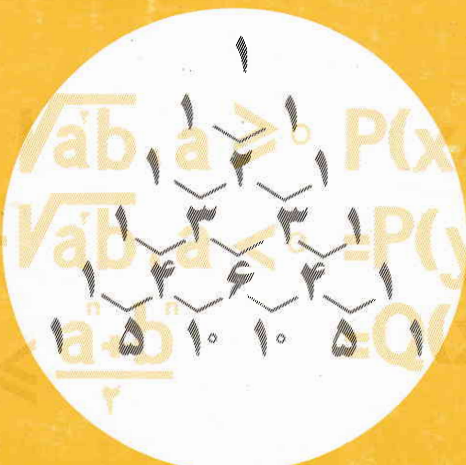
عبارتهای جبری

تألیف عبدالحسین مصحفی



گنجینهٔ دانش

علوم دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی

انتشارات فاطمی

عبارتهای جبری

تألیف عبدالحسین مصحفی

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

انتشارات فاطمی

عبارتهای جبری
مؤلف: عبدالحسین مصحفی
چاپ سوّم: مهرماه ١٣٦٩
تیراژ: ٥٥٠٠ نسخه
چاپ و صحافی: چاپخانهٔ صنوبر

نشانی: تهران، خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ١٥٩
تلفن: ٦٥١٤٢٢

به‌نام خدا

سخنی در بارهٔ این کتابها

هر جامعهٔ به‌پاخاسته‌ای، برای دست‌یافتن به خودکفایی و گسستن هرگونه زنجیر وابستگی سیاسی و اقتصادی، تلاش می کند تا علم و دانش و صنعت و فن و هنر را درمیان همگان، خاصه نوجوانان و جوانان و دانشپژوهان، گسترش دهد. نظام آموزشی را دگرگون می کند. کتابهای درسی را پربارتر می کند و از دانشهای کهنه و سرگرم کننده می زداید. علم را با عمل و دانستن را با اندیشیدن و به کاربستن می آمیزد. برای هرگونه کتابی که دانشهای نو و تازه‌ترین یافته های دانشمندان و پژوهشگران به‌آنها راه‌یافته است، پایگاهی بس ارجمند می شناسد. می داند که بسیارنکته هاست که کتاب درسی فرصتی نمی یابد به آنها بپردازد یا افزونتر از اشاره هایی در این زمینه ها داشته باشد. چنین جامعه ای تلاش می کند تا دانش آموختگان به گونه ای بارآیند که برای زندگی امروز و فردای خود و جامعهٔ خویش کارآمدتر و مؤثرتر باشند و از خلق کردن و دست‌یازیدن به هنرها و صنعتها و اختراعها و اکتشافها و سودبردن از دانستن برای بهتر زیستن باز نمانند.

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی، باتوجه به این نیازها، رسالتی را برعهده گرفته است و انتشار مجموعه کتابهایی را در زمینهٔ علوم و دانستنیها آغاز کرده است که آنها را **گنجینهٔ دانش** نامیده است. این کتابها به پرسشهای آدمی در بارهٔ خود و جهان پیرامونش، و کنجکاو یهایش در زمینه های گوناگون علم و کاربردهایش پاسخ می گوید. برای انتشار آنها از بهترین و تازه‌ترین کتابهای علمی جهان استفاده می شود. در کارنوشتن و تألیف و ترجمهٔ آنها از همکاریهای زبده‌ترین کارشناسان آموزش و پرورش کشورمان و پژوهشگران در زمینه های گوناگون علوم بهره می برد. تا آنجا که میسر و ممکن است تلاش می شود تا اشتباه و لغزشی در آنها راه نیابد.

کتابهای **گنجینهٔ دانش** هم خودآموزند، هم یاری‌دهنده به فهم کتابهای درسی، هم آماده کنندهٔ دانش آموزان برای موفقیت در امتحان در رشته های گوناگون علمی و کنکور دانشگاهها، و هم راهنمای معلمان برای تدریس علم.

اگر به اندکی از این رسالت در راه بازسازی جامعهٔ علمی کشورمان رسیده باشیم، خدای را سپاس می گوییم که خدمتی درخور جامعه ای بزرگ برعهده گرفته ایم، حتی اگر اندک باشد.

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

فهرست

۱

پیشگفتار

با درنظرگرفتن یك مجموعه و با تعریف یك عمل درآن، معادله‌ای‌حاکی از عکس آن عمل مطرح می‌گردد. مثلاً با درنظرگرفتن عمل جمع $a+b=c$ درمجموعهٔ اعداد، این سؤال پیش می‌آیدکه اگر b و c داده شده باشند،کدام عدد است‌که چون با b جمع شود c به دست‌آید، یعنی معادلهٔ $x+b=c$ مطرح می‌شودکه حل‌آن عمل تفریق یعنی عکس عمل جمع را بیان می‌دارد. همچنین با در نظرگرفتن عمل ضرب $a.b=c$، معادلهٔ $x.b=c$ و درنتیجه عمل تقسیم‌که عکس عمل ضرب است به‌میان می‌آید.

آدمی پیش ازآنکه شمارش را آغازکند به‌مفهوم مجموعه پی برده است و برای آنکه‌دنبالهٔ اعداد را پدیدآورد لازم بوده‌که عمل جمع‌را دریافته باشد. ازاین‌رو می‌توان گفت‌که تاریخ معادلات با تاریخ اعداد هم‌آغاز بوده است.

در میان ملتهای متمدن گذشته، هندیها و یونانیها روشهای پیشرفته‌تری را برای حل معادلات به‌کار می‌برده‌اند. روش هندیها بیانی بوده است؛ همانند روشی که امروزه در حل مسئله‌ها و معماهایی که درگفتگوها مطرح می‌شوند به‌کار می‌رود و در آن از علامتها و نمادها استفاده نمی‌شود. روش یونانیها، متأثر ازروش مصریها، ترخیمی بوده است؛ در این روش به‌جای‌کلمات و اصطلاحاتی‌که‌کاربرد زیاد داشته‌اند،کوتاه شدهٔ آنها را به‌کار می‌برده‌اند؛ همانندآنکه امروزه به جای سؤال و جواب به‌ترتیب س و ج را به کار می‌برند. درآغاز تمدن اسلامی و در سدهٔ سوم هجری، ریاضیدان و دانشمند بزرگ، **محمدبن موسی خوارزمی** پس از بازگشت از سفر علمی به هند و مطالعهٔ آثار علمی موجود کتابی جامع و به‌گفتهٔ خودش مقدماتی، دربارهٔ حل معادلات تألیف کرد وآن را **الجبر والمقابله** نام نهاد. انتخاب این نام بدان جهت بودکه درکتاب خوارزمی دو اصل مهم، یکی به نام جبر و دیگری به نام مقابله مبنای حل معادلات قرار گرفته بود. اصل جبر بدان معنی بودکه می‌توان جمله‌ای را با تغییر علامت از یك طرف معادله به طرف دیگر منتقل‌کرد. اصل مقابله یعنی آنکه می‌توان دو مقدار برابر را از دو طرف

معادله حذف کرد. تألیف خوارزمی بعدها آنچنان اهمیت یافت که نام آن بر علمی که از آن بحث می کرد نهاده شد و این نامگذاری هنوز هم درهمهٔ زبانها متداول است. (در زبانهای اروپایی حرف تعریف ال را نیز جزء کلمه دانسته‌اند. چنانکه درانگلیسی اصطلاح Algebra را به‌کار می‌برند). پس از انتقال علوم اسلامی به اروپا نفوذ جبر و مقابلهٔ خوارزمی بدان حد رسید که هرروش مربوط به‌تعیین حاصل یك عمل بین اعداد را **الخوارزمی** می‌نامیدند. اصطلاح **آلگوریتم**، که امروزه در زبانهای اروپایی به‌همین منظور به‌کار می‌رود، تحریف شدهٔ الخوارزمی است و نبایدآن را با اصطلاح **لگاریتم** اشتباه کرد.

خوارزمی در جبر و مقابلهٔ خود همان روش بیانی هندیها را به‌کار برده است. سایر ریاضیدانان اسلامی (که بیشترآنان ایرانی بوده‌اند) نیزهمین روش را به‌کار برده‌اند. اما برخی از اصطلاحات که درآثار ریاضی اسلامی همچون نمادهایی استعمال می‌شده‌اند، زمینه را برای وضع جبر علامتی فراهم کرده‌اند. دانشمندان اسلامی درکتابهای جبر و مقابلهٔ خودکلمهٔ «شیء» را به‌جای مجهول به‌کار می‌بردند. چون اولین ترجمهٔ کتابهای ریاضی اسلامی به‌زبان اسپانیایی انجام گرفت، لغت شیء را با همان تلفظ به‌صورت xei اختیارکردندکه بعدها ترخیم شد و x جانشین‌آن گردید.

روش امروزی جبر، **روش علامتی** است که واضع نخستین آن **ویت**، ریاضیدان فرانسوی سدهٔ شانزدهم میلادی، است. در این روش از حروف به جای مقادیر استفاده می‌شود و عملیات با نمادها و نشانه‌ها مشخص می‌شوند. ازاین‌رو جبر را به‌معنی‌عملیات بر روی حروف و علامات تعریف کرده‌اند.

هرچندکه از اواخر پادشاهی صفویه به بعد بعضی از ریاضیدانان ایرانی برکارهای اروپائیان در زمینهٔ جبرآگاهی داشته‌اند، اما آموزش جبر علامتی در ایران از زمان تأسیس **دارالفنون** آغاز می‌شود و نخستین کتابهای جبر علامتی به زبان فارسی توسط معلمان این مؤسسه ترجمه یا تألیف شده است.

استعمال حروف و علامات درجبر از یك سو دقت و پیشرفت سریع آن را باعث‌شده و از سوی دیگر سهولت فهم‌آن را فراهم کرده است. از این‌رو در بیان سایر علوم نیز روش جبر علامتی به کار گرفته شده واین خود موجب شده است که علم جبر در همهٔ زمینه‌ها کاربرد داشته باشد.

علم جبر را می‌توان به‌دوبخش عمده تقسیم کرد: دربخش نخست چگونگی عملیات برروی حروف وعلامات تشریح می گردد و مقدمه‌ای است برای حل معادلات وفراگیری علوم دیگر. دربخش دوم، که با عنوان **نظریهٔ معادلات** مشخص می‌شود، روشهای‌مختلف حل انواع معادلات بیان می گردد. این‌کتاب بخش نخست جبر را شامل است.

در تألیف کتاب این گمان بوده است که خوانندهٔ آن تحصیلات دبیرستانی را به پایان رسانیده است و برای ادامهٔ تحصیلات به بازآموزی یك دورهٔ جبر کاملتر از آنچه فرا گرفته نیاز دارد. اما بیان مطالب و تنظیم تمرینها و پرسشها به گونه‌ای خواهد بود که کتاب جنبهٔ خودآموزی داشته باشد و گروههای دیگر خوانندگان نیز بتوانند از آن بهره گیرند. برای آنکه خواننده به صحت عملیات خود در حل مسئله‌ها و تعیین جواب تمرینها و پرسشها اطمینان یابد، پاسخهای درست مسئله‌ها و پرسشها و در مواردی راهنماییهای لازم در بخش پایانی کتاب نموده شده است. هرگاه خواننده لغزشی را مشاهده کند یا اینکه توضیحاتی را خواستار باشد می‌تواند به نشانی ناشر با نگارنده مکاتبه کند و مراتب را به اطلاع برساند.

مطلبهایی از کتاب و بخشهایی از تمرینها و پرسشهای آن با نشانهٔ «✲» مشخص شده‌اند. آن دسته از خوانندگان که خواهان ادامهٔ تحصیلات در رشته‌های غیر تخصصی ریاضی می‌باشند، می‌توانند از مطالعهٔ این مطلبها و بررسی و حل این تمرینها و پرسشها خودداری نمایند.

۲

توان و ریشگی

۲، الف- تعریف کلاسیک

همانگونه که از جمع مکرر یك عدد با خودش مفهوم عمل ضرب درك شده است (که بعدها این مفهوم تعمیم یافته و عمل ضرب دو عامل دلخواه، مستقل از عمل جمع تعریف می‌شود)، از ضرب مکرر یك عدد در خودش مفهوم عمل توان به‌دست آمده و بر مبنای‌آن، تعریف نخستین به‌شرح زیر ارائه شده است:

۲-۱- توان طبیعی یك عدد- اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل‌ضرب n عامل برابر با عدد a، توان nام عدد a نامیده شده و با a^n نشان داده می‌شود. عدد a پایه و عدد n نما نام دارد. از نوشتن نمای یك خودداری می‌شود، زیرا $a^1=a$. اگر $a=0$ باشد هر توانی ازآن نیز صفر خواهد بود.

بنا به‌این تعریف، مقدار a^n برابر با یك عدد حقیقی مانند A است:

$$a\in R,\ n\in N \implies a^n=A,\ A\in R$$

در رابطهٔ $a^n=A$:

هرگاه a صفر باشد A نیز صفر خواهد بود.

هرگاه a مثبت باشد A نیز مثبت است.

هرگاه a منفی باشد، درحالتی‌که n زوج باشد A مثبت است و درحالتی‌که n فرد باشد A منفی است.

یادآوری- دو رابطهٔ $(-a)^n$ و $-a^n$ ازیکدیگر متفاوتند: دراولی نشانهٔ منفی جزء پایه است و به‌توان می‌رسد اما دردومی نشانهٔ منفی جزء پایه نیست بلکه درحاصل a^n ضرب می‌شود.

چند مثال

$(-3)^3=-27$ $\qquad$ $-7^2=-49$ $\qquad$ $(-7)^2=49$

$$-(-۳)^۳=-(-۲۷)=۲۷ \qquad -\left(-\frac{۲}{۵}\right)^۲=-\frac{۴}{۲۵}$$

۲-۲- ریشهٔ طبیعی یك عدد- عمل عکس عمل توان، ریشه گرفتن نام دارد که پاسخ سؤال کدام عدد است که چون به توان عدد طبیعی n برسد عدد معین A به‌دست آید، یعنی جواب معادلهٔ $x^n=A$، را بـه دست می‌دهد. جواب ایـن معادله را ریشهٔ nام عدد A می‌نامند. بنابراین، اگر n عددی طبیعی باشد، ریشهٔ nام عدد حقیقی A عددی است مانند a که a^n برابر با A باشد.

هرگاه n فرد باشد برای عدد A یك ریشهٔ nام وجود دارد که با A همعلامت است وآن را با $\sqrt[n]{A}$ نشان می‌دهند و در حالت $n=۱$ با خود A برابر است.

$$\sqrt[۳]{\frac{۸}{۲۷}}=\frac{۲}{۳} \qquad \sqrt[۳]{-۰/۱۲۵}=-۰/۵$$

$$\sqrt[۵]{x^۵}=x \qquad \sqrt[۷]{-a^{۱۴}}=-\sqrt[۷]{a^{۱۴}}=-a^۲$$

$$x^۵=-۱۷ \Longrightarrow x=\sqrt[۵]{-۱۷}=-\sqrt[۵]{۱۷}$$

هرگاه n زوج و A مثبت باشد برای عدد A دو ریشهٔ nام وجود دارد کـه قرینهٔ یکدیگرند. از این دو ریشه آن را که مثبت است با $\sqrt[n]{A}$ و دیگری را، که منفی است، با $-\sqrt[n]{A}$ نشان می‌دهند. در حالت $n=۲$ از نوشتن آن خودداری می‌شود. بنابراین $\sqrt{A}$ نمایانگر ریشهٔ دوم مثبت A و $-\sqrt{A}$ نمایانگر ریشهٔ دوم منفی A است.

$$\sqrt{۴}=۲ \qquad -\sqrt{۴}=-۲$$

$$\sqrt[۴]{۰/۰۰۸۱}=۰/۳ \qquad -\sqrt[۶]{\frac{۱}{۶۴}}=-\frac{۱}{۲}$$

$$x^۴=۶۲۵ \Longrightarrow x=۵ \text{ یا } x=-۵ \quad (x=\pm ۵)$$

$$x^۲=۷ \Longrightarrow x=\sqrt{۷} \text{ یا } x=-\sqrt{۷} \quad (x=\pm\sqrt{۷})$$

در این حالت باید توجه داشت کـه جمله‌هایی از گونهٔ $\sqrt{A^۲}$ نشان دهندهٔ یـك مقدار مثبت است و نمی‌توان آن را برابر با A نوشت زیرا در حالت منفی بودن A طرف اول یك مقدار مثبت و طرف دوم یك مقدار منفی است و برابری درست نخواهد بود. از این‌رو باید چنین نوشت:

$$\boxed{\sqrt{A^{۲}}=|A|}$$

$$\sqrt{(-۳)^{۲}}=|-۳|=۳ \qquad \sqrt{(۱-\sqrt{۳})^{۲}}=|۱-\sqrt{۳}|=\sqrt{۳}-۱$$

$$\sqrt[۴]{(x-۱)^{۴}}=|x-۱|=\begin{cases}x-۱ ، x\geqslant ۱\\ ۱-x ، x<۱\end{cases}$$

هرگاه n زوج و A منفی باشد، مقدار $\sqrt[n]{A}$ غیر حقیقی است، زیرا عددی حقیقی وجود ندارد که چون به‌توان زوج برسد برابر با عددی منفی شود. از این‌رو مقدارهایی مانند $\sqrt{-۴}$، $\sqrt{-۷}$، $\sqrt{-x^{۲}-۱}$، $\sqrt[۴]{-۱}$ و ... غیرحقیقی هستند.

یادداشت- درگسترش نظریهٔ اعداد فرض می‌شود که $i^{۲}=-۱$ یعنی $i=\sqrt{-۱}$ و در نتیجه:

$$\sqrt{-۴}=i\sqrt{۴}=۲i \qquad \sqrt{-۷}=i\sqrt{۷}$$

که **عددهای موهومی** نام دارند. به‌عددهایی از گونهٔ $a+ib$، که شامل یك جزء حقیقی و یك جزء موهومی می‌باشند، **عددهای همبافته (عددهای مختلط)** گفته می‌شود.

۲-۳- مسئلهٔ نمونه- مطلوب است تعیین حاصل عبارت زیر به‌ازای مقادیر مختلف x:

$$y=\sqrt{(x+۱)^{۲}}-\sqrt{(x-۱)^{۲}}$$

حل- بنابرآنچه گذشت داریم:

$$y=|x+۱|-|x-۱|$$

با توجه به اینکه اگر $a\geqslant ۰$ باشد، $|a|=a$ و اگر $a<۰$ باشد، $|a|=-a$ است. حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) هرگاه $x\leqslant -۱$ باشد، داریم $x+۱\leqslant ۰$ و $x-۱<۰$ و در نتیجه:

$$y=-(x+۱)+(x-۱)=-۲$$

۲) هرگاه $-۱\leqslant x\leqslant ۱$ باشد، داریم $x+۱\geqslant ۰$ و $x-۱\leqslant ۰$

$$y=x+۱+(x-۱)=۲x$$

۳) هرگاه $x\geqslant ۱$ باشد، داریم $x+۱>۰$ و $x-۱\geqslant ۰$.

$$y=x+۱-(x-۱)=۲$$

۲-۴- رابطهٔ برابری وتوان و ریشگی- دو طرف هر برابری را می‌توان به‌توان معین n رساند. به‌عبارت دیگر، اگر دو مقدار با هم برابر باشند، توانهای nام آنها نیز با هم برابرند:

$$\boxed{A=B \implies A^n=B^n}$$

$$x=۷ \implies x^۲=۴۹ \text{ و } x^۳=۳۴۳ \ldots$$

$$a=-۵ \implies a^۲=۲۵ \text{ و } a^۳=-۱۲۵ \ldots$$

اما در بیان عکس مطلب باید به تفاوت بین تعریف ریشگی با شمارهٔ n و تعریف ریشهٔ nام یك عدد توجه داشت:

$$\forall n : A^n=B^n \implies \sqrt[n]{A^n}=\sqrt[n]{B^n}$$

$$\forall n : A^n=B^n \not\Longrightarrow A=B$$

به‌عبارت دیگر: اگر دو مقدار با هم برابر باشند ریشگیهای با شمارهٔ nام آنها نیز با هم برابرند؛ اگر از دو طرف یك برابری ریشهٔ nام بگیریم، در حالتی که n فرد باشد دو مقدار حاصل باهم برابرند و در حالتی که n زوج باشد دو مقدار حاصل یا با هم برابرند یا قرینهٔ یکدیگرند.

$$\boxed{\begin{array}{c} A=B \implies \sqrt[n]{A}=\sqrt[n]{B} \\ A^n=B^n \text{ و } n \text{ فرد} \implies A=B \\ A^n=B^n \text{ و } n \text{ زوج} \implies A=B \text{ یا } A=-B \end{array}}$$

$$x=۷ \implies \sqrt{x}=\sqrt{۷} \text{ و } \sqrt{x}\neq-\sqrt{۷}$$

زیرا $\sqrt{x}$ نمایانگر یك مقدار مثبت است.

$$x=-۹ \implies \sqrt{x}=\sqrt{-۹} \text{ مقدار غیرحقیقی}$$

$$x^۲=۳۶ \implies \sqrt{x^۲}=\sqrt{۳۶}=۶$$

$$x^۲=۳۶ \implies x=۶ \text{ یا } x=-۶ \qquad (x=\pm۶)$$

$$a^۳=۲۷ \implies \sqrt[۳]{a^۳}=\sqrt[۳]{۲۷} \implies a=۳$$

$$a^۳=-۱۰ \implies \sqrt[۳]{a^۳}=\sqrt[۳]{-۱۰} \implies a=-\sqrt[۳]{۱۰}$$

۲-۵- رابطهٔ نابرابری و توان و ریشگی- هرگاه دوطرف‌یك نابرابری را به‌توان برسانیم، یا اینکه از دو طرف یك نابرابری ریشه بگیریسم، در حالتهایی نابرابری پایدار می‌ماند و در حالتهایی نابرابری به‌نابرابری عکس یا به‌برابری تبدیل می‌شود.

$$۰<a<b \implies \begin{cases} a^n<b^n \\ \sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b} \end{cases}$$

$$a<b<۰ \Longrightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} a^n<b^n \\ \sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b} \end{array}\right\} n\ \text{فرد} \\ \left.\begin{array}{l} a^n>b^n \\ \sqrt[n]{a}\ \text{و}\ \sqrt[n]{b}\ \text{غیرحقیقی} \end{array}\right\} n\ \text{زوج} \end{cases}$$

$$a<۰<b \Longrightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} a^n<b^n \\ \sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b} \end{array}\right\} n\ \text{فرد} \\ \left.\begin{array}{l} a^n<b^n\ \text{یا}\ a^n>b^n\ \text{یا}\ a^n=b^n \\ \sqrt[n]{a}\ \text{غیرحقیقی} \end{array}\right\} n\ \text{زوج} \end{cases}$$

در حالت عکس داریم:

$$a^n<b^n \Longrightarrow a<b \text{، } n\ \text{فرد}$$
$$a^n<b^n \Longrightarrow a<b\ \text{یا}\ a>b \text{، } n\ \text{زوج}$$

چند مثال:

$$-۷<۵ \Longrightarrow (-۷)^۲>۵^۲ \text{، } (-۷)^۳<۵^۳$$

$$۶۴>۲۷ \Longrightarrow \sqrt{۶۴}>\sqrt{۲۷} \text{، } \sqrt[۳]{۶۴}>\sqrt[۳]{۲۷}$$

$$x>۵ \Longrightarrow x^۲>۲۵ \text{، } \sqrt{x}>\sqrt{۵}$$

$$x<۵ \Longrightarrow \begin{cases} x^۲<۲۵ \text{، } ۵>x>-۵ \\ x^۲=۲۵ \text{، } x=-۵ \\ x^۲>۲۵ \text{، } x<-۵ \end{cases}$$

$$x^۲>۸۱ \Longrightarrow x>۹\ \text{یا}\ x<-۹$$
$$x^۴<۳۶ \Longrightarrow -\sqrt{۶}<x<\sqrt{۶}$$

حالت ویژه- در رابطه‌های بالا در ازای $b=۱$ خواهیم داشت:

$$a=۱ \Longrightarrow a^n=۱\ \text{و}\ \sqrt[n]{a}=۱$$

$$a>۱ \Longrightarrow a^n>۱\ \text{و}\ \sqrt[n]{a}>۱$$

$$۰<a<۱ \Longrightarrow a^n<۱\ \text{و}\ \sqrt[n]{a}<۱$$

مقایسهٔ توانهای متوالی یك عدد

$$a>۱ \Rightarrow \begin{cases} a<a^۲<a^۳<\dots<a^n<\dots \\ a>\sqrt{a}>\sqrt[۳]{a}>\dots>\sqrt[n]{a}>\dots \end{cases}$$

$$۰<a<۱ \Rightarrow \begin{cases} a>a^۲>a^۳>\dots>a^n>\dots \\ a<\sqrt{a}<\sqrt[۳]{a}<\dots<\sqrt[n]{a}<\dots \end{cases}$$

۲،ب- عملیات بر روی توانها

هر توان مانند a^n نمایانگر یك عدد حقیقی مانند A است. بنابرایـن، عملیات بین توانها همان عملیات بین‌اعداد حقیقی است و همان ویژگیها را دارا است، مانند جابجایی و انجمنی بودنِ جمع و ضرب آنها و غیره.

در حالت‌کلی می‌توان هر عمل بین دو توان را به‌آن عمل بین حاصلهای‌آنهاتبدیل کرد.

$$۵^۳+(-۲)^۳=۱۲۵-۸=۱۱۷$$

$$-۱۲^۲\times\left(-\frac{۱}{۴}\right)^۴=-۱۴۴\times\frac{۱}{۲۵۶}=-\frac{۹}{۱۶}$$

اما در حالتهای زیر روشهای ساده‌تر بکار می‌رود:

۲-۶- ضرب توانهای با پایهٔ مشترك

$$a^m\cdot a^n=\overbrace{(a\cdot a\dots a)}^{m \text{ عامل}}\ \overbrace{(a\cdot a\dots a)}^{n \text{ عامل}}=\overbrace{a\cdot a\cdot a\dots a}^{m+n \text{ عامل}}=a^{m+n}$$

$$\boxed{a^m\cdot a^n=a^{m+n}}$$

و با توجه به‌ویژگیهای جمع و ضرب نتیجه می‌شود:

$$\boxed{a^m\cdot a^n\cdot a^p\dots=a^{m+n+p+\dots}}$$

در موردی که پایه‌ها دارای علامتهای مختلف باشند، نخست علامت حاصل‌ضرب تعیین می‌شود.

$$۱۱^{۳}\times ۱۱^{۴}\times (-۱۱)^{۵}=-(۱۱^{۳}\times ۱۱^{۴}\times ۱۱^{۵})=-۱۱^{۱۲}$$

۲-۷- ضرب توانهای با نمای مشترک

$$a^n.b^n=\overbrace{(a.a\ \dots\ a)}^{\text{n عامل}}\overbrace{(b.b\ \dots\ b)}^{\text{n عامل}}=\overbrace{(ab.ab,\ \dots\ ab)}^{\text{n عامل}}=(ab)^n$$

$$\boxed{a^n.b^n.c^n\ \dots\ =(abc\ \dots)^n}$$

$$۷^{۵}\times\left(-\frac{۲}{۳}\right)^{۵}\times\left(-۴/۵\right)^{۵}=\left(\frac{۷\times۲\times۹}{۳\times۲}\right)^{۵}=۲۱^{۵}$$

۲-۸- توان یك توان

$$(a^n)^p=\overbrace{(a^n.a^n,\ \dots\ a^n)}^{\text{p عامل}}=a^{\overbrace{n+n+\cdots+n}^{\text{p عامل}}}=a^{np}$$

$$\boxed{(a^n)^p=a^{np}}$$

باید توجه داشت که مقصود از a^{n^p} عبارت است از $a^{(n^p)}$ است و نباید آن را با $(a^n)^p$ اشتباه کرد.

$$(۳^{۵})^{۲}=۳^{۱۰}\ \ ،\ \ (-۷^{۲})^{۳}=-۷^{۶}$$
$$[(-۷)^{۲}]^{۳}=(-۷)^{۶}=۷^{۶}\ \ ،\ \ -(۵^{۲})^{۴}=-۵^{۸}$$

۲-۹- تقسیم توانها- می‌دانیم که‌مقصود ازتقسیم‌عدد a برعدد b تعیین عددی‌مانند c است که حاصل‌ضرب bc برابر با a باشد. در تقسیم a^m بر a^n (با فرض $m>n$) اگر خارج قسمت x فرض شود باید داشته باشیم:

$$a^m=a^n.x$$

می‌توانیم بنویسیم $m=n+(m-n)$، یعنی:

$$a^m=a^n.a^{m-n}$$

بنابراین، $x=a^{m-n}$ و:

$$\boxed{a^m:a^n=a^{m-n}}$$

$$۱۷^{۵}:(-۱۷)^{۳}=-(۱۷^{۵}:۱۷^{۳})=-۱۷^{۲}$$

$$-۶^۴:(-۶)^۲=-(۶^۴:۶^۲)=-۶^۲$$

در تقسیم دو توان با نمای مشترك داریم:

$$a^n:b^n=x \iff a^n=b^n.x$$

$$a=b.\frac{a}{b} \text{ ، } a^n=\left(b.\frac{a}{b}\right)^n=b^n.\left(\frac{a}{b}\right)^n$$

از مقایسهٔ رابطه‌ها نتیجه می‌شود $x=\left(\frac{a}{b}\right)^n$، یعنی:

$$\boxed{a^n:b^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n}$$

$$-\left(\frac{۳}{۵}\right)^۳:\left(-۲/۵\right)^۳=+\left(\frac{۳}{۵}:\frac{۵}{۲}\right)^۳=\left(\frac{۶}{۲۵}\right)^۳$$

۲-۱۰- توان حاصل‌ضرب یا خارج قسمت- با توجه به ویژگیهای عملهای ضرب و توان نتیجه می‌شود:

$$\boxed{\begin{array}{l}(a.b.c....)^n=a^n.b^n.c^n.\ ...\\ \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\end{array}}$$

$$(-۳a^۲b^۴)^۳=-۲۷a^۶b^{۱۲} \text{ ، } \left(-\frac{۲x^۳}{۷}\right)^۲=\frac{۴x^۶}{۴۹}$$

۲،ج- توانهای غیر طبیعی

۲-۱۱- توان صفر- بنا به تعریف توان یك عدد، توان صفر یك عدد مفهومی ندارد. اما اگر وجود $a^۰$ را بپذیریم و در رابطهٔ $a^m.a^n=a^{m+n}$ مقدار n را برابر صفر اختیار کنیم، خواهیم داشت $a^m.a^۰=a^m$ و از تقسیم دو طرف بر a^m، به فرض $a\neq ۰$، نتیجه خواهد شد:

$$\boxed{a^۰=۱}$$

$$۵^۰=۱ \qquad \left(-\frac{۲}{۷}\right)^۰=۱ \qquad -\left(\frac{۲}{۷}\right)^۰=-۱$$

۲-۱۲- توان منفی- این‌توان‌نیز، بنابه‌تعریف بیان‌شده، مفهوم ندارد. اما هرگاه

وجودآن پذیرفته شود و در رابطهٔ $a^m\ a^n=a^{m+n}$ مقدار n را برابر با $m-$ اختیار کنیم خواهیم داشت $a^m.a^{-m}=a^{\circ}=۱$ و نتیجه می‌شود:

$$\boxed{a^{-m}=\frac{۱}{a^m}\ \text{،}\ a^m=\frac{۱}{a^{-m}}}$$

$$(-۸)^{-۲}=\frac{۱}{(-۸)^۲}=\frac{۱}{۶۴}\quad \text{،}\quad -۷^{-۲}=-\frac{۱}{۷^۲}=-\frac{۱}{۴۹}$$

$$\left(\frac{۳}{۷}\right)^{-۱}=\frac{۷}{۳}\quad \text{،}\quad -۱۲^{-۱}=-\frac{۱}{۱۲}$$

$$(x+x^{-۱})^۲=x^۲+x^{-۲}+۲x.x^{-۱}=x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲$$

یادداشت- ازتعریف توان منفی برمی‌آیدکه اگر nعددی منفی‌باشد $\circ^n$ برابر $\frac{۱}{\circ}$ و نامعین است.

۲-۱۳- توان‌کسری- هرگاه دررابطهٔ $(a^n)^m=a^{nm}$ مقدار n را برابر با کسر $\frac{p}{q}$ و مقدار m را برابر با q اختیارکنیم، خواهیم داشت:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q=a^{\frac{p}{q}\times q}=a^p$$

توان qام عدد $a^{\frac{p}{q}}$ برابر با عدد a^p است.پس بنابه‌تعریف ریشهٔ یك‌عدد داریم:

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}}$$

به‌ویژه در حالت $p=۱$ و $q=n$ داریم:

$$\boxed{a^{\frac{۱}{n}}=\sqrt[n]{a}}$$

$$۵^{\circ/۵}=۵^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۵}$$

$$(-۱\circ)^{\frac{۲}{۳}}=\sqrt[۳]{(-۱\circ)^۲}=\sqrt[۳]{۱\circ\circ}$$

$$-۴^{-\frac{۱}{۲}}=-\frac{۱}{۴^{\frac{۱}{۲}}}=-\frac{۱}{\sqrt{۴}}=-\frac{۱}{۲}$$

$$(-۱۶)^{\frac{۳}{۴}}=\sqrt[۴]{(-۱۶)^۳}=\sqrt[۴]{-۲^{۱۲}}$$ غیر حقیقی

۲، د ـ تعریف اصولی توان و ریشگی

در تعریف کلاسیك توان، رابطهٔ $a^m.a^n=a^{m+n}$ برای عددهای طبیعی m و n محقق می‌شود، اما آنگاه‌که وجودتوانهای غیرطبیعی پذیرفته می‌شود، در رابطهٔ مزبور m یا n برابر با عدد غیرطبیعی اختیار می‌گردد تا بدین وسیله این‌گونه توانها توجیه شوند. اما این اشتباه است‌که عددهای غیرطبیعی را در رابطه‌ای به‌کار برد که درستی آن برای این عددها محقق نشده است. برای پرهیز از این نارسایی، روشهایی بر مبنای اصلهای موضوع را برای تعریف توان به‌کارمی‌برند. دوگونه ازاین روشها در زیربازگو می‌شود. یادآوری می‌شود که درهر یك ازاین روشها عملهای جمع و ضرب و ویژگیهای آنها پذیرفته‌می‌شود.

۲-۱۴- تعریف مرحله‌ای- اولاً اگر n عدد درست‌مثبت (طبیعی) باشد، توان nام عددحقیقی a برپایهٔ دو اصل موضوع

$$\forall a\neq 0 : a^0=1 \text{ و } a^n=a.a^{n-1}$$

تعریف می‌شود و با استفاده از اصل استقراءِ ریاضی نتیجه می‌شود که:

$$a^n=\underbrace{a.a, \dots a}_{\text{عامل } n} \text{ و } a^m.a^n=a^{m+n}, \dots$$

ثانیاً اگر نما عدد درست نسبی باشد، اصل موضوع زیر نیز پذیرفته می‌شود:

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

ثالثاً برای وقتی‌که نما عددگویا است، به‌عنوان اصل موضوع دیگر قبول می‌شود که:

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

رابعاً در تعریف نمای گنگ قاعدهٔ افناء بـه کار می‌رود. (توجه کنید پایه در زمانی‌که نما گنگ، یا گویا با مخرج زوج است، باید مثبت باشد).

۲-۱۵- تعریف کلی- در مجموعهٔ عددهای حقیقی عمل‌توان‌چنین تعریف می‌شود که‌نظیر هر جفت مرتب عددهای حقیقی (a, b)، که به صورت a^b نوشته می‌شود، عدد حقیقی c وجود دارد به‌گونه‌ای‌که اصلهای موضوع زیر دربارهٔ آن صادق باشد:

(۱) $a^1=a$

(۲) $a^b.a^c=a^{b+c}$

(۳) $a^b.c^b=(ac)^b$

(۴) $(a^b)^c=a^{bc}$

توجیه عمل- برای توجیه عملی‌که بنا به‌تعریف بالامشخص می‌شود، وبرای‌آنکه

نشان‌داده شود که این عمل همان است که بر طبق تعریف کلاسیك معین می گردد، حالتهای زیررا در نظر می گیریم:

۱) در رابطهٔ (۲) به‌فرض $b=۱$ و $c=۰$ داریـم $a^{۱}.a^{۰}=a^{۱}$ که بنا به‌رابطهٔ (۱) می‌شود $a.a^{۰}=a$، حال اگر $a\neq ۰$ باشد می‌توان دوطرف را بر a تقسیم کرد، پس:

$$\forall a\neq ۰ : a^{۰}=۱$$

۲) اگر n عددی طبیعی باشد به‌فرض $b=۱$ و $c=n-۱$ از رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود $a^{n}=a.a^{n-۱}$ و با توجه به‌رابطهٔ (۱) وبنابه‌اصل استقراء ریاضی‌خواهیم داشت:

$$\forall n\in N : a^{n}=\underbrace{a.a.a\ \dots\ a}_{\text{عامل } n}$$

۳) به‌فرض $c=-b$ از رابطهٔ (۲) و با توجه به‌نتیجهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$a^{b}.a^{-b}=۱ \implies a^{-b}=\frac{۱}{a^{b}}$$

۴) به‌فرض $b=\frac{p}{q}$ و $c=q$ از رابطهٔ (۴) خواهیم داشت:

$$(a^{\frac{p}{q}})^{q}=a^{p} \implies a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^{p}}$$

۵) رابطهٔ(۴)زمینه را برای بررسی ویژگیها و عملیات بر روی توانهای با نمای کسری، یعنی عملیات بر روی ریشگیها، فراهم می‌سازد.

۶) اگر r عدد حقیقی دلخواه باشد، بنا به‌اصول مربوط به‌اعداد حقیقی، در ازای هر عدد مثبت و هر قـدر کـوچك ε عددگـویای q وجود خواهد داشت، بـه‌گونه‌ای که $q\leqslant r<q+\varepsilon$ و در نتیجه مقدار a^{r} بین دو مقدار a^{q} و $a^{q+\varepsilon}$ وجود دارد و با کوچك کردن ε می‌توان مقدار a^{r} را با هر تقریب دلخواه به‌دست آورد و در نتیجه بنا به‌قاعدهٔ افناء عدد حقیقی متناظر با a^{r} به‌دست می‌آید. مثلاً برای $x=۵^{\sqrt{۲}}$ به‌ترتیب داریم:

$$۵<x<۵^{۲} \text{ و } ۵^{۱/۴}<x<۵^{۱/۵} \text{ و } ۵^{۱/۴۱}<x<۵^{۱/۴۲} \text{ و } \dots$$

همچنین برای $x=a^{\pi}$ به‌فرض $۰<a<۱$ خواهیم داشت:

$$a^{۳}>x>a^{۴}\text{، }a^{۳/۱}>x>a^{۳/۲}\text{، }a^{۳/۱۴}>x>a^{۳/۱۵}\text{، }\dots$$

۷) با توجه به‌اصلها و حالتهای بالا نتیجه می‌شودکـه اگر a عدد دلخواه مثبت باشد، داریم $۰^{a}=۰$ و اگـر a عدد منفی باشد مقدار ۰^{a} نامعین $\left(\frac{۱}{۰}\right)$ می‌باشد.مقدار $۰^{۰}$ مبهم است.

نتیجهٔ اخیررا می‌توان ازروی تغییرات تابع $y=x^{a}$ در حالتهای $a>۰$ و $a<۰$

نیز به‌دست‌آورد.

۲، هـ- عملیات بر روی ریشگیها

۲-۱۶- ویژگی‌ریشگی- در $\sqrt[q]{a^p}$، نماد $\sqrt{\ }$ را ریشگی یا رادیکال، عدد q را شماره یا نمای‌آن، عدد a^p را مقدار زیر ریشگی، و بالاخره عدد p را نمای زیر ریشگی می‌نامند. عدد q بزرگتریا برابر ۲ است و درحالتی‌که برابر۲ باشد، ازنوشتن‌آن خودداری‌می‌شود.

از اینکه هر ریشگی عبارت است از یك توان با نمای‌کسری و از اینکه صورت و مخرج هرکسر را می‌توان در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم‌کرد، ظاهراً چنین برمی‌آید که در هر ریشگی می‌توان شمارۀ ریشگی و نمای زیر ریشگی را در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم‌کرد. اما در این مورد باید به‌این نکتۀ مهم توجه داشت‌که هرگاه مقدارزیر ریشگی منفی باشد، از ضرب یا تقسیم شماره و نمای‌آن بر یك عدد زوج مقدار ریشگی تغییر می‌کند. مانند اینکه در $\sqrt[3]{-4}$، که عددی منفی است، چون شمارۀ ریشگی و نمای زیرآن در ۲ ضرب شود، عدد مثبت $\sqrt[6]{16}$ به‌دست می‌آید. اما $\sqrt[3]{-4}\neq\sqrt[6]{16}$. برای پرهیز از این‌اشتباه نخست‌باید توجه داشت‌که اگرمقدار زیرریشگی منفی وشمارۀ ریشگی زوج‌باشد،آن ریشگی مقداری غیرحقیقی است و ویژگی‌گفته شده دربارۀآن صادق‌نیست.

$$\text{غیرحقیقی}\ \sqrt[n]{A} : A<0 \ \text{و}\ n\ \text{زوج}$$

و اگر مقدار زیرریشگی منفی و شمارۀ ریشگی فرد است، پیش ازانجام عمل باید علامت منفی را به‌بیرون ریشگی منتقل‌کرد:

$$n\ \text{فرد} : \sqrt[n]{A}=-\sqrt[n]{-A}$$

چگونگی عمل در حالتهای مختلف به‌شرح زیر است:

$$A>0 \implies \sqrt[n]{A}=\sqrt[kn]{A^k}$$

$$A<0\ \text{و}\ n\ \text{فرد} \implies \sqrt[n]{A}=-\sqrt[n]{-A}=-\sqrt[kn]{(-A)^k}$$

$$k\ \text{فرد} \implies \sqrt[kn]{A^k}=\sqrt[n]{A}$$

$$k\ \text{زوج} \implies \sqrt[kn]{A^k}=\sqrt[n]{|A|}$$

$$a^p>0 \implies \sqrt[q]{a^p}=\sqrt[kq]{a^{kp}}$$

$$a^p<0\ \text{،}\ q\ \text{فرد} \implies \sqrt[q]{a^p}=-\sqrt[q]{(-a)^p}=-\sqrt[kq]{(-a)^{kp}}$$

$$k \text{ زوج } \Longrightarrow \sqrt[kq]{a^{kp}}=\sqrt[q]{|a^p|}$$

چند مثال:

$$\sqrt[۶]{۱۲۵}=\sqrt[۶]{۵^۳}=\sqrt{۵}$$

$$\sqrt{۷}=\sqrt[۴]{۷^۲}=\sqrt[۴]{۴۹}$$

$$\sqrt[۳]{-۲۵}=-\sqrt[۳]{۲۵}=-\sqrt[۶]{۶۲۵}$$

$$\sqrt[۸]{(-۲)^۴}=\sqrt[۸]{۲^۴}=\sqrt{۲}$$

$$\sqrt[۱۵]{-۲۷}=-\sqrt[۱۵]{۳^۳}=-\sqrt[۵]{۳}$$

$$\sqrt[۳]{x-۱}=\begin{cases}\sqrt[۶]{(x-۱)^۲} \text{ ، } x\geqslant ۱\\ -\sqrt[۶]{(x-۱)^۲} \text{ ، } x<۱\end{cases}$$

$$\sqrt[۱۰]{(x+۲)^۲}=\sqrt[۵]{|x+۲|}=\begin{cases}\sqrt[۵]{x+۲} \text{ ، } x\geqslant -۲\\ -\sqrt[۵]{x+۲} \text{ ، } x<-۲\end{cases}$$

$$\sqrt[۴]{۴a^۲}=\sqrt{|۲a|}=\begin{cases}\sqrt{۲a} \text{ ، } a\geqslant ۰\\ \sqrt{-۲a} \text{ ، } a<۰\end{cases}$$

۲-۱۷- ساده‌کردن ریشگی شامل یك عامل- باتوجه به‌ویژگی که گفته‌شد، ریشگی $\sqrt[q]{a^p}$ را، که فرض می‌کنیم حقیقی باشد، می‌توان در حالتهای زیر ساده‌کرد:

۱) هرگاه p و q دارای مقسوم‌علیه مشترکی مانند r باشند آنها را به‌آن تقسیم می‌کنیم ودقت خواهیم‌کردکه مقدار ریشگی تغییر علامت ندهد. در این حالت اگر $r=q$ یعنی p مضرب q باشد ریشگی حذف خواهد شد.

$$p=kr \text{ و } q=lr \Longrightarrow \begin{cases}\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[l]{a^k} \text{ ، } r \text{ فرد}\\ \sqrt[q]{a^p}=\sqrt[l]{|a^k|} \text{ ، } r \text{ زوج}\end{cases}$$

$$p=kq \Longrightarrow \begin{cases} \sqrt[q]{a^p}=a^k \text{ ، فرد } k \\ \sqrt[q]{a^p}=|a^k| \text{ ، زوج } k \end{cases}$$

$$\sqrt[۶]{۵^۴}=\sqrt[۳]{۵^۲} \quad ، \quad \sqrt[۱۵]{۲^{۱۰}}=\sqrt[۳]{۲^۲}$$

$$\sqrt[۱۶]{(-۳)^{۱۲}}=\sqrt[۱۶]{۳^{۱۲}}=\sqrt[۴]{۳^۳}$$

$$\sqrt[۳]{(-۵)^۶}=\sqrt[۳]{۵^۶}=۵^۲$$

$$\sqrt[۳]{(-۲)^۳}=-۲$$

$$\sqrt[۴]{(-۷)^{۱۲}}=\sqrt[۴]{۷^{۱۲}}=۷^۳$$

$$\sqrt{a^۴}=|a^۲|=a^۲$$

$$\sqrt[۳]{a^۹}=a^۳$$

$$\sqrt{a^۶}=|a^۳|=\begin{cases} a^۳ & ، \quad a\geqslant ۰ \\ -a^۳ & ، \quad a<۰ \end{cases}$$

۲) هرگاه $p\geqslant q$ باشد از تقسیم p بر q خواهیم داشت:

$$p=kq+r \Longrightarrow \sqrt[q]{a^p}=\sqrt[q]{a^{kq+r}}$$

که با در نظر گرفتن حالتهای مختلف نتیجه می‌شود:

$$a>۰ \Longrightarrow \sqrt[q]{a^p}=a^k\sqrt[q]{a^r}$$

$$a<۰ \Longrightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \sqrt[q]{a^p}=|a^k|\sqrt[q]{a^r} & ، \quad \text{زوج } p \\ \sqrt[q]{a^p} \text{ غیرحقیقی} & ، \quad \text{فرد } p \end{array}\right\} \text{، زوج } q \\ \sqrt[q]{a^p}=a^k\sqrt[q]{a^r} \quad ، \quad \text{فرد } q \end{cases}$$

یادآوری- در این حالت هم اگر p و q دارای مقسوم‌علیه مشترک باشند بهتر **آن است** که نخست بنابرحالت اول ریشگی را ساده کرد. درحالتی هم که a^p منفی **و** q **فرد باشد بهتر** است که نخست علامت منفی از ریشگی خارج شود.

چند مثال:

$$\sqrt[4]{32}=\sqrt[4]{2^5}=2\sqrt[4]{2}$$

$$\sqrt[3]{-16}=-\sqrt[3]{2^4}=-2\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[4]{(-3)^{14}}=\sqrt{3^7}=3^3\sqrt{3}=27\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{(-5)^5}=-5\sqrt[3]{5^2}=-5\sqrt[3]{25}$$

$$\sqrt[3]{(-2)^4}=\sqrt[3]{2^4}=2\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt{a^3}=\begin{cases} a\sqrt{a} & ، \quad a\geqslant 0\\ \text{غیرحقیقی} & ، \quad a<0\end{cases}$$

$$\sqrt[3]{a^4}=a\sqrt[3]{a} \qquad ، \qquad \sqrt[3]{a^{11}}=a^3\sqrt[3]{a^2}$$

$$\sqrt[4]{a^6}=\sqrt{|a^3|}=|a|\sqrt{|a|}=\begin{cases} a\sqrt{a} & ، \quad a>0\\ -a\sqrt{-a} & ، \quad a<0\end{cases}$$

در این مثال به صورت زیر نیز می‌توان عمل کرد:

$$\sqrt[4]{a^6}=|a|\sqrt[4]{a^2}=|a|\sqrt{|a|}=\dots$$

۲-۱۸- ساده‌کردن ریشگی شامل چند عامل- هرگاه مقدار زیرریشگی به‌صورت حاصل‌ضرب چند عامل باشد (که ممکن است نمای بعضی از این عاملها منفی باشد)، هریك از عاملها را بنا به شرایط بند پیش می‌توان ساده‌کرد، زیرا:

$$\sqrt[q]{a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}\dots}=(a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}\dots)^{\frac{1}{q}}=a^{\frac{\alpha}{q}}.b^{\frac{\beta}{q}}.c^{\frac{\gamma}{q}}\ \dots$$

و هر یك از نماها را می‌توان جداگانه ساده‌کرد. مانند مثالهای زیر:

$$\sqrt{540}=\sqrt{2^2\times 3^3\times 5}=2\times 3\sqrt{3\times 5}=6\sqrt{15}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{375}{32}}=-\sqrt[3]{\frac{3\times 5^3}{2^5}}=-\frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2^2}}=-\frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt{a^7b^2c}=|a^3b|\sqrt{ac}=\begin{cases} a^3b\sqrt{ac} & ، \quad ab\geqslant 0\\ -a^3b\sqrt{ac} & ، \quad ab<0\end{cases}$$

۲-۱۹- نوشتن عدد به‌صورت ریشگی- هرعددحقیقی a برابراست با a^1 وباتوجه

به تعریف ریشگی و ویژگیهای آن نتیجه می‌شود که:

$$|a|=|a^{\frac{n}{n}}|=\sqrt[n]{|a^n|}$$

که بعداز حذف قدرمطلق، حالتهای زیر را خواهیم داشت:

$$a\geqslant ۰ \implies a=\sqrt[n]{a^n}$$

$$a<۰ \implies \begin{cases} a=\sqrt[n]{a^n}=-\sqrt[n]{(-a)^n} & \text{، فرد } n \\ a=-\sqrt[n]{a^n} & \text{، زوج } n \end{cases}$$

بنابراین، قاعدهٔ زیر به‌دست می‌آید: برای آنکه عددی را به صورت ریشگی با شمارهٔ n بنویسیم، توان nام قدر مطلق آن عدد را درون ریشگی وعلامت آن عدد را جلوی ریشگی قرار می‌دهیم.

$$۵=\sqrt{۲۵}=\sqrt[۳]{۱۲۵}=\sqrt[۴]{۶۲۵}= \dots =\sqrt[n]{۵^n}$$

$$-۴=-\sqrt{۱۶}=-\sqrt[۳]{۶۴}=-\sqrt[۴]{۲۵۶}= \dots =-\sqrt[n]{۴^n}$$

$$x-۳=\begin{cases} \sqrt{(x-۳)^۲}= \dots & \text{،} \quad x\geqslant ۳ \\ -\sqrt{(x-۳)^۲}= \dots & \text{،} \quad x<۳ \end{cases}$$

۲-۲۰- داخل کردن عدد به‌ریشگی- با توجه به‌اینکه:

$$|a|\sqrt[n]{b}=|a^{\frac{n}{n}}|.b^{\frac{۱}{n}}=(|a^n|.b)^{\frac{۱}{n}}=\sqrt[n]{|a^n|.b}$$

برای آنکه ضریب یک ریشگی با شمارهٔ n را به درون آن ببریم، توان nام قدرمطلق آن ضریب‌را درمقدار زیر ریشگی ضرب می‌کنیم و علامت‌آن را جلوی ریشگی باقی‌می‌گذاریم.

$$۷\sqrt{۱۷}=\sqrt{۴۹\times ۱۷}=\sqrt{۸۳۳}$$

$$-\frac{۲}{۳}\sqrt[۳]{۱۸}=-\sqrt[۳]{\frac{۸}{۲۷}\times ۱۸}=-\sqrt[۳]{\frac{۱۶}{۳}}$$

$$-\frac{\sqrt[۴]{۵}}{۲}=-\sqrt[۴]{\frac{۵}{۱۶}}$$

$$x\sqrt{a}=\begin{cases} \sqrt{ax^۲} & \text{،} \quad x\geqslant ۰ \\ -\sqrt{ax^۲} & \text{،} \quad x<۰ \end{cases}$$

۲-۲۱- ضرب وتقسیم ریشگیها- هرگاه دوریشگی مقادیرحقیقی ودارای‌شماره‌های

برابر باشند، داریم:

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{n}}.b^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad ، \quad b\neq 0$$

حاصلضرب یا خارج قسمت ریشگیهای حقیقی با شماره‌های برابر، ریشگی‌است با همان شماره که مقدار زیر آن حاصلضرب یا خارج قسمت مقادیر زیرآن ریشگیهاست.

$$\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{14}}{\sqrt{35}}=\sqrt{\frac{5\times 14}{35}}=\sqrt{2}$$

$$-3\sqrt[3]{7}\times 4\sqrt[3]{-2}=12\sqrt[3]{14}$$

$\sqrt{-2}\times\sqrt{-8}$ تعریف نشده $\neq\sqrt{16}$ حقیقی

$$\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}=\begin{cases}\sqrt{x^2-1} & ، \quad x\geqslant 1\\ \text{تعریف نشده} & ، \quad x<1\end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}=\begin{cases}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} & ، \quad |a|>|b|\\ \text{غیر حقیقی یا نامعین} & ، \quad |a|\leqslant|b|\end{cases}$$

برای ریشگیهای با شماره‌های مختلف m، n، p و...، هرگاه k کوچکترین مضرب‌مشترک این شماره‌ها باشد و داشته باشیم:

$$k=m'm=n'n=p'p=\ \dots$$

خواهیم داشت:

$$\sqrt[m]{|a|}=\sqrt[k]{|a^{m'}|} \ ، \ \sqrt[n]{|b|}=\sqrt[k]{|b^{n'}|} \ ، \ \dots$$

و این ریشگیهای با شماره‌های برابر را بنا به‌روش پیش ضرب یا تقسیم می‌کنیم. یعنی: برای ضرب یا تقسیم ریشگیهـای حقیقی با شماره‌های مختلف، نخست آنهـا را با حفظ علامت ومقدار به ریشگیهای با شماره‌های برابر تبدیل کرده، آنگاه عمل ضرب یا تقسیم را انجام می‌دهیم.

$$\sqrt{5}\times\sqrt[3]{-2}=\sqrt[6]{5^3}\times(-\sqrt[6]{2^2})=-\sqrt[6]{500}$$

$$\frac{\sqrt[4]{7}\times\sqrt{12}}{\sqrt[3]{21}}=\frac{\sqrt[12]{7^3}\times\sqrt[12]{12^6}}{\sqrt[12]{21^4}}=\sqrt[12]{\frac{7^3\times 3^6\times 2^{12}}{3^4\times 7^4}}=2\sqrt[12]{\frac{9}{7}}$$

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}=\begin{cases}\sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[6]{b^2}=\sqrt[6]{a^3b^2} & \text{،}\quad a\geqslant 0 \text{ و } b\geqslant 0\\ \sqrt[6]{a^3}(-\sqrt[6]{b^2})=-\sqrt[6]{a^3b^2} & \text{،}\quad a\geqslant 0 \text{ و } b<0\\ \text{غیر حقیقی} & \text{،}\quad a<0\end{cases}$$

$$\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x+1}}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt[4]{(x+1)^2}}=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} & \text{،}\quad x\geqslant 1\\ \text{حقیقی یا نامعین} \text{ ، } x<1 & \end{cases}$$

۲-۲۲- توان ریشگی- توان rام ریشگی حقیقی $\sqrt[n]{A}$ برابراست با ریشهٔ nام توان A^r، زیرا:

$$(\sqrt[n]{A})^r=(A^{\frac{1}{n}})^r=A^{\frac{r}{n}}=\sqrt[n]{A^r}$$

$$(\sqrt[n]{a^p})^r=\sqrt[n]{(a^p)^r}=\sqrt[n]{a^{pr}}$$

برای آنکه یك ریشگی حقیقی را بـه توان مفروض برسانیم، مقدار زیر ریشگی را به‌آن توان می‌رسانیم و ریشگی به‌دست‌آمده را در صورت امکان ساده می‌کنیم.

$$(\sqrt{7})^3=\sqrt{7^3}=7\sqrt{7}$$

$$(\sqrt[3]{-10})^5=-\sqrt[3]{10^5}=-10\sqrt[3]{100}$$

$$(\sqrt[3]{-24})^4=(-2\sqrt[3]{3})^4=16\sqrt[3]{3^4}=48\sqrt[3]{3}$$

$(\sqrt{-10})^4$ تعریف نشده

$$(\sqrt[4]{a})^2=\begin{cases}\sqrt[4]{a^2}=\sqrt{a} & \text{،}\quad a\geqslant 0\\ \text{غیر حقیقی} & \text{،}\quad a<0\end{cases}$$

هرگاه توان مضربی از شمارهٔ ریشگی باشد، ریشگی حذف می‌شود.

$$(\sqrt[n]{a})^{kn}=\begin{cases}a^k & \text{،}\quad a>0 \text{ یا } a<0 \text{ و } n \text{ فرد}\\ \text{تعریف نشده} & \text{،}\quad a<0 \text{ و } n \text{ زوج}\end{cases}$$

$$(\sqrt{۲۰})^{۲}=۲۰ \quad ، \quad (\sqrt[۳]{-۴})^{۳}=-۴$$

$$(\sqrt[۳]{-۴})^{۶}=(-۴)^{۲}=۱۶$$

$$(\sqrt{x})^{۲}=\begin{cases} x & ، \quad x\geqslant ۰ \\ \text{تعریف نشده} & ، \quad x<۰ \end{cases}$$

۲-۲۳- ریشهٔ ریشگی- به‌فرض حقیقی بودن $\sqrt[n]{a}$، هرگاه مقدار این ریشگی مثبت باشد، یا اینکه مقدار این ریشگی منفی و p عدد فرد باشد، مقدار ریشگی $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$ حقیقی است و داریم:

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}=\left((a)^{\frac{۱}{n}}\right)^{\frac{۱}{p}}=(a)^{\frac{۱}{np}}=\sqrt[np]{a}$$

و به شرط حفظ علامت:

$$\sqrt[p]{a\sqrt[n]{b}}=\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^{n}b}}=\sqrt[np]{a^{n}b}$$

برای ریشه گرفتن ازیك ریشگی، شمارهٔ ریشگی جدید را در شمارهٔ ریشگی مفروض ضرب می‌کنیم.

$$\sqrt{\sqrt{۷}}=\sqrt[۴]{۷} \quad ، \quad \sqrt[۳]{\sqrt{۱۰}}=\sqrt[۶]{۱۰}$$

$$\sqrt[۳]{-۲\sqrt{۵}}=-\sqrt[۳]{\sqrt{۲۰}}=-\sqrt[۶]{۲۰}$$

$$\sqrt[۳]{x\sqrt[۴]{y}}=\begin{cases} \sqrt[۳]{\sqrt[۴]{x^{۴}y}}=\sqrt[۱۲]{x^{۴}y} & ، \quad x\geqslant ۰ \,,\, y\geqslant ۰ \\ -\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{x^{۴}y}}=-\sqrt[۱۲]{x^{۴}y} & ، \quad x<۰ \,,\, y\geqslant ۰ \\ \text{غیر حقیقی} & ، \quad y<۰ \end{cases}$$

$$\sqrt[۳]{\frac{a}{\sqrt[۳]{b}}}=\sqrt[۹]{\frac{a^{۳}}{b}} \quad ، \quad b\neq ۰$$

۲-۲۴- عددهای گنگ- هرعددشامل یك یا چند ریشگی و غیر قابل تبدیل به‌عدد گویا ، عدد گنگ است. مانند عددهای گنگ $۳\sqrt{۲}$، $۷+۲\sqrt{۳}$، $\sqrt[۳]{۴}+\sqrt{۷}-۱$ و ....

هر جفت عددهای گنگ به صورت $a+\sqrt{b}$ و $a-\sqrt{b}$، یا به به‌صورت $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ و $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ را مزدوج می‌نامند. حاصل‌ضرب دو عدد گنگ مزدوج، عددی گویاست:

$$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^{۲}-b \text{ ، } b\geqslant ۰$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b \text{ ، } a\geqslant ۰ \text{ و } b\geqslant ۰$$

برای آنکه دو عبارت شامل اجزای گویا و اجزای گنگ با یکدیگر برابر باشند، لازم و کافی است که اجزای گویا با هم و اجزای متناظر گنگ نیز با هم برابر باشند:

$$(A+\sqrt{B}=C+\sqrt{D}) \iff (A=C \text{ و } B=D)$$

۲-۲۵- مسئلهٔ نمونه- هرگاه x و y عددهای گویای مثبت باشند، اندازه‌های آنها را از رابطهٔ زیر به‌دست آورید:

$$y(\sqrt{x}-۱)=۲(\sqrt{x}+۱)^{۲}-y^{۲}$$

حل- عبارت را عمل‌کرده، اجزای گنگ را با هم واجزای گویا را باهم برابرقرار می‌دهیم.

$$y\sqrt{x}-y=۲x+۲+۴\sqrt{x}-y^{۲}$$

$$\begin{cases} y\sqrt{x}=۴\sqrt{x} \text{ و } x>۰ \\ -y=۲x+۲-y^{۲} \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} y=۴ \\ x=۵ \end{array} \right.$$

۲-۲۶- تحویل ریشگی مرکب- عبارتهایی از نوع $\sqrt[n]{a+b\sqrt[p]{c}+d\sqrt[q]{e}+\ldots}$ ریشگی مرکب نام دارند. مقصود از تحویل ریشگی مرکب، تبدیل آن به مجموع جبری ریشگیهای ساده است. برای این کار فرض می‌کنیم:

$$\sqrt[n]{a+b\sqrt[p]{c}+d\sqrt[q]{e}+\ldots}=x+y\sqrt[p]{c}+z\sqrt[q]{e}+\ldots$$

سپس دو طرف را به‌توان n رسانده، در برابری حاصل اجزای گویا را با هم و اجزای متناظر گنگ را با هم برابر قرار می‌دهیم و از حل دستگاه معادلات به‌دست آمده مقادیر x، y، z و ... را به‌دست می‌آوریم.

۱) در مورد ریشگیهای با شمارهٔ ۲ داریم:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$$
$$a\pm\sqrt{b}=x+y\pm ۲\sqrt{xy}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=\dfrac{b}{۴} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a+\sqrt{a^۲-b}}{۲} \\ y=\dfrac{a-\sqrt{a^۲-b}}{۲} \end{cases}$$

اگر $a^۲-b$ مجذور کامل باشد، x و y مقادیر گویا هستند و داریم:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^۲-b}}{۲}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^۲-b}}{۲}}$$

در استفادهٔ از این فرمول، به‌ویژه در مثالها و مسئله‌های حرفی، باید توجه داشت که $\sqrt{a^۲-b}$ و همچنین طرف دوم رابطه مقدار مثبت است؛ پس اگر $a^۲-b=k^۲$ اختیار شود، داریم:

$$\boxed{\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+|k|}{۲}}\pm\sqrt{\frac{a-|k|}{۲}}}$$

مثال ۱: در ریشگی $\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}$، که می‌شود $\sqrt{۴-\sqrt{۱۲}}$، داریم:

$$a=۴ \text{ ،} b=۱۲ \text{ ،} \sqrt{a^۲-b}=\sqrt{۱۶-۱۲}=۲$$

$$\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{۴+۲}{۲}}-\sqrt{\frac{۴-۲}{۲}}=\sqrt{۳}-۱$$

مثال ۲: در ریشگی $\sqrt{۵+\sqrt{۳}}$ داریم $a=۵$ و $b=۳$ و $a^۲-b=۲۲$ که مجذور کامل نیست. پس این ریشگی مرکب به‌ریشگیهای ساده تبدیل نمی‌شود.

مثال ۳: ریشگی $\sqrt{۳-۲\sqrt{۳}}$ غیرحقیقی است و تحویل‌آن معنی ندارد.

یادآوری- درتحویل‌ریشگی مرکب‌می‌توان مقدارزیرریشگی را ازراه تجسس‌ذهنی به‌صورت توان دوم یك دوجمله‌ای درآورد و از این راه حاصل ریشگی را به‌دست‌آورد:

$$\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}=\sqrt{۱+۳-۲\sqrt{۳}}=\sqrt{۱^۲+(\sqrt{۳})^۲-۲\times۱\times\sqrt{۳}}$$
$$=\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{۳}-۱$$

۲) در حالت سادهٔ ریشگی با شمارهٔ ۳ داریم:

$$\sqrt[۳]{a+b\sqrt{c}}=x+y\sqrt{c}$$

دو طرف را به‌توان ۳ می‌رسانیم:

$$a+b\sqrt{c}=x^3+3x^2y\sqrt{c}+3cxy^2+cy^3\sqrt{c}$$

$$\begin{cases} x(x^2+3cy^2)=a \\ y(3x^2+cy^2)=b \end{cases}$$

این دستگاه به معادله‌ای درجه سوم تبدیل می‌شود که درحالت کلی به سادگی قابل حل نیست. (با فرض $x=\alpha y$ و آنگاه از تقسیم دوطرف دومعادلهٔ دستگاه برهم، معادله درجهٔ سوم نسبت به α به‌دست می‌آید.) اگر x و y را عددهای درست بگیریم ، a و b را به‌صورت حاصل‌ضرب دو عامل بنویسیم و عاملهای کوچکتر را برابر با x و y اختیار کنیم ، در صورتی که این مقادیر در دستگاه صدق کنند، جوابهای آن خواهند بود.

مثال ۱: تحویل ریشگی مرکب $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$:

$$5\sqrt{2}-7=(x+y\sqrt{2})^3=x^3+3x^2y\sqrt{2}+6xy^2+2y^3\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x(x^2+6y^2)=-7 \\ y(3x^2+2y^2)=5 \end{cases}$$

داریم $-7=-1\times 7$ و $5=1\times 5$ پس اگر x و y عددهای درست باشند $x=-1$ و $y=1$ می‌تواند باشد. این مقادیر در دستگاه صدق می‌کنند و قابل قبولند. پس:

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt{2}-1$$

مثال ۲: برای تحویل ریشگی $\sqrt[3]{38\sqrt{14}-100\sqrt{2}}$ نخست درزیر ریشگی از $-2\sqrt{2}=(-\sqrt{2})^3$ فاکتور می‌گیریم که حاصل می‌شود $-\sqrt{2}\sqrt[3]{50-19\sqrt{7}}$ آنگاه مانند مثال قبل عمل می‌کنیم و جواب می‌شود:

$$-\sqrt{2}(2-\sqrt{7})=\sqrt{14}-2\sqrt{2}$$

مثال ۳:

$$\sqrt[3]{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}=x\sqrt{3}+y\sqrt{5}$$

$$54\sqrt{3}+41\sqrt{5}=3x^3\sqrt{3}+9x^2y\sqrt{5}+15xy^2\sqrt{3}+5y^3\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} x(x^2+5y^2)=18 \\ y(9x^2+5y^2)=41 \end{cases}$$

چون ۴۱ عدد اول است پس اگر y صحیح باشد داریم:

$$y=\pm 1 \Longrightarrow 9x^2+5=\pm 41$$

و نتیجه می‌شود $y=1$ و $x=2$ که این مقادیر درمعادلهٔ اول دستگاه نیز صدق‌می‌کنند.
پس :

$$\sqrt[3]{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}=2\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

۳) حالتهای دیگر نیز به معادله‌هایی می‌انجامدکه حل آنها به سادگی میسرنیست مگر آنکه جوابهای آنها از راه تجسس به‌دست آید. در این حالتها از ابتدا می‌توان مقدارزیر ریشگی را از راه تجسس به‌توان یك‌دوجمله‌ای تبدیل‌کرد و پاسخ را از این راه به‌دست آورد.

مثال: برای تحویل ریشگی مرکب $\sqrt[4]{\dfrac{17+12\sqrt{2}}{4}}$ داریم:

$$17+12\sqrt{2}=9+8+2\times3\times2\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^2$$
$$3+2\sqrt{2}=1+2+2\times1\times\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$$
$$\sqrt[4]{\frac{17+12\sqrt{2}}{4}}=\sqrt[4]{\frac{(1+\sqrt{2})^4}{2^2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+1$$

✲ **۲-۲۷- مسئلهٔ نمونه-** عبارت زیر را ساده‌کنید:

$$y=\sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}}$$

حل- اولاً مقدار y نامنفی است و وقتی حقیقی است‌که:

$$x^2-1\geqslant 0 \quad \text{و} \quad x^2-2\sqrt{x^2-1}\geqslant 0 \iff x\geqslant 1 \quad \text{یا} \quad x\leqslant -1$$

ثانیاً با توجه به فرمول تحویل ریشگی مرکب خواهیم داشت:

$$y=\sqrt{\frac{x^2+|x^2-2|}{2}}+\sqrt{\frac{x^2-|x^2-2|}{2}}$$
$$-\left(\sqrt{\frac{x^2+|x^2-2|}{2}}-\sqrt{\frac{x^2-|x^2-2|}{2}}\right)$$

هرگاه $x^2\geqslant 2$ ، یعنی $x\geqslant\sqrt{2}$ یا $x\leqslant-\sqrt{2}$ باشد، خواهیم داشت:

$$y=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1}-\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1}=2$$

و هرگاه $1\leqslant x^2\leqslant 2$ ، یعنی $1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$ یا $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant -1$ باشد، خواهیم داشت :

$$y=\sqrt{1}+\sqrt{x^2-1}-\sqrt{1}+\sqrt{x^2-1}=2\sqrt{x^2-1}$$

روش دیگر:

$$y=\sqrt{1+(x^2-1)+2\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{1+(x^2-1)-2\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\sqrt{(1+\sqrt{x^2-1})^2}-\sqrt{(1-\sqrt{x^2-1})^2}$$
$$=|1+\sqrt{x^2-1}|-|1-\sqrt{x^2-1}|$$
$$y=\begin{cases}2 & , \quad x^2\geqslant 2\\ 2\sqrt{x^2-1} & , \quad 1\leqslant x^2\leqslant 2\end{cases}$$

روش دیگر- نخست y^2 را حساب می‌کنیم و ازروی‌آن y را به‌دست می‌آوریم:

$$y^2=x^2+2\sqrt{x^2-1}+x^2-2\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{x^4-4x^2+4}$$
$$y^2=2x^2-2|x^2-2|$$
$$x^2\geqslant 2 \text{ و } y\geqslant 0 \implies y=2$$
$$1\leqslant x^2\leqslant 2 \text{ و } y\geqslant 0 \implies y=2\sqrt{x^2-1}$$

۲-۲۸- گویاکردن مخرج گنگ کسر- در محاسبات و درساده‌کردن عبارتها سعی می‌شود که اگرمخرج یك کسر گنگ‌است،آن را گویا کنند. برای این کار،صورت ومخرج کسر یك یا چندبار درجمله یا عبارتی ضرب می‌شود، که‌آخرین‌حاصل‌ضرب درمخرج گویا باشد.

۱) هرگاه مخرج کسر به صورت یك جمله‌ای $a\sqrt{b}$ باشد ، صورت و مخرج کسر در $\sqrt{b}$ ضرب می‌شود:

مثال:

$$\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$$
$$\frac{1-\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=\frac{(1-\sqrt{2})\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-2}{10}$$

۲) هرگاه مخرج کسر یك‌جمله‌ای $a\sqrt[n]{b^p}$ باشد ، صورت و مخرج کسر در $\sqrt[n]{b^{n-p}}$ ضرب می‌شود.

مثال:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{6}}=\frac{4\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{6^2}}=\frac{4\sqrt[3]{36}}{6}=\frac{2\sqrt[3]{36}}{3}$$

$$\frac{۱۲\sqrt{۵}}{۵\sqrt[۴]{۸}}=\frac{۱۲\sqrt{۵}}{۵\sqrt[۴]{۲^۳}}=\frac{۱۲\sqrt{۵}\times\sqrt[۴]{۲}}{۵\sqrt[۴]{۲^۳}\times\sqrt[۴]{۲}}=\frac{۱۲\sqrt[۴]{۵^۲\times ۲}}{۵\times ۲}=\frac{۶\sqrt[۴]{۵۰}}{۵}$$

۳) اگر مخرج کسر دوجملـه‌ای دارای ریشگی یا ریشگیهای با شمارهٔ ۲ باشد، صورت و مخرج در دوجمله‌ای مزدوج مخرج ضرب می‌گردد.

مثال:

$$\frac{\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}+۱}=\frac{(\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲})(۲\sqrt{۳}-۱)}{(۲\sqrt{۳}+۱)(۲\sqrt{۳}-۱)}=\frac{۶-۲\sqrt{۲}-\sqrt{۳}-۴\sqrt{۶}}{۱۲-۱=۱۱}$$

$$\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}=\frac{(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^۲}{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})}=\frac{۵+۲\sqrt{۶}}{۳-۲}=۵+۲\sqrt{۶}$$

۴) اگر مخرج کسر چندجمله‌ای شامل ریشگیهای با شمارهٔ ۲ باشد، مخرج به‌دو بخش تقسیم شده و صورت و مخرج در مزدوج آن دو بخش ضرب می‌شود:

مثال:

$$\frac{۱}{۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}+۱}=\frac{۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}-۱}{(۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}+۱)(۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}-۱)}$$

$$=\frac{۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}-۱}{(۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲})^۲-۱}=\frac{۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}-۱}{۲۹-۱۲\sqrt{۶}}$$

$$=\frac{(۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}-۱)(۲۹+۱۲\sqrt{۶})}{(۲۹-۱۲\sqrt{۶})(۲۹+۱۲\sqrt{۶})}$$

$$=\frac{۲۹+۱۵\sqrt{۲}+۱۴\sqrt{۳}+۱۲\sqrt{۶}}{۲۳}$$

۵) هرگاه مخرج کسر چندجمله‌ای شامل ریشگیهای با شمارهٔ ۳ باشد، با استفاده از اتحاد

$$(a\pm b)(a^۲\mp ab+b^۲)=a^۳\pm b^۳$$

عامل ضرب در صورت و مخرج تعیین می‌گردد.

مثال:

$$\frac{1+\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}=\frac{(1+\sqrt[3]{2})(1-\sqrt[3]{2})}{(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})(1-\sqrt[3]{2})}$$

$$=\frac{1-\sqrt[3]{4}}{1-\sqrt[3]{8}}=\sqrt[3]{4}-1$$

۶) در موردهای دیگـر از اتحادهای مربوط و از روشهـای بالا مشترکاً استفاده می‌شود.

مثال:

$$\frac{4+\sqrt{5}}{\sqrt{4-\sqrt{5}}}=\frac{(4+\sqrt{5})\sqrt{4-\sqrt{5}}}{4-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{(4+\sqrt{5})^2\sqrt{4-\sqrt{5}}}{(4-\sqrt{5})(4+\sqrt{5})}=\frac{(21+8\sqrt{5})\sqrt{4-\sqrt{5}}}{11}$$

$$\frac{\sqrt[4]{2}+1}{\sqrt[4]{2}-1}=\frac{(\sqrt[4]{2}+1)^2}{(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt[4]{2}-1)}=\frac{1+\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$=3+2\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2}+2\sqrt[4]{8}$$

یادداشت- هرگاه مخرج کسر شامل ریشگی مرکب باشد نخست توجـه شودکه اگر ممکن باشدآن را به‌ریشگیهای ساده تحویل کرد.

مثال:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}=\frac{1}{\sqrt{2}-\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}=\frac{1}{\frac{2-\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{4}$$

۲، و- مسئله‌های نمونه

۲-۲۹- از رابطهٔ زیر مقدار x را به‌ساده‌ترین صورت به‌دست‌آورید:

$$x=\sqrt{۲}\left(\sqrt[۴]{۷+۴\sqrt{۳}}-\sqrt[۴]{۷-۴\sqrt{۳}}\right)$$

حل- به‌ترتیب داریم:

$$x=\sqrt{۲}\left(\sqrt[۴]{(۲+\sqrt{۳})^{۲}}-\sqrt[۴]{(۲-\sqrt{۳})^{۲}}\right)$$

$$x=\sqrt{۲}\left(\sqrt{۲+\sqrt{۳}}-\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\right)$$

$$x=\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}-\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}$$

$$x=\sqrt{(\sqrt{۳}+۱)^{۲}}-\sqrt{(\sqrt{۳}-۱)^{۲}}$$

$$x=\sqrt{۳}+۱-\sqrt{۳}+۱=۲$$

۲-۳۰- مطلوب است مقایسهٔ دو عدد $a=۵-۲\sqrt{۵}$ و $b=\sqrt{۴۵-۲۰\sqrt{۵}}$.

حل- چون هر دو عدد مثبت هستند پس توانهای دوم آنها را مقایسه می‌کنیم؛

$$a^{۲}=۲۵+۲۰-۲۰\sqrt{۵}=۴۵-۲۰\sqrt{۵}$$

$$a^{۲}=b^{۲} \text{ و } a>۰ \text{ و } b>۰ \implies a=b$$

۲-۳۱- به‌فرض‌آنکه a و b و m عددهای مثبت و $a>b$ باشد، دو عدد زیر را با هم مقایسه کنید:

$$x=\sqrt{a+m}-\sqrt{a} \quad \text{و} \quad y=\sqrt{b+m}-\sqrt{b}$$

حل- می‌توان علامت $x-y$ را تعیین کرد، اما در اینجا ساده‌تر آن است که $\frac{۱}{x}$ و $\frac{۱}{y}$ را مقایسه کنیم:

$$\frac{۱}{x}=\frac{۱}{\sqrt{a+m}-\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a+m}+\sqrt{a}}{m}$$

$$\frac{۱}{y}=\frac{۱}{\sqrt{b+m}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b+m}+\sqrt{b}}{m}$$

با توجه به‌شرایط گفته شده داریم:

$$\frac{۱}{x}>\frac{۱}{y} \implies x<y$$

۲-۳۲- دو عدد a و b به‌شرح زیر داده شده است

$$a=\sqrt{۴-\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}} \quad \text{و} \quad b=\sqrt{۴+\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}$$

مقادیر $a^{۲}+b^{۲}$ و ab را حساب‌کرده و از روی‌آن مقدار $a+b$ را به‌دست‌آورید.

حل- داریم:

$$a^۲+b^۲=۴-\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}+۴+\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}=۸$$

$$ab=\sqrt{۱۶-(۱۰+۲\sqrt{۵})}=\sqrt{۶-۲\sqrt{۵}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{۵}-۱)^۲}=\sqrt{۵}-۱$$

$$(a+b)^۲=a^۲+b^۲+۲ab$$

$$=۸+۲(\sqrt{۵}-۱)=۶+۲\sqrt{۵}=(\sqrt{۵}+۱)^۲$$

و چون a و b هر دو مثبت هستند پس:

$$a+b=\sqrt{۵}+۱$$

۲-۳۳- اولاً مقدار x را از رابطهٔ زیر حساب کنید:

$$۲۰\pm ۱۴\sqrt{۲}=(x\pm\sqrt{۲})^۳$$

ثانیاً حاصل عبارت زیر را به‌ساده‌ترین صورت به‌دست‌آورید:

$$y=\sqrt[۳]{۲۰+۱۴\sqrt{۲}}+\sqrt[۳]{۲۰-۱۴\sqrt{۲}}$$

حل- اولاً رابطه را بسط داده مقادیر گویا را با هم و مقادیر گنگ را با هم برابر قرار می‌دهیم.

$$۲۰\pm ۱۴\sqrt{۲}=x^۳\pm ۳x^۲\sqrt{۲}+۶x\pm ۲\sqrt{۲}$$

$$\begin{cases} x^۳+۶x=۲۰ \\ ۳x^۲+۲=۱۴ \end{cases} \Longrightarrow x=۲$$

ثانیاً با توجه به‌نتیجهٔ بالا داریم:

$$y=\sqrt[۳]{(۲+\sqrt{۲})^۳}+\sqrt[۳]{(۲-\sqrt{۲})^۳}$$

$$y=۲+\sqrt{۲}+۲-\sqrt{۲}=۴$$

۲-۳۴- درستی برابری زیر را تحقیق کنید:

$$\sqrt[۳]{۳۰\sqrt{۳}+۳۷}-\sqrt[۳]{۳۰\sqrt{۳}-۳۷}=۲$$

حل- دو طرف را به‌توان ۳ می‌رسانیم و حاصل طرف اول را از روی اتحاد زیر حساب می‌کنیم؛

$$(a-b)^۳=a^۳-b^۳-۳ab(a-b)$$

$$۳۰\sqrt{۳}+۳۷-(۳۰\sqrt{۳}-۳۷)-۳\sqrt[۳]{۲۷۰۰-۱۳۶۹}\times ۲=۸$$

که پس از ساده کردن خواهیم داشت $۸=۸$

۲-۳۵- معادلهٔ درجهٔ سومی تشکیل دهیدکه یك جواب‌آن برابر باشد با:

$$x=\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۳}}$$

حل- دو طرف را به‌توان ۳ می‌رسانیم و از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$(a+b)^{۳}=a^{۳}+b^{۳}+۳ab(a+b)$$

که با فرض $a+b=x$ داریم:

$$x^{۳}=۲+\sqrt{۳}+۲-\sqrt{۳}+۳x\sqrt[۳]{۴-۳}$$

و پس از ساده‌کردن:

$$x^{۳}-۳x-۴=۰$$

۲-۳۶- از رابطهٔ زیر اندازه‌های x و y را برحسب عددهای گویای a و b به‌دست‌آورید:

$$(a+b\sqrt{۵})(x+y\sqrt{۵})=b+a\sqrt{۵}$$

حل- می‌توان طرف اول‌را بسط داد وآنگاه مقادیر گویا را با هم ومقادیر گنگ‌را نیز با هم برابر قرار داد ودستگاه دو معادلهٔ حاصل را حل‌کرد. اما ساده‌ترآن است‌که به روش زیر عمل‌کنیم:

$$x+y\sqrt{۵}=\frac{b+a\sqrt{۵}}{a+b\sqrt{۵}}$$

$$=\frac{(b+a\sqrt{۵})(a-b\sqrt{۵})}{(a+b\sqrt{۵})(a-b\sqrt{۵})}$$

$$x+y\sqrt{۵}=\frac{-۴ab+(a^{۲}-b^{۲})\sqrt{۵}}{a^{۲}-۵b^{۲}}$$

$$x+y\sqrt{۵}=\frac{-۴ab}{a^{۲}-۵b^{۲}}+\frac{a^{۲}-b^{۲}}{a^{۲}-۵b^{۲}}\sqrt{۵}$$

$$x=\frac{-۴ab}{a^{۲}-۵b^{۲}} \quad ، \quad y=\frac{a^{۲}-b^{۲}}{a^{۲}-۵b^{۲}}$$

۲-۳۷- اگر $x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ باشد حاصل عبارت زیر را به‌دست‌آورید:

$$y=\frac{۱+۲x}{۱+\sqrt{۱+۲x}}+\frac{۱-۲x}{۱-\sqrt{۱-۲x}}$$

حل- به‌ترتیب داریم:

$$۱+۲x=۱+\frac{۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۴+۲\sqrt{۳}}{۴}=\left(\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}\right)^{۲}$$

$$۱-۲x=۱-\frac{۲\sqrt{۳}}{۴}=\left(\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}\right)^{۲}$$

$$y=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}+1}{2}}+\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$y=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$y=\frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{9-3}=1$$

۲-۳۸- به‌فرض $x=\cos^2 a$ و $0\leqslant a\leqslant\pi$ مقدار y از رابطهٔ زیر را برحسب a به‌دست آورید.

$$y=\frac{1+2\sqrt{x(1-x)}}{2x-1}$$

حل- داریم:

$$y=\frac{1+2\sqrt{\cos^2 a(1-\cos^2 a)}}{2\cos^2 a-1}=\frac{1+2\sqrt{\cos^2 a\sin^2 a}}{\cos 2a}$$

$$y=\frac{1+2|\cos a\sin a|}{\cos 2a}$$

۱) هرگاه a حاده باشد داریم:

$$y=\frac{1+2\cos a\sin a}{\cos 2a}=\frac{\cos^2 a+\sin^2 a+2\sin a\cos a}{\cos^2 a-\sin^2 a}$$

$$=\frac{(\cos a+\sin a)^2}{(\cos a+\sin a)(\cos a-\sin a)}=\frac{\cos a+\sin a}{\cos a-\sin a}$$

۲) هرگاه a منفرجه باشد داریم:

$$y=\frac{1-2\cos a\sin a}{\cos 2a}=\frac{(\cos a-\sin a)^2}{\cos^2 a-\sin^2 a}=\frac{\cos a-\sin a}{\cos a+\sin a}$$

هرگاه a کمان غیر مشخص باشد، در یک حالت باید انتهای آن را در بخشهای اول یا سوم، و در حالت دیگر باید انتهای آن را در بخشهای دوم یا چهارم اختیارکرد.

* **۲-۳۹-** اولاً کسر زیررا به‌تفاضل دوکسر با صورتهای یک تجزیه‌کنید:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$$

ثانیاً مجموع زیر را حساب کنید:

$$S=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$$

حل- اولاً به‌ترتیب داریم:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)^2-n^2(n+1)}$$

$$=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

ثانیاً در رابطهٔ به‌دست آمدهٔ در بالا n را به‌ترتیب برابر با ۱، ۲، ... ۹۸ و ۹۹ قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}=\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}$$

دو طرف برابریهای بالا را نظیر به نظیر با هم جمع می‌کنیم؛ حاصل طرف اول برابر با S است و در طرف دوم جمله‌های قرینه حذف می‌شوند و خواهیم داشت:

$$S=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{100}}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

✽۲-۴۰- هرگاه x_i عدد مثبت باشد، اولاً ثابت کنید:

$$1+x_i\geqslant 2\sqrt{x_i}$$

ثانیاً نابرابری زیر را ثابت کنید.

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)\geqslant 2^n\sqrt{x_1x_2\dots x_n}$$

دراین رابطه چه‌موقع برابری برقرار است؟ هرگاه $x_1x_2\dots x_n=1$ باشد رابطه به‌چه صورت درمی‌آید؟

حل- اولاً با استفاده از نابرابری $(a-b)^2\geqslant 0$ داریم $(1-\sqrt{x_i})^2\geqslant 0$ یعنی

$0 \geqslant 1+x_i-2\sqrt{x_i}$ که می‌شود $1+x_i \geqslant 2\sqrt{x_i}$. برابری وقتی است که $x_i=1$ باشد.

ثانیاً در نابرابری بالا i را به‌ترتیب برابر با ۱، ۲، ...، n می‌گیریم:

$$1+x_1 \geqslant 2\sqrt{x_1}$$
$$1+x_2 \geqslant 2\sqrt{x_2}$$
$$\vdots$$
$$1+x_n \geqslant 2\sqrt{x_n}$$

از ضرب نظیر به‌نظیر دو طرف نابرابریها در یکدیگر به‌دست می‌آید:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geqslant 2^n\sqrt{x_1x_2\ldots x_n}$$

برابری وقتی است که $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$ باشد. در حالت $x_1x_2\ldots x_n=1$ داریم:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geqslant 2^n$$

✽ **۲-۴۱-** به‌فرض $a \geqslant 1$ مقدار x را از معادلهٔ زیر به‌دست آورید:

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^x+\left(\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)^x=2a$$

حل- حاصل‌ضرب دو ریشگی مرکب بالا برابر یك است، پس فرض می‌کنیم.

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^x=y \implies \left(\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)^x=y^{-1}$$

$$y+\frac{1}{y}=2a \implies y=a\pm\sqrt{a^2-1}$$

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^x=a\pm\sqrt{a^2-1} \implies x=\pm 2$$

✽ **۲-۴۲-** به فرض آنکه a و b عددهای مثبت باشند، مقدار y از رابطهٔ زیر را به‌ازای مقدار داده شده حساب کنید:

$$y=\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} \quad ، \quad x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

حل- نخست مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$y=\frac{2b\sqrt{x^2-1}\,(x+\sqrt{x^2-1})}{x^2-(x^2-1)}$$

$$y=2b(x\sqrt{x^2-1}+x^2-1)$$

اکنون مقدار x^2-1 را حساب می‌کنیم.

$$x^2-1=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2-1=\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)-1$$

$$=\frac{۱}{۴}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-۲\right)=\frac{۱}{۴}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^۲$$

برای محاسبهٔ مقدار $\sqrt{x^۲-۱}$ دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) اگر $a\leqslant b$ باشد آنگاه $\frac{b}{a}\geqslant\frac{a}{b}$ و:

$$\sqrt{x^۲-۱}=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$

$$x\sqrt{x^۲-۱}=\frac{۱}{۴}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$

$$=\frac{۱}{۴}\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)$$

$$y=۲b\left[\frac{۱}{۴}\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)+\frac{۱}{۴}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-۲\right)\right]$$

$$=\frac{b}{۲}\left(\frac{۲b}{a}-۲\right)=\frac{b(b-a)}{a}$$

۲) اگر $a>b$ باشد آنگاه $\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$ و:

$$\sqrt{x^۲-۱}=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

$$x\sqrt{x^۲-۱}=\frac{۱}{۴}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

$$=\frac{۱}{۴}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$$

$$y=\ \dots\ =a-b$$

۲، ز- تمرینها و پرسشها

۲-۴۳- تمرینهای دستهٔ اول

● حاصل هر یک از مقادیر زیر را به‌ساده‌ترین صورت به‌دست‌آورید:

۱) $۴^{-۲}$ ۲) $-۴^۲$ ۳) $-۴^{-۲}$

۴) $(-۴)^{-۲}$ ۵) $\frac{۱}{(-۳)^{-۳}}$ ۶) $\frac{-۷^۳}{(-۷)^{-۲}}$

۷) $-۹^{\frac{۱}{۲}}$

۸) $(-۹)^{\frac{۱}{۲}}$

۹) $۱۶^{-\frac{۱}{۲}}$

۱۰) $-۱۲^{۰}$

۱۱) $(-۱۲)^{۰}$

۱۲) $-(-۱۱)^{-۱}$

۱۳) $-\sqrt[۳]{-۶۴}$

۱۴) $\sqrt{(-۵)^{۲}}$

۱۵) $\sqrt[۴]{-۸۱}$

۱۶) $\sqrt[۳]{۵\sqrt{۵}}$

۱۷) $\sqrt[۵]{-x^{۱۰}}$

۱۸) $-\sqrt[۴]{۳^{-۸}}$

● حاصل هر یك ازجمله‌ها یا عبارتهای زیر را به‌ساده‌ترین صورت به‌دست‌آورید:

۱۹) $x^{۳}y^{۲}.x^{-۲}y^{۰}.a^{۲}xy^{-۱}$

۲۰) $a^{-۵}x^{۳}y(x^{-۴}a^{۲})$

۲۱) $a^{۵}b^{۰}c(x^{-۳}c^{۰}-۴a^{-۵}b^{-۱})$

۲۲) $a^{-۳}b^{۲}(a^{۳}b^{-۲}+۴)$

۲۳) $\dfrac{x^{-۲}y^{-۲}}{x^{۲}y^{۲}-۱}$

۲۴) $\dfrac{a+b}{(a-b)^{-۱}}$

۲۵) $۲/۵\times ۱۰^{۳}\times(۳/۲\times ۱۰^{-۵})$

۲۶) $\dfrac{a^{-۲}b^{۰}}{x^{۲}}(x^{-۲}+a^{۵}x^{۴})$

۲۷) $-۲x^{-۲}(x+x^{-۱})^{۲}$

۲۸) $(x^{۲}-y^{۲})(x+y)^{-۲}$

۲۹) $\dfrac{a^{\frac{۱}{۲}}.a^{-\frac{۳}{۴}}}{a^{-\frac{۱}{۴}}}$

۳۰) $\dfrac{\sqrt{x}\,.\,\sqrt{x^{۳}}}{x^{-۳}}$

۳۱) $\dfrac{(x-۱)^{\frac{۱}{۲}}+(x-۱)^{-\frac{۱}{۲}}}{(x-۱)^{-۲}}$

۳۲) $(x^{۲}y^{۴}z^{-۲})^{\frac{۱}{۲}}$

● ریشگیهای زیر را ساده کنید:

۳۳) $\sqrt[۶]{(-۵)^{۲}}$

۳۴) $\sqrt[۳]{-(-۷)^{۶}}$

۳۵) $\sqrt{(۱-\sqrt{۵})^{۲}}$

۳۶) $\sqrt{(\pi^{۲}-۱۰)^{۲}}$

۳۷) $\sqrt{۲۸۸}$

۳۸) $\sqrt[۳]{۳\sqrt{۳}}$

۳۹) $\sqrt{۴۵۰}$

۴۰) $\sqrt[۳]{۲۵۰}$

۴۱) $\sqrt[۴]{۶۴}$

۴۲) $\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}$

۴۳) $\sqrt{۸-۴\sqrt{۳}}$

۴۴) $\sqrt[۴]{۱۷+۱۲\sqrt{۲}}$

● در تمرینهای زیر به‌جای ؟ مقدار یا علامت لازم را قرار دهید:

۴۵) $\sqrt[۳]{۲۵}=\sqrt[۶]{۵^{?}}$

۴۶) $-۷=?\sqrt[۴]{(-۷)^{۴}}$

۴۷) $a<0 \implies \sqrt{4a^2}=?a$

۴۸) $x<y \implies \sqrt[4]{(x-y)^2}=\sqrt{?}$

۴۹) $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi \implies \sqrt{\cos^2\alpha}=?$

۵۰) $0<\alpha<\frac{\pi}{4} \implies \sqrt[6]{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\sqrt[3]{?}$

۵۱) $a<1 \implies (a-1)\sqrt{a^2+1}=?\sqrt{(a-1)^2(a^2+1)}$

۵۲) $x^2=1 \implies \sqrt{x^2}=?$

۵۳) $0<x\leqslant 1 \implies x^3?x^7$

۵۴) $a>1 \implies a^{-2}?a^{-4}$

۵۵) $a^3>b^3 \implies \sqrt[3]{\frac{a}{b}}\ ?1$

● حاصل عبارتهای زیر را به‌دست‌آورید و ساده کنید:

۵۶) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$

۵۷) $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$

۵۸) $(3\sqrt{3}-2\sqrt{6})^2$

۵۹) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[5]{-2}\times\sqrt{8}$

۶۰) $(\sqrt[5]{9})^3\times\sqrt[15]{3^3}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt{12}$

۶۱) $(\sqrt[3]{\sqrt{3}})^2\times\sqrt{27}\times\sqrt{3}$

● در تمرینهای زیر عددهای داده شده را به‌ترتیب صعودی مرتب کنید:

۶۲) $a=\sqrt[4]{8}$ ، $b=\sqrt[7]{32}\times\sqrt{2}$ ، $c=\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[5]{2}}$

۶۳) $a=\sqrt{\sqrt[3]{9}}$ ، $b=\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt[3]{3}}$ ، $c=\sqrt[4]{3}$ ، $d=\sqrt{3}$

● مخرج کسرهای زیر را گویا کنید و حاصل را ساده نمایید:

۶۴) $\frac{1}{\sqrt{27}}$

۶۵) $\frac{2}{\sqrt[3]{32}}$

۶۶) $\frac{۳}{۲+\sqrt{۳}}$

۶۷) $\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}$

۶۸) $\frac{۴}{۳\sqrt{۲}(\sqrt{۳}-۱)}$

۶۹) $\frac{(۳\sqrt{۲}+۱)^{۲}}{(۳\sqrt{۲}-۱)^{۲}}$

۷۰) $\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}-\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}$

۷۱) $\frac{(۲\sqrt{۳}-۱)(۳\sqrt{۲}+۱)}{(۲\sqrt{۳}+۱)(۳\sqrt{۲}-۱)}$

۷۲) $\frac{\sqrt{۲\sqrt{۳}-۳}}{\sqrt{۳+۲\sqrt{۳}}}$

۷۳) $\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}}}$

۷۴) $\sqrt[۳]{\frac{۲(\sqrt{۳}+۱)^{۲}}{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}}$

۷۵) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}$

۷۶) $\sqrt{\frac{۱-\cos\alpha}{۱+\cos\alpha}}$

۷۷) $\frac{۵-۲\sqrt{۳}+۳\sqrt{۲}}{۷+۳\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}}$

۷۸) $۱+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{\sqrt{۳}}}+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{\sqrt{۳}}}}$

● در هر تمرین زیر دو عدد a و b را با هم مقایسه کنید:

۷۹) $a=\frac{۵}{۵-۲\sqrt{۵}}$ ، $b=\sqrt{\frac{۵}{۹-۴\sqrt{۵}}}$

۸۰) $a=\frac{۶}{۲\sqrt{۳}+۳\sqrt{۲}}$ ، $b=\sqrt{\frac{۶}{۵+۲\sqrt{۶}}}$

● در هرتمرین زیرمقدار y را در ازای آن مقدار از x که داده شده است به‌دست‌آورید و ساده‌کنید:

۸۱) $y=۲x^{۲}-x\sqrt{۲}+\sqrt{۲}-۱$ ، $x=\sqrt{۲}-۱$

۸۲) $y=۳x+\frac{۲}{x}$ ، $x=\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

۸۳) $y=۳\sin^{۲}x-۴\sin x\cos x-\cos^{۲}x+۱$ ، $x=۷۵^\circ$

۸۴) $y=\frac{tg\,x+۱}{۱-\sin ۲x}$ ، $x=\frac{\pi}{۸}$

● مسئله‌ها و تمرینهای زیر را حل‌کنید:

۸۵) هرگاه داشته باشیم

$$x=\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۳-۲\sqrt{۲}}+\frac{۳-۲\sqrt{۲}}{۳+۲\sqrt{۲}} \quad \text{و} \quad y=\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۳-۲\sqrt{۲}}-\frac{۳-۲\sqrt{۲}}{۳+۲\sqrt{۲}}$$

حاصل‌کسر $\frac{x^۲+y^۲}{x^۲-y^۲}$ را به‌ساده‌ترین صورت به‌دست‌آورید.

۸۶) حاصل‌کسر زیر را حساب‌کنید:

$$\frac{\sqrt[۴]{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt[۴]{۲-\sqrt{۳}}}{\sqrt[۴]{۲+\sqrt{۳}}-\sqrt[۴]{۲-\sqrt{۳}}}$$

۸۷) به‌فرض $x=\sqrt{ab}$ حاصل عبارت زیر را در حالتهای ممکن حساب‌کنید:

$$y=\frac{a}{x}+\frac{x}{b}+۲\sqrt{\frac{a}{b}}$$

❋ ۲-۴۴ - تمرینهای دستهٔ دوم

● حاصل هر یك از عبارتهای زیر را به‌ساده‌ترین صورت به‌دست‌آورید:

۸۸) $\sqrt{۲-\sqrt{۳}}(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})(۲+\sqrt{۳})$

۸۹) $(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۳}+۱)(\sqrt{۶}+۱)(۵-۲\sqrt{۲}-\sqrt{۳})$

۹۰) $\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\times\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}\times\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}}\times\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}}$

۹۱) $\sqrt[۳]{۱۱۷\sqrt{۲}-۲۵\sqrt{۷}}$

۹۲) $(۷-۴\sqrt{۳})\sqrt{۷+۴\sqrt{۳}}+(۷+۴\sqrt{۳})\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}$

۹۳) $(۵-۳\sqrt{۲})\sqrt{۱۳+۳۰\sqrt{۲+\sqrt{۹+۴\sqrt{۲}}}}$

۹۴) $\sqrt{a+۲m\sqrt{a-m^۲}}+\sqrt{a-۲m\sqrt{a-m^۲}}$

۹۵) $\sqrt{x^۲+۲a\sqrt{x^۲-a^۲}}$

۹۶) $\sqrt{۲(a+x)(a+\sqrt{a^۲-x^۲})}$

۹۷) $\sqrt{x^۲+x+۱-\sqrt{۲x^۳+x^۲+۲x}}$

۹۸) $\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}+\sqrt{x-۲\sqrt{x-۱}}$

● در کسرها و عبارتهای زیر مخرجهای گنگ را گویا کنید و حاصل را ساده نمایید:

۹۹) $\dfrac{2}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

۱۰۰) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2}}$

۱۰۱) $\dfrac{7-\sqrt{13}}{\sqrt{11+\sqrt{13}}\sqrt{4-\sqrt{13}}}$

۱۰۲) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

۱۰۳) $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{2}}+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}-a\sqrt{2}}$

۱۰۴) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4-2\sqrt{3}-\sqrt{37+20\sqrt{3}}}}$

۱۰۵) $\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}-\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}$

۱۰۶) $\dfrac{1-\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}-\dfrac{1+\sqrt[3]{2}}{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$

۱۰۷) $\dfrac{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}}$

۱۰۸) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

۱۰۹) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$

۱۱۰) $\dfrac{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$

۱۱۱) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

۱۱۲) $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}}$

● حاصل عبارتهای زیر را به‌دست‌آورده و بحث کنید.

۱۱۳) $y=\dfrac{\sqrt{(x+a)^۲}-\sqrt{(x-a)^۲}}{\sqrt{(x+a)^۲}+\sqrt{(x-a)^۲}}$

۱۱۴) $y=x+\dfrac{\sqrt{x^۲}}{x}$

۱۱۵) $y=x-۲+\dfrac{x(x^۲-۱)}{\sqrt{(x^۲-۱)^۲}}$

۱۱۶) $z=\dfrac{\sqrt{x^۲y^۲}}{xy}+\dfrac{\sqrt{(x-y)^۲}}{x-y}\left[\dfrac{\sqrt{x^۲}}{x}-\dfrac{\sqrt{y^۲}}{y}\right]$

۱۱۷) $y=\dfrac{\sqrt{۱+\sin ۲x}-\sqrt{۱-\sin ۲x}}{۲}$

● در تمرینهای زیر مقدار y را برحسب مقداری از x که داده شده است به‌دست آورید ودرصورت لزوم بحث کنید.

۱۱۸) $y=\dfrac{(x-۱)\sqrt{۳}}{\sqrt{x^۲-x+۱}}$ ، $x=۲+\sqrt{۳}$ ، $x=۲-\sqrt{۳}$

۱۱۹) $y=\dfrac{\sqrt{۱+x^۲}}{x+\sqrt{۱+x^۲}}$ ، $x=\dfrac{۱}{۲}\left(\sqrt{\dfrac{۳}{۴}}-\sqrt{\dfrac{۴}{۳}}\right)$

۱۲۰) $y=ax+\dfrac{b}{x}$ ، $x=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ ، $x=\sqrt{-\dfrac{b}{a}}$

۱۲۱) $y=\dfrac{۴a^۲b^۲\sqrt{x^۲+۴}}{x+\sqrt{x^۲+۴}}$ ، $x=\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}$

۱۲۲) $y=x+\sqrt{x^۲-۱}$ ، $x=\sqrt{\dfrac{a}{۸}}+\sqrt{\dfrac{۱}{۲a}}$

۱۲۳) $y=\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}$ ، $x=\dfrac{۴t}{t^۲+۴}$

۱۲۴) $y=\sqrt{۱+۲\sqrt{x(۱-x)}}$ ، $x=\sin^۲\alpha$ و $۰\leqslant\alpha\leqslant ۲\pi$

● مسئله‌های زیر را حل کنید:

۱۲۵) هرگاه $a_۱$، $a_۲$، ... ، a_n به‌ترتیب جمله‌های یک تصاعد حسابی باشند، **حاصل** عبارت زیر را به‌دست‌آورید:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$$

۱۲۶) هرگاه a و b دو عدد گویا و متمایز بوده و هیچکدام مجذور کامل نباشند، ثابت کنید که دو عدد $s=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ و $d=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ گنگ می‌باشند.

۱۲۷) ثابت کنید که اگر $\sqrt{a}+\sqrt{c}$ واسطهٔ توافقی بین $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ و $\sqrt{b}+\sqrt{c}$ باشد آنگاه b واسطهٔ حسابی بین a و c خواهد بود (عددی را واسطهٔ توافقی دو عدد دیگر گویند که عکس آن واسطهٔ حسابی بین عکسهای آن دو عدد باشد).

۱۲۸) اگر n عدد طبیعی باشد ثابت کنید که:

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$$

۱۲۹) ثابت کنید که دنبالهٔ با رابطهٔ برگشت $u_n=\dfrac{\sqrt{3}+u_{n-1}}{1-\sqrt{3}u_{n-1}}$ و جملهٔ اول $u_1=1$ یك دنبالهٔ متناوب دوره‌ای است.

[دربارهٔ دنباله‌ها می‌توانید به کتاب تصاعدها و لگاریتم تألیف نگارنده مراجعه کنید.]

۱۳۰) برای سه عدد مثبت a، b و c ثابت کنید که:

$$a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}=c^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow (a-b)^2-2c(a+b)+c^2=0$$

$$a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}=c^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow (a+b-c)^3+27abc=0$$

۱۳۱) اگر α و β عددهای نامنفی باشند ثابت کنید که:

$$\left(\alpha+\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\beta+\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

۱۳۲) ثابت کنید که:

$$2\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)\left(b+\sqrt{a^2+b^2}\right)=\left(a+b+\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$$

۱۳۳) ثابت کنید که اگر $a>b>0$ باشد آنگاه

$$\sqrt{4a^2-2b^2}>a+\sqrt{a^2-b^2}$$

۱۳۴) ثابت کنید که:

$$\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4b^2}}+\sqrt{b^2+\sqrt[3]{a^2b^4}}=\left[\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}\right]^3$$

۱۳۵) مقدار x را برحسب $a>0$ از رابطهٔ زیر به‌دست‌آورید که در آن تعداد جمله‌ها نامحدود است

$$x=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\dots}}}}$$

۱۳۶) ثابت کنید که عددهای گویای a و b در چه شرط اولیه‌ای باید صدق کنند برای آنکه مقدار x از رابطهٔ زیر یك عدد گویا باشد.

$$x=\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}$$

۱۳۷) مقدار x را از رابطهٔ زیر به‌دست‌آورید:

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

۱۳۸) کسر زیر را ساده کنید.

$$\frac{x^3-3x-2+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{x^3-3x+2+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}$$

۱۳۹) به‌فرض $x^2-4>0$ عبارت زیر را ساده‌کنید.

$$\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}$$

۱۴۰) به‌فرض آنکه a و b عددهای حقیقی مثبت و $a>b$ و m و n عددهای درست نسبی باشند، مقدار y از عبارت زیر را به‌ازای مقدار دادهٔ شدهٔ x حساب‌کنید.

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\left(x^{\frac{1}{m}}+x^{\frac{1}{n}}\right) \quad ، \quad x=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2mn}{m-n}}$$

۱۴۱) هرگاه a ، b ، c ، a' ، b' ، c' و α عددهای گویا و $\sqrt[3]{\alpha}$ عدد گنگ باشد، اولاً ثابت کنید که برابری $a\sqrt[3]{\alpha^2}+b\sqrt[3]{\alpha}=c$ وقتی برقرار است که $a=b=c=0$. ثانیاً ثابت کنید برای آنکه کسر

$$\frac{a\sqrt[3]{\alpha^2}+b\sqrt[3]{\alpha}+c}{a'\sqrt[3]{\alpha^2}+b'\sqrt[3]{\alpha}+c'}$$

گویا باشد بایستی a ، b ، c به‌ترتیب با a' ، b' ، c' متناسب باشند.

۱۴۲) هرگاه a ، b ، a' و b' عددهای گویا و x عددی گنگ باشد، چه شرطی باید برقرار باشد برای آنکه کسر $\frac{ax+b}{a'x+b'}$ عددی گویا باشد؟

۱۴۳) دو معادلهٔ زیر مفروض است:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x \pm 1 = 0$$

هرگاه همهٔ ضریبهای a_i عددهای درست نسبی و عددهای ± 1 ریشه‌های معادله نباشند؛

۱) ثابت کنید که هر جواب حقیقی معادله‌های بالا عددی گنگ است.

۲) با تشکیل معادلهٔ درجهٔ ششمی از گونهٔ بالا ثابت کنید که $x = \sqrt[3]{3} + \sqrt{2}$ عدد گنگ است.

۱۴۴) دنبالهٔ (u_n) چنین تعریف شده است:

$$u_1 = \sqrt{2} \quad , \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad , \quad \forall n \in N$$

۱) با روش استقراءِ ریاضی ثابت کنید که هر جملهٔ این دنباله کوچکتر از ۲ است.

۲) ثابت کنید که:

$$2 - u_{n+1} < \frac{2 - u_n}{2}$$

و نتیجه بگیرید که هرگاه n به‌سمت $+\infty$ میل کند حد u_n برابر ۲ است.

۱۴۵) درمجموعهٔ عددهای حقیقی قانون ترکیب داخلی با نشانهٔ* چنین تعریف‌شده‌است:

$$a * b = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$$

۱) ویژگیهای جابجایی، انجمنی این قانون را بررسی کنید وعضو بی‌اثرآن وعضو متقابل هر عضو را معلوم سازید.

۲) آیا عمل ضرب اعداد نسبت به‌این قانون توزیعی است؟ این قانون نسبت به ضرب چطور؟

۳) نسبت به عمل مزبور حاصل n عامل برابر با a را به $a(*)^n$ نشان می‌دهیم، حاصل این عمل و مقادیر $a(*)^0$ ، $a(*)^1$ ، $a(*)^{-n}$ و $a(*)^{\frac{1}{n}}$ را برحسب a و n به‌دست آورید ($a(*)^r$ را به اعداد غیر صحیح r تعمیم دهید). آیا $[a(*)^m] \times [a(*)^n]$ و $[a(*)^m](*)^n$ به‌ترتیب با $a(*)^{m+n}$ و $a(*)^{mn}$ برابرند یا نه؟

۲-۴۵- پرسشهای چهار جوابی یك انتخابی

۱۴۶) پرسش نمونه- به‌فرض $x > 4$ و $a = \frac{1}{2}(\sqrt{x} + \sqrt{x-4})$، مقدار $(a + a^{-1})^{-1}$ با کدام مقدار زیر برابر است؟

الف- $\sqrt{x}$ ب- $\sqrt{x-4}$

ج- $\frac{1}{\sqrt{x-4}}$ د- $\frac{1}{\sqrt{x}}$

حل- به‌ترتیب داریم:

$$a^{-۱}=\frac{۱}{a}=\frac{۲}{\sqrt{x}+\sqrt{x-۴}}=\frac{۲(\sqrt{x}-\sqrt{x-۴})}{۴}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-۴}}{۲}$$

$$a+a^{-۱}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-۴}}{۲}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-۴}}{۲}=\sqrt{x}$$

$$(a+a^{-۱})^{-۱}=(\sqrt{x})^{-۱}=\frac{۱}{\sqrt{x}}$$

پس جواب «د» باید انتخاب شود.

۱۴۷) اگر $a=۱۰^{-۳}$ و $b=-۱۰^{-۲}$ باشد، حاصل عبارت

$$\frac{ab^{-۲}(a^{-۱}b^{۲})^{۴}(ab^{-۱})^{۲}}{a^{-۲}b(a^{۲}b^{-۱})^{۳}a^{-۱}b}$$

با کدام عدد زیر برابر است؟

الف- -۱۰۰ ب- ۱۰۰

ج- $۰/۰۱$ د- $-۰/۰۱$

۱۴۸) حاصل عبارت زیر کدام عدد است؟

$$(۱+\sqrt{۳})^{۳}+(۱-\sqrt{۳})^{۳}$$

الف- $۱۲\sqrt{۳}$ ب- $۲+۶\sqrt{۳}$

ج- ۱۲ د- ۲۰

۱۴۹) حاصلضرب $\sqrt[۳]{-۲}\times\sqrt{۳}$ برابر است با:

الف- $\sqrt[۶]{۱۰۸}$ ب- $\sqrt[۶]{۷۲}$

ج- $-\sqrt[۶]{۱۰۸}$ د- $-\sqrt[۶]{۷۲}$

۱۵۰) مقدار y از رابطهٔ زیرکدام می‌تواند باشد؟

$$y^{۲}=\frac{(۴\times۱۰^{-۱۰})^{۳}\times(۹\times۱۰^{۴})^{۲}}{(۱/۲\times۱۰^{-۷})^{۴}}$$

الف- $۲/۵\times۱۰^{۹}$ ب- ۵×۱۰^{۴}

ج- $۲^{\frac{۴}{۳}}\times۱۰^{-\frac{۱۵}{۲}}$ د- $۲^{\frac{۲}{۳}}\times۱۰^{-\frac{۱۵}{۴}}$

۱۵۱) مقدار x از رابطهٔ زیرکدام است؟

$$x=\sqrt{\sqrt{\frac{۳}{۲}+\sqrt{۲}}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

الف- غیر حقیقی　　　ب- ۱

ج- $۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$　　　د- $۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۵۲) عبارت $\left[\frac{۲+\frac{۱}{\sqrt{x}}}{۲\sqrt{x}+۱}\right]^{۲}$ به ازای چه مقادیر گویایی از x یك عدد گویاست؟

الف- هر مقدار از x　　　ب- $\forall x \geqslant ۰$

ج- $\forall x > ۰$　　　د- $x=a^{۲}$ (a عددی گویاست.)

۱۵۳) هرگاه داشته‌باشیم:

$$y=\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}} \quad و \quad y^{۴}=۴a(y^{۲}-a)$$

کدام رابطهٔ زیر بین a و b برقرار است؟

الف- $a=b^{۲}$　　　ب- $a^{۲}=b$

ج- $a=۲b$　　　د- $b=۲a$

۱۵۴) در دنباله‌ای که به‌شرح زیر مشخص شده است

$$u_{۱}=\sqrt{۲}-۱ \quad ، \quad u_{n}=\frac{۱+u_{n-۱}}{۱-u_{n-۱}}$$

جملهٔ $u_{۵}$ برابر است با:

الف- $\sqrt{۲}-۱$　　　ب- $\sqrt{۲}+۱$

ج- $-(\sqrt{۲}-۱)$　　　د- $-(\sqrt{۲}+۱)$

۱۵۵) در رابطهٔ

$$\sqrt{a^{۴}-a^{۲}}=x\sqrt{a^{۲}-۱}$$

مقدار x برابر است با:

الف- a　　　ب- $\pm a$

ج- $a^{۲}$　　　د- $|a|$

۱۵۶) هرگاه داشته باشیم:

$$x=\sqrt{۴+\sqrt{۹-۴\sqrt{۳}}} \quad ، \quad y=\sqrt{۴-\sqrt{۹-۴\sqrt{۳}}}$$

حاصل xy برابر خواهد بود با:

الف- $۲+\sqrt{۳}$　　　ب- $۲-\sqrt{۳}$

ج- $۲\sqrt{۳}+۱$　　　د- $۲\sqrt{۳}-۱$

۱۵۷) حاصل عبارت زیرکدام جواب داده شده است؟

$$۲\sqrt{\frac{۵}{۳}}+\sqrt{۶۰}-\sqrt{۱۵}+\sqrt{\frac{۳}{۵}}+\sqrt{\frac{۴}{۱۵}}$$

الف- $۲\sqrt{۱۵}$ ب- $-۴\sqrt{۱۵}$

ج- $۳\sqrt{۱۵}$ د- $-۲\sqrt{۱۵}$

۱۵۸) هرگاه داشته باشیم:

$$x=\sqrt[۳]{a^{۲}} \quad ، \quad y=\sqrt[۴]{a^{۳}} \quad ، \quad ۰<a<۱$$

کدام رابطهٔ زیر برقرار است:

الف- $۴x=۳y$ ب- $x>y$

ج- $x<y$ د- $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=۱$

۳

عبارت جبری

۳-۱- عبارت ریاضی- به مجموعه‌ای از نمادها و حرفهایی که نمایانگر عضوهایی از مجموعهٔ مرجع هستند و نشانه‌های مربوط به روابط یا عملیاتی که باید روی این عضوها انجام گیرد عبارت ریاضی گفته می‌شود. پس هرعبارت ریاضی اولاً روی یک مجموعهٔ مرجع بنا می‌شود و ثانیاً شامل دو دسته از عناصر است: عناصر دستهٔ اول نمادها یا حرفهایی هستند که عضوهایی مشخص یا غیرمشخص ازمجموعهٔ مرجع را نشان می‌دهند؛ دستهٔ دوم نشانه‌های مربوط به‌روابط یاعملیاتی هستند که درمجموعهٔ مرجع تعریف‌شده وباید به‌ترتیبی که درعبارت نموده شده‌اند روی عناصر دستهٔ اول محقق شوند یا اینکه انجام گیرند. به‌عبارت ریاضی عبارت تحلیلی نیز می‌گویند.

مثال ۱: عبارت‌ریاضی $\forall p \text{ ، } \forall q : (p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee q)$

که به‌آن عبارت‌گزاره‌ای نیز گفته می‌شود روی‌مجموعهٔ گزاره‌ها بنا شده‌است ودرآن هریک ازحرفهای p و q نشان‌دهندهٔ یک گزاره، نماد $\forall$ به‌این‌معنی‌است که p و q می‌توانند هرگزارهٔ دلخواه باشند، نشانهٔ $\sim$ به‌معنی عمل نفی و نشانه‌های $\Longrightarrow$ ، $\Longleftrightarrow$ و $\vee$ به‌معنی رابطه‌ها یا عملیاتی دوتایی هستند که درمجموعهٔ گزاره‌ها تعریف شده‌اند ونشانه‌های پرانتز ترتیب انجام این عملیات را روی دو گزارهٔ مزبور نشان می‌دهند.

مثال ۲: عبارت ریاضی $(A \cup B \cup \varnothing) \subset A \cap B$

روی مجموعهٔ مجموعه‌ها تعریف شده است و در آن نماد $\varnothing$ نمایانگر مجموعهٔ تهی و حرفهای A و B نشان دهندهٔ دومجموعه و نشانه‌های $\cup$ ، $\cap$ و $\subset$ مربوط به عملیات روی مجموعه‌ها می‌باشند.

مثال ۳: فرمولهای مربوط به فیزیک، شیمی و علوم دیگر.

۳-۲- عبارت جبری- به عبارت ریاضی که روی مجموعهٔ اعداد بیان شده باشد، عبارت‌جبری گفته می‌شود. هرعبارت جبری شامل نمادها وحرفهایی است که بیانگراعدادند و شامل نشانه‌های مربوط به روابط و عملیاتی است که باید روی آن اعداد عمل شود.

(از این نظر که به‌کار بردن حروف و علامات نخستین بار در علم جبر معمول شده است، دربعضی از نوشته‌ها و آثار، هرعبارت تحلیلی را عبارت جبری نامیده‌اند.)

در هرعبارت جبری، عددها و حرفهایی راکـه جانگهدار عددهای معین و مشخص باشند مقادیر معلوم و حرفهایی را کـه نمایانگر عددهای غیرمشخص باشند مقادیر متغیر یا متغیرهای آن عبارت می‌نامند. به‌حرفهای نشان‌دهندهٔ مقادیر معلوم پارامتر نیزمی گویند. هرعبارت جبری برحسب متغیر یا متغیرهای آن نموده می‌شود و برحسب تعداد متغیرها آن‌را عبارت یک‌متغیری، عبارت دومتغیری، ... یا عبارت چندمتغیری می‌نامند. عبارت بایک متغیر x را با $f(x)$ وعبارت بامتغیرهای x، y، z، ... را بـا $f(x ، y ، z ، ...)$ نشان می‌دهند. مانند:

$$f(x)=\frac{x^{۲}-|x|}{۳-۲\sqrt{x}}$$

$$f(x)=(a+b)x^{۲}-۲a^{۲}x+(a-b)$$

$$f(x)=۳\sin x-۴\cos x+۳\log ۵$$

$$f(x ، y)=ax+my-(k+۳)x^{۲}\sqrt{y}$$

وقتی عبارتـی جبری با $f(x)$ نموده شده باشد، حرفهای غیراز x موجـود درآن به‌عنوان‌مقادیرمعلوم یا پارامترها منظورمی‌شوند. ممکن‌است‌که متغیررا باهرحرف دیگری غیر ار x نشان داد و همچنین برای نمودن عبارت از حرفهـای دیگری غیراز f استفاده کرد. مانند:

$$u(t)=e^{mt}\cos t$$

$$E(n)=۱+\frac{۱}{۲}+ ... +\frac{۱}{n}-\log n$$

۳ـ۳ـ اقسام عبارتهای جبری ـ عبارتهای جبری برحسب نوع نماهای متغیر یا متغیرها یا نماهای عاملهای شامل متغیر یا متغیرها دسته‌بندی می‌شوند:

۱) عبارت جبری را نسبت به‌متغیری، یا حرفی ازآن، صحیح گـویند هرگاه هیچ توان غیرصحیح یا منفی از این متغیر یا عامل شامل آن در عبارت وجـود نداشته باشد. مانند عبارت

$$f(x)=\frac{x+a}{b-c}+\frac{x+b}{c-a}+\frac{x+c}{a-b}$$

که نسبت به x صحیح اما نسبت به a، b، یا c غیرصحیح است، زیرا عاملهـای شامل این حرفها دارای نمای منفی هستند:

$$f(x)=(x+a)(b-c)^{-۱}+ ...$$

اگر عبارتی جبری نسبت بـه همهٔ حرفهای خـود صحیح باشد عبارت جبری صحیح نامیده می‌شود. مانند:

$$f(x\,,y)=۳x^{۲}+۲\sqrt{۲}xy-\frac{۴}{۵}y^{۲}-\frac{۲}{۳}$$

$$P(a\,,b\,,c)=(a+b)^{۲}-۴c^{۲}+۲۷abc-۱$$

۲) عبارت جبری را نسبت به‌حرفی ازآن کسری گویندهرگاه اقلاً یك عامل شامل حرف مزبور دارای نمای منفی باشد. یعنی در عبارت‌کسری وجود داشته باشدکه مخرج آن شامل‌آن حرف باشد. مانند:

$$f(x)=\frac{۴x^{۲}-۳x+۱}{۲x-۱}=(۴x^{۲}-۳x+۱)(۲x-۱)^{-۱}$$

$$F(a,\,b)=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}-\frac{۲ab}{a+b}$$

۳) عبارت جبری نسبت به‌حرفی ازآن‌گویاست هرگاه هیچ توان غیر صحیح شامل آن حرف در عبارت وجود نداشته باشد. مانند هر یك از عبارتهای مثالهای بالا.

هرگاه اقلاً یك توان غیر صحیح شامل حرفی در عبارت وجود داشته باشد، عبارت نسبت به‌این حرف گنگ می‌باشد. مانند عبارت $۳ax+۷\sqrt{x-۱}+y^{۲}$ که نسبت به x گنگ و نسبت به‌سایر حرفهای خودگویاست $[\sqrt{x-۱}=(x-۱)^{\frac{۱}{۲}}]$. همچنین مانند:

$$۴ax+۳x^{\pi}+۲$$

۴) عبارت جبری را نسبت به متغیری مثلثاتی یا لگاریتمی یا ... گـویند هرگاه شامل تابعهای مثلثاتی یا لگاریتم یا ... از متغیر مزبور باشد.

$$f(x)=۴\,\sin^{۲}x+۳\,tg\,x-۲$$

$$f(x)=۳x-۲\log(x+۱)$$

۵) عبارت جبری را نسبت بـه‌یك متغیر نمایی گویند هرگاه این متغیر به‌صورت نما درآن عبارت نموده شده باشد. مانند:

$$\varphi(t)=e^{t}+e^{-t}\quad،\quad f(x)=x+۴^{x-۱}-۲$$

یادآوری- عبارتهای جبری‌مثلثاتی، لگاریتمی، نمایی جزء عبارتهای جبری گنگ منظورمی‌شوند مگرآنکه آن تابع نسبت به‌خود متغیر نموده نشده باشدکـه در این حالت ممکن‌است گویا باشد. چنانکه عبارت $f(x)=\sin^{۲}x-۴\sin x+۱$ که نسبت به x مثلثاتی است نسبت به $\sin x$ صحیح و گویاست. زیرا با فرض $t=\sin x$ داریم:

$$g(t)=t^{۲}-۴t+۱$$

۳ـ۴ـ حوزهٔ تعریف عبارت جبریـ عبارت جبری را بـه ازای یك مقـدار از متغیر (یامقادیری ازمتغیرها) معین گویند هرگاه به‌ازای آن‌مقدار متغیر (یاآن مقادیرمتغیرها) همهٔ عملیاتی را که درعبارت نموده شده است بتوان انجام داد، وگرنه می‌گوییم کـه آن عبارت نسبت به‌مقدار (یا مقادیر) مزبور نامعین است. مجموعهٔ مقادیری‌کـه به‌ازای هر عضوازآن، عبارت جبری معین باشد حوزهٔ تعریف آن عبارت نامیده می‌شود.

مثال ۱: عبارت جبری $f(x)=\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}-۱}$

به‌ازای دو عدد ۱ و ۱ــ نامعین و بـه‌ازای هر عدد دیگر معین است؛ وقتی $x=\pm۱$ باشد مخرج کسر صفر است و تقسیم بر صفر ممکن نیست. پس حوزهٔ تعریف ایـن عبارت می‌شود:

$$R-\{۱,-۱\}$$

مثال ۲: عبارت جبری $f(x,y)=۲x+y+\sqrt{x-y}+۱$

به ازای مقادیری‌که $x\geqslant y$ باشد معین و به‌ازای مقادیری‌که $x<y$ باشد نامعین است و حوزهٔ تعریف‌آن می‌شود:

$$\{(x ، y)\,|\,x\in R ، y\in R ، x\geqslant y\}$$

۳ـ۵ـ مقدار عددی عبارت جبریـ هرعبارت جبری روی مجموعهٔ اعداد بیان شده است پس خود نیزنشان دهندهٔ یك عدد است‌که این عدد برحسب مقادیری‌که به‌جای متغیر یا متغیرهای عبارت قرارگیرد تغییر می‌کند. اگر $f(x)$ عبارتی نسبت به‌متغیر x و به ازای مقدار معلوم α معین باشد، مقدارآن را بـه‌ازای α با $f(\alpha)$ نشان می‌دهند. در عبارت جبری $f(x ، y ، z ، ...)$ مقصود از $f(\alpha ، \beta ، \gamma ، ...)$ مقـدار آن عبارت جبری است به‌ازای $x=\alpha$ ، $y=\beta$ ، $z=\gamma$ و ...

مثال ۱: هرگاه داشته باشیم

$$f(x)=۲x^{۲}-۳x+۱$$

به‌ترتیب داریم:

$$f(-۵)=۲(-۵)^{۲}-۳(-۵)+۱=۶۶$$

$$f(۱)=۲\times ۱^{۲}-۳\times ۱+۱=۰$$

$$f\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=۲\times\frac{۱}{۲}-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}+۱=۲-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

$$f(۰)=۰-۰+۱=۱$$

مثال ۲: در مورد عبارت بعد داریم:

$$f(x\,،y)=۴x^{۲}+۵xy-y^{۲}+۳$$
$$f(۲\,،-۱)=۴\times ۲^{۲}+۵\times ۲(-۱)-(-۱)^{۲}+۳=۸$$
$$f(-۱\,،۲)=۴(-۱)^{۲}+۵(-۱)\times ۲-۲^{۲}+۳=-۷$$

مثال ۳:

$$f(x\,،y\,،z)=\left(۱-\frac{۱}{x}\right)\left(۱-\frac{۱}{y}\right)\left(۱-\frac{۱}{z}\right)$$
$$f\left(\sqrt{۲}\,،-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\,،\frac{۱}{۳}\right)=\left(۱-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)\left(۱+\frac{۲}{\sqrt{۲}}\right)(۱-۳)=-\sqrt{۲}$$

۳-۶- تبدیل متغیر - در یك عبارت می‌توان متغیری را با متغیردیگریا با عبارتی شامل متغیرجانشین‌کرد. درعبارت $f(x)$ هرگاه x را با y جانشین‌کنیم $f(y)$ را خواهیم داشت، اگر x را با $ax+b$ جانشین‌کنیم $f(ax+b)$ را خواهیم داشت و اگر x رابا خود عبارت $f(x)$ جانشین‌کنیم $f[f(x)]$ را خواهیم داشت‌که‌آن را با $ff(x)$ نشان می‌دهند. هرگاه در عبارت مفروض باز هم x را با عبارت اخیر یعنی با $ff(x)$ جانشین کنیم حاصل با $fff(x)$ نشان داده می‌شود و این عمل را می‌توان تا هرمرتبه ادامه داد.

چند مثال:

$$۱)f(x)=\frac{۱-x}{۱+x}$$

$$f\left(\frac{۱}{x}\right)=\frac{۱-\frac{۱}{x}}{۱+\frac{۱}{x}}=\frac{x-۱}{x+۱}$$

$$f(\sqrt{x})=\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=\frac{۱+x-۲\sqrt{x}}{۱-x}$$

$$ff(x)=\frac{۱-\frac{۱-x}{۱+x}}{۱+\frac{۱-x}{۱+x}}=x$$

$$fff(x)=\frac{۱-x}{۱+x}=f(x)$$

$$۲)f(x\,،y)=\frac{x+۲\sqrt{x^{۲}+۲y^{۲}}}{x-y}$$

$$f(y,x)=\frac{y+۲\sqrt{y^۲+۲x^۲}}{y-x}$$

$$f(x+۱,y-۱)=\frac{x+۱+۲\sqrt{(x+۱)^۲+۲(y-۱)^۲}}{x+۱-y+۱}$$

$$=\frac{x+۱+۲\sqrt{x^۲+۲y^۲+۲x-۴y+۳}}{x-y+۲}$$

یادداشت- هرگاه دریك عبارت جبری دو متغیر را با یکدیگر جابجا کنیم **ومقدار** عبارت فرق نکند یعنی مثلاً داشته باشیم

$$f(x,y,\ldots)=f(y,x,\ldots)$$

می‌گوییم که‌آن عبارت نسبت به‌آن دومتغیر متقارن است.

۳-۷- عبارت جبری متحد با صفر- یك عبارت جبری متحد باصفر نامیده‌می‌شود هرگاه به‌ازای هرمقدار ازمتغیر یا متغیرها مقدارآن عبارت برابر باصفر باشد. اگر $f(x)$ عبارتی متحد با صفر باشد می‌نویسند $f(x)\equiv ۰$ پس:

$$[\forall x\ :\ f(x)=۰]\iff[f(x)\equiv ۰]$$

$$[\forall x,\forall y,\ldots\ :f(x,y,\ldots)=۰]\iff[f(x,y,\ldots)\equiv ۰]$$

عبارت جبری که متحد با صفر باشد مستقل از متغیرهاست، یعنی اگرآن را ساده کنیم متغیرها، و عاملهای دیگر، حذف می‌شوند. استفاده از این ویژگی یك راه اثبات **متحد بودن** عبارتی با صفر است.

مثال ۱: عبارت زیر متحد با صفر است

$$f(x)=\frac{(x+\sqrt{x^۲+۱})^۲+(x-\sqrt{x^۲+۱})^۲}{۲x^۲+۱}-۲$$

زیرا اگر در صورت عملهای توان را انجام دهیم و حاصل را ساده‌کنیم خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{۴x^۲+۲}{۲x^۲+۱}-۲=۲-۲=۰$$

مثال ۲: به‌فرض‌آنکه x و y و z دوبه‌دومتمایز باشند، عبارت‌زیر متحدباصفراست

$$f(x,y,z)=\frac{۱}{(x-y)(x-z)}+\frac{۱}{(y-x)(y-z)}+\frac{۱}{(z-x)(z-y)}$$

زیرا اگر بین کسرها مخرج مشترك بگیریم داریم:

$$f(x,y,z)=\frac{z-y+x-z+y-x}{(x-y)(y-z)(z-x)}=۰$$

۳-۸- دو عبارت جبری متحد- دوعبارت جبری رامتحد با یکدیگر گویند هر گاه به‌ازای هر مقدار از متغیر یا متغیرها، حاصل‌آن دو عبارت با هم برابر باشد:

$$[\forall x ، \forall y ، \dots : f(x ، y ، \dots)=g(x ، y ، \dots)]$$
$$\Longleftrightarrow [f(x ، y ، \dots)\equiv g(x ، y ، \dots)]$$

اگر دوعبارت جبری متحد باهم‌باشند هریك باعملیات جبری ازروی دیگری به‌دست می‌آید، همچنین تفاضل‌آنها عبارتی متحد با صفر می‌باشد.

مثال: برای اثبات اتحاد

$$\frac{(x+y)^۳-(x^۳+y^۳)}{(x+y)^۲-(x^۲+y^۲)}=\frac{۳}{۲}(x+y)$$

طرف اول را عمل می‌کنیم که می‌شود:

$$\frac{۳xy(x+y)}{۲xy}=\frac{۳}{۲}(x+y)$$

یعنی از طرف اول می‌توان طرف دوم را به‌دست‌آورد و اتحاد برقرار است.

مسئله‌های نمونه

۳-۹- به‌فرض $f(x)=x^۲-۱+۲\sqrt{x-۱}$

اولاً $f(x-۱)$ را حساب‌کنید. ثانیاً عبارت $f(x)$ را برحسب $x-۱$ مرتب‌کنید.

حل- اولاً باید x را به $x-۱$ تبدیل‌کنیم که عبارت تغییر می‌کند؛

$$f(x-۱)=(x-۱)^۲-۱+۲\sqrt{x-۱-۱}=x^۲-۲x+۲\sqrt{x-۲}$$

ثانیاً باید عبارت را، بدون‌آنکه تغییرکند، برحسب قوای $x-۱$ بنویسیم. برای این کار فرض می‌کنیم $t=x-۱$ پس $x=t+۱$ و داریم:

$$f(t+۱)=(t+۱)^۲-۱+۲\sqrt{t}=t^۲+۲t+۲\sqrt{t}$$

اکنون تبدیل t به $x-۱$ را انجام می‌دهیم‌که خواهیم داشت

$$f(x)=(x-۱)^۲+۲(x-۱)+۲\sqrt{x-۱}$$

۳-۱۰- عبارت زیر را برحسب چه عبارتی درجه اول از x مرتب‌کنیم تا عبارت حاصل بدون جملهٔ درجهٔ دوم باشد؟

$$f(x)=x^۳+۶x^۲+۱۱x+۶$$

حل- فرض می‌کنیم $t=x+m$ پس $x=t-m$ و:

$$f(t-m)=(t-m)^3+6(t-m)^2+11(t-m)+6$$
$$=t^3-(3m-6)t^2+(3m^2-12m+11)t$$
$$-m^3+6m^2-11m+6$$

باید داشته باشیم $3m-6=0$ یعنی $m=2$ و ازآنجا:

$$f(t-2)=t^3-t \quad ، \quad t=x+2$$
$$f(x)=(x+2)^3-(x+2)$$

عبارت اخیر را به‌سادگی می‌شود تجزیه کرد و در نتیجه:

$$x^3+6x^2+11x+6=(x+2)(x+3)(x+1)$$

۳-۱۱- عبارت $f(x)$ را تعیین کنید که داشته باشیم:

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x^2+1}{2x}$$

حل- فرض می‌کنیم $\frac{x+1}{x-1}=t$ پس $x=\frac{t+1}{t-1}$ و:

$$f(t)=\frac{\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2+1}{2\left(\frac{t+1}{t-1}\right)}=\frac{t^2+1}{t^2-1}$$

اکنون با تبدیل t به x داریم:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$$

✻ **۳-۱۲-** عبارت $f(x)$ نسبت به x زوج و عبارت $g(x)$ نسبت به x فرد است. یعنی:

$$f(-x)=f(x) \quad ، \quad g(-x)=-g(x)$$

هرگاه داشته باشیم

$$f(x)+g(x)=a^x$$

۱) عبارتهای $f(x)$ و $g(x)$ را مشخص کنید.

۲) ثابت کنید که:

$$f(x+y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$$
$$g(x+y)=g(x)f(y)+f(x)g(y)$$

حل- ۱) در رابطهٔ داده شده x را به $-x$ تبدیل می‌کنیم که با توجه به‌شرایط

مفروض خواهیم داشت:

$$f(x)-g(x)=a^{-x}$$

دو طرف این رابطه و رابطهٔ مفروض را یك بار با هم جمع و یك بار از هم کم می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$f(x)=\frac{a^{x}+a^{-x}}{۲} \quad ، \quad g(x)=\frac{a^{x}-a^{-x}}{۲}$$

۲) به‌ترتیب داریم:

$$f(x)f(y)+g(x)g(y)=\frac{۱}{۴}[(a^{x}+a^{-x})(a^{y}+a^{-y})$$
$$+(a^{x}-a^{-x})(a^{y}-a^{-y})]$$
$$=\frac{۱}{۴}[۲a^{x+y}+۲a^{-(x+y)}]$$
$$=\frac{۱}{۲}[a^{x+y}+a^{-(x+y)}]=f(x+y)$$

$$g(x)f(y)+f(x)g(y)$$
$$=\frac{۱}{۴}[(a^{x}-a^{-x})(a^{y}+a^{-y})+(a^{x}+a^{-x})(a^{y}-a^{-y})]$$
$$=\frac{۱}{۲}[a^{x+y}-a^{-(x+y)}]=g(x+y)$$

✽ ۳-۱۳- عبارت $f(x)$ را تعیین کنید که داشته باشیم:

$$f\left(x+\frac{۱}{x}\right)=x^{۴}+۲x^{۲}+\frac{۲}{x^{۲}}+\frac{۱}{x^{۴}}$$

حل- با فرض $x+\frac{۱}{x}=t$ داریم:

$$x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}=t^{۲}-۲$$

$$x^{۴}+\frac{۱}{x^{۴}}=t^{۴}-۴t^{۲}+۲$$

$$f(t)=t^{۴}-۴t^{۲}+۲+۲(t^{۲}-۲)=t^{۴}-۲t^{۲}-۲$$
$$f(x)=x^{۴}-۲x^{۲}-۲$$

✽ ۳-۱۴- عبارت $f(x)$ را با توجه به‌رابطهٔ زیر به‌دست‌آورید:

$$af(x-\alpha)+bf(\alpha-x)=cx$$

حل- یك بار x را به $\alpha+x$ و بار دیگرآن را به $\alpha-x$ تبدیل می‌کنیم که دو

رابطهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} af(x)+bf(-x)=c(\alpha+x) \\ af(-x)+bf(x)=c(\alpha-x) \end{cases}$$

بین این دو رابطه $f(-x)$ را حذف می‌کنیم، به‌شرط $a^۲\neq b^۲$ خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{cx}{a-b}+\frac{c\alpha}{a+b}$$

در حالت ویژهٔ $a=۲$ و $b=۱$ و $c=۱$ و $\alpha=۰$ داریم $f(x)=x$ و رابطهٔ داده شده می‌شود:

$$۲f(x)+f(-x)=x$$

تمرینها و پرسشها

۳-۱۵- تمرینهای دستهٔ اول

● درهریك از تمرینهای زیر معلوم کنیدکه عبارت جبری داده شده از چه نوع: صحیح، کسری، گویا و گنگ می‌باشد:

۱) $f(x)=۳x^۲+\frac{۱}{۳}x+\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$

۲) $f(x)=x^۲+x^{-۲}$

۳) $f(x)=\frac{ax}{b+c}+\frac{bx}{c+a}+\frac{cx}{a+c}$

۴) $f(x)=\frac{x+\sqrt{a^۲+۱}}{x-۱}$

۵) $f(x)=۵x^۲-۲x^{\sqrt{۲}}+x-۱$

۶) $f(x،y)=\frac{x}{y-۱}+\frac{y}{x-۱}-\sqrt{ab}$

۷) $f(\cos x)=۴\cos^۲x-\frac{۱}{\cos x}+۵$

۸) $f(e^x)=۲e^{۲x}-۳e^x+۷$

● در هر یك از تمرینهای زیر حوزهٔ تعریف عبارت داده شده را معلوم کنید:

۹) $f(x)=\frac{۳x\sqrt{۲}-۴}{x^۲-۲}$

۱۰) $f(x)=x-\sqrt{x+۱}$

۱۱) $f(x)=\dfrac{x^{۲}+۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}}$

۱۲) $f(x،y)=\dfrac{x+۳y-۵}{x-y}$

۱۳) $f(x)=\dfrac{۱+\sin x}{۱-\sin x}$

۱۴) $f(\sin x)=\dfrac{۱+\sin x}{۱-\sin x}$

۱۵) $f(x)=\dfrac{a^{x}+۲}{a^{x}-۲} \quad ، \quad a>۰$

۱۶) $f(x،y)=(x+y)^{۲}-۲\sqrt{x^{۲}-y^{۲}}$

● در هر تمرین زیر مقدار خواسته شده را حساب کنید:

۱۷) $f(x)=۳x^{۲}-۲\sqrt{۲}x+۱$

$f(-۱)=? \quad ، f(\sqrt{۲})=? \quad ، \quad f(-\sqrt{۲})=?$

۱۸) $f(x،y)=x^{۲}+y^{۲}-۴x+۶y+۱۲$

$f(۲ ، -۴)=? \quad ، \quad f(-۴ ، ۲)=? \quad ، \quad f(\sqrt{۳} \quad ، \quad ۱-\sqrt{۳})=?$

۱۹) $f(a ، b ، c)=a+b\sqrt{۲}+c^{۲}+\dfrac{۱}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}$

$f(۱ ، ۱ ، ۲)=? \quad f(۲ ، ۱ ، ۱)=?$

۲۰) $f(x)=۳x-۲ \quad ، \quad ff(-۱)=? \quad ، \quad fff(۱)=?$

۲۱) $f(x ، y)=x^{۲}+\sin^{۲}y+\dfrac{۱}{۴^{x}-۴}$

$f\left(-۲ ، \dfrac{\pi}{۴}\right)=? \quad ، \quad f(۰ ، \pi)=?$

● در تمرینهای زیر عبارتهای خواسته شده را معلوم کنید:

۲۲) $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۱ \quad ، \quad f(x+۱)=?$

۲۳) $f(x)=\dfrac{۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}} \quad ، \quad f\left(\dfrac{۱}{x}\right)=?$

۲۴) $f(x)=x^{۲}-۱ \quad ، \quad ff(x)=?$

۲۵) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ ، $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=?$

۲۶) $f(x,y)=4x^2+9y^2-8x+18y-23$

$f(x+1,y-1)=?$

۲۷) $f(x-2)=x^3-12x+15$

$f(x)=?$

۲۸) $f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2x-3\sin x\cos x-4\sin^2x+1$

$f(x)=?$

● مسئله‌ها و تمرینهای زیر را حل کنید:

۲۹) درعبارت $f(x)=ax^2+bx+c$ متغیر x را با چه‌متغیری متمایز ازخود جانشین کنیم تا عبارت فرق نکند؟

۳۰) اگر $f(x)=x^2-4x+5$ باشد محقق کنید که: $f(4-x)=f(x)$

۳۱) عبارت $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ را مشخص کنید که داشته باشیم.

$$f(2)=0 \quad , \quad f(0)=-2 \quad , \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}$$

۳۲) اگر $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ و $f(y)=f(x-1)$ باشد y را برحسب x به‌دست آورید

۳۳) هرگاه داشته باشیم

$$f(x)=x^4-4x^3+x^2+6x$$

مقدار a را چنان معلوم کنید که عبارت $f(x+a)$ بدون جمله‌های درجهٔ فرد باشد.

✻ ۳-۱۶- تمرینهای دستهٔ دوم

● حوزهٔ تعریف عبارتهای زیر را معلوم کنید:

۳۴) $f(x)=x\left|1+\frac{1}{x}\right|^{-1}$

۳۵) $f(x)=\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+1)}$

۳۶) $f(x,y)=\sqrt{y(x-1)}+\sqrt{x(y+1)}$

۳۷) $f(x,y)=16x^2+y^2-10xy+9=0$

۳۸) $f(x)=\sqrt{\log(۴x^۲-۱)}+\operatorname{Arccos}x$

● مسئله‌ها و تمرینهای زیر را حل کنید:

۳۹) به فرض $f(x)=\log_a x$ و $g(x)=a^{۲+x}$ عبارت $g(f(x))$ را به دست آورید.

۴۰) به‌فرض $f(x)=\dfrac{x+۱}{x-۱}$ مقدار $f(nx)$ را برحسب $f(x)$ به‌دست‌آورید.

۴۱) هرگاه داشته باشیم $f(x)=x^۲+ax-۲a$، مقدار a را تعیین کنید برای آنکه $fff(۱)=۰$ باشد.

۴۲) اگر $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-۲}{x+۲}}$ باشد و داشته باشیم

$$\log f(x)-\log f(y)=\log f(z)$$

z را برحسب x و y به‌دست‌آورید

۴۳) اگر $f(x)=\log\left(\dfrac{۱-x}{۱+x}\right)^۲$ و $f(x)-f(y)=f(z)$ باشد، z رابرحسب x و y به‌دست‌آورید.

۴۴) اگر $f(x)=\sqrt{\dfrac{۱-x^۲}{۱+x^۲}}$ و α کمان حاده باشد، حاصل عبارت زیرراحساب کنید:

$$S=f(tg\alpha)+ff(tg\alpha)+\dots+\underbrace{ff\dots f}_{\text{۲n عامل}}(tg\alpha)$$

۴۵) اگر $f(x)=a^x+b^x$ و $g(x)=\dfrac{f(x)}{f(x-۲)}$ باشد، مقدار $g(۳)$ را حساب کنید.

۴۶) عبارت $f(x)$ را تعیین کنید بنابرآنکه $f(۰)=b$ و:

$$f(x+y)-f(x-y)=axy$$

۴۷) هرگاه $f(x)=\dfrac{۲x}{۱+x^۲}$ و $g(x)=\dfrac{۳x+x^۳}{۱+۳x^۲}$، نسبت $\dfrac{f(g(x))}{g(f(x))}$ را حساب کنید.

۴۸) اگر داشته باشیم:

$$f(x)=\log(x+\sqrt{x^۲-۱})$$

ثابت کنید که:

$$f(۲x^{۲}-۱)=۲f(x)$$

۴۹) اگر n عدد طبیعی باشد و داشته باشیم:

$$f(۱)=۱ \quad \text{و} \quad f(n)=f(n-۱)+۲n-۱$$

$f(n)$ را برحسب n بدست‌آورید.

۵۰) هرگاه داشته باشیم:

$$f(x)=\frac{a^{\log x}-a^{-\log x}}{a^{\log x}+a^{-\log x}}$$

ثابت کنید که:

$$f(xy)=\frac{f(x)+f(y)}{۱+f(x)f(y)} \quad \text{و} \quad f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x)-f(y)}{۱-f(x)f(y)}$$

۵۱) به‌فرض $f(x)=\frac{۱}{۲}(a^{x}+a^{-x})$ ثابت کنید که:

$$f(x+y)+f(x-y)=۲f(x)f(y)$$

۵۲) اگر داشته باشیم:

$$f(n)=A\times ۳^{n}+B\times(-۲)^{n}$$

ثابت کنید که:

$$f(n)=f(n-۱)+۶f(n-۲)$$

و اگر $f(۱)=۱$ و $f(۲)=۲$ باشد مقدار $f(۴)$ را حساب کنید.

۵۳) از رابطهٔ زیر $f(x)$ را به‌دست‌آورید:

$$\sin x f(x)+\cos x f(-x)=x$$

۵۴) اگر داشته باشیم $f(x)=x^{۲}-۳$ می‌دانیم که $f(tg۶۰^{\circ})$ برابربا صفرخواهد بود. حال عبارت $g(x)$ را بیابید به‌گونه‌ای که $f(g(tg۱۰^{\circ}))$ برابر با صفر باشد.

۵۵) عبارت $f(x)$ را پیدا کنید که داشته باشیم

$$f(۱)+۱=a>۰$$

و:

$$f(x+y)+x+y=[f(x)+x][f(y)+y]$$

۵۶) عبارت $f(x)$ را بیابید که در رابطهٔ زیر صدق کند

$$f(xy)=xf(y)+yf(x)$$

۴-۱۷- پرسشهای چهار جوابی یك انتخابی

۵۷) پرسش نمونه- هرگاه داشته باشیم:

$$f(x)=x+\sqrt{x^{2}} \quad \text{و} \quad g(x)=\sin x-\cos x$$

وقتی $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$ باشد $f(g(x))$ برابر است با:

الف- $2\cos x$ ب- $2\sin x$

ج- 0 د- $2\sin x-2\cos x$

حل- داریم $f(g(x))=g(x)+|g(x)|$ و چون در ازای مقادیر مشخص شدهٔ x مقدار $g(x)=\sin x-\cos x$ منفی است پس در این حالت:

$$f(g(x))=\sin x-\cos x-(\sin x-\cos x)=0$$

و پاسخ «ج» باید انتخاب شود.

۵۸) به‌فرض $f(x+2)=\frac{-2x^{2}-4x+4}{x^{2}}$ مقدار $f\left(\frac{2x}{x-1}\right)$ برابر است با:

الف- $\frac{-2x^{2}+4x+4}{(x-2)^{2}}$ ب- $\frac{x^{2}-4x+1}{(x-2)^{2}}$

ج- $x^{2}-4x+1$ د- $-2x^{2}+4x+4$

۵۹) اگر داشته باشیم:

$$f(x)+f(x+a)=x$$

حاصل عبارت $f(x+a)-f(x-a)$ کدام است:

الف- x ب- $2x-a$

ج- $a-2x$ د- a

۶۰) هرگاه داشته باشیم:

$$f(x)=\frac{1+x}{1-x} \quad \text{و} \quad f(g(x))=\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}\right)^{2}$$

$g(x)$ کدام عبارت زیر است:

الف- $\operatorname{tg}^{2}x$ ب- $\operatorname{tg}2x$

ج- $\operatorname{cotg}2x$ د- $\sin 2x$

۶۱) دربارهٔ عبارت $z=f(x, y)=3\cos 4y+4\cos 3x+1$ گزاره‌های زیر بیان شده است:

(۱) عبارت z نسبت به‌هر یك از متغیرهای x و y زوج است.
(۲) عبارت z نسبت به‌متغیر x فرد و نسبت به‌متغیر y زوج است.
(۳) عبارت z نسبت به‌دو متغیر x و y متقارن است.

از این گزاره‌ها کدامها نادرست است:

الف- (۲) و (۳)　　ب- فقط (۲)

ج- (۱) و (۳)　　د- فقط (۱)

۶۲) به‌فرض $f(x)=\frac{x}{x+۱}$ مقدار $g(x)=\frac{f(nx)}{\underbrace{ff\ldots f(x)}_{n \text{ عامل}}}$ برابر است با:

الف- n　　ب- nx

ج- $\frac{nx}{x+۱}$　　د- $\frac{n}{x+۱}$

۶۳) هرگاه داشته باشیم:

$$A(x)=f(x+۳) \quad ، \quad B(x)=A\left(-\frac{۱}{x}\right)$$

$$C(x)=B(x^۲-۱) \quad ، \quad D(x)=C(\sqrt{x})$$

کدام برابری زیر را خواهیم داشت:

الف- $D(x)=f\left(\frac{۳\sqrt{x}-۴}{\sqrt{x}-۱}\right)$

ب- $D(x)=f\left(-\frac{\sqrt{x^۲+۶x+۸}}{x+۳}\right)$

ج- $D(x)=f\left(-\frac{x+۶\sqrt{x}+۸}{\sqrt{x}+۳}\right)$

د- $D(x)=f\left(\frac{۳x-۴}{x-۱}\right)$

۶۴) به‌فرض $f(x)=۲^x+۲^{-x}$ هرگاه داشته باشیم:

$$y=\frac{f(x+۱)+f(x-۱)}{f(x)}$$

مقدار y برابر است با:

الف- ۱　　ب- $f(۱)$

ج- $f\left(\frac{۱}{۲}\right)$　　د- $f\left(\frac{۵}{۲}\right)$

۶۵) عبارت $f(x)=۲x^۳+۶x^۲+x-۱$ را چون برحسب $x-۱$ مرتب

کنیم می‌شود:

الف ـ $۲(x-۱)^۳+۶(x-۱)^۲+(x-۱)-۱$

ب ـ $۲x^۳-۵x+۲$

ج ـ $۲(x-۱)^۳+۱۲(x-۱)^۲+۱۹(x-۱)+۸$

د ـ $۲x^۳-۶x^۲+x+۵$

۴

چندجمله‌ایها

۴،الف- یك‌جمله‌ای

۴-۱- جملهٔ جبری - عبارت جبری صحیح که فقط شامل عمل ضرب وتوان باشد جملهٔ جبری نام دارد که معمولاً آن را یك‌جمله‌ای می‌نامند. حاصل‌ضرب عاملهای عددی و عاملهای معلوم جمله را ضریب آن جمله ومجموع نماهای متغیرهـای آن را درجهٔ آن جمله می‌نامند. درجهٔ جمله عدد صحیح نامنفی است و درحالتی‌که درجهٔ جمله صفر باشد آن جمله برابر مقدار معلوم ضریب است. درجهٔ جمله نسبت به یـك متغیر برابر است با نمای این متغیر درآن جمله، و درجهٔ جمله نسبت به‌هرمتغیری‌که درآن جمله نباشد صفر است. جملهٔ یك متغیری را به‌صورت کلی ax^n نشان می‌دهندکه a ضریب و n درجهٔ آن است؛ a عددحقیقی و n عدد صحیح نامنفی است. جملهٔ چندمتغیری با ضریب a به‌صورت کلی $ax^ny^pz^q...$ نشان داده می‌شود. این جمله‌نسبت به x از درجهٔ n، نسبت به y از درجهٔ p، نسبت به z ازدرجهٔ q ونسبت به‌همهٔ متغیرها ازدرجهٔ $n+p+q+...$ است.

چند مثال: جملهٔ $2\sqrt{2}x^3$ نسبت به x از درجهٔ ۳ و نسبت به‌هرمتغیردیگری از درجهٔ صفر است و ضریب آن $2\sqrt{2}$ است.

جملهٔ $\frac{7}{3}a^3b^2c$ — دارای ضریب $\frac{7}{3}$ — ونسبت به a از درجهٔ ۳، نسبت به b از درجهٔ ۲، نسبت به c از درجهٔ یك ونسبت به a و b و c یك جملهٔ درجهٔ ۶ است.

۴-۲- جملهٔ صفر- در جملهٔ یك‌متغیری ax^n یا چند متغیری $ax^py^q...$ ضریب a عدد حقیقی است‌که معمولاً مخالف صفر اختیار می‌شود. هرگاه a، ضریب جمله،برابر صفر باشد، جمله نیز صفر است‌که آن را جملهٔ صفر می‌نامند.

۴-۳- جمله‌های متحد- دوجمله را متحد یکدیگرگویند هرگاه اولاً ضریبهای آنها با هم برابر باشند و ثانیاً هرمتغیرکه در یکی از آنهاست با همان درجـه در دیگری نیز وجود داشته باشد. دوجملهٔ متحد را معمولا دوجملهٔ متساوی می گویند.

$$(a=b \quad , \quad n=m) \iff (ax^n \equiv bx^m)$$

$$(a=a' \quad ، \quad n=n' \quad ، \quad m=m' \text{ و} \ldots)$$

$$\iff (ax^n y^m \ldots \equiv a'x^{n'}y^{m'} \ldots)$$

مثال: برای آنکه دو جملهٔ $۳x^۲y$ با $ax^ny^pz^q$ متحد باشند لازم و کافی است که:

$$a=۳ \quad ، \quad n=۲ \quad ، \quad p=۱ \quad ، \quad q=۰$$

۴-۴- مسئلهٔ نمونه- یک جمله‌ای $f(x)=ax^n$ را مشخص کنید که $ff(x)=\frac{۳\sqrt{۳}}{۸}x^۴$ باشد.

حل- عبارت $ff(x)$ می‌شود $a(ax^n)^n=a^{n+۱}x^{n^۲}$ و باید داشته باشیم:

$$a^{n+۱}x^{n^۲} \equiv \frac{۳\sqrt{۳}}{۸}x^۴ \iff n^۲=۴ \quad ، \quad a^{n+۱}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۸}$$

از معادلهٔ $n^۲=۴$ جواب $n=۲$ قبول است و از آنجا:

$$a^۳=\frac{۳\sqrt{۳}}{۸} \implies a=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \quad ، \quad f(x)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}x^۲$$

(جواب $n=-۲$ ازآن‌رو قبول نیست که $x^{-۲}=\frac{۱}{x^۲}$ کسری است و جملهٔ جبری نمی‌باشد.)

۴-۵- جمله‌های متشابه- دوجملهٔ جبری را متشابه گویند هرگاه اختلاف آنها فقط در ضریبهایشان باشد. مانند جمله‌های ax^n و bx^n و $-۳x^n$، یا مانند جمله‌های $۲a^۲b^۳$ ، $-۷a^۲b^۳$ و $۳\sqrt{۲}a^۲b^۳$.

۴-۶- جمله‌های قرینه- دوجمله که متشابه و ضریبهای آنها دو عدد قرینه‌باشند دو جملهٔ قرینه نامیده می‌شوند. مانند $۷ax^۳$ و $-۷ax^۳$.

۴-۷- معکوس جمله- عبارت جبری $\frac{۱}{ax^n}=\frac{۱}{a}x^{-n}$ معکوس‌جملهٔ ax^n و عبارت جبری $\frac{۱}{ax^py^q\ldots}$ معکوس جملهٔ $ax^py^q\ldots$ نامیده می‌شود. معکوس جمله، جمله نیست مگرآنکه جمله برابر مقدار ثابت باشد.

۴-۸- عملیات بین جمله‌ها- مجموع جبری چندجملهٔ متشابه جمله‌ای است متشابه‌آنها که ضریبش مجموع جبری ضریبهای آن جمله‌هاست.

$$ax^n+bx^n+cx^n=(a+b+c)x^n$$

$$۳\sqrt{۲}a^۲b^۳-\frac{۱}{۲}a^۲b^۳-۴a^۲b^۳+۷a^۲b$$

$$=\left(۳\sqrt{۲}-\frac{۹}{۲}\right)a^۲b^۳+۷a^۲b$$

برای تفریق جمله‌ای از جملهٔ دیگر، قرینهٔ جملهٔ اول با جملهٔ دوم جمع می‌شود.
حاصل‌ضرب چندجمله عبارت است از جمله‌ای که ضریبش حاصل‌ضرب ضریبهای آن جمله‌هاست و سایرعاملهای آن طبق قاعدهٔ ضرب توانها به‌دست می‌آیند.

$$ax^ny^p \times bx^mz^q = abx^{n+m}y^pz^q$$

تقسیم جمله‌ها به‌صورت عکس عمل ضرب آنها انجام می‌گیرد:

$$ax^my^nz^p : bx^qy^rz^s = \frac{a}{b}x^{m-q}y^{n-r}z^{p-s}$$

خارج‌قسمت دوجمله وقتی یك جمله است که نمای هریك از متغیرها در مقسوم از نمای آن متغیر در مقسوم‌علیه کوچکتر نباشد و گرنه خارج‌قسمت، عبارت جبری کسری است

جمله: $5x^2y^3z : 10x^2y = \frac{1}{2}yz$

کسری: $6x^2y^3 : 3xy^4z = \frac{2x}{yz}$

در عمل توان یك جمله، ضریب به‌توان می‌رسد ونمای هریك از متغیرها درنمای جدید ضرب می‌شود

$$(-3a^2bx^4)^2 = 9a^4b^2x^8$$

در عمل ریشه گرفتن از یك جمله، ریشهٔ ضریب حساب می‌شود و نمای هریك از متغیرها برشمارهٔ ریشگی تقسیم می‌شود. ریشه‌ای از یك جمله وقتی یك جمله است که اولاً ریشهٔ ضریب آن حقیقی و ثانیاً نمای هریك از متغیرها برشمارهٔ ریشگی بخش‌پذیر باشد و گرنه یك عبارت جبری غیرحقیقی یا گنگ است.

$$A^3 = 8x^3y^6z^{12} \Longrightarrow A = 2xy^2z^4$$

$$B^2 = 5x^4y^6z^{10} \Longrightarrow B = \pm\sqrt{5}x^2y^3z^5$$

$$\sqrt{4x^2y^2z^4} = 2|xy|z^2$$

$C^2 = -4x^2y^{12}z^6 \Longrightarrow C$ غیرحقیقی

عبارت گنگ: $D^3 = -27x^3y^4z^6 \Longrightarrow D = -3xyz^2\sqrt[3]{y}$

یادداشت- در مجموعهٔ یك جمله‌ایها عمل ضرب (و به‌تبع آن عمل توان) یك عمل درونی است اما عمل جمع یك عمل درونی نیست؛ مجموعه نسبت به عمل ضرب بسته است اما نسبت به‌عملهای جمع، تفریق، تقسیم و ریشگی بسته نیست.

در مجموعهٔ یك‌جمله‌ایها جمله‌های متشابه کلاسهایی پدید می‌آورند که درهریك از این کلاسها عمل جمع یك عمل درونی است.

۴،ب- چندجمله‌ای (بس‌جمله‌ای)

۴-۹- تعریف- مجموع جبری چند یک‌جمله‌ای که همهٔ آنها با هم متشابه نباشند چندجمله‌ای نامیده می‌شود. تازگیها اصطلاح بس‌جمله‌ای را نیز برای چندجمله‌ای به‌کار برده‌اند. جمع جمله‌های متشابه یک چند جمله‌ای را ساده کردن آن می‌گویند و یک چندجمله‌ای را ساده شده یا ساده نشدنی می‌نامند هرگاه هیچ دو جملهٔ آن متشابه نباشند. چندجمله‌ای با یک متغیر x را به $P(x)$ یا $Q(x)$ و مانند آن، و چندجمله‌ای با چند متغیر x، y، z، ... را به $P(x, y, z, \ldots)$ یا $Q(x, y, z, \ldots)$ و مانندآن نشان می‌دهند.

$$P(x) = ۳x^۷ - ۴ax^۴ + ۶x^۲ - ۱$$

$$P(x, y) = x^۳y - ۴x^۲y^۲ + ۵xy + ۱۱$$

درجهٔ چندجمله‌ای عبارت است ازدرجهٔ جمله‌ای ازآن‌که نسبت به دیگر جمله‌های آن‌بزرگترین‌درجه را داشته باشد. مثلاً چندجمله‌ای $۴x^۳y - ۷x^۲y^۲ + ۱۲x^۴y - ۳x$ نسبت به‌متغیرهای خود از درجهٔ ۵ است که همان درجهٔ جملهٔ $۱۲x^۴y$ از آن است و نسبت به‌دیگر جمله‌ها دارای بزرگترین درجه است. درجهٔ چندجمله‌ای P با $d^\circ P$ یا با $\deg P$ نشان داده می‌شود. چنانکه برای مثالهای بالا داریم: $d^\circ P(x) = ۷$ و $d^\circ P(x, y) = ۴$.

۴-۱۰- مجموع ضریبهای چندجمله‌ای- هر جمله از چندجمله‌ای $P(x)$ به‌صورت کلی ax^n است که n عدد درست نامنفی است. به‌ازای $x = ۱$ مقدار این جمله با a ضریب آن برابر است. بنابراین مجموع ضریبهای چندجمله‌ای $P(x)$ برابر است با $P(۱)$، همچنین مجموع ضریبهای $P(x, y, z, \ldots)$ می‌شود $P(۱, ۱, ۱, \ldots)$

مثال: مجموع ضریبهای چندجمله‌ایهای

$$P(x) = (۲x - ۳)(۴x + ۱)^۳(x^۴ - ۲)^۲$$

و

$$Q(x, y) = (x - y)(x^۲ + ۳xy - y^۲)$$

به‌ترتیب برابر است با ۱۲۵- و ۰ .

۴-۱۱- چندجمله‌ای همگن- اگر همهٔ جمله‌های یک چندجمله‌ای (با بیش از یک متغیر) هم‌درجه باشند، آن چندجمله‌ای را همگن یا متجانس می‌نامند. مانند:

$$P(a, b) = ۳a^۳ - a^۲b + ۴ab^۲ + ۷b^۳$$

$$P(x, y, z) = x^۳ - x^۲y + xyz + ۱۱xz^۲$$

از ویژگیهای چندجمله‌ای همگن درجهٔ n، یکی آن است که اگرهریک از متغیرهای

آن در عدد ثابت k ضرب شود آن چندجمله‌ای در k^n ضرب می‌گردد؛

$$P(kx \text{ ، } ky \text{ ، } kz)=k^n.p(x \text{ ، } y \text{ ، } z)$$

چنانکه درمورد دو مثال بالا داریم:

$$P(۳a \text{ ، } ۳b)=۲۷(۳a^۳-a^۲b+۴ab^۲+۷b^۳)$$
$$P(۲x \text{ ، } ۲y \text{ ، } ۲z)=۸(x^۳-x^۲y+xyz+۱۱xz^۲)$$

ویژگی‌دیگرآن‌است که‌هرگاه متغیری ازچندجمله‌ای همگن‌را درنظرگرفته وهریك از متغیرهای دیگرآن را با ضریب ثابتی ازآن متغیر جانشین کنیم همهٔ جمله‌های‌چندجمله‌ای شامل عامل توان nام آن متغیر خواهند بود. مثلاً در چندجمله‌ای $P(a , b)$ از مثال بالا با فرض $b=ka$ خواهیم داشت:

$$P(a \text{ ، } ka)=a^۳(۳-k+۴k^۲+۷k^۳)$$

یا اگر در چندجمله‌ای دوم مثال گذشته فرض‌کنیم $x=kz$ و $y=lz$ خواهیم داشت:

$$P(kz \text{ ، } lz \text{ ، } z)=z^۳(k^۳-k^۲l+kl+۱۱k)$$

از این ویژگی درحل دستگاه معادله‌های همگن استفاده می‌شود.

۴-۱۲- چندجمله‌ای متقارن- یك چندجمله‌ای متقارن نامیده می‌شود هرگاه با جابجاکردن هردو متغیر از آن، چندجمله‌ای فرق نکند؛

$$P(x \text{ ، } y)=P(y \text{ ، } x)$$
$$P(x \text{ ، } y \text{ ، } z)=P(y \text{ ، } x \text{ ، } z)=P(z \text{ ، } x \text{ ، } y)$$
$$=P(x \text{ ، } z \text{ ، } y)=\ldots$$

مانند دو چندجمله‌ای زیر:

$$P(a \text{ ، } b)=۲a^۲+۲b^۲-ab+۷$$
$$Q(a \text{ ، } b \text{ ، } c)=a^۳+b^۳+c^۳+۳abc(a+b+c)$$

ممکن است یك چندجمله‌ای هم متقارن و هم‌همگن باشد. مانند هر چندجمله‌ای حاصل از بسط $(a+b)^n$.

ویژگی مهم چندجمله‌ای متقارن $P(x \text{ ، } y)$ آن است که می‌توان آن را برحسب $x+y$ و xy بیان‌کرد. زیرا جمله‌های متقارن این چندجمله‌ای یا به‌صورت ax^n وay^n یا به‌صورت ax^py^q و ax^qy^p می‌باشند. درحالت اول اگر n زوج باشد داریم:

$$x^{۲k}+y^{۲k}=(x^k+y^k)^۲-۲x^ky^k$$

و اگر n فرد باشد داریم:

$$x^n+y^n=(x+y)[x^{n-۱}+y^{n-۱}-xy(x^{n-۳}+y^{n-۳})+\ldots]$$

درهردوحالت مجموع توانهای متشابه x و y به‌مجموع توانهای متشابه آنها امابادرجهٔ

کوچکتر تبدیل می‌شود و با تکرار این تبدیل به‌چندجمله‌ای خواهیم رسید که شامل توانهایی از $x+y$ و xy است. مجموع دوجملهٔ ax^py^q و ax^qy^p نیز با فرض $q<p$ به $ax^qy^q(x^{p-q}+y^{p-q})$ تبدیل می‌شود و به‌حالت اول منجر می‌شود.

ویژگی بالا برای چندجمله‌ای چند متغیری متقارن بدین‌صورت تعمیم می‌یابد که یك‌چنین چندجمله‌ای را می‌توان به‌چندجمله‌ای برحسب مجموع متغیرها، مجموع حاصل‌ضربهای دو به‌دوی آنها، مجموع حاصل‌ضربهای سه به‌سهٔ آنها، ... و بالاخره حاصل‌ضرب آنها تبدیل کرد.

مثال: نوشتن چندجمله‌ای

$$P(x , y)=2x^4-3x^3y+5xy-3xy^3+2y^4$$

برحسب $s=x+y$ و $p=xy$:

$$\begin{aligned}2x^4+2y^4&=2[(x^2+y^2)^2-2x^2y^2]\\&=2\{[(x+y)^2-2xy]^2-2x^2y^2\}\\&=2[(s^2-2p)^2-2p^2]=2s^4-8ps^2+4p^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-3x^3y-3xy^3&=-3xy(x^2+y^2)\\&=-3xy[(x+y)^2-2xy]\\&=-3p(s^2-2p)=-3ps^2+6p^2\end{aligned}$$

$$P(x , y)=Q(s , p)=2s^4-11ps^2+10p^2+5p$$

۴-۱۳- چندجمله‌ای زوج، چندجمله‌ای فرد- چند جمله‌ای را نسبت به‌یک متغیر زوج گویند هرگاه با تبدیل آن متغیر به قرینهٔ خود، چندجمله‌ای فرق نکند، یعنی: $P(-x)=P(x)$، و اگر با تبدیل متغیر به‌قرینهٔ خود، چندجمله‌ای نیز به‌قرینهٔ خود تبدیل شود یعنی $P(-x)=-P(x)$، آن چندجمله‌ای را نسبت به‌آن متغیرفرد گویند، ممکن است که یك چندجمله‌ای نه‌زوج باشد و نه‌فرد.

مثال: چندجمله‌ای $P(x)=x^2+a$ زوج وچندجمله‌ای $P(x)=x^3+ax$ فرد است. اما چندجمله‌ای x^3+x^2-4x+1 نه‌زوج است و نه‌فرد.

۴-۱۴- مرتب‌کردن چندجمله‌ای- چندجمله‌ای یك متغیری را معمولاً به‌دو گونه مرتب می‌کنند: یا برحسب توانهای نزولی که جمله‌ها راچنان دنبال هم قرارمی‌دهند که به‌ترتیب درجه از بزرگ به‌کوچك قرار گیرند؛ یا برحسب توانهای صعودی که جمله‌ها را به‌ترتیب درجه از کوچك به‌بزرگ قرار می‌دهند. مانند:

مرتب نزولی: $P(x)=4x^3-3ax^2-x+a-7$

مرتب صعودی: $P(x)=a-7-x-3ax^2+4x^3$

چندجمله‌ای چندمتغیری رابه‌گونه‌های مختلف‌می‌توان مرتب‌کرد: برحسب‌الفباء، برحسب‌درجه، وغیره. معمولاً ترتیب درجه و الفباء را توأماً به‌کار می‌برند. مانند:

$$P(x ، y ، z) = x^{۳} - y^{۳} + ۲z^{۳} - ۳x^{۲}y + y^{۲}z - z^{۲} - ۵x + y + z - ۱۰$$

چندجمله‌ای دومتغیری همگن چون نسبت به یـك متغیر مرتب نزولی شود نسبت به‌دیگری مرتب صعودی خواهد بود.

یك چندجمله‌ای را نرمال گویند هرگاه برحسب‌توانهای نزولی مرتب شده‌وضریب جملهٔ بزرگترین درجهٔ آن یك باشد.

۴-۱۵- چندجمله‌ای کامل- چندجمله‌ای را نسبت به‌یك متغیرکامل گویند هرگاه اگر نسبت به‌این متغیر از درجهٔ n است، همهٔ جمله‌های از درجهٔ n تا صفر آن متغیر را دارا باشد. در غیرایـن صورت آن را نسبت به‌آن متغیر ناقص گـویند. به‌عنوان مثال، چندجمله‌ای

$$۴x^{۳}y + ۷x^{۲}y^{۲} - ۶xy^{۳} + ۷y^{۴}$$

نسبت به x از درجهٔ سوم وکامل است امـا نسبت به y از درجـهٔ چهارم و ناقص است زیرا جملهٔ توان صفر y را ندارد.

۴-۱۶- نمایش‌چندجمله‌ای یك‌متغیری- چندجمله‌ای $P(x)$ راکه از درجهٔ n است درحالت کلی به‌دوگونه نمایش می‌دهند؛ درگـونهٔ نخست ضریبهـای جمله‌ها را از بزرگترین درجه تاکوچکترین درجه به‌ترتیب الفبایی با a ، b ، c ، ... ، k و l نشان می‌دهند:

$$P(x) = ax^{n} + bx^{n-۱} + \dots + kx + l$$

نمونه‌های این‌گونه، نمایش دوجمله‌ای درجهٔ اول، سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم، چهارجمله‌ای درجهٔ سوم، و غیره است:

$$ax + b \quad ، \quad ax^{۲} + bx + c \quad ، \quad ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d \quad ، \dots$$

گونهٔ دیگر نمایش چندجمله‌ای این است‌که ضریب هر جملهٔ درجهٔ i را با a_iنشان می‌دهند:

$$P(x) = a_n x^{n} + a_{n-۱} x^{n-۱} + \dots + a_{۱} x + a_{۰}$$

در گونهٔ اخیر معمولاً چندجمله‌ای را به‌ترتیب توانهای صعودی در نظر گرفته و آن را تنها با ضریبهایش نشان می‌دهند:

$$P(x) = (a_{۰} ، a_{۱} ، a_{۲} ، \dots ، a_{n-۱} ، a_n)$$

بنابراین اگر مثلاً داشته باشیم:

$$P(x)=(-۲ ، ۱ ، ۰ ، ۰ ، -۴ ، ۱)$$

مقصود چندجمله‌ای زیراست:

$$P(x)=-۲+x+۰x^{۲}+۰x^{۳}-۴x^{۴}+x^{۵}=x^{۵}-۴x^{۴}+x-۲$$

که نسبت به x از درجهٔ پنجم و ناقص است.

جملهٔ درجهٔ صفر چندجمله‌ای، یعنی $a_{۰}$ (و یا l درگونهٔ نخست) را جملهٔ ثابت چندجمله‌ای می‌گویند: هرگاه غیراز این ضریب $a_{۰}$ سایر ضریبها صفر باشند، چندجمله‌ای برابر با مقدار ثابت $a_{۰}$ است که آن را اصطلاحاً چندجمله‌ای درجهٔ صفر یا چندجمله‌ای ثابت می‌نامند؛

$$P(x)=(a_{۰} ، ۰ ، ۰ ، ۰ ، \ldots)=a_{۰}$$

بنابراین هرمقدار ثابت را می‌توان چندجمله‌ای درجهٔ صفرمنظورکرد که حالت ویژهٔ آن چندجمله‌ای یك است.

اگر همهٔ ضریبهای چندجمله‌ای برابر صفر باشند آن را چندجمله‌ای صفر می‌نامند که به‌ازای هرمقداری از متغیر برابر صفر است و می‌گوییم که متحد با صفراست

$$P(x)=(۰ ، ۰ ، ۰ ، \ldots ، ۰)\equiv ۰$$

۴-۱۷- مشخص کردن چندجمله‌ای یك‌متغیری- چندجمله‌ای $P(x)$ که‌ازدرجهٔ n باشد دارای $n+۱$ ضریب است که با معلوم بودن این ضریبها چندجمله‌ای مشخص می‌باشد. بنابراین برای مشخص کردن چندجمله‌ای درجهٔ nام $P(x)$ تعداد $n+۱$ شرط لازم است. یك موردکه بیشتر پیش می‌آید به‌دست آوردن چندجمله‌ای است که به‌ازای مقادیر معینی از متغیر برابر با مقادیر معلومی باشد (نظیرآنکه تابعی را معلوم‌کنیم که نمودارآن برنقطه‌های به مختصات معلوم بگذرد). هرگاه تعداد $n+۱$ مقدار $\alpha_{۰}$ ، $\alpha_{۱}$ ، ... ، α_{n} و مقادیر $P(x)$ به‌ازای این مقادیر نیز معلوم باشد:

$$p_{۰}=P(\alpha_{۰}) ، p_{۱}=P(\alpha_{۱}) ، \ldots ، p_{n}=P(\alpha_{n})$$

نسبت به‌ضریبهای چندجمله‌ای تعداد $n+۱$ معادله با $n+۱$ مجهول داریم که درنتیجه ضریبها به‌دست می‌آیند. چنانکه برای دوجمله‌ای درجهٔ اول $P(x)=ax+b$ داریم:

$$\begin{cases} p_{۰}=a\alpha_{۰}+b \\ p_{۱}=a\alpha_{۱}+b \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} a=\dfrac{p_{۰}-p_{۱}}{\alpha_{۰}-\alpha_{۱}}=\dfrac{p_{۰}}{\alpha_{۰}-\alpha_{۱}}+\dfrac{p_{۱}}{\alpha_{۱}-\alpha_{۰}} \\ b=\dfrac{-p_{۰}\alpha_{۱}}{\alpha_{۰}-\alpha_{۱}}+\dfrac{-p_{۱}\alpha_{۰}}{\alpha_{۱}-\alpha_{۰}} \end{array} \right.$$

و درنتیجه خواهیم داشت:

$$P(x)=p_0\frac{x-\alpha_1}{\alpha_0-\alpha_1}+p_1\frac{x-\alpha_0}{\alpha_1-\alpha_0}$$

***۴-۱۸- چندجمله‌ای لاگرانژ-** هرگاه روش بالا راکه برای دوجمله‌ای درجهٔ اول به‌کار بردیم برای چندجمله‌ای درجهٔ n تعمیم دهیم فرمول زیر به‌نام چندجمله‌ای انترپلاسیون لاگرانژ را خواهیم داشت:

$$\begin{cases}P(x)=p_0f_0(x)+p_1f_1(x)+\ \dots\ +p_nf_n(x)\\ f_i(x)=\dfrac{(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\dots(x-\alpha_n)}{(\alpha_i-\alpha_0)(\alpha_i-\alpha_1)\dots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\dots(\alpha_i-\alpha_n)}\end{cases}$$

[توجه داشته باشیدکه درصورت عامل $x-\alpha_i$ ودر مخرج عامل $\alpha_i-\alpha_i$ وجودندارد.]

به‌عنوان مثال برای چندجمله‌ای درجهٔ دوم داریم:

$$P(x)=p_0\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{(\alpha_0-\alpha_1)(\alpha_0-\alpha_2)}+p_1\frac{(x-\alpha_0)(x-\alpha_2)}{(\alpha_1-\alpha_0)(\alpha_1-\alpha_2)}$$
$$+p_2\frac{(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)}{(\alpha_2-\alpha_0)(\alpha_2-\alpha_1)}$$

مثال: چندجمله‌ای درجهٔ دوم با شرایط $P(1)=0$ ، $P(2)=0$ و $P(3)=2$ می‌شود:

$$P(x)=0\times\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+0\times\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$$
$$+2\times\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

$$P(x)=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$$

یادداشت- هرگاه درچندجمله‌ای لاگرانژ مقادیر p_0 ، p_1 ، ... ، p_n برابر u، مثلاً x یایك، انتخاب شوند اتحاد $P(x)=u$حاصل می‌شود.چنانکه برای حالت $n=2$ و به‌فرض $\alpha_0=a$ ، $\alpha_1=b$ و $\alpha_2=c$ و $u=1$ داریم:

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\equiv 1$$

۴-۱۹- چندجمله‌ای متحد با صفر- برای‌آنکه یك چندجمله‌ای متحد بـا صفر باشد، یعنی به‌ازای هرمقدار از متغیر یا متغیرها برابر صفر باشد، لازم وکافی است کـه همهٔ ضریبهای آن صفر باشند. زیرا درچندجمله‌ای

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ \dots\ +a_2x^2+a_1x+a_0$$

اولاً اگر داشته باشیم $a_n=a_{n-1}=\ldots=a_2=a_1=0$
مقدار چندجمله‌ای به‌ازای هرمقدار از x برابر صفر است،

ثانیاً اگر چندجمله‌ای به ازای هر مقدار از x صفر باشد به ازای $x=0$ نیز صفر است و نتیجه می‌شود $a_0=0$ و خواهیم داشت:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x=0$$

یا:

$$x(a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_2x+a_1)=0$$

این عبارت وقتی به‌ازای هرمقدار از x، مثلاً $x=\alpha\neq 0$، برابر صفر است که عبارت داخل پرانتز صفر باشد و این عبارت که به‌ازای هرمقدار از x باید صفر باشد به‌ازای $x=0$ نیز باید صفر باشد و نتیجه می‌شود $a_1=0$. با تکرار استدلال به ترتیب نتیجه می‌شود که $a_2=0$ ، $a_3=0$ و بالاخره:

$$a_n=a_{n-1}=\ldots=a_2=a_1=a_0=0$$

مثال: تعیین مقادیر a ، b و c برای آنکه چندجمله‌ای زیر نسبت به x متحد با صفر باشد:

$$ax^2(x-2)+b(x^3-x^2+1)+c(x^3+x+2)+x^2+x+1$$

نخست چندجمله‌ای را نسبت به x مرتب می‌کنیم که می‌شود:

$$(a+b+c)x^3-(2a+b-1)x^2+(c+1)x+b+2c+1$$

اکنون همهٔ ضریبها را برابر صفر قرار می‌دهیم و از حل دستگاه حاصل مقادیر مجهول را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+b-1=0 \\ c+1=0 \\ b+2c+1=0 \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} a=0 \\ b=1 \\ c=-1 \end{array} \right.$$

(وقتی ضریبهای چندجمله‌ای را برابر صفر قرار می‌دهیم اگر تعداد معادله‌ها بیش از تعداد مجهولها باشد، مانند مثال بالا، مقادیرمجهول که از چند معادلهٔ دستگاه به‌دست آیند، باید در دیگر معادله‌ها نیز صدق کنند، یعنی دستگاه سازگار باشد، وگرنه دستگاه غیرممکن است. اگر تعداد معادله‌ها کمتر از تعداد مجهولها باشد دستگاه سیال است و ممکن است جوابهای زیاد یا بیشمار داشته باشد.)

۴-۲۰- چندجمله‌ایهای متحد- برای‌آنکه دوچندجمله‌ای چندمتغیری با هم‌متحد باشند لازم وکافی است که جمله‌های آنها نظیر به‌نظیر با هم متحد باشند.

برای آنکه دوچندجمله‌ای نسبت به‌یك متغیر متحدباشند لازم و کافی است که‌ضریبهای جمله‌های همدرجه با هم برابر باشند. زیرا اگر دوچندجمله‌ای

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1 x+a_0$$
$$Q(x)=b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_1 x+b_0$$

با هم متحد باشند تفاضل آنها متحد با صفر است، یعنی:

$$(a_n-b_n)x^n+(a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1}+\dots+(a_1-b_1)x$$
$$+a_0-b_0\equiv 0$$

و بنابه‌قضیهٔ قبلی نتیجه می‌شود:

$$a_n=b_n \text{ ، } a_{n-1}=b_{n-1} \text{ ، } \dots \text{ ، } a_1=b_1 \text{ ، } a_0=b_0$$

مثال: برای آنکه چندجمله‌ای

$$(a-2b)x^4+(a+b)x^3+(a+2b-4)x^2+(3a+1)x-7a$$

با چندجمله‌ای $3x^3+7x-14$ متحد باشد باید:

$$\begin{cases} a-2b=0 \\ a+b=3 \\ a+2b-4=0 \\ 3a+1=7 \\ -7a=-14 \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} a=2 \\ b=1 \end{array} \right.$$

۴،ج- عملیات روی چندجمله‌ایها

۴-۲۱- یادآوری مقدماتی- هرگاه در نتیجهٔ عملی مانند * بین دوچندجمله‌ای یك یا چند متغیری P و Q چندجمله‌ای دیگر R به‌دست آید رابطهٔ $P*Q=R$ نسبت به‌هریك ازمتغیرها یك اتحاد است، یعنی به‌ازای هرمقداری از متغیرها برقرار خواهدبود. بنابراین دراین‌گونه موردها نماد برابری «=» که به کار می‌رود به‌معنی برابری واقعی یا اتحاد (همانی) است. چنانکه اگر $A(x)$ و $B(x)$ دو چندجمله‌ای مفروض و $S(x)$ مجموع آنها، $D(x)$ تفاضل‌آنها، $P(x)$ حاصل‌ضرب آنها، $Q(x)$ و $R(x)$ خارج‌قسمت و باقیماندهٔ تقسیم $A(x)$ بر $B(x)$ و ... باشد، هریك از رابطه‌های زیر یك اتحاد خواهد بود:

$$A(x)+B(x)=S(x) \quad \text{،} \quad A(x)-B(x)=D(x)$$
$$A(x)B(x)=P(x) \quad \text{،} \quad A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$$

با توجه به‌همین نکته است که برای اثبات درستی یك اتحاد کافی است ثابت کرد که با اجرای عملیاتی می‌توان یك طرف را از روی طرف دیگر به‌دست آورد. مثلاً برای آنکه ثابت کنیم که رابطه‌ای مانند $[F(x, y)]^n = G(x, y)$ یك اتحاد است، کافی است که طرف اول را عمل کنیم وساده نماییم و حاصل برابر با طرف دوم باشد.

۴-۲۲- جمع چندجمله‌ایها- حاصل‌جمع دوچندجمله‌ای چندجمله‌ای دیگری‌است که هریك از جمله‌های غیرمتشابه و مجموع جمله‌های متشابه آنها را دربرداشته باشد. با فرض

$$A(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

و $\quad n > k$

$$B(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_kx^k$$

مجموع آنها عبارت می‌شود از:

$$S(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_k + b_k)x^k + \dots + a_nx^n$$

درجهٔ چندجمله‌ای مجموع حداکثر برابر است با بزرگترین درجهٔ چند جمله‌ایهای عامل جمع و حداقل می‌تواند صفر باشد؛

$$d^\circ[P(x) + Q(x)] \leqslant \text{بزرگترین}[d^\circ P(x), d^\circ Q(x)]$$

عمل جمع چندجمله‌ایها جابجایی (تعویض‌پذیر) و انجمنی (شرکت‌پذیر) است و چندجمله‌ای صفر برای آن عضو بی‌اثر است.

۴-۲۳- چندجمله‌ایهای قرینه- اگر مجموع دو چندجمله‌ای برابر صفر باشد، آنها را قرینهٔ یکدیگر می‌نامند؛

$$A(x) + B(x) = 0 \iff A(x) = -B(x) \quad , \quad B(x) = -A(x)$$

۴-۲۴- تفریق چندجمله‌ایها- تفاضل دو چندجمله‌ای برابر است با حاصل جمع چندجمله‌ای اول باقرینهٔ چندجمله‌ای دوم. بنابراین عمل تفریق چندجمله‌ایها به‌عمل‌جمع آنها تبدیل می‌شود وهمواره امکان‌پذیر است.

۴-۲۵- ترکیب خطی چندجمله‌ایها- حاصل‌ضرب یك عدد در یك چندجمله‌ای به‌این ترتیب به‌دست می‌آیدکه آن عدد در هریك از ضریبهای چندجمله‌ای ضرب شود. حاصل‌ضرب عدد α در چندجمله‌ای $P(x)$ با $\alpha P(x)$ نموده می‌شود.

هرگاه عددهای α، β، γ و ... به ترتیب در چندجمله‌ایهای $A(x)$، $B(x)$، $C(x)$ و ... ضرب شوند، مجموع حاصل‌ضربها یك چندجمله‌ای است به‌صورت:

$$P(x)=\alpha A(x)+\beta B(x)+\gamma C(x)+\dots$$

که آن را ترکیب خطی چندجمله‌ایهای مزبور با ضریبهای α ، β ، γ و ... می‌نامند.

مثال: هرگاه داشته باشیم

$$A(x)=dx^3-cx^2+bx+a$$
$$B(x)=cx^3+dx^2-ax+b$$
$$C(x)=-bx^3+ax^2+dx+c$$
$$D(x)=-ax^3-bx^2-cx+d$$

ترکیب خطی با ضریبهای a ، b ، c و d این چندجمله‌ایها می‌شود

$$\begin{aligned}P(x)&=aA(x)+bB(x)+cC(x)+dD(x)\\&=(ad+bc-cb-da)x^3+(-ac+bd+ca-db)x^2\\&\quad+(ab-ba+cd-dc)x+a^2+b^2+c^2+d^2\\&=a^2+b^2+c^2+d^2\end{aligned}$$

۴-۲۶- ضرب چندجمله‌ایها- با توجه به‌توزیع‌پذیری ضرب یک‌جمله‌ایها نسبت به‌جمع آنها، عمل ضرب دوچندجمله‌ای به‌این ترتیب انجام می‌شود که هریک ازجمله‌های یکی ازآنها را به‌ترتیب در هریک از جمله‌های دیگری ضرب وحاصل‌ضربها را با هم جمع کرد.

$$f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$$
$$g(x)=b_0+b_1x+\dots+b_px^p$$
$$f(x)g(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\dots+a_nb_px^{n+p}$$

درجهٔ چندجمله‌ای حاصل‌ضرب برابر است با مجموع درجه‌های چندجمله‌ایهای عاملهای ضرب به‌شرط آنکه هیچ‌یك از این عاملها صفر نباشد؛

$$d^\circ[f(x)g(x)]=d^\circ f(x)+d^\circ g(x)$$

عمل ضرب چندجمله‌ایها جابجایی و انجمنی و نسبت به جمع آنها پخشی (توزیع‌پذیر) است، چندجمله‌ای یك عضو بی‌اثرآن و چندجمله‌ای صفر عضو غیرعادی آن‌است؛ حاصل‌ضرب هرچند جمله‌ای درصفر برابرصفراست و اگر حاصل‌ضرب دویاچند چندجمله‌ای صفر باشد دست‌کم یکی ازآن چندجمله‌ایها صفر است؛

$$f(x)g(x)=0 \implies [f(x)=0 \text{ یا } g(x)=0]$$
$$f(x)g(x)=0 \text{ و } f(x)\neq 0 \implies g(x)=0$$

حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای فقط وقتی برابر با یك است‌که هر یك ازآنها از درجهٔ صفر باشند و مقدار یکی وارون دیگری باشد. به‌عبارت دیگر عکس یك چندجمله‌ای که

مقدار ثابت نباشد یك چندجمله‌ای نیست.

۴-۲۷- توان چندجمله‌ای- اگر k عدد طبیعی باشد توان kام چندجمله‌ای درجهٔ nام $p(x)$ برابر است با حاصل‌ضرب k عامل برابر با $P(x)$ که یك چندجمله‌ای از درجهٔ kn است؛

$$[P(x)]^k = \underbrace{P(x)P(x)\ \dots\ P(x)}_{k\ \text{عامل}}$$

$$d^\circ[P(x)]^k = kd^\circ[P(x)]$$

۴-۲۸- تقسیم چندجمله‌ایها- تقسیم یك‌چندجمله‌ای برچندجمله‌ای دیگررا به‌دو گونه می‌توان تعریف‌کرد:

الف- تقسیم برحسب توانهای نزولی- اگر $A(x)$ و $B(x)$ دوچندجمله‌ای با درجه‌های n و p باشندکه $p \leqslant n$، دو چندجمله‌ای $Q(x)$ و $R(x)$ یافت می‌شودکه:

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \quad \text{و} \quad d^\circ R(x) < d^\circ B(x)$$

چندجمله‌ایهای $Q(x)$ و $R(x)$ را به‌ترتیب خارج قسمت و باقیماندهٔ تقسیم $A(x)$ بر $B(x)$ می‌نامندکه $Q(x)$ از درجهٔ $n-p$ و $R(x)$ دارای درجهٔ کوچکتر از p است. هرگاه $R(x)$ برابر صفر باشد می‌گویندکه $A(x)$ بر $B(x)$ بخش‌پذیر است.

برای تعیین $Q(x)$ و $R(x)$ یك راه همان عمل متداول تقسیم است که نخست هریك از چندجمله‌ایها برحسب توانهای نزولی مرتب می‌شوند. مانند تقسیم زیر:

$$A(x) = x^3 + 1 \quad \text{و} \quad B(x) = x^2 - 1$$

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & x^2 + 0x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 + 0x^2 - x} & x + 0 \\
\qquad\qquad\quad x + 1 &
\end{array}$$

خارج‌قسمت برابر است با $Q(x) = x$ که ازدرجهٔ یك است وباقیمانده، دوجمله‌ای از درجهٔ یك $R(x) = x + 1$ است.

عمل دیگر روش ضرایب نامعین است؛ چون مقسوم از درجهٔ ۳ و مقسوم‌علیه از درجهٔ ۲ است پس خارج‌قسمت از درجهٔ یك است‌که آن را $ax + b$ می‌گیریم، باقیمانده نیز از درجهٔ یك است‌که آن را $cx + d$ می‌گیریم و اتحاد زیررا داریم:

$$x^3 + 1 = (x^2 - 1)(ax + b) + cx + d$$

طرف دوم را عمل و مرتب می‌کنیم:

$$x^3 + 1 = ax^3 + bx^2 - (a - c)x - b + d$$

ضریبهای جمله‌های هم‌درجه را برابر قرار می‌دهیم ومقادیر مجهول را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ a-c=0 \\ -b+d=1 \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \\ d=1 \end{array} \right.$$

$$Q(x)=x \quad \text{و} \quad R(x)=x+1$$

ب- تقسیم برحسب توانهای صعودی- با مفروض بودن دوچندجمله‌ای $A(x)$ و $B(x)$ و نظیر عدد طبیعی k دو چندجمله‌ای $Q(x)$ و $R(x)$ یافت می‌شود که:

$$A(x)=B(x)Q(x)+x^{k+1}R(x) \quad \text{و} \quad d^\circ Q(x)\leqslant k$$

چندجمله‌ایهای $Q(x)$ و $R(x)$ به‌ترتیب خارج قسمت مرتبهٔ k و باقیماندهٔ مرتبهٔ k تقسیم بر حسب توانهای صعودی $A(x)$ بر $B(x)$ نام دارند. برای تعیین این چندجمله‌ایها، چندجمله‌ایهای مقسوم و مقسوم‌علیه را برحسب توانهای صعودی، مرتب می‌کنیم وعمل تقسیم را طبق روش متداول انجام می‌دهیم تا جایی‌که جملهٔ درجهٔ k از خارج قسمت به‌دست آید.

مثال: تقسیم برحسب توانهای صعودی $1+x^3$ بر $-1+x^2$ تا مرتبهٔ ۳:

$$\begin{array}{r|l} 1+x^3 & -1+x^2 \\ \cline{2-2} -1-x^2 & -1-x^2-x^3 \\ \cline{1-1} x^2+x^3 & \\ -x^2-x^4 & \\ \cline{1-1} x^3+x^4 & \\ -x^3-x^5 & \\ \cline{1-1} x^4+x^5=x^4(1+x) & \end{array}$$

$$1+x^3=(-1+x^2)(-1-x^2-x^3)+x^4(1+x)$$

$$Q(x)=-1-x^2-x^3 \quad \text{و} \quad R(x)=1+x$$

اگر بخواهیم با روش ضرایب نامعین عمل‌کنیم با توجه به‌اینکه $d^\circ R(x)<d^\circ B(x)$ باید بنویسیم:

$$1+x^3=(-1+x^2)(a+bx+cx^2+dx^3)+x^4(e+fx)$$

و پس از مرتب‌کردن طرف دوم ضریبها را تعیین‌کنیم.

از تقسیم برحسب توانهای صعودی در بسط‌کسرها استفاده می‌شود که در مبحث کسرها یادآوری خواهد شد.

۴-۲۹-چندجمله‌ای مرکب- چندجمله‌ایها را به گونه‌های مختلف می‌توان ترکیب کرد. به‌ویژه نظیر چندجمله‌ای $P(x)$ می‌توان ترکیبهای $P(P(x))$، $P(P(P(x)))$، ... را تشکیل داد که چندجمله‌ایهایی هستند با درجه‌های توان دوم، توان سوم و ... از درجهٔ چندجمله‌ای مفروض.

مثال: به‌فرض $P(x)=x^{۲}-۳x+۱$ داریم:

$$P(P(x))=(x^{۲}-۳x+۱)^{۲}-۳(x^{۲}-۳x+۱)+۱$$
$$=x^{۴}-۶x^{۳}+۸x^{۲}+۳x-۱$$

۴،د- بخش‌پذیری چندجمله‌ایها

۴-۳۰- تعریف- اگر در تقسیم چندجمله‌ای $A(x)$ برچندجمله‌ای $B(x)$ماندهٔ تقسیم برابر صفر باشد گفته می‌شود که $A(x)$ بر $B(x)$ بخش‌پذیر است. در این صورت $A(x)$ برابر است با حاصل‌ضرب $B(x)$ در چندجمله‌ای خارج‌قسمت. از این‌رو می‌توان چنین تعریف کرد:

هرگاه نظیر دو چندجمله‌ای $A(x)$ و $B(x)$ چندجمله‌ای $Q(x)$ وجود داشته باشد که $A(x)=B(x)Q(x)$؛ گفته می‌شود که چندجمله‌ای $A(x)$ برچندجمله‌ای $B(x)$ بخش‌پذیر است. اگر $Q(x)$ برابر با مقدار ثابت و غیرصفر a باشد داریم:

$$A(x)=a.B(x) \quad \text{و} \quad B(x)=\frac{۱}{a}A(x)$$

و در این حالت هریك از دوچندجمله‌ای $A(x)$ و $B(x)$ بردیگری بخش‌پذیر است که آنها را چندجمله‌ایهای متناسب نیز می‌نامند و درحالت $a=۱$ با یکدیگر برابرند.

مثال ۱: چندجمله‌ای $x^{۳}+۱$ بر چندجمله‌ای $x+۱$ بخش‌پذیر است زیرا:

$$x^{۳}+۱=(x+۱)(x^{۲}-x+۱)$$

مثال ۲: دو چندجمله‌ای $۳(x^{۲}+a)$ و $۵(x^{۲}+a)$ متناسبند و هریك بردیگری بخش‌پذیر است:

$$۳(x^{۲}+a)=۵(x^{۲}+a)\times\frac{۳}{۵} \quad ، \quad ۵(x^{۲}+a)=۳(x^{۲}+a)\times\frac{۵}{۳}$$

یادآوری ۱- بخش‌پذیری چندجمله‌ایها با تقریب مضربی از چندجمله‌ای ثابت همراه است، اگر $A(x)$ بر $B(x)$ بخش‌پذیر باشد برهرمضرب ثابت و مخالف صفر $B(x)$ نیز بخش‌پذیر است:

$$A(x)=B(x)Q(x) \quad ، \quad A(x)=[aB(x)]\times\frac{۱}{a}Q(x)$$

یادآوری ۲- در تقسیم چندجمله‌ایهای چندمتغیری آنها را نسبت به‌یک متغیر مرتب می‌کنیم، یعنی نسبت به‌آن متغیرآنها را یك متغیری منظور می‌کنیم، از این‌رو تعریف بالا چندجمله‌ایهای چند متغیری را نیز شامل می‌باشد، مانند چندجمله‌ای $a^3+b^3+c^3-3abc$ که برچندجمله‌ای $a+b+c$ بخش‌پذیر است زیرا:

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

۴-۳۱- مسئلهٔ نمونه- به‌ازای چه مقادیر a و b چندجمله‌ای

$$ax^3+bx^2+3x+9$$

برچندجمله‌ای x^2+3 بخش‌پذیر است؟

حل- چندجمله‌ای خارج‌قسمت راکه درجهٔ یك است $mx+n$ می‌گیریم:

$$ax^3+bx^2+3x+9=(x^2+3)(mx+n)$$
$$=mx^3+nx^2+3mx+3n$$

چون این رابطه اتحاد است پس:

$$\begin{cases} a=m \\ b=n \\ 3=3m \\ 9=3n \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} a=m=1 \\ b=n=3 \end{array} \right.$$

می‌توانیم به‌این روش عمل کنیم که چندجمله‌ای اول را برچندجمله‌ای دوم تقسیم کنیم و مانده را متحد با صفر قرار دهیم:

$$R(x)=(3-3a)x-3b+9\equiv 0$$

$$\begin{cases} 3-3a=0 \\ -3b+9=0 \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} a=1 \\ b=3 \end{array} \right.$$

۴-۳۲- ویژگیهای رابطهٔ بخش‌پذیری- رابطهٔ بخش‌پذیری در مجموعهٔ چندجمله‌ایها همان ویژگیهایی را داردکه در مجموعهٔ عددهای درست دارا است، یعنی؛

۱) بازتابی (انعکاسی) است: هرچندجمله‌ای برخودش بخش‌پذیر است.

۲) غیرتقارنی: اگر $A(x)$ بر $B(x)$ بخش‌پذیر باشد $B(x)$ بر $A(x)$ بخش‌پذیر نیست مگراینکه $A(x)$ و $B(x)$ متناسب باشند.

۳) ترایایی (انتقالی): اگر $A(x)$ بر $B(x)$ و $B(x)$ بر $C(x)$ بخش‌پذیر باشد آنگاه $A(x)$ بر $C(x)$ بخش‌پذیر است.

ویژگیهای بالا با تقریب یك مضرب چندجمله‌ای ثابت همراه است. زیرا هرچندجمله‌ای برچندجمله‌ای ثابت بخش‌پذیر است و اگردوچندجمله‌ای هریك دریك‌چندجمله‌ای ثابت ضرب شوند در رابطهٔ بخش‌پذیری آنها تغییری پیش نمی‌آید. با این تقریب گفته شده، رابطهٔ بخش‌پذیری در مجموعهٔ چندجمله‌ایها یك رابطهٔ ترتیب است.

۴-۳۳- مقسوم‌علیه‌ها و مضربهای یك چندجمله‌ای- هرگاه $A(x)$ بر $B(x)$ بخش‌پذیر باشد، $A(x)$ را مضرب $B(x)$ و $B(x)$ را مقسوم‌علیه $A(x)$ می‌نامند. هرچندجمله‌ای حداقل دارای دو مقسوم‌علیه است: خود آن چندجمله‌ای و چند جمله‌ای ثابت وغیر ازاین نیزممکن است که مقسوم‌علیه‌های دیگر نیز داشته باشد اما تعدادآنها محدود است. درجهٔ هر یك از مقسوم‌علیه‌های یك چندجمله‌ای غیرصفر از درجهٔ آن چندجمله‌ای کوچکتر و یا با آن برابر است. چندجمله‌ای راکه غیراز خودش و چندجمله‌ای ثابت مقسوم‌علیه‌دیگری نداشته باشدچندجمله‌ای‌اول یاچندجمله‌ای تجزیه‌ناپذیر (تحویل‌ناپذیر) می‌نامند. مانند چندجمله‌ای $x^۲+۴$ ویا چندجمله‌ای $a(x^۲+۴)$ که a مقدارِ ثابت‌باشد.

(اگر مجموعهٔ چندجمله‌ایها روی میدان عددهای مختلط بنا شده باشد،چندجمله‌ای $x^۲+۴$ نیز تجزیه‌پذیر است:

$$x^۲+۴=x^۲-(-۴)=x^۲-۴i^۲=(x+۲i)(x-۲i)$$

اما در مجموعهٔ چندجمله‌ایهای جبری که روی میدان عددهای حقیقی بنا می‌شود چندجمله‌ایهای از نوع مزبور تجزیه‌ناپذیر می‌باشند).

هرچندجمله‌ای را درهرچندجمله‌ای دیگرکه ضرب کنیم مضربی‌ازآن به‌دست‌می‌آید، پس تعدادمضربهای یك‌چندجمله‌ای نامحدود است،چندجمله‌ای صفرمضرب هرچندجمله‌ای است. درجهٔ هریك ازمضربهای غیرصفر یك چندجمله‌ای از درجهٔ آن چندجمله‌ای‌بزرگتر یا با آن برابر است.

۴-۳۴- بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوچندجمله‌ای- دوچندجمله‌ای حداقل دارای‌یك مقسوم‌علیه مشترك می‌باشندکه همان چندجمله‌ای ثابت است. اگر مقسوم‌علیه مشترك دو چندجمله‌ای منحصر به‌چندجمله‌ای ثابت باشد، آن دو چندجمله‌ای را نسبت به‌هم اول می‌نامند. اگردوچندجمله‌ای چندین مقسوم‌علیه مشترك داشته باشند، ازبینشان آن‌که بزرگترین درجه را دارد بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك آن دو چندجمله‌ای نامیده می‌شود. این تعریف نیز با تقریب مضربی ازچندجمله‌ای ثابت همراه است چه‌می‌توان بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو چندجمله‌ای را در مقدار ثابت ضرب کرد.

اگرچندجمله‌ای $D(x)$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو چندجمله‌ای $A(x)$ و $B(x)$ باشد، می‌نویسند:

$$(A(x)\ ،\ B(x))=D(x)$$

که اگر $D(x)$ از درجهٔ صفر باشد، $A(x)$ و $B(x)$ نسبت به‌هم اولند و در این حالت:

$$(A(x)\ ،\ B(x))=a \text{ مقدار ثابت}$$

هرگاه $D(x)$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوچندجمله‌ای $A(x)$ و $B(x)$ باشد، ثابت می‌شود که دوچندجمله‌ای $U(x)$ و $V(x)$ یافت می‌شود که رابطهٔ زیر به‌نام اتحاد بزو برقرار است:

$$A(x)U(x)+B(x)V(x)=D(x)$$

با فرض $A(x)=A'(x)D(x)$ و $B(x)=B'(x)D(x)$ خواهیم داشت:

$$A'(x)D(x)U(x)+B'(x)D(x)V(x)=D(x)$$

و اتحاد بزو چنین می‌شود:

$$A'(x)U(x)+B'(x)V(x)=۱$$

که درآن دو چندجمله‌ای $A'(x)$ و $B'(x)$ نسبت به‌هم اولند.

ویژگیهای دیگر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو چندجمله‌ای همانند ویژگیهای بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك اعداد است. مانند اینکه اگریك چندجمله‌ای مقسوم‌علیهی از حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای و نسبت به‌یکی از آنها اول باشد مقسوم‌علیهی از دیگری خواهد بود و غیره.

برای تعیین بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو چندجمله‌ای از روش تقسیمهای متوالی استفاده می‌شود؛ چندجمله‌ای درجهٔ بزرگتر را برچندجمله‌ای درجهٔ کوچکتر تقسیم می‌کنیم و اگر مانده از درجهٔ بزرگتر از صفر باشد مقسوم‌علیه را برآن تقسیم می‌کنیم و عمل را تکرار می‌کنیم تاآنجاکه ماندهٔ تقسیم صفرباشد. مقسوم‌علیه این تقسیم بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك چندجمله‌ایهای مفروض است (در ضمن عمل می‌توانیم از مضربهای ثابت صرف‌نظر کنیم).

مثال: با فرض $A(x)=x^۴+x^۲-۲$ و $B(x)=x^۳+۳x^۲+۲x+۶$ داریم:

$x+۳$	$x-۳$	
$x^۲+۲$	$x^۳+۳x^۲+۲x+۶$	$x^۴+x^۲-۲$
	۰	$۸x^۲+۱۶$

پس $x^{2}+2$ یا $a(x^{2}+2)$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك چندجمله‌ایهای مفروض است.

برای تعیین بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك چند چندجمله‌ای ، نخست بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو چندجمله‌ای بزرگترین درجه را به دست می‌آوریم، سپس بین این بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك و چندجمله‌ای دیگر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك را تعیین می‌کنیم و عمل را تا چندجمله‌ای باکوچکترین درجه انجام می‌دهیم.

اتحاد بزو برای چند چندجمله‌ای به‌صورت زیر تعمیم می‌یابد:

$$A_{1}(x)U_{1}(x)+A_{2}(x)U_{2}(x)+\ \dots\ +A_{n}(x)U_{n}(x)=D(x)$$

۴-۳۵- کوچکترین مضرب مشترك چندجمله‌ایها- حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای مفروض و هر يك از مضربهای آن مضربی مشترك از آن دو چندجمله‌ای است. پس دو چندجمله‌ای دارای مضربهای مشترك به تعداد نامحدود می‌باشندکه از بین آنها آن راکه مخالف صفر است وکوچکترین درجه را دارد کوچکترین مضرب مشترك آن دو چندجمله می‌نامند. این تعریف نیز باتقریب مضربی از چندجمله‌ای ثابت همراه است؛ اگر $M(x)$ کوچکترین مضرب‌مشترك چندجمله‌ایهای $A(x)$ و$B(x)$ و $D(x)$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك آنها و a مقدار ثابت باشد ، $aM(x)$ نیز کوچکترین مضرب مشترك آنها است و رابطهٔ زیر برقرار است:

$$M(x)=\frac{A(x)B(x)}{D(x)}$$

که از همین رابطه برای تعیین کوچکترین مضرب مشترك استفاده می‌شود.

یادداشت- هرگاه‌چندجمله‌ایها به‌صورت‌حاصل‌ضرب عاملهای‌اول‌باشند، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك آنها برابر است با حاصل‌ضرب عاملهای مشترك آنها وکوچکترین مضرب مشترك آنها برابر است با حاصل‌ضرب عاملهای مشترك و عاملهای غیر مشترك.

مثال: هرگاه داشته باشیم:

$$A(x)=3(x-1)^{2}(x^{2}+3)$$
$$B(x)=2(x-1)(x+1)(x^{2}+3)$$
$$C(x)=x^{2}(x-1)(x+1)^{3}(x^{2}+3)^{2}$$

خواهیم داشت:

$$D(x)=a(x-1)(x^{2}+3)$$
$$M(x)=bx^{2}(x-1)^{2}(x+1)^{3}(x^{2}+3)^{2}$$

که معمولاً $a=1$ و $b=1$ اختیار می‌شود.

✽ ۴-۳۶- مسئلهٔ نمونه- هرگاه $P(x)$ و$Q(x)$ دوچندجمله‌ای‌مفروض و$D(x)$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك‌آنها باشد، دوچندجمله‌ای $U(x)$ و $V(x)$ باکمترین درجه را پیداکنیدکه:

$$P(x)U(x)+Q(x)V(x)=D(x)$$

حل- از تقسیم دوطرف بر $D(x)$ خواهیم داشت:

$$A(x)U(x)+B(x)V(x)=۱$$

که $A(x)$ و $B(x)$ نسبت به‌هم اولند. بافرض‌آنکه درجهٔ $B(x)$ بزرگتراز درجهٔ $A(x)$ باشد، داریم:

$$B(x)=A(x)A_۱(x)+R_۱(x)$$

$$U(x)=\frac{۱-B(x)V(x)}{A(x)}=-A_۱(x)V(x)+\frac{۱-R_۱(x)V(x)}{A(x)}$$

برای‌آنکه چندجمله‌ای $U(x)$ وجود داشته باشد لازم و کافی است‌که کسرطرف دوم به‌چندجمله‌ای تبدیل شود. یعنی صورت‌کسر برابر چندجمله‌ای مضرب مخرج‌کسر باشد:

$$۱-R_۱(x)V(x)=A(x)V_۱(x)$$

درجهٔ $R_۱(x)$ کوچکتر از درجهٔ $A(x)$ است و با فرض

$$A(x)=R_۱(x)A_۲(x)+R_۲(x)$$

داریم:

$$V(x)=\frac{۱-A(x)V_۱(x)}{R_۱(x)}=-A_۲(x)V_۱(x)+\frac{۱-R_۲(x)V_۱(x)}{R_۱(x)}$$

با فرض $۱-R_۲(x)V_۱(x)=R_۱(x)V_۲(x)$ و باتوجـه به‌اینکه درجهٔ $R_۲(x)$ کمتر ازدرجهٔ $R_۱(x)$ است $V_۱(x)$ را برحسب $V_۲(x)$ به‌دست می‌آوریم واین عمل را ادامه می‌دهیم تـا درطرف دوم مخرج کسر حاصل مقـدار ثابت باشد. دراین حالت طـرف دوم شامل چندجملـه‌ای مانند $V_n(x)$ است کـه بـرحسب آن مـی‌تـوان چندجملـه‌ایهـای $V_{n-۱}(x)$، ...، $V_۱(x)$، $V(x)$، وبالاخره $U(x)$ راحساب‌کرد. برای‌اینکه‌این‌چندجمله‌ایها باکمترین درجه باشند، $V_n(x)$ را باکمترین درجهٔ ممکن یعنی برابر با صفر (و اگر چنین امری ممکن نباشد آنگاه، آن را با درجهٔ صفر یعنی بـرابـر مقدار ثابت و ...) انتخاب می‌کنیم.

مثال: به‌فرض $(x^۳+۱)U(x)+(x^۲+۱)V(x)=۱$ داریم:

$$V(x)=\frac{۱-(x^۳+۱)U(x)}{x^۲+۱}=-xU(x)+\frac{۱+(x-۱)U(x)}{x^۲+۱}$$

$$۱+(x-۱)U(x)=(x^۲+۱)U_۱(x)$$

$$U(x)=\frac{(x^۲+۱)U_۱(x)-۱}{x-۱}=(x+۱)U_۱(x)+\frac{۲U_۱(x)-۱}{x-۱}$$

$$۲U_۱(x)-۱=(x-۱)U_۲(x) \implies U_۱(x)=\frac{۱+(x-۱)U_۲(x)}{۲}$$

$$U_۲(x)=۰ \implies U_۱(x)=\frac{۱}{۲}$$

$$U(x)=\frac{۱}{۲}(x+۱) \quad ، \quad V(x)=\frac{۱}{۲}(-x^۲-x+۱)$$

که جوابهای با کمترین درجه‌اند. جوابهای کلی به فرض آنکه $k(x)$ یك چندجمله‌ای دلخواه باشد عبارت می‌شوند از:

$$U(x)=\frac{۱}{۲}(x+۱)+(x^۲+۱)k(x) ،$$

$$V(x)=\frac{۱}{۲}(-x^۲-x+۱)-(x^۳+۱)k(x)$$

یادداشت- در روش بالا می‌توان بدون انجام دادن تقسیمها و از روی تعدادآنها درجه‌های $U(x)$ و $V(x)$ را معلوم و سپس به‌روش ضرایب نامعین عمل کرد.

۴،۵- تقسیم بر دوجمله‌ای

۴-۳۷- ماندهٔ تقسیم بر $x-\alpha$- درتقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-\alpha$ مانده از درجهٔ صفر یعنی مقدار ثابت است که آن را R می‌گیریم واگر $Q(x)$ خارج قسمت باشد داریم $P(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$ که به‌ازای $x=\alpha$ نتیجه می‌شود:

$$\boxed{R=P(\alpha)}$$

ماندهٔ تقسیم یك چندجمله‌ای بر $x-\alpha$ برابر است با مقدار آن چندجمله‌ای در ازای $x=\alpha$.

مثال ۱: ماندهٔ تقسیم $P(x)=x^۳+x^۲-۷x+۱$ بر $x+۲$ برابر است با:

$$P(-۲)=-۸+۴+۱۴+۱=۱۱$$

مثال ۲: باقیماندهٔ تقسیم $P(a)=۴a^۲-ab+۲b^۲$ بر $a-۲b$ برابراست با:

$$P(۲b)=۴(۲b)^۲-b(۲b)+۲b^۲=۱۶b^۲$$

۴-۳۸- ماندهٔ تقسیم بر $A(x)-\alpha$- اگر چندجمله‌ای $P(x)$ را بتوان بر حسب $t=A(x)$ مرتب کرد و به‌صورت $P(x)=Q(t)$ درآورد، آنگاه باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $A(x)-\alpha$ همان باقیماندهٔ تقسیم $Q(t)$ بر $t-\alpha$ و برابر است با $Q(\alpha)$.

مثال ۱: تعیین باقیماندهٔ تقسیم $P(x)=۸x^۳-۱۲x^۲+۲x+۱۳$ بر $۲x-\sqrt{۲}$؛
با فرض $t=۲x$ داریم:

$$P(x)=Q(t)=t^{۳}-۳t^{۲}+t+۱۳$$
$$R=Q(\sqrt{۲})=۲\sqrt{۲}-۶+\sqrt{۲}+۱۳=۳\sqrt{۲}+۷$$

مثال ۲: تعیین باقیماندهٔ تقسیم $P(x)=۴x^{۴}+۷x^{۲}-۱۵$ بر $x^{۲}+۳$؛

$$x^{۲}=t \quad ، \quad P(x)=Q(t)=۴t^{۲}+۷t-۱۵$$
$$R=Q(-۳)=۳۶-۲۱-۱۵=۰$$

۴-۳۹- ماندهٔ تقسیم بر $(x-\alpha)(x-\beta)$. باقیماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x-\alpha)(x-\beta)$ از درجهٔ یک است وآن را با $R(x)=ax+b$ نشان می‌دهیم، پس:

$$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)+ax+b$$

x را یک‌بار برابر α و یک بار برابر β اختیار می‌کنیم که نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} P(\alpha)=a\alpha+b \\ P(\beta)=a\beta+b \end{cases}$$

این دستگاه را نسبت به a و b حل می‌کنیم و درنتیجهٔ آن خواهیم داشت:

$$R(x)=\frac{P(\alpha)-P(\beta)}{\alpha-\beta}x+\frac{\alpha P(\beta)-\beta P(\alpha)}{\alpha-\beta}$$
$$=P(\alpha)\frac{x-\beta}{\alpha-\beta}+P(\beta)\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$$

مثال: هرگاه باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-۵$ برابر ۳ و باقیماندهٔ تقسیم آن بر $x+۳$ برابر ۱۳ — باشد، برای تعیین باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $(x-۵)(x+۳)$ داریم:

$$P(x)=(x-۵)(x+۳)Q(x)+ax+b$$

$$\begin{cases} P(۵)=۵a+b=۳ \\ P(-۳)=-۳a+b=-۱۳ \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} a=۲ \\ b=-۷ \end{vmatrix}$$

$$R(x)=۲x-۷$$

یادداشت- روش بالا را می‌توان برای تعیین باقیماندهٔ تقسیم برحاصل‌ضرب سه‌عامل و بیشتر تعمیم داد.

مثال: هرگاه باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+۱$ ، $x+۲$ و $x-۲$ به‌ترتیب ۳ ، ۱۳ و ۹ باشد، برای تعیین باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $(x+۱)(x^{۲}-۴)$ داریم:

$$P(x)=(x+۱)(x^{۲}-۴)Q(x)+ax^{۲}+bx+c$$

$$\begin{cases} P(-1)=a-b+c=3 \\ P(-2)=4a-2b+c=13 \\ P(2)=4a+2b+c=9 \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} a=3 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{array} \right.$$

***۴-۴۰- ماندهٔ تقسیم بر $(x-\alpha)^n$-** این مانده‌چندجمله‌ای $R(x)$ ازدرجهٔ $n-1$ است یعنی:

$$P(x)=(x-\alpha)^n Q(x)+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\dots+a_1x+a_0$$

از دو طرف این رابطه متوالیاً تا $n-1$ مرتبه مشتق می‌گیریم که خواهیم داشت:

$$P'(x)=(x-\alpha)^{n-1}Q_1(x)+a_{n-1}(n-1)x^{n-2}+\dots+a_1$$

$$P''(x)=(x-\alpha)^{n-2}Q_2(x)+a_{n-1}(n-1)(n-2)x^{n-3}+\dots+a_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$P^{(n-1)}(x)=(x-\alpha)Q_{n-1}(x)+a_{n-1}(n-1)(n-2)\dots\times 2\times 1$$

حال اگر در رابطه‌های بالا x را برابربا α قرار دهیم ازآخرین رابطه ضریب a_{n-1} سپس از رابطهٔ قبل از آن ضریب a_{n-2} و به همین ترتیب ضریبهای دیگر تا بالاخره a_0 به‌دست می‌آید.

مثال: تعیین باقیماندهٔ تقسیم x^5+1 بر $(x-1)^3$:

$$x^5+1=(x-1)^3Q(x)+ax^2+bx+c$$

$$5x^4=(x-1)^2Q_1(x)+2ax+b$$

$$20x^3=(x-1)Q_2(x)+2a$$

اکنون در رابطه‌های بالا x را یك می‌گیریم:

$$\begin{cases} 2=a+b+c \\ 5=2a+b \\ 20=2a \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} a=10 \\ b=-15 \\ c=7 \end{array} \right.$$

و باقیماندهٔ تقسیم می‌شود:

$$R(x)=10x^2-15x+7$$

۴-۴۱- بخش‌پذیری بر $x-\alpha$ - برای آنکه چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-\alpha$ بخش‌پذیر باشد لازم و کافی است که $P(\alpha)=0$. زیرا برای‌آنکه $P(x)$ بر $x-\alpha$ بخش‌پذیر باشد لازم وکافی است که ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-\alpha$ برابر صفر باشد و چنانکه درپیش دیدیم این ماندهٔ تقسیم برابر $P(\alpha)$ است.

مثال: چندجمله‌ای $P(x)=2x^3+7x^2+5x-2$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است

زیرا:

$$P(-۲)=-۱۶+۲۸-۱۰-۲=۰$$

۴-۴۲- مسئلهٔ نمونه- مقادیر m و n را بیابید برای آنکه چندجمله‌ای

$$P(x)=x^۵+۲x^۴+۳x^۳+۴x^۲+mx+n$$

بر چندجمله‌ای $x^۲-۵x+۶$ بخش‌پذیر باشد.

حل- یك راه حل مطابق با حل مسئلهٔ نمونهٔ (۴-۳۱) انجام می‌گیرد. روش دیگر آن است که چون

$$x^۲-۵x+۶=(x-۲)(x-۳)$$

و دو عامل $x-۳$ و $x-۲$ نسبت به‌هم اولند کافی است که $P(x)$ بر هر یك از این عاملها بخش‌پذیر باشد.

$$P(۲)=۳۲+۳۲+۲۴+۱۶+۲m+n=۲m+n+۱۰۴$$
$$P(۳)=۲۴۳+۱۶۲+۸۱+۳۶+۳m+n=۳m+n+۵۲۲$$

$$\begin{cases}۲m+n=-۱۰۴\\ ۳m+n=-۵۲۲\end{cases}\Longrightarrow \left|\begin{array}{l}m=-۴۱۸\\ n=۷۳۲\end{array}\right.$$

*** ۴-۴۳- بخش‌پذیری بر $(x-\alpha)^n$-** اگر چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x-\alpha)^n$ بخش‌پذیر باشد داریم:

$$P(x)=(x-\alpha)^nQ(x)\Longrightarrow P(\alpha)=۰$$

از دوطرف این برابری نسبت به x مشتق می‌گیریم و عمل را تا مشتق مرتبهٔ nام ادامه می‌دهیم:

$$P'(x)=n(x-\alpha)^{n-۱}Q(x)+(x-\alpha)^nQ'(x)$$
$$P'(x)=(x-\alpha)^{n-۱}Q_۱(x)\Longrightarrow P'(\alpha)=۰$$
$$P''(x)=(x-\alpha)^{n-۲}Q_۲(x)\Longrightarrow P''(\alpha)=۰$$
$$\vdots$$
$$P^{(n-۱)}(x)=(x-\alpha)Q_{n-۱}(x)\Longrightarrow P^{(n-۱)}(\alpha)=۰$$
$$P^{(n)}(x)=Q_n(x)\Longrightarrow P^{(n)}(\alpha)=Q_n(\alpha)$$

یعنی اگر $P(x)$ بر $(x-\alpha)^n$ بخش‌پذیر باشد هریك ازمشتقهای اول، دوم،... و $n-۱$ام $P(x)$ بر $x-\alpha$ بخش‌پذیرند. برعکس، اگر هریك ازاین مشتقها بر $x-\alpha$ بخش‌پذیر باشند هرکدام عامل $x-\alpha$ را شامل است و نتیجه می‌شود که $P(x)$ دارای عامل $(x-\alpha)^n$ است. بنابراین: شرط لازم و کافی برای آنکه $P(x)$ بر $(x-\alpha)^n$ بخش‌پذیر

باشد آن است که $P(x)$ و هر یک از مشتقهای اول، دوم،... و $n-1$ام آن در ازای α برابر صفر باشد.

مثال: به فرض $P(x)=x^{4}-6x^{2}+8x-3$ و $\alpha=1$ داریم: $P(1)=0$ و:

$$P'(x)=4x^{3}-12x+8 \quad ; \quad P'(1)=0$$
$$P''(x)=12x^{2}-12 \quad ; \quad P''(1)=0$$
$$P'''(x)=24x \quad ; \quad P'''(1)=24$$

پس چندجمله‌ای مزبور بر $(x-1)^{3}$ بخش‌پذیر است.

۴-۴۴- مسئلهٔ نمونه- چند جمله‌ای $P(x)=x^{3}+px-\alpha^{3}-p\alpha$ بر $x-\alpha$ بخش‌پذیر است، به‌ازای چه مقدار از p بر $(x-\alpha)^{2}$ بخش‌پذیر خواهد بود؟

حل- باید مشتق $P(x)$ نیز بر $x-\alpha$ بخش‌پذیر باشد

$$P'(x)=3x^{2}+p$$
$$P'(\alpha)=3\alpha^{2}+p=0 \implies p=-3\alpha^{2}$$

✽ ۴-۴۵- خارج قسمت تقسیم بر $x-\alpha$ - اگر $P(x)$ چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد خارج‌قسمت تقسیم $P(x)$ بر $x-\alpha$ چندجمله‌ای $Q(x)$ از درجهٔ $n-1$ وباقیمانده مقدار ثابت $P(\alpha)$ است، یعنی:

$$\alpha_{n}x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_{1}x+a_{0}$$
$$=(x-\alpha)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_{0})+P(\alpha)$$

در این اتحاد مقادیر a_{0} ، a_{1} ، ... ، a_{n} و α معلومند و چون طرف دوم را عمل‌کرده و مرتب‌کنیم و ضریبهای جمله‌های هم درجه را در دو طرف برابر قرار دهیم مقادیر b_{0} ، b_{1} ، ... ، b_{n-1} به‌دست آمده و چندجمله‌ای خارج قسمت مشخص می‌شود؛

$$b_{n-1}=a_{n}$$
$$b_{n-2}=\alpha b_{n-1}+a_{n-1}$$
$$b_{n-3}=\alpha b_{n-2}+a_{n-2}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$b_{0}=\alpha b_{1}+a_{1}$$
$$R=P(\alpha)=\alpha b_{0}+a_{0}$$

مثال: به فرض $P(x)=x^{4}+2x^{2}-x+4$ و $\alpha=2$ داریم:

$$a_{4}=1 \quad ، \quad a_{3}=0 \quad ، \quad a_{2}=2 \quad ، \quad a_{1}=-1 \quad ، \quad a_{0}=4$$

خارج قسمت چندجمله‌ای درجهٔ سوم است با ضریبهای:

$$b_{3}=a_{4}=1 \quad ، \quad b_{2}=2\times1+0=2$$

$$b_1 = 2\times 2+2=6 \quad , \quad b_0 = 2\times 6-1=11$$
$$R=P(2)=2\times 11+4=26$$

پس در تقسیم چندجمله‌ای بالا بر $x-2$ خارج قسمت برابر $x^3+2x^2+6x+11$ و باقیمانده برابر ۲۶ است.

✻ ۴-۴۶- تقسیم $x^n \pm \alpha^n$ بر $x \pm \alpha$- دراین حالت $P(x)$ چندجمله‌ای درجهٔ n است که در آن ضریب a_n برابر یك و جملهٔ ثابت a_0 برابر $\pm\alpha^n$ و سایر ضریبها صفر می‌باشند و درنتیجه ضریبهای چندجمله‌ای خارج قسمت می‌شوند:

$$b_{n-1}=a_n=1$$
$$b_{n-2}=\mp\alpha\times 1+0=\mp\alpha$$
$$b_{n-3}=(\mp\alpha)(\pm\alpha)+0=\alpha^2$$
$$b_{n-4}=\pm\alpha^3$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$b_2=(\mp\alpha)^{n-3}$$
$$b_1=(\mp\alpha)^{n-2}$$
$$b_0=(\mp\alpha)^{n-1}$$
$$R=\pm 2\alpha^n \text{ یا } 0$$

خارج قسمت چندجمله‌ای است نسبت به x و α همگن به صورت:

$$x^{n-1}\mp\alpha x^{n-2}+\alpha^2x^{n-3}\mp\ldots+(\mp\alpha)^{n-2}x+(\mp\alpha)^{n-1}$$

برای وضوح بیشتر حالتهای مختلف را جداگانه بررسی می‌کنیم:

۱) تقسیم $x^n+\alpha^n$ بر $x+\alpha$:

خارج‌قسمت : $x^{n-1}-\alpha x^{n-2}+\alpha^2x^{n-3}-\ldots+(-\alpha)^{n-2}x+(-\alpha)^{n-1}$

باقیمانده : $\begin{cases} 2\alpha^n \text{ ، اگر } n \text{ زوج} \\ 0 \text{ ، اگر } n \text{ فرد} \end{cases}$

نتیجه- دوجمله‌ای $x^n+\alpha^n$ وقتی بر $x+\alpha$ بخش‌پذیر است‌که n فرد باشد.

مثال ۱: درتقسیم x^5+1 بر $x+1$ باقیمانده صفر وخارج قسمت برابراست با:

$$x^4-x^3+x^2-x+1$$

مثال ۲: درتقسیم a^4+b^4 بر $a+b$ باقیمانده $2b^4$ و خارج قسمت چنین است:

$$a^3-a^2b+ab^2-b^3$$

۲) تقسیم $x^n+\alpha^n$ بر $x-\alpha$:

خارج قسمت : $x^{n-1}+\alpha x^{n-2}+\alpha^2x^{n-3}+\ldots+\alpha^{n-2}x+\alpha^{n-1}$

باقیمانده : $2\alpha^n$

نتیجه- دوجمله‌ای $x^n+\alpha^n$ هیچگاه بر $x-\alpha$ بخش‌پذیر نیست.

مثال: درتقسیم x^5+32 بر $x-2$ باقیمانده ۶۴ و خارج قسمت می‌شود:

$$x^4+2x^3+4x^2+8x+16$$

۳) تقسیم $x^n-\alpha^n$ بر $x+\alpha$:

خارج قسمت : $x^{n-1}-\alpha x^{n-2}+\alpha^2x^{n-3}-\dots+(-\alpha)^{n-2}x+(-\alpha)^{n-1}$

باقیمانده : $\begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ زوج} \\ -2\alpha^n & \text{اگر } n \text{ فرد} \end{cases}$

نتیجه- دوجمله‌ای $x^n-\alpha^n$ وقتی بر $x+\alpha$ بخش‌پذیر است‌که n زوج باشد.

مثال ۱: دوجمله‌ای $81x^4-25y^4$ بر $3x+y\sqrt{5}$ بخش‌پذیر است و خارج‌قسمت می‌شود:

$$27x^3-9\sqrt{5}x^2y+15xy^2-5\sqrt{5}y^3$$

مثال ۲: در تقسیم $1-a^7$ بر $1+a$ باقیمانده $2a^7-$ و خارج قسمت عبارت است از:

$$1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6$$

۴) تقسیم $x^n-\alpha^n$ بر $x-\alpha$:

خارج قسمت : $x^{n-1}+\alpha x^{n-2}+\dots+\alpha^{n-2}x+\alpha^{n-1}$

باقیمانده : 0

نتیجه- دوجمله‌ای $x^n-\alpha^n$ همواره بر $x-\alpha$ بخش‌پذیر است.

مثال: دوجمله‌ای $x^{10}-y^{15}$ یعنی $(x^2)^5-(y^3)^5$ بر x^2-y^3 بخش‌پذیراست و خارج قسمت عبارت است از:

$$(x^2)^4+(x^2)^3y^3+(x^2)^2(y^3)^2+x^2(y^3)^3+(y^3)^4$$
$$=x^8+x^6y^3+x^4y^6+x^2y^9+y^{12}$$

۴،و- ریشه‌های چند جمله‌ای

۴-۴۷- تعریف- عدد معین α را ریشه یا صفر چندجمله‌ای $P(x)$ می‌نامند هرگاه $P(\alpha)=0$ باشد، یعنی مقدار چندجمله‌ای $P(x)$ به‌ازای $x=\alpha$ برابر صفر گردد.

در پیش دیدیم که اگر $P(x)$ به‌ازای α برابر صفر گردد آنگاه $P(x)$ بر $x-\alpha$ بخش‌پذیر است و برعکس. بنابراین: شرط لازم و کافی برای آنکه α ریشهٔ چندجمله‌ای $P(x)$ باشد آن است‌که $P(x)$ بر $x-\alpha$ بخش‌پذیر باشد، یعنی؛

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x) \iff P(\alpha)=0$$

مثال ۱: عدد -2 ریشهٔ چندجمله‌ای $P(x)=x^4+2x^3-9x^2-18x$ است زیرا $P(-2)=0$ و درنتیجه این چندجمله‌ای به صورت $(x+2)(x^3-9x)$ درمی‌آید.

مثال ۲: با فرض

$$P(x)=x^3+2ax^2-2a^2x-a^3=(x-a)(x^2+3ax+a^2)$$

عدد a ریشهٔ چندجمله‌ای $P(x)$ است و $P(a)=0$.

۴-۴۸- تعداد ریشه‌های چندجمله‌ای - هرگاه چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ اول باشد داریم:

$$P(x)=ax+b=a\left(x+\frac{b}{a}\right)$$

ودرنتیجه $\alpha=-\dfrac{b}{a}$ ریشهٔ چندجمله‌ای است که منحصر به‌فرد می‌باشد.

هرگاه چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ بیش از یك اما اول یعنی تجزیه ناپذیر باشد بر عاملی حقیقی غیر از خودش و چندجمله‌ای ثابت بخش‌پذیر نیست و درنتیجه ریشهٔ حقیقی ندارد (مقصود از عامل حقیقی چندجمله‌ای با ضریبهای حقیقی است). همچنین است چندجمله‌ایهایی که به‌صورت حاصل‌ضرب عاملهایی باشند که هیچکدام ازاین عاملها ریشهٔ حقیقی نداشته باشند.

مثال ۱: چندجمله‌ای $2x^2+6$ اول است پس دارای ریشهٔ حقیقی نیست.

مثال ۲: چندجمله‌ای $(x^2+1)(x^2-x+1)=x^4-x^3+2x^2-x+1$ اول نیست اما ریشهٔ حقیقی ندارد زیرا حاصل‌ضرب دو عامل است که هیچکدام ازاین عاملها ریشهٔ حقیقی ندارند.

هرگاه α ریشهٔ چندجمله‌ای درجهٔ nاُم $P(x)$ باشد داریم $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$ که $Q(x)$ از درجهٔ $n-1$ است. حال اگر چندجمله‌ای $Q(x)$ نیز دارای ریشهٔ β باشد داریم:

$$Q(x)=(x-\beta)Q_1(x)$$

$$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)Q_1(x)$$

یعنی β نیز ریشهٔ $P(x)$ است و $P(x)$ علاوه بر $x-\alpha$ بر $x-\beta$ نیز بخش‌پذیر است.

برعکس، اگر دو عدد متمایز α و β ریشه‌های $P(x)$ باشند داریم:

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)=(x-\beta)R(x)$$

$x-\beta$ حاصل‌ضرب دو عامل $x-\alpha$ و $Q(x)$ را می‌شمرد و نسبت به $x-\alpha$ اول است

پس $Q(x)$ را می‌شمرد یعنی $Q(x)=(x-\beta)Q_1(x)$ و درنتیجه:

$$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)Q_1(x)$$

که $Q_1(x)$ از درجهٔ $n-2$ است.

به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که برای‌آنکه علاوه بر α و β عدد γ نیزریشهٔ $P(x)$ باشد لازم و کافی است که داشته باشیم:

$$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)Q_2(x)$$

که $Q_2(x)$ از درجهٔ $n-3$ است.

بالاخره برای‌آنکه تعداد n عدد α ، β ، γ ، ... λ ریشه‌های $P(x)$ باشند لازم و کافی‌است که $P(x)$ برحاصلضرب $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ ...\ (x-\lambda)$ بخش‌پذیر باشدکه چون این حاصلضرب ازدرجهٔ n و با $P(x)$ همدرجه است پس خارج قسمت از درجهٔ صفر یعنی مقدار ثابت (ضریب جملهٔ درجهٔ n) است:

$$P(x)=a_n(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ ...\ (x-\lambda)$$

چون $P(x)$ از درجهٔ n است تعداد پرانتزهای طرف دوم نمی‌تواند بیش از n باشد مگرآنکه $P(x)$ برابر صفر باشدکه در این حال تعداد پرانتزها یعنی تعداد ریشه‌های $P(x)$ نامتناهی خواهد بود. بنابراین:

نتیجهٔ ۱- یك چندجمله‌ای درجهٔ n که صفرنباشد حداکثر می‌تواند تعداد n ریشه داشته باشد.

نتیجهٔ ۲- اگر یك چندجمله‌ای درجهٔ n به‌ازای بیش از n مقدار صفر شود متحد با صفر است، یعنی به‌ازای هرمقدار از متغیر صفر می‌شود.

یادداشت- ثابت می‌شود که هرچند جمله‌ای درجهٔ فرد حداقل یك ریشهٔ حقیقی دارد، و بنابرآن اگر یك چندجمله‌ای درجهٔ زوج یك ریشهٔ حقیقی داشته باشد حداقل یك ریشهٔ حقیقی دیگر نیز خواهد داشت.

همچنین بنابه **قضیهٔ دالامبر** ثابت می‌شود که در مجموعهٔ عددهای مختلط هر چند-جمله‌ای درجهٔ n دارای n ریشه است.

۴-۴۹- مسئلهٔ نمونه- چندجمله‌ای ازدرجهٔ سوم رابیابیدکه ۱ و۲ و۳ ریشه‌های آن باشند و مقدار آن در ازای ۴ برابر ۶ باشد.

حل- داریم:

$$P(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$P(4)=a\times 6=6 \quad ; \quad a=1$$

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)=x^3-6x^2+11x-6$$

۴-۵۰- مسئلهٔ نمونهٔ دیگر- به‌فرض‌آنکه a و b و c از یکدیگر متمایز باشند صحت اتحاد زیر را ثابت‌کنید.

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1$$

حل- طرف اول نسبت به x چندجمله‌ای از درجهٔ دوم $P(x)$ است و باید ثابت کنیم‌که چندجمله‌ای $Q(x)=P(x)-1$ متحد با صفر است. اما داریم:

$$Q(a)=0 \quad , \quad Q(b)=0 \quad , \quad Q(c)=0$$

چندجمله‌ای $Q(x)$ از درجهٔ دوم است و بیش از دو ریشه دارد پس متحد با صفر است؛

$$Q(x)=P(x)-1\equiv 0 \implies P(x)\equiv 1$$

یادداشت- اتحاد بالا به‌صورت زیر تعمیم می‌گردد (چند جمله‌ای لاگرانژ بند ۴-۱۸):

$$\sum \frac{(x-b)(x-c)\dots(x-l)}{(a-b)(a-c)\dots(a-l)}\equiv 1$$

۴-۵۱- ریشه‌های چندگانه- هرگاه تعداد k ریشه از ریشه‌های یك چندجمله‌ای باهم برابرباشند می‌گوییم که‌آن چندجمله‌ای ریشهٔ مکرر مرتبهٔ k (یا ریشهٔ چندگانه مرتبهٔ k) دارد. برای آنکه α ریشهٔ چندگانهٔ مرتبهٔ k از چندجمله‌ای درجهٔ nام $P(x)$ باشد، که $k\leqslant n$ ، لازم و کافی است‌که:

$$P(x)=(x-\alpha)^k Q(x) \quad , \quad Q(\alpha)\neq 0$$

مثال ۱ : چند جمله‌ای $4x^2+4x+1=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ دارای ریشهٔ مکرر مرتبهٔ ۲ برابر $-\frac{1}{2}$ است که‌آن را ریشهٔ مضاعف یا ریشهٔ دوگانه می‌گویند.

مثال ۲: در چندجمله‌ای $x^4-4x^3+16x-16=(x-2)^3(x+2)$ عدد ۲ ریشهٔ سه‌گانه و ۲ — ریشهٔ ساده است.

۴-۵۲- مسئلهٔ نمونه- اولاً ثابت‌کنیدکه چندجمله‌ای

$$P(x)=mx^3-(2m-1)x^2+(m-2)x+1$$

در ازای‌هرمقدار m ریشهٔ مضاعف دارد. ثانیاً به‌ازای چه‌مقدار m چندجمله‌ای بالاریشهٔ مکرر مرتبهٔ ۳ دارد؟

حل- اولاً داریم:

$$P(x)=m(x^3-2x^2+x)+x^2-2x+1$$

$$P(x)=(mx+۱)(x-۱)^۲$$

هرچه باشد m ، عدد ۱ ریشهٔ دوگانهٔ چندجمله‌ای است.

ثانیاً باید ۱ ریشهٔ $mx+۱$ نیز باشد که نتیجه می‌شود $m=-۱$ و:

$$P(x)=-(x-۱)^۳$$

یادآوری- اگر α ریشهٔ مکرر مرتبهٔ k از چندجمله‌ای $P(x)$ باشد، این چندجمله‌ای بر $(x-\alpha)^k$ بخش‌پذیر است و درنتیجه بنابرآنچه در بند (۴-۴۳) بیان شد علاوه برخود چندجمله‌ای، هر یک از مشتقهای اول، دوم، ... و $k-۱$ام آن نیز بر $x-\alpha$ بخش‌پذیر است. یعنی α ریشهٔ هریک ازاین مشتقها نیز می‌باشد.

۴-۵۳- مسئلهٔ نمونه- ثابت کنیدکه چندجمله‌ای زیر ریشهٔ دوگانهٔ یک دارد.

$$P(x)=nx^{n+۱}-(n+۱)x^n+۱$$

حل- به‌سادگی معلوم می‌شودکه $P(۱)=۰$ و همچنین

$$P'(x)=n(n+۱)x^n-n(n+۱)x^{n-۱} \Longrightarrow P'(۱)=۰$$

چندجمله‌ای و مشتق‌آن در ازای $x=۱$ صفر می‌شوند پس ۱ ریشهٔ دوگانهٔ چندجمله‌ای است.

۴-۵۴- مسئلهٔ نمونه- اگرچهارجمله‌ای درجهٔ سوم ریشهٔ سه‌گانه داشته باشد چه رابطه‌هایی بین ضریبهای آن برقرار است.

حل- باید سه چندجمله‌ای‌زیر ریشهٔ مشترک داشته باشند:

$$P(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d$$

$$P'(x)=۳ax^۲+۲bx+c$$

$$P''(x)=۶ax+۲b$$

چندجمله‌ای‌سوم‌درجهٔ‌اول‌است وریشهٔ‌آن $-\dfrac{b}{۳a}$ است. این مقدار را در دو چندجمله‌ای دیگر قرارداده وحاصل هریک را برابر صفر قرار می‌دهیم‌که نتیجه خواهد شد:

$$b^۲=۳ac \quad \text{و} \quad ۲b^۳=۹a(۳ad-bc)$$

۴-۵۵- چندجمله‌ایها و عبارتهای جبری هم‌ارز- نسبت به‌یک‌مجموعهٔ مرجع، دوچندجمله‌ای ودرحالت کلی‌دوعبارت جبری‌را هم‌ارزیا معادل گویند هرگاه ریشه‌های آنها، درآن مجموعهٔ مرجع نظیربه‌نظیر باهم برابرباشند. اگر دوچندجمله‌ای $P(x)$ و $Q(x)$، نسبت به‌مجموعهٔ عددهای مختلط (حقیقی و موهومی)، هم‌ارز باشند داریم:

$$P(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\ \dots\ (x-\lambda)$$

$$Q(x)=b(x-\alpha)(x-\beta)\ \dots\ (x-\lambda)$$

ونتیجه خواهدشد که برای هم‌ارزی دو چندجمله‌ای، در مجموعهٔ عددهای مختلط، لازم و کافی است که ضریبهای آنها متناسب باشند مانند:

$$P(x)=۳x^{۲}-۲x-۷ \quad , \quad Q(x)=\frac{-۳}{۴}(۳x^{۲}-۲x-۷)$$

یك چندجمله‌ای بایك عبارت کسری تحویل ناپذیر وقتی هم‌ارز است که با چندجمله‌ای صورت آن هم‌ارز باشد.

۴-۵۶- روابط بین ریشه‌ها و ضریبهای چندجمله‌ای - فرض می‌کنیم که چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ n باشد:

$$P(x)=a_{n}x^{n}+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_{۱}x+a_{۰}$$

و فرض می‌کنیم که ریشه‌های این چندجمله‌ای عبارت باشند از $x_{۱}$ ، $x_{۲}$ ، ... ، x_{n} پس داریم:

$$P(x)=a_{n}(x-x_{۱})(x-x_{۲})\cdots(x-x_{n})$$

اگر عملیات ضرب را انجام دهیم وحاصل را مرتب کنیم اتحاد زیر را خواهیم داشت:

$$a_{n}x^{n}+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_{۱}x+a_{۰}$$
$$\equiv a_{n}[x^{n}-(x_{۱}+x_{۲}+\cdots+x_{n})x^{n-۱}+\cdots+(-۱)^{n}x_{۱}x_{۲}\cdots x_{n}]$$

ضریبهای جمله‌های همدرجه در دو طرف باهم برابرند و در نتیجه تعداد n رابطهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$s_{۱}=\sum x_{i}=x_{۱}+x_{۲}+\cdots+x_{n}=-\frac{a_{n-۱}}{a_{n}}$$

$$s_{۲}=\sum x_{i}x_{j}=x_{۱}x_{۲}+x_{۱}x_{۳}+\cdots+x_{۱}x_{n}+\cdots$$
$$+x_{n-۱}x_{n}=\frac{a_{n-۲}}{a_{n}}$$

$$s_{۳}=\sum x_{i}x_{j}x_{k}=x_{۱}x_{۲}x_{۳}+x_{۱}x_{۳}x_{۴}+\cdots=-\frac{a_{n-۳}}{a_{n}}$$

. . . .

$$s_{n}=x_{۱}x_{۲}\cdots x_{n}=(-۱)^{n}\frac{a_{۰}}{a_{n}}$$

مثال ۱: برای سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم $ax^{۲}+bx+c$ داریم:

$$x_{۱}+x_{۲}=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_{۱}x_{۲}=\frac{c}{a}$$

مثال ۲: برای چهارجمله‌ای درجهٔ سوم $ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$ داریم:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$$

۴-۵۷- تعیین چندجمله‌ای با معلوم بودن روابط بین ریشه‌ها- هرگاه تعداد n رابطهٔ بین ریشه‌های یك چندجمله‌ای داده‌شده‌باشد هریك ازضریبهای چندجمله‌ای برحسب a_n ضریب جملهٔ بزرگترین درجه مشخص می‌شود و درنتیجه چندجمله‌ای نیزبرحسب این ضریب معین می‌گردد. دراین حالت چندجمله‌ای را به صورت زیر در نظر می‌گیریم که نمایانگر یك دسته چندجمله‌ایهای هم‌ارز است:

$$P(x)=a[x^n-s_1x^{n-1}+s_2x^{n-2}-\ldots+(-1)^ns_n]$$

مثال: تعیین چندجمله‌ای درجهٔ سوم که ریشه‌هایش در رابطه‌های زیر صدق کنند:

$$x_1+x_2+x_3=0$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-7$$

$$x_1x_2x_3=-6$$

داریم $s_1=0$ ، $s_2=-7$ و $s_3=-6$ و:

$$P(x)=a(x^3-7x+6)$$

۴-۵۸- تبدیل چندجمله‌ای از راه تبدیل ریشه‌ها- هرگاه هرریشهٔ x_i از چندجمله‌ای $P(x)$ را به‌عبارتی از آن مانند $f(x_i)$ تبدیل‌کنیم چندجمله‌ای دیگر $Q(x)$ را خواهیم داشت که هرریشه‌اش برحسب ریشهٔ نظیر از $P(x)$ برابر $f(x_i)$ خواهدبود. روش سادهٔ تشکیل $Q(x)$ آن است که فرض‌می‌کنیم $t=f(x)$ و x را برحسب t حساب‌می‌کنیم که می‌شود $x=g(t)$ و عبارت $P(g(t))$ را تشکیل می‌دهیم. ساده‌ترین چندجمله‌ای هم‌ارز بااین عبارت $Q(t)$ است و t را به x تبدیل می‌کنیم.

مثال ۱: تشکیل چندجمله‌ای که ریشه‌هایش به‌ترتیب عکس ریشه‌های چندجمله‌ای زیر باشد:

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

فرض می‌کنیم $t=\frac{1}{x}$ که $x\neq0$ وخواهیم داشت $x=\frac{1}{t}$ و $t\neq0$ و:

$$P\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{a_n}{t^n}+\frac{a_{n-1}}{t^{n-1}}+\dots\frac{a_1}{t}+a_0$$
$$=\frac{1}{t^n}(a_n+a_{n-1}t+\dots+a_1t^{n-1}+a_0t^n)$$

با تبدیل t به x و باحذف عامل مخالف صفر $\frac{1}{t^n}$ خواهیم داشت:

$$Q(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

ملاحظه می‌شود که در دو چندجمله‌ای $P(x)$ و $Q(x)$ ضریبها به‌ترتیب عکس بایکدیگر برابرند. بنابراین وبه‌عنوان مثال چندجمله‌ای که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های چندجمله‌ای ax^3+bx^2+cx+d باشد عبارتست از dx^3+cx^2+bx+a.

مثال ۲: اگر x_i ریشهٔ چندجمله‌ای $P(x)=x^3-3x-2$ باشد چندجمله‌ای تشکیل‌دهیم که ریشه‌اش $\frac{x_i+1}{x_i-1}$ باشد، فرض می‌کنیم:

$$t=\frac{x+1}{x-1} \quad و \quad x-1\neq 0 \implies x=\frac{t+1}{t-1} \quad و \quad t-1\neq 0$$

$$\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^3-3\left(\frac{t+1}{t-1}\right)-2=\frac{-4(t^3-3t^2)}{(t-1)^3}$$

پس از حذف عاملهای مخالف صفر و تبدیل t به x چندجمله‌ای $Q(x)=x^3-3x^2$ به‌دست می‌آید.

۴-۵۸- چندجمله‌ای معکوسه به‌چندجمله‌ای گفته می‌شود که **ریشه‌هایش** دو به‌دو عکس یکدیگر یاعکس و قرینهٔ یکدیگرباشند. به‌عبارت دیگراگر α ریشه‌ای ازچندجمله‌ای باشد $\frac{1}{\alpha}$ یا $-\frac{1}{\alpha}$ نیزریشه‌ای ازچندجمله‌ای باشد. بنابراین اگر درچندجمله‌ای‌معکوسه x به $\pm\frac{1}{x}$ تبدیل شود چندجمله‌ای هم‌ارز باآن به‌دست می‌آید وقبلاً معلوم شدکه اگر در یك چندجمله‌ای x به $\frac{1}{x}$ تبدیل شود ضریبها به‌ترتیب عکس قرار می‌گیرند. بنابراین درچندجمله‌ای معکوسه ضریبهایی‌که از دوطرف به‌یك فاصله‌اندیا باهم برابرند یا قرینه‌اند که‌در حالت اول‌آن را معکوسهٔ نوع اول و در حالت دوم آن را معکوسهٔ نوع دوم می‌نامند. مانند:

سه جمله‌ای درجهٔ دوم معکوسهٔ نوع اول: $\quad ax^2+bx+a$

چهارجمله‌ای درجهٔ سوم معکوسهٔ نوع دوم: ax^3+bx^2-bx-a

چندجمله‌ای درجهٔ چهارم معکوسهٔ نوع اول: $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$

چندجمله‌ای درجهٔ چهارم معکوسهٔ نوع دوم: ax^4+bx^3-bx-a

یادداشت- در چندجمله‌ای درجهٔ زوج که معکوسهٔ نوع دوم باشد ضریب جملهٔ وسط صفر است زیرا این ضریب باید با قرینهٔ خودش برابر باشد.

۴-۵۹- مسئلهٔ نمونه- ثابت کنید که حاصل‌ضرب هردو چندجمله‌ای معکوسه یك چندجمله‌ای معکوسه است.

حل- چندجمله‌ای معکوسه برحسب آنکه درجه‌اش فرد یا زوج باشد به‌ترتیب چنین نوشته می‌شود:

$$P(x)=a(x\pm 1)(x-\alpha)\left(x\pm\frac{1}{\alpha}\right)(x-\beta)\left(x\pm\frac{1}{\beta}\right)\cdots$$

$$P(x)=a(x-\alpha)\left(x\pm\frac{1}{\alpha}\right)(x-\beta)\left(x\pm\frac{1}{\beta}\right)\cdots$$

وحاصل‌ضرب هردوچندجمله‌ای ازاین نوع یك چندجمله‌ای است از همین نوع یعنی شامل هرعامل $(x-\alpha)$ که باشد شامل عامل $\left(x\pm\frac{1}{\alpha}\right)$ نیز خواهد بود و معکوسه است.

* ۴،ز- نهاد مجموعهٔ چندجمله‌ایهای یك‌متغیری

۴-۶۰- حلقهٔ چندجمله‌ایها- بنا برآنچه در بندهای پیش بیان شد مجموعهٔ چندجمله‌ایها دارای ویژگیهای زیر است:

۱) مجموعه‌ای است ناتهی؛

۲) جمع عملی درونی درآن است که جابجایی و انجمنی است، چندجمله‌ای صفر عضو بی‌اثر آن است و هرعضو نسبت به‌جمع یك قرینه دارد (مجموعهٔ چندجمله‌ایها با عمل جمع گروهی جابجایی پدید می‌آورد)؛

۳) ضرب عملی درونی درآن است که انجمنی و نسبت به‌جمع پخشی است؛

۴) این عمل ضرب جابجایی است؛

۵) دارای عضو واحد (چندجمله‌ای یك) است که عضو بی‌اثر عمل ضرب است؛

۶) عضو بی‌اثرعمل جمع (یعنی چندجمله‌ای صفر) نسبت به‌عمل ضرب عضوی غیرعادی است؛

با توجه به‌ویژگیهای بالا و با توجه به‌تعریف حلقه و اقسام آن (که درمبحث

نهادهای جبری بیان می‌شود) نتیجه می‌شود که: مجموعهٔ چندجمله‌ایها حلقه‌یی است جابجایی، یك دار و جامع (حوزهٔ درست).

۴-۶۱- حلقهٔ زیربنا- درچندجمله‌ایهای حقیقی متغیرهاوضریبها عددهای حقیقی‌اند که نهاد مجموعهٔ آنها هیأت و درنتیجه حلقه است. ازاین‌رو گفته می‌شود که: حلقهٔ چندجمله‌ایهای حقیقی روی حلقهٔ عددهای حقیقی بناشده است. می‌توان حلقهٔ چندجمله‌ایها را روی هرحلقهٔ دیگرمانند حلقهٔ عددهای‌مختلط وغیره بناکرد. هرگاه k حلقه‌ای جابجایی ویك دار باشد، حلقهٔ چندجمله‌ایهای یك متغیری روی حلقهٔ k چنین تعریف می‌شود؛ اگر a_0 ، a_1 ، a_2 ، ... ، a_n ، ... عضوهایی از k باشند، دنبالهٔ

$$P=(a_0\ , a_1\ , a_2\ , \dots\ , a_n\ , 0\ , 0\ , 0\ , \dots)$$

که جمله‌هایش از a_n به‌بعد همه صفرند چندجمله‌ای یك متغیری درجهٔ n با ضریبهای a_0 ، a_1 ، ... ، a_n نامیده می‌شود. چندجمله‌ای $(a\ , 0\ , 0\ , 0\ , \dots)$ با مقدار ثابت a برابر است وچندجمله‌ای $(0\ , 1\ , 0\ , 0\ , 0\ , \dots)$ به‌نام متغیر با x نشان داده می‌شود و داریم:

$$(0\ , 0\ , 1\ , 0\ , 0\ , 0\ , \dots)=x^2$$

$$(0\ , 0\ , 0\ , 1\ , 0\ , 0\ , 0\ , \dots)=x^3$$

و غیره. و به‌عنوان مثال و به‌فرض $a \in k$ و $b \in k$ داریم:

$$(0\ , a\ , 0\ , 0\ , b\ , 0\ , 0\ , 0\ , \dots)=ax+bx^4$$

عملیات بین این چندجمله‌ایها نیز بر حسب عملیات بین ضریبهای آنها تعریف می‌شود؛

$$P=(a_0\ , a_1\ , \dots\ , a_n\ , 0\ , 0\ , 0\ , \dots)$$

$$Q=(b_0\ , b_1\ , \dots\ , b_n\ , 0\ , 0\ , 0\ , \dots)$$

$$P+Q=(a_0+b_0\ , a_1+b_1\ , \dots\ , a_n+b_n\ , 0\ , 0\ , 0\ , \dots)$$

$$P\cdot Q=(a_0b_0\ , a_0b_1+a_1b_0\ , \dots\ , a_0b_n+\dots+a_ib_{n-i}+\dots+a_nb_0\ , a_1b_n\ , \dots\ , a_nb_n\ , 0\ , 0\ , 0\ , \dots)$$

و بالاخره مشتق چندجمله‌ای $P=(a_0\ , a_1\ , a_2\ , \dots\ , a_n\ , 0\ , 0\ , \dots)$ می‌شود:

$$P'=(a_1\ , 2a_2\ , \dots\ , na_n\ , 0\ , 0\ , 0\ , \dots)$$

مثال: به فرض $P(1,\ 2,\ -1,\ 0,\ 0, \dots)$ و $Q=(-1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ \dots)$ داریم:

$$P+Q=(0\ , 4\ , -1\ , 0\ , 0\ , 0\ , \dots)$$

$$PQ=(-1\ , 0\ , 5\ , -2\ , 0\ , 0\ , 0\ , \dots)$$

$$Q^2=Q\cdot Q=(1\ , -4\ , 4\ , 0\ , 0\ , 0\ , \dots)$$

$$P' = (۲, -۲, ۰, ۰, ۰, ...) \quad ، \quad Q' = (۲, ۰, ۰, ۰, ...)$$

۴-۶۲- زیرحلقه‌ها- هر زیرمجموعه ازمجموعهٔ چندجمله‌ایها که دارای دوویژگی زیر باشد یك زیرحلقه از حلقهٔ چندجمله‌ایها خواهد بود:

۱) یك زیر گروه ازگروه جمعی چندجمله‌ایها باشد؛ یعنی نسبت به‌عمل جمع بسته باشد، شامل چندجمله‌ای صفر (عضو بی‌اثر عمل جمع) باشد، قرینهٔ هرعضو خود را نیز شامل باشد.

۲) نسبت به‌عمل ضرب بسته باشد، یعنی حاصل‌ضرب هردو عضو از زیرمجموعه باز عضوی ازآن باشد.

مثال: مجموعهٔ چندجمله‌ایهای با ضریبهای صحیح(= عددهای صحیح مثبت، منفی و صفر) یك زیرحلقه تشکیل می‌دهد. زیرا اولاً مجموع هردو چندجمله‌ای با ضریبهای صحیح یك چندجمله‌ای با ضریبهای صحیح است، چندجمله‌ای صفر نیز یك چندجمله‌ای با ضریبهای صحیح (صفر) است، قرینهٔ هرچندجمله‌ای باضریبهای صحیح باز یك چندجمله‌ای با ضریبهای صحیح است؛ ثانیاً حاصل‌ضرب هر دوچندجمله‌ای با ضریبهای صحیح یك چند-جمله‌ای با ضریبهای صحیح است.

۴-۶۳- ایده‌آلها- درمجموعهٔ چندجمله‌ایها هرایده‌آل عبارت است از زیرحلقه‌ای که حاصل‌ضرب هرعضوآن درهرچندجمله‌ای دلخواه نیز عضوی ازآن باشد. بنابراین و باتوجه به‌تعریف زیرحلقه نتیجه می‌شودکه‌یك ایده‌آل عبارت است از مجموعه‌ای ازچند-جمله‌ایهاکه دارای دو ویژگی زیر باشد:

۱) یك زیرگروه ازگروه جمعی چندجمله‌ایها باشد؛ یعنی نسبت به‌عمل جمع بسته باشد، چندجمله‌ای صفر را دربر داشته باشد، قرینهٔ هرعضو خود را نیز شامل باشد.

۲) حاصل‌ضرب هرعضوآن درهرچندجمله‌ای دلخواه نیز عضوی ازآن باشد.

دو ویژگی بالا را می‌توان چنین خلاصه‌کرد: اگر P مجموعهٔ چند جمله‌ایها باشد، زیرمجموعهٔ I از P با برقراربودن دو شرط زیر یك ایده‌آل خواهد بود:

$$۱)\ \forall X \in I \ , \ \forall Y \in I \implies X + Y \in I \ (\text{یا}\ X - Y \in I)$$

$$۲)\ \forall X \in I \ , \ \forall Y \in P \implies XY \in I$$

مثال: مجموعهٔ چندجمله‌ایهایی‌که هرکدام برچندجمله‌ای $A(x)$ بخش‌پذیرند یك ایده‌آل حلقهٔ چندجمله‌ایها را تشکیل می‌دهند. زیرا چندجمله‌ای صفر بر $A(x)$ بخش‌پذیر است. هردوچندجمله‌ای‌که بر $A(x)$ بخش‌پذیرباشند مجموع آنها نیز بر $A(x)$ بخش‌پذیر است، هرچندجمله‌ای‌که بر $A(x)$ بخش‌پذیرباشد قرینه‌اش نیز بر $A(x)$ بخش‌پذیراست، بالاخره اگر یك چندجمله‌ای بر $A(x)$ بخش‌پذیر باشد حاصل‌ضرب آن در هر چندجمله‌ای

دلخواه نیز بر $A(x)$ بخش‌پذیر است.

۴-۶۴- قضیه- هر ایده‌آل از حلقهٔ چندجمله‌ایها مجموعهٔ چندجمله‌ایهایی است که مضربهای یك چندجمله‌ای مشخص می‌باشند.

برهان- این ایده‌آل را I می‌نامیم و فرض می‌کنیم $A \neq 0$ چندجمله‌ای از آن باشد که دارای کوچکترین درجه است و P یك چندجمله‌ای دلخواه از آن باشد. درتقسیم P بر A داریم $P=AQ+R$ که درجهٔ R کوچکتر از درجهٔ A است. چون P و A هرکدام عضو I هستند بنابه‌ویژگیهای ایده‌آل چندجمله‌ای AQ و چندجمله‌ای $P-AQ=R$ نیز عضو I است اما چون درجهٔ R کوچکتر از درجهٔ A است و A عضوی از I است که کمترین درجه را دارد پس R به‌ناچار برابر صفر است و P مضرب A است. بنابراین هر چندجمله‌ای عضو I مضربی از چندجمله‌ای A است. هرگاه A_1 چندجماه‌ای دیگری از I و همدرجه با A باشد چون A_1 بر A بخش‌پذیر و باآن همدرجه است پس باآن متناسب است یعنی $A_1=\alpha A$ که α عدد ثابت است و درپیش دیده‌ایم که بخش‌پذیری چندجمله‌ایها با تقریب ضریبی ثابت تعریف می‌شود.

مثال: مجموعهٔ چندجمله‌ایهایی که جملهٔ ثابت‌آنها صفراست یك ایده‌آل حلقهٔ چندجمله‌ایها را پدید می‌آورد. این چندجمله‌ایها عبارتند از مضربهای چندجمله‌ای ax.

۴-۶۵- مسئلهٔ نمونه- هرگاه A و B دو چندجمله‌ای معلوم و U و V دو چندجمله‌ای دلخواه باشند ثابت کنیدکه مجموعهٔ چندجمله‌ایهای $P=AU+BV$ یك‌ایده‌آل پدید می‌آورد.

حل- بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوچندجمله‌ای معلوم A و B یك‌چندجمله‌ای معلوم D است. هریك ازچندجمله‌ایهای AU و BV و درنتیجه مجموع‌آنها بر D بخش‌پذیر است. پس مجموعهٔ چندجمله‌ایهای P عبارت‌است ازمجموعهٔ مضربهای چندجمله‌ای D و یك ایده‌آل است.

۴-۶۶- فضای برداری چندجمله‌ایها- فرض می‌کنیم P مجموعهٔ چندجمله‌ایها باشدکه روی حلقهٔ k بناشده است. مجموعهٔ P با عمل درونی جمع یك‌گروه جابجایی تشکیل می‌دهد (عمل جمع‌چندجمله‌ایها جابجایی، انجمنی، دارای‌عضوبی‌اثر وپدیدآورندهٔ عضو قرینه برای هرعضو است). مجموعهٔ P همچنین مجهز به‌عمل خارجی ضرب روی حلقهٔ k است‌که اگر α عضوی از k و A یك چندجمله‌ای باشد αA نیز یك چندجمله‌ای است و علاوه برآن برای A و هرچندجمله‌ای دیگر B و عضو دیگر β از k داریم:

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$$

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$$

$$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$$
$$1\times A=A$$

باتوجه به‌ویژگیهای بالا و باتوجه به‌تعریف‌فضای برداری، هرگاه حلقهٔ k یك هیأت باشد درآن صورت مجموعهٔ چندجمله‌ایهای P یك فضای برداری روی هیأت k از ضریبها خواهد بود.

درچندجمله‌ایهای حقیقی ضریبها عددهای حقیقی هستند و حلقهٔ عددهای حقیقی یك هیأت است، پس مجموعهٔ چندجمله‌ایهای حقیقی یك متغیری فضایی برداری روی هیأت عددهای حقیقی است و ۱ ، x ، x^2 ، ... ، x^n ، ... یك پایهٔ آن را تشکیل می‌دهد.

۴،ح- تمرینها و پرسشها

۴-۶۷- تمرینهای دستهٔ اول

● عملیات زیر را انجام دهید و حاصل را ساده ومرتب‌کنید:

۱) $-\frac{3\sqrt{2}}{5}x^2yz^4\left(\frac{5\sqrt{5}}{6}x^3y^2z\right)^2$

۲) $[(2a^2x^3y)\times(-3ab^2y^3)]^3$

۳) $(a+b)x+(a-b)y-[2(a-b)x-3(a+b)y]$

۴) $(a-a^2)(a^2+a^3+a^4)$

۵) $(x^a+y^b-z^c)(3x^a-2y^b+z^c)$

۶) $(m^{k-1}+n^{k+1})(m^{k+1}-n^{k-1})$

۷) $[4x^2-2a(x+a^2)][3x^2+4x(a^2+x)]$

۸) $(4p^3-2p+1)\ :\ (2p-1)$

۹) $(x^7+x^3-2)\ :\ (x^3+x)$

۱۰) $[(a+b)x^3+(a+b)^2x^2-2abx-2ab(a-b)]\ :\ (x+a+b)$

● درهریك ازچندجمله‌ایهای زیر مقدار خواسته شده را حساب‌کنید:

۱۱) $P(x)=-3x^3+7x^2-4$

$P\left(-\frac{1}{3}\right)=?$ ، $P(\sqrt{3}-1)=?$ ، $P\left(\frac{1}{x}\right)=?$

۱۲) $P(x)=x^2-1$ ، $P[P(x)]=?$

$P(a-b\sqrt{۲})=?$ ، $P\left[P\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\right]=?$

۱۳) $P(x\,,\,y)=۴(x-۱)^۲-۹(y+۳)^۲-۴$

$P(۱\,,\,-۳)=?$ ، $P(۰\,,\,-۳)=?$

$P(y\,,\,x)=?$ ، $P(۲-x\,,-۶-y)=?$

۱۴) $P(a)=a^n(b^p-c^p)+b^n(c^p-a^p)+c^n(a^p-b^p)$

$P(b)=?$ ، $P(c)=?$

۱۵) $P(x\,,\,y)=(a+۱)^۲x^۲-۴axy-(a-۱)^۲y^۲$

$P(x\,,\,x)=?$ ، $P(a-۱\,,\,a+۱)=?$

۱۶) $P(x)=۲x^۲-۱$, $\alpha=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$

$P(\alpha)=?$ ، $P[P(\alpha)]=?$

۱۷) $P(x\,,y)=(x+y-۱)^۲+(x-y+۱)^۲$

$P(\sqrt{۵۳}\,,\sqrt{۴۷}+۱)=?$

۱۸) $P(x\,,\,y)=۲(x^۶+y^۶)+۳(x^۴+y^۴)$

$P\left(\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۲}\ ،\ \frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۲}\right)=?$

● درهریك از تمرینهای زیر بدون انجام عمل تقسیم باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $Q(x)$ را بیابید.

۱۹) $P(x)=۵x^۵-۴x^۳-۳x+۲$ ، $Q(x)=x+۲$

۲۰) $P(x)=x^{۱۰}-۳۲x^۵+۲$ ، $Q(x)=x-۲$

۲۱) $P(x)=۹x^۳+۱۲x^۲+۶x-۷$ ، $Q(x)=۳x+۱$

۲۲) $P(x)=x^۶+۴x^۴+۴x^۲-۵$ ، $Q(x)=x^۲+۳$

۲۳) $P(x)=ax^۴-(a+b)x^۲+a-۱$ ، $Q(x)=x^۲-a-b$

● مسئله‌ها و تمرینهای زیر را حل کنید:

۲۴) حاصل‌عبارت زیریك چندجمله‌ای است، درجه ومجموع ضریبهای‌آن را تعیین کنید.

$$x(۲x^۲-۱)(۳x^۳-۲)\ldots[nx^n-(n-۱)]$$

۲۵) به‌ازای چه‌مقدارهایی از p و q سه‌جمله‌ای $x^۲+px+q$ بزرگترین‌مقسوم‌علیه مشترك دو چندجمله‌ای زیر است:

$$x^۳-۷x^۲+۱۶x-۱۰ \qquad x^۳-۳x^۲-۸x+۳۰$$

۲۶) مقدار a را پیدا کنید که نمودار $y=\frac{x^{2}-(a+1)x+2}{x-a}$ خط مستقیم باشد.

۲۷) چندجمله‌ای $P(x)=x^{3}+px^{2}+qx+r$ را مشخص کنید بنابرآنکه $P(1)=8$ و $P(x)-P(x-1)$ با $x^{2}+x+1$ متناسب باشد.

۲۸) ثابت کنید که حاصل‌ضرب چندجمله‌ایهای $ax+by+cz$ و $bx+cy+az$ و $cx+ay+bz$ ترکیبی خطی از چندجمله‌ایهای زیر است:

$$A(x)=x^{3}+y^{3}+z^{3} \quad , \quad B(x)=y^{2}z+z^{2}x+x^{2}y$$
$$C(x)=yz^{2}+zx^{2}+xy^{2} \quad , \quad D(x)=xyz$$

۲۹) به‌فرض‌آنکه $P(x)$ چندجمله‌ای درجهٔ دوم باشد، چندجمله‌ایهای زیررا ساده کنید:

$$A(x)=P(x)-P(\alpha)-\frac{x-\alpha}{2}[P'(x)+P'(\alpha)]$$

$$B(x)=P(x)-P(\beta)-(x-\beta)P'\left(\frac{x+\beta}{2}\right)$$

۳۰) به‌فرض‌آنکه $P(x)$ چندجمله‌ای درجهٔ سوم باشد مقادیر α ، β و γ رابیابیدکه:

$$P(x+h)=P(x)+\frac{h}{\alpha}P'(x)+\frac{h^{2}}{\beta}P''(x)+\frac{h^{3}}{\gamma}P'''(x)$$

۳۱) به‌فرض آنکه $P(x)$ چندجمله‌ای درجهٔ سوم مفروض باشد، α ، β ، γ و δ را بیابیدکه:

$$P(x)=\alpha+\frac{\beta}{1!}x+\frac{\gamma}{2!}x(x-1)+\frac{\delta}{3!}x(x-1)(x-2)$$

۳۲) ثابت کنیدکه چندجمله‌ای زیر بر $x-y$ بخش‌پذیر است و خارج قسمت را به‌دست آورید.

$$P(x\ ,\ y\ ,\ z)=x(x^{2}+xz+z^{2})-y(y^{2}+yz+z^{2})$$

۳۳) به‌فرض $P(x)=8x^{3}-2x^{2}-5x+\frac{5}{4}$ ثابت کنیدکه $P\left(\frac{x^{4}}{2}\right)$ بر $\sqrt{2}x^{2}+1$ بخش‌پذیر است.

۳۴) بافرض $P(x\ ,\ y)=x^{2}+y^{2}-xy+9x-12y+40$ رابطهٔ بین α و β را پیدا کنید بنابرآنکه‌چندجمله‌ای $P(x-\alpha\ ,\ y-\beta)$ نسبت به‌x و y متقارن باشد.

۳۵) چندجمله‌ای $P(x)$ را تعیین کنیدکه بر $x^{2}-4$ بخش‌پذیر باشد و داشته باشیم:

$$P(x+1)=x^{3}+ax^{2}+bx+a+b$$

۳۶) ثابت کنیدکه چندجمله‌ای $P(x)=(ax^{k}+c)^{2n+1}+(cx^{k}+a)^{2n+1}$ بر

x^k+1 بخش‌پذیر است.

۳۷) چندجمله‌ای درجهٔ دوم را پیدا کنید که بر $x-1$ بخش‌پذیر و باقیماندهٔ تقسیم آن بر $x+2$ برابر ۳۳ باشد.

۳۸) چندجمله‌ای درجهٔ دوم را بیابید که باقیمانده‌های تقسیم آن بر $x-1$ و بر $x+1$ باهم برابر باشند.

۳۹) ضریبهای a ، b و c را بیابید که داشته باشیم:

$$ax+bx(x-1)+cx(x-1)(x-2)=x(x+1)(2x+1)$$

۴۰) مطلوب است محاسبهٔ p و q که داشته باشیم:

$$x^2+qx+p\equiv(x+p)^2+q^2$$

۴۱) p و q را پیدا کنید که x^4+px^2+q بر x^2+x+1 بخش‌پذیر باشد.

۴۲) سه جمله‌ای $P(x)=x^2+x+1$ مفروض است. p و k را چنان بیابید که:

$$P(x-p)+P(x+p)\equiv kP(x)+p$$

۴۳) α و β را تعیین کنید که:

$$x^4+2x^3-4x^2-5x-6\equiv(x-\alpha)(x-\beta)(x^2+x+1)$$

۴۴) ثابت کنید که عبارت زیر متحد با صفر است.

$$P(x)=(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)$$
$$+(b-c)(c-a)(a-b)$$

۴۵) k را برحسب m معلوم کنید که حاصل‌ضرب دو ریشهٔ چندجمله‌ای

$$P(x)=(m-\alpha)x^2-(2-m)x+k-m\alpha$$

بستگی به α نداشته باشد.

۴۶) مقدار m را تعیین کنید که چندجمله‌ای زیر ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$$P(x)=(x^2-1)(x^2+mx+4)$$

۴۷) a و b را معلوم کنید که ax^4+bx^3+1 بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر باشد.

۴۸) چه رابطه‌ای بین p و q برقرار باشد تا ریشه‌های سه‌جمله‌ای $P(x)=x^2+px+q$ دارای تفاوتی برابر یك باشند.

۴۹) p و q را معلوم کنید که مجموع دو ریشه ازچندجمله‌ای $P(x)=x^3+px+q$ برابر ۲ و حاصل‌ضرب همان دو ریشه برابر ۱۵ — باشد.

۵۰) هرگاه داشته باشیم:

$$P(x)=ax^2+bx+c \quad , \quad P(\alpha)=\beta \quad , \quad P(\beta)=\alpha \quad , \quad \alpha\neq\beta$$

ثابت کنید که چندجمله‌ای زیر بر $(x-\alpha)(x-\beta)$ بخش‌پذیر است.

$$Q(x)=a^{۲}x^{۲}+a(b+۱)x+ac+b+۱$$

۴-۶۸. تمرینهای دستهٔ دوم

● مسئله‌ها و تمرینهای زیر را حل کنید.

۵۱) چندجمله‌ای $P(x\ ,\ y)$ را معلوم کنید که نسبت به x و y متقارن و همگن از درجهٔ ۳ بوده و داشته باشیم:

$$P(x\ ,\ ۱-x)=۵x^{۲}-۵x+۱$$

۵۲) سه جمله‌ای درجهٔ دوم $P(x)$ را معلوم کنید که چندجمله‌ای زیر نسبت به x و y متقارن وهمگن باشد:

$$P(۲)x^{۴}+P(۰)x^{۳}y+P(\sqrt{۲})x^{۲}y^{۲}+[P(۱)-۱]xy^{۳}+y^{۴}+P(\sqrt{۳})$$

۵۳) b را برحسب a و c به‌دست‌آورید برای‌آنکه چندجمله‌ای

$$P(x)=a(b-c)x^{۲}+b(c-a)x+c(a-b)$$

بر $(x-۱)^{۲}$ بخش‌پذیر باشد.

۵۴) چندجمله‌ای $P(x\ ,\ y)$ راتعیین کنید که نسبت به x و y متقارن بوده و بر $x^{۲}-y^{۲}$ بخش‌پذیر باشد و داشته باشیم:

$$P(x\ ,\ kx)=x^{۳}(a+bk+ck^{۲}+dk^{۳})$$

۵۵) **مسئلهٔ هرمیت-** ثابت کنید یك چندجمله‌ای که نسبت به x و y متقارن است اگر بر $x-y$ بخش‌پذیر باشد بر $(x-y)^{۲}$ بخش‌پذیر خواهد بود.

۵۶) چندجمله‌ایهای $P(x)=x^{۲}+mx-۲$ و $Q(x)=mx-۱$ مفروض است.

۱) m را پیدا کنید که $P(x)$ بر $Q(x)$ بخش‌پذیر باشد.

۲) به‌فرض $m\neq\pm۱$ ثابت کنید که منحنیهای c_m به‌معادلهٔ $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ برسه نقطهٔ ثابت می‌گذرند.

۵۷) چندجمله‌ایهای حداکثردرجهٔ دوم $P(x)$ و $Q(x)$ را تعیین کنید که مشتق تابع زیر متحد با $x^{۲}\cos x$ باشد.

$$y=P(x)\sin x+Q(x)\cos x$$

۵۸) بین p و q چه رابطه برقرار باشد تا $x^{۵}-۵px+۴q$ بر $(x-\alpha)^{۲}$ بخش‌پذیر باشد.

۵۹) به‌فرض $P(x)=ax^{۳}+bx^{۲}$ ضریبهای a و b را بیابید که:

$$P[r(r+1)]-P[r(r-1)]\equiv r^5$$

۶۰) ثابت کنید که چندجمله‌ای $P(x)=x^5-8x^4+19x^3-9x^2-27$ دارای ریشهٔ مکرر مرتبهٔ ۳ است و این ریشه را بیابید.

۶۱) چندجمله‌ای درجهٔ پنجم $P(x)$ را پیداکنیدکه $P(x)+2$ بر $(x+1)^3$ و $P(x)-2$ بر $(x-1)^3$ بخش‌پذیر باشد.

۶۲) به‌فرض $P(x)=x^2+px+q$ ضریبهای p و q را پیداکنیدکه $P[P(x)]$ یک چندجمله‌ای دومجذوری یا معکوسه باشد.

۶۳) هرگاه ماندهٔ تقسیم یک سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم بر $x-1$ ، $x-2$ و $x-3$ به‌ترتیب r ، $2r$ و $4r$ باشد، ماندهٔ تقسیم آن را بر $x-4$ به‌دست آورید.

۶۴) چندجمله‌ای درجهٔ چهارم $P(x)$ را چنان تعیین کنیدکه $P(x+1)$ بر $(x-1)^2$ و $P(x-1)$ بر $(x+1)^2$ بخش‌پذیر بوده و $P(1)=1$ باشد.

۶۵) اگر $P(x+y\ ,\ x-y)=xy+y^2$ باشد، $P(x,\ y)$ را به‌دست‌آورید.

۶۶) هرگاه x_1 ، x_2 ، ... ، x_n ریشه‌های چندجمله‌ای

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)+\lambda$$

باشند، چندجمله‌ای تشکیل دهیدکه ریشه‌هایش عبارت باشد از a_1 ، a_2 ، ... ، a_n

۶۷) به‌فرض $P(x)=2x^2-1$ ثابت کنیدکه:

$$\underbrace{PP\dots P}_{n\ \text{مرتبه}}(\cos\alpha)=\cos 2^n\alpha$$

۶۸) ماندهٔ تقسیم a^3 را بر a^2+a+1 به‌دست آورید و ثابت کنیدکه چندجمله‌ای

$$P(a)=a^{3p+2}+a^{3q+1}+a^{3r}$$

بر a^2+a+1 بخش‌پذیر است.

۶۹) به‌فرض $u_n=x^{2n}+x^n+1$ صحت همنهشتی زیر را ثابت کنید:

$$u_{n+3}\equiv u_n\ (\text{mod. } x^2+x+1)$$

۷۰) چه رابطه‌ای بین p و q برقرار باشد تا چندجمله‌ای x^2+px+q بر $x-\alpha$ و بر $x-\alpha^2$ بخش‌پذیر باشد؟

۷۱) اگرریشه‌های چندجمله‌ای $x^4+px^3+qx^2+rx+s$ تصاعدحسابی یاتصاعد هندسی تشکیل دهند چه‌رابطه‌ای بین ضریبهای آن برقرار است؟

۷۲) چه‌رابطه‌ای بین a و b برقرار باشد تا چندجمله‌ای $x^n+nax+(n-1)b$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد؟

۷۳) **چه‌رابطه‌ای** بین a ، b و c برقرار باشد تا چندجمله‌ایهای ax^5+bx+c و

$x^3 - 1$ نسبت به‌یکدیگر اول باشند.

۷۴) عددهای درست m و n را پیدا کنید که ماندهٔ تقسیم $x^m + nx$ بر $x^2 - x - 2$ برابر $2x + 6$ شود.

۷۵) عددهای گویا و مخالف صفر a ، b و c را بیابید که ریشه‌های چندجمله‌ای زیر باشند:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

۷۶) هر گاه ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ بر $x - 1$ ، $x + 3$ و $x - 2$ به ترتیب ۲ ، ۱۰− و ۲۰ باشد، ماندهٔ تقسیم آن را بر $(x+1)(x-3)(x+2)$ به‌دست آورید.

۷۷) اگر چندجمله‌ای $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1$ را بر $x^2 - 1$ و بر $x^2 - 4$ تقسیم کنیم به ترتیب مانده‌های $-9x + 6$ و $-12x + 45$ به دست می‌آید. ماندهٔ تقسیم $P(x)$ را بر $x^2 - 3x + 2$ به‌دست آورید.

۷۸) اولاً عدد طبیعی a را بیابید که اگر p عدد اول و بزرگتر از عدد a و $P(x)$ یك چندجمله‌ای دلخواه باضرایب صحیح باشد داشته‌باشیم: $P(0) = p$ و $P(a) = a$
ثانیاً هر گاه خارج قسمت تقسیم $P(x)$ بر $(x-a)^n$ برابر با عدد مثبت q باشد، ثابت کنید که n زوج است.

۷۹) ثابت کنید که چندجمله‌ای $P(x) = x^{9999} + x^{8888} + \ldots + x^{1111} + 1$ بر چندجمله‌ای $Q(x) = x^9 + x^8 + \ldots + x + 1$ بخش‌پذیر است.

۸۰) هر گاه مجموع دو عدد s و حاصل‌ضرب آنها p معلوم باشد، مجموع توانهای پنجم آنها را حساب کنید.

۸۱) ثابت کنید که اگر چندجمله‌ای $P(x) = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d$ بر چندجمله‌ای $Q(x) = ax^2 + 2bx + c$ بخش‌پذیر باشد $P(x)$ توان سوم و $Q(x)$ توان دوم خواهد بود.

۸۲) ثابت کنید که عدد معین α وجود دارد که چندجمله‌ای

$$P(x) = x^3 - 2mx^2 + (2m^2 - 1)x - 2m(m-1)$$

به ازای هر مقدار m بر $x - \alpha$ بخش‌پذیر است.

۸۳) چند جمله‌ای از درجهٔ سوم $P(x)$ را بیابید که

$$P(x) - P(x-1) = x^2$$

و از آنجا حاصل سری زیر را نتیجه بگیرید.

$$\sum_{1}^{n} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

۸۴) چندجمله‌ای درجهٔ یك را با $P_1(x)$، درجهٔ ۲ را با $P_2(x)$ و بالاخره درجهٔ n را با $P_n(x)$ نشان می‌دهیم. درجهٔ چندجمله‌ای زیر را حساب کنید.

$$P(x) = [P_1(x)][P_2(x)]^2[P_3(x)]^3 \ldots [P_n(x)]^n$$

۸۵) مجموع ضریبهای چندجمله‌ای زیر را حساب کنید.

$$P(x) = (ax+b)(a^2x^2+b^2)(a^4x^4+b^4) \ldots (a^{2^n}x^{2^n}+b^{2^n})$$

۸۶) ثابت کنیدکه چندجمله‌ای $P(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ برچندجمله‌ای $x(x+1)(2x+1)$ بخش‌پذیر است.

۸۷) ثابت کنید که چندجمله‌ای $P(x) = (x^n - 1)(x^{n+1} - 1)$ بر چندجمله‌ای $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ بخش‌پذیر است.

۸۸) ثابت کنید که اگر n مضرب p باشد چندجمله‌ای

$$P(a, b, c) = a^n(b^p - c^p) + b^n(c^p - a^p) + c^n(a^p - b^p)$$

بر $(a^p - b^p)(b^p - c^p)(c^p - a^p)$ بخش‌پذیر است.

۸۹) چندجمله‌ای زیر را مشخص کنید که ریشهٔ چهارگانه داشته باشد:

$$P(x) = x^6 + px^4 + 10x^3 + qx + r$$

۹۰) پارامترهای a ، b ، c و d رابیابید که اگر به هر ریشهٔ چندجمله‌ای

$$P(x) = x^4 + (a-b)x^3 + cx^2 + (c+d)x + 2$$

یك افزوده شود ریشه‌ای از چند جمله‌ای زیر به‌دست آید:

$$Q(x) = x^4 - ax^3 - cx + d$$

۹۱) ثابت کنیدکه چندجمله‌ای غیرصفرزیر به‌ازای همهٔ مقادیر n بر $(x-1)^4$ بخش‌پذیر است ومقداری قابل قبول برای n یافت نمی‌شودکه در ازای آن، چندجمله‌ای بر $(x-1)^5$ بخش پذیر باشد.

$$P(x) = x^{2n} - n^2x^{n+1} + 2(n^2-1)x^n - n^2x^{n-1} + 1$$

۹۲) هر گاه ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ برابر ۳ ، بر $x+3$ برابر ۲ و بر $x-4$ برابر ۵ باشد، ماندهٔ تقسیم $P(x)$ را بر $(x-2)(x+3)(x-4)$ به‌دست آورید.

۹۳) چه رابطه‌ای بین p و q برقرارباشد تا چندجمله‌ای $x^4 - px + q$ بر $(x-\alpha)^2$ بخش پذیر باشد؟

۹۴) ثابت کنید که چندجمله‌ای غیرصفر $ax^n + bx^{n-1} + 1$ نمی‌تواند ریشهٔ مکرر یك

با مرتبهٔ پیش از ۲ داشته باشد.

۹۵) هریك از چندجمله‌ایهای

$$P(x, y) = (x+y)^7 - (x^7+y^7) \quad ، \quad Q(x, y) = xy(x^2+xy+y^2)$$

را برحسب $s = x+y$ و $p = xy$ بنویسید و نتیجه بگیرید که اولی بر دومی بخش‌پذیر است.

۹۶) چندجمله‌ای درجهٔ پنجم $P(x)$ را بیابید که:

$$(1-x^2)P''(x) - xP'(x) + 25P(x) \equiv 0$$

۹۷) ثابت کنید که اگر $P(x)$ چندجمله‌ای غیرصفر باشد، تابع با ضابطهٔ $y = P(x)$ نمی‌تواند متناوب باشد؛ یعنی ثابت کنید که عدد $\alpha \neq 0$ وجود ندارد که

$$P(x+\alpha) \equiv P(x)$$

۹۸) p و q را بیابید که x^4+px^2+q بر x^2+px+q بخش‌پذیر باشد.

۹۹) p را بیابید که چندجمله‌ای $x^4 - px^3 + 3x^2 - 2px - p^2$ بر $x - 2$ بخش‌پذیر باشد و بدون انجام عمل تقسیم خارج قسمت را به‌دست آورید.

۱۰۰) چندجمله‌ای درجهٔ n را با P_n نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم:

$$P_0 \equiv 1 \quad ، \quad P_1 \equiv x$$

$$P_n \equiv 2xP_{n-1} - P_{n-2}$$

۱) چندجمله‌ایهای P_2 ، P_3 ، P_4 و P_5 را به‌دست‌آورید.

۲) با روش استقراءِ ریاضی ثابت کنید که چندجمله‌ای P_n از درجهٔ n است.

۳) ثابت کنید اگر n زوج باشد P_n چندجمله‌ای زوج است و اگر n فرد باشد P_n چندجمله‌ای فرد است.

۴) ضریبهای x^n و x^{n-2} را در P_n معلوم کنید.

۵) مقدار عددی P_n را به‌ازای $x = 1$ و به‌ازای $x = -1$ حساب کنید.

۱۰۱) با قبول اینکه هرعبارت جبری نمایی را می‌توان به صورت چندجمله‌ای بسط داد، ماندهٔ تقسیم عبارت زیر را بر $(x-1)(x-2)$ به‌دست آورید:

$$f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2} + x\left(\frac{a^x - a^{-x}}{2}\right)$$

۱۰۲) تابع با ضابطهٔ $y = ax^2+bx+c$ را مشخص کنید که نمودارآن برسه نقطهٔ نظیر اکسترمم (ماکسیمم یا مینیمم) تابع با ضابطهٔ زیر بگذرد:

$$y = 3x^4 + 2x^3 - 9x^2 + 6x + 3$$

۱۰۳) چندجمله‌ای $P(x)$ را پیدا کنید که کمترین درجه را داشته و $P(x)+1$ بر x^2+1

و $P(x)-1$ بر x^3+1 بخش‌پذیر باشد.

۱۰۴) چندجمله‌ای $D(x)$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك چندجمله‌ایهای

$$P(x)=x^4+x^3+x^2-x-2 \quad ، \quad Q(x)=x^5-x^3+2x^2-2$$

را پیدا کنید و دوچندجمله‌ای $U(x)$ و $V(x)$ را بیابیدکه:

$$U(x)P(x)+V(x)Q(x)=D(x)$$

۱۰۵) اگر a و b عددهای گویا باشند، چندجمله‌ای تشکیل دهیدکه یك ریشهٔ آن عبارت باشد از: $a+\sqrt[n]{b}$

حالت ویژه $a=1$ ، $b=2$ و $n=3$

۱۰۶) چندجمله‌ای $P(x)=x^3+x^2-2$ دارای ریشهٔ ۱ ودو ریشهٔ دیگر α و β است.

۱) سه‌جمله‌ای $Q(x)=ax^2+bx+c$ را پیدا کنیدکه:

$$Q(1)=1 \quad ، \quad Q(\alpha)=\beta \quad , \quad Q(\beta)=\alpha$$

۲) ثابت کنیدکه چندجمله‌ای $Q[Q(x)]-x$ بر $P(x)$ بخش‌پذیر است.

۱۰۷) هرگاه داشته باشیم

$$u+v=1 \quad , \quad uv=p \quad , \quad u^n+v^n=S_n$$

۱) ثابت کنیدکه:

$$S_n=S_{n-1}-pS_{n-2}$$

و مقادیر S_2 ، S_3 ، S_4 و S_5 را حساب کنید.

۲) چه رابطه بین a ، b و c برقرار باشد تا عبارت زیر مستقل از p باشد

$$E=aS_5+bS_4+cS_3$$

۳) حاصل عبارت زیر را به‌دست‌آورید:

$$A=\frac{\sin^{10}x+\cos^{10}x}{5}-\frac{\sin^8x+\cos^8x}{2}+\frac{\sin^6x+\cos^6x}{3}$$

۱۰۸) چندجمله‌ای $Q(x)$ و $R(x)$ را بیابیدکه اگر $\cos\alpha$ ریشه‌ای ازچندجمله‌ای $P(x)$ باشد، چندجمله‌ایهـای $P[Q(x)]$ و $P[R(x)]$ به‌ترتیب دارای ریشهٔ $\cos\frac{\alpha}{2}$ و $\cos\frac{\alpha}{3}$ باشند.

باقبول اینکه ریشه‌های چندجمله‌ای $P(x)=4x^2-1$ عبارتند از $\pm\cos 60^\circ$ ، چندجمله‌ای تشکیل دهیدکه ریشه‌هایش عبارت باشند از:

$$\pm\cos 10^\circ ، \pm\cos 20^\circ ، \pm\cos 40^\circ ، \pm\cos 50^\circ ، \pm\cos 70^\circ ، \pm\cos 80^\circ$$

و حاصل عبارت زیر را به‌دست‌آورید:

$$\cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 30^\circ \ldots \cos 80^\circ$$

۱۰۹) هرگاه ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $Q(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ برابر

$$a(x-2)(x-3)+b(x-3)(x-1)+c(x-1)(x-2)$$

باشد، به‌ازای چه‌مقدار از k ماندهٔ تقسیم x^5+kx بر $Q(x)$ بدون جملهٔ درجهٔ اول است.

۱۱۰) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو چندجمله‌ای زیر را به‌دست‌آورید:

$$P(x)=x^{15}-610x-377 \quad , \quad Q(x)=x^{13}-233x-144$$

۱۱۱) چندجمله‌ای $P(x)$ را پیدا کنیدکه‌کمترین درجه را داشته و اگر بر $(x+2)^3$ و بر $(x-2)^3$ تقسیم شود مانده‌های به‌ترتیب ۲ و ۲ − به‌دست‌آید.

۱۱۲) چندجمله‌ای $P(x)$ بابزرگترین درجه رامشخص کنیدکه ایده‌آل حاصل ازمضربهای $P(x)$ چندجمله‌ایهای $A(x)=x^{51}+1$ و $B(x)=x^{85}+1$ را شامل باشد.

۱۱۳) به‌فرض‌آنکه $U(x)$ و $V(x)$ دو چندجمله‌ای دلخواه باشند و

$$A(x)=x^4+(\sin\alpha-\cos\alpha)x^3+(1-\sin\alpha\cos\alpha)x^2+x\sin\alpha\,,$$
$$B(x)=x^3+(1-\cos\alpha)x^2+(1-\cos\alpha)x+1$$

مجموعهٔ چندجمله‌ایهای $P(x)=A(x)U(x)+B(x)V(x)$ یك ایده‌آل I از حلقهٔ چندجمله‌ایها راتشکیل می‌دهند. چندجمله‌ای $Q(x)$ راپیداکنیدکه بزرگترین درجه را داشته و عضوهای I مضربهای آن باشند.

۱۱۴) ثابت کنید که مجموعهٔ چندجمله‌ایهای یك متغیری زوج یك زیرحلقه از حلقهٔ چندجمله‌ایها را پدید می‌آورند.

۱۱۵) ثابت‌کنیدکه مجموعهٔ چندجمله‌ایهای یك متغیری با ضریبهای زوج یك ایده‌آل از حلقهٔ چندجمله‌ایهای با ضرایب صحیح است.

۱۱۶) دو چندجمله‌ای زیر داده شده است:

$$P(x)=1+x+x^2+\ldots+x^p$$
$$,\ p>q$$
$$Q(x)=1+x+x^2+\ldots+x^q$$

۱) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك $P(x)$ و $Q(x)$ را به‌دست‌آورید.

۲) p و q چگونه باشند تا $P(x)$ بر $Q(x)$ بخش‌پذیر باشد.

حالتهای ویژه: $(p=8$ و $q=5)$ ، $(p=9$ و $q=4)$.

۱۱۷) دوچندجمله‌ای زیر داده شده است:

$$P(x)=1-x^{n}+x^{2n}-\dots+x^{(k-1)n}-x^{kn}$$

$$Q(x)=1-x+x^{2}-\dots+x^{n-2}-x^{n-1}$$

خارج قسمت و ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $Q(x)$ را به‌دست‌آورید.

۱۱۸) چندجمله‌ایهای $P(x)$ و $Q(x)$ را پیدا کنید بنابرآنکه کوچکترین مضرب مشترک آنها عبارت باشد از $M(x)=5[(x+y)^{7}-x^{7}-y^{7}]$ واگر $D(x)$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك آنها باشد رابطهٔ $P(x)U(x)+Q(x)V(x)=D(x)$ پس از ساده شدن به‌صورت زیر درآید:

$$5U(x)+7(x^{2}+xy+y^{2})V(x)=1$$

۱۱۹) از مسئلهٔ پیش نتیجه بگیرید که به‌فرض

$$P(x)=(x+y)^{5}-x^{5}-y^{5}\quad,\quad Q(x)=(x+y)^{7}-x^{7}-y^{7}$$

چندجمله‌ای $5Q(x)$ بر چندجمله‌ای $7P(x)$ بخش‌پذیر است.

۱۲۰) ثابت کنید که اگر يك چندجمله‌ای بر مشتق خود بخش‌پذیر باشد دارای ریشهٔ چندگانه است

۱۲۱) فرض می‌کنیم که E مجموعهٔ چندجمله‌ایهای با ضریبهای حقیقی باشد که درجهٔ آنها نابزرگتر از ۲ است. به‌هرچندجمله‌ای A ازمجموعهٔ E چندجمله‌ای زیر را نظیرمی‌سازیم:

$$P(A)=A+(x+1)A'$$

که A' مشتق A است.

۱) ثابت کنید که:

الف ـ P تابعی از E در E است.

ب ـ برای هر $A\in E$ ، $B\in E$ و $\lambda\in R$ داریم:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)\quad \text{و} \quad P(\lambda A)=\lambda P(A)$$

۲) چندجمله‌ایهای $P(1)$ ، $P(x)$ و $P(x^{2})$ را به‌دست آورید و از روی‌آن وقتی که $A=ax^{2}+bx+c$ باشد $P(A)$ را به‌دست آورید.

۳) چندجمله‌ای $A_1=a_1x^{2}+b_1x+c_1$ داده شده است. آیا چندجمله‌ای مانند A از E وجود دارد که $P(A)=A_1$ باشد؟ اگر جواب مثبت است آن را مشخص کنید.

۴) تمام چندجمله‌ایهای Q از E را به‌دست‌آورید که به‌وسیلهٔ P به‌چندجمله‌ایهای متناسب تبدیل می‌شوند، یعنی $P(Q)=\lambda Q$. سه دسته چندجمله‌ای وجود دارد که جواب مسئله‌اند (به‌جز $Q=0$). چندجمله‌ایهای نرمال‌شدهٔ هردسته را به‌Q_1،

Q_2 و Q_3 نشان می‌دهیم، پس داریم:

$$P(Q_1)=\lambda_1 Q_1 \quad ، \quad P(Q_2)=\lambda_2 O_2 \quad ، \quad P(Q_3)=\lambda_3 Q_3$$

مقادیر $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ و چندجمله‌ایهای Q_1 ، Q_2 و Q_3 را به‌دست آورید.
ثابت کنیدکه چندجمله‌ای $A=ax^2+bx+c$ را فقط به‌یک راه می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$A=\alpha Q_1+\beta Q_2+\gamma Q_3$$

و α ، β و γ را برحسب a ، b و c به‌دست آورید.

۵) $P(A)$ را برحسب Q_1 ، Q_2 و Q_3 به‌دست آورید و از روی آن $P[P(A)]$ و به‌طورکلی $\underbrace{PP\ldots P}_{n\ \text{مرتبه}}(A)$ را نیز برحسب Q_1 ، Q_2 و Q_3 نتیجه بگیرید.

۴-۶۹- پرسشهای چهار جوابی یك انتخابی

۱۲۲) پرسش نمونه. درچندجمله‌ای $P(x)=ax+b$ متغیر x را n مرتبهٔ متوالی با $P(x)$ جانشین می‌کنیم که چندجمله‌ای $Q(x)=\underbrace{PP\ldots P}_{n\ \text{مرتبه}}(x)$ به‌دست می‌آید.

از گزاره‌های:

(۱) چندجمله‌ای $Q(x)$ از درجهٔ n است.

(۲) چندجمله‌ای $Q(x)$ از درجهٔ $1=1^n$ است.

(۳) برای آنکه مجموع ضریبهای چندجمله‌ای $Q(x)$ برابر یك باشد لازم وکافی است‌که $a+b=1$ باشد.

(۴) اگر ریشهٔ $P(x)$ برابر یك باشد، ریشهٔ $Q(x)$ برابر n خواهد بود.

کدامها نادرست هستند.

الف- فقط (۱)	ب- (۲) و (۴)
ج- (۱) و (۴)	د- (۲) و (۳)

حل- با روش استقراء ریاضی معلوم خواهد شدکه:

$$Q(x)=a^n x+a^{n-1}b+a^{n-2}b+\ldots+ab+b$$

$Q(x)$ از درجهٔ یك است، پس گزارهٔ (۱) نادرست و گزارهٔ (۲) درست است.

مجموع ضریبهای $Q(x)$ می‌شود:

$$Q(1)=a^n+b(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1)=a^n+\frac{b(a^n-1)}{a-1}$$

اگر $a+b=1$ باشد داریم $b=1-a$ و:

$$Q(1)=a^n-\frac{(a-1)(a^n-1)}{a-1}=1$$

برعکس، اگر $Q(1)=1$ باشد داریم:

$$a^n+\frac{b(a^n-1)}{a-1}=1 \Longrightarrow b=(1-a^n):\frac{a^n-1}{a-1}=-a+1$$

و نتیجه می‌شود $a+b=1$. پس گزارهٔ (۳) درست است.

[درحالت کلی برای هرچندجمله‌ای $P(x)$ اگر $P(1)=1$ باشد به‌سادگی می‌توان معلوم کرد که $\underbrace{PP\ldots P}_{n \text{ مرتبه}}(1)=1$]

ریشهٔ $P(x)$ برابر $\alpha=-\frac{b}{a}$ و ریشهٔ $Q(x)$ برابر $\beta=-\frac{b(a^n-1)}{a^n(a-1)}$ است

اگر $\alpha=1$ یعنی $b=-a$ باشد داریم:

$$\beta=\frac{a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1}{a^{n-1}}$$

درحالت کلی β مخالف n است (مگرآنکه $a=1$ باشد)، پس گزارهٔ (۴) نیزنادرست است. بنابراین پاسخ «ج» باید انتخاب شود.

۱۲۳) هرگاه داشته باشیم:

$$(1+x)^n=1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$$

مجموع $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ باکدام عدد زیر برابر است:

الف- 2^n ب- 2^n-1

ج- 2^n+1 د- 2^{n+1}

۱۲۴) ترکیب خطی چندجمله‌ایهای

$$A(x)=\delta x^3-\gamma x^2+\beta x+\alpha$$
$$B(x)=\gamma x^3+\delta x^2-\alpha x+\beta$$
$$C(x)=-\beta x^3+\alpha x^2+\delta x+\gamma$$
$$D(x)=-\alpha x^3-\beta x^2-\gamma x+\delta$$

با ضریبهای به‌ترتیب β ، $-\alpha$ ، δ و $-\gamma$ برابر می‌شود با:

الف- چندجمله‌ای درجهٔ سوم   ب- چندجمله‌ای صفر

ج- $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ د- $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)x$

۱۲۵) ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $A(x)(1-x^{n+1})(x^n-1)$ بر $(x+1)(x-1)^2$ در

چه‌حالت برابر صفر است:

الف- هرچه باشد n .

ب- فقط وقتی‌که n زوج باشد.

ج- فقط به‌شرط آنکه $A(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر باشد.

د- فقط وقتی‌که n فرد باشد.

۱۲۶) به‌فرض $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ هرگاه داشته باشیم:

$$P(\alpha)=P(\beta)=P(\gamma)=0 \quad \text{و} \quad P(0)=5$$

کدام رابطهٔ زیر درست است:

الف- $\alpha+\beta+\gamma=5$ ب- $\alpha\beta\gamma=-5$

ج- $\alpha+\beta+\gamma=-5$ د- $\alpha\beta\gamma=5$

۱۲۷) به‌فرض $x>y>1$ دوجمله‌ای x^n-y^n چه‌موقع بر x^2-y بخش‌پذیر است:

الف- به‌ازای هرمقدار از عدد طبیعی n .

ب- به‌ازای هیچ مقدار از n .

ج- وقتی‌که n زوج باشد.

د- وقتی‌که n مضرب ۴ باشد.

۱۲۸) هرگاه چندجمله‌ای x^a-1 بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك چندجمله‌ایهای x^p-1 و x^q-1 باشد، از گزاره‌های:

(۱) a بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك p و q است.

(۲) a بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك $p+1$ و $q+1$ است.

(۳) x^a-1 مقسوم‌علیهی از x^p-x^q است.

کدامها درست هستند:

الف- فقط (۱) ب- فقط (۲)

ج- (۱) و (۳) د- (۲) و (۳)

۱۲۹) در چندجمله‌ای $P(x\ ,\ y)$ که نسبت به x و y متقارن و همگن درجهٔ n است، از تبدیل y به tx چندجمله‌ای $x^nQ(t)$ به‌دست می‌آید. از گزاره‌های

(۱) چندجمله‌ای $Q(t)$ نسبت به t معکوسهٔ نوع اول است.

(۲) چندجمله‌ای $Q(t)$ نسبت به t معکوسهٔ نوع دوم است.

(۳) مقدار $Q(1)$ با $P(1\ ,\ 1)$ برابر است.

(۴) اگر n فرد باشد $P(x\ ,\ y)$ بر $x+y$ بخش‌پذیر است.

کدامها نادرست هستند:

الف ـ هرچهار گزاره   ب ـ فقط (۱)

ج ـ فقط (۲)   د ـ (۲) و (۳) و (۴)

۱۳۰) به‌فرض $P(x)=ax+b$ ماندهٔ تقسیم $P(x^{۳}+۱)$ بر $x^{۲}+۱$ کدام است:

الف ـ $(a+۱)x+b$ ب ـ $(۱-a)x+b$

ج ـ $a(x+۱)+b$ د ـ $a(۱-x)+b$

۵

همانیها و نابرابریها

۵،الف- همانیها

۵-۱- ویژگیهای برابری- رابطهٔ برابری که درجبر و دیگر شاخه‌های ریاضی به‌کار می‌رود یک رابطهٔ هم‌ارزی است و همهٔ ویژگیهای بازتابی (انعکاسی)، تقارنی و ترایایی (انتقالی) را دارا است. علاوه برآن، چنانکه پیش از این نیز یادآوری گردید، رابطهٔ برابری درمجموعهٔ چندجمله‌ایها به‌دو مفهوم به‌کار می‌رود؛ یک مفهوم آن همانی (اتحاد) دو عبارت است که گاهی با نشانهٔ «$\equiv$» مشخص می‌شود و به‌این معنی است که هریک از دو عبارت همان عبارت دیگر است، یعنی هرکدام از آنها باانجام عملیات جبری از روی دیگری به‌دست آمده است. دوعبارت جبری که متحد باشند به‌ازای هرمقدار از متغیر یامتغیرها با یکدیگر برابرند. مفهوم دیگر برابری درمجموعهٔ چندجمله‌ایها برابری عددی دو عبارت است؛ یعنی دوعبارت به‌ازای مقدار یا مقادیر معینی از متغیر یا متغیرها باهم برابرندکه این نوع برابریهای جبری معادله یا همچندی نامیده می‌شوند.

رابطهٔ برابری درجبر به‌هریک از دومفهوم که باشد چنین تعریف می‌شود: دو عنصر جبری وقتی باهم برابرندکه تفاضل آنها صفر باشد؛ اگر A و B دوعنصر جبری، دو چندجمله‌ای یا درحالت ویژه دو عدد جبری، باشند:

$$A=B \iff A-B=0$$

این تعریف پیامدهای زیر را به‌دنبال دارد:

۱) می‌توان عنصری جبری را به‌دوطرف برابری افزود یا از دوطرف آن کم کرد؛

$$\begin{aligned} A=B &\iff A-B=0 \iff A-B+C-C=0 \\ &\iff (A+C)-(B+C)=0 \iff A+C=B+C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A=B &\iff A-B=0 \iff A-B+C-C=0 \\ &\iff (A-C)-(B-C)=0 \iff A-C=B-C \end{aligned}$$

۲) می‌توان جمله‌ای را با تغییر علامت ازیك طرف به‌طرف دیگر برابری منتقل کرد؛

$$A=B+C \iff A-C=B+C-C \iff A-C=B$$

۳) می‌توان دوطرف برابری را تغییر علامت داد؛ هرطرف را با تغییر علامت به‌طرف دیگر برد.

۴) دوطرف دو، یاچند، برابری را می‌توان نظیر به‌نظیر باهم جمع یا ازهم کم کرد؛

$$\left.\begin{array}{l} A=B \iff A+C=B+C \\ C=D \iff B+C=B+D \end{array}\right\} \iff A+C=B+D$$

$$\left.\begin{array}{l} A=B \iff A-C=B-C \\ C=D \iff B-C=B-D \end{array}\right\} \iff A-C=B-D$$

۵) می‌توان دو طرف برابری را در یك مقدار معین ضرب یا بر یك مقدار معین مخالف صفر تقسیم کرد؛

$$A=B \iff A-B=0\ ,\ C\neq 0 \iff C(A-B)=0$$
$$\iff CA-CB=0 \iff AC=BC$$

$$A=B \iff A-B=0\ ,\ C\neq 0 \iff \frac{1}{C}(A-B)=0$$

$$\iff \frac{1}{C}A-\frac{1}{C}B=0 \iff \frac{A}{C}=\frac{B}{C}$$

۶) اگر حاصل‌ضرب دوعامل برابر صفرباشد حداقل یکی ازآن دو عامل برابر صفر است. زیرا با فرض $AB=0$ اگر $A=0$ که حکم ثابت است و اگر $A\neq 0$ از تقسیم دو طرف بر A نتیجه می‌شودکه $B=0$. پس:

$$AB=0 \iff A=0 \text{ یا } B=0$$

۷) دوطرف دوبرابری راکه هیچکدام صفر نباشند می‌توان نظیر به‌نظیر در یکدیگر ضرب یا بریکدیگر تقسیم کرد؛

$$\left.\begin{array}{l} A=B\ ,\ C\neq 0 \iff AC=BC \\ C=D\ ,\ B\neq 0 \iff BC=BD \end{array}\right\} \iff AC=BD$$

$$\left.\begin{array}{l} A=B\ ,\ C\neq ۰ \iff \dfrac{A}{C}=\dfrac{B}{C} \\[2ex] C=D\ ,\ B\neq ۰ \iff \dfrac{C}{B}=\dfrac{D}{B} \end{array}\right\} \iff \frac{A}{C}\cdot\frac{D}{B}=\frac{B}{C}\cdot\frac{C}{B}=۱$$

$$\iff \frac{A}{C}\cdot\frac{D}{B}\cdot\frac{B}{D}=\frac{B}{D} \iff \frac{A}{C}=\frac{B}{D}$$

۸) دوطرف برابری راکه هیچکدام صفرنباشند می‌توان معکوس کرد؛

$$A=B\neq ۰ \iff \frac{A}{AB}=\frac{B}{AB} \iff \frac{۱}{B}=\frac{۱}{A} \iff \frac{۱}{A}=\frac{۱}{B}$$

۹) از (۷) نتیجه می‌شودکه اگر دوطرف یك برابری به توان‌عدد صحیح n برسند مقادیر حاصل با هم برابرند؛

$$A=B\ ,\ n\in Z \implies A^n=B^n$$

(توجه داشته باشیدکه نشانهٔ $\implies$ به‌کار رفته است نه‌نشانهٔ $\iff$)

۱۰) اگر ازدوطرف برابری ریشهٔ nام گرفته شود، مقادیر حاصل برابر یا قرینه‌اند(در صورتی‌که ریشهٔ زوج بگیریم، مقادیر مفروض باید نامنفی باشند).

$$A=B\ ,\ \text{فرد}\ n \implies \sqrt[n]{A}=\sqrt[n]{B}$$

$$A^n=B^n\ ,\ \text{فرد}\ n \implies A=B$$

$$A=B>۰\ ,\ \text{زوج}\ n \implies \sqrt[n]{A}=\sqrt[n]{B}$$

$$A^n=B^n\ ,\ \text{زوج}\ n \implies A=B\ \text{یا}\ A=-B$$

۵-۲. یك‌پارادوكس. به فرض $a=۷$ دوطرف را در a ضرب می‌کنیم‌که می‌شود $a^۲=۷a$، از دو طرف $۷^۲$ را کم می‌کنیم؛ $a^۲-۷^۲=۷a-۷^۲$ که ایـن برابری چنین می‌شود:

$$(a-۷)(a+۷)=۷(a-۷)$$

از تقسیم دوطرف بر $a-۷$ نتیجه می‌شود $a+۷=۷$ و یا $a=۰$ اما در ابتدا a برابر ۷ اختیارشده بود. پس $۰=۷$ است یا اینکه جایی اشتباه‌کرده‌ایم؟

اشتباه‌آنجا روی داده است‌که دوطرف برابری بر $a-۷=۰$ تقسیم شده است. در صورتی‌که درپیش بیان شدکه دوطرف برابری را برصفر نمی‌توان تقسیم‌کرد.

۵-۳. همانیهای مهم. پیش از این دیدیم برابری‌که یك طرف آن نشانگر عمل‌یا

عملیاتی بین چندجمله‌هایی مفروض و طرف دیگـر آن چندجمله‌ای حاصل از آن عمل یا عملیات باشد یك همانی یـا اتحاد است. مانند $x(x+1)\equiv x^2+x$ و مـانند آن. پس تعداد همانیهای جبری بیشمار است. به‌ویژه‌که اگردوطرف دویا چند همانی را باهم‌جمع، از هم‌کم، درهم‌ضرب و... کنیم حاصل نیز یك همانی است.

برخی از همانیها به‌خاطر کاربرد زیادی‌که در انجام عملیات دارند به‌همانیهای مهم معروف هستند. نخستین این همانیهاکه حاصل‌ضرب یك دوجمله‌ای در خودش یعنی توان دوم‌آن را به دست می‌دهد عبارت است از:

$$(a+b)^2\equiv a^2+2ab+b^2 \qquad (1)$$

این همانی به‌گونه‌های مختلف تعمیم می‌یابد؛ نخست آنکه از تبدیـل b به $-b$ نتیجه می‌شود:

$$(a-b)^2\equiv a^2-2ab+b^2 \qquad (2)$$

دیگر آنکه از تبدیل a یا b به مجموع دو جمله سپس به مجموع سه جمله و ... نتیجه می‌شود:

$$(a+b+c+\dots+k+l)^2\equiv a^2+b^2+\dots+k^2+l^2+2ab$$
$$+2ac+\dots+2al+2bc+\dots+2bl+\dots+2kl$$

که با استفاده از نماد $\sum$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(\sum_1^n a_i)^2\equiv\sum_1^n (a_i)^2+2\sum_1^n a_ia_j \quad ، \quad i<j\leqslant n \qquad (3)$$

از جمع یا تفریق دوطرف همانیهای (۱) و(۲) همانیهای دیگری به‌دست می‌آید:

$$(a+b)^2+(a-b)^2\equiv 2a^2+2b^2 \qquad (4)$$

$$(a+b)^2-(a-b)^2\equiv 4ab \qquad (5)$$

$$(a+b)^2-4ab\equiv(a-b)^2 \qquad (6)$$

$$(a-b)^2+4ab\equiv(a+b)^2 \qquad (7)$$

در همانی اخیر اگر a به n^2 و b به ۱ تبدیل شود یکی از دستورهای مربوط به عددهای فیثاغورسی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(n^2-1)^2+4n^2=(n^2+1)^2 \ , \ n\in N \ , \ n>1$$

در این دستور عددهای طبیعی n^2-1 و $2n$ اندازه‌های دو ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ای هستندکه اندازهٔ وتر آن n^2+1 است. مانند:

$$n=2:\ 3 \ ، \ 4 \ ، \ 5 \qquad n=3:\ 8 \ ، \ 6 \ ، \ 10$$

دیگر از همانیهای مهم‌حاصل‌ضرب مجموع دوجمله در تفاضل همان دوجمله‌است:

$$(a+b)(a-b)\equiv a^{۲}-b^{۲} \qquad (۸)$$

که a یا b ممکن است خود ازچندجمله تشکیل شده باشد. مانند:

$$(x^{۲}+\sqrt{۲}x+۱)(x^{۲}-\sqrt{۲}x+۱)$$
$$=[(x^{۲}+۱)+\sqrt{۲}x][(x^{۲}+۱)-\sqrt{۲}x]=(x^{۲}+۱)^{۲}-۲x^{۲}$$
$$=x^{۴}+۱$$

همانی مربوط به‌حاصل‌ضرب دو دوجمله‌ای با جملهٔ مشترك:

$$(x+a)(x+b)\equiv x^{۲}+(a+b)x+ab \qquad (۹)$$

که اگر a یا b منفی باشند در این رابطه به‌قرینهٔ خود تبدیل می‌شوند. مانند

$$(a^{۲}-۳k)(a^{۲}+۵k)=a^{۴}+۲ka^{۲}-۱۵k^{۲}$$

تعمیم همانی (۱) از راه تعمیم توان آن:

$$(a+b)^{۳}\equiv a^{۳}+۳a^{۲}b+۳ab^{۲}+b^{۳} \qquad (۱۰)$$

$$(a-b)^{۳}\equiv a^{۳}-۳a^{۲}b+۳ab^{۲}-b^{۳} \qquad (۱۱)$$

که به‌گونه‌های دیگر نیز نوشته می‌شوند، مانند:

$$(a+b)^{۳}=a^{۳}+b^{۳}+۳ab(a+b)$$
$$a^{۳}-b^{۳}=(a-b)^{۳}+۳ab(a-b)$$
$$(a+b)^{۳}+(a-b)^{۳}=۲a^{۳}+۶ab^{۲}=۲a(a^{۲}+۳b^{۲})$$

هرگاه تعداد جمله‌ها بیش از دو باشد:

$$(a+b+c)^{۳}=[a+(b+c)]^{۳} \qquad (۱۲)$$
$$=a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}+۳a^{۲}b+۳a^{۲}c+۳b^{۲}a+۳b^{۲}c$$
$$+۳c^{۲}a+۳c^{۲}b+۶abc$$

این همانی به‌گونهٔ زیر درمی‌آیدکه کاربرد بیشتری دارد:

$$a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}-۳abc \qquad (۱۳)$$
$$=(a+b+c)(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}-ab-bc-ca)$$

همچنین همانی زیر:

$$(a+b+c)^{۳}-(a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}) \qquad (۱۴)$$
$$\equiv ۳(a+b)(b+c)(c+a)$$

همانیهای حاصل از تقسیم بر دوجمله‌ای:

$$a^{۳}-b^{۳}=(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲}) \qquad (۱۵)$$

$$a^{۳}+b^{۳}=(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲}) \qquad (۱۶)$$

که به‌صورت کلی زیر تعمیم می‌یابد:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}) \qquad (17)$$

$$n \text{ فرد} : a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1}) \qquad (18)$$

۴-۵. دوجمله‌ای نیوتن. همانیهایی به‌نامهای اشخاص معروفند که مهمترین آنها عبارت است از: بسط دوجمله‌ای نیوتن که تعمیم همانی (۱) است:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3}b^3 + \dots + b^n$$

با قرارداد:

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{1 \times 2 \times \dots \times p}$$

بسط دو جمله‌ای نیوتن به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(a+b)^n = a^n + c_n^1 a^{n-1}b + c_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + c_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

عددهای C_n^p در همانی زیر صدق می‌کنند:

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

بنابراین بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ چندجمله‌ای است نسبت به a و b متقارن و همگن درجهٔ n که دارای $n+1$ جمله است.

هرگاه ضریبهای بسط دوجمله‌ای نیوتن را به‌ازای $n=0$ ، $n=1$ ، $n=2$ و... به ترتیب زیر بنویسیم مثلثی عددی خواهیم داشت که قبلا به نام مثلث حسابی پاسکال معروف بود ودر یکی از کنگره‌های بین‌المللی علوم به تصویب رسیدکه مثلث حسابی خیام-پاسکال نامیده شود. این مثلث به‌گونهٔ زیر است:

$n=0$	۱
$n=1$	۱ ۱
$n=2$	۱ ۲ ۱
$n=3$	۱ ۳ ۳ ۱
$n=4$	۱ ۴ ۶ ۴ ۱
$n=5$	۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
$n=6$	۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱
....	. . . .

در این مثلث نخستین و آخرین عدد هر سطر یک است و هرعدد دیگربرابر است با مجموع دوعدد بالایی خود. بنابراین تشکیل این مثلث ساده است و ازآنرو می‌توان ضریبهای بسط دوجمله‌ای را برای مقدار معین n به دست آورد. مانند:

$$(۲x-۳y)^۵=(۲x)^۵+۵(۲x)^۴(-۳y)+۱۰(۲x)^۳(-۳y)^۲$$
$$+۱۰(۲x)^۲(-۳y)^۳+۵(۲x)(-۳y)^۴+(-۳y)^۵$$
$$=۳۲x^۵-۲۴۰x^۴y+۷۲۰x^۳y^۲-۱۰۸۰x^۲y^۳+۸۱۰xy^۴-۲۴۳y^۵$$

یادداشت- ثابت می‌شود که بسط دوجمله‌ای نیوتون به ازای هر مقدار حقیقی n قابل تعمیم است.

اگر در دوجمله‌ای نیوتن جملهٔ اول برابر یک وجملهٔ دوم برابر $\frac{۱}{n}$ اختیار شود که n همان توان دوجمله‌ای است و n به‌سمت $+\infty$ میل یابد در این صورت

$$\lim_{n\to+\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$$

عددی است گنگ و غیرجبری به‌نام e که با سری

$$e=۱+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\dots+\frac{۱}{n!}+\dots$$

نموده می‌شود و مقدار تقریبی آن برابر است با: ...۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹

۵-۵. همانیهای ویژه. ازجمله همانیهای دیگری که به‌نام اشخاص معروفند همانیهای لاگرانژ است:

$$(a^۲+b^۲)(x^۲+y^۲)\equiv(ax+by)^۲+(ay-bx)^۲$$
$$(a^۲+b^۲+c^۲)(x^۲+y^۲+z^۲)-(ax+by+cz)^۲$$
$$\equiv(bz-cy)^۲+(cx-az)^۲+(ay-bx)^۲$$

این همانی برای n جمله قابل تعمیم است.

دیگر همانی بزو است که در بند (۴-۳۴) یادآوری گردید.

همچنین ازچندجمله‌ای انترپلاسیون لاگرانژ(بند ۴-۱۸) می‌توان نام برد که ازروی آن همانیهایی به‌تعداد زیاد نتیجه می‌شود.

۶-۵. روش اثبات یک همانی. برای‌اثبات درستی یک اتحاد روش‌معمولی ومتداول آن است که یک طرف را عمل‌کرد تا از روی‌آن طرف دیگر به‌دست‌آید. یا اینکه دوطرف را عمل‌کرد و به نتیجهٔ مشترک رسید، زیرا رابطهٔ همانی ترایایی است و اگر دوعبارت با عبارت سوم متحد باشند با هم متحدند. برای اثبات یک اتحاد می‌توان از اتحادهایی که صحت آنها قبول است استفاده‌کرد، و در حالتی‌که یک اتحاد تعمیم یافته است از روش استقراء ریاضی نیز استفاده می‌شود. درستی برخی از همانیها بدین‌گونه ثابت می‌گردد که اگر نسبت به متغیری از درجهٔ n است ثابت کردکه به‌ازای بیش از n مقدار از آن‌متغیر برقرار است. به‌بندهای ۴-۴۸ و ۴-۵۰ مراجعه فرمایید. به‌چند مثال زیرنیز توجه کنید:

مثال ۱: اثبات درستی همانی:

$$ax^2+bx+c=$$

$$\frac{1}{4a}(2ax+b+\sqrt{b^2-4ac})(2ax+b-\sqrt{b^2-4ac})$$

در طرف اول به‌ظاهر عملی مشاهده نمی‌شود که بتوان انجام داد اما طرف دوم به‌صورت ضرب‌عاملها است که با استفاده از اتحاد $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ برابر خواهدشدبا:

$$\frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2\right]$$

$$=\frac{1}{4a}(4a^2x^2+4abx+b^2-b^2+4ac)$$

که پس از ساده‌کردن با طرف اول برابر خواهد شد.

عمل کردن طرف اول اتحاد بالا شامل ابتکارهای ضرب در $1=\frac{4a}{4a}$ و جمع با $b^2-b^2=0$ است؛ یعنی نوشتن طرف اول به‌صورت:

$$\frac{1}{4a}(4a^2x^2+4abx+b^2-b^2+4ac)$$

$$=\frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2\right]$$

مثال ۲: اثبات درستی اتحاد:

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

در اینجا ساده‌تر آن است که هریك از دو طرف را عمل کنیم که حاصل هرکدام برابرخواهد شد با:

$$a^2x^2+b^2x^2+a^2y^2+b^2y^2$$

مثال ۳: برای اثبات درستی همانی:

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=(a-b)(a-c)(b-c)$$

ملاحظه می‌کنیم که هر طرف نسبت به a چندجمله‌ای درجهٔ دوم است پس کافی است‌ثابت کنیم که به‌ازای سه مقدار از a دو طرف با هم برابرند:

اگر $a=b$ باشد طرف دوم صفر می‌شود و طرف اول هم می‌شود

$$b^2(b-c)+b^2(c-b)=b^2(b-c)-b^2(b-c)=0$$

اگر $a=c$ باشد باز خواهیم داشت: $0=0$

اگر $a=0$ باشد مقدار هر یك از دو طرف می‌شود: b^2c-bc^2

برای اثبات درستی همانی بالا می‌توانیم از ویژگیهای بخش‌پذیری استفاده کنیم؛ طرف اول چندجمله‌ای $P(a,b,c)$ است و به‌سادگی معلوم خواهد شد که

$$P(a\ ,\ a\ ,\ c)=P(a\ ,\ b\ ,\ b)=P(c\ ,\ b\ ,\ c)=0$$

پس طرف اول بر $a-b$ و $b-c$ و $a-c$ بخش‌پذیر است و با در نظر گرفتن ضریب a^2 که در طرف اول برابر b است نتیجه می‌شود که طرف اول برابر است با طرف دوم.

مثال ۴. اثبات صحت بسط دوجمله‌ای نیوتن به‌روش استقراء ریاضی:

اگر $n=1$ انتخاب شود تعداد جمله‌ها دو است و رابطه درست است؛

اگر به‌ازای $n=k$ داشته باشیم:

$$(a+b)^k=a^k+C_k^1a^{k-1}b+C_k^2a^{k-2}b^2+\ \dots\ +b^k$$

چون دو طرف را در $a+b$ ضرب کنیم، در طرف اول k به $k+1$ تبدیل می‌شود، و در طرف دوم ازضرب جملهٔ اول در a یك جملهٔ a^{k+1} با ضریب ۱ خواهیم داشت و ازضرب جملهٔ اول در b و جملهٔ دوم در a دو جملهٔ متشابه a^kb و $C_k^1a^kb$ را خواهیم داشت که باتوجه به‌اینکه $C_k^1+1=k+1=C_{k+1}^1$، مجموع دوجملهٔ مزبورمی‌شود $C_{k+1}^1a^kb$. همچنین از ضرب جملهٔ دوم در b و جملهٔ سوم در a دو جملهٔ متشابه خواهیم داشت که مجموع آنها می‌شود $C_{k+1}^2a^{k-1}b^2$. با درنظر گرفتن نتیجهٔ همسان برای جمله‌های بعدی بالاخره خواهیم داشت:

$$(a+b)^{k+1}=a^{k+1}+C_{k+1}^1a^kb+C_{k+1}^2a^{k-1}b^2+\ \dots\ +b^{k+1}$$

رابطه به‌ازای $n=1$ برقراراست واگر به‌ازای $n=k$ برقرار باشد به‌ازای $n=k+1$ نیز برقرار خواهد بود، بنابراین به‌ازای هر مقدار از عدد طبیعی n برقرار است.

۵، ب - نابرابریها

۵-۷. تعریف- نظیر هر دو مقدار جبری A و B مقدار جبری C وجود دارد که $A-B=C$ یا $A=B+C$. اگر مقدار جبری C صفر باشد همچنانکه در پیش دیدیم برابری $A=B$ برقرار است، هرگاه C مثبت باشد می‌گوییم که A از B بزرگتر است و می‌نویسیم $A>B$، وهرگاه C منفی باشد می‌گوییم که A از B کوچکتر است ومی‌نویسیم $A<B$. از این تعریف بر می‌آید که هر مقدار مثبت بزرگتر از صفر است زیرا تفاضل آن مقدار برصفر مقداری است مثبت، و هر مقدار منفی کوچکتر از صفر است زیرا تفاضل آن برصفر مقداری است منفی:

$$A = \circ + A\ ,\ \begin{cases} \text{مثبت } A \iff A > \circ \\ \text{منفی } A \iff A < \circ \end{cases}$$

با توجه به‌اینکه $A=B+C$ هم‌ارز با $B=A+(-C)$ است پس برحسب اینکه C مثبت یا منفی باشد داریم:

$$A > B \iff B < A \quad \text{یا} \quad A < B \iff B > A$$

رابطهٔ با نماد $<$ یا با نماد $>$ نابرابری نامیده می‌شود و چون نابرابری $A>B$ را به‌صورت $B<A$ بنویسیم می‌گوییم که جهت آن را تغییر داده‌ایم.

هرگاه A و B دوعبارت جبری باشند دراین صورت نابرابری بین آنها یا به‌ازای همهٔ مقادیر متغیرها برقرار است که چنین نابرابری را نابرابری همیشه برقرار یا همان نابرابری می‌نامند؛ اما اگر نابرابری به‌ازای بعضی از مقادیر متغیرها برقرار باشد آن را نابرابری شرطی یا نامعادله می‌نامند.

۵-۸. اصل سه‌گانگی. هردو مقدار جبری نسبت به‌یکدیگر یا برابرند یا اولی از دومی بزرگتر است یا اولی از دومی کوچکتر است؛

$$\forall A\ ،\ \forall B\ :\ A > B \ \text{یا}\ A = B \ \text{یا}\ A < B$$

بنابراین اگر A بزرگتر از B نباشد یا با آن برابر یا ازآن کوچکتر است که می‌نویسیم $A \leqslant B$. همچنین اگر A کوچکتر از B نباشد یا باآن برابر یا ازآن بزرگتر است که می‌نویسیم $A \geqslant B$. بنابراین نفی $A>B$ می‌شود $A \leqslant B$ ونفی $A<B$ می‌شود $A \geqslant B$.

۵-۹. ویژگیهای نابرابری. بررسی نابرابری $A>B$ یا $A<B$ به‌بررسی برابری $A=B+C$ می‌انجامد و نتیجه می‌شود که نابرابری بازتابی نیست یعنی یك مقدار از خودش بزرگتر یا کوچکتر نیست؛ نابرابری تقارنی نیست، اگر $A>B$ آنگاه $B \ngtr A$؛ نابرابری ترایایی است:

$$A > B\ ,\ B > C \Longrightarrow \begin{cases} A = B + M\ ,\ M > \circ \\ B = C + N\ ,\ N > \circ \end{cases}$$
$$\Longrightarrow A = C + (M+N)\ ,\ M+N > \circ \Longrightarrow A > C$$

از اینرو گفته می‌شود که رابطهٔ $>$ یا $<$ درمجموعهٔ مقادیر جبری یك نوع رابطهٔ ترتیب است.

می‌توان دو مقدار برابر را به‌دو طرف نابرابری افزود:

$$A < B \Longrightarrow A = B + C\ ,\ C < \circ \Longrightarrow A + K = B + K + C\ , C < \circ$$
$$\Longrightarrow A + K < B + K$$

می‌توان جمله‌ای راازیك طرف نابرابری با تغییر علامت به‌طرف دیگر منتقل کرد:

$$A>B+C \Rightarrow A=B+C+M,\ M>0$$
$$\Rightarrow A-C=B+M,\ M>0 \Rightarrow A-C>B$$

اگر دوطرف نابرابری را تغییرعلامت دهیم جهت آن عوض می‌شود:

$$A>B \Rightarrow -B>-A \Rightarrow -A<-B$$

می‌توان دوطرف دو یا چند نابرابری هم‌جهت را نظیر به‌نظیر باهم جمع کرد:

$$\left.\begin{array}{l} A>B \Rightarrow A+C>B+C \\ C>D \Rightarrow B+C>B+D \end{array}\right\} \Rightarrow A+C>B+D$$

می‌توان دوطرف دو نابرابری با جهتهای مخالف را نظیربه‌نظیر از هم کم کرد:

$$\begin{cases} A>B \\ C<D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A>B \\ -C>-D \end{cases} \Rightarrow A-C>B-D$$

می‌توان دوطرف نابرابری را دریك مقدار مثبت ضرب یا بر یك مقدار مثبت تقسیم کرد.

$$A>B \Rightarrow A=B+C,\ C>0 \quad ، \quad K>0$$
$$\Rightarrow KA=KB+KC,\ KC>0 \Rightarrow KA>KB$$

اگر دو طرف نابرابری دریك مقدار منفی ضرب یا بریك مقدارمنفی تقسیم شود جهت نابرابری تغییر می‌کند:

$$A>B \Rightarrow A=B+C,\ C>0 \quad ، \quad K<0$$
$$\Rightarrow AK=BK+CK,\ CK<0 \Rightarrow AK<BK$$

اگر دونابرابری هم‌جهت باشند وهرطرف هرکدام آنها مثبت باشد می‌توان دوطرف آنها را نظیر به‌نظیر درهم ضرب‌کرد:

$$\left.\begin{array}{l} A>B>0 \Rightarrow AC>BC \\ C>D>0 \Rightarrow BC>BD \end{array}\right. \Rightarrow AC>BD$$

اگر دوطرف نابرابری هم‌علامت باشند چون آنها را معکوس‌کنیم جهت نابرابری تغییر می‌کند:

$$A>B>0 \Rightarrow \frac{A}{AB}>\frac{B}{AB} \Rightarrow \frac{1}{B}>\frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{A}<\frac{1}{B}$$
$$A<B<0 \Rightarrow \frac{A}{AB}<\frac{B}{AB} \Rightarrow \frac{1}{B}<\frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{A}>\frac{1}{B}$$

اگردوطرف یك نابرابری را به‌توان فرد برسانیم یا ازدوطرف‌آن ریشهٔ فرد بگیریم جهت نابرابری تغییرنمی‌کند:

$$\text{فرد } n\ ,\ A>B \Longrightarrow \begin{cases} A^n>B^n \\ \sqrt[n]{A}>\sqrt[n]{B} \end{cases}$$

اگر هریك از دوطرف نابرابری مثبت باشند و دوطرف را به‌توان زوج برسانیم جهت نابرابری تغییر نمی‌کند:

$$\text{زوج } n\ ,\ A>B>\circ \Longrightarrow A^n>B^n$$

اگر دوطرف یك نابرابری را به‌توان زوج برسانیم یا از دوطرف (به‌شرط مثبت بودن‌آنها) ریشهٔ زوج بگیریم، درحالت اول جهت نابرابری یا ثابت می‌ماند یاتغییرمی‌کند یا اینکه نابرابری به‌برابری تبدیل می‌شود و در حالت دوم جهت نابرابری ثابت می‌ماند.

$$\text{زوج } n\ ,\ A>B \Longrightarrow \begin{cases} A^n>B^n \text{ یا } A^n<B^n \text{ یا } A^n=B^n \\ \sqrt[n]{A}>\pm\sqrt[n]{B} \text{ و } -\sqrt[n]{A}<\pm\sqrt[n]{B} \end{cases}$$

$$\text{زوج } n\ ,\ a^n>b^n \iff a>|b| \text{ یا } a<-|b|$$

$$\text{زوج } n\ ,\ a^n<b^n \iff -|b|<a<|b|$$

۵-۱۰. نابرابریهای بنیادی. برخی از نابرابریهاکه برپایهٔ برخی از تعریفها مسلم هستند به‌منزلهٔ زیربنای تشکیل یا اثبات دیگر نابرابریها به‌کار می‌روند. نخستین این نابرابریها این است که اگر a مقدار مثبت باشد، همانگونه که پیش ازاین هم‌بیان شد، $a>\circ$ است و اگر a منفی باشد $a<\circ$ است. هرگاه a نامنفی باشد داریم $a\geqslant\circ$ واگر a مقدار نامثبت باشد داریم $a\leqslant\circ$.

هرگاه x مقدار جبری غیرمشخص باشد توان دوم آن منفی نیست، پس نابرابری $x^{۲}\geqslant\circ$ یکی دیگر از نابرابریهای مسلم است و می‌توانیم‌آن را به‌صورت‌کلیتر $x^{۲n}\geqslant\circ$ بنویسیم که n عدد صحیح نامنفی است (درحالت $n=\circ$ ، $x\neq\circ$ است)؛

$$n=\circ \text{ و } x\neq\circ\ :\ x^{۲n}=x^{\circ}=۱>\circ \quad ، \quad n=۲\ :\ x^{۴}\geqslant\circ$$

و اگر n صحیح منفی باشد نشانهٔ برابری را باید حذف‌کرد ($x\neq\circ$)؛

$$n=-۱\ :\ x^{-۲}=\frac{۱}{x^{۲}}>\circ$$

دیگر از نابرابریهای بنیادی نابرابری $|x|\geqslant\circ$ است که درستی آن بنابه‌تعریف قدرمطلق یك‌مقدار جبری مسلم است.

نابرابری $\sqrt{A}\geqslant\circ$ به‌شرط $A\geqslant\circ$ نیزبنابه‌قرارداد مربوط به‌نشانهٔ $\sqrt{\ }$ ازنابرابریهای

مسلم است که حالت کلی آن $\sqrt[2n]{A} \geqslant 0$ است و A می‌تواند یك مقدار ثابت یا یك عبارت جبری نامنفی باشد. مانند:

$$\sqrt{a^2+b^2} \geqslant 0 \quad , \quad \sqrt[4]{x^2(y^2+1)} \geqslant 0$$

بااستفاده ازاینکه مجموع چندمقدار نامنفی مقداری است نامنفی، یا بااستفاده ازاینکه دوطرف دو یا چند نابرابری هم‌جهت را می‌توان نظیر به‌نظیر باهم جمع کرد، نابرابریهای از گونهٔ نمونه‌های زیر را خواهیم داشت:

$$a^2+b^2+ \dots +l^2 \geqslant 0$$
$$|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n| \geqslant 0$$

برابری فقط درحالتی است که همهٔ جمله‌ها صفر باشند.

مثال: تعیین مقادیر x ، y و z از معادلهٔ زیر:

$$x^2+4y^2+5z^2+2x-8y+5=0$$
$$(x+1)^2+(2y-2)^2+5z^2 \geqslant 0 \implies x=-1 \ , \ y=1 \ , \ z=0$$

۵-۱۱. رابطهٔ نابرابریها با همانیها. هرگاه به‌یکی از دوطرف یك همانی مقداری را بیفزاییم یا جمله وجمله‌هایی ازآن‌را حذف‌کنیم یك نابرابری به‌دست می‌آید. بنابراین از روی همانیها می‌توان نابرابریهای زیادی را بـه‌دست‌آورد. برعکس، اثبات برقراری بسیاری از نابرابریها به‌یافتن همانیهایی می‌انجامد که آن نابرابریها از روی آنها به‌دست آمده باشند.

علاوه برآن دربرخی از همانیها عبارت یك طرف مقداری مثبت یا منفی است و در نتیجه نمایانگر یك نابرابری است که از روی آن می‌توان نابرابریهای دیگری را به‌دست آورد.

مثال ۱: اگر a و b دومقدار غیرمشخص باشند تفاضل آنها یا صفر است یا مثبت یا منفی پس مجذور این تفاضل یا صفر است یا مثبت یعنی $(a-b)^2 \geqslant 0$ ویا

$$a^2+b^2-2ab \geqslant 0 \implies a^2+b^2 \geqslant 2ab$$

این نابرابری به‌ازای هرمقدار از a و b برقرار است و باجانشین ساختن a و b بامقادیر دیگر می‌توانیم نابرابریهای دیگری را نتیجه بگیریم. ازجمله:

۱) اگر a و b را مثبت فرض‌کنیم وآنها را به‌ترتیب با $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ جانشین و دو طرف را بر ۲ بخش‌کنیم خواهیم داشت: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ یعنی واسطهٔ حسابی هردو عدد مثبت از واسطهٔ هندسی آنها بزرگتر یا حداقل با آن برابر است (برابری وقتی است

که دو عدد باهم برابر باشند).

۲) اگر a رامثبت و b را برابریك بگیریم‌داریم $a^2+1 \geqslant 2a$ وازتقسیم دوطرف بر مقدار مثبت a نتیجه می‌شود: $a+\frac{1}{a} \geqslant 2$ یعنی مجموع هرعدد مثبت و عکس آن از ۲ بزرگتریاحداقل با ۲ برابراست (برابری درحالت $a=1$).

۳) اگر a و b را نامنفی فرض‌کنیم و آنهـا را یك بار با $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ بار دوم با $\sqrt{b}$ و $\sqrt{c}$ و بار سوم با $\sqrt{c}$ و $\sqrt{a}$ جانشین‌کنیم، که c نیز مثبت باشد خواهیم داشت

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab} \quad ، \quad b+c \geqslant 2\sqrt{bc} \quad ، \quad c+a \geqslant 2\sqrt{ca}$$

سه نابرابری بالا هم‌جهت هستند و مقادیر دو طرف هر کدام از آنها مثبت است پس می‌توانیم طرفهای آنها را نظیر به‌نظیر درهم ضرب‌کنیم‌که نابرابری زیر به‌دست می‌آید:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$$

برابری وقتی است‌که: $a=b=c$

۴) اگر x، y و z مقادیر نامنفی باشند و a و b را به‌ترتیب با x و y، y و z، z و x جانشین‌کنیم داریم:

$$x^2+y^2 \geqslant 2xy \quad ، \quad y^2+z^2 \geqslant 2yz \quad ، \quad z^2+x^2 \geqslant 2zx$$

نابرابریها هم‌جهت هستند وچون طرفهای‌آنها را نظیربه‌نظیر باهم جمع و دوطرف حاصل را بر ۲ بخش‌کنیم نابرابری زیر به‌دست می‌آید:

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$$

برابری درحالتی است که: $x=y=z$

مثال ۲: با درنظرگرفتن همانی (۱۲) از بند (۵-۳) و با فرض نامنفی بودن a و b و c می‌توان از راه حذف بعضی ازجمله‌های طرف دوم‌همانی مزبور نابرابریهای متعددی را به‌دست آورد از جمله:

$$(a+b+c)^3 \geqslant a^3+b^3+c^3$$

$$(a+b+c)^3 \geqslant 3(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2)$$

$$(a+b+c)^3 \geqslant 6abc$$

که از روی این نابرابریها نیز می‌توان نابرابریهای دیگری را به‌دست آورد. مانند:

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c} \geqslant \sqrt[3]{a+b+c}$$

۵-۱۲. روشهای اثبات نابرابریها. برای اثبات درستی یك نـابرابری مفـروض، یا بایدثابت‌کردکه‌آن نابرابری برطبق بعضی ازتعریفها یا قضیه‌های قبلاً ثابت شده برقرار

است، یا اینکه یك نابرابری‌بنیادی یا یك همانی یا یك نابرابری قبلاً ثابت شده را ارائه داد و ثابت‌کردکه نابرابری مفروض را می‌توان از روی آن به‌دست‌آورد. اما یافتن آن نابرابری بنیادی یا قبلاً ثابت شده و یا آن همانی و چگونگی ارتباط آنها با نابرابری مفروض گاهی به‌سادگی انجام می‌پذیرد و گاهی مستلزم روشهای ابتکاری ویژه می‌باشد. دراثبات نابرابریهایی‌که برحسب عدد طبیعی غیرمشخص n بیان شده باشند معمولاً روش استقراء ریاضی به‌کار می‌رود. نمونه‌هایی از روشهای گوناگون اثبات نابرابریها ضمن مثالهای زیر بیان می‌شود؛

مثال ۱: اثبات نابرابری زیر (= نابرابری قدرمطلقها) به‌فرض‌آنکه x_iها مقادیر حقیقی‌اند:

$$|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|\geqslant|x_1+x_2+\ldots+x_n|$$

برابری وقتی است‌که همهٔ x_iها همعلامت باشند.

برای اثبات این نابرابری می‌توانیم از روش استقراء ریاضی استفاده‌کنیم؛ درحالت $n=2$ نابرابری $|x_1|+|x_2|\geqslant|x_1+x_2|$ بنابه‌تعریف جمع عددهای جبری مسلم است. زیرا اگر دو عدد جبری x_1 و x_2، همعلامت باشند قدرمطلق مجموع آنها برابر است با مجموع قدرمطلقهای آنها، و اگر x_1 و x_2 با علامتهای مختلف باشند قدرمطلق مجموع آنها برابر است با تفاضل قدرمطلقهای آنها و از مجموع قدرمطلقهای آنها کوچکتر است.

حال فرض می‌کنیم‌که نابرابری درحالت $n=k$ درست باشد یعنی داشته باشیم:

$$|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_k|\geqslant|x_1+x_2+\ldots+x_k|$$

به‌دوطرف این نابرابری جملهٔ $|x_{k+1}|$ رااضافه می‌کنیم، درطرف دوم بنابه‌حالت $n=2$ داریم:

$$|x_1+x_2+\ldots+x_k|+|x_{k+1}|\geqslant|x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}|$$

و بنا به‌ویژگی ترایایی نابرابری نتیجه می‌شودکه

$$|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_k|+|x_{k+1}|\geqslant|x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}|$$

نابرابری مفروض درحالت $n=2$ درست است و اگر برای $n=k$ درست باشد برای $n=k+1$ نیز درست خواهد بود، پس بنابه‌اصل استقراء ریاضی برای هرمقدار از عدد طبیعی n درست می‌باشد.

مثال ۲: اثبات درستی نابرابری زیرکه درحالت $a=b$ به‌برابری تبدیل می‌شود:

$$(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$$

درستی این نابرابری بنابه‌همانی (۴) محقق است و همچنین می‌توانیم آن را به‌روش زیر

ثابت کنیم:

از نابرابری بنیادی $(a-b)^2 \geqslant 0$ نتیجه می‌شود:

$$a^2+b^2-2ab \geqslant 0 \implies a^2+b^2 \geqslant 2ab \implies 2ab \leqslant a^2+b^2$$

به‌هرطرف این نابرابری مقدار a^2+b^2 را اضافه می‌کنیم:

$$a^2+b^2+2ab \leqslant a^2+b^2+a^2+b^2 \implies (a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$$

پس نابرابری مفروض برای هرمقدار از a و b محقق است.

مثال ۳: اثبات درستی نابرابری زیر با فرض نامنفی بودن متغیرهای آن:

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$$

همانی (۱۳) را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که a ، b و c مقادیر نامنفی باشند:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

در طرف دوم عامل اول نامنفی است (مجموع سه مقدار نامنفی)، عامل دوم نیز بنابه‌نابرابری قسمت چهارم از مثال ۱ بند قبل نامنفی است. پس طرف دوم و درنتیجه طرف اول همانی بالا نامنفی است و داریم:

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$$

حال اگر a ، b و c را به‌ترتیب با $\sqrt[3]{x}$ ، $\sqrt[3]{y}$ و $\sqrt[3]{z}$ جانشین کنیم نابرابری موردمثال به‌دست می‌آید.

مثال ۴: اثبات نابرابری زیر با فرض نامنفی بودن متغیرهای آن:

$$(x+y-z)(z+x-y)(y+z-x) \leqslant xyz$$

فرض می‌کنیم:

$$x+y-z=a \quad ، \quad z+x-y=b \quad ، \quad y+z-x=c$$

که نتیجه خواهد شد:

$$2x=a+b \quad ، \quad 2y=a+c \quad ، \quad 2z=b+c$$

و نابرابری به‌دست خواهد آمد که درقسمت ۳ از مثال ۱ بند پیش ثابت گردید.

مثال ۵: اثبات نابرابری زیر به‌فرض آنکه $a_i \geqslant 1$:

$$a_1a_2a_3 \dots a_n \geqslant a_1+a_2+a_3+ \dots +a_n-(n-1)$$

نابرابریهای زیر بنابه‌شرط $a_i \geqslant 1$ برقرارند:

$$a_1 \geqslant a_1-1$$

$$a_1(a_2-1) \geqslant a_2-1$$

$$a_1a_2(a_3-1)\geqslant a_3-1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}(a_n-1)\geqslant a_n-1$$

طرفهای نابرابریهای بالا را نظیر به‌نظیر باهم جمع می‌کنیم خواهیم داشت:

$$a_1a_2a_3\ldots a_n-1\geqslant a_1+a_2+\ldots+a_n-n$$

که با انتقال ۱ — ازطرف اول به‌طرف دوم، نابرابری مورد بحث به‌دست می‌آید.

مثال ۶: اثبات نابرابری زیر (نابرابری مثلثی):

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{z^2+t^2}\geqslant\sqrt{(x+z)^2+(y+t)^2}$$

راه سادهٔ اثبات این نابرابری استفاده ازهندسهٔ مختصاتی است: درصفحهٔ مختصات به‌فرض $O(0,0)$ ، $P(x,y)$ ، $Q(x+z,y+t)$ داریم:

$$OP=\sqrt{x^2+y^2}\quad،\quad PQ=\sqrt{z^2+t^2}\quad،$$
$$OQ=\sqrt{(x+z)^2+(y+t)^2}$$

درمثلث OPQ نابرابری $OP+PQ\geqslant OQ$ ثابت شده‌است ودرنتیجه نابرابری مفروض نیز برقرار است. حالت برابری وقتی است‌که O ، P و Q بریك استقامت باشند یعنی:

$$\frac{x}{y}=\frac{x+z}{y+t}=\frac{z}{t}$$

مثال ۷: اثبات نابرابری زیر به‌فرض $-1\leqslant a\leqslant 1$:

$$a\pm\sqrt{1-a^2}\leqslant\sqrt{2}$$

روش جبری اثبات این نابرابری بدین صورت انجام می‌گیردکه نخست آن راچنین می‌نویسیم:

$$\pm\sqrt{1-a^2}\leqslant\sqrt{2}-a$$

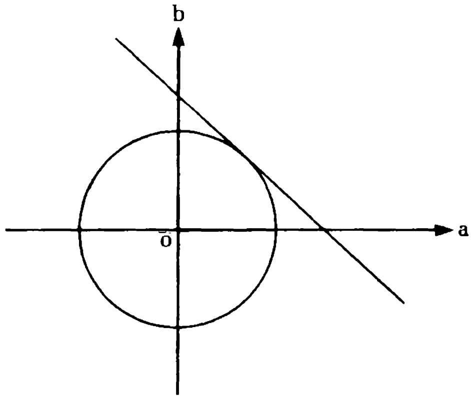
باتوجه به‌فرض $-1\leqslant a\leqslant 1$، طرف دوم مقداری است مثبت، در طرف اول اگر ضریب منفی را اختیارکنیم مقدار طرف اول نامثبت بوده و نابرابری «مثبت $\leqslant$ نامثبت» مسلم است. اما اگر درطرف اول ضریب مثبت را برگزینیم مقدار طرف اول نیز مثبت است و می‌توانیم دوطرف را مجذورکنیم:

$$1-a^2\leqslant 2+a^2-2a\sqrt{2}\iff(a\sqrt{2}-1)^2\geqslant 0$$

بنابراین نابرابری مفروض درهرحال برقرار است.

روش دیگر استفاده از هندسهٔ تحلیلی است: درصفحهٔ محورهای مختصات aOb به‌فرض $b=\pm\sqrt{1-a^2}$ و $b=\sqrt{2}-a$، نمودار اولی دایرهٔ به‌معادلهٔ $a^2+b^2=1$

و نمودار دومی خطی است که بردایره مماس است. عرض هر نقطهٔ دایره از عرض نقطهٔ همطول‌آن روی خط نابزرگتر است، پس نابرابری مفروض محقق است.



روش دیگر استفاده از مشتق است: بافرض $y=a\pm\sqrt{۱-a^۲}$ چون y' راحساب کنیم و برابر با صفر قرار دهیم معلوم خواهد شد که y درازای $a=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ دارای‌ماکسیمم برابر با $\sqrt{۲}$ است.

✽ **مثال ۸:** اثبات نابرابری زیر به‌فرض نامنفی بودن x_i :

$$\frac{x_۱+x_۲+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_۱x_۲\ldots x_n}$$

این نابرابری‌که حالتهای $n=۲$ و $n=۳$ از آن درمثال ۳ از بند (۵-۱۱) و مثال ۱ از بند (۵-۱۲) مطرح گردید به‌نابرابری واسطه‌های حسابی و هندسی معروف است و با روش استقراء ریاضی ثابت می‌گردد. یك روش اثبات آن به‌شرح زیر است:

لم- اگر حاصل‌ضرب n مقدار مثبت $a_۱$ ، $a_۲$ ، ... ، a_n برابر یك باشد مجموع آنها ناکوچکتر از n است.

اگر $n=۲$ باشد و داشته باشیم $a_۱a_۲=۱$ ، دومقدار مثبت $a_۱$ و $a_۲$ عکس یکدیگرند و چنانکه قبلاً ثابت شد (مثال ۱ از بند ۵-۱۱) داریم:

$$a_۱+a_۲\geqslant۲$$

اگر به‌ازای $n=k$ داشته باشیم

$$a_۱a_۲\ldots a_k=۱\ ,\ a_۱+a_۲+\ldots+a_k\geqslant k$$

ثابت می‌کنیم که این ویژگی به‌ازای $n=k+۱$ نیز صحت دارد. زیرا به‌فرض

$$a_۱a_۲\ldots a_ka_{k+۱}=۱$$

لااقل یك عامل a_i از یك نابزرگتر ویکی دیگر از یك ناکوچکتر است. مثلاً $a_1 \geqslant 1$ و $a_2 \leqslant 1$. با فرض $a_1a_2 = b$ داریم $ba_3 \ldots a_{k+1} = 1$ که چون این حاصل‌ضرب دارای k عامل است پس $b + a_3 + \ldots + a_{k+1} \geqslant k$. اما داریم:

$$a_1 - 1 \geqslant 0 \text{ و } 1 - a_2 \geqslant 0 \implies (a_1 - 1)(1 - a_2) \geqslant 0$$

که نتیجه خواهد شد $a_1 + a_2 \geqslant a_1a_2 + 1$. حال دو طرف این نابرابری و نابرابری به‌دست‌آمده دربالا را باهم جمع می‌کنیم که پس از حذف دو عامل برابر b و a_1a_2 از دو طرف حاصل خواهیم داشت:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1} \geqslant k + 1$$

پس ثابت شد که لم به‌ازای $n = 2$ درست است، واگر به‌ازای $n = k$ درست‌باشد به‌ازای $n = k + 1$ نیز درست است. بنابراین طبق اصل استقراء ریاضی به‌ازای هرمقدار از n درست خواهد بود.

اکنون به‌اثبات نابرابری مورد مثال می‌پردازیم: فرض‌می‌کنیم $x_1x_2 \ldots x_n = a$ پس خواهیم داشت:

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{a}} \cdot \frac{x_2}{\sqrt[n]{a}} \cdots \frac{x_n}{\sqrt[n]{a}} = 1$$

و بنابه‌لم خواهیم داشت:

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{a}} + \frac{x_2}{\sqrt[n]{a}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{a}} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sqrt[n]{a}} \geqslant n$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n}$$

یعنی: **واسطهٔ حسابی هرچند مقدار مثبت از واسطهٔ هندسی مثبت آنها ناکوچکتر است.** برابری وقتی خواهد بود که آن مقدارها باهم برابر باشند.

۵-۱۳. ماکسیمم و مینیمم مطلق. اگر P عبارت جبری یك یا چند متغیری باشد ومقدار معین m وجود داشته‌باشد که نابرابری $P \leqslant m$ به‌ازای هرمقدار ازمتغیریامتغیرها برقرارباشد، مقدار m را ماکسیمم مطلق عبارت P می‌نامند. و اگر نابرابری $P \geqslant m$ همواره برقرار باشد دراین صورت مقدار m را مینیمم مطلق عبارت P می‌نامند. برای آنکه ماکسیمم یا مینیمم مطلق عبارتی مانند P به‌دست‌آید لازم‌است که مقدار m به‌دست آید که نابرابری $P \geqslant m$ یا $P \leqslant m$ و یا نابرابریهای هم‌ارز آنها $P - m \geqslant 0$ یا $P - m \leqslant 0$ همواره برقرار باشد.

مثال ۱: تعیین ماکسیمم یا مینیمم سه‌جمله‌ای $P(x)=ax^2+bx+c$ **بدون** استفاده از مشتق:

$$P(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$P(x)-\frac{4ac-b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

باتوجه به‌اینکه $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ به‌ازای هرمقدار x مقداری نامنفی است پس برحسب اینکه a مثبت یا منفی باشد یکی از دوحالت زیر را داریم:

$$a>0 \implies P(x)-\frac{4ac-b^2}{4a}\geqslant 0$$

$$a<0 \implies P(x)-\frac{4ac-b^2}{4a}\leqslant 0$$

یعنی اگر a مثبت باشد سه‌جمله‌ای $P(x)$ دارای مینیممی است برابربا $\frac{4ac-b^2}{4a}$ که‌این مینیمم به‌ازای $x=-\frac{b}{2a}$ حاصل می‌شود و اگر a منفی باشد سه‌جمله‌ای $P(x)$ دارای ماکسیمم برابر $\frac{4ac-b^2}{4a}$ است‌که به‌ازای $x=-\frac{b}{2a}$ به‌دست می‌آید.

مثال ۲: تعیین ماکسیمم یا مینیمم $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$ بدون استفاده از مشتق؛

فرض می‌کنیم این ماکسیمم یا مینیمم برابر m باشد پس مقدار

$$f(x)-m=\frac{x+1}{x^2+1}-m=\frac{-mx^2+x+1-m}{x^2+1}$$

به‌ازای هرمقدار x یا نامنفی یا نامثبت است. چون x^2+1 همواره مثبت است پس‌حذف آن درعلامت عبارت بالا تغییری نمی‌دهد. اما داریم:

$$-mx^2+x+1-m=-m\left(x-\frac{1}{2m}\right)^2+\frac{1+4m-4m^2}{4m}$$

$$1+4m-4m^2=0 \implies m=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$$

$$m=\frac{1+\sqrt{2}}{2} \implies \frac{-1-\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2\leqslant 0$$

$$m=\frac{1-\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^2\geqslant 0$$

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2}\leqslant\frac{x+1}{x^2+1}\leqslant\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

یعنی عبارت مفروض دارای ماکسیمم برابر با $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ و مینیمم برابر با $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ است.

یادداشت- به‌دست‌آوردن ماکسیمم یا مینیمم عبارتهای جبری بدون استفاده از مشتق همواره به‌سادگی انجام نمی‌پذیرد. دراین باره بهتر است‌که ازمشتق استفاده شود.

*** ۵-۱۴. قضیه‌های ماکسیمم و مینیمم مطلق-** از چهار قضیه به‌شرح زیر می‌توان نام برد:

۱) اگر مجموع چند متغیر مثبت مقدار ثابت باشد، حاصل‌ضرب آنها وقتی ماکسیمم است‌که آن متغیرها باهم برابر باشند:

$$x_i>0\ ,\ x_1+x_2+\dots+x_n=a \iff x_1x_2\dots x_n\leqslant\left(\frac{a}{n}\right)^n$$

زیرا بنابه‌نابرابری واسطه‌های حسابی وهندسی‌که پیش ازاین ثابت شد داریم:

$$\frac{a}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\Longrightarrow x_1x_2\dots x_n\leqslant\left(\frac{a}{n}\right)^n$$

و چون برابری واسطه‌های حسابی و هندسی وقتی است‌که متغیرها باهم برابر باشند پس قضیه ثابت است.

۲) اگر حاصل‌ضرب چند متغیر مثبت مقدار ثابت باشد، مجموع آنها وقتی مینیمم است‌که آن متغیرها باهم برابر باشند:

$$x_i>0\ ,\ x_1x_2\dots x_n=a \iff x_1+x_2+\dots+x_n\geqslant n\sqrt[n]{a}$$

این قضیه نیز نتیجه‌ای از نابرابری واسطه‌های حسابی و هندسی است.

۳) اگر مجموع چند متغیر مثبت مقدار ثابت باشد، حاصل‌ضرب توانهای صحیح مثبتی ازآن‌متغیرها وقتی ماکسیمم است‌که‌آن متغیرها به‌ترتیب با نماهای‌خود متناسب باشند.

$$x_i>0\ ,\ x_1+x_2+\dots+x_n=a \iff$$

$$x_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_n^{m_n}\leqslant\left(\frac{a}{b}\right)^b m_1^{m_1}m_2^{m_2}\dots m_n^{m_n},$$

$$b=m_1+m_2+\dots+m_n$$

برابری وقتی است که:

$$\frac{x_1}{m_1}=\frac{x_2}{m_2}=\dots=\frac{x_n}{m_n}=\frac{a}{b}$$

زیرا اگر از $\frac{x_1}{m_1}$ تعداد m_1 عامل، از متغیر $\frac{x_2}{m_1}$ تعداد m_2 عامل، ... ، از متغیر $\frac{x_n}{m_n}$ تعداد m_n درنظربگیریم، تعداد همهٔ آنها می‌شود $m_1+m_2+\dots+m_n=b$ و مجموع آنها می‌شود a ، پس حاصلضرب این عاملها وقتی ماکسیمم است که باهم برابر باشند.

۴) اگر حاصلضرب توانهای صحیح مثبتی از چند متغیر مقدار ثابت باشد، مجموع آن متغیرها وقتی مینیمم است که متغیرها به‌ترتیب با نماهای خود متناسب باشند.

$$x_i>0\ ,\ x_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_n^{m_n}=a\quad ،\quad b=m_1+m_2+\dots+m_n$$

$$\Longleftrightarrow\ x_1+x_2+\dots+x_n\geqslant b\sqrt[b]{\frac{a}{p}}\quad ،\quad p=m_1^{m_1}m_2^{m_2}\dots m_n^{m_n}$$

برابری وقتی است که:

$$\frac{x_1}{m_1}=\frac{x_2}{m_2}=\dots=\frac{x_n}{m_n}$$

زیرا حاصلضرب m_1 عامل از $\frac{x_1}{m_1}$ در m_2 عامل از $\frac{x_2}{m_2}$ در ... در m_n عامل از $\frac{x_n}{m_n}$ برابر می‌شود با $\frac{a}{p}$ که مقدار ثابت است. پس مجموع این عاملها وقتی مینیمم است که آن عاملها باهم برابر باشند. چون تعداد همهٔ عاملهای مزبور b است پس اگر باهم برابر باشند مقدار هرکدام می‌شود $\sqrt[b]{\frac{a}{p}}$ و مجموع آنها می‌شود $b\sqrt[b]{\frac{a}{p}}$.

یادداشت- اثبات قضیه‌های بالا برای حالتی‌که m_1 ، m_2 ، ... ، m_n عددهای گویا باشند قابل تعمیم است و دراین حالت هم نابرابریها برقرارند.

مثال۱ : از بین مثلثهای با محیط ثابت $2p$ آنکه متساوی‌الاضلاع باشد دارای مساحت ماکسیمم است. زیرا مساحت مثلث از دستور

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

به‌دست می‌آیدکه شامل سه‌عامل متغیر و مثبت $p-a$ ، $p-b$ و $p-c$ است. مجموع

این متغیرها

$$p-a+p-b+p-c=3p-2p=p$$

مقدار ثابت است. پس حاصل‌ضرب آنها وقتی ماکسیمم است که باهم برابر باشند.

مثال ۲: عبارت $(1-x^2)\sqrt{x^2-y^2}\cdot\sqrt[3]{y}$ که به‌صورت

$$(1-x^2)(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}(y^2)^{\frac{1}{6}}$$

نوشته می‌شود به‌فرض $0\leqslant y^2<x^2<1$ برابر است با حاصل‌ضرب توانهای سه‌عامل مثبت $1-x^2$ ، x^2-y^2 و y^2 که مجموع آنها ثابت است و وقتی ماکسیمم است که:

$$\frac{1-x^2}{1}=\frac{x^2-y^2}{\frac{1}{2}}=\frac{y^2}{\frac{1}{6}}\implies y=\frac{\sqrt{10}}{10}\,,\ x=\frac{2\sqrt{10}}{10}$$

*** ۵-۱۵. برخی نابرابریهای مشهور-** ازجمله نابرابریهایی‌که کاربرد زیاد دارند و برخی از آنها به‌نام اشخاص معروفند:

۱) نابرابری ویرشتراس - برای هر $a_i\geqslant 0$:

$$(1+a_1)(1+a_2)\ \dots\ (1+a_n)\geqslant 1+a_1+a_2+\ \dots\ +a_n$$

برابری وقتی است‌که همهٔ a_iها صفر (یا حداکثر یکی از آنها مخالف صفر) باشند.

این نابرابری از روی نابرابری‌که درمثال ۵ ازبند (۵-۱۲) ثابت شد از راه تبدیل a_i به $1+a_i$ به‌دست می‌آید. همچنین می‌توان آن را مستقیماً با روش استقراءِ ریاضی ثابت کرد.

۲) نابرابری برنولی. اگر $a\geqslant -1$ و $b>1$ باشد:

$$(1+a)^b\geqslant 1+ab \quad ، \qquad \text{برابری برای } a=0$$

طرف اول نابرابری بالا بنابه‌فرض مثبت است و طرف دوم آن اگر منفی یا صفر باشد نابرابری محقق است واگر $1+ab\geqslant 0$ باشد هرگاه b برابر باعددگویای $\frac{p}{q}$باشد که $p>q$ و تعداد q عدد مثبت برابر $1+ab$ و تعداد $p-q$ عدد برابر یك را درنظر بگیریم تعداد همهٔ این عددها p است و واسطهٔ حسابی آنها می‌شود

$$\frac{q(1+ab)+p-q}{p}=\frac{p+qab}{p}=1+\frac{q}{p}ab=1+\frac{q}{p}\times\frac{p}{q}a=1+a$$

و واسطهٔ هندسی آنها می‌شود $\sqrt[p]{(1+ab)^q}$ و بنابرآنچه دربندهای پیش ثابت شد داریم:

$$1+a\geqslant\sqrt[p]{(1+ab)^q}\implies(1+a)^{\frac{p}{q}}\geqslant 1+ab$$

درحالتی‌که b عدد حقیقی غیرمشخص باشد با استفاده از قاعدهٔ افناء (عبور از حد) درستی برابری محقق است. بنابراین نابرابری مفروض برای هرمقدار حقیقی $b>1$ برقرار است.

درحالتی‌که b برابر با عدد طبیعی n باشد داریم:

$$(1+a)^n \geqslant 1+na$$

و درستی این نابرابری را می‌توان از روی نابرابری که درمثال ۵ از بند (۵-۱۲) ثابت شدکه درحالت برابری عاملهای‌آن به‌صورت $a^n \geqslant na-(n-1)$ درمی‌آید، سپس ازراه تبدیل a به $1+a$ نتیجه گرفت و یا اینکه آن را از نابرابری ویرشتراس یا از بسط دوجمله‌ای نیوتن به‌دست آورد. همچنین می‌توان آن را مستقیماً با روش استقراءریاضی ثابت‌کرد.

۳) نابرابری کشی-شوارتز. برای هرمقدار حقیقی از x_i و y_i:

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)\geqslant$$
$$(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2$$

برابری وقتی است‌که x_iها و y_iها نظیر به‌نظیر متناسب باشند، یعنی:

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\ldots=\frac{x_n}{y_n}$$

این نابرابری نتیجه‌ای از اتحاد لاگرانژ درحالت کلی‌آن است. درحالت $n=2$ می‌توان چنین نوشت:

$$(x^2+y^2)(a^2+b^2)\geqslant(ax+by)^2$$

۴) نابرابری چبیشف. برای‌هرمقدارحقیقی‌از x_i و y_i که $x_i \leqslant x_{i+1}$ و $y_i \leqslant y_{i+1}$ باشد.

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)(y_1+y_2+\ldots+y_n)\leqslant$$
$$n(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)$$

برابری وقتی است‌که یا همهٔ x_iها یا همهٔ y_iها باهم برابر باشند.

برای هردومقدار از i و j تفاضلهای x_i-x_j و y_i-y_j همعلامتند یا حداقل یکی از آنها صفر است. پس:

$$(x_i-x_j)(y_i-y_j)\geqslant 0 \implies x_iy_i+x_jy_j\geqslant x_iy_j+x_jy_i$$

چون به i و j مقادیر از ۱ تا n را نسبت داده وطرفهای نابرابریهای حاصل را باهم‌جمع کنیم نابرابری مفروض به‌دست می‌آید. نابرابری چبیشف به‌گونهٔ زیر تعمیم می‌یابد:

$$\frac{\sum_{1}^{n} x_i y_i z_i \dots}{n} \geqslant \frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n} \times \frac{\sum_{1}^{n} y_i}{n} \times \frac{\sum_{1}^{n} z_i}{n} \times \dots$$

۵) نابرابری توان‌مجموع و مجموع توانها. هرگاه درنابرابری‌چبیشف x_iها رابرابر با y_iها برگزینیم نتیجه می‌شود:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leqslant n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

برابری وقتی است که همهٔ x_iها باهم برابر باشند.

این نابرابری به‌صورت زیرتعمیم می‌یابدکه باروش استقراءِ ریاضی‌قابل اثبات‌است:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^m \leqslant n^{m-1}(x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m)$$

چنانکه درحالت $n = 2$ و $m = 2$ نابرابری $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$ را خواهیم داشت (که درمثال ۲ از ۵-۱۲ مستقلاً ثابت‌گردیـد). حال اگر دو طرف این نابرابری را در $a+b$ ضرب‌کنیم، باتوجه به‌اینکه

$$a^2 - ab + b^2 \geqslant \frac{a^2+b^2}{2} \implies a^3 + b^3 \geqslant \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)(a+b)$$

نتیجه خواهد شدکه درحالت $n = 2$ و $m = 3$ نیز داریم:

$$(a+b)^3 \leqslant 4(a^3+b^3)$$

۶) نابرابریهای واسطه‌ها. واسطهٔ کلـی n عـدد مثبت a_1، a_2، ...، a_n را با $M_r(a_i)$ نشان داده و چنین تعریف می‌کنیم:

$$M_r(a_i) = \sqrt[r]{\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n}}$$

اگر $r = 1$ انتخاب شود واسطهٔ حسابی را خواهیم داشت:

$$M_1(a_i) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

واسطهٔ توافقی به‌ازای $r = -1$ به‌دست می‌آید:

$$M_{-1}(a_i) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

واسطه به‌ازای $r = 2$ واسطهٔ مربعی نامیده می‌شود:

$$M_2(a_i) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

ثابت می‌شودکه اگر $r \to 0$، حد حاصل برابر با واسطهٔ هندسی است:

$$M_{0}(a_i)=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

درمثال ۸ از ۵-۱۲ ثابت شدکه: واسطهٔ هندسی چند عدد مثبت از واسطهٔ حسابی آنها نابزرگتر است:

$$M_1(a_i)\geqslant M_0(a_i)$$

هرگاه دراین‌نابرابری‌هر a_i را به $\frac{1}{a_i}$ تبدیل و دو طرف را معکوس‌کنیم نتیجه می‌شود که: واسطهٔ توافقی چند عدد مثبت از واسطهٔ هندسی آنها نابزرگتر است:

$$M_0(a_i)\geqslant M_{-1}(a_i)$$

از نابرابری توان مجموع و مجموع توانها نتیجه می‌شودکه: واسطهٔ مربعی چند عدد مثبت از واسطهٔ حسابی آنها ناکوچکتر است:

$$M_2(a_i)\geqslant M_1(a_i)$$

به‌سادگی ثابت می‌شودکه هرکدام از واسطه‌های چند عدد مثبت از کوچکترین این اعداد ناکوچکتر و از بزرگترین آنها نابزرگتر است.

ازآنچه گذشت و با فرض $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$ خواهیم داشت:

$$\boxed{a_1\leqslant M_{-1}(a_i)\leqslant M_0(a_i)\leqslant M_1(a_i)\leqslant M_2(a_i)\leqslant a_n}$$

برابری وقتی است‌که همهٔ a_iها باهم برابر باشند.

به‌عنوان مثال برای دوعدد a و b به‌شرط $0<a\leqslant b$ داریم:

$$a\leqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leqslant b$$

❊ ۷) چندنابرابری دیگر. نابرابریهای‌زیربرای شناسایی‌یادآوری می‌شود. خوانندهٔ علاقه‌مند برای بررسی بیشتر می‌تواند به‌مآخذ و کتابهای دراین زمینه مراجعه کند؛

نابرابری مینکوفسکی : باتوجه به‌تعریف واسطهٔ‌کلی چند عدد مثبت‌که در بند پیش به‌صورت $M_r(a_i)$ تعریف‌گردید، به‌فرض $r>1$ داریم:

$$M_r(a_i+b_i)\leqslant M_r(a_i)+M_r(b_i)$$

حالت ویژهٔ این نابرابری در هندسه همان نابرابری بین ضلعهای مثلث است. از اینرو نابرابری مزبور را نابرابری مثلثی نیز می‌نامندکه می‌توان آن را به‌ازای مقادیر مختلف r و انتخاب مقادیر i به صورت نابرابریهای مختلف بیان‌کرد. مانند نابرابری‌که در مثال ۶ از ۵-۱۲ بااستفاده ازهندسهٔ مختصاتی ثابت‌گردید.

نابرابری هلدر: اگر a_iها و b_iها عددهای مثبت و p و q دو عدد مثبت بوده و در شرایط $p>1$ و $p+q=pq$ صدق کنند آنگاه:

$$\sum_{1}^{n} a_i b_i \leqslant \left[\sum_{1}^{n} a_i^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\sum_{1}^{n} b_i^{q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

نابرابری ینسن: هرگاه a_iها عددهای مثبت و $s>t>0$ باشد:

$$\left[\sum_{1}^{n} a_i^{s}\right]^{\frac{1}{s}} \leqslant \left[\sum_{1}^{n} a_i^{t}\right]^{\frac{1}{t}}$$

نابرابری واسطه‌های موزون: اگر a_iها عددهای مثبت و m_iها عددهای گویای مثبت باشند:

$$\frac{\sum_{1}^{n} m_i a_i}{\sum_{1}^{n} m_i} \geqslant \left[\prod_{1}^{n} a_i^{m_i}\right]^{\frac{1}{\sum_{1}^{n} m_i}}$$

همچنین از نابرابریهای آبل، بسل، نیوتن، هادمارد، یونگ می‌توان نام برد که در زمینه‌های توابع، دترمینانها، انتگرالها، احتمالات وغیره کاربرد دارند.

✽ ۵ - ۱۶. نابرابری و تحدب منحنی. اگر تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ (a,b) تعریف شده باشد و x_1 و x_2 دو مقدار دلخواه متعلق به این فاصله باشند، هرگاه داشته باشیم:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

می‌گوییم که درفاصلهٔ مزبور تحدب منحنی نمودار تابع به‌سمت yهای مثبت است، و اگر داشته باشیم:

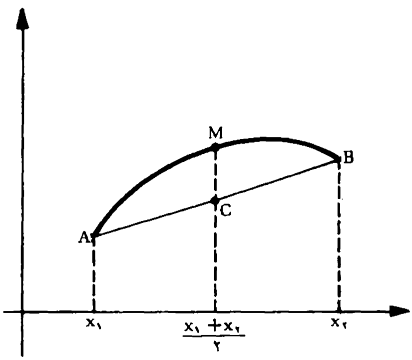
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

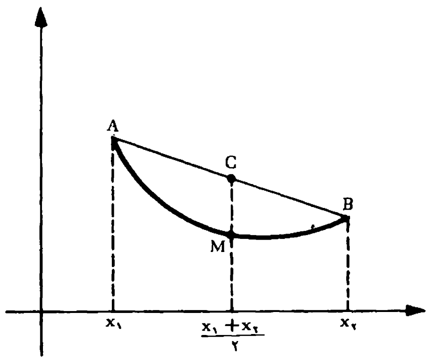
تحدب منحنی به سمت y های منفی خواهد بود. هرگاه

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

باشد منحنی بدون تحدب است. تعبیر هندسی تعریف بالا بدین قرار است که اگر A و B دو نقطهٔ به‌طولهای x_1 و x_2 از منحنی باشند طول نقطهٔ C وسط پاره خط AB برابر با $\frac{x_1+x_2}{2}$ است و چون عرضهای نقطه‌های A و B به ترتیب $f(x_1)$ و $f(x_2)$ است

پس عرض نقطهٔ C می‌شود $\frac{f(x_۱)+f(x_۲)}{۲}$ اما $f\left(\frac{x_۱+x_۲}{۲}\right)$ برابر است با عرض نقطهٔ M از منحنی که با نقطهٔ C همطول است. نابرابری اول به این معنی است که نقطهٔ





واقع برمنحنی بالاتر از نقطهٔ نظیر از وتر واقع است و نابرابری دوم نمایانگر آن است که نقطهٔ واقع برمنحنی پایینتر ازنقطهٔ نظیر از وتر قرار دارد. درحالت $x_۲ \to x_۱$ نقطهٔ B به A و همچنین M به C میل می‌کند و AB به‌مماس برمنحنی در نقطهٔ M میل می‌کند.

هر گاه منحنی نمودار تابع $y=f(x)$ درفاصلهٔ (a,b) دارای تحدب به‌سمت yهای مثبت باشد و $x_۱$ و $x_۲$ و ... و x_n از یکدیگر متمایز و متعلق به فاصلهٔ مزبور باشند، می‌توان ثابت کرد که:

$$f\left(\frac{x_۱+x_۲+\dots+x_n}{n}\right)>\frac{f(x_۱)+f(x_۲)+\dots+f(x_n)}{n}$$

از ویژگی گفته شده دربالا برای اثبات بعضی از نابرابریها استفاده می‌شود. چه اگر جهت تحدب منحنی نمودار یك تابع معین شده باشد (مثلاً باستفاده ازعلامت مشتق دوم)، درآن صورت نابرابری ازگونهٔ بالا برقرار خواهد بود.

مثال. به فرض $y=x^n$ داریم $y''=n(n-۱)x^{n-۲}$ و به‌شرط $n>۱$ هرگاه x مثبت باشد y'' نیز مثبت است پس به‌ازای $x>۰$ تحدب منحنی تابع به‌سمت yهای منفی است (اگر n زوج باشد به‌ازای هرمقدار x) بنابراین برای دو عدد مثبت a و b داریم:

$$\left(\frac{a+b}{۲}\right)^n \leqslant \frac{a^n+b^n}{۲} \Longrightarrow (a+b)^n \leqslant ۲^{n-۱}(a^n+b^n)$$

و اگر تعداد عددهای مثبت k باشد:

$$(a+b+\dots+l)^n \leqslant k^{n-1}(a^n+b^n+\dots+l^n)$$

همان نابرابری که قبلاً از راه دیگر ثابت گردید.

۵.ج ـ استلزامها و همارزیهای جبری (همانیها و نابرابریهای شرطی)

۵-۱۷. یادآوریهایی از منطق. اگر P و Q دو گزاره باشند در ترکیب دوتایی $P \Longrightarrow Q$ که استلزام نامیده میشود ، اگر P درست باشد Q نیز درست خواهد بود و اگر Q نادرست باشد P نیز نادرست خواهد بود. در این ترکیب، Q را شرط لازم برای P و P را شرط کافی برای Q مینامند.

هرگاه دو استلزام $P \Longrightarrow Q$ و $Q \Longrightarrow P$ باهم برقرار باشند، همارزی $P \Longleftrightarrow Q$ برقرار خواهد بود. دراین همارزی هریك از دوگزارهٔ P و Q شرط لازم وکافی برای دیگری نامیده میشود.

استلزام بهصورت «اگر، آنگاه» یا بهصورت شرط لازم یا شرطکافی بیان میشود و همارزی را معمولاً بهصورت شرط لازم وکافی یا بهصورت «اگر وفقط اگر» بیانمیکنند.

۵-۱۸. استلزام و همارزی درجبر. هرگاه گزارههای P و Q جبریباشند، مثلاً همانی یا نابرابری باشند، استلزام $P \Longrightarrow Q$ یاهمارزی $P \Longleftrightarrow Q$ را معمولاً زیرعنوان همانی شرطی(اتحاد شرطی) یا نابرابری شرطی بیان میکنند.

مثال۱(همانی شرطی): اگر داشته باشیم $a+b+c=0$ آنگاه خواهیم داشت $a^3+b^3+c^3=3abc$ یعنی استلزام:

$$a+b+c=0 \Longrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

مثال ۲ (نابرابری شرطی): اگر a و b و c عددهای مثبت باشند:

$$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow a^3>b^3+c^3$$

مثال ۳ (همارزی): به فرض آنکه p و q عددهای مثبت باشند:

$$\frac{p}{q}<\sqrt{3} \Longleftrightarrow \frac{p+3q}{p+q}>\sqrt{3}$$

۵-۱۹. روشهای اثبات استلزامهای جبری. یك روشکه بیشتر متداول است عمل کردن رابطهٔ طرف اول است تا اینکه رابطهٔ طرف دوم بهدست آید. این روش از دیدگاه منطق عبارت است ازنمودن دنبالهای از استلزامهاکه از P آغاز و به Q پایان یابد:

$$P \Longrightarrow P_1, P_1 \Longrightarrow P_2, \dots, P_{n-1} \Longrightarrow P_n, P_n \Longrightarrow Q$$

که دراین صورت بنا به قانون قیاس استلزام $P \Longrightarrow Q$ برقرار خواهد بود.

روش دیگر که گونه‌ای از برهان خلف است اثبات استلزام $\sim P \Leftarrow \sim Q$ است، یعنی ثابت می‌شود که اگر گزارهٔ Q نادرست باشد گزارهٔ P نیز نادرست خواهد بود.

اثبات ترکیب فصلی $\sim P \vee Q$ یک روش دیگر است زیرا این ترکیب نیز با استلزام $P \Rightarrow Q$ هم‌ارز است.

روش دیگر نمودن رابطه‌هایی جبری مانند همانی یا نابرابری ثابت شده است که استلزام مورد اثبات نتیجه‌ای از آن باشد. از گونهٔ اینکه اگر رابطهٔ $A = B.C$ محقق باشد. آنگاه استلزام $A = ۰ \Leftarrow B = ۰$ وهمچنین استلزام $B = ۰ \Rightarrow (C \neq ۰$ و $A = ۰)$ نیز محقق خواهد بود.

روشهای دیگر نیز یافته خواهد شد. اما اینکه کدام روش انتخاب شود که ساده‌تر و زیباتر باشد به‌نوع رابطه‌های مفروض و به‌ذوق ومهارت وابتکار شخص بستگی دارد.

مثال ۱: اثبات اینکه اگر $a + b + c = ۰$ آنگاه $a^۳ + b^۳ + c^۳ = ۳ab$؛ بنا به روش متداول از $a + b + c = ۰$ آغاز می‌کنیم؛ با در نظر گرفتن رابطهٔ دوم درمی‌یابیم که رابطه را به‌توان ۳ برسانیم. اگر به‌همین صورت دو طرف را به‌توان برسانیم به‌نتیجه خواهیم رسید اما ساده‌تر آن است که رابطه را به‌صورت $a + b = -c$ بنویسیم و دنبالهٔ استلزامهای زیر را خواهیم داشت:

$$a+b+c=۰ \Longrightarrow a+b=-c \Longrightarrow (a+b)^۳=-c^۳$$
$$\Longrightarrow a^۳+b^۳+۳ab(a+b)=-c^۳$$
$$\Longrightarrow a^۳+b^۳+۳ab(-c)=-c^۳ \Longrightarrow a^۳+b^۳+c^۳=۳abc$$

روش دیگر: همانی زیر را که قبلاً محقق شده است درنظر می‌گیریم:

$$a^۳+b^۳+c^۳-۳abc=(a+b+c)(a^۲+b^۲+c^۲-ab-bc-ca)$$

هرگاه $a + b + c = ۰$ آنگاه طرف دوم صفر است و درنتیجه طرف اول نیز صفر است و از آنجا رابطهٔ $a^۳ + b^۳ + c^۳ = ۳abc$ به‌دست می‌آید.

مثال ۲: به فرض آنکه a ، b و m عددهای مثبت باشند ، اثبات اینکه اگر $a > b$ آنگاه :

$$\sqrt{a+m}-\sqrt{a}<\sqrt{b+m}-\sqrt{b}$$

از نقیض رابطهٔ اخیر آغاز می‌کنیم:

$$\sqrt{a+m}-\sqrt{a}\geqslant\sqrt{b+m}-\sqrt{b}$$

$$\Longrightarrow \frac{۱}{\sqrt{a+m}-\sqrt{a}} \leqslant \frac{۱}{\sqrt{b+m}-\sqrt{b}}$$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{a+m}+\sqrt{a}}{m} \leqslant \frac{\sqrt{b+m}+\sqrt{a}}{m}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{a+m}+\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b+m}+\sqrt{b} \Longrightarrow \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b} \Longrightarrow a \leqslant b$$

پس اگر رابطهٔ دوم نفی شود رابطهٔ اول هم نفی خواهد شد؛ یعنی اگر رابطهٔ دوم درست نباشد نتیجه می‌شود $a \leqslant b$ که خلاف فرض است. بنابراین رابطهٔ دوم درست است.

مثال ۳: به‌فرض اینکه a ، b و c عددهای مثبت باشند، اثبات استلزام:

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Longrightarrow a^۳>b^۳+c^۳$$

رابطه‌های زیر را درنظر می‌گیریم:

$$(a^۳-b^۳-c^۳)(a^۳+b^۳+c^۳)=a^۶-(b^۳+c^۳)^۲$$
$$=a^۶-(b^۶+c^۶+۲b^۳c^۳)$$
$$=a^۶-[(b^۲+c^۲)^۳-۳b^۲c^۲(b^۲+c^۲)+۲b^۳c^۳]$$
$$=a^۶-a^۶+b^۲c^۲[۳(b^۲+c^۲)-۲bc]$$
$$=b^۲c^۲[۲(b^۲+c^۲)+(b-c)^۲]$$

عبارت اخیرمثبت‌است، پس طرف اول رابطه نیز مثبت است وچون عامل $a^۳+b^۳+c^۳$ به‌فرض مثبت‌است بنابراین‌عامل $a^۳-b^۳-c^۳$ نیزمثبت‌است ونابرابری $a^۳>b^۳+c^۳$ محقق است.

۵-۲۰. روشهای اثبات هم‌ارزیهای جبری. برای اثبات هم‌ارزی $P \Longleftrightarrow Q$ یا بایددرستی هریک ازاستلزامهای $Q \Longrightarrow P$ و $P \Longrightarrow Q$ رابنا به‌یکی از روشهای قبلی ثابت کرد، یا اینکه یک رابطهٔ محقق، مثلا یك همانی یا یك نابرابری، را ارائه داد که، هم‌ارزی مفروض بنابرآن مسلم باشد. مثلا اگر رابطه‌ای از گونهٔ $A=BC$ به شرط $C\neq ۰$ محقق باشد آنگاه هم‌ارزی $(B=۰ \Longleftrightarrow A=۰)$ نیز محقق خواهد بود.

همچنین می‌توان برای اثبات هم ارزی دو گزارهٔ جبری P و Q گزارهٔ دیگر R را یافت‌به‌گونه‌ای که‌هریک از گزاره‌های P و Q با R هم‌ارز باشند.

مثال ۱. اثبات اینکه دو رابطهٔ زیر هم‌ارز یکدیگرند:

$$(۱)\quad \frac{x^۲}{y^۲}=\frac{a^۲+b^۲}{a^۲-b^۲} \quad ، \quad (۲)\quad \frac{a^۲}{b^۲}=\frac{x^۲+y^۲}{x^۲-y^۲}$$

ثابت می‌کنیم‌که هر یك از دو رابطه را می‌توان از روی دیگری به‌دست آورد؛ با استفاده از عمل ترکیب وتفضیل نسبتها دریك تناسب داریم:

$$۱)\quad \frac{x^۲}{y^۲}=\frac{a^۲+b^۲}{a^۲-b^۲} \Longrightarrow \frac{x^۲+y^۲}{x^۲-y^۲}=\frac{(a^۲+b^۲)+(a^۲-b^۲)}{(a^۲+b^۲)-(a^۲-b^۲)}$$

$$=\frac{۲a^۲}{۲b^۲}=\frac{a^۲}{b^۲}$$

$$۲)\quad \frac{a^۲}{b^۲}=\frac{x^۲+y^۲}{x^۲-y^۲}\Longrightarrow \frac{a^۲+b^۲}{a^۲-b^۲}=\frac{(x^۲+y^۲)+(x^۲-y^۲)}{(x^۲+y^۲)-(x^۲-y^۲)}$$

$$=\frac{۲x^۲}{۲y^۲}=\frac{x^۲}{y^۲}$$

مثال ۲. اثبات هم‌ارزی زیر بافرض آنکه p و q عددهای مثبت باشند:

$$\frac{p}{q}<\sqrt{۳}\iff \frac{p+۳q}{p+q}>\sqrt{۳}$$

رابطهٔ طرف دوم را به‌صورت زیر می‌نویسیم و عمل می‌کنیم:

$$\frac{p+۳q}{p+q}-\sqrt{۳}=\frac{p+۳q-\sqrt{۳}(p+q)}{p+q}$$

$$=\frac{(۳-\sqrt{۳})q-(\sqrt{۳}-۱)p}{p+q}=\frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۳}-۱)q-(\sqrt{۳}-۱)p}{p+q}$$

$$=\frac{(\sqrt{۳}-۱)q}{p+q}\left(\sqrt{۳}-\frac{p}{q}\right)$$

چون p و q مثبتند و $\sqrt{۳}-۱$ هم مثبت‌است پس عبارت $\frac{(\sqrt{۳}-۱)q}{p+q}$ مثبت است و در نتیجه دو عبارت $\frac{p+۳q}{p+q}-\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۳}-\frac{p}{q}$ هم‌علامتند پس:

$$\frac{p+۳q}{p+q}-\sqrt{۳}>۰\iff \sqrt{۳}-\frac{p}{q}>۰$$

به عبارت دیگر:

$$\frac{p+۳q}{p+q}>\sqrt{۳}\iff \frac{p}{q}<\sqrt{۳}$$

مثال ۳: به‌فرض مثبت‌بودن x و z، اثبات اینکه شرط لازم و کافی برای درستی رابطهٔ:

$$(۱)\quad (x^n+y^n+z^n)(x^n-y^n+z^n)=x^{۲n}+y^{۲n}+z^{۲n}$$

آن است‌که رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$(۲)\quad xz=y^۲$$

رابطهٔ (۱) هم‌ارز است با:

$$D=(x^n+y^n+z^n)(x^n-y^n+z^n)-(x^{۲n}+y^{۲n}+z^{۲n})$$

$$=(x^n+z^n)^2-y^{2n}-(x^{2n}+y^{2n}+z^{2n})$$
$$=x^{2n}+z^{2n}+2x^nz^n-y^{2n}-x^{2n}-y^{2n}-z^{2n}$$
$$=2(x^nz^n-y^{2n})$$

هرگاه رابطهٔ (۱) برقرار باشد $D=0$ است و درنتیجه:

$$x^nz^n-y^{2n}=0 \implies y^{2n}=x^nz^n$$

از دو طرف این برابری ریشهٔ n ام می‌گیریم وچون x و z مثبت هستند نتیجه می‌شود $y^2=xz$، یعنی اگر رابطهٔ (۱) برقرار باشد رابطهٔ (۲) نیز برقرار است.

برعکس، هرگاه رابطهٔ (۲) برقرار باشد، داریم:

$$y^2=xz \implies y^{2n}=x^nz^n \implies x^nz^n-y^{2n}=0$$

که درنتیجه $D=0$ و رابطهٔ (۱) برقرار خواهد بود. بنابراین:

$$[(1) \implies (2) \text{ و } (2) \implies (1)] \implies [(1) \iff (2)]$$

۵، د ـ چند مسئلهٔ نمونه

۵-۲۱. چندجمله‌ای $A(x)$ داده شده است. چندجمله‌ای $B(x)$ با بزرگترین درجه را بیابیدکه توان n ام آن با درجهٔ نابزرگتر از درجهٔ $A(x)$ باشد.

حل- درجهٔ $A(x)$ را p وخارج قسمت وباقیماندهٔ تقسیم p بر n را به‌ترتیب q و r می‌گیریم. یعنی فرض می‌کنیم $p=nq+r$. در این صورت، در حالتهای خاصی، چندجمله‌ای $B(x)$ از درجهٔ q و چندجمله‌ای $C(x)$ از درجهٔ r یافت می‌شود به گونه‌ای که:

$$A(x)=[B(x)]^nC(x)+R(x)$$

که $R(x)$ چندجمله‌ای است با درجهٔ کمتر از q. این برابری نسبت به x یک‌همانی است و با روش ضریبهای نامعین می‌توان $B(x)$ و همچنین $C(x)$ و $R(x)$ را به‌دست آورد.

هرگاه $r=0$ یعنی $p=nq$ باشد داریم:

$$A(x)=[B(x)]^n+R(x) \quad , \quad d^\circ R(x)<q$$

دراین حال $B(x)$ را ریشهٔ nام $A(x)$ بایك درجهٔ تقریب می‌نامند.

مثال عددی: ریشهٔ دوم چندجمله‌ای زیر را به‌دست‌آورید:

$$A(x)=x^6+6x^4+2x^3+11x^2+5x+2$$

ریشهٔ دوم این عبارت از درجهٔ ۳ است وچون ضریب جملهٔ درجهٔ ششم از $A(x)$ برابر ۱ است. پس:

$$A(x)=[\pm(x^3+ax^2+bx+c)]^2+dx^2+ex+f$$

$$A(x)=x^6+2ax^5+(a^2+2b)x^4+(2ab+2c)x^3$$
$$+(b^2+2ac+d)x^2+(2bc+e)x+c^2+f$$

ازمتحد قرار دادن این چندجمله‌ای با چندجمله‌ای داده شده خواهیم داشت:

$$a=0\ .\ b=3\ ،\ c=1\ ،\ d=2\ ،\ e=-1\ ،\ f=1$$
$$A(x)=[\pm(x^3+3x+1)]^2+2x^2-x+1$$

۵-۲۲. هرگاه متغیرهای x و y در رابطهٔ $ax+by=c$ صدق کنند، مینیمم x^2+y^2 را به‌دست آورید.

حل- بنابرهمانی لاگرانژ برای دو متغیر خواهیم داشت:

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=c^2+(ay-bx)^2$$

از این رابطه برمی‌آید که مینیمم x^2+y^2 وقتی است که $(ay-bx)^2$ مینیمم باشد، یعنی:

$$(ay-bx)^2=0 \iff \frac{x}{y}=\frac{a}{b}$$

و مقدار آن :

$$x^2+y^2 \geqslant \frac{c^2}{a^2+b^2}$$

۵-۲۳. اگر x کمان حاده و a و b نامنفی باشند، ماکسیمم $a\sin x+b\cos x$ را به‌دست آورید.

حل- با توجه به نابرابری کشی شوارتز (یا با توجه به‌اتحاد لاگرانژ) داریم:

$$(a\sin x+b\cos x)^2 \leqslant (a^2+b^2)(\sin^2 x+\cos^2 x)$$

و چون درحالت :

$$\cos x=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad و \quad \sin x=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

برابری برقرار است، نتیجه می‌شود:

$$a\sin x+b\cos x \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$$

۵-۲۴. درستی نابرابری زیر را برای عدد طبیعی $n>1$ ثابت کنید:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}<\sqrt{2n-1}$$

حل- بنا به نابرابری واسطهٔ حسابی و واسطهٔ مربعی داریم:

$$\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)^2<n\left(1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$<n\left(۱+\frac{۱}{۱\times ۲}+\dots+\frac{۱}{(n-۱)n}\right)$$

$$=n\left(۱+\left[\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۲}\right]+\dots+\left[\frac{۱}{n-۱}-\frac{۱}{n}\right]\right)$$

$$=n\left(۲-\frac{۱}{n}\right)=۲n-۱$$

$$\left(۱+\frac{۱}{۲}+\dots+\frac{۱}{n}\right)^۲<۲n-۱ \Longrightarrow ۱+\frac{۱}{۲}+\dots+\frac{۱}{n}<\sqrt{۲n-۱}$$

۵-۲۵. اگر n عدد طبیعی و x عدد حقیقی مثبت باشد، ثابت کنید که:

$$x^n-۱\geqslant n(x-۱)$$

حل- تابع $y=x^n-۱-n(x-۱)$ را درنظرمی‌گیریم. مشتق این‌تابع می‌شود $y'=n(x^{n-۱}-۱)$ کـه به‌ازای $x=۱$ صفر می‌شود و از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد. پس y به‌ازای $x=۱$ دارای مینیمم برابر صفر است و از آنجا درستی نابرابری مفروض محقق است و برابری وقتی است که $n=۱$ یا $x=۱$

۵-۲۶. اگر n عدد طبیعی باشد، ثابت‌کنیدکه:

$$\left(\frac{n+۱}{۲}\right)^n>n!$$

حل- بنا بـر نابرابری واسطهٔ حسابی و هندسی و با توجه به‌اینکه عددهای طبیعی باهم برابر نیستند داریم:

$$\frac{۱+۲+۳+\dots+n}{n}>\sqrt[n]{۱\times ۲\times ۳\times\dots\times n}$$

$$۱+۲+۳+\dots+n=\frac{n(n+۱)}{۲} \quad \text{و} \quad ۱\times ۲\times ۳\times\dots\times n=n!$$

$$\frac{n+۱}{۲}>\sqrt[n]{n!} \Longrightarrow \left(\frac{n+۱}{۲}\right)^n>n!$$

۵-۲۷. بدون استفاده ازمشتق معلوم‌کنیدکـه تابع $y=\dfrac{x^m+a}{x^n}$ به‌فرض $m>n$ به‌ازای چه‌مقدارازx ماکسیمم یامینیمم‌است ومقداراین ماکسیمم‌یامینیمم‌را به‌دست‌آورید.

حل- تابع را به صورت $y=x^{m-n}+\dfrac{a}{x^n}$ می‌نویسیم وچون حاصل‌ضرب

$$(x^{m-n})^n\times\left(\frac{a}{x^n}\right)^{m-n}=a^{m-n}$$

مقدار ثابت است پس مجموع دو عامل x^{m-n} و $\frac{a}{x^n}$ (به فرض مثبت بودن آنها) یعنی y وقتی مینیمم است که:

$$\frac{x^{m-n}}{n}=\frac{\frac{a}{x^n}}{m-n} \Longrightarrow x=\sqrt[m]{\frac{an}{m-n}}$$

مقدار مینیمم y به‌ازای این مقدار از x مشخص می‌شود:

$$y=\frac{m}{n}\sqrt[m]{\left(\frac{an}{m-n}\right)^{m-n}}$$

۲۸-۵. روی بیضی به معادلهٔ $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ هرنقطهٔ M راکه انتخاب‌کنیم و قرینه‌های آن را نسبت به‌محورها و نسبت به‌مبدأ مختصات به دست آوریم، چهار نقطهٔ حاصل چهار رأس یك مستطیل می‌باشند. نقطهٔ M را چگونه برگزینیم تامستطیل به‌دست آمده دارای بیشترین مساحت باشد؟

حل- نقطهٔ $M(x,y)$ را دربخش نخست محورها می گیریم که x و y مثبت‌باشند. مساحت مستطیل به دست آمده می‌شود $۲x \times ۲y=۴xy$ و اگر این مساحت ماکسیمم باشد مقدار $\frac{۴x^۲y^۲}{a^۲b^۲}$ یعنی $۴\times\frac{x^۲}{a^۲}\times\frac{y^۲}{b^۲}$ نیزماکسیمم است و برعکس. اما مجموع دو عامل $\frac{x^۲}{a^۲}$ و $\frac{y^۲}{b^۲}$ مقدارثابت یك است‌پس حاصل‌ضرب‌آنها وقتی ماکسیمم است‌که این دوعامل‌باهم برابرباشند؛

$$\frac{x^۲}{a^۲}=\frac{y^۲}{b^۲}=\frac{۱}{۲} \Longrightarrow x=\frac{a\sqrt{۲}}{۲} \quad و \quad y=\frac{b\sqrt{۲}}{۲}$$

دراین حالت مقدار مساحت مستطیل برابر است با $۲ab$.

این مسئله را می‌توان چنین حل‌کردکه اگر x طول نقطهٔ M باشد از روی معادلهٔ بیضی عرض آن می‌شود $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^۲-x^۲}$ و مساحت مستطیل برابر می‌شود با $S=\frac{۴b}{a}|x|\sqrt{a^۲-x^۲}$. این‌مساحت‌وقتی‌ماکسیمم‌است که $x\sqrt{a^۲-x^۲}$ ماکسیمم‌باشد که‌دراین‌حال $x^۲(a^۲-x^۲)$ نیزماکسیمم است. چون مجموع دوعامل مثبت $x^۲$ و $a^۲-x^۲$ مقدار ثابت است پس حاصل‌ضرب آنها وقتی ماکسیمم است که این دو عامل با هم برابر

باشند:

$$a^2-x^2=x^2 \Longrightarrow x=\pm\frac{a\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow y=\pm\frac{b\sqrt{2}}{2}$$

۵ ، ۵ ـ تمرینها و پرسشها

۵-۲۹. تمرینهای دستهٔ اول

● حاصل عملیات زیر را بااستفاده از اتحادها به‌دست آورید:

۱) $(1+x\sqrt{3}+x^2)(1-x\sqrt{3}+x^2)$

۲) $(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$

۳) $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b+c)$

۴) $(a+b+c)^4$ ۵) $(a+b+c+d)^3$

۶) $(a^2+b^2\sqrt{2})^2-(a^2-b^2\sqrt{2})^2$

۷) $(2a+b\sqrt{5})^2+(2a-b\sqrt{5})^2$

۸) $(3a\sqrt{3}+2b\sqrt{2})^3-(3a\sqrt{3}-2b\sqrt{2})^3$

۹) $(a-b\sqrt{3})(a^3+a^2b\sqrt{3}+3ab^2+3b^3\sqrt{3})$

۱۰) $(1+2x)^6$ ۱۱) $(x-2)^5$

۱۲) $(4+9x^2)(9a^2+4b^2)-(4b-9ax)^2$

● درستی نابرابریهای زیر را ثابت‌کنید (با فرض نامنفی بودن متغیرها):

۱۳) $(a+b)^2 \geqslant 4ab$ ۱۴) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$

۱۵) $a-1\geqslant 1-\frac{1}{a}$ ۱۶) $a^3+b^3\geqslant ab(a+b)$

۱۷) $(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca)$

۱۸) $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geqslant 6$

● تمرینها و مسئله‌های زیر را حل‌کنید:

۱۹) به فرض $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ و $y=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ اولاً xy و $(x+y)^2$ را حساب کنید. ثانیاً $x+y$ و بااستفادهٔ ازاتحادها $x-y$ را نیز حساب‌کنید و x و y را به‌دست آورید.

۲۰) به ازای چه مقدار از p چندجمله‌ای $P(x)=x^3+px+a^3+b^3$ بر

بخش‌پذیر است؟ $x+a+b$

۲۱) عددهای a ، b ، c و d را به‌فرض مثبت بودن a و c به‌دست آورید که:

$$x^۴+۴x^۳+۲x^۲+۱۶x-۸=(ax+b)^۴-(cx+d)^۲$$

۲۲) ثابت کنید که چندجمله‌ای زیر مربع کامل است:

$$P(x)=x^۴+۴x^۳-۱۲x^۲-۳۲x+۶۴$$

۲۳) چندجمله‌ای زیر را به مجموع چند مربع تبدیل و معلوم کنید به‌ازای چه مقدار از x و y و z مینیمم است:

$$P(x,y,z)=۲x^۲+۲y^۲+z^۲+۲(xy+yz+zx)+۲(x-y)+۳$$

۲۴) مقدار m را معلوم کنید که $x=۲+\sqrt{۲}$ در رابطهٔ زیر صدق کند:

$$x^۴=(m-۱)(x^۳-x^۲-۲x-۱)$$

۲۵) ریشهٔ دوم چندجمله‌ای زیر را به‌دست آورید:

$$x^۴+۴x^۳+۱۲x^۲+۱۶x+۱۶$$

۲۶) درستی همانی زیر را ثابت کنید:

$$(x+y+z)^۳-(y+z-x)^۳-(z+x-y)^۳-(x+y-z)^۳ \equiv ۲۴xyz$$

۲۷) حاصل عبارت $AB(A^۲+B^۲)-CD(C^۲+D^۲)$ را به‌ازای داده‌های زیر معلوم کنید:

$$A=a+b+c+d \qquad B=a+b-c-d$$

$$C=a-b+c-d \qquad D=a-b-c+d$$

۲۸) اولاً صحت اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$(a+b+c)^۲\equiv\frac{۱}{۲}[(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲]+$$
$$+۳(ab+bc+ca)$$

ثانیاً اگر مجموع سه عدد a و b و c مقدار ثابت s باشد عبارت $ab+bc+ca$ چه وقت ماکسیمم است.

۲۹) ازبین‌مثلثهای قائم‌الزاویهٔ بامساحت ثابت S آن را معلوم کنید که دارای کوچکترین وتر باشد.

۳۰) دوعدد طبیعی را بیابید که مجموع آنها ۵۱ و حاصل‌ضرب آنها ماکسیمم باشد.

۳۱) از بین مکعب مستطیلهایی که قطر آنها به‌طول ثابت $d^۲$ است کدام است که مجموع بعدهایش ماکسیمم است؟ دراین حالت ابعاد مکعب مستطیل را حساب کنید.

۳۲) ثابت کنید که:

$$a>0\ ,\ b>0\ \ ,\ a+b=1 \Longrightarrow ab\leqslant\frac{1}{4}$$

۳۳) ثابت کنید که اگر x و y برابر نباشند برای آنکه برابری $(x^2+y^2)^2=2(x^4+y^4)$ برقرار باشد لازم و کافی است که: $x+y=0$

۳۴) ثابت کنید که:

$$x>0\ ,\ y>0 : [(x+y)(x^3+y^3)=4x^2y^2 \iff x=y]$$

✲ ۵-۳۰ . تمرینهای دستهٔ دوم

● حاصل عملیات زیر را به‌دست آورید:

۳۵) $(x^2-1)(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$

۳۶) $(x^2+1)(x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1)$

۳۷) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})\times$
$(-\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$

۳۸) $[x^2+(2+\sqrt{2})x+1+\sqrt{2}][x^2+(2-\sqrt{2})x+1-\sqrt{2}]$

۳۹) $[x^2-(a+\sqrt{b})x+1][x^2-(a-\sqrt{b})x+1]$

۴۰) $[x^2-2x\cos(a+b)+1][x^2-2x\cos(a-b)+1]$

۴۱) $[x^2+x\sqrt{2+\sqrt{2}}+1][x^2+x\sqrt{2-\sqrt{2}}+1][x^2-x\sqrt{2-\sqrt{2}}+1]\times$
$[x^2-x\sqrt{2+\sqrt{2}}+1]$

۴۲) $(a-\sqrt{2}b)^5$ **۴۳)** $(x-y+1)^6$

۴۴) $(1-\sqrt{3}x^2)(1+\sqrt{3}x^2+3x^4+\ \dots\ +81\sqrt{3}x^{18})$

۴۵) $(x^2+2\sqrt{2}y^3)^4-(x^2-2\sqrt{2}y^3)^4$

● درستی همانیهای زیر را ثابت کنید:

۴۶) $(a+b)^4+(a-b)^4=2a^2(a^2+3b^2)+2b^2(b^2+3a^2)$

۴۷) $(a+b)^4-(a-b)^4=8ab(a^2+b^2)$

۴۸) $[(a^2-x^2)(b^2-y^2)+4abxy]^2+4[by(a^2-x^2)-ax(b^2-y^2)]^2$
$=(a^2+x^2)^2(b^2+y^2)^2$

۴۹) $(ax+by+cz+dt)^2+(bx-ay+dz-ct)^2$
$+(cx-dy-az+bt)^2+(dx+cy-bz-at)^2$
$=(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)$

۵۰) $(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)+b^4=(a^2+5ab+5b^2)^2$

۵۱) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$
$=2[(a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b)]$

۵۲) $\frac{a(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\equiv x$

● درستی نابرابریهای زیر را ثابت کنید (با فرض نامنفی‌بودن متغیرها و طبیعی‌بودن نماها):

۵۳) $\left(\frac{a+b+c+3}{3}\right)^3\geqslant abc+ab+bc+ca+a+b+c+1$

۵۴) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}<2$ ، $n\in N$

۵۵) $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 2^2}+\frac{1}{3\times 2^3}+\dots+\frac{1}{n\times 2^n}<1$

۵۶) $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geqslant\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 3$

۵۷) $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\geqslant 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

۵۸) $(a^n+b^n)(a^m+b^m)<2(a^{m+n}+b^{m+n})$

۵۹) $a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\dots+b^n\geqslant(n+1)\sqrt{(ab)^n}$

۶۰) $a^4+b^4+c^4+d^4\geqslant 4abcd$

۶۱) $a^4+b^4\geqslant ab(a^2+b^2)$

۶۲) $a^3+b^3+c^3\geqslant\frac{(a+b+c)^3}{9}\geqslant 3abc$

۶۳) $\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{n+1}\geqslant(a-b)\sqrt{(ab)^n}$

۶۴) $(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3\geqslant\frac{1}{9}(a+b+c)^3$

۶۵) $(a^7+b^7+c^7)(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a^5+b^5+c^5)(a^4+b^4+c^4)$

۶۶) $(a^6+b^6+c^6)(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a^4+b^4+c^4)^2$

۶۷) $a^{n+2}+b^{n+2}\geqslant ab(a^n+b^n)$

۶۸) $nx^{n+1}+1\geqslant(n+1)x^n$

۶۹) $(a_1+a_2+\dots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2$

۷۰) $|\sin kx|\leqslant k|\sin x|$ ، k عدد طبیعی است

۷۱) $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

● درستی استلزامهای زیررا ثابت کنید (با فرض مثبت بودن متغیرها وطبیعی‌بودن نماها):

۷۲) $a>b \Rightarrow \frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}>1$

۷۳) $a+b+c=0 \Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$

۷۴) $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3 \Rightarrow (a+b+c)^n=a^n+b^n+c^n$ ، n فرد

۷۵) $|b-c|<a<b+c \Rightarrow (a+b+c)^3>24abc$

۷۶) $ax+by+cz=s \Rightarrow x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{s^2}{a^2+b^2+c^2}$

۷۷) $a^4+b^4+c^4+d^4\leqslant 1 \Rightarrow a^{-4}+b^{-4}+c^{-4}+d^{-4}\geqslant 16$

۷۸) $a>b>c \Rightarrow a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)$
$+c^2(c-a)(c-b)>0$

۷۹) $a\geqslant b \Rightarrow a^a+b^b\geqslant a^b+b^a$

۸۰) $a\leqslant b+c \Rightarrow \frac{a}{1+a}\leqslant\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$

۸۱) $a\leqslant b+c \Rightarrow \frac{1}{1+a}\geqslant\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}-1$

۸۲) $x+y+z=1 \Rightarrow \left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)\geqslant 8$

● تمرینها و مسئله‌های زیر را حل کنید:

۸۳) با فرض $y=(x+1)^n$ رابطهٔ بین y و y' را به‌دست آورده و از این راه بسط $(x+1)^n$ را نتیجه بگیرید. حالت ویژه: $n=4$.

۸۴) به‌فرض $y=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}$

درستی استلزامهای زیر را ثابت کنید:

$x\geqslant 3 \Rightarrow y^2=4(x-2)$

$2\leqslant x\leqslant 3 \Rightarrow y^2=4$

۸۵) ثابت کنیدکه اگر چندجمله‌ای

$a(b-c)x^2+b(c-a)xy+c(a-b)y^2$

توان دوم باشد a و b و c تصاعد توافقی تشکیل می‌دهند.

۸۶) رابطهٔ $P^3+Q^3=AR^3$ را با داده‌های زیر ثابت کنید:

$$P=x^3-y^3+3xy(2x+y)\ ،\ Q=y^3-x^3+3yx(2y+x)$$
$$R=3(x^2+xy+y^2)\quad ،\quad A=xy(x+y)$$

۸۷) a و b را بیابید که چندجمله‌ای زیر توان دوم باشد:

$$x^4-6x^3+ax^2+bx+1$$

۸۸) در چندجمله‌ای $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$، x را با $2X+3Y+1$ و y را با $3X-2Y+5$ جانشین می‌کنیم و در نتیجه چندجمله‌ای $AX^2+2BXY+CY^2+2DX+2EY+F$ به دست می‌آید. مقدار B^2-AC را برحسب b^2-ac به‌دست آورید.

۸۹) ثابت کنید که حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای $a^3+b^3+c^3-3abc$ و $x^3+y^3+z^3-3xyz$ را می‌توان به‌صورت $p^3+q^3+r^3-3pqr$ نوشت که:

$$p+q+r=(a+b+c)(x+y+z)$$

۹۰) حاصل $P^2+Q^2+R^2$ با مفروضات زیر را به‌ساده‌ترین صورت به‌دست آورید:

$$P=a(x^2-1)+2b(x+1)-2c(x-1)$$
$$Q=b(x^2-1)+2c(x+1)-2a(x-1)$$
$$R=c(x^2-1)+2a(x+1)-2b(x-1)$$

۹۱) حاصل P^2+Q^2 و P^2-Q^2 را با داده‌های زیر به‌ساده‌ترین صورت به‌دست آورید:

$$P=x^4+x^3+x^2+x+1\quad ،\quad Q=x^4-x^3+x^2-x+1$$

۹۲) به‌فرض $p^2+q^2+r^2=1$ و به‌فرض:

$$A=(2p^2-1)x^2+2pqx+2pr$$
$$B=2pqx^2+(2q^2-1)x+2qr$$
$$C=2rpx^2+2rqx+(2r^2-1)$$

حاصل $A^2+B^2+C^2$ را به‌ساده‌ترین صورت به‌دست آورید.

۹۳) ریشهٔ سوم چندجمله‌ای زیر را به‌دست آورید:

$$x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27$$

۹۴) درچندجمله ایهای درجهٔ دوم $P=ax^2+bx+c$ و $Q=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ضریبهارا برحسب یك پارامتر چنان بیابیدکه رابطهٔ زیرنسبت به x یك‌همانی باشد:

$$P^2+Q^2=(x^2+1)^2$$

۹۵) ثابت کنید که اگر هر یک از چندجمله‌ایهای $P=(a+bx)^2+(\alpha+\beta x)^2$ و $Q=(b+cx)^2+(\beta+\gamma x)^2$ توان دوم باشد چند جمله‌ای $R=(a+cx)^2+(\alpha+\gamma x)^2$ نیز توان دوم خواهد بود.

۹۶) ثابت کنیدکه اگر a ، b و c اندازه‌های ضلعهای یک مثلث باشند نابرابری $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2>0$ به‌ازای همهٔ مقادیر x برقرار خواهد بود.

۹۷) ثابت کنیدکه‌حاصل‌عبارت $P^2+Q^2+R^2$ بامفروضات زیر توان‌دوم یک‌چندجمله‌ای است که آن را مشخص خواهیدکرد:

$$P=2x(2x+y-3z)-2(x^2+y^2-z^2)$$

$$Q=2y(2x+y-3z)-(x^2+y^2-z^2)$$

$$R=2(x^2+y^2-z^2)$$

۹۸) فرض می کنیم که: $P(x,y,z)=abx-(a+b)(by+az)$. حاصل‌عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$[P(x,y,z)]^2+[P(y,z,x)]^2+[P(z,x,y)]^2$$

۹۹) با قبول اینکه اگر $n>1$ آنگاه $2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ و با روش استقراء ریاضی ثابت کنیدکه اگر $n>2$:

$$1^2\times 2^2\times 3^2\times\ldots\times n^2>n^n \quad \text{یا} \quad (n!>n^{\frac{n}{2}})$$

۱۰۰) اگر a ، b و c متغیرهای مثبت باشند ثابت کنیدکه عبارت زیر دارای مینیممی برابر ۲ است:

$$F=\frac{a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

۱۰۱) اگر اندازه های دو ضلع از مثلثی مقدارهای ثابت a و b و اندازهٔ ضلع سوم مقدار متغیر x باشد، بدون استفاده از مشتق یا از روابط مثلثاتی معلوم‌کنید که مساحت این مثلث به‌ازای چه مقدار از x ماکسیمم است ومقدار این ماکسیمم چقدر است؟

۱۰۲) اگر مجموع n مقدار متغیر مثبت مقدار ثابت k^2 باشد، مجموع معکوسهای آنها چه موقع مینیمم است و مقدار این مینیمم چقدر است؟

۱۰۳) اولا به‌فرض مثبت بودن a ، b و c ثابت کنیدکه:

$$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)\geqslant(a^2+b^2+c^2)^2$$

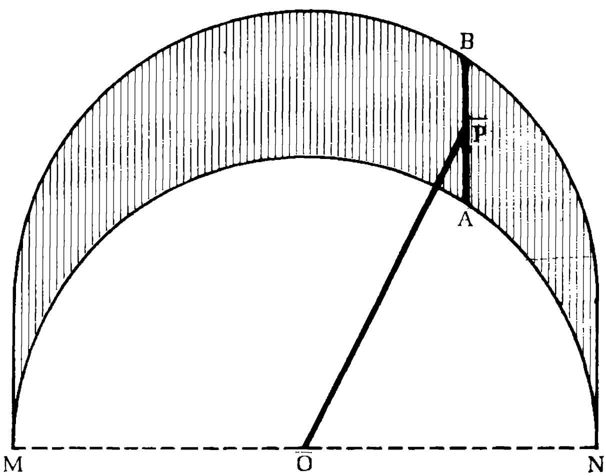
ثانیاً نوع مثلثی را معلوم کنیدکه بین اندازه‌های ضلعهای آن رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}$$

۱۰۴) اگر x متغیر مثبت باشد درفاصله‌ای کـه تابع زیر معین است ماکسیمم‌آن را بدون استفادهٔ از مشتق به‌دست‌آورید:

$$y=x\sqrt{4a^2-x^2}$$

۱۰۵) برف پاککن اتومبیلها، از دو میله تشکیل شده است؛ میلهٔ AB کـه همواره به



وضع قائم قراردارد و میلهٔ OP که P وسط AB را به‌نقطهٔ ثابت O وصل می‌کند و حول این نقطهٔ ثابت می‌چرخد به‌گونه‌ای‌که A دارای دو حد M و N است‌که با O بر یك خط افقی واقعند. چه نسبت بین طولهای AB و OP برقرار باشد تا سطح پیموده شدهٔ توسط AB ماکسیمم باشد.

۱۰۶) اگر مجموع n مقدار مثبت مقدار ثابت k^2 باشد. مجمـوع توانهای دوم آنها چه موقع مینیمم و مقدار این مینیمم چقدر است؟

۱۰۷) اگر a ، b و c مقدارهای ثابت مثبت وx و y و z متغیرهای مثبت باشندبه‌فرض $ax+by+cz=k^2$ ماکسیمم $P=x^\alpha y^\beta z^\gamma$ را به‌دست‌آورید.

حالت ویژه: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+z=12$ و $P=x^3y^4z^2$

۱۰۸) اگر x، y و z مثبت باشند، اولاً ثابت‌کنیدکه:

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)\geqslant 9xyz$$

و معلوم کنیدکه برابری چه موقع برقرار است؟

ثانیاً هرگاه $x+y+z=k^2$ ثابت باشد مینیمم $S=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ را بـه دست آورید.

۱۰۹) مینیمم تابع $y=\frac{3x^5+64}{6x^3}$ را، به‌ازای مقادیرمثبت x، بـدون استفادهٔ ازمشتق به‌دست‌آورید.

۱۱۰) اگر x_1، x_2، ...، x_n کمانهای حاده باشند، ثابت‌کنیدکه

$$tg\, x_1+tg\, x_2+\ldots+tg\, x_n \geqslant n\, tg\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

و معلوم کنیدکه برابری چه موقع‌خواهد بود.

۱۱۱) بدون استفادهٔ از مشتق معلوم کنید که تابع زیر به ازای چه مقدار از x مینیمم است و مقدار این مینیمم چقدر است؟

$$y=\sqrt{(a+x)^2+b^2}+\sqrt{(c-x)^2+d^2}$$

حالت ویژه
$$y=\sqrt{x^2+4x+13}+\sqrt{x^2-8x+41}$$

۱۱۲) ازدایرهٔ به‌شعاع R قطاع به‌زاویهٔ α راجداکرده وآن رابه‌شکل مخروط درمی‌آوریم. اندازهٔ زاویهٔ α چقدر انتخاب شود تا مخروط حاصل بیشترین حجم را داشته باشد.

۱۱۳) درکارخانه‌ای قرار است‌که ازورقه‌های فلزی به‌شکل قطاع دایره قالبهای مخروطی با گنجایش معین (مثلاً $\frac{1}{3}\pi a^3$) ساخته شود. شعاع و زاویـهٔ قطاع چـه انـدازه انتخاب شوند تا مصرف فلز مینیمم باشد؟

۱۱۴) اگر در صفحهٔ محـورهای مختصات تعـداد n نقطهٔ (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، ...، (x_n, y_n) اختیار و فرض شود کـه این نقطه‌ها بـه ترتیب دارای جرمهای m_1، m_2، ...، m_n باشند، مرکز ثقل این نقطه‌ها دارای مختصات زیر خواهد بود:

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$$

$$y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$$

هـرگاه نقطه‌های مزبـور بـر یك منحنی واقـع باشندکـه تحدب یکنواخت داشته باشد مرکز ثقل‌آنها در داخل منحنی قرار خواهد داشت.

با توجه به‌ویژگیهای بالا و با قبول اینکه جهت تحدب منحنی تابع $y=a^x$ به‌سمت yهای منفی است،درستی نابرابری‌واسطه‌های موزون، یعنی درستی‌نابرابری زیر را نتیجه بگیرید:

$$\frac{m_1a_1+m_2a_2+\dots+m_na_n}{m_1+m_2+\dots+m_n}\geqslant(a_1^{m_1}a_2^{m_2}\dots a_n^{m_n})^{\frac{1}{m_1+m_2+\dots+m_n}}$$

که برابری برای حالتی است که a_iها با هم و m_iها با هم برابر باشند.

۱۱۵) بایه‌کاربردن‌نابرابری واسطه‌های موزون برای دومقدار $a_1=1$ و $a_2=\frac{n}{n+1}$ با ضریبهای به‌ترتیب $m_1=1$ و $m_2=n+1$ ثابت‌کنید که:

نابرابری مندلسون: $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

۵-۳۱. پرسشهای چهارجوابی یك انتخابی

۱۱۶) پرسش نمونه: دربارهٔ برابری

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2+9=(x+y+1)(z-3)$$

کدام حکم زیر درست است:

الف- به‌ازای هر مقداری از متغیرها برقرار است.

ب- معادله‌ای است دارای یك دسته جواب معین

ج- معادله‌ای است دارای دو دسته جواب معین

د- معادله‌ای است‌که بیش از دو دسته جواب دارد.

حل- با توجه به اینکه $x+y+1=(x-1)+(y+2)$، برابری داده شده حالت برابری از ناکوچکتری

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant(a+b)(c+d)$$

است بنابراین وقتی برقراراست‌که:

$$x-1=y+2=z=-3$$

$$\Longrightarrow x=-2\ ,\quad y=-5\ ,\quad z=-3$$

پس جواب «ب» باید انتخاب شود.

[برای‌اثبات درستی ناکوچکتری بالا کافی است‌که طرفهای نابرابریهای زیر را نظیر به‌نظیر با هم جمع و حاصل را به ۲ ساده‌کنید:

$$a^2+b^2\geqslant 2ab \quad ، \quad b^2+c^2\geqslant 2bc$$
$$c^2+d^2\geqslant 2cd \quad ، \quad d^2+a^2\geqslant 2da$$

برابری وقتی خواهد بودکه متغیرها با هم برابر باشند و توجه داریدکه شرط مثبت بودن متغیرها درکار نیست].

۱۱۷) سه جمله‌ای $ax^2+bxy+cy^2$ درکدام حالت زیر توان دوم است:

الف- b واسطهٔ حسابی بین a و c باشد.

ب- b واسطهٔ هندسی بین a و c باشد.

ج- b واسطهٔ هندسی بین $2a$ و $2c$ باشد.

د- b واسطهٔ حسابی‌بین $2a$ و $2c$ باشد.

۱۱۸) از برابری $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$ کدام رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود:

الف- $b=\frac{-ac}{a+c}$ ب- $b=\frac{2ac}{a+c}$

ج- $b=\frac{ac}{a+c}$ د- $b=\frac{-2ac}{a+c}$

۱۱۹) به‌فرض‌آنکه a و b و c عددهای نامنفی باشند، به‌شرط $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{c}$ و به فرض $P=(a-b)^2-2c(a+b)+c^2$ کدام حالت زیر درست است:

الف- $P=0$ ب- $P\geqslant 0$

ج- $P\leqslant 0$ د- $P\neq 0$

۱۲۰) برای‌آنکه برابری

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$
$$=a(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$$

نسبت به‌متغیرهای xوyوz اتحاد باشد لازم وکافی است‌که مقدار a برابرباشد با:

الف- ۱   ب- ۲

ج- $\frac{1}{4}$ د- $\frac{1}{2}$

۱۲۱) بیشترین مقدار عبارت زیرکدام عدد داده شده است:

$$\left(11-\frac{2}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)\left(7+\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)$$

الف- ۸۱   ب- ۹

ج- ۱۸   د- ۷۷

۱۲۲) با فلزی به ضخامت ثابت می‌خواهند قوطیهایی به شکل استوانهٔ دوار بسازند که گنجایش هرکدام از آنها مقدار ثابت 16π باشد. شعاع قاعده (r) و ارتفاع (h) قوطیها چقدر باشد تا برای ساختن هر قوطی کمترین مقدار فلز مصرف شود.

الف- $r=4$ ، $h=1$ ب- $r=2$ ، $h=4$

ج- $r=2\sqrt[3]{2}$ ، $h=2\sqrt[3]{4}$ د- $r=\sqrt[3]{2}$ ، $h=8\sqrt[3]{2}$

۱۲۳) هرگاه سه جملهٔ اول بسط $(1+ax)^n$، $n\in R$، عبارت باشد از: $1+6x+24x^2$، مقادیر a و n کدام‌اند:

الف- $a=2$ ، $n=3$ ب- $a=-2$ ، $n=3$

ج- $a=-2$ ، $n=-3$ د- $a=2$ ، $n=-3$

۱۲۴) هرگاه $x+y+z=3\times 10^a$ باشد، ماکسیمم $A=\log x+\log y+\log z$ کدام است:

الف- a^3 ب- $3a$

ج- $a\log 3$ د- $3\log a$

۶

تجزیهٔ چندجمله‌ایها

۶،الف. روشهای تجزیه

۶-۱. مفهوم تجزیه. دو یا چند چندجمله‌ای را به‌سادگی می‌توان درهم ضرب‌کرد و حاصل را به‌صورت یك چندجمله‌ای مرتب نمود. اما عکس عمل، یعنی معلوم‌کردن اینکه یك چندجمله‌ای مفروض حاصل‌ضرب چه عاملهایی است،به‌سادگی انجام نمی‌پذیرد، مگر اینکه اقلاً بتوان یکی از عاملها را مشخص‌کرد.

تبدیل یك چندجمله‌ای به‌صورت ضرب دو یا چند عامل، تجزیهٔ آن چندجمله‌ای نامیده می‌شود. تجزیهٔ یك چندجمله‌ای وقتی‌کامل خواهدبودکه هریك از عاملهای به‌دست آمده اول، یعنی تجزیه ناپذیر، باشد. پیش ازاین، درمبحث بخش‌پذیری، بیان شدکه اول بودن یك چندجمله‌ای با تقریب مضربی از چندجمله‌ای ثابت همراه است. بنابراین اگر درتجزیهٔ یك چندجمله‌ای عاملی را با چندجمله‌ای متناسب خود جانشین‌کنیم شکل تجزیه فرق نمی‌کند. چنانکه

$$\left(x-\frac{۱}{۵}\right)\left(۵x+۲\right) \text{ و } \left(۵x-۱\right)\left(x+\frac{۲}{۵}\right) \text{ و } ۵\left(x-\frac{۱}{۵}\right)\left(x+\frac{۲}{۵}\right)$$

یك صورت از تجزیهٔ $۵x^۲+x-\frac{۲}{۵}$ منظور می‌شوند. همچنین پیش ازاین یادآوری شد که اول بودن یك چندجمله‌ای منوط است به‌اینکه روی چه مجموعه‌یی تعریف شده‌باشد؛ در مجموعهٔ چندجمله‌ایهای با ضریبهای حقیقی چندجمله‌ای درجهٔ دوم‌که ریشهٔ حقیقی نداشته باشد اول به‌حساب می‌آید مانند $x^۲+a^۲$. درصورتی‌که همین چندجمله‌ای در مجموعهٔ چندجمله‌ایهای‌باضریبهای مختلط به‌صورت $(x+ai)(x-ai)$ تجزیه‌می‌گردد. ثابت می‌شودکه درمجموعهٔ چندجمله‌ایهای یك متغیری باضریبهای حقیقی، دوجمله‌ایهای درجهٔ اول و سه‌جمله‌ایهای درجهٔ دومی‌که ریشهٔ حقیقی ندارند اول می‌باشند و هر چند‌جمله‌ای غیر ازآنها به‌ضرب عاملهایی‌که درجهٔ اول یادرجهٔ دوم باشند قابل تجزیه است.

[اگر $P(x)$ چندجمله‌ای از درجهٔ n و باضریبهای حقیقی باشد دارای n ریشهٔ $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n است و در نتیجه برابر می‌شود با:

$$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

هرگاه همهٔ این ریشه‌ها حقیقی باشند که قضیه ثابت است زیرا $P(x)$ به ضرب n عامل درجهٔ اول تجزیه شده است. اما اگر همهٔ ریشه‌ها حقیقی نباشند، مثلاً x_1 عدد مختلط باشد یک ریشهٔ دیگر مختلط که مزدوج x_1 باشد وجود خواهد داشت، مثلاً x_2، که اگر $x_1=a+ib$ باشد $x_2=a-ib$ است و درنتیجه:

$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$$
$$=x^2-2ax+a^2+b^2$$

که سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم با ضریبهای حقیقی‌است].

۶-۲. تجزیهٔ سه‌جمله‌ای دوم. هرچندجمله‌ای یک متغیری به‌عاملهای درجهٔ اول ویا درجهٔ دوم قابل تجزیه است. کامل بودن این تجزیه به‌آنجا می‌انجامدکه معلوم شود عاملهای درجهٔ دوم‌آن اول هستند یا تجزیه‌پذیر. سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم ax^2+bx+c به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

و سه‌حالت زیر را می‌توان در نظر گرفت:

$$1)\quad b^2-4ac>0 \implies ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)\ ؛$$

$$x_1\ ,\ x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$2)\quad b^2-4ac=0 \implies ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

درحالت سوم که $b^2-4ac<0$ باشد سه جمله‌ای درجهٔ دوم اول است و در مجموعهٔ عددهای حقیقی تجزیه نمی‌شود.

اگر سه‌جمله‌ای چند متغیری باشد، تجزیه‌پذیری‌آن را نسبت به‌متغیری‌که ازدرجهٔ دوم است می‌توان به‌روش بالا بررسی‌کرد و دراین حال مبین $\Delta=b^2-4ac$ شامل یک یا چند متغیر است و تعیین علامت آن به‌صورت شرطی انجام می‌پذیرد.

مثال ۱: برای چندجمله‌ای

$$x^2+3(a+b)x+2a^2+5ab+2b^2$$

نسبت به‌متغیر x داریم:

$$\Delta=9(a+b)^2-4(2a^2+5ab+2b^2)=(a-b)^2$$

$$x=\frac{-3(a+b)\pm(a-b)}{2}$$

و سه‌جمله‌ای مفروض عبارت می‌شود از:

$$(x+۲a+b)(x+a+۲b)$$

مثال ۲. برای تجزیهٔ چندجمله‌ای $x^۲+۲xy+۲x+۶y-۳$ آن را نسبت به x مرتب می‌کنیم که می‌شود $x^۲+۲(y+۱)x+۶y-۳$ و مبین این سه‌جمله‌ای می‌شود:

$$\Delta'=(y+۱)^۲-۶y+۳=(y-۲)^۲$$

بنابراین چندجمله‌ای مفروض به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$[x+(y+۱)+(y-۲)][x+(y+۱)-(y-۲)]$$
$$=(x+۲y-۱)(x+۳)$$

یادداشت. تجزیهٔ سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم که ریشه‌های صحیح داشته باشد معمولاً از راه تعیین ذهنی ریشه‌ها صورت می‌گیرد؛ تعیین ذهنی دو عدد که حاصل‌ضرب و مجموع آنها معلوم است.

۶-۳. روشهای تجزیه. برای تجزیهٔ چندجمله‌ایها روشهایی متداول است که بیشتر آنها ویژهٔ چندجمله‌ایهای به‌شکل معین‌اند برای تجزیهٔ چندجمله‌ای مفروضی که به‌شکلهای شناخته شده نباشد باید روشهای ابتکاری به‌کار برد؛ یا آن چندجمله‌ای را با تبدیلاتی به‌شکلی شناخته شده درآورد، یا اینکه روشی جدید را یافت که راه را برای تجزیهٔ چند-جمله‌ایهای دیگر از آن گونه نیز بازخواهدکرد. روشهایی هم‌یافت می‌شود که ظاهراً برای انواع چندجمله‌ایها عمومیت دارند اما کاربرد آنها در بیشتر موارد به بن‌بست برمی‌خورد. اهمیت تجزیه درآن است که بدان وسیله می‌توان ریشه‌های چندجمله‌ای مفروض را به‌دست آورد. اما گاهی روشی که برای تجزیهٔ آن چندجمله‌ای به‌کار می‌رود بدانجا می‌انجامد که باید ریشه‌های آن چندجمله‌ای شناخته شده باشند و درنتیجه بن‌بست پیش می‌آید.

برخی از انواع روشهای تجزیه در زیر می‌آید.

۶-۴. انتخاب عامل مشترک، دسته‌بندی. عمل ضرب چندجمله‌ایها بااستفاده از قانون توزیعی بودن ضرب نسبت به‌جمع انجام می‌گیرد. هرگاه عاملها به‌گونه‌ای باشند که پس ازضرب دریکدیگر ادغام نشوند و به‌همان صورت باقی بمانند، به‌سادگی درحاصل-ضرب شناخته می‌شوند و درنتیجه می‌توان آن حاصل‌ضرب را به‌صورت ضرب آن عاملها درآورد. هرگاه همهٔ جمله‌های یك چندجمله‌ای دریك عامل مشترك باشند به‌معنی آن‌است که آن چندجمله‌ای از ضرب آن عامل درچندجمله‌ای دیگری به‌دست آمده است که جمله-های این چندجمله‌ای به‌ترتیب از راه حذف آن عامل مشترك از جمله‌های چندجمله‌ای مفروض مشخص می‌شوند و به‌این ترتیب عمل تجزیه انجام می‌گیرد. این روش به‌نام

فاکتورگیری معروف است. مثلاً با مشاهدهٔ چندجمله‌ای $ax^{m+n}+bx^{2n}+cx^{n}$ واینکه عامل x^{n} در همهٔ جمله‌های آن مشترك است معلوم می‌شود که این چندجمله‌ای برابر است با: $x^{n}(ax^{m}+bx^{n}+c)$ و درنتیجه به‌ضرب دوعامل تجزیه می‌شود.

گونهٔ دیگری از چندجمله‌ایها چنانندکه جمله‌های آنها دسته به‌دسته دریك عامل مشترکند و چون هرکدام از این دسته‌ها باروش فاکتورگیری تجزیه شود همهٔ دسته‌ها در عامل دوم‌مشترك خواهند بودکه نتیجه می‌شودآن چندجمله‌ای از ضرب این عامل مشترك درمجموع عاملهای نخستین به‌دست‌آمده است و بدین وسیله تجزیه می‌گردد. این روش را دسته‌بندی می‌نامند.

مثال: درچندجمله‌ای $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1$ دوجملهٔ اول در x_2 و دوجملهٔ دیگر در x_4 مشترکند و در نتیجه داریم $x_2(x_1+x_3)+x_4(x_1+x_3)$. چندجمله‌ای شامل دو دسته است‌که هرکدام در عامل x_1+x_3 مشترکند، پس برابراست با $(x_1+x_3)(x_2+x_4)$.

هرچندجمله‌ای تجزیه‌پذیر را باید بتوان از راه دسته‌بندی تجزیه‌کرد. زیرا این‌چنین چندجمله‌ای ازضرب حداقل دوچندجمله‌ای دیگر به‌دست آمده است. اما دربیشتر موارد تشخیص عاملهای ضرب به‌سادگی میسر نیست. زیرا اولاً اگر عاملها به‌صورت توانهای با پایه‌های مشترك باشند دریکدیگر ادغام می‌شوند. مثلاً از ضرب ۱ در x^{4} یا x در x^{3} یا x^{2} در x^{2} عامل مشترك x^{4} به‌دست می‌آید و تشخیص اینکه x^{4} را حاصل‌ضرب‌کدام دو عامل بایدگرفت مشکل است. ثانیاً چون درحاصل‌ضرب، جمله‌های متشابه باهم جمع می‌شوند تعداد جمله‌های اولیه تغییر می‌کند و برای دسته‌بندی مطلوب باید جمله‌های مفروض را به‌صورت مجموع جبری دو یا چند جملهٔ متشابه نوشت و انتخاب مناسب این جمله‌ها هم ساده نیست. باوجود این در مواردی می‌توان بخت خود را برای به‌کار بردن این روش آزمایش‌کرد.

مثال ۱: برای تجزیهٔ $۲x^{۳}+۱۳x^{۲}+x-۲۱$ باید $۱۳x^{۲}$ و همچنین x را به‌مجموع جبری دوجمله چنان تبدیل‌کردکه یکی از آنها با $۲x^{۳}$ و دیگری با -۲۱ دارای عامل مشترك باشند. اگریك عامل مشترك را $۲x$ و دیگری را ۳ بگیریم و$۱۳x^{۲}$ را برابر با $۱۰x^{۲}+۳x^{۲}$ بگیریم باید یکی از عاملهای جمع مربوط به x علاوه بر ۳ عامل $۵x$ را شامل باشد، پس x را برابر با $۱۵x-۱۴x$ می‌گیریم و داریم:

$$
\begin{aligned}
۲x^{۳}+۱۳x^{۲}+x-۲۱ &= ۲x^{۳}+۱۰x^{۲}+۳x^{۲}+۱۵x-۱۴x-۲۱ \\
&= ۲x(x^{۲}+۵x-۷)+۳(x^{۲}+۵x-۷) \\
&= (x^{۲}+۵x-۷)(۲x+۳)
\end{aligned}
$$

مثال ۲: درچندجمله‌ای

$$x^4(y^2+z^2)+y^4(z^2+x^2)+z^4(x^2+y^2)+2x^2y^2z^2$$

چون عملهای ضرب را انجام دهیم شامل ۷ جمله می‌شودکـه هرچهارجمله از آن در یك عامل مشترکند. پس برای‌آنکه دسته‌بندی صحیح انجام گیردجملهٔ $2x^2y^2z^2$ را به‌صورت $x^2y^2z^2+x^2y^2z^2$ می‌نویسیم و پس ازآن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}x^2y^2(z^2+x^2)+x^2z^2(z^2+x^2)+z^2y^2(z^2+x^2)+y^4(z^2+x^2)\\ =(z^2+x^2)(x^2y^2+x^2z^2+z^2y^2+y^4)\\ =(z^2+x^2)[x^2(y^2+z^2)+y^2(z^2+y^2)]\\ =(z^2+x^2)(y^2+z^2)(x^2+y^2)\end{aligned}$$

۶-۵. ریشه‌یابی. اگرα ریشهٔ چندجمله‌ای $P(x)$ باشد، $P(x)$ بر $x-\alpha$ بخش‌پذیر است و درنتیجه به‌صورت $(x-\alpha)Q(x)$ تجزیه می‌شود. همچنین اگرچندجمله‌ای $P(x, y, ...)$ به‌ازای $x=y$ صفر شود برابر خواهـد بود با حاصل‌ضرب $x-y$ در یك عامل دیگر. بنابراین اگربتوانیم ریشه یاریشه‌هایی از چندجمله‌ای مفروض را بیابیم یا اینکه معلوم کنیم یك متغیر را باکدام متغیر دیگرجانشین کنیم تاحاصل چندجمله‌ای صفر شود به‌تجزیهٔ آن به‌دو عامل موفق شده‌ایم. درچندجمله‌ای یك متغیری‌از گونهٔ

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{a_0}{a_n}$ است. مقسوم‌علیه‌های $\frac{a_0}{a_n}$ را یـافته آنهـا را در $P(x)$ امتحان می‌کنیم تا ریشه‌های $P(x)$ به دست آیند. این روش هم همواره به سادگی انجام نمی‌پذیرد زیرا تعیین همهٔ مقسوم‌علیه‌های مزبور، به‌ویژه اگر بعضی از آنها گنگ باشند، و امتحان همهٔ آنها همیشه میسر نیست. اما گاهی به‌سادگی می‌توان ریشه‌ای را تشخیص داد. مثلاً اگر مجموع ضریبهای چندجمله‌ای صفر باشد یك ریشهٔ آن یك است.

مثال ۱: در چندجمله‌ای x^3+3x^2-4 مجموع ضریبها صفر است پس $x=1$ یك ریشه و $x-1$ یك عامل ازچندجمله‌ای است. حال یاازراه تقسیم یاازراه دسته‌بندی (نوشتن یك جمله به‌صورت مجموع دوجملهٔ دیگر) عامل دیگر را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned}x^3-x^2+4x^2-4=x^2(x-1)+4(x^2-1)\\ =(x-1)(x^2+4x+4)=(x-1)(x+2)^2\end{aligned}$$

مثال ۲: درچندجمله‌ای x^4-2x^3-6x-9 حاصل‌ضرب ریشه‌ها -9 است، پس اگـر چندجمله‌ای ریشهٔ صحیح داشته باشد یکـی از عـددهای ±1 ، ±3 ، ±9

خواهد بود. با امتحان کردن این عددها درمی‌یابیم که ۱ — و ۳ ریشه‌های چندجمله‌ای هستند. حال می‌کوشیم تا نخست عامل $x+۱$ و پس ازآن عامل $x-۳$ را ازچندجمله‌ای استخراج کنیم (یااینکه آن را بر $(x+۱)(x-۳)$ تقسیم می‌کنیم)؛

$$\begin{aligned} x^۴+x^۳-۳x^۳-۳-۶x-۶ &= x^۳(x+۱)-۳(x^۳+۱)-۶(x+۱) \\ &=(x+۱)(x^۳-۳x^۲+۳x-۹) \\ &=(x+۱)[x^۲(x-۳)+۳(x-۳)] \\ &=(x+۱)(x-۳)(x^۲+۳) \end{aligned}$$

مثال ۳: برای تجزیهٔ $P=(x-y)^۳+(y-z)^۳+(z-x)^۳$ ملاحظه می‌کنیم که اگر $x=y$ یا $y=z$ یا $z=x$ باشد P برابر صفر می‌شود، پس P برحاصل‌ضرب $(x-y)(y-z)(z-x)$ بخش‌پذیر است. اما مجموع سه عامل اخیر برابر صفر است پس بنابه‌استلزام:

$$a+b+c=۰ \implies a^۳+b^۳+c^۳=۳abc$$

چندجمله‌ای مفروض برابر می‌شود با:

$$P=۳(x-y)(y-z)(z-x)$$

۶ـ۶. روش ضریبهای نامعین. هرچندجمله‌ای‌تجزیه‌پذیر رامی‌توان باحاصل‌ضرب چندجمله‌ایهایی با ضریبهای نامعین درنظرگرفته از راه متحد قراردادن دو طرف دستگاه معادله‌هایی را تشکیل دادکه ضریبهای نامعین جوابهای‌آن باشند. اگر بتوان این دستگاه را حل‌کرد و ضریبهای مجهول را به‌دست‌آورد، تجزیهٔ چندجمله‌ای مفروض انجام‌گرفته است. این روش هم همواره قابل اعمال نیست. زیرا دستگاه معادله‌های شامل ضریبهای مجهول را همیشه نمی‌توان حل‌کرد.

مثال ۱: برای تجزیهٔ $x^۴+x^۲+۱$ آنرا با حاصل‌ضرب دو سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم برابر قرارمی‌دهیم وچون ضریب $x^۴$ و جملهٔ معلوم چندجمله‌ای بالا یك است، چنین فرض می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x^۴+x^۲+۱ &=(x^۲+ax+۱)(x^۲+bx+۱) \\ &=x^۴+(a+b)x^۳+(ab+۲)x^۲+(a+b)x+۱ \end{aligned}$$

نسبت به a و b دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{cases} a+b=۰ \\ ab+۲=۱ \end{cases} \implies \left|\begin{array}{l} a=۱ \\ b=-۱ \end{array}\right. \text{ یا } \left|\begin{array}{l} a=-۱ \\ b=۱ \end{array}\right.$$

$$x^۴+x^۲+۱=(x^۲+x+۱)(x^۲-x+۱)$$

این تجزیه کامل است زیرا هریك از سه‌جمله‌ایهای درجهٔ دوم به‌دست‌آمده اول است.

۶ـ۷. استفاده از اتحادها. دربیشتر اتحادهای معروف، یك طرف به‌صورت توان یا حاصل‌ضرب عاملها است. هرگاه چندجمله‌ای مفروض به‌شکل طرف دیگر یکی ازاین اتحادها باشد از راه مقایسهٔ جمله‌ها می‌توان عاملهای ضرب یا توان را مشخص کرده و چندجمله‌ای را تجزیه‌کرد. دراین میان آنچه بیشتر به‌کارمی‌رود تجزیهٔ چندجمله‌ای است‌که به‌شکل تفاضل دوتوان مشابه درآید.

مثال ۱: در چندجمله‌ای $۸x^۳-۲۷y^۳-۸z^۳-۳۶x^۲y+۵۴xy^۲$ صرف‌نظر ازجملهٔ $-۸z^۳$ بقیهٔ‌عبارت به‌شکل‌بسط حاصل از $(a-b)^۳$ است و درنتیجه‌چندجمله‌ای مفروض به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}&(۲x-۳y)^۳-۸z^۳\\&=[(۲x-۳y)-۲z][(۲x-۳y)^۲+۲z(۲x-۳y)+۴z^۲]\\&=(۲x-۳y-۲z)(۴x^۲+۹y^۲+۴z^۲-۱۲xy-۶yz+۴zx)\end{aligned}$$

مثال ۲: دوجمله‌ای $x^۵-y^۵$ بر $x-y$ بخش‌پذیر است و درمرحلهٔ اول چنین تجزیه می‌شود:

$$(x-y)(x^۴+x^۳y+x^۲y^۲+xy^۳+y^۴)$$

در مرحلهٔ دوم چندجمله‌ای پرانتز دوم را با روش ضریبهای نامعین تجزیه می‌کنیم که خواهیم داشت:

$$x^۵-y^۵=(x-y)\left(x^۲+\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}xy+y^۲\right)\left(x^۲+\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}xy+y^۲\right)$$

هریك از سه‌جمله‌ایهای درجهٔ دوم به‌دست‌آمده را چه‌نسبت به x وچه‌نسبت به y درنظر بگیریم مبین آن منفی خواهد شد. بنابراین تجزیهٔ بالا کامل است.

چندجمله‌ایهایی به‌ظاهر به‌شکل بسط حاصل ازیك‌اتحاد نیستند اما می‌توان باانجام دادن تبدیلاتی در آنها، مثلا تبدیل یك جمله به‌مجموع جبری دو یا چند جملهٔ دیگر یا افزودن دو جملهٔ قرینه و غیره، آنهارا به‌چنان شکلی درآورد.

مثال ۳: چندجمله‌ای $a^۴+۹b^۴$ را به‌گونهٔ زیر تبدیل و تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}a^۴+۹b^۴+۶a^۲b^۲-۶a^۲b^۲&=(a^۲+۳b^۲)^۲-۶a^۲b^۲\\&=(a^۲+۳b^۲-\sqrt{۶}ab)(a^۲+۳b^۲+\sqrt{۶}ab)\end{aligned}$$

مثال ۴: برای تجزیهٔ $x^۵+x+۱$ آن را چنین می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}x^۵-x^۲+x^۲+x+۱&=x^۲(x^۳-۱)+x^۲+x+۱\\&=x^۲(x-۱)(x^۲+x+۱)+x^۲+x+۱\\&=(x^۲+x+۱)(x^۳-x^۲+۱)\end{aligned}$$

سه‌جمله‌ای $x^۲+x+۱$ اول است و سه‌جمله‌ای $x^۳+x^۲+۱$ بنا به‌دستورهای مربوط به‌حل و بحث معادله‌های درجهٔ سوم به $(x+\alpha)(x^۲+px+q)$ تبدیل می‌شود که α عدد گنگ و سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم اول است.

۶ـ۸. استفاده از روشهای حل معادلات. گونه‌هایی ازمعادله‌های با درجه‌های بالاتر از دو را می‌توان با روشهایی به‌معادله‌های درجهٔ اول یا دوم تبدیل کرد. در واقع چندجمله‌ایهای مربوط به‌این معادله‌ها با این روشها تجزیه می‌شوند. ازگونهٔ:

۱) سه‌جمله‌ای درجهٔ چهارم دومجذوری. تجزیهٔ سه‌جمله‌ای ازگونهٔ $ax^۴+bx^۲+c$ بافرض $x^۲=y$ به‌تجزیهٔ سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم $ay^۲+by+c$ منجر می‌شود. هرگاه $b^۲-۴ac>۰$ باشد سه‌جمله‌ای اخیر به $a(y-y_۱)(y-y_۲)$ و درنتیجه سه‌جمله‌ای دو مجذوری به $a(x^۲-y_۱)(x^۲-y_۲)$ تجزیه می‌گرددکه برحسب مثبت یا منفی بودن $y_۱$ و $y_۲$ یا به‌عاملهای درجهٔ اول تجزیه می‌شود ویا یکی یا هردو عامل آن اول است.

اگر $b^۲-۴ac=۰$ باشد، سه‌جمله‌ای مفروض به $a\left(x^۲+\frac{b}{۲a}\right)^۲$ تبدیل‌می‌گردد که برحسب علامت $\frac{b}{۲a}$ یا تجزیه کامل است یا به‌عاملهای درجهٔ اول تجزیه می‌گردد.

در حالت $b^۲-۴ac<۰$ سه‌جمله‌ای $ay^۲+by+c$ ریشهٔ حقیقی ندارد و اول است. اما اگرخواسته باشیم عاملهای درجهٔ دوم سه‌جمله‌ای دومجذوری را به‌دست‌آوریم چنین عمل می‌کنیم:

$$a\left(x^۴+\frac{b}{a}x^۲+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x^۲+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^۲-\left(۲\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}\right)x^۲\right]$$

$$=a\left(x^۲+\sqrt{۲\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}}\,x+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(x^۲-\sqrt{۲\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}}\,x+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)=$$

که هریك ازدومقدار $\frac{c}{a}$ و $۲\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}$ مثبت می‌باشند.

چند مثال:

$$۳x^۴-۴x^۲+۱=۳(x^۲-۱)\left(x^۲-\frac{۱}{۳}\right)$$

$$=۳(x+۱)(x-۱)\left(x+\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)\left(x-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)$$

$$x^۴-x^۲-۲=(x^۲-۲)(x^۲+۱)=(x+\sqrt{۲})(x-\sqrt{۲})(x^۲+۱)$$

$$4x^4+4x^2+1=4\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2=(2x^2+1)^2$$
$$x^4-x^2+4=(x^2+2)^2-5x^2=(x^2+\sqrt{5}x+2)(x^2-\sqrt{5}x+2)$$
$$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

۲) چندجمله‌ای درجهٔ فرد معکوسه. از راه دسته‌بندی تجزیه می‌شود. مانند:

$$\begin{aligned}5x^3+3x^2-3x-5&=5(x^3-1)+3x(x-1)\\&=5(x-1)(x^2+x+1)+3x(x-1)\\&=(x-1)(5x^2+8x+5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x^5-4x^3-4x^2+3&=3(x^5+1)-4x^2(x+1)\\&=(x+1)(3x^4-3x^3-x^2+3x+3)\end{aligned}$$

عبارت درجهٔ چهارم داخل پرانتز معکوسهٔ نوع اول است که روش تجزیهٔ آن در زیر می‌آید.

۳) چندجمله‌ای درجهٔ زوج معکوسهٔ نوع اول. چندجمله‌ای را برحسب $x+\frac{1}{x}$ مرتب می‌کنیم و درنتیجه به‌عاملهای از درجه‌های پایین‌تر تجزیه می‌گردد؛

$$\begin{aligned}ax^4+bx^3+cx^2+bx+a&=x^2\left(ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}\right)\\&=x^2\left[a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c\right]\\&=x^2\left[a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+b\left(x+\frac{1}{x}\right)-2a+c\right]\end{aligned}$$

عبارت داخل کروشه نسبت به $x+\frac{1}{x}$ از درجهٔ دوم است که اگر ریشه‌های حقیقی داشته باشد می‌شود:

$$=ax^2\left(x+\frac{1}{x}-\alpha\right)\left(x+\frac{1}{x}-\beta\right)=a(x^2-\alpha x+1)(x^2-\beta x+1)$$

$$2x^4-x^3-6x^2-x+2=x^2\left[2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)-6\right]$$
$$=x^2\left[2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-10\right]$$
$$=2x^2\left(x+\frac{1}{x}+2\right)\left(x+\frac{1}{x}-\frac{5}{2}\right)$$
$$=(x^2+2x+1)(2x^2-5x+2)$$
$$=(x+1)^2(x-2)(2x-1)$$

$$2x^6+7x^5+7x^4+4x^3+7x^2+7x+2$$
$$=x^3\left[2\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+7\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x+\frac{1}{x}\right)+4\right]$$
$$=x^3\left[2\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+7\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-14+7\left(x+\frac{1}{x}\right)+4\right]$$
$$=x^3\left[2\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+7\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-10\right]$$
$$=2x^3\left(x+\frac{1}{x}+2\right)\left(x+\frac{1}{x}+\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right)$$
$$=(x^2+2x+1)(2x^2+5x+2)(x^2-x+1)$$
$$=(x+1)^2(x+2)(2x+1)(x^2-x+1)$$

روش بالا وقتی قابل اعمال است که معادلهٔ برحسب $x+\frac{1}{x}$ دارای ریشه‌های حقیقی باشد.

۴) چندجمله‌ای درجهٔ زوج معکوسهٔ نوع دوم. از راه دسته‌بندی به‌حاصل‌ضرب x^2-1 در عامل دیگری که معکوسه است تبدیل و سپس تجزیه می‌شود. مانند:

$$5x^4-4x^3+4x-5=5(x^4-1)-4x(x^2-1)$$
$$=(x^2-1)(5x^2-4x+5)=(x+1)(x-1)(5x^2-4x+5)$$

۶-۹. روشهای ویژه. گاهی می‌توان چندجمله‌ای مفروضی را باروشی ویژه و ابتکاری به‌گونه‌ای تبدیل کرد که با یکی ازروشهای شناخته شده قابل تجزیه باشد. تجزیهٔ این‌گونه چندجمله‌ایها در مواردی به‌حل معما می‌ماند و موضوع کشف و شهود به‌میان می‌آید. باوجود این نباید از تلاش لازم دست برداشت؛ مرحلهٔ کشف و شهود آنگاه تحقق می‌یابد که ذهن روی موضوع متمرکز و فعال باشد.

۶،ب- مسئله‌های نمونه

۶-۱۰. برای تجزیهٔ چندجمله‌ای

$$x^6-(m^2-2)x^4-(3m^2-1)x^2+m^4-m^2$$

که نسبت به x مرتب است، در وهلهٔ اول برآن خواهیم بود که آن را برحسب عاملهایی **نسبت به x** تجزیه کنیم که با فرض $x^2=t$ چندجمله‌ای خواهیم داشت نسبت به t از درجهٔ ۳. **اما اگر چندجمله‌ای** رانسبت به m مرتب کنیم دومجذوری بوده و **روش تجزیهٔ**

آن را می‌دانیم؛

$$m^4-(x^4+3x^2+1)m^2+x^6+2x^4-x^2$$

چون این چندجمله‌ای را برابر با صفر قرار دهیم و معادله را نسبت به m^2 حل کنیم با تعیین جوابها نتیجه خواهد شد که به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$(m+x)(m-x)(m+x^2+1)(m-x^2-1)$$

$$=(x+m)(x-m)(x^2+m+1)(x^2-m+1)$$

روش بالا را می‌توان در تجزیهٔ بسیاری از چندجمله‌ایهای یك متغیری پارامتری یا چند متغیری به کار برد.

۶-۱۱. برای تجزیهٔ عبارت

$$(x^2+px+q)^2-x^2(ax^2+px+q)$$

یك روش آن است که فرض‌کنیم $px+q=t$ که عبارت چنین می‌شود:

$$(x^2+t)^2-x^2(ax^2+t)=t^2+tx^2+(1-a)x^4$$

$$=\left[t+\frac{x^2(1+\sqrt{4a-3})}{2}\right]\left[t+\frac{x^2(1-\sqrt{4a-3})}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{4}[x^2(1+\sqrt{4a-3})+2px+2q][x^2(1-\sqrt{4a-3})+2px+2q]$$

در روش دیگر با فرض $t=\dfrac{x^2+px+q}{x^2}$ عبارت داده شده چنین می‌شود:

$$x^4(t^2-t+1-a)=x^4\left[t-\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}\right]\left[t-\frac{1-\sqrt{4a-3}}{2}\right]$$

و چون t را با مقدار آن جانشین‌کنیم همان نتیجهٔ قبلی را خواهیم داشت.

۶-۱۲. چندجمله‌ای

$$x^4+2x^3-x^2-2x-1$$

با نوشتن $2x^2-x^2$ به‌جای $-x^2$ و $2-1$ به‌جای -1 وبا درنظر گرفتن بسط توان دوم یك سه‌جمله‌ای به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(x^2+x-1)^2-2=(x^2+x-1+\sqrt{2})(x^2+x-1-\sqrt{2})$$

۶-۱۳. برای تجزیهٔ $(x-1)^3(x+5)-(x+2)^3(x-4)$ ممکن است که در جستجوی راههایی ابتکاری به‌بیراهه بیفتیم. درصورتی‌که نکته‌ای را که باید به‌آن توجه‌کنیم بسط و ساده‌کردن چندجمله‌ای است که برابر می‌شود با: $27(2x+1)$

*** ۶-۱۴.** برای تجزیهٔ $P(x)=(1+x+x^2+\ldots+x^n)^p-x^n$ فرض می‌کنیم $1+x+x^2+\ldots+x^n=s$ و تقسیم s^p-x^n بر $s-x^n$ راانجام می‌دهیم:

$$s^p - x^n = (s - x^n)Q(x) + R(x)$$
$$s - x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$$
$$Q(x) = s^{p-1} + x^n s^{p-2} + x^{2n} s^{p-3} + \dots + x^{(p-1)n}$$
$$R(x) = x^{pn} - x^n = x^n(x^{n(p-1)} - 1)$$
$$= x^n(x^n - 1)(x^{n(p-2)} + x^{n(p-3)} + \dots + x^n + 1)$$
$$= x^n(x-1)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})(1 + x^n + \dots + x^{n(p-2)})$$
$$P(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})[s^{p-1} + x^n s^{p-2} + \dots + x^{(p-1)n} + x^n(x-1)(1 + x^n + \dots + x^{n(p-2)})]$$

که s^{p-1} ، s^{p-2} و ... برحسب x قابل محاسبه‌اند و عبارت داخل کروشه چندجمله‌ای برحسب x و از درجهٔ $(p-1)n+1$ است.

حالتهای ویژه

اگر $p=2$ باشد، خواهیم داشت:

$$P(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})(1 + x + x^2 + \dots + x^{n+1})$$

اگر $p=3$ باشد، خواهیم داشت:

$$P(x) = (1 + x + \dots + x^{n-1})[s^2 + x^n s + x^{2n} + x^n(x-1)(1 + x^n)]$$

و دراین حالت اگر $n=3$ اختیار شود، نتیجه خواهد شد:

$$P(x) = (1 + x + x^2 + x^3)^3 - x^3$$
$$= (1 + x + x^2)(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 3x^5 + 2x^6 + x^7)$$

عبارت داخل پرانتز نیز، شامل عامل $x^3 + x^2 + 1$ است. (چرا؟)

۶،ج- کاربردهای تجزیه

تجزیهٔ چندجمله‌ایها درهمهٔ زمینه‌های ریاضیات مقدماتی و عالی که محاسبات جبری مطرح باشد کاربرد دارد. در دورهٔ جبر مقدماتی نخستین کاربردهای تجزیه عبارتند از:

۶-۱۵. به‌دست آوردن بزرگترین مقسوم‌علیه و کوچکترین مضرب مشترک چندجمله‌ایها. چندجمله‌ایهای مفروض را به‌ضرب عاملهای اول تجزیه می‌کنیم. حاصل‌ضرب عاملهایی که درهمهٔ چندجمله‌ایها مشترک باشند برابرخواهد بود بابزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آن چندجمله‌ایها، و حاصل‌ضرب عاملهای مشترک و عاملهای غیر مشترک برابر می‌شود باکوچکترین مضرب مشترک آن چندجمله‌ایها.

مثال: به‌دست‌آوردن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک‌وکوچکترین مضرب مشترک چندجمله‌ایهای زیر:

$$P(x\,,\,y)=x^4+x^3y-xy^3-y^4$$
$$Q(x\,,\,y)=x^4+x^2y^2+y^4$$
$$R(x\,,\,y)=(x+y)^5-(x^5+y^5)$$

نخست هریك از چندجمله‌ایها را تجزیهٔ کامل می‌کنیم که خواهیم داشت:

$$P(x\,,\,y)=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$Q(x\,,\,y)=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$
$$R(x\,,\,y)=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$$

حال اگر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك چندجمله‌ایهای بالا را با $D(x\,,\,y)$ و کوچکترین مضرب مشترك آنها را با $M(x\,,\,y)$ نشان دهیم، داریم:

$$D(x\,,\,y)=x^2+xy+y^2$$
$$M(x\,,\,y)=5xy(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

۶ـ۱۶. کاربرد درکسرها. برای ساده‌کردن کسرها، برای عملیات بین‌کسرها، برای تبدیل یك‌کسر به‌مجموع چندکسر ساده‌تر از عمل تجزیه استفاده می‌شود که در بخش پس از این دراین باره به‌تفصیل صحبت خواهد شد.

۶ـ۱۷. حل معادلات. مهمترین کاربرد تجزیه در حل معادله‌ها است؛ جوابهای یك معادله، یعنی ریشه‌های یك چندجمله‌ای را وقتی می‌توان به‌دست آورد که آن چندجمله‌ای را بتوان به‌ضرب عاملهای اول تجزیه‌کرد.

بیان‌کامل این کاربرد و ذکر مثالهای مختلف مربوط به‌آن درنظریهٔ معادلات مطرح می‌گردد.

۶،دـ تمرینها و پرسشها

۶ـ۱۸. تمرینهای دستهٔ اول. چندجمله‌ایهای زیر را تجزیه‌کنید:

۱) $(2x+5)(3x^2-14)-2x^2-5x$

۲) $(x-y)^2-2(xz+yt-xt-yz)+(z-t)^2$

۳) $(x+1)^3+(y-1)^3$

۴) x^3+7y-y^3-7x

۵) $27x^3-57x^2+38x-8$

۶) $(x+1)^4-(2x-3)^2$

۷) $(6x-5)^3-(4x-7)^3-(2x-2)^3-64$

۸) $x^3+7x^2+10x+4$

۹) $x^4-4x^3-19x^2+106x-120$

۱۰) $(x+y)+(x+y)^2+(x+y)^3+\dots+(x+y)^n$

۱۱) $(a+b)^4+(a-b)^4+(a^2-b^2)^2$

۱۲) $3x^4-10x^2y^2+3y^4$

۱۳) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$

۱۴) $(x+2)^4+(2-x)^4$

۱۵) $(x^2+6x+8)(x^2+6x-18)-27$

۱۶) $(x-2)(x+2)(x+3)(x+7)+36$

۱۷) $-2x^3-(a+1)x^2+2(a+4)x+(a+1)(a+4)$

۱۸) $11x^2+2y^2-14xy-2x-2y-1$

۱۹) x^3-3x^2+3x-6

۲۰) $x^4-16x^3+96x^2-256x+256$

۲۱) $x^2+2x\cos^2 y+\cos 2y$

❊ ۶-۱۹. تمرینهای دستهٔ دوم

● چندجمله‌ایهای زیر را به‌ضرب عاملها تجزیه‌کنید:

۲۲) $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)-5$

۲۳) $x^4+4x^3-12x^2-32x+64$

۲۴) $x^3-y^4-x^2y^2-3x^2-8x+16$

۲۵) $x^5-8x^4+19x^3-9x^2-27$

۲۶) $x^3-(a+b+1)x^2+(ab+2a-1)x-(a-1)(b+1)$

۲۷) $(3-x)^4+(2-x)^4-(5-2x)^4$

۲۸) $x^3-(m^2+3)x^2+(m^2+3)x+m^4-1$

۲۹) $(3x^2+2x-3)^2-(2x^3+3x^2-2x)$

۳۰) $(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)$

۳۱) $(a+b+c)^5-a^5-(b+c)^5$

۳۲) $(a+b+c)^5-(a^5+b^5+c^5)$

۳۳) $2x^4-13x^3+24x^2-13x+2$

۳۴) $2x^4+x^3-(3a+2)x^2+2x+a^2-1$

۳۵) $(3x^2-8xy-3y^2)^2-2x(x-3y)^3$

۳۶) $(3x^2-30xy+11y^2)^2-256y(y-x)^3$

۳۷) $x^۲y^۲-xy(y+۳x-۱)-y(۲y-۱)+x(۲x-۱)$

۳۸) $(b-c)(b+c-۲a)^۲+(c-a)(c+a-۲b)^۲+(a-b)(a+b-۲c)^۲$

۳۹) $x^۲z^۲-x^۳-z^۳-x^۲y-۲z^۲y+yz+zx+۲xy+۲y^۲$

۴۰) $x(x^۲+y^۲)^۲-ay(x+y)(x^۲+y^۲)+a^۲y^۳$

۴۱) $a^۳(bz-cy)^۳+b^۳(cx-az)^۳+c^۳(ay-bx)^۳$

۴۲) $a^۲yz(bz-cy)+b^۲zx(cx-az)+c^۲xy(ay-bx)$

۴۳) $[(a^۲-x^۲)(b^۲-y^۲)+۴abxy]^۲+۴[by(a^۲-x^۲)-ax(b^۲-y^۲)]^۲$

● تمرینها و مسئله‌های زیر را حل کنید:

۴۴) ریشهٔ دوم با تقریب یك درجه از چندجمله‌ای

$$P(x)=x^۴-۲x^۳-۹x^۲+۱۰x+۲۰$$

را به‌دست‌آورده و ازاین راه $P(x)$ را به‌ضرب عاملهای اول تجزیه کنید.

۴۵) چندجمله‌ای

$$۸۱x^۴+۱۰۸x^۳+۵۰x^۲-۸x-۲۴$$

را به‌صورت $(ax+b)^۴-(cx+d)^۲$ تبدیل و ازاین راه آن را تجزیه کنید.

۴۶) چندجمله‌ای زیر را به‌فرض $a+d=b+e=c$ تجزیه کنید:

$$ax^۴+bx^۳+cx^۲+dx+e$$

۴۷) اولاً چندجمله‌ای زیر را به‌ضرب دوعامل تجزیه کنید:

$$P=x(y^۲+z^۲)+y[z^۲+x^۲)+z(x^۲+y^۲)+۳xyz$$

ثانیاً به‌فرض‌آنکه x، y و z نامنفی‌باشند، ثابت کنید $P\geqslant ۹xyz$ ونتیجه‌بگیرید که:

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)\geqslant ۹xyz$$

۴۸) دوچندجمله‌ای زیررا به‌فرض $۲p=a+b+c$ درنظر می گیریم:

$$E=۲(p-a)(p-b)(p-c)-p(a-b)(a-c)$$

$$F=۲p(p-b)(p-c)-(p-a)(a+b)(a+c)$$

اولاً E و F را برحسب a ، b و c بنویسید؛

ثانیاً معلوم کنید چه تبدیـل ساده‌ای روی تنها حرف a انجام‌گیرد تا چندجمله‌ای E به‌چندجمله‌ای F تبدیل گردد.

ثالثاً چندجمله‌ای E را تجزیه کنید واز روی‌آن تجزیهٔ‌چندجمله‌ای F رانتیجه‌بگیرید.

۴۹) اولاً ثابت‌کنید که چندجمله‌ای از نوع

$$P(x)=ax^۴+bx^۳+cx^۲-bx+a$$

را می‌توان برحسب $x-\frac{۱}{x}$ مرتب و از این راه آن را تجزیه کرد.

ثانیاً چندجمله‌ای زیر را تجزیه کنید:

$$۲۰x^۴-۷۲x^۳+۲۳x^۲+۷۲x+۲۰$$

۵۰) چندجمله‌ای زیر را برحسب $\alpha=\sqrt{۳}$ مرتب و ازاین راه آن را تجزیه کنید:

$$x^۳-\sqrt{۳}x^۲+(\sqrt{۳}+۱)x-۳-\sqrt{۳}$$

۵۱) چندجمله‌ای $P(x)=(x-۱)^۵-a(x^۵-۱)$ را تجزیه کنید و اگر به‌فرض $x+\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۳}$ چندجمله‌ای $P(x)$ برابربا صفرشود مقدار a را حساب‌و تجزیهٔ $P(x)$ را کامل کنید.

۵۲) ثابت‌کنیدکه چندجمله‌ای از گونهٔ

$$P(x)=ax^۴+bx^۳+cx^۲+bkx+ak^۲$$

را می‌توان برحسب $x+\frac{k}{x}$ مرتب و تجزیه کرد.

۵۳) چندجمله‌ای زیر را تجزیه کنید:

$$(x^۲-yz)^۳+(y^۲-zx)^۳$$
$$+(z^۲-xy)^۳-۳(x^۲-yz)(y^۲-zx)(z^۲-xy)$$

۵۴) چندجمله‌ای زیر را به‌فرض $a+b+c=۰$ تجزیه کنید:

$$P(x\ ,\ y\ ,\ z)=a(x^۲+۲yz)+b(y^۲+۲zx)+c(z^۲+۲xy)$$

۶-۲۰. پرسشهای چهارجوابی یك انتخابی

۵۵) پرسش نمونه: هرگاه a ، b و c اندازه‌های ضلعهای یك مثلث در رابطهٔ

$$(a^۴+b^۴+c^۴)^۲=۲(a^۸+b^۸+c^۸)$$

صدق کنند، این مثلث ازکدام نوع زیر است:

الف- متساوی الاضلاع — ب- قائم‌الزاویه

ج- منفرج‌الزاویه — د- شبه قائمه

یادداشت- به‌مثلثی شبه قائمه گفته می‌شودکه تفاضل دو زاویهٔ آن ۹۰° باشد.

حل- رابطهٔ داده شده به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$(a^۲+b^۲+c^۲)(c^۲+a^۲-b^۲)(b^۲+c^۲-a^۲)(a^۲+b^۲-c^۲)=۰$$

عامل اول نمی‌تواند صفر باشد. و هرکدام از عاملهای دیگر که صفر باشد قائم‌الزاویه بودن مثلث را می‌رساند. پس جواب «ب» باید انتخاب شود.

۵۶) در تجزیهٔ چندجمله‌ای

$$ax^۲+by^۲+cz^۲+(a+b)xy+(b+c)yz+(c+a)zx$$

کدام عامل زیر وجود خواهد داشت:

الف- $ax+by+cz$ ب- $ax+by-cz$

ج- $ax-by+cz$ د- $-ax+by+cz$

۵۷) در تجزیهٔ عدد طبیعی از نوع $۱۰^{۲n}-۹^n$ به‌ضرب عاملهای اول، وجود کدام عامل زیر به‌مقدار n بستگی ندارد به‌فرض‌آنکه n عدد طبیعی باشد.

الف- ۱۹ ب- ۱۰۳

ج- ۱۳ د- ۹۷

۵۸) چندجمله‌ای

$$۲b^۲+ab(b-a)-ab(a+b)$$

به‌کدام صورت زیر تجزیه می‌شود:

الف- $۲b(a+b)(b-a)$ ب- $۲b(a-b)(b+a)$

ج- $۲b(a-b)(b-a)$ د- $۲b(a-b)^۲$

۵۹) عبارت

$$\sin^۴x-۲\sin^۳x\cos x+۲\sin x\cos^۳x-\cos^۴x$$

باکدام عبارت برابر است:

الف- $-\cos ۲x-\sin ۲x$ ب- $\cos ۲x-\sin ۲x$

ج- $\cos ۲x(۱-\sin ۲x)$ د- $-\cos ۲x(۱-\sin ۲x)$

۶۰) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك سه عبارت

$$a^۶+x^۶ \quad ، \quad a^۸-x^۸ \quad ، \quad (a^۴-x^۴)^۲$$

کدام عبارت زیر است:

الف- $a-x$ ب- $a+x$

ج- $a^۲-x^۲$ د- $a^۲+x^۲$

۶۱) برای‌آنکه عبارت

$$x(۱+x)(۲+x)-(a-x)(۱+x)$$

به‌ضرب سه عامل حقیقی درجهٔ اول تجزیه شود برای a کدام حالت زیر وجود دارد:

الف- a هرچه باشد ب- $a\leqslant ۰$

ج- $a\geqslant -\frac{۹}{۴}$ د- $a\leqslant -\frac{۹}{۴}$

۶۲) اگر در تجزیهٔ $x^۴+px^۲+۲p-۴$ یکی از عاملها $x^۲+۱$ باشد، تجزیهٔ کامل عبارت مزبور کدام حالت زیر را دارد:

الف- شامل دوعامل درجهٔ دوم است.

ب- شامل یك عامل درجهٔ دوم و دو عامل درجهٔ اول است.

ج- توانی از یك عامل درجهٔ دوم است.

د- دو عامل مزدوج یکدیگر را شامل است.

۶۳) اگر چندجمله‌ای

$$(pa+qb+rc)^{۲}+(qa+rb+pc)^{۲}+(ra+pb+qc)^{۲}$$

به‌صورت $(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})(p^{۲}+q^{۲}+r^{۲})$ تجزیه شود، به شرط مثبت بودن مقادیر p، q و r کدام رابطهٔ زیر برقرار است:

الف- $a+b+c=۰$

ب- $ab+bc+ca=۰$

ج- $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}$

د- $a+b+c=۱$

۷

کسرها و عبارتهای جبری گویا

۷،الف- کسرهای جبری گویا

۷-۱. تعریف. خارج قسمت کامل چندجمله‌ای P بر چندجمله‌ای Q عبارتی جبری است که چون در Q ضرب شود P به‌دست‌آید. این خارج قسمت کامل وقتی دارای معنی است که Q صفر نباشد. خارج قسمت کامل چندجمله‌ای P بر چندجمله‌ای مخالف صفر Q را به صورت $\frac{P}{Q}$ نوشته و آن را کسر جبری گویا می‌نامند. چندجمله‌ای P را صورت کسر و چندجمله‌ای Q را مخرج کسر و خود کسر $\frac{P}{Q}$ را نسبت P بر Q نیز می‌نامند. خارج‌قسمت کامل هر چندجمله‌ای بر مقدار ثابت برابر یك چندجمله‌ای است. بنابراین هر کسر با مخرج ثابت عبارتست از یك چندجمله‌ای، و هر چندجمله‌ای را می‌توان کسر با مخرج ثابت یك دانست.

کسر $\frac{P}{Q}$ را یك متغیری می‌نامند هرگاه چندجمله‌ایهای P و Q حداکثر یك متغیری باشند. اگر حداقل یکی از چندجمله‌ایهای P و Q چند متغیری باشد درآن صورت کسر $\frac{P}{Q}$ نیز چندمتغیری خواهد بود. کسر با یك متغیر x به‌صورت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ نشان داده می‌شود.

۷-۲. مقدار عددی کسر. مقدارعددی یك کسر به‌ازای مقدار معینی از متغیر، یا مقادیر معینی از متغیرهای‌آن، برابر است با خارج قسمت مقدار عددی چندجمله‌ای صورت بر مقدار عددی چندجمله‌ای مخرج در ازای آن مقدار یا آن مقادیر از متغیر یا متغیرها به شرط‌آنکه مقدار عددی مخرج مخالف صفر باشد.

مثال ۱: به‌فرض $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x+۱}{x^{۲}-x}$ داریم:

$$f(۵)=\frac{P(۵)}{Q(۵)}=\frac{۶}{۲۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

$$f(-۱)=\frac{P(-۱)}{Q(-۱)}=\frac{۰}{۲}=۰$$

$$f(۱)=\frac{P(۱)}{Q(۱)}=\frac{۲}{۰}\ \text{نامعین}$$

مثال ۲. به‌فرض $f(x,y)=\frac{۲x}{x^۲-۳y^۲}$ داریم:

$$f(۱,-۱)=\frac{۲}{۱-۳}=-۱$$

$$f(-۲,۰)=\frac{-۴}{۴}=-۱$$

$$f(\alpha\sqrt{۳},\alpha)=\frac{۲\alpha\sqrt{۳}}{۳\alpha^۲-۳\alpha^۲}\ \text{نامعین}$$

هرگاه مقدار عددی یك کسر به‌ازای مقداری از متغیر، یا مقادیری از متغیرهای‌آن به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ درآید گفته می‌شود که کسر در ازای‌آن مقدار یا آن مقادیر مبهم است. مانند کسر $\frac{x^۲-۱}{(x+۱)^۲}$ که به‌ازای $x=-۱$ به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ درمی‌آید. یا کسر $\frac{ax+by}{a^۳x^۳+b^۳y^۳}$ که در ازای مقادیر $\frac{y}{a}=-\frac{x}{b}$ مبهم خواهد بود. هرگاه کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ به‌ازای $x=\alpha$ به صورت $\frac{۰}{۰}$ درآید به‌معنی آن است که صورت و مخرج کسر در عامل $x-\alpha$ مشترکند و می‌توان با حذف‌آن، کسر را ساده‌کرد. این عمل رفع ابهام کسر نام دارد.

مثال: کسر $\frac{x^۳+۴x^۲-۸}{۲x^۲+x+۶}$ به‌ازای $x=-۲$ مبهم‌می‌شود، پس چندجمله‌ایهای صورت و مخرج بر $x+۲$ بخش‌پذیرند و خواهیم داشت:

$$\frac{x^۳+۴x^۲-۸}{۲x^۲+x-۶}=\frac{(x+۲)(x^۲+۲x-۴)}{(x+۲)(۲x-۳)}=\frac{x^۲+۲x-۴}{۲x-۳}$$

مقدارکسر اخیر به‌ازای $x=-۲$ برابر است با $\frac{۴}{۷}$ که این مقدار را اصطلاحاً مقدارواقعی کسر مفروض در ازای $x=-۲$ نامیده‌اند. در واقع بایدگفت که کسر مفروض به‌ازای $x=-۲$ برابر با $\frac{۴}{۷}$ تعریف می‌شود.

۷-۳. ریشه‌ها و قطبهای کسر. ازریشه‌های چندجمله‌ای صورت‌کسر آنها که‌ریشهٔ

چندجمله‌ای مخرج نباشند ریشه‌های کسر نامیده می‌شوند. به‌عبارت دیگر، ریشه‌های یك کسر مقادیری هستندکه به‌ازای آنها مقدار کسر برابرصفرمی‌شود. از ریشه‌های چندجمله‌ای مخرج کسر آنها که ریشهٔ چندجمله‌ای صورت نباشند قطبهای کسر نام دارند. حداکثرتعداد ریشه‌های کسر برابر است با درجهٔ چندجمله‌ای صورت و حداکثر تعداد قطبهای کسر برابر است با درجهٔ چندجمله‌ای مخرج. ریشه‌ها و همچنین قطبهای کسر ممکن است ساده یا چندگانه (مکرر از مرتبهٔ مثلاً n) باشند.

مثال ۱: کسر $\frac{x^۳-x}{۲x^۲-۱}$ دارای سه ریشهٔ ۰، ۱ و ۱− و دارای دو قطب $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

مثال ۲: کسر $\frac{x^۲-۱}{x^۳-۱}$ که به‌صورت $\frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)(x^۲+x+۱)}$ نوشته می‌شود دارای یك ریشهٔ ۱− است و در مجموعهٔ عددهای حقیقی قطب ندارد. عدد یك کسر را به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ درمی‌آورد و نه ریشهٔ کسر است و نه قطب آن.

مثال ۳: کسر $\frac{x^۲+۱}{(x+۱)(x-۱)^۲}$ ریشه ندارد اما دارای دوقطب ۱− و ۱ است که اولی ساده و دومی دوگانه است.

۷-۴. حوزهٔ تعریف کسر. اگر E مجموعهٔ مرجع و A مجموعهٔ ریشه‌های چندجمله‌ای مخرج کسر باشد (که این ریشه‌ها ممکن است قطبهای کسر باشند یا نباشند)، مجموعهٔ $D=E-A$ را حوزهٔ تعریف کسر می‌نامند.

مثال ۱: در مجموعهٔ عددهای حقیقی، R، حوزهٔ تعریف کسر $\frac{x^۲-۱}{x^۲-x}$ عبارتست از مجموعهٔ $R-\{۰, ۱\}$

مثال ۲: در هر مجموعهٔ مرجع E حوزهٔ تعریف کسر $\frac{P(x, y)}{x-y}$ عبارتست از مجموعهٔ:

$$E-\{x, y|x\in E, y\in E, x=y\}=\{x, y|x\in E, y\in E, x\neq y\}$$

مثال ۳: در مجموعهٔ عددهای حقیقی، حوزهٔ تعریف کسر $\frac{x^۲-|x|}{x^۲+۲|x|+۱}$ برابر است با خود R، زیرا مخرج این کسر برابر است با $(۱+|x|)^۲$ و همواره مثبت است.

۷-۵. برابری کسرها. برابری دو کسر (دریك حوزهٔ تعریف) طبق رابطهٔ زیرتعریف می‌شود:

$$\frac{P}{Q}=\frac{R}{S} \iff PS=QR,\ Q\neq 0,\ S\neq 0$$

برحسب اینکه برابری $PS=QR$ همانی یا معادله باشد، برابری $\frac{P}{Q}=\frac{R}{S}$ نیز همانی یا معادله خواهد بود.

مثال ۱: دو کسر $\frac{a+b}{a-b}$ و $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$ با هم برابرند زیرا برابری

$$(a+b)^2(a-b)=(a^2-b^2)(a+b)$$

برقرار است، و چون این برابری یك همانی است پس برابری دو کسر در اشتراك حوزهٔ تعریف آنها نیز یك همانی است، یعنی به ازای هر مقداری از a و b به شرط $a\neq\pm b$ دو کسر با هم برابرند.

مثال ۲: دو کسر $\frac{x+2}{x-1}$ و $\frac{x+2}{2x-4}$ وقتی با هم برابرندکه داشته باشیم:

$$(x+2)(2x-4)=(x+2)(x-1) \text{ و } x\neq 1,\ x\neq 2$$

$$(x+2)(x-3)=0,\ x\neq 1,\ x\neq 2 \implies x=-2 \text{ یا } 3$$

پس برابری دو کسر مزبور معادله‌ای است که به‌ازای $x=-2$ یا $x=3$ برقرار است.

۷-۶. ویژگیهای برابری کسرها. برابری دو کسر، در اشتراك حوزهٔ تعریف‌آنها، علاوه برآنکه یك رابطهٔ هم ارزی است، ویژگیهای زیر را نیز دارا است:

$$1)\ \frac{A}{B}=\frac{C}{D} \iff AD=BC \iff \frac{A}{C}=\frac{B}{D}\ (C, D\neq 0)$$

$$\iff \frac{B}{A}=\frac{D}{C}(A, C\neq 0)$$

$$2)\ \frac{A}{B}=\frac{C}{D} \iff AD=BC \iff AD+BD=BC+BD$$

$$\iff \frac{A+B}{B}=\frac{C+D}{D}$$

$$3)\ \frac{A}{B}=\frac{C}{D} \iff AD=BC \iff AD+AC=BC+AC$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{A+B}=\frac{C}{C+D}(A\neq -B,\ C\neq -D)$$

$$۴)\ \frac{A}{B}=\frac{C}{D} \Leftrightarrow \frac{A-B}{B}=\frac{C-D}{D} \Leftrightarrow \frac{A}{A-B}=\frac{C}{C-D}$$
$$(A\neq B,\ C\neq D)$$

$$۵)\ \frac{A}{B}=\frac{C}{D} \Leftrightarrow \frac{A+B}{A-B}=\frac{C+D}{C-D}(A\neq B,\ C\neq D)$$

$$۶)\ \frac{A_۱}{B_۱}=\frac{A_۲}{B_۲}= \dots =\frac{A_n}{B_n}=k \qquad (B_۱,\ B_۲,\ \dots,\ B_n\neq ۰)$$

$$A_۱=B_۱k \quad ، \quad A_۲=B_۲k ،\dots ،A_n=B_nk$$

$$A_۱+A_۲+ \dots +A_n=(B_۱+B_۲+ \dots +B_n)k$$

$$\frac{A_۱}{B_۱}=\frac{A_۲}{B_۲}= \dots =\frac{A_n}{B_n}=\frac{A_۱+A_۲+ \dots +A_n}{B_۱+B_۲+ \dots +B_n}$$
$$(B_۱+B_۲+ \dots +B_n\neq ۰)$$

مثال ۱: برای حل معادلهٔ $\frac{x+۵}{x-۵}=۴$ به‌شرط $x\neq ۵$ از ویژگی (۵) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{x+۵+x-۵}{x+۵-(x-۵)}=\frac{۴+۱}{۴-۱} \Longrightarrow \frac{۲x}{۱۰}=\frac{۵}{۳} \Longrightarrow x=\frac{۲۵}{۳}$$

مثال ۲: حل دستگاه زیر با استفاده از ویژگی (۶):

$$\begin{cases} x+y+z=۱۶ \\ \frac{x-۱}{۴}=\frac{y+۱}{۵}=\frac{z+۳}{۱۰} \end{cases}$$

$$\frac{x-۱}{۴}=\frac{y+۱}{۵}=\frac{z+۳}{۱۰}=\frac{x+y+z+۳}{۱۹}=۱$$

$$x=۵ \quad ، \quad y=۴ \quad ، \quad z=۷$$

۷-۷. ساده‌کردن کسر. از تعریف برابری دو کسر برمی‌آید که می‌توان صورت و مخرج یک کسر را در عبارتی مخالف صفر ضرب یا بر عبارتی مخالف صفر تقسیم کرد.

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \Longleftrightarrow AD=BC \Longleftrightarrow ADK^{۲}=BCK^{۲},\ K\neq ۰$$

$$\Longleftrightarrow \frac{AK}{BK}=\frac{CK}{DK}$$

تقسیم کردن صورت و مخرج کسر بر عبارتی که هر دو بر آن بخش‌پذیر باشند ساده کردن آن کسر نامیده می‌شود. کسری که عبارتهای صورت و مخرج آن نسبت به‌هم اول باشند کسر ساده نشدنی یا کسر تحویل ناپذیر نام دارد.

برای ساده کردن کسر و تبدیل آن به کسر ساده نشدنی، یك روش که بیشتر به‌کار می‌رود آن است که عبارتهای صورت و مخرج آن به‌ضرب عاملهای اول تجزیه و عاملهای مشترك در صورت و مخرج حذف شوند.

روش دیگر آن است که نخست بزرگترین مقسوم علیه مشترك عبارتهای صورت و مخرج را به‌دست آوریم و آنگاه صورت و مخرج را بر آن تقسیم کنیم.

مثال ۱. برای ساده کردن کسر $y=\frac{x^{۳}-|x|}{x^{۲}+|x|}$ دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$۱)\ x>۰\ :\ y=\frac{x^{۳}-x}{x^{۲}+x}=\frac{x(x+۱)(x-۱)}{x(x+۱)}=x-۱$$

$$۲)\ x<۰\ :\ y=\frac{x^{۳}+x}{x^{۲}-x}=\frac{x(x^{۲}+۱)}{x(x-۱)}=\frac{x^{۲}+۱}{x-۱}$$

مثال ۲. برای ساده کردن کسر $\frac{۲x^{۳}+۷x^{۲}+۱۳x+۵}{۳x^{۳}+۱۰x^{۲}+۱۸x+۵}$ بزرگترین مقسوم علیه مشترك چندجمله‌ایهای صورت و مخرج را به دست می‌آوریم که می‌شود $x^{۲}+۳x+۵$ و عبارتهای صورت و مخرج را بر این سه‌جمله‌ای تقسیم می‌کنیم که در نتیجه سادهٔ شدهٔ کسر برابر با $\frac{۲x+۱}{۳x+۱}$ به‌دست می‌آید.

۷-۸. کسر ثابت. اگر کسر یك یا چندمتغیری به ازای همهٔ مقادیر از متغیر یا متغیرها برابر مقدار ثابت باشد به آن کسر ثابت گفته می‌شود. برای آنکه یك کسر برابر مقدار ثابت، یعنی مستقل از متغیر یا متغیرها باشد لازم و کافی است که ضریبهای جمله‌های متشابه صورت و مخرج نظیر به‌نظیر متناسب باشند.

چنانکه اگر به‌ازای هر مقدار از x داشته باشیم:

$$\frac{a_n x^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\ldots+a_۰}{b_n x^n+b_{n-۱}x^{n-۱}+\ldots+b_۰}=r$$

خواهیم داشت:

$$(a_n-rb_n)x^n+(a_{n-1}-rb_{n-1})x^{n-1}+\ldots+(a_0-rb_0)\equiv 0$$

$$a_n-rb_n=a_{n-1}-rb_{n-1}=\ldots=a_0-rb_0=0$$

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}=\ldots=\frac{a_0}{b_0}=r$$

مثال. برای آنکه کسر $\frac{4x^2+mx+n}{2x^2+3x+8}$ برابر مقدار ثابت باشد لازم و کافی است که:

$$\frac{4}{2}=\frac{m}{3}=\frac{n}{8}\Longrightarrow m=6\ ,\ n=16$$

۷ـ۹. کسر صفر. کسری که صورت آن صفر یا چندجمله‌ای متحد با صفر، و مخرج **آن مخالف صفر** باشد، کسر صفر نام دارد. مانند $\frac{(x+1)^2-x^2-2x-1}{x^2+1}$ که برابر است با $\frac{0}{x^2+1}$ و برابر است با صفر.

۷ـ۱۰. تحویل به‌یك مخرج. با استفادهٔ از این ویژگی که اگر صورت و مخرج کسر در یك مقدار مخالف صفر ضرب شود آن کسر برابر با خودش باقی می‌ماند، می‌توان چندکسر مفروض را به کسرهایی با مخرجهای برابر تبدیل کرد. برای این کار، پس از ساده کردن کسرها کوچکترین مضرب مشترك مخرجها را به‌دست آورده آن را مخرج مشترك قرار می‌دهند و خارج قسمت آن بر مخرج هر کسر را در صورت آن کسر ضرب می‌کنند.

مثال. به‌فرض $A(x)=\frac{(x+1)^2}{x^3-1}$ ، $B(x)=\frac{x-1}{x^3-1}$ و $C(x)=\frac{x+1}{x^3+1}$ داریم:

$$A(x)=\frac{(x+1)^2}{x^3-1}\quad,\quad B(x)=\frac{1}{x^2+x+1}\quad,\quad C(x)=\frac{1}{x^2-x+1}$$

x^3-1 بر x^2+x+1 بخش‌پذیر و نسبت به x^2-x+1 اول است. پس کوچکترین مضرب مشترك مخرجها می‌شود $(x^3-1)(x^2-x+1)$ و داریم:

$$A(x)=\frac{(x+1)^2(x^2-x+1)}{(x^3-1)(x^2-x+1)}=\frac{(x^3+1)(x+1)}{(x^3-1)(x^2-x+1)}$$

$$B(x)=\frac{(x-1)(x^2-x+1)}{(x^3-1)(x^2-x+1)}$$

$$C(x)=\frac{x^3-1}{(x^3-1)(x^2-x+1)}$$

۷-۱۱. مقایسهٔ دوکسر. برای مقایسهٔ دوکسر نخست آن دو به کسرهای با مخرج مشترك تبدیل، سپس صورتهای آنها با هم مقایسه می‌شوند. مقایسهٔ دوکسر متغیردار به تعیین علامت عبارتها منجر می‌شود که معمولاً در مبحث نامعادله‌ها بررسی می‌شود.

۷-۱۲. عملیات بین کسرها. در حوزه‌ای که هر کدام از کسرهای مفروض معین باشد، یعنی در حوزه‌ای که برابر است با اشتراك حوزه‌های تعریف آن کسرها:

۱) مجموع جبری چندکسر با مخرجهای برابر، کسری است با همان مخرج که صورت آن مجموع جبری صورتهای آن کسرها است.

$$\frac{A(x)}{P(x)}+\frac{B(x)}{P(x)}+\ \dots\ +\frac{L(x)}{P(x)}=\frac{A(x)+B(x)+\ \dots\ +L(x)}{P(x)}$$

۲) برای جمع کردن چندکسر با مخرجهای متفاوت نخست کسرها به کسرهای با مخرج مشترك تبدیل می‌شوند و آنگاه صورتهای آنها با هم جمع می‌شوند.

۳) دوکسر که مجموع آنها صفر باشد کسرهای قرینه نامیده می‌شوند.

۴) تفریق دوکسر به عمل جمع کسر مفروق منه با قرینهٔ کسر مفروق تبدیل می‌شود.

۵) حاصلضرب چندکسر برابر است با کسری که صورت آن حاصلضرب صورتها و مخرج آن حاصلضرب مخرجهای آن کسرها است. به‌هنگام ضرب کسرها، هر عامل مشترك بین یکی از صورتها و یکی از مخرجها حذف می‌شود.

مثال:

$$\frac{a^2-b^2}{a^4+a^2b^2+b^4}\times\frac{a^3+b^3}{(a+b)^2}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)}$$

$$\times\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)^2}=\frac{a-b}{a^2+ab+b^2}$$

۶) دوکسر، و به‌طور کلی دو عبارت، که حاصلضرب آنها برابر یك باشد **معکوس** یکدیگر نامیده می‌شوند. برای آنکه معکوس یك کسر به دست آید کافی است که صورت و مخرج آن با هم عوض شوند.

$$\frac{A}{B}\times\frac{B}{A}=1 \quad , \quad F(x,\dots)\times\frac{1}{F(x,\dots)}=1$$

۷) خارج قسمت دو کسر برابر است با حاصل‌ضرب کسر مقسوم در معکوس کسر مقسوم‌علیه.

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$$

$$\frac{x^2+x+1}{x^4-1} : \frac{x}{x^6-1} = \frac{x^2+x+1}{x^4-1} \times \frac{x^6-1}{x}$$

$$= \frac{(x^2+x+1)(x^4+x^2+1)}{x(x^2+1)}$$

یادداشت مهم: هرعمل بین کسرها و ازجمله ساده کردن آنها درحوزه‌ای انجام‌پذیر است که آن کسرها معین باشند وگرنه آن عمل بی‌معنی خواهد بود. برای مثال کسر $\frac{x^2-1}{x^3-1}$ را فقط درحوزهٔ تعریف‌آن،یعنی به‌شرط $x \neq 1$ می‌توان ساده کرد، وگرنه تقسیم برصفر پیش می‌آیدکه بی‌معنی است. در حوزهٔ تعریف R مقدار کسر مزبور به‌ازای $x = 1$ برابر با $\frac{2}{3}$ تعریف می‌شود، یعنی مقدار کسر $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ به‌ازای $x = 1$. در صورتی‌که در حوزهٔR، اگر مقدار کسرمزبور به‌ازای $x = 1$ تعریف نشده باشد،آن‌کسر برابر با هر مقدار می‌تواند باشد و نامعین است که گفته می‌شود مبهم است.

۷-۱۳. ترکیب کسرها. دو کسر $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ با حوزهٔ تعریف D_f و $g(x) = \frac{C(x)}{D(x)}$ با حوزهٔ‌تعریف D_g را درنظرمی‌گیریم. عبارت $f[g(x)]$ درحوزهٔ‌تعریف خود کسر مرکب نامیده می‌شود و برابر است با:

$$f[g(x)] = \frac{A\left(\frac{C(x)}{D(x)}\right)}{B\left(\frac{C(x)}{D(x)}\right)}$$

مثال. به‌فرض $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ و $g(x) = \frac{3x-x^3}{1-3x^2}$ و به فرض $x \neq \pm 1$ و $x \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ داریم:

$$f[g(x)]=\frac{2\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)}{1-\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)^2}=\frac{6x-20x^3+6x^5}{1-15x^2+15x^4-x^6}$$

$$g[f(x)]=\frac{3\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)-\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^3}{1-3\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}=\frac{6x-20x^3+6x^5}{1-15x^2+15x^4-x^6}$$

۷-۱۴. بسط کسر. اگر درجهٔ صورت کسر از درجهٔ مخرج آن کمتر باشد، چون تقسیم برحسب توانهای صعودی چندجمله‌ای صورت برچندجمله‌ای مخرج تا مرتبهٔ k انجام گیرد، چندجمله‌ای خارج قسمت را بسط تا مرتبهٔ kام کسر مفروض می‌نامند (چگونگی تقسیم مزبور دربخش چندجمله‌ایها بیان شده است). هرگاه درجهٔ صورت کسر با درجهٔ مخرج برابر یا ازآن بزرگتر باشد نخست کسر را رفع می‌کنیم؛ یعنی ازراه تقسیم معمولی صورت برمخرج کسر را به‌مجموع یك چندجمله‌ای (خارج قسمت) و یك کسر تبدیل می‌کنیم که درجهٔ صورت آن (باقیماندهٔ تقسیم) از درجهٔ مخرج آن (همان مخرج کسر مفروض) کوچکتر خواهد بود.

مثال ۱. برای بسط کسر $\frac{5x+2}{x^2-3x+1}$ تا مرتبهٔ ۴، تقسیم برحسب توانهای صعودی

$$2+5x \;\Big|\; \underline{1-3x+x^2}$$

تا مرتبهٔ ۴ را انجام می‌دهیم که خواهیم داشت:

$$\frac{2+5x}{1-3x+x^2}=2+11x+31x^2+82x^3+215x^4+\frac{563x^5-215x^6}{x^2-3x+1}$$

مثال ۲. برای بسط کسر $\frac{x^2-2}{x-1}$ نخست آن را رفع می‌کنیم که می‌شود $x+1+\frac{1}{x-1}$ که برابر است با $x+1-\frac{1}{1-x}$، اکنون بسط $\frac{1}{1-x}$ را به دست می‌آوریم که در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{x^{۲}-۲}{x-۱}=(x+۱)-(۱+x+x^{۲}+x^{۳}+\dots)$$

۷،ب- چند مسئلهٔ نمونه

۷-۱۵. استلزام زیر را ثابت کنید:

$$\frac{ad+b}{bc+a}=\frac{bd+a}{ac+b} \Longrightarrow |a|=|b| \text{ یا } cd=۱$$

حل- بنا به تعریف برابری دو کسر از برابری $\frac{ad+b}{bc+a}=\frac{bd+a}{ac+b}$ خواهیم داشت:

$$a^{۲}cd+abd+abc+b^{۲}=b^{۲}cd+abd+abc+a^{۲}$$

$$a^{۲}(cd-۱)+b^{۲}(۱-cd)=۰$$

$$(a^{۲}-b^{۲})(cd-۱)=۰ \Longrightarrow a^{۲}=b^{۲} \text{ یا } cd=۱$$

۷-۱۶. مقادیر a، b و c چگونه باشند که داشته باشیم:

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=\frac{۱}{a+b+c}$$

حل- فرض می‌کنیم $S=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}-\frac{۱}{a+b+c}$ و چنین عمل می‌کنیم:

$$S=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{a+b+c-c}{c(a+b+c)}=\frac{a+b}{ab}+\frac{a+b}{c(a+b+c)}$$

$$=(a+b)\left[\frac{۱}{ab}+\frac{۱}{c(a+b+c)}\right]=\frac{(a+b)[ab+c(a+b+c)]}{abc(a+b+c)}$$

$$=\frac{(a+b)(ab+ac+bc+c^{۲})}{abc(a+b+c)}=\frac{(a+b)[a(b+c)+c(b+c)]}{abc(a+b+c)}$$

$$=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc(a+b+c)}$$

$$S=۰ \Longleftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=۰$$

یعنی دو مقدار از سه مقدار a و b و c قرینهٔ یکدیگر باشند.

۷-۱۷. به‌فرض $xyz=۱$ حاصل عبارت زیر را به‌دست‌آورید:

$$A=\frac{x}{xy+x+۱}+\frac{y}{yz+y+۱}+\frac{z}{zx+z+۱}$$

حل- صورت و مخرج کسر اول را در z و از کسر دوم را در zx ضرب می‌کنیم:

$$A=\frac{xz}{xyz+xz+z}+\frac{xyz}{xyz^{۲}+xyz+zx}+\frac{z}{zx+z+۱}$$

بنا به‌فرض $xyz=۱$ پس:

$$A=\frac{xz}{۱+xz+z}+\frac{۱}{z+۱+zx}+\frac{z}{zx+z+۱}$$

$$=\frac{zx+z+۱}{zx+z+۱}=۱$$

۷-۱۸. به‌فرض آنکه α و β ریشه‌های سه‌جمله‌ای $x^{۲}-۵x+۱$ باشند مقدار کسر $A=\frac{\alpha^{۴}-\beta^{۴}}{\alpha^{۳}-\beta^{۳}}$ را به‌دست‌آورید.

حل. داریم $\alpha\beta=۱$ و $\alpha+\beta=۵$ و کسر A را ساده و به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^{۲}+\beta^{۲})}{(\alpha-\beta)(\alpha^{۲}+\alpha\beta+\beta^{۲})}=\frac{(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta]}{(\alpha+\beta)^{۲}-\alpha\beta}$$

$$=\frac{۵(۲۵-۲)}{۲۵-۱}=\frac{۱۱۵}{۲۴}$$

۷-۱۹. درستی استلزام زیر را ثابت‌کنید:

$$\sum\frac{x}{y-z}=۰ \implies \sum\frac{x}{(y-z)^{۲}}=۰$$

حل. بنا بر مقدم (طرف اول) استلزام داریم:

$$\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}=۰$$

$$\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}=\frac{xz-x^{۲}+y^{۲}-yz}{(y-z)(z-x)}=\frac{(x-y)(z-x-y)}{(y-z)(z-x)}=\frac{-z}{x-y}$$

$$\frac{x+y-z}{(y-z)(z-x)}=\frac{z}{(x-y)^{۲}} \quad (۱)$$

چون عبارت داده شده نسبت به x و y و z دوری است، پس دو رابطهٔ زیر را داریم:

$$\frac{y+z-x}{(z-x)(x-y)}=\frac{x}{(y-z)^{۲}} \quad (۲)$$

$$\frac{z+x-y}{(x-y)(y-z)}=\frac{y}{(z-x)^{۲}} \quad (۳)$$

دو طرف رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) را نظیر به‌نظیر با هم جمع می‌کنیم. **حاصل جمع**

طرفهای اول می‌شود:

$$\frac{(x+y-z)(x-y)+(y+z-x)(y-z)+(z+x-y)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$

عبارت صورت این کسر را که عمل کنیم حاصل برابر صفر می‌شود، پس مجموع طرفهای اول سه رابطهٔ بالا برابر صفر است و در نتیجه مجموع طرفهای دوم نیز برابرصفر است، یعنی:

$$\frac{x}{(y-z)^2}+\frac{y}{(z-x)^2}+\frac{z}{(x-y)^2}=0$$

۷،ج- تجزیهٔ کسر به مجموع کسرهای ساده

۷-۲۰. مفهوم و اهمیت عمل. تبدیل یك کسر به‌مجموع چندکسر ساده‌تر را **تجزیهٔ** کسرمی‌نامند. اهمیت این عمل ازآن جهت است که انتگرال گرفتن از تابع کسری را ممکن می‌سازد.

روش تجزیهٔ کسرهایی که درجهٔ صورت آنها از درجهٔ مخرجشان کمتر است در زیر می‌آید. اگـر درجـهٔ صورت کسر از درجهٔ مخرج کـوچکتر نباشد، آن کسر را رفع کرده به مجموع یك چندجمله‌ای و یك کسر تبدیل می‌کنندکـه درجهٔ صورت‌آن از درجهٔ مخرجش کمتر باشد.

۷-۲۱. روش تجزیهٔ کسر. نخست کسر را ساده می‌کنیم و فـرض می‌کنیم کسری باشدکه درجهٔ صورت‌آن ازدرجهٔ مخرجش کوچکتر است. برای تجزیهٔ چنین کسری نخست مخرج آن را به‌ضرب عاملهای اول تجزیـه می‌کنیم. برحسب‌آنکه همهٔ عاملها از درجهٔ اول‌یا بعضی ازآنها ازدرجهٔ دوم‌باشد وبرحسب اینکه این‌عاملها دارای‌توان‌یك یا دارای توانی بزرگتر از یك باشند، حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم. بدیهی است که اگرمخرج کسر اول باشدآن کسر تجزیه ناپذیر است.

حالت ۱) همهٔ عاملهای مخرج ازدرجهٔ اول و با توان یك باشند. نظیر هر عامل یك کسر در نظر می‌گیریم کـه‌آن عامل مخرج‌آن و عدد ثابت مانند A_i صورت‌آن باشد. مجموع این کسرها را متحد با کسرمفروض قرارمی‌دهیم، که پس از تحویل کسرهای‌حاصل به‌مخرج مشترك صورتهای دو کسرمتحد قرارداده می‌شوند و ازاین راه مقادیر ثابت A_iها به‌دست می‌آیند.

مثال. تجزیهٔ کسر $\frac{x^2-6x+6}{x^2-3x+2}$:

$$\frac{x^2-6x+6}{x^2-3x+2}=1-\frac{3x-4}{(x-2)(x-1)}$$

$$\frac{3x-4}{(x-2)(x-1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}$$

$$3x-4\equiv A(x-1)+B(x-2)\equiv(A+B)x-A-2B$$

$$\begin{cases}A+B=3\\ -A-2B=-4\end{cases}\Longrightarrow\left|\begin{array}{l}A=2\\ B=1\end{array}\right.$$

$$\frac{x^2-6x+6}{x^2-3x+2}=1-\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-1}$$

یادداشت. برای به‌دست‌آوردن مقادیر A و B به‌جای برابر قرار دادن ضریبهای جمله‌های همدرجه در اتحاد به‌دست آمده، می‌توان x را با مقادیر معین دلخواه جانشین ساخت؛ مثلاً یك بار $x=1$ و یك بار $x=2$ فرض شود.

حالت ۲) همهٔ عاملهای مخرج درجهٔ اول اما بعضی یا همهٔ آنها به‌توان بزرگتر از یك باشند. در این حالت نظیر هر عامل مانند $(ax+b)^n$ تعداد n کسر به‌صورت‌زیر در نظر می‌گیریم.

$$\frac{A_1}{ax+b}\ ،\ \frac{A_2}{(ax+b)^2}\ ،\ \dots\ ،\ \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

و بعد مانند حالت اول عمل می‌کنیم.

مثال. تجزیهٔ کسر $\frac{4x^2+3x+5}{x^3-3x-2}$ که پس از تجزیهٔ مخرج‌آن داریم:

$$\frac{4x^2+3x+5}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-2}$$

$$4x^2+3x+5\equiv A(x+1)(x-2)+B(x-2)+C(x+1)^2$$

$$\equiv(A+C)x^2+(-A+B+2C)x-2A-2B+C$$

$$\begin{cases}A+C=4\\ -A+B+2C=3\\ -2A-2B+C=5\end{cases}\Longrightarrow\left|\begin{array}{l}A=1\\ B=-2\\ C=3\end{array}\right.$$

$$\frac{4x^2+3x+5}{x^3-3x-2}=\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{3}{x-2}$$

حالت ۳) بعضی ازعاملهای اول مخرج از درجهٔ ۲ باشند (در مجموعهٔ عددهای حقیقی تجزیه ناپذیر باشند). در این حالت نیز مانند حالتهای ۱ و ۲ عمل می‌کنیم بااین

تفاوت‌که صورت هرکسر را که مخرج‌آن عامل درجهٔ دوم، یا توانی از این عامل، باشد دوجمله‌ای درجهٔ اول درنظر می‌گیریم‌که ضریبهای‌آن باید از اتحاد دو طرف معین‌شوند.

مثال ۱. تجزیهٔ کسر $\frac{x^3-7x^2-3x-7}{x^4-1}$؛

$$\frac{x^3-7x^2-3x-7}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$x^3-7x^2-3x-7\equiv A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+$$
$$+(Cx+D)(x^2-1)$$
$$\equiv(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x$$
$$+A-B-D$$

$$\begin{cases}A+B+C=1\\A-B+D=-7\\A+B-C=-3\\A-B-D=-7\end{cases}\Longrightarrow\left|\begin{array}{l}A=-4\\B=3\\C=2\\D=0\end{array}\right.$$

$$\frac{x^3-7x^2-3x-7}{x^4-1}=\frac{-4}{x-1}+\frac{3}{x+1}+\frac{2x}{x^2+1}$$

مثال ۲. تجزیهٔ کسر:

$$\frac{4x^4-3x^3+10x^2+6x+6}{(2x+1)(x^2-x+1)^2}$$
$$=\frac{A}{2x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}+\frac{Dx+E}{(x^2-x+1)^2}$$

$$4x^4-3x^3+10x^2+6x+6\equiv A(x^2-x+1)^2+$$
$$+(Bx+C)(2x+1)(x^2-x+1)+(Dx+E)(2x+1)$$
$$\equiv(A+2B)x^4+(-2A-B+2C)x^3+(3A+B-C+2D)x^2$$
$$+(-2A+B+C+D+2E)x+A+C+E$$

$$\begin{cases}A+2B=4\\-2A-B+2C=-3\\3A+B-C+2D=10\\-2A+B+C+D+2E=6\\A+C+E=6\end{cases}\Longrightarrow\left|\begin{array}{l}A=2\\B=1\\C=1\\D=2\\E=3\end{array}\right.$$

$$\text{کسر مفروض} = \frac{۲}{۲x+۱} + \frac{x+۱}{x^۲-x+۱} + \frac{۲x+۳}{(x^۲-x+۱)^۲}$$

یادداشت. اگر کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ساده نشدنی وچندجمله‌ای $Q(x)$ ازدرجهٔ n (بزرگتر از درجهٔ $(P(x)$) باشد، کسر مزبور در مجموعـهٔ عددهای مختلط دارای n قطب است و در نتیجه به‌مجموع n کسر تجزیه می‌شود. اما نظیر هر یك از ایـن کسرها که مخرج آن مختلط باشدکسر دیگری وجود خواهد داشت که مخرج‌آن مزدوج مخرج کسر اول است، در نتیجه مجموع دو کسر مزبور کسری خواهد بود حقیقی کـه مخرج‌آن از درجـهٔ دوم و صورت‌آن ازدرجهٔ اول است. بنابراین، تجزیهٔ کسر درهرحال به‌یك صورت انجام‌می گیرد.

* ۷،د- مجموعهٔ عبارتهای جبری گویا

۷-۲۲. عبارت جبری گویا. مجموعه‌یی از جفتهای مرتب را درنظر می گیریم که هرعضو ازهریك ازجفتها یك‌چندجمله‌ای حقیقی باشد وعضودوم هیچ‌جفتی صفرنباشد. در این مجموعه رابطه‌ای هم‌ارزی بدین گونه تعریف می کنیم که دوجفت مرتب (P , Q) و (R, S) وقتی و فقط وقتی درآن رابطه‌اند کـه $PS = RQ$ بـاشد. این رابطهٔ هم‌ارزی درمجموعهٔ مزبور کلاسهایی پدید می‌آورد که هر کلاس را یك عبارت‌جبری گویا می‌نامیم. هر جفت عضـو مجمـوعـهٔ گفته شده را کسر جبری گویا می‌نـامند کـه ممکن است یك چندجمله‌ای باشد (در حالتی‌کـه عضو دوم جفت یـك مقـدار ثابت، مانند یك، باشد) و رابطهٔ هم ارزی تعریف شده را همان رابطهٔ برابری می گیرند. هرکسری می‌تواند نمایندهٔ عبارت جبری گویایی باشدکه همهٔ کسرهای مساوی با آن کسر، یعنی کلاس آن کسر، پدید می‌آورد. اما معمولاً ساده‌تـریـن کسر هر کلاس را نمایندهٔ عبارت جبری گـویای‌آن کلاس برمی گزینند.

مثال ۱. جفت مـرتب $(x+۱, x-۱)$ به شرط $x\neq۱$ کـه بـه صورت کسر $\frac{x+۱}{x-۱}$ نوشته می‌شودنمایانگرعبارت جبری گویایی‌است که‌هریك‌از کسرهای‌زیر نیزنمایانگر آنند:

$$\frac{x^۲-۱}{(x-۱)^۲} \quad ، \quad \frac{(x+۱)^۲}{x^۲-۱} \quad ، \ldots ، \quad \frac{(x+۱)P(x)}{(x-۱)P(x)}, \ P(x)\neq ۰$$

مثال ۲. عبارت‌جبری گویای $۲x^۲+۱$ نمایندهٔ کلاس هم‌ارزی شامل کسرهای زیر است:

$$\frac{۲x^۲+۱}{۱} \quad ، \quad \frac{۲x^۳+x}{x} \text{ و } x\neq ۰ \quad ، \quad \frac{(۲x^۲+۱)(x^۲+۲)}{x^۲+۲}، \ldots$$

یادداشت. معمولاً عبارت جبری گویا وکسر جبری‌گویا را با یکدیگر اشتباه می‌گیرند. مثلاً کسرهای $\frac{x}{x+۱}$ و $\frac{x^۲-x}{x^۲-۱}$ را یک‌کسر تلقی می‌کنند، در صورتی‌که آنها دو کسر متمایزند اما هر دو یک عبارت جبری گویا می‌باشند.

۷-۲۳. نهاد مجموعهٔ عبارتهای جبری‌گویا. در مجموعهٔ عبارتهای جبری گویا دو عمل درونی جمع و ضرب با ویژگیهای زیر تعریف می‌شود:

عمل جمع جابجایی و انجمنی است و صفر عضو بی‌اثرآن است و برای هر عضو مجموعه یک عضوقرینه وجود دارد.

عمل ضرب جابجایی و انجمنی و نسبت به‌عمل جمع پخشی است، یک عضوبی‌اثر آن است و برای هر عضو به‌غیر از صفر یک عضو معکوس وجوددارد.

با توجه به ویژگیهای بالا و با توجه به‌تعریف هیأت نتیجه می‌شود که: مجموعهٔ عبارتهای جبری گویا یک هیأت است.

۷-۲۴. هیأت زیربنا. در عبارتهای جبری‌گویا که در دوره‌های پیش دانشگاهی آموزش داده می‌شود ضریبها عددهای حقیقی هستند و متغیرها نیز نمایانگر عددهای حقیقی‌اند. ازاین‌رو گفته می‌شود که هیأت‌عبارتهای جبری‌گویا روی هیأت عددهای‌حقیقی بنا شده است. اما می‌توان به جای هیأت عددهای حقیقی یک هیأت دیگر، مثلاً هیأت عددهای مختلط، را به‌عنوان زیر بنا انتخاب‌کرد.

در هیأت عبارتهای جبری گویا که روی هیأت عددهای حقیقی بنا شده است، هر عبارت جبری‌گویا را می‌توان به‌صورت‌کلی:

$$a_۱P_۱^{p_۱}Q_۱^{q_۱}R_۱^{r_۱}\ldots+a_۲P_۲^{p_۲}Q_۲^{q_۲}R_۲^{r_۲}\ldots+\ldots$$

نشان دادکه درآن هر a_i یک عدد حقیقی، هر P_i، Q_i، ... یک چندجمله‌ای و هر p_i، q_i، ... یک عدد صحیح نسبی است. مانند:

$$۱۵ax^۲-۴xy+۷$$

$$\frac{۷x^۲y}{z}=۷x^۲yz^{-۱}$$

$$\frac{۳ax^۲+۲x-b}{(x^۲+a)^۳}=(۳ax^۲+۲x-b)(x^۲+a)^{-۳}$$

۷،ه‍ـ تمرینها و پرسشها

۷-۲۵. تمرینهای دستهٔ اول

● مقدار عبارتهای زیر را بـه‌ازای مقادیر داده شده بـه‌دست‌آورید و هر جا که حاصل مبهم باشدرفع ابهام کنید.

$$۱)\ f(x)=\frac{۴x+۸}{۳x-۶}\quad ؛\quad f(۱)،f(۲)،f(-۲)=?$$

$$۲)\ f(x)=\frac{x^۳-۷x+۶}{x^۲+۵x-۶}\quad ؛\quad f(-۵)،f(۲)،f(۱)=?$$

$$۳)\ f(x,y)=\frac{x^۲-۳xy+۲y^۲}{x^۳-۸y^۳}\quad ؛\quad f(x,x)،f(۲y,y)=?$$

$$۴)\ f(x)=\frac{x+۳+\frac{x+۱}{x-۲}}{x+\frac{x^۲}{x-۲}}\quad ؛\quad f(۰)،f(۲)=?$$

● ریشه‌ها و قطبهای کسرهای زیر را حساب کنید:

$$۵)\ \frac{۹x^۲-۴}{۹x^۲+۱۲x+۴}$$

$$۶)\ \frac{(۳x-۴)^۲(۳x+۸)}{۹x^۲+۱۲x-۳۲}$$

$$۷)\ \frac{x^۳+۲x^۲-x-۲}{x^۲+x-۲}$$

$$۸)\ \frac{x^۴+۳x^۲+۴}{x^۴-x^۲+۴x-۴}$$

● حوزهٔ تعریف هر یك از کسرهای زیر را در مجموعهٔ عددهای حقیقی (R) معلوم کنید:

$$۹)\ \frac{۳(x-۱)^۲}{x^۲+x-۲}$$

$$۱۰)\ \frac{\sqrt{(x+۱)^۲}+\sqrt{(x-۱)^۲}}{\sqrt{(x+۱)^۲}-\sqrt{(x-۱)^۲}}$$

$$۱۱)\ \frac{|x+۲|-|x-۲|}{|x+۲|+|x-۲|}$$

$$۱۲)\ \frac{x^۲-۲x+۱}{|x^۲-|۲x-۱||}$$

● کسرهای زیر را ساده کنید:

$$۱۳)\ \frac{۲\left[\left(۲x-\frac{۱}{۳}\right)^۲-\frac{۱۶}{۹}\right]}{(۲x+۱)(x-۳)+(۲x+۱)(۳x-۴)-(۲x+۱)^۲}$$

$$۱۴)\ \frac{(a-b)^۲(x-y)^۲}{(ax+by)^۲-(ay+bx)^۲}$$

۱۵) $\frac{(2x-3)^2-4(3x-2)^2}{(4x-1)^2-x(4x-1)-16x^2+1}$

۱۶) $\frac{a^3-5a^2+7a-3}{a^3-3a+2}$

۱۷) $\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2y+2xy-x^2-2x+y-1}$

۱۸) $\frac{12x^3+x^2+4x-30}{6x^3-x^2-18}$

● حاصل عبارتهای زیر را به‌ساده‌ترین صورت به‌دست‌آورید:

۱۹) $\frac{|x|-1}{x^2-1}-\frac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}$

۲۰) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right) : \left[\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{a^3b+ab^3}\right]\times\frac{2a-2b}{a+b}$

۲۱) $\frac{(2x+3)^2-x^2}{x^2-9}+\frac{x^2-(2x-1)^2}{x^2-4x+3}+\frac{(2x-3)^2}{2x^2-9x+9}$

۲۲) $\frac{1}{a-b}+\frac{a}{b^2+a(a+b)}+\frac{b}{a^2+b(a+b)}-\frac{3ab}{a^3-b^3}$

۲۳) $\frac{xy}{(z-x)(z-y)}+\frac{yz}{(x-y)(x-z)}+\frac{zx}{(y-z)(y-x)}$

۲۴) $\frac{a^2-b^2+c^2+2ac}{a^2-b^2-c^2-2bc}\times\frac{a^2-b^2+c^2-2ac}{-a^2+b^2+c^2-2bc}$

۲۵) $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$

۲۶) $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

۲۷) $\frac{b^2c^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{c^2a^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{a^2b^2}{(c-a)(c-b)}$

۲۸) $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$

۲۹) $\frac{3x^2-4x+1}{x^3-3x^2+3x-1}-\frac{x+1}{x^2-2x+1}$

۳۰) $\dfrac{x^4+xy^3}{xy+y^2} : \dfrac{x^4-x^3y+x^2y^2}{x^2+xy}$

۳۱) $\dfrac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2} : \dfrac{x^3+y^3}{x^2+xy}$

۳۲) $\dfrac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\dfrac{x}{x^2+x\sqrt{2}+1}$

● هر یك از کسرهای زیر را به‌مجموع کسرهای ساده تجزیه کنید:

۳۳) $\dfrac{1}{x^2-x}$

۳۴) $\dfrac{2x}{(x+1)^2}$

۳۵) $\dfrac{x^3-x^2-x-3}{x^4-1}$

۳۶) $\dfrac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)}$

۳۷) $\dfrac{2x^6-x^5+8x^4-2x^3+8x^2+3}{x^5+2x^3+x}$

● تمرینها و مسئله‌های زیر را حل کنید:

۳۸) درستی استلزام زیر را ثابت کنید:

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y} \Longrightarrow \frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}=\frac{a^2+b^2}{x^2+y^2}$$

۳۹) ثابت کنید که از برابری $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ نتیجه می‌شود که:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$$

۴۰) ثابت کنید که اگر $\dfrac{1}{a+b}$ و $\dfrac{1}{a+c}$ و $\dfrac{1}{b+c}$ تصاعد حسابی تشکیل دهند، a^2 و b^2 و c^2 نیز تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند.

۴۱) هرگاه داشته باشیم:

$$\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{a+c-b}=\frac{z}{a+b-c}$$

ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$\frac{x+y}{y+z}+\frac{y+z}{z+x}+\frac{z+x}{x+y}=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$$

۴۲) به‌فرض $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ حاصل عبارت زیر را به‌ساده‌ترین صورت به‌دست‌آورید:

$$y=\frac{f(x^{2})-fff(x)}{f\left(\frac{1}{x^{2}}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)}$$

۴۳) هرگاه نسبت xyz بر $zx+xy$ و $xy+yz$ و $yz+zx$ به‌ترتیب برابر $\frac{a}{2}$ ، $\frac{b}{2}$ و $\frac{c}{2}$ باشد، حاصل $\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}$ را برحسب a و b و c به‌دست‌آورید.

۴۴) ثابت کنید که معادلهٔ

$$\frac{x^{4}+2ax^{3}+(a^{2}+1)x^{2}+2bx+b^{2}}{x^{4}+2ax^{3}+(a^{2}-1)x^{2}-2bx-b^{2}}=\frac{\alpha^{2}+\beta^{2}}{\alpha^{2}-\beta^{2}}$$

به‌معادلهٔ $\frac{x^{2}+ax}{x+b}=\pm\frac{\alpha}{\beta}$ تبدیل می‌شود:

۴۵) به‌فرض $f(x)=\frac{ax^{2}+bx+c}{cx^{2}+bx+a}$ حاصل $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)$ را به‌دست‌آورید.

۴۶) مقدار a را چنان پیابیدکه بتوان‌کسر زیر را ساده‌کرد و پس از تعیین a حاصل کسر را به‌ساده‌ترین صورت به‌دست‌آورید:

$$y=\frac{1+x+x^{2}+\ \dots\ +x^{4}}{a^{9}+a^{8}x+a^{7}x^{2}+\ \dots\ +x^{9}}$$

۴۷) هرگاه $f(x)=\log\frac{1-2x}{1+2x}$ باشد ثابت کنید‌که:

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+4xy}\right)$$

۴۸) حاصل عبارت زیر را به‌ساده‌ترین صورت به‌دست‌آورید:

$$y=\frac{x-x^{q}}{(1-x)(1-x^{q})}+\frac{x^{q}-x^{pq}}{(1-x^{q})(1-x^{pq})}$$

۴۹) حاصل $A-B$ با داده‌های زیر را به‌دست‌آورید:

$$A=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{2}+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)^{2}+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)^{2}$$

$$B=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)$$

۵۰) هرگاه داشته باشیم

$$\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}=0$$

ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$\frac{x^2}{(y-z)^2}+\frac{y^2}{(z-x)^2}+\frac{z^2}{(x-y)^2}=2$$

* ۷-۲۶. پرسشهای دستهٔ دوم

● کسرهای زیر را ساده کنید:

۵۱) $\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}$

۵۲) $\dfrac{2x^2-y^2-xy-4x+4y}{6x^2-y^2+xy-16x+2y+8}$

۵۳) $\dfrac{(a^2-b^2c-d)\sqrt{d}-2bd\sqrt{c}}{a^2-b^2c+d+2a\sqrt{d}}$

۵۴) $\dfrac{x^2-xy^2-2y^4-xz-2z^2+5y^2z}{x^2-3xy^2+2y^4+y^2z-z^2}$

۵۵) $\dfrac{x^4-87x^2+1681}{(x+5)(x+6)(x+7)(x+8)+1}$

۵۶) $\dfrac{4x^3-8x^2-x+2}{4x^4-20x^3+33x^2-20x+4}$

۵۷) $\dfrac{(a^3+b^3)(a+b)^3+2a^3b^3}{(a^2+b^2)(a+b)^2+a^2b^2}$

۵۸) $\dfrac{x^2-2bx-4a(a-2b)-3b^2}{x^2-4ax+4a^2-b^2}$

۵۹) $\dfrac{\sin\alpha-x\cos\alpha}{(1-x^2)\sin 2\alpha-2x\cos 2\alpha}$

۶۰) $\dfrac{(x+a)^2+(x+b)^2-(y+a)^2-(y+b)^2}{(x+a)(x+b)-(y+a)(y+b)}$

۶۱) $\dfrac{[a^2(x+1)+b^2(x-1)]^2-4a^2b^2x^2}{[a(x+1)]^2-[b(x-1)]^2}$

۶۲) $\dfrac{x^3(y-a)+y^3(a-x)+a^3(x-y)}{x(y^2-a^2)+y(a^2-x^2)+a(x^2-y^2)}$

● تمرینها و مسئله‌های زیر را حل کنید:

۶۳) به‌ازای چه مقادیر از m و n کسر زیر مستقل از x و y است:

$$\frac{(m-1)x^{2}-(m-n+2)xy+4ny^{2}}{2x^{2}+3xy+4y^{2}}$$

۶۴) اولاً عبارت زیر را به‌ساده‌ترین صورت تبدیل کنید:

$$f(x)=\frac{x^{3}+x^{2}-8x-12}{x^{3}-(1-\sqrt{3})x^{2}-(6+\sqrt{3})x-6\sqrt{3}}$$

ثانیاً مقدار $f\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ را حساب کنید.

۶۵) ثابت کنید که مجموع سه کسر زیر قرینهٔ حاصل‌ضرب آنها است:

$$\frac{a-b}{a+b}\ ،\quad \frac{b-c}{b+c}\ ،\quad \frac{c-a}{c+a}$$

۶۶) به فرض $x=\frac{a}{b+c}$ ، $y=\frac{b}{c+a}$ ، $z=\frac{c}{a+b}$

حاصل عبارت زیر را به‌ساده‌ترین صورت به‌دست‌آورید:

$$S=xy+yz+zx+2xyz$$

۶۷) ثابت کنید که:

$$\frac{1}{(x-y)^{2}}+\frac{1}{(y-z)^{2}}+\frac{1}{(z-x)^{2}}=\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}\right)^{2}$$

۶۸) اولاً کسر $\frac{1}{x(x+1)}$ را به‌مجموع دو کسر تجزیه کنید.

ثانیاً حاصل جمع زیر را به‌دست‌آورید:

$$S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$$

۶۹) مجموع زیر را حساب کنید:

$$S=\frac{1}{(1+x)(1+x^{2})}+\frac{x}{(1+x^{2})(1+x^{3})}+\dots+\frac{x^{n-2}}{(1+x^{n-1})(1+x^{n})}$$

۷۰) مجموع زیر را حساب کنید:

$$S=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^{2}+1}+\frac{4}{x^{4}+1}+\dots+\frac{2^{n}}{x^{2^{n}}+1}$$

۷۱) به‌فرض $ax+by+cz=0$ کسر زیر را ساده کنید:

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{ab(x-y)^2+bc(y-z)^2+ca(z-x)^2}$$

۷۲) به‌فرض‌آنکه x و y و z عددهای متمایـز و مخالف صفر باشند و در دو رابطهٔ زیر با فرض $a\neq 0$ صدق کنند:

$$(1)\quad xy-ax+a^2=0$$

$$(2)\quad yz-ay+a^2=0$$

نخست نتیجه بگیریدکه:

$$(3)\quad zx-az+a^2=0$$

$$(4)\quad xyz+a^3=0$$

آنگاه ثابت کنید که:

$$(5)\quad \frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=\frac{1}{a}$$

۷۳) از رابطه‌های زیر، رابطه‌ای مستقل از x و y و z بین a و b و c به‌دست‌آورید:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=a \quad ، \quad \frac{y}{z}+\frac{z}{y}=b \quad ، \quad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=c$$

۷۴) هرگاه داشته باشیم:

$$x^2+y^2=1 \quad \text{و} \quad \frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{1}{a+b}$$

حاصل عبارت $\frac{x^8}{a^3}+\frac{y^8}{b^3}$ را به‌دست‌آورید.

۷۵) هرگاه داشته باشیم:

$$x=by+cz+dt \quad ، \quad y=cz+dt+ax$$

$$z=dt+ax+by \quad ، \quad t=ax+by+cz$$

ثابت کنیدکه خواهیم داشت:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}=3$$

۷۶) هرگاه x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 ریشه‌های چندجمله‌ای

$$P(x)=x^4+ax^2+x+1$$

باشند، از رابطهٔ زیـر عبارت S را برحسب a به‌دست آورید وحوزهٔ تعریف آن را مشخص کنید:

$$S=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_3+1}+\frac{1}{x_4+1}$$

۷۷) حاصل y از عبارت زیر را به‌فرض $0 \leqslant x \leqslant \pi$ به‌ساده‌ترین صورت به‌دست‌آورید:

$$y=\frac{\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}}{\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}}$$

۷۸) عبارت زیر را به‌ساده‌ترین صورت تبدیل کنید:

$$f(x)=\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2+\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}\right)$$

۷۹) هرگاه a ، b ، c ، d و e از یکدیگر متمایز باشند و داشته باشیم:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=\frac{c}{d}+\frac{d}{c}=\frac{d}{e}+\frac{e}{d}=k$$

ثابت کنیدکه خواهیم داشت:

$$\frac{a}{e}+\frac{e}{a}=k^4-4k^2+2$$

۸۰) هرگاه داشته باشیم:

$$\begin{cases} p^3+ap+b=0 \\ q^3+aq+b=0 \\ r^3+ar+b=0 \end{cases}$$

ثابت کنیدکه خواهیم داشت:

$$\frac{1}{p^2+q^2-r^2}+\frac{1}{q^2+r^2-p^2}+\frac{1}{r^2+p^2-q^2}=0$$

۸۱) حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صـورت به‌دست آورید (مقصود از نماد $\sum$ آن است کـه عبارت مجموع کسرهایی است که از جابجایی دوری x ، y و z به‌دست می‌آیند):

$$f(x\,,\,y\,,\,z)=\sum\frac{(y+z)(y^2+z^2-x^2)}{yz}$$

۸۲) اولاً معلوم کنید چه‌شرط باید برقرار باشد برای‌آنکه‌کسر زیر را بتوان ساده‌کرد:

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$$

ثانیاً مقدار m را بیابید برای‌آنکه‌کسر زیر ساده شدنی باشد:

$$f(x)=\frac{x^{2}+mx+1}{x^{2}+x+m}$$

۸۳) حاصل عبارت زیر را به‌ساده‌ترین صورت به‌دست‌آورید:

$$f(x)=\frac{x^{3}-3x+(x^{2}-1)\sqrt{x^{2}-4}-2}{x^{3}-3x+(x^{2}-1)\sqrt{x^{2}-4}+2}\times\sqrt{\frac{x^{3}-3x+2}{x^{3}-3x-2}}$$

۸۴) به‌فرض:

$$A=\frac{4bc-a^{2}}{bc+2a^{2}}\quad ،\quad B=\frac{4ca-b^{2}}{ca+2b^{2}}\quad ،\quad C=\frac{4ab-c^{2}}{ab+2c^{2}}$$

ثابت کنیدکه اگر داشته باشیم $a+b+c=0$ خواهیم داشت:

$$A+B+C=3\ ,\ ABC=1$$

۸۵) اگر سه عدد متمایز و مخالف صفر a ، b و c در رابطهٔ

$$(a+b+c)^{2}=a^{2}+b^{2}+c^{2}$$

صدق کنند ثابت کنیدکه:

۱) $$\frac{a^{2}}{a^{2}+2bc}+\frac{b^{2}}{b^{2}+2ca}+\frac{c^{2}}{c^{2}+2ab}=1$$

۲) $$\frac{bc}{a^{2}+2bc}+\frac{ca}{b^{2}+2ca}+\frac{ab}{c^{2}+2ab}=1$$

۸۶) به‌فرض‌آنکه a ، b و c سه عدد حقیقی متمایز باشند، اولاً درستی همانی زیر را ثابت کنید:

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)$$

$$=\frac{a}{(b-c)^{2}}+\frac{b}{(c-a)^{2}}+\frac{c}{(a-b)^{2}}$$

ثانیاً هم‌ارزی زیر را ثابت‌کنید:

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{a}{(b-c)^{2}}+\frac{b}{(c-a)^{2}}+\frac{c}{(a-b)^{2}}=0$$

۸۷) به‌فرض آنکه a ، b و c عددهای حقیقی متمایز و غیرصفر باشند و به‌فرض $a+b+c=0$ ثابت کنیدکه:

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)=9$$

۸۸) هرگاه هر a_i و هر b_i مثبت باشد، استلزام زیر را ثابت کنید:

$$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}<\dots<\frac{a_n}{b_n} \Longrightarrow \frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{b_1+b_2+\dots+b_n}<\frac{a_n}{b_n}$$

۸۹) هرگاه x' و x'' ریشه‌های سه‌جمله‌ای ax^2+bx+c باشند، حاصل عبارت زیر را برحسب a ، b و c به‌دست‌آورید:

$$y=\frac{1}{(ax'+b)^2}+\frac{1}{(ax''+b)^2}$$

۹۰) به‌فرض آنکه α و β ریشه‌های سه‌جمله‌ای x^2+x-a^2 باشند، حاصل عبارت زیر را برحسب a به‌دست آورید:

$$y=\frac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha^2+\alpha+1}+\frac{\beta^2-\beta+1}{\beta^2+\beta+1}$$

۹۱) ثابت کنیدکه اگر x ، y و z در رابطهٔ $x+y+z=xyz$ صدق کنند، رابطه زیر بین آنها برقرار خواهد بود:

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

۷-۲۷. پرسشهای چهارجوابی یك انتخابی

۹۲) **پرسش نمونه.** به‌فرض‌آنکه a ، b و c عددهای حقیقی مخالف صفر باشند و رابطهٔ

$$(1)\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

برقرار باشد. دراین صورت رابطهٔ

$$(2)\quad \frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}$$

کدام حالت زیر را خواهد داشت:

الف- به‌ازای هرمقدار از n برقرار است.

ب- به‌ازای هیچ مقدار از n برقرار نیست.

ج- فقط وقتی برقرار است که n زوج باشد.

د- فقط وقتی برقرار است که n فرد باشد.

حل. فرض می‌کنیم $S=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}$ و بنا به‌مسئلهٔ نمونهٔ

(۷-۱۶) داریم:

$$S=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc(a+b+c)}$$

$$S=\circ \iff a=-b \text{ یا } b=-c \text{ یا } c=-a \qquad (۳)$$

به‌روش مشابه ثابت می‌شود که رابطهٔ (۲) هم‌ارز است با:

$$\frac{(a^n+b^n)(b^n+c^n)(c^n+a^n)}{a^nb^nc^n(a^n+b^n+c^n)}=\circ$$

$$\iff a^n=-b^n \text{ یا } b^n=-c^n \text{ یا } c^n=-a^n$$

اما رابطهٔ اخیر فقط وقتی از (۳) نتیجه خواهد شدکه n فرد باشد. پس جواب «د» باید انتخاب شود

۹۳) حاصل E از عبارت زیر باکدام مقدار داده شده برابر خواهد بود:

$$E=\frac{۴a^۲-۱}{(a-b)(a-c)}+\frac{۴b^۲-۱}{(b-c)(b-a)}+\frac{۴c^۲-۱}{(c-a)(c-b)}$$

الف- -۴ ب- $۴abc$

ج- ۴ د- $-۴abc$

۹۴) به‌فرض $x=(a-۱)^{-۱}$ و به‌شرط $a\neq ۱$ حاصل عبارت

$$\frac{۱+(a+x)^{-۱}}{۱-(a+x)^{-۱}}\times\left[۱-\frac{۱-(a^۲+x^۲)}{۲ax}\right]$$

کدام مقدار زیر است:

الف- $\frac{a^۳}{۲(a-۱)}$ ب- $\frac{۲a^۳}{a-۱}$

ج- $\frac{۲a^۵}{(a-۱)^۳}$ د- $\frac{a}{۲(a-۱)}$

۹۵) به‌فرض

$$A=(۳x-۷)(x+۲)$$

$$B=(۲x+۵)(۳x^۲-۱۴)-۲x^۲-۵x$$

$$C=\frac{Ax}{B} \quad ، \quad D=\frac{۷C-۱}{۲C-۱}$$

حاصل عبارت D به‌ازای $x=(a+۱)^۲$ کدام مقدار زیر است:

الف- $a^۲+۲a$ ب- $a^۲+۲a+۲$

ج- $-a^۲-۲a$ د- $a^۲$

۹۶) کسر $\frac{x^۲+۳x-۴}{x^۲+ax+a-۱}$ به‌ازای کدام مقادیر a فقط یك ریشه دارد:

الف- هیچ مقدار از a ب- $a=0$ یا $a=5$

ج- $a\neq 0$ و $a\neq 5$ د- $a=2$

۹۷) به‌فرض $x^3-3x^2+3x-6=0$ حاصل کسر $\frac{x^3-3x^2}{x-2}$ کدام عدد زیراست:

الف- ۳   ب- $1+\sqrt[3]{5}$

ج- -3 د- $1-\sqrt[3]{5}$

۹۸) اگر برابری زیر نسبت به x یك همانی باشد

$$\frac{4ax}{x^2-a^2-2x+1}=\frac{x^2-a^2+2x+1}{x^2+a^2+2ax-1}\bigcirc\frac{x^2-a^2+2x+1}{x^2+a^2-2ax-1}$$

نماد $\bigcirc$ جانشین کدام یك از نشانه‌های زیر است:

الف- $+$ ب- $-$

ج- $\times$ د- $:$

۹۹) اگر R مجموعهٔ عددهای حقیقی مجموعهٔ مرجع باشد، حوزهٔ تعریف عبارت

$$\frac{x-x^q}{(1-x)(1-x^q)}+\frac{x^q-x^{pq}}{(1-x^q)(1-x^{pq})}$$

به‌شرط آنکه p و q عددهای طبیعی باشند در کدام حالت زیر برابر با $R-\{-1,1\}$ است:

الف- pq زوج باشد   ب- pq فرد باشد

ج- pq عدد طبیعی دلخواه باشد.   د- $pq=1$

۱۰۰) در تجزیهٔ کسر $\frac{x^3+7x^2-x+5}{x^4-1}$ به $\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{c}{x+1}+\frac{d}{x-1}$

ضریبهای نامعین برابر خواهند شد با:

الف- $d=-3$ ، $c=3$ ، $b=1$ ، $a=1$

ب- $d=3$ ، $c=-3$ ، $b=1$ ، $a=1$

ج- $d=-3$ ، $c=3$ ، $b=-1$ ، $a=1$

د- $d=3$ ، $c=-3$ ، $b=1$ ، $a=-1$

۸

خودآزمایی

(پرسشهای چهارجوابی یک‌انتخابی)

۸-۱. پرسشهای دستهٔ اول

۱) هرگاه x متغیر مثبت باشد، درحالتی‌که $x+\frac{1}{x}$ کمترین مقدارخود را دارد، $x-\frac{1}{x}$ باکدام مقدار زیر برابر است:

الف- ۲ ب- ۰

ج- ۱ د- $\frac{1}{۲}$

۲) حاصل عبارت $\frac{ab^{-۲}(a^{-۱}b^{۲})^{۴}(ab^{-۱})^{۲}}{a^{-۲}b(a^{۲}b^{-۱})^{۳}a^{-۱}b}$ کدام عبارت زیر است:

الف- $a^{-۴}b^{۵}$ ب- $a^{۴}b^{-۵}$

ج- $a^{۵}b^{-۴}$ د- $a^{-۵}b^{۴}$

۳) فرض می‌کنیم: $A=x^{۳}-y^{۳}+۳xy(۲x+y)$
و $B=y^{۳}-x^{۳}+۳yx(۲y+x)$ وگزاره‌های زیر را بیان می‌کنیم:

(۱) $A+B$ نسبت به x و y یک چندجمله‌ای متقارن است.

(۲) $A+B$ نسبت به x و y یک چندجمله‌ای همگن است.

(۳) $A+B$ بر $x+y$ بخش‌پذیراست.

(۴) $A-B$ بر $x-y$ بخش‌پذیراست.

ازگزاره‌های بالاکدامها نادرست هستند:

الف- هیچکدام ب- هرچهارگزاره

ج- فقط (۴) د- فقط (۲)

۴) درمجموعهٔ عددهای حقیقی یعنی R، حوزهٔ تعریف عبارت $x\sqrt{x-a}+a\sqrt{a-x}$ کدام است:

الف- R ب- $R-\{a\}$

ج- $\{a\}$ د- $\varnothing$

۵) عبارت زیر پس از ساده شدن باکدام عبارت داده شده برابر خواهد شد:

$$\frac{۲x+۳}{۲x+۱}-\frac{۲x+۵}{۲x+۷}-\left(۱-\frac{۶x^۲+۹x-۹}{۴x^۲+۱۶x+۷}\right)$$

الف- $\frac{x+۱}{۲x+۱}$ ب- $\frac{x^۲}{(۲x+۱)(۲x+۷)}$

ج- $\frac{x}{۲x+۷}$ د- ۰

۶) حاصل عبارت $|x+۱|+|x-۱|-۲|x|-۱$ درکدام حالت زیربرابربا $۱-$ است:

الف- فقط $x \geqslant ۱$ ب- فقط $x \leqslant -۱$

ج- $-۱ \leqslant x \leqslant ۱$ د- $x \geqslant ۱$ یا $x \leqslant -۱$

۷) حاصل عبارت زیر برابر باکدام عدد داده شده است:

$$\log ۲+\log(۲+\sqrt{۲})+\log\left(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}\right)+\log\left(۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲}}\right)$$

الف- $\log ۲$ ب- ۱

ج- ۰ د- $\log ۴$

۸) به‌فرض $f(x)=۲x^۲-۱$ مقدار $f\left[f\left(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}\right)\right]$ برابراست با:

الف- $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۴}$ ب- $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$

ج- $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۴}$ د- $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۴}$

۹) حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}+۴\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ برابر می‌شود با:

الف- $۵-\sqrt{۶}$ ب- $۵-۴\sqrt{۶}$

ج- $۲\sqrt{۶}$ د- ۵

۱۰) مقدار عبارت $\frac{۳x-x^۳}{۱+x^۲}$ به‌ازای $x=۱-\sqrt{۲}$ برابر است با:

الف- ۱-　　　　ب- ۱

ج- $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$　　　　د- $\frac{۲-۲\sqrt{۲}}{۴}$

۱۱) استلزام $a^n=b^n \implies a<b$ در کدام حالت زیر برقرار است:

الف- a منفی، b مثبت، n فرد باشد.

ب- قدرمطلقهای a و b با هم برابر و n عدد طبیعی دلخواه باشد.

ج- $a+b=۰$ و $a<۰$ و n فرد باشد.

د- $a+b=۰$ و $a<۰$ و n زوج باشد.

۱۲) اگر m و n عددهای طبیعی باشند، به‌فرض $m>n$ و $۰<x<۱$ کدام رابطهٔ زیر نادرست است:

الف- $\sqrt[m]{x}<\sqrt[n]{x}$　　　　ب- $x^m<x^n$

ج- $\sqrt[n]{x^m}<\sqrt[m]{x^n}$　　　　د- $\sqrt{x^m}<\sqrt{x^n}$

۱۳) به‌فرض $f(x-۱)=x^۳-۳x^۲+۶x-۸$ عبارت $f(x)$ کدام است:

الف- $x^۳-۶x^۲+۱۵x-۱۸$

ب- $x^۲+۳x-۴$

ج- $(x-۱)^۳-۳(x-۱)^۲+۶(x-۱)-۸$

د- $x^۳+۱۵x-۴$

۱۴) هرگاه چندجمله‌ای $P(x)$ ازدرجهٔ p وچندجمله‌ای $Q(x)$ از درجهٔ q باشد، به‌فرض $p>q$ کدام گزارهٔ زیر درست است:

الف- درجهٔ چندجمله‌ای $P(x)+Q(x)$ برابر است با $p+q$

ب- درجهٔ چندجمله‌ای $P(x)Q(x)$ برابر است با pq

ج- درجهٔ چندجمله‌ای $P(x)Q(x)$ برابر است با $p+q$

د- درجهٔ چندجمله‌ای $P(x)-Q(x)$ برابر است با $p-q$

۱۵) هرگاه داشته باشیم:

$$\frac{۱}{(x+۱)\sqrt{x}+x\sqrt{x+۱}}=\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{b}{\sqrt{x+۱}}$$

مقادیر a و b برابرند با:

الف- $b=۱$ و $a=۱$　　　　ب- $b=-۱$ و $a=۱$

ج- $b=-۲$ و $a=۲$　　　　د- $b=-۱$ و $a=۲$

۱۶) اگر n عدد طبیعی باشد، عبارت $x^{3n}-y^{2n}$ برکدام یک از عبارتهای زیر همواره بخش‌پذیر است:

الف- $x-y$ ب- x^n-y^n

ج- x^3-y^2 د- x^2-y^3

۱۷) هرگاه سه‌جمله‌ای x^2+px-1 بر $x-\alpha$ و همچنین بر $x-\beta$ بخش‌پذیر باشد حاصل عبارت $4\alpha\beta+(\alpha-\beta)^2$ باکدام مقدار زیر برابر است:

الف- ۴ ب- ۴−

ج- p^2 د- $-p^2$

۱۸) به‌فرض $a+b=c$ کدام نابرابری زیر همواره برقرار است:

الف- $ab\leqslant bc+ca$ ب- $ab\geqslant bc+ca$

ج- $\frac{ab}{a+b}\leqslant c$ د- $\frac{ab}{a+b}\geqslant c$

۱۹) به‌ازای کدام مقادیر a خواهیم داشت:

$$\log a^n>\log a \implies n>1$$

الف- هرمقدار از a ب- هرمقدار مثبت از a

ج- $a>1$ د- $0<a<1$

۲۰) از نابرابریهای $a+b<c$ و $a-b>-c$ کدام نابرابری زیر نتیجه می‌شود:

الف- $a<c$ ب- $a>-c$

ج- $b>-c$ د- $b<c$

۲۱) در تجزیهٔ کسر $\frac{2}{(x-1)(x^2+1)}$ از سه گزارهٔ:

(۱) کسری با مخرج $x-1$ و با صورت یك وجود خواهد داشت.

(۲) همانی $2\equiv A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$ مطرح می‌شود:

(۳) کسری با مخرج x^2+1 و با صورت $-x+1$ وجود خواهد داشت.

کدامها درست است:

الف- هرسه ب- (۱) و (۲)

ج- (۲) و (۳) د- فقط (۲)

۲۲) هرگاه دربارهٔ کسر $f(x)$ اطلاعات زیر داده شده باشد:

(۱) $f(x)$ کسری است که درجهٔ صورت آن از درجهٔ مخرجش کوچکتر است.

$$f(0)=1 \qquad (۲)$$

$$f(x)=\frac{A}{(x-1)^2(x+1)} \qquad (۳)$$

برای آنکه بتوان کسر $f(x)$ را به کسرهایی مشخص تجزیه کرد، از اطلاعات سه گانهٔ بالا کدامها لازم و کافی است:

الف- هرسه ب- فقط (۱)

ج- (۲) و (۳) د- فقط (۳)

۲۳) چندجمله‌ای x^3-3x^2+6x-2 بر کدام‌یك از دوجمله‌ایهای زیر که تقسیم شود باقیماندهٔ تقسیم برابر با ۲ خواهد بود:

الف- $x+1$ ب- $x-2$

ج- $2x-1$ د- $x-1$

۲۴) به‌فرض $f(x)=(3-5x)^4$ از گزاره‌های زیر کدام نادرست است:

(۱) باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ برابر با ۱۶ است

(۲) بسط $f(x)$ شامل ۴ جمله است

(۳) ضریب x دربسط $f(x)$ برابر با ۶۰- است.

الف- هیچکدام ب- (۲) و (۳)

ج- فقط (۲) د- هرسه

۲۵) به‌فرض $x+y=2a$ نابرابری $xy>a^2$ کدام وضع زیررا دارد:

الف- به‌ازای هرمقدار از x و y برقرار است.

ب- به‌ازای هیچ مقدار از x و y برقرار نیست.

ج- وقتی برقرار است‌که x و y هردو مثبت باشند

د- فقط درحالت $x\neq y$ برقرار است.

۲۶) کسر $\frac{3x^2+(p-1)x-3p}{(x^2-1)^2}$ وقتی تحویل‌پذیر است‌که:

الف- فقط $p=1$ ب- $p=\pm 1$

ج- $p=\pm\frac{1}{2}$ د- فقط $p=\frac{1}{2}$

۲۷) به‌فرض $a>0$ و $S=2a+\frac{1}{2a}$ کدام نابرابری زیرهمواره برقرار است:

الف- $S\geqslant 2$ ب- $S\geqslant 4$

ج- $S\leqslant 2$ د- $S\leqslant 4$

۲۸) حاصل عبارت $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$ کدام عدد زیراست:

الف- ۱ ب- ۴

ج- $2\sqrt{3}$ د- $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۹) عبارت $x(2x^2-xy-y^2)+y(x-y)(x+2y)$ برکدام عبارت زیرهمواره بخش‌پذیر است:

الف- x^2-xy+y^2 ب- $x+y$

ج- x^2+xy+y^2 د- x^2-y^2

۳۰) به‌فرض $a<0$ و $b>0$ از نابرابری $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>0$ کدام نابرابری زیر نتیجه می‌شود:

الف- $a+b<0$ ب- $a^2<b^2$

ج- $|a|<|b|$ د- $a+b>0$

۳۱) به‌فرض $x>0$ و $y>0$ و $xy=2$ کدام نابرابری زیرهمواره برقراراست:

الف- $x+y\leqslant 2\sqrt{2}$ ب- $x+y\leqslant 4$

ج- $x+y\geqslant 4$ د- $x+y\geqslant 2\sqrt{2}$

۳۲) دربارهٔ عبارت $f(x)=\sqrt{x^2y}-\sqrt{y^3}-\sqrt{x^3-2x^2y+xy^2}$ گزاره‌های زیربیان شده‌اند:

(۱) عبارت $f(x)$ در مجموعهٔ عددهای حقیقی وقتی معین است‌که $x\geqslant 0$ و $y\geqslant 0$

(۲) به‌ازای هرمقدار مثبت از x و y حاصل عبارت $f(x)$ برابراست با $(x-y)(\sqrt{y}-\sqrt{x})$

(۳) عبارت $f(x)$ وقتی با $(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ برابراست‌که $x\geqslant y\geqslant 0$

ازگزاره‌های بالاکدامها درست هستند.

الف- (۱) و (۲) ب- (۱) و (۳)

ج- (۲) و (۳) د- فقط (۱)

۳۳) حاصلضرب $\sqrt{x-1}\times\sqrt{x+1}$ چه موقع با $\sqrt{x^2-1}$ برابر است:

الف- به‌ازای هرمقدار از x

ب- به‌ازای $x \geqslant ۱$ یا $x \leqslant -۱$

ج- به‌ازای $-۱ \leqslant x \leqslant ۱$

د- به‌ازای $x \geqslant ۱$

۳۴) حاصل کسر $\frac{(x+y)^۴-(x+y)^۲}{(x+y)^۴+(x+y)^۳}$ برابر است با:

الف- $x+y-۱$ ب- $\frac{x+y+۱}{x+y}$

ج- $۱-\frac{۱}{x+y}$ د- $\frac{۱}{x+y}$

۳۵) از رابطه‌های:

$$\frac{۳xy}{x+y}=۴ \quad ، \quad \frac{۴yz}{y+z}=۵ \quad ، \quad \frac{۵zx}{z+x}=۳$$

مقدار $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}$ برابر با کدام مقدار زیر به‌دست می‌آید:

الف- $\frac{۱۹۳}{۱۲۰}$ ب- $\frac{۱۹۳}{۶۰}$

ج- $\frac{۱۹۱}{۱۲۰}$ د- $\frac{۱۹۱}{۶۰}$

۳۶) حاصل عبارت زیر کدام مقدار داده شده است:

$$\frac{a^{\frac{۲}{۳}}\sqrt{b^{-۱}}}{b\sqrt[۳]{a^{-۲}}} : \sqrt{\frac{a\sqrt{b^{-۴}}}{b\sqrt{a^{-۲}}}}$$

الف- $\sqrt[۳]{a}$ ب- $\frac{a^۳}{b^۳}$

ج- b د- $a^۲b$

۳۷) از دورابطهٔ $x+y=۱۰$ و $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{۱۳}{۶}$ کدام رابطهٔ زیربه‌دست می‌آید:

الف- $xy=۲۴$ ب- $xy=۲/۴$

ج- $xy=۶۰۰$ د- $xy=۶۰$

۳۸) اگرداشته باشیم:

$$x^۲+y^۲+z^۲=۳۵ \quad و \quad xy+yz+zx=-۱۷$$

برای $x+y+z$ کدام مقدار زیر نتیجه می‌شود:

الف- $\pm ۳\sqrt{۲}$ ب- $\pm ۲\sqrt{۱۳}$

ج- ± ۱ د- $\pm\sqrt{۶۹}$

۳۹) هرگاه اطلاعات زیر دراختیار باشد:

(۱) عبارت $f(x)$ یك چندجمله‌ای درجهٔ اول است.

(۲) $f(۰)=۱$

(۳) $f(۱)=۲$

برای تعیین مقدار $f(۲)$ از کدام‌یك از اطلاعات بالا می‌توان صرف‌نظر کرد:

الف- (۱) و (۲)   ب- (۱)

ج- (۲) یا (۳)   د- هیچکدام

۴۰) برابری $(x+a)^۲-۲=x^۲-(x-b)^۲$ به‌ازای چه مقدارهایی از a و b نسبت به x یك همانی است:

الف- هرمقدار از a و b   ب- هیچ مقدار از a و b

ج- $a=b=\pm ۱$ د- $a=b=\pm\sqrt{۲}$

۴۱) کسر $\dfrac{x^۳}{(x+۱)(x-۳)}$ به‌کدام صورت زیر تجزیه می‌شود:

الف- $x+۲+\dfrac{۱}{x+۱}+\dfrac{۹}{x-۳}$

ب- $x-۲+\dfrac{۱}{۴(x+۱)}+\dfrac{۹}{۴(x-۳)}$

ج- $x-۲-\dfrac{۱}{۴(x+۱)}+\dfrac{۲۷}{۴(x-۳)}$

د- $x+۲+\dfrac{۱}{۴(x+۱)}+\dfrac{۲۷}{۴(x-۳)}$

۴۲) به‌فرض $f(x,y)=x^۲+y^۲-۲x+۴y+۹$ ازگزاره‌های زیرکدامهادرست هستند:

(۱) عبارت $f(x,y)$ فقط به‌ازای $x=۱$ و $y=-۲$ صفرمی‌شود.

(۲) عبارت $f(x,y)$ به‌ازای $x=۱$ و $y=-۲$ مینیمم است.

(۳) مقدار مینیمم عبارت $f(x,y)$ برابر با ۴ است.

(۴) عبارت $f(x,y)$ هیچگاه صفرنمی‌شود.

الف- (۱) و (۲) و (۳)   ب- فقط (۱)

ج- فقط (۴)   د- (۲) و (۳) و (۴)

۴۳) مقدار مینیمم عبارت $f(x)=(x^۲-۹)^۲+(x-۳)^۲+۲$ کدام است:

الفـ ۳ ب‍ـ ± ۳

ج‍ـ ۲ دـ -۲

۴۴) به‌فرض $f(x)=\frac{x-۱}{x+۱}$ عبارت $f\left(\frac{۱}{x}\right)$ را در کدام حالت زیر می‌توان به‌دست آورد:

الفـ هرچه باشد x ب‍ـ $x\neq -۱$

ج‍ـ $x\neq ۰$ دـ $x\neq -۱$ و $x\neq ۰$

۴۵) برای تجزیهٔ کسر $\frac{۳x^۲+۲x+۳}{(x^۲-۱)^۲}$ آن را باکدام مجموع زیر باید برابرقراردهیم:

الفـ $\frac{A}{x^۲-۱}+\frac{B}{(x^۲-۱)^۲}$

ب‍ـ $\frac{A}{x+۱}+\frac{B}{x-۱}+\frac{C}{(x+۱)^۲}+\frac{D}{(x-۱)^۲}$

ج‍ـ $\frac{A}{x+۱}+\frac{B}{x-۱}+\frac{C}{x^۲-۱}$

دـ $\frac{A}{(x+۱)^۲}+\frac{B}{(x-۱)^۲}$

۴۶) حاصل تجزیهٔ کسر $\frac{۳x^۲+۲x+۳}{(x^۲-۱)^۲}$ کدام عبارت زیر است:

الفـ $\frac{۱}{(x+۱)^۲}+\frac{۱}{(x-۱)^۲}$

ب‍ـ $\frac{۲}{(x+۱)^۲}+\frac{۱}{(x-۱)^۲}$

ج‍ـ $\frac{۱}{(x+۱)^۲}+\frac{۲}{(x-۱)^۲}$

دـ $\frac{۱}{(x+۱)^۲}-\frac{۱}{(x-۱)^۲}$

۴۷) به‌فرض $f(x, y)=(x+y)^۶-(x^۶+y^۶)$، از گزاره‌های:

(۱) چندجمله‌ای $f(x, y)$ دارای ۵ جمله است.

(۲) چندجمله‌ای $f(x, y)$ نسبت به x و y از درجهٔ پنجم است.

(۳) چندجمله‌ای $f(x, y)$ را می‌توان برحسب $s=x+y$ و $p=xy$ مرتب کرد

کدام نادرست است:

الف- فقط (۲) ب- فقط (۱)

ج- (۱) و (۲) د- (۱) و (۴)

۴۸) کوچکترین مضرب مشترک عبارتهای $x^۴-y^۴$ ، $x^۶-y^۶$ و $(x^۲-y^۲)^۲$ به‌چهار صورت:

(۱) $(x^۲-y^۲)^۲(x^۶-y^۶)(x^۴-y^۴)$

(۲) $(x^۲-y^۲)^۲(x^۲+y^۲)(x^۴+x^۲y^۲+y^۴)$

(۳) $(x^۲-y^۲)(x^۲+y^۲)(x^۶-y^۶)$

(۴) $(x^۴-y^۴)(x^۶-y^۶)$

نموده شده است. ازاین چهارصورت کدامها درست هستند:

الف- فقط (۱) ب- فقط (۲)

ج- (۲) و (۳) و (۴) د- فقط (۴)

۴۹) عبارت $f(x, y)=x^۲+y^۲-۱-۲(x+۱)(y-۱)$

به کدام صورت زیر تبدیل می‌شود:

الف- $(x-y+۱)^۲$ ب- $(x+y-۱)^۲$

ج- $(x-y+۱)^۲+۱$ د- $(x+y-۱)^۲-۲$

۵۰) به‌ازای چه مقدار از k برابری زیر نسبت به x یك اتحاد است:

$$(x+۴)^۲-(x+۵)(x+۳)=k$$

الف- $k=۰$ ب- $k=۱$

ج- $k=-۱$ د- $k=۲$

۵۱) به‌فرض $f(x)=۳x+۱$ و $g(x)=۵x+k$ برای k چند مقدار وجود خواهد داشت تا $f[g(x)]$ همان $g[f(x)]$ باشد:

الف- فقط یك مقدار ب- حداکثر دو مقدار

ج- مقدارهایی به‌تعدادنامحدود د- هیچ مقدار

۵۲) دربارهٔ چندجمله‌ای $f(x)=ax^۲+(a+b)x+b$ گزاره‌هایی که در زیر بیان شده است کدامها درست هستند:

(۱) چندجمله‌ای $f(x)$ به‌ازای هرمقدار از a و b بر $x+۱$ بخش‌پذیراست.

(۲) برای‌آنکه $f(x)$ بر $(x+۱)^۲$ بخش‌پذیر باشد لازم‌وکافی است که $b=a$

(۳) برای‌آنکه $f(x)$ بر $x-\alpha$ بخش‌پذیر باشد لازم و کافی است که $a\alpha+b=۰$

الف- هیچکدام ب- هر سه

ج- (۱) و (۲) د- (۱) و (۳)

۵۳) ریشگی مرکب $\sqrt{۱۷+۱۲\sqrt{۲}}$ به کدام مقدار زیرتبدیل می‌شود:

الف- $۴\sqrt{۲}+۱$ ب- $۳\sqrt{۲}+۲$

ج- $۳+۲\sqrt{۲}$ د- $۳\sqrt{۲}+۱$

۵۴) برابری $\sqrt[۶]{(a+۱)^{۲}}=\sqrt[۳]{a+۱}$ درکدام حالت زیربرقرار است:

الف- هرچه باشد عدد حقیقی a ب- $a\geqslant -۱$

ج- $a\leqslant -۱$ د- فقط $a=-۱$

۵۵) از رابطه‌های زیرکدام‌یك نادرست است:

الف- $\sqrt[۳]{(-۵)^{۴}}=-۵\sqrt[۳]{-۵}$

ب- $\sqrt[۴]{(-۳)^{۶}}=\sqrt{(-۳)^{۳}}=-۳\sqrt{-۳}$

ج- $\sqrt[۳]{(-۲)^{۵}}=-۲\sqrt[۳]{۴}$

د- $\sqrt[۳]{-۸۱}=-۳\sqrt[۳]{۳}$

۵۶) به‌فرض $x=۲\sqrt{۲}-۳$ و $y=\sqrt{(۲\sqrt{۲}-۳)^{۲}}$ کدام رابطهٔ زیرصحیح است:

الف- $x=y$ ب- $x^{۲}=y$

ج- $x+y=۰$ د- $x>y$

۵۷) به‌فرض $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ و $c\neq ۰$ و با معلومات $f(۰)=-۴$ و $f(۲)=۸$ و $f(-۲)=۰$، کدام حکم زیرصحیح است:

الف- عبارت $f(x)$ با معلومات بالا کاملاً مشخص می‌شود.

ب- برای مشخص‌کردن $f(x)$ یك معلوم دیگرباید داده شده باشد.

ج- با معلومات بالا عبارت $f(x)$ برحسب یك پارامترمشخص می‌شود.

د- با معلومات بالا هرچهار ضریب a، b، c و d کاملاً مشخص‌می‌شوند.

۵۸) هرگاه داشته باشیم:

$$f(x)=\frac{x-۱}{x+۱} \quad \text{و} \quad f[g(x)]=\frac{۱-x^{۲}}{۱+x^{۲}}$$

عبارت $g(x)$ کدام است:

الف- $x^{۲}$ ب- $-x^{۲}$

ج- $-\dfrac{۱}{x^{۲}}$ د- $\dfrac{۱}{x^{۲}}$

۵۹) از سه رابطهٔ: $\frac{y}{x}=m$ و $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ و $x+y=a$

می‌توان رابطه‌ای مستقل از x و y بین a و m به‌دست‌آورد. این رابطه کدام وضع زیر را دارد:

الف- نسبت به m از درجهٔ دوم است.

ب- نسبت به a و m خطی است، یعنی نسبت به‌هرکدام از درجهٔ اول‌است.

ج- نسبت به a از درجهٔ دوم است.

د- نسبت به‌هردو متغیر a و m از درجهٔ دوم است.

۶۰) ترکیب خطی چندجمله‌ایهای $ax+b$، $-ax+b$، $ax-b$ و $-ax-b$ با ضریبهای به‌ترتیب a، b، $-a$ و $-b$ برابر می‌شود با:

الف- a^2+b^2 ب- $2(a^2+b^2)x$

ج- $2abx$ د- $2ab+2b^2$

✲ ۸-۲. پرسشهای دستهٔ دوم

۶۱) به‌فرض $f(x)=(3x-1)^5$ ازگزاره‌های زیرکدامها نادرست هستند:

(۱) مجموع ضریبهای چندجمله‌ای حاصل ازبسط $f(x)$ برابربا ۳۲ است.

(۲) ضریب x^4 دربسط $f(x)$ برابر با ۴۰۵ است.

(۳) باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $9x^2-1$ برابر با $48x-16$ است.

الف- هیچکدام ب- (۲) و (۳)

ج- فقط (۲) د- فقط (۳)

۶۲) اگر x و y دو متغیر مثبت و $xy=a$ باشد، برای $s=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$ کدام حالت **زیر** برقرار است:

الف- s دارای ماکسیممی برابر با $\frac{2}{a}$ است.

ب- s دارای مینیممی برابربا $\frac{2}{a}$ است.

ج- ماکسیمم s برابربا $2a$ است

د- مینیمم s برابربا $2a$ است.

۶۳) به‌فرض $a>x^n>b$ و $f(x)=(a-x^n)(x^n-b)$

کدام نابرابری زیرهمواره برقرار است:

الف- $f(x)\geqslant\frac{(a-b)^۲}{۴}$ ب- $f(x)\leqslant\frac{(a-b)^۲}{۲}$

ج- $f(x)\geqslant\frac{(a-b)^۲}{۲}$ د- $f(x)\leqslant\frac{(a-b)^۲}{۴}$

۶۴) دربارهٔ عبارت $f(x)=\frac{x^۲+۳x+۲}{۲x^۳+۵x^۲+x-۲}$ ازگزاره‌های زیرکدامها درست هستند:

(۱) کسر $f(x)$ دارای دو ریشهٔ ۱ــ و ۲ــ است.

(۲) حوزهٔ تعریف $f(x)$ برابراست با: $R-\left\{-۲،-۱،\frac{۱}{۲}\right\}$

(۳) کسر $f(x)$ به‌ازای هیچ مقدار از x صفر نمی‌شود.

الف- (۱) و (۲) ب- (۲) و (۳)

ج- فقط (۲) د- فقط (۱)

۶۵) هرگاه $f(x)=x^۲+۲x-۴$ بر $(x-\alpha)(x-\beta)$ بخش‌پذیرباشد، مقدارعبارت $\frac{\alpha^۵-\beta^۵}{\alpha^۲-\beta^۲}$ برابرخواهد بود با:

الف- ۴۰ــ ب- ۲۴

ج- ۸ د- ۸ــ

۶۶) به‌فرض $f(x)=ax+b$ و $g(x)=x^۲+ax+b$ عبارت

$$[(a+\sqrt{a})x+b][(a-\sqrt{a})x+b]$$

باکدام عبارت زیربرابراست:

الف- $f[g(x)]$ ب- $f[g(x)]+g[f(x)]$

ج- $g[f(x)]$ د- $g[f(x)]-f[g(x)]$

۶۷) حاصل عبارت $f(x)=\frac{۳x-۱۲x^۳}{\sqrt{۱-(۳x-۴x^۳)^۲}}$ درکدام حالت زیر برابر با $\frac{-۳x}{\sqrt{۱-x^۲}}$ است.

الف- $-\frac{۱}{۲}<x<\frac{۱}{۲}$ ب- $۰\leqslant x<\frac{۱}{۲}$

ج- $-\frac{۱}{۲}<x\leqslant ۰$ د- $۱<|x|<\frac{۱}{۲}$

۶۸) به‌ازای چه مقدارهای حقیقی از m، کسر $\frac{x^۲-۳x+m}{x^۲+۲mx-۵}$ تحویل‌پذیر است:

الف- فقط $m=۲$ ب- $m=۲$ یا $m=\frac{-۱۵\pm\sqrt{۶۵}}{۸}$

ج- فقط $m=\frac{-۱۵\pm\sqrt{۶۵}}{۸}$ د- $m=\frac{\pm\sqrt{۳۰}}{۲}$

۶۹) عبارت $x^۲(y^۲+z^۲)^۲-y^۲(x^۲+z^۲)^۲-(x+y)^۲(xy-z^۲)^۲$

به کدام صورت زیر تجزیه می‌شود:

الف- $۲x(x-y)(xy-z^۲)(x^۲-z^۲)$

ب- $۲y(x-y)(xy+z^۲)(z^۲-x^۲)$

ج- $۲y(x+y)(xy-z^۲)(z^۲-x^۲)$

د- $۲x(x+y)(xy+z^۲)(x^۲-z^۲)$

۷۰) به‌فرض‌آنکه اندازه‌های ضلعهای مثلثی عبارت باشند از:

$a=x(y^۲+z^۲)$ ، $b=y(z^۲+x^۲)$ ، $c=(x+y)(xy-z^۲)$

مساحت این مثلث باکدام عبارت زیربرابرخواهد بود:

الف- $xyz(x+y)(xy-z^۲)$

ب- $x^۲y^۲z^۲(x+y)^۲(xy-z^۲)^۲$

ج- $\sqrt{xyz(x+y)(xy-z^۲)}$

د- $xyz\sqrt{(x+y)(xy-z^۲)}$

۷۱) به‌ازای چه مقادیر از a و b، باقیماندهٔ تقسیم

$(a-b)x^۲+۲(a-۳)x+b^۲-۹$

بر $x^۲-۱$ برابرخواهد بود با $۲x+۱$:

الف- $a=۲$ و $b=۴$ یا -۳

ب- $a=۴$ و $b=۳$ یا -۲

ج- $a=۴$ و $b=۲$ یا -۳

د- $a=۲$ و $b=۳$ یا -۴

۷۲) به‌ازای چه مقدارهایی از a و b و c، عدد یك ریشهٔ مکرر مرتبهٔ سوم چندجمله‌ای زیراست:

$$f(x)=ax^{5}-(5a-b)x^{4}+(10a-4b+c)x^{3}$$
$$-(10a-6b+3c)x^{2}+(5a-4b+3c)x-a+b-c$$

الف ـ هرمقداری از a و b و c ب ـ هیچ مقدار از a و b و c

ج ـ فقط $a=b=c=1$ د ـ فقط $a=2b=4c=4$

۷۳) دوعدد زیر نسبت به‌هم کدام وضع را دارند:

$$x=|a-b| \quad , \quad y=\big|\,|a|-|b|\,\big|$$

الف ـ درهرحال $x=y$ ب ـ درهرحال $x>y$

ج ـ به‌شرط $ab<0$ آنگاه $x>y$ د ـ به‌شرط $ab<0$ آنگاه $x=y$

۷۴) هرگاه دو رابطهٔ زیرداده شده باشد:

$$x\sqrt{31+12\sqrt{3}}+y\sqrt{31-12\sqrt{3}}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$$
$$2(x-y)+3\sqrt{3}(x+y)=\sqrt{3}-1$$

ازگزاره‌های زیرکدامها درست هستند:

(۱) برای تعیین x و y استفادهٔ ازیکی ازرابطه‌هاکفایت می‌کند.

(۲) دورابطه با هم یکی هستند. بنابراین برای تعیین x و y وجود یك رابطهٔ دیگر لازم است.

(۳) از هرکدام از رابطه‌ها $x=-\frac{1}{12}$ و $y=\frac{5}{12}$ به‌دست می‌آید.

الف ـ (۱) و (۳) ب ـ فقط (۱)

ج ـ فقط (۲) د ـ هیچکدام

۷۵) چندجمله‌ای $x^{4}-6x^{3}+11x^{2}-6x+1$ کدام وضع زیررا دارد:

الف ـ توان دوم است ب ـ توان چهارم است.

ج ـ ریشهٔ مکررمرتبهٔ سوم دارد.

د ـ دارای ریشه‌های ساده است.

۷۶) چندجمله‌ای $x^{5}+x^{4}+1$ برکدام‌یك ازچندجمله‌ایهای زیربخش‌پذیراست:

الف ـ $x^{2}-x+1$ ب ـ $x^{2}-x-1$

ج ـ $x^{3}+x-1$ د ـ $x^{3}-x+1$

۷۷) تجزیهٔ کسر $\frac{2x^{2}\sqrt{2}}{x^{4}+1}$ به‌کدام صورت زیرانجام می‌پذیرد:

الف ـ $\frac{1}{x^{2}-x\sqrt{2}+1}-\frac{1}{x^{2}+x\sqrt{2}+1}$

ب- $\frac{x}{x^۲-x\sqrt{۲}+۱}-\frac{x}{x^۲+x\sqrt{۲}+۱}$

ج- $\frac{x}{x^۲-x\sqrt{۲}+۱}+\frac{x}{x^۲+x\sqrt{۲}+۱}$

د- $\frac{۱}{x^۲-x\sqrt{۲}+۱}+\frac{۱}{x^۲+x\sqrt{۲}+۱}$

۷۸) کسر $\frac{۴x^۲-۸x+۱}{x^۲+(p-۴)x+p}$ به‌ازای چه مقدار از p فقط یك قطب ساده دارد.

الف- $p=\frac{۲۴\pm۷\sqrt{۳}}{۲۶}$ یا $p=۶\pm۲\sqrt{۵}$

ب- $p=\frac{۲۴\pm۷\sqrt{۳}}{۲۶}$

ج- $p=\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۲}$

د- $p=۶\pm۲\sqrt{۵}$

۷۹) به‌فرض $x^۲+y^۲+z^۲=۹a^۲$ و $s=\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{y^۲}+\frac{۱}{z^۲}$ کدام نابرابری زیرهمواره برقرار است:

الف- $s\geqslant\frac{۱}{a^۲}$ ب- $s\geqslant\frac{۳}{a^۲}$

ج- $s\leqslant\frac{۱}{a^۲}$ د- $s\leqslant\frac{۳}{a^۲}$

۸۰) درمثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ وتر برحسب متغیر مثبت x برابربا

$\sqrt{۲x^۴-۴x^۲+۳۴}$

واندازهٔ یك ضلع برابربا $x^۲-۵$ است. به‌ازای چه مقدار از x، مساحت این مثلث بیشترین مقدار را دارد و اگراین بیشترین مقدار M فرض شود، مقدار M نیزچقدر است:

الف- $x=۱$ و $M=۱۶$ ب- $x=\sqrt{۲}$ و $M=۱۵$

ج- $x=۱$ و $M=۸$ د- $x=\sqrt{۲}$ و $M=۷/۵$

۸۱) هرگاه $P(x)$ یك چندجمله‌ای باشد، ازگزاره‌های زیرکدام نادرست است:

(۱) اگر $P(x)$ زوج باشد باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+\alpha$ برابر است با باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-\alpha$.

(۲) اگر باقیمانده‌های تقسیم $P(x)$ بر $x+\alpha$ و بر $x-\alpha$ با هم برابر باشند، $P(x)$ یك چندجمله‌ای زوج است.

(۳) اگر $P(x)$ زوج باشد باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x^{۲}+\alpha$ به‌ازای هرمقدار حقیقی α برابر با مقدار ثابت است.

(۴) خارج‌قسمت و باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر یك چندجمله‌ای زوج، چندجمله‌ایهای زوج هستند.

الف- فقط (۱) ب- (۳) و (۴)

ج- فقط (۲) د- هیچکدام

۸۲) به‌فرض $P(x)=ax^{۴}+bx^{۳}+cx^{۲}+dx+e$

کدام شرط زیرلازم و کافی است برای‌آنکه باقیمانده‌های تقسیم $P(x)$ بر $x+\alpha$ و بر $x-\alpha$ با هم برابر باشند:

الف- $b=d=۰$ ب- $b=-d$

ج- $b\alpha^{۲}+d=۰$ د- $b\alpha^{۲}-d=۰$

۸۳) چندجمله‌ای $P(x, y)$ نسبت به x و y همگن درجهٔ n است. به‌فرض $x=ky$ چندجمله‌ای $P(x, y)$ به‌کدام چندجمله‌ای زیرتبدیل می‌شود:

الف- $x^{n}P(k, ۱)$ ب- $x^{n}P(۱, k)$

ج- $y^{n}P(۱, k)$ د- $y^{n}P(k, ۱)$

۸۴) هرگاه ازچندجمله‌ای $P(x)=x^{۴}+۲x^{۳}+۳x^{۲}+px+q$

تا یك درجهٔ تقریب جذر گرفته شود، باقیماندهٔ جذر برابر با $-۶x-۶$ به‌دست می‌آید. کدام‌یك از گزاره‌های چهارگانهٔ زیرنادرست است:

الف- اگر p و q تغییر کنند چندجمله‌ای جذر نیزتغییرمی‌کند

ب- اگر p و q تغییر کنند فقط چندجمله‌ای باقیمانده تغییرمی‌کند.

ج- جذر چندجمله‌ای $P(x)$ برابر است با $x^{۲}+x+۱$

د- جذر چندجمله‌ای $P(x)$ مستقل از مقادیر p و q مشخص می‌شود.

۸۵) هرگاه باقیماندهٔ تقسیم $P(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx$ بر $x^{۲}+۱$ برابر با $۲x+۱$ باشد، باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x^{۲}-۱$ کدام است:

الف- $۲x-۱$ ب- $-۲x+۱$

ج- $-۴x+۱$ د- $۴x-۱$

۸۶) به‌فرض $x+\frac{۱}{x}=a$ مقدار $x^{۵}+\frac{۱}{x^{۵}}$ کدام است:

الف- a^5+5a ب- a^5-5a^3+5a

ج- a^5-5a د- a^5+5a^3-5a

۸۷) حاصل عبارت $(x^3+x^2y)^{\frac{1}{2}}+(xy^2+y^3)^{\frac{1}{2}}$ در کدام حالت زیر با $(x-y)\sqrt{x+y}$ برابر است:

الف- $x>0$ و $y>0$ و $x>y$

ب- $x>0$ و $y<0$ و $x>-y$

ج- $x<0$ و $y>0$ و $x<y$

د- $x<0$ و $y<0$ و $x<-y$

۸۸) به‌ازای مقداری از k چندجمله‌ای $P(x)=x^{10}-2x^9-x^3+2x+k$ بر $x+1$ بخش‌پذیر می‌گردد. به‌ازای این مقدار از k، باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $(x+1)^2$ کدام است:

الف- $-29x-29$ ب- $29x-29$

ج- $-29x+29$ د- $29x+29$

۸۹) اگر $5 \leqslant x \leqslant 8$ باشد، حاصل عبارت

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$$

کدام مقدار زیراست:

الف- ۱   ب- ۳

ج- ۰   د- ۲

۹۰) به‌فرض $x>1$، حاصل عبارت زیر کدام است:

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\right):\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$$

الف- $8x(x+1)$ ب- $8x(x-1)$

ج- $\frac{1}{2x(x-1)}$ د- $\frac{1}{2x(x+1)}$

۹۱) ضریب x^3 در بسط عبارت زیر کدام است:

$$(9x^4-4x^3+2x^2-5x+1)^2$$

الف- -18 ب- ۱۲

ج- ۸   د- -28

۹۲) اگر $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{2x}{x^2+1}$ باشد، $ff(x)$ کدام عبارت زیراست:

الف- $\frac{2x^2}{x^4+1}$ ب- $\frac{-2x^2}{x^4+1}$

ج- $\frac{4x^2}{(x^2+1)^2}$ د- $\frac{-4x^2}{(x^2+1)^2}$

۹۳) به‌ازای چه مقدار از n عبارت $1+x+x^2+\dots+x^{2n-1}$
برعبارت $1+x+x^2+\dots+x^{n-1}$ بخش‌پذیراست:

الف- n زوج باشد ب- n فرد باشد

ج- هرمقدار از عدد طبیعی n د- هیچ مقدار از n

۹۴) به‌فرض‌آنکه a عدد حقیقی منفی باشد، حاصل $\sqrt{a^2+1+2\sqrt{a^2}}$
کدام عبارت زیراست:

الف- $\pm(a+1)$ ب- $a-1$

ج- $1-a$ د- $a+1$

۹۵) به فرض آنکه x و y مثبت باشند و داشته باشیم $x^4+y^4=1$ ، عبارت $P=x^9+y^9$ درکدام رابطهٔ زیرصدق می‌کند:

الف- $P=1$ ب- $P<1$

ج- $P>1$ د- $P>\frac{9}{4}$

۹۶) هرگاه x و y و z هرسه با هم صفر نباشند و داشته باشیم:

$$\begin{cases} x^3=y^3+z^3 \\ x^2=y+z \\ x=y^2+z^2+yz \end{cases}$$

مجموع $x+y+z$ باکدام عدد زیر برابر است:

الف- ۲ ب- ۲ −

ج- ۰ د- ۱

۹۷) اگر a و b و c عددهای مثبت باشند و داشته باشیم:

$$S=\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}$$

کدام رابطهٔ زیررا خواهیم داشت:

الف- $S\geqslant abc$ ب- $S\geqslant a+b+c$

ج- $S \leqslant abc$ د- $S \leqslant a+b+c$

۹۸) اگر عبارت $f(x)$ به‌مجموع $P(x)+I(x)$ تبدیل‌شود به گونه‌ای که $P(x)$ نسبت به x یك عبارت زوج و $I(x)$ نسبت به x یك عبارت فرد باشد، کدام رابطهٔ زیر نادرست است:

الف- $P(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{۲}$

ب- $I(x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{۲}$

ج- $I(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{۲}$

د- $I(x)+I(-x)=۰$

۹۹) فرض می‌کنیم:

$$A=\frac{۱+a+a^۲+\dots+a^{n-۱}}{۱+a+a^۲+\dots+a^n}$$

$$B=\frac{۱+b+b^۲+\dots+b^{n-۱}}{۱+b+b^۲+\dots+b^n}$$

و گزاره‌های زیررا بیان می‌کنیم:

(۱) اگر $a>b>۰$ آنگاه $A>B$

(۲) اگر $a>b>۰$ آنگاه $A<B$

(۳) اگر $۰<a<۱$ آنگاه $A<۱$

(۴) اگر $a>۱$ آنگاه $A>۱$

از گزاره‌های بالا کدامها درست هستند:

الف- (۱) و (۳) و (۴)   ب- (۲) و (۴)

ج- (۲) و (۳) و (۴)   د- (۲) و (۳)

۱۰۰) از گزاره‌های زیر کدام نادرست است:

الف- مجموعهٔ چندجمله‌ایها با عمل جمع یك گروه جابجایی پدید می‌آورد.

ب- مجموعهٔ چندجمله‌ایها با عمل ضرب یك گروه جابجایی پدید می‌آورد.

ج- مجموعهٔ چندجمله‌ایها با دو عمل جمع و ضرب حلقه‌ای جابجایی پدید می‌آورد.

د- مجموعهٔ چندجمله‌ایهای با مقدار ثابت زوج یك ایده‌آل ازحلقهٔ چندجمله‌ایهای با مقدار ثابت صحیح است.

۹

پاسخها و راهنمائیها

تمرینهای ۲-۴۳ :

۱) $\frac{۱}{۱۶}$

۲) -۱۶

۳) $-\frac{۱}{۱۶}$

۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۵) -۲۷

۶) $-۷^{۵}$

۷) -۳

۸) موهومی

۹) $\frac{۱}{۴}$

۱۰) -۱

۱۱) ۱

۱۲) $\frac{۱}{۱۱}$

۱۳) ۴

۱۴) ۵

۱۵) موهومی

۱۶) $\sqrt{۵}$

۱۷) $-x^{۲}$

۱۸) $-\frac{۱}{۹}$

۱۹) $a^{۲}x^{۲}y$

۲۰) $\frac{y}{a^{۳}x}$

۲۱) $\frac{a^{۵}c}{x^{۳}}-\frac{۴c}{b}$

۲۲) $۱+\frac{۴b^{۲}}{a^{۳}}$

۲۳) $\frac{۱}{x^{۲}y^{۲}(x^{۲}y^{۲}-۱)}$

۲۴) $a^{۲}-b^{۲}$

۲۵) $۸\times ۱۰^{-۲}=۰/۰۸$

۲۶) $\frac{۱}{a^{۲}x^{۴}}+a^{۳}x^{۲}$

۲۷) $-۲\left(۱+\frac{۲}{x^{۲}}+\frac{۱}{x^{۴}}\right)$

۲۸) $\frac{x-y}{x+y}$

۲۹) ۱

۳۰) $x^{۵}$

۳۱) $x(x-۱)\sqrt{x-۱}$

۳۲) $\left|\frac{x}{z}\right|y^{۲}$

۳۳) $\sqrt[۳]{۵}$

۳۴) -۴۹

۳۵) $\sqrt{۵}-۱$

۳۶) $۱۰-\pi^{۲}$

۳۷) $۱۲\sqrt{۲}$

۳۸) $\sqrt{۳}$

۳۹) $۱۵\sqrt{۲}$

۴۰) $۵\sqrt[۳]{۲}$

۴۱) $۲\sqrt{۲}$

۴۲) $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$

۴۳) $\sqrt{۶}-\sqrt{۲}$

۴۴) $\sqrt{۲}+۱$

۴۵) ۴

۴۶) $-$

۴۷) -۲

۴۸) $y-x$

۴۹) $-\cos\alpha$

۵۰) $\cos\alpha-\sin\alpha$

۵۱) $-$

۵۲) ۱

۵۳) $>$

۵۴) $>$

۵۵) $\begin{cases} > & \text{،} \quad a>b>۰ \text{ اگر} \\ < & \text{،} \quad \text{درغیراین صورت} \end{cases}$

۵۶) ۱

۵۷) $۲-\sqrt{۳}$

۵۸) $۵۱-۳۶\sqrt{۲}$

۵۹) $-۴\sqrt[۳۰]{۲^{۱۱}}$

۶۰) $۱۸\sqrt[۳۰]{۳^{۱۷}}$

۶۱) $۹\sqrt[۳]{۳}$

۶۲) a،c،b

۶۳) c،a،b،d

۶۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۹}$

۶۵) $\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}$

۶۶) $۳(۲-\sqrt{۳})$

۶۷) $۲+\sqrt{۳}$

۶۸) $\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۳}$

۶۹) $\frac{۴۳۳+۲۲۸\sqrt{۲}}{۲۸۹}$

۷۰) -۲

۷۱) $\frac{(۱۳-۴\sqrt{۳})(۱۰+۶\sqrt{۲})}{۱۸۷}$

۷۲) $۲-\sqrt{۳}$

۷۳) $\sqrt{2}-1$

۷۴) $\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sqrt[3]{2}}{2}$

۷۵) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$

۷۶) $\dfrac{1-\cos\alpha}{|\sin\alpha|}=\left|tg\dfrac{\alpha}{2}\right|$

۷۷) $\dfrac{481\sqrt{6}+575\sqrt{3}-739\sqrt{2}-923}{334}$

۷۸) $\dfrac{5(39-\sqrt{3})}{66}$

۷۹) $a=b=5+2\sqrt{5}$

۸۰) $a=b=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

۸۱) $3-2\sqrt{2}$

۸۲) $2\sqrt{6}$

۸۳) $\sqrt{3}+1$

۸۴) $2(\sqrt{2}+1)$

۸۵) 577

۸۶) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

۸۷) $\begin{cases} a>0\ ,\ b>0 \Longrightarrow y=4\sqrt{\dfrac{a}{b}} \\ a<0\ ,\ b<0 \Longrightarrow y=0 \end{cases}$

تمرینهای ۲-۴۴

۸۸) 2

۸۹) 10

۹۰) 1

۹۱) $3\sqrt{2}-\sqrt{7}$

۹۲) 4

۹۳) 7

۹۴) $\begin{cases} 2m & ، \quad \sqrt{\dfrac{a}{2}}\leqslant|m|\leqslant\sqrt{a} \\ 2\sqrt{a-m^2} & ، \quad |m|\leqslant\sqrt{\dfrac{a}{2}} \end{cases}$

۹۵) $|a+\sqrt{x^2-a^2}|$

۹۶) $|a+x+\sqrt{a^2-x^2}|$

۹۷) $\sqrt{\dfrac{2x^2+x+2}{2}}-\sqrt{\dfrac{x}{2}}$

۹۸) $\begin{cases} 2\sqrt{x-1} & : \quad \text{اگر } x\geqslant 2 \\ 2 & : \quad \text{اگر } 1\leqslant x\leqslant 2 \end{cases}$

۹۹) $(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})$

۱۰۰) $۲+\sqrt{۳}$

[دراین تمرین می‌توانید نخست ازرابطهٔ $y=\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}$ مقدار $y^۲$ راحساب کنید و نتیجه بگیریدکه $y=\sqrt{۶}$]

۱۰۱) $\sqrt{۲}$

[نخست در مخرج عمل ضرب را انجام داده و حاصل را به‌ریشگیهای ساده تحویل کنید]

۱۰۲) $\dfrac{۳\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}{۶}$

۱۰۳) $\dfrac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{a+b}$

۱۰۴) $\dfrac{۱-۲\sqrt{۳}}{۱۱}$

۱۰۵) ۲

۱۰۶) $\frac{۴}{۳}\left(\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۴}-۱\right)$

۱۰۷) $\dfrac{۵+۲\sqrt[۳]{۲۸}-۲\sqrt[۳]{۹۸}}{۹}$

۱۰۸) $۲x^۲$

۱۰۹) $۴x$

۱۱۰) $\dfrac{\sqrt[۳]{۲۵}-\sqrt[۳]{۴}}{۳}$

۱۱۱) $\dfrac{(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۳}-۱)}{۲}$

۱۱۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۱۲}(\sqrt{۵}-\sqrt{۲})(\sqrt{۲}-\sqrt{۳}+۱)$

(در تمرینهای ۱۱۱ و ۱۱۲ نخست مخرج کسر را به‌حاصل‌ضرب عاملها تجزیه کنید.)

۱۱۳) $\begin{cases} |x|\geqslant|a| \implies y=\dfrac{a}{x} \\ |x|<|a| \implies y=\dfrac{x}{a} \end{cases}$

۱۱۴) $\begin{cases} x>۰ \implies y=x+۱ \\ x<۰ \implies y=x-۱ \end{cases}$

۱۱۵) $\begin{cases} x>۱ \text{ یا } x<-۱ \implies y=۲x-۲ \\ -۱<x<۱ \implies y=-۲ \end{cases}$

۱۱۶) $z=۱$

۱۱۷) $\begin{cases} ۲k\pi-\frac{\pi}{۴}<x<۲k\pi+\frac{\pi}{۴} \implies y=\sin x \\ ۲k\pi+\frac{\pi}{۴}<x<۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴} \implies y=\cos x \\ ۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴}<x<۲k\pi+\frac{۵\pi}{۴} \implies y=-\sin x \\ ۲k\pi+\frac{۵\pi}{۴}<x<۲k\pi+\frac{۷\pi}{۴} \implies y=-\cos x \end{cases}$

۱۱۸) $y=\sqrt{۲}$ ، $y=-\sqrt{۲}$

[نخست $y^{۲}$ را حساب کنید و نتیجه بگیرید که $|y|=\sqrt{۲}$]

۱۱۹) $y=\frac{۷}{۶}$

۱۲۰) $$\begin{cases} x=\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ و } \begin{cases} a>۰\ ,\ b>۰ \Longrightarrow y=۲\sqrt{ab} \\ a<۰\ ,\ b<۰ \Longrightarrow y=-۲\sqrt{ab} \end{cases} \\ x=\sqrt{-\frac{b}{a}} \text{ و } ab<۰ \Longrightarrow y=۰ \end{cases}$$

۱۲۱) $$\begin{cases} ab>۰ \Longrightarrow y=۲b^{۲}(a^{۲}+b^{۲}) \\ ab<۰ \Longrightarrow y=۲a^{۲}(a^{۲}+b^{۲}) \end{cases}$$

۱۲۲) $$\begin{cases} a\geqslant ۲ \Longrightarrow y=\sqrt{\frac{a}{۲}} \\ ۰<a\leqslant ۲ \Longrightarrow y=\sqrt{\frac{۲}{a}} \end{cases}$$

۱۲۳) $$\begin{cases} t\leqslant -۲ \Longrightarrow y=\frac{-۴}{\sqrt{t^{۲}+۴}} \\ -۲\leqslant t\leqslant ۲ \Longrightarrow y=\frac{۲t}{\sqrt{t^{۲}+۴}} \\ t\geqslant ۲ \Longrightarrow y=\frac{۴}{\sqrt{t^{۲}+۴}} \end{cases}$$

۱۲۴) $$\begin{cases} ۰\leqslant \alpha\leqslant \frac{\pi}{۲} \Longrightarrow y=\sin\alpha+\cos\alpha \\ \frac{\pi}{۲}\leqslant \alpha\leqslant \pi \Longrightarrow y=\sin\alpha-\cos\alpha \\ \pi\leqslant \alpha\leqslant \frac{۳\pi}{۲} \Longrightarrow y=-\sin\alpha-\cos\alpha \\ \frac{۳\pi}{۲}\leqslant \alpha\leqslant ۲\pi \Longrightarrow y=-\sin\alpha+\cos\alpha \end{cases}$$

۱۲۵) $$\frac{(n-۱)(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_۱})}{a_n-a_۱}$$

۱۲۶) داریم $\frac{s+d}{2}=\sqrt{a}$ و $\frac{s-d}{2}=\sqrt{b}$ و $sd=a-b$ ، هرگاه s گویا باشد از رابطهٔ $d=\frac{a-b}{s}$ برمی‌آیدکه d نیز گویا باشد و آنگاه $s+d$ و $s-d$ نیز گویابوده و لازم می‌آیدکه $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ نیز گویا باشند، اما این خلاف فرض است. پس s نمی‌تواند گویا باشد. همچنین است برای d.

۱۲۷) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \Longrightarrow b-a=c-b$$

۱۲۸) $\sqrt{n+1}>\sqrt{n} \Longrightarrow \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}>\sqrt{n} \Longrightarrow \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$

و مخرج کسر طرف اول را گویا می‌کنیم. برای نابرابری دیگر از $\sqrt{n}>\sqrt{n-1}$ شروع می‌کنیم.

۱۲۹) $u_2=-(2+\sqrt{3})$ ، $u_3=-(2-\sqrt{3})$ ، $u_4=1=u_1$ ،

$u_5=u_2$ ، $u_6=u_3$ ، ...

$u_{3n+1}=u_1$ ، $u_{3n+2}=u_2$ ، $u_{3n+3}=u_3$

۱۳۰) $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2=(c^{\frac{1}{2}})^2 \Longrightarrow a+b-c=-2(ab)^{\frac{1}{2}}$

$$(a+b-c)^2=4ab \Longrightarrow a^2+b^2-2ab+c^2-2ac-2bc=0$$

$$(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})^3=c \Longrightarrow a+b+3c^{\frac{1}{3}}(ab)^{\frac{1}{3}}=c$$

$$\Longrightarrow 27abc=(c-a-b)^3$$

۱۳۱) $\alpha^{\frac{1}{3}}=a$ ، $\beta^{\frac{1}{3}}=b$

$$\sqrt{a^3+a^2b}+\sqrt{b^3+ab^2}=a\sqrt{a+b}+b\sqrt{a+b}$$

$$=(a+b)\sqrt{a+b}=(a+b)^{\frac{3}{2}}$$

۱۳۲) $(a+b+\sqrt{a^2+b^2})^2=2a^2+2b^2+2ab+$

$$+2a\sqrt{a^2+b^2}+2b\sqrt{a^2+b^2}$$

$$=2[a(b+\sqrt{a^2+b^2})+\sqrt{a^2+b^2}(\sqrt{a^2+b^2}+b)]$$

$$=2(a+\sqrt{a^2+b^2})(b+\sqrt{a^2+b^2})$$

۱۳۳) برای هردوعدد x و y داریم:

$$(x-y)^2 \geqslant 0 \implies x^2+y^2 \geqslant 2xy$$

$$\implies 2x^2+2y^2 \geqslant x^2+y^2+2xy$$

$$2x^2+2y^2 \geqslant (x+y)^2 \implies \sqrt{2x^2+2y^2} \geqslant |x+y|$$

و با فرض $x=a>0$ و $y=\sqrt{a^2-b^2}$ که با شرط $a>b>0$ حقیقی و مثبت است داریم:

$$\sqrt{2a^2+2a^2-2b^2} \geqslant a+\sqrt{a^2-b^2}$$

۱۳۴) تمرین ۱۳۱ را درنظر بگیرید.

۱۳۵) دوطرف را به‌توان ۲ می‌رسانیم، می‌شود:

$$x^2=a+x\ ,\ x>0 \implies x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

۱۳۶) چون دوطرف را به‌توان ۳ برسانیم خواهیم داشت

$$x^3-3x\sqrt[3]{a^2-b}-2a=0$$

ازاین رابطه برمی‌آیدکه شرط لازم، اما نه‌کافی، برای گویا بودن x آن است که $\sqrt[3]{a^2-b}$ عددگویا یعنی a^2-b مکعب کامل باشد؛ اگر x عددگویا باشد عدد a^2-b مکعب کامل است، اما اگر a^2-b مکعب کامل باشد ممکن است‌که x گویا نباشد.

۱۳۷) $x^3+3x-4=0 \implies (x-1)(x^2+x+4)=0 \implies x=1$

۱۳۸) $x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$

$$x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$$

وکسر مفروض به‌کسر زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{(x+1)\sqrt{x-2}\,[(x+1)\sqrt{x-2}+(x-1)\sqrt{x+2}\,]}{(x-1)\sqrt{x+2}\,[(x-1)\sqrt{x+2}+(x+1)\sqrt{x-2}\,]}$$

$$=\frac{(x+1)\sqrt{x-2}}{(x-1)\sqrt{x+2}}=\frac{(x+1)\sqrt{x^2-4}}{(x-1)(x+2)}$$

۱۳۹) عبارت داده شده را y می‌گیریم. پس ازمحاسبهٔ y^3 و ساده‌کردن خواهیم داشت

$$y^3-3y-(x^3-3x)=0$$

$$(y-x)(y^2+xy+x^2-3)=0$$

$$y_1=x \quad \text{یا} \quad y_2=\frac{-x\pm\sqrt{-3(x^2-4)}}{2}$$

اماچون $x^۲-۴>۰$ است پس $-۳(x^۲-۴)<۰$ و در نتیجه جواب $y_۲$ پذیرفته نیست و مقدار عبارت داده شده برابر x است.

۱۴۰) $$y=\frac{۱}{۲}\left(\frac{a^۲-b^۲}{a^۲+b^۲}\right)x^{\frac{۱}{m}}\left(۱+x^{\frac{۱}{n}-\frac{۱}{m}}\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\frac{a^۲-b^۲}{a^۲+b^۲}\right)\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{۲n}{m-n}}\left[۱+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^۲\right]$$

$$=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{m+n}{m-n}}$$

۱۴۱) از ضرب دو طرف رابطهٔ مفروض در $\sqrt[۳]{\alpha}$ و حذف $\sqrt[۳]{\alpha^۲}$ بین رابطهٔ حاصل و رابطهٔ مفروض خواهیم داشت:

$$-(b^۲+ac)\sqrt[۳]{\alpha}+bc+a^۲\alpha=۰$$

$$\begin{cases} b^۲+ac=۰ \\ bc+a^۲\alpha=۰ \end{cases}$$

اگر $a\neq ۰$ باشد از این دستگاه نتیجه می‌شود:

$$\alpha=-\frac{bc}{a^۲}=-\frac{abc}{a^۳}=\frac{b^۳}{a^۳} \implies \sqrt[۳]{\alpha}=\frac{b}{a}$$

یعنی $\sqrt[۳]{\alpha}$ عددگویا است که خلاف فرض است. بنابراین $a=۰$ و از آن نتیجه می‌شودکه $b=c=۰$

ثانیاً اگر مقدارکسر را برابر λ بگیریم خواهیم داشت:

$$(a-\lambda a')\sqrt[۳]{\alpha^۲}+(b-\lambda b')\sqrt[۳]{\alpha}=-(c-\lambda c')$$

و بنابرآنچه قبلاً ثابت شد باید داشته باشیم:

$$a-\lambda a'=۰\ ,\ b-\lambda b'=۰\ ,\ c-\lambda c'=۰$$

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\lambda$$

۱۴۲) $$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

۱-۱۴۳) فرض می‌کنیم که کسر ساده نشدنی $\frac{p}{q}$ یك ریشهٔ گویای معادلات باشد، یعنی:

$$\frac{p^n}{q^n}+a_۱\frac{p^{n-۱}}{q^{n-۱}}+\dots+a_{n-۱}\frac{p}{q}\pm ۱=۰$$

$$p^n+pq(a_۱p^{n-۲}+\dots+a_{n-۱}q^{n-۲})=\mp q^n$$

از این رابطه برمی‌آیدکه q بر p بخش پذیر است که خلاف فرض ساده نشدنی کسر $\frac{p}{q}$ است مگر آنکه $p=q=\pm ۱$ باشدکه در این صورت ± ۱ ریشهٔ معادله باید باشدکه باز هم خلاف فرض است. بنابراین عدد گویا نمی‌تواند ریشهٔ معادلات مفروض باشد.

۲) داریم $\sqrt[3]{۳}=x-\sqrt{۲}$ و

$$۳=x^۳-۳x^۲\sqrt{۲}+۶x-۲\sqrt{۲}$$
$$(۳x^۲+۲)\sqrt{۲}=x^۳+۶x-۳$$

دوطرف این رابطه را به‌توان می‌رسانیم. پس از ساده‌کردن خواهیم داشت

$$x^۶-۶x^۴-۶x^۳+۱۲x^۲-۳۶x+۱=۰$$

عددهای ± ۱ ریشه‌های این معادله نیستند پس بنا به‌آنچه قبلا ثابت شد هرریشهٔ این معادله و ازجمله $\sqrt[3]{۳}+\sqrt{۲}$ عددگنگ است.

۱۴۴-۱) چون $u_۱=\sqrt{۲}<۲$ پس ویژگی مورد نظر در ازای $n=۱$ صادق است. اکنون ثابت می‌کنیم که اگر به ازای n صادق باشد به ازای $n+۱$ نیز صادق خواهد بود.

$$u_n<۲ \Rightarrow u_n+۲<۴ \Rightarrow \sqrt{u_n+۲}<۲ \Rightarrow u_{n+۱}<۲$$

۲) $$۲-u_{n+۱}=۲-\sqrt{۲+u_n}=\frac{۲-u_n}{۲+\sqrt{۲+u_n}}$$

$$۲-u_n>۰ \Rightarrow ۲-u_{n+۱}<\frac{۲-u_n}{۲}$$

$$۰<۲-u_{n+۱}<\frac{۲-u_n}{۲} \Rightarrow ۰<۲-u_n<\frac{۲-u_۱}{۲^{n-۱}}$$

$$۰<۲-u_n<\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲^{n-۱}}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{۲-\sqrt{۲}}{۲^{n-۱}}=۰ \Rightarrow \underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\ (۲-u_n)=۰$$

$$\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\ u_n=۲$$

به‌عبارت دیگر:

$$\text{حد}\ \sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{\dots}}}}=۲$$

۱۴۵):۱) $a*b=\sqrt[3]{a^۳+b^۳}=\sqrt[3]{b^۳+a^۳}=b*a$

$$(a*b)*c=\sqrt[3]{(\sqrt[3]{a^3+b^3})^3+c^3}=\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3}$$
$$=\sqrt[3]{a^3+(\sqrt[3]{b^3+c^3})^3}=a*(b*c)$$
$$a*e=a \text{ ؛ } \sqrt[3]{a^3+e^3}=a \Longrightarrow e=0$$
$$a*a^{-1}=e \text{ ؛ } \sqrt[3]{a^3+(a^{-1})^3}=0 \Longrightarrow a^{-1}=-a$$

۲) $$a\times(b*c)=a\sqrt[3]{b^3+c^3}=\sqrt[3]{a^3b^3+a^3c^3}=ab*ac$$

یعنی ضرب نسبت به * توزیعی است.

$$a*(bc)=\sqrt[3]{a^3+b^3c^3}\ ,$$
$$(a*b)\cdot(a*c)=\sqrt[3]{a^3+b^3}\times\sqrt[3]{a^3+c^3}=\sqrt[3]{(a^3+b^3)(a^3+c^3)}$$
$$a*(bc)\neq(a*b)\cdot(a*c)$$

یعنی عمل * نسبت به‌ضرب توزیعی نیست.

۳) $$a(*)^n=\sqrt[3]{\underbrace{a^3+a^3+\cdots+a^3}_{\text{عامل } n}}=\sqrt[3]{na^3}=a\sqrt[3]{n}$$

$$a(*)^0=0 \text{ ، } a(*)^1=a$$
$$a(*)^{-n}=a\sqrt[3]{-n}=-a\sqrt[3]{n}=-a(*)^n$$
$$a(*)^{\frac{1}{n}}=a\sqrt[3]{\frac{1}{n}}=\frac{a}{\sqrt[3]{n}}$$
$$[a(*)^n]*[a(*)^m]=[a\sqrt[3]{n}]*[a\sqrt[3]{m}]=\sqrt[3]{a^3n+a^3m}$$
$$=a\sqrt[3]{m+n}=a(*)^{m+n}$$
$$[a(*)^m](*)^n=(a\sqrt[3]{m})(*)^n=(a\sqrt[3]{m})\sqrt[3]{n}=a\sqrt[3]{mn}=a(*)^{mn}$$

پرسشهای ۲-۴۵

۱۴۷- الف	۱۴۸- د	۱۴۹- ج	۱۵۰- ب
۱۵۱- ب	۱۵۲- ج	۱۵۳- ب	۱۵۴- الف
۱۵۵- د	۱۵۶- الف	۱۵۷- الف	۱۵۸- ب

تمرینهای ۳-۱۵

۱) صحیح ۲) کسری گویا ۳) صحیح

۴) کسری گویا ۵) گنگ ۶) کسری گویا

۷) کسری گویا (نسبت به $\cos x$)، اما نسبت به x مثلثاتی

۸) صحیح (نسبت به e^x)، اما نسبت به x نمایی

۹) $R-\{-\sqrt{۲}\ ,\ \sqrt{۲}\}$

۱۰) $\{x | x\in R\ ,\ x\geqslant -۱\}$

۱۱) $\{x | x\in R\ ,\ x>۱$ یا $x<-۱\}$

۱۲) $\{(x,y) | x\in R\ ,\ y\in R\ ,\ x\neq y\}$

۱۳) $\left\{x | x\in R\ ,\ x\neq ۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\right\}$

۱۴) $\{\sin x | \sin x\in R\ ,\ -۱\leqslant \sin x<۱\}$

۱۵) $\left\{x | x\in R\ ,\ x\neq \frac{\log ۲}{\log a}\right\}$

۱۶) $\{(x,y) | x\in R\ ,\ y\in R\ ,\ |x|\geqslant |y|\}$

۱۷) $f(-۱)=۴+۲\sqrt{۲}$ ، $f(\sqrt{۲})=۳$ ، $f(-\sqrt{۲})=۱۱$

۱۸) $f(۲,-۴)=۰$ ، $f(-۴,۲)=۶۰$ ، $f(\sqrt{۳},۱-\sqrt{۳})=۲۵-۱۲\sqrt{۳}$

۱۹) $f(۱,۱,۲)=\frac{۱۲+۳\sqrt{۲}}{۲}$ ، $f(۲,۱,۱)=\frac{۶+۳\sqrt{۲}}{۲}$

۲۰) $ff(-۱)=-۱۷$ ، $fff(۱)=۱$

۲۱) $f\left(-۲,\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{۵۳۵}{۱۲۶}$ ، $f(۰,\pi)=-\frac{۱}{۳}$

۲۲) $x^۳-۳x-۱$　　۲۳) $\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}$

۲۴) $x^۴-۲x^۲$　　۲۵) ۰

۲۶) $۴x^۲+۹y^۲-۳۶$　　۲۷) $x^۳+۶x^۲-۱$

۲۸) $\sin^۲ x+۳\cos x\sin x-۴\cos^۲ x+۱$

۲۹) $f(t)=f(x)\ :\ at^۲+bt+c=ax^۲+bx+c$

$$a(t^۲-x^۲)+b(t-x)=۰ \Longrightarrow t=-x-\frac{b}{a}$$

۳۰) این تمرین حالت ویژه‌ای از تمرین قبل است.

۳۱) $f(۲)=\frac{۲a+b}{۲c+d}=۰ \Longrightarrow b=-۲a$

$$f(۰)=\frac{b}{d}=-۲ \Longrightarrow d=-\frac{b}{۲}=a$$

$$f\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{a+۲b}{c+۲d}=-\frac{۳}{۴} \Longrightarrow c=۲a$$

$$f(x)=\frac{ax-2a}{2ax+a}=\frac{x-2}{2x+1}$$

۳۲) $\dfrac{ay+b}{cy+d}=\dfrac{a(x-1)+b}{c(x-1)+d} \Longrightarrow y=x-1$

۳۳) $f(x+a)=x^4+4(a-1)x^3+(6a^2-12a+1)x^2$
$+2(2a^3-6a^2+a+3)x+a^4-4a^3+a^2+6a$

$$\begin{cases} a-1=0 \\ 2a^3-6a^2+a+3=0 \end{cases} \Longrightarrow a=1$$

$$f(x+1)=x^4-5x^2+4$$

تمرینهای ۳-۱۶

۳۴) $R-\{0,-1\}$

۳۵) $]-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[1,+\infty]$

۳۶) $x\leqslant 0$ و $y\leqslant -1$ یا $0\leqslant x\leqslant 1$ و $-1\leqslant y\leqslant 0$ یا $x\geqslant 1$ و $y\geqslant 0$

۳۷) $f(x,y)=(y-5x+3\sqrt{x^2-1})(y-5x-3\sqrt{x^2-1})$
$=16\left(x-\dfrac{5y+3\sqrt{y^2-16}}{16}\right)\left(x-\dfrac{5y-3\sqrt{y^2-16}}{16}\right)$

$(x\geqslant 1$ و $y\geqslant 4)$ یا $(x\leqslant -1$ و $y\leqslant -4)$

۳۸) $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ یا $-1\leqslant x\leqslant -\frac{1}{2}$

۳۹) $g(f(x))=a^2x$

۴۰) $x=\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1}$ و $f(nx)=\dfrac{(n+1)f(x)+n-1}{(n-1)f(x)+n+1}$

۴۱) $a=1$ یا $a=\frac{1}{6}$

۴۲) $z=\dfrac{xy-4}{y-x}$

۴۳) $z=\dfrac{x-y}{1-xy}\,,\ \dfrac{1-xy}{x-y}$

۴۴) $S=n\sqrt{\cos 2\alpha}+n\,tg\alpha$

۴۵) $g(3)=a^2-ab+b^2$

۴۶) با تبدیل y به x ابتدا $f(2x)$ به‌دست می‌آید و نتیجه می‌شود

$$f(x)=\frac{ax^4}{4}+b$$

۴۷) $f(x)=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)^2+(x-1)^2}$ ، $g(x)=\frac{(x+1)^3+(x-1)^3}{(x+1)^3-(x-1)^3}$

$$f(g(x))=g(f(x))=\frac{(x+1)^6-(x-1)^6}{(x+1)^6+(x-1)^6}$$

۴۸) $2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}=(x+\sqrt{x^2-1})^2$

۴۹) در رابطهٔ داده شده n را به‌ترتیب برابربا ۱ ، ۲ ، ۳ ،... ، n قراردهید وبرابریها را عضو به‌عضو باهم جمع‌کنید، می‌شود:

$$f(n)=1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$$

۵۰) عبارتهای طرف دوم رابطه‌ها را عمل‌کنید و با توجه به‌اینکه

$$a^{\log x}\cdot a^{\log y}=a^{\log x+\log y}=a^{\log xy}$$

عبارتهای طرف اول را نتیجه بگیرید.

۵۱) می‌توانید از مسئلهٔ نمونهٔ (۳-۱۲) استفاده‌کنید.

۵۲) عبارت طرف دوم را عمل‌کنید وعبارت طرف اول را به دست آورید. با استفاده از همین رابطه نخست $f(3)$ وآنگاه از روی‌آن $f(4)$ را (برابربا ۲۰) به‌دست‌آورید.

۵۳) x را به $x-$ تبدیل‌کنید و بین دو رابطه $f(-x)$ را حذف‌کنید، خواهید داشت.

$$f(x)=x(\sin x-\cos x)$$

۵۴) ازبسط $tg\,6a$ برحسب $x=tg\,a$ خواهید داشت:

$$g(x)=\frac{6x-20x^3+6x^5}{1-15x^2+15x^4-x^6}$$

۵۵) به‌فرض $x=1$ و $y=0$ نتیجه می‌شود:

$$a=af(0)\implies f(0)=1\implies f(x)+x\neq 0$$

در رابطهٔ داده شده چون y را به ترتیب به x، $2x$، ...، kx، $(k+1)x$، ...، nx تبدیل‌کنید بنا به‌اصل استقراء ریاضی خواهید داشت:

$$f(nx)+nx=[f(x)+x]^n$$

کـه به فرض $x=\frac{1}{n}$ نتیجه خواهیدگرفت: $f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}=a^{\frac{1}{n}}$ و با توجه به رابطهٔ قبلـی داریـد $f\left(\frac{p}{n}\right)+\frac{p}{n}=a^{\frac{p}{n}}$ یعنی اگـر x گویـا باشد: $f(x)+x=a^x$. با استفاده از روش افناء نتیجه می‌شودکه این رابطه برای وقتی‌که x حقیقی باشد نیز

درست است و بنابرآن:
$$f(x)=a^x-x$$

۵۶) اگر $x=۰$ آنگاه $f(۰)=۰$ و در غیر آن $\frac{f(xy)}{xy}=\frac{f(x)}{x}+\frac{f(y)}{y}$ که به فرض $g(x)=\frac{f(x)}{x}$:

$$g(xy)=g(x)+g(y) \implies g(x)=a\log|x|$$
$$f(x)=ax\log|x|$$

(توجه کنید که در این‌حالت $f(۰)$ تعریف نشده است. می‌توان $f(۰)$ را به شکل $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۰$ تعریف کرد.)

پرسشهای ۳-۱۷

۵۸- ج	۵۹- د	۶۰- د	۶۱- الف
۶۲- الف	۶۳- د	۶۴- ب	۶۵- ج

تمرینهای ۴-۶۷

۱) $-\frac{۲۵\sqrt{۲}}{۱۲}x^{۸}y^{۵}z^{۶}$ ۲) $-۲۱۶a^{۹}b^{۶}x^{۹}y^{۱۲}$

۳) $(۳b-a)x+۲(۲a+b)y$ ۴) $a^{۳}-a^{۶}$

۵) $۳x^{۲a}-۲y^{۲b}-z^{۲c}+x^{a}y^{b}+۳y^{b}z^{c}-۲z^{c}x^{a}$

۶) $m^{۲k}-(mn)^{k-۱}+(mn)^{k+۱}-n^{۲k}$

۷) $۲۸x^{۴}+۲(۸a^{۲}-۷a)x^{۳}-۲۲a^{۳}x^{۲}-۸a^{۵}x$

۸) خارج قسمت: $۲p^{۲}+p-\frac{۱}{۲}$ ، مانده: $\frac{۱}{۲}$

۹) خارج قسمت: $x^{۴}-x^{۲}+۲$ ، مانده: $-۲x-۲$

۱۰) خارج قسمت: $(a+b)x^{۲}-۲ab$ ، مانده: $۴ab^{۲}$

۱۱) $-\frac{۲۸}{۹}$ ، $۵۴-۳۲\sqrt{۳}$ ، $\frac{-۴x^{۳}+۷x-۳}{x^{۳}}$

۱۲) $x^{۴}-۲x^{۲}$ ، $a^{۲}+۲b^{۲}-۲ab\sqrt{۲}-۱$ ، $-\frac{۳}{۴}$

۱۳) -۴ ، ۰ ، $-۹(x+۳)^{۲}+۴(y-۱)^{۲}-۴$ ، $۴(x-۱)^{۲}-۹(y+۳)^{۲}-۴$

۱۴) ۰ ، ۰ ۱۵) ۰ ، $-۴a(a^{۲}-۱)$

۱۶) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ۱۷) 200

۱۸) 146 ۱۹) -120

۲۰) 2 ۲۱) -8

۲۲) -8 ۲۳) $(a-1)[(a+b)^2+1]$

۲۴) درجه $= \frac{n(n+1)}{2}$ ، مجموع ضریبها $= 1$

۲۵) تفاضل چندجمله‌ایها یعنی $4x^2-24x+40$ بر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک بخش‌پذیر است. پس:

$$\frac{4}{1}=\frac{-24}{p}=\frac{40}{q} \Longrightarrow p=-6 \text{ و } q=10$$

۲۶) باید صورت برمخرج بخش پذیر باشد و $a=2$ جواب است.

۲۷) $p=3$ ، $q=5$ ، $r=-1$

۲۸) حاصل‌ضرب به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$abcA(x)+(a^2b+b^2c+c^2a)B(x)+(ab^2+bc^2+ca^2)C(x)$$
$$+(a^3+b^3+c^3+3abc)D(x)$$

۲۹) $A(x)=0$ ، $B(x)=0$

۳۰) $\alpha=1!$ ، $\beta=2!$ ، $\gamma=3!$

۳۱) به‌فرض $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$:

$$\alpha=d \quad ، \quad \beta=a+b+c \quad ، \quad \gamma=6a+2b \quad ، \quad \delta=6a$$

۳۲) $P(x\ ,\ x\ ;\ z)=0$

خارج قسمت : $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx$

۳۳) $P\left(\frac{x^4}{2}\right)=x^{12}-\frac{1}{2}x^8-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{4}$

$$=(x^2)^6-\frac{1}{2}(x^2)^4-\frac{5}{2}(x^2)^2+\frac{5}{4}=Q(x^2),\ Q\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$

۳۴) $\alpha=\beta+7$

۳۵) $P(x)=x^3-\frac{5}{6}x^2-4x+\frac{10}{3}$

۳۶) $x^k=t$ ، $P(x)=Q(t)=(at+c)^{2n+1}+(ct+a)^{2n+1}$

$$Q(-1)=(-a+c)^{2n+1}+(-c+a)^{2n+1}=0$$

۳۷) $ax^{۲}+(a-۱۱)x-۲a+۱۱$

۳۸) $ax^{۲}+c$

۳۹) $a=۶$ ، $b=۹$ ، $c=۲$

۴۰) $p=q=۰$ یا $p=\frac{۱}{۵}$ و $q=\frac{۲}{۵}$

۴۱) $p=q=۱$

۴۲) $k=۲$ ، $p=۰$ یا $\frac{۱}{۲}$

۴۳) $\alpha=-۳$ و $\beta=۲$ یا $\alpha=۲$ و $\beta=-۳$

۴۴) عبارت $P(x)$ درجهٔ دوم است و به‌ازای سه‌مقدار $x=a$ و $x=b$ و $x=c$ صفر می‌شود پس متحد با صفر است.

۴۵) $\forall\alpha:\ \frac{k-m\alpha}{m-\alpha}=$ ثابت $\Longrightarrow \frac{m}{۱}=\frac{k}{m}\ ,\ k=m^{۲}$

۴۶) $m=\pm۴$ یا $m=\pm۵$

۴۷) $a=۳\ ,\ b=-۴$

۴۸) $p^{۲}-۴q=۱$

۴۹) $x_{۱}+x_{۲}+x_{۳}=۰$ و $x_{۱}+x_{۲}=۲ \Longrightarrow x_{۳}=-۲$

$$x_{۱}x_{۲}+x_{۲}x_{۳}+x_{۳}x_{۱}=x_{۱}x_{۲}+x_{۳}(x_{۱}+x_{۲})$$
$$=-۱۵-۲\times۲=-۱۹=p$$
$$x_{۱}x_{۲}x_{۳}=-۲(-۱۵)=۳۰=-q \quad ، \quad q=-۳۰$$

۵۰) $a\alpha^{۲}+b\alpha+c=\beta\ ,\ a\beta^{۲}+b\beta+c=\alpha$

$$\begin{cases} a(\alpha^{۲}-\beta^{۲})+b(\alpha-\beta)=\beta-\alpha \\ a(\alpha^{۲}+\beta^{۲})+b(\alpha+\beta)+۲c=\alpha+\beta \end{cases}$$

از معادلهٔ اول $\alpha+\beta$ برابر با $-\frac{b+۱}{a}$ وآنگاه ازمعادلهٔ دوم $\alpha\beta$ برابر $\frac{ac+b+۱}{a^{۲}}$ به‌دست‌می‌آیدکه همین مقادیر برابرند بامجموع وحاصل‌ضرب ریشه‌های $Q(x)$.

تمرینهای ۴-۶۸

۵۱) بافرض $P(x\ ,\ y)=ax^{۳}+bx^{۲}y+bxy^{۲}+ay^{۳}$ و بامتحد قراردادن

حاصل $P(x, 1-x)$ با $5x^2-5x+1$ خواهیم‌داشت $a=1$ و $b=-2$

۵۲) به‌فرض $P(x)=ax^2+bx+c$ داریم:

$$\begin{cases} 4a+2b+c=1 \\ c=a+b+c-1 \\ 3a+b\sqrt{3}+c=0 \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \end{array} \right.$$

۵۳) از دورابطهٔ $P(1)=0$ و $P'(1)=0$ نتیجه خواهد شد:

$$b=\frac{2ac}{a+c}$$

۵۴) $P(x, y)=a(x^3-x^2y-xy^2+y^3)$

۵۵) با فرض اینکه $P(x, y)$ نسبت به x و y متقارن و بر $x-y$ بخش‌پذیر باشد داریم:

$$P(x, y)=(x-y)Q(x, y) \quad \text{و} \quad P(y, x)=(y-x)Q(y, x)$$

$$P(x, y)=P(y, x) \Longrightarrow Q(x, y)=-Q(y, x)$$

با تبدیل x به y خواهیم داشت $Q(y, y)=0$ یعنی $Q(x, y)$ بر $x-y$ بخش‌پذیر است.

۵۶) $1-P\left(\frac{1}{m}\right)=0 \Longrightarrow m=\pm 1$

$$2-f(m)\equiv m(xy-x)-y-x^2+2\equiv 0$$

$$(x=0 \ , \ y=2) \quad ، \quad (x=\pm 1 \ , \ y=1)$$

۵۷) $y=(ax^2+bx+c)\sin x+(dx^2+ex+f)\cos x$

$$y'=(2ax+b-dx^2-ex-f)\sin x$$
$$+(ax^2+bx+c+2dx+e)\cos x\equiv x^2\cos x$$

$$\begin{cases} -dx^2+(2a-e)x+b-f\equiv 0 \\ ax^2+(b+2d)x+c+e\equiv x^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{lll} a=1 \ ، & b=0 \ ، & c=-2 \\ d=0 \ ، & e=2 \ ، & f=0 \end{array} \right.$$

$$P(x)\equiv x^2-2 \quad ، \quad Q(x)\equiv 2x$$

۵۸) $\begin{cases} \alpha^5-5p\alpha+4q=0 \\ 5\alpha^4-5p=0 \end{cases} \Longrightarrow p^5=q^4$

۵۹) $a=\frac{1}{6}$ ، $b=-\frac{1}{12}$

۶۰) $x^5-8x^4+19x^3-9x^2-27\equiv(x-\alpha)^3(x^2+px+q)$

ونتیجه خواهد شد $\alpha=3$. می‌توان جواب مشترك معادله‌های $P(x)=0$، $P'(x)=0$ و $P''(x)=0$ را به‌دست آورد؛ برای این کار هرگاه درمعادلهٔ $P'(x)=0$ عامل $x\neq 0$ راحذف وبعد بین‌این‌معادله‌ومعادلهٔ $P''(x)=0$ جملهٔ x^3 را نیز حذف‌کرد معادلهٔ درجهٔ دومی به‌دست می‌آید که جوابهایش ۳ و $\frac{9}{16}$ است‌که ۳ درمعادله‌های $P'(x)=0$ و $P(x)=0$ نیز صدق می‌کند و ریشهٔ سه‌گانهٔ $P(x)$ است.

۶۱) مشتق $P(x)$ یعنی $P'(x)$ بر $(x+1)^2$ و بر $(x-1)^2$ و در نتیجه بر $(x^2-1)^2$ بخش‌پذیر است و چون از درجهٔ ۴ است پس:

$$P'(x)=a(x^2-1)^2=a(x^4-2x^2+1)$$

$$P(x)=a\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x\right)+b$$

$$P(1)=2\ ,\ P(-1)=-2 \implies a=\frac{15}{4}\ ,\ b=0$$

$$P(x)=\frac{1}{4}\left(3x^5-10x^3+15x\right)$$

۶۲) $P=0$ ، دو مجذوری

معکوسهٔ نوع اول، $\begin{cases}P=-1\pm\sqrt{5}\\ q=\frac{3\mp\sqrt{5}}{2}\end{cases}$ یا $\begin{cases}P=0\\ q=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}$

معکوسهٔ نوع دوم، $\begin{cases}P=-1\pm\sqrt{5}\\ q=\frac{-1\mp\sqrt{5}}{2}\end{cases}$

۶۳) $P(x)=\frac{r}{2}(x^2-x+2)\ ,\ P(4)=7r$

۶۴) $\begin{cases}P(x+1)=(x-1)^2Q(x)\\ P(x-1)=(x+1)^2R(x)\end{cases} \implies \begin{cases}P(x)=(x-2)^2Q(x-1)\\ P(x)=(x+2)^2R(x+1)\end{cases}$

$$P(x)=(x^{۲}-۴)^{۲}S(x)\ ,\ d^{\circ}P(x)=۴\ ,\ P(۱)=۱$$
$$\Longrightarrow\ P(x)=\frac{۱}{۹}(x^{۲}-۴)^{۲}$$

۶۵) $\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} x=\dfrac{u+v}{۲} \\ y=\dfrac{u-v}{۲} \end{array}$

$$f(u\ ,\ v)=\frac{u^{۲}-uv}{۲} \Longrightarrow f(x,\ y)=\frac{x^{۲}-xy}{۲}$$

۶۶) $(x-a_{۱})(x-a_{۲})\ \dots\ (x-a_{n})=$
$$(x-x_{۱})(x-x_{۲})\ \dots\ (x-x_{n})-\lambda$$

۶۷) از روش استقراء ریاضی استفاده کنید:

$$P(\cos\alpha)=۲\cos^{۲}\alpha-۱=\cos ۲\alpha$$
$$\underbrace{PP\ \dots\ P}_{\text{مرتبه } k+۱}(\cos\alpha)=۲\cos^{۲}۲^{k}\alpha-۱=\cos ۲^{k+۱}\alpha$$

۶۸) $a^{۳}=(a^{۲}+a+۱)(a-۱)+۱$
$$P(a)=(a^{۳})^{p}.a^{۲}+(a^{۳})^{q}.a+(a^{۳})^{r}\equiv a^{۲}+a+۱$$
$$\equiv ۰\ (\text{mod}.a^{۲}+a+۱)$$

۶۹) $u_{n+۳}-u_{n}=x^{۲n+۶}+x^{n+۳}+۱-(x^{۲n}+x^{n}+۱)$
$$=x^{۲n}(x^{۶}-۱)+x^{n}(x^{۳}-۱)=(x^{۲}+x+۱)Q(x)$$

۷۰) $\begin{cases} \alpha+\alpha^{۲}=-p \\ \alpha.\alpha^{۲}=q \end{cases} \Longrightarrow p^{۳}-۳pq+q+q^{۲}=۰$

۷۱) $\begin{cases} \text{تصاعد حسابی}\ :\ p^{۳}-۴pq+۸r=۰ \\ \text{تصاعد هندسی}\ :\ p^{۳}s=r^{۲} \end{cases}$

۷۲) $P(x)=۰\ ,\ P'(x)=۰ \Longrightarrow nP(x)-xP'(x)=۰$

$$ax+b=۰ \Longrightarrow x=-\frac{b}{a}$$

زوج $n\ :\ a^{n}=b^{n-۱}$ ، فرد $n\ :\ a^{n}=-b^{n-۱}$

۷۳) هرمقسوم‌علیه مشترک دو چندجمله‌ای مقسوم‌علیهی از چندجمله‌ای

$$ax^{۵}+bx+c-ax^{۲}(x^{۳}-۱)=ax^{۲}+bx+c$$

نیز می‌باشد. بنابراین بایستی ax^2+bx+c برهیچ یك ازدوعامل $x-1$ و x^2+x+1 بخش‌پذیر نباشدکه نتیجه می‌شود:

$a+b+c\neq 0$ و $(a\neq b$ یا $b\neq c$ یا $c\neq a)$

۷۴) $$\begin{cases} 2^m+2n=10 \\ (-1)^m-n=4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2^m+2(-1)^m=18 \\ m\in Z \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} m=4 \\ n=-3 \end{array} \right.$$

۷۵) $$\begin{cases} a+b+c=-a \\ ab+bc+ca=b \\ abc=-c \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{array} \right.$$

۷۶) $P(x)\equiv x^3+3x^2+2x-4$

$R(x)\equiv 3x^2+9x+2$

۷۷) $24x-27$

۷۸) $P(x)=(x-a)Q(x)+a \quad , \quad P(0)=-aQ(0)+a=p$

عدد p بر a بخش‌پذیر است. اما p عدد اول بزرگتراز a است. پس $a=1$

$P(x)=(x-1)^n q+1 \quad , \quad P(0)=(-1)^n q+1=p$

چون p بزرگتر از یك است پس $(-1)^n$ مثبت و n زوج است.

۷۹) $P(x)-Q(x)=Q(x)R(x)$

$P(x)-Q(x)=x^9(x^{9990}-1)$

$+x^8(x^{8880}-1)+\dots+x(x^{1110}-1)$

هریك از دوجمله‌ایهای داخل پرانتزها بر $x^{10}-1$ و درنتیجه بر $Q(x)$ بخش‌پذیر است زیرا:

$x^{10}-1=(x-1)(x^9+x^8+\dots+x+1)$

۸۰) $s(s^4-5ps^2+5p^2)$

۸۱) ماندهٔ‌تقسیم که متحدبا صفرقرارداده شودبه‌دست می‌آید: $c=\frac{b^2}{a}$ و $d=\frac{b^3}{a^2}$ و:

$P(x)=\frac{1}{a^2}(ax+b)^3 \quad , \quad Q(x)=\frac{1}{a}(ax+b)^2$

۸۲) چندجمله‌ای را نسبت به m مرتب و متحد با صفر قرار دهید، نتیجه خواهد شد $P(1)\equiv 0$.

۸۳) اولاً خواهید داشت:

$$P(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+c$$

ثانیاً چون x را به‌ترتیب ۱ ، ۲ ، ۳ ، ... ، n بگیرید خواهید داشت:

$$P(1)-P(0)=1^2$$
$$P(2)-P(1)=2^2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$P(n)-P(n-1)=n^2$$

از جمع نظیر به‌نظیر دوطرف برابریهای بالا به‌دست می‌آید:

$$\sum_1^n n^2=P(n)-P(0)=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

۸۴) $d^\circ P(x)=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

۸۵) $P(1)=\dfrac{a^{2n+1}-b^{2n+1}}{a-b}$

۸۶) $P(0)=0$ ؛ $P(-1)=0$ ، $P\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

۸۷) $Q(x)=(x+1)(x-1)^2$

۸۸) $P(a^p,\ a^p,\ c^p)=0$ ، $P(a^p,\ b^p,\ b^p)=0$ ، $P(c^p,\ b^p,\ c^p)=0$

۸۹) $P(x)=0$ ، $P'(x)=0$ ، $P''(x)=0$ ، $P'''(x)=0$

$$\frac{1}{12}P'''(x)-\frac{1}{6x}P''(x)=5x^3-5=0 \implies x=1$$

$$P(1)=P'(1)=P''(1)=P'''(1)=0$$

$$\implies p=-\frac{15}{2} \ ،\ q=-6 \ ،\ r=\frac{5}{2}$$

۹۰) $P(x)\equiv Q(x+1) \implies a=3$ ، $b=2$ ، $c=-3$ ، $d=1$

۹۱) $\forall n:[P(1)=0 ، P'(1)=0 ، P''(1)=0 ، P'''(1)=0]$

$P^{(4)}(1)=0 \implies 2n^2(n^2-1)=0$ و $n=0$ یا ± 1 غیرقابل قبول

۹۲) $\frac{1}{35}(4x^2+11x+67)$

۹۳) $27p^4-256q^3=0$

۹۴) اگر چندجمله‌ای بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر باشد نتیجه می‌شود $a=n-1$ و $b=-n$ اما مشتق سوم و مرتبه‌های بالاتر ازآن فقط در ازای $n=0$ و

$n = 1$ می‌تواندریشهٔ یك‌داشته باشد و این مقادیرقابل‌قبول نیستند زیراچندجمله‌ای را به‌صفر تبدیل می‌کنند.

۹۵) $P(x, y) \to 7ps(s^2-p)^2 , Q(x, y) = p(s^2-p)$

۹۶) $P(x) = a(16x^5 - 20x^3 + 5x)$

۹۷) هرگاه داشته باشیم:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$
$$= a_n(x-\alpha)^n + a_{n-1}(x-\alpha)^{n-1} + \dots + a_0$$

با استفاده از بسط دوجمله‌ای نیوتن و پس از حذف جمله‌های متشابه از دو طرف نتیجه خواهد شد:

$$\alpha(na_n x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_0) \equiv 0$$

چون na_n مخالف صفر است پس این اتحاد به غیر از $\alpha = 0$ برقرار نخواهد بود.

۹۸) $(p, q) = (0, 0)$ یا $(0, -1)$ یا $(1, 1)$ یا $(-2, 1)$ یا $(0, -1)$

۹۹) $p = 2$ یا -14

$$\text{خارج قسمت} = x^3 + (2-p)x^2 + (7-2p)x + 14 - 6p$$

۱۰۰) $P_2 \equiv 2x^2 - 1 \quad , \quad P_3 \equiv 4x^3 - 3x$

$P_4 \equiv 8x^4 - 8x^2 + 1 \quad , \quad P_5 \equiv 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$$\left.\begin{array}{ll} 2)\ P_0 = 1 & , \quad d^\circ P_0 = 0 \\ P_1 \equiv x & , \quad d^\circ P_1 = 1 \\ P_{k+1} = 2xP_k - P_{k-1} & \\ d^\circ P_{k+1} = d^\circ x + d^\circ P_k = k+1 & \end{array}\right\} \Longrightarrow d^\circ P_n = n$$

۳) می‌توانید روش استقراء ریاضی را به‌کار ببرید.

۴) $a_n = 2^{n-1} \quad , \quad a_{n-2} = -n \times 2^{n-3}$

۵) $P_n(1) = 2P_{n-1}(1) - P_{n-2}(1)$

و با روش استقراء ریاضی ثابت خواهد شدکه مقدارعددی P_n به‌ازای $x = 1$ برابریك است. وقتی $x = -1$ باشد، اگر n زوج باشد مقدار P_n برابریك است (زیـرا با تبدیل x به $-x$ چندجمله‌ای فرق نمی‌کند) و اگـر n فرد باشد مقدار P_n برابر -1 است (زیرا باتبدیل x به $-x$ مقدار P_n به $-P_n$ تبدیل می‌شود).

۱۰۱) $\dfrac{3a^4 - 2a^3 - 1}{2a^2}x - \dfrac{3a^4 - 4a^3 - 1}{2a^2}$

۱۰۲) $y'=6(2x^3+x^2-3x+1)$

$$(2x^3+x^2-3x+1)(px+q)+ax^2+bx+c$$
$$\equiv 3x^4+2x^3-9x^2+6x+3$$

$$a=-\frac{19}{4}\quad،\quad b=\frac{21}{4}\quad،\quad c=\frac{11}{4}\quad؛$$

$$y=-\frac{1}{4}(19x^2-21x-11)$$

۱۰۳) $P(x)=(x^2+1)A(x)-1=(x^3+1)B(x)+1$

$$(x^2+1)A(x)-(x^3+1)B(x)=2$$

مانند مسئلهٔ نمونهٔ (۴-۳۶) عمل کنید خواهید داشت:

$$P(x)=-x^4-x^3-x$$

۱۰۴) $D(x)=x^2-1$ و از تقسیم دوطرف رابطه بر x^2-1 خواهید داشت:

$$(x^2+x+2)U(x)+(x^3+2)V(x)=1$$

مانند مسئلهٔ نمونهٔ (۴-۳۶) عمل کنید که جواب کلی می‌شود:

$$U(x)=\frac{-x^2-4x+6}{22}-(x^3+2)Q(x)$$

$$V(x)=\frac{x+5}{22}+(x^2+x+2)Q(x)$$

که $Q(x)$ چندجمله‌ای دلخواه است و اگر آن را برابر صفر بگیریم جوابهای با کمترین درجه به‌دست می‌آیند:

$$U(x)=\frac{-x^2-4x+6}{22}\quad،\quad V(x)=\frac{x+5}{22}$$

۱۰۵) $(x-a)^n-b\quad؛\quad (x-1)^3-2=x^3-3x^2+3x-3$

۱۰۶) $\alpha+\beta+1=-1\ ,\ \alpha.\beta.1=2 \implies \alpha+\beta=-2\ ,\ \alpha\beta=2$

$$Q(\alpha)+\alpha=\beta+\alpha=-2\ ,\ Q(\beta)+\beta=\alpha+\beta=-2$$
$$Q(x)+x=\lambda(x-\alpha)(x-\beta)-2$$
$$=\lambda[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]-2\ ,\ Q(1)=1$$

$$Q(x)=\frac{1}{5}(4x^2+3x-2)$$

$$Q[Q(x)]-x=\frac{1}{125}(64x^4+96x^3+32x^2-128x-64)$$
$$=\frac{32}{125}(2x+1)(x^3+x^2-2)$$

۱۰۷) ازضرب عضوبه‌عضو دو رابطهٔ $u+v=۱$ و $u^{n-۱}+v^{n-۱}=S_{n-۱}$ دریکدیگر نتیجه خواهد شد:

$$S_n=S_{n-۱}-pS_{n-۲}$$
$$S_۰=۲\ ،\ S_۱=۱\ ؛\ S_۲=۱-۲p\ ،\ S_۳=۱-۳p$$
$$S_۴=۱-۴p+۲p^۲\ ،\ S_۵=۱-۵p+۵p^۲$$

۲) $E(p)\equiv$ مقدار ثابت $\Longrightarrow ۵a=-۲b=۳c$ ، مقدارثابت $=\dfrac{a}{b}$

۳) $u=\sin^۲x\ ،\ v=\cos^۲x \Longrightarrow A=\frac{۱}{۵}S_۵-\frac{۱}{۲}S_۴+\frac{۱}{۳}S_۳=\frac{۱}{۳۰}$

۱۰۸) $Q(x)=۲x^۲-۱\ \ ،\ \ R(x)=۴x^۳-۳x$

$$P(Q[R(x)])=۲^{۱۲}x^{۱۲}-\ldots+۳$$

$$\cos۱۰^\circ\cos۲۰^\circ\cos۳۰^\circ\ \ldots\ \cos۸۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲^۶}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۳}{۲^۸}$$

۱۰۹) $a=\frac{۱}{۲}P(۱)\ ،\ b=-P(۲)\ ،\ c=\frac{۱}{۲}P(۳)\ ،\ k=۲۳۹$

۱۱۰) ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $Q(x)$ مضربی از بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك است و این مانده برابر است با:

$$۲۳۳x^۳+۱۴۴x^۲-۶۱۰x-۳۷۷$$
$$=۲۳۳x^۳+(۳۷۷-۲۳۳)x^۲-(۲۳۳+۳۷۷)x-۳۷۷$$
$$=(x^۲-x-۱)(۲۳۳x+۳۷۷)$$
$$D(x)=x^۲-x-۱$$

۱۱۱) $P(x)=(x+۲)^۳Q(x)+۲=(x-۲)^۳R(x)-۲$

$$(x-۲)^۳R(x)-(x+۲)^۳Q(x)=۴$$

بنابرمسئلهٔ نمونهٔ (۴-۳۶) معلوم خواهیدکردکه $Q(x)$ و $R(x)$ از درجهٔ دوم و درنتیجه $P(x)$ ازدرجهٔ‌پنجم‌است. اما $P'(x)$ بر $(x^۲-۴)^۲$ و $P''(x)$ بر $x^۲-۴$ بخش پذیر است پس:

$$P''(x)=(x^۲-۴)(ax+b)$$
$$P'(x)=\int(x^۲-۴)(ax+b)dx\ \ ،\ \ P'(\pm۲)=۰$$
$$P(x)=\int P'(x)dx\ \ \text{و}\ \ P(۲)=-۲\ \ \text{و}\ \ P(-۲)=۲$$
$$P(x)=-\frac{۱}{۱۲۸}(۳x^۵-۴۰x^۳+۲۴۰x)$$

۱۱۲) $P(x)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترك $A(x)$ و $B(x)$ وبنابراین مقسوم علیهی از تفاضل آنهاست؛

$$B(x)-A(x)=x^{۸۵}-x^{۵۱}=x^{۵۱}(x^{۳۴}-۱)$$
$$=x^{۵۱}(x^{۱۷}+۱)(x^{۱۷}-۱)$$

$$P(x)=x^{۱۷}+۱$$

۱۱۳) $Q(x)$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك $A(x)$ و $B(x)$ است که برابر است با:

$$Q(x)=x^{۲}-x\cos\alpha+۱$$

۱۱۴) هرچند جمله‌ای زوج شامل جمله‌های با نمای زوج است، پس مجموع هردوچند جمله‌ای زوج یك چندجمله‌ای زوج است، چندجمله‌ای صفرزوج است، قرینهٔ چند جماه‌ای زوج یك چندجمله‌ای زوج‌است، بالاخره حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای زوج یك چندجملـه‌ای زوج است. زیر حلقهٔ چندجمله‌ایهای زوج جابجایی و یك دار و حوزهٔ درست است (یك یعنی $۱\times x^{\circ}$ نیز زوج است).

۱۱۵) این چندجمله‌ایها مضربهای چندجمله‌ای $۲x^{\circ}=۲$ مـی‌باشند. همچنین می‌تـوان ویژگیهای مربوط به‌ایده‌آل را دربارهٔ آنها ثابت‌کرد:

۱۱۶) $P(x)\equiv\dfrac{۱-x^{p+۱}}{۱-x}$ ، $Q(x)\equiv\dfrac{۱-x^{q+۱}}{۱-x}$

۱) هرگاه r بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو عدد $p+۱$ و $q+۱$ باشد بزرگترین مقسوم علیه مشترك $P(x)$ و $Q(x)$ برابر خواهد بود با:

$$D(x)=\frac{۱-x^{r}}{۱-x}=۱+x+\ldots+x^{r-۱}$$

۲) برای آنکه $P(x)$ بـر $Q(x)$ بخش‌پذیر باشد لازم و کافی است که $p+۱$ مضرب $q+۱$ باشد.

$$p=۸\ ,\ q=۵\ :\ P(x)=\frac{۱-x^{۹}}{۱-x}\ ,\ Q(x)=\frac{۱-x^{۶}}{۱-x}\ ؛$$

$$D(x)=\frac{۱-x^{۳}}{۱-x}$$

$$p=۹\ ,\ q=۴\ :\ p(x)=\frac{۱-x^{۱۰}}{۱-x}\ ,\ Q(x)=\frac{۱-x^{۵}}{۱-x}\ ؛$$

$$\frac{۱-x^{۱۰}}{۱-x}=\left(\frac{۱-x^{۵}}{۱-x}\right)(۱+x^{۵})$$

۱۱۷) از اینکه ضریب جملهٔ بانمای $n-۱$ از $Q(x)$ منفی است برمی‌آیدکه $n-۱$ فرد

و n زوج است و داریم:

$$Q(x)=\frac{1-x^n}{1+x} \quad \text{و} \quad n \text{ زوج}$$

در $P(x)$ با فرض $x^n=t$ داریم:

$$P(x)=Q(t)=1-t+t^2-t^3+\ldots+t^{k-1}-t^k$$

$Q(1)=0$ پس $Q(t)$ بر $1-t$ یعنی $P(x)$ بر $1-x^n$ و درنتیجه بر $Q(x)$ بخش‌پذیر است؛ ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $Q(x)$ صفر است و خارج قسمت می‌شود:

$$(1+x)(1+x^{2n}+x^{4n}+\ldots+x^{(k-1)n}) \quad , \quad k \text{ فرد}$$

۱۱۸) $P(x)=5D(x)$ و $Q(x)=7(x^2+xy+y^2)D(x)$

$$M(x)=\frac{5D(x)\times 7(x^2+xy+y^2)D(x)}{D(x)}=5[(x+y)^7-x^7-y^7]$$

$$D(x)=\frac{5[(x+y)^7-x^7-y^7]}{35(x^2+xy+y^2)}=\frac{7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2}{7(x^2+xy+y^2)}$$

$$D(x)=xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$$

$$P(x)=(x+y)^5-x^5-y^5 \quad \text{و} \quad Q(x)=(x+y)^7-x^7-y^7$$

۱۱۹) $\dfrac{5Q(x)}{7P(x)}=x^2+xy+y^2$

۱۲۰) اگرعددهای α، β، γ ... ریشه‌های $P(x)$ باشند، همهٔ آنها به‌غیرازیکی‌ریشه‌های $P'(x)$ نیز می‌باشند و درنتیجه هر کدام از آنها ریشهٔ مضاعف $P(x)$ است و این ممکن نیست مگرآنکه همهٔ ریشه‌ها با هم برابر باشند؛ یعنی $P(x)$ به‌صورت $a(x-\alpha)^n$ باشد.

۱۲۱) ۱) الف) چون درجهٔ A حداکثر ۲ است پس درجهٔ A' حداکثر ۱ است و در نتیجه درجهٔ $P(A)$ نیزحداکثر ۲ است و $P(A)$ عضوی از E است. یعنی P تابعی است که هرعضو E را به‌عضو دیگری از E تبدیل می‌کند.

ب) $$P(A+B)=A+B+(x+1)(A'+B')$$
$$=[A+(x+1)A']+[B+(x+1)B']$$
$$=P(A)+P(B)$$
$$P(\lambda A)=\lambda A+(x+1)\lambda A'=\lambda P(A)$$

۲) $$P(1)=1+(x+1)\times 0=1$$
$$P(x)=x+(x+1)\times 1=2x+1$$

$$P(x^2)=x^2+(x+1)\times 2x=3x^2+2x$$
$$P(ax^2+bx+c)=P(ax^2)+P(bx)+P(c)$$
$$=a(3x^2+2x)+b(2x+1)+c$$
$$=3ax^2+2(a+b)x+b+c$$

۳) $a_1=3a$ ، $b_1=2(a+b)$ ، $c_1=b+c$

$$A\equiv\frac{a_1}{3}x^2+\left(\frac{b_1}{2}-\frac{a_1}{3}\right)x+c_1-\frac{b_1}{2}+\frac{a_1}{3}$$

۴) $Q_1=1 \Longrightarrow P(Q_1)=1$ ، $\lambda_1=1$

$$Q_2=x+c_2 \Longrightarrow P(Q_2)=2x+c_2+1$$
$$c_2+1=2c_2 \Longrightarrow c_2=1 \text{ و } Q_2=x+1 \text{ و } \lambda_2=2$$
$$Q_3=x^2+b_3x+c_3$$
$$\Longrightarrow P(Q_3)=3x^2+2(1+b_3)x+b_3+c_3$$
$$2(1+b_3)=3b_3 \text{ و } b_3+c_3=3c_3 \Longrightarrow b_3=2 \text{ و } c_3=1$$
$$Q_3=x^2+2x+1=(x+1)^2 \text{ و } \lambda_3=3$$
$$ax^2+bx+c=\alpha Q_1+\beta Q_2+\gamma Q_3$$
$$\gamma=a \text{ ، } 2\gamma+\beta=b \text{ ، } \gamma+\beta+\alpha=c$$
$$\alpha=c-b+a \text{ ، } \beta=b-2a \text{ ، } \gamma=a$$

۵) $P(A)=\alpha Q_1+2\beta Q_2+3\gamma Q_3$

$$=(a-b+c)Q_1+2(b-2a)Q_2+3aQ_3$$
$$P[P(A)]=\alpha P(Q_1)+2\beta P(Q_2)+3\gamma P(Q_3)$$
$$=\alpha Q_1+4\beta Q_2+9\gamma Q_3$$
$$\underbrace{PP\ldots P}_{\text{n مرتبه}}(A)=\alpha Q_1+2^n\beta Q_2+3^n\gamma Q_3$$

پرسشهای ۴-۶۹

۱۲۳- ب	۱۲۴- د	۱۲۵- الف	۱۲۶- ب
۱۲۷- ب	۱۲۸- ج	۱۲۹- ج	۱۳۰- د

تمرینهای ۵-۲۹

۱) $1-x^2+x^4$ ۲) x^8+x^4+1

۳) $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$

۴) $a^4+b^4+c^4+4a^3b+4a^3c+4ab^3+4b^3c+4ac^3+4bc^3+$

$+6a^2b^2+6b^2c^2+6c^2a^2+12a^2bc+12ab^2c+12abc^2$

۵) $a^3+b^3+c^3+d^3+3a^2b+3a^2c+3a^2d+3b^2c+3b^2d+3b^2a+$
$+3c^2d+3c^2a+3c^2b+3d^2a+3d^2b+3d^2c+6abc+6bcd+$
$+6cda+6dab\,.$

۶) $4\sqrt{2}a^2b^2$ ۷) $8a^2+10b^2$

۸) $4\sqrt{2}b(81a^2+8b^2)$ ۹) a^4-9b^4

۱۰) $1+12x+60x^2+160x^3+240x^4+192x^5+64x^6$

۱۱) $x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$

۱۲) $(6a+6bx)^2=36(a^2+2abx+b^2x^2)$

۱۳) $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2\geqslant 0$

۱۴) $a^2+b^2\geqslant 2ab \implies \frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}\geqslant 2$

۱۵) $a+\frac{1}{a}\geqslant 2 \implies a-1\geqslant 1-\frac{1}{a}$

۱۶) $(a-b)^2\geqslant 0 \implies a^2-ab+b^2\geqslant ab \implies a^3+b^3\geqslant ab(a+b)$

۱۷) $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$
$$\implies a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\geqslant 3(ab+bc+ca)$$
$$\implies (a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca)$$

۱۸) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\geqslant 2+2+2$

۱۹) $xy=\sqrt{4-3}=1$ و $(x+y)^2=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2=6$
$x+y=\sqrt{6}$ و $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=2$ و $x-y=\sqrt{2}$

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{6} \\ x-y=\sqrt{2} \end{cases} \implies \left| \begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

۲۰) $P(-a-b)=(-a-b)^3-p(a+b)+a^3+b^3=0$
$$\implies p=-3ab$$

۲۱) $a=1$ ، $b=1$ ، $c=2$ ، $d=-3$

۲۲) $(x^۲+bx+c)^۲ \equiv P(x) \implies b=۲ \text{ ، } c=-۸$

۲۳) $P(x, y, z)=(x+y+z)^۲+(x+۱)^۲+(y-۱)^۲+۱ \geqslant ۰$

$P(x)=۱ \iff x=-۱ \text{ ، } y=۱ \text{ ، } z=۰$

۲۴) $m=\frac{۲۰۳+۱۱۲\sqrt{۲}}{۴۷}$ ۲۵) $x^۲+۲x+۴$

۲۶) طرف اول را عمل کنید و ساده نمائید.

۲۷) $۱۶ab(a^۲+b^۲)-۱۶cd(c^۲+d^۲)$

۲۸) اولاً دوطرف را عمل کنید که درنتیجه یك عبارت به‌دست خواهد آمد.

ثانیاً از اتحاد ثابت شده نتیجه می‌شود:

$$۳(ab+bc+cd)=s^۲-\frac{۱}{۲}[(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲]$$

ماکسیمم طرف اول وقتی است که عبارت داخل کروشه مینیمم یعنی برابرصفرباشد که نتیجه می‌شود.

$$a-b=b-c=c-a=۰ \implies a=b=c$$

۲۹) اگر x و y اندازه‌های دوضلع و z اندازهٔ وتر باشد از رابطهٔ $S=\frac{xy}{۲}$ نتیجه می‌شود $xy=۲S$ مقدار ثابت است. اما:

$$z^۲=x^۲+y^۲=(x-y)^۲+۲xy=(x-y)^۲+۴S$$

$z^۲$ و درنتیجه z وقتی مینیمم است که $(x-y)^۲$ مینیمم باشد یعنی $x=y$ و مثلث متساوی‌الساقین باشد.

۳۰) اگر a و b آن دوعدد باشند از اتحاد $(a+b)^۲-(a-b)^۲=۴ab$ داریم:

$$۴ab=۵۱^۲-(a-b)^۲$$

$۴ab$ و در نتیجه ab وقتی ماکسیمم است که $(a-b)^۲$ یعنی $a-b$ مینیمم باشد. مجموع دوعدد طبیعی a و b عدد فرد ۵۱ است. پس a و b نمی‌توانند برابر باشند. پس مینیمم $a-b$ برابر یك است و:

$$\begin{cases} a+b=۵۱ \\ a-b=۱ \end{cases} \implies \left| \begin{array}{l} a=۲۶ \\ b=۲۵ \end{array} \right.$$

۳۱) اگر a و b و c بعدهای مستطیل فرض شود طول قطرآن $a^۲+b^۲+c^۲=d^۲$ است و از اتحاد

$$(a+b+c)^۲=۳(a^۲+b^۲+c^۲)-[(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲]$$

نتیجه می‌شودکه $a+b+c$ وقتی ماکسیمم است که عبارت داخل کروشه‌مینیمم

باشد، یعنی:

$$a-b=b-c=c-a=0 \implies a=b=c$$

$$3a^2=d^2 \implies a=b=c=\frac{d\sqrt{3}}{3}$$

۳۲) نابرابری واسطه‌های هندسی وحسابی برای a و b را به‌کار ببرید.

۳۳) $(x^2+y^2)^2-2[(x^2+y^2)^2-2x^2y^2]=-(x^2+y^2)^2+4x^2y^2$

$$=-(x^2-y^2)^2=0 \iff x^2-y^2=0$$

$$x\neq y : (x^2-y^2=0 \iff x+y=0)$$

۳۴) $(x+y)(x^3+y^3)-4x^2y^2=x^4+y^4+x^3y+xy^3-4x^2y^2$

$$=(x^2-y^2)^2+xy(x^2+y^2-2xy)=(x^2-y^2)^2+xy(x-y)^2$$

$$=(x-y)^2[(x+y)^2+xy]=0 \text{ و } xy>0 \iff x=y$$

تمرینهای ۵-۳۰

۳۵) x^8-1 **۳۶)** x^6+1

۳۷) $-(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)$

۳۸) $(x^2+2x+1)^2-2(x+1)^2=(x^2+2x+1)(x^2+2x-1)$

$$=(x^2+2x)^2-1=x^4+4x^3+4x^2-1$$

۳۹) $(x^2-ax+1)^2-bx^2=x^4-2ax^3+(a^2-b+2)x^2-2ax+1$

۴۰) $x^4-4x^3\cos a\cos b+2x^2(1+\cos 2a+\cos 2b)-4x\cos a\cos b+1$

۴۱) $[(x^2+1)^2-x^2(2+\sqrt{2})][(x^2+1)^2-x^2(2-\sqrt{2})]$

$$=[(x^4+1)-x^2\sqrt{2}][(x^4+1)+x^2\sqrt{2}]=x^8+1$$

۴۲) $a^5-5\sqrt{2}a^4b+20a^3b^2-20\sqrt{2}a^2b^3+20ab^4-4\sqrt{2}b^5$

۴۳) $(x-y)^6+6(x-y)^5+15(x-y)^4+20(x-y)^3+15(x-y)^2$

$$+6(x-y)+1=x^6+y^6-6(x^5y+xy^5)+6(x^5-y^5)$$

$$+15(x^4y^2+x^2y^4)-30(x^4y-xy^4)+15(x^4+y^4)$$

$$-20x^3y^3+60(x^3y^2-x^2y^3)-60(x^3y+xy^3)+$$

$$+20(x^3-y^3)+90x^2y^2-60(x^2y-xy^2)$$

$$+15(x^2+y^2)-30xy+6(x-y)+1$$

۴۴) $1-243x^{20}$ **۴۵)** $16\sqrt{2}x^2y^3(x^4+8y^6)$

۴۶) می‌توانید طرف اول را با استفاده از اتحاد زیرعمل کنید:

$$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$$

۴۷) طرف اول را با استفاده از اتحاد زیرعمل کنید:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

۴۸ و ۴۹) دوطرف را عمل کنید تا به‌یك عبارت برسید.

۵۰) $(a+b)(a+4b)=a^2+5ab+4b^2$

$$(a+2b)(a+3b)=a^2+5ab+6b^2$$

$$(a^2+5ab+4b^2)(a^2+5ab+6b^2)+b^4$$
$$=(a^2+5ab)^2+10b^2(a^2+5ab)+25b^4$$
$$=(a^2+5ab+5b^2)^2$$

۵۱) از اتحاد زیراستفاده کنید:

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$

۵۲) اگرطرف‌اول را $P(x)$ بگیریم‌عبارت $P(x)-x$ نسبت به x ازدرجهٔ دوم‌است و به‌ازای سه‌مقدار $x=a$ ، $x=b$ و $x=c$ صفرمی‌شود پس‌متحد با صفراست.

۵۳) نابرابری واسطه‌های حسابی و هندسی را بـرای سه مقدار $a+1$ ، $b+1$ و $c+1$ به‌کار ببرید.

۵۴) با استفاده از دستور مجموع جمله‌های تصاعد هندسی خواهیم داشت:

$$2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2-\frac{1}{2^{n-1}}<2$$

۵۵) نابرابری $\frac{1}{n\times 2^n}<\frac{1}{2^n}$ را ثابت کنید و نابرابریهـای حاصـل از آن به ازای $n=1$ ، $n=2$ ، ... تا $n=n$ را نوشته با هـم جمع کنید و از مسئلهٔ قبل استفاده کنید.

۵۶) $\frac{1}{3}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)\geqslant\sqrt[3]{\frac{a}{c}\times\frac{c}{b}\times\frac{b}{a}}=1$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)\geqslant\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\times\frac{b^2}{c^2}}=\frac{a}{c}$$ و ...

۵۷) نابرابری به‌نابرابری زیرتبدیل می‌شود:

$$ab(a-b)^2+bc(b-c)^2+ca(c-a)^2\geqslant 0$$

۵۸) تفاضل‌طرف دوم برطرف اول به‌حاصل‌ضرب دوعامل هم‌علامت تبدیل می‌شود.

۵۹) نابرابری واسطه‌های حسابی و هندسی را به‌کار ببرید؛ عبارت طرف اول نسبت

به a و b متقارن و شامل $n+1$ جمله است وواسطهٔ هندسی آنها می‌شود
$\sqrt{(ab)^n}$

۶۰) $a^4+b^4+c^4+d^4 \geqslant 2(a^2b^2+c^2d^2) \geqslant 4\sqrt{a^2b^2c^2d^2}=4abcd$

۶۱) $a^4-a^3b+b^4-ab^3=(a-b)(a^3-b^3)$
$$=(a-b)^2(a^2+ab+b^2)\geqslant 0$$

۶۲) از نابرابری توان مجموع و مجموع توانها درحالت $n=3$ و $m=3$، یااز تحدب تابع $y=x^3$، و از نابرابری واسطه‌های حسابی وهندسی استفاده شود.

۶۳) دوطرف نابرابری تمرین ۵۹ را در $a-b$ ضرب کنید.

۶۴) از تمرین ۶۲ استفاده کنید.

۶۵) دوطرف را عمل کرده و با استفاده از تمرین ۶۱ ثابت کنیدکه تفاضل طرف اول برطرف دوم نامنفی است.

۶۶) تفاضل طرف اول برطرف دوم مجموع عبارتهای از گونهٔ $a^2b^2(a^2-b^2)^2$ می‌باشد.

۶۷) حالت کلی تمرین ۶۱ است و به‌نابرابری زیر تبدیل می‌شود:
$$(a-b)^2(a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n)\geqslant 0$$

۶۸) تفاضل طرف اول برطرف دوم به‌عبارت زیر تبدیل می‌شود:
$$(x-1)(x^n-x^{n-1}+x^n-x^{n-2}+\ldots)=(x-1)^2P(x)$$

۶۹) تبدیلی از نابرابری واسطه‌های حسابی و توافقی است.

۷۰) می‌توانید از روش استقراء ریاضی استفاده کنید.

۷۱) از روش استقراءِ ریاضی و از نابرابری $(2n+1)(2n+3)<(2n+2)^2$ استفاده کنید.

۷۲) $a>b \implies a+c>b+c$ و $ab+ac>bc+ab$

۷۳) تفاضل دوطرف برابری به‌عبارت زیرتبدیل می‌شود:
$$(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

۷۴) از همانی زیراستفاده کنید:
$$(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=3(a+b)(b+c)(c+a)$$

۷۵) اتحاد زیررا ثابت کنید و به کار ببرید:
$$(a+b+c)^3-24abc=(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3$$

۷۶) نابرابری کشی-شوارتز را به‌کار ببرید.

۷۷) نابرابری واسطه‌های حسابی وتوافقی را به‌کار ببرید.

۷۸) دوطرف نابرابریهای $a-c>b-c$ و $a^{2}(a-b)>b^{2}(a-b)$ را درهم ضرب کنید.

۷۹) ثابت کنید که: $a^{a}(1-a^{b-a})\geqslant b^{a}(1-b^{b-a})$

۸۰) $a\leqslant b+c \Longrightarrow a+a(b+c)\leqslant b+c+a(b+c)$

$$a(1+b+c)\leqslant(a+1)(b+c)$$

$$\frac{a}{1+a}\leqslant\frac{b+c}{1+b+c}=\frac{b}{1+b+c}+\frac{c}{1+b+c}<\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$$

۸۱) از تمرین قبل استفاده کنید؛ $\frac{1}{1+x}=1-\frac{x}{1+x}$

۸۲) نابرابری مورد اثبات به‌نابرابری $9\leqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ تبدیل‌می‌شود وازنابرابری واسطه‌های حسابی و توافقی استفاده‌کنید.

۸۳) $y'=n(x+1)^{n-1} \Longrightarrow ny=(x+1)y'$

$$y=x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_{1}x+a_{0}$$

$$y'=nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_{1}$$

چندجمله‌ای y را در n و چندجمله‌ای y' را در $x+1$ ضرب‌کرده و دو حاصل‌ضرب را متحد یکدیگر قرار می‌دهیم و ازاین راه ضریبهای a_{n-1} ، a_{n-2} و ... و a_{0} را حساب می‌کنیم.

درحالت $n=4$ داریم $4y=(x+1)y'$ و:

$$y=x^{4}+ax^{3}+bx^{2}+cx+d \quad \text{و} \quad y'=4x^{3}+3ax^{2}+2bx+c$$

$$4x^{4}+4ax^{3}+4bx^{2}+4cx+4d$$

$$\equiv4x^{4}+(3a+4)x^{3}+(2b+3a)x^{2}+(c+2b)x+c$$

$$3a+4=4a \;؛\; a=4 \;،\; 2b+12=4b \;؛\; b=6$$

$$c+12=4c \;؛\; c=4 \;،\; 4=4d \;؛\; d=1$$

$$(x+1)^{4}=x^{4}+4x^{3}+6x^{2}+4x+1$$

۸۴) $y^{2}=2(x-1)+|x-3|$

۸۵) $4ac(b-c)(a-b)=b^{2}(c-a)^{2}=(bc-ab)^{2}$

$$=(bc-ab+ac-ac)^{2}=[a(c-b)+c(b-a)]^{2}$$

$$\Longrightarrow [a(b-c)-c(a-b)]^{2}=0 \Longrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$$

۸۶) می‌توانید نخست مقادیر $P+Q$ و PQ را به دست آورید و آنگاه از **اتحاد**

زیر استفاده کنید: $P^3+Q^3=(P+Q)^3-3PQ(P+Q)$

۸۷) چندجمله‌ای را متحد با $(x^2+px+q)^2$ قرار دهید.

۸۸) $A=4a+12b+9c$ ، $B=6a+5b-6c$

$C=9a-12b+4c$ ، $B^2-AC=169(b^2-ac)$

۸۹) از همانی زیر استفاده کنید:

$$A^3+B^3+C^3-3ABC=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$$

و به‌دست آوریدکه:

$p=ax+bz+cy$ ، $q=by+cx+az$ ، $r=cz+ay+bx$

(توجه کنیدکه این یکی از حالات ممکن است وجای x ، y و z را در این برابریها می‌توان عوض کرد.)

۹۰) $P^2+Q^2+R^2=(a^2+b^2+c^2)(x^2+3)^2$

۹۱) می‌توانید از همانیهای

$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ و $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

استفاده کنید و خواهید داشت:

$P^2+Q^2=2(x^8+3x^6+5x^4+3x^2+1)$

$P^2-Q^2=4(x^7+2x^5+2x^3+x)$

۹۲) $A^2+B^2+C^2=x^4+x^2+1$

۹۳) ریشهٔ سوم‌را $x^2+\alpha x+3$ فرض کنید وروش ضریبهای نامعین را به‌کار ببرید که $\alpha=2$ به‌دست خواهد آمد.

۹۴) یا: $a=c=\cos\theta$ و $b=0$ ، $\alpha=\gamma=\sin\theta$ و $\beta=0$

یا: $a=-c=\cos\theta$ و $b=\pm 2\sin\theta$ ، $\alpha=-\gamma=\sin\theta$ ،

$\beta=\mp 2\cos\theta$

۹۵) ثابت کنید شرط لازم و کافی برای‌آنکه چندجمله‌ای از گونهٔ

$(A+Bx)^2+(A'+B'x)^2$

توان دوم باشد آن است که $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}$ وازاین ویژگی برای‌حل مسئله‌استفاده کنید.

۹۶) سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم که ضریب جملهٔ درجهٔ دوم آن مثبت باشد وقتی همواره مثبت است که جواب حقیقی نداشته باشد. برای چندجمله‌ای مفروض با توجه

به‌شرط داده شده خواهید داشت:

$$\Delta=(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(b-c-a)<0$$

۹۷) برای‌سادگی‌عملیات نخست $2x+y-3z$ را با A و $x^2+y^2-z^2$ را با B
سپس $2x+y$ را با C نشان دهید. عبارت خواسته شده برابرخواهد شد با:

$$[3(x^2+y^2+z^2)-2z(2x+y)]^2$$

۹۸) $(a^2+ab+b^2)^2(x^2+y^2+z^2)$

۹۹) اگر $k>2$ باشد $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<k+1$ و نتیجه بگیرید که

$$(k+1)^2>\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}$$

و با استفاده از این نابرابری ثابت‌کنیدکه اگرنابرابری مفروض به‌ازای $n=k$ درست باشد به‌ازای $n=k+1$ نیز درست خواهد بود.

۱۰۰) باید ثابت‌کنیدکه نابرابری $F\geqslant 2$ برقرار است‌که این نابرابری هم‌ارز خواهد بود با:

$$ab(a-b)^2+bc(b-c)^2+ca(c-a)^2\geqslant 0$$

برابری، یعنی مینیمم F، وقتی است‌که: $a=b=c$

۱۰۱) اگر S مساحت مثلث باشد، داریم:

$$S^2=\frac{1}{16}(x+a+b)(a+b-x)(b+x-a)(x+a-b)$$

این رابطه را می‌توانید به‌صورت زیر درآورید:

$$S^2=\frac{1}{16}\{4a^2b^2-[x^2-(a^2+b^2)]^2\}$$

S^2 یا S وقتی‌ماکسیمم است‌که $x^2=a^2+b^2$ (یعنی مثلث‌قائم‌الزاویه باشد)
و دراین‌حال $S=\frac{ab}{2}$ خواهد بود.

(راه سادهٔ حل این مسئله استفاده ازدستور $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ است).

۱۰۲) با به‌کاربردن نابرابری میانگینهای حسابی و توافقی خواهید داشت:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\geqslant\frac{n^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n}$$

برابری یعنی مینیمم طرف اول وقتی است که $x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{k^2}{n}$

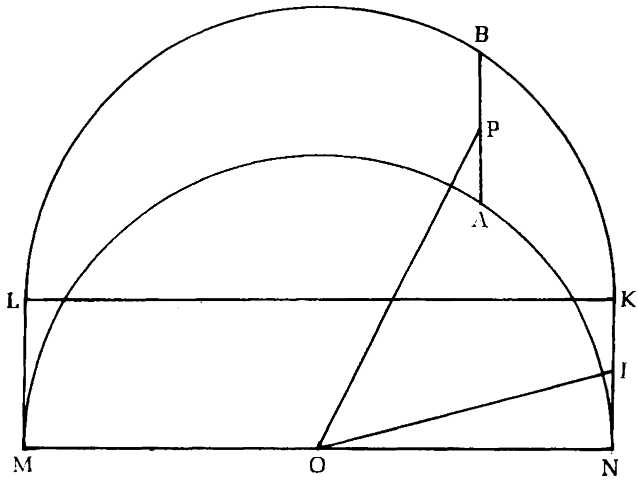
باشدکه دراین صورت مجموع معکوسهای متغیرها برابر $\frac{n^۲}{k^۲}$ خواهد بود.

۱۰۳) اولاً نابرابری کشی-شوارتز را به کار ببرید. ثانیاً از حالت برابری همین نابرابری نتیجه می‌شودکه مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۱۰۴) مجموع دو متغیر مثبت $x^۲$ و $۴a^۲-x^۲$ ثابت است پس حاصل‌ضرب آنها یعنی $y^۲$ و در نتیجه y وقتی ماکسیمم است که $۴a^۲-x^۲=x^۲$ یعنی $x=a\sqrt{۲}$ و $y=۲a^۲$ باشد.

۱۰۵) ثابت کنیدکه سطح پیموده شدهٔ توسط AB برابر است با مساحت مستطیل $KLMN$. اگر $AB=۲a$ و $OP=۲b$ فرض شود خواهید داشت:

$MN=۲\sqrt{۴b^۲-a^۲}$ و $KN=۲a$



به‌ازای هرمقدار b داریم: $ON^۲+NI^۲=OI^۲=۴b^۲$ پس به‌ازای هرمقدار b مستطیل $KLMN$ وقتی بیشترین سطح را داردکه مربع باشد:

$۲\sqrt{۴b^۲-a^۲}=۲a \implies a=b\sqrt{۲}$

(می‌توانید این مسئله را به‌مسئلهٔ قبل برگردانید.)

۱۰۶) نابرابری میانگینهای حسابی و مربعی را به‌کار ببرید و نتیجه بگیریدکه مجموع توانهای دوم متغیرها وقتی مینیمم است‌که متغیرها باهم برابرباشند که دراین حال این مجموع برابر می‌شود با $\frac{k^۴}{n}$.

۱۰۷) اگر P ماکسیمم باشد $Q=(ax)^\alpha(by)^\beta(cz)^\gamma$ نیز ماکسیمم است و برعکس و بنا به‌قضیهٔ سوم مربوط به ماکسیمم و مینیمم مطلق، Q وقتی ماکسیمم است که:

$$\frac{ax}{\alpha}=\frac{by}{\beta}=\frac{cz}{\gamma}=\frac{k^۲}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$x=\frac{\alpha k^۲}{a(\alpha+\beta+\gamma)}،\ y=\frac{\beta k^۲}{b(\alpha+\beta+\gamma)}،\ z=\frac{\gamma k^۲}{c(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$P=\left(\frac{\alpha k^۲}{a(\alpha+\beta+\gamma)}\right)^\alpha\left(\frac{\beta k^۲}{b(\alpha+\beta+\gamma)}\right)^\beta\left(\frac{\gamma k^۲}{c(\alpha+\beta+\gamma)}\right)^\gamma$$

$$P=\left(\frac{\alpha}{a}\right)^\alpha\left(\frac{\beta}{b}\right)^\beta\left(\frac{\gamma}{c}\right)^\gamma\left(\frac{k^۲}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^{(\alpha+\beta+\gamma)}$$

حالت ویژه: $a=\frac{۱}{۲}$ ، $b=\frac{۱}{۳}$ ، $c=۱$ ، $\alpha=۳$ ، $\beta=۴$ ، $\gamma=۲$ و $k^۲=۱۲$؛

$$P=\left(\frac{۲\times۳\times۱۲}{۹}\right)^۳\left(\frac{۳\times۴\times۱۲}{۹}\right)^۴\left(\frac{۱\times۲\times۱۲}{۹}\right)^۲=\frac{۲^{۳۱}}{۹}$$

۱۰۸) اولاً از تقسیم دوطرف برمقدار مثبت xyz خواهید داشت:

$$(x+y+z)\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}\right)\geqslant ۹$$

که هم‌ارز با نابرابری میانگینهای حسابی و توافقی برای سه عامل است. برابری زمانی است که $x=y=z$.

ثانیاً از نابرابری بالا نتیجه بگیرید که مینیمم S برابراست با $\frac{۹}{k^۲}$.

۱۰۹) حالت کلی این مسئله زیرعنوان مسئلهٔ نمونه به شمارهٔ ۵-۲۷ حل شده است. در اینجا تابع به‌صورت $y=\frac{x^۲}{۲}+\frac{۳۲}{۳x^۳}$ نوشته می‌شود و چون حاصل‌ضرب دوعامل مثبت $\left(\frac{x^۲}{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}$ و $\frac{۳۲}{۳x^۳}$ مقدار ثابت است، مجموع $\frac{x^۲}{۲}+\frac{۳۲}{۳x^۳}$ یعنی مقدار y وقتی مینیمم است که:

$$\frac{\frac{x^۲}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{\frac{۳۲}{۳x^۳}}{۱}\implies x=۲\ \text{و}\ y=\frac{۱۰}{۳}$$

۱۱۰) از تحدب منحنی نمودار تابع $y=tg\,x$ در فاصلهٔ $\left(\circ\ ,\ \frac{\pi}{\mathtt{۲}}\right)$ استفاده کنید. برابری وقتی است که کمانها با هم برابر باشند.

۱۱۱) نابرابری مثلثی (مثال ۶ از ۵-۱۲) را به کار ببرید و نتیجه بگیرید که:

$$y \geqslant \sqrt{(x+a+c-x)^{۲}+(b+d)^{۲}}=\sqrt{(a+c)^{۲}+(b+d)^{۲}}$$

برابری وقتی است که:

$$\frac{a+x}{c-x}=\frac{b}{d} \implies x=\frac{bc-ad}{b+d}$$

تابع مفروض در حالت ویژه به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y=\sqrt{(۲+x)^{۲}+۹}+\sqrt{(۴-x)^{۲}+۲۵}$$

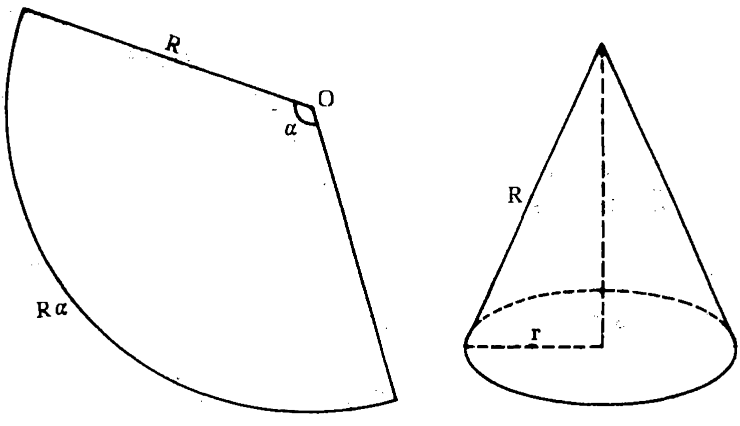
$$a=۲ \quad ، \quad b=۳ \quad ، \quad c=۴ \quad ، \quad d=۵$$

$$x=\frac{۳\times۴-۲\times۵}{۳+۵}=\frac{۱}{۴} \quad ، \quad y=\sqrt{(۲+۴)^{۲}+(۳+۵)^{۲}}=۱۰$$

تابع مفروض به‌ازای $x=\frac{۱}{۴}$ دارای مینیممی برابر ۱۰ است.

۱۱۲) α را برحسب رادیان می‌گیریم؛ پس طول کمان قطاع برابر می‌شود با $R\alpha$ که برابر است با محیط قاعدهٔ مخروط. اگر r شعاع قاعدهٔ مخروط باشد داریم $r=\frac{R\alpha}{۲\pi}$ و V حجم مخروط برابر می‌شود با:

$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}\sqrt{R^{۲}-r^{۲}}$$



این حجم وقتی ماکسیمم است که $r^{۲}(R^{۲}-r^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$ ماکسیمم باشد و چون مجموع دو مقدار متغیر مثبت $r^{۲}$ و $R^{۲}-r^{۲}$ مقدار ثابت است پس:

$$\frac{r^2}{1}=\frac{R^2-r^2}{\frac{1}{2}} \Longrightarrow r=\frac{R\sqrt{6}}{3} \Longrightarrow \alpha=\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$$

۱۱۳) در این مسئله حجم مخروط ثابت است و باید سطح جانبی آن مینیمم باشد، اندازه‌های مولد و شعاع قاعده را R و r می گیریم. پس:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}=\frac{1}{3}\pi a^3 \Longrightarrow R^2=\frac{a^6+r^6}{r^4}$$

اگر S سطح جانبی مخروط باشد داریم $S=\pi rR$ یا:

$$S^2=\pi^2 r^2\times\frac{a^6+r^6}{r^4}=\pi^2\frac{a^6+r^6}{r^2}=\pi^2\left(\frac{a^6}{r^2}+r^4\right)$$

چون حاصلضرب $\frac{a^6}{r^2}\times(r^4)^{\frac{1}{2}}$ مقدارثابت است پس S^2 و درنتیجه S وقتی مینیمم است که:

$$\frac{a^6}{r^2}=\frac{r^4}{\frac{1}{2}} \Longrightarrow r=\frac{a}{\sqrt[6]{2}} \quad , \quad R=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt[6]{2}}$$

$$\frac{a}{\sqrt[6]{2}}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt[6]{2}}\times\frac{\alpha}{2\pi} \Longrightarrow \alpha=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

۱۱۴) چون مرکز ثقل داخل منحنی است و جهت تحدب منحنی به‌سمت yهای منفی است پس نسبت به‌محور xها مرکز ثقل در بالای منحنی قرار دارد و عرض آن از عرض نقطهٔ همطولش ازمنحنی بیشتر است. یعنی اگر y عرض مرکز ثقل و x طول آن باشد داریم $y>a^x$ یعنی:

$$\frac{m_1y_1+m_2y_2+\dots+m_ny_n}{m_1+m_2+\dots+m_n}\geqslant a^{\frac{m_1x_1+m_2x_2+\dots+m_nx_n}{m_1+m_2+\dots+m_n}}$$

طرف دوم این نابرابری برابر است با:

$$(a^{m_1x_1}\times a^{m_2x_2}\times\dots\times a^{m_nx_n})^{\frac{1}{m_1+m_2+\dots+m_n}}$$

$$=(y_1^{m_1}y_2^{m_2}\dots y_n^{m_n})^{\frac{1}{m_1+m_2+\dots+m_n}}$$

و هرگاه در طرف اول و عبارت اخیر یعنی حاصل طرف دوم، y_i را با a_i جانشین کنیم نابرابری واسطه‌های موزون حاصل می‌شود.

$$115)\ \frac{1\times 1+(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)}{1+(n+1)}>\left[1^{1}\times\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{1}{n+2}}$$

$$\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{n+2}>\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\Longrightarrow\left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{n+2}<\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\Longrightarrow\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

پرسشهای ۵-۳۱

۱۱۷ ـ ج	۱۱۸ ـ الف	۱۱۹ ـ الف	۱۲۰ ـ د
۱۲۱ ـ الف	۱۲۲ ـ ب	۱۲۳ ـ ج	۱۲۴ ـ ب

تمرینهای ۶-۱۸

۱) $(2x+5)(3x-7)(x+2)$

۲) $(x-y-z+t)^2$

۳) $(x+y)(x^2+y^2-xy+3x-3y+3)$

چندجمله‌ای عامل دوم نسبت به x، یا نسبت به y، دارای مبین منفی خواهد بود.

۴) $(x-y)(x^2+y^2+xy-7)$

۵) $(3x-2)(x-1)(9x-4)$

۶) $(x^2+4)(x+2+\sqrt{6})(x+2-\sqrt{6})$

۷) $18(x+1)(2x-3)(4x-3)$

۸) $(x+1)(x+3+\sqrt{5})(x+3-\sqrt{5})$

۹) $(x-4)(x-3)(x-2)(x+5)$

۱۰) $(x+y)[1+(x+y)+\dots+(x+y)^{n-1}]$

عبارت داخل کروشه را با استفاده از کسرها می‌توان به $\frac{1-(x+y)^n}{1-x-y}$ تبدیل کرد.

۱۱) $(3a^2+b^2)(a^2+3b^2)$

۱۲) $(x+\sqrt{3}y)(x-\sqrt{3}y)(\sqrt{3}x+y)(\sqrt{3}x-y)$

۱۳) $(b+c)(c+a)(a+b)$

۱۴) $[(۲-\sqrt{۲})x^۲+۴(۲+\sqrt{۲})][(۲+\sqrt{۲})x^۲+۴(۲-\sqrt{۲})]$

۱۵) $(x^۲+۶x+۹)(x^۲+۶x-۱۹)$

$$=(x+۳)^۲(x+۳+۲\sqrt{۷})(x+۳-۲\sqrt{۷})$$

۱۶) $\frac{۱}{۴}(x+۱)(x+۴)(۲x+۵+\sqrt{۷۳})(۲x+۵-\sqrt{۷۳})$

۱۷) $(a+۲x+۱)(a-x^۲+۴)=(۲x+a+۱)(-x^۲+a+۴)$

۱۸) $\frac{۱}{۲}[(۷+۳\sqrt{۳})x-۲y+\sqrt{۳}+۱][(۷-۳\sqrt{۳})x-۲y-\sqrt{۳}+۱]$

۱۹) $(x-۱-\sqrt[۳]{۵})[x^۲-(۲-\sqrt[۳]{۵})x+۱+\sqrt[۳]{۲۵}-\sqrt[۳]{۵})]$

۲۰) $(x-۴)^۴$

۲۱) $(x+۱)(x+\cos ۲y)$

تمرینهای ۶-۱۹

۲۲) $\frac{۱}{۲۴}(۱۴۴x^۲-۶۰x-۶)(۱۴۴x^۲-۶۰x+۱۶)$

$$=(۲x-۱)(۱۲x+۱)(۳۶x^۲-۱۵x+۴)$$

۲۳) $(x+۴)^۲(x-۲)^۲$

۲۴) $(x-y^۲-۴)(x^۲+x+y^۲-۴)$

۲۵) $(x-۳)^۳(x^۲+x+۱)$

۲۶) $(x-۱)(x-a+۱)(x-b-۱)$

۲۷) $۲(۳-x)(x-۲)(۷x^۲-۳۵x+۴۴)$

۲۸) $(x+m-۱)(x-m-۱)(x-m^۲-۱)$

۲۹) $x^۲\left[\frac{x^۲-۱}{x}+۱\right]\left[۹\left(\frac{x^۲-۱}{x}\right)+۱\right]=$

$$=(x^۲+x-۱)(۹x^۲+x-۹)$$

$$=۹\left(x+\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)\left(x+\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)\left(x+\frac{۱+\sqrt{۳۲۵}}{۱۸}\right)\left(x+\frac{۱-\sqrt{۳۲۵}}{۱۸}\right)$$

۳۰) $(a+b+c)(c+a-b)(b+c-a)(a+b-c)$

۳۱) $۵a(b+c)(a+b+c)[a^۲+(b+c)(a+b+c)]$

۳۲) $۵(a+b)(b+c)(c+a)(a^۲+b^۲+c^۲+ab+bc+ca)$

۳۳) $(2x-1)(x-2)(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})$

۳۴) $(2x^2-x+1-a)(x^2+x-1-a)$

۳۵) $(x-3y)^2(6x+x\sqrt{29}+y)(6x-x\sqrt{29}+y)$

۳۶) $y^4\left(\frac{x}{y}+3\right)^3\left(\frac{9x}{y}-5\right)=(x+3y)^3(9x-5y)$

۳۷) $[(x-2)y-2x+1][(x+1)y-x]$

۳۸) $-9(a-b)(b-c)(c-a)$

۳۹) $(2y-x^2+z)(y+x-z^2)$

۴۰) $y^3\left[a-\frac{x(x^2+y^2)}{y^2}\right]\left[a-\frac{x^2+y^2}{y}\right]=$

$$=(x^3+xy^2-ay^2)(x^2+y^2-ay)$$

۴۱) $3abc(bz-cy)(cx-az)(ay-bx)$

۴۲) $(bz-cy)(cx-az)(ay-bx)$

۴۳) $(a^2+x^2)^2(b^2+y^2)^2$

۴۴) $P(x)=(x^2-x-5)^2-5=$

$$=(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5})$$

۴۵) $(3x+1)^4-(2x+5)^2=$

$$=\frac{1}{9}(9x+2+2\sqrt{10})(9x+2-2\sqrt{10})(9x^2+8x+6)$$

۴۶) $(x^2+x+1)[ax^2+(b-a)x+c]$

۴۷) اولاً : $P=(x+y+z)(xy+yz+zx)$

ثانیاً از نابرابری $c(a^2+b^2)\geqslant 2abc$ استفاده کنید.

۴۸) اولاً : $E=\frac{1}{4}[(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)-$

$$-2(a+b+c)(a-b)(a-c)]$$

$F=\frac{1}{4}[(a+b+c)(c+a-b)(a+b-c)$

$$-2(b+c-a)(a+b)(a+c)$$

ثانیاً : $a \rightarrow -a$

ثالثاً : $E=\frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2)(3a-b-c)$

$$F=-\frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2)(3a+b+c)$$

۴۹) اولاً : $P(x)=x^2\left[a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x-\frac{1}{x}\right)+c\right]$

$$x-\frac{1}{x}=t \implies x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$$

$$P(x)=x^2(at^2+bt+c+2a)$$

و در صورتی که مبین سه‌جمله‌ای داخل پرانتز نامنفی باشد:

$$P(x)=ax^2(t-\alpha)(t-\beta)$$
$$=a(x^2-\alpha x-1)(x^2-\beta x-1)$$

ثانیاً : $(2x+1)(x-2)(2x-5)(5x+2)$

۵۰) $-\alpha^2-(x^2-x+1)\alpha+x^3+x$
$$=-(\alpha-x)(\alpha+x^2+1)=(x-\sqrt{3})(x^2+1+\sqrt{3})$$

۵۱) $P(x)=x^2(x-1)\left[(1-a)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-(4+a)\left(x+\frac{1}{x}\right)+6-a\right]$

$$x+\frac{1}{x}=3 \implies x^2(x-1)\left(\frac{25+5a}{9}\right)=0 \implies a=-5$$

$$a=-5 \implies P(x)=(x-1)(3x^2-x+3)(2x^2+x+2)$$

۵۲) $x+\frac{k}{x}=t \implies x^2+\frac{k^2}{x^2}=t^2-2k$

$$P(x)=x^2(at^2+bt+c-2ak)$$

و در صورتی که مبین سه‌جمله‌ای داخل پرانتز نامنفی باشد:

$$P(x)=ax^2(t-\alpha)(t-\beta)$$
$$=a(x^2-\alpha x+1)(x^2-\beta x+1)$$

۵۳) $(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2$
$$=(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)^2$$

۵۴) $a+b+c=0 \implies -(ab+bc+ca)=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=k^2$

$$P(x\ ,\ y\ ,\ z)=\frac{1}{a}[ax+(c+k)y+(b-k)z][ax+(c-k)y+$$
$$+(b+k)z]$$

پرسشهای ۶-۲۰

۵۶- الف	۵۷- ج	۵۸- الف	۵۹- د
۶۰- د	۶۱- ج	۶۲- الف	۶۳- ب

تمرینهای ۷-۲۵

۱) $f(1)=-4$ ، $f(2)$ نامعین ، $f(-2)=0$

۲) $f(-5)=14$ ، $f(2)=0$ ، $f(1)$ مبهم

$$f(x)=\frac{(x-1)(x^2+x-6)}{(x-1)(x+6)}=\frac{x^2+x-6}{x+6}\ ,\ f(1)=-\frac{4}{7}$$

۳) $f(x\ ,\ x)=0$ ، $f(2y\ ,\ y)$ مبهم

$$f(x\ ,\ y)=\frac{(x-2y)(x-y)}{(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)}$$

$$=\frac{x-y}{x^2+2xy+4y^2}\ ,\ f(2y\ ,\ y)=\frac{1}{12y}$$

۴) $f(0)$ نامعین ، $f(2)$ مبهم

$$f(x)=\frac{x^2+2x-5}{x^3+x^2-2x}\ ,\ f(2)=\frac{3}{8}$$

۵) ریشه : $x=\frac{2}{3}$ ، قطب : ندارد

۶) ریشه : $x=\frac{4}{3}$ ، قطب : ندارد

۷) ریشه : $x=-1$ ، قطب : ندارد

۸) ریشه : ندارد ، قطبها : $x=1\ ,\ -2$

۹) $R-\{-2\ ,\ 1\}$

۱۰) $R-\{0\}$

۱۱) R

۱۲) $R-\{1\ ,\ -1+\sqrt{2}\ ,\ -1-\sqrt{2}\}$

۱۳) $\frac{6x-5}{3(x-4)}$

۱۴) $\frac{(a-b)(x-y)}{(a+b)(x+y)}$

۱۵) $\frac{8x-7}{x+2}$

۱۶) $\frac{a-3}{a+2}$

۱۷) $\frac{x-1}{y-1}$

۱۸) $\frac{4x-5}{2x-3}$

۱۹) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

۲۰) a^2-b^2

۲۱) $\dfrac{2x+1}{x-3}$

۲۲) $\dfrac{2a}{a^2+ab+b^2}$

۲۳) 1

۲۴) -1

۲۵) 0

۲۶) $a+b+c$

۲۷) $ab+bc+ca$

۲۸) $\dfrac{1}{abc}$

۲۹) $\dfrac{2}{x-1}$

۳۰) $\dfrac{x+y}{y}$

۳۱) $\dfrac{x(x+y)(x^2+y^2)}{(x-y)(x^2-xy+y^2)}$

۳۲) $\dfrac{2\sqrt{2}x^2}{x^4+1}$

۳۳) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}$

۳۴) $\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}$

۳۵) $\dfrac{x+1}{x^2+1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$

۳۶) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}$

۳۷) $2x-1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{x-1}{(x^2+1)^2}$

۳۸) $\dfrac{a^2}{x^2}=\dfrac{b^2}{y^2}=\dfrac{a^2-b^2}{x^2-y^2}=\dfrac{a^2+b^2}{x^2+y^2}$

۳۹) $\dfrac{ax}{a^2}=\dfrac{by}{b^2}=\dfrac{cz}{c^2}=\dfrac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}$

$\dfrac{x^2}{ax}=\dfrac{y^2}{by}=\dfrac{z^2}{cz}=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{ax+by+cz}$

۴۰) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{2}{a+c} \Longrightarrow a^2+c^2=2b^2$

۴۱) $\dfrac{x+y}{2c}=\dfrac{y+z}{2a}=\dfrac{z+x}{2b}$

۴۲) $ff(x)=x$, $fff(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ ، $f(x^2)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

$f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1+x}{1-y} \Longrightarrow y=-1$

۴۳) $\dfrac{xyz}{zx+xy}=\dfrac{a}{۲} \Longrightarrow \dfrac{zx+xy}{xyz}=\dfrac{۱}{y}+\dfrac{۱}{z}=\dfrac{۲}{a}$

$\dfrac{۱}{z}+\dfrac{۱}{x}=\dfrac{۲}{b}$ و $\dfrac{۱}{x}+\dfrac{۱}{y}=\dfrac{۲}{c}$

$\dfrac{۱}{x}+\dfrac{۱}{y}+\dfrac{۱}{z}=\dfrac{۱}{a}+\dfrac{۱}{b}+\dfrac{۱}{c}$

۴۴) دوطرف را درصورت ترکیب و در مخرج تفضیل کنید.

۴۵) $f(x)f\left(\dfrac{۱}{x}\right)=۱$

۴۶) $y=\dfrac{(۱-x^{۵})(a-x)}{(۱-x)(a^{۱۰}-x^{۱۰})}$ ؛ $a=۱$ و $y=\dfrac{۱}{۱+x^{۵}}$

۴۷) $f(x)+f(y)=\log\left(\dfrac{۱-۲x}{۱+۲x}\times\dfrac{۱-۲y}{۱+۲y}\right)$

$$=\log\dfrac{۱-۲x-۲y+۴xy}{۱+۲x+۲y+۴xy}$$

$$f\left(\dfrac{x+y}{۱+۴xy}\right)=\log\dfrac{۱-\dfrac{۲(x+y)}{۱+۴xy}}{۱+\dfrac{۲(x+y)}{۱+۴xy}}$$

$$=\log\dfrac{۱-۲x-۲y+۴xy}{۱+۲x+۲y+۴xy}$$

۴۸) $y=\dfrac{x-x^{pq}}{(۱-x)(۱-x^{pq})}$

۴۹) $A-B=۴$

۵۰) دوطرف رابطهٔ فرض را به‌توان ۲ برسانید و از تمرین ۲۳ استفاده کنید.

تمرینهای ۷-۲۶

۵۱) $\dfrac{۱}{a+b+c}$

۵۲) $\dfrac{x-y}{۳x-y-۲}$

۵۳) $\dfrac{(a-b\sqrt{c}-\sqrt{d})\sqrt{d}}{a-b\sqrt{c}+\sqrt{d}}$

۵۴) $\dfrac{x+y^{۲}-۲z}{x-y^{۲}-z}$

۵۵) $\dfrac{x^{۲}-۱۳x+۴۱}{x^{۲}+۱۳x+۴۱}$

۵۶) $\dfrac{۲x+۱}{۲x^{۲}-۵x+۲}$

۵۷) $\dfrac{a^{۴}+۲a^{۳}b+۲ab^{۳}+b^{۴}}{a^{۲}+ab+b^{۲}}$

۵۸) $\dfrac{x+۲a-۳b}{x-۲a-b}$

۵۹) $\frac{1}{2(x\sin\alpha+\cos\alpha)}$ ۶۰) ۲

۶۱) a^2-b^2 ۶۲) $-(x+y+a)$

۶۳) $\frac{m-1}{2}=\frac{m-n+2}{-3}=\frac{4n}{4} \Longrightarrow m=-\frac{1}{2},\ n=-\frac{3}{4}$

۶۴) $f(x)=\frac{x+2}{x+\sqrt{3}}$ ، $f\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)=\frac{2+7\sqrt{3}}{13}$

۶۵) مجموع سه کسررا به‌دست آورید وصورت کسرحاصل را تجزیه کنید. یااینکه مجموع سه کسر وحاصل‌ضرب آنها را جداگانه به‌دست آورید و نتیجه‌بگیرید که دوحاصل قرینهٔ یکدیگرند.

۶۶) برای تجزیهٔ صورت کسرحاصل ازتمرین ۱۳ بخش قبل استفاده‌کنید. $S=1$

۶۷) طرف دوم‌را بسط دهید وثابت کنیدکه مجموع حاصل‌ضربهای دو به‌دو کسرها برابرصفراست.

۶۸) اولاً خواهید داشت:

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

ثانیاً دراین رابطه x را به‌ترتیب برابر با ۱ ، ۲ ، ۳ ، ... ، n قراردهید و دوطرف رابطه‌ها را نظیر به‌نظیر با هم جمع کنیدکه خواهید داشت:

$$S=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

۶۹) نخست ثابت کنیدکه:

$$\frac{x^{n-2}}{(1+x^{n-1})(1+x^n)}=\frac{1}{x(1-x)}\left[\frac{1}{1+x^n}-\frac{1}{1+x^{n-1}}\right]$$

آنگاه دراین رابطه n را به‌ترتیب برابر با ۲ ، ۳ ، ... ، n اختیار و دو طرف رابطه‌های حاصل را نظیر به‌نظیر با هم جمع کنیدکه خواهید داشت:

$$S=\frac{1}{x(1-x)}\left[\frac{1}{1+x^n}-\frac{1}{1+x}\right]$$

۷۰) عبارت صفر $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-1}$ را به‌مجموع اضافه کنید وثابت کنیدکه:

$$\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{-2}{x^2-1}$$

$$\frac{-2}{x^2-1}+\frac{2}{x^2+1}=\frac{-4}{x^4-1}$$

. . . .

وبالاخره نتیجه بگیرید که:

$$S=\frac{1}{x-1}-\frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}-1}$$

۷۱) ازرابطهٔ فرض نتیجه بگیرید که:

$$-2abxy-2bcyz-2cazx=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$$

و این رابطه را دربسط عبارت مخرج کسر و تجزیهٔ آن به‌کار ببرید که حاصل را برابر با $\frac{1}{a+b+c}$ به‌دست خواهید آورد.

۷۲) دو طرف رابطهٔ (۱) را در $a-z$ و از رابطهٔ (۲) را در x ضرب کنید و رابطه‌های حاصل را عضو به‌عضو با هم جمع کنید و بالاخره رابطهٔ (۳) را نتیجه بگیرید. دوطرف رابطهٔ (۱) را در z ضرب‌کنید و با استفاده از رابطهٔ (۳) به‌رابطهٔ (۴)دست خواهید یافت. رابطه‌های سه‌گانه را دو به‌دو از هم کم‌کنید و ازاین راه رابطهٔ (۵) را نتیجه بگیرید.

۷۳) دوطرف رابطه‌ها را درهم ضرب‌کنید و حاصل را بسط داده با توجه به‌اتحاد $A^2+\frac{1}{A^2}=\left(A+\frac{1}{A}\right)^2-2$ نتیجه بگیرید که:

$$a^2+b^2+c^2-abc=4$$

۷۴) از حذف y بین دو رابطهٔ داده شده خواهید داشت:

$$(a+b)^2x^4-2a(a+b)x^2+a^2=0$$

$$x^2=\frac{a}{a+b}\ ,\ \ y^2=\frac{b}{a+b}\ \Longrightarrow\ \frac{x^8}{a^3}+\frac{y^8}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}$$

۷۵) فرض‌کنید $u=ax+by+cz+dt$ و نتیجه بگیرید که

$$u-x=ax\ \Longrightarrow\ a+1=\frac{u}{x}\ ,\ \ldots$$

۷۶) اگرچندجمله‌ای $P(x)$ را برحسب $X=\frac{1}{x+1}$ بنویسید $\left(x=\frac{1}{X}-1\right)$، خواهید داشت:

$$f(X)=\frac{۱}{X^۴}[(a+۱)X^۴-(۲a+۳)X^۳+(a+۶)X^۲-۴X+۱]$$

و خواهید داشت $S=\frac{۲a+۳}{a+۱}$ که حوزهٔ تعریف آن $R-\{-۱\}$ است.

۷۷) دو طرف را درصورت ترکیب ودرمخرج تفضیل کنیدکه خواهید داشت:

$$\frac{y+۱}{y-۱}=\left|\frac{tg x+۱}{tg x-۱}\right|$$

$$۰\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۴} \quad \text{یا} \quad \frac{۳\pi}{۴}\leqslant x\leqslant\pi \Longrightarrow y=cotg x$$

$$\frac{\pi}{۴}\leqslant x\leqslant\frac{۳\pi}{۴} \Longrightarrow y=tg x$$

۷۸) $$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^۲+\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^۲=\left(\frac{x+a}{x+b}-\frac{x-a}{x-b}\right)^۲+۲\left(\frac{x^۲-a^۲}{x^۲-b^۲}\right)$$

$$f(x)=-\frac{(a-b)^۲}{ab(x^۲-b^۲)^۲}[x^۲+(a+b)x-ab]\times$$

$$[x^۲-(a+b)x-ab]$$

۷۹) $$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{b}{c}-\frac{b}{a} \Longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=h$$

$$c=\frac{b^۲}{a} \;,\quad d=\frac{c^۲}{b} \;,\quad e=\frac{d^۲}{c}=\frac{b^۴}{a^۳}$$

$$\frac{e}{a}=\frac{b^۴}{a^۴}=h^۴ \;,\; \dots$$

۸۰) بنابه‌رابطه‌های داده شده، p و q و r ریشه‌های معادلهٔ

$$x^۳+ax+b=۰$$

می‌باشند و در نتیجه:

$$p+q+r=۰ \Longrightarrow p^۲+q^۲-r^۲=-۲pq \;,\; \dots$$

$$\frac{-۱}{۲pq}+\frac{-۱}{۲qr}+\frac{-۱}{۲rp}=\frac{-(p+q+r)}{۲pqr}=۰$$

۸۱) بین سه کسر مخرج مشترك بگیرید و صورت را عمل کنید، خواهید داشت:

$$f(x\ ,\ y\ ,\ z)=۲(x+y+z)$$

۸۲) شرط لازم و کافی آن است که دو سه جمله‌ای درجهٔ دوم صورت و مخرج دارای ریشهٔ مشترك باشند. پس باید داشته باشیم:

$$(ac'-ca')^۲=(ab'-ba')(bc'-cb')$$

هرگاه هریك از عاملهای این رابطه صفرباشند، یعنی رابطه‌های

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

برقرار باشند دو سه جمله‌ای در هردو ریشه مشترکند و کسر برابر با مقدار ثابت است، در غیرآن دوسه جمله‌ای فقط دریك ریشه مشترکند و کسر به یك عامل درجهٔ اول ساده می‌شود.

ثانیاً. بنابه‌رابطهٔ بالا باید داشته باشیم:

$$(m-۱)^۲=(۱-m)(m^۲-۱) \implies m=۱ \text{ یا } m=-۲$$

$$m=۱ \implies f(x)=\frac{x^۲+x+۱}{x^۲+x+۱}=۱$$

$$m=-۲ \implies f(x)=\frac{x^۲-۲x+۱}{x^۲+x-۲}=\frac{x-۱}{x+۲}$$

۸۳) $x^۳-۳x-۲=(x+۱)^۲(x-۲)$

$$x^۳-۳x+۲=(x-۱)^۲(x+۲)$$

$$f(x)=\frac{(x+۱)\sqrt{x-۲}}{(x-۱)\sqrt{x+۲}}\times\frac{(x-۱)\sqrt{x+۲}}{(x+۱)\sqrt{x-۲}}=۱$$

۸۴) $a+b+c=۰ \implies bc+۲a^۲=bc+a^۲-a(b+c)$

$$=(a-b)(a-c)$$

$$bc-a^۲=bc+a(b+c)=ab+bc+ca$$

$$A-۱=\frac{۳(bc-a^۲)}{bc+۲a^۲}=\frac{۳(ab+bc+ca)}{(a-b)(a-c)}$$

$$A+B+C-۳=۳(ab+bc+ca)\times$$

$$\times\left[\frac{۱}{(a-b)(a-c)}+\frac{۱}{(b-c)(b-a)}+\frac{۱}{(c-a)(c-b)}\right]=۰$$

$$۴bc-a^۲=۴bc-(b+c)^۲=-(b-c)^۲$$

$$A=-\frac{(b-c)^۲}{(a-b)(a-c)}\ ,\ \dots \Longrightarrow ABC=۱$$

۸۵) از رابطهٔ فرض نتیجه می‌شود:

$$ab+bc+ca=۰$$

$$\frac{a^۲}{a^۲+۲bc}=\frac{a^۲}{a^۲-۲(ab+ca)}=\frac{a}{a-۲(b+c)}=\frac{a}{۳a-u}$$

$$u=۲(a+b+c)$$

$$\frac{a}{۳a-u}+\frac{b}{۳b-u}+\frac{c}{۳c-u}=\dots=\frac{۲۷abc+۴(a+b+c)^۳}{۲۷abc+۴(a+b+c)^۳}=۱$$

برای اثبات رابطهٔ (۲) ملاحظه کنید که مجموع دو برابر هر کسر از این رابطه و کسر نظیر از رابطهٔ (۱) برابر یك است.

۸۶) اولاً تفاضل عبارتهای دو طرف به‌ترتیب زیر برابر با صفر می‌گردد:

$$\frac{a}{b-c}\left(\frac{۱}{c-a}+\frac{۱}{a-b}\right)+\frac{b}{c-a}\left(\frac{۱}{b-c}+\frac{۱}{a-b}\right)+$$
$$+\frac{c}{a-b}\left(\frac{۱}{b-c}+\frac{۱}{c-a}\right)$$

$$=-\left[\frac{a}{(c-a)(a-b)}+\frac{b}{(a-b)(b-c)}\right.$$
$$\left.+\frac{c}{(b-c)(c-a)}\right]=۰$$

ثانیاً لازم و کافی است که ثابت کنید عبارت زیر مخالف صفر است:

$$\frac{۱}{b-c}+\frac{۱}{c-a}+\frac{۱}{a-b}=\dots$$
$$=-\frac{(b-c)^۲+(c-a)^۲+(a-b)^۲}{۲(b-c)(c-a)(a-b)}<۰$$

۸۷) عبارت طرف اول به‌ترتیب زیر تبدیل می‌شود:

$$S=۳+\frac{a}{b-c}\left(\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)+\frac{b}{c-a}\left(\frac{b-c}{a}+\frac{a-b}{c}\right)+$$
$$+\frac{c}{a-b}\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)$$

$$=\dots=۳+\frac{۲(a^۳+b^۳+c^۳)}{abc}$$

$$a^3+b^3+c^3=a^3+b^3-(a+b)^3=-3ab(a+b)=3abc$$

$$S=3+\frac{6abc}{abc}=9$$

۸۸) از نابرابریهای مفروض اولاً نتیجه می‌شود که:

$$a_1b_2<b_1a_2 \quad , \quad a_1b_3<b_1a_3 \quad , \quad \dots \quad , \quad a_1b_n<b_1a_n$$

از جمع عضو به‌عضو نابرابریهای بالا و افزودن a_1b_1 به‌هرطرف نتیجه می‌شود:

$$a_1(b_1+b_2+\dots+b_n)<b_1(a_1+a_2+\dots+a_n)$$

$$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{b_1+b_2+\dots+b_n}$$

ثانیاً نتیجه می‌شود که:

$$a_1b_n<b_1a_n \text{ و } a_2b_n<b_2a_n \text{ و } \dots \text{ و } a_{n-1}b_n<b_{n-1}a_n$$

و به‌همان ترتیب بالا نتیجه می‌شود:

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{b_1+b_2+\dots+b_n}<\frac{a_n}{b_n}$$

۸۹) $$y=\frac{a^2[(x'+x'')^2-2x'x'']+2ab(x'+x'')+2b^2}{[a^2x'x''+ab(x'+x'')+b^2]^2}$$

$$x'+x''=-\frac{b}{a} \text{ و } x'x''=\frac{c}{a} \implies y=\frac{b^2-2ac}{a^2c^2}$$

۹۰) $$\alpha=\frac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2} \text{ و } \beta=\frac{-1-\sqrt{1+4a^2}}{2}$$

$$y=\frac{2a^2+4}{a^2+1}$$

(برای به دست آوردن این رابطه، از روابط مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها استفاده کنید.)

۹۱) فرض کنید $x=tg\alpha$ ، $y=tg\beta$ و $z=tg\gamma$ که از رابطهٔ فرض خواهید داشت:

$$\alpha+\beta+\gamma=k\pi \implies 2\alpha+2\beta+2\gamma=2k\pi$$

$$tg2\alpha+tg2\beta+tg2\gamma=tg2\alpha\, tg2\beta\, tg2\gamma$$

و این رابطه را برحسب تانژانت نصف‌کمان یعنی برحسب x ، y و z بنویسید.

پرسشهای ۷-۲۷

۹۳- ج   ۹۴- الف   ۹۵- ج   ۹۶- ب

۹۷- ج	۹۸- ب	۹۹- الف	۱۰۰- ب

پرسشهای ۸-۱

۱ - ب	۲ - الف	۳ - الف	۴ - ج
۵ - ج	۶ - د	۷ - د	۸ - ب
۹ - د	۱۰- الف	۱۱- د	۱۲- الف
۱۳- ب	۱۴- ج	۱۵- ب	۱۶- ج
۱۷- ج	۱۸- الف	۱۹- ج	۲۰- د
۲۱- ب	۲۲- ج	۲۳- د	۲۴- ب
۲۵- ب	۲۶- الف	۲۷- الف	۲۸- د
۲۹- ج	۳۰- الف	۳۱- د	۳۲- د
۳۳- د	۳۴- ج	۳۵- الف	۳۶- الف
۳۷- الف	۳۸- ج	۳۹- د	۴۰- ب
۴۱- د	۴۲- د	۴۳- ج	۴۴- د
۴۵- ب	۴۶- ج	۴۷- الف	۴۸- ج
۴۹- الف	۵۰- ب	۵۱- الف	۵۲- ج
۵۳- ج	۵۴- ب	۵۵- ب	۵۶- ج
۵۷- الف	۵۸- د	۵۹- الف	۶۰- د

پرسشهای ۸-۲

۶۱- ج	۶۲- ب	۶۳- د	۶۴- ب
۶۵- الف	۶۶- د	۶۷- د	۶۸- ب
۶۹- ج	۷۰- الف	۷۱- ب	۷۲- الف
۷۳- ج	۷۴- الف	۷۵- الف	۷۶- د
۷۷- ب	۷۸- ب	۷۹- الف	۸۰- ج
۸۱- ج	۸۲- ج	۸۳- د	۸۴- الف
۸۵- د	۸۶- ب	۸۷- ب	۸۸- الف
۸۹- الف	۹۰- ج	۹۱- د	۹۲- ب
۹۳- ج	۹۴- ج	۹۵- ب	۹۶- الف
۹۷- ب	۹۸- ب	۹۹- د	۱۰۰- ب

فهرست فارسی-انگلیسی اصطلاحات و نامها

آ ، ا

آلگوریتم	Algorithm
اتحاد ← همانی	Identity
اتحاد بزو	Bezout identity
استلزام	Implication
اصل	Axiom, Postulate, Principle
اصل استقراء ریاضی	Axiom of mathematical induction
اصل سه گانگی	Trichotomy axiom
اصل موضوع	Axtiom
افناء (قاعدهٔ)	Exhaustion (method)
انجمنی	Associatative
اول	Prime
ایده‌آل	Ideal

ب

بازتابی	Reflexive
باقیمانده	Remainder
بخش‌پذیر	Divisible
بخش‌پذیری	Divisibility
برابری	Equality
برنولی	Bernoulli
برهان خلف	Reductio ad absurdum proof
بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك	Greatest common divisor
بزو	Bezout
بسط (کسر)	Expansion (fraction)
بنیادی	Original, Basic
بی‌اثر (عضو)	Neutral (element)
بیانی	Rhetorical

پ

پارامتر	Parameter
پاسکال	Pascal

پایه	**Base**
پخشی	Distributive

ت

تبدیل متغیر	Substitution, Change of variable
تجزیهٔ (چندجمله‌ای)	Decomposition, Factorising (Polynomial)
تجزیهٔ کسر	Expressing in partial fractions, Decomposition....
تحدب	Convexity
تحویل به‌یك مخرج	Expressing with a common denominator
تحویل‌پذیر	Reducible
تحویل رادیکال مرکب	Reduction of a complex radical
تحویل‌ناپذیر	Irreducible
ترایایی	Translative
ترتیب (رابطهٔ)	Ordering (relation)
ترخیمی	Syncopated
ترکیب	Composition, Combination, Compound
ترکیب خطی	Linear combination
ترکیب فصلی	Disjunction
تفریق	Subtraction
تقسیم	Division
توان	Power

ث

ثابت	Constant

ج

جابجایی	Commutative
جامع (حلقهٔ)	Integral (ring)
جبر	Algebra
جبر و مقابله	Restitution and adjustment
جمع	Addition
جملهٔ ثابت	Constant term

جملهٔ جبری	Algebraic term
جملهٔ صفر	Null term

چ

چبیشف	Tchebycheff
چندجمله‌ای	polynomial
چندجمله‌ای لاگرانژ (دستور انترپلاسیون لاگرانژ)	Lagrange's formula of interpolation
» اول	Prime polynomial
» تحویل‌ناپذیر	Irreducible »
» ثابت	Constant »
» صفر	Null »
» معکوسه	Reciprocal »
» نرمال	Normal »
» یک	Unity »

ح

حوزهٔ تعریف	Defined domain
حلقه	Ring

خ

خارج‌قسمت	Quotient
خارج‌قسمت کامل	Exact quotient
خطی	Linear
خیام	Khayam

د

دالامبر	D'alembert
درجه	Degree
دسته‌بندی	In bands
دوجمله‌ای	Binomial

ر

رابطه	Relation
رابطهٔ ترتیب	Ordinary relation

رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریبها	Relationships between the roots and coefficients
رادیکال ← ریشگی	Radical
رفع ابهام	Reduction of an indeterminate form
رفع کسر	Reduction of an improper fraction
روش ضریبهای نامعین	Undetermined coefficients
ریشه (ریشهٔ nام یك عدد)	Root (nth root of a number)
ریشهٔ (ریشهٔ چندجمله‌ای)	Root, Zero (of a polynomial)
ریشهٔ چندگانه	Multiple root
ریشهٔ ساده	Simple root
ریشهٔ کسر	Root, Zero, of a fraction
ریشگی	Radical
ریشهٔ مضاعف	Double root
ریشه‌یابی	Determination of roots

ز

زوج	Even
زیرحلقه	Subring
زیرمجموعه	Subset

س

ساده کردن	Reduction, Simplification
ساده شده	Reduced
ساده نشدنی	Irreducible
سازگار (دستگاه)	Consistent (system)
سیال (معادله، دستگاه معادلات)	Indeterminate, Diophantine (equation, system of equations)

ش

شرط	Condition
شرط کافی	Sufficient condition
شرط لازم	Necessary «
شرط لازم و کافی	Necessary and sufficient condition

شرطی	Conditional
شمارهٔ ریشگی	Index
شوارتز	Schwartz

ص

صفر	Zero
صورت (کسر)	Numerator (fraction)

ض

ضرب	Multiplication
ضریب	Coefficient

ع

عبارت	Expression
عبارت تحلیلی	Analytic expression
« جبری	Algebraic »
« جبری صحیح	Entire »
« ریاضی	Mathematical »
« کسری	Fractional »
« گزاره‌ای	Proposional »
« گویا	Rational »
« متقارن	Symmetric »
« معین	Defined »
« نامعین	Undefined »
« نمایی	Exponential »
« همگن	Homogeneous »
عضو	Element
عضو بی‌اثر	Neutral element
عکس عمل	Reciprocal operation
علامت	Sign, Symbol
علامتی	Symbolic
عمل	Operation

غ

غیرعادی	Degenerate

غیرمتقارن ← نامتقارن	Non-symmetrical
ف	
فاکتورگیری	Factorizing
فرد	Odd
فضای برداری	Vector space
ق	
قانون قیاس	Syllogism law
قدرمطلق	Absolute value
قرینه	Symmetry
قطب کسر	Pole of fraction
ک	
کامل (چندجمله‌ای)	Complete (Polynomial)
کسر	Fraction
کشی	Cauchy
کوچکترین مضرب مشترك	Least common multiple
گ	
گنگ	Irrational, Surd
گویا	Rational
گویا کردن	Rationalizing
ل	
لاگرانژ	Lagrange
لگاریتم	Logarithm
لم	Lemma
م	
ماکسیمم	Maximum
ماکسیمم و مینیمم مطلق	Absolute maximum and minimum
مبهم	Indeterminate, Ambiguous
متجانس ← همگن	Homogeneous
متحد (عبارتهای جبری)	Identical
متحد با صفر	Identical to zero

Similar (terms)	متشابه (جمله‌های)
Variable	متغیر
Symmetric (algebraic expression)	متقارن (عبارت جبری)
Proportional (polynomials)	متناسب (چندجمله ایهای)
Arithmetic triangle	مثلث حسابی
Triangular (inequality)	مثلثی (نابرابری)
Set	مجموعه
Alkharazmi	محمدبن‌موسی خوارزمی
Complex	مختلط ← همبافته
Denominator	مخرج کسر
Ordering	مرتب کردن
Conjugate	مزدوج
Problem	مسئله
Sample problem	مسئلهٔ نمونه
Independent of	مستقل از
Multiple	مضرب
Equivalent	معادل ← هم‌ارز
Equation	معادله
Reciprocal (term)	معکوس (جملهٔ)
Defined	معین
Restitution	مقابله ← جبر و مقابله
Comparison	مقایسه
Numerical value	مقدارعددی
Constant term	مقدار معلوم (جملهٔ ثابت)
Exact value	مقدار واقعی
Divisor	مقسوم‌علیه
Imaginary (number)	موهومی (عدد)
Minkowski	مینکوفسکی
Minimum	مینیمم

ن

نابرابری	Inequality
نابرابری مثلثی	Triangular inequality
ناقص (چندجمله‌ای)	Incomplete (polynomial)
نامتقارن	Non-symmetrical
نامعادله	Inequality
نامعین	Undefined
نرمال (چندجمله‌ای)	Normal (polynomial)
نسبت	Ratio
نظریهٔ معادلات	Theory of equations
نما	Exponent
نماد	Symbol
نهاد	Structure
نیوتن	Newton

و

واسطه	Average, Mean
واسطهٔ توافقی	Harmonic »
واسطهٔ حسابی	Arithmetic »
واسطهٔ مربعی	Square »
واسطهٔ موزون	Gravity »
واسطهٔ هندسی	Geometric »
ویت	Viéte
ویرشتراس	Weierstrass

ه

هلدر	Hölder
همانی	Identity
همانی شرطی	Conditional identit
هم‌ارز	Equivalent
همبافته (عدد)	Complex (number)
همگن	Homogeneous
همیشه برقرار	Universally valid

مآخذ

درتألیف این کتاب ازمنابع زیراستفاده شده است:

۱. دهها کتاب درسی دانشگاهی فارسی یا خارجی به‌ویژه:

a) جبر. ترجمهٔ دکتر علینقی زنـد، بیژن شمس، دکتر محمدگودرزی، دکترکاظم‌للهی

b) Exposé moderne des mathématiques élémentaires.

par: *Lucienne FÉLIX*

c) Mathématiques générales, algebre–analyse.

par: *Charles PISOT, Marc ZAMANSKY*

۲. انواع کتابهای ریاضی پیش‌دانشگاهی فارسی و خارجی به‌ویژه:

a) ریاضیات‌عمومی برای‌دانشسراهای‌راهنمایی. تألیف: غلامرضاعسجدی، عبدالحسین مصحفی

b) جبر و مقابلهٔ چهارم ریاضی. تألیف: دکتر غلامحسین مصاحب، احمد ارشمید

c) روشهای جبر. تألیف: پرویز شهریاری

d) دورهٔ اختصاصی جبر مقدماتی. ترجمهٔ: پرویز شهریاری

e) حل‌المسائل عمومی ریاضیات. تألیف: باقر امامی

f) Algèbre.

par: *V. LESPINARD, R. PERNET*

g) Mathématiques élémentaires, analyse.

par: *G. CAGNAC, L. THIBERGE*

دهها جلد دورهٔ کتابهای خلاصه درس و حل مسائل به‌نام:

h) Mathématiques, exercices avec solutions

par: *A. COMBES*

i) Algebra. an incremental approach.

by: *JOHN H. SAXON, JR*

j) Pure Mathematics

by: *L. BOSTOCK, S. CHANDLER*

۳. کتابهای **ریاضیات جدید** و **جبر و حساب** که هم اکنون در دبیرستانهای ایران تدریس می‌شود.

۴. دورهٔ دوازده سالهٔ **مجلهٔ ریاضیات یکان** به‌مدیریت عبدالحسین مصحفی به‌ویژه:

a) **قضایائی دربارهٔ نامساویها.** ترجمهٔ: محمدشریف‌زاده. مقالهٔ مندرج در یکان شمارهٔ ۸

b) **روشهای تجزیهٔ عبارتهای جبری.** نوشتهٔ: پرویز شهریاری. یکان شمارهٔ ۳۵

c) **اثبات چند نامساوی مهم.** تنظیم از: افراسیاب ملکی. یکان شمارهٔ ۴۲

d) **تحویل رادیکال مرکب با فرجهٔ ۳.** ترجمهٔ: جعفرآقایانی چاوشی. یکان شمارهٔ ۴۴

e) **نامساویهای معروف.** ترجمهٔ محمدعلی رضوانی، مگردیچ تومانیان. یکان شمارهٔ ۶۶

f) **نامساویهای جبری.** ترجمهٔ: سعید شعاری‌نژاد. از یکان شمارهٔ ۹۴ تا یکان شمارهٔ ۹۷

g) **مسائل امتحانات G. C. E. انگلستان.** تهیه وترجمهٔ: جلیل‌الله قراگزلو. دوره‌های مختلف یکانهای سال.

d) هزاران مسئلهٔ مندرج درشماره‌های مختلف یکان که ذکر نام طرح کنندگان یا مترجمان آنان در اینجا میسر نیست. با تشکر از همهٔ آنان.

۵. انواع فرهنگها به‌ویژه:

a) Dictionnaire raisonné de mathématiques

par: *A. WARUSFEL*

b) Mathematics dictionary.

by: *G. JAMES, R. C. JAMES*

از این مجموعه منتشر شده است:

***تصاعدها و لگاریتم**
تألیف عبدالحسین مصحفی

***جبر تحلیلی (۱)**
تألیف غلامرضا عسجدی

***مثلثات پایه**
تألیف جلیل الله قراگزلو

***سیری در عددهای طبیعی**
تألیف جلیل الله قراگزلو

***آمار و احتمال**
ترجمه و تألیف جلیل الله قراگزلو

***منطق و استدلال ریاضی**
تألیف عبدالحسین مصحفی

عبارتهای جبری کتابی است که آگاهیهای دانشپژوه علم ریاضیّات را در زمینهٔ جبر پیش دانشگاهی، به‌صورت خودآموز، وسیعتر و عمیقتر می کند. مثالها و تمرینها و مسئله های فراوان کتاب وسیله ای است برای خودآزمایی و ارزشیابی آنچه دانشپژوه در این زمینه فراگرفته است و پدید آوردن این توانایی در او تا در هرگونه آزمون جبر در ردهٔ ممتاز پذیرفته شود.

جبر را علم عملیّات برروی حروف و نشانه ها نامیده اند. به کار بردن حروف و نشانه ها، نه‌تنها در شاخه های گوناگون ریاضی، بلکه در بسیاری از رشته های دیگر علمی نیز اهمیّت فراوان دارد. از این رو، جبر پایهٔ فراگیری بسیاری از دانشهاست.

این کتاب، گذشته از معادله ها و نامعادله ها، تمامی آنچه را زیر عنوان جبر در برنامه های آموزشی پیش دانشگاهی آموخته می شود یکجا در بر دارد. بخشهایی از کتاب نیز به **روشهای نوین در جبر** و نکته هایی مهمّ می پردازد که کمتر مورد توجّه بوده است و به همین سبب لغزشهایی در فراگیری نکته های دیگر پدید آورده است.

طرح روی جلد نمایانگر بخشی از مثلث حسابی خیام - پاسکال است.

گنجینهٔ دانش بخش کتابهای آموزشی **مؤسسهٔ انتشارات فاطمی**، به زودی کتابهای دیگری در زمینه های گوناگون علمی انتشار خواهد داد.

بها هشتاد [illegible] تومان