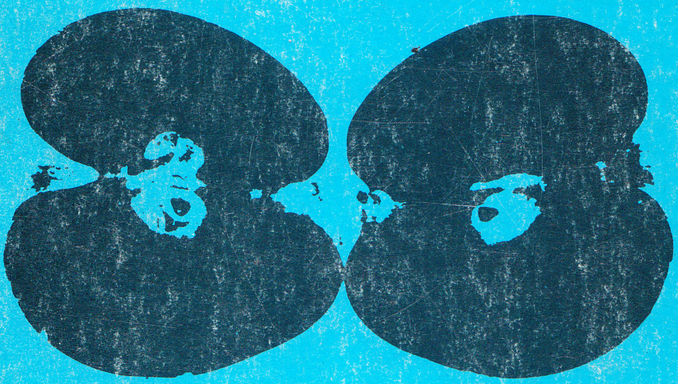
پرویز شهریاری

عبارت‌های متقارن

در جبر مقدماتی



پرویز شهریاری

عبارت‌های متقارن

در جبر مقدماتی

علمی دانشجو

تهران – ۱۳۶۶

انتشارات علمی دانشجو
تهران ــ خیابان انقلاب، مقابل دانشگاه تهران، ساختمان ظروفچی، شمارهٔ ۲۷۸ تلفن: ۶۴۳۴۵۲

عبارت‌های متقارن در جبر مقدماتی
پرویز شهریاری
چاپ اول، شهریور ۱۳۶۶
تیراژ : ۳۰۰۰ نسخه
حروفچینی : مهدی
صفحه‌آرا : حسن نیک‌بخت
فیلم و زینک : لادن
چاپ : چاپخانه امین

فهرست

تقارن جبری،شباهت زیادی با تقارن آئینه‌ای شکل‌ها دارد. وقتی که شما جلو آئینه می‌ایستید، تصویرخود را می‌بینید. ولی، تصویرشما درآئینه، با خود شما تفاوت‌هایی دارد. مثلا درتصویر، جای چشم‌های راست و چپ شما باهم عوض شده است. حالا اگردوجمله‌ای $x+y$ را جلو آئینه قرار دهید (شبیه شکل، یعنی امتداد خط راستی که از $x+y$ می‌گذرد برصفحهٔ آئینه‌عمود باشد،در

$$x+y\cdots \Big| \cdots y+x$$

تصویر به صورت $y+x$ درمی‌آید ، یعنی جای x و y باهم عوض می‌شوند: $y+x$ قرینهٔ $x+y$ نسبت به‌آئینه است.

ازآن‌جاکه $x+y$ و $y+x$، هیچ تفاوتی از نظرجبری ندارند، می‌گویند $x+y$ یا $y+x$، عبارتی متقارن است.

عبارت‌ها یا چند جمله‌ای‌هـای متقارن، اهمیت زیادی در جبر دارند ومی‌توان، به‌کمك ویژگی‌های‌آن‌ها، اولا بسیاری از مساله‌های محاسبه‌ای جبری را ساده و درانجام عمل‌های مفصل صرفه‌جوئی کرد و ثانیاً، به حل خیلی از مساله‌هایی‌که به طریق عادی قابل حل به نظر نمی‌آیند توفیق یافت.

بحث مربوط به تقارن (حتی اگر به ریاضیات مقدماتی اکتفا شود) گسترده‌تر از آن است که بتوان در یک «کتاب کوچك» به همهٔ جنبه‌های آن پرداخت. به همین مناسبت، در این کتاب، تنها به مهم‌ترین ویژگی‌ها و مهم‌ترین کاربردها پرداخته‌ایم و از بعضی جنبه‌ها (مثل کاربرد عبارت‌های متقارن در مثلثات و یا جست و جوی راه حلی کلی برای گویا کردن مخرج کسرها و یا گویا کردن معادله‌ها) حتی نام هم نبرده‌ایم.

ولی امید می‌رود که همین مختصر بتواند راهنمای خوبی برای دانش‌آموزان در شناخت و بهره گیری از ویژگی‌های عبارت‌های متقارن باشد.

دهم خرداد ۱۳۶۶

پرویز شهریاری

فصل اول

ورود به مطلب

۱. دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=19 \end{cases} \qquad (1)$$

و فرض می‌کنیم به طریقی کشف کرده باشیم جواب $x=3$، $y=-2$ در دستگاه صدق می‌کند. آیا، از اینجا، نمی‌توانید بلافاصله جواب دیگری از دستگاه را بشناسید؟ درست توجه کنید، در هر دو معادله، x و y، نقش‌های یکسانی به‌عهده دارند، هیچ‌کدام از آنها نسبت بــه دیگری برتری یاکمبودی ندارد. x و y، دراین دستگاه دو «موجود» کاملاً با «حقوق» برابرند. وقتی‌که این دو «موجــود» نقشی یکسان دارند، باید «پاداشی» یکسان دریافت کنند. نمی‌توان «پاداش» یکی را کمتر یا بیشتر از دیگری به حساب آورد. این، حکم عدل و منطق است.

بنابراین، تنها یکی ازدوحالت ممکن است: یا باید x و y جوابی برابرداشته باشد و یا اگر $x=a$، $y=b$ جوابی از دستگاه باشد، به ناچــار $x=b$، $y=a$ هم جواب دیگری از دستگاه خواهد بود.

به‌این ترتیب، وقتی که‌می‌دانیم $x=3$، $y=-2$ درمعادله‌های دستگاه (۱) صدق می‌کند، بلافاصله می‌توان نتیجه گرفت کــه $x=-2$، $y=3$ هم با معادله‌های دستگاه سازگار است. [البته، این بحث تضمین نمی‌کندکه دستگاه، جواب دیگری ندارد.]

عبارت‌هایی همچون $x+y$ و x^3+y^3 را، عبارت‌هایی متقارن نسبت به x و y گویند. بنابراین، اگر یك عبارت جبری، نسبت به دوحرف متقارن باشد، به معنای آن است

که نقش هرکدام ازاین دوحرف درعبارت، همان نقشی است که دیگری به‌عهده دارد: این دوحرف درعبارت مفروض جبری، برابرحقوق‌اند.

ولی باید برای «برابرحقوقی» یا «نقش‌های یکسان» تعریفی ریاضی پیداکرد، یعنی بتوان با نوعی «عمل ریاضی» تقارن عبارت را نسبت به دوحرف مفروض «ثابت» کرد.

خود مفهوم «نقش‌های یکسان»، معیار ریاضی لازم را به ما می‌دهد. اگر دو نفر در یك نمایش، نقشی کاملاً یکسان داشته باشند، مسلماً می‌توان جای آن‌ها را در صحنهٔ نمایش با هم عوض کرد، بدون این‌که هیچ گونه تفاوتی در نحوهٔ ارائهٔ نمایش به‌وجود آید:

یك عبارت جبری، وقتی نسبت به دوحرف x و y متقارن است که با تبدیل x به y و y به x، هیچ تغییری به وجود نیاید.

می‌توان گفت که: معادله‌های دستگاه (۱) نسبت به x و y متقارن‌اند، زیر اگر در هرکدام ازآن‌ها، x را به y و y را به x تبدیل کنیم، به دستگاه

$$\begin{cases} y+x=1 \\ y^3+x^3=19 \end{cases} \qquad (1)$$

می‌رسیم و روشن است که، دستگاه‌های (۱) و $'$(۱) تفاوتی باهم ندارند و، درواقع، معرف یك دستگاه‌اند.

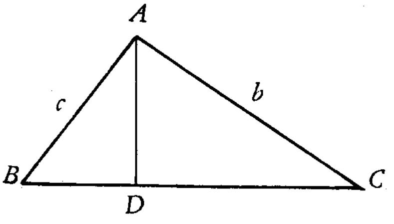
۲. در مثلث غیرمشخص ABC، طول ضلع‌ها را a، b و c (به ترتیب روبه‌روی راس‌های A، B و C) و طول نیمساز A را d_a می‌گیریم. اکنون، اگر رابطهٔ زیر (برای محاسبهٔ طول d_a) به شما داده شده باشد:

$$d_a=\frac{b(c \sin B+b \sin C)}{(b+c) \sin \frac{A}{2}} \qquad (1)$$

چه قضاوتی دربارهٔ آن دارید؟

آیا ممکن است این رابطه نادرست باشد؟

لزومی ندارد که شما از ویژگی‌های نیمساز و بستگی آن باضلع‌ها وزاویه‌های مثلث آگاه باشید. حتی لزومی ندارد مفهوم تابع‌های مثلثاتی را بشناسید. تنهااندکی توجه به‌شکل ۱ ورابطه‌ای که برای d_a نوشته شده است، کافی است تا شما را راهنمائی کند.



شکل ۱

نیمساز AD نمی‌تواند نسبت به ضلع‌های زاویهٔ A تفاوتی قایل شود و یکی را بر

دیگری ترجیح دهد (مثلاً، هر نقطه ازخط راست نیمساز، ازدوضلع زاویهٔ A به یك فاصله است، یا با هریك ازاین دوضلع زاویه‌های برابر می‌سازد و غیره). بنابراین، دررابطه‌ای که d_a را به دست می‌دهد، باید دو ضلع b و c از مثلث، حقوقی برابر داشته باشند.همین استدلال را درمورد زاویه‌های B و C از مثلث هم می‌توان دنبال کرد:

رابطهٔ (۱) باید از یك‌طرف نسبت به b و c وازطرف دیگر نسبت به B و C متقارن باشد، یعنی اگـر دو رابطهٔ (۱)، b و c را به یکدیگر و B و C را به یکدیگر تبدیل کنیم، تغییری به وجود نیاید.

آیا رابطهٔ (۱) چنین است؟

در رابطهٔ (۱)، b رابه c و c را بـه b، همچنین، B را به C و C را بـه B تبدیل می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$d_a=\frac{c(b\ \sin C+c\ \sin B)}{(c+b)\sin\frac{A}{۲}} \qquad (۱)'$$

d_a نمی‌تواند دو طول مختلف داشته باشد، بنابراین باید سمت راست برابری‌های (۱) و $(۱)'$، باهم برابر باشند،که ازآن‌جا به روشنی حاصل می‌شود:

$$b=c$$

و این نتیجه، فرض ما را دربارهٔ غیرمشخص بودن مثلث، نقض می‌کند: رابطهٔ (۱)، و در ضمن رابطهٔ $(۱)'$، نمی‌تواند درست باشد. این رابطه نسبت به B و C متقارن است، ولی نسبت به b و c متقارن نیست. درواقع، رابطهٔ درست برای محاسبهٔ d_a، چنین است:

$$d_a=\frac{a(c\ \sin B+b\ \sin C)}{(b+c)\sin\frac{A}{۲}} \qquad (۲)$$

یادداشت ۱. توجـه‌کنید، رابطهٔ (۲)، نتیجه‌ای از استدلال ما نیست. با استدلالی که برای نادرست بودن رابطهٔ (۱) آوردیم، نمی‌توان رابطهٔ درست را نتیجه گرفت. این، تنها یك استدلال نفی‌کننده است و ثابت می‌کند که رابطهٔ (۱) درست نیست. اثبات درستی رابطهٔ (۲) مسیر دیگری می‌خواهد. ما تنها می‌توانیم بگوییم که رابطهٔ (۲)، هم نسبت به B و C و هم نسبت به b و c متقارن است.

یادداشت ۲. اگر برای محاسبهٔ طول نیمساز AD، این رابطه را به ما بدهند:

$$d_a=\frac{ac\sin B}{(b+c)\sin\frac{A}{۲}} \qquad (۳)$$

نباید از عدم تقارن ظاهری آن، فوراً نتیجه گرفت که رابطهٔ (۳) نادرست است. در واقع، اگر در رابطهٔ (۳)، تبدیل‌ها را انجام دهیم و همه‌جا، b را به c و c را به b، همچنین، B را به C و C را به B تبدیل کنیم، به دست می‌آید:

$$d_a = \frac{ab \sin C}{(a+c) \sin \frac{A}{۲}} \qquad (۳)'$$

چه بسا که رابطه‌های (۳) و $'$(۳) یکی باشند و شرط‌های مسأله را نقض نکنند. برای این که دراین مورد اطمینان پیدا کنیم، سمت راست برابری‌های (۳) و $'$(۳) را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{ac \sin B}{(b+c) \sin \frac{A}{۲}} = \frac{ab \sin C}{(b+c) \sin \frac{A}{۲}}$$

که از آن‌جا، به سادگی نتیجه می‌شود:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

و این، رابطه‌ای است که درمورد هر مثلث غیرمشخص، همیشه برقرار است. یعنی، رابطهٔ (۳)، مفهوم تقارن نسبت به b و c (یا B و C) را نقض نمی‌کند، با این روش نمی‌توان به‌درستی یا نادرستی رابطهٔ (۳) پی‌برد. روش استفاده از مفهوم تقارن، درستی رابطهٔ (۳) را نفی نمی‌کند؛ ولی همان‌طور که در یادداشت ۱ گفتیم، از این‌جا نمی‌توان اطمینان پیدا کرد که رابطهٔ (۳) درست است. [رابطه‌های (۳) و $'$(۳)، درواقع درست و به سادگی قابل اثبات‌اند.]

۳. به این مسأله توجه کنید. می‌خواهیم معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهیم که هرکدام از ریشه‌های آن، مکعب ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیر باشند:

$$ax^۲ + bx + c = ۰ \qquad (۱)$$

می‌دانیم که برای تشکیل یك معادلهٔ درجه دوم، باید مجموع (S) و حاصل ضرب (P) دو ریشهٔ آن را داشته باشیم. دراین صورت معادلهٔ درجه دوم مطلوب به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$x^۲ - Sx + P = ۰ \qquad (۲)$$

یك راه حل مسأله این است که ریشه‌های معادلهٔ (۱) را به‌دست‌آوریم:

$$x' = \frac{-b+\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}, \quad x'' = \frac{-b-\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

سپس، هریك از این ریشه‌ها را مکعب کنیم تا ریشه‌های معادلـهٔ مطلوب به دست آید، بعد مجموع و حاصل ضرب مقدارهـای حاصل را به دست آوریم و، سرانجام، به کمك رابطهٔ (۲)، معادلهٔ مطلوب را تشکیل دهیم.

خودتان این راه را ادامـه دهیـد و ببینید، برای رسیدن به معـادلهٔ جواب، به چه محاسبه‌های طولانی نیاز دارید.

در اینجا، مساله را به طریق دیگری حل می‌کنیم.

دو رابطهٔ معروف بین ریشه‌ها وضریب‌های معادلهٔ (۱) برقرار است[۱]:

$$x'+x''=-\frac{b}{a}\ ;\ x'.x''=\frac{c}{a}$$

اکنون، اگر ریشه‌های معادلهٔ مطلوب را y' و y'' فرض کنیم، بنا بر شرط مساله باید داشته باشیم:

$$y'=x'^{۳}\ ;\ y''=x''^{۳}$$

و به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}S&=y'+y''=x'^{۳}+x''^{۳}=\\&=(x'+x'')^{۳}-۳x'x''(x'+x'')=\\&=\left(-\frac{b}{a}\right)^{۳}-۳.\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)=-\frac{b^{۳}}{a^{۳}}+\frac{۳bc}{a^{۲}}=\\&=-\frac{b^{۳}-۳abc}{a^{۳}};\end{aligned}$$

$$P=x'^{۳}.x''^{۳}=(x'.x'')^{۳}=\frac{c^{۳}}{a^{۳}}$$

و بنابراین، معادلهٔ مطلوب چنین است:

$$y^{۲}+\frac{b^{۳}-۳abc}{a^{۳}}y+\frac{c^{۳}}{a^{۳}}=۰$$

ویا (باتوجه به‌این‌که، a مخالف صفر است):

$$a^{۳}y^{۲}+(b^{۳}-۳abc)y+c^{۳}=۰$$

---

۱. این دورابطه را **رابطه‌های ویت** گویند، به‌نام فرانسوا ویت (۱۵۳۰ـ۱۶۰۳)، ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی. $x'+x''$ و $x'.x''$، ساده‌ترین عبارت‌های متقارن، نسبت به x' و x''، هستند.

در این‌جا، در واقع، به این مناسبت توانستیم از رابطه‌های سادهٔ ویت، برای حل مساله استفاده کنیم کـه هم $S(x'^{۲}+x''^{۳})$ و هم $P(x'^{۳}.x'^{۳})$، نسبت به ریشه‌های معادلهٔ مفروض (یعنی x' و x'')، عبارت‌هایی متقارن بودند.

اگر مثلاً می‌خواستیم معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهیم که یك ریشهٔ آن مجذور یکی از ریشه‌های معادلهٔ (۱) و ریشهٔ دیگر آن مکعب ریشهٔ دیگر معادلهٔ (۱) باشد، نمی‌توانستیم از این راه حل ساده استفاده کنیم.

یادداشت. برای مساله‌ای که در شمارهٔ ۳ حل کردیم، راه حل دیگری هم وجوددارد. ولی از این راه حل هم تنها وقتی می‌توان استفاده کرد که مجموع وحاصل ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید، نسبت به ریشه‌هـای معـادلهٔ (۱)، عبارت‌هایی متقارن باشند. به زبان دیگر، رابطهٔ بین y' و x'،کاملاً با رابطهٔ بین y'' و x'' شبیه باشد (اگر y' مکعب x' است، y'' هم مکعب x'' باشد؛ یا اگر y' به‌اندازهٔ ۲ واحد ازمجذور x' بیشتراست، y''،هم به‌اندازهٔ ۲ واحد از مجذور x'' بیشتر باشد).

به راه حل بپـردازیم. مجهول معـادلهٔ (۱) عبارت است از x؛ اگر مجهول معادلهٔ مطلوب را y فرض کنیم، بنا بر شرط مساله، باید داشته باشیم: $y=x^{۳}$ و یا $x=\sqrt[۳]{y}$. این مقدار x را را درمعادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم:

$$a\sqrt[۳]{y^{۲}}+b\sqrt[۳]{y}+c=۰$$

اکنون، کافی است این معادله را گویا کنیم. اگر مقدار ثابت c را به سمت راست برابری ببریم و دوطرف را مکعب کنیم، به‌ترتیب، به دست می‌آید:

$$(a\sqrt[۳]{y^{۲}}+b\sqrt[۳]{y})^{۳}=-c^{۳};$$

$$a^{۳}y^{۲}+b^{۳}y+۳(a\sqrt[۳]{y^{۲}}.b\sqrt[۳]{y})(a\sqrt[۳]{y^{۲}}+b\sqrt[۳]{y})=-c^{۳};$$

$$a^{۳}y^{۲}+b^{۳}y+۳aby(-c)=-c^{۳}$$

و سرانجام

$$a^{۳}y^{۲}+(b^{۳}-۳abc)y+c^{۳}=۰$$

و این،همان جواب موردنظر است.

۴. از ما خواسته‌اند عبارت

$$f(x,\ y)=۳x^{۴}-۴x^{۳}y-۹x^{۲}y^{۲}-۴xy^{۳}+۳y^{۴}$$

را به‌ضرب دوعامل تجزیه کنیم، وما بعدازعمل‌های لازم (که فعلا خبری از آن‌ها نداریم)، به این نتیجه رسیده‌ایم:

$$f(x,\ y)=(x^2-3xy+2y^2)(3x^3+5xy+3y^2) \qquad (1)$$

آیا این جواب درست است؟ البته، می‌توان دو عامل حاصل را درهم ضرب‌کرد و مشاهده‌کرد که آیا با عبارت اصلی $f(x,\ y)$، یکی درمی‌آید یا نه!

ولی، با نگاهی گذرا، به عبارت $f(x,\ y)$ و نتیجه‌ای که به دست آورده‌ایم، فوراً متوجه می‌شویم که باید درجایی اشتباه‌کرده باشیم. چگونه؟

با اندکی دقت در $f(x,\ y)$، برای ما روشن می‌شود که، نسبت به x و y، عبارتی متقارن است، یعنی اگر نقش x و y را در آن، باهم عوض کنیم، هیچ تغییری در عبارت به وجود نمی‌آید، به خصوص، اگر $f(x,\ y)$ را به صورت

$$f(x,\ y)=3(x^4+y^4)-4xy(x^2+y^2)-9x^2y^2$$

بنویسیم، متقارن بودن آن نسبت به x و y، روشن‌تر دیده می‌شود. بنابراین، نتیجهٔ حاصل از تجزیهٔ این عبارت هم، باید نسبت به x و y متقارن باشد، در حالی که چنین نیست، زیرا اگر درنتیجهٔ تجزیه، جای x و y را باهم عوض‌کنیم، به دست می‌آید:

$$f(y,\ x)=(y^2-3yx+2x^2)(3y^2+5yx+3x^2) \qquad (2)$$

و به روشنی دیده می‌شود که (۱) و (۲)، یکی نیستند: عامل دوم در $f(x,\ y)$ و $f(y,\ x)$ باهم تفاوتی ندارند، ولی عامل‌های اول آن‌ها، با یکدیگر فرق دارد. در واقع، در (۱)، عامل دوم نسبت به x و y متقارن است، درحالی‌که عامل‌اول آن، نسبت به x و y متقارن نیست، بنابراین، (۲) نمی‌تواند نتیجهٔ تجزیهٔ $f(x,\ y)$ به ضرب دوعامل‌اول باشد.

تمرین‌ها

۰۱ آیا می‌توانید، بدون حل، جوابی از دستگاه زیر را پیدا کنید؟

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\ ;\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$$

۰۲ آیا عبارت جبری زیر، نسبت به x و y، متقارن است؟

$$x^2+y^2-5x^2y^3+5x^3y^2$$

۰۳ دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی

$$\begin{cases} 4\sqrt[3]{x}+4\sqrt[3]{2y}=5 \\ \dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[6]{2y}}=3 \end{cases}$$

مفروض است، می‌دانیم، یکی ازجواب‌ها عبارت است از $x=\frac{1}{64}$، $y=\frac{1}{2}$. آیا می‌توانید جواب دیگری از دستگاه را پیدا کنید؟

۴. در دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی

$$\begin{cases} x^3-y^3=9 \\ x^4+y^4=17 \end{cases}$$

یکی از جواب‌هــا عبــارت است از: $x=2$، $y=-1$. جواب دیگری از دستگاه را پیدا کنید.

۵. این عبارت، نسبت به چه حرف‌هایی متقارن است؟

$$abc^2-a^2b^2c-3abc+5\sqrt{abc}(\sqrt{ab}+\sqrt{c})$$

۶. معادلهٔ درجهٔ دوم زیرمفروض است:

$$x^2-(m+1)x+m=0 \qquad (1)$$

a) مقدار m را درمعادلهٔ (۱) طوری پیدا کنید که:

الف. یکی از ریشه‌های آن دوبرابر ریشهٔ دیگر باشد.

ب. مجموع عکس مجذور ریشه‌های آن برابر $\frac{5}{4}$ شود.

پ. مجموع توان‌های سوم ریشه‌های آن برابر ۲۸ باشد.

b) معادلهٔ درجهٔ دوم دیگری تشکیل دهید که:

الف. هریك از ریشه‌های آن k برابر ریشه‌های معادلهٔ (۱) باشد.

ب. هریك از ریشه‌های آن برابر با عکس مجذور ریشه‌های معادلهٔ (۱) باشد.

پ. هریك ازریشه‌های آن برابر باتوان پنجم ریشه‌ها متناظرخود درمعادلهٔ (۱) باشد.

۷. اگر بدانیم عبارت

$$x^3+xy^2+x^2y+y^3$$

بر $x+y$ بخش‌پـذیر است، آیا می‌توانید بدون عمل‌هــای معمول تجزیه و یا تقسیم این عبارت بر $x+y$، نتیجهٔ تجزیهٔ آن را به ضرب دوعامل اول پیدا کنید؟

۸. آیا برابری زیر یك معادله است یا یك اتحاد؟

$$(x+y+2)(xy+2x+2y)-2xy=(x+y)(x+2)(y+1)$$

۹. درمثلث‌غیرمشخص ABC، طول ضلع‌های رو به‌روی راس‌های A و B و C را،

به‌ترتیب، a و b و c می‌نامیم. اگـر AM طول میانهٔ وارد بر BC باشد، آیا رابطهٔ زیر می‌تواند درست باشد:

$$AM^۲ = c(b - a \cos B) + \frac{a^۲}{۴}$$

فصل دوم
تعمیم مفهوم تقارن و ویژگی‌های آن

۰۱ درفصل اول ازعبارت‌هایی صحبت کردیم که نسبت به دو حرف متقارن بود و دیدیم که:

عبارتی نسبت به دو حرف متقارن است‌که اگر، درآن جای دو حرف را باهم عوض کنیم، تغییری درعبارت جبری به‌وجود نیاید. درواقع عبارت $f(x_۱, x_۲)$ وقتی نسبت به $x_۱$ و $x_۲$ متقارن است‌که داشته باشیم:

$$f(x_۱, x_۲) = f(x_۲, x_۱)$$

اکنون به تعریف‌کلی یك چندجمله‌ای متقارن می‌پردازیم.

چندجمله‌ای $f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ را، نسبت به n متغیر $x_۱$، $x_۲$، $\ldots$، x_n متقارن گوییم، وقتی که با تبدیل هردو متغیر دلخواه x_i و x_j آن به یکدیگر، تغییر نکند.

در واقع، در یك چندجمله‌ای متقارن همهٔ متغیرها «حقوقی» برابر دارند وهیچ‌کدام ازآن‌ها، نقشی ممتازتر از دیگران به عهده ندارد. مثلاً، همهٔ عبارت‌های زیر، نسبت به a و b و c متقارن‌اند:

$$a+b+c, \qquad a^۲+b^۲+c^۲-abc,$$

$$ab+bc+ca \qquad \frac{۱}{a^۳}+\frac{۱}{b^۳}+\frac{۱}{c^۳}$$

در هریك از این عبارت‌ها اگر a و b یا b و c یا c و a را به یکدیگر تبدیل کنیم، در مقدار عبارت تغییری حاصل نمی‌شود. همچنین، عبارت

$$\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲+d^۲-۴abcd}$$

نسبت به چهارحرف a، b، c و d متقارن است.

یادداشت. اگر درچندجمله‌ای $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$، x_1 را به x_2، x_2 را به x_3، ...، x_{n-1} را به x_n، x_n را به x_1 تبدیل کنیم به چندجمله‌ای $f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$ می‌رسیم که آن را تبدیل دوری چندجمله‌ای اصلی گویند. درحالتی که یك چندجمله‌ای، ضمن تبدیل دوری تغییر نکند، گویند یك دور (سیکل) تشکیل داده است.

روشن است که، یك چندجمله‌ای متقارن، همیشه تشکیل یك دور می‌دهد، درحالی که یك دور، ممکن است عبارتی متقارن نباشد.

مثلاً چندجمله‌ای متقارن

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$

درضمن یك چندجمله‌ای دوری است، درحالی که چندجمله‌ای

$$xy+yz+zt+xt$$

یك عبارت دوری است، یعنی با تبدیل x به y، y به z، z به t و t به x تغییر نمی‌کند، درحالی که همین عبارت، نسبت به x، y، z و t، متقارن نیست و، مثلاً، اگر جای x و y را باهم عوض کنیم، به عبارت دیگری منجرمی‌شود.

ما دراین کتاب، تنها به عبارت‌های متقارن می‌پردازیم و به عبارت‌های دوری کاری نداریم.

۲. ساده‌ترین چندجمله‌ای‌های متقارن. معادلهٔ درجه دوم

$$x^2+px+q=0 \tag{1}$$

را درنظرمی‌گیریم. می‌دانیم که

$$x_1+x_2=-p; \quad x_1 \cdot x_2=q \tag{2}$$

(x_1 و x_2 را ریشه‌های معادلهٔ (۱) گرفته‌ایم). x_1+x_2 و x_1x_2، نسبت به x_1 و x_2، متقارن‌اند. البته، تعداد عبارت‌های متقارن نسبت به x_1 و x_2، بی‌شماراست. ولی در جبر ثابت می‌کنند (و ما دراین‌جا به این اثبات نمی‌پردازیم) که هر عبارت متقارن نسبت به x_1 و x_2 را می‌توان برحسب x_1+x_2 و x_1x_2 نوشت. یعنی، اگر همان طور که معمول است، فرض کنیم:

$$\sigma_1=x_1+x_2, \quad \sigma_2=x_1x_2$$

هر عبارت متقارن نسبت به x_1 و x_2 را می‌توان به صورت عبارتی برحسب σ_1 و σ_2 درآورد (که البته، همیشه نسبت به σ_1 و σ_2 متقارن نیست).

به‌عنوان مثال، مجموع توان‌های برابر از x_1 و x_2 را برحسب σ_1 و σ_2 می‌نویسیم، به ترتیب داریم:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\sigma_1^2-2\sigma_2,$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2,$$

$$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=$$

$$=(\sigma_1^2-2\sigma_2)^2-2\sigma_2^2=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2,$$

. . . . . .

همچنین، ثابت می کنند که، هرعبارت متقارن را، تنها به یك صورت می‌توان برحسب σ_1 و σ_2 نوشت.

روشن است که عکس حکم بالا هم درست است، یعنی هر چند جمله‌ای از متغیرهای σ_1 و σ_2 (که لازم نیست نسبت به‌آن‌ها متقارن باشد)، نسبت به x_1 و x_2 عبارتی متقارن می‌شود. مثلا

$$f(\sigma_1,\sigma_2)=(\sigma_1-\sigma_2)^2+2\sigma_1=$$

$$=\sigma_1^2-2\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2+2\sigma_1=$$

$$=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2(x_1+x_2)+x_1^2x_2^2-2(x_1+x_2)$$

که نسبت به x_1 و x_2 متقارن است.

۳. اکنون، معادلهٔ درجهٔ سوم زیر را در نظر می گیریم:

$$x^3+px^2+qx+r=0 \qquad (3)$$

برای ساده‌ترین عبارت‌های متقارن، نسبت به سه ریشه، داریم:

$$x_1+x_2+x_3=-p,\quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q,\quad x_1x_2x_3=-r \qquad (4)$$

و اگر فرض کنیم:

$$x_1+x_2+x_3=\Sigma x_1=\sigma_1,$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\Sigma x_1x_2=\sigma_2,$$

$$x_1x_2x_3=\sigma_3$$

می‌توان ثابت کرد که هرعبارت متقارن نسبت به سه حرف x_1 و x_2 و x_3 برحسب σ_1، σ_2 و σ_3 قابل بیان است. دومثال:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3};$$

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-$$

$$-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3)+3x_1x_2x_3=$$

$$=\sigma_1[(x_1+x_2+x_3)^2-3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)]+3\sigma_3=$$

$$=\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_2)+3\sigma_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$$

مثال. در معادلهٔ درجه سوم:

$$x^3-(m-2)x^2-(m-1)x+m-2=0$$

مقدار m را طوری پیدا کنید که مجموع توان‌های سوم ریشه‌های آن برابر صفر شود.

حل. در این معادله داریم:

$$\sigma_1=m-2; \quad \sigma_2=-(m-1); \quad \sigma_3=-(m-2)$$

و بنا بر فرض مساله باید داشته باشیم:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=0$$

و یا

$$(m-2)^3+3(m-2)(m-1)-3(m-2)=0$$

که بعد از ساده کردن به معادلهٔ درجه سوم زیر، نسبت به m، می‌رسیم:

$$m^3-3m^2+4=0$$

و یا

$$(m+1)(m-2)^2=0$$

و بنابراین، به‌دست می‌آید: $m_1=-1$ و $m_2=2$.

یادداشت. جواب‌هایی که برای m به دست‌آمده است، به هیچ وجه، حقیقی بودن همهٔ ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم مفروض را تضمین نمی‌کنند. البته، در این‌جا، هم به ازای $m=-1$، معادلهٔ مفروض، سه ریشهٔ حقیقی پیدا می‌کند.

۴. اکنون، حالت کلی، یعنی معادلهٔ درجهٔ n زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+rx^{n-3}+\ldots+s=0 \qquad (5)$$

اگر ریشه‌های این معادله را (حقیقی یا موهومی) x_1، x_2، x_3، . . .، x_n فرض کنیم، در جبر ثابت می‌کنند که

$$
(۶)\quad \begin{cases}
\Sigma x_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -p \\
\Sigma x_1 x_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n = q \\
\Sigma x_1 x_2 x_3 = -r \\
\cdots\cdots \\
x_1 x_2 x_3, \ldots, x_n = (-1)^n s
\end{cases}
$$

منظور از $\Sigma x_1 x_2$، مجموع همهٔ جمله‌هائی است که می‌توان از ضرب دو به دوی ریشه‌ها به دست آورد؛ همچنین منظور از $\Sigma x_1 x_2 x_3$، مجموع همهٔ جمله‌هایی است که می‌توان از ضرب سه به سه ریشه‌ها پیدا کرد، به‌طور کلی منظور از

$$\Sigma x_1 x_2 \cdots x_k$$

مجموع همهٔ جمله‌هایی است که می‌توان ازضرب همهٔ انواع ممکن k ریشه به‌دست آورد.

مثلاً در معادلهٔ درجه چهارم

$$x^4 - 7x^3 + 4x - 3 = 0$$

داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = 0,$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = -4$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = -3$$

عبارت‌های سمت‌چپ رابطه‌های (۶) را، ساده‌ترین‌رابطه‌های متقارن بین nحرف x_1، x_2، . . . ، x_n می‌نامند و ثابت می‌کنند که هــر عبارتی را که نسبت به این nحرف متقارن باشد، می‌توان برحسب این ساده‌ترین عبارت‌های متقارن نوشت. این ساده‌ترین عبارت‌های‌متقارن را، معمولاً این طور می‌نامند:

$$\Sigma x_1 = \sigma_1;\ \Sigma x_1 x_2 = \sigma_2;\ \Sigma x_1 x_2 x_3 = \sigma_3;\ \ldots;\ x_1 x_2 \cdots x_n = \sigma_n$$

روشن است که، نسبت به x_1، x_2، . . . ، x_n، عبارت σ_1 از درجهٔ اول، σ_2 ازدرجهٔ دوم و . . و σ_n از درجهٔ nام است؛ بنابراین، اگر عبارتی به صورت

$$\sigma_1^{m_1} \sigma_2^{m_2} \cdots \sigma_n^{m_n}$$

داشته باشیم، درجهٔ آن نسبت به x_1، x_2، . . . ، x_n برابر است با

$$m_1 + 2m_2 + \cdots + nm_n$$

مثلاً، σ_1^3 از درجه سوم، $\sigma_1^2\sigma_2$ از درجهٔ چهارم و $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ از درجهٔ ششم است.

۵. به عنوان مثال، عبارت $x_1^5+x_2^5+x_3^5$ را، برحسب σ_1، σ_2 و σ_3 پیدا می‌کنیم. روشی که دراین مثال به‌کار می‌بریم، روشی کلی است ومی‌تواند در مورد هرمثال دیگری هم به‌کاررود. اگرضمن حل، باتفصیل عمل می‌کنیم، به‌این مناسبت است‌که خواننده به‌این روش کلی آشنا شود.

به مقدارهای σ_1، σ_2 و σ_3 توجه‌کنید:

$$\sigma_1=x_1+x_2+x_3;$$

$$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3;$$

$$\sigma_3=x_1x_2x_3$$

اگر هر سه حرف x_1، x_2 و x_3 را درنظر بگیریم، σ_1 از درجهٔ اول، σ_2 از درجهٔ دوم و σ_3 از درجهٔسوم است.

وقتی که عبارت $x_1^5+x_2^5+x_3^5$ برحسب σ_1، σ_2 و σ_3 نوشته شود، باید به عبارتی برسیم‌که هرکدام ازجمله‌های‌آن به صورت

$$K\,\sigma_1^{m_1}\cdot\sigma_2^{m_2}\cdot\sigma_3^{m_3}$$

باشند که، درآن، K ضریب ثابت جمله و m_1، m_2 و m_3 عددهایی درست و غیرمنفی‌اند.

با توجه به این که عبارت $x_1^5+x_2^5+x_3^5$ از درجهٔ پنجم است (و درضمن، σ_1 درجهٔ اول، σ_2 درجهٔ دوم و σ_3 درجهٔ سوم‌اند)، باید داشته باشیم:

$$m_1+2m_2+3m_3=5 \qquad (7)$$

تمام جواب‌های درست و غیرمنفی معادلهٔ (۷) را، برای m_1، m_2 و m_3، به دست می‌آوریم. از m_1 آغاز می‌کنیم:

۱) اگر داشته باشیم $m_1=5$ روشن است‌که $m_2=m_3=0$؛

۲) m_1 نمی‌توانــد برابــر ۴ باشد، زیرا دراین صورت، برای m_2 و m_3 جواب غیرمنفی درستی به دست نمی‌آید؛

۳) $m_1=3$، دراین حالت به‌دست می‌آید

$$2m_2+3m_3=2$$

که تنها یك جواب غیرمنفی درست، برای m_2 و m_3 دارد: $m_2=1$، $m_3=0$؛

۴) $m_1=2$، دراین صورت از معادلهٔ

$$2m_2+3m_3=3$$

به‌دست می‌آید: $m_2 = 0$ و $m_3 = 1$.

۵) $m_1 = 1$؛ دراین حالت از معادله

$$2m_2 + 3m_3 = 4$$

حاصل می‌شود: $m_2 = 2$ و $m_3 = 0$؛

۶) و سرانجام به ازای $m_1 = 0$ خواهیم داشت $m_2 = 1$ و $m_3 = 1$.

این جواب‌ها را در جدولی منظم می‌کنیم:

	m_1	m_2	m_3	شکل کلی جمله
۱)	۵	۰	۰	$A\sigma_1^5$
۲)	۳	۱	۰	$B\sigma_1^3\sigma_2$
۳)	۲	۰	۱	$C\sigma_1^2\sigma_3$
۴)	۱	۲	۰	$D\sigma_1\sigma_2^2$
۵)	۰	۱	۱	$E\sigma_2\sigma_3$

بنابراین در تبدیل $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$، به عبارتی برحسب σ_1، σ_2 و σ_3، باید به مجموعی از پنج جملهٔ ستون سمت راست جدول برسیم که، درآن، A، B، C، D و E ضریب‌های ثابت‌اند. یعنی می‌توان نوشت:

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = A\sigma_1^5 + B\sigma_1^3\sigma_2 + C\sigma_1^2\sigma_3 + D\sigma_1\sigma_2^2 + E\sigma_2\sigma_3 \qquad (8)$$

چون برابری (۸) یك اتحاد است، بنابراین باید به ازای همهٔ مقدارهای x_1، x_2 و x_3 برقرارباشد. برای پیداکردن ضریب‌های A، B، C، D و E، به‌پنج معادله نیاز داریم. پنج بار و هر بار مقدارهای مناسبی را در دو طرف برابری، به جای x_1، x_2 و x_3 قرار می‌دهیم.

۱) فرض می‌کنیم $x_1 = x_2 = 0$ و $x_3 = 1$؛ دراین حالت خواهیم داشت: $\sigma_1 = 1$، $\sigma_2 = 0$، $\sigma_3 = 0$ و، بنابراین، ازاتحاد (۸) به دست می‌آید:

$$A = 1 \qquad (\mathrm{I})$$

۲) $x_1 = x_2 = 1$، $x_3 = -2$؛ در این حالت داریم: $\sigma_1 = 0$، $\sigma_2 = -3$ و $\sigma_3 = -2$؛ و از اتحاد (۸) نتیجه می‌شود:

$$E=-5 \qquad \text{(II)}$$

۳) $x_1=x_2=1$، $x_3=0$؛ دراین حالت داریم: $\sigma_1=2$، $\sigma_2=1$ و $\sigma_3=0$ و به معادلهٔ زیر می‌رسیم (با توجه به $A=1$):

$$4B+D=-15 \qquad \text{(III)}$$

۴) $x_1=x_2=1$ و $x_3=-1$؛ به دست می‌آید: $\sigma_1=1$، $\sigma_2=-1$ و $\sigma_3=-1$ و به این معادله می‌رسیم (با توجه به $A=1$ و $E=-5$):

$$B-C+D=-5 \qquad \text{(IV)}$$

۵) $x_1=x_2=x_3=1$؛ از آن‌جا: $\sigma_1=3$، $\sigma_2=3$ و $\sigma_3=1$:

$$9B+C+3D=-25 \qquad \text{(V)}$$

معادله‌های (I) تا (V)، مقدارهای A، B، C، D و E را به ما می‌دهند:

$$A=1,\ B=-5,\ C=5,\ D=5,\ E=-5$$

به این ترتیب، سرانجام خواهیم داشت:

$$x_1^5+x_2^5+x_3^5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_2\sigma_3$$

یادداشت. ما دراین‌جا نه‌تنها ثابت نکردیم که هرعبارت متقارنی را می‌توان برحسب ساده‌ترین عبارت‌های متقارن نوشت، بلکه درضمن دو حکم مهم دیگر را هم، بدون اثبات دقیق، پذیرفتیم: اولا، هرعبارت متقارن را تنها به‌یك صورت می‌توان برحسب ساده‌ترین عبارت‌های متقارن نوشت؛ ثانیا این‌که، در تبدیل هر عبارت متقارنی‌که شامل توان‌های مشابه متغیرها باشد، به عبارتی می‌رسیم که تنها شامل جمله‌های درجهٔ nام است و، همیشه، ضریب جمله‌های پایین‌تر از درجهٔ n برابر صفر می‌شود. [برای آشنائی کامل با این قضیه‌ها و مفهوم‌های دیگر عبارت‌های متقارن، می‌توانید به کتاب «تقارن در جبر» که با ترجمهٔ نویسندهٔ کتاب حاضر چاپ شده است، مراجعه کنید.]

تمرین‌ها

۱۰. اگر بدانیم

$$f(a,b,c)=a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)+2abc$$

بر $a+b$ بخش‌پذیر است، تجزیه $f(a,b,c)$ را به ضرب عامل‌های اول پیدا کنید.

۱۱. یکی ازجواب‌های دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ x^3+y^3+z^3=8 \end{cases}$$

عبارت است از: $x=1$، $y=-1$، $z=2$. آیا می‌توانید جواب‌های دیگری از دستگاه را بنویسید؟

۱۲. اگر R شعاع دایرهٔ محیطی، S مساحت و a و b و c طول ضلع‌های یك مثلث باشند، آیا رابطهٔ زیر می‌تواند درست باشد؟

$$R=\frac{2S}{a+b-c}$$

۱۳. آیا عبارت جبری زیر، نسبت به a و b و c متقارن است؟

$$(a-b)(b-c)(c-a)$$

۱۴. معادلهٔ درجه سوم زیر مفروض است:

$$x^3-3x+2=0$$

از روی ساده‌ترین رابطه‌های متقارن بین ریشه‌ها و ضریب‌ها چه نتیجه‌ای دربارهٔ علامت ریشه‌های معادله می‌گیرید؟

۱۵. معادلهٔ درجه سومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن مجذور ریشه‌های معادلهٔ زیر باشند:

$$x^3+mx^2+nx+p=0$$

۱۶. معادلهٔ درجه سوم زیر مفروض است:

$$x^3-3(m+1)x^2+(m+10)x-2(m+2)=0 \qquad (1)$$

a) m را طوری پیدا کنید که

الف. مجموع عکس ریشه‌ها برابر $\frac{11}{6}$ باشد؛

ب. مجموع مجذورهای ریشه‌ها برابر ۱۴ شود؛

پ. یکی از ریشه‌ها برابر مجموع دوریشهٔ دیگر باشد؛

b) معادلهٔ درجهٔ سومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن:

الف. عکس ریشه‌های معادلهٔ (۱) باشد؛

ب) عکس مکعب ریشه‌های معادلهٔ (۱) باشد.

۱۷. اگر $x+y=\sigma_1$ و $xy=\sigma_2$ فرض کنیم، حاصل عبارت x^k+y^k را به ازای $k=2,3,4,5$ و $k=-1,\ -2,-3,-4,-5$ به دست آورید.

۱۸. اگر داشته باشیم:

$$x_1+x_2+x_3=\sigma_1,\quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\sigma_2,\quad x_1x_2x_3=\sigma_3$$

حاصل عبارت $x_1^k+x_2^k+x_3^k$ را در حالت‌هایی که k برابر ۲، ۳ و ۴ و یا k برابر ۲ــ، ۳ــ و ۴ــ باشد، برحسب σ_1، σ_2 و σ_3 به دست آورید.

فصل سوم
استفاده از تقارن در جبر مقدماتی

درواقع تاهمین‌جا توانسته‌ایم به بسیاری ازکاربردهای عبارت‌های متقارن پی ببریم. به کمك عبارت‌های متقارن می‌توانیم اشتباه بودن بعضی از رابطه‌ها را تشخیص دهیم، می‌توانیم با دردست داشتن یك جواب ازدستگاه متقارن، جواب‌های دیگری ازآن را پیدا کنیم. عبارت‌های متقارن، در پیدا کردن مقدار پارامتر یك معادله و در تشکیل معادله‌های جدید، می توانند به ما کمك کنند.

ولی درواقع، کاربرد عبارت‌های متقارن، خیلی بیش از این‌هاست: از ویژگی‌های عبارت‌های متقارن، می‌توان برای حل دستگاه‌ها، تجزیهٔ عبارت‌های جبری به‌صورت ضرب عامل‌ها، اثبات نابرابری‌ها، حل معادله‌های مثلثاتی، گویا کردن مخرج کسرها و موردهای بسیار دیگری استفاده کرد.

ولی ازآن‌جاکه این «کتاب کوچك» اجازه نمی‌دهد تا به بحث تفصیلی دربارهٔ همهٔ این موردها بپردازیم، در زیر تنها به سه‌مورد ازاین‌گونه کاربردها (آن هم، ضمن مثال و بدون بحث تفصیلی) اشاره می‌کنیم و بقیهٔ نکته‌های مربوط به این مطلب‌ها را، ضمن حل مساله‌ها، می آوریم.

به خواننده‌ای‌که می‌خواهد با کاربرد عبارت‌های متقارن، به قدر کافی آشنا شود، توصیه می‌کنیم، یك به‌یك تمرین‌های این‌کتاب را ابتدا خود حل‌کند و، سپس، با حلی‌که در آخرکتاب داده شده است، مقایسه کند، ضمن راه حل‌ها و یادداشت‌های آخرکتاب، بسیاری موضوع‌های تازه وجود داردکه درچند صفحهٔ متن دیده نمی‌شود.

همچنین خواننده‌ای که بخواهد با استدلال‌های دقیق ومفصل مربوط به ویژگی‌های عبارت‌های متقارن‌آشنا شود و، درضمن، به‌نکته‌های تازه‌ای از این بحث پی‌ببرد، می‌تواند

به ترجمهٔ فارسی کتاب آقایان و. ك. بالیتانسکی و ن. یا. ویلنکین، به نام «تقارن درجبر» (که با ترجمهٔ نویسندهٔ کتاب حاضر چاپ شده است) مراجعه کنید.

۱. دستگاه‌های متقارن. به دستگاه زیر توجه کنید:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲=۱۳ \\ x^۳+y^۳=۱۹ \end{cases} \qquad (۱)$$

این دستگـاه دارای شش جواب حقیقی یا موهومی است (یادداشت حل مسالهٔ ۱۱ را در پایان کتاب ببینید). بنابراین، باید انتظار داشته باشیم که، اگر یکی ازمجهول‌ها را بین دومعادله حذف کنیم، به‌معادله‌ای برسیم که، نسبت به‌مجهول دیگر، ازدرجهٔ ششم باشد.

ازمعادلهٔ اول دستگاه به دست می آید:

$$y^۲=۱۳-x^۲ \Rightarrow y^۶=(۱۳-x^۲)^۳$$

واز معادلهٔ دوم دستگاه

$$y^۳=۱۹-x^۳ \Rightarrow y^۶=(۱۹-x^۳)^۲$$

و بنابراین باید داشته باشیم:

$$(۱۳-x^۲)^۳=(۱۹-x^۳)^۲$$

که معادله‌ای از درجهٔ ششم است و اگر آن را بازکنیم، به‌این صورت درمی‌آید:

$$۲x^۶-۳۹x^۴-۳۸x^۳+۵۰۷x^۲-۱۸۳۶=۰ \qquad (۲)$$

و روشن است که، حل چنین معادله‌ای، از عهدهٔ ما بیرون است.

ولی دستگاه (۱)، یك دستگاه متقارن است (هرمعادلهٔ دستگاه نسبت به x و y، متقارن است). آن را برحسب ساده‌ترین عبـارت‌هـای متقـارن نسبت به x و y (یعنی برحسب $S=x+y$ و $P=xy$) می‌نویسیم:

$$x^۲+y^۲=(x+y)^۲-۲xy=S^۲-۲P;$$

$$x^۳+y^۳=(x+y)^۳-۳xy(x+y)=S^۳-۳PS$$

بنابراین، دستگاه (۱) هم ارز است با دستگاه

$$\begin{cases} S^۲-۲P=۱۳ \\ S^۳-۳PS=۱۹ \end{cases} \qquad (۳)$$

اگر مقدار P را در هردومعادلهٔ دستگاه (۳) برحسب S پیدا کنیم:

$$P=\frac{S^{۲}-۱۳}{۲};\quad P=\frac{S^{۳}-۱۹}{۳S}$$

و باهم برابر قرار دهیم:

$$\frac{S^{۲}-۱۳}{۲}=\frac{S^{۳}-۱۹}{۳S}$$

به معادلهٔ درجه سوم زیر، برحسب مجهول S، می‌رسیم:

$$S^{۳}-۳۹S+۳۸=۰ \qquad (۴)$$

که به سادگی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$(S-۱)(S^{۲}+S-۳۸)=۰$$

و از آن‌جا، مقدار S وسپس مقدارهای نظیر P به‌دست می‌آید:

$$\left|\begin{array}{l}S_{۱}=۱\\P_{۱}=-۶\end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l}S_{۲}=\frac{-۱+۳\sqrt{۱۷}}{۲}\\P_{۲}=\frac{۵۱-۳\sqrt{۱۷}}{۴}\end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l}S_{۳}=\frac{-۱-۳\sqrt{۱۷}}{۲}\\P_{۳}=\frac{۵۱+۳\sqrt{۱۷}}{۴}\end{array}\right.$$

و درهرمورد باتشکیل یك معادلهٔ درجه دوم، می‌توان جواب‌های x و y را به‌دست آورد. مثلاً، در حالت $x+y=۱$، $xy=-۶$، جواب‌های x و y، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیر هستند:

$$t^{۲}-t-۶=۰ \Rightarrow t=۳,\ -۲$$

یعنی، برای این حالت، دوجواب دستگاه (۱) پیدا می‌شود:

$$\left|\begin{array}{l}x_{۱}=۳\\y_{۱}=-۲\end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l}x_{۲}=-۲\\y_{۲}=۳\end{array}\right.$$

و به‌همین ترتیب، به‌کمك مقدارهای $(S_{۲}, P_{۲})$ و $(S_{۳}, P_{۳})$، چهار جواب دیگر دستگاه (۱) به دست می‌آید.

یادداشت. ممکن‌است اعتراض شودکه، اگر با روش اول، به‌معادلهٔ درجهٔ ششم (۲) رسیدیم، با روش دوم هم به معادلهٔ درجهٔ سوم (۴) می‌رسیم که باز هم در حالت‌کلی قابل حل نیست و، بنابراین، دوروش، از نظر اصولی وکلی، باهم تفاوتی ندارند.

ولی در داوری عجله نکنیم. اولاً درجهٔ معادلهٔ (۴) نصف درجهٔ معادلهٔ (۲) و این،

به‌هرحال، به معنای ساده‌تر بودن روش دوم است، ثانیاً، درجبر هم برای معادله‌های درجه سوم و هم برای معادله‌هـای درجه چهارم، راه حل جبری کلی وجود دارد (اگرچه ممکن است، بعضی از ما، اطلاعی از آن‌ها نداشته باشیم). ولی، هنریك آبل ثابت کرد که برای معـادله‌های از درجه چهـارم به بالا، نمی‌توان در حالت کلی، راه حلی جبری پیدا کرد، بنابراین، معادلهٔ درجهٔ ششم، در حالت کلی «غیرقابل حل» است، درحالی که معادلهٔ درجهٔ سوم، همیشه راه حل جبری دارد.

مثالی از یك دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی می‌آوریم.

می‌خواهیم این دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی را حل کنیم:

$$\begin{cases} x+۲y-۳z=۷ \\ x^۲+۴y^۲+۹z^۲=۸۱ \\ x^۳+۸y^۳-۲۷y^۳=۳۴۳ \end{cases}$$

این دستگاه به ظـاهر، نسبت به x و y و z، متقـارن نیست، ولی اگر فرض کنیم $x=u$، $۲y=v$ و $-۳z=w$، به دستگاه متقارن زیر، نسبت به u و v و w می‌رسیم:

$$\begin{cases} u+v+w=۷ \\ u^۲+v^۲+w^۲=۸۱ \\ u^۳+v^۳+w^۳=۳۴۳ \end{cases}$$

سمت چپ معادله‌ها را برحسب ساده‌ترین عبارت‌های متقارن، یعنی

$$\begin{cases} S=u+v+w \\ P=uv+uw+vw \\ Q=uvw \end{cases}$$

می‌نویسیم، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} S=۷ \\ S^۲-۲P=۸۱ \\ S^۳-۳PS+۳Q=۳۴۳ \end{cases}$$

که از آن‌جا، S، P و Q به دست می‌آیند:

$$S=۷,\quad P=-۱۶,\quad Q=-۱۱۲$$

یعنی u و v و w، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سومی هستند که، با دردست داشتن S و P و Q، می‌توانیم آن را تشکیل دهیم:

$$t^{۳}-۷t^{۲}-۱۶t+۱۱۲=۰$$

سمت چپ این معادله قابل تجزیه است:

$$(t-۴)(t+۴)(t-۷)=۰$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$t_{۱}=۴,\ \ t_{۲}=-۴,\ \ t_{۳}=۷$$

و درنتیجه، جواب‌های u، v و w چنین‌اند (۶ جواب):

$$\left|\begin{array}{l} u_{۱}=۴ \\ v_{۱}=-۴ \\ w_{۱}=۷ \end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l} u_{۲}=۴ \\ v_{۲}=۷ \\ w_{۲}=-۴ \end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l} u_{۳}=-۴ \\ v_{۳}=۴ \\ w_{۳}=۷ \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} u_{۴}=-۴ \\ v_{۴}=۷ \\ w_{۴}=۴ \end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l} u_{۵}=۷ \\ v_{۵}=۴ \\ w_{۵}=۴ \end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l} u_{۶}=۷ \\ v_{۶}=-۴ \\ w_{۶}=۴ \end{array}\right.$$

و به‌کمك آن‌ها، x و y و z به دست می‌آیند:

$$\left|\begin{array}{l} x_{۱}=۴ \\ y_{۱}=-۲ \\ z_{۱}=-\frac{۷}{۳} \end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l} x_{۲}=۴ \\ y_{۲}=\frac{۷}{۲} \\ z_{۲}=\frac{۴}{۳} \end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l} x_{۳}=-۴ \\ y_{۳}=۲ \\ z_{۳}=-\frac{۷}{۳} \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_{۴}=۴ \\ y_{۴}=\frac{۷}{۲} \\ z_{۴}=-\frac{۴}{۳} \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x_{۵}=۷ \\ y_{۵}=۲ \\ z_{۵}=\frac{۴}{۳} \end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l} x_{۶}=۷ \\ y_{۶}=-۲ \\ z_{۶}=-\frac{۴}{۳} \end{array}\right.$$

۲. تجزیهٔ عبارت‌هایی که، نسبت به حرف‌های خود، متقارن باشند. موضوع را با یك مثال روشن می‌کنیم.

می‌خواهیم عبارت زیر را به ضرب عامل‌ها تجزیه‌کنیم:

$$f(x, y)=2x^5+3x^4y+4x^3y^2+4x^2x^3+3xy^4+2y^5$$

$f(x, y)$ را به این صورت می‌نویسیم:

$$f(x, y)=2(x^5+y^5)+3xy(x^3+y^3)+4x^2y^2(x+y)$$

می‌دانیم (حل تمرین ۱۷ را ببینید):

$$x+y=\sigma_1;\quad xy=\sigma_2;$$

$$x^3+y^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2;$$

$$x^5+y^5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}f(x, y)&=2(\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2)+3\sigma_2(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2)+4\sigma_2^2\sigma_1=\\&=2\sigma_1^5-7\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2=\\&=\sigma_1(2\sigma_1^4-7\sigma_1^2\sigma_2+5\sigma_2^2)=\\&=\sigma_1(\sigma_1^2-\sigma_2)(2\sigma_1^2-5\sigma_2)\end{aligned}$$

که اگر به جای σ_1 و σ_2، مقدارهایشان را برحسب x و y قراردهیم:

$$f(x, y)=(x+y)(x^2+xy+y^2)(2x^2-xy+2y^2)$$

۳. حل معادله‌های مثلثاتی. ابتدا یادآوری می‌کنیم که، اگر مقدار $\sin x+\cos x$ و یا مقدار $\cos x\cdot\sin x$ در دست باشد، می‌توان مقدار $\sin^k x+\cos^k x$ را برای هرمقدار درست k، پیدا کرد.

فرض کنید داشته باشیم: $\sin x+\cos x=a$، با مجذور کردن دوطرف این برابری به دست می‌آید:

$$\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=a^2$$

و ازآن‌جا، با توجه به $\sin^2 x+\cos^2 x=1$، به دست می‌آید:

$$\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}(a^2-1)$$

یادداشت. رابطهٔ اخیر رامی‌توان به این صورت نوشت:

$$\sin 2x=a^2-1$$

می‌دانیم که، برای مقدارهای حقیقی x، باید داشته باشیم: $|\sin\alpha|\leqslant 1$. بنابراین

$$|a^۲-۱|\leqslant ۱ \Rightarrow -۱\leqslant a^۲-۱\leqslant ۱$$

این نابرابری دو طرفه را می‌توان، با اضافه‌کردن یك واحد به همهٔ جمله‌های آن، چنین نوشت:

$$۰\leqslant a^۲\leqslant \sqrt{۲} \Rightarrow -\sqrt{۲}\leqslant a\leqslant \sqrt{۲}$$

یعنی، وقتی که فرض می‌کنیم $\sin x+\cos x=a$، این شرط به‌خودی خود وجود دارد که $|a|\leqslant\sqrt{۲}$؛ حالت تساوی تنها با شرط $\sin x=\cos x$، یا $x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$ برقرار است.

اکنون، مجموع توان‌های درست متوالی $\sin x$ و $\cos x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin^۰ x+\cos^۰ x=۲;$$

$$\sin^۱ x+\cos^۱ x=a;$$

$$\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱;$$

$$\sin^۳ x+\cos^۳ x=(\sin x+\cos x)^۳-۳\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=$$

$$=a^۳-\frac{۳}{۲}(a^۲-۱)\cdot a=\frac{۱}{۲}(-a^۳+۳a);$$

$$\sin^۴ x+\cos^۴ x=(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۲-۲\sin^۲ x\cos^۲ x(\sin^۲ x+\cos^۲ x)=$$

$$=۱-\frac{۱}{۲}(a^۲-۱)^۲=\frac{۱}{۲}(-a^۴+۲a^۲+۱);$$

$$\sin^۵ x+\cos^۵ x=(\sin x+\cos x)(\sin^۴ x-\sin^۳ x\cos x+$$

$$+\sin^۲ x\cos^۲ x-\sin x\cos^۳ x+\cos^۴ x)=$$

$$=(\sin x+\cos x)[(\sin^۴ x+\cos^۴ x)-$$

$$-\sin x\cos x(\sin^۲ x+\cos^۲ x)+\sin^۲ x\cos^۲ x]=$$

$$=a\left[\frac{۱}{۲}(-a^۴+۲a^۲+۱)-\frac{۱}{۲}(a^۲-۱)+\frac{۱}{۴}(a^۲-۱)^۲\right]=$$

$$=\frac{۱}{۴}(-a^۵+۵a)$$

و غیره. به همین ترتیب می‌توان توان‌های منفی را محاسبه کرد:

$$\sin^{-1} x+\cos^{-1} x=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=$$

$$=\frac{a}{\frac{1}{2}(a^2-1)}=\frac{2a}{a^2-1};$$

$$\sin^{-2} x+\cos^{-2} x=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{4}(a^2-1)^2}=\frac{4}{(a^2-1)^2};$$

$$\sin^{-3} x+\cos^{-3} x=\frac{1}{\sin^3 x}+\frac{1}{\cos^3 x}=\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin^3 x\cos^3 x}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(-a^3+3a)}{\frac{1}{8}(a^2-1)^3}=\frac{4a(3-a^2)}{(a^2-1)^3};$$

و به‌طور کلی، اگر $k=-m$ $(m>0)$ فرض کنیم:

$$\sin^{-m} x+\cos^{-m} x=\frac{1}{\sin^m x}+\frac{1}{\cos^m x}=$$

$$=\frac{\sin^m x+\cos^m x}{(\sin x\cos x)^m}=\frac{2^m(\sin^m x+\cos^m x)}{(a^2-1)^m}$$

●

وقتی که یك معادلهٔ مثلثاتی، نسبت به $\sin x$ و $\cos x$ (یا $\sin x$ و $-\cos x$) متقارن باشد، یکی از بهترین راه حل‌ها این است که $\sin x+\cos x$ (یا $\sin x-\cos x$) را به عنوان مجهول کمکی انتخاب کنیم.

فرض کنید، بخواهیم معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$4(\sin^3 x+\cos^3 x)-3(\sin x+\cos x)=\sqrt{2} \qquad (1)$$

این معادله، نسبت به $\sin x$ و $\cos x$ متقارن است. اگر فرض کنیم:

$$\sin x+\cos x=a$$

آن وقت، خواهیم داشت:

$$\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{1}{2}(-a^3+3a)$$

و معادلهٔ (۱) به‌این صورت درمی‌آید:

$$4\times\frac{1}{2}(-a^3+3a)-3a=\sqrt{2}$$

و یا پس از ساده کردن

$$2a^3-3a+\sqrt{2}=0$$

که آن را به‌ترتیب و به‌صورت‌های متوالی زیر، تبدیل می‌کنیم:

$$(2a^3-a)-2a+\sqrt{2}=0;$$

$$\frac{1}{2}a(4a^2-2)-(2a-\sqrt{2})=0;$$

$$\frac{1}{2}a(2a+\sqrt{2})(2a-\sqrt{2})-(2a-\sqrt{2})=0;$$

$$(2a-\sqrt{2})\left(a^2+\frac{\sqrt{2}}{2}a-1\right)=0;$$

$$\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2a^2+\sqrt{2}a-2)=0;$$

$$\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})=0;$$

$$2\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(a+\sqrt{2})=0$$

و از آن جا

$$a_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad a_2=-\sqrt{2}$$

بنابراین، معادلهٔ مفروض، هم‌ارز با دو معادلهٔ زیر است:

$$\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin x+\cos x=-\sqrt{2}$$

اگر توجه کنیم که

$$\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$$

$$=\text{۲}\sin\frac{\pi}{\text{۴}}\cos\left(x-\frac{\pi}{\text{۴}}\right)=\sqrt{\text{۲}}\cos\left(x-\frac{\pi}{\text{۴}}\right)$$

به سادگی می‌توانیم، جواب‌های معادلهٔ مفروض را به‌دست آوریم:

$$\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}};\quad \sqrt{\text{۲}}\cos\left(x-\frac{\pi}{\text{۴}}\right)=\frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}};$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{\text{۴}}\right)=\frac{\text{۱}}{\text{۲}};\ x-\frac{\pi}{\text{۴}}=\text{۲}k\pi\pm\frac{\pi}{\text{۳}};$$

$$x_{\text{۱}}=\text{۲}k\pi+\frac{\text{۷}\pi}{\text{۱۲}}$$

(k عددی درست است)

$$x_{\text{۲}}=\text{۲}k\pi-\frac{\pi}{\text{۱۲}}$$

$$\sin x+\cos x=-\sqrt{\text{۲}};\quad \sqrt{\text{۲}}\cos\left(x-\frac{\pi}{\text{۴}}\right)=-\sqrt{\text{۲}};$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{\text{۳}}\right)=-\text{۱};\quad x-\frac{\pi}{\text{۴}}=\text{۲}k\pi+\pi$$

$$x_{\text{۳}}=\text{۲}k\pi+\frac{\text{۵}\pi}{\text{۴}}$$ (k عددی درست است)

یادداشت ۱. درمعادلهٔ (۱) می‌توانستیم $\sin x.\cos x$ را مجهول کمکی بگیریم. اگر فرض کنیم $\sin x.\cos x=b$، خواهیم داشت:

$$\sin^{\text{۲}}x+\cos^{\text{۲}}x+\text{۲}\sin x\cos x=\text{۱}+\text{۲}b$$

و از آن‌جا:

$$\sin x+\cos x=\pm\sqrt{\text{۱}+\text{۲}b}$$

به محاسبهٔ $\sin^{\text{۳}}x+\cos^{\text{۳}}x$ می‌پردازیم:

$$\sin^{\text{۳}}x+\cos^{\text{۳}}x=(\sin x+\cos x)(\sin^{\text{۲}}x-\sin x\cos x+\cos^{\text{۲}}x)=$$

$$=\pm\sqrt{\text{۱}+\text{۲}b}(\text{۱}-b)$$

که اگر در معادلهٔ (۱) قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$\pm\ \text{۴}(\text{۱}-b)\sqrt{\text{۱}+\text{۲}b}\mp\text{۳}\sqrt{\text{۱}+\text{۲}b}=\sqrt{\text{۲}};$$

معادله داگویا و، سپس، مرتب می کنیم:

$$\pm\sqrt{1+2b}\,(4-4b-3)=\sqrt{2};$$
$$\pm\sqrt{1+2b}\,(1-4b)=\sqrt{2}; \qquad \text{(I)}$$
$$(1+2b)(1-4b)^2=2; \qquad \text{(II)}$$
$$32b^3-6b-1=0$$

برای حل این معادله، می‌توان از این قاعده استفاده کرد که، ریشه‌های گویای آن (اگر وجود داشته باشند) مقسوم‌علیهی از $\frac{1}{32}$اند:

$$\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{1}{8},\ \pm\frac{1}{16},\ \pm\frac{1}{32}$$

که در همان آزمایش‌هـای اول معلوم می‌شود که $\frac{1}{2}$ ریشهٔ معادله است. وقتی که یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم معلوم باشد، حل آن مشکل نیست.

ولی ما در این‌جا، این معادله را به طریق دیگری حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم:

$$f(b)=32b^3-6b-1$$

در این صورت داریم:

$$f'(b)=96b^2-6;$$
$$f'(b)=0 \Rightarrow b=\pm\frac{1}{4}$$

$-\frac{1}{4}$ یکی از ریشه‌های مشتق است وضمناً، در خود معادله هم صدق می‌کند، بنابراین، $-\frac{1}{4}$ ریشهٔ مضاعف معادله است و عبارت $f(b)$ بر $(4b+1)^2$ بخش‌پذیر است.

به هر حال، معادله به این صورت درمی‌آید:

$$(2b-1)(4b+1)^2=0$$

واز آن‌جا: $b_1=\frac{1}{2}$, $b_2=-\frac{1}{4}$.

در حالت $b=\frac{1}{2}$ داریم:

$$\sin 2x=2\sin x\cos x=2b=1;$$
$$2x=2m\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ \ x=m\pi+\frac{\pi}{4} \qquad (A)$$

و درحالت $b=-\frac{1}{4}$ داریم

$$\sin 2x=2b=-\frac{1}{2}\,;$$

$$۲x=۲m\pi-\frac{\pi}{۶}, ۲x=۲m\pi+\frac{۷\pi}{۶};$$

$$x=m\pi-\frac{\pi}{۱۲},\ \ x=m\pi+\frac{۷\pi}{۱۲} \qquad (B)$$

چرا این جواب‌ها، با جواب‌هایی کــه با روش اول به دست آورده بودیم، کاملاً تطبیق نمی‌کنند؟

در روش اول، برای رسیدن به معادلهٔ

$$۲a^۳-۳a+\sqrt{۲}=۰$$

هیچ عملی‌که موجب گسترش حوزهٔ تعریف معــادلهٔ (۱) بشود، انجام ندادیم و، بنابراین، جواب‌هایی‌که به دست آوردیم قابل قبول‌اند و نیازی به‌آزمایش درستی‌آن‌ها نیست.

ولی، درروش دوم، باعبور ازمعادلهٔ (I) به‌معادلهٔ (II)، درواقع، حوزهٔ‌تعریف‌معادله را گسترش داده‌ایم. اگردرصورت اصلی معادلهٔ (۱) به جای $\sqrt{۲}$ در سمت راست برابری $-\sqrt{۲}$ داده شده بود، بازهم به‌همان نتیجهٔ (II) می‌رسیدیم. به‌این‌ترتیب، جواب‌هایی‌که با این روش به‌دست می‌آیند، در واقع، جواب‌هایی هستند که در یکی از دو معادلهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$۴(\sin^۳ x+\cos^۳ x)-۳(\sin x+\cos x)=\sqrt{۲} \qquad (۱)$$

$$۴(\sin^۳ x+\cos^۳ x)-۳(\sin x+\cos x)=-\sqrt{۲} \qquad (۱)'$$

درحالی کــه ما، تنهــا جواب‌های معادلهٔ (۱) را می‌خواهیم. برای جداکردن جواب‌های معادله‌های (۱)و'(۱) ازیکدیگر، باید جواب‌های (A) و(B) را موردآزمایش قراردهیم.

معلوم می‌شودکه (A) به‌ازای مقدارهای زوج m درمعادلهٔ'(۱) و به‌ازای مقدارهای فرد m در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند. درنتیجه، ماکه به‌دنبال جواب‌های معادلهٔ (۱) هستیم، باید $m=۲k+۱$ درنظربگیریم،که دراین صورت، به‌دست می‌آید:

$$x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۴}$$

همچنین، باآزمایش معلوم می‌شودکه، اگر بخواهیم جواب‌های (B) درمعادلهٔ (۱) صدق‌کنند، باید $m=۲k$ بگیریم (به‌ازای مقدارهای فرد m، جواب‌هایی از معادلهٔ '(۱) به دست می‌آید)، دراین صورت خواهیم داشت:

$$x=۲k\pi-\frac{\pi}{۱۲}, x=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}$$

همین‌بحث‌کوتاه نشان می‌دهدکه، چرا روش اول برروش دوم ترجیح دارد! درواقع بهترین روش برای حل یك معادله، روشی است کــه ضمن آن، حوزهٔ تعریف معادله تغییر

نکند، اگر بین روش‌هـای مختلف حل یك معادلهٔ مثلثاتی، دو روش وجود داشته باشد، که یکی منجر به معادله‌ای گویا و دیگری منجر به معادله‌ای گنگ درجبر بشود، طبیعی است که روش اول برروش دوم برتری دارد.

ولی، بهرحال، اگر ضمن‌حل‌معادله‌ای، ناچار شدیم، یك یا چندبار دوطرف معادله را مجذورکنیم، باید جواب‌های حاصل را، در معادلهٔ اصلی مورد آزمایش قرار دهیم تا بتوانیم جواب‌های واقعی معادله را، ازبین آن‌ها جداکنیم.

یادداشت ۲. در روش اول، وقتی کـه $sin\ x+cos\ x$ را مجهول‌کمکی می‌گیریم، در واقع $sin\left(\frac{\pi}{۴}+x\right)$ یا $cos\left(\frac{\pi}{۴}-x\right)$ را مجهول‌کمکی‌گرفته‌ایم($\frac{\pi}{۴}+x$ و $\frac{\pi}{۴}-x$ متمم یکدیگرند و، بنابراین، سینوس اولی باکسینوس دومی برابراست). بنابراین، درحل معادله‌هـایی از مثلثات، که نسبت بـه $sin\ x$ و $cos\ x$ متقـارن‌اند می‌توان $sin\left(\frac{\pi}{۴}+x\right)$ [یا $cos\left(\frac{\pi}{۴}-x\right)$] را مجهول گرفت.

مثلاً، درمورد معادلهٔ (۱)، اگرفرض‌کنیم:

$$sin\left(\frac{\pi}{۴}+x\right)=y$$

بلافاصله به دست می‌آید (باباز کردن سینوس):

$$sin\ x+cos\ x=y\sqrt{۲};$$

$$sin^۳\ x+cos^۳\ x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(-۲y^۳+۳y)$$

که اگر درمعادلهٔ (۱) قرار دهیم، به معادلهٔ جبری

$$۴y^۳-۳y+۱=۰$$

می‌رسیم که از هر دو معادلهٔ قبلی ساده‌تر است (به روشنی دیده می‌شود که $y=-۱$ یکی از جواب‌های معادله است). این معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$(y+۱)(۲y-۱)^۲=۰ \Rightarrow y=-۱,\ \frac{۱}{۲}$$

دنبالهٔ کار روشن است

تمرین‌ها

۱۹. معادلهٔ درجه دوم زیر داده شده است:

$$x^{۲}-(a-۲)x-a-۱=۰$$

مقدار a را طوری پیدا کنید که

الف. مجموع مجذور ریشه‌های آن، حداقل مقدار ممکن باشد.

ب. مجموع عکس مکعب‌های دو ریشهٔ آن، برابر $\frac{۷}{۸}$ شود.

۲۰. a و b را ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^{۲}-mx+n=۰$ می‌گیریم $m>۰$ و $n>۰$). مطلوب است محاسبهٔ $\sqrt[۴]{a}+\sqrt[۴]{b}$ برحسب m و n.

۲۱. ثابت کنید، اگر عبارت متقارن $f(x, y)$ بر $(x-y)$ بخش‌پذیر باشد، بر $(x-y)^{۲}$ بخش‌پذیر است.

این دستگاهها را حل کنید:

۲۲.
$$\begin{cases} x^{۵}-y^{۵}=۲۷۵ \\ x-y=۵ \end{cases}$$

۲۳.
$$\begin{cases} x+y=۱۸ \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{۵}{۴}\sqrt{xy} \end{cases}$$

۲۴.
$$\begin{cases} x+y=۶ \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=۲\sqrt{xy} \end{cases}$$

۲۵.
$$\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=۱۹ \\ x^{۲}+y^{۲}+xy=۱۳۳ \end{cases}$$

۲۶.
$$\begin{cases} x+y=۷ \\ \sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{y}=۱ \end{cases}$$

۲۷.
$$\begin{cases} \sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{y}=۱ \\ \sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{xy}+\sqrt[۳]{y}=-۱ \end{cases}$$

۲۸.
$$\begin{cases} \sqrt[۳]{\frac{x}{y}}+\sqrt[۳]{\frac{y}{x}}=a \\ x+y=b \end{cases}$$

۲۹.
$$\begin{cases} x^{۲}+y^{۳}=۱۷ \\ \sqrt{x}+\sqrt[۴]{y^{۳}-۱}=۲ \end{cases}$$

۳۰.
$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=b^{۲} \\ x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}=a^{۳} \end{cases}$$

۳۱.
$$\begin{cases} x+y+z=۱۱ \\ \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}=۱ \\ xyz=۳۶ \end{cases}$$

۳۲.
$$\begin{cases} x+y+z-u=0 \\ x^2+y^2+z^2-u^2=6 \\ x^3+y^3+z^3-u^3=18 \\ x^5+y^5+z^5-u^5=210 \end{cases}$$

۳۳.
$$\begin{cases} x+y+z+u=a \\ x^2+y^2+z^2+u^2=a^2 \\ x^3+y^3+z^3+u^3=a^3 \\ x^4+y^4+z^4+u^4=a^4 \end{cases}$$

۳۴.
$$\begin{cases} x\sin a+y\sin 2a+z\sin 3a+t\sin 4a=\sin 5a \\ x\sin b+y\sin 2b+z\sin 3b+t\sin 4b=\sin 5b \\ x\sin c+y\sin 2c+z\sin 3c+t\sin 4c=\sin 5c \\ x\sin d+y\sin 2d+z\sin 3d+t\sin 4d=\sin 5d \end{cases}$$

با شرط $a+b+c=0$، درستی برابری‌های زیر را ثابت کنید:

۳۵. $$a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+ \\ +(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)=0$$

۳۶. $$a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)= \\ =2(ab+ac+bc)^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2$$

۳۷. $$2(a^5+b^5+c^5)=5abc(a^2+b^2+c^2)$$

۳۸. $$6(a^5+b^5+c^5)=5(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)$$

این عبارت‌ها را به‌صورت ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

۳۹. $$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$$

۴۰. $$a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)+abc(a+b+c)$$

۴۱. $$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$$

۴۲. $$(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)^2-(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)$$

۴۳. ثابت کنید عبارت

$$a^۴(b^۲+c^۲-a^۲)^۳+b^۴(c^۲+a^۲-b^۲)^۳+c^۴(a^۲+b^۲-c^۲)^۳$$

بر عبارت $a^۴+b^۴+c^۴-۲a^۲b^۲-۲a^۲c^۲-۲b^۲c^۲$ بخش‌پذیر است.

۴۴. می‌دانیم

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=\frac{۱}{a+b+c}$$

ثابت‌کنید برای هرعدد فرد n، داریم:

$$\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\right)^n=\frac{۱}{a^n+b^n+c^n}=\frac{۱}{(a+b+c)^n}$$

درستی نابرابری‌های زیررا، به شرط مثبت بودن x و y و z و a و b و c ثابت‌کنید.

۴۵. $$(x+y+z)\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}\right)\geqslant ۹$$

۴۶. $$a^۳+b^۳+c^۳\geqslant ۳abc$$

۴۷. $$\frac{a+b+c}{۳}\geqslant\sqrt[۳]{abc}$$

۴۸. اگر a،b و c طول ضلع‌های یك مثلث باشند، ثابت‌کنید

$$۲(ab+ac+bc)>a^۲+b^۲+c^۲$$

۴۹. ریشه‌های درست این معادله را پیدا کنید: $\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=۳$.

۵۰. ثابت‌کنید از بین همهٔ مثلث‌های با محیط $۲p$ (p عدد ثابتی است)، مثلث متساوی‌الاضلاع، دارای حداکثر مساحت است.

فصل چهارم
عبارت‌های متقارن منفی

۱. در یادداشت حل مسالهٔ ۱۳ اشاره‌کردیم: هر عبارتی را که با تبدیل هر دو حرف

دلخواه آن به یکدیگر به قرینهٔ خودش تبدیل شود، عبارت متقارن منفی گویند.

ساده‌ترین عبارت متقارن نسبت به دومتغیر x و y

$$x-y$$

و نسبت به سه متغیر x و y و z

$$(x-y)(x-z)(y-z)$$

است. روشن است که مجذور هر عبارت متقارن منفی، یك عبارت متقارن می‌شود و یا به طور کلی: از ضرب دو عبارت متقارن منفی در یکدیگر، به‌عبارتی متقارن می‌رسیم.

و باز روشن است که: ازضرب یك عبارت متقارن منفی دریك عبارت‌متقارن، عبارت متقارن منفی‌به دست می‌آید. درواقع،اگر $f(x, y)$ را متقارن منفی و $g(x, y)$ را متقارن فرض‌کنیم،باید داشته باشیم:

$$f(x, y)=-f(y, x);\ \ g(x, y)=g(y, x)$$

و بنابراین

$$f(x, y)\cdot g(x, y)=-f(y, x)\cdot g(y, x)$$

به طورکلی، وقتی که با n متغیر x_1، x_2، . . .، x_n سروکار داشته باشیم، ساده‌ترین عبارت متقارن منفی، نسبت به این متغیر، چنین می‌شود:

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)'(x_2-x_3)\ldots(x_{n-1}-x_n)$$

که می‌توان آن را به این صورت نوشت:

$$\prod_{i<j}(x_i-x_j)$$

دراین‌جا، تنها به عبارت‌های متقارن منفی، نسبت به دو و سه متغیر، اکتفا می‌کنیم.

۲. ویژگی‌های عبارت‌های متقارن منفی. هرعبارتی که نسبت به دو متغیر x و y، متقارن منفی باشد، بر $x-y$ بخش‌پذیر است.

اثبات این حکم ساده است. $f(x, y)$ را متقارن منفی می‌گیریم، بنابراین باید داشته باشیم:

$$f(x, y)=-f(y, x) \tag{۱}$$

رابطهٔ (۱) یك اتحاد است و، بنابراین، باید به ازای هرمقدار x و y برقرار باشد؛ $y=x$ می‌گیریم:

$$f(x, x)=-f(x, x)\ \Rightarrow\ f(x, x)=0$$

و این، به‌معنای آن است که $f(x, y)$ بر $x-y$ بخش‌پذیر است [زیرا، $f(x, y)$ به‌ازای $x=y$ برابر صفر می‌شود].

به‌همین ترتیب، و با همین روش استدلال، می‌توان ثابت کرد که هر عبارت متقارن منفی نسبت به سه متغیر x و y و z، بر

$$(x-y)(x-z)(y-z)$$

بخش پذیر است.

درضمن، وقتی عبارت متقارن منفی را بر ساده‌ترین عبارت متقارن منفی تقسیم کنیم، در خارج‌قسمت، یك عبارت متقارن به دست می آید.

$f(x, y)$ را متقارن منفی می گیریم، بنا براین داریم:

$$f(x, y)=(x-y)\cdot g(x, y) \qquad (۱)$$

اگر x و y را به‌هم تبدیل کنیم، به‌دست می‌آید:

$$f(y, x)=-(x-y)\cdot g(y, x) \qquad (۲)$$

ازطرف دیگر می‌دانیم $f(y, x)=-f(x, y)$، بنابراین از اتحاد (۲) نتیجه می‌شود:

$$f(x, y)=-(x-y)\cdot g(y, x)$$

یا

$$f(x, y)=(x-y)\cdot g(y, x) \qquad (۳)$$

از مقایسهٔ (۲) و (۳) به دست می‌آید:

$$g(x, y)=g(y, x)$$

یعنی $g(x, y)$ یك عبارت متقارن است.

اثبات برای حالت سه متغیر x و y و z هم، به همین‌ترتیب انجام می‌شود.

به عنوان مثال، فرض می‌کنیم بخواهیم عبارت زیر را به‌ضرب عامل‌ها تجزیه کنیم:

$$f(x, y, z)=x^{3}(y-z)+y^{3}(z-x)+z^{3}(x-y)$$

این عبارت، نسبت به x و y و z، متقارن منفی است و بنا براین بر

$$(x-y)(x-z)(y-z)$$

بخش‌پذیر است، یعنی می‌توان نوشت:

$$f(x, y, z)=(x-y)(x-z)(y-z)\cdot g(x, y, z)$$

که درآن، $g(x, y, z)$ عبارتی است متقارن نسبت به x و y و z. ازطرف دیگر، چون

$f(x, y, z)$ نسبت به x از درجهٔ سوم و $(x-y)(x-z)(y-z)$ نسبت به x ازدرجهٔ دوم است، بنابراین، $g(x, y, z)$ باید نسبت به x (و همچنین، نسبت به y و z) از درجهٔ اول باشد، یعنی

$$g(x, y, z)=A(x+y+z)$$

که درآن، A مقداری است ثابت. درنتیجه باید داشته باشیم:

$$f(x, y, z)=A(x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z)$$

که با قراردادن سه عدد دلخواه به جای x و y و z (دردوطرف اتحاد)، مقدار A به‌دست می‌آید. مثلاً $x=۰$، $y=۱$، $z=۲$ قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم : $A=۱$. نتیجهٔ تجزیه چنین می‌شود:

$$f(x, y, z)=(x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z)$$

۳. مبین عبارت‌های متقارن منفی. مجـذور ساده‌ترین عبارت‌های متقارن منفی را مبین می‌نامند و با Δ نشان می‌دهند:

برای حالت دومتغیر: $\Delta=(x-y)^۲$

برای حالت سه متغیر: $\Delta=(x-y)^۲(x-z)^۲(y-z)^۲$

و روشن‌است که مبین، عبارتی متقارن است و می‌توان‌آن را برحسب ساده‌ترین عبارت‌های متقارن نوشت. برای حالت دومتغیر

$$\Delta=(x-y)^۲=(x+y)^۲-۴xy=\sigma_۱^۲-۴\sigma_۲ \qquad (۱)$$

و برای حالت سه متغیر

$$\Delta=-۴\sigma_۱^۳\sigma_۳+\sigma_۱^۲\sigma_۲^۲+۱۸\sigma_۱\sigma_۲\sigma_۳-۴\sigma_۲^۳-۲۷\sigma_۳^۲ \qquad (۲)$$

(محاسبه را خودتان انجام دهید).

مبین، به‌خصوص، درنظریهٔ معادله‌ها، برای تعیین تعدادریشه‌های حقیقی،شرط برابر- بودن ریشه‌ها، . . . کاربردهای زیادی دارد.

معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را درنظر می‌گیریم:

$$ax^۲+bx+c=۰ \qquad (۳)$$

اگر ریشه‌های این معادله را $x_۱$ و $x_۲$ فرض کنیم، داریم:

$$\sigma_۱=x_۱+x_۲=-\frac{b}{a},\ \sigma_۲=x_۱x_۲=\frac{c}{a}$$

مبین را درمورد دو مقدار x_1 و x_2 تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta=(x_1-x_2)^2=\sigma_1^2-4\sigma_2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\frac{c}{a}$$

و یا، بعد از ساده کردن

$$\Delta=\frac{1}{a^2}(b^2-4ac)$$

اگر x_1 و x_2، عددهایی حقیقی باشند، مبین، یعنی $(x_1-x_2)^2$ عددی مثبت و در حالت $x_1=x_2$، مقدار مبین برابر صفر می‌شود.

بنابراین نتیجه می گیریم که برای معادلهٔ درجه دوم (۳)

۱) اگر $b^2-4ac>0$ باشد، دو ریشهٔ حقیقی داریم؛

۲) اگر $b^2-4ac=0$ باشد، دو ریشهٔ برابر داریم؛

۳) اگر $b^2-4ac<0$ باشد، دو ریشهٔ موهومی داریم.

به‌طور کلی ثابت می کنند که درمورد معادلهٔ درجهٔ n، وقتی‌دست‌کم دو ریشهٔ برابر داریم که مبین نسبت به ریشه‌ها، برابر صفر باشد (مساله ۶۰ را درمورد معادلهٔ درجه سوم ببینید).

تمرین‌ها

۵۱. ثابت کنید، اگر چندجمله‌ای متقارن $f(x, y, z)$ بر $(x-y)$ بخش‌پذیر باشد، بر عبارت

$$\Delta(x, y, z)=(x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2$$

بخش‌پذیر است.

این چهار عبارت را به ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

۵۲. $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

۵۳. $x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)$

۵۴. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$

۵۵. $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$

۵۶. ثابت کنید، به‌شرط $a+b+c=0$ داریم:

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9$$

هریك از دو عبارت زیر را ساده کنید:

۵۷. $$\frac{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}$$

۵۸. $$\frac{a^2(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}$$

۵۹. عبارت $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$ را به ضرب عامل‌ها تجزیه کنید.

۶۰. در معادلهٔ درجه سوم

$$x^3+px+q=0$$

شرط وجود ریشه‌های حقیقی و شرط وجود دو ریشهٔ برابر را پیدا کنید.

۶۱. اگر x، y و z مقدارهایی مثبت باشند و داشته باشیم:

$$xy+yz+zx=1$$

ثابت کنید: $\Sigma x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z_2)}{1+x^2}}=2$.

۶۲. معادلهٔ درجه سوم زیر، با ضریب‌های درست p و q مفروض است:

$$x^3+px+q=0$$

ثابت کنید، اگر p^3+q^2 بر ۲۳ بخش‌پذیر باشد، حتماً تفاضل دوتا از ریشه‌های این معادله هم، بر ۲۳ بخش‌پذیر است.

۶۳. مطلوب است رابطهٔ بین ضریب‌های معادلهٔ درجه سوم

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \qquad (1)$$

به شرطی که بدانیم، ریشه‌های معادلهٔ

$$a^3x^3+b^3x^2+c^3x+d^3=0 \qquad (2)$$

مکعب ریشه‌های معادلهٔ (۱) هستند.

۶۴. ریشه‌های دو معادلهٔ درجهٔ دوم

$$ax^2+bx+c=0,\quad a'x^2+b'x+c'=0$$

را به‌ترتیب x_1 و x_2، x'_1 و x'_2 می‌گیریم. بدون حل این معادله‌ها، معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $x_1+x'_1$ و $x_2+x'_2$ یا $x_1+x'_2$ و $x_2+x'_1$ باشد.

حل تمرین‌ها

۱. اگر $x=y$ بگیریم، یکی از جواب‌ها به دست می‌آید: $x=y=۴$.

۲. این عبارت، نه نسبت به x و y، بلکه، نسبت به x و $-y$ متقارن است، زیرا اگر $z=-y$ فرض کنیم، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&x^۲+y^۲-۵x^۲y^۳+۵x^۳y^۲=\\&=x^۲+(-y)^۲+۵x^۲(-y)^۳+۵x^۳(-y)^۲=\\&=x^۲+z^۲+۵x^۲z^۳+۵x^۳z^۲\end{aligned}$$

که نسبت به x و z متقارن است.

۳. اگر $z=۲y$ فرض کنیم، دستگاه مفروض چنین می‌شود:

$$\begin{cases}۴\sqrt[۳]{x}+۴\sqrt[۳]{z}=۵\\ \dfrac{۱}{\sqrt[۶]{x}}+\dfrac{۱}{\sqrt[۶]{z}}=۳\end{cases}$$

که هردومعادلهٔ آن، نسبت به x و z متقارن‌اند؛ بنابراین، وقتی‌که $x=\frac{۱}{۶۴}$، $y=\frac{۱}{۲}$، $z=۱$ یکی از جواب‌ها باشد، حتماً $x=۱$، $z=\frac{۱}{۶۴}$ یا $x=۱$، $y=\frac{۱}{۱۲۸}$ هم جواب دیگری از آن است.

۴. دستگاه را این طور می‌نویسیم:

$$\begin{cases}x^۳+(-y)^۳=۹\\x^۴+(-y)^۴=۱۷\end{cases}$$

اکنون دو معادلهٔ دستگاه نسبت به x و $(-y)$ متقارن‌اند. چون یکی از جواب‌ها $x=2$، $-y=+1$ است، بنابراین جواب دیگر آن $x=+1$، $-y=2$ خواهد بود. به‌این‌ترتیب جواب دیگر دستگاه $x=1$، $y=-2$ است.

۵. نسبت به (ab) و c متقارن است، یعنی با تبدیل ab به c و c به ab تغییر نمی‌کند.

۶. a) الف. بنا بر رابطه‌های ویت داریم:

$$x'+x''=m+1;\quad x'.x''=m$$

اگر درآن‌ها قرار دهیم $x'=2x''$، به‌دست می‌آید:

$$x''=\frac{m+1}{3};\quad x''^2=\frac{m}{2}$$

و از آن‌جا

$$\left(\frac{m+1}{3}\right)^2=\frac{m}{2} \Rightarrow 2m^2-5m+2=0$$

برای m دوجواب به‌دست می‌آید: $m_1=2$، $m_2=\frac{1}{2}$.

ب. باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{x'^2}+\frac{1}{x''^2}=\frac{5}{4}$$

که به‌ترتیب، به‌صورت‌های زیر قابل تبدیل است:

$$\frac{x'^2+x''^2}{x'^2.x''^2}=\frac{5}{4};\quad \frac{(x'+x'')^2-2x'x''}{(x'.x'')^2}=\frac{5}{4};$$

$$\frac{(m+1)^2-2m}{m^2}=\frac{5}{4} \Rightarrow m^2-4=0$$

پاسخ: $m_1=2$، $m_2=-2$.

پ. بنابرشرط مساله، باید داشته باشیم:

$$x'^3+x''^3=17$$

این رابطه را، به ترتیب، تبدیل می‌کنیم:

$$(x'+x'')^3-3x'x''(x'+x'')=17;$$

$$(m+1)^3-3m(m+1)=17$$

که سرانجام به معادلهٔ درجهٔ سوم زیر می‌رسد:

$$m^{3}=27 \Rightarrow m=3$$

b) الف. راه حل اول. داریم $y=kx$ یا $x=\dfrac{y}{k}$. درمعادلهٔ مفروض قرار می‌دهیم:

$$\frac{y^{2}}{k^{2}}-\frac{(m+1)y}{k}+m=0$$

ویا پس از ضرب دوطرف در k^{2}:

$$y^{2}-(m+1)ky+mk^{2}=0$$

راه حل‌دوم: داریم:

$$y'=kx', \quad y''=kx''$$

و بنابراین:

$$S=y'+y''=k(x'+x'')=k(m+1);$$
$$P=y'\cdot y''=(kx')\cdot(kx'')=k^{2}m$$

و درنتیجه، معادلهٔ مطلوب چنین می‌شود:

$$y^{2}-k(m+1)y+mk^{2}=0$$

ب. پاسخ $\quad m^{2}y^{2}-(m^{2}+1)y+1=0$

پ. ابتدا $x'^{2}+x''^{2}$ و $x'^{4}+x''^{4}$ را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$x'^{2}+x''^{2}=(x'+x'')^{2}-2x'x''=$$
$$=(m+1)^{2}-2m=m^{2}+1;$$
$$x'^{4}+x''^{4}=(x'^{2}+x''^{2})^{2}-2x'^{2}x''^{2}=$$
$$=(m^{2}+1)^{2}-2m^{2}=m^{4}+1$$

اکنون به‌ترتیب داریم:

$$S=x'^{5}+x''^{5}=(x'+x'')(x'^{4}-x'^{3}x''+x'^{2}x''^{2}-x'x''^{3}+x''^{4})=$$
$$=(x'+x'')[(x'^{4}+x''^{4})-x'x''(x'^{2}+x''^{2})+x'^{2}x''^{2}]=$$
$$=(m+1)[(m^{4}+1)-m(m^{2}+1)+m^{2}]=$$
$$=(m+1)(m^{4}-m^{3}+m^{2}-m+1)=m^{5}+1;$$

$$P=x'^{5}\cdot x''^{5}=(x'\cdot x'')^{5}=m^{5}$$

و بنابراین، معادلهٔ مطلوب، چنین است:

$$y^{2}-(m^{5}+1)y+m^{5}=0$$

۷. عبارت مفروض، نسبت به x و y، متقارن و از درجهٔ سوم است. بنابراین وقتی که بر $x+y$ بخش‌پذیر باشد، خارج قسمت نسبت به x و y، متقارن و از درجهٔ دوم می‌شود، یعنی به صورت $ax^{2}+ay^{2}+bxy$. درنتیجه باید داشته باشیم:

$$x^{3}+xy^{2}+x^{2}y+y^{3}=(x+y)(ax^{2}+ay^{2}+bxy)$$

این برابری یك‌اتحاداست و،بنابراین، باید به‌ازای همهٔ مقدارهای xوy برقرارباشد. دردوطرف برابری، یك بار $x=0$، $y=1$ ویك‌بار $x=y=1$ قرارمی‌دهیم، به دومعادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$1=a;4=2(2a+b)$$

که ازآن‌جا $a=1$، $b=0$ حاصل می‌شود و نتیجهٔ تجزیه چنین است:

$$x^{3}+xy^{2}+x^{2}y+y^{3}=(x+y)(x^{2}+y^{2})$$

۸. سمت چپ برابری، نسبت به x و y متقارن و سمت راست آن، نسبت به همین دوحرف x وy، نامتقارن است. بنابراین،این برابری‌نمی‌تواند اتحادباشد ویك معادله‌است.

۹. میانهٔ وارد برضلع BC باید نسبت به b و c و همچنین، B و C حقوقی برابر داشته باشد. اگررابطهٔ فرض مساله درست باشد، باید با تبدیل b به c و c بهb وهمچنین B به C و C به B تغییر نکند، یعنی رابطهٔ زیرهم، معرف مجذور طول میانهٔ AM باشد:

$$AM^{2}=b(c-a\cos c)+\frac{a^{2}}{4}$$

یعنی باید داشته باشیم:

$$c(b-a\cos B)+\frac{a^{2}}{4}=b(c-a\cos C)+\frac{a^{2}}{4}$$

و یا پس از ساده کردن

$$c\cdot\cos B=b\cdot\cos C$$

واین‌رابطه، درهرمثلث غیرمشخص برقرارنیست، زیرااگر از برابری‌های $b=2R\sin B$ و $c=2R\sin C$ (که درهرمثلث دلخواه برقرارند) استفاده‌کنیم، به‌این نتیجه می‌رسیم که

$$\sin C\cos B=\sin B\cos C \Rightarrow \sin(C-B)=0$$

و این برابری تنها وقتی در مثلث برقرار است که داشته باشیم: $B=C$، یعنی با مثلث متساوی‌الساقین سروکار داشته باشیم.

به‌این ترتیب، رابطهٔ فرض مساله درست نیست.

یادداشت. رابطهٔ درست چنین است:

$$AM^{2}=c(c-a\cos B)+\frac{a^{2}}{4} \qquad (1)$$

اکنون، اگر دراین رابطه، c را به b و B را به C تبدیل کنیم، به‌دست می‌آید:

$$AM^{2}=b(b-a\cos C)+\frac{a^{2}}{4}$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$c(c-a\cos B)+\frac{a^{2}}{4}=b(b-a\cos C)+\frac{a^{2}}{4}$$

و یا بعد از ساده‌کردن

$$b^{2}-c^{2}=a(b\cos C-c\cos B)$$

و یا، با استفاده از رابطه‌های $a=2R\sin A$، $b=2R\cos B$ و $c=2R\sin C$.

$$\sin^{2}B-\sin^{2}C=\sin A(\sin B\cos C-\sin C\cos B) \qquad (2)$$

برای عبارت سمت راست برابری به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}\sin A(\sin B\cos C-\sin C\cos B)&=\sin(B+C)\sin(B-C)=\\&=\sin^{2}B\cos^{2}C-\sin^{2}C\cos^{2}B=\\&=\sin^{2}B(1-\sin^{2}C)-\sin^{2}C(1-\sin^{2}B)=\\&=\sin^{2}B-\sin^{2}C\end{aligned}$$

که همان عبارت سمت چپ برابری (۲) است.

بنابراین، رابطهٔ (۱) برای بیان مجذور میانهٔ AM، می‌تواند درست باشد. [به واژهٔ «می‌توانـد» توجه کنید؛ از این راه، احتمال درستی رابطهٔ (۱) ثابت می‌شود نه حتمی و یقینی بودن آن.]

۱۰. $f(a, b, c)$ نسبت به سه حـرف a و b و c متقارن است، بنابراین، نتیجهٔ تجزیهٔ آن نیز باید عبارتی متقارن باشد. در نتیجه باید داشته باشیم:

$$f(a, b, c)=A(a+b)(b+c)(c+a) \qquad (1)$$

که در آن، A ضریب عددی ثابتی است [$f(a, b, c)$ نسبت به a، و همچنین نسبت به b و c، از درجهٔ دوم است و چون عبارت حاصل از ضرب سه پرانتز سمت راست (۱) هم نسبت به a، وهم نسبت به b و c، از درجهٔ دوم است، بنابراین A نمی‌تواند شامل a یا b یا c باشد].

اکنون، اگر در دو طرف اتحاد (۱) فرض‌کنیم $a=b=c=۱$، به دست می‌آید: $۶A=۶$، یعنی $A=۱$:

$$f(a, b, c)=(a+b)(b+c)(c+a)$$

۱۱. ازآن‌جاکه هریك ازمعادله‌های دستگاه مفروض، نسبت به x و y و z متقارن‌اند، بنابراین، سه مجهول دارای «حقوقی» برابرند، یعنی یا باید با هم برابر باشند و یا، ضمن مقایسهٔ جواب‌ها، این «برابر حقوقی» تضمین شود. جواب‌های دیگری از معادله چنین‌اند (به فرض این‌که، یکی از جواب‌ها $x=۱$، $y=-۱$، $z=۲$ باشد:

$$(x=۱,\quad y=۲,\quad z=-۱);\ (x=-۱,\ y=۱,\ z=۲);$$
$$(x=-۱,\ y=۲,\quad z=۱)\ ;\ (x=۲,\quad y=۱,\ z=-۱);$$
$$(x=۲\ ,\ y=-۱,\ z=۱)$$

یادداشت. در نظریهٔ دستگاه‌های معادله‌ها، ثابت می‌کنند که تعداد جواب‌های حقیقی یك دستگاه، ازحاصل‌ضرب درجهٔ معادله‌ها تجاوز نمی‌کند. در دستگاه مفروض، سه معادله، به ترتیب، از درجه‌های ۱، ۲ و ۳ هستند و بنابراین، حداکثر تعداد جواب‌های حقیقی دستگاه، برابر $۳\times۲\times۱$، یعنی ۶ می‌شود وهمان‌طور که می‌بینید، با دردست داشتن یکی ازجواب‌ها، هرشش جواب معادله را شناختیم.

۱۲. دایرهٔ محیطی مثلث، و درنتیجه، طول شعاع آن، نسبت به هیچ‌کدام از سه ضلع مثلث، موقعیت ممتازی ندارد و، بنابراین، بیان R، باید نسبت به ضلع‌های a و b و c متقارن باشد. رابطهٔ صورت مساله، نسبت به a و b و c متقارن نیست و، در نتیجه، نمی‌تواند درست باشد.

۱۳. این عبارت متقارن نیست، ولی نسبت به a و b و c یك دور تشکیل می‌دهد، یعنی با تبدیل a به b، b به c و c به a تغییر نمی‌کند.

یادداشت. اگر دراین عبارت، تنها دوحرف را به‌هم تبدیل‌کنیم (a به b و b به a، یا b به c و c به b، یا a به c و c به a)، به قرینهٔ خود تبدیل می‌شود. هر عبارتی را که، با تبدیل هر دو حرف دلخواه آن به یکدیگر، به قرینهٔ خود تبدیل شود، عبارت متقارن منفی گویند.

۱۴. داریم:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-3 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3=-2 \end{cases}$$

از رابطهٔ $\sigma_1=0$ نتیجه می‌شود که‌سه ریشهٔ معادلهٔ نمی‌توانند باهم مثبت یا باهم منفی باشند: یا یکی از ریشه‌ها مثبت ودوتای دیگر منفی ویا یکی از ریشه‌ها منفی‌و دوتای دیگرمثبت‌اند. ولی، با توجه به منفی بودن σ_3، نمی‌توان دوریشه را منفی ویك ریشه را مثبت گرفت، زیرا دراین صورت حاصل‌ضرب ریشه‌ها منفی نمی‌شود.

این معادله، دو ریشهٔ مثبت و یك ریشهٔ منفی دارد. [و با کمی دقت، می‌توان کشف کردکه ریشه‌ها عبارتند از ۱ و ۱ و ۲ —.]

۱۵. راه حل اول. داریم:

$$y_1=x_1^2,\quad y_2=x_2^2,\quad y_3=x_3^2$$

و بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} S&=y_1+y_2+y_3=x_1^2+x_2^2+x_3^2= \\ &=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)= \\ &=m^2-2n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P&=y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2= \\ &=(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)= \\ &=n^2-2mp \end{aligned}$$

$$Q=y_1 \cdot y_2 \cdot y_3=(x_1x_2x_3)^2=p^2$$

و معادله را از روی دستور

$$y^3-Sy^2+Py-Q=0$$

تشکیل می‌دهیم:

$$y^3+(2n-m^2)y^2+(n^2-2mp)y-p^2=0$$

راه حل دوم. از رابطهٔ $y=x^2$ به دست می‌آید: $x=\pm\sqrt{y}$؛ به جای x در معادلهٔ مفروض قرار می‌دهیم، به ترتیب خواهیم داشت:

$$\pm y\sqrt{y}+my\pm n\sqrt{y}+p=0;$$

$$\pm(y+n)\sqrt{y}=-(my+p);$$

$$(y^2+2ny+n^2)y=m^2y^2+2mpy+p^2;$$

$$y^3+(2n-m^2)y^2+(n^2-2mp)y-p^2=0$$

۱۶. a) الف. باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}=\frac{11}{6}$$

و از آنجا

$$\frac{m+10}{2(m+2)}=\frac{11}{6}\Rightarrow m=1$$

ب. پاسخ: $m_1=1$، $m_2=-\frac{25}{9}$.

پ. فرض می‌کنیم: $x_1=x_2+x_3$. اگر به جای x_2+x_3 در رابطهٔ

$$x_1+x_2+x_3=3(m+1)$$

x_1 راقراردهیم، به دست می‌آید:

$$x_1=\frac{3}{2}(m+1)$$

این مقدار x_1 باید درمعادلهٔ مفروض صدق کند که، از آن‌جا، به‌دست می‌آید:

$$\frac{27}{8}(m+1)^3-\frac{27}{4}(m+1)^3+\frac{3}{2}(m+1)(m+10)-2(m+2)=0$$

و بعد از ساده کردن، به معادلهٔ درجه سوم زیر برحسب m، می‌رسیم:

$$27m^3+69m^2-35m-61=0$$

سمت چپ این معادله، به ازای $m=1$، برابر صفر می‌شود و، بنابراین، بر $m-1$ بخش‌پذیر است و به صورت زیر درمی‌آید:

$$(m-1)(27m^2+96m+61)=0$$

پاسخ: $m_1=1$، $m_{2,3}=\frac{-16\pm\sqrt{73}}{9}$.

b) الف. پاسخ:

$$۲(m+۲)y^{۳}-(m+۱۰)y^{۲}+۳(m+۱)y-۱=۰$$

ب. پاسخ:

$$۸(m+۲)^{۳}y^{۳}+(۱۷m^{۳}+۱۹۲m^{۲}+۲۲۸m-۶۸۸)y^{۲}+$$
$$+۳(۹m^{۳}+۲۴m^{۲}-۴m-۱۷)y-۱=۰$$

۱۷. پاسخ:

$$x+y=\sigma_{۱};$$
$$x^{۲}+y^{۲}=\sigma_{۱}^{۲}-۲\sigma_{۲};$$
$$x^{۳}+y^{۳}=\sigma_{۱}^{۳}-۳\sigma_{۱}\sigma_{۲};$$
$$x^{۴}+y^{۴}=\sigma_{۱}^{۴}-۴\sigma_{۱}^{۲}\sigma_{۲}+۲\sigma_{۲}^{۲}$$
$$x^{۵}+y^{۵}=\sigma_{۱}^{۵}-۵\sigma_{۱}^{۳}\sigma_{۲}+۵\sigma_{۱}\sigma_{۲}^{۲};$$
$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{x+y}{x\cdot y}=\frac{\sigma_{۱}}{\sigma_{۲}};$$
$$\frac{۱}{x^{۲}}+\frac{۱}{y^{۲}}=\frac{x^{۲}+y^{۲}}{x^{۲}\cdot y^{۲}}=\frac{\sigma_{۱}^{۲}-۲\sigma_{۲}}{\sigma_{۲}^{۲}};$$
$$\frac{۱}{x^{۳}}+\frac{۱}{y^{۳}}=\frac{\sigma_{۱}^{۳}-۳\sigma_{۲}\sigma_{۱}}{\sigma_{۲}^{۳}};$$
$$\frac{۱}{x^{۴}}+\frac{۱}{y^{۴}}=\frac{\sigma_{۱}^{۴}-۴\sigma_{۱}^{۲}\sigma_{۲}+۲\sigma_{۲}^{۲}}{\sigma_{۲}^{۴}};$$
$$\frac{۱}{x^{۵}}+\frac{۱}{y^{۵}}=\frac{\sigma_{۱}^{۵}-۵\sigma_{۱}^{۳}\sigma_{۲}+۵\sigma_{۱}\sigma_{۲}^{۲}}{\sigma_{۲}^{۵}}$$

۱۸. پاسخ:

$$x_{۱}+x_{۲}+x_{۳}=\sigma_{۱};$$
$$x_{۱}^{۲}+x_{۲}^{۲}+x_{۳}^{۲}=\sigma_{۱}^{۲}-۲\sigma_{۲};$$
$$x_{۱}^{۳}+x_{۲}^{۳}+x_{۳}^{۳}=\sigma_{۱}^{۳}-۳\sigma_{۱}\sigma_{۲}+۳\sigma_{۳};$$
$$x_{۱}^{۴}+x_{۲}^{۴}+x_{۳}^{۴}=\sigma_{۱}^{۴}-۴\sigma_{۱}^{۲}\sigma_{۲}+۲\sigma_{۲}^{۲}+۴\sigma_{۱}\sigma_{۳}$$
$$\frac{۱}{x_{۱}}+\frac{۱}{x_{۲}}+\frac{۱}{x_{۳}}=\frac{x_{۱}x_{۲}+x_{۱}x_{۳}+x_{۲}x_{۳}}{x_{۱}x_{۲}x_{۳}}=\frac{\sigma_{۲}}{\sigma_{۳}};$$

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}=\frac{x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2}{x_1^2x_2^2x_3^2}=$$

$$=\frac{(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)}{(x_1x_2x_3)^2}=$$

$$=\frac{\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2};$$

$$\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}+\frac{1}{x_3^3}=\frac{x_1^3x_2^3+x_1^3x_3^3+x_2^3x_3^3}{x_1^3x_2^3x_3^3}=$$

$$=\frac{(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\left[(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2-3x_1x_2x_3\,(x_1+x_2+x_3)\right]}{(x_1x_2x_3)^3}+$$

$$+\frac{3x_1^2x_2^2x_3^2}{(x_1x_2x_3)^3}=$$

$$=\frac{\sigma_2\,(\sigma_2^2-3\sigma_1\sigma_3)+3\sigma_3^2}{\sigma_3^3}=$$

$$=\frac{\sigma_2^3+3\sigma_3^2-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sigma_3^3};$$

$$\frac{1}{x_1^4}+\frac{1}{x_2^4}+\frac{1}{x_3^4}=\frac{\sigma_2^4-4\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3+2\sigma_1^2\sigma_3^2+4\sigma_2\sigma_3^2}{\sigma_3^4}$$

۱۹. الف. برای مجموع مجذورهای ریشه‌ها داریم:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=$$

$$=(a-2)^2+2(a+1)=a^2-2a+6=(a-1)^2+5$$

و روشن است که مقدار اخیر نمی‌تواند از ۵ کوچکتر باشد. مجموع مجذورهای ریشه‌ها به ازای $a=1$ برابر ۵ و به‌ازای هرمقدار دیگر a، از ۵ بزرگتر می‌شود. به این ترتیب، حداقل مجموع مجذورهای ریشه‌ها، به‌ازای $a=1$ به‌دست می‌آید.

یادداشت. اگرمجموع مجذورهای ریشه‌ها را با S نشان‌دهیم، بنا برمحاسبهٔ بالا، داریم:

$$S=a^2-2a+6 \Rightarrow a^2-2a+6-S=0$$

این معادلهٔ درجهٔ دوم، وقتی جواب‌های حقیقی داردکه مبین آن غیرمنفی باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\Delta=۴-۴(۶-S)\geqslant ۰ \Rightarrow S\geqslant ۵$$

به‌این ترتیب، مقدار مجموع مجذورهای ریشه‌ها، یعنی S، نمی‌تواند از ۵ کوچکتر شود. حداقل ممکن برای مقدار S، عدد ۵ است که به ازای $a=۱$ به دست می‌آید.

ب. باید داشته باشیم:

$$\frac{۱}{x_۱^۳}+\frac{۱}{x_۲^۳}=\frac{۷}{۸};$$

که اگر درسمت چپ برابری، دوکسر را به یك مخرج تبدیل کنیم:

$$\frac{(x_۱+x_۲)^۳-۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲)}{(x_۱x_۲)^۳}=\frac{۷}{۸}$$

به جای $x_۱+x_۲$ و $x_۱x_۲$ مقدارهایشان را از معادله قرار می‌دهیم، ($x_۱+x_۲=a-۲$ و $x_۱x_۲=-(a+۱)$). بعد از عمل‌های لازم، به‌این معادلهٔ درجهٔ سوم می‌رسیم:

$$۵a^۳-a^۲+۳۱a-۳۵=۰$$

مجموع ضریب‌های عددی سمت چپ برابری، برابرصفر است و، بنابراین، $a=۱$ یکی ازریشه‌های این معادلهٔ درجهٔ سوم است. معادله به‌این صورت درمی‌آید:

$$(a-۱)(۵a^۲+۴a+۳۵)=۰$$

عبارت درجهٔ دوم پرانتز دوم، ریشه‌های موهومی دارد و، درنتیجه، تنها ریشهٔ حقیقی این معادله (یعنی، جواب منحصر به فرد مساله) $a=۱$ است.

۲۰. می‌دانیم:

$$a+b=m;\ \ a\cdot b=n \qquad (۱)$$

اگر فرض کنیم: $\sqrt[۴]{a}=A$ و $\sqrt[۴]{b}=B$، باتوجه به‌رابطه‌های (۱)، خواهیم داشت:

$$A^۴+B^۴=m;\ \ A^۴\cdot B^۴=n$$

باید، از این دستگاه، مقدار $A+B$ را محاسبه کنیم، معادلهٔ اول دستگاه را تبدیل می‌کنیم:

$$(A^۲+B^۲)^۲-۲A^۲B^۲=m$$

و به‌جای $A^۲B^۲$، مقدارآن $\sqrt{n}$ را قرار می‌دهیم (چون $A^۲B^۲$ مثبت است، باید حاصل آن را $\sqrt{n}$ گرفت نه $-\sqrt{n}$)، به دست می‌آید:

$$(A^2+B^2)^2=m+2\sqrt{n} \Rightarrow A^2+B^2=\sqrt{m+2\sqrt{n}}$$

(چون A^2+B^2 مثبت است، علامت مثبت را در جلو رادیکال انتخاب کرده‌ایم). سپس

$$A^2+B^2=(A+B)^2-2AB=(A+B)^2-2\sqrt[4]{n}$$

و بنابراین

$$(A+B)^2=\sqrt{m+2\sqrt{n}}+2\sqrt[4]{n}$$

وسرانجام

$$A+B=\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}=\sqrt{\sqrt{m+2\sqrt{n}}+2\sqrt[4]{n}}$$

۲۱. به طور شهودی روشن است که اگر $f(x, y)$ بر $(x-y)$ بخش‌پذیر و بر $(x-y)^2$ بخش‌ناپذیر باشد، عبارت مفروض، نسبت به x و y، متقارن منفی می‌شود و نه متقارن. ولی ما به استدلال ریاضی می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم:

$$f(x, y)=(x-y)\cdot\varphi(x, y) \qquad (1)$$

(خارج قسمت $f(x, y)$ بر $x-y$ را $\varphi(x, y)$ می‌گیریم). چون $f(x, y)$ متقارن است، بنابراین با تبدیل x به y و y به x تغییر نمی‌کند، یعنی باید داشته باشیم:

$$(x-y)\cdot\varphi(x, y)=(y-x)\cdot\varphi(y, x)$$

و یا

$$\varphi(x, y)=-\varphi(y, x)$$

این اتحاد باید به ازای هرمقدار x و منجمله $x=y$ برقرار باشد، یعنی

$$\varphi(y, y)=-\varphi(y, y) \Rightarrow \varphi(y, y)=0$$

وقتی که $\varphi(x, y)$ به ازای $x=y$ برابر صفر می‌شود، به معنای آن است که بر $x-y$ بخش‌پذیر است، یعنی

$$\varphi(x, y)=(x-y)\cdot\varphi_1(x, y)$$

و معادلهٔ (۱) به‌این صورت درمی‌آید:

$$f(x, y)=(x-y)^2\cdot\varphi_1(x, y)$$

یعنی $f(x, y)$ بر $(x-y)^2$ بخش‌پذیر است.

۲۲. اگر $z=-y$ فرض کنیم، به دستگاه متقارن

$$x^5+z^5=275,\quad x+z=5$$

و با فرض $x+z=\sigma_1$ و $xz=\sigma_2$ به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2=275\\ \sigma_1=5\end{cases}$$

اگرمقدار σ_1 راازمعادلهٔ دوم درمعادلهٔ اول دستگاه قراردهیم، بعداز عمل‌های لازم، معادلهٔ درجه دوم زیر، نسبت به σ_2، به دست می‌آید:

$$\sigma_2^2-25\sigma_2+114=0 \implies \sigma_2=6,\ 19$$

برای $\sigma_2=6$ داریم:

$$x+z=5,\quad x\cdot z=6$$

و x و z ریشه‌های معادله درجه دوم

$$t^2-5t+6=0$$

هستند و به دست می‌آید $t_1=2$ و $t_2=3$. یعنی

$$\left|\begin{array}{l}x=2\\ z=3\end{array}\right. \quad \text{یا} \quad \left|\begin{array}{l}x=3\\ z=2\end{array}\right.$$

درحالت $\sigma_2=19$ به‌معادلهٔ درجه دوم

$$t^2-5t+19=0$$

می‌رسیم که دارای ریشه‌های موهومی است. به این ترتیب، اگر $y=-z$ به‌حساب آوریم، جواب‌های حقیقی دستگاه، چنین‌اند:

$$(x=2,\ y=-3)\ \text{و}\ (x=3,\ y=-2)$$

۲۳. با فرض $\sqrt{x}=u$ و $\sqrt{y}=v$ (روشن است کــه x و y باید مقدارهایی مثبت باشند) به دستگاه زیرمی‌رسیم:

$$u^2+v^2=17,\ u+v=\frac{5}{4}uv$$

و با فرض $u+v=\sigma_1$ و $uv=\sigma_2$:

$$\sigma_1^2-2\sigma_2=17,\ \sigma_1=\frac{5}{4}\sigma_2$$

با حذف $\sigma_۲$ بین دومعادله دستگاه، به دست می‌آید:

$$۵\sigma_۱^۲-۸\sigma_۱-۸۵=۰$$

و از آن جا

$$\sigma_۱=u+v=۵ \quad \text{یا} \quad -\frac{۱۷}{۵}$$

ومقدارهای نظیر $\sigma_۲$:

$$\sigma_۲=u.v=\frac{۴}{۵}\sigma_۱=۴ \quad \text{یا} \quad -\frac{۶۸}{۲۵}$$

برای $\sigma_۱=۵$ و $\sigma_۲=۴$، مقدارهای u و v ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیر هستند:

$$t^۲-۵t+۴=۰ \Rightarrow t=۱,۴$$

و از آن‌جا:

$$(u=۱,\ v=۴) \quad \text{یا} \quad (u=۴,\ v=۱)$$

که با توجه به شرطهای $x=u^۲$ و $y=v^۲$ خواهیم داشت:

$$(x=۱,\ y=۱۶) \quad \text{یا} \quad (x=۱۶,\ y=۱)$$

در حالت $\sigma_۱=-\frac{۱۷}{۵}$ و $\sigma_۲=-\frac{۶۸}{۲۵}$ به این معادله می‌رسیم:

$$۲۵t^۲-۸۵t-۶۸=۰$$

با توجه به منفی بودن حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله، معلوم می‌شود که از u و v، باید یکی مثبت و دیگری منفی باشد. ولی، از فرض $u=\sqrt{x}$ و $v=\sqrt{y}$ معلوم است که u و v هردومثبت‌اند. بنابراین، معادلهٔ اخیر درجه دوم، جواب جدیدی به ما نمی‌دهد.

۲۴. $\sqrt{x}=u$ و $\sqrt{y}=v$ می‌گیریم. روشن است که باید داشته باشیم: $u\geqslant ۰$ و $v\geqslant ۰$. دستگاه مفروض به‌این صورت درمی‌آید:

$$u^۲+v^۲=۶ \quad \text{و} \quad u+v=-۲uv$$

ویا (با فرض $u+v=\sigma_۱$ و $uv=\sigma_۲$):

$$\sigma_۱^۲-۲\sigma_۲=۶ \quad \text{و} \quad \sigma_۱=-۲\sigma_۲$$

با حذف $\sigma_۲$، بین دومعادله خواهیم داشت:

$$\sigma_۱^۲+\sigma_۱-۶=۰ \Rightarrow \sigma_۱=۲,\ -۳$$

و مقدارهای نظیر σ_2 چنین می‌شود:

$$\sigma_2 = -1,\ \frac{3}{2}$$

برای حالت $\sigma_1 = 2$ و $\sigma_2 = -1$، مقدارهای u و v، ریشه‌های معادلهٔ زیرهستند:

$$t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \pm \sqrt{2}$$

یعنی (با توجه به مثبت بودن u و منفی بودن v):

$$u = 1 + \sqrt{2},\ v = 1 - \sqrt{2}$$

و ازآن‌جا

$$\begin{cases} x = u^2 = 3 + 2\sqrt{2} \\ y = v^2 = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

برای حالت $\sigma_1 = -3$ و $\sigma_2 = \frac{3}{2}$ جوابی به دست نمی‌آید، زیرا با مثبت بودن حاصل‌ضرب u و v ومنفی بودن مجموع آن‌ها، برای هردومجهول u و v، مقدارهایی منفی به دست می‌آید، درحالی‌که u باید مثبت باشد.

۲۵. $x = u^2$، $y = v^2$ می‌گیریم ($x \geqslant 0$، $y \geqslant 0$):

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + uv = 19 \\ u^4 + v^4 + u^2v^2 = 133 \end{cases}$$

که برحسب σ_1 و σ_2 چنین می‌شود:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - \sigma_2 = 19 \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 3\sigma_2^2 = 133 \end{cases}$$

اگر σ_2 را از معـادلهٔ اول، برحسب σ_1 محاسبه کنیم و در معادلهٔ دوم دستگاه قرار دهیم، به‌دست می‌آید: $\sigma_1 = \pm 5$ وازآن‌جا $\sigma_2 = 6$. وجواب‌های دستگاه اصلی چنین‌اند:

$$(x = 4,\ y = 9) \text{ یا } (x = 9,\ y = 4)$$

۲۶. پاسخ: $(x = 8,\ y = -1)$ یا $(x = -1,\ y = 8)$.

۲۷. $\sqrt[3]{x} = u$ و $\sqrt[3]{y} = v$ بگیرید.

پاسخ: $(x = -8\ ,\ y = 1)$ و یا $(x = 1\ ,\ y = -8)$.

۲۸. $\sqrt[3]{x} = u$ و $\sqrt[3]{y} = v$ می‌گیریم، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\frac{v}{u} + \frac{v}{u} = a,\ u^3 + v^3 = b$$

با فرض $u + v = \sigma_1$ و $uv = \sigma_2$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\sigma_1^2=(a+2)\sigma_2\\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=b\end{cases} \tag{1}$$

و اگر σ_2 را بین این دومعادله حذف کنیم:

$$(a-1)\sigma_1^3=b(a+2) \tag{2}$$

ابتدا فرض می‌کنیم $a\neq 1$ و $a\neq -2$ در این صورت، خواهیم داشت:

$$\sigma_1=\sqrt[3]{\frac{b(a+2)}{a-1}},\quad \sigma_2=\sqrt[3]{\frac{b^2}{(a+2)(a-1)}}$$

که از آن‌جا، می‌توان جواب‌های u و v را به دست آورد:

$$\left|\begin{array}{l} u_1=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{a-2}{a+2}}\right)\sqrt[3]{\frac{b(a+2)}{a-1}}\\ v_1=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{a-2}{a+2}}\right)\sqrt[3]{\frac{b(a+2)}{a-1}}\end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l}u_2=v_1\\ v_2=u_1\end{array}\right.$$

روشن است که،علاوه برشرط‌های اولیهٔ $a\neq 1$ و $a\neq -2$،باید $a-2$ و $a+2$ هم علامت باشند (یعنی $a<-2$ یا $a\geqslant 2$) تا ریشه‌های حقیقی داشته باشیم. به‌این ترتیب، برای $a<-2$ یا $a\geqslant 2$، خواهیم داشت:

$$\left|\begin{array}{l} x_1=\frac{b}{2}+\frac{b(a+1)}{2(a-1)}\sqrt{\frac{a-2}{a+2}}\\ y_1=\frac{b}{2}-\frac{b(a+1)}{2(a-1)}\sqrt{\frac{a-2}{a+2}}\end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l}x_2=y_1\\ y_2=x_1\end{array}\right.$$

درحالت $a=1$ و $b\neq 0$، معادلهٔ (۲)، و درنتیجه دستگاه اصلی، جواب ندارد.

در حالت $a=1$ و $b=0$، دستگاه (۱) تبدیل به معادلهٔ $\sigma_1^2=3\sigma_2$ می‌شود. ازاین‌جا نتیجه می‌شود: $\sigma_2>0$. ولی معادلهٔ درجه دوم

$$t^2-\sigma_1 t+\sigma_2=0$$

ریشه‌های موهومی دارد، زیرا مبین آن

$$\Delta=\sigma_1^2-4\sigma_2=3\sigma_2-4\sigma_2=-\sigma_2<0$$

یعنی در این حالت هم، دستگاه مفروض، جواب ندارد. [به طور کلی دستگاه مفروض،

به ازای $a=1$ (وهرمقدار b) جواب ندارد.]

در حالت $a=-2$، دستگاه (۱) به این صورت درمی‌آید:

$$\sigma_1=0,\ \ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=b$$

که درصورت $b\neq 0$ جواب ندارد و به‌شرط $b=0$ خواهیم داشت:

$$\sigma_1=0,\ \ \sigma_2=\text{عددی دلخواه}$$

بنابراین، درحالت $a=-2$ و $b=0$، x و y را می‌توان عددهای دلخواهی (به‌جز صفر) گرفت که در رابطهٔ $x+y=0$ صدق کنند.

۲۹. $\sqrt{x}=u$ و $\sqrt[4]{y^3-1}=v$ می‌گیریم، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$u^4+v^4=17,\ \ u+v=2$$

که دستگاه کمکی آن، برحسب σ_1 و σ_2، چنین است:

$$\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2=16,\ \ \sigma_1=2$$

که ازآن‌جا به دست می‌آید:

$$(\sigma_1=2,\ \ \sigma_2=0)\ \ \text{یا}\ \ (\sigma_1=2,\ \ \sigma_2=8)$$

حالت $\sigma_1=2$ و $\sigma_2=8$ منجر به جواب‌های موهومی برای u و v می‌شود و در حالت $\sigma_1=2$ و $\sigma_2=0$ به‌دست می‌آید:

$$(u=0,\ \ v=2)\ \ \text{یا}\ \ (u=2,\ \ v=0)$$

و سرآخر، برای جواب‌های دستگاه اصلی داریم:

$$(x=0,\ \ y=\sqrt[3]{17})\ \ \text{یا}\ \ (x=4,\ \ y=1)$$

۳۰. فرض می‌کنیم:

$$x+y+z=\sigma_1,\ \ xy+xz+yz=\sigma_2,\ \ xyz=\sigma_3$$

و دستگاه جدید را برحسب مجهول‌های σ_1، σ_2 و σ_3 تشکیل می‌دهیم:

$$\sigma_1=a,\ \ \sigma_1^2-2\sigma_2=b^2,\ \ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=a^3$$

که ازآن‌جا به دست می‌آید:

$$\sigma_1=a,\ \ \sigma_2=\frac{1}{2}(a^2-b^2),\ \ \sigma_3=\frac{1}{2}a(a^2-b^2)$$

به‌این ترتیب، x و y و z، ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم زیر هستند:

$$t^3-at^2+\frac{1}{2}(a^2-b^2)t-\frac{1}{2}a(a^2-b^2)=0$$

$t=a$ یکی از ریشه‌های این معـادله است و، بنـابراین، سمت چپ این معادله بر $(t-a)$ بخش‌پذیر است و به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$(t-a)\left[t^2+\frac{1}{2}(a^2-b^2)\right]=0$$

و از آن‌جا:

$$t_1=a,\quad t_2=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}},\quad t_3=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}$$

و بنابراین، برای دستگاه اصلی، ۶ جواب به دست می‌آید:

$$\left|\begin{array}{l} x_1=a \\ y_1=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \\ z_1=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l} x_2=a \\ y_2=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \\ z_2=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l} x_3=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \\ y_3=a \\ z_3=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_4=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{4}} \\ y^4=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \\ z_4=a \end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l} x_5=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \\ y_5=a \\ z_5=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l} x_6=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \\ y_6=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \\ z_6=a \end{array}\right.$$

یادداشت. روشن است که همهٔ این جواب‌ها، وقتی قابل قبول و حقیقی‌اند که داشته باشیم: $b^2>a^2$ یا $|b|>|a|$، درغیراین‌صورت، دستگاه مفروض جواب حقیقی ندارد درحالت $b=a$، دستگاه مفروض، تنها دارای سه جواب می‌شود:

$$\left|\begin{array}{l} x_1=a \\ y_1=0 \\ z_1=0 \end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l} x_2=0 \\ y_2=a \\ z_2=0 \end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l} x_3=0 \\ y_3=0 \\ z_3=a \end{array}\right.$$

۳۱. با فـرض $x+y+z=\sigma_1$، $xy+xz+yz=\sigma_2$ و $xyz=\sigma_3$، بلافاصله

به‌دست می‌آید:

$$\sigma_1 = 11,\ \ \sigma_2 = \sigma_3 = 36$$

و بنابراین، x و y و z، ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم زیرهستند:

$$t^3 - 11t^2 + 36t - 36 = 0$$

که‌هم‌ارز است با معادلهٔ

$$(t-2)(t-3)(t-6) = 0$$

وازآن‌جا: $t_1 = 2$، $t_2 = 3$ و $t_3 = 6$.

شش جواب دستگاه اصلی، از تبدیل‌های دوری دو جواب (t_1, t_2, t_3) و (t_2, t_1, t_3) به‌دست می‌آیند.

یادداشت. قبلاً گفته‌ایم که، تبدیل دوری نسبت به سه حرف x و y و z، به‌معنای آن است که x را به y، y را به z و z را به x تبدیل کنیم، درضمن، اگر عبارتی ضمن تبدیل دوری به خودش تبدیل شود، آن را یك دور یا عبارتی دوری می‌نامند. هرعبارتی که نسبت به x و y و z متقارن باشد، یك عبارت دوری هم‌هست، ولی‌عکس این حکم همیشه درست نیست، یعنی ممکن است یك عبارت دوری، متقارن نباشد.

به همین مناسبت، وقتی که بخواهیم، از روی یکی از جواب‌ها، در دستگاه‌های سه مجهولی، بقیهٔ جواب‌ها را به‌دست‌آوریم، نمی‌توان به‌تبدیل دوری متوالی این یك جواب اکتفا کرد. فرض کنید، بخواهیم، از روی جواب (a, b, c) بقیهٔ جواب‌ها را پیدا کنیم. اگر دراین جواب تبدیل دوری انجام دهیم (دوبار):

$$(a, b, c) \rightarrow (b, c, a) \rightarrow (c, a, b)$$

با تبدیل دوری جواب اخیر، دوباره همان جواب اول به‌دست می‌آید. ولی، این سه‌جواب همهٔ جواب‌هـای دستگاه نیستند. برای این‌که همهٔ جواب‌ها به‌دست‌آید، باید در این سه جواب دو حرف را (a و b یا a و c ویا b و c) به‌یکدیگر تبدیل کرد. مثلاً، اگر b و c را به‌هم تبدیل کنیم، سه جواب دیگر دستگاه چنین می‌شود:

$$(a, c, b);\ (c, b, a);\ (b, a, c)$$

که درواقع، از تبدیل دوری یکدیگر به دست‌آمده‌اند:

$$(a, c, b) \rightarrow (c, b, a) \rightarrow (b, a, c)$$

بنابراین، وقتی کـه بخواهیم، در یك دستگاه شامل سه معادلهٔ سه مجهولی متقارن، بقیهٔ جواب‌ها را ازروی یك جواب پیداکنیم، می‌توان ابتدا دراین جواب، جای دومقدار

را باهم عوض کرد و، سپس، تبدیل‌های دوری هر دوی آن‌ها را به دست آورد. مثلاً، در مسالهٔ ۳۱، یك جـواب (۶, ۳, ۲) را پیدا کرده‌ایم. ابتدا جـواب دوم (۳, ۶, ۲) را (با تبدیل ۲ و ۶ به یکدیگر) می‌نویسیم و سپس، تبدیل‌های دوری هر دو جواب را پیدا می‌کنیم:

$$(۲, ۳, ۶) \rightarrow (۳, ۶, ۲) \rightarrow (۶, ۲, ۳);$$

$$(۲, ۶, ۳) \rightarrow (۶, ۳, ۲) \rightarrow (۳, ۲, ۶)$$

و به این ترتیب، هر شش جواب دستگاه به دست می‌آید.

۳۲. از معادلهٔ اول داریم:

$$u = x + y + z$$

در سه معادلهٔ آخر قرارمی‌دهیم، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ + z^۲ - (x + y + z)^۲ = ۶ \\ x^۳ + y^۳ + z^۳ - (x + y + z)^۳ = ۱۸ \\ x^۵ + y^۵ + z^۵ - (x + y + z)^۵ = ۲۱۰ \end{cases}$$

که اگر برحسب $\sigma_۱$، $\sigma_۲$ و $\sigma_۳$ تبدیل کنیم، بعداز ساده‌کردن خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \sigma_۲ = -۳ \\ \sigma_۳ - \sigma_۱\sigma_۲ = ۶ \\ (\sigma_۱^۲ - \sigma_۲)(\sigma_۳ - \sigma_۱\sigma_۲) = ۴۲ \end{cases}$$

اگر در معادلهٔ آخـر دستگاه اخیر $\sigma_۳ - \sigma_۱\sigma_۲ = ۶$ و $\sigma_۲ = -۳$ قرار دهیم، مقدار $\sigma_۱$ به‌دست می‌آید و، سپس، به‌کمك معادلهٔ دوم دستگاه، $\sigma_۳$ هم محاسبه می‌شود:

$$(\sigma_۱ = ۲,\ \sigma_۲ = -۳,\ \sigma_۳ = ۰) \ \text{یا}\ (\sigma_۱ = -۲,\ \sigma_۲ = -۳,\ \sigma_۳ = ۱۲)$$

و درنتیجه، x و y و z، ریشه‌های یکی از دومعادلهٔ درجه سوم زیر هستند:

$$t^۳ - ۲t^۲ - ۳t = ۰ \ \text{یا}\ t^۳ + ۲t^۲ - ۳t - ۱۲ = ۰$$

معادلهٔ اول سه جواب دارد:

$$t_۱ = ۰ \quad t_۲ = ۳ \quad t_۳ = -۱$$

بنابراین، شش جواب دستگاهٔ اصلی، برای x و y و z را می‌توان ازاین جواب به دست آورد (یادداشت مسالهٔ قبل را ببینید) واگر $u = x + y + z$ به‌حساب آوریم، شش جواب

چنین‌اند: (x, y, z, u)

$$(۰, ۳, -۱, ۲);\ (۰, -۱, ۳, ۲);\ (۳, ۰, -۱, ۲);$$
$$(۳, -۱, ۰, ۲);\ (-۱, ۰, ۳, ۲);\ (-۱, ۳, ۰, ۲)$$

برای شش جواب دیگر، باید معادلهٔ درجه سوم

$$t^۳+۲t^۲-۳t-۱۲=۰$$

را حل کنیم. این معادله ریشه‌های گویا ندارد و حل آن از عهدهٔ ما خارج است. دستگاه روی هم ۱۲ جواب دارد.

۳۳. ابتدا یادآوری می‌کنیم که، اگر ریشه‌های معادلهٔ درجه چهارم

$$x^۴+ax^۳+bx^۲+cx+d=۰$$

را $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ و $x_۴$ فرض کنیم، می‌توان از اتحاد

$$x^۴+ax^۳+bx^۲+cx+d=(x-x_۱)(x-x_۲)(x-x_۳)(x-x_۴)$$

با برابر قراردادن ضریب‌های جمله‌های متشابه در دو طرف برابری، ساده‌ترین رابطه‌های متقارن بین ریشه‌ها و ضریب‌ها را درمعادلهٔ درجه چهارم به دست آورد.

$$\sigma_۱=x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=-a,$$
$$\sigma_۲=x_۱x_۲+x_۱x_۳+x_۱x_۴+x_۲x_۳+x_۲x_۴+x_۳x_۴=b,$$
$$\sigma_۳=x_۱x_۲x_۳+x_۱x_۲x_۴+x_۱x_۳x_۴+x_۲x_۳x_۴=-c,$$
$$\sigma_۴=x_۱x_۲x_۳x_۴=d$$

ازهمین‌جا روشن می‌شود که، بادردست داشتن مقدارهای $\sigma_۱$، $\sigma_۲$، $\sigma_۳$ و $\sigma_۴$، چگونه می‌توان معادلهٔ درجهٔ چهارم را تشکیل داد.

اکنون به دستگاه مفروض برمی‌گردیم. معادلهٔ اول دستگاه نشان می‌دهد که $\sigma_۱=a$. برای معادلهٔ دوم دستگاه، از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲+z^۲+u^۲\equiv(x+y+z+u)^۲-۲(xy+xz+xu+yz+yu+zu)$$

و بنابراین، معادلهٔ دوم دستگاه به صورت $\sigma_۱^۲-۲\sigma_۲=a^۲$ درمی‌آید.

برای معادلهٔ سوم، باید از اتحاد بغرنج‌تری استفاده کنیم:

$$x^۳+y^۳+z^۳+u^۳=$$
$$=(x+y+z+u)(x^۲+y^۲+z^۲+u^۲-xy-xz-xu-yz-yu-zu)+$$
$$+۳(xyz+xyu+xzu+yzu)$$

و بنابراین، معادلهٔ سوم دستگاه، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\sigma_1[(\sigma_1^2-2\sigma_2)-\sigma_2]+3\sigma_3=a^3$$

و یا

$$\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=a^3$$

برای تبدیل معادلهٔ چهارم دستگاه، ابتدا، این عبارت را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&x^2y^2+x^2z^2+x^2u^2+y^2z^2+y^2u^2+z^2u^2=\\
&\quad=(xy+xz+xu+yz+yu+zu)^2-\\
&\quad-2(x^2yz+x^2yu+xy^2z+xy^2u+xyzu+x^2zu+xyz^2+xyzu+\\
&\quad+xz^2u+xyzu+xyu^2+xzu^2)=\\
&\quad=(xy+xz+xu+yz+yu+zu)^2-\\
&\quad-2[(x+y+z+u)(xyz+xyu+xzu+yzu)-xyzu]=\\
&\quad=\sigma_2^2-2(\sigma_1\sigma_3-\sigma_4) \qquad (1)
\end{aligned}$$

اکنون، معادلهٔ چهارم دستگاه را تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&x^4+y^4+z^4+u^4=(x^2+y^2+z^2+u^2)^2-\\
&\quad-2(x^2y^2+x^2z^2+x^2u^2+y^2z^2+y^2u^2+z^2u^2)
\end{aligned}$$

در سمت راست، پرانتز اول را قبلاً محاسبه کرده‌ایم و پرانتز دوم را در (۱) داده‌ایم. بنابراین خواهیم داشت:

$$x^4+y^4+z^4+u^4=(\sigma_1^2-2\sigma_2)^2-2(\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4)$$

و درنتیجه، معادلهٔ چهارم دستگاه چنین می‌شود:

$$\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4=a^4$$

و دستگاه جدید کمکی به این صورت درمی‌آید،

$$\begin{cases}
\sigma_1=a\\
\sigma_1^2-2\sigma_2=a^2\\
\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=a^3\\
\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4=a^4
\end{cases}$$

جواب این دستگاه، به سرعت به دست می‌آید:

$$\sigma_1 = a، \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0, \quad \sigma_4 = 0$$

بنابراین، x، y، z و u، جواب‌های معادلهٔ درجه چهارم زیر هستند:

$$t^4 - at^3 = 0 \Rightarrow t_1 = a, \quad t_2 = t_3 = t_4 = 0$$

و برای دستگاه مفروض، چهار جواب به دست می‌آید

$$(a, 0, 0, 0); \ (0, a, 0, 0); \ (0, 0, a, 0); \ (0, 0, 0, a)$$

یادداشت ۱. در این مساله هم می‌توانستیم، برای تبدیل $\sum x^3$ و $\sum x^4$ برحسب σ_1، σ_2، σ_3 و σ_4 از روش ضریب‌های نامعین، که درفصل دوم، ۵ نمونه‌ای از آن را ارائه دادیم، استفاده کنیم.

یادداشت ۲. اگر S_k را مجموع توان‌های kام n حرف x، y، z، ...، t، و σ_1، σ_2، ...، σ_n را به همان مفهوم ساده‌ترین عبارت‌های متقارن مربوط به این n حرف بگیریم، در جبر ثابت می‌کنند که رابطهٔ زیر همیشه برقرار است:

$$S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} + \sigma_3 S_{k-3} - \dots + (-1)^{k-1} k \sigma_k$$

ازاین رابطه، می‌توان به‌ترتیب، مقدارهای S_k را پیدا کرد:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sigma_1, \\
S_2 &= \sigma_1 S_1 - 2\sigma_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \\
S_3 &= \sigma_1 S_2 - \sigma_2 S_1 + 3\sigma_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3, \\
S_4 &= \sigma_1 S_3 - \sigma_2 S_2 + \sigma_3 S_1 - 4\sigma_4 = \\
&= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4 \\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

دراین رابطه‌ها، باید توجه داشت، که وقتی مثلاً با دوحرف x و y سروکار داریم و ساده‌ترین عبارت‌های متقارن برای این دوحرف تنها σ_1 و σ_2 است، باید σ_3، σ_4، ... را درموردآن صفر به حساب آورد. مثلاً، برابر دوحرف x و y داریم:

$$S_4 = x^4 + y^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$$

وبرای سه حرف x و y و z:

$$S_4 = x^4 + y^4 + z^4 = \sigma_1^4 - \sigma_1^2 4\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3$$

و برای چهار حرف x و y و z و u:

$$S_4=x^4+y^4+z^4+u^4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4$$

۳۴. ابتدا، این اتحادهای مثلثاتی را به یاد می‌آوریم:

$$\sin 2a=2\sin a\cos a;$$

$$\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a=\sin a(4\cos^2 a-1);$$

$$\sin 4a=4\sin a\cos a\cos 2a=4\sin a\cos a(2\cos^2 a-1)=$$
$$=\sin a(8\cos^3 a-4\cos a);$$

$$\sin 5a=16\sin^5 a-20\sin^3 a+5\sin a=$$
$$=\sin a[16(1-\cos^2 a)^2-20(1-\cos^2 a)+5]=$$
$$=\sin a(16\cos^4 a-12\cos^2 a+1)$$

به این ترتیب، با فرض $\sin a\neq 0$ (یا $a\neq k\pi$) معادلهٔ اول دستگاه مفروض به $\sin a$ ساده می‌شود و به صورت زیر درمی‌آید:

$$x+2y\cos a+z(4\cos^2 a-1)+t(8\cos^3 a-4\cos a)=$$
$$=16\cos^4 a-12\cos^2 a+1$$

این معادله را، نسبت به توان‌های نزولی $\cos a$ منظم می‌کنیم:

$$16\cos^4 a-8t\cos^3 a-4(z+3)\cos^2 a-$$
$$-2(y-2t)\cos a-(x-z-1)=0 \qquad (1)$$

به همین ترتیب، با شرط $b\neq k\pi$، $c\neq k\pi$ و $d\neq k\pi$ سه معادلهٔ دیگر برحسب $\cos b$، $\cos c$ و $\cos d$، مشابه معادلهٔ (۱) به دست می‌آید.

اکنون، معادلهٔ درجه چهارم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$16u^4-8tu^3-4(z+3)u^2-2(y-2t)u-(x-z-1)=0 \qquad (2)$$

با توجه به معادله‌های دستگاه مفروض (که به صورت (۱) و صورت‌های مشابه آن درآمده‌اند)، چهار ریشهٔ معادلهٔ (۲) عبارتند از $\cos a$، $\cos b$، $\cos c$ و $\cos d$ (مثلاً، اگر $\cos a$ را به‌جای u درمعادلهٔ (۲) قراردهیم، همان معادلهٔ (۱) به دست می‌آید که بنا برفرض مساله برقراراست).

اکنون رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریب‌های معادلهٔ (۲) را می‌نویسیم:

$$\Sigma\cos a=\cos a+\cos b+\cos c+\cos d=\frac{t}{2};$$

$$\Sigma(\cos a \cos b) = \cos a \cdot \cos b + \cos a \cdot \cos c + \cos a \cdot \cos d + \cos b \cdot \cos c +$$

$$+ \cos b \cdot \cos d + \cos c \cdot \cos d = -\frac{z+۳}{۴};$$

$$\Sigma(\cos a \cos b \cos c) = \cos a \cos b \cos c + \cos a \cos b \cos d +$$

$$+ \cos a \cos c \cos d + \cos b \cos c \cos d = \frac{y-۲t}{۸};$$

$$\cos a \cos b \cos c \cos d = \frac{z-x+۱}{۱۶}$$

و ازاین چهار رابطه، مقدارهای x، y، z و t به سادگی به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} x = -۴[۴\cos a \cos b \cos c \cos d + ۴\Sigma(\cos a \cos b) - ۱], \\ y = ۸\Sigma(\cos a \cos b \cos c) + ۴\Sigma\cos a, \\ z = -[۴\Sigma(\cos a \cos b) + ۳], \\ t = ۲\Sigma\cos a \end{cases}$$

در حالتی‌که یکی ازکمانهای a، b، c و d برابر $k\pi$ و بقیه مخالف $k\pi$ باشند، مثلاً $\sin a = ۰$ و $(\sin a, \sin c, \sin d) \neq ۰$، معادلهٔ اول دستگاه به اتحاد تبدیل‌می‌شود. بنابراین، می‌توان یکی ازمجهول‌ها و مثلاً x را به دلخواه انتخاب‌کرد وسه مجهول دیگر را از سه معادلهٔ بعدی به دست‌آورد.

درحالت $a=b=k\pi$ و $(c, d) \neq k\pi$ دو معادلهٔ اول و دوم به اتحاد تبدیل می‌شوند: x وyعددهایی‌دلخواهند وz وt ازدو معادلهٔ‌آخر(برحسب x وy) به‌دست‌می‌آیند.

در حالت $a=b=c=k\pi$ و $d \neq k\pi$، می‌توان x وy وz را مقدارهایی‌دلخواه گرفت ومقدار t را از معادلهٔ چهارم دستگاه محاسبه‌کرد.

سرانجام، درحالت $a=b=c=d=k\pi$، برای هریك از چهار مجهول، می‌توان مقدارهای دلخواهی درنظر گرفت.

۳۵. با توجه به شرط $a+b+c=۰$، می‌توان نوشت:

$$b+c=-a, \quad c+a=-b, \quad a+b=-c$$

و اتحاد مشروط مفروض به این صورت درمی‌آید:

$$a^۴+b^۴+c^۴+(a^۲+b^۲+c^۲)(ab+ac+bc)=۰ \qquad (۱)$$

اکنون، اگر قرار دهیم:

$$a^۴+b^۴+c^۴=(a^۲+b^۲+c^۲)^۲-۲(a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲)=$$
$$=[(a+b+c)^۲-۲(ab+ac+bc]^۲-$$
$$-۲[(ab+ac+bc)^۲-۲abc(a+b+c)]=$$
$$=(\sigma_۱^۲-۲\sigma_۲)^۲-۲(\sigma_۲^۲-\sigma_۱\sigma_۳)=$$
$$=\sigma_۱^۴-۴\sigma_۱^۲\sigma_۲+۲\sigma_۲^۲+۴\sigma_۱\sigma_۳=۲\sigma_۲^۲$$

[در واقع، عبارت $a^۴+b^۴+c^۴$ را از قبل برحسب $\sigma_۱$، $\sigma_۲$ و $\sigma_۳$ محاسبه کرده بودیم و دراین‌جا، نیازی به این محاسبه نداشتیم (حل مسالهٔ ۱۸ را ببینید)، تنها به قصد یادآوری به‌آن اشاره کردیم.]

$$a^۲+b^۲+c^۲=\sigma_۱^۲-۲\sigma_۲=-۲\sigma_۲;$$
$$ab+ac+bc=\sigma_۲$$

[همه‌جا، $\sigma_۱$، یعنی $a+b+c$ را برابر صفر گرفتیم]. اکنون، سمت چپ اتحاد مشروط مفروض، چنین می‌شود:

$$۲\sigma_۲^۲-۲\sigma_۲.\sigma_۲=۲\sigma_۲^۲-۲\sigma_۲^۲=۰$$

یادداشت. اگر فرض کنیم:

$$a=x-y;\ \ b=y-z;\ \ c=z-y$$

آن وقت، خواهیم داشت $a+b+c=۰$. بنابراین، اتحاد مشروط صورت مساله را می‌توان به‌صورت زیر، و بدون هیچ شرطی نوشت:

$$(x-y)^۴+(y-z)^۴+(z-x)^۴+[(x-y^۲)+(y-z)^۲+(z-x)^۲]\times$$
$$\times[(x-y)(y-z)+(x-y)(z-x)+(y-z)(z-x)]=۰$$

که برای حل آن، بهتراست به‌همان صورت اصلی درآید.

۳۶. با توجه به فرض $\sigma_۱=۰$ خواهیم داشت:

$$a^۴+b^۴+c^۴=۲\sigma_۲^۲;$$ (مسالهٔ ۳۵ را ببینید)

$$۲(a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲)=۲(\sigma_۲^۲-۲\sigma_۱\sigma_۳)=۲\sigma_۲^۲;$$
$$۲(ab+ac+bc)^۲=۲\sigma_۲^۲;$$
$$\frac{۱}{۲}(a^۲+b^۲+c^۲)^۲=\frac{۱}{۲}(\sigma_۱^۲-۲\sigma_۲)^۲=۲\sigma_۲^۲$$

یعنی، همهٔ این عبارت‌ها باهم برابرند.

یادداشت. شکل بدون‌شرط این اتحادها، چنین می‌شود (یادداشت مسألهٔ ۳۵ را ببینید):

$$(x-y)^۴+(y-z)^۴+(z-x)^۴=$$
$$=۲[(x-y)^۲(y-z)^۲+(x-y)^۲(z-x)^۲+(y-z)^۲(z-x)^۲]=$$
$$=۲[(x-y)(y-z)+(x-y)(z-x)+(y-z)(z-x)]^۲=$$
$$=\frac{۱}{۲}[(x-y)^۲+(y-z)^۲+(z-x)^۲]^۲$$

۳۷. ابتدا $a^۵+b^۵+c^۵$ را برحسب $\sigma_۱$، $\sigma_۲$ و $\sigma_۳$ محاسبه می‌کنیم.

می‌دانیم، نسبت به a و b و c، $\sigma_۱$ از درجهٔ اول، $\sigma_۲$ از درجهٔ دوم و $\sigma_۳$ از درجهٔ سوم است. ضمناً باید درنتیجهٔ عبارت $a^۵+b^۵+c^۵$، همهٔ جمله‌ها، برحسب a و b و c، از درجهٔ پنجم باشند. بنابراین، تنها با جمله‌هایی به صورت زیر سروکار خواهیم داشت:

$$\sigma_۱^۵;\ \sigma_۱^۳\sigma_۲;\ \sigma_۱^۲\sigma_۳;\ \sigma_۱\sigma_۲^۲;\ \sigma_۲\sigma_۳$$

و درنتیجه باید داشته باشیم:

$$a^۵+b^۵+c^۵=A\sigma_۱^۵+B\sigma_۱^۳\sigma_۲+C\sigma_۱^۲\sigma_۳+D\sigma_۱\sigma_۲^۲+E\sigma_۲\sigma_۳$$

این برابری یك اتحاد است و باید به ازای هر مقدار دلخواه از a، b یا c برقرار باشد. برای (a, b, c) پنج‌بار، عددهای مختلف، والبته مناسب، انتخاب می‌کنیم تا به‌کمك پنج معادله‌ای که برحسب ضریب‌های A، B، C، D و E به‌دست می‌آید، این ضریب‌ها را محاسبه‌کنیم:

۱) $\quad a=b=۰,\ c=۱;\ \sigma_۱=۱,\ \sigma_۲=\sigma_۳=۰$

به ازای این مقدارها به‌دست می‌آید: $A=۱$.

۲) $\quad a=۲,\ b=c=-۱;\ \sigma_۱=۰,\ \sigma_۲=-۳,\ \sigma_۳=۲$

که ازآن‌جا حاصل می‌شود: $E=-۵$.

۳) $\quad a=۰,\ b=c=۱;\ \sigma_۱=۲,\ \sigma_۲=۱,\ \sigma_۳=۰$

به ازای این مقدارها به‌معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$۴B+D=-۱۵ \qquad (I)$$

۴) $\quad a=b=۱,\ c=-۱;\ \sigma_۱=۱,\ \sigma_۲=-۱,\ \sigma_۳=-۱$

و معادلهٔ زیر به دست می‌آید:

$$B+C-D=-5 \qquad \text{(II)}$$

۵) $a=1,\ b=-1,\ c=2;\ \sigma_1=2,\ \sigma_2=-1,\ \sigma_3=-2$

و معادلهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$4B+4C-D=-5 \qquad \text{(III)}$$

به‌کمک معادله‌های (I)، (II) و (III)، مقدارهای B و C و D به دست می‌آید:

$$B=-5,\ C=5,\ D=5$$

به این ترتیب، خواهیم داشت:

$$a^5+b^5+c^5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_2\sigma_3$$

که با توجه به شرط $\sigma_1=0$ به دست می‌آید:

$$2(a^5+b^5+c^5)=-10\sigma_2\sigma_3$$

از طرف دیگر، با توجه به شرط $\sigma_1=0$، داریم:

$$5abc(a^2+b^2+c^2)=5\sigma_3(\sigma_1^2-2\sigma_2)=-10\sigma_2\sigma_3$$

درستی اتحاد مشروط ثابت شد.

۳۸. شبیه مسالهٔ قبل ثابت می‌شود.

۳۹. به‌ترتیب داریم:

$$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=$$
$$=(\sigma_1-c)(\sigma_1-a)(\sigma_1-b)+\sigma_3=$$
$$=\sigma_1^3-(a+b+c)\sigma_1^2+(ab+ac+bc)\sigma_1-abc+\sigma_3=$$
$$=\sigma_1^3-\sigma_1^3+\sigma_1\sigma_2-\sigma_3+\sigma_3=\sigma_1\sigma_2$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(a+b+c)(ab+ac+bc)$$

۴۰. به ترتیب داریم:

$$a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)+abc(a+b+c)=$$
$$=a^3(\sigma_1-a)+b^3(\sigma_1-b)+c^3(\sigma_1-c)+\sigma_1\sigma_3=$$

$$=(a^3+b^3+c^3)\sigma_1-(a^4+b^4+c^4)+\sigma_1\sigma_3=$$
$$=(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)\sigma_1-(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3)+\sigma_1\sigma_3=$$
$$=\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_2^2=\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)=$$
$$=(ab+ac+bc)(a^2+b^2+c^2)$$

۴۱. می‌توان نوشت:

$$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3=$$
$$=\sigma_1^3-3(\sigma_1-2a)^3-(\sigma_1-2b)^3-(\sigma_1-2c)^3=$$
$$=\sigma_1^3-\sigma_1^3+6(a+b+c)\sigma_1^2-12(a^2+b^2+c^2)\sigma_1+$$
$$+8(a^3+b^3+c^3)$$

که بعد از تبدیل هریک از پرانتزها (برحسب σ_1، σ_2 و σ_3)، برابر $24\sigma_3$ می‌شود.

پاسخ: $24abc$.

۴۲. داریم:

$$(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)^2-(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)=$$
$$=(\sigma_1^2-\sigma_2)^2-\sigma_1^2(\sigma_1^2-2\sigma_2)=\sigma_2^2$$

پاسخ: $(ab+ac+bc)^2$.

۴۳. ابتدا عبارت $a^4+b^4+c^2-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$ را تجزیه می‌کنیم:

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=$$
$$=(a^2+b^2+c)^2-4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=$$
$$=(\sigma_1^2-2\sigma_2)^2-4[(ab+ac+bc)^2-2abc(a+b+c)]=$$
$$=(\sigma_1^2-2\sigma_2)^2-4(\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3)=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+8\sigma_1\sigma_3=$$
$$=\sigma_1(\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+8\sigma_3)$$

به‌این ترتیب،عبارت‌مفروض بر $a+b+c$ بخش‌پذیر است ازطرف دیگردرعبارت

$$a^4+b^4+c^2-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$$

تمام توان‌های a و b و c زوج است، یعنی با تبدیل a به $-a$، b به $-b$ و c به $-c$ تغییر نمی‌کند. بنابراین، وقتی که این عبارت به $a+b+c$ بخش‌پذیر است، باید بر $-a+b+c$، $a-b+c$ و $a+b-c$ هم بخش‌پذیر باشد. درنتیجه، باید داشته باشیم:

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=$$
$$=k(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

دراین‌جا، k یك ضریب عددی است، زیرا حاصل‌ضرب پرانتزها، مثلاً نسبت به a، ازدرجهٔ چهارم است و، بنابراین، k نمی‌تواند شامل a باشد و به همین‌ترتیب برای b و c.

برای پیداکردن k، در دوطرف تساوی، مثلاً $a=b=0$ و $c=1$ قرار می‌دهیم، به دست می‌آید: $k=-1$.

به این ترتیب، روشن شد:

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=$$
$$=-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

بنابراین، حل مساله به این‌جا منجر می‌شود که ثابت‌کنیم عبارت

$$a^4(b^2+c^2-a^2)^3+b^4(c^2+a^2-b^2)^3+c^4(a^2+b^2-c^2)^3$$

برهریك از عبارت‌های $a+b+c$، $-a+b+c$، $a-b+c$ و $a+b-c$ بخش‌پذیر است. برای این منظور باید ثابت‌کنیم که، عبارت مفروض، به ازای $a=-b-c$، $a=b+c$، $a=b-c$ و $a=-b+c$ برابر صفر می‌شود.

درضمن،کافی است تنها دریکی ازاین موردها تحقیق‌کنیم، زیرا عبارت مفروض‌هم، نسبت به هریك از حرف‌های a و b و c، از درجهٔ زوج است و، بنابراین، هرکدام از حرف‌های a و b و c را به قرینهٔ خودش تبدیل‌کنیم، تغییر نمی‌کند.

مثلاً، به ازای $a=b+c$، حاصل عبارت مفروض را محاسبه می‌کنیم:

$$(b+c)^4(-2bc)^3+b^4(2c^2+2bc)^3+c^4(2b^2+bc)^3=$$
$$=-8b^3c^3(b+c)^4+8b^4c^3(b+c)^3+8b^3c^4(b+c)^3=$$
$$=8b^3c^3(b+c)^3[-(b+c)+b+c]=0$$

۴۴. رابطهٔ فرض، به سادگی، به این صورت درمی‌آید:

$$(a+b+c)(ab+ac+bc)-abc=0$$

عبارت سمت چپ بر $a+b$ بخش‌پذیر است (به ازای $a=-b$ برابر صفر می‌شود؛ خودتان آزمایش‌کنید)، بنابراین بر $b+c$ و $c+a$ هم بخش‌پذیر می‌شود درنتیجه، رابطهٔ فرض را می‌توان چنین نوشت:

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0$$

اکنون دیگر روشن است که برابری‌های حکم هم، برای مقدارهای فرد n، به ازای $a=-b$ یا $b=-c$ و یا $c=-a$ برقرارند.

۴۵. ابتدا دو نابرابری زیر را ثابت می‌کنیم:

$$\sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2 \quad (1); \qquad \sigma_2^2 \geqslant \sigma_1\sigma_3 \quad (2)$$

۱) برای اثبات نابرابری (۱)، درواقع، باید داشته باشیم:

$$(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+xz+yz)$$

و یا

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz \geqslant 0 \qquad (1)'$$

درستی نابرابری $(1)'$ را با روش‌های مختلفی می‌توان ثابت کرد که، از بین آن‌ها، دو روش را شرح می‌دهیم:

α) اگر دوطرف نابرابری $(1)'$ را در ۲ ضرب کنیم، می‌توان آن را به صورت

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqslant 0$$

نوشت که درستی آن روشن است. درضمن معلوم است که علامت برابری وقتی، وتنها وقتی برقرار است که داشته باشیم $x=y=z\neq 0$.

β) سمت چپ نابرابری $(1)'$ را نسبت به یکی ازحرف‌ها و مثلاً x، منظم می‌کنیم:

$$x^2-(y+z)x+(y^2+z^2-yz) \geqslant 0$$

این نابرابری تنها وقتی برای عبارت‌درجهٔ دوم همیشه برقراراست که مبین آن مثبت نباشد (ضریب x^2، عددی مثبت است). مبین این سه جمله‌ای را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=(y+z)^2-4(y^2+z^2-yz)=$$
$$=-3(y^2+z^2-2yz)=-3(y-z)^2$$

که مثبت نبودن آن روشن است.

درحالت $\Delta=0$، به ازای $y=z$، سه جمله‌ای به صورت

$$(x-y)^2=(x-z)^2 \geqslant 0$$

درمی‌آید که تنها درحالت $x=y=z\neq 0$، به‌جای نابرابری، یك برابری خواهیم داشت.

۲) نابرابری(۲) را می‌توان به‌کمك نابرابری (۱) به دست آورد. نابرابری (۱) چنین بود:

$$(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+xz+yz)$$

از آن‌جاکه این، یك نابرابری اتحادی است، یعنی به ازای همهٔ مقدارهای مثبت x و y و z برقرار است، می‌توان x و y و z را به هر مقدار مثبت دیگری تبدیل کرد. در دوطرف نابرابری، x را به xy، y را به xz و z را به yz تبدیل می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$(xy+xz+yz)^2 \geqslant 3(x^2yz+xy^2z+xyz^2)$$

و یا

$$(xy+xz+yz)^2 \geqslant 3xyz(x+y+z)$$

که همان نابرابری مطلوب (۲) است:

$$\sigma_2^2 \geqslant 3\sigma_1\sigma_3$$

با توجه به بحثی که درمورد نابرابری (۱) داشتیم، می‌توان نتیجه گرفت که نابرابری (۲) وقتی به برابری تبدیل می‌شود که داشته باشیم:

$$xy=xz=yz \Rightarrow x=y=z\neq 0$$

اکنون به اثبات نابرابری مسالهٔ ۴۵ می‌پردازیم.

این نابرابری، درواقع، چنین است:

$$\sigma_1.\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\geqslant 9 \Rightarrow \sigma_1\sigma_2\geqslant 9\sigma_3$$

چون σ_1، σ_2 و σ_3 مثبت، و دو نابرابری (۱) و (۲) هم‌جهت‌اند، از ضرب دو نابرابری اخیر، به دست می‌آید:

$$\sigma_1^2.\sigma_2^2 \geqslant 9\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

و از تقسیم دوطرف آن برمقدار مثبت $\sigma_1\sigma_2$، به همان نابرابری مورد نظر می‌رسیم:

$$\sigma_1\sigma_2 \geqslant 9\sigma_3$$

با توجه به بحث قبلی، روشن است که، حالت برابری، وقتی و تنها وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم: $x=y=z$.

یادداشت ۱. استدلال بالا را، که اندکی هم طولانی شد، به این خاطر انتخاب کردیم که، ضمن آن، بتوانیم خواننده را با برخی نکته‌های تازه، واز آن جمله نابرابری‌های (۱) و (۲)، آشنا کنیم. اثبات درستی خود نابرابری مسالهٔ ۴۵، راه بسیار ساده‌تری دارد و کافی است از این حقیقت استفاده کنیم که مجموع هرعدد مثبت با عکس آن، از ۲ کوچکتر نیست، درواقع، اگر x و y، دوعدد مثبت باشند، همیشه داریم:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$$

[این نابرابری، بلافاصله، به نابرابری روشن $0 \leqslant (x-y)^2$ تبدیل می‌شود.]

اگر دو پرانتز سمت چپ نابرابری مسالهٔ ۴۵ را درهم ضرب کنیم، بعد ازکمی ساده‌کردن و جا به‌جاکردن برخی جمله‌ها، چنین می‌شود

$$3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\geqslant 9$$

هریك ازپرانتزهای سمت چپ از ۲ و، بنابراین، مجموع سه پرانتز، از ۶ کوچکتر نیستند و، درنتیجه، درستی نابرابری ثابت می‌شود.

در ضمن، هریك از سه پرانتز، وقتی و تنها وقتی برابر ۲ می‌شوندکه داشته باشیم: $x=y=z$.

یادداشت ۲. نابرابری‌اتحادی مسالهٔ ۴۵،حالت‌خاصی‌است ازنابرابری اتحادی زیر:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2 \qquad (\mathrm{I})$$

$$(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n>0)$$

روشن است‌که، برای $x_1=x_2=\ldots=x_n$ داریم:

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=nx_1,$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{n}{x_1}$$

و بنابراین، حاصل‌ضرب آن‌ها برابر با n^2 می‌شود.

ثابت می‌کنیم، درحالتی‌که دست‌کم دو مقدار از مقدارهای x_1، x_2، $\ldots$، x_n باهم برابر نباشند، نابرابری (بدون علامت برابری) برقراراست.

وقتی‌که پرانتزهای سمت چپ نابرابری (I) را در هم ضرب‌کنیم، جمله‌هایی به صورت $\frac{x_i}{x_j}$ به دست می‌آید. تعداد این جمله‌ها برابراست با n^2 (ازضرب هرجملهٔ پرانتز اول در n جملهٔ پرانتز دوم، n جمله و، درنتیجه، از ضرب n جملهٔ پرانتز اول در n جملهٔ پرانتز دوم به اندازهٔ $n.n$ یعنی n^2 جمله به‌دست می‌آید). از بین این n^2 جمله، n جمله به صورت $\frac{x_k}{x_k}$ داریم‌که مجموع آن‌ها برابر $1\times n$، یعنی n می‌شود. برای ما n^2-n جمله باقی می‌ماند، ولی آن‌هارا می‌توان دوبه‌دو به صورت مجموع $\frac{x_n}{x_m}+\frac{x_m}{x_n}$ کنار هم گذاشت.

تعداد این‌گونه زوج جمله‌ها، برابر است با $\frac{n^۲-n}{۲}$. ولی هرمجموع به‌صورت $\frac{x_m}{x_n}+\frac{x_n}{x_m}$ از ۲ بزرگتر است ($m\neq n$ و $x_m\neq x_n$)، بنابراین مجموع کل این‌گونه زوج جمله‌ها از $۲\times\frac{n^۲-n}{۲}$ یعنی $n^۲-n$ بزرگتراست.

به‌این ترتیب، بعد از بازکردن پرانتزها، اولاً n جمله با مجموع برابر n، ثانیاً $\frac{n^۲-n}{۲}$ زوج جمله با مجموع بزرگتر از $n^۲-n$ به دست می‌آید و درنتیجه

$$(x_۱+x_۲+\cdots+x_n)\left(\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}+\cdots+\frac{۱}{x_n}\right)>n+(n^۲-n)=n^۲$$

این نابرابری اتحادی را، به‌کمك استقرای ریاضی هم می‌توان ثابت کرد.

اولاً، نابرابری به ازای $n=۲$ برقراراست:

$$(x_۱+x_۲)\left(\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}\right)=۲+\left(\frac{x_۱}{x_۲}+\frac{x_۲}{x_۱}\right)>۴$$

[توجه می‌کنید که تنها به حالتی می‌پردازیم که در بین $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n، دست‌کم دو مقدار نابرابر وجود دارد.]

ثانیاً فرض می‌کنیم داشته باشیم:

$$(x_۱+x_۲+\cdots+x_n)\left(\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}+\cdots+\frac{۱}{x_n}\right)>n^۲$$

و ثابت می‌کنیم:

$$(x_۱+\cdots+x_n+x_{n+۱})\left(\frac{۱}{x_۱}+\cdots+\frac{۱}{x_n}+\frac{۱}{x_{n+۱}}\right)>(n+۱)^۲$$

به ترتیب داریم:

$$(x_۱+\cdots+x_n+x_{n+۱})\left(\frac{۱}{x_۱}+\cdots+\frac{۱}{x_n}+\frac{۱}{x_{n+۱}}\right)=$$

$$=(x_۱+\cdots+x_n)\left(\frac{۱}{x_۱}+\cdots+\frac{۱}{x_n}\right)+x_{n+۱}\left(\frac{۱}{x_۱}+\cdots+\frac{۱}{x_n}\right)+$$

$$+\frac{۱}{x_{n+۱}}(x_۱+\cdots+x_n)+\frac{x_{n+۱}}{x_{n+۱}}>n^۲+۱+$$

$$+x_{n+۱}\left(\frac{۱}{x_۱}+\cdots+\frac{۱}{x_n}\right)+\frac{۱}{x_{n+۱}}(x_۱+\cdots+x_n)=$$

$$=n^۲+۱+\left(\frac{x_{n+۱}}{x_۱}+\frac{x_۱}{x_{n+۱}}\right)+\left(\frac{x_{n+۱}}{x_۲}+\frac{x_۲}{x_{n+۲}}\right)+\cdots+$$

$$+\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)>n^2+1+2n=(n+1)^2$$

حکم ثابت شد.

۴۶. این نابرابری را می‌توان چنین نوشت:

$$\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3\geqslant 3\sigma_3$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$\sigma_1^3\geqslant 3\sigma_1\sigma_2 \Rightarrow \sigma_1^2\leqslant 3\sigma_2$$

واین همـان نابرابری (۲) در حل مسالهٔ قبل است (ابتدای حل مسالهٔ ۴۵ را ببینید). از همین‌جـا، نتیجه می‌شود کـه با شرط $a=b=c\neq 0$، نابرابری مسالهٔ ۴۶ به برابری تبدیل می‌شود.

یادداشت ۱. شرط اخیر، یعنی مخالف صفر بودن a و b و c را به‌این جهت درنظر گرفتیم که درصورت مساله فرض شده بود $a>0$، $b>0$ و $c>0$.

اگر شرط مثبت بودن a و b و c (یا x و y و z درمسالهٔ ۴۵) را برداریم، در مسالهٔ ۴۶، درحالت $a=b=c$ (چه مثبت، چه منفی وچه صفر)، نابرابری به‌برابری تبدیل می‌شود، ولی درمسالهٔ ۴۵، به‌دلیل وجـود x و y و z در مخرج کسرها، شرط $x\neq 0$، $y\neq 0$ و $z\neq 0$ به قوت خود باقی می‌ماند. [البته، در مسالهٔ ۴۵ هم، وقتی که x و y و z مقدارهایی منفی باشند، بازهم در حالت $x=y=z\neq 0$ دو طرف نابرابری باهم برابر می‌شوند.]

یادداشت ۲. شرط $x=y=z$ (برای مسالهٔ ۴۵) یا $a=b=c$ (برای مسالهٔ ۴۶) شرطی کافی است تا علامت نابرابری به‌علامت برابری تبدیل شود، ولی شرطی لازم نیست (البته، اگر از شرط مثبت بودن x و y و z یا a و b و c صرف‌نظر کنیم).

مثلاً در نابرابری مسالهٔ ۴۶، با حذف شرط مثبت بودن a و b و c، در دو حالت ممکن است نابرابری به برابری تبدیل شود: ۱) $a=b=c$ ۲) $a+b+c=0$.

۴۷. اگردونابرابری $\sigma_1^2\geqslant 3\sigma_2$ (نابرابری (۱) درحل‌مسالهٔ ۴۵) و $\sigma_1\sigma_2\geqslant 9\sigma_3$ (حکم مسالهٔ ۴۵) را درهم ضرب کنیم، به دست می‌آید:

$$\sigma_1^3\sigma_2\geqslant 27\sigma_2\sigma_3 \Rightarrow \frac{\sigma_1^3}{27}\geqslant\sigma_3$$

که اگر از دوطرف، ریشهٔ سوم بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sigma_1}{3}\geqslant\sqrt[3]{\sigma_3} \Rightarrow \frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$$

حالت برابری، با شرط $a=b=c$ به‌دست می‌آید.

یادداشت. این نابرابری، حالت خاصی از نابرابری کلی

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

است (به ازای $n=۳$) که به‌این ترتیب قابل بیان است.

واسطهٔ حسابی n عدد مثبت، از واسطهٔ هندسی آن‌ها، کوچکتر نیست.

۴۸. اگر فرض کنیم:

$$a+b-c=x,\ a-b+c=y,\ -a+b+c=z$$

ازآن‌جاکه a و b و c، طول ضلع‌های یك مثلث هستند، برای x و y و z، مقدارهایی مثبت به دست می‌آید. دراین صورت خواهیم داشت:

$$a=\frac{x+y}{۲},\ b=\frac{x+z}{۲},\ c=\frac{y+z}{۲}$$

و نابرابری مفروض با شرط $x>۰$، $y>۰$ و $z>۰$، به صورت زیر درمی‌آید:

$$۲\left(\frac{x+y}{۲}\cdot\frac{x+z}{۲}+\frac{x+y}{۲}\cdot\frac{y+z}{۲}+\frac{x+z}{۲}\cdot\frac{x+z}{۲}\right)>$$

$$>\left(\frac{x+y}{۲}\right)^۲+\left(\frac{x+z}{۲}\right)^۲+\left(\frac{y+z}{۲}\right)^۲$$

که پس ازتبدیل به $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ به صورت $۴\sigma_۲>۰$ درمی‌آیدکه واضح است.

۴۹. از صورت معادله روشن است که

$$x\neq ۰,\ y\neq ۰,\ z\neq ۰$$

اگر فرض کنیم:

$$\frac{xy}{z}=a,\ \frac{xz}{y}=b,\ \frac{yz}{x}=c$$

به دست می‌آید:

$$ab+ac+bc=x^۲+y^۲+z^۲$$

اگر $a+b+c=\sigma_۱$ و $ab+ac+bc=\sigma_۲$ بگیریم، اولا داریم:

$$\sigma_۱=a+b+c=۳$$

(بنابر شرط مساله). ثانیاً با توجه به نابرابری $\sigma_۱^۲\geqslant ۳\sigma_۲$ (نابرابری (۱) در حل مسالهٔ ۴۵) می‌توان نوشت:

$$(a+b+c)^۲\geqslant ۳(ab+ac+bc)$$

و یا
$$9 \geqslant 3(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \leqslant 3$$
این نابرابری، با توجه به درست بودن مقدارهای x و y و z، تنها به‌ازای
$$|x|=|y|=|z|=1$$
برقراراست، درضمن، هریك ازمقدارهای $|a|$، $|b|$ و $|c|$ هم برابر واحد می‌شوند، ولی چون داریم $a+b+c=3$، به دست می‌آید:
$$a=b=c=1$$
یعنی x و y و z را باید طوری انتخاب کرد که هر یك از مقدارهای $\frac{xy}{z}$، $\frac{xz}{y}$ و $\frac{yz}{x}$ برابر مقدار مثبت $+1$ بشوند، بنابراین یا هرسه عدد x و y و z مثبت و یا دوتای آن‌ها منفی و سومی مثبت است.

پاسخ:
$$\left|\begin{array}{l} x_1=1 \\ y_1=1 \\ z_1=1 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_2=1 \\ y_2=-1 \\ z_2=-1 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_3=-1 \\ y_3=-1 \\ z_3=1 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_4=-1 \\ y_4=1 \\ z_4=-1 \end{array}\right.$$

۵۰. می‌دانیم، بنابر رابطهٔ هرون، مساحت مثلث را می‌توان این طور بیان کرد:
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$
اگر فرض کنیم
$$b+c-a=x,\ a+c-b=y,\ a+b-c=z$$
اولا x و y و z مقدارهایی مثبت می‌شوند، ثانیاً داریم:
$$\sigma_1=x+y+z=a+b+c=2p$$
به‌این ترتیب، برای مساحت مثلث خواهیم داشت:
$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)xyz}=\frac{1}{4}\sqrt{\sigma_1\sigma_3}$$
درمسالهٔ ۴۷ ثابت کردیم
$$\sigma_3 \leqslant \frac{1}{27}\sigma_1^3$$

بنا براین می توانیم بنویسیم:

$$S \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{\sigma_1 \times \frac{1}{27}\sigma_1^3} = \frac{1}{12\sqrt{3}}\sigma_1^2 = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

درضمن، حالت برابری، تنها به ازای $x=y=z$ یا $a=b=c$ به دست می آید.

پاسخ: حداکثر مساحت مثلث برابر است با $\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ و وقتی به این حداکثرمی‌رسیم که با مثلث متساوی‌الاضلاع سروکار داشته باشیم.

۵۱. وقتی که عبارت متقارن $f(x, y, z)$ بر $x-y$ بخش‌پذیر باشد، به‌دلیل حقوق برابر x و y و z در $f(x, y, z)$، باید بر $x-z$ و $y-z$، یعنی بر $(x-y)(x-z)(y-z)$ بخش‌پذیر باشد. خارج قسمت

$$g(x, y, z) = \frac{f(x, y, z)}{(x-y)(x-z)(y-z)}$$

متقارن منفی است، زیرا مثلا با تبدیل x و y به یکدیگر، صورت کسر تغییر نمی کند درحالی که مخرج آن تغییرعلامت می‌دهد. بنا براین $g(x,y,z)$ بر $(x-y)(x-z)(y-z)$ بخش‌پذیر است. واین به‌معنای آن است که $f(x, y, z)$ بر $(x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2$ بخش‌پذیر است.

۵۲. این عبارت متقارن منفی است و، در ضمن، نسبت به x (و هم نسبت به y یا نسبت به z) از درجه دوم است، بنا براین باید داشته باشیم:

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3 = A(x-y)(x-z)(y-z)$$

که اگر مثلا $x=0$، $y=1$ و $z=2$ را دردوطرف این اتحاد قرار دهیم، به‌دست می آید: $A=-3$. در نتیجه

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$$

۵۳. این عبارت متقارن منفی و، نسبت به سه متغیر x و y و z، ازدرجهٔ پنجم‌است، بنا براین، اولا بر $(x-y)(x-z)(y-z)$ بخش‌پذیر است و ثانیاً خارج قسمت، نسبت به سه متغیر (x و y و z) از درجهٔ دوم (ومتقارن) می‌شود. یعنی باید داشته باشیم:

$$x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2) =$$

$$=(x-y)(x-z)(y-z)(A\sigma_1^2+B\sigma_2) \qquad (1)$$

$$(\sigma_2 = xy+xz+yz,\ \ \sigma_1 = x+y+z)$$

اگر در اتحاد (۱)، مثلا یك بار $x=-1$، $y=0$ و $z=1$ و بار دیگر $x=0$، $y=1$ و $z=2$ قراردهیم، به دست می‌آید $A=0$ و $B=1$. به‌این ترتیب:

$$x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)=$$
$$=(x-y)(x-z)(y-z)(xy+xz+yz)$$

۵۴. این عبارت متقارن منفی، نسبت به x و y و z، از درجهٔ ششم است وبنابراین باید داشته باشیم:

$$x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)=$$
$$=(x-y)(x-z)(y-z)(A\sigma_1^3+B\sigma_1\sigma_2+C\sigma^3)$$

که به سادگی (و با قرار دادن سه ردیف مقدار برای x و y و z در دو طرف اتحاد)، مقدارهای عددی A و B و C به دست می آید.

پاسخ:

$$x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)=$$
$$=(x-y)(x-z)(y-z)(x+y)(x+z)(y+z)$$

۵۵. دراین‌جا هم، با استدلالی شبیه تمرین ۵۳ باید داشته باشیم:

$$x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)=$$
$$=(x-y)(x-z)(y-z)(A\sigma_1^2+B\sigma_2)$$

پاسخ:

$$x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)=$$
$$=(x-y)(x-z)(y-z)(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)$$

۵۶. هردو پرانتز را به یك مخرج تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a)}{abc}\times$$
$$\times\frac{a(a-b)(c-a)+b(b-c)(c-b)+c(c-a)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

صورت کسر اول برابر است با $(x-y)(x-z)(y-z)$. صورت کسر دوم عبارتی است متقارن از درجهٔ سوم و، بنابراین، باید به صورت $A\sigma_1^3+B\sigma_1\sigma_2+C\sigma_3$ ویا، با توجه به‌این‌که $\sigma_1=a+b+c=0$، به صورت $C\sigma_3$ باشد. اگر در اتحاد

$$a(a-b)(c-a)+b(b-c)(a-b)+c(c-a)(b-c)=$$
$$=A\sigma_1^3+B\sigma_1\sigma_2+C\sigma_3$$

مثلا $a=1$، $b=2$ و $c=-3$ قرار دهیم (باید a و b و c را طوری انتخاب کنیم که $\sigma_1=a+b+c$ برابر صفر شود)، به دست می‌آید $C=-9$. بنابراین حاصل‌ضرب دوپرانتز سمت چپ برابری فرض، چنین می‌شود:

$$\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{abc}\times\frac{-9abc}{-(a-b)(a-c)(b-c)}=9$$

۵۷. صورت کسر را می‌توان تجزیه کرد:

$$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)=$$
$$=(x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z)$$

(مثال بند ۲ از فصل چهارم را ببینید). مخرج کسر هم چنین است:

$$(x-y)(x-z)(y-z)$$

و بنابراین، حاصل کسر برابر $x+y+z$ می‌شود.

۵۸. اگر به‌یك مخرج تبدیل کنیم، صورت کسر حاصل چنین می‌شود:

$$f(a,b,c)=a^2(a+b)(a+c)(b-c)+$$
$$+b^2(b+c)(b+a)(c-a)+c^2(c+a)(c+b)(a-b)$$

$f(a,b,c)$ متقارن منفی است و، بنابراین، بر

$$(a-b)(a-c)(b-c)$$

بخش‌پذیر است و چون $f(a,b,c)$، نسبت به a و b و c، از درجهٔ پنجم است، باید داشته باشیم:

$$f(a,b,c)=(a-b)(a-c)(b-c)(A\sigma_1^2+B\sigma_2)$$

که اگر پشت سرهم $a=0$، $b=1$ و $c=2$ وسپس $a=1$، $b=-1$ و $c=2$ قرار دهیم، به دومعادلهٔ زیر، برای A و B، می‌رسیم:

$$9A+2B=9,\quad 4A-B=4$$

که از آن به دست می‌آید: $A=1$ و $B=0$. درنتیجه داریم:

$$f(a,b,c)=(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)^2$$

بنابراین، حاصل عبارت مسالهٔ ۵۸، برابر $(a+b+c)^2$ می‌شود.

۵۹. به‌ترتیب داریم:

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5=\sigma_1^5-(x^5+y^5+z^5)=$$
$$=\sigma_1^5-(\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3)=$$
$$=5\sigma_1^3\sigma_2-5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_2\sigma_3=$$
$$=(5\sigma_1^3\sigma_2-5\sigma_1^2\sigma_3)-(5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_2\sigma_3)=$$
$$=5\sigma_1^2(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)-5\sigma_2(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)=$$
$$=5(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_1^2-\sigma_2)$$

که با توجه به اتحاد

$$\sigma_1\sigma_2-\sigma_3=(x+y)(x+z)(y+z)$$

سرانجام خواهیم داشت:

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5=$$
$$=5(x+y)(x+y)(y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)$$

۶۰. ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم را x_1، x_2 و x_3 می‌گیریم وفرض می‌کنیم:

$$x_1+x_2+x_3=\sigma_1,\quad xy+xz+yz=\sigma_2,\quad xyz=\sigma_3$$

از صورت معادلهٔ درجهٔ سوم معلوم است که

$$\sigma_1=0,\quad \sigma_2=p,\quad \sigma_3=-q$$

مبین را برای x_1، x_2 و x_3 تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=$$
$$=-4\sigma_1^3\sigma_3+\sigma_1^2\sigma_2^2+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-4\sigma_2^3-27\sigma_3^2$$

که اگر $\sigma_1=0$، $\sigma_2=p$ و $\sigma_3=-q$ قرار دهیم:

$$\Delta=-4p^3-27q^2=-(4p^3+27q^2)$$

و نتیجه‌گیری‌های زیر روشن است:

۱) $4p^3+27q^2=0$: دست‌کم دو ریشه از سه ریشهٔ معادله، باهم برابرند (والبته، هر سه ریشه حقیقی‌اند)؛

۲) $4p^3+27q^2<0$: معادله دارای سه ریشهٔ حقیقی متمایز است؛

۳) $4p^3+27q^2>0$: معادله دارای دوریشهٔ موهومی و یك ریشهٔ حقیقی است.

یادداشت ۱. وقتی که بامعادلهٔ درجه سومی با ضریب‌های حقیقی سروکارداشته باشیم، حتماً یکی از ریشه‌ها حقیقی است، ولی دو ریشهٔ دیگر ممکن است حقیقی و ممکن است موهومی باشند.

یادداشت ۲. وقتی که یك معادلهٔ جبری با ضریب‌های حقیقی (ازهردرجه‌ای) دارای ریشه‌های موهومی باشد، حتماً تعداد این ریشه‌های موهومی زوج است و دو به‌دو مزدوج یکدیگرند، یعنی ریشه‌هایی به صورت $a+b\sqrt{-1}$ و $a-b\sqrt{-1}$ دارد.

وقتی که ضریب‌های معادله،عددهایی گویا باشند، حتماً تعداد ریشه‌های گنگ معادله زوج است و دو به دو مزدوج یکدیگر. یعنی ریشه‌هایی به صورت $m+\sqrt{n}$ و $m-\sqrt{n}$ دارد.

۶۱. عبارت

$$\Sigma x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}=x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}+$$
$$+y\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+z^2)}{1+y^2}}+z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

نسبت به x و y و z متقارن است و، بنابراین، نسبت به همین متغیرها یك دور تشکیل می‌دهد، یعنی با تبدیل x به y، y به z و z به x تغییرنمی‌کند. درنتیجه کافی است یکی‌از جمله‌های این عبارت را محاسبه‌کنیم ودوباره‌با تبدیل‌های دوری متوالی، مقدارعبارت‌های دیگر را به دست‌آوریم. طبق فرض داریم:

$$xy+yz+zx=1 \Rightarrow x=-\frac{1-xz}{y+z}$$

و بنابراین

$$1+x^2=1+\left(\frac{1-yz}{y+z}\right)^2=\frac{(y^2+1)(z^2+1)}{(y+z)^2}$$

درنتیجه، به سادگی مقدار جملهٔ اول عبارت به دست می‌آید:

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}=1-yz$$

و درنتیجه

$$\Sigma=(1-yz)+(1-zx)+(1-xy)=$$
$$=3-(xy+yz+zx)=2$$

۶۲. اگر $\Delta=-۴p^{۳}-۲۷q^{۲}$، مبین معادلهٔ درجه سوم مفروض را تبدیل کنیم، به دست می‌آید:

$$\Delta=-۴p^{۳}-۲۷q^{۲}=-۴(p^{۳}+q^{۲})-۲۳q^{۲} \qquad (۱)$$

ازطرف دیگر می‌دانیم مبین معادلهٔ درجه سوم را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\Delta=(x_{۱}-x_{۲})^{۲}(x_{۲}-x_{۳})^{۲}(x_{۳}-x_{۱})^{۲} \qquad (۲)$$

که نسبت بـه تفاضل دو به‌دوی ریشه‌هـا متقارن است. از (۱) معلوم است کـه Δ بر ۲۳ بخش‌پذیراست، بنابراین باید یکی ازعامل‌های (۱)، یعنی تفاضل دوتا از ریشه‌ها، بر ۲۳ بخش‌پذیر باشد.

۶۳. ساده‌ترین رابطه‌های متقارن راکه بین ریشه‌ها وضریب‌های معادلهٔ (۱) وجود دارند، می‌نویسیم:

$$x_{۱}+x_{۲}+x_{۳}=-\frac{b}{a};\quad x_{۱}x_{۲}+x_{۲}x_{۳}+x_{۳}x_{۱}=\frac{c}{a};\; x_{۱}x_{۲}x_{۳}=-\frac{d}{a}$$

اگر نخستین رابطه را مکعب کنیم، به دست می‌آید:

$$(x_{۱}+x_{۲}+x_{۳})^{۳}=x_{۱}^{۳}+x_{۲}^{۳}+x_{۳}^{۳}+$$
$$+۳(x_{۱}^{۲}x_{۲}+x_{۲}^{۲}x_{۳}+x_{۳}^{۲}x_{۱}\times x_{۱}^{۲}x_{۳}+x_{۲}^{۲}x_{۱}+x_{۲}^{۲}x_{۳})+۲x_{۱}x_{۲}x_{۳}$$

از معادلهٔ (۲) داریم:

$$x_{۱}^{۳}+x_{۲}^{۳}+x_{۳}^{۳}=-\frac{b^{۳}}{a^{۳}}=(x_{۱}+x_{۲}+x_{۳})^{۳}$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$x_{۱}^{۲}x_{۲}+x_{۱}^{۲}x_{۳}+x_{۲}^{۲}x_{۱}+x_{۱}^{۲}x_{۳}+x_{۱}^{۲}x_{۱}+x_{۲}^{۲}x_{۳}+۲x_{۱}x_{۲}x_{۳}=۰$$

و یا

$$(x_{۱}x_{۲}+x_{۲}x_{۳}+x_{۳}x_{۱})(x_{۱}+x_{۲}+x_{۳})-x_{۱}x_{۲}x_{۳}=۰$$

که اگر ازمقدار عبارت‌های متقارن استفاده کنیم.

$$-\frac{b}{a}.\frac{c}{a}+\frac{d}{a}=۰ \Rightarrow ad=bc$$

۶۴. ساده‌ترین رابطه‌های متقارن بین ریشه‌ها و ضریب‌ها، چنین‌اند:

$$x_{۱}+x_{۲}=-\frac{b}{a},\quad x_{۱}x_{۲}=\frac{c}{a};$$

$$x'_1+x'_2=-\frac{b'}{a'},\quad x'_1x'_2=\frac{c'}{a'};$$

مبین‌های این دومعادله هم، به ترتیب، عبارتند از

$$\Delta=b^2-4ac,\quad \Delta'=b'^2-4a'c'$$

$X_1=x_1+x'_1$ و $X_2=x_2+x'_2$ می گیریم، داریم:

$$X_1+X_2=\frac{ab'+a'b}{aa'},$$

$$X_1X_2=\frac{2(ac'+a'c)+bb'-\sqrt{\Delta\Delta'}}{2aa'}$$

ومعادلهٔ مطلوب به‌این صورت درمی آید:

$$2aa'x^2-2(ab'+a'b)x+2(ac'+a'c)+bb'-\sqrt{\Delta\Delta'}=0$$

به‌همین ترتیب،معادله‌ای‌که ریشه‌های آن $x_1+x'_2$ و $x_2+x'_1$ باشد، به‌این‌صورت است:

$$2aa'x^2-2(ab'+a'b)x+2(ac'+a'c)+bb'+\sqrt{\Delta\Delta'}=0$$

کتابهای کوچک ریاضی

۲

تهران - خیابان انقلاب ، مقابل دانشگاه تهران
ساختمان ظروفچی ، شماره ۲۷۸
تلفن : ۶۴۳۴۵۲

قیمت ۳۵ تومان