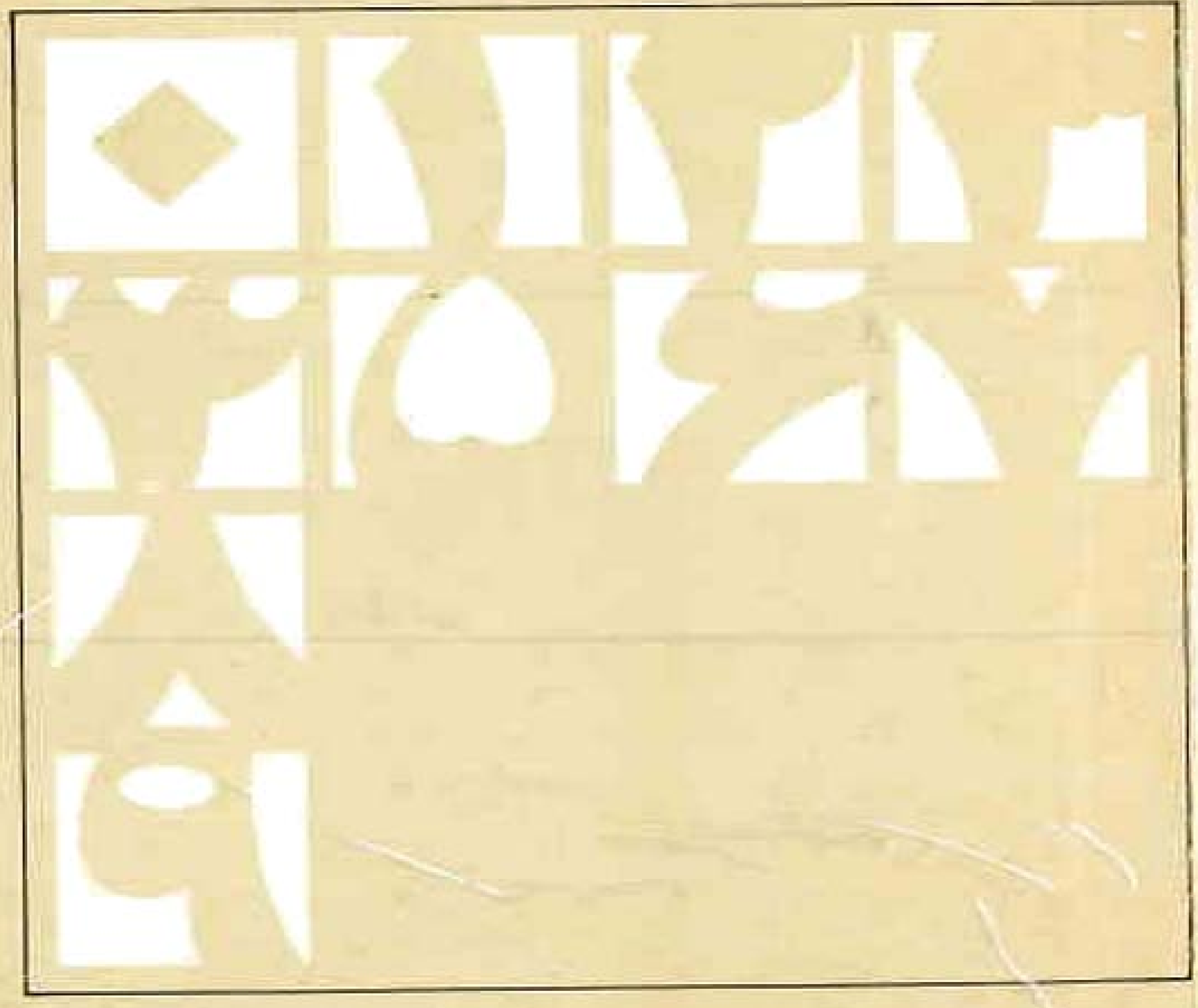
عدد، زبان علم

نوشتهٔ توبیاس دانتزیگ

ترجمهٔ مهندس عباس گرمان



توبیاس دانتزیگ

عدد، زبان علم

ترجمهٔ مهندس عباس گرمان

تهران، ۱۳۶۱

شرکت سهامی کتابهای جیبی

دانتزیگ، توبیاس

عدد، زبان علم

ترجمه: مهندس عباس گرمان

چاپ اول: ۱۳۴۲ـ چاپ دوم: ۱۳۴۹

چاپ سوم: ۱۳۶۱

چاپ و صحافی: چاپخانهٔ سپهر، تهران

تیراژ: ۱۱۰۰۰ نسخه

فهرست

بسمه تعالی

مقدمهٔ چاپ چهارم

ربع قرن پیش ، هنگامی که این کتاب برای اولین بار انتشار یافت ، با آنکه پیدایش و تکامل مفهوم عدد در میان ریاضی‌دانان حرفه‌ای و منطقیون و فلاسفه موضوع بحث پرشوری بود، وچون هنوز این مسئله به‌صورتی متناسب بافهم عامه عرضه نشده بود، حق داشتم که انتشار این کتاب را ابتکار متهورانه‌یی تصور کنم. درحقیقت امر درآن زمان بهیچوجه محقق نبود که در میان خوانندگان معمولی عدهٔ زیادی وجود داشته باشند که علاقهٔ آنها به‌خواندن چنین آثاری مستلزم انتشار این کتاب بوده باشد. استقبال از این کتاب چه در داخل و چه در خارج، و کتاب‌های متعدد دیگری که برپایهٔ مضمون عمومی همین کتاب و به‌دنبال آن انتشار یافت، به این شك و تردید پایان بخشید. امروز وجود خوانندگان زیادی‌که به‌جنبه‌های آموزشی ریاضیات و علوم متکی بر ریاضیات علاقه دارند قابل توجه است.

درخزان زندگی، هنگامی که یك نویسنده درمی‌یابد که نخستین کتاب او هنوز طالب دارد و بار دیگر به چاپ می‌رسد، شور وشوقی در او پدید می‌آید ، و باچنین روحی بود که من موفق به تجدیدنظر در این کتاب شدم. اما هرچه در این کار پیشتر می‌رفتم به تغییرات وافری که از زمان آخرین چاپ کتاب حاضر به‌وجود آمده بود بیشتر آگاه می‌شدم. پیشرفتهای صنعتی،

گسترش شیوه‌های آماری، ظهور علوم الکترونی و فیزیک هسته‌ای و بالاتر از همه اهمیت روزافزون دستگاههای محاسبهٔ خودکار خارج از حد انتظار باعث ازدیاد شمارهٔ مردمی که در حاشیه‌های فعالیت ریاضی زندگی می‌کنند گردیده و در عین حال باعث رشد عمومی سطح تعلیمات ریاضی شده است. بدین ترتیب بود که من برخلاف بیست وچند سال پیش امروز باشنوندگانی دقیق مواجه گردیدم. این نکات باریک در طرح چاپ جدید کتاب تأثیر قطعی داشت. دیگر با خوانندگانست تانسبت به توانایی من در مقابله باضرورتهای گذشت زمان قضاوت کنند.

بجز در مورد چند قسمت‌که بازمان تطبیق داده شده وحک واصلاحی در آن صورت گرفته است، قسمت اول کتاب، یعنی **پیدایش و تکامل مفهوم عدد**، مو به مو از متن اصلی استنساخ شده است. به‌عکس قسمت‌دوم- مسائل‌کهنه و نو- ازهرلحاظ کتابی است جدید. بعلاوه، درحالی که قسمت اول مربوط به‌مفاهیم و تصورات‌کلی می‌شود، قسمت دوم راه بکاربردن این‌مفاهیم وایده‌ها است. با این حال قسمت دوم نه بمثابهٔ تفسیر بر قسمت اول بلکه به‌عنوان تاریخ‌کلی‌گسترش **روش‌علمی وطرزاستدلال‌درمیدان‌عدد** باید تلقی‌گردد. بنابراین ممکن است کسی چنین استنباط کند که چهار فصل قسمت دوم از نظر محتوی فنی‌تر از دوازده فصل قسمت اول است، و درحقیقت نیز همین است. از طرف دیگر، در میان موضوعهای مورد بحث در کتاب فقط مباحث معدودی است که جنبهٔ کلی دارد وخوانندهٔ ماهر می‌تواند باجهش از روی‌آنها، بدون از دست دادن مسیر اصلی، راه خود را ادامه دهد.

مقدمهٔ چاپ اول

این کتاب باا ندیشه‌ها سروکاردارد و به‌سبک‌ها نپرداخته‌است. باجدیت تمام از کلیهٔ نکات فنی غیر مربـوط اجتناب شده است و برای دریافت مطالب معلومات ریاضی بیش‌از آنچه که در دوران تحصیلات متوسطه فراگرفته می‌شود ضروری نیست.

کتاب حاضر تحصیلات خاص ریاضی را بـرای خوانندگان ایجاب نمی‌کند. اما لازم‌است خوانندهٔ آن کمابیش قدرت‌دریافت مسائل وارزیابی آنها را داشته باشد.

بعلاوه، بااینکه ازجنبه‌های فنی موضوع اجتناب شده، این کتاب برای کسانی که ازعلائم‌ریاضی وحشتی درمان‌ناپذیر دارند، یا ذاتاً از نیروی ادراك وتشخیص محرومند، نوشته نشده است.این کتاب دربارهٔ ریاضیات است وبنابراین باعلائم واشکال و در نتیجه باا ندیشه‌هایی که درپس علامت ویا شکل جای دارند سروکاردارد.

نویسنده معتقد است‌که برنامه‌های تحصیلی ما باتهی کردن ریاضیات ازمحتوی تربیتی وفرهنگی و باقی‌گذاردن اسکلتی فنی ازآن باعث واخوردگی بسیار از ذوقهای ظریف شده است. هدف این‌کتاب آنست‌که بار دیگر این محتوی فرهنگی را بازگرداند وپیدایش وتکامل مفهوم‌عدد راهمچون داستانی انسانی عرضه‌دارد.

این‌کتابی نیست‌که درتاریخ این موضوع نوشته شده باشد. بااین حال شیوهٔ تاریخی بشکلی وسیع درآن به‌کار برده شده‌است

تا نقشی که مکاشفه و الهام در ادراکات ریاضی ایفا کرده است مشخص گردد. و بدین ترتیب سرگذشت عـدد در اینجا بمنزلهٔ صحنه‌ای تاریخی از تصورات و اندیشه‌ها گسترده شده است که با انسانهایی که خالق آنها بوده‌اند و با اعصاری که این انسانها را آفریده‌اند ارتباط پیدا می‌کند.

آیـا می‌توان نتایج اساسی علم عدد را بدون وارد کردن افزارهای غامض و پیچیدهٔ این علم عرضه داشت؟ نویسندهٔ این کتاب باقطع و یقین اعلام می‌دارد که این کار شدنی است. قضاوت در این باره باخوانندگانست.

توبیاس دانتزیگ
واشنگتن D.C.
سوم ماه مه ۱۹۳۰

پوانکاره

«هرچند که سرچشمه ناشناخته باشد، جویبار، همچنان به جریان خود ادامه می‌دهد.»

۱

تکامل مفهوم عدد

اوید ، فاستی ، III
سال رومی دارای ده ماه بود :
از آن جهت این عدد در آن دوره قدر و منزلتی زیاد داشت ،
که ما عادت داریم که با انگشتان دست بشماریم ،
یا اینکه زن در مدت دو پنج ماه دوران حاملگی خود را تمام می‌کند ،
یا از آن جهت که اعداد تا وقتی به ده برسند بزرگ می‌شوند ،
و از آن به بعد آهنگ آنها دوباره از یك آغاز می‌شود .

۱ | شمارش با انگشت

۱ انسان حتی در مراحل اولیهٔ رشد خود دارای قابلیتی است، که چون نام بهتری بر آن نمی‌توان نهاد، من آن را **حس عدد** نامگذاری می کنم. این قابلیت، بدون دانش مستقیم، به او امکان می‌دهد تا وقتی از مجموعه‌ای چیزی کاهش یافت نقصان آن را درك کند.

حس عدد را با شمارش که محصول زمانهای بعد است ، و همانطور که خواهیم دید یك پدیدهٔ پیچیدهٔ مغزی است، نباید

اشتباه کرد . تا آنجاکه ما می‌دانیم، شمارش خصلتی‌است‌بشری، درحالی‌که نمونه‌هایی از جانوران یافت می‌شوند که به شکلی ابتدایی دارای حس عددی مشابه با ما هستند . در هرحال ، لااقل عقیدهٔ کسانی که در رفتار حیوانات مطالعه می‌کنند چنین است ، و این نظریه با بسیاری از دلایل روشن پشتیبانی می‌شود .

برای مثال ، تعداد زیادی از پرندگان دارای این حس عددی هستند . از لانه‌ای‌که دارای چهار تخم است میتوان یکی را برداشت بی‌آنکه پریـده متوجه شود ، اما چون دوتخم از آن برداشته شودپرنده‌آشیانه‌را ترك خواهدکرد. به‌طریقی غیر از راه شمارش پرنده می‌تواند دو را از سه تمیز دهد. ولی این قابلیت به هیچ‌وجه محدود به پرندگان نیست . در واقع نمونهٔ جالبی‌که باآن آشنایی داریم زنبور مخصوصی است به نام عنتر (Solitary Wasp) این‌زنبوردرحفره‌های منفردتخم‌می‌گذارد و برای هرتخم تعدادی معین کـرم شکار می‌کند تـا وقتی بچه‌ها سر از تخم به‌درآوردند ازآنهـا تغذیه‌کنند. اما ، تعداد قربانیان بشکلی جالب برای هرنمونه از زنبور معین و مشخص است : بعضی از انواع ۵ عدد ، پاره‌ای ۱۲ ، عده‌ای دیگرحتی تا ۲۴ کرم برای هرحفره آماده می‌کنند . اما جالب توجه تر مورد نوعی از آن است که جنس مذکر آن بسیار کوچکتر از جنس مؤنث‌آن‌است . مادر به‌شکلی مرموز می‌داندکه تخم جنس مذکرتولید می‌کند یا مؤنث ، و برحسب جنس تخم غذای لازم را برای آنها توزیع می‌کند . او در این مورد اندازه یا نوع طعمه را تغییر نمی‌دهد ، بلکه اگر تخم مذکر بود ۵ قربانی و

اگر مؤنث بود ۶ قربانی برایش می‌گذارد.

نظم کار این زنبورها، و این واقعیت که عمل مزبور در زندگی حشره با وظیفهٔ اساسی او ارتباط دارد، این مسأله را نسبت به آنچه که در زیر بیان می‌شود کم اهمیت‌تر جلوه می‌دهد. به نظر می‌رسد که در جریان زیر عمل پرنده توأم با توجه و هوشیاری است.

ملاکی تصمیم گرفت کلاغی را که در برج مراقبت ملك او آشیانه ساخته بود شکار کند. او بارها کوشش کرد تا پرنده را غافلگیر کند ولی تلاشش بیهوده بود. هنگامی که نزدیك لانه می‌شد پرنده آشیانهٔ خود را ترك می‌کرد و بر درختی دور از برج می‌نشست و تا این شخص برج را ترك نمی‌کرد به لانهٔ خود باز نمی‌گشت. یك روز ارباب حیله‌ای به کار برد: دومرد وارد برج شدند، یکی داخل آن باقیماند و دیگری بیرون آمد و پی کار خود رفت. اما پرنده فریب نخورد، او خارج از آشیانه باقیماند تا مردی که داخل برج بود نیز بیرون آمد. درروزهای بعد این تجربه با دو، سه، و بعد با چهار نفر تکرار شد، ولی توفیقی بدست نیامد. بالاخره، پنج مرد فرستاده شدند: مانند قبل همه وارد برج گردیدند، یکی باقیماند و چهار نفر دیگر خارج شدند در اینجا کلاغ شمارش را اشتباه کرد، بدون اینکه بتواند چهار را از پنج تمیز دهد وارد لانه شد.

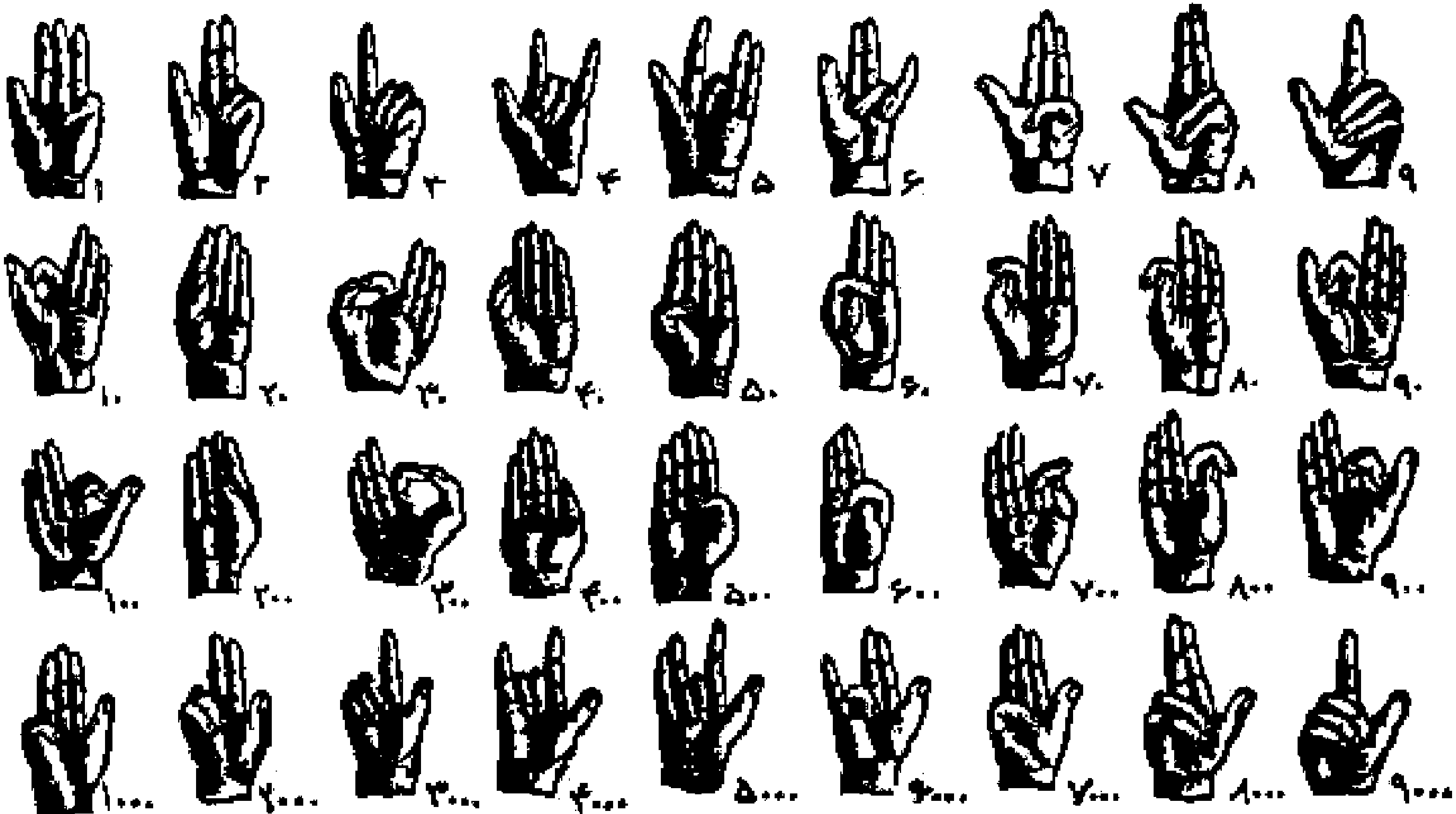
۴ درمقابل چنین دلیلی دو اعتراض ممکن است پیش آید. اول اینکه انواعی که دارای چنین حس عددی هستند بسیار معدودند و حتی میمونها این حس را ندارند. دوم اینکه درتمام حالات

شناخته شده دامنهٔ حس عددی حیوانات چنان محدود است کـه می‌توان از آن صرفنظر کرد .

ایراد اول وارد است، و قابلیت دریافت عدد ، به اشکال مختلفهٔ آن ، تنها بـه بعضی از حشرات و پرنـدگان و انسان محدود است . مشاهدات و تجربیات دربارهٔ سگها ، اسبها و سایر حیوانات اهلی نشانه‌ای از حس عددی را در آنهـا معلوم نکرده است .

اما در بارهٔ اعتراض دوم ، باید گفت که ارزش آن کم است ، زیرا دامنهٔ حس عددی انسان نیز کاملا محدود است . در تمام موارد عملی که انسان متمدن ناگزیر از تشخیص عدد می‌شود ، آگاهانه یا ناآگاهانه قرینه خوانی ، گروه بندی یا شمارش مغزی را به‌یاری حس عدد خویش می‌طلبد. **شمارش** چنان‌جزء مکمل دستگاه مغزی ما شده که آزمایشهای روانی در بارهٔ ادراک شمارشی ما با اشکالات فراوان مواجه می‌شود . با وجود ایـن پیشرفتهایی نیز حاصل شده است؛ تجربیاتی که با دقت دنبـال شوند این نتیجهٔ اجتناب ناپذیر را حاصل می‌کنند که حس‌عدد **بصری** مستقیم یك انسان متوسط متمدن بندرت از چهار تجاوز می‌کند و میدان حس عدد **لمسی** از این هم محدود تر است .

مطالعات انسان شناسی در بارهٔ انسانهای ابتدایی ایـن نتایج را تا حد قابل توجهی تأیید می‌کنند . این مطالعات نشان می‌دهند که **وحشیانی که به‌مرحلهٔ انگشت‌شماری** نرسیده‌اند تقریباً ازادراك عددمحرومند. این وضع درمیان تعدادزیادی از قبیله‌های استرالیا، جزیره‌های دریای‌جنوب، امریکای‌جنوبی، و



علامتهای عددی انگشتی منقول از یک کتاب منتشر شده در سال ۱۵۲۰

افریقا وجود دارد. کر (Curr) که بررسی دامنه‌داری در بارهٔ استرالیای بدوی کرده است، بـر آنست که معدودی از بومیها می‌تواننـد چهار را تمیز دهند، و هیچ انسان استرالیایی بدوی نمی‌تواند ۷ را ادراک کند. بوشمن‌های (Bushmen) افریقای جنوبی برای شمارش کلماتی بیش از **یك** و **دو** و **بسیار** ندارند، و این کلمات چنان ناشمرده ادا می‌شوند که دراینکه مفهوم روشنی برای آنها داشته باشند انسان دچار تردید می‌گردد.

با توجه به اینکه عملا در تمام زبانهای اروپایی آثاری از ایـن محدودیتها وجود دارد، دلیلی در دست نداریم تا قبول کنیم که اسلاف دور ما در این زمینه مجهزتر بوده‌اند. واژه **ترایس** (thrice) انگلیسی کاملا مانند **تر** (ter) لاتینی دارای دو معنی است یکی سه بار و دیگری تعداد زیـاد. بین «**ترس**» (ters) لاتینی و «**ترانس**» (trans) بمعنی ماوراء محتملا ارتباطی وجود دارد؛ همین مطلب را در بارهٔ کلـمهٔ فرانسوی **تره** (trés) به معنی خیلی **وتروا** (trois) به معنی سه نیز می‌توان گفت.

پیدایش عدد در پس نقاب نفوذناپذیر اعصار ناشمردنی ما قبل تاریخ مستور است. آیا این مفهوم از راه تجربه بەدست آمده‌است، یا تجربه فقط آنچەرا که درمغزانسان ابتدایی به‌حالتی پنهانی‌جایگزین بوده‌آشکار ساخته؟ این‌خودموضوع جالبی برای تفکر فلسفی است و به‌همین دلیل‌از میدان بحث ما خارج می‌شود.

اگر بخواهیم از روی وضع فکری قبایل عصر حاضر در بارهٔ رشد اسلاف دوردست خود قضاوت کنیم، از این نتیجه‌که شروع کار بسیار ابتدایی و کم مایه بوده است نمی‌توانیم اجتناب

کنیم . یك حس عددی بدوی ، که از نظر وسعت بیش ازاحساس پرندگان نیست ، هسته‌ای تشکیل می‌داده که مفهوم عدد از آن نتیجه شده است . وشکی نمی‌توان داشت که بااتکا به‌همین‌دریافت مستقیم‌عدد، انسان‌فقط به‌همان‌اندازهٔ پرندگان‌می‌توانست دراین زمینه پیشرفت حاصل کند. ازمیان وقایع قابل توجه، بشر نیرنگی را که مقدور بود تأثیری عظیم در زندگی آینده‌؛ او داشته باشد کمك‌کاردریافت عددی‌خودکرد . این نیرنگ همان‌شمارش‌است، و این **همان شمارش** است‌که ما پیشرفت خارق‌العادهٔ خود را دربیان‌گیتی برحسب عدد مدیون‌آن هستیم .

۴ زبانهای اولیه‌ای موجودند که برای هر رنگ رنگین کمان لغاتی دارند ، اما در آن زبانها برای خود مفهوم رنگ کلمه‌ای نمی‌توان یافت ؛ زبانهای دیگر نیز دیده می‌شوند که‌کلماتی برای تمام اعداد دارند و برای‌خود مفهوم عدد در آن زبانها کلمه‌ای یافت نمی‌شود . در بارهٔ مفاهیم دیگر نیز قضیه به‌همین منوال است. زبان انگلیسی به‌طور فطری از نظر کلمات مربوط به مجموعه‌های مختلف‌کاملا غنی است : flock (گله)، herd (رمه) ، set (مجموعه)، lot (زیاد) ، bunch (دسته) برای‌حالاتی مخصوص به‌کار می‌روند؛ باوجود این خودکلمات collection (مجموعه) aggregate (گروه پیوسته) در زبان انگلیسی ریشه‌ای خارجی دارند .

مفهـوم مجسم و ملموس (concrete) بـرمفهوم مجرد وانتزاعی (abstract) مقدم‌است. برتراند راسل (Bertrand Russell) می‌گوید ، « قرنها لازم بود تا کشف شود یك‌جفت

قرقاول و یك زوج روز هردو نمونه‌هایی از عدد دو هستند .»
امروز ما راههای چندی برای بیان تصور عدد دوداریم : pair (جفت) ، Couple (زوج) ، set (دسته) ، team (گروه دو طرف بازی) ، twin (دوقلو) ، brace (جفت نردبان)، وغیره
یك مثال برجسته ازاینکه ادراك اولیهٔ عدد جنبهٔ تجسمی دارد ، زبان تیم شیان (Thimshian) یکی از قبایل کلمبیا است. در آنجا ما برای عدد هفت دسته کلمه می‌یابیم . یکی برای اشیاء پهن و حیوانات ؛ یکی برای اشیاء گرد و زمان ؛ یکی برای شمارش انسان ؛ یکی برای اشیاء دراز و درختان ؛ یکی برای کرجیها و قایقها ؛ یکی برای اندازه‌ها ؛ یکی برای شمارش هنگامی‌که شئی معینی مورد نظر نباشد . این‌نوع اخیر محتملا مربوط به ترقیات همین اواخر است ؛ و بقیه باید از آثار روزگاران قدیمی باشندکه در آن اعضای قبیله هنوز شمارش را نیاموخته بودند .

شمارش توانسته است عدد مجسم و تصور نا متجانس چند گانگی را که از مشخصات انسان اولیه بوده است با **مفهوم عدد مجرد متجانس** پیوند دهد و بدین ترتیب ریاضیات را ممکن سازد .

۴ گر چه عجیب به‌نظر می‌رسد اما ممکن است بدون استفاده از شمارش به تصور منطقی و مشخص عدد دسترس پیدا کرد .

وارد تالاری می‌شویم . در مقابل ما دو مجموعه وجود دارد: جایگاه شنوندگان، و خود شنوندگان. **بدون شمارش**

می‌توانیم بگوییم که آیا این دو مجموعه مساوی‌اند، و اگر مساوی نباشند کدام یك بزرگتر است . زیرا اگر همهٔ جایگاهها اشغال شده باشند و کسی ایستاده نباشد بدون شمارش می‌دانیم که دو مجموعه برابرند . اگر تمام جایگاهها اشغال شده و بعضی از حضار نیز ایستاده باشند **بدون شمارش** می‌دانیم کـه تعداد حاضرین بیش از جایگاهها است .

این معرفت را به‌وسیلهٔ جریانی که بر تمام ریاضیات حاکم و به‌نام **تطابق یك بیك** موسوم است بدست می‌آوریم . وآن چنان است که به هر شیء از یك مجموعه، شیئی ازمجموعهٔ دیگر را تخصیص دهیم و این کار را تا اتمام یکی یا هر دو مجموعه دنبال کنیم .

فن شمارش برای انسانهای ابتدایی محدود به همین‌جور کردن و تطبیق کردن بوده است. آنها برای نگاهداری حساب گله و جنگاوران خود از شکافهایی که برروی درختان بوجود می‌آوردند و یا از تودهٔ شنی که جمع آوری می‌کردند استفـاده می‌کردند. ازکلمات تالی tally وکلکیولیت calculate که هر دو به معنی حساب نگاه داشتن (مثلا با چوب خط) و حساب کردن است می‌توان به این نتیجه رسید که پیشینیان ما در کار برد شیوه‌های یـاد شده مهارت داشته‌اند ، زیرا کلمهٔ اول‌ازلغت لاتینی talea به‌معنی بریدن و دومی از کلمهٔ calculus بمعنی شن آمده است .

ظاهراً چنین به‌نظر می‌رسد که جریان تطابق فقط‌وسیله‌ای برای مقایسهٔ دو مجموعه در اختیار ما می‌گذارد و نمی‌توانـد عدد را به مفهوم خاص این کلمه به‌وجود آورد . بـا وجود این

انتقال از عدد نسبی به‌عدد مطلق کارمشکلی نیست. فقط لازم است‌که مجموعه‌های نمونه‌ای ایجادشودکه هرکدام بتوانند مجموعه معینی رامشخص‌کنند. دراین‌صورت ارزیابی هرمجموعه به این منجر می‌شودکه در میان نمونه‌ها و قالبهای آماده شده یکی راکه بتواند عضو به‌عضو با مجموعهٔ مورد نظرتطبیق نماید انتخاب کنیم.

انسان ابتدایی چنین قالب‌هایی را در اطراف خود پیدا کرد: بالهای یك پرنده می‌توانند نشانه‌ای برای عدد دوباشند، برگهای شبدر برای سه، دست وپای حیوان برای‌چهار، انگشتان دست برای عدد پنج. درتعدادی اززبانهای بشرابتدایی‌می‌توان گواه روشنی برای ریشهٔ کلمات مربوط به اعداد بدست آورد. مسلماً هنگامی‌که برای اولین بار عدد واژه بوجودآمد وبکار بسته شد، خود آن مانند شیئی که این‌واژه نمایندهٔ آن بود به صورت قالبی درآمد. لزوم تمایزمیان‌نام شیئی که برای این‌کار به‌عاریه‌گرفته‌شده بود وخودعلامت عددمربوطه‌طبیعتاً باعث‌تغییری درطرزادای‌آن‌شد، تااینکه درطول‌زمان ارتباط مسلم بین‌این‌دو حافظهٔ بشر از بین رفت. بتدریج که بشرآموخت که هر چه بیشتر برزبان و تکلم خود تکیه‌کند، اصوات ادا شده‌تصاویری را که برای آنها خلق شده بودند به کناری گذاشتند وقالبهای مجسم اصلی صورتهای مجرد عدد واژه‌ها را به‌خود گرفتند. حافظه و عادت به این صورتهای مجرد رنگ تجسم بخشیدند وبدین‌ترتیب این کلمات محض معیاری برای‌چندگانگی‌شدند.

■ مفهومی راکه هم‌اکنون‌شرح دادم‌عدداصلی(cardinal)

نامیده شده است . عدد اصلی برروی اصل تطابق بنا نهاده شده است: این عدد دلالتی برشمارش ندارد. برای بەوجودآوردن عمل شمارش تنها داشتن قالبهای گونـاگون ، هراندازه هم که جامع وکامل باشند ، کافی نیست . بـاید یك دستگاهی از عدد بەوجود آوریم : دستگاه قالبهای ما باید طبق یك توالی منظم تنظیم گردند ، آنچنان توالی که درجهت‌رشد مقدار ترقی کند، که همان توالی طبیعی است : یك ، دو ، سه ، ...... وقتی این دستگاه بەوجودآمد مفهوم‌شمارش یك‌مجموعه‌آن‌است‌که به هریك ازاعضای این مجموعه جمله‌ای از این توالی طبیعی را ، بانظمی پی درپی ، منتسب‌کنیم تا این مجموعه تمام شود. جمله‌ای از توالی طبیعی که به آخرین عضو مجموعه اختصاص می‌یابد عدد یا شمارهٔ ترتیبی این مجموعه نامیده می‌شود .

دستگاه ترتیبی می‌تواند شکل واقعی یك تسبیح را بخود بگیرد ، اما البته این شکل نشان دهندهٔ واقعیت نیست. دستگاه ترتیبی وقتی بوجود می‌آید که معدودی از نخستین عدد واژه‌ها، برحسب نظم پی در پی خود ، در حافظه باقی مانده باشند و طرحی صوتی بەوجودآمده باشد که از هرعدد ، هرچه‌آن‌عدد بزرگ باشد ، بتوان بەجانشین‌آن رسید .

با چنان‌سهولتی از عدد اصلی به عدد ترتیبی منتقل شدیم که این هردو بەشکلی واحد در نظرمان جلوه می‌کنند . برای تعیین تعداد یك مجموعه ، یعنی شمارهٔ اصلی آن، بەخودزحمت پیدا کردن مجموعهٔ قالبی را نمی‌دهیم تا این مجموعه را با آن مقایسه کنیم ـ این مجموعه را می‌شماریم . و پیشرفت ما در ریاضیات مدیون این واقعیت است که دو جنبهٔ اصلی و ترتیبی

عدد را یکی فرض می‌کنیم . زیرا اگر چه در عمل حقیقتاً عدد اصلی مورد توجه ماست ، ولی این جنبهٔ عدد نمی‌تواند خلاق ریاضیات باشد . اعمال ریاضی برپایهٔ این فرض ضمنی قرار گرفته‌اند که **ما همیشه می‌توانیم از هرعدد ، به‌جانشین آن برسیم** ، و این مطلب جوهر مفهوم عدد ترتیبی است.

عدد اصلی با وجود آنکه در نوع خود بی‌نظیر است قادر نیست هنر محاسبه وشمارش را به‌وجود آورد. بدون آنکه بتوانیم اشیاء را با نظم متوالی مرتب کنیم پیشرفتی در این زمینه به‌دست نمی‌آوریم . تطابق و توالی دو اصلی هستند که نه‌تنها در تمام ریاضیات بلکه در تمام قلمرو فکر انسانی نفوذ کرده‌اند و تار و پود بافتهٔ دستگاه عددی ما را تشکیل می‌دهند.

۶ دراینجا طبیعتاً این سؤال پیش می‌آیدکه آیا این وجه تمایز دقیق میان عدد اصلی و عدد ترتیبی در تاریخ قدیمی و اولیهٔ مفهوم عدد سهمی داشته است یا نه . برای قبول اینکه پیدایش عدد اصلی ،که برپایهٔ جور شدن و تطبیق کردن قرار دارد ، مقدم برعدد وصفی بوده است،که دارای دوجنبهٔ تطبیق و تنظیم است، انسان کاملا آمادگی دارد. باوجود این بررسی‌های دقیق دربارهٔ تمدن وزبان شناسی ابتدائی نتوانسته‌اند چنین تطبیق را تأیید کنند . در هر کجا که اثری از صنعت استعمال عدد دیده شده ، هردو جنبهٔ آن وجود داشته است .

اما بایدگفت ، هر کجاکه فن شمارشی که شایستهٔ اطلاق این نام شد ، وجود داشته ، شمارش انگشتی یا مقدم برآن ویا بهمراه آن پیدا شده است . و بشر با این شمارش انگشتی خود

صاحب دستگاهی است که بوسیلهٔ آن ناد انسته از عدد اصلی به عدد ترتیبی می‌رسد . اگر بخواهد مشخص کند که مجموعهٔ معینی شامل چهار شیء است چهار انگشت خود را **با هم** بلند خواهدکرد یا خواهد بست؛ اگر بخواهد این مجموعه‌را بشمارد **متوالیاً** این چهار انگشت را یکی یکی بلند می‌کند و یا می‌بندد . در حالت اول او انگشتان خود را به مثابهٔ قالبی برای عدد اصلی و در حالت دوم به منزلهٔ دستگاهی برای‌عدد ترتیبی بکار برده است . در تمام زبانهـای ابتدایی آثار مشخصی از مبدأ و منشأ چنین شمارشی یافت می‌شود . در اغلب این زبانها عدد«پنج»بوسیلهٔ«دست» عدد«ده» بوسیلهٔ «دودست»یا گاهی اوقات بوسیله «انسان» بیان شده‌است. بعلاوه دراغلب‌زبانهای‌ابتدایی‌عدد واژه‌های تاچهار مشابه بانامهائی‌است که به‌چهارانگشت‌داده‌اند.

در زبانهای متمدن‌تر ، که در طول زمان دستخوش فرسایش قرارگرفته‌اند، مفهوم اصلی این کلمات محو شده‌است. اما در اینجا نیز «انگشت شماری» از میان نرفته‌است . در این باره می‌توان کلمهٔ سنسکریت **پنچا** به معنی پنج را باکلمهٔ **پنجهٔ** فارسی به‌معنی دست ، و کلمهٔ **پیات** (piat) روسی بمعنی پنج را با **پیاست** (piast) به معنی دست دراز شده مقایسه کرد.

کامیابی بشر در محاسبه مدیون ده انگشت بندبند اوست. این انگشتان به‌او شمارش را آموخته‌اند و بدین ترتیب میدان عدد را وسیع کرده‌اند. بدون این دستگاه فن‌شمارش نمی‌توانست در انسان از حدود حس عدد ابتدائی و بدوی زیاد تجاوز کند . و بنا براین می‌توان حدس زد که بدون انگشتان گسترش عدد و در نتیجهٔ پیشرفت علوم واقعی ، که رشد مادی و معنوی بشر

مدیون آنست ، محدود و ناچیز می‌ماند .

۴ با وجود آنکه اطفال ما هنوز شمارش را با انگشتان خود می‌آموزند ، و خود ما نیز گاهی بعنوان اشاره‌ای حاکی از تأکید ازانگشتان خود استفاده می‌کنیم ، شمارش انگشتی در میان انسان متمدن امروزی از بین رفته است . ظهور کتابت و ساده شدن عدد نویسی وآموزش عمومی، هنر مزبور را بیحاصل ومنسوخ کرده است. با چنین وصفی طبیعی استکه ماازنقشی‌که شمارش انگشتی درتاریخ محاسبات ایفاکرده است غافل میمانیم وارزش چندانی برای‌آن قائل نمیشویم. تا چند صد سال پیش انگشت شماری در اروپای غربی آنچنان جزو اعتیادات جاری بودکه هیچ‌کتابی دربارهٔ حساب، جز با تعلیماتی در زمینهٔ این شیوه ،کتاب‌کاملی بشمار نمیآمد (بصفحه ۵ مراجعه‌کنید).

درآنوقت هنرکار برد انگشتان درشمارش و انجام اعمال سادهٔ حسابی یکی از شرایط لازم برای یك انسان باسواد بود . بزرگترین استادی دراین بودکه کسی بتواند قوانینی برای اعمال جمع‌وضرب بوسیلهٔ انگشتان دست تهیه‌کند. بدین‌ترتیب، تا بامروز، دهقان‌فرانسهٔ مرکزی (اورنی Auvergne) طریق جالبی را برای ضرب اعداد بالاتر از۵ بکار می‌بندد. اگر او بخواهد ۹رادر۸ ضرب‌کند، چهارانگشت دست چپ(۴عبارتست از تفاضل ۹ و ۵) و سه انگشت دست راست خود را تا میکند (۳=۵-۸). دراینصورت تعداد انگشتان تاشده عشرات حاصل ضرب را برای اومعین میکند (۷=۳+۴). درحالیکه حاصل ضرب انگشتان‌تا نشده عددآحاد رانشان میدهد (۲=۲×۱).

حیله هائی ازاین قبیل در مناطق وسیعی مانند بسارابی (Bessarabia)، صربستان، وسوریه مشاهده شده است . تشابه کم نظیراین‌شیوه‌ها واین حقیقت‌که‌کشورهای فوق درزمان‌معینی جزئی از امپراطوری روم بزرگ بوده‌انـد ، انسان را وادار بقبول مبدأ رومی این اختراعات میکند. باوجود این، باتوجه باینکه شرایط یکسان میتوانند نتایجی یکسان ببارآورند ، این احتمال نیز موجود است‌که شیوه‌های مزبور مستقل از یکدیگر بوجودآمده باشند.

حتی امروز قسمت اعظم بشریت بر روی انگشتان خـود شمارش میکند: باید بخاطرداشته باشیم‌که برای بشرابتداییاین تنها وسیلهٔ انجام محاسبات سادهٔ روزمره است.

۸ عمر زبان عددی مـا چه اندازه است ؟ دقیقاً نمیتوان مشخص کرد که‌درچه‌دورانی کلمات‌مربوط‌باعدادبوجودآمده‌اند ، با وجود این دلیل غیرقابل انکاری وجود داردکه این‌دوران‌را به هزارها سال قبل ازتاریخ‌کتابت مربوط میکند . قبلا واقعیتی را ذکرکردیم ، وآن اینکه معانی اصلی عدد واژه‌ها ، احتمالا جز پنج ، درزبانهای اروپائی‌ازبین رفته است. وباتوجه‌باینکه عددواژه‌ها بنابرقاعده دارای ثباتی خارق‌العاده هستند، این‌امر قابل توجه است. درعین‌آنکه زمان در سایر زمینه‌ها تغییراتی اساسی بوجودآورده است، می‌بینیم که لغتنامهٔ اعداد عملا دست نخورده مانده‌است. همین ثبات عدد واژه‌ها است‌که برای بدست آوردن قرابت بین زبانهای مختلفی‌که ظاهراً بایکدیگر بیگانه هستند مورد استفادهٔ زبان شناسان قرارگرفته است. از خواننده

دعوت میشود تاجدول انتهای فصل را که در آن عدد واژه‌های زبانهای هند واروپائی مقایسه شده‌اند بررسی کند.

پس چگونه علی رغم این پایداری اثری ازمعنی اصلی در زبان یافت نمی‌شود؟ میتوان احتمال داد که عدد واژه‌ها از زمانیکه بوجود آمده‌اند تاکنون دست نخورده مانده واسامی اشیاء معینی که منشأ این کلمات هستند تحت تأثیر تغییر شکل کامل قرار گرفته‌اند.

۹ اما دربارهٔ ساختمان زبان عدد تحقیقات زبان شناسی تقریباً نوعی یکنواختی جهانی را نشان میدهد. در همه جا ده انگشت انسان اثر جاویدان خود را بجای گذارده است.

تأثیر ده انگشت در «انتخاب» مبنای دستگاه شمارش کاملا مشهود است. در تمام زبانهای هند و اروپائی و همچنین زبانهای سامی ومغولی و اغلب زبانهای ابتدایی مبنای شمارش ده است، یعنی تا ده کلمات مستقلی برای اعداد وجود دارد، و بعد ازآن برای بوجود آوردن کلمات تا ۱۰۰ قواعدی برای ترکیب اعداد بکار میرود. تمام این زبانها برای ۱۰۰ و ۱۰۰۰، وبعضی زبانها حتی برای مضارب اعشاری بالاتر آنها، دارای کلمات مستقلی هستند. استثناهای مشهودی مانند eleven (یازده) و twelve (دوازده) در زبان انگلیسی ویا elf و Zwölf در زبان آلمانی نیز دیده میشود. اما اصل این دو کلمهٔ آلمانی ein — lif و zwo — lif است و lif درزبان آلمانی قدیم همان ده بوده است.

درست است که علاوه بردستگاه دهدهی دومبنای دیگر نیز

متداول است، اما شکل آنها تا حد قابل توجهی مؤید این امر است که دستگاه شمار ما از توجه بهشخص انسان پیدا شده‌است. این دو دستگاه عبارتند از دستگاه پنج پنجی با مبنای ۵ ودستگاه بیست بیستی با مبنای ۲۰.

دردستگاه پنج پنجی برای اعداد تا پنج کلمات مستقلی وجود دارد، وترکیبات از آن ببعد شروع میشود. (بجدولی که درانتهای فصل داده شده است مراجعه شود.) مسلماً منشأ این دستگاه درمیان مردمی بوده است که عادت داشتند با یك دست شمارش کنند. اما چرا انسان باید خود را محدود بیك دست کند؟ یك توضیح موجه آنست که انسان ابتدایی بندرت بدون اسلحه خارج میشد. اگر میخواست بشمارد، اسلحهٔ خودرا معمولا زیر بازوی چپ میزد وبا انگشتان دست چپ شمارش میکرد و دست راست خود را بعنوان نگاهداری حساب عدهٔ دفعاتی که شمارش با دست چپ تمام شده بود بکار میبرد. ممکن است از این راه بتوان توضیح داد که چرا تقریباً تمام کسانیکه با دست راست کار می کنند ازدست چپ خود برای شمارش استفاده میکنند.

اغلب زبانها هنوز آثاری از دستگاه پنج پنجی را بهمراه دارند، وبحق میتوان گفت که بعضی از دستگاههای دهدهی از مرحلهٔ پنج پنجی عبور کرده‌اند. بعضی اززبان شناسان ادعا می کنند که حتی زبانهای عددی هند و اروپائـی ریشهٔ پنج پنجی داشته‌اند. آنها به کلمهٔ یونانی pempazein که بمعنی شمارش بوسیلهٔ پنجها است و همچنین به خصوصیت غیر قابل تردید پنج پنجی اعداد رومی اشاره میکنند. ولی دلیل دیگری ازاین نوع دردست نیست واین بسیارمحتمل است که گروه زبانهای ما از

مرحلهٔ اولیه بیست بیستی عبور کرده باشند.

احتمالاً منشأ دستگاه دهدهی درمیان قبایل بدوی که بوسیلهٔ انگشتان دست وپای خود هردوشمارش میکردند بوده است. یك نمونهٔ جالب توجه از آن دستگاهی است که توسط مایاهای امریکای مرکزی بکار میرفته است. دستگاه آزتکهای قدیم نیز دارای همین خصوصیت عمومی بوده است. روزهای آزتك‌ها به ۲۰ ساعت تقسیم میشد ویك لشکر آنها شامل ۸۰۰۰ سرباز بود ($۸۰۰۰ = ۲۰ \times ۲۰ \times ۲۰$).

درعین آنکه دستگاههای بیست بیستی محض نادر است، زبانهای متعددی وجود دارد که در آنها دستگاههای دهدهی و بیست بیستی در هم آمیخته شده‌اند. با کلمات انگلیسی score (بیست) two – score (دو بیست) و three–score (سه بیست) ولغات فرانسهٔ vingt (۲۰) و quatre –vingt (چهار بیست، ۲۰×۴ یا هشتاد) آشنائی داریم. درفرانسهٔ قدیم این شکل اغلب بکارمیرفته است: یك مریضخانه درپاریس، که دراصل برای ۳۰۰ سربازقدیمی کورساخته‌شده بود نام‌عجیب‌وغریب Quinze Vingt (پانزده‌بار بیست) را داشت، و نام Onze–Vingt (یازده بیست) بیك دسته از گروهبانهای پلیس که شامل ۲۲۰ نفر بود داده شده بود.

۱۰ درمیان اغلب قبایل ابتدائی استرالیا وافریقا دستگاه شمارشی یافت میشود که ۵و۱۰ و ۲۰ هیچ کدام را برای مبنای خود انتخاب نکرده‌اند. این دستگاه **دودویی** یعنی برمبنای ۲ است. این وحشیان هنوز بمرحلهٔ شمارش باانگشتان نرسیده‌اند

به ۳۵۰۰ سال قبل از میلاد مسیح میباشد . هنگامی که آنهارا با یکدیگر مقایسه می‌کنیم شباهت کامل آنها در اصول ما را به تعجب و امیدارد . البته ممکن است علی رغم بعد مسافتی که آنها را از یکدیگرجدا میکرده این دو ملت بایکدیگر ارتباط داشته‌اند . با وجود این بیشتر محتمل است که‌آنها شمارش‌خود را در جهاتی که حداقل اشکال را برایشان داشته گسترش داده باشند ، بعبارت دیگر عدد ـ شماری نتیجه رشد طبیعی چوب خط زدن بوده است . (به شکل صفحهٔ ۳۲ مراجعه شود) .

واقع این است که هم در اعداد میخی بابل قدیم و هم‌در اعداد هیرگلیف های پاپیروس مصری ، ونیز دراشکال عجیب و غریب نوشتجات چینی در همه جا بیك اصل مشخص برای نمایاندن **عدد اصلی** برمیخوریم . هریك از ارقام تا ۹ تنها مجموعه‌ایست از دفعات. همین اصل نیز دربارهٔ اعداد از۹ ببالا برای واحدهای طبقات بالاتر مانند ده‌ها ، صدها و غیره ، که بوسیلهٔ علائم مخصوص نشان داده میشوند ، بکار برده شده‌است.

۳ چوب خط انگلیسی ، که ریشهٔ آن تاریك ولی مربوط بزمانهای بسیار قدیم است ، نیز دارای همین خاصیت عدداصلی است ، یك تصویر نظری از چوب خط در شکل صفحهٔ بعدنشان داده شده است . هر یك از شکافهای کوچك یك‌پوند استرلینگ را نشان میدهند و شکافهای بزرگ هر یك نمایندهٔ ۱۰ و ۱۰۰ ..... پوند میباشند .

جالب‌توجه‌آنست‌که چوب خطانگلیسی قرنها پس ازآنکه

برای‌دستگاه دودویی این جدول‌ها به ۱۰ = ۱ + ۱ و ۱ = ۱ × ۱ تقلیل می‌یابند در صورتی که برای دستگاه دهدهی هر جدول شامل ۱۰۰ خانه است . با وجود این جاگیری عدد در عدد نویسی چنان است که این مزیت را از میان می‌برد : مثلا عدد دهدهی $۲^{۱۲}$ = ۴۰۹۶ در دستگاه دو دویی به وسیلهٔ
۱،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰ نمایش داده می‌شود .

شکوه عرفانی این‌دستگاه دودویی لایب نیتز را وادار به بیان این عبارت لاتینی کرده است:

omnibus er nihil ducendis sufficit unum

(یك کافی است که همه چیز را از هیچ بیرون آورد .)
لاپلاس می‌گوید : « لایب نیتز در حساب دودویی خود تصویر خلقت را دیده است ..... او واحد را نمایندهٔ خدا و صفر را نمایندهٔ تهی دانسته است ؛ درست همانطور که خداوند متعال همه چیز را از خلأ آفریده است ، یك و صفر نیز مبین تمام اعداد دردستگاه اوهستند. این تصور چنان مطبوع‌طبع لایب‌نیتز افتاد که آنرا به گریمالدی (Grimaldi) رئیس مسیحی محکمهٔ چینی ریاضیات فرستاد ، به‌امید آنکه این نشانهٔ خلقت بتواند امپراطور چین را، که علاقهٔ وافری به علوم داشت‌بدین مسیح درآورد. ذکر این مطلب فقط به خاطر این بود که نشان دهم چگونه تعصبات کودکی می‌تواند حتی بینش بزرگترین مردان را ازکار بیندازد !»

۱۱ تفکر در این امر جالب توجه است که اگر انسان به

جای انگشتان قابل انعطاف فقط دو برجستگی و بدون مفصل ، در دست داشت سیر تاریخ فرهنگ چگونه بود. دستگاه‌شمارشی که در چنین وضعی می‌توانست گسترش یابد احتمالا دستگاه دودویی بود .

اینکه نوع بشر دستگاه دهدهی را قبول کرده ، واقعه‌ای است که ریشهٔ فیزیولوژیك دارد. کسانی که دست باریتعالی‌را در هرچیز می‌بینند، باید قبول کنند که پروردگار ریاضی دانی ضعیف است، زیراکه مبنای دهدهی جزافتخار فیزیولژیکی‌خود چیزی برای خودستایی ندارد . تقریباً هرمبنا، شاید جز نه ، بهمین اندازه و بلکه بهتر کارآمدی دارد .

در واقع اگر انتخاب مبنای شمار به‌گروهی ازمتخصصین واگذار می‌شد، محتملا میان یك مرد عمل ویك ریاضیدان نزاعی درگیر می‌شد؛ اولی برروی مبنایی که تعداد مقسوم‌علیه‌های آن زیاد باشد ، مثلا **دوازده** ، پافشاری می‌کرد، و دومی طرفدار انتخاب عددی اول مانند **هفت** یا **یازده** برای مبنای شمار بود. آنچه واقعاً پیش آمده این است‌که در قرن هجدهم بوفن (Buffon) ، طبیعی‌دان بزرگ ، پیشنهاد کردکه یك دستگاه دوازده دوازدهی (مبنای ۱۲) در سراسر جهان بکاربرده‌شود . دلیل وی آن بود که ۱۲ دارای ۴ مقسوم‌علیه‌است ، درصورتی که ۱۰ فقط دو مقسوم علیه دارد ، و عقیده داشت که در طول اعصار این عدم‌کفایت دستگاه دهدهی باچنان شدتی‌احساس شده است‌که ، علی‌رغم اینکه ده مبنایی جهانی است ، اغلب مقیاسها و اندازه‌ها دارای ۱۲ واحد فرعی‌هستند .

ازطرف دیگرریاضی‌دان بزرگ،لاگرانژ(Lagrange)،

ادعا کرده است که مبنای عدد اول دارای مزایای زیادتریست. دلیل وی آن بود که با مبنای عدد اول تمام کسرهای منظم به صورت غیرممکن‌التحویل درمی‌آید و بنابراین عدد مربوط را تنها به یك صورت نشان می‌دهد. مثلا درشمار کنونی کسراعشار ۰/۳۶ را می‌توان به صورت کسرهای ۳۶/۱۰۰، ۱۸/۵۰، ۹/۲۵، ۰۰۰۰۰۰۰ درآورد، درصورتی که اگرمبنای شمارعددی اول مانند یازده‌می‌بود این ابهام به‌مقدارقابل توجه‌تقلیل‌می‌یافت.

گروه روشنفکرانی که انتخاب مبنای شمار به‌آنان‌واگذار می‌شود ، خواه عدد اول را قبول کنند و خواه عدد مرکب را ، آنچه یقین است این است که هرگز عدد ده مورد توجه ایشان قرار نخواهدگرفت، زیراکه این‌عدد نه‌اول است و نه به اندازهٔ کافی مقسوم علیه دارد .

در عصر خود ما ، که دستگاههای محاسباتی جایگزین محاسبهٔ مغزی شده است، هیچکس پیشنهادهای‌مختلف را دراین باره جدی تلقی نمی‌کند . مزایای حاصل از این تغییرات چنان جزئی و سنت شمارش با پایهٔ دهدهی چنان محکم است که این کشمکش به‌نظر خنده‌آور می‌رسد .

از لحاظ تاریخ تمدن ، تغییر مبنای شمار، برفرض‌آنکه اگر عملی باشد ، بسیار نامطلوب است . تا وقتی که بشر با ده شمارش می‌کند ، ده انگشت او یادآور منشأ انسانی این مرحلهٔ مهم زندگی فکری او خواهد بود. دستگاه دهدهی به مثابهٔ اثر تاریخی زنده‌ای است در تأیید مطلبی که یکی از فیلسوفان‌کهن با این عبارت بیان‌کرده است :

انسان مقیاس تمام اشیاء است

عدد و واژه‌های بعضی از زبانهای هند و اروپایی که مبین شباهت بی‌نظیر آنها است.

	سنسکریت	یونانی قدیم	لاتینی	آلمانی	انگلیسی	فرانسه	روسی
۱	اکا	ان	اونوس	آینز	وان	ان	ادین
	eka	en	unus	eins	one	un	odyn
۲	دوا	دواو	دواو	زوای	تو	دو	دوا
	dva	duo	duo	Zwei	two	deux	dva
۳	تری	تری	ترس	درای	تری	تروا	تری
	tri	tri	tres	drei	three	trois	tri
۴	چاتور	تترا	کواتوادر	فیر	فور	کاتر	چتیری
	Catur	tetra	quatuor	vier	four	quatre	chetyre
۵	پانچا	پنت	کوئینک	فونف	فایو	سنک	پیات
	panca	pente	quinque	fünf	five	cinq	piat
۶	شش	هکس	سکس	زکس	سیکس	سیس	شست
	sas	hex	sex	Sechs	six	six	shest
۷	ساپتا	هپتا	سپتم	زیبن	سون	ست	سم
	sapta	hepta	septem	sieben	seven	sept	sem
۸	آشتا	اوکتو	اوکتو	آخت	ایت	ویت	وسم
	asta	octo	octo	acht	eight	huit	vosem
۹	ناوا	انئا	نووم	نوین	ناین	نوف	دویات
	nava	ennea	novem	neun	nine	neuf	deviat
۱۰	داکا	دکا	دسم	زهن	تن	دی	دسیات
	daca	deca	decem	zehn	ten	dix	desiat
۱۰۰	کاتا	اکاتون	سنتوم	هوندرت	هندرد	سان	ستو
	cata	ocaton	centum	hundert	hundred	cent	sto
۱۰۰۰	سهاستر	کسیلیا	میل	توزند	توزند	میل	تیسیاکا
	sehastre	xilia	mille	tausend	thousand	mille	tysiaca

یك دستگاه پنج پنجی نمونه : زبان آپی (Api) مربوط به جزایر هبرید جدید

	لغت	معنی	
۱	تای	tai	
۲	لوآ	lua	
۳	تولو	tolu	
۴	واری	vari	
۵	لونا	luna	دست
۶	اتای	otai	یکی دیگر
۷	اولوآ	olua	دوتا دیگر
۸	اوتولو	otolu	سه تا دیگر
۹	اوایر	ovair	چهار تا دیگر
۱۰	لوآ لونا	lua luna	دو دست

یك دستگاه بیست بیستی نمونه : زبان مایا از امریکای مرکزی

۱	هون	hun	۱
۲۰	کال	kal	۲۰
$۲۰^{۲}$	بك	bak	۴۰۰
$۲۰^{۳}$	پیك	Pic	۸۰۰۰
$۲۰^{۴}$	کالاب	calab	۱۶۰،۰۰۰
$۲۰^{۵}$	کینچل	kinchel	۳،۲۰۰،۰۰۰
$۲۰^{۶}$	آلس	alce	۶۴،۰۰۰،۰۰۰

یك دستگاه دودویی نمونه : قبیلهٔ غربی بفارتورس (گینهٔ جدید)

۱ اوراپون uraPun

۲ اوکوسا okosa

۳ اوکوسا-اوراپون okosa -urapun

۴ اوکوسا- اوکوسا okosa_okosa

۵ اوکوسا-اوکوسا-اوراپون okosa-okosa-urapun

۶ اوکوسا-اوکوسا- اوکوسا okosa-okosa-okosa

لاپلاس

«هندوستان بما شیوه‌ای استادانه برای بیان کلیهٔ اعداد بوسیلهٔ ده علامت داده است ؛ هرعلامت از نظر موقعیت خود و از نظر قـدر مطلق دارای ارزش معینی است ؛ این فکر عمیق و پراهمیت اکنون آنچنان ساده بنظر میرسد که اهمیت واقعی آن فراموش شده است . اما همین سادگی آن و سهولتی که در محاسبات بوجودآورده است حساب را در عداد اختراعات سودمند درجه اول قرار میدهد ؛ چون بخاطر آوریم که این شیوهٔ کار با تمام سادگی از نظر بزرگترین مردان روزگار کهن مـانند ارشمیدس و آپولونیوس مکتوم مانده است ، بیشتر به ارزش این کار بزرگ متوجـه خواهید شد . »

۲ | ستون خالی

۱ درحالی‌که بنوشتن‌این سطور مشغولم ترجیع بندقدیمی زیر در گوشم طنین انداز است :

«خواندن ، نوشتن ، حساب ،
با آهنگ ترکهٔ گردو آموخته شده است !»

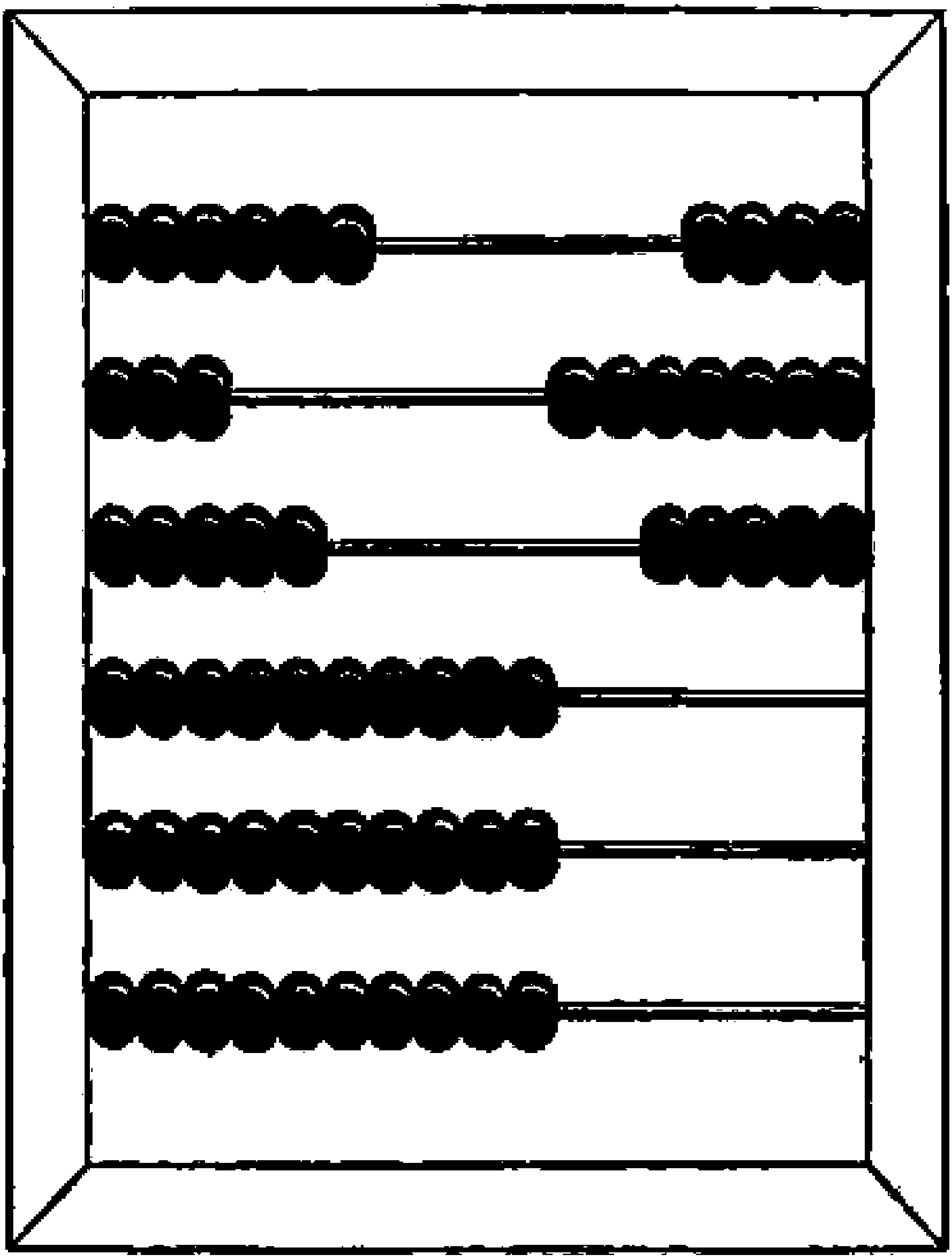
دراین فصل میخواهیم داستان یکی ازاین سه را باز گویم ، داستان حساب را که باوجود قدمت خود بامشقت فراوانتری نوع بشر آنرا بچنگ آورده است .

این داستان داستان پیشرفتی درخشان یا اعمال قهرمانی و یا فداکاری شکوهمندی نیست . این حکایت لغزش‌ها و کشف اتفاقی ، داستان کورمالی در ظلمت و امتناع از ورود به روشنی است . این داستانی است سرشار از بی‌اعتمادی بـه دانش ، که درآن پردهٔ تاریك‌وفاداری به سنت‌ها ، داوری صحیح را درمحاق ظلمت فرو برده است و عقل مدتها اسیر و بردهٔ عادت بوده‌است. کوتاه سخن ، این داستانی از بشریت است .

۴ شمار اعداد شاید بهمان قدمت مالکیت خصوصی باشد . باحتمال بسیار زیاد این‌امر از تمایل انسان به نگهداری‌حساب گله‌ها وسایر کالاهایش سرچشمه گرفته‌است. شکافهائی برروی درخت گذاشتن ، خراش‌هائی برروی سنگ‌ها دادن ، و نشانه‌هائی روی گل رس نقش کردن ، اشکال اولیهٔ کوششی است که برای ثبت شماره‌ها از راه علامات صورت گرفته است .

بعلت پیدا شدن این‌گونه علامات درغارهای ما قبل‌تاریخ انسان در اروپا و افریقا و آسیا ، علمای باستان شناسی آنها را مربوط بزمانهای بسیارقدیم‌میدانند. تاریخ شمارش لااقل باتاریخ کتابت یکی‌است ودلایلی دردست‌است که برآن نیز تقدم‌دارد. حتی ممکن‌است ثبت‌اعداد انسان‌را درخط ثبت‌اصوات انداخته باشد.

قدیمی‌ترین اسناد کـه نشان دهندهٔ کار برد منظم اعداد نوشته‌است مربوط به‌سومری‌ها و مصریهای قدیم وتقریباً مربوط



شکل ۱ : طرحی از یك چرتکه

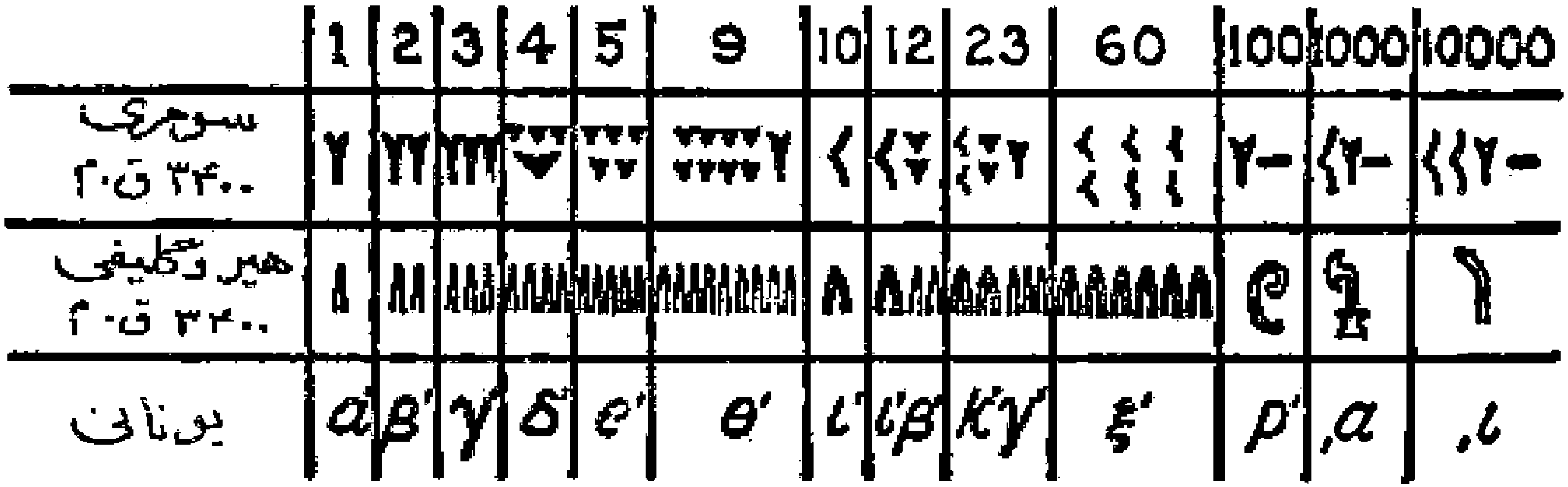
برای یك ودو اعداد مستقلی دارند، واز۲تا ۶اعدادآنها ترکیبی است. هرچیز دیگری بیش از۶ راآنها با نام « زیـاد » مشخص می‌کنند .

کر (Curr) که نام وی پیش از این هنگام بحث ازقبایل استرالیائی ذکر شد ، مدعی است که آنان غالباً با جفت‌شمارش می‌کنند . در واقع ، این عادت برای یك بومی آنچنان قوی است که اگر از ردیف ۷ سنجاق دو سنجاق بـر داشته شود بندرت‌توجه پیدا می‌کند ، ولی نقصان یك سنجاق را بلافاصله درمی‌یابد . حس تشخیص جفت در او نیرومندتر از حس عدد است .

تعجب‌آور است که این ابتدایی‌ترین مبنای شمارش در دوره‌های نسبتاً متأخر طرفدار دانشمندی همچون لایب نیتز پیدا کرده است . شمار دو دویی تنها به دو علامت‌احتیاج‌دارد، ۰ و ۱ ؛ و همانطور که در جدول زیر نشان داده شده بوسیلهٔ آنها تمام اعداد دیگر بیان می‌شوند .

دهدهی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
دودویی	۱	۱۰	۱۱	۱۰۰	۱۰۱	۱۱۰	۱۱۱	۱۰۰۰
دهدهی	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱٤	۱۵	۱۶
دودویی	۱۰۰۱	۱۰۱۰	۱۰۱۱	۱۱۰۰	۱۱۰۱	۱۱۱۰	۱۱۱۱	۱۰۰۰۰

مزایای **مبنای دو** صرفه‌جویی در علامات وسهولت‌زیاد در اعمال حسابی است. باید به‌خاطرآورد که هردستگاه محتاج به‌آنست که جدول‌های جمع وضرب را درآنها به‌خاطربسپاریم.



ارقام قدیمی

شکل نظری جو بخط انگلیسی

عدد شماری جدید کار برد مضحك آن را منسوح کرد استعمال میشد. داستانی درتاریخ پارلمان انگلستان ازهمین امرسرچشمه گرفته است : چارلز دیکنز ـ (Charles Dickns) ، چند سال بعد این داستان را ضمن نطقی دربارهٔ اصلاحات اداری ، که چند سال پس از آن ایراد کرد ، بابیانی هجو آمیز و پر کنایه چنین گفت :

«در روزگاران پیش روش حکیمانه‌ای برای نگاهداری حساب بوسیلهٔ چوبهای چوبخط بدفتر وزیردارائی پیشنهاد شد و همان طورکه روبن سون کروزوئه سالنامهٔ خود را درجزیرهٔ متروك بوجود آورد ، حسابها به این وسیله نگاهداری میشد . حسابدارها و دفتردارها ، و منشی‌هائی بوجود آمدند وفناشدند ..... و هنوز جریان عادی رسمی چنان به این چوبهای شکاف دار با احترام مینگریست که گوئی ستونهای مشروطیت‌اند . چوبهای زبان گنجشکی که حسابهای دارائی بر روی آنها نگهداری میشد چوبخط نامیده میشدند . در دوران سلطنت ژرژ سوم توسط بعضی ازمغزهای انقلابی تحقیقاتی دراین زمینه‌بعمل آمده که آیا با وجود قلم و جوهر و کاغذ و لوح و مداد این هوا داری لجوجانه از عادت کهنه باید ادامه یابد و یا اینکه تغییری در این وضع داده شود ، کارمندان کهنه کار و علاقمند به شؤون اداری درسراسرکشور از این تذکرصریح وگستاخانه عصبانی شدند، و بدین ترتیب منسوخ شدن این چوبخطها تاسال ۱۸۲۶ به طول انجامید. در ۱۸۳۴ باز معلوم شد که مقداری قابل توجه از آنها وجود دارند و باز این مسئله عنوان گردید که با این چوبهای پوسیده و موریانه خورده چه باید کرد .

چوبها در وست مینیستر انبار شد ، وطبیعتاً هر انسان عاقلی می‌دانست که کاری سهل‌تر از این نخواهد بود که اجازه داده‌شود این چوبها اجاق فقرائی راکه درآن نزدیکی زندگی میکردند گرم کند . با وجود این هرگز چنین نشد و بنابر سنت اداری از این کار جلوگیری شد و فرمانی صادر گردید که این چوبها را کاملا محرمانه و بی سروصدا بسوزانند . انجام این کار در یکی از بخاریهای مجلس لردها صورت گرفت . از این بخاری مملو از چوبهای بنجل آتش زبانه کشید و مجلس اعیان و عوام را دستخوش حریق ساخت وبه تلی خاکستر بدل کرد؛ معماران را خواستند تا بناهای دیگری برپاکنند وما اکنون‌مشغول‌جبران دومین میلیون هزینهٔ آن هستیم . »

۴ درمقابل این خصوصیت‌اعداد اصلی‌مربوط بدوران‌اولیه شمارشی ترتیبی نیز وجود دارد، که درآن اعداد بوسیلهٔ حروف الفبائی که متوالیاً و پشت سر یکدیگر بیان می‌شوند نشان‌داده می‌شوند .

قدیمی‌ترین اثرمربوط به‌این اصل شمارش فنیقی‌هااست. محتمل است که این‌امراز ضرورتی‌که تجارت دامنه‌دار درحال گسترش برای فشردگی و جای‌کمتر خواستن محاسبات‌بوجود آورده بود ناشی شده باشد . در ریشهٔ فنیقی شمارش عبری و یونانی نیز تردیدی نباید داشت : دستگاه فنیقی بانضمام الفبا یکجا بکار برده شده و حتی اصوت کلمات نیز حفظ شده است.

از طرف دیگر شمار رومی که تا امروز بحیات خود ادامه داده ، نشانه بازگشتی بسوی شیوه‌های شمار اصلی قدیمی

است . هنوز میتوان تأثیر یونانی را در علائم حرفی که برای بعضی از واحدها بکار میرود ملاحظه کرد ، مانند X برای ده ، C برای صد ، و M برای هزار . اما جایگزینی حروف بجای اغلب علائم قدیمی و عجیب کلدانی ها ومصریها نمایندهٔ انحرافی از اصل نیست .

۵ آخرین اثر تحول شمارهای قدیمی در دستگاه ترتیبی یونانی و دستگاه اصلی رومی دیده می‌شود. درجواب این سؤال که قدمت با کدام یك از آنها است ، باید گفت کـه اگر تنها هدف یك شمارثبت‌کمیتی بصورت فشرده بود، این سؤال اهمیت زیادی کسب میکرد ، اما موضوع اصلی این نیست .

مسألهٔ بسیار مهم اینست که : هر دستگاه تـا چـه اندازه برای اعمال حسابی مناسب‌تر است و بـه چه حد کار محاسبات را آسان‌تر می‌کند .

ازاین نظر مشکل بتوان ازاین دو شیوه یکی را انتخاب کرد : هیچ یك از این دو طریق نمی‌توانستند به تنهائی حسابی به‌وجود آورند که بتواندبرای یك انسان باهوش متوسط مورد استفاده واقع شود . و بهمین دلیل است که از شروع تاریخ تا ظهور شمارش وضعی جدید ما ، در زمینهٔ هنر محاسبه پیشرفتی نا چیز حاصل شده است . مقصودم آن نیست که بـرای بوجود آوردن قوانینی برای عملیات برروی این اعداد کوششی بعمل نیامده است . وقتی به احترام آمیخته با ترسی که در آن‌زمان همهٔ محاسبات به‌وجودآورده بودند توجه کنیم می‌توانیم به اشکال محاسبات در آن زمانها پی‌بریم. کسی‌که در هنر محاسبه‌مهارت

داشت بمثابه موجودی که از موهبتی مافوق الطبیعه بر خوردار باشد مورد توجه قرارمی‌گرفت. این مطلب نشان میدهدکه چرا از روزگاران بسیار قدیم آموزش حساب با مراقبت و دقت زیاد توسط مراجع دینی انجام میگرفت . در صفحات آینده فرصت بهتری‌خواهیم داشت تا در بارهٔ ارتباط ریاضیات اولیه بامراسم مذهبی و شعائر دینی صحبت کنیم . این امر نـه تنها در شرق قدیم ، که در آنجا علم در اطراف مذهب پایه گذاری شده بود، به چشم می‌خورد، بلکه یونانیان روشن فکر نیزهرگز نتوانستند کاملا خود را از اندیشه‌های ماوراء الطبیعه درزمینهٔ عدد وشکل رهایی بخشند .

این ترس تا حدی هنوز هم باقی است. یك انسان متوسط توانایی در ریاضیات را بـا سرعت در محاسبه اشتباه می‌کند . «شمایك ریاضیدان هستید ؟ دراین‌صورت زحمتی‌برای رسیدگی به حساب مالیات بـر در آمد خـود ندارید ! » از کـدام ریاضیدانی لااقل برای‌یك بار در زندگی این سؤال نشده‌است ؟ شاید در این کلمات ناآگاهانه طنزی نهفته باشد ، زیرا مگرنه اینست که اغلب ریاضی‌دانان حرفه‌ای از تمام مشقات نـاشی از در آمد مصونند ؟

۶ داستانی از یك تاجر آلمانی قرن هجدهم نقل زبانها است که من نتوانستم صحت آن را تحقیق‌کنم ، اما این داستان چنان نشان دهندهٔ خصوصیات آن زمان است که نتوانستم خود را از وسوسهٔ بازگو کردن آن برهانم. ظاهـراً این تـاجر را فرزندی بود که میخواست تعلیمات‌کافی در زمینهٔ تجارت به او

بدهد. یک استاد دانشگاه مراجعه کرد واز او پرسید که فرزندش را برای این کار باید بکجا بفرستد . آن استاد در پاسخ گفت که اگر دورهٔ تحصیلات ریاضی پسرش باید بـه جمع و تفریق محدود باشد این کار در دانشگاه آلمان میسر است ، اما هنر ضرب و تقسیم در ایتالیا رشد زیادی یافته‌است که بـه عقیدهٔ او تنها کشوریست که در آن می‌توان تعلیمات کاملی در این زمینه فرا گرفت .

حقیقت این است که ضرب و تقسیمی که در آن روزگار انجام می‌شد وجه مشترکی ناچیز باعملیات ضرب وتقسیم امروزی ما داشت . مثلا عمل ضرب عبارت بود از **دو برابر کردن‌های** متوالی ، و بهمین طریق تقسیم عبارت بود از **نصف کردن‌های** متوالی عدد. با یک مثال می‌توان چشم‌انداز روشنی ازوضع محاسبه درقرون وسطی بدست آورد. با استفاده از علامت‌گذاری جدید:

قرن سیزدهم	امروز
۴۶ × ۲ = ۹۲	۴۶ ×
۴۶ × ۴ = ۹۲ × ۲ = ۱۸۴	۱۳
۴۶ × ۸ = ۱۸۴ × ۲ = ۳۶۸	۱۳۸
۳۶۸ + ۱۸۴ + ۴۶ = ۵۹۸	۴۶
	۵۹۸

اکنون کم کم می‌فهمیم که چرا بشریت باچنین سرسختی بوسائلی مانند چرتکه وحتی چوبخط چسبیده است. محاسباتی

که اینك یك طفل می‌تواند انجام دهد درآن دوران کار یك
متخصص ، و آنچه‌که اکنون بیش از چند دقیقه وقت نمی گیر
درقرن دوازدهم کار پرزحمت چندین روز بود.

سهولت زیادی که با آن انسان عادی امروز اعداد را
هم ضرب می‌کند اغلب به عنوان دلیلی بر رشد فکری در نظر
گرفته می‌شود. حق مطلب اینست‌که اشکالات موجود در آنزمان
جزء لاینفك شمارش آن روزگار بود که قابلیت قبول قوانین
ساده و روشن را نداشت . کشف عدد نویسی وضعی جدید این
موانع را از سرراه برداشت وحساب راحتی در دسترس‌کودن‌ـ
ترین مغزها قرارداد .

۷ پیچیدگی روزافزون زندگی، صنعت و تجارت، مالکیت
برزمین و پرده‌داری ، وضع مالیات‌ها و تشکیلات نظامی، همه
محاسبات کم و بیش بغرنجی را خارج از چشم‌انداز انگشت
شماری ایجاب می‌کرد . عددنویسی مشکل وسنگین نمی‌توانست
جوابگوی این خواسته باشد. چگونه انسان در طول پنجهزار
سال از دوران تمدن خود ، که مقدم برعدد نویسی جدید بود
با این مشکلات مقابله‌کرد ؟

پاسخ این سؤال چنین است که او از شروع کار متوسل
به وسایل مکانیکی شد که در جاهای متفاوت و در اعصارمختلف
فقط اشکال آنها تغییر یافته و در اصل آن دگرگونی حاصل
نشده است . نمونهٔ این طرز کار مکانیکی را می‌توان به وسیله
شیوهٔ شمارش ارتش که در ماداگاسکار وجود داشته است نشان
داد. سربازان را وادار می‌کردند تا به‌ستون ازمیان یك راهرو

تنگ عبور کنند و برای هریك یك دانه شن می‌انداختند. وقتی ده شن شمرده می‌شد، یك شن در محل دیگری که نشان دهندهٔ دهها بود می‌افکندند، و شمارش بهمین ترتیب ادامه می‌یافت. هنگامیکه ده شن در محل دومی جمع می‌شد، یك شن در ظرف سوم می‌انداختند که نمایندهٔ صدها بود و به همین ترتیب تمام سربازها شمرده می‌شدند.

از این وضع شمارش تا شمارش به وسیلهٔ **چرتکه** که اشکال متفاوت آن عملا در تمام کشورهایی که فن شمارش در آنها وجود دارد دیده می‌شود، بیش از یك قدم فاصله نیست. چرتکه در شکل عمومی خود شامل یك صفحهٔ پهن است که به ستونهای موازی قسمت شده و هر یك ستون نمایندهٔ یك مرتبهٔ مشخص شمار دهدهی مانندیکان، دهگان، صدگان وغیره است. صفحه با مهره‌های شمارنده‌ای مجهز شده است که به وسیلهٔ آنها تعداد واحدهای هرمرتبه را معین می‌کنند. مثلا برای نشان دادن ۵۷۴ در روی چرتکه چهار مهره برآخرین ستون، ۷ مهره برستون مجاور آن و ، ۵ مهره برستون سوم می‌گذارند. (به شکل صفحهٔ ۲۰ مراجعه شود.)

اختلاف اغلب این صفحات فقط در ساختمان ستونها و نوع مهره‌ها است. نوع یونانی و رومی دارای مهره‌های آزاد است در صورتی‌که سوآن پان (Suan_Pan) چینی امروز دارای گلوله‌های سوراخداری است که برروی ترکه‌های خیزران باریك می‌لغزند. سچیوتی روسی : مانند نوع چینی شامل یك چهار چوب است‌که بر آن رشته‌های سیم که از میان مهره‌هایی لغزان عبورمی‌کند سوار شده‌اند. بالاخره، بهاحتمال

زیاد ، صفحهٔ خاك هندی نیز همان چرتکه بوده است که نقش شمارنده‌ها را علامات قابل پاك کردن که برروی شن‌نرم نوشته می‌شد ایفا می‌کرده است .

ریشهٔ کلمهٔ انگلیسی abacus به‌معنی چرتکه معین نیست. دسته‌ای آنرا از کلمهٔ سامی **آباك** (abac) به معنی خاك می‌دانند ، وپاره‌ای معتقدندکه ازکلمهٔ یونانی **آباکس** abax به‌معنی لوح مشتق شده است. این اسباب به‌مقیاس وسیع دریونان به کار می‌رفته ، هردوتوس (Herodotus) و پولوبیوس (Polybius) بدان اشاره کرده‌اند . پولوبیوس در کتاب تاریخ خود که توضیحی از دربار فیلیپ دوم مقدونی است چنین می گوید :

«مانند مهره‌های چرتکه که بنا بخواست محاسب در یك لحظه ارزش یك تالنت و در لحظه‌ای دیگر بهای یك خلکوس را پیدا می کند ، درباریان با یك اشارهٔ سرشاه بدورهٔ سعادت میرسند و با اشاره‌ای دیگر به موجوداتی زبون‌که ترحم وشفقت انسانی را برمی‌انگیزند بدل می‌شوند .»

تا به امروز چرتکه در نواحی دهقانی روسیه و سرتاسر چین ، در کار روزانه، به‌کار برده می‌شود و با وسایل‌محاسباتی جدید رقابت می‌کند . اما در اروپای غربی و امریکااین‌اسباب فقط به عنوان تحفه و یادگاری از قدیم وجود دارد که تنها در عکس‌ها عده‌ای انگشت شمار آنها را دیده‌اند . تعدادکمی را می‌توان یافت که بدانند تا چند صد سال پیش ، به مقیاسی وسیع ، چرتکه درکشورشان به‌کار می‌رفته و تا حدودی‌درمقابله با مشکلاتی که خارج از توانایی یك شمارش ابتدایی و ناپخته

بوده ایستادگی کرده است .

۸ هرکس دربارهٔ تاریخ محاسبه تا دوران اختراع اصول عددنویسی وضعی بیندیشد ، از محدودیت گسترش آن متحیر خواهد ماند . این دوران طولانی تقریباً پنجهزار سال به طول انجامید و شاهد اوج و حضیض تمدن‌های بیشماری بود که‌هریك به دنبال خود میراثی از ادبیات و هنر و فلسفه و مذهب باقی گذاردند . آیا محصول پیشرفت در میدان محاسبه ، که‌ازاولین هنرهای انسان است ، چه بوده است ؟ شماری غیرقابل انعطاف و چنان خام که تقریباً پیشرفت را غیر ممکن می‌ساخت ، و وسایل محاسبه‌ای آنچنان محدود که حتی برای محاسبات ابتدایی به کار شناسانی نیازمند بود . و از این مهمترآنکه ، انسان برای هزاران سال بدون جزئی ترین اصلاح و بدون پیدا شدن یك نظریهٔ قابل توجه ، این وسایل را به کار برده است !

این انتقاد بسیار خشن به‌نظر می‌رسد ؛ از این گذشته، انصاف نیست‌که پیشرفتهای دورانی دوردست را با معیارهای زمان حاضر ، که دوران پیشرفت سریع و فعالیت بسیار شدید است ، بسنجیم . با این همه باید گفت‌که تاریخ محاسبه، حتی در مقایسهٔ بارشد بطیی اندیشه‌ها در دوران **اعصارسیاه** ، به صورت عجیبی از یك رکود غم‌انگیز حکایت می‌کند .

چون موضوع از این لحاظ بررسی شود ، کار هندویی ناشناس که در قرون اولیهٔ عصر ما **اصل شمار وضعی** راکشف

کرد اهمیت جهانی کسب می‌کند . این اصل نه تنها تغییری اساسی در شیوهٔ کار به وجود آورد ، بلکه مسلم است که بدای آن هیچ پیشرفتی در علم حساب ممکن نبود. و بعلاوه این اصل آنچنان سهل و ساده است که امروز کودن‌ترین شاگردان اشکالی برای فراگرفتن آن احساس نمی‌کنند. طراح این اصل تا حدی همان ساختمان زبان عددی ما بوده است . ظاهراً باید نخستین کوشش برای ترجمه و تفسیر عمل چرتکه به زبان ارقام منتج به کشف اصل شمار وضعی شده باشد .

این واقعیت که چرا بزرگترین ریاضیدانان کلاسیك یونان به این اصل متوجه نشده‌اند ، همچون معمایی بنظر می‌رسد. آیا این امر مربوط به آن نیست که یونانیان با چنان حقارتی به علوم عملی می‌نگریستند که آموزش اطفال خود را در این زمینه به غلامان واگذار می‌کردند؟ اما اگر چنین باشد ، چگونه ملتی که علم هندسه را با چنین وسعتی به ما ارزانی داشته ، نتوانسته جبر مقدماتی را به وجود آورد ؟ و نیز آیا بهمین اندازه عجیب به نظر نمی‌رسد که جبر ، یعنی سنگ بنای ریاضیات جدید ، تقریباً در همان دورانی که شمار وضعی بوجود آمده ازهندوستان سرچشمه گرفته باشد؟

۹ بررسی دقیق در بارهٔ تشریح عددنویسی جدید ما می‌تواند این سؤالات را روشن کند . اصل شمار وضعی عبارت از آنست که عدد واحد ارزشی باشد که این ارزش نه تنها وابسته به محل آن در سلسلهٔ طبیعی متوالی اعداد است ، بلکه به وضعی که آن عدد نسبت به سایر علامات در مجموعهٔ نمایندهٔ عدد معین دارد نیز

مربوط است . بدین ترتیب عدد صحیح مبین ۲ برای سه عدد ۳۴۲ ، ۷۲۵ و ۲۶۹ دارای معانی متفاوتست : در عدد اول این رقم برای ۲ آمده است، در دومی برای بیست و در سومی برای دویست. در حقیقت ۳۴۲ خلاصه‌ایست از سیصد بعلاوهٔ چهار مرتبه ده بعلاوهٔ دو واحد .

اما این طرز عدد نویسی درست همان وضع چرتکه‌است که در آن ۳۴۲ بصورت زیر نمایش داده می‌شود . و همانطور که قبلا گفته شد ، ظاهراً کافی بوده است که این طرح را بزبان اعداد تأویل کنیم تا آنچه را که امروز در اختیار داریم به دست آوریم .

این بجای خود درست ! اما یك اشکال باقی می‌ماند . هر کوششی برای آنکه بتواند عمل چرتکه را بطور ثابت ثبت کند به این مانع برمی‌خورد که رقمی مانند ═ ☰ می‌تواند مبین هریك اعداد زیر باشد : ۳۲، ۳۰۲، ۳۲۰، ۳۰۰۲، ۳۰۲۰، و غیره . برای اجتناب از این ابهام داشتن شیوه‌ای برای نشان دادن فواصل ضروری است، بعبارت دیگر به **علامتی برای يك ستون خالی** نیازمندی وجود دارد .

بنا براین دیده می‌شود تا علامتی برای مرتبه **خالی** یعنی نشانه‌ای برای هیچ ، یا همان **صفر** جدید ما ، اختراع نمی‌شد پیشرفتی

ممکن نبود. عقل جامد یونانیان قدیم نمی‌توانست جای خالی را به مثابهٔ عددی بپذیرد ، چه رسد به اینکه علامتی هم برای آن به وجود آورد .

آن هندی ناشناس نیز صفر را علامتی برای هیچ نمی‌دانست. کلمهٔ صفر در هندی **سونیا** (Sunya) بود که به معنی **سفید و خالی** است ، اما دلالتی بر «هیچ» ندارد . بدین ترتیب، از روی تمام شواهد ، کشف صفر واقعه‌ای بود که از راه کوشش برای رفع ابهام عدد نویسی ثابت از روی عمل صفحهٔ محاسبه یا چرتکه بوجود آمد .

۱۰ چگونگی تبدیل سونیای هندی به صفر امروزیکی از فصول جالب تاریخ تمدن است . هنگامی که اعراب قرن دهم عدد نویسی هندی را به کار بردند ، سونیای هندی را به کلمهٔ عربی مربوط یعنی صفر ترجمه کردند که در زبان عربی به معنی خالی است . وقتی که عدد نویسی هند و عربی برای بار اول به ایتالیا سرایت کرد ، صفر به زبان لاتینی درآمد و تبدیل بــه **زفیروم** (Zephirum) شد . این امر در شروع سدهٔ سیزدهم اتفاق افتاد و در طول صد سال بعد از آن این کلمه دستخوش تغییراتی گردید و به صورت **زرو** (Zero) ایتالیایی درآمد .

در این اوان جوردانوس نمراریوس (Jordanus — Nemerarius) دستگاه عربی را به آلمان منتقل می‌کرد . وی کلمهٔ عربی را حفظ کرد و آنرا به شکل **سیفرا** (Cifra) درآورد . با توجه به اینکه گاوس ، آخرین ریاضیدان بزرگ سدهٔ نوزدهم ، که نوشته‌هایش به زبان لاتینی بود ، هنوز کلمهٔ

سیفرا را به این مفهوم به‌کار می‌برد ، معلوم می‌شود که مدت درازی در محافل تحصیل کردهٔ اروپائی کلمه و مشتقاتش دلالت برصفر می‌کردند . در زبان انگلیسی کلمهٔ سیفرا به **سیفر** (Cipher) مبدل شد ومعنی اصلی خود را حفظ کرد.

وضع مردم عادی در مقابل این عددنویسی جدید در این واقعیت منعکس شده است که بلافاصله پس از معرفی‌آن در اروپا کلمهٔ سیفرا به‌عنوان علامتی‌رمزی به‌کار برده شد؛ اما این‌معنی ضمنی تقریباً درقرون‌آتی منسوخ‌گردید. فعل **دسیفر** انگلیسی، به معنی گشودن رمز ، نیز به‌عنوان یادگاری ازاین دوران باقی ماند .

مرحلهٔ بعدی این پیشرفت شاهد هنر جدید محاسبه بود که به مقیاس وسیعی توسعه یافت . اینکه سهم اساسی صفر در دستگاه جدید از نظر مردم دور نمانده است ، دارای اهمیت بسزایی است. در حقیقت‌آنها تمامی دستگاه را بعلاوهٔ برجسته‌ترین قیافه‌های موجود در آن یعنی سیفرا را به‌رسمیت شناختند و این امر مبین آنست که چگونه این کلمه به اشکال مختلف خود Chiffre ، Ziffer و غیره ، معنی رقم را که امروز در اروپا بدان اطلاق می‌گردد ، بخودگرفت . این معنی دوگانه سیفرا ، که یکی همان مفهوم عامیانه و رقمی و دیگری مفهوم عالمانه آن است ، ابهام و پیچیدگی قابل توجهی بوجودآورده است .

علما بیهوده کوشش کردند تا به معنی اصلی آن جان تازه‌ای بدمند، در حالیکه معنی عامیانهٔ آن ریشه‌ای عمیق پیدا کرده است . در اینجا عالم ناچار از تسلیم در برابر استعمال

عامیانهٔ کلمه شد ، و این امر بالمآل با بکار بردن کلمهٔ ایتالیائی Zero به‌آن مفهومی که امروز به‌کاربرده می‌شود برای صفر تثبیت گردید .

همین مطلب دربارهٔ کلمهٔ **آلگوریتم** (algorithm) نیز صادق است. مفهوم امروزی این کلمه نمایندهٔ هرروش‌ریاضی است که شامل بینهایت مرحله باشد و در هرمرحله نتیجه‌ای که از مرحلهٔ قبل به‌دست آمده به‌کار بسته شود، اما میان سده‌های دهم و پانزدهم آلگوریتم با عدد نویسی وضعی مترادف بود . اکنون می‌دانیم که این واژه تغییر صورتی از کلمهٔ الخوارزمی است که نام یکی از ریاضیدانان سده نهم است و کتاب او (که به لاتینی ترجمه شده است) اولین اثر در این موضوع است که به اروپای غربی رسیده است .

۱۱ امروز که عدد نویسی وضعی جزئی‌از زندگی روزانهٔ ما شده، بنظرمی‌رسد که اولویت این شیوه ، فشردگی‌درنوشتن، و سهولت و ظرافتی که در محاسبات وارد کرده است ، ضامن پذیرش همه جانبه و سریع آن بوده است . ولی حقیقت آنست که تحول و انتقال به این شیوه نه تنها سریع نبوده بلکه سده‌ها به طول انجامیده است . کشمکش بین **چرتکه‌گران** آباسیست‌ها (Abacists) که ازسنت‌های‌کهنه دفاع می‌کردند و **آلگوریتمیان**(آلگریست‌ها Algorists) که‌طرفداردگرگونی و اصلاح بودند ، از سده یازدهم تا سده پانزدهم ادامه داشت و و در تمام مراحل کهنه‌پرستی و ارتجاع رایج بود. دربعضی از نواحی‌کار برد اعداد عربی دراسناد رسمی ممنوع بود؛ درديگر

نواحی به‌طور کلی از استعمال آن‌ها جلوگیری می‌شد. ومانند همیشه، این منع نتوانست توفیقی در نابودی‌آن بدست آورد، بلکه فقط بگسترش پنهانی آن کمك کرد. دلیل کافی در این باره در بایگانی های سدهٔ سیزدهم ایتالیا یافت شده است‌که در آن جا تجار عددهای‌عربی را بعنوان نوعی مکاتبهٔ رمزی به‌کار می‌بردند.

با این همه، برای مدتی ارتجاع توفیق یافت تاپیشرفت آنرا متوقف‌کند وتوسعهٔ این دستگاه جدید را به تعویق اندازد. در واقع، در این دوران انتقال، برای فن محاسبه ارزش‌اساسی یا تأثیر پایدار فراوانی به‌وجود نیامد. فقط قیافهٔ ظاهری‌اعداد دستخوش تغییراتی شد، آنهم نه‌به سبب میل به اصلاح بلکه‌از این لحاظ که‌کتب مربوطه دست‌نویس می‌شد وهمین‌امر تغییراتی را بهمراه داشت. در واقع، تا زمانی‌که صنعت چاپ به‌وجود نیامد، اعداد نتوانستند شکل ثابتی به خود گیرند. به عنوان جملهٔ معترضه باید اضافه‌کرد که صنعت چاپ چنان تأثیری در پایدارکردن شکل‌اعداد داشت‌که به‌طور اساسی اعدادامروزشبیه همان اعداد پانزدهم هستند.

۱۲ برای آخرین فتح‌آلگوریتمیان تاریخ مشخصی نمی‌توان تعیین‌کرد. می‌دانیم که درشروع قرن شانزدهم تفوق شمار جدید بی‌رقیب بود. ازآن تاریخ پیشرفت ادامه داشت، به طوری که در طول صد سال بعد تمام قوانین چهار عمل اصلی، چه دربارهٔ اعداد صحیح و چه دربارهٔ کسرهای اعشاری و متعارفی،

به همان پایه‌ای رسید که امروز در مدارس ما آموخته می‌شوند.

یك قرن بعد چرتکه‌گران و طرفدارانشان چنان در بوتهٔ فراموشی قرار گرفتند که این پندار برای هر یك از ملت‌های اروپائی پیش‌آمد که عدد نویسی وضعی را از مخترعات خود بدانند. برای مثال دیده می‌شود که در اوایل سدهٔ نوزدهم اعداد عربی در آلمان **دویتچ** (= آلمانی Deutsche) نامیده می‌شدند، از آن جهت که آنها را از اعداد **رومی** (Roman) که برایشان منشأ خارجی داشت متمایز کنند.

امادربارهٔ خودچرتکه، آثاری از آن دردوران سدهٔ هجدهم دراروپای غربی یافت نمی‌شود. ظهور مجدد آن، تحت اوضاع واحوال عجیبی، دراوایل سدهٔ نوزدهم بود. پونسله (Poncelet) ریاضی‌دان و یکی از ژنرالهای زمان ناپلئون در لشکرکشی به روسیه اسیر شد و سالها بعنوان اسیرجنگی درآنجا بسر برد. هنگام مراجعت به فرانسه در میان سایر ره‌آوردهای او یك چرتکهٔ روسی نیز یافت می‌شد. سالها این ره‌آورد پونسله بعنوان تحفه‌ای با منشأ خارجی و «بربری» تلقی می‌گردید. چنین نمونه‌هایی از فراموشی ملی را در تاریخ فرهنگ فراوان می‌توان یافت. چند نفر از تحصیل کردگان امروزی را می‌توان یافت که بدانند فقط چهارصد سال پیش شمارش انگشتی تنهاوسیلهٔ محاسبهٔ مردمان عادی بود، و تنها محاسبان حرفه‌ای به چرتکه دسترس داشتند؟

۱۳ مقدر گردید تاسو نیای هندی، که به مثابهٔ علامتی برای

متون خالی صفحهٔ محاسبه در نظر گرفته شده بود ، نقطهٔ عطفی باشد که بدون آن هیچگونه پیشرفتی در علم جدید و صنعت و تجارت ممکن نگردد . تأثیر این کشف بزرگ بهیچوجه محدود به حساب نیست .

این کشف با به‌وجود آوردن تعمیمی برای مفهوم عدد عملا نقش اساسی در تمام شاخه‌های ریاضیات ایفا کرد . در تاریخ تمدن، کشف صفر همیشه بمانند بزرگترین تکامل کوشش بشری محسوب خواهد شد .

یك کشف بزرگ ! آری، کشفی با تأثر عمیق برزندگی که حاصل تصادفی ناآگاهانه بود نه تحقیقات پر زحمت و خسته کننده .

نیکوماخوس Nicomachus

«طبیعتا آنچه زیبا و محدود و موضوع معرفت است بر آنچه زشت و نامحدود و غیر قابل ادراک است تقدم دارد.»

۳ علم عدد

۱ هیچ یك از شاخه‌های ریاضیات به قدر حساب و **نظریهٔ اعداد** با یکدیگر متباین نیستند.

عمومیت و سادگی بیش از حد قواعد، حساب را بـرای کودن ترین انسانها سهل الوصول کرده است. در واقع سرعت و روانی در محاسبه موضوعی است مربوط بحافظه، وسریع‌ترین محاسبان چیزی جز ماشین‌های انسانی نیستند کـه مزیت آنها بر نوع مکانیکی قابلیت زیاد حمل و نقل آنها است.

از طرف دیگر مشکل‌ترین آموزش‌های ریاضی نظریهٔ اعداد است . درست است که بیان مسائل آن آنقدر ساده است که حتی یك کودك می‌تواند موضوع را ادراك کند ، اما شیوه‌های بکار رفته چنان منحصر بفردند که نبوغی خارق‌العاده ومهارتی بیش‌از اندازه لازم‌است تا بتوان راهی برای نزدیك شدن به‌آن یافت . در اینجا ذوق و الهام میدانی آزاد داشته است . اغلب خواص معلوم از راه نوعی **استقراء** کشف شده‌اند . مطالبی که سده‌ها صحتشان مورد تأیید بوده بعدها غلط ازآب درآمده‌اند، و امروز نیز مسائلی موجود است که نیروی بزرگترین ریاضی دانها را به مبارزه طلبیده و هنوز لاینحل مانده‌اند .

حساب اساس تمام ریاضیات محض عملی است . از کلیهٔ علوم مفیدتر است و محتملا هیچ شاخه‌ای از معرفت بشری بیش از حساب در میان مردم شایع نیست .

از طرف دیگر نظریهٔ اعداد شاخه ایست از ریاضیات که مورد استعمال آن از هر شاخهٔ دیگری کمتر است . نه فقط از تأثیر پیشرفت فن بدور مانده ، بلکه حتی در قلمرو ریاضیات محض نیز جای متروکی را اشغال کرده است و فقط ارتباطی نااستوار با بدنهٔ عمومی علم دارد .

کسانیکه در تفسیر تاریخ تمدن به نظریهٔ سودمندی (utilitarian) گرایش ، دارند آماده‌اند چنین نتیجه گیری کنند که حساب بر نظریهٔ اعداد تقدم داشته است . اما واقعیت عکس اینست. نظریهٔ اعداد صحیح یکی‌از قدیمی‌ترین شاخه‌های ریاضیات است ، در صورتی که از عمر حساب جدید به زحمت چهارصد سال می‌گذرد .

این مطلب در تاریخ کلمهٔ «حساب» منعکس شده است. حتی تا سدهٔ هفدهم کلمهٔ یونانی **آریتموس** (arithmos) به معنی عدد و کلمهٔ **اریتمتیکا** (arithmetica) به‌معنی نظریهٔ اعداد بوده است. آنچه راکه ما امروز حساب مینامیم یونانیها **لوجیستیکا** (logistica) می‌نامیدند، وهمان‌طور که دیدیم، درقرون وسطی آنرا **آلگوریسم** (algorism) می‌خواندند.

۴ با اینکه داستانی شنیدنی که من اکنون می‌خواهم نقل کنم با بسط سایر مفاهیم ریاضی ارتباط فراوانی ندارد، اما به بهترین وجهی می‌تواند تحول این مفاهیم را مجسم کند.

از روزگاران قدیم خواص فردی اعدادصحیح هدف تحقیق و تجسس بشر بود، در حالیکه خواص باطنی آنها مسلم فرض می‌شد. دربارهٔ این پدیدهٔ عجیب چه می‌توان گفت؟

بنا به گفتهٔ منتسکیو (Montesquieu) زندگی بشر چیزی جز توالی آرزوهای بیهوده و ترس‌های بی‌پایه نیست. این امیدها و ترس‌ها که تا بـه امروز به شکلی مبهم بـراساس عرفان مذهبی توضیح داده شده‌اند، در روزهـای اخیر اشکال مشخص و قابل لمس به خود گرفته‌اند. ستاره‌ها و سنگ‌ها، حیوانات و علف‌ها، واژه‌ها و اعداد، نشانه‌ها وعوامل سرنوشت انسان بودند.

پیدایش علم را می‌توان نتیجهٔ مشاهده و تفکر در ایـن تأثیرات‌مرموزدانست. طالع بینی و نجوم برعلم اختر شناسی تقدم داشته، شیمی از راه کیمیاگری رشدکرده، و سلف نظریهٔ اعداد یك نوع عدد شناسی مخصوص بوده که تابه امروز به‌شکل

دیگری که همان فال‌بینی و طالع شناسی است باقیمانده است .

۳

« درهفت روز هفت‌کاهن با هفت شیپور شهراریحا را به‌تسلیم واداشتند و در هفتمین روز هفت بار شهر را دور زدند.»

چهل شبانه روز باران ادامه داشت که طوفان بزرگی به پا کرد . چهل شب وچهل روز موسی با یهوه درکوه سیناگفتگو کرد. چهل سال فرزندان اسرائیل دربیابان سرگردان بودند .

شش و هفت و چهل اعداد نحس عبری بودند ودین مسیح هفت را به ارث برد : هفت گناه کبیره، هفت فضیلت، هفت‌روح خدا ، هفت شادی مریم عذرا ، هفت شیطان رانده شده از وجود مریم مجدلیه .

بابلی‌ها وایرانی‌ها شصت ومضارب آنرا ترجیح میدادند، خشایارشا هلس پونت (بغاز داردانل) را با سیصد تازیانه تنبیه کرد ، و داریوش فرمان داد تا آب رود گوندس (Gundes) (دیاله؟) سیصد وشصت کانال بیندازند و در بیابان پراکنده کنند، زیرا یکی از اسبهای مقدس او در رودخانه غرق شده بود .

پوانکاره می‌گوید که ارزش‌های مذهبی بـا طول و عرض جغرافیائی تغییر می‌کنند. در حالی که ۳و۷و۱۰و۱۳و۴۰و۶۰ مورد نظر خاص بودند ، عملا می‌بینیم هر یك از اعداد دیگردر جاهای مختلف و در دوره‌های متفاوت مفهوم مقدس و مرموزی داشته‌اند . مثلا بابلی‌ها به هر یك از خدایان خود عددی کمتر از ۶۰ وابسته می‌کردند و ایـن عدد مرتبهٔ آن خداوند را در سلسله مراتب آسمانی نشان می‌داد .

جالب توجه اینکه فیثاغورسیان نیز نظیر بابلی‌ها عددرا

می‌پرستیدند. چنین می‌نماید که آنها به خاطر این که بافراموش کردن عددی آنرا نرنجانند به اغلب اعداد کمتر از ۵۰ منزلتی الهی نسبت می‌دادند.

۴ یکی از اشکال بی‌معنی عددشناسی که بسیار نیز متداول گردیده بود **علم حروف** (Gematria) است. درالفبای عبری و یونانی هر حرف دارای دو مفهوم صوتی و عددی بود. جمع اعداد حروف یك کلمه **شمارهٔ آن کلمه** را معین می‌کرد و از نظر علم حروف هرگاه دو کلمه نمایندهٔ یك عدد بوده هم ارز تلقی می‌شدند. نه تنها از زمان بسیارقدیم علم حروف برای تفسیر آیات کتاب مقدس بکارمی‌رفت، بلکه نشانه‌هائی دردست است که نویسندگان کتاب مقدس نیز این هنر را بکار بسته‌اند. بدین ترتیب ابراهیم در جریان نجات برادرش الیمازر ۳۱۸ غلام به همراه داشت. آیا این اتفاقی است که تعداد عددی کلمهٔ عبری الیمازر برابر ۳۱۸ است؟

مثالهای متعددی از علم حروف در اساطیر یونان یافت می‌شود. نام قهرمانانی مانند پاترو کلوس و هکتور و آشیل به ترتیب برابر ۸۷ و ۱۲۲۵ و ۱۲۷۶ است، و تفوق آشیل را بر سایرین بهمین امر نسبت می‌دادند. شاعری که می‌خواست یکی از دشمنانش به نام تاماگوراس را ناراحت کند، ثابت کرد که این کلمه هم ارز کلمهٔ لویموس (loimos) که نوعی طاعون است، می‌باشد.

در الهیات مسیحی علم حروف برای تفسیر گذشته و پیشگویی آینده بکار رفته است. شمارهٔ جانور وحشی در کتاب

مکاشفهٔ یوحنا یعنی ۶۶۶ دارای معنی خاصی بود. درمذهب کاتولیك جانور وحشی را **ضد مسیح** یا **دجال** می‌دانستند. یکی ازحکمای الهی آنها به‌نام‌پتر بونگوس (Peter Bungus) که در دوران لوتر (Luther) زندگی می‌کرد، کتابی هفتصد صفحه‌ای در بارهٔ عدد شناسی نگاشته است. نویسنده با توجه به این که عدد ۶۶۶ هم ارز با عدد اسم لوتر است، قسمت اعظم این اثر را به عدد مزبور اختصاص داده واز اینجابه این نتیجهٔ آشکار رسیده‌که لوتر همان ضد مسیح (دجال) است. در جواب او لوتر عدد ۶۶۶ را به منزلهٔ پیش بینی طول‌عمر دستگاه پاپی تفسیر کرده و از این‌که عمر این‌رژیم زیادنخواهد پائیده‌شعوف شده است.

علم حروف قسمتی از دورهٔ تحصیلی طلاب کلیمی امروز است. مهارت این طلاب در تفسیر دو گانهٔ کلمات‌کتاب مقدس با انجام دادن عملی‌که غیر ممکن بنظر می‌رسد روشن می‌شود. ملای کلیمی یك رشته اعداد راکه در توالی خود ازقانون معینی تبعیت نمی‌کنند پشت سر هم می‌شمارد. بعضی از این اعداد تا پانصد و به بالا نیز می‌رسند. او این کار را شاید تا ده دقیقه ادامه می‌دهد، در حالیکه مخاطب او این‌اعداد را ثبت می‌کند. ملا بعد از اتمام ذکر مجدداً همان اعداد را بدون اشتباه و با همان ترتیب اولی بیان میکند. آیا او تمام این رشته اعداد را به خاطر سپرده است؟ نه، او فقط بعضی از آیات کتاب مقدس عبری را به زبان حروف ترجمه می‌کند.

■ اما اجازه بدهید به پرستش اعداد برگردیم. بیان‌کامل

این مطلب را در فلسفهٔ فیثاغورسی می‌توان یافت . فیثاغورسیان اعداد زوج را به منزلهٔ اعداد قابل حل و بنابراین گذرا و مؤنث و خاکی تلقی می‌کردند ؛ اعداد فرد برایشان غیر قابل حل و مذکر بودند و ماهیتی آسمانی داشتند .

هر عدد با صفتی انسانی مشخص می‌شد. یك نمایندهٔ عقل بود ، زیرا تغییر ناپذیر بود ، دو نمایندهٔ عقیده بود ؛ چهار علامت عدالت بود ، زیرا اولین مجذور کامل و حاصلضرب دو عدد مساوی بود ؛ پنج نمایندهٔ ازدواج بود ، زیرا از اتحاد اولین عدد مؤنث و اولین عدد مذکر تشکیل شده بود . (**یك** به عنوان عدد فرد تلقی نمی‌شد ، بلکه آنرا **سرچشمه** همهٔ اعداد می‌دانستند) .

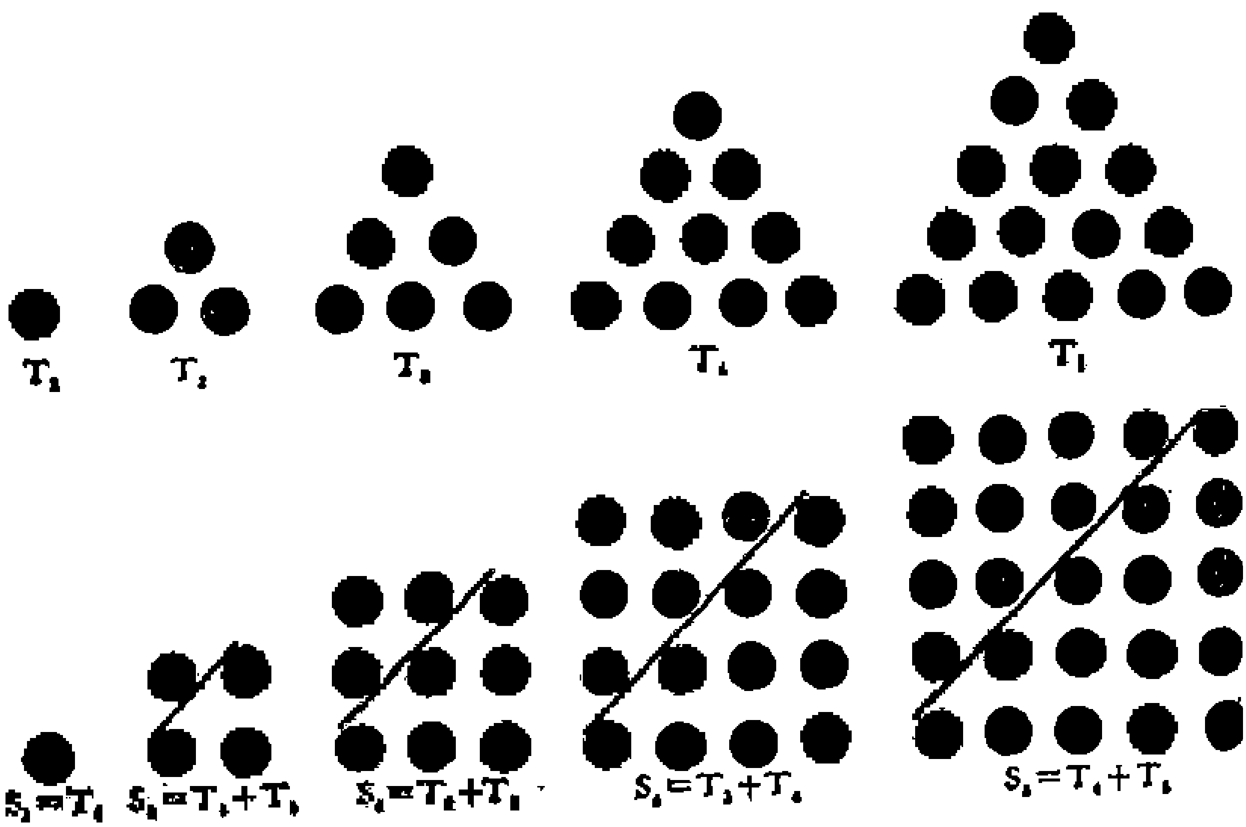
تعجب آور است که در اساطیر چین نیز نظایر جالب توجهی پیدا می‌شود . در اینجا اعداد فرد نشانهٔ سفیدی و روز و خورشید و آتش و اعداد زوج نشانهٔ تاریکی و شب و سرما و ماده و آب و زمین‌اند . اعداد را برروی یك صفحهٔ مقدس به صورت خاص منظم‌می‌کردند، وقتی‌که این صفحهٔ مقدس یا لوچو (Lo -Chou) درست بکار می‌رفت دارای خواص سحرآمیز بود .

۶ « ما را رحمت کن ای عدد الهی ، تو که خالق خدایان و انسانهائی ! ای چهار مقدس ، تویی که شامل ریشه ومنشأخلقت جاری‌ابدی هستی ! زیرا عدد الهی با واحد پاك ومنزه شروع‌می‌شود تا به چهارمقدس برسد ؛ از آن پس او مادر همه چیز را منشأ همه چیز را ، آنچه را که جهان شمول و انحراف ناپذیر است یعنی ده مقدس خستگی ناپذیر و کلید

همهٔ مشکلات را بوجود میآورد.»

این دعای فیثاغورسیان بود که به تتراکتیس (tetraktys) یا چهار مقدس که نمایندهٔ چهار عنصر آب و آتش و باد و خاک بود خطاب می‌شد. ده مقدس از چهار عدد اولیه ۱ و ۲ و ۳ و ۴ به وجود میآید. داستان عجیبی از فیثاغورس نقل می‌کنند که به یکی از شاگردان جدید دستور داد که تا چهار بشمارد:

«ببین، آنچه راکه تصور می‌کردی چهار است در حقیقت عدد ده و مثلثی کامل و اسم شب ما است.»



اعداد مثلث و مربع

این اشارهٔ به مثلث کامل مهم است. این امر نشان می‌دهد که در یونان آن زمان اعداد به وسیلهٔ نقاط ثبت می‌شدند . در شکل صفحهٔ ۵۵ اعداد مثلث ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵ و همین طور اعداد مربع ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵ نمایش داده شده‌اند . با توجه به این‌که شروع نظریهٔ اعداد ازهمین جا بوده است ، تکیه برذوق و الهام هندسی فایده‌ای بزرگ به بار میاورد . فیثاغورسی ها می‌دانستند که یك عدد مربع از هر طبقه برابر است با عدد مثلث همان طبقه به اضافهٔ عدد قبلی آن و آنها با جدا کردن نقطه‌ها از یکدیگر ، همان طور که در شکل نشان داده شده‌است، این مسئله را اثبات می‌کردند . مقایسهٔ این شیوه با آنچه که یك شاگرد باهوش مدرسهٔ متوسطه بکار می‌بندد جالب توجه است . واضح است که عدد مثلثی از مرتبهٔ n برابر است با $۱+۲+۳+\cdots+n$ که مجموع یك تصاعد حسابی و برابر است با $\frac{۱}{۲}n(n+۱)$ سلف‌این‌عدد بهمین دلیل‌برابر است با : $n\ (n-۱)\frac{۱}{۲}$ و جبر مقدماتی نشان می‌دهد که جمع این دو عدد برابر است با $n^{۲}$ که‌همان عددمربع ازمرتبهٔ n است (به شکل صفحهٔ ۵۵ مراجعه کنید) .

امروز دیگر اثری ازاین منشأ هندسی اولیه به‌جز کلمات مربع و مکعب باقی نمانده است . بر عدد مثلث، و یا به صورت کلی‌تر بر اعداد کثیرالاضلاع فایدهٔ علمی زیادی مترتب نیست .

باوجوداین‌حتی‌در عصر نیکوماخوس (Nicomachus ۱۰۰ بعد از میلاد) این اعدادموضوع اصلی تحقیقات علم‌حساب را تشکیل می‌دادند .

۷ این که فلسفهٔ عرفانی فیثاغورسی ، که چنین اثری عمیق براندیشه‌های متفکرین یونانی از قبیل افلاطون و ارسطو گذارده ، از کجا برخاسته است ، مسأله‌ای است که دانشمندان در آن اختلاف نظر دارند . برای اندیشه‌های نو که معتقد بر اصالت عقل‌اند، عدد پرستی می‌توانند بعنوان **خرافات پرستی که در یك دستگاه** بوجود آمده است تلقی گردد. هنگامی که ما آنرا در دور نمای تاریخی‌آن مشاهده می‌کنیم، علاقه‌مند می‌شویم که نظر مساعد تری داشته باشیم . فلسفهٔ فیثاغورسی ، چون پوستهٔ عرفان دینی آن برداشته شود ، نمایندهٔ این فکر اساسی‌است که انسان فقط به وسیلهٔ عدد و شکل می‌تواند بماهیت گیتی پی‌برد . این اندیشه‌ها توسط فیلولائوس مقتدر ترین شاگرد فیثاغورس و نیز به وسیلهٔ نیکوماخوس که می‌توان او را در سلك نو فیثاغورسیان قلمداد کرد ، چنین بیان شده است .

« هر چیز که بتوان آن را شناخت عدد دارد ؛ زیرا ممکن نیست بتوان بدون عدد چیزی را درك کرد ویا شناخت .»

(فیلولائوس)

«چنان می‌نماید که همهٔ چیزها که برطبق نقشه‌ای استادانه به‌وسیلهٔ طبیعت منظم شده‌اند،هم منفرداً وهم بعنوان یك‌مجموعه، به مثابهٔ چیزی منتخب و دستچین خودنمائی می‌کندکه به وسیلهٔ عقل وپیشدانی مطلق که همه چیزرا براساس **عدد** به‌وجودآورده آفریده شده‌اند ، و این عدد تنها برای اندیشه قابل درك است و بنابراین کاملا غیرمادی است ؛ با وجود این واقعی است ؛ واقعی‌ترین واقعی و جاویدان است . » (نیکوماخوس) .

۸ هنگامی که ازفیثاغورس سؤال شد که رفیق چیست، جواب داد: «کسی که من دیگریست، بدان گونه که ۲۲۰ و ۲۸٤ هستند.» مفهوم این عبارت با اصطلاحات امروزی چنین است:

مقسوم‌علیه‌های ۲۸٤ عبارتند از ۱، ۲، ٤، ۷۱، ۱٤۲، و مجموع اینها برابر است با ۲۲۰؛ در صورتیکه مقسوم‌علیه‌های ۲۲۰ عبارتند از ۱، ۲، ۴، ۵، ۱۰، ۱۱، ۲۰، ۲۲، ۴۴، ۵۵، ۱۱۰ که مجموع اینها نیز بنوبهٔ خود برابر ۲۸٤ است. فیثاغورسیان چنین اعدادی را اعداد متحابّه (دوستدارهم) می‌نامیدند. کشف چنین زوج‌هائی برای یونانیان هم مشکلات زیادی بهمراه داشت و هم مورد علاقهٔ مفرط آنان بود.

گرچه تاکنون درحدود ۱۰۰ زوج با خاصیت فوق بدست آورده‌اند ولی این مسألهٔ عمومی که آیا بینهایت از این زوج‌ها وجود دارد یا نه هنوز حل نشده است.

هندیها اعداد متحابه را قبل از فیثاغورس شناخته بودند. همچنین قسمت‌هائی از کتاب مقدس را می‌توان یافت که نشان می‌دهد یهودیان چنین اعداد را مبشر سعادت می‌دانستند.

داستانی از قرون وسطی، که صحت آن مورد تردیداست، دربارهٔ شاهزاده‌ای نقل شده است که نامش از لحاظ علم حروف برابر ۲۸۴ است. این شاهزاده بدنبال عروسی می‌گشت که نامش برابر ۲۲۰ باشد و معتقد بود که این عدد ضمانتی آسمانی برای خوشبختی آنها در ازدواج است.

۹ پس از آن اعداد **تام** مورد توجه بودند. عددی مانند

۱۴ را در نظر بگیرید . چون مقسوم‌علیه‌های مربوط به آن را که عبارتند از ۱، ۲، ۷ با یکدیگر جمع کنید، عدد ۱۰ به دست می‌آید. بنابراین عدد ۱۴ بزرگتر است از از مجموع مقسوم‌علیه‌های آن و به همین دلیل عدد **زائد** (excessive) نامیده می‌شد . از طرف دیگر جمع مقسوم‌علیه‌های ۱۲ برابر است با ۱۶ که از خود عدد بزرگتر است و از آنجا این عدد را ناقص (defective) می‌نامیدند . اما در عدد تام فزونی و کاستی دیده نمی‌شود، این‌عدد درست برابر حاصل جمع مقسوم‌علیه‌های خود است .

کوچکترین اعداد تام ٦ و۲۸است که هندیها وعبرانی‌ها با آن آشنا بودند. بعضی ازمفسران کتاب مقدس ۶و۲۸رااعداد اساسی مهندس اعلای فلکی می‌دانستند. آنها به ۶ روز خلقت و به دورهٔ ۲۸ روزهٔ گردش ماه اشاره می‌کنند. بعضی دیگر پا را از این حد فراتر می‌نهند و نقص خلقت دوم را در این می‌دانند که در کشتی نوح نجات یافتگان به‌جای ۶ تن ۸ تن بوده‌اند .

سنت اوگوستین می گوید :

« شش در ذات خود عددیست تام، نه‌بخاطر اینکه خداوند همه چیزرا درشش‌روز آفرید، بلکه برعکس همه‌چیزرا باین دلیل درشش روز آفرید که این عدد تام است، و بازهم اگرخلقت شش روزه وجود نداشت شش عدد تامی می‌بود .» .

بنظر می‌رسد که کشف دو عدد تام دیگر مربوط به نیکوماخوس است. ماقسمت زیررا ازکتاب حساب اونقل می‌کنیم.

«اما همانطور که زیبایی و نیکی نادرند وانگشت شمار، وزشتی و بدی فراوان و بیحساب، اعداد ناقص نیز بسیارند و بی‌نظم وکشف آنها بی‌زوال و بدون اسلوب. اما اعداد تام هم قابل شمارش‌اند و هم به‌سهولت به رشتهٔ نظم در می‌آیند: زیرا در یکان فقط یك عدد تام یعنی ۶ وجود دارد؛ دردهگان نیز یك عدد ۲۸؛ درمیان صدگان سومین عدد تام ۴۹۶؛ و چهارمین عدد تام یعنی ۸۱۲۸ در سرحد ده‌هزارگان که کوچکتر از ده هزار است وجود دارد. وجه مشترك کلیهٔ آنها در آنست که یا به ۶ ویا به ۸ ختم می‌گردند و همهٔ آنها زوج‌اند.»

اگر نیکوماخوس منظورش این بوده است که درهر مرتبه عشراتی یك عدد تام وجود دارد اشتباه کرده است، زیرا پنجمین عدد تام ۳۳۶، ۵۵۰ و ۳۳ است. اما حدس او از هر لحاظ دیگر بسیار عالی بود. گرچه غیرممکن بودن عدد تام فرد هرگز اثبات نشده، ولی نمونه‌ای از آن نیز دیده نشده است. بعلاوه این نیز درست است که هرعدد تام زوجی باید به ۶ یا به ۸ ختم شود.

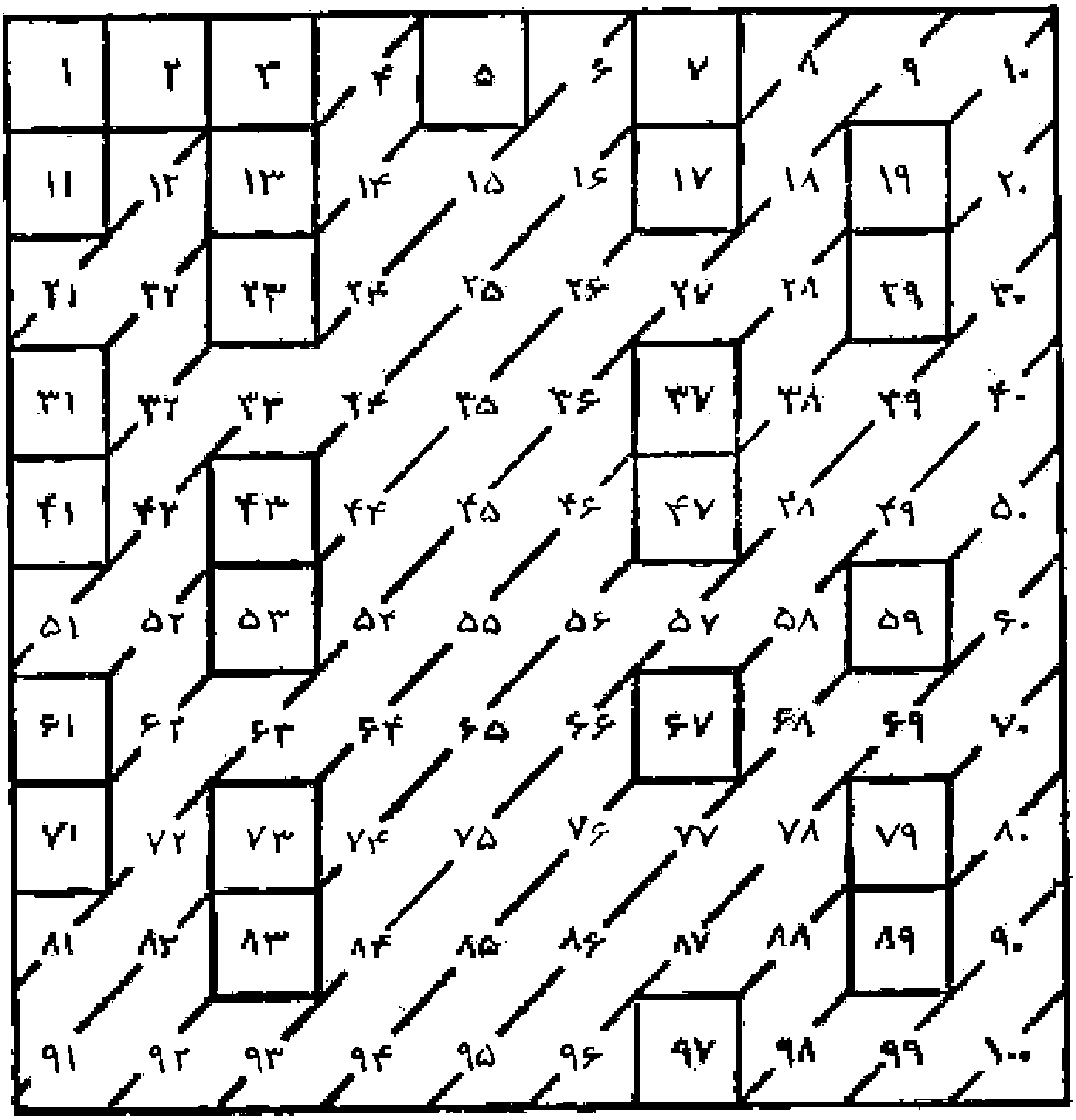
با توجه به‌اینکه اوقلیدس فصلی از کتاب اصول خودرا به اعداد تام اختصاص داده، می‌توان به اهمیتی که یونانیان برای این اعداد قائل بودند پی‌برد. وی در آن کتاب ثابت کرده است که هرعدد که به شکل $(۲^p-۱)\,۲^{p-۱}$ باشد تام است، به شرط آنکه درآن عامل فرد $۲^p-۱$ عدد اول باشد. تا این اواخر فقط دوازده عدد که به‌طور مشخص در رابطهٔ مزبور صدق می‌کند شناخته شده بود. مقادیر p برای این اعداد تام عبارتند از:

$$p = ۲،۳،۵،۷،۱۳،۱۷،۱۹،۶۱،۱۰۷،۱۲۷،۲۵$$

باظهور ماشین‌های حساب سریع ۵ عدد دیگر نیز به‌این فهرست اضافه شده است .

۱۰ ازروزگاران بسیارقدیم اعداد اول موردتوجه‌بودند. جالب ترین شیوه‌هایی که در ایـن باره بکار رفته است شیوهٔ غربال‌است که به‌اراتوستنس(Eratosthenes) یکی ازمعاصرین ارشمیدس نسبت داده‌شده است. درشکل زیر غربال اراتوستنس برای ۱۰۰ عدد اول دیده می‌شود . طرح مزبور شامل آنست‌که تمام اعداد را بطور طبیعی پشت سر هم بنویسیم و ابتدا تمام مضارب ۲ ، پس‌از آن باقیماندهٔ مضارب ۳ و سپس مضارب ۵ و غیره را حذف کنیم. اگر مثلا بخواهیم کلیهٔ اعداد اول کمتراز ۱۰۰۰ را معین کنیم ضرورتی نیست که کار حذف اعداد را تا بیش از مضارب ۳۱ دنبال‌کنیم، زیرا ۹۶۱ $=۳۱^۲$ بزرگترین مجذور عدد اولی است‌که کمتر از هزار است. امروزه با شکلی کاملتر‌ازطرح فوق‌جدول‌هایی برای‌اعداد اول‌تا ۱۰،۰۰۰،۰۰۰ تهیه شده است .

با اینکه شیوهٔ حذف شیوه‌ایست ذکاوتمندانـه ، ولی کاملا استقرائی است و از اثبات خواص عمومی اعداد اول عاجزاست. برای مثال اولین سؤالی‌که طبیعتاً پیش می‌آیدآنست‌که‌آیااعداد اول مجموعه‌ای‌محدودیا نامحدود می‌سازند. به‌عبارت دیگر، آیا تعداد اعداد اول لایتناهی است یا آنکه بزرگترین عدد اولی



غربال اراتوستنس برای اعداد اول کمتر از ۱۰۰

وجود دارد. برای این مسألهٔ اساسی اوقلیدس راه حلی داده که می‌توان آنرا به مثابهٔ اولین نمونهٔ پیشرفت در تاریخ ریاضیات به ثبت رساند.

در این راه حل اقلیدس برای اولین بار آنچه را که ما امروز اعداد **عامله‌ای** یا فاکتوریل (Factorial) می‌نامیم در تاریخ وارد کرده است. این حاصل ضرب n عدد صحیح متوالی از یک ببالا، نقش مهمی در مسائل ریاضی برعهده دارد. طرز

نوشتنی که امروز برای n عامله به کار می‌رود به‌صورت $n!$ است بدین ترتیب عاملهٔ ۷ عبارتست از: $۷! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ \times ۷$
جدولی از عاملها تا $۱۱!$ درصفحه ۶۸ داده شده است.

اوقلیدس، برای اثبات اینکه بزرگترین عدد اولی یافت نمی‌شود، می‌گوید که: هرگاه n هرعدد اولی باشد دراین‌صورت یا عدد $(n! + ۱)$ عددیست اول ویا بین $n!$ و $(n! + ۱)$ اعداد اولی می‌توان یافت. هردوحالت ممکن است: مثلا اگر n برابر ۳ باشدعدداقلیدس متناظر ۴ برابراست با ۷ که‌عددی‌است‌اول،، اما اگر n برابر ۷ باشد $n = ۵۰۴۰$ و عدد اوقلیدس متناظر با که ۷ برابراست با ۵۰۴۱ که عددیست غیراول وبرابر با ۷۱×۷۱.
بنابراین بین ۷ و $۷! + ۱$ عدد اول ۷۱ وجود دارد.

برای اثبات این امر درحالت‌کلی، اوقلیدس به توضیح زیرمبادرت کرد: دو عدد متوالی ممکن است مقسوم‌علیه‌مشترکی نداشته باشند؛ این امر بخصوص برای $n!$ و $n! + ۱$ صادق است؛ پس اگرعدد دوم‌اصولا مقسوم علیه‌هائی که عدد اول باشند داشته باشد، مسلماً بین آنها عدد n و اعداد ماقبل n یافت نمی‌شود. دراینصورت یا عدد اوقلیدس $(n! + ۱)$ شامل مقسوم علیه اول بزرگتر از n است ویا خود این‌عدداول خواهدبود: وبه‌این ترتیب ثابت‌می‌شود که‌درهردوصورت‌اعداداولی‌بزرگتراز n وجود دارد.

اوقلیدس چنین نتیجه‌گرفت که بزرگترین عدد اول یافت نمی‌شود، و یا به صورت دیگر تعداد اعداد اول بینهایت‌است.

۱۱ مسألهٔ دیگرمربوط به توزیع اعداد اول است. بعبارت

دیگر می‌توانیم از تکاثف اعداد اول، یعنی مثلاً از تعداد اعداد اول موجود در هرهزار عدد گفتگو کنیم . مسلماً این همان شمارش تعداد اعداد اولی است که کوچکتر از عدد معینی هستند. عده‌ای از ریاضی‌دانان جدید در حل این مسئله نبوغ زیادی از خود نشان دادند، اما راه‌حلی که تمام‌وکمال رضایت‌بخش باشد هنوز به‌دست نیامده‌است. باوجوداین، با دانش خود این نتیجه‌را می‌توانیم بگیریم که با جلو رفتن درقلمرو اعداد از تکاثف اعداد اول کاسته نمی‌شود.

در ۱۸۴۵، برتران (Bertrand) ریاضی‌دان فرانسوی ادعا کرد که بین هر عدد و دو برابر آن حداقل یك عدد اول می‌توان یافت. او پایهٔ این ادعا را یك بررسی تجربی در جدول اعداد اول قرار داد. برای مدت پنجاه سال این پیشنهاد بعنوان **اصل موضوع برتران** مورد قبول بود . بالاخره این حکم به وسیلهٔ ریاضی‌دان بزرگ روسی چبیشف (Tchebyshev) اثبات گردید. او درعین حال ثابت کرد که حتی در فاصله‌ای تنگ‌تر نیز اعداد اول موجودند . عاقبت در ۱۹۱۱ بونولیس (Bonolis) ریاضی‌دان ایتالیائی باارائهٔ فرمولی تقریبی برای اعداد اول بین x و $\frac{3}{2}$x این مسئله را به‌مقدار قابل توجهی به پیش برد . طبق این فومول بین ۱۰۰،۰۰۰،۰۰۰ و ۱۵۰،۰۰۰،۰۰۰ کمتر از یك میلیون عدد اول یافت نمی‌شود.

ازطرف دیگر نشان داده شده‌است که هرچه اعداد بزرگتر می‌شوند تعداد اعدادی بنام **اول‌های دو قلو** مانند (۵،۲) ، (۷،۵) ، (۱۳،۱۱) ، (۱۹،۱۷) ، (۳۱،۲۹) ، (۱۳ ،۴۱) و غیره کمتر می گردد . این تئوری قابل توجه به وسیلهٔ بروانز (Bruns) ریاضی‌دان آلمانی در ۱۹۱۹ به‌اثبات رسید .

ازطرف دیگر نشان داده شده است که هرچه اعداد بزرگتر می‌شوند تعداد اعدادی به‌نام **اول‌های دوقلو** مانند (۳ ، ۵)، (۵ ، ۷) ، (۱۱ ، ۱۳) ، (۱۷ ، ۱۹) ، (۲۹ ، ۳۱) ، (۴۱ ، ۴۳) و غیره کمتر می‌گردد . این قضیهٔ قابل توجه به وسیلهٔ برونس (Bruns) ریاضی‌دان آلمانی در ۱۹۱۹ به اثبات رسید.

۱۲ چگونه می‌توان یك عدد اول را تشخیص داد؟ می‌دانیم که هرگاه عددی به ۵ یا صفر یا رقم زوجی منتهی شود آن عدد مرکب یا غیراول است . اما فرض کنید عدد به ۳ یا ۷ یا ۹ ختم شده باشد. دراینصورت محکی نسبتاً ساده برای قابلیت تقسیم به ۳ یا ۹ در اختیار داریم : اگر جمع رقمهای عدد مضربی از ۳ یا ۹ باشد، در اینصورت آن عدد خود مضربی از ۳ یا ۹ خواهد بود. این قانون **سه سه** یا **نه نه طرح کردن** قانونی است قدیمی .

برای مقسوم‌علیه‌های دیگر شرایط پیچیده‌تر است. درست است که در ۱۶۵۴ پاسکال و صد سال بعد از آن لاگرانژ قضیه‌های بسیار تعمیم یافته‌ای در این باره ارائه دادند ، اما این قضیه‌ها بیشتر جنبهٔ ریاضی ذوقی داشت ودارای ارزش عملی نبود. پرفسور دیکسن (Dickson) در کتاب خود بنام **تاریخ نظریهٔ اعداد** این عبارت جالب را بیان داشته است :

«اگر تمام آنچه را که تاکنون آموخته‌ایم بکار بندیم ، باز هم تمام اوقات زمان برای بررسی این که بگوییم عددی ۱۵ یا ۲۰ رقمی اول است یا نه ، کافی نیست . »

دراین‌صورت بیان این امر تعجب‌آور نیست که‌سده‌هاست همه نوع کوشش به عمل می‌آید تا شاید فرمولی ریاضی و

عمومی بدست آید تا تمام اعداد اول را معین کند، یا لااقل طرح مخصوصی تهیه شود تا بدان وسیله اعداد اول شناخته شوند . در ۱۶۴۰ فرما (Fermat) ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی اعلام داشت که او توانسته است قالبی برای بدست آوردن اعداد اول بوجود آورد. امروزه اعدادی که طبق این قالب بوجود می‌آیند به اعداد فرما معروفند. اولین چهارعدد فرما چنین‌اند:

$$۲^{۲^{۴}}+۱=۶۵۵۳۶ \text{ ؛ } ۲^{۲^{۳}}+۱=۲۵۷ \text{ ؛ } ۲^{۲^{۲}}+۱=۱۷ \text{ ؛ } ۲^{۲}+۱=۵$$

فرما اول بودن این اعداد را رسیدگی کرد و برای مدتی به عمومیت این نظریه یقین حاصل کرد . با وجود این مدتی بعد شك و تردید در او راه یافت . در واقع در حدود یکصد سال بعد ، اویلر نشان داد که پنجمین عدد فرما عددیست غیر اول و یکی از عوامل ضرب آن ۶۴۱ است . از آن به بعد این حقیقت برای ششمین و هفتمین و تعداد دیگری از اعداد فرما باثبات رسید .

این مطلب خطر **استقراء ناقص** را بخوبی روشن می‌کند. بوسیلهٔ پاره‌ای ازعبارات درجهٔ دوم نظیر $f(n)=n^{۲}-n+۴۱$ می‌توان مثال‌های جالب‌تری تهیه کرد .

اگر به جای n مقادیر عددی بگذاریم نتیجهٔ زیر به دست می‌آید .

$$f(۱)=۴۱ \text{، } f(۲)=۴۳ \text{، } f(۳)=۴۷ \text{، } f(۴)=۵۳ \ldots$$

که تمام آنها اعداد اولند واین واقعیت را می‌توان تا $n = 40$ به اثبات رساند. اما برای $n = 41$ آشکارا دیده می‌شود که حاصل عددیست غیر اول : $f(41) = 41 \times 41$

۱۳ شکست در به دست آوردن شکلی کلی برای یافتن اعداد اول به جستجو در تعیین ملاکی غیر مستقیم برای آزمایش اول بودن اعداد انجامید. فرما تصورکرد که چنین ملاکی را در این تئوری یافته است : اگر n عدد صحیحی غیر مشخص باشد ، دو جمله‌ای $n^p - n$ مضربی است از p به شرط آن‌که p عدد اول باشد. برای روشن شدن مطلب حالت $p = 5$ رادر نظر می‌گیریم. داریم :

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 + 1)(n^2 - 1)$$

و به سهولت دیده می‌شود که n هر چه باشد ، یکی از عوامل فوق مضربی است از ۵ .

صحت قضیهٔ فرما به وسیلهٔ لایب‌نیتس و اویلر و دیگران تأیید گردید. یکی از مشکلات آن آنست که با توجه بصحتش نمی‌توان‌آن را ملاك قرار داد. **به عبارت دیگر شرط لازم است اما کافی نیست**. برای مثال ۳۴۱ عدد اول نیست اما $2^{341} - 2$ شامل عامل ۳۴۱ است .

ملاک ویلسن

شاخص ویلسن باقی ماندهٔ تقسیم ۱ + !(n — ۱) بر n است. اگر شاخص ویلسن صفر باشد عدد مربوط اول است.

شاخص ویلسن	(n − ۱)! + ۱ اعداد اوقلیدس	عاملها (n − ۱)!		مشخصه	n
۰	۲	۱	۱!	اول	۲
۰	۳	۲	۲!	اول	۳
۳	۷	۶	۳!	مرکب	۴
۰	۲۵	۲۴	۴!	اول	۵
۱	۱۲۱	۱۲۰	۵!	مرکب	۶
۰	۷۲۱	۷۲۰	۶!	اول	۷
۱	۵,۰۴۱	۵,۰۴۰	۷!	مرکب	۸
۱	۴۰,۳۲۱	۴۰,۳۲۰	۸!	مرکب	۹
۱	۳۶۲,۸۸۱	۳۶۲,۸۸۰	۹!	مرکب	۱۰
۰	۳,۶۲۸,۸۰۱	۳,۶۲۸,۸۰۰	۱۰!	اول	۱۱
۱	۳۹,۹۱۶,۸۰۱	۳۹,۹۱۶,۸۰۰	۱۱!	مرکب	۱۲

یکی از ملاکها یا به عبارت دیگر شروطی که هم لازم است و هم کافی است با قضیهٔ ویلسن بیان می‌شود، و چون اول کسی که لزوم این شرط را اثبات کرد لایب‌نیتس بود صحیح‌تر آنست که آنرا قضیهٔ لایب‌نیتس نام گذاریم. صد سال بعد لاگرانژ

بستگی شرط مزبور را نیز نشان داد . جدول بالا از عاملها واعداد بلافاصله پس‌از آنها که همان اعداد اوقلیدسی (n!+۱) است تشکیل شده است . دیده می‌شود کـه هرگاه (n+۱) برابر ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، که اعدادی اولند باشد ، (n+۱) مقسوم علیهی برای (n!+۱) است؛ درصورتی که برای مقادیر غیراول (n+۱) ، مانند ۴، ۶، ۸، ۹، ۱۰، تقسیم (n!+۱) بر (n+۱) باقیمانده‌ای بجای خواهد گذارد. این یك خاصیت کاملا عمومی است : شرط لازم وکافی برای آنکه **p عددی اول باشد آنست که عدد بلافاصله پس از !(p-۱) دارای عامل ضرب p باشد.**

این قضیهٔ جالب اهمیت نظری زیادی دارد . باوجوداین، تحقیق مستقیم آنکه ۱+!(p−۱) دارای مقسوم علیهی برابر p است به اندازهٔ تحقیق دربارهٔ اول بودن عـدد بزرگ p ، درصورت بزرگ بودن این عدد ، دشواری دارد .

از آن زمان ببعد راههای غیرمستقیم متعددی پیشنهادشد. یکی از جالب توجه‌ترین آنها **اصل موضوع گلدباخ (Goldbach)** یکی از معاصرین اویلر (Euler) است .

این اصل موضوع می‌گویدکه : **هرعدد زوجی مجموع دو عدد اول است .** این اصل برای اعداد تـا ۱۰۰،۰۰۰ اثبات گردیـده اما اثبات این بیان مهم هنوز نبوغ ریاضی‌دانها را به مبارزه می‌طلبد .

۱۴ « غیرممکن است مکعبی را به دو مکعب ، یا توان چهارمی را به دو توان چهارم ، یا بطورکلی هرتوانی بزرگتر از توان ۲ را به دو توان همدرجه تبدیل کرد . من اثباتی حقیقتاً عجیب برای این امر کشف کرده‌ام ، که این حاشیه گنجایش بیان آنرا ندارد.»

بیش از صد سال است که از تاریخ این یادداشت مشهوری که در حاشیه نوشته شـده می‌گذرد و بسیاری از دانشمندان ، از آن زمان تـاکنون آرزو می‌کنند که ای کاش هنگام نوشتن این سطور حاشیه‌ای بزرگتر در اختیار فرما (Fermat) بود .

تاریخـخ این مسأله بزمان قدیم مصریها برمی‌گردد که از وجود مثلث قائم‌الزاویه‌که اضلاعش بر نسبت ۳ و ۴ و ۵ بود با خبر بودند . در واقع آنها از ایـن مثلث در گونیای نجاری استفاده می‌کردند . من شنیده‌ام که چینی‌ها حتی امروز چنین طرحی را بکار می‌برند .

آیا این تنها مثلث قائم‌الزاویه‌ایست که اضلاعش را می‌توان به عدد صحیح بیان کرد ؟ نه ، بنیهایت سه ضلعی دیگر از همین نوع وجود دارد که تعدادی از آنها نیز برای فیثاغورسیان شناخته شده بود. دیوفانتوس اسکندرانی، که درقرن سوم عصر ما زندگی می‌کرد ، در کتاب **حساب** خود قاعده‌ای بـرای تعیین چنین اعدادی بیان داشته است .

عددهای فیثاغورسی

برای هر مقداری از u و v که ۲ u v مربعی کامل باشد ، مثلثی فیثاغورسی به دست می‌آید .

$$\left\{\begin{aligned} X &= u + \sqrt{2uv} \\ Y &= v + \sqrt{2uv} \\ Z &= u + v + \sqrt{2uv} \end{aligned}\right.$$

$2uv$	uv	$\sqrt{2uv}$	u	v	x	y	z
۴	۲	۲	۱	۲	۳	۴	۵
۱۶	۸	۴	۱	۸	۵	۱۲	۱۳
۱۶	۸	۴	۲	۴	۶	۸	۱۰
۳۶	۱۸	۶	۱	۱۸	۷	۲۴	۲۵
۳۶	۱۸	۶	۳	۹	۸	۱۵	۱۷
۳۶	۱۸	۶	۳	۶	۹	۱۲	۱۵
۶۴	۳۲	۸	۱	۳۲	۹	۴۰	۴۱
۶۴	۳۲	۸	۲	۱۶	۱۰	۲۴	۲۶

با اصطلاحات جدید این مسأله هم‌ارز حل معادلهٔ

$$X^2+Y^2=Z^2$$

بازاء مقادیر عددی صحیح است . تعدادی از این اعداد فیثاغورسی درجدول بالا داده شده است ، و فرمولهایی که در بالای جدول آمده امکان می‌دهد تا بدان وسیله کلیهٔ اعداد فیثاغورسی بدست آیند . ازاین فرمولها روشن می‌شود که معادلهٔ $X^2+Y^2=Z^2$ نه تنها جوابهای صحیح دارد، بلکه بینهایت جواب برای این معادله بدست می‌آید .

۱۵ طبیعتاً این سؤال پیش می‌آید که آیا این امر برای معادلات با درجهٔ بالاتر نیز صادق است یا نه . در ۱۶۲۱ چاپ جدیدی از **حساب** دیوفانتوس در فرانسه انتشار یافت و یك نسخهٔ آن بدست فرما رسید . دریکی از صفحات این کتاب فرما حاشیه‌ای نوشته‌که از آن تاریخ تاکنون جهان ریاضیات را سر درگم کرده است . در اصطلاح جدید بیان فرما را می‌توان به صورت فرمول زیر در آورد : **ثابت کنید که معادلهٔ**

$$X^n+Y^n=Z^n$$

که در آن X و Y و Z اعدادی صحیح‌اند، هنگامی که n عددی صحیح بزرگتر از ۲ باشد غیرممکن است.

وضع کنونی این مسأله چیست؟ اویلر غیر ممکن بودن مسأله را وقتی n برابر ۳ یا ۴ باشد نشان داد، دیریخلت (Dirichlet) آنرا برای n=۵ ثابت کرد. ثابت شده است که اگر قضیه برای مقادیر اول توان n صادق باشد برای سایر توانهای مرکب نیز صدق می‌کند. مدلل شده است که بیان فوق برای اشکال متعدد و معینی از توان n صحیح است، و برای n کوچکتر از ۲۶۹ معادلهٔ فرما جوابی ندارد. با اینحال قضیه از نظر عمومی هنوز ثابت نشده است و ادعای فرما در اثبات قضیهٔ فوق نیز مورد شك و تردید است.

مسألهٔ فرما، بخاطر اعلام جایزهٔ پرسروصدای ۱۰۰،۰۰۰ مارکی برای حل آن، شهرت فراوان کسب کرد. این جایزه در ۱۹۰۸ توسط دکتر ولفسکول (Dr . Wolfskoel) که خود نیز اوقات قابل توجهی را بی‌نتیجه برای حل این مسأله مصروف کرده بود تعیین شد. از آن ببعد عده‌ای از علاقمندان که تا آنوقت هم خودرا برای حل مسائلی نظیر تربیع دایره، تثلیث زاویه یا اختراع ماشینی که دائماً درحرکت باشد مصروف می‌داشتند، کوشش خودرا در زمینهٔ قضیهٔ فرما متمرکز کردند. برآورد شده است که بین ۱۹۰۸ تا ۱۹۱۱ بیش از هزار راه حل باصطلاح «کامل» به کمیته‌ای که مأمور پرداخت جایزه بود رسیده است. خوشبختانه آگهی مزبور مقرر می‌داشت که مقالات ارسالی درزمینهٔ این راه حل باید بچاپ برسد

و بدین ترتیب از شوروهیجان بسیاری از کسان که می‌خواستند در اینکار شرکت کنند کاسته شد . بجا است یادآوری کنیم که اغلب راه حل‌ها بوسیلهٔ خود نویسندگان چاپ می‌شد و انتشار می‌یافت. مشخصهٔ همهٔ این نوع کوشش‌ها یکی آنست که نویسندگان آنها بکلی فراموش کرده بودند که پیش از ایشان چه کوششهای عظیمی در این راه شده بوده است ؛ دیگر آنکه به پیدا کردن اصل اشکال کار توجهی نداشته‌اند .

این مسأله توجه بسیاری از ریاضی‌دانان سه قرن اخیر را بخود جلب کرد: اویلر و لاگرانژ ، وکومر (Kummer) و ریمان (Riemann) همه بیهوده کوشیدند تا آنرا اثبات یا رد کنند . اگر تمام مقالاتی که در این باره و موضوعهای مربوط به‌آن به‌چاپ رسیده جمع‌آوری شوند کتابخانهٔ کوچکی را پرخواهندکرد .

از میان کوششهایی که برای حل مسألهٔ فرما بعمل آمده علمی گسترش یافته‌است که اهمیت‌آن بسیار زیادتر ازاهمیت مسألهٔ اصلی است . بعضی‌از این نتایج بقدری مهم و پردامنه‌اند که باید ازاینکه موضوع اصلی لاینحل مانده است اظهاررضایت و خشنودی کنیم . مثلا ، هنگامی که ادواردکومر برای اثبات قضیهٔ فرما کوشش می‌کرد، نظریهٔ مشهور **اعداد ایدآل** خود را خلق کرد که یکی از تئوریهای اساسی و ازپیشرفتهای پر-بهای سدهٔ نوزدهم است .

باوجود این ، حجم این‌کتاب به من اجازه نمی‌دهد که حتی توضیح مختصری از این مفهوم ، که دارای میدان عملی بسیار وسیع است ، بدهم .

۱۶ تئوری اعداد صحیح که درجهان عرفانی دینی زائیده شده بود ، قبل از آنـکه وضعی علمی بدست آورد ، از مرحلهٔ سرگردانی و عنوان معماگشایی داشتن عبور کرد.

هراندازه این امر بنظر کسانی که امر عرفانی را با امر مجرد یکی می‌دانند نادرست بیاید ، حق اینست کـه پایهٔ این تصوف عددی به اندازهٔ کافی برامورمادی وغیرمجرد متکی بوده است . این امر در اطراف دوتصور دورمی‌زند . اعداد تصویری (اعداد مسطح واعداد مجسم) فیثاغورسی‌ها که ریشهٔ بسیارقدیمی دارد ، ارتباط نزدیکی را بین **صورت و عدد** نشان می‌دهد . اعدادکه نشان دهندهٔ اشکال ساده و منظم ، مانند مثلث و مربع و هرم و مکعبانـد ، آسانتر به تصور درمی‌آیـند و بنابراین اهمیت خاص دارند . درطرف دیگر اعداد تام و متحابه و اول را در اختیار داریم کـه ازنظرقابلیت تجزیه خواصی مخصوص دارند . همانطور کـه الواح سومری و پاپیروس‌های مصری به روشنی نشان می‌دهند ، می‌توان ریشهٔ توجه بـه قابلیت تقسیم و تجزیه اعداد را به اهمیتی که قدما برای مسائل مربوط به‌تقسیم **توزیع** (Distribution) قائل بودند رسانید .

این جنبهٔ تجسم وغیرمجرد بودن، نشان دهندهٔ خصوصیت تجربی دوران اولیه است که تاحدودی نظریهٔ اعداد آنرا تا به امروز محفوظ نگاهداشته . من اینك رشتهٔ کلام را بیـکی از نظریه‌سازان معروف عصرخودمان یعنی ج.ه . هاردی (G.H. Hardy) فقید واگذار می‌کنم .

« نظریهٔ اعداد ، بیش از هر شاخهٔ دیگر ریاضیات ، در آغاز جنبهٔ علمی تجربی داشته است . مشهورترین قضایای آن

همه از راه حــدس به وجود آمده‌اند ، و گاهی یك حدس صــد سال یا بیشتر بر اثبات قضیه مقدم بوده است ؛ آنچه که مردم را درخط طرح قضیه انداخته ، شواهدی بوده که از عدهٔ زیادی محاسبه به‌دست می‌آمده است .»

مجسم و ملموس همیشه بــرمجرد مقدم بوده ، و بـه این دلیل است که نظریهٔ اعداد بر علم حساب تقدم داشته است . و نیزامورمجسم همیشه بزرگترین سنگ راه توسعهٔ علم‌بوده است. تأثیرجادوئی **اعدادبصورت فردی** درفکر بشر، از زمانهای بسیار دوری که یاد آنها ازخاطره‌ها رفته است . مانع عمده‌ای در سر راه رشد یــك نظریهٔ جمعی دربارهٔ اعداد یا علم حساب بوده است ؛ و این درست شبیه است به این مسأله کــه توجه به فرد فردستارگان مدتهای درازی ازپیدایش وتکامل‌اخترشناسی علمی جلوگیری کرده است .

زنون ایلیایی ، به نقل سیمپلیکیوس «اما آنچه‌که وقتی گفته شده است ، همیشه می‌تواند تکرار شود »

٤ | آخرین عدد

۱ چه چیزی در ریاضیات وجود داردکه آنرا نمونهٔ عالی دقیقه وکمال مطلوب علومی‌که به‌پایهٔ این امتیاز نرسیده‌اند می‌سازد ؟ آرزوی پژوهندگان جوان، لااقل درمیدان زیست‌شناسی و علوم اجتماعی ، این است‌که میارها و شیوه‌هائی را گسترش دهندکه به این علوم امکان دهد تا در زمرهٔ علومی‌که راه رشد و تکامل دائمی را می‌پیمایند و تسلط ریاضیات را پذیرفته‌اند درآیند .

ریاضیات نه‌تنها الگوئی است‌که علوم دقیقه می‌کوشند تا

ساختمان خود را مطابق با آن طرح ریزی کنند ، بلکه ملاطی است که اجزای این ساختمان را به‌یکدیگر می‌چسباند و آن را پابرجا نگاه می‌دارد . در واقع ، تا وقتی که یك پدیدهٔ مورد بررسی به‌صورت قانونی ریاضی مورد مطالعه قرار نگرفته باشد، نمی‌توان آن را حل شده تلقی کرد . چرا این اعتقاد به وجود آمده است که فقط جریانات ریاضی می‌توانند برای مشاهده و تجربه و تفکر آن دقت و آن آگاهی و آن اطمینان محکمی را که علم واقعی ایجاب می‌کند فراهم آورند ؟

هنگامی که این‌جریانات ریاضی راتجزیه وتحلیل‌می‌کنیم می‌بینیم که بردومفهوم تکیه دارند: عدد وتابع؛واینکه تابع نیز درنهایت‌امر به عدد منجرمی‌شود؛واینکه مفهوم‌عمومی عدد نیز به نوبهٔ خود برپایـهٔ توالی طبیعی یعنی یك ، دو ، سه . . . قرار دارد .

پس ، اگر امیدی به یافتن سر اعتقاد ضمنی آدمی به استحکام و شکست ناپذیری استدلال ریاضی باشد ، این امیـد در شناختن خواص اعداد صحیح است .

۲ اولین‌کار برد عملی این‌خواص شکل ابتدائی‌چهارعمل اصلی حساب یعنی **جمع** و **تفریق** و **ضرب** و **تقسیم** اعداد را به خود می‌گیرد . این اعمال را در روزهای اول زندگی خود آموخته‌ایم ، و تعجب‌آور نیست اگر اغلب از مـا چگونـگی این آموزش را بکلی فراموش‌کرده باشیم. اجازه بدهیدخاطرهٔ آنرا زنده‌کنیم .

بیادبیاوریم که‌کاررا باجدول‌جمع ۲ = ۱ + ۱ ، ۳ = ۲ + ۱ ...

شروع کرده بوده‌ایم . اینکاررا مکرر در مکرر تمرین کردیم و بدین ترتیب توانستیم بی‌تأمل هر دو عددی را تاده با یکدیگر جمع کنیم . در جریان این اولین مرحلهٔ تعلیم به ما آموختند که ۵+۳=۳+۵ است و دانستیم که این قانونی است کلی نه امری اتفاقی . بعد بما آموختند که این خاصیت جمع را با این کلمات بیان کنیم :

حاصل جمع به‌ترتیب قرار گرفتن جمله‌های آن وابسته نیست . وقتی ریاضی‌دان می‌گوید: **جمع عملی است تبدیلی**(Commutative)مقصودی جز این ندارد وآن را با علائم زیر نشان می‌دهد :

$$a+b=b+a$$

بعدبما نشان داده شدکه (۴+۳)+۲=۴+(۳+۲) است ؛ و مقصود از این عبارت آن بود که با توجه به عبارات اول که منظور آن جمع ۳ است با ۲ و جمع ۴ است با مجموع آنها ، ترتیب عمل جمع اهمیتی ندارد وهرگاه مجموع (۴+۳) را با ۲ جمع کنیم همان نتیجهٔ اول بـه دست خواهد آمـد . ریاضی‌دان نیز که می‌گویـد : جمع عملی است **تلفیقی** (associative) ، مقصودی جز این ندارد و آنرا چنین می‌نویسد :

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

هرگز برای این اظهارات اهمیت زیادی قائل نبودیم . معذلك اینها پایه و اساس کارند و قانون جمع اعداد بزرگتر بر روی آنها قرار دارد . طرح زیر :

۲۵
۳۴
۵۶
___
۱۱۵

چیزی جز فشردهٔ عبارت زیر نیست :

۲۵ + ۳۴ + ۵۶ = (۲۰ + ۵) + (۳۰ + ۴) + (۵۰ + ۶) =
(۲۰ + ۳۰ + ۵۰) + (۵ + ۴ + ۶) = ۱۰۰ + ۱۵ = ۱۱۵

که در آن جنبهٔ تبدیلی و تلفیقی بودن عمل جمع نقشی اساسی ایفا می‌کند .

پس از آن بکار **ضرب** پرداختیم . باردیگر جدولی بزرگ را ازبر کردیم تا توانستیم بدون تأمل حاصلضرب دو عدد تا ده را بیان کنیم . مانند جمع مشاهده کردیم که **ضرب هم تلفیقی و هم تبدیلی است** . البته این کلمات را بکار نمی‌بردیم ، ولی عمل ما متضمن شناختن این مفاهیم بود .

هنوز خاصیت دیگری که مربوط بهردوعمل جمع وضرب می‌شد وجود داشت . معنی حاصل ضرب (۳ + ۲) × ۷ آنست که ۷ باید درحاصل‌جمع (۳ + ۲) ، یعنی عدد ۵ ، ضرب شود؛ اما باجمع دوحاصلضرب جزئی (۲ × ۷) و (۳ × ۷) همین نتیجه را می‌توان به دست آورد . ریاضی‌دان این خاصیت را به این عبارت بیان می‌کند که : ضرب نسبت به جمع **توزیعی** است و چنین می‌نویسد :

$$a(b+c)=ab+ac$$

همین قابلیت توزیع پایهٔ طرحی است که امروز برای عمل

ضرب اعداد بزرگتر از ده بکار می‌بریم. در واقع، هنگامی که عمل زیر را تحلیل کنیم.

$$\begin{array}{r} ۲۵ \\ ۴۳ \\ \hline ۷۵ \\ ۱۰۰ \\ \hline ۱۰۷۵ \end{array}$$

درمی‌یابیم که این عمل چیزی نیست جزصورت فشرده‌ای از رشته‌ای عملیات که درآنها خاصیت توزیعی آزادانه بکار رفته است. یعنی:

$$\begin{aligned} ۲۵ \times ۴۳ &= (۲۰+۵) \times (۴۰+۳) \\ &= [(۲۰+۵) \times ۳] + [(۲۰+۵) \times ۴۰] \\ &= (۲۰ \times ۳) + (۵ \times ۳) + (۲۰ \times ۴۰) + (۵ \times ۴۰) \\ &= ۷۵ + ۱۰۰۰ = ۱۰۷۵ \end{aligned}$$

۴ اینها واقعیاتی‌هستندکه نه‌تنها برای همهٔ متفکرین، بلکه برای‌تمام‌کسانی‌که‌تاحدودی‌تحصیل کرده‌اندپایهٔ‌تعلیمات‌ریاضی‌را میسازند. برروی این واقعیات علم حساب که اساس‌ریاضیات است، بناشده، و ریاضیات بنوبهٔ‌خودتکیه‌گاه همهٔ‌علوم‌محض وعملی است‌که سرچشمهٔ‌قیاس‌کلیهٔ پیشرفتهای فنی وریاضیات می‌باشند.

بعدها واقعیتها و اندیشه‌ها و مفاهیم جدیدی بر اندوختهٔ ذهنی‌ما اضافه شد، اماهیچ یك ازآنهامانند خواص اعدادصحیح

که در سنین حساس پنج شش سالگی آموخته بودیم بر ایمان اطمینان‌بخش و مستحکم نبوده . این مطلب را در ضرب‌المثل معروف زیر می‌توان یافت: «این امر مثل دو دو تا چهار تا واضح و آشکار است .»

این مطالب را در سنی آموختیم که بدانستن «چگونگی» اشیاء تمایل داشتیم. هنگامی که بقدر کافی پا بسن گذاردیم و «چرا»ی اشیاء را مورد توجه قرار دادیم ، این قواعد درجریان کاربرد دائمی خود چنان جزء لاینفکی از دستگاه مغزی ما شدندکه بر ایمان صورتی بدیهی و مسلم پیدا کردند .

اعتقاد بر آن است که بسط و گسترش فرد می‌تواند تحول نوعی را که فرد به‌آن متعلق است نشان دهد . تقریباً درپیشرفت عقل بشری نیز چنین اصلی حاکم است . در تاریخ ریاضیات «چگونه» همیشه بر «چرا» و راه و رسم کار بر فلسفهٔ آن پیشی داشته است .

این امر بویژه درمورد حساب صادق است . فن شمارش وقواعد محاسبه درآخر دورهٔ رونسانس واقعیاتی پابرجا وثابت بودند . اما فلسفهٔ عدد تا آخرین ربع سدهٔ نوزدهم هنوز بوجود نیامده بود .

۴ هرچه بیشتر ازعمر ماسپری می‌شود ، موقعیت‌های زیادتری به‌دست می‌آوریم تا این قواعد را درکارهای روزانهٔ خود به‌کار بندیم ، و بیش از پیش به عمومیت آن‌ها معتقد می‌شویم . نیرومندی حساب در **تعمیم مطلق** آن نهفته است . قواعدآن هیچ استثنائی‌را نمی‌پذیرند: آن‌هادربارهٔ **همهٔ عددها** صادقند.

همهٔ عددها ! همه‌چیز به این‌واژهٔ کوتاه ولی بسیار مهم **همه** مربوط است .

هنگامی که این واژه را برای **طبقهٔ محدود ومعینی** از اشیاء یا امور به‌کار می‌بریم ، هیچ ابهامی پیش نمی‌آید . مثلا **هنگامی که می‌گوئیم «تمام مردم زنده»، مفهوم کاملا معینی به‌آن** داده‌ایم. می‌توانیم تصور کنیم که تمام بنی نوع بشر بنحوی به‌دنبال یکدیگر ردیف شده‌اند : در این‌ردیف یك **اولین** انسان وجود دارد و یك **آخرین** نیز وجود خواهد داشت . برای اطمینان و برای اثبات دقیق اینکه خاصیتی برای تمام مردم زنده صادق است ، باید ثابت‌کنیم که این‌خاصیت برای هرفرد صدق می‌کند. با وجود آنکه چنین‌کاری بسیار دشوار است و دشواریهای غیر قابل عبوری در این راه وجود دارد، این مطلب کاملا برما معلوم است که این مشکلات تنها از لحاظ **فنی** محض است نه ازلحاظ عقلی و **ادراکی** . و این امر برای هر مجموعهٔ**محدود** و به عبارت دیگر **برای هرمجموعه‌ای که دارای اولین وآخرین عضو است صادق می‌باشد، زیرا چنین‌مجموعه‌ای رامی‌توان با شمارش به پایان رساند .**

آیا وقتی در بارهٔ **همهٔ عددها** صحبت‌می‌کنیم می‌توانیم همین منظور را داشته باشیم ؟ در اینجا نیز می‌توان مجموعه را بصورت ردیفی درآورد، و این ردیف دارای عضو اولی‌بنام عدد **یك** خواهد بود . اما دربارهٔ آخرین عضو آن چه باید گفت ؟

جواب‌سؤال آماده‌است: **آخرین عددی وجودندارد!** جریان‌شمارش‌از نظرادراك نمی‌تواند خاتمه‌ای داشته باشد. **هرعدد**

عدد دیگری در پی دارد. شمارهٔ اعداد **بینهایت** است .

اما اگر آخرین عدد موجود نباشد ، منظور ما از همهٔ اعداد و بخصوص از **خاصیت همهٔ اعداد** چیست؟ چگونه می‌توان چنین خاصیتی را ثابت کرد : در واقع این کار با بررسی درحالت هر فرد **میسر نیست** ، زیرا پیشاپیش می‌دانیم که نمی‌توانیم در مورد تمام آحاد این کار را انجام دهیم .

در آستانهٔ ریاضیات به **معمای بینهایت** برمی‌خوریم که شبیه اژدهای افسانه‌ای است که از ورود بباغ جادوئی جلوگیری می‌کند .

۵ سرچشمهٔ ادراک بینهایت یعنی اعتقاد به پایان‌ناپذیری در جریان شمارش چیست ؟ آیا تجربه است ؟ محققاً نه ! تجربه بما محدودیت تمام اشیاء و تمام جریانات بشری را می‌آموزد . می‌دانیم که هر کوشش برای تمام کردن عدد از راه شمارش به تمام شدن خود ما پایان می‌یابد .

و نیز وجود بی‌نهایت از راه ریاضی ثابت نمی‌شود ، زیرا بینهایت ، یا پایان ناپذیری جریان شمارش ، فرضی است ریاضی ، که **پایهٔ حساب است** و تمام ریاضیات بر روی آن استوار شده است . پس آیا حقیقتی مافوق‌الطبیعه است ؛ آیا یکی از مواهبی است که وقتی خداوند انسان را برهنه و جاهل و آزاد برای سیر و گردش وارد صحنهٔ گیتی کرد به او بخشید ؟ یا اینکه تصور بینهایت از کوششهای بیهودهٔ انسان برای رسیدن به آخرین عدد بوجود آمده است ؟ آیا وجود بینهایت فقط اعتراف انسان به عدم توانایی او در شماره کردن اجزای گیتی با عدد است ؟

« آخرین عدد وجود دارد ، اما در حدود دسترسی بشر نیست، زیرا بخدایان تعلق دارد .» چنین است اندیشهٔ اصلی اغلب ادیان کهنه و قدیمی. شمارهٔ ستارگان آسمان ، دانه‌های شن ، و قطرات آب اقیانوس نمونه‌ای از این **ماوراء غایت‌اند** که فکر انسانی را بدان راهی نیست. نویسندهٔ کتاب **مزامیر** دربارهٔ یهوه می‌گوید : « اوست که ستارگان را شمرده و به همهٔ آنها نام داده است.» و موسی در مسألت از خدا برای انجاز وعده‌ای که به‌قوم برگزیدهٔ خود داده ، چنین می‌گوید : «او که‌گرد وغبار زمین را می‌تواند شمرد به شمارش نسل تو نیز توانا است .»

۶ «شاهی است به نام گلون Gelon که تصور می‌کند تعداد شن‌ها بی‌ینهایت است؛ و منظور من از شن تنها آنهائی نیست که در اطراف سیراکوس و جاهای دیگر سیسیل موجودند ، بلکه مقصودم تمام شن‌هائی است که در همه جا ، چه مسکون وچه نامسکون ، یافت می‌شود . و نیز کسانی هستند که بدون آنکه تصور کنند که این تعداد بینهایت است ، چنین می‌اندیشند که تا کنون هیچ عددی به آن بزرگی که بتواند ازکثرت این شن‌ها تجاوز کند نامگذاری نشده است. وروشن است که کسانی که چنین عقیده‌ای دارند ، اگر توده‌ای از ریگ را به‌بزرگی کرهٔ زمین که حفره‌ها و دریاهای آن تا قلل کوهها پر شده باشد درنظـر بگیرند ، تصور می‌کنند نمی‌توان عددی را بیان کرد که از شمارهٔ این ریگ‌ها تجاوز کند. اما من کوشش می‌کنم تا با دلائلی هندسی که شما بتوانیدآن را درک کنید، به وسیلهٔ اعدادی که نامگذاری کرده‌ام و برای زئوکسیپوس فرستاده‌ام بشما نشان دهم که نه تنها این اعداد از تعداد ریگهائی که این زمین را پر کرده‌اند ، بلکه ازهمهٔ دانه‌های شنی که بتوانند تمام گیتی را پر کنند ، تجاوز خواهند کرد . »

ارشمیدس : ریگ‌شمار

اما گیتی ارشمیدس کره‌ای بود که به‌فلك ستارگان ثابت محدود شده بود. او قطر این کره را ۱۰،۰۰۰ برابر قطر کرهٔ زمین برآورد کرده بود. وی، با این فرض که تعداد دانه‌های شنی که حقهٔ خشخاشی را پر می‌کنند ۱۰،۰۰۰ است و قطر زمین از ۱۶،۰۰۰ کیلو متر (۳۰۰،۰۰۰ استادیا) تجاوز نمی‌کند، برای شمارهٔ دانه‌های شنی که بتوانند گیتی را پـر کنند عددی افسانه‌ای با ۵۲ رقم بدست آورد .

ارشمیدس برای بیان این عدد واحد جدیدی بنام **اکتاد** (Octade) اختراع کرد که برابر عدد ۱۰۰،۰۰۰ خودمان است.

سرگذشت کوشش برای تربیع دایره نمونهٔ دیگری را نشان می‌دهد. مسأله درشکل اصلی خود این بود که بوسیلهٔ خط‌کش و پرگار مربعی هم سطح با دایره‌ای مفروض بسازیم. اکنون ساختن مربعی هم‌ارز با کثیرالاضلاعی مثلا ۸ ضلعی ، محاط در دایره میسر است. از طرف دیگر معلوم شده است که اگر تعداد اضلاع کثیرالاضلاع را به ۱۶ ، ۶۴،۳۲ وغیره افزایش دهیم، سطح آن را بیش از پیش بسطح دایره نزدیك کرده‌ایم. شك نیست که بعضی از هندسه‌دانان یونان عمل دو برابر کردن اضلاع چند ضلعی را نه تنها وسیلهٔ نزدیك شدن به دایره بلکه وسیله‌ای برای بدست آوردن دایره می‌دانستند ، یعنی آنها تصور می‌کردند اگر بتوانند این عمل را بقدر کافی دنبال کنند در نهایت امر به یك کثیرالاضلاع نهائی که نقطه به‌نقطه منطبق بر دایره است خواهند رسید .

فرض قابل قبول آنست که تصور ابتدائی دربارهٔ بینهایت این نبوده است کــه بینهایت **غیرقابل شمارش** است ، بلکه

بینهایت را چیزی **هنوز ناشمرده** تصور می‌کردند . مفهوم آخرین عدد نمایندهٔ **صبر و پشتکار** بود ، وچنان می‌نمود که آدمی فاقد این **دو** صفت است .

در داستان برج بابل نیز رسیدن به آسمان چیزی نظیر همین جریان بوده است . آخرین عدد ، مانندآسمان ، مخصوص خدا بود ، و همین بلندپروازی انسان سبب شد کـه سازندگان برج بابل چنان شوندکه هیچ یك زبان دیگری را نفهمند .

۷ این عجز از فهمیدن زبان یکدیگر تا بـه امروز نیز ادامه دارد . در اطراف بینهایت تمام ابهامات و معماهای ریاضی به وجود آمده است : از استدلالهای زنون گرفته تـا **تناقضات کانت و کانتور (Cantor) . از این داستان درفصل دیگری گفتگو** خواهیم کرد . آنچه‌که **در اینجا باید گفت آنست که این ابهامات وتناقضات برای بوجود آوردن وضعی انتقادی** در برابر پایه‌های حساب بسیار ثمربخش بـوده است . زیرا ، باتوجه به اینکه خواص اعداد صحیح پایهٔ ریاضیات است ، اگر این‌خواص بوسیلهٔ قواعد منطق **صوری** قابل اثبات باشند ، در **اینصورت تمام ریاضیات دستگاهی منطقی خواهد بود . ولی ، اگر منطق برای اثبات این خواص کافی نباشد ، در اینصورت ریاضیات تنها برپایهٔ منطق قرار نخواهد داشت و قدرت خلاقهٔ** آن برچیزی اغفال کننده و غیرقابل لمس تکیه می‌کندکه بشر نام **مکاشفه** را به آن داده است .

اجازه بدهید چیزی را مبهم نگذاریم ! آنچه نامعلوم است اعتبار و صحت ایـن خواص نیست ، بـلکه موضوع بر سر

اعتبار استدلالهائی است که می‌خواهند صحت این‌خواص را ثابت کنند. مسائلی‌که از زمان پایه‌گذاری ریاضیات تا به امروزمورد گفتگو بوده است در معرض همین تحلیل‌های پـژوهشی قرار گرفته است .

این مسائل‌کـه متفکرین ریاضی را بـه دو اردوی رقیب یکدیگر، یعنی **مکاشفه‌گران** (intuitionists) درمقابل **صوریگران** (formalists) تقسیم کرده ، عبارت از اینها است :

۱ـ استدلالی ریاضی ازچه ساخته شده است ؟ ۲ـ ماهیت استدلال بطور اعم و استدلال ریاضی بطور اخص چیست ؟ ۳ـ مقصود **ازوجود ریاضی** چیست؟

۸ قوانین استدلال سالم به‌سن کوهها وتپه‌های زمین است. درست است‌که ارسطو این قوانین را صورت‌بندی کرده است ، اما سالیان دراز پیش‌از ارسطو آنها را می‌شناختند . استخوان‌بندی فهم بشری ازاین قوانین ساخته شده : هرانسان باشعوری موقعیت کاربرد این قوانین را در زندگی روزانهٔ خود دارد . او می‌داند که برای استدلال صحیح باید اول مقدمه‌ها را بدون ابهام تعریف کند و سپس بـا استفادهٔ گام به‌گام از قوانین منطق در آخر کار به نتیجه‌ای برسد کـه نتیجهٔ **منحصربفرد** اعمال منطقی است که در رسیدن به نتیجه انجام داده است .

اگر این نتیجه با واقعیات مشهود تطبیق نکرد ، دراین صورت قدم اول‌آنست که ببینند آیا این قوانین صحیح بکاربرده شده‌اند یا نه . اینجا جای‌آن نیست که صحت این قوانین تحلیل

شود . واین از آن جهت نیست که این قوانین ، ازکورهٔ انتقاد عصر حاضرگذشته‌اند ! بلکه کاملا مطلب بعکس است : در واقع یکی از آنها مرکز جدل و گفتگوهائی است که یك ربع قرن بطول انجامیده است و نشانه‌ای از فرو نشستن آن بچشم نمی‌خورد . بهرصورت ، این امر برای خود داستانی جداگانه داردکه بموقع خواهدآمد .

اگر معلوم شد که قوانین منطق بدرستی بکار برده شده‌اند ، دراینصورت اختلاف ، اگر اختلافی موجود باشد ، ازاینجاممکن است ناشی شده باشدکه درمقدمه‌چینی ما اشتباهی رخ داده باشد . ممکن است در جائی از مفروضات ما تناقضی وجود داشته باشد ، یا یکی از مقدمه‌های ما با دیگری متضاد باشد .

اما برقرار کردن دسته‌ای از مفروضات برای هرقسمت معینی از دانش کار ساده‌ای نیست . اینکار نه تنها مستلزم قضاوتی تحلیلی و دقیق است ، بلکه احتیاج به مهارت زیاد نیز دارد . زیرا ، علاوه بررهائی ازتناقض و تضاد ، مطلوب آنست که هرفرضی مستقل از سایر مفروضات بوده سرتاپای دستگاه فراگیر باشد ، یعنی ، بطورکامل مسألهٔ مورد بررسی را دربر گیرد . آن شاخه از ریاضیات که با چنین مسائلی مربوط می‌شود **بدیهه‌شناسی** (axiomatics) نامیده می‌شود وبوسیلهٔ مردانی مانند پینو (Peano) و راسل (Russell) وهیلبرت (Hilbert) پرورش یافته است . با این شکل‌کار ، منطق ، قبلا شاخه‌ای از فلسفه بود ، بتدریج بصورت جزئی از پیکر ریاضیات شده است .

به مطلب خودمان برگردیم و فرض کنیم کــه مقدمه‌های خود را بررسی کردیــم و آنها را مصون از تناقضات یافتیم . در این صورت می‌گوئیم که نتیجهٔ ما کامل وبدون نقص منطقی است . اگر، باوجود این ، نتیجه‌با واقعیات مشهودتطبیق نکرد، می‌دانیم که مفروضات ما بامسئله مشخصی، که برای‌آن بکاربرده شده‌اند ، مناسب نیستند . در برش لباس اشتباهی رخ‌نداده است چین و چروك در این ویاآن نقطه مربوط بکسی است که‌خواسته است آن را ببدن **آزمایش** کند .

۹ جریان استدلالی‌که هم‌اکنون توضیح داده شده **قیاسی** (deductive) نامیده می‌شود . این شکل استدلال از خواص عمومی‌که بشکل **تعاریف و اصول موضوعه** یا **بدیهیات** است شروع می‌شود وبوسیلهٔ قوانین منطق ازآنها نتایجی مربوط به اشیاء و یا وقایعی کــه در موارد مخصوص اتفاق افتاده‌اند بدست می‌آید .

استدلال ریاضی صورت قیاسی دارد. این صورت قیاسی تقریباً درهندسه‌کمال تحقق رایافته وبهمین دلیل‌است که‌ساختمان منطقی هندسه الگوئی برای تمام علوم دقیقه شده بود .

ماهیت شیوهٔ دیگری‌که در بررسی‌های عملی بکار رفته است ، یعنی شیوهٔ **استقراء** ،(induction)با آنچه گفته شد کاملا متفاوت است. دراین روش استدلال، عموماً ازخاص شروع می‌شود وبه عام ختم می‌گردد . این عمل نتیجهٔ مشاهده و تجربه است . برای یافتن خاصیت طبقهٔ معینی از اشیاء ، عمل مشاهده یاآزمایش‌خود را ، دراوضاع واحوال تاحد ممکن یکسان ، به دفعاتی هرچه بیشترکه مقدور است‌تکرار می کنیم .آنگاه ممکن

است چنین پیش آید که درحین مشاهده یا تجربه گرایش مخصوصی خود نمائی کند . در اینصورت گرایش مزبور بعنوان خاصیت آن طبقه مورد قبول قرار خواهد گرفت. برای مثال، اگر تعدادی نمونه‌های سربی را، که بقدر کافی زیاد باشند تحت تأثیر گرما قرار دهیم و به این نتیجه برسیم که در کلیهٔ این نمونه‌ها نقطهٔ ذوب از ۳۲۸ درجه سانتی گراد شروع می‌شود، به این نتیجه می‌رسیم که نقطهٔ ذوب سرب ۳۲۸ درجه است . پشت سر این بیان این اعتقاد وجود دارد که صرف نظر از تعداد نمونه‌هائی که باید آزمایش شوند، با ثابت بودن شرایط همهٔ نتایج یکسانند .

این جریان استقرائی که پایهٔ تمام علوم تجربی است ، برای همیشه ، درمیدان ریاضیات دقیق تحریم شده است. نه تنها اثبات قضیه‌ای ریاضی از این طریق مضحك جلوه می‌کند ، بلکه حتی برای امتحان یك حقیقت مسلم نیز غیرقابل قبول است. **زیرا ، برای اثبات یك قضیهٔ ریاضی، روشنی وصحت حالات متعدد کافی نیست، درصورتی که برای رد یك ادعا فقط یك نمونه کفایت می کند** . یك قضیهٔ ریاضی وقتی صحیح است که به تضادی منطقی منجر نگردد ودرغیر این صورت غلط است. **شیوهٔ قیاس برپایهٔ اصل تناقض قرار گرفته است وبچیز دیگری تکیه ندارد** .

۱۰ بدلیل بسیار موجهی استقراء را در ریاضیات راهی نیست ، عبارت درجهٔ دوم ($n^2 - n + 41$) را، که در فصل قبل بدان اشاره کرده‌ام ، در نظر بگیرید . در این عبارت n را برابر ۱، ۲، ۳، ... تا ۴۰ قرار می‌دهیم : درهر یك از این حالات نتیجهٔ کار عددیست اول . آیا باید از این امر چنین نتیجه گرفت که این

عبارت بازاء تمام مقادیر n اعدادی اول بوجود می‌آورد ؟ حتی خواننده‌ای هم که چندان در ریاضی ماهر نباشد ، خطا بودن چنین نتیجه‌ای را تشخیص می‌دهد : باوجود این قوانینی درفیزیك هست که با مدارك و شواهدی کمتر از این اعتبار و صحت آنها مورد قبول قرار گرفته است .

ریاضیات علمی قیاسی است و حساب شاخه‌ای است از ریاضیات . در اینجا استقراء قابل قبول نیست. قضایای حساب، مثلا خواص تلفیقی و تبدیلی و توزیعی چهارعمل اصلی که حتی در ساده‌ترین محاسبات نقشی اساسی ایفا می کنند ، باید با شیوه‌های قیاسی اثبات گردند. دراینجا اصل بکار رفته چیست ؟

این اصل نامهای مختلفی بخودگرفته است، ازقبیل **قیاس ریاضی** و **قیاس کامل** **استدلال ارجاعی** (reasoning by recurrence) فقط نام آخر قابل قبول است ودواصطلاح دیگر گمراه کننده است . کلمهٔ قیاسی تصوری کاملا خطا آمیز در بارهٔ شیوهٔ کار ایجاد می کند ، زیرا متضمن آزمایشهای منظم نیست .

برای روشن شدن مسأله بوسیلهٔ یك مثال ، ستونی سرباز را در نظر می گیریم . به هر یك از این سربازها دستور داده شده که هر خبری که بدست آورد به سرباز کنار دست خود بازگو کند. افسرفرماندهی که هم اکنون واردمیدان شده است می‌خواهد معلوم کندکه آیا همهٔ سربازها از واقعه‌ای که اتفاق افتاده است آگاهی دارندیانه . آیا باید ازفردفرد سربازان سؤال کند؟ اگر مطمئن باشد که هرچه را که سرباز طرف راست او نیز خواهد دانست، چنین پرسشی ضروری نیست، ودراین‌صورت وقتی معلوم کرد که **اولین** سربازطرف چپ صف ازواقعه آگاه است می‌تواند

نتیجه بگیرند که **همهٔ** سربازها از آن آگاهی دارند.

برهانی که در اینجا بکاررفته مثالی از استدلال ارجاعی است. این شکل کار دارای دو مرحله است. ابتدا نشان داده شده است قضیه‌ای که می‌خواهیم اثبات کنیم از آن نوعی است که برتراندراسل نام **موروثی** برآن نهاده است: بدین‌معنی که اگر قضیه در مورد هریک از اعضای یک رشته صادق باشد، صحت آن برای خلف این عضو بحکم یک اجبار منطقی مسلم است. در مرحلهٔ دوم، ثابت می‌شود که این قضیه برای اولین جملهٔ رشته صادق است. نام عمل مرحلهٔ دوم همان است که به اصطلاح **قیاس** نامیده می‌شود. قضیه‌ای که ازنظرماهیت موروثی خود برای اولین عضو صحیح باشد برای دومی نیزصحیح است، و وقتی برای دومی صحیح بود برای سومی نیزمعتبر است و الی آخر. بدین طریق آنقدر کار را ادامه می‌دهیم تا همهٔ افراد رشته تمام شوند، یعنی به **آخرین عضو** برسیم.

۱۱ دراین طرز اثبات هردومرحلهٔ قیاس وکیفیت‌موروثی لازم‌اند و هیچیک از آنها به‌تنهائی‌کافی نیستند. سرگذشت دو قضیه از فرما می‌تواند جریان را روشن کند. قضیهٔ اول‌عبارتست ازاینکه بازاء جمیع مقادیر n عبارت $۱+۲^{۲^n}$ اول است. فرما به‌وسیلهٔ آزمایش‌عملی نشان‌داد که این‌قضیه برای $n=۰$، $n=۱$، ۲، ۳ یا ۴، صادق است. اما او نتوانست خاصیت موروثی قضیه را اثبات‌کند. و چنان که می‌دانیم، اویلر با نشان دادن اینکه عبارت فوق برای $n=۵$ اول نمی‌شود قضیه را ردکرد.

قضیهٔ دوم می‌گوید که معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ ، درصورتی که n بزرگتر از ۲ باشد ، ریشه‌های صحیح ندارد . دراینجا مرحلهٔ قیاس عبارت از آنست کـه نشان داده شود قضیه برای $n = ۳$ صادق است ، یعنی معادلهٔ $x^۳ + y^۳ = z^۳$ دارای ریشه‌های صحیح نیست . شاید فرما راه اثباتی برای این امر داشته است ، و اگرچنین بوده باشد ، دلیلی برای حاشیهٔ مشهوری که توسط فرما نوشته شده به‌وجود می‌آید . بهرحال دیدیم که قدم اول به وسیلهٔ اویلر برداشته شد. اکنون باید خاصیت موروثی را نشان داد ، بعبارت دیگر ، با فرض اینکه قضیه برای مقدار معینی از n مثلا p صحیح است بحکم‌الزام منطقی باید این نتیجه بدست آید که‌معادلهٔ $x^{p+۱} + y^{p+۱} = z^{p+۱}$ دارای ریشه‌ای‌صحیح نیست .

قابل‌توجه است که ما صورت‌بندی صریح **اصل ارجاعی** را مدیون نبوغ بلزپاسکال (Blaise Pascal) یکی‌از معاصرین فرما هستیم. پاسکال اصل مزبور را در رساله‌ای‌به‌نام **مثلث حسابی** (the Arithmetic Triangle) که در ۱۶۵۴ منتشر شد بیان داشته است . اما بعداً معلوم شد کـه چکیدهٔ این رساله در نامه‌ای بوده است که بین پاسکال و فرما دربارهٔ مسئله‌ای مربوط بیك بازی قمار مبادله شده بود و ایـن همان نامه است‌که امروزآن را هستهٔ نظریهٔ احتمالات می‌دانند.

وقتی می‌بینیم اصل استدلال ارجـاعی که برای ریاضیات محض دارای این همه اهمیت اساسی است ، ونظریهٔ احتمالات، که‌آن نیزاساس علوم قیاسی را تشکیل می‌دهد ، هردو،درضمن تهیهٔ طرحی برای تقسیم پولی میان دو قمار باز کـه بازیشان

ناتمام مانده بود، پایه ریزی شده‌اند، موضوع مناسبی برای تفکر صوفیانه پیدا می‌کنیم .

۱۲ برای نشان دادن چگونگی کاربرد قیاس ریاضی در حساب بهترین راه آنست که ثابت کنیم جمع کردن اعداد صحیح عملی است **تلفیقی** . با استفاده از علامات باید چنین نوشت .

$$a+(b+c)=(a+b)+c \qquad (۱)$$

اجازه بدهید عمل $a+b$ را تحلیل کنیم : معنی آن این است که به عدد a یك اضافه شده است و به مجموع مجدداً یك اضافه شده و این عمل b بار تکرار گردیده است .

به‌همین ترتیب $a+(b+۱)$ بدان معنی است که متوالیاً $b+۱$ بار واحد با a جمع شده است . بنابراین چنین نتیجه می‌شود :

$$a+(b+۱)=(a+b)+۱ \qquad (۲)$$

و این همان عبارت (۱) است برای حالتی که c برابر واحد باشد. آنچه که تا بحال انجام دادیم مرحلهٔ قیاسی استدلال ما بود .

اکنون بمرحلهٔ موروثی می‌پردازیم . فرض کنیم که عبارت مزبور برای مقداری از c برابر n صادق باشد . یعنی :

$$a+(b+n)=(a+b)+n \qquad (۳)$$

بطرفین ۱ اضافه می‌کنیم :

$$[a+(b+n)]+۱=[(a+b)+n]+۱ \qquad (۴)$$

که با توجه بعبارت (۲) می‌توان چنین نوشت :

$$(a+b)+(n+1)=a+[(b+n)+1] \quad (5)$$

و با دلیل مشابه عبارت (۵) بصورت زیر نوشته می‌شود :

$$(a+b)+(n+1)=a+[b+(n+1)] \quad (6)$$

که همان عبارت (۱) است برای حالتی‌که در آن $c=n+1$ باشد .

بدین ترتیب وقتی عبارت بالا برای عدد معینی مانند n صحیح بود ، این **الزام منطقی** را بهمراه دارد که باید برای $n+1$ نیز صحیح باشد . پس وقتی برای ۱ صحیح بود برای ۲ نیزصحیح است، وقتی برای ۲ صحیح بود برای ۳ نیزصحیح است و بهمین ترتیب می‌توان بطور **نامحدود** پیش رفت .

اصل قیاس ریاضی در شکل کلی‌تر خود که دراینجا بکار رفته است چنین بیان می‌شود : اگر قضیه‌ای دریك توالی‌برای اولین عدد آن توالی صادق باشد ، و نیز قبول صحت آن برای یکی ازجمله‌های معین آن توالی بعنوان نتیجهٔ منطقی صحت‌آن برای جملهٔ بعدی ظاهر باشد ، نتیجه می‌گیریم کـه این قضیه برای تمام اعداد آن توالی صادق است . اختـلاف بین اصل **محدود** بدان صورت که در مورد سربازان بکار برده شد ، و اصل **کلی** ، چنان‌که در حساب بکار برده می‌شود ، فقط در تفسیر کلمهٔ **همه** است .

بگذارید این مطلب را تکرارکنم کـه : نه بوسیلهٔ اصل محدود بلکه از راه اصل‌کلی قیاس ریاضی است‌که صحت اعمال حسابی ، که در روزگار اولیه‌ای‌که با اسرار عدد آشنا می‌شویم آنرا مسلم می‌پنداریم ، اثبات می‌شود .

۱۳ آنچه‌که در قسمت زیر آمده است از مقالهٔ هانری ـ پوانکاره (Henri Poincaré) به‌نام **ماهیت استدلال ریاضی** The Nature of mathematical Reasoning اقتباس‌گردیده است. این مقالهٔ قرن سازدر۱۸۹۴ بعنوان اولین نوشته از یـك رشته تحقیقات دربارهٔ اساس عـلوم دقیقه انتشار یافت . ایـن مقاله طلیعهٔ جنبشی بود کـه از طرف دسته‌ای از ریاضی‌دانان ، برای تجدید نظر درمفهومهای جاری وکلاسیك، که منجر به ادغام کامل منطق برپیکرریاضیات گردید ، شروع شد .

شخصیت بزرگ پـوانکاره ، زیبائی سبك او ، و جرأت بت شکنی او به مقیاس وسیعی اثر اورا ازحدود محدود ریاضی‌ـ دانان بیرون برد . بعضی ازکسان‌که شرح حالی از اونوشته‌اند برآنندکه نوشتهٔ او به دست نیم میلیون نفر رسیده است . تاقبل از او هیچ ریاضی‌دانی به این اندازه شنونده و خواننده نداشته است .

خود اوکه عملا درهریك از شاخه‌های ریاضیات و فیزیك ومکانیك سماوی اثرآفرینندگی داشت ، ازچنان موهبت درون‌ـ بینی برخوردار بود کـه توانست منابع تحقیقات و اکتشافات خودرا تحلیل‌کند . روح نافذ اوتوجه خاصی به مفاهیم ابتدائی داشت که پوستهٔ ضخیم اعتیاد انسانی تقریباً آنرا غیرقابل نفوذ ساخته بود ، و از ایـن جمله است مفهوم‌های مربوط به **عدد، فضا، و زمان.**

۱۴ « خود امکان وجود یـك علم ریاضی ظاهراً تناقضی

غیرقابل رفع به‌نظر می‌رسد . اگر این علم تنها از لحاظ ظاهر قیاسی است، پس از کجا دقت کاملی را که هیچکس جرأت شك کردن در آن را ندارد بدست آورده است ؟ اگر، بالعکس تمام قضایائی را که این علم اعلام می‌دارد بتوان بوسیلهٔ قواعد منطق صوری از یکدیگر استنتاج کرد، چرا ریاضیات به یك لفظبازی ساده تنزل نیافته است ؟ قیاس نمی‌تواند چیزی جدید بما بیاموزد، واگر همه چیز می‌تواند از اصل تماثل یا این همانی زائیده شود، پس همه چیز می‌تواند به‌آن بازگردد . آیا باید این‌را قبول کنیم که تمام قضایائی که این همه کتابها را انباشته‌اند راههای منحرفی هستند که می‌گویند A همان A است؟

«شك نیست که می‌توانیم به اصول موضوعه که سرچشمهٔ تمام براهین‌اند تکیه کنیم . اگر فتوی می‌دهیم که اینها نمی‌توانند به اصل تضاد بازگردند ، اگر هنوز در آنها واقعیات تجربی کمتری می‌بینیم ... با وجود این وسیله‌ای در اختیار داریم که به‌آنها به مثابهٔ احکام قبلی یافطریات بنگریم . این امر اشکال را حل نمی‌کند بلکه به‌آن نام خاصی می‌بخشد ...

«قانون استدلال ارجاعی قابل تحویل به‌اصل تضاد نیست... و نیز این قانون نمی‌تواند از راه تجربه بدست آید . تجربه می‌تواند به ما بیاموزد که این قانون برای ده یا صد عدد اولیه صادق است ؛ نمی‌تواند تمام رشتهٔ بینهایت اعداد را در برگیرد، بلکه‌فقط ممکن است شامل قسمتی کمابیش طولانی، از این رشته بشود، ولی همیشه این قسمت محدود است ...

«اینك ، اگرمسأله برسرقسمتی ازاین رشته باشد ، اصل تضاد کافی خواهد بود ، در این صورت مجاز خواهیم بود که‌هر

اندازه که برای پیشرفت کار خود ضروری می‌دانیم ، از قیاس استفاده کنیم . تنها وقتی که بنای آنست که عدهٔ نامحدودی از افراد را در فرمول واحد قرار دهیم ، یعنی در مقابل بینهایت است که این اصل منطقی لنگ می‌ماند ، ودراینجاست که‌تجربه نیز توانائی خود را از دست می‌دهد ...

«پس چرا در این صورت این حکم با چنین‌نیروی غیر قابل مقاومتی خود را بر ما تحمیل می‌کند ؟

دلیل این امر آن است که این حکم تصدیق قدرت ذهنی ما برای دریافت تکرار نامحدود یك عمل معین است ، در آن صورت وقوع این عمل ممکن باشد ...

« باید قبول‌کنیم‌که در اینجا بین موضوع و روش معمولی استقراء شباهت جالبی وجود دارد .

ولی یك اختلاف اساسی نیز دیده می‌شود . استقراء ، آن طور که درعلوم فیزیکی بـکار می‌رود ، همیشه نامتیقن است ، زیرا که این استقراء برپایهٔ اعتقاد برنظم عمومی عالم قرار دارد ، و این نظمی است‌که از ما بیرون است . برعکس، استقرای ریاضی ، یعنی اثبات از راه استدلال ارجاعی خود را بمثابهٔ امری لازم و ضروری بـه ما تحمیل می‌کند ، زیـرا فقط خاصیت خود ذهن و فکر است ...

« پیشرفت ما فقط بوسیلهٔ استقرای ریاضی است ، که به تنهائی می‌توانـد چیزهای تـازه به ما بیاموزد . قیاس تنها ، بدون‌کمك این استقراء ، که بااستقرای فیزیکی‌تفاوت دارد ولی بهمان اندازه سودمند است ، برای بوجود آوردن یك علم ناتوان‌است . »

« بالاخره باید توجه داشت کـه این استقراء فقط وقتی امکان‌پذیر است کـه عمل معینی را بتوان بینهایت بار تکرار کرد . به این دلیل است‌که نظریهٔ شطرنج هرگز نمی‌تواند یك نظریهٔ علمی به حساب آید : در اینجا اشکال مختلف بازی با یکدیگر شباهتی ندارند .»

۱۵ چون کلام آخر باید به استاد اختصاص یابد ، مایـل بودم کـه این فصل را به همین جا خاتمه دهم . امـا تاریخ به اشخاص احترام نمی‌گذارد : با اندیشه‌های پوانکاره اختلافاتی پیدا شد کـه تا امروز ادامه دارد . وبنابراین بایـد در اینجا کلمه‌ای نیز ازخود بیفزایم ، نه به‌امیدآنکه دراین مشاجرات، که با دقت کامل بوسیلهٔ مردانی عالیقدر کـه در طرفین دعوا هستند دنبال می‌شود شرکت کرده باشم ، بـلکه بخاطر اینکه موضوع اختلاف حقیقی را روشن کنم .

استدلال ارجاعی،درآن هنگام‌که درمورد توالی‌محدودی از اعداد بـکار برده شود ، از نظر منطقی غیرقابل رد است . این اصل با این معنای **محدود** ، مـدعی است‌که اگرقضیه‌ای از نوع قضایای موروثی باشد ، در این‌صورت، اگربرای اولین جملهٔ توالی صحیح یا غلط باشد ، برای تمام جمل توالی‌صحیح یا غلط خواهد بود .

این **اصل محدود** برای ایجـاد علم حسابی محدود و مفید کافی است . برای مثال می‌گوئیم‌که رشتهٔ طبیعی اعداد را بنابرتـوانایی بدنی یا روانی در امر شمارش ، مثلا تا ۱،۰۰۰،۰۰۰ محدودکنیم : درچنین حسابی جمع وضرب ، در

صورتی که ممکن باشند ، دارای خواص **تلفیقی** و **تبدیلی** خواهند بود ؛ اما انجام این اعمال همیشه ممکن نیست . عباراتی مانند (۵۰۰،۰۰۱ + ۵۰۰،۰۰۰) یا (۱۰۰۱ × ۱۰۰۰) بی‌معنی‌اند، و واضح است که حالات بی‌معنی بسیار زیادتر از حالات معنی‌دار است. این محدودیت برای اعداد صحیح متناظراً باعث محدودیتی برای کسرها نیز خواهد شد ؛ هیچ کسر اعشاری نمی‌تواند بیش از ۶ رقم اعشار داشته باشد و تبدیل کسرهائی از قبیل ۱/۳ به کسر اعشاری بی‌معنی خواهد بود . تقسیم نـا محدود نیز مانند رشد نامحدود دارای مفهومی نیست و ما با تقسیم هر شیئی به یك میلیون قسمت مساوی به سرحد تقسیم نشدنی می‌رسیم .

در هندسه نیز ، اگر به جای آنکه صفحه را از هر طرف نـامحدود فرض کنیم ، خود را بـا **ناحیه‌ای محدود** ، مثلا دایره‌ای محدود کنیم ، در اینصورت دراینجا نیز وضع مشابهی پیش می‌آیـد . در چنین هندسهٔ محدودی فصل مشترك دو صفحه موضوعی است احتمالی ؛ دو خط غیرمشخص زاویـه‌ای بـوجود نمی‌آورنـد ؛ و سه خط غیرمشخص نیز نمی‌توانند یك مثلث بسازند .

باوجود این ، نه فقط این حساب و هندسه محدود از نظر منطق پابرجا و استوارند ، بلکه ، برخلاف آنچه در اول کار به نظر می‌رسد ، به واقعیت حواس ما نزدیك‌تر از حساب و هندسهٔ نامحدودی خواهند بود که بشر کنونی آن را از پیشینیان به‌میراث برده است .

۱۶ اصل محدود استقرای ریاضی مستلزم رشتهٔ محدودی

از قیاسات است ، که هریك بخودی خود محکم وپا برجاهستند: به همین دلیل این اصل نتیجهٔ منطق کلاسیك است .

اما شیوه‌ای که در براهین حساب بکار برده شده ، یعنی اصل کلی استقرای تمام ، ازحدودی کـه بوسیلهٔ اصل محدود تعیین شده ، پا را بسیار فراتر می‌نهد . این شیوه تنها به این اکتفا نمی‌کند که بگوید: وقتی قضیه‌ای دربارهٔ عدد ۱ صادق‌بود ، به شرط آنکه اگر برای هرعدد صدق‌کرد برای عدد پس‌از آن نیز اعتبار خود را حفظ کند ، برای‌کلیهٔ اعداد صادق‌خواهدبود . این شیوه بطور ضمنی تصدیق می‌کند که هر عدد عدد دیگری در دنبال دارد .

این تصدیق یك‌الزام منطقی‌نیست ،زیرا نتیجه‌ای ازقوانین منطق کلاسیك نمی‌باشد . ایـن حکم خود را بمثابهٔ تنها شکل واحد قابل تصور تحمیل نمی‌کند ، زیـرا کـه مخالف آن ، یعنی فرض یك رشتهٔ محدود از اعداد ، به حسابی محدود منجر می‌شودکه آنهم به نوبهٔ خود کاملا منطقی است . ایـن حکم از تجربهٔ بـلاواسطهٔ حواس ما ناشی نشده است ، زیـرا تمام تجربیات ما نادرستی‌آنرا ثابت می‌کنند . و بالاخره این بیان نتیجهٔ بسط تاریخی علوم تجربی نیست ، زیـرا همهٔ آخرین شواهد و دلایل موجود برمحدود بودن عالم دلالت دارند ، ودر پرتو آخرین اکتشافات در بارهٔ ساختمان اتم ، قابلیت تقسیم نامحدود ماده را باید درموزهٔ تاریخ مدفون کرد .

وبا آنکه تصور بی‌نهایت ، از هیچ یك از دوراه منطق یا تجربه ، خود را به‌ما تحمیل نکرده است ، یك الزام ریاضی است . آیاچه چیز ، درپس این قدرت ذهن برای تصورتکرار

بینهایت یك عمل که انجام آن برای یك بار ممکن باشد ، نهفته است ؛ در سراسر این کتاب چند بار فرصت آن پیش می‌آید که به این مطلب باز گردیم .

هانریش هرتز (Heinrich Hertz)

« انسان نمی‌تواند ازاین احساس بگریزدکه این فرمولهای ریاضی دارای وجود مستقلی هستند و بخودی‌خود بصیرتی دارند ، و اینکه از ما وحتی از کاشفین خود عاقلترند ، و بیش از آنچه که در اصل بدانها داده شده است می‌توان از آنها بهره‌برداری کرد . »

۵ علامات ریاضی

۱ جبر ، به مفهوم وسیع کلمه که امروز بکار می‌رود ، اعمالی است بر روی اشکال علامتی . جبر ، با این حدود ، نه تنها به تمام ریاضیات سرایت می‌کند ، بلکه در قلمرو منطق صوری و حتی متافیزیك نیز تجاوز می‌نماید . بعلاوه با چنین تعبیری قدمت جبر همان قدمت قابلیت بشر برای بررسی قضایای

عمومی و توانائی او در تمایز بین **بعضی** و **هر یك** خواهد شد .

باوجود این دراینجا ما به جبر ، بامفهوم بسیارمحدودتر آن می‌نگریم ، یعنی آن قسمت از جبر عمومی که نام **نظریهٔ معادلات** بدان اطلاق می‌شود . این کلمه ، در آغاز پیدایش نیزهمین‌معنی‌محدود را داشته است. کلمهٔ انگلیسی Algebra (= جبر) دارای ریشهٔ عربی است . « al » همان الف و لام تعریف عربی است ، و «gebra» همان مصدر «جبر» عربی ، به معنی مرتب‌کردن یا جبران است . تا به‌امروز کلمهٔ‌الجبریستا در اسپانیا برای شکسته‌بند بکار می‌رود .

استعمال کلمهٔ جبر برای عنوان کتابی که توسط محمدابن موسی‌الخوارزمی نگاشته شده‌کاملا مناسب است. محمدخوارزمی همان‌کسی است که ، پیش از این دیدیم ، سهم بزرگی در توسعهٔ عددنویسی وضعی داشته است . عنوان کامل کتاب او « الجبر والمقابلة » است کـه ترجمهٔ دقیق آن به انگلیسی عبارتست از « On Restitution and Adjustment » محمد ابن موسی کلمهٔ جبر(restitution) را بهمان مفهوم امروزی **جابجا کردن** عبارات در یك معادله ، از یك طرف به طرف دیگر ، بکار برده است ، مانند تغییر معادلهٔ ۲۵ = ۷ + ۳x به صورت ۷ − ۲۵ = ۳x .

۴ آثاری از جبر ابتدائی در الواح سومری یافت شده است ، ومحتملا درمیان مصریان قدیم به اوج وسعت خود رسیده بوده است . در واقع پاپیروس‌های ریند (Rhind) ، که تاریخ

آن نزدیکتر ازقرن هیجدهم قبل از میلاد نیست، مسائل‌مربوط به توزیع غذا و سایر ذخایر را رسیدگی می‌کند ، کـه به معادلات ساده منتهی می‌گردند . در آن معادلات مقدار مجهول با کلمهٔ هو (hau)، به معنی توده ، مشخص شده است ؛ جمع و تفریق را با اثر پاهای مردی‌که ازیك عامل جمع (یاتفریق) به طرف عامل دیـگر نزدیك (یا از آن دور) می‌شده ، نشان می‌داده‌اند . این پاپیروس بوسیلهٔ شخصی به نام آحمس (Ahmes) امضا شده است . باتوجه به اشتباهات فراوانی‌که در متن موجود است ، می‌توان گفت که آحمس فقط نقش نویسنده‌ای را داشته‌که باآنچه رونویس می‌کرده‌آشنائی زیادی نداشته است . بنابراین می‌توان‌حدس‌زد که وضع دانش‌مصرقدیم بیش ازآن چیزیست‌که این پاپیروس نشان می‌دهد . بهرتقدیر، شك نیست که جبر مصری سده‌ها براین پاپیروس پیشی دارد.

بطورکلی‌بایدقبول‌کرد که‌توسعهٔ جبردرکشورهای مختلف متوالیاً سه‌مرحله را‌پشت‌سر گذارده‌است: بیانی، (Rheorical) ترخیمی (Syncopated) و علامتی (Symbolic) . مشخصهٔ جبر **بیانی** عبارت است از فقدان کامل علامات ، البته به‌جزآن که خودکلمات بمعنی علامتی خودبه‌کار برده می‌شدند. تا به امروز جبر بیانی‌گاهی در پاره‌ای عبارات به کار برده می‌شود . مثلاً در عبارت «حاصل جمع مستقل ازترتیب نوشتن جمله‌ها است» ، ازجبر بیانی استفاده شده است‌که درصورت به‌کار بردن علامات بصورت $a+b=b+a$ در می‌آید .

جبر **ترخیمی** ، که نمونهٔ آن جبر مصری است ، از تکامل جبربیانی بوجود آمده است .

بعضی کلمات که کار برد فراوان داشته کم‌کم مختصر شده‌اند . در نهایت امر این خلاصه نویسی تا آنجا ادامه یافته که منشاء آنها فراموش شده . و چنان شده است که دیگر در علامات ارتباط مشهودی با اعمالی که معرف آنها هستند به چشم نمی‌خورد . **مرخمها به علامات مبدل شده‌اند .**

تاریخ علامات + و — می‌تواند موضوع را روشن کند. در اروپای قرون وسطی علامت دوم مدتها با کلمهٔ **مینوس** (minus) بیان می‌شد وسپس آن را باحرف اول این کلمه یعنی «m» ، که درزیر آن خطی می کشیدند، نشان می‌دادند، وبالاخره خود این حرف نیز حذف شد وفقط خط زیر آن باقی ماند. علامت **پلوس** (Plus) نیز نظیر تغییر مشابهی را پشت سرگذارده است . خواننده برای دریافتن سرگذشت تاریخی علامات متداول می‌تواند به‌جدول مقابل مراجعه کند .

۳ قبل از دیوفانتوس جبر یونانی اساساً بیانی بوده است . توضیحات مختلفی داده می‌شود تا علت ناتوانی یونانیان رادر به وجود آوردن علامات توجیه کنند . جاری‌ترین نظریه‌ها این است که حروف الفبای یونانی برای اعداد به‌کار می‌رفته و استفاده از آنها بعنوان علامت ایجاد آشفتگی می کرده است . می‌گویند که دیوفانتوس از اینکه سیگما به دو شکل حذف نوشته می‌شد استفاده کرده یکی‌را برای ۶۰ ودیگری‌راکه‌دارای معنی عددی نبوده برای علامت مقدار مجهول به‌کار برده است .

واقع مطلب آن است که به احتمال زیادعلامت دیوفانتوس برای مقدار مجهول ، مرخم شدهٔ هجای اول کلمهٔ یونانی **آریتموس** (arithmos) یعنی عدد بوده است که این نام‌را

اعمال ریاضی		جمع	تفریق	ضرب	تقسیم	نما	تساوی	مجهول
علامتهای جدید		+	−	x · ab	$\div$: $\frac{a}{b}$	a^2, a^3	=	x, y, z
منشأ	قرن							
مصری	۱۷ ق.م				[illegible]			[illegible]
دیوفانتس اسکندرانی			⋀		[illegible]	[illegible]		ς
هندی	۱۱ م	حروف مصوت سانسکریت	نقطه‌ای بالای عدد		−	$x^2 = \square$	− − −	[illegible]
ایتالیایی	۱۶ م	$\bar{p}$	$\bar{m}$					
آلمانی	۱۶ م	+	−					
ستون (بلژیکی)	۱۶ م	+	−			$x^2 = ②$ $x^3 = ③$	fera egale	O
دیکورد (انگلیسی)	۱۶ م	+	−				=	
ویتا (فرانسوی)	۱۷ م	+	−	in	$\frac{a}{b}$	$D^2 =$ D in quadratum	aequabantur	A, E, O,
اوترد (انگلیسی)	۱۷ م	+	−	×	$\frac{a}{b}$	$x^4 = \boxed{4}$		
هریوت (انگلیسی)	۱۷ م	+	−			$a^2 = aa$, $a^3 = aaa$	=	a, b, c,
دکارت (فرانسوی)	۱۷ م	+	−		$\frac{a}{b}$	$x^2 = xx$	∝	x, y, z
لایب‌نیتز (آلمانی)	۱۸ م	+	−		$\frac{a}{b}$	$a^3 = \boxed{3}a$	=	هر حرف

سیر تکاملی نمادها

او برای مجهول یك مسئله به‌کارمی‌برده . بعلاوه بنظرمی‌رسدکه در آن‌نظریه به این واقعیت که فقط حروف کوچك‌الفبای یونانی بجای اعداد بکار می‌رفته توجهی نشده است . یونانیان حروف بزرگ را در اختیار داشتند که می‌توانستند به جای علامات به کار برند ، و در واقع این‌کار را نیز عملی کردند .

منتهی علامات فوق هرگز برای نمایش دادن **اعمال حسابی** به‌کار برده نشده ، بلکه فقط بعنوان **برچسب هائی** برای تعیین نقاط مختلف ، یا عناصر مختلف یك شکل هندسی، مورداستفاده قرارگرفت. این علامات توصیفی تا به امروز برای مشخص کردن نقاط مختلف یك شکل هندسی به‌کار می‌روند ، و باید بخاطر داشته باشیم که این عادت را ما از یونانیان به ارث برده‌ایم .

نه! فکر یونانی اصولا غیر جبری نبود ، زیرا که بسیار به ماده‌ها وملموسات‌توجه داشت . اعمال مجرد جبر که سروکار آن بااشیائی است که‌عمداً ازمحتوی فیزیکی‌خود عاری شده‌اند، نمی‌توانست درمغزهائی‌که بااین شدت به‌خود اشیاء توجه داشتند رسوخ‌کند. **علامت ریاضی‌تنها یك امر تشریفاتی نیست،** بلکه جوهرحقیقی جبر است . شیء ، بدون علامت ، چیزی جز دریافت بشری نیست ، و تمام مراحلی را که حواس انسانی در آن‌مراحل شیء را ادراك می‌کند منعکس می‌سازد؛ وقتی علامت جایگزین آن شد ، شیء تبدیل به **تجریدی** کامل می‌شود، وتنها صورت **عاملی** (Operand) را پیدامی‌کندکه درمعرض بعضی اعمال تعیین شده قرار می‌گیرد .

۴ فکر یونانی تازه داشت از مرحلهٔ شکل پذیری خود بیرون‌می‌آمد که دوران زوال شروع شد. درآن روزهای‌انحطاط فرهنگ یونان ، دو شخصیت برجسته پیدا شدند . هردوی آنها در قرن سوم زندگی می‌کردند و در اسکندریه پا بعرصهٔ وجود گذاردند . و هر دوی آنها بذر نظریه‌های جدیدی را که بافهم معاصران ایشان فاصلهٔ زیادی داشت افشاندند، ومقدر شدکه این نظریه‌ها قرنها بعد با توسعهٔ خود علوم مهمی را بوجودآورند . قضیه‌های (Porisms) پاپوس اساس **هندسهٔ تصویری**، و مسائل دیوفانتوس زمینه را برای نظریهٔ معادلات آماده‌کرد .

دیوفانتوس اولین ریاضی‌دان یونانی بود که با صراحت کسرها را بمنزلهٔ اعداد پذیرفت . و نیز وی اولین کسی‌بود که بـه صورت منظم ، نه تنها معادلات ساده ، بلکه معادلات درجهٔ دوم و درجات بالاتررا موردبررسی قرارداد. علی رغم انتخاب علامات نارسا و علی‌رغم بی ظرافتی شیوه‌هایش ، به او باید به نظر طلایه‌دار جبر جدید نگریست .

اما دیوفانتوس آخرین پرتو شمعی درحال خاموش شدن بود. برپهنهٔ دنیای غرب شب ظلمانی قرون تاریك بال‌وپرگسترد تقدیر چنان بود که بذر فرهنگ یونانی در خاك بیگانه‌ای سر از خاك بیرون آورد .

۵ محتمل استکه هندیها بعضی از نتایج روشن وسادهٔ علم یونان را بهارث‌برده باشد ، ولی تیزهوشی یونانی رانداشتند.

عاقل‌به‌کنار آب‌تاپل می‌جست   دیوانهٔ پابرهنه ازآب‌گذشت

ناراحتی‌های وجدانی ناشی از دقیق بودن جلوی کار

هندیها را نگرفت در میان آنها سوفسطائیانی که مانع پرواز تصورات خلاقهٔ آنها شوند وجود نداشت. آنها با عدد و نسبت و با صفر و بینهایت، مانند سایر کلمات رفتار کردند: مثلا همان کلمهٔ سونیا را که برای خلأ آمده بود و در نهایت امر به صورت صفر ما در آمد، برای نشان دادن مجهول نیز به‌کار بردند.

با این همه، صوریگری (فرمالیسم) حقیر هندیها بیش از دقت انتقادی یونانیان برای توسعهٔ جبر کار صورت داد. ولی جبر هندی، به **حداعلی** جبری ترخیمی بود. علائم آنها چیزی جز اولین هجای کلمات نمایندهٔ اشیاء یا اعمال ریاضی نبود؛ باوجود این، نه‌تنها برای اعمال اساسی و تساویها، بلکه برای اعداد منفی نیز علاماتی داشتند. بعلاوه، بتمام قوانین تبدیل معادلات ساده و درجهٔ دوم آشنا بودند.

انواع مسائلی‌که با آنها سروکار داشتند بقدرکافی ساده و در حقیقت در خور آن مرحله از جبر بود. دو تای از آنها را از **لیلاواتی** (Lilawati) که رساله‌ایست دربارهٔ خدا شناسی عمومی‌که در قرن هشتم نوشته شده است نقل می‌کنیم:

«از توده‌ای از گلهای نیلوفر آبی یك‌سوم و یك پنجم و یك‌ششم بخداوندان، سیوا (Siva)، ویشنو (Vishnu)، و خورشید تقدیم گردید، یك‌چهارم به بهاوانی (Bhavani) هدیه شد. شش گل باقیمانده به آموزگارمحترم داده شد؛ بگو تمام گلها چند عدد بوده است.» ...

«گردن‌بندی در ضمن یك کشمکش عشقی پاره شد. یك سوم مرواریدها بزمین ریخت، یك پنجم در روی تخت باقی ماند، یك ششم رامعشوق پیداکرد، یك دهم بوسیلهٔ دلداده پیدا شد، و شش مروارید در بند باقی مانده بود. بگوگردن‌بند از چند مروارید تشکیل شده بود؟»

۶ تأثیر مستقیم ریاضیات هندی در اروپا بسیار کم بوده است . اما تقریباً شکی نمی‌توان داشت که اعراب حساب و جبر خود را از نمایندگان برهمن ، که در دربار خلفای دانش پرور قرن نهم و دهم باسخاوتمندی و بلند نظری پذیرائی می‌شدند ، کسب کرده‌اند . تمدن اسلام در آن دوره مخلوطی از دوفرهنگ بود : شرقی ویونانی . تعداد زیادی از آثار قدیمی ادبی وعلمی و فلسفی سانسکریت ویونانی به عربی ترجمه شد ، ودانشمندان اسلام با اشتیاق و ولع بـه مطالعهٔ آنها پرداختند . بسیاری از این ترجمه‌ها تا به امروز حفظ شـده و منبع اطلاعات فراوان تاریخی است، دراینجا باید بخاطر آوریم که غنی‌ترین کتابخانه‌های یونان قدیم ، یعنی کتابخانهٔ اسکندریه ، دو بار غارت و منهدم گردید : بار اول بـوسیلهٔ دشمنان مسیحی علم در قرن چهارم و پس از آن توسط متعصبین مسلمان قرن هفتم . نتیجهٔ این ویرانی آن بود که تعداد زیادی از نسخ خطی قدیمی نابود شد ، و اگر ترجمه‌های عربی بعضی از آنها نمی‌بود ، از هیچ یك اکنون اثری برجای نبود .

اغلب گفته شده است که رسالت تاریخی مسلمانان حفاظت و نگهبانی فرهنگ یونان درطول این اعصار انتقالی بود . این کار را بنحوی شایسته انجام دادند ، امـا بنوبهٔ خود نیز این گنجینه را بـا سهم درخشان خود غنی کردنـد . باید از میان بسیاری از ریاضی‌دانان طراز اول آن دوران عمر خیام را که شهرت جهانی دارد نام برد . نویسندهٔ ربـاعیات ، منجم رسمی دربار خلیفه بود. باآنکه خیام رباعیات خودرا به زبان فارسی نوشته ، جبری به زبان عربی دارد که درآن برای حل معادلات

درجهٔ سوم و چهارم از دانش خود در بارهٔ هندسهٔ یونان و جبر هندی ، کاملا استفاده کرده است . در حقیقت وی را می‌تـوان مبتکر روشهای نموداری دانست ، بعلاوه ، نشانه‌هائی در دست است که خیام در زمینهٔ کشف فرمول دوجمله‌ای بر نیوتون تقدیم داشته است .

با همهٔ اینها ، مسلمانان در زمینهٔ بکار بردن علائم هیچ‌ـ گونه پیشرفت حاصل نـکردند . یـکی از پدیده‌های عجیب در تاریخ ریاضیات این است که مسلمانان، هنگام قبول جبر هندی، علائم ترخیمی عجیب آنها را حفظ نکردنـد ، بلکه برعکس ، به همان جبر بیانی یونانیان بازگشتند و حتی برای مدتی علائم عـددی را نیز از کتابهای جبر حذف کردنـد و تـرجیح دادند اعداد را بصورت تمام بنویسند . آیا این بخاطر آن بود کـه مسلمانان در ادعـای میراث بردن از فـکر یونانی آن اندازه مبالغه کردند که دین خود را به برهمن‌ها منکر شوند ؟

۷ در آن هنگام که فرهنگ اسلام به اوج خود می‌رسید ، اروپا هنوز درخوابی عمیق بود. ژاکوبی(Jacobi)،ریاضی‌دان بزرگ ، در خطابه‌ای در ستایش دکارت ، تصویر باشکوهی از این اعصار تاریك و دوران انتقال را به قلم آورده است :

« تاریخ نیمه شبی داشته است که می‌توانیم آنرا درحدود هزارسال بعداز میلاد بر آورد کنیم . در ایـن زمان هنر و علم ، حتی از خاطرهٔ بشریت ، محو شده بود . آخرین فلق بت‌پرستی زوال یافته بـود ، ولی هنوز طلایهٔ روز جدید خودنمائی نمی‌کرد . آنچه در دنیا از فرهنگ باقی مانده بود فقط در میان مسلمانان دیده می‌شد ، و پاپی مشتاق تحصیل

علم با لباس مبدل در دانشکده‌های ایشان بکسب علم پرداخت ومایهٔ حیرت مغرب زمین شد . بالاخره مسیحیت ،که ازپرستش استخوان‌های مردهٔ شهدا خسته شده بود ، بطرف قبر خود نجات دهنده رهسپار شد و تنها این امر معلوم شد که قبر خالی است و مسیح جهان مردگان را ترك کرده است . وآن وقت بشریت نیز ازجهان مردگان برخاست وبسمت فعالیتها ومشاغل زندگی روی آورد . رقابت تب‌آلودی درهنر وصنعت ظاهرگشت . شهرها شکفته شدند ، قشری جدید از شهرنشینان پیدا شد . کیامبو (Ciambue) بار دیگر هنر نقاشی راکه خاموش شده بود زنده‌کرد ؛ دانته (Dante) به کالبد شعر جانی تازه دمید . آن وقت بود که مردان شجاعی مانند آبلارد(Abelard) و توماس‌آکویناس (Saint Thomas Aquinas) جرأت بخرج دادند و مفاهیمی از منطق ارسطو را درکاتولیك‌گری وارد کردند و از اینجا پایهٔ مکتب اصحاب مدرسه ریخته شد . اما ، هنگامی‌که کلیسا علوم را زیر پر و بال خود گرفت . خواستار آن شد که اشکال مختلف جنبش‌های علم تابع همان ایمان بی‌قید وشرطی باشدکه برقوانین دینی حکم می‌کند . بدین‌سان بود که مکتب اصحاب مدرسه ، بجای آنکه روح بشر را آزادکند ، برای قرن‌های بعد آن را بزنجیر کشید ، وچنان شدکه امکان واقعی برای تحقیقات آزاد علمی مورد شك و تردید قرار گرفت . بالاخره دراینجا نیزطلیعهٔ صبح نمایان شد ، و انسان با اطمینان مجدد برآن شد تا از مواهب خویش بهره‌بردارد و دانش طبیعی را بــر پایهٔ فکری آزاد و مستقل بنا کند . سپیده دم این روز را درتاریخ بنام رونسانس یا تجدید حیات دانش می‌نامند .»

کسب علم و فرهنگ مسلماً جزو برنامهٔ صلیبیان نبود . ولی در حقیقت با جنگهای صلیبی این کار نیز صورت گرفت . در مدت سه قرن قدرت‌های مسیحی خواستندباشمشیر «فرهنگ»

خود را براسلام تحمیل کنند . اما نتیجهٔ غائی آن این بود که فرهنگ متفوق اعراب آرام و مطمئن در اروپا رسوخ کرد . اعراب اسپانیا و کرانهٔ شرقی دریای مدیترانه به مقداری وسیع ذمه‌دار تجدید حیات علم ومعرفت اروپائی بوده‌اند .

این جدید حیات ازایتالیا شروع شد . اولین اثر قابل توجه درریاضیات بوسیله فیبوناتچی (Fibonacci) به‌وجود آمد که مردی با قابلیت خارق‌العاده بود و بصیرت و پیش‌بینی او بمراتب از قرن سیزدهمی که درآن زندگی می‌کرد برتر بود. او که به تجارت اشتغال داشت سفرهای زیادی به خاور نزدیك کردودانش‌عربی آن‌عصررا فراگرفت، به‌نوشته‌های ریاضی‌یونان نیز آشنائی داشت . کارهای او در حساب وجبر وهندسه گنجینهٔ پرقیمتی را درریاضیات ایتالیا برای سه قرن بعد بوجودآورد. در این باره در فصل آینده گفتگو خواهم کرد .

۸ نقطهٔ تحولی در تاریخ جبر رساله‌ای بود که در اواخر قرن شانزدهم بوسیلهٔ یك نفر فرانسوی بنام ویت (Viète) نوشته شد که بنام لاتینی فرانکیسکوس ویتا شهرت داشت . کار عظیم او امروز بنظرما ساده می‌آید . این کار در فقرهٔ ذیل که از کتاب او اقتباس شده منعکس است .

« به‌این‌ترتیب به‌نیرنگی متوسل شده‌ایم که اجازه می‌دهد مقادیر مفروض را از مجهول و یا مقادیری که بدنبالشان‌می‌گردیم متمایز کنیم،و این‌کار بوسیلهٔ بکار بردن علامت است که طبیعتاً ثابت است و به روشنی ادراك می‌شود،مانند مشخص‌کردن مقادیرمجهول با A یا هر حرف مصوت دیگر، ونشان دادن مقادیر معلوم‌باحروف‌بی‌صدا مانند.G.C.B وغیره .»

طول عمر این علامت گذاری با حروف بی صدا وبا صدا کوتاه بود . درطول نیم قرن پس ازمرگ ویتا هندسهٔ دکارت بوجود آمد که درآن اولین حروف الفبا بمقادیر معلوم وآخرین آنها بمقادیر مجهول اختصاص داده شده بود. علامت گذاری دکارتی نه تنها جایگزین علامت گذاری ویتا شد بلکه تا به امروز نیز دوام یافت .

اما در حالی که اندکی از پیشنهادات ویتا درعمل به کار برده شد، ولی درواقع جوهر همهٔ آن پیشنهادات مورد استفاده قرار گرفت . کار برد منظم حروف برای مقادیر نا معین ولی ثابت ، که وی خودآن را Logistica Speciosa نامیده است، بزرگترین کار اوست که در بسط و گسترش ریاضیات نقش برجسته داشته است .

۹ ارزیابی قیمت واقعی کاری که بوسیلهٔ ویتا صورت گرفته، برای شخص کم سواد دشوار است . مگر علامت گذاری حرفی چیزی جز ظاهر سازی ، ودر بهترین صورت خود یك تندنویسی مناسب است؟ بی شك در طرز نوشتن $(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$ صرفه جوئی وجود دارد ، اما آیا حقیقتاً این شکل نوشتن بیش از شکل بیانی این رابطه ، یعنی « مجذور حاصل جمع دو عدد برابر است با مجموع مجذورات هر یك از آن‌ها بعلاوه دو برابر حاصل ضرب یکی در دیگری » چیزی بشخص می آموزد؟

علامت گذاری حرفی نیز سرنوشت همهٔ ابداعات موفقیت آمیز را داشته است . کار برد جهانی این چیزهای نو ،

تصور زمانی را که روشهای پست‌تر رایج بوده است، دشوار می‌سازد.

امروز نوشتن فرمول ریاضی، که در آن حروف نمایندهٔ مقادیر عمومی هستند تقریباً مانند خط نویسی معمولی رواج دارد و توانائی آدم هوشمند در کاربرد علامات، همچون امری طبیعی تلقی می‌شود؛ اما این مسئله فقط به این لحاظ طبیعی است که جزو اعتیادات ثابت مغزهای ما شده است. در زمان ویتا این علامت‌گذاری انحراف اساسی از سنت‌های قرنها بود. ودر واقع، وسیله‌ای را که دیوفانتوس بزرگ وجانشینان مسلمان زیرك او بدان دسترس پیدا نکردند، ونابغه‌ای مانند فیبوناچی در حاشیهٔ این اکتشاف گـام بر می‌داشت و نتوانست بدان قدم گذارد، چگونه می‌توان دانست.

۱۰ شباهت جالبی میان تاریخ جبر وتاریخ حساب وجود دارد. در زمینهٔ حساب می‌بینم کـه بشریت هزاران سال بسبب فقدان علامت باشمارشی ناقص درکشمکش بود. در جبر فقدان، علامات کلی سبب آن بود که علم جبر به‌صورت مجموعه‌ای از قواعد اتفاقی برای حل معادلات عددی باقی بماند. درست همان طور که کشف صفر حساب امروز را بوجود آورد، علامت‌گذاری حرفی چراغ راهنمایی برای عصر جدید در تاریخ جبر بود.

قدرت کار برد علامات درکجا نهفته است؟

نخست اینکه، حرف، جبر را از بندگی کلام آزاد کرد. دراینجا منظورمن فقط این نیست که بدون علامت گذاری حرفی هر بیان عمومی وکلی تبدیل به لفاظی و درازگویی می‌شد و در معرض همه نوع ابهام وسوء تعبیر سخن گفتن قرار می‌گرفت.

البته این امر به جای خود مهم است ؛ اما اهمیت بیشتر در این است که حرف از ممنوعیت‌هائی که در طول قرنها استعمال، جزو کلمه‌شده‌اند آزاداست. اصطلاح **آریتموس**(arithmos) دیوفانتوس یا **رس** (res) فیبوناتچی، مفاهیم ازقبیل دانسته‌ای بودند : به معنی آنها عددکامل یا صحیح بود. اما Aی ویتایا X کنونی ما وجودی دارند مستقل ازشیء مشخصی‌که به نمایندگی آن مورد قبول قرار گرفته‌اند. علامت دارای مفهومی است‌که از شیءکه بقید علامت وابسته شده است تجاوز می‌کند : بخاطر همین است‌که **نمی‌توان آن راتنهایك تشریفات وصورت‌سازی دانست.**

در مرحلهٔ دوم، قابلیت حرف برای انجام اعمال ریاضی امکان می‌دهدکه عبارات حرفی تغییرصورت یابند وبدین‌ترتیب هر بیانی قابل توضیح به چندین شکل هم‌ارز خود می‌گردد. این قدرت تغییرصورت است‌که **جبررا ازسطح یك خلاصه نویسی ساده بالاتر می‌برد.**

قبل از وارد شدن ارقام حرفی، فقط از عبارات معین و مشخصی می‌توانستیم صحبت‌کنیم ؛

هرعبارتی مانند $۲x+۳$ ؛ $۳x-۵$ ؛ $x^۲+۴x+۷$ ؛ $۳x^۲-۴x+۵$ دارای شخصیتی منحصر بفرد بود و می‌بایست درحدود ارزش خود بکار برده شود. رقم حرفی این امکان را فراهم ساخت که از حالت انفرادی به وضع دسته جمعی، و از «یك» به «هر» و «تمام» انتقال یابیم. شکل‌خطی $ax+b$ وشکل درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c$ هر کدام اینك بمنزلهٔ نوع خاصی می‌شوند. همین امر پیدایش نظریهٔ عمومی توابع را ممکن

ساخت که پایهٔ تمام ریاضیات عملی است .

۱۱ اما سهم عمدهٔ **logistica speciosa** ، یعنی سهمی که در این بررسی بیشتر مورد نظر ما است ، نقشی است که در به‌وجود آوردن مفهوم تعمیم یافتهٔ عدد داشته است .

تا وقتی انسان با معادلات عددی مانند :

(I) $x+٤=۶$	(II) $x+۶=۴$
$۲x=۸$	$۲x=۵$
$x^{۲}=۹$	$x^{۲}=۷$

سروکار دارد می‌تواند بااین اظهار که گروه معادلات اول ممکن‌اند ومعادلات گروه دوم غیرممکن ، خود را قانع سازد ، و بیشتر علمای جبر قرون وسطی چنین بودند .

اما وقتی معادلات حرفی ازهمین نوع را درنظر بگیریم:

$$x+b=a$$
$$bx=a$$
$$a^{n}=a$$

خود نامعین بودن مفروضات شخص را مجبور می‌کند تا یك حل **علامتی** برای مسئله تصور کند :

$$x=a-b$$
$$x=a/b$$
$$x=\sqrt[n]{a}$$

پس از این علامت گذاری ، دیگر قیدهائی از این قبیل

بیهوده است که: تنها اگر a بزرگتر از b باشد عبارت $a-b$ معنی دارد، یا $\frac{a}{b}$، در صورتی که a مضربی از b نباشد، بیمعنی است، یا فقط وقتی a توان n ام عددی باشد، $\sqrt[n]{a}$ به صورت عدد درمی‌آید. خود نوشتن آنچه که بی معنی بنظر می‌رسد یك معنی بوجود می‌آورد؛ و انکار وجود چیزی که نامی برای خود به دست‌آدرده است ساده نیست.

بعلاوه، باقبول اینکه $a>b$ و b مضربی است از a و a توان n ام‌کامل است، قوانینی برای بهره‌برداری ازعلائمی مانند $a-b$، $\frac{a}{b}$؛ $\sqrt[n]{a}$ وضع شده است.

اما دیریا زود خود این واقعیت که برپیشانی این علامات چیزی‌که حکایت از مشروع بودن یا نامشروع بودن آنها باشد نوشته نشده است، این مطلب مشخص می‌کند که با بهره‌برداری ازاین موجودات علامتی، **درست مثل اعداد اصیل**، تضادی بوجود نخواهدآمد و از اینجا تا قبول این موجودات علامتی بعنوان **اعداد تمام عیار** یك قدم بیشتر فاصله نیست.

۱۲ خلاصهٔ کلی داستان جبر اولیه، یا بهتر بگوئیم، آن مرحله از جبر که به تعمیم تصور عدد منجر شد، چنین بوده است. اینك به دو دلیل باید راه تاریخی را رها کنیم. یکی آنکه توسعهٔ ریاضیات پس از عصر ویتا چنان سریع بوده است که شرح و بیان کامل آن ما را از چشم‌انداز این کتاب بسیار بدور خواهد برد. بعلاوه، شالودهٔ علم عدد، تا زمانی که

پیشرفت فقط محدود به تکنیك بود ، کمتر از این تکامل متأثر می‌شد .

آنچه کـه حساب جدید را از دوران قبل‌از ویتا متمایز می‌کند ، تغییروضعی است که درمقابل «غیرممکن» به‌وجودآمده است ، تا قرن هفدهم علمای جبر این جمله را بصورت مطلق به کار می‌بردند . ازآن جهت که اعداد طبیعی را میدان انحصاری همهٔ اعمال حساب می‌دانستند ، امکان یا امکان محدود را بمنزلهٔ خاصیت ذاتی این اعمال می‌نگریستند .

بدین ترتیب اعمال **مستقیم** حسابی - جمع $(a+b)$ ، ضرب $(a\,b)$ بتوان رسانـدن (a^b) - بطورنامحدود و همه‌جانبه ممکن‌بودند؛ درصورتی‌که اعمال عکس‌آنها - تفریق $(a-b)$، تقسیم $\frac{a}{b}$ استخراج ریشه $\sqrt[b]{a}$ - فقط تحت شرایط محدود ممکن بودند . علمای جبرماقبل ویتا با بیان واقعیات راضی خشنود بودند ، اما نمی‌توانستند تحلیل دقیق‌تری از موضوع بعمل آورند .

امروز می‌دانیم‌که ممکن بودن و غیرممکن بودن هر یك دارای مفهومی نسبی‌اند ؛ و این کـه هیچ یك از آنها خاصیت ذاتی یك عمل نیستند ، **بلکه فقط محدودیتی هستند که سنت انسانی درمیدان اعمال حسابی واردکرده است.** سد را بشکنید ، میدان عمل را گسترش دهید ، خواهید دیدکه غیرممکن ، ممکن خواهد شد .

۱۳ اعمال مستقیم حسابی از آن جهت امکان همه جانبه دارندکه چیزی‌جز **تکرارهای** پی‌درپی نیستند. ورود تدریجی

به میدان طبیعی رشتهٔ اعدادند که آدمی **بالفطره** آنها را نامحدود تصور می‌کند . این فرض را به کناری بگذارید ، و میدان عمل را محدود به مجموعهٔ معینی کنید (مثلا به اولین اعداد تا ۱۰۰۰) ، آنوقت اعمالی مانند ۱۲۵+ ۹۲۵ یا ۱۵ × ۶۷ غیرممکن و این عبارات نظیر آنها بی‌معنی خواهند شد .

اجازه بدهید فرض کنیم که میدان فقط محدود است به اعداد فرد در اینجا باز عمل ضرب امکان همه جانبه دارد ، زیرا حاصل ضرب هر دو عدد فرد عددیست فرد . ولی در این میدان محدود جمع تقریباً عملی غیر ممکن می‌شود ، زیرا که جمع هر دو عدد فرد هر گز عدد فرد نیست .

اگرمیدان به اعداد **اول** محدود باشد ، ضرب غیرممکن خواهدبود، بهاین دلیل ساده که‌حاصل ضرب دوعدد اول هرگز عددی‌اول نخواهدبود ؛ درصورتی که جمع فقط درحالات نادری ممکن‌خواهد بودکه یکی‌از دوجملهٔ جمع ۲ باشد و دیگری عدد کوچکتر یك جفت عدد اول که میانشان بیش از یك عدد فاصله نیست مانند ۱۳ = ۱۱ + ۲ .

مثالهای فراوان دیگری می‌توان‌آورد ، ولی همین چند مثال نیزبرای‌نشان دادن **نسبی بودن** ماهیت‌کلمات **ممکن وغیر ممکن** و بی معنی کفایت خواهند کرد . و به محض آنکه این نسبت تشخیص داده شد ، طبیعتاً این مطلب پیش می‌آید که شاید گسترش خاص میدان محدود اعمال معکوس حسابی را مانند اعمال‌مستقیم‌به صورت همه جانبه ممکن سازد .

برای اجرای این امر نسبت بعمل تفریق کافی است

بر رشتهٔ **اعداد طبیعی**، **صفر** و **اعداد صحیح منفی** را بیفزاییم. میدانی‌که بدین ترتیب بوجود می‌آید کلی **اعداد صحیح** خوانده می‌شود.

بهمین ترتیب، اضافه‌کردن **کسرهای** مثبت و منفی بر این میدان اعداد صحیح عمل‌تقسیم را به شکلی همه‌جانبه ممکن می‌سازد.

اعدادی که بدین وسیله بوجود آمده‌اند ـ اعداد صحیح و کسرهای مثبت یا منفی، و عدد صفر قلمرو **اعداد منطق** را به وجود می‌آورند. ایـن میدان جانشین قلمرو اعداد صحیح می‌شود. چهار عمل اصلی، که قبلا فقط در مورد اعداد صحیح به کار میرفت، اینك از راه قیاس باین اعداد تعمیم یافته نیز گسترش خواهد یافت.

تمام این اعمال بدون بروز تضاد قابل اجرا هستند. و بعلاوه، صرف نظر از یك استثناءکه بدان اشاره خواهیم‌کرد، **حاصل جمع، تفاضل، حاصل‌ضرب، و خارج قسمت، هر دو عدد منطق عددیست منطق**. این حقیقت مهم اغلب به بیان زیر ادا می‌شود: قلمرو اعداد منطق نسبت به چهار عمل اصلی حساب **بسته** است.

تنها استثنائی که بنوبهٔ خود بسیار مهم است تقسیم اعداد برصفر است. این کار هم‌ارز حل معادلهٔ $a = 0 \times x$ است. اگر a صفر نباشد معادله **غیر ممکن** است، زیرا در تعریف صفر مجبور شدیم این همانی $a \times 0 = 0$ را بپذیریم. بنابراین هیچ عدد گویائی را نمی‌توان یافت که در معادلهٔ $a = 0 \times x$ صدق کند.

برعکس، معادلهٔ $0 = 0 \times x$ برای تمام مقادیر گویای x صادق است. در نتیجه x در اینجا مقدار **نامعینی** است. تا آن زمان که مسأله‌ای که به چنین معادلات منجر شده است اطلاعات بیشتری در اختیار ما نگذارد، باید به $\frac{0}{0}$ بعنوان علامتی برای **هر** عددگویا، (منطق) و به $\frac{a}{0}$ بعنوان علامتی برای **هیچ** عدد گویا بنگریم.

۱۴ با آنکه این ملاحظات استادانه به‌نظر می‌رسند، با بیان علامتی به این صورت خلاصه می‌شوند: اگر a و b و c اعداد گویائی باشند، و a برابر صفر نباشد، در این صورت همیشه فقط یك عدد گویا مانند x می‌توان یافت که در معادلهٔ زیر صدق کند.

$$ax+b=c$$

این معادله را **خطی** می‌نامند، که ساده‌ترین نوع ازاشکال گوناگون معادلات است. بعدازمعادلهٔ خطی به معادلهٔ درجهٔ دوم، سپس درجهٔ سوم، چهارم، پنجم وبطور کلی بمعادلهٔ جبری از درجهٔ nام می‌رسیم که در آن درجهٔ n عبارت‌است از بزرگترین توان مجهول x و به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots\dots+px+q=0$$

اما حتی این نیز تمام انواع بینهایت معادله رافرانمی‌گیرد، ومعادلات **مجهول‌القوه**، **مثلثاتی**، **لگاریتمی**، **دایره‌ای**، **بیضوی**، وغیره انواع وسیع‌تری راتشکیل می‌دهند که‌معمولا زیرعنوان کلی معادلات فرازنده (transcendental) طبقه

بندی می‌شوند .

آیا قلمرو اعداد گویا برای کار کردن با این اقسام نامحدود شایستگی دارد ؟ در فصل آینده خواهیم دید که مؤکداً این کار ممکن نیست . باید انتظار قلمرو وسیع‌تر و پیچیده‌تری را برای عدد داشته باشیم . ولی این توسعه اختیاری نیست ؛ و درخود مکانیسم طرح تعمیمی، فکری راهنما ومتحدکننده وجود دارد .

این فکر گاهی بنام اصل دوام (principle of permanence) نامیده‌می‌شود. درابتدا این اصل به‌طور سریع به‌وسیلهٔ ریاضی‌دان آلمانی هرمان‌هانکل (Hermann Hanckel) در ۱۸۶۷ بیان شده‌بود ، اما هستهٔ این فکر تقریباً درنوشته‌های سرویلیام روان هامیلتن - (Sir William Rowan Hamilton) ، یکی ازمغزهای بارور ومتفکر قرن نوزدهم، وجود داشته است. من این اصل را بصورت‌تعریف زیر درآورده‌ام.

مجموعه‌ای از علامات که تعدادشان بینهایت است یك **میدان عدد** خوانده می‌شود وهرجزء منفردی درآن یك **عدد**،

اول : اگر در میان افراد آن مجموعه بتوان توالی **اعداد طبیعی** را مشخص کرد .

دوم : اگر بتوان ملاکی رتبه‌ای معین نمود که بوسیلهٔ آن بتوان گفت که آیا دوجزء از مجموعه مساوی هستند یا نه، و در صورتی که مساوی نباشندکدام یك بزرگتر ازدیگری‌است. هنگامی که دو جزء اعدادی طبیعی از مجموعه باشند ملاك ما به ملاك **طبیعی** بدل خواهد شد .

سوم : اگر برای هر دو جزء از مجموعه بتوان طرحی

از جمع و ضرب به وجود آورد که خواص تبدیلی و تلفیقی و توزیعی اعمال جمع و ضرب طبیعی را داشته باشند ، و در آن صورت که این اعمال برای دوجزء طبیعی ازاین مجموعه انجام می‌گیرد به صورت اعمال طبیعی در آیند .

۱۵ این ملاحظات عمومی‌جای این سؤال را بازمی‌گذارد که : اصل دوام‌درموارد خاص‌چگونه عمل خواهدکرد ؟هامیلتن بوسیلهٔ شیوه‌ای که‌نام‌آن‌را**جفت‌کردن جبری**(algebraic pairing) نامیده ، راه را نشان داده است ، وما بوسیلهٔ اعداد صحیح این مطلب را روشن خواهیم‌کرد .

اگر b مضربی از a باشد ، در این صورت $\frac{a}{b}$ تقسیم a را بر b نشان می‌دهد. بدین‌ترتیب $۳ = \frac{۹}{۳}$ ، یعنی خارج قسمت ۹ بر ۳ برابر است با ۳ . حال اگر دو عمل که بصورت فوق نموده شده در دست باشد ، آیا راهی وجود دارد تا بدون انجام عمل بتوان گفت که نتایج عمل مساوی‌اند یا یکی بزرگتر و یا کوچکتراز دیگریست ؟ آری چنین راهی وجود دارد :

ملاك رتبه‌ای
$$\left.\begin{array}{lll} \frac{a}{b}=\frac{c}{d} & \text{اگر} & ad=bc \\ \frac{a}{b}>\frac{c}{d} & \text{«} & ad>bc \\ \frac{a}{b}<\frac{c}{d} & \text{«} & ad<bc \end{array}\right\}$$

و ماحتی می‌توانیم از این هم پا را فراتر نهیم : بدون انجام اعمال گفته شده در بالا می‌توان قواعدی برای کار کردن برروی این مقادیر وضع نمود .

جمع : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

ضرب : $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

اینك اجازه بدهید ازاین ببعد تصریح نکنیم که b مضربی است از a . بگذارید $\frac{a}{b}$ را بمثابهٔ علامتی برای موجودات ریاضی میدانی جدید تلقی کنیم . این موجودات علامتی وابسته بهدوعدد صحیح a و b اندکهبانظممعینی نوشتهشدهاند. ما ملاك رتبهای راکه در بالا بدان اشاره کردیم دربارهٔ این مجموعه ، **زوجها** اجرا می‌کنیم : یعنی در اینجا ادعا می‌کنیم که مثلا :

$\frac{۱۶}{۱۲}=\frac{۲۰}{۱۵}$ زیرا که $۲۰\times۱۲=۱۵\times۱۶$

$\frac{۵}{۴}>\frac{۴}{۳}$ « « $۴\times۴>۳\times۵$

ما اعمال‌حسابی را دربارهٔ این زوجها ، طبق قوانینی که در بالا بدان اشاره شد **تعریف می‌کنیم** ، که هنگامی که a مضربی از b و c مضربی از d باشد صادق‌اند ، بعبارت دیگر مثلا خواهیم گفت :

$$\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۵}=\frac{(۲\times۵)+(۳\times۴)}{۵\times۳}=\frac{۲۲}{۱۵}$$

$$\frac{۲}{۳}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۲\times۴}{۳\times۵}=\frac{۸}{۱۵}$$

اینك تمام آنچه را که اصل دوام شرط شده بود اجرا نمودیم :

۱ـ میدان‌جدید شامل‌اعداد طبیعی بمثابهٔ میدان ـ فرعی است، زیرا می‌توان هرعدد طبیعی را بشکل یك زوج درآورد:

$$\frac{۱}{۱}،\frac{۲}{۱}،\frac{۳}{۱}،\frac{۴}{۱}\ldots\ldots$$

۲ـ میدان جدید شامل ملاکی رتبه‌ای است که وقتی $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{b}$ اعداد طبیعی باشند بصورت ملاك طبیعی درمی‌آید.

۳ ـ میدان جدید دو عمل برای ما تهیه کرده است که دارای کلیهٔ خواص جمع و ضرب می‌باشند ، و هنگامی که $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ اعدادی طبیعی باشند این اعمال به جمع‌وضرب معمولی بدل خواهند شد .

و بنابراین موجودات جدید باتمام شروط آن اصل سازگاری دارند ، و حق خود را برای اینکه به اعداد طبیعی ملحق شوند وشایستگی نام عدد را داشته‌باشند ، ثابت‌کرده‌اند. آنها در این میدان پذیرفته شده‌اند و اینك قلمرو اعدادی که شامل موجودات قدیم و جدید است به‌نام **قلمرو اعدادگویا** خوانده می‌شوند.

۱۶ در نظر اول چنین پیداست که اصل دوام در انتخاب اعمال حسابی چنان وسعتی ایجاد کرده است‌که با توجه به‌عدد عمومی وعمومیت بیش‌ازحد آن ، ارزش عملی‌این‌اعمال را ازبین برده است . باوجود این ، شرط اینکه رشتهٔ طبیعی باید جزئی از این میدان باشد ، واینکه عملیات اصلی باید تبدیلی وتلفیقی و توزیعی باشند (مانند اعمال اعداد طبیعی)، محدودیتی‌بوجود می‌آوردکه ، همانطورکه خواهیم دید ، فقط میدانهای مخصوصی می‌توانند آن را بپذیرند .

وضع حساب را ، آنطور کــه در اصل دوام تلخیص شده است ، می‌توان با سیاست دولتی توسعه‌طلب که در عین حال خواستار حفظ قوانین اساسی است که براساس آنها نیرومندتر

می‌شود ، مقایسه نمود . این دو هدف متضاد توسعه از یك طرف و حفظ یکنواختی ازطرف دیگر ـ طبیعتاً بر قوانینی که طبق آنها باید واحدهای جدید به قلمرو این دولت پذیرفته شوند اثر می‌گذارند .

بدین ترتیب نکتهٔ اول اصل دوام با این بیان منطبق‌است که دولت اولی باید صبغهٔ این اتحاد را معین کند . دیگر آن که اگر دولت اصلی قدرت متمرکز درچند نفر باشدکه در آن هرشارمندی دارای رتبهٔ خاصی است ، این امر لازم می‌آید که همین وضع به سایرقسمتهائی که‌به‌آن ضمیمه می‌شوند نیز تحمیل شود . این الزام با قسمت دوم اصل دوام‌مطابقت دارد .

شرط آخر این است که قوانین آمیزش شارمندان هر یك از دولتها که دراتحاد پذیرفته شده‌اند ، باید ازنوعی باشد که امکان ارتباط بی مانع شارمندان آن دولت‌را با دولتی که هستهٔ اصلی اتحاد است ، امکان‌پذیر سازد .

البته من‌نمی‌خواهم که این مقایسه‌کلمه‌به‌کلمه مورد نظر قرار گیرد .منظور من از این مقایسه آن است که از زمینه‌ای که با آن آشنا هستیم مثالی آورده شود ، و به‌این ترتیب شاید تصنع ظاهری اصل دوام از میان برخیزد .

۱۷ ملاحظاتی که‌به‌ساختمان قلمرواعدادگویامنجر گردید اولین قدمهای یك جریان تاریخی است که نام **حسابانیدن ریاضیات** را به خود گرفته‌است . این جنبش که با ویرشتراس (Weierstrass) در دههٔ ششم قرن گذشته شروع شد، هدفش جداکردن‌مفاهیم ریاضی محض،مانند **عدد وتناظر ومجموعه** است‌از مفاهیم ذوقی وفطری که ریاضیات در طول سالهای دراز ارتباط خود باهندسه و مکانیك بدست آورده بود .

بعقیدهٔ صوریگران ، مفاهیم دستهٔ اخیر آن چنان در تفکر ریاضی نفوذ کرده‌اند که باوجود احتیاط فراوانی که درانتخاب کلمات بعمل‌می‌آید ، مفهوم پنهانی پشت سر آنها استدلال ما را تحت تأثیر خود قرار می‌دهد ، زیرا که اشکال کلمات در این است که **دارای محتوی‌اند**، درصورتی که مقصود از ریاضیات آن است که صورت محضی از تفکر بوجود آورد .

اماچگونه می‌توان ازکاربرد زبان‌بشری اجتناب جست؟ جواب این سؤال را در کلمهٔ **علامت** یا سمبول (**symbol**) می‌توان یافت . فقط باید زبان علامت را به کار برد که هنوز به وسیلهٔ تصورات مبهم **فضا و زمان و پیوستگی**، که منشأ آنها ذوق وفطرت است واستدلال‌محض را تیره‌وپیچیده می‌کند، آلوده نشده است ــ فقط از این راه است که می‌توان امید داشت که ریـاضیات بر پایهٔ محکمی از منطق استوارشود .

چنین‌است بنیان این مکتب ، مکتبی که به وسیلهٔ په‌آنو (**peano**) از ایتالیا پایه‌گذاری شده است و نمایندگان جدید آن‌برتراندراسل و ا.ن .وایت هد (**A.N. Whitehead**) هستند . دو نفر اخیر در اثراصلی خود بنام **اصول ریاضیات** (**principia Mathematica**) کوشیده‌اند تا تمام پایهٔ ریاضیات جدید را تجدید بنا کنند و بـا مفروضات اساسی و روشن‌کار را شروع کرده واصول منطق دقیق را به‌کاربرده‌اند. کار برد شکل علامتی دقیق ، محلی برای ابهام هائی که از زبان بشری غیر قابل تفکیک‌اند باقی نخواهد گذارد .

این‌کتاب **اصول** مدت درازی به عنوان اثری تاریخی از کاری پرزحمت و تصوراتی باشکوه باقی خواهد ماند . آیا

نویسندگان آن موفق شده‌اند تا بنائی را که با استدلال محض پشتیبانی شود و رنگ ذوق و فطرت مستقیم بشری را نداشته باشد برپا دارند ؟ من از دادن جواب به این سؤال عاجزم و هرگز ریاضی‌دانی را که هر سه جلد آنها را خوانده باشد ندیده‌ام. آنچه‌که درمحافل ریاضی شایع است این است که فقط دو نفرند که درخواندن تمام مجلدات **اصول** توفیق یافته‌اند. هنوز برای من محقق نیست که آیا خود نویسندگان جزو این عده خواننده بوده‌اند یا نه.

۱۸ من اعتراف میکنم که طرفدار صوریگری افراطی مکتب په‌آنو ـ راسل نیستم، هرگز طعم شیوه‌های منطق علامتی (سمبولیك) آنها را نچشیده‌ام، و کوشش من برای تسلط بر این شیوه منتج به ابهام و یأس شده است. بی شك این عدم شایستگی شخصی بر عقیدهٔ من اثر گذارده است و دلیل محکمی است برای اینکه من ازاظهارنظر دراین باره خودداری کنم.

برای من اهمیت عظیم این علامتیگری (سمبولیسم) در کوشش‌های عقیمی نیست که برای کنار گذاردن ذوق و فطرت از قلمرو تفکر بشری بکار می‌رود، بلکه در قدرت نامحدود آن برای **مدد رساندن به ذوق و فطرت** برای بوجود آوردن اشکال جدید تفکر است.

برای تشخیص این امر، ضرورتی نیست که علامتیگری فنی وپیچیدهٔ ریاضیات جدید تسلط یابیم. کافی است به‌علامتگری در مکالمه که بسیار ساده و در عین حال ظریف و دقیق است توجه کنیم. زیرا تا آن حد که زبان ما قادر به اظهاراتی

دقیق است ، فقط دستگاهی از علامتها بوده و **به‌تمام معنی** مانند جبر بیانیست . اسمها و اصطلاحات فقط علاماتی مربوط به طبقات اشیاءاند ، افعال نشان دهندهٔ روابطاند ، و جمله‌ها قضایائی هستند که این طبقات را به یکدیگر مربوط می‌کنند . باوجود اینکلمه درعین‌آنکه علامت یك طبقه است ، قابلیت آن را دارد که **تصویری را برانگیزد** ، و صورت مجسم شدهٔ چیزی است که نمایندهٔ این طبقه است . در این عمل دوگانهٔ زبان است که باید بدنبال نطفه‌های برخوردهائی که درآینده بین منطق و ذوق بروز خواهدکرد بگردیم..

وآنچه‌که دربارهٔ کلمات به‌صورت عام درست است ، برای کلماتی که نمایندهٔ اعداد **طبیعی** اند بطور اخص معتبر خواهد بود . که از آن جهت‌که این توانائی را دارند که در فکر ما تصویرهائی از مجموعه‌های مشخص بوجودآورند ، به‌نظرما پایهٔ آنها در واقعیت محکم چنان ریشه دوانیده است‌که می‌توان‌آنها را واجد طبیعت **مطلق** دانست . اما به آن معنی‌که در حساب بکار می‌روند ، دسته‌ای از علامات مجردندکه دستگاهی از قوانین اعمال حسابی نسبت به آنها اجرا می‌گردد .

وقتی که ماهیت علامتی عدد طبیعی معلوم شد ، خاصیت مطلق بودن خودرا ازدست می‌دهد خویشاوندی ذاتی‌آن‌باقلمرو وسیع تری که خود هستهٔ آن را میسازدآشکارمی‌شود . درعین حال گسترش‌های متوالی‌مفهوم عدد ، برخلاف آنچه‌که درابتدا بنظر می‌رسد و به صورت تردستی اختیاری و تصنعی جلوه‌گر می‌شود ، مراحلی از عمل تکامل طبیعی را تشکیل می‌دهد .

لئوپولد کرونکر (Leopold Kroncker)
«خداوند اعداد صحیح را آفرید، بقیه کار انسان است.»

۶ | ناگفتنی

۱ عدد بر گیتی فیثاغورسیان حکمروایی داشت.

عدد طبیعی، عدد صحیح، و نه عدد به مفهوم جدید کلمه، حکومتی باشکوه داشت. اما گیتی فیثاغورسیان مانند گیتی ما نبود که از ادراك مستقیم حسی تجاوز می کند، و با اختراعات متعددی که قسمت اساسی زندگی روزانهٔ ما را می‌سازد، با این همه شکوه واسرارآمیزی تجلی می‌کند: گیتی یونانیان محدود به اشیائی بود که دردسترس مستقیم حواس قرار داشت.

فیثاغورسیان در هماهنگی‌های صوتی تأییدی از فلسفهٔ عددی خود را می‌دیدند. هماهنگی بینائی‌ولامسه در اشکال کامل

هندسی بسیار عالی بود : دایره و کره ، کثیرالاضلاع منتظم و احجام کامل اجزائی بودند که مهندس فلکی درساختمان جهان آنها را به‌کار برده بود .آنچه که با اعتماد انتظارش می‌رفت این بود که در اینجا نیز عدد می بایست حکومت باشکوه خود را داشته باشد .

پایهٔ هندسهٔ فیثاغورسی این بود که « نقطه واحد وضع و مکان است .» در دنبال این صنعت سخن پردازی به تصور خط می‌رسیم که آن را اتم‌های درپی‌یکدیگر ردیف شده می‌پنداشتند ، درست مانند گلوبندی که از دانه‌های متوالی درست شده است . اتمها ممکن است تااین‌حدکوچك‌باشند، اما تماماً دارای جوهری یکنواخت و اندازه‌ای برابر و آن‌ها را میتوان به عنوان واحد نهائی اندازه‌پذیرفت. بنابراین وقتی دوقطعه‌خط مفروض باشند، نسبت طول آنها تنها نسبت تعداد اتم‌های موجود درهر یك از آنها است .

البته همین امر برای اضلاع هر مثلث و به خصوص در مثلث‌قائم‌الزاویه‌صادق بود. فیثاغورسیان‌مثلث«طلائی» راکه‌اضلاع آن به‌نسبت۳ : ۴ : ۵ بوداز‌مصر به کشورخود بردند، بزودی‌مثلث‌های فیثاغورسی دیگر مانند ، ۵:۱۲:۱۳ و ۸:۱۵:۱۷ کشف شد .

دلایلی برای این اعتقاد کـه تمام مثلث ها **گویا** هستند به وجود آمد . اما به هیچ‌وجه‌به این مسئله‌که بعضی ازمثلث‌ها، و در حقیقت اغلب آن‌ها ، تابع چنین قانونی نیستند برخورد نشد . زیرا بهر حال ،نسبت‌های اضلاع به صورت اعدادی‌بزرگ و طولانی در می‌آید و فن محاسبهٔ یونانیـان در آن وقت بسیار ابتدائی ومحدود بود .

مدت زمانی وضع بدین منوال بود .

۴ مشاهدهٔ چنین مثلث‌هائی به کشفی عمده منجر شد که تا به امروز نام فیثاغورس را به خودگرفته است ویکی از قضایای اساسی هندسهٔ رسمی را می‌سازد . این قضیه عبارتست از این که:

در هرمثلث قائم‌الزاویه مجموع دومربع که بر روی ساقهاساخته‌شودبرابراست بامربعی که بر روی وتر بناگردد . این طور شایع است که این قضیه به وسیلهٔ خود فیثاغورس کشف شده و چنان تحت تأثیر شکوه آن قرار گرفته بود که گاو نری را برای خدایان قربانی کرد . قضاوت دراین که داستان بالا تاچه حد می‌تواند با این واقعیت که فیثاغورسیان طرفدارسرسخت غذای نباتی بوده‌اندسازگار باشد، به خوانندگان واگذار می‌شود .

این کـه فیثاغورس قضیهٔ خود را از راه استدلال قیاسی اثبات کرده باشد مورد شك است . بیشتر محتمل است این کار محصول تجربه‌باشد . این که فیثاغورس راه اثبات قاطعی برای این قضیه داشته است احتمال فراوان ندارد .اما تقریباً شکی نمی‌توان داشت که او وشاگردانش اهمیت زیادی برای آن قائل بودند ؛ **زیرا درآن اتحادلاینفك بین هندسه وحساب** را مشاهده می‌کردند که مؤید تازه‌ای برای این گفتهٔ آنها بود که : « عدد بر گیتی حکومت دارد . »

اما عمر این فیروزی کوتاه بود . در واقع یکی ازنتایج بلافصل قضیه کشف دیگری بود ، و معلوم شد که **قطر مربع قابل اندازه گیری با ضلع آن اندازه پذیر نیست ،**

این که چه کسی برای اولین بار این امر را نشان داد ، وچگونه این کار صورت گرفت ، امری است که به‌احتمال زیاد همیشه در ابهام خواهد ماند . دلیل زیبای اوقلیدس ، که در پائین خواهد آمد ، مسلماً حاصل رشد شیوهٔ ابتدائی‌تری بوده است . اما هر که میخواهد کاشف آن باشد ، در میان فیثاغورسیان سرگیجه و حیرت زدگی زیادی فراهم ساخت . نامی که به این گونه کمیات داده شده میتواند گواه صادقی براین امر باشد . این طولهای بایکدیگر اندازه‌ناپذیر را به‌نام آلوگون (Alogon) یا ناگفتنی نامیدند ، و اعضای فرقه سوگند یاد کردند تا وجود آنها را برای دیگران فاش نسازند . پرده از روی نقص در کار معمار بزرگ جهان برداشته شد ولازم بود که در محاق استتار نگهداری شود ، مبادا که غضب او برمردم فرود آید .

پروکلوس (proclos) گفته است :

«میگویند کسانی که مقادیر اصم‌را نخستین بار از نهانگاه بیرون آوردند و افشا کردند ، تا آخرین نفر درطوفانی که کشتی آنها را شکست هلاك شدند. زیرا ناگفتنی و بی شکل باید مکتوم بماند .وکسانی که آن را برملا ساختند و به‌این تصویر زندگی دست درازی کردند بلافاصله خانه خراب شدند و برای همیشه نیز بایددستخوش موجهای ابدی باشند.»

۳ در مدتی کمتر از یك قرن راز فیثاغورس در تملك مردان متفکر بود : ناگفتنی گفته شد ، چیزی که قابل تفکر نبود به کسوت و کلام در آمد ، آن چه‌که نمی‌بایدآشکار شود در مقابل دیدگان نامحرم قرار گرفت . انسان طعم‌گندم را در بهشت اعداد فیثاغورس چشید و از آن جا رانده شد .

حادثهٔ مقادیر اصم انحطاط فیثاغورسیگری را بعنوان دستگاهی از فلسفهٔ طبیعی نشان می‌داد . معلوم شد که آنچه را که فیثاغورسیان دربارهٔ توافق کامـل بین اشیاء حسابی و اشیاء هندسی موعظه می‌کردند شوخی و فریبی بیش نیست : عدد ، که حتی جوابگوی ساده‌ترین چهرهٔ گیتی یعنی **هندسه** نیست ، چگونه میتواند بر آن حکمروائی کند ؟

بدین سان اوّلین کوشش برای بیان کامل طبیعت با عدد پایان یافت .

۴ مانند اغلب براهین کلاسیك ، دلیل اوقلیدس دربارهٔ اندازه پذیر نبودن قطر مربع بحسب ضلع آن از نوع برهان خلف است . فقط ظاهر این استدلال هندسی است ، زیرا اساس آن بطور کامل تئوری اعداد است . درعبارت سازی جدید ، اگر هر ضلع مربع باواحد وقطرآن بـا x ، نشان داده شود . قضیهٔ فیثاغورس به حل معادلهٔ درجه دوم زیر منجر می گردد :

$$x^۲ = ۲ \text{ یا } x^۲ = ۱^۲ + ۱۲ \qquad (۱)$$

اگر عددی گویا مانند $\frac{p}{q}$ بتوانـد در ایـن معادله صدق کند ، دراین صورت قطر وضلع بایکدیگر قابل سنجش‌اند. فرض کنیم که وضع چنین باشد و کسر $\frac{p}{q}$ **راتاحدممکن کوچك کرده باشیم** .دراین صورت یکی‌از اعداد صحیح p یا q باید فرد باشند . من نشان خواهم داد که p نمی‌تواند فرد باشد . در واقع اگر در معادلهٔ (۱) بجای x ، $\frac{p}{q}$ بگذاریم ،خواهیم داشت :

$$p^{2}=2q^{2} \text{ یا } \frac{p^2}{q^2}=2 \qquad (2)$$

که نشان می‌دهد p^2، و بنابراین p زوج است.

اما اینک که p زوج است می‌توان آنرا برابر $2r$ اختیار کرد، که r عدد صحیح نامعلوم دیگریست. اگر به جای p مقدار آنرا در (۲) بگذاریم به دست می‌آید:

$$q^{2}=2r^{2} \text{ یا } 4r^{2}=2q^{2}$$

که نوعی از رابطهٔ (۲) است. اما ایـن بدانمعنی است که عدد صحیح q نیز زوج است، که با این فرض که $\frac{p}{q}$ بـه آخرین حد خود کوچک شده است مغایرت دارد، و به‌نوبهٔ خود ثابت می‌کندکه نمی‌توان عددی گویا پیدا کرد که در $x^{2}=2$ صدق کند.

استدلال کاملا عمومی است. باکمی تغییر آنرا می‌توان در معادلات زیر:

$$x^{2}=3 ، x^{2}=5 ، x^{2}=6$$
$$x^{3}=2 ، x^{3}=3 ، x^{3}=4$$

و بطورکلی در معادلهٔ $x^{n}=a$ بکار برد.

هنگامی که a توان n ام عددی گویا نیست، معادلهٔ $x^{n}=a$ دارای جوابهای گویا نخواهد بود.

۵ مادرمیان نوشته‌های علمای هندسهٔ‌کوچکتر یونان مانند هرو (Hero) اسکندرانـی و تئون (Theon) از میری به مقادیری تقریبی از اعداد $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ و غیره برمی‌خوریم، در آنجـا بطریق به دست آوردن ایـن مقادیر

اشاره‌ای نشده است . ولی چون در اغلب این اندازه‌ها تقریب بسیار کم است ، مورخان ریاضی میدانی به دست آورده‌اند که آزادانه خیال خود را بکار اندازند و به تصور خود شیوه‌های حساب ناشناخته ایشان از نو بسازند . چنین نظریاتی را در اینگونه تاریخ‌ها بسیار می‌توان یافت . بعضی می گویند ریاضی‌دانان یونان از سری‌های بینهایت باخبر بودند . دسته‌ای دیگر بر آنندکه آنها کسرهای مسلسل را می‌شناختند. من نیز نظریه‌ای از خود دارم ،که با آنکه مانند دیگر نظریه ها ذهنی است ، لااقل این مزیت را دارد که مانند دیگر نظریه ها مبتنی بر این فرض نیست که یونانیان در روشهای ریاضی جدید مهارت داشته‌اند.

نظریهٔ من چنین است : برهان اقلیدس دربارهٔ گنك بودن $\sqrt{۲}$ برای اعتقاد یك ریاضی‌دان **متوسط** یونانی بیش از آن بیگانه بود که بتواند قانع‌کننده باشد . در میان فیثاغورسیان « سخت جانهائی » یافت می‌شدندکه امید خود را برای به دست آوردن مقادیر گویا برای $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۳}$ و غیره از دست نمی‌دادند . جستجو برای چنین مقادیر گویا از طبیعی‌ترین راهها ادامه یافت . مثلا ممکن است عدد ۲ به صورت کسرهای بیشماری نوشته شودکه مخرج آنها مجذور کامل است :

$$\frac{۲}{۱}=\frac{۸}{۴}=\frac{۱۸}{۹}=\frac{۳۲}{۱۶}=\frac{۵۰}{۲۵}=\frac{۷۲}{۳۶}=\frac{۱۲۸}{۶۴}=\frac{۲۰۰}{۱۰۰}=\cdots$$

اگر $\sqrt{۲}$ عددی گویا بود ، در اینصورت تصور می‌شد که با ادامهٔ این کار به قدرکافی ، آخرالامر کسری به دست خواهد آمد که صورت آن نیز مجذور کامل باشد ؛ البته آنها

دراینکار توفیقی به دست نیاوردند ، اما نتیجهٔ فرعی این کوششها به دست آمدن مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ بادقتی بسیار عالی بود .

در واقع $2 = \frac{288}{144}$ است

در حالی‌که $\left(\frac{17}{12}\right)^{2} = \frac{289}{144}$ می‌باشد

این رابطه برای $\sqrt{2}$ تقریب تئون یعنی $1\frac{5}{12}$ رامی‌دهد ، که با مقدار واقعی آن کمتر از $\frac{1}{7}$ از ۱٪ تفاوت دارد . من این نظریه را به خاطر ارزشی که دارد بیان کردم .

۶ در هندسه مسائل مختلفی وجود دارد ،که حتی بعضی‌از ساده‌ترین آنها ، لااقل تا آنجا که می‌توانیم خودرا در قلمرو اعداد گویا محدود کنیم ، حل **عددی** نمی‌پذیرند . قطر مربعی با ضلع یك را در نظر بگیرید . طفلی که ساختن اشکال ساده را با پرکار و خط‌کش آموخته است ، می‌تواند این قطر را بطریق **هندسی** به دست آورد . همین امر در بارهٔ مسائلی که به معادلات درجهٔ دوم و درجهٔ سوم و درجات بالاتر و حتی معادلات فرازنده منجر می‌شوند نیز صادق است . ولی مسائل فوق کاملا از تیررس **حساب گویا** دور مانده‌اند .

ازطرف دیگر، مقادیر گنك را می‌توان به وسیلهٔ مقادیر تقریبی گویا تاهردرجه تقریب نشان داد . روشی‌که دربالا ارائه داده‌ایم روشی کاملا عمومی است . روش‌هائی نظیر آنچه‌که در فوق گفته شد عبارتنداز : **الگوریثم** (algorithm) برای استخراج ریشهٔ دوم ، که در مدرسه با آن آشنا شده‌ایم ، بسط به صورت سری ؛ کسرهای مسلسل ؛ و اشکال دیگری که هنگام

مواجهه با مسئله‌ای که حل گویا ندارد بکار بـرده می‌شوند .
این شیوه‌ها امکان می‌دهد که عددگنگ را بین دو عضو پشت سر هم از رشتهٔ اعداد گویا به « تله » بیندازیم : یکی‌از این دوعدد پیوسته « کوچکتر » و دیگری پیوسته « بزرگتر » از آن عــدد گنگ است و بعلاوه فاصلهٔ بین این دوتقریب‌گویا تا حد دلخواه می‌تواند کوچك باشد .

دیگر بچه چیز نیازمندیم ؟ فیزیك دان و مهندس و کسی که باعمل سروکار دارد راضی‌اند . آنچه‌که مورد نیـازفیزیك‌ـ دانست درجهٔ دقتی است که با آن بتواند از ابزار اندازه‌گیری خود ، که دقت آن روز افزونست نهایت بهره‌برداری را بنماید.
این مسأله که بعضی از مقادیر مانند $\sqrt{2}$ ، π یا e از نقطهٔ نظر ریاضی به وسیلهٔ اعداد گویا قابل بیان نیستند خواب را بر اوحرام نمی‌کنند،زیرا ریاضیات تاحدی که بدان نیازمند است ، اندازه‌های تقریبی‌گویائی برای این مقادیر گنگ جهت بهره ـ برداری او فراهم می کند .

۷ وضع ریاضی‌دان نسبت به این مسأله متفاوتست و به این دلیل او به قلمرو اعداد گویا به چشم قلمروی تمام و جامع می‌نگرد . او مشاهده می‌کند که این مجموعه از منهای بینهایت گسترش می‌یابد ، از صفر می‌گذرد ، و به بعلاوهٔ بی‌نهایت می‌ـ رسد . این مجموعه مرتب است : هر دو عدد گویائی را که به او بدهید ، به شما خواهد گفت‌که کدامیك بزرگتر است . بین هر دو عدد گویا ، هرقدرهم‌که آندو به یکدیگر نزدیك باشند، باز می‌تواند عدد سومی واردکند . او به‌زبان خودش این مطلب

راچنین بیان می‌کندکه قلمروگویا **درهمه جامتکاثف** است . خلاصه او مجموعهٔ اعداد گویـا را بمثابهٔ **توده‌ای متراکم و پیوسته و ظاهراً بدون شکاف می‌دادند .**

برای او شباهتی جدی بین ایـن مجموعه و دسته‌ای از نقاط که برروی خطی مستقیم قرار دارند وجود دارد . دراینجا نیزاین مجموعهٔ نقاط ازهردوجهت بطور نامحدود گسترده‌اند. در اینجا نیز می‌تواند بگوید که از دو جزء کدامیك در طرف راست دیگری قرار دارد . و باز او در اینجا به خاصیت تراکم برمی‌خورد ! زیرا بین هر دونقطه ، هرقدر هم کـه به یکدیگر نزدیك باشند ، نقطهٔ سومی را می‌تواند قرار دهد . این شباهت آن اندازه کـامل به نظر می‌رسد کـه راهی برای **تطابق بین قلمرو اعداد گویا از یکطرف و نقاط واقع بر روی یك خط از طرف دیگر به وجود می‌آورد .**

این‌تطابق پایهٔ **هندسه‌تحلیلی** است، وحتی خوانندگانی که هرگز آنرا مطالعه نکرده‌اند به وسیلهٔ بعضی ازنمودارهائی که به دست آنها رسیده است تصور خوبی ازآن می‌توانند داشته باشند . بنابراین من فقط باید به آنها یادآوری کنم که طرح مزبور شامل تعیین **جهتی** مثبت و منفی بر روی خطی مستقیم است . چنین خطی‌که دجهت‌دار شده است **محور** نامیده می‌شود . بـرروی محور دو نقطه انتخاب می‌کنیم : O به عنوان مبدأ کـه عدد صفر را مشخص می‌کند ؛ و U ، **نقطهٔ واحد** که عدد ۱ را نشان می‌دهد. اعداد صحیح مثبت را به این‌ترتیب

به دست می‌آوریم که فواصل مساوی باطول OU درطرف راست جدا می‌کنیم، و برای‌اعداد منفی این‌کار را درطرف‌چپ انجام می‌دهیم . با تقسیم قطعهٔ واحد به تعدادی مساوی می‌توانیم کلیهٔ کسرهای مثبت ویا منفی مورد نظررا به دست‌آوریم.

بدین‌ترتیب هرعدد گویا می‌تواند به وسیلهٔ نقطه‌ای بر روی محور مشخص شود ؛ و بلافاصله این سؤال مطرح می‌شود که آیا عکس این امر نیز صحیح است یا نه ، به عبارت دیگر آیا هر نقطه برروی محور باعددی گویا مطابقت دارد یا نـه . جواب این مسأله مسلماً **نه** است : زیرا اگرمربعی باضلع OU بسازیـم و قطعهٔ OD را بـرروی محور مساوی قطر آن منتقل کنیم ، **نقطهٔ D متناظر با عددی گویا نیست .**

بنابراین نبودن شکاف‌ها توهمی‌بیش نبوده است . درست است‌که اگر **تمام** اعداد گویـا برروی محور **رسم** می‌شدنـد دستهٔ متراکمی به‌وجود می‌آمد ؛ امـا این نقاط بهیچوجه خط را پر نخواهندکرد : تعدادی بینهایت شکاف باقی خواهد ماند که چنین‌شرطی را نمی‌پذیرند. بعداً خواهیم دیدکه مفهوم این ادعای ما که **فواصل گنگ تعدادشان به مراتب بیش از نقاط** گویا است چیست .

از نقطه نظر ریاضیات محض واقعیت اساسی این است : هر عدد گویا متناظر با نقطه‌ای برروی محور است ، امـا این تطابق متعاکس نیست . برروی محور نقاطی موجودند که هیچ عددگویائی را نمی‌توان بدانها تخصیص داد : این نقاط نه تنها در تعداد بینهایت‌اند ، بلکه ازنظر نوع وچگونگی نیزلایتناهی

هستند. هریك از انواع ، مانند $\sqrt{a}$ ، $\sqrt[3]{a}$ ، ... $\sqrt[n]{a}$ و غیره شامل تعدادی بینهایت از نقاط **گنگ** اند .

۸ بدین ترتیب ما بار دیگر با وظیفهٔ گسترش مفهوم عدد مواجه هستیم . باید قلمرو عدد را به حدودی دورتر از مفهوم عدد گویا بسط دهیم ، زیرا این تصور حتی برای حل ساده‌ترین معادلات درجهٔ دوم نیز ناتوان است .

استمداد از اصل دوام، که چنین خدمت پرارجی برایمان انجام داده است طبیعی به نظر می‌رسد . ما علامت $\sqrt[n]{a}$ را اختراع می‌کنیم . این علامت در صورتی نمایندهٔ عددی گویا است که معادلهٔ $x^n = a$ دارای ریشه‌ای گویا ، a توان n ام عددی گویا باشد . با استفادهٔ از این حالت مخصوص به عنوان نقطهٔ شروع قواعدی برای اعمالی که با این علامات باید انجام دهیم به وجود می‌آوریم . بدین ترتیب ازاین تماثل برای تعریف روابط میدانی جدید، میدان **گنگ‌های ساده یا رادیکال‌ها** که با $\sqrt[n]{a}$ علامت‌گذاری می‌شوند ، استفاده می‌کنیم . به کمك طرح تبدیل توانها به یك توان مشترك ، به سهولت ملاکی برای تعیین رتبه به‌وجود می‌آید. مثلا اگر بخواهیم $\sqrt{2}$ را با $\sqrt[3]{3}$ مقایسه کنیم می‌نویسیم :

$$\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{9}\,;\ \sqrt{2}=\sqrt[6]{8}\,;\ \sqrt[6]{9}>\sqrt[6]{8}$$

واین رابطه به‌نامساوی $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ منجرمی‌شود .
ضرب و تقسیم نیز به وسیلهٔ همین تدبیر قابل تعریف‌اند. حاصل ضرب هر دو عدد **گنگ** موجودی از همان نوع است . برای مثال :

$$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{8\times 9}=\sqrt[6]{72}$$

باوجود این یك اشکال غیرقابل حل وجود دارد. عبارتی مانند $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ را نمی‌توان به شکل $\sqrt[n]{a}$ ، که در آن a عددی گویا است بیان کرد . **جمع دو عدد گنگ ساده معمولا عدد گنگ ساده‌ای نیست** میدان اعداد گنگ ساده نسبت به‌ضرب‌وتقسیم «بسته» است ، اما برای جمع وتفریق این میدان « کاملا باز » است .

برای‌بوجودآوردن یك دستگاه منطقی مجبوریم که میدان خود را از اعداد گویـای ساده به **اعداد گویای مرکب** ، مانند $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$ گسترش دهیم. اما قبل‌از اقدام به چنین گسترشی اجازه بدهید نظری اجمالی به آنچه‌که در مقابلمان است بیفکنیم .

۹ نبایدفراموش‌کرد که ما برای «حل» معادلهٔ عمومی زیر شروع بکار کردیم :

$$ax^{n}+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+px+q=0$$

که در آن n عدد صحیح دلخواهی است و کلیهٔ ضرائب نیز اعدادی گویا هستند . از این معادلات عمومی مورد خاص آنرا که معادلهٔ دوجمله‌ای زیر باشد در نظر گرفته‌ایم :

$$ax^n + b = 0$$

حالت $n = 1$ به‌قلمرو اعداد گویا خواهد رسید ، وحالت عمومی اعداد گنگ ساده را پیش‌می‌آورد. اما دربارهٔ معادلهٔ کلی چه باید گفت ؛ اگر بتوان آنرا بـه معادله‌ای ساده و از نوع $x^n = A$ تبدیـل کرد ، در اینصورت جواب رسمی آن اعداد گنگ ساده خواهد بود . مسألهٔ اساسی اینست : آیا هرمعادلهٔ جبری را می‌توان به معادله‌ای دوجمله‌ای تبدیل کرد ؟ یـا به عبارت دیگر ، **آیا جواب معادلهٔ عمومی جبری را می‌توان رسماً با رادیکال‌ها بیان کرد ؟** تاریخ این مسأله مثال جالبی برای استدلال استقرائی ارائه می‌دهد .

انواع مخصوص معادلات درجهٔ دوم در **آریتمتیکای** دیوفانتوس‌یافت می‌شود . باردیگر نظریه بوسیلهٔ هندیها گسترش یافت و به‌موازات آن قواعدی برای اعمال برروی اعداد گنگ بوجود آوردند کـه تقریباً به همان شکلی است کـه امروز در ریاضیات معمول است . این رسالت بوسیلهٔ ریاضی‌دان عالم اسلام کامل شد : معلوم گردید که جواب رسمی معادلهٔ **کلی درجـه دوم** $ax^2 + bx + c = 0$ به صورت $A + \sqrt{B}$ است یعنی ، **می‌توان آنرا بوسیلهٔ اعداد گویا و اعداد گنك درجه دوم بیان کرد .**

بعداً مسلمانان به معادلهٔ کلی درجه سوم $ax^3+bx^2+cx+d=0$ پرداختند که کامیابی آنها در این باره قابل تردید است. عمر خیام با استادی راه حلی هندسی بوجود آورده است، اما کوشش بیهودهٔ او برای حل جبری آن او را وادار کرد که بدون دلیل قبول کند که حل معادلهٔ درجه سوم بوسیلهٔ رادیکالها غیرممکن است. این مسئله ریاضی‌دانان ایتالیائی دوران رونسانس را مفتون خود کرد، و در قرن شانزدهم در اوضاع و احوال خاصی که بعداً در آن باره سخن می‌گوئیم، بطور کامل حل گردید. آنها به این نتیجه رسیدند که **جواب عمومی معادلهٔ درجه سوم را بوسیلهٔ ریشه‌های دوم و چهارم می‌توان بیان کرد.**

تقریباً در همین اوقات فراری (Ferrari) از ایتالیا حل معادلهٔ درجهٔ چهارم را به حل معادلات فرعی ومعاون درجهٔ دوم ودرجهٔ سوم تبدیل کرد، و بدین ترتیب ثابت کرد که **ریشه‌های رسمی معادلهٔ درجهٔ چهارم رادیکالهائی است که نمای آنها از چهار تجاوز نمی‌کند.**

نتیجهٔ طبیعی آن بود که بطورکلی باید قبول کرد که: معادلهٔ درجه n ام باید، بنابرسابقه، حلی رسمی بوسیلهٔ رادیکالها داشته باشد، و احتمالا نمای این رادیکالها نباید از n بزرگتر باشد. در واقع این اعتقاد اغلب ریاضی‌دانان سده هجدهم و به استثنای لاگرانژ بود.

مسأله تا نیمهٔ اول سده نوزدهم حل نشد. همانطور که اغلب در ریاضیات اتفاق می‌افتد، اشکال بیش‌ازاندازهٔ موضوع، شیوه‌های جدیدی را ایجاب می‌کرد، و معلوم شد که این

شیوه‌های جدید بیش‌از خود موضوع بارور وهمه جانبه بودند .
سهم اساسی روفینی (Ruffini) و آبل (Abel) وگالوآ (Galois)، نه‌تنها حل این مسأله را سبب شد ، بلکه ریاضیات را بامفهوم تازه و اساسی **گروه** غنی‌تر ساخت .

۱۰ بسیار قابل توجه است که دونفر مانند آبل وگالوآ باخصوصیات و طرز تفکرهای کاملا متفاوت نسبت به یك مسأله علاقه‌مند شوند و هر دو شیوه‌های مشابهی را در آن به‌کاربرند. هر دو ، با اعتقاد به اینکه حل معادلهٔ درجهٔ **پنجم** بوسیلهٔ رادیکالها ممکن است ، این معادله را بررسی کردند . ایـن بررسی را آبل در ۱۸ سالگی و گالوا در ۱۶ سالــگی شروع کرد . در واقع هر دوی آنها مدت کوتاهی گمان کردند کـه چنین جوابی را کشف کرده‌اند ، ولی هر دو بزودی به اشتباه خود پی بردند و مسأله را با شیوه‌های جدید بررسی نمودند .

در ۱۸۲۵ آبل به شکلی قاطع ثابت کرد کـه **معادلهٔ عمومی درجه پنجم نمی‌تواند فقط بوسیلهٔ رادیکالها حل شود .** او همچنین حدس زد که این امر برای معادلات بادرجهٔ بالاتر از ۵ نیزصادق است . این موضوع به شکلی‌کامل توسط‌گالوآ اثبات‌گردید. اوبه این سئوال‌که «ماهیت معادله‌ای که جواب آن با رادیکال‌ها مشخص شود چیست ؟ » تمام وعیار در **وصیت نامهٔ خاطرات** (testament-memoir) پاسخ داده است . این مسألهٔ خاص بودکـه گالوآ را به ارائهٔ نظریهٔ جدید دربارهٔ معادلات ، که معمولا به‌نام نظریهٔ‌گروههای گالوآمشهوراست، وادارکرد. اما این موضوع خارج ازچشم‌

انداز ما است .

۱۱ به موضوع اصلی برگردیم . کار برد مستقیم اصل دوام برای موضوع مقادیر گنگ به دو دلیل با اشکال مواجه می‌شود . یکی آنکه مقادیر گنگ ساده ، یعنی اعداد گنگی که به شکل $\sqrt[n]{a}$ هستند ، میدانی بسته نمی‌سازند . دیگر آنکه اعداد گنگ مرکب توانائی حل معادلهٔ **عمومی با درجهٔ بیش از چهار** را ندارند .

برای به‌وجود آوردن یك نظریهٔ جامع لازم‌است‌که تمام میدان **جبر** را که شامل کلیهٔ اعداد جبریست مورد نظر قرار داد ؛ یعنی به‌حل تمام معادلات ممکن جبری باید توجه داشت. چنین میدانی محققاً شامل قلمرو اعداد گویا نیز خواهد بود . بعلاوه می‌توان نشان داد که میدان جبری نه تنها نسبت به‌چهار عمل اصلی ، بلکه همچنین نسبت به استخراج ریشه میدانیست بسته ؛ به عبارت دیگرمجموع و تفاضل و حاصل‌ضرب و حاصل تقسیم و توان و ریشه هر دو عدد جبری خود اعداد جبری‌اند . و از این مهمتر آنکه اگر معادلهٔ کلی زیر را درنظربگیریم:

$$ax^{n}+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+px+q=0$$

که در آن n عددیست صحیح ، اما a،b،c ... p ، q دیگر محدود بـه اعداد گویا نبوده بلکه بتوانند نوع کاملا عمومی اعداد جبری‌باشند ؛ اگرچنین معادله‌ای قابل حل باشد **ریشهٔ آن عددیست جبری** .

باوجود این ، گرچـه نظریهٔ اعداد جبری ممکن است

جامع باشد ، ولی معایبی جدی نیز بـه همراه دارد . در وهلهٔ اول علامت‌گذاری مورد نیاز آن مبهم و بـد شکل است ، زیرا متضمن‌تمام ضرایب معادله است . بعلاوه عملیات مربوط به‌چنین علاماتی آنقدر پیچیده است کـه حتی ساده‌ترین آنها غیرعملی است . بالاخره ، مشکل جدی تر آنست کـه یك معادله جبری بالاتر از خطی ، معمولا **بیش از یك ریشه دارد .**

معادلهٔ درجهٔ دوم دو ریشه‌ومعادلهٔ درجه n ام تا n ریشهٔ متمایز می‌تواند داشته باشد . ابهام ذاتی همراه با چنین روش عمل ، بخصوص هنگامی‌کـه در بارهٔ مسائلی که ارزش واحد و معین بـرای آنها دارای اهمیت درجهٔ اولی است ، به صورت مانع غیرقابل عبور درمی‌آید .

۱۲ اما مدتها قبل از آنـکه نهضت تعمیم مفهوم عدد در این جهت نیروئی بدست آورد ، واقعه‌ای اتفاق افتاد کـه حتی اهمیت اکتشافات آبل و گالوآ را درپردهٔ تاریکی فرو برد . در ۱۸۴۴ ریاضی‌دان فرانسوی ژاك لیوویل (Jacques Liouville) استاد دانشسرای عالی و پایـه‌گذار مجلهٔ ریاضیات (Journal des mathematiques) در مقابل آکادمی گزارشی را قرائت کرد که بعداً در مجلهٔ خود او تحت عنوان « دربـارهٔ طبقهٔ بسیار وسیع مقادیـری کـه نه جبری‌اند و نه قابل تبدیل به اعدادگنگ جبری » انتشار یافت. در این مقالهٔ علمی ، که سازندهٔ عصری جدید بود ، لیوویل مقادیری راکه از نظر ماهیت خود نمی‌توانند ریشه‌های هیچ‌یك از معادلات جبری باشند ارائه داد ، و بدین‌ترتیب سوء ظنی را

که لوژاندر (Legendre) در ۱۷۹۴ ابراز کرده بود تأیید نمود .

هر اندازه انواع اعداد جبری زیاد بنظر رسند، با این‌حال ناحیه‌ای در قلمرو بزرگتری بیش نیستند ، وهمانطور که پنجاه سال بعد گئورگ کانتور (Georg Cantor) در برهانی جدید برای قضیهٔ لیوویل تئوری اعداد غیر جبری بنام **فرازنده** را بر پایهٔ محکمی وضع نمود ، نشان داد که وسعت این قلمرو بسیار بیش‌از حدود اعداد جبریست .

عجیب تر آنست که این ترانساندانها محصول خارق‌العادهٔ ادراك ریاضی نیستند و اشتهای ریاضی‌دانها را در زمینهٔ تجرید تحریك نمی‌کنند . اختراع حساب انتگرال بدنبال خود **لگاریتم‌ها و نسبت‌های مثلثاتی** را بوجود آورد که درطول قرنهای بعد عمــلا نقشی مسلط در کلیهٔ مسائل تحلیلی داشتند . امروز این مقادیر مورد استفادهٔ روزانهٔ هر دفتر مهندسی در سراسر دنیا وابزار نیرومندی برای بکار بردن ریاضیات است. در طول پنجاه سال بعد از اعلام لیوویل ، بطور قطعی ثابت شد که اغلب این مقادیر فرازنده هستند . برای فهم بهتر مطلب نظری اجمالی بر تاریخ عدد π می‌افکنیم .

۱۳ « و دریاچه ریخته شده را ساخت که از لب تا لبش ده زراع بود و از هر طرف مدور بود و بلندیش پنج ذراع و ریسمانی سی زراعی آن را گرداگرد احاطه میداشت . »

کتاب « تواریخ‌ایام IV ، ۲.۳»

چنین بنظر میرسد کــه ، با توصیف استخر شنای کاهنان

معبد سلیمان ، نشان داده شده است که یهودیان قدیم نسبت بین محیط دایره با قطر آن ، یعنی عدد π را برابر ۳ میدانستند. این مقدار ۰۵/۰ کمتر ازمقدار حقیقی است. مصریها اندازهٔ نزدیکتری به واقعیت بدست آورده بودند : درپاپیروس ریند (۱۷۰۰ قبل از میلاد) دیده می‌شود که مقدار π برابر $\frac{۱۳}{۸۱}$ ۳ یا $\frac{۲۵۶}{۸۱}$ یا $(\frac{۱۶}{۹})$ ذکر شده است که کمتر از ۰۱/۰ تقریب اضافی دارد .

طبیعی است که این مقدار از زمانهای بسیار قدیم می‌بایست موضوع بررسی یونانیان شده باشد . اما درخاک یونان مسأله رنگ تازه‌ای پیدا کرد ، و جای خود را در میان مسائل عتیق باز نمود و یکسوت باشکوه و افسانه‌ای اساطیر یونان درآمد . تعداد این مسائل سه بود: **تضعیف مکعب ، تثلیث زاویه و تربیع دایره .** مسألهٔ اخیر اساساً همارز تعیین عدد π است ، زیرا سطح دایره‌ای به شعاع واحد برابر π واحد مربع است ، و اگر عدد π بتواند به شکل گویا بیان شود تمام مسأله تبدیل به ساختن مربعی باسطح معلوم خواهد شد . درواقع ، اگر اندازهٔ مصری صحیح بود ، سطح دایره می‌باید همان سطح مربعی که برروی $\frac{۸}{۹}$ قطر دایره ساخته می‌شد باشد .

تقریباً تمام هندسهٔ یونانی در اطراف این سه مسأله رشد کرده است . هندسه‌دانان یونان باکوشش برای حل این مسائل مقاطع مخروطی و تعدادی از منحنی‌های با درجات بالاتر را کشف کردند . محتملا آنها گمان نمی‌بردندکه چنین راه‌حل‌هائی که به دنبالشان می‌گشتند وجود ندارد ، دشواری و حل‌ناپذیری این مسائل تنها آتش اشتیاقشان را شعله‌ور می‌ساخت

ومغزهای بزرگی را از ارشمیدس گرفته تا آپولونیوس به عرصهٔ هندسه می‌کشاند .

۱۴ اما دو مسألهٔ اول از نظر جبری به ترتیب هم‌ارز حل معادلات درجهٔ سوم ساده زیراند :

$$4x^3-3x-a=0 \quad \text{و} \quad x^3-2=0$$

که در آن a یک کسر واقعی است . آیا وقتی ما بر- پیشانی این مسائل داغ ناممکن بودن را می‌زنیم کلمهٔ «ناممکن»را به‌همان مفهومی که درحساب گفتیم ، یعنی معادل با محدودیتی که برای یك میدان بوجود آوردیم بکار می‌بریم ؟

آری ! ناممکن بودن مسائل کلاسیك بوسیلهٔ محدودیتی بسیار قدیمی ، که کاملا جنبهٔ طبیعی به خود گرفته بود تحمیل شده بود . و در واقع این محدودیت آنقدر طبیعی شده بود که بندرت بدان اشاره‌ای می‌شد . هنگامی که یونانی از ساختمان هندسی صحبت می‌کرد ، مقصودش ساختمانی بـا **خط‌کش و پرگار** بود . اینها ابزار خداوند بودند ؛ کلیهٔ وسائل دیگر بعنوان اشیائی که ارزش تفکر فیلسوف را نداشتند تحریم شـده بودند ؛ زیرا باید یادآوری کنیم که فلسفهٔ یونان اساساً فلسفه‌ای اشرافی بود . شیوهای مربوط به صنعتگران ، هرچند که بنظر زیباوحاکی ازنبوغ می‌رسید ، بازشیوهائی عامیانه تلقی می‌شد، و تمام کسانی کـه معرفت خود را برای هدف‌های سودجویانه به کار می‌بردند مورد تحقیر عموم قرار می‌گرفتند . (داستانی از اشراف‌زادهٔ جوانی گفته شده است که در آکادمی اوقلیدس

نام‌نویسی کرد . بعداز چند روز ، چنان از ماهیت تجریدی موضوع ناراحت گردید که از استاد فایدهٔ عملی این بررسی‌ها را پرسید . در نتیجه استاد غلامی را فرا خواند وچنین دستور داد : « به ایــن جوان سکه‌ای بده تــا بتوانــد از دانش خود بهره بردارد . »)

اینك،مسائلی که فقط بتوانند بوسیلهٔ خط‌کش حل شوند ، یعنی مسائلی که امروز **خطی** نامیده می‌شوند ، به زبان جبری به معادلات **خطی** منجر خواهد شد . اما آنهائی که برای حل خود علاوه بر خط‌کش محتاج به پرکار نیز می‌باشند ، از نظر جبری هم‌ارزحل معادلات **درجه دوم**اند . بااین حال قبل از قرن هفتم عصر ما ، حقایق بالا معلوم نبود . در این فاصله دو مسأله بوسیلهٔ مغزهای متفکرریاضی‌دانان عادی مورد حمله قرار گرفت . تا به امروز اشخاص حرفه‌ای که « تقسیم کنندهٔ زاویه به سه قسمت مساوی »انــد وجود دارند کــه هنوز نمی‌دانند در حدود سیصد سال است که این مسأله خاتمه یافته است .

امروز مفهوم حل مسأله‌ای خطی و یا درجه دوم بوسیلهٔ خط‌کش و پرکار این نیست که اگر درجــه مسأله‌ای بالاتر از این‌حدود بود چنین راه‌حلی غیرممکن است. برای روشن شدن مطلب ، معادلهٔ $x^{۴}-۳x^{۲}+۲=۰$ را درنظر بگیرید . طرف چپ این معادله به عوامل $(x^{۲}-۲)(x^{۲}-۱)$ تجزیه می‌شود، و در نتیجه این معادلهٔ درجهٔ **چهارم** به دو معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل شده است . هرکجا چنین دستکاری ممکن باشد ، یعنی هرکجا بتوانیم ازیك معادله عبارتی ازدرجه پائین‌تر باضرائب

گویا استخراج کنیم، می‌گویند این معادله **تحویل‌پذیر** است.

اشکال معادلات درجهٔ سوم کـه منجر به تضعیف مکعب و تثلیث زاویه می‌گردد این است کـه **تحویل‌پذیر** نیستند. و این حقیقت مسائل پشت سر این معادلات را کـه گفته می‌شود بوسیلهٔ **خط‌کش و پرگار لاینحل‌اند**، محکوم می‌کند.

در اینجا تأیید دیگری بـرای ماهیت نسبی کلمهٔ **ناممکن** نیز به‌دست آمد. ناممکن بودن تقریباً همیشه نتیجهٔ محدودیتی است، و معمولا این محدودیت چنان بـوسیلهٔ سنت تضمین شده که انسان گمان می‌کند به‌وسیلهٔ طبیعت تحمیل گردیده است. محدودیـت را کنار بگذاریـد **ناممکن** نیز به کنار می‌رود. در اینجـا نیز مسأله بـه همین منوال است. امروز معلوم است کـه باوسـائل مفصلدار مخصوص یعنی ابزارهایـی که شامل یك رشته اجزای مفصل شده‌اند، می‌توان نه‌تنها این دو مسألـه، بلـکه هر مسئله‌ای را کـه به **معادلات جبری با ضرائب گویا** منجر شود حل نمود.

۱۵ مسألهٔ تربیع دایره ایـن فرق را با دو مسألهٔ دیگر دارد که تحت فرمولی جبری در نمی‌آید.

کوشش‌هائی کـه برای حل این مسأله به‌عمل آمده است سالنامه‌های ریاضیات را از زمان فیثاغورث تا به امروز پر کرده است. ارشمیدس اولین کسی بود که متوجه شد که اشکالی که هست در تعریف است. هنگامی که از مستطیل یـا مثلث صحبت می‌کنیم، عبارات خود را بادقت بیان می‌کنیم؛ این امر برای هر شکل کثیرالاضلاع نیز صادق است. اما مقصود ما از سطح محصور در یك منحنی چیست؟ درست است که می‌توان خطوطی

کثیرالاضلاعی را بر این سطح محیط و یا در آن محاط نمود و از **حد بالا** و یـا از **حد پائین** چنین سطحی گـفتگو کرد ؛ اما خود اندازهٔ سطح را نمی‌توان بدون توسل به‌مفاهیم **بینهایت و حدود** تعریف کرد .

بعداً خواهیم دید که بر روی این مسأله بود که ارشمیدس توانائی شیوه‌افنا (exhaustion) را آزمایش کرد. دراینجا کافی است یادآوری شود که بوسیلهٔ یك رشته از کثیرالاضلاعها که بعضی از آنها محاط در دایره و بعضی دیگر محیط بر آنند، ارشمیدس ثابت کرد که عدد π بین $۳\frac{۱}{۷}$ و $۳\frac{۱۰}{۷۱}$ قرار دارد .

در طول هزار و هشتصد سال بعـداز ارشمیدس ، مسـأله پیشرفت کمی نمود . البته در این مدت **مربع سازان دایرهٔ** فراوانی پیدا شدند،زیاد مربع هم ، وتعدادی از این به‌اصطلاح راه حلها نیز منتشر شد ، کـه بعضی از آنها بـه اندازهٔ کافی عجیب بود . همچنین اندازه‌های تقریبی فراوانی برای π پیدا شد ، کـه جالب‌ترین آنهـا $\sqrt{۱۰}$ است کـه احتمالا دارای منشائی هندسی است .

این مقدار کـه بسیار نزدیك به مقـدار مصری است ، در طول قرون وسطی کاربردی متداول داشت . کوشش‌های زیادی نیز برای اصلاح مقادیر ارشمیدس به‌ثبت رسیده است‌که درآن میان فقط کار ویتا که‌کثیرالاضلاع ۳۹۳۲۱۶ ضلعی را بـرای بدست آوردن عدد π با ده رقم تقریب صحیح به کار برده ، قابل توجه است .

اختراع فرایندهای (Processes) بینهایت ، چنان نتیجهٔ بزرگی در اصلاح محاسبات داشت کـه مقدار ویتا را در بوتهٔ فراموشی سپرد . امروز بیش از ۷۰۰ رقم اعشار برای π

بدست آمده است . از نظر ارزش عملی برای مقدار فوق رشتهٔ سخن را بدست اخترشناس آمریکائی سیمون نیوکومب (Simon Newcomb) می‌دهیم :

« ده رقم اعشار کافی است که محیط زمین را تا یك اینچ تقریب به ما بدهد ، و سی رقم اعشار محیط تمام عالم قابل رویت را با تقریبی که برای نیرومندترین میکرسکپ‌ها غیرقابل تشخیص است فراهم می‌سازد. »

از لحاظ نظری ممکن است تأیید کرد که کوشش‌های گفته شده نشانه‌ای از دقت شیوه‌های ریاضیات جدید است . همچنین اندك امیدی می‌توان داشت که در اعشارهای پی در پی نوعی از نظم و قاعده کشف شود که ماهیت عدد π را بتواند روشن کند .

۱۶ در آخر قرن هیجدهم مسأله وارد مرحله‌ای کاملا جدید می‌شود . لامبرث (Lambert) نشان داد که π عددی گویا نیست و لاگرانژ ثابت کرد که این عدد نمی‌تواند ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دومی با ضرائب گویا باشد . **این امر بطور قطع به مسابهٔ تربیع دایره خاتمه داد** ، ولی اشتیاق سازندگان مربع از دایره را خاموش نکرد . زیرا مشخصهٔ این اشخاص آنست که جهل آنها با ظرفیتشان برای خود فریبی برابری می‌کند .

هنوز ممکن بود π عددی جبری باشد . اگر این امر ثابت می‌شد ، به مربع در آوردن دایره که بطور رسمی بوسیلهٔ خط کش و پرکار ممکن نبود ، لااقل راهی بوسیلهٔ ابزارمفصلی پیدا می‌کرد . بااینکه اینکار ارزش عملی نداشت ، می‌توانست

نقطه اوجی برای کوشش‌های بیهودهٔ دو هزار ساله باشد .

هنگامی که در ۱۸۷۳ ریاضی‌دان فرانسوی شارل‌هرمیت (Charles Hermite) ثابت کرد که **عدد e عددی فرازنده است** ، بطور قابل ملاحظه ای به این امکان آسیب وارد آمد . ارتباط نزدیك بین اعداد e و π کاملا معلوم بود، و این امر کوششی را که برای اثبات فرازنده بودن π بعمل می‌آید مضاعف کرد . در حقیقت این کار نه سال بعد بوسیلهٔ لینده‌مان (Lindemann) آلمانی ، اثبات گردید . بدین ترتیب آنالیز جدید به مسأله‌ای که از قابلیت ریاضی‌دانان تالس به بعد باج می‌گرفت پایان داد .

۱۷ بدین ترتیب بود که دومین کوشش برای افنای جهان با عدد پایان یافت .

کشف اعداد فرازنده ، و اثبات این امر که آنها چه از لحاظ وسعت و چه از نظر نوع غنی‌تراز اعداد گنگ جبری بوده و شامل بعضی از مقادیر اساسی ریاضیات جدید هستند ــ همهٔ اینها بطور قطعی نشان داد که درست همانجائی که ابزار حساب گویا دوهزار سال قبل کند شده بود ارابهٔ نیرومند جبر نیز به‌گل نشسته است . این ناتوانی‌ها هر دو سرچشمهٔ واحد داشتند : جبر مانند حساب گویا فقط با**فرایندهای محدود** سروکار داشت .

اینك نیز مانند پیش مشکلاتی که درسرراه امید به‌ایجاد پایه‌ای محکم برای عدد قرار داشت بسیار زیاد بود . اما قانونی کردن فرایندهای بینهایت ، وقبول برابری این‌مخلوقات

گنگ عجیب با اعداد گویا ، در نظر ملانقطی‌های قرن نوزدهم همان اندازه زشت و تنفرآور بود کـه در نظر دانشمندان قدیم یونان.

در میان این عده صدای لئوپولدکرونکر (Leopold Kronecker)، پدر طرفداری ازمکاشفهٔ جدید، ازهمه رساتر بود. اومشکل‌کار برداعداد گنگ را طرح‌ریزی کرده وپیشنهاد نموده‌است که این‌اعداد از ریاضیات طرد گردند. بااعلان ماهیت مطلق اعداد صحیح به این نتیجه رسیده است که قلمرو طبیعی و قلمرو اعداد گویا که بی‌واسطه قابل تحویل بـه یکدیگرند ، تنها اساس محکمی است که برآن می‌توان تکیه کرد .

« خداوند اعداد صحیح را آفرید ، بقیه ساختهٔ دست بشر است » جملهٔ مشهوریست که بوسیلهٔ آن نسل آینده این مرد را بهتر خواهد شناخت . این جمله داستان زنی عابد و پیر را به خاطر من می‌آورد که ریاست کمیته‌ای را برای بپا ساختن یك کلیسا بعهده داشت . معماری که نقشهٔ ساختمان را تسلیم کرد دریافت که این پیر زن کار را با نظری جدی تلقی می‌کند . اعتراض شدید او برعلیه شیشه‌های رنگینی بود که در مشخصات معمار آمده بود . بالاخره معمار با ناامیدی علت مخالفت اورا با شیشه‌های رنگین پرسید و جواب مؤکد او چنین بود : « من شیشه را همانطور که خداوند آنرا ساخته است می‌خواهم ! »

دیوید هیلبرت (Dvid Hilbert)

« عقیدهٔ اولیه و سادهٔ ما از طبیعت و ماده پیوستگی آن است . یك قطعه فلز یا حجمی از مایع را ما همواره بشکل قابل تقسیم به اجزاء بینهایت کوچك تصور می‌کنیم وهرقدراین جزء کوچك باشدبرای ما دارای خواص قسمت اصلی است . »

۷ دنیای جاری

۱ در ریاضیات تمام راهها به یونان برمی‌گردد .

دراینجا می‌خواهم طرحی ازتحول مفهوم بینهایت‌کوچك را بدهم . محلی که این مفهوم به حد بلوغ رسید اروپای غربی است ، و زمان آن قرنهای هفدهم و هیجدهم است ؛ با این‌حال هنگامی که می‌کوشم تا منشأ این مفهوم را نشان دهم ، مکان و زمان دیگری در نظرم مجسم می‌شود : صحنه به یونان کلاسیك

و به روزگاران خاطره‌انگیز افلاطون برمی‌گردد .

مسألهٔ بینهایت مانند مسألهٔ اعدادی گنگ، که بایکدیگر مربوطند ، در خاك یونان رشد کرده است . همچنین در آنجا اولین بحران آن بوجود آمده وتا بامروز نیز از این بحرانها بسیارایجاد شده است . بحران در زمان افلاطون پیدا شد ، اما ساختهٔ خود افلاطون نبود . سایرفلاسفهٔ رسمی یونان نیزادعائی برای طرح موضوع نکردند. این‌کار بوسیلهٔ مکتبی ازمتفکرین که فلاسفهٔ رهبری کنندهٔ عصر با اهانت نام « سوفسطائیان » را برآنها نهادند شروع شد .

« ایلیائیان » نام دیگری بود که متفکران رسمی براین مردان گمنام می‌نهادند ، و شاید این نامگذاری به خاطر آن بود که آموزش آنها را مانند سرزمین مادری نمایندگان اصلیشان ، پارمنیدس و زنون ، بیگانه و بی‌اهمیت جلوه دهند. زیرا الئا (ایلیا ، Elea) یك مستعمرهٔ کوچك یونان در جنوب ایتالیا بود و آنطور که‌لائرتیوس(Laërtius)می‌گوید « اهمیتش تنها از این لحاظ بود مردم آن می‌دانستند چگونـه فرزندان خود را شارمندان باتقوائی تربیت‌کنند . » ولی برای ما ، بامراجعه به گذشتهٔ این شهر ، چنین به‌نظر میرسدکه تنها سبب شهرت الئا سوفسطائیان آن بوده‌اند .

۲ داسل می‌گوید « براهین زنون ایلیائی ، به صورتهای مختلف ، زمینه را تقریباً برای همهٔ نظریه‌های فضـا و زمان و بینهایت ، کـه از زمان او تا روزگار ما شناخته شده ، آماده کرده است .» با این حال امروز بر ما معلوم نیست کـه آیا این براهین در طول گفتگوهائی بوجود آمده یا به شکل‌کتابی

تدوین شده‌اند . شاید هر دوی اینها بوده است ؛ زیرا در یکی از چند منبعی کـه دربارهٔ این موضوع تاریک در دست داریم ، و محاورهٔ افلاطونی به نام « پارمنیدس » است ، از دیداری که زنون به اتفاق استاد خود پارمنیدس از آتن بعمل آورده است باخبر می‌شویم . در آنجا اشاره‌ای به ملاقات گذشته نیز شده که معلوم می‌کند در ضمن آن ملاقات زنون برهان‌های خودرا عرضه داشته بوده است . با این حال وقتی در بارهٔ این مسائل از زنون سؤال شد ، چنین جواب داد :

« علاقهٔ به استاد مرا وادار بنوشتن‌آن‌کتاب در دوران جوانیم‌کرد، اما کتاب را بسرقت بردند؛ بنا بر این فرصت‌آن‌پیش‌نیامد‌کتاب همگانی شود ؛ محرك من برای نوشتن آن نه جاه طلبی یك مرد پیر ، بلکه پرخاشجوئی یك مرد جوان بود . »

سابقه وامر بهرصورت که بوده باشد ، اطلاع ما براهین تنها از طریق ارسطو است . آیا ارسطو در مقابل وسوسهٔ دگرگون کردن نشان دادن براهین رقیب متوفایش توانسته است ایستادگی کند ؟

بیان این براهین به زبان جدید مشکل است. نباید تصور کرد که ترجمه‌های آن نادر است ، بلکه قضیه کاملا برعکس است و اشکال کارما آنست که **در انتخاب دچارسر شکستگی هستیم** . درحدود بیست تائی ترجمه وصدها تفسیر وجود دارد، و دربارهٔ تفسیرها باید گفت کـه هیچ قسمت مبهمی از کتاب مقدس هم به این اندازه مورد دقت قرار نـگرفته است . هر تفسیری انعکاس نظریهٔ مورد توجه نویسندهٔ آن است ، وتقریباً به تعداد خود نویسندگان نظریه وجود دارد .

۳ چهار برهان زنون که ارسطو در کتاب **فیزیکا** (Physica) آورده شده عبارتنداز :

برهان‌اول : تنصیف (Dichotomy)

برهان اول بر پایهٔ عدم وجود حرکت بناشده است، براین اساس که آنچه در حرکت است باید همیشه بنقطهٔ وسط زودتر از نقطهٔ انتها برسد.»

برهان دوم : آشیل و لاک‌پشت:

« برهان دوم آن است که نام آشیل را گرفته ، و عبارت از آن است که روندهٔ تندرو ، هنگام تعقیب ،هرگز نمی‌تواند روندهٔ کندرو را بگیرد ، تعقیب کننده همیشه باید بنقطه‌ای برسد که تعقیب شونده تازه از آنجا حرکت کرده است ، بنابراین کندرو لزوماً همیشه کمابیش جلوتر از تند رو خواهد بود . »

برهان‌سوم : پیکان :

« هر چیز که حالت یکنواخت دارد ، یا پیوسته متحرك است یا پیوسته ساکن ، ولی آنچه که در حرکت است همیشه درزمان حال‌است، بنابراین پیکان متحرك بیحرکت است .

برهان چهارم : زمین مسابقه :

« چهارمین برهان مربوط به‌دو ردیف‌آدم‌با تعداد مساوی‌و بزرگی‌های برابر است ، که درضمن مسابقهٔ دو که با سرعت‌های مساوی درجهات مخالف یکدیگر حرکت می‌کنند از مقابل یکدیگر رد می‌شوند ؛ یك ردیف در ابتدا قسمت بین هدف و نقطهٔ وسط خط سیر را اشغال کرده است ، و ردیف دیگر درفاصلهٔ نقطهٔ شروع و نقطهٔ وسط مسیرقرارگرفته است. او (یعنی زنون) تصور می‌کند که این امر مستلزم این نتیجه است که نصف زمان معین مساوی دو برابرآن زمان بوده باشد . »

۴ کسانی که تمایلات متافیزیکی دارند در این جدل‌ها

انکار واقعیت حرکت را می‌بینند . دیگران ، مانند تانری (Tannery) مورخ مدعی هستند که زنون چنین قصدی نداشته ، بلکه ، برعکس ، واقعیت غیرقابل بحث حرکت را به‌کار برده است تا تضاد آشکاری را که در مفاهیم فضا و زمان و پیوستگی ما وجود دارد نشان دهد. هانری برگسن (Henri Bergson) نیز با این نظر کاملا متفق است که می‌گوید : « تضادی کـه بـوسیلهٔ مکتب ایلیائی نشان داده شـده است ، کمتر بـه خود حرکت توجه دارد تا به نظم محدد ومصنوعی که مغز ما بـرای آن بوجود آورده است . »

از این‌لحاظ اخیر ، ارزش برهانهای زنون دقیقاً دراین واقعیت است که وضعی را که ریاضیات در طرح عمومی معرفت بشری اشغال کرده است ، با نیرومندی تمام ظاهر می‌سازند . این برهانها نشان می‌دهند که فضا و زمان وحرکت ، آنطور که بوسیلهٔ حواس آدمی (یا بوسیلهٔ گسترش جدید این حواس که همان ابزارهای علمی است) دریافت می‌شونـد ، هم وسعت با ادراکهای ریاضی که همان نامها را به خودگرفته‌اند نیستند . اشکالاتی که بوسیلهٔ زنون مطرح گردیده است از نـوعی نیست که ریاضی‌دان محض را هشیار دهد ــ آنها هیچ تضاد منطقی را آشکار نمی‌کنند ، بلکه فقط ابهامات زبان را نشان می‌دهند ؛ ریاضی‌دان می‌تواند باقبول اینکه دنیای علامتی که اوخلق کرده است متمایل بادنیای حواس اونیست به‌این ابهامات خاتمه دهد.

بدین ترتیب خواص خط مستقیم‌که بدون دلیل مورد قبول قرار گرفته است سـاختهٔ خود هندسـه‌دان نیست . او تعمداً از ضخامت و پهنای خط صرفنظر می‌کند ، عمـداً فرض می‌کند که

وجه مشترك بین چنین دوخطی ، یعنی نقطهٔ تقاطع آنها ، دارای بعد نیست . در آن صورت که می‌خواهد قوانین حساب را در بارهٔ این موجودات هندسی اجرا کند ، چنان‌که خواهیم دید، اعتبار فرایندهای بینهایت را ، که قابلیت تقسیم به بینهایت یك قطعه خط یعنی همان تنصیف (دیکوتومی) یونانیان چیزی جز حالت خاص آن نیست ، می‌پذیرد . هندسهٔ رسمی یکی از نتایج منطقی این فرضیات است ، اما خود این فرضیات من‌عندی است و در بهترین شکل خود توهمی سهل و مناسب بیش نیست : ریاضی‌دان می‌تواند یك یا تمام اصل موضوع‌های رسمی را به دور افکند ، و مفروضاتی جدید جانشین آنها کند ؛ مثلا می‌تواند عناصر جدید را نوار و سطح مشترك بین دو نوار در نظر بگیرد ، و این عناصر را به جای خطوط و نقاط به کار برد و هندسه‌ای کاملا متفاوت با تعالیم رسمی ، اما کاملا منطقی و شاید سودمند ، بوجود آورد .

اما برای مردی که با عمل سروکار دارد ، یعنی برای فیزیکدان و مهندس ، تمام چنین دستگاهها قابل قبول نیستند . مرد عمل به حداقل نمایشی از واقعیت احتیاج دارد . او که همیشه با امور مجسم وملموس سروکار دارد ، بعبارات ریاضی، نه به چشم علامات یا اندیشه‌ها ، بلکه به دیدهٔ تصاویری از واقعیت می‌نگرد . دستگاهی که به علت منطقی بودن ذاتی خود برای ریاضی‌دان قابل قبول است، ممکن است به‌نظر مرد عمل، به علت اینکه نمی‌تواند واقعیات را به شکلی کامل نشان دهد ، سرشار از « تضاد » باشد .

هر اندازه هم که عجیب به نظر برسد ، مرد عمل است که باید براهین گفته شده را عیناً موردتوجه‌قراردهد ، زیرا که آنها به ارزش و اعتبار اجرای ریاضیات در واقعیت فیزیکی حمله می‌کنند . اما ، خوشبختانه ، مرد عمل بندرت توجهی به این براهین مبذول می‌دارد .

۵ اهمیت تاریخی این براهین را نمی‌توان بیش از حد ارزیابی کرد . کار آنها تنها این بود کـه یونانیان را وادار کردند تا وضعی جدید در مقابل ادراك زمان به خود گیرند .

جوهر آنچه که زنون در اولین بحث خود می‌گوید این است : دونده قبل از رسیدن به هدف باید بـه نقطهٔ وسط مسیر برسد ، و زمان **معینی** برای اینکار لازم است . او همچنین باید به نقطهٔ وسط باقیماندهٔ فاصله بـرسد ، و این نیز زمان معینی را ایجاب می‌کند . **و آنچه که یك بار گفته شد می‌تواند همواره تکرار شود .** در عبور از مسیر مسابقه بینهایت مرحله وجود دارد ، و هر یك از مراحل احتیاج بـه زمان معینی دارنـد . اما مجموع تعداد بینهایت از فواصل معین بینهایت است . بنابراین دونده هرگز به هدف نخواهد رسید .

ارسطو این بحث را به این صورت بیان کرده است :

« زمان ومکان به تقسیماتی برابر ویکسان قسمت شده‌اند . بنا براین برهان زنون ، یعنی غیر ممکن بودن عبور از یك مجموعهٔ بینهایت و یا دست زدن به یك مجموعهٔ نامحدود یکی پس از دیگری در زمانی محدود ، سفسطه آمیز خواهد بود . زیرا کلمهٔ « بینهایت » برای طول و برای

زمان ، ودرواقع برای تمام اشیاء پیوسته ، بدو معنی بکار برده می‌شود: یکی دربارهٔ قابلیت تقسیم ، دیگری دربارهٔ شمارش . بنا براین ممکن نیست با اشیائی‌که شمارهٔ بینهایت دارند در زمان محدود تماس گرفته شود ، اما میتوان نسبت به قابلیت تقسیم ، بینهایت‌بار با اشیاء تماس گرفت ، زیرا زمان به نوبهٔ خود به این معنی ، بینهایت است . »

بنا براین نتیجهٔ چکیده‌ای که از دو برهان اول بوجود می‌آید(زیرا برهان‌دوم‌درست‌صورت‌زیرکانهٔ‌دیگری‌ازاولی‌است) آنست که فرض **قابلیت تقسیم فضا** مستقل از قبول **قابلیت تقسیم زمان** غیرممکن است . اما این درست همان چیزیست که قبولش مشکل است ! زیرا قابلیت تقسیم یك خط به سهولت قابل فهم است : باکمال سادگی‌بابریدن یك تکه چوب یاعلامت گذاری بر روی خط به این کار شکل واقعی می‌دهیم . اما «علامتگذاری زمان» درست درحرف می‌تواند ظاهرشود : زمان تنها چیزیست که دربارهٔ آن تجربه غیرممکن است : یاکلا در گذشته است و یا تماماً در آینده . تقسیم زمان به فواصل برای یونانیان عملی کاملا ذهنی بودکه برای ما نیز درست به همین صورت است .

تحمیل صفت قابلیت تقسیم بینهایت به زمان هم‌ارز آنست که زمان راما نند خط هندسی تصورکنیم ومدت (duration) را با امتداد (extension) ازیك جنس بدانیم . بدین‌ترتیب اولین برهان زنون علیه اصلی بود که امروز جهان چهار بعدی نسبیت جدید برروی آن ساخته شده است .

۶ گوئی زنون دفاع مخالفین خود را پیش‌بینی کرده بود

وبا آمادگی برای مقابله با آنها ضربهٔ حقیقی را برای دوجدل آخر نگهداری کرده بود . در اینجا بحث چهارم ، که شامل نطفهٔ مسألهٔ نسبیت است ، مورد توجه ما نیست . جدل سوم است که با نیرومندی تمام شکافی را میان حرکت ، بدان صورت که بوسیلهٔ حواس ما ادراك می‌شود ، و میان آن پندار ریاضی کـه زیر نقاب همین نام خود را پنهان کرده ، بوجود آورده است.

به جواب زنون در رد موضوع توجه کنیم :

« شما می‌گوئید که فضا شامل بینهایت نقطه کنار یکدیگر است، وهمینطور زمان چیزی جز مجموعه‌ای لایتناهی از لحظات نیست ؟ بسیار خوب ! در اینصورت یك تیر راکه درحال پرواز است در نظر بگیرید . در هرلحظه انتهای آن نقطهٔ معینی از مسیر را اشغال می‌کند . درآن هنگام که این نقطه وضعی را اشغال می‌کند باید در آنجا درحال سکون باشـد . اما چگونه نقطه‌ای می‌تواند بی حرکت باشد و درعین‌حال حرکت کند ؟ »

ریاضی‌دان به این جدل نیز بااین حکم پایان می‌دهد : حرکت ؟ چون ، حرکت درست تناظرمیان وضع مکانی و زمان است. وی چنین تناظر میان متغیرها را تابع نامگذاری‌می‌کند. قانون حرکت درواقع یك تابع ودرواقع نمونهٔکامل همه‌توابع پیوسته است. ذاتاً تفاوتی بین این حالت و حالت استوانه‌ای مملو از گاز نیست‌که با پیستونی‌که در داخل آن حرکت آزاد دارد مجهز شده باشد . برای هروضع ممکن پیستون فشارمعینی درداخل استوانه مطابقت دارد. برای بدست‌آوردن فشارمربوط به هروضع معین، می‌توان پیستون را درآنحالت ثابت‌نگهداشت

و درجهٔ فشار را خواند .

اما آیا برای یك جسم متحرك نیز قضیه به همین منوال است ؟ آیا می‌توانیم آنرا بدون قطع حرکتی که به مشاهدهٔ آن پرداخته‌ایم به سکون واداریم ؟ مطمئناً نه ! پس مقصود ما از عبارت جسم متحرکی که **وضع معینی را در زمان معین اشغال می‌کند** چیست ؟ منظور ما اینست که گرچه نمی‌توانیم روشی فیزیکی بوجود آوریم که پیکانی را در حین پرواز، بدون توقف حرکت آن ، به‌سکون واداریم ، ولی مانعی برای انجام **این کار در ذهن خود** نداریم . ولی تنها واقعیت پشت سر این عمل ذهنی آنست که تیر **دیگری** را می‌توان تصورکرد که در این لحظه و در این نقطه ثابت باشد .

حرکت ریاضی درست توالی بینهایتی ازسکون‌های پی‌در پی است ، یعنی ، ریاضیات علم حرکات را به شاخه‌ای از استاتیك بدل می‌کند . اصلی که این انتقال را عملی می‌سازد ابتدا بوسیلهٔ دالامبر در قرن هیجدهم طرح شد . این تشبیه کردن حرکت با حالات سکون متوالی ، که در حین آن جسم متحرك در حال تعادل است ، علی رغم خود مسئله ، بی‌معنی به نظر می‌رسد . و با اینحال حرکت ساخته شدهٔ از **حالات بیحرکتی** به هیچوجه بی‌معنی‌تر از طول حاصل از نقاط **بدون امتداد** و یا زمان تشکیل شدهٔ از **لحظات بدون‌مدت** نیست .

این تجرید حتی بااستخوان‌بندی حرکت واقعی ، آنطور که بوسیلهٔ حواس محسوس است ، یکی نیست ! هنگامی که گلوله‌ای درحال‌حرکت‌را مشاهده می‌کنیم ، حرکت آنرا یکجا

مشاهده خواهیم کرد وچیزی ازپرش‌های بینهایت کوچك متوالی به چشم نمی‌خورد . به‌همین ترتیب نیز یك خط ریاضی نه واقعیتی است و نه بهترین شکل نمایش یك قطعه سیم است . انسان برای مدتهای طولانی به استفاده از این توهمات عادت کرده و انتخاب جانشینی را بر انتخاب اصل ترجیح می‌دهد .

۷ دوران بعدی علم یونانی بطور وضوح نشان می‌دهد که تأثیر بحرانی که بوسیلهٔ براهین زنون در زمینهٔ تفکر ریاضی یونانیان بوجود آمد چقدر عظیم بوده است .

این بحران ازیك طرف راه را برای سوفسطائیگری باز کرد. این امر عکس‌العمل طبیعی لفاظی سادهٔ فیثاغورسیان و اختلاط عجیب افکار ریاضی باشمارهای مذهبی وتفکرات مبهم متافیزیکی بود. میان این طرز فکر ودقت فراوانی که در کتاب **اصول** اوقلیدس ، که تا به امروز بعنوان الگوئی برای تعلیمات ریاضی به کار می‌رود ، تباین عظیمی وجود دارد !

ازطرف دیگر ، باتزریق ترس از بینهایت درذهن هندسه دانان یونان ، این براهین اثر فلج ناقص را درتصورخلاق آنها داشت . بینهایت تحریم شده بود و بهر قیمت که تمام می‌شد می‌بایست آنرا دور نگهداشت ؛ واگرچنین نمی‌کردند ، آن را زیر پرده‌هایی چون **برهان‌خلف** و نظایر آن مخفی می‌داشتند . تحت چنین اوضاع واحوالی نه تنها نظریهٔ مثبتی دربارهٔ بینهایت غیر ممکن شد ، بلکه حتی توسعهٔ فرایندهای بینهایت ، که در دوران قبل ازافلاطون به مرحلهٔ پیشرفته‌ای رسیده بود ، تقریباً متوقف ماند .

در یونان قدیم انبوهی از وقایع ارزنده‌ای را می‌بینیم : یك دسته از نوابغ طراز اول مانند : اودوکسوس، آریستارخوس، اوقلیدس، ارشمیدس، آپولونیوس ، دیوفانتوس ، پاپوس ؛ مقداری از سنت‌ها که تشویق کنندهٔ کوشش خلاق و تفکر ذهنی و درعین‌حال محرك روح انتقادی بودند و محقق را دربرابر دام اندیشهٔ جاه‌طلبانه نگهداری می‌کردند ؛ وبالاخره یك ساختمان اجتماعی که کاملا برای رشد یك طبقهٔ مرفه و پیداشدن سیل پایداری از متفکرین مساعد بود که می‌توانستند ، بدون توجه به فایدهٔ آنی ، خود را وقف تعقیب افکارخودکنند ــ مجموعه‌ای از اوضاع و احوال که حتی دراین زمان نمی‌توان به‌آن دسترسی پیداکرد . با وجود این ، ریاضیات‌یونان علی رغم داشتن‌مردی چون دیوفانتوس درآستانهٔ جبر ناگهان متوقف ماند ، وعلی‌رغم وجودآپولونیوس‌هندسهٔ‌تحلیلی‌را بوجودنیاورد ، وعلی‌رغم ارشمیدس نسبت به آنالیز بینهایت کوچك‌ها بی‌توجه ماند . قبلا یادآوری کردم که فقدان علامتگذاری چگونه رشد ریاضیات یونان را متوقف‌کرد؛ **وحشت از بینهایت** نیز به همان‌اندازه از پیشرفت کارها جلوگیری می‌کرد .

۸ ارشمیدس در **روش افنا** ، تمام عناصر اصلی آنالیز بینهایت کوچك را در اختیار داشت . زیراآنالیز جدید چیزی جزتئوری فرایندهای بینهایت نیست ، که اساس آنها مفهوم **حد** است .

صورت بندی دقیق این فکررا برای فصل آینده می‌گذارم. کافی است در اینجا گفته شود که مفهوم حد ، به آن صورت‌که

ارشمیدس آنرا دریافته بود، برای گسترش حساب انتگرال نیوتن ولایب نیتز شایستگی داشت وعملا تا دوران ویرشتراس و کانتور دست نخورده ماند . در واقع **حساب حدود** بر این پایه است که اگر اختلاف دومقدار از یك متغیر بتوانند به مقدار دلخواه کوچك شود ، آن دومقدار به حالت برابری به یکدیگر نزدیك خواهند شد ، واین فکر نیز اساس روش افنا است .

بعلاوه ، این اصل روشی عملی بـرای تعیین حد بوجود می‌آورد . این روش عبارتست از « به تله انداختن » یك مقدار متغیر بین دو مقدار دیگر ، درست مانند چیزی که بین دو فك گیره قرار می‌گیرد . بدین ترتیب ، درحالت محیط دایره که پیشتر از آن صحبت کردم ، ارشمیدس آنرا بین دو دسته کثیرـ الاضلاع منتظم که تعداد اضلاعشان دائماً زیاد می‌شد قرارمی‌داد، یك دسته از این کثیرالاضلاعها محیط بـر دایره و دستهٔ دیگر محاط در آن بودند . همانطور که قبلا بیان داشتم ، ارشمیدس از این راه نشان داد کـه عدد π بین $۳\frac{۱}{۷}$ و $۳\frac{۱۰}{۷۱}$ قرار دارد همچنین نتیجه گرفت کـه مساحت زیر یك قوس سهمی برابر دوسوم مساحت مستطیلی است کـه قاعدهٔ آن برابر بـا وترقوس سهمی وارتفاعش برابرارتفاع رأس آن باشدـ مسأله‌ای که طلایه‌دار حساب انتگرال امروزی ما است .

آری ، در قضاوت عادلانه باید گفت که ارشمیدس پایه‌ـ گذار آنالیز بینهایت کوچك است . آنچه کـه روش افنای او از حساب انتگرال قرن هیجدهم کم دارد علامتگذاری مناسب، و داشتن وضعی مثبت ـ یـا بهتر است گفته شود وضعی ساده ـ

نسبت به بینهایت است . باوجود این هیچ یونانی جای پای ارشمیدس قدم نگذارد ، و کار کشف نظریهٔ پر ارزشی که بوسیلهٔ استاد بزرك پی‌ریزی شده به عصر دیگری موکول شد .

۹ بعداز هزار سال رکود ، هنگامی که اندیشهٔ اروپائی خود را ازتأثیر داروهای خواب‌آوری که بامهارت زایدالوصف بوسیلهٔ **پدران مسیحی** خورانده شده بود رهانید ، مسألهٔ بینهایت اولین موضوعی بودکه بار دیگر جان گرفت .

باوجود این ، مشخصهٔ این تجدید حیات ، علی‌رغم این حقیقت‌که ریاضیات رونسانس تمام وکمال برمنابع یونانی تکیه داشت ، فقدان کامل روح دقیق انتقادی یونانیان بود . روش‌های زمخت و ناپخته‌ای که بوسیله کپلر (Kepler) و کاوالییری (Cavalieri) افتتاح شده بود ، توسط نیوتون و لایب‌نیتز، بوسیله والیس (Wallis)، مخترع‌علامت بینهایت، بوسیلهٔ برنولی (Bernoullis) و بالاخره بوسیلهٔ اویلر (Euler) و د الامبر (d'Alembert) دنبال شد، و اینان ادعایی جز بهتر کردن آن نداشتند .

این دانشمندان بینهایت کوچك‌ها را برحسب ضرورت بحث ، بعنوان ثابت و یا متغیر در نظر گرفتند ؛ رشته‌های بینهایت را بی‌ملاحظهٔ نظم و ترتیبی به کار بردند ؛ باحدود شعبده باختند ؛ دنباله‌های واگرا را طوری مورد استفاده قرار دادندکه گوئی از همان قوانین دنباله‌های همگرا تبعیت می‌کنند . عبارات خود را با ابهام بیان می‌داشتند و شیوه‌های خود را با مسامحه به‌کار می‌بردند و منطق استدلالهایشان به

قسمی تهیه شده بود کــه با بیان مکاشفهٔ آنها هم آهنگی داشته باشد . مختصر ، آنها تمام قوانین دقیق و آداب‌دانــی ریاضی را زیر پا گذاردند .

هرج و مرج واقعی که پس از ابداع بینهایت کوچك‌ها ، و یا آنطور کــه در آن زمان می‌گفتند قسمت ناپذیرها (indivisibilia)، بوجود آمد ، عکس‌العمل طبیعی ایــن جریان بود . مکاشفه کــه مدتها بوسیلهٔ دقت و سخت‌گیری یونانیان به زنجیر کشیده شده بود ، اینك آزاد می‌شد و دیگر اوقلیدس نبود که از پرواز خیالی آن جلوگیری کند .

اما علت دیگری را نیزمی‌توان‌کشف کرد . باید به‌خاطر آورد که مغزهای برجسته آن عصر تمام تربیت شدهٔ اصول اسکولاستیك بودند . یك نفر مسیحی ژزوئیت وقتی چنین گفت « بگذار بچه‌ای را به هشت سالگی برسانیم ، آنوقت آینده‌اش را خود خواهد ساخت .» کپلر ، در آن هنگام که امیدش برای وارد شدن در سلك روحانیان به یأس مبدل گشت ، با بی‌میلی وارد اخترشناسی شد؛ پاسکال برای اینکه زاهدی منزوی شود، ریاضیات را رها نمود . علاقهٔ دکارت به‌گالیله به‌خاطر اعتقادی که به اقتدار کلیسا داشت کاهش یافت ؛ نیوتون در فاصلهٔ بین شاهکارهای خود رسالاتی دربارهٔ خداشناسی نــوشت . لایب‌نتیز خواب اعدادی را می‌دیـد کــه بتوانند دنیائــی بی‌خطر بــرای مسیحیت بسازند . برای مغزهائی کــه منطق آنها از تفکراتی مانند عشاء ربانی و کفارهٔ گناهان مردم شدن مسیح و تثلیث و تجسد خدا در مسیح آب می‌خورد ، اعتبار فرایندهای بینهایت واقعاً مطلب کوچکی بود .

۱۰ توضیحات این قسمت را می‌توان بعنوان جوابی به اسقف برکلی تلقی کرد که از موقع خود دیرتر داده شده است. ربع قرن بعد از انتشار اثر قرنساز نیوتون دربارهٔ حساب بینهایت کوچک‌ها، اسقف رساله‌ای تحت عنوان « آنالیست ، The Analyst) ، سخنی با یک ریاضی‌دان مرتد » نوشت . در مجادله‌ای که قسمت اعظم آن بر پایهٔ مطمئنی نیست به مخالفت می‌پردازد. بامهارتی بی‌نظیر وهشیارانه اصل بینهایت کوچک‌ها را مورد تحلیل تحقیقی قرارمی‌دهد وتعدادی بحث‌های نااستوار و برهانهای مبهم و تضادهائی آشکار را نشان می‌دهد . درمیان اینها عبارات « فلوکسیون » (fluxion) و « دیفرانس » (difference) را مورد توجه قرار می‌دهد و علیه این عبارات با مزاج ایرلندی خود به حمله می‌پردازد : « کسی‌که می‌تواند فلوکسیون و دیفرانس مرتبهٔ دوم یا سوم‌را ادراک کند، به نظر من احتیاجی ندارد تا دربارهٔ هیچ یک از امور غیبی نازك طبعی به خرج دهد . »

« فلوکسیون » نیوتون و « دیفرانس » لایب‌نتیز امروز **مشتق و دیفرانسیل** خوانده می‌شوند . اینها مفاهیم اصلی دستگاهی ریاضی‌اند که با هندسهٔ تحلیلی عامل نیرومندی را در توسعهٔ علوم عملی یعنی **حساب دیفرانسیل وحساب انتگرال** بوجود می‌آورند . دکارت افتخار آفریدگاری هندسهٔ تحلیلی را دارد ؛ و اختلاف در اینکه آیا واضع حساب انتگرال و دیفرانسیل نیوتون بوده است یا لایب‌نیتز ، در سراسر قرن هجدهم وجود داشت و هنوز هم رأی قطعی در این باره پیدا نشده است . با این همه ، اصول هر دوی این آموزش‌ها را در

نامه‌ای که فرما در ۱۶۳۶ یعنی یك سال قبل‌از بوجود آمدن کتاب هندسهٔ دکارت ، وشصت وهشت سال قبل‌از انتشار کتاب **اصول ریاضی** نیوتون ، خطاب به روبروال نوشته است ، به روشنی می‌بینیم . اگرعادت فرما براین بود که تحقیقاتش را به چاپ برساند ، افتخار بوجود آمدن هندسهٔ تحلیلی وحساب دیفرانسیل نصیب ارشمیدس دوران رونسانس می‌گردید، ودنیای ریاضی از سرشکستگی یك قرن مشاجرهٔ تهوع‌آور خلاص می‌شد .

۱۱ جوهر اصل نیوتون را می‌توان با مثالی از حرکت روشن کرد ، که تصادفاً اولین موضوعی بود که دربارهٔ آن محاسبات دیفرانسیل به‌کار برده شد . نقطه‌ای مادی و درحال حرکت را در امتداد خطی مستقیم در نظر بگیرید . اگر این نقطه در زمانهای مساوی فواصل مساوی بپیماید ، می‌گویند حرکت آن **یکنواخت** است ، و فواصل پیموده شده در واحد زمان ، مثلا در یك ثانیه را **سرعت** این حرکت یکنواخت می‌نامند . اینك اگر فواصل پیموده شده در فواصل زمانی مساوی برابر نباشند ، به عبارت دیگر اگر حرکت **غیریکنواخت** باشد ، دیگر چیزی به نام سرعت با مفهومی که هم‌اکنون‌برای کلمه به‌کاربردیم وجود ندارد. باوجود این می‌توانیم فاصله‌ای را که جسم در زمان معین پیموده است به فاصلهٔ زمانی مربوطه قسمت کنیم و این نسبت را سرعت **متوسط** این نقطه در این فاصله بنامیم. نیوتون این نسبت را نسبت**نخستین** (Prime) نام نهاده است . آشکارا دیده می‌شود که این عدد به طول فاصلهٔ

مورد نظر وابسته است . باید توجه داشت که هر چه طول این فاصله‌کوتاه‌تر باشد ، سرعت به مقدار معین و ثابتی نزدیکتر می‌شود .... در اینجا با مثالی از یك رشته سروکار داریم که در آن از اختلاف بین جمل پی در پی دائماً کاسته می‌شود تا پس از مدتی دو جملهٔ مجاور از یکدیگرغیرقابل تمیزمی‌شوند. اینك اجازه بدهید تصور کنیم (و چنین تصوری با ادراکی مکاشفه‌ای که از **پیوستگی مکان و زمان** داریم مجاز است) که‌به‌کاهش فاصلهٔ زمانی **بصورت نامحدود** ادامه دهیم . دراین صورت، جمله ماقبل‌آخر رشته (**آخرین نسبت** نیوتون آنطورکه گفته‌است، **سرعت را در نقطهٔ شروع فاصلهٔ زمانی** بیان‌می‌کند.

امروز می‌گوئیم : **طبق تعریف** سرعت نقطهٔ متحرك در هر لحظه مقدار حدی سرعت متوسط است هنگامی‌که فاصلهٔ زمانی که برای آن سرعت متوسط در نظر گرفته شده است به صورت نامحدود تنزل یابد . در زمان نیوتون دانشمندان این اندازه دقیق نبودند .

آخرین نسبت را نیوتون **فلوکسیون** می‌نامید . فلوکسیون عبارت بود از میزان تغییر یك مقدار متغیر ، مانند طول، مساحت ،حجم، فشاروغیره . خود این مقادیر را نیوتون فلوئنت‌ها (fluents) نامیده بود . باعث تأسف است که این کلمات حفظ نشده وکلماتی مانند **مشتق وتابع** جایگزین‌آنها شده است . زیرا کلمهٔ لاتینی **فلوئره** (fluere) به معنی « جاری شدن » است ؛ **فلوئنت** به معنی « چیزی است که جریان دارد » و**فلوکسیون** «سرعت یامیزان جریان است .»

۱۲ نظریهٔ نیوتون با مقادیر پیوسته سروکار داشت و در عین‌حال قابلیت تقسیم نامحدود فضا و زمان را بمثابهٔ اصلی‌مسلم می‌پذیرفت؛ در این نظریه از یك جریان بحث می‌شد ، ولی این جریان به شکل جهش‌های بسیار کوچك پی در پی در نظر گرفته می‌شد . به این دلیل نظریه فلوکسیون راه را برای همهٔ اعتراضاتی که دو هزار سال قبل بوسیلهٔ زنون بوجود آمده بود باز می‌گذاشت. بنابراین دشمنی طولانی بین «رآلیست‌ها» که خواهان ریاضیاتی بودند که با واقعیتهای خشك احساس بشری سازگار باشد ، و « ایده آلیست‌ها » که می‌گفتند واقعیت باید با آنچه که ذهن انسان حکم می‌کند سازگار باشد ، می‌توانست از سر گرفته شود . اما اجازه بدهید رشتهٔ کلام را به دست جرج برکلی (George Berkeley) که بعدها اسقف کلوین (Cloyne) شد بدهیم :

« اینك با توجه به اینکه حواس ما برای مشاهدهٔ اشیاء بینهایت کوچك در زحمت بوده و دچار حیرت است ، و حتی اگر چنین بینهایت کوچك‌هائی نیز وجود داشته باشند ، تخیل ، که ناشی از ادراکات حسی است ، برای اینکه کوچکترین ذرات زمان یا افزایشهای بسیار کوچکی را که درآن به وقوع می‌پیوندد ، درچهارچوب تصوردرآورد ، بیش‌ازاندازه در زحمت می‌افتد و دچار سرگشتگی می‌شود ؛ و مهمتراز آن مسئله فهم آن‌ها یا لحظه‌ها یاافزایشهای کمیتهای درحال تولد (in statu nascenti) در همان آغاز پیدا شدن آن‌ها ، یعنی پیش از آنکه تبدیل به اجزاء و ذرات معین و محدودی بشوند . و اشکال عمده‌تر ادراك سرعت مطلق چنین موجودات ناقص جدیدالولاده است. اما سرعت‌های سرعت‌ها ، یعنی سرعت‌های دوم و سوم و چهارم و غیره ، اگر اشتباه نکنم ، از حدود

فهم بشری تجاوز می‌کند . هرچه عقل این تصورات فرار را بیشتر تحلیل کرده و تعقیب نماید بیشتر دچار سرگشتگی می‌شود ؛ اشیائی‌که درابتدای امر فرار وکوچکند بزودی از نظر محو می‌گردند . در واقع فلوکسیون از مرتبهٔ دوم و سوم ، به هر معنی که گرفته شود ، رازی مبهم به نظر می‌رسد . هرطورکه می‌خواهید آنرا بررسی کنید ، اگر اشتباه نکنم ، تصور روشن برای نخستین تندی یك نخستین تندی ، یاافزایش‌جدیدالولادهٔ یك افزایش جدیدالولاده ، یعنی از چیزی که دارای اندازه‌ای نیست ، غیرممکن است . . .

« واضع بزرك روش فلوکسیون این اشکال را حس کرد ، و بنابراین تجریدها و متافیزیك‌های هندسی را واردکارکردکه بدون آنها بااین اصول هیچ‌کاری‌نمی‌توانست صورت پذیرد... این مطلب باید دانسته شود که وی فلوکسیون‌ها را همچون چوب بستی که در ساختن بنائی‌به‌کار می‌رود و پس از تمام شدن ساختمان و پیدا شدن خطوط اصلی متناسب با این چوب بست آنها را برمی‌دارند ، به‌کار برده است .

ولی پس از آنکه این نماینده‌های محدود به‌کمك فلوکسیونها پیدا شدند ... آیا خود این فلوکسیونها چه چیزهائی هستند ؟ سرعت‌های افزایش‌های میرا . وخود این افزایش‌های میرا کدامند ؟ آنها نه‌مقادیر مردودند و نه مقادیر بینهایت کوچك ، وبا اینهمه عدم نیز نیستند . آیا نباید آنها را اشباحی از مقادیر محو شده نامگذاری کنیم ؟....

« ودر پایان برای آنکه به نیرومندی وطرح اشارات قبل‌آگاهی بیشتری پیدا کنید ، و در تأملی که می‌کنید آنها را بیشتر بتوانید تعقیب نمائید » پرسشهای زیر را اضافه می‌کنم ...

پرسش ۶۴ . آیا ریاضی‌دانان که اینقدر در نکات دینی باریك بین‌اند ، نسبت به‌علم خود نیزاین اندازه خرده بینی نشان می‌دهند ؟ آیا آنها در اعتماد به اشیاء و اعتقاد به غیرقابل ادراك بودن نقطه تسلیم

کسانی نشده‌اند که برای ایشان حجیت دارند؟ آیا آنها نیزمطالب اسرار-آمیز و تناقض‌ها و تضادهای مربوط به خود را ندارند؟

۱۳ نتیجهٔ خالص توضیحات هوشمندانه برکلی چیست؟ از این جهت که به بی‌کفایتی و ناسازگاری اصطلاحات ریاضی حمله‌کرده ، خدمت صادقانه‌ای انجام داده است . سالهای بعد شاهد تغییرات جالب‌توجهی بود : کلماتی مانندنخستین و نهائی رهاشدند . غیر قابل تقسیم (indivisibilia) بـه بینهایت کوچك (infinitesimal) امروزی ما مبدل شد ؛ اکنون بینهایت کوچك عبارتست از مقدار متغیری که در حد خود به صفر نزدیك می‌شود . تمام اوضاع کم‌کم ولی با اطمینان ، تحت تسلط تصور حد درآمد .

اگر اسقف برکلی پنجاه سال پس ازآن‌که «**آنالیست**» را نوشت زنده می‌شد ، طفلی را که آن همه سرزنش کرده بود باز نمی‌شناخت . آیا آن وقت او راضی می‌شد ؟ به هیچوجه ! زیراچشمان تیزبین اسقف همان پلنگ را درپشت‌پیسه‌های‌تغییر یافته مشاهده می‌کرد . آنچه‌که او با آن مخالفت کرده بود بیدقتی در استعمال کلمات (با اینکه این قسمت نیز در انتقاد او سهمی داشت) نبود ، بلکه در موضوعی بودکه زنون بیش از وی خاطر نشان کرده بود : وآن درماندگی روش جدید برای ارضای تصوری که از امر وشیء پیوسته داریم ، وآن را بمثابهٔ چیزی قطع نشده و غیر قابل تقسیم و بدون اجزاء میشناسیم ، زیرا هرگونه کوشش برای تقسیم‌آن به اجزاء نتیجه‌اش تباهی خاصیت همان چیزیست که تحت تجزیه قرار گرفته است .

و اگر اندیشه خود را بیشتر تحت فشار بگذاریم و فکر کنیم که اسقف دوباره درمیان ما زنده شده‌است ، همان‌اعتراضات او را می‌شنویم ، و همان دعاوی در نظرمان مجسم می‌شود . ولی این دفعه با کمال تعجب و سرور مشاهده خواهد کرد که در اردوی دشمن دسته‌ای نیرومند ازمردانی وجود دارند که نه‌تنها از او دفاع میکنند بلکه به او بعنوان یك پیشاهنگ شادباش می‌گویند.

در این باره بعداً سخنی چند خواهم گفت .

۱۴ ودراین‌اوضاع‌واحوال آنالیزتوسعه‌یافت وتوسعه‌یافت؛ به اخطارهای منتقدین توجهی نکرد ، دائماً به پیش تاخت و قلمروهای جدید را بحیطهٔ تصرف در آورد . ابتدا هندسه و مکانیك ، بعد نور و صوت ، انتشار گرما وترمودینامیك ، الکتریسیته و مغناطیس ، و بالاخره حتی قوانین زمین‌شناسی زیر نفوذ آن در آمدند .

لاپلاس می‌گوید :

« ما باید وضع کنونی گیتی را به مثابهٔ معلول گذشته وعلت آینده درك کنیم . عقلی که در هرلحظهٔ معین نیروی‌های نگهدارنده طبیعت و و اوضاع متقابل موجوداتی که این طبیعت را تشکیل میدهند شناخته باشد، آن اندازه وسعت داردکه مفروضات خود را تسلیم آنالیزکند ، یا قانون حرکت بزرگترین جزء گیتی و سبکترین اتم‌ها را در دستور واحدی خلاصه نماید ؛ برای چنین عقلی‌هیچ‌چیز نامعلوم نیست‌زیرا آینده‌درست مانند گذشته‌دائماًدرجلوچشم‌او نموداراست.»

و این ساختمان باشکوه بوسیلهٔ ریاضی‌دانان چند قرن

اخیر ، بدون فکر زیاد دربارهٔ پایه‌های آن ساخته شد . دراین صورت آیا قابل توجه نیست که علی رغم تمام براهین غیرقاطع، تمام مفاهیم مبهم و تعمیم های تضمین نشده ، اشتباهات تا این اندازه کم باشد ؟ « چون خدا در پیش باشد ایمان در پی آن خواهد آمد» عبارتی بود که با آن دالامبر شجاعت شکاکان را تقویت میکرد . گوئی با توجه به کلمات او ، آنها با نوعی ایمان مکتوم به اعتبار فرایندهای بینهایت ، در سرگشتگی خود به پیش میتاختند .

پس از آن دوران بحرانی پیش آمد : ابل (Abel) و ژاکوبی، گاوس ، کوشی (Cauchy) و وایرشتراس، وبالاخره دده کیند (Dedekind) و کانتور، تمام ساختمان را در بوتهٔ آنالیز تحقیقی ریختند واز این راه به ابهام ودوپهلوئی خاتمه دادند . آیا نتیجهٔ خالص این تجدید ساختمان چه بود ؟ این کارمنطق پیشتازان را محکوم کرد، اما ایمان آن‌ها را به‌ثبوت رساند.

۱۵ اهمیت شایان فرایندهای بینهایت برای الزامات عملی زندگی صنعتی را به‌سختی میتوان ارزیابی کرد. عملا تمام کار‌برد حساب در هندسه و مکانیك و فیزیك و حتی آمار ، این فرایندها را چه مستقیم وچه غیرمستقیم در بر دارد. غیرمستقیم بخاطر مورد استعمال وسیعی که مقادیر گنگ و فرازنده در این علوم دارند؛ مستقیم بخاطر آنکه اغلب مفاهیم اساسی که دراین علوم به‌کار برده می‌شود بدون این فرایندها هیچ‌دقتی نخواهند داشت . اگر فرایندهای بینهایت را نفی کنید ، ریاضیات محض و عملی به

حالت ماقبل فیثاغورسی بر می‌گردد.

تصور ما ازطول قوس یك منحنی می‌تواند مطلب را روشن کند. دریافت فیزیکی این قوس بر پایهٔ یك سیم خم شده است. پیش خود فکر می‌کنیم که بدون **کشیدن** سیم آن را بصورت **خط مستقیم** در آورده باشیم؛ در این صورت قطعه‌ای از آن خط مستقیم می‌تواند مقیاسی برای سنجش طول قوس باشد. اما مقصود ما از اینکه سیم «کشیده نمی‌شود» چیست؟ مقصود ما اینست که در طول آن تغییری عارض نمی‌گردد. اما این گفته مستلزم آنست که ما ازقبل چیزی دربارهٔ طول قوس دانسته باشیم. چنین تلخیصی آشکارا **مصادرهٔ بمطلوب** است و نمی‌توان بعنوان تعریفی ریاضی آن را به‌کار برد.

راه دیگر آن است که در داخل قوس محیط‌های مستقیم‌الخطی که تعداد اضلاعشان بتدریج زیاد می‌شوند محاط کنیم. این رشته به‌حدی نزدیك می‌شود، و طول قوس بعنوان حد این رشته تعریف می‌شود.

آنچه که برای مفهوم طول صادق است، برای سطح، حجم و جرم و گشتاور وفشار و نیرو واسترس واسترین وسرعت وشتاب وغیره وغیره نیز صادق خواهد بود. تمام این مفاهیم دردنیائی **«خطی»** و **«گویا»** بوجود آورده‌اند که در آن همه چیز مستقیم ومسطح و یکنواخت است. در این‌صورت یا باید این مفاهیم گویای ابتدائی را رها کنیم ـ ومفهوم این کار، با توجه به‌ریشهٔ عمیقی که این مفاهیم در مغز ما دارند، پیدایش انقلابی واقعی است؛ یا باید آن‌ها را بادنیائی تطبیق دهیم که نه مسطح است و نه مستقیم و نه یکنواخت.

اما چگونه مسطح و مستقیم و یکنواخت با نقطهٔ مقابل خود که تابدار و منحنی و غیر یکنواخت است تطبیق می کند ؟ محققاً با تعداد محدودی از مراحل این کار عملی نیست ! این معجزه فقط با بینهایت صاحب کرامت عملی میشود . وقتی مصمم شدیم که به مفاهیم گویای ابتدائی بچسبیم ، راه دیگری جز آن نداریم که بهواقعیت «منحنی» محسوسات خود بهچشم مرحلهٔ ما قبل آخر رشتهای نامحدود از دنیای مسطح نظر کنیم که فقط در تصور ما وجود دارد .

معجزه در اینجاست که این کار نتیجه بخش است !

نیچه (Nietzsche)

« دیگر برای ما توهم نیست: ما حساب می‌کنیم ؛ اما آنچه را که باید حساب کنیم لازم است ابتدا توهمی برایش بوجود آوریم . »

۸ | « فعل » شدن

۱ در حالی که به گنگ‌ها برمی‌گردم ، کوشش خواهم کرد تا ارتباط نزدیك بین این مسئله را با موضوع پیوستگی که در فصل قبل از آن سخن گفتم نشان دهم . اما اجازه بدهیدقبل از آنکه مسألهٔ پیوستگی را شروع کنم بمطلبی برگردم که نیمه کاره گذاردم .

کوشش برای به کار بردن حساب گویادرمورد مسأله‌ای هندسی ، اولین بحران را در تاریخ ریاضیات بوجودآورد . دو مسألهٔ نسبتاً سادهٔ تعیین قطریك مربع ومحیط یك دایره،ازوجود

موجودات ریاضی جدید ، که برای آنها در قلمرو گویا جائی پیدا نمی‌شد ، پرده برداشتند . بی‌کفایتی حساب گویا کاملا به ثبوت رسید .

تحلیل‌های بیشتر نشان دادند که روش‌های جبری نیز کافی نیستند . بنابراین روشن شد که توسعهٔ میدان عدد اجتناب‌ناپذیر است . اما چگونه می‌بایست اینکار انجام گیرد ؟ چگونه می‌توان یك بینهایت ، یا بهتر است گفته شود انواع بینهایت از مجموعهٔ بینهایت مقادیر گنگ را وارد بافتهٔ پیوستهٔ مجموعهٔ اعداد گویا کرد ؟

باید تصور کهنهٔ عدد را مجدداً قالب ریزی کنیم . و با توجه باینکه مفهوم قدیمی در زمینه هندسه با شکست روبروشد ، باید در اینجا بدنبال الگوئی جدید بگردیم . بنظر می‌رسد که خط مستقیم پیوسته و نامحدود برای انتخاب الگو بسیار مطلوب و مرغوب باشد. ولی‌در اینجا نیز بمشکل‌جدیدی برمی‌خوریم: اگر بنا باشد که قلمرو عدد را با خط یکی بدانیم ، دراینصورت‌هر عدد مشخص باید متناظر بانقطه‌ای باشد . اما یك نقطه چیست؟ اگر برای نقطه تعریفی نداشته باشیم ، لااقل باید‌تصوری مشخص از جزء یك خط ، یعنی نقطه ، داشته باشیم .

۳ مفهوم نقطه بعنوان موجودی هندسی وبدون بعد توهمی بیش نیست ؛ اما وقتی این توهم را تحلیل می‌کنیم در پشت سر آن به‌سه‌فکر‌مشخص برمیخوریم. درمرحلهٔ اول نقطه را بعنوان نوعی عنصر **مولد** تصور میکنیم‌که درحرکت خود خطی رسم می‌کند. این فکر با تصور الهامی که از **پیوستگی** داریم ، و آن را

نخستین صفت خط می‌شناسیم ، بسیار سازگار است. باوجود این، وقتی کوشش می‌شود که این در یافت حرکتی (دینامیك) را بعنوان پایه‌ای برای شباهت بین خط وقلمرو عدد در نظر بگیریم ، این دو را بایکدیگر ناسازگار می‌یابیم .

در واقع، حواس ما حرکت را بمثابهٔ چیزی مستقل ، غیر قابل تقسیم وغیر منقطع ادراك می‌کنند . خود عمل تبدیل حرکت به اجزاء نتیجه‌اش از بین رفتن آن پیوستگی است کـه تصمیم به‌حفظ آن داشتیم . بخاطر عدد لازم است که بخط بعنوان ایستگاههای ثابت بینهایت کوچك متوالی بنگریم واین امر مغایر با خود تصور حرکت است که بعنوان نقطهٔ مقابل سکون در نظر گرفته‌ایم . در اینجا نیروی براهین زنون نهفته است .

دیدیم که چگونه ریاضی دانان کوشش کردند با اختراع آنالیز بینهایت کوچك این اختلاف را از بین ببرند ؛ دیدیم که چگونه این آنالیز ، که با هندسه و مکانیك شروع شده بود ، توفیق آن یافت تاوضع مسلطی در تمام زمینه‌های علوم واقعی بدست آورد و در آخر کار بصورت نظریهٔ تغییر (theory of change) واقعی ریاضی درآمد . اگر از جنبهٔ عملی و سودمندی موضوع صحبت کنیم ، باید بگوییم که این فتح همه جانبهٔ آنالیز دلیلی کافی برای صحت روشهای آنست . ولی اگر این درست باشد که دلیل وجود پلو در خوردن آنست ، عمل خوردن هیچ توضیحی در بارهٔ اینکه پلو چیست به ما نمی‌دهد . خود کامیابی آنالیز این پرسش قدیمی را بیشتر بر سر زبانها انداخت که : پیوسته (Continuum) ازچه ساخته شده‌است ؟

درمرحلهٔ دوم، نقطه را می‌توان بعنوان محل تلاقی دو خط تلقی کرد ، یعنی بمثابهٔ اثری باقیمانده بر روی خط مورد نظر بوسیلهٔ خطی دیگر . بدین ترتیب ، این کار یك **تقسیم** و شکلی از بریدن خط بدو ناحیهٔ غیر مشترك مکمل یکدیگر است . این فکر را ریچارد ددکیند همچون نقطهٔ عزیمتی در اثر قرنساز خود بنام «پیوستگی و اعداد گنگ» انتخاب کرد که در ۱۸۷۲ انتشار یافت ؛ در این باره من در فصل آینده گفتگو خواهم کرد .

درمرحله سوم، میتوانیم نقطه را به‌عنوان **حالت حد** در یك **فرایند بینهایت** که درمورد قطعه‌ای از خط بکار برده‌می‌شود، تلقی کنیم. این فرایند می‌تواند اشکال مختلف داشته باشد؛ در حال حاضر کافیست گفته شود که یك مثال نمونه **تنصیف** یونانیها است که پیش از این ذکر شد المثنای حساب فرایند بینهایت در حساب **رشتهٔ بینهایت** است ، و این همان رشتهٔ بینهایت اعداد گویا بود که گئورگ کانتور به‌عنوان وسیله برای نظریهٔ مشهور گنگ‌های خود ، که اولین بار در ۱۸۸۴ انتشار یافت ، بکار برد . این همان فکر ساده و دامنه‌داری است که موضوع این فصل را تشکیل می‌دهد .

۳ یك رشته وقتی **گویا** است که تمام جمل آن اعدادی گویا باشند ، **بینهایت** است اگر هر جملهٔ آن جمله‌ای در پی داشته باشد. من دسته‌ای از اعمال را که یك رشتهٔ بینهایت را بوجود می‌آورند یك فرایند (process) بینهایت نام می‌گذارم .

نمونهٔ کامل فرایندهای بینهایت **تکرار** است . در واقع

خود تصور ما از بینهایت از این مفهوم ناشی شده است که **هر چه را بشود یکبار انجام دادمیتوان همیشه تکرار کرد.** هنگامی که تکرار در مورد عدد گویای a به کار رود ، یك رشتهٔ **تکراری** خواهیم داشت :

$$a , a , a , a , a \ldots\ldots$$

من خواهم گفت که این رشته **عدد a رامشخص می کند.**

یکی دیگر از اعمال اصلی، که من نام آنرا **فرایند سلسله‌ای** (serial process) نام میگذارم، جمع پی‌در پی است . با در دست داشتن رشتهٔ

$$a,b,c,d,e,f,g \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

فرایند نوبتی رشته‌ای جدید به‌وجود می آورد باین‌صورت:

$$a,a+b,a+b+c , a + b+ c + d , \cdot \cdot \cdot \cdot$$

که نام آنرا سلسلهٔ حاصل از رشتهٔ $a,b,c, \ldots$ می‌گذارم . بدین ترتیب ازیك رشته‌تکراری . . . ۱،۱،۱،۱ رشتهٔ طبیعی . . . ۱،۲،۳،۴ به وجود می‌آید .

واضح است که فرایند سلسله‌ای را می‌توان برای هر رشته به‌کار برد ؛ وبنابراین هر رشتهٔ متناظر با یك سلسله خواهد بود.

اما سلسله‌هائی که بوسیلهٔ **رشته‌های میرا** بوجود می‌آیند دارای اهمیت‌زیادی هستند . مشخصهٔ این رشته‌ها تقلیل تدریجی جمل متوالی آنها است ، بنابراین باپیش‌رفتن درزمینهٔ جمل این دنباله‌می‌توان به‌جمله‌ای رسیدکه ازهرمقدارکوچکی کوچکتر باشد.رشته‌های زیراز این نوعند .

$1/2 ، 1/4 ، 1/8 ، 1/16 ، 1/32 ، \ldots$

$1/2 ، 1/3 ، 1/4 ، 1/5 ، 1/6 ، \ldots$

۴ اینك با در دست داشتن دورشتهٔ غیرمشخص ودلخواه ، از راه تفریق جمله به جملهٔ آنها می‌توان رشتهٔ سومی به دست آورد . ممکن است که **رشتهٔ تفاضل** حاصل از این طریق میرا باشد ، مانند حالتی کـه از تفریق دو رشتهٔ زیـر ایجاد می‌شود :

$2/1 ، 3/2 ، 4/3 ، 5/4 ، 6/5 ، 7/6 ، \ldots$ و

$1/2 ، 2/3 ، 3/4 ، 4/5 ، 5/6 ، 6/7 ، \ldots$

در اینجا تفاضل بین جمل متناظر رشتهٔ زیر را تشکیل می‌دهد :

$$\frac{3}{1\times 2}، \frac{5}{2\times 3}، \frac{7}{3\times 4}، \frac{9}{4\times 5}، \frac{11}{5\times 6}، \frac{13}{6\times 7}، \frac{15}{7\times 8}، \ldots$$

مخرج هر یك از جمل حاصلضرب دو عـدد متوالی ، و صورت آن مجموع بین دوعدد است . جملهٔ هزارمین این رشته کوچکتر از ۰٫۰۰۲ و جملهٔ میلیونم آن از ۰٫۰۰۰۰۰۲ کوچکتر است و قس‌علی‌هذا . این رشته قطعاً میرا است .

دو رشته را که تفاضل آنها میرا باشد **مجانب** نام می‌گذاریم . یکی ازاین رشته‌ها می‌تواند رشته‌ای‌تکراری‌باشد. مثلا :

$1 ، 1 ، 1 ، 1 ، 1 ، 1 \ldots$

۱/۲ ، ۲/۳ ، ۳/۴ ، ۴/۵ ، ۵/۶ ، ....

رشتهٔ تکراری نمایندهٔ **عدد گویای ۱** است . می‌تـوان گفت که رشتهٔ دوم کـه مجانب رشتهٔ اول است نیز عدد **۱ را مشخص می‌کند**، یا اینکه **رشتهٔ دوم درحد خود بسمت ۱ گرایش می‌یابد** .

از ایـن امر استنتاج می‌شود کـه اگر دو رشته با رشتهٔ سومی مجانب باشند خود با یکدیگر مجانب اند ، و بعلاوه اگر یکی به طرف عدد گویائی گرایش یابد ، این امر برای دیگری نیز صادق است . به این ترتیب ممکن است که تعداد زیادی از رشته‌هـا ، علی‌رغم اختلاف شکلشان ، نمایندهٔ عـدد واحدی باشند . بنابراین نمایش عدد ۲ به بینهایت طریق ، از راه رشته‌های گویا ، امکان‌پذیر است . ما در زیر به ذکر نمونه‌ای چند می‌پردازیم :

۱٫۹ ، ۱٫۹۹ ، ۱٫۹۹۹ ، ۱٫۹۹۹۹ ....

۲٫۱ ، ۲٫۰۱ ، ۲٫۰۰۱ ، ۲٫۰۰۰۱ ....

۱ ۱/۲ ، ۱ ۲/۳ ، ۱ ۳/۴ ، ۱ ۴/۵ ....

۱ ۱/۲ ، ۱ ۳/۴ ، ۱ ۷/۸ ، ۱ ۱۵/۱۶ ....

همین امر برای هرعدد گویائی صادق است . بخصوص ، **هر رشتهٔ میرا را می‌توان بمنزلهٔ نمایشی از عدد گویای صفر تلقی کرد .**

۵۰ ساده‌ترین رشته‌ها که در عین‌حال دارای اهمیت زیاد تاریخی ونظری است ، **رشتهٔ هندسی** است . دراینجا هرعدد دلخواه را می‌توان برای جمله اول و عدد دلخواهی را برای نسبت بین دو جملهٔ متوالی انتخاب کرده ، و بدین‌ترتیب هر جمله از ضرب جملهٔ ما قبل در این قدر نسبت به دست می‌آید. رشتهٔ تکراری را می‌توان به منزله یك رشته هندسی پذیرفت که قدر نسبت آن يك است . اگر این حالت خاص را در نظر بگیریم ، می‌توانیم رشته هندسی را به **صعودی و نزولی** طبقه‌بندی‌کنیم . مثلا دو رشتهٔ زیریکی صعودی ودیگری نزولی است :

$$۲ ، ۴ ، ۸ ، ۱۶ ، ۳۲ ، ۶۴ ، \ldots ۲^n ، \ldots \quad و$$

$$۱ ، {}^{۱}/_{۳} ، {}^{۱}/_{۹} ، {}^{۱}/_{۲۷} ، {}^{۱}/_{۸۱} \ldots {}^{۱}/_{۳^n} \ldots$$

در رشته صعودی قدر مطلق جمل **به صورت بینهایت ترقی می کند**، یعنی اگربه اندازهٔ کافی جلورویم ، به جمله‌ای که از هر عدد دلخواه بزرگتر است می‌رسیم . این رشته‌ها را **واگرا** می‌نامند .

رشتهٔ نزولی همیشه میرا است، وبه این دلیل توجه خاصی به آن می‌شود . اما آنچه بخصوص سبب اهمیت چنین رشته‌ای می‌شود ، آنست که رشتهٔ هندسی میرا همیشه به طرف يك حد گویا گرایش دارد ، **و بالعکس هرعدد گویائی را می‌توان به منزلهٔ حد يك دنبالهٔ گویای هندسی تلقی کرد** . بعلاوه ، در اینجا ما به يك حالت نادر برمی‌خوریم که

درآن «مجموع جمل یك سلسله» را می‌توانیم برحسب مفروضات موجود پیدا کنیم .

سلسلهٔ حاصل از یك رشتهٔ هندسی را **تصاعد هندسی** می‌نامند . یك رشتهٔ میرای هندسی تصاعدی هندسی بوجود می‌آورد . اگر رشته با عدد a شروع شود وقدرنسبت آن r باشد، حد این دنباله بوسیله فرمول سادهٔ زیر به دست می‌آید :

$$S = \frac{e}{1-r}$$

این حد را **مجموع** تصاعد می‌نامند .

رشتهٔ **تنصیف** در برهان اول زنون تصاعد هندسی زیر است .

$$۱/۲ ، ۳/۴ ، ۱/۸ ، ۱۵/۱۶ و \ldots$$

که خود سلسلهٔ زیرارا بوجود می‌آورد :

$$۱/۲ ، ۳/۴ ، ۷/۸ ، ۱۵/۱۶ \ldots$$

چه مستقیماً از راه فرمول جمع و چه غیرمستقیم ، می‌توان ملاحظه نمود که سلسه به طرف ۱ گرایش دارد .

مجموع

$$۱/۲ + ۱/۴ + ۱/۸ + ۱/۱۶ + \ldots$$

علی‌رغم برهان زنون ، که دارای بینهایت جمله است ، برابر عدد محدود ۱ خواهد بود . وارد کردن تصور همگرایی و حدود ممکن است در بعضی از زمینه‌ها مورد مخالفت قرار گیرد ، ولی وقتی که پذیرفته شد ، برای زنون که می‌گوید

مجموع یك سلسله بینهایت ناچار بینهایت است ، نیرویش را از دست خواهد داد.

برهان دوم زنون نیز با یك تصاعد هندسی ارتباط پیدا می‌کند . برای آنکه بطور مشخص آنرا بررسی کنیم ، فرض می‌کنیم که آشیل با سرعت ۱۰۰ پا دردقیقه ولاك‌پشت یك پا در دقیقه حرکت می‌کند . هرگاه فاصلهٔ آنها ۹۹۰ پا باشد چه وقت آشیل به‌لاك‌پشت می‌رسد ؟ زنون می‌گوید هرگز . « عقل سلیم» با توجه به اینکه آشیل در هر دقیقه ۹۹ پا بیش از لاك‌پشت راه می‌رود ، و فاصلهٔ آنها ۹۹۰ پا است ، می‌گوید که آشیل برای رسیدن به لاك پشت ۱۰ دقیقه وقت لازم دارد . اما اجازه بدهید به سیاق خود زنون بحث کنیم . هنگامی‌که آشیل به وضعی که لاك‌پشت در ابتدا در آن بود می‌رسد ، لاك پشت ۱/۱۰۰ اختلاف مسافت یعنی ۹/۹ پا را پیموده است . هنگامی کـه آشیل این فاصلهٔ دوم را طی می‌کند ، لاك‌پشت ۱/۱۰۰ آن ، یعنی ۰۹۹. ر. پا را طی کرده است . « امـا آنچه کـه یکبار گفته شد همیشه قابل تکرار است . » اختلاف مسافت به‌تصاعد هندسی زیر تبدیل می‌شود :

. . . . . ، ۰٫۰۰۰۹۹ و ۰٫۰۹۹ و ۹٫۹ و ۹۹۰

که مجموع آن طبق فرمول برابر ۱۰۰۰ است . آشیل باید ۱۰۰۰ پا طی کند تا به لاك‌پشت بـرسد و اینکار ده دقیقه وقت لازم دارد . مجدداً دیده می‌شود که مجموع تعداد بینهایت جمله **می‌تواند محدود باشد .**

۶ کسرهای اعشاری **متناوب** نیزسلسله‌های هندسی تغییر

شکل یافته‌ای هستند .

مثلا کسر اعشاری زیر راکه ازنوع متناوب **بسیط** است در نظر بگیرید :

$$۰٫۳۶۳۶۳۶۳۶۳۶ \ldots\ldots$$

من این کسر را بــه شــکل اختصاری (۳۶)ر۰ خواهم نوشت .

معنی حقیقی این کسر عبارتست از :

$$۳۶/۱۰۰ + ۳۶/۱۰٫۰۰۰ + ۳۶/۱۰٫۰۰۰٫۰۰۰ + \ldots\ldots$$

دیده می‌شودکه این‌یك سلسلهٔ هندسی باقدرنسبت ۱/۱۰۰ و فرمول حاصل جمع نشان می‌دهد که این دنباله به طرف حد گویای ۳۶/۹۹ یا ۴/۱۱ گرایش دارد . همین امر برای کسرهای متناوب **مرکب** مانند (۵۳) ۳۴ر۰ نیزصدق می کند . زیرا با ضرب این‌کسردر ۱۰۰کسرمتناوب‌بسیط $\frac{۵۳}{۹۹}$ ۳۴ بدست می‌آید ، وچون‌کسرمتناوب مرکب ۱ر۱۰۰ این عدد است خواهیم داشت.

$$۰٫۳۴(۵۳) = \frac{۳۴۱۹}{۹۹۰۰}$$

حتی یك کسر پایان‌پذیر را می‌توان به عنوان کسرمتناوبی با دورهٔ صفر تلقی کرد . مثلا :

$$۲٫۵ = ۲٫۵ \ldots = ۲٫۵(۰)$$

ما درمدرسه تبدیل کسرمتعارفی را به‌اعشاری‌آموخته‌ایم. روش عمل تقسیم طولانی نامیده می‌شود ، و از روی تجربه می‌دانیم‌که اینکار یابه‌کسری پایان یافته ختم می‌شود ، مانند ۱/۸ که هم‌ارز ۱۲۵ر۰ است ، و یا به کسری متناوب ، مانند حالت

۱/۷ که با کسر اعشاری (۱۴۲۸۵۷)ر. نمایش داده می‌شود. این خاصیت را باکمال دقت می‌توان ثابت کرد و در بیان زیر ممکن است آنرا خلاصه کرد: **هرعدد گویا را می‌توان به شکلی منحصر بفرد با کسری اعشاری با دورهٔ بینهایت نمایش داد؛ بالعکس هر کسر متناوب اعشاری نمایش یك عدد گویا است.**

از طرف دیگر بدیهی است که به تعداد دلخواه می‌توان رشته‌هائی اعشاری ساخت که **با آنکه نامحدودند دوره‌ای نباشند**. در اینجا توزیع ارقام ممکن است بی‌قاعده و هرج و مرج باشد. و یا ممکن است از قانونی منظم تبعیت کنند و در عین‌حال **غیرمتناوب** باشند، مانند سلسلهٔ اعشاری زیر:

۱ر۱۰۱۱۱۲۱۳ . . . ۱۹۲۰۲۱ . . . ۱۰۰۱۰۱ . . .

اگر می‌توانستیم رشته‌ای گویا و تکراری مانند . . . ، a ، a ، a که با این رشتهٔ اعشاری مجانب باشد بیابیم، در این صورت رشتهٔ اعشاری نمایش عدد گویای a می‌بود. اما می‌دانیم که اینکار غیر ممکن است، زیرا اگر ممکن بود، رشته می‌بایست متناوب باشد، در صورتی که چنین نیست. پس این سلسله نمایندهٔ چیست؟ ما نمی‌دانیم. شکلی کـه طبق آن واگرائی و حد را تعریف کردیـم از همهٔ امـکانات طبقه‌بندی این رشته در مقولهٔ عدد احتراز جسته است. بـا وجود این، تصور ذهنی ما از همگرائی و حد عبارتست از چیزی که رشد می‌یابد اماهرگز از مقدار معینی تجاوز نمی‌کند، و یاچیزی که کاهش می‌پذیرد و هرگز پائین‌تر از مقدار معینی قرار

نمی‌گیرد . با این طرز تصور ذهنی سلسله‌های بینهایت اعشاری غیرمتناوب همگرا هستند ، و همین مطلب برای تعداد زیادی‌از رشته‌های دیگر مانند :

$$\left(1\tfrac{1}{2}\right)^{2} ، \left(1\tfrac{1}{3}\right)^{3} ، \left(1\tfrac{1}{4}\right)^{4} ، \left(1\tfrac{1}{5}\right)^{5} ، \ldots$$

صادق است که این یکی ، بنابر تصادف ، نمایندهٔ عدد فرازنده e نیز می‌باشد .

همین فکر سادهٔ همگرائی و حد است که در روزهای اول پیدایش‌آنالیز بمثابهٔ اصلی بدیهی پذیرفته شد، وباید قبول کرد، که علی‌رغم دامی‌که برای ما تعبیه کرده است ، اولین کامیابی محاسبات انتگرال و دیفرانسیل مدیون همین فکر بود . بنا۔ براین مسائلی که به طور کاملا طبیعی مطرح می‌شوند چنین‌اند : آیا ممکن است که برای اندیشه‌های ذهنی و الهامی همگرائی‌و حد تعریفی منجز و دقیق پیدا کرد ؟ آیا ممکن است با این تعریف ابزاری دقیق ساخت تا به ما امکان دهد که با این موجودات ریاضی جدید ، که با سلسله‌های اعشاری غیرمتناوب رشته‌های دیگر نمایش داده می‌شوند ، باهمان اطمینانی عمل‌کنیم که با نوع خاصی که حدود گویا می‌پذیرند عمل می‌کردیم ؟

۷ برای جواب گفتن به این سئوالات ، باید دید که آیا در میان خواص رشته‌های مخصوصی که به طرف حدودی گویـا گرایش دارند، خاصیتی یافت می‌شودکه امکان تعمیمی را برای انواع رشته‌هائی که چنین شکل گرایشی ندارند فراهم سازد یا نه . گئورگ کانتور چنین خاصیتی را درامری یافته است که من نام آنرا **خاصیت خود مجانبی** رشتهٔ همگرا می‌گذارم .

برای بیان آن ، اجازه بدهید سلسلهٔ تنصیف را مجدداً بررسی کنیم . با حذف اولین جملهٔ رشته و قبول دومین جمله آن به عنوان اولین جمله از یك رشتهٔ جدید می‌توان رشته‌ای نوی بدست آورد . این کار رشته‌های پی در پی

$$1/2 ، 3/4 ، 7/8 ، 15/16 ، 31/32 ، 63/64 ، 127/128 \ldots$$

$$3/4 ، 7/8 ، 15/16 ، 31/32 ، 63/64 ، 127/128 ، 255/256 \ldots$$

$$7/8 ، 15/16 ، 31/32 ، 63/64 ، 127/128 ، 255/256 ، 511/512 \ldots$$

را بوجود می‌آورد که بدیهی است به طور نامحدود می‌توانند ادامه یابند . حتی یك آزمایش سطحی از این رشته‌ها نشان می‌دهد که همگی نسبت به یکدیگر مجانب‌اند یعنی رشته‌هائی تفاضلی که از هردو تای آنها بوجود می‌آیند میرا هستند .

می‌توان نشان داد که این خاصیت خود مجانبی برای تمام رشته‌هائی که بسمت حدی گویا گرایش دارند صادق است ؛ اما بهیچوجه محدود بهمین‌ها نیست : در واقع ، هرسلسلهٔ اعشاری غیرمتناوب نامحدود نیز دارای چنین خاصیتی است . به عنوان مثال سلسلهٔ اعشاری زیر را در نظر بگیریم .

$$0.101112131415 \ldots ،$$

که می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت :

$$0.1 ، 0.10 ، 0.101 ، 0.1011 ، 0.10111 ، 0.101112 ، \ldots$$

بدیهی است که حذف هر اندازه که بخواهیم از این تقریبهای گویا حتی درسیمای رشته تغییری بوجود نمی‌آورد . بدین‌ترتیب ما آنرا به صورت زیر می‌توانیم بنویسیم :

۰٫۱۰۱۱۱۲۱۳، ۰٫۱۰۱۱۱۲۱، ۰٫۱۰۱۱۱۲
. . . ، ۰٫۱۰۱۱۱۲۱۳۱

که در حقیقت مجانب اولی است .

بدین‌ترتیب کانتور فکر همگرائی را ، که تا آن زمان برای رشته‌هائی که با رشته‌ای تکراری مجانب بودند بکار می‌رفت ، با یکی دانستن اصطلاحات **خود مجانبی وهمگرائی** گسترش داد . بعلاوه ، باتوجه به‌اینکه رشتهٔ خود مجانب نوعی از موجود ریاضی را بوجود می‌آورد کـه از قدیم نام **عـدد حقیقی** را به آن داده‌اند ، فکر حد را گسترش داد .

۸ اینك اگر بتوان اثبات کرد که تمام شروط اصل دوام در اینجا صادق است ، می‌توان نام **عدد** را بر این موجودات اطلاق نمود .

تحقق شرط اول از اینجا نتیجه می‌شود که در میان رشته‌های همگرا رشته‌هائی هستند کـه حدود آنها اعداد گویا است .

شرط دوم مربوط به ملاك مرتبه‌ای است . دو رشتهٔ (A) و (B) را که دو عدد حقیقی a و b را تعریف می‌کنند در نظر می‌گیریم ، ورشتهٔ تفاضل ، یعنی $(A-B)$، را تشکیل می‌دهیم. ممکن است که این رشته اخیر میرا باشد ، که در آن صورت (A) و (B) مجانب‌اند ، و بنابـر آن می‌گوئیم اعداد a و b **برابرند.**

به عنوان مثال دو رشتهٔ زیر را در نظر بگیریم :

$$\left(1\tfrac{1}{2}\right)^{2},\ \left(1\tfrac{1}{3}\right)^{3},\ \left(1\tfrac{1}{4}\right)^{4},\ \left(1\tfrac{1}{5}\right)^{5}\ \ldots$$

$$2 + 1/2!\,,\quad 2 + 1/2! + 1/3!\,,$$
$$2 + 1/2! + 1/3! + 1/4!\,,$$
$$2 + 1/2! + 1/3! + 1/4! + 1/5!\,,\ \ldots$$

می‌توان اثبات کرد کـه اینها مجانب‌اند و بنابـراین هر دو نمایندهٔ یك عدد گویا هستند کـه در اینجا عدد فرازنده e است .

اگر رشتهٔ تفاضل میرا نباشد ، در این صورت با شروع از جملهٔ معین ، ممکن است تمام جمل آن مثبت باشند ، که در آنحالت می‌گوئیم رشتهٔ (A) **مسلط** بـر رشتهٔ (B) است و یا عدد حقیقی a **بزرگتر** ازعدد حقیقی b است. و باز اگر با شروع ازجمله‌ای معین، جمل بعدی رشته تفاضل منفی باشند، در این صورت (A) **تحت تسلط** (B) است ، و در این حال می‌گوئیم a کوچکتر از b است . می‌توان نشان داد کـه این ملاكها وقتی (A) و (B) حـدودی گویـا را می‌پذیرند ، به ملاك‌های معمولی بدل می‌شوند .

بالاخره ، حاصل جمع و حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی ، که بادو رشته تعریف شده باشند ، از راه جمع وضرب جمل متناظر این دو رشته به دست می‌آیند . البته این امر مستلزم آن است که رشته‌های منتجه خود همگرا باشند و ایـن امرباصحت تمام قابل اثبات باشد . بعلاوه می‌توان نشان داد کـه جمع و ضربی که بهاین‌ترتیب تعریف شدند، تلفیقی وتبدیلی وتوزیعی خواهند بـود .

بنابراین از لحاظ اصل دوام این مقادیر جدید را

می‌توان به عنوان اعدادی واقعی پذیرفت . با اضافه شدن این اعداد ، میدان اعداد گویا تبدیل به قلمروی وسیع می‌شود کـه نـام **قلمرو اعداد حقیقی** به آن اطلاق خواهد شد .

۹ آیا این قلمرو جدید شامل اعداد گنگ جبری و فرازنده آنالیز نیز هست ؟ آری و برای نشان دادن این امر اجازه بدهید به معادلهٔ $x^2 = ۲$ برگردیم ، که از دو هزار سال پیش به صورت تعیین قطر مربع ، بـحرانی بوجود آورده که منجر به‌ایجاد قلمروعدد حقیقی گردید. شکل عملی استخراج ریشه را در مـدرسه آموخته‌ایـم . این روش بـرای $\sqrt{۲}$ دسته‌ای از تقاریب گویا ،که یك رشتهٔ همگرا می‌سازند بوجود می‌آورد :

۱، ۱٫۴، ۱٫۴۱، ۱٫۴۱۴، ۱٫۴۱۴۲، ۱٫۴۱۴۲۱ ...

این رشته دارای حدی گویا نیست ، اما رشته‌ای که از مجذور هر یك از جمل آن به دست می‌آید ، یعنی :

۱، ۱٫۹۶، ۱٫۹۸۸۱، ۱٫۹۹۹۳۹۶ ...

بسمت عدد گویای ۲ گرایش دارد .

بنا براین هنگامی که‌می گوییم ریشهٔ مثبت معادله $x^2 = ۲$ ریشهٔ مورد بحث بوده و عددیست که بوسیلهٔ $\sqrt{۲}$ نمایش داده می‌شود . منظورما تنها این نیست که رشتهٔ مجذورات همگراست، بلکه می‌خواهیم بگوئیم که در عین حال این رشته متعلق به آن نوع نادر از رشته‌های همگراست که دارای **حدی گویا** هستند که درحالت مثال ما عدد ۲ است . به عبارت دیگر رشتهٔ نماینده

$\sqrt{2}$ است ، زیرا ما قبول کردیم که عدد ۲ ، در عین آنکه مجذوری کامل نیست ، حدیست که یك رشته از مجذورات کامل به طرف آن میل می‌کند .

همین روش برای معادلات جبری و فرازنده به کار می‌رود . کشف عملی آلگوریتم ، که در هرمورد بخصوص رشته‌ای را که به طرف جواب مورد نظر گرایش پیدا می‌کند ، بوجود می‌آورد ، می‌تواند اشکال ریاضی قابل توجهی ایجاد کند . اما وقتی برای یکبار این شکل‌کار بوجود آمد، می‌توان رشته را به بینهایت کسر اعشاری که از نظر ماهیت همگرا و بدین ترتیب نماینده عددی حقیقی است بدل نمود .

بنابراین قبول اعتبار فرایندهای بینهایت ما را ازحدود محدود حساب گویا بیرون می‌آورد . این کار برای ما **یك حساب عمومی** ، یا **حساب اعدادحقیقی** را تهیه می‌کند، و ما را با وسائل لازم برای حملهٔ به مسائل قبلی ، که حساب اعداد گویا در مقابل آنها ناتوان بود ، مجهز می‌نماید .

۱۰ در ابتدا به نظر می‌رسد که با اطلاق نام بسیارعمومی **حقیقی** به حدود رشته‌های گویا ، احتیاط را از دست داده‌ایم. زیرا درواقع اکنون فقط‌میتوان‌رشته‌های بینهایت چنین گنگهائی را مورد توجه قرار داد . اگرما گنگهای نوع اول را گنگهای **رتبهٔ** اول می‌نامیدیم ، حدهای‌جدید می‌توانستند گنگ‌های رتبهٔ دوم نامیده شوند ؛ از این رشته می‌توانستیم گنگ‌های رتبهٔ سوم والی‌آخررا بوجودآوریم. باعبارت ساده $\sqrt{1+\sqrt{2}}$

می‌توان به خوبی قضاوت کرد که این کار شعبده بازی نیست : تعبیر مستقیم این عبارت رشتهٔ **گنگ** زیر را به وجود می‌آورد :

$$\sqrt{۲٫۴}\ \text{و}\ \sqrt{۲٫۴۱}\ \text{و}\ \sqrt{۲٫۴۱۴}\ \cdots$$

اما در این حالت لااقل مخالفتی به چشم نمی‌خورد . زیرا اگر بنویسیم $x = \sqrt{۱+\sqrt{۲}}$ ، با یك عمل جبری ساده ثابت می‌شود که x جواب معادله $x^۴ = ۲x^۲ + ۱$ است . با این حال ، برای این معادله می‌توان روشی شبیه به آلگوریتم استخراج ریشه را بکار برد ، و این روش به ما امکان می‌دهد تا یك دسته از تقریبهای گویائی را بسازیم که به نوبهٔ خود بمثابه یك رشته گویا نماینده $\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$ ومجانب رشته گنگ قبلی باشند .

هر اندازه هم که در بادی نظر عجیب به نظر برسد ، این واقعیت کلی وجود دارد که : **به هر رشته گنگ می‌توان یك رشته گویا (و معمولا بیش از یکی) تخصیص داد که مجانب آن باشد** . بنابراین وقتی مسأله برسر حسابی عمومی است ، گنگ های **طبقه‌بندی** شده زائد به نظر می‌رسند ، گرچه این طبقه‌بندی از نقطه نظر تشریفاتی ممکن است جالب باشد .

۱۱ این قضیه، که هرچه را بتوان بوسیلهٔ رشتهٔ گنگ بیان کرد می‌توان بوسیلهٔ رشته‌ای از اعداد گنگ نیز نمایش داد ، دارای اهمیت اساسی است ، و به اعداد گویا نقش خاصی در

نظریه واگذار می‌کند. باوجود آنکه هر عدد حقیقی را می‌توان بوسیلهٔ رشته‌های گویای بینهایت و همگرا نمایش داد، قلمرو گویا، که با مفاهیم واگرائی و حدود تقویت شده است، برای بوجود آوردن حساب، و بدان وسیله ایجاد نظریهٔ توابع که شالودهٔ ریاضیات جدید است، کفایت می‌کند.

اما این واقعیت اساسی در ریاضیات عملی نیز دارای همین اندازه اهمیت است. با توجه به اینکه هر رشتهٔ گویا را می‌توان بمثابهٔ سلسلهٔ اعشاری نامحدود نمایش داد، تمام محاسبات شکل منظمی به خود می‌گیرند. محاسب بامحدودکردن خود به عدد معینی از ارقام اعشاری می‌تواند تقریبی گویا برای هر مسألهٔ گنگ و یا فرازنده به دست آورد. و مهمتر اینکه نه فقط درجهٔ دقت این روش را به سهولت می‌توان تعیین کرد، بلکه حتی از قبل نیز می‌توان آنرا مشخص نمود.

۱۲ می‌گویند که هنگامی که از لوئی چهاردهم سؤال شد که اصل راهنمای او درسیاست بین‌المللی چیست، چنین جواب داد: «الحاق! وهمیشه می‌توان یك وکیل دعاوی پیدا کرد تا این عمل را قانونی کند.»

من هرگاه به سرگذشت دو مسأله بینهایت و اعداد گنگ می‌اندیشم این نقل قول بیادم می‌آید. دنیا برای تقدیس روش جانشین کردن عددی گنگ با یکی از تقریبهای گویای آن، به عبارت دیگر، تعویض حد یك رشته بینهایت با یکی از جمل که با جملهٔ اول فاصلهٔ زیادی دارد، به انتظار وایرشتراس و و کانتور ننشست. زمینها مساحت می‌شد و ساختمانها بالا می

رفت ؛ تونلها را حفر می‌کردند و پلها را می‌ساختند ؛ سلاحها و ماشینها برپایهٔ تقریبهای گویا ساخته شد ، بی‌آنکه کمترین اندیشه‌ای دربارهٔ ارزش واعتبار اصلی که درساختن چنین تقریبها به کار می‌رفت بوده باشند .

من قبلا دربارهٔ مقادیر تقریبی که تئون وهرو برای ریشهٔ دوم اعداد صحیح داده بودند صحبت کردم . نشانه‌هایی در دست است که مسأله دارای ریشه‌ای قدیمتر است وحتی به زمان فیثاغورسیان می‌رسد . اما ارشمیدس بود که برای اولین بار اجرای منظم و صحیح این اصل را معمول داشت .

اجازه بدهید مجدداً به مسألهٔ قدیمی تربیع دایره برگردیم ، که در آن مراحل مختلفی که ریاضیات گذرانده به خوبی منعکس است . همانطور که قبلا یادآوری کردم ، شیوهٔ ارشمیدس این بود که فرض می‌کرد محیط دایره بین دودسته کثیرالاضلاع منتظم قرار گرفته است که دسته‌ای محاط در دایره ودستهٔ دیگر محیط بر دایره‌اند. او کار را با شش ضلعی شروع کرد و با دوبرابر نمودن اضلاع آنها به کثیرالاضلاع های ۹۶ ضلعی رسید . طول محیطهای کثیر ـ الاضلاع های محاطی متوالی یك رشته ، واز آن کثیرالاضلاع های محاطی رشته‌ای دیگر بوجود می‌آورند . اگر جریان تا بینهایت ادامه یابد ، دورشته به سمت حد مشترکی میل خواهند کرد که طول محیط دایره است . اگر قطر دایره واحد باشد در این صورت حد مشترك عدد π خواهد بود .

آنچه که دربارهٔ این رشته‌ها قابل توجه است آنست که هر دوی آنها گنگ‌اند . در واقع جمله‌های اول رشتهٔ اول

۶ ، $6(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ ، و از آن رشتهٔ دوم $4\sqrt{3}$ ، $24(2-\sqrt{3})$ بوده و عبارات بعدی در هر یك از آنها رادیکالهای پیچیده‌تری هستند . به یقین می‌توان گفت که به جای این رشته‌های گنگ ارشمیدس اعدادی گویا گذارده واین نتیجه به دست آمده است که عدد π بین $3\,{}^{1}/_{7}$ و $3\,{}^{10}/_{71}$ قرار دارد .

۱۳ دومسألهٔ مشابه قدیمی، یعنی رادیکالها واندازه‌گیری π ، نیروی محرکه‌ای برای توسعهٔ فرایند بینهایت مهم دیگر ، یعنی **کسر مسلسل** بوجود آوردند . گرچه بعضی ازمورخان ریاضی می‌گویند که این کسرها را یونانیان می‌شناختند ، اما اولین گزارشی که از این کسرها به دست ما رسیده در کتابی از بومبلی است که تاریخ آن به ۱۵۷۲ برمی‌گردد . اومی‌گوید « روش‌های متعددی برای تشکیل‌کسرها درآثارسایر نویسندگان داده شده است که بدون دلیل برعلیه یکدیگر به‌مقابله برخاستند. از آن جهت می‌گویم بدون دلیل که به نظر من همه آنهامقصود مشترکی را تعقیب می‌کنند . » باقضاوت در این باره می‌توان گفت‌که در اوایل قرن شانزدهم با آلگوریتم آشنائی داشته‌اند.

مقصود مشترکی که بومبلی از آن صحبت می‌کند عبارت است از پیدا کردن تقریبهای‌گویا برای رادیکالها .

من این روش را برای $\sqrt{2}$ نشان‌خواهم داد . این‌عدد بین ۱و۲ قراردارد. اینك فرض می‌کنیم $\sqrt{2}=1+{}^{1}/_{y}$

باشد . ازاینجا $y = ۱ + \sqrt{۲} = ۲ + ۱/y$ این راه را ادامه می‌دهیم و کسر زیر به دست می‌آید .

$$\sqrt{۲} = ۱ + \cfrac{۱}{۲ + \cfrac{۱}{۲ + \cfrac{۱}{۲ + \cfrac{۱}{۲ + \cdots}}}}$$

این نوع مخصوصی از کسر مسلسل است ؛ و آنرا کسر **ساده** می‌گویند ، زیرا همهٔ صورتها ۱ است و **متناوب** می‌گویند به خاطر آنکه مخرجها تکراری است .

اگر ما خودرا به یك عنصر ، دو عنصر ، سه عنصر و .... از یك کسر مسلسل محدود کنیم دسته‌ای از تقریبهای گویا به دست می‌آوریم که آنرا **همگرا** می‌نامند . درحالت $\sqrt{۲}$ همگراها عبارتنداز :

۱ ، ۱۴/۲ ، ۱۳/۵ ، ۱۵/۱۲ ، ۱۱۴/۲۹ ، ۱۲۹/۷۰ ، ۱۷۰/۱۶۹ ، ...

بخصوص دو جنبه است که کسرهای مسلسل را ارزشمند می‌سازد . اول آنکه **یك کسر ساده مسلسل همیشه همگرا است** ، و دوم آنکه **خاصیت نوسانی** دارد . در واقع ما همگراها را یك بار با انتخاب اولین ، سومین ، پنجمین و ... جمله و بار دیگر با انتخاب دومین ، چهارمین ، ششمین و . . . جمله به دو گروه قسمت می‌کنیم . در مورد $\sqrt{۲}$ ، دو رشتهٔ مجانب زیر به‌دست می‌آید :

$$1 \quad 1\tfrac{2}{5} \quad 1\tfrac{12}{29} \quad 1\tfrac{70}{169} \quad \cdots$$

$$1\tfrac{1}{2} \quad 1\tfrac{5}{12} \quad 1\tfrac{29}{70} \quad 1\tfrac{169}{408} \quad \cdots$$

گروه اول دائماً درحال رشد است و حد بالائی آن $\sqrt{2}$ می‌باشد ؛ گروه دوم درحال تنزل است و حد پائینی آن $\sqrt{2}$ است. این خاصیت نوسانی،کسرهای مسلسل را برای تقریبهای دقیق گرانبها می‌کند ، زیرا هر مقداری را که انتخاب کنیم خطای اندازه بلافاصله قابل تعیین است .

در قرن هجدهم ، اویلر نشان داد که **هر مقدار گنگ درجه دوم را می‌توان به وسیلهٔ کسر مسلسل متناوب ساده نمایش داد ؛** و بلافاصله پس‌از آن لاگرانژ ثابت‌کرد که عکس مسأله نیز صحیح است ، **یعنی هر کسر مسلسل متناوب ساده جواب معادله‌ای درجه دوم است .** بنابراین، کسرهای مسلسل متناوب همان نقشی را برای‌معادلات درجه دوم دارند که کسرهای اعشاری متناوب نسبت به معادلات خطی ایفا می‌کنند.

۱۴ روشی‌که برای $\sqrt{2}$ بیان‌کردیم برای هرمعادله‌ای قابل اجرا است ، و هر ریشهٔ حقیقی معادلهٔ کلی را می‌توان بوسیلهٔ کسرهای مسلسل نمایش داد . اما فقط در مورد معادلهٔ درجه دوم است که این کسر متناوب خواهد بود . در ابتدا چنین به‌نظر می‌رسدکه‌کسرهای مسلسل منحصراً با اعمال‌جبری سازگارند . اگر چنین بود ملاکی برای تمیز اعداد گنگ جبری از فرازنده‌ها دراختیار داشتیم . ازآن لحاظ که منشأ

جبری کسر محدودیتهائی برای اجزای آن ایجاد می‌کند این مسئله صحیح است ، و در واقع نیز همین محدودیت بود که لیوویل را درکشف **وجود اعداد جبری رهبری کرد** . اما از این موضوع گذشته ، روش‌های جبری نه نسبت به کسرهای مسلسل امتیاز خاصی دارند ، و نه (تا آن حد که می‌دانم) نسبت به سایر رشته‌هائی که با آنها سر و کار داریم همین « بی تفاوتی» فرایندهای بینهایت برای جبرمسئول مشکلات عمده‌ای است که در نظریهٔ فرازنده‌ها باآن روبرو هستیم .

بدین ترتیب ، مثلا ، اعداد فرازنده π و a رامی‌توان بوسیلهٔ کسرهای مسلسل ، به شکل زیباتری بیان کرد . این کار را ما در جدول انتهای فصل انجام داده‌ایم .

بسط عدد π به شکل‌کسر مسلسل توسط‌لامبرت در ۱۷۶۱ کشف شد و دارای اهمیت تاریخی فراوانیست . عدم تناوب در این کسر بطور قطعی نشان می‌دهدکه عدد π ریشهٔ معادلهٔ درجه دوم با **ضرائب‌گویا** نیست . این امرمشعر برآنستکه تربیع دایره تنها بوسیلهٔ خط‌کش و پرگار امکان‌پذیر نیست . از آن جهت می‌گویم**«مشعر بر آنست»** ونمی‌گویم **«ثابت‌می‌کند»** که هنوز ممکن است عدد π ریشهٔ معادلهٔ درجه دومی باشد که ضرائب آن شامل اعداد گنگ درجه دوم باشند ، که در این حالت کسر مسلسل غیر متناوب خواهد بود ، و ساختمان با خط‌کش وپرگار امکان پذیر است .

۱۵ شباهت جالبی بین سرهای مسلسل ساده و سلسله‌های اعشاری نامحدود وجود دارد . اولا این هردونوع رشته همیشه

همگرا هستند : یعنی هر قانون اتفاقی در توالی مخرجهای یك کسر مسلسل یا ارقام یك کسر اعشاری ، همیشه نمایندهٔ عددی حقیقی است . ثانیاً ، اگر قانون توالی متناوب باشد ، سلسلهٔ اعشاری نمایش عددی گویا است ، در صورتی که یك کسر مسلسل متناوب نمایش عدد گنگ درجهٔ دوم یعنی عددی به شکل $a+\sqrt{b}$ است که در آن a و b اعدادی گویا هستند. بالاخره، هر عدد حقیقی را می‌توان یا به شکل سلسلهٔ اعشاری ویا به‌شکل کسر مسلسل نشان داد ، به شرط آنکه کسرهای متعارفی حالت خاصی از کسرهای مسلسل تلقی شوند .

خواص فوق دو نوع فرایندهای بینهایت را که بخصوص برای نشان دادن اعداد حقیقی به کار می‌روند مشخص می‌کند . و با این حال تاریخ این فرایندها در اطراف روشی که دارای وسعت عمومی‌تر یست دور زده و درعین حال به علت عمومیت و ابهام زیادش به نتایج گیج کننده و معماآمیز منجر شده است.

بدون شك منشأ این روش سلسله‌های هندسی بوده‌اند که ، اگر از روی براهین زنون قضاوت کنیم ، تقریباً برای همهٔ پیشینیان شناخته شده بود . هنگامی که خود را به سلسله‌های هندسی مثبت محدود می‌کنیم ، می‌بینیم که وقتی قدر نسبت کمتر از ۱ باشد این دنباله‌ها همگرا ودرغیراینصورت واگرا هستند. این نتیجه را فوراً می‌توان برای سلسله های هندسی **نوسانی** تعمیم داد ، یعنی برای حالتی که قدرنسبت منفی است. سلسله‌های متناوب درصورتی همگرا خواهند بودکه قدرنسبت کسری واقعی باشد ، ودرغیراینصورت واگرا هستند . یك حالت جالب توجه هنگامی است که قدرنسبت برابر ۱ ـ باشد . دراینصورت سلسله

شکل زیر را پیدا می‌کند :

$$a - a + a - a + a - a + a - a + \cdots$$

ناچاریم تأییدکنیم که این سلسله ، علی‌رغم آنکه مجموع آن از a تجاوز نمی‌کند ، واگرا است . در واقع سلسلهٔ فوق را می‌توان به صورت رشتهٔ زیر درآورد :

$$a, \cdot, a, \cdot, a, \cdot, a, \cdot, \ldots$$

بدین‌ترتیب حد معینی نخواهـد داشت . بـا این حال ، لایب‌نیتز به شکل دیگری اندیشیده است . او چنین بحث می‌کندکه دو حد a و ۰ دراینجا **احتمال برابردارند** ، ونتیجه می‌گیردکه حد مجموع سلسله به مقدار متوسط a ۱/۲ گرایش دارد .

رساله‌ای که درآن لایب‌نیتز دربارهٔ سلسله‌ها بحث‌کرده ، در اواخر قرن هفدهم انتشار یافت ، و جزو اولین آثاری بود که در این زمینه منتشر گردیـد . مشخصهٔ این مرحلهٔ قـدیمی سلسله‌ها آنست‌که مسألهٔ همگرائی و واگرائی آنها ، که امروز به عنوان اساس تشخیص داده شده است ، در آن روزگار معلوم نبود . مثلا ، اعتقاد عمومی بر آن بود که اگر رشته‌ای که یك سلسله را به وجود می‌آورد میرا باشد ، آن سلسله به ناچار همگرا خواهد بود . به‌طوری که می‌دانیم این امر برای سلسله‌های هندسی صادق است ، و بی‌شك منشأ این نظر خطاآمیز نیز در همین جـا بـوده است . تا انتشار اثـر ژاك برنولی دربارهٔ سلسله‌های بینهایت در ۱۷۱۳ ، دید روشنی از این مسأله در دست نبود . موقعیت مناسب را سلسله‌های هماهنك بـه‌وجود

آورد .

$$۱+۱/۲+۱/۳+۱/۴+۱/۵+۱/۶+ \ldots$$

با توجه به اینکه رشتهٔ مولد میرا است ، عموماً بر آن بودند که این سلسله باید همگرا باشد . با اینحال برنولی در کتاب خود برهانی از برادر خود ژان آورد که این سلسله به کندی ، اما مطمئناً ، واگرائی دارد .

۱۶ کتاب برنولی توجه عمومی را به ضرورت تهیهٔ ملاکی برای همگرائی جلب کرد . میرائی **جملهٔ عمومی** ، یعنی رشتهٔ مولد ، محققاً شرطی **لازم** است ، اماکافی نیست . شروط **کافی** را دالامبر و مک‌لورن (Maclaurin) ، کوشی (Cauchy) ، آبل و دیگران معین کردند . من روی این موضوع توقف نمی‌کنم ، زیرا خارج از منظور کلی من است . با این حال باید بگویم که حتی امروز نیز تشخیص واگرائی و همگرائی بعضی از سلسله‌ها مشکل است .

انواع مخصوصی از سلسله‌ها وجود دارند که در روزگار پیش بسیار مورد توجه بودند ، و در آنها میرائی جملهٔ عمومی ملاکی برای همگرائی است . اینها سلسله‌های متناوب است که نمونهٔ آن سلسلهٔ زیر است :

$$۱-۱/۲+۱/۳-۱/۴+۱/۵-۱/۶+۱/۷- \ldots$$

این سلسله به سمت لگاریتم طبیعی[1] عدد ۲ گرایش دارد و مقدار تقریبی آن ۰/۶۹۳ است . اما سلسلهٔ حاصل از قدر مطلق‌های سلسلهٔ فوق سلسلهٔ هماهنگ زیر است :

$$۱+۱/۲+۱/۳+۱/۴+۱/۵+۱/۶+۱/۷+\ldots$$

از آن جهت به این نوع از سلسله‌ها اشاره کردم که منشأ وقایعی گیج‌کننده بوده‌اند . در طول قرنهای هفدهم و هجدهم وضع عمومی نسبت به سلسله‌ها این بود که به آنها نه به چشم انواع مخصوصی از رشته‌ها، بلکه بمثابهٔ مجموع بینهایت جمله می‌نگریستند . بنابراین طبیعی بود که این «عمل جمع» را واجد خواص اعمال محدود، یعنی خاصیت تلفیقی و تبدیلی بدانند. بنابراین قبول شده بود که در این سلسله‌ها حاصل جمع بستگی به طرز قرار گرفتن جمل ندارد ، و ترتیب نوشتن جمله‌ها به دلخواه مورد قبول بود .

در ۱۸۴۸ دیریشله (Dirichlet) ثابت کرد که این امر برای سلسله‌های همگرا و با جمله‌های مثبت صحیح است . اما اگر سلسله دارای جملی منفی باشد ، دراینصورت دوحالت ممکن است اتفاق افتد : اگر سلسله همگرای مطلق باشد ،

---

۱) لگاریتم طبیعی عدد A از نمای X در معادلهٔ ذیل به‌دست می‌آید :

$$e^x = A \; ; \; x = \log A$$

که درآن e مقدار ترانساندانی است که پیش‌از این چند نوبت از آن سخن گفتیم . مقدار تقریبی آن این است :

$$e = ۲/۷۱۸۲۸$$

یعنی سلسلهٔ حاصل از قدر مطلق‌ها همگرا باشد ، دراین صورت خاصیت تلفیقی و تبدیلی صادق خواهد بود ؛ ولی اگر سلسله فقط **همگرای مشروط** باشد ، یعنی سلسلهٔ حاصل از جملات مثبت واگرا باشد ، دراینصورت این خواص صادق نخواهند بود ومی‌توان باتنظیم جمل به‌طریق مخصوص نتیجه گرفت که مجموع می‌تواند برابر هر عدد مورد نظری باشد .

بنابراین جای تعجب نیست که قبل از زمان دیریشله ، با کاربرد سلسله‌ها ، بخصوص در مورد آنهائی که امروز نام **همگرای مشروط** را به‌خودگرفته‌اند ، نتایج عجیبی به‌دست آمده باشد . یك مثال تاریخی سلسلهٔ هماهنگ است. فرض کنید که مجموع جمله‌های فرد این سلسله را با x ومجموع جمله‌های زوج آنرا با y نمایش داده باشیم . در این صورت می‌توان نوشت :

$$y = ۱/۲+۱/۴+۱/۶+\cdots = ۱/۲(۱+۱/۲+۱/۳+ ۱/۴+۱/۵+\cdots)$$

که از آن با بی‌توجهی عبارت زیر نتیجه می‌شود :

$$y = ۱/۲(x+y) \text{ یا } ۱/۲\,x = ۱/۲\,y \text{ یا } x-y = ۰$$

و به این نتیجه اشتباه‌آمیز می‌رسیم که سلسلهٔ متناوب هماهنگ به سمت صفر می‌گراید ، درصورتی که واقعیت آنست که حد این سلسله لگاریتم طبیعی عدد ۲ است .

گرچه امروز این بحث‌ها بی‌معنی‌اند ، اما نه تنها در قرن هیجدهم بلکه در اوایل قرن نوزدهم نیز بسیار متداول بودند . آبل در ۱۸۲۸ در نامه‌ای که به استاد سابق خود ،

هلمبو (Holmboe) نوشته ،چنین شکایت کرده است :

« سلسله‌های واگرا اختراع شیطانند ، و شرم‌آور است که آنها را مبنای هرگونه برهانی قرار دهیم . با بکار بردن آنها می‌توان هر نتیجه دلخواهی‌را بدست‌آورد ، و بخاطر همین‌است که‌این‌سلسله‌ها این‌همه سفسطه و‌این‌همه‌معما بوجود‌آورده‌اند... من‌با این موضوع توجه فراوان‌کرده‌ام ، و باین نتیجه رسیده‌ام که باستثنای سلسلهٔ هندسی ، در تمام ریاضیات ، حتی یك سلسله نامحدود وجود ندارد‌که مجموع آن بطوردقیق معین شده باشد. بعبارت دیگر ، چیزهائی که در ریاضیات اهمیت بیشتری دارند آنهائی هستند‌که اساس و پایه‌شان ضعیف‌تر است . و با کمال تعجب دیده می‌شود که اغلب این مطالب صحیح است . من کوشش می‌کنم تا دلیلی بر این امر بیابم ؛ این مسأله واقعاً جالب توجه است . »

۱۷ مکتوب آبل روح تازه‌ای می‌دمید . عصر‌جدیدی‌آغاز شده‌بود، که عصرانتقادی ریاضیات است. وضع ساده وکودکانه‌ای که ازشروع دوران رونسانس تسلط داشت به‌پایان می‌رسید . فتوحات بزرگی در تمام زمینه‌های علوم ریاضی به دست آمده بود؛ اینك‌لازم‌بود که‌این نتایج دردستگاههائی‌محکم‌ومستقرشوند، وبالاترازهمه لازم بود که پایه‌هائی، که این دستگاهها می‌بایست برآنها استوار شوند ، با دقت مورد بررسی قرار گیرند .

داستان فرایندهای بینهایت از زمان‌کوشی و آبل به بعد، همان‌سرگذشت آنالیز‌جدید ونظریهٔ‌توابع است که موردگفتگوی ما نیست . اما این معرفی مختصر از تاریخ اولیهٔ فرایندهای بینهایت کافی است تا نشان دهد که نظریهٔ کانتور دربارهٔ اعداد

$$\pi/4 = \text{حدکسر}: 1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\cfrac{11^2}{2+\cdots}}}}}}$$

عدد e

$$e = \text{حد رشته}: (1\tfrac{1}{2})^2, (1\tfrac{1}{3})^3, (1\tfrac{1}{4})^4, (1\tfrac{1}{5})^5 \ldots$$

$$e = \text{حد سلسلة}: 1+\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{3!}+\tfrac{1}{4!}+\tfrac{1}{5!}+\tfrac{1}{6!}+\ldots$$

e = حد کسر :

$$e = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}}}}}}}$$

گنگ فقط تـکمیل تحول تـاریخی طولانی بود کـه با بحران فیثاغورسیان شروع شد و گاهی به علت پیدا شدن فترتی موقتی در پیشرفت همهٔ اندیشه‌ها متوقف ماند ، و در دورهٔ **رونسانس** از سر گرفته شد .

اما در مورد آنالیز ، که من درفصل گذشته از آن گفتگو کردم ، نوعی ایمـان مکتوم **به ماهیت مطلق نا محدود** ، محرك و راهنما در طول این دوران طولانـی سر گشتگی بود . بیان عالی این ایمـان را در صحنهٔ آخر ، یعنی در نظریه‌های پیوستگی « Continuum » می‌توان یافت که من دربارهٔ آن سخن خواهم گفت .

عدد π

$$\pi/۲ = \text{حد حاصلضرب}: \frac{۲\times۲}{۱\times۳}\times\frac{۴\times۴}{۳\times۵}\times\frac{۶\times۶}{۵\times۷}\times\frac{۸\times۸}{۷\times۹}\times\frac{۱۰\times۱۰}{۹\times۱۱}\times\ldots$$

$$\pi/۴ = \text{حد سلسله}: ۱ - ۱/۳ + ۱/۵ - ۱/۷ + ۱/۹ - ۱/۱۱ + ۱/۱۳ - ۱/۱۵ + ۱/۱۷ - ۱/۱۹ + ۱/۲۱ \ldots$$

$$\pi/۲ = \text{حد سلسلهٔ}: ۱ + ۱/۳(۱/۲) + ۱/۵\left(\frac{۱\times۳}{۲\times۴}\right) + ۱/۷\left(\frac{۱\times۳\times۵}{۲\times۴\times۶}\right) + ۱/۹\left(\frac{۱\times۳\times۵\times۷}{۲\times۴\times۶\times۸}\right) + \ldots$$

عمرخیام

من ظاهر نیستی و هستی دانم   من باطن هر فراز و پستی دانم
بااینهمه ازدانش خود شرمم باد   گر مرتبه‌ای ورای مستی دانم

***

روزی‌که‌گذشت هیچ از اویاد مکن   فردا که نیامده‌ست فریاد مکن
برنامده و گذشته بنیاد مکن   حالی‌خوش باش وعمر برباد مکن

۹ پر کردن شکافها

۱ قبول صحت فرایندهای بینهایت ما را ازتنگنای قلمرو گویـا بیرون می‌کشد و وسیله‌ای بـرای حمله بـه مسائلی می‌دهد که در مقابل آنها ارابه حساب به‌گل می‌نشیند. بنابر‌این طبیعی است سؤال شودکه‌آیا اکنون برای‌حل مسألهٔ قدیمی تهیهٔ یك تناظر کامل بین نقاط یك خط و قلمرو اعداد در وضع بهتری هستیم یا نه.

می‌دانیم که حساب گویا قادر به حل این مسأله نبود. اما اینکه حساب عمومی، یعنی حساب اعداد حقیقی، از این نظر بهتر عمل می‌کند یا نه مسأله‌ای است که هنوز مجال بحث در آن باقی است: آیا نقاط خط که از نمایش با اعداد گویا سرپیچی می‌کنند می‌توانند تحت فرمولی حسابی درآیند؟ مسألهٔ قدیمی که باعث بحران اصلی گردید وسبب شد که نسبت به پایه‌های حساب تجدیدنظر بعمل‌آید، اکنون به شکل جدید و عمومی‌تر خودنمائی می‌کند:

آیا «هر» عدد حقیقی را می‌توان به وسیلهٔ نقطه‌ای بر روی یك خط نمایش داد؟ آیا برای «هر نقطه» از یك خط می‌توان عددی معین کرد؟

اگرجواب مثبت باشد، دراین صورت یك تطابق متعاکس وکامل بین قلمرو اعداد حقیقی از یك طرف و مجموعهٔ نقاط از طرف دیگر وجود خواهد داشت. اگر چنین تطابقی وجود داشته باشد، با اطمینان کامل می‌توان از زبان الهامی و ذهنی هندسه در صورت‌بندی کردن مسائل حساب استفاده‌کرد. اگر چنین تطابقی وجود داشته باشد، می‌توان تمام دقت و قدرت آنالیز حسابی را در مسائل هندسی به‌کار برد و این مسائل را به عدد و مقدار تبدیل نمود. چنانکه دیده می‌شود سؤالی که در بالا طرح شد بسیار اساسی است، و اساسی‌تر از آن اینست که چگونه به آن سؤال جواب داده شود.

۴ برای فهمیدن جوابی که در روزگار جدید به این سؤال داده شده است، باید توضیح جداگانه‌ای در بارهٔ ماهیت

دو مجموعه ، یعنی قلمرو اعداد حقیقی و نقاط یك خط ، بدهیم.

در بارهٔ قلمرو اعداد حقیقی می‌دانیم که :

اول . ترتیب بسیار منظمی دارد : می‌توان گفت که ازهر دو عدد حقیقی a و b کدام‌یك بزرگتر است . بعلاوه ، اگر a بزرگتر از b و b بزرگتر از c باشد ، در این صورت a بزرگتر از c خواهد بود . خلاصه با یك عمل ذهنی می‌توان هر مجموعه نامحدودی از چنین اعداد را نسبت به بزرگیشان مرتب کرد . و نیز می‌توان دریافت که **همهٔ** اعداد حقیقی بهمین ترتیب منظم شده‌اند . این است منظور ما از بیان جمله که اعداد حقیقی **ترتیب بسیار منظمی دارد** .

دوم . این قلمرو عضو اول و عضو آخری ندارد : هرچه عدد مثبت بزرگ باشد باز عددی بزرگتر از آن وجود دارد ؛ و هر چه عدد منفی کوچك باشد باز عددی کوچکتر از آن خواهیم داشت . و ما این مطلب را چنین بیان می‌کنیم که قلمرو اعداد حقیقی ازمنهای بینهایت تا بعلاوه بینهایت گسترده شده است .

سوم . درمیان اعداد حقیقی تمام اعداد گویا را می‌توان یافت . **قلمرو گویا** فرعی از قلمرو وسیع‌تر عدد حقیقی است .

چهارم . مجموعهٔ اعداد حقیقی **در همه جا چگال** است . بین هر دو عدد حقیقی ، هرچندکه این فاصله کوچك باشد ، باز بینهایت عدد حقیقی دیگر می‌توان جا داد .

آیا از این مطلب چنین بر نمی‌آید که قلمرو اعداد حقیقی شامل همهٔ اعداد هست ؟ اگر تجربهٔ ما درباره اعداد گویا نبود، برای تأیید بدون تأمل این مسأله دچار وسوسه می‌شدیم ؛ زیرا اجازه بدهید خاطر نشان کنم که آنچه را تا بحال دربارهٔ قلمرو حقیقی گفته شده است عیناً می‌توان برای اعداد گویا به‌کار برد. علی رغم ساختمان فشردهٔ اعداد گویا باز این قلمرو « پر از شکاف» است. درحقیقت چه اطمینانی می‌توان داشت که گنگ‌ها و فرازنده‌ها تمام شکافها را پر کرده باشند ؟ ـ شاید زمان کشف فرایندهای جدیدی چندان دور نباشد ، و این فرایندها بتوانند، با وجود آوردن موجودات ریاضی جدید ، شکافهای تازه‌ای را در قلمرو اعداد حقیقی نشان دهند .

۳ برای جواب گفتن به این سؤال ، کانتور اختلاف اساسی بین قلمرو گویا و حقیقی را به خوبی وارسی کرد .

مجموعه اعداد گویا ، با آنکه خوب منظم شده وفشرده، **ناقص** است . از آن جهت ناقص است که نسبت به فرایندهای بینهایت **بسته نیست**. از آن جهت نسبت به‌فرایندهای بینهایت بسته نیست که ، همانطور که خود اعداد گنگ نشان می‌دهند ، بینهایت رشتهٔ گویا می‌توان یافت که ، درعین همگرائی ، حد آنها اعداد گویا نیست . بطور خلاصه ، مجموعهٔ اعداد گویا ناقص است ، زیرا شامل تمام **مقادیر حد** خود نیست .

اما مجموعهٔ اعداد حقیقی نه تنها بـه خوبی منظم شده و فشرده است ، بلکه **کامل** نیز می‌باشد . از آن جهت کامل است که برای **تمام** فرایندهای **بینهایت بسته است** . یك رشتهٔ

نامحدود ازاعداد حقیقی ، اگر همگرا باشد ، یك عدد حقیقی را نشان می‌دهد ؛ در واقع اگر چنین رشتهٔ بینهایتی خود گویا نباشد ، می‌توان آن را با رشته‌ای گویا که به سمت همان حد گرایش می‌یابد عوض کرد ، و این حد طبق تعریف عددیست حقیقی. مجموعهٔ اعدادحقیقی شامل تمام **مقادیر حد** خود بوده و به همین دلیل **کامل** است .

اینك ، همانطور که تحلیل قلمرو اعداد گویا نشان می‌دهد ، هر مجموعه فشرده‌ای کامل نیست ؛ بلکه طبق برهان کانتور **هر مجموعه کاملی فشرده است** .کانتور مجموعه‌ای را که هم ترتیب بسیار منظمی داشته باشد و هم کامل باشد ، **پیوستهٔ حسابی** (arithmatic continuum) نام گذارده است . از طرف دیگر ، قلمرو اعداد گویا که ناقص است ، یك پیوسته را تشکیل نمی‌دهد .

۴ بنا براین آنچه که قلمرو اعداد حقیقی را بطور کامل وصف می‌کند آنست که این قلمرو یك پیوسته است یعنی دارای پیوستگی به مفهوم کانتور است . اینك ، همانطور که دیدیم ، کلمات محیط پیوسته و پیوسته و پیوستگی ، در علوم حقیقی ، از همان ابتدای امر به کار می‌رفتند . از زمانی که به خاطر نمی‌آید ، پیوسته (continuous) به مفهوم تامعین چیزی که انقطاع ناپذیر است ، چیزی که در کوچکترین جزء خود مانند تمام آن دارای ماهیتی‌یکسان است ،چیزی که **به‌تنهائی متصل** است و خلاصه چیزی که **پیوسته** ا است ، یعنی برای فضا و زمان و حرکت به کار می‌رفت . این یکی از مفاهیم درك

شدهٔ مبهم و غیر دقیق است که علم حضوری مفهوم آن را ادراك می‌کند ، و همهٔ‌کوشش‌هائی که بـرای تعیین تعریفی دقیق بعمل آمده به جائی نرسیده است .

نمونهٔ کامل تصوراتی که دارای چنین خصوصیات است ، خط و بخصوص خط مستقیم است که درذهن ماواجد این پیوستگی کامل است . بنابرایـن اگر بخواهیم کـه یك تطابق کامل و متعاکس بین خط و قلمرو اعداد گویـا موجود باشـد باید اطمینان حاصل کنیم که تضاد مشهودی بین علم حضوری پیوستگی که به خط نسبت دادیم ، و پیوستگی دقیق علمی که طبق تعریف کانتور بـرای اعداد حقیقی تلخیص شـده است ، وجود نداشته باشد .

۵ اگر بدون توسل به یك فرمول‌بندی دقیق تصور غریزی خود ازپیوستگی ، بخواهم بطور مشخص منظورم را از پیوسته بیان کنم مطلب چنین خواهد بود :

« زمان جوهرهمه چیزاست . مادرطبیعت جهش ندارد، زیرا پدر زمان نمی‌تواند بجهد . ادراك زمان بریده و نا ـ پیوسته امکان ندارد ، و به همین دلیل است که در طبیعت هیچ‌ـ چیز خودبه‌خود وجود ندارد . زمان جاریست و در جریان خود همه چیز را به شکل قابل ادراك با خود می‌برد . »

و بنابـراین وقتی می‌کوشیم پیوستگی پدیده‌ای را شرح دهیم ، همیشه ، حتی ناآگاهانه هم‌که باشد ، که پیوستگی زمان را بـه کمك می‌طلبیم . در نظر ما خط اولین نمونهٔ کامل تمام اشیاء پیوسته است زیرا آنرا به عنوان چیزی که از عبورپیوسته

به وجود آمده است ادراك می‌کنیم ، و برای ذهن ما خط چیزی جز جلوه‌ای از نمایش مادی **جریان زمان** ، یا زمان منجمد شده ، نمی‌تواند باشد .

برای پدیده‌های دیگر نیز جریان به همین منوال است. مسأله خود به خودی برای مغز آدمی قابل قبول نیست و ازآن می‌گریزد ؛ به همین دلیل است که تئوریهای علمی ما با چنین ناامیدی به‌تحول وتکامل توسل می‌جویند. چه درکیهان‌شناسی ، چه در تئوری حیات ، و چه در فرضیه‌های جامعه‌شناسی ، همه جا این نفرت و گریز حادثهٔ ناگهانی به چشم می‌خورد . بهر قیمت که شده ، نمی‌خواهیم تصادف و انقلاب و تولد خودبه‌خود و کشف ناگهانی را به عنوان عوامل مسلط درتاریخ گیتی ونژاد بپذیریم .

و درست به خاطر اینکه تحول وتکامل تصویر ملایمی‌از گذشته به ما می‌دهد ، اصل علیت ، با به هم بستن تمام پدیده‌ها در یك زنجیر پیوسته ، آیندهٔ ما را در مقابل تمام اضطرابات ناشی از خودبه‌خودی حفظ می‌کند و ما را از وحشت بی‌نظمی‌و هرج و مرج مصون می‌دارد . تصورات مبهمی که از پیوستگی و علیت داریم ، چنان با یکدیگر پیوسته‌اند که هر یك دائماً به کمك دیگری می‌شتابد . و جای تعجب نیست : اعتقاد ما در پیوستگی عالم و ایمان ما به ارتباط علی بین وقایع آن ، جز دو جنبه از یك علم حضوری ابتدائی کـه آنرا **زمان** می‌نامیم نیستند . و بنابراین از یـکطرف این اعتقاد وجود دارد کـه **طبیعت نمی‌جهد** (Natura non facit saltus) و از طرف دیگر این توهم پیش می‌آید که : **به دنبال آن** ،

بنابراین به‌علت آن(post hoc, ergo propterhoc)

۶ تعارض میان علم حضوری هندسی ، که ادراك فیزیکی از آن نـاشی می‌شود ، و منطق علم حساب از همین جا ناشی می‌شود . هماهنگی گیتی فقط یك شکل موسیقی را برای خود می‌شناسد که شکل لگاتو[1] (legato) است ؛ در حالی کـه سمفونی‌اعداد فقط با نقطهٔ مقابل آن‌یعنی ستاکاتو[1] (staccato) آشنـایی دارد . تمام کوششی که برای رفع این اختلاف انجام می‌شود براین امید استوار است که یك ستاکاتوی سریع ممکن است برای حواس ما بمثابهٔ یك لگاتـو جلوه‌گر شود . اما عقل ما همیشه چنین کوشش‌هائی را خدعه و نیرنگ می‌داند و این نظریه‌ها را بمثابهٔ توهین و به منزلهٔ متافیزیکی تلقی می‌کند که می‌خواهـد مفهومی را از طریق تبدیل آن بـه مفهوم مخالفش توضیح دهد ، و به همین جهت چنین استدلالی را نمی‌پذیرد .

اما این اعتراض‌ها بیهوده است . برای پر کردن فاصلهٔ بین پیوستگی تصور ما از زمان وناپیوستگی موجود درساختمان عدد ، انسان باید باردیگر آن نیروی فکری خود را «که قادر است بینهایت بارتکرار عمل معینی راکه اتفاق آن برای یکبار ممکن است ادراك کند» به‌کمك بطلبد . نقش تاریخی بینهایت

---

۱) ستاکاتو اصطلاحی است در موسیقی برای نشان دادن نوتی که کوتاه و منفصل از نوت پس از آن اجرا می‌شود ، و معنی کلمه‌که ایتالیائی است،منفصل وجدا است ؛ لگاتو عکس ستاکاتو و معنی کلمه متصل و به هم پیوسته است .

چنین بود ؛ و به این دلیل است که در طول قرنها مسألۀ محیط پیوسته و بینهایت تنها دو شاخ یك قیاس اقرن بودند . این جریان طولانی توافق اینك به نظریۀ کانتور منجر شده است که در آن هر عدد به عنوان **هدف** بینهایت جهش متوالی تصور می‌شود و محیط پیوسته نه تنها تمام **میان منزلهای** ممکن ، بلکه همۀ هدف‌های ممکن را نیزشامل می‌شود . این یك نظریۀ ستاکاتویی **بسیار عالی** است ؛ و با اینحال ازحکم‌استبدادی زمان‌آزاد نشده است. تنها با نظرکردن به جریان مدت همچون بینهایت ضربان‌های پی در پی که با سرعت جنون‌آمیز اجرا می‌شود ، خود را با این حکم استبدادی تطبیق کرده است .

عقل در مقابل این استبداد سرکشی می‌کند ، و خواهان نظریۀ اعدادی است که از تأثیرات خارجی هندسه یا مکانیك وارسته باشد ؛ به همین جهت تاریخ شاهد پیشامد دیگری شد : این پیشامد در نظریۀ اعداد گنگ جدیدی شدکه به نام‌سازندۀ آن ریچارد ددکیند شناخته شده است .

۷ روح نظریۀ ددکیند را در قسمت زیر که از مقالۀ « پیوستگی و اعداد گنگ » او گرفته شده است می‌توان یافت . این مقاله در ۱۸۷۲ و دهسال قبل از مقالات کانتور در بارۀ همین موضوع انتشار یافت :

« خط مستقیم از نظر نقاط مستقل بینهایت بار غنی‌تر از قلمرو اعداد گویا از نظر تعداد اعداد مستقل است ....

« بنا براین اگر کوشش کنیم تا از نظر حسابی پدیده‌هائی را که حاکم برخط مستقیم است تعقیب نمائیم ، خواهیم دیدکه قلمرو اعدادگویا کفایت نمی‌کند . اگر بخواهیم قلمرو عدد دارای همان کمال ، یا بهتر

بگوئیم همان پیوستگی خط مستقیم باشد ، مطلقاً لازم خواهد بود که این بزار با بوجود آمدن اعدادی جدید اصلاح شود ...

« مقایسهٔ قلمرو اعداد گویا باخط مستقیم به قبول وجود شکافها و ناتمامی یا ناپیوستگی درآن منجر شده است ، درصورتی‌که خط مستقیم را کامل و بدون شکاف یا پیوسته تلقی می‌کنیم .آیا این پیوستگی درچیست؟ همه چیز بستگی به جواب این سؤال دارد و فقط از آن راه خواهیم توانست پایه‌ای علمی برای تحقیق درهمهٔ زمینه‌های پیوسته دردست داشته باشیم . با اشارات مبهم در بارهٔ ارتباط قطع نشده‌در کوچکترین جزء ، مسلماً هیچ چیز عاید ما نمی‌شود ؛ مسأله اینست که باید مشخصه‌ای دقیق از پیوستگی ، که بتواند بمثابهٔ اساسی برای استنتاج صحیح باشد ، تعیین گردد . مدتها من در این باره بیهوده اندیشیدم ، اما بالاخره آنچه را که می‌جستم یافتم . شاید ارزیابی اشخاص گوناگون در بارهٔ این کشف مختلف‌باشد؛ ممکن است اکثریت اساس‌آنرا بسیار پیش پاافتاده برآورد کنند . کشف مزبوربدین شرح است . درقسمت قبل توجه ما به این واقعیت بود که هر نقطه در خط مستقیم آنرا بدان‌سان به دو قسمت می‌کندکه هر نقطه از یك قسمت در طرف چپ هر نقطه از قسمت دیگر قرار می‌گیرد . من جوهر پیوستگی را در عکس این مسأله یعنی در اصل زیر می‌بینیم :

« اگر تمام نقاط یك خط مستقیم در دوطبقه قرارگیرند ، بطوری که هر نقطه از طبقهٔ اول در طرف چپ هر نطقه از طبقه دوم قرار داشته باشد ، در اینصورت فقط و فقط یك نقطه وجود دارد که این تقسیم تمام نقاط را به دو طبقه و این بریدن خط مستقیم را بوجود می‌آورد .

« هما نطورکه قبلا گفته شد ، من تصور می‌کنم‌که اگر چنان فرض کنم که هرکس بلافاصله حقیقت این بیان را مسلم خواهد پنداشت ، دچار اشتباه نشده باشم ؛ بعلاوه ، هرگاه اکثریت خوانندگان من بدانند که با

این اشارهٔ پیش‌پا افتاده راز پیوستگی مکشوف می‌گردد ، دچار تردید خواهند شد . در این باره باید بگویم که من از این خوشحال هستم که هر کس اصل فوق را چنان روشن و آشکار و بنابراین با تصورات خود در بارهٔ یك خط هماهنگ ببیند ؛ زیرا به‌هیچوجه توانائی آن را ندارم که دلیلی برای صحت آن اقامه کنم ، و هیچ کس دیگر نیز دارای چنین قدرتی نیست . قبول این خاصیت در بارهٔ خط چیزی جز یك امر بدیهی نیست که بوسیلهٔ آن پیوستگی آن خط را توصیف می‌کنیم . فرض اینکه فضا وجودی حقیقی است مستلزم پیوستگی‌آن نخواهد بود ؛ هرگاه آن را ناپیوسته فرض کنیم تغییری در اغلب خواص آن داده نخواهد شد . و اگر ما حقیقتاً می‌دانستیم که فضا ناپیوسطه است ، هنگام لزوم هیچ چیزمانع ما نمی‌شد تا دراندیشهٔ خودقسمت‌های خالی‌آنرا پرکرده‌آنرا به صورت پیوسته درآوریم ؛ این پر کردن شامل ایجاد نقاط منفرد جدیدی می‌شد و می‌بایست برطبق اصل بالا صورت می‌گرفت . »

۸ اجازه بدهیدکه اصل دده‌کیند را در عمل مورد بررسی قرار دهیم . دده‌کند نیز مانند کانتور نقطهٔ شروع بحث خود قلمرو اعداد گویا را انتخاب‌کرده است . با اینحال ، وی به جای یکی دانستن عدد حقیقی بارشتهٔ همگرائی ازاعداد گویا ، آن را زائیدهٔ حاصل از قدرت فکر در طبقه‌بندی اعداد گویا دانسته است . وی این طرح طبقه‌بندی مخصوص را **شنیت** (schnitt) نام گذارده است ، و ایـن اصطلاح به اشکال مختلف ترجمه شده است ، مانند **برش دده‌کیند** ، **تقسیم دده‌کیند**، **شکاف‌دده‌کیند**، **قطع دده‌کیند** و **حدفاصل دده‌کیند** . من آخری را انتخاب می‌کنم .

این حد فاصل درست‌المثنای مفهومی است که ددکیند برای تعریف پیوستگی یك خط به‌کار برده است . درست همان طور که هر نقطه بر روی خط آنرا به دو قسمت مجاور تقسیم می‌کند که هیچ یك دیگری را نمی‌پوشاند ، همینطور نیز عدد حقیقی وسیله‌ای برای تقسیم تمام اعداد گویا به دو طبقه بوجود می‌آورد که هیچ جزء مشترکی با یکدیگر ندارند ، اما این دو طبقه با هم تمام قلمرو اعداد گویا را فرا می‌گیرند .

بالعکس ، هرمعادله ، هرطرح ازطبقه‌بندی ، هرفرایندی که بتواند چنین شکافتی (split) را در قلمرو اعداد حقیقی به وجود آورد ، **به همین دلیل** به وسیلهٔ یك عدد مشخص می‌شود و طبق تعریف عددیست حقیقی و عنصریست از یك قلمرو جدید .

اعداد گویا جزئی از این قلمرو وسیعند زیرا هر یك را بـه خودی خود می‌توان بـه منزلهٔ چنین طرحی از طبقه‌بندی دانست . در واقع نسبت به هر عدد گویـای مفروضی ، مثلا ۲ ، تمام اعداد گویا را می‌توان به دو طبقه تقسیم کرد . آنها که از ۲ کوچکتر و یا مساوی آنند در **طبقه پائین** و آنها کـه بزرگتراز ۲ اند در **طبقهٔ بالا** قرار می‌گیرند . دو طبقه هیچ عنصر مشترکی بایکدیگرندارند و رویهم ، تمام مجموعهٔ اعداد گویا را فرا می‌گیرند . عدد گویای ۲ را می‌توان به عنوان **یك حد فاصل** تلقی کرد و دراینصورت عددیست حقیقی .

اما واضح است که توانائی این اصل‌پردامنه را نمی‌توان به همین حد فاصل‌های جزئی محدودکرد . مثلا هیچ چیزنمی‌ـ تواند ما را از این باز دارد که تمام اعدادگویا را به اعدادی

که مربع آنها کمتر یا مساوی عدد گویای معینی ، مثلا ۲ ، و آنها که مجذورشان بزرگتر از ۲ است تقسیم کنیم ، هیچ یك از اعضای این دو طبقه درطبقهٔ دیگر قرار نمی‌گیرد ، همانطور که این امر در مثال قبل نیز صادق بود ؛ و باز مانند قبل ، وقتی این دو طبقه را با هم در نظر بگیریم شامل تمام اعداد گویا خواهند شد . این حد فاصل عددی حقیقی را تعریف می‌کند که آنرا با دوست قدیمی خود $\sqrt{2}$ یکی می‌دانیم .

از طرف دیگر ، وقتی اعدادگویا وگنگ را بتوان باحد فاصل‌ها نشان داد ، انتخاب گویاها برای پایه بی‌نتیجه نخواهد بود ، زیرا اختلافی اساسی بین حد فاصل‌های گویا و گنگ وجود دارد . حدفاصل گویا خود جزئی ازطبقه پائین‌تر است: این بدان می‌ماند که یك **سیاستمدار** در حزب خود انشعاب به وجود آورده وبه جناح چپ ملحق شده باشد . اما حدفاصل‌های گنگ به‌طورکامل خارج از طبقه‌اند : این امر شبیه آن است که **اخراج** از حزب آن را به دودسته قسمت‌کرده باشد، و آنها که خارج شده‌اند نه جزئی از جناح چپ خواهند بود و نه جزئی ازجناح راست . وبهمین ترتیب دراینجا عددگنگی که باعث تقسیم شده است نه‌به طبقهٔ پائین تعلق دارد و نه‌به‌طبقهٔ بالا. به عبارت دیگر: درحالت‌گویا طبقهٔ پائین بیشترین افراد را دارد و طبقهٔ‌بالا نیزچیزکمتری ندارد ؛ درحالت عددگنگ، طبقهٔ پائین دارای بیشترین فرد نیست ، و طبقهٔ بالا نیز فرد کمتری نخواهد داشت .

طبق‌نظریهٔ ده‌کیند این تنها وجهی است‌که دو نوع عدد را از یکدیگر متمایز می‌کند : مشخصهٔ عدد گویا اینست که

متعلق به یك طبقه است، و مشخصهٔ عدد گنگ آنست که **به هیچ یك از طبقات تعلق ندارد**.

۹ برای اثبات اینکه حدفاصل‌های ددکیند اعداد **اصیل** هستند باید نشان داد که جوابگوی تمام احکام اصل دوام می‌باشند. آنچه که در قسمت قبل گفتم ثابت می‌کند که حکم اول در اینجا صادق است. اعتبار احکام دیگر را می‌توان به‌سادگی و با دقت کامل به اثبات رساند. ملاك رتبه‌ای؛ تعریف اعمال حسابی؛ اثبات خواص تلفیقی و تبدیلی و توزیعی ایـن اعمال همه‌المثنای واقعی قضایای متناظر در نظریهٔ کانتور می‌باشند و من خواننده را با شرح جزئیات ناراحت نمی‌کنم.

قضیهٔ اساسی در نظریهٔ کانتور - یعنی این امر که اعداد حقیقی نسبت به‌فرایندهای بینهایت بسته‌اند - نیزدارای المثنائی در نظریهٔ ددکیند است: با تعریف قلمرو اعداد حقیقی، طبیعی است که باز سؤال شود که آیا کاربرد بعدی این اصل باردیگر به‌توسعهٔ این قلمرو منجر نخواهد شد؟ به عبارت دیگر آیا اجازه نخواهد داد تا حدفاصل دیگری کـه اعداد **حقیقی** را به دو طبقه قسمت کند به وجود آید. آیا چنین حد فاصلی می‌تواند کمیت جدیدی به وجود آورد که در میان اعداد حقیقی یافت نشود؟ جواب سئوال منفی است؛ هر حدفاصلی از این نوع را می‌توان با عمل حدفاصل گیری در قلمرو اعداد گویا واردکرد. مجموعهٔ تمام این حد فاصل‌های قلمرو گویا **بسته** است.

۱۰ هم‌ارزی کامل دو نظریهٔ محیط پیوسته حسابی به‌وسیلهٔ

خود نویسندگان تشخیص داده شد و امروز رقابت این دو نظریه (اگر اصولا چنین رقابتی وجود داشته است) فقط واقعه‌ای تاریخی به حساب می‌آید . با هر حدفاصل در قلمرو گویا مقدار حدی یك رشته بینهایت متناظر است ؛ و بالعکس هر مقدار حد از یك رشتهٔ بینهایت را به عنوان معرف یك حد فاصل در قلمرو گویا می‌توان به‌کار برد . تمام حد فاصل‌های قابل درك ازیك طرف وتمام مقادیرحدی رشته‌های گویا ازطرف دیگرمتماثل‌اند و درست دو بیان از یك مجموعه‌ای هستند که محیط پیوستهٔ حسابی را به‌وجود می‌آورد .

این امر از نقطه‌نظرمتافیزیکی درواقع گیج‌کننده است. هما نطور که قبلا بیان داشتم ، نظریهٔ کانتور تکامل یك فرایند تاریخی طولانی بوده است ؛ حدفاصل ددکیند تصوری جسورانه و اساسی است . نظریهٔ کانتور فرایند بینهایت را برای به وجود آوردن قلمرو عدد به‌کار می‌برد ، درصورتی که در تعریف عدد حقیقی ددکیند هیچ وقت از کلمهٔ **بینهایت** به صورت صریح و یاکلماتی‌مانند **میل** ، **نموخارج ازاندازه** ، **همگرائی** ، **حد** ، **کمتر از هر مقدار قابل تعیین** ، و کلماتی دیگر استفاده نکرده است . و نیز نظریهٔ کانتور کاملا **دینامیك** است : مقدار حد به شکلی به وجودآمده است که شباهت کامل باحرکت یك نقطه‌که به طرف یك مرکز جذب می‌شود دارد . نظریه ددکیند اساساً **استاتیك** است ، و از هیچ اصل دیگری بجز یك نیروی فکری برای طبقه‌بندی افراد در زمینهٔ طرحی مشخص و معین استفاده نشده است . بنابراین در نظراول چنان تصور می‌شود که در اینجا بالاخره به آزاد کردن کامل تصور

عدد از یوغ زمان ذهنی شده‌ایم که وابستگی طولانی با هندسه و مکانیك به گردن عدد گذارده بود .

و با اینحال هم ارزی دو نظریه ، کـه تا این حد نقطهٔ عزیمت آنها متفاوت وشیوه‌های کارشان بایکدیگرمغایرت دارد ، نشان دهندهٔ آنست که با اصل دده کیند، آن‌طور که در اول کار به نظر می‌رسد ، مسائل زیاد هم عاقبت خوشی ندارنـد . و در واقع تحلیل بیشتر روش دده کیند معلوم می‌کند که گرچه در آن به‌طورصریح ازبینهایت استفاده نشده است ولی به صورت ضمنی این مفهوم به‌کاررفته است . اصل ایجاد حدفاصل، اگردربارهٔ دسته‌ای محدود از اعداد گویا به‌کار رود ، به نتایج جزئی و بی‌اهمیتی منجر می‌شود که بیهودگی خود راکاملا نشان خواهد داد . بعلاوه هر کاربرد عملی ایـن اصل برای تعیین یك عدد گنگ استفاده از دستگاهی شبیه به رشته بینهایت کانتور را ایجاب می‌نماید .

۱۱ همین امر در مورد ارتباط تئوری با علم حضوری زمان نیز صادق است . اصل موضوع دده‌کیند «اگر تمام نقاط یك خط مستقیم به دو طبقه تقسیم شوند ، بطوریکه هر نقطه از طبقهٔ اول در طرف چپ هر نقطه از طبقه دوم قرار گیرد ، در این صورت فقط و فقط یك نقطه وجود خواهد داشت که این تقسیم تمام نقاط به دو طبقه و این تقسیم خط بـه دو قسمت را عملی سازد » ـ این اصل بدیهی صورت بیان ماهرانهٔ دیگری از آن خاصیت اساسی است که ما به زمان نسبت می‌دهیم . علم حضوری به ما امکان می‌دهد که از راه فکر **تمام زمان** را به

دو طبقهٔ **گذشته** و **آینده** تقسیم کنیم که هر طبقه از طبقهٔ دیگر بیرون می‌ماند و با این‌حال به اتفاق یکدیگر تمام زمان **و ابدیت** را مشخص می‌کنند. **زمان حال** حد فاصلی است که همهٔ گذشته را از همهٔ آینده جدا می‌سازد ؛ هر لحظهٔ از گذشته در وقتی **حال** بوده است ، و هر آن از آینده بـه زودی **حال** خواهد شد ، و بدین‌ترتیب هر آن به‌خودی خود می‌تواند بمثابهٔ یك حدفاصل عمل کند . یقین است که ما ، از گذشته تنها لحظه‌های متفرق آن را می‌شناسیم ؛ اما از راه فکر شکافها را پر می‌کنیم ؛ استنباط ما چنین است که بین هر دو لحظه ــ هر قدر هم که در مغزما این دو به یکدیگر نزدیك باشند ــ لحظه‌های دیگری هم وجود داشته ، و ما همین فشردگی را برای آینده نیز مسلم می‌دانیم . مقصود ما از جریان زمان نیز همین است .

بعلاوه ، با آنکه معمایی به‌نظر می‌رسد ، با معنایی کـه ددکیند برای کلمهٔ حال به‌کار برده است، **حال حقیقتاً گنگ است** . زیرا وقتی بمنزلهٔ حد فاصل عمل می‌کند نـه جزئی از گذشته است و نه قسمتی از آینده . در حقیقت ، برای حسابی که پایه‌اش زمان محض است (اگر چنین حسابی ممکن باشد) عدد گنگ است که باید به عنوان امری بدیهی قبول شود ، و تمام‌کوشش‌های ناراحت‌کننده منطق ما باید متوجه اثبات وجود اعداد گویا باشد .

بالاخره ، هنگامی که دده‌کنید می‌گوید «اگر مسلم می‌دانستیم‌کـه فضا ناپیوسته است ، هیچ چیز مانع آن نمی‌شد کـه اگر لازم شود شکافهای آنرا درفکرخود پر کرده بدین‌ترتیب

آنرا پیوسته کنیم » ، او در اینجا از امری سخن می‌گوید که مدتها پیش از این صورت گرفته است . عمل پر کردن شکافها قرنها قبل انجام گرفته است و به این دلیل ساده که ما نمی‌توانیم هیچ شکافی در زمان تصور کنیم ، هرگز نخواهیم توانست شکافهائی را در فضا تشخیص دهیم .

۱۲ ولی علی‌رغم‌این‌حقیقت‌که کانتور ودده‌کیند هیچ‌کدام موفق نشدند تا پیوسته را از علم حضوری زمـان آزاد سازند ، مبارزهٔ طولانی بین‌مفهوم پیوستگی ومفهوم علمی عدد به‌پیروزی قطعی مفهوم عدد منجر شد . این پیروزی از آنجا پیدا شد که لازم بود روش کاری که از زمان فرما و دکارت تاکنون ابزار ضروری آنالیز به شمار می‌رود ، پاك و پاکیزه و برحق بـوده باشد . تاریخ این‌آموزش ، یعنی‌آموزش هندسهٔ تحلیلی ، قسمتی از فصل آینده را تشکیل می‌دهد . در اینجا فقط کافیست گفته شود که این آموزش ، که نتیجهٔ کوشش‌هائی بود تا مسائل هندسی را به تحلیل (آنالیز) حسابی منجر کند ، درآخرکار به‌صورت وسیله‌ای درآمد که خواص مجرد عدد را به‌فکرانتقال می‌دهد . این آموزش ، آنـالیز را با زبانی غنی مجهز کرد و آنرا در راه تعمیم‌هائی انداخت که تا آن وقت در فکر نیز نمی‌گنجید .

اما فرض ضمنی که هندسهٔ تحلیلی برپایهٔ آن عمل می‌کند عبـارتست از آنکه نقاط را برروی یك خط و بنابراین برروی صفحه و در فضا می‌توان به وسیلهٔ اعداد نمایش داد . البته این فرض هم‌ارز آنست که بپذیریم تطابقی کامل می‌توان بین نقاط

واقع بر روی یك خط و اعداد واقعی به وجود آورد . موفقیت عمدهٔ هندسه تحلیلی ، و این حقیقت که خدمتی قابل تحسین برای مقاصد آنالیز وهندسه صورت داده است ، به فرض مزبور نیروئی عملی وغیرقابل مقاومت داده است . کار اساسی این بود که این اصل درساختمان کلی ریاضیات وارد شود . اما چگونه؟

تحت چنین شرایطی پیشرفت ریاضیات **جبری** است . این علم شکاف بین علم حضوری و استدلال را با اصل موضوع مناسبی پـر می‌کند . ایـن اصول موضوع از علم حضوری خلع‌ید می‌نماید و به جای آن مفهومی را که قوام منطقی دارد می‌گذارد . خود ابهام موجود در علم حضوری چنین جانشینی را نه تنها موجه ، بلکه کاملا قابل قبول می‌سازد .

در اینجا نیز قضیه به‌همین ترتیب صورت پذیرفته است. از یك طرف مفهوم دارای قوام منطقی عدد حقیقی و مجموعهٔ آن و محیط پیوستهٔ حساب ، و از طرف دیگر مفاهیم مبهم نقطه و مجموعهٔ آن و پیوستگی خطی وجود داشته است . اکنون تنها می‌بایست همانندی این دو ، یا تأیید این امر اعلام شود که :

می‌توان به هر نقطه بر روی یك خط منحصراً یك عدد نسبت داد ، و بالعکس هر عدد را می‌تـوان منحصراً به یك شکل به وسیلهٔ یك نقطه بر روی یك خط نمایش داد .

این اصل موضوع مشهور **دده‌کیند ـ کانتور** است .

۱۴ این قضیه ، باموجه‌کردن فرض‌ضمنی‌که هندسهٔ تحلیلی بیش از دویست سال برپایهٔ آن عمل می‌کند اساس اصل موضوع

این علم شد . این اصل موضوع ، مثل سایر اصول ، در واقع تعریفی است که تغییر شکل داده است : این اصل موجود جدید ریاضی یعنی **خط حسابی** را تعریف می‌کند . از این به بعد خط ـ و در نتیجه صفحه و فضا ـ تصوری مکاشفه‌ای نخواهند بود ، **بلکه فقط حامل اعدادند** .

بدین‌ترتیب این اصل بدیهی درحکم حسابی‌کردن هندسه است . مفهوم آن آزاد کردن آنالیز از درك هندسی است که وجود و رشد خود را به آن مدیون است . وباز مفهوم آن این است‌که ازاین به‌بعدآنالیز نظارت خود را بر هندسه و مکانیك اعلام می‌دارد ، و به وسیلهٔ آنها برمراحل دیگر معرفت ما ، که حتی به واقعیت خام حواس ما نزدیك‌ترند ، نیز نظارت خواهد کرد .

کشمکش طولانی برای به وجود آوردن حساب به‌صورت تصویری از آن واقعیت ، به علت ابهام موجود در آن واقعیت ، با شکست مواجه گشت . بنابراین حساب واقعیتی جدید از تصویر خود به وجود آورد . در آنجا عدد گویا مغلوب شد ، فرایند بینهایت پیروزی به دست آورد .

عدد برجهان حکومت می‌کند .

ك . ج . ژ . ژاکوبی (K . G . J . Jacobi)

« جوانی که عشق به معرفت داشت به نزد ارشمیدس رفت .
و به او گفت : استاد هنر خدائی را به من بیاموز
که این همه خدمت صادقانه به علم آسمانها کرده است
و در پشت اورانوس سیارهٔ دیگری را آشکار کرده است .
حکیم جواب داد . درست است این علم آسمانی است ،
و خدمت صادقانه‌ای به علم آسمانها کرده است
و در ورای اورانوس سیارهٔ دیگری آشکار کرده است .
آنچه را که در کیهان می‌بینی چیزی جز انعکاسی از خداوند نیست ،
خدائی که بر المپ حکومت می‌کند عدد جاوید است . »

۱۰ | قلمرو عدد

۱ معرفت بشری ، با کوشش و سرگردانی ، با کورانه رفتن وسکندری خوردن، گام‌بگام پیشرفت کرده است . انسان را ،که بندهٔ‌سنت‌های زمان وبازیچهٔ دست محیط خودبود وبرای

بقای خویش سخت با موانع مبارزه می‌کرد ، در این پیشرفت منطق رهبری نمی‌کرد ، راهنمای وی علم حضوری و تجربه‌های روی هم انباشته شدهٔ تمام بشریت بود . این کیفیت درهمهٔ امور انسانی صادق است و من زحمت زیادی ندارم تا نشان دهم که ریاضیات نیز از این امر مستثنی نبوده است .

و اما چه کسی می‌داند که عادت به توضیح‌دادن منظم ، که بر اثر سالها معلمی در من پیدا شده ، باعث آن نشده باشد که نادانسته از این شیوه تخطی کنم ؟ وقتی تحول عدد باطرحی وسیع نشان داده شود ، به نظر می‌رسد که دارای یك پیوستگی منطقی واقعی است . اما طرح وسیع معمولا طرحی خام و ناپخته است : چنین طرحی کمتر مطالبی را می‌آموزد که داری اهمیت واقعی است . از بی‌قاعدگی‌های یك منحنی بیش از شکل آن می‌توان اطلاعاتی دربارهٔ ماهیت واقعی آن به‌دست آورد؛ به‌همین ترتیب ، در زمینهٔ توسعهٔ کوشش‌های بشری ، بی‌قاعدگی‌ها بیش از آنچه در همهٔ این کوشش‌ها مشترك است، عوامل نامرئی را روشن کرده در معرض دیدار قرار می‌دهد .

توضیح منظم در یـك کتاب درسی ریاضیات نه بـر اساس توالی تاریخی بلکه بر پایهٔ پیوستگی منطقی قرار دارد ؛ امـا در ریاضیات دورهٔ دوم متوسطه و حتی در ریاضیات عالی این واقعیت را یادآوری نمی‌کنند ؛ و به همین جهت دانش‌آموزان و دانشجویان چنان می‌پندارند که تکامل تاریخی عـدد به همان نظم و ترتیبی است که در کتابهـای درسی نوشته شـده است . و همین امر تا حد زیادی مسئول این عقیدهٔ شایع است که در ریاضیات عنصر انسانی وجود ندارد . بدین‌ترتیب به‌نظر می‌رسد که این علم ساختمانی است که بدون چوب بست بر پـا

شده ، یعنی طبقه به طبقه به وسیلهٔ قطعات باشکوه و جامد خود روی هم سوار شده است ! معماری آن بی‌نقص است ، زیرا که شالودهٔ آن استدلال محض است ، و دیوارهایش غیرقابل نفوذند ، از آن جهت که بدون اشتباه و خطا و حتی تردید ساخته شده‌اند ، و در اینجا علم حضوری انسان سهمی نداشته است ! خلاصه به نظر یك انسان عامی ریاضیات ، نه به وسیلهٔ فکر سرگردان انسان ، بلکه به وسیلهٔ روح مصون از خطای الهی برافراشته شده است .

تاریخ ریاضیات اشتباه این طرز تلقی را روشن می‌کند . این تاریخ نشان می‌دهد که پیشرفت ریاضیات بیشتر بی‌روال و نامنظم بوده ، و در آن مکاشفه نقشی حاکم داشته است. هدف‌های دور قبل از سرزمین های میان راه کشف شده‌اند ، و اغلب این کار به شکلی صورت گرفته است که حتی خودکاشفین نیز نمی‌دانستند که سرزمین‌های دیگری هم دراین میانه وجوددارد. عامل علم حضوری و مکاشفه‌ای آفریدگارصورجدید بوده است؛ وحق مسلم منطق نیز این بوده است که صورمز بور را بپذیرد یا نپذیرد.

ولی در به وجود آوردن آن صورسهمی نداشته است .

اما این داور رأی خود را به کندی صادر می‌نمود ، و در این میان طفل به دنیا آمده ناچار از آن بود که زندگی کند ، و بدین ترتیب ، درحالی که انتظار می‌کشید تا منطق بر وجودش صحه گذارد به‌پیش می‌رفت ، و تکثیر می‌یافت .

تحول عدد مرکب که فصلی خارق‌العاده را در تاریخ ریاضیات می‌سازد ، تمام آثار وعلائم چنین گسترشی را درخود دارد . آیا علم عدد پیروزیهای جدیدی به دست نیاورد ومنتظر

ماند تا وایرشتراش و کانتور ودده‌کیند پایه‌ای ازمنطق برای عدد حقیقی به وجود آورند ؟ هرگز ؛ این علم با قبول حقانیت عدد حقیقی ، و برای کشف زاویهٔ نا مکشوف دیگری در دنیای خود به پیش رفت ودر نتیجهٔ این پیشروی حاکم برقلمروجدیدی شد که عظمت و جلال آن بی‌سابقه بود .

۴ می‌خواهیم این مفهوم جدید را از زمان پیدایش آن تا امروز بررسی کنیم . این بررسی را باز باجبر ، که سرچشمهٔ عدد حقیقی است، شروع می‌کنم . مسافرت طولانی ما به‌بینهایت این بررسی را قطع کرد . اینك بامفهوم تازه‌ای از عدد ، که کاملا غنی و با سلاح جدیدی نیرومند شده است ، باردیگر به آن برمی‌گردیم : سلاح جدید مافرایند بینهایت است . به‌جای مجموعه گویا ، اینك محیط پیوسته حسابی را دردسترس داریم؛ و علاوه بر فرایندهای گویا و محدود جبر ، اکنون با دستگاه نیرومند آنالیز پشتیبانی می‌شویم . قطعاً در وضعی هستیم که می‌توانیم بااطمینان خاطر به معادلهٔ کلی جبر حمله کنیم !

خواننده‌ای که جبر مقدماتی را به خاطر دارد ، می‌داند که وضع از اینقرار نبوده است : عدد حقیقی نیز برای حل همه معادلات جبری کافی نیست . برای اثبات این امر لازم نیست معادلات مشکل از درجات بالا را مورد توجه قرار دهیم . کافی است یکی ازساده‌ترین معادلات را درنوع خودیعنی $x^۲ - ۱ = ۰$ را بررسی کنیم .

این معادله حدفاصل دده‌کیند را تعریف نمی‌کند و رشتهٔ کانتور را نیز که حد مجذور آن به سمت ۱ - گرایش دارد

نمی‌توانیم بسازیم . در قرن دوازدهم برهمن بهاسکارا (Brahmin Bhaskara) این مطلب را در کلام ساده و مؤثر زیر بیان داشت ، « مربع یك عدد مثبت ، درست مانند مجذور عدد منفی ، مثبت است ؛ و ریشهٔ دوم یك عدد مثبت مضاعف ، یعنی مثبت و منفی است ؛ برای عدد منفی ریشهٔ دومی وجود ندارد ، زیرا عدد منفی مجذور هیچ عددی نیست . »

آگاهی براین امر که عبارت $x = \sqrt{-1}$ دارای معنی مشخصی نیست ، از قبول این عبارت به عنوان جواب معادلهٔ فوق جلوگیری می‌کرد . ریاضی‌دانان هندی ومسلمان درمقابل این وسوسه مقاومت می‌کردند. افتخار کشف **مقادیرموهومی** مربوط به ایتالیائی‌های دوران رونسانس است . کاردان در ۱۵۴۵ اولین کسی بود که این‌عبارت بی‌معنی را به وسیلهٔ علامتی نشان داد . وی در بحث خود دربارهٔ غیرممکن بودن تجزیهٔ عدد ۱۰ به دو قسمت ، بطوریکه حاصل ضرب آنها ۴۰ باشد ، ثابت کرد که حل رسمی این مسأله به عبارات غیرممکن $5+\sqrt{-15}$ و $5-\sqrt{-15}$ منجر می‌شود .

اما همانطورکه دربارهٔ اعداد منفی اتفاق افتاد، دراینجا نیز تنها نوشتن « غیرممکن » آنرا به شکل موجودی علامتی درآورد. درست است که این نوشتن بااین احتیاط که **بیمعنی، مجازی ، ناممکن ، ساختگی ، مرموز ، و موهومی** است صورت‌گرفته است ، ولی‌باید دانست که خود نام ، برفرض آنکه نسبت یا دشنام هم بوده باشد ، بسیار چیزها باخوددارد.

۳ مایهٔ کمال تعجب است که می‌بینیم معادلات درجهٔ سوم

نیروئی حرکتی برای کار برد این موجودات به عنوان **اعداد جدی** به وجود آوردند نه معادلات درجه دوم . این کار بدین شکل صورت پذیرفت :

معادلهٔ درجه سوم $x^{۳}+ax+b=۰$ لااقل دارای یك جواب حقیقی‌است، وممکن‌است این جوابها به سه برسند . در حالتی که یك جواب حقیقی برای آن موجود باشد ، سکیپیودل فرو (Scipio del Ferro) ، تارتاگلیا (Tartaglia) وکاردان روشی راکه بطور کلی به نام فرمول کاردان معروف است به وجود آوردند . ولی این فرمول ، در حالتی که دارای سه جواب حقیقی هستیم ، صدق نمی‌کنند ، زیرا دراین حالت رادیکالهائی که وارد فرمول شده‌اند نمایندهٔ اعدادی **موهومی** خواهند بود .

معادلهٔ تاریخی $x^{۳}=۱۵x+۴$ را در نظر می‌گیریم که به وسیلهٔ بومبلی در کتاب جبری که در سال ۱۵۷۲ منتشر شده مورد بررسی قرار گرفته است . این معادله دارای سه ریشهٔ حقیقی ۴ ، $(-۲\times\sqrt{۳})$ و $(-۲-\sqrt{۳}-)$ است . اما کاربرد فرمول کاردان به نتیجهٔ غیرواقعی زیرمنجرمی‌گردد:

$$x=\sqrt[۲]{۲+\sqrt{-۱۲۱}}+\sqrt[۳]{۲-\sqrt{-۱۲۱}}$$

بومبلی باخود اندیشید که شاید دو رادیکال نمایش عباراتی از نوع $p+\sqrt{-q}$ و $p-\sqrt{-p}$ ، یعنی عباراتی باشند که امروز نام آنها را عبارات **موکب مزدوج** می‌گذاریم . اگر وضع چنین بود ، و اگر ممکن بود مجموع چنین عباراتی را

طبق فرمولهای معمولی به دست آورد ، در اینصورت مجموع چنین دو مقدار «ساختگی» می‌توانست عددی حقیقی ، و حتی شاید یکی از جوابهای واقعی معادله ، کـه بومبلی می‌دانست ۴ است بوده باشد. اما اجازه بدهیدکه رشتهٔ کلام را به دست خود بومبلی بدهیم .

« به عقیدهٔ عده‌ای زیاد این فـکری خود سرانه بود ، و من نیز برای مدتی دراز همین عقیده را داشتم . به نظرمی‌رسد تمام موضوع بیشتر برپایهٔ مغالطه قرار دارد تا واقعیت . با این حال من مدتی جستجوکردم تا اینکه واقعاً ثابت نمودم که وضع از این قرار است . »

در واقع بومبلی نشان داد که دو ریشهٔ سوم فوق به $۲+\sqrt{-۱}$ و $۲-\sqrt{-۱}$ تبدیل می‌شوند که مجموع آنها ۴ است .

۴ آیا این موجودات غیر ممکن‌انـد ، آری ! اما روی هم رفته بیفایده نیستند ، زیرا می‌توانند به عنوان ابزاری برای حل مسائل حقیقی به کار روند . بنابراین بومبلی ، که باکامیابی‌خود تشجیع شده بود ، برای به وجودآوردن قواعدی در زمینهٔ اعمال مربوط به این موجودات مرکب اقدام کرد .

امروز ما عددنویسی بومبلی را با قراردادن علامت i به جای $\sqrt{-۱}$ خلاصه‌کرده‌ایم. هرعدد مرکب ازنوع $a+ib$ است . با این طرز نوشتن ، جواب معادلهٔ بومبلی عبارت زیر خواهد بود :

$$x=\sqrt[۳]{۲+۱۱\,i}+\sqrt[۳]{۲-۱۱\,i}=(۲+i)+(۲-i)=۴$$

این موجودات بومبلی را **اعداد مرکب** نامگذاری

می‌کنیم و برای توجیه نام **عدد** ثابت می‌کنیم که آنها جوابگوی تمام احکام اصل دوام می‌باشند. بومبلی چیزی از این اصل نمی‌دانست؛ او تنها به وسیلهٔ وجدان ریاضی خود راهنمائی می‌شد که ما نام دیگر آنرا مکاشفه یاعلم حضوری می‌گذاریم. اما صرفنظر از این طریق نوشتن، آن ایتالیائی صاحب قریحه عملا تمام قواعدی را که امروز در این زمینه آموخته می‌شود در اختیار داشت.

اولین شرط اصل مزبوردراینجا صادق است، زیرا عدد مرکب $a+ib$ شامل اعداد حقیقی به عنوان قلمرو فرعی ($b=۰$) نیز هست. ملاك مرتبه‌ای نیز در اینجا وجود دارد، از آن جهت که اگر $a=c$ و $b=d$ باشد، $a+ib$ و $c+id$ مساوی‌اند، ودرغیر اینصورت نامساوی خواهند بود. اما برای ملاك بزرگی یا کوچکی مطلب اینقدرها هم سرراست نیست. با این حال، اشکالات موجود چنان جدی نیستند که محتاج بذکر آنها باشیم.

مجموع دوعدد مرکب عددیست مرکب که از جمع جداگانه اجزاء حقیقی و اجزاءِ موهومی به دست می‌آید؛ بههمین ترتیب نیز عمل تفریق انجام می‌پذیرد. حاصلضرب دو یا چند عدد مرکب با ضرب هریك از این اعداد طبق قواعد معمولی جبر به دست می‌آید و طبق طرح زیر می‌توان مقادیر توانهای i را به جای خود گذارد.

$$i=\sqrt{-۱} \qquad i^{۵}=i \qquad i^{۹}=i$$
$$i^{۲}=-۱ \qquad i^{۶}=-۱ \qquad i^{۱۰}=-۱$$

$$i^3 = -i \qquad i^7 = -i \qquad i^{11} = -i$$
$$i^4 = 1 \qquad i^8 = 1 \qquad i^{12} = 1$$

بنا بر این اعمال بومبلی تبدیلی و تلفیقی و توزیعی‌اند . تمام شروط اصل در اینجا صدق کرده است . بدین‌ترتیب قلمرو عدد مرکب آفریده شد و به‌همان طریقی که قلمرو حقیقی جانشین میدان گویا گردید ، این میدان جدید جایگزین قلمرو اعداد حقیقی شد .

۵ چنین نتیجه می‌شود که هر دسته از اعمال گویائی که دربارهٔ اعدداد مرکب اجرا شود منجر به عددی مرکب خواهد شد . به عبارت دیگر ، قلمرومرکب نسبت به اعمال گویا **بسته است** . آیا این قلمرو برای فرایندهای بینهایت آنالیز نیز بسته است ؟ به عبارت دیگر ، آیا می‌توانیم تصور رشتهٔ بینهایت و همگرائی و حد را به اعداد مرکب نیز توسعه دهیم ؟ جواب مثبت به این سؤال در قرن نوزدهم ، به وسیلهٔ گوس و آبل و کوشی و وایرشتراس داده شد و این واقعیت اساسی پایه نظریهٔ جدید توابع را تشکیل می‌دهد .

حتی در قرن هجدهم عدد مرکب تقریباً در این جریان بود کـه خاصیت جبری محض خود را از دست بدهد . اتحاد مشهودی که به وسیله دوموآور (de Moivre) کشف شد، نقش عدد مرکب را در مثلثات نشان داد . و در ضمن اویلر نیز باوادار کردن عددترانساندان e به‌فرمول دوموآور نیرو بخشید . با اینکه خارج از چشم انداز ایـن کتاب است ، من به خاطر

تکمیل موضوع باید این اتحاد جالب اویلر را یادآوری کنم .

$$e^{i\pi}+1=0$$

که به وسیلهٔ بعضی ازمعاصران متمایل به‌متافیزیك وی به‌عنوان رابطه‌ای که دارای‌اهمیت مرموزی است مورد توجه‌قرار گرفت. درواقع این رابطه شامل علائم مهم ریاضیات نو است وبه عنوان نوعی **اتحاد صوفیانه** تلقی می‌شد که در آن حساب به وسیلهٔ صفر و یك و جبر به وسیلهٔ علامت i ، هندسه توسط و آنالیز با عدد فرازندهٔ e ظاهرشده است .

۶ طبیعتاً این سؤال پیش می‌آیدکه‌آیا ابزاری‌که به‌وسیلهٔ الحاق اعداد مرکب به وجودآمده است‌برای حل مسألهٔ اساسی جبر ، یعنی تعیین ریشهٔ عمومی‌ترین معادله ، لیاقت دارد یا نه؟

قبلا بومبلی می‌دانست که به وسیلهٔ اعداد مرکب معادلهٔ درجه دوم و سوم کاملا قابل حل‌اند ؛ به عبارت دیگر ، او می‌دانست که عمومی‌ترین معادلهٔ درجه دوم و سوم باید حداقل دارای یك ریشه باشدکه می‌تواند حقیقی ویاعددی مرکب‌باشد. این امر نتیجهٔ این واقعیت است که حل این معادلات منجر به جوابهای رسمی بیان شده با اعداد گنگ درجه دوم وسوم می‌گردد . بی‌شك عبارات گنگ درجه سوم می‌توانند شامل اعداد مرکب باشند ، اما چنین رادیکالهائی خود می‌توانند به‌صورت $a+ib$ درآیند .

با توجه به اینکه شیوهٔ فراری (Ferrari) روشی‌مشابه برای معادلات درجه چهارم تعیین می کند ، این معادلات نیز

دارای ریشه‌هائی هستند که می‌توان آنها را به صورت اعداد مرکب نشان دادکه جواب حقیقی حالت خاصی از آنها است .

این واقعیات را در قرن هفدهم می‌دانستند . و نیز می‌دانستندکه ریشه‌های موهومی یك معادلهٔ جبری باضرائب حقیقی می‌بایست جفت‌جفت باشند ؛ یعنی اگر $a+ib$ یکی از ریشه‌های چنین معادله‌ای است ، مزدوج آن $a-ib$ نیز ریشهٔ دیگر خواهد بود . از اینجا نتیجه می‌شودکه معادله‌ای از درجه فرد حداقل باید **دارای یك ریشهٔ حقیقی باشد** .

امادر۱۶۳۱ توماس‌هاریوت (Thomas Harriot) انگلیسی با فکری بکر به تبدیل هرمعادله بـه صورت کثیر ـ الجمله‌ای برابر با صفر موفق شد ، واین فکرپردامنه هاریوت را به این قضیه راهنمائی کرد که : هرگاه a ریشهٔ یك معادلهٔ جبری باشد ، $x-a$ یکی از عوامل‌کثیرالجملهٔ مربوط به‌آن معادله است (این قضیه امروز به نام قضیهٔ عامل معروف است). این واقعیت اساسی حل هر معادله را به مسألهٔ تعیین عوامل ضرب تبدیل‌کرد ، و در نتیجه نشان دادکه هرگاه بتوان ثابت نمود کـه معادله‌ای دارای یك ریشهٔ حقیقی و یا مرکب باشد ، به‌خودی‌خود مسلم است کـه تعداد ریشه‌های آن برابر درجـهٔ معادله است ؛ البته با قید این شرط که **هر ریشه به تعداد دفعاتی که عامل مربوطه وارد کثیرالجمله شده است باید به حساب آید** .

در اوایل قرن هفدهم جیرارد (Girard) حدس زد که آنچه‌که‌برای‌معادلات درجه چهارم درست‌است دارای‌اعتبارکلی است ؛ ودر اواسط قرن هجدهم دالامبر این مطلب را به‌صورت

این حکم بیان کرد : **هر معادلهٔ جبری حداقل باید دارای یك جواب حقیقی یا مرکب باشد** . با این حال او نتوانست این اظهار را دقیقاً ثابت کند ، و علی‌رغم کوشش عدهٔ زیادی که به دنبال او رفتند ، این امر بــه عنوان اصل موضوعی در طول پنجاه سال بعد باقی ماند .

این حکم ، حکم دیگری را به خاطر می‌آورد : هر معادله را می‌توان به وسیلهٔ رادیکالها حل کرد . دیدیم که این عبارت حتی در زمان لاگرانژ نیز به وسیلهٔ عده‌ای از ریاضی ـ دانان بمثابهٔ موضوعی روشن مورد قبول بود . اما این مقایسه غیرمنصفانه است : در اینجا تعمیم از نوعی بود که نام استقرای ناقص را داشت و نادرستی قضیه فقط خطر کاربرد این شیوه را آشکار ساخت . مکاشفه‌ای که منجر به اصل مسلم دالامبر شد با این شیوه کاملا متفاوتست .

۷ این مکاشفه در تمام براهینی که از زمان دالامبر تا ـ کنون برای این **قضیه اساسی جبر** داده شده منعکس است ، که از آن جمله است : براهین نارسای دالامبر و اویلر و لاگرانژ ؛ دلایلی که آرگاند در ۱۸۰۶ و ۱۸۱۶ برای این موضوع ارائه نمود ؛ چهار برهانی که گاوس برای اثبات قضیه بیان کرد ؛ و تمام اصلاحات بعدی که در این چهار برهان به عمل آمد .

با آنکه این بــراهین در اصل بــا یکدیگر متفاوتند ، همگی یك وجه مشترك دارند . در بعضی از این براهین به دلایلی ـ گاهی آشکار و زمانی ضمنی ـ فکر پیوستگی وارد شده

است ، فکری که برای جبر بیگانه است و به قلمرو آنالیز تعلق دارد .

اجازه بدهید با یك مثال ساده این مطلب را توضیح دهم. اگر $Z=z^2+1$ و $z=x+iy$ باشد ، از ترکیب این دو معادله حاصل می‌شود: $Z=(x^2-y^2+1)+i(2xy)$ اینك چون y و x به شکلی پیوسته تغییر کنند و تمام مقادیر ممکن بین $\infty-$ و $\infty+$ را بپذیرند ، عبارات داخل پرانتزها نیز تمام مقادیرممکن بین این دوحد را خواهند پذیرفت . **اثبات** این امر درحالت کلی و با دقت کامل دشواری فراوان دارد ؛ وتمام‌کوششهای نافرجام دالامبر و گاوس به طرف همین هدف متوجه بوده است . اما **تصور** اینکه مطلب از همین قرار است موضوع دیگری‌است؛ دراینجااست که **علم‌حضوری‌پیوستگی** کار خود را انجام داده است . برای بعضی از مقادیر متغیرهای x و y کثیرالجمله‌ها مثبت ، و برای مقادیر دیگری منفی‌اند. چون تغییرات پیوسته است ، مقادیر واسطی از x و y یافت می‌شود (که درحقیقت تعدادآنها بینهایت است)که‌کثیرالجمله اول را صفر می‌کند ؛ و نیز یك سلسله از مقادیـر دیگر نیز وجود دارند که برای آنها کثیرالجملهٔ دوم از بین می‌رود . **بعضی ازجفت های X و Y دراین دو دسته ازمقادیر مشترکند** . اگر a و b یکی از این جفت‌ها باشند ، در این صورت $a+ib$ ریشهٔ معادله $Z=0$ است . این‌همان چیزیست که علم حضوری ریاضی تلقین می‌کرد ، وهمان است‌که دالامبر برای اثبات آن کوشش نمود . در آنجاکه دالامبر مغلوب شد، گاوس پیروزی به دست آورد . و اما این واقعیت که برهان

اول او درباره این قضیه اساسی جبر به ملاحظاتی در زمینهٔ آنالیز وابسته می‌گردید فکر او را معذب کرده بود، به همین جهت شانزده سال بعد او برهان دیگری را عرضه کرد. ثابت کرد که هر معادله‌ای از درجهٔ زوج به وسائل جبری محض قابل تبدیل به معادله‌ای از درجهٔ فرد است. دراین‌صورت اگر ثابت می‌شد که هر معادله از درجهٔ فرد لااقل یك ریشه حقیقی دارد، قضیه اساسی اثبات شده بود. اما بدبختانه به هیچ وجه بدون وارد کردن عناصر بیگانه درجبر محض قضیهٔ اخیر را نمی‌توان ثابت نمود.

۸ خود این حقیقت کـه اثبات قضیهٔ اساسی جبر متضمن فرایندهائی است که نسبت به جبر بیگانه‌اند، نشان می‌دهد که قضیه می‌تواند چشم‌انداز وسیع‌تری داشته باشد، و درحقیقت هم چنین است. خاصیت داشتن ریشه‌ای در قلمرو اعداد مرکب به هیچ وجـه در انحصار معادلات جبری نیست. مثلا معادلاتی نظیر $e^z+z=0$ وبسیاری ازمعادلات‌فرازندهٔ دیگر نیز ریشه‌های مرکب می‌پذیرند.

کثیرالجمله‌ها فقط قسمتی کوچك از طبقه توابعی را تشکیل می‌دهند که وایرشتراس نام **تام** (**entire**) بر آنها نهاده است. این‌توابع نیز مانندکثیرالجمله‌ها، به ازای‌مقادیر خاصی از متغیر، هر عدد مرکب از قبل تعیین شده و بخصوص عددصفررا می‌توانند قبول کنند. اغلب عبارات‌فرازنده مهم مانند سینوس وکسینوس وتابع مجهول‌القوه به‌این طبقه تعلق دارند. از لحاظ نظریهٔ توابع، توابع **تام** از توسعهٔ بـلافصل توابع

کثیرالجمله‌ای به دست می‌آیند .

چنین است اساس نظریهٔ توابع متغیرهای مرکب که به وسیلهٔ کوشی و وایرشتراس و ریمان پایه‌گذاری شده است ، و تقدیر چنان بود که این نظریه به صورت عامل حاکم بر توسعهٔ ریاضیات در قرن نوزدهم درآید .

اما بگذارید به داستان خود برگردم .

۹ در ۱۷۷۰ جبر اویلر منتشر شد که در آن کاربرد بسیاری از کمیتهای مرکب داده شده‌بود ، باوجود این درآنجا چنین می‌خوانیم :

« کلیهٔ عباراتی از قبیل $\sqrt{-۱}$ ، $\sqrt{-۲}$ و غیره ، در نتیجه غیر ممکن و یا اعدادی موهومی‌اند ، آنها نمایندهٔ جذر مقادیر منفی‌اند ؛ و با چنین اعدادی حقیقتاً می‌توانیم ادعا کنیم که آنها نه هیچ‌اند ، نه بزرگتر از هیچ‌اند و نه کوچکتر از هیچ و همین است که الزاماً آنها را بصورت موهومی و یا غیر ممکن در می‌آورد. »

در سال ۱۸۳۱ گاوس نوشت

« حساب عمومی ما ، که تا این حد در وسعت برهندسهٔ پیشینیان پیشی گرفته، بتمامی مخلوق زمان جدید بوده است . این حساب که اساساً با تصور اعداد صحیح مطلق شروع شده بود قلمرو خود راکم‌کم وسعت داد. کسرها به اعداد صحیح ، مقادیر گنگ بمقادیر گویا ، مقادیر منفی بمقادیر مثبت ، و موهومی به حقیقی اضافه شد . با این حال‌این پیشرفت همیشه با قدمهای لرزان و نا پایدار صورت گرفته است . علمای نخستین جبر ریشه‌های منفی‌معادلات را ریشه‌های باطل می‌خواندند ، و درواقع وقتی مسأله‌ای بشکلی بیان میشد که مشخصه مقداری که بدنبال‌آن می‌گشتند

مقدار منفی را نمی‌پذیرفت این نام صادق بود . با اینکه درحساب عمومی هیچ‌کس نمیتواند در قبول کسرها تأمل روا دارد ، اما اشیاء قابل‌شمارش زیادی هستند که برای آنها کسر مفهومی ندارد . بنابر این ما نباید از واگذاری حقوق اعداد مثبت به منفی ، فقط به خاطراینکه اشیاء بیشماری جواب مخالف را نمی‌پذیرد ، شانه خالی کنیم . از زمانی که اعداد منفی توانسته‌اند توضیح مناسبی برای موارد بیشمار دیگر باشند، واقعیت آنها بقدر کافی مورد قبول قرار گرفته است . این کار مدتها است صورت پذیرفته است ، اما مقادیر موهومی -که قبلا و گاهی درحال حاضر بغلط درمقابل مقادیرواقعی آنهارا ناممکن می‌نامند- هنوزنتوانسته‌اند به‌صورت طبیعی درآیند و در واقع وجودشان تحمل می‌شود ؛ آنها بیشتر بمثابهٔ بازی بی‌مغزی با علامات بنظرمیرسند وحتی کسانی که‌سهم اساسی ومهم‌این بازی با علامت را در گنجینهٔ روابط بین مقادیر حقیقی انکار نمی‌کنند ، تأملی در انکار زمینه قابل فکر برای‌آنها روا نمی‌دارند .

« نویسنده سالیان دراز از نقطهٔ نظر دیگر به این قسمت مهم از ریاضیات نگریسته است تا بتواند همان وجود عینی را که برای مقادیر منفی در نظر گرفته شده است به اعداد موهومی نیز تخصیص دهد . اما تا کنون فرصت مناسبی برای انتشارنظریات خود بدست‌نیاورده است . »

در این شصت سالی‌که دوحکم ذکر شده را از هم جـدا می‌کند ، چه اتفاقی رخ داده کــه باعث چنین تغییر فاحش در جبهه شده است ؟ گاوس با کلام خود به این سؤال پاسخ می‌گوید : « برای این موجودات موهومی می‌توان وجودی عینی در نظر گرفت . » به عبارت دیــگر تعبیر ملموسی برای این موهومی‌ها پیدا شده است ، توضیحی مشابه آنچه‌که اعداد منفی را با تغییر جهت مشخص می‌سازد .

برای فهم عمیق این تعبیر باید به قرن هفدهم برگردیم ونظری به علم هندسهٔ ترسیمی ، که بکرات در فصول گذشته از آن یاد کردم ، بیفکنیم .

۱۰ هنگامی که دربارهٔ تغییرات عمیقی که علم در زندگی ما ایجاد کرده است می‌اندیشیم ، فکرمان متوجه فیزیك وشیمی می‌شود . در اختراعات مکانیکی که انقلابی در صنعت و حمل‌و نقل ایجاد کرده‌اند دلیل قابل لمسی برای این تغییر بزرگ در دست داریم . کاربرد الکتریسیته وظایف شاق زندگی را از بین برده و وسایل ارتباط را تا حدی که در فکر نمی‌گنجد آسان کرده است . ترقی علم شیمی به ما اجازه داده است که از این پس با مواد بیحاصل چیزهایی بسازیم که برای زندگی و آسایش و خوشی ما سودمند باشد . و همه اینها سبب آن شده است که آدمی به این علم به چشم احترام و اعجاب نظر کند .

اما فایده‌ای که ریاضیات به ما رسانده به علت ابهام و پیچیدگی خود کمتر آشکار است . درست است که ما می‌دانیم ریاضیات در نظریه‌هائی که این اختراعات را ممکن ساخته ودر طرح این اختراعات نقش خود را ایفا کرده است ، اما این مطلبی است که تنها متخصصان از آن آگاهند . انسان در زندگی روزمره ممکن است ازدانش خود دربارهٔ عناصر متشکله آب و اختلاف بین موجهای بلند وکوتاه استفاده کند ، درصورتی که مطالعه و بررسی هندسه و حساب انتگرال ممکن است سهم بسیار کوچکی در فراهم آوردن رضایت خاطر اوداشته باشد .

بااین‌حال درمیان پیشرفتهای فراوان ریاضیات چیزهائی

یافت می‌شوند که حتی به مفهوم مستقیم خود می‌توانند به عنوان اختراعاتی مفید مورد نظر قرار گیرند ، زیرا آنها درزندگی روزانهٔ مردم نفوذکرده‌اند . عدد نویسی ترتیبی ما ، که محاسبه را در دسترس مغزهای متوسط قرار داده ، متعلق به این دسته است ؛ همچنین علامت گذاری جبری وبخصوص **حساب نظری لوگیستیکاسپکیوسا** (logistica speciosa) ویتا که اشکال فشرده‌ای ازروابط عمومی را دراختیارعده زیادی قرار می‌داد که سابقاً فقط برای عدهٔ معدودی قابـل فهم بودند ، از همین مقوله‌اند . همچنین اختراع بزرگی راکه دکارت به دنیا عرضه داشت ، یعنی هندسهٔ تحلیلی ، کـه با یـك نظر تصویری **نموداری** از **قانون** حاکم بریك پدیده و یا هم‌بستگی‌موجود بین وقایع مربوط به یکدیگر و یا **تغییراتی** را کـه در طول زمان در وضعی پیدا می‌شود نشان می‌دهد ، می‌توان جزو این دسته محسوب داشت .

این مسأله جالب توجه است که آن اختراعات ریاضی که بیشتردردسترس‌تودهٔ مردم قرارمی‌گرفت، بزرگترین‌تأثیررا در بسط وگسترش ریاضیات محض داشته‌اند. اصل عددنویسی وضعی عدد صفر را به ما داده است که بدون آن تصورعدد منفی‌ممکن نبود . این اصل ملاکی قانونی برای معادلات به وجود آورده و قضیه عامل را ممکن ساخته است، علامت گذاری‌حرفی ریاضیات را از حالت خاص به حالت عام‌گسترش داده و، باتعیین علامتی برای غیرممکن ، راه را برای مفهوم تعمیم یـافتهٔ عدد هموار کرده است .

بالاخره اختراع دکارت نه‌تنها علم مهم هندسهٔ تحلیلی‌را

به همراه داشته است ، بلکه بــه نیوتون و لایب‌نیتز و اویلر و برنولی اسلحه‌ای داده است‌که ارشمیدس و پس از وی فرمـا به علت فقدان آن نتوانستند تفکرات همه جـانبه و عمیق خود را بیان دارند .

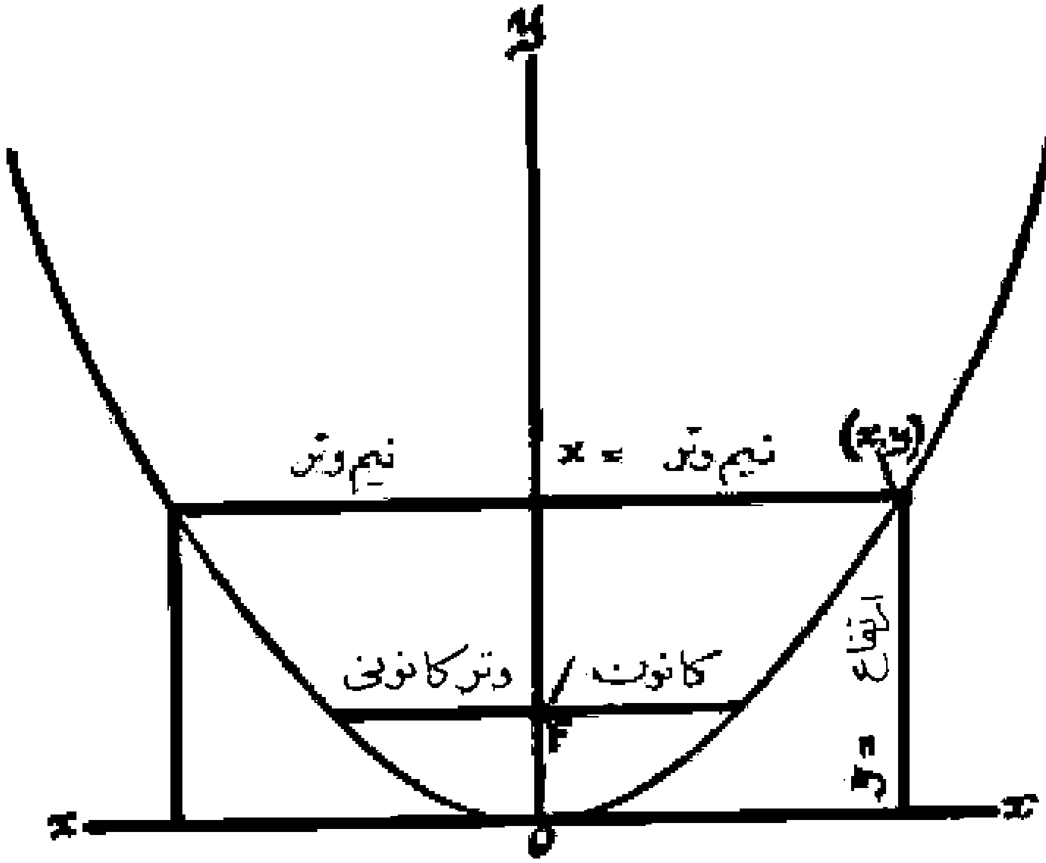
« کودکانی‌که بدون مادر متولد شدند .»

۱۱ شال (Chasles) هندسه‌دان بزرگ ، با این‌کلمات کاری را کــه به دست دکارت صورت گرفت بیان کرده است . این عبارت را برای اصل عدد نویسی وضعی و علامت حرفی که هر دو پیش از کار دکارت صورت گرفته نیز می‌تـوان گفت ، ولی در هر دو مورد ازجادهٔ انصاف خارج شده‌ایم ! سابقهٔ عدد نویسی وضعی را تا ستون خالی صفحهٔ شمارش نشان دادیم ، و در مورد علامتگذاری حرفی دیدیم که جز تکامل علامتگذاری ریاضی‌دانان از زمان بسیار قدیم نبوده است .

همین‌طور ریشه‌های اختراع دکارت در مسائل مشهوری از زمان قدیم است‌که منشأ آن به‌زمان افلاطون می‌رسد. یونانیان درکوشش خود برای حل مسائل تثلیث زاویه و تضعیف مکعب و تربیع دایره ، که خط‌کش و پرگار از عهدهٔ آن نمی‌آمدند ، منحنی‌هائی جدید بــه دست آوردند . از ایــن راه به **مقاطع مخروطی** ، یعنی منحنی‌هائی کــه از برش یك مخروط دوار با یك صفحه به دست می‌آید (**بیضی ، سهمی ، شلجمی**) رسیدند . خواص عالی این مقاطع چنان هندسه‌دانان یونان را مفتون کردکه به زودی این منحنی‌ها به خاطر خود آنها مورد مطالعه قرار گرفتند . آپولونیوس بزرگ رساله‌ای دربارهٔ آنها

نوشت که در آن مهمترین خواص این منحنی‌ها را شرح داد و ثابت کرد.

در آنجا هسته‌های روشی را باز می‌یابیم که بعدها دکارت به صورت اصلی بیان کرد. مثلا آپولونیوس منحنی سهمی را با توجه به محور و مماس اصلی آن معرفی کرد و نشان داد که نیم وتر آن واسطهٔ هندسی بین ارتفاع قطعه و وتر کانونی (Latus rectum) است. امروز این رابطه را به وسیلهٔ معادلهٔ دکارتی $x^2=Ly$ نمایش می‌دهیم و ارتفاع را عرض از مبدأ (y) و نیم وتر را طول از مبدأ (x) می‌نامیم؛ وتر کانونی همان ضریب y یعنی L است.



هندسه ترسیمی در لفافه: آپولونیوس پرگا لف معرفی سهمی

مسألهٔ مهم آنست که یونانیان این منحنی‌ها وتعداد زیاد دیگری راکه کشف کرده بودند **مکان هندسی** (loci) می‌نامیدند ؛ یعنی آنها را به عنوان **مکان** تمام نقاطی می‌دانستند که نسبت به‌دستگاه مقایسهٔ ثابتی وضع قابل‌اندازه‌گرفتن داشتند. مثلا بعضی **مکان هندسی** نقاطی است که مجموع فواصل آن از دو نقطهٔ ثابت مقدار ثابتی باشد . چنین توصیفی در واقع **معادلهٔ بیانی** منحنی بود ، زیرا ملاکی به دست می‌داد که بر اساس آن انسان می‌توانست مشخص کند که‌آیا نقطه معینی متعلق به منحنی هست یا نه .

عمرخیام که به وسیلهٔ دو مقطع مخروطی حلی نموداری برای معادلهٔ درجهٔ سوم به دست آورد ، در واقع روابط فوق‌را به مفهوم گفته شده مورد استفاده قرار داد . این روشها بعداً به وسیلهٔ ریاضی‌دانان ایتالیائی دورهٔ رونسانس و ویتا بسط و توسعه یافت . در واقع مسائلی از این قبیل بود که ویتا را در به وجود آوردن **لوگیستیکاسپکیوسا** راهنمائی کرد .

درخاتمه به‌این‌قسمت از نوشتهٔ فرما که در۱۶۲۹ نگاشته شد وتا چهل سال بعد، یعنی سی سال بعدازظهورهندسهٔ دکارت، منتشر نشد توجه کنید :

« هر زمان که دو مقدار مجهول وارد در معادلهٔ نهائی شوند ، یك مکان هندسی داریم ، و انتهای یکی ازمقادیر مجهول یك خط مستقیم ویا یك منحنی رسم می‌کند . خط مستقیم ساده ومنحصربفرد است ؛ طبقات منحنی‌ها تعدادشان زیاد و نامعین‌اند : دایره ، سهمی ، هذلولی ، بیضی و غیره ....

برای‌کمك به فهم یك معادله، مناسب آن است که چنان کنیم که دو مقدار مجهول با یکدیگر زاویه‌ای تشکیل دهند که فرض می‌کنیم قائمه باشد . »

۱۲ این درست نیست که بگوئیم هندسهٔ دکارتی چیزی جز طفل بی‌مادر نبود. ممکن است شوخی به نظر رسد، اما می‌خواهم بگویم که نه‌تنها طرز تصور دکارت مادری داشت ــ که همان هندسهٔ یونان است ــ بلکه برادر توأمی نیز داشت. حتی یك بررسی سطحی از **هندسه** دکارت و **مقدمه** فرما نشان می‌دهد که ما در مقابل خود یکی از آن پدیده‌های دو قلوئی را که در تاریخ ریاضیات فراوانند مشاهده می‌کنیم. درهمان قرن، و در واقع در دوران یك نسل، کشف هندسهٔ ترسیمی دزارگ ــ پاسکال (Desargues – Pascal) وکشف اصول نظریهٔ ریاضی تصادف پاسکال ــ فرما را می‌بینیم. اما این پدیده‌ها بهیچوجه محدود به قرن هفدهم نبودند. قرن هیجدهم واقعهٔ نیوتون ــ لایب‌نیتز را به همراه داشت؛ قرن نوزدهم شاهد کشف همزمان وسل (Wessel)، آرگاند، گاوس دربارهٔ توضیح مقادیر مرکب، تصورتقریباً همزمان غیراوقلیدسی لوباچفسکی (Lobatchevski) بولیای (Bolyai)، گاوس وآخر کار فرمول‌بندی محیط پیوستهٔ کانتور ــ ددکیند بود.

نمونه‌های مشابهی نیزدرسایر رشته‌های علوم وجود دارد. در مغز دو یا حتی چند نفر عملا در یك زمان افکار مشابهی به وجود می‌آید. در بسیاری ازحالات این دومرد صدها فرسنگ ازیکدیگردور وکاملا متعلق به ملیت‌های مختلف وحتی ازوجود یکدیگر نیز بیخبرند؛ و اختلاف مزاج و محیط وطرزنگرش دو مردی همچون دکارت و فرما شگفت‌انگیز است. این پدیدهٔ عجیب را چگونه می‌توان توضیح داد؟ چنین به‌نظر می‌رسد که انباشتگی تجربهٔ نسل در اعصار مختلف به مرحله‌ای می‌رسد که

لبریز شدن آن ضروریست ، و دیگر بسته به تصادف است که قرعهٔ بهره‌برداری از آنچه که لبریز شده به نام یك نفر یا دو نفر یا دسته‌ای از پویندگان زده شود .

۱۳ فرما و دکارت هیچ‌کدام به کمال اهمیت کشف خود متوجه نشدند . هر دوی آنها به‌ایجاد اصلی برای‌تولید یگانگی در هندسه توجه داشتند ؛ فرما به عنوان یك ریاضی‌دان محض در این راه می‌کوشید ، و دکارت همچون یك فیلسوف . هندسه یونان ، که بیان نهائی خود را در آثار اوقلیدس وآپولونیوس بازیافت ، چنین یگانگی را در خود نداشت : هر قضیه و هر ساختمان هندسی بیشترشبیه به‌خلقتی هنری بود تا کاربرد اصول عمومی . چه افکاری در پشت این و یا آن ساختمان نهفته‌بود؟ چرا بعضی از مسائل تنها به وسیلهٔ خط‌کش ساخته می‌شدند ، و برای بعضی دیگر پرگار نیز لازم شد ، و گروهی دیگر از مسائل حتی تسلیم نبوغ یونانیان ، که اربابان قدیمی خط‌کش و پرگار بودند ، نمی‌گردیدند ؟ این‌ها و سؤالاتی مشابه آنها ، افکار ریاضی‌دانان آن عصر و ازجمله فرما و دکارت را به‌خود مشغول داشته بود .

آنان درجبر به دنبال کلید این معما می‌گشتند ؛ به‌همین جهت به دنبال **جبری کردن** هندسه رفتند، و در نتیجه هندسهٔ تحلیلی به وجود آمد . آنها پایهٔ روشی را نهادند که بنابرآن ممکن بود مسأله‌ای هندسی با عملیات سادهٔ جبری حل شود . بدین‌ترتیب مسائل مشهود قدیمی ، که باشکوهی افسانه‌ای‌شروع شد ودرطول قرنهامنبع شیفتگی بسیاری ازریاضی‌دانان‌طرازاول

گردید ، به‌صورت این‌حکم قطعی دکارت‌بیان شد که : هرمسأله که منجر به‌معادله‌ای‌ازدرجه‌اول‌شودحلی‌هندسی به‌وسیله خط‌کش دارد ، و هرساختمانی که به وسیلهٔ خط‌کش و پرگار انجام گیرد هم‌ارز حل معادله‌ای درجه دوم است ، و اگر مسأله منجر به معادله‌ای از درجات بالاتر از دو یا **غیرقابل تبدیل** به این درجه باشد ، حل هندسی آن به وسیلهٔ خط‌کش و پرگار ممکن نیست .

۱۴ دکارت (و نیز فرما) نمی‌دانست که با این کار پایه‌ای برای ریاضیات‌جدید ریخته است ؛ مقصودآشکار او این بود که هندسه قدما را منظم کند . در واقع این نقشی بود که قرن‌هفدهم‌درتاریخ ریاضیات‌بازی‌کرد؛ این‌قرن **عصرانحلال** فرهنگ ریاضی قدیم بود . من دراثرگالیله ، فرما ، پاسکال، دکارت و سایرین مرحلهٔ کمال یك فرایند تاریخی را ، که در دورانی از انحطاط عمومی نمی‌توانست به ذروهٔ خود برسد ، می‌بینم . بی‌علاقگی رومی و اعصار تاریك و طولانی خرافات مذهبی در طول ۱۵۰۰ سال مانع شد تا این فرایند تاریخی از سرگرفته شود .

دراین زمان، نبوغ این مردان بادور ریختن بازمانده‌های ریاضیات کهنه زمینه را برای وضع جدید آماده کرد . مشخصات اصلی تفکر ریاضی جدید عبارتند از **دوام قوانین صوری و اصل تطابق** . اولی منجر به مفهوم عدد تعمیم‌یافته شد ، و دومی امکان به وجود آمدن ارتباطی را بین مفاهیمی که نامتجانس به‌نظر می‌رسیدند فراهم ساخت . گرچه دکارت،

حتی به طور ضمنی ، از این دو اصل اساسی ریاضیات جدید چیزی نمی‌دانست ، ولی هندسهٔ تحلیلی او تمام آنچه را که مورد نیاز برای به‌وجود آمدن و گسترش این اصول بود در برداشت.

در اینجا جبری وجود داشت که به‌طور ضمنی اعداد گنگ را مانند مقادیر گویا می‌پذیرفت . این جبر در مورد مسائل هندسهٔ کلاسیك به کار برده شد : از طرفی مستقیم و با اسلوب معین این جبر همان نتایجی را به وجود می‌آورد که یونانیان از راه نبوغ خود و بدون اسلوب به‌دست آورده بودند. همان یونانیان که سخت پای‌بند دقت بودند و ترس از بینهایت و اعداد گنگ مانع پیشرفت ایشان می‌شد . خود این واقعیت به استنتاج دکارت نیروی عظیم عملی می‌دهد، زیرا هیچ چیز به اندازهٔ کامیابی موفق نیست .

از طرف دیگر هندسهٔ تحلیلی اولین مثال تاریخی از قرابتی بود که بین دو ساخته ریاضیات یعنی **حساب و هندسه** به وجود آمد که نه تنها از نظر ماهیت با یکدیگر تفاوت فاحشی داشتند، بلکه درست از تاریخ شروع ریاضیات مستقیماً متعارض با یکدیگر بودند. البته این پیوستگی و خویشاوندی برای فرما و دکارت و معاصرینشان روشن نبود، اما در طول دویست سال بعد تأثیر بزرگی درزمینهٔ توسعهٔ تفکر ریاضی به همراه داشت .

در فصل قبل گفتیم که دکارت به‌طور ضمنی قبول کرد که یك تطابق کامل بین اعداد حقیقی و نقاط واقع بر روی محوری ثابت وجود دارد. او پا را از این هم فراتر نهاد ، و به عنوان اصلی بدیهی پذیرفت که: **بین نقاط یك صفحه و مجموعهٔ متشکل از جفتهای اعداد حقیقی تطابقی کامل موجود است .** و این موضوع آنقدر طبیعی به‌نظر او می‌آمد که حتی از توضیح

دربارهٔ آن نیز خودداری کرد . بدین ترتیب اصل بدیهی ددکیند کانتور در مورد دو بعد ، دویست سال قبل از آنکه آنها پا به عرصهٔ وجود گذارند به‌طور ضمنی در آموزش ریاضی وارد شده بود . این آموزش پایهٔ برهان تمام ترقیات دویست سال آینده شد : حساب انتگرال ، نظریهٔ توابع ، مکانیك ، و فیزیك ، هندسهٔ تحلیلی هیچگاه به تضادی برنخورد ؛ و دارای چنان قدرتی برای طرح مسائل جدید و پیش‌بینی نتایج بود که درهر جا که به‌کار می‌رفت به زودی به صورت ابزار ضروری کار در آن زمینه درمی‌آمد .

۱۵ دومحورمتعامد جهت‌دار را درنظر بگیرید ؛ هر نقطه از صفحهٔ این محورها را می‌توان به وسیلهٔ دوعدد مشخص کرد . هر یك از این اعداد می‌توانند مثبت یا صفر یا منفی ، گویا یا گنگ باشند . این اعداد اندازه‌های فواصل نقطهٔ مفروض نسبت به محورهای مقایسه‌اند و برحسب آنکه نقطه در کدام یك از چهار بخشی که به وسیلهٔ محورها جدا شده‌اند ، علامت مثبت یا منفی را می‌پذیرند .

این اصل بقدری ساده و طبیعی است که مشکل می‌توان باورکردکه‌کشف آن سه هزار سال به طول انجامیده باشد . این پدیده به‌اندازهٔ پدیدهٔ عددنویسی وضعی جالب‌توجه است . دومی ، یعنی عدد نویسی وضعی به‌طور ضمنی مندرج در ساختمان زبان اعداد است ، و با اینحال تا پنجهزار سال از کشف آن خبری نبود . اولی نتیجهٔ مستقیم ساختمان متقارن بدن ما است و در توضیح وضع متقابل بدن اشخاص اززمانهای بسیار قدیم ، که در

وهم نیز نمی‌گنجد ، به کار می‌رفت . در واقع چنین به نظر می‌رسد که کافی بود مفهومی کمی به تصورات **راست و چپ ، جلو و عقب ، بالا و پائین** وابسته شود تا هستهٔ اولیهٔ کاملی از هندسهٔ تحلیلی به وجود آید .

وما می‌بینیم که این اصل از روزگار قدیم به‌کار می‌رفت : درداستانهای جن وپری قدیمی محل گنج را بجویندگان ازاین راه نشان می‌دادند که مثلا چند قدم به طرف مشرق و پس‌از آن چند قدم به طرف شمال باید رفت . یا نقشه‌برداران مصری به‌طور ضمنی این شیوه را با کشیدن خطی شمالی جنوبی وخطی شرقی غربی برای مقایسهٔ اشیاء با آنها به‌کار می‌بردند .

البته انتقال ازاین روش عملی به هندسهٔ تحلیلی به ایجاد تصور صفر و عدد منفی وابسته بود . اما از دوران فیبوناکچی در اروپا با این اعداد آشنائی وجود داشت . دراینصورت چرا **اصل مختصات** پیشتر در ریاضیات به وجود نیامد ؟ جواب این سؤال را می‌توان در تأثیر عظیم عقیدهٔ یونانی که بر فکر اروپائی تسلط داشت جستجو کرد . آزاد شدن عدد ازممنوعیت‌هائی که به وسیلهٔ یونانیان برآن تحمیل شده بود ، آنطور که امروز به‌نظر می‌رسد ، کار ساده‌ای نبود .

۱۶ هندسهٔ دکارتی به هر نقطه برروی صفحه دوعددحقیقی تخصیص می‌دهد ، و برای هر جفت عدد حقیقی نقطه‌ای در روی صفحه درنظرمی گیرد . این هندسهٔ مجموعهٔ جفت‌هائی از اعداد حقیقی را با نقاط واقع در روی یك صفحه همانند می‌دانند . از اینجافقط یك گام دیگر باقیمانده است تا نقطه به‌عنوان **فردعددی**

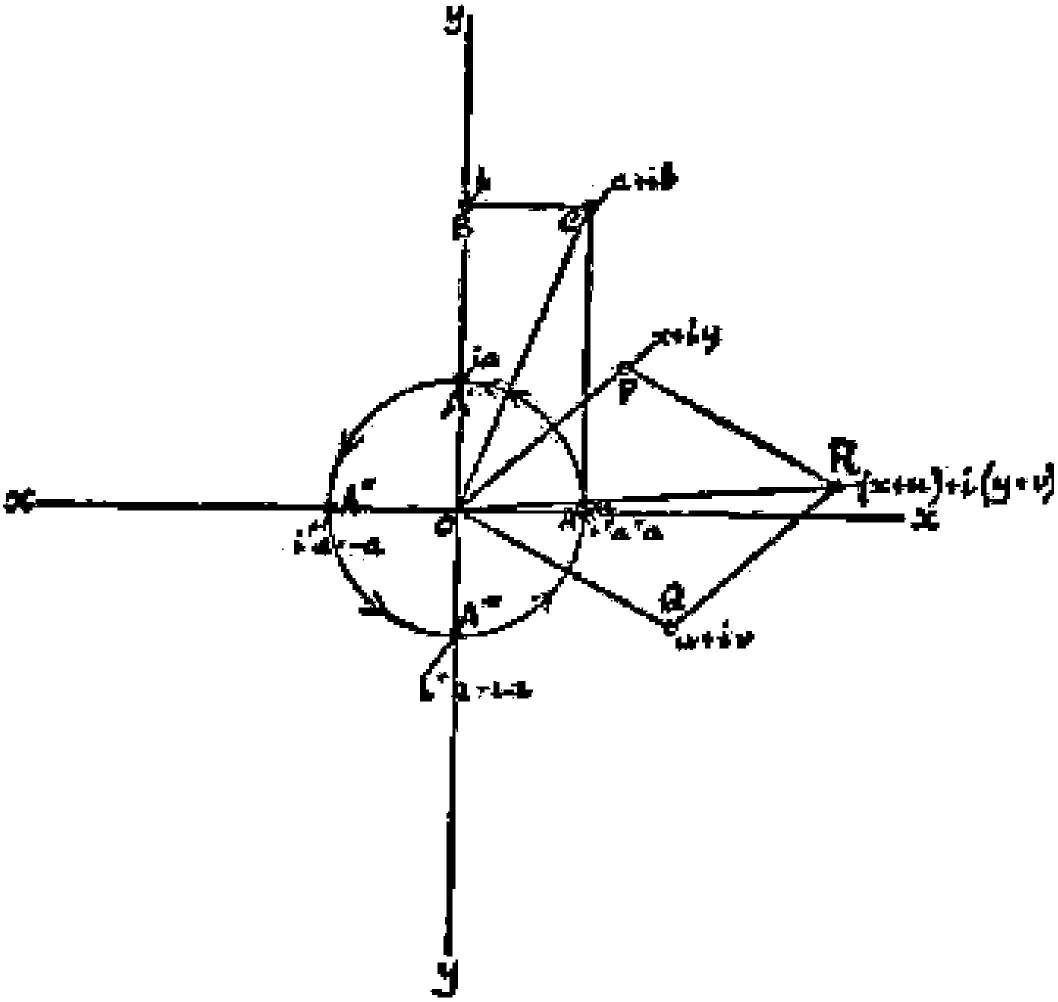
(number – individual) یا به عنوان یك عدد پذیرفته شود . اما برداشتن این گام نیز تقریباً دوقرن به تاخیر افتاد.

در ۱۷۹۷ یك نقشه‌بردار نروژی گمنام به‌نام وسل (Wessel) درمقابل آکادمی علوم دانمارك گزارشی دربارهٔ تفسیر هندسی مقادیر مرکب داد . این گزارش بـا بی‌اعتنائی مواجه‌گشت و فقط صد سال بعد بودکه دردنیای علم شهرت خود را کسب کرد . در همان سال ۱۷۹۷ ، گاوس بیست ساله ، از رسالهٔ دکترای خود دربارهٔ قضیهٔ اساسی جبر دفاع می‌کرد که در آن به‌طور ضمنی نمایش هندسی قلمرواعداد مرکب را به‌کار برده بود . در ۱۸۰۶ روبرت‌آرگاند ، یك کتاب‌دار پاریسی گمنام که در سویس متولد شده بود ، مقاله‌ای در بارهٔ توضیح هندسی اعداد مرکب انتشار داد . این امر نیز تا ده‌سال بعد ، هنگامی‌که دریکی ازروزنامه‌های برجستهٔ ریاضی مجدداً انتشار یافت ، با بی‌توجهی برگزار شد . بالاخره گاوس در ۱۸۳۱ ، در مقاله‌ای که قبلا از آن نقل کردیم ، با دقت تمام **هم‌ارزی ریاضی هندسه مسطحهٔ‌دکارتی‌را باقلمرو عدد مرکب به شکل فرمول درآورد .**

طبق این‌فرمول بندی‌که اصولا همان شکل وسل وآرگاند است ، یك عدد حقیقی نقطه‌ای را برروی محور x از نمودار دکارتی نمایش می‌دهد . اگراین عدد حقیقی a باشد (به‌شکل صفحهٔ ۲۶۵ مراجعه‌کنید) و A نقطهٔ نمایندهٔ آن در روی محور x ، دراینصورت ضرب این عدد در i هم‌ارز اینست‌که حامل OA به اندازهٔ °۹۰ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران کرده‌باشد ؛ دراینصورت عدد a i به وسیلهٔ نقطهٔ Á درروی

محور y نمایش داده می‌شود . اگر بار دیگر این عدد در i ضرب شود $i^2a = -a$ به دست می‌آید که نمایش نقطهٔ $\acute{A}$ بر روی محور x است ، والی آخر . چهـار دوران متوالی ، هر یـك برابر ۹۰ درجه ، نقطه را مجدداً به جای اصلی خود بازمی‌گرداند . و این تفسیر هندسی رابطه‌ای است که در صفحهٔ ۲۶۳ گفته شد .

بعلاوه مجموع $a+ib$ را می‌توان به وسیلهٔ **ترکیب** حاملهای OA و OB به دست آورد، که در آن A نقطهٔ نمایندهٔ



نمودار گاوس - آرگان

عدد حقیقی a و B مربوط به عدد موهومی محض b i است.
در نتیجه a+ib نمایش انتهای c از قطر مستطیلی است که بر روی OA و OB ساخته شده است. بنابراین عدد مرکب a+ib همانند نقطه‌ای از نمودار دکارتی است که طول از مبدأ آن a و عرض از مبدأ آن b باشد.

جمع دو عدد مرکب که به ترتیب به وسیلهٔ نقاط P و Q نمایش داده شده‌اند، با ترکیب دو حامل OP و OQ طبق قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع به دست می‌آید. ضرب یك عدد مرکب در یك عدد حقیقی، مثلاً ۳، عبارتست از امتداد دادن حامل OP به نسبت ۳ به ۱. ضرب عدد مرکب در i عبارتست از یك دوران ۹۰ درجه در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، و الی آخر.

جزئیات اعمال به وسیلهٔ مثالی در شکل نشان داده شده است.

۱۷ کشف این تعبیر ملموس به موجودات شبحی بومبلی قالب مادی پوشانید. این امر موهومی را از مرکب بیرون آورد و به جای آن تصویری قرار داد.

این برهان و براهین هم عصر آن درباره: اینکه هرمعادلهٔ جبری و هرمعادله از طبقهٔ وسیع ترانساندان، جوابی ازقلمرو اعداد مرکب را می‌پذیرند، باعث انقلابی واقعی در ریاضیات گردید.

کوشی، وایرشتراس، ریمان و سایرین تمام دستگاه فرایندهای بینهایت را تا قلمرو اعداد مرکب گسترش دادند. بدین‌ترتیب نظریهٔ توابع مربوط به‌متغیر مرکب، باتمام نتایج

پردامنهٔ خود برای آنالیز و هندسه و فیزیك و ریاضی به‌وجود آمد .

درمیدان هندسه‌پونسله و فن شتاوت (Von Staudt) و سایرین ، عدد مرکب را به عنوان نقطهٔ شروع برای به‌وجود آوردن یك هندسهٔ تصویری عمومی اختیار کردند ؛ لباچفسکی ، بولیای ، لی (Lie) ، ریمان ، کی‌لی (Cayley) ، کلاین (Klein) وعدهٔ زیادی دیگرپهنهٔ بیکران هندسهٔ غیراوقلیدسی را گشودند . کاربرد عدد مرکب برای هندسهٔ بینهایت کوچك بالاخره هندسهٔ دیفرانسیلی مطلق راکه پایهٔ نظریهٔ نسبیت جدید است به وجود آورد .

کومردرنظریهٔ اعداد روش‌مقسوم علیه‌های‌مرکب‌راآفرید ونام اعداد مثالی (ideal) را برآن گذارد وبدانوسیله مسألهٔ فرما ومسائل دیگرمربوط به‌آن را تامراحلی‌که در وهم نمی‌ـ گنجد پیش برد .

۱۸ این‌کامیابی بزرگ سبب پیدا شدن تعمیم‌هائی شد ، و این‌کار تعمیم مسائل وتعاریف‌هارا درردوجهت صورت پذیرفت . نخست این سؤال مورد نظرقرارگرفت‌که آیا واحدهای‌مرکب را می‌توان چنان به کار بـرد که از قوانینی غیراز $i^2 = -1$ تبعیت‌کنند . کارهای زیادی در این زمینه انجام گرفت ، که از بحث فعلی ما خارج است . درمرحلهٔ دوم ، طبیعی چنان بودکه تحقیق شودکه‌آیا نقاط فضای سه بعدی را نیزمی‌توان به عنوان اعداد افرادعددی موردتوجه قرار داد؛ ازاین بررسی‌آموزش جدیدتشکیل شدکه درآخرکار به‌صورت آنالیزحاملی امروز

درآمد، که خود نقش اساسی در مکانیك جدید دارد. یکی دیگر از نتایج این تحقیق نظریهٔ کواترنیون‌های (quaternions) هامیلتون (Hamilton) و نظریهٔ گراسمان (Grassman) وابسته به آن به نام نظریهٔ کمیتهای گسترده (extensive magnitudes) بود.

این تعمیم‌ها اهمیت این قضیه‌را روشن کرد که پیشروی در زمینه‌هائی در ماورای قلمرو عدد مرکب **تنها با بهای تزلزل اصل دوام میسر است**. قلمرو عدد مرکب آخرین حد این اصل است، در ورای آن یا خاصیت تلفیقی اعمال حساب یا نقشی که صفر درحساب بازی می‌کند، فدا خواهد شد.

این امر بررسی خواص اعمال حسابی را به صورت کلی واجب شمرد. بدین‌ترتیب با حذف بعضی از محدودیت‌ها اصل دوام توسعه یافت. نتیجهٔ آن طرح نظریهٔ پرداعنهٔ **ماتریس‌ها** بود که در آن به یك رشتهٔ کامل عناصر به عنوان یك فرد عددی نظر می‌شود. این «جعبه‌های بایگانی» بایکدیگر جمع یا درهم ضرب می‌شوند و مجموعه‌ای از محاسبات ماتریس‌ها را به‌وجود می‌آورند که می‌توان آنرا بعنوان ادامهٔ جبر اعداد مرکب در نظر گرفت. اخیراً این موجودات مجرد در نظریهٔ کوانتوم و در سایر زمینه‌های علمی تعبیری جالب به دست آوردند.

۱۹ داستان اجمالی کمیتهای مرکب از این قرار است، که درطول قرنها بـه‌صورت پیوندی عارفانه میان عقل و تخیل خودنمائی می‌کرد. لایب‌نیتز دراین باره می‌گوید:

«روح الهی گذرگاهی در آن آنالیز بدیع و شگفت ، در آن موجود خارق‌العادهٔ دنیای مثالی، درآن‌موجود دوزیستی که بین بودن و نبودن زندگی می‌کرد وما آنرا ریشه خالی واحد منفی می‌نامیم ، به‌دست‌آورد.»

دیگران اعداد مرکب را به عنوان بازی باعلامات می‌انگاشتند که به علت دلایل غیرقابل ذکر به نتایج عملی رسیده است. سودمندی آنها علت وجودشان را موجه نشان داد ، همان گونه که هدف وسیله را موجه نشان می‌دهد . با این اعداد روش کار تکامل یافت و نتیجهٔ بسیاری از مسائل را ، که جز از این راه دسترس به‌آنها میسر نبود ، پیش‌بینی‌کردند . این اشباح غالباً احضار می‌شدند ، ولی این کار باشك و شبهه‌ای همراه بود .

وپس‌ازآن روزی فرا رسید که معلوم شد این مخلوقات شبحی بومیلی اصلا اشباح نیستند ، بلکه مانند هرعدد حقیقی دیگرموجودیتی ملموس ومشخص دارند. بعلاوه این موجودات مرکب نوعی وجود دوگانه دارند : از یك طرف از همهٔ قوانین حساب تبعیت می‌کنند و به این لحاظ اعدادی درست وحسابی هستند ؛ ازطرف دیگر در داخل نقاط صفحه نمونه مجسمی برای خود دارند . وچنین بودکه ، برای تفسیرعددی روابط پیچیدهٔ هندسی موجود میان اشکال صفحه ، به صورت ابزاری عالی درآمدند .

هنگامی که این‌امر تحقق پذیرفت، **حسابی‌شدن هندسه**، که بدون قصد به‌وسیلهٔ فرما ودکارت شروع شده بود ، به‌صورت یك واقعیت تمام شده درآمد . وبدین‌ترتیب بودکه عدد مرکب، که منشأ آن در **نشانه‌ای برای یك پندار** بود ، به صورت ابزاری ضروری برای فرمول‌بندی افکار ریاضی و برای حل

مسائل پیچیده ، و به صورت وسیله‌ای برای به‌وجود آوردن خویشاوندی بین آموزش‌های مجزا و بی‌ارتباط درآمد.

نتیجه : **پندار شکلی است در جستجوی یک تعبیر .**

گئورگ کانتور (Georg Cantor)

« جوهر ریاضیات آزادی آنست . »

۱۱ | کالبد شناسی بینهایت

۱ اندازه‌گیری تعدد (plurality) یك مجموعه نا ـ محدود در نظر اول عجیب به نظر می‌آیـد . با اینحال ، حتی کسانی که حداقل آشنائی با افکار ریاضی دارند ، با احساسی مبهم می‌دانندکه بین بینهایت و بینهایت فرق است ـ یعنی بین اصطلاح بینهایتی‌که به رشتهٔ طبیعی اعداد وابسته می‌شود ، وآن بینهایتی که دربارهٔ نقاط واقع برروی یك خط به کار می‌رود اختلاف اساسی وجود دارد .

این تصور مبهمی را که ما از « محتویات » مجموعه‌ای بینهایت داریم می‌توان از راه تشبیه با تور ماهیگیری بهتر نشان داد. اگر ما توری را که گشادگی چشمه‌های آن مساوی واحد است بیندازیم، همهٔ اعداد صحیح در تور باقی می‌مانند، و همهٔ اعداد دیگر از تور بیرون می‌روند. سپس توری با چشمهٔ ۱۰/۱ بیندازیم؛ سپس با چشمه ۱۰۰/۱؛ و بهمین ترتیب کار را ادامه دهیم و بیشتر و بیشتر اعداد گویا را جمع آوری کنیم. ما حدی برای ریزی چشمه‌های تور نمی‌توانیم قائل شویم، زیرا هر قدر توری که می‌اندازیم ظریف باشد، توری ظریفتر از آن **ممکن است** انداخته شود. توسن خیال را آزاد بگذارید و شما می‌توانید چشمه‌های این تور ماقبل آخر را که دارای حلقه‌های بسیار ظریف و تنگ است در نظر بگیرید که **تمام** اعداد گویا را درخود جمع کرده است.

وقتی که این تشبیه را تاحد آخر خود به جلو ببریم و این تور نهائی را به مثابهٔ چیزی ثابت و تغییر ناپذیر در نظر بگیریم، به‌تمام مشکلاتی که بامهارت زیاد بوسیلهٔ زنون به‌وجود آمده است برمی‌خوریم. ولی در اینجا مشکل دیگری درمقابل ما خودنمائی می‌کند.

این تور گویای ماقبل آخر، برفرض اینکه قابل‌ساختن باشد، هنوز قادر نخواهد بودکه **تمام اعداد** را درخود نگاه دارد. تور «**تنگ‌تری**» برای اعداد گنگ جبری لازم‌داریم؟ وحتی‌این تور«جبری» نمی‌تواند اعدادفوق‌جبری (ترانساندان) را جمع کند. و بدین‌ترتیب به‌علم حضوری درمی‌یابیم که قلمرو عددگویا فشرده‌تر از قلمرو اعداد طبیعی است؛ و اینکه قلمرو

اعداد جبری از آن هم فشرده‌تر است ؛ و بالاخره اینکه قلمرو عدد حقیقی ، یا محیط پیوستهٔ حسابی ، **محیط فراچگال** محیطی بی‌شکاف وتوری باچشمهٔ صفراست .

پس اگر برای نخستین بار به ما گفته می‌شدکه کانتور ، برای طبقه‌بندی مجموعه‌های نامحدود و برای شناساندن هریك از آنها با عددی‌که نمایندهٔ تعدد آن باشد ، عملاکوشیده است ، طبیعتاً چنین انتظار داشتیم که وی در پیداکردن مقیاسی برای این فشردگی متغیر توفیق به دست آورده است .

و به دلیل همین انتظارها ،کار کانتور شگفتی‌های زیادی برای ماذخیره‌کرده است ، وبعضی ازآنها آنقدرشگفت‌انگیزند که گوئی در سرحد بیهودگی و پوچی قرار دارند .

۴ کوشش‌برای اندازه‌گیری فشردگی‌مجموعه‌ای به وسیلهٔ تورها محکوم به شکست است ، زیرا که اصولا عملی فیزیکی است نه عملی حسابی . از آن جهت حسابی نیست که برپایهٔ اصل تطابق ، که حساب بـر آن بنا شده است ، قرار ندارد . طبقه‌بندی **بینهایت بالفعل** ، به عبارت دیگر ، انواع مختلف تعدد مجموعه‌های نامحدود ، اگرچنین طبقه‌بندیی ممکن باشد ، می‌بایست درهمان راهی باشدکه تعدد مجموعه‌های محدود برآن اساس طبقه‌بندی شده است .

در فصل اول کتاب دیدیم که مفهوم **تعدد مطلق** ملکهٔ فطری عقل بشری نیست . پیدایش عدد طبیعی ، یا عدد اصلی را می‌توان مربوط به ملکهٔ مقایسهٔ ما دانست ، کـه امکان تطابق بین مجموعه‌ها را برایمان فراهم می‌سازد. **تصور مساوی ــ**

بزرگتر - کوچکتر ، برمفهوم عدد تقدم داشته است ؛ مقایسه را قبل از **اندازه‌گیری** فرا می‌گیریم . حساب نه با اعداد بلکه با **ملاك‌ها** شروع می‌شود . قدم بعدی ، برای انسانی که این ملاك **تساوی - بزرگی - کوچکی** را به کار می‌برد ، تهیهٔ الگوهایی برای **انواع** مختلف تعدد بود . این الگوها ، درست به همان صورت که متر نمونه در ادارهٔ اوزان و مقادیر پاریس بایگانی شده ، در مغز آدمی بایگانی شده‌اند . یك ، دو ، سه ، چهار .... پنج ؛ به جای اینها می‌توانستیم داشته باشیم : من ، بالها ، شبدر ، دست و پا ، دست... و ، تا آن‌جا که می‌دانیم ، نامگذاری اخیر بر نامگذاری اول تقدم داشته است .

اصل تطابق عدد صحیح را به وجود می‌آورد ، و به وسیلهٔ عدد صحیح بر تمام حساب حکمروائی می‌کنند . و از همین طریق ، قبل از آنکه بتوانیم تعدد مجموعه‌های نامحدود را اندازه‌گیری کنیم ، باید راه مقایسهٔ آنها را بیابیم . چگونه ؟ از همان راهی که این کار برای مجموعه های محدود صورت گرفته است ؛ جریان مقایسه ، که چنین خدمت برجسته‌ای را در زمینهٔ حساب محدود انجام داده است ، باید به **حساب بینهایت** نیز گسترش یابد : زیرا عناصر دو مجموعهٔ بینهایت را نیز می‌توان یك به یك با یکدیگر مقایسه کرد .

۳ امکان به وجود آوردن یك تطابق بین دو مجموعهٔ نامحدود در یکی از گفتگوهای گالیله، که اولین سند تاریخی دربارهٔ مجموعه‌های بینهایت است ، مطرح گردیده است . من

این گفتگو را از کتابی که عنوان آن « گفتگو دربارهٔ علوم جدید » است و در ۱۶۳۶ منتشر گردیده عیناً استنساخ می‌کنم. سه نفر دراین گفتگو شرکت دارند. از این سه نفر، ساگردو (Sagredo) نمایندهٔ مغز عملی است، سیمپلیکیو (Simplicio) کسی است که با شیوه‌های اسکولاستیك تربیت شده است، و کاملا پیدا است که نفر سوم یعنی سالویاتی (Salviati) کسی جز خود گالیله نیست.

سالویاتی: یکی از مشکلات آنست که وقتی ما با مغزهای محدود خود می‌کوشیم تا بینهایت را مطرح کنیم، آنرا واجد صفاتی می‌کنیم که به چیزهای معین و محدود اختصاص دارند؛ اما من تصور می‌کنم که این کار اشتباهی باشد، زیرا که ما از مقادیر بینهایتی که مساوی یا بزرگتر یا کوچکتر از یکدیگر باشند نمی‌توانیم سخن بگوئیم. برای اثبات این امر من در فکر خود برهانی دارم که برای روشن شدن باید آن را به شکل سؤالاتی از سیمپلیکیو که این مشکل را عنوان کرده است در آورم.

این را مسلم فرض می‌کنم که شما می‌دانید که چه اعدادی مربعند و چه اعدادی چنین نیستند.

سیمپلیکیو: این را نیك می‌دانم که عدد مربع عددی است که از ضرب یك عدد در خودش به وجود آمده باشد؛ بنابراین ۴ و ۹ و غیره اعدادی مربعند که از ضرب ۲ و ۳ و غیره در خودشان به وجود آمده‌اند.

سالویاتی: بسیار خوب؛ و نیز این را می‌دانید که همانطورکه به این حاصلضرب‌ها مربع می‌گویند، عوامل ضرب را ریشه‌ها یا اضلاع نام می‌گذارند؛ درصورتی که، از طرف دیگر، آن اعدادی که شامل دو

عامل مساوی نیستند مربع نیز نخواهند بود . بنابراین اگر من ادعا کنم که همهٔ اعداد ، اعم ازمربع‌ها و غیرمربع‌ها ، تعدادشان بیش‌ازمربع‌هائی است که در بالا گفته شد ، آیا حقیقتی‌را بیان نداشته‌ام؟

سیمپلیکیو : کاملا صحیح‌است .

سالویاتی : اگرمن سؤال کنم که تعداد مربع‌هاچند است ، شما می‌توانید به درستی جواب دهیدکه به تعداد ریشه‌های‌متناظرمربع وجود دارد ، ازیرا هرمربعی دارای ریشهٔ مخصوص به خود و هر ریشه‌ای نیز مربع مخصوص به خود دارد ، درصورتی‌که هیچ مربعی بیش از یك‌ریشه و هیچ ریشه‌ای بیش‌از یك مربع نخواهد داشت.

سیمپلیکیو : دقیقاً همینطور است.

سالویاتی : اما اگر من بپرسم که تعداد ریشه‌هاچند است ، نمی‌توان منکرشدکه به‌تعداد اعدادریشه موجوداست، زیرا هرعددریشه‌ای برای یك مربع است . با قبول این امر باید بگوئیم‌که به تعداد اعداد موجود مربع داریم ، زیرا که مربع‌ها تعدادشان به‌اندازهٔ ریشه‌ها است ، و هرعددی ریشه‌ای است . اما در شروع کار گفتیم‌که شمارهٔ اعداد بیش از شمارهٔ مربع‌ها است ، از آن جهت که قسمت اعظم‌آنها مربع نیستند . صرف‌نظر از این ، تعداد نسبی مربع‌ها با رسیدن به‌اعداد بزرگتر تقلیل می‌یابد . بدین ترتیب تا ۱۰۰ دارای ۱۰ مربع هستیم، یعنی مربع‌ها یك دهم تمام اعدادند ؛ تا ۱۰۰۰۰ فقط یك صدم آن‌ها مربع‌اند، و تا یك میلیون تنها یك هزارم آنها چنین هستند ؛ و اما از طرف دیگراگر شما بتوانید تصوری از بینهایت عدد داشته باشید مجبور خواهیدبود قبول کنید که تعداد مجذورهای کامل برابر همهٔ اعداد است‌که یکجا جمع شوند.

ساگردو : پس‌بااین ترتیب چه نتیجه‌ای می‌توان به‌دست‌آورد؟

سالویاتی : تا آنجا که من می‌دانم، فقط می‌توانیم چنین استنباط کنیم که تعداد مربع‌ها بینهایت و تعداد ریشه‌های آنها نیز بینهایت است ؛ نه تعداد مربع‌ها کمتر از کلیهٔ اعداد است و نه اینها بیشتر از آنها هستند ؛ و بالاخره صفات «برابر» ، «بزرگتر» و «کمتر» برای بینهایت قابل اطلاق نبوده فقط مربوط به مقادیر محدودند.

بنا بر این ، هنگامی که سیمپلیکیو چندین خط با طولهای مختلف را ارائه می‌دهد و می‌پرسد چطور ممکن است که خطهای بزرگتر شامل نقاطی بیش از نقاط خط کوچکتر نباشند ، به او جواب می‌دهم که تعداد نقاط یك خط مساوی ، کمتر و یا بیشتر از نقاط خط دیگر نیست ، بلکه هر خط دارای بینهایت نقطه است .

۴ ابهام گالیله اثر روشنی در معاصرین او باقی نگذاشت. تا دویست سال چیزی به این مسأله کمك نکرد. بعداً در ۱۸۲۰ رسالهٔ کوچکی به وسیلهٔ بولتسانو (Bolzano) در آلمان منتشر شد که عنوان « ابهامات بینهایت » را داشت. به این رساله نیز توجه کمی مبذول گشت ؛ و در واقع آنقدر نا چیز بود که وقتی پنجاه سال بعد نظریهٔ مجموعه‌ها موضوع بحث روز شد ، تعداد کمی از ریاضی‌دانان نویسندهٔ آنرا می‌شناختند.

امروز مشارکت بولتسانو در این امر فقط جنبهٔ تاریخی دارد . با اینکه درست است که او اولین کسی بود کـه مسألهٔ **بینهایت بالفعل** را مطرح کرد اما در این راه زیاد پیش نرفت . با این حال ، افتخار آفریدن مفهوم بسیار مهم **توان** یك مجموعه، که به اختصار از آن صحبت خواهیم کرد، مخصوص او است.

نظریهٔ جدید مجموعه‌ها به وسیلهٔ کانتور آغاز شد. مقالهٔ

او ، که پایـه‌گذار این شاخهٔ جدید ریاضی بـود ، در ۱۸۸۳ تحت عنوان « دربارهٔ مجموعه‌های خطی » انتشار یافت . ایـن اولین مقاله‌ای بود که با بینهایت‌بالفعل‌مانند یك موجود ریاضی مشخص رفتار می‌کرد . قسمت زیر که از این مقاله گرفته شده نظر کانتور را در این موضوع کاملا روشن می‌سازد :

« سنت چنین است که بینهایت به عنوان چیزی که به طور نامعین رشد می‌کند ، یا به عبارت رایج در قرن هفدهم که صورت دیگر همین بیان است رشتهٔ همگرائی است . درمقابل این ، من بینهایت را شکل قطعی از چیزی که کامل شده است ، چیزی که نه تنها بتواند وارد یك فرمول ریاضی شود ، بلکه به وسیلهٔ عدد قابل تعریف باشد ، تصور می‌کنم . این طرز تصور بینهـایت مخالف سنت‌هائی است که برای ما عزیزند ، و من علی‌رغم میل قلبی خود مجبور به قبول آن شده‌ام. اما سالها تفکر و تحقیق ریاضی با یك الزام منطقی به این نتایج انجامیده است ، و به این دلیل من ایمان دارم که هیچ اعتراض معتبری، که من از عهدهٔ جواب گفتن با آن برنیایم ، نمی‌تواند ارائه شود . »

۵ برای آنکه بدانیم چه اندازه جسارت وتهور لازم بوده است تا چنان گستاخانـه سد سنت‌های کهن شکسته شود ، باید وضع کلی دوران نسل کانتور را در مقابل **بینهایت بالفعل** فهم کنیم . بـدین منظورمن قسمتی از نامهٔ گاوس بزرگ را به شوماخر (Schumacher) نقل می‌کنم کـه ، با آنـکه در ۱۸۳۱ نوشته شده ، آهنگ جهان ریاضی را برای نیم قرن بعد از خود مشخص کرده است :

« و اما دربارهٔ برهان شما ، باید بگویم که من به شدت به این تصور که بینهایت چیزی کامل شده است اعتراض دارم ، و چنین تصوری در ریاضیات مجاز نیست . بینهایت فقط صورتی کلامی است و چیزی جز این نیست ؛ شکل خلاصه شده‌ای است برای بیان اینکه حدودی وجود دارند که بعضی از نسبت‌ها تا حد دلخواه ما می‌توانند به آن نزدیك شوند ، درصورتی‌که مقادیر می‌توانند در آن طرف هرحدی بزرك شوند ...»

« ... تا زمانی‌که انسان محدود بینهایت را به اشتباه برای چیزی ثابت در نظر نگیرد، و تا زمانی‌که با نیروی عادی فکری خود بینهایت را بمثابهٔ چیزی محدود ومحصوردرنظرنگیرد ، تناقضی به وجود نخواهد آمد . »

طرز تصور گاوس همان طرز تصور رایــج زمان خودش بود ، و از این‌جا می‌توان به طوفانی کــه دفاع آشکار کانتور در اردوی پیروان سنت‌ها به پا کرد پی برد . نه به خاطراینکه بینهایت‌بالفعل به این شکل و یا به شکل دیگر در زمان کانتور به کار نمی‌رفت ، بلکه به این دلیل که وضع سنت در بارهٔ این موضوعها مانند وضع نجبای جنوبی درمقابل بی‌عفتی بود : آنها بدون اینکه در حضور یك خانم کلمه ای از موضوع بیان دارند عمل آن را مرتکب می‌شدند .

خوشبختی کانتور در این بود کــه فکر پــختهٔ او وی را برای مقابلهٔ با حملهٔ سخت آماده کرده بود ، و تا سالها بعد می‌توانست یك تنه بجنگد . و چه جنگی ! تاریخ ریاضیات خصومتی را که بتواند از نظر حدت با آن برابری کند ثبت نکرده است . شروع طوفانی نظریهٔ مجموعه‌ها نشان می‌دهد که حتی در میدان مجردی چون ریاضیات نیز نمی‌توان احساسات

هیجانی بشر را کلاً نادیده گرفت .

۶ کانتور از آنجا شروع کرد که گالیله رها کرده بود ، آری ، می‌توان تطابقی بین دو مجموعهٔ بینهایت برقرار کرد ، حتی اگر یکی از این بینهایت‌ها جزئی از دیگری باشد ! بنابراین برای بیان دقیق‌تر موضوع اجازه بدهید بگوئیم که دو مجموعهٔ **محدود** یا **نامحدود** ، اگر بتوان آنها را عنصر به عنصر بایکدیگر مقابله کرد ، هم‌ارزند یادارای یك **توانند** . **اگر** دومجموعه دارای **توان متفاوتی باشند** ، در این صورت در جریان مقابله یکی از آنها تمام خواهد شد ، اما عناصر مقابله نشده‌ای از مجموعهٔ دوم باقی خواهد ماند . به عبارت دیگر ممکن است اولی را با **جزئی** از دومی مقابله کرد ، اما دومی را نمی‌توان باهیچ قسمتی از اولی مقابله نمود . با این ترتیب ما می‌گوئیم که مجموعه دوم دارای **توانی بزرگتر** از اولی است .

اگر (A) و (B) دو مجموعهٔ **محدود** باشند که تعداد عناصر هر دو برابر باشد ، آشکار است که آنها دارای یك توانند ؛ و بالعکس اگر (A) و (B) مجموعه‌های **محدودی** با توان برابر باشند ، عدد **اصلی** آنها نیز برابر است . اگر (A)و(B) دارای توان نامساوی باشند ، آنکه توانش بزرگتر است با عدد اصلی بزرگتری متناظر است . **بنابراین ، برای مجموعه‌های محدود ، مفهوم را می‌توان با مفهوم عدد اصلی یکی دانست** . اینك ، باتوجه به اینکه **در حساب محدود** کلمهٔ توان می‌تواند همانند **عدد اصلی** باشد ،

طبیعتاً این سؤال پیش می‌آید که آیا ممکن است توانهای مجموعه‌های بینهایت را بـا اعدادی از مرتبهٔ بالاتر بـا اعداد **ماوراء محدود** (transfinite) همانند دانست،و به وسیلهٔ این تصور جدید یك **حساب ماوراء محدود** ، یعنی حساب بینهایت را آفرید یا نه .

اگر ما در امتداد خطوطی کـه به وسیلهٔ حساب محدود طرح شده‌اند راه بیفتیم ، باید به‌جستجوی مجموعه‌های الگوئی بپردازیم که هر قالبی نمایندهٔ یك نمونهٔ مشخص از تعدد باشد . این الگوها کاملا در دسترس ما قرار دارنـد : رشتهٔ طبیعی ، قلمرو گویا ، میدان اعداد جبری ، محیط پیوستهٔ حسابی ــ همهٔ این مجموعه‌های نامحدود کـه از کثرت استعمال چنین آشنا به‌نظر ما می‌رسند ، به شکل تحسین‌آمیزی به عنوان ملاكهائی برای مقایسه به‌کار رفته‌اند . در این صورت اجازه بدهید کـه این مجموعه‌های ملاکی را باعلامتی مشخص کنیم ، و بگذاریم این علامات همان نقشی را که المثنای آنها ، یعنی اعداد اصلی محدود ۱ ، ۲ ، ۳ . . . درحساب محدود ایفـا می‌کنند ، در حساب ماوراء محدود بازی‌نمایند .

کانتور این علامات را **اصلی‌های ماوراء محدود** (transfinite cardinals) نامگذاری‌کرده است . آنها را در یك رشته با توان دائم التزایـد منظم کرده است ؛ اعمال اصلی جمع ، ضرب و به تـوان رساندن را درٔبارهٔ این موجودات مجرد اجرا کرده است ؛ نشان داده است که چگونه آنها با خود وبا اعداد اصلی محدود ترکیب می‌شوند . خلاصه این موجودات خیالی زائیدهٔ نبوغ کانتور آنقدر خواص مقادیر

محدود را دربر دارند که اعطای عنوان « عدد » به آنها کاملا مناسب به‌نظر می‌رسد . اما یکی از خواص بسیار مهمی که آنها فاقدند محدودیت است . جملهٔ اخیر توضیح واضحی به نظر می‌رسد ، و باوجود این از اهمیت آن نباید غافل شد . تمام قضایای معماآمیزی که دربارهٔ آنها بحث می‌کنم ازاین واقعیت سرچشمه می‌گیرند که این موجودات ریاضی ، که دارای تمام ظواهر عدد می‌باشند، از بعضی‌صفات اولیهٔ عددمعمولی محرومند. یکی از نتایج جالب‌توجه این تعریف آنست کـه جزئی از یك مجموعه الزاماً کوچکتر از کل آن نخواهد بود : این قسمت می‌تواند مساوی کل آن باشد .

۷ جزء می‌تواند توان کل را داشته باشد . چنان می‌نمایدکه این سخن بیش از علم ریاضی به علم کلام مربوط است . و در واقع ما می‌بینیم که این فکر بازیچهٔ دست عده‌ای از حکمای الهی (متکلمان) و نزدیکـان آنها بوده است . در کتاب‌های سانسکریت ، که دین با مسرت تمام با فلسفه و ریاضیات و دستورات جنسی ممزوج شـده است ، ازاینگونـه مطالب زیاد به نظر می‌رسد . مثلا بهاسکارا هنگام تحقیق در بارهٔ ماهیت ۱/۰ می‌گوید که این عدد « شبیه است به بینهایت ، به خداوندی که وقتی جهانهای کهنه ازبین می‌روند وجهانهای نو آفریده می‌شوند ، و هنگامی‌که مخلوقات بیشمار متولد می‌گردند و یا عدهٔ زیادی نابود می‌شوند ، تغییر نمی‌پذیرد . »

« جزء دارای توان کل است » این است جوهر معمای گالیله . اما در آن حال که گالیله بـا اعلان اینـکه « صفات

مساوی و بزرگتر و کوچکتر بر بینهایت قابل اطلاق نیستند و فقط در مورد مقادیر محدود مصداق دارند » از زیر بار موضوع شانه خالی کرد ، کانتور این مسأله را نقطهٔ عزیمتی برای نظریهٔ مجموعه‌های خود اختیار نمود .

وددکیند حتی پا را فراترمی‌گذارد : درنظروی مشخصهٔ تمام مجموعه‌های نامحدود این است که دارای اجزائی هستند که آنها را می‌توان باکل جور و مقابله کرد . برای روشن شدن مطلب رشتهٔ بینهایتی راکه طبق دلخواه تنظیم شده وترتیب آن بابرچسب معین شده است در نظر بگیرید . اینك هر تعداد محدود از جمل آنرا که می‌خواهید از اول آن کنار بگذارید و مجدداً این رشتهٔ بریده را از نو برچسب بزنید . بازاء هر جملهٔ از دومی یك جمله با همان مرتبه در رشتهٔ اولی وجود خواهد داشت و بالعکس . بنابراین تطابق‌کامل است ودو رشته هم‌توانند ؛ اما نمی‌توان انکار کردکه رشتهٔ دوم چیزی بغیراز جزئی از رشتهٔ اول نیست . این پدیده فقط برای مجموعه های بینهایت امکان‌پذیر است ، زیرا مشخصهٔ مجموعه‌های محدود آنست که در آنها کل هرگز برابر جزء نمی گردد .

۸ اما اجازه بدهید به نظریهٔ کانتور بازگردیم : فرض کنیم که علامت a توان مجموعهٔ اعـداد طبیعی را تعیین کند . هر مجموعه‌ای‌که دارای توان a باشد **شمردنی** نامیده خواهد شد . رشتهٔ مربعات کامل که دربرهان گالیله به‌کار رفت یکی از این مجموعه های شمردنی است . اما ، تنها به خاطر این واقعیت که امکان تخصیص یك رتبه بهر جمله نشان دهندهٔ آن

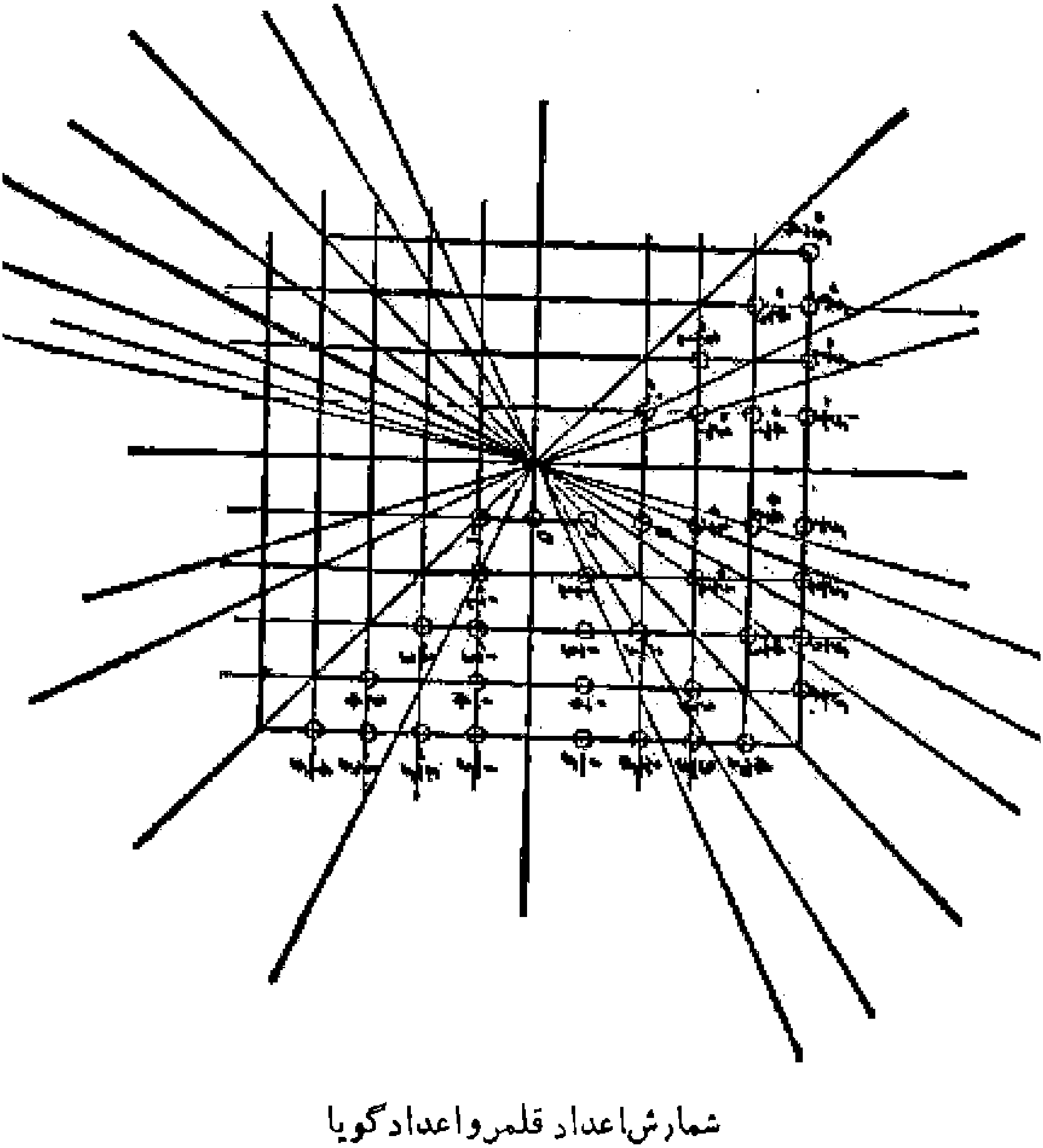
است، که بین رشتهٔ مورد نظر و اعداد طبیعی تطابقی وجود دارد، می‌توان گفت که همهٔ رشته‌ها دارای همین خاصیت‌اند. اعداد زوج، اعداد فرد، هر تصاعد حسابی، هر تصاعد هندسی، و هر رشته به طور کلی قابل شمارش‌اند.

بعلاوه اگر فرض کنیم که هریك از چنین رشته‌ها از قلمرو اعداد طبیعی حذف گردند، مجموعه باقیمانده هنوز نا- محدود بوده و هنوز قابل شمارش است؛ و به همین دلیل است که عمل **تنك کردن** (thinning-out) یك دستگاه قابل شمارش امیدی برای تقلیل توان آن به وجود نمی‌آورد. مثلا ممکن است تمام اعداد زوج، و پس از آن تمام مضارب باقیماندهٔ ۳ و بعد همهٔ مضارب ۵ را که باقیمانده است حذف کرد. می- توانیم این جریان را بی‌اینکه اثری بر توان آنچه که باقیمانده است بگذارد به طور نامحدود ادامه دهیم.

به زبان کانتور، هیچ عدد **ماوراء محدود کوچکتر** از a، که اندازهٔ تعدد هرمجموعهٔ نامحدود قابل شمارش است، وجود ندارد.

اما اگر با تنك کردن رشتهٔ طبیعی امیدی برای بدست آوردن ماوراء محدود کوچکتری نیست، آیا نمی‌توان با **پر کردن** (filling-out) توان مزبور را افزایش داد؟ در واقع معلوم می‌شود که توان قلمرو اعداد گویا، که در همه جا متکاثف است، باید بر توان رشتهٔ طبیعی که منقطع است فزونی داشته باشد. در اینجا مجدداً علم حضوری ما را به گمراهی می‌کشاند زیرا کانتور ثابت می‌کند که مجموعهٔ گویا نیز قابل شمارش است. برای اثبات این امر تنها از راه تخصیص

مرتبه‌ای معین به هرعددگویا باید نشان دادکه خود این اعداد را می‌توان در یك رشته منظم‌کرد . و در واقع این همان‌کاری است که کانتور انجام می‌دهد . ما از راهی هندسی می‌توانیم تصوری کلی از روش کار او پیدا کنیم .



شمارش اعداد قلمرو اعداد گویا

درشکل زیر دو دسته خط عمود بر یکدیگر رسم کرده‌ایم، هر یك از خطوط افقی را به وسیلهٔ عدد صحیح y مشخص می‌کنیم، به‌طوری که y بتواند تمام مقادیر صحیح را از $-\infty$ تا $+\infty$ بپذیرد؛ به همین ترتیب عدد صحیح x نیز مربوط به خطوط قائم است. اینك ما هر یك از نقاط تقاطع این شبکهٔ نامحدود را که بدین ترتیب ساخته‌ایم، به وسیلهٔ دو عدد مربوط به خطوط قائم و افقی متناظر با آن نقطه مشخص می‌کنیم. بنابراین علامت (y,x) نمایندهٔ یك محل تقاطع مشخص در شبکهٔ ما خواهد بود، و بالعکس هر نقطهٔ در این شبکه را می‌توان به وسیلهٔ چنین علامتی نشان داد.

می‌خواهیم ثابت کنیم که کلیهٔ این نقاط مجموعه‌ای قابل شمارش به وجود می‌آورند. برای اثبات این حقیقت جالب توجه کافی است، هماطورکه در شکل نشان داده شده است، کثیرالاضلاعی شبه حلزونی رسم کنیم و نقاط تقاطع را به ترتیبی که بر روی نمودار ظاهر می‌شوند دنبال کنیم.

از طرف دیگر می‌توانیم علامت (y،x) را با کسر $\frac{y}{x}$ نشان دهیم. اما واضح است که اگر این کار را انجام دهیم، نمی‌توانیم به تمام نقاط تقاطع برچسب عدد گویای مشخصی را بزنیم.

در واقع همهٔ نقاط تقاطع واقع بر روی خطی که از مبدأ می‌گذرد نمایندهٔ یك عدد گویا است. برای رفع این ابهام، **توافق می‌کنیم که درحین حرکت بر روی این شبه حلزونی هر کسر را فقط یکبار بشماریم**. این نقاط

تشکیل رشتهٔ زیر را خواهند داد .

$$1,\ 0,\ -1;\ -2,\ 2,\ +\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2};\ -\tfrac{3}{2},\ -3,\ +3,\ +\tfrac{3}{2},\ +\tfrac{2}{3},\ +\tfrac{1}{3},\ \ldots\ldots$$

(به شکل صفحهٔ ۲۸۵ مراجعه کنید)

در اینجا تمام اعداد گویا وارد شده‌اند و هرعدد گویائی فقط یکبار در این رشته ظاهر شده است . **بنابراین قلمرو اعداد گویا قابل شمارش است .**

۹ اما خواننده می‌تواند ادعا کند که این امر درست مخالف تصور ما از آن فشردگی است که طبق آن برای هیچ عددگویا عددی در پی آن وجود ندارد . در واقع میان هر دو عدد گویا می‌توانیم بینهایت عدد گویای دیگر وارد کنیم ؛ اما در اینجا ما در واقع این عمل توالی را اثبات کرده‌ایم ! می‌توان چنین جواب داد : با اینکه در اینجا یك رشتهٔ واقعی وجود دارد اما این رشته ازنوع رشتهٔ طبیعی ۱ ، ۲ ، ۳ . . . . . ، که برحسب بزرگی اعداد منظم شده است ، نیست ما به این دلیل موفق به شمارش اعداد گویا شده‌ایم که درنظم جدید خود ناچار به‌حفظ ترتیب بزرگی اعداد نبوده‌ایم . **به بهای از دست دادن پیوستگی توالی به دست آورده‌ایم.**

چنانکه می‌بینیم ، تشخیص وجه تمایز بین این دو نوع هم‌ارزی مسأله‌ای اساسی‌است . ازنقطهٔ نظر **تطابق** ، دومجموعه هم‌ارزند هرگاه بتوان آنها را عنصر به عنصر با یکدیگرمقابله

کرد . از نقطهٔ نظر **ترتیب** نیز این شکل کار اجتناب ناپذیر است . اما برای هم‌ارزی کامل یعنی بـرای **مشابهت** ، علاوه براینها لازم است که عمل مقابله وجور کردن ترتیب ردیف شدن را برهم نزند ، یعنی هرگاه در مجموعهٔ (A) عنصر a برعنصر á مقدم است ، در مجموعهٔ (B) نیزعنصرمتناظر b' بر b مقدم باشد . مجموعهٔ اعداد گویا کـه برحسب بزرگی به رشتهٔ نظم درآمده‌اند ، و مجموعهٔ منظم شدهٔ حلزونی که به وسیلهٔ آن اعداد گویـا را شمارش کردیم ، از نقطه‌نظر تطابق هم‌ارزند نه از نقطه‌نظر ترتیب . به‌عبارت دیگر عدد اصلی a آنها یکی است ، ولی **نوع ترتیبی** آنها با یکدیگر متفاوت است .

ازاینجا کانتور نظریهٔ **انواع ترتیبی** را پیشنهاد کرد که المثنای اعداد وصفی حساب محدود است . درحساب محدود این خاصیت اساسی وجود داشت ، که هر دومجموعه بـا اعداد اصلی مساوی ، از لحاظ ترتیبی نیز یکسان بودند ، وبه همین دلیل به سهولت می‌توانستیم یکی را از دیگری به دست آوریم . امـا درحساب بینهایت کانتور دو مجموعه ممکن است از نظر عدد اصلی یکسان **و ازنظر ترتیبی متمایز** و به قول کانتور **نامتشابه** باشند.

۱۰ از این قرار ، تنها فشردگی مانـع شمارش نیست ، و عمل پر کردن شکاف‌ها بیش‌از عمل تنك کردن آنها تأثیری بر توان مجموعه نخواهد داشت . به‌همین جهت استنتاج دیگر کانتورکمتر مایهٔ تعجب است ، این استنتاج حاکی از آنست که **مجموعهٔ اعداد جبری نیز قابل شمارش است** . برهان

کانتور برای این نظریه پیروزی نبوغ انسانی است .

او برهان خودرا باتعریف چیزی شروع کردکه **ارتفاع** یك معادله نامیده می‌شود . این ارتفاع عبارتست از مجموع مقادیر مطلق ضرائب یك معادله بعلاوهٔ درجهٔ معادله منهای یك. برای مثال معادلهٔ $۲x^۳-۳x^۲+۴x-۵=۰$ دارای ارتفاع $h=۱۶$ است، زیرا $۱۶=(۳-۱)+۵+۴+۳+۲$

او بعداً ثابت می‌کند که تعداد معادلاتی کــه هر ارتفاع صحیح مثبت h را می‌پذیرند **محدود** است . این مطلب به ما امکان می‌دهدکــه **همهٔ** معادلات جبری را در گروههائی بـا ارتفاع تزایدی منظم‌کنیم، می‌توان ثابت‌کردکه فقط یك معادله با ارتفاع ۱ ، سه معادله با ارتفاع ۲ ، بیست و دو معادله بـا ارتفاع ۳ و الی‌آخر وجود دارد .

اینك می‌توانیم معادلات هر گروه با ارتفاع معین را با اشکال مختلف منظم کنیم . برای مثال می‌توانیم تمام معادلات همدرجه را در یــك‌گروه فرعی وارد کنیم و هر گروه فرعی را طبق اندازهٔ اولین ضریب آن منظم کنیم ، و آنهائی‌که ضرائب اولشان مساوی است طبق دومین ضریب آنها و الی‌آخر .

چنین طبقه‌بندی به ما امکان می‌دهد کــه همهٔ معادلات جبری را مطابق ترتیب خاصی تنظیم کرده بدین‌ترتیب آنها را بشماریم ، یعنی بهرمعادله مرتبه‌ای معین اختصاص دهیــد . هر یك از این معادلات ممکن است یك یاچنــد ریشهٔ حقیقی داشته باشد ، اما تعداد این ریشه‌ها همیشه محدود است در حقیقت از درجهٔ معادله ، و بنابراین از ارتفاع آن ، نمی‌توانند تجاوز کنند. این ریشه‌ها را می‌توان مجدداً طبق بزرگیشان منظم‌کرد.

اکنون اگر ما این طرح را به طور یکپارچه مورد نظر قرار دهیم مطمئناً به مکررات بـرخورد می‌کنیم ، اما در اینجا نیز مانند حالت اعداد گویا موافقت می‌کنیم کـه هرعدد جبری را فقط بار اول که به آن برخوردیم بشماریم و به این ترتیب از این تکرارها اجتناب می‌کنیم .

با این طریق موفق شدیم کـه به هرعدد جبری در این سلسلهٔ مراتب یك مرتبه اختصاص دهیم و یا به عبارت دیـگر **مجموعهٔ اعداد جبری را شمارش کردیم .**

۱۱ شاید در این میان چنین گمانی برای خواننده پیدا شود که **همهٔ مجموعه‌ها قابل شمارش باشند** . اگروضع چنین بود می‌باید فقط یك ماوراء محدود وجود داشته باشـد ، و آنچه‌که برای مجموعه‌های گویا و جبری صادق است باید به طور کلی وحتی برای محیط پیوسته نیز معتبر باشد . باحیله‌ای نظیر ارتفاع کانتور می‌توان هرمجموعهٔ نامحدود را در یـك سلسلهٔ ترتیبی منظم کرد و بـدین‌ترتیب آنرا شمرد . در واقع طرز تصور کـانتور نیز در مراحل اولیه کارش همین بود : **شمارش اعداد حقیقی** یکی ازگوشه‌های برنامهٔ جاه‌طلبانه او بود ؛ و ایجاد نظریهٔ اعداد ماوراء محدود مدیون کوشش او برای «شمارش محیط پیوسته است» .

کانتور در ۱۸۷۴ پی برد که قضیه از این قرار نیست و نمی‌توان تمام اعداد حقیقی را دریك رشتهٔ قابل شمارش منظم کرد . بااین حال اثبات این امر تاسال ۱۸۸۳ میسر نگردید. من نمی‌توانم به شرح جزئیات این اثبات بپردازم ، فقط باید

بگویم که اصل کلی آن عبارت از این است کـه فرض می‌شود تمام اعداد حقیقی دریك سلسله مراتب وارد شده‌اند ، وباروشی که اکنون **روش قطری** نامیده می‌شود ، ثـابت می‌شود کـه می‌توان اعداد دیگری رانمایش دادکه ، بااینکه حقیقی‌هستند، در این شمارش ما وارد نشده‌اند .

یکی از نتایج ضمنی این برهان اهمیتی تاریخی دربـر دارد . خواننده کشف فرازنده‌ها را به وسیلهٔ لیوویل به‌خاطر دارد . این قضیهٔ جاویدان لیوویل مجدداً به عنوان یك محصول فرعی قضیهٔ کانتور ، که می‌گوید محیط پیوسته غیرقابل شمارش است ، به وسیلهٔ خود او ثابت گردید . غنـای نسبی دو قلمرو جبری و فرازنده ، یعنی مسأله‌ای‌که برای لیوویل دارای‌مفهوم مبهمی بود ، اینك باکمال دقت به وسیلهٔ‌کانتور به شکل فرمول درآمده بود . وی ثابت کرد که درآن حال کـه قلمرو جبری مجموعهٔ اعداد طبیعی بتوان a است،فرازنده‌ها دارای **توان c از محیط پیوسته‌اند** . بدین‌ترتیب مجادلهٔ مربوط به‌اینکه تعداد اعداد فرازنده بسیار بسیار بیش از اعداد جبری است ، مفهومی واقعی به دست می‌آورد .

ودر اینجا نیز ، دراین قلمرو اعداد حقیقی ، جزء می‌تواند توان کل را داشته باشد ؛ به زبان جالب توجه گالیله « نقاط محتوی خط طویل‌تر بیش‌از نقاط خط‌کوتاهتر نیست » .

در واقع ، یك قطعه خط هراندازه هم که کوتاه باشد ، دارای همان توان است‌که خط تا بینهایت امتداد یافته دارد ، و یك سطح ، هرقدر هم‌که‌کوچك باشد ، دارای توان تمام صفحه است ، ویك حجم ، هراندازه هم‌که‌کوچك باشد ، دارای توان

تمام فضای سه بعدی لایتناهی است .

خلاصه: **تکه‌تکه کردن یا تکه‌ها را به‌هم پیوستن، مانند تنك کردن یا پر کردن ، تأثیری در توان یك مجموعه ندارد .**

۱۲ دراین‌جا باردیگر علم حضوری ما پیشنهادی را بنجوا بیان می‌کند . آیا در بارهٔ مجموعه‌های با ابعاد بلندتر قضیه از چه قرار است ، یعنی : قلمرو اعداد مرکب که ما آن را با نقاط یك صفحه همانند کردیم ؛ نقاط واقع در فضا ؛ حامل‌ها و کواترنیون‌ها ؛ تانسورها و ماتریس‌ها ، و سایر اعداد مرکب پیچیده‌ای که ریاضی‌دانها آنها را بمثابهٔ عناصری که تابع قوانین اعمال مربوط به اعداد هستند به‌کار می‌برند ، ولی آنها را نمی‌توان به شکل پیوسته مانند نقاط واقع برروی یك خط نمایش داد ؟ مطمئناً این مجموعه‌ها می‌توانند توانی بالاتر از محیط پیوستهٔ خطی داشته باشند ! مطمئناً درفضای سه بعدی ؛ یعنی جهانی که تا بینهایت درهمهٔ جهات گسترده شده است ، نقاطی بیشتر از آنچه که برروی یك خط به‌طول یك سانتیمتر موجود است وجود دارد !

این مسأله نیز یکی از افکار اولیهٔ کانتور بوده است . اما او به‌طور قطعی ثابت کرد که دراینجا نیز علم حضوری ما را به‌کجراهی می‌کشاند . مجموعهٔ نامتناهی دو یا سه بعدی ، و موجودات ریاضی که وابسته به‌چند متغیرند که حتی تعدادشان از سه بیشتر است ، و قطعاً هرعدد ، دارای توانی بیش از توان محیط پیوستهٔ خطی نیست. حتی اگر بتوانیم موجود متغیری

را تصور کنیم که وضع آن درهر لحظه وابسته بـه بینهایت متغیر مستقل باشد ، یعنی موجودی که در **دنیائی با بینهایت بعد قابل شمارش** « زندگی کند » ، همـهٔ چنین موجودات نیز دارای توانی هستندکه بزرگتر از توان محیط پیوستهٔ خطی یا بیش‌از قطعه خطی به طول یك سانتیمتر نیست .

این حکم چنان باتصورات ما دربارهٔ بعددرتضاد است که گمان می‌کنیم سخن یاوه‌ای بیش نیست. در واقع ، هنگامی که کانتور برای اولین بار آنرا اعلام کرد ، عقیدهٔ بسیاری چنین بود ، ولی گروه کم شماری ازمتفکران درجهٔ اول این حکم را با احتیاط تلقی کردند .

اما برهان کانتور دربارهٔ ایـن قضیهٔ اساسی چنان ساده است‌که حتی یك طفل خوش فکرمی‌تواندآنرا فهم کند .

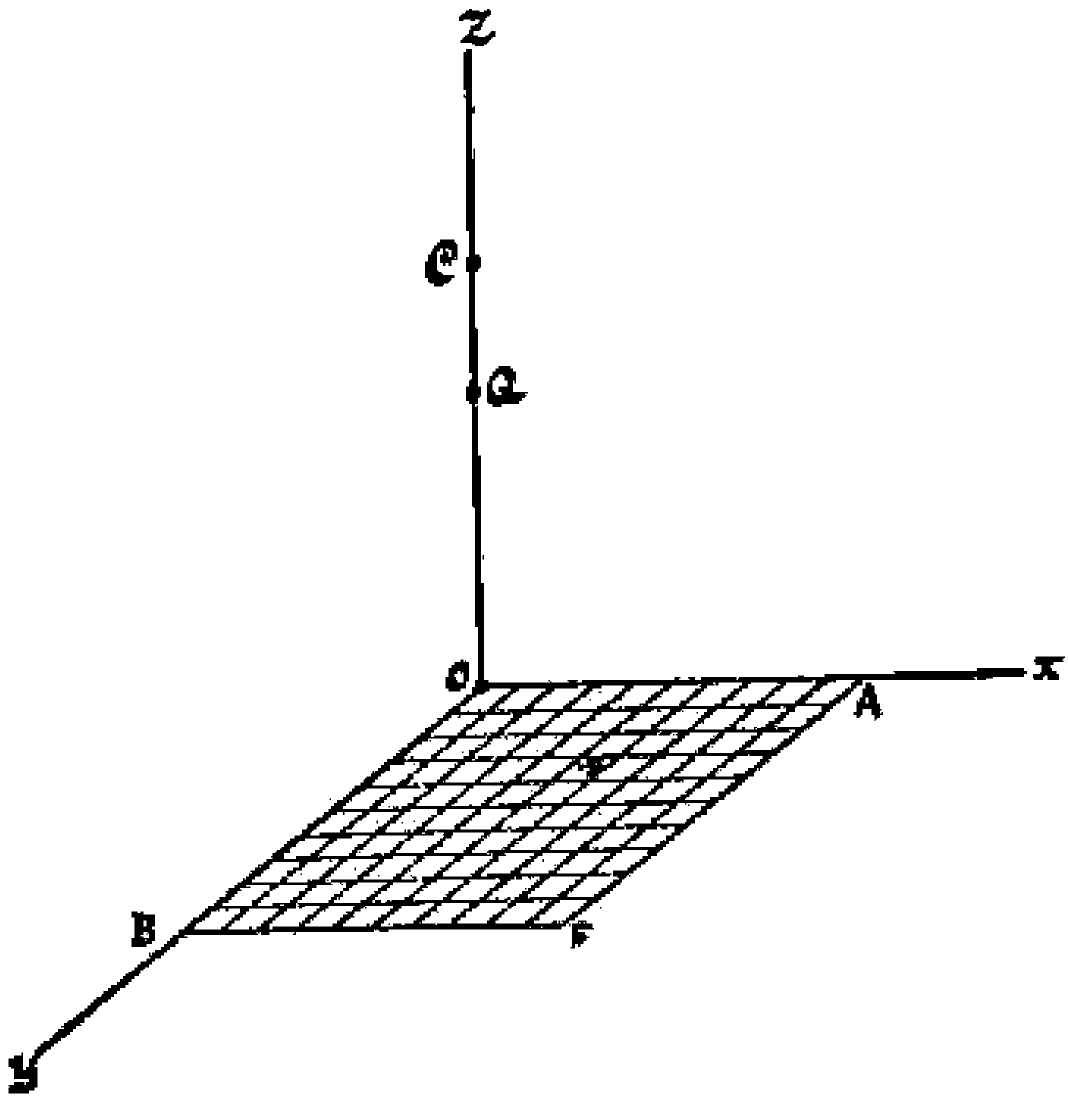
من‌حکم فوق را درمورد نقاط واقع درصفحه نشان‌خواهم داد : خواننده خواهد دید که برهان فوق کاملا عمومی است . باتوجه به‌اینکه نقاط یك قطعه‌خط به‌طول ۱ دارای همان توان خط نامحدودند ، ونقاط واقع درداخل مربعی به‌ضلع ۱ دارای همان توان صفحهٔ نا محدود است ، کافی است نشان داده شود که یك تطابق یك به یك را می‌توان بین این مربع و این قطعه خط به‌ثبوت رساند .

به طوری دیده می‌شود ، هر نقطهٔ p در داخل مربع OAFB ازشکل مجاور می‌تواند به وسیلهٔ مختصات x و y نمایش داده‌شود .

این مختصات اعدادی واقعی‌اند که از ۱ تجاوز نمی‌کنند و می‌توان آنها را به صورت کسرهای اعشاری‌نمایش داد . این

کسرها را می‌توان همیشه به عنوان کسرهائی پایان ناپذیر در نظر گرفت ، زیرا حتی اگر پایان پذیر هم باشند ، ممکن است با اضافه کردن صفری به دنبال آخرین رقم معنی دارشان آنها را پایان ناپذیر کرد . بگذارید این کسرهای اعشاری را به شکل زیر بنویسیم :

$$x = 0.a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid a_4 \mid a_5 \mid a_6 \mid \ldots$$
$$y = 0.b_1 \mid b_2 \mid b_3 \mid b_4 \mid b_5 \mid b_6 \mid \ldots$$



ترسیم یک مربع بر روی یک خط

اینك متناوباً با ارقام x و y کسرهای اعشاری جدیدی مانند z ، به‌صورت زیر ، می‌سازیم :

$$z = \cdot a_1 | b_1 | a_2 | b_2 | a_3 | b_3 | a_4 | b_4 | \ldots\ldots$$

این کسر مجدداً عددی حقیقی را نشان می‌دهد و آنرا می‌توانیم بمثابهٔ نقطه‌ای مانند Q برروی قطعهٔ O C تلقی کنیم. بدین‌ترتیب ثابت شد که تطابق بین p و Q متعاکس بوده منحصر بفرد است ؛ زیرا در مقابل x و y معین ، همیشه می‌توان ، فقط از یك راه ، یك z به دست آورد ؛ و بالعکس معلوم بودن z امکان می‌دهد که مجدداً اعداد x و y را ساخته وازآنجا نقطهٔ p را به دست آوریم .

۱۳ چه چیزدر میان قرار می‌گیرد وچه چیزدر خارج ؟

در نظریهٔ کانتور چیزی که امکان عدد ماوراء محدود بزرگتر از a ولی کوچکتر از c را نفی کند وجود ندارد . با این حال ، تمام مجموعه‌های نقطه‌ای شناخته شده ، یا مانند قلمرواعداد گویا یاجبری قابل شمارش‌اند ، یا مانند فرازنده‌ها هم توان محیط پیوسته حسابی‌اند . تمام کوشش‌هائی که برای به وجود آوردن یك مجموعه نقطه‌ای ساختگی‌که « تواناتر» از رشتهٔ طبیعی بوده ، اما « ناتوان » تر از مجموعهٔ نقاط موجود بر روی یك خط باشند بعمل آمده ، تا کنون نتوانسته است به نتیجه برسد .

از طرف دیگر مجموعه‌هائی شناخته شده‌اند که دارای توانی بزرگتراز c اند . در میان آنها می‌توان مجموعهٔ **تابعی**

(functional manifold) یا به عبارت دیگر **مجموع همهٔ تطابق‌های** ممکن بین دو محیط پیوسته را ذکر کرد. به همان ترتیبی که جور کردن و مقابله کردن اعداد طبیعی با نقاط واقع بر روی یك خط پیوسته غیرممکن است ، این مجموع را نیز نمی‌توان با این نقاط جور کرد . عدد اصلی متناظر را در اینجا با f نشان می‌دهند . مجدداً در نظریه چیزی دیده نمی‌شود که وجود عددی اصلی بین f و c را نفی کند ، و با این حال هنوز مجموعه‌ای که توان آن کمتر ولی بزرگتر از c باشد کشف نشده‌است .

و آن طرف f هنوز اعدادی اصلی وجود دارند . همان روش قطری که برای بدست آوردن « فضای » تابعی از محیط پیوسته به‌کار رفت می‌تواند از یك فضای تابعی یك **مافوق تابعی** به دست آورد که **نتواند** با مجموعهٔ تطابق‌ها جورشود . مجموعه‌هائی با توان بالاتر و بالاتر را نیزمی‌توان بدین طریق به‌دست آورد ، و این عمل **از لحاظ تصور نمی‌تواند هیچ جا خاتمه پیدا کند** .

۱۴ بدین ترتیب نظریهٔ کانتور که تا سرحد نهائی خود رسیده مدعی است که **آخرین عددماوراء محدودی وجود ندارد** . این اظهار بشکلی جالب با این عبارت متشابه است که : **آخرین عدد محدود** وجود ندارد . با این حال عبارت آخری فرضی است که پذیرفته شده است و فرض اساسی حساب اعداد **محدود** است ، در حالی که به نظر می‌رسد اظهارمشابه آن در حساب **بینهایت** نتیجهٔ منطقی تمام نظریه است .

آخرین عددماوراء محدود وجودندارد! این قضیه به قدر کافی بی ضرر به نظر می‌رسد ، وبا این حال ، درزمانی که کانتور پرمقاومت نیرومند اولین مخالف خود غلبه می‌کرد، و تمام دلایل را برای اعتقاد به اینکه اصول او پیروز گشته در دست داشت ، این قضیه در داخل خود مادهٔ منفجره‌ای داشت که تقریباً تمام نظریه را متلاشی کرد . زیرا همزمان با آن یك رشته ازپدیده‌هائی کشف گردید که ، گرچه‌ظاهراً ازنوع‌دیگری بودند، ولی نشان می‌دادند که چیز غلطی دراینجاوجود دارد . بورالی ــ فورتی (Burali forti) ایتالیائی وبرتراندراسل انگلیسی و کونیگ (König) آلمانی و ریشار فرانسوی تضاد بین دو اصل ومشکلاتی را نشان دادند که به‌نام خودآنان معروف است . مجدداً سؤال مربوط به اعتبار روش‌های کانتور واستنتاجات او،وقانونی بودن کاربردبالفعل بینهایت درریاضیات مطرح گردید .

بحث تفصیلی دربارهٔ تضادهای‌کشف‌شده مرا به جای دوری می‌کشاند . گرچه این تضادها نا متجانس‌اند ، ولی به نظر می‌رسد که تمام آنها وابسته‌به‌این مسأله‌اند که اگر اصلا کلمهٔ همه باید درریاضیات مورد استفاده قرارگیرد، چگونه بایدآن را به‌کار برد . اگر این کلمه بتواند آزادانه همراه با هرعمل قابل درك برای مغز به‌کار برده شود ، دراین صورت می‌توانیم دربارهٔ **مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها** گفتگو کنیم . اکنون‌اگر این مجموعه مجموعه‌ای به مفهوم کانتور باشد ، دراین صورت بایددارای‌عددی‌اصلی‌باشد . این عددماوراءمحدود «بزرگترین عدد قابل تصور است» چه مگر می‌توان مجموعه‌ای را تواناتر

از مجموعهٔ همه مجموعه‌ها تصور کرد ؟ پس این عدد اصلی آخرین عدد ماوراء محدود ، و در واقع قدم ماقبل آخر در تکامل آن تجریدی است که ما نام عدد را بر آن می گذاریم! وبااین حال آخرین عدد ماوراء محدود وجود ندارد !

۱۵ از زمانی‌که این مسائل‌معمائی‌برای اولین بار‌ه‌طرح شده سالهای زیادی گذشته‌است؛ راه‌حل‌های متعددی‌پیشنهاد شده، و هزاران مقاله برله و علیه آن نوشته‌اند ، و ریزه خوانیهای زیادی به‌وسیلهٔ طرفداران کانتور و مخالفین آنها به عمل‌آمده است . با این حال مجال بحث در این مسأله هنوز باقی است. ریاضیات تا زمان‌کانتور یکپارچه بود؛ وی‌آن‌را در دو اردوی رقیب یکدیگر تقسیم کرد .

نشان دادن«منظورهای»این‌دسته‌های متخاصم‌درریاضیات، با وسائل ساده‌ای‌که دراختیار دارم وبا قولی که دربارهٔ اجتناب ازطرح‌جنبه‌های‌فنی‌موضوع‌داده‌ام، غیرممکن‌است. وبااین‌حال، اگر می‌خواستم کاملا از این موضوع حیاتی ریاضیات جدید بگذرم ، برنامه‌ام ناقص می‌ماند . بنابراین به طور ساده و مختصر ، همانطور که نمایندگان اصلی اردوهای مخالف نظر کرده‌اند ، دو طرف مسأله را بیان خواهم کرد .

هیلبرت و راسل و زرملو (Zermelo) جزو دستهٔ صوریگران «فرمالیست‌ها» هستند . در عین آنکه از کانتور دفاع می‌کنند، ازآن‌جهت که‌می کوشند تا **حداقل** برنامهٔ اورا نجات دهند ، « منشویك » (= اقلیت) اند به عقیدهٔ اینان ، کاربردنامحدود کلمات «همه» ، «مجموعه» ، «تطابق» ،«عدد»

غیر قابل قبول است . اما راه حل در نفی کامل نظریهٔ « مجموعه‌ها » نیست ، بلکه در قالب گیری مجدد این نظریه بنا بر مقتضیات عقل محض است . باید دستگاهی از اصول موضوعه به وجود آوریم که بتواند پایهٔ نظریه باشد ، و این اطمینان را ایجاد کند که بار دیگر به وسیلهٔ علم حضوری خود به کجراهی نیفتیم ؛ باید طرح این دستگاه چنان صوری (formal) محض و منطقاً استوار باشد که گویی اسکلتی بدون محتوی است . وقتی که این دستگاه استوار و جامع را به وجود آوردیم و با اطمینان در عقیدهٔ خود که دیگر تضاد و ابهامی که فکر ما را مغشوش کند به نخواهد آمد ، آن را به مثابهٔ اساسی برای حساب نامحدود اختیار کنیم . هیلبرت می گوید : « از بهشتی که به وسیلهٔ کانتور برای ما ایجاد شده است هیچکس نباید ما را بیرون کند » .

۱۶ کار طرفداران مکاشفه و علم حضوری (intuitionists) ، که با کرونکر (Kronecker) شروع و به وسیلهٔ پوانکاره (poincaré) تقویت شد ، و در دوران خود ما نمایندگانی از مغزهای متفکر مانند بروور (Brouwer) در هلند ، ویل (Weyl) در آلمان ، و تا حدی بورل در فرانسه دارند ، داستان دیگری دارند . اینان می گویند که کانتوریگری « کانتوریسم » را فقط با اصلاح در تعریف یك مجموعه نمی‌توان نجات داد . بیماری مربوط به قبل از کانتور است و ریشه‌های عمیق دارد و تمام دستگاه ریاضیات گرفتار آن است . ویل (Weyl) می گوید:

« باید فروتنی جدیدی را بیاموزیم . آسمانها را طوفانی کرده‌ایم ، اما تنها موفق به ساختن مهی بر روی مه دیگر شده‌ایم ، مهی که

هیچکس را که با اشتیاق بخواهد بر آن تکیه کند نگهداری نخواهد کرد . چیزی که معتبر است آن قدر بی اهمیت به‌نظر می‌رسد که براستی می‌توان در اینکه آیا اصولا آنالیزی ممکن باشد ، شك کرد . »

برای طرفداران علم حضوری مسائل موردنزاع ازحدود نظریهٔ مجموعه ها تجاوزمی‌کند . اینان می‌گویندبرای اینکه مفهومی بتواند در قلمرو ریاضیات مورد قبول واقع شود ، کافی نیست که « خوب تعریف شود » : **این مفهوم بایدقابل ساختن باشد** . نه تنها مفهوم باید بنام موجود باشد ، بلکه هم چنین‌باید برای تعیین هدفی‌که این مفهوم‌به‌خاطر آن‌عرضه شده است بتوان یك ساختمان واقعی به وجودآورد . اما دربارهٔ ساختمان باید گفت‌که تنها ساختمانهای قابل قبول فرایندهای محدود ، یا ــ بنابر سازشی ــ آن فرایندهای نا محدود هستند که به وسیلهٔ قواعد معدودی قابل تبدیل به فرایندهای محدود باشند .

عمل تصور همزمان تعدادی بینهایت از اشیاء منفرد و معاملهٔ شیء منفردی با همهٔ‌آن اشیاءکردن ، متعلق‌به این دسته از مفاهیم قابل قبول نیست و **ازابتدا** بایداز ورودآن‌درحساب جلوگیری شود . و نه تنها این امر به معنی دوراانداختن نظریهٔ مجموعه‌ها است، بلکه‌حتی تصوراعدادگنگ نیزباید مورداصلاح عمیقی قرار گیرد تا آنکه آنالیز از تمام ناخالصی‌هائی که به وسیلهٔ‌کاربرد بدون مشوش بینهایت بدانها آلوده شده است‌پاك گردد. زیرا ، چنانکه ویل می‌گوید :

« ریاضیات ، حتی از لحاظ صورتهای منطقی‌که در آنها

حرکت می‌کند ، کاملا وابسته به مفهوم عدد طبیعی است . »

۱۷ در حالی که این کشمکش بر سر اعتبار پایه‌ای که آنالیز بر آن قرار دارد به اوج خود رسیده ، خود ساختمان آنالیز باسرعت‌شگفت انگیزی درحال رشد است . هر سال‌شاهد چنان پیشرفتهائی است که در قرن نوزدهم این پیشرفتها به کوشش دهها سال نیازمند بود . درهر ده‌سال زمینه‌های‌جدیدی از دانشهای استقرائی پیش می‌آید که‌داوطلبانه‌تسلیم نفوذآنالیز ریاضی می‌شود . اما دربارهٔ فیزیك ، که‌در میان اولین فتوحات آنالیز قرار دارد ، جهان کلی (Pancosmos) نظریه نسبیت جزجهانی‌به شکل معادلات دیفرانسیل‌نیست، وپدیده‌های نا پیوسته جهان صغیر(microcosmos) ازقوانین مکانیك موجی تبعیت می‌کند که ظاهراً درست کار بردی از نظریهٔ معادلات دیفرانسیل است .

منظره‌ای جالب توجه از کسانی را می‌بینم که به‌بانگ بلند اعلام می‌دارند که امپراطوری بر پایه‌های لرزان و نا مطمئنی قرار دارد ـ می‌بینیم که این شیوخ گاه به گاه ، برای پیوستن به فعالیت برای گسترش امپراطوری و به پیش راندن پیش از پیش جبههٔ جنگ ، از این جنجال اضطراب آمیز خود دست برمی‌دارند.

در زمینهٔ حکمروائی منطق قضیه بدین قراراست .

۱۸ از زمانی که بشر به شکلی معجز آسا دریافت که‌یك زوج قرقاول و یك جفت روز هردونمونه‌ای از عدد هستند ، تا

بامروز ، که انسان کوشش می‌کند تا قدرت تجریدی خود را به زبان عدد بیان کند ، راه دراز و پر پیچ و خمی طی شده است .

آیا اکنون به بن بست رسیده‌ایم ؟ آیا باید راهی را که طی کرده‌ایم دوباره بعقب بر گردیم ؟ و یا اگر آینده را بتوان بر پایهٔ گذشته قضاوت کرد ، بحران کنونی یکی از پیچ های تندیست که بار دیگر عدد از آن با پیروزی سر بلند می‌کند و آمادگی خود را برای صعود به ارتفاعات گیج کننده‌تر تجرید نشان می‌دهد ؟

۱ . س . ادینگتن (A . S . Eddington)

« ما رد پای عجیبی در سواحل ناشناس یافته‌ایم. نظریه‌های عمیقی، یکی پس از دیگری، برای بیان منشاء این آثار بوجود آورده‌ایم. بالاخره موفق شده‌ایم که مخلوقی را که این رد پا را به جا گذارده است باز دیگر بسازیم . و اینك ! این مخلوق خود ما هستیم . »

۱۲ | دو واقعیت

۱ من به انتهای داستان خود رسیده‌ام. هدف من این بود که وضع حاضر علم عدد را در پرتو گذشتهٔ آن بررسی کنم . بنا براین مناسب است در فصلی که از این بررسی نتیجه گیری می‌شود نظری اجمالی نیز به آینده افکنده شود . اما آینده متعلق به پیغمبران است و من حق ندارم در قلمرو آنان گام نهم .

پس آنچه که باقی می‌ماند **زمان همیشه حال** است که

گذرگاه واقعیت است .

این گذرگاه ، از زمانی که بشر آگاهانه کوشید تا وضع خود را درعالم ارزیابی کند ، درتصرف فیلسوفان بود ، وامروز نیز اشتغال عمدهٔ آنان همین است .

و بنابراین من کاملا واقفم که ، با انتخاب عنوان واقعیت برای این فصل نتیجه‌گیری ، بقلمروی خارج ازآموزش و نظرگاه خود تجاوز کرده‌ام . علاوه بر این معتقدم که برای از بین بردن قیاس اقرن[1] قدیمی کار تازه‌ای نخواهم کرد ؛ و هیچ قصدی برای تغییر صورت آنچه‌که به وسیلهٔ فلاسفهٔ مکتب مخالف از زمان سقراط تا کنون گفته شده است ندارم .

علاقهٔ من منحصراً مربوط به وضعی است که علم عدد نسبت به تمام دستگاه دانش بشری دارد . از این لحاظ است که من رابطهٔ بین مفهوم عدد و واقعیت حواس خودمان را مورد توجه قرار خواهم داد ، به این امید که این کار پرتوی بر نقش تاریخی ریاضیات در آفرینش **واقعیت جدید** یا **ماورای واقعیت** علم جدید بیفکند .

۴ بین نظر فیلسوف نسبت به گذرگاه واقعیت و نظر ریاضی دان نسبت به آن اختلافی اساسی وجود دارد : برای فیلسوف مسأله دارای جنبهٔ اساسی است ، در صورتی که عشق ریاضی‌دان

---

۱) قیاس اقرن ترجمهٔ dilemma است ، و آن برهانی است که بنابرآن، طرف مجادله ناچاراست به‌یکی ازدوامر(دوشاخ برهان) تسلیم شود که هر دو به ضرر اوست . — م .

به واقعیت جنبهٔ افلاطونی محض دارد .

تنها علاقهٔ مفرط ریاضی‌دان آنست که قبول کند سرو کارش منحصراً بااعمال مغزی وفکریست. وی یقیناً به این امر آگاهی دارد که تدابیر استادانه و زیرکانه‌ای که سرمایهٔ او را تشکیل می‌دهند از تأثرات حسی سرچشمه نمی‌گیرند که وی آنها را با واقعیت خام یکی می‌داند ، وچون مشاهده کند گاهی این تدابیر و اختراعات با واقعیتی که در آن زائیده شده‌اند با کمال وضوح جور در می‌آیند تعجبی نخواهد کرد . ولی ریاضی‌دان این وضوح را ملاکی برای تعیین اندازهٔ پیشرفت کار خودقرار نمی‌دهد : ارزش موجوداتی که از فکرخلاق او زائیده شده‌اند با دامنهٔ کار برد آنها در واقعیت فیزیکی اندازه‌گیری نمی‌شود . پیشرفت ریاضی باید به وسیلهٔ ملاکهائی که مخصوص به‌خودریاضیات‌است ارزیابی‌شود. این‌ملاکهاکه‌مستقل ازواقعیت خام حواس ما هستند، عبارتند از: آزادی از تضادهای منطقی، عمومیت قوانینی‌که بر صورت‌به وجودآمده حاکم است ،قرابتی که بین این صورت تازه و صورتهائی که مقدم بر آن بوده‌اند وجود دارد .

ریاضی‌دان را می‌توان با طراح یك لباس مقایسه نمودکه کاملا از کسانی که لباسهایش به تن آنها می‌خوردبی خبراست. محققاً هنر او از احتیاج آدمی به لباس سرچشمه گرفته است، اما این امر مربوط به روزگار بسیار قدیم است ؛ ممکن است گاهی قالبی پیدا شود که مناسب با لباس باشد ، و چنان تصور شود که لباس برای آن قالب دوخته شده است . آن وقت است که شگفتی و خوشحالی را حدی نیست !

چنین شگفتی‌های لذت بخش بسیار اندك بوده است. مقاطع مخروطی، که در حین کوشش برای حل مسئله دوبرابر کردن محراب یك معبد اختراع شد، سرانجام به صورت مدارهای حرکت سیاره‌ها بدور خورشید در آمد. مقادیر موهومی که به وسیلهٔ کانتور و بومبلی کشف گردید، به طریقی عجیب خصائل مشخصهٔ جریان متناوب را شرح می‌دهند. محاسبات دیفرانسیل مطلق که منشأ آن هوس ریمان بود، ابزار ریاضی نظریهٔ نسبیت شد. و ماتریس‌ها که در زمان کی‌لی (Cayley) و سیلوستر (Sylester) کاملا جنبهٔ تجریدی داشتند، بشکلی قابل تحسین در نظریهٔ کوانتوم که اصلا به آن ربطی نداشت به‌کاررفت.

هراندازه این شگفتی‌ها لذت بخش باشند، کشف آن‌ها نیروی محرکه‌ای برای کار خلاق ریاضی‌دان نیست. برای او، ریاضیات میدانیست که در آن بهتر می‌تواند شخصیت خود را جلوه‌گر سازد. ریاضیات به خاطر ریاضیات! پوانکاره می‌گوید: «مردم از این عبارت وحشت دارند و با این حال این درست مانند عبارت زندگی برای زندگی است ولو اینکه زندگی جز فقر چیزی نباشد.»

۳ دین مادر علوم است. هنگامی که اطفال بزرگ شدند مادر خود را ترك کردند؛ فلسفه در خانه ماند تا آسایش مادر را در سنین پیری فراهم کند. مصاحبت طولانی دربارهٔ دختر چیزهای زیادتری گفته است تا دربارهٔ مادر.

تا امروزمسائل اصلی فلسفه رنگ دینی داشته‌است. به‌نظر من، نقص عمدهٔ فلسفه نداشتن اصل نسبیت است.

یك اصل نسبیت درست قانونی برای محدود کردن است: این

اصل سر حداتی‌را مشخص می کند که در آن یك علم باید حرکت کند ، و صریحاً این امر را می‌پذیرد که‌راهی وجود ندارد که بنا بر آن بتوان به یقین گفت که مجموعه‌ای از واقیت‌ها تجلی **امر مشهود** (Observata) است یا رؤیا و وهم **شخص مشاهده کننده** (Observer) .

یك اصل نسبیت عمل تسلیم است ، و اصل نسبیت فلسفی عبارتست ازقبول صریح غیرقابل‌حل‌بودن‌این‌سؤال مشکل‌قدیمی دوطرفی است‌که : آیا گیتی بنفسه (pel' se) موجود است یا اینکه در فکر انسان وجود دارد ؟ برای دانشمند قبول این فرض یا آن فرض هرگز مسألهٔ « بودن یا نبودن » نیست، زیرا از نقطهٔ نظر منطق هر یك از دو فرض قابل دفاع است و از نقطه نظر تجربه هیچ یك از آنها قابل اثبات نیست . بنا براین همیشه انتخاب یکی از آن دو مربوط به مصلحت و سهولت کار است. دانشمندطوری عمل‌می کند که **گوئی** این گیتی‌مجموعه‌ای مطلق است که به وسیلهٔ قوانین مستقل از افکار یا اعمال او کنترل می‌شود ؛ اما هروقت قانونی راکشف می‌کند که دارای سادگی تعجب آوریست ، یا وسعتی گیتی‌ای دارد ، یا معرف هماهنگی کاملی در کیهان است ، برای یافتن نقشی که مغز او در این کشف داشته است درایت بخرج می‌دهد ، وبه دنبال این امر می‌رود که آیا تصویر زیبائی که او درآبگیر ابدیت‌می‌بیند پرده از روی ماهیت این ابدیت برمی‌دارد یا فقط انعکاسی از فکر خود اوست .

۴ وقتی می‌کوشیم تا درجهٔ واقعیتی را که باید به مفهوم

عمومی عدد داده شود مشخص نمائیم، اندیشه‌های فیلسوف دربارهٔ واقعیت به‌کار ما نمی‌آید . تا این اندازه محقق است که راههای دیگری باید یافت . اما ابتدا بگذارید بعضی از ابهامات مربوط به اصطلاحات را روشن کنم .

اصطلاحاتی که ریاضی‌دانان به‌کار می‌برند بالاخره کلماتند و متعلق به لغتنامهٔ محدودی هستند که به وسیلهٔ آن بشر از اولین روزها کوشش می‌کرد تا افکار خودرا چه درزمینه ریاضی وچه درزمینه‌های دیگر بیان کند . بعضی از این اصطلاحات ، مانند هندسه وحساب ، مفهوم دوگانهٔ اولیه خودرا از دست داده‌اندو برای همه‌کس دارای مفهوم معین و مشخصی هستند کـه درکار ریاضی به‌دست آورده‌اند. ولی اصطلاحات دیگر، مانندمنطقی وغیر منطقی، گویاو گنگ، محدود ونامحدود، حقیقی وموهومی، تا به امروز معانی چندگانهٔ خود را حفظ کرده‌اند . برای ریاضی‌دان که بندرت وارد قلمرو متافیزیك می‌شود ، ایـن کلمات دارای معانی خاص بوده وکاملا بـدون ابهام می‌باشند ؛ برای فیلسوف نیزکه این اصطلاحات را بمنزلهٔ سرمایه‌ای درحرفهٔ خود به‌کار می‌برد ، این اصطلاحات باز هم معانی خاص دارند ، منتهی با معانی اولی متفاوت است ؛ وبرای کسی که نه فیلسوف است و نه ریاضی‌دان ، این کلمات دارای معانی عمومی ومبهمی می‌باشند .

تا وقتی که فیلسوف کوششی برای ارائه تجزیه تحلیل‌های خود دربارهٔ مفاهیم اساسی ریاضی به انسان عامی بـه عمل نیاورده است ، اشکالی پیش نمی‌آید . از این ببعد است کـه معانی ضمنی متفاوتی کـه ازکلماتی مانند بینهایت یا واقعیت بـه دست می‌آید ، فکر انسان عامی را دچار پریشانی یأس‌آمیزی

می‌کند .

این مطلب بخصوص دربارهٔ شناختن مفاهیم **حقیقی** و **موهومی** پیش می‌آید . ما این اصطلاحات نگون‌بخت را که درعین‌حال از نظر تاریخی اجتناب‌ناپذیرند مدیون فیلسوفی به نام دکارت هستیم . اصطلاح **موهومی** که برای صورت $a+\sqrt{-b}$ به‌کار می‌رفت ، با آنکه هیچ شالودهٔ مجسم و ملموسی برای این چنین کمیت‌ها وجود نداشت ، در آن زمان موجه به‌نظر می‌رسید . زمانی‌که توضیحی برای این مقادیر پیدا شد ، عدم‌کفایت اصطلاح **موهومی** روشن گردید . گاوس این مطلب را چنین بیان‌کرده است :

«اینکه موضوع ازچنین نظرگاه مغلوطی مورد بحث قرارگرفته و با چنین قشری از ابهام و تیرگی پوشیده شده به طور عمده مربوط به نارسائی اصطلاحات به‌کاررفته است . اگر به‌جای اینکه ۱+، ۱−، $\sqrt{-1}$ را مثبت و منفی وموهومی نام گذارده‌ایم مثلا مستقیم وغیرمستقیم وطرفی می‌نامیدیم ، ازاین تیرگی و ابهام رهائی می‌یافتیم.»

اما اعتراضات بسیار بیهوده بود: کلمهٔ **موهومی** ریشه‌ای عمیق به دست آورده بود . پایداری اصطلاحات ریاضی بسیار عظیم وشگفت‌انگیز است : این امر ممکن است مربوط به‌محافظه کاری ریاضی‌دان بوده باشد ، یا به اینکه چون ابهامی پیدا نمی‌شده نسبت به انتخاب کلمات بی‌اعتنا بوده است . قضیه هر شکل که می‌خواهد باشد ، مآلاً کلمهٔ مرکب از روی بی‌میلی جایگزین **موهومی** شد ، و تا به امروزهر دو اصطلاح به‌کار برده می‌شود ؛ و اما دربارهٔ اصطلاح **حقیقی** باید گفت که عبارتی‌که بتواند شایستگی بیشتری داشته باشد هنوز پیشنهاد

نشده است .

پاره‌ای ازمتخصصین کاربرد اصطلاح **موهومی** را به‌این معنی گواهی برابهامی کـه ریاضیات جدید با آن پوشیده است می‌دانند . آنها مدعی‌اند کـه ریاضی‌دانها بـا انتخاب چنین اصطلاحی **عملا** به ساختگی بودن ماهیت این کمیت‌ها اعتراف می‌کنند .

۵ اگرعدد مختلط(Complex number) جنبه‌ای غیرواقعی داشته باشد این جنبه نه در نام آنست و نه در علامت $\sqrt{-1}$: یك عدد مختلط درست یك زوج عدد حقیقی است که بمثابهٔ یك‌واحدمنفرد موردنظرقرار می گیرد ، وبه‌این دلیل نه بیشتر و نه کمتر از اعداد حقیقی ، که از ترکیب آنهـا به‌وجود آمده است ، جنبهٔ ساختگی دارد . بنابراین انتقاد بـر جنبهٔ واقعیت مفهوم عدد باید به عدد حقیقی‌برگردد .

در اینجا فیلسوف می‌تواند گواه زیادی برآن پوشیدگی و ابهامی‌که در ریاضیات به دنبال آن می‌گردد بیابد .

هرقدرهم تجریدی‌که تصور ما ازعدد طبیعی به‌آن‌مدیون است بزرگ باشد ، مفهوم آن از «واقعیت» محکم مجموعه‌های محدود به‌وجود آمده است . درست است لحظه‌ای‌که ماخواستیم به این اعداد به‌چشم یك‌کل وکلی بنگریم ، ناچارشدیم‌که‌کلمهٔ **همه** را باتمام مفاهیم ضمنی‌آن به‌کاربریم . با این حال‌مفهوم بینهایت آنطورکه درحساب‌گویا به‌کار رفته است به‌این توضیح محدود شده است‌که هرعدد عددی درپی‌خود دارد . خصوصیت نامحدود بودن فرایند شمارش فقط به این دلیل به کمك طلبیده

شدکه قواعد اعمال برروی اعداد صحیح بتواند تعمیم مطلق خود را به دست آورد : بینهایت فقط به عنوان چیزی **بالقوه** به‌کار می‌رفت، به‌عنوان چیزی **بالفعل** .

عددگویا چیزی جز یك جفت عدد صحیح نیست و بنا براین واقعیت آن به اندازهٔ واقعیت عدد صحیح است . اگر ، آن طور که کرونکر ما را تشویق می‌کرد ، ازوارد کردن فرایند بینهایت ودر نتیجه فرایند اعداد گنگ اجتناب می‌کردیم ، عدد مختلط درست به‌صورت زوجی از اعدادگویا درمی‌آمد و هراندازه که ما می‌توانستیم به عددگویا رنگ واقعی و یا غیرواقعی بدهیم ، برای عدد مختلط نیز می‌توانستیم اینکار را عملی سازیم . اما درجستجوی میدانی که درآن هرمعادلهٔ جبری دارای جوابی باشد ، مجبور بودیم که فرایند بینهایت را به‌صورت مشروع درآوریم ، و عدد به اصطلاح حقیقی نتیجهٔ همین عمل بود . ما خودرا بیش‌از این دراستفادهٔ ازبینهایت ، بمثابهٔ شکلی از کلام ویا به عنوان اختصاری برای بیان اینکه هرعدد هرقدرهم بزرگ باشد بازعددی بزرگتراز آن وجود دارد ، محدود نمی‌کنیم : **عمل شدن** ، بینهایت را به عنوان اصل مولد برای هرعدد به کمك می‌طلبد ؛ بدین‌ترتیب هرعدد به عنوان قدم ما قبل آخر یك فرایند بینهایت تلقی می‌شود ؛ مفهوم بینهایت خود در نسج مفهوم تعمیم یافتهٔ ما از عدد بافته شده است .

قلمرو اعداد طبیعی براین فرض قرارگرفته بودکه **عمل اضافه کردن یك می‌تواند به‌طور نامحدود تکرار شود**، وبخصوص تصریح گردید که **هرگز نباید خود قدم ما قبل آخر این فرایند به عنوان یك عدد تلقی شود** . تعمیم

اعداد حقیقی نـه‌تنها صحت تکرار الی غیرالنهایه را برای هر یك از اعمال گویا گسترش داد، بلکه این کار درواقع محدودیت را رها نمود وحدود این فرایندها را به عنوان **اعداد واقعی** پذیرفت.

وچنین است ریشخند کلمات، که اعدادی با نام **حقیقی** ازقربانی کردن قسمتی ازآن **حقیقتی** که به‌اعدادطبیعی نسبت می‌دهیم، به دست آمده‌اند.

۶ آیا این فرایندهای بینهایت کـه حساب ما را واجد عمومیتی مطلق کرده و آن را به صورت ابزاری بـرای مکاشفهٔ هندسی ومکانیکی درآورده‌اند وبه‌وسیلهٔ هندسه ومکانیك امکان داده‌اند کـه پدیده‌های فیزیکی و شیمیائی به وسیلهٔ عـدد بیان شوند، تاچه اندازه حقیقی‌اند؟ اگرحقیقت محدود به‌آزمایشهای مستقیم حواس ما باشد، هیچ انسان متفکری، خواه ریاضی‌دان خواه فیلسوف وخواه انسان عامی، نمی‌تواند برای مفهوم عدد واقعیتی قائل شود.

با این حال عقیدهٔ شایع آنست کـه اعتبار بینهایت نتیجهٔ اجتناب‌ناپذیرپیشرفت علوم تجربی‌است. وقتی دیوید هیلبرت، در خطابهٔ خود بیادبود وایرشتراس، بـاچنان فصاحتی به این مسأله جواب داده است، دیگرمن ازطرف خود برای نفی این مجادله دست به‌گستاخی نمی‌زنم:

«بینهایت! هیچ مسأله‌ای تاکنون با چنین ژرفائی روح بشر را دستخوش آشوب نساخته است؛ هیچ فکر دیگری به این باروری نبوغ او

را تحریك نکرده است ؛ با این‌حال هیچ مفهوم دیگری به اندازهٔ بینهایت محتاج به توضیح نبوده است ... »

« هنگامی‌که به این سؤال می‌رسیم که جوهر بینهایت چیست ، ابتدا باید روشن‌کنیم که معنی بینهایت درقبال واقعیت چیست : ببینیم که فیزیك در این باره چه می‌گوید .

« اولین اثرساده‌ای که طبیعت و ماده برمامی‌گذارند اثر پیوستگی است . یك تکه فلز یا حجمی از مایع را درنظر بگیریم ، این تصوربرای ما اجتناب‌ناپذیر است‌که می‌توان آنها را بینهایت‌بارتقسیم نمود وهرجزء ازاین تقسیمات دارای خواص‌کل اصلی است . اما ازآنجاکه شیوهٔ بررسی در ساختمان ماده به اندازهٔ کافی‌گسترش یافته است ، مادر زمینهٔ قابلیت تقسیم ماده به اجزاء کوچك همواره به مرزی برخورده‌ایم ، و این امر مربوط به کمبود دقت و ظرافت تجربی ما نبوده بلکه وابستهٔ به خود ماهیت این پدیده است . در واقع انسان می‌تواند این رهائی از بینهایت را به عنوان تمایل علم جدید تلقی کند و به جای ضرب‌المثل قدیمی «طبیعت نمی‌جهد» (natura non facit saltus) مخالف آن یعنی « طبیعت می‌جهد » را بگذارد ...

« همه می‌دانند که ماده از ذرات کوچك یعنی اتم‌ها تشکیل شده است ، و پدیده‌های مشهود و عظیم گیتی چیزی جز تجلیاتی از ترکیب و فعل و انفعالهای همین اتم‌ها با یکدیگر نیستند . اما فیزیك در اینجا توقف نمی‌کند : در آخر قرن گذشته این علم بار الکتریکی اتم را که آثار جالبی بروز می‌دهد کشف کرد . گرچه تا آنوقت قبول شده بود که الکتریسیته سیال است، بعدازآن‌روشن شدکه الکتریسیته نیزازالکترون‌ـ های مثبت و منفی به وجود آمده است .

« اینك علاوه بر ماده و الکتریسیته در فیزیك واقعیت دیگری ،

به نام انرژی ، وجود دارد که برای آن قانون بقاء صادق است . اما معلوم شد که حتی انرژی قابلیت تقسیم نامحدود و ساده‌ای را نمی‌پذیرد. پلانك **کوانتومهای انرژی** را کشف کرد .

« و حکمی که می‌توان صادر کرد آنست که هیچ جا در واقعیت، محیطی همگن و پیوسته وجود ندارد که در آن قابلیت تقسیم نامحدود امکان‌پذیر، یعنی جزء بینهایت کوچك درآن قابل تشخیص باشد . قابلیت تقسیم نامحدود یك محیط پیوسته عملی است‌که فقط در فکر وجود دارد ، تصوری بیش نیست ، تصوری است که بامشاهدات ما از طبیعت و تجربیات فیزیکی و شیمیائی مباینت دارد .

« دومین جائی‌که درطبیعت بامسألهٔ بینهایت مواجه می‌شویم وقتی است که دنیا را بمنزلهٔ یك کل در نظر می‌گیریم . اجازه بدهید امتداد این گیتی را ، برای اینکه یقین حاصل‌کنیم درآن چیزی‌که بینهایت‌بزرگ باشد وجود دارد یا نه ، بررسی کنیم . دورانی طولانی عقیدهٔ متداول چنین بوده است که گیتی لایتناهی است . تا زمان‌کانت وحتی بعدازآن، معدودی بودند که در نامحدود بودن گیتی شك داشتند .

« در اینجا نیز علم جدید و بخصوص اخترشناسی مسأله را بار دیگرمطرح نمود وکوشید تا دربارهٔ آن ، نه ازراه اندیشه‌های متافیزیکی بلکه براساس تجربه وکاربرد قوانین طبیعت ، تصمیم بگیرد . اعتراضات شدیدی علیه نامحدود بودن عام بلند شد . این هندسهٔ اقلیدسی است که فضای لایتناهی برایش ضرورت پیدا می‌کند . . . آینشتاین نشان داد که هندسهٔ اقلیدسی بایدکنار گذارده شود . او این مسأله کیهان‌شناسی را از لحاظ نظریهٔ جاذبهٔ خویش مورد توجه قرار داد و امکان وجود گیتی محدود را ثابت نمود ؛ و تمام نتایجی که به وسیلهٔ اخترشناسان به دست آمده است با این فرضیهٔ گیتی بیضوی سازگاری دارد .

۷ بنابراین ، هرچه بیشتر در دانش جهان فیزیکی خود پیشرفت می‌کنیم ، و یا به عبارت دیگر هر چه بیشتر به وسیله ابزار علمی عالم مشهور خود را گسترش می‌دهیم ، تصور خود را درباره نامحدود بودن ، چه در عمل وچه از لحاظ اصول ، با این دنیای فیزیکی ناسازگارتر می‌بینیم .

از زمانی کــه تصور بینهایت ضرورت منطقی خود را از دست داده است ، و از زمانی که علاوه برآنکه تجربه برصحت آن صحه نگذاشته تمام تجربیات نیز نادرست بودن‌آن را نشان داده‌اند ، ظاهراً باید **کاربرد بینهایت در ریاضیات به خاطر واقعیت و به نام آن محکوم شود .** چنین محکومیتی ریاضیات را به حساب محدود و هندسهٔ محدود کــه من در فصل چهارم از آن صحبت کردم تبدیل خواهــد کرد . « آنچه‌که معتبر است آنقدر بی‌اهمیت به‌نظرمی‌رسدکه حتی در ممکن بودن آنالیز تردید حاصل می‌شود » . ساختمان رفیعی که به وسیلهٔ ریاضیات سه قرن گذشته ساخته شده بود تا پایه ویران می‌گردد؛ اصول وشیوه‌هائی‌که قدرت خود را ازاستعمال بینهایت به دست‌آورده‌اند بایدکنارگذارده شوند ؛ علوم فیزیکی که باچنین اعتمادی مفاهیم حد و تابع وعدد را در فرمول‌بندی وتحلیل مسائل مربوط به‌خود به‌کار می‌برند باید فصل جدیدی برای خود باز کنند : این علوم باید باردیگر پایه‌های خودرا از نو بنا کنند و ابزار جدیدی به جای ابزارهائی که محکوم شده است به وجود آورند .

همهٔ این‌کارها به‌نام واقعیت انجام‌می‌گیرد !

۸ محققاً چنین برنامه‌ای بسیار مؤثر است . اما بعداز آنکه این تجدیدنظر صورت گرفت ، آنچه که از ریاضیات پس از این تصفیه باقی می‌ماند ، باید با واقعیت سازگار باشد.

آیا چنین خواهد بود؟ این خود سؤالی است ، و این سؤال مقدمه‌ای برای پرسش دیگراست : «واقعیت چیست؟» از این سؤال دوم به هیچ وجه منظور ما تعاریفی موشکافانه یا نکته گیری نامربوط نیست ؛ فقط می‌خواهیم بدانیم رسائی و میدانی که باید به‌این واقعیت تخصیص داد چیست، تااین‌رسائی از این پس به عنوان ملاکی برای آنچه که معتبراست وآنچه‌که از درجهٔ اعتبار ساقط است به کار رود .

برای یافتن جواب ، طبیعتاً به‌متخصصین واقعیت مراجعه می‌کنیم. هریك از آنها نمونه‌ای از واقعیت را که مخصوص به خود او است به ما پیشنهاد می‌کند ، اما برای **خود** واقعیت نمونه‌ای به‌نظر نمی‌رسد . ما در وضعی هستیم که فرانسویان آن را **سرگیجگی‌درانتخاب** (embarras du choix) می‌نامند .

دو نمونه از نمونه‌های فوق مورد توجه خاص ما هستند: واقعیت ذهنی و واقعیت عینی . واقعیت ذهنی آن چیزیست که بتوان آن را بمثابه مجموعهٔ تمام تأثرات حسی یك فرد توضیح داد . اما دربارهٔ واقعیت عینی ، تعریف آن نسبت به مکاتب مختلف فلسفی متفاوتست ، زیرا در اینجا به طور صریح مشکل وجود و یا عدم وجود دنیای خارج از آگاهی ما درحد اعلای خود وجود دارد . این مسأله را بوانکاره باعریان کردن آن ازتمام بیهودگی‌های متافیزیکی وعبارت‌پردازیهای‌فلسفی چنین

بیان کرده است : « آنچه را که ما واقعیت عینی می‌نامیم در تحلیل آخر عبارتست از آنچه که بین موجودات متفکر مشترك است و بتواند بین همه مشترك باشد .» عبارت « آنچه که بتواند بین همه مشترك باشد » ، بـا همهٔ ابهام و سستی آشکاری کـه دارد ، برای درك مستقیمی که ما دربارهٔ تصوراز واقعیت‌داریم، نزدیکترین و بهترین بیان است .

۹ اینك مشکل تعیین چشم‌اندازی صحیح ازواقعیت درست در این امر نهفته است که هیچ فردی نمی‌تواند پیروزمندانه این واقعیت ذهنی را که همان مجموعهٔ تأثرات حسی شخصی او است ، از واقعیت عینی ، که از ارتباط با سایر افراد حاضر و یاگذشته به دست آورده است ، جداکند . مطالعه در روانشناسی مردمان اولیه می‌تواند مسأله را خوب روشن کند، اما دراینجا نیز محیط‌کار خود را می‌کند . نزدیکترین راهی که ما را به این واقعیت ذهنی نزدیك می‌کند روانشناسی یك طفل است ؛ و با توجه به این که ما نمی‌توانیم تأثرات طفلی خود را از نـو به وجود آوریم ، ناچار باید برمطالعاتی‌که بزرگسالان برروی اطفال دارند ، وقطعاً صبغه‌ای از مفاهیم از قبل تصور شده بـا خود دارند ، تکیه‌کنیم .

اما اجازه بدهید فرض‌کنیم که واقعیت ذهنی یك فرد را بتوان بامعلوماتی که فیزیولوژیست‌ها و روانشناسانی از قبیل هلمهلتز (helmholtz) یا ماخ (mach) از ادراکات بینائی ، شنوائی ، لامسه و غیره به دست آورده‌اند یکی بدانیم. اگررسائی این واقعیت را به عنوان ملاکی برای صحت واعتبار

امر در نظر بگیریم ، رأی منصفانهٔ اجتناب‌ناپذیر باید این باشد که حتی حساب محدود ضعیف شده‌ای که پس از تصفیهٔ ریاضیات از بینهایت به دست آمده است باز باید نقصان یابد و از گوشه و کنارش زده شود . **زیرا فرایند شمارش ، جزئی از این واقعیت نخواهد بود .**

فرایند شمارش مستلزم یك واقعیت دیگر یعنی یك واقعیت عینی است ، و این اصطلاح را در اینجا به همان معنی به کار بردیم که پوانکاره آن را به کار برده بود . شمارش مستلزم توانائی بشر برای طبقه‌بندی ادراکات مختلف ، تحت یك عنوان واعطای نام‌معینی برای هرطبقه است : این امرمستلزم توانائی جور کردن عنصر به عنصر دو مجموعه و همراه ساختن این مجموعه‌ها با عدد واژه‌ای‌است‌که خود این‌عدد واژه چیزی جز قالبی برای تعدد مشخص ومفروض نیست ؛ ونیزشمارش مستلزم توانائی منظم کردن این قالب‌ها به صورت یك رشته و به وجود آوردن ترکیبی است‌که امکان توسعهٔ نامحدود این عدد واژه‌ها را فراهم سازد . خلاصه آنکه ، فرایند شمارش وجود **زبانی** را ایجاب می‌کند ، و مستلزم سازمانی است که متعالی‌تر از واقعیت ذهنی و یا احساس مستقیم یك فرد بشری است .

پس اگر این واقعیت ذهنی به عنوان ملاکی برای آنچه که در ریاضیات معتبر است اختیار شود ، مجبورخواهیم بودکه نه تنها فرایند بینهایت وتمام آنچه راکه متضمن آنست محکوم کنیم ، بلکه روش شمارش را نیز باید کنار بگذاریم . حس ابتدائی ، که بعضی از پرندگان و حشرات دارا هستند ، تنها میدان قانونی برای عدد خواهد شد ؛ وعلاوه برزبان و حساب

باید تمام ساختمان پیچیدهٔ تمدن را که برپایهٔ این دو دستگاه بشری برپا شده است کنار بگذاریم .

۱۰ ما از دنیای مطلق و تغییر ناپذیری که در خارج از خود آگاهی ما وجود دارد ، فقط ازراه تفکرات کلامی اطلاع داریم : قبول این مسأله و یا نپذیرفتن آن برای یك فلسفهٔ طبیعی به طور یکسان بیهوده و بی‌معنی است . اما قبول واقعیت خام حواس ما به عنوان شاه **واقعیت** (**arch-reality**) واقعیت منحصر ، نیز درست همان‌قدر پوچ و بی‌معنی است . مطمئناً ، برای یك توضیح منظم ، مناسب و سهل چنان است که یك طفل نوزاد یا یك انسان اولیه یا یك حیوان را به عنوان تجسمی از چنین واقعیت منحصر در نظر بگیریم . پا را از این هم فراتر می‌گذاریم ، و مانند هلمهلتز و ماخ و پوانکاره یك موجود باهوشی را که از تمام حواس بجز یکی ، مثلا بینائی ، محروم است درنظر می‌گیریم ، ودربارهٔ نوعی از عالم که این موجود برای خود خواهد ساخت می‌اندیشیم . این اندیشه‌ها و تفکرات ، از آن نظر که به قدرت ما برای تجزیهٔ دریافتهای حسی خود به اجزاء متشکلهٔ آن آزادی کامل می‌دهند ، و پس از آن مفاهیم را به عنوان ترکیبی از این احساس‌هائی که نام **احساسهای اصلی** (**arch-sensations**) برآنها می‌گذاریم جلوه‌گر می‌سازد ، بسیار قابل توجه است . اما قبول چنین ترکیبی به عنوان **واقعیت** ، آن‌طورکه من فکر می‌کنم یك نقص هلاکت‌بار دارد : این امر مستلزم وجود یك فردی است؛ درصورتی‌که خودجریان نسق دادن وهماهنگ ساختن‌این

دریافته‌های حسی وجود فکر را ایجاب می‌کند، که بدون ارائهٔ زبان که به نوبهٔ خود متضمن تبادل تنظیم شدهٔ تأثرات است، و آن نیز به‌نوبهٔ خود وجودی دسته‌جمعی برای موجودات بشری را که نوعی از تشکیلات اجتماعی است ایجاب می‌کند ، غیر ــ ممکن است .

تنها واقعیتی که ممکن است صحت آن به‌عنوان ملاك در نظرگرفته شود ، نه آن واقعیت مطلق و تغییرناپذیری است که خارج از خودآگاهی ماوجود دارد وبنابراین متافیزیك محض است ، ونه آن شاه واقعیتی است که زبان‌شناس وروانشناس می‌ــ خواهد باوسائل مشکل تجربی آن را مجزا کند ؛ این واقعیت آن واقعیت عینی است‌که بین عدهٔ زیادی مشترك بوده وتوانسته است بــرای همه مشترك بــاشد . و آن واقعیت مجموعه منجمد تصاویر نبوده ، بلکه یك ارگانیسم زنده و رشد کننده است .

۱۱ اما هنگـامی که به این دنیای عینی بازمی‌گردیم تا در آن ملاکی برای واقعیت ادراکات ریاضی بیابیم ، به مشکل جدیدی برمی‌خوریم . این‌چیزهای مشترك بین عدهٔ زیاد ممکن است محدود به‌آن تأثرات مستقیم وبلافصل فردی باشدکه سایر موجودات متفکر در آن سهیم‌اند ؛ اما هم چنین آنها می‌توانند شامل تمام معلوماتی باشندکه نژاد بشر دردوران کاربرد ابزار علمی‌آنها را به دست آورده است ، زیرا این حقایق نیزمشترك در میان افراد بسیار است و محتمل است مشترك میان همگان شود .

این دنیای توسعه یافتهٔ اخیر می‌تواند برای قضاوت در

بارهٔ هر بیان کیفی معتبر باشد ، اما وقتی بـرای کار برد آن به عنوان ملاکی در مورد عدد صحبت می‌کنیم ، با این حقیقت روبرو می‌شویم که فرض قبلی عـدد در این دنیای عینی وجود داشته است ، زیرا ابزارهای علمی مـا طبق اصول ثابت ریاضی که بنوبهٔ خود متکی برعدد است ساخته شده است .

در واقع با استفاده از یك خط‌کش ، یك ترازو ، یـك فشارسنج یا یك دماسنج ما همیشه چیزی را اندازه می گیریم که به نظرمان **پیوسته** می‌رسد ، و ما آن را به وسیلهٔ **مقیاسی عددی** اندازه می‌گیریم. پس‌از آن فرض می‌کنیم که یك تطابق‌کامل بین حالات ممکن این محیط پیوسته با مجموعهٔ اعدادی که در اختیارمان قرار دارد وجود دارد ؛ ما بـه طور ضمنی یك اصل موضوع را می‌پذیریم که در این محیط پیوسته همان نقشی را ایفا می‌کند که اصل موضوع دده کیند ـ کانتور برای‌خط مستقیم‌ایفامی‌کرد. بنابراین ، هروسیلهٔ اندازه‌گیری، هر قدرهم که به نظر ما ساده و طبیعی برسد ، متضمن تمام دستگاههای حساب اعداد حقیقی‌خواهدبود : پشت سرهر ابزار علمی یك شاه ابزار به‌نام حساب وجود داردکه بدون آن ابزار مخصوص نه‌می‌تواند به‌کار برده شود ونه حتی به ذهن‌خطور کند.

بدین‌ترتیب اشکال کار در اینجا است : اگر ما نـاچار باشیم که واقعیت عدد واقعی را از روی جهان عینی کـه شامل تمام معلومات حاصل از ابـزارهای علمی است قضاوت کنیم ، باید درداخل‌یك دایرهٔ خبیثه‌حرکت‌کنیم . زیرا **این ابزارها بافرض‌مسلم‌بودن واقعیت عدد حقیقی‌ساخته شده‌اند.**

به همین ترتیب اگر ناچار باشیم کـه خود را به دنیای

عینی محدودتر حاصل از آن دسته از تأثرات مستقیم خود که دیگران نیز در آن سهیم‌اند محدود کنیم ، باز هم از این دایرهٔ خبیثه خلاصی نخواهیم یافت .

زیرا اگر تمام ابزارهای اندازه‌گیری را کنار بگذاریم و عقیدهٔ عمومی را به عنوان تنها ملاك واقعیت بپذیریم ، درآن صورت چگونه به‌قضاوت صحیح دسترسی‌خواهیم یافت ؟ هنگامی که شما اعلام می‌کنید که نسبت به رنگ‌، کورید ، زیرا که‌آنجا را که قرمز است سبز می‌بینید ، به جز استمداد از **قاعدهٔ اکثریت** چگونه صحت ادعای خودرا ثابت می‌کنید ؟ دراینجا نیزماهردوموافقت می‌کنیم‌که **تصمیم را به‌عدد واگذاریم.**

ارقام دروغ نمی‌گویند ، زیرا آنها نمی‌توانند دروغ بگویند . از آن جهت نمی‌توانند دروغ بگویند ، زیرا کــه از ابتدا مصون از خط اعلام شده‌اند . وقتی که عدد را به عنوان تنها داور برای قضاوت دربارهٔ مقادیرواندازه‌ها انتخاب کردیم، و به تسلیم درمقابل تصمیمات آن گردن نهادیم ، **عملا** ازحق خود دربارهٔ مراجعهٔ به هر داور دیگر صرف‌نظر کردیم .

۱۲ نتیجهٔ کار چیست ؟

یك فردبدون یك محیط زندگی ، محروم از زبان، فاقد ازهرموقعیتی برای تبادل‌تأثرات‌با نظایر واقران خود، هرگز نمی‌توانست علـم عدد را بنا نهد . برای دنیای مشهود او ، حساب واقعیت و مفهومی نمی‌توانست داشته باشد .

از طرف دیگر ، دنیای عینی یك موجود متفکر از آن تأثرات تشکیل می‌شود که اکثریت اقران او در آن سهیم‌اند .

برای او این پرسش بی‌معنی است که «چه واقعیتی را باید به عدد وابسته کنیم؟» ، زیرا هیچ واقعیتی بدون عدد وجود ندارد ، همان‌گونه‌که هیچ واقعیتی بدون مکان و زمان وجود ندارد .

وبنابراین ما در دنیای ذهنی و در دنیای عینی خود در هیچ کدام نمی‌توانیم ملاکی برای واقعیت مفهوم عدد پیدا کنیم ، زیرا که دنیای اول شامل چنین مفهومی نیست ، و دومی شامل چیزی نیست که از قید این تصور آزاد نباشد .

پس چگونه می‌توان ملاکی به دست آورد؟ این کار به وسیلهٔ مدرك و شاهد ممکن نیست زیرا درآنجا جائی برای این ملاك وجود ندارد. به‌وسیلهٔ منطق هم غیرممکن است ، زیرامنطق وجودی مستقل‌از ریاضیات‌نیست: منطق مرحله‌ای ازآن‌ضرورت چند مرحله‌ای است که نام ریاضیات را بر آن نهاده‌ایم . در این صورت چگونه می‌توان تصورات ریاضی را مورد بررسی و قضاوت‌قرار داد؟ **دربارهٔ آنها نباید قضاوت کرد!** ریاضیات خود قاضی القضات است ؛ برای اعتراض به قضاوت او دیوان دیگری وجود ندارد .

ما نه‌می‌توانیم قواعد بازی را تغییر دهیم ، و نه‌می‌توانیم تأکید کنیم که بازی خوب و منصفانه است .فقط می‌توانیم‌بازی کننده را در کارش مورد بررسی قرار دهیم ؛ و این کار را به صورت یك ناظر بیطرف نیز نمی‌توانیم انجام دهیم ، زیرا ما مراقب مغزهای خود که وارد بازی شده‌اند نیز می‌باشیم .

۱۳ خاطره‌های خود را بازگو می‌کنم : تازه وارد رموز عدد مختلط شده بودم . سرگشتگی آن زمان خود را خوب به

خاطر دارم : در اینجا مقادیری وجود داشت که آشکارا غیر ممکن بودند و با این حال کاربرد آنها نتایج مشخص ومعینی را به وجود می‌آورد . احساس عدم رضایت و ناراحتی از این جریان وجود داشت، ومایل بودم که این مخلوقات غیرواقعی و این علامات تو خالی را با ماده‌ای پر کنم . پس از آن طرز تفسیر این موجودات را از راه هندسهٔ محض آموختم . بعد از این کار احساسی از آرامش به وجود آمد ، گوئی من معمائی را حل کرده‌ام ، و معلوم شد شبحی که باعث تشویش خاطرمن شده بود چیزی خیالی نبوده بلکه جزئی آشنا ازمحیط است .

از آن به بعد موقعیت‌های زیادی پیش‌آمد که دانستم‌عدهٔ زیادی از مردم در این نگرانی و هیجان با من سهیم‌اند . آیا احساس‌آرامش چگونه بدست‌آمده است؟ ما قالب مشخصی برای این‌علامات یافتیم . دانستیم‌که می‌توانیم آنها را به چیزی‌مأنوس وابسته کنیم ، چیزی که واقعی است و یا لااقل واقعی به نظر می‌رسد . اما چرا نقطه‌ای از صفحه و یا قطعاتی‌که فواصل این نقطه را از دو محور مقایسهٔ دلخواه اندازه می‌گیرند بیش از مقدار $a+ib$ دارای جنبهٔ واقعی باشند ؟ در ورای یك صفحه یا یك خط یا یك نقطه چه واقعیتی نهفته است ؟ یکی دو سال پیش این‌ها نیز در نظر من رؤیائی بیش نبودند . صفحه‌ای که در تمام جهات تا الی غیرالنهایه گسترش می‌یابد ــ نزدیکترین تقریب من در این باره صفحه کاغذی به ابعاد ۸ اینچ در ۱۱ اینچ یا تختهٔ سیاه موج دار که پر از شیار و خراشیدگی است می‌باشد. خط‌بدون ضخامت، نقطه تقاطع‌دوخط‌با این‌مشخصات‌ــ چیزی که بدون بعد است ، یعنی یك توهم محض کــه برای

آن هیچ قالب والگوئی وجود ندارد ؛ وبالاخره مختصات چنین نقطه‌ای که دارای تمام بی دقتی‌ها وجنبه‌های غیرواقعی درا ندازه است ـ آیا چنین چیزهائی واقعیت مشخصی بودند که باعث احساس تسکین در من می‌شدند ؟

ما برای یك توهم که برایمان آشنا ومأنوس است ،ظاهری خیالی ساخته‌ایم، اما همیشه‌این توهم برای ماآشنا نبوده وزمانی نیز باعث سر گیجگی و ناراحتی بوده است تا آنکه آنرا به خیالی واهی بسیار ابتدائی که بنوبهٔ خود درطول قرنها اعتیاد تبدیل به واقعیت شده بود مربوط ساختیم .

۱۴ واقعیت امروز خیال واهی دیروز بوده است . این خیال واهی به حیات خود ادامه داده است ، زیرا به تنظیم و تنسیق و هدایت تجربهٔ ما کمك کرده و بنابراین برای زندگی نژاد بشر مفید بوده است . چنین است تفسیر من از گفته‌های نیچه :

«ما به نادرستی واشتباه‌چسبیده‌ایم وزمینه‌ای برای‌به دورانداختن قضاوت خود نداریم . موضوع از این قرار است :تا چه حد ادراك‌عمومی زندگی بشر را حفظ‌کرده و بجلو رانده است ؟ خطاآمیزترین ادراك‌ها ـــ که قضاوت‌های ترکیبی ابتدا باکن ما نیز وابسته به آنها است ـــ همانهائی هستند که ضرورت آنها زیادتر و اجتناب ناپذیرترند . بشر بدون توهمات خود ، بدون اینکه واقعیت را در دنیای مطلق افسانه‌ای و تغییر ناپذیر بسنجد ، بدون آنکه جهان را دائماً با جعل وتصنع به وسیلهٔ عدد بیان کند ، نمی‌توانست بزندگی خود ادامه دهد . صرف نظر کردن از تمام قضاوتهای نادرست بمعنای صرف نظر کردن ونفی زندگی خواهد بود . »

نه مدرك مستقیم و نه قوانین منطقی هیچ کدام نمی‌توانند صحت درك ریاضی را معین کنند . نتیجه از اینقرار است : تا چه حد این تصور زندگی عقلانی نژاد بشر را حفظ می‌کند و به پیش می‌راند ؟ از اینجاست که توضیحات اضطراب انگیز استادان ترشروی در من اضطرابی به وجود نمی‌آورند . ملاك اعتبار برای هر توهم ، یك **حکم بعد از وقوع حادثه** (post factum) و گاهی اوقات صادر شدهٔ پس از مرگ (post mortem) است . قضاوتهائی که زندگی انسان را حفظ می‌کند و به‌پیش می‌رانند و رشد می‌دهد ، و بدین‌ترتیب حق خود را از نظر واقعیت به دست می‌آورد ، آنهائی هستند که ، چه مفید و چه زیان‌بخش ، درآخرکار راه خود را بسه کتابهای درسی متافیزیك و حکمت الهی باز می‌کنند ودرآنجا متوقف می‌شوند . بنابراین آنها نیز بیهوده نابود نمی‌شوند .

۱۵ شواهد تجربی و ضرورت‌های منطقی همهٔ دنیای عینی را که ما حقیقت می‌نامیم فرا نمی‌گیرند . یك ضرورت ریاضی وجود دارد که مشاهده و تجربه را راهنمائی می‌کند ، ومنطق فقط یکی از صور آنست . صورت دیگر این ضرورت ریاضی ، که مکاشفه یاعلم حضوری نامیده می‌شود ، چیزی است غیرقابل لمس و مبهم که از هر تعریف گریزان است . بدین ترتیب به موضوع اصلی علم عدد برگردیم ، یعنی بینهایت. تصور بینهایت نه ضرورت‌تجربی است ونه منطقی ؛ **بلکه ضرورتی‌ریاضی است** . قبول **قدرت فکر دایر براینکه می‌تواندتکرار نامحدود عملی ممکن الوقوع را به‌پذیرد ، ممکن**

است توهمی محض باشد، اما توهمی است مناسب و بنابراین ضروری.

این امرما را از بارتجربه درهرمورد بخصوص می‌رهاند. به بیان ما این عمومیتی را می‌دهدکه بدون آن علمی وجود نخواهد داشت. و بالاتر از همه پلی بر روی شکاف بین درك دنیائی موجود، که **با زمان جاری جریان می‌یابد**، و تصورعدد که ازراه **شمارش ناپیوسته** ایجاد شده‌است به‌وجود می‌آورد.

اما بینهایت تنها یکی از راههای فرعی بسیاری است که در آن بشر **به جستجوی مطلق** پرداخته است. راههای زیاد دیگری نیز وجود دارند. سادگی، یکنواختی، همگنی، تبعیت از قانون علیت تجلیات دیگر این درك مستقیم ومکاشفهٔ ریاضی هستند. زیر این مکاشفه ریاضی است که فکر بشر را برای تعقیب سراب بینهایت به کوشش وا می‌دارد و بدین‌ترتیب ازاین‌هگذر میراث عقلانی نژادبشر راغنی می‌کند. اماهنگامی که‌ادامهٔ این پی‌گردی وتعقیب میراث بشررابه خطرمی‌اندازد، مکاشفهٔ ریاضی روح بلند پرواز او را از حرکت باز می‌دارد و با طعنه با او چنین زمزمه می‌کند: «چه شباهت عجیبی بین تعقیب کننده و تعقیب شونده وجود دارد!»

۱۶ اما سرچشمهٔ این‌مکاشفهٔ خلاق کجاست؟ این‌ضرورتی که تجربهٔ انسانی را منظم می‌کند و رهبری می‌نماید و آن را از وحشت هرج‌ومرج می‌رهاند چیست؟ این نیروی بزرگی که صخره‌های بیحاصل و منجمد و بی حرکت منطق را ازجای خود تکان می‌دهد از کجا آمده است؟

« موجها زمزمه‌های ابدی خود را نجوا می‌کنند ،
باد می‌وزد ، ابرها بادبان کشیدند ،
ستارگان ، سرد و بی اعتنا چشمك می‌زنند ،
و ساده دلی برای جواب خود انتظار می‌کشد . »

و انسان عاقل چه می‌کند ؟ انسان عاقل کار خود را در زندگی از سر می‌گیرد . پشم اوهام امروز را که ممکن است حقایق فردا باشند می‌ریسد ، نظر نهائی دیگری بر قلل دور دست ، که در پشت آنها منشأ اندیشه و فکر گم گشته است ، می‌افکند و این کلمات مسیح را تکرار می‌کند :

« با آنکه سرچشمه تاریك است ،
اما آب به جریان خودادامه می‌دهد . »

جریان تحول تصور عدد در طول تاریخ

پیشرفتها	نام اشخاص	کشور	زمان
دوران باستان			
کشف اعداد گنگ	فیثاغورس	یونان	قرن ششم ق.م
اولین بحران در تصور بینهایت	زنون، افلاطون، ارسطو	یونان	قرن چهارم ق.م
اولین فرمول بندی مفهوم حد	ارشمیدس	یونان	قرن سوم ق.م
اختراع علامت صفر	نامعلوم	هند	قرن اول ب.م
اعداد منفی	نامعلوم	هند	قرون اول ب.م

تجدید تعلیمات قدیم

اولین کاربرد منظم کسرهای پیوسته	بومبلی	ایتالیا	قرن شانزدهم ب.م
اولین فرمول بندی اعداد مرکب	کاردانو، بومبلی	ایتالیا	قرن شانزدهم ب.م
اختراع علامتگذاری حرفی	ویتا	فرانسه	آخر قرن شانزدهم
کشف قضیهٔ عامل	هاریوت	انگلستان	۱۶۳۱
فرمول بندی بینهایت کوچك	کاوالیری	ایتالیا	۱۶۳۵
اولین فرمول بندی مجموعه نامحدود	گالیلئو	ایتالیا	۱۶۳۸

دوران جدید

اختراع مختصات هندسی	دکارت	فرانسه	۱۶۳۹
اولین فرمول بندی ـ اصل استقراری ریاضی	پاسکال	فرانسه	۱۶۵۴
اختراع حساب انتگرال	نیوتون لایب نیتز	انگلستان آلمان	درحدود ۱۶۷۷

اولین کار برد منظم ــ سریهای نامحدود	نیوتون / لایب نتیز	انگلستان / آلمان	در حدود ۱۶۷۷
کشف تفسیر هندسی ــ عداد مرکب	گاوس	آلمان	۱۷۹۸

قرن نوزدهم

اولین فرمول بندی ــ توان یك مجموعه	بولتانو	آلمان	۱۸۲۰
کشف اعداد جبری که ــ به وسیلهٔ رادیکالها قابل ــ توضیح نیستند	آبل	نروژ	۱۸۲۵
اختراع کواترنیون‌ها	هامیلتون	بریتانیای کبیر	۱۸۴۳
کشف فرازنده‌ها	لیوویل	فرانسه	۱۸۴۴
اولین نظریهٔ کمیتهای گسترده	گراسمان	آلمان	۱۸۴۴
اولین فرمول بندی ــ صریح اصل دوام دربارهٔ ــ قوانین صوری	هانکل	آلمان	۱۸۶۷
اولین نظریهٔ علمی اعداد گنگ	دده کیند	آلمان	۱۸۷۲
دومین تئوری اعداد گنگ	کانتور	آلمان	۱۸۸۳
کشف تناقص در نظریهٔ ــ مجموعه‌ها	بورالی ـ فرتی	ایتالیا	۱۸۹۷

شکسپیر

« چنین کردیم . . . از بیراهی راهها را یافتیم . »

۲

مسائل ، کهنه و نو

پاسکال

« زیرا برخلاف نظرغیراستدلالی شخص‌جاهل، انتخاب‌یك دستگاه شمارشی فقط امریست قرار دادی . »

الف | دربارهٔ ثبت برداری از اعداد

۱ **دربارهٔ حس شمارشی انسان وحیوان** . چگونه انسان ، بدون آنکه متوسل به شمارش عملی شود ، متوجه‌می‌شود که تعداد اشیاء یك مجموعه تغییر کرده است ؟ ماهیت این علم حضوری که‌ما **حس‌عدد** می‌نامیم‌چیست؟ تعداد کمی‌ازخوانندگان چاپهای قدیمتر این کتاب کوشش کرده‌اند تا باین سؤالات پاسخ گویند . من نیز خود را صالح نمی‌دانم تا براهینی راکه برای تأیید نظریه‌های گفته شده اقامه گردیده است رد نمایم ،

اما هرگز نیز نمی‌خواهم تصور خلاق آنان را نیز ناچیز انگارم، و بنابراین در اینجا بعضی از حدسیات متقاعد کننده‌تر کسانی را که بامن در این باب مکاتبه کرده‌اند بیان می‌دارم .

عدم تجانس یك مجموعه می‌تواند به تخمین آن کمك کند . مثلا وقتی وارد یك اتاق می‌شوید تشخیص می‌دهید که تعداد اشخاص موجود کمتر از حد معمولی‌اند ، زیرا یك قیافه آشنا در آنجا وجود ندارد : توفیق شما در ارزیابی مدیون این امر است که افراد گروه مثل دانه‌های گردو شبیه به یکدیگر نیستند، بلکه اشخاص مستقلی هستند که هر یك مشخصهٔ مربوط به خود را دارند . شاید از راههائی مشابه کلاغی که در فصل اول از آن ذکری به میان آمد تشخیص می‌داد که تمام کسانی که وارد برج شده‌اند از آن خارج نگردیده‌اند .

خستگی ناشی از کوششی برای غلبه کردن بریك مانع می‌تواند کار تخمین را آسان کند. مثلا ، اگر شما از پلکانی بدون آنکه طبقات عمارت را بشمارید بالا رفته باشید، پاهای شما خواهند گفت که پنج طبقه بالا رفته‌اید یا شش طبقه . حس شمار زنبوری را که در فصل اول بدان اشاره شد می‌توان بر پایهٔ چنین زمینه‌هائی توضیح داد .

اغلب **قواره‌خوانی** کمك قابل توجهی به ما می‌کند . اگر کسی با یك نظر تشخیص داد که میزی برای بیش از چهار نفر چیده شده است ، این تغییر قوارهٔ چیدن‌میز بوده که در این آگاهی به او کمك کرده است ؛ یا ، یك ردیف نخود را بر روی یك میز مورد توجه قرار دهید : اگر آنها درست پهلوی هم « و بر روی یك خط » منظم شده باشند ، شما نمی‌توانید

بگوئید که پنج نخود است یا شش نخود؛ اگر توزیع این نخودها نامنظم باشد حدس شما به یقین نزدیک‌تر خواهد بود و حتی وقتی آنها رئوس یك کثیرالاضلاع را تشکیل دهند، به قضاوت خود اعتماد بیشتری خواهید داشت. ممکن است چنین اصولی حاکم بر غریزهٔ پرنده‌ای باشد که لانه او مورد دستبرد قرار گرفته است.

۲ چگونه خشایارشا ارتش خود را می‌شمرد

«سرزمین دوریسکوس در تراکیا دشت وسیعی است در کنار دریا که از میان آن رود بزرگی بنام هبروس جاری است؛ در آنجا آن قلعه سلطنتی که نامش دوریسکوس است ساخته شده بود، و بر آن یك نگهبان پارسی از طرف داریوش، از زمان لشکرکشی او به سرزمین سکه‌ها، گمارده شده بود. به نظر خشایارشا اینجا مکان مناسبی برای آرایش و شمارش سپاهیان بود. تمام ناوگانی که به دوریسکوس رسیده بودند، به دستور او به ساحل مجاور آورده شدند .... و برای توقف لنگر انداختند .... در این فاصله خشایارشا سپاهیان خود را شمارش کرد ....

« من دقیقاً نمی‌توانم تعداد سپاهیان هر قسمت را بگویم، زیرا کسی را نمی‌توان یافت که آن‌را به ما گفته باشد؛ اما شمارهٔ کل افراد ارتش زمینی به یك میلیون و هفتصد هزار رسید. شمارش بدین طریق انجام پذیرفت: تعداد یك میریاد (= ده هزار نفر) از افراد را دریك جا جمع کردند، و پس از آنکه آن‌ها را تا حدممکن تنگ یکدیگر نگهداشتند، خطی به‌دور آنها کشیدند؛ پس از آن آنها را از میان خط بیرون فرستادند

و یك دیوار سنگی در محلی که خط‌کشی شده بود بپا کردند ، پس از آن دسته دسته سربازان را داخل این حصار کردند و هر دفعه که پر می‌شد خالی می‌نمودند و عمل شمارش را بدین ترتیب انجام می‌دادند .» هرودوت : تاریخ ، کتاب VII.

۴ ثبت برداری از اعداد بزرگ « بنابر این آشکار است که تعداد دانه‌های شن موجود در کره‌ای به بزرگی کره‌ای که محدود به ستارگان ثابت است و قطر آن را ارستوخوس تخمین کرده بود ، کمتر از یك هزار میریاد (= ده هزار) از واحد طبقه هشتم است .» این جمله آخرین جملهٔ رساله‌ای از ارشمیدس است که نام «**ریگ شمار**» دارد .

منظور او از واحدهای طبقه هشتم چه بوده است ؟ میریاد یونانی برای ده هزار آماده است : این عدد را که $m = ۱۰^{۴}$ است ارشمیدس به عنوان **واحد طبقهٔ اول** در نظر گرفته است. بعد از آن **اوکتاد** است ، یعنی یك میریاد میریاد ، که ارشمیدس آن را به‌عنوان **واحد طبقهٔ دوم** تعریف می‌کند. اجازه بدهید که اوکتاد را با Ω نمایش دهیم. در این صورت $\Omega = m^{۲} = ۱۰^{۸}$ است . بدین ترتیب باید چنین استنباط کنیم که $m^{۳} = ۱۰^{۱۲}$ واحد طبقهٔ سوم است . ولی قضیه بدینمنوال نبوده است. **مبنای** طرح شماری ارشمیدس **اوکتاد** یعنی $\Omega = ۱۰^{۸}$ بوده است . از این‌رو واحد طبقه n ام باید به شکل $\Omega^{n-۱}$ تفسیر گردد ، و «تعداد دانه‌های شن در همهٔ عالم ،» آنطور که ارشمیدس تخمین زده بود ، برابر است با :

$$۱۰^{۳} \times ۱۰^{۴} \times (۱۰^{۸})^{۷} = ۱۰^{۶۳}$$

مقایسهٔ این ارزیابی ارشمیدس با بزرگترین عدد اول «شناخته شده . » ، که **هفدهمین عدد مرسن است** واخیراً به‌وسیلهٔ انستیتوی آنالیز عددی لوس آنجلس « Institute of Numerical Analysis at Los Angeles محاسبه شده‌قابل توجه است :

$$m = ۲^{۲۲۸۱} - ۱ \qquad (۱)$$

این عدد صحیح ازمرتبهٔ $۱۰^{۶۸۷}$ است و باتوجه به اینکه

$$۶۸۷ = ۸۵ \times ۸ + ۷$$

اگر بنا بود ارشمیدس این عدد را به سبك خود بیان کند ، آن را از مرتبهٔ **یك هزار میریاد از طبقهٔ هشتاد و شش** بیان می‌کرد .

۴ دربارهٔ اصل ترتیبی یا مقامی اغلب ازما شمارش را در سنین بسیار کم آموخته‌ایم ، و در میان ما کمتر کسی را می‌توان یافت که از آن زمان تاکنون دربارهٔ این موضوع اندیشیده باشد . اجازه بدهید خاطرات خود را زنده کنیم .

این آموزش ازراه نوعی تطبیق میان **انگشتان ولب‌ها** شروع می‌شود . طفل ارتباط نمونه‌هائی که با انگشتان او به وجود می‌آیند با بعضی ازکلمات می‌آموزد . به اوگفته می‌شود که این کلمات اعداد نام دارد ، و او را وادار می‌کنندکه آنها را به صورت **رشته‌ای منظم** در خاطر نگهدارد . دراین‌ضمن که رفته‌رفته انگشتان برای شمارش کفایت نمی‌کند ، به او می‌آموزندکه یك روش **بیانی** جالبی را به‌کاربردتابدانوسیله بتواند میدان شمارش خود را بدون توسل به قالب‌های جدید

قابل لمس گسترش دهد. اینك «شمارش به مسابقهٔ با اعداد یا بازی با کلمات تبدیل شده است که کودك در ابتدا مشتاق به‌انجام دادن آنست. بالاخره روزی فرا می‌رسد که طفل تشخیص می‌دهد که **آنچه یك بار گفته یا عمل شده همیشه‌قابل تکــرار است**؛ و پس از آن درحین شمارش رشتهٔ اعـداد ناگهانی بر روی جمله‌ای توقف می‌کند و با بیان «الی‌آخر» از شمارش بقیهٔ اعدادصرف‌نظرمی‌نماید. درچنین وضعی‌آموزش او دربارهٔ شمارش کامل شده است. در همین احوال در مغزاو تخم فکری، که سالها بعد در قیافهٔ **مفهوم بینهایت** او را مشوش و حیران می‌کند، کاشته می‌شود.

روش بیانی که این اعتماد فوق‌العاده را دربارهٔ تکرار نامحدود عمل شمارش تلقین می‌کند چیست؟ علی‌رغم این واقعیت که‌در سنین‌کودکی به‌این روش مسلط شده‌ایم، این طرزکار بر پایهٔ فکر پیچیدهٔ ریاضی قرار دارد. اساس این فکر چنین‌است **که هر عدد صحیح مثبت را می‌توان از یك راه وتنها از همان راه به شکل کثیرالجمله‌ای که از توان‌های ده به‌وجود آمده است منظم کــرد و ضرائب این کثیرالجمله محدودبه اعدادصحیح کمتر از ده‌خواهد بود.**

همانطور که در فصل دوم گفته شد، رجحان پایهٔ ده بر اساس شایستگی ذاتی آن عدد نیست، بلکه به طورآشکار نتیجهٔ این واقعهٔ **فیزیولژیکی** است که تمام اشخاص عادی دارای ده انگشت در دستان خود می‌باشند. این سیمای فیزیولژیکی زبان عددی ما بسیار جالب است؛ اما جالب توجه‌تر شکل

ساختمان کثیر الجمله‌ای آنست . در واقع چنین به نظر می‌رسد که هر جا انسان به وسیلهٔ انقلابی در زندگی ناچار شده است که با اعدادی صحیح ، بزرگتر از آنچه فن انگشتانش شمارش آنها را به او اجازه می‌داد ، سر و کار داشته باشد ، همواره به این شکل نمایشی کثیرالجمله‌ای متوسل شده است.

شمارش وضعی چیزی جز اجرای این روش بیانی در نوشتن نیست؛ با افزودن علامت 0 (صفر) بر ردیف ضرایب مجاز ، شکافهائی را که ممکن است در جمل کثیرالجمله منظم شده وجود داشته باشد پر کنیم و بدین ترتیب از هر گونه ابهام جلوگیری کنیم . بنابراین (a b c d) فقط یك **کلمهٔ رمزی** و صورت خلاصه شده‌ازشکل کثیرالجمله‌ای است مانند:

$$aR^{۳}+bR^{۲}+cR+d=(abcd)R$$

که در آن R مبنا و ضرایب a ، b ، c ، b می‌توانند مقادیر ۰، ۱، ۲، ... R-۱ را بپذیرند ، اما برای R یعنی مبنا یا ریشهٔ (Radix) دستگاه، هرعدد صحیحی بجزیك را می‌توان انتخاب کرد . بعلاوه با توجه بهاینکه‌آموزش ما دربارهٔ اعمال حسابی برروی اعدادی که با عدد نویسی دهگانی‌بیان می‌شوند، از خواص کثیرالجمله‌های کلی بدست آمده‌اند ، به سهولت‌می‌توان همین قوانین را دربارهٔ سایر دستگاهها به کار برد.

۵ دربارهٔ تاریخ علامت دهگان شمار وضعی قرنها پیش از آنکه معلوم شود یکی از مزایای آن سهولت زیاد آن در استعمال کسرها است ، به کار می‌رفت . حتی پس از آن‌نیز این تشخیص به هیچوجه کامل نبود ، زیرا دیده می‌شود که باز

علائم فوقانی و تحتانی پردردسر به وسیلهٔ استوین (Stevin) و ناپیر(Napier) به کار برده شده است .

تنها چیزی که لازم بود تا طرح ما را تمام وکمال مؤثر سازد علامتی همچون **نقطهٔ اعشاری** [1] جدیدبودکه عدد صحیح را از جزءکسری مجزا سازد . اما نوآوران، جزکپلروبریگز (Briggs) ، به دلایل نامعلومی،یا این واقعیت راتشخیص نمی‌دادند ، یا اعتمادی نداشتند که بتوانند مردم را به پذیرفتن آن وا دارند . در واقع ، یك قرن پس از کشف استوین ، یکی از مورخین آن دوران با اشارهٔ به علامات‌گوناگونی‌که درآن عصر رایـج بوده چنین می‌گوید : Quod homines tot sententiae (به تعداد مردم عقاید وجود دارد) . و قبل از آنکه طرزنوشته اعشاری پایدار شود وعلائم اضافی و زایدحذف گردد یك قرن دیگر لازم بود .

نویسنده	زمان	طرز نوشتن
قبل از سیمون استوین		$۲۴\frac{۳۷۵}{۱۰۰۰}$
سیمون‌استوین	۱۵۸۵	$۲۴\ ۳^{(۱)}\ ۷^{(۲)}\ ۵^{(۳)}$
فرانسیسکوس‌ویتا	۱۶۰۰	۲۴|۳۷۵

۱) در فارسی به جای نقطهٔ اعشاری ممیز می‌گذارند و احمقانه در این اواخر آن را به خط‌کسری مبدل کرده‌اند .

یوهان کپلر	۱۶۱۶	۲۴(۳۷۵ | || |||
جان ناپیر	۱۶۱۷	۲۴ : ۳ ۷ ۵
هانری بریگز	۱۶۲۴	۲۴۳۷۵
ویلیام اوترد	۱۶۳۱	۲۴ |۳۷۵
بالام	۱۶۵۳	۲۴ : ۳۷۵
اوزانام	۱۶۹۱	۲۴ • ۳(۱) ۷(۲) ۵(۳)
وضع جدید		۲۴/۳۷۵ (24.375)

۶ دربارهٔ انتخاب مبنا پیشنهاد بوفون دایر بر تغییر مبنای جهانی شمارش از **ده** به **دوازده** درقرن ما تجدید حیات شگفت انگیزی پیداکرده است . انجمن‌های شمار دوازدهگانی در داخل و خارج به وجود آمد . جزوه‌ها و نشریات هفتگی در مدح فضلیت **دوازده** باشوروشوقی که توأم باحرارت مذهبی بود منتشر شد ؛ پس از حل مسألهٔ « آزاردهنده » وضع علامات برای **ده** و **یازده** ، مصلحان به ساختن جداول رو آوردند . **جدول‌های تبدیل و ضرب** و حتی جدولهای **لگاریتم دوازدهگانی** به وجود آمد . آخرالامر این جهاد نیز مانند سایر جنبش‌هائی که هدفشان تغییر عادت دسته جمعی بشر بود به پایان رسید .

تغییر شکل دیگر ، یعنی شمار ثنائی لایب‌نیتز ، که حتی بیگانه‌تر از تغییر شکل پیشنهادی بوفون بود ، سرنوشت کاملا متفاوتی پیدا کرد . آنچه که زمانی به عنوان یادگاری باشکوه

از یکتاپرستی با هیجان استقبال گردید ، در بطن دستگاهی که وظیفهٔ انسان‌را انجام می‌دهد جای گرفت، زیرا اغلب ازماشین‌های محاسبهٔ سریع امروزی بر پایهٔ شمار ثنائی کار می‌کنند . این دستگاه یا انسان الکترونیکی به سنت‌های بشری وابسته نیست، عاداتی به همراه ندارد، و « حافظهٔ‌آن » بابرنامهٔ ماشین کنترل می‌شود . نقصان فشردگی شمار ثنائی در این ماشین با سرعت عظیم‌آن جبران شده است . عادات محاسباتی متعدی‌نیز به‌طور جدی با این دستگاه به مبارزه برنمی‌خیزند ، زیرا این ماشین به طور خودکارمفروضات دهگان را به دوگانه وبالعکس تبدیل می‌کند . زمانی نخواهدگذشت که انسانی‌که درپشت این ماشین ایستاده است ، به اندازه اعضای داخلی خود ازاندرون دوگانهٔ آن بی‌اطلاع باشد .

۷ **در بارهٔ تغییر مقیاس** دامنهٔ محدود حس شمارشی بشر این امکان را تقریباً از بین می‌برد که عدد معین را طبق قالب مجموعه‌ای‌که این عدد « اندازهٔ اصلی » آنست نامگذاری کند . راه دیگر کار اینست که عدد را باعلاماتی‌که برای ثبت آن به‌کار رفته است مربوط کند . قبل از ابداع ارقام عربی ، حروف الفبا برای این منظور به‌کار می‌رفت وتاحدی این امر سبب موفقیت بزرگ جفر (Gematria) درآن دوران بود . باظهورعدد نویسی‌ترتیبی وقبول‌جهانی‌آن ، رمزنویسی دهگانی خود به خود برای هر عدد نامی به وجود آورد . امروز نام‌گذاری فوق پا را از حدود خود فراتر نهاده است :

ما آموخته‌ایم که عدد را بارمزنویسی دهگانی

آن همانند بدانیم . در واقع آن قدر نیروی عادت قویست که اغلب از ما هر نوع نمایش دیگر عدد را نوعی تغییر شکل مصنوعی تلقی می‌کنیم ، در حالی که می‌دانیم در مقیاس ده چیز مطلق و یا واجب‌الاحترامی وجود ندارد .

تبدیل هر مقیاس به عددنویسی دهگانی به‌وسیلهٔ رمز نویسی کثیرالجمله‌ای عملی است . مثلا رمز نویسی $(4321)_5$ را در نظر بگیرید : طبق تعریف $(4321)_5 = 4 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 5 + 1 = 586$ به‌وسیله تدبیری که خواننده تحت عنوان تقسیم ترکیبی (synthetic division) آموخته است محاسبه آسانتر خواهد شد ، اما بهتر است نام آن را **جایگزینی ترکیبی** (synthetic substitution) بگذاریم .

در جدول زیر شکل کار به طور تفصیلی نشان داده شده است :

۱	۲	۳	۴	
$(5 \times 117) + 1 = 586$	$(5 \times 23) + 2 = 117$	$(5 \times 4) + 3 = 23$		
۵۸۶	۱۱۷	۲۳	۴	خارج قسمت‌ها
۱	۲	۳	۴	باقیمانده‌ها

نظیر همین جدول را برای تغییر مقیاس عددی که با صورت متداول بیان شده بهر مقیاس دیگر ، می‌توان بکار برد . **با معکوس کردن** عمل محاسبه ، سلسله‌ای از تقسیم‌های پی‌درپی برمبنای مقیاس جدید حاصل می‌شود که درمثال انتخاب شده این مبنا ۵

است : **باقیماندهٔ این تقسیم‌ها اعداد صحیح رمزنویسی را که درصدد یافتن آنیم به‌وجود می‌آورد .**

اجازه بدهید برای استعمال این شکل کار جمل متوالی **رشتهٔ مرسن** را که جملهٔ عمومی آن $M_p = 2^p - 1$ است، محاسبه کنیم. در دستگاه ثنائی این اعداد صحیح بشکل زیر نشان‌داده می‌شوند :

$$M_1 = 1, M_2 = (11)_2, M_3 = (111)_2, M_4 = (1111)_2, \dots \quad (2)$$

طرز محاسبه‌ای که در بالا شرح‌داده شدشیوهٔ سهلی برای محاسبه این ارقام بوجود می‌آورد .

p	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
M_p	۱	<u>۳</u>	<u>۷</u>	۱۵	<u>۳۱</u>	۶۳	<u>۱۲۷</u>	۲۵۵	۵۱۱	۱۰۲۳

جمله‌هائی که در زیر آن خط‌کشیده شده است اعداد اول رشته‌اند و بنام اعداد **مرسن** خوانده می‌شوند . من باردیگر در قسمت‌های بعد دربارهٔ این اعداد صحیح صحبت خواهم کرد (رجوع کنید به : ب ، ۱۰)

۸ مسأله‌ای از پاسکال نقل قولی که در آغاز این فصل آمده ، از مقالهٔ پاسکال تحت عنوان « دربارهٔ یافتن قابلیت تقسیم اعداد به وسیلهٔ ارقام آنها » اقتباس شده است . آزمایش پاسکال دربارهٔ قابلیت تقسیم به عدد صحیحی مانند q ارتباط

نزدیکی با بسط $\frac{1}{q}$ به‌**کسر** اعشاری دارد . از این نقطه‌نظر بود که بررسی پاسکال به وسیلهٔ معاصر انگلیسی اوجان‌والیس و در قرن بعد توسط برنولی ، اویلر ، و لامبرت که درگسترش و عملی‌تر کردن این نظریه کوشیدند ، ادامه یافت .

اجازه بدهید شیوه‌ای که برای گسترش عدد $\frac{1}{q}$ به‌کسر اعشاری به‌کار رفته است بررسی کنیم . در اینحالت q را عدد اول بغیر از ۲ یا ۵ اختیار می‌کنیم . با راه عمل این تبدیل ، که‌آنرا **تقسیم طولانی** می‌نامیم، آشنایی داریم؛ کسراعشاری حاصل دراین جریان از نوعی است که به نام **دوره‌ای** معروف است ، زیرا شامل بینهایت « قطعهٔ » همانند است . این قطعه‌یك **دوره** نامیده می‌شود و تعداد ارقام قطعه **تناوب** هر دوره خوانده می‌شود . مثلا در مورد $q=۷$ چنین داریم .

0,	۱	۴	۲	۸	۵	۷	۱	۴	۲	۸	۵	۷	...	خارج قسمت‌ها
۱	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	مقسوم‌ها
۱	۳	۲	۶	۴	۵	۱	۳	۲	۶	۴	۵	۱	...	باقیمانده‌ها

بدین‌ترتیب دوره $K = ۱٤۲۸۵۷$ و تناوب $p=۶$ است .

خارج قسمت‌ها که ارقام گسترش را به وجود می‌آورند ، در برهان پاسکال تأثیری ندارند . او فقط به باقیمانده‌ها توجه داشته‌که من به‌علت فقدان نام مناسب آنهارا **پس‌مانده‌های اعشاری مقسوم‌علیه** q نامگذاری می‌کنم . **رشتهٔ حاصل از پس مانده‌ها متناوب است، و تناوب دورهٔ پس مانده نمایندهٔ تناوب خود گسترش است** . از

ماهیت عمل محاسبه می‌توان استنباط کرد که هر دورهٔ پس مانده با ۱ شروع می‌شود ، و این که در یك دوره دو پس‌ماندهٔ **مساوی با یکدیگر وجود ندارد** . از طرف دیگر ، پس مانده‌ها می‌توانند تمام ارقام از ۱ تا $q-۱$ را بپذیرند :

بنابر این **حد اکثر تناوب برابر $q-۱$ است** .
مسلم است که این دوره یا مانند حالتی که $q=۷$ است برابر $q-۱$ ویا مانند حالت $q=۱۳$ **مقسوم‌علیهی** از $q-۱$ است.
درجدول زیرپس مانده‌های اعداد صحیح مختلف تهیه شده است؛ مطابق روش پاسکال ، تنظیم ارقام **از راست به چپ** صورت گرفته است تا باترتیب ارقام درعدد نویسی رمزی مطابقت‌داشته باشد .

اینك من برهان پاسکال را دربارهٔ $q=۷$ بیان می‌کنم که نمونه‌ای از حالت کلی است . ابتدا اجازه بدهید نتایج تقسیم طولانی را بررسی می‌کنم :

$1=0.7$	$+1$	$10^4=1428.7$	$+4$
$10=1.7$	$+3$	$10^5=14285.7$	$+5$
$10^2=14.7$	$+2$	$10^6=142857.7$	$+1$
$10^3=142.7$	$+6$	....	.....

اینك یك عدد سه رقمی را در نظر می‌گیریم .

$$N=(CBA)=A.1+B.10+C.10^2$$

به جای توانهای ۱۰ مقادیر آنها را می‌گذاریم :

$$N=7.H+(A+3B+2C) \qquad (۲)$$

که در آن H عددیست صحیح و مثبت : از اینجا نتیجه می‌شود که N تنها وقتی بر 7 قابل قسمت است که $A+3B+2C$ بر 7 قابل قسمت باشد .

اینك ازاین حالت خصوصی بحالت کلی می‌پردازیم ، و فرض می‌کنیم R_1 و R_2 و R_3 ... R_j پس مانده‌های q و $N=(D_j \ D_{j-1} \cdots D_3D_2D_1)$ عددی باشدکه می‌خواهیم قابلیت تقسیم آنرا بر q آزمایش کنیم : **دراینصورت** بر حسب آنکه q مجموعه‌ای را نظیر آنچه در بالا گفته شد بتواند تجزیه کند عدد N به q قابل قسمت خواهد بود و بالعکس .

پس مانده‌های اعشاری و دوره‌ها

مقسوم علیه   تناوب

1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	p	q
1	0	0	0	0	0	0	0	0		2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3
1	0	0	0	0	0	0	0	0		5
1	3	2	6	4	5	1	3	2	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
1	0	0	0	0	0	0	0	0		10
1	10	1	10	1	10	1	10	1	2	11
1	10	9	12	3	4	1	10	9	6	13
1	10	15	14	4	6	9	5	19	16	17

$$P=R_1D_1+R_2D_2+R_3D_3+\cdots+R_jD_j \quad (۴)$$

✿ ✿ ✿

ما قضیهٔ پاسکال را در مورد **قابلیت تقسیم** بیان کردیم. ولی دامنهٔ تفسیر و توضیح آن وسیع‌تر است . در واقع این استدلال نشان می‌دهد که **باقیماندهٔ تقسیم عددی مانند N بر q برابر است با باقیماندهٔ تقسیم تابع آزمونی** p(test function) بر q ، یا اگر اصطلاح گاوس را به کار بریم ، **اعداد صحیح N و P نسبت به مدول یا اساس q همنهشت** (congruent) **هستند.** صورت علامتی این بیان چنین است :

$$N = p \pmod{q} \qquad (۵)$$

بدین ترتیب در حالت $q = ۹$ می‌بینیم

$R_۱ = R_۲ = R_۳ = \ . \ . \ . \ = 1$ و در نتیجه

$D_j = \Sigma D$ و $P = D_1 D_2 + D_3 + \cdots$

$$N = \Sigma D \pmod{9} \qquad (۶)$$

و این همان قاعده **طرح نه نه** است ، که می‌گوید **چه خود عدد صحیح و چه مجموع ارقام آنرا بر ۹ قسمت کنیم باقیمانده یکی خواهد بود .** مخصوصاً **عددی بر ۹ قابل قسمت است که مجموع ارقام آن بر ۹ قابل قسمت باشد و تنها در همین حالت قابل قسمت است .**

درباره‌ٔ قابلیت‌تقسیم N بر ۹ برای تمام‌مقادیر N و q صادق است؛ با این حال در عمل انسان زودتر به نقطه‌ٔ نهائی کار می‌رسد . از طرف دیگر بعضی از قواعدکه ازقضیه‌ٔ کلی ناشی می‌شوند برای محاسب عملی واجد اهمیت زیاد است . قبل‌از بیان این قوانین اجازه بدهید یادآوری‌کنم کـه در امتحان قابلیت تقسیم عددی صحیح بر q ، همیشه می‌توان به‌جای عدد مورد آزمایش **تابع ـ آزمونی** پاسکال یعنی p صورت **همنهشت** با آنرا گذارد ، و یا به عبارت ساده می‌توان از p هرمضربی از q را **کم نمود و یا بدان اضافه کرد** بدون آنکه به صحت آزمایش خدشه‌ای وارد شود. برای مثال گوئیم‌که ملاك پاسکال برای قابلیت تقسیم عددی سه رقمی بر ۷ آنست کـه ۷ بتواند $P=۲C+۳B+A$ را عاد کند . با اضافه کردن B ۷ و گذاردن T به جای $۱۰B+A$ تابع ـآزمونی بسیارساده‌تری به دست می‌آوریم که $T+۲C$ است . بدین‌ترتیب ۵۸۱ بر هفت قابل‌قسمت است زیرا ۷ می‌تواند $۸۱+۲\times۵=۹۱$ را عاد کند .

I . آزمایش عدد سه رقمی:

$$T=(B \text{ ، } A) \text{ ، } N=(C\ B\ A)$$

اساس : q	نزدیکترین مضرب q به ۱۰۰	تابع آزمونی
۷	۹۸	$۲C+T$
۱۱	۹۹	$C+T$
۱۳	۱۰۴	$T-۴C$

$T-۲C$	۱۰۲	۱۷
$۵C+T$	۹۵	۱۹
$۸C+T$	۹۲	۲۳
$۱۳C+T$	۸۷	۲۹
$۷C+T$	۹۳	۳۱

مثال : $N=۹۱۲$ و $T=۱۲$. N بر ۱۷ قابل قسمت نیست زیرا $۱۲-۲\times۹=-۶$ ؛ N بر ۱۹ قابل قسمت است، زیرا

$$۱۲+۵\times۹=۵۷=۱۹\times۳$$

II . ملاك برای ۱۱ . تابع پاسكال عبارتست از ... $P=A+۱۰B+C+۱۰D+E+۱۰F+\cdots$ با کم کردن $۱۱B+۱۱D+۱۱F+\cdots$ ملاك را به شکل سهل‌تری تبدیل می‌کنیم :

$$P=A-B+C-D+E-F+\cdots$$

مثال : $N=۳۹۹۱۶۸$ بر ۱۱ قابل قسمت است ، زیرا $۳-۹+۹-۱+۶-۸=۰$

III . ملاك برای ۷ و ۱۳ . این ملاكها را نیز می‌توان ازقضیهٔ پاسکال به‌دست‌آورد. با این حال‌راه مستقیم‌تر از این جا به دست می‌آید که **$۱۰^۳+۱=۱۰۰۱$ هم بر ۷ و هم بر ۱۳ قابل‌قسمت است** ، و در نتیجه هم ۷ و هم ۱۳عدد $۱۰^۶-۱=۹۹۹،۹۹۹$ و $۱۰^۹+۱=۱۰۰۰،۰۰۰،۰۰۱$ وغیره را عادی کنند . برای‌مثال، اگر N عدد۹رقمی دلخواه باشد ، می‌توان چنین نوشت .

$$N = x + ۱،۰۰۰ y + ۱،۰۰۰،۰۰۰ z = x - y + z + ۱۰۰۱ H \quad (۷)$$

بنابراین وقتی N بر ۷ (یا ۱۳) قابل قسمت است که ۷ (یا ۱۳) ، $x - y + z$ را عاد کند . این قانون ساده بخصوص در روش جدید برای ثبت اعداد بزرگ به صورت قطعه‌های سه‌تائی به کار می‌رود .

مثال :

$N = ۸۶۴،۱۹۲$. در اینجا $۸۶۴ - ۱۹۲ = ۶۷۲ = ۷ \times ۹۶$

بدین‌ترتیب N بر ۷ قابل قسمت بوده بر ۱۳ قابل‌قسمت نیست.

۱۰ رسیدگی به پس‌مانده

دربارهٔ کاشف قاعده طرح نه نه یامدت زمانی که این قاعده به‌کار رفته است چیزی معلوم نیست ، جز آنکه پاسکال در مقالهٔ خود دربارهٔ مقسوم علیه‌ها و ارقام ، که من قبلا از آن صحبت‌کردم ، مطالبی در این باره به عنوان معلومات عمومی یاد می‌کند ، و از آن مقاله تاکنون بیش از سیصد سال می‌گذرد . محاسبان دوران قدیم این قاعده را در جمع و ضرب به کار می‌بردند ، و من فکر نمی‌کنم که حسابداران معاصر به این ظرافتکاریها بپردازند . خوب یا بد. ماشین‌های حساب به مهارت محاسبان مانند استادی خطاطان خط بطلان کشیده است .

جالب توجه است که قاعده طرح نه‌نه از اصلی مشتق شده است که میدان آن ازکاربردهای ناچیزی که درابتداء این قاعده به خاطر آنها طرح ریزی شده بود تجاوز می‌کند . در واقع ،

خود طرز عمل برای تمام پایه‌ها و برای تمام دستگاههای شمارشی معتبر است ، و آموزش آن می‌تواند بمثابهٔ عالیترین مقدمه برای نظریهٔ همنهشتی کاوس که پیشتر ذکری ازآن شد ، کمك کار باشد . با این حال ، برای اجتناب از سرگشتگی ، من وسیلهٔ مستقیم‌تری به‌کار خواهم برد .

اگر a باقیماندهٔ تقسیم عدد صحیح A بر عدد صحیح q باشد ، دراین صورت خواهم‌گفت که a **پس ماندهٔ A بر اساس q است** و چنین می‌نویسم :

$$\mathrm{res}A = a (\mathrm{mod}\ q) \qquad (۸)$$

پس مانده می‌تواند از صفر تا ۱−q باشد ، و معنای (mod q) $\mathrm{res}A=0$ آنست که q عدد A را عاد می‌کند . اینك اگر C,B,A ... دستهٔ محدودی از اعداد صحیح باشند ، c,b,a پس ماندهٔ آنها نسبت به اساس q ؛ دراین صورت اثبات مطالب زیر مشکل نخواهد بود .

$$(۹)\begin{cases} \mathrm{res}(A+B+C+\cdots)=\mathrm{res}(a+b+c+\cdots) \\ \mathrm{res}(A-B)=\mathrm{res}(a-b) \\ \mathrm{res}(A.B.C\cdots)=\mathrm{res}(a.b.c\cdots) \\ \mathrm{res}(A^m)=\mathrm{res}(a^m) \\ \mathrm{res}A^m.B^n.C^p\ldots)=\mathrm{res}(a^m.b^n.c^p\ldots) \end{cases}$$

که در اینجا توانهای p,n,m ..... اعداد صحیح ومثبت‌اند .

با ترکیب این خواص می‌توان قضیه راتا **عمومی‌ترین**

تابع صحیح که دارای توانها و ضرائب و پارامترهای دلخواه باشند تعمیم داد. من نام این قضیهٔ عمومی را **اصل پس مانده** می گذارم . این قضیه را می توان چنین بیان کرد : اگر $F(x,y,z,\ldots)$ تابعی دلخواه باشد، و فرض کنیم که اگر به جای z,y,x .... به ترتیب مقادیر C,B,A ... را بگذاریم نتیجهٔ تابع عدد صحیح N گردد و بعلاوه ، اگر ، $n \ldots c,b,a$ پس ماندههای C,B,A ، ... N نسبت به اساسی مانند q باشند، دراین صورت

$$F(A,B,C\cdots)=N \qquad (۱۰)$$

مستلزم آن خواهد بود که

$$F(a,b,c\cdots)=n$$

اینك به وسیلهٔ چند مثال که از نظر تاریخی اهمیت دارند چگونگی استفاده از اصل پس مانده را برای رسیدگی به محاسبات عددی نشان خوهیم داد .

۱۱ توضیحات تاریخی I . آن طور که فرما بیان داشته اویلر ثابت کرده است ، معادله $x^۳+y^۳=R^۳$ **دارای ریشههای صحیحی نیست** . از طرف دیگر معادله

$$x^۳+y^۳+z^۳=R^۳ \qquad (۱۱)$$

بینهایت جواب دارد . بعضی از این جوابها ، مانند (۳، ۶؛۵،۴) و (۱، ۶، ۸؛۹) را فیبوناچی میدانست . فهرستی از جوابها که شامل بیش ازصد دستهاند ، در ۱۹۲۰ به وسیلهٔ ه.و. ریچموند (H.W.Richmond) به چاپ رسید . یکی از این دستهها (۲۵، ۳۸، ۸۷؛ ۹۰) است . برای امتحان صحت

معادلهٔ $۲۵^۳+۳۸^۳+۸۷^۳=۹۰^۲$

ملاحظه می‌کنیم که دو جملهٔ آخر قابل قسمت بر ۹ اند: بنابراین ۹ باید $۲۵^۳+۳۸^۳$ را عاد کند ، و در واقع $۶۳=۳۸+۲۵$ است. ازطرف‌دیگر $۲۵^۳$ و $۹۰^۳$ متضمن‌مقسوم‌علیه مشترك ۱۲۵ اند . پس ۱۲۵ باید $۳۸^۳+۸۷^۳$ را عادکند. و چنانکه می‌بینیم $۳۸+۸۷=۱۲۵$ است .

II . از آن فهرست این رابطه به دست می‌آید :

$$۲۴^۳+۶۳^۳+۸۹^۳=۹۸^۳ \qquad (۱۲)$$

با توجه به اینکه ۷ اعداد ۹۸ و ۶۳ را عادمی‌کند ، باید $۲۴^۳+۸۹^۳$را نیز عاد کند . ولی ،

$$\text{resd}۲۴^۳(\text{mod}۷)=\text{res}۳^۳=۶ \text{ و } \text{res}۷۹^۳=\text{res}۵^۳=۶$$

از اینجا

$\text{res}(۲۴^۳+۸۹^۳)\ (\text{mod}\ ۷)$ صفرنبوده بلکه ۵ است .

بنابر این شروع کار خطا آمیز بوده است ، در صورتی‌که‌طرح نه‌نه جواب مثبت برای این حالت به وجود می‌آورد .

III. مسأله‌ای به‌نام**مسألهٔ رامانوجان** Problem-of Ramanujan بسیار نزدیك به موضوع قبل است :

تعیین اعدادی که بتوانند از بیش از یك راه‌تبدیل به‌مجموع‌دو مکعب شوند.

$۱۲^۳+۱^۳=۹^۳+۱۰^۳=۱،۷۲۹$ کوچکترین عدد صحیح از این نوع است . اینك رابطهٔ زیر را بررسی می‌کنیم :

$$N=۱۰۰۰۹۰۷۳۶=۹۶^۳+۵۰^۳=۹۳^۳+۵۹^۳$$

نتیجهٔ امتحان نه‌نه عبارت است از ۸=۸ . ازطرف‌دیگر

N بر ۷ قابل قسمت است زیرا ۷ عدد $۷۲۸ = ۱ + ۹ - ۷۳۶$ را عاد می‌کند . نتیجهٔ امتحان با اساس ۷ عبارت‌از

$$۳۵ = ۷ \times ۵ \text{ و } ۱۲۶ = ۷ \times ۱۸$$

IV . این رابطه را امتحان کنید :

$$N = ۱۲! + ۱ = ۴۷۹،۰۰۱،۶۰۱$$

با توجه به اینکه ! ۱۲ به هر عدد صحیحی مساوی و یا کمتر از ۱۲ قابل‌قسمت است ، باقیماندهٔ تقسیم ۴۷۹،۰۰۱،۶۰۱ به هر عدد صحیح نظیر اعداد مزبور باید ۱ باشد ، و خواننده این امر را به سهولت می‌تواند ثابت کند . امتحان اضافی دیگری از راه **قضیهٔ ویلسن** به دست می‌آید که بنابر آن $۱۲! + ۲$ به **عدد اول** ۱۳ قابل قسمت است ، از این قرار :

$$\text{res}(۴۷۹،۰۰۱،۶۰۱) = \text{res}(۴۷۹ - ۱ + ۶۰۱) =$$
$$\text{res}(۱،۰۷۹) = \text{res}(۷۸) = ۰ \pmod{۱۳}$$

V . در جای دیگر گفته شده است که چگونه اویلر به این نتیجه رسید کــه ۱،۰۰۰،۰۰۹ **عدد اول نبوده** بلکه حاصلضرب اعداد اول ۲۹۳ و ۳۴۱۳ و ۳ است . برای امتحان رابطهٔ :

$$۱،۰۰۰،۰۰۹ = ۲۹۳ + ۳،۴۱۳$$

ابتدا امتحان نه‌نه را به کار می‌بندیم . مجموعهٔ ارقام به ترتیب عبارتند از ۱۰ ، ۱۴ ، ۱۱ ؛ پس مانده‌ها ۱ ، ۵ و ۲ و $\text{res}(۵ \times ۲) = ۱$ است . از طرف دیگر در امتحان ۷ چنین داریم :

res (۱،۰۰۰۰،۰۰۹) = res (۹+۱) = ۳

res (۲۹۳) = res (۹۳+۴) = ۶ ؛ res (۳۰۴۱۳) =

res (۴۱۰) = res(۱۰+۸) = ۴

و res (۴ × ۶) = ۳

VI. با توجه به اینکه داریم ۳۱^۲ < ۱۰۰۰ < ۳۲^۲ ، معلوم می‌شود که برای عددی سه رقمی نمی‌توان عامل اولی بزرگتر از ۳۱ یافت. از اینجا، جدول توابع آزمونی قسمت ۹ را که پیش از این گذشت، می‌توان بسهولت برای بررسی اول بودن هر عدد سه رقمی به‌کار برد. از اینجاست که من در صفحهٔ ۴۴ یادآوری کردم که پنجمین عدد فرما،

۲^{۲^۵}+۱ بر ۶۴۱ قابل قسمت است.

آیا ۶۴۱ عددیست اول؟ در اینجا داریم C = ۶، T = ۴۱ و با توجه به‌اینکه ۶۴۱ < ۲۹^۲ ، اعداد اولی‌که باید آزمایش شوند ۷ ، ۱۱ ، ۱۳ ، ۱۷ ، ۱۹ و ۲۳ خواهند بود. می‌بینیم که هیچ یك از پس‌مانده‌های متناظر صفر نبوده و در نتیجه ۶۴۱ عددیست اول.

«ما قضیه‌ای بسیار زیبا و کلی بدست‌آورده‌ایم مبنی بر اینکه هر عدد صحیح یا مجذور است ، یا مجموع دو ، سه و یا حد اکثر چهار عدد مجذور . این قضیه به بعضی از رازهای پوشیدهٔ عددمربوط است، وامکان اثبات آن درحدود حاشیهٔ این صفحه موجود نیست .»

فرما Fermat

ب | مباحثی دربارهٔ اعداد صحیح

۱ دو مثلث حسابی استفاده از الگوهایی برای نشان دادن خواص اعداد صحیح با زوال فیثاغورسیان ازبین نرفت . مثلث حسابی پاسکال یکی ازاین موارد است. برهان‌فیبوناچی دربارهٔ اتحاد زیر زیاد مشهور نیست اما بسیارجالب است :

(۱۴)

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+\dots+n^۳=(۱+۲+۳+\dots+n)^۲$$

فیبوناچی با منظم کردن اعداد فرد در یك **آرایش مثلثی** ،

آنطور که در شکل ۱ نشان داده شده است، مشاهده کرد که K جمله از ردیف K امیك تصاعد حسابی با مقدار متوسط $K^۲$ را می‌سازند. از اینجا مجموع جمل ردیف K ام برابر است با $K \times K^۲$ یا $K^۳$، و مجموع جمل در m ردیف متوالی برابر است با $S = ۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ \ldots + n^۳$.

از طرف دیگر، با استفاده از قضیه‌ای که برحسب روایات به‌خود فیثاغورس منسوب است، **مجموع اولین p عدد صحیح فرد برابر است با $p^۲$**؛ پس:

$$S = (۱ + ۲ + ۳ + \ldots + n)^۲$$

مثلث پاسکال برای آن طرح شده بود که رابطهٔ بین ضرائب متوالی دو جمله‌ای را نشان دهد.

موافقت کنیم که ضریب جملهٔ $x^x y^g$ را به‌صورت (α,β) نمایش دهیم. گسترش $(x+y)^p$ وقتی شامل این جمله خواهد بود که $\alpha+\beta=p$ باشد؛ همچنین این گسترش شامل جملهٔ $x^{\alpha-۱} y^{\beta+۱}$ نیز خواهد بود. و از طرف دیگر، **گسترش دوجمله‌ای** $(x+y)^{p+۱}$ شامل عبارت $x^{\alpha} y^{\beta+۱}$ می‌گردد.

بین ضرائب این جمل «مجاور» رابطهٔ زیر وجود دارد:

$$(\alpha ,\beta) + (\alpha - ۱ ,\beta + ۱) = (\alpha ,\beta + ۱) \qquad (۱۵)$$

این همان **قانون ترجیعی** (Recursion Law) پاسکال است.

اینك، اگر آنطور که اغلب گفته شده، درست باشد که

$۲^{۰}$	۱										
$۲^{۱}$	۱	۱									
$۲^{۲}$	۱	۲	۱								
$۲^{۳}$	۱	۳	۳	۱							
$۲^{۴}$	۱	۴	۶	۴	۱						
$۲^{۵}$	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱					
$۲^{۶}$	۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱				
$۲^{۷}$	۱	۷	۲۱	۳۵	۳۵	۲۱	۷	۱			
$۲^{۸}$	۱	۸	۱۸	۵۶	۷۰	۵۶	۲۸	۸	۱		
$۲^{۹}$	۱	۹	۳۶	۸۴	۱۲۶	۱۲۶	۸۴	۳۶	۹	۱	
$۲^{۱۰}$	۱	۱۰	۴۵	۱۲۰	۲۱۰	۲۵۲	۲۱۰	۱۲۰	۴۵	۱۰	۱

شکل ۱ـ مثلث حسابی فیبوناتچی

تفکر دربارهٔ این « عدد مرموز و اسرار آمیز » پاسکال را در به وجود آوردن **اصل استقراء ریاضی** هدایت‌کرد ، دراین صورت باید مثلث حسابی را در موزهٔ تاریخ ریاضیات دفن کرد . با این حال ، این اصل بمثابهٔ یك وسیلهٔ فنی ، تأثیری جزئی درگسترش بعدی ریاضیات داشته است . این امر تاحدی مربوط به محدودیت‌های شیوهٔ کار بوده است ، که امکان تعمیم آن را در بارهٔ گسترش چند جمله‌ای و نیز در مورد توانهای منفی یا کسری فراهم نمی‌ساخته است . همچنین خود شکل قانون‌ترجیعی پاسکال ارتباط مهم بین اعدادصحیح **دوجمله‌ای و فاکتوریل** را در پردهٔ ابهام فروبرده است .اما دلیل عمده

این عدم موفقیت را باید در تاریخ دورانی پس‌از اتحاد سه‌گانه (دکارت ، پاسکال ، فرما) جستجو کرد . ظهور آنالیز بینهایت کوچك کارهای درخشان این مردان را در تاریکی فرو برد و نظریهٔ اعداد بیش از همه از این تاریکی زیان دید .

۴ قضیهٔ چند جمله‌ای عبارت

$$(x+y+z+\dots+w)^p$$

که در آن، **p** عددی صحیح و مثبت ، و **n** پایهٔ x ، y ، z ... w عناصری هستند که از قوانین عمومی جبر تبعیت می‌کنند ، به نام **کثیر الجملهٔ رتبه p** خوانده می‌شود وچون کاملا گسترش یابد ، کثیرالجمله‌ای از درجهٔ **p** ام از آن به دست می‌آید . این کثیرالجمله نسبت به **n** پایه متقارن است ، یعنی ، با جا به جائی x ، y ، z . . . تغییری در آن عارض نمی‌شود ؛ بعلاوه ضرائب جمل x^p ، y^p ، z^p وغیره برابر یك‌اند. اویلر ، و قبل از او لایب نیتز ، این توضیحات‌را دراتحاد زیر منعکس کردند :

$$(x+y+z+\dots w)^p-(x^p+y^p+z^p+\dots+w^p)=$$
$$S\,(x,y,z\dots w) \qquad (۱۶)$$

کثیر الجملهٔ S نه تنها متقارن است بلکه **همگن** نیز می‌باشد ، و این بدان معنی است که مقادیر توانهای **مؤلفه‌های یك جمله‌ای** $Mx^\alpha y^\beta z^\gamma \dots w^\Delta$ آن می‌توانند بین دو حد

صفر تا ۱ــp قرار گیرند ، ولی در عین حال تابع شرط زیر می‌باشند :

$$\alpha+\beta+\gamma\cdots+\nu=p \qquad (۱۷)$$

									۱	$۱^{۳}$
								۳	۵	$۲^{۳}$
							۷	۹	۱۱	$۳^{۳}$
						۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	$۴^{۳}$
					۲۱	۲۳	۲۵	۲۷	۲۹	$۵^{۳}$
				۳۱	۳۳	۳۵	۳۷	۳۹	۴۱	$۶^{۳}$
			۴۳	۴۵	۴۷	۴۹	۵۱	۵۳	۵۵	$۷^{۳}$
		۵۷	۵۹	۶۱	۶۳	۶۵	۶۷	۶۹	۷۱	$۸^{۳}$
	۷۳	۷۵	۷۷	۷۹	۸۱	۸۳	۸۵	۸۷	۸۹	$۹^{۳}$
۹۱	۹۳	۹۵	۹۷	۹۹	۱۰۱	۱۰۳	۱۰۵	۱۰۷	۱۰۹	$۱۰^{۳}$

شکل ۲ ـ مثلث حسابی پاسکال

ضرائب M این جمله‌ای‌ها اعدادی صحیح و مثبت بوده بنام **ضرائب کثیرالجمله‌ای بارتبهٔ p خوانده می‌شوند.**

اینك این **اعداد کثیرالجمله ای** را می‌توان به شکلی بسیار زیبا **پاسکال** در قالب « کسرهای ــ کاذب » به صورت فاکتوریل بیان کرد. درواقع هم ازراه **استقراءریاضی** و هم از راه **براهین ترکیبی** (combinatorial arguments) می‌توان ثابت کرد که اگر ضریب

$x^{\alpha}\ y^{\beta}\ z^{\gamma}\ \ldots\ w^{\nu}$ را با علامت $(\alpha ، \beta ، \gamma ، \ldots \nu)$ نمایش دهیم ، در این صورت خواهیم داشت :

$$(\alpha ، \beta \ldots \nu) = \frac{(\alpha+\beta+\ldots+\nu)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!} = \frac{P!}{\alpha!\beta!\ldots\nu!} \qquad (۱۸)$$

به شرط آنکه هرجا به **!** **برخوردیم به‌جایش**۱ بگذاریم . من کسر اخیر را **کسب کاذب** نام می‌گذارم . نیرنگ فوق اولین بار در اثر ژاکوب برنولی به نام (Ars Conjectandi) پس‌از مرگش در ۱۷۱۳ به چاپ رسید . این اثر را امروز ما باید به عنوان رساله‌ای دربارهٔ **آنالیز ترکیبی** و نظریهٔ احتمالات تلقی‌کنیم . مسلماً این مسأله قابل بحث است‌که آیا طرح این فرمول اولین‌بار به وسیلهٔ او ریخته شده ، یا به وسیلهٔ برادرش یا لایب‌نیتز یا کسانی که با اینان مکاتبه داشته‌اند .

طرز کار قضیهٔ چند جمله‌ای را **در یك کثیرالجمله‌ای با رتبهٔ ۵** می‌توان چنین نمایش داد :

(۱۹)

$$(x+y+z)^{۵} = x^{۵}+y^{۵}+z^{۵}+۵(x^{۴}y+xy^{۴}+y^{۴}z+yz^{۴}+z^{۴}x+xz^{۴})+۱۰(x^{۳}y^{۲}+x^{۲}y^{۳}+y^{۳}z^{۲}+y^{۲}z^{۳}+z^{۲}x^{۳}+z^{۳}x^{۲})+۲۰(x^{۳}yz+y^{۳}zx+z^{۳}xy)+ ۳۰(xy_{۲}z_{۲}+yz_{۲}x_{۲}+zx_{۲}y_{۲})+$$

جزئیات‌کار درجدول‌زیر نشان‌داده‌شده است؛ با قراردادن

در اتحاد فوق محاسبات را می‌توان امتحان $x=y=z=1$
کرد .

نوع جمله	تعداد جمله‌ها	ضریب	امتحان
x^5	۳	۱	$1\times 3=3$
x^4y	۶	$5!/(4!)=5$	$5\times 6=30$
x^3y^2	۶	$5!/(3!2!)=10$	$10\times 6=60$
x^3yz	۳	$5!/(3!)=20$	$20\times 3=60$
x^2y^2z	۳	$5!/(2!2!)=30$	$30\times 3=90$
	۲۱		$3^5=243$

۴ درباره قضیهٔ کوچك فرما ساده‌ترین وسرراست‌ترین شکل بیان قضیه چنین است : اگر R عددی صحیح ومثبت و اول باشد، دراین صورت R^p-R بر p قابل قسمت است .

مثلا برای $R=2$:

(۲۰)

$$2^2-2=2 \text{ و } 2^3-2=3\times 2 \text{ و } 2^5-2=5\times 6 \text{ و }$$
$$2^7-2=7\times 18$$

این حالت مخصوص از **قضیه کوچك** را چینی‌های قدیم نیز می‌دانستند .

این قضیه اغلب به شکلی که کمی با آنچه گفته شد متفاوتست بیان می‌شود که صورت آن چنین است : **اگر p عدد اولی باشدکه R را عاد نکند ، $R^{p-1}-1$ را عاد خواهدکرد .** مثلا ، اگر p عدد اولی بغیراز ۲ یا ۵ باشد ، دراین صورت ۹۹ ... ۹۹۹ $=10^{p-1}-1$ را عادخواهدکرد.

مقصود این است که هرگاه تعداد ارقام ۹ . . . ۹۹۹ مناسب انتخاب شوند ، در این صورت بهر عدد اولی بغیراز ۲ یا ۵ و در نتیجه بهر عددی مانند Q که قابل قسمت بر ۲ یا ۵ نباشد قابل‌قسمت خواهد بود. این موضوع اهمیت زیادی برای تعیین ملاک قابلیت تقسیم بر Q و همچنین برای دور گسترش اعشاری 1/Q دارد .

همان‌طور که مثال‌های زیر نشان‌می‌دهند عکس‌قضیه کوچك معمولا صادق نیست : I . ۳۴۱ = ۱۱ × ۳۱ و در نتیجه **عدد اول نیست** ؛ با این حال ۳۴۱ عدد ۱ — N = ۲^۳۴۰ را عاد می‌کند زیرا یکی از مقسوم علیه‌های N عبارتست از

۲^۱۰ — ۱ = ۳۱ × ۳۳ = ۳ × ۳۴۱

II . ۱۲۱ = ۱۱^۲ **عدد اول نیست** و با این حال

۱ — N = ۳^۱۲۰ بر ۱۲۱ قابل قسمت است ، زیرا

۳^۵ — ۱ = ۲۴۲ = ۲ × ۱۲۱

تاریخ قضیهٔ کوچك بسیار جالب توجه است . فرما خبر آن‌را بدون آوردن برهان در نامه‌ای که در تاریخ ۱۶۴۰ به دوست‌خود فرنیکل (Fernicle) نوشت به وی داد؛ این‌نامه در میان مجموعهٔ مقالات فرما که پس از مرگ او در ۱۶۶۰ توسط فرزندش به چاپ رسید منتشر گردید . ظاهراً این قضیه تأثیری ناچیز در ریاضی‌دانان آن عصر گذارد . زیرا هنگامی که چهل سال بعد قضیه به وسیلهٔ لایب‌نیتز مجدداً کشف شد ، وی بی‌پروا دربارهٔ آن چنین نوشت :

« در اینجا چیزی وجود دارد که هیچ آنالیستی قبل از من نمی‌دانست ، یك فرمول واقعی عمومی برای اعداد اول »

طرز بیان جمله مبتنی بر اعتقاد به‌صحت عکس قضیه است ، که در واقع معما آمیز به‌نظر می‌رسد ؛ زیرا بعید است که لایب‌نیتز از مثالهای سادهٔ فوق بی‌اطلاع بوده باشد .

مضحك است که شریك لایب‌نیتز در قضیهٔ کوچك فرما دچار همان سر نوشت کاشف اصلی آن گردید . در دهسالهٔ بین ۱۷۳۰ و ۱۷۴۰ اویلر در بارهٔ موضوع مطالب زیادی نوشت ، ولی علی‌رغم آنکه در یکی از براهین خود قضیهٔ کوچك را به عنوان یکی از نتایج فرعی **فرمول مربوط به‌کثیرالجمله** به دست آورده است نامی از لایب‌نیتز نمی‌برد ، در صورتی که این‌کاری است که لایب‌نتیز کرده بود .

فرض کنیم که رتبهٔ p یك چند جمله‌ای **عدد اول** باشد: در این صورت ، با توجه به اینکه توانهای α ، β ، γ . . . کوچکتر از p اند ، مخرج کسر کاذب شامل هیچ عاملی که بتواند با p حذف شود نیست ، و عدد صحیح (α، β، γ . . .) در این حالت به p قابل قسمت است . از اینجا این قضیهٔ مهم حاصل می‌شود که : **تمام ضرائب چند جمله‌ای با رتبهٔ p که عدد اول باشند ، مضاربی از p اند .** با اتکای باین‌قضیه ، اتحاد چند جمله‌ای قسمت قبل شکل زیر را به‌خود می گیرد :

(۲۱)

$$(x+y+z+\cdots+w)^p-(x^p+y^p+z^p+\cdots+w^p)=PH(x,y,z,\ldots w)$$

که در آن $H(x، y، z، \ldots w)$ یك چند جمله‌ای با ضرائب مثبت و صحیح است.

نتایج ضمنی قضیهٔ فوق در نظریهٔ اعداد بسیاروسیع است، و قضیهٔ کوچك یکی از ساده‌ترین و مهمترین این نتایج است. درهمانندی مقادیر زیر را می‌گذاریم:

$$x=y=z=\ldots=w=۱ \text{ و } H(۱،۱،۱،۱،\ldots۱)=N \qquad (۲۱)$$

نتیجه می‌شود:

$$n^{p}-n=Np \text{ یا } n(n^{p-۱}-۱)=Np \qquad (۲۲)$$

بنابراین اگر عدد اول p عدد n را عاد نکند $n^{p-۱}-۱$ را عاد خواهد کرد.

اساس برهان لایب نیتز در بارهٔ قضیهٔ فرما همین است. یکی از براهین اویلر فقط از نظر جمله‌بندی کمی متفاوتست؛ یکی دیگر از این براهین شاهدی عالی برای استقراء ریاضی است. گره برهان دراینجا است که **p راثابت و R را متغیر درنظر بگیریم**. برای $R=۱$ داریم $۱^{p}-۱=۰$، که **قدم استقراء** را پابرجا می‌سازد.

اینك فرض می‌کنیم که قضیه برای مقدار R صادق است، یعنی داشته باشیم $R^{p}-R=AP$ که در آن A مقداری صحیح ومثبت است، وپس‌ازآن عبارت $(R+۱)^{p}-(R+۱)$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به قضیهٔ مذکور در بالا،

$BP=(R+۱)^p-R^p-۱$ است ، به‌شرط آنکه p عددی اول باشد.

در نتیجه داریم :

$$(R+۱)^p-(R+۱)=R^p-R+Bp=(A+B)p$$

فهوالمطلوب .

۴ درباره قضیهٔ ویلسون . سرگذشت این قضیه نشان دهندهٔ نقش تفسیر در استدلال ریاضی است . در ۱۷۷۰ ادوارد وارینگ (Edward Waring) کتابی تحت عنوان «تأملاتی در علم جبر» (Meditations Algebraicae) منتشر کرد. فقره‌ای از این کتاب چنین است : « اگر p عددی اول باشد ، در این صورت مقدار :

$$\frac{۱\cdot۲\cdot۳\cdot\ldots\cdot(p-۱)+۱}{P} \qquad (۲۳)$$

عددی صحیح است » . . . این خاصیت جالب اعداد اول اکتشاف ویلسن یعنی مردی است که در موضوعهای ریاضی استاد و متبحر است . « این ستایش درخشان از ویلسن‌را نباید زیاد جدی گرفت ، زیرا دلایلی در دست است که وارینگ بدین طریق خواسته است دینی « سیاسی » را ادا کند . وارینگ اضافه می‌کند : « اثبات قضایائی از این نوع به علت فقدان علامتگذاری برای بیان اعداد اول بسیار مشکل است . »

گاوس در تفسیر این قسمت کلام پر مغز و مشهور خود را به صورت « notationes versus notiones» بیان کرد ، که معنی آن این‌است که دربارهٔ مسائلی از این نوع **نامگذاری** مهم نیست ، بلکه آنچه واجد اهمیت است **ادراك** است .

علی‌رغم پیش‌بینی حاکی از بدبینی وارینگ ، قضیه مستقلا به وسیلهٔ اویلر و لاگرانژ چند سال پس از اعلان آن اثبات گردید . شیوه‌های به‌کار رفته به وسیلهٔ این اساتید بسیار برتر از مسأله‌ای است که الهام بخش آنان بوده است ، و به همین دلیل غیرمستقیم وپیچیده‌اند . برعکس ، برهان گاوس که در زیر آمده است‌چنان ساده وسر راست است که حتی خواننده‌ای با آموزش متوسط ریاضی آنرا ادراك می‌کند .

قضیهٔ ویلسن هم‌ارز رابطهٔ زیر است :

$$(p-۱)! = Wp-۱ \qquad (۲۴)$$

که در آن W عددیست صحیح ، و باتوجه به اینکه خود را به بررسی مقادیری از p که بزرگتر از ۳ اند محدودکرده باشیم ، می‌توانیم W را بزرگتر از ۱ اختیار کنیم. بنابراین به جای W می‌گذاریم $G+۱$ که عبارت (۲۴) را به‌صورت ذیل درمی‌آورد :

$$(p-۱)! = Gp(p-۱) \qquad (۲۴)$$

اینك قضیه‌را می‌توان‌چنین بیان‌کرد: **اگر p عددی اول باشد، باقیمانده تقسیم $(p-۱)!$ بر p برابر است با $(p-۱)$**. از طرف دیگر $(p-۱)! = (p-۱)(p-۲)!$ ، وبنابراین مسئله‌تبدیل

به اثبات این امر می‌شود که **باقیماندهٔ تقسیم! $(p-۲)$ بر عدداول p برابر است با یك .**

برای اثبات بیان اخیر ، گاوس وسیله‌ای به‌کار برد که به علت فقدان نامی مناسب من آن را « **جفت‌کردن** » نام می‌گذارم . روش کار در جدول زیر که برای حالت $p = ۱۱$ به وجود آمده نمایش داده شده است . عملا این جدول همان **جدول ضرب ۱۰ در ۱۰ است** ، جز آنکه ارقام خانه‌های آن حاصل‌ضرب‌ها نبوده بلکه **پس‌مانده‌های بر اساس ۱۱ اند.**

۱	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۲	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱	۳	۵	۷	۹
۳	۳	۶	۹	۱	۴	۷	۱۰	۲	۵	۸
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
۹	۹	۷	۵	۳	۱	۱۰	۸	۶	۴	۲
۱۰	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱

آرایش فوق دارای خواص زیر است: اولا **هر دو رقم مساوی متناظر با دو عدد صحیح است که تفاضل آنها قابل قسمت بر p می‌باشد** . ثانیاً ، **هیچ دو رقمی در یك سطر و یا در یك ستون نمی‌توان یافت که برابر باشند** . ثالثاً ، با توجه به اینکه هرسطر دارای $p-۱$ رقم است ، **هر یك از $p-۱$ پس مانده در یك سطر نمایش داده شده و این کار فقط یکبار انجام گرفته است .** رابعاً ، بخصوص ، **پس‌ماندهٔ یك در هر یك از سطرها**

آمده است ؛ و این بدان معنی است که می‌توانیم به هر عدد صحیح R از رشتهٔ ۲،۳،۴ ... p-۲ عدد صحیح دیگری مانند K را وابسته کنیم به طوری‌که پس‌مانده $K \times K$ برابر ۱ باشد .

درحالت ۱۱ = p می‌توانیم به شکل زیر گروه بندی حاصل را تجدید کنیم :

$$۲ \times ۳ \times ۴ \times \dots \times ۸ \times ۹ = (۲ \times ۶)(۳ \times ۴)(۵ \times ۹)(۷ \times ۸)$$

هر جفت حاصلضرب وقتی بر ۱۱ قسمت شود باقیمانده‌ای برابر ۱ دارد . بنابراین همین امر برای تمام این جفت‌ها صادق است ، از اینجا ۱ = (!۹) res و ۱۰ = (!۱۰) res یعنی ۱۱N = ۱ + !۱۰ ، که‌همان قضیهٔ ویلسن است برای ۱۱ = p .

با استفاده از این برهان در حالت کلی ، به این نتیجه خواهیم رسید : **اگر p عددی اول باشد ، در اینصورت p-۳ عامل ۲،۳،۴.... (p-۲) را می‌توان به $\frac{۱}{۲}$(p-۳) جفت وابسته به یکدیگر منظم کرد** ؛ پس‌ماندهٔ هر جفت برای **اساس p** یك است ، بنابراین پس‌ماندهٔ حاصلضرب تمام **جفت‌های وابسته** به یکدیگر نیزیك خواهد بود ؛ از اینجا استنتاج می‌کنیم‌که هرگاه p عددی اول باشد res(mod p) از !(۱ - p) برابر است با ۱ - p ، واین همان بیان گاوس از قضیهٔ ویلسن است .

جدول صفحهٔ ۴۵ برپایهٔ تفسیر دیگری از قضیهٔ ویلسن ساخته شده است. اگر wp باقیماندهٔ تقسیم [۱ + !(۱ - p)]

بر p باشد: من Wp **را شاخص ویلسن برای عدد صحیح p نام می‌گذارم. قضیهٔ ویلسن می‌گوید که شاخص عدد اول صفر است** ؛ بالعکس، **اگر شاخص ویلسون برای p صفر باشد، دراین صورت p عددیست اول.** هنگامی که p عددی مرکب باشد، چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ جواب چنین است: **شاخص ویلسن برای هر عدد صحیح مرکب بجز ۴ برابر است با ۱+**

بیان اخیر چیزی جز تفسیر قضیهٔ زیر نیست : **اگر p عدد صحیح و غیر اولی بزرگتر از ۴ باشد، در این صورت p عدد! (p − ۱) را عاد می‌کند.** اثبات : ابتدا فرض کنیم p غیر اول بوده، اما مجذور یك عدد اول نباشد ؛ در این صورت حاصل ضرب دو عدد صحیح متمایز خواهد بود که هردوی آنها کوچکتر از p − ۱ و بنابراین مقسوم علیه ! (p − ۱) اند.

اینك فرض کنیم $p = q^2$ باشد، که در آن q عددیست اول، در این صورت q و همینطور 2 q کوچکتر از p − ۱ است، و بنابرآن هم q و هم 2q وارد ! (p − ۱) می‌شوند. از این نتیجه می‌شود که ! (p − ۱) بر $2q^2$ و درنتیجه بر p قابل قسمت است.

اگر اعداد صحیح کمتر از ۴ را کنار بگذاریم، می‌توانیم بحث قبل را در این عبارت خلاصه کنیم :

شاخص ویلسن برای یك عدد اول صفر، و برای یك عدد صحیح غیر اول یك است. از این رو می‌توان رشتهٔ اعداد طبیعی را به شکل **یك کسر نامحدود با شمار**

ثنائی نشان داد که در آن رقم ۱ نمایش یك عدد صحیح غیر اول و صفر نمایش یك عدد اول است .

$$\begin{array}{llll} & 010111 & 0101110101 & 1101111101 \\ (۲۵) & 0111110111 & 0101110111 & 1101111101 \\ & 0111110111 & 010111101 & 1101111101 \\ & 111110111 & & \end{array}$$

اولین رقم کسر $p = ۵$ و آخرین آن $p = ۱۰۰$ را نشان می‌دهد .

٭ درباره مساله‌ای از لاگرانژ قانون عامل صفر، که دربارهٔ آن پس از این به تفصیل سخن خواهم گفت ، تصریح می‌کند که **یك حاصلضرب نمی‌تواند برابر صفر باشد مگر آنکه لااقل یکی از عوامل آن صفر باشد .** همین مطلب به تغییر علامتی چنین بیان می‌شود که : رابطهٔ $uv = ۰$ متضمن $u = ۰$ یا $v = ۰$ یا $u = v = ۰$ است . صورت دیگر این قانون در نظریهٔ عدد چنین است :

اگر عدد اول P حاصلضربی از اعداد صحیح را عاد کند ، در این صورت لااقل یکی از عوامل آنرا عاد خواهد کرد . از اصطلاحات و علاماتی که گاوس به کار برده است ، شباهت بین این دو خاصیت جالب توجه تر شده است .

اگر اعداد صحیح a و b دارای یك باقیمانده در تقسیم بر p باشند، دراین صورت گاوس **a و b را نسبت به‌اساس p همنهشت نامیده و** می‌نویسد $a \equiv b \pmod{p}$

بخصوص مفهوم $c \equiv 0 \pmod{p}$ آنست که c بر p **قابل قسمت** است .

با این علامتگذاری می‌توان قانون عامل صفر را به‌شکل زیر بیان داشت :

اگر p عدداول باشدو $uv \equiv 0 \pmod{p}$ ، دراین صورت یا $u \equiv 0 \pmod{p}$ ، یا $v \equiv 0 \pmod{p}$ و یا $u \equiv v \equiv 0 \pmod{p}$ خواهند بود .

اینك چندجمله‌ای $G(x)$ بادرجهٔ n را درنظر بگیرید. آیا $G(x)$ بازاء چه مقدار صحیحی از x (اگر موجود باشد) بر عدد اول مفروض p قابل قسمت است ؟ این مسأله لاگرانژ است ، که تفسیر آن به زبان گاوس چنین است :

جوابهای همنهشتی $G(x) \equiv 0 \pmod{p}$ رابیابید.

در این نقطه شباهت بین معادلات و همنهشتی‌ها به مانعی برمی خورد : اگر a ریشهٔ یك همنهشتی نسبت به اساس p باشد ، در این‌صورت ، n هرچه باشد، $a+np$ نیزریشهٔ دیگری برای آن‌است : لاگرانژ هنگام تعیین **کوچکترین جملهٔ مثبت** تصاعد $a+np$ به عنوان نمایندهٔ تمام تصاعد به این اشکال برخورد. گاوس‌نام آنها را **ریشه‌های حداقل** نامیده است . مثلا همنهشتی $x^{2}+1 \equiv 0 \pmod{5}$ بینهایت ریشه دارد : ۲،۷،۱۲،۱۷ ... ، ۳،۸،۱۳،۱۸ . . . . اما فقط دوتا از این ریشه‌ها متمایزند ، یکی ۲ و دیگری ۳ .

با به کار بردن این اصطلاح ، دو قضیهٔ اساسی لاگرانژ چنین بیان می‌شود :

اول : همنهشتی از درجهٔ n می‌تواند **حداقل‌دارای** n

ریشهٔ متمایز باشد؛ دوم : **اگر کثیرالجمله‌ای ازدرجه n بازای بیش از n مقدار غیر همنهشت از x بر p قابل قسمت باشد، برای تمام مقادیر x بر p قابل قسمت است.**

این قضیهٔ اخیر لاگرانژ را به کشف رابطه‌ای جالب بین قضیهٔ کوچک فرما و قضیهٔ ویلسن راهنمائی کرد. کثیرالجملهٔ

$$G(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\ \ldots\ [x-(p-1)]-(x^{p-1}-1) \qquad (۲۶)$$

را در نظر بگیرید که در آن p عددیست اول. می‌بینیم:

$$G(1)=0,\ G(2)=2^{p-1}-1,\ G(3)=3^{p-1}-1,\ \ldots$$

$$G(p-1)=(p-1)^{p-1}-1$$

با در نظر گرفتن قضیهٔ کوچک فرما، تمام این مقادیر **بر عدد اول p قابل قسمت‌اند**؛ بدین ترتیب همنهشتی $G(x)\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$ دارای $p-1$ **ریشهٔ غیر همنهشت** است. ازطرف دیگر، درجهٔ کثیرالجملهٔ $G(x)$ فقط $q-2$ است.

از اینجا نتیجه می‌شود که $G(x)$ بازای جمیع مقادیر x بر p قابل قسمت است، و بخصوص برای $x=0$ بنابراین

$$G(0)\equiv[(p-1)!+1]\equiv 0(\mathrm{mod}\,p) \qquad (۲۷)$$

که همان قضیهٔ ویلسن است.

۶ دربارهٔ توزیع اعداد اول غربال اراتوستن که در صفحه ۴۱ نشان داده شده است، یا کسر ثنائی (۲۵)، نمایشی از توزیع نا متجانس اعداد اول در میان اولین اعداد صحیح تا صد است. این بی نظمی ادامه دارد و حتی هنگامی که در زمینه رشتهٔ اعدادطبیعی پیشتر می‌رویم زیادتر می‌گردد. کسانی که به

دنبال نظم و دلیلی در این جا می‌گردند باید ارقام و واقعیات و خیالبافیهائی را که دچار شکست شده‌اند بررسی کنند .

بین ۱۰۱ و ۱۱۳ پنج عدد اول وجود دارد ، اما بین ۱۱۴ و ۱۲۶ عدد اولی نمی‌توان یافت . ۲۳ عدد اول بین ۱ و ۱۰۰ ، و بیست و یکی بین ۱۰۱ تا ۲۰۰ موجود است ؛ اما بین ۸۴۰۱ و ۸۵۰۰ فقط ۸ عدد اول می‌توان یافت ، و این ۸ عدد در فاصله بین ۸۴۱۸ تا ۸۴۶۰ جمع‌شده‌اند . و برای آنکه خواننده تصوری خطا آمیز پیدا نکند ، اجازه بدهید اضافه کنم که ۱۳ عدد اول بین ۸۹۵۰۱ و ۸۹۶۰۰ وجود دارد .

جداول قابل اعتمادی برای اعداد صحیح تا ۱۰،۰۰۰،۰۰۰ وجود دارد : در بین این اعداد ۶۶۴،۵۸۰ عدد اول موجود است . بالاتر از این حد باید از نظریه‌ها و فرمولهائی که جنبهٔ ارزیابی دارند کمك گرفت . اولین فرمول در این زمینه در ۱۸۰۸ به‌وسیلهٔ لوژاندر (Legendre) داده‌شد. وی استنتاجات خود را بر پایهٔ بررسی تجربی جدول اویلر قرار داد و این فرمول تقریبی را به دست آورد :

$$x/\pi(x) \cong \ln(x) - B \qquad (۲۸)$$

که در آن $\pi(x)$ **تعداد اعداد اولی را که کمتر ویا برابر x است** نشان می‌دهد؛ $\ln(x)$ لگاریتم طبیعی x است ، و B مقداریست که به‌کندی تغییر کرده حد متوسط آن ۱٫۰۸ است .

فرمول تقریبی دیگر به وسیلهٔ گاوس پیشنهاد شد :

$$\pi(x) \cong \int_{2}^{x} dx/\ln(x) \qquad (۲۹)$$

از آنوقت تاکنون انتگرال فوق نام **انتگرال لگاریتمی** به خود گرفته‌است و در جدول‌ها به صورت $Li(x)$ می‌آید.

گاوس حدس زدکه **هنگامی که** x **به‌سمت بینهایت میل می‌کند، نسبت** $\pi(x)/Li(x)$ **بسمت یك میل خواهدکرد**. واین حدس به وسیلهٔ ریاضی‌دان بلژیکی دولاواله پوسن (De la Vallèe-Poussin) در ۱۸۹۶ به اثبات رسید. فرمول اوژاندر به وسیلهٔ چبیشف (Chebyshëv) از حالت یك قانون تجربی به صورت یك حدس ریاضی درآمد. در ۱۸۴۸ این ریاضی‌دان روسی اثبات کردکه اگر نسبت $\pi(x)$ به $(x/\ln x)$ به طرف حدی میل کند، در این صورت این حد باید ۱ باشد. وجود این حدبه وسیلهٔ ریاضی دان فرانسوی هادامار (Hadamard)، در ۱۸۹۶، ثابت گردید. قضیهٔ چبیشف ـ هادامار اینك به‌نام **قضیهٔ عدد اول** معروف است.

هادامار قضیه عدد اول را با روشهای **نظریهٔ تحلیلی عدد**، یعنی به وسیلهٔ **فرایندهای نامحدود** ثابت‌کرد ... از متخصصین براین عقیده بودند که برهان حسابی مستقیم قضیه هرگز به وجود نخواهد آمد، اما در ۱۹۵۰ این بر... باکوشش‌های مشترك سلبرگ (Selberg) و اردوس (Erdös) به وجود آمد.

از مثال زیر معلوم می‌شودکه چه اندازه باید درنتیجه‌گیری از تئوری عدد اول دقیق باشیم: رشته‌ای ازیك میلیون اعداد متوالی و صحیح

$$۱۰۰۰۰۰۰۰۰۱!+۲ \,؛\, ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۱!+۳۰۰۰ \quad (۳۰)$$
$$\ldots \,؛\, ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۱!+۱۰۰۰۰۰۰۰۰۱$$

«قطعهٔ صلیبی» از اعداد مرکب به‌وجود می‌آورد، زیرا $N!+K$ ، تا وقتی K بزرگتر از ۱ و کوچکتر از ۱ + N باشد ، بر K قابل قسمت است . از اینجا نتیجه می‌شود که تعداد اعداد اول در فاصلهٔ فوق صفر است ، در صورتی‌که فرمولهای تقریبی این اعتقاد را به وجود می‌آورند که بین هر فاصلهٔ محدود که به اندازهٔ کافی بزرگ باشد اعداد اول وجود دارند .

۷ «قاعده» برای اعداد اول پی گردی در موضوع به دوران فرما بر می‌گردد .

هدف مخصوص او تعیین تابعی مانند $G(x)$ بوده است که بازای همهٔ مقادیر صحیح از پایهٔ x اعداد اول به‌وجود می‌آورد؛ تابعی که مورد جستجو است باید فقط متضمن جمع و ضرب باشد ، به طوریکه هر قدم در جریان کار ، چه قدم اولیه چه در وسط کار و چه قدم نهائی ، **منحصراً به اعداد صحیح مربوط شود** . بی تناسب نیست اگر چنین توابعی را **توابع حسابی یا صحیح** نامگذاری کنیم ؛ ولی چون این اصطلاحات تاکنون معانی خاصی برای خود به دست آورده‌اند ، پیشنهاد می‌کنم که این توابع را **عام** (generic) بنامیم . اولین نمونه توابع مولد **یك کثیر الجمله با ضرائب صحیح است.** نمونه‌های دیگر عبارتند از :

$$a^x+b\ ,\ a^{G(x)}+H(x), G(x)^{H(x)}+K(x) \qquad (۳۱)$$

که در آن ها a و b اعدادی صحیح ، G و H و K کثیر الجمله‌هائی با ضرائب صحیح و مثبت‌اند .

علی‌رغم محدودیت‌های موجود ، انواع توابع عام زیادند، و طبیعی است که سؤال شود که آیا لااقل یکی از این توابع بازای جمیع مقادیر x به ما اعدادی اول خواهند داد یا نه . تا کنون چنین تابعی کشف نشده است ، اما عدم امکان وجود چنین فرمولی نیز اثبات نگردیده است . از طرف دیگر ثابت شده است که بعضی انواع عام نمی‌توانند منحصراً عدد اول را به وجود آورند. یکی از اولین قضایای از این نوع ، قضیه‌ای از اویلر است دایر بر اینکه **هر کثیرالجملهٔ عام باید لااقل برای یك مقدار از یا به مقادیر غیر اولی به وجود آوردند .**

قضیه اویلر براین قضیهٔ جبری تکیه دارد که : اگر $p(x)$ کثیرالجمهٔ دلخواهی باشد، کثیرالجملهٔ

$$Q(x)=p[x+p(x)]$$

$p(x)$ را به عنوان عامل می‌پذیرد . مثلا اگر به جای $p(x)$ بگذاریم x^2+1 چنین خواهیم داشت :

(۳۲)

$$Q(x)=[x+(x^2+1)]^2+1=(x^2+1)^2+2x(x^2+1)+x^2+1=(x^2+1)(x^2+2x+2)$$

اثبات لم (قضیهٔ) کلی نیز مانند همین مثال است ، و بهمین جهت آنرا به خود خواننده واگذار می‌کنم .

اینك فرض کنیم $p(x)$ یك کثیرالجملهٔ عام باشد ؛ اگر a عدد صحیح دلخواهی باشد و b را برابر $p(a)$ بگیریم ، در این صورت طبق این لم ، عدد صحیح $p(a+1)$ بر b قابل قسمت است و بنا براین عددیست غیر اول ، البته به شرط آنکه $b\neq 1$ باشد . توجه داشته باشید که اگر n درجهٔ کثیرالجملهٔ $p(x)$ باشد ، در این صورت طبق قضیهٔ اساسی جبر حداکثر n

مقدار وجود دارد که برای آنها $p(x)=1$ است، و در نتیجه قضیهٔ اویلر را می‌توان به این شرح بیان داشت : **هر کثیر الجملهٔ عام بینهایت مقدار غیر اول را می‌پذیرد .**

یك مسألهٔ دیگر ارتباط نزدیکی با مسألهٔ قبل دارد : آیا توابعی عام وجود دارند که بدون آنکه **منحصراً** اعداد اول را نمایش دهند ، بتوانند تعداد نامحدود عدد اول ایجاد کنند ؟ قضیهٔ اوقلیدوس جواب مثبتی به این سؤال می‌دهد ؛ زیرا روشن است که : **تابع خطی $G(x)=2x+1$ می‌تواند بینهایت مقدار اول را قبول کند.** اویلر و لوژاندر قبول کردند که این امر برای تصاعدهای حسابی $4x+1$ و $3x+2$، $3x+1$، $4x+3$ نیز صادق است ، و گاوس حدس زد که **هر تصاعد حسابی شامل بینهایت عدد اول است به شرط آنکه اولین جملهٔ آن و قدر نسبت تصاعد اول باشند** ، و این امر هم ارز این قضیه است که تابع خطی

$$G(x)=px+q \qquad (33)$$

بینهایت عدد اول را قبول می‌کند به شرط آنکه اعداد صحیح p و q نسبت به یکدیگر اول باشند . قضیه در ۱۸۲۶ به وسیله لوژون دیریکله (Lejenne Dirichlet) اثبات گردید .

از طرف دیگر ، تمام کوشش‌هائی که برای تعمیم شیوه‌های دیریکله دربارهٔ توابع **غیر خطی** به عمل آمده ، تاکنون با ناکامی مواجه شده است . در واقع ، علی رغم قدم‌های بلندی که ، از زمان دیریکله تا به امروز ، در این میدان برداشته شده ، حتی یك تابع عام غیر خطی شناخته نشده است که با اطمینانی ریاضی بتوان تأیید کرد که می‌تواند بینهایت مقدار

اول قبول کند .

چند مثال کلاسیك می‌آوریم که وضع فعلی مسأله راروشن می‌کند :

I. تابع درجهٔ دوم $G(x)=x^{۲}+۱$. شرط لازم برای آنکه $G(x)$ اول باشد آنست که x به ارقام ۴ و یا۶ ختم شود . این شرط مقادیر ۱۷،۳۷،۱۹۷،۲۵۷، .... را به وجودمی‌آورد. ۶۶جملهٔ اول این‌رشته شامل ۱۲عدد اول است. تعداد زیادتری عدد اول از این نوع شناخته شده است ، اما **نامحدود** بودن ویا **محدود** بودن این مجموعه هنوزموردبحث است .

II. تابع‌مرسن(Mersenne) $G(x)=۲^{x}-۱$.

همانطور که قبلا یادآوری شد ، مقادیر اول $G(x)$ به‌نام‌اعداد مرسن مشهورند ، وتا به امروز فقط هفده‌تای آنها شناخته شده است . این حدس که بینهایت عدد اول مرسن وجود دارد هنوز به اثبات نرسیده است .

III . تابع فرما $G(x)=۲^{x}+۱$. باتوجه به این‌که

هر عدد صحیح و زوجی به‌شکل $x=۲^{p}M$ است‌که در آن M عددیست فرد، شرط **لازم** برای **اول بودن** $G(x)$ آنست‌که $M=۱$ باشد . این تابع اعداد فرما را که درصفحه ۴۴ بدان اشاره شد به وجود می‌آورد . در این جا باید اضافه کرد که این اعداد صحیح نقش مهمی در ساختمان هندسی دارند ، زیرا

باتوجه به قضیهٔ اساسی گاوس **کثیرالاضلاع منتظم n ضلعی را به وسیلهٔ خط کش و پرگار وقتی، وتنها وقتی، می‌توان ساخت که n عدد اول فرما یا حاصلضرب غیر مجذور اعداد اول فرما بوده باشد**. در اینجا باردیگر یکی ازمسائل حل نشدهٔ نظریه‌اعداد پیش‌می‌آید، وآن اینکه‌آیا مجموعه اعداد اول‌فرما محدودند و یا نامحدود.

۸ سه‌تائی‌های فیثاغورث. این اعدادصحیح در زمان حاضر به کشف بسیاری از مسائل‌نظریهٔ اعداد وهمچنین بسیاری از مسائل‌گیج کننده‌ای‌که بعضی ازآنها هنوز انتظار راه‌حل‌هائی را می‌کشند منجرشده است. نیروی محرکه‌برای این گسترش‌های جدید به وسیلهٔ فرما به وجود آمد، که در یادداشت‌های حاشیه‌ای خود بدون برهان بسیاری از قضایا را که شامل این اعداد نیز بود بیان داشت. این قضایا در حدود یك قرن بعد به وسیلهٔ اویلر، لاگرانژ، گاوس، و لیوویل توضیح داده شد و تأیید گردید. برای سهولت در بیان من هرجواب‌کامل معادلهٔ

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (۳٤)$$

را یك **سه تائی**(triple) می‌نامم: x و y **اضلاع** سه‌تائی و R **وتر**آن خواهد بود. اگر عناصر سه‌تائی آن مقسوم علیه مشترکی‌نداشته باشد،آن‌را**ابتدائی**(Primitive)می‌نامند، و در غیر این صورت **غیرابتدائی** خواهد بود. اگر (x، y و R) یك سه‌تائی باشد، واضح است که (nx، ny و nR) نیز سه‌تائی خواهد بود. بنابر این بازاء هرسه‌تائی ابتدائی می‌توان بینهایت سه تائی غیر ابتدائی به دست آورد، واین‌امر

جای برجسته‌ای را به‌سه‌تائی‌های اصلی وا می‌گذارد. بعضی از خواص این ابتدائی‌ها مستقیماً از تعریف آن ناشی می‌شود وقدما آنها را می‌دانستند . مهمترین آنها عبارتند از: (۱)**مجموعهٔ سه‌تائی‌های ابتدائی نا محدود است**، (ب) **هردوعنصر از یك سه‌تائی ابتدائی نسبت به یکدیگر اولند** . (ج) اضلاع یك سه‌تائی ابتدائی از لحاظ زوج و فرد بودن مخالف یکدیگرند ، در صورتی که **وتر همیشه فرد است** .

نقطهٔ شروع فرما قضیه‌ایست‌که به طورضمنی به وسیلهٔ دیوفانتوس و فیبوناتچی و ویتا به صورت ضمنی به کار برده بودند وعبارت از آنست که **وتر یك سه‌تائی فیثاغورسی را می‌توان به شکل مجموع دو مربع نشان داد**. اگر R یك وتر « قابل قبول» باشد، در این صورت دو عدد صحیح مانند p و q وجود دارند به طوری که

$$p^2+q^2=R \qquad (۳۵)$$

باشد . **کفایت** شرط از همانندی زیر معلوم می‌شود :

$$(p^2+q^2)^2=(p^2-q^2)^2+(2pq)^2 \qquad (۳۶)$$

بنابراین سه‌تائی زیر در معادلهٔ (۳۴) صدق خواهد کرد :

$$x=p^2-q^2,\ y=2pq,\ R=p^2+q^2 \qquad (۳۷)$$

که در آن p و q می‌توانند هر عدد صحیح دلخواهی باشند . برهان آنکه **این شرط کافی لازم نیز هست** ، مستلزم بحث دقیق‌تری است که محتاج به صفحاتی بیشتر از آنست که من در اینجا در اختیار دارم .

معادلات(۳۷) برای سه‌تائی‌های غیرابتدائی نیزمانندابتدائی صادق است؛ با این حال به‌آسانی دیده می‌شود که محدود کردن

پارامترهای p و q به اینکه نسبت به‌یکدیگر اول**واز لحاظ زوجیت وفریت متقابل**باشند، خودبه خود تمام سه‌تائی‌های غیر ابتدائی را حذف می‌کنند. در جدول زیر که هر عدد داخل آن از جمع دو مجذور زوج وفرد به‌دست‌آمده، این‌امر به روشنی نشان داده‌شده است. اقلام‌حذف شده **سه‌تائی‌های غیر ابتدائی** را به وجود می‌آورند، زیرا پارامترهای مولد دیگر با یکدیگر اول نیستند. از طرف دیگر عناصری که زیر آنها خط‌کشیده شده است، **وترهای** اول رانشان می‌دهند، که‌همان طورکه خواهیم دیدنقشی اساسی درتوجه فرما به مسئله‌فیثاغورث داشته‌اند.

	4	16	36	64	100	144	196	...
1	5	17	37	65	101	145	197	...
9	13	25	~~45~~	73	109	~~153~~	205	...
25	29	41	61	89	~~125~~	169	221	...
49	53	65	85	113	149	193	~~245~~	...
81	85	97	~~117~~	145	181	~~225~~	277	...
121	125	137	157	185	221	265	317	...
169	173	185	205	233	269	313	365	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

ولی تشخیص آنکه یك عدد مفروض فرد را می‌توان به شکل‌مجموع‌دومجذور نشان‌دادکاری‌مشکل‌است. مطمئناً‌مجموع یك مجذور فرد ویك مجذور زوج‌همیشه به‌شکل $4n+1$ است، که خود به خود با هیچ‌یك ازجمل تصاعد زیرمطابق‌درنمی‌آید:

$4n-1$: ۳،۷،۱۱،۱۵ ، ۱۹،۱۳ ....

ولی ، متأسفانه ، تنها متعلق بودن به تصاعد زیر نیز **کافی نیست** :

$4n+1$:۵،۹،۱۳،۱۷،۲۱،۲۵:۲۹،۳۳،۴۱

چنانکه مثلا ۹ نمی‌تواند به مجموع دو مربع تجزیه شود ، و برای ۲۱ و ۳۳ نیز چنین است؛ در واقع یافتن شرطی کافی مشکلی بود که راه را در مقابل کوشش‌های درخشان سلف فرما یعنی ویئا سد کرده بود .

فرما با متمایز کردن وترهای **اول** ، و **غیر اول** بر این مشکل غلبه کرد . در آنچه که پس از این خواهد آمد من سه‌تائی‌های متناظر را **اول** و **غیر اول** نام می‌دهم نمونه‌هائی برای سه‌تائی‌های اول عبارتند از: (۵،۴،۳)،(۱۳،۱۲،۵)و(۱۷،۸،۱۵) نمونه‌های سه‌تائی مرکب عبارتند از: (۲۵،۲۴،۷)(۶۵،۱۶،۶۳) و (۶۵،۵۶،۳۳) . فرما در برهان خود از یکی از قضایای مشهور خود که در حاشیه نوشته بود کمک گرفت که صورت آن چنین است: **هر عدد اول به شکل ۱+$4n$ را می‌توان به شکل مجموع دو مربع نمایش داد، و بعلاوه این نمایش منحصر به فرد است** . طبق معمول ، یادداشت حاشیه توأم با برهانی نبود ؛ با این حال فرما در نامه‌ای به روبروال تأیید کرد که اثباتی دقیق برای این امر دارد که بر پایهٔ شیوهٔ **تنزل لایتناهی** (indefinite descent) اوست . ۱۲۵ سال بعد ، اویلر اصل تنزل را مبنای کار قرار داد و اولین برهان را منتشر کرد.

نتیجهٔ مستقیم قضیه آنست که **هر عدد اول به شکل ۱+$4n$ یک وتر قابل قبول است** . آیا دربارهٔ اعداد صحیح

غیر اول از این نوع مسأله از چه قرار است ؟ جواب را فرما در یادداشت‌های حاشیه‌ای خود به شکل زیر ارائه داده است :

اگر . . . $R = q^{\alpha} p^{\beta} r^{\gamma} \ldots$ باشد که در آن p، q، r ... اعداد **اول فرد** و α، β، γ اعداد صحیح مثبت باشند ؛ در این صورت چهار حالت می‌توان تشخیص داد :

I. تمام مقسوم‌علیه‌های اول از نوع $4n+1$ است. دراین صورت معادلهٔ فیثاغورث لااقل یك جواب **ابتدائی** دارد.

II . تمام مقسوم‌علیه‌ها از نوع $4n-1$ است . معادلهٔ (۳٤) **جوابی ندارد .**

III. لااقل یکی ازمقسوم‌علیه‌های اول از نوع $4n+1$ است، درصورتی که هر یك از مقسوم علیه‌های اول از نوع $4n+1$ در حاصلضرب با توانی زوج وارد می‌شود . در این صورت معادلهٔ (۳۴) فقط **جوابهای غیر ابتدائی** خواهد داشت .

IV هر یك از مقسوم‌علیه‌های اول از نوع $4n-1$ با توان فرد وارد حاصلضرب می‌شوند . معادله **جوابی نخواهدداشت ،** نه ابتدائی و نه غیرابتدائی .

راه فرما نشان می‌دهد که ، همان طور که قدما حدس می‌زدند ، نه فقط معادلهٔ فیثاغورس جوابهای ابتدائی نا محدود را می‌پذیرد، بلکه می‌تواند بینهایت جواب **اول** نیز داشته باشد. این جوابها را می‌توان برای به دست آوردن سایر ریشه‌های ابتدائی و غیر ابتدائی به عنوان سنگ بنا و ابزار اصلی به‌کار برد. اما دربارهٔ فرایندا‌عداد مرکب، شکل کار کاملا رسمی بوده و

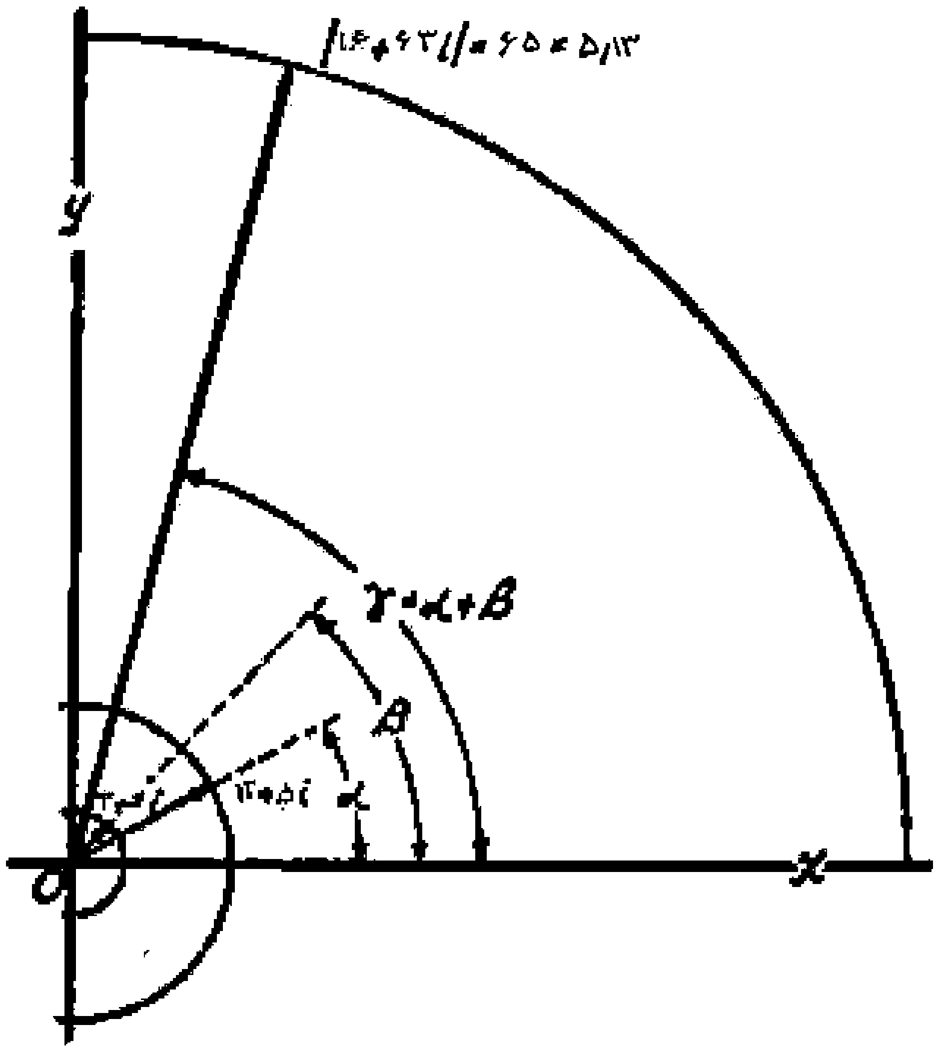
درست هم ارز **ضرب اعداد مختلط است** (به شکل ۳ مراجعه کنید). در واقع می‌توان « عدد مختلط » $x+iy$ را به مثابه اضلاع یک سه‌تائی تعریف نمود که وتر آن قدر مطلق $R=|x+iy|$ است. حاصلضرب دو چنین عدد صحیح مختلط عبارتست از :

$$(x+iy)(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+x'y) \qquad (۳۸)$$

و عناصر این عدد صحیح جدید با اتکاء به همانندی زیر، جوابی جدید برای معادله (۳۴) اند.

$$(xx'-yy')^{۲}+(xy'+x'y)^{۲}=(x^{۲}+y^{۲})(x'^{۲}+y'^{۲}) \qquad (۳۹)$$

وضع مسأله در حال حاضر چگونه است؟ فرض کنید از



شکل ۳- سه‌تائی های مرکب و اعداد صحیح مختلط

شما بخواهند سه‌تائی‌هائی را تعیین کنید که عدد صحیح مفروض R را به عنوان وتر قبول کنند. دو رقم آخر نشان می‌دهد که R از نوع $4n-1$ است، و بنا بر این قدم بعدی شما آنست که مقسوم علیه‌های اول R را به دست آورید، و این کاری است که اگر R به اندازهٔ کافی بزرگ باشد بسیار دشوار است. در این صورت، برای آنکه بتوان بحث را ادامه داد، فرض کنید که موفق شده‌اید ثابت کنید که R عددی است اول.

بنا بر این یك سه‌تائی منحصر به فرد با وتر R وجود خواهد داشت، و جستجوی شما به حل **معادلهٔ دیوفانتوس** یعنی $p^2+q^2=R$ منجر می‌گردد. این مسأله اخیر به نوبهٔ خود به وسیلهٔ **لاگرانژ** به تحقیق در **کسر پیوسته** مربوط به $\sqrt{R}$ تبدیل شد. روشهای دیگری نیز برای مقابلهٔ با این مسأله به وجود آمده است؛ با این حال به طور کلی باید گفت مسألهٔ تعیین **مؤلفه‌های مجذور کامل** برای یك عدد صحیح لااقل دارای همان اشکال تبدیل یك عدد به مقسوم‌علیه‌های اول آن است. در این صورت مشکل بتوان ادعا کرد که مسألهٔ قدیمی کاملا حل شده است.

۹ داستانی از اویلر. اویلر در مقاله‌ای که در ۱۷۷۴ منتشر کرد، چند عدد اول بزرگ را ذکر کرده بود که در میان آنها ۱۰۰۰۰۰۰۰۹ به چشم می‌خورد. در مقالهٔ بعدی، اویلر اشتباه خود را پذیرفت و مقسوم‌علیه‌های اول این عدد را به صورت زیر نشان داد.

$$۱۰۰۰۰۰۰۰۹=۲۹۳\times۳۴۱۳ \qquad (٤٠)$$

او یاد آوری کرد که زمانی که مقالهٔ اول را منتشر کرده

بود تحت تأثیر این فکر بود که ۱،۰۰۰،۰۰۹ **فقط دارای یك نمایش منحصر به فرد از مجذورهای کامل است**، یعنی آنرا فقط می‌توان به‌صورت $۱۰۰۰^{۲}+۳^{۲}=۱،۰۰۰،۰۰۹$ نوشت؛ اما پس از آن شکل دیگری را به صورت $۹۷۲^{۲}+۲۳۵^{۲}$ کشف کرد که نشان دهندهٔ خصلت ترکیبی خود عدد است.

پس از آن اویلر کوشش نمود تا مقسوم علیه‌های ۱،۰۰۰،۰۰۹ را با شیوه‌ای به دست آورد که قالب آن را قضیه‌ای تشکیل می‌داد که قبلا در مقاله‌ای منتشر کرده بود. آن قضیه که رد پای یاد داشت حاشیه‌ای فرما را تعقیب می‌کرد، چنین می‌گفت:

اگر عدد صحیح فردمانند R را بتوان به بیش از یك طریق به دو مجذور کامل تبدیل نمود، دراین صورت R عددیست غیر اول.

روش اویلر بر پایهٔ لم ساده‌ای قرار داشت، و سادگی این لم چنان است که اغلب خوانندگان میل دارند آنرا به‌عنوان چیزی بدیهی بپذیرند. اگر A/B و a/b دو کسر باشند که کسر دومی **به ساده‌ترین صورت خود در آمده باشد**، در این صورت **تساوی $a/b=A/B$ مستلزم وجود عدد صحیحی مانند n است به طوری که $A=na$ و $B=nb$ باشد.**

اینك مسأله را مجدداً بیان کنیم. می‌دانیم که

$$R=p^{۲}+q^{۲}=p'^{۲}+q'^{۲} \qquad (۴۱)$$

است؛ ثابت کنید که R عددیست غیر اول و مقسوم علیه‌های آنرا بیابید. ابتدا (۴۱) را به شکل تناسب زیر می‌نویسیم

$$p^{2}-p'^{2}=q'^{2}-q^{2} \quad \text{یا} \quad \frac{p+p'}{q'-q}\times\frac{q'+q}{p-p'}=\frac{a}{b}$$

که درآن فرض کرده‌ایم a و b نسبت به‌یکدیگر اول باشند. اینك چون لم فوق را به کومك بطلبیم ، چهار رابطهٔ زیر را به دست خواهیم آورد:

$$p+p'=ma \qquad q'+q=na$$
$$q'-q=mb \qquad p-p'=nb$$

که اگر آنها را به‌توان دو رسانده وجمع کنیم ، حاصل می‌شود:

(۴۲)

$$(m^{2}+n^{2})(a^{2}+b^{2})=2\,(p^{2}+q^{2}+p'^{2}+q'^{2})=4R$$

و از این نتیجه می‌گیریم که $a^{2}+b^{2}$ یکی از مقسوم علیه‌های R است که به دنبال آن می‌گشتیم ، البته به شرط آنکه a و b دوعدد از لحاظ زوجیت وفردیت متقابل باشند ؛ ازطرف دیگر ، اگر a و b هر دو فرد باشند ، در این صورت $\frac{1}{2}(a^{2}+b^{2})$ مقسوم علیهی برای R است . چون‌که این روش را در مورد $R=1{,}000{,}009=1000^{2}+3^{2}=235^{2}+972^{2}$ به‌کار بریم به تناسب زیر خواهیم رسید :

$$\frac{1972}{238}=\frac{232}{28}=\frac{58}{7}$$

وبنابرآن $a=58$ ، $b=7$ ، $a^{2}+b^{2}=3412$ که یکی از دو مقسوم علیه مورد نظر است.

معلوم نیست که چگونه اویلر به تجزیهٔ دومی دست یافته است . حس شمارشی شگفت انگیز و حافظهٔ خارق‌العاده این استاد بسیار حیرت آور بوده است ، اما آنچه که‌این راز را عمیق تر می‌کندآنست که در زمان وقوع این حادثه اویلرهفتاد

سال داشت و ده سال بود که کاملا کور شده بود ، و مدتها قبل از آن نیز تقریباً بینائی خود را از دست داده بود .

۱۰ **دربارهٔ اعداد کامل** موضوع زیر ترجمهٔ آزاد برهان اویلر دربارهٔ این قضیهٔ اوقلیدس است که **هر عدد کامل زوج به‌شکل $(2^{p}-1)\,2^{p-1}$ می‌باشد** ، که در آن عامل فرد عدد اول است ؛ و اینکه بالعکس اگر M **عدد مرسن**، یعنی عدد اولی به شکل $2^{p}-1$ باشد ، در این صورت $M\,2^{p-1}$ **عددیست کامل .**

هر عدد صحیح زوج را می‌توان به شکل $M\;2^{p-1}=p$ نوشت که درآن p بزرگتر است از ۱ و M عددیست فرد. چون تمام مجموع مقسوم علیه‌های فرد p را با S ومجموع تمام مقسوم علیه‌های P وازجمله خود P را با Σ نمایش‌دهیم، $\Sigma=S-M$ خواهد شد . باید توجه داشت که اگر M اول باشد، Σ مساوی یك خواهد شد ، و اگر M غیر اول باشد Σ بزرگتر از ۱ خواهد شد .

دومجموع Σ و S به‌صورت‌رابطهٔ ذیل بایکدیگرپیوستگی‌دارند:

$$\Sigma=S+2S+2^{2}S+\cdots+2^{p-1}S=S(2^{p}-1) \qquad (43)$$

و چون پس از آن فرض کنیم که P عدد کامل است ، روابط $M\,2^{p}=2p=\Sigma$ را نیز خواهیم داشت . از برابر قراردادن این دو مقدار Σ حاصل می‌شود .

$$S=2^{p}\,\Sigma \qquad M=(2^{p}-1)\,\Sigma \qquad (44)$$

رابطهٔ اول نشان می‌دهد که S زوج است و از آن نتیجه

می‌گیریم که Σ فرد است. رابطهٔ دوم یکی از دو راه را در پیش پای ما می‌گذارد: یا اینکه Σ برابر با ۱ است و M اول است، یا اینکه M عدد غیر اول است و Σ مقسوم‌علیهی از M. فرض دوم به این معنی است که p لااقل سه مقسوم علیه فرد ۱ و M و Σ را دارد، و این غیرممکن است، از آن جهت که مجموع این سه $S+۱$ است، در صورتی که مجموع **همهٔ مقسوم علیه‌های فرد** برابر با S است. از اینجا نتیجه می‌شود که Σ برابر با ۱ است و M اول است؛ سپس از رابطهٔ (۴۴) به دست می‌آید که

$$M = ۲^{p} - ۱$$

برهان سیلوستر دربارهٔ اینکه **یک عدد فرد کامل ـ اگر چنین عددی وجود داشته باشد ـ لااقل باید دارای سه مقسوم‌علیه اول باشد**، ازهمین قبیل است. ابتدا اجازه بدهید امکان یک مقسوم علیه اول را بررسی کنیم. اگر x عدد اول و p عددصحیح کامل به‌شکل x^{m} باشد. در این صورت:

$$x^{m} = ۱ + x + x^{۲} + \cdots + x^{m-۱} = \frac{x^{m} - ۱}{x - ۱} \qquad (۴۵)$$

که از آن رابطهٔ $x^{m}(۲ - x) = ۱$ ناشی می‌شود، که غیرممکن بودن آن روشن است.

یک عددصحیح کامل نیز نمی‌تواند به شکل $p = x^{m} y^{n}$ باشد که در آن x و y **اعداد اول متمایز** بوده باشند. درواقع،

اگر x و y به ترتیب مجموع مقسوم‌علیه‌های x^m و y^n باشند و فرض‌کنیم Σ مجموع تمام‌مقسوم‌علیه‌های P باشد دراین‌صورت، باتوجه به اینکه P کامل فرض شده است ، $\Sigma = ۲P$ خواهد بود . اما از طرف دیگر $\Sigma = xy$ است ؛ بامساوی قرار دادن دو مقدار Σ معلوم می‌شود:

$$(۱+x+x^۲+\cdots+x^m)(۱+y+y^۲+\cdots+y^n)=۲x^m y^n$$

$$(x^{m+۱}-۱)(y^{n+۱}-۱)=۲(x-۱)(y-۱)x^m y^n$$ یا

برای اثبات آنکه این رابطه غیرممکن است ، سیلوستر آنرا به شکل زیر درآورد:

$$(۱-\frac{۱}{x^{m+۱}})(۱-\frac{۱}{y^{n+۱}})=۲(۱-\frac{۱}{x})(۱-\frac{۱}{y}) \quad (۴۶)$$

و مشاهده کرد که عنصر طرف راست بازای $x=۳$ ، $y=۵$ حداقل مقدار را به دست می‌آورد ، و بنابراین هرگز کمتراز $۱۶/۱۵$ نمی‌شود ، در صورتی که طرف چپ هرگز از ۱ تجاوز نمی‌کند.

ویتا Vieta

«هر مسألهٔ درجهٔ سوم یا درجهٔ چهارم را در آخرین تحلیل می‌توان یا به تثلیث زاویه تبدیل کرد یا به تضعیف مکعب.»

ج | دربارهٔ ریشه‌ها و رادیکالها

۱ **میراث فینیقی‌ها** نظریهٔ مورد قبول عامه در بارهٔ اینکه‌هم یونانیها وهم یهودیان دستگاه‌کتابت خودرا به‌فینیقی‌ها مدیونند ، به مقدار زیادی بــه وسیلهٔ تشابهی کــه بین نامهای عــلامات وجود دارد تــأیید می‌گردد : **آلفا** ، **بتا** ، **گامای** یونانی را بــا **الف** ، **بت** ، **گیمل** عبری مقایسه کنید . ایــن مطلب نیزمهم است‌که یهودیان مانند یونانیها برای‌حوائج خود با به‌کار بردن شیوهٔ فینیقی‌ها خود را گرفتار خصلت **دوگانه** این دستگاه نمودند : درواقع هرحرف الفبا نه‌تنها نمایندهٔ یك

صدا است ، بلکه علامت یك عدد نیز می‌باشد . یــکی از نتایج این امر **جفر** است که درفصل۳ از آن صحبت شد ؛ با این‌حال میراث دوگانگی دستخط یونانی نتایج دیگری داشته است که جریان ریاضیات بعدی را از چند جهت تحت تأثیر قرار داد.

کتابت فینیقی خواه اختراع نبوغ یك فینیقی گمنام باشد، وخواه این دستخط را از تمدن قدیمی‌تری به ارث‌برده باشند ، یك امر مسلم است : اصل به‌کار رفته چنان اصلاح همه جانبه‌ای از شیوه‌های کتابت گذشته بود که پس ازکاربرد آن توسط یونانیان نیز دستخوش تغییرات مهمی نگردید . یکی از مزایای مهم آن اینست که دستخط به تعدادی محدود ازعلامات نیازمند است به‌طوری که حتی یك انسان‌باشعور متوسط بسهولت می‌تواند حروف را طبق نظم معمولی خود بــه خاطر بسپارد. سیمای **ترتیبی** الفبا از خود المثنائی برای فرایند شمارشی به‌وجودمی‌آورد . اماباتوجه به‌اینکه الفبای یونانی شامل بیست و دو حرف و شمارش ترتیبی و ساختمان اعشاری زبان مرسوم عدد فقط متضمن ده علامت است ، این همبستگی‌بهیچ وجه‌کامل نیست . یونانیان هر یك از حروف الفبای خود را به جای یك رقم به کار می‌بردند **و این سرگردانی به علت فراوانی** و یا به طوری که فرانسویان می‌گویند « embarras de richesses » بی‌شك مانع جدی برای‌کشف اصل عددنویسی وضعی بوده است که بــدون آن هیچ پیشرفتی در حساب ممکن نمی‌شد .

این خصلت دوگانهٔ الفبای یونانی یك تأثیر کند کننده در توسعهٔ سایــر شاخه‌های ریــاضیات نیز داشته است . امروز

می‌دانیم که تاوسائلی برای تعیین مقادیر مطلق معلوم یامجهول، متغیر یا ثابت، و بخصوص برای مقادیر ثابت نا مشخص که ما امروز آنها را ضرایب و پارامترها می‌نامیم به وجود نیاید هیچ پیشرفت اساسی درجبر میسر نمی‌گردد. قبل از رسیدن به این مراحل، لازم بود که حروف از ارزش عددی خود خلاصی می‌یافت. ابداع ارقام عربی قدم مهمی در ایـن جهت بود. نیروی عادت آن اندازه عظیم است که با اینکه تقریباً چهارصد سال فیبوناتچی را از ویتـا جدا می‌کرد، پیشرفت کمی دراین زمینه حاصل شد. مطمئناً ریـاضی‌دانـان قرن شانزدهم ایتالیا روش‌هائی برای حل معادلات درجه سوم و چهارم داشتند؛ بـا این حال جوابهای آنها با عباراتی عمومی وکلی بیان نمی‌شد، بلکه مربوط به نمونه‌های مخصوصی ازمثالهای عددی بود. در واقع، تا سال ۱۵۹۲ که اثر ویتا دربارهٔ علامتگذاری حرفی منتشر گردید، حرف الفبا نتوانسته بود از پای‌بندی که فینیقی‌ها بر آن زده بودند خود را رها سازد.

۴ اصل هاریوت Harriot این عنوان مربوط بـه نقش صفر در آن شاخه از جبر است که نام نظریهٔ معادلات را به خود گرفته است. برای روشن شدن مطلب، مـا در اینجا روشی راکه شامل **جابجا کردن تمام جمل** یك معادله به‌یك طرف و نوشتن آن به‌صورت $p(x)=0$ است مورد توجه قرار می‌دهیم، که درآن $p(x)$ یك کثیرالجمله است. من این روش را **اصل هاریوت** می‌نامم. توماس هاریوت، جغرافی‌دان، کـه زمـانی معلم سرخانـهٔ سروالتررالـه (Sir Walter

Raleigh) بود و اولین کسی است کـه ناحیهٔ ویرجینیا را بازدیـد نموده است ، در دوران زندگی خود شهرتی در زمینهٔ ریاضیات نداشت . حقیقت آنست که اصل مورد بحث تا ۱۶۳۱ ، یعنی تا دهسال پس از مرگ هـاریوت آفتابی نشده بود . حتی درآن موقع نیز اعتبار این نوآوری به‌شخص دیگری داده شد، زیرا بلافاصله پس از انتشار کتاب **پراکسیس** (**Praxis**) هاریوت، کتابی‌از دکارت دربارهٔ هندسهٔ تحلیلی منتشر گردید، که درآن فیلسوف‌آزادانه افکار هاریوت را مورد استفاده قرار داده بود بدون آنکه نامی ازمنبع آن ذکر کند. شهرت دکارت چنان بود که تقریباً برای یك قرن این اصل قرنساز به عنوان کاری از دکارت تلقی می‌شد.

من کلمهٔ قرنساز را با بصیرت کامل در اینجا بـه کار برده‌ام ، زیرا که این اصل ، علی‌رغم سادگی تام و تمام آن ، با کاربرد علامتگذاری حرفی در اعداد بزرگترین اصول مهم تاریخی قرار گرفته است.

اصل هاریوت ، اولا با **تبدیل حل یك معادله به فاکتورگیری از یك کثیرالجمله** بهبود وسیعی در فن حل معادلات وارد کرد . ثانیاً ، این کار به بحث در روابطی که ریشه‌های یك معادله را باضرائب آن مربـوط می‌کند منجر گردید ، وازهمین راه سایهٔ بسیاری ازگسترش‌های نظری‌آینده مانند **توابع متقارن، قضیهٔ اصلی جبر وتوابع بامتغیر مختلط** در آن دیدن می‌شد.

برای درك منبع این باروری شگفت انگیز ، باید یاد- آوری کرد که مقادیر حقیقی ومختلط که برای آنها این اصل

به‌کار می‌رود نه‌تنها ازقوانین رسمی جبر تبعیت می‌کنند ، بلکه تابع**قانون عامل صفر** نیز می‌باشند . مطلب اخیررا می‌توان چنین بیان‌داشت : **یك حاصلضرب نمی‌تواند برابر صفر گردد مگر آنکه لااقل یکی ازعوامل آن صفر باشد،** و بیان علامتی آن این است که : رابطهٔ $uv=0$ مستلزم آن است که یا $u=0$ ، یا $v=0$ ، یا $u=v=0$ بوده باشد.

اما اگر این قانون به اصل هاریوت بزرگترین نیرو را بخشید ، چرا نه هاریوت و نه گروه ریاضی‌دانانی که اصل را در مدت دوقرن بعداز او به کار بردند هرگز ذکری از**قانون صفر** ، حتی به شکلی غیر مستقیم ، به عمل نیاوردند؟ جواب آن چنین است که قبل‌ازآنکه کسی بتواند موضوعی را بیان نماید ، باید امکان بیان موضوع به‌شکل دیگر برای او وجود داشته باشد . امروز هرکس‌که دورهٔ آنالیزحاملی را دیده باشد به‌سهولت شکل دیگری از قانون عامل صفر را درك می‌کند؛ اما در زمان هاریوت، که حتی به عدد مختلط با بدگمانی آلوده به ابهام می‌نگریستند . صحبتی از مسأله در میان نبود. و من به جرأت می‌گویم که خود فکر به وجود آوردن مجمع‌القوانین جبری و پس‌ازآن جستجوی موجوداتی که بتوانند از این قوانین تبعیت کنند ، به وسیلهٔ اغلب از ریاضی‌دانان قرن هفدهم و هجدهم به عنوان هذیان و یاوه‌گوئی یك دیوانه تلقی می‌شد.

۴ معادله و همانندی طرز تصور هاریوت که درقسمت قبل گفته شد ، قرابتی جالب بین **معادلات جبری وتوابع**ـ

کثیرالجمله‌ای به وجود آورد ، و معلوم داشت که دو مفهوم فوق قابل تبدیل به یکدیگرند . با این حال هم اکنون خواهیم دید که شباهت بین اینها زیاد هم کامل نیست ، و اگر بخواهیم در این مقایسه زیاد دور برویم به نتایجی که بی‌معنی است خواهیم رسید .

اگر معادلهٔ مفروض به صورتی بدون ابهام تعریف شود ، یعنی همهٔ ضرائب کثیرالجملهٔ متناظر با آن بر حسب مفروضات مسأله قابل بیان باشد ، هیچ ابهامی پیش نخواهد آمد . ولی چنین حالتی به‌ندرت اتفاق می‌افتد : اغلب از مسائل در ریاضیات محض و عملی ، وابسته به **پارامتری‌های متغیرند** ، ضرائب معادله‌ای که هر یك از این مسائل به آن منجر می‌گردد ثابت نیستند ، بلکه توابعی از این پارامترها هستند . نتیجه آنست که انسان نه با یك معادله ، بلکه با **مجموعه‌ای از معادلات** سروکار دارد .

مثلا تابع عمومی درجهٔ دوم یك مجهولی با فرمول زیر داده می‌شود .

$$Q(x) = ax^2 + bx + c \qquad (٤٧)$$

فرض کنیم که ضرائب نامعین a،b،c بتوانند تمام مقادیر گویا ، چه مثبت چه منفی و چه صفر را بپذیرند . در اینصورت مجموعهٔ Q نه تنها شامل کلیهٔ توابع درجهٔ دوم تمام عیار است ، بلکه توابعی از قبیل آنچه را که در زیر می‌آید نیز در بر می‌گیرد :

$$Q(x) = 0 \times x^2 + bx + c \qquad (b \neq 0)$$
$$Q(x) = 0 \times x^2 + 0 \times x + c \qquad (c \neq 0) \qquad (48)$$
$$Q(x) = 0 \times x^2 + 0 \times x + 0$$

ما از نظر نموداری این امر را چنین تفسیر می‌کنیم که تابع $y = Q(x)$ نه‌تنها نمایندهٔ سهمی‌ها است ، بلکه همچنین نمودار خطوط مستقیمی که شامل خطوط موازی با محور x و خود محور x است نیز می‌باشد .

با این حال دقتی می‌کوشیم که این‌حالات مخصوص را به عنوان معادلات‌مورد بحث قرار دهیم ، به‌این نتیجه‌می‌رسیم که‌حق نداریم‌به این‌تفسیرهای جامع‌متوسل شویم.در واقع،ازلحاظ‌جبر محض ، رابطهٔ $0 \times x^2 + bx + c = 0$ **درجه دوم نیست ، بلکه معادلـه‌ای خطی است** ؛ رابطهٔ $(c \neq 0)$ $0 \times x^2 + 0 \times x + c = 0$ معادله نبوده بلکه یك **نابرابری** است ، $0 \times x^2 + 0 \times x + 0 = 0$ نیز معادله نبوده بلکه یك **تکرار بیهوده** است . بعلاوه ، با توجه به اینکه این مشکلات از لوازم ذاتی **تعریف عدد صفر** است ، با تدابیری نظیر روش هاریوت از آنها نمی‌توان اجتناب نمود . در واقع‌ما دیدیم‌که این روش بدون قانون عامل صفر، که چیزی جز نتیجهٔ فرعی شرایطی نیست که تحت‌آن صفر به عنوان عنصری از قلمرو عدد پذیرفته شده ، بی‌فایده خواهد بود .

بدین‌ترتیب یك رابطهٔ کثیرالجمله‌ای الزاما یك معادلهٔ تمام عیار نیست . این رابطه می‌تواند یك **نابرابری** یا یك **اتحاد** باشد . تعجب‌آور است که خود این ابهام می‌تواند تبدیل به وسائل موثری برای اثبات اتحادها گردد . روش‌کار

ازاین‌قضیه نتیجه می‌شود که **اگر یک رابطهٔ کثیرالجمله‌ای از x بادرجهٔ n بازای بیش از n** مقـدار متمایـز از x صحیح باشد ، در این صورت آن رابطه یـك اتحاد است ، یعنی هرمقدار x در آن صدق خواهد کرد .

مثلا رابطهٔ درجه دوم زیر را درنظر بگیریم :

$$P(x)=(b-c)(x-a)^{2}+(c-a)(x-b)^{2}+(a-b)(x-c)^{2}$$

به سادگی می‌توان دید که:

$$P(a)=P(b)=P(c)=(a-b)(b-c)(c-a)$$

چنانکه دیده می‌شود این رابطه با بیش‌از دومقدار از x درست درمی‌آید ، و از این‌رو این یك اتحاد است به این صورت:

(٤٩)

$$(b-c)(x-a)^{2}+(c-a)(x-b)^{2}+(a-b)(x-c)^{2} \equiv (a-b)(b-c)(c-a)$$

به عنوان مثال دیگری رابطهٔ زیر را در نظرمی‌گیریم:

(٥٠)

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}+\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{(x-c)(x-d)(x-a)}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{(x-d)(x-a)(x-b)}{(c-d)(c-a)(c-b)}=1$$

چون طرف‌چپ را با $P(x)$ نمایش دهیم ودرنظر بگیریم که‌این رابطهٔ درجهٔ سوم‌بازای**چهار**مقدار x برابر ١ می‌شود، یعنی:

$$p(a)=p(b)=p(c)=p(d)=1$$

نتیجه آن می‌شود که این رابطه یك اتحاد است .

۴ دربارهٔ معادلات درجه‌سوم و چهارم حدس لاگرانژ

دربارهٔ اینکه ریشه‌های معادلات بادرجهٔ چهار معمولا **نمی‌توانند** به وسیلهٔ رادیکالها بیان شوند ، به وسیلهٔ آبل و گالوآ تأیید شد . اثبات این امر خارج از حدودکتاب حاضراست ؛ با این حال با بررسی روش‌هائی که اویلر ولاگرانژ درمورد این‌گونه معادلات به کار بردند ، و در نتیجهٔ آنها اهمیت اصل هاریوت در مورد کار کردن با معادلات آشکار شد ، اطلاع زیادتری دربارهٔ ماهیت مسأله به دست خواهد آمد .

اگر در اتحاد

$$H(x)=x^3+a^3+b^3-3abx\equiv \tag{51}$$

$$(x+a+b)(x^2+a^2+b^2-ax-bx-ab)$$

a و b را معلوم و x را مجهول در نظر بگیریم ، می‌توانیم اتحاد را به این وسیله توضیح دهیم که معادلهٔ **ناقص** درجه سوم $H(x)=0$ مقدار $x=-b-a$ را به عنوان یك ریشه می‌پذیرد . معادلهٔ عمومی درجهٔ سوم ناقص به شکل زیر است:

$$x^3+ux+v=0 \tag{52}$$

و همیشه می‌توان معادلات (۵۱) و (۵۲) را با تعیین a وb برحسب u و v به‌عنوان ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم همانند کرد . در واقع معلوم می‌شود :

$$a^3+b^3=v\ ،\ -3ab=u\ ،\ a^3b=-u^3/27 \tag{53}$$

و این بدان معنی است که a^3 و b^3 ریشه‌های معادلهٔ زیرند:

$$y^2 - vy - \frac{u^3}{27} = 0 \qquad (54)$$

اگر ریشه‌های این معادلهٔ درجهٔ دوم **حلال** را A و B بنامیم، در این صورت $x = -\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$ یك ریشهٔ معادلهٔ درجه سوم است. با انجام جزئیات محاسبات ذکر شده، به **فرمول کاردان در بارهٔ معادلهٔ درجه سوم** می‌رسیم.

حل لاگرانژ در مورد معادلهٔ درجهٔ چهارم ناقص

$$x^4 + ux^2 + vx + w = 0 \qquad (55)$$

طریق مشابهی دارد. اتحاد

$$(56)$$

$$(a+b+c+x)(a-b-c+x)(-a+b-c+x)(-a-b+c+x) = (a^4+b^4+c^4+x^4) - 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+x^2a^2+x^2b^2+x^2c^2) + 8\,abcx = H(x)$$

نشان می‌دهد که

$$x = -a-b-c \,،\, -a+b+c \,،\, a-b+c \,،\, a+b-c$$

ریشه‌های معادلهٔ درجه چهارم ناقص $H(x) = 0$ اند.

آیا می‌توان a ، b ، c را به طریقی تعیین نمود که دو معادلهٔ (۵۵) و (۵۶) همانند گردند؟ چنین داریم:

$$a^2+b^2+c^2 = -u/2 \,،\, abc = v/8$$

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2=\frac{u^2-4w}{16}$$

که از آن نتیجه می‌شود که a^2، b^2، c^2 ، ریشه‌های معادله

$$y^3+\frac{u}{2}y^2+\frac{(u^2-4w)}{16}y-\frac{v}{8}=0 \qquad (۵۷)$$

می‌باشند. اگر ریشه‌های این معادلهٔ درجه **سوم حلال** را با A ، B ، C نمایش دهیم ، در این صورت

$$x=-\sqrt{A}-\sqrt{B}-\sqrt{C}\ ،\ -\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$$
$$\sqrt{A}-\sqrt{B}+\sqrt{C}\ ،\ \sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}$$

ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ چهارم مورد نظر است . در نظر داشته باشید که عناصر زیر رادیکال A ، B ، C معمولا متضمن اعداد گنگ درجه سوم اند .

این طرز کار جالب مسألهٔ زیر را مطرح می‌سازد : چرا نتوان روشی را که با این کامیابی درمورد معادلات درجهٔ سوم و چهارم به کار رفته است برای معادلات **درجهٔ پنجم** و بالاتر مورد استفاده قرار داد؟ ممکن است یك اتحاد متقارن از درجهٔ n با n پارامتر را مشابه با آنچه اویلر و لاگرانژ به‌کار برده‌اند طرح نمود ؛ با در نظر گرفتن یکی از پارامترها به عنوان مجهول ، می‌توان اتحاد را به مثابهٔ یك معادله توضیح داد ؛ با یکی شمردن این معادله با معادلهٔ کلی از درجهٔ n می‌توان روابطی بین پارامترها و ضرائب به وجود آورد ، و بالاخره به معادله‌ای شبیه به معادله‌های **حلال** اویلر و لاگرانژ رسید.

در واقع کوشش‌هائی در این جهت نیز بـه عمل آمـده است که قابل توجه‌ترین آنها کارهای مالفاتی است (Malfatti). معادلهٔ حلال **مالفاتی** برای معادله **عمومی درجه پنجم** از **درجه ششم** است و بدان وسیله او حدس زد که درجهٔ m مربوط

به‌معادلهٔ حلال یک‌معادلهٔ درجهٔ n ام ازرابطهٔ زیر به‌دست‌می‌آید:

$m = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$

و در نتیجه برای هرمقدار n بزرگتر از ۴ درجهٔ **معادلهٔ حلال بزرگتر از درجهٔ معادلهٔ اصلی است.**

۵ **هندسه‌ونمودارها** تاریخ نویسان کشف **مقاطع مخروطی** را به‌شخصی بنام منایخموس (Menaechmus) نسبت می‌دهند که یکی از معاصرین افلاطون و شاگرد ائودوکسوس و مغز متفکری بود که کتاب **اصول** اوقلیدس را الهام بخشید. روایت است که منایخموس، هنگامی که در جستجوی راهی برای **تضعیف مکعب**، یعنی حل معادلهٔ $a^3 = 2$ بود، پایش به‌این «**مکانهای هندسی صلب**» خورد و در نتیجهٔ همین بود که توانست مسأله‌را به‌وسیلهٔ یک **سهمی** ویک دایره حل کند. جزئیات راه حل اومعلوم نیست‌اما یک‌صورت ممکن آن‌درشکل۴ که مربوط به **معادلهٔ درجه‌سوم دو جمله‌ای کلی** $x^3 - N = 0$ است نشان داده شده است.

معادلهٔ این سهمی $y = x^2$ است. دایرهٔ «حلال» باقطر op رسم شده است، و p نقطه ایست که مختصات‌آن $x = N$، $y = 1$ است. بنابراین معادلهٔ دایره عبارتست از

$$x^2 + y^2 - Nx - y = 0 \qquad (58)$$

با حذف y بین دو معادله حاصل می‌شود $x^4 - Nx = 0$ $x(x^3 - N) = 0$ سهمی‌ودایره‌درنقاط O و Q یکدیگررا قطع می‌کنند وطول نسبت‌بمبدأ نقطه Q برابراست با $x = \sqrt[3]{N}$.

آنچه که حدس فوق را محتمل می‌سازد آنست که در

حدود پانزده قرن بعد، عمر خیام یك حل نموداری برای معادلات کلی درجه سوم وچهارم بر پایهٔ همین اصل ، **یعنی تـقاطع یك سهمی ویك دایرهٔ متحرك** پیشنهاد کرد. باحذف y بین

$$y = x^2 \text{ و } x^2 + y^2 + ux + vy + w = 0$$

معادلهٔ درجهٔ چهارم زیر بدست می‌آید:

$$x^4 + (v+1)x^2 + ux + w = 0$$

واگر معادلهٔ درجه چهارم مفروض به صورت زیرباشد:

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

دراین صورت بامقایسهٔ این دورابطه حاصل می‌شود :

$$u = B،\ v = A - 1 ،\ w = C$$

که بطور کامل دایرهٔ «حلال» را برحسب ضرائب معادلهٔ درجهٔ چهارم مفروض تعیین می کند. اگرمعادلهٔ مفروض ازدرجهٔ سوم باشد، قبول $C = 0$ به $w = 0$ منجر می‌گردد: دراین‌حالت **دائرهٔ حلال از مبدا مختصات می‌گذرد .**

درشکل۵ شیوهٔ عمرخیام برای **تثلیث یك زاویهٔغیر مشخص** به کار برده شده است . زوایهٔ مفروض $\varphi = xOM$ بوسیلهٔ نقطهٔ M برروی**دایره‌ای بهشعاع واحد** نشان داده شده‌است، بطوریکه$a = \cos\varphi = Hc$. فرمول‌زاویهٔسه‌برابر

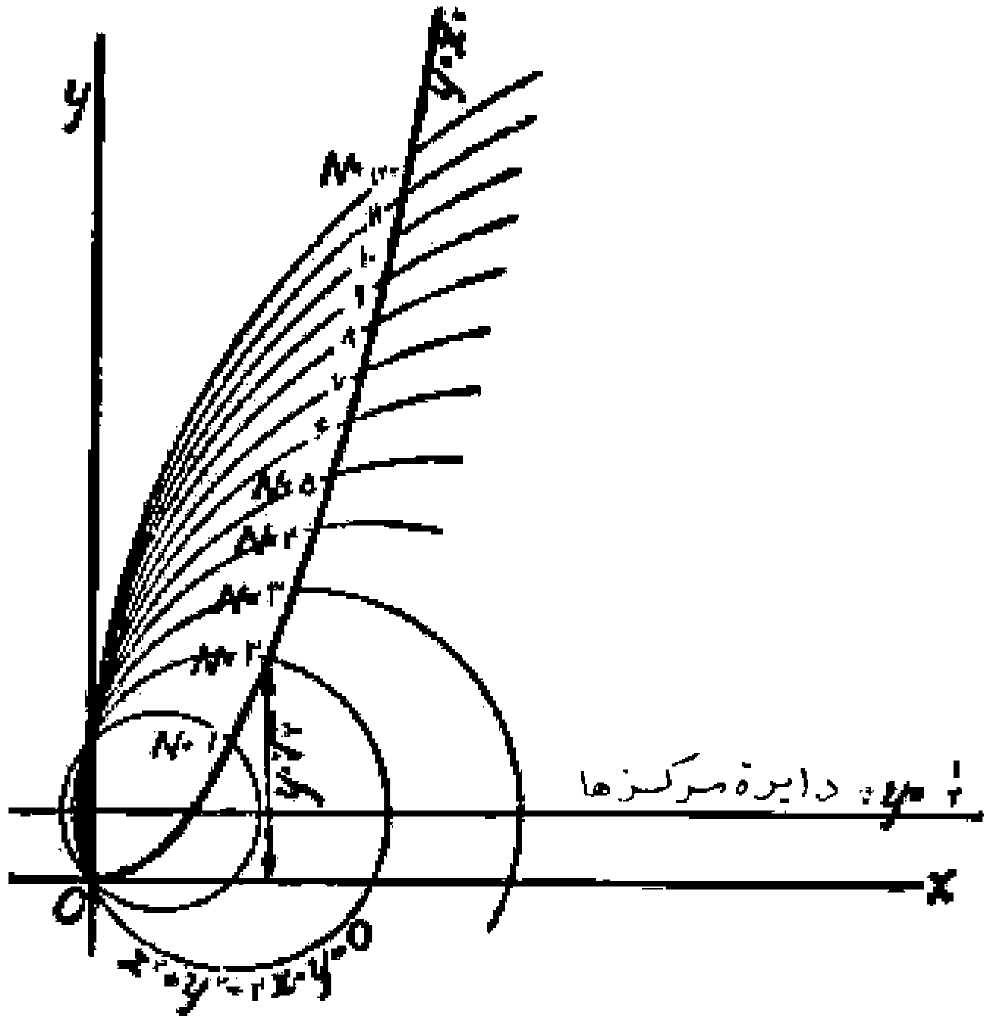
$$\cos\varphi = 4\cos^3\varphi/3 - 3\cos\varphi/3 \qquad (59)$$

معادله درجهٔ سوم

$$x^3 - 3x - 2a = 0 \qquad (60)$$

را بوجود می‌آوردکه در آن $x = 2\cos\varphi/3$ است . مرکز C ازدایرهٔحلال‌درمحل$x = a$ ، $y = 2$ است. اگر φ نقطه‌ای

مشترک بین این دایره و سهمی در ربع اول ، و p تصویر φ برروی‌دایرهٔ به‌مرکزO و به‌شعاع۲ باشد : در این صورت xop زاویهٔ مورد نظر است .



شکل۴-: اخراج نموداری ریشه های سوّم

حل نموداری معادله‌درجهٔ دوم $x^2 - ax + b = 0$ که در آن a و b اعدادی حقیقی ودلخواه‌اند، درشکل ۶ نشان داده شده است. در اینجا دایرهٔ حلال برروی قطرup بنا شده است، که‌درآنp نقطه‌ای بامختصات$x = a$ و$y = b$ وU نقطه‌ای به عرض واحدبرروی محور y ها است . نقاط X و X' که

درآنهـا دایرهٔ حـلال محور x هارا قطع می‌کند ، جوابهای نموداری معادلهٔ درجه دوم‌اند . اگر دایره محور x ها راقطع نکند ویا بر آن مماس نباشد ،دراین صورت‌ریشه‌ها موهومی‌اند؛ با این‌حال دراین‌مورد نیزریشه‌ها را می‌توان به‌شکلی‌نموداری به‌مسائل سادهٔ ساختمانی‌که درشکل ۷ دیده‌می‌شود نمایش داد: مماس OT را بردایرهٔ حلال رسم مـی‌کنـیم و فرض می‌نمائیم دایره‌ای که مرکـز آن O و شعاعش OT است خط CM را درZوZ' قطع‌کند. دراین‌صورت ZوZ' محل ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم **در صفحه متغیر مختلط** $x + iy$ است.

۶ **الگوریتم اقلیدسی** بسط یك عدد به صورت‌کسری پیوسته ، شکل جدید روشی است که در کتاب VII **اصول** دیده می‌شود ، وبه این دلیل ، **الگوریتم اقلیدسی** نامیده شده‌است .

اقلیدس‌این‌روش‌را برای تعیین **بزرگترین‌مقسوم‌علیه مشترك عدد صحیح** به کار برده است ، اما این آلگوریتم مورد استعمال‌های دیگری نیز دارد . من سه تا از این مسائل را دراین قسمت مطرح خواهم ساخت : **کسرهای پیوسته ، معادلات نامعین، واعداد گنگ .**

فرض‌کنیم $|\Gamma|$ **بزرگترین عدد صحیحی باشد که در عدد مثبت Γ وجود دارد بدین ترتیب**

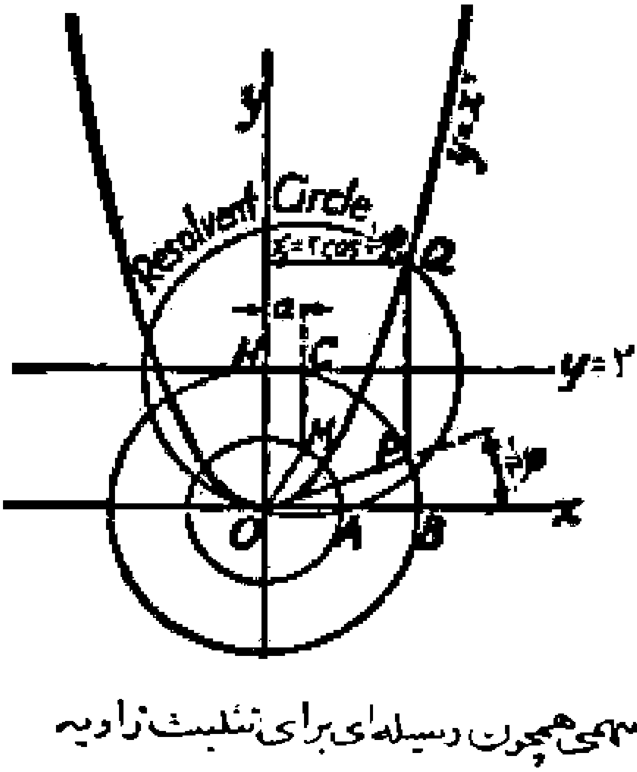
$$\left[\frac{۲۲}{۷}\right]=۳،[\sqrt{۲}]=۱،[\pi]=۳،[e]=۲،[۱]=۱،[۰]=۰$$

ونیز فرض‌کنیم‌که Γ **گویا** باشد. اگر Γ عدد صحیح باشد، دراین‌صورت$|\Gamma| = \Gamma$ اگر Γ عددصحیح نباشد، بنا براین

عددصحیحی مانند Γ_1 وجود دارد که از ۱ بزرگتر است بطوریکه $\Gamma=[\Gamma]+(1/\Gamma_1)$ و این Γ_1 ممکن است عددی صحیح باشد ؛ اگر صحیح نباشد همین شکل استدلال را تا مرحلهٔ دوم ادامه می‌دهیم یعنی $\Gamma_1=[\Gamma_1]+(1/\Gamma_2)$ و فرایند را تا رسیدن بیك عددصحیح مثل Γ_n دنبال می کنیم. درآخر کار به‌یك **کسر پیوسته** می‌رسیم :

$$\Gamma=[\Gamma]+\cfrac{1}{[\Gamma_1]+\cfrac{1}{[\Gamma_2]+\cfrac{1}{\cdots}+\cfrac{1}{\Gamma_n}}}$$

که می‌توان به سهولت آنرا به شکل زیر خلاصه کرد.

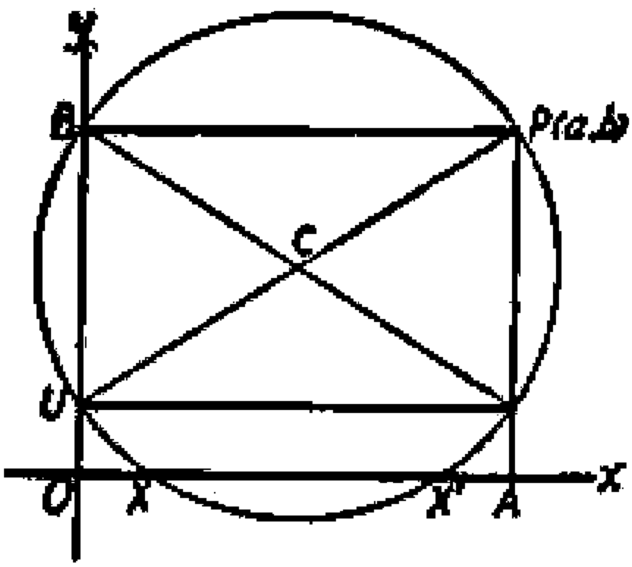


شکل ۵ ـ سهمی همچون وسیله‌ای برای تثلیث زاویه

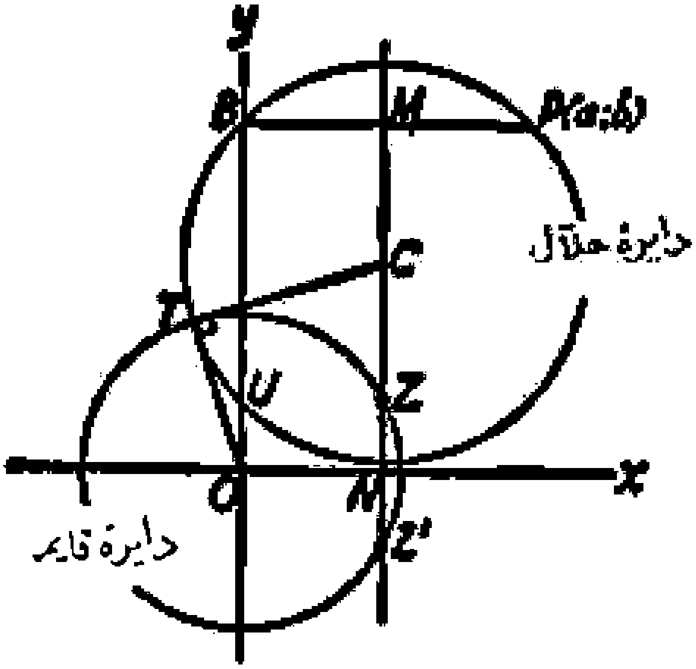
$$\Gamma=([\Gamma];[\Gamma_{1}],[\Gamma_{2}],\dots,\Gamma_{1}) \qquad (۶۱)$$

به عنوان مثال فرض کنیم ۰۶ر۳۹ = Γ_1 باشد **که عدد e با ۴۰ر۰٪ تقریب است** . در اینجا جزئیات امر در جدول زیر نشان داده شده است .

مقسوم	مقسوم‌علیه	خارج قسمت	باقیمانده
۱۰۶	۳۹	۲	۲۸
۳۹	۲۸	۱	۱۱
۲۸	۱۱	۲	۶
۱۱	۶	۱	۵
۶	۵	۱	۱
۵	۱	۵	۰



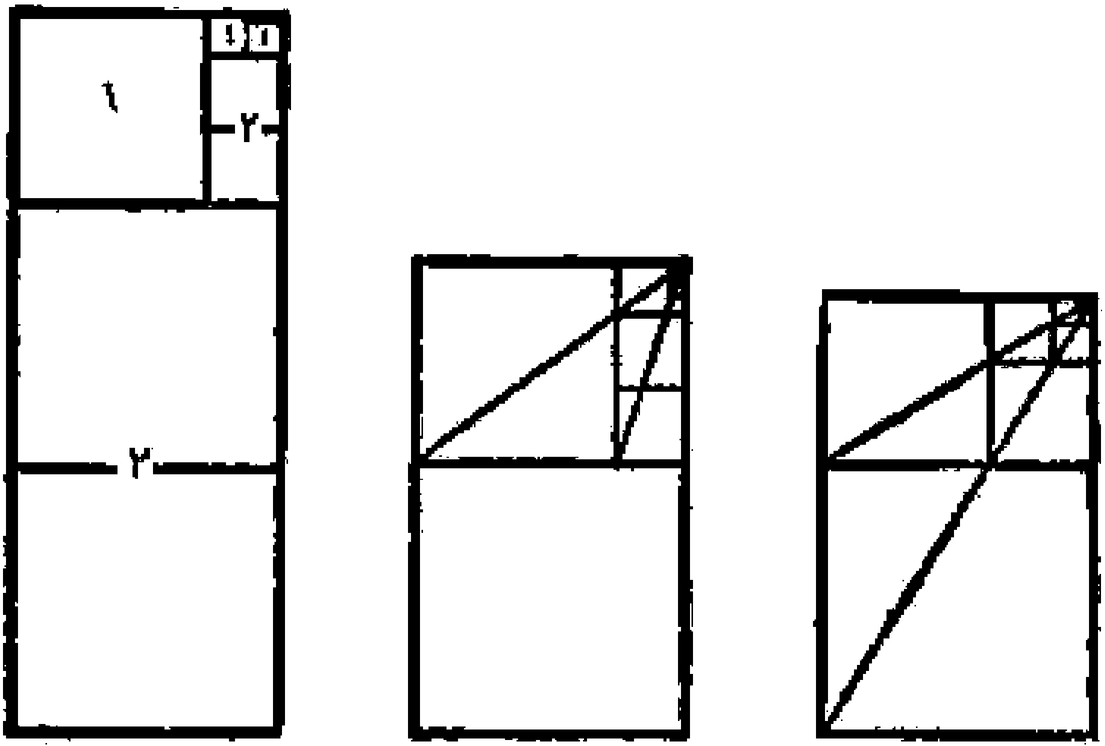
شکل ۶ - حل نموداری معادلهٔ درجهٔ دوم با ریشه های حقیقی



شکل ۷ـ نمایش نموداری ریشه های مختلط یک معادلهٔ درجهٔ دوم

بنابراین : ۱۰۶/۳۹ = (۲۰ ، ۱ ، ۲،۱ ، ۱ ، ۵)

من آرایش اعداد صحیح Γ_n و ... $[\Gamma_2]$ و $[\Gamma_1]$ و $[\Gamma]$ را **طیف عدد** Γ می‌نامم. جمل طیف عبارتند ازمخرج‌های کسرمنظم پیوسته مربوط به Γ تعبیر جالب توجهی هندسی از آلگوریتم وطیفی که به‌وجود می‌آورد، در شکل ۸ نشان داده شده است . با رسم مستطیلی با قاعدهٔ ۱ و ارتفاع کار را شروع می‌کنیم ؛ از این مستطیل تا حد ممکن مربع هائی را **حذف می‌کنیم** ، و یك مستطیل **پس ماندی** را باقی می‌گذاریم ، که برای آن نیز همین عمل را اجرا می‌کنیم . عمل تاحدی که دیگر **مستطیل پس‌ماندی باقی نماند** ادامه می‌یابد **تعداد مربع‌ها در هریك ازمستطیل‌های متوالی جملهٔ متناظر را برای طیف** Γ **بوجود می‌آورد .**



طیف $\frac{106}{49} = (2; 1, 2, 1, 1, 5)$

طیف $\sqrt{3} = (1; 1, 2, 1, 2, \ldots)$

طیف «نسبت طلائی» $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = (1; 1, 1, 1, \ldots)$

شکل ۸ - طیف بالای اعداد

این مسأله که آلگوریتم را می‌توان برای هرعدد گویا به‌کاربرد، وطیف حاصل **محدود ومنحصر** به فرد است، جزء لاینفك خود فرایند است. و بالعکس، بازای هرآرایش‌محدود مفروضـی از اعداد مثبت صحیح، یك وتنها یك‌عدد گویای Γ وجود دارد که این آرایش را به عنوان طیف می پذیرد. یك راه مستقـیم و صعب العبور محاسبهٔ Γ بوسیلهٔ طیف آنست که جریان‌کار را از «پائین ببالا انجام دهیم» با این حال باکاربرد آلگوریتم دیگری، که کشف آن معمولا به جان‌والیس استـاد

نیوتون نسبت‌داده می‌شود ، می‌توان‌ازمقداری اشکالات اجتناب کرد . برای نشان‌دادن طرز کار عملی ، من نـتیجـه را برای مورد بالا، یعنی (۱۹۵ و۱ و ۲ و۱ و ۲) $= \Gamma$ در جدول زیر نشان می‌دهم . واضح است که دوهمگرای (**convesgent**) اول آن ، چنانکه آشکار است ، ۲ و ۳ است.

جملهٔ طیف: g	۲	۱	۲	۱	۱	۵
صورت ـ همگرا : N	۲	۳	۲×۳+۲=۸	۱×۸+۳=۱۱	۱۹	۱۰۶
مخرج همگرا : D	۱	۱	۲×۱+۱=۳	۱×۳+۱=۴	۷	۳۹
دترمینان هویگنس: H		-۱	+۱	-۱	+۱	-۱

به‌طور کلی، اگر N_{k-2}، N_{k-1} ، N^k صورت‌ها، D_{k-2}، D_{k-1} ، D_k مخرجهای **سه همگرای متوالی** و g_k جملهٔ کسرپیوسته‌ای که متناظر با همگرای K ام است باشد. دراین‌صورت آلگوریتم و الیس درقانون ترجیعی زیر خلاصه می‌شود.

$$N_k=g_kN_{k-1}+N_{k-2},\ D_k=g_kD_{k-1}+D_{k-2} \quad (۶۲)$$

از این فرمول هویگنس قضیه‌ای را نتیجه گرفت‌که بعد از او در دست اویلر و لاگرانژ به‌صورت‌سنگ بنای **نظریهٔ کسرهای مسلسل نامحدود** درآمد . اگر دترمینان زیر را با H_k نشان دهیم:

$$H_H=\begin{vmatrix} N_{k-1} & N_k \\ D_{k-1} & D_k \end{vmatrix}=(-1)^k \quad (۶۳)$$

قضیهٔ هویکنس می‌گوید که H_k متناوباً یا ۱+ یا ۱− است.

۷ دربارهٔ معادلات نامعین اغلب از مسائل ریاضی به حل جبری معادله‌ای با دو یا چند مجهول منجر می‌شود. بررسی سه‌تائی‌های فیثاغورس، حدس فرما دربارهٔ اینکه هرگاه $n > ۲$ باشد معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ دارای جوابی به‌صورت عدد صحیح نیست، به‌این دسته ازمسائل متعلق‌اند که نام عمومی **تجزیه دیوفانتوس** را به خود گرفته‌اند.

موضوع مقالهٔ حاضر ابتدائی‌ترین مسأله ازمسأله تجزیهٔ دیوفانتوس است که تعیین تمام جوابهای صحیح معادلهٔ ذیل باشد:

$$qx - py = r \qquad (٦٤)$$

که در آن اعداد صحیح p، q و r **دو به‌دو نسبت به یکدیگر اولند**. ابتدا ملاحظه کنیم که اگر $x = a$، $y = b$ جوابی از (۶۴) باشد، در این صورت

$$x = a + np \text{ ، } y = b + nq$$

نیز به‌ازاء تمام مقادیر صحیح n، **چه‌مثبت‌وچه‌منفی**، جواب همین معادله خواهد بود. ازطرف دیگر، اگر X و Y جوابهای معادلهٔ

$$qX - pY = ١ \qquad (٦٥)$$

باشند، در این صورت $a = rX$ و $b = rY$ درمعادلهٔ (۶۴) صدق می‌کند. و بالاخره معادلهٔ

$$qx + pz = r$$

را می‌توان با جایگزینی ساده $x = x$ و $y = -z$ به صورت (۶۴) در آورد. اینك p/q را به صورت کسر مسلسل

گسترش می‌دهیم ، و همگرائی ما قبل آخر طیف را با N/D نشان می‌دهیم . دراین‌صورت ، طبق قضیهٔ هویگنس $qN-pD$ یا با ۱ + برابراست یا با ۱ — . درحالت‌اول $X=N$ ، $Y=D$ جوابی از معادله (۶۵) است ، و در حالت دوم $X=-N$ ، $Y=D$ چنین جوابی خواهد بود .

از اینجا نتیجه می‌شود که جواب کلی معادلهٔ (۶۴) ، برحسب‌آنکه تعدادجمله‌های طیف p/q **فرد** یا **زوج** باشد ، یکی از دو صورت زیر است :

$$x=np+rN \text{ ، } y=nq+rD \qquad \text{یا :}$$
$$x=np-rN \text{ ، } y=nq-rD \qquad \text{یا :} \qquad (٦٦)$$

مثال: معادله $۳۹x-۱۰۶y=۵$ را درنظر می‌گیریم. همگرای ماقبل‌آخر $۱۰۶/۳۹$ عبارتست از $۱۹/۷$ و

$$\begin{vmatrix} ۱۰۶ & ۱۹ \\ ۳۹ & ۷ \end{vmatrix}$$

است . بنابراین جواب عمومی عبارتست از $x=۱۰۶\,n-۹۵$ ، $y=۳۹\,n-۳۵$. بازای $n=۱$ جواب خصوصی معادلهٔ (۴ ، ۱۱) است ؛ بنابراین می‌توان چنین نوشت :

$$x=۱۰۶\,m+۱۱ \text{ ، } y=۳۹\,m+۴$$

که در آن m می‌تواند هرمقدارصحیحی را از ∞ — تا ∞ + بپذیرد .

۸ مسأله‌ای دربارهٔ تقسیم دایره (Cyclotomy)

ساختن یک کثیرالاضلاع منتظم n ضلعی معادل است با تقسیم محیط یک دایره به n قسمت مساوی یاساختن زاویهٔ $\omega=2\pi/n$

این دسته از مسائل نام **تقسیم دایره** به خود گرفته‌اند. **این اصطلاح اغلب به‌مفهوم محدودتری به‌کار می‌رود که عبارتست از تعیین خصوصیت n بدان صورت که عمل ساختن چند ضلعی منحصراً بوسیلهٔ خط‌کش و پرگار عملی باشد.** باتوجه به اینکه تنصیف یك قوس از دایره کار خط‌کش و پرگار است، فقط **مقادیر فرد n** در اینجا مورد نظر ما خواهند بود.

یونانیان فقط سه تا از چنین اعداد، یعنی ۳ و ۵ و ۱۵ را می‌شناختند. ساختمان یك هفت ضلعی منتظم، یعنی تقسیم دایره به ۷ قسمت مساوی، یکی از مسائل مشهور قدیم بود. این مسأله تا قرن هجدهم یعنی زمانی‌که ثابت شد که حالت $n=7$ و $n=13$ منجر به معادلات **درجهٔ سوم غیر ممکن التحویل** می‌شوند، حل نگردید.

در ۱۸۰۱، هنگامی‌که مسأله فرمول بندی‌جدیدی پیدا کرد وکاملا بوسیلهٔ گاوس حل‌گردید، وضع از این قرار بود. قضیهٔ گاوس می‌گوید که اگر تقسیم محیط دایره به n قسمت مساوی بوسیلهٔ خط‌کش و پرگار ممکن باشد، در این صورت n **یا عدد اول فرمایی** است، **یا حاصل ضرب نامجذور چنین اعداد** است. با توجه به‌اینکه عدد اول فرما به‌صورت $2^{2^k}+1$ است، بنابر قضیه گاوس برای تقسیم دایره ۸ عدد صحیح فرد قبل از عدد ۳۰۰ وجود دارد که عبارتند از:

$$3 ، 5 ، 15 ، 17 ، 51 ، 85 ، 255 ، 257 \qquad (67)$$

قسمت اول قضیهٔ‌گاوس مستلزم بررسی معادلهٔ $z^n-1=0$ است، واز حدود بحث این کتاب خارج است قسمت دوم هم‌از

این بیان است که اگر تقسیم دایره‌ای به p قسمت و نیز به q قسمت ممکن باشد، **در این صورت تقسیم آن به pq قسمت هم ممکن خواهد بود**، به‌شرط آنکه p و q نسبت به‌هم اول باشند. فرض کنید چنین داشته باشیم:

$$۲\pi/p=\alpha ، ۲\pi q=\beta ، ۲\pi/pq=\gamma \qquad (۶۸)$$

باشد. قبول می‌کنیم که با وسائل موجود ساختمان قوسهای α و β ممکن باشد؛ x و y هرمقدار صحیحی باشند، باهمان وسائل می‌توانیم قوسهای $x\alpha$ و $y\beta$ را بسازیم، و در نتیجه قوس $x\alpha-y\beta$ قابل ساختمان است. تا این حد اعمال مزبور را می‌توان تنها با پرگار انجام‌داد. مسأله پیداکردن دو عدد صحیح x و y است که در رابطهٔ:

$$y = x\alpha-y\beta$$

صدق کنند. بنابر (۶۸) رابطهٔ اخیر هم ارز **معادله نامعین** ذیل است:

$$xq - yp = ۱$$

وچنانکه در قسمت قبل ملاحظه شد، **تا وقتی p و q نسبت به‌هم اول باشند**، این معادله دارای جوابهائی است.

به‌عنوان‌مثال $p=۵۱$ و $q = ۴۰$ را درنظرمی گیریم. با الگوریتم اقلیدس معلوم می‌شود $(۱؛۳و۱و۱و۳) = ۵۱/۴۰$ که همگرای ماقبل آخر آن $۱۴/۱۱$ است. بنابراین:

$$۱۱\left(\frac{۲\pi}{۴۰}\right)-۱۴\left(\frac{۲\pi}{۵۱}\right)=\frac{۲\pi}{۴۰\times ۵۱}$$

۹ طیف نامحدود در تعریف یا اجرای الگوریتم اقلیدس

چیزی نمی‌توان یافت که آنرا با اعداد گویا محدود کند، جز آنکه وقتی برای مقادیر گنگ به‌کار برده می‌شود این فرآیند همیشه پایان‌ناپذیر است. آلگوریتم و الیس نیز منحصر به طیف محدود نیست. درواقع، طبق قضیهٔ هویگنس، **آلگوریتم برای هر طیف نامحدود همگرائی پیدا می‌کند** یا دقیق‌تر بگوئیم، **همگراهای هر کسر مسلسل نامحدود، به عنوان حد، به سمت یك عدد منحصر به‌فرد گنك میل می‌کنند.** این سؤال که آیا کاربرد آلگوریتم اقلیدس برای این عدد گنگ همیشه طیف اصلی را از نو بوجود خواهدآورد، نکات باریکی‌را مطرح می‌سازد که دراینجا مجال گفتنش نیست. بااینحال جواب این سؤال مثبت است.

بنا بر این، وقتی دو آلگوریتم با یکدیگر به کار برده شوند، نیرومندترین وسیله را برای‌استخراج **اعداد تقریبی گویا برای مقادیر گنگ** به‌وجود می‌آورند. شکل عملی این مسأله متضمن گسترش جمله به‌جملهٔ‌عدد به صورت یك کسر پیوسته منظم است، و این خود کار بسیار پردردسری است. اما عرضه کردن یك قالب‌ریاضی‌بایك قانون‌توالی به‌صورت طیف نامحدود مطلب دیگریست. درواقع، جز عبارات درجهٔ دوم، طیف مقادیر گنگ خواه جبری خواه فرازنده معمولا بی‌شکل و بی‌قاعده‌اند، یعنی مانندگسترش اعشاری π **اتفاقی‌اند.**

برعکس‌طیف اعداد گنگ‌از نوع $A+\sqrt{B}$ اتفاقی نیستند. و این امر بخصوص در مورد ریشه‌های دوم اعداد صحیح صادق است. **تناوب ها،** اشکال **دوره ها،** خواص همگراها

ازلحاظ نظریهٔ عدد ارتباط نزدیك بین این همگراها و سایـر مسائل کلاسیك دیوفانتوس سرچشمهٔ شیفتگی بسیاری از ریاضی‌دانان قرون هفدهم وهجدهم، ازاویلر تاسیلوستر بوده وتاکنون نیز اهمیت خود را از دست نداده است. محدودیت صفحات مانع از آنست که با شکلی قابل ادراك این مسائل مورد بحث قرار گیرد. نمونه‌های زیر باین امید انتخاب شده اند که شاید خواننده را برای بررسی عمیق‌تر موضوع تحریك وتشویق کنند.

۱۰ گنگ‌ها ودوره‌ها ما با بررسی عمل آلگوریتم اقلیدس دربارهٔ عدد گنگ نمونه، مثلا $\sqrt{۲۳}$، کار را شروع می‌کنیم. می‌توان نوشت $N = ۲۳ = ۴^۲ + ۷$ و بنابرآن اولین جملهٔ طیف $\sqrt{۲۳}$ عبارتست از ۴؛ **اولین پس مانده** $\sqrt{۲۳}-۴$ است؛ عکس آن، $(\sqrt{۲۳}+۴)/۷$، دومین **خارج قسمت کامل** است؛ و بزرگترین عدد صحیح موجود در این خارج قسمت دومین جملهٔ طیف است. چون کار را به‌همین شکل ادامه دهیم، در آخر کار به‌پس مانده‌ای برابر اولین پس‌مانده می‌رسیم، وازاین جا به‌بعد جمل طیف تکرار می‌شوند. باین ترتیب:

$\sqrt{۲۳} =$ (۴؛۱ و ۳ و ۱ و ۸ و ۱ و ۳ و ۱ و ۸ و ۱ و ۳ و ۱ و ۸ ...) به دست می‌آید که برای سهولت می‌توان آنرا به شکل خلاصه (۴؛ ۱ و۳ و۱ و۸) نوشت.

دسته ۱،۳،۱،۸ **دورهٔ** طیف نامیده می‌شود. تعداد جمل دوره را **تناوب** می‌خوانند. جزئیات آلگوریتم درجدول I نشان داده شده است. جدول II فهرستی از دوره‌های اعداد گنگ از $\sqrt{۲}$ تا $\sqrt{۲۴}$ است.

جدول I . بسط نمونه

خارج قسمت کامل

$$\sqrt{23} \quad \frac{\sqrt{23}+4}{7} \quad \frac{\sqrt{23}+3}{2} \quad \frac{\sqrt{23}+3}{7} \quad \sqrt{23}+4 \quad \frac{\sqrt{23}+4}{7}$$

جملهٔ طیف

$$4 \qquad 1 \qquad 3 \qquad 1 \qquad 8 \qquad 1$$

پس‌مانده

$$\sqrt{23}-4 \quad \frac{\sqrt{23}-3}{7} \quad \frac{\sqrt{23}-3}{2} \quad \frac{\sqrt{23}-4}{7} \quad \sqrt{23}-4 \quad \frac{\sqrt{234}-3}{7}$$

و برای حالت کلی گوئیم که اگر N عدد صحیحی باشد که مجذور کامل نیست ، در ایـن صورت می‌توان نوشت $N=b^2+h$ ، که در آن h می‌تواند مقادیر از ۱ تا $2b$ را بپذیرد. فرض کنیم $C=\left[\frac{2b}{h}\right]$ باشد. با این علامتگذاری خواص عمومی گسترش عبارتند از:

۱) طیف $\sqrt{b^2+h}$ با b و c شروع می‌شود؛

۲) c **اولین جمله دوره** و نیز **جملهٔ ماقبل آخر** آنست؛ **آخرین جملهٔ** دوره $2b$ است؛

۳) جمل دوره که قبل از cb قرار دارند یك **قطعه متقارن** می‌سازند. اگر تناوب p زوج باشد (مانند حالت $\sqrt{14}$ یـا $\sqrt{23}$)، در این صورت **تقارن فرد** است و **یك جمله مرکزی** وجود دارد. اگر تناوب **فرد** باشد (مانند حالت $\sqrt{13}$)، دراین صورت **تقارن زوج** است و **دوجملهٔ**

مرکزی خواهیم داشت.

بنابراین شرط اینکه طیف‌متناوبی نمایش ریشهٔ دوم عدد صحیحی باشد آنست که به شکل زیر درآید.

$$\Gamma = (b \text{ ؛ } \overline{c \text{ ، } d \text{ ، } \ldots d \text{ ، } c \text{ ، } ۲\, b})$$

با این حال اکنون خواهیم دید که گرچه این تقارن لازم است اما کافی نیست.

جدول III دورهٔ اعداد گنگ

$\sqrt{۲}$	۱		۲
$\sqrt{۳}$	۱		۲
$\sqrt{۵}$	۲		۴
$\sqrt{۶}$	۲	۲	۴
$\sqrt{۷}$	۲	۱ ۱ ۱	۴
$\sqrt{۸}$	۲	۲	۴
$\sqrt{۱۰}$	۳		۶
$\sqrt{۱۱}$	۲	۳	۶
$\sqrt{۱۲}$	۳	۲	۶
$\sqrt{۱۳}$	۳	۱۱۱۱	۶
$\sqrt{۱۴}$	۳	۱۲۱	۶
$\sqrt{۱۵}$	۳	۱	۶

$\sqrt{۱۷}$	۴		۸
$\sqrt{۱۸}$	۴	۴	۸
$\sqrt{۱۹}$	۴	۲ ۱ ۳ ۱ ۲	۸
$\sqrt{۲۰}$	۴	۲	۸
$\sqrt{۲۱}$	۴	۱ ۱ ۲ ۱ ۱	۸
$\sqrt{۲۲}$	۴	۱ ۲ ۴ ۲ ۱	۸
$\sqrt{۲۳}$	۴	۱۳۱	۸
$\sqrt{۲۴}$	۴	۱	۸

با کسر های مسلسل با **دورهٔ ۲** توجه خاصی مبذول می‌گردد. اگر بنا باشد چنین کسری ریشهٔ دوم عدد صحیحی را نمایش‌دهد، در این صورت باید به‌شکل زیر باشد:

$$x=(b;\overline{c\text{ و }۲b})\text{ یعنی، }x-b=\cfrac{۱}{c+\cfrac{۱}{x+b}}$$

رابطهٔ آخر به‌معادلهٔ دوم زیر منجر می‌گردد:

$$x^{۲}=b^{۲}+۲b/c$$

بنابراین برای آنکه $(b;\overline{c\text{ و }۲b})$ نمایش‌ریشهٔ دوم‌عددی صحیح باشد، **c باید b را عاد کند.** واین محققاً وقتی‌صورت خواهد گرفت که $c=۱$ یا ۲، یا b یا ۲b؛ واز اینجا روابط‌ذیل حاصل‌می‌شود:

$$\sqrt{b^2+2b} = (b;\overline{1,2b}) \qquad \sqrt{b^2+b} = (b;\overline{2,2b})$$

$$\sqrt{b^2+2} = (b;\overline{b,2b}) \qquad \sqrt{b^2+1} = (b;\overline{2,2b})$$

درمورد حالت آخر، تناوب یك می‌شود. اگر b عدد اول باشد، این چهار حالت تنها طیف‌های با تناوب ۱ یا ۲ اند. هنگامی که b عدد غیراول، مثلاً ۳۰ باشد، قضیه شکل دیگری دارد. در اینجا $2b = 60$ و c می‌تواند میان ۱، ۲، ۳، ۳، ۵، ۶، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۳۰، ۶۰ باشد. نتیجه می‌شود که میان $\sqrt{901}$ و $\sqrt{961}$ دوازده عدد گنگ وجود دارد که برای آنها تناوب کمتر از ۳ است.

پوآنکاره

«ریاضی دانان نه با اشیاء بلکه با روابط بین‌آنها سروکار دارند؛ بدین ترتیب آنها آزادند که، تا وقتی روابط بین اشیاء تغییر نکرده است، بعضی را جایگزین برخی دیگر سازند. برای آنها محتوی دارای اهمیت نیست وفرم مورد توجهشان است.»

د | دربارهٔ اصول و براهین

۱ سخنی دربارهٔ اصل توزیع دیریخله: قفسه‌ای با پنج خانه را در نظر بگیرید که بیش از پنج پیراهن در آن جای دارد: ناچار یکی از خانه‌ها بیش از یك پیراهن خواهد داشت. اگر خانواده‌ای بیش از هفت عضو داشته باشد، لااقل دوتا از افراد این خانواده دریك روز هفته‌تولد یافته‌اند. هر- گاه تعداد درختان جنگلی بیش از تعداد برگ‌های هر یك از درختان موجود در آن جنگل باشد، لااقل تعداد برگهای دوتا

از این درختان با یکدیگر برابر است. اینها نمونه هائی است از آنچه به نام **اصل جعبهٔ دیریخله** مشهور شده است به بیان کلی این اصل چنین مقرر می‌دارد که **هرگاه p شیء در q جایگاه وجود داشته باشند و p بزرگتر از q باشد، در این صورت لااقل محتوی یکی از این جایگاهها بیش از یك خواهد بود.**

من برهان دیگری دربارهٔ این قضیه نمی‌آورم تا خواننده مرا به این متهم نسازد که «توضیح واضحات» می‌دهم. لااقل واکنش یکی از دوستان غیرریاضی‌دان من که برای باراول این استدلال را شنید چنین بود. وی گفت: «این موضوع برای کند ذهن‌ترین افراد روشن است که اگر تعداد میهمانان بیش از تعداد قرصهای نان باشد، در این صورت بعضی از قرصهای نان باید تقسیم شوند یا بعضی از مهمانها از قرص نان محروم بمانند. بدین‌ترتیب چگونه می‌توان این امر واضح را یك اصل پنداشت و آنرا به ریاضی‌دانی ازقرن‌نوزدهم استناد داد؟ چگونه فکری چنین ابتدائی وساده را می‌توان کشفی جدید نامید. در حالی که این فکر به صورت ضمنی در هر استدلال ریاضی از زمان آغاز آن تاکنون موجود بوده است؟»

این ایرادها وارد است. اما آنها را می‌توان با همین شدت دربارهٔ سایر وسایل کاری که به صورت ضمنی وغیرصریح از سالها قبل مورد کاربرد ریاضی‌دانان وعوام بوده‌اندنیز گفت. نمونه‌هایی از چنین **افکار نهانی** عبارتست از: اصل **قیاس کامل** پاسکال، روش **نزول لایتناهی** فرما **تقطیع** ددکیند. اما چرا در اینجا توقف کنیم؟ **استنتاج قیاسی** قرنها پیش

ازآنکه تالس آن را پایه و اساس ضروری استدلال ریاضی قرار دهد، در بحث و تحقیق خداشناسی وسیله کار بود؛ درعین حال **اصل شمار وضعی** سیمای زنده محاورهٔ بشری را از زمانیکه کاربرد کلمات برای شمارش اعدادی که از انگشتان دست تجاوز می‌نماید ضرورت می‌یابد نشان می‌دهد.

با این حال، استعمال وسیله‌ای فکری برای امور جاری روزانهٔ زندگی چیزیست، وبیان فکر به شکل عباراتی صریح و به کار بستن هشیارانهٔ آن برای کشف قلمرو جدید فکری چیزی دیگر است. به خاطر دارید که نو کیسهٔ نمایشنامهٔ مولیر که برای اولین بار متوجه شد که در تمام مدت عمر در محاورات خود **نثر** به کار می‌برده است، چه اندازه متعجب شد. همهٔ ما نثر به کار می‌بریم و اغلب در این کار سوء استعمال می‌کنیم؛ با این حال نثر به عنوان نیرومندترین وسیله برای بیان فکر و انتقال آن به اعقاب ما باقی می‌ماند.

در این کتاب اصل توزیع در مواردی متعدد به صورت ضمنی و غیر صریح بیان شده، که از آن جمله است: تعیین دورهٔ گردش در گسترش اعشاری کسر گویا؛ برهان گاوس دربارهٔ قضیهٔ ویلسن؛ گسترش کسر گنگ درجهٔ دوم به صورت کسر منظم پیوسته. من در اینجا مورد اول را مجدداً بررسی می‌کنم، زیرا این مورد نمونهٔ مشخص طریقی است که اصل به عنوان ابزار برهان عمل می‌کند.

کسر نامحدود اعشاری $1/q$ را در نظر بگیرید که در آن q عددیست که به ۲ یا ۵ قابل قسمت نیست. گسترش این کسر **دوره‌ای** است و دورهٔ گردش آن p است؛ به‌عبارت دیگر،

تعداد ارقام در یك دورهٔ گردش تابعی است از q که ماهیت واقعی آن هنوز مکشوف نگردیده است. با این حال می‌دانیم که p نمی‌تواند از ۱ — q تجاوز کند. در واقع p برابر است با طول سیکل باقیماندهٔ تقسیم، که تعداد عناصر آن می‌تواند از ۱ تا ۱ — q باشد. اگر دورهٔ p از ۱ — q تجاوز کند، در این صورت طبق اصل دیریخله باقیمانده برای بار دوم در یك سیکل تکرار می‌شود که این خود با این واقعیت که دو باقیمانده از یك سیکل نمی‌توانند مساوی باشند متناقض است.

۲ اصطلاحات «ممکن» و «غیر ممکن» در هندسه

مشکلات موجود در مسائلی مانند تضعیف مکعب، تثلیث زاویه، و تربیع دایره و مسائل دیگری که از پیشینیان برای ما به میراث گذارده شده است، مربوط به ذات خود مسائل نیستند. این اشکالات فقط نیرومندی آن **نهی کلاسیکی** را منعکس می‌کنند که استفادهٔ از جز خط کش و پرگار را بر ما ممنوع کرده است.

اصطلاحات «ممکن» یا «غیر ممکن» آنطور که دربارهٔ ساختمان هندسی به کار برده شده‌اند، دارای معانی مطلق نیستند: در هر یك از این موارد باید ابزاری را که به وسیلهٔ آنها ساختمان مورد نظر اجرا می‌شود ذکر نمائیم. در واقع، هرگاه تمام محدودیت‌ها را بر می‌داشتند، اگر همهٔ وسائل شایسته برای فرمول بندی هندسی ارزشی مساوی با ابزارهای مرسوم و متداول کسب می‌کردند، هرگاه هر مکان هندسی ــ خواه به وسیلهٔ مکانیکی و خواه به وسیلهٔ روش نموداری به وجود آمده باشد ــ هم ارز با خط و دایره پذیرفته می‌شد، کلمات «ممکن»

یا «غیر ممکن» معنی خودرا ازدست می‌داد، زیرا واضح است که وسعت میدان مسائل **ممکن** با وسعت میدان **همهٔ** مسائل یکسان می‌شد.

در روش قدیمی ساختمان‌های هندسی، ابزارها بافروتنی در عقب صحنه قرار می‌گرفتند؛ با نگرش جدید آنها را به صورت برجسته به میان صحنه کشیدند. هر ابزاری به مثابه «توان» یك گروه کامل از مسائلی که باید گفت قلمرو مربوط به خود را ساختهاند مورد نظر قرار گرفته است. بدین ترتیب ما قلمرو **خطی** را به دست آوردیم که از مسائلی که با خط کش حل می‌شوند تشکیل یافته است؛ قلمرو دیگر قلمرو **مستدیر** یا قلمرو پرگار است؛ و به همین ترتیب قلمرو **کلاسیك** یا قلمرو روایتی که قلمروهای خطی ومستدیر هر دو را شامل می‌شود. در ورای قلمرو روایتی زمینه وسیعی ازمسائل قراردارد که برای آنها ابزارهای رسمی کافی نیستند.

۳ **دربارهٔ فرایند قطری** می‌خواهیم ثابت کنیم که **مجموعه‌اعداد حقیقی قابل‌شمارش نیست**. بدین‌منظور فرض کنیم که‌هریك‌ازاعداد حقیقی موجود درفاصله $0<x<1$ به صورت‌کسری اعشاری بیان شده باشد. توسل به چنین روشی منجر با بهامی می‌گردد که در آن ۵ر.و ...۴۹۹۹ر. معرف عدد گویای واحدی خواهند بود. برای اجتناب از این مشکل موافقت می‌کنیم که هر کسر اعشاری مختومه‌ای را با کسر هم ارز غیر مختومه‌آن، همانطورکه درنمونهٔبالا دیدیم، جایگزین کنیم.

بعداً فرض کنیم که کسی بتواند مجموعهٔ اعداد حقیقی را بشمارد: در این صورت می‌توان این اعداد را در یك

توالی به شکل زیر منظم کرد:

$$x_1 = 0/a_1\ a_2\ a_3 \ldots$$
$$x_2 = 0/b_1\ b_2\ b_3 \ldots$$
$$x_3 = 0/c_1\ c_2\ c_3 \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

می‌خواهیم نشان دهیم که بدون در نظر گرفتن چگونگی به وجود آمدن نظم فوق، همیشه یک عدد حقیقی مانند x' وجود دارد که در آن وارد نمی‌شود. x' با فرایندی که نام فرایند قطری به خود گرفته است به دست می‌آید.

$$x' = 0/a_1'\ b_2'\ c_3' \ldots$$

که در آن a_1' رقمی است که نه صفر است و نه a_1؛ به همین ترتیب b_2' نه صفر است و نه b_2، وقس علی هذا.

بدین ترتیب ما به وسیلهٔ یک کسر اعشاری عددی مانند x' را بیان کردیم که دارای بینهایت رقم با معنی است، و معذلک این عدد حقیقی با هریک از اعداد توالی فوق تفاوت دارد، زیرا دو کسر اعشاری دارای بینهایت رقم با معنی، تنها زمانی با یکدیگر مساوی‌اند که رقم به رقم متماثل باشند. اما x' با x_1 در رقم اول و با x_2 در رقم دوم و به طور کلی با x_n در رقم nام اختلاف دارد. بدین ترتیب ما وجود عدد حقیقی x' را که در توالی فوق وجود ندارد ثابت کردیم، که با فرض اینکه مجموعهٔ اعداد حقیقی قابل شمارش است تناقض دارد.

۴ دربارهٔ هندسهٔ محدود

هندسهٔ تجربی در ماهیت خود

هندسه‌ایست **مقید و محدود**، و تنظیم قوانینی کلی برای چنین هندسه‌ای کار بسیار مشکلی است. مثلا میز خودرا یك میدان تفکر هندسی منحصر به فرد درنظر بگیرید. شما ناچارید بین انواع مختلف خطوط مستقیم وجه تمیزی قائل شوید: در اینجا خطوطی موجودند که از گوشهٔ میز شما شروع می‌شوند؛ دسته‌ای دیگر وجود دارندکه دو قطر را قطع می‌کنند؛ پاره‌ای دیگر با لبه‌های میز زاویهٔ قائمه می‌سازند و غیره. چهار نقطهٔ دلخواه را در نظر بگیرید و از خود بپرسید که آیا خطی که دو نقطه ازاین‌چهار رابه‌یکدیگر وصل می‌کندخطی‌راکه دو نقطهٔ دیگر را به‌هم می‌پیوندد قطع خواهدکرد یانه: ناچار باید ابتدا معین کنیدکه این یاآن خط به کدام یك ازانواع گفته شده در بالاتعلق دارند. به‌علاوه‌اگرشماکوشش‌کنید تا تمام حالات ممکن را با این نقطه نظر که معیاری برای تقاطع دو خط معین‌کنید، بررسی نمائید، به تهیهٔ قانونی کشیده خواهید شد کـه قوانین افعال بیقاعدهٔ انگلیسی درمقایسه با آن بازیچه‌ای بیش نخواهند بود.

در یك **هندسهٔ محدود**، مسائلی از قبیل ساختن یك دایره با شعاع و مرکز معین، یا محیط کردن دایره‌ای بریك مثلث یا فرود آوردن عمودی از نقطهٔ معین بر یك خط، عموماً راه حلی نخواهند داشت؛ به طور کلی دوخط‌با یکدیگرزاویه‌ای نمی‌سازند و سه خط با هم مثلثی تشکیل نمی‌دهند. اگر نسبت تشابه شما از حد معینی تجاوز کند مثلثی متشابه با مثلث دیگر نمی‌توانید بسازید. اقصر فاصلهٔ یك نقطه از یك خط همیشه خط عمود بر آن نیست، وقس‌علی‌هذا.

حتی اگر موفق شدید براین هندسهٔ هیجان انگیز مسلط شوید، مشکلات شما تازه می‌شود. زیرا هرگاه حدود میدان هندسی شما ازصورت مستطیل مپز بصورت دیگری، مثلا مثلث یا بیضی درآید، کاررا بایدازابتدا شروع کنید. درواقع این خصلت هندسه محدود است که قوانین آن اساساً وابسته بماهیت حدودی هستند که عمل شما باآن‌ها شروع‌شده است. دراینجا باردیگر می‌توانیم شباهتی بازبان بیابیم: قواعد هندسهٔ محدود مانندستورزبان معینی است: درداخل هرمرزی به دستهٔ معینی از قوانین احتیاج داریم. و با آنکه پاره‌ای ازاین قوانین ممکن‌است برای‌انواع‌مرزها مشترک باشند، همانطور که مثلا افعال بی قاعدهٔ انگلیسی وفرانسه اختلاف دارند، وجوه تمایز مشهوری برای مرزهای متفاوت میتواند وجود داشته باشد. و اگر این‌امردر بارهٔ هندسهٔ تجربی‌مسطحه صحیح باشد، در شکل بندیهای فضائی با چه اشکالاتی مواجه خواهیم بود!

بنا بر این به قدر کافی روشن است که اگر ما خود را به حدود محدود محصور کرده بودیم، برروش استقرائی فایدهٔ زیادی مترتب نبود: هندسه به صورت‌علمی توصیفی‌باقی می‌ماند، وبیش ازحیوان شناسی، نبات‌شناسی وکان شناسی‌تعمیم نمی‌یافت.

۵ دربارهٔ اصل انتقال پذیری اگررابطه‌ای به‌شکلی باشد که وقتی برای اعداد بین A وB و بین B وC صادق بود بین A وC نیز صادق باشد، در این صورت گوئیم این رابطه **انتقال پذیر** است. برای روشن شدن قضیه گوئیم: ارتباط خونی ارتباط **انتقال پذیر** است، و ارتباط نسلی و پدر ـ

فرزندی **انتقال ناپذیر** است. نمونه‌های انتقال‌پذیری در ریاضیات عبارتست از: **تساوی، همنهشتی، توازی،** و نمونه‌های انتقال ناپذیری در ریاضیات عبارتست از: ارتباط **پوششی،** و ترتیب **داخلی و خارجی.** مثلاً، شکل A ممکن است قابل محاط شدن در شکل B و B قابل محاط شدن در C باشد، بدون آنکه A قابل محاط شدن در C گردد.

اصل **انتقال‌پذیری** را می‌توان به این شکل بیان داشت که **هرگاه دو شیء به طریقی هم‌ارز با شیء سوم باشند با یکدیگر نیز هم ارزند.** این اصل موارد استعمال مهمی در بسیاری از مسائل دارد. مثلا در هندسه دو قطعه را وقتی **همنهشت** می‌نامیم که بتوان یکی از آنها را طوری قرار داد که بر دیگری منطبق گردد: اگر این معیار را جدی تلقی کنیم، می‌توانیم قسمتی از صفحه‌ای را که شامل یکی از دو قطعه است ببریم و بر روی قطعهٔ دیگر موجود در صفحه بگذاریم. البته در عمل با چنین وضعی سر و کار نداریم. در عمل از پرگار، خط‌کش مدرج و یا پرگار اندازه‌گیر استفاده می‌کنیم و در هر یک از حالات به خاطر داریم که **دو قطعهٔ همنهشت با قطعهٔ سوم خود نیز همنهشت‌اند.** در ریاضیات محض، هر جا معادله‌ای را از یک شکل به شکل دیگر در می‌آوریم، اصل انتقال پذیری را مبنای کار قرار داده‌ایم. خلاصه، **سیمای اصلی و برجستهٔ تساوی ریاضی خاصیت انتقال‌پذیری آنست.** اما دربارهٔ **تساوی فیزیکی** مطلب از چه قرار است؟

برای آنکه تا حد امکان قضیه را به صورت مجسم بیان کنیم، از خواننده می‌خواهیم چنان فرض کند که تعدادی میلهٔ

فولادی در اختیار دارد که جز از لحاظ طول از سایر لحاظها مشابه یکدیگرند. فرض کنیم همه اینها درآزمایشگاه اندازه‌ـ گیری شده و معلوم گردیده است که طول آنها از ۳۰ تا ۵۰ میلیمتر تغییر می‌کند؛ سه‌تای ازآنها را کـه علامت A و B و C دارند و به ترتیب طولهایشان برابر ۳۰ ، ۳۱ و ۳۲ میلیمتر است در نظر می‌گیریم. ولی شما از این طولها اطلاعی ندارید و نمی‌خواهید اطلاعی داشته‌باشید، چه ممکن است‌که این اطلاع بر قضاوت شما اثر بگذارد. منظور شما آنست که‌با حواس‌خود، بدون آنکه با دستگاه اندازه گیری مجهز باشید، این طولها را اندازه بگیرید.

شما با قراردادن میله A درکنار B کارخود را شروع می‌کنید: می‌بینیدکه نه چشم اختلاف طولی بین این دو را تمیز می‌دهند ونه انگشتان و لامسه؛ بدین ترتیب اعلام می‌کنید که این دو **متماثل** اند. همین مقایسه را دربارهٔ B و C تکرار می‌کنید؛ به این نتیجه می‌رسید که این میله‌ها نیز ازنظر طول برابرند. پس از آن A را در کنار C می‌گذارید، اما این بار هم چشم و هم نوک انگشتان‌شما تمیز می‌دهندکه C بزرگتراست از A. به این نتیجهٔ تکان دهنده می‌رسید که **ممکن است دو چیز، بدون آنکه باهم برابر باشند، باشیء سوم برابر باشند.**

اما این نتیجه با یکی از مهمترین بدیهیات ریاضی، که بنابرآن دو چیز مساوی با یك چیز الزاماً برابرند، متناقض است. این حکم درپایهٔ اغلب اعمال حسابی قرار گرفته است؛ بدون‌آن ما نه می‌توانیم اتحادها را تغییر شکل دهیم و نه ممکن است معادلات را حل کنیم. من دراین باره که هرگاه ریاضیاتی

این حکم را نفی کند نمی‌تواند به وجود آید سخنی نمی‌گویم. واقعیت مهم آنست که فیزیکدان چنین آموزش **نوظهوری** را به کار نخواهد بست، بلکه **به ریاضیات کلاسیک** که حکم مزبور سنگ بنای آنست توسل خواهد جست.

چه حقی او را بدینکار وامی‌دارد؟ آیا استفاده از ابزار اندازه‌گیری علمی به‌جای مشهودات مستقیم این تضاد را از بین برده است؟ نه. **خواندن یك خط‌کش مدرج** کار نهائی هر دستگاه اندازه گیری است؛ در نتیجه هر قدر طراح یك دستگاه نابغه باشد، درآخرین تحلیل باید به حواس ناظر معینی و قبل از همه به حواس خود متکی باشد.

از طرف دیگر، وقتی ما با دقت بیشتری عمل خواندن یك خط‌کش را بررسی کنیم، به‌این‌نتیجه‌می‌رسیم که شکل **اساسی** آن با حالت فرضی میله‌هائی که فوقاً بدانها اشاره شد تفاوتی ندارد. البته **فاصله بحرانی** که درمثال فوق یك میلیمتر بود، در اینجا می‌تواند به یك میکرون مبدل شود؛ به وسیله بزرگ کردن فواصل وافزودن حساسیت دستگاه اندازه‌گیری به‌شیوه‌های مختلف ممکن است حتی این‌فاصله را به کسری ازمیکرون تقلیل داد. با این حال به اندازهٔ کافی واضح است که تا هر حدی‌این تکمیل واصلاح پیش رود، مشکل‌مارا‌حل نخواهدکرد و حتی آن را تقلیل نخواهد داد؛ زیرا درآخرکار مطلبی باقی می‌ماند که دربارهٔ آن بایدچنین گفت: «من اندازهٔ A راهمانند و برابر B یافتم؛ همچنین اندازهٔ C با B همانند است؛ با اینحال به‌خوبی تشخیص می‌دهم که C از A بزرگتر است.»

۶ اندازه گرفتن و اندازه پذیر دلایل فراوانی در

دست است که پیشینیان از مثلث‌های گویا ، که به وسیله اعدادی سه گانه نظیر (۳،۴،۵)(۵،۱۲،۱۳)، و(۷،۲۴،۲۵) مشخص می‌شود آگاه بودند ؛ بی‌شك جستجو برای یافتن سه‌گانه‌های بیشتر بود که ریاضی‌دانان یونان‌قدیم را به‌قضیهٔ فیثاغورث کشاند.

این قضیه تأیید ظفرمندانهٔ فلسفهٔ عددی آنها بود. با این حال عمر این فیروزی کوتاه بود: زیرا خود تعمیم قضیه از وجود **مقادیر گنگ** پرده برداشت. یکی از نتایج این اکتشاف‌مایهٔ پریشانی تجدید نظر درموضوعهای هندسی بود. برای فیثاغورسیان اولیه **هرمثلث، مثلثی گویابود**، زیرا آنها باورداشتند که تمام‌اشیاءِ اندازه گرفتنی اندازه‌پذیرند. این امر به نظر آنها مانند هر بدیهی دیگر مسلم و غیر قابل تردید می‌رسید؛ و وقتی اعلام می‌داشتند که **عدد حاکم بر کائنات است**، مقصودشان **اعداد صحیح** بوده است، زیرا خود تصور اینکه‌ممکن است مقادیری موجود باشند که مستقیماً به صورت اعداد صحیح درنیایند نسبت به نقطه نظر و تجربیات آنها هر دو بیگانه بود.

پاره‌ای از مفسرین جدیدافکار ریاضی‌بدان میل کرده‌اند که افکار فیثاغورسیان اولیه را به عنوان مفاهیم ساده‌لوحانهٔ اعصار گذشته به کناری گذارند. با اینحال در نظر کسی که در کار روزانهٔ خود با ابزار ریاضی سروکار دارد و برای او ریاضیات چیزی جز وسیله‌برای هدفی معین نیست، این مفاهیم نه مهجور است ونه ساده لوحانه. زیرا از نظر مفهوم عملی، این‌اعداد یاازشمارش ویا از اندازه‌گیری‌نتیجه شده‌اند، و بنابر این یا اعداد **صحیح‌اندیا کسرهای گویا** مسلماً او ممکن است با سهولتی نسبی‌کار بردعلائم و عباراتی‌راکه بروجود هیچ

یك از موجودات گویا دلالت ندارند آموخته باشد، اما درنظر او این عبارت پردازی جز لفاظی مفید چیز دیگری نیست. بالاخره، عدد گویا به‌عنوان تنها مقداری که می‌تواند مورد استفاده عملی قرار گیرد خودنمائی می‌کند.

اگر این شخص در زیرفشار این سرزنش که آدم ساده لوحی است، بخواهد به عمق الفاظ و اصطلاحات دست یابد، بزودی در می‌یابد که مراحلی که به وسیلهٔ آنها باید برای این موجودات غیر گویا استیفای حقوق گردد تماماً غیر قابل حصول‌اند. اگر بخواهد با سماجت بکوشد تا با اصطلاحات گویای خود تعبیری برای این موجودات به دست آورد به او گوشزد می‌شود که در مسائل گنگ گاهی می‌توان از بینهایت طفره رفت، اما هرگز نمی‌شود از آن اجتناب نمود. زیرا این خاصیت که هر قدر عدد معین گویائی به عدد گنگ شباهت داشته باشد باز اعداد دیگری وجود دارند که بیشتر نزدیك به آن بوده و شبیه‌تر به آنند، جزو لاینفك طبیعت این موجود اسرار آمیز است.

این شخص درمیان فیثاغورسیان اولیه بیشتر احساس آشنایی می‌کند تا در میان جانشینان سختگیر آنها. او داوطلبانه اعتقاد آنها را مبنی بر آنکه هر چیز قابل اندازه گیری قابل عادشدن نیز هست خواهد پذیرفت. در واقع او از اینکه چرا اصلی بدین زیبایی و سادگی بیجهت کنار گذارده شده است گیج و حیران می‌ماند. بالاخره، ریاضی دان مجبور می‌شود قبول کند که ترك این اصل نه به خاطر تضادش با تجربه بلکه برای آن بوده است که با بدیهیات هندسی از خود ناسازگاری

نشان داده است.

زیرا اگر بدیهیات هندسی معتبر باشند، دراین صورت قضیهٔ فیثاغورس هیچ استثنائی نمی پذیرد. واگر قضیه درست باشد، دراین صورت مربعی که بر روی قطر مربعی به ضلع ۱ بنا شده است دارای سطحی برابر ۲ خواهد بود. از طرف دیگر اگر حکم فیثاغورس صادق باشد، دراین صورت ۲ باید مجذورعددی گویا باشد که تضادآن با بدیهیات حساب روشن است.

۷ زمان و پیوستگی آگاهی و هوش شما وجود **حال** (اکنون) را می‌پذیرد؛ ذهن شما **حال‌های** دیگری رابه خاطر می‌آورد که هرچه به **گذشته** دورتر می‌روند غیر قابل تمیزتر می‌شوند تا در سپیده دم مه‌آلود خاطره محو می گردند. این رشته‌های زمانی مبهم که یکدیگررا می‌پوشانند شما را به فردی که نامش رامن گذارده‌اید مربوط می‌کنند. درطول چند سال، هرسلول ازبدن این فردتغییریافته است؛ افکار او، قضاوتهایش، هیجانات و آرزوهایش تحت تأثیر تغییرشکل‌های مشابهی قرار گرفته‌اند. پس این پایداری و بقایی را که با «من» مشخص کرده‌اید چیست؟ مسلماً تنها نام نیست که این فرد را از همگنانش متمایز می‌سازد. آیا می‌توان گفت که مقصود از «من» همان رشته زمانی است که اجزای آن مانند دانه‌های تسبیح به نخ خاطره کشیده‌شده‌اند؟

زمان همچون یك توالی منقطع و بدون اتصال از خاطرات که از دوران کودکی شروع می‌شود و ناگهان در زمان حاضر قطع می‌گردد، یکی ازمعلومات مستقیم خودآگاهی

بشری است. با این حال، وقتی این مادهٔ خام در بوته‌ای که نام مکاشفهٔ فیزیکی بر آن می‌نهیم مصفا گردد، به شکل کاملا تازه ودیگری خارج می‌شود. **زمانی که از راه مکاشفه ادراک می‌شود زمانی است امتداد یافته (extrapolated)** که بیش از حد تصور کشیده شده است، از سپیده دم آگاهی تا دورترین لحظات **گذشته** امتداد دارد، و در ورای حال تا **آیندهٔ** لایتناهی ادامه خواهد داشت، و این آیندهٔ خود مانند گذشته به مثابهٔ مجموعه‌ای از **زمانهای حال** تصور می‌شود. ما با یك عمل فکری زمان را به این دو طبقهٔ گذشته و آینده، که متقابلا یکدیگر را طرد می‌کنند و با یکدیگر **همهٔ** زمان وابدیت را می‌سازند تقسیم می‌کنیم. برای ذهن‌ما **حال** چیزی جز حد فاصلی که گذشته را از آینده جدا می‌سازد نیست؛ و باتوجه به‌اینکه‌هر لحظه از گذشته‌زمانی‌حال بوده‌است وهر لحظه از آینده زمانی حال خواهد شد، هر لحظه ازگذشته‌وآینده را به‌مثابهٔ چنین‌حد فاصلی ادراك‌می‌کنیم.

آیا همهٔ مطلب همین بود؟ نه. زمان مکاشفه‌ای زمانی است بینابینی (interpolated): بین هردولحظه درگذشته، هرچه این دولحظه را درفکر خود نزدیك بهم فرض‌کنیم، باز بایك‌عمل ذهنی لحظات‌دیگری که تعدادشان نا معین و نامحدود است می‌گذاریم. منظور ما از **پیوستگی** گذشته همین است، و همین پیوستگی را به‌آینده نیز تحمیل می‌کنیم. **برای ذهن‌ما زمان یك جریان است**؛ مسلماً آزمایش ما از این جریان جز عناصر نا پیوسته چیزی نمی‌داند، ولی مکاشفهٔ ماشکافهائی را که دراثر تجربه باقی مانده است پرمی‌کند؛ این مکاشفه‌زمان را به پیوسته‌ای (continuum) تبدیل می‌کند

که نمونه‌ای از همهٔ پیوستگی‌های طبیعت است.

آیا آن پیوستگی کاملی که به خط هندسی نسبت می‌دهیم، جز اعتقاد ما به اینکه چنین خطی را می‌توانیم با حرکت **بدون انقطاع** دست رسم کنیم چیست؟ خصلت جریانی دوام (duration) را به تمام پدیده‌های فیزیکی منتقل کنیم: اولین کوشش ما برای تحلیل هر پدیده ــ چه نور، چه صوت، چه حرارت و چه الکتریسیته ــ این است که آنرا برحسب فاصله یا جرم یا انرژی چنان بیان کنیم که **تابعی از زمان** باشد.

تصادم بین انقطاع و پیوستگی تنها مشاجرهٔ لفظی و مدرسه‌ای نیست: این تصادم انعکاس عدم توافق دائمی بین دریافت زمان به عنوان یك جریان پیوسته و خصلت انقطاعی تمام تجربیات ما است. زیرا در تحلیل آخر ادراك عددی ما بر پایهٔ شمارش است. یعنی برپایهٔ یکایك شمردن منقطع و ناپیوسته است، درحالی که مکاشفهٔ ما از زمان همهٔ پدیده‌ها را به مثابهٔ چیزی جاری رسم می‌کند. تبدیل یك پدیدهٔ فیزیکی به عدد بدون آنکه به خصلت جریانی آن آسیبی برسد وظیفهٔ مافوق تصور دشوار دانشمند فیزیك ریاضی است، و به مفهوم وسیع‌تر هندسه نیز باید به عنوان شاخه‌ای از فیزیك تلقی گردد.

۸ ریاضیات و واقعیت علم کلاسیك انسان را درزمینهٔ سایر اشیاء در وضعی استثنائی قرار می‌داد: او می‌توانست خود را از زنجیری که بدان وسیله به مکانیسم جهانی پای‌بند شده بود رها سازد و این مکانیسم را به شکل واقعی خودمورد ستایش قرار دهد. البته آگاهی او نیز به مثابهٔ حلقه‌ای از این زنجیر

بی انتهای علت و معلول مورد نظر قرار می‌گرفت، ولی این اعتقاد نیز وجود داشت که تحول این آگاهی درجهت **آزادی** بیشتر است. بدن او در زنجیر بود، اما فکر او برای مشاهدهٔ این زنجیرها، برای طبقه بندی آنها وارزیابیشان آزادی‌داشت. کتاب طبیعت در مقابل چشمان او باز بود؛ او کاری جز این نداشت که رمز کتابت این مجمع‌القوانین را کشف کند؛ و استعداد او برای اجرای این وظیفه شایسته بود.

این مجمع‌القوانین عقلانی بود: نظم تغییر ناپذیری که مشاهده و بررسی آن با انسان بود، زیر فرمان قوانینی منطقی قرار داشت؛ کائنات بر پایهٔ الگو و نمونه‌ای طرح ریزی شده بود که عقل انسانی، که این وظیفه بدان سپرده شده بود باید آن رابیافریند؛ ساختمان‌عالم‌قابل‌تحویل به‌دستگاهی‌عقلانی‌بود؛ مجمع‌القوانین‌آن می‌توانست از تعداد محدودی صغری وکبری به وسیلهٔ قیاس منطقی استنتاج گردد. این صغری و کبری ها اعتبار خود را نه ازراه تفکر بلکه‌از راه تجربه، که تنها وسیله ایست که می‌تواند دربارهٔ شایستگی یك نظریه تصمیم بگیرد، به دست آوردند. همانطور کــه آنتائئوس (Antaeus) در مقابل هرکول برای‌کسب‌نیروی از دست رفتهٔ خودناچاربود به مادرش‌زمین بچسبد، تفکر وتأمل نیز لاینقطع ازتماس واقعیت سرسخت تجربه بهره برداری کرده است.

شیوهٔ ریاضی عالم را منعکس کرده است. این شیوه برای به‌وجودآوردن اشکال متنوع عقلانی وفنا ناپذیر توانا بوده است. در میان این اشکال شکل کیهانی‌که ممکن است زمانی همهٔ‌عالم را با یك حرکت در بر گیرد وجود دارد. علم در نهایت امر

باید با تقریبهای پی‌درپی به این شکل کیهانی دست یابد، زیرا باهر قدم پی درپی بیش از پیش به این شکل نزدیك می گردد. خود ساختمان ریاضیات این نزدیکی مجانب وار را تضمین می‌کند، زیرا هر تعمیم‌بدون‌آنکه پایگاههای به دست آورده را تسلیم کند قسمت بیشتری از عالم را در بر می گیرد.

امروز ریاضیات و تجربه با استحکامی بیش از هرزمان بر فیزیك جدید حکومت می‌کنند، اما شکی همه گیر براعتبار آنها سایه افکنده است. اعتقاد جازم بشر دربارهٔ صحت مطلق دو شیوه از آنجا است کـه این اعتقاد برپایهٔ تصور خدایی به صورت بشر بنا شده است؛ معلوم شده است که هر دو شیوه به مسائل دینی وایمانی بستگی دارد.

اگر این قطعیت که آدمی دارای حافظهٔ نامحدود است و با کمال اطمینان می‌تواند بـر آن تکیه کند، و اینکه یك زندگی‌جاودانی در برابر وی موجود است، از ریاضیات گرفته شود، مانند خانه‌ای کـه با ورقهای مقوا ساخته شده باشد فرو خواهد ریخت. با چنین‌فرمی است که صحت فرایندهای‌لایتناهی پایه گذاری شده است، و این فرایندها حاکم بر تحلیل‌های ریاضی است. امااین‌نیز همهٔ‌مطلب‌نیست: هر گاه فرضیهٔ‌جریانات بینهایت به کناری گذارده شود، خود حساب نیز عمومیت خود را ازدست می‌دهد، زیرا تصورما دربارهٔ عدد کامل قابل تفکیك از این فرایند نیست؛ برای هندسه و مکانیك نیز قضیه به همین منوال است. در صورت بروز فاجعه فرو ریختگی ریاضیات تمام علم فیزیك دستخوش نابودی خواهد شد.

اعتبارتجربه‌متکی بر آنست که‌آینده به‌گذشته‌شباهت‌دارد.

ما بر آنیم که چون در یك رشته از وقایع که به نظر ما دارای خصلتهای یکسانند ، تمایل معین و مشخصی بروز کرده است ، این گرایش وتمایل مبین پایداری است. وهرچه این پایداری در گذشته یکنواخت‌تر ومنظم‌تر مشاهده شده باشد اطمینان بخشی آن برای آینده زیادتر است. و با این حال این اعتبار و این **استقراء و قیاس** که پایهٔ تمام معلومات تجربی است نمی‌تواند بر پایه‌ای محکم‌تر از اشتیاق بشری برای حقیقت و ابدیت تکیه کند.

و چه شکاف پر نشدنی تجربهٔ منظم و طبق اسلوب ما را از تجربهٔ غیر منظم و بی اسلوب جدا می‌کند ! آیا ابزار کشف و اندازه‌گیری ما که به آنها با نظر اشیائی همچون امتداد حواس‌خویش وتلطیف‌شدهٔ‌آن‌می‌نگریم‌مانند طاسهای سنگین شدهٔ تخته‌نرد نیستند که آنچه راکه در جستجوی آنیم‌باآگاهی‌قبلی بر آنها حك کرده باشیم؟ آیا آگاهی و دانش علمی ما نمودار کوشش عظیم ما برای جعل دنیای مبهم وفریبنده‌ای که دربرابر- مان گسترده شده است نیست؟ رنگ ، صدا و گرما به امواج متفاوت ، طعم و بو به نماینده‌های عددی در فرمولهای شیمیایی تبدیل شده‌اند؛ آیا آنچه که آگاهی ما را اشباع کرده است واقعیات موجودند؟

در اینجا علم جدید راه خود را از سلف کلاسیکش جدا می‌سازد: این علم منشأ ماهیت ریشهٔ بشری‌دانش انسانی‌را تمیز داده است. چه شیوهٔ دترمینیسم ، چه طریق عقلانی وچه تجربی همه بر آنند که **انسان مقیاس همهٔ اشیاء است و مقیاس دیگری وجود ندارد.**

منتشر شده است:

ورودی به‌منطق ریاضی
ایزائیل سالاموتوویچ گرادشتین
ترجمهٔ پرویز شهریاری

«ورودی به‌منطق ریاضی» بستگی منطقی بین قضیهٔ مستقیم، قضیهٔ عکس، قضیهٔ نقیض و قضیهٔ عکس نقیض و همچنین مفهوم شرط لازم و کافی را روشن می کند.
در مقدمهٔ نویسنده آمده است که: «نقش اصلی این کتاب اینست که... فاصلهٔ بین آموزش دبیرستانی و دانشگاهی را پر کند. هدف اصلی کتاب اینست که مفهوم نفی را روشن کند، ولی مفهوم نفی، به‌مفهومهایی مثل قضیهٔ مستقیم و قضیهٔ عکس، قضیهٔ مستقیم و قضیهٔ نقیض، شرط لازم و کافی و مکان هندسی نقطه‌ها، بستگی کامل دارد.» ص ۱۲
«ورودی به‌منطق ریاضی»، در دو بخش است: قضیهٔ مستقیم و قضیهٔ معکوس، عناصر منطق ریاضی. در پایان نیز حل مسأله‌های متن کتاب آورده شده است.
در تعریف قضیه آمده است که: از بررسی خاصیتهای موضوعهای مختلف ریاضی، نتیجه‌هایی بدست می‌آید. این نتیجه‌گیریها را که ناشی ازاصلها و تعریفها هستند، معمولا به‌صورت عبارتی، که قضیه نامیده می‌شود، منظم می کنند.
دربارهٔ منطق ریاضی گفته شده است که: «منطق ریاضی، از یک‌طرف به عنوان کاربرد روشهای ریاضی در منطق صوری، و از طرف دیگر به عنوان روشی که به‌بنیانهای ریاضی خدمت می کند، پیشرفت می کند. در چند دههٔ اخیر، منطق ریاضی توانسته است کاربردهای فنی مختلفی پیدا کند. منطق ریاضی: امروزه با خودکارکردن، با ماشینهای ریاضی و مسألهٔ ترجمهٔ خودکار از یک زبان به‌زبان دیگر، با نظریهٔ اطلاع (انفورماسیون) و بطور کلی با سیبرنتیک، ارتباط جدی دارد.» ص ۸۵

ریاضی‌دانان نامی
اریک‌تمپل بل
ترجمهٔ حسن صفاری

ریاضی‌دانان نامی، زندگی و آثار دانشمندان ریاضیات را درسطح جهانی بازگویی و بررسی می‌کند. از آنجایی که ریاضیدانان بزرگ در تکامل اندیشه‌های انسانی نقش تعیین‌کننده‌ای دارند، نویسنده ضمن بیان شرح حال و زندگی آنان خطوط اصلی و نقاط اساسی نقششان را مشخص کرده و شخصیت آفرینندگان ریاضیات جدید را تصویر می‌کند.
ریاضی‌دانان نامی دو قسمت دارد، بخش نخست بیست‌ونه فصل را در برمی‌گیرد که احوال و آثار سی‌وچهار تن ریاضیدان بررسی می‌شود. در بخش دوم ــ که توسط مترجم برای رفع کمبود متن اصلی افزوده شده است ــ شرح حال چهار تن: سوفوس‌لی، داوید هیلبرت، امی‌نوتر، رامانوجان آمده است.
در این کتاب نکات جدید و بدیع تاریخ ریاضیات بازگوشده است. مؤلف می‌نویسد: «دو عامل اصلی راهنمای ما به انتخاب اسامی و ترجیح برخی از ریاضیدانان بر بعضی دیگر بوده است: اول اهمیت آثار ایشان در ریاضیات جدید، و دوم جاذبه‌ای که در زندگی و اخلاق ایشان از لحاظ بشری وجود داشته است.» عامل دوم بیش از اولی در نظرگرفته شده است. یکی از هدفهای نویسنده این است که نشان بدهد، ریاضیدانان نیز انسان عادی هستند و در روابط اجتماعی اغلب آنان اشخاص معمولی هستند ولی به‌بسیاری از امور دنیا کنجکاو بوده‌اند، در مقام مبارزه کاملا قبول مسؤولیت می‌کرده‌اند. در عالم سیاست، عقاید مختلف و متفرقی داشته‌اند. آنچه از تاریخچه زندگی ریاضیدانان در این کتاب برمی‌آید: آنان افراد آشفته و ژنده‌پوش نبوده و با عشق و علاقه زندگی کرده‌اند.

مکانیک کلاسیک
ل. د. لاندو
ا. م. لیفشیتز
ترجمهٔ کامیار نیکپور، مهیار نیکپور

مکانیک‌کلاسیک، مکانیک نیوتنی را به‌شیوهٔ نوینی بیان می‌کند و اصول و مبانی مکانیک را بدون توجه به‌سیر تاریخی و تکامل آن، بلکه برپایه‌ای اصولی که بتواند همهٔ مسائل را به‌روشی منطقی و پیوسته و روشن و ساده تعبیر و تفسیر کند، ارائه داده است. کتاب هفت فصل دارد و در پایان آن ضمائم، فرهنگ لغات و راهنمای واژه‌ها گنجانده شده است. مبحثهای کلی کتاب چنین است: معادلات حرکت، قوانین بقا، انتگرال معادلات حرکت، برخوردذرات، نوسانهای کوچک، حرکت‌جسم صلب، معادلات کانونیک.

نویسندگان مکانیک کلاسیک دو تن از اعضای آکادمی علوم شوروی هستند که‌در زمینه‌های مختلف دانش فیزیک دارای تحقیقات و بررسیهای جامعی هستند.

لو داوید ویچ لاندو (۱۹۰۸ —۱۹۶۸) در باکو زاده شد، از دانشگاه لنین فارغ‌التحصیل شد و در دانشگاه مسکو فیزیک تدریس کرد. جایزهٔ لنین را به‌مناسبت تحقیقاتش در نظریهٔ کوانتوم برد و در سال ۱۹۶۲ به جهت کشفهای علمی خود دربارهٔ مادهٔ متراکم و تئوری کوانتیک مایعات، جایزهٔ نوبل را برد، او عضو بسیاری از آکادمیهای اروپا بود.

لیفشیتز نیز به‌مناسبت مطالعاتی که دربارهٔ فیزیک اجسام صلب و مغناطیسی و نسبیت انجام داد، پرآوازه شد، به‌علت تحقیقاتش در زمینهٔ تئوری نیروهای ملکولی، جایزهٔ لومونوسف را برد و در سال ۱۹۶۲ به مناسبت نوشتن مجموعهٔ فیزیک نظری به‌همکاری لاندو، به‌اخذ جایزهٔ لنین نائل آمد.

زندگینامهٔ آلبرت‌اینشتین و تاریخ سیاسی و اجتماعی دوران او
فیلیپ فرانک
ترجمهٔ حسن صفاری

آلبرت‌اینشتین (۱۸۷۹—۱۹۵۵) در شهر اولم آلمان، زادمشد. ولی محل نموونمای او شهر مونیخ است. آلبرت کوچک به‌قوانین‌طبیعت توجه‌داشت. از کودکی اصرار داشت هرگز کلمه‌ای نگوید که با واقعیت تطبیق نکند و هیچوقت دروغ نمی‌گفت، شاگردان مدرسه نامش را «عنصر شرافتمند» گذاشته بودند. ذوق مطالعه در دانش طبیعت از کودکی در او بیدارشد. اینشتین خود قصد خروج از خاک آلمان را داشت، ولی همان وقت از مدرسه اخراج شد، بعد به‌ایتالیا رفت. سپس راهی سویس شد و در آراو و زوریخ به‌تحصیل خود ادامه داد و در سال ۱۹۰۵ به‌تابعیت سویس درآمد. فیزیک‌نظری توجهش را بیشتر جلب کرد و در ریاضیات نیز اطلاعات وسیعی داشت. به‌سال ۱۹۰۹ استاد فیزیک نظری در دانشگاه زوریخ شد، در ۱۹۱۳ عضو آکادمی علوم پروس در برلین شد، در ۱۹۱٤ استاد فیزیک نظری دانشگاه برلین شد، بار دیگر به‌تابعیت آلمان درآمد و در همان‌سال به‌مدیریت مؤسسهٔ فیزیکی کایزر ویلهلم در برلین برگزیده شد، در سال ۱۹۱٦ نظریهٔ نسبیت عمومی را منتشر کرد، در سال ۱۹۲۱ جایزهٔ نوبل را در فیزیک برد، در ۱۹۲۹ نظریهٔ میدان واحد را اعلام کرد، در ۱۹۳۳ که اینشتین در سفر انگلستان و ایالات متحدهٔ امریکا بود، نازیها اموالش را مصادره کردند و از کار برکنارش کردند. در ۱۹٤۰ تابعیت امریکا را پذیرفت، سال ۱۹٤۹ نظریهٔ عمومی گرانش را منتشر کرد. در ۱۹۵۰ و بار دیگر در ۱۹۵۳ در تئوری میدان واحد تجدید نظر کرد.
تئوریهای اینشتین درگسترش پژوهشهای اتمی تأثیرزیادی گذاشت. در اوت ۱۹۳۹، روزولت را از پیشرفتهای آلمان در شکافتن اتم آگاه کرد و او را تشویق کرد تا مرکز تحقیق جدی درشکافتن اتم در امریکا تأسیس شود،

این تحقیقات منجر به‌ساختن نخستین بمب اتمی شد.

در زندگینامهٔ آلبرت اینشتین مفهوم واقعی تئوریهای اینشتین روشن شده است و از طرفی چون نویسنده در همهٔ جریانهای سیاسی و اجتماعی نیمهٔ اول قرن بیستم وارد بوده است، با سادگی و صمیمیت توانسته است رویدادهای روزگار را تشریح کند. مسائل انسانی و اجتماعی و سیاسی اوایل قرن بیستم در این کتاب چشم‌گیر است و حوادثی که منجر به‌دو جنگ جهانی گردید و نیز علل پیدایش و سقوط رژیم هیتلری و ایجاد کشور اسرائیل و سایر حوادثی که با زندگی پرحادثه و شورانگیز اینشتین آمیخته است، به‌خوبی بیان شده است. مترجم جهت مطالب کتاب، با استفاده کتابهای دیگر و مجله‌های مختلف، سه ضمیمه درباب آخرین سالهای زندگی اینشتین، اظهار نظر برخی از مشاهیر دربارهٔ اینشتین و پاره‌ای گفته‌های مشهور اینشتین را بر کتاب افزوده است.