



فضا- زمان تخت و خمیده

جورج ایس، روٹ ویلیامز

ترجمہ یوسف امیرارجمند

فضا- زمان تخت و خمیده

جورج ایس، روث ویلیامز

ترجمه یوسف امیرارجمند

مرکز نشر دانشگاهی، تهران



Flat and Curved Space-Times

George F. R. Ellis, Ruth M. Williams
Clarendon Press-Oxford, 1988

فضا - زمان تخت و خمیده

تألیف جورج ف. ر. ایلس، روث م. ویلیامز

ترجمه یوسف امیرارجمند

ویراسته دکتر منیژه رهبر

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

چاپ اول ۱۳۷۶

تعداد ۳۰۰۰

حروفچینی: مرکز نشر دانشگاهی

چاپ و صحافی: محمد

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

ایلس، جورج فرانسیس رینر، ۱۹۳۹-

Ellis, George Francis Rayner

فضا - زمان تخت و خمیده / جورج ایلس، روث ویلیامز؛ ترجمه یوسف امیرارجمند؛
ویراسته منیژه رهبر. - تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۶.

پنج، ۴۰۱ ص. مصور، عکس، نمودار. - (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۸۶۸. فیزیک؛ ۷۸)

ISBN 964-01-0868-5

فهرست نویسی براساس اطلاعات فیبا (فهرست نویسی پیش از انتشار).

عنوان اصلی: Flat and curved space-times

کتابنامه: به صورت زیر نویس.

۱. نسبیّت خاص (فیزیک). ۲. فضا و زمان. الف. ویلیامز، روث. Williams, Ruth M.

ب. امیرارجمند، یوسف، ۱۳۲۸- ، مترجم. ج. رهبر، منیژه، ۱۳۲۴- ،

ویراستار. د. مرکز نشر دانشگاهی. ه. عنوان.

QC ۱۷۳ / ۶۵ / ۶۶ الف ۷ / ۵۳۰ / ۱۱

۱۳۷۶

۱۰۳۳۲-۷۶ م

کتابخانه ملی ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار
۲	مقدمه
۷	۱. نمودارهای فضا زمان و مبانی نسبیت خاص
۷	۱-۱ مفهوم فضا زمان
۱۵	۱-۲ علیت و سرعت نور
۲۹	۱-۳ حرکت نسبی در نسبیت خاص
۴۱	۲. مبانی اندازه گیری
۴۱	۲-۱ زمان
۴۳	۲-۲ فاصله
۴۸	۲-۳ همزمانی
۵۲	۲-۴ جهان نقشه ها، جهان تصاویر و نقشه های راداری
۵۷	۳. اندازه گیری در فضا زمانهای تخت
۵۷	۳-۱ اثر دوپلر
۶۷	۳-۲ سرعت نسبی
۷۹	۳-۳ همزمانی
۸۸	۳-۴ اتساع زمان
۱۰۱	۳-۵ انقباض طول
۱۱۲	۳-۶ مجموعه کامل اثرهای سینماتیکی

۱۱۹	۷-۳ دینامیک نسبیتی
۱۴۱	۸-۳ سازگاری فیزیک
۱۴۴	۴. تبدیل لورنتس و بازه ناوردا
۱۴۴	۱-۴ تبدیل لورنتس
۱۶۵	۲-۴ ناوردهای فاصله فضا زمان
۱۹۴	۳-۴ برخی عالمهای فضا-تخت
۲۲۱	۵. فضا زمانهای خمیده
۲۲۱	۱-۵ مفهوم کلی
۲۲۵	۲-۵ شتاب و گرانش: اصل هم‌ارزی
۲۳۲	۳-۵ حرکت سقوط آزاد و معنای ژئودزیک
۲۳۸	۴-۵ فرم متریک و تانسور متریک
۲۴۷	۵-۵ پرتوهای نور
۲۵۵	۶-۵ علیت
۲۵۷	۷-۵ انتشار موازی در امتداد یک خم
۲۶۳	۶. ستاره‌های کروی و رمبش ستاره‌ای
۲۶۳	۱-۶ حل شوارتس شیلد
۲۷۴	۲-۶ رمبش کروی و تشکیل سیاهچاله
۲۸۵	۷. مدل‌های ساده کیهانشناسی
۲۸۶	۱-۷ هندسه فضا زمان
۲۹۳	۲-۷ تکامل عالم
۳۰۰	۳-۷ کمیتهای قابل مشاهده
۳۰۹	۴-۷ مخروط نور، حدود مشاهده‌ای، و افقها
۳۱۷	۵-۷ حالت پایا و عالمهای تورمی
۳۱۹	۶-۷ عالمهای کوچک
۳۲۸	پیوست الف: انتگرالهای خطی
۳۲۸	مفهوم انتگرال خطی

۳۳۰	کاربردها
۳۳۱	ارزیابی
۳۳۶	پیوست ب: چاربردارها و دینامیک نسبیتی
۳۳۶	ب-۱ بردارهای مکان
۳۳۸	ب-۲ چاربردارها (فضازمان تخت)
۳۴۱	ب-۳ چارسرعت و چارتکانه
۳۴۶	ب-۴ ناورداهای
۳۵۰	ب-۵ فضازمانهای خمیده
۳۵۶	پیوست ج: چارتانسورها، الکترومغناطیس، و پایستگی انرژی-تکانه
۳۵۶	ج-۱ چارتانسورهای ساده و معادله‌های تانسوری
۳۶۲	ج-۲ میدان الکترومغناطیسی
۳۶۵	ج-۳ تبدیل میدان الکترومغناطیس
۳۷۵	ج-۴ معادله‌های ماکسول
۳۸۱	ج-۵ تانسور تنش-انرژی
۳۸۷	ج-۶ چارتانسورها و معادله‌های تانسوری
۳۹۱	نمادهای مورد استفاده
۳۹۲	فهرست راهنما

پیشگفتار

این کتاب حاصل یک رشته سخنرانی درسی و یک دوره تابستانی است که توسط یکی از ما (جورج ایلیس) در دانشگاه کیپ‌تاون برگزار شده است. یادداشتهایی که یکی از دانشجویان (گاوین هاو) برداشته بود در آماده کردن متن کتاب مفید واقع شد. قسمت اعظم کتاب هنگامی که جورج ایلیس در دانشگاه تگزاس، و روث ویلیامز در انستیتوی مطالعات پیشرفته، در پرینستون، اقامت داشت تکمیل شد. از مریلین برینک، کالین می‌بورا، ساشا لونکارویچ و کلایو خونی برای نظرهای مفیدشان در مورد پیش‌نویس متن سپاسگزاریم. از آن جهت تصمیم گرفتیم یادداشتهایمان را به صورت یک کتاب مقدماتی درآوریم که معتقدیم، با وجود تعداد فزاینده کتابهای مربوط به نظریه نسبیت، هنوز کتاب درسی معادل این کتاب در دسترس نیست. امیدواریم که این کتاب درک عمیق فضازمانهای تخت و خمیده را برای خوانندگان هر چه بیشتری امکانپذیر سازد.

از دکتر مورو کارفورا که نمودارهای این کتاب را، با ترکیبی از مهارت هنری خود و معلوماتش از نسبیت، تولید کرده است بسیار سپاسگزاریم.

نسبیت ممکن است در ابتدا در نظر خواننده نظریه‌ای مجرد جلوه کند که از واقعیت زندگی روزمره بسیار دور است. وقتی به انتهای کتاب برسیم در خواهیم یافت که این نظریه نه تنها در فیزیک ذرات بنیادی و اخترشناسی بلکه از نظر تأثیر در شرایط زندگی در دنیای اطراف ما نیز اهمیت اساسی دارد. این را هم خواهیم دید که تصویر روی جلد، که گرفتگی خورشید توسط زمین از دید فضایی آپولو را نشان می‌دهد، نمایانگر چندین ویژگی نسبیت است.

جورج. اف. آر. ایلیس

روث. ام. ویلیامز

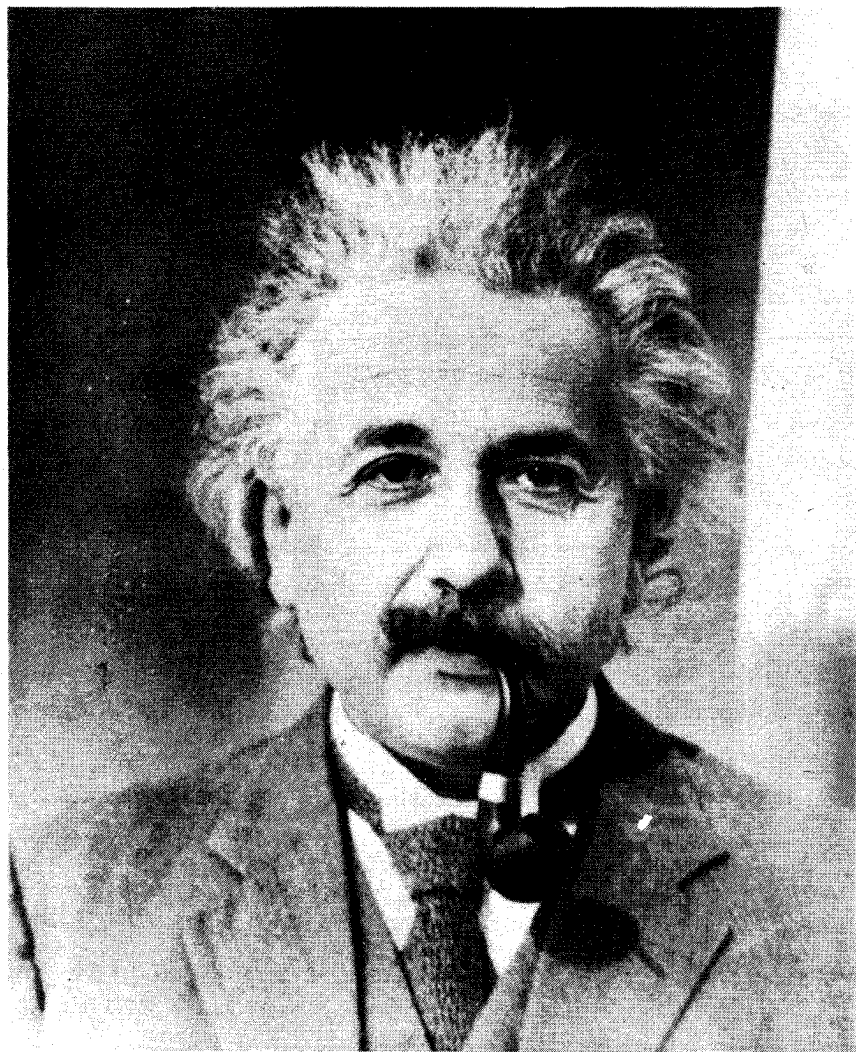
اکتبر ۱۹۸۷

مقدمه

هدف این کتاب نشان دادن توان وحدت‌بخش مفهوم فضا‌زمان در درک ماهیت دنیای فیزیکی است. این کار در ابتدا با تفهیم خوب ماهیت و معنای فضا‌زمان تخت در نظریه نسبیت خاص، و جنبه‌هایی از آن نظریه مانند انقباض طول و اتساع زمان، و پارادوکس دوقلوها انجام خواهد شد. سپس مقدمه‌ای در مورد ماهیت و معنای فضا‌زمانهای خمیده نظریه نسبیت عام از جمله مفهوم عالم در حال انبساط و ماهیت سیاهچاله‌ها آورده می‌شود. هر دوی نظریه‌های نسبیت متعلق به آلبرت اینشتین است (شکل ۱-۰)، نظریه خاص در سال ۱۹۰۵ (۱۲۸۴ شمسی) و نظریه عام در سال ۱۹۱۶ (۱۲۹۵ شمسی) تکمیل شد.

نظریه‌های نسبیت اینشتین و افشای هیجان‌انگیز ماهیت غیرمنتظره فضا‌زمان در شمار اکتشافات علمی عمده این قرن هستند، و جایگزین ایده‌های فضا و زمانی شدند که از دوره گالیله و نیوتون مورد قبول بودند. برای رهیافت به این مباحث، خواننده باید خود را برای کنار گذاشتن ایده‌هایی که از قبل درباره ماهیت اندازه‌گیری فاصله، اندازه‌گیری زمان، همزمانی، و علیت داشته است آماده کند. شاید بزرگترین سهم اینشتین در تفهیم فضا‌زمان این است که به ما می‌آموزد ایده‌های معمولی درباره این مفاهیم را مورد سؤال قرار دهیم. انقلاب حاصل در ادراک که منجر به کشف انقباض طول، اتساع زمان (یک ساعت متحرک آهسته کار می‌کند)، نسبیت همزمانی، و این واقعیت شده است که هندسه فضا‌زمان و علیت را ماده درون آن تعیین می‌کند عمیقاً در این کتاب بررسی خواهند شد. باید توجه داشت که اثرات سینماتیکی مورد بحث تنها زمانی قابل ملاحظه می‌شوند که با سرعت‌هایی نزدیک به سرعت نور سروکار داشته باشیم؛ این اثرات در زندگی روزمره قابل چشمپوشی هستند. بدین سبب است که ما این اثرات را به‌طور شهودی به‌عنوان ”جریان عادی امور“ درک نمی‌کنیم. با وجود این، بسیاری از نتایج نسبیت خاص، حتی در شرایطی که با حرکت در سرعت‌های زیاد سروکار نداریم، بارز است؛ از مهمترین این نتایج، یکی ماهیت نیروهای مغناطیسی و دیگری امکان تولید انرژی هسته‌ای است.

مفهوم فضا‌زمان که در اینجا ارائه شده است مدلی برای واقعیت است که فیزیکدانهای نظری به‌خوبی از آن استفاده کرده‌اند. این مدل ماهیت روابط فضایی و زمان را به‌طور جامع خلاصه می‌کند، و مثال بسیار خوبی از کاربرد هندسه در فهم فیزیک است. هدف یک تصویر هندسی نمایش



شکل ۱-۵ آلبرت اینشتین، که در سال ۱۹۰۵ (۱۲۸۴ شمسی) نظریه نسبیت خاص و در سال ۱۹۱۶ (۱۲۹۵ شمسی) نظریه نسبیت عام را پیشنهاد کرد و بدین وسیله مطالعه فضا-زمان تخت و خمیده را به جریان اصلی فیزیک ملحق کرد. تصویر اینشتین را در سال ۱۹۳۳ (۱۳۱۲ شمسی) نشان می‌دهد.

تصویر جامع بسیاری از روابط تحلیلی است که توصیف کامل آنها با شرح جزئیات خسته‌کننده و فهمشان مشکل است. این تصاویر امکان درک نتایج اندازه‌گیری‌های فاصله و زمان را مستقیماً در اختیار ما می‌گذارند و از این‌رو ابزار بسیار مفیدی برای پیشگویی نتایج آزمایشهای فیزیکی هستند. باید به‌خاطر داشت که دیدگاه فضا-زمان در نظریه نسبیت مدلی از واقعیت است که آزمایشهای

فیزیکی بسیاری آن را آزموده‌اند، و این مدل نتایج این آزمایشها را صحیح‌تر از مدل‌های دیگر توصیف می‌کند. بدین ترتیب این دیدگاه راهی برای خلاصه کردن بسیاری از چیزهایی است که دربارهٔ دنیای فیزیکی می‌دانیم. بصیرتی که از طریق مفهوم فضا زمان به دست می‌آوریم نشان می‌دهد که چگونه وجوه مختلفی که در ابتدا مستقل از یکدیگر می‌دانستیم در واقع تجلیات پدیده‌های فیزیکی با زیربنای واحد هستند. بنابراین این مفهوم تنها یک وسیله برای پیش‌بینی‌های مؤثر نیست بلکه راهی برای درک وحدتی عمیقتر از آنچه ظاهراً در طبیعت به چشم می‌خورد فراهم می‌آورد.

برای اینکه بتوانیم مفهوم یک فضا زمان را به‌طور کامل بفهمیم، باید بتوانیم نتایج اندازه‌گیریها را در فضازمانهای خاص محاسبه کنیم. نشان خواهیم داد که چگونه، بدون استفاده از ریاضیاتی بالاتر از سطح دبیرستان و با استفاده از مفهوم سادهٔ انتگرال خطی (که در پوست الف تعریف شده است)، می‌توان این محاسبات را انجام داد. از این رو برای ما باوریم که هر کسی با تسلط بر جبر دبیرستانی، مقداری مثلثات، و مفهوم تابع باید بتواند بحث تفصیلی ما از جمله محاسبات را دنبال کند. (از این حیث کتاب ما شبیه کتاب لی لی است که مقدمهٔ آن در مورد جزئیات عملی محاسبات از آنچه ما در اینجا آورده‌ایم گسترده‌تر است.)^(۱) در قسمتهای محدودی از متن اصلی به مفهوم مشتق نیز احتیاج داریم. حذف این بخشها به فهم قسمت اعظم استدلال ما لطمه‌ای وارد نخواهد آورد. به خوانندهٔ جدی توصیه می‌کنیم که بکوشد تا تمام محاسباتی را که در متن اصلی آمده است دنبال کند و حداقل برخی از مثالها را حل کند، هم به‌خاطر درک کامل مفاهیم ارائه شده، و هم اینکه رضایت خاطری از این رهگذر نصیب خواننده می‌شود. محدودیتی که برای حجم کتاب وجود داشت سبب شد که نتوانیم حل تمرینها را اضافه کنیم. به هر حال می‌توان مجموعه‌ای از یادداشتهای که شامل مخلوطی از حل کامل، راهنمایی، و جواب مسائل می‌شود را به‌طور جداگانه از مؤلفین درخواست کرد. برای تفنن، مثالهایی را افزوده‌ایم که نوشتن برنامه برای ریز کامپیوترهایی مانند کامپیوترهای شخصی BBC یا IBM را در برمی‌گیرد؛ این مثالها نمایش بصری خوبی از برخی ایده‌ها را امکانپذیر می‌سازند، و انجام آنها سرگرم‌کننده است، اما برای فهم کتاب اساسی نیستند. پیشنهاد می‌کنیم هرگاه که احساس کردید در پیچ و خم یک بحث یا محاسبه گیر افتاده‌اید، فقط ایده‌های کلی ارائه شده را یادداشت کنید و به‌بخش بعد بپردازید.

آشنایی با فیزیک دبیرستان در بعضی موارد دنبال کردن بحثها را ساده‌تر می‌کند. اما نداشتن این زمینه هم خواننده را از درک ایده‌های اصلی باز نمی‌دارد. نشان خواهیم داد که چگونه مفاهیم انرژی و تکانه از طریق مفهوم چاربردار فضا زمان وحدت می‌یابند و به نتیجهٔ مشهور $E = mc^2$ منجر می‌شود (پوست ب)؛ و چگونه الکتروسیسته و مغناطیس در تانسور فضا زمان وحدت پیدا می‌کنند، و به فهم اساسی میدان مغناطیسی به‌عنوان یک میدان الکتریکی که از چارچوبی در حال حرکت نسبی نگریسته می‌شود، می‌انجامد (پوست ج). این مباحث از متن اصلی جدا شده‌اند زیرا تشریح کامل آنها به ریاضیاتی پیچیده‌تر نیازمند است (درک کامل پوست ج احتیاج

به معلومات کافی در مورد مشتقات جزئی برای فهم معادلات ماکسول با نمادهای برداری دارد). بنابراین در حالی که این مباحث برای کسانی که می‌خواهند کاربردهای دینامیکی نظریه نسبیت را بفهمند جالب توجه و سودمندند، اما برای فهم سینماتیک که در قسمت اصلی کتاب توصیف شده است اساسی نیستند. این کتاب با پیوستهایش، مواد کافی در مورد نسبیت خاص را برای فهم مطالب اغلب درسهای سال اول دانشگاهها در این زمینه توصیف می‌کند؛ با وجود این متن اصلی باید برای قشر وسیعتری از خوانندگان، یعنی هر شخص علاقه‌مندی که معلومات قابل قبولی در ریاضیات دبیرستانی داشته باشد و بتواند بحثها را تا به آخر دنبال کند، قابل استفاده باشد.^۱ اگر زمینه‌ای در فیزیک ندارید اما مایلید که بحثهای فیزیکی را بیشتر دنبال کنید، کتاب ریذلی احتمالاً نقطه شروع خوبی خواهد بود.^۲

در این کتاب تأکید ویژه بر درک نسبیت از یک دیدگاه هندسی است.^۳ ما از حساب K باندی برای به دست آوردن نتایج محاسبات در فضا-زمان مسطح استفاده می‌کنیم.^۴ بنابراین به جای اینکه از تبدیل لورنتس به عنوان مبنای بحث شروع کنیم، پس از مدتی نسبتاً طولانی به آن می‌رسیم، که در آنجا تبدیل لورنتس به صورت شیوه وحدت‌یافته مناسبی برای خلاصه کردن روابطی که قبلاً به کمک حساب K به دست آمده‌اند ظاهر می‌شود. نحوه ارائه ما از ماهیت فضا-زمانهای خمیده ساده برچگونگی استنتاج مستقیم بسیاری از خواص این فضا-زمانها از بازه آنها تأکید دارد. در بخش آخر متن اصلی ("سخن آخر") منابعی برای آشنایی بیشتر پیشنهاد شده‌اند، و خواننده درمی‌یابد که پیوست راهنمایی برای واژه‌های به کار رفته و ایده‌های ارائه شده در سراسر کتاب است. در حالی که سعی کرده‌ایم مطالب تحت پوشش را به طور کامل ارائه دهیم، کوشیده‌ایم تا ایجاز را هم رعایت کنیم تا حجم کلی کتاب زیاده از حد یا مرعوب‌کننده نباشد. ممکن است قسمت اول کتاب تا حدودی پر تفصیل به نظر آید زیرا تمام جزئیات توضیح داده شده‌اند. این تصمیم آگاهانه گرفته شده است. احساس می‌کنیم که یک کتاب درسی متوسط از

۱. در واقع از این کتاب می‌توان در درسهایی مانند آنچه که در کتاب زیر توصیف شده است استفاده کرد:

T. A. Roman, *General relativity, black holes and cosmology: a course for non-scientists*, *American Journal of Physics*, **54**, 144, 1986.

2. B. K. Ridley, *Time, Space and Things*, Cambridge, 1984.

۳. شاید شبیه‌ترین رهیافت دیگر در کتاب زیر و بانوشت صفحه ۳ باشد.

Geroch, *General Relativity from A to B*, University of Chicago Press, 1978.

۴. هرمن باندی از این رهیافت در یک مجموعه تلویزیونی موفق بی‌بی‌سی در مورد نسبیت استفاده کرد و ماجرای آنرا در کتابهای زیر به چاپ رساند:

Herman Bondi, *Relativity and Common Sense*, Anchor Books, 1964, and *Assumption and Myth in Physical Theory*, Cambridge University Press, 1967.

اصول با سرعتی زیاد از حد می‌گذرد. یک دانشجوی جدی احتمالاً می‌تواند چند فصل اول را نسبتاً سریع بخواند، اما از این زمینه‌سازی استفاده خواهد کرد؛ او درخواهد یافت که قسمت عمده مشکلات در پیوستهاست، افزودن آنها برای پوشش مواد لازم در یک دوره مقدماتی نسبت دانشگاهی است. از طرف دیگر خوانندگانی که پیوستها را زیاد از حد فنی می‌یابند می‌توانند به راحتی آنها را حذف کنند. به اعتقاد ما این کتاب فرصت مناسبی برای خوانندگان علاقه‌مند غیرمتخصص و یا تازه دانشجویست تا ماهیت فضای مسطح و فضازمانهای خمیده، و اینکه چگونه آنها اندازه‌گیری زمان، فواصل و آنیت را تعیین می‌کنند درک کند بدون اینکه با ریاضیات آن درگیر شود. بنابراین خواننده با یکی از پایه‌های برداشت جدید ما از ماهیت دنیای فیزیکی آشنا خواهد شد.

نمودارهای فضا زمان و مبانی نسبیت خاص

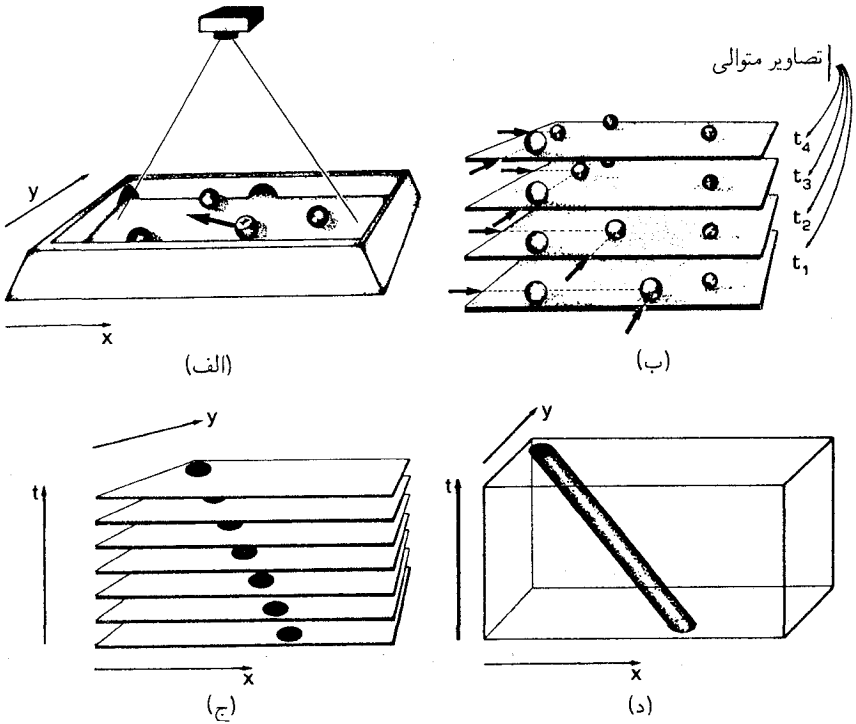
۱-۱ مفهوم فضا زمان

فضا و زمان برای همه مفاهیمی آشنا هستند، ابتدا چگونگی تشکیل یک موجود واحد به نام فضا زمان را طبق برداشت معمولی و روزمره از چگونگی وقوع رویدادها (یعنی طبق نظریه نیوتونی) بررسی خواهیم کرد. در بخشهای بعدی توصیف فضا زمان را در نظریه نسبیت بررسی می‌کنیم.

فضا زمان از دید یک ناظر منفرد

یک دوربین فیلمبرداری را در نظر بگیرید که بالای یک میز بیلیارد نصب شده است تا یک سری عکس از گویهای بیلیارد روی میز بردارد [شکل ۱-۱ (الف)]. می‌توانیم برای بیان وضعیت هر گوی از مختصات x و y استفاده کنیم، و حتی می‌توانیم این مختصات را با رسم شبکه مختصات روی میز بیلیارد گویاتر کنیم. فرض کنید که با گذشت زمان یکی از گویها حرکت کند در حالی که بقیه ساکن بمانند. در این صورت مختصات x و y این گوی با زمان طبق این حرکت تغییر می‌کند، و این نکته در عکسها بازتاب می‌یابد.

اکنون فرض کنید حلقه فیلم را برای جدا کردن تصاویر بریده‌ایم [شکل ۱-۱ (ب)] و سپس آنها را به ترتیب زمانی صحیح روی هم قرار داده‌ایم، به طوری که اولین عکس در پایین و آخرین عکس در بالا قرار گیرد [شکل ۱-۱ (ج)]. وضعیت هر گوی در هر زمان $t = t'$ توسط وضعیت



شکل ۱-۱ ساختن یک فضا-زمان. (الف) یک دوربین فیلمبرداری عکسهایی از گویهای روی میز می‌گیرد. یک گوی نسبت به دیگران حرکت می‌کند. (ب) یک سلسله از عکسهای فیلم. (ج) عکسها یکی بعد از دیگری روی هم قرار گرفته‌اند. (د) عکسها ذوب شده‌اند تا یک فضا-زمان با محور زمان t و محورهای فضایی x و y را به وجود آورند.

تصویرش در عکس متناظر با آن نشان داده می‌شود، عکسهای بعدی که در قسمتهای بالاتر قرار دارند وضعیتهای متوالی گوی را در زمانهای بعدی ثبت می‌کنند. بدین ترتیب یک نگاه به این دسته تصاویر نحوه تغییر ترتیب گویها با گذشت زمان را نشان خواهد داد؛ به ویژه نشان می‌دهد که چگونه یک گوی حرکت می‌کند و گویهای دیگر ساکن هستند.

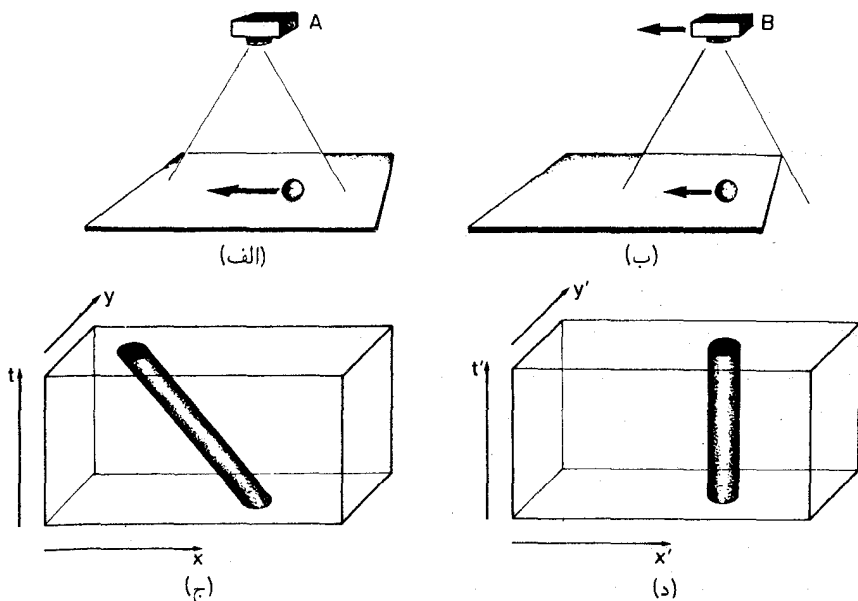
در این دسته عکس ایده‌آسی یک فضا-زمان نهفته است، یعنی نمایش توالی زمانی تصاویر که یکی روی دیگری قرار دارد و وضعیتهای متوالی اشیاء را در فضای مورد نظر (در اینجا، سطح میز) نشان می‌دهد. اما، یک مسئله وجود دارد: دسته عکسها بسیار بی‌بنیادند: عطسه‌ای می‌تواند ترتیب آنها را برهم زند. برای رفع این نقص فرض کنید که دسته عکسها را در یک کوره ذوب کرده‌ایم تا یک جسم سخت، یک فضا-زمان ماندگار به دست آید [شکل ۱-۱ (د)]. این یک فضا-زمان سه‌بعدی است که محور عمودی آن نماینده زمان با مختصه t (که با یک ساعت اندازه گرفته می‌شود) است و محورهای افقی وضعیت فضایی را، که با مختصات x و y نمایش داده می‌شود

با خط‌کش اندازه‌گیری می‌شوند)، روی سطح میز مشخص می‌کنند. فضا زمان نمایندهٔ تاریخچهٔ تمام اشیاء در فضای دوبعدی است. بنابراین تاریخچهٔ گویهای بیلیارد ساکن با لوله‌های عمودی در فضا زمان نشان داده می‌شود. در صورتی که تاریخچهٔ گویی که به طرف چپ حرکت می‌کند با لوله‌ای مایل به چپ نشان داده می‌شود. برای به دست آوردن جزئیات تاریخچهٔ حرکت‌های اشیاء در فضا، کافی است یک سری مقاطع افقی فضا زمان (سطوح آنتی) در زمانهای بعدی و بعدی در نظر بگیریم. این مقاطع، لوله‌های نمایندهٔ تاریخچهٔ گویهای ساکن را در مواضعی با مختصات t و y که ثابت می‌مانند (و نشان می‌دهند که گویها واقعاً ثابت هستند) قطع می‌کنند، و لولهٔ نماینده گوی متحرک به چپ را در مواضعی که به ترتیب بیشتر در طرف چپ قرار می‌گیرند (و نشان می‌دهند که گوی واقعاً به طرف چپ حرکت دارد) قطع می‌کند. در واقع، با در نظر گرفتن توالی زمانی به این طریق می‌توانیم سلسله تصاویری را بسازیم که با عکسهایی که در ابتدا به کمک آنها فضا زمان را ساختمین متناظرند، و سپس با در نظر گرفتن این عکسها یکی پس از دیگری می‌توانیم حرکت ذرات را مانند فیلم سینما مجسم کنیم. بنابراین فضا زمان این حرکات را به طور کامل نمایش می‌دهد. فضا زمانی که ساخته‌ایم سه بعدی است، و تاریخچهٔ اشیاء را در فضای دوبعدی (روی میز) نمایش می‌دهد. البته، فضا زمان حقیقی چهار بعدی است، با سه بعد فضا (که با مختصات t, y, z و توصیف می‌شود) و یک بعد زمان (که با مختصهٔ t توصیف می‌شود) و تاریخچهٔ تمام اشیاء را در فضای سه بعدی نمایش می‌دهد. ما نمی‌توانیم به سادگی این را در یک شکل واحد نمایش دهیم. با این وجود مطالعهٔ فضا زمانهای سه بعدی (یا حتی دوبعدی) به ما این امکان را خواهد داد که بسیاری از خواص فضا زمان چهار بعدی کامل را بفهمیم. این نکته را در طول کتاب نشان خواهیم داد.

فضا زمان از دید ناظرهای مختلف

در حالت کلی ناظرهای مختلف، دیدگاههای مختلفی در مورد فضا زمان دارند. با رجوع به میز بیلیارد که در بالا مورد بحث قرار دادیم، فرض می‌کنیم که علاوه بر دوربین A که بالای میز بیلیارد ثابت شده است [شکل ۱-۲ (الف)]، یک دوربین دوم B هم وجود دارد که همراه گوی متحرک حرکت می‌کند [شکل ۱-۲ (ب)].^۱ برای سهولت فرض کنید که گوی موازی با محور t ها حرکت می‌کند؛ در این صورت دوربین هم موازی با محور t ها با همان سرعت گوی در بالای آن حرکت می‌کند، به طوری که گوی نسبت به تصویر یاب در وضعیت ثابتی باقی می‌ماند. پس در مدل فضا زمان که از عکسهای A ساخته شده است (دقیقاً آن طور که در بالا توصیف شد) تاریخچهٔ گوی متحرک لوله‌ای مایل به چپ است [شکل ۱-۲ (ج)]، در صورتی که در مدل فضا زمان که با B ساخته می‌شود (باز

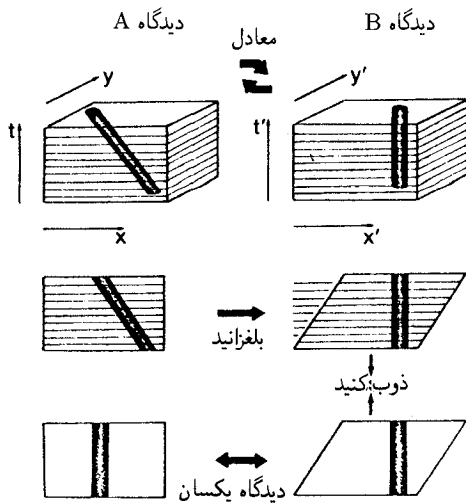
۱. اگر فکر می‌کنید که برجسهای A و B برای دوربینهای مختلف و ناظرهای متناظر با آنها فاقد شخصیت هستند می‌توانید به جای A از ناهایی مانند آرش یا آذر استفاده کنید و به جای B از بدری یا بهرام. گرچه این نوع نامگذاری ممکن است در ابتدا افراد مبتدی را در فهم آنچه رخ می‌دهد یاری کند، اما در نهایت تجرید ملال‌آوری خواهد شد. بنابراین تصمیم گرفته‌ایم که از ابتدا همان برجسهای مجرد معمولیتر را انتخاب کنیم.



شکل ۱-۲ اثر حرکت ناظر در تصویر فضا-زمان. (الف) دوربین A بالای میز بلیارد ثابت شده است. (ب) دوربین B با گوی متحرک حرکت می‌کند. (ج) دیدگاه فضا-زمان تاریخیچه گوی که از عکسهای A ساخته شده است. (د) فضا-زمان که از عکسهای B ساخته شده است.

هم دقیقاً مانند بالا) تاریخیچه گوی یک لوله عمودی است [شکل ۱-۲(د)]. این بدان سبب است که گوی نسبت به مختصه t متناظر با دیدگاه A به طرف چپ حرکت می‌کند، اما در مختصه t' متناظر با دیدگاه B بی حرکت باقی می‌ماند. بدین ترتیب ما درباره یک مجموعه واحد از وقایع دو نظر مختلف داریم. اینها فضا-زمان واحدی هستند که از دو دیدگاه مختلف توصیف می‌شوند.

این نکته نمایانگر یکی از مطالب عمده‌ای است که در درک فضا-زمانها پیش می‌آید: برای مطالعه یک سیستم فیزیکی واحد، می‌توان از دستگاههای مختصات مختلف استفاده کرد که متناظر با مجموعه مشاهده‌های مختلف هستند. نمایشهای فضا-زمان حاصل، ظاهراً متفاوت خواهند بود، اما در واقع می‌توان با تغییر مختصات مناسب یکی را به دیگری تبدیل کرد. بعداً تبدیلهای ریاضی‌ای که دیدگاههای دو ناظر را به یکدیگر مربوط می‌کنند تعیین خواهیم کرد. اکنون توجه داریم که وقتی سری عکسهایی را که نمایشهای فضا-زمان از آنها ساخته شده‌اند در نظر می‌گیریم، رابطه حاصل یک رابطه ساده است. فرض کنید قبل از ذوب مجموعه عکسهای A با دقت آنها را به یک طرف لغزاندیم تا تصاویر گوی متحرک درست روی یکدیگر قرار گیرند (شکل ۱-۳)؛ در این صورت نمایش A و B از یک مجموعه واحد از رویدادهای فیزیکی یکسان خواهد بود. به این وسیله دیدگاه به دست آمده از دوربین اول به همان دیدگاه دوربین دوم تبدیل شده است.

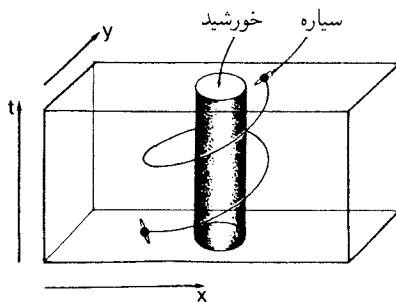


شکل ۱-۳ گرچه شکل دیدگاههای فضا زمان A و B متفاوت به نظر می‌رسند اما هم‌ارز هستند: اگر عکسهای A را قبل از ذوب به یکدیگر به یک طرف بلغزانیم همان دیدگاه فضا زمان B به دست می‌آید.

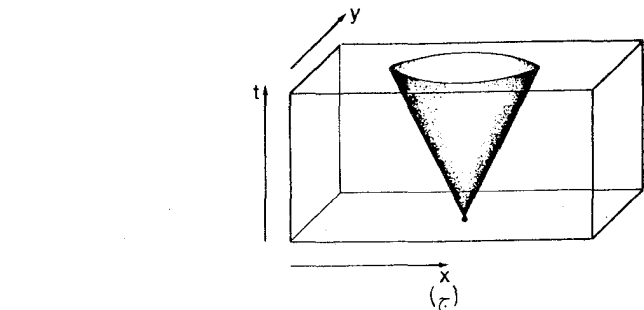
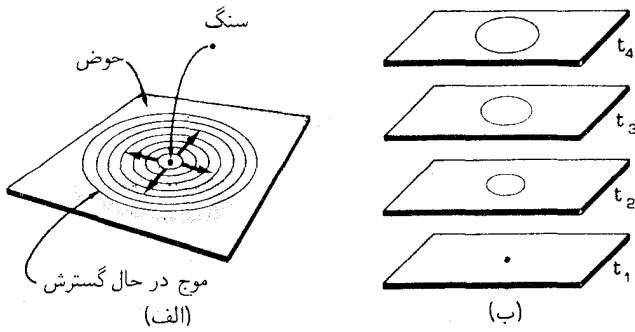
مثالهای فضا زمان

ایده‌هایی که تا کنون توصیف شده‌اند باید با ذکر دو مثال کاملاً روشن شوند.

الف) یک سیاره در حرکت دایره‌ای به‌دور خورشید. در دستگاه مرجع خورشید، با مختصات فضایی مورد استفاده، خورشید ساکن است، در حالی‌که سیاره به‌دور آن می‌گردد و در فضا زمان یک خم مارپیچ رسم می‌کند (شکل ۱-۴). برای پی‌بردن به درستی این تصویر فضا زمان، مقاطع زمانی فضا زمان را در زمانهای بعدی و بعدتر در نظر می‌گیریم؛ مواضع سیاره در رویه‌های متوالی آنتیت، همان‌طور که باید، دایره‌ای به‌دور خورشید رسم می‌کند.



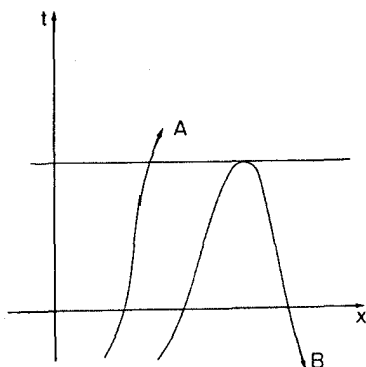
شکل ۱-۴ یک سیاره در حرکت دایره‌ای به‌دور خورشید که یک خم مارپیچ در فضا زمان ترسیم می‌کند.



شکل ۱-۵ (الف) امواج دایره‌ای که از انداختن سنگی در حوض به وجود می‌آیند. (ب) عکسهای متوالی از موج در حال گسترش. (ج) منظره فضا-زمان موج در حال گسترش.

ب) یک موج دایره‌ای در حوض. فرض کنید با انداختن یک سنگ در یک حوض بزرگ در زمان t_1 یک موج کروی گسترش یابنده در حوض تولید شده است [شکل ۱-۵ (الف)]. عکسهایی که از موج کروی گسترش‌یابنده با دوربینی که در بالای نقطه برخورد قرار دارد برداشته می‌شود [شکل ۱-۵ (ب)] تصویری از فضا-زمان تولید می‌کند که در آن موج گسترش‌یابنده مخروطی است که رأس آن در زمان $t = t_1$ قرار دارد [شکل ۱-۵ (ج)]. در اینجا هم اگر رویه‌های متوالی آنتیت در فضا-زمان را در نظر بگیریم، سلسله تصاویری که موج کروی گسترش‌یابنده را ترسیم می‌کنند و از مرکز در زمان $t = t_1$ شروع می‌شوند به دست می‌آوریم.

نقاط در فضا-زمان رویداد خوانده می‌شوند. یک رویداد نماینده یک وضعیت ویژه در دنیای فیزیکی در یک زمان خاص است و مجموعه تمام رویدادها نماینده وضعیتهای فضایی و زمانی تمام پیشامدهای فیزیکی ممکن است. یک جهانخط مسیری است که رویدادهای نماینده تاریخچه یک ذره خاص یا پرتو نور طی می‌کند. مثلاً خم مارپیچ در مثال (الف) جهانخط سیاره‌ای است که به دور خورشید حرکت می‌کند. همه خطوط در فضا-زمان جهانخطهای ممکن نیستند؛ مثلاً اگر خطی به یک زمان بیشینه برسد و سپس به طرف پایین برود (شکل ۱-۶)، نماینده جهانخط ممکن یک جسم پرجرم نیست، زیرا در جایی که این جهانخط پایین می‌رود، زمان هم در امتداد آن شروع

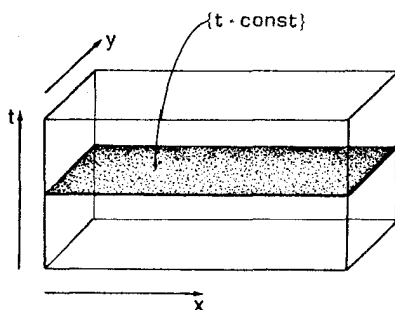


شکل ۶-۱ خمها در فضا زمان: A تاریخچه یا جهانخط ممکن یک ذره است؛ B این طور نیست.

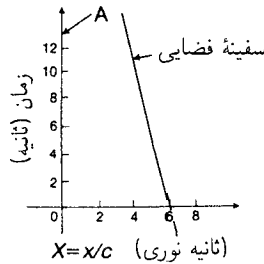
به عقب رفتن می‌کند. پس از در نظر گرفتن نقش محدودکننده سرعت نور در نسبیت، محدودیتهای بیشتری را در مورد جهانخطهای مجاز کشف خواهیم کرد.

خلاصه

فضا زمان نماینده تاریخچه اشیاء در فضا است. اگر فضا در دو بعد نشان داده شود، فضا زمان سه بعدی است (سه مختصه برای مشخص کردن همه رویدادها لازم است: دو مختصه فضایی x, y و z که وضعیت فضایی رویداد را ترسیم می‌کنند، و مختصه زمان t که نماینده زمان رویداد است). فضا زمان کاملی که برای نمایش تمام رویدادها در دنیای فیزیکی واقعی لازم داریم چهار بعدی است (با یک مختصه زمان و سه مختصه فضا). هر رویه ($t = \text{const.}$) به ما می‌گوید که جسم در زمان t ، از نظر ناظری که از یک دستگاه مختصات خاص مانند (x, y, z) استفاده می‌کند، در کجا بوده است؛ این رویه‌ها برشهای آیت یا همزمانی در فضا زمان هستند (شکل ۷-۱).



شکل ۷-۱ یک برش ($t = \text{const.}$) فضا زمان؛ این برش رویه همزمانی را نشان می‌دهد.



شکل ۸-۱

تمرینها

۱-۱ ناظر O موتور یک قطار را مشاهده می‌کند که در یک مسیر مستقیم حرکت می‌کند؛ او برای اندازه گرفتن فاصله در امتداد مسیر مختصه x را انتخاب می‌کند. جهانخط موتور را در صفحه (t, x) رسم کنید در صورتی که موتور از فاصله 5° متری ناظر شروع به حرکت کند و (۱) برای مدت 5 s با سرعت 1° m/s از ناظر دور شود؛ (۲) سپس به مدت 7 s توقف کند؛ (۳) و سپس به مدت 8 s با سرعت 5 m/s به طرف ناظر بیاید.

۲-۱ حرکت یک سفینه فضایی نسبت به ناظر A در شکل ۸-۱ نشان داده شده است. در $t = 0$ سال ($y = 0$) فاصله سفینه تا A چقدر است؟ در $t = 1^{\circ}$ چقدر است؟ سرعت حرکت سفینه نسبت به A چقدر است؟

۳-۱ یک نمودار فضا زمان برای نمایش حرکت ماه به دور زمین را رسم کنید (به دقت بگویید که از چه چارچوب مرجعی استفاده می‌کنید). مقیاسهای تقریبی زمان و فضا را روی نمودار نشان دهید.

۴-۱ فرض کنید ذره‌ای در یک شتابدهنده در مدار دایره‌ای به شعاع 25 m حرکت می‌کند و سرعت آن مدام زیاد می‌شود. نمودار فضا زمان حرکت آن را ترسیم کنید.

۵-۱ شخصی که می‌خواهد از خیابان عبور کند دو ماشین A و B را مشاهده می‌کند که با یکدیگر برخورد می‌کنند و پس زده می‌شوند. جهانخطهای A، B، و C را از دیدگاه ناظرهای زیر ترسیم کنید (۱) راننده یکی از ماشینها؛ (۲) راننده ماشین دیگر؛ (۳) شخصی که منتظر عبور از خیابان است. [هر یک از راننده‌ها امن و امان با کمر بند ایمنی بسته در ماشینهایشان نشسته‌اند].

تا اینجا، بحث درباره فضا زمانها بر مبنای ایده‌های روزمره نظریه نیوتونی بود. مفهوم فضا زمان در مورد نظریه نسبیت نیز به کار می‌رود به شرط اینکه اصول مهم نسبیت را که در دو بخش آینده مورد بررسی قرار خواهند گرفت در نظر بگیریم.

۲-۱ علیت و سرعت نور

سرعت حرکت نور بسیار زیاد ولی متناهی است. این سرعت تقریباً برابر با

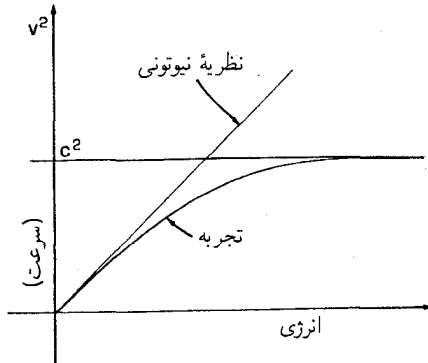
$$3 \times 10^{10} \text{ cm/s} = 3 \times 10^8 \text{ m/s} = 300000 \text{ km/s}$$

اندازه‌گیری شده است. بدین ترتیب به‌طور مثال نور 30 km را در $1/100000 \text{ s} = 10^{-5} \text{ s}$ و 300 km را در $1/1000 \text{ s} = 10^{-3} \text{ s}$ می‌پیماید. طبق دیدگاه نیوتونی فضا زمان، سرعت نور چیز خاصی نیست، و عوامل فیزیکی (مثلاً تغییر در میدان گرانش) می‌توانند سریعتر منتشر شوند: در واقع، اصولاً آنها می‌توانند فوراً در مناطق دور دست نفوذ کنند. طبق نظریه نسبیت، وضعیت کاملاً متفاوت است.

ماهیت محدودکننده سرعت نور

یکی از اصول اساسی نظریه نسبیت اینشتین این است که سرعت نور برای همه ارتباطات و تمام حرکت‌های اجسام پرجرم سرعتی است حدی؛ در واقع این سرعت حدی برای تمام عوامل علیتی است. در اینجا باید توجه کنیم که این سرعت، سرعت حرکت همه تابش‌های الکترومغناطیسی است، و منحصر به نور نمی‌شود؛ این سرعت، سرعت حرکت پرتوهای فرسوخ و فرابنفش، امواج رادیویی و پرتوهای x و همچنین نور مرئی است (زیرا همه آنها نوعی از تابش الکترومغناطیسی با طول‌موجهای مختلف هستند). به علاوه، این سرعت، سرعت حرکت هر ذره‌ای است که دارای جرم سکون صفر باشد، مانند گراویتونها و نوترینوهای بدون جرم و فوتونها. بدین ترتیب می‌توانیم به راه‌های مختلف علائمی را با سرعت نور گسیل کنیم اما راهی برای گسیل علامت با سرعتی بیش از آن وجود ندارد. هیچ جسم پرجرم، مانند یک سفینه فضایی، یک شهابسنگ یا یک انسان نمی‌تواند با سرعت نور حرکت کند.

در تأیید این اصل شواهد تجربی از منابع زیادی وجود دارد. از یک طرف سرعت هیچ ذره یا علامتی تا به حال اندازه گرفته نشده است که بزرگتر از این سرعت باشد. از طرف دیگر کوشش برای شتاب دادن اجسام تا سرعت‌های بالاتر شکست خورده است. مثلاً، فرض کنید که ذراتی در یک شتابدهنده خطی شتاب داده شوند، و نمودار مربع سرعت حاصل را برحسب انرژی داده شده به ذره رسم کنید. نظریه نیوتونی پیش‌بینی می‌کند هر اندازه که سرعت زیاد باشد، نمودار به دست آمده یک خط راست خواهد بود زیرا انرژی جنبشی ذره با مربع سرعت حرکت آن متناسب است. به‌ویژه نباید مانعی در راه شتاب دادن ذره تا سرعتی بزرگتر از سرعت نور وجود داشته باشد. در عمل معلوم شده است که پیش‌بینی نیوتونی در سرعت‌های پایین صحیح است اما در سرعت‌های بالاتر نتایج تجربی از این پیش‌بینی منحرف می‌شوند: سرعت حاصل کمتر از مقداری است که نظریه نیوتونی پیش‌بینی می‌کند. این رویداد به‌گونه‌ای رخ می‌دهد که هر قدر انرژی به ذره بدهیم نمی‌توانیم آن را تا سرعتی بیش از سرعت نور شتاب دهیم (شکل ۱-۹). مقدار انرژی لازم برای

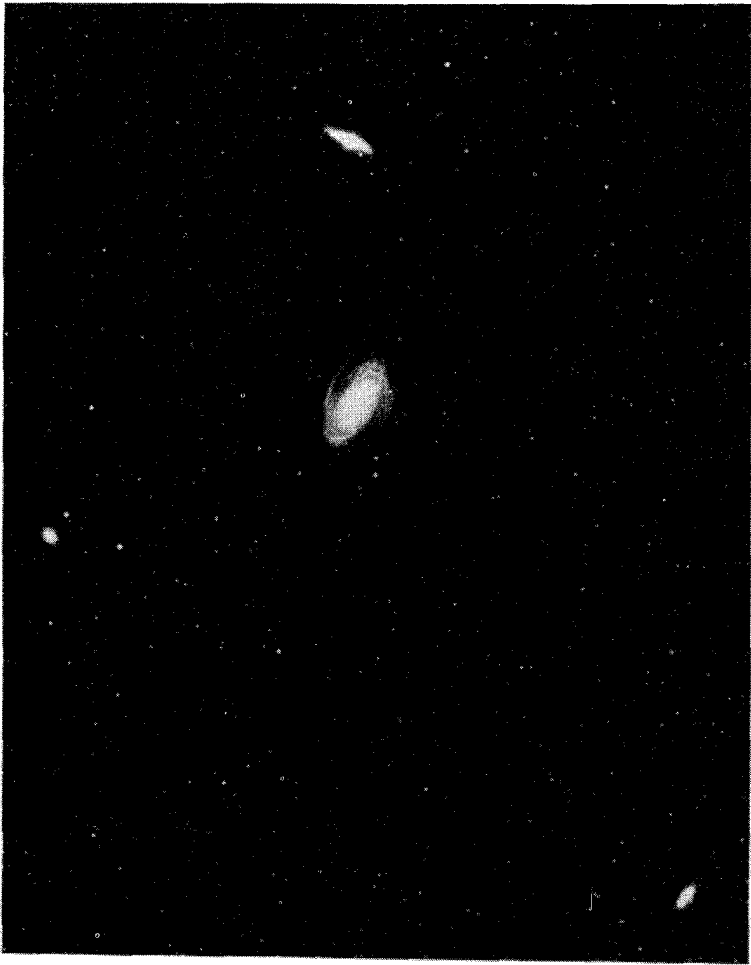


شکل ۹-۱ نمودار مربع سرعت یک ذره برحسب انرژی حرکتی که به آن داده می‌شود که نتایج تجربی و پیش‌بینی نظریه نیوتونی را نشان می‌دهد. هر قدر هم که به‌ذره انرژی بدهیم سرعت نور حد سرعت قابل دسترسی است.

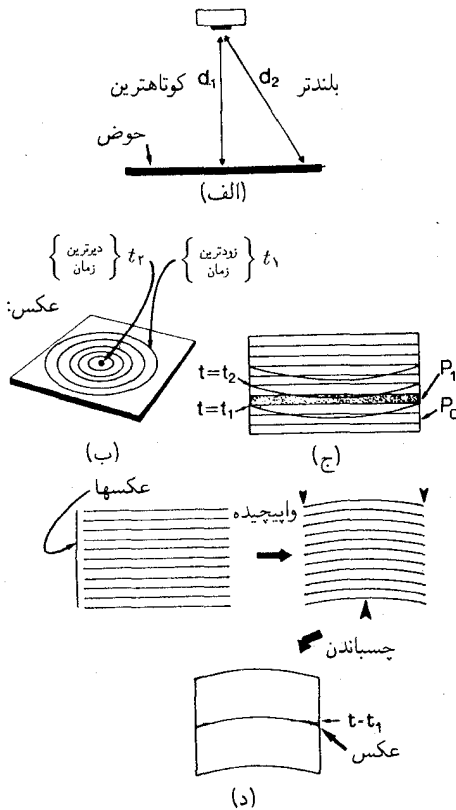
شتاب دادن ذرات سریع با افزایش سرعت بیشتر می‌شود؛ هر بار که انرژی را دو برابر کنیم افزایش سرعت کمتری حاصل می‌شود و هرگز به سرعت نور نمی‌رسیم. این یک نتیجه تجربی است که بارها به قیمت میلیاردها دلار اثبات شده است (هزینه شتابدهنده‌های ذره‌پرانرژی که اکنون مورد استفاده هستند). باید پول زیادی در شتابدهنده‌ها برای تولید یک اثر قابل مشاهده سرمایه‌گذاری شود، زیرا سرعت نور بسیار زیاد است. مسلماً حد سرعت نور به‌عنوان عامل محدودکننده برای سرعت ماشینها، هواپیما و سایر وسایل نقلیه روی زمین به‌کار نمی‌رود!

ضرورت به حساب آوردن سرعت نور

فاصله زمانی بین برق و رعد به‌ما یادآوری می‌کند که باید سرعت صوت را به حساب بیاوریم، اما این تنها چیزی نیست که باید به حساب آورده شود؛ ماهیت حدی سرعت نور در نسبیت خاص به‌این معناست که باید همیشه در تحلیل تمام پدیده‌های فیزیکی مدت زمان حرکت نور به حساب آورده شود. برای مثال، یک عکس در حالت کلی شامل تصاویری از اشیاء در فواصل مختلف و در نتیجه زمانهای مختلف حرکت نور است. این بدین معناست که تصاویر یک عکس نماینده حالات اشیاء عکسبرداری شده در زمانهای مختلف در گذشته است. بنابراین عکس ماه در میان درختها حالت ماه را در ۱٫۲۷ ثانیه قبل از حالت درختها نشان می‌دهد؛ عکسی از کهکشانهای دور دست با ستاره‌های زمینه (شکل ۱-۱۰) میلیونها سال فاصله زمانی بین حالت آن کهکشانها نسبت به حالت ستاره‌ها را نمایش می‌دهد (ستاره‌ها نوعاً در فواصلی قرار دارند که زمان لازم برای پیمودن آن هزارها سال نوری است اما فاصله کهکشانها به‌اندازه‌ای است که زمان پیمودن آن به میلیونها سال نوری می‌رسد). در هر مورد ما شیئی را در لحظه گسیل نور می‌بینیم؛ بنابراین دوربین الزاماً تأخیر زمانی حاصل را ثبت می‌کند. عکس روی جلد این کتاب یک تأخیر زمانی ۸ دقیقه و ۱۸٫۷ ثانیه‌ای



شکل ۱-۱۰ کهکشانهای دور دست و ستاره‌های نزدیکتر. این ستاره‌ها همگی متعلق به کهکشان ما هستند، که سیستمی ماریپیچ از ستاره‌ها و غبار مانند کهکشان M۸۱ است که در اینجا نشان داده شده است. چهار کهکشان "نزدیک" که در عکس دیده می‌شوند چند میلیون سال نوری با ما فاصله دارند (سه کهکشان کم‌نورتر از این هم دورتر هستند) اما تک ستاره‌ها در فاصله چند هزار سال نوری قرار دارند. این عکس تأخیرهای زمانی را که الزاماً در تمام مشاهدات ما از اشیای دور وجود دارند به‌خوبی نشان می‌دهد: ما شرایط کهکشانهای را در میلیون‌ها سال پیش و شرایط ستاره‌ها را در چند هزار سال پیش می‌بینیم. بنابراین تصاویر این اشیاء را در زمانهایی نشان می‌دهد که میلیون‌ها سال با یکدیگر اختلاف دارند.



شکل ۱-۱۱ (الف) دوربین در بالای مرکز یک حوض: فاصله d_1 تا مرکز به روشنی کوتاهتر از فاصله d_2 است که دورتر قرار دارد. در نتیجه، نوری که از مرکز به دوربین می‌رسد دیرتر از نوری که از کناره در همان لحظه به دوربین می‌رسد راه افتاده است. (ب) دایره با زمان تصویرگیری ثابت در عکس حوض P_1 ، دایره‌های بزرگتر مناظر با زمانهای قدیمتر هستند. (ج) رویه‌های همزمانی در دسته‌ای از عکسهای حوض (که از پهلو دیده می‌شود و ضخامت محدود هر عکسی را نشان می‌دهد). عکس P_1 سایه زده شده است. (د) تغییر شکل دسته عکسها قبل از چسباندن تا رویه‌های همزمانی بدرستی نماینده مقاطع افقی فضا زمان باشند.

را (که زمان لازم برای رسیدن نور از خورشید به زمین است) نشان می‌دهد، زیرا تصویر خورشید وضعیت آنجا را در حدود ۸ دقیقه قبل از اینکه آن نور زمین را روشن کند نشان می‌دهد. چون دوربین تصاویر را از طریق نوری که در یک لحظه به آن می‌رسد ثبت می‌کند، پس این عکس حالت خورشید را هشت دقیقه قبل از حالت زمین که در همان عکس تصویر شده است نشان می‌دهد. برای بررسی بیشتر این اثر دوربینی را در نظر بگیرید که در ارتفاع ۳ متری از مرکز یک حوض دایره‌ای به قطر ۸m [شکل ۱-۱۱ (الف)] قرار دارد. نور باید فاصله ۳m از مرکز حوض تا دوربین

را طی کند، که این کار $10^{-8} \text{s} = (3 \text{ m}) / (3 \times 10^8 \text{ m/s})$ طول می‌کشد. نور از کناره حوض باید مسافت 5 m را طی کند، این کار $5/3 \times 10^{-8} \text{s} = (5 \text{ m}) / (3 \times 10^8 \text{ m/s})$ طول می‌کشد. پس نور از کناره حوض $2/3 \times 10^{-8} \text{s}$ بیشتر از مرکز آن در راه است. یک عکس، لحظه‌ای را ثبت می‌کند که نور از مکانهای مختلف میدان دید به دوربین می‌رسند؛ اگر این مکانها در فواصل مختلفی از دوربین قرار داشته باشند، تصویر به‌دست آمده نمایانگر زمانهای مختلفی است که نور حرکت به‌سوی دوربین را آغاز کرده است. بنابراین وقتی دوربین عکسی از حوض برمی‌دارد، تصاویری از وضعیت نواحی مختلف حوض در زمانهای مختلف به‌دست می‌آید. نور از کناره حوض باید مسافت طولانی‌تری را بپیماید پس باید زودتر راه بیافتد تا همزمان با نوری که از مرکز حوض می‌آید به‌عدسی برسد. اگر خطوط دقیق همزمانی را روی یک عکس P_1 حوض که دوربین آن را برداشته است رسم کنیم، دایره‌ای به‌دست می‌آید که دایره خارجی قدیمیترین وضعیت حوض را، مثلاً در زمان t_1 ، و نقطه مرکزی وضعیت را در زمان t_2 نشان می‌دهد که $0.667 \times 10^{-8} \text{s}$ بعد از t_1 است [شکل ۱-۱۱(ب)]. عکسی که دوربین گرفته است تصویر لحظه‌ای حوض نیست! بنابراین با روی هم قرار دادن عکسهای متوالی و ذوب آنها برای به‌دست آوردن یک نمایش فضا-زمان، مقاطع افقی نمایانگر همزمانی دقیق نخواهد بود.^۱ با دور شدن از مرکز در یک برش افقی فضا-زمان (که یکی از تصاویر عکس خواهد بود)، وضعیت نمایش داده شده مربوط به زمانهای قدیمیتر است و این قدمت هر قدر از مرکز دورتر شویم بیشتر می‌شود. یک عکس قدیمیتر P_0 وجود خواهد داشت که وضعیت نقطه مرکزی را در زمان t_1 نشان دهد؛ این عکس در دسته عکسها در زیر P_1 قرار می‌گیرد (زیرا عکسهای جدیدتر روی عکسهای قدیمیتر قرار می‌گیرند). در نتیجه رویه‌های دقیق همزمانی در فضا-زمان (مثلاً، $t_1 = \text{const.}$) در مرکز در پایتترین وضع قرار دارند و با دور شدن از مرکز به‌سمت کناره به‌طرف بالا انحنا پیدا می‌کنند [شکل ۱-۱۱(ج)].

برای تصحیح این وضع، یعنی به‌دست آوردن یک نمایش فضا-زمان که در آن مقاطع افقی دقیقاً مقاطع همزمانی باشند، باید قبل از دسته کردن و ذوب عکسهای حوض آنها را تغییر شکل بدهیم و نواحی خارجی آنها را به‌طرف پایین خم کنیم [شکل ۱-۱۱(د)]. از این طریق می‌توان زمان حرکت نور را به‌حساب آورد و تصویری از فضا-زمان به‌دست آورد که همزمانی را دقیقاً به‌صورت رویه‌های افقی نمایش دهد.

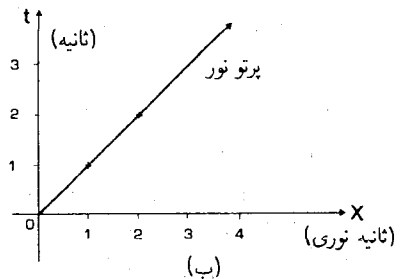
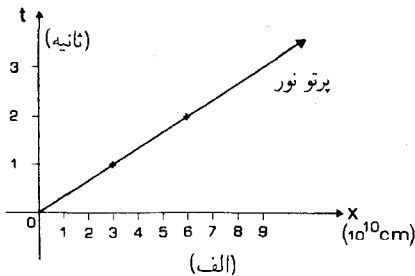
در این مورد خاص، این اثر عملاً قابل چشمپوشی است. اما، همیشه این‌طور نیست. مثلاً، تأخیرهایی را در نظر بگیرید که از مرکز تا کناره عکسی وجود دارد که ناظری در یک سفینه فضایی از دیسک یک کهکشان از فاصله 30000 سال نوری بالای مرکز آن کهکشان برمی‌دارد. اگر شعاع کهکشان 40000 سال نوری باشد، تأخیری که در عکس نمایش داده می‌شود 20000 سال خواهد بود، یعنی تصویر وضعیت در مرکز 20000 سال بعد از وضعیت در کناره دیسک خواهد بود.

۱. در بخش ۱-۱ ما زمان حرکت نور را در نظر نگرفتیم و از این رو برشهای افقی را دقیقاً همزمان محسوب کردیم. این برای اشیاء دارای حرکت کند در مقیاس زمان و طول روزمره ما تقریب خوبی است.

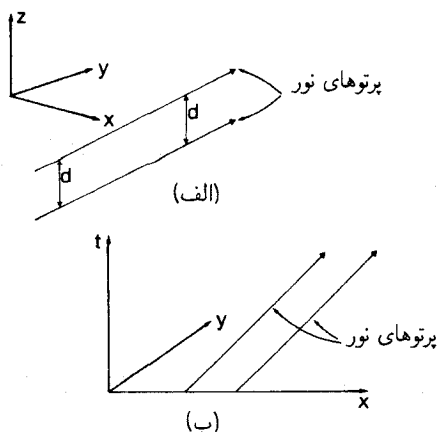
پرتوهای نور در فضا-زمان

در فضای مسطح، نور در امتداد خطوط مستقیم حرکت می‌کند؛ چون سرعت حرکت نور c ثابت است، مسیری که نور (یا دقیقتر، فوتون، یعنی یک ذره نور) در فضا-زمان طی می‌کند نیز یک خط راست خواهد بود. هر پرتو نور در فضا-زمان نمایانگر طی مسافت d در زمان t است که از $t = d/c$ به دست می‌آید و در آن نماد c نماینده سرعت نور است (بنابراین $c = 3 \times 10^{10} \text{ cm/s}$). مثلاً اگر یک پرتو نور در جهت محور x ها در رویداد O با مختصات $x = y = z = 0$ و $t = 0$ ، گسیل شود پس از 1 s در وضعیت $x = 1 \text{ ccm} = 3 \times 10^{10} \text{ cm}$ ، $y = z = 0$ خواهد بود؛ در زمان $t = 2 \text{ s}$ در وضعیت $x = 2 \text{ ccm} = 6 \times 10^{10} \text{ cm}$ و $y = z = 0$ ، و غیره [شکل ۱-۱۲ (الف)]. بهتر است که فواصل فضایی را برحسب مختصات فضایی که همان مختصات فضایی قبلی هستند که بر سرعت نور تقسیم شده‌اند؛ این مسافتها همان فواصل هستند که اکنون برحسب "زمانهای نوری" (ثانیه‌های نوری، سالهای نوری، و غیره) اندازه گرفته می‌شوند، در این صورت پس از 1 s نور در وضعیت $x = 1 \text{ ccm}$ و $y = z = 0$ خواهد بود و از این رو $X = (1 \text{ ccm}) / (c \text{ cm/s})$ برابر با ۱ ثانیه نوری، $Y = Z = 0$ ؛ در زمان $t = 2 \text{ s}$ این نور در وضعیت $X = (2 \text{ ccm}) / (c \text{ cm/s})$ برابر با ۲ ثانیه نوری، $Y = Z = 0$ خواهد بود؛ و غیره. در یک زمان دلخواه t ، نور در وضعیت $X = (ct) / c$ برابر با t ثانیه نوری، $Y = Z = 0$ [شکل ۱-۱۲ (ب)] خواهد بود. رابطه بین این نوع نمایش و نمایش قبلی با یادآوری اینکه ۱ ثانیه نوری برابر است با $3 \times 10^{10} \text{ km} = 3000000 \text{ km}$ ($1 \text{ s}) \times (c \text{ cm/s})$ به سادگی به دست می‌آید. راه دیگر تفکر در باره مختصات X ، Y ، و Z این است که، با استفاده از آنها ما در واقع یکاهای فواصل فضایی را طوری انتخاب کرده‌ایم که سرعت نور برابر ۱ باشد (زیرا در این صورت نور مسافت ۱ ثانیه نوری را در ۱ ثانیه طی می‌کند، و غیره).

در فضای تخت، پرتوهای نوری که در ابتدا موازی هستند هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند زیرا فاصله فضایی بین آنها ثابت می‌ماند [شکل ۱-۱۳ (الف)]; در نتیجه در نمودارهای فضا-زمان،



شکل ۱-۱۲ (الف) یک پرتو نور که پس از گسیل در رویداد O در جهت محور x ها حرکت می‌کند ($x = 0$ ، $t = 0$). وضعیت فضا-زمان آن در $t = 1$ و $t = 2$ نشان داده شده است. (ب) همان پرتو نور که با استفاده از مختصات فضایی $X = x/c$ نشان داده شده است (با یکای ثانیه نوری).

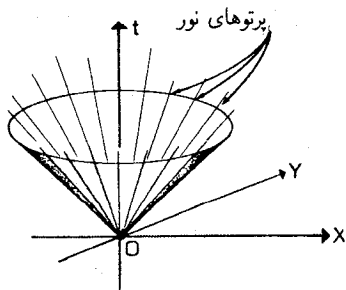


شکل ۱-۱۳ (الف) پرتوهای نور موازی در فضای سه بعدی با مختصات (x, y, z) . (ب) این پرتوها با خطوط راست موازی در فضا زمان نمایش داده شده‌اند.

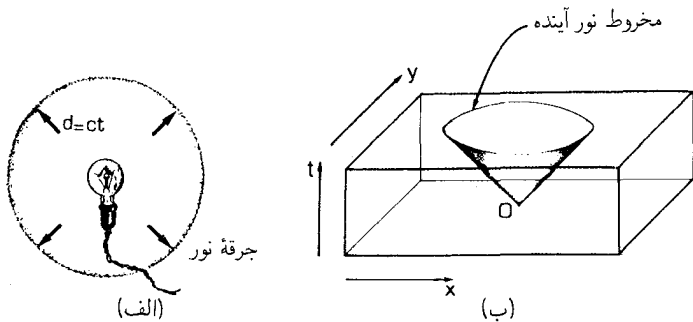
آنها را با خطوط راست با فاصله ثابت نشان می‌دهند [شکل ۱-۱۳ (ب)]. بعداً خواهیم دید که در فضا زمان خمیده این طور نیست.

مخروط نور و نواحی علیتی

مخروط نور آینده یک رویداد O مجموعه‌ای از تمام پرتوهای نوری است که از آن رویداد عبور می‌کنند (شکل ۱-۱۴). این مخروط نماینده مسیره‌های فضا زمان پرتوهای نور است که در تمام جهات از آن مکان و در آن زمان گسیل شده‌اند. می‌توان این مخروط را به عنوان تاریخچه یک جرقه نور در فضا زمان در نظر گرفت که در وضعیت و لحظه متناظر با رویداد O در تمام جهات گسیل می‌شود؛ بدین ترتیب، می‌توان تصور کرد که یک جرقه نورانی که از این مکان و در این زمان



شکل ۱-۱۴ مخروط نوری آینده رویداد O عبارت است از مجموعه تمام پرتوهای نوری که به طرف آینده هستند و از O عبور می‌کنند.



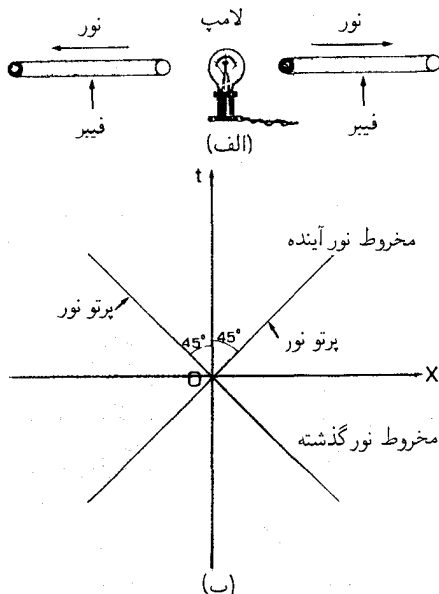
شکل ۱۵-۱ (الف) یک کره نور که از یک لامپ حیابی به طرف خارج منتشر می‌شود، (ب) نمایش موج کروی در یک نمودار فضا-زمان سه‌بعدی، که مخروط نور آینده O را به دست می‌دهد.

راه افتاده است و به یک کره نور تبدیل می‌شود در تمام جهات با سرعت نور گسترش می‌یابد. در زمان t پس از گسیل جرقه، نورکرای در فاصله $d = ct$ از منبع را تشکیل می‌دهد. برای قطعیت، فرض می‌کنیم که رویداد O دارای $(x = y = z = 0, t = 0)$ است.

نمایش یک مخروط نور کامل در یک نمودار مشکل است، بنابراین ما توجه خود را صرفاً به یک مقدار ثابت z ، مثلاً $z = 0$ ، معطوف می‌داریم و به این ترتیب تصویر این نور منتشر شونده را در صفحه دو بعدی به دست می‌آوریم. در این صفحه که با مختصات x و y توصیف می‌شود نور به طور دایره‌ای پراکنده می‌شود. این دقیقاً مشابه به موج کروی در حوض است [مثال (ب)]، دقیقاً با همان استدلالی که در آن مثال به کار برده شد [و منجر به شکل ۱۵-۱(ج) شد]، در یک نمودار سه‌بعدی فضا-زمان که انتشار نور را نشان می‌دهد جهت موج به صورت مخروطی است که در $(x = y = 0, t = 0)$ آغاز می‌شود و شعاع آن در زمان t برابر ct است [شکل ۱۵-۱(ب)]. از آنجا که مخروط نور آینده رویداد O که بدین ترتیب به دست می‌آید نمایانگر نوری است که از رویداد در تمام جهات گسیل می‌شود، بنابراین توسط تمام پرتوهای نور آینده که از O می‌گذرند تولید شده است.

برای نمایش این وضعیت به صورت روشن و استاندارد، بهتر است از مختصات $X = x/c$ ، $Y = y/c$ ، $Z = z/c$ که در بالا معرفی شدند استفاده کنیم. استفاده از آنها این مزیت را دارد که در این یکاها فاصله فضایی پیموده شده با زمان سپری شده برابر است (سرعت مؤثر نور ۱ است)؛ مثلاً، پس از زمان ۱ ثانیه، نور در کره‌ای به شعاع ۱ ثانیه نوری پراکنده می‌شود. در نتیجه مخروط نور با محور عمودی زاویه 45° می‌سازد، و نمایانگر این حقیقت است که فاصله افقی واحد در این نمودارها در واحد زمان طی می‌شود؛ با استفاده از این یکاها ترسیم مخروطهای نور ساده می‌شود [شکل ۱۵-۱(ب)] با استفاده از این قرارداد رسم شده است.

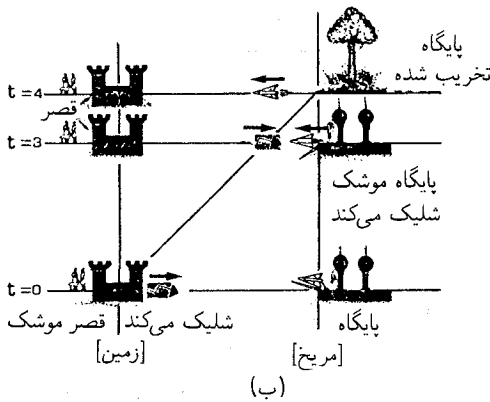
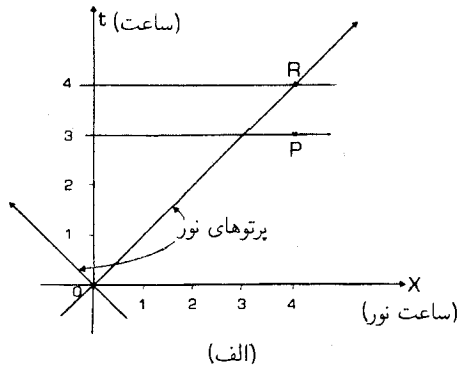
اغلب بهتر است که توجه خود را محدودتر کنیم و علاوه بر مقدار ثابت Z ، برای Y هم یک مقدار ثابت (مثلاً $Y = 0$) در نظر بگیریم. در این صورت نور در یک فضای یک بعدی که در آن X مختصه فضایی است منتشر می‌شود [این وضعیت در صورتی تحقق می‌یابد که مثلاً یک جفت



شکل ۱-۱۶ (الف) نوری که از یک لامپ در امتداد تارهای نوری در یک بعد منتشر می‌شود. (ب) نمایش این پرتوهای نور در نمودار دویبعدی فضازمان که مخروط نور آینده O را تولید می‌کند. مخروط نور گذشته O (یعنی، پرتوهای نور همگرا که به O منتهی می‌شوند) نیز نشان داده شده است.

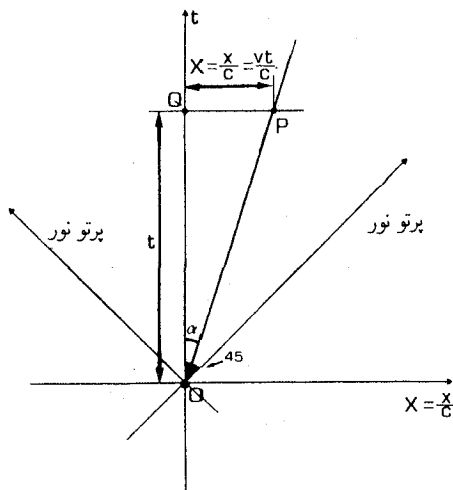
تار نوری نور را از یک لامپ در جهت مثبت و منفی X منتقل کنند، شکل ۱-۱۶ (الف). نمودار دویبعدی فضازمان متناظر با آن نوری را که از رویداد O گسیل شده است به صورت خطوطی نشان می‌دهد که با محور t زاویه $\pm 45^\circ$ می‌سازند [شکل ۱-۱۶ (ب)]; این دو پرتوی نورانی از O عبور می‌کنند، زیرا این خطها دقیقاً خطهایی هستند که در آنها یک تغییر واحد (عمودی) در زمان است با تغییر یک واحد (افقی) در فاصله. این نمودار یک مقطع دویبعدی [که یک بعد زمان و یک بعد فضا را نمایش می‌دهد] از شکل سه‌بعدی ۱-۱۵ (ب) است (که یک بعد زمان و دو بعد فضا را نمایش می‌دهد). در این نمودار ما پرتوهای نور را به گذشته O نیز گسترش داده‌ایم؛ پرتوهای نور همگرایی که از گذشته به O منتهی می‌شوند مخروط نور گذشته آن را تولید می‌کنند، و نماینده تپهای نور همگرایی هستند که در زمان $t = 0$ به وضعیت ($X = Y = Z = 0$) می‌رسند.

اهمیت مخروط نور یک رویداد ناشی از آن است که این مخروط حدود ناحیه‌ای از فضازمان را مشخص می‌کند که می‌تواند تصادفاً از آن رویداد متأثر شود. مثلاً، فرض کنید رئیس جمهور لوگارفونوف از ترانسیلوانیا هنگام ظهر اطلاعاتی دریافت می‌کند که بر مبنای آن در ساعت ۳:۰۰ بعدازظهر از یک پایگاه سری در مریخ یک موشک هسته‌ای به طرف قصر او در زمین پرتاب خواهد



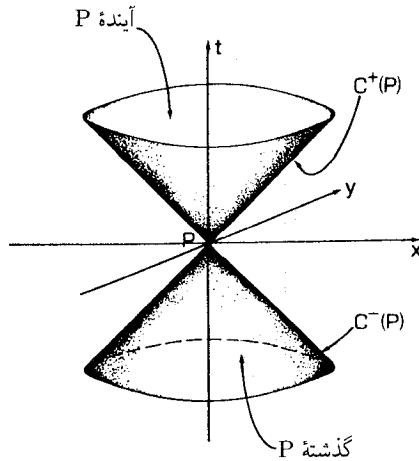
شکل ۱-۱۷ (الف) یک نمودار فضا-زمان که رویداد $P(X = 4, t = 3)$ را نشان می‌دهد که در آن موشکها از مریخ به طرف زمین شلیک می‌شوند. در زمان $t = 0$ در زمین (در $X = 0$) دیگر برای جلوگیری از پرتاب این موشکها خیلی دیر است؛ زیرا تب لیزری که از این رویداد O گسیل می‌شود، در رویداد $R(X = 4, t = 4)$ ، یک ساعت پس از اینکه موشکها پرتاب شده‌اند به مریخ می‌رسد. (ب) ترسیم این رشته رویدادها با دیدگاههای فضایی لحظه‌ای متوالی. در $t = 0$ ، قصر پرتابه‌ای به سوی پایگاه موشک شلیک می‌کند؛ در $t = 3$ ، پایگاه یک موشک شلیک می‌کند در حالی که پرتابه هنوز یکساعت با آن فاصله دارد؛ در $t = 4$ ، پایگاه تخریب می‌شود اما موشک در راه به سوی قصر است. به تناظر بین این دیدگاههای فضایی و نمودار فضا-زمان توجه کنید. دلیل اینکه رویداد P نمی‌تواند از رویداد O تأثیر بپذیرد این است که P خارج از مخروط نور آینده O قرار دارد (پرتو نور OR روی این مخروط نور قرار دارد).

شد. او بلافاصله با فشار دگمه لیزرهای سوپر Z خود را به طرف پایگاه مریخ می‌فرستد، اما خیلی دیر شده است: پرتابه‌های انرژی آزاد شده که با سرعت نور حرکت می‌کنند، طی ۴ ساعت به مریخ می‌رسند و بنابراین سکوی پرتاب موشک را ۱ ساعت پس از ترک موشک نابود می‌کنند. فرض کنید رویداد دریافت اطلاعات توسط او نقطه O باشد؛ در این صورت این رویداد (که با زمان و مختصات فضایی مشخص می‌شود) ظهر و در محل قصر اوست. مخروط نور O در شکل ۱-۱۷



شکل ۱-۱۸ یک جهانخط مستقیم که از O و P می‌گذرد نمایانگر حرکت نسبت به چارچوب مرجع (t, X) با سرعت v در جهت X است؛ در زمان t ، در وضعیت $X = x/c = vt/c$ قرار دارد. زاویه این جهانخط با امتداد قائم از $\tan \alpha = X/t = v/c$ به دست می‌آید. برای یک پرتو نور، $v = c$ و $\tan \alpha = 1$ است.

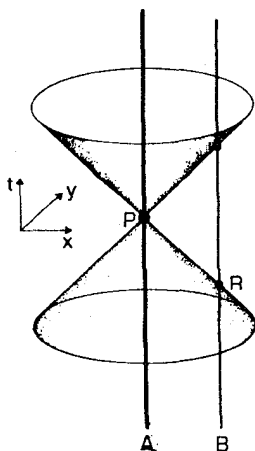
ترسیم شده است، که در آن، برای سهولت، زمان از O برحسب ساعت و فواصل فضایی از O به ساعت نوری اندازه گرفته می‌شود (پس O دارای مختصات $t = 0$ و $X = 0$ است). در این صورت رویداد پرتاب موشکها P با مختصات $t = 3$ و $X = 4$ است. مخروط نور به روشنی نشان می‌دهد که باریکه لیزری که از O گسیل شده است دیرتر از آنکه بتواند تأثیری بر P داشته باشد به مریخ می‌رسد. P را نمی‌توان از O تحت تأثیر قرار داد زیرا P خارج از مخروط نور O است. علت این محدودیت البته ماهیت محدودکننده سرعت نور است. زاویه بین جهانخط یک ذره در فضا-زمان و جهت قائم، به‌آهنگ تغییر فاصله فضایی آن در امتداد جهانخط به‌زمان بستگی دارد، و از این رو نمایانگر سرعت حرکت ذره نسبت به دستگاه مختصات موردنظر است (شکل ۱-۱۸). بنابراین، ماهیت محدودکننده سرعت نور به این معناست که هیچ جهانخطی نمی‌تواند با جهت قائم زاویه‌ای بزرگتر از زاویه بین مخروط نور و امتداد قائم بسازد؛ اگر از مختصات (X, Y, Z) استفاده کنیم، هیچ جهانخطی نمی‌تواند زاویه‌ای بزرگتر از 45° با محور عمودی بسازد. به‌علاوه، از هر رویدادی فقط می‌توان نور یا علائم رادیویی را به رویدادهایی فرستاد که در مخروط نور آینده آن قرار داشته باشند. با در نظر گرفتن این مطلب، روشن است که ناظر رویداد O نمی‌تواند رویدادهایی را که خارج از مخروط نور آینده O قرار دارند تحت تأثیر قرار دهد (برای انجام این کار باید تصادفاً رویدادها را در امتداد مسیرهایی تحت تأثیر قرار داد که نمایانگر سرعت‌هایی بزرگتر از سرعت نور هستند). این یک محدودیت اساسی در برقراری هر نوع ارتباط است، که از نظریه نسبیت ناشی



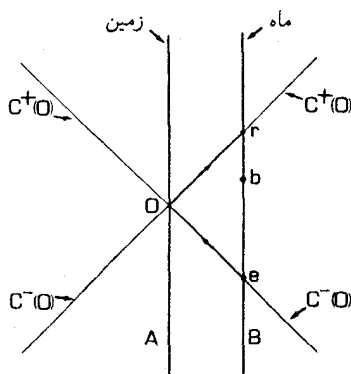
شکل ۱-۱۹ مخروطهای نور آینده و گذشته $C^+(P)$ ، $C^-(P)$ یک رویداد P آینده P (داخل مخروط نور آینده) و گذشته P (داخل مخروط نور گذشته) را تعیین می‌کند. رویدادهایی که خارج از این مخروطهای نور قرار دارند نمی‌توانند از P تأثیر بپذیرند و نمی‌توانند آنچه را که در P اتفاق می‌افتد تحت تأثیر قرار دهند.

می‌شود. در نتیجه برای هر رویداد P ، می‌توانیم فضازمان را به پنج ناحیه علیتی متمایز تقسیم کنیم (شکل ۱-۱۹). داخل مخروط نور آینده $C^+(P)$ ناحیه‌ای است که می‌تواند از اشیایی که از رویداد P با سرعتی کمتر از سرعت نور حرکت می‌کنند تأثیر بپذیرد؛ خود مخروط نور آینده می‌تواند از P با علانمی که با سرعت نور حرکت می‌کنند متأثر شود. مخروط نور گذشته نماینده مجموعه رویدادهایی در فضازمان است که علانم ارسالی از آنها با سرعت نور به موضع فضا و زمانی که رویداد P نمایانگر آن است رسیده‌اند. بدین ترتیب در عکسی که در P از یک شیء برداشته می‌شود، نوری که به P می‌رسد وضعیت را در لحظه‌ای به ثبت می‌رساند که جهانخط آن شیء مخروط نور گذشته ما را قطع می‌کند (شکل ۱-۲۰)؛ دور بین الزاماً تأخیرهای زمانی حاصل را ثبت می‌کند (مانند عکس روی جلد). داخل مخروط نور گذشته $C^-(P)$ ناحیه‌ای در فضازمان است که از آن رویداد P را می‌توان با اشیایی که کندتر از سرعت نور حرکت می‌کنند تحت تأثیر قرار داد. خارج مخروطهای نور ناحیه‌ای است که نمی‌تواند از P تأثیر بپذیرد و P را تحت تأثیر قرار دهد.

این وجه اخیر را می‌توان با در نظر گرفتن یک رویداد خاص در روی کره زمین نشان داد، در این رویداد یک فضاورد در ماه با یک تلسکوپ بینهایت قوی مشاهده می‌شود. فرض کنید که در این زمان می‌دیدیم که سنگ بزرگی در سرایشی به طرف فضاورد در حرکت است. چون ۱۲۷ ر ثانیه طول می‌کشد تا نور از ماه به زمین برسد، ما رویدادی را مشاهده می‌کنیم که در فاصله ۱۲۷ ر ثانیه نوری قرار دارد و محل آن در مخروط نوری گذشته در ۱۲۷ ر ثانیه (شکل ۱-۲۱) واقع است. اکنون برای فرستادن یک اخطار رادیویی به فضاورد، در صورتی که سنگ پس از دو ثانیه به او برسد،



شکل ۱-۲۰ عکسی که ناظر A از رویداد P برمی‌دارد، رویداد R در تاریخ B را ترسیم می‌کند، که در آن جهانخط B مخروط نور گذشته P را قطع می‌کند.



شکل ۱-۲۱ مخروطهای نور گذشته و آینده یک رویداد O در تاریخ یک ناظر A روی زمین، که (در رویداد O) رویداد e را (سنگ تهدیدکننده‌ای که به پایین می‌غلند) در تاریخ یک فضاپرونده B در روی ماه مشاهده می‌کند. ناظر A بلافاصله یک علامت هشداردهنده به B می‌فرستد؛ اما این علامت در رویداد r، پس از اصابت سنگ به فضاپرونده در رویداد b در تاریخ وی به او می‌رسد. چون b خارج از مخروط نور آینده O قرار دارد، ناظر واقع در O نمی‌تواند آنچه را که در آنجا اتفاق می‌افتد تحت تأثیر قرار دهد.

دیر شده است، زیرا رویدادی که در آن سنگ به او می‌رسد خارج از آینده علیتی رویداد دریافت قرار دارد. با توجه به محدودیتهای موجود در ارتباطات در اثر ماهیت محدودکننده سرعت نور، هیچ راهی برای ارسال به موقع علامت هشداردهنده وجود ندارد. محدودیتهای علیتی مورد بحث در اینجا اساسی هستند، اما در زندگی روزمره معمولی ما تأثیر

قابل ملاحظه‌ای ندارند زیرا سرعت نور بسیار زیاد است: در مورد اتومبیل و هواپیما و غیره روی سطح زمین و یا در نزدیکی آن تأخیر حاصل در ارتباطات قابل چشم‌پوشی است. این محدودیتها وقتی قابل ملاحظه می‌شوند که یا با فاصله‌ها و زمانهای بزرگ سروکار داشته باشیم، و یا مقیاسهای زمانی دخیل در فرایندها طوری باشند که سرعت نور یک عامل مهم محدودکننده باشد. یک مثال [از این نوع] ابرکامپیوترها هستند: یک حد نهایی بر سرعت ممکن محاسبات آنها تحمیل شده است زیرا اطلاعات در آنها را نمی‌توان با سرعتی بالاتر از سرعت نور از یک قسمت به قسمت دیگر انتقال داد؛ این نکته تعداد محاسبات ممکن در هر ثانیه را محدود می‌کند. به این دلیل، فاصله بین اجزای آن را باید کوتاه نگاه داشت؛ بدین ترتیب ابرکامپیوترهای آینده ماشینهای کوچکی خواهند بود.

تمرینها

۶-۱ یک ماهواره از یک ناحیه مربع شکل زمین به ضلع 800 km از ارتفاع 300 km بالای سطح زمین عکسهای شناسایی برمی‌دارد. مقدار تأخیر از مرکز تا حاشیه عکس چقدر است؟ برای سادگی محاسبه سطح زمین را تخت فرض کنید.

۷-۱ فرض کنید که یک "فکرخوان"، در لندن ادعا کند که می‌داند برادر دوقلوش در زلاند نو در هر لحظه چه می‌گوید، و این کار را به فاصله‌ای کمتر از یک صدم ثانیه پس از اینکه حرف از دهان او خارج شد انجام می‌دهد. آیا چیزی غیرعادی در مورد این ادعا وجود دارد؟ [شعاع زمین در حدود 6000 km است.]

۸-۱ سفینه R نسبت به ناظر A در مرخ z با سرعت v حرکت می‌کند به طوری که $v/c = 1/2$ ؛ در $t = 0$ وضعیتهای این دو بر هم منطبق است. جهانخطهای A و R را در یک نمودار (t, Z) رسم کنید. در $t = 2 \text{ s}$ ، سفینه در دو جهت جلو و عقب علامت نوری گسیل می‌کند؛ پرتوهای نوری متناظر را در نمودار فضا-زمان خود رسم کنید. ناظر A در زمان $t = 1 \text{ s}$ یک علامت به سفینه می‌فرستد؛ زودترین زمانی که او می‌تواند انتظار دریافت جواب داشته باشد چیست؟ [تمام فاصله‌ها و زمانها در چارچوب مرجع ناظر A اندازه گرفته می‌شوند.]

۹-۱ نموداری رسم کنید که نشان دهد "گذشته" هر نقطه P (یعنی مخروط نور گذشته و درون آن) روی هر جهانخط، همیشه شامل "گذشته" هر نقطه زودتر از آن Q در آن جهانخط می‌شود، این نتیجه را از نظر فیزیکی تعبیر کنید.

تمرین کامپیوتری ۱

برنامه‌ای بنویسید که یا (الف) به عنوان ورودی فاصله فضایی D (برحسب مایل یا کیلومتر) را بپذیرد و خروجی آن زمان T (برحسب ثانیه، دقیقه، یا ساعت) باشد که نور این فاصله را می‌پیماید؛ یا (ب) به عنوان ورودی زمان حرکت نور T را بپذیرد و خروجی آن فاصله D متناظر با آن باشد. این برنامه را برای فواصل مناسب در زمین و در منظومه شمسی آزمایش کنید.

اکنون برنامه را طوری تغییر دهید تا علاوه بر آن فاصله تغییر مقیاس یافته $D \setminus = D/c$ را

چاپ کند، که در آن c سرعت نور است. به سادگی می‌توانیم فرض کنیم که در آن Z است که در بالا مورد بحث قرار گرفت و در آن سرعت نور واحد است. خروجی شما باید همیشه یکاهای مورد استفادهٔ زمان و فاصله را بیان کند.

۱-۳ حرکت نسبی در نسبیت خاص

دیدیم که حتی در نظریهٔ نیوتونی، دو ناظر که نسبت به هم حرکت می‌کنند، در حالت کلی، دیدگاه‌های مختلفی از فضا-زمان دارند. این را هم دیدیم که چگونه می‌توان این دیدگاه‌های مختلف نیوتونی را با هم وفق داد. برطبق نظریهٔ نسبیت خاص اینشتین برخی وجوه اساسی وجود دارند که برای ناظرهایی که از چارچوب‌های مرجع مختلف استفاده می‌کنند مشترک هستند. این وجوه در اصل نسبیت خاص توصیف شده‌اند:

قوانین فیزیک برای همهٔ ناظرهای بدون شتاب یکسان است.

در نظریهٔ نیوتونی این نتیجه، تا آنجا که به قوانین دینامیک مربوط می‌شود، به خوبی جاافتاده است: برای یک آزمایشگر هیچ راهی وجود ندارد که با یک آزمایش دینامیکی بتواند حرکت یکنواخت مطلق را تعیین کند. مثلاً اگر یک رشته آزمایش انجام دهیم که شامل اندازه‌گیری حرکت گویهای بیلیارد برخوردکننده، آونگ‌های تعیین زمان و غیره در کوبهٔ یک قطار در حال حرکت یکنواخت باشد، نتایج حاصل مستقل از سرعت حرکت قطار خواهد بود. بنابراین، با این نوع آزمایشها نمی‌توان سرعت حرکت قطار را تعیین کرد، زیرا این آزمایشها از آن سرعت تأثیر نمی‌پذیرند؛ در واقع، این نتایج دقیقاً با نتایجی که در یک قطار ساکن به دست می‌آید یکسان‌اند. همین‌طور، اگر آزمایشها در یک هواپیمای کنکورده که با سرعتی دو برابر سرعت صوت به نرمی حرکت می‌کند انجام می‌شود همان نتایج به دست می‌آید. این مجموعه آزمایشها اصل نسبیت نیوتونی را ثابت می‌کند که طبق آن قوانین دینامیک ذرات و اجسام صلب در تمام چارچوب‌های بدون شتاب یکسان‌اند.

نبوغ اینشتین گسترش این اصل به تمام قوانین فیزیک است (این اصل مثلاً در اپتیک، ترمودینامیک، اثرهای الکترومغناطیسی و فیزیک ذرات بنیادی به کار می‌رود). بدین ترتیب اصل خاص نسبیت ایجاب می‌کند که مطلقاً هیچ آزمایش فیزیکی نمی‌تواند حرکت مطلق یک جسم با حرکت یکنواخت را اثبات کند (حرکت نسبت به دیگر اجسام به سادگی قابل اثبات است، اما موضوع این نیست: نکتهٔ اینجاست که نمی‌توانیم حرکت زمین را در یک لحظهٔ خاص معین کنیم و به معنای مطلق کلمه بگوییم که مثلاً سرعت آن 350 km/s در فلان جهت است) علت آن است که هیچ آزمایشی نمی‌تواند چنین حرکت مطلق را آشکار سازد؛ و آن بدین دلیل است که قوانین فیزیک از هیچ حرکت یکنواخت مطلق تأثیر نمی‌پذیرند.

اصل نسبیت را می‌توان به طریق دیگر نیز بیان کرد و آن هم‌ارزی تمام چارچوبهای مرجع لخت است. مجموعه مختصاتی که یک ناظر برای توصیف فضا زمان مورد استفاده قرار می‌دهد و خود در مبدأ آن ($x = y = z = 0$) قرار دارد چارچوب مرجع او را تشکیل می‌دهد. چارچوب مرجع را لخت گوئیم اگر بدون چرخش و بدون شتاب باشد. قوانین حرکت نیوتون ایجاب می‌کند که یک جسم تنها در صورتی نسبت به یک چارچوب مرجع لخت شتاب پیدا کند که نیروهای حاصل از اجسام دیگر بر آن اثر کنند؛ در واقع می‌توان از این خصوصیت برای مشخص کردن چارچوبهای لخت استفاده کرد. اگر چارچوبی لخت باشد، هر چارچوب دیگری که نسبت به آن به طور یکنواخت حرکت کند نیز لخت است. بنابراین می‌توان گفت که از هر چارچوب مرجعی می‌توان استفاده کرد و قوانین فیزیک تغییر نخواهند کرد.

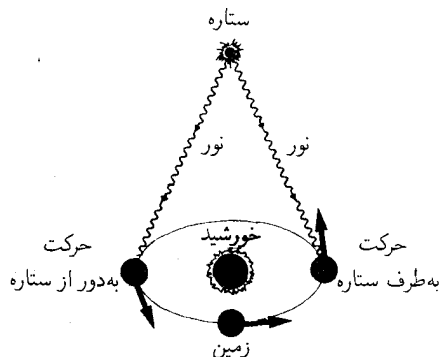
در ابتدا این اصل مبهم به نظر می‌رسد، اما پس از برخورد با این اصل در موارد مختلف و مشاهده نتایج آن، ماهیت آن روشن می‌شود. این یک اصل وحدت‌بخش توانمند است که تمام قوانین شناخته شده فیزیک را در برمی‌گیرد. هم اکنون روشن است که این اصل به صورت زیر قابل استفاده است: این اصل ایجاب می‌کند که اگر جسمی به طور یکنواخت حرکت کند، مجبور نیستیم قبل از کاربرد قوانین فیزیک در مورد آن حالت حرکت آن را مشخص کنیم. مثلاً اگر حرکت هواپیما یکنواخت باشد کار مولد برق و موتورها در یک هواپیما از حرکت هواپیما تأثیر نمی‌پذیرند. بنابراین ما مجبور نیستیم در طراحی موتورها سرعت هواپیما را هنگام کاربرد در نظر بگیریم؛ یک موتور برقی که روی زمین کار کند می‌تواند به همان خوبی در سفینه‌ای که با سرعت یکنواخت ۲۵۰۰۰ مایل در ساعت نسبت به سطح زمین در حرکت است نیز کار کند. اگر این طور نبود مهندسی کاری واقعاً مشکل می‌بود.

ناوردایی سرعت نور

یکی از مهمترین تبعات اصل نسبیت، اصل ناوردایی سرعت نور اینشتین است.

سرعت نور در فضای تهی برای همه ناظرها بدون توجه به حرکت منبع و ناظر یکسان است.

اگر سرعت نور مستقل از حرکت ناظر نبود، می‌توانستیم حرکت مطلق را با اندازه‌گیری سرعت نور در جهتهای مختلف آشکار کنیم و از این طریق اصل نسبیت را نقض کنیم. با وجود این ناوردایی روشن است که سرعت نور باید مستقل از حرکت منبع نیز باشد، چه در غیر این صورت می‌توانستیم حرکت مطلق آن را با اندازه‌گیری نوری که از خود گسیل می‌کرد (و همه ناظرها آن را یکسان اندازه می‌گرفتند) آشکار سازیم. این اصل را همه شواهد تجربی تأیید می‌کنند، به‌ویژه، آزمایش مشهور مایکلسون-مورلی که نشان داد سرعت نوری که از ستاره‌های دور دست گسیل می‌شود از زمین یکسان اندازه گرفته می‌شود. چه زمین در مدارش به دور خورشید به طرف آن



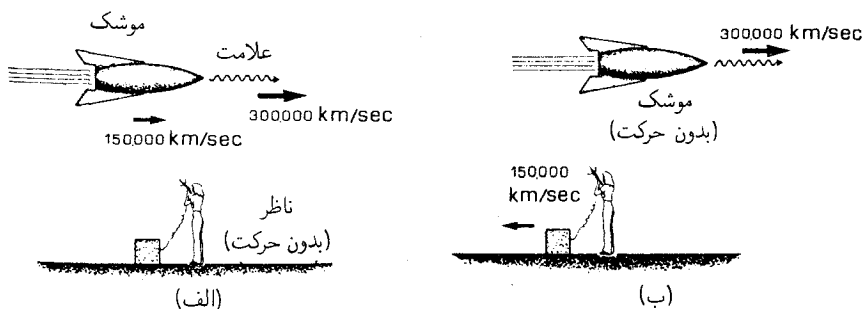
شکل ۱-۲۲ در آزمایش مایکلسون-مورلی، سرعت نور گسیل شده از یک ستاره وقتی که زمین در مدارش به دور خورشید به طرف ستاره می‌رود و هنگام دور شدن از آن اندازه‌گیری می‌شود. در هر دو مورد برای سرعت نور نتیجه یکسانی به دست می‌آید: این سرعت مستقل از حرکت نسبی منبع و ناظر است.

ستاره حرکت کند چه از آن دور شود (شکل ۱-۲۲). به علاوه، این اصل نیز نتیجه اصل نسبیت است که در دینامیک ذرات به کار گرفته می‌شود، زیرا سرعت نور سرعت حدی حرکت ذره است (با بخش قبل مقایسه کنید). طبق این اصل اگر سرعت نور در چارچوبهای مختلف متفاوت بود، امکان داشت که بتوان با استفاده از آزمایشهای دینامیکی (که هدف آنها تعیین سرعت حدی حرکت بود) حرکت مطلق در هر چارچوبی را تعیین کرد.

با توجه به اعتبار این نتیجه کاملاً روشن می‌شود که باید در طرز فکرمان در مورد بسیاری از چیزهایی که قبلاً بدیهی می‌دانستیم تجدید نظر کنیم. برای پی بردن به این مطلب، سه اثر مهم نسبیت خاص را در نظر می‌گیریم.

مسئله جمع سرعتها

ناظر A را در نظر بگیرید که روی زمین بدون حرکت است و موشکی را مشاهده می‌کند که با سرعت 150000 km/s حرکت می‌کند و در جهت حرکتش علامت نوری گسیل می‌کند [شکل ۱-۲۳ (الف)]. ناظر A سرعت این نور را 300000 km/s اندازه‌گیری می‌کند. اگر او سرعت حرکت نور را طبق اندازه‌گیری ناظر B در سفینه بر مبنای نظریه نیوتونی معمولی حساب کند، چنین استدلال خواهد کرد: "سرعت نور که از کنار من عبور می‌کند 300000 km/s است و سرعت سفینه که از کنار من رد می‌شود 150000 km/s در همان جهت است. بنابراین ناظر B در سفینه سرعت نور را $150000 \text{ km/s} = (300000 - 150000) \text{ km/s}$ اندازه می‌گیرد." اما اگر وضعیت را از چارچوب ناظر B [شکل ۱-۲۳ (ب)] بنگریم، سرعت نور 300000 km/s اندازه گرفته می‌شود، که طبق اصل ناوردایی سرعت نور همین طور هم باید باشد و این با محاسبات A تضاد فاحش دارد. قانون نیوتونی جمع سرعتها، وقتی با سرعتهای قابل مقایسه با سرعت نور سروکار



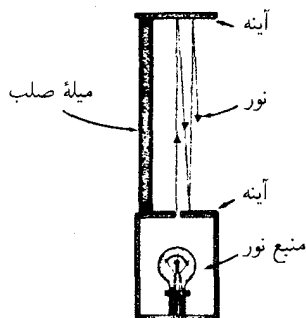
شکل ۱-۲۳ (الف) ناظر ساکن در روی زمین که سرعت علامت نوری گسیل شده از یک موشک سریع السیر را اندازه می‌گیرد. (ب) همان وضعیت از دیدگاه چارچوب سکون موشک.

داریم، کاملاً غلط است؛ باید قانون جدیدی جایگزین آن شود که با اصول نسبیت خاص سازگار باشد. قانون نیوتونی سرعتها نادرست است زیرا بر مبنای ایده‌های نادرست در مورد اندازه‌گیری طول و زمان قرار دارد که اصل نسبیت خاص در آنها به اندازه کافی در نظر گرفته نشده است. ما قانون صحیح جمع سرعتها در نسبیت را در بخش ۳-۲ تعیین خواهیم کرد.

وابستگی آهنگ نسبی کار ساعت به حرکت نسبی

روشن است که در نظریه نسبیت در اندازه‌گیری زمان واقعه غریبی رخ می‌دهد که دلیل آن این "آزمایش فکری" ساده اینستین است. فرض کنید شخصی با یک تلسکوپ قوی یک ساعت بزرگ (مانند ساعتی که روی برج در میدان مرکزی برن قرار دارد) را از یک تراموای سریع السیر که از آن دور می‌شود مشاهده می‌کند (!) و درست هنگام ظهر از کنار ساعت رد می‌شود. اگر تراموا می‌توانست با سرعت نور حرکت کند، ناظری که در آن قرار داشت ساعت را بی حرکت می‌دید زیرا نور گسیل شده هنگام ظهر دقیقاً با همان سرعت تراموا از ساعت دور می‌شد، و نوری که پس از آن گسیل می‌شد، نمی‌توانست به ناظر برسد. بنابراین با استفاده از تلسکوپ، او عقربه‌های ساعت را همواره روی ساعت ۱۲ می‌بیند. در واقع تمام وقایع اطراف برج ساعت هم دقیقاً همان‌گونه که در ظهر بودند به نظر او می‌رسیدند، زیرا نوری که در تمام زمانهای بعدی از برج به او می‌رسد نوری است که در آن ساعت برج را ترک گفته است. اگر کسی می‌توانست با سرعت نور حرکت کند، زمان برای او متوقف می‌شد!

برای تحلیل بیشتر چگونگی رفتار زمان طبق نظریه نسبیت خاص، باید چگونگی اندازه‌گیری زمان با یک ساعت را در نظر بگیریم. به طور کلی، ساعت سازوکار پیچیده‌ای دارد که تحلیل آن مشکل است. از نظر مفهومی ساده‌ترین آنها "ساعت نوری" است که با استفاده از یک منبع نور ساخته می‌شود و علامی را گسیل می‌کند که پس از طی فاصله d_0 به منبع بازتابیده می‌شوند (شکل ۱-۲۴). فاصله زمانی بین گسیل و بازگشت علائم به آینه "تیک"های چنین ساعتی را

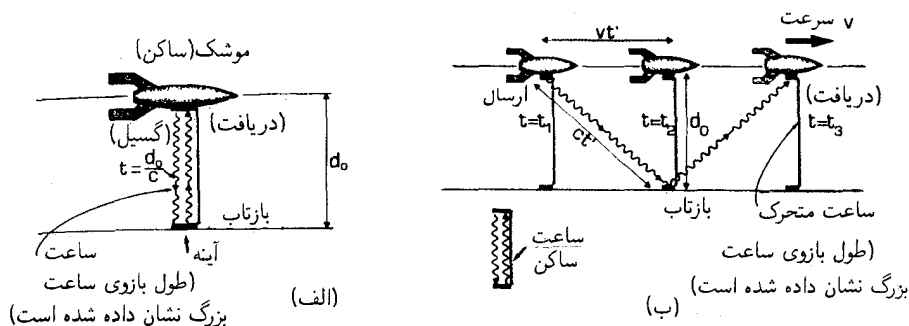


شکل ۱-۲۴ یک "ساعت نوری" متشکل از دو آینه که با یک میلۀ صلب در فاصله ثابت قرار گرفته‌اند و یک منبع نوری "تیک"‌های این ساعت زمانی است که تپ نور از آینه پایینی بازتابیده می‌شود.

تعیین می‌کنند؛ این تیکها در فاصله $2t$ از یکدیگر قرار دارند که در آن

$$2t = 2d_0/c \Leftrightarrow t = d_0/c \quad (1-1)$$

(زیرا علائم با سرعت نور حرکت می‌کنند). فرض کنید که چنین ساعت نوری به موشکی متصل است [شکل ۱-۲۵ الف]؛ از دیدگاه چارچوب موشک، زمان اندازه‌گیری شده از معادله ۱-۱ بدون توجه به حالت حرکت آن تعیین می‌شود (به دلیل اصل نسبیت). اکنون فرض می‌کنیم که سفینه با سرعت v از کنار یک ساعت مشابه در روی زمین عبور کند [شکل ۱-۲۵ ب]. از نظر زمین، نور همواره با سرعت یکسان حرکت می‌کند؛ بنابراین فاصله زمانی بین گسیل و دریافت نور با ساعت سفینه از زمین $2t'$ اندازه گرفته می‌شود، در حالی که فاصله‌ای که نور طی می‌کند با استفاده از



شکل ۱-۲۵ الف) یک ساعت نوری که به موشک متصل است و از چارچوب سکون موشک مشاهده می‌شود. نور از یک آینه در فاصله d_0 بازتابیده می‌شود، و پس از زمان $2t$ دوباره دریافت می‌شود. (ب) یک ساعت نوری در موشکی که با سرعت v نسبت به یک ساعت مشابه روی زمین حرکت می‌کند. یک ناظر در روی زمین نوری را که سفینه دوباره دریافت می‌کند پس از گذشت $2t'$ می‌بیند.

قضیه فیثاغورس تعیین می‌شود، بنابراین

$$c^2 t'^2 = v^2 t'^2 + d_0^2$$

و این ایجاب می‌کند که

$$t'^2(c^2 - v^2) = d_0^2 \Leftrightarrow t'^2(1 - v^2/c^2) = d_0^2/c^2$$

با جذر گرفتن و تقسیم بر $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ داریم

$$t' = (d_0/c)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

اما آهنگ ساعت در روی زمین را ۱-۱ تعیین می‌کند. بدین ترتیب

$$t' = t/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \quad (1-2\text{الف})$$

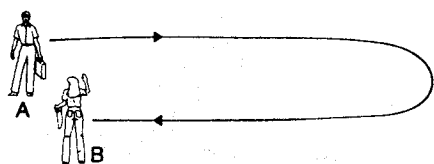
می‌بینیم که حتی با ساعت‌های یکسان، تیک ساعت‌های در حالت حرکت نسبی گذشت زمان را با آهنگ‌های متفاوت اندازه می‌گیرند. چون t' از t بزرگتر است، ساعت متحرک از نظر زمین به نسبت

$$t'/t = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \quad (1-2\text{ب})$$

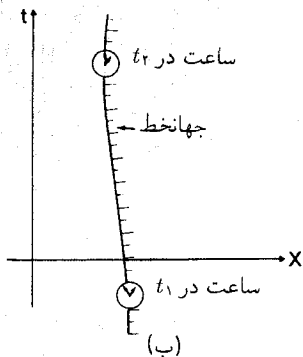
”کندتر کار می‌کند“. این اثر هنگامی که حرکت با سرعت‌هایی نزدیک به سرعت نور انجام می‌گیرد قابل ملاحظه می‌شود. ما این نتیجه را در بخش ۳-۴ به دست خواهیم آورد و در بخش ۳-۶ مورد تأیید تجربی آن بحث خواهیم کرد.

پارادوکس دوقلوها

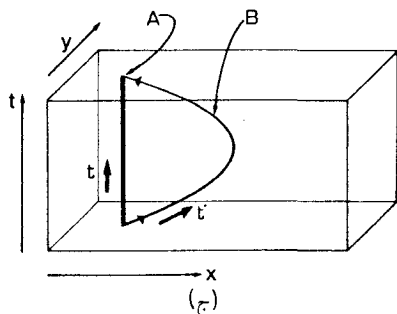
یک مثال جالب توجه این اثر چیزی است که به اصطلاح ”پارادوکس (باطل‌نمای) دوقلوها“ خوانده می‌شود. فرض کنید یکی از دوقلوها (یعنی خواهر یا برادرهایی که در یک‌روز به دنیا آمده‌اند) در یک سفینه سریع‌السیر به یک مسافرت طولانی برود و دیگری در خانه بماند [شکل ۱-۲۶(الف)]. این دوقلوها هم‌ارز نیستند زیرا یکی از آنها شتاب‌هایی متغیر وابسته به تغییر سرعت سفینه‌ای را که در آن است آزموده است در صورتی‌که دیگری چنین تجربه‌ای را ندارد. دوقلوی ساکن آهنگ کار سیستم‌های زیستی دوقلوی متحرک را کندتر اندازه می‌گیرد. سن آنها با ساعت‌های ایده‌آل در نزد هر یک از آنها اندازه‌گیری می‌شود، و وقتی آنها دوباره ملاقات کنند سن آنها یکی نخواهد بود؛ آنکه در



دوقلوها (الف)



(ب)

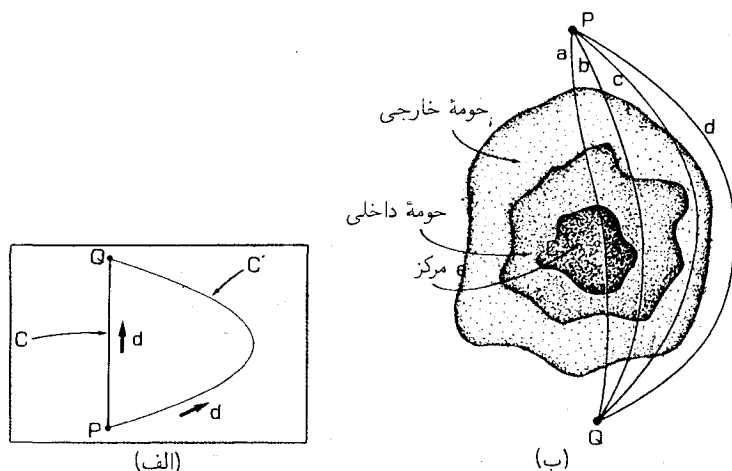


(ج)

شکل ۱-۲۶ "پارادوکس دوقلوها". (الف) دوقلوی A در خانه می ماند در حالی که دوقلوی B با سرعت زیاد به یک مسافرت طولانی می رود. (ب) یک ساعت در واقع زمان را در امتداد جهانخط خود در فضا زمان اندازه می گیرد (هر "تیک" را می توان به صورت یک تیره روی جهانخط تصور کرد). (ج) یک نمودار فضا زمان تاریخی دوقلوها: ساعت دوقلوی A زمان t را در امتداد جهانخط خود اندازه می گیرد، در حالی که ساعت دوقلوی B هم زمان t' را در امتداد جهانخط خود اندازه می گیرد.

خانه مانده است پیرتر خواهد بود. این پیرشدنهای مختلف با توجه به فرایندهای زیست شناختی یا ساعت های مکانیکی یا برقی همراه دوقلوها تأیید می شود. برای قابل توجه بودن این اثر باید حرکت های نسبی با سرعت های نزدیک به سرعت نور صورت گیرند.

اگر از خود سؤال کنیم که معنای اندازه گیری "زمان" در فضا زمان چیست، این اثر در واقع شگفت آور نخواهد بود. اگر به یاد داشته باشیم که ساعتها سازوکارهایی هستند که تاریخ آنها با یک جهانخط در فضا زمان نشان داده می شود، می بینیم که آنچه آنها واقعاً اندازه می گیرند "فاصله در فضا زمان" در امتداد جهانخط های نماینده تاریخ آنهاست [شکل ۱-۲۶ (ب)]. چون دوقلوها در فاصله بین رویداد ملاقات ابتدایی و انتهایشان مسیرهای مختلفی را در فضا زمان طی می کنند [شکل ۱-۲۶ (ج)]. چندان تعجب آور نیست که زمانهای مختلفی زندگی کرده باشند. اثر مشابهی در سطح یک میز رخ می دهد. فاصله d از P تا Q در امتداد منحنی C با فاصله این دو نقطه در امتداد راه C تفاوت دارد [شکل ۱-۲۷ (الف)]; "پارادوکس دوقلوها" مشابه این اثر در فضا زمان است. با وجود این اختلاف قابل ملاحظه ای بین این دو اثر وجود دارد: ممکن است در این مقایسه، انتظار داشته باشیم که زمان اندازه گیری شده توسط آن دوقلویی که به خارج می رود و بازمی گردد



شکل ۱-۲۷ (الف) دو مسیر بین نقاط P و Q در سطح یک میز. طول مسیر مستقیم C برابر با d است، در حالی که طول مسیر منحنی C' برابر با d' است. (ب) بین شهر Q و شهر P که در دو طرف مخالف شهر بزرگ C قرار دارند چهار راه مختلف وجود دارد. زمان مسافت از راه a که از مرکز شهر بزرگ می‌گذرد طولانیترین است؛ این زمان از راه d که ظاهراً طولانیتر است از همه کوتاهتر است، d بزرگراهی است که حتی حومه‌های خارجی شهر بزرگ را دور می‌زند. این نکته مقایسه خوبی با وضعیت در شکل ۱-۲۶ (ج) است.

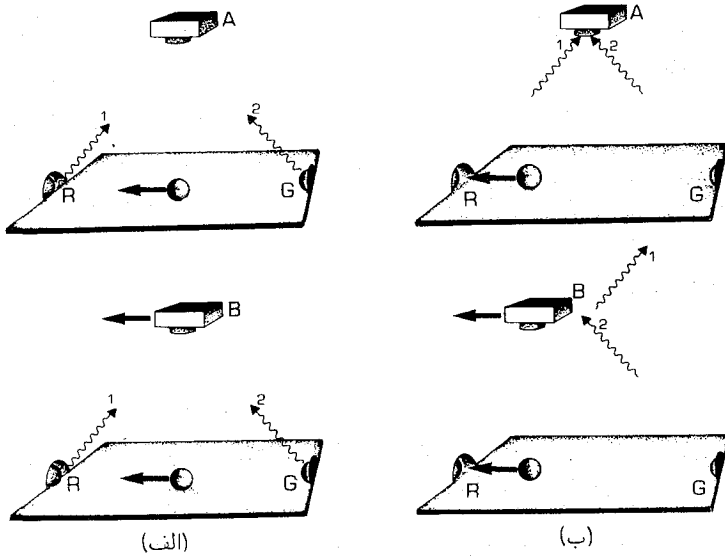
طولانیتر باشد، زیرا جهانخط او در شکل ۱-۲۶ (ج) به نظر طولانیتر می‌آید؛ اما علامت واقعی اثر خلاف آن است. باید محتاط باشیم؛ در حالی که یک چنین نمودار فضازمانی دقیقاً نماینده اندازه‌گیریهای لحظه‌ای وضعیتهای نسبی فضایی و زمانی توسط یک ناظر واحد است، اما نباید در مورد اندازه‌گیریهای فضا و زمان توسط ناظرهای دیگر با عجله نتیجه‌گیری کنیم. در این مورد نمودار دقیقاً نماینده اندازه‌گیریهای دوقلوی خانه‌نشین A است، اما به روشنی اندازه‌گیریهای دوقلوی مسافر B را نشان نمی‌دهد. آنچه در نمودار مشهود است این نکته است که ممکن است انتظار داشته باشیم که اندازه‌گیریهای زمان توسط B با اندازه‌گیریهای A متفاوت باشد، اما نباید در مورد چگونگی این تفاوت عجولانه قضاوت کنیم.

یک مورد قابل مقایسه با وضعیت نمودار فضا زمان را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت: شهرهای P و Q را در نظر بگیرید که به ترتیب در شمال و جنوب شهر قدیمی C قرار گرفته‌اند. در خیابانهای این شهر به واسطه ترافیک سنگین خیابانهای باریک راه‌بندان است، به طوری که هر چه به مرکز شهر نزدیکتر می‌شویم حرکت ماشین کندتر می‌شود. برای رفتن از P به Q می‌توان راههای عبوری از مرکز شهر، از حومه داخلی، از حومه خارجی شهر، و یا از جاده کمربندی که به کلی از شهر بزرگ اجتناب می‌کند، انتخاب کرد همان طور که از نقشه پیداست رفتن از P به Q از طریق راههای خارجی نیز مستلزم پیمودن مسافتهای طولانیتر است، [شکل ۱-۲۷ (ب)]. با وجود این،

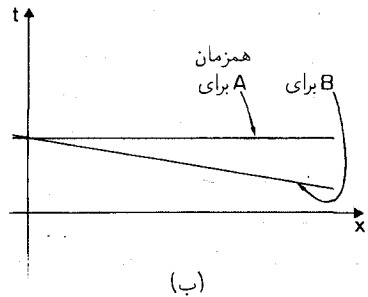
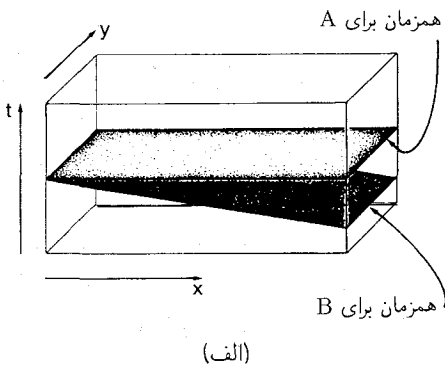
زمان مسافرت از P تا Q از طریق جاده کمربندی از همه کوتاهتر و از جاده‌ای که از مرکز شهر عبور می‌کند طولانیترین است. این نقشه دقیقاً مسیره‌های مختلف ممکن از P به Q را نشان می‌دهد، اما زمان لازم برای پیمودن این راهها را نشان نمی‌دهد؛ کوتاهترین زمان مسافرت از نقطه آغاز تا نقطه پایان به مسیری مربوط می‌شود که در نقشه طولانیترین مسیر به نظر می‌آید. این مطلب مقایسه خوبی با وضعیت فضازمان است که در شکل ۱-۲۶ (ج) نشان داده شده است. می‌توان علامت اثر را تقریباً با یادآوری مثال ناظری که از داخل یک تراموا به یک ساعت نگاه می‌کند فهمید، هر چه سرعت ساعت نسبت به ناظر A به سرعت نور نزدیکتر باشد، کار ساعت به نظر ناظر کندتر می‌آید. ما اثر اتساع زمان و "پارادوکس دوقلوها" را در بخش ۳-۴ به تفصیل بررسی خواهیم کرد.

رابطه همزمانی با چارچوب مرجع

یکی از مهمترین جنبه‌های نظریه نسبیت آن است که ناظرهایی که نسبت به هم حرکت می‌کنند در مورد همزمانی توافق نخواهند داشت. به عنوان مثال، مانند حالت قبل دو ناظر A و B را در نظر بگیرید که از بالا به یک میز بیلیارد نگاه می‌کنند، یکی از آنها که در بالای مرکز میز قرار دارد ساکن است و دیگری به طرف چپ حرکت می‌کند (مقایسه کنید با شکل ۱-۲). اکنون فرض کنید که گویهای قرمز و سبز R و G درست در یک لحظه واحد (طبق اندازه‌گیری ناظری که نسبت به میز ساکن است) در دو گوشه مقابل میز در سوراخها می‌افتند. امواج نوری که این دو رویداد را ثبت می‌کند از دو گوشه میز در یک لحظه واحد (نسبت به میز) گسیل می‌شوند. فرض می‌کنیم این لحظه، لحظه‌ای باشد که A و B منطبق‌اند [شکل ۱-۲۸ (الف)]; بدین ترتیب نور در فاصله‌های مساوی از A و B گسیل می‌شود. هر دو موج در یک لحظه T به A می‌رسند [شکل ۱-۲۸ (ب)]. چون فاصله A از دو گوشه میز یکی است، برداشت او این است که گویهای بیلیارد همزمان وارد سوراخها شده‌اند (بحث بالا را با مورد همزمانی در عکس حوض مقایسه کنید). با وجود این، وقتی امواج به A می‌رسند، حرکت B سبب می‌شود که موج سمت چپ از او گذشته باشد در حالی که موج سمت راست هنوز به او نرسیده است. بدین ترتیب، B مشاهده می‌کند که گوی قرمز قبل از گوی سبز وارد سوراخ شده است. بنابراین ناظرهایی که نسبت به هم حرکت می‌کنند در مورد همزمانی توافق ندارند. این نکته در عکسهایی که ناظرها برمی‌دارند نمایان می‌شود: این عکسها ناحیه یکسان از فضا را در برشهای مختلف زمانی نشان می‌دهند. مثلاً، عکس A که در T برداشته شده است نشان می‌دهد که R و G همزمان وارد سوراخها شده‌اند، در صورتی که عکس B نشان می‌دهد که گوی R در سوراخ است و G به لبه نزدیک می‌شود. اگر دو عکس A و B لبه سمت چپ را در یک زمان نشان دهند، عکس B لبه سمت راست را در زمانی زودتر از عکس A نشان خواهد داد. بدین ترتیب سطح همزمانی در فضا زمان برای B نسبت به سطح همزمانی برای A کج می‌شود (شکل ۱-۲۹). در نتیجه ناظرهایی که نسبت به هم حرکت می‌کنند فضا زمان را به صورتهای مختلف به فضا و زمان تقسیم می‌کنند. فضا زمان واحدی است که فضا و زمان را متحد می‌سازد، اما این



شکل ۱-۲۸ (الف) دو دوربین A و B بالای یک میز بیلیارد؛ A در بالای مرکز میز ساکن است و B به طرف چپ در حرکت است. با ورود همزمان دو گوی R و G به سوراخها، پرتوهای نور از دو گوشه میز گسیل می‌شوند؛ در یک لحظه، A و B بر یکدیگر منطبق می‌شوند. (ب) هر دو پرتوی نور در یک لحظه به A می‌رسند، اما B نوری را که از سمت چپ می‌آید قبل از نور سمت راست دریافت می‌کند. بدین ترتیب او می‌بیند که R قبل از G وارد سوراخ می‌شود.



شکل ۱-۲۹ (الف) رویه‌های همزمانی برای A و B، که نشان می‌دهد چگونه ناظرهایی که نسبت به هم حرکت می‌کنند قسمتهای مختلفی فضایی فضا-زمان را همزمان به حساب می‌آورند. (ب) مقطع $\eta = \text{const.}$ (شکل الف). رویه همزمانی برای A موازی محور t است، اما رویه همزمانی برای B نسبت به آن کج شده است.

کار برای ناظرهای مختلف به صورتهای مختلف انجام می‌گیرد. نسبیت همزمانی در بخش ۳-۳ مورد بررسی بیشتر قرار خواهد گرفت.

تمرینها

۱-۱۰ می‌خواهیم دو سرعت موازی v_1 و v_2 را ترکیب کنیم تا سرعت برآیند v_3 به دست آید. کدامیک از خواص زیر را می‌توان از یک قانون جمع نسبیتی صحیح سرعتها انتظار داشت؟

$$\{v_1/c \ll 1, v_2/c \ll 1\} \Rightarrow v_1 + v_2 \approx v_3 \quad 1.$$

$$\left\{v_1/c > \frac{1}{4}, v_2/c > \frac{1}{4}\right\} \Rightarrow v_3/c > 1 \quad 2.$$

$$\left\{v_1/c < \frac{1}{4}, v_2/c < \frac{1}{4}\right\} \Rightarrow v_3/c < 1 \quad 3.$$

(\ll به معنای "خیلی کوچکتر از" است)

۱۱-۱ یک ذره بنیادی ناپایدار در حال سکون در آزمایشگاه به طور متوسط پس از 10^{-5} s فرو می‌پاشد. این نوع ذرات با سرعت $3/5c$ از یک شتابدهنده خطی عبور داده می‌شوند. طول عمر متوسط آنها از نظر یک ناظر ساکن چقدر خواهد بود؟

۱۲-۱ مسافر A که در وسط یک واگن یک قطار در حال حرکت نشسته است، مشاهده می‌کند که ساعتی، دقیقاً در یک زمان واحد، به دو انتهای واگن برخورد می‌کند. در لحظه دریافت علائم نوری او از کنار یک ناظر ساکن B می‌گذرد که در نزدیکی خطوط آهن ایستاده است. طبق نظر B، ساعتی ابتدا به کدام انتهای واگن برخورد می‌کند؟ اگر سرعت حرکت واگن 30 m/s باشد و ناظر ساکن طول آن را 100 m اندازه بگیرد، فاصله زمانی بین برخورد دو ساعت را چقدر اندازه می‌گیرد؟ [توجه کنید که هنگام دریافت علائم، B دقیقاً در وسط دو انتهای واگن قرار دارد].

تمرین کامپیوتری ۲

برنامه‌ای بنویسید که به عنوان ورودی مقادیر V را، که نماینده سرعت حرکت نسبی است، به صورت کسری از سرعت نور، و زمان T که توسط یک ناظر ساکن اندازه گرفته می‌شود بپذیرد؛ و خروجی آن زمان متناظر T' باشد که توسط ناظر در حال حرکت اندازه گرفته می‌شود (معادله ۱-۲). مطمئن شوید که برنامه شما تنها مقادیری از V را می‌پذیرد که بزرگی آنها کمتر از ۱ باشد.

با استفاده از این برنامه ثابت می‌کنید که (الف) برای تمام مقادیر غیر صفر V (مثبت یا منفی) داریم $T' < T$ ؛ (ب) به ازای هر T ، $T' \rightarrow 0$ وقتی $V \rightarrow 1$. اگر $V = 0$ ، مقدار T'/T چقدر می‌شود؟ نتایج حاصل را از نظر فیزیکی تعبیر کنید.

این اثرهای گوناگون سرعت نسبی هشدار می‌دهد که در تفسیر نمودارهای فضا-زمان با احتیاط

عمل کنیم. فرض کنید که یک نمودار فضا زمان از دیدگاه A رسم شده است؛ در این صورت مختصات (t, X, Y, Z) نتیجه اندازه‌گیریهای A را نشان می‌دهد، و می‌توانیم نتیجه اندازه‌گیریهای او را مستقیماً از این نمودار بخوانیم. اما بدون تحقیق بیشتر نمی‌توانیم فرض کنیم که نتیجه اندازه‌گیریهای ناظرهای دیگر را می‌دانیم. به‌ویژه نمی‌توانیم نتیجه اندازه‌گیریهای فضا و زمان ناظر B را که نسبت به A حرکت می‌کند، مستقیماً بخوانیم، زیرا این نمودار نمایانگر رابطه‌ای ساده بین اندازه‌گیریهای فضا و یا زمان توسط A و B نیست. بعداً خواهیم دید که در واقع می‌توانیم از این نمودار برای درک این روابط استفاده کنیم، اما در انجام این کار باید محتاط باشیم و از پیش‌داوری احتراز کنیم.

نتیجه‌گیری

نمودارهای فضا زمان توصیف بسیار مناسبی را از روابط فضایی و زمانی به دست می‌دهند، که به کمک آن می‌توانیم نکات مهمی مانند ماهیت روابط علی را روشن کنیم. مثالهایی که تا کنون آورده‌ایم نشان می‌دهند که برای درک صحیح نظریه نسبیت و چگونگی نمایش اندازه‌گیریهای فضا و زمان در فضا زمان توسط ناظرهای مختلف باید درباره ماهیت اندازه‌گیریهای فضا و زمان مجدداً به دقت بیندیشیم. این کار را در فصل ۲ انجام خواهیم داد، و سپس نتایج آن را برای هندسه فضا زمان نسبیت خاص به‌طور منظم در فصل ۳ استنتاج خواهیم کرد (در آنجا مفاهیمی را که در این فصل معرفی کردیم عمیقاً بررسی خواهیم کرد. موضوع وحدت بخش بازه فضا زمان در فصل ۴ معرفی خواهد شد و در فصلهای بعد از آن برای مطالعه برخی ایده‌های اساسی فضا زمانهای خمیده استفاده خواهیم کرد.

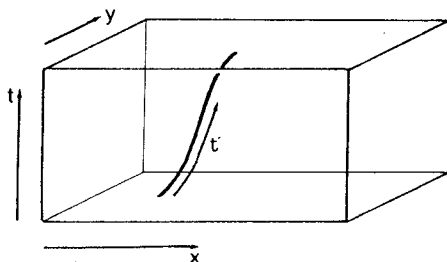
با وجود اینکه همه موضوعهای قبلی برای فهم کامل فصلهای بعد لازم است، و بهتر است که آنها را به ترتیب بخوانیم، اما خواننده‌ای که مایل است مستقیماً به ایده‌های اصلی فضا زمانهای خمیده بپردازد اکنون می‌تواند این کار را با خواندن فصل ۵ انجام دهد. با وجود این برای درک کاربردهای جالب توجه فصلهای ۶ و ۷ باید لااقل عالمهای تخت فضا را که در بخش ۳-۴ بررسی شده‌اند به دقت خواند.

مبانی اندازه‌گیری

برای به‌وجود آوردن مبانی صحیح در درک نظریهٔ نسبیت، باید مبانی اندازه‌گیری، زمان، فاصله، و همزمانی را به‌نوبت در نظر بگیریم، زیرا اینها مبناهایی هستند که اندازه‌گیریهای سینماتیک دیگر، مانند اندازه‌گیریهای سرعت، به آنها بستگی دارد.

۲-۱ زمان

فرض می‌کنیم که ساعت‌های ایده‌آلی وجود دارند که زمان را در امتداد جهانخط‌هایشان به‌طور دقیق اندازه‌گیری می‌کنند. این ساعتها ممکن است مکانیکی (مثلاً مبتنی بر سازوکار یک چرخ دنگ که آهنگ باز شدن فنر ساعت را کنترل می‌کند)، اتمی (مثلاً وابسته به نیمه عمر یک مادهٔ پرتوزا)، الکتروشمیایی (مثلاً بر مبنای یک بلور)، یا الکترونیکی (مبتنی بر یک نوسانگر الکترونیکی) باشند. مفهوم اندازه‌گیری دقیق زمان در امتداد یک جهانخط حائز اهمیت است زیرا به‌صورت زیر متضمن کلیت اندازه‌گیری زمان است. معادلاتی که رفتار مکانیکی یک جسم را تعیین می‌کنند همانند معادلات الکترومغناطیس و ساختارهای اتمی و هسته‌ای شامل زمان هستند. قبل از تحقیقات بیشتر، نمی‌توانیم فرض کنیم که این زمانها و زمانهای در قوانین فیزیکی دیگر یکی هستند، یا حتی با هم رابطهٔ ساده‌ای دارند. با وجود این، با توجه به دقت اندازه‌گیریهای انجام شده، معلوم شده است که زمان ذریبط برای تمام سیستمهای فیزیکی یکی است: لازم نیست که متغیرهای زمانی مختلفی را

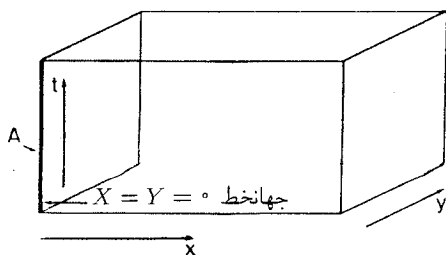


شکل ۱-۲ اندازه‌گیری زمان بر مبنای این واقعیت است که یک ساعت زمان t' را در امتداد جهانخط خود در فضا زمان اندازه می‌گیرد.

برای سیستم‌های مکانیکی، سیستم‌های حرارتی، سیستم‌های اتمی، و غیره در نظر بگیریم. بنابراین، نباید نوع ساعتی را که یک ناظر باید مورد استفاده قرار دهد مشخص کنیم: عمومیت داشتن زمان به او اجازه می‌دهد که مبنای ساعت خود را بر هر اصل فیزیکی که بخواهد قرار دهد. ساعت‌های ایده‌آلی که بر مبنای هر یک از قوانین فیزیکی ساخته شده باشند با هم توافق خواهند داشت.

نکته حائز اهمیت دیگر که باید بر آن تأکید شود این است که یک ساعت خود به خود نمی‌تواند اندازه‌گیری زمان را در نقطه‌ای دور از خود تعیین کند (من نمی‌توانم ساعتی را که دور از من قرار دارد بخوانم مگر اینکه از سازوکارهای فرستنده و گیرنده برای انتقال داده‌ها از ساعت تا محلی که من هستم استفاده شود). بدین ترتیب، ساعت‌ها به خودی خود نمی‌توانند سطوح همزمانی را در فضا زمان تعیین کنند، بلکه می‌توانند زمان را در امتداد یک جهانخط (یعنی، جهانخط آن ساعت در فضا زمان، شکل ۱-۲) اندازه بگیرند. در اینجا لزومی ندارد که یک زمان از نقطه آغاز تا نقطه پایانی در امتداد جهانخط‌های مختلف اندازه گرفته شود، و در واقع در نظریه نسبیت انتظار نداریم که چنین چیزی حقیقت داشته باشد (با شکل ۱-۲۶ و بحث بخش ۱-۳ مقایسه کنید). شواهد آزمایشگاهی نشان می‌دهند که نسبیت خاص صحیح است: ساعت‌های ایده‌آل در هواپیماها به اطراف جهان پرواز کرده‌اند و با ساعت‌های دقیقاً مشابه ساکن در روی زمین مقایسه شده‌اند. زمانهایی که این ساعت‌ها نشان داده‌اند، مطابق پیشگویی نسبیت خاص متفاوت بوده است. بدین ترتیب ایده نیوتونی جریان یکنواخت زمان که برای تمام ناظرها یکی است غلط است.

اگر جهانخطی معلوم باشد، زمان یکتایی وجود دارد که در امتداد آن جهانخط توسط هر ساعت ایده‌آلی که در امتداد آن حرکت می‌کند اندازه گرفته می‌شود. این زمان را ویژه زمان در امتداد آن جهانخط گویند. تمام اندازه‌گیرهای مستقیم، اندازه‌گیرهای ویژه زمان در امتداد یکی از جهانخط‌ها هستند. ارتباط ویژه زمانهایی که در امتداد جهانخط‌های مختلف اندازه گرفته می‌شوند مستلزم استفاده از دستگاه‌های علامت‌دهنده‌ای است که بتوانند اطلاعات را بین ناظرهایی که با هم فاصله دارند انتقال دهند؛ ما در بخش ۲-۳ به این موضوع خواهیم پرداخت. با توجه به این مطلب، "زمان" خاصی نیز وجود دارد که احتیاج به توضیح دارد: یعنی، اهمیت مختصه زمان t مشخص



شکل ۲-۲ زمان t در دستگاه مختصات استاندارد یک ناظر A زمانی است که با ساعتی که نسبت به او ساکن است اندازه‌گیری می‌شود. این ساعت زمان را در امتداد جهانخط او اندازه می‌گیرد (خط $X = Y = 0$ ، که در چارچوب مرجع او مبدأ مختصات فضایی است). هر چند، همان‌طور که بعداً خواهیم دید، این ساعت، زمان اندازه‌گیری شده توسط هر ناظر دیگری را که در این دستگاه مختصات ساکن است، یعنی نسبت به A ساکن است، صحیح به دست می‌دهد.

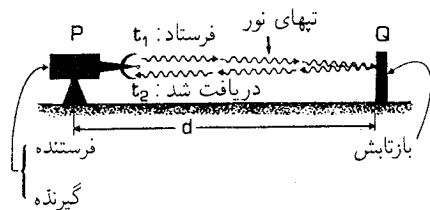
شده در مختصات استاندارد (t, X, Y, Z) که یک ناظر از آن برای توصیف فضا-زمان استفاده می‌کند چیست (با بخش ۱-۱ مقایسه کنید)؟ پاسخ آن است که این زمان، ویژه زمانی است که ناظر در امتداد جهانخط خود در فضا-زمان، یعنی خط $(X = Y = Z = 0)$ در آن مختصات (شکل ۲-۲) اندازه می‌گیرد. این زمان مستقیماً زمانی را که در امتداد جهانخطهای دلخواه دیگر اندازه گرفته شده است نشان نمی‌دهد. اما چنانکه خواهیم دید زمانی را به درستی نشان می‌دهد که هر ناظر ساکن در این دستگاه مختصات، یعنی ناظری که نسبت به A ساکن است، اندازه می‌گیرد.

تمرین ۱-۲

معلوم شده است که دوره چرخش زمین که با یک ساعت بلور الکترومغناطیسی اندازه‌گیری می‌شود در حال افزایش است. آیا این امر مستلزم تفاوت (الف) زمان دینامیکی (که با استفاده از قوانین اساسی که چرخش زمین را کنترل می‌کنند اندازه گرفته می‌شود) با زمان الکترومغناطیسی است یا (ب) چرخش زمین به دلایل مختلف ساعتی ناقص است؟

۲-۲ فاصله

در کتابهای فیزیک مقدماتی اغلب گفته می‌شود که خط‌کشها یا "میله‌های صلب" مبنای اندازه‌گیری فاصله‌ها هستند. گرچه، آنها معیارهای بسیار ناقصی از فاصله هستند؛ مثلاً طول یک خط‌کش با دما تغییر می‌کند، و اگر در یک میدان گرانش افقی یا عمودی نگاه داشته شود طول آن تفاوت می‌کند (به دلیل رفتار کشسان آن در مقابل تنشهایی که گرانش القا می‌کند). بنابراین باید "تصحیحاتی" به عمل آید که در آنها این حقیقت که یک خط‌کش همواره فاصله ثابتی را اندازه نمی‌گیرد به حساب آورده شود. به علاوه، استفاده از یک خط‌کش (یا تعدادی خط‌کش) برای اندازه‌گیری دقیق فاصله



شکل ۲-۳ دستگاهی برای اندازه‌گیری فاصله بین P و Q: یک علامت راداری (معمولاً یک موج رادیویی) از P در زمان t_1 فرستاده می‌شود، در Q بازتابیده می‌شود، و پژواک آن را P در t_2 دریافت می‌کند. فاصله d از زمان رفت و برگشت نور $t_2 - t_1$ به دست می‌آید.

بین رم تا ونیز و یا دور تا کاله عملی نیست تا چه رسد به فاصله زمین تا ماه یا تا مریخ. پس باید روشهای عملیتری وجود داشته باشند.

اندازه‌گیری فاصله یک جسم از جسم دیگری که از آن دور است مستلزم فرستادن علائم یا اطلاعات بین این اجسام است. ناوردایی سرعت نور به این معناست که تابش الکترومغناطیسی بهترین مبنا برای دستگاههای اندازه‌گیری استاندارد در فضا زمان است. این نکته بخصوص در اندازه‌گیری فاصله صادق است. بنابراین، مبنای مناسب برای اندازه‌گیری فاصله در نسبیت خاص رادار است. رادار به صورت زیر کار می‌کند: برای اندازه‌گیری فاصله بین نقاط P و Q، یک علامت الکترومغناطیسی از فرستنده‌ای در P گسیل می‌شود و از Q به P بازتابیده می‌شود، (شکل ۲-۳). زمان گسیل t_1 و زمان دریافت t_2 علائم با یک ساعت ایده‌آل در P اندازه گرفته می‌شود. اگر اختلاف این دو زمان $\tau \equiv t_2 - t_1$ باشد؛ این مدت زمان رفت و برگشت نور است. اگر فاصله بین P و Q برابر d باشد، مسافتی که نور پیموده برابر $2d$ است. اما نور با سرعت ناوردای c حرکت می‌کند؛ بنابراین، $\tau = 2d/c$ ، و فاصله اندازه‌گیری شده نصف مدت رفت و برگشت نور است:

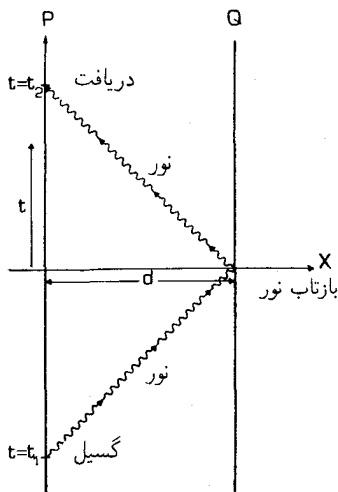
$$d = \frac{1}{2}c\tau \quad \Leftrightarrow \quad d/c = \frac{1}{2}(t_2 - t_1) \quad (1-2)$$

به عنوان مثال، اگر نور در $01:12$ گسیل و در $03:12$ دریافت شده باشد، در این صورت $t_1 = 01:12$ و $t_2 = 03:12$ ، و $\tau = 2 \text{ min}$ است، و فاصله یک دقیقه نوری یا 60 ثانیه نوری است، پس مسافت طی شده $60 \text{ s} \times 300000 \text{ km/s}$ برابر با 18000000 کیلومتر است. برعکس اگر $\tau = 2 \mu\text{s} = 2 \times 10^{-6} \text{ s}$ باشد، در این صورت $d = 1 \mu\text{s} = 300 \text{ m}$ این استفاده از رادار برای اندازه‌گیری فاصله، نه تنها سریعترین روش است، بلکه در اکثر موارد تنها روش عملی است. مثلاً رادار مبنای اندازه‌گیری دقیق فاصله برای نقشه برداری توسط نقشه برداران است (مثلاً به کمک دستگاهی که تلومات نام دارد، شکل ۲-۴ را ببینید). از رادار برای اندازه‌گیری فاصله ماه



شکل ۲-۴ تومات، یک دستگاه پیشرفته اندازه‌گیری فاصله بر مبنای اصل رادار. در این دستگاه از تابش میکروموج برای اندازه‌گیری فواصلی بین ۲۰ m تا ۲۵ km با دقت ۵ mm استفاده می‌شود. فاصله اندازه گرفته شده مستقیماً به صورت رقمی در روی واحد کنترل دستی ظاهر می‌شوند.

و مریخ [از زمین] با دقت بیسابقه استفاده شده است. کشتیها و هواپیماها معمولاً برای اندازه‌گیری فاصله کشتیها و هواپیماهای دیگر از رادار استفاده می‌کنند. همچنین، به دلیل مشکلاتی که در تعریف استاندارد طول با استفاده از یک "میله صلب" وجود دارد، اکنون متر به صورت فاصله‌ای که نور در یک مدت معین می‌پیماید تعریف شده است؛ بدین ترتیب ثابت بودن سرعت نور — که مبنای رادار است — مبنایی است که اکنون برای تعریف طول در یک آزمایشگاه نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. از این پس، در این کتاب فرض می‌کنیم که رادار وسیله عملی اندازه‌گیری فاصله است.



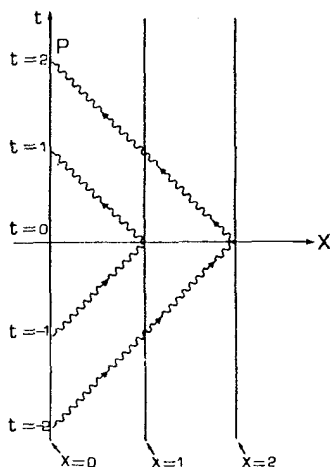
شکل ۵-۲ یک نمودار فضا-زمان برطبق روش اندازه‌گیری در شکل ۲-۳.

یک نمودار فضا-زمان با استفاده از رادار برای اندازه‌گیری فاصله در شکل ۵-۲ رسم شده است. از این پس از مختصات (t, X, Y, Z) فصل قبل استفاده می‌کنیم که در آن مقیاس به گونه‌ای است که سرعت نور ۱ است، مگر آنکه خلاف آن ذکر شود (زیرا طولها برحسب زمان سیر نور اندازه گرفته می‌شوند) و مخروط نوری با راستای قائم در نمودارهای فضا-زمان زاویه 45° می‌سازد. در این صورت تمام جهانخطهای ذرات پرجرم در این نمودارها باید زاویه‌ای کمتر از 45° با راستای قائم بسازند، زیرا نمی‌توانند سریعتر از نور حرکت کنند. از این قرارداد در شکل ۵-۲ استفاده شده است. هرگاه از رادار برای اندازه‌گیری فاصله استفاده شود، توصیف فاصله‌ها برحسب زمان سیر نور امری کاملاً طبیعی است (مثلاً میکروثانیه، ثانیه، و سال). برای تبدیل به یکاهای معمولی، باید آنرا در سرعت نور ضرب کنیم. مثلاً

$$1 \mu\text{s} = (10^{-6} \text{s}) \times (3 \times 10^{10} \text{cm/s}) = 3 \times 10^4 \text{cm} = 300 \text{m}$$

1ms برابر است با 300km ؛ 1s برابر است با 300000km . برحسب این یکاها، فاصله متوسط زمین تا ماه (381550km) برابر است با 127s ؛ فاصله متوسط زمین و خورشید (149600000km) برابر است با 831min ؛ فاصله [زمین] تا نزدیکترین ستاره 427 سال نوری است.

اکنون می‌توانیم معنای سرراستی از مختصات فضایی استاندارد (X, Y, Z) در تصویر فضا-زمان یک ناظر به‌دست دهیم. در راستای محور مختصات اینها فواصلی هستند که او به‌وسیله رادار از جهانخط خود ($X = Y = Z = 0$) در امتداد محورهای مختصات تا رویداد مورد نظر (شکل ۲-۶)، برحسب واحدهای زمان سیر نور اندازه می‌گیرد؛ فاصله اندازه‌گیری شده برای



شکل ۲-۶ مختصه X در دستگاه مختصات استاندارد یک ناظر P فاصله راداری است که او از مکان خود اندازه می‌گیرد. بدین ترتیب یک سری علائم راداری خطوط $X=0$ ، $X=1$ ، و $X=2$ و غیره را در فضا زمان تعیین می‌کند ($X=0$ جهانخط خود اوست).

یک نقطه کلی برابر است با $d = (X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}$. مانند مورد اندازه‌گیری زمان، نمی‌توان فرض کرد که فواصلی را که ناظرهای دیگر اندازه می‌گیرند بتوان مستقیماً از نمودار فضا زمان خواند، زیرا این فاصله‌ها در حالت کلی با مختصات X ، Y ، و Z نمایش داده نمی‌شوند.

یکی از جنبه‌های مهم اندازه‌گیری فاصله با رادار این است که ناظر در P می‌تواند فاصله خود تا Q را فقط با مشاهدات انجام شده در جای خود اندازه بگیرد؛ او برای اندازه‌گیری مجبور نیست که به Q برود و یا از Q با او همکاری فعال شود. در عوض او نور یا امواج رادیویی را به Q می‌فرستد؛ فقط لازم است که امواج به وسیله جسمی در Q به P بازتابیده شوند. این جنبه رادار چیزی است که آن را تا این حد در کشتیرانی و کاربردهای نظامی حائز اهمیت کرده است.

سرانجام، پس از تعریف فاصله برحسب رادار، اکنون می‌توانیم کاربرد معمولی خطکش برای اندازه‌گیری فواصل بین $10^{-2}m$ و 10^2m را بفهمیم زیرا خطکش در بسیاری شرایط تقریب قابل قبولی برای "میله صلب" (میله با طول ثابت) است. اگر بین اندازه‌گیریهایی با خطکش و رادار اختلافی وجود داشته باشد، نتیجه حاصل از خطکش را به نفع نتیجه‌ای که با رادار به دست آمده است کنار می‌گذاریم.

تمرینها

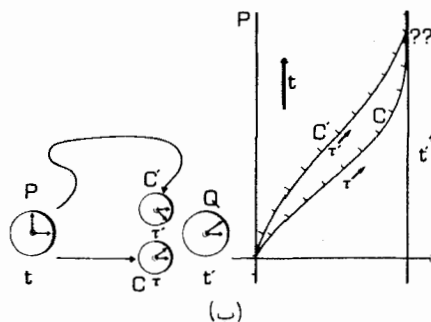
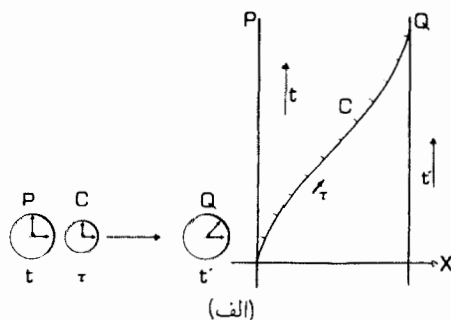
۲-۲ زمان سیر نور بین محل‌های زیر را پیدا کنید: (۱) پاها و چشم‌های شما؛ (۲) کمربند و لندن (فاصله بین آنها ۹۰ کیلومتر است)؛ (۳) زمین و سیاره پلوتون (فاصله متوسط ۵۹۰۰ میلیون کیلومتر). فاصله [زمین] تا اشیای نجومی زیر را برحسب کیلومتر محاسبه کنید (۱) به فاصله

یک ساعت نوری، (۲) به فاصله یک روز نوری، (۳) به فاصله یک سال نوری.

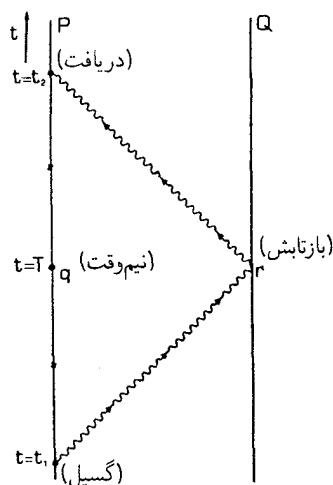
۳-۲ یک هواپیمای جنگنده علامتی می‌فرستد که توسط یک هواپیمای بمب‌افکن بازتابیده می‌شود؛ علامت پژواک را جنگنده پس از 20° میکروثانیه دریافت می‌کند. یک ثانیه پس از گسیل علامت اول، جنگنده علامت دیگری می‌فرستد؛ علامت پژواک پس از 15° میکروثانیه دریافت می‌شود. فاصله بین جنگنده و بمب‌افکن را که جنگنده در هر مورد اندازه می‌گیرد به دست آورید و از آنجا سرعت نسبی نزدیک شدن دو هواپیما را پیدا کنید.

۳-۲ همزمانی

برای همزمان کردن ساعتی که در نقطه دور دست Q قرار دارد با ساعتی که در P قرار دارد باید اطلاعاتی را در مورد وضعیت ساعت در P به Q بفرستیم (و یا برعکس). یک پیشنهاد اولیه فرستادن یک ساعت ایده‌آل C، از P به Q، پس از همزمان کردن آن با ساعت P است؛ این کار همزمان کردن ساعت Q با C و در نتیجه با P را ممکن می‌کند [شکل ۲-۷ (الف)]. اما، این کار



شکل ۲-۷ (الف) یک فرایند قابل تصور برای همزمان کردن ساعتهای دور از هم در P و در Q با ترازبی یک ساعت سوم C بین آنها، و یک نمودار فضا-زمان برای این فرایند. (ب) این روش بی‌حاصل است، زیرا نتیجه آن مبهم است: در حالت کلی یک ساعت دیگر C' که با C در P همزمان شده است، پس از رفتن از P به Q، در هنگام ورود به Q با C توافق نخواهد داشت. بدین ترتیب نتیجه چنین فرایند همزمان کردن اختیاری است.



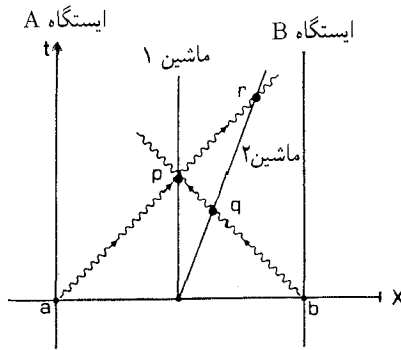
شکل ۸-۲ همزمان کردن ساعت‌های واقع در P و Q با استفاده از علامت رادار. چون زمان رفت و برگشت نوری یکی است، رویداد بازتاب r در Q باید همزمان باشد با رویداد q در P که در نیمهٔ راه بین گسیل و دریافت علامت قرار دارد.

بی‌فایده است. زیرا، همان‌طور که دیدیم، نتیجهٔ حاصل به‌مسیری بستگی دارد که C در فضا-زمان از P به Q می‌پیماید [شکل ۲-۲ (ب)]، یعنی به‌سرعت حرکت C از P به Q. بدین ترتیب نمی‌توان از این طریق یک سیستم سازگار همزمان کردن ایجاد کرد که بدون توجه به‌چگونگی حرکت C از P به Q جواب واحدی به‌دست دهد (به‌زبان ریاضی، ویژه زمان یک متغیر انتگرال‌پذیر نیست). مانند مورد اندازه‌گیری فاصله‌ها برای انتقال اطلاعات لازم برای همزمان کردن از P به Q، باید به‌استفاده از علائم الکترومغناطیسی ("نور") روی آوریم. در واقع، تعیین اینکه کدام رویدادها با رویدادهای خاصی در تاریخچهٔ یک ناظر لخت همزمان هستند هم به‌بهترین وجه توسط رادار انجام می‌گیرد.

فرض کنید P در زمان t_1 یک علامت الکترومغناطیسی به Q می‌فرستد و زمان t_2 را که در آن تپ پژواک از Q بازتابیده می‌شود ثبت می‌کند. چون P می‌داند که سرعت نور ثابت است، نتیجه می‌گیرد که نیمی از زمان سیر نور صرف رفتن و نیم دیگر صرف برگشتن شده است، از این رو برداشت او این است که رویداد بازتاب r در Q همزمان است با زمان T در تاریخچهٔ او که دقیقاً وسط راه بین زمان ارسال علامت و زمان دریافت پژواک آن قرار دارد (شکل ۲-۸). این زمان را با افزودن نیمی از زمان سیر نور به‌زمان گسیل نور به‌دست می‌آوریم، یعنی

$$T = t_1 + \frac{1}{c}(t_2 - t_1) = \frac{1}{c}(t_1 + t_2) \quad (2-2)$$

این یک راه عملی برای تعیین همزمانی، و از این‌رو همزمان کردن ساعت‌هاست حتی اگر آنها دور از

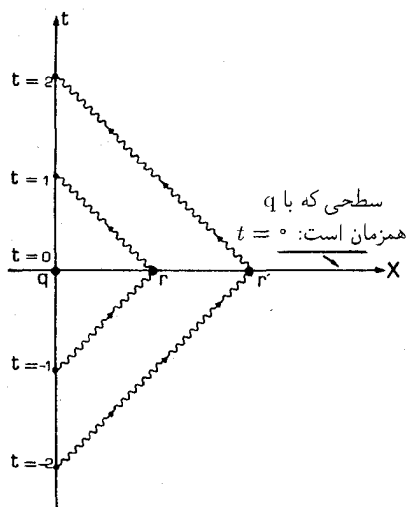


شکل ۹-۲ ماشین پلیس ۱ نسبت به ایستگاههای پلیس A و B ساکن است، اما ماشین ۲ به B نزدیک می‌شود. علامتی که همزمان (برحسب اندازه‌گیری ماشین ۱) از A و B در رویدادهای a و b فرستاده می‌شوند، به وسیله ماشین ۱ به طور همزمان در رویداد P دریافت می‌شوند، اما ماشین ۲ ابتدا علامت ایستگاه B (در رویداد q) و سپس علامت ایستگاه A (در رویداد r) دریافت می‌کند. بدین ترتیب ماشین ۲ رویداد گسیل b را قبل از رویداد گسیل a دریافت می‌کند.

هم قرار داشته باشند. مثلاً اگر P در سطح زمین و Q روی ماه باشد، آنها می‌توانند ساعت‌هایشان را با روش زیر همزمان کنند: ناظر P یک علامت رادار به Q می‌فرستد. او زمانهای t_1 و t_2 را اندازه می‌گیرد، T را از معادله ۲-۲ به دست می‌آورد، و این مقدار را به Q منتقل می‌کند. ناظر Q زمان t' رویداد بازتاب r را طبق تنظیم اولیه ساعت خود ثبت می‌کند. پس از دریافت علامت از P، او ساعت خود را به اندازه $T - t'$ میزان می‌کند، که این مقدار تفاوت بین زمان T است که A به رویداد r نسبت می‌دهد با زمان t' که ساعت خود او به رویداد r نسبت می‌دهد.

هر ناظر می‌تواند از این روش برای تعریف همزمانی در فضا-زمان استفاده کند. اگر آنها نسبت به هم حرکت کنند، در مورد همزمانی توافق نخواهند داشت (همان‌گونه که در بخش ۱-۳ متذکر شدیم). اما اشکالی ندارد: هر ناظر برای خود یک تعریف بدون ابهامی از همزمانی به دست می‌آورد که دقیقاً با مفهوم معمولی و روزمره ما از همزمانی مطابقت دارد. مثال زیر می‌تواند به روشن شدن مطلب کمک کند. دو ماشین پلیس را در نظر بگیرید که در یک جاده مستقیم بین دو ایستگاه پلیس A و B گشت می‌زنند. رانندگان دستور دارند که بلافاصله به ایستگاهی بروند که ابتدا آنها را فراخوانده است، مگر اینکه هر دو با هم آنها را بخوانند که در این صورت اولویت با A است. در یک زمان خاص هر دو ماشین در بین راه دو ایستگاه هستند، ماشین ۱ ساکن و ماشین ۲ به سوی ایستگاه B در حرکت است. درست در این لحظه، طبق گفته ماشین ۱، هر دو ایستگاه پیام می‌فرستند. ماشین ۱ به طرف ایستگاه A حرکت می‌کند، در صورتی که ماشین ۲ به طرف ایستگاه B حرکت می‌کند زیرا پیام آن ایستگاه را قبل از پیام A دریافت کرده است. حق با کدام است؟

جواب، البته این است که هر دو راست می‌گویند (شکل ۹-۲ را ببینید). همزمانی مطلق نیست



شکل ۲-۱۰ سطح رویدادها در فضا-زمان که برای ناظر P (که در دستگاه مختصات انتخاب شده ساکن است) با رویداد q در مبدأ مختصات همزمان‌اند. برای تعیین این رویه P باید از مقدار زیادی علامت رادار استفاده کند (مثلاً، آنهایی که برای اثبات همزمانی r و r' نشان داده شده‌اند).

و حرکت نسبی در آن مؤثر است (مقایسه کنید با شکل ۱-۲۹). ما این مطلب را در فصل بعد بیشتر مطالعه خواهیم کرد.

مفهوم کلیدی که این تجزیه و تحلیل را ممکن می‌سازد مربوط به اینستین است: و آن این است که باید یک تعریف عملی از همزمانی داشته باشیم، یعنی تعریفی برحسب نتایج آزمایشهای ممکن. در این صورت بقیه تحلیل با توجه به ناوردایی سرعت نور برای تمام ناظرها ممکن می‌شود. باید توجه داشت که هنگامی که ناظر P از مختصات استاندارد (t, X, Y, Z) در فضا-زمان مسطح استفاده می‌کند طبق تعریف ارائه شده رویه‌های $\{t = \text{const.}\}$ دقیقاً رویه‌های همزمانی برای P هستند که جهانخط آن $(X = Y = Z = 0)$ است. مثلاً اگر P در $t = -1$ (شکل ۲-۱۰) علامتی بفرستد که در رویداد r با مختصات $(t = 0, X = 1)$ بازتابیده شود، در این صورت P دوباره علامت را در $t = 1$ دریافت می‌کند. میان زمان T را (که از فرمول ۲-۲ محاسبه می‌شود) برابر با $P = 1/2(-1 + 1) = 0$ اندازه می‌گیرد؛ از این رو P در تاریخچه خود رویداد r و رویداد q را همزمان می‌داند: $(t = T = 0, X = 0)$. همین‌طور هر رویدادی که در آن $t = 0$ ، طبق اندازه‌گیری او با q همزمان است. بدین ترتیب، در فضا-زمان مسطح، مختصه زمان استاندارد t در واقع (همان‌طور که انتظار می‌رود) راه همزمان کردن ساعتها (با استفاده از رادار) توسط ناظری که دستگاه مختصات را بنا کرده است نشان می‌دهد. هر ناظر دیگری که در این دستگاه مختصات ساکن باشد، یعنی، نسبت به P بدون حرکت است، همان رویه‌های همزمانی را تعیین می‌کند، اما،

ناظری که دارای حرکت نسبی است، و برای تعیین همزمانی از ۲-۲ استفاده می‌کند، با این نکته توافق نخواهد داشت. این مطلب را در فصل بعد بیشتر بررسی خواهیم کرد.

۲-۴ جهان نقشه‌ها، جهان تصاویر و نقشه‌های راداری

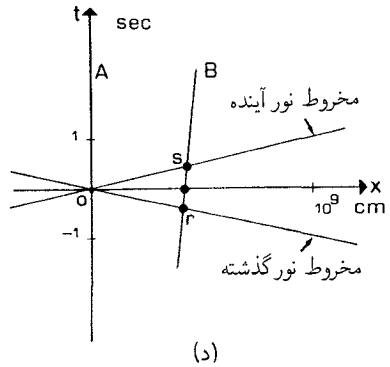
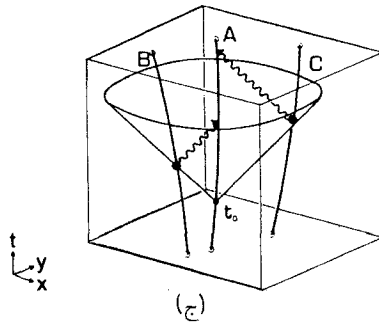
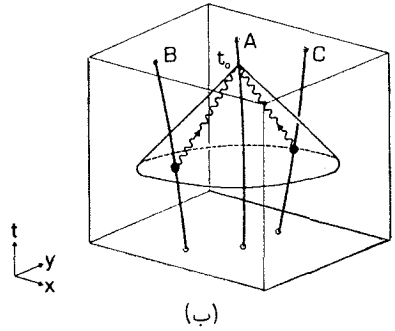
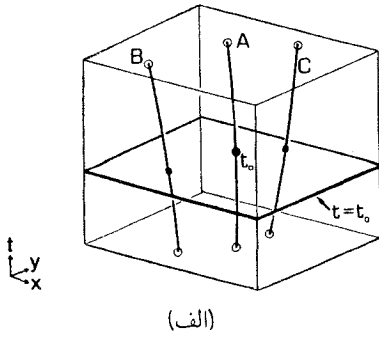
اکنون که مفهوم همزمانی را که با رادار تعیین می‌شود به‌دقت تعریف کردیم، بد نیست که بین سه دیدگاه مختلف فضا-زمان تفاوت بگذاریم.

یک جهان نقشه ایده‌ای است که از نظریه نیوتونی به‌ارث برده‌ایم: و آن منظرهٔ اشیاء در فضا-زمان در یک لحظه است، یعنی، نقشه‌ای است که محل اشیاء را در یک مقطع لحظه‌ای فضا $\{t = \text{const.}\}$ در فضا-زمان نشان می‌دهد [شکل ۲-۱۱ (الف)]. متأسفانه، برای یک ناظر مشکل است که چنین دیدگاهی از فضا-زمان را در زمان t_0 از راه مشاهده به‌دست آورد (با شکل ۱-۱۱ مقایسه کنید). علت آن است که هر چه نقطه‌ای از سطح $\{t = t_0\}$ دورتر باشد، گسیل تپ رادار باید زودتر و دریافت تپ پژواک آن دیرتر انجام گیرد (با شکل ۲-۱۰ مقایسه کنید)؛ بنابراین، تنها راه تعیین این نقشه از راه مشاهده انجام یک سری اندازه‌گیری راداری با فرستادن یک سری تپ راداری است.

برعکس، یک جهان تصویر دیدگاهی از اشیاء در فضا-زمان است که در مخروط نور گذشتهٔ نقطهٔ مشاهده قرار دارد [شکل ۲-۱۱ (ب)]. هر عکس یا مشاهدهٔ دیگری از اشیای دور دست که با آشکارسازی تابش از آنها^۱ انجام گیرد نمایش این اشیاء در مخروط نور گذشتهٔ ماست، و به‌ناچار تأخیرهای زمانی مربوطه را نشان می‌دهد. (با بحث بخش ۱-۲ مقایسه کنید). مسئله در آن است که آنچه که ما مستقیماً به‌دست می‌آوریم یک نمایش دوبعدی از این اشیاء است (خود عکس)، که در آن تصاویر اشیاء همگی، صرفنظر از فاصلهٔ آنها، بر روی یک صفحهٔ تصویر افتاده است (با شکل ۱-۱۰ مقایسه کنید). در این صورت فاصلهٔ آنها اصلاً واضح نیست؛ در واقع طی چند دهه اخترشناسها بحث می‌کردند که آیا "سحابیهای مارپیچی" ابرهایی از غبار در کهکشان خود ما هستند و یا اینکه کهکشانهای دوردستی هستند که اندازهٔ آنها برابر کهکشان ما است؛ بالاخره معلوم شد که فرض دوم درست است. برای تعیین فاصلهٔ اشیاء نیازمند تحلیل بیشتر هستیم، مثلاً تعیین فاصله‌ها با اندازه‌گیری اندازه‌های ظاهری، درخشندگیهای ظاهری، یا انتقال به‌سرخ. استفاده از چنین روشهای برآورد فاصله (که در فصلهای آینده مورد بحث قرار خواهند گرفت) به ناظر اجازه می‌دهد که تصویر جهان خود را در هر زمان t_0 در تاریخچهٔ خود بسازد. امتیاز ویژهٔ این روش مشاهده آن است که می‌توان از آن برای فاصله‌های بسیار بسیار زیاد استفاده کرد.

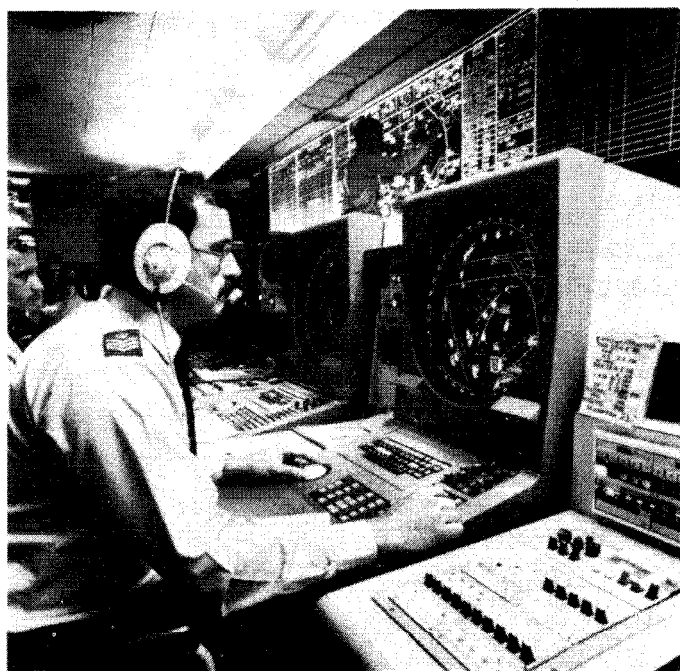
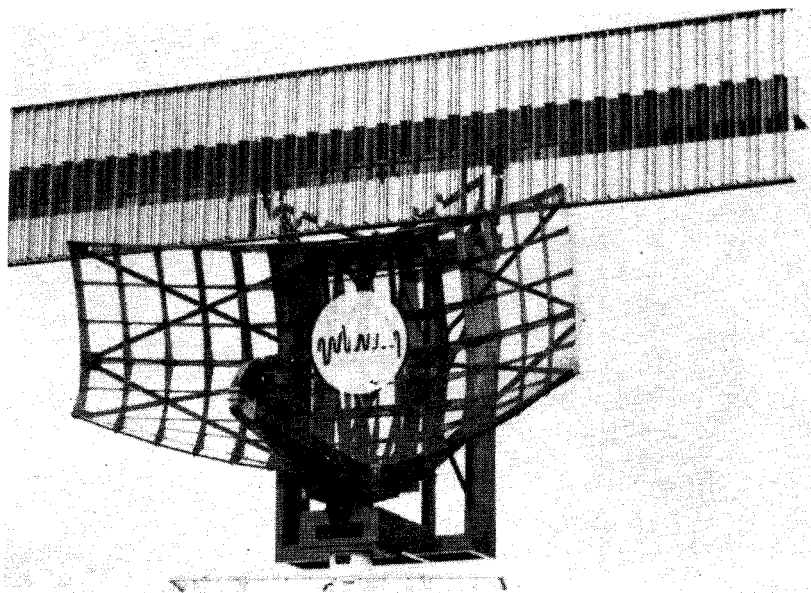
سرانجام، نقشهٔ راداری تصویری طبیعی است که مستقیماً توسط یک دستگاه رادار به‌دست می‌آید که معمولاً در هواپیما، کشتیها و برجهای کنترل فرودگاهها و غیره قرار دارد (شکل ۲-۱۲ را

۱. مثلاً به‌وسیلهٔ یک رادیوتلسکوپ یا یک تلسکوپ پرتو x ، یا با چشم انسان نگاه کنید به



شکل ۱۱-۲ (الف) یک جهان نقشه محل هر یک از اشیاء را در سطح همزمانی یک رویداد $t = t_0$ در جهانخط ناظر ترسیم می‌کند. (ب) یک جهان تصویر محل هر یک از اشیاء را در مخروط نور گذشته یک رویداد $t = t_0$ روی جهانخط ناظر ترسیم می‌کند (مثلاً، وقتی که عکسی گرفته شده است). (ج) یک نقشه راداری محل هر یک از اشیاء را در مخروط نور آینده یک رویداد $t = t_0$ روی جهانخط ناظر ترسیم می‌کند (وقتی که یک تب راداری گسیل شده است). (د) هرگاه از یکاهای معمولی برای توصیف رویدادهای روزمره استفاده شود، مخروطهای نور بسیار تخت خواهند بود و بنابراین هر سه دیدگاه بسیار شبیه خواهند بود، زیرا وضعیت فضایی یک شیء نمی‌تواند بین رویدادهای s و r ، که جهانخط آن این مخروطهای نور را قطع می‌کند، تغییر چندانی بکند (مگر اینکه شیئی که مشاهده می‌شود با سرعتی نزدیک به سرعت نور حرکت کند).

بینید). می‌توانیم یک تب رادار را که در زمان t_0 فرستاده می‌شود در نظر بگیریم، تپهای پژواکی از اشیایی که در فواصل مختلف هستند دریافت می‌شود، و تصویر راداری از این پژواکها ساخته می‌شود، به طوری که فاصله هر شیء را برحسب زمان تأخیر پژواکهای مربوط به آن نشان می‌دهد. این تصویری از وضعیت هر یک از اشیاء در روی مخروط نور آینده رویداد t_0 است [شکل ۱۱-۲ (ج)]. امتیاز بزرگ این تصویر این است که مستقیماً به دست می‌آید و بلافاصله نمایش داده می‌شود. اما این عیب را دارد که از آن نمی‌توان برای فاصله‌های بسیار زیاد استفاده کرد، زیرا مدت رفت و برگشت نور به شیء مورد نظر بیش از حد طولانی می‌شود. گرچه، این محدودیت تنها در مورد



شکل ۱۲-۲. راداری که برای کنترل حرکت هواپیماها مورد استفاده قرار می‌گیرد. (بالا) تپها توسط واحدی که در کانون آنتن خمیده رادار قرار دارد گسیل و دریافت می‌شوند. این آنتن برای پوشاندن تمام جهتهای اطراف فرودگاه می‌چرخد. (پایین) صفحه نمایش (یک "نقشه رادار")، که مستقیماً وضعیت فضایی هواپیما را نسبت به فرودگاه نمایش می‌دهد.

مشاهدات نجومی وجود دارد؛ در روی زمین این محدودیت جدی نیست.

روشن است که نمایش وضعیت اشیاء در فضا زمان در هر مورد از نظر مفهومی کاملاً متفاوت است [با شکل‌های ۲-۱۱ (الف)، (ب)، و (ج) مقایسه کنید]. گرچه، نقشه‌های حاصل تنها در صورتی تفاوت بارز خواهند داشت که اشیای نشان داده شده در مقیاس زمانی مربوطه به مقدار قابل ملاحظه‌ای حرکت کنند. در اندازه‌گیری‌های معمولی روزمره، سرعت نور بسیار زیاد است، و بنابراین اگر ما از واحدهای اندازه‌گیری معمولی استفاده کنیم، مخروط‌های نوری بسیار تخت خواهند بود و سه نقشه به دست آمده اختلاف کمی خواهند داشت [شکل ۲-۱۱ (د)]. بنابراین، برای اندازه‌گیری فاصله‌ها در زندگی روزمره، رادار تصویر کافی و مناسبی از موقعیت نسبی اشیاء فراهم می‌آورد که تقریب خوبی از دیدگاه لحظه‌ای یک جهان نقشه است.

تمرینها

۲-۴ مشکلات عملی استفاده از رادار در فاصله‌های بسیار دور را شرح دهید، و حداکثر فاصله‌ای را که برای اندازه‌گیری آن می‌توان از یک دستگاه رادار استفاده کرد، برآورد کنید.

۲-۵ با در نظر داشتن اصول نسبیت خاص و ماهیت حدی سرعت نور، آیا می‌توانید روش دیگری را برای تعیین همزمانی از دور پیشنهاد کنید. در صورت انجام این کار اطمینان حاصل کنید که این روش اساساً معادل تعریف رادار است یا نه.

۲-۶ دو کوه آتشفشان به فاصله 100 km از یکدیگر واقع در آیو (یکی از ماههای مشتری) را ناظر A ساکن در آیو مشاهده می‌کند که همزمان آتشفشانی می‌کنند. ناظر B خلبان سفینه‌ای است که طبق گفته A در زمان انفجار در ارتفاع 10 کیلومتری بالای کوه آتشفشان اول قرار دارد و با سرعت $1/5c$ به طرف کوه دوم در حرکت است. در لحظه انفجار کوه اول از دید ناظر B در کوه دوم چه رخ می‌دهد؟

۲-۷ برطبق یک قرارداد هسته‌ای بین ابرقدرتها، اگر یکی از آنها حمله را آغاز کند دیگری حق دارد که او را کاملاً نابود کند. ابرقدرتها دو کشتی A و B را به کار گرفته‌اند که با سرعت بسیار زیاد به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند. کشتی A در هر ثانیه یک علامت می‌فرستد که از B بازتابیده می‌شود. در لحظه $t = 0$ در دستگاه مختصات خودش به B شلیک می‌کند. در $t = 4$ ، علامتی را که در $t = -6$ فرستاده بود و معلوم می‌کرد که B در حال شلیک به A است دریافت می‌کند. A در مورد اینکه چه کسی ابتدا شلیک کرده است چه نتیجه‌ای می‌تواند بگیرد؟ (در فصل ۳ در مورد اینکه آیا B هم به همان نتیجه می‌رسد یا خیر بحث خواهیم کرد.)

۲-۸ از دوستان مختلف سؤال کنید کدام بازه‌های زمانی مطابقت بیشتری با فاصله‌های مختلف مانند، 1 cm ، 1 m ، و 1 km دارند. [چنین مقایسه‌ای اصولاً ممکن نیست، اما در عمل اکثر افراد می‌توانند بر مبنای تجربه‌های زندگی روزمره، مانند استفاده از سرعت راه رفتن یا رانندگی به عنوان مقیاس‌های نسبی، این تطبیق را انجام دهند.] سعی کنید مخروط‌های نور گذشته و آینده را

در فضا‌زمان با استفاده از یک‌های طبیعی (مانند، دقیقه و متر) رسم کنید. با استفاده از آن ببینید چگونه مخروط‌های نور به‌دقت یک "سطح هم‌زمانی" را در زندگی روزمره تعریف می‌کند.

تمرین کامپیوتری ۳

برنامه‌ای بنویسید که ورودی آن از راداری باشد که یک شیء ناشناخته را دنبال می‌کند [داده]‌های زیر را بپذیرد، (الف) زمان T_1 که یک تپ راداری به‌سوی شیء ناشناخته گسیل می‌شود، (ب) زمان T_2 که در آن پژواکی از آن شیء دریافت می‌شود؛ و خروجی آن عبارت باشد از (۱) فاصله D تا شیء ناشناخته، (۲) زمان TR که در آن تپ رادار از شیء بازتابیده می‌شود.

فرض کنید که دستگاه رادار به‌فاصله T یک سلسله تپ‌های منظم می‌فرستد. T چقدر باشد تا تپ‌های پژواکی مختلف مخلوط نشوند؟ برنامه‌تان را تعدیل کنید تا سرعت نسبی نزدیک شدن شیء ناشناخته را نیز با استفاده از تپ‌های پژواکی دریافتی از آن چاپ کند. مطمئن شوید که اگر تعیین سرعت شیء ناشناخته شرط نسبیت خاص را نقض کرد برنامه شما یک پیام هشداردهنده مخصوص را چاپ می‌کند. این پیام هشداردهنده را با چه جمله مناسبی می‌توان بیان کرد؟

نتیجه‌گیری

اکنون روشهایی را برای اندازه‌گیری کمیت‌های اساسی (زمان، فاصله، هم‌زمانی) که به‌عنوان مبنا برای تمام اندازه‌گیری‌های سینماتیکی دیگر مورد نیاز هستند تعیین کرده‌ایم، و این‌کار را با در نظر داشتن ماهیت حدی سرعت نور انجام داده‌ایم. درک این نکته مهم است که (از دیدگاه اصل نسبیت) تمام ناظرها هم‌ارز هستند و بنابراین همگی برای تعیین زمان، اندازه‌گیری مسافت، و تعیین هم‌زمانی، چنانکه در بالا به اختصار آمد، از روش واحدی استفاده خواهند کرد. در فصل بعد، پیامدهای این روشهای اندازه‌گیری را تعیین خواهیم کرد.

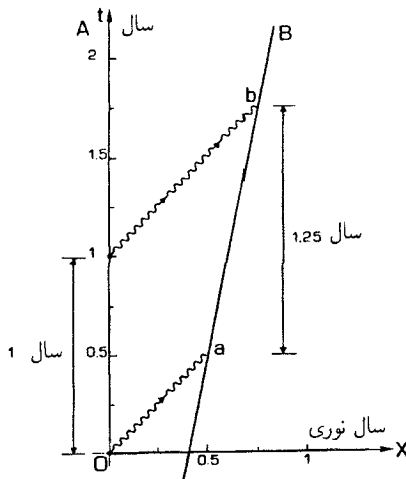
اندازه‌گیری در فضا زمانهای تخت

اکنون خواص فضا زمان نسبیت خاص را که در فصلهای قبل با آنها آشنا شدیم به صورت کمی درمی‌آوریم. برای این کار از یک روش ساده استفاده خواهیم کرد به نام حساب K که هرمن باندی مبتکر آن است. می‌توانیم تمام اثرهای فیزیکی بجز گرانش را در این فضا زمانها عیناً نشان دهیم. برای نمایش مناسب گرانش باید از فضا زمانهای خمیده استفاده کنیم: این مطالب را در فصل ۵ مورد بحث قرار خواهیم داد.

جنبه‌های اصلی نسبیت خاص که به ترتیب بررسی خواهند شد عبارت‌اند از جنبه‌های سینماتیکی آن، یعنی (۱) اثر دوپلر، (۲) جمع سرعت نسبیتی، (۳) نسبی بودن همزمانی، (۴) اتساع زمان و "پارادوکس دوقلوها"، و (۵) انقباض طول؛ و جنبه‌های دینامیکی آن مانند (۶) بستگی مؤثر جرم به سرعت نسبی، و هم ارز بودن جرم و انرژی. در حالی که هر یک از این اثرها را می‌توان فی‌نفسه مهم دانست، اما تأکید بر این خواهد بود که آنها تنها به صورت مجموعه‌ای کلی که در آن همگی با هم اتفاق می‌افتند معنادار هستند. در فصل بعدی به بررسی راههای فشرده‌تر نمایش این کل خواهیم پرداخت.

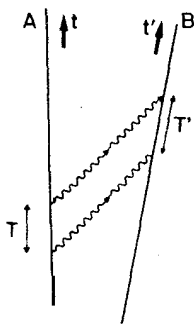
۳-۱ اثر دوپلر

اولین جنبه‌ای که بررسی می‌کنیم اثر حرکت نسبی بر آهنگ نسبی گذشت زمان مشاهده شده است. ایده‌آسی به‌قرار زیر است. فرض کنید فضانورد B در سفینه‌ای قرار دارد که با سرعت یکنواخت



شکل ۳-۱ دو علامت که به فاصله یک سال از هم از ایستگاه فضایی A فرستاده می‌شوند، آن‌طور که در دستگاه مختصات A دیده می‌شود (زمان صفر را ظهر روز ۲۲ اسفند سال ۱۳۸۹ انتخاب کرده‌ایم). علامت اول را فضانورد B در رویداد a با مختصات $t = 0.5$ و $x = 0.5$ دریافت می‌کند. علامت دوم را B در رویداد b دریافت می‌کند که مختصات آن $t = 1.75$ و $x = 0.75$ است. بدین ترتیب از نظر A، فاصله زمانی بین دریافت این دو علامت توسط B ۱٫۲۵ سال است. نمی‌توانیم از این نمودار بازه زمانی را که B بین این دو رویداد اندازه می‌گیرد تعیین کنیم.

۱/۵C از ایستگاه فضایی A دور می‌شود و به سوی ستاره آلفا قنطورس می‌رود. ایستگاه فضایی هر سال در تاریخ ۱۳ مارس (۲۲ اسفند) برای B تبریک تولد می‌فرستد. فرض کنید که طبق اندازه‌گیری ایستگاه فضایی، در سال ۲۰۱۰ (۱۳۸۹ شمسی) پیام رادیویی حامل این تبریک فاصله ۱/۲ سال نوری را برای رسیدن به سفینه طی می‌کند و زمان لازم برای این کار $T = 1/2$ سال است. پیام بعدی دقیقاً یک سال بعد فرستاده می‌شود. وقتی این پیام رادیویی پس از ۱/۲ سال به جایی می‌رسد که فضانورد پیام قبلی را دریافت کرده بود، سفینه به اندازه ۱/۵ سال نوری جلو رفته است، پس این علامت برای رسیدن به سفینه باید راه درازتری را بپیماید؛ در واقع زمانی که A برای رسیدن علامت به سفینه اندازه می‌گیرد ۳/۴ سال پس از گسیل علامت است (شکل ۳-۱). بدین ترتیب طبق نظر A، B تبریکهای تولدی را که سالانه فرستاده می‌شود به فاصله یک و یک چهارم سال دریافت می‌کند! این مستقیماً به ما نمی‌گوید که B بازه دریافت علائم را چقدر اندازه می‌گیرد (به هشدار که در فصل قبل داده شد توجه کنید)، اما نشان می‌دهد که این زمان یک سال نخواهد بود. اثر مشابهی برای همه علائم نوری یا رادیویی که از B به A فرستاده می‌شود روی می‌دهد. بنابراین انتظار داریم که آهنگ رویدادها در ایستگاه فضایی آن‌گونه که فضانورد می‌بیند، با آهنگ همان رویدادها که در ایستگاه فضایی اندازه گرفته می‌شود متفاوت باشد. این اثری است که اکنون بررسی می‌کنیم. دو ناظر لخت A و B را که نسبت به هم حرکت می‌کنند در نظر بگیرید. A یک علامت



شکل ۲-۳ علامت نوری که ناظر A در بازه زمانی T ، که ساعت خودش اندازه می‌گیرد، به ناظر B که نسبت به A در حرکت است می‌فرستد. این علامت را B در بازه T' ، طبق ساعت خودش دریافت می‌کند؛ K را با رابطه $T' = KT$ تعریف می‌کنیم.

نوری گسیل می‌کند، به اندازه زمان T با توجه به ساعت خود صبر می‌کند، و سپس علامت دیگری می‌فرستد. B بازه زمانی بین دریافت این دو علامت را T' اندازه می‌گیرد (شکل ۲-۳). اکنون کمیت K را برابر نسبت این دو ویژه زمان تعریف می‌کنیم

$$K = T'/T \quad \Leftrightarrow \quad T' = KT \quad (۱-۳)$$

خواهیم دید که هرگاه سرعت حرکت نسبی غیرصفر باشد، بازه‌های زمانی متفاوت‌اند، یعنی K مخالف ۱ است. [روابطی که K را به سرعت نسبی ناظرها مربوط می‌کنند روابط ۳-۹ و ۳-۱۰ هستند که بعداً می‌آیند.]

اصولاً K را می‌توان به سادگی از تعریف ۱-۳ مستقیماً اندازه گرفت. مثلاً، اگر وسیله نقلیه A (که می‌تواند یک سفینه فضایی، یک هواپیمای، زمین یا هر چیز دیگر باشد) مجهز به یک فرستنده رادیویی باشد که علامتی را در بازه منظم معلوم (مثلاً هر دقیقه) گسیل کند، B برای تعیین K فقط باید این علامت را دریافت کند و بازه زمانی بین آنها را اندازه بگیرد. بدین ترتیب اگر B بازه زمانی بین دریافت علامت را ۱٫۵ دقیقه اندازه بگیرد، در این صورت $T = ۱$ و $T' = ۱٫۵$ (دقیقه) و در نتیجه $K = ۱٫۵/۱ = ۱٫۵$. جنبه فرضی را قویتر می‌کنیم، فرض می‌کنیم که A و B دارای ساعت‌های دقیق یکسان هستند، و B یک تلسکوپ بسیار قوی در اختیار دارد که به کمک آن می‌تواند ساعت A را ببیند. در این صورت کافی است که او ساعت A را با تلسکوپ مشاهده کند، و زمان آن را با زمان ساعت خودش مقایسه کند (مثلاً هر بار ساعت A گذشت یک ساعت را نشان می‌دهد بازه زمانی $T' = ۱$ h را طبق ساعت خودش یادداشت کند؛ در این صورت K از ۱-۳ با قرار دادن $T = ۱$ h نتیجه می‌شود). این چیزی جز آن «آزمایش خیالی» بخش ۱-۳ نیست که در آن یک ناظر در تراموا برج ساعت شهر برن را مشاهده می‌کرد. آن آزمایش خیالی به ما می‌گوید که باید انتظار داشته باشیم با نزدیک شدن سرعت نسبی ناظرها به سرعت نور K به طور نامحدود بزرگ شود.

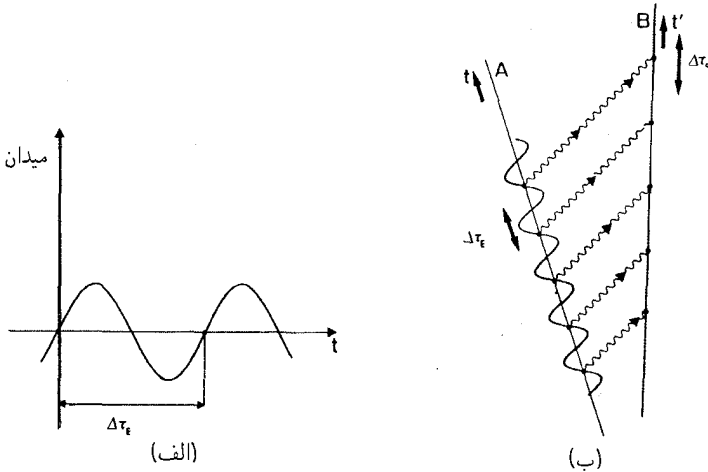
انتقال به سرخ

اغلب ساده‌ترین راه عملی اندازه‌گیری کمیت K اندازه‌گیری طول موج مشاهده شده نور، امواج رادیویی و یا دیگر تابشهای الکترومغناطیسی است که از منبع گسیل می‌شود، به شرط اینکه طول موج ذاتی این تابشها را بدانیم. این مبنای اندازه‌گیریهای انتقال به سرخ است که ابزار اصلی ما برای بررسی انبساط جهان است.

فرض کنید A تابش الکترومغناطیسی با طول موج λ_E گسیل می‌کند. در این صورت دوره ΔT_E این تابش [زمان یک نوسان کامل، با شکل ۳-۳ (الف) مقایسه کنید] برابر است با $\lambda_E = c \Delta T_E$. طبق معادله ۱-۳، دوره تابشی که B دریافت می‌کند را او $\Delta T_o = K \Delta T_E$ اندازه می‌گیرد [شکل ۳-۳ (ب)]. طول موج λ_o که B برای نور مشاهده می‌کند، با دوره آن با رابطه $\lambda_o = c \Delta T_o$ مربوط می‌شود. بنابراین رابطه طول موج تابش دریافتی با طول موج تابش گسیل به صورت زیر است

$$\lambda_o = K \lambda_E \quad (۲-۳)$$

این تغییر طول موج را می‌توان مستقیماً از طیف نور دریافتی به سادگی اندازه گرفت. در طیف مشاهده شده از منبع یک خط با طول موج معلوم را شناسایی می‌کنیم (مثلاً "خط آلفا" با طول موج ۱۲۱۵ آنگستروم در طیف هیدروژن)، طول موج دریافت شده آن را اندازه می‌گیریم، و K را از



شکل ۳-۳ (الف) دامنه یک میدان الکتریکی که برحسب زمان رسم شده است و دوره ΔT_E را نشان می‌دهد (مدت یک نوسان کامل). (ب) ناظر B دوره ΔT_o را برای علامتی که ناظر A با دوره ΔT_E گسیل کرده است اندازه می‌گیرد.

۱. اگر می‌توانید معادله ۳-۳ را به عنوان معادله‌ای صحیح بپذیرید، می‌توانید جزئیات به دست آوردن آن را حذف کنید.

معادله ۲-۳ تعیین می‌کنیم. معمول است که نتیجه چنین اندازه‌گیری‌هایی را برحسب پارامتر انتقال به سرخ z که تغییر نسبی طول موج است بیان کنند. z رسماً با رابطه

$$z = \frac{(\text{تغییر در طول موج})}{(\text{طول موج گسیل شده})}$$

$$= (\lambda_o - \lambda_E) / \lambda_E$$

$$= \lambda_o / \lambda_E - 1 \quad (\text{الف ۳-۳})$$

تعریف می‌شود. در این صورت نتیجه می‌شود که

$$1 + z = \lambda_o / \lambda_E = K \quad (\text{ب ۳-۳})$$

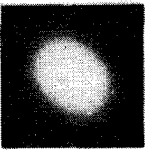
اخترشناسها انتقال به سرخ کهکشانهای دور دست را معمولاً از طیف آنها اندازه می‌گیرند و از آن برای تعیین سرعت دور شدن آنها استفاده می‌کنند (شکل ۳-۴؛ ما رابطه انتقال به سرخ و سرعت را در بخش ۲-۳ و ۳-۴ بررسی می‌کنیم). نام "انتقال به سرخ" از این رو مورد استفاده قرار می‌گیرد که مشاهده شده است که نور کهکشانهای دور دست در حال عقب نشینی به طرف انتهای سرخ طیف جا به جا می‌شود. زیرا اگر $z > 0$ باشد، در این صورت $K > 1$ می‌شود و طول موج دریافتی طولانیتر از طول موج گسیل شده است. رنگ نور مستقیماً از طول موج آن به طریق زیر تعیین می‌شود: برحسب پیکاهای 10^{-5} سانتیمتر، طول موج نور قرمز بین ۷۵ و ۶۳، نارنجی از ۶۳ تا ۵۹، زرد از ۵۹ تا ۵۳، سبز از ۵۳ تا ۴۹، آبی از ۴۹ تا ۴۵، نیلی از ۴۵ تا ۴۳، و بنفش از ۴۲ تا ۳۹ است در صورتی که فروسرخ بیش از ۷۵ و فرابنفش کمتر از ۳۹ است. بدین ترتیب نوری که آبی گسیل شده است ممکن است سبز دیده شود و نوری که سبز گسیل شده است ممکن است زرد دیده شود و غیره، [با شکل ۳-۵(الف) مقایسه کنید]. پس همان‌طور که گفتیم نور به سوی انتهای سرخ طیف جا به جا می‌شود، از طرف دیگر اگر $z < -1$ باشد، در این صورت $1 < K < 0$ می‌شود، و طول موج دریافتی کوتاهتر از طول موج گسیل شده است، و نور به طرف آبی انتقال پیدا می‌کند (نوری که در هنگام گسیل زرد بوده است ممکن است سبز دیده شود و نوری که سبز بوده است ممکن است آبی دیده شود و غیره [شکل ۳-۵(ب) را ببینید].

البته این اثر برای تمام تابشهای الکترومغناطیسی وجود دارد. مثلاً اگر A از رادیو پخش شود و B نسبت به A در حرکت باشد و K اختلاف قابل ملاحظه‌ای با ۱ داشته باشد، در این صورت B باید برای دریافت صدا، رادیوی خود را دوباره تنظیم کند. مثلاً فرض کنید که یک فرستنده علامتی را با بسامد ۲ kHz می‌فرستد. بسامد ν طبق رابطه $c = \nu \lambda$ با طول موج λ ارتباط دارد، بنابراین معادله ۲-۳ نشان می‌دهد

$$\nu_o = \nu_E / K \quad (۴-۳)$$

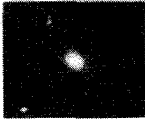
انتقالهای به سرخ

فاصله برحسب سال نوری



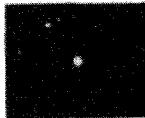
دباکبر

۷۵۰۰۰۰۰



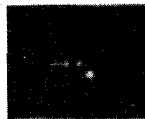
اکلیل شمالی

۱۰۰۰۰۰۰۰



عوا

۱۳۰۰۰۰۰۰



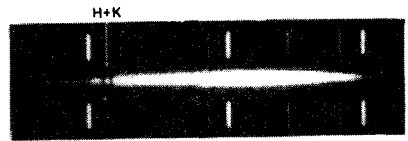
سنبله

۲۳۰۰۰۰۰۰

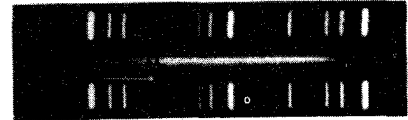


شجاع

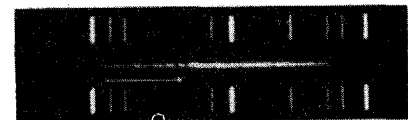
۳۵۰۰۰۰۰۰



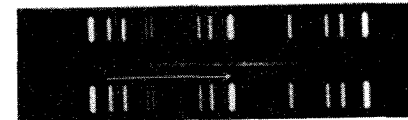
۷۵۰ مایل در ثانیه



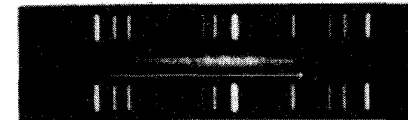
۹۳۰۰ مایل در ثانیه



۱۳۴۰۰ مایل در ثانیه



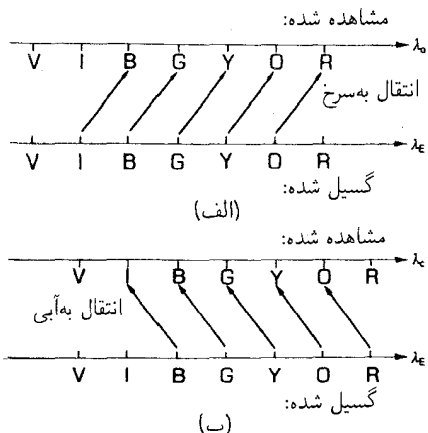
۲۴۴۰۰ مایل در ثانیه



۳۸۰۰۰ مایل در ثانیه

شکل ۳-۴ رابطه بین فاصله و انتقال به سرخ برای کهکشانهای دوردست. در هر مورد طیف کهکشان بین طیفهای مرجع آزمایشگاهی نمایش داده شده است؛ انتقال به سرخ مستقیماً از انتقال بسامد خطوط K و H کلسیم در طیفها، که در اینجا با پیکان نشان داده شده است، اندازه‌گیری می‌شود. سپس انتقالهای به سرخ (با استفاده از رابطه انتقال دوپلر) به صورت سرعت بیان می‌شوند. فاصله کهکشانهای از درخشندگی ظاهری آنها برآورده و برحسب سال نوری بیان می‌شود (یک سال نوری تقریباً $10^{12} \times 6$ مایل است). در اینجا رابطه بین انتقال به سرخ و فاصله معمولاً دلیلی برای انبساط عالم تلقی می‌شود.

به عبارت دقیق اگر $K = 2$ باشد؛ در این صورت B علامت را با فرکانس 1 kHz دریافت خواهد کرد. روشن است که K را می‌توان مستقیماً از تغییر لازم برای تنظیم مجدد محاسبه کرد. چون این اثر اساساً با انتقال دوپلر امواج صوتی یکسان است (صدای یک منبع در حال حرکت با بسامدی متفاوت از بسامد گسیل شنیده می‌شود)، می‌توان پارامتر K را به حق ضریب انتقال دوپلر نامید.

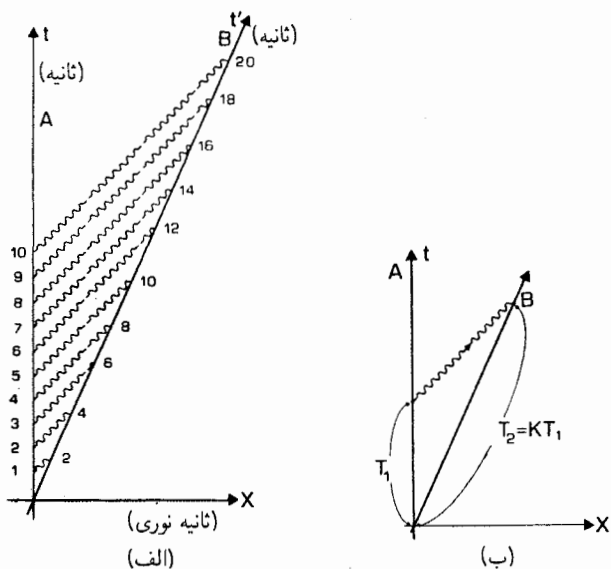


شکل ۵-۳ (الف) انتقال به سرخ: طول موج مشاهده شده نور با رنگهای مختلف (قرمز، نارنجی، زرد، سبز، آبی، نیلی، بنفش) از طول موج گسیل شده بلندتر است، از این رو به نظر می آید که رنگها به طرف انتهای سرخ طیف جا به جا شده اند. (ب) انتقال به آبی: طول موج مشاهده شده نور از طول موج نور گسیل شده کوتاهتر است.

یکنواختی K

اولین فرض اساسی در مورد K (که با معادله ۱-۳ تعریف می شود) آن است که وقتی A و B ناظرهای لخت باشند، K مستقل از T و در زمان ثابت است. ابتدا، K مستقل از T فرض می شود؛ بدین ترتیب، مثلاً چه علائم با فاصله یک ثانیه و چه با فاصله یک ساعت از یکدیگر گسیل می شوند ضریب دوپلر یکسان اندازه گرفته می شود. این بدان معناست که انتقال طیفی مشاهده شده از یک منبع (معادله ۲-۳ تا ۴-۳) برای همه طول موجها یکی است، و این نشان اصالت اثر است؛ در یک طیف مشاهده شده انتقال به سرخ باید برای تمام خطوط طیف یکسان باشد. اگر مقادیر اندازه گیری شده z برای نوری که از یک منبع می آید برحسب خطی که اندازه گرفته می شود تغییر کند، تغییر طول موج ناشی از اثر انتقال دوپلر ساده نیست؛ باید در جستجوی علل دیگر بود. ثانیاً، اگر A و B با لختی حرکت کنند، K برحسب زمان ثابت فرض می شود؛ بدین ترتیب اگر سرعت نسبی ثابت باشد، مقدار به دست آمده برای K در ساعت ۱ و در ساعت ۲ برابر خواهد بود. این را می توان وارون کرد: فرض کنید که منبع A در فضا زمان تخت نسبت خاص به طور لخت حرکت می کند. در این صورت می توان با مشاهده ثابت بودن K در زمان تعیین کرد که آیا حرکت B لخت است یا خیر (یعنی، آیا حرکت منبعها نسبت به هم یکنواخت است یا خیر). (توجه داشته باشید که نتایج ذکر شده در اینجا در نظریه نسبیت خاص صحیح اند؛ اما در فضازمانهای خمیده نظریه نسبیت عام همیشه صادق نیستند، همان گونه که در فصل ۵ خواهیم دید.)

نمایش این نتیجه به فرار زیر است: فرض کنید ناظر B نسبت به ناظر A به طور یکنواخت حرکت



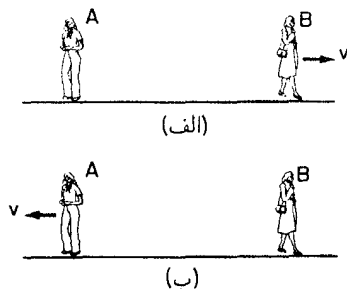
شکل ۳-۶ (الف) ناظر A علائم منظمی را به مدت ده ثانیه می‌فرستد، این علائم را B طی ۲۰ ثانیه دریافت می‌کند زیرا ضریب K برابر است با ۲. (ب) در حالت کلی در این حالت، $T_2 = KT_1$.

می‌کند و برای ضریب K مقدار ۲ را مشاهده می‌کند؛ B از کنار A در رویداد O عبور می‌کند، و A در رویداد O سپس در بازه ۱ ثانیه و به مدت ۱۰ ثانیه علائمی را به B ارسال می‌کند [شکل ۳-۶ (الف) را ببینید]. در این صورت B این علائم را در بازه‌های منظم ۲ ثانیه دریافت می‌کند؛ بنابراین تمام مدت تراگسیل T_1 که توسط A ثبت می‌شود (۱۰ ثانیه) با تمام مدت دریافت علائم T_2 به وسیله B (۲۰ ثانیه) با رابطه $T_2 = 2T_1$ ، یعنی $T_2 = KT_1$ مربوط می‌شود [شکل ۳-۶ (ب) را ببینید].

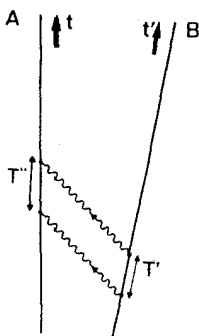
دوجانبگی K

دومین فرض اساسی در مورد K نتیجه‌ای است از اصل نسبیت. فرض کنید که نه تنها A علائمی به B می‌فرستد، بلکه ناظر B نیز علائمی را به A ارسال می‌کند. در این صورت هیچ‌گونه تفاوت ذاتی بین دو حالت وجود ندارد: در هر مورد منبع صرفاً علائمی را به ناظر، که نسبت به منبع در حرکت است، می‌فرستد (شکل ۳-۷ را ببینید). در نسبیت خاص ضریب K نتیجه حرکت نسبی در فضا زمان تخت است. چون این فضا زمان همسانگرد است (یعنی، در تمام جهات یکی است)، انتشار نور در تمام جهات یکسان است. به دلیل هم‌ارز بودن همه ناظرهای لخت، دو ضریب اندازه‌گیری شده K باید یکسان باشند

$$K_{AB} = K_{BA} \quad (۵-۳)$$

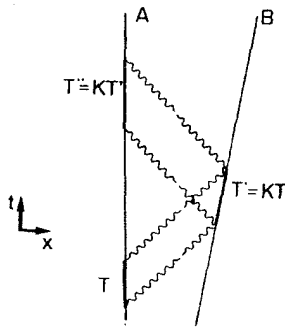


شکل ۳-۷ حرکت نسبی با سرعت v برای ناظرهای A و B که (الف) در چارچوب سکون A (ناظر A ساکن است و ناظر B با سرعت v به راست حرکت می‌کند، و (ب) در چارچوب سکون (ناظر B ساکن است و A با سرعت v به چپ حرکت می‌کند) مشاهده می‌شود.



شکل ۳-۸ علامتی که B درباره T' (که ساعت خود را اندازه می‌گیرد) می‌فرستد و A درباره T'' (اندازه‌گیری ساعتش) دریافت می‌کند. طبق اصل نسبیت، $T'' = KT'$.

که در آن K_{AB} ضریب K برای نوری است که A گسیل و B دریافت می‌کند و K_{BA} ضریب K برای نوری است که B گسیل و A دریافت می‌کند. اگر این طور نبود یک اختلاف ذاتی بین انتشار نور از B به A و از A به B وجود می‌داشت، که خلاف فرض نسبیت است: این تفاوت ذاتی اندازه‌گیری حرکت مطلق را ممکن می‌ساخت. بدین ترتیب اثر انتقال دوپلر کاملاً دوجانبه است: هر تغییر نسبی زمان که B در مشاهداتش از A آشکار کند A هم در مشاهداتش از B آشکار می‌سازد. اگر افزایش ضریب γ در طول موجهای نور دریافتی از B را اندازه بگیرد، در این صورت B هم در طول موجهای نوری که از A دریافت می‌کند یک افزایش ضریب γ را اندازه خواهد گرفت. از این رو A باید برای دریافت علامت از B تنظیم گیرنده خود را با ضریب γ تغییر دهد و B هم برای دریافت علامت از A باید تنظیم گیرنده خود را به اندازه ضریب γ تغییر دهد. ناظر B می‌بیند که ساعت A با ضریب γ کندتر کار می‌کند و A هم می‌بیند که ساعت B با ضریب γ کندتر کار می‌کند. این تقارن به ما اجازه می‌دهد که زیرنویس 'AB' را از K_{AB} حذف کنیم. البته وقتی که قرائن نشان دهد که کدام ناظرها مورد نظر است (شکل ۳-۸ را ببینید).



شکل ۹-۳. علامتی که A درباره T می‌فرستد، B آنها را درباره T'' بازمی‌تاباند، و A آنها را درباره T'' دریافت می‌کند.

اندازه‌گیری K با رادار

یک خاصیت مفید از رابطهٔ تقارن ۵-۳ نتیجه می‌شود: فرض کنید A دو تپ دربارهٔ زمانی T می‌فرستد، که در B بازتابیده می‌شوند و A دوباره آنها را دربارهٔ زمانی T'' دریافت می‌کند (شکل ۹-۳). طبق تعریف K ، زمان بین این دو تپ را $T' = KT$ اندازه می‌گیرد، و در این صورت $T'' = KT' = K^2 T$. بدین ترتیب، کافی است که A برای تعیین K نسبت T''/T را مشاهده کند و در رابطهٔ

$$K = \sqrt{(T''/T)} \quad (۶-۳)$$

قرار دهد. اهمیت این خاصیت ناشی از آن است که اگر برای تعیین K از روابط ۱-۳ تا ۴-۳ استفاده شود، ناظر A باید تابشی را که از B گسیل شده است دریافت کند و طول موج (یا بسامد) این تابش باید معلوم باشد. بدین ترتیب، با علامت باید عمداً با بسامد مشخصی ارسال شود، یا بسامد را باید از تابش دریافت شده (که نمایانگر شرایط فیزیکی در منبع است) به دست آورد، مثلاً با تشخیص خطوط طیفی ویژه. اما، با استفاده از تپهای بازتابیده و رابطهٔ ۶-۳، A می‌تواند K را اندازه بگیرد حتی اگر B تابشی گسیل نکند. با این کار او می‌تواند سرعت B نسبت به خود و فاصلهٔ B را صرفاً بر مبنای اندازه‌گیری‌هایی در محل خود، بدون همکاری B و داشتن اطلاعات تفصیلی در مورد B اندازه بگیرد.

خلاصه

بحثی که ارائه کردیم نشان می‌دهد که هرگاه $K > ۱$ (و این همان‌گونه که در بخش آینده خواهیم دید، هنگامی است که A و B از هم دور شوند)، ضریب K افزایش نسبی زمان را که B در تمام

پدیده‌ها در A ، و A در تمام پدیده‌ها در B مشاهده می‌کند به دست می‌دهد. اینکه ما معمولاً به این اثر انتقال به سرخ نور می‌گوییم تنها بدین علت است که اتفاقاً مشاهده این انتقال آسان است. انتقال زمانی که برای تمام اثرهای دیگر مشاهده می‌شود یکسان است. مثلاً، فرض کنید تابشی که از یک شیء شبه‌ستاره‌ای در فاصله بسیار زیاد دریافت می‌کنیم دارای انتقال به سرخ $z = 3$ است، و روشنایی آن در یک مقیاس زمانی ۸ ساعته تغییر می‌کند. در این صورت (چون $K = z + 1 = 4$) در واقع این تغییرات باید در منبع در یک مقیاس زمانی ۲ ساعته به وقوع پیوسته باشد.

تمرینها

۱-۳ یک فضاپنورد که از زمین دور می‌شود و سرعت او طوری است که $K = 2$ ، تلویزیون را روی نمایشی که از زمین پخش می‌شود میزان می‌کند. چگونه ضریب K در تصویری که او به دست می‌آورد و نحوه دریافت آن تاثیر می‌گذارد؟

۲-۳ برای اینکه دو سفینه فضایی بتوانند عملیات پیچیده اتصال به یکدیگر را انجام دهند باید نسبت به هم ساکن نگه داشته شوند. آزمایش ساده‌ای ابداع کنید که این نکته را نشان دهد.

تمرین کامپیوتری ۴

برنامه‌ای بنویسید که به عنوان ورودی (الف) با یک مقدار K و یا یک مقدار z ناشی از حرکت نسبی دو ناظر، و (ب) یک دوره T ، یک طول موج L ، یا یک بسامد F که یکی از آنها اندازه می‌گیرد را بپذیرد؛ و به عنوان خروجی دوره T' ، طول موج L' و بسامد F' (مناسب)، متناظر با آنها را که دیگری اندازه می‌گیرد (و با معادله‌های ۱-۳ تا ۴-۳ تعیین می‌شوند) به دست دهد. اکنون برنامه خود را تعدیل کنید تا به عنوان ورودی حرفی را که نماینده رنگ نور گسیل شده است (مثلاً 'آ'، برای 'آبی') بپذیرد و رنگ این نور را، آن‌طور که ناظر در حال حرکت نسبی می‌بیند، چاپ کند. [توجه داشته باشید که برای مقادیر بزرگ z ، برخی نورها به خارج از گستره مرئی و برخی تابشها به این گستره منتقل می‌شوند.]

اگر کامپیوتر شما دارای گرافیک رنگی است، این تغییر را بر هر تصویر رنگی که در اختیار دارید اعمال کنید تا اثر انتقال به سرخ ($K > 1$) و یا انتقال به آبی ($K < 1$) یک تصویر را با چشم خود ببینید.

۲-۳ سرعت نسبی

در نظریه نسبیت خاص، ضریب انتقال دوپلر K فقط به حرکت نسبی منبع و ناظر بستگی دارد. ابتدا آن رابطه را در حالت ساده حرکت نسبی شعاعی تعیین می‌کنیم و سپس قانون جمع سرعت‌های موازی را در نظریه نسبیت خاص به دست می‌آوریم.

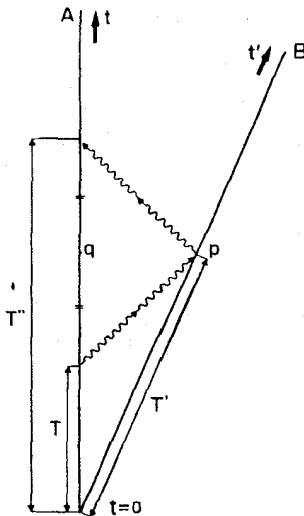
رابطه بین K و حرکت نسبی شعاعی

دو ناظر A و B را که با سرعت یکنواخت v مستقیماً از هم دور می‌شوند در نظر می‌گیریم. برای سهولت، فرض کنید که وضعیت آنها در زمان $t = 0$ ، که با ساعت‌های آنها تعیین می‌شود یکی باشد؛ می‌توانیم تصور کنیم که در آن زمان با رادیو به یکدیگر علامت می‌دهند (فاصله صفر است و بنابراین ارتباط لحظه‌ای است). فرض کنید، که در زمان T که با ساعت او تعیین می‌شود، یک تپ رادیویی گسیل کند که توسط B در زمان T' ، که ساعت B اندازه می‌گیرد، بازتابیده شود، و آنرا دوباره در زمان T'' ، که ساعت A اندازه می‌گیرد دریافت کند (شکل ۳-۱۰). با به‌خاطر داشتن تعریف ۳-۱ برای K و رابطه دوجانبگی ۳-۵، به‌دست می‌آوریم (با شکل ۳-۶ و استنتاج معادله ۳-۶ مقایسه کنید).

$$T' = KT, \quad T'' = KT' = K^2 T$$

بنابراین، بر طبق A، زمان سیر تپ رادیویی برابر است با

$$T'' - T = K^2 T - T = (K^2 - 1)T$$



شکل ۳-۱۰ ناظر A یک علامت رادیویی در زمان T گسیل می‌کند و ناظر B آنرا در زمان T' دریافت می‌کند و ناظر A این علامت مجدداً به‌طرف ناظر A بازتابیده می‌شود و این ناظر آنرا در زمان T'' دریافت می‌دارد. ناظر A رویداد q را در زمان $\frac{1}{2}(T + T'')$ همزمان با p اندازه می‌گیرد.

بدین ترتیب طبق معادله ۱-۲ فاصله راداری که A بین B و A اندازه می‌گیرد برابر است با

$$D = \frac{1}{\gamma} c(K^2 - 1)T \quad (۷-۳)$$

برای تعیین سرعت B، که A اندازه می‌گیرد، باید پیدا کنیم که چه وقت A فاصله B را اندازه می‌گیرد. طبق تعریف همزمانی (بخش ۲-۳، A رویداد بازتابش p را با رویداد q در تاریخچه خود که در نیمه راه بین زمانهای گسیل و دریافت قرار دارد همزمان اندازه می‌گیرد. طبق معادله ۲-۲، ساعت A در q زمان زیر را نشان می‌دهد

$$t_q = \frac{1}{\gamma}(T'' + T) = \frac{1}{\gamma}(K^2 + 1)T \quad (۸-۳)$$

اما، A و B در زمان $t = 0$ که ساعت A اندازه گرفته است بر هم منطبق بوده‌اند. بنابراین A نتیجه می‌گیرد که B در زمان t_q (که از ۸-۳ به دست می‌آید) فاصله D (که از ۷-۳ به دست می‌آید) را پیموده است، از این رو سرعت B نسبت به A، آن‌طور که A اندازه می‌گیرد، برابر است با

$$v = D/t_q = \left\{ \frac{1}{\gamma} c(K^2 - 1)T \right\} / \left\{ \frac{1}{\gamma}(K^2 + 1)T \right\}$$

ضرب صورت و مخرج در γ/T نشان می‌دهد که

$$v = (K^2 - 1)c / (K^2 + 1) \quad (۹-۳ الف)$$

بنابراین K، که به راههای مختلف قابل اندازه‌گیری است (بخش ۳-۱ را ببینید)، مستقیماً سرعت نسبی دور شدن A و B را تعیین می‌کند (توجه کنید که اگر حرکت غیرشعاعی باشد، یعنی اگر A و B مستقیماً به یکدیگر نزدیک و یا از هم دور نشوند، نتایج بالا پیچیده‌تر می‌شوند؛ در اینجا فقط حرکت شعاعی را در نظر می‌گیریم). همان‌گونه که برای ساده کردن اندازه‌گیری فاصله‌ها نسبت به سرعت نور مقیاس مختصات (X, Y, Z) را تغییر دادیم، اکنون هم بهتر است که مقیاس اندازه‌گیری سرعت را تغییر دهیم. این کار را با تعریف $V = v/c$ انجام می‌دهیم. کمیت V بی بعد است؛ این کمیت سرعت v است که به مقیاس سرعت نور درآمده است. طبق این یکاها، سرعت نور ± 1 است (اگر $v = c$ باشد $V = c/c = 1$ ؛ اگر $v = -c$ ، در این صورت $V = -1$). پس نتیجه نهایی عبارت است از

$$V = (v/c) = (K^2 - 1) / (K^2 + 1) \quad (۹-۳ ب)$$

می‌توانیم معادله (۳-۹) را برای K^2 بر حسب V با ضرب دو طرف در $K^2 + 1$ و مرتب کردن جمله‌ها حل کنیم. به دست می‌آوریم

$$V(K^2 + 1) = (K^2 - 1) \Leftrightarrow K^2(V - 1) = -(V + 1)$$

بنابراین

$$K^2 = -(V + 1)/(V - 1) = (1 + V)/(1 - V)$$

در جذر گرفتن از این رابطه ابهامی که در مورد علامت وجود دارد با توجه به اینکه K باید همواره مثبت باشد از بین می‌رود (اگر B ساعت A را با یک تلسکوپ مشاهده کند، هرگز نخواهد دید که ساعت به عقب می‌رود!) بدین ترتیب معلوم می‌شود که ضریب انتقال دوپلر K ناشی از سرعت نسبی شعاعی v برابر است با

$$K = \left(\frac{1 + V}{1 - V} \right)^{1/2} \quad (۳-۱۰ الف)$$

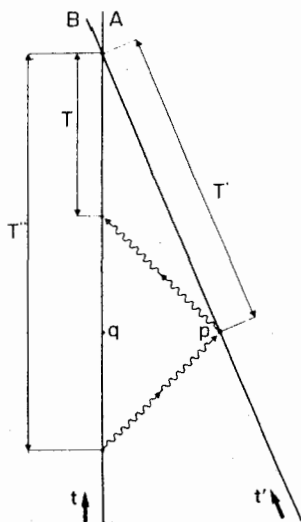
مثلاً، اگر $v = 1/4c$ ، در این صورت $V = 1/4$ ، $1 + V = 5/4$ ، $1 - V = 3/4$. پس $K^2 = 5/3$ و $K = (5/3)^{1/2} = 1.291$. همین‌طور

$K = 3^{1/2} = 1.732$	اگر $v = \frac{1}{2}c$ در این صورت
$K = 7^{1/2} = 2.646$	اگر $v = \frac{3}{4}c$ در این صورت
$K = 19^{1/2} = 4.359$	اگر $v = \frac{9}{16}c$ در این صورت
$K = 199^{1/2} = 14.107$	اگر $v = \frac{99}{100}c$ در این صورت

بدین ترتیب، همان‌طور که انتظار می‌رود، سرعت‌های نسبی زیاد سبب ایجاد ضرایب K بزرگ و در نتیجه نسبت‌های بزرگ بین زمان‌هایی می‌شوند که دو ناظر اندازه می‌گیرند.

نزدیک شدن و دور شدن

محاسبهٔ بالا برای سرعت دور شدن نسبی A از B انجام شده است، و فرض بر این بود که $v > 0$. اگر موردی را در نظر بگیریم که A و B با سرعت نسبی v به هم نزدیک می‌شوند (شکل ۳-۱۱)، روابط حاصل یکسان‌اند بجز اینکه v با $-v$ و V با $-V$ جایگزین شود. بنابراین، با معرفی قرارداد علامت، می‌توانیم روابط ۳-۹ و ۳-۱۰ را هم برای نزدیک شدن و هم دور شدن استفاده کنیم: هرگاه A و B از یکدیگر دور شوند v مثبت و هرگاه آنها به هم نزدیک شوند v منفی است. ما از این پس قرارداد علامت را می‌پذیریم؛ در این صورت ۳-۹ و ۳-۱۰ برای حرکت نسبی شعاعی قابل



شکل ۱۱-۳ وضعیتی شبیه به آنچه در شکل ۱۰-۳ نشان داده شد، اما در اینجا ناظرها به جای اینکه از هم دور شوند به یکدیگر نزدیک می‌شوند. A علامتی را در زمان T'' قبل از اینکه ناظرها ملاقات کنند می‌فرستد و آن را در زمان T قبل از ملاقات آنها و پس از اینکه B آن را در زمان T' بازتاباند، دوباره دریافت می‌کند.

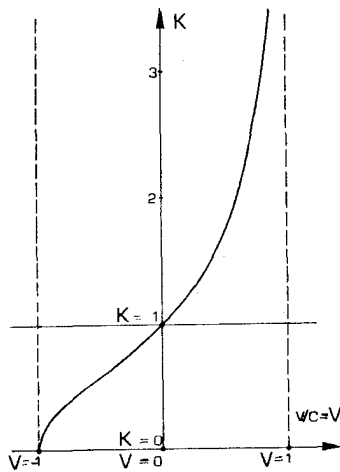
استفاده است چه این حرکت نزدیک شدن ناظرها باشد یا دور شدن آنها. با این قرارداد علامت، دوجانبگی رابطه آشکار است

$$K_{AB} = K_{BA} \quad \Leftrightarrow \quad v_{AB} = v_{BA} \quad (۱۰-۳ ب)$$

یعنی اینکه، ناظرهایی که از یکدیگر دور می‌شوند هر دو سرعت دور شدن دیگری را یکسان اندازه می‌گیرند، و ناظرهایی که به هم نزدیک می‌شوند، هر دو سرعت نزدیک شدن دیگری را یکسان اندازه می‌گیرند. این نتیجه در واقع یکی از پیامدهای اصل نسبیت اینشتین است، که برطبق آن فیزیک باید برای هر دو ناظر لخت یکی باشد، زیرا این به عبارات ۷-۳ تا ۱۰-۳ می‌انجامد که در آنها با هر دو ناظر برخورد دقیقاً یکسان شده است. اگر این نتیجه درست نباشد (مثلاً اگر شما سرعت دور شدن من را 50° km/s اندازه بگیرید و من سرعت دور شدن شما را 250 km/s اندازه بگیرم) برخورد با سرعتهای نسبی واقعاً بسیار مشکل می‌شود. مانند مورد K ، شاخص "AB" را هرگاه ابهامی پیش نیاید از v_{AB} حذف خواهیم کرد.

فرض کنید $V = 0$ ؛ در این صورت ۱۰-۳ الف نشان می‌دهد که $K = 1$. همین‌طور اگر $K = 1$ ، در این صورت ۹-۳ نشان می‌دهد که $V = 0$. بدین ترتیب روابطی که به دست آورده‌ایم نشان می‌دهند

$$K = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V = 0$$

شکل ۳-۱۲ رابطه بین K و $V = v/c$.

یعنی فقط و فقط وقتی اثر انتقال دوپلر وجود ندارد که سرعت نسبی صفر باشد. اکنون اگر رابطه v با K و z را که $۳-۳$ ، $۳-۳$ و $۳-۱۰$ ایجاب می‌کنند در نظر بگیریم، می‌بینیم که وقتی ناظرها از هم دور می‌شوند $K > 1$ (کند شدن نسبی زمان مشاهده می‌شود)، و وقتی به یکدیگر نزدیک می‌شوند $K < 1$ (تند شدن نسبی زمان مشاهده می‌شود):

نزدیک شدن نسبی	$0 < V < 1$	$1 < K < \infty$	$0 < z < 1$	(انتقال به آبی نور)
بدون حرکت نسبی	$V = 0$	$K = 1$	$z = 0$	(بدون اثر دوپلر)
دور شدن نسبی	$1 < V < \infty$	$0 < K < 1$	$z > 0$	(انتقال به سرخ نور)

اساساً، این بدین سبب است که وقتی ناظرها از هم دور می‌شوند، هر یک می‌بینند که دیگری در جایی قرار دارد که فاصله آن مدام افزایش می‌یابد و از این رو نور به هر طرفی که حرکت کند باید فاصله بیشتر و بیشتری را طی کند؛ بنابراین انتظار داریم که بازه‌های زمانی مشاهده شده در گیرنده از بازه‌های زمانی در فرستنده بلندتر باشد، یعنی $K > 1$ (با شکل ۳-۱۰ مقایسه کنید). همین طور، وقتی ناظرها به هم نزدیک می‌شوند، نور به هر طرف که برود باید فاصله کوتاهتری را طی کند و بنابراین بازه‌های زمانی مشاهده شده در گیرنده از بازه‌های زمانی در فرستنده کوتاهتر خواهند بود، یعنی $K < 1$.

شکل ۳-۱۲ رابطه بین v/c و K را نشان می‌دهد؛ این رابطه را می‌توان از هر دو سوی منحنی خواند (مثلاً، می‌توان مقدار K متناظر با هر مقدار v/c ، یا مقدار v/c متناظر با هر مقدار K را یافت). با توجه به منحنی روشن است (و از معادلات ۳-۹ و ۳-۱۰ نتیجه می‌شود) که با نزدیک شدن سرعت حرکت نسبی به سرعت نور، تغییر زمان نسبی مشاهده شده بدون حد افزایش می‌یابد.

در مورد نزدیک شدن نسبی

$$v/c \rightarrow -1 \quad \Leftrightarrow \quad K \rightarrow 0$$

یعنی، یک بازه زمانی $\Delta\tau$ در A به صورت مدت زمان بی نهایت کوچکی در B دیده می شود. در مورد دور شدن نسبی

$$v/c \rightarrow 1 \quad \Leftrightarrow \quad K \rightarrow \infty$$

یعنی، یک بازه زمانی $\Delta\tau$ در A به صورت مدت زمان بی نهایت طولانی در B مشاهده می شود. این نتیجه ای است که ایشستین با تفکر در مورد مشاهده ساعت میدان برن از تلسکوپ بدان پی برد (بخش ۱-۳ را ببینید): وقتی $v \rightarrow c$ ، به نظر می رسد که زمان متوقف شده است.

تمرین ۳-۳

(۱) چه سرعت نسبی شعاعی V با ضریب K برابر با ۳ متناظر است؟ سرعت متناظر $v = cV$ را برحسب کیلومتر بر ثانیه حساب کنید.

(۲) چه سرعت نسبی شعاعی V با ضریب K برابر با $1/3$ متناظر است؟ سرعت متناظر $v = cV$ را برحسب کیلومتر بر ثانیه حساب کنید.

(۳) اگر A با سرعت $v = 1/3c$ به طور شعاعی از B دور شود، ضریب K بی که A مشاهده می کند چقدر است؟ ضریب K بی که B مشاهده می کند چقدر است؟

(۴) اگر A با سرعت $v = 1/3c$ به طور شعاعی به B نزدیک شود، ضریب K بی که A مشاهده می کند چقدر است؟ ضریب K بی که B مشاهده می کند چقدر است؟

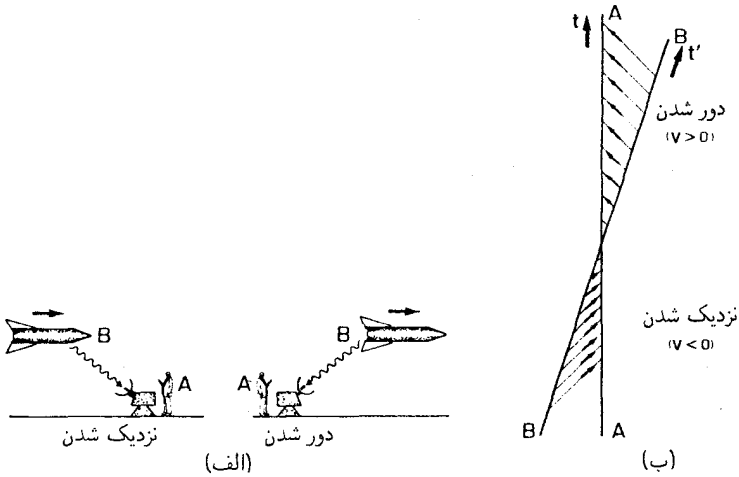
تغییر در K هنگام گذر

ناظر B را در نظر بگیرید که با سرعت v به A نزدیک می شود و ناظر دیگر C را در نظر بگیرید که با همان سرعت از A دور می شود. در این صورت

$$V_{AB} = -V_{AC}, \quad V_{AC} > 0 \quad (11-3)$$

که در آن V_{AB} سرعت B نسبت به A و V_{AC} سرعت C نسبت به A است که برحسب کسری از سرعت نور اندازه گرفته می شود (از قرارداد علامت که با آن آشنا شدیم استفاده می کنیم). بنابراین ۱۰-۳ الف نشان می دهد که

$$K_{AC} = \left\{ \frac{1 + V_{AC}}{1 - V_{AC}} \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{1 - V_{AB}}{1 + V_{AB}} \right\}^{1/2} = 1/K_{AB}$$



شکل ۱۳-۳ یک "گذر". (الف) A به B می‌نگرد که از سمت چپ به او نزدیک و از سمت راست از او دور می‌شود. (ب) یک وضعیت فضا زمان، که پرتوهای نوری را نشان می‌دهد که A به کمک آنها B را به هنگام نزدیک شدن و دور شدن مشاهده می‌کند.

بنابراین ضرایب K برای B و C نسبت به A به صورت زیر به یکدیگر مربوط اند

$$K_{AB} = 1/K_{AC}, \quad K_{AC} > 1 \quad (12-3)$$

هم اکنون ثابت کردیم که ۱۱-۳ معادله ۱۲-۳ را ایجاب می‌کند. همین طور از معادله ۹-۳ می‌توان نشان داد که ۱۲-۳ معادله ۱۱-۳ را ایجاب می‌کند؛ یعنی، دو ضریب K عکس یکدیگرند اگر و تنها اگر سرعت‌های نسبی بزرگی یکسان اما علامت مخالف داشته باشند (یکی مربوط به نزدیک شدن و دیگری مربوط به دور شدن باشد).

این درست وضعیتی است که در هنگام یک "گذر" [شکل ۱۳-۳ (الف) را ببینید] اتفاق می‌افتد. مثلاً فرض کنید که B از کنار A با سرعت ثابت $3/5c$ عبور می‌کند. هنگام نزدیک شدن B به A، داریم $v_{AB}/c = -3/5$ و $K = 1/2$. پس از اینکه B به A رسید و شروع به دور شدن از آن کرد، $v_{AB}/c = +3/5$ و $K = 2$. هنگامی که B از کنار A می‌گذرد، ضریب K ناگهان وارون می‌شود (در این مورد از $1/2$ به 2 تغییر می‌کند). برای این تغییر دلایل فیزیکی خوبی وجود دارد: در ابتدا آنتن گیرنده A به طرف چپ است (B از آن طرف نزدیک می‌شود). A باید هنگام گذر B آنتن را بچرخاند تا بتواند علائم B را، که اکنون از سمت راست می‌آیند، دریافت کند. در این صورت A علائمی را که از B می‌آید در خانواده‌ای متفاوت از خانواده پرتوهای نور اولیه دریافت می‌کند [شکل ۱۳-۳ (ب)]. در نتیجه، A گیرنده خود را باید هنگام گذر B دوباره

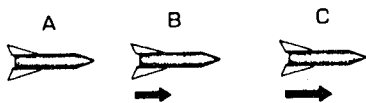
میزان کند؛ مثلاً، اگر B علائم رادیویی را روی طول موج ۱ متر بفرستد، A وقتی که B به او نزدیک می‌شود، علائم را روی طول موج ۵٫۰ متر و وقتی که B از او دور می‌شود آنها را روی طول موج ۲ متر دریافت خواهد کرد. این اثر شباهت زیادی به اثر متناظر با آن در امواج صوتی دارد: هنگامی که یک قطار سوت‌زنان از کنار یک ناظر ساکن عبور می‌کند، طنین صدا از یک گام بالا به یک گام پایین سقوط می‌کند. ضریب انتقال دوپلر در اینجا نیز وقتی نزدیک شدن به دور شدن تبدیل می‌شود به‌طور ناپیوسته تغییر می‌کند.

تمرین ۳-۴

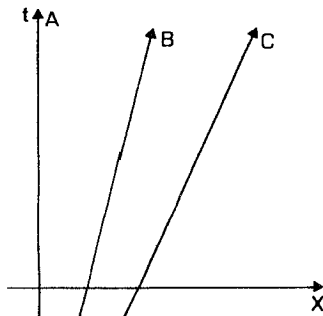
نشان دهید که از ۳-۱۲ می‌توان ۳-۱۱ را نتیجه گرفت، یعنی، اگر ضریبهای K عکس یکدیگر باشند، سرعتهای نسبی شعاعی نزدیک شدن و دور شدن اندازه‌گیری شده یکسان‌اند.

قانون نسبیتی جمع سرعتهای موازی

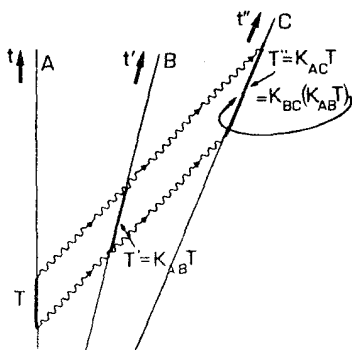
اکنون سه ناظر لخت (بدون شتاب) A، B، و C را در نظر بگیرید که نسبت به هم در یک جهت حرکت می‌کنند (شکل ۳-۱۴). در این صورت سرعتهای آنها موازی است و می‌توانیم مختصات را طوری انتخاب کنیم که حرکت در جهت محور x ها انجام گیرد و جهانخطهای آنها در یک نمودار فضا-زمان در صفحه (t, X) قرار بگیرند، شکل ۳-۱۵ چنین نموداری است که از دیدگاه A رسم شده است. می‌توانیم فوراً از این نمودار سرعتهای نسبی v_{AB} و v_{AC} را بخوانیم زیرا محورهای آن



شکل ۳-۱۴ ناظرهای A، B، و C در حرکت نسبی، همگی در یک جهت حرکت می‌کنند.



شکل ۳-۱۵ جهانخطهای ناظرهای A، B، و C از دیدگاه چارچوب مرجع A.



شکل ۱۶-۳ A علانمی را با بازه زمانی T گسیل می‌کند؛ B آنها را با بازه زمانی T' و C آنها را با بازه زمانی T'' دریافت می‌کند.

طبق اندازه‌گیریهای A علامت‌گذاری شده است؛ اما v_{BC} را نمی‌توانیم بخوانیم زیرا از این نمودار معلوم نیست که چگونه اندازه‌گیریهای زمان و فضا توسط B یا C به اندازه‌گیریهای A مربوط می‌شود.

برای تعیین v_{BC} ، فرض کنید A در بازه زمانی T علامت نوری گسیل کند و B و C بازه زمانی بین دریافت این علامت را به ترتیب T' و T'' اندازه بگیرند (شکل ۱۶-۳). در این صورت بنا بر تعریف ضریب K

$$T' = K_{AB}T, \quad T'' = K_{AC}T \quad (\text{ب-۱۳-۳})$$

اما، می‌توانیم فرض کنیم که B علانمی را در فاصله زمانی T' گسیل می‌کند. در این صورت

$$T'' = K_{BC}T' \quad (\text{ج-۱۳-۳})$$

ترکیب ۱۳-۳ ج و ۱۳-۳ ب نشان می‌دهد که $T'' = K_{BC}K_{AB}T$. با مقایسه با (ب-۱۳-۳) و با توجه به اینکه این روابط به‌ازای تمام مقادیر T معتبر هستند، به‌دست می‌آوریم

$$K_{AC} = K_{AB}K_{BC} \quad (\text{د-۱۴-۳})$$

که قانون ترکیب ضرایب انتقال دوپلر است با مربع کردن رابطه ۱۴-۳ داریم $K_{AC}^{\gamma} = K_{AB}^{\gamma}K_{BC}^{\gamma}$ و با استفاده از فرمول ۱۰-۳ الف، به‌دست می‌آوریم

$$\left(\frac{1 + V_{AC}}{1 - V_{AC}} \right) = \left(\frac{1 + V_{AB}}{1 - V_{AB}} \right) \left(\frac{1 + V_{BC}}{1 - V_{BC}} \right)$$

که می‌توان آن را برای V_{AC} به طریق زیر حل کرد: طرفین را در حاصلضرب مخرجها ضرب می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$(1 + V_{AC})(1 - V_{AB})(1 - V_{BC}) = (1 + V_{AB})(1 + V_{BC})(1 - V_{AC})$$

اکنون با ضرب کردن، برخی جملات حذف می‌شوند، با گردآوری جملاتی را که V_{AC} در آنها هست، داریم

$$V_{AC}(1 + V_{AB}V_{BC}) = (V_{AB} + V_{BC})$$

با تقسیم بر $1 + V_{AB}V_{BC}$ داریم

$$V_{AC} = (V_{AB} + V_{BC}) / (1 + V_{AB}V_{BC}) \quad (۱۵-۳ \text{ الف})$$

یعنی

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2} \quad (۱۵-۳ \text{ ب})$$

که قانون نسبیتی جمع سرعت‌های موازی است. وقتی سرعت‌های درگیر در مقایسه با سرعت نور c بسیار کوچک باشند ($|v_{AB}/c| \ll 1$, $|v_{BC}/c| \ll 1$) مخرج تقریباً برابر ۱ است و این رابطه به نتیجه نیوتونی تبدیل می‌شود

$$v_{AC} = v_{AB} + v_{BC} \quad (۱۶-۳)$$

اما، برای سرعت‌های بزرگتر نتایج معادلات ۱۵-۳ و ۱۶-۳ به طور قابل ملاحظه‌ای متفاوت هستند. مثلاً، فرض کنید $v_{AB} = v_{BC} = 1/2c$. در این صورت نتیجه نسبیتی عبارت است از $v_{AC} = (1/2c + 1/2c) / (1 + 1/2 \times 1/2) = 4/5c$ ، در حالی که نتیجه نیوتونی برطبق ۱۶-۳ عبارت است از $v_{AC} = 1/2c + 1/2c = c$ همین‌طور، اگر $v_{AB} = v_{BC} = 3/4c$ ، نتیجه نسبیتی برابر است با

$$v_{AC} = 3/2c / (1 + 9/16) = 3/2c / 25/16 = 24/25c = (0.96)c$$

در حالی که نتیجه نیوتونی برابر است با $v_{AC} = 1.5c$.

سرعت نور به عنوان یک سرعت حدی ناورد

در مثال بالا، قانون نسبیتی جمع سرعتها نشان می‌دهد که سرعت نسبی A و C از سرعت نور کمتر است، گرچه طبق جمع معمولی سرعتها، سرعت نسبی از سرعت نور بزرگتر می‌شود (با بخش ۱-۳ مقایسه کنید). این تصادفی نیست: رابطه ۳-۱۵ چنان است که تضمین می‌کند اگر v_{AB} و v_{BC} هر دو کوچکتر از سرعت نور باشند، v_{AC} نیز چنین است. این خاصیت مهمی است، زیرا برای سازگاری با این اصل که هیچ ناظری نباید سرعت جسم پرجرم را مساوی سرعت نور اندازه بگیرد لازم است (بخش ۱-۲). به علاوه، حد این قانون وقتی $c \rightarrow v$ درست همان چیزی است که می‌خواهیم. در واقع، فرض کنید در ۳-۱۵ الف قرار دهیم $v_{BC} = 1$. در این صورت

$$V_{AC} = (V_{AB} + 1)/(1 + V_{AB}) = 1$$

خواهد بود که در آن V_{AB} هر مقدار می‌تواند باشد. بدین ترتیب اگر در ۳-۱۵ حد $c \rightarrow v_{BC}$ را حساب کنیم، تأیید کرده‌ایم که این قانون جمع سرعتها، اصل ناوردایی سرعت نور اینشتین را ایجاب می‌کند، زیرا، اگر B اندازه بگیرد که ذره C با سرعت نور حرکت می‌کند، A نیز چنین خواهد کرد، حال سرعت نسبی A و B هر مقداری می‌تواند باشد. این نکته مسئله جمع سرعتها را که در بخش ۱-۲ با آن مواجه شدیم حل می‌کند.

سرانجام، متوجه می‌شویم که اگر حالتی را در نظر بگیریم که در آن حرکت نسبی B و C با حرکت نسبی A و B موازی نیست، نتیجه نسبیتی پیچیده‌تر از آن خواهد بود که در اینجا به دست آوریم، اما باز هم متضمن سازگاری با اصل ناوردایی سرعت نور (و در نتیجه ماهیت محدودکننده سرعت نور برای ذرات پرجرم) خواهد بود. این نظریه، نظریه خودسازگار است.

تمرینها

۳-۵ فرض کنید سفینه A با سرعت $3/4c$ از سفینه B دور می‌شود و به طرف چپ می‌رود و سفینه C با سرعت $3/4c$ از سفینه B دور می‌شود و به راست می‌رود. یک نمودار فضا-زمان برای این وضعیت از دیدگاه B رسم کنید و نشان دهید که B می‌تواند با استفاده از این نمودار محاسبه کند که فاصله نسبی A و C با آهنگ $3/2c$ افزایش می‌یابد. چگونه این مطلب با این حقیقت سازگار است که سرعت نسبی حرکت که دو ناظر هر یک برای دیگری اندازه می‌گیرند، نمی‌تواند بزرگتر از سرعت نور شود؟ سرعت نسبی که A برای C اندازه می‌گیرد چقدر است؟

۳-۶ (۱) معادله ۳-۱۴ را در نظر بگیرید که در آن $K_{BC} = 1$. بگویید چه اتفاقی می‌افتد. آیا نتیجه حاصل معقول است؟ چه نتیجه خاصی به دست می‌آید اگر K_{AB} هم برابر ۱ باشد؟
 (۲) معادله ۳-۱۴ را در نظر بگیرید که در آن $K_{AC} = 1$ ، وضعیت حاصل را توصیف کنید، و از آنجا نتیجه را برای وقتی که K با $1/K$ جایگزین می‌شود، یعنی وقتی که سرعت نزدیک شدن v با یک سرعت دور شدن با همان بزرگی جایگزین می‌شود، به دست آورید.

۷-۳ (۱) چه مقدار K با سرعت نسبی نزدیک شدن 1000 km/h متناظر است؟ (نمونه‌ای از سرعت نزدیک شدن هواپیماها). آیا این مقدار قابل اندازه‌گیری است؟

(۲) اگر $v = 500 \text{ km/s}$ باشد مقدار K چقدر می‌شود؟ (نمونه‌ای از سرعت‌های نسبی کهکشانها در خوشه ما).

(۳) اگر K برابر $1/5$ اندازه گرفته شود. سرعت حرکت نسبی متناظر با آن چقدر است؟

(۴) یک مأمور راهنمایی در منطقه‌ای که حداکثر سرعت مجاز 60 کیلومتر در ساعت است سرعت نزدیک شدن اتومبیلی را که در 150 متری او قرار دارد 100 کیلومتر در ساعت اندازه می‌گیرد. چه مدت طول می‌کشد تا پژواک رادار به او برسد؟ اگر فاصله زمانی تپهایی که رادار او گسیل می‌کنند $3 \mu\text{s}$ باشد، رادار او فاصله زمانی بین تپهای پژواک را چقدر اندازه می‌گیرد؟

۸-۳ با استفاده از ۱۵-۳ ثابت کنید که اگر $|V_{AB}| < 1$ و $|V_{BC}| < 1$ ، در این صورت $|V_{AC}| < 1$. [راهنمایی: ثابت کنید که $1 - V_{AC} = (1 - V_{AB})(1 - V_{BC}) / (1 + V_{AB}V_{BC})$ و همین‌طور برای $1 + V_{AC}$].

تمرینهای کامپیوتری

۵. برنامه‌ای بنویسید که یا (الف) ورودی آن مقداری برای سرعت شعاعی نسبی V باشد و ضریب K متناظر با آن را حساب کند (از معادله ۱۰-۳)، یا (ب) ورودی آن یک ضریب K باشد و سرعت شعاعی نسبی V متناظر با آن را (از معادله ۹-۳) حساب کند. [مطمئن شوید که برنامه شما تنها سرعت‌های نسبی کوچکتر از سرعت نور، و مقادیر K بزرگتر از صفر را می‌پذیرد].

از برنامه خود برای تأیید (۱) فرم شکل ۱۲-۳، و (۲) رابطه K وارون ۱۲-۳ برای سرعت‌های نزدیک شدن و دور شدن برابر استفاده کنید.

۶. برنامه‌ای بنویسید که ورودی آن سرعت‌های V_{AB} و V_{AC} حرکت نسبی باشد، و V_{AC} سرعت نسبی C را که A (از معادله ۱۵-۳) اندازه می‌گیرد چاپ کند؛ (ورودیها باید منحصر به مقادیری باشند که از لحاظ فیزیکی قابل قبول اند).

از برنامه خود برای تحقیق اینکه V_{AC} از سرعت نور تجاوز نمی‌کند استفاده کنید. برنامه را طوری تنظیم کنید که اگر V_{AC} از مقدار نیوتونی متناظر ۱۶-۳ برآورد شود پیام خطا چاپ کند، و از آنجا تحقیق کنید که مقدار نیوتونی در شرایط عادی زندگی روزمره به خوبی قابل قبول است.

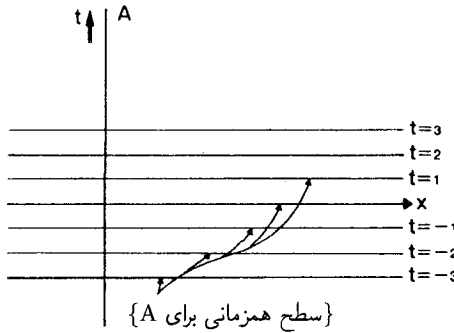
۳-۳ همزمانی

در بخش ۳-۱ دیدیم که سطوح همزمانی یا لحظه‌ای برای ناظرهای A و B در فضا زمان به حرکت آنها بستگی دارد. این یک خاصیت کلیدی است: اکثر "پارادوکسهای" نظریه نسبیت برای حل، به درک نسبی بودن همزمانی احتیاج دارند. ما اکنون این موضوع را بررسی می‌کنیم.

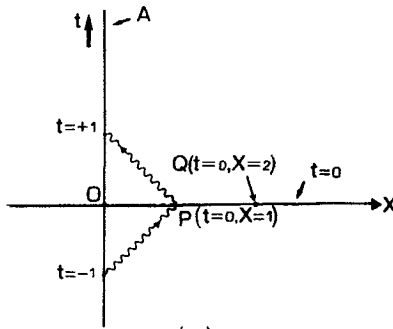
همزمانی در چارچوب سکون ناظر

برای اینکه یک مثال خاص را به خاطر داشته باشیم، می‌توانیم ایجاد یک سیستم استاندارد زمان را در سراسر منظومه شمسی برای سهولت ارتباط بین سفینه‌ها و کمک به فضاوردی در نظر بگیریم. برنامه در مرحله اول گسترش زمان میانگین گرینویچ تا مریخ است. راه انجام این کار آن است که ناظر A در گرینویچ یک ساعت استاندارد درست کند، و سپس با استفاده از مفهوم همزمانی که با رادار تعیین می‌شود (آن‌طور که در بخش ۲-۳ گفته شد) برای گسترش زمانی که ساعت او اندازه می‌گیرد به نقاط دیگر در منظومه شمسی استفاده کنید.

درست همان‌گونه که به‌طور شهودی انتظار داریم، وقتی که فضا زمان با مختصات استاندارد (t, X) در چارچوب مرجع A نمایش داده شود، سطوح همزمانی که او با استفاده از رادار تعیین می‌کند عبارت‌اند از سطوح $\{t = \text{const.}\}$ [شکل ۳-۱۷ (الف)]. مثلاً، اگر A در $t_1 = -1$



(الف)



(ب)

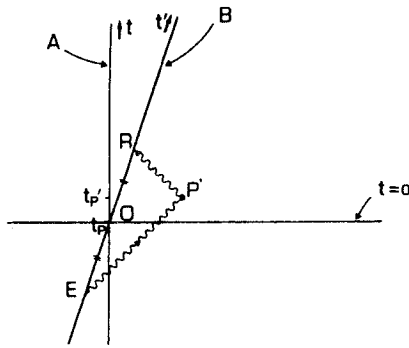
شکل ۳-۱۷ (الف) سطوح همزمانی برای ناظر A (که طبق تعریف در دستگاه مختصات مربوط به خود (t, X) ساکن است). (ب) ناظر A رویداد P در $(0, 1)$ را با O همزمان تعیین می‌کند زیرا نوری که A در $t = -1$ گسیل کرده است در P بازتابیده می‌شود و A دوباره آن را در $t = 1$ دریافت می‌کند. همین‌طور A می‌تواند Q در $(0, 2)$ را با O همزمان تعیین کند.

یک علامت نوری گسیل کند و پژواک آن را در $t_2 = +1$ دریافت کند، در این صورت چون در این مختصات نور با سرعت واحد حرکت می‌کند، مختصات رویداد بازتاب P عبارت‌اند از $t = 0$ و $X = 1$. طبق معادله ۲-۲، A وقوع P را در زمان $T = 1/2(-1 + 1) = 0$ اندازه می‌گیرد. بدین ترتیب A در تاریخ خود [شکل ۱۷-۳ (ب)] P و رویداد O (در $t = 0$ و $X = 0$) را همزمان اندازه می‌گیرد. همین‌طور اگر A نوری در $t = -2$ گسیل کند و آن را در $t = +2$ دریافت کند، رویداد Q در $\{X = 2, t = 0\}$ را نیز با O همزمان اندازه می‌گیرد؛ و در حقیقت تمام نقاطی که برای آنها $t = 0$ است را با یکدیگر همزمان اندازه می‌گیرد. این امر تصادفی نیست؛ استفاده از همزمانی (که با رادار تعیین می‌شود) برای A شیوه طبیعی گسترش ساعت خوانی از جهانخط خود به سایر نقاط در فضا زمان است، از این‌رو او طبیعتاً سطح $\{t = \text{const.}\}$ را تعریف می‌کند تا همزمانی با ساعت خوانی در امتداد جهانخط خودش را نشان دهد. اساساً، ما فقط نشان داده‌ایم که این تعبیر طبیعی صحیح است.

اثر حرکت نسبی

در ادامه مثال خاصی که آوردیم، اکنون فرض کنید که یک مؤسسه تجارتي رقیب تصمیم بگیرد که استاندارد زمان دیگری را برای فضانوردی ایجاد کند. آنها با آینده‌نگری تصمیم می‌گیرند که استاندارد سکون را در مرکز کهکشانشان قرار دهند. به سبب چرخش کهکشانشان ما، زمین با سرعت تقریباً 350 km/s نسبت به این استاندارد سکون در حرکت است. مسئله اینجاست که چگونه باید زمانها را در این دو چارچوب مرجع با یکدیگر ربط داد.

برای انجام این کار، چارچوب مرجع ناظر را B که از کنار ناظر A با سرعت نسبی v عبور می‌کند در نظر بگیرید. برای سادگی محاسبات فرض می‌کنیم که وضعیت آنها در رویداد O که هر دو به آن زمان صفر را وابسته می‌سازند منطبق باشد؛ در این صورت برحسب ویژه زمان t' که B در امتداد جهانخط خود اندازه می‌گیرد، $t'_O = 0$. با استفاده از روش استاندارد رادار برای تعیین همزمانی (بخش ۲-۳ را ببینید)، ناظر B در صورتی که یک رویداد بازتاب P' را با O همزمان اندازه می‌گیرد که O در نیمه زمان بین گسیل و دریافت نوری باشد که از P' بازتابیده می‌شود؛ چون P' با O همزمان است، در این صورت $t'_{P'}$ هم برابر صفر است. ما هنوز نمی‌دانیم چگونه t' به مختصه زمان t مربوط می‌شود. گرچه، می‌توانیم ببینیم (به دلیل ثابت بودن ضریب K هنگام یکنواخت بودن سرعت نسبی) که بازه‌های زمانی مساوی که B اندازه می‌گیرد در امتداد جهانخط او در نمودار فضا زمان با فاصله‌های مساوی نمایش داده می‌شوند (با شکل ۳-۶ مقایسه کنید). پس، نوری که با آن B همزمانی با O را تعیین می‌کند باید در رویدادهای E و R دریافت شده باشد که در فاصله‌های مساوی از O در امتداد جهانخط او در نمودار فضا زمان نمایش داده می‌شوند (شکل ۳-۱۸). چون نور با زاویه 45° حرکت می‌کند، از شکل ۳-۱۸ پیداست که رویدادی مانند P' که B آن را همزمان با O اندازه می‌گیرد، بالای سطح $\{t = 0\}$ در فضا زمان قرار می‌گیرد، اگر

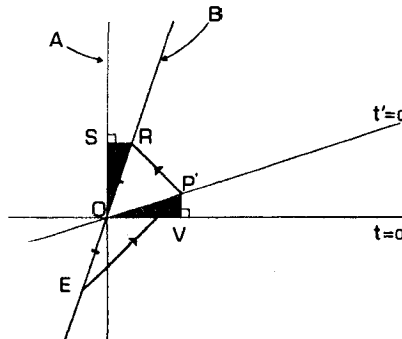


شکل ۱۸-۳ ناظر B که نسبت به A در حرکت است، رویداد P' را با رویداد O همزمان تعیین می‌کند زیرا O در نیمه راه بین E، که در آن B یک علامت گسیل می‌کند، و R، که در آن علامت پس از بازتاب در P' دوباره دریافت می‌شود قرار دارد.

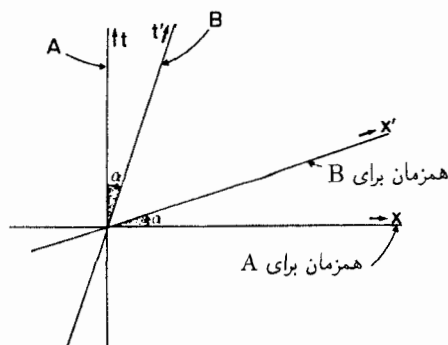
B به طرف موضع فضایی آن رویداد در حرکت باشد؛ از این رو $t_{P'} > t_0$. بدین ترتیب، در این مورد، اگرچه B رویداد O و P' را همزمان اندازه می‌گیرد، اما A رویداد P' را بعد از رویداد O تعیین می‌کند ($t_{P'} > t_0$). اگر B از موضع فضایی P' دور شود، در این صورت A رویداد P' را قبل از O تعیین می‌کند.

قاعده زاویه‌های برابر

وضعیت بالا را، آن‌طور که در شکل ۱۹-۳ نمایش داده شده است، در نظر بگیرید. بررسی هندسه این شکل که در آن دو فاصله OE و OR برابرند، به علاوه اینکه پاره‌خطهای EP' و RP' با جهت قائم زاویه 45° می‌سازند، نشان می‌دهد که مثلثهای سایه‌دار ORS و $OP'V$ قابل انطباق‌اند. می‌توان از این نتیجه به‌طور تجربی اطمینان یافت (به‌ازای مقادیر مختلف زاویه SOR)، پاره‌خطهای



شکل ۱۹-۳ شکل ۱۸-۳ دوباره رسم شده است تا نشان داده شود که مثلثهای ORS و $OP'V$ قابل انطباق‌اند.



شکل ۳-۲۰ زاویه α بین سطوح همزمانی برای A و B برابر است با زاویه بین جهانخطهای آنها در یک نمودار فضازمان که از دیدگاه A رسم شده است.

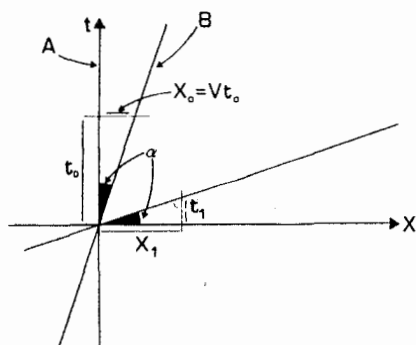
OE و OR را دقیقاً مساوی رسم کنید، محل برخورد خطوطی است که از R و E عبور می‌کنند و با جهت قائم زاویه 45° می‌سازند، یا با یک اثبات هندسی رسمی بر مبنای هندسه اقلیدسی (چنین اثباتی در آخرین بخش ارائه شده است). در نتیجه زاویه‌های SOR و VOP' برابرند. از این یک قاعده ساده برای مشخص کردن سطوح همزمانی در فضازمان نتیجه می‌شود (شکل ۳-۲۰): اگر یک جهانخط Λ با جهت قائم در یک نمودار فضازمان زاویه α بسازد، سطوح همزمانی برای ناظری که جهانخطش Λ است به اندازه زاویه α به طرف Λ کج می‌شود.

معادله همزمانی

به کمک نتیجه قبل می‌توانیم فرمول ساده‌ای برای این سطوح همزمانی به دست آوریم. چون B با سرعت v نسبت به A حرکت می‌کند، می‌بینیم که جهانخط B عبارت است از $x = vt$ پس $X = x/c = vt/c = (v/c)t = Vt$ (به یاد داریم که $V = v/c$ و $X = x/c$) بدین ترتیب در زمان t_0 (که A اندازه می‌گیرد) در موضع $X_0 = Vt_0$ (که A اندازه می‌گیرد؛ شکل ۳-۲۱ را ببینید) قرار خواهد داشت. بنابراین زاویه جهانخط Λ با قائم برابر است با $\tan \alpha = X_0/t_0 = (Vt_0)/t_0 = V$ از طرف دیگر اگر (t_1, X_1) نقطه‌ای بر روی سطح همزمانی برای B باشد که در آن $X_1 = x_1/c$ ، در این صورت زاویه α این سطح با جهت افقی برابر است با $\tan \alpha = t_1/X_1$ مساوی قرار دادن این مقادیر برای $\tan \alpha$ نشان می‌دهد که

$$t_1 = VX_1 = vx_1/c^2 \quad (17-3)$$

که معادله سطح همزمانی برای B بر حسب متغیرهایی است که A اندازه می‌گیرد.



شکل ۳-۲۱ یک نقطه (t_0, X_0) روی جهانخط B، که در آن $X_0 = vt_0$ ، و یک نقطه (t_1, X_1) روی سطح همزمانی B. به دلیل قاعده زاویه‌های برابر (شکل ۳-۲۰)، $t_1/X_1 = X_0/t_0 = \tan \alpha$.

دو مثال

به‌عنوان مثال اول، ناظر A را در نظر بگیرید که روی سطح زمین قرار دارد؛ B در سفینه‌ای است که از کنار A با سرعت $1/2c$ به طرف سیارهٔ مریخ عبور می‌کند، وقتی که فاصله تا مریخ ۴ ساعت نوری است. در این صورت در شکل ۳-۲۱، $v/c = 1/2$ ، $X_1 = x_1/c = 4h$ ، و $t_1 = 1/2 \times 4 = 2h$ (از معادلهٔ ۳-۱۷). بدین ترتیب، رویداد P در تاریخ مریخ که A آن را با رویداد O، وقتی که A و B از کنار یکدیگر عبور می‌کنند، همزمان اندازه می‌گیرد، دو ساعت قبل از رویداد P' در تاریخ مریخ که B آن را با O همزمان اندازه می‌گیرد رخ می‌دهد.

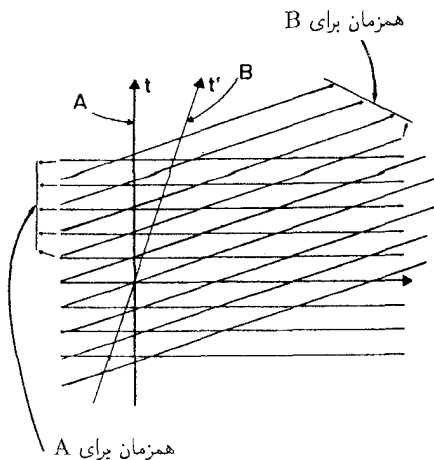
به‌عنوان مثال دوم، ساحبی امراة‌المسلسله در حدود ۲۱۹۰۰۰۰ سال نوری از زمین فاصله دارد. همزمانی بین رویدادهای روی زمین و در امراة‌المسلسله را در نظر می‌گیریم که یک ناظر A روی سطح زمین و یک ناظر B در هواپیمایی که با سرعت 300 km/h بالای زمین به طرف امراة‌المسلسله حرکت می‌کند اندازه می‌گیرند. سرعت نسبی حرکت این دو ناظر برابر است با

$$V = v/c = (300 \text{ km/h}) \times (1/3600 \text{ h/s}) / (3000000 \text{ km/s}) = 1/3600000$$

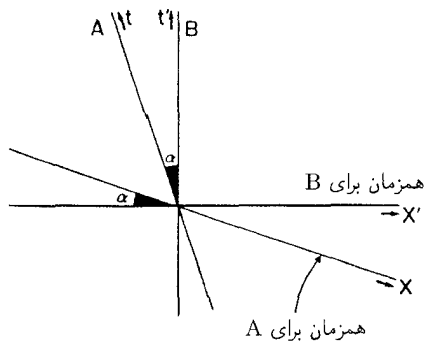
بنابراین طبق رابطهٔ ۳-۱۷ اختلاف زمانی بین رویدادهایی در امراة‌المسلسله که آنها با یک رویداد واحد در زمین همزمان اندازه می‌گیرند برابر است با $t_1 = (21900000/3600000) = 61y$ روز. اگر ناظر C در یک اتوبوس با سرعت 30 km/h به طرف امراة‌المسلسله در حرکت باشد، نظر او با A در مورد همزمانی در آنرومدا ۲۲ روز اختلاف خواهد داشت.

نتیجه‌گیری

این تحلیل آنچه را قبلاً کشف کرده بودیم تأیید می‌کند، یعنی اینکه فضا زمان، واحدی است که ناظرهای مختلف آن را به راه‌های مختلف به فضا (سطوح همزمانی) و زمان تقسیم می‌کنند (شکل ۳-۲۲). این



شکل ۲۲-۳ فضازمان برای ناظرهای A و B که نسبت به هم حرکت می‌کنند به راه‌های متفاوتی به فضا (سطوح همزمانی) و زمان (که در امتداد جهانخطها اندازه گرفته می‌شود) تقسیم می‌شود.



شکل ۲۳-۳ شکل ۲۰-۳ که از دیدگاه B دوباره رسم شده است.

تقسیم به سرعت‌های نسبی آنها بستگی دارد؛ و با معادله ۱۷-۳ تعیین می‌شود که صورت تحلیلی نتیجه ساده‌تری برای برابر است، که در شکل ۲۰-۳ نشان داده شده است. به محض اینکه تصمیم گرفتیم که مفهوم همزمانی را بر مبنای اثرهای قابل اندازه‌گیری قرار دهیم، و متوجه شدیم که بهترین راه انجام این کار پایه قرار دادن سرعت نور به دلیل اهمیت اساسی این سرعت در طبیعت است، تحلیل فوق اجتناب‌ناپذیر می‌شود. نسبیت همزمانی مانند همهٔ اثرهای نسبیتی، کاملاً دوجانبه است: از دیدگاه چارچوب مرجع B، سطوح همزمانی او افقی هستند و سطوح همزمانی A مایل و میلشان به طرف جهانخط A است (شکل ۲۳-۳ را ببینید که همان شکل ۲۰-۳ است که دوباره از دیدگاه B رسم شده است).

سرانجام متوجه می‌شویم که به‌ازای مقادیر کوچک $|vx/c^2|$ ، این اثر بسیار کوچک است؛ به‌ویژه، این اثر در زندگی روزمره قابل چشم‌پوشی است (اختلاف بین همزمانی ناظرهای مختلف در حدود $10^{-5} \mu\text{s}$ است). از طرف دیگر، وقتی v به c نزدیک می‌شود، $x_1/c \rightarrow t_1$ یعنی، رویدادهای همزمان با O به‌مخروط نور آینده نزدیک و نزدیکتر می‌شوند. شکل ۳-۲ نشان می‌دهد که با افزایش تدریجی $45^\circ \rightarrow \alpha$ و سطح همزمانی B در فضا زمان به جهانخط او نزدیک و نزدیکتر می‌شود. اگر حد $v/c = 1$ قابل دسترسی بود، جهانخط B در سطح همزمانی او وجود داشت: جریان زمان برای او متوقف می‌شد، و این با این حقیقت متناظر است که در این وضعیت اگر B بخواهد برای تعیین همزمانی در جهت حرکت خود از رادار استفاده کند، موفق نخواهد شد: اگر برای این‌کار یک علامت رادار گسیل کند، همزمان با علامتی که می‌خواست از آن برای تعیین همزمانی در محلی استفاده کند به‌آنجا خواهد رسید! به‌علاوه، اگر به‌عقب نگاه کند، جبهه‌های موجی که در گذشته دور از ناحیه‌هایی که او از آنجا عبور کرده است گسیل شده‌اند دائماً با او در حرکت خواهند بود، و به‌او خبر می‌دهند که اوضاع در آن نواحی تغییری نکرده است. خوشبختانه، این موقعیتهای عجیب نمی‌تواند برای ناظرهای واقعی اتفاق بیفتد زیرا آنها نمی‌توانند با سرعت نور حرکت کنند.

تمرینها

۳-۹ هواپیمایی با سرعت 500 km/h به‌طرف مقصدی در فاصله 1000 کیلومتری در پرواز است. اختلاف میان همزمانی برای هواپیما و برج کنترل در مقصد چقدر است؟ آیا خلبان باید آن را به‌حساب آورد؟

۳-۱۰ یکی از دو قلوها A در روی زمین با دو قلو دیگری B در یک سفینه که با سرعت $1/2c$ از او دور می‌شود ارتباط رادیویی دارد. آنها تصمیم می‌گیرند که همزمان در ظهر روز 2° دی / 1° ژانویه (روز تولدشان) شمعهای یک‌یک را فوت کنند. در آن لحظه فاصله بین آنها، طبق اندازه‌گیری A ، 2 سال نوری خواهد بود. اختلاف بین زمانهایی که هریک زمان مناسب برای فوت کردن شمعها می‌داند چقدر است؟ B هنگامی که فاصله‌اش از A ، طبق اندازه‌گیری A ، 3 سال نوری است، دور می‌زند و با سرعت $1/2c$ شروع به‌بازگشت می‌کند. فرض کنید P رویدادی در تاریخ A باشد که طبق اندازه‌گیری B بلافاصله قبل از دور زدن او، و Q رویدادی در تاریخ A باشد که طبق اندازه‌گیری B بلافاصله پس از دور زدن او اتفاق می‌افتد (برای سهولت فرض کنید که این رویدادها همزمان اتفاق می‌افتد). اختلاف زمانی بین P و Q را A چقدر اندازه می‌گیرد؟

۳-۱۱ با توجه به‌مسئله ۲-۷ تعیین کنید که B کدام لحظه از تاریخ خود را با رویداد شلیک کردن A به‌وی اندازه می‌گیرد. آیا B به‌همان نتیجه می‌رسد که A در مورد اینکه چه کسی اول شلیک کرده است رسیده است؟

تمرینهای کامپیوتری ۷

برنامه‌ای بنویسید که ورودی آن (الف) سرعت نسبی V دو ناظر، و (ب) یک فاصله D باشد؛ و

سپس اختلاف بین همزمانی DT را طبق اندازه‌گیریهای این ناظرها که به فاصله D از یکدیگر قرار دارند (که از معادله ۳-۱۷ به دست می‌آید) چاپ کند. ثابت کنید که این اثر برای سرعتهای حرکت روزمره در روی زمین قابل چشمپوشی است.

برنامه را طوری اصلاح کنید که بتواند با معلوم بودن D ، V ، DT حساب کند؛ یا V را از D و DT محاسبه کند. از آنجا، مثلاً حساب کنید که چه سرعت نسبی باعث ایجاد یک ساعت اختلاف در همزمانی در فاصله ۴ ساعت نوری خواهد شد. حد بزرگی ممکن DT در این فاصله چیست؟ صورت کلی حد بزرگی DT در صورتی که D معلوم باشد چیست؟

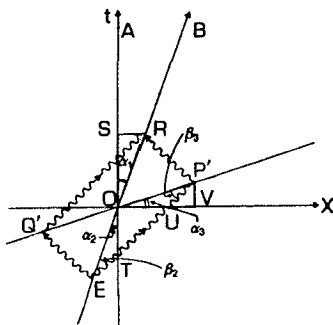
ضمیمه: اثبات هندسی قابلیت انطباق مثلثها

شکل ۳-۲۴ را در نظر بگیرید که گسترش شکل ۳-۱۹ است. ناظر B با گسیل یک علامت نوری در جهت مخالف P' ، رویداد Q' را هم با O همزمان اندازه می‌گیرد. اکنون، متوازی‌الاضلاع $EP'RQ'$ از پرتوهای نور تشکیل شده است که همگی با جهت قائم زاویه 45° می‌سازند. بدین ترتیب این متوازی‌الاضلاع مستطیلی است که قطرهای آن، که در O یکدیگر را قطع می‌کنند، باید برابر باشند. بنابراین طول OP' باید با OE و OR برابر باشد. اکنون اگر به زاویه‌ها بنگریم، می‌بینیم که

$$\beta_2 = \beta_3 \quad (\text{مثلث } OP'E \text{ متساوی‌الساقین است})$$

$\alpha_2 + \beta_2 = 45^\circ$ (زاویه OTU که زاویه خارجی مثلث OET است با مجموع دو زاویه داخلی مثلث برابر است)؛ و همین‌طور

$$\alpha_3 + \beta_3 = 45^\circ$$



شکل ۳-۲۴ اثبات قابلیت انطباق دو مثلث سایه‌داری که در شکل ۳-۱۹ دیده می‌شوند. نوری که در رویداد E از تاریخ B گسیل شده است در رویداد Q' و P' بازتابیده می‌شود و به رویداد R در تاریخ B بازمی‌گردد.

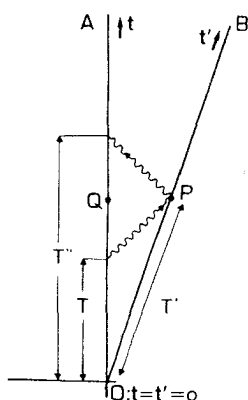
این سه معادله نشان می‌دهند که $\alpha_2 = \alpha_3$. همچنین داریم $\alpha_1 = \alpha_2$ (زوایای روبه‌رو برابرند)، بنابراین $\alpha_1 = \alpha_3$.
 اکنون می‌بینیم که مثلثهای OP'V و ORS با دو ضلع برابر (OR و OP') و دو جفت زاویه مساوی (α_1 و α_3 ، و دو زاویه قائمه OSR و OVP') مساوی هستند.

۳-۴ اتساع زمان

دیدیم که ناظری که در حرکت نسبی است زمان را متفاوت از ناظری که ساکن است اندازه می‌گیرد (بخش ۳-۱)؛ و تأکید کردیم که در نتیجه نمی‌توانیم ویژه زمان t' را برای ناظر B از یک نمودار فضا-زمان که از دیدگاه A رسم شده است مستقیماً اندازه بگیریم، زیرا این نمودار برحسب متغیرهای $A(t, X, Y, Z)$ مدرج شده است، و مجاز نیستیم به سادگی بگوییم که رابطه میان t و t' چیست. اگرچه، می‌توانیم این رابطه را به آسانی محاسبه کنیم (مقایسه کنید با استنتاج معادله ۲-۱). در این بخش ما مقدار اتساع زمان را برحسب ضریب انتقال دوپلر K و سرعت نسبی v محاسبه خواهیم کرد، شواهد مستقیم برای اتساع زمان را در نظر می‌گیریم و دربارهٔ تقارن اثر اتساع زمان بحث خواهیم کرد، و "پارادوکس دوقلوها" را بررسی می‌کنیم.

مقایسهٔ ساعت خوانیها با رادار

وضعیتی را که در ابتدای بخش ۲-۳ توصیف شده بود و در آن ناظر B با سرعت v از کنار A عبور می‌کرد در نظر بگیرید (شکل ۲۵-۳ را ببینید). هر دو ناظر هنگام عبور از کنار یکدیگر ساعت‌هایشان را روی صفر می‌زنان می‌کنند؛ بدین ترتیب رویداد O که در محل تلاقی جهانخطهای آنها قرار دارد



شکل ۲۵-۳ ناظرهای A و B نسبت به هم در حرکت‌اند. با فرستادن یک علامت نوری در T و دریافت آن در T'' ، ناظر A رویداد Q را هم‌زمان با بازتاب در رویداد P تعیین می‌کند، که طبق ساعت B در زمان T' است.

عبارت است از $t'_O = 0$, $t_O = 0$. ناظر A پس از اینکه یک تپ راداری را در زمان T گسیل کرد، رویداد بازتابش P را در جهانخط B با رویداد Q در جهانخط خودش همزمان اندازه می‌گیرد: یعنی $t_P - t_Q = 0$. در این صورت از معادله ۱۸-۳ داریم $t_P = t_Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^2 + 1)T$. از طرف دیگر برای B داریم $t'_P = T' = KT$. چون هم A و هم B در O ساعت را روی صفر میزان کرده‌اند، نسبت زمان از O تا P طبق اندازه‌گیری A به زمان از O تا P طبق اندازه‌گیری B برابر است با

$$t_P/t'_P = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^2 + 1)T/KT$$

با حذف عامل T داریم

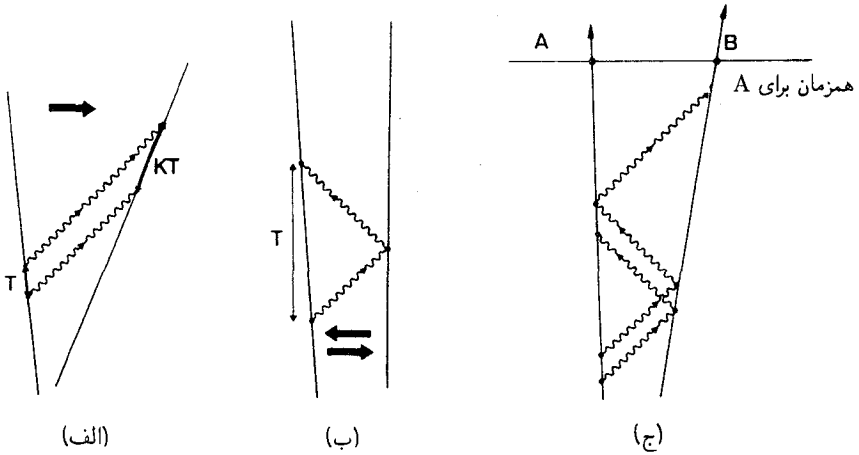
$$t_P/t'_P = (K^2 + 1)/\sqrt{2}K \equiv \gamma(K) \quad (18-3)$$

(” \equiv ”) یعنی ”همانند است با“). این اثر نسبیتی اتساع زمان است که ارتباط میان زمانهای t' که توسط B اندازه گرفته می‌شود و زمانهای t را که A اندازه می‌گیرد وقتی از طریق همزمان کردن ساعتها مقایسه شوند نشان می‌دهد (یعنی، استفاده از رادار برای تعیین همزمانی).

ضریب K و ضریب γ

معادله ۱۸-۳ ضریب اتساع زمان γ (“گاما”) را برحسب ضریب انتقال دوپلر K ، که A مستقیماً با مشاهده کند یا تند شدن ظاهری زمان در تصویر رویدادها در B اندازه می‌گیرد (چنانکه در بخش ۱-۳ مورد بحث قرار گرفت) تعریف می‌کند. سردرگم شدن در مورد این دو اثر (اثر اتساع زمان و اثر انتقال دوپلر) آسان است، بنابراین اکنون تفاوت‌های اساسی آنها را بررسی می‌کنیم. اساساً، ضریب K زمان را در نزد ناظر با آهنگ ساعت در نزد شیئی آن‌طور که مستقیماً مشاهده می‌شود (مثلاً با یک تلسکوپ) مربوط می‌کند. بدین ترتیب این ضریب آهنگ ساعت را در آن زمان (در زمان گسیل) با زمان حال (زمان مشاهده) مقایسه می‌کند. از طرف دیگر، γ رابطه‌ی زمانهای ساعت با یکدیگر از طریق همزمانی است. بدین ترتیب γ بر مبنای مفهوم ”همزمانی“ یا ”زمان حال“ قرار دارد، و آهنگ کار کردن ساعتها در نزد ناظر و نزد شیئی را در زمان حال مقایسه می‌کند.

با توجه به این دو وضعیت، روشن می‌شود که اختلاف اصلی در این است که برای اندازه‌گیریهای مستقیم ضریب K نور باید فقط یکطرفه، از شیئی به ناظر [شکل ۳-۲۶ (الف)] سفر کند؛ بدین ترتیب برای انجام مشاهده‌ها فقط یک گیرنده لازم داریم. برعکس، اندازه‌گیریهای راداری (مانند اندازه‌گیریهایی که برای تعیین γ از طریق همزمان کردن ساعتها انجام می‌شود) به سفر دوطرفه نور بین شیئی و ناظر بستگی دارد، زیرا تنها از ناظر به شیئی سفر می‌کند و دوباره به ناظر بازمی‌گردد [شکل ۳-۲۶ (ب)]، از این رو برای انجام مشاهده‌ها هم فرستنده و هم گیرنده ضروری است.



شکل ۳-۲۶ وجوه تمایز بین K و γ : (الف) ضریب K ساعت ناظرها را با انتقال دوپلر مشاهده شده به یکدیگر مربوط می‌کند و به علامت نوری که فقط در یک جهت سفری کنند بستگی دارد. (ب) ضریب γ ساعت ناظرها را از طریق همزمانی که به وسیله رادار تعیین می‌شود به یکدیگر مربوط می‌کند، و به علامتی بستگی دارد که بین ناظرها سفر رفت و برگشت انجام می‌دهند. (ج) وضعیتی که در آن اطلاعات به وسیله یک علامت یکطرفه از A به B انتقال می‌یابد، اما آن اطلاعات از طریق اندازه‌گیریهای راداری قبلی و با استفاده از علامت بازتابیده (دوطرفه) تعیین شده است و از این رو بر مبنای ضریب γ قرار دارد.

مشاهده‌های مربوط به ضریب K اساساً ساده‌ترند، زیرا فقط به تحلیل علامت دریافت شده احتیاج دارد. از این طریق فقط می‌توانیم اطلاعاتی درباره شرایط موجود در شیئی در زمان گسیل نور به دست آوریم، که می‌تواند در گذشته‌ای بسیار دور بوده باشد؛ در واقع ما انتقال به سرخ نور اشیا دور دست را با استفاده از تابشی که از هزاران میلیون سال پیش به سوی ما می‌آیند اندازه گرفته‌ایم. ما اطلاعاتی درباره شیئی "در حال" حاضر، به دست نمی‌آوریم. این اندازه‌گیریها از فواصلی به این بزرگی امکان‌پذیر است به دلیل اینکه خود شیئی (که می‌تواند یک کهکشان و یا یک اختروش باشد) منبع تغذیه علامت است. به دست آوردن اطلاعات نسبتاً ساده است اما نسبتاً محدود هم هست؛ بخصوص نه فاصله و نه همزمانی را نمی‌توان مستقیماً از اندازه‌گیریهای ضریب K به دست آورد. برعکس، مشاهده‌هایی که برای تعیین مستقیم ضریب γ صورت می‌گیرد وابسته به یک تپ پژواکی است؛ آزمایشها اساساً مشکل‌ترند، و مستلزم اندازه‌گیری هماهنگ علامت گسیل و دریافت شده هستند؛ و به همین نسبت هم اطلاعات بیشتری به دست می‌دهند (فاصله و همزمانی را می‌توان مستقیماً نتیجه گرفت، و در واقع ضریب انتقال دوپلر نیز مستقیماً از یک سری تپهای راداری قابل اندازه‌گیری است، معادله ۳-۶ را ببینید). فاصله‌ای که در آن رادار قابل استفاده است محدودتر است، هم به سبب محدودیتهای عملی در مشاهده تأخیرهای زمانی، و هم به سبب توان مورد نیاز،

زیرا توان لازم برای آشکارسازی علامت را ما تأمین می‌کنیم. مگر اینکه تابش با دقت بسیار موازی (یعنی بدون پخش شدن) گسیل شود و یا هدف به‌طور فعال با تقویت و پخش دوباره علامت به این فرایند کمک کند، توان لازم به‌واسطه ضرورت به‌دست آوردن یک تپ پژواکی با توان چهارم فاصله افزایش خواهد یافت. استفاده از رادار برای اندازه‌گیری فاصله‌های بیش از چند سال نوری به‌سختی عملی است، بیشترین فاصله‌ای که با رادار اندازه گرفته شده است در حدود ۸ ساعت نوری است. روشن است که همین محدودیتها در استفاده از رادار برای همزمان کردن ساعتها وجود دارد.

سرانجام، توجه داریم که در یک وضعیت پیچیده، قبل از تصمیم‌گیری در مورد اثر واقعی که عمل می‌کند، ممکن است مجبور شویم وضعیت را به‌دقت بررسی کنیم. به‌عنوان مثال، فرض کنید ناظر A یک سفینه فضایی B را که با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند برای مدتی با رادار دنبال کند و سپس پس از انجام محاسبه‌های مناسب این پیام را بفرستد: وقتی شما این پیام را دریافت کنید، ساعت ۰۰ : ۱۲ ظهر خواهد بود [شکل ۳-۲۶ ج]]. اما، پیام نهایی از A به B یکطرفه است، بنابراین ممکن است فکر کنیم اطلاعات ارسالی اساساً از اثر ضریب K به‌دست آمده است. اما، این درست نیست؛ داده‌های فرستاده شده بر مبنای مشاهده‌های راداری دوطرفه است که A در ابتدا انجام داده بود، پیام نهایی صرفاً نتایج این اندازه‌گیریهای قبلی را از A به B انتقال می‌دهد. اطلاعاتی که B در این مورد دریافت می‌کند درباره شرایط در زمان گسیل نیست، بلکه در مورد شرایط در زمان دریافت است: در آن زمان، ساعت A به‌طور همزمان ۰۰ : ۱۲ را نشان خواهد داد (همزمان طبق اندازه‌گیری A). بدین ترتیب اطلاعات ارسالی در مورد همزمانی است که بر مبنای رادار تعیین شده است، و اتساع زمان نسبی که از این مشاهده‌ها اندازه‌گیری می‌شود با ضریب γ تعیین می‌شوند.

رابطه وارون و تقارن γ

می‌توان K را از رابطه ۳-۱۸ برحسب γ به‌دست آورد

$$K = \gamma \pm (\gamma^2 - 1)^{1/2}$$

علامت مثبت متناظر با دور شدن نسبی است (وقتی که $K > 1$)، و علامت منفی متناظر است با نزدیک شدن نسبی دو ناظر (وقتی که $1 < K < \infty$). به‌عنوان مثالهایی از رابطه بین ضرایب انتقال دوپلر و اتساع زمان، معادله ۳-۱۸ نشان می‌دهد که

$$K = 1 \Rightarrow \gamma = 1, \quad K = 2 \Rightarrow \gamma = \frac{5}{4}, \quad K = 3 \Rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$$

این مثالها همگی برای ناظرهایی هستند که از یکدیگر دور می‌شوند. همان معادله ۳-۱۸ در

صورتی که آنها به یکدیگر نزدیک شوند معتبر است. به عنوان مثال

$$K = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{5}{4}, \quad K = \frac{1}{3} \Rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$$

این نتایج نشان می‌دهند که مقدار γ به ازای $1/K$ و K یکی است، و در واقع هم معادله ۱۸-۳ این را تأیید می‌کند

$$\gamma(1/K) = \frac{(1/K)^2 + 1}{2(1/K)} = \frac{K^2 + 1}{2K} = \gamma(K)$$

می‌دانستیم (بخش ۲-۳) که $K \rightarrow 1/K$ متناظر با تبدیل نزدیک شدن به دور شدن (یا برعکس) با همان سرعت حرکت نسبی است. بدین ترتیب، نشان دادیم که اثر اتساع زمان (که با مقایسه تنظیم ساعتها با رادار تعیین می‌شود) برای نزدیک شدن یا دور شدن نسبی با سرعت یکسان یکی است. مثالهای بالا و بررسی بیشتر تأیید می‌کند که $\gamma \geq 1$. بدین ترتیب ساعت B (که از کنار A عبور می‌کند) طبق اندازه‌گیری A نسبت به ساعت A (که در دستگاه مختصات انتخاب شده ساکن است) کند کار می‌کند، چه آنها به یکدیگر نزدیک و چه دور شوند. این تقارن اساساً به این دلیل است که نور مورد استفاده برای اندازه‌گیری بین A و B دو طرفه سفر می‌کند. این اثر با اثر انتقال دوپلر تضاد دارد که در آن اگر B از A دور شود، A می‌بیند که ساعت B کند شده است اما اگر B به A نزدیک شود، A مشاهده می‌کند که ساعت B تند کار می‌کند. اختلاف بین نتایج مشاهده شده نزدیک شدن و دور شدن در این مورد به این سبب امکان‌پذیر است که نور مورد استفاده برای اندازه‌گیری فقط یکطرفه سفر می‌کند (یا از A به B و یا از B به A).

رابطه با سرعت نسبی

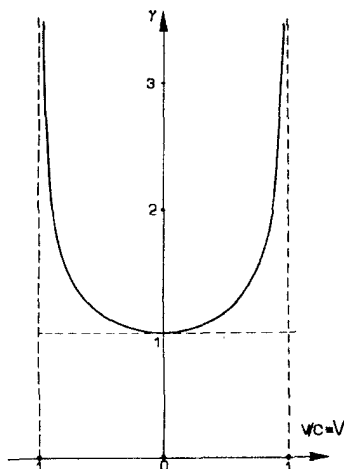
می‌توانیم ضریب اتساع زمان γ را با جایگزینی از (معادله ۱۰-۳ الف) در ۱۸-۳ به جای K برحسب $V = v/c$ بیان کنیم. داریم

$$\gamma = \left(\frac{1+V}{1-V} + 1 \right) / 2 \left(\frac{1+V}{1-V} \right)^{1/2} = \{(1-V)(1+V)\}^{-1/2}$$

بنابراین

$$\gamma = 1/(1-V^2)^{1/2} = 1/(1-v^2/c^2)^{1/2} \quad (19-3)$$

که نتیجه‌ای را که قبلاً از راههای دیگر به دست آورده بودیم (معادله ۲-۱) تأیید می‌کند. به عنوان مثال، اگر $v/c = 1/4$ در این صورت $1 - V^2 = 15/16$ ، $1 - V^2 = 0.97$ ، و $1/(1 - V^2)^{1/2} = 1.033$ ، $\gamma = 1/0.97$ همین‌طور



شکل ۳-۲۷ نمودار ضریب γ برحسب $v/c = V$ ، که به کمک معادله ۳-۱۹ رسم شده است. توجه کنید که با نزدیک شدن سرعت نسبی به سرعت نور، γ به دلخواه بزرگ می شود.

اگر $v/c = \frac{1}{4}$ در این صورت $\gamma = 1.0866 = 1/0.866$ ؛

اگر $v/c = \frac{2}{3}$ در این صورت $\gamma = 1.512 = 1/0.661$ ؛

اگر $v/c = \frac{3}{4}$ در این صورت $\gamma = 2.294 = 1/0.436$ ؛

اگر $v/c = \frac{99}{100}$ در این صورت $\gamma = 7.089 = 1/0.141$.

بدین ترتیب، همان طور که انتظار می رفت، سرعت های نسبی بزرگ سبب ضرایب γ بزرگ و در نتیجه مشاهده اتساع زمان های بزرگ می شوند.

از معادله ۳-۱۹ بلافاصله نتیجه می شود که (الف) این اثر همواره موجب کند شدن مشاهده شده برای ساعت در حال حرکت می شود ($\gamma \geq 1$)؛ (ب) این اثر تنها هنگامی صفر است که شیء و ناظر حرکت نسبی نداشته باشند

$$\gamma = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0$$

و (ج) با نزدیک شدن سرعت نسبی به سرعت نور، اتساع زمان بینهایت بزرگ می شود

$$\gamma \rightarrow \infty \quad \Leftrightarrow \quad (v/c)^2 \rightarrow 1$$

این رابطه تأکید می کند که (د) اتساع زمان فقط به بزرگی سرعت نسبی بستگی دارد، و به اینکه آن سرعت مربوط به نزدیک شدن یا دور شدن است بستگی ندارد: $\gamma(-v) = \gamma(v)$. تمام این خصوصیات در نمودار γ برحسب v/c که در شکل ۳-۲۷ نشان داده شده است (و به کمک معادله ۳-۱۹ رسم شده است) مشهودند.

شواهد مستقیم برای اتساع زمان

اثر اتساع زمان در ابتدا کاملاً غیرمنتظره است، بنابراین تعیین تجربی اینکه آیا این اثر واقعاً اتفاق می‌افتد یا خیر مهم است. ایده اصلی این است که (الف) دو ساعت اتمی را همزمان کنید؛ (ب) یکی را روی زمین قرار دهید و دیگری را در یک هواپیمای جت که مسافت می‌کند؛ سپس (ج) در بازگشت هواپیما زمانهایی را که ساعتها اندازه گرفته‌اند با یکدیگر مقایسه کنید. اگر بتوان سطح زمین را برای این منظور یک چارچوب لخت در نظر گرفت، در این صورت، پس از به حساب آوردن شتابها در طی سفر جت، ساعت داخل جت قاعدتاً باید به اندازه ضریب γ کندتر کار کرده باشد. در تجربه هافل و کیتینگ در سال ۱۹۷۲ از دو هواپیما که در جهتهای مخالف زمین را دور زدند استفاده شد. اتساع زمانی که ساعتها ثبت کرده بودند با در نظر گرفتن خصوصیات ماندگوش زمین، با پیشگوییهای نظری توافقی قابل ملاحظه داشت^۱ در بخش ۳-۶ راه دیگری برای تحقیق درستی اثر اتساع زمان را بررسی خواهیم کرد.

تقارن اتساع زمان

شاید مشکلترین نکته در درک اثر اتساع زمان این باشد که، مانند تمام اثرهای نسبیتی دیگر که در اینجا بررسی می‌شود، این اثر کاملاً متقارن است. بدین ترتیب نه تنها طبق اندازه‌گیری A ساعت B به اندازه ضریب γ کند کار می‌کند بلکه طبق اندازه‌گیری B هم ساعت A به اندازه ضریب γ کند کار می‌کند. به عنوان یک مثال روشن‌تر یک سفینه فضایی ترانسیلوانیایی را در نظر بگیرید که با سرعت بسیار زیاد از پایگاهش در زمین به سوی ستاره الدباران در حرکت است و در روز یازدهم دی زمین را ترک کرده است. برای اطمینان از اینکه خدمه سفینه روز تولد رئیس‌جمهور (یازدهم خرداد) را در موقع مناسب جشن می‌گیرند، پایگاه با رادار پیشرفت سفینه فضایی را پی می‌گیرد و کامپیوتر آنها یک علامت رادیویی گسیل می‌کند ("امروز روز موعود است") که طوری زمانبندی شده است که طبق اندازه‌گیری از زمین دقیقاً سر ظهر روز یازدهم خرداد به سفینه برسد. خدمه سفینه فضایی این علامت را بر طبق ساعت دقیق خود و روز شماری منظمی که انجام داده‌اند در ظهر روز دوازدهم فروردین دریافت می‌کنند. اختلاف از اینجا ناشی می‌شود که وقتی ساعت در حال حرکت (در سفینه فضاییما) از چارچوب زمین دیده شود کند کار می‌کند. حال، تصادفاً، روز تولد فرمانده فضاییما نیز یازدهم خرداد است. خدمه فضاییما نیز از همان روشهای پایگاه زمینی استفاده می‌کنند: آنها وضعیت زمین را با رادار پیگیری می‌کنند، و یک علامت تریک رادیویی را طوری می‌فرستند که دقیقاً (طبق تقویم آنها) در ظهر روز یازدهم خرداد به پایگاه زمینی برسد. این علامت هم در ظهر روز دوازدهم فروردین به پایگاه زمینی می‌رسد. این بدان دلیل است که

۱. خواننده علاقه‌مند توصیف کاملتری از این تجربه را در مجله زیر خواهد یافت:

وضعیت کاملاً وارون است: طبق اندازه‌گیری‌هایی که در فضاپیما انجام می‌شود، ساعت روی زمین (که نسبت به فضاپیما در حرکت است) کند کار می‌کند. دو چارچوب مرجع (که هر دو در اینجا لخت فرض شده‌اند) معادل‌اند، و هر یک از نظر دیگری به یک اندازه کند کار می‌کند.

برای درک این خصوصیت راه‌های گوناگونی وجود دارد. یکی از آنها توجه به آن است که در به‌دست آوردن نتیجهٔ مربوط به اتساع زمان، هیچ چیز خاصی در مورد A در مقایسه با B وجود نداشت؛ آنها چیزی جز دو ناظر لخت نبودند که نسبت به یکدیگر در حرکت‌اند. برای تعیین اینکه B چه چیزی را اندازه می‌گیرد، تنها باید جای A و B را عوض کنیم؛ تمام محاسبه‌ها (البته با تعویض اسم مختصات) معتبر باقی می‌مانند. بدین ترتیب اینکه دوجانبگی نتیجه باید درست باشد، چیزی جز پیامد اصل اساسی نسبیست نیست.

با اینکه این نتیجهٔ مطلوب را ثابت می‌کند، اما رابطهٔ بین دو مجموعهٔ مشاهده‌ها را توصیف نمی‌کند. برای این منظور از شکل ۳-۲۸ (الف) (که از دیدگاه A رسم شده است) آغاز می‌کنیم. همان‌طور که دیدیم، A در جهانخط خود Q را با P در جهانخط B همزمان اندازه می‌گیرد و بنابراین تعیین می‌کند که

$$t_Q = \gamma t'_P \quad (۳-۲۰ \text{ الف})$$

که در آن γ از رابطهٔ ۳-۱۹ به‌دست می‌آید. بنابراین $t_Q > t'_P$: گرچه OP بلندتر از OQ به‌منظر می‌رسد، اما پاره‌خط OP در نمودار فضا-زمان اندازه‌گیری شده کوتاه‌تری را برای B از زمانی که A از O تا Q اندازه می‌گیرد نشان می‌دهد [با شکل ۳-۲۷ (ب) مقایسه کنید]. طبق اندازه‌گیری A، ساعت B کند کار می‌کند. چطور ممکن است که طبق اندازه‌گیری B ساعت A کند کار کند؟

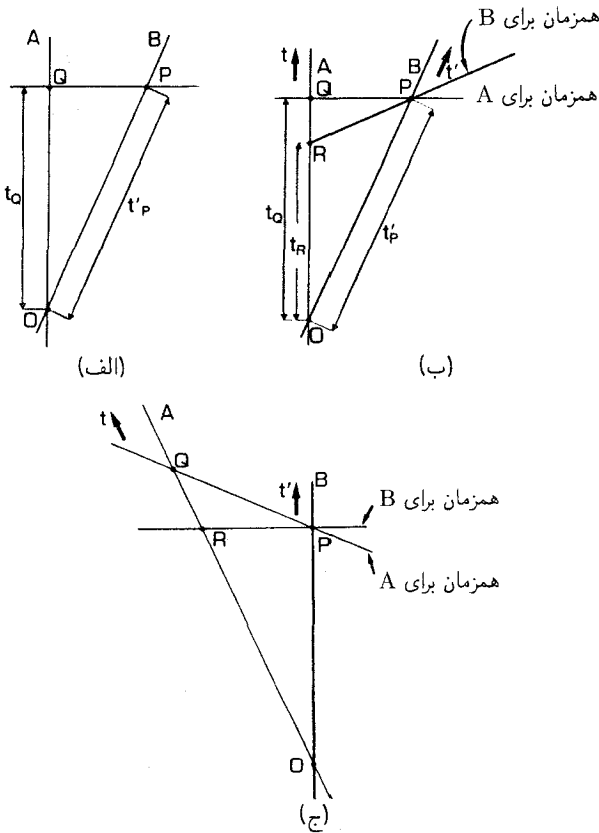
خصوصیت کلیدی آن است که طبق اندازه‌گیری B رویداد Q در جهانخط A با رویداد P در جهانخط خود او همزمان نیستند. بلکه، از آنچه در بخش ۳-۳ آموختیم، B نقطهٔ R در جهانخط A را با P همزمان اندازه می‌گیرد، در حالی که R قبل از Q است: یعنی $t'_P = t'_R = t_Q < t_R$ [شکل ۳-۲۸ (ب)]. دقیقاً مشابه با ۳-۲۰ (الف) تحلیل B نشان می‌دهد که

$$t'_P = \gamma t_R \quad (۳-۲۰ \text{ ب})$$

که نشان می‌دهد طبق اندازه‌گیری B، ساعت A کند کار می‌کند. تناقضی بین این نتایج وجود ندارد؛ بلکه ۳-۲۰ الف و ب نشان می‌دهند که

$$t_Q = \gamma^2 t_R \quad (۳-۲۰ \text{ ج})$$

که نتیجهٔ $t_Q > t_R$ را که برای سازگاری لازم است تأیید می‌کند.



شکل ۳-۲۸ الف) ناظر A نقطه B روی جهانخط خود را با P روی جهانخط B همزمان اندازه می‌گیرد. (ب) ناظر B نقطه R روی جهانخط A را با P روی جهانخط خودش همزمان اندازه می‌گیرد. رویداد R بر رویداد Q مقدم است. (ج) همان وضعیت که در چارچوب سکون B دوباره رسم شده است.

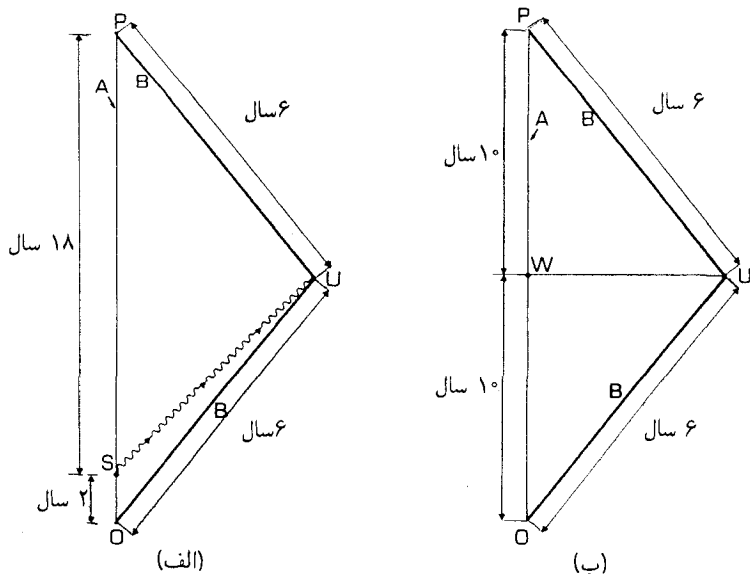
بنابراین، کلید فهم اینکه چگونه اثر اتساع زمان می‌تواند دوجانبه باشد، این است که توجه کنیم که A، Q و P را همزمان اندازه می‌گیرد، اما B، R و P را همزمان اندازه می‌گیرد. سرانجام توجه می‌کنیم که شکل ۳-۲۸ (ب) از دیدگاه A رسم شده است. برای اینکه دوجانبگی را کاملاً بفهمیم، شکل ۳-۲۸ (ج) را در نظر می‌گیریم که وضعیت فضا زمان یکسانی است که از دیدگاه B رسم شده است. بنابراین روابط ۳-۲۰ در مورد شکل ۳-۲۸ (ج) صادق‌اند، همان‌طور که در مورد شکل ۳-۲۸ (ب) چنین هستند. توجه کنید که می‌توان مستقیماً ویژه‌زمان t' را که B اندازه می‌گیرد از شکل ۳-۲۸ (ج) خواند، زیرا این نمودار برحسب متغیرهای (t', X', Y', Z') او مدرج شده است؛ اما، نمی‌توانیم به‌طور مستقیم زمانهایی را که A اندازه می‌گیرد از این نمودار بخوانیم. بعداً

(در بخش ۲-۴ خواهیم دید که چگونه زمان در امتداد جهانخط B را برابر با زمان OQ که A اندازه می‌گیرد نمایش دهیم.

”پارادوکس دوقلوها“

قبلاً به ”پارادوکس دوقلوها“ اشاره کردیم (بخش ۱-۳). سؤالی که اکنون پیش می‌آید این است که چگونه این پارادوکس می‌تواند با تقارن بین ناظرهای لخت که هم اکنون ثابت کردیم سازگار باشد؟ برای بررسی مسئله یک مثال خاص را در نظر می‌گیریم. فرض کنید که A ناظری است که در یک چارچوب لخت ساکن باقی می‌ماند در حالی که B با سرعت $v = 4/5c$ به مدت ۶ سال طبق اندازه‌گیری ساعت B از A دور می‌شود، و سپس با همان سرعت و به مدت ۶ سال بازمی‌گردد. بدین ترتیب B کل مدت سفر را ۱۲ سال اندازه می‌گیرد. A چه چیزی را اندازه می‌گیرد؟

شکل ۳-۲۹ (الف) یک نمودار فضا-زمان این وضعیت است. در سفر رفت، A و B با سرعت $v/c = 4/5$ از یکدیگر دور می‌شوند. از معادله ۳-۱۰ داریم $K^2 = (1+4/5)/(1-4/5) = 9$ بنابراین $K = 3$. در سفر برگشت، A و B به یکدیگر نزدیک می‌شوند؛ $v/c = -4/5$ و $K = 1/3$.



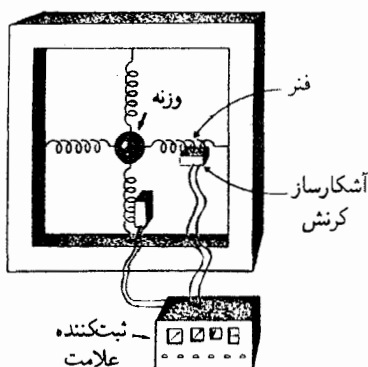
شکل ۳-۲۹ ”پارادوکس دوقلوها“. (الف) دوقلوی B به مدت ۶ سال با سرعت v سفر می‌کند و سپس با همان سرعت بازمی‌گردد و به A می‌پیوندد، A در طی سفر B (در یک چارچوب مرجع لخت) ساکن باقی می‌ماند. علامت نوری را که A در S می‌فرستد B در U در هنگام بازگشت دریافت می‌کند. (ب) طبق اندازه‌گیری دوقلوی A، رویداد W در جهانخط او با رویداد U در جهانخط B هم‌زمان است.

(همان طوری که انتظار می‌رفت این وارون K برای سفر رفت است). فرض کنید O رویداد رفتن B در تاریخ A باشد، S رویدادی است که A یک علامت به B می‌فرستد که در رویداد U ، که B برمی‌گردد، به او برسد، و P رویداد بازگشت B به A باشد. رابطه $t'_{OU} = Kt_{OS}$ از تعریف K نتیجه می‌شود؛ چون $t'_{OU} = 6$ و $K = 3$ ، زمان t_{OS} که A از O تا S اندازه می‌گیرد ۲ سال است. همین‌طور $t'_{UP} = Kt_{SP}$ ، که در آن $t'_{UP} = 6$ و $K = 1/3$ ، بنابراین طبق اندازه‌گیری A زمان t_{SP} از S تا P ۱۸ سال است. بدین ترتیب طبق اندازه‌گیری A زمان کل سفر برابر است با $t_{OP} = t_{OS} + t_{SP} = 20$ سال. این مثال پارادوکس دوقلوها را نشان می‌دهد: A پس از سفر ۸ سال پیرتر از B شده است.

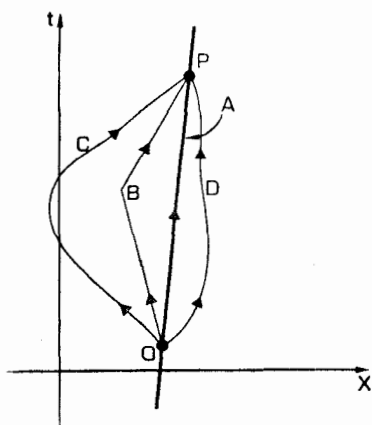
راه دیگر به‌دست آوردن این نتیجه این است که توجه کنیم که در هر دو سفر رفت و برگشت، از ۳-۱۹، داریم $\gamma = \{1 - (4/5)^2\}^{-1/2} = 5/3$ ، بدین ترتیب، اگر رویداد W در تاریخ A را با U همزمان در نظر بگیریم [شکل ۳-۲۹(ب)]؛ در این صورت $t_{OW} = \gamma t'_{OU} = 5/3 \times 6 = 10$ سال. بدین ترتیب، $t_{WP} = \gamma t'_{UP} = 10$ سال. مدت کل سفر B را مانند مورد پیش به همین ترتیب $t_{OP} = t_{OW} + t_{WP} = 20$ سال اندازه می‌گیریم.

اگر اثر اتساع زمان بین ناظرهای لخت دوجانبه است، پس چگونه می‌توان این اختلاف بین زمانهایی را که A و B از O تا P اندازه می‌گیرند توجیه کرد؟ لب مطلب این است که B به‌طور لخت حرکت نمی‌کند، اما A به‌صورت لخت حرکت می‌کند. بدین ترتیب، B یک ناظر لخت نیست. بلکه تاریخ او از قطعه‌های لختی تشکیل شده است که با یک دوره شتاب به‌یکدیگر متصل شده‌اند. برای این شتاب گرفتن (هنگامی که جهت حرکت B وارون می‌شود)، او باید یا موشکی شلیک کند، یا نیروهای کشسان بر او وارد آید، و یا به‌طریقی دیگر حرکت لخت خود را تغییر دهد؛ اگر او این کار را نکند ناظرها هم‌ارز خواهند بود و فاصله آنها به‌طور نامحدود افزایش خواهد یافت. برای ملاقات دوباره آنها شتاب لازم است. این شتاب از نظر فیزیکی قابل آشکارسازی است. فرض کنید که هر ناظر یک آشکارساز شتاب همراه دارد که از وزنه مقید به‌حرکت در یک چارچوب با فنرهایی که به آشکارساز کرنش متصل است تشکیل شده است (شکل ۳-۳۰). چون A به‌صورت لخت حرکت می‌کند، آشکارساز او نیرویی را ثبت نمی‌کند، اما آشکارساز B می‌کند؛ این نشان می‌دهد که تمایز بین حرکت آنها نتایج فیزیکی قابل اندازه‌گیری واضحی دارد. تقارن اثر اتساع زمان تنها بین ناظرهایی که به‌صورت لخت حرکت می‌کنند معتبر است. در این مثال، B بین رویدادهای O و P به‌طور لخت حرکت نمی‌کند، اما A می‌کند، و این منشأ عدم تقارنی است که به‌سبب آن A ویژه‌زمان بین O و P را طولانی‌تر از B اندازه می‌گیرد.

این اثر اتساع زمان است که روشن می‌سازد باید زمان را به‌درستی کمیتی در نظر بگیریم که در امتداد جهاتخطها از نقاط ابتدایی آنها تا نقاط انتهایی آنها اندازه گرفته می‌شود، یعنی، یک انتگرال خط در امتداد جهاتخطهاست (برای یک بحث کوتاه در مورد انتگرال خط پیوست الف را ببینید). در این صورت عدم تقارن در "پارادوکس دوقلوها" تعبیر روشنی دارد (شکل ۳-۳۱). دو رویداد O و P را در فضا زمان در نظر بگیرید که فاصله بین آنها زمانگونه است، یعنی، طوری هستند که



شکل ۳-۳۰ یک آشکارساز شتاب، متشکل از یک وزنه که بین فترهایی قرار دارد که به آشکارسازهایی متصل‌اند که حرکت وزنه نسبت به اطراف چارچوب را ثبت می‌کند.



شکل ۳-۳۱ جهانخطهای مختلف بین O و P. مسیر مستقیم A مسیری است که طولانیترین ویژه‌زمان را دارد. این مسیر دارای این مشخصه یکتاست که یک آشکارساز شتاب در امتداد آن شتابی را اندازه نمی‌گیرد.

یک ذره می‌تواند بدون اینکه از سرعت نور تجاوز کند از O به P برود. سپس می‌توان نشان داد که مسیر یکتا از O به P که در امتداد آن یک ساعت طولانیترین زمان را اندازه می‌گیرد آن است که حرکت لخت (سقوط آزاد) را نمایش می‌دهد. این مسیر یک خط راست در فضا-زمان از O تا P است. بدین ترتیب، این دقیقاً ناظر لخت است که وقتی دو ناظر دوباره ملاقات می‌کنند پیرتر شده است، بدون توجه به مسیری که دیگری برای رفتن از O به P در فضا-زمان اختیار کرده است هرچه می‌خواهد باشد (یعنی، بدون توجه به شتابهایی که داشته است). در مثال بالا، این امر ناظر A را در مقایسه با تمام ناظرهای دیگری که از هر دو رویداد O و P عبور می‌کنند یکتا می‌سازد.

نتیجه‌گیری

به طور خلاصه، یک ساعت متحرک کند کار می‌کند، به طوری که این کند کار کردن برای هر جفت ناظر لخت دوجانبه است (طبق اندازه‌گیری هر یک، ساعت دیگری کند کار می‌کند). این سازگاری نتیجه عدم توافق آنها در مورد همزمانی است. این اثر اتساع زمان مربوط به مقایسه زمانهایی است که هر دو ساعت "اکنون" اندازه می‌گیرند، یعنی، بر مبنای ایده همزمانی است. این نکته را نباید با اثر انتقال دوپلر اشتباه کرد که زمانهای مشاهده شده را به یکدیگر مربوط می‌سازد و آن هم کاملاً دوجانبه است، اما زمانی را که ناظر اکنون اندازه می‌گیرد به زمان در منبع تابش در هنگام گسیل تابش (که می‌تواند در گذشته‌ای بسیار دور باشد) مربوط می‌سازد. اتساع زمان به پارادوکس دوقلوها منجر می‌شود: هر ناظری که از یک ناظر لخت دور شود و دوباره بازگردد متوجه خواهد شد که نسبت به ناظر لخت زمان کوتاهتری بر او گذشته است. این خاصیت با مقایسه ساعتی که در یک هواپیما و ساکن بر روی زمین قرار داشتند از نظر تجربی مشاهده شده است (آزمایش هافل-کیتینگ که قبلاً توصیف شد).

تمرینها

۱۲-۳ مثال "پارادوکس دوقلوها" را در نظر می‌گیریم (شکل ۳-۲۹).

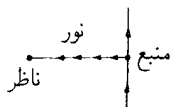
(۱) فرض کنید نوری که B در رویداد U گسیل می‌کند را A در رویداد V دریافت کند. با استفاده از ضریب K ، زمانهایی را که A از O تا V و از V تا P اندازه می‌گیرد معین کنید؛ و از آنجا کل زمانی را که A از O تا P اندازه می‌گیرد به دست آورید.

(۲) طبق اندازه‌گیری B کدام رویداد در تاریخ A همزمان است با U، (الف) درست قبل از اینکه برگردد، (ب) درست پس از اینکه برگشته است؟ با استفاده از ضریب γ که بر مبنای دیدگاه B از فضا زمان در طی قطعه‌های حرکت لخت او قرار دارد، فاصله‌های زمانی بین O، این رویدادها، و P را در تاریخ A تعیین کنید. و از آنجا نشان دهید که B هم می‌تواند برای تعیین زمانی که A از O تا P اندازه می‌گیرد از γ استفاده کند.

(۳) فرض کنیم A و B یکدیگر را با رادار مشاهده می‌کنند. حرکت نسبی که هر یک برای دیگری تعیین می‌کند را پیدا کنید. [در اینجا حرکت کاملاً غیرمنتظره‌ای که B برای A اندازه می‌گیرد آشکار می‌شود و در نتیجه تمایز بین آنها به روشنی نمایان می‌شود].

۱۳-۳ فرض کنید که جهانخط یک ناظر لخت A از یک رویداد فضا زمان O تا P امتداد داشته باشد. فرض کنید ناظر D از O تا رویدادی مانند Q و سپس از آنجا به P را به طور لخت طی کند. نشان دهید که D فاصله زمانی از O تا P را کوتاهتر از A اندازه می‌گیرد. [راهنمایی: زمانی را که طبق اندازه‌گیری A در تاریخ او با Q همزمان است پیدا کنید؛ سپس از ضرایب مناسب γ برای سفر رفت و برگشت D به طور جداگانه استفاده کنید].

با تعمیم این مسئله نشان دهید که اگر D برای رفتن از O به P از هر تعداد متناهی از قطعه‌های لخت عبور کند، فاصله زمانی از O تا P را کوتاهتر از A اندازه می‌گیرد (مگر اینکه یک ژئودزیک پیوسته از O



شکل ۳-۳۲

تا P برود، در این صورت دقیقاً مانند A حرکت می‌کند و در نتیجه بازه زمانی را یکسان اندازه می‌گیرد).
 ۳-۱۴ فرض کنید که یک سفینه فضایی با سرعت $v = 3/4c$ حرکت می‌کند. با فرض اینکه زمانهای شتاب و شتاب منفی قابل چشمپوشی باشد، پیدا کنید که در طی سفر رفت و برگشت که طبق اندازه‌گیری فضانورد داخل سفینه 5° سال طول می‌کشد زمین چقدر پیر می‌شود؟ در این سفر سفینه فضایی چقدر از زمین دور شده است؟ با توجه به این مسئله حدودی را که می‌توان در سفر فضا بدان دست یافت چیست؟

۳-۱۵ رابطه بین سرعت و K (و بنابراین انتقال به سرخ) که تا کنون در نظر گرفته شد، برای حرکت شعاعی بود (منبع مستقیماً به طرف ناظر حرکت می‌کرد و یا از آن دور می‌شد). اکنون حرکت عرضی را در نظر بگیرید؛ منبع در جهت عمود بر خط دید ناظر حرکت می‌کند (شکل ۳-۳۲). در این صورت فاصله بین منبع و ناظر تغییر لحظه‌ای ندارد. ضریب K را برای نوری که منبع گسیل و ناظر دریافت می‌کند حساب کنید، و از آنجا انتقال به سرخ را که در این مورد اندازه گرفته می‌شود به دست آورید. [راهنمایی: ضریب K در این مورد فقط ناشی از اثر اتساع زمان ۳-۱۹ است].

تمرین کامپیوتری ۸

برنامه‌ای بنویسید که به عنوان ورودی یکی از سه پارامتر: سرعت V (برابر با v/c)، ضریب اتساع زمان G (برابر با γ)، ضریب انتقال دوپلر K را بپذیرد و دو ضریب دیگر را چاپ کند. با استفاده از برنامه خود نمودار γ و K را برحسب V به‌ازای تمام مقادیر مجاز V به‌دقت رسم کنید.

برنامه‌تان را تغییر دهید تا (الف) تقریب "حرکت کند" $K \approx 1 + 1/2V^2$ و $G \approx 1 + V$ را نیز چاپ کند. برای کدام مقادیر V ، G ، و K به ترتیب تقریبهای خوبی برای G و K هستند؟
 (ب) این را برای تقریب حرکت تند $K \approx \sqrt{2/\epsilon}$ و $G \approx 1/\sqrt{2\epsilon}$ تکرار کنید که در آن ϵ به صورت $V = 1 - \epsilon$ تعریف می‌شود.

۳-۵ انقباض طول

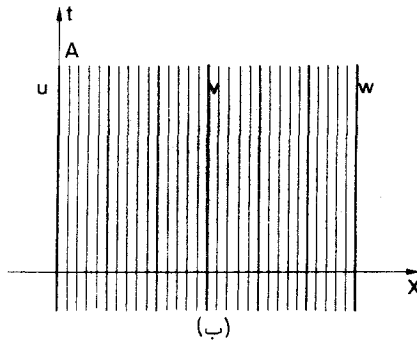
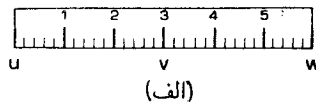
آخرین اثر سینماتیکی عمده نسبیت خاص، انقباض طول است. درست همان‌طور که اندازه‌گیری زمان به حرکت نسبی بستگی دارد، انتظار می‌رود که همان اثر کلی در مورد اندازه‌گیری طول نیز معتبر باشد. به‌عنوان مثال، فرض کنید که یک شاتل بین ستاره‌ای ویژه برای فرود ایمن به سطح ۱۵ مایل احتیاج داشته باشد، از این رو باندی با این طول در صحرای "موژو" برای آن ساخته

شده است. از آنجا که خلبان با سرعت بسیار زیاد نزدیک می‌شود، طول باند را با رادار بررسی و اندازه آن را فقط ۷ مایل تعیین می‌کند که ظاهراً برای یک فرود ایمن بسیار کوتاه است! این ناشی از اثر انقباض طول نسبیتی است؛ وقتی او برای آخرین بار با سرعت کم نزدیک می‌شود، طول باند را در حدود ۱۵ مایل اندازه می‌گیرد، و در نتیجه می‌تواند بدون خطر فرود آید. در حالت کلی، اندازه‌گیرهای طول که دو ناظر نسبت به هم حرکت می‌کنند انجام می‌دهند از طریق انقباض طول، به یکدیگر مربوط می‌شوند که همتای اتساع زمان است و از جهت‌های بسیار به آن شباهت دارد. بخصوص، این رابطه نیز به سبب نسبیت همزمانی یک رابطهٔ دوجانبه است.

در این بخش، محاسبه خواهیم کرد که چگونه حرکت نسبی در طولهایی که توسط رادار اندازه گرفته می‌شوند مؤثر است، می‌بینیم که چگونه انقباض طول می‌تواند دوجانبه باشد، به عدم انقباض عرض اشاره خواهیم کرد، و رابطهٔ این نتایج را با تصویر اشیاء مورد بحث قرار خواهیم داد.

تعیین طول به وسیلهٔ رادار

نکتهٔ اساسی در اندازه‌گیری طول یک خطکش صلب، یک میله یا شیء دیگر این است که اندازه‌گیری طول در یک لحظه صورت می‌گیرد. برای پی بردن به نتایج این گفته درک این مطلب مهم است که نمایش فضا زمان تاریخ یک میله نواری در فضا زمان محصور بین دو خط زمان گونه است. برای مشاهدهٔ این مطلب، یک میلهٔ راست را که دو انتهای آن u و w است در نظر می‌گیریم [شکل ۳-۳۳ (الف)]. فرض می‌کنیم که میله در چارچوب مرجع A ساکن است؛ برای سادگی، u



شکل ۳-۳۳ (الف) یک خطکش که دو انتهای آن u و w و نقطهٔ وسط آن v است. (ب) نمودار فضا زمان آن خطکش، که در چارچوب مرجع ناظر A ساکن است، جهانخطهای دو انتهای خطکش u و w و نقطهٔ وسط آن v را نشان می‌دهد. روشن است که تمام نوار بین جهانخطهای u و w تاریخهای ذرات تشکیل‌دهندهٔ خطکش را نشان می‌دهد. در این نمودار سطح همزمانی برای A افقی است.

را مبدأ مختصات A قرار می‌دهیم. در این صورت جهانهخظهای انتهایی چپ میله (u) و انتهایی راست میله (w) خطهایی با X ثابت هستند که در شکل ۳-۳۳ (ب) نشان داده شده است. روشن است که نقطه مرکزی v بین u و w قرار دارد، بنابراین تاریخ آن را جهانهخظی بین جهانهخظهای u و w نمایش خواهد داد؛ همین‌طور، تاریخ هر نقطه میله با جهانهخظی که بین جهانهخظهای u و w قرار دارد نشان داده خواهد شد. بدین ترتیب، ماده میله سراسر ناحیه بین این دو جهانهخظ را اشغال خواهد کرد [شکل ۳-۳۳ (ب)].

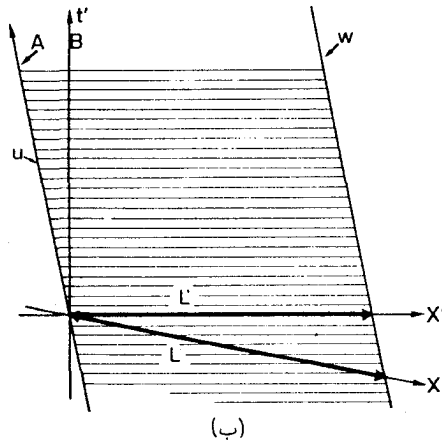
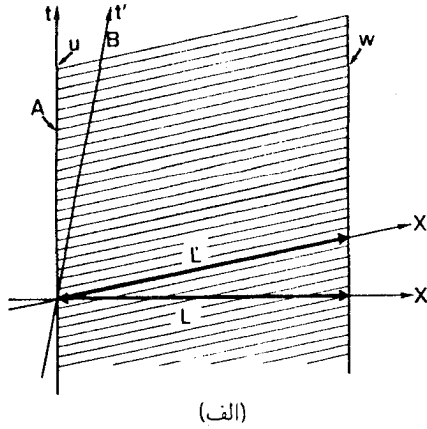
اندازه‌گیری طول میله اندازه‌گیری فاصله بین u و w با رادار [شکل ۳-۳۳ (الف)] "در یک لحظه" است. بدین ترتیب وقتی A طول میله از u تا w را اندازه می‌گیرد، این اندازه فاصله بین جهانهخظهای آنها روی یک سطح همزمانی برای A است [شکل ۳-۳۳ (ب)].

اثر حرکت نسبی در طولهای اندازه‌گیری شده

مطابق معمول، ناظر لخت B را در نظر می‌گیریم که از کنار ناظر لخت A با سرعت نسبی v عبور می‌کند. با در دست داشتن یک نمودار فضا-زمان که از دیدگاه A رسم شده است (و با مختصات A مدرج شده است) می‌توانیم فواصلی را که A اندازه گرفته است مستقیماً از روی آن بخوانیم، اما نمی‌توانیم اندازه‌گیری فواصل توسط B را مستقیماً از روی آن بخوانیم. از آنجا که همزمانی برای A و B متفاوت است، هنگامی که این دو برای اندازه‌گیری طول میله از رادار استفاده می‌کنند، به‌اعتباری جنبه‌های مختلف تاریخ فضا-زمان آن را اندازه می‌گیرند [شکل ۳-۳۴ (الف)]، بنابراین تعجب‌آور نیست که نتایج مختلفی به‌دست آورند. این نمودار وضعیت را از دیدگاه A نشان می‌دهد؛ [شکل ۳-۳۴ (ب)] همان وضعیت را آن‌طور که B می‌بیند نشان می‌دهد. بررسی مفصل زیر به فرمول ۳-۲۲ انقباض طول می‌انجامد.

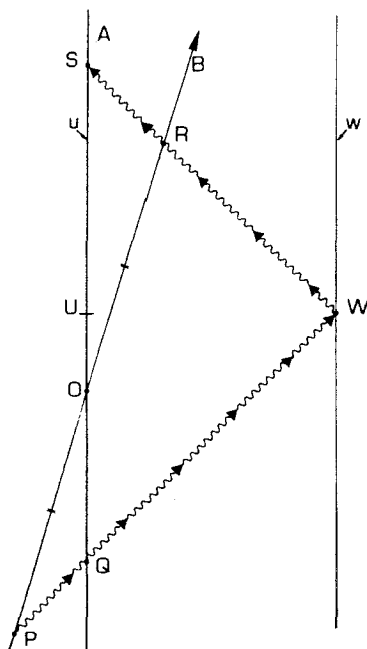
برای اینکه مقایسه را آسان کنیم، اندازه‌گیریهایی را در نظر می‌گیریم که در آنها برای تعیین طول هر دو میله A و B از پرتوهای نور یکسان استفاده می‌کنند (شکل ۳-۳۵). B در P یک علامت نوری گسیل می‌کند؛ این علامت از انتهایی میله w در W بازتابیده می‌شود، و B دوباره آن را در R دریافت می‌کند. فرض می‌کنیم رویدادی که روی جهانهخظ B در نیمه راه بین گسیل علامت و دریافت آن طبق اندازه‌گیری ساعت خود او قرار دارد O باشد. فرض کنید B رویداد P را طوری انتخاب می‌کند که خود او در رویداد O با انتهایی u منطبق باشد؛ در این صورت $t'_{OP} = t'_{OR}$ و طبق اندازه‌گیری B، O، و w همزمان هستند. مدت سیر نور برابر است با $t'_{OP} = t'_{OR} = t'$ و B طول میله را برابر با

$$L' = \frac{1}{\gamma} ct' \quad (۳-۲۱ الف)$$



شکل ۳-۳۴ (الف) طبق اندازه‌گیری A طول خطکش L است، در حالی که طبق اندازه‌گیری B (که نسبت به A در حرکت است) طول آن در سطح همزمانی وی L' است. (ب) همان وضعیت که در چارچوب سکون B رسم شده است.

فرض کنید نوری که B در رویداد P گسیل می‌کند در رویداد Q به جهانبخت A برسد. فرض کنید که A در رویداد Q یک علامت نوری گسیل کند. این نور در رویداد W بازتابیده می‌شود و آن را دوباره در رویداد S دریافت می‌کند. اگر ضریب K_1 برای سرعت نسبی نزدیک شدن v باشد؛ این زمان t'_{PO} را به t_{QO} مربوط می‌کند. از این رو طبق اندازه‌گیری A زمان از O تا Q برابر است با $t_{QO} = K_1 \times \sqrt{2} \tau'$. فرض کنید K_2 ضریب K برای سرعت نسبی دور شدن v باشد؛ که زمان t_{OR} را با t_{OS} مربوط می‌سازد، از این رو طبق اندازه‌گیری A زمان از O تا S برابر است با $t_{OS} = K_2 \times \sqrt{2} \tau'$. فرض می‌کنیم که طبق اندازه‌گیری A مدت کل سیر نور برابر τ



شکل ۳-۳۵ ناظر A و ناظر B هر دو طول میله را با رادار اندازه می‌گیرند، A علامتی در Q گسیل می‌کند و پژواک آن را در S دریافت می‌کند، در حالی که B علامتی در P گسیل می‌کند و پژواک آن را در R دریافت می‌کند. طبق اندازه‌گیری A، U و W همزمان هستند، در حالی که طبق اندازه‌گیری B، O، W همزمان هستند (OR و OP نماینده زمانهای برابر هستند).

باشد، در این صورت

$$\tau = t_{QS} = t_{QO} + t_{OS} = (K_1 + K_2) \times \frac{1}{4} \tau'$$

اما، $K_2 = 1/K_1$ زیرا مربوط به سرعت نزدیک شدن و دور شدن یکسان هستند. در این صورت طبق رابطه ۳-۱۸ داریم

$$\tau = (K_1 + 1/K_1)(\tau'/2) = \{(K_1^2 + 1)/2K_1\} \tau' = \gamma \tau' \quad (۳-۲۱ ب)$$

طبق اندازه‌گیری A طول میله برابر است با

$$L = \frac{1}{\gamma} c\tau \quad (۳-۲۱ ج)$$

بنابراین نسبت طول میله طبق اندازه‌گیری A بر طول میله طبق اندازه‌گیری B با در نظر گرفتن ۲۱-۳ برابر است با

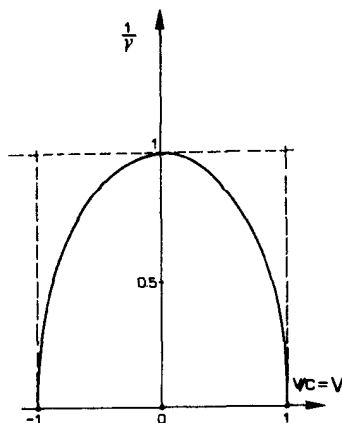
$$L/L' = \tau/\tau' = \gamma \quad (22-3)$$

که در آن γ توسط معادله ۱۹-۳ برحسب v بیان می‌شود. (توجه داشته باشید که γ برای K_1 و K_2 یکسان است. زیرا آنها نمایندهٔ نزدیک شدن و دور شدن با سرعت یکسان هستند، بنابراین اگر در ۲۱-۳ (ب) K_2 را به جای K_1 قرار دهیم نتیجهٔ به دست آمده یکسان خواهد بود). بدین ترتیب طول میله بر طبق اندازه‌گیری A (که میله نسبت به او ساکن است) به اندازه ضریب γ از طول میله طبق اندازه‌گیری B (که میله نسبت به او با سرعت v حرکت می‌کند) بزرگتر است. خلاصه، طول اشیای متحرک با ضریب

$$1/\gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

از طول اشیای ساکن کوتاهتر اندازه گرفته می‌شود. به عنوان مثال، یک سفینهٔ میان ستاره‌ای را در نظر بگیرید که طول آن طبق اندازه‌گیری خدمه‌اش $0.5 \text{ km} = 500 \text{ m}$ است. فرض کنید که این سفینه از سیاره‌ای نظاره می‌شود که سفینه از کنار آن با سرعت $v = 0.9c$ عبور می‌کند. در این صورت $0.44 \approx \{1 - (0.9)^2\}^{1/2} = 1/\gamma$. بنابراین طول سفینه از زمین $0.22 \text{ km} = (0.5)(0.44) \approx L' = L/\gamma$ اندازه گرفته می‌شود. اکنون فرض کنید $v = 0.99c$. در این صورت $0.14 \approx \{1 - (0.99)^2\}^{1/2} = 1/\gamma$ و طول اندازه گرفته شده برابر است با $0.07 \text{ km} = 70 \text{ m} \approx L'$.

یک نمودار کمیت انقباض طول γ در شکل ۳-۳۶ نشان داده شده است. خصوصیات این نمودار متناظر با خصوصیات γ است (با بخش قبل مقایسه کنید)، یعنی (۱) همیشه کوچکتر یا مساوی ۱ است؛ (۲) تنها در صورتی برابر ۱ است که سرعت حرکت نسبی صفر باشد؛ (۳) وقتی $|v/c| \rightarrow 1$ ، مقدار آن به صفر میل می‌کند؛ و (۴) برای نزدیک شدن (v مثبت) و دور شدن (v منفی) یکی است. بدین ترتیب، برای حرکت‌های نسبی که سرعت آنها نسبت به سرعت نور کم است این اثر قابل چشم‌پوشی است، اما برای سرعت‌هایی که نزدیک به سرعت نور هستند طول یک شیء در حال حرکت طبق اندازه‌گیری با رادار به صفر میل می‌کند. همان‌طور که در بالا بدان اشاره شد، می‌توان علت اصلی اثر انقباض طول را در این دانست که B طول میله را در "لحظه" ای اندازه می‌گیرد که توسط سطح همزمانی OW نمایش داده شده است (شکل ۳-۳۵)، در صورتی که A طول میله را در "لحظه" ای اندازه می‌گیرد که با سطح همزمانی WU نمایش داده شده است و در آن U در جهانه‌خط A وسط Q و S قرار دارد؛ این سطح در نمودار فضا-زمان A افقی به نظر می‌آید. گرچه ظاهراً خط OW از UW درازتر است، اما نمایندهٔ طول کوتاهتری است که B با رادار



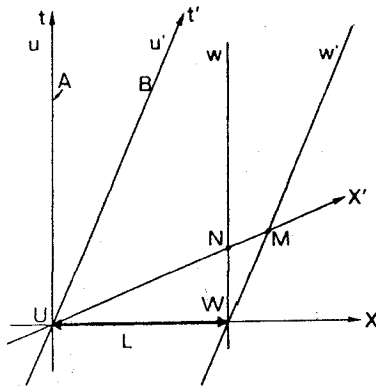
شکل ۳-۳ یک نمودار ضریب انقباض طول $1/\gamma$ برحسب $v/c = V$.

اندازه می‌گیرد. در بخش ۲-۴ از چگونگی ارتباط طولهایی را که در امتداد سطحهای همزمانی مختلف اندازه گرفته می‌شوند دقیقاً به‌دست خواهیم آورد.

تقارن انقباض طول

این اثر درست مانند مورد اتساع زمان کاملاً دوجانبه است: هر ناظری اشیایی را که در چارچوب دیگری ساکن هستند با ضریب $1/\gamma$ کوتاهتر اندازه می‌گیرد. همانند مورد قبل، می‌توانیم با توجه به اینکه هیچ‌گونه اختلاف ذاتی بین A و B وجود ندارد به این امر پی ببریم، بنابراین در تحلیل بالا می‌توانستیم برای تعیین انقباض طولی که B در مورد اشیایی که با A حرکت می‌کنند مشاهده می‌کند، جای A و B را عوض کنیم. بدین ترتیب دوجانبگی این اثر نتیجه اصل نسبیت است. گرچه، چگونگی امکان دوجانبگی را به‌صورت سازگار کاملاً به حساب نمی‌آورد. برای درک مطلب، باید اندازه‌گیریهایی را در نظر بگیریم که A و B با میله‌های صلبی که همراه با هر یک حرکت می‌کند انجام می‌دهند.

شکل ۳-۳۷ یک نمودار فضا-زمان است که از دیدگاه A رسم شده است و میله R_A را که نقاط انتهایی آن u و w در چارچوب A ساکن هستند و میله R_B را که نقاط انتهایی u' و w' در چارچوب B ساکن هستند نشان می‌دهد. میله‌ها طوری انتخاب شده‌اند که طبق اندازه‌گیری A طول آنها یکی باشد: جهانخطهای u و u' در رویداد U با یکدیگر تلاقی می‌کنند و جهانخطهای w و w' در رویداد W برخورد می‌کنند، که در آن U و W برای A همزمان هستند، بنابراین A طول هر دو را L اندازه می‌گیرد (فاصله راداری که او بین U و W اندازه می‌گیرد). اما، B با استفاده از رادار طولها را در سطح همزمانی خود اندازه می‌گیرد که در نمودار به‌صورت خط UNM نشان داده شده است و N روی جهانخط w و M روی جهانخط w' قرار دارد. او طول R_A را به‌صورت



شکل ۳-۳۷ اندازه‌گیری دو میله R_A ، با نقاط انتهایی u و w ، و R_B با نقاط انتهایی u' و w' . طبق اندازه‌گیری A طول هر دو برابر L است (فاصله بین زویدادهای U و W). طبق اندازه‌گیری ناظر B طول آنها در سطح همزمانی UM او L' (بین U و N) و L'' (بین U و M) است.

فاصله راداری L' بین U و N ، و طول R_B را به صورت طول راداری L'' بین U و M اندازه می‌گیرد. طبق نتایج بالا، A میله R_B را که در حرکت نسبی است به اندازه ضریب γ کوتاهتر اندازه می‌گیرد

$$L'' = \gamma L, \quad L'' > L \quad (۳-۲۳ الف)$$

همین طور، B میله R_A را که در حرکت نسبی است به اندازه ضریب γ کوتاه اندازه می‌گیرد.

$$L = \gamma L' \quad L > L' \quad (۳-۲۳ ب)$$

این نتایج با یکدیگر سازگار هستند. در واقع نشان می‌دهند که

$$L'' = \gamma^2 L' \quad (۳-۲۳ ج)$$

و با $L' > L''$ سازگار است (روشن است، زیرا پاره خط UM درازتر از UN است).

با توجه به این دو جانبگی پیداست که هر شیء صلب دلخواه به نظر ناظری که شیء برای او ساکن است (یعنی، ناظری که با همان سرعت شیء حرکت می‌کند) درازترین است. می‌توانیم از اسم ویژه طول برای نامیدن طول آن شیء طبق اندازه‌گیری چنین ناظری استفاده کنیم. در این صورت هر ناظری که نسبت به میله حرکت داشته باشد طول آن را کوتاهتر از ویژه طول اندازه می‌گیرد.

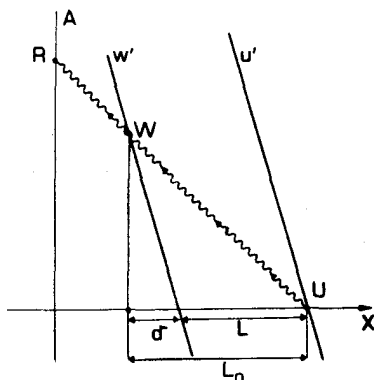
اندازه‌گیریهای عرضی

اثر انقباض طول یک اثر طولی است؛ یعنی، این اثر در جهت حرکت نسبی شیء مشاهده می‌شود (در محاسبه بالا، حرکت نسبی در جهت محور X ها بود و انقباض طول در اندازه‌گیری طول آن شیء در این جهت روی می‌داد). در جهت‌های عمود بر جهت حرکت هیچ تغییری در اندازه مشاهده نمی‌شود، زیرا در این جهت‌ها در فواصل نسبی تغییری حاصل نمی‌شود. بدین ترتیب، دستگاه‌های راداری که توسط A و B در امتداد محورهای Y و Z قرار داده شده‌اند در امتداد این دو محور فاصله‌ها را یکسان اندازه می‌گیرند، و معلوم می‌شود که اندازه اشیاء که در جهت‌های Y و Z اندازه گرفته می‌شود از حرکت در جهت محور X ها تأثیر نمی‌پذیرد. بنابراین جسمی که از کنار ما عبور می‌کند طبق اندازه‌گیری ما تغییر شکل می‌دهد، زیرا ابعاد آن در جهت محورهای Y و Z مانند حالت ساکن است اما در جهت محور X ها منقبض شده است.

تصاویر عکاسی

اثر انقباض طول مربوط به اندازه‌گیری‌هایی است که با رادار انجام می‌شود. این بدان معنا نیست که یک عکس انقباض طول را به‌طور آشکار نشان می‌دهد. زیرا چنین تصویری حالت شیء "در یک لحظه" را نشان نمی‌دهد. برای اینکه محاسبه کنیم تصویر چه چیزی را نشان می‌دهد، باید مدت سیر نور از قسمتهای مختلف شیء تا دوربین را به حساب آوریم و این در جهت مخالف انقباض طول عمل می‌کند. در حالت کلی محاسبه نتیجه پیچیده است، اما یک مثال ساده این اصل را روشن می‌سازد. این بررسی تفصیلی در حاشیه خط اصلی بحث ما قرار دارد، و بنابراین می‌توان آن را در نظر اول حذف کرد.

یک میله صلب R_B را با دو انتهای u' و w' در نظر بگیرید که به طرف ناظر A در حرکت است (شکل ۳-۳۸). مانند مثال قبل، ویژه طول میله را با L'' و طولی را که A برای آن اندازه می‌گیرد با L نشان می‌دهیم؛ در این صورت این کمیتها با $۳-۲۳$ (الف) به یکدیگر مربوط می‌شوند. در مطالب زیر تمام فواصل به مقیاس مختصه A ، یعنی X ، خواهند بود مگر آنکه خلاف آن ذکر شود، که از آن در مدرج کردن محور x ها در شکل ۳-۳۸ استفاده شده است و طوری بهنجار شده است که سرعت نور v باشد. در رویداد R ، ناظر A عکسی از R_B برمی‌دارد. نوری که در رویداد R می‌رسد مخروط نور گذشته خود را پیموده است؛ ما رویدادی را که در آن نور انتهای u را ترک کرده با U و رویدادی را که در آن نور انتهای w را ترک کرده با W نمایش می‌دهیم. فرض کنید در حالی که نور از U به W می‌رود. R_B به اندازه d به سوی A می‌آید؛ چون R_B با سرعت v/c به طرف A حرکت می‌کند، داریم $|d| = T|v/c|$ که در آن T زمانی است که نور از U به W می‌رود. با توجه به قراردادمان در مورد علامت v ، سرعت نزدیک شدن را با یک مقدار منفی v نمایش می‌دهیم، بنابراین $d = -Tv/c$. وقتی نور به W می‌رسد به اندازه $L + d$ به سوی A آمده



شکل ۳-۳۸ عکسی که ناظر A از یک خط‌کش با نقاط انتهایی u' و w' که به طرف دوربین حرکت می‌کند برمی‌دارد. رویدادهای U در u و W در w را دوربین در رویداد R ثبت می‌کند. وقتی پرتو نور W را ترک می‌کند، خط‌کش به اندازه فاصله d به دوربین نزدیکتر شده است، بنابراین طول ظاهری آن برابر است با $L_0 = L + d$.

است، بنابراین $T = L + d$ ؛ در نتیجه $d = -(L + d)v/c$. حل برای d نشان می‌دهد که

$$d = \left\{ -(v/c) / (1 + v/c) \right\} L \quad (\text{الف } ۳-۲۴)$$

اما طول مؤثر R_B در تصویر A برابر است با $L_0 = L + d$ ، زیرا این فاصله بین دو انتهای u و w است که در تصویر مشخص است (مثلاً، اگر میله بر روی یک مقیاس بلغزد که در آن فواصل از A مشخص شده‌اند، رویداد U که در آن تصویر A انتهای u را نشان می‌دهد در این مقیاس در فاصله $L + d$ از رویداد W که در آن تصویر A انتهای w را تصویر می‌کند نشان داده خواهد شد.) از ۳-۲۴ الف داریم

$$L_0 = L / (1 + v/c) \quad (\text{ب } ۳-۲۴)$$

اکنون، با استفاده از ۳-۲۳ الف و رابطه ۳-۱۹ برای γ و ساده‌سازی، می‌توان نشان داد که

$$L_0 = \left\{ (1 - v/c) / (1 + v/c) \right\}^{1/2} L''$$

اما طبق ۳-۱۰ رابطه زیر

$$L_0 = (1/K) L'' \quad (\text{۳-۲۵})$$

درست طول مؤثر R_B است که A در تصویر مشاهده می‌کند و از طریق ضریب انقباض طول γ به ویژه طول مربوط نمی‌شود بلکه ارتباط آن از طریق عکس ضریب انتقال دوپلر، یعنی K است!

در واقع این نتیجه تعجب آور نیست: این وضعیت مشابه نحوه اندازه‌گیری اختلاف مقیاس زمان در مشاهدات انتقال دوپلر است که، به وسیله K تعیین می‌شود و نه γ . در هر دو مورد دلیل اصلی ظهور K این است که در آن مشاهده نور در یک جهت سفر می‌کند و نه دو طرفه مانند وقتی که برای تعیین طولها و یا همزمانی از رادار استفاده می‌شود. همین طور می‌توان گفت که K ظاهر می‌شود زیرا اندازه‌گیری مورد نظر مربوط به بزرگی کمیتها در "آن‌گاه" و "اکنون" است و نه اندازه‌گیری "در یک لحظه". علامت این اثر، مانند مورد انتقالهای دوپلر، به دورشونده یا نزدیک‌شونده بودن حرکت نسبی بستگی دارد. اگر شیئی نزدیک شود طول آن به اندازه ضریب $1/K$ بلندتر به نظر می‌آید (در این صورت $v < 0$ و $K < 1$)؛ اگر در حال دورشدن باشد، به اندازه ضریب $1/K$ کوتاهتر به نظر می‌آید (در این مورد، $v > 0$ و $K > 1$).

مثال بالا طول مؤثر R_B را در تصویری که به هنگام حرکت مستقیم میله به طرف A و یا دور شدن از A دیده می‌شود محاسبه می‌کند (درست است که چون شیئی مستقیماً به طرف دوربین حرکت می‌کند، نشان دادن این رابطه عملاً کاری است نسبتاً مشکل). هنگامی که شیئی به صورت عرضی نسبت به خط دید حرکت کند اثرهای پیچیده‌تری بروز می‌کنند. در واقع اگر میله از دور مشاهده شود بدون تغییر شکل به نظر می‌آید؛ در این مورد اثرهای انقباض طول و حرکت نور دقیقاً یکدیگر را خنثی می‌کنند (اما بررسی دقیق چگونگی حرکت نور از شیئی به دوربین نشان می‌دهد که به نظر می‌آید که میله چرخیده است!)

نتیجه

نتیجه اینکه، اثر "انقباض طول" که در این بخش مورد بحث قرار گرفت و بزرگی آن را ضریب $1/\gamma$ تعیین می‌کند، نماینده رفتار اندازه‌گیرهای فاصله است که "در یک لحظه" انجام می‌شود، مثلاً با رادار. این اثر نماینده اندازه‌گیری از روی تصویر نیست، که در آن باید مدت سیر نور را به حساب آورد و تصویر به دست آمده وضعیت "در یک لحظه" را نشان نمی‌دهد. با توجه به این تفاهم، جنبه اصلی مسئله ساده است: ناظری طول یک شیئی را که به طور شعاعی به او نزدیک می‌شود و یا از او دور می‌شود دقیقاً به اندازه ضریب $1/\gamma$ کوتاهتر از طول شیئی مشابهی که ساکن است اندازه می‌گیرد.

تمرینها

۳-۱۶ روی قسمتی از یک جاده تعدادی گلمیخ فشارسنج کوبیده شده است که با کابلهایی با طول دقیقاً مساوی به یک مرکز اندازه‌گیری وصل شده‌اند. یک سری لامپ در مرکز نشان می‌دهند که خودروها از روی کدام یک از آنها در حال عبورند. یک تریلی با سرعت زیاد از روی آنها عبور می‌کند. طول تریلی در حال سکون 30° متر اندازه گرفته شده است. اگر سرعت حرکت تریلی $v = 0.9c$ باشد، این دستگاه طول آن را چقدر اندازه می‌گیرد؟

۳-۱۷ برای اندازه‌گیری طول یک قطار سریع‌السیر، ناظری زمان T را که طول می‌کشد تا قطار از یک نقطه ثابت روی خط آهن عبور کند اندازه می‌گیرد، و سپس طول آن L' را از سرعت حرکت قطار v (که آن را هم اندازه می‌گیرد) با استفاده از رابطه $L' = vT$ تعیین می‌کند. نشان دهید، که فرمول انقباض طول ۳-۲۲، L' را به (ویژه) طول L مربوط می‌کند که توسط ناظری که با قطار حرکت می‌کند اندازه گرفته می‌شود.

۳-۱۸ در یک داستان علمی تخیلی وسیله نقلیه‌ای روی ماه وجود دارد که همیشه (از طریق پنجه‌های هزارپایی) با سطح ماه در تماس است و وزن آن به‌طور یکنواخت در امتداد ۱۰ متر طول آن توزیع شده است. حد بالای سرعتی که این وسیله می‌تواند از شکافهایی به‌پهنای ۴ متر عبور کند بدون اینکه درون آنها بیفتد چقدر است؟ توضیح دهید که از نظر شخصی که با این وسیله حرکت می‌کند، چگونه ممکن است برای سرعتهای بالاتر از این سرعت بحرانی وسیله به‌داخل شکاف بیفتد؟

تمرین کامپیوتری ۹

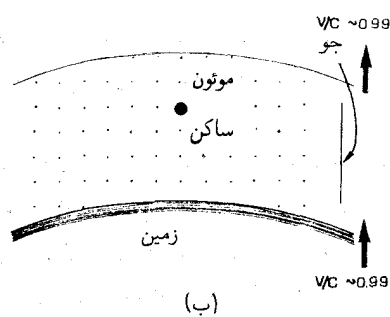
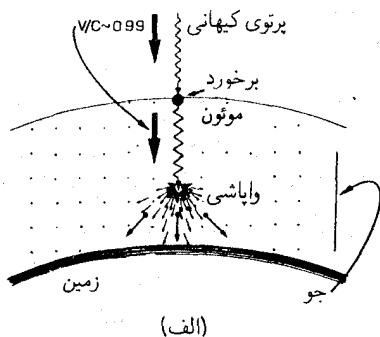
برنامه‌ای بنویسید که سرعت نسبی $V (= v/c)$ و ویژه طول L را به‌عنوان ورودی بپذیرد و طول اندازه گرفته شده L' را که از معادله ۳-۲۲ به‌دست می‌آید چاپ کند. طول تقریبی $L' = L(1 - 1/2V^2)$ را نیز چاپ کنید و برآورد کنید که برای چه گستره‌ای از مقادیر V تقریب L' تقریب خوبی برای L' است. برنامه‌تان را در مورد (الف) یک هواپیمای کنکورد که با سرعت بیشینه حرکت می‌کند و، (ب) یک شاتل فضایی به‌کار گیرید.

۳-۶ مجموعه کامل اثرهای سینماتیکی

تا کنون اصول اساسی نسبیت خاص — هم‌ارز بودن همه ناظرهای لخت، و ناوردایی و ماهیت محدودکننده سرعت نور — و چهار پدیده عمده که از این اصول ناشی می‌شوند: اتساع زمان، انقباض طول، نسبیت همزمانی، و قانون نسبیتی جمع سرعتها را بررسی کردیم. تشخیص ارتباط نزدیک این پدیده‌ها با یکدیگر حائز اهمیت است. هر یک از آنها تنها زمانی معنی دارد که دیگران نیز در کار باشند؛ فقط مجموعه کامل سازگار است. این نکته را با دو مثال گویا نشان خواهیم داد، و سپس خواهیم دید که چگونه می‌توان خواص اصلی را با یک رابطه وحدت‌یافته (تبدیل لورنتس) و یا از راه مفهوم یک ناوردا (بازه فضا-زمان) که هر دو به‌تفصیل در فصل ۴ مورد بحث قرار خواهند گرفت بیان کرد.

مثال (الف): واپاشی موئون

پرتوهای کیهانی ذراتی هستند که از فضا با سرعتهای نسبی بسیار زیاد v (اغلب $۰.۹۹ \approx |v/c|$) به‌زمین می‌رسند. منشأ آنها، و اینکه این انرژی زیاد را از کجا کسب می‌کنند هنوز از اسرار است. در



شکل ۳-۳۹ (الف) پرتوهای کیهانی که با اتمهای جو زمین برخورد می‌کنند و موتون تولید می‌کند به ذرات دیگر واپاشیده می‌شوند. موتونها با سرعتی در حدود $0.99c$ نسبت به زمین حرکت می‌کنند. (ب) همان وضعیت از نظر موتونها، زمین با سرعت زیاد به آنها نزدیک می‌شود.

ارتفاع 20 km از سطح دریا این ذرات با اتمهای جو زمین برخورد می‌کنند، و در میان ذراتی که از این برخوردها نتیجه می‌شوند ذراتی هستند به نام موتون [شکل ۳-۳۹ (الف)]. اینها نیز با سرعت زیاد به سوی زمین حرکت می‌کنند (سرعت متوسط آنها تقریباً با سرعت پرتوهای کیهانی فرودی برابر است)، اما ناپایدارند و به سرعت به ذرات سبکتر (الکترون و نوترینو) واپاشیده می‌شوند. آهنگ این واپاشی را می‌توان در آزمایشگاه اندازه گرفت؛ عمر متوسط موتون ساکن t_1 است در حالی که

$$t_1 \approx 2.2 \times 10^{-6} \text{ s} \quad (\text{الف } 26-3)$$

مدت میانگین عبور آنها از جو زمین، از آنجایی که به وجود می‌آیند، تا سطح دریا t_2 برابر است با

$$t_2 \approx 20 \text{ km} / (0.99 \times 3 \times 10^8 \text{ km/s}) \approx 6.7 \times 10^{-5} \text{ s} \quad (\text{ب } 26-3)$$

f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f \equiv (\text{عمر میانگین}) / (\text{مدت میانگین عبور}) \quad (\text{ج } 26-3)$$

می‌بینیم که $f \approx 30$. اما یک تحلیل آماری نشان می‌دهد که در مدت یک طول عمر میانگین t_1 ، نسبت موتونهایی که باقی می‌مانند تقریباً برابر $1/e$ خواهد بود، که در آن e آن عدد متعالی است که در لگاریتمهای طبیعی ظاهر می‌شود ($e \approx 2.71828 \dots$)؛ و در مدت زمان t_2 کسری که باقی می‌ماند قاعدتاً باید در حدود $e^{-f} \approx e^{-30} \approx 10^{-13}$ باشد. با وجود این وقتی تعداد موتونهایی که در ارتفاع بالای جو تولید

می‌شوند و آنهایی که به سطح دریا می‌رسند اندازه گرفته شود، معلوم می‌شود که کسر بسیار زیادتری به سطح دریا می‌رسد: تقریباً $10^{-2} = 1\%$ کل تعداد تولید شده. بدین ترتیب این پیش‌بینی کاملاً غلط است: تعداد ذره بسیار زیادتری از آنچه که بر مبنای این محاسبه ساده انتظار می‌رود باقی می‌مانند. اشتباه در کجاست؟

نکته اساسی این است که ما اتساع زمان را به حساب نیاورده‌ایم. وقتی یک وضعیت فیزیکی را در نظر می‌گیریم، باید در مورد اینکه کدام چارچوب برای تحلیل مورد استفاده قرار گیرد تصمیم قطعی بگیریم، و سپس روی این تصمیم بایستیم؛ معمولاً درهم آمیختن نتایج اندازه‌گیریهای دو ناظر مختلف به نتایج نادرست می‌انجامد. ابتدا تصمیم گرفتیم که از دیدگاه یک ناظر روی سطح زمین به وضعیت بنگریم. در این صورت (معادله ۳-۲۶ الف) برآورد نادرستی از طول عمر اندازه‌گیری شده موئون است، زیرا این طول عمری است که ناظری که همراه موئون حرکت می‌کند اندازه گرفته است. طول عمر t_1 طبق اندازه‌گیری ناظری که روی زمین ساکن است به اندازه ضریب γ با آن اختلاف خواهد داشت، که در آن

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = \{1 - (0.99)^2\}^{-1/2} \approx 7.1 \quad (\text{الف } 27-3)$$

بنابراین

$$t_1 = \gamma t'_1 = 1.5 \times 10^{-5} \text{ s} \quad (\text{ب } 27-3)$$

معادله (۳-۲۶ ب) برآورد صحیحی از زمان عبور است که ناظری که روی زمین ساکن است اندازه می‌گیرد. برای محاسبه ۳-۲۶ ج، باید از مقادیری استفاده کنیم که همان ناظر (در این مورد ناظری که روی زمین ساکن است)، برای صورت و مخرج اندازه گرفته است. بدین ترتیب به دست می‌آوریم

$$f = t_2/t_1 \approx 4.2 \quad (\text{ج } 27-3)$$

(یعنی $1/\gamma$ ضرب در برآورد قبلی ما). بنابراین $0.15 \approx e^{-f} \approx e^{-4.2}$ ، که برآوردی است از کسری که باقی می‌ماند و با آزمایش هم به خوبی سازگار است.

بنابراین اثر اتساع زمان نتایج نظری و تجربی را در چارچوب زمین با یکدیگر آشتی می‌دهد؛ در واقع این مشاهدات موردی از تحقیق تجربی اثر اتساع زمان است. با این وجود، اگر وضعیت را از دیدگاه ناظری که با موئون حرکت می‌کند در نظر بگیریم مشکلی ظاهر می‌شود. علت آن است که در آن چارچوب برای واپاشی، اثر اتساع زمان وجود ندارد: موئون در چارچوب مرجع ناظر ساکن است [شکل ۳-۳۹ (ب)]، و دارای طول عمر ۳-۲۶ الف است. ظاهراً تحلیل قبلی که جواب نادرست داده بود به کار می‌آید.

حل مشکل در این مورد با به‌خاطر داشتن اینکه باید تمام نتایج نسبیّت خاص را در تحلیل مشاهداتمان به‌کار ببریم حاصل می‌شود. از دیدگاه چارچوب مرجع موثون [شکل ۳-۳۹ (ب)] زمین با سرعت v ($v/c \approx 0.99$) نزدیک می‌شود و این همان سرعتی است که ناظر روی زمین برای موثون اندازه می‌گیرد، زیرا هر دو ناظر در مورد آهنگ نسبی نزدیک شدن با یکدیگر توافق دارند (معادله ۳-۱۰ ب را ببینید). اما، از این دیدگاه جو هم با سرعت زیاد در حرکت است، از این رو مسیر عبور از جو به‌سبب اثر انقباض طول بسیار کوتاهتر اندازه گرفته می‌شود. در واقع، ناظر متحرک طول مسیر موثون در جو را، از تولید موثون تا برخورد با سطح زمین $2.8 \text{ km} \approx 0.141 \times 10^8 \text{ km} \approx 20/\gamma \text{ km}$ اندازه می‌گیرد و نه 20 km که ناظر روی زمین (ساکن نسبت به جو) اندازه می‌گیرد. بدین ترتیب، از نظر ناظر متحرک موثون این مسیر را در زمان t'_2 طی می‌کند که برابر است با

$$t'_2 = 2.8 \text{ km} / (0.99 \times 3 \times 10^8 \text{ km/s}) \approx 9.4 \times 10^{-6} \text{ s} = t_2/\gamma \quad (3-28 \text{ الف})$$

بنابراین، از محاسبه هر دو جمله در ۳-۲۶ ج در چارچوب موثون، داریم

$$f = t'_2/t'_1 = (t_2/\gamma)/(t_1/\gamma) = t_2/t_1 \quad (3-28 \text{ ب})$$

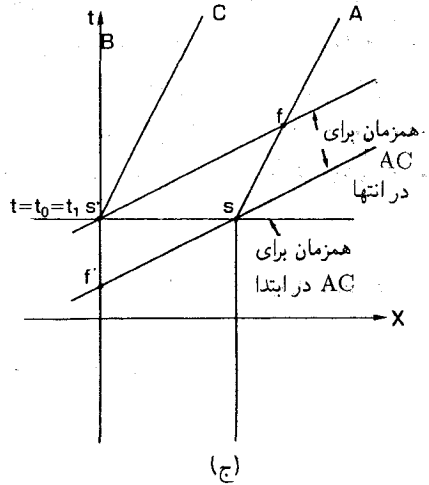
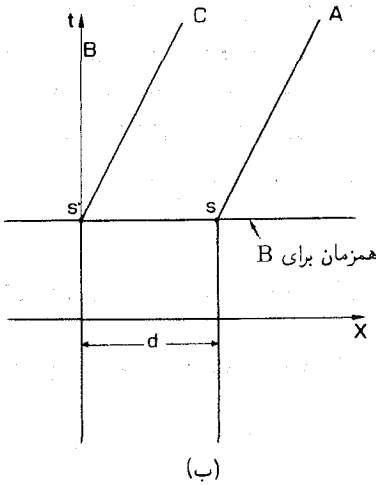
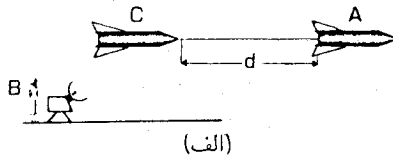
و مانند قبل دقیقاً همان نتیجه ۳-۲۷ ج را به‌دست می‌آوریم. در چارچوب مرجع موثون نتایج نظری و تجربی را با استفاده از اثر انقباض طول با یکدیگر آشتی می‌دهیم و این آزمایش برای تحقیق درستی این اثر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

این تحلیل با روشنی بسیار نشان می‌دهد که چرا انقباض طول و اتساع زمان را باید با هم در نظر گرفت: این دو یک پدیده واحد هستند که از دیدگاههای مختلف دیده می‌شوند. در چارچوب ساکن، نظریه و تجربه به سبب اتساع زمان با یکدیگر سازگارند؛ در چارچوب متحرک به‌سبب انقباض طول؛ اگر تنها یکی از آنها به‌وقوع می‌پیوست آن تحلیل ناسازگار از آب درمی‌آمد. داده‌های تجربی واپاشی موثون برای تحقیق درستی اینکه هر دو اثر در دنیای فیزیکی واقعی به‌وقوع می‌پیوندند به‌کار می‌آید.^۱

مثال (ب): سفینه‌های به‌هم بسته

ناظر B را در نظر بگیرید که دو سفینه ساکن مشابه C و A را مشاهده می‌کند که به‌فاصله $d = 400 \text{ m}$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند، و با یک طناب انعطاف‌ناپذیر به‌طول d به‌یکدیگر متصل‌اند

۱. خواننده علاقه‌مند درباره چگونگی انجام این آزمایش جزئیات بیشتری در کتاب زیر خواهد یافت.



شکل ۳-۴۰ (الف) ناظر B دو سفینه A و C را مشاهده می‌کند که همزمان در یک جهت شتاب می‌گیرند. فاصله بین آنها ثابت باقی می‌ماند زیرا شتاب آنها یکسان است. (ب) یک نمودار فضا-زمان ایده‌آلی از آن وضعیت آن‌طور که ناظر B می‌بیند. موتورهای بسیار قوی درست قبل از رویدادهای s و s' روشن می‌شوند و درست پس از این رویدادها خاموش می‌شوند. (ج) در ابتدا سطوح همزمانی A و C بر سطوح همزمانی B منطبق‌اند، اما پس از پایان شتاب آنها، این سطوح نسبت به سطوح B کج می‌شوند. بدین ترتیب، درست پس از اینکه شتاب گرفتن A (در رویداد s) تمام می‌شود، رویداد f' در تاریخ C (قبل از اینکه C شروع به شتاب گرفتن کند) با s همزمان است. بدین ترتیب اندازه‌گیرهای او نشان می‌دهد که، در آن لحظه، C باید شروع به شتاب گرفتن کند.

(بنابراین طناب بین آن دو کشیده شده است). طبق اندازه‌گیری B، در لحظه t_0 آنها همزمان موتورها را روشن می‌کنند و به موازات طناب با حداکثر توان موتورها شروع به حرکت می‌کنند و A در جلوی C حرکت می‌کند [شکل ۳-۴۰ (الف)]. از آنجا که آنها مشابه‌اند سرعت‌هایشان نسبت به ناظر B یکسان است، و بنابراین طبق اندازه‌گیری او فاصله بین آنها دقیقاً d باقی می‌ماند. در زمان t_1 که B اندازه می‌گیرد، هر دو موتورها را خاموش می‌کنند و به حرکت لخت با سرعت $v = 3/5c$ نسبت به وی ادامه می‌دهند. طبق اندازه‌گیری او فاصله بین آن دو هنوز 400 m است. برای ساده کردن مسئله فرض خواهیم کرد که موتورهای سفینه‌ها بسیار توانمند و تندسوزند و به سفینه‌ها تکان‌های کوتاه مدت اما قوی وارد می‌آورند که سفینه‌ها را تا رسیدن به سرعت نهایی آنها شتاب می‌دهد. بنابراین،

فرض خواهیم کرد که t_1 زمان کوتاه قابل چشمپوشی پس از t_0 است. یک نمودار فضا-زمان از این وضعیت (که از دیدگاه B رسم شده است) در شکل ۳-۴۰ (ب) نشان داده شده است. اکنون، ناظری که با سفینه A حرکت می‌کند، سفینه C را نسبت به خودش هم در زمانهای اولیه و هم در زمانهای بعدی ساکن اندازه می‌گیرد. طبق اندازه‌گیری او فاصله نهایی بین A و C چقدر خواهد بود؟ این فاصله را با D نشان می‌دهیم. طبق فرمول انقباض طول، $D/d = \gamma$ (معادله ۳-۲۲ را ببینید)؛ D با L متناظر است، زیرا این فاصله‌ای است که در چارچوب سکون A اندازه گرفته شده است. در حالی که d متناظر است با L' که توسط ناظر B که نسبت به آن چارچوب در حرکت است اندازه گرفته شده است، طبق اندازه‌گیری او این فاصله کوتاهتر است. بنابراین

$$D = \gamma d = \left\{ 1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right\}^{-1/2} d = \frac{5}{4} d = 500 \text{ m}$$

اگر طناب هنوز آن دو سفینه را به یکدیگر وصل کرده باشد، نسبت به آنها ساکن است؛ از این رو باید طولش برابر این مقدار باشد (که در چارچوب سکون خودش اندازه گرفته می‌شود). اما طناب انعطاف‌ناپذیر است؛ نمی‌تواند آن را کشید و به این طول رساند. بنابراین باید پاره شده باشد. مشکل وقتی پیش می‌آید که بخواهیم بینیم چگونه این امر می‌تواند اتفاق بیفتد. همان‌طور که در بالا نشان داده شد، B می‌بیند که هر دو سفینه دقیقاً به یک نحو شتاب می‌گیرند. ظاهراً لازمه این امر آن است که فاصله بین آنها نتواند تغییر کند، و بنابراین طناب پاره نشده است. آنها یکسان شتاب گرفته‌اند؛ چطور فاصله بین آنها از 400 m (طبق اندازه‌گیری A در ابتدا) به 500 m (طبق اندازه‌گیری A در انتها) رسیده است؟ آیا در واقع طناب پاره می‌شود یا نه؟

مانند قبل، مسئله این است که ما تمام اثرهای نسبی را به حساب نیاورده‌ایم. پارادوکس ظاهری را می‌توان با در نظر گرفتن نسبیت همزمانی حل کرد. به‌طور مشخص، هنگامی که A و C با سرعت نهایی خود حرکت می‌کنند سطوح همزمانی در فضا-زمان برای آنها نسبت به سطوح همزمانی ابتدایی آنها که با سطوح همزمان B منطبق می‌شود، کج است [شکل ۳-۴۰ (ج) را ببینید]. بنابراین، رویدادهایی را که A تعیین می‌کند در نظر می‌گیریم. درست قبل از اینکه او شروع به روشن کردن موتور سفینه‌اش (در رویداد s در تاریخش) کند، C هم دارد موتورس را (در رویداد s') روشن می‌کند. در این مرحله A و C فاصله‌شان از هم را 400 m اندازه می‌گیرند، و در مورد همزمانی توافق دارند. اما، وقتی A روشن کردن موتورس را (درست پس از رویداد s) به پایان رساند، C هنوز موتورس را روشن نکرده است (زیرا طبق اندازه‌گیری A، s با رویداد f' در تاریخ C، که قبل از s' است، همزمان است). در این مرحله ارزیابی A این است که از C دور می‌شود، زیرا شتاب گرفتن را به پایان رسانده است اما C هنوز شروع به شتاب گرفتن نکرده است. فاصله بین آنها افزایش می‌یابد و طناب پاره می‌شود. سپس C شروع به شتاب گرفتن می‌کند (درست قبل از رویداد s' در تاریخ خودش، که طبق اندازه‌گیری A با رویداد f در تاریخ A همزمان است). سرانجام شتاب

گرفتن C درست قبل از رویداد S' پایان می‌یابد. اکنون A و C هر دو فاصله بین خود را 50° متر اندازه می‌گیرند و در مورد همزمانی هم توافق دارند؛ و این توضیح می‌دهد که چرا فاصله نهایی آنها از فاصله ابتدایی آنها بیشتر است، و معنای آن البته این است که طناب باید پاره شود. مانند قبل، می‌بینیم که سازگاری اثرهای نسبیت خاص بستگی به این دارد که همگی آنها را به حساب بیاوریم؛ "پارادوکسهای" معابرانگیز نسبیت معمولاً از نادیده گرفتن یکی از این اثرها ناشی می‌شود. در ابتدا درک نسبیت همزمانی از همه مشکلاتر است؛ در واقع هم، یک قاعده تقریبی این است که هرگاه مسئله ویژه‌ای پارادوکسی به نظر آید، دلیل آن معمولاً این است که این اثر فراموش شده است.

تمرینها

۱۹-۳ ذراتی که پیون نامیده می‌شوند با چنان آهنگی به ذرات دیگر واپاشیده می‌شوند که وقتی اندازه‌گیری در چارچوب سکون آنها انجام می‌شود) به طور متوسط نیمی از پیونهای موجود در $10^{-9} \times 18$ ثانیه واپاشیده می‌شوند. اکنون فرض کنید که در آزمایش برخورد ذرات پراثری، پیونهایی با سرعت $0.99c$ تولید شوند. به طور متوسط چقدر طول می‌کشد تا طبق اندازه‌گیری یک ناظر ساکن، نیمی از آنها واپاشیده شوند؟ در این مدت آنها چه فاصله‌ای را طی خواهند کرد؟ [این فاصله را با مسافتی که موئونهای توصیف شده در کتاب طی می‌کنند مقایسه کنید].

۲۰-۳ ماشینی به طول ۵ متر با سرعت $v = 3/5c$ وارد گاراژی به طول ۴ متر می‌شود. از دیدگاه یک ناظر ساکن طول ماشین به اندازه ضریب $1/5$ کوتاه شده و به ۴ متر رسیده است و بنابراین دقیقاً در گاراژ جا می‌شود. از طرف دیگر راننده ماشین می‌بیند که طول گاراژ به اندازه ضریب $1/5$ کاهش یافته و ۳٫۲ متر شده است و بنابراین ماشین در آن جا نمی‌شود. این پارادوکس ظاهری را شما چگونه حل می‌کنید؟ کدام کلمات در این بیانیه به اندازه کافی دقیق نیستند؟

۲۱-۳ نمودار فضا زمانی بسازید که نشان دهد در صورت وجود تاکیونها (ذراتی که از نور سریعتر حرکت می‌کنند) پارادوکس علیت به وجود می‌آید. ناظر A ساکن است و ناظر B با سرعت نسبی $4/5c$ از کنار او رد می‌شود. سطوحی رسم کنید که نشان دهند کدام رویدادها، طبق دیدگاه B، با رویدادهای روی جهانخط A در t برابر با ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ همزمان اند. فرض کنید A بخواهد در $t = 1$ علامتی با سرعت $5/3c$ به B بفرستد. نشان دهید که از دیدگاه B، A زمانی علامت را فرستاده است که B آن را قبلاً دریافت کرده است. بنابراین طبق اندازه‌گیری (راداری) او از همزمانی، B می‌توانست جواب علامت را قبل از فرستادن آن دریافت کند! [نکته آموزشی: سازگاری نظریه نسبیت فرستادن علامتها با سرعت بیش از سرعت نور را ممنوع می‌کند].

۲۲-۳ تحلیل ما از مثال (ب) (سفینه‌های متصل) که در بالا آمد مربوط به فاصله‌های لحظه‌ای بود که A، B، و C از سطوح همزمانی خود به دست می‌آوردند. در عمل، آنها فاصله‌های بین خود را با علائم راداری اندازه می‌گیرند و این اندازه‌گیریها لحظه‌ای نیستند؛ مثلاً، سطح همزمانی (sf')

را A با علائمی تعیین می‌کند که قبل از رویداد S می‌فرستد و پس از رویداد S دریافت می‌کند. فاصله‌ای را که A با اندازه‌گیری راداری فاصله بین خود و C اندازه می‌گیرد به تفصیل محاسبه کنید (با مثال ۳-۱۲ مقایسه کنید؛ توجه کنید که این تمرینی است طولانی اما جالب توجه).

مجموعه کامل: دیدگاه‌های وحدت‌بخش

اکنون به کمک این مثالها دیدیم که اگر بخواهیم توصیف سازگاری از آنچه رخ می‌دهد به دست آوریم باید مجموعه کامل اثرهای سینماتیک نسبیتی را در نظر بگیریم. گره ناگشودنی بین آنها را این حقیقت روشن می‌کند که آنچه در یک چارچوب انقباض طول به نظر می‌آید ممکن است در چارچوب دیگر اتساع زمان باشد. بدین ترتیب، ما طبیعتاً به این راه کشیده می‌شویم که ببینیم آیا راهی برای نوشتن این نظریه طوری که این وحدت در آن ظاهر باشد وجود دارد و دیدگاهی وحدت یافته از اندازه‌گیریهای فضازمان و هندسه ارائه کنیم.

این کار شدنی است: در واقع، دو راه جداگانه برای برخورد با این مسئله وجود دارد. اول رهیافت وابسته به این محاسبه است که چگونه تمام اندازه‌گیریهای فضا و زمان وقتی از یک چارچوب مرجع به دیگری می‌رویم تغییر می‌کنند. بدین ترتیب ما را به تبدیل لورنتس رهبری می‌کند. رهیافت دوم در واقع دیدگاهی مخالف را اتخاذ می‌کند. ما ثابت کردیم که خواص مختلف (طول، اختلاف زمان، همزمانی) که قبلاً در هنگام تغییر چارچوب مرجع ناوردا تصور می‌شدند، به هیچ وجه تغییرناپذیر نیستند. حال می‌توان پرسید: با توجه به بصیرت جدیدی که به دست آورده‌ایم، آیا هیچ خاصیتی در فضازمان وجود دارد که یک تغییر چارچوب مرجع دلخواه آن را تغییر ندهد؟ یعنی، آیا فضازمان دارای خواص ناوردای بااهمیتی هست؟ خواهیم دید که کمیتهای چندی از این نوع وجود دارد. یکی از آنها به‌ویژه (فرم متریک) نتایج اندازه‌گیریهای فاصله‌های فضایی و اختلاف زمانها را به صورت فشرده خلاصه می‌کند. در فصل بعد هر یک از این رهیافتها را به نوبت بررسی خواهیم کرد. اما، قبل از بازگشت به این موضوع، ماهیت دینامیک نسبیتی و رابطه اصل نسبیت با بقیه فیزیک را به اختصار در نظر می‌گیریم: "مجموعه کاملی" که باید سازگار باشد شامل تمام قوانین فیزیکی است و بنابراین به‌ویژه شامل قوانین دینامیک می‌شود.

۳-۷ دینامیک نسبیتی

اگر قوانین نیوتونی حرکت ذره درست بود، می‌توانستیم یک ذره را تا سرعتهای بیش از سرعت نور شتاب دهیم و به این ترتیب یکی از فرضیه‌های بنیادی، نظریه نسبیت برخلاف شواهد تجربی نقض می‌شد (بخش ۱-۲). بدین ترتیب، قوانین حرکت ذره در نظریه نسبیت باید با قوانین حرکت در نظریه نیوتونی متفاوت باشند. همین‌طور قوانین پایستگی انرژی و تکانه نیز باید متفاوت باشند. هنگامی که ماهیت چهاربعدی فضازمان را به حساب آوریم، ماهیت واقعی مفاهیم "جرم"، "تکانه"، "انرژی"، و "نیرو" با این مفاهیم در نظریه نیوتونی تا اندازه‌ای متفاوت می‌شوند. فرمولبندی

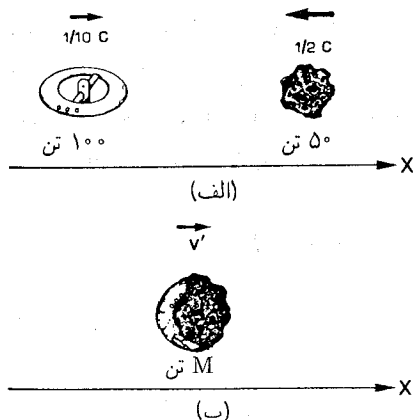
چهار بعدی این مباحث در پیوست ب آورده شده است. در اینجا فقط قوانین دینامیکی تجدید نظر شده حاصل را به صورت سه بعدی آن خلاصه می‌کنیم. این قوانین مبنای یک نظریه دینامیکی را تشکیل می‌دهند که با نتایج سینماتیکی نسبیتی که بنیان نهاده‌ایم سازگار است، و از این روی یک نظریه نسبیتی سازگار برای حرکت ذره‌ها و اجسام پر جرم پایه‌گذاری می‌کنند که نتایج عملی بسیار با اهمیتی دارد (مانند ایجاد مبنایی نظری برای استخراج انرژی هسته‌ای و درک فرایندهایی که در خورشید رخ می‌دهد). مباحثی که در این بخش بررسی می‌شوند بخش مهمی از نظریه نسبیت خاص هستند، اما برای درک ماهیت هندسه و اندازه‌گیریهای فضا زمان اساسی نیستند. بدین ترتیب، خواننده‌ای که می‌خواهد توجه خود را بر هندسه فضا زمانها متمرکز سازد می‌تواند این بخش را حذف کند.

الف) جرم

همان‌طور که باید آماده باشیم تا تمام عقاید پیشین خود را در مورد اندازه‌گیریهای فضا زمان مورد سؤال قرار دهیم، باید آماده باشیم تا در مورد عقایدمان راجع به کمیتهای اصلی دینامیک نیز تجدید نظر کنیم. در نظریه نیوتونی، جرم یک جسم کمیتهای حائز اهمیت فراوان است، زیرا انرژی و تکانه هر جسم با جرم آن متناسب است. بدین ترتیب، جرم یک سفینه انرژی لازم برای قرار دادن آن در مداری به دور زمین در یک فاصله خاص را تعیین می‌کند؛ جرم یک شهابسنگ مقدار انرژی جنبشی تلف شده در برخورد آن با ماه با یک سرعت خاص و ایجاد یک گودال جدید را تعیین می‌کند؛ جرم ذرات بنیادی سرعت نهایی هر یک را پس از برخورد تعیین می‌کند؛ جرم یک اتومبیل با توان معلوم زمان لازم برای شتاب دادن آن از حالت سکون تا سرعت 10^3 کیلومتر در ساعت را تعیین می‌کند. در نظریه نیوتونی، جرم یک شیء مستقل از حرکت ناظری است که آن را اندازه می‌گیرد. در نظریه نسبیت باید آماده باشیم تا درستی یا نادرستی این مطلب را مورد سؤال قرار دهیم. بنابراین، اگر جرمی را که یک ناظر ساکن نسبت به شیء اندازه می‌گیرد با m_0 نشان دهیم، در این صورت این سؤال که آیا حتی وقتی که آن جسم در حرکت نسبی است جرم آن m_0 است یا خیر سؤالی تجربی است. معلوم شده است که جرم مؤثر نسبیتی m در واقع به حرکت نسبی بستگی دارد (معادله ۳-۳۲ که بعداً می‌آید). ویژگی مهم دوم این است که در نظریه نیوتونی جرم کل در برهم‌کنشها پایسته است؛ مثلاً، اگر 10 kg هیدروژن و 80 kg اکسیژن بسوزند و به آب تبدیل شوند، پیش‌بینی می‌شود که جرم آب تولید شده 90 kg باشد. در زیر خواهیم دید که پایستاری جرم در نظریه نسبیت هم واقعیت دارد اما به مفهومی گسترده‌تر: جرم را می‌توان به انرژی و انرژی را به جرم تبدیل کرد؛ جرم و انرژی کل پایسته است.

ب) تکانه

در نظریه نیوتونی تکانه یک شیء برابر است با جرم آن ضربدر سرعت. اهمیت تکانه در آن است که مبنای قوانین اساسی پایستگی حرکت دینامیکی را تشکیل می‌دهد.



شکل ۳-۴۱ (الف) یک ایستگاه فضایی با سرعت $v = 1/10c$ به طرف راست حرکت می‌کند در حالی که یک شهابسنگ با سرعت $v = 1/2c$ به طرف چپ می‌رود. (ب) پس از برخورد آنها به یکدیگر جوش می‌خورند، توده باقیمانده با سرعت v' در جهت $+X$ حرکت می‌کند.

(ت ۱) هرگاه نیرویی بر جسم اثر نکند، تکانه آن پایسته است؛

(ت ۲) هنگامی که برخوردی بین ذرات یا اجسام بر جرم صورت می‌گیرد، تکانه کل تمام اجسام درگیر در برخورد پایسته می‌ماند.

مثلاً، یک ایستگاه فضایی به جرم 100 تن و یک شهابسنگ به جرم 5 تن را در نظر بگیرید که به یکدیگر نزدیک می‌شوند. در چارچوب مرجع یک ناظر لخت B ، ایستگاه فضایی ابتدا با سرعت $1/10c$ در جهت $+X$ و شهابسنگ با سرعت $1/2c$ در جهت $-X$ در حرکت‌اند [شکل ۳-۴۱ (الف)]. تکانه اولیه سفینه $100 \times 1/10c = 10c$ (به طرف راست مطابق با علامت مثبت)، و تکانه اولیه شهابسنگ $5 \times (-1/2) = -25c$ (به طرف چپ، مطابق با علامت منفی) است. چون نیرویی بر آنها وارد نمی‌شود، طبق (ت ۱) این تکانه‌ها ثابت باقی می‌مانند؛ بنابراین آنها به نزدیک شدن به یکدیگر با سرعت ثابت ادامه می‌دهند. سپس برخورد می‌کنند، گرمای قابل ملاحظه‌ای تولید می‌کنند، و به هم جوش می‌خورند. فرض کنیم که جرم توده باقیمانده M و سرعت آن v' در جهت $+X$ باشد [شکل ۳-۴۱ (ب)]. تکانه نهایی کل اشیای درگیر Mv' است. طبق (ت ۲)، این مقدار برابر با تکانه کل اولیه ایستگاه فضایی به علاوه شهابسنگ است، که برابر است با $10c + (-25c) = -15c$. بدین ترتیب پایستگی تکانه به ما می‌گوید که $Mv' = -15c$ ، از این رو سرعت نهایی برابر است با $v' = -15c/M$. در نظریه نیوتونی، جرم کل پایسته است و از این رو جرم نهایی توده باقیمانده برابر با جرم ایستگاه فضایی به علاوه شهابسنگ است، یعنی $M = 100 + 5 = 105$. بدین ترتیب $v' = -15c/105 = -1/7c$ ؛ یعنی، توده باقیمانده با سرعتی برابر با $1/7c$ (سرعت نور c) به طرف چپ می‌رود.

در این مثال، وضعیت بسیار ساده بود زیرا تمام حرکتها موازی با محور X ها صورت می‌گرفت. اگر حرکت در یک جهت کلی صورت گیرد، می‌توانیم بردار سرعت \mathbf{v} را برحسب مؤلفه‌های آن (v_x, v_y, v_z) به ترتیب موازی با محورها X, Y, Z بنویسیم؛ در این صورت مؤلفه‌های بردار تکانه \mathbf{p} موازی با این محورها برابرند با

$$p_x = mv_x, \quad p_y = mv_y, \quad p_z = mv_z \quad (الف\ ۲۹-۳)$$

می‌توانیم این سه رابطه را به نحوی مناسب در یک معادله برداری واحد ادغام کنیم

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (ب\ ۲۹-۳)$$

که تکانه ذره‌ای به جرم m را که با سرعت \mathbf{v} حرکت می‌کند طبق اندازه‌گیری ناظر B به دست می‌دهد. طبق نظریه نیوتونی، پس از برخورد اندازه‌گیری B نشان خواهد داد که هر یک از مؤلفه‌های تکانه کل (۲۹-۳ الف) پایسته است.

در نظریه نسبیت، پس از بررسی پایستگی تکانه از دیدگاه فضا زمان (پوست B را ببینید)، معلوم می‌شود که کمیت پایسته \mathbf{p} نیست بلکه بردار $\boldsymbol{\pi}$ ، یعنی سه تکانه نسبیته، است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\boldsymbol{\pi} = m_0 \gamma(v) \mathbf{v} \quad (الف\ ۳۰-۳)$$

با مؤلفه‌های

$$\pi_x = m_0 \gamma(v) v_x, \quad \pi_y = m_0 \gamma(v) v_y, \quad \pi_z = m_0 \gamma(v) v_z \quad (ب\ ۳۰-۳)$$

که در آن m_0 جرم وابسته به ذره است (که بعداً آن را با "جرم سکون" مشخص می‌کنیم) و $\gamma(v) = \{1 - (v/c)^2\}^{-1/2}$ (معادله ۳-۱۹). با در نظر گرفتن این تعریف نظریه نسبیت پیش‌بینی می‌کند که تکانه $\boldsymbol{\pi}$ در برخورد پایسته است:

$$(\boldsymbol{\pi} \text{ تکانه کل اولیه}) = (\boldsymbol{\pi} \text{ تکانه کل نهایی}) \quad (۳۱-۳)$$

و از این معادله می‌توان اثر برخوردها را در نظریه نسبیت تقریباً همانند نظریه نیوتونی محاسبه کرد. برای درک مطلب، دوباره ایستگاه فضایی و شهابسنگ مثال بالا را در نظر بگیرید. طبیعتاً فرض می‌کنیم که جرمهای قبلی جرم سکون هستند. نسبت به ناظر B ، ضریب γ برای ایستگاه فضایی برابر

است با $۱٫۰۰۵ = (۹/۱۰)^{-۱/۲} = \{۱ - (۱/۱۰)^۲\}^{-۱/۲}$. از این رو مؤلفه x تکانه اولیه آن برابر است با $۱۰۰ \times ۱٫۰۰۵ \times ۱/۱۰c = ۱۰٫۰۵c$. ضرب $\pi_x = m_0 \gamma(v)v_x$ برای شهابسنگ برابر است با $۱٫۵۵ = \gamma(۱/۲c) = (۱ - (۱/۲)^۲)^{-۱/۲} = (۳/۴)^{-۱/۲}$. از این رو مؤلفه x تکانه اولیه آن برابر است با $۲۸٫۸۶۸c = ۱۰٫۰۵c \times ۱٫۱۵۵ \times (-۱/۲)c$. بنابراین تکانه کل اولیه برابر است با $-۱۸٫۸۱۸c = ۲۸٫۸۶۸c - ۱۰٫۰۵c$ ، که برابر با تکانه کل نهایی است، بنابراین

$$M_0 \gamma(v')v' = -۱۸٫۸۱۸c \quad (*)$$

که در آن M_0 جرم سکون توده باقیمانده است. تکمیل محاسبه برای پیدا کردن v' مستلزم یافتن جرم کل نهایی M_0 است.

طبق نظریه نیوتونی جرم کل پایسته است. آیا می‌توان این نتیجه را به نحوی ساده تعمیم داد؟ این بستگی به شناسایی یک کمیت پایسته دارد که در نظریه نسبیت به آن "جرم" می‌گوییم. اکنون، با مقایسه ۲۹-۳ و ۳۰-۳ روشن می‌شود که اگر جرم ذره متحرک را با

$$m = \gamma(v)m_0 = m_0 \{1 - (v/c)^2\}^{-1/2} \quad (۳۲-۳)$$

تعریف کنیم به طوری که ۳۰-۳ را بتوان به صورت

$$\{\pi = m\mathbf{v}\} \Leftrightarrow \{\pi_x = mv_x, \pi_y = mv_y, \pi_z = mv_z\} \quad (۳۳-۳)$$

نوشت، در این صورت معادله‌های نیوتونی و نسبیتی هر دو به یک شکل در می‌آیند. تکانه پایسته عبارت است از: تکانه مساوی است با جرم ضربدر سرعت، به علاوه، اگر این تعریف جرم را که بستگی به سرعت نسبت به ناظر دارد بپذیریم (m_0 مستقل از این سرعت است)، معادله چهاربعدی پایستگی تکانه نشان می‌دهد که m در برخورد پایسته است (پیوست ب را ببینید). از این به بعد، ما m را (که از جرم سکون و سرعت نسبی به کمک معادله ۳۲-۳ تعیین می‌شود) به عنوان "جرم" یک شیء می‌شناسیم، هم از این جهت که در این صورت معادله‌های تکانه شکل خود را حفظ می‌کنند (معادله‌های ۲۹-۳ و ۳۴-۳) و هم از این جهت که این کمیت در برخورد پایسته است

$$(جرم کل اولیه) = (جرم کل نهایی) \quad (۳۴-۳)$$

هرگاه جسم نسبت به ناظر ساکن باشد، ۳۲-۳ نشان می‌دهد که $m = m_0$ ، از آنجا نام "جرم سکون" برای m_0 ناشی می‌شود. روشن است که $m \geq m_0$ و $m = m_0$ اگر و تنها اگر جسم نسبت به ناظر ساکن باشد.

به‌مثال خود بازمی‌گردیم، جرم اولیهٔ ایستگاه فضایی نسبت به‌ناظر با $m_0 \gamma = 100 \times 1.005 = 100.5 \text{ ton}$ و جرم اولیهٔ شهابسنگ برابر بود با $100.5 + 57.75 = 158.25 \text{ ton}$ بدین ترتیب، جرم اولیهٔ کل $50 \times 1.155 = 57.75 \text{ ton}$ بود. به‌شرط اینکه هیچ جرمی به‌طریق دیگری از بین نرفته باشد، با توجه به‌پایستگی جرم نسبیتی، نتیجه می‌شود که، این جرم نهایی M نیز خواهد بود؟ از این رو

$$M = M_0 \gamma(v') = 158.25 \quad (**)$$

اگر رابطهٔ بالا را بر رابطهٔ (*) تقسیم کنیم داریم، $v'/c = -18.818/158.25 = -0.119$ سپس جایگزین کردن دوبارهٔ این مقدار در (**) نشان می‌دهد که

$$M_0 = 158.25/\gamma(0.119c) = 158.25/1.0071 = 157.13 \text{ ton}$$

که ۷ تن بیشتر از جرم سکون اجسامی است که برخورد کردند! منشأ جرم سکون اضافی تبدیل قسمتی از انرژی جنبشی دو جسم به‌جرم است، که چگونگی آن را در بخش‌های بعد بررسی خواهیم کرد. همچنین خواهیم دید که برخورد آن‌طور که تاکنون مورد بحث قرار گرفت بیش از حد ساده شده است؛ در عمل تابش هم گسیل می‌شود که برای به‌دست آوردن یک تصویر کامل باید به‌حساب آورده شود.

تمرین ۳-۲۳

مثال بالا را در حالتی در نظر بگیرید که در آن جرم شهابسنگ ۲۰ تن باشد، و سایر شرایط تغییر نکند. نشان دهید که در این صورت، طبق نظریهٔ نیوتونی، تودهٔ باقیمانده پس از برخورد نسبت به چارچوب سکون ناظر B ساکن است، اما طبق نظریهٔ نسبیت این‌طور نیست. در این مورد جرم سکون نهایی چقدر است؟

به‌عنوان مثال دوم، فرض کنید که ناظری ذره‌ای با جرم سکون m_0 را مشاهده می‌کند که از طرف چپ با سرعت $v = 1/2c$ نزدیک می‌شود و با ذره‌ای که از طرف راست با سرعت $v = 1/4c$ نزدیک می‌شود برخورد می‌کند؛ پس از برخورد هر دو نسبت به‌آن ناظر ساکن باقی می‌مانند. جرم سکون ذرهٔ دوم چقدر بوده است؟

فرض کنید این جرم M_0 باشد. تکانهٔ نهایی کل صفر است، و از این رو تکانهٔ اولیهٔ کل صفر

است. بنابراین، تکانه اولیه به سمت راست یکی از آنها برابر با تکانه اولیه به سمت چپ دیگری است

$$m_0 \gamma \left(\frac{1}{2}c \right) \times \frac{1}{2}c = M_0 \gamma \left(\frac{1}{4}c \right) \times \frac{1}{4}c$$

$$\Rightarrow m_0 / 2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\}^{1/2} = M_0 / 4 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

پس $m_0 / (3/4)^{1/2} = M_0 / 2(15/16)^{1/2}$ یعنی

$$M_0 = 2m_0 (4/3 \times 15/16)^{1/2} = 2m_0 (5/4)^{1/2} = 2,236m_0$$

برخلاف آن پایستگی انرژی طبق نظریه نیوتونی ایجاب می‌کند که $m_0 \times 1/2c = M_0 \times 1/4c$ یعنی $M_0 = 2m_0$ ، که خطای آن نسبت به نتیجه نسبیتی تقریباً ۱۱ درصد است. اکنون دیدیم که چگونه می‌توان نتایج پایستگی نسبیتی جرم و تکانه را حساب کرد. آیا این قوانین واقعاً درست هستند، یعنی، آیا آنها دنیای واقعی را توصیف می‌کنند؟ این را باید تجربه تعیین کند. هر روزه از شتابدهنده‌های بزرگ ذرات برای ایجاد برخورد در انرژی‌های بسیار بالا استفاده می‌شود، و چندین هزار برخورد از این نوع بر مبنای پایستگی تکانه (معادله ۳-۳۱) و جرم (معادله ۳-۳۴) نسبیتی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند. به کمک این نظریه می‌توانیم در هر مورد برخوردها را بفهمیم، از این رو این قوانین در شمار آزموده شده‌ترین قوانین فیزیک هستند.

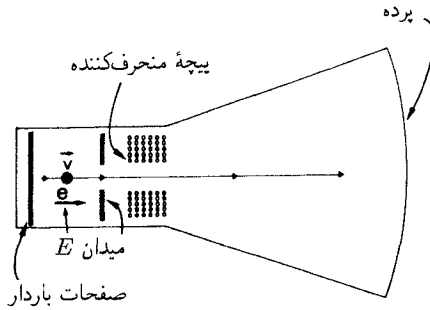
ج) نیرو

در نظریه نیوتونی، اگر نیروی \mathbf{F} روی جسمی با تکانه \mathbf{p} اثر کند آهنگ تغییر تکانه برابر است با نیروی مؤثر؛ یعنی^۱

$$\{\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt\} \Leftrightarrow \{F_x = dp_x/dt, F_y = dp_y/dt, F_z = dp_z/dt\} \quad (3-35 \text{ الف})$$

و این حرکت جسمی را که نیرویی بر آن اثر می‌کند تعیین می‌کند. مثلاً، الکترونهايي که تصویر را در یک دستگاه تلویزیون به وجود می‌آورند ابتدا توسط یک میدان الکتریکی از حالت سکون شتاب داده می‌شوند. برای تحلیل این مطلب توجه کنید که اگر ذره‌ای با بار الکتریکی e به طور غیرنسبیتی در یک میدان الکتریکی یکنواخت، به موازات آن، حرکت کند، نیرویی که میدان بر آن وارد می‌کند برابر خواهد بود با $F = eE$ (شکل ۳-۴۲). اگر محور x ها موازی با میدان انتخاب شود، در

۱. در اینجا dp/dt (مشتق \mathbf{p} نسبت به t) یعنی آهنگ تغییر \mathbf{p} در اثر گذشت زمان t است؛ مثلاً سرعت v آهنگ تغییر مکان است، $v = dx/dt$ ، و شتاب a آهنگ تغییر سرعت است، $a = dv/dt$. اگر در درس ریاضیات عمومی مشتقها را نخوانده‌اید، باید نتایج ۳-۳۵ الف را به عنوان نتایج صحیح بپذیرید.



شکل ۳-۴۲ شتاب گرفتن یک ذره باردار توسط یک میدان الکتریکی (مثلاً، در یک لامپ تصویر تلویزیون).

این صورت از آنجا که $p = mv$ حرکت ذره را معادله $eE = m dv/dt$ برای مؤلفه سرعت v در جهت محور x تعیین می‌کند، که اگر ذره از حالت سکون شروع کند جواب آن $v = (eE/m)t$ است. به‌طور کلی، ذره می‌تواند در نهایت به هر سرعت زیاد دلخواهی برسد در صورتی که به اندازه کافی در میدان الکتریکی یکنواخت حرکت کند. در نظریه نسبیت، همان معادله حرکت معتبر است؛ در اینجا هم داریم

$$\text{آهنگ تغییر تکانه} = \text{نیرو}$$

اگرچه، در اینجا "تکانه" اکنون تکانه نسبیتی است (۳-۳۰)، بدین ترتیب معادله‌های حرکت عبارت‌اند از

$$\{\mathbf{F} = d\boldsymbol{\pi}/dt\} \Leftrightarrow \{F_x = d\pi_x/dt, F_y = d\pi_y/dt, F_z = d\pi_z/dt\} \quad (3-35)$$

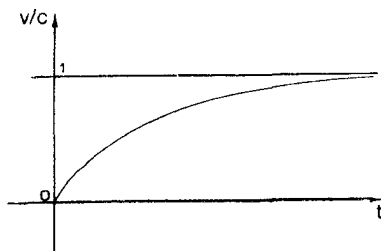
که حرکت جسمی را که هر نوع نیرویی بر آن وارد می‌آید تعیین می‌کند، اما اکنون اثرهای نسبیتی را به‌طور صحیح به حساب می‌آورد. مثال بالا را دوباره در نظر می‌گیریم، معادله v اکنون به صورت

$$eE = m_0 d\{v/(\sqrt{1 - v^2/c^2})\}/dt$$

درمی‌آید. این به رابطه $v/\sqrt{1 - (v/c)^2} = eEt/m_0$ می‌انجامد، که می‌توان آن را برای v/c حل کرد، نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$v/c = (eEt/m_0 c) / \sqrt{1 + (eEt/m_0 c)^2}$$

در این مورد، حتی یک دوره شتاب‌گیری طولانی سبب نخواهد شد که سرعت ذره از سرعت نور تجاوز کند (شکل ۳-۴۳).



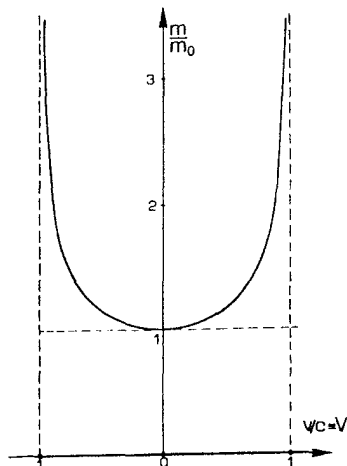
شکل ۳-۴۳ سرعت حرکت ذره باردار برحسب زمان. هر قدر هم مدت شتاب‌گیری ذره طولانی شود، سرعت آن از سرعت نور تجاوز نمی‌کند.

باز هم سؤال این است: آیا قانون نسبیتی نیرو (۳-۳۵ ب) اثرهای نیرویی را که بر یک ذره وارد می‌شود به‌طور صحیح توصیف می‌کند؟ جواب مانند جواب قبلی است: این قانون نیرو چندین هزار بار تا انرژی‌های بسیار زیاد در تعداد زیادی شتابدهنده ذرات آزموده شده است، و قانون حرکتی تثبیت شده‌ای است که با تمام داده‌های تجربی توافق دارد.

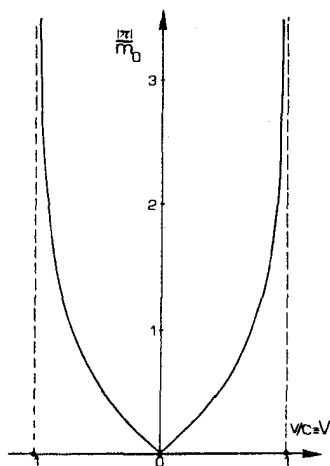
تفاوت اساسی

ناظر B جرم لختی یک جسم را با آزمایشهایی اندازه می‌گیرد که بر مبنای پایداری تکانه و یا قانون نیرو قرار دارند (مثلاً، او جرم یک ذره بنیادی را با اندازه‌گیری تغییر سرعت آن هنگامی که در یک برخورد به آن تکانه داده می‌شود برآورد می‌کند). بدین ترتیب، چون جرمی که از ۳-۳۲ به دست می‌آید کمیتی است که مستقیماً در تعریف تکانه ۳-۳۳ و در نتیجه در معادله پایداری تکانه ۳-۳۱ و معادله قانون نیرو ۳-۳۵ ب وارد می‌شود، در واقع کمیتی است که او به‌عنوان جرم لختی مؤثر آن اندازه خواهد گرفت. مثلاً، پاسخ یک الکترون در یک شتابدهنده ذرات به نیروی وارد بر آن چیزی خواهد بود که از ذره‌ای با جرم m (و نه m_0) انتظار می‌رود. بنابراین جرم مؤثر ذره‌ای که نسبت به B در حرکت است طبق اندازه‌گیری او با سرعت نسبی حرکت آن ذره تغییر می‌کند.

روشن است که معادله‌های تکانه و نیرو در نظریه نیوتونی و نظریه نسبیتی بسیار همانند هستند؛ در واقع تنها تفاوت آن است که در نظریه نسبیتی جرم مؤثر m طبق رابطه ۳-۳۲ به سرعت حرکت جسم نسبت به ناظر بستگی دارد در حالی که در نظریه نیوتونی از این حرکت مستقل است. با وجود این همانندی ظاهری، تغییر m با سرعت v سبب بروز تفاوت اساسی بین موارد نیوتونی و نسبیتی می‌شود. در نظریه نیوتونی، m ثابت است و سرعت نور ویژگی خاصی ندارد. در نظریه نسبیت، m با رابطه ۳-۳۲ به v مربوط می‌شود؛ این رابطه در شکل ۳-۴۴ نشان داده شده است. نکته اساسی این است که جرم مؤثر وقتی $\pm 1 \rightarrow V$ (یعنی، وقتی $\pm c \rightarrow v$) واگرا می‌شود و از این رو تکانه π (که از رابطه ۳-۳۳ تعیین می‌شود) هم واگرا می‌شود؛ یک نمودار از بزرگی تکانه برحسب بزرگی سرعت نسبی v در شکل ۳-۴۵ نشان داده شده است. در نتیجه به تدریج که به



شکل ۳-۴۴ یک نمودار m/m_0 نسبت جرم مؤثر m به جرم سکون m_0 ، برحسب سرعت حرکت نسبی $V = v/c$.



شکل ۳-۴۵ یک نمودار $|E|/m_0 c^2$ نسبت بزرگی تکانه نسبی به جرم سکون برحسب $V = v/c$.

یک شیء از طریق برخورد یا وارد کردن نیرو تکانه بیشتری داده می‌شود، سرعت آن به سرعت نور نزدیک و نزدیکتر می‌شود، اما هرگز به آن سرعت نمی‌رسد زیرا جرم لختی بدون محدودیت افزایش می‌یابد و از این رو نیروی لازم برای افزایش سرعت آن به مقدار معین هم بدون محدودیت افزایش می‌یابد. بدین ترتیب نمی‌توانیم در یک شتابدهنده ذرات، هر قدر هم که بزرگ باشد، ذره‌ای را تا سرعتی بیش از سرعت نور شتاب دهیم (شکل ۳-۴۳ را ببینید)، یک موشک را هم نمی‌توانیم، هر قدر هم که سوخت مصرف کنیم و یا هر قدر هم که موتور موشک قوی باشد تا سرعتی بزرگتر از سرعت نور شتاب دهیم.

برای مشاهده این مطلب در یک مورد خاص، فرض می‌کنیم یک پرتابه با سرعت $v/c = 4/5$ حرکت می‌کند؛ در این صورت $\gamma = (1 - 16/25)^{-1/2} = 5/3$ ، از این رو جرم مؤثر آن $5/3 m_0$ و بزرگی تکانه آن $\pi = mv = 5/3 m_0 (4/5)c = 4/3 m_0 c$ است. حال اگر تکانه آن دو برابر شود، در این صورت $\pi = 8/3 m_0 c$. سرعت جدید حرکت v' و تکانه به صورت $\pi = 8/3 m_0 c = v' \gamma(v') m_0 = v' \{1 - (v'/c)^2\}^{1/2} m_0$ ، از حل معادله برای v' نشان می‌دهد که $(v'/c)^2 = (8/3)^2 / \{1 + (8/3)^2\} = 64/73$ ، از این رو $v'/c = (64/73)^{1/2} = 0.936$ با دو برابر کردن تکانه به طور متوالی به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \pi = \frac{4}{3} m_0 &\Rightarrow V = v/c = \left(\frac{16}{25}\right)^{1/2} = 0.800 \\ \pi = \frac{8}{3} m_0 &\Rightarrow V = v/c = \left(\frac{64}{73}\right)^{1/2} = 0.936 \\ \pi = \frac{16}{3} m_0 &\Rightarrow V = v/c = \left(\frac{256}{265}\right)^{1/2} = 0.983 \\ \pi = \frac{32}{3} m_0 &\Rightarrow V = v/c = \left(\frac{1024}{1033}\right)^{1/2} = 0.996 \\ \pi = \frac{64}{3} m_0 &\Rightarrow V = v/c = \left(\frac{4096}{4105}\right)^{1/2} = 0.999 \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد که به ازای هر بار دو برابر کردن تکانه بازده کمتر و کمتر می‌شود و به سرعت نور نمی‌رسیم.

چون جرم مؤثر در سرعت نور واکرا می‌شود. با هیچ فرایند فیزیکی نمی‌توانیم یک شیء حقیقی را تا سرعت نهایی بیش از سرعت نور شتاب دهیم. بدین ترتیب، نظریه دینامیکی نسبیت خاص با این فرضیه اساسی که سرعت نور برای حرکت تمام اجسام پرجرم یک سرعت حدی است سازگار است، و در واقع برقراری این شرط را تضمین می‌کند. بین سینماتیک و دینامیک نسبیت خاص ناسازگاری وجود ندارد؛ آنها با یکدیگر یک مجموعه سازگار را تشکیل می‌دهند، به شرط اینکه هیچیک از اثرهای نسبیتی را از قلم نیندازیم.

تمرینهای کامپیوتری

۱. برنامه‌ای بنویسید که جرم سکون M^0 و سرعت حرکت یک ذره $V \setminus 1$ را که نسبت به ناظر B در جهت X چارچوب مرجع او حرکت می‌کند به عنوان ورودی بپذیرد، و جرم نسبیتی $M \setminus 1$ و تکانه $P \setminus 1$ آن را چاپ کند. با استفاده از این برنامه درستی فرم شکل‌های ۳-۴۴ و ۳-۴۵ را بسنجید، و تحقیق کنید که هر قدر که تکانه به یک ذره منتقل گردد سرعت آن از سرعت نور تجاوز نخواهد کرد. تقریب حرکت کند $M \setminus 1 = M^0 [1 + 1/2 (V \setminus 1/c)^2]$ را نیز چاپ کنید، و ببینید که برای چه گستره‌ای از $V \setminus 1$ این تقریب برای $M \setminus 1$ تقریب خوبی است.
۱۱. برنامه‌ای بنویسید که جرمهای سکون $M^0(I)$ و سرعت‌های حرکت $V \setminus 1(I)$ دو ذره با

برچسب $I(1, 2)$ که در یک شتابدهنده ذرات با یکدیگر برخورد می‌کنند و به دو ذره جدید (با برچسب $J, 3, 4$) تبدیل می‌شوند را به‌عنوان ورودی بپذیرد، تمام ذره‌ها در جهت X محور مختصات انتخاب شده حرکت می‌کنند. این برنامه علاوه بر آن باید سرعت‌های اندازه‌گیری شده ذره‌های حاصل $V_2(J)$ را به‌عنوان ورودی بپذیرد و سپس جرم‌های سکون $M^0(J)$ را محاسبه و چاپ کند. [تکانه کل و جرم سکون ذره‌های اولیه را محاسبه کنید، از معادله‌های پایستگی جرم و تکانه استفاده کنید، و سپس با حل آنها جرم‌های نهایی را به‌دست آورید].

اگر مقداری بزرگتر از سرعت نور را برای $V_2(J)$ وارد کنید چه رخ می‌دهد؟ اگر مقدار آن مساوی سرعت نور باشد چه اتفاق می‌افتد؟

د) انرژی و جرم

یکی از جنبه‌های اساسی نظریه نیوتونی اصل پایستگی انرژی است. مثلاً هنگامی که موتور یک سفینه آن را شتاب می‌دهد، انرژی توسط سوختی که مصرف می‌کند تأمین می‌شود، آهنگ انجام کار برابر است با آهنگ تهیه انرژی توسط سوخت. همین‌طور در مورد نظریه نسبیت، می‌توان آهنگ انجام کار توسط نیرویی که بر جسم اثر می‌کند را محاسبه کرد؛ معلوم می‌شود که این مقدار با آهنگ تغییر جرم m متناسب است (پیوست ب را ببینید). بدین ترتیب اگر فرض کنیم که آهنگ انجام کار در اینجا هم با آهنگ تغییر انرژی آن جسم برابر است، نتیجه می‌گیریم که آهنگ تغییر انرژی متناسب است با آهنگ تغییر جرم، که نمایانگر رابطه‌ای است بین جرم و انرژی.

به‌علاوه، اگر جسمی با جرم سکون m نسبت به ناظر به‌کندی حرکت کند به‌طوری که $(v/c)^2 \ll 1$ ، عبارت ۳-۳۲ را می‌توان به‌صورت تقریبی زیر نوشت

$$m = m_0 / \left\{ 1 - (v/c)^2 \right\}^{1/2} = m_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2}(v/c)^2 + (v/c)^4 \right. \quad \left. \text{جمله‌های از مرتبه} \right\}$$

یعنی،

$$m = m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 / c^2 + \text{(جمله‌های کوچک که قابل چشمپوشی‌اند)} \quad (3-36 \text{ الف})$$

این نشان می‌دهد که انرژی جنبشی نیوتونی $E_K = \frac{1}{2} m_0 v^2$ به‌اندازه E_K / c^2 در جرم مؤثر جسم سهمیم است. با حذف جمله‌های کوچک و ضرب در عدد ثابت c^2 تقریباً به‌دست می‌آوریم

$$mc^2 = m_0 c^2 + E_K \quad (3-36 \text{ ب})$$

بدین ترتیب دوباره به‌این ایده می‌رسیم که جرم و انرژی با یکدیگر رابطه نزدیک دارند.

بر مبنای این نوع استدلالها، اینشتین پیشنهاد کرد که جرم و انرژی وجوه متفاوت یک کمیت فیزیکی بنیادی واحد هستند. از نظر ریاضی، این مطلب با رابطه مشهور

$$E = mc^2 \quad (37-3)$$

بیان می‌شود. که در آن ضریب ثابت c^2 ، برای درست بودن ابعاد معادله وارد شده است؛ این حقیقت که این ضریب تبدیل برای ارتباط یکاهای جرم و انرژی لازم است از ۳-۳۶ پیداست. این رابطه بلافاصله ایجاب می‌کند که قانون پایستگی جرم ۳-۳۴ پایستگی انرژی طی برهم‌کنشهای ذرات را نیز بیان کند

$$(انرژی نهایی کل) = (انرژی اولیه کل) \quad (38-3)$$

پایستگی انرژی ضروری است زیرا اگر دیدگاه نسبیتی داشته باشیم (پیوست ب را ببینید)، روشن است که قانون (سه‌بعدی) پایستگی تکانه ۳-۳۱ و قانون (یک‌بعدی) پایستگی انرژی ۳-۳۸ را می‌توان به صورت یک قانون واحد (چهاربعدی) پایستگی انرژی تکانه نوشت؛ چیزی که ظاهراً پایستگی تکانه در یک چارچوب است در چارچوب دیگر پایستگی انرژی خواهد بود، و برعکس. در این صورت اینها قوانین مطلق هستند که در همه برهم‌کنشها و از دیدگاه همه ناظرها معتبر هستند، در نتیجه ۳-۳۷، قانون پایستگی جرم ۳-۳۴ نیز لازم می‌آید.

قبل از کشف معنای این روابط، مفاهیم انرژی جرم سکون و انرژی جنبشی را در نسبیت تعریف می‌کنیم. با قرار دادن $v = 0$ در ۳-۳۷، انرژی جسمی که نسبت به ناظر ساکن است، یعنی، انرژی $E = E_0$ وابسته به جرم سکون آن را به دست می‌آوریم. چون در این مورد $\gamma = 1$ ، در این صورت $m = m_0$ و داریم

$$E_0 = m_0 c^2 = (\text{“انرژی جرم سکون” ذره}) \quad (39-3)$$

با استفاده از معادله‌های ۳-۳۲ و ۳-۳۹ در ۳-۳۷ نشان می‌دهیم که انرژی کل از رابطه زیر به دست می‌آید

$$E = m_0 \gamma(v) c^2 = E_0 \gamma(v) \quad (40-3)$$

اکنون ما انرژی جنبشی نسبیتی E_K را از انرژی جرم سکون E_0 و انرژی کل E با رابطه

$$E = E_0 + E_K \quad (41-3)$$

تعریف می‌کنیم، یعنی، طبق تعریف، انرژی جنبشی E_K دقیقاً بخشی از انرژی کل E است که ناشی از حرکت جسم نسبت به ناظر است. با استفاده از تعاریف ۳-۳۷، ۳-۳۹ معادله ۳-۳۶ را به عنوان معادله‌ای که در نظریه نسبیت دقیقاً درست است بازمی‌یابیم. همچنین با استفاده از ۳-۴۰ و ۳-۱۹، معادله ۳-۴۱ نشان می‌دهد که

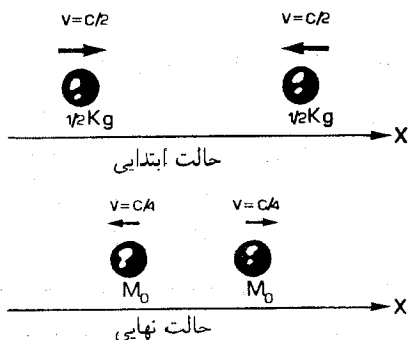
$$E_K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\{1 - (v/c)^2\}^{1/2}} - 1 \right) \quad (۳-۴۲)$$

عبارت دقیق نسبیتی برای انرژی جنبشی است. در حرکت کند این رابطه به صورت (جملات کوچک که قابل چشمپوشی‌اند) $E_K = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots$ درمی‌آید و بدین ترتیب عبارت نیوتونی $\frac{1}{2} m_0 v^2$ را به عنوان یک تقریب خوب برای انرژی جنبشی هنگامی که $|v/c| \ll 1$ به دست می‌آوریم. در سرعت‌های کم می‌توانیم از هر کدام از این عبارتها برای انرژی جنبشی استفاده کنیم، زیرا تفاوت بین آنها ناچیز است؛ در سرعت‌های زیاد، باید از عبارت نسبیتی برای انرژی استفاده کنیم، در غیر این صورت جوابهای غلط به دست خواهیم آورد. در جمع‌بندی، در نظریه نسبیت، معادله ۳-۴۱ انرژی کل E را به انرژی جرم سکون آن E_0 ، یعنی بخشی از انرژی کل که مستقل از حرکت جسم است، و انرژی جنبشی آن E_K ، بخشی که فقط به حرکت جسم بستگی دارد، تقسیم می‌کند. E_0 از ۳-۳۹ و E_K از ۳-۴۲ به دست می‌آید. این ایده‌ها در فیزیک اهمیت اساسی دارند. بررسی تفصیلی همه پیامدهای این مطلب خارج از برنامه این کتاب است، اما برخی از مهمترین نتایج را خلاصه خواهیم کرد.

پایستگی جرم و انرژی

بصیرت اینشتین در این بود که متوجه شود این رابطه‌ها در مورد همه شکل‌های انرژی به کار می‌روند و این که انرژی کل پایسته است. در نظریه نیوتونی، به شرط آنکه همه شکل‌های انرژی به حساب آورده شوند، جرم کل و انرژی کل در برهم‌کنشهای پیچیده بین اجسام یا دستگاههای ذرات به طور جداگانه پایسته‌اند. در نظریه نسبیت جای این دو قانون را یک قانون واحد پایستگی می‌گیرد، قانون پایستگی انرژی نسبیتی، که تمام شکل‌های انرژی را به حساب می‌آورد و همزمان با آن نماینده پایستگی جرم است (زیرا جرم و انرژی چیزی جز وجوه مختلف یک کمیت واحد نیستند).

پیامدهای آن عمیق‌اند. برخورد دو توپ بیلیارد را در نظر بگیرید. در دنیای واقعی، بیشتر انرژی جنبشی آنها پس از پس‌زده شدن دوباره به دست می‌آید، قسمتی از این انرژی صرف گرم کردن گویها می‌شود. بدین ترتیب انرژی جنبشی نهایی کمتر از انرژی جنبشی اولیه خواهد بود، اختلاف آنها انرژی گرمایی است که گویها به دست آورده‌اند (در نتیجه دمای نهایی آنها از دمای ابتدایی آنها بیشتر خواهد بود). انرژی کل پایسته است، بنابراین می‌توانیم تغییر در انرژی گرمایی را حساب کنیم، که نتیجه آن می‌شود که سرانجام جرم سکون گویها از قبل از برخورد بیشتر است.



شکل ۳-۴۶ دوگویی با جرم 0.5 kg به یکدیگر نزدیک می‌شوند، هر یک با سرعت $1/2c$ نسبت به ناظر B حرکت می‌کند و پس از برخورد از هم دور می‌شوند. هر یک با سرعت $1/4c$ حرکت می‌کند.

به عنوان مثالی ویژه، فرض کنید ناظری دوگویی یکسان با جرم سکون $1/2 \text{ kg}$ را می‌بیند که به طور متقارن به یکدیگر نزدیک می‌شوند و هر یک با سرعت $v = 1/2c$ حرکت می‌کند، برخورد می‌کنند و سپس با سرعت $v' = 1/4c$ از هم دور می‌شوند (شکل ۳-۴۶). تکانه کل در ابتدا صفر است و بنابراین، چون تکانه پایسته است، در پایان هم صفر خواهد بود. در نتیجه جرمهای سکون نهایی برابرند (که از تقارن وضعیت هم پیداست). انرژی کل ابتدایی برابر است با

$$2 \times \frac{1}{2} \times \gamma\left(\frac{1}{2}c\right) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-1/2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1/2} = 1.155$$

اگر جرم سکون نهایی هر گوی M_0 باشد، انرژی کل نهایی برابر است با

$$2 \times M_0 \times \gamma\left(\frac{1}{4}c\right) = 2M_0 \left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}^{-1/2} = 2M_0 \left(\frac{15}{16}\right)^{-1/2} = 2.066M_0$$

چون این انرژیها برابرند. بنابراین $M_0 = 1.155/2.066 = 0.559 \text{ kg}$ ، که به اندازه 0.059 kg بیشتر از جرم سکون قبل از برخورد است. طبق تعریف، این جرمی است که ناظری که با هر یک از گویها حرکت می‌کند برای آن گوی اندازه می‌گیرد؛ چطور جرم سکون گوی می‌تواند افزایش یابد؟ پاسخ آن است که انرژی گوی در پایان بیشتر از انرژی اولیه است زیرا گرم شده است و این به سبب هم‌ارز بودن جرم و انرژی موجب افزایش جرم سکون گوی می‌شود.

لختی انرژی

این مثال نمایانگر این حقیقت است که جرم لختی یک گوی گرم بیشتر از گوی سرد مانند آن است. طبق ۳-۳۰ تکانه آن در یک سرعت معین نیز افزایش می‌یابد؛ انرژی گرمایی دارای لختی است! بدین ترتیب، برای اینکه سرعت یک گوی گرم را از سکون تا 30 km/h افزایش دهیم باید انرژی بیشتری نسبت به موردی که گوی سرد است به آن منتقل کنیم. این مطلب در مورد تمام اشکال انرژی صادق است، زیرا ۳-۳۹ نشان می‌دهد که اگر افزایشی در انرژی یک جسم پدید آید (مثلاً، اگر آن را حرارت دهند، اگر یک باتری شارژ شود و یا اگر فزنی فشرده شود)، جرم سکون آن افزایش خواهد یافت. بدین ترتیب تمام شکلهای انرژی (مثلاً، انرژی شیمیایی در یک باتری شارژ شده، انرژی مکانیکی در فنر فشرده) در لختی یک جسم متحرک سهیم‌اند، و نیرویی را که برای شتاب دادن آن تا یک سرعت معین لازم است و تکانه آن را در آن سرعت افزایش می‌دهند.

در بیشتر موارد این اثر در زندگی روزمره قابل چشمپوشی است: در مثال روشنگر، گویهای بیلیاردی را در نظر گرفتیم که با نصف سرعت نور به یکدیگر نزدیک می‌شوند تا یک اثر اساسی را نشان دهیم، اما البته دست یافتن به چنین چیزی در روی یک میز بیلیارد معمولی کاملاً غیرممکن است! اگرچه، سرعتهای نسبیتی (یعنی سرعتهای نزدیک به سرعت نور) در بسیاری از موارد فیزیکی دست‌یافتنی هستند، ولی این اثر، با افزایش کسری از تکانه ناشی از انرژی داخلی، و نه انرژی جرم سکون، بسیار قابل اهمیت می‌شود. بارزترین مثال در مورد ذرات با جرم سکون صفر است: این ذره‌ها گرچه جرم سکونی ندارند، ولی انرژی داخلی و در نتیجه تکانه آنها غیرصفر است.

برای اینکه به خواص این ذره‌ها پی ببریم، توجه می‌کنیم که از معادله‌های ۳-۱۹، ۳-۳۰، و ۳-۴۰ می‌توانیم رابطه‌های

$$E^2 - \pi^2 c^2 = m_0^2 c^4 \quad (43-3)$$

$$\pi = (E/c^2)\mathbf{v}, \quad \pi^2 c^2 = E^2 v^2 / c^2 \quad (44-3)$$

را که در آنها π^2 و v^2 به ترتیب مربع بزرگیهای بردار تکانه و سرعت هستند (تمرینهای ۳-۲۷ را ببینید) ثابت کنیم. این هم به نوبه خود معادله

$$E^2 (1 - v^2/c^2) = m_0^2 c^4 \quad (45-3)$$

را ایجاد می‌کند. این معادله‌ها برای هر ذره یا جسم صادق‌اند. اکنون ایده این است که حد $m_0 \rightarrow 0$ را محاسبه کنیم در حالی که E غیرصفر باقی می‌ماند. از ۳-۴۴ و ۳-۴۵ به دست می‌آوریم

$$\{m_0 = 0, E \neq 0\} \Rightarrow \{v^2 = c^2, \pi = E/c\} \quad (46-3)$$

که نشان می‌دهد ذره‌های با جرم سکون صفر باید با سرعت نور حرکت کنند، و انرژی و تکانه آنها یکی است (با یک ضریب c که برای تبدیل ابعاد این کمیتها لازم است). بدین ترتیب می‌توانیم به‌طور سازگار ذره‌هایی را تصور کنیم که دارای انرژی متناهی هستند و حامل تکانه متناهی هستند و در مورد آنها $۳-۳۰$ ، $۳-۴۰$ ، $۳-۴۳$ ، و $۳-۴۴$ به‌شکل محدودی است که در آن $۳-۴۶$ صادق است. این ذره‌ها در واقع وجود دارند، مثلاً فوتون، که ذره وابسته به‌نور است (و از این رو باید الزاماً با سرعت نور حرکت کند، همان‌طور که $۳-۴۶$ ایجاب می‌کند). چنانکه می‌دانیم فوتونها می‌توانند حامل انرژی بین نقاط دور باشند، مثلاً می‌توان یک ماهواره در فضا را با استفاده از یک لیزر مناسب در روی زمین که نور را روی ماهواره متمرکز کند از بین برد؛ فوتونهایی که انرژی را از لیزر به ماهواره حمل می‌کنند حامل تکانه نیز هستند، از این رو لیزر در هنگام شلیک لگد می‌زند و تکه‌پاره‌های ماهواره توسط این تکانه به مدار جدیدی رانده می‌شوند.

این اثر در هر برخورد ذره‌های با جرم سکون صفر وجود دارد. برای مثال فرض کنید که فوتونی با انرژی ۱ MeV با الکترون ساکنی با جرم سکون ۰.۵۱۱ MeV برخورد کند. مشاهده می‌شود که پس از برخورد فوتون به اندازه ۴۵° منحرف شده است. فرض می‌کنیم که در آن زمان انرژی و تکانه آن E' و π' و انرژی و تکانه الکترون E'' و π'' باشد. اما $E'/c = |\pi'|$ ، و از پایستگی انرژی داریم

$$1 + 0.511 = E' + E''$$

پایستگی تکانه نشان می‌دهد

$$\pi = \pi' + \pi''$$

که در آن π تکانه اولیه فوتون است. با تغییر ترتیب آخرین معادله و مربع کردن بزرگیها به‌دست می‌آوریم

$$|\pi - \pi'|^2 = |\pi''|^2$$

که به‌دست می‌دهد

$$|\pi|^2 + |\pi'|^2 - 2\pi \cdot \pi' = |\pi''|^2$$

با توجه به اینکه بزرگی π برابر $1/c$ است (از $۳-۴۶$) و $\cos 45^\circ = |\pi| |\pi'|$ داریم

$$(1/c)^2 + (E'/c)^2 - 2(E'/c^2) \cos 45^\circ = |\pi''|^2 = (1/c^2) \{ (E'')^2 - (0.511)^2 \}$$

از ۳-۴۳ با جایگزینی مقدار E'' از معادله پایستگی انرژی خواهیم داشت

$$1 + (E')^2 - 2 \times \frac{1}{4} E' \sqrt{2} = (19511 - E')^2 - (9511)^2$$

با حل این معادله $E' = 9636 \text{ MeV}$ به دست می‌آید و می‌بینیم که فوتون در نتیجه برخورد انرژی از دست داده است.

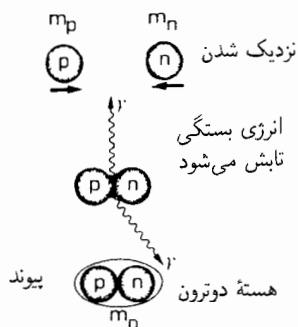
وجود ذره‌های با جرم سکون صفر به تغییرات مهمی در معادله حالت ماده در دماهای بسیار زیاد می‌انجامد، که به نوبه خود در چگونگی حالت‌های تعادل ستاره‌های پرجرم و آهنگ انبساط جهان ابتدایی مؤثر است. به‌عنوان یک مثال ویژه: به‌علت بالا بودن دما در درون ستاره‌هایی مانند خورشید مقدار بسیار زیادی فوتون پرنرژی وجود دارد. نیروهای گرانشی که سعی در رماندن خورشید دارند در درجه اول به‌واسطه فشار تابشی این فوتونها که ناشی از تکانه آنهاست (معادله ۳-۴۶) از این کار باز می‌مانند. بدین ترتیب، این یکی از پدیده‌هایی است که عمر طولانی را برای ستاره‌هایی مانند خورشید ممکن می‌سازد؛ این نکته پایداری خورشید و در نتیجه زندگی در زمین را امکان‌پذیر می‌سازد.

تبدیل جرم به انرژی و برعکس

در حالی‌که انرژی کل در نظریه نسبیت پایسته است، رابطه ۳-۳۹ امکان تبدیل جرم سکون به انرژی و برعکس را نشان می‌دهد. این کار را در واقع نمی‌توان به‌راه‌های مختلف انجام داد. به‌سبب ثابت بسیار بزرگ c^2 در این رابطه، مقدار بسیار زیادی انرژی با تبدیل مقدار بسیار کمی ماده به دست می‌آید. فرایندهای عمده‌ای که در آنها جرم به انرژی تبدیل می‌شود عبارتند از همجوشی، شکافت و نابودی زوج؛ هر یک را به‌اختصار مورد بررسی قرار خواهیم داد.

همجوشی. در مثال بالا در مورد برخورد بین یک ایستگاه فضایی و یک شهابسنگ، معلوم شد که جرم نهایی کل از جرم ابتدایی بزرگتر است؛ و اکنون می‌توانیم این افزایش را به‌عنوان هم‌ارز جرمی انرژی گرمایی توده باقیمانده تعبیر کنیم. اکنون فرض می‌کنیم که این گرما به فضا تابیده شود تا وقتی‌که توده باقیمانده سرد شود: تمامی انرژی گرمایی از دست رفته است. در این صورت جرم سکون چقدر خواهد بود؟

در ابتدا ممکن است تصور شود که این جرم دقیقاً برابر خواهد بود با جرم اجزاء، یعنی 15° تن. با این وصف، به دلایل زیر این نمی‌تواند درست باشد. ماده ماهواره و شهابسنگ به یکدیگر جوش خورده‌اند و به یک جسم یکپارچه تبدیل شده‌اند، که پایدار است (خود به‌خود متلاشی نمی‌شود). این بدین معناست که برای تجزیه کردن به اجزای تشکیل دهنده باید مقداری انرژی صرف کرد؛ به‌سبب این انرژی اضافی، که جرم اجزاء را افزایش می‌دهد، جرم کل این قسمت‌ها از جرم توده باقیمانده بیشتر خواهد بود. بدین ترتیب جرم توده باقیمانده باید کمتر از 15° تن باشد.



شکل ۳-۴۷ یک پروتون و یک نوترون به یکدیگر جوش می‌خورند و انرژی آزاد می‌کنند، تا هسته یک دوترون را با جرمی کمتر از جرم کل ذره‌های تشکیل‌دهنده آن به‌وجود آورند.

یک اثر دقیقاً مشابه در هسته اتم می‌دهد. هسته یک اتم تشکیل شده است از پروتونها و نوترونها (نوکلئونها)یی که سخت به یکدیگر وابسته‌اند. برای شکستن یک هسته پایدار به اجزای تشکیل‌دهنده انرژی لازم است. مقدار انرژی لازم برای این کار انرژی بستگی آن هسته است. اگر بخواهیم یک هسته را از اجزای اولیه آن درست کنیم این مقدار انرژی به‌هنگام وابستگی آنها به یکدیگر برای تشکیل هسته آزاد خواهد شد (شکل ۳-۴۷). اما، طبق ۳-۳۹ این اتلاف انرژی مستلزم اتلاف جرم است: از این رو جرم تمام هسته‌ها کمتر از جرم نوکلئونهای تشکیل‌دهنده آنهاست. مثلاً، جرم یک پروتون 1.007825 amu است^۱ و جرم یک نوترون 1.008665 amu است، از این رو جرم کل یک پروتون و یک نوترون برابر 2.016490 amu است. با وجود این، جرم هسته یک دوتریم، که از همجوشی یک پروتون و یک نوترون تشکیل شده است، برابر با 2.014102 amu است، که از جرم اجزای تشکیل‌دهنده‌اش به‌اندازه 0.002388 amu کمتر است. این اختلاف جرم که به کاستی جرم معروف است، مستقیماً قابل اندازه‌گیری است. انرژی بستگی دوتریم نیز مستقیماً قابل اندازه‌گیری است، و برابر 2.224 MeV به‌دست آمده است که درست معادل انرژی 0.002388 amu است. بدین ترتیب درستی معادله ۳-۳۹ را می‌توان مستقیماً با این آزمایشهای ظریف تحقیق کرد.

برای اکثر هسته‌ها انرژی بستگی بر نوکلئون در حدود 8 MeV است؛ آهن بزرگترین انرژی بستگی بر نوکلئون را دارد، که در نتیجه پایدارترین هسته موجود است. برخی از عناصر سبکتر می‌توانند با همجوشی، هنگامی که ترکیب می‌شوند تا عناصر سنگینتر را به‌وجود آورند انرژی آزاد کنند. یک نمایش بارز همجوشی (در گامهای متوالی) هیدروژن به هلیم، و آزاد کردن انرژی بستگی هلیم است؛ این فرایند در بمب هیدروژنی رخ می‌دهد، و منبع اصلی انرژی در خورشید نیز هست.

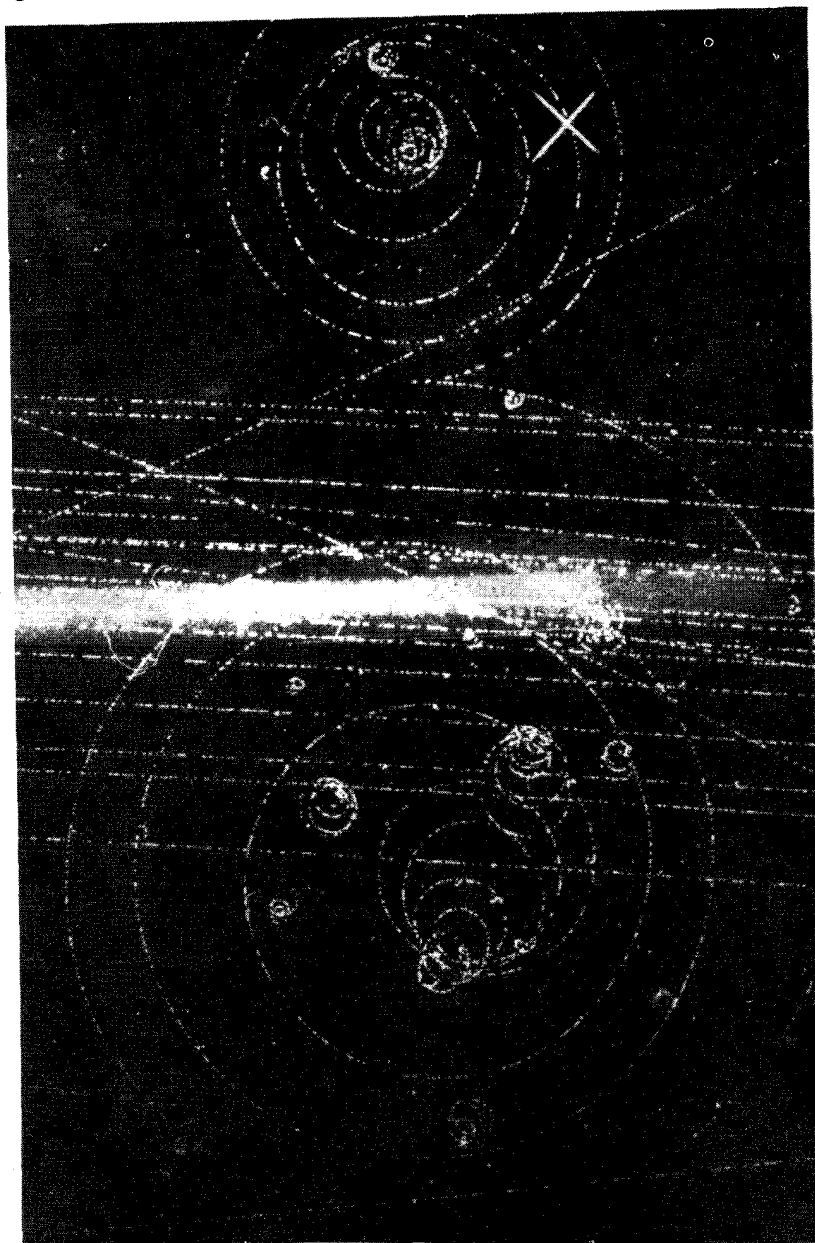
۱. 1 amu برابر با یکای جرم اتمی مساوی است با $1.6605 \times 10^{-27} \text{ kg}$. معادل انرژی 931.5 MeV است.

این یک نتیجهٔ بینهایت مهم نظریهٔ نسبیت خاص است، زیرا خورشید منبع تمام انرژی است که وجود زندگی در زمین را ممکن می‌سازد. اگر آزاد شدن انرژی همجوشی نبود، در تصویر روی جلد این کتاب خورشید نامرئی می‌شد، گذشته از این حقیقت که در غیاب این فرایند نه عکس‌برداری وجود داشت و نه خواننده‌ای.

شکافت انرژی بستگی بر نوکلئون عناصر سنگینتر از آهن، از انرژی بستگی آهن کمتر است و از این رو می‌تواند با شکافت، وقتی که تقسیم می‌شوند و عناصر سبکتری را می‌سازند، انرژی آزاد کنند. مشهورترین مثال در این مورد هنگامی است که اورانیم ۲۳۵ به دو هسته تقسیم می‌شود، و تفاوت انرژی بستگی هستهٔ اورانیم اولیه و دو هستهٔ نهایی را آزاد می‌کند. این فرایندی است که در بمب اتمی اولیه رخ داد و منبع انرژی در بسیاری از رآکتورهای هسته‌ای است که برای تولید الکتریسیته مورد استفاده قرار می‌گیرند. بدین ترتیب اختلاف جرماهای اندک متناظر با انرژی بستگی هسته‌ها نتایج بسیار مهمی در دنیای جدید دارند.

نابودی و آفرینش زوج. در نابودی زوج، یک الکترون و پادذره‌اش،^۱ پوزیترون، کاملاً نابود می‌شوند و تمام جرم سکون به‌علاوهٔ انرژی جنبشی آنها به انرژی تبدیل می‌شود که به‌صورت تابش الکترومغناطیسی (به‌صورت ذرات نور، یعنی فوتون) آزاد می‌شوند. انرژی سکون یک الکترون برابر با $m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$ است، از این رو در هر نابودی زوج الکترون-پوزیترون بیش از 1.022 MeV انرژی آزاد می‌شود. این فرایند می‌تواند یک منبع انرژی توانمند در فرایندهای گوناگون اختریف‌یکی باشد.

فرایند معکوس آفرینش زوج نیز امکان‌پذیر است. اگر دو فوتون با انرژی کل بیش از انرژی آستانهٔ 1.022 MeV با یکدیگر برخورد کنند انرژی لازم برای تهیهٔ جرم سکون یک زوج الکترون-پوزیترون وجود خواهد داشت. از این رو چنین زوجی را می‌توان بدون وجود قبلی آفرید. این مطلب اصل پایستگی جرم را نقض نمی‌کند زیرا انرژی به جرم تبدیل شده است، و این جرم و انرژی کل است که در این واکنش پایسته می‌ماند. همین‌طور، یک فوتون تنها با انرژی کافی می‌تواند یک زوج الکترون-پوزیترون خلق کند، به شرط اینکه در آن نزدیکیها هسته‌ای وجود داشته باشد تا پایستگی انرژی و تکانه را میسر سازد. آفرینش ماده از تابش خالص شاید بارزترین نمایش رابطهٔ جرم-انرژی باشد. و این در آزمایشهای شتابدهنده‌های ذرات صدها هزار بار نشان داده شده است؛ شکل ۳-۴۸ آفرینش یک زوج الکترون-پوزیترون را در یک اتاقک حباب نشان می‌دهد، که در آن یک فوتون پراثری از سمت چپ وارد اتاقک می‌شود و زوج را در نزدیکی یک هسته که توازن انرژی و تکانهٔ کل را میسر می‌سازد تولید می‌کند. نه فوتون و نه هسته هیچیک رد قابل رؤیتی در اتاقک باقی نمی‌گذارند، از این رو به‌نظر می‌آید که رد زوج الکترون-پوزیترون یکباره ظاهر می‌شود.



شکل ۳-۴۸ تبدیل انرژی به ماده طبق فرمول مشهور اینشتین $E = mc^2$ که با آفرینش زوج نشان داده شده است. یک فوتون بسیار پرانرژی، انرژی لازم برای آفرینش جرم سکونهای یک زوج الکترون-پوزیترون را تأمین می‌کند. فوتون رد قابل رؤیتی به جا نمی‌گذارد، اما رد الکترون و پوزیترون پس از آفرینش هنگامی که در اتاقک حباب بروکهاون در یک مسیر مارپیچ به طرف راست می‌روند قابل رؤیت است.

مبنای نسبیتی

همه این پیامدهای نسبیت خاص به‌طور طبیعی از دیدگاه چهاربعدی انرژی و تکانه ناشی می‌شوند که نتیجه در نظر گرفتن دینامیک از دیدگاه فضا زمان است و طبیعتاً به معادله‌های $۳-۳۰$ و $۳-۴۰$ می‌انجامد. بد نیست که این فصل را با اشاره به اینکه این امر چگونه رخ می‌دهد خاتمه دهیم (تفصیل آن در پیوست ب آورده شده است).

ایده‌های بنیادی ما در باره انرژی جنبشی و تکانه منجر به این باور می‌شود که هم در نظریه نیوتونی و هم در نظریه نسبیتی، وقتی سرعت نسبی صفر باشد، یک ناظر هر دو کمیت را صفر اندازه خواهد گرفت؛ بدین ترتیب در مورد نسبیت

$$\{v = 0\} \Rightarrow \{\pi = 0, E_K = 0, E = E_0\} \quad (۴۷-۳)$$

(برابری E و E_0 از $۳-۴۱$ ناشی می‌شود). بدین ترتیب اگر ناظری با ذره حرکت کند، تنها چیزی که اندازه می‌گیرد انرژی جرم سکون ذره خواهد بود. اکنون چارچوب را تغییر می‌دهیم به طوری که ذره در حرکت نسبی با سرعت v باشد؛ در این صورت معادله‌های $۳-۳۰$ برای تکانه و $۳-۴۰$ برای جرم نتیجه می‌شوند. رابطه اخیر مبنای $۳-۳۶$ و در نتیجه $۳-۳۷$ است.

نتیجه‌گیری

دیدیم که چگونه کاربرد نظریه نسبیت در دینامیک به درک بسیاری از پدیده‌های مهم می‌انجامد؛ وابستگی جرم مؤثر به سرعت، هم‌ارزی جرم و انرژی، لختی تمام اشکال انرژی، مفهوم "جرم سکون"، و امکان تبدیل جرم به انرژی و به عکس. در حالی که بسیاری از پیامدهای نظریه نسبیت تنها وقتی اهمیت پیدا می‌کنند که با سرعت‌های بالا و یا فاصله‌های زیاد سروکار داشته باشیم، اما برخی از پدیده‌های دینامیکی در زندگی روزمره دارای اهمیت‌اند؛ مانند، شکافت هسته‌ای که اکنون منبع نیرو برای بسیاری از شهرهاست.

تمرینها

$۳-۲۴$ فرض کنید ذره‌ای با سرعت $(۱) ۱۰^{-۶}c$ $(۲) ۱۰^{-۲}c$ $(۳) ۱/۲c$ حرکت می‌کند. در هر مورد نسبت انرژی جنبشی به انرژی سکون آن را بیابید.

$۳-۲۵$ ذره‌ای با جرم سکون M_0 و سرعت $۳/۵c$ با یک ذره ساکن به جرم سکون $۷/۴M_0$ برخورد می‌کند. آنها به یکدیگر می‌چسبند و ذره جدیدی را تشکیل می‌دهند. جرم سکون و سرعت حرکت آن را بیابید.

$۳-۲۶$ ذره‌ای با جرم سکون M_0 در زمان $t = 0$ با سرعت $۵/۱۳c$ حرکت می‌کند. نیروی ثابتی با بزرگی $c ۷/۱۲M_0$ موازی با جهت حرکت ذره به آن وارد می‌شود. سرعت آن را در $t = 1$ حساب کنید. در این مورد نتیجه نیوتونی چقدر نادرست خواهد بود؟

۳-۲۷ رابطه انرژی-تکانه را برای ذرات با جرم سکون صفر به صورت زیر به دست آورید. (۱) معادله $۳-۳۰$ الف را مربع کنید. (۲) معادله $۳-۴۰$ را مربع کنید. (۳) معادله $۳-۴۳$ را به دست آورید، و آن را بر حسب E حل کنید. (۴) حد این عبارت را وقتی $0 \rightarrow m_0$ حساب کنید. (۵) $۳-۴۴$ را از $۳-۴۳$ به دست آورید، و نشان دهید که سرعت $v = c$ این امکان را به وجود می آورد که مقادیر π و E غیر صفر باشند هر چند که m_0 صفر است. [توجه داشته باشید که روابط $۳-۳۰$ و $۳-۴۰$ در این مورد نامعین هستند].

۳-۲۸ انرژی دریافتی زمین از خورشید روی یک سطح عمود بر پرتوهای خورشید برابر است با $۸ \times 10^7 \text{ erg/cm}^2 \text{ min}$. با چه آهنگی (بر حسب کیلوگرم بر دقیقه) هیدروژن در یک سری واکنش همجوشی ۴ پروتون (یعنی هسته هیدروژن) با یکدیگر و تشکیل هسته هلیوم، در خورشید مصرف می شود تا این انرژی تابشی را فراهم آورد؟ این مطلب چه اطلاعی در مورد طول عمر خورشید می دهد؟

[راهنمایی: (۱) انرژی آزاد شده را هنگامی که ۴ پروتون یک هسته هلیوم تشکیل می دهند بر حسب amu پیدا کنید (جرم هسته هلیوم 4.002603 amu است). این مقدار را با استفاده از رابطه $1 \text{ amu} = 1.4916 \times 10^{-3} \text{ erg}$ به ارگ تبدیل کنید. (۲) مساحت سطح یک کره $(4\pi r^2)$ به شعاعی برابر با فاصله بین زمین و خورشید را که $1.496 \times 10^{13} \text{ cm}$ است بیابید. (۳) انرژی کلی که در هر دقیقه به این کره می تابد را حساب کنید در صورتی که در هر دقیقه $8 \times 10^7 \text{ erg}$ از این کره بتابد. (۴) تعداد همجوشیهای لازم در هر دقیقه برای تولید این انرژی را تعیین کنید. (۵) جرم کل هیدروژن لازم در هر دقیقه را به kg تبدیل کنید. (۶) حداکثر طول عمر خورشید را برآورد کنید در صورتی که تمام جرم آن ($1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$) در فرایند همجوشی مصرف شود].

۳-۲۹ چه مقدار انرژی در شکافت هسته رادیم (که متشکل از ۲۲۴ نوکلئون با انرژی بستگی میانگین 7.5 MeV بر نوکلئون است) و تبدیل آن به ۴ هسته آهن (هر یک با ۵۶ نوکلئون با انرژی بستگی میانگین 8.6 MeV بر نوکلئون) آزاد می شود؟

۳-۳۰ چه مقدار انرژی در نابودی یک زوج پروتون-پادپروتون آزاد می شود؟ انرژی آستانه یک زوج فوتون چقدر باید باشد تا بتواند یک زوج پروتون-پادپروتون بیافریند؟ [جرم سکون یک پروتون $1.836 \times 10^{-30} \text{ kg}$ است].

۳-۸ سازگاری فیزیک

ما در این مورد که چگونه باید تمامی ایده های سینماتیکی و دینامیکی نظریه نسبیت سازگار و دارای پیامدهای مهم فیزیکی باشند بحث کردیم. اما شرط اینشتین فراتر از این است: تمام فیزیک باید با اصل نسبیت سازگار باشد.

این ایده مرکزی پیامدهای مهم بسیار دارد. این اصل ایجاب می کند که سینماتیک نسبیتی

باید از اصل نسبیت پیروی کند و سازگار باشد؛ در مورد این مطلب در بخش ۳-۶ بحث کردیم. این اصل مستلزم آن است که قوانین دینامیک باید از اصل نسبیت پیروی کنند، و با سینماتیک نسبیتی سازگار باشند؛ در مورد این مطلب در بخش ۳-۷ بحث کردیم. استفاده از این اصل در مکانیک کوانتومی راهنمای دیراک در پیش‌بینی وجود پادذرات خیلی قبل از مشاهده تجربی آنها شد. ما این فصل را با بررسی مختصر یکی از موفق‌ترین نظریه‌های فیزیک کلاسیک، یعنی نظریه الکترومغناطیس، خاتمه می‌دهیم. وقتی به این نظریه از دیدگاه نظریه نسبیت می‌نگریم چه رخ می‌دهد؟ پاسخ شاید تا حدودی تعجب‌آور باشد: این نظریه کلاسیک کاملاً با نسبیت سازگار است. برخلاف مورد دینامیک کلاسیک، که در آن به فرمولبندی دوباره احتیاج داشتیم و با به حساب آوردن نسبیت نتایج بارز جدیدی یافتیم، در این مورد معلوم شد که اصل نسبیت قبلاً در نظریه کلاسیک به طور عمیق مستتر بوده است؛ در واقع، نسبیت مبنای ارتباط معروف بین الکتریسته و مغناطیس را تشکیل می‌دهد. در این مورد مختصراً در پیوست ج بحث خواهد شد.

به سبب این وحدت فیزیک و سازگاری تمام فیزیک با نظریه نسبیت، برای تحقیق درستی نسبیت خاص احتیاجی به اندازه‌گیریهای دقیق زمان (مانند آزمایش هافل-کیتینگ) و یا سرعت نور (مانند آزمایش مایکلسون-مورلی) نداریم. در عوض باید اعتبار آن را با دقت پیش‌بینیهای پایستگی تکانه نسبیتی، که صدها هزار بار در شتابدهنده‌های انرژی بالا تحقیق شده است، و از طریق وجود رآکتورهای هسته‌ای و نشان دادن آفرینش و نابودی زوج، آن‌گونه که در بخش ۳-۷ بحث شد، اثبات کنیم. بنابراین، نظریه نسبیت در واقع یکی از آزموده شده‌ترین تمام نظریه‌های فیزیکی است. همان‌طور که در بالا هم بدان اشاره شد، حتی عکس روی جلد این کتاب هم شاهدی برای نظریه نسبیت است، زیرا خورشید در نتیجه تبدیل جرم به انرژی آن‌گونه که در تمرین ۳-۲۸ بدان اشاره شد، می‌درخشد.

تمرین گرافیک کامپیوتری ۱

برنامه‌ای بنویسید که روی صفحه کامپیوتر محورهای (t, X) ناظر A را رسم کند. این برنامه باید دارای زیر برنامه‌هایی باشد که کارهای زیر را انجام دهند:

(الف) v سرعت حرکت ناظر B نسبت به A ، و X_0 وضعیت فضایی B در زمان $t = 0$ طبق اندازه‌گیری A را به عنوان ورودی بپذیرد؛ سپس جهانخط B را روی صفحه رسم کند. [توجه داشته باشید: $|v/c| < 1$]

(ب) زمان t_0 را که A اندازه گرفته است به عنوان ورودی بپذیرد، و سپس نقطه P در جهانخط B را که متناظر با آن زمان است نشان دهد.

(ج) سطح همزمانی B را از هر نقطه تعیین شده Q در جهانخط B رسم کند.

(د) مخروطهای گذشته و آینده هر نقطه تعیین شده Q در فضا زمان $[(t_1, X_1)]$

را رسم کند.

(ه) یک سری پرتوهای نور را که در فواصل زمانی منظم T_0 از A به B گسیل شده‌اند رسم

کند، و فاصله دریافت علائم توسط B را طبق اندازه‌گیری A [که مستقیماً از مقادیر مختصه t معلوم می‌شوند]، و طبق اندازه‌گیری B [که با استفاده از ضریب K تعیین می‌شوند] چاپ کند. (و) یک علامت راداری را که در زمانی مانند t_1 از A به B فرستاده شده و به A بازتابانده شده است رسم کند.

از برنامه‌تان برای رسم موارد زیر استفاده کنید (۱) یک ناظر A در لحظه‌ای مانند t_0 از یک کهکشان دور دست تابش را دریافت و به روشنی مشاهده می‌کند که زمان t_1 در تاریخ کهکشان را نشان می‌دهد؛ (۲) جلو و عقب سفینه B که از کنار A می‌گذرد و طول آن طبق اندازه‌گیری A برابر L است و سطوح همزمانی برای A و B را نشان می‌دهد؛ (۳) ناظر B که از ناظر A دور می‌شود و سپس با سرعت v بازمی‌گردد، در حالی که A حرکت او را با رادار دنبال می‌کند. [شما باید بتوانید جزئیات بسیار دیگری را به این برنامه گرافیکی بیفزایید و موارد استفاده بسیار دیگری برای آن بیابید.]

تبدیل لورنتس و بازه ناوردا

برای بررسی ایده‌های وحدت‌بخش که در بخش ۳-۶ مطرح شدند، ما به نوبت تبدیلهای لورنتس، کمیت‌های ساده که تحت این تبدیلهای ناوردا هستند، و بازه ناوردای فضازمان تخت را بررسی می‌کنیم. ما بررسی خود در مورد فضازمانهای تخت را با نگرش به سه مدل عالم برمبنای این فضازمانها کامل می‌کنیم.

فهم بازه ناوردا و معنای آن (که در بخش ۴-۲ ارائه شده است) برای درک کامل خواص فضازمانهای خمیده که در فصلهای ۶ و ۷ مورد بحث قرار گرفته‌اند حائز اهمیت است. از دیدگاه این کتاب، اهمیت اصلی بحث تبدیل لورنتس (در بخش ۴-۱) در آن است که به کمک آن می‌توانیم (در بخش ۴-۲) ثابت کنیم که بازه فضازمان یک ناورداست، یعنی برای تمام ناظرها یکسان است.

۱-۴ تبدیل لورنتس

بعضی مردم ادعا می‌کنند که اگر بشر، قبل از رسیدن به مدارج عالی خود را نبود نکند، کهکشانی را کشف خواهد کرد. در سفر به ناشناخته، بررسی و نقشه‌برداری دقیق برای ایمنی کسانی که در این کار شرکت می‌کنند اهمیت حیاتی دارد. بنابراین، باید مشاهده‌های انجام شده از بسیاری از رصدخانه‌ها، ایستگاههای فضایی، و سفینه‌های فضاپیما با یکدیگر مقابله شوند تا تصویری

همه‌جانبه از نواحی کشف شده به‌دست آید.^۱ اما، بسیاری از این مشاهده‌ها را ناظرهایی انجام می‌دهند که نسبت به یکدیگر در حرکت‌اند، بنابراین باید بدانیم که چگونه مشاهده‌های ناظرهایی که نسبت به هم حرکت می‌کنند را به یک چارچوب مشترک تبدیل کنیم. مسئلهٔ اساسی به‌دست آوردن رابطه‌ای بین دیدگاه‌های فضا‌زمان است که دو ناظر دلخواه به‌دست می‌آورند. چنین رابطه‌ای نتایج بنیادی نسبت خاص اتساع زمان، انقباض طول، و نسبییت همزمانی را در یک رابطهٔ واحد وحدت خواهد بخشید. این رابطه، یعنی تبدیل لورنتس را در این بخش تعیین خواهیم کرد.

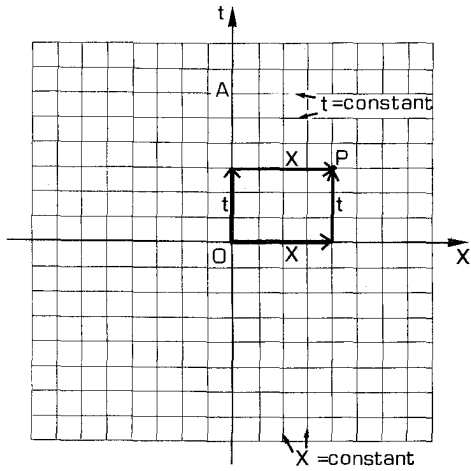
دو دستگاه مختصات

دو ناظر لخت A و B را در نظر بگیرید که نسبت به یکدیگر با سرعت v در حرکت‌اند و وضعیتهای فضا‌زمان آنها در رویداد O منطبق است؛ برای ملموس بودن می‌توان فرض کرد که مثلاً A در برج کنترل یک فرودگاه است، و B در هواپیمایی است در حال عبور.

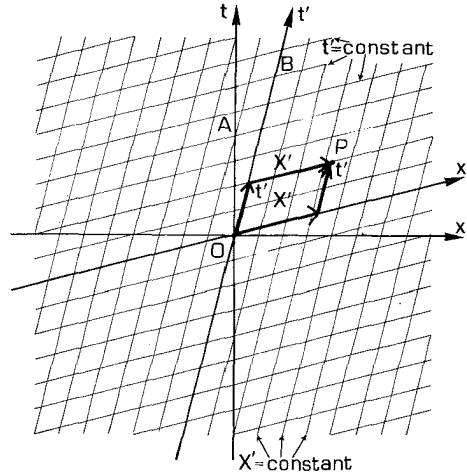
مختصات A . ناظر A مختصهٔ زمان t و مختصات فضایی (x, y, z) را به‌روش استاندارد تعیین می‌کند. اساساً او (۱) ویژه زمان t را با استفاده از یک ساعت ایده‌آل در امتداد جهانخط خود اندازه می‌گیرد؛ (۲) سطوح همزمانی را در فضا‌زمان با استفاده از رادار تعیین می‌کند؛ اینها سطوح $\{t = \text{const.}\}$ هستند، و اندازه‌گیریهای زمان را از جهانخط خود به‌باقیماندهٔ فضا‌زمان گسترش می‌دهد؛ و (۳) مجموعه‌ای از جهت‌های بدون چرخش متعامد را در امتداد جهانخط خود به‌کمک آزمایش‌های دینامیکی موضعی (با استفاده از ژيروسکوپهای ایده‌آل، آونگ، و غیره) تعیین می‌کند، و فواصل فضایی (x, y, z) در امتداد این محورها را با رادار تعیین می‌کند. این امر مستلزم آن است که او (x, y, z) را طوری انتخاب کند که مکان خودش در تمام زمانها در مبدأ $(0, 0, 0)$ باشد. (۴) سطوح $\{z = \text{const.}, y = \text{const.}, x = \text{const.}\}$ در فضا‌زمان را می‌توان با مشاهده‌های راداری فاصله‌ها از زاویه‌های دلخواه θ و ϕ نسبت به این محورها و استفاده از مثلثات استاندارد تعیین کرد، و بدین ترتیب اندازه‌گیری فاصله در امتداد این محورها را به‌بقیهٔ فضا‌زمان گسترش داد (نوشتن رابطه‌هایی که در اینجا با آنها سروکار داریم به‌طور کامل تا حدی پیچیده است، و ماهیت نسبت خاص را هم به‌ویژه روشن نمی‌کنند. از این‌رو جزئیات این کار را حذف می‌کنیم). در این صورت بهتر است که (۵) برای به‌دست آوردن یک تصویر هندسی از فضا‌زمان که در آن مخروط زمان با امتداد قائم زاویهٔ 45° می‌سازد، مختصات جدید (X, Y, Z) را با استفاده از رابطه‌های $(Z = z/c, Y = y/c, X = x/c)$ تعریف کنیم؛ بدین وسیله از نظر فیزیکی یکاهای فاصله‌ای را انتخاب کرده‌ایم که سرعت نور را برابر ۱ می‌کنند (بخشهای ۱-۲ و ۲-۲).

پس از انجام این کار در واقع فضا‌زمان را با شبکهٔ مختصاتی پوشانده‌ایم که هر رویداد P را با مختصات (t, X, Y, Z) به‌طریق استاندارد مشخص می‌کند (شکل ۴-الف را ببینید). به‌ویژه باید توجه داشت که این مختصات، به‌اقتضای ماهیتشان، نمایندهٔ اندازه‌گیری ویژه‌زمان و فضایی

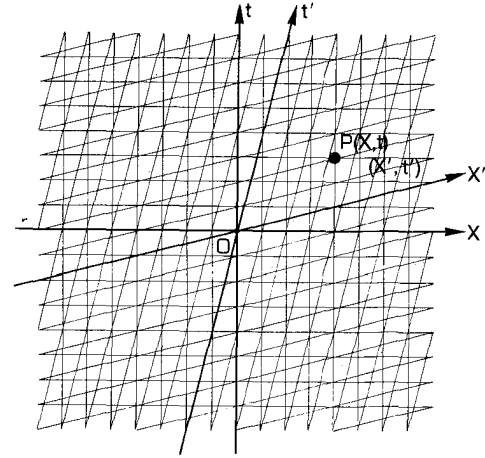
1. "Navigation between the planets", W. G. Melbourne. *Scientific American* 234, June 1976, 58.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۱-۴ (الف) شبکه مختصات در فضا-زمان برای ناظر A، که به رویداد P مختصات (t, X) را نسبت می‌دهد. جهانخط ناظر A، $\{X = 0\}$ است؛ یعنی، طبق تعریف او در دستگاه مختصات خودش ساکن است. طبق اندازه‌گیری وی سطوح $\{X = \text{const.}\}$ در فاصله ثابت از او قرار دارند، و سطوح $\{t = \text{const.}\}$ برای او سطوح همزمانی هستند. (ب) دیدگاه ناظر A از شبکه مختصات ناظر B که نسبت به A حرکت می‌کند. در دستگاه مختصات B، رویداد P دارای مختصات (t', X') است. طبق اندازه‌گیری B، سطوح $\{X' = \text{const.}\}$ در فاصله ثابت از او قرار دارند، و سطوح $\{t' = \text{const.}\}$ سطوح همزمانی هستند. (ج) شبکه‌های مختصات A و B هر دو در یک فضا-زمان قرار دارند و مجموعه واحدی از رویدادها را توصیف می‌کنند.

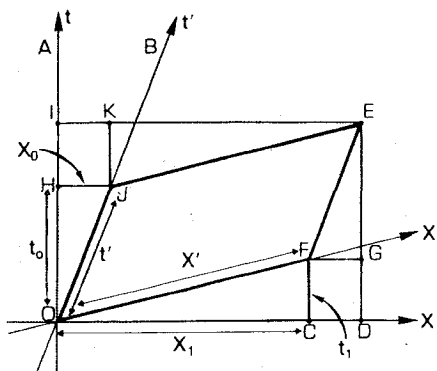
هستند که در بالا توصیف شد. مختصهٔ زمان هر نقطه در امتداد خطوط زمان (موازی با جهانخط A) از سطح همزمانی $\{t = 0\}$ اندازه گرفته می‌شود؛ به‌ویژه t مشخص‌کنندهٔ زمانی است که هر ناظری که جهانخطش محور مختصات ($X = Y = Z = 0$) است اندازه می‌گیرد. سطوح $\{t = \text{const.}\}$ سطوح همزمانی برای هر ناظر است، و $\{X, Y, Z\}$ مختصات فاصلهٔ فضایی او از مبدأ ($X = Y = Z = 0$) در این سطوح است. بدین ترتیب، وضعیت یک نقطهٔ کلی P را می‌توان به‌صورت ترکیبی از یک جابه‌جایی فضایی روی یک سطح $\{t = \text{const.}\}$ و یک جابه‌جایی زمانی در امتداد خط $\{Z, Y, X\}$ ثابت نمایش داد، که در آن این جابه‌جاییها را می‌توان از هر مرتبه‌ای انجام داد. برای توصیف مجموعهٔ تمام رویدادها به چهار مختصه نیاز داریم زیرا فضا-زمان چهاربعدی است، از این رو برای تعیین محل هر رویدادی در فضا و زمان دقیقاً چهار عدد لازم است. مثلاً، محل برخورد دو هواپیما را می‌توان به‌دقت تعیین کرد، اگر به‌ما بگویند که این برخورد در ساعت $00:04$ بعدازظهر (به‌وقت گرینویچ) در روز ۱۹ نوامبر سال ۱۹۸۶ (۲۸ آبان ۱۳۶۵)، در ارتفاع 10000 متری سطح زمین و در عرض جغرافیایی $00^{\circ}30'20''$ و طول جغرافیایی $00^{\circ}23'34''$ رخ داده است. مختصات بیشتر از این یا ناسازگار خواهند بود و یا زائد؛ مختصات کمتر از این برای اینکه به‌طور کامل به‌ما بگویند [این برخورد] کجا و چه وقت، یعنی در کدام نقطهٔ فضا-زمان، اتفاق افتاده است ناکافی خواهد بود.

اغلب بهتر است برای مختصات از یک نمادگذاری با شاخصهای بالا استفاده کنیم. بدین ترتیب به جایی که بنویسیم (t, X, Y, Z) می‌توانیم بنویسیم (x^0, x^1, x^2, x^3) که در آن طبق تعریف $x^0 \equiv t, x^1 \equiv X, x^2 \equiv Y, x^3 \equiv Z$. برای اختصار، تمامی دنبالهٔ چهار مختصه را به‌صورت (x^a) می‌نویسیم، که در آن شاخص (یا برچسب) مختصه می‌تواند به‌ترتیب مقادیر $0, 1, 2, 3$ را اتخاذ کند؛ یعنی $(x^a) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. از امکان بروز اشتباه بین مختصه x^2 و "مربع مختصهٔ x " با نوشتن آن به‌صورت $(x)^2$ می‌توان اجتناب کرد؛ و همین‌طور برای توانهای دیگر x که ممکن است پیش بیاید. در استفاده از مختصات t, X, Y, Z ، مربع آنها را باز هم با t^2, X^2, Y^2 و نشان خواهیم داد در صورتی که ابهامی پیش نیاید. ما به دستگاه مختصات $A(x^a)$ که به‌این ترتیب تعیین شده است چارچوب مرجع می‌گوییم و آن را با حرف F به‌تنهایی نشان می‌دهیم. مختصات B . ناظر B مختصات خود $(x'^a) = (t', X', Y', Z')$ را با همین روش، با استفاده از ساعت‌های ایده‌آل و رادار، تعریف می‌کند. در این صورت او فضا-زمان را با شبکهٔ مختصات دومی می‌پوشاند که هر رویداد P را با مختصات (t', X', Y', Z') مشخص می‌کند [شکل ۴-۱ (ب)]. در این مورد، وضعیت یک نقطه P با ترکیبی از یک جابه‌جایی فضایی در روی سطح همزمانی $\{t' = \text{const.}\}$ (که نسبت به سطوح با زمان ثابت t به‌اندازه زاویهٔ α کج شده است) و یک جابه‌جایی زمانی در امتداد خط $\{Z', Y', X'\}$ ثابت موازی با جهانخط B (که نسبت به جهانخط A به‌اندازه همان زاویهٔ α کج شده است با شکل ۳-۲ مقایسه کنید) نشان داده می‌شود. در اینجا هم می‌توان این جابه‌جاییها را به‌هر یک از این دو به‌ترتیب انجام داد. ما دستگاه مختصات $B, (x^a)$ را چارچوب مرجع او F' می‌گوییم.

رابطه بین دو دستگاه مختصات

اکنون نکته اساسی این است که مجموعه واحدی از رویدادها با دو دستگاه مختصات (x^a) و (x'^a) توصیف می‌شوند [شکل ۱-۴ (ج)]. رابطه بین اندازه‌گیریهای فضا-زمان این دو ناظر در ارتباط این دو دستگاه مختصات نهفته است. این رابطه را می‌توان با دو انتخاب تا حد زیادی ساده کرد: (۱) هر یک A و B هر یک محورهای فضایی خود را طوری می‌چرخانند که جهت حرکت نسبی آنها به ترتیب در جهت X و X' قرار گیرد، و محورهای Y ، Y' و Z ، Z' آنها به ترتیب بر یکدیگر منطبق شوند. و (۲) A و B هر یک مبدأ مختصات زمان خود را طوری انتخاب می‌کنند که رویداد O محل ملاقات آنها به ترتیب در زمان $t = 0$ و $t' = 0$ باشد؛ یعنی، مبدأ مختصات آنها در این هنگام برهم منطبق می‌شود. از این پس فرض خواهیم کرد که این ساده‌سازیها اعمال می‌شوند. پس وظیفه ما این است که روابط بین این دو دستگاه و در نتیجه روابط بین اندازه‌گیریهایی که این دو ناظر انجام می‌دهند را تعیین کنیم. آنچه که به دنبال می‌آید تا حدودی مشکل است. اگر می‌بینید که در خواندن چند پاراگراف بعدی برای اولین بار گیر کردید، توصیه می‌کنیم که به خود فرمولهای ۳-۴ و ۵-۴ و نتایج آنها ۴-۶ تا ۴-۱۴ رجوع کنید.

رویداد E را که A با (t, X, Y, Z) و B با (t', X', Y', Z') مشخص می‌کند در نظر می‌گیریم. چون حرکت نسبی در جهت X (یا X') است، اندازه‌گیری در جهتهای X و Z تغییر نمی‌کنند (بخش ۵-۳ را ببینید)، از این رو به ازای هر t (یا t') داریم $Z = Z'$ و $Y = Y'$. بدین ترتیب فقط لازم است که به رابطه بین (t, X) و (t', X') توجه کنیم. این دو جفت مختصات در شکل ۲-۴ از دیدگاه A رسم شده‌اند. چون سطوح همزمانی B به همان اندازه زاویه جهانخط او



شکل ۲-۴ مختصات رویداد E در چارچوب $A(t, X)$ و در چارچوب $B(t', X')$ است. خطوط OD و IE برای A همزمان هستند در حالی که برای B ، JE و OF همزمان هستند. طبق اندازه‌گیری ناظر A ، فاصله DE از جهانخطش یعنی OI ثابت است در حالی که طبق اندازه‌گیری B فاصله FE از جهانخط او یعنی OJ ثابت است. خطوط JH و FG با محور X موازی هستند، و خطوط CF و JK با محور t موازی‌اند.

از جهت قائم به سمت بالا کج شده است (بخش ۳-۳)، مثلثهای OCF و EKJ در شکل ۲-۴ یکسان هستند (رسماً: آنها متشابه‌اند)؛ و همین‌طور مثلثهای OHJ و EGF چنانکه از نمودار پیداست یکسان هستند؛ اثبات این مطلب در پیوست این بخش آورده شده است. چون مختصات E طبق دیدگاه B عبارت‌اند از (t', X') ، جابه‌جاییهای OF و JE هر دو نماینده فاصله X' است که B اندازه گرفته است و OJ و FE هر دو نماینده زمان t' است که B اندازه گرفته است. فرض می‌کنیم مختصات J در چارچوب $A(t_0, X_0)$ باشد؛ در این صورت جابه‌جاییهای OH و GE هر دو نماینده زمان t_0 است که A اندازه گرفته است و HJ و FG هر دو فاصله‌های X_0 را که A اندازه گرفته است نشان می‌دهند. همین‌طور فرض کنید مختصات F در چارچوب $A(t_1, X_1)$ باشند؛ در این صورت جابه‌جاییهای OC و KE هر دو فاصله X_1 را که A اندازه می‌گیرد و JK و CF زمانهای t_1 را که A اندازه می‌گیرد نشان می‌دهند.

اکنون برای برقراری ارتباط بین این مقادیر مختلف مختصات از برخی نتایج قبلی استفاده می‌کنیم

الف) اتساع زمان (۳-۱۸ و ۳-۲۰) برای زمانی که از O تا J اندازه گرفته می‌شود رابطه زیر را می‌دهد

$$t_0 = \gamma(v)t' \quad (۱-۴الف)$$

که در آن $\gamma(v)$ از ۳-۱۹ به دست می‌آید.
ب) انقباض طول (۳-۲۲ و ۳-۲۳) برای فاصله‌ای که از O تا F اندازه گرفته می‌شود رابطه زیر را می‌دهد

$$X_1 = \gamma(v)X' \quad (۱-۴ب)$$

ج) چون B با سرعت v نسبت به A حرکت می‌کند، فاصله X_0 که با HJ نمایش داده می‌شود به صورت زیر با زمان t_0 که با OH نشان داده شده است مربوط می‌شود

$$X_0 = x_0/c = vt_0/c = (v/c)t_0 = Vt_0 \quad (۱-۴ج)$$

د) چون زاویه $\angle HOJ$ برابر با زاویه $\angle COF$ است، داریم $HJ/H_0 = FC/CO$ یعنی، $X_0/t_0 = t_1/X_1$ ؛ پس با استفاده از (۱-۴ج)، به دست می‌آوریم

$$t_1 = X_0 X_1/t_0 = VX_1 \quad (۱-۴د)$$

(که اساساً همان نتیجه همزمانی ۳-۱۷ است).

به کمک این اطلاعات اکنون می توانیم طول اضلاع مستطیل بزرگ OIED را تعیین کنیم. اولاً،
 $OD = OC + CD = OC + FG = OC + HJ$ (زیرا مثلثهای OHJ و EGF متشابه اند).
 اما $OC = X_1$ ، $OD = X$ و $HJ = X_0$. بنابراین

$$X = X_1 + X_0 = \gamma(v)X' + V\gamma(v)t'$$

با استفاده از ۱-۴ الف، ج داریم

$$X = \gamma(v)(X' + Vt') \quad (۲-۴ الف)$$

همین طور، $OI = OH + HI = OH + JK = OH + CF$ (زیرا مثلثهای OCF و EKJ قابل انطباق اند). بنابراین

$$t = t_0 + t_1 = \gamma(v)t' + V\gamma(v)X'$$

با توجه به ۱-۴ الف، د، و ب داریم

$$t = \gamma(v)(t' + VX') \quad (۲-۴ ب)$$

سرانجام، قبلاً دیدیم که

$$Y = Y', \quad Z = Z' \quad (۲-۴ ج)$$

معادله های ۲-۴ الف تا ج را تبدیل لورنتس گویند که از تغییر سرعت در جهت x (که گاهی "خیز" نامیده می شود) نتیجه می شود. این تبدیلهای مختصات A برای رویداد E را بر حسب مختصات B برای آن رویداد به دست می دهند. معادله ها را معمولاً بر حسب مختصات x, y, z و x', y', z' می نویسند:

$$t = \gamma(v)(t' + vx'/c^2) \quad (۳-۴ الف)$$

$$x = \gamma(v)(x' + vt') \quad (۳-۴ ب)$$

$$y = y', \quad z = z' \quad (۳-۴ ج)$$

که در آن

$$\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \quad (۴-۴)$$

این مجموعه معادله‌های لازم برای ارتباط مختصات دو ناظر در یک رویداد واحد است. به‌عنوان مثالی از کاربرد این معادله‌ها، فرض کنید ناظر B در سفینه‌ای است که با سرعت ثابت $v = 4/5c$ از ناظر A در پایگاهی در روی زمین دور می‌شود، هر دو ناظر توافق کرده‌اند که زمان را از لحظه‌ای که B در رویداد O در فضا زمان از کنار A می‌گذرد اندازه بگیرند. پس از مدتی ناظر B انفجار عظیمی را در سیاره‌ای که با رادار تحت نظر دارد مشاهده می‌کند. طبق اندازه‌گیری او مختصات رویداد P که در آن انفجار رخ داده است عبارت‌اند از $(x^a) = (5, 1, 3, 0)$ ، یعنی، $t' = 5$ ، $X' = 1$ ، $Y' = 3$ ، $Z' = 0$. او با امواج رادیویی به A خبر می‌دهد. خطراً به سبب انفجاری که در زمان $t' = 5$ رخ داده است زباله‌های رادیواکتیو در وضعیت $(1, 3, 0)$ وجود دارد. (در این مثال، یکاها سال و سال نوری فرض شده‌اند). مختصات استاندارد بر مبنای وضعیت و حرکت A قرار دارند. در هنگام ارسال هشدار به سفینه فضایی دیگر A چه مختصاتی را باید به این رویداد نسبت دهد؟

در این مورد، $V = 4/5$ و از این رو، طبق ۴-۴،

$$\gamma = \gamma(4/5) = \{1 - (4/5)^2\}^{-1/2} = 5/3$$

بدین ترتیب معادله‌های ۳-۴ به صورت زیر درمی‌آیند

$$t = \frac{5}{3} \left(5 + \frac{4}{5} \times 1 \right) = \frac{5}{3} \times \frac{29}{5} = \frac{29}{3}$$

$$x = \frac{5}{3} \left(1 + \frac{4}{5} \times 5 \right) = \frac{5}{3} \times 5 = \frac{25}{3}$$

$$y = 3, \quad z = 0$$

بدین ترتیب مختصاتی که A برای رویداد P می‌یابد عبارت‌اند از $(x^a) = (29/3, 25/3, 3, 0)$ ، یعنی، $t = 29/3$ ، $X = 25/3$ ، $Y = 3$ ، $Z = 0$. خلاصه می‌توان نوشت

$$(x^{a'}) = (5, 1, 3, 0) \Rightarrow (x^a) = \left(\frac{29}{3}, \frac{25}{3}, 3, 0 \right) \quad (*)$$

که مختصات مختلفی را که دو ناظر به انفجار در این رویداد وابسته می‌سازند نشان می‌دهد.

تبدیل وارون

روابط ۲-۴ و ۳-۴ کاملاً دوجانبه هستند (مانند تمام فرمولهای نسبیت)؛ یعنی، تبدیل از مختصات A به مختصات B هم به صورت ۳-۴ هستند. در واقع، می‌توان معادله‌های ۳-۴ را بر حسب t' و

x' حل کرد، خواهیم داشت

$$t' = \gamma(v)(t - vx/c^2) \quad (۴-۵الف)$$

$$x' = \gamma(v)(x - vt) \quad (۴-۵ب)$$

$$y' = y, \quad z' = z \quad (۴-۵ج)$$

به عنوان مثال، فرض کنید مختصاتی که A برای رویداد P می یابد $(x^a) = (۲۹/۳, ۲۵/۳, ۳, ۰)$ باشد، یعنی، $t = ۲۹/۳, x = ۲۵/۳, Y = ۳, Z = ۰$ ، و سرعت حرکت B نسبت به A، $v = ۴/۵c$ (پس $V = ۴/۵$) باشد. در این صورت استفاده از ۴-۵ نشان خواهد داد (درست مانند مثال بالا) که طبق اندازه گیری B مختصات رویداد P، $(x^a) = (۵, ۱, ۳, ۰)$ است، یعنی، $t' = ۵, x' = ۱, Y' = ۳, Z' = ۰$. به طور خلاصه، می توان نوشت

$$(x^a) = \left(\frac{۲۹}{۳}, \frac{۲۵}{۳}, ۳, ۰ \right) \Rightarrow (x'^a) = (۵, ۱, ۳, ۰) \quad (**)$$

که مختصات مختلفی را نشان می دهد که دو ناظر به رویداد واحد P نسبت می دهند. البته این نتیجه درست وارون (*) در بالاست، و همین طور هم باید باشد زیرا ۴-۵ وارون ۴-۳ است.

معادله های ۴-۵ از نظر فرم با معادله های ۴-۳ یکسان اند بجز علامت منفی که جلوی v آمده است. علت این علامت به قرار زیر است: طبق نظر A، مبدأ چارچوب مرجع B (نقطه $X' = Y' = Z' = ۰$) با سرعت v در جهت مثبت x حرکت می کند؛ طبق نظر B، مبدأ چارچوب مرجع A (نقطه $X = Y = Z = ۰$) در جهت منفی x' با همان سرعت حرکت می کند. فرمولهای تبدیل لورنتس ۴-۳ و ۴-۵ وقتی A و B به یکدیگر نزدیک می شوند برای t و t' منفی و وقتی از یکدیگر دور می شوند برای t و t' مثبت معتبر است، یعنی، وقتی B طبق اندازه گیری A در جهت $+x$ حرکت می کند، اما، اگر ما نتیجه را برای وقتی که B نسبت به A در جهت منفی x حرکت می کند محاسبه می کردیم برای v علامت مخالف را به دست می آوردیم. بنابراین، قرارداد برای علامت v که از فرمول تبدیل لورنتس لازم می آید این است که v هرگاه حرکت نسبی در جهت $+x$ باشد مثبت و هرگاه حرکت در جهت $-x$ باشد منفی خواهد بود. با توجه به این تفاهم (که با آنچه لازمه فرمول ضریب K در بخشهای ۳-۱ و ۳-۲ بود تفاوت دارد)، معادله های ۴-۵ دقیقاً همان چیزی است که انتظار داریم مختصات B را از مختصات A تعیین کند. این هم ارزی فرمولها نتیجه مستقیم اصل نسبیت است (هر ناظری هم ارز ناظر دیگر است، پس بین فرمولهای تبدیل بین آنها نباید تفاوت اساسی وجود داشته باشد).

پیامدهای تبدیل لورنتس

فرمولهای تبدیل لورنتس و وارون آن (۳-۴ و ۵-۴) برای ناظرهای A و B که در حرکت نسبی هستند مختصات هر یک از ناظرها برای یک رویداد دلخواه را از مختصات ناظر دیگر برای آن رویداد تعیین می‌کند. از آنها می‌توان برای یافتن رابطه‌های میان هر اندازه‌گیری فضا، زمان یا سرعت که ناظرها انجام می‌دهند استفاده کرد. مثلاً همان‌طور که بزودی نشان خواهیم داد، می‌توان انقباض طول، اتساع زمان، نسبیت همزمانی و قوانین جمع سرعتها در نسبیت خاص را مستقیماً از این روابط به دست آورد. اکنون پیامدهای عمده تبدیلیهای لورنتس را اجمالاً بررسی می‌کنیم.

الف) حد نیوتونی. توجه به این نکته مهم است که وقتی سرعتهایی که با آن سروکار داریم در مقایسه با سرعت نور کوچک‌اند و فاصله‌ها نسبت به زمانهایی که با آن سروکار داریم کوچک هستند، تبدیلیهای لورنتس به نتایج نیوتونی تبدیل می‌شوند. مثلاً اگر $v = 300 \text{ km/s}$ باشد (که با معیارهای روزمره ما سرعتی بسیار بزرگ است) در این صورت $V = v/c = 300/3000000 = 1/1000$ ، از این‌رواز $\gamma(v) = \{1 - (1/1000)^2\}^{-1/2} = (1 - 10^{-6})^{-1/2} \simeq 1 + (1/2)10^{-6}$ داریم، ۴-۴ مقداری که بی‌اندازه به ۱ نزدیک است؛ پس در اکثر موارد می‌توانیم γ در ۳-۴ و ۵-۴ را به درستی ۱ در نظر بگیریم. به‌علاوه، اگر فاصله x که با آن سروکار داریم کوچکتر از 10000 km باشد، در این صورت $x/c < 10000 \text{ km}/3000000 \text{ km/s} = 1/30 \text{ s}$ پس $(v/c)(x/c) < (1/1000)(1/30) = 1/3 \times 10^{-2} \text{ s}$ از این‌رو اگر $t \gg 10^{-2} \text{ s}$ داریم $t - vx/c^2 \simeq t$. بدین ترتیب، در این شرایط، تمام جمله‌های ویژه نسبیت به قدری کوچک هستند که می‌توان آنها را نادیده گرفت، و تبدیلیهای ۳-۴ به صورت زیر درمی‌آیند

$$t \simeq t', \quad x \simeq x' + 300t', \quad y = y', \quad z = z'$$

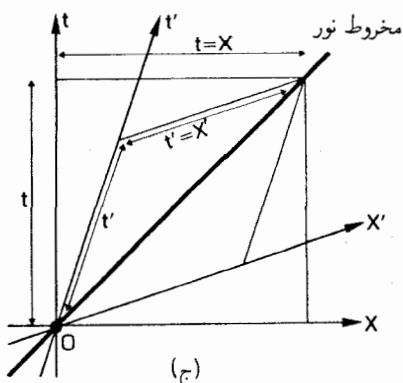
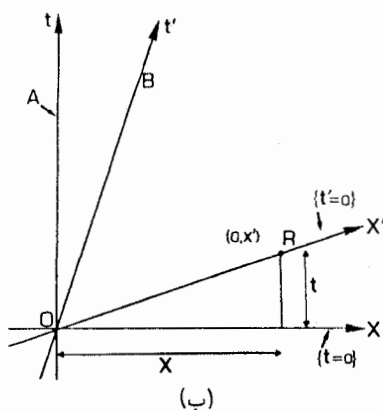
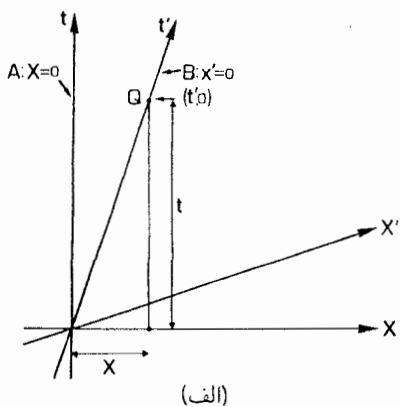
که در آن x برحسب کیلومتر و t برحسب ثانیه است. به‌طور کلیتر

$$\{|v/c| \ll 1, |x/c| < t\} \Rightarrow \gamma(v) \simeq 1 \Rightarrow$$

$$t \simeq t', \quad x \simeq x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad (6-4)$$

$$t' \simeq t, \quad x' \simeq x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z$$

که درست همان روابط معمول هستند که ما به‌طور شهودی از طریق تجربه زندگانی روزمره می‌فهمیم و در نظریه نیوتونی فرمولبندی شده است. بدین ترتیب، نتایج استاندارد نظریه نیوتونی هرگاه حرکت کند باشد (یعنی، سرعتها نسبت به سرعت نور کند باشند) و مقیاسهای طولی که با آنها سروکار داریم طولهای روزمره باشند؛ معتبر خواهند بود؛ اثرهای نسبیتی تنها زمانی ظاهر می‌شوند که با سرعتهای زیاد و سفرهای طولانی نور سروکار داشته باشیم، اما در این موارد این اثرها مهم‌اند. اکنون ما به مطالعه این اثرها می‌پردازیم.



شکل ۳-۴ (الف) نقطه Q روی جهانخط B در چارچوب A دارای مختصات (t, X) و در چارچوب B مختصات $(t', 0)$ است؛ از طریق ضریب اتساع زمان به یکدیگر مربوط می‌شوند. (ب) نقطه‌ای مانند R روی سطح رویدادهای B که با مبدأ O همزمان هستند در چارچوب A دارای مختصات (t, X) و در چارچوب B دارای مختصات $(0, X')$ است؛ از طریق ضریب انقباض طول به یکدیگر مربوط می‌شوند. (ج) برای هر دو ناظر A و B پرتوهای نور دارای سرعت یکسان هستند؛ طبق A معادله آنها $t = x/c = X$ و طبق B $t' = x'/c = X'$ است.

(ب) اتساع زمان. اولاً، تبدیل برای نقطه‌ای مانند Q روی جهانخط B ($x' = y' = z' = 0$) را در نظر می‌گیریم. بدین ترتیب (شکل ۳-۴ را ببینید) در ۲-۴ قرار می‌دهیم $x' = 0$ و به دست می‌آوریم

$$t = \gamma(v)t' \quad (۷-۴ \text{ الف})$$

$$x = \gamma(v)vt' = vt \quad (۷-۴ \text{ ب})$$

نتیجهٔ دوم تأیید می‌کند که کمیت “ v ” در واقع سرعتی است که A برای B در جهت $+x$ اندازه می‌گیرد؛ و اولی اثر اتساع زمان استاندارد $۳-۲^{\circ}$ است که A برای ساعت B اندازه می‌گیرد. مثلاً، اگر $v = ۴/۵c$ باشد به طوری که $\gamma = ۵/۳$ ، در این صورت زمانی که طبق اندازه‌گیری B در امتداد جهانخطش آن‌طور که از $۷-۴$ الف پیداست برابر ۵ سال است ($t' = ۵$) با زمان تاریخ B با رویدادهای در جهانخط خودش استفاده می‌کند هم‌ارز است. همین‌طور، با قرار دادن $x = ۰$ در $۵-۴$ نتیجه‌های وارون وقتی که B ، A را مشاهده می‌کند به دست می‌دهد.

ج) انقباض طول و نسبیت همزمانی. ثانیاً، تبدیل برای نقطه‌ای مانند R را در نظر بگیرید که در روی سطح $\{t' = ۰\}$ طبق اندازه‌گیری B با رویداد O همزمان است. بدین ترتیب [شکل ۳-۴ (ب) را ببینید] در $۳-۴$ ، $t' = ۰$ را قرار می‌دهیم، به دست می‌آوریم

$$x = \gamma(v)x' \quad (۴-۸الف)$$

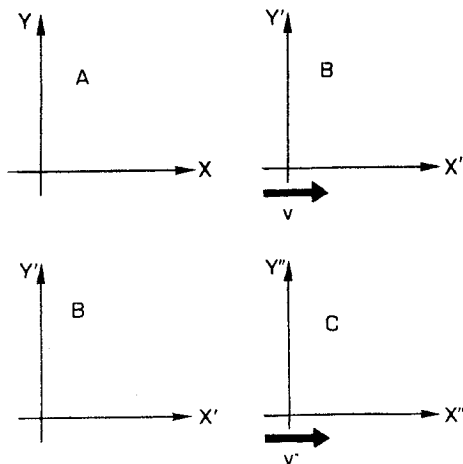
$$t = \gamma(v)vx'/c^2 = vx/c^2 \quad (۴-۸ب)$$

نتیجهٔ اول فاصلهٔ بین O و R طبق اندازه‌گیری A را به همان فاصله طبق اندازه‌گیری B مربوط می‌کند و اثر استاندارد انقباض طول $۳-۲۳$ را برای B که از کنار A عبور می‌کند نشان می‌دهد. نتیجهٔ دوم فرمول $۳-۱۷$ است که مختصات A برای هر نقطهٔ دلخواهی مانند R در روی سطح همزمانی B را با O نشان می‌دهد. مثلاً، اگر $v = ۴/۵c$ باشد به طوری که $\gamma = ۵/۳$ ، طولی برابر با یک سال نوری که B به‌طور آبی برای جسمی که نسبت به او ساکن است و موازی v قرار دارد ($x' = ۱$) اندازه می‌گیرد، طبق $۴-۸$ الف متناظر خواهد بود با طولی برابر با $۵/۳ \times ۱ = ۵/۳$ سال نوری که A اندازه می‌گیرد؛ همچنین طبق $۴-۸$ ب، A و B در مورد همزمانی روی آن فاصله به اندازه $y = ۴/۵ \times ۱ = ۴/۵$ اختلاف $(v/c)(x/c)$ نظر خواهند داشت. در اینجا هم نتیجه وارون با قرار دادن $t = ۰$ در $۵-۴$ به دست می‌آید.

د) ناوردایی سرعت نور. ثالثاً، هر دو ناظر باید در مورد حرکت با سرعت نور با هم توافق داشته باشند. این مطلب را در مورد نوری که در جهت $+x$ حرکت می‌کند با قرار دادن $t' = +x'/c$ در $۴-۳$ بررسی می‌کنیم، به دست می‌آوریم: $x = \gamma(v)x'(1 + v/c)$ و $x/c = \gamma(v)(x'/c)(1 + v/c)$ ؛ بدین ترتیب

$$t' = +x'/c \quad \Rightarrow \quad t = +x/c \quad (۴-۹الف)$$

که تأیید می‌کند اگر B سرعت نور را در جهت $+x$ اندازه بگیرد، A با او موافق خواهد بود [شکل ۳-۴ (ج)]. مثلاً، اگر $v = ۴/۵c$ باشد به طوری که $\gamma = ۵/۳$ در این صورت، پس از یک سال، B نوری که در O ($t' = ۰$ ، $x' = ۰$) گسیل شده است در رویداد P ($x' = ۱$) و



شکل ۴-۴ سه ناظر در حرکت نسبی: A دارای دستگاه مختصات (t, X, Y, Z) است؛ ناظر B دارای دستگاه مختصات (t', X', Y', Z') است و با سرعت v در جهت X نسبت به A در حرکت است؛ C دارای مختصات (t'', X'', Y'', Z'') است و نسبت به B با سرعت v' در جهت X' (که موازی با جهت X است) حرکت می‌کند.

اندازه می‌گیرد. مختصات رویداد O را $\{t = 0, X = 0\}$ و مختصات رویداد P را $\{t = 3, X = 5/3 \times 1 \times 9/5 = 3y, X = 5/3 \times 1 \times 9/5 = 3\}$ سال نوری تعیین می‌کند، و این تأییدی است بر اینکه طبق اندازه‌گیری A نور با سرعت c حرکت می‌کند. همین‌طور

$$t' = -x'/c \Rightarrow t = -x/c \quad (۹-۴ب)$$

که نشان می‌دهد A با B در مورد سرعت نور در جهت $-x$ توافق دارد.

ه) جمع نسبیتی سرعت. رابعاً، فرض کنید ناظر سوم C با سرعت v' در جهت $+x'$ از کنار B عبور می‌کند (شکل ۴-۴). فرض کنید مختصات C به صورت استاندارد (t'', x'', y'', z'') باشد. در این صورت (با به‌کار بردن نتایج بالا برای B که C را مشاهده می‌کند) مختصات B به صورت زیر به مختصات C مربوط می‌شوند

$$t' = \gamma(v')(t'' + v'x''/c^2) \quad (۱۰-۴الف)$$

$$x' = \gamma(v')(x'' + v't'') \quad (۱۰-۴ب)$$

$$y' = y'', \quad z' = z'' \quad (۱۰-۴ج)$$

که در آن

$$\gamma(v') = \{1 - (v')^2/c^2\}^{-1/2} \quad (۱۱-۴)$$

اکنون، رابطه بین مختصات A و C باز هم باید یک تبدیل لورنتس به صورت ۳-۴ باشد، چون A و C دو ناظر لخت هستند که مختصات آنها به صورت استاندارد به یکدیگر مربوط است. در واقع هم چنین است: می توان (۴-۱۰ و ۴-۱۱) را در (۴-۳ و ۴-۵) جایگزین و ساده کرد، سرانجام (پس از عملیات جبری پر دردسر) به دست می آوریم

$$t = \gamma(v'')(t'' + v''x''/c^2) \quad (۴-۱۲ الف)$$

$$x = \gamma(v'')(x'' + v''t'') \quad (۴-۱۲ ب)$$

$$y' = y'', \quad z' = z'' \quad (۴-۱۲ ج)$$

که در آن

$$\gamma(v'') = \{1 - (v'')^2/c^2\}^{-1/2} \quad (۴-۱۳)$$

کمیت v'' به صورت زیر تعریف می شود

$$v'' = (v + v')/(1 + vv'/c^2) \quad (۴-۱۴)$$

این در واقع نشان می دهد که اندازه گیریهای A و C به طریق استاندارد با هم رابطه دارند، و سرعت نسبی A و C از ۴-۱۴ به دست می آید. بدین ترتیب، تأیید کرده ایم که اگر طبق اندازه گیری A، B با سرعت v در جهت x حرکت کند و طبق اندازه گیری B، C با سرعت v' در جهت (موازی) x' حرکت کند، در این صورت طبق اندازه گیری A، C با سرعت v'' در جهت x حرکت می کند که v'' از فرمول جمع سرعتها در نسبیت خاص ۳-۱۵ به دست می آید. مثلاً اگر $v = 4/5c$ و $v' = 1/5c$ در این صورت $v'' = 1/5 + 4/5 = 29/25$ پس $v'' = (1/5 + 4/5)c + 25/29 = 25/29c$ (که چنانکه باید، از c کوچکتر است).

مرور

اکنون معادله های تبدیل لورنتس ۳-۴ و ۴-۵ را تعیین کرده ایم که اندازه گیریهای دو ناظر که با سرعتهای متفاوت در جهت x حرکت می کنند را به یکدیگر مربوط می کند، و ثابت کردیم که می توان نتایج سینماتیکی استاندارد نسبیت خاص را از آنها استنتاج کرد، بدین ترتیب تأیید کرده ایم که این فرمولها در واقع به صورت فشرده سینماتیک نسبیت خاص را در برمی گیرند. در بخش بعد ما به دنبال کمیت هایی خواهیم گشت که تحت تبدیل لورنتس ناوردا هستند؛ این بخش را با ارائه یک مثال از موارد استفاده تبدیل لورنتس و نشان دادن اینکه چگونه می توان این تبدیله را به جای جنبه

نافعال آن که تا کنون مورد استفاده بود از جنبه فعال در نظر گرفت به پایان می‌رسانیم. این مطلب بعداً در هنگام ساختن مدل‌های ساده عالم مفید خواهد بود.

یک مثال

فرض کنید سفینه‌ای به طول $۱۰^۰\text{m}$ به صورت افقی بالای سطح زمین با سرعت $۱۰^۷\text{m/s}$ حرکت می‌کند. در یک لحظه بخصوص، یک علامت نوری از قسمت جلوی سفینه گسیل می‌شود. زمانهایی را که طول می‌کشد تا نور (۱) طبق نظر ناظر همراه با سفینه و (۲) یک ناظر ساکن در روی زمین، به انتهای سفینه برسد با هم مقایسه کنید.

برای ناظری که در سفینه است، طول سفینه البته $۱۰^۰\text{m}$ است. بدین ترتیب (۱) زمان سپری شده برابر است با این طول بخش بر سرعت نور، یعنی $۰.۳۳ \times ۱۰^{-۶}\text{s}$ $= ۱۰۰\text{m}/(۳ \times ۱۰^۸\text{m/s})$ فرض کنید که در چارچوب مرجع ناظر روی زمین، نور در رویداد A با مختصات $t_A = x_A = ۰$ گسیل شده و در رویداد B با زمان t_B ، آن‌طور که در بالا محاسبه شد، و در فاصله $x_B = ۱۰^۰\text{m}$ دریافت شده باشد. در این صورت در چارچوب ناظر ساکن، که با سرعت نسبی $v = ۱۰^۷\text{m/s}$ در جهت x حرکت می‌کند، معادله ۵-۴ الف به دست می‌دهد

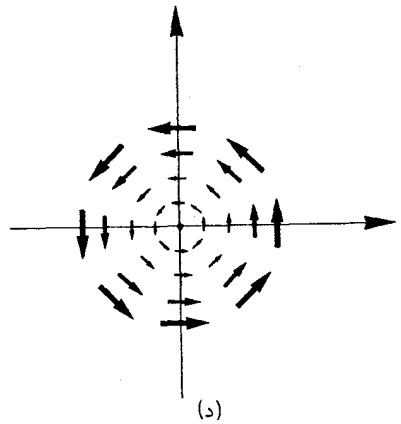
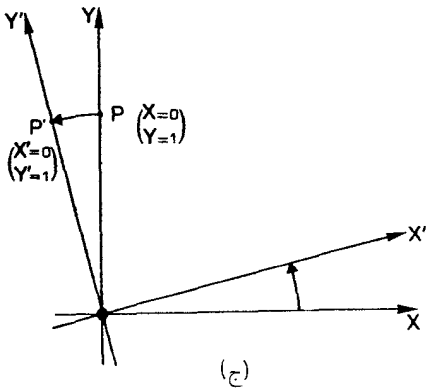
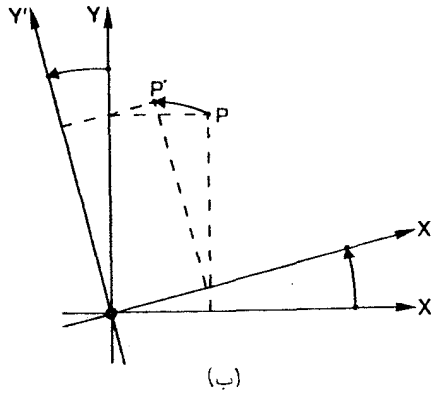
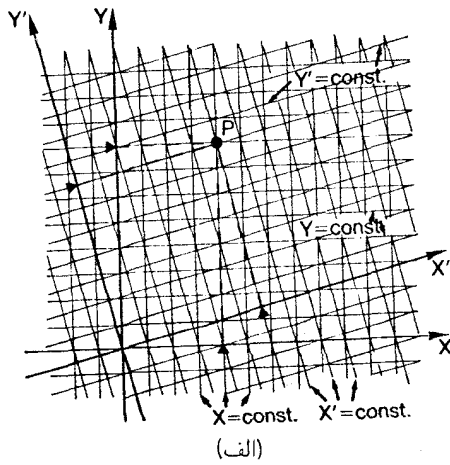
$$t'_A = ۰$$

$$\begin{aligned} t'_B &= \gamma(v)(t_B - vx_B/c^2) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}(x_B/c)(1 - v/c) \\ &= t_B \{ (1 - v/c)/(1 + v/c) \}^{1/2} \\ &= t_B \left\{ \left(1 - \frac{1}{30}\right) / \left(1 + \frac{1}{30}\right) \right\}^{1/2} \sim \frac{29}{30} t_B \sim ۰.۳۲ \times ۱۰^{-۶}\text{s} \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که این نتیجه را نمی‌توان به سادگی از ضریب انقباض طول یا ضریب اتساع زمان به دست آورد، زیرا نه طول سفینه مستقیماً مطرح است و نه آهنگ کار یک ساعت در حال حرکت.

تبدیل‌های فعال

تاکنون به تبدیل لورنتس از جنبه نافع آن نگریسته‌ایم: این تبدیل چارچوب‌های ناظرهای مختلف را به یکدیگر مربوط می‌کند، و از این رو تعیین می‌کند که چگونه مختصات مختلف یک رویداد واحد با هم ارتباط دارند. به هر حال به تبدیل لورنتس از جنبه فعال نیز می‌توان نگریست. برای درک مطلب، ابتدا یک چرخش معمولی محورها را در فضای دوبعدی اقلیدسی در نظر بگیرید [شکل ۵-۴ الف]]. اگر چارچوب مرجع F با (مختصات (x, y)) را به چارچوب مرجع F' (با مختصات (x', y')) تغییر دهیم، در خواهیم یافت که مختصات نقطه واحد P به صورت زیر



شکل ۵-۴ (الف) یک چرخش محورها در صفحه اقلیدسی مختصات (X, Y) نقطه P را به مختصات (X', Y') تغییر می‌دهد. این یک تبدیل نافعال است: نقطه‌ها در فضا ثابت می‌مانند، اما چارچوب مرجع تغییر می‌کند. (ب) در یک چرخش فعال، نقطه P همراه با محور و مختصات می‌چرخد و به نقطه جدید P' می‌رود. (ج) نقطه تصویر P' نسبت به دستگاه مختصات جدید دارای همان مختصاتی است که نقطه اولیه P نسبت به مختصات قدیم داشت (د) حرکت نقطه‌ها در صفحه اقلیدسی که با یک چرخش فعال تولید می‌شود.

به یکدیگر مربوط می‌شوند

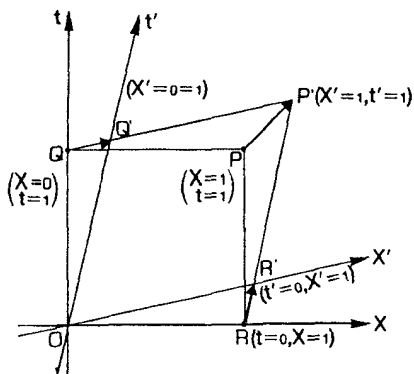
$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

[که کاملاً شبیه ۵-۴ است]. این چیزی است که به آن تبدیل نافعال می‌گوییم: به هر نقطه از فضا می‌توان به سادگی در دو دستگاه مختصات F و F' رجوع کرد. F' با یک چرخش به F مربوط می‌شود. برعکس، در یک تبدیل فعال فضا به‌طور کلی نسبت به محورهای مختصات ثابت چارچوب اولیه F می‌چرخد، چرخش چارچوب مرجع F' نقاط فضا را به دنبال خود می‌کشاند، یعنی نقاط را طوری حرکت می‌دهد که مقادیر مختصات آنها حفظ شود [شکل ۵-۴(ب)]. مثلاً نقطه P در $\{x = 0, y = 1\}$ در اثر چرخش محورها به نقطه P' با مختصات $\{x' = 0, y' = 1\}$ کشیده می‌شود، شکل ۵-۴(ج) را ببینید. همین‌طور، هر نقطه P در اثر تبدیل به نقطه P' نگاشته می‌شود که مقادیر مختصات آن نسبت به چارچوب جدید همانهایی است که نقطهٔ قدیم نسبت به چارچوب قدیم داشت.

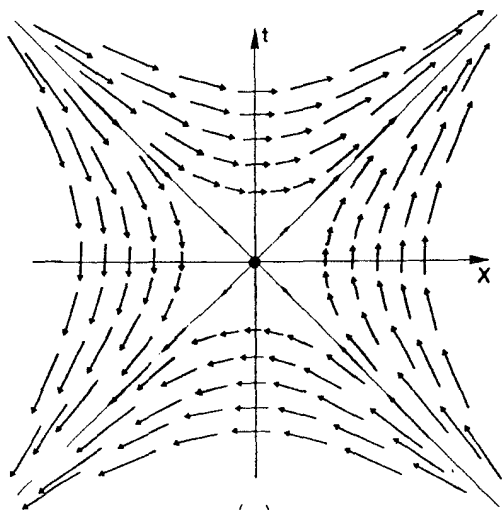
دقیقاً به همین طریق، می‌توانیم به تبدیل لورنتس به صورت یک تبدیل نافعال و یا یک تبدیل فعال بنگریم. قبلاً به معادله‌های ۵-۴ به عنوان نمایندهٔ یک تبدیل نافعال نگریم (با رجوع به نقطه‌های ثابت فضا زمان در دو دستگاه مختصات). اکنون فرض کنید که با شروع از دو چارچوب مرجع A و B که نسبت به هم ساکن هستند فضا زمان را به ترتیب با مختصات (t, x, y, z) و (t', x', y', z') نشان دهیم. در ابتدا این مختصات یکسان هستند $(t = t', x = x', y = y', z = z')$ زیرا چارچوبها نسبت به یکدیگر ساکن‌اند. اکنون چارچوب B را به حرکت درمی‌آوریم به طوری که نسبت به چارچوب A با سرعت v در جهت $+x$ حرکت کند؛ می‌توان گفت چارچوب B تکانی به اندازه $+v$ دریافت کرده است. می‌توان فرض کرد که رویدادهای فضا زمان در اثر این خیز به همراه چارچوب B کشیده می‌شوند (اما چارچوب A به عنوان یک چارچوب ثابت، تأثیری از این عمل نمی‌پذیرد). بدین ترتیب، اثر خیز این است که هر نقطهٔ P از یک وضعیت ابتدایی که نسبت به چارچوبهای A و B هر دو با مختصات (x', y', z', t') داده شده است، به وضعیت نهایی که نسبت به چارچوب B با همان مقادیر (x', y', z', t') داده شده است حرکت می‌کند [شکل ۶-۴(الف) را ببینید]. نسبت به چارچوب A مختصات نهایی (t, x, y, z) برحسب (t', x', y', z') با استفاده از معادله‌های ۳-۴ تعیین می‌شود. مثلاً، معلوم می‌شود رویداد Q' که به اندازهٔ یک واحد زمان در امتداد محور زمان B قرار دارد $\{t' = 1, x' = y' = z' = 0\}$ از دیدگاه A (با معادلهٔ ۷-۴ مقایسه کنید) دارای مختصات

$$t = \gamma(v), \quad x = v\gamma(v), \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (۱۵-۴)$$

است. این رویداد در ابتدا به فاصلهٔ یک واحد زمان در امتداد هر دو محورهای A و B قرار داشت.



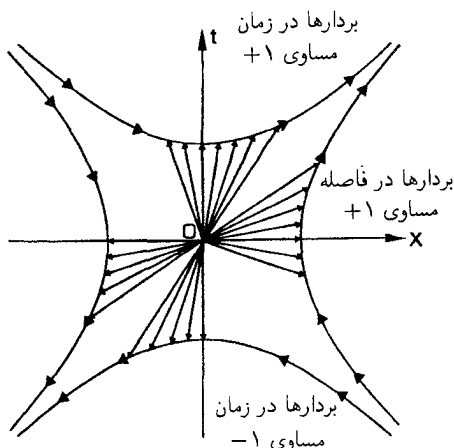
(الف)



(ب)

شکل ۴-۶ یک تبدیل لورنتس فعال که نقطه‌های فضا-زمان سطح دویعدی را به یکدیگر می‌برد. (الف) اثر خیز بر نقطه‌های P ، Q ، R ، و هر نقطه (t, X) را به نقطه جدیدی با مختصات جدید $t' = t$ ، $X' = X$ می‌برد. (ب) الگوی حرکتی که در اثر خیز تولید می‌شود [که دقیقاً مشابه شکل ۴-۵ (ب) است].

بدین ترتیب، اگر نقطه Q در $\{t = 1, x = y = z = 0\}$ را در چارچوب A انتخاب کنیم و به آن خیزی به اندازه v بدهیم، این نقطه به Q' با مختصات ۴-۱۵ می‌رود. روشن است که با این ساختمان اندازه‌گیری‌های طول و زمان تحت یک تبدیل فعال لورنتس محفوظ می‌مانند (مثلاً، اندازه‌گیری واحد زمان در چارچوب B ، پس از اعمال خیز، اندازه‌گیری واحد زمان باقی می‌ماند). از این دیدگاه، این در واقع ویژگی تبدیلی‌های لورنتس را، که نقاط را در فضا-زمان مطابق شکل ۴-۶ (ب) حرکت می‌دهد، تعریف می‌کند.



شکل ۴-۷ اثر اعمال مکرر یک سری خیز بر بردارهای یکة زمانگونه و فضاگونه در امتداد محورهای چارچوب مرجع ناظر A . بردارهای تصویر را می توان بردارهای یکة زمان و فضا در امتداد محورهای چارچوبهای مرجع یک سری ناظر در نظر گرفت که نسبت به هم حرکت می کنند. این بردارها سطوحی را تعریف می کنند که به فاصله واحد زمان و واحد فاصله فضایی از O قرار دارند.

اگر به اعمال خیز برای یک سرعت نسبی خاص v ادامه دهیم، یک سری نامتناهی چارچوب به دست می آوریم که هر یک با چارچوب قبل از خود با $4-3$ مربوط می شود، که نماینده سرعت نسبی v در جهت x است. اگر این چارچوبها را در یک نمودار واحد فضازمان واحد رسم کنیم، نتیجه شکل ۴-۷ است. می توان تصور کرد که این نمودار نشان می دهد چگونه اعمال مکرر یک خیز به اندازه v بردار یکة زمان چارچوب A را [یعنی، بردار OT را که در آن مختصات T در چارچوب A ، $(1, 0, 0, 0)$ است] به بردارهای بعدی می برد، که هر یک نماینده جابه جایی در واحد زمان از نظر ناظری است که نسبت به A حرکت می کند. هر یک از این بردارهای یکة زمان نماینده اندازه گیری 1 واحد زمان از رویداد O در فضازمان توسط ناظر مربوطه است. بدین ترتیب، همه این پیکانها نماینده اندازه گیریهای واحد ساعت هستند که ناظرهایی که با سرعتهای مختلف نسبت به A حرکت می کنند انجام می دهند و سطحی که آنها تعریف می کنند سطحی است که به فاصله واحد از ویژه زمان O قرار دارد (که در آن زمان در امتداد خط مستقیم از O اندازه گرفته می شود). به کمک این سطح می توان یکاهای زمان را روی خطوط مختلفی که از مبدأ می گذرند و نماینده حرکت یکنواخت ذرات با سرعتهای مختلفی هستند که همگی در زمان $t = 0$ از O عبور می کنند مقایسه کرد. همین طور، اعمال مکرر خیز در مورد جابه جایی $\{t = 0, x = 1, y = 0, z = 0\}$ که نماینده یک جابه جایی فضایی واحد است سری بردار به دست می دهد که نماینده اندازه گیریهای فضایی واحد آنی به وسیله این گروه از ناظرهاست، و سطحی را تعریف می کند که به فاصله فضایی

واحد از O قرار دارد (این فاصله در امتداد خط مستقیم از O اندازه گرفته می‌شود). به کمک این سطح می‌توان یکاهای فاصله فضایی در امتداد خطهای مختلف فضاگونه را که همگی از مبدأ عبور می‌کنند مقایسه کرد. این دو سطح، معادل فضازمانی یک دایره یک در صفحه اقلیدسی هستند (زیرا این دایره سطحی به فاصله ثابت یک واحد از مبدأ O است، که در امتداد خط راست از O اندازه گرفته می‌شود؛ در این مورد تمایزی بین منحنیهای یا اندازه‌گیریهای زمان‌گونه و فضاگونه وجود ندارد). شکل ۷-۴ این را هم نشان می‌دهد که با نزدیک شدن سرعت نسبی v به c به نظر می‌آید که چارچوبهای ناظرهای دیگر (که از A مشاهده می‌شوند) به سوی مخروط نور می‌رمبند. این یک پیامد ماهیت محدودکننده سرعت نور در نسبیت خاص است.

تمرینها

۱-۴ تبدیل (***) را که به دنبال ۵-۴ می‌آید صریحاً از فرمول کلی تبدیل لورنتس ۵-۴ استخراج کنید.

۲-۴ دو رویداد A و B را که در یک چارچوب مرجع توسط مختصات $x_A = y_A = z_A = 0$ و $t_A = 1$ و $x_B = y_B = z_B = 0$ و $t_B = 3/4$ تعریف می‌شوند در نظر می‌گیریم. مختصات آنها در چارچوبی که با سرعت $c/4$ در جهت x نسبت به چارچوب اول در حرکت است چیست؟ در تبدیل بین دو چارچوب بر سر ترتیب زمانی آنها چه آمده است؟ کدام جنبه از رابطه بین A و B این خاصیت را امکان‌پذیر می‌سازد؟

۳-۴ فرض کنید دو رویداد با یک خط زمان‌گونه در یک چارچوب مرجع به یکدیگر متصل‌اند. نشان دهید که ترتیب زمانی آنها در تمام چارچوبهای مرجع یکسان است.

۴-۴ مسافر قطاری که با سرعت v در حرکت است دختر ساکنی را مشاهده می‌کند که تویی با سرعت $2v$ در جهتی که با افق زاویه 60° می‌سازد موازی با جهت حرکت قطار پرتاب می‌کند. از نظر آن دختر مسیر گوی با معادله‌های زیر تعیین می‌شود

$$x = vt, \quad y = \sqrt{3}vt - \frac{1}{4}gt^2$$

در آن x و y اندازه فاصله‌های افقی و عمودی هستند. این مسیر را از نظر مسافر در قطار پیدا کنید. ۵-۴ یک سفینه فضایی که حداکثر سرعت آن $c/5$ است سفینه دیگری را که حداکثر سرعت آن $c/5$ است دنبال می‌کند. ناظری در سیاره مجاور آنها را در فاصله یک سال نوری از هم مشاهده می‌کند. از نظر ناظر روی سیاره پس از چه مدتی سفینه اول به سفینه دوم می‌رسد؟ این فاصله زمانی از نظر (۱) ناظری که در سفینه کندروتر قرار دارد و (۲) ناظری که در سفینه تندروتر قرار دارد چقدر است؟

۶-۴ خیز با پارامتر v را به رویدادهای زیر که با مختصاتشان (t, X) توصیف می‌شوند اعمال کنید: (الف) $(-1, 2)$ ، (ب) $(0, \sqrt{3})$ ، (ج) $(1, 2)$ ، (د) $(-1, -1)$ ، (ه) $(1, 1)$ ، (و) $(2, -1)$ ،

(ز) $(\sqrt{3}, 0)$ ، (ح) $(2, 1)$. نقاط قدیم و جدید را در یک نمودار فضا-زمان به‌ازای $v = 5c/13$ رسم کنید، و خطوط با فاصله ثابت از مبدأ را که برای نشان دادن اثر خیز بر این نقاط لازم هستند رسم کنید.

۴-۷ خاصیت گروه [در این مثال فرض بر این است که شما تعریف ریاضی یک گروه را می‌دانید]. نشان دهید که ترکیبی از هر مقدار تبدیل لورنتس به‌شکل استاندارد (با سرعت‌های موازی) منجر به یک تبدیل لورنتس نهایی به‌همان شکل و با سرعت مناسب می‌شود. مثلاً، خانواده‌ای از ناظرهای A_1, A_2, A_3, \dots را در نظر بگیرید که هر یک با سرعت v نسبت به عضو قبلی خانواده حرکت می‌کند (A_2 با سرعت v نسبت به A_1 حرکت می‌کند؛ A_3 با سرعت v نسبت به A_2 حرکت می‌کند؛ و غیره). سری محورهای مختصات حاصل در شکل ۴-۷ نشان داده شده‌اند. این شکل بردارهای یک‌زمان‌گونه (از مبدأ $\{t=0, x=0\}$ تا نقطه $\{t=1, x=0\}$ را روی جهانخط هر یک از ناظرها) و بردارهای یک‌فضاگونه (از مبدأ $\{t=0, x=0\}$ تا نقطه $\{t=0, x/c=1\}$ در هر یک از چارچوبها) را، از نظر چارچوب مرجع A ، برای این خانواده از ناظرها نشان می‌دهد. در این صورت هر دو چارچوب مرجع در این خانواده از طریق یک تبدیل لورنتس به‌شکلی که در معادله ۴-۳ آمده است، در آن و به‌جای v مقدار مناسب برای سرعت نسبی (که از تکرار قانون جمع سرعت‌های نسبی به‌دفعات لازم به‌دست آمده) قرار گرفته است، به‌یکدیگر مربوط می‌شوند. تبدیل همانی یک تبدیل لورنتس است (در ۴-۳ $v=0$ را قرار دهید)، و تبدیل وارون هر تبدیل لورنتس باز یک تبدیل لورنتس است (در واقع ۴-۵ وارون ۴-۳ است). ثابت کنید که تبدیلهای لورنتس (t, x) ، همراه با خاصیت ترکیبی که در بالا مورد بحث قرار گرفت یک گروه تبدیلهای را تشکیل می‌دهند.

تمرینهای کامپیوتری ۱۲

برنامه‌ای بنویسید که ورودی آن (الف) سرعت V (برابر با v/c)، (ب) مختصات (t, x, y, z) نقطه P طبق اندازه‌گیری ناظر A باشد، و به‌عنوان خروجی مختصات (t', x', y', z') نقطه P طبق اندازه‌گیری B ، که از معادله‌های تبدیل لورنتس ۴-۵ تعیین می‌شوند را چاپ کند. مطمئن شوید که برنامه شما می‌تواند تبدیلهای لورنتس مکرر را انجام دهد، یعنی پس از یک تبدیل، در صورتی که داده جدیدی وارد نشود، خروجی تبدیل قبلی خود به‌خود ورودی تبدیل بعدی می‌شود.

برنامه‌تان را طوری بنویسید که (ج) نتیجه تبدیلات نیوتونی ۴-۶ را هم چاپ کند، این کار نشان می‌دهد که آیا این نتایج تقریب خوبی برای تبدیل لورنتس هستند؛ (د) کمیت $Q = -t^2 + X^2 + Y^2 + Z^2$ را چاپ کند. تغییر این کمیت برای هر تبدیل لورنتس چقدر است؟

تمرین گرافیک کامپیوتری ۲

برنامه‌ای بنویسید که یک سری محورهای (t, X) را رسم کند، و سپس اثر حرکت یک نقطه انتخابی P با مختصات (t, X) به‌نقطه P' با مختصات (t', X') را با فرمول تبدیل لورنتس ۴-۵ به‌ازای یک سرعت مشخص V (برابر با v/c) در یک نمودار فضا-زمان نشان دهد [کاری کنید که روی صفحه پیکانی از P به‌نقطه جدید P' رسم شود؛ در این تمرین به‌تبدیل لورنتس به‌عنوان یک تبدیل فعال نگریسته می‌شود، اما شما می‌توانید برای انجام محاسبه‌ها از برنامه تمرین کامپیوتری ۲ استفاده

کنید]. اثر تبدیلیهای مکرر را بر نقاط (۱) $t = 1, X = 0$; (۲) $t = 1, X = 1$; (۳) $t = 0, X = 1$; (۴) $t = -1, X = -1$ بیازمایید.

برنامه را طوری تعدیل کنید که (الف) اثر تبدیل را در حرکت چندین نقطه انتخابی به طور همزمان نشان دهد؛ (ب) اثر آن را بر خطی که از مبدأ عبور می‌کند به نحو زیر نشان دهد: به ازای یک نقطه مشخص Q_1 ، (۱) خط مستقیمی که از مبدأ O ($t = 0$ و $X = 0$) و از Q_1 می‌گذرد را رسم کند؛ (۲) روی این خط یک سری نقطه Q_i را مشخص کند، که در آن Q_1 همان Q باشد، فاصله نقطه Q_2 از O در امتداد این خط مستقیم دو برابر فاصله نقطه Q از O باشد، فاصله نقطه Q_3 از O در امتداد این خط مستقیم سه برابر فاصله نقطه Q از O باشد، و غیره تا اینکه به لبه نمودار برسیم؛ (۳) اثر تبدیل بر تمام نقاط Q_i را نشان دهد، و خط جدیدی را از میدتی که آنها به آن منتقل شده‌اند رسم کند. این برنامه را روی مجموعه نقاط (۱) تا (۴) بالا آزمایش کنید.

پیوست: اثبات هندسی قابلیت انطباق مثلثهای شکل ۲-۴

از نظر ساختمان OFEJ یک متوازی‌الاضلاع است و از این رو $FE = OJ$. زاویه‌های HOJ و COF برابرند (بخش ۳-۳ را ببینید). زاویه‌های KEJ و COF برابرند (دو خط موازی JE و OF با افق زاویه‌های برابر می‌سازند). همین‌طور زاویه‌های HOJ و GEF برابرند (دو خط موازی OJ و FE با قائم زاویه‌های برابر می‌سازند). زاویه‌های OHJ، JKE، EGF، و OCF بنابر نحوه ترسیم قائم هستند. بنابراین، مثلثهای OCF و EKJ مساوی‌اند (با دو ضلع مساوی OF و JE، و دو جفت زاویه مساوی COF و KEJ، و OCF و EKJ). همین‌طور، مثلثهای OHJ و EGF مساوی هستند (با دو ضلع مساوی OJ و FE، و دو جفت زاویه مساوی HOJ و GEF، و OHJ و EGF).

۲-۴ نورداهای فاصله فضازمان

دیدیم که بسیاری از جنبه‌های فضازمان، که قبلاً آنها را تغییرناپذیر می‌پنداشتیم، در واقع طبق حرکت نسبی ناظرها تغییر می‌کنند. یافتن کمیت‌هایی که ناوردا هستند، یعنی مستقل از چارچوب مرجع انتخاب شده هستند بسیار مفید خواهد بود. در این صورت تمام ناظرها در مورد مقادیر این کمیتها توافق خواهند داشت، از این رو ارتباطات ساده‌تر خواهند شد، و می‌توان انتظار داشت که قوانین فیزیکی اگر برحسب چنین نورداهایی بیان شوند، صورت ساده‌تری به خود بگیرند. استقلال آنها از حالت حرکت ایجاب می‌کند که چنین کمیت‌هایی دارای اهمیت فیزیکی یا هندسی خاصی باشند: آنها منعکس‌کننده برخی ساختارهای بنیادین عمیقتری هستند، که مستقل از چارچوب مرجع یا دستگاه مختصاتی است که برای توصیف آنها به کار می‌رود.

یک مثال ساده که می‌توان به خاطر سپرد، چرخشها در فضای اقلیدسی است. اگر از محورهای مختلف استفاده شود، مختصات مختلف (x, y) به یک نقطه واحد نسبت داده می‌شوند [شکل ۵-۴ (الف)]. با وجود این فاصله از مبدأ، که با $d = (x^2 + y^2)^{1/2}$ تعریف می‌شود، برای تمام مختصات مورد استفاده یکسان محاسبه می‌شود زیرا نسبت به چرخش محورهای مختصات

(x, y) ناورداست. بدین ترتیب مفید است که بتوانیم در مورد فاصله دو نقطه سخن بگوییم زیرا این فاصله کمیتی ناورداست: تمام ناظرها، بدون توجه به انتخاب مختصات، درباره مقدار آن توافق دارند، و از این رو به جاست که هندسه فضای اقلیدسی را برحسب فاصله بین نقاط مشخص کنیم. ما در جستجوی کمیت‌های مشابه در فضا زمان هستیم.

در اینجا به بررسی سه ناوردا می‌پردازیم که به اندازه‌گیری فاصله و زمان در فضا زمان مربوط می‌شوند: توابع S^2 و ΔS^2 و مقدار بینهایت کوچک ds^2 . گرچه استدلال گاهی پیچیده است، اما به پیگیری آن می‌ارزد. زیرا منای درک بازه ناوردا فضا زمان خمیده است که در فصل بعد مورد بررسی قرار می‌گیرد. این کمیت‌ها چگونگی رفتار اندازه‌گیری ساعت سیر نور در فضا زمان را مشخص می‌کنند و در نتیجه آنتی و اندازه‌گیریهای فاصله فضایی را نیز مشخص می‌کنند. ناوردا S^2 این خواص را نسبت به مبدأ در فضا زمان تخت مشخص می‌کند، در حالی که ΔS^2 مشخص‌کننده آنها برای هر دو نقطه در فضا زمان تخت است. در مقابل، ds^2 این خواص را برای هر دو نقطه مجاور در فضا زمان مشخص می‌کند؛ خواص فضا‌های خمیده و فضا زمانها را با دانستن فاصله‌های موضعی بین هر جفت نقطه مجاور در فضا به دست می‌آورند، که با ds^2 بیان می‌شود.

ناوردای فضا زمان S^2

قبلاً دیدیم که سرعت نور یک ناورداست. ناوردهای دیگر را می‌توانیم از موجوداتی بسازیم که خودشان از چارچوبی به چارچوب دیگر تغییر می‌کنند، اما طوری ترکیب شده‌اند که کمیت حاصل تغییر نمی‌کند. یک مثال مهم کمیت S^2 است که برحسب مختصات (t, X, Y, Z) ناظر A به صورت زیر تعریف می‌شود که در آن $X = x/c, Y = y/c, Z = z/c$

$$S^2 = -t^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 \quad (۱۶-۴)$$

(مهم است توجه کنیم که گرچه در اینجا، به دلایل تاریخی، "مربع S " نوشته شده است، اما لزوماً مثبت نیست. این مطلب در بحث زیر روشن خواهد شد.) هرگاه ناظر B که از مختصات (t', X', Y', Z') استفاده می‌کند این کمیت را محاسبه کند، بنابر تعریف ۱۶-۴ به دست می‌آورد

$$S'^2 = -t'^2 + X'^2 + Y'^2 + Z'^2 \quad (۱۷-۴)$$

فرض کنید B با سرعت v نسبت به A در جهت مثبت x در حرکت باشد. او با استفاده از رابطه ۱۷-۴، به دست می‌آورد

$$S'^2 = -\{\gamma(v)(t - VX)\}^2 + \{\gamma(v)(X - Vt)\}^2 + Y^2 + Z^2$$

که در آن $V \equiv v/c$. با ضرب کردن و استفاده از عبارت ۴-۴ برای γ ، این عبارت به صورت زیر درمی آید

$$S'^2 = \{-t^2(1 - V^2) + X^2(1 - V^2)\}/(1 - V^2) + Y^2 + Z^2$$

با حذف ضریب $1 - V^2$ ، می بینیم که

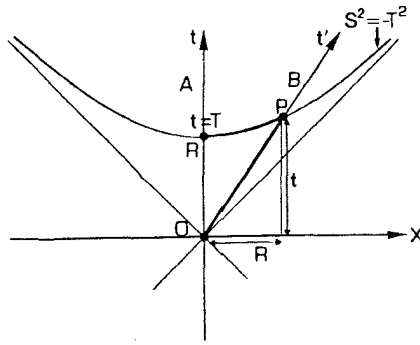
$$S'^2 = S^2 \quad (18-4)$$

یعنی، هر دو ناظر برای این عبارت مقدار یکسانی به دست می آورند (سرعت حرکت نسبی هر چه باشد). بدین ترتیب S'^2 تحت تغییر سرعت در جهت X ناورداست. این کمیت تحت هر چرخش فضایی محورهای X ، Y ، Z نیز ناورداست، زیرا t و $X^2 + Y^2 + Z^2$ هر یک به طور جداگانه تحت چنین چرخشهایی ناوردا هستند. بنابراین تحت هر تغییری در سرعت ناورداست (یک چرخش فضایی می تواند هر تغییری در سرعت را به تغییر در جهت x تبدیل کند)؛ از این رو S'^2 یک ناوردا است. تمام ناظرهای لخت مقدار آن را یکسان می یابند، به عنوان مثال، فرض کنید در دستگاه مختصات A رویداد P عبارت باشد از $(x^a) = (29/3, 25/3, 3, 0)$ ؛ در این صورت $S^2 = -(29/3)^2 + (25/3)^2 + 3^2 + 0^2 = -841/9 + 625/9 + 9 = -15$. اگر B با سرعت $v = 4/5c$ نسبت به A در حرکت باشد، مختصات B برای رویداد P به صورت $(x'^a) = (5, 1, 3, 0)$ خواهد بود (معادله (**)) در بخش قبل را ببینید). بدین ترتیب مقداری که برای B S'^2 محاسبه می کند عبارت است از

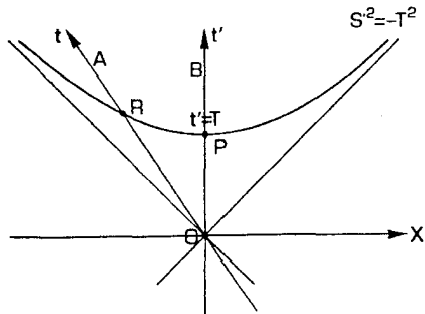
$$S'^2 = -(5)^2 + (1)^2 + (3)^2 + (0)^2 = -25 + 1 + 9 = -15$$

که همان مقدار قبلی است، و این را که S'^2 یک ناورداست در این مورد خاص تأیید می کند. وقتی به خاطر آوریم که بسیاری از کمیتهایی را که قبلاً تصور می کردیم ناوردا هستند در واقع چنین نیستند، روشن می شود که این کمیت باید معنای خاصی داشته باشد. معنای آن چیست؟ چیزی نیست جز مربع فاصله فضازمانی از مبدأ O با مختصات $(0, 0, 0, 0)$ تا نقطه P با مختصات (t, X, Y, Z) . بدین ترتیب این تعمیم طبیعی $r^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2$ یعنی مربع فاصله فضایی از مبدأ O با مختصات $(0, 0, 0)$ تا نقطه P با مختصات (x, y, z) در فضای سه بعدی اقلیدسی، به فضازمان است. اگرچه، اختلاف مهمی وجود دارد: r^2 غیرمنفی است: $r^2 \geq 0$ ، در صورتی که به سبب علامت منفی در ۴-۱۶، S^2 می تواند مقادیر منفی، مثبت، و یا صفر را اتخاذ کند که تعبیر آن در هر مورد اندکی متفاوت است. ما به نوبت به این موارد خواهیم پرداخت. برای بررسی این معانی، بهتر است که ۴-۱۶ را به صورت زیر بنویسیم

$$S^2 = -t^2 + R^2 \quad (19-4)$$



(الف)



(ب)

شکل ۸-۴ (الف) مجموعه نقطاتی که از دید ناظر A در $S^2 = -T^2$ صدق می‌کنند. طبق اندازه‌گیری ناظر B که نسبت به A در حرکت است، زمان بین مبدأ O و این سطح برابر T است. (ب) همان وضعیت که از دیدگاه ناظر B رسم شده است.

که در آن $R^2 \equiv X^2 + Y^2 + Z^2$ مربع فاصله فضایی از O به P طبق اندازه‌گیری A است، و یگاها طوری هستند که سرعت نور ۱ می‌شود (و از این رو غیرمنفی است: $R^2 \geq 0$). ما $R/t \equiv V$ را سرعت حرکت اندازه‌گیری شده جسمی که در امتداد خط راست از O به P می‌رود تعریف می‌کنیم. مقادیر منفی S^2 . فرض کنید $S^2 < 0$. در این صورت یک عدد مثبت حقیقی T وجود دارد به طوری که $S^2 = -T^2$. مجموعه نقطاتی را در نظر می‌گیریم که از دید ناظر A با $t > 0$ و $S^2 = -T^2$ مشخص می‌شوند [شکل ۸-۴ (الف)]. یک نقطه دلخواه P را روی این سطح انتخاب کنید. A با استفاده از معادله ۱۹-۴ رابطه بین زمان t و فاصله R بین O و P را به صورت زیر به دست می‌آورد

$$S^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 < t^2 \quad \Leftrightarrow \quad V^2 = (R/t)^2 < 1$$

یعنی، خط مستقیم OP از O به P حرکتی را نشان می دهد که سرعت آن نسبت به A از سرعت نور کمتر است. بنابراین OP می تواند جهانخط ناظری مانند B باشد که بین O و P به طور لخت حرکت می کند. در مختصات B یعنی (t', X', Y', Z') این جهانخط از $(X' = Y' = Z' = 0)$ ، به دست می آید از این رو P با مختصات $(t', 0, 0, 0)$ به ازای زمانی مانند t' تعیین می شود؛ مختصات O دوباره $(0, 0, 0, 0)$ است [شکل ۴-۸(ب)]. در این چارچوب، S'^2 بنابر ۴-۱۷ مقدار

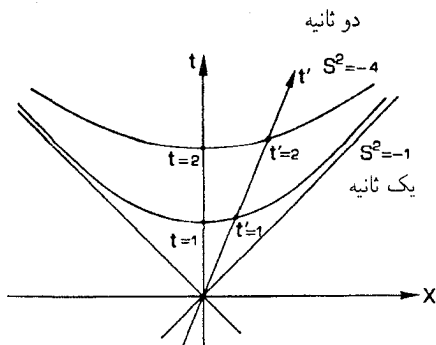
$$S'^2 = -t'^2 + 0 + 0 + 0 = -t'^2 \quad (۴-۲۰الف)$$

است. اما S^2 یک ناورداست، از این رو

$$S'^2 = S^2 = -T^2 \quad (۴-۲۰ب)$$

معادله های ۴-۲۰ نشان می دهند که $t' = T$ (زمان برای A و B در یک جهت حرکت می کند، از این رو ما جواب دیگر $t' = -T$ را نمی پذیریم). یعنی، B برحسب مختصات استاندارد خود (t', X', Y', Z') ، به P مختصات $(T, 0, 0, 0)$ را نسبت می دهد. اما این بدین معناست که او زمان بین O و P را، با استفاده از یک ساعت ایده آل استاندارد، T اندازه می گیرد (زیرا این درست همان معنای مختصه t است). البته این در مورد شکل ۴-۸(الف) نیز صادق است که نمایانگر وضعیت فضا زمان یکسانی است. بنابراین، برای ناظری که به طور لخت از O به P می رود هر نقطه P روی سطح $S^2 = -T^2$ به اندازه زمان T از مبدأ O دور است. بدین ترتیب این مجموعه نقاطی در فضا زمان است که طبق اندازه گیری ناظرهای لخت به فاصله ویژه زمان T از O (به طرف آینده O) قرار دارند. همین طور اگر $t < 0$ سطوحی را می یابیم که به فاصله ویژه زمان T از O به طرف گذشته قرار دارند. با درک این مطلب، استفاده از این ناوردا در اندازه گیری های ویژه زمانی که ناظرهای لخت انجام می دهند آسان است. مثلاً، نقطه P را در نظر بگیرید که طبق اندازه گیری A در $\{t$ برابر با ۵ ثانیه، X برابر با ۳ ثانیه نوری، و $\{Y = Z = 0$ قرار دارد. سپس او حساب می کند که $-۴^2 = -۱۶ = -۲۵ + ۹ = -۵^2 + ۳^2$. بنابراین P روی سطح "ویژه زمان برابر با ۴ ثانیه" به طرف آینده O قرار دارد. بدین ترتیب، ناظری مانند B که از O به P می رود در جهت $+x$ با سرعت $v/c = V = X/t = ۳/۵$ نسبت به A حرکت خواهد کرد و از O تا P ویژه زمان را ۴ ثانیه اندازه خواهد گرفت.

یک مورد با اهمیت ویژه وقتی است که $T = ۱$ ؛ در این صورت ما سطح $S^2 = -۱$ را به دست می آوریم که نماینده ویژه زمان واحد از O است. این سطح اطلاعاتی را در اختیار می گذارد که همواره برای مقایسه ویژه زمانی که در امتداد جهانخطهای مختلف اندازه گرفته می شوند به آن نیاز داشتیم اما فاقد آن بودیم؛ هر جا که یک جهانخط این سطح را قطع کند یک واحد بازه زمانی در امتداد آن جهانخط مشخص می شود، و با مقیاس قرار دادن آن تمام اندازه گیری های

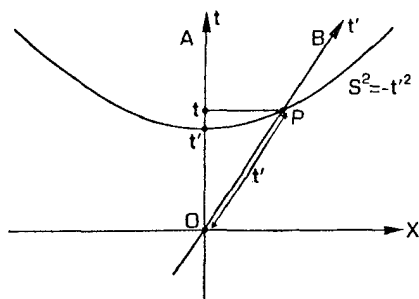


شکل ۴-۹ سطوحی در فضا-زمان که به فاصله یک واحد و دو واحد ویژه-زمان از مبدأ قرار دارند.

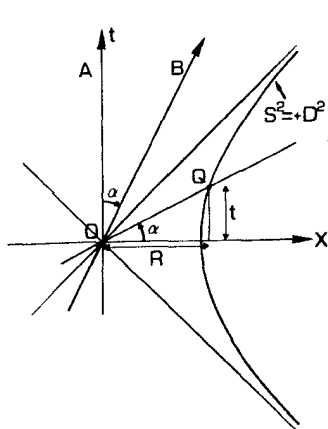
دیگر زمان در امتداد آن جهانخط به دست می‌آید. (فاصله دو واحد زمان از O در امتداد آن خط دو برابر خواهد بود و غیره؛ شکل ۴-۹ را ببینید). بدین ترتیب، این سطح نحوه اندازه‌گیری زمان در امتداد جهانخطهای لخت مختلفی را که از O می‌گذرند مدرج می‌کند (و این، همان‌گونه که همواره تأکید کردیم در نظر اول از فواصل نسبی در نمودار روشن نیست). بدین ترتیب، می‌توانیم سطوح $\{S^2 = \text{const.} < 0\}$ را به صورت "۱ ثانیه"، "۲ ثانیه" و غیره طبقه‌بندی کنیم، که رابطه بین ویژه‌زمانها در امتداد جهانخطهای مختلف را به صورت نمودار نمایش می‌دهند.

ناوردای S^2 به تعبیر معنای شکل ۴-۷ نیز کمک می‌کند: اگر یک سری خیز به بردار یکه زمان در چارچوب مرجع هر ناظری اعمال شود، یک بردار یکه باقی خواهد ماند و از این رو همواره مبدأ O را به نقطه‌ای مانند P روی سطح $S^2 = -1$ وصل خواهد کرد؛ در واقع تمام پیکانها در شکل ۴-۷ روی یک چنین سطحی قرار دارند (با شکل ۴-۹ مقایسه کنید). همین‌طور، این سطح این امکان را به ما می‌دهد که بسادگی ببینیم کدام رویداد در تاریخ A متناظر است با زمان t' که توسط ناظر متحرکی مانند B اندازه گرفته می‌شود، و بدین ترتیب آخرین قسمت از اطلاعات لازم در مورد اتساع زمان را به دست می‌دهد (شکل ۴-۱۰). بخصوص، روشن می‌کند که در این نمودارها یک ویژه‌زمان معلوم در امتداد محور ناظر ساکن با فاصله طولانیتری در امتداد جهانخط ناظر متحرک نمایش داده خواهد شد. مقادیر مثبت S^2 فرض کنید $S^2 > 0$. در این صورت عدد حقیقی مثبتی مانند D وجود دارد به طوری که $S^2 = D^2$. مجموعه نقاطی که از دیدگاه ناظر A با $S^2 = D^2$ داده می‌شود و یک رویداد دلخواه Q را روی این سطح در نظر می‌گیریم [شکل ۴-۱۱ (الف)]. در این صورت یک خط مستقیم از مبدأ O به Q وجود دارد؛ محورهای فضایی را طوری می‌چرخانیم که y و z در امتداد این خط ثابت باشند، یعنی جهت فضایی آن جهت x شود. A با استفاده از معادله ۴-۱۹ درمی‌یابد که زمان t و فاصله R رویداد Q از O به صورت زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند

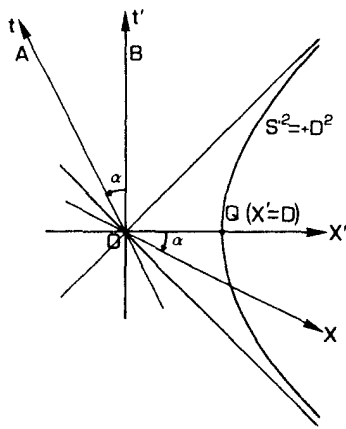
$$S^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 > t^2 \quad \Leftrightarrow \quad V^2 = (R/t)^2 > 1$$



شکل ۱۰-۴ برای یافتن اینکه چه رویدادی در تاریخ A با زمان t' در تاریخ B متناظر است، سطح $S^2 = -t'^2$ را رسم می‌کنیم. جهانخط ناظر B این سطح را در رویداد P قطع می‌کند که در زمان t در چارچوب A است.



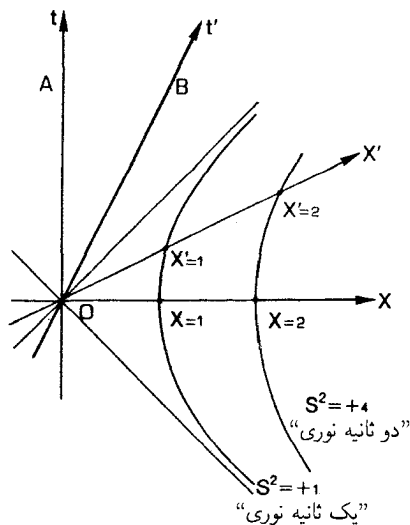
(الف)



(ب)

شکل ۱۱-۴ (الف) مجموعه رویدادهایی که از نظر A در $S^2 = D^2$ صدق می‌کنند. ناظر B فاصله رویداد Q را، که در چارچوب مرجع او با مبدأ O همزمان است، از O برابر D اندازه می‌گیرد. (ب) همان وضعیت که دوباره در چارچوب مرجع ناظر B ترسیم شده است.

یعنی، خط راست OQ از O تا Q نمایانگر حرکت با سرعتی بزرگتر از سرعت نور نسبت به A است. بنابراین OQ نمی‌تواند جهانخط ناظری مانند B باشد که بین O و Q به‌طور کُخت حرکت می‌کند. در صفحه (t, X) ، این خط با محور افقی زاویه α می‌سازد [شکل ۱۱-۴ (الف)]; در این صورت خطی که با محور عمودی زاویه α به‌طرف Q می‌سازد جهانخط ناظر B است که از نظر او رویدادهای O و Q همزمان هستند، یعنی خط OQ روی سطح آنتیت متعلق به او هستند. با یک تبدیل لورنتس مناسب به چارچوب مرجع B می‌رویم؛ در این صورت رویدادهای O و Q هر دو روی سطح آنتیت او $\{t' = 0\}$ قرار خواهند داشت [شکل ۱۱-۴ (ب)]. مختصات او

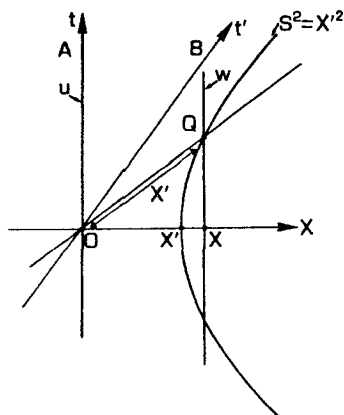


شکل ۴-۱۲ سطوحی که به فاصله فضایی یک واحد و دو واحد از مبدأ O قرار دارند.

برای $Q(t', X', Y', Z')$ برابر خواهند بود با $(0, X', 0, 0)$. محاسبه S'^2 برای این نقطه نشان می‌دهد که $S'^2 = X'^2$. اما چون این یک ناورداست، $S'^2 = S^2 = D^2$ از این رو $X' = D$. این به آن معناست که B فاصله Q از O را (در لحظه $t' = 0$) اندازه می‌گیرد. این نکته در شکل ۴-۱۱ (الف) نیز که همین مجموعه از رویدادها را در یک چارچوب مرجع دیگر نمایش می‌دهد صادق است؛ بدین ترتیب تمام نقاط سطح $S^2 = D^2$ طبق اندازه‌گیری هر ناظری که از نظرش این جابه‌جایی لحظه‌ای باشد به فاصله D از O قرار دارند. بنابراین ما می‌توانیم این سطوح را با اینکه به فاصله «۱ ثانیه نوری»، «۲ ثانیه نوری»، و غیره، از O قرار دارند مشخص کنیم.

به عنوان مثال، فرض کنید که طبق اندازه‌گیری A رویداد Q در $\{t \text{ برابر با } 3 \text{ ثانیه، } X \text{ برابر با } 5 \text{ ثانیه نوری، و } Y = Z = 0\}$ قرار دارد. در این صورت $4^2 = 16 = 25 - 9 = S^2 = -3^2 + 5^2$ پس Q روی سطح «با فاصله ۴ ثانیه نوری از O » قرار دارد. طبق اندازه‌گیری ناظر B که با سرعت $V = v/c = 3/5$ در جهت $+x$ حرکت می‌کند O و Q همزمان هستند و به فاصله فضایی ۴ ثانیه نوری از یکدیگر قرار دارند.

در اینجا هم سطح $S^2 = 1$ به فاصله فضایی واحد دارای اهمیت خاص است، زیرا این رویه با تعیین مقیاس فاصله واحد در امتداد هر یک از این مقطعهای فضایی مقیاس فواصل را در امتداد سطوح مختلف آنتیت در یک نمودار فضا-زمان به دست می‌دهد (شکل ۴-۱۲). ناوردایی بردارهای یکه فضایی در اثر خیز از شکل ۴-۷ پیداست، زیرا هرگاه یکی از این بردارها تحت تبدیل لورنتس قرار می‌گیرد روی همان سطحی که در ابتدا بود $\{S^2 = \text{const.}\}$ باقی می‌ماند. این ناوردا نیز آخرین قسمت از اطلاعات لازم برای درک کامل اثر انقباض طول را به ما می‌دهد.



شکل ۴-۱۳ یک میله صلب، که نسبت به ناظر A ساکن است، و دو انتهای آن u و w است. طبق اندازه‌گیری ناظر B که نسبت به A حرکت می‌کند طول آن X' است. برای یافتن طولی که ناظر A برای میله اندازه می‌گیرد، سطح $S^2 = X'^2$ را رسم می‌کنیم. این سطح رویه همزمانی B را پس از عبور از O در Q قطع می‌کند که فاصله آن از مبدأ در چارچوب مرجع A برابر X است. بنابراین A طول میله را X اندازه می‌گیرد.

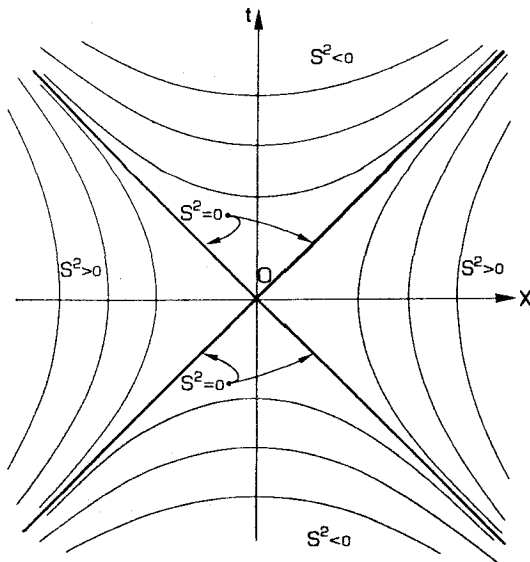
زیرا نشان می‌دهد که طبق اندازه‌گیری ناظر ساکن A کدام طول با طول "انقباض یافته" ای که ناظر متحرک B اندازه می‌گیرد برابر است (شکل ۴-۱۳).

مقادیر صفر S^2 . اکنون فرض کنید $S^2 = 0$. اگر L یک نقطه دلخواه روی این سطح باشد. A از معادله ۴-۱۹ درمی‌یابد که زمان t و فاصله R نقطه L از O به صورت زیر باهم مربوط می‌شوند

$$S^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 = t^2 \quad \Leftrightarrow \quad V^2 = (R/t)^2 = 1$$

یعنی، خط راست OL از O به L نمایانگر حرکت با سرعت نور نسبت به A است. بدین ترتیب این سطح همان مخروط نور است که A برای رویداد O اندازه می‌گیرد. از آنجا که S^2 ناورد است، هر ناظر دیگری مانند B هم درمی‌یابد که $S'^2 = 0$: این مجموعه رویدادها هم همان مخروط نوری است که او برای رویداد O تعیین می‌کند. یعنی، ناوردایی $S^2 = 0$ برای ناظرهای مختلف چیزی جز اصل ناوردایی سرعت نور برای تمام ناظرها نیست.

خلاصه. تمام ناظرها در مورد مقدار ناوردای S^2 توافق دارند. سطوح $S^2 = \text{const.}$ در شکل ۴-۱۴ رسم شده‌اند؛ این سطوح (هرگاه S^2 منفی باشد) ویژه‌زمانها از O، و (هرگاه S^2 مثبت باشد) فاصله‌های فضایی لحظه‌ای از O، و (هرگاه S^2 صفر باشد) مخروط نوری $C^+(O)$ مربوط به O را نمایش می‌دهند. بهتر است به دلیل زیر آخری را فاصله (فضا زمان) صفر از O بنامیم. با گرفتن حد نزدیک شدن Q به $C^+(O)$ ، Q با O همزمان و فاصله فضایی OQ (هرگاه از ناحیه‌ای



شکل ۱۴-۴ سطوح $\{S^2 = \text{const.}\}$ با فاصله فضازمانی ثابت از مبدأ O که در یک نمودار فضازمان رسم شده‌اند. سطوح $S^2 = 0$ مخروط نور مبدأ هستند.

که در آن $S^2 > 0$ نزدیک شویم) به صفر میل می‌کند یا (هرگاه از ناحیه‌ای که در آن $S^2 < 0$ نزدیک شویم) ویژه‌زمان اندازه‌گیری شده OO' به صفر میل می‌کند. با استفاده از این ناوردا می‌توان به‌سادگی اندازه‌گیری‌های فاصله فضایی و ویژه‌زمان را که ناظرهای لخت مختلف که از O عبور می‌کنند با هم مقایسه کرد.

تمرینها

۸-۴ کمیت S^2 را برای موارد زیر محاسبه کنید (الف) $t = 4, X = 2, Y = 3, Z = 0$ ؛ (ب) $t = 2, X = 4, Y = 0, Z = 5$ ؛ (ج) $t = 5, X = 3, Y = 0, Z = 4$. در هر مورد نتایج را برحسب رابطه بین مبدأ مختصات O و نقطه P با مختصات گفته شده تعبیر کنید. با استفاده از معادله‌های ۵-۴ ناوردایی S^2 را در این موارد، در صورتی که $v/c = 1/2$ ، صریحاً اثبات کنید.

۹-۴ اگر مخروط نور را با قرار دادن $Y = Z = 0$ بر صفحه (t, X) تصویر کنیم، $S^2 = 0$ به صورت $t^2 - x^2 = 0$ درمی‌آید. نشان دهید که حل به صورت $t = \pm X$ است. به‌طور صریح نشان دهید که این پرتوها تحت ۵-۴ ناوردا هستند.

۱۰-۴ فرض کنید که یک علامت نوری در رویداد فضازمان $(X = 0, t = 0)$ گسیل و در رویداد فضازمان $B (X = 1, t = 1)$ جذب می‌شود. آیا S^2 برای B صفر است؟ اکنون

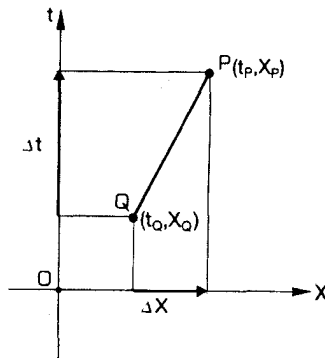
فرض کنید که نور توسط آینه‌ای در B بازتابیده می‌شود و در رویداد C ($X = 0, t = 2$) جذب می‌شود. آیا S^2 برای C صفر است؟

۱۱-۴ بحث در مورد واپاشی موثون در بخش ۳-۶ را دوباره در نظر می‌گیریم. با کمک کمیت‌هایی که در چارچوب زمین معلوم‌اند ویژه‌زمان لازم برای اینکه موثونها از جو زمین عبور کنند را محاسبه کنید. از این زمان برای پیش‌بینی کسری از موثونها که به سطح دریا می‌رسند استفاده کنید.

ناوردای ΔS^2

دیدیم که ناوردای S^2 رویه‌هایی را در فضا زمان تعیین می‌کند که "به فاصله ثابت" از نقطه O با مختصات $(0, 0, 0, 0)$ قرار دارند، و بدین وسیله اندازه‌گیریهای ساعت در مسیرهای لخت که از O عبور می‌کنند، اندازه‌گیریهای فضایی بر رویه‌های همزمانی و جهت‌های پرتوهای نور از آن رویداد را تعیین می‌کند، آیا می‌توانیم ناوردای مشابهی را پیدا کنیم که ما را از چنین اندازه‌گیریهایی که بر مبنای یک نقطه دلخواه در فضا زمان مانند Q قرار دارند مطلع سازد؟

یک مثال در نشان دادن راهی که باید در پیش گیریم مفید خواهد بود. فرض کنید که سفینه‌های تجسسی ثابت کرده‌اند که در یک انفجار عظیم ابرنواختر، ستاره‌ای در رویداد Q که مختصات آن $(x_Q^a) = (2, 3, 1, 0)$ است منفجر شده است و در سیاره یک ستاره نزدیک به آن دایناسورها در یک رویداد P فاجعه‌آمیز منقرض شده‌اند، مختصات P عبارت‌اند از $(x_P^a) = (3, 1, 2, 0)$. سؤال این است: آیا این امکان وجود دارد که انفجار ابرنواختر مسؤول انقراض دایناسورها باشد؟ یک راه برای رسیدن به جواب این است که توجه داشته باشیم که جابه‌جایی از Q به P (شکل ۴-۱۵) دارای مختصات $(y^a) = (3 - 2, 1 - 3, 2 - 1, 0 - 0) = (1, -2, 1, 0)$ است، یعنی اینها مؤلفه‌های موضع P نسبت به Q هستند. بدین ترتیب، اگر Q را مبدأ مختصات



شکل ۴-۱۵ یک انفجار ابرنواختر در رویداد Q رخ می‌دهد و دایناسورها در یک سیاره مجاور در رویداد P منقرض می‌شوند. مختصه زمانی این رویدادها به اندازه Δt و مختصه فضایی آنها X به اندازه ΔX با یکدیگر تفاوت دارند.

بگیریم، می‌توانیم ناوردای متناظر ΔS^2 برای این جابه‌جایی را با استفاده از معادله ۴-۱۶ محاسبه کنیم با این تفاوت که اکنون طرف چپ را با ΔS^2 نمایش می‌دهیم (که معنای آن فقط این است که بازه بر مبنای Q قرار دارد و نه O) و طرف راست را به‌ازای مؤلفه‌های جابه‌جایی $(1, -2, 1, 0)$ از Q به P حساب کنیم. به‌طور صریح

$$\Delta S^2 = -1^2 + (-2)^2 + 1^2 + 0^2 = -1 + 4 + 1 = +4$$

چون این مقدار مثبت است، جابه‌جایی از Q تا P فضاگونه است (نمایانگر فاصله فضایی برابر با دو سال نوری)؛ بنابراین هیچ اثر علی که از Q با سرعتی کمتر و یا برابر با سرعت نور حرکت کند، نمی‌تواند در آنچه که در P اتفاق می‌افتد مؤثر باشد. انقراض دیناسورها به‌علت انفجار ابرنواختر نبوده است.

این مثال روشن می‌کند که توجه به جابه‌جایی از Q به P [با مختصات (y^a) در مثال بالا] مفید است. برای اینکه این مطلب را به‌طور کلیتر بررسی کنیم، دو نقطه P و Q در فضا زمان را در نظر می‌گیریم که یک ناظر لخت A به ترتیب مختصات (t_P, X_P, Y_P, Z_P) و (t_Q, X_Q, Y_Q, Z_Q) را به‌آنها نسبت می‌دهد (مانند شکل ۴-۱۵). وقتی یک تبدیل لورنتس ۴-۲ را برای چارچوب ناظر دوم B انجام می‌دهیم، این نقاط به ترتیب دارای مختصات (t'_P, X'_P, Y'_P, Z'_P) و (t'_Q, X'_Q, Y'_Q, Z'_Q) خواهند شد. محاسبه نحوه رفتار این جابه‌جایی از Q تا P ساده است؛ نتیجه ۴-۲۱ ج است، که به‌فاصله ناوردا بین این نقاط منجر می‌شود (رابطه ۴-۲۲). جزئیات به قرار زیر است.

مختصات قدیم و جدید P به‌طریق زیر با هم ارتباط دارند

$$t_P = \gamma(v)(t'_P + V X'_P), \quad Y_P = Y'_P$$

$$X_P = \gamma(v)(X'_P + V t'_P), \quad Z_P = Z'_P$$

و مختصات قدیم و جدید Q به‌صورت زیر با یکدیگر مربوط‌اند

$$t_Q = \gamma(v)(t'_Q + V X'_Q), \quad Y_Q = Y'_Q$$

$$X_Q = \gamma(v)(X'_Q + V t'_Q), \quad Z_Q = Z'_Q$$

با کم کردن معادله‌ها از یکدیگر به‌دست می‌آوریم

$$t_P - t_Q = \gamma(v)\{(t'_P - t'_Q) + V(X'_P - X'_Q)\}, \quad Y_P - Y_Q = Y'_P - Y'_Q$$

$$X_P - X_Q = \gamma(v)\{(X'_P - X'_Q) + V(t'_P - t'_Q)\}, \quad Z_P - Z_Q = Z'_P - Z'_Q$$

کار کردن با این عبارت کمی مشکل است، بنابراین ما از نماد Δ استفاده می‌کنیم که تغییر یک کمیت بین P و Q را نمایش می‌دهد. در این صورت

$$\Delta t \equiv t_P - t_Q, \quad \Delta X \equiv X_P - X_Q, \quad \Delta Y \equiv Y_P - Y_Q, \quad \Delta Z \equiv Z_P - Z_Q \quad (۲۱-۴ \text{ الف})$$

$$\Delta t' \equiv t'_P - t'_Q, \quad \Delta X' \equiv X'_P - X'_Q, \quad \Delta Y' \equiv Y'_P - Y'_Q, \quad \Delta Z' \equiv Z'_P - Z'_Q \quad (۲۱-۴ \text{ ب})$$

تغییر مختصات (t, X, Y, Z) و (t', X', Y', Z') بین P و Q هستند؛ و سرانجام به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \Delta t &= \gamma(v)(\Delta t' + V\Delta X'), & \Delta Y &= \Delta Y' \\ \Delta X &= \gamma(v)(\Delta X' + V\Delta t'), & \Delta Z &= \Delta Z' \end{aligned} \quad (۲۱-۴ \text{ ج})$$

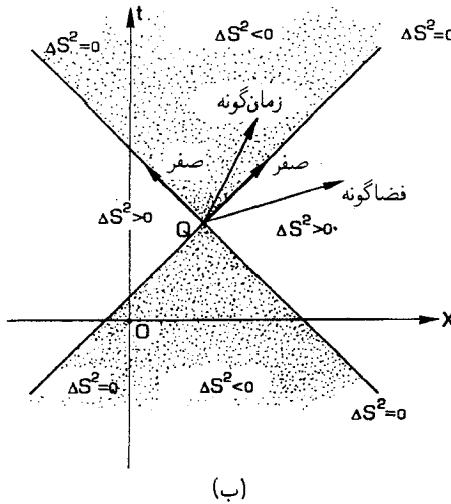
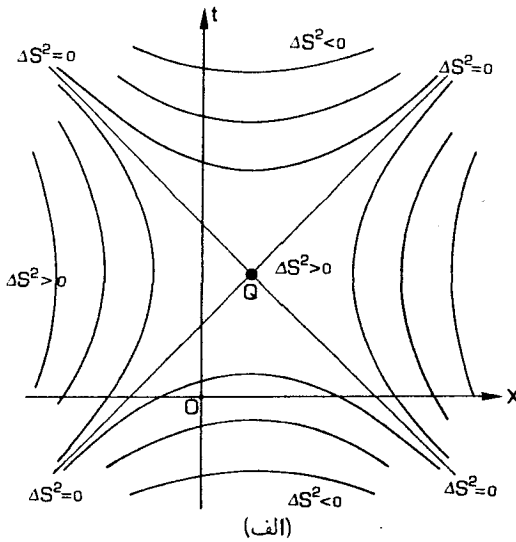
این هم دقیقاً شکل تبدیل لورنتس ۲-۴ را دارد، اما ΔX به جای X قرار گرفته است و غیره. اکنون با در نظر داشتن تعریف ۴-۱۶، نتیجه ناوردای ۴-۱۸ پیامد مستقیم ۴-۲ است. درست به همان شکل، تعریف می‌کنیم

$$\Delta S^2 \equiv -(\Delta t)^2 + (\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 + (\Delta Z)^2 \quad (۲۲-۴)$$

در این صورت از ۲۱-۴ ج نتیجه می‌شود که این کمیت به‌ازای هر تغییر در چارچوب مرجع یک ناورداست.

$$\Delta S'^2 = \Delta S^2 \quad (۲۳-۴)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که فاصله فضازمانی نقطه P از نقطه Q ناورداست. بدین ترتیب، درست مانند قبل، می‌توانیم سطوح با فاصله ثابت از Q را که نقطه‌ای دلخواه در فضازمان است رسم کنیم، و نتیجه را درست مانند قبل تعبیر کنیم بجز اینکه Q را به جای O قرار می‌دهیم [شکل ۴-۱۶ (الف) را ببینید]. به‌ویژه، اگر $\Delta S^2 < 0$ ، در این صورت جابه‌جایی QP نماینده حرکتی با سرعت کمتر از سرعت نور است، و از این رو می‌تواند تاریخ یک ذره و یا ناظری پرجرم باشد [شکل ۴-۱۶ (ب)]؛ در این صورت آن را زمان‌گونه می‌گوییم. اگر $\Delta S^2 = 0$ ، جابه‌جایی نماینده یک حرکت با سرعت نور است، و از این رو می‌توانیم مسیر یک ذره با جرم سکون صفر باشد (مثلاً یک فوتون)؛



شکل ۱۶-۴ (الف) سطوح $\{\Delta S^2 = \text{const.}\}$ که نماینده فاصله‌های فضا زمانی ثابت از رویداد Q هستند. (ب) جابه‌جاییهای زمان‌گونه از Q (جهانخطهای ممکن ناظرها و ذره‌های پرجرم) آنهایی هستند که در موردشان $\Delta S^2 < 0$ ؛ جابه‌جاییهای صفر (که نماینده حرکت با سرعت نورند) آنهایی هستند که در موردشان $\Delta S^2 = 0$ ؛ و جابه‌جاییهای فضاگونه آنهایی هستند که برایشان $\Delta S^2 > 0$.

در این صورت آن‌را صفر یا نورگونه می‌گوییم. اگر $\Delta S^2 > 0$ ، این جابه‌جایی نمی‌تواند نماینده حرکت یک ذره باشد، زیرا این حرکتی خواهد بود با سرعتی بیش از سرعت نور؛ در عوض نماینده جابه‌جایی فضایی لحظه‌ای یک ناظر خواهد بود. در این صورت آن‌را فضاگونه می‌گوییم.

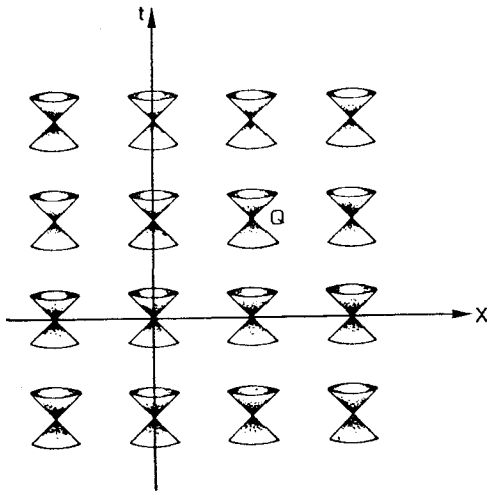
اینها صورتهای کلیتر نتایج قبل هستند؛ در واقع، اگر در اینجا O [با مختصات $(0, 0, 0, 0)$] را به جای Q قرار دهیم محاسبه‌های قبلی نتیجه می‌شوند، با مثال ۴-۱۲ مقایسه کنید. این فرمولبندی جدید چندین مزیت دارد. یکی از آنها این است که عبارت ۴-۲۲ نه تنها در اثر خیزها و چرخش محورها ناورداست، بلکه تحت انتقال نیز ناورداست: یعنی با تغییر مبدأ مختصات و قرار دادن

$$t' = t + t_0, \quad X' = X + X_0, \quad Y' = Y + Y_0, \quad Z' = Z + Z_0.$$

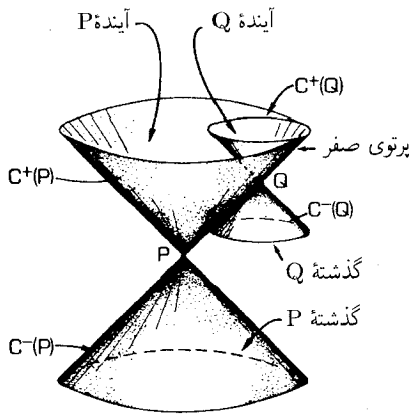
که در آن t_0, X_0, Y_0, Z_0 ثابتهای دلخواهی هستند، مقادیر ۴-۲۱ الف و ۴-۲۱ ب و همچنین مقدار ۴-۲۲ بدون تغییر باقی خواهند ماند. بدین ترتیب کمیت ΔS^2 ، یعنی فاصله فضازمان بین Q و P، تحت انتقال، خیز، و چرخش ناورداست. به کمک این ناوردا می‌توانیم اختلاف فضایی وزمانی هر دو نقطه در فضازمان را، اندازه‌گیری هر ناظر لخت در چارچوب A در نظر بگیریم بدون اینکه مجبور شویم تغییر مختصات صریحی در چارچوب آن ناظر انجام بدهیم. به عنوان مثال، فرض کنید که ذره B ابتدا از رویداد Q به مختصات آن طبق اندازه‌گیری A (برحسب ثانیه) برابر است با $(5, 1, 1, 1)$ و سپس از رویداد P با مختصات $(7, 2, 2, 2)$ عبور کند؛ فاصله زمانی بین این دو رویداد طبق اندازه‌گیری B چقدر است؟ فوراً می‌بینیم که $\Delta t = 7 - 5 = 2$ و $\Delta X = \Delta Y = \Delta Z = 2 - 1 = 1$ بدین ترتیب $\Delta S^2 = -1^2 = -1 = -1 + 1 + 1 + 1 = -4 + 1 + 1 + 1$. بنابراین این در واقع می‌تواند مسیر یک ذره باشد (زیرا نتیجه منفی است) و زمانی که ذره بین Q و P اندازه می‌گیرد برابر ۱ ثانیه است. همچنین، به کمک کمیت ΔS^2 می‌توانیم سرعت نور را در هر رویداد Q با تعیین آن در رویدادهایی مانند P در اطراف Q که برای آنها $\Delta S^2 = 0$ است مشخص کنیم. اگر این کار را برای تعداد زیادی نقطه مانند Q انجام دهیم، می‌توانیم ببینیم که چگونه مخروطهای نوری در این نقطه‌های مختلف به یکدیگر مربوط می‌شوند؛ در مورد فضازمان تخت نسبت خاص که اکنون بررسی می‌کنیم این مخروطهای نوری با هم موازی هستند [شکل ۴-۱۷ الف].

تمرینها

۴-۱۲ ما مختاریم که هر نقطه در فضازمان را به عنوان مبدأ O مختصاتمان انتخاب کنیم. در محاسبه بالا نقطه Q را به عنوان مبدأ انتخاب کنید. در این صورت $(X_Q^0) = (0)$ ، یعنی، طبق تعریف $t_Q = X_Q = Y_Q = Z_Q = 0$ و در نتیجه محاسبه بالا که به ۴-۲۳ می‌انجامد دقیقاً به محاسبه $t'_Q = X'_Q = Y'_Q = Z'_Q = 0$ و در نتیجه محاسبه بالا که به ۴-۱۸ انجامید تبدیل می‌شود. نشان دهید که تمام نتایجی که از ۴-۱۸ به‌ازای مقادیر مثبت، منفی، و صفر S^2 ، که فاصله از O تلقی می‌شود، به‌دست می‌آید، در مورد ΔS^2 نیز که فاصله از Q تلقی می‌شود، معتبرند.



(الف)



(ب)

شکل ۱۷-۴ (الف) در یک فضا-زمان تخت با مختصات استاندارد، در هر نقطه مخروط‌های نور با یکدیگر موازی هستند. (ب) آینده نقطه‌ای مانند Q که روی مخروط صفر آینده $C^+(P)$ متعلق به نقطه P قرار دارد، در آینده P است؛ مخروط‌های صفر Q مماس بر مخروط صفر P هستند.

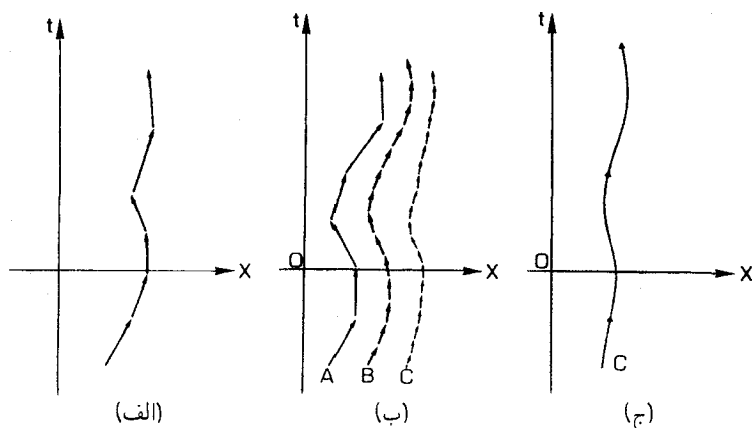
۱۳-۴ مخروط نور $C^+(P)$ رویداد P با پرتوهای نوری که از P عبور می‌کنند تولید می‌شود. نشان دهید که مخروط‌های نور هر نقطه Q روی این پرتوهای نور بر $C^+(P)$ مماس‌اند [شکل ۱۷-۴ (ب)]. برای این کار نشان دهید که (الف) قسمت داخلی $C^+(Q)$ در درون $C^+(P)$ قرار دارد؛ (ب) قسمت داخلی $C^-(Q)$ در بیرون $C^+(P)$ قرار دارد؛ و (ج) مخروط‌های $C^+(Q)$ و $C^-(Q)$ مخروط $C^+(P)$ را دقیقاً در امتداد پرتو نوری که از P به Q می‌رود قطع می‌کنند. [اعتبار این ویژگیها در فضا-زمانهای خمیده نیز حائز اهمیت خواهد بود.]

فرم متریک

تا اینجا نوردای ΔS^2 را برای خط راست بین دو نقطه دلخواه P و Q در فضازمان تعیین کردیم. اکنون می‌خواهیم نتیجه‌ها را به هر مسیری از Q به P تعمیم دهیم. به طوری که مثلاً بتوانیم زمان اندازه‌گیری شده بین رویدادهای Q و P را توسط ناظری با شتاب دلخواه تعیین کنیم. ابتدا نتیجه‌ها را با در نظر گرفتن یک مسیر قطعه‌قطعه مستقیم از Q به P و سپس با در نظر گرفتن یک مسیر خمیده کلی بین آنها تعمیم می‌دهیم.

یک مسیر در فضازمان را در نظر بگیرید که از خطوط مستقیم متصل به هم ساخته شده است [شکل ۱۸-۴ الف]. فرض می‌کنیم که تمام این پاره‌خطها زمان‌گونه‌اند، یعنی $\Delta S^2 < 0$. در این صورت هر یک از آنها می‌تواند نماینده یک حرکت لخت (یعنی بدون شتاب) یک ناظر یا یک ذره باشد، از این رو تمامی مسیر نماینده تاریخ ناظری است که به طور لخت حرکت می‌کند بجز تعداد دفعات معدودی که ناگهان شتاب می‌گیرد و سرعتش را تغییر می‌دهد (مثلاً با شلیک یک موشک بسیار قوی). در هر پاره‌خط لخت ویژه‌زمان $\Delta\tau$ طبق اندازه‌گیری ناظر برابر است با $\Delta\tau = (-\Delta S^2)^{1/2}$ که در آن ΔS^2 از ۴-۲۲ به دست می‌آید. در حالت ایده‌آل مورد نظر ما، در طی شتاب‌گیری (که آن را لحظه‌ای در نظر می‌گیریم) هیچ ویژه‌زمانی سپری نمی‌شود. بدین ترتیب کل ویژه‌زمان اندازه‌گیری شده τ که در امتداد مسیر سپری می‌شود برابر است با

$$\tau = \sum (-\Delta S^2)^{1/2} = \sum (\Delta t^2 - \Delta X^2 - \Delta Y^2 - \Delta Z^2)^{1/2} \quad (24-4)$$



(الف)

(ب)

(ج)

شکل ۱۸-۴ الف) یک مسیر زمان‌گونه که از پاره‌خطهای مستقیم (لخت) زمان‌گونه تشکیل شده است. (ب) مسیریابی که از پاره‌خطهای مستقیم و (بنابراین لخت) کوچک و کوچکتر تشکیل شده‌اند. (ج) حد این مسیرها یک مسیر هموار زمان‌گونه است.

که در آن علامت \sum جمع این عبارت روی تمام پاره‌خطهای لخت است (یعنی، ویژه‌زمان کل در امتداد مسیر به‌سادگی از جمع ویژه‌زمانهایی که در امتداد این پاره‌خطها اندازه‌گیری شده‌اند به‌دست می‌آید)؛ در اینجا و در آنچه بعد خواهد آمد، " Δt " یعنی " $(\Delta t)^2$ " و غیره. این به‌روشنی یک ناورداست (زیرا هر جمله در جمع یک ناورداست). به‌عنوان مثال، حرکت دوقلوها در "پارادوکس دوقلوها" را دوباره در نظر بگیرید (بخش ۳-۴). A می‌بیند که دوقلوی او B به مدت ده سال با سرعت $c/5$ از او دور می‌شود و به‌فاصله ۸ سال نوری از او می‌رسد، و بازگشت او ده سال دیگر طول می‌کشد. بدین ترتیب او روی یک ژئودزیک شکسته حرکت می‌کند که در آن (t, X) از $(0, 0)$ به $(10, 8)$ و به $(20, 0)$ می‌رود Y و Z را در نظر نمی‌گیریم، زیرا آنها ثابت می‌مانند و از این رو در ΔS^2 سهمی ندارند. در قطعه اول $\Delta t = 10 - 0 = 10$ و $\Delta X = 8 - 0 = 8$. در قطعه دوم $\Delta t = 20 - 10 = 10$ و $\Delta X = 0 - 8 = -8$. بدین ترتیب

$$\begin{aligned}\tau &= (10^2 - 8^2)^{1/2} + \{10^2 - (-8)^2\}^{1/2} = (100 - 64)^{1/2} + (100 - 64)^{1/2} \\ &= (36)^{1/2} + (36)^{1/2} = 6 + 6 = 12\end{aligned}$$

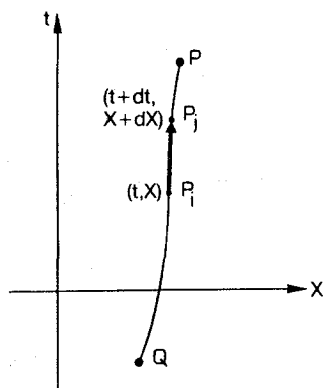
که نتیجه قبلی ما را تأیید می‌کند. در امتداد مسیر مستقیم بین نقاط ابتدایی و انتهایی که A می‌بیند، داریم $\Delta t = 20 - 0 = 20$ و $\Delta X = 0 - 0 = 0$ ؛ از این رو $\tau = (20^2 - 0^2)^{1/2} = 20$ همان‌گونه که انتظار می‌رود.

به‌کمک عبارت ۴-۲۴ می‌توانیم اندازه‌گیریهای ساعت در امتداد هر مسیر زمان‌گونه در فضا-زمان را که از تعدادی متناهی پاره‌خطهای لخت ساخته شده است تعیین کنیم. اما مسیرهای کلی ممکن است جهتی داشته باشند که پیوسته تغییر کند، و ما می‌خواهیم ویژه‌زمان را در امتداد هر مسیر قابل قبول یک ناظر تعیین کنیم. برای این کار ما مسیرهای قطعه قطعه لخت از Q به P را در نظر می‌گیریم که این پاره‌خطها به تدریج کوچک و کوچکتر می‌شوند [شکل ۴-۱۸ (ب)]. در حالت حدی که این پاره‌خطها کوچک می‌شوند و به صفر میل می‌کنند ما یک مسیر هموار زمان‌گونه C به‌دست می‌آوریم [شکل ۴-۱۸ (ج)]. تا زمانی که مقدار حدی برای ΔS^2 ، وقتی حد را حساب می‌کنیم، برای هر پاره‌خط منفی بماند، این مسیر می‌تواند نماینده حرکت یک ناظر از Q به P باشد، و ویژه‌زمان τ که طبق اندازه‌گیری ناظری که در امتداد مسیر حرکت می‌کند عبارت است از حد عبارت ۴-۲۴. معمولاً این حد را به‌صورت انتگرال خط می‌نویسیم

$$\tau = \int (-ds^2)^{1/2} \quad (۴-۲۵ \text{ الف})$$

که در آن

$$ds^2 \equiv -dt^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \quad (۴-۲۵ \text{ ب})$$



شکل ۱۹-۴ دو نقطه P_1 و P_2 روی یک خم زمان‌گونه هموار با مختصاتی که اختلاف آنها dt و dX است.

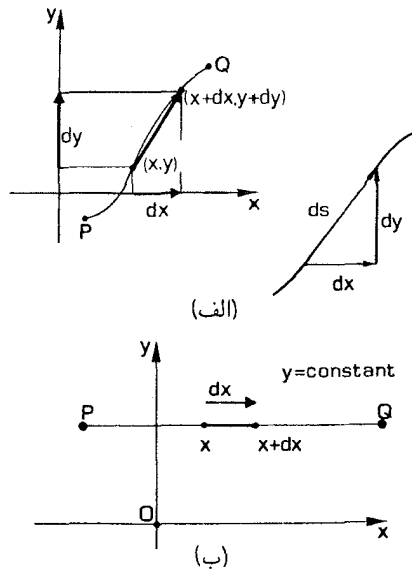
یا به صورت هم‌ارز آن

$$ds^2 = -dt^2 + (dx^2 + dy^2 + dz^2)/c^2 \quad (۴-۲۵ج)$$

که در آن " dt^2 " به معنای $(dt)^2$ است و غیره. (اگر به جای ds^2 می‌نوشتیم dS^2 با نمادگذاری قبلی سازگارتر می‌بود؛ اما استفاده از نماد ds^2 تقریباً یک قرارداد عمومی است، از این رو در اینجا از آن استفاده می‌کنیم.) این چیزی نیست جز یک توصیف ریاضی حد عبارت ۴-۲۴ وقتی که طول تمام پاره‌خطهای لخت بینهایت کوچک می‌شوند و مسیرهای قطعه‌قطعه لخت به جهانخط هموار C میل می‌کنند. می‌توان آن را نماینده مسیر C از Q به P دانست که از پاره‌خطهای "بینهایت کوچک"، که هر یک از یک جابه‌جایی (dt, dX, dY, dZ) از نقطه P_i به مختصات (t, X, Y, Z) به نقطه P_j با مختصات $(t + dt, X + dX, Y + dY, Z + dZ)$ تشکیل شده‌اند (شکل ۴-۱۹)، که هر یک از آنها (طبق ۴-۲۴) به اندازه ویژه‌زمان $d\tau = (-ds^2)^{1/2}$ [عبارت ۴-۲۵(ب)] در زمان کل τ سهیم است. پس (۴-۲۵الف) به روشنی می‌گوید که زمان کل اندازه‌گیری شده در امتداد مسیر جمع تمام این سهمهاست. (با پیوست الف مقایسه کنید). عبارات ناوردایی مانند (۴-۲۵ب و ۴-۲۵ج) به فرمهای متریک یا بازها معروف‌اند.

صفحه دوعبده اقلیدسی. این مفهوم را اکنون با در نظر گرفتن نحوه اندازه‌گیری طول در امتداد یک خم دلخواه C در صفحه دوعبده اقلیدسی معمولی نشان می‌دهیم. ابتدا استفاده از مختصات دکارتی استاندارد (x, y) [شکل ۴-۲۵(الف)] را در نظر می‌گیریم. این طول را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$L = \int (ds^2)^{1/2} \quad (۴-۲۶الف)$$

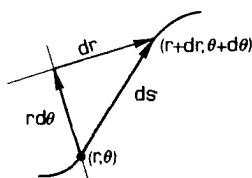
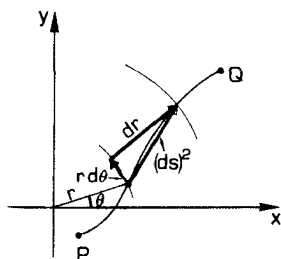


شکل ۴-۲۰ (الف) خم C در صفحه اقلیدسی دوبعدی بین نقاط P و Q . اختلاف مختصات نقاط مجاور dx و dy است و فاصله بین آنها را می‌توان با استفاده از قضیه فیثاغورس به دست آورد. (ب) خمی که برای آن $dy = 0$ (یعنی، $y = \text{const.}$) و x یک پارامتر است.

که در آن

$$ds^2 \equiv dx^2 + dy^2 \quad (۴-۲۶)$$

”جذر گرفتن“ از ۴-۲۶ الف مناسب نیست، زیرا عبارت داخل پرانتز در واقع عبارت کامل ds^2 است که در ۴-۲۶ ب آمده است. در اینجا هم ما طول کل را متشکل از پاره‌خطهایی می‌دانیم که نماینده جابه‌جاییها از (x, y) به $(x + dx, y + dy)$ به طول $(ds^2)^{1/2}$ هستند، که در آن ds^2 از ۴-۲۶ ب به دست می‌آید. این یک انتگرال خط است که طول هر خم در صفحه را محاسبه می‌کند (همین‌طور، عبارت ۴-۲۵ یک انتگرال خط است که ویژه‌زمان را در امتداد هر مسیر زمان‌گونه در فضا-زمان حساب می‌کند). این نیز یک ناورد است که تمام ناظرها در مورد آن توافق دارند (زیرا هر یک از ds^2 ‌های بینهایت کوچک یک ناورد است)؛ در واقع این چیزی جز استفاده مکرر از قضیه فیثاغورس ۴-۲۶ ب در مورد جزء خطهای کوچک برای برآورد طول تمام خط نیست. عبارت ۴-۲۶ طول هر قسمت از پاره خم (dx, dy) را می‌دهد. برای درک معنای آن، بهتر است که ابتدا حالت خاص این عبارت را در مورد قطعاتی از منحنی که روی آن فقط x یا فقط y تغییر می‌کند در نظر بگیریم. مورد اول را بررسی می‌کنیم: اگر در امتداد منحنی فقط x تغییر کند، در این صورت y ثابت است و بنابراین در تمام طول منحنی $dy = 0$ [شکل ۴-۲۰ (ب)].



شکل ۴-۲۱ منحنی شکل ۴-۲۰ (الف) که اکنون با مختصات قطبی r و θ توصیف شده است. فاصله بین نقاط مجاور اکنون از قضیه فیثاغورس از جابه‌جاییهای متعامد dr و $d\theta$ که اندازه آنها به ترتیب dr و $r d\theta$ است به دست می‌آید.

عبارت ۴-۲۶ در این حالت به صورت

$$L = \int (dx^2 + \circ)^{1/2} = \int dx = x_P - x_Q$$

درمی‌آید. یعنی، فاصله در امتداد این منحنی تنها با تغییر مختصه x اندازه گرفته می‌شود، از این رو ۴-۲۶ به ما می‌گوید که x در واقع مختصه‌ای است که مستقیماً فاصله را در امتداد خطهای $\{y = \text{const.}\}$ نمایش می‌دهد. همین‌طور، y مختصه‌ای است که مستقیماً فاصله را در امتداد خطهای $\{x = \text{const.}\}$ نشان می‌دهد. این مطلب برای مختصات عمومیتز صادق نیست. به عنوان مثال، به مختصات قطبی در صفحه (r, θ) می‌رویم که در آن r فاصله از مبدأ و θ زاویه با محور x هاست (شکل ۴-۲۱). اکنون عبارت زیر جایگزین ۴-۲۶ ب می‌شود

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (۴-۲۷)$$

برای مشاهده درستی آن توجه کنید که در امتداد خطها {که فقط r تغییر می‌کند} مختصه θ ثابت است؛ بنابراین در امتداد این خط $d\theta = 0$. در این صورت ۴-۲۷ نشان می‌دهد که

$$ds^2 = dr^2 + 0 = dr^2$$

اما این مربع فاصله طی شده است. بدین ترتیب در امتداد این خمها (همانگونه که تعریفشان اقتضا می‌کند) r مستقیماً فاصله را اندازه می‌گیرد. از طرف دیگر، در امتداد خمها {بی که فقط θ تغییر می‌کند} مختصه r ثابت است و بنابراین در امتداد این خمها $dr = 0$. در این صورت $4-27$ نشان می‌دهد که

$$ds^2 = 0 + r^2 d\theta^2 = r^2 d\theta^2$$

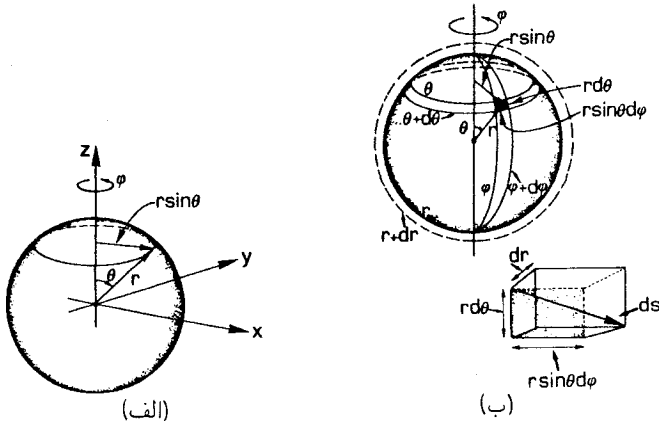
یعنی، فاصله در امتداد جزء خم که با $d\theta$ تعریف می‌شود $r d\theta$ است و از آنجا که r ثابت است برای تمام جزء خمها یکسان است، فاصله در امتداد منحنی به جای اینکه فقط $\theta_P - \theta_Q$ باشد $r(\theta_P - \theta_Q)$ است. این با درک عادی ما از تعریف زاویه (که با رادیان اندازه گرفته می‌شود) دقیقاً سازگار است. سرانجام، $4-27$ نشان می‌دهد که برای یک جابه‌جایی کلی نتیجه نهایی از قضیه فیثاغورس با استفاده از مؤلفه‌های آن در جهتهای r و θ به دست می‌آید. روشن است که فاصله کل بین دو نقطه P و Q در امتداد یک منحنی از P به Q که از این روابط تعیین می‌شود به منحنی انتخاب شده بستگی دارد. فضای اقلیدسی سه‌بعدی. به عنوان مثالی دیگر، هندسه فضایی اقلیدسی سه‌بعدی بر حسب مختصات دکارتی (x, y, z) از رابطه زیر به دست می‌آید

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (4-28 \text{ الف})$$

که تعمیم بدیهی رابطه $4-26$ ب در سه بعد است. اگرچه، در بسیاری موارد یک وضعیت هندسی یا فیزیکی ممکن است تقارن کروی داشته باشد، و از این رو ممکن است بخواهیم بجای [مختصات دکارتی] از مختصات قطبی کروی استفاده کنیم [شکل $4-22$ (الف)]. اگر به جای مختصات (x, y, z) از مختصات (r, θ, ϕ) استفاده کنیم، عبارت متناظر هندسه اقلیدسی به صورت زیر است

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4-28 \text{ ب})$$

از این شکل می‌توان مستقیماً دید که (۱) مختصه r مستقیماً فاصله طی شده در امتداد منحنیهای {فقط r متغیر} یعنی، منحنیهای $\{\theta \text{ و } \phi \text{ ثابت}\}$ را نمایش می‌دهد؛ گرچه، (۲) نمو مختصه، $d\theta$ ، فاصله $r d\theta$ در امتداد منحنیهای {فقط θ متغیر}، یعنی $\{r \text{ و } \phi \text{ ثابت}\}$ را نمایش می‌دهد، و (۳) نمو مختصه، $d\phi$ ، فاصله $r \sin \theta d\phi$ را در امتداد منحنیهای {فقط ϕ متغیر}، یعنی منحنیهای $\{r \text{ و } \theta \text{ ثابت}\}$ را نمایش می‌دهد. این در واقع دقیقاً چگونگی ارتباط فاصله‌ها به مختصات قطبی استاندارد است (شکل $4-22$ (ب) را ببینید). البته، هندسه‌های فضایی که با $4-28$ الف و $4-28$ ب نمایش داده می‌شوند یکسان‌اند؛ اختلاف در مختصات مورد استفاده است. نکته مهمی که در اینجا باید مورد توجه قرار گیرد این است که وقتی از مختصات عمومی استفاده می‌شود فاصله‌ها حتی در امتداد این خمهای مختصات مستقیماً نمایش داده نمی‌شوند،



شکل ۲۲-۴ (الف) مختصات قطبی کروی r, θ, ϕ در فضای اقلیدسی سه بعدی. در اینجا r فاصله شعاعی، θ زاویه بین جهت شعاعی و محور z ها، و ϕ چرخش در حول این محور است. (ب) فاصله بین نقاط مجاور که با مختصات قطبی کروی توصیف می شود را قضیه فیثاغورس از جابه جاییهای متعامد dr و $d\theta$ و $d\phi$ که اندازه آنها به ترتیب $dr, r d\theta, r \sin\theta d\phi$ است تعیین می کند.

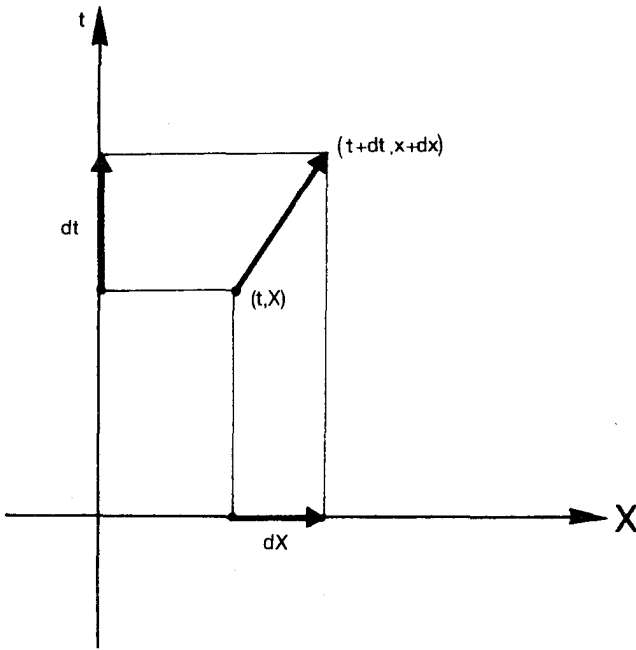
بلکه رابطه بین نمو مختصه و فاصله واقعی طی شده را می توان مستقیماً از بازه (در این مورد ۲۸-۴ ب) خواند. فاصله های طی شده در امتداد هر منحنی را ۴-۲۶ الف تعیین می کند. محاسبه این عبارتها در مورد یک خط خمیده کلی ممکن است پیچیده باشد (اما اگر این خط یک خط مختصه ای باشد، این عبارت را اغلب می توان بی دردسر محاسبه کرد). جزئیات بیشتری در مورد انتگرال خط که برای محاسبه این فاصله ها لازم است در پیوست الف داده شده است.

تمرین ۴-۱۴

دایره C که با $\{r = R = \text{const.}\}$ داده شده است از نقطه P در $\{r = R, \theta = 0\}$ و نقطه Q در $\{r = R, \theta = \pi\}$ می گذرد. (الف) نشان دهید که طول خط مستقیم L از P به Q برابر $2R$ است، (ب) طول پاره خط C که به ازای $0 < \theta < \pi$ ، P را به Q وصل می کند برابر πR است. [ابتدا ۴-۲۶ الف و ۴-۲۷ را در مورد خط راستی که P را به Q وصل می کند، و سپس آنها را در مورد منحنی $r = R$ به کار ببرید.] نتیجه بگیرید که شعاع این دایره R ، قطر آن $2R$ ، و محیط آن $2\pi R$ است.

فضازمان

در این مثالها فقط فضاها ی اقلیدسی که با دستگاههای مختصات مختلف توصیف می شوند و در آنها $ds^2 \geq 0$ ، در نظر گرفته شده اند. در فضازمان، ds^2 به سبب علامت منفی در ۴-۲۵ ب مقید نیست که بزرگتر یا مساوی صفر باشد. همان طور که در بالا اشاره شد، در این مورد برحسب اینکه ds^2 برای جابه جایی (dt, dX, dY, dZ) مورد نظر منفی، مثبت یا صفر باشد اندازه گیریهای زمان،



شکل ۲۳-۴ نقاط مجاور در یک نمودار فضا-زمان که اختلاف مختصات آنها dx و dt است.

اندازه‌گیرهای فاصله فضایی، و سرعت نور در یک کمیت واحد نمایش داده می‌شود (شکل ۴-۲۳). به‌ویژه هرگاه $ds^2 < 0$ ، بزرگی آن برابر مربع ویژه‌زمان dt است که در امتداد آن جابه‌جایی اندازه گرفته می‌شود: $ds^2 = -dt^2$. اکنون به کمک معادله ۴-۲۵ الف می‌توانیم ویژه‌زمان را در امتداد هر جهانخط دلخواهی در فضا-زمان اندازه بگیریم (حتی اگر شتابدار باشد، یعنی نماینده حرکت غیرلخت باشد). به عنوان مثال، روی خم $\{x = y = z = 0\}$ ، که جهانخط ناظری است که مختصات را برقرار کرده است. معادله‌های $dx = dy = dz = 0$ معتبرند، از این رو ۴-۲۵ ب به $ds^2 = -dt^2$ تبدیل می‌شود و ۴-۲۵ الف نشان می‌دهد که مختصه t در واقع ویژه‌زمان را در امتداد این جهانخط ویژه اندازه می‌گیرد. به علاوه، وقتی $ds^2 = 0$ ، جابه‌جایی در امتداد مخروط نور، یعنی حرکت با سرعت نور انجام می‌شود. از آنجا که تمام کمیت‌های سینماتیکی دیگر، از قبیل فاصله‌های فضایی و ضرایب K را می‌توان از این اجزای اساسی محاسبه کرد، به کمک فرم ds^2 می‌توان تمام اندازه‌گیرهای اساسی فضا-زمانی مورد نظر را انجام داد. اگر از مختصات استاندارد استفاده کنیم، از ۴-۲۵ ج به دست می‌آید، اما اگر از مختصات دیگری استفاده کنیم ds^2 از عبارت دیگری به دست می‌آید. مثلاً، اگر مختصات قطبی کروی را به کار بگیریم، ۴-۲۸ ب جایگزین

قسمت فضایی ۲۸-۴ الف می‌شود. در این صورت

$$ds^2 = -dt^2 + \{dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\}/c^2 \quad (29-4)$$

به کمک این رابطه می‌توان بازه‌های زمانی اندازه‌گیری شده در امتداد هر جهانخط را برحسب این مختصات از عبارت ۲۵-۴ الف محاسبه کرد. همانند مورد فضایی، بازه زمانی اندازه‌گیری شده در امتداد یک خم زمان‌گونه از P به Q به منحنی انتخاب شده بستگی دارد، و این منشأ "پارادوکس دوقلوها" است. به عنوان آخرین مثال استفاده از فرم ds^2 ، فرض کنید که ناظر A ذره‌ای را مشاهده می‌کند که با سرعت v از کنار او رد می‌شود. فرض کنید $\eta = (dt, dX, dY, dZ)$ یک جابه‌جایی در امتداد جهانخط ذره در مختصات قائم استاندارد باشد [شکل ۲۴-۴ الف]. در این صورت ویژه‌زمان متناظر مربوط به ذره برابر است با

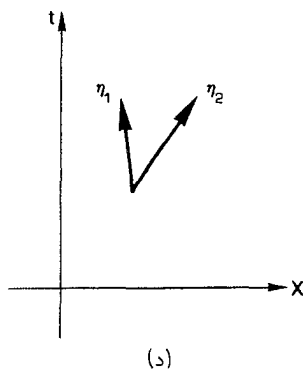
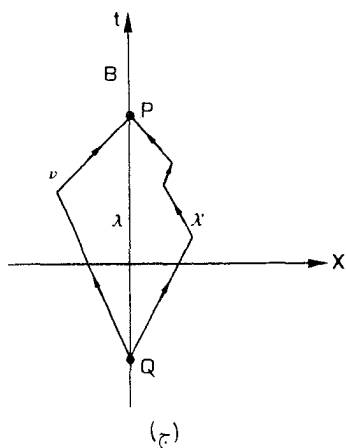
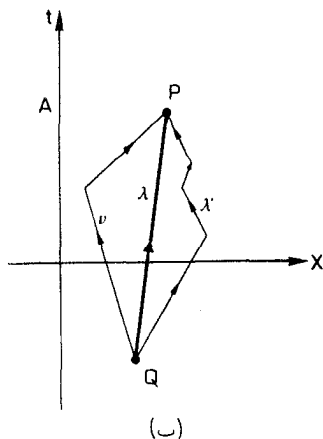
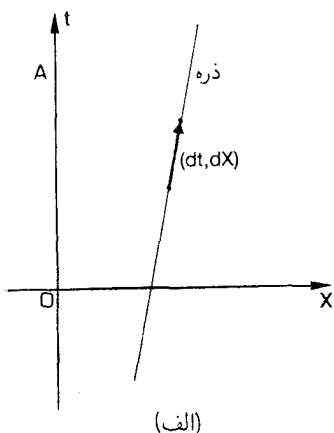
$$\begin{aligned} d\tau &= (-ds^2)^{1/2} = (dt^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2)^{1/2} \\ &= (dt^2 - dr^2/c^2)^{1/2} = \{1 - (dr/dt)^2/c^2\}^{1/2} dt \end{aligned}$$

که در آن $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2(dX^2 + dY^2 + dZ^2)$ فاصله فضایی در امتداد η طبق اندازه‌گیری A است. اما v مساوی است با تغییر فاصله تقسیم بر تغییر زمان، از این رو

$$d\tau = (1 - v^2/c^2)^{1/2} dt \quad \Leftrightarrow \quad dt = \gamma(v) d\tau \quad (30-4)$$

و ما نتیجه اتساع زمان ۲-۳ را مستقیماً از ds^2 بازیافته‌ایم. (اگر بخواهیم دقیق باشیم، برای تعیین اندازه‌گیریهای ساعت نسبی برای بازه‌های زمانی متناهی باید از این نتیجه در امتداد جهانخط انتگرال‌گیری کنیم، اما معنای ۳-۴ برحسب جابه‌جاییهای بینهایت کوچک، کاملاً روشن است.)

اکنون دو نقطه P و Q را در نظر بگیرید که فاصله آنها زمان‌گونه است. فرض کنید λ خط مستقیم زمان‌گونه‌ای باشد که آنها را به یکدیگر وصل می‌کند و τ ویژه‌زمان از P تا Q طبق اندازه‌گیری ناظری باشد که جهانخط او λ است. در این صورت از بررسی ۴-۲۴ و ۴-۳۰ روشن می‌شود که هر ناظری که تاریخ او هر قطعه دیگری باشد که P را به Q وصل می‌کند [با شکل ۲۴-۴ ب) مقایسه کنید]، این زمان را کوتاهتر اندازه می‌گیرد. اگر مانند ۲۵-۴ حد را در نظر بگیریم، روشن می‌شود که در امتداد هر خط زمان‌گونه دیگری از P به Q زمان کوتاهتر از τ اندازه گرفته می‌شود. بدین ترتیب طولانیترین زمان بین P و Q را ناظری اندازه می‌گیرد که به طور یکنواخت، یعنی بدون شتاب، بین P و Q حرکت می‌کند (با بحث "پارادوکس دوقلوها" در بخش ۳-۴ مقایسه کنید). نمودار فضازمان از دیدگاه او در شکل ۲۴-۴ ج) نشان داده شده است.



شکل ۲۴-۴ (الف) جابه‌جایی (dt, dX) در امتداد جهانخط ذره‌ای که با سرعت v نسبت به ناظر A در حرکت است. ویژه‌زمان متناظر $d\tau$ طبق اندازه‌گیری ساعتی که با ذره در امتداد این جابه‌جایی حرکت می‌کند، با رابطه‌ی اتساع زمان $dt = \gamma(v)d\tau$ به dt مربوط می‌شود که نشان می‌دهد $dt \geq d\tau$ و تنها در صورتی $dt = d\tau$ که $v = 0$ باشد. (ب) چند مسیر قطعه‌ای لخت که دو نقطه P و Q را که فاصله‌ی زمان‌گونه است به یکدیگر وصل می‌کنند، طولانیترین زمان اندازه‌گیری شده در امتداد مسیر λ است، که مسیر مستقیم بین آنهاست. (ج) همان وضعیت از دیدگاه ناظری که بین P و Q به‌طور لخت حرکت می‌کند. [با توجه به (الف)] روشن است که ویژه‌زمان طبق اندازه‌گیری B در امتداد هر پاره‌خط لخت روی γ و λ' متناظر با زمانهای طولانیتر است؛ بدین ترتیب ویژه‌زمان از Q تا P در امتداد این مسیرها کوتاهتر از ویژه‌زمان در امتداد مسیر لخت منفرد λ خواهد بود. (د) جابه‌جاییهای η_1 و η_2 در فضا-زمان حاصلضرب اسکالر آنها با معادله ۳۱-۴ تعریف می‌شود.

ضرب اسکالر

تعمیم فرم متریک ناوردا ضرب اسکالر بین دو جابه‌جایی است. فرض کنید $\eta_1 = (dt_1, dX_1, dY_1, dZ_1)$ و $\eta_2 = (dt_2, dX_2, dY_2, dZ_2)$ دو جابه‌جایی دلخواه باشند [شکل ۴-۲۴(د)]. در این صورت حاصلضرب اسکالر آنها برابر است با کمیت

$$\eta_1 \cdot \eta_2 = -dt_1 dt_2 + dX_1 dX_2 + dY_1 dY_2 + dZ_1 dZ_2 \quad (31-4)$$

با استفاده از ۴-۲۱ ج به‌سادگی می‌بینیم که این عبارت مانند مورد ds^2 ، یک ناورداست؛ این عبارت تعمیم ds^2 است زیرا $ds^2 = \eta_1 \cdot \eta_1$. به هر حال، این عبارت اطلاعات جالب توجه بیشتری به ما می‌دهد؛ برای مثال اگر ناظری در امتداد قطعه جهانخطی که با جابه‌جایی η_1 مشخص می‌شود حرکت کند، جابه‌جایی η_2 برای او آنی خواهد بود اگر و تنها اگر $\eta_1 \cdot \eta_2 = 0$. این نکته را می‌توان با انتخاب چارچوب سکون ناظر به‌نحوی که $\eta_1 = (dt_1, 0, 0, 0)$ باشد به‌سادگی دید؛ در این صورت این رابطه ناوردا به‌صورت $dt_1 dt_2 = 0$ درمی‌آید که مستلزم آن است که $dt_2 = 0$ باشد، از این رو η_2 در واقع یک جابه‌جایی آنی (برای آن ناظر) است. با همین روش می‌توان نشان داد که اگر η_1 زمان‌گونه و η_2 زمان‌گونه یا صفر باشد، در این صورت $\eta_1 \cdot \eta_2 < 0$. در اینجا ما ضرب داخلی را فقط وقتی از مختصات استاندارد (مینکوفسکی) استفاده می‌شود آورده‌ایم؛ تعمیم آن به هر مختصات دیگری در پیوست ب آمده است.

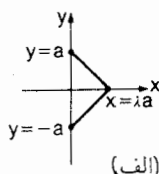
اکنون که ضرب اسکالر را تعریف کرده‌ایم، می‌توانیم نتیجه تمرین ۴-۱۳ را به‌طور تحلیلی به‌صورت زیر ثابت کنیم. نقطه‌ای مانند T را در داخل $C^+(Q)$ در نظر بگیرید جابه‌جایی PT برابر است با $PQ + QT$. در این صورت

$$\begin{aligned} (PT)^2 &= (PQ + QT)^2 \\ &= (PQ)^2 + 2PQ \times QT + (QT)^2 \end{aligned}$$

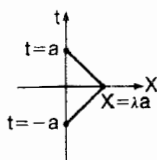
اما $(PQ)^2$ صفر است و $PQQT$ و $(QT)^2$ هر دو منفی‌اند. بنابراین $(PT)^2$ منفی است و T در داخل $C^+(P)$ قرار دارد.

نتیجه‌گیری

در این بخش، ما ناوردهایی را بررسی کردیم که مستقیماً به اندازه‌گیریهای زمان و فاصله در فضا زمان مربوط می‌شوند. ناوردهای مهم دیگری نیز وجود دارند که در اینجا بررسی نکردیم و به انرژی، تکانه، و میدان الکترومغناطیسی مربوط می‌شوند؛ آسانترین راه ساختن آنها استفاده از روش تانسوری است که در پیوست ب مورد بحث قرار گرفته است. برخی از این ناوردها در این پیوست و در پیوست ج بررسی شده‌اند.



(الف)



(ب)

شکل ۲۵-۴

تمرینها

۱۵-۴ (۱) در صفحهٔ دوبعدی اقلیدسی، مسیری مانند آنچه در شکل ۲۵-۴ (الف) نشان داده شده است و $\{x = 0, y = -a\}$ را به $\{x = 0, y = a\}$ از طریق نقطهٔ $\{x = \lambda a, y = 0\}$ وصل می‌کند. در نظر بگیرید طول L این مسیر را (که از ۲۶-۴ الف به دست می‌آید) پیدا کنید و نشان دهید که کوتاه‌ترین مسیر (یعنی، کوچک‌ترین مقدار L) متناظر با $\lambda = 0$ است.

(۲) اکنون در فضا-زمان دوبعدی مسیری مانند آنچه در شکل ۲۵-۴ (ب) نشان داده شده است و $\{t = -a, x = 0\}$ را به $\{t = +a, x = 0\}$ از طریق نقطهٔ $\{t = 0, x = \lambda a\}$ وصل می‌کند در نظر می‌گیریم. ویژه‌زمان τ در امتداد این مسیر را (که از ۲۵-۴ به دست می‌آید) پیدا کنید، و نشان دهید که طولانی‌ترین ویژه‌زمان (یعنی، حداکثر مقدار τ) متناظر با $\lambda = 0$ است.

۱۶-۴ با حل تمرین زیر نشان دهید که چگونه از فرم متریک برای تعیین ضریب K برای دو ناظری که دارای حرکت نسبی هستند استفاده می‌کنید. فرض کنید که فرم متریک در یک فضا-زمان دوبعدی به صورت زیر است

$$ds^2 = -a^2 dt^2 + b^2 dx^2$$

که در آن a و b ثابتهای مثبت هستند. ناظر A در $x = 0$ ساکن است و در $t = t_1$ و $t = t_2$ علائم نوری گسیل می‌کند. ناظر B با سرعت v نسبت به A حرکت می‌کند و در $t = 0$ از کنار او می‌گذرد. مطلوب است محاسبهٔ (۱) معادله‌های پرتوهای نوری که A می‌فرستد؛ (۲) مختصات نقطاتی که در آن B علائم را دریافت می‌کند؛ (۳) بازهٔ Δs_1 بین رویدادهای گسیل، و بازهٔ Δs_2 بین رویدادهای دریافت؛ (۴) نسبت $K = \Delta s_2 / \Delta s_1$.

۱۷-۴ (الف) ثابت کنید که حاصلضرب اسکالر ۳۱-۴ یک ناورداست. (ب) فرض کنید که ناظر O هر دو جابه جایی η_1 و η_2 را آنی تعیین می کند. نشان دهید که در این صورت حاصلضرب اسکالر ۳۱-۴ به صورت زیر درمی آید

$$\eta_1 \cdot \eta_2 = dX_1 dX_2 + dY_1 dY_2 + dZ_1 dZ_2$$

که هم فاصله ها و هم زاویه ها را در فضای اقلیدسی تعیین می کند (مثلاً اگر $\eta_1 \cdot \eta_2 = 0$ در این صورت جابه جاییها بر یکدیگر عمودند).

۱۸-۴ فضا زمان دوبعدی تخت دارای فرم متریک $ds^2 = -dt^2 + dX^2$ است (که با قرار دادن $dY = dZ = 0$ در ۲۵-۴ به دست می آید). به جای t یک مختصه جدید v که به صورت $v = t + X$ تعریف می شود انتخاب می کنیم، در این صورت $dv = dt + dX$ و بازه بر حسب مختصات (v, X) به صورت زیر درمی آید

$$ds^2 = -dv^2 + 2dv dX \quad (*)$$

از این عبارت نتیجه بگیرید که خم $\{v = \text{const.}\}$ یک پرتو نور است، اما یک خم $\{X = \text{const.}\}$ زمان گونه است. این خمها را در یک نمودار فضا زمان رسم کنید. به جای X هم مختصه $w = t - X$ را انتخاب کنید، در این صورت $dw = dt - dX$ و بر حسب مختصات (v, w) فرم متریک به صورت زیر درمی آید

$$ds^2 = -dv dw \quad (**)$$

با استفاده از این عبارت نشان دهید که خمهای $\{v = \text{const.}\}$ و خمهای $\{w = \text{const.}\}$ پرتوهای نور هستند (به این دلیل، به این مختصات، مختصات صفر می گویند). این خمها را در یک نمودار فضا زمان رسم کنید. امتحان کنید که اگر ما یک مختصه صفر جدید $u = -v$ را تعریف کنیم، فرم متریک به صورت زیر درمی آید

$$ds^2 = du dw \quad (***)$$

تمرین کامپیوتری ۱۳

برنامه ای بنویسید که به عنوان ورودی داده های زیر را بپذیرد (الف) مختصات (TP, XP) و (TQ, XQ) برای نقطه ابتدایی P و نقطه نهایی Q یک خم زمان گونه، (ب) عدد صحیح N که تعداد نقطه های میانی که باید مشخص شوند را نشان دهد، (ج) مختصات $T(I)$ و $X(I)$ برای هر

یک از این نقاط میانی $R(I)$ ($I = 1$ تا $I = N$). برنامه باید ویژه‌زمان T کل را طبق اندازه‌گیری ناظری که در امتداد مسیر قطعه‌ای لخت $Q \rightarrow R(N) \rightarrow R(2) \rightarrow \dots \rightarrow R(1) \rightarrow P$ از P به Q می‌رود به دست دهد. [برنامه باید امتحان کند که تمامی مسیر و هر یک از این قطعه‌ها در واقع زمان‌گونه‌اند.]

یک خم با شتاب یکنواخت بین نقطهٔ P با مختصات $(t = -3, X = 5)$ و Q با مختصات $(t = 3, X = 5)$ در معادلهٔ $t^2 - X^2 = -16$ صدق می‌کند. N نقطه $R(I)$ روی این خم بین P و Q انتخاب کنید ($I = 1$ تا $I = N$) و ویژه‌زمان T از P به Q را در امتداد مسیر قطعه‌ای لخت که این نقاط معرف آن هستند تعیین کنید. نشان دهید که با بزرگ و بزرگتر شدن N ، T به سمت حد TL ، یعنی ویژه‌زمان از P به Q در امتداد مسیر با شتاب یکنواخت میل می‌کند. [یک راه برای انتخاب این نقطه‌ها این است که مجموعه‌ای از مقادیر برای T ($-5 < T < 5$) انتخاب کنیم و سپس معادلهٔ $X^2 = T^2 + 16$ را برای X حل کنیم.]

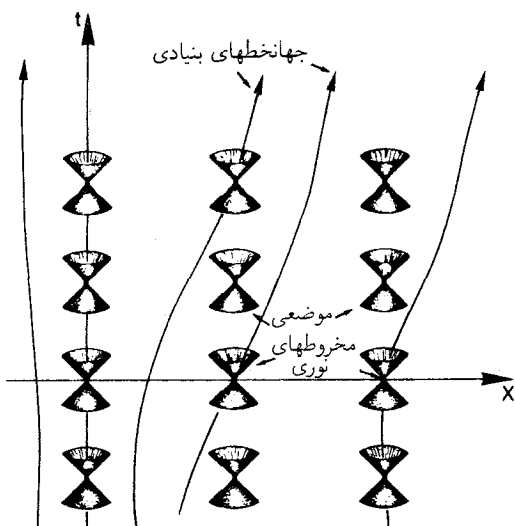
۳-۴ برخی عالمهای فضا-تخت

اکنون برخی از ایده‌های بخشهای قبل را با بررسی مختصر سه نوع کیهانشناسی در فضا-زمان تخت به تصویر خواهیم کشید. این مثالها را بدان سبب آورده‌ایم تا برخی از امکانات نهانی نسبیت خاص (وقتی اثرات گرانش قابل چشمپوشی‌اند) را نشان دهیم. اثرهای مشابهی در فضا-زمانهای خمیدهٔ نسبیت عام رخ می‌دهند که در فصلهای آینده (وقتی که گرانش کاملاً به حساب می‌آید) مورد نظر قرار گرفته‌اند. برای سهولت، به‌طور کلی بر مثالهای دوبعدی تأکید خواهیم داشت که جنبه‌های اصلی فضا-زمانهای چهاربعدی کامل را از خود نشان می‌دهند. اگر جزئیات به نظرتان مشکل می‌آید، در خواندن اول از آنها صرف‌نظر کنید و به‌مبحث فضا-زمانهای خمیده بروید.

ماده در عالم

در عالم واقعی، ما ماده (ستاره‌ها و غبار) را می‌بینیم که در کهکشانها و خوشه‌های کهکشانی مجتمع شده‌اند و (شکل ۱-۱۰) که طبق اندازه‌گیریها هر قدر فاصلهٔ آنها از ما بیشتر باشد انتقال به سرخ آنها نیز به‌طور منظم زیادتر می‌شود (شکل ۳-۴). با توجه به این مطلب یک حرکت میانگین خوش تعریف ماده در هر ناحیه از عالم (مثلاً در ناحیه‌ای از عالم که ما در آن قرار داریم، حرکت ابرخوشه کهکشانهای ما) وجود دارد. بنابراین، هر مدل عالم باید هم فضا-زمان و هم این حرکت میانگین ماده را مشخص کند. به فضا-زمانی که در آن خانواده‌ای از جهانخطهای مرجح مشخص شده باشند که این جهانخطها^۱ نمایندهٔ حرکت میانگین ماده در هر نقطه از فضا-زمان باشد، مدل عالم می‌گوییم (شکل ۴-۲۶). در این صورت این جهانخطها، که آنها را جهانخطهای بنیادی می‌نامیم،

۱. در یک مدل کیهانشناسی کامل باید بسیاری از ویژگیهای دیگر ماده موجود در عالم را نیز مشخص کنیم. اما در این کتاب ما فقط هندسهٔ فضا-زمان این مدلها را بررسی خواهیم کرد.



شکل ۴-۲۶ هر مدلی از عالم فضا زمانی همراه با یک خانواده از جهانخطهای نماینده حرکت میانگین ماده در هر نقطه از فضا زمان است. ناظری که همراه این حرکت میانگین در حرکت است را ناظر اصلی می نامیم.

نماینده تاریخ کهکشانی یا ناظرهایی هستند که دقیقاً با حرکت میانگین ماده در هر نقطه حرکت می کنند (همه ماده هم به این طریق حرکت نخواهد کرد؛ مثلاً سرعت پرتوهای کیهانی نسبت به سرعت بیشتر ماده موجود بسیار زیاد است). ما ناظرهایی را که دقیقاً با این سرعت میانگین حرکت می کنند ناظرهای اصلی می خوانیم، و رفتار مدل عالم را طبق مشاهدات این ناظرهای اصلی (ابده آلی) بر روی کهکشانیهای اصلی فرضی (که با سرعت مرجح در حرکت اند) تجزیه و تحلیل خواهیم کرد. با در دست داشتن مدل عالم می توانیم خوبی یک نمایش از عالم واقعی را با مقایسه مشاهدات کهکشانی در عالم واقعی و مشاهداتی که آن مدل برای ناظرهای اصلی پیش بینی می کند بیازماییم.

همان طور که در بالا گفته شد مدلهایی از عالم که در اینجا بررسی می کنیم، ماهیت گرانس را (که در بخش بعد مورد بحث قرار خواهد گرفت) نشان نمی دهند، بلکه بر مبنای تقارنهای فضا زمان تخت قرار دارند که ساختاری برای فضا زمان تعریف می کند که رسته های خاصی از جهانخطها را در نظر می گیرد که به طور "طبیعی مرجح" هستند، و بنابراین اینها را به عنوان جهانخطهای ناظرهای اصلی انتخاب می کنیم. ما سه نوع از این مدلها را بررسی خواهیم کرد: عالم مینکوفسکی، عالم ریندلر، که دارای بسیاری از خواص شبیه یک سیاهچاله است، و عالم میلن که مدلی ساده از عالم در حال انبساط است. ما مدلهای عالم فضاخمیده از نوع سیاهچاله و در حال انبساط را به ترتیب در فصلهای ۶ و ۷ بررسی خواهیم کرد.

عالم مینکوفسکی

ابتدا یک نوع دوبعدی از این مدل عالم، و سپس یک نوع چهاربعدی آن را در نظر می‌گیریم. یک عالم مینکوفسکی دوبعدی. این همان فضا زمان دوبعدی تخت نسبیّت خاص است که فرم متریک آن برحسب مختصات (t, X) به صورت زیر است

$$ds^2 = -dt^2 + dX^2 \quad (۴-۳۲ الف)$$

جهانخطهای ناظرهای اصلی خطهای $\{X = \text{const.}\}$ هستند، و چگالی عددی کهکشانه روی رویه‌های $\{t = \text{const.}\}$ که رویه‌های آینت برای ناظرهای اصلی هستند، یکنواخت است [شکل ۴-۲۷ الف]. این مدل عالم بر مبنای ناوردایی انتقالی فضا زمان قرار دارد: با توجه به تقارن انتقال زمان جهانخطها بر روی خودشان حرکت می‌کنند

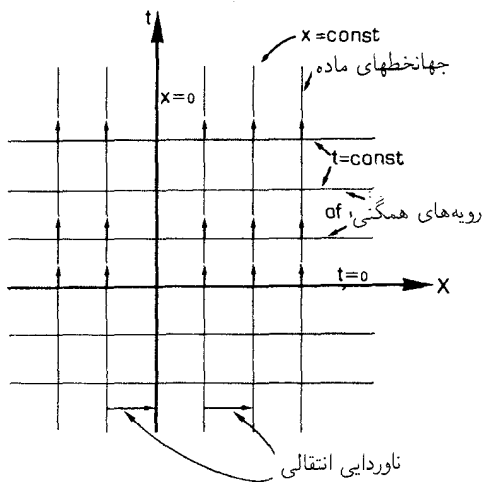
$$t' = t + t_0, \quad X' = X \quad (۴-۳۳ الف)$$

که در آن t_0 یک ثابت دلخواه است. این مطلب به‌ویژه ایجاب می‌کند که فاصله جهانخطها از هم ثابت بماند، و با توجه به تقارن انتقال فضایی نسبت به هم حرکت می‌کنند

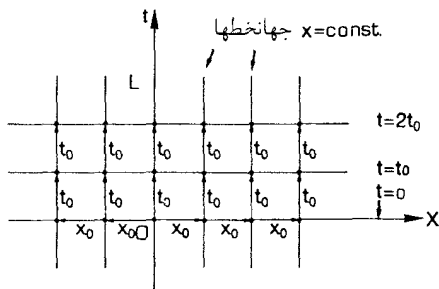
$$X' = X + X_0, \quad t' = t \quad (۴-۳۳ ب)$$

که در آن X_0 یک ثابت دلخواه است. لازمه این مطلب همگنی فضایی است؛ به‌ویژه، این تقارن چگالی ماده را در رویه‌های فضایی $\{t = \text{const.}\}$ ناوردا باقی می‌گذارد. توجه کنید که ۴-۳۳ تقارنهای فضا زمان هستند زیرا فرم ۴-۳۲ به روشنی تحت آنها ناورداست (با ۴-۲۲ و تقاسیری که در زیر می‌آیند مقایسه کنید).

توزیع یکنواخت و ایستای ماده. می‌توانیم این عالم را یا در تقریب پیوستاری تصور کنیم که در آن یک جهانخط از هر نقطه فضا زمان می‌گذرد، و یا آن را به صورت ناپیوسته در نظر بگیریم، که در آن هم مجموعه نامتناهی از جهانخطها به‌طور یکنواخت توزیع شده‌اند، اما از هر نقطه‌ای عبور نمی‌کنند. در این صورت از جهانخط L که از رویداد O ، $\{X = 0, t = 0\}$ می‌گذرد شروع می‌کنیم، و تمام جهانخطهای دیگر را [شکل ۴-۲۷ ب] را ببینید با (۱) تکرار یک انتقال فضایی ۴-۳۳ ب در مورد آن به‌ازای مقدار مناسب X_0 برای تعیین رویدادهای O_n که در آنها جهانخطها رویه اولیه $\{t = 0\}$ را قطع می‌کنند؛ (۲) کاربرد یک انتقال زمانی ۴-۳۳ الف برای تعیین جهانخطهای L_n در فضا زمان از این رویدادهای اولیه تولید می‌کنیم. توزیع جهانخطهایی که به این نحو تولید شده‌اند الزاماً از نظر زمانی ناورداست (زیرا با یک انتقال زمانی تعریف می‌شود که یک تقارن فضا زمانی است)، و طوری ساخته شده است که در رویه ابتدایی $\{t = \text{const.}\}$ دارای همگنی فضایی نیز



(الف)



(ب)

شکل ۴-۲۷ عالم مینکوفسکی. (الف) جهانخطهای ناظرهای اصلی، که حرکت میانگین ماده را در عالم نمایش می‌دهند، عبارت‌اند از $\{X = \text{const.}\}$ و رویه‌های آینت آنها $\{t = \text{const.}\}$ هستند. (ب) ساختن این عالم با (۱) تکرار انتقالهای فضایی به فاصله X_0 از یکدیگر در مورد جهانخط L که از مبدأ O می‌گذرد برای تعیین نقاط ابتدایی این جهانخطها در رویه $t = 0$ ، (۲) کاربرد انتقالهای زمانی بر این رویدادها برای تمام مقادیر t با هدف تعیین جهانخطها در فضا-زمان. با این ساختمان، چگالی ماده که در رویه‌های $\{t = \text{const.}\}$ اندازه گرفته می‌شود ثابت است.

هست (در این رویه فاصله تمام جهانخطها از یکدیگر، X_0 ، یکسان است)، و این همگن فضایی با انتقال زمانی ۴-۳۳ الف برای تعیین توزیع در دیگر نقاط در فضا-زمان همچنان باقی می‌ماند، زیرا در اثر این تقارن زمان-ناوردا، تقارن اولیه حفظ می‌شود (فاصله X_0 بین جهانخطها در زمانهای بعدی نیز ثابت می‌ماند). به علت همگنی فضایی، تابع چگالی، که نماینده تعداد کلهکشانها در واحد فاصله زمانی است از نظر فضایی ثابت خواهد بود؛ به علت تقارن زمانی، چگالی نیز در زمان ثابت

خواهد بود.

یک عالم مینکوفسکی چهاربعدي. اين فضا زمان چهاربعدي تخت نسبت خاص است که فرم متریک ناورداي آن برحسب مختصات (t, X, Y, Z) به صورت زیر است

$$ds^2 = -dt^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \quad (۳۲-۴)$$

جهانخطهای ناظرهای اصلي خطهای $\{X, Y, Z\}$ ثابت هستند، و چگالی عددي کهکشانیها در رويه های $\{t = \text{const.}\}$ که رويه های آينت برای تمام ناظرهای اصلي هستند، يکنواخت است. ویژگیهای اين فضا زمان بلافاصله از بحث بالا در مورد نسخه دوبعدي آن (که مقطع فضا زمان چهاربعدي کامل است با قرار دادن $X = Z = \text{const.}$ در ۳۲-۴ به دست می آيد) آشکار می شود.

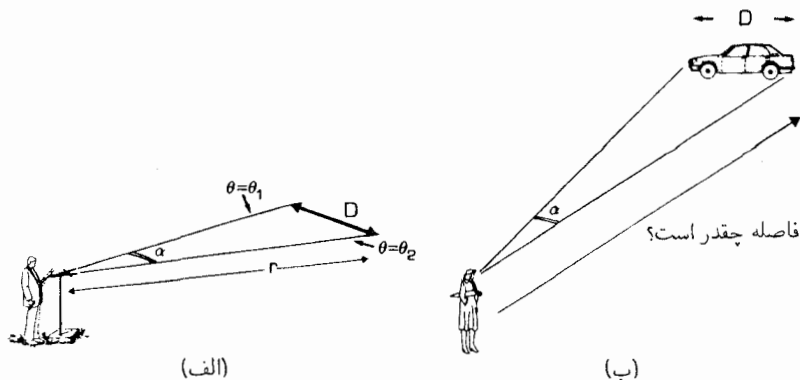
اين ساده ترين نوع مدل عالم است: يک توزيع ایستا و يکنواخت ماده در فضا زمان تخت، بدون آغاز و بی انتها و بدون حد فضایی. اين مدل چندان جالب توجه نیست: انتقال به سرخ یا انتقال به آبی در آن مشاهده نمی شود، و چگالی ماده در اين عالم در زمان و در فضا يکنواخت است. اين مدل متناظر با عالم واقعی نیست که در آن انتقال به سرخ کهکشانی به طور سینماتیک مشاهده می شود؛ هدف از آوردن آن بیشتر مقایسه با دو مدل بعدی است تا برخی از روشهایی را که در ادامه این بخش به کار خواهیم برد با يک قرينه آشنا به نمایش بگذاريم. يک مدل عالم با فضا زمان خمیده، عالم ایستای اینشتین، وجود دارد، که شبیه عالم مینکوفسکی است که در اینجا مورد بحث قرار گرفت؛ اين عالم را در فصل ۷ بررسی می کنیم.

ما بررسی اين مدل عالم را با در نظر گرفتن اجمالی سه روش قابل تصور برای برآورد فاصله يک شیء در اين فضا زمان به پایان می رسانيم که عبارت اند از تعيين فاصله با زاویه ظاهري، درخشندگی ظاهري و روشنایی ظاهري. اين مطالب مفصل آورده شده اند زیرا بعداً از روشهای مشابهی برای بررسی ویژگیهای فضا زمانهای خمیده استفاده خواهیم کرد؛ اين مطالب را می توان در خواندن اول حذف کرد.

اندازه ظاهري. برای تعيين اینکه چگونه اندازه های ظاهري در اين عالم ظاهر می شوند، از مختصات قطبي کروي (r, θ, ϕ) استفاده می کنیم که در آن فرم متریک به صورت زیر است

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (۳۲-۴ ج)$$

(با رابطه ۲۹-۴ مقایسه کنید؛ يکاهای مختصه شعاعي r را چنان برگزیده ایم که سرعت نور واحد باشد) که در آن اکنون جهانخطهای بنيادی خطهای $\{r, \theta, \phi\}$ ثابت هستند. از اين فرم بلافاصله نتیجه می شود که r فاصله از مبدأ در امتداد منحنیهای شعاعي $\{t, \theta, \phi\}$ ثابت را مستقیماً اندازه می گیرد. اکنون يک جسم خطی به طول D را در نظر بگیرید که عمود بر اين خط شعاعي



(الف)

(ب)

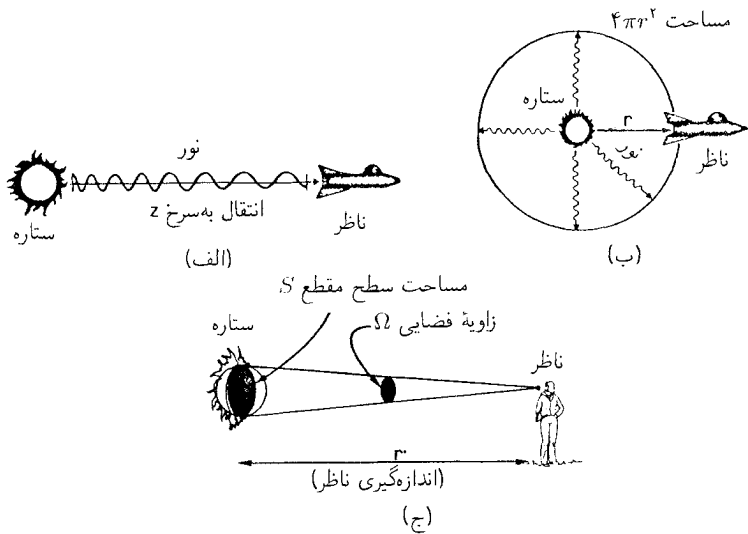
شکل ۲۸-۴ (الف) میله‌ای به طول D که عمود بر خط دید ناظری است که در فاصله r قرار دارد. اندازه زاویه‌ای ظاهری میله α است. (ب) ما فاصله‌اشیایی مانند ماشین سواری را با مشاهده زاویه‌ی ظاهری آنها α ، و استنتاج فاصله از آن برآورد می‌کنیم، زیرا می‌دانیم که طول آنها تقریباً چقدر است.

و به فاصله r قرار دارد [شکل ۲۸-۴ (الف)]; بدون از دست رفتن کلیت می‌توان مختصات قطبی را طوری انتخاب کرد که آن شیء روی رویه $\{\phi = \text{const.}\}$ قرار گیرد و دو انتهای آن به ترتیب در $\theta = \theta_1$ و $\theta = \theta_2$ باشد. در این صورت بازه‌ای که یک ناظر اصلی در امتداد میله در یک لحظه $\{t = \text{const.}\}$ اندازه می‌گیرد برابر است با $ds^2 = r^2 d\theta^2$ (با قرار دادن $dt = 0 = dr = d\phi$) در ۳۲-۴ ج). در این صورت طول آن برابر است با $D = r(\theta_2 - \theta_1)$. بدین ترتیب اگر اندازه زاویه‌ای ظاهری را به صورت $\alpha = \theta_2 - \theta_1$ تعریف کنیم، رابطه آن با طول شیء به صورت زیر است

$$\alpha = D/r \quad (۳۴-۴)$$

که نشان می‌دهد اندازه ظاهری شیء با طول آن D و عکس فاصله آن r متناسب است. از طریق این معادله است که ما عملاً فاصله اشیا را در زندگی روزمره اندازه می‌گیریم: مثلاً چشم ما زاویه ظاهری یک ماشین سواری را هنگام عبور برآورد می‌کند [شکل ۲۸-۴ (ب)], اندازه تقریبی ماشین D را می‌دانیم، از این رو مغز ما می‌تواند فاصله آن r را برآورد کند (در عمل با استفاده از معادله ۳۴-۴). اگر آن شیء نسبت به ناظر ساکن نباشد، یا بر خط دید عمود نباشد، محاسبه پیچیده‌تر می‌شود اما هنوز هم مستقیماً از ۳۲-۴ نتیجه می‌شود.

درخشندگی ظاهری. می‌خواهیم آهنگ دریافت انرژی توسط ناظری که در فاصله r از یک ستاره قرار دارد را حساب کنیم. برای کلیت، فرض نمی‌کنیم که ناظر نسبت به ستاره ساکن است. دقیقاً، فرض خواهیم کرد که ستاره در مبدأ $r = 0$ مختصاتی ساکن است که فرم متریک آن ۳۲-۴ ج است، و ناظر به‌طور شعاعی از آن دور می‌شود به طوری که انتقال به‌سرخی برابر با z را



شکل ۴-۲۹ (الف) یک ناظر که نسبت به یک ستاره در فضا زمان تخت در حرکت است در تابشی که از ستاره دریافت می کند انتقالی به سرخی برابر با z را اندازه می گیرد. (ب) هنگامی که تابش از ستاره به فاصله r که ناظر در آن قرار دارد می رسد، روی سطحی به مساحت $4\pi r^2$ پخش شده است. (ج) از نظر این ناظر زاویه فضایی Ω اندازه ظاهری آن شیء است؛ می توان آن را قسمتی از آسمان دانست که ستاره می پوشاند.

برای تابش دریافتی اندازه می گیرد [شکل ۴-۲۹ (الف)].

فرض کنید که طبق اندازه گیری ستاره در چارچوب سکون خود تابشی را با آهنگ $L \text{ erg/s}$ به طور یکنواخت در تمام جهات گسیل می کند. این انرژی را فوتونها حمل می کنند، انرژی هر فوتون $E = h\nu$ است که در آن h مقداری ثابت و ν بسامد تابش است که با رابطه $c = \nu\lambda$ به طول موج تابش مربوط می شود. در این صورت آهنگ گسیل فوتونها توسط ستاره برابر $L/E = L/h\nu$ فوتون در ثانیه است. با فرض پابستگی فوتونها پس از طی مسافت r از ستاره (طبق اندازه گیری در چارچوب ستاره) همگی به ناظر می رسند و در این فاصله روی کره ای به مساحت $4\pi r^2$ پخش می شوند [شکل ۴-۲۹ (ب)]. به سبب اثر ضریب K (رابطه انتقال به سرخ ۳-۳ و ۳-۴ را ببینید) آهنگ رسیدن فوتونها، در چارچوب سکون ناظر، با ضریب $1+z$ کندتر از آهنگ گسیل آنها در چارچوب سکون ستاره خواهد بود؛ بدین ترتیب طبق اندازه گیری ناظر آهنگ رسیدن فوتونها برابر خواهد بود با

$$R = (L/h\nu)(1/4\pi r^2)\{1/(1+z)\}$$

اما طبق اندازه گیری ناظر انرژی هر فوتون $h\nu'$ است که در آن ν' بسامدی است که ناظر اندازه می گیرد و با رابطه $\nu'/\nu = 1/(1+z)$ به ν مربوط می شود. در نتیجه طبق اندازه گیری ناظر

شار تابش (یعنی انرژی دریافتی در واحد سطح در واحد زمان) ستاره برابر است با

$$F = Rh\nu' = (L/4\pi)/\{r(1+z)\}^2 \quad (35-4)$$

این مبنای اندازه‌گیری فاصله توسط درخشندگی ظاهری است. می‌توانیم شار F و انتقال به سرخ z را با استفاده از تلسکوپ و آشکارسازهای مناسب اندازه بگیریم. اگر بتوانیم درخشندگی ذاتی ستاره L را برآورد کنیم (مثلاً از طریق معلوماتان درباره درخشندگی دیگر ستاره‌ها که فاصله آنها را با وسائل دیگری بتوانیم تعیین کنیم) در این صورت می‌توانیم از رابطه ۴-۳۵ فاصله r ستاره را پیدا کنیم. از این روش برآورد فاصله به‌طور گسترده در نجوم استفاده می‌شود، مثلاً برای برآورد فاصله کهکشانهای دور. در عالم مینکوفسکی، شاری را که یک ناظر اصلی اندازه می‌گیرد از این معادله با $z = 0$ به دست می‌آید، که چیزی جز قانون عکس مجذور فاصله برای شار نور دریافتی از یک شیء نیست (چون در این صورت F فقط با $1/r^2$ متناسب است).

روشنایی ظاهری. شار F کل تابشی است که یک شیء گسیل می‌کند. هنگام مشاهده یک شیء گسترده مانند یک کهکشان، چیزی که دستگاه ما مستقیماً ثبت می‌کند در واقع روشنایی ظاهری است، یعنی شار دریافتی در واحد زاویه فضایی، در نوار طول موجی است که در گستره حساسیت، آن قرار دارد (مثلاً این چیزی است که چشم ما و یا یک صفحه عکاسی ثبت می‌کند). زاویه فضایی Ω آن قسمت از آسمان است که تصویر آن شیء می‌پوشاند. این زاویه از معادله $S = r'^2 \Omega$ تعریف می‌شود که در آن S مساحت سطح مقطع ستاره، و r' فاصله از شیء است که ناظر اندازه می‌گیرد [شکل ۴-۲۹ (ج)]. شدت تابش I مشاهده شده (روشنایی در تمام طول موجها) شار دریافتی در واحد زاویه فضایی است، یعنی

$$I = F/\Omega = Fr'^2/S \quad (36-4 \text{ الف})$$

اما رابطه بین r (فاصله بین شیء و ناظر که شخصی که نسبت به ستاره ساکن است اندازه می‌گیرد) و r' (همان فاصله که ناظر اندازه می‌گیرد به صورت $r' = r/(1+z)$ است، که عملاً همان معادله ۳-۲۵ است که در مورد وضعیت فعلی به کار رفته است (روشن است که این فاصله‌ها باید از طریق $1+z = K$ و نه از طریق γ به هم مربوط شوند زیرا نور مورد نظر ما یکطرفه، یعنی از چشمه به ناظر، سفر می‌کند و نه دوطرفه؛ زاویه فضایی زاویه‌ای است که چشمه در زمان مشاهده می‌سازد و نه در زمان حاضر که با رادار به دست می‌آید. ترکیب این نتیجه با ۴-۳۵ و ۴-۳۶ الف نشان می‌دهد که

$$I = I_0/(1+z)^4 \quad (36-4 \text{ ب})$$

که در آن $I_0 = L/(4\pi S)$ سطح روشنایی ستاره است.

این نشان می‌دهد که در فضا زمان تخت، شدت تابش مشاهده شده از یک چشمه معلوم مستقل از فاصله بین ناظر و چشمه است؛ و فقط به حرکت نسبی آنها بستگی دارد. در عالم مینکوفسکی، یک ناظر اصلی شدت تابش یک چشمه را، بدون توجه به فاصله خود از چشمه، یکسان اندازه می‌گیرد (چون در این صورت $z = 0$ است). بدین ترتیب امکان ندارد که تنها با استفاده از شدت تابش مشاهده شده (یا روشنایی سطحی، یعنی شدت اندازه‌گیری شده در نوارهای طول موج محدود) فاصله یک شیء مشاهده شده را برآورد کرد.

تمرین ۱۹-۴

در عالم مینکوفسکی هر پرتو نور گذشته از رویداد P بالاخره با یک ستاره برخورد می‌کند. ثابت کنید که انتقال به سرخی که یک ناظر اصلی برای هر ستاره مشاهده می‌کند صفر است (با فرض اینکه تمام ستاره‌ها با سرعت بنیادی حرکت می‌کنند). از معادله ۴-۳۶ نتیجه بگیرید که اگر در چنین عالمی ستاره‌ها پیوسته بدرخشند، تمامی آسمان هنگام شب به روشنی سطح یک ستاره می‌شود، و این خلاف تجربه ما است که در شب آسمان را تاریک می‌بینیم (این پارادوکس اولیبر است).

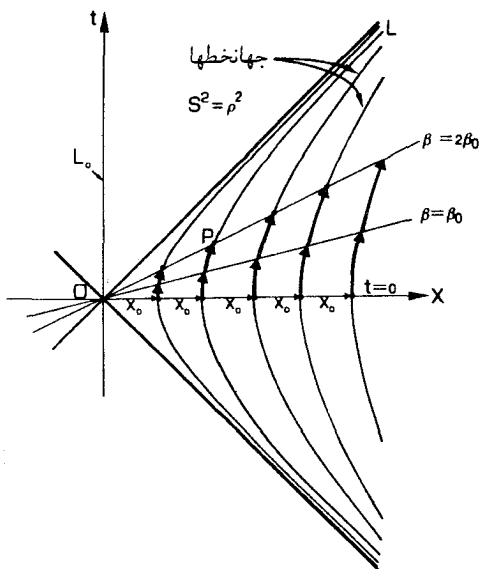
کدام قانون پایستگی نشان می‌دهد که ستاره‌ها نمی‌توانند پیوسته بدرخشند (یعنی، محدودیتی برای طول عمر ممکن یک ستاره قائل می‌شود؟)

عالم ریندلر دوبعدی

گرچه این مدل عالم بر مبنای فضا زمان تخت قرار دارد، اما برخی ویژگیهای اساسی یک سیاهچاله را (که در بخش ۶-۲ بررسی خواهیم کرد) از خود نشان می‌دهد. این مدل بر اساس نوردایی "خیز" فضا زمان تخت است و ساده‌ترین شیوه ساختن آن مانند مثال قبل است. با شروع از فضا زمان تخت بر حسب مختصات (t, X) و فرم ds^2 که مطابق ۴-۳۲ الف تعیین می‌شود و با استفاده از انتقالهای فضایی ۴-۳۳ ب وضعیتهای اولیه یک خانواده از جهانخطها را در رویه $\{t = t_0\}$ که از مبدأ O می‌گذرد تعیین می‌کنیم که از آن یک توزیع ماده که مانند مورد قبل در ابتدا یکنواخت است نتیجه می‌شود. اکنون از خیزهای حول O (معادله ۴-۳۷ الف در زیر) برای تعیین جهانخطها در مکانهایی غیر از وضعیت اولیه‌شان استفاده می‌کنیم (شکل ۴-۳۰). همان‌طور که در بالا (با ۴-۲۳ مقایسه کنید) بحث شد بازه ناورداست، و بنابراین جهانخطها را طوری تعیین می‌کند که فاصله بین آنها X_0 در رویه‌های آنتی‌شان در همه زمانهای بعدی ثابت باقی بماند.

نتیجه به روشنی با عالم مینکوفسکی تفاوت دارد. مشخصاً، یک نقطه کلی P روی هر خط L از رویداد اولیه (X', t') با یک خیز به دست می‌آید

$$X = \gamma(V)(X' + Vt'), \quad t = \gamma(V)(t' + VX') \quad (\text{الف } 4-37)$$



شکل ۴-۳ عالم ریندر. جهانخطهای ناظرهای اصلی با خیزهایی به دست می‌آیند که [شکل ۴-۶ (ب) را ببینید] از وضعیتهای اولیه آنها به فواصل مساوی در امتداد رویه $\{t = 0\}$ صورت می‌گیرد. این خیزها رویه $\{t = 0\}$ را برحسب پارامتر β به رویه‌های $\{\beta = \beta_0\}$ ، $\{\beta = 2\beta_0\}$ ، و ... منتقل می‌کنند (معادله ۴-۴۴).

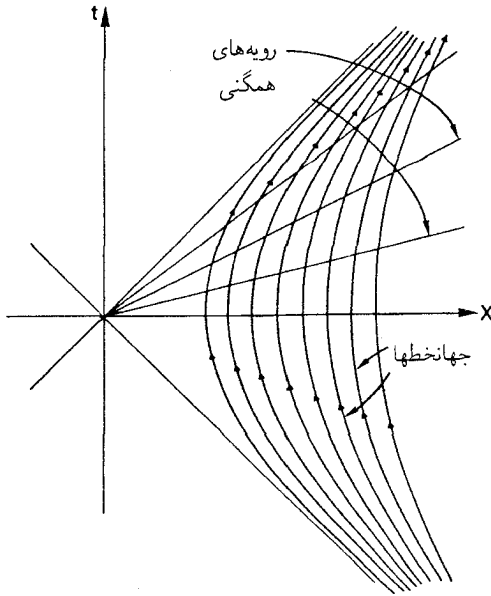
به ازای مقدار V برای تغییر سرعت مربوطه، که در آن $\gamma(V) = (1 - V^2)^{-1/2}$ است، بدین ترتیب V ($|V| < 1$) نقش یک پارامتر را در امتداد جهانخط L ایفا می‌کند. به ازای هر مقدار از V ، خیز، S^2 را که فاصله بین O و P است حفظ می‌کند (معادله ۴-۱۶ تا ۴-۱۸ را ببینید). مقدار این فاصله روی هر جهانخط L برابر مقدار آن در نقطه اولیه است

$$-t^2 + X^2 = \rho^2, \quad \rho^2 = \text{const.} \quad (۴-۳۷ \text{ ب})$$

پس این معادله، معادله جهانخطهای بنیادی است. این خمها در شکل ۴-۳۱ رسم شده‌اند؛ تمام آنها به ازای مقادیر بزرگ $|X|$ بجانب مخروط نوری هستند که از O می‌گذرد. چون جهانخط L از نقطه $\{t' = 0, X' = \rho\}$ می‌گذرد، یک نقطه کلی بر روی L را می‌توان برحسب این نقطه اولیه و از طریق معادله (۴-۳۷ الف) به صورت

$$X = \gamma(V)\rho, \quad t = \gamma(V)V\rho \quad (۴-۳۷ \text{ ج})$$

بیان کرد. در این فرم، V پارامتری در امتداد منحنی است که با ρ مشخص می‌شود. توجه داشته



شکل ۴-۳۱ جهانخطهای $S^1 = \rho^2$ و رویه‌های همزمانی آنها که در عین حال رویه‌های همگنی (یعنی با چگالی ثابت) نیز هستند.

باشید که نقطه O یک نقطه ثابت این خیزهاست، و از این رو این روش جهانخطی را که از خود O می‌گذرد به وجود نمی‌آورد؛ برای اهداف بعدی بهتر است که جهانخط L_0 را با $\{X = 0\}$ تعریف کنیم. این مدل‌های عالم جالب توجه بسیاری دارند که به نوبت بررسی می‌کنیم.

الف) فاصله‌های نسبی ثابت. جهانخطها طوری ساخته شده‌اند که تحت تبدیلهای لورنتس (خیزها) حول O ناوردا باشند؛ بنابراین، فاصله آنها از یکدیگر در تمام زمانها ثابت باقی می‌ماند. در نظر اول به شکل ۴-۳۱ این نکته بدیهی نیست، اما روشن است که این خطها روی رویه‌هایی قرار دارند که به فاصله ثابت از O هستند (۴-۳۷ ب را ببینید). نکته اینجاست که رویه‌های آنیت برای تمامی این خانواده از ناظرها خطهای مستقیم I_V هستند که از O می‌گذرند؛ در هر نقطه واقع بر هر رویه I_V زاویه با خط افقی یکسان است، اما در زمانهای بعدی و بعدتر، روی هر جهانخط (که متناظر با مقادیر فزاینده V است) زاویه I_V با محور X ها افزایش می‌یابد، و به طور مجانبی به مخروط نور نزدیک می‌شود. این بدان سبب است که این ناظرها شتاب می‌گیرند؛ همیشه روی هر جهانخط، سرعت نسبت به محورهای t و X در حال افزایش است، از این رو خطوط به اندازه زاویه α نسبت به جهت عمودی کج می‌شوند و این افزایش تا 45° ادامه می‌یابد. متناظر با آن، رویه‌های آنیت به اندازه همان زاویه α نسبت به محور X ها کج می‌شوند؛ بنابراین انقباض طولهای فزاینده باعث می‌شوند که یک فاصله ثابت (از نظر ناظر L) درازتر و درازتر به نظر برسد (برای یک

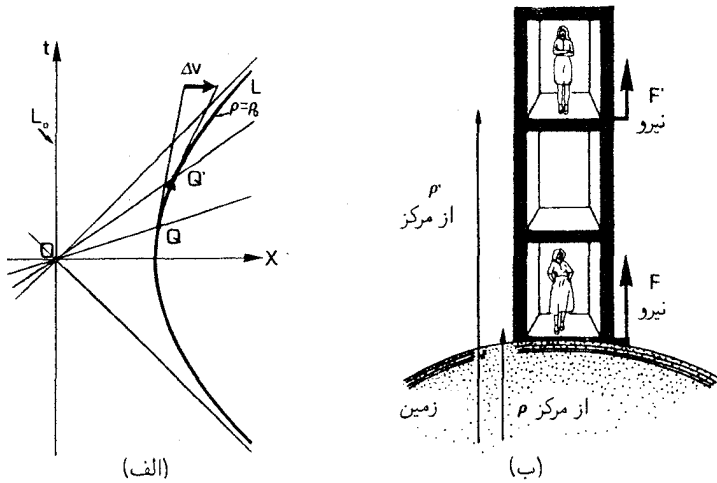
ناظر ساکن L_0 ، که یک ناظر اصلی نیست).

رویداد O برای این خانواده از ناظرها موقعیت ممتاز غریبی دارد. هر ناظر L آن را با هر رویدادی در تاریخش همزمان می‌بیند (زیرا تمام رویه‌های آنیت آنها در آنجا با یکدیگر برخورد می‌کنند) و فاصله آن را از خود همیشه یکسان می‌بیند. برعکس، هر ناظری در رویداد O (سرعتش هر چه باشد) فاصله خود را از هر ناظر L یکسان اندازه می‌گیرد. برعکس، ناظر با جهانخط L_0 دارای رویه‌های آنیت $\{t = \text{const.}\}$ است، و طبق ۴-۳۷ اندازه‌گیری او نشان می‌دهد که تمام ناظرهای L (تا رویداد O) به او نزدیک می‌شوند و سپس (بعد از رویداد O) به تدریج از او دور می‌شوند. آن ناظر، چگالی ماده در زمان $t = 0$ را یکتواخت اندازه می‌گیرد (زیرا ساختمان آن طوری است که در آن زمان یکتواخت است) اما در هیچ زمان دیگری یکتواخت نیست، زیرا، همان‌طور که ۴-۳۷ ب نشان می‌دهد، طبق اندازه‌گیری L فاصله فضایی آنی $X_1 - X_2$ ($t = \text{const.}$) بین دو جهانخط بنیادی به زمان t بستگی دارد. با وجود این مدل عالم از لحاظ فضایی در نظر ناظرهای اصلی یکتواخت است. ترکیب تقارنهای فضا-زمان ۴-۳۳ با ۴-۳۷ الف که روی رویه‌های آنیت I_V عمل می‌کنند نشان می‌دهند که خود فضا-زمان روی این رویه‌ها یکتواخت است. همچنین، فاصله بین جهانخطها روی این رویه‌ها ثابت اندازه گرفته می‌شوند، از این رو طبق اندازه‌گیری ناظرهای اساسی چگالی ماده روی آنها ثابت است. بدین ترتیب آنها در این مدل عالم رویه‌های همگنی دیده می‌شوند.

ب) شتاب یکتواخت. از آنجا که جهانخطهای L خطوط مستقیم نیستند، هر ناظر به‌طور غیرلخت حرکت می‌کند. به‌علت ساختمان این جهانخطها که با استفاده از تبدیلهای لورنتس صورت می‌گیرد که بازه‌های فضا و زمان را حفظ می‌کنند و به‌ازای گامهای یکسان زمانی روی هر جهانخط سرعت را به‌طور یکتواخت افزایش می‌دهند، این الزاماً به‌نحوی اتفاق می‌افتد که هر ناظر آهنگ تغییر سرعت خود نسبت به ویژه‌زمان خود را ثابت اندازه می‌گیرد، یعنی در یک حالت شتاب دائمی است. طبق قانون نیروی ۳-۳۵ ب، این به‌یک نیروی ثابت (مثلاً موتور سفینه‌ای که به‌طور دائم کار می‌کند) نیاز دارد تا هر ناظر را در مدار خود نگهدارد. گرچه، از نظر L_0 سرعت این جهانخطها به تدریج به‌سرعت نور نزدیک می‌شود اما هیچگاه بدان نمی‌رسد (مطابق با ماهیت محدودکننده سرعت نور).

گرچه به‌محض اینکه کسی نقش تبدیل لورنتس را به‌عنوان یک نگاشت فضا-زمان بر خودش که اندازه‌گیریهای فضا و زمان را حفظ می‌کند درک کند، این مطالب روشن می‌شوند، اما تحقیق صریح این نتایج جالب توجه است. رویداد $Q = (t, X)$ روی جهانخط L $\{\rho = \rho_0\}$ را در نظر می‌گیریم که روی رویداد دیگری $Q' = (t', X')$ روی L با ۴-۳۷ الف به‌ازای مقدار مشخص ΔV از V نگاشته می‌شود. در این صورت ویژه‌زمان بین Q و Q' که ΔT است از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\Delta T^2 = \Delta t^2 - \Delta X^2 \quad (\text{الف } ۳۸-۴)$$



شکل ۴-۳۲ (الف) اختلاف سرعت دو نقطه مجاور Q و Q' روی جهانخط L ($\rho = \rho_0$) برابر ΔV است. (ب) درست همان طور که شتاب برای حرکت روی مسیر L که شتاب یکنواخت دارد با فاصله ρ کاهش می یابد، نیروی لازم برای نگه داشتن یک ناظر در مسیری با شتاب یکنواخت به فاصله ثابت از مرکز زمین نیز کاهش می یابد (در زندگی روزمره، آن نیرو را کف اتاق برما وارد می کند؛ اگر کف اتاق نبود به سوی مرکز زمین سقوط آزاد می کردیم).

که در آن

$$\Delta t = t' - t, \quad \Delta X = X' - X \quad (۴-۳۸)$$

با جایگزینی از ۴-۳۷ الف و ساده کردن، به دست می آوریم

$$\Delta \tau^2 = 2\rho_0^2 \{ \gamma(\Delta V) - 1 \} \quad (۴-۳۹ الف)$$

که نشان می دهد $\Delta \tau$ به ازای ΔV مشخص روی جهانخط ثابت است. اگر ΔV کوچک باشد این مقدار برابر است با زمانی که در حرکت مستقیم از Q به Q' اندازه گرفته می شود، که تقریباً با زمان Δ_{LT} برابر است که در حرکت از Q به Q' در امتداد L اندازه گرفته می شود. اما ΔV تغییر سرعت ناظر در آن زمان است [شکل ۴-۳۲ (الف)]. بدین ترتیب شتاب طی این زمان برابر است با $\Delta V / \Delta_{LT}$. در حد ΔV کوچک، نتیجه می شود که $1/2 \Delta V^2 \sim \gamma - 1$ و در این صورت ۴-۳۹ الف نشان می دهد که

$$\Delta \tau = \rho_0 \Delta V \quad (۴-۳۹ ب)$$

همچنین $\Delta_{LT} \sim \Delta \tau$ ، از این رو ویژه شتاب $A \equiv dV/d\tau$ است که حد $\Delta V / \Delta_{LT}$ است به ازای

ΔV کوچک و در نتیجه برای Δ_{LT} کوچک، برابر است با

$$A = \rho_0^{-1} \quad (40-4)$$

که تأیید ثابت بودن شتاب روی هر جهانخط است و هر قدر جهانخط از O دورتر باشد مقدار آن کوچکتر است. این دقیقاً مشابه مورد ناظر ایستایی است که فاصله شعاعی او از مرکز زمین ثابت است او را با یک نیروی ثابت، که معمولاً از کف اتاق وارد می‌شود، در این فاصله ثابت نگه می‌دارد، و اندازه این نیرو با فاصله او از زمین کاهش می‌یابد [شکل ۴-۳۲(ب)]. بعداً معلوم خواهد شد که این تشابه بین ناظرهای با شتاب یکنواخت و یک میدان گرانش یکنواخت اهمیت اساسی دارد. (ج) انتقالهای به سرخی که ناظرهای اساسی اندازه می‌گیرند. چون ناظرها به طور لخت حرکت نمی‌کنند، تحلیل بخشهای ۱-۳ و ۲-۳ دیگر معتبر نیستند. گرچه، می‌توانیم ضریب K مشاهده شده برای این خانواده از ناظرها را به سادگی حساب کنیم. نور گسیل شده در رویداد r_1 توسط ناظر O_1 روی جهانخط L_1 $\{\rho = \rho_1\}$ را در نظر می‌گیریم که ناظر O_2 روی جهانخط L_2 $\{\rho = \rho_2\}$ در رویداد r_2 دریافت می‌کند (شکل ۴-۳۳). تحت خیز ۴-۳۷ الف، به ازای یک مقدار انتخاب شده ΔV ، پرتوهای نور روی پرتوهای نور نگاشته می‌شوند. پس اگر r'_1 به r_1 و L_1 و r'_2 به r_2 روی L_2 نگاشته شود، در این صورت پرتو نوری که از r_1 به r_2 می‌رود به پرتو نوری که از r'_1 به r'_2 می‌رود نگاشته می‌شود. طبق ۴-۳۹ الف، ویژه‌زمان ΔT_1 از r_1 به r'_1 برابر است با

$$\Delta T_1' = 2\rho_1' \{ \gamma(\Delta V) - 1 \} \quad (41-4 \text{ الف})$$

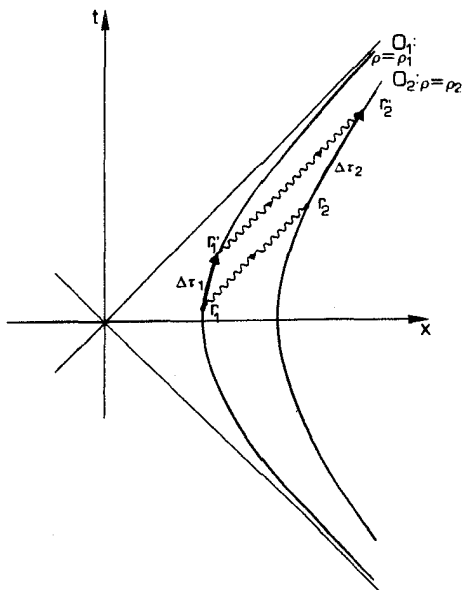
ویژه‌زمان ΔT_2 از r_2 به r'_2 برابر است با

$$\Delta T_2' = 2\rho_2' \{ \gamma(\Delta V) - 1 \} \quad (41-4 \text{ ب})$$

با در نظر گرفتن نسبت این دو معادله داریم $\Delta T_1/\rho_1 = \Delta T_2/\rho_2$ ؛ بنابراین رابطه بازه‌های زمانی به صورت زیر است

$$K = \Delta T_2/\Delta T_1 = \rho_2/\rho_1 \quad (42-4)$$

این رابطه مستقل از ΔV است، بنابراین با در نظر گرفتن حد ΔV کوچک، عبارت بالا ضریب K را در هر لحظه به دست می‌دهد و با استفاده از ۳-۳ انتقال به سرخ مشاهده شده توسط ناظر O_2 برای تابش گسیل شده از O_1 را تعیین می‌کند. این انتقال به سرخ ناشی از حرکت شتابدار ناظرهاست. از آنجا که انتقال به سرخ تنها به نسبت دو فاصله ρ_2 و ρ_1 بستگی دارد مستقل از زمان است. انتقال به سرخ با افزایش ρ_2 و کاهش ρ_1 ، افزایش می‌یابد و اگر $\rho_1 \rightarrow 0$ و یا $\rho_2 \rightarrow \infty$ و اگر می‌شود.



شکل ۴-۳۳ نور در رویداد I_1 روی جهانخط O_1 ($\rho = \rho_1$) گسیل و در رویداد I_2 روی جهانخط O_2 ($\rho = \rho_2$) دریافت می‌شود. وقتی رویداد I_1 در اثر یک خیز به رویداد I'_1 پس از گذشت ویژه‌زمان $\Delta\tau_1$ می‌رود، پرتو نور در اثر یک خیز به پرتو نور دیگری می‌رود که این جهانخطها را به یکدیگر وصل می‌کند (زیرا هم پرتوهای نور و هم جهانخطها تحت تبدیلهای لورنتس ناوردا هستند). پرتو دوم در I'_1 روی O_1 گسیل می‌شود و در رویداد I'_2 روی O_2 در زمان $\Delta\tau_2$ پس از دریافت می‌شود.

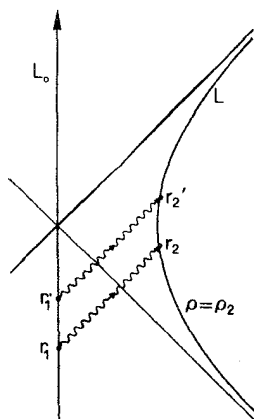
د) انتقالهای به‌سرخ نسبت به ناظر ساکن. اگر رویدادهای گسیل I_1 و I_2 روی جهانخط استثنایی L_0 که از مبدأ O می‌گذرد باشند (شکل ۴-۳۴)، محاسبه پیچیده‌تری ضریب K را تعیین می‌کند. پس از انجام عملیات جبری به‌دست می‌آوریم

$$\Delta\tau_1 = \rho_1^2 \{1 - (1 - \Delta V)\gamma\} / \{t + (\rho_1^2 + t^2)^{1/2}\}$$

که در آن t زمان دریافت علامت در رویداد I_2 است، در حالی‌که $\Delta\tau_2$ از ۴-۴۱ ب‌دست می‌آید. نسبت این دو K را تعیین می‌کند. در حد ΔV کوچکی، پس از حذف شاخص پایین "۲" به‌دست می‌آوریم

$$K = \{t + (\rho^2 + t^2)^{1/2}\} / \rho \quad (43-4)$$

این رابطه انتقال به آبی (برای t منفی)، به‌تدریج که L به L_0 نزدیک می‌شود) و انتقال به‌سرخ (برای

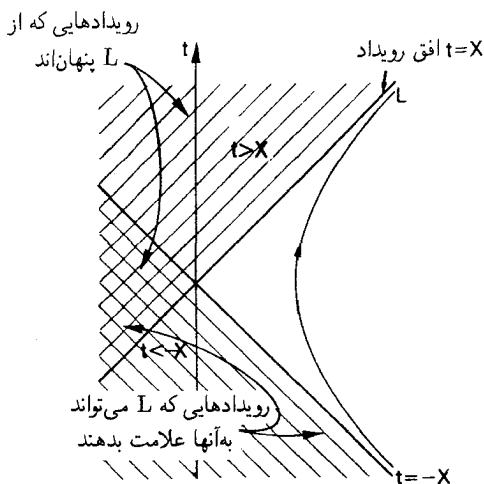


شکل ۴-۳۴ علامت نوری از جهانخط استثنایی L_0 در رویدادهای r_1 و r_2' گسیل می‌شوند، و توسط ناظر L که شتاب یکنواخت دارد دریافت می‌شوند.

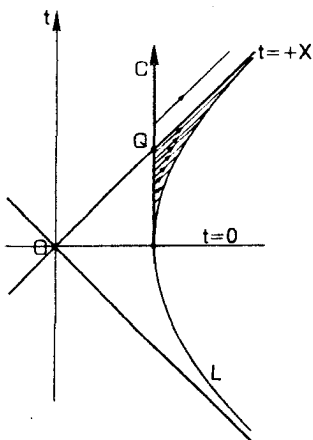
t مثبت، به تدریج که L از L_0 دور می‌شود (بینهایت بزرگی را برای قدر مطلق t به اندازه کافی بزرگ به دست می‌دهد).

ه) افق رویداد. اندکی تأمل دربارهٔ مثال قیل و یا شکل ۴-۳۱ نشان خواهد داد که ناظر روی L_0 فقط وقتی می‌تواند علامتی را از ناظر روی L دریافت کند که $t > 0$ ، اما تنها وقتی می‌تواند برای او علامت بفرستد که $t < 0$. بدین ترتیب، هر ناظر اصلی L نمی‌تواند به L_0 علامت بفرستد و پاسخی دریافت کند! در واقع روشن است (شکل ۴-۳۵) که تمام رویدادهایی که در مورد آنها $t - X > 0$ نمی‌توانند به L علامت بفرستند، در حالی که تمام رویدادهایی که در مورد آنها $t + X < 0$ نمی‌توانند علامتی از L دریافت کنند. رویهٔ $\{t = X\}$ افق رویداد برای این ناظرهای اصلی نامیده می‌شود. تمام رویدادهای ”آن طرف“ افق، یعنی رویدادهایی که در مورد آنها $t > X$ ، برای همیشه از چشم ناظرهای اصلی پنهان می‌مانند: آنها هرگز نمی‌توانند بدانند که در آنجا چه روی می‌دهد.

برای روشن شدن مطلب، فرض کنید که ناظر L در یک سفینهٔ فضایی که در زمان $t = 0$ به صورت یک ناظر اصلی حرکت می‌کند فضاوردی را در یک محفظه رها و او آزادانه سقوط کند (یعنی نیرویی بر او وارد نشود). از آنجا که محفظه به طور لخت حرکت می‌کند، جهانخط آن خط راست C است (شکل ۴-۳۶). در هر لحظه پیش از آنکه محفظه در رویداد Q از افق رویداد عبور کند، فضاورد می‌تواند با روشن کردن موتور موشکی که به اندازه کافی توانمند است به سفینهٔ فضایی بازگردد. به هر حال، پس از رویداد Q ، محفظه هرگز نخواهد توانست به سفینهٔ فضایی بازگردد؛ زیرا برای انجام این کار می‌بایستی سریعتر از نور حرکت کند. می‌توان تصور کرد که او در افق رویداد ”به‌دام“ افتاده است، رویه‌ای در فضا زمان که او نمی‌تواند در یک جهت از آن عبور



شکل ۳۵-۴ افقهای رویداد $t = \pm X$ در یک عالم ریندر. یک ناظر اصلی با جهانخط L نمی‌تواند به رویدادهایی که در ناحیه $t < -X$ و برای افق رویداد گذشته $t = -X$ قرار دارند علامتی بفرستد و نمی‌تواند از رویدادهایی که در ناحیه $t > X$ واقع در آن سوی افق رویداد آینده $t = +X$ قرار دارند علامتی دریافت کند.



شکل ۳۶-۴ در $t = 0$ ، ناظر اصلی L (در یک سفینه فضایی) محفظه‌ای را رها می‌کند که از آن به بعد به طور ناختم روی جهانخط C حرکت می‌کند. قبل از رویداد Q هنگامی که C از $t = X$ عبور می‌کند، محفظه می‌تواند علامت نوری به L بفرستد، اما بعد از Q این کار غیرممکن است. بدین ترتیب اگر Q برطبق اندازه‌گیری ساعت C در ساعت $12:00$ اتفاق بیافتد، L نمی‌تواند رویدادهایی که پس از ساعت $12:00$ در تاریخ او روی می‌دهند را مشاهده کند؛ بدین ترتیب L این رویدادها را "پنهان شده در پشت افق رویداد" به حساب خواهد آورد.

کند. همچنین او نمی‌تواند هیچ علامتی را به‌سفینه فضایی بفرستد تا بگوید چه برآن گذشته است. تا آنجا که به‌دنیای خارج ($t < X$) مربوط می‌شود، فضاورد دیگر عملاً وجود ندارد.

فرض کنید که C بازه‌های منظم علائمی را می‌فرستد که L دریافت می‌کند (شکل ۴-۳۶). برای سهولت، فرض کنید طبق اندازه‌گیری C ، رویداد Q در $00:12$ ظهر روی می‌دهد. در این صورت تمام علائم منظمی که قبل از $00:12$ ظهر فرستاده شده‌اند را L بالاخره دریافت خواهد کرد، اما علامت ساعت $00:12$ را دریافت نخواهد کرد، هیچیک از علائم بعدی را نیز دریافت نخواهد کرد. L که ساعت C را با یک تلسکوپ مشاهده می‌کند هرگز رسیدن ساعت $00:12$ را نخواهد دید. در واقع، L علائم منظم را در فواصلی که به‌تدریج طولانی می‌شوند دریافت خواهد کرد، آخرین دقیقه قبل از ظهر در تاریخ C را L در یک زمان بینهایت طولانی خواهد دید؛ یعنی، ضریب انتقال دوپلر K به‌سوی بینهایت میل می‌کند و انتقال به‌سرخ بینهایت می‌شود. این از نمودار پیدااست زیرا آخرین دقیقه را L در سراسر تاریخ باقی‌مانده‌اش می‌بیند. این مطلب از ۴-۴۳ نیز مستقیماً نتیجه می‌شود، زیرا روی جهانخط L در آینده دور $t \rightarrow \infty$ ، به‌تدریج که انتقال به‌سرخ واگرا می‌شود، شدت تصویر کاهش می‌یابد و به‌صفر می‌رسد (طبق معادله ۴-۳۶ ب). بدین ترتیب L که پیوسته C را مشاهده می‌کند، می‌بیند که فعالیتها در C به‌طور نامحدود کند می‌شوند؛ انتقال به‌سرخ مشاهده شده بدون حد افزایش می‌یابد، و تصویر محو می‌شود. رویداد Q و تمامی رویدادهای بعد از آن برای L قابل مشاهده نخواهند بود، اما تا آنجا که به C مربوط می‌شود، هیچ چیز خاصی در آنجا اتفاق نخواهد افتاد. این رفتار دقیقاً شبیه رفتار ذره‌ای است که هنگام عبور از افق رویداد یک سیاهچاله (فصل ۶ را ببینید) توسط یک ناظر خارجی مشاهده می‌شود.

و) فرم متریک. سرانجام، بد نیست ببینیم چگونه فرم متریک ۴-۳۲ الف در اثر تغییر مختصات که با تقارن جهانخطها سازگار شده است تبدیل می‌شود. این کار با استفاده از مختصات ρ (که از ۴-۳۷ ب به‌دست می‌آید) و کمیت β که از τ با استفاده از رابطه $d\tau = \rho d\beta$ در امتداد جهانخطها تعیین می‌شود (این رابطه همان حد بینهایت کوچک رابطه ۴-۳۹ ب است) انجام می‌دهیم: اینها مختصات همراه ناظرهای اصلی هستند: ρ برچسب جهانخطهاست، و β یک پارامتر زمانی (اما نه ویژه‌زمان) در امتداد آنهاست. مشخصاً، β "سرعت هذلولوی" است که با V در ۴-۳۷ ج به‌واسطه $V = \tanh \beta$ مربوط می‌شود؛ در این صورت $\gamma(V) = \cosh \beta$ و $V\gamma(V) = \sinh \beta$ بنا براین باید بتوانیم ۴-۳۷ ج را به‌صورت زیر بنویسیم^۱

$$X = \rho \cosh \beta, \quad t = \rho \sinh \beta \quad (4-44 \text{ الف})$$

۱. در اینجا، $\sinh \beta = 1/2\{\exp \beta - \exp(-\beta)\}$ ، $\cosh \beta = 1/2\{\exp \beta + \exp(-\beta)\}$ ، $\tanh \beta = \sinh \beta / \cosh \beta$ که در آن \exp تابع نمایی است که می‌توان آن را برحسب سری توانی به‌صورت $\exp x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \dots$ بیان کرد. از این رابطه‌ها نتیجه می‌شود که $\tanh^0 = 0$ ، $\sinh^0 = 0$ ، $\cosh^0 = 1$ ، $\cosh^2 \beta - \sinh^2 \beta = 1$ جزئیات بیشتری در مورد این "توابع هذلولوی" را می‌توان در هر کتاب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال یافت.

برای تحقیق درستی این رابطه‌ها، از $4-32$ الف و $4-44$ الف برای تعیین $d\tau$ در امتداد جهانخطهایی که روی آنها $d\rho = 0$ استفاده کنید). بنابر تعریف β و اینکه ρ معیار فاصله شعاعی است، فرم متریک را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$ds^2 = -\rho^2 d\beta^2 + d\rho^2 \quad (4-44\text{ب})$$

ماهیت ایستای راه حل آشکار است، زیرا متریک و جهانخطها (که عبارت‌اند از $\rho = \text{const.}$) مستقل از متغیر زمان β هستند. باید توجه داشت که فرم $4-44$ ب تنها آن قسمت از فضا-زمان را می‌پوشاند که در آن جهانخطهای بنیادی وجود دارند، یعنی ناحیه‌ای از عالم که خارج از افق رویداد آینده $t = X$ (که در بالا بحث شد) و افق رویداد گذشته $t = -X$ (که مشخصه‌های آن را در اینجا بررسی نکرده‌ایم) قرار دارد.

تمرینها

۴-۲۰ (الف) بگویید چرا برای نگه‌داشتن یک ناظر اصلی روی جهانخطش در عالم ریندلر باید نیرویی بر او وارد شود. چگونه می‌توان نیروی لازم را تولید کرد؟ (ب) با توجه به اینکه این نیرو (که در هر لحظه در چارچوب سکون ناظر اندازه گرفته می‌شود) باید برای یک ویژه‌زمان نامتناهی در امتداد جهانخط او ثابت باشد، چه ملاحظات فیزیکی به ما می‌گوید که رسیدن به این هدف عملاً در بعضی شرایط مشکل است؟

۴-۲۱ مسیر پرتوهای نور را در یک عالم ریندلر برحسب مختصات در بازه $4-44$ ب بیابید و رسم کنید. سرعت مختصه‌ای نور در نقطه (ρ, β) چقدر است؟

۴-۲۲ (الف) $4-39$ و $4-40$ را از معادله‌های قبلی به دست آورید؛ (ب) فرمول $4-43$ انتقال به سرخ را نسبت به یک ناظر ساکن به صورت زیر به دست آورید.

(۱) معادله‌های پرتوهای نور پیش‌رونده را که از رویدادهای $r_1(t_1, 0)$ و $r'_1(t'_1, 0)$ عبور می‌کنند بنویسید.

(۲) از این معادله‌ها برای ارتباط t_1 و t'_1 به مختصات $r_2(t_2, X_2)$ و $r'_2(t'_2, X'_2)$ که در آن پرتوهای نور مسیر ناظر O_2 ، یعنی $\rho = \rho_2$ ، را قطع می‌کنند استفاده کنید.

(۳) $\Delta t_1 = t'_1 - t_1$ را برحسب t_2 و ρ_2 با استفاده از

$$t'_2 = \gamma(t_2 + \Delta V X_2), \quad X'_2 = \gamma(X_2 + \Delta V t_2), \quad X'_2 - t'_2 = \rho_2^2$$

برای حذف t'_2 ، X'_2 و X_2 بیان کنید.

(۴) با تعیین نسبت ΔT_2 به ΔT_1 فرمولی برای K پیدا کنید. در حد ΔV کوچک، شما باید $4-43$ را به دست آورید.

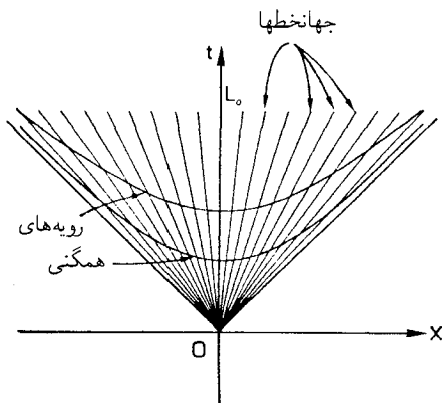
۲۳-۴ مشخصه‌های افق رویداد گذشته $t = -X$ را بررسی کنید [ناظر L_0 را در نظر بگیرید که جهانخطهای بنیادی را مشاهده می‌کند، و نشان دهید تابشی که در ویژه‌زمان نامتناهی توسط یک ناظر اصلی L_0 گسیل می‌شود را L_0 در ویژه‌زمانی نامتناهی دریافت می‌کند]. آیا انتقالهای به‌سرخ نامتناهی به این افق وابسته هستند؟ شار ظاهری تابش چقدر خواهد بود؟

عالم میلن

در این مورد، باز هم با فضا‌زمان تخت که با مختصات (t, X) و فرم متریک $4-32$ الف تعیین می‌شود شروع می‌کنیم. فرض کنید جهانخط L_0 خط $\{X = 0\}$ باشد که از مبدأ O می‌گذرد. مقداری برای ΔV انتخاب کنید، و از خیز $4-37$ الف با V برابر $\pm \Delta V$ مکرراً استفاده کنید تا یک خانواده از جهانخطها که همگی از O می‌گذرند (شکل $4-37$) به‌وجود آید. اینها جهانخطهای ناظرهای اصلی در این مدل عالم هستند که نمایندهٔ یک عالم در حال انبساط است. ما به نوبت ویژگیهای اصلی آن را بررسی خواهیم کرد.

الف) جهانخطهای معادل. چون جهانخطها از یک سری خیز ساخته شده‌اند که تمام اندازه‌گیریهایی فضایی و زمانی را ناوردا باقی می‌گذارد، سپس همگی با یکدیگر معادل‌اند؛ هر ناظر اصلی تاریخی مشابه دیگران را برای مدل عالم تعیین می‌کند. بدین ترتیب این مدل عالم از اصل کیهانشناختی پیروی می‌کند. تمام ناظرهای اصلی با یکدیگر هم‌ارزند. این فرض بنیادی، که به این ایده که ما در عالم در وضعیت ممتازی قرار نداریم رسمیت می‌بخشید، مبنای مدل‌های استاندارد عالم در حال انبساط است که امروزه اختر فیزیکدانها از آن استفاده می‌کنند.

چون جهانخط L_0 یک خط مستقیم است که حرکت لخت (یعنی بدون شتاب) را نمایش می‌دهد، این امر در مورد جهانخطهای تمام ناظرهای اصلی دیگر در عالم نیز صادق است.



شکل $4-37$ عالم میلن. جهانخطها با خیزهای مکرر به‌ازای سرعت $\pm \Delta V$ بر جهانخط L_0 تولید می‌شوند. رویه‌های یکنواختی (یا همگنی) از $S^2 = -\tau^2$ به‌دست می‌آیند.

چون $۳۷-۴$ الف به طور نامحدود تکرار می‌شود، تعداد نامحدودی جهانخط اصلی از این ساختمان به دست می‌آید؛ پس این مدل‌های عالم حاوی تعداد بینهایت کهکشان خواهند بود.
 (ب) مقطعیهای فضایی همگن. رویه‌های S به فاصله فضازمانی ثابت از O تعریف می‌شوند؛ یعنی، آنها رویه‌های زیر هستند

$$t^2 - X^2 = \tau^2 \quad (\tau^2 = \text{const.}) \quad (۴۵-۴)$$

چون جهانخطها خطهای راست هستند، τ همان ویژه‌زمان است که در امتداد این جهانخطها از O اندازه گرفته می‌شود؛ از این رو این رویه‌ها رویه‌های ویژه‌زمان ثابت در تاریخ ناظرهای اصلی هستند. خیز ($۳۷-۴$ الف) این رویه‌ها را ناوردا باقی می‌گذارد و از این رو محل برخورد Q هر جهانخط L با رویه S را به نقطه Q' می‌برد که نماینده محل برخورد یک جهانخط دیگر L' با همان رویه S است. از آنجا که جهانخطها با اعمال مکرر تبدیل $۳۷-۴$ الف با همان مقدار ΔV تولید شده‌اند، با فاصله‌های مساوی از یکدیگر روی رویه S قرار دارند. محاسبه‌ای شبیه به آنچه به $۳۹-۴$ الف انجامید، نشان می‌دهد که فاصله فضایی $\Delta\rho$ بین Q و Q' برابر است با

$$\Delta\rho^2 = 2\tau^2\{\gamma(\Delta V) - 1\} \quad (الف) ۴۶-۴$$

در حد ΔV کوچک ($\Delta V \ll 1$)، رابطه به صورت زیر درمی‌آید

$$\Delta\rho = \tau \Delta V \quad (ب) ۴۶-۴$$

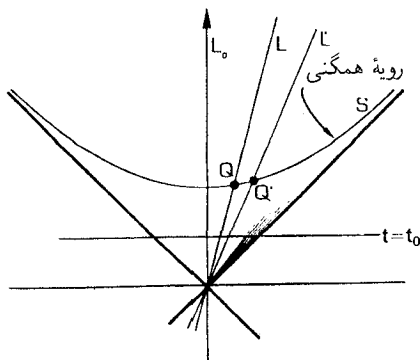
درست همان‌گونه که در عالم ریندلر به فرم متریک $۴۴-۴$ ب رسیدیم، اگر در اینجا از (τ, β) به عنوان مختصات برای این مدل عالم، که در آن $d\rho = \tau d\beta$ است، استفاده کنیم، فرم متریک زیر را به دست می‌آوریم

$$ds^2 = -d\tau^2 + \tau^2 d\beta^2 \quad (الف) ۴۷-۴$$

برای این فضازمانها جهانخطهای بنیادی خمهای $\{\beta = \text{const.}\}$ هستند. مانند قبل، β سرعت هذلولوی است که با V در رابطه $۳۷-۴$ الف از طریق $V = \tanh\beta$ ارتباط دارد؛ چون خم L_0 از نقطه $\{t = \tau, X = 0\}$ می‌گذرد، در این مورد می‌توانیم تبدیل $۳۷-۴$ الف را به صورت

$$t = \tau \cosh \beta, \quad X = \tau \sinh \beta \quad (ب) ۴۷-۴$$

بیان کنیم که در آن β برحسب جهانخطهای بنیادی است و τ ویژه‌زمان در امتداد آنهاست. همگنی فضایی فضازمان در اینجا نمایان می‌شود، زیرا فرم $۴۷-۴$ الف مستقل از متغیر فضایی β است.



شکل ۴-۳۸ خیزی که از طریق ΔV به رویداد Q روی جهانخط L وارد می‌شود آن را به رویداد Q' منتقل می‌کند که در آن جهانخط دوم L' همان رویه همگنی را قطع می‌کند؛ روشن است که فاصله L' از L_0 بیشتر از فاصله L تا L_0 است، و در مقایسه با L با سرعت بیشتری نسبت به L_0 حرکت می‌کند. رویه $t = t_0$ یک رویه همگنی نیست زیرا در نزدیکی مرز \mathcal{L} ($t = \pm X$) تعداد بینهایت جهانخط را قطع می‌کند.

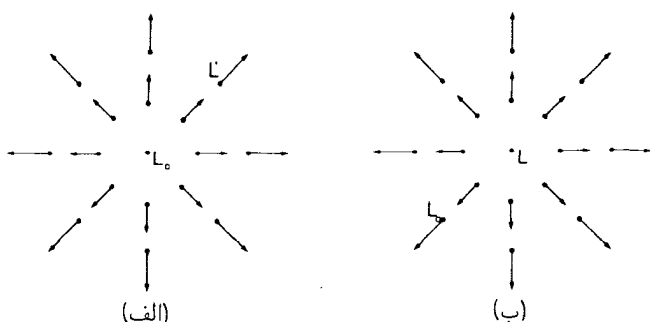
فاصله فضایی بین دو جهانخط متعلق به خانواده ناظرهای اصلی، که در رویه S ($d\tau = 0$) اندازه گرفته می‌شود، برابر خواهد بود با

$$\rho = \int (ds^2)^{1/2} = \tau \int d\beta = \tau(\beta_1 - \beta_2) \quad (48-4)$$

که در آن β_1 و β_2 مقادیر β روی جهانخطها هستند. ساختمان جهانخطها طوری است که تفاوت مقادیر β برای دو جهانخط مجاور به اندازه $\pm \tanh^{-1} \Delta V$ است، از این رو طبق ۴۸-۴ فاصله فضایی همگی آنها از یکدیگر یکسان است. از آنجا که جهانخطها به طور یکنواخت روی این رویه‌ها قرار گرفته‌اند، چگالی ماده روی رویه S ، که از تعداد جهانخطها بر واحد فاصله فضایی به دست می‌آید، ثابت است. بدین ترتیب این رویه‌های فضاگونه رویه‌های همگنی در این مدل‌های عالم هستند. برعکس، روی رویه‌های $\{t = \text{const.}\}$ چگالی غیریکنواخت است؛ در واقع چگالی روی مرز \mathcal{L} ، که در آن $t \rightarrow \pm X$ ، واگرا می‌شود، زیرا رویه‌ها با نزدیک شدن به \mathcal{L} بینهایت جهانخط را قطع می‌کنند (شکل ۴-۳۸).

باید توجه داشت که مقطعی‌های فضاگونه یکنواخت تا بینهایت امتداد دارند. نکته اینجاست که مختصه β در ۴۷-۴ تمام مقدارهای از $-\infty$ تا $+\infty$ را اتخاذ می‌کند، از این رو در هر زمان τ کهکشانهایی وجود دارند که فاصله بین آنها ۴۸-۴ بینهایت بزرگ است.

ج) انبساط خطی و انتقالهای به سرخ مشاهده شده. طبق ۴۶-۴ و ۴۸-۴، فاصله فضایی بین هر دو جهانخط بنیادی که روی رویه همگنی S اندازه گرفته می‌شود با ویژه‌زمان τ متناسب است. بدین ترتیب ماده در این مدل عالم به طور یکنواخت منبسط می‌شود. چون حرکت ناظرهای

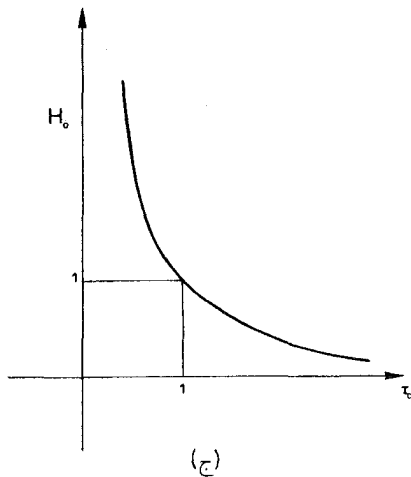
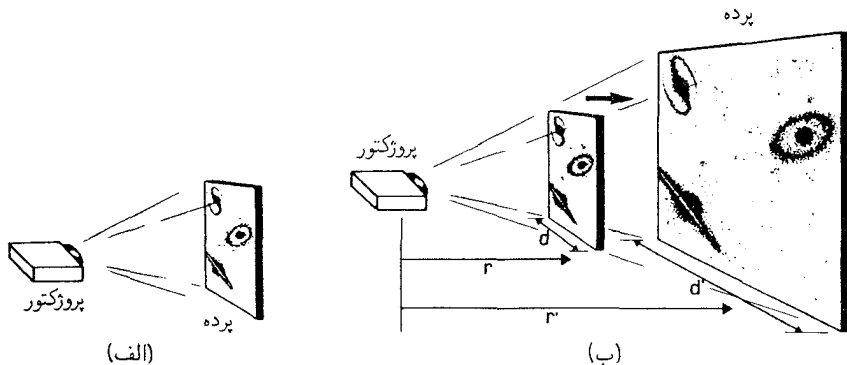


شکل ۴-۳۹ (الف) یک ناظر در کهکشان با جهانخط بنیادی L می‌بیند که کهکشانهای دیگر در تمام جهات از او دور می‌شوند. (ب) همین مطلب در مورد ناظری که در هر یک از کهکشانهای دیگر با جهانخط مثلاً L' قرار دارند نیز صادق است.

اصلی لخت است، بنابراین تحلیل مربوط به ضریب K در فصل ۳ در مورد آنها معتبر است، و مشاهدات آنها از کهکشانهای دور، انتقال به سرخی را نشان خواهد داد که به طور منظم با فاصله افزایش می‌یابد (با شکل ۳-۴ مقایسه کنید).

در حالی که طبق اندازه‌گیری یک ناظر L اصلی تمام کهکشانهای دیگر به طور خطی از او دور می‌شوند، این به معنای قرار داشتن او در مرکز انبساط نیست: برعکس هر ناظر دیگری دقیقاً همین را مشاهده خواهد کرد. در واقع، طبق اندازه‌گیری تمام کهکشانها، کهکشانهای دیگر به طور خطی از آنها دور می‌شوند و مرکز انبساطی وجود ندارد، تمام کهکشانها با یکدیگر هم‌ارزند. اگرچه از نمودارهای ما این طور برمی‌آید که جهانخط L ممتاز است، اما این تنها به خاطر این است که ما این نمودارها را برحسب مختصات رسمی رسم کرده‌ایم که مرکز آنها آن کهکشان است. می‌توانستیم هر کهکشان دیگری L' را انتخاب کنیم و مرکز مختصات را در آنجا قرار دهیم؛ تصویری که به دست می‌آید دقیقاً یکسان خواهد بود، به جز اینکه مرکز آن اکنون روی L' است (شکل ۴-۳۹). سرعت نسبی حرکت دورترین کهکشانها به سرعت نور نزدیک می‌شود، ناظر هر که می‌خواهد باشد. (هر عضو از خانواده جهانخطها تحت «خیزهای» تبدیل لورنتس هم‌ارزند، و از این رو در اینجا خواص سینماتیکی نسبیت خاص، آن‌گونه که در فصل قبل بحث شد، به شکل تازه‌ای ظاهر می‌شود.)

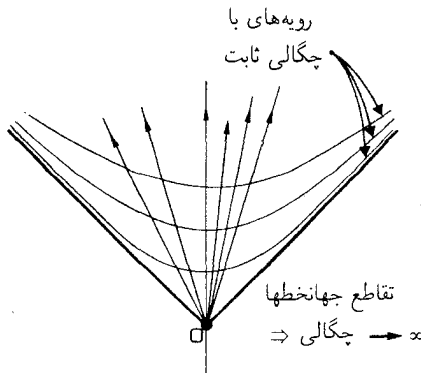
شاید در ابتدا درک این ویژگی که هر کهکشان از کهکشان دیگر دور می‌شود مشکل باشد، اما می‌توان آن را به صورت زیر مجسم کرد: یک پروژکتوری را در نظر بگیرید که تصاویری از یک خوشه کهکشانها را بر روی پردهٔ دور دست می‌اندازد [شکل ۴-۴۰ (الف)]. اگر پرده را از پروژکتور دور کنیم، مقیاس کل صحنه تصویر بزرگ می‌شود و تصویر هر کهکشان از تصویر کهکشانهای دیگر دور می‌شود بدون اینکه برای این انبساط ظاهری مرکزی وجود داشته باشد [شکل ۴-۴۰ (ب)]. بدین ترتیب اگر پرده را به طور یکنواخت دور کنیم، انبساط قسمت کوچکی از عالم را روی پرده



شکل ۴-۴۰ (الف) یک پروژکتور تصویر خوشه‌ای از کهکشانها را روی یک پرده می‌اندازد. (ب) اگر پرده را به تدریج دور کنیم، تصویرهای کهکشانها روی پرده به تدریج از یکدیگر دور می‌شوند؛ ظاهر امر درست شبیه به یک عالم در حال انبساط است. (ج) رابطه بین ثابت هابل H_0 و سن آن τ_0 در یک عالم میلن.

مشاهده خواهیم کرد. نمودار فضازمانی که از توالی این تصویرها بر روی پرده تشکیل می‌شود درست شبیه به شکل ۴-۳۷ خواهد بود.

(د) ثابت هابل. ثابت هابل H_0 آهنگ انبساط عالم در یک لحظه مشخص τ_0 را اندازه می‌گیرد. طبق تعریف مقدار آن برابر آهنگ تغییر فاصله از یک کهکشان نزدیک در واحد ویژه‌زمان تقسیم بر فاصله از آن کهکشان است، این نسبت در زمان τ_0 محاسبه می‌شود. در موردی که در اینجا بررسی می‌شود، از ۴-۴۶ برای یک جفت کهکشان در زمانهای τ_1 و τ_2 می‌بینیم که $\Delta\rho_1 = \tau_1 \Delta V$ و $\Delta\rho_2 = \tau_2 \Delta V$ ، از این رو تغییر فاصله در زمان $\Delta T = \tau_2 - \tau_1$ برابر است

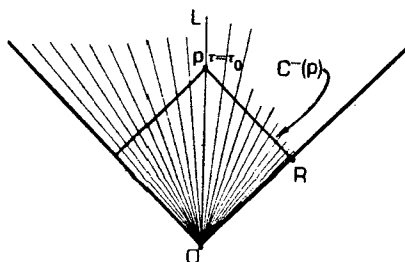


شکل ۴-۴۱ "مهبانگ": در نقطه O که تمام جهانخطها یکدیگر را قطع می‌کنند، چگالی ماده نامتناهی است. از آنجا که رویه‌های نشان داده شده رویه‌های با چگالی ثابت هستند، روی رویه‌های \mathcal{S} نیز چگالی نامتناهی است، که در نتیجه مرز مدل عالم را تشکیل می‌دهند: ناحیه عالم در حال انبساط که از نظر فضایی همگن است در این رویه‌ها که چگالی ماده نامتناهی می‌شود به پایان می‌رسد. رویداد O آغاز عالم است.

با $\Delta\rho_1 - \Delta\rho_2 = \Delta T \Delta V$. بنابراین $H_0 = (\Delta T \Delta V / \Delta T) / (\tau \Delta V) = 1/\tau$ که در زمان τ_0 محاسبه می‌شود، یعنی $H_0 = 1/\tau_0$ ، که به روشنی با افزایش عمر عالم کاهش می‌یابد [شکل ۴-۴۰ (ج)].

ه) تکنیکی اولیه. از آنجا که انبساط خطی است، بنابراین اگر تا زمان O ($\tau = 0$) به عقب برگردیم، در O که تمام جهانخطهای ماده یکدیگر را قطع می‌کنند یک "مهبانگ" وجود دارد (طبق ۴-۴۸)، در آنجا فاصله بین هر دو کهکشان به صفر میل می‌کند). در این صورت روشن است که در O چگالی ماده نامتناهی است. اما چون رویه‌های S رویه‌های چگالی ثابت هستند، این بدان معناست که وقتی $\tau \rightarrow 0$ چگالی ماده همه جا روی این رویه‌ها افزایش پیدا می‌کند، و بنابراین در تمام نقطه‌های روی مرز \mathcal{S} به بینهایت میل می‌کند (شکل ۴-۴۱). بنابراین، در واقع باید این مرز را لبه مدل عالم دانست، زیرا ناحیه‌ای که از نظر فضایی همگن است و در آن ماده در حال انبساط دارای چگالی متناهی است توسط این رویه محصور می‌شود. بدین ترتیب، اکنون که این مدل عالم ساخته شده است، تنها در داخل ناحیه $t = \pm X$ منظم است، و ناحیه خارج از آن را باید کنار گذاشت زیرا این ناحیه توسط رویه‌های با چگالی نامتناهی از عالم در حال انبساط جدا شده است.

در حالی که در هر رویه $\{t = \text{const.}\}$ لبه‌ای برای توزیع کهکشانها وجود دارد، وقتی ناحیه خارجی را کنار بگذاریم، در واقع نمی‌توانیم بگوییم که این مدل نماینده انبساط ماده موجود در عالم به خلأ اطراف است. پس چگونه می‌توانیم آنچه روی می‌دهد را تعبیر کنیم؟ نکته کلیدی این است که توجه داشته باشیم که هیچ مرز یا لبه‌ای برای کهکشانها در رویه‌های همگنی $\tau = \text{const.}$



شکل ۴-۴۲ مخروط نور گذشته $C^-(p)$ رویداد p در زمان τ_0 روی جهانخط L تمام جهانخطهای بنیادی دیگر در عالم را قبل از رسیدن به مرز \mathcal{L} قطع می‌کند. بدین ترتیب ناظر روی L می‌تواند تمام کهکشانهای عالم را ببیند. گرچه، دورترین فاصله فضایی‌ای که L می‌تواند با رادار در آن زمان اندازه بگیرد $\tau_0/2$ است، یعنی فاصله رویداد R که در آن $C^-(p)$ مرز \mathcal{L} را قطع می‌کند.

وجود ندارد. بدین ترتیب هرگاه انبساط را برحسب این رویه‌ها تحلیل کنیم، انبساط به داخل خلأ اطراف و یا جای دیگر صورت نمی‌گیرد، بلکه انبساط چیزی نیست جز افزایش پیوسته فاصله بین هر جفت کهکشان در این رویه‌ها، که تا بینهایت امتداد دارند. این تعبیر آنچه را که در این مدل عالم اتفاق می‌افتد کاملاً توصیف می‌کند، زیرا این رویه‌ها ناحیه فضازمانی را که نماینده عالم در انبساط است به‌طور کامل می‌پوشانند (شکل ۴-۴۱).

مخروط نور گذشته $C^-(p)$ متعلق به هر نقطه p روی جهانخط L تمام جهانخطهای دیگر را تا \mathcal{L} قطع می‌کند. بدین ترتیب اصولاً هر ناظر اصلی می‌تواند در هر زمانی که بخواهد هر کهکشان دیگر را در عالم ببیند و با او ارتباط برقرار کند، هر چند که تعداد آنها نامتناهی است. طبق رابطه ۳-۱۰ الف ضریب انتقال دوپلر به تدریج که به زمانهای قدیمتر نگاه می‌کنیم (یعنی به کهکشانهایی که در مورد آنها $\tau \rightarrow 0$ و سرعت نسبی $c \rightarrow v$) بینهایت میل می‌کند، و از این رو طبق ۳-۳ انتقال به سرخ نیز در آنجا به بینهایت میل می‌کند و طبق ۴-۳۶ ب شدت نور دریافتی کم می‌شود و به صفر می‌رسد. برعکس، گرچه در هر زمان τ_0 هر ناظری می‌تواند از کلیه کهکشانهای دیگر در عالم علامتهایی را دریافت کند. فاصله‌ای که رادار تا رویداد حدی قابل مشاهده R در هر جفت اندازه می‌گیرد $\tau_0/2$ است، از این رو می‌توان گفت که اندازه عالم قابل مشاهده همان τ_0 است. هر ناظر اصلی با این اندازه‌گیری موافق خواهد بود (شکل ۴-۴۲).

عالم میلن چهاربعدی. می‌توان مدلهایی چهاربعدی تخت فضا از عالم میلن ساخت که تمام ویژگیهایی را که در بالا بحث شد داشته باشند؛ این مدلها در فصل ۷ ارائه خواهند شد. از آنجا که این فضازمانها تخت هستند، معادله‌های ۴-۳۵ (با $r = \rho$) و ۴-۳۶ شار مشاهده شده و شدت تابش در چنین عالمهایی را تعیین خواهند کرد. این مدلهای عالم بسیاری از ویژگیهای مدلهای عالم در حال انبساط فضازمان خمیده را از خود نشان می‌دهند که آنها را در فصل ۷ بررسی خواهیم کرد.

تمرینها

۲۴-۴ در یک نمودار عالم میلن، جهانخطهای چند ذره را که به طور لخت حرکت می‌کنند رسم کنید. چرا یک چنین ذره‌ای در نهایت نسبت به ناظرهای اصلی و ماده اطراف خود به حالت سکون در می‌آید؟ فرض کنید ذره‌ای در $t = t_0$ از مبدأ گسیل می‌شود و آزادانه با سرعت V_0 حرکت می‌کند. دورترین ناظر اصلی (ناظری با بزرگترین مقدار V) که این ذره در صورت نامتناهی بودن زمان به او برسد کدام است؟

۲۵-۴ معادله‌های ۴-۴۶ الف و ۴-۴۶ ب را به دست آورید.

۲۶-۴ فرض کنید که ثابت هابل برابر با 50° کیلومتر بر ثانیه بر مگاپارسک اندازه گرفته شده است، که در آن یک "مگاپارسک" (Mpc) برابر با $10^6 \times 3.26$ سال نوری و سن قدیمترین ستاره در خوشه‌های گویسان در عالم $10^9 \times 16$ سال تعیین شده است. آیا این داده‌ها با مدل عالم میلن سازگار است؟ چه می‌شود اگر معلوم شود که ثابت هابل در واقع 10° کیلومتر بر ثانیه بر مگاپارسک است؟

۲۷-۴ از بازه ۴-۴۷ الف نتیجه بگیرید که انتقال به سرخ z نوری که یک ناظر اصلی A در زمان τ_0 مشاهده می‌کند که از یک کهکشان بنیادی در زمان τ_G گسیل می‌شود از معادله زیر به دست می‌آید

$$1 + z = \tau_0 / \tau_G$$

بنابراین نشان دهید که به تدریج که ناظر A طیف گسیل شده از کهکشانها در زمانهای قدیم و قدیمتر (یعنی به تدریج که $\tau_G \rightarrow 0$) را بررسی می‌کند، انتقال به سرخ مشاهده شده و اگر می‌شود. پیامد این امر در مورد اندازه‌گیریهایی که ممکن است A در مورد شار و یا شدت تابش گسیل شده از کهکشانها در زمانهای ابتدایی تاریخ این عالم انجام دهد چیست؟ [برای سادگی، فرض کنید که نور گسیل شده توسط هر کهکشانی در طول تاریخ ثابت است.]

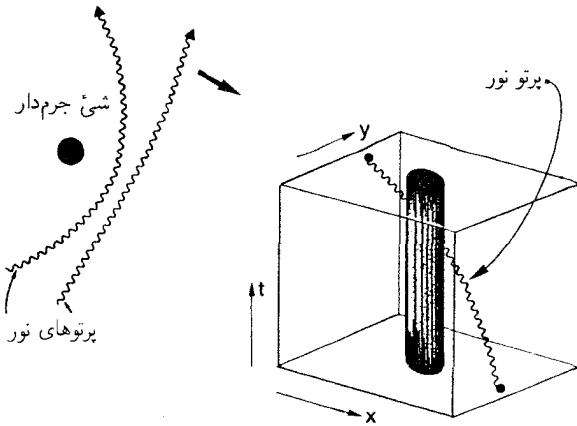


فضازمانهای خمیده

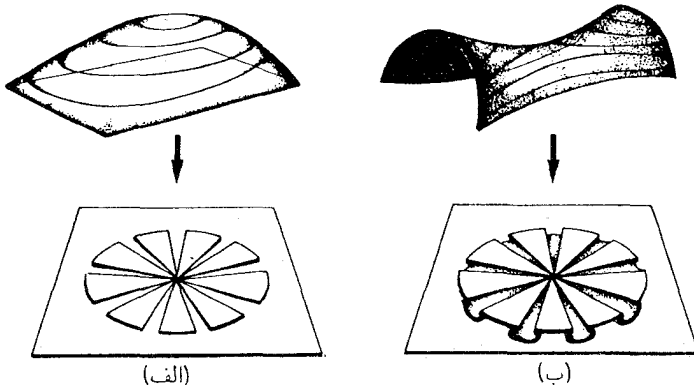
۱-۵ مفهوم کلی

تا کنون تمامی بحثهای ما مربوط به فضازمانهای تخت بوده است، که در آن می‌توانیم مختصات فیزیکی را طوری انتخاب کنیم که تمام مخروطهای نور با یکدیگر موازی باشند. این امکان وجود دارد زیرا در یک فضازمان تخت، پرتوهایی که در ابتدا با یکدیگر موازی هستند موازی باقی می‌مانند. در فضازمانهای خمیده وضعیت کاملاً متفاوت است. طبق نظریه نسبیت عام اینشتین، که در آن میدانهای گرانشی با خمیدگی فضازمان نمایش داده می‌شوند، میدانهای گرانشی اشیای پرجرم علاوه بر مسیر اشیای پرجرم دیگر مسیر پرتوهای نور را هم خم می‌کنند (شکل ۱-۵)؛ در واقع، مشاهده این اثر اولین تأیید تجربی صحت نسبیت عام [در سال ۱۹۱۹ (۱۲۹۸ شمسی)] بود. این ویژگی بر خواص علی و مشاهده‌ای فضازمانهای خمیده به‌نحو شگفت‌آوری اثر می‌گذارد.

مفهوم فضای خمیده در زندگی روزمره آشناست. مثلاً سطح یک توپ فوتبال یک فضای دوبعدی خمیده است، همین‌طور سطح یک دونات؛ اما سطح یک استوانه چنین نیست، زیرا یک استوانه را می‌توان باز کرد و بدون اعوجاج به‌شکل یک صفحه درآورد. در واقع، درمورد انحنای یک رویه دوبعدی با ایجاد برشهای مناسب در جاهای لازم و پهن کردن آن روی یک صفحه می‌توان چیزهای زیادی آموخت. اگر در حین این کار، در نقطه‌ای، اعوجاج، گاف، یا همپوشی ظاهر شود، رویه در آنجا خمیده است. اگر رویه دارای انحنای مثبت باشد (مثلاً نوک یک تپه) در تصویر آن بر

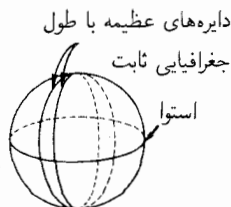


شکل ۱-۵ خم شدن پرتوهای نور در میدان گرانشی یک شی بجرم؛ مسیرها در فضا و در فضا زمان دیگر مستقیم نیستند.



شکل ۲-۵ (الف) رویه‌ای با خمیدگی مثبت. از آنجا که پیرامون یک دایره به شعاع r کوچکتر از $2\pi r$ است، اگر قسمتی از آن را روی صفحه پهن کنیم پاره خواهد شد و در تصویر آن بر صفحه گانهایی وجود خواهند داشت. (ب) رویه‌ای با خمیدگی منفی. از آنجا که پیرامون یک دایره به شعاع r از $2\pi r$ بزرگتر است، اگر قسمتی از آن را روی صفحه پهن کنیم تا می‌شود و در این صورت در تصویر آن بر صفحه همپوشانهایی وجود خواهد داشت.

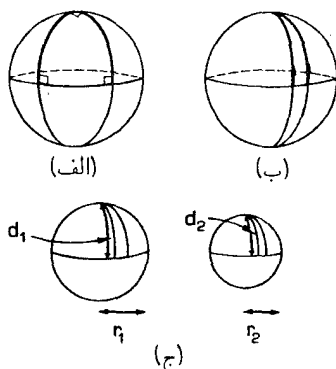
روی صفحه گانهایی وجود خواهد داشت [شکل ۲-۵ (الف)]. اگر انحنای منفی باشد (مثلاً سطح زمین، اسب گونه بین دو تپه مجاور) در تصویر آن همپوشی وجود خواهد داشت [شکل ۲-۵ (ب)]. روابط هندسی در فضاهای خمیده با فضاهای تخت تفاوت دارند. به عنوان مثال، رویه یک کره را در نظر بگیرید؛ می‌توان آن را مدل ایده‌آلی سطح زمین دانست. دایره‌های عظیمه در این رویه



شکل ۳-۵ خط استوا و خطهای با طول جغرافیایی ثابت روی سطح زمین دایره‌های عظیمه (ژئودزیک) هستند.

منحنیهای محل برخورد رویه با صفحاتی هستند که از مرکز کره می‌گذرند، مثلاً خطهای با طول جغرافیایی ثابت، و خط استوا (شکل ۳-۵). روی این رویه، یک دایره عظیمه مشابه خط راست است، زیرا (۱) هنگامی که روی سطح کره حرکت می‌کنیم این دایره‌ها خمهای کوتاهترین فاصله بین هر دو نقطه هستند (این را می‌توان با کشیدن یک قطعه کش بین دو نقطه واقع بر روی یک کره مشاهده کرد)، و (۲) اینها خمهایی هستند که اگر کسی از یک نقطه روی سطح کره در جهت معینی شروع به حرکت کند و سپس بدون انحراف حرکت را ادامه دهد به دست می‌آیند (یک کشتی و یا یک هواپیما را تصور کنید که بدون انحراف به چپ و راست مستقیماً پیش می‌روند). ما در هر فضایی به خمهایی که دارای این دو خاصیت باشند ژئودزیکهای آن فضا می‌گوییم؛ بدین ترتیب روی سطح کره، دایره‌های عظیمه ژئودزیک هستند. اکنون اگر بخواهید روی سطح یک کره مثلی رسم کنید که اضلاع آن دایره‌های عظیمه باشند، در خواهید یافت که مجموع زاویه‌های آن 180° نخواهد شد؛ در واقع می‌توان مثلی را یافت که هر زاویه آن 90° باشد [شکل ۴-۵ (الف)]. به علاوه، اگر دو منحنی از این نوع را که در ابتدا موازی یکدیگرند [مثلاً هر دو در ابتدا بر استوا عمود باشند، شکل ۴-۵ (ب)] دنبال کنیم، فاصله بین آن دو ثابت نمی‌ماند؛ بلکه در نهایت یکدیگر را قطع می‌کنند. اگر دو هواپیما در ابتدا دقیقاً موازی هم حرکت کنند، و در ارتفاع یکسان بالای سطح زمین مستقیم به جلو حرکت کنند، بالاخره برخورد می‌کنند. پس هندسه این فضای خمیده با هندسه فضای تخت متفاوت است؛ این اصل موضوع اقلیدس، که خطهای راست موازی هرگز تلاقی نمی‌کنند، نادرست است. به علاوه روشن است که هر قدر شعاع کره مورد نظر کوچکتر باشد، رویه آن خمیدگی بیشتری دارد، و در این صورت فاصله‌ای که در آن دایره‌های عظیمه‌ای که در ابتدا موازی هستند برخورد می‌کنند کوتاهتر است. [شکل ۴-۵ (ج)]. بدین ترتیب این فاصله معیاری برای خمیدگی سطح است.

تصور یک فضا زمان خمیده (چهار بعدی) مشکلتر است، اما باز می‌توان ژئودزیکها را به همین ترتیب تعریف کرد و اثرهای مشابهی بروز می‌کنند. این مطلب در این فصل و در فصلهای بعد روشن می‌شود. در این فصل ماهیت فضا زمانهای خمیده و چگونگی توصیف ریاضی آنها را بررسی می‌کنیم. به عنوان مقدمه‌ای بر این کار، ابتدا اصل هم‌ارزی اینشتین را، که مبنای درک ماهیت گرانش بر اساس فضا زمان خمیده است، بررسی می‌کنیم.



شکل ۴-۵ (الف) یک "مثلث کروی" که از سه دایره عظیمه (خط استوا و دو خط عرضی که در قطب شمال برهم عمودند) تشکیل شده است. هر یک از زاویه‌های داخلی این مثلث 90° است. (ب) دو دایره عظیمه (خطهای عرضی)، که در ابتدا در استوا با یکدیگر موازی‌اند، در قطب شمال یکدیگر را قطع می‌کنند. (ج) اگر شعاع کره کوتاهتر باشد، فاصله d بین خط استوا و محل برخورد این دایره‌های عظیمه که در ابتدا موازی بودند کوتاهتر می‌شود؛ در این صورت خمیدگی سطح کره بیشتر است.

تمرین‌ها

۱-۵ نقطه‌ای مانند P را روی صفحه انتخاب کنید، و دایره‌های مختلفی با شعاع r به مرکز P رسم کنید. همین کار را روی سطح کره‌ای به شعاع a تکرار کنید. در هر دو مورد، نسبت $R = C/r$ بین پیرامون C و شعاع r هر دایره را بیابید (برای دایره‌هایی که روی کره رسم می‌کنید، شعاع روی کره را در امتداد یک ژئودزیک اندازه بگیرید). برای دایره‌هایی که روی کره هستند نسبت R به چه صورت به شعاع آنها بستگی دارد؟ [این تمرین را می‌توانید به‌طور تجربی انجام دهید، و واقعاً دایره‌ها را روی یک برگ کاغذ و روی یک توپ رسم کنید، یا می‌توانید از مثلثات ساده برای محاسبه جوابهایی که در صورت انجام این آزمایش به دست می‌آورد استفاده کنید]. R با تغییر شعاع کره، a ، چگونه تغییر می‌کند؟

۲-۵ مسئله اصلی در رسم نقشه جهان در یک اطلس جغرافیایی به علت مسطح نبودن سطح زمین پیش می‌آید. این مسئله را با توجه به بحث بالا در نظر بگیرید. آیا می‌توانید اعوجاجهای مختلفی را که ممکن است در ترسیم نقشه سطح زمین روی یک نقشه مسطح (مانند یک اطلس معمولی) پیش آید مشخص کنید؟ چگونه می‌توان این اعوجاج را به حداقل رساند؟ اگر بکوشیم با "بریدن" سطح زمین و تقسیم آن به مناطق جداگانه و تصویر کردن این مناطق بر روی صفحه نقشه‌ای با حداقل اعوجاج رسم کنیم، آیا منتظر یافتن گاف در این تصویر هستید یا همپوشانی؟

۳-۵ سطح یک مخروط را در نظر بگیرید. (۱) ناحیه‌ای را که شامل رأس مخروط می‌شود و

(۲) ناحیه‌ای را که شامل رأس مخروط نمی‌شود بر روی صفحه طوری تصویر کنید که فاصله‌ها و زاویه‌ها محفوظ بمانند و از این طریق ماهیت خمیدگی سطح مخروط را تعیین کنید.

۲-۵ شتاب و گرانش: اصل هم‌ارزی

واکنش دینامیکی یک شیء (مثلاً یک سفینه فضایی) در برابر نیروهایی که بر آن وارد می‌شوند را جرم لختی آن تعیین می‌کند، یعنی جرمی که در معادله زیر وارد می‌شود

$$F = m_1 a$$

این معادله نیروی کل وارد بر جرم را با شتاب حاصل از آن مربوط می‌کند. اگر این جرم در میدان گرانشی یک جسم کروی پر جرم (مثلاً یک ستاره) با جرم M قرار گیرد که مرکز آن در فاصله r است، نیروی گرانشی وارد بر جسم را جرم گرانشی آن تعیین می‌کند، یعنی جرم m_G در معادله گرانشی نیوتون

$$F = G m_G M / r^2$$

که در آن G ثابت گرانشی است. یک ویژگی اساسی گرانش این است که جرم گرانشی و جرم لختی هر شیء یکسان هستند؛ یعنی

$$m_G = m_1 \equiv m$$

ترکیب این سه معادله نشان می‌دهد که در فاصله r از مرکز یک ستاره یا یک شیء پر جرم دیگر به جرم M ، شتابی که یک شیء کوچک به سبب وارد آمدن نیروی گرانش بر آن پیدا می‌کند برابر است با

$$a = GM/r^2 \quad (*)$$

که از جرم آن مستقل است. بدین ترتیب، اشیای مختلف در یک میدان گرانشی، بدون توجه به جرم و یا ترکیبشان، با آهنگ یکسان شتاب می‌گیرند. در واقع، این محتوای اساسی مشاهده مشهور گالیله است که اجسام از هر نوع، هرگاه بتوان مقاومت هوا را نادیده گرفت همگی با آهنگ یکسان سقوط می‌کنند. این واقعیت نیز که برای محاسبه مدار یک سیاره لازم نیست که ترکیب یا ماهیت آن سیاره را بدانیم در آن مستتر است [سیاره‌های خارجی مانند زحل و مشتری، که به‌طور عمده از گازهای پر هیدروژن مانند متان تشکیل شده‌اند درست مانند سیاره‌های داخلی مانند مریخ و زمین، که عمدتاً از سنگ سخت (صخره) و آهن تشکیل شده‌اند، در مدارهای بیضوی حرکت می‌کنند].

این ویژگی اساسی دارای دو پیامد عمده است که به ترتیب آنها را بررسی می‌کنیم. اصل هم‌ارزی را در این بخش و معنای ژئودزیک را در بخش بعد بررسی خواهیم کرد.

چارچوبهای مرجع شتابدار و نیروی گرانی

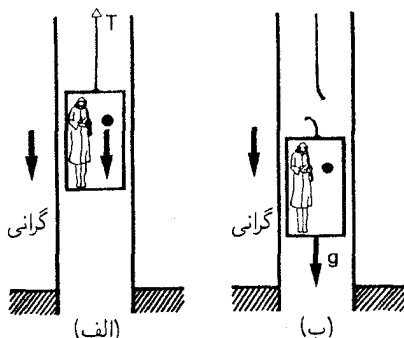
در بحث نسبیت خاص (فصل ۳) فقط به بررسی حرکت لخت، یعنی ناظرهایی پرداختیم که جهانخطهایشان ژئودزیکهای فضا زمان تخت نسبیت خاص هستند. بدین ترتیب اصل نسبیت اینشتین را تنها برای چنین ناظرهایی در نظر گرفتیم (بخش ۱-۳). در نسبیت عام، اصل نسبیت را به تمام ناظرها، که به طور لخت حرکت می‌کنند یا نمی‌کنند تعمیم می‌دهیم. بدین ترتیب در نظریه نسبیت عام فرض می‌شود که

قوانین فیزیک از نظر تمام ناظرها، بدون توجه به چگونگی حرکت آنها، یکسان است.

اکنون خواهیم دید که این فرض به درک جدیدی از ماهیت گرانی می‌انجامد.

روشن است که نیروی گرانشی که یک ناظر اندازه می‌گیرد به حالت شتاب فوق‌العاده بستگی دارد. [بهتر آنست ناظری را در نظر بگیریم که در یک آسانسور آزمایشگاهی را انجام می‌دهد. تا زمانی که آسانسور ساکن و یا در حرکت یکنواخت باشد، نتایجی که به دست می‌آورد با نتایج او در یک آزمایشگاه ساکن بر روی سطح زمین یکسان هستند. برای سهولت، آسانسور را ساکن در نظر می‌گیریم؛ گرانی زمین بر آسانسور و بر ناظر داخل آن اثر می‌کند. کشش کابل نگهدارنده آسانسور [شکل ۵-۵ (الف)] مانع می‌شود که آسانسور با آهنگ g ، که در مورد تمام اشیای در حال سقوط آزاد مشاهده می‌شود، به طرف پایین شتاب بگیرد (مقدار g روی سطح زمین که به کمک $*$) تعیین می‌شود و در آن M جرم زمین و r شعاع آن است، تقریباً برابر است با 9.8 m/s^2). واکنش کف آسانسور بر ناظر مانع از سقوط او به داخل مسیر آسانسور می‌شود؛ او این واکنش را به صورت وزن خود احساس می‌کند. اگر لیوانی را که در دست دارد رها کند، لیوان نسبت به او به طرف پایین با آهنگ g شتاب می‌گیرد و در اثر برخورد با کف آسانسور می‌شکند. به دلیل هم‌ارزی جرم گرانشی و جرم لختی، تمام اجسام، صرف‌نظر از سنگینی (تا حدودی معین) یا جنس آنها، شتاب یکسانی را تجربه می‌کنند، این مطلب را آزمایش مشهور گالیله در برج کج پیزا، و انواع جدیدتر آن آزمایش نشان داده‌اند.

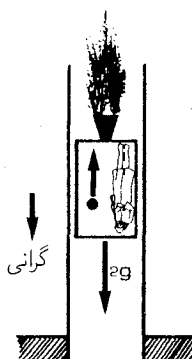
به هر حال، اگر کابل متصل به آسانسور پاره شود [شکل ۵-۵ (ب)]، اصطکاک و مقاومت هوا را نادیده بگیریم در این صورت آسانسور نسبت به سطح زمین با آهنگ g به طرف پایین شتاب خواهد گرفت (چون جسمی در حال سقوط آزاد خواهد بود). ناظر هم نسبت به زمین به طرف پایین با این آهنگ شتاب خواهد گرفت، زیرا کف آسانسور دیگر مانع این کار نیست: کف آسانسور درست با آهنگ سقوط آزاد شتاب می‌گیرد و از او می‌گریزد، و از این رو نیرویی برای کند کردن سقوط او



شکل ۵-۵ (الف) ناظری در یک آسانسور ساکن، که کشش T کابل آن را نگه داشته است. نیروی گرانی او را در کف آسانسور نگه می‌دارد؛ جسمی که او رها کند با آهنگ g بسوی کف آسانسور شتاب می‌گیرد. (ب) یک ناظر در آسانسوری که پس از پاره شدن کابل در حال سقوط آزاد است؛ او نیرویی که وی را بر روی کف آسانسور نگه می‌دارد احساس نمی‌کند؛ جسمی که او رها کند در کنار او معلق خواهد ماند زیرا با همان آهنگ شتاب g او به طرف پایین شتاب می‌گیرد.

وارد نمی‌کند. از آنجا که اکنون واکنش کف از میان رفته است، او دیگر احساس نمی‌کند که وزنش او را روی کف آسانسور نگه داشته است. بدین ترتیب تا آنجا که به او مربوط می‌شود، به نظر می‌رسد که نیروی گرانی دیگر اثری ندارد. اگر او لیوانی را که در دست دارد رها کند، لیوان با آهنگ g نسبت به زمین به طرف پایین شتاب خواهد گرفت، درست مانند خود او، و در نتیجه در کنار او به فاصله ثابتی از کف (که آن هم با آهنگ g ، نسبت به زمین، به طرف پایین شتاب دارد) شناور خواهد ماند. بدین ترتیب، چون تمام اجسامی که در حال سقوط آزاد هستند در یک میدان گرانشی شتاب یکسانی می‌گیرند، هر جسمی که در حال سقوط آزاد باشد در چارچوب مرجع ناظر، ساکن به نظر خواهد آمد. طبق اندازه‌گیری آزمایشهای موضعی در این چارچوب شتابدار، میدان گرانشی زمین دیگر سبب نمی‌شود که اشیاء به طرف کف آسانسور با آهنگ g شتاب پیدا کنند. اثرهای معمول میدان گرانشی، با تعویض چارچوب مرجع به یک چارچوب مرجع شتابدار، تبدیل یافته و از بین رفته‌اند.

این نکته را می‌توان مستدل‌تر کرد با توجه به اینکه اگر موشکی را به سقف آسانسور متصل کنیم تا آن را با آهنگ $2g$ به طرف پایین شتاب دهد ناظر چه چیزی را تجربه می‌کند. (شکل ۵-۶). او در این صورت می‌تواند مانند وقتی که در یک میدان گرانشی عادی قرار دارد بایستد و پاهایش به سقف باشد! گرانش می‌خواهد او را نسبت به زمین با آهنگ g به طرف پایین شتاب دهد، اما واکنش سقف آسانسور بر پاهای او سبب می‌شود که او به جای آهنگ سقوط آزاد g با آهنگ $2g$ به طرف پایین شتاب بگیرد. در نتیجه، ناظر ظاهراً یک نیروی گرانی کاملاً عادی را حس می‌کند که از کف آسانسور به سقف عمل می‌کند و او را به سقف می‌چسباند. اگر او لیوانی را که در دست دارد رها کند، لیوان

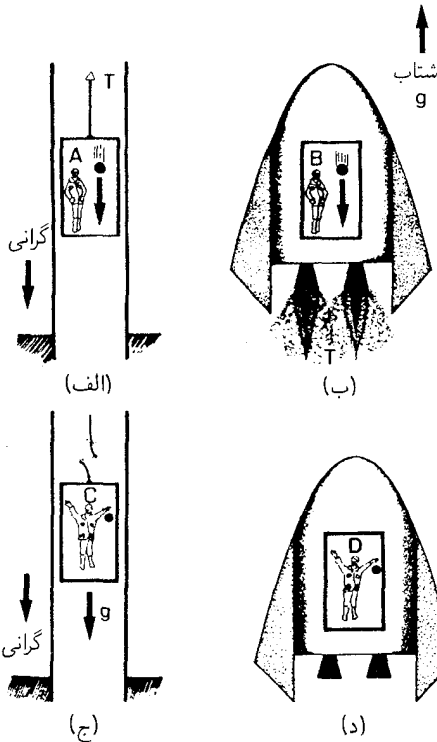


شکل ۶-۵ ناظر در آسانسوری که توسط یک موشک با آهنگ $2g$ به طرف پایین شتاب می‌گیرد. ناظر پا در هواست، پاهای او روی سقف قرار دارند، و او ظاهراً حس می‌کند که نیروی گرانش مطابق معمول او را روی سقف نگه داشته است [همان‌طور که گرانش او را در شکل ۵-۵(الف) روی کف آسانسور نگه می‌دارد]. اگر او جسمی را رها کند، این جسم (نسبت به او) با آهنگ g به طرف سقف شتاب می‌گیرد.

نسبت به او با آهنگ g به طرف سقف شتاب می‌گیرد و پس از برخورد با سقف می‌شکند. با آزمایشهایی که او در داخل آسانسور انجام می‌دهد، مقدار استاندارد شتاب ناشی از گرانش را اندازه می‌گیرد اما سقف را "پایین" و کف آسانسور را "بالا" به حساب می‌آورد. بدین ترتیب، با تعویض چارچوب مرجع با یک چارچوب مرجع که دارای شتاب مناسب است، می‌توان جهت مؤثر گرانش را (برای مدتی کوتاه!) وارون کرد.

اصل هم‌ارزی

این مثالها به نحوی تعیین‌کننده به هم‌ارزی جرم گرانشی و جرم لختی بستگی دارند. اگر این‌طور نبود، بر اجسام مختلفی که دارای جرم لختی یکسان هستند نیروهای گرانشی مختلفی وارد می‌شد و در نتیجه برخلاف آنچه تجربه نشان می‌دهد در یک میدان گرانشی با آهنگهای مختلف شتاب می‌گرفتند؛ تبدیل به یک چارچوب شتابدار می‌توانست برای برخی اجسام اثرهای نیروی گرانشی را از بین ببرد اما نه برای همه (زیرا آهنگ شتاب لازم برای اشیای مختلف متفاوت می‌بود). در نتیجه این هم‌ارزی رابطه‌ی نزدیکی بین شتاب و گرانی وجود دارد. برای درک روشنتر این رابطه از اینشتین پیروی می‌کنیم و حالت‌های گوناگون ممکن حرکت یک ناظر را در ناحیه‌ی کوچکی از فضازمان در نظر می‌گیریم. ابتدا، فرض می‌کنیم ناظر A در آسانسوری قرار دارد که نسبت به زمین ساکن است. نتایج هر آزمایشی که در آنجا انجام شود مانند همان آزمایشها در زندگی روزمره در روی زمین خواهد بود [شکل ۷-۵(الف)]؛ اگر جسمی رها شود به زمین می‌افتد. سپس، ناظر B را در نظر می‌گیریم که در سفینه‌ای نشسته است و با شتاب ثابت g به دور از هر گونه شیء پرجرم حرکت



شکل ۷-۵ الف) ناظر در آسانسوری که نسبت به زمین ساکن است [با شکل ۵-۵ الف) مقایسه کنید]. (ب) ناظر B در یک سفینه که با شتاب ثابت g به‌دور از هرگونه شیء پرجرم در حرکت است. جسمی که B رها می‌کند با آهنگ g به‌طرف کف سفینه شتاب خواهد گرفت. (ج) ناظر C در یک آسانسور که در اثر گرانی در حال سقوط است [با شکل ۵-۵ ب) مقایسه کنید]. (د) ناظر D در یک سفینه در حال سقوط آزاد و به‌دور از هرگونه جسم پرجرم. جسمی که D رها می‌کند در کنار او شناور می‌ماند.

می‌کند [شکل ۷-۵ ب)]. از نظر او، نتایج آزمایشها با نتایج آزمایشهای A یکسان خواهند بود. اگر جسمی رها شود با شتاب نسبی g به‌کف سفینه می‌افتد (یا، می‌توان گفت، کف سفینه به‌طرف آن جسم شتاب می‌گیرد!). فرض کنید که ناظر C در آسانسوری است که در اثر گرانی در حال سقوط آزاد است زیرا کابل آن پاره شده است [شکل ۷-۵ ج)]. ناظر با همان آهنگ هر جسم رها شده سقوط می‌کند، و از این‌رو هیچ‌گونه شتاب نسبی را اندازه نمی‌گیرد؛ بدین‌ترتیب نتیجه تمام آزمایشها مشابه نتیجه آزمایشهای ناظر D در یک سفینه ساکن به‌دور از هرگونه میدان گرانشی خواهد بود [شکل ۷-۵ د)]. این واقعیت را که ناظرهای A و B در موقعیتهای فیزیکی به‌ظاهر متفاوت تجربه مشابهی از یک میدان گرانشی عادی دارند، و اینکه ناظرهای C و D هنگامی که

وضعیت فیزیکی آنها باز هم بسیار متفاوت است، تجربه مشابهی از یک میدان گرانشی به ظاهر صفر را دارند می‌توان در اصل هم‌ارزی خلاصه کرد:

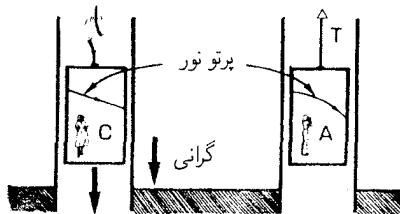
هیچ راهی برای تشخیص اثرهای ناشی از یک میدان گرانشی یکنواخت و یک شتاب ثابت بر روی یک ناظر وجود ندارد.

مورد ناظر B که در سفینه‌ای حرکت می‌کند دقیقاً معادل با مورد یک ناظر اصلی در عالم ریندلر است (بخش ۳-۴). از طرف دیگر، ناظر A میدان گرانشی جسمی با تقارن کروی را تجربه می‌کند که جواب شوارتس‌شیلد است و در فصل ۶ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

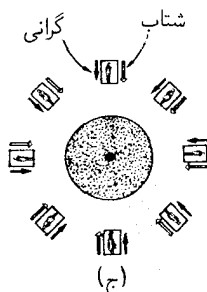
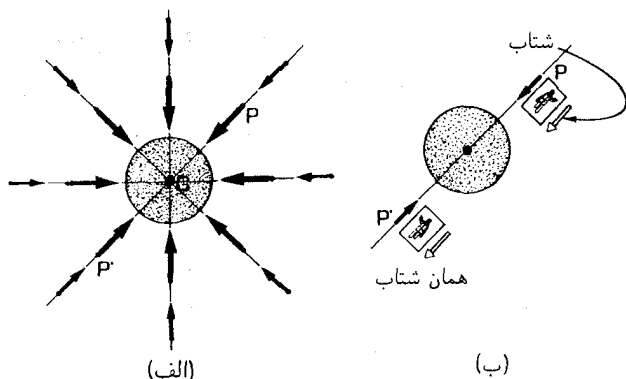
ضرورت فضازمانهای خمیده

با تغییر شتاب یک ناظر در یک فضازمان تخت می‌توان هر میدان گرانشی را تقلید کرد. پس چرا به فضازمانهای خمیده نیاز داریم؟ بررسی حرکت شتابدار، و اثرهای گرانشی می‌تواند انگیزه‌ای برای این‌کار باشد.

برای مشاهده اثر شتاب، به مورد ناظر D برمی‌گردیم. طبق مشاهدات او، یک پرتو نور که به آن سوی محفظه سفینه فرستاده شود، در امتداد خط مستقیم حرکت خواهد کرد. اصل هم‌ارزی ایجاب می‌کند که طبق اندازه‌گیری ناظر هم‌ارز C که در حال سقوط آزاد است، شعاع نوری که به آن سوی آسانسور فرستاده می‌شود در امتداد خط مستقیم حرکت کند. بنابراین یک ناظر ساکن (که در حال سقوط آزاد نیست) می‌بیند که شعاع نور C به طرف پایین خم شده است (شکل ۵-۸) و نتیجه می‌گیرد که فضازمان نمی‌تواند تخت باشد. بدین ترتیب برای اینکه بتوانیم تجربیات تمام ناظرهای ممکن را توصیف کنیم، باید فضازمانهای خمیده را در نظر بگیریم.



شکل ۵-۸ طبق اندازه‌گیری ناظر در حال سقوط آزاد C، شعاع نوری که از این سو به آن سوی آسانسور می‌رود در امتداد خط مستقیم حرکت می‌کند (زیرا این وضعیت با وضعیت ناظر D که در یک سفینه در حال سقوط آزاد قرار دارد هم‌ارز است). همین شعاع نور به نظر ناظر A، یعنی ناظر ساکن در میدان گرانشی، خمیده خواهد بود زیرا C نسبت به A شتاب می‌گیرد.

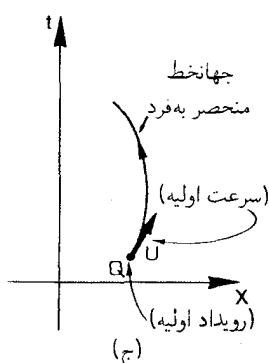
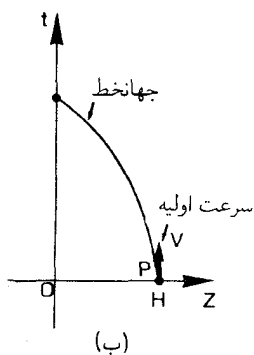
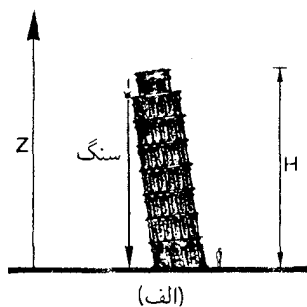


شکل ۹-۵ (الف) جهت میدان گرانشی در نقاط مختلف زمین. این جهت‌ها در P و P' عکس یکدیگرند. (ب) شتابی که میدان گرانشی را در P صفر کند در P' آن‌را دو برابر خواهد کرد، و از این‌و هیچ چارچوب مرجعی به‌تنهایی نمی‌تواند آن‌را در همه جا صفر کند. (ج) در یک فضا‌زمان تخت، در هر نقطه برای صفر کردن میدان گرانشی به یک چارچوب جداگانه نیاز داریم.

در بررسی واقع‌گرایانه گرانش، باید این امر را که میدانهای گرانشی حقیقی غیریکنواخت هستند در نظر بگیریم. بدین‌گونه مثلاً اندازه و جهت نیروی گرانشی که زمین وارد می‌آورد متغیر است [شکل ۹-۵ (الف)]. در حالی‌که این امکان وجود دارد که با تبدیل به یک چارچوب مرجع شتابدار F میدان گرانشی مؤثر در هر نقطه P نزدیک زمین را از بین ببریم، اما استفاده از این چارچوب میدان گرانشی مؤثر در سایر نقاط را از بین نخواهد برد، زیرا در آن‌صورت جهت و اندازه شتاب غلط خواهد بود. مثلاً در نقطه P' که نقطه مقابل P نسبت به زمین است، استفاده از چارچوب F میدان گرانشی مؤثر آن‌را به‌جای خنثی کردن دو برابر خواهد کرد [شکل ۹-۵ (ب)]. بدینسان اگر کسی از توصیف فضای تخت استفاده کند، تنها راه تقلید از اثر گرانش در تمام نقاط در اختیار داشتن بینهایت چارچوب شتابدار است [شکل ۹-۵ (ج)]. به‌هر حال، ناظری که تنها یک چارچوب مرجع در اختیار دارد می‌تواند هر میدان گرانشی را با استفاده از توصیف فضا‌زمان خمیده نمایش دهد.

۳-۵ حرکت سقوط آزاد و معنای ژئودزیک

از هم‌ارزی جرم گرانشی و جرم لختی نتیجه می‌گیریم که هرگاه جسمی تنها تحت تأثیر گرانش و لختی حرکت کند، بدون اینکه نیروی دیگری بر آن وارد شود، حرکت آن با وضعیت و سرعت اولیه آن در یک زمان اولیه، کاملاً معین می‌شود. بنابراین مثلاً می‌توانیم مشخص کنیم که سنگی از فراز برج پیزا در ساعت ۰۰ : ۱۲ روز (یازدهم دی سال ۹۸۳) اول ژانویه سال ۱۶۰۴ (از حالت سکون) رها شده است [شکل ۵-۱۰ (الف)]. این شرایط اولیه حرکت را کاملاً مشخص می‌کند (مکان و زمان رویدادی که می‌خواهد اتفاق بیفتد و سرعت سنگ در آن رویداد). اگر مقاومت هوا را در طی مدت کوتاه سقوط نادیده بگیریم، سنگ فقط تحت تأثیر گرانش و لختی به‌طور آزاد سقوط می‌کند، و حرکت کامل با این داده اولیه تعیین می‌شود (سنگ با آهنگ تقریبی 9.8 m/s^2 از حالت سکون شتاب می‌گیرد).



شکل ۵-۱۰ (الف) از فراز برج پیزا در ساعت ۱۲ ظهر روز اول ژانویه ۱۶۰۴ (یازدهم دی ۹۸۳) سنگی از حالت سکون رها می‌شود. (ب) جهانخط سنگ، که از رویداد P در فضا زمان با چارسرعت اولیه V آغاز می‌گردد. (ج) به‌طور کلی، در فضا زمان جهانخط یک شیء در حال سقوط آزاد (یعنی جسمی که تنها تحت اثر گرانی و لختی حرکت می‌کند) را منحصرأ موضع اولیه فضا زمان Q و چارسرعت اولیه U که در آن رویداد تعریف شده‌اند تعیین می‌کنند.

از دیدگاه فضا-زمان این (حرکت) چگونه به نظر می‌آید؟ جهانخط آن سنگ [شکل ۵-۱۰ (ب)] منحصراً با داده‌های اولیه تعیین می‌شود، که معادل است با مشخص کردن (الف) رویداد اولیه P در فضا-زمان (مکان و زمانی که انتخاب می‌کنیم تا حرکت را نظاره کنیم) و (ب) چار سرعت اولیه در آن رویداد، که همان جهت فضا-زمان جهانخط در رویداد P است (پیوست ب را ببینید). از آنجا که سنگ از حالت سکون رها می‌شود، جهت فضا-زمان اولیه جهانخط آن موازی با محور t است، از آنجا که این متناظر با تغییری در جهت Z نیست؛ اگر به جای رها کردن سنگ از حالت سکون آن را به پایین پرتاب می‌کردیم، جهت اولیه آن نسبت به جهت Z مایل می‌شد.

از این مثال روشن است که نتیجه‌ای مشابه در حالت کلی در مورد هر جسمی که تنها تحت اثر گرانی و لختی آزادانه حرکت کند معتبر است. شرایط اولیه لازم برای مشخص کردن حرکت عبارت‌اند از موضع فضا-زمان اولیه آن Q و سرعت [یک راستای زمان‌گونه در آن رویداد، شکل ۵-۱۰ (ج)].

اگر این شرایط معلوم باشند، حرکت کاملاً تعیین و با یک مسیر منحصر به فرد زمان‌گونه در فضا-زمان توصیف می‌شود. مثلاً، اگر موضع یک ماهواره مصنوعی را که به دور زمین می‌گردد در یک زمان معین، و حرکت آن را در آن لحظه بدانیم، می‌توانیم حرکت آتی آن را به دور زمین، مادامی که نیروی دیگر بجز گرانی بر آن وارد نمی‌شود (مثلاً، تا وقتی که موتوری را روشن نمی‌کند)، پیشگویی کنیم. یک منحنی فضا-زمان منحصر به فرد این حرکت را که کاملاً با یک نقطه اولیه در فضا-زمان و یک راستای اولیه در آن رویداد مشخص می‌شود، توصیف می‌کند.

فیزیک سقوط آزاد

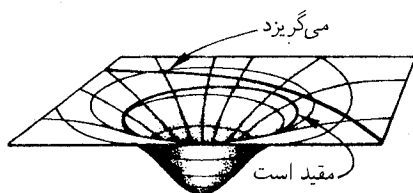
پس از این مقدمه نسبتاً طولانی در مورد رابطه میان شتاب و گرانش، در شرایطی قرار داریم که می‌توانیم بحث را جمع‌بندی کنیم. با گذر از اصل نسبیت خاص به عام، یعنی با توجه به استفاده از چارچوبهای مرجع شتابدار، دیگر نمی‌توانیم بین گرانش و لختی تمایز مشخصی قائل شویم (زیرا آن تمایز به شتاب چارچوب مرجعی که برگزیده‌ایم بستگی دارد). به‌ویژه، حرکت لخت دیگر معنای فیزیکی روشنی ندارد، زیرا حرکتی که در یک چارچوب مرجع لخت است در چارچوب دیگری که نسبت به اولی شتاب دارد لخت نخواهد بود. به هر حال، می‌توان برای مفهوم ذره در حالت سقوط آزاد، یعنی ذره‌ای که تنها تحت اثر {گرانی و لختی} حرکت می‌کند، یک معنای روشن فیزیکی قائل شد. به‌عنوان مثال، ناظرهای C و D که در بالا (شکل ۵-۷) مورد بحث قرار گرفتند در حالت سقوط آزاد بودند، در حالی که A و B چنین نبودند (A در حال سقوط آزاد نبود زیرا کابل مانع از سقوط آسانسور می‌شد در حالی که B به سبب نیرویی که موتورهای موشک بدان وارد می‌آوردند در حالت سقوط آزاد نبود). یک شیء به‌طور آزاد سقوط می‌کند مگر اینکه نیرویی غیر از گرانش بر آن وارد شود. با شناسایی فیزیکی مجموعه منحصر به فردی از حرکات ذرات طبیعی است که آنها را با مجموعه حرکات ذرات که از نظر هندسی منحصر به فرد هستند و در بالا مورد بحث قرار گرفتند، یعنی ژئودزیکهای زمان‌گونه فضا-زمان، یکی بدانیم. بنابراین این شناسایی را انجام

می‌دهیم. مسیرهای اجسام در حال سقوط آزاد در فضا زمان، یعنی اجسامی که تنها در اثر گرانی و لختی حرکت می‌کنند، ژئودزیکهای زمان‌گونه در فضا زمان هستند. حرکت سیاره‌ها به دور خورشید نمونه‌ای از حرکت اجسام در حالت سقوط آزاد است و در واقع هم معلوم می‌شود که این نسخه حرکت سیاره‌ها را به طور رضایتبخشی توصیف می‌کند. چگونگی این امر را اجمالاً بررسی می‌کنیم.

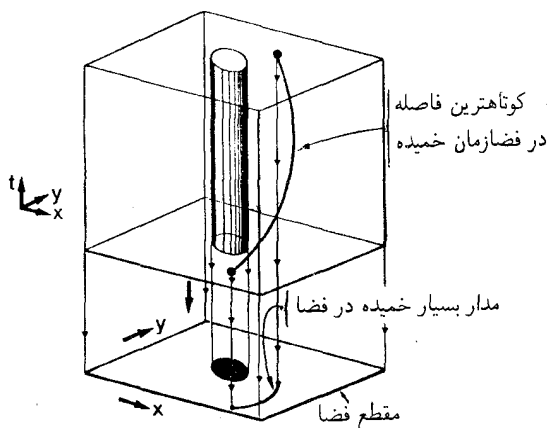
سیاره‌ها

درست همان‌طور که گرانی مسیر پرتوهای نور در یک فضا زمان خمیده را خم می‌کند، مسیر اشیای پرجرم را نیز خم می‌کند. به غیر خطی بودن ذاتی این نظریه توجه کنید — اجسام پرجرم سبب انحنای فضا زمان می‌شوند که بر حرکت همین اجسام پرجرم اثر می‌گذارد. بدین دلیل برخی محاسبات در فضا زمان خمیده بسیار مشکل‌اند. به هر حال، در اینجا ما بیشتر با حرکت چیزهایی که عملاً ذره‌های آزمون، نامیده می‌شوند سروکار داریم، که به معنای چشمپوشی از تأثیر آنها در انحنای فضا زمان است و می‌بینیم که چگونه حرکت آنها تحت تأثیر انحنای قرار می‌گیرد که اجسام پرجرم دیگر تولید کرده‌اند.

روشن است که اگر بخواهیم حرکت تقریباً دایره‌ای سیاره‌ها را ناشی از گرانشی که فضا زمان را خمیده می‌کند بدانیم، خمیده شدن مسیر اشیای پرجرم توسط فضا زمان ضروری می‌شود. یک جنبه این حرکت را می‌توان با در نظر گرفتن دو مثال روزمره از حرکت دایره‌ای نشان داد. ابتدا، گلوله‌ای را در نظر بگیرید که شخصی ریسمان متصل به آن را می‌چرخاند و یک مسیر دایره‌ای طی می‌کند. نیرو یا کشش ریسمان مسیر را دایره‌ای نگه می‌دارد. سپس، گلوله‌ای را در نظر بگیرید که در داخل یک پوسته به شکل نیمکره در ارتفاع ثابتی مسیر دایره‌ای را می‌پیماید (شکل ۵-۱۱)؛ در این مورد واکنش پوسته مسیر را دایره‌ای نگه می‌دارد. مثال اول متناظر با این ایده است که گرانش نیرویی است که حرکت را تعیین می‌کند؛ در مثال دوم این ایده نهفته است که حرکت توسط شکل



شکل ۵-۱۱ گلوله‌ای که در یک ارتفاع ثابت در داخل پوسته‌ای به شکل نیمکره در مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند که با خمیدگی ظرف تعیین شده است. حرکت مقید سیاره‌ای درست شبیه به همین است، میدان گرانشی خورشید سبب خمیدگی فضا زمان می‌شود و سیاره را در مدار دایره نگه می‌دارد. اجسامی که انرژی جنبشی کافی داشته باشند به بینهایت خواهند گریخت.



شکل ۱۲-۵ مدار یک سیاره به دور خورشید یک مسیر "کمترین فاصله" (طولانیترین ویژه زمان) در فضا زمان است، که این خاصیت را نیز دارد که جهت آن (در فضا زمان خمیده) منحرف نمی شود. تصویر فضایی آن می تواند بسیار خمیده باشد.

فضای اطراف تعیین می شود و برای بحث فضازمانهای خمیده ما ضروری است.

مسیرهای فضایی سیاره ها می تواند بسیار خمیده باشد؛ این یکی از پیامدهای حرکت آنها روی ژئودزیکهای فضا زمان است که طولانیترین^۱ زمان ممکن بین نقاط ابتدایی و انتهایی را به دست می دهند. به دلیل خمیدگی فضا زمان، این مسیرهای با "طولانیترین زمان" در فضا زمان سبب ایجاد مدارهای فضایی خمیده می شوند (شکل ۱۲-۵). بدین گونه، می توان فهمید که سیاره ها به گونه ای دور خورشید حرکت می کنند که فاصله فضا زمان طی شده بین مواضع ابتدایی و انتهایی آنها کمینه شود (با بیشینه کردن ویژه زمان).

ژئودزیکها (آن طور که قبلاً توضیح داده شد) منحنیهایی هستند که علاوه بر اینکه فاصله فضا زمان بهینه بین نقاط انتهایی خود را به دست می دهند جهت آنها در فضا زمان منحرف نمی شود. پس چگونه ذره ای که روی یک ژئودزیک حرکت می کند به وضعیت فضایی اولش بازمی گردد (همان طور که، مثلاً در مورد سیاره ای که در یک مدار دایره ای به دور خورشید می گردد اتفاق می افتد)؟ این را به دشواری می توان مجسم کرد، اما مثال گلوله ای که در یک پوسته نیمکره ای حرکت می کند و در بالا بدان اشاره شد، تا حدودی روشنگر است؛ زیرا واضح است که اگر گلوله روی خط استوا حرکت کند، هرگز نه به راست منحرف می شود و نه به چپ و بالاخره به سر جای اولش بازمی گردد. یک نمونه عملی که این مطلب را تقریباً به نمایش می گذارد موتور سواری روی

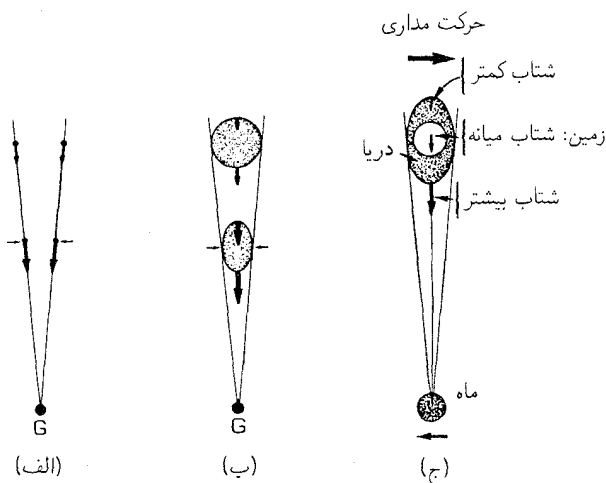
۱. در فضا، ژئودزیک مسیری است که کوتاهترین فاصله بین نقاط امتداد و انتهایش را به دست می دهد اما در فضا زمان مسیری است که طولانیترین زمان بین نقاط ابتدا و انتهایش را به دست دهد (با بحث بخش ۴-۲ و بخش ۴-۵ که خواهد آمد مقایسه کنید).

”دیوار مرگ“ در یک شهر بازی است. در یک فضازمان خمیده که نمایندهٔ میدان گرانشی یک ستارهٔ پرجرم است، اثر خمیدگی فضازمان این است که گویی سیاره‌های آن روی رویهٔ دواری با خمیدگی ملایم حرکت می‌کنند که سیاره‌های با انرژی جنبشی به اندازه کافی کوچک را در نزدیکی خود نگه می‌دارد، اما اجازه می‌دهد آنهایی که انرژی جنبشی زیاد دارند به بینهایت بگریزند (شکل ۵-۱۱). در اینجا باید به یاد داشته باشیم که جهت بدون انحراف در فضازمان است نه در فضا؛ تجسم این مطلب ساده نیست، و در نهایت، برای مشاهدهٔ اینکه مسیرهای پیش‌بینی شده توسط این نظریه در واقع همان‌گونه‌اند که در منظومهٔ شمسی مشاهده می‌شود، باید بر محاسبات خود اتکا کنیم مثلاً زمین که در مدار تقریباً دایره‌ای دور خورشید می‌گردد با خمیدگی فضازمان در این فاصله نگه داشته می‌شود.

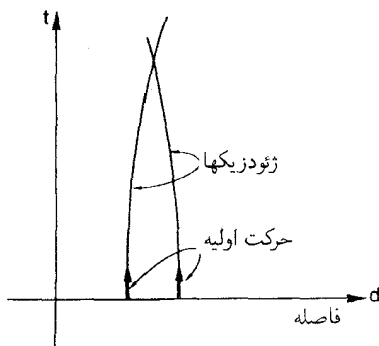
انحراف ژئودزیک: خمیدگی و اثرهای کشندی

نمی‌توان شدت یک میدان گرانشی را با اندازه‌گیری مطلق مقدار خم شدن یک پرتو نور یا مسیر ذره اندازه گرفت، زیرا این به چارچوب مرجع مورد استفاده بستگی دارد؛ در واقع می‌توان همواره چارچوب مرجعی را انتخاب کرد که در آن حرکت ذره یکنواخت است (مثلاً ذره را به‌عنوان مبدأ دستگاه مرجع انتخاب کرد؛ در این صورت ذره همیشه در مبدأ ساکن خواهد بود، به سبب مختصات خاصی که مورد استفاده قرار گرفته است). به هر حال، شدت میدان گرانشی را می‌توان با اندازه‌گیری حرکت نسبی ذرات یا پرتوهای نور آشکار کرد. بدین ترتیب، مثلاً در یک وضعیت ایستا، ممکن است بتوان خم شدن نور نسبت به یک ناظر ایستا را اندازه گرفت و بدین‌گونه شدت میدان گرانشی را برآورد کرد. حرکت نسبی ذره‌ها یا پرتوهای نور مجاور را می‌توان به‌طور منظم بررسی کرد، و این‌کار مستقیماً به برآورد خمیدگی فضازمان می‌انجامد.

یک زوج ذره را در نظر بگیرید که در میدان گرانشی یک ستارهٔ پرجرم G پس از رها شدن از حالت سکون در حال سقوط آزادند [شکل ۵-۱۳ (الف)]. هر دوی آنها به طرف مرکز ستاره سقوط می‌کنند، و از این رو به تدریج به یکدیگر نزدیکتر می‌شوند. بدین ترتیب می‌توان اثر میدان گرانشی را در حرکت نسبی ذره‌های در حال سقوط آزاد آشکار ساخت. اگر ابرکروی شکلی از ذرات در حال سقوط آزاد را که از حالت سکون رها شده‌اند در نظر بگیریم، ذره‌هایی که به ستاره نزدیکترند از آنهایی که دورتر هستند سریعتر شتاب می‌گیرند و از این رو کناره‌های کره متراکم می‌شود اما در جهت ستاره کشیده می‌شود [شکل ۵-۱۳ (ب)]. ثابت شده است که، در این مورد، حجم ابر ذرات ثابت باقی می‌ماند. بدینسان میدان گرانشی یک جرم دور دست صرفاً یک اثر اعوجاجی ناب دارد، که آن را به‌عنوان نیروی کشندی می‌شناسیم [میدان گرانشی دوردست ماه علت اصلی جزرو مدها در زمین است، با شکل ۵-۱۳ (ج) مقایسه کنید]. اگر اثر گرانشی خود ذره‌ها را در حرکتشان به حساب می‌آوریم، می‌دیدیم که حجم کاهش می‌یابد. این مثالها اثر شیب میدانهای گرانشی را در شتاب نسبی ذرات آزمون نشان می‌دهند که می‌توان با اندازه‌گیری آنها شدت این شبیه را برآورد



شکل ۵-۱۳ (الف) دو ذره که از حالت سکون به طرف ستاره G سقوط آزاد می‌کنند. با حرکت به سوی G فاصله بین آنها کاهش می‌یابد. (ب) یک ابر کروی از ذرات با سقوط آزاد به طرف ستاره تغییر شکل می‌دهد. (ج) جزر و مدها در زمین در اثر میدان گرانشی ماه تولید می‌شوند. دریایی که در قسمتی از زمین قرار دارد که به ماه نزدیکتر است از دریایی که در طرف دورتر قرار گرفته شتاب بیشتری می‌گیرد [با تغییر شکل در (ب) مقایسه کنید].



شکل ۵-۱۴ مسیرهای فضازمان ذره‌های شکل ۵-۱۳ (الف) که در حال سقوط آزاد هستند. آنها در ابتدا موازی‌اند اما در زمان متناهی یکدیگر را قطع می‌کنند [با شکل ۵-۴ (ب) مقایسه کنید].

کرد. این شبیها را نمی‌توان با تغییر چارچوب مرجع به یک چارچوب مرجع شتابدار صفر کرد، و از این رو آنها نماینده یک جنبه فیزیکی واقعی فضازمان هستند.

برای درک بهتر این مطلب، یک دیدگاه فضازمان (شکل ۵-۱۴) ذره‌های در حال سقوط آزاد را که از حالت سکون رها شده‌اند در نظر می‌گیریم [شکل ۵-۱۳ (الف)]. در ابتدا ژئودزیکها موازی‌اند

اما به طرف یکدیگر همگرا می‌شوند؛ در واقع اگر به اندازه کافی پیش بروند در زمانی متناهی یکدیگر را قطع می‌کنند. این یک ویژگی عمومی میدانهای گرانشی است؛ و کاملاً مشابه اثر خمیدگی روی ژئودزیکهای یک کره است [شکل ۵-۴(ب)]. در آن مورد مسافتی که پس از طی آن خطهای موازی یکدیگر را قطع می‌کنند عکس مقدار خمیدگی است. در مورد فضا‌زمان، با مقایسه، می‌توانیم شدت خمیدگی فضا‌زمان را با زمانی که سپری می‌شود تا ذره‌هایی که در ابتدا ساکن هستند به یکدیگر برخورد کنند، اندازه بگیریم؛ هر قدر این زمان کوتاهتر باشد، خمیدگی فضا‌زمان بیشتر و میدان گرانشی قویتر است.

تمرینها

۴-۵ روشی برای ساختن مسیرهای ژئودزیکی مورد استفادهٔ هواپیماهایی که در ارتفاع ثابتی از سطح زمین بین شهرهای مختلف پرواز می‌کنند ابداع کنید. به‌ویژه مسیرهای (۱) لندن-سیدنی، (۲) نیویورک-توکیو، (۳) کیپ‌تاون-لوس‌آنجلس را ببینید.

۵-۵ توضیح دهید که چرا فضا‌نوردی که در ماهواره‌ای دور زمین می‌گردد احساس بی‌وزنی می‌کند.

۶-۵ دو ذره که به فاصلهٔ ۹ متر از یکدیگر در سطح زمین قرار دارند در یک لحظه از حالت سکون رها می‌شوند، و در تونلی سقوط می‌کنند که تا مرکز زمین ادامه دارد. در آنجا چه اتفاق خواهد افتاد؟ نمودار فضا‌زمان این وضعیت را رسم کنید.

۴-۵ فرم متریک و تانسور متریک

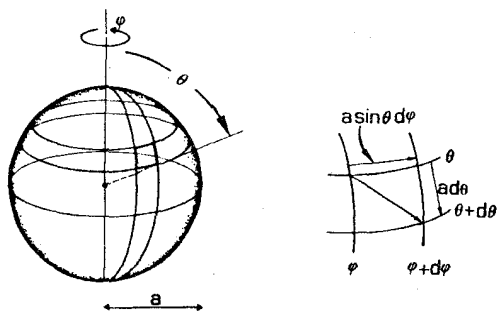
اکنون یک ایدهٔ کلی از ماهیت فضا‌زمانهای خمیده کسب کرده‌ایم. موضوع این بخش نحوهٔ توصیف ریاضی آنهاست.

فرم متریک برای فضا‌های خمیده

ایدهٔ اساسی مورد استفاده برای توصیف یک فضا‌زمان خمیده ارائهٔ فرم متریک ds^2 در یک دستگاه مختصات مناسب است. در این صورت، درست مانند مورد فضای تخت، این شکل تمام اندازه‌گیریهای فاصله و زاویه را تعیین می‌کند (با بخش ۴-۲ مقایسه کنید). به عنوان مثال، فرم متریک برای سطح کره‌ای به شعاع a عبارت است از

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (۱-۵)$$

که در آن θ و ϕ مختصات قطبی استاندارد هستند (θ را می‌توان عرض جغرافیایی دانست که از قطب شمال اندازه گرفته می‌شود و ϕ طول جغرافیایی است؛ شکل ۵-۱۵ را ببینید). درست مانند



شکل ۱۵-۵ زاویه‌های θ و ϕ که برای توصیف موضع روی سطح یک کره به کار می‌رود. نمونه‌های کوچک در θ و ϕ به جابه‌جاییهای $a d\theta$ و $a \sin \theta d\phi$ روی سطح کره می‌انجامند.

استدلالی که در پی معادله ۲۸-۴ آمد، این رابطه نشان می‌دهد که فاصله اندازه‌گیری شده در امتداد یک خط با طول ثابت (ϕ ثابت) از θ_1 تا θ_2 برابر $a(\theta_2 - \theta_1)$ است، در حالی که فاصله‌ای که در امتداد یک خط با عرض ثابت (θ ثابت) از ϕ_1 تا ϕ_2 اندازه گرفته می‌شود $a(\phi_2 - \phi_1) \sin \theta$ است (شکل ۲۲-۴ را ببینید^۱). اگر یک جابه‌جایی کوچک کلی (به اندازه $d\theta$ در جهت θ ، و $d\phi$ در جهت ϕ) داشته باشیم، در این صورت، از آنجا که خطهای با عرض و طول ثابت بر یکدیگر عمودند، تقریباً یک مثلث قائم‌الزاویه تحت کوچک داریم، هر قدر این جابه‌جاییها کوچکتر باشند، این تقریب هم دقیقتر است. در چنین مثلثی، قضیه فیثاغورس معتبر است: مربع وتر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر است. شکل معادله ۱-۵ نشان می‌دهد که هندسه رویه خمیده، در حد جابه‌جاییهای خیلی کوچک، با این نتیجه متعلق به فضای تخت سازگار است. بدین ترتیب در حد خیلی نزدیک به هر نقطه، هندسه یک رویه خمیده با هندسه فضای تخت یکسان است؛ البته این نکته در روی سطح زمین روشن است: ما برای درست کردن یک زمین فوتبال یا طراحی یک ساختمان به مثلثات کروی نیازی نداریم!

در این سطح وجه تمایز بین فضاهای تخت و خمیده این است که، در مورد فضای (دوبعدی) تخت، می‌توان دستگاه مختصاتی یافت که در همه جای آن فرم متریک به صورت زیر باشد

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (۱۵-۲ الف)$$

یعنی، ضرایب dx^2 و dy^2 برابر ۱ باشد، در حالی که چنین دستگاه مختصاتی را نمی‌توان برای فضای خمیده (مثلاً روی سطح یک کره) یافت. توجه کنید که معنای این حرف این نیست که در یک فضای تخت فرم متریک در تمام دستگاههای مختصات یکی است؛ در واقع در بخش ۴-۲ فرمهای گوناگون دیگر متریک فضای تخت را دیده‌ایم. در یک فضای خمیده دوبعدی، همیشه

۱. با معادله ۲۸-۴ مقایسه کنید؛ در اینجا ما همان فرم متریک را داریم اما با $r = a = \text{const.}$ که ایجاب می‌کند $dr = 0$ ، که همان‌طور که می‌خواستیم، یک ۲-کره با شعاع a را به دست می‌دهد.

می‌توان مختصات را یافت که فرم متریک در هر نقطه دلخواه P ، ۵-۲ الف باشد، اما در سایر نقاط فرم متریک چنین نخواهد بود (مثلاً، فرم متریک ۵-۱، با یک ضریب مقیاس‌بندی مشترک θ فرم معادله ۵-۱ در هر نقطه در امتداد خط $\theta = 1/2\pi$ به این متریک تبدیل می‌شود اما در جای دیگر چنین نخواهد بود). اگر می‌توانستیم مختصات را بیابیم که این شکل در همه جا کاربرد داشته باشد، معنای آن این بود که قضیه فیثاغورس برای جابه‌جاییهای بزرگ نیز معتبر است، و این با وضعیت حاکم بر فضاهاى خمیده ناسازگار است که در آنها قضیه فیثاغورس تنها در حد، نزدیک به هر نقطه معتبر است. در فضاهاى با بعد بالاتر نیز نتیجه‌های مشابهی وجود دارند. مثلاً یک فضای سه‌بعدی در صورتی تخت است که مختصاتى مانند x ، y ، و z را بتوان طوری یافت که همه جا فرم متریک به صورت زیر باشد

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (۵-۲ب)$$

در مختصات کلی، فرم متریک متفاوت خواهد بود [شکل ۴-۲۸ (ب)].

تانسور متریک

بهتر است که از یک نمادگذاری کلی استفاده کنیم تا بعدها بتوانیم آن را در تمام فضاها و فضا زمانها به کار ببریم. ابتدا نمادگذاری مختصات (x^1, x^2, x^3, x^4) را که در بخش ۴-۱ معرفی کردیم یادآور می‌شویم. کمیت‌های

$$g_{11} = a^2, \quad g_{22} = a^2 \sin^2 \theta, \quad g_{12} = g_{21} = 0 \quad (۵-۳ الف)$$

را تعریف می‌کنیم که می‌توان آنها را به سادگی به صورت ماتریسی نیز نوشت

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

در این صورت فرم متریک ۵-۱ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{12}dx^1dx^2 + g_{21}dx^2dx^1 + g_{22}(dx^2)^2 \quad (۵-۴ الف)$$

از طرف دیگر، اگر تعریف کنیم

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0 \quad (۵-۳ ب)$$

این را هم می‌توان به سادگی به صورتی ماتریس

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نوشت، در این صورت ۴-۵ الف فرم متریک ۵-۲ الف را به دست می‌دهد. بدین ترتیب صورتگرایی $[g_{ij}]$ را می‌توان برای تعیین فرم متریک یک فضای دوبعدی تخت در مختصات دکارتی، و یا یک دوکره (خمیده) در مختصات قطبی به کار برد. از بررسی سایر مثالها چنین برمی‌آید که فرم متریک برای یک فضای دوبعدی کلی برحسب مختصات کلی را می‌توان مانند ۵-۴ الف نوشت، که در آن ضرایب g_{ij} ، که مؤلفه‌های تانسور متریک نامیده می‌شوند، متقارن‌اند

$$g_{12} = g_{21} \quad (۵-۴ ب)$$

و در غیر این صورت توابع دلخواهی از مختصات x^1 و x^2 هستند. راه مختصرتر نوشتن ۵-۴ به صورت زیر است

$$ds^2 = \sum g_{ij} dx^i dx^j \quad (۵-۵ الف)$$

$$g_{ij} = g_{ij}(x^k), \quad g_{ij} = g_{ji} \quad (۵-۵ ب)$$

که در آن \sum به معنای جمع‌زدن روی تمام مقادیر شاخصهای i و j (در این مورد، $i = 1, 2$ و $j = 1, 2$) است و معادله آخر برای تمام مقادیر i و j (در این مورد $i, j = 1, 2$) معتبر است. یک امتیاز بزرگ این نمادگذاری این است که تمام موازادی را که تاکنون با آن روبه‌رو شده‌ایم در برمی‌گیرد، بعد فضا هر چه می‌خواهد باشد (به شرط آنکه عمل جمع‌زدن را روی تمام مقادیر مناسب انجام دهیم). بدین ترتیب، مثلاً با قرار دادن $g_{11} = 1$ ، $g_{22} = r^2$ ، $g_{33} = r^2 \sin^2 \theta$ و سایر g_{ij} ها برابر با صفر ۴-۲۸ ب را از ۵-۵ به دست می‌آوریم، در عوض اگر $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ و سایر g_{ij} ها را برابر با صفر قرار دهیم، ۵-۲ ب را به دست می‌آوریم. بدین‌گونه مفهوم کلی این است که یک فضای خمیده n بعدی با یک فرم متریک ds^2 توصیف می‌شود که از ۵-۵ به دست می‌آید و گستره i و j از ۱ تا n است.

تمرینها

۷-۵ فضای دوبعدی تخت برحسب مختصات قطبی در صفحه (r, θ) مشخص می‌شود. در این مورد مؤلفه‌های متریک به چه فرمی خواهند بود؟

۸-۵ در مورد یک فضای سه بعدی کلی، تحقیق کنید که هرگاه عبارت ۵-۵ الف را با تمام جزئیات بنویسیم به صورت

$$ds = g_{11}(dx^1)^2 + g_{12}dx^1dx^2 + g_{13}dx^1dx^3 + g_{21}dx^2dx^1 + g_{22}(dx^2)^2 \\ + g_{23}dx^2dx^3 + g_{31}dx^3dx^1 + g_{32}dx^3dx^2 + g_{33}(dx^3)^2$$

درمی آید. با استفاده از ۵-۵ ب چه ساده سازی امکان پذیر می شود؟

فرم متریک فضازمان

همین طور، برای توصیف یک فضازمان (چهار بعدی) خمیده کلی، باید فرم متریک ds^2 را در یک دستگاه مختصات مناسب به دست داد، و این فرم را می توان برحسب مؤلفه های تانسور متریک ۵-۵ نوشت. باز هم، وجه تمایز فضازمانهای تخت و خمیده این است که در یک فضازمان خمیده این امکان وجود دارد که بتوان دستگاه مختصاتی را یافت که در آن در همه جا

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (۵-۶ الف)$$

به طوری که، با $i, j = 0, 1, 2, 3$ مؤلفه های متریک g_{ij} برابرند با ± 1 اگر $j = i$ و در غیر این صورت صفرند^۱؛ یعنی

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۵-۶ ب)$$

در یک فضازمان خمیده می توان دستگاه مختصاتی یافت که در هر نقطه خاص P از آن فرم متریک ۵-۶ الف باشد، اما هیچ دستگاه مختصاتی وجود ندارد که این را در همه جا بدهد. در فضازمان تخت این فرم تنها وقتی به کار می رود که مختصات خاصی مورد استفاده قرار گیرند؛ اما صورت کلی ۵-۵ در تمام موارد به کار می رود (برای مثال ۴-۲۹ را ببینید).

متریک شیوه مناسبی برای نوشتن ضرب اسکالر ۴-۳۱ نیز به دست می دهد. در یک فضای کلی، ضرب اسکالر دو بردار η_1 و η_2 برابر است با

$$\eta_1 \cdot \eta_2 = \sum_{ij} g_{ij} \eta_1^i \eta_2^j \quad (۵-۶ ج)$$

۱. در اینجا ما همان یکاهای فضایی (برحسب زمان مسیر نور) را به کار می بریم که در اندازه گیری زمان مورد استفاده قرار می گیرند؛ یعنی یکاهایی را به کار می بریم که در آن سرعت نور یک باشد.

به سادگی دیده می شود که هرگاه فرم متریک ۵-۶ باشد و η ها از ۴-۳۱ انتخاب شوند رابطه بالا به صورت ۴-۳۱ درمی آید.

با معلوم بودن فرم متریک، درست مانند مورد فضا زمان تخت، تمام اندازه گیریهای زمان با ساعت های ایده آل در فضا زمان (با حرکت روی منحنیهای زمان گونه، که در مورد آنها $ds^2 < 0$ است) از معادله ۴-۲۵ الف، و حرکت نور در هر نقطه (مسیرهایی که روی آن $ds^2 = 0$ مشخص می شوند. بدین ترتیب، پرتوهای نور در هر نقطه و مخروطهای صفر گذشته و آینده هر نقطه (که با این پرتوهای نور تولید می شوند)، و از آنجا ماهیت علیت را تعیین می کنند. به عنوان یک مثال ساده، مدلی از عالم را در نظر بگیرید که فرم متریک آن برحسب مختصات مناسبی داده شده است

$$ds^2 = -dt^2 + t^{4/3}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (الف ۷-۵)$$

(یعنی، $-1 = g_{00}$ ، $t^{4/3} = g_{11} = g_{22} = g_{33}$ ، و بقیه g_{ij} ها صفرند). بلافاصله مشاهده می شود که در امتداد هر جهانخط $\{x = \text{const.}, y = \text{const.}, z = \text{const.}\}$ ، اتحادهای $dx = 0 = dy = dz$ ، و در نتیجه $ds^2 = -dt^2$ ، برقرار است؛ از این رو طبق ۴-۲۵ الف مختصه زمان t ویژه زمان را در امتداد آن جهانخطها، که جهانخطهای بنیادی این عالم هستند، اندازه می گیرد. گرچه، در امتداد منحنی $\{t = \text{const.}, y = \text{const.}, z = \text{const.}\}$ ، داریم $ds^2 = t^{4/3}dx^2$ ، از این رو ویژه فاصله در امتداد آن منحنی به جای x با $t^{2/3}x$ اندازه گرفته می شود (که همان طور که به تفصیل در فصل ۷ خواهیم دید) ایجاب می کند که این عالم در حال انبساط باشد. مخروط صفر را شرط $ds^2 = 0$ تعیین می کند؛ با توجه به ۷-۵ الف این نشان می دهد که یک جابه جایی $(dx^a) = (dt, dx, dy, dz)$ در امتداد مخروط صفر باید از رابطه زیر پیروی کند

$$dt^2 = t^{4/3}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (ب ۷-۵)$$

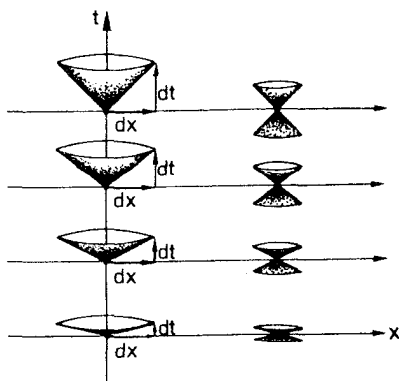
برای مشاهده پیامدهای آن، مخروطهای صفر را در نظر می گیریم که روی رویه

$$\{y = \text{const.}, z = \text{const.}\}$$

تصویر شده اند، یعنی در ۷-۵ ب $dy = dz = 0$ قرار می دهیم، و رابطه زیر را به دست می آوریم

$$dt^2 = t^{4/3}dx^2 \quad \Leftrightarrow \quad dt = \pm t^{2/3}dx \quad (ج ۷-۵)$$

این نشان می دهد که به ازای مقادیر کوچک مختصه t ، یک جابه جایی معین dx به یک جابه جایی بسیار کوچک dt منجر می شود؛ به ازای مقادیر بزرگتر t ، همان جابه جایی dx به جابه جایی بزرگتری

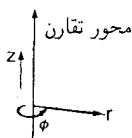


شکل ۱۶-۵ مخروطهای نور برای بازه ۷-۵ الف، که از ۷-۵ ج به دست می‌آید. برای مقادیر کوچک مختصه t ، مخروطها پهن می‌شوند.

dt می‌انجامد (شکل ۱۶-۵). بدین‌گونه طبق این مختصات، مخروط نور با نزدیک شدن به رویه $t = 0$ "تخت‌تر می‌شود" (برای نموهای یکسان t ، نمودی که x باید داشته باشد تا ۷-۵ ج برقرار باشد، با کوچک شدن t بزرگ و بزرگتر می‌شود). این عمل مستقل از مقدار x صورت می‌گیرد (زیرا مختصه x به‌طور صریح در ۷-۵ الف و ج ظاهر نمی‌شود). ما این مدل و مدل‌های مربوط به آن را به‌تفصیل در فصل ۷ بررسی خواهیم کرد.

تمرین ۹-۵

فضازمان تخت (که دارای تقارن فضایی حول یک محور دلخواه است) را در نظر می‌گیریم. مختصات قطبی استوانه‌ای را انتخاب می‌کنیم که در آن z فاصله در امتداد این محور و r فاصله از این محور را اندازه می‌گیرد، و ϕ زاویه‌ای است که مقدار چرخش حول این محور را بیان می‌کند (شکل ۱۷-۵ را ببینید): فرم متریک ds^2 و تانسور متریک $[g_{ij}]$ را در این مختصات بنویسید.



شکل ۱۷-۵

معادله‌های میدان

هندسه فضا زمان را فرم متریک ds^2 ، و یا معادل آن مؤلفه‌های تانسوری $g_{ij}(x^k)$ تعیین می‌کند. پس سؤال اساسی این است که تانسور متریک را چه تعیین می‌کند؟

اینشتین در سال ۱۹۱۶ (۱۲۹۵ شمسی) پیشنهاد کرد که هندسه فضا زمان را معادله‌های میدان گرانشی تعیین می‌کند. به‌طور کلی، این معادله‌ها بیانگر این فکر هستند که ماده موجود در فضا زمان سبب خمیدگی آن فضا زمان می‌شود، و این خمیدگی فرم متریک فضا زمان را تعیین می‌کند. این یک ایده انقلابی دیگر است؛ تا زمان اینشتین، فرض بر این بود که هندسه ایستاست، یکی از ویژگیهای دنیای فیزیکی که از ازل، همه چیز در عالم را تحت تأثیر قرار می‌داده اما تحت تأثیر هیچ چیز قرار نمی‌گرفته است. ایده جدید این است که ساختار هندسی فضا زمان، مانند جنبه‌های دیگر دنیای فیزیکی، کمیتی است که تحت تأثیر شرایط فیزیکی دنیا قرار دارد، و سیر تکامل آن را معادله‌های خوش تعریف با شرایط اولیه معلوم تعیین می‌کنند. در این صورت اثرهای گرانشی در خمیدگی فضا زمان مستتر است. بدین‌گونه، با این تفاهم جدید هندسه یکی از شاخه‌های فیزیک شد: پس می‌توان هندسه فضا زمان را به‌کمک مشاهده‌های مناسب تعیین کرد، و قوانین حاکم بر این هندسه را پیدا کرد.

اینشتین مجموعه خاصی از معادله‌ها را برای تعیین هندسه فضا زمان پیشنهاد کرد، که عبارت‌اند از معادله‌های میدان گرانشی اینشتین. این معادله‌ها مجموعه پیچیده‌ای از معادله‌های دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای مؤلفه‌های تانسور متریک g_{ij} هستند که به زبان ریاضی حساب تانسوری نوشته می‌شوند و از سطح کتاب حاضر فراتر است. اگرچه در اینجا جزئیات این معادله‌ها را نخواهیم آورد، اما مشخصه‌های برخی از جوابهای دقیق آن را در فصلهای آینده توضیح خواهیم داد.

معادله‌های اینشتین فیزیک گرانش را در بر می‌گیرند. البته مهم است که، در حد حرکت کند میدان ضعیف، نتیجه‌های نظریه گرانش نیوتونی با دقت زیاد به دست آیند، زیرا این نظریه رفتار ماده در منظومه شمسی را به‌نحو شایسته‌ای توصیف می‌کند. گرچه، پیش‌بینیهای نظریه نیوتونی کاملاً دقیق نیستند، و در مواردی که اختلاف وجود دارد، پیش‌بینی بهتر از آن نظریه اینشتین است. در واقع نظریه اینشتین از تمام آزمایشهایی که تا کنون برای بررسی درستی آن انجام شده موفق بیرون آمده است. در مورد میدانهای قوی نظریه اینشتین با نظریه نیوتونی اختلاف اساسی پیدا می‌کند. همان‌گونه که خواهیم دید، طبق نظریه اینشتین ماده بسیار چگال می‌تواند سبب "پیچش" فضا زمان شود که نتیجه آن یک "سیاهچاله" است (فصل ۶)؛ اکنون شواهدی دال بر وجود سیاهچاله‌هایی با جرم خورشیدی در نواحی خارجی کهکشان ما وجود دارد، و ممکن است سیاهچاله‌های بسیار سنگینتری در مرکز کهکشانها وجود داشته باشند. به‌طور کلی، خمیدگی فضا زمان به‌صورت پرتوهای نور و اثرهای مشابه گرانشی ظاهر می‌شود، مثلاً، به انتقال به سرخ می‌انجامد که در رصد ستاره‌های پر جرم مشاهده می‌شود و منشأ گرانشی دارد نه دوپلری.

تمرینها

۱۰-۵ انتظار دارید در فرم متریکی که فضازمان اطراف یک ستاره ایستا با تقارن کروی را توصیف می‌کند چه تقارنهایی وجود داشته باشد؟ با استدلالهای کلی، کلی‌ترین فرم متریکی را که ممکن است این فضازمان را نشان دهد با شرط اینکه مختصات با این تقارنها مطابقت داشته باشند بنویسید.

۱۱-۵ بازهٔ تمرین ۱۰-۵ چه وضعیت فیزیکی دیگری را می‌تواند نشان دهد؟

بازهم ژئودزیکها

ما معنای فیزیکی ژئودزیکهای زمان‌گونه و اهمیت آنها در توصیف اثرهای گرانی را مورد بحث قرار دادیم. اکنون بررسی می‌کنیم که این بحث به صورت‌نگاری ریاضی که اکنون وضع کرده‌ایم مربوط می‌شود؟

همان‌طور که قبلاً گفتیم، در یک فضای خمیده می‌توان به دنبال کوتاهترین فاصلهٔ بین دو نقطه گشت. این را می‌توان با کمینه کردن $L = \int (ds^2)^{1/2}$ یافت (با ۴-۲۶ الف مقایسه کنید)، که در آن ds^2 فرم متریک ۵-۵ است. همین‌طور در فضازمان خمیده، می‌توان مسیر زمان‌گونه‌ای را یافت که مقدار $\tau = \int (-ds^2)^{1/2}$ را (با ۴-۲۵ الف مقایسه کنید) که در آن ds^2 فرم متریک فضازمان است (که باز هم با ۵-۵ مشخص می‌شود) کمینه کند. این متناظر با مسیری است که ویژه‌زمان بین نقاط انتهایی آن طولانیترین است، همان‌طور که در بحث بخش ۴-۲ اشاره شد. تمام مسیرهایی که فاصلهٔ فضازمان بین دو نقطهٔ انتهایی‌شان بیشینه یا کمینه است ژئودزیکهای فضازمان هستند (با بخش ۵-۱ مقایسه کنید). همان‌طوری که دیدیم، ذره‌هایی که آزادانه حرکت می‌کنند (یعنی تحت هیچ نیرویی غیرگرانشی قرار ندارند) چنین مسیرهایی را در فضازمان خمیده خواهند پیمود.

هنگام معرفی ایدهٔ فضای خمیده، اشاره کردیم که راه دیگری برای تعریف ژئودزیک: یعنی، خمی که اگر در امتداد آن حرکت کنیم، جهتش تغییر نمی‌کند وجود دارد. این ایده را می‌توان در هر فضا یا فضازمان خمیده به صورت دقیق بیان کرد (با بخش ۵-۷ مقایسه کنید)، و معلوم می‌شود که این دو تعریف یکی هستند. خمی که طول آن بهینه باشد خمی است که از جهت اولیهٔ خود منحرف نمی‌شود. در یک فضا یا فضازمان تخت، ژئودزیکها همان خطهای مستقیم بین نقطه‌های ابتدایی و انتهایی‌شان هستند.

ژئودزیکهای زمان‌گونه (ژئودزیکهایی که در هر نقطه از آنها $ds^2 < 0$) در فضازمان دارای معنای فیزیکی بسیار روشنی هستند که دربارهٔ آن بحث کرده‌ایم (بخش ۳-۵). ژئودزیکهای صفر

۱. در فضازمان، "کوتاهترین" یا "بلندترین" مسیر بودن بستگی به قراردادی دارد که برای علامت بازهٔ فضازمان اتخاذ می‌شود؛ این قرارداد اختیاری است و می‌توان به‌طور سازگار عکس علامتی را که در اینجا برای ds^2 به‌کار رفته است مورد استفاده قرار داد. اما اثر فیزیکی مستقل از این انتخاب است: اینها مسیرهایی با طولانیترین ویژه‌زمان هستند. ما در اینجا ds^2 را که منفی است روی یک مسیر زمان‌گونه، کمینه شده است در نظر گرفتیم، که منجر به یک مقدار بیشینه برای زمان سپری شده گردید که از انتگرال‌گیری $(-ds^2)^{1/2}$ به‌دست می‌آید.

ژئودزیکهایی که در هر نقطه از آنها $ds^2 = 0$ نیز دارای معنای فیزیکی مهمی هستند که اکنون مورد بحث قرار می‌دهیم.

۵-۵ پرتوهای نور

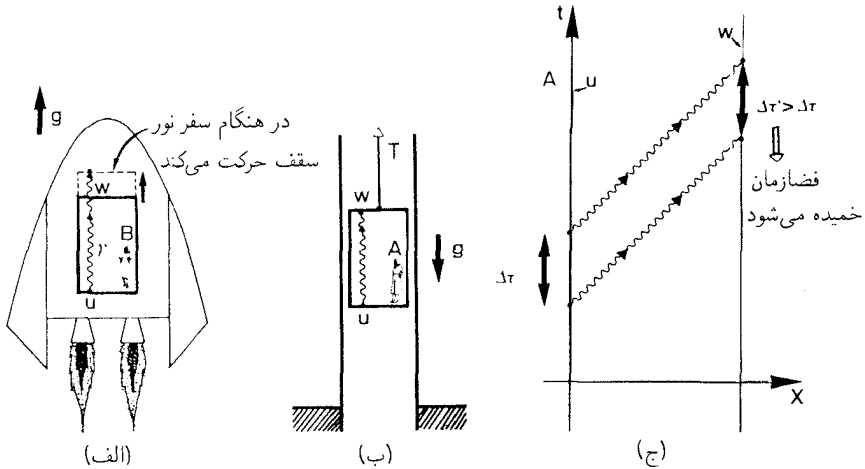
اکنون تغییر فیزیکی منحصر به فردی از ژئودزیکهای زمان‌گونه در یک فضا-زمان خمیده را تعیین کرده‌ایم. ژئودزیکهای صفر چطور؟ پاسخ بدیهی آن است که آنها باید نماینده پرتوهای نور باشند، زیرا آنها خمهای صفر هستند (یعنی نماینده حرکت با سرعت نور هستند) که، در یک فضا-زمان خمیده، نزدیکترین خم به خط راست هستند. بنابراین: پرتوهای نور در یک فضا-زمان خمیده ژئودزیکهای صفر هستند. این فرضیه را می‌توان با بررسی جوابهای اپتیک هندسی معادله‌های ماکسول در یک فضا-زمان خمیده، و بررسی انتشار ذره‌های با جرم سکون صفر در فضا-زمان خمیده تأیید کرد. این شناسایی اهمیتی قابل ملاحظه دارد، زیرا، از یک طرف پرتوهای نور نتیجه رصدهای نجومی را که می‌توانیم انجام دهیم تعیین می‌کنند، و از طرف دیگر مولدهای مخروطهای نور در فضا-زمان هستند و از این رو ماهیت علیت را نیز تعیین می‌کنند. قبل از بحث در این مورد نگاهی به پیامدهای اصل هم‌ارزی می‌اندازیم.

خم شدن پرتوهای نور

قبلاً دیدیم که یک ناظر D در حالت سقوط آزاد به دور از هر گونه میدان گرانشی باید ببیند که پرتوهای نور در خط مستقیم حرکت می‌کنند (زیرا این درست همان وضعیت فضا-زمان تخت است). بنابراین، طبق اصل هم‌ارزی، این باید در مورد ناظر D که به طور شعاعی به سوی مرکز زمین در حال سقوط آزاد است نیز صدق کند [شکل ۵-۷ (ج)]. اما مسیر این نور نسبت به ناظر A که نسبت به زمین ساکن است خمیده به نظر می‌رسد، درست همان‌طور که مسیر نور نسبت به ناظر B که در سفینه‌ای با شتاب یکنواخت به دور از هر گونه میدان گرانشی قرار دارد خمیده به نظر می‌آید [شکل‌های ۵-۷ (الف) و (ب)؛ با شکل ۵-۸ مقایسه کنید]. بنابراین اصل هم‌ارزی به این باور می‌انجامد که میدان گرانشی یک جسم پر جرم پرتوهای نور را (نسبت به ناظری که روی آن جسم ساکن است) خم می‌کند. این پیش‌بینی با مشاهده وضعیت ظاهری ستاره‌ها طی یک کسوف در سال ۱۹۱۹ (۱۲۹۸ شمسی) تأیید شد که منجر به پذیرش گسترده نسبت عام گریدید.

انتقال به سرخ گرانشی

می‌توان توجه داشت که اگر نوری از کف یک آزمایشگاه و یا یک سفینه در حال سقوط آزاد گسیل و آشکارسازی روی سقف آن را دریافت دارد، در این صورت ناظر D نباید تغییری در بسامد این نور مشاهده کند. از طرف دیگر، از نظر B که در یک سفینه شتابدار قرار دارد، هنگام گسیل نور سقف

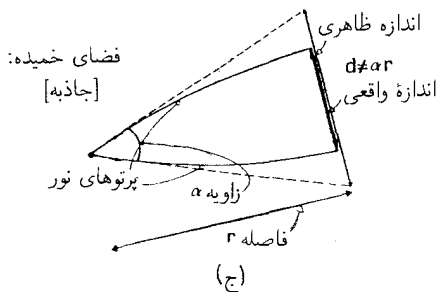
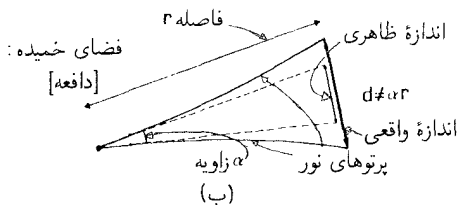
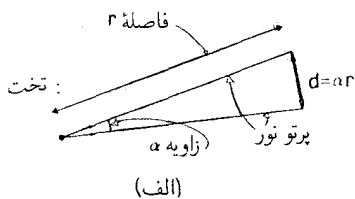


شکل ۵-۱۸ (الف) در یک سفینه شتابدار که ناظر B سرنشین آن است، نوری که در بازه‌های پیاپی از کف سفینه گسیل می‌شود باید هر بار تا رسیدن به سقف مسافت بیشتری را طی کند. (ب) مشاهده پرتوهای نور توسط ناظر هم‌ارز A در یک آسانسور ساکن در میدان گرانشی زمین باید همان نتایج مشاهده‌های B را بدهد. (ج) انتقال به سرخ گرانشی: بازه زمانی $\Delta T'$ بین دریافت علائمی که در فاصله ΔT گسیل می‌شوند، از ΔT بزرگتر است هر چند نقطه دریافت w نسبت به نقطه گسیل u حرکتی ندارد؛ این امر در نتیجه میدان گرانشی بین w و u است که موجب خمیدگی فضا زمان می‌شود.

از موضع کف با شتاب دور می‌شود؛ بدین ترتیب، طبق اندازه‌گیری B، در هر بازه زمانی نور باید قبل از رسیدن به سقف مسافت بیشتری را از بازه زمانی پیش از آن طی کند [شکل ۵-۱۸ (الف)]. در نتیجه، ناظر شتابدار B در نور دریافتی انتقال به سرخ را مشاهده می‌کند (در واقع این را با محاسبه انتقال به سرخ مشاهده شده در جهان ریندلر که در بخش ۳-۴ ارائه شد، نشان دادیم). اصل هم‌ارزی منجر به این باور می‌شود که در مورد ناظر A که روی سطح زمین ساکن است نیز این مطلب صادق است [شکل ۵-۱۸ (ب)]. بدینسان ما انتقال به سرخ گرانشی را پیش‌بینی کرده‌ایم؛ نوری که از یک میدان گرانشی ایستا خارج می‌شود هنگام دریافت توسط یک ناظر ساکن انتقال به سرخ پیدا می‌کند [شکل ۵-۱۸ (ج)]. این مطلب از نظر تجربی تأیید شده است، هم در رصد ستاره‌های پرجرم دوردست، و هم در آزمایشهایی که در آن نور از پای برج هاروارد گسیل و در بالای آن دریافت شده است.

انحراف ژئودزیک: پرتوهای نور

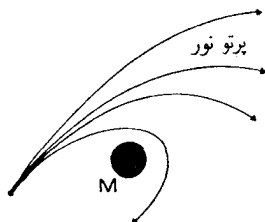
یکی از پیامدهای خم شدن گرانشی پرتوهای نور این است که رابطه بین زاویه‌ها و فاصله‌های مشاهده شده تغییر می‌کند. در فضا زمان تخت، ناظری که پرتوهای نوری را که زاویه بین آنها α است از جسمی که در فاصله r قرار دارد دریافت می‌کند، می‌تواند نتیجه بگیرد که اندازه آن شیء



شکل ۱۹-۵ (الف) در یک فضای تخت اندازه d جسمی که در فاصله r با زاویه α دیده می‌شود برابر αr است. (ب) در یک فضای خمیده این رابطه صحیح نیست. اگر انحنای فضا منفی باشد، اندازه ظاهری آن αr کوچکتر از اندازه واقعی d خواهد بود. (ج) در یک فضای با انحنای مثبت، پرتوهای نور در محل شیئی نسبت به فضای تخت به یکدیگر نزدیکتر خواهند بود، و اندازه ظاهری αr از اندازه واقعی d بزرگتر خواهد بود. این اثر "عدسی گرانشی" است.

برابر با $d = \alpha r$ است [شکل ۱۹-۵ (الف)]. اما این نتیجه‌گیری در فضا زمان خمیده اعتبار ندارد، زیرا پرتوهای نور در اثر گرانش خم شده‌اند [شکل ۱۹-۵ (ب)]. اگر پرتوهای نور به طرف یکدیگر خم شوند (آن طور که از یک میدان گرانشی جاذبه‌ای انتظار می‌رود) در محل شیئی به یکدیگر نزدیکتر از آن خواهند بود که ما مستقیماً از زاویه بین آنها استنتاج می‌کنیم، و به سبب این اثر "همگرایی گرانشی" جسم از اندازه واقعی بزرگتر به نظر می‌آید [شکل ۱۹-۵ (ج)]. این اثر، درخشندگی شیئی را نیز افزایش خواهد داد، زیرا نوری که از آن گسیل می‌شود نسبت به فضا زمان تخت در سطح کوچکتری پخش می‌شود. یک اثر دیگر آن است که در حالت کلی نوری که تصاویر اشیای دور را منتقل می‌کند به صورت متفاوت خم می‌شود، زیرا نوری که در نزدیکی یک شیئی پر جرم است از نوری که در فاصله دورتری قرار دارد بیشتر خم خواهد شد زیرا میدان گرانشی در نزدیکی آن شیئی قویتر است (شکل ۱۹-۵). بنابراین تصویر واپیچیده می‌شود؛ مثلاً یک شیئی کروی بیضی شکل به نظر خواهد رسید، و از این رو در حالت کلی اثر عدسی گرانشی ناقص است و ظاهر شیئی مشاهده شده را واپیچیده می‌کند.

از دیدگاه فضا زمان، روشن است که موضوع بحث ما چیزی جز اثر "انحراف ژئودزیک" که در بالا بحث شد نیست (بخش ۳-۵)، اما اکنون این انحراف در مورد پرتوهای نور بررسی می‌شود. به سبب اثرهای کشندی میدانهای گرانشی اشیای دور، خطهایی که در ابتدا موازی هستند به یکدیگر



شکل ۵-۲۰ پرتوهای نور نزدیک به یک جسم پرجرم بیشتر از پرتوهای دورتر خم می‌شوند، زیرا میدان گرانشی نزدیک جسم قویتر است. در نتیجه، وقتی نور نزدیک به یک شیء پرجرم حرکت می‌کند تصاویر واپیچیده می‌شوند.

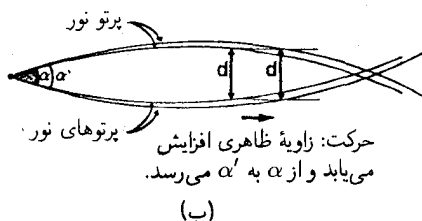
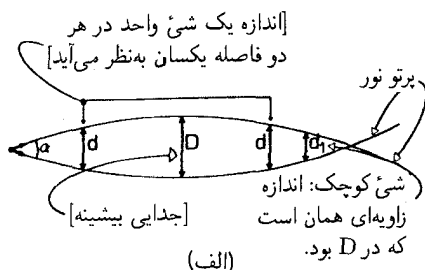
نزدیک می‌شوند و پرتوهای نوری که از یک نقطه شروع و از یکدیگر دور می‌شوند تمایل به کانونی شدن دارند. فاصله نسبی پرتوهای مجاور را می‌توان مانند جهانخطهای ذره‌ها برای آشکارسازی خمیدگی فضا زمان به‌کار برد، و قدرت آن را اندازه گرفت. در مورد فضا زمان، این اصل موضوع اقلیدسی که خطهای راست موازی هرگز برخورد نمی‌کنند با یک معادله (معادله انحراف ژئودزیک) جایگزین می‌شود که نحوه تغییر فاصله بین ژئودزیکهای مجاور در نتیجه خمیدگی فضا زمان را تعیین می‌کند. در مورد پرتوهای نور، این اثرها با اندازه‌گیری قطر زاویه‌ای ظاهری اشیای دور مستقیماً قابل مشاهده است.

همگرایی گرانشی

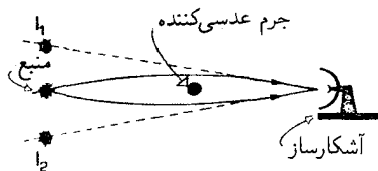
در حالت‌های حدی، اثر کانونی‌کننده ناشی از حضور اشیای پرجرم و یا ماده پراکنده می‌تواند به اندازه‌ای نور را خم کند که پرتوهای نور دوباره کانونی شوند. در این صورت این پرتوها در فاصله‌های دورتر از یکدیگر دور نمی‌شوند بلکه به یکدیگر نزدیک می‌شوند. در نتیجه، برای یک مسافت معین که پرتوهای نور شروع به بازکانونی شدن می‌کنند، اندازه جسمی که اندازه زاویه‌ای آن در محل ناظر α است با دور شدن از ناظر کوچکتر می‌شود (شکل ۵-۲۱ الف))، به طوری که اگر یک جسم صلب را از خود دور کنیم (شکل ۵-۲۱ ب)). اندازه ظاهری آن با دور شدن از ناظر افزایش می‌یابد (به‌جای اینکه، آن‌طور که معمولاً انتظار می‌رود، کاهش یابد). این امر می‌تواند به‌طور موضعی یا در سراسر مخروط نور گذشته رخ دهد.

همگرایی موضعی. یک نمونه از رویداد بازکانونی کردن موضعی هنگامی است که در یک مدل کیهانشناختی، یک جسم پرجرم نور اشیای دور دست را دوباره کانونی کند و سبب پیدایش تصاویر چندگانه شود (شکل ۵-۲۲). این اثر اکنون در چندین مورد مشاهده شده است. در این موارد نوری که از اشیای شبه‌ستاره‌ای بسیار دور دست می‌آید توسط یک کهکشان بینابینی کانونی می‌شود.^۱

۱. نگاه کنید به

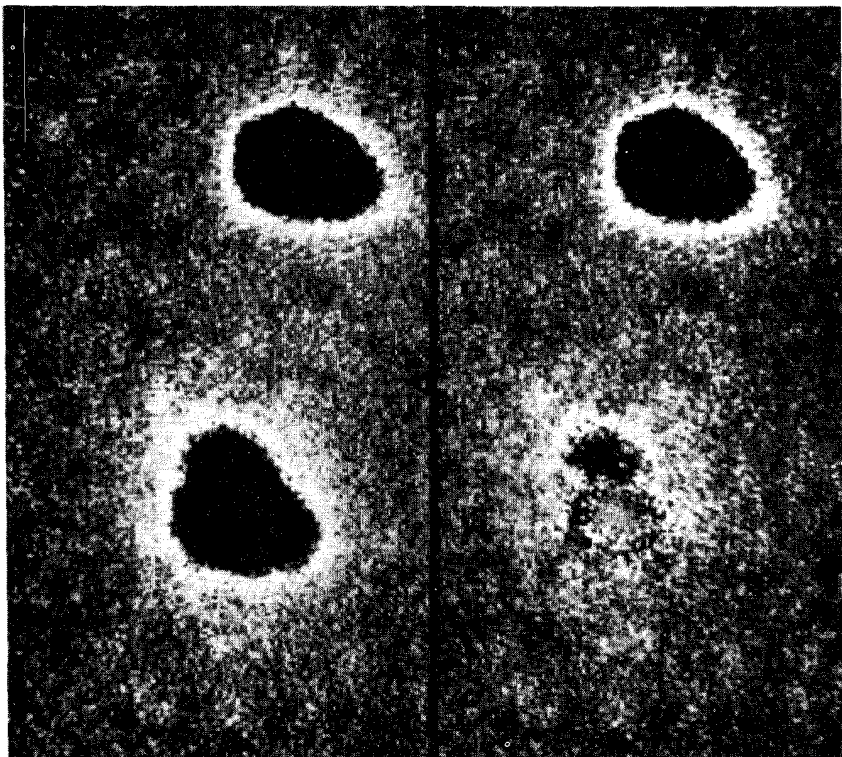


شکل ۲۱-۵ (الف) بازکانونی شدن پرتوهای نور در یک میدان گرانشی. اشیایی که اندازه زاویه ای آنها در محل ناظر یکی است با زیاد شدن فاصله آنها ابتدا افزایش و سپس کاهش می یابد. (ب) اندازه زاویه ای جسمی به طول d در محل ناظر در آن سوی نقطه بازکانونی شدن با دور شدن شیء افزایش می یابد ($\alpha' > \alpha$).



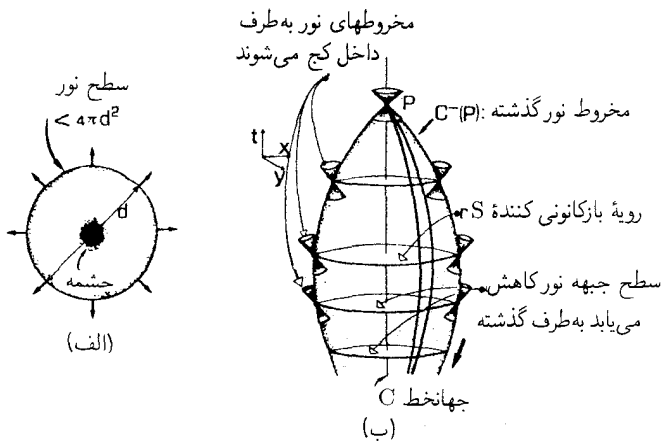
شکل ۲۲-۵ یک جسم پرجرم، نوری را که از یک منبع دور دست می آید بازکانونی می کند و چندین تصویر I_1 و I_2 از آن منبع تولید می کند.

شکل ۲۳-۵ چنین موردی را نشان می دهد؛ دو تصویر شبه ستاره ای $۵۶۱ + ۹۵۷^\circ$ با استفاده از طیفهایشان شناسایی و معلوم شده است که از یک شیء شبه ستاره ای واحد می آیند؛ کهکشانی کانونی کننده بسیار محواست، و تنها با ظهور ثبوت ویژه تصویر آشکار شده است (شکل ۵-۲۴). این نمایش بارزی از تأثیر خمیدگی فضا زمان بر پرتوهای نور است. در این مثال، اثر موضعی است؛ نوری که از کنار کهکشانی کانونی کننده عبور می کند بازکانونی می شود، اما نوری که به آن نزدیک نمی شود تحت تأثیر قرار نخواهد گرفت. بدینسان، این اثر تنها راستاهای نسبتاً معدودی در آسمان و برای پرتوهای نوری که از فاصله به اندازه کافی نزدیک کهکشانیها یا سایر اشیای پرجرم عبور می کنند رخ می دهد.



شکل ۲۳-۵ و ۲۴-۵ (پشت جلد را هم ببینید) همگرایی گرانشی توسط یک کهکشان بینابینی دو تصویر از یک شیء شبه ستاره‌ای واحد (QSO ۰۹۵۷ - ۵۶۱) تولید می‌کند. در شکل ۲۳-۵، دو تصویر QSO شناسایی شده‌اند و به سبب تشابه طیفهای آنها معلوم شده است که از یک شیء بسیار دور واحد می‌آیند. در شکل ۲۴-۵ یکی از تصاویر QSO به طور رقمی حذف شده است، و در نتیجه تصویر محوتر کهکشان همگراکننده (که نزدیکتر است اما تابش آن به اندازه تابش QSO پراثری نیست) آشکار شده است. بدین ترتیب این عکسها خم شدن نور در اثر میدان گرانشی کهکشان را مستقیماً آشکار می‌سازند، و در نتیجه خمیدگی فضازمان را نمایش می‌دهند.

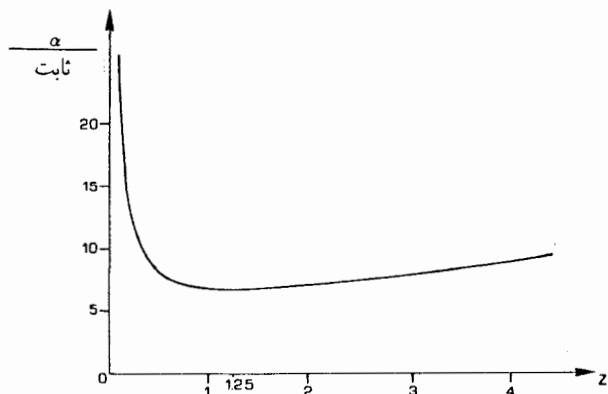
بازکانونی شدن در بزرگ مقیاس. دومین نوع بازکانونی کردن مستلزم خم شدن کل مخروط نور بر روی خود است. در یک فضازمان تخت مساحت یک جبهه موج با افزایش فاصله از ناظر الزاماً افزایش می‌یابد [نوری که از یک منبع می‌آید. پس از طی فاصله $r = ct$ در زمان t ، روی سطحی به مساحت $4\pi r^2$ پخش می‌شود، مقایسه کنید با شکل ۴-۲۹ (ب)]. در یک فضازمان خمیده این درست نیست؛ در حالت کلی، سطح کل یک جبهه موج به جای اینکه با فاصله گرفتن افزایش یابد کاهش می‌یابد [شکل ۵-۲۵ (الف)]. زیرا پرتوهای نور مجاور به طرف یکدیگر کانونی می‌شوند (مانند شکل ۵-۲۱). همین‌طور اگر روی مخروط گذشته‌مان به عقب برگردیم، کل مخروط نور به یک فاصلهٔ پیشینه از جهانخط گذشتهٔ ما C می‌رسد و سپس شروع به بازکانونی شدن به طرف



شکل ۲۵-۵ بازکانونی شدن نور در جایی که کل مخروط نور با خمیدگی فضا زمان ناشی از میدان گرانشی ماده یا تابش با توزیع یکنواخت بازکانونی شده است. (الف) سطح نوری که به طور کروی از منبع S گسترش می‌یابد در فاصله d کمتر از $\sqrt{4\pi d^2}$ است، و در نهایت کانونی می‌شود و به صفر می‌رسد. در این وضعیت، ناظر می‌بیند که نور ناشی از یک ناحیه دوردست تا یک مقدار حداکثر گسترش می‌یابد، و سپس در محل ناظر کانونی می‌شود. (ب) از دیدگاه فضا زمان این مستلزم آن است که مخروط نور ناظر به سطح S با مساحت بیشینه برسد و سپس و به تدریج که آن را به طرف گذشته دنبال می‌کنیم به سوی خود خم شود (مخروط نورهای موضعی کج می‌شوند، به طوری که بر مخروط نوری P مماس باقی می‌مانند؛ با شکل ۱۷-۴ (ب) در مورد فضا زمان تخت مقایسه کنید). یک ناظر در P رویه بازکانونی شدن S را که در آن ژئودزیکها بیشترین فاصله را از یکدیگر دارند به صورت رویه با کمترین قطرهای زاویه‌ای می‌بیند. هر چه بیشتر به گذشته برگردیم، با نزدیک شدن پرتوهای نور به یکدیگر مساحت جبهه نور کاهش می‌یابد.

آن جهانخط می‌کند [شکل ۲۵-۵ (ب)]. بررسی مدل‌های عالم در حال انبساط مؤید این مطلب است که در واقع این همان رفتاری است که ما از مخروط نور گذشته خودمان در عالم واقعی انتظار داریم، زیرا در عالم، ماده و تابش به اندازه کافی به طور یکنواخت پراکنده است تا بتواند سبب این بازکانونی شدن سراسری شود. این بدان معناست که ما انتظار داریم این رفتار بازکانونی کننده که در شکل ۲۱-۵ نشان داده شده است در امتداد هر پرتو نور به تدریج که آن را تا گذشته به اندازه کافی دور دنبال کنیم، رخ دهد.

مخروط نور در هر نقطه هنوز، به طور موضعی، نماینده سرعت نور است؛ بدینسان مخروطهای نور موضعی (در دستگاه مختصاتی که در آن مختصات مستقیماً طول و زمان را نمایش می‌دهند) نمی‌توانند در چنین فضا زمانی با یکدیگر موازی باشند. و در شکل ۲۵-۵ (ب) به طور مناسب کج شده است. ما بر این باوریم که چگالی ماده در عالم برای این نوع بازکانونی کردن کافی است و در نتیجه انتقال به سرخهای بین ۱ و ۵ سبب بروز قطرهای زاویه‌ای و درخشندگیهای "ناهنجار" در تصاویر اشیای دوردست می‌شود (شکل ۲۶-۵). به هر حال، این مطلب هنوز از طریق مشاهده تأیید نشده است.



شکل ۵-۲۶ در یک عالم اینشتین-دوسیتة قطر زاویه‌ای جسم صلبی که به تدریج به فاصله‌های دورتر برده می‌شود توسط رابطه زیر برحسب انتقال به سرخ مشاهده شده تعیین می‌شود $\alpha = (1+z)^2 \{ (1+z) - (1+z)^{1/2} \}^{-1}$ (ثابت) $\alpha =$ قطر زاویه‌ای ظاهری در انتقال به سرخ $z = 5/4$ دارای یک کمینه است.

تمرینها

۱۲-۵ فرض کنید جعبه سیاه یک هواییما از ارتفاع ۱۰ کیلومتری سطح زمین رها و آزادانه به سوی زمین سقوط کند. در ابتدا در جعبه دو تیله به فاصله ۱۰ cm از یکدیگر به طور افقی ساکن هستند. هنگامی که جعبه به زمین برخورد کند فاصله آنها چقدر خواهد بود؟ [شعاع زمین تقریباً ۶۰۰۰ km است. می‌توان از جاذبه گرانشی بین تیله‌ها چشمپوشی کرد.]

این دستگاه نیروهای کشندی گرانشی را با انحراف ژئودزیکی آنها اندازه می‌گیرد. نشان دهید که چطور می‌توان دستگاه اندازه‌گیری دیگری ساخت که از همین فکر در مورد پرتوهای نور استفاده کند. آیا این دستگاه عملاً مفید خواهد بود؟

۱۳-۵ ناحیه‌ای از فضازمان را که از هرگونه جرم گرانشی به دور باشد در نظر می‌گیریم. تخت یا خمیده بودن آن را چگونه می‌آزمایید؟

۱۴-۵ اگر پرتوهای نور در میدانهای گرانشی خم شوند. آیا باز هم می‌توانیم از نور به عنوان مبنای اندازه‌گیری زمان و فاصله در فضازمانهای خمیده استفاده کنیم؟

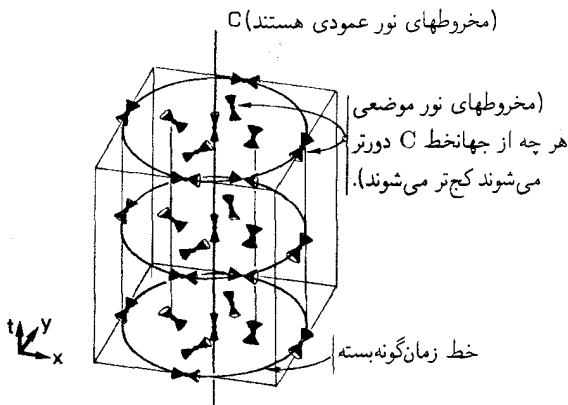
۱۵-۵ نمودارهایی رسم کنید که نشان دهد چگونه وقتی پرتوهای نور (الف) توسط لایه‌های هوا در دماهای مختلف در یک بیابان و (ب) توسط میدان گرانشی یک جسم بسیار چگال خم می‌شوند، از یک شیء واحد ممکن است دو تصویر دیده شود.

۱۶-۵ هنگام بازگشتی شدن پرتوهای نور، شار تابشی یک شیء دوردست با شار تابشی آن شیء در فضازمان تخت یکسان اندازه‌گیری نمی‌شود. ببینید چگونه می‌توان استدلالی را که به معادله ۴-۳۵ منتهی شد با این وضعیت تطبیق داد. [مساحت جبهه نور دورشونده را با A نشان دهید.]

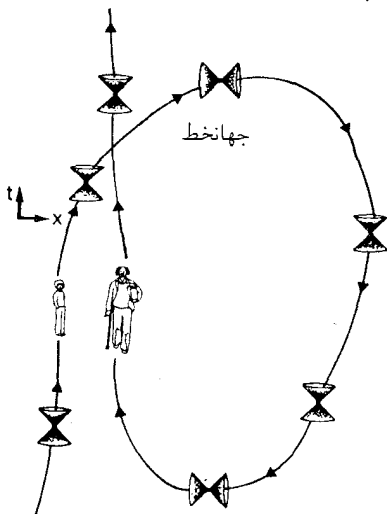
۶-۵ علیت

بازکانونی شدن بزرگ مقیاس پرتوهای نور نشان می‌دهد که رفتار موضعی مخروطهای نور در یک فضای خمیده می‌تواند با رفتار آن در فضا زمان تخت تفاوت بسیار داشته باشد. این به نوبه خود مستلزم آن است که ویژگیهای علی می‌توانند بسیار متفاوت باشند. یکی از ویژگیهای خاصی که می‌تواند رخ دهد وجود انواع مختلف افق در فضا زمان خمیده است، یعنی رویه‌هایی که به راههای مختلف پیشگویی‌پذیری را محدود می‌کنند. ساده‌ترین رویه از این نوع مخروط نور گذشته ماست که ناحیه‌هایی را که می‌توانیم با آن تماس علیتی برقرار کنیم محدود می‌کند (با بحث فصل ۱ مقایسه کنید). در فصلهای آینده مفاهیم افق رویداد در اطراف یک سیاهچاله را به دقت مورد بحث قرار خواهیم داد، با مفهوم اصلی قبلاً در بحث مدل عالم ریندلر (فضای تخت)، و افق ذره در کیهانشناسی آشنا شدیم. یک امکان دیگر در فضا زمانهای خمیده نقض ایده‌های معمول ما درباره علیت است، که در این بخش به بحث اجمالی آن می‌پردازیم.

برای اینکه ببینیم این امر چگونه می‌تواند روی دهد، توجه داریم که مخروطهای نور موضعی می‌توانند نسبت به یکدیگر کج شوند؛ در واقع می‌توان انتظار داشت که چنین چیزی در یک دستگاه دوار اتفاق بیفتد (دوران پرتوهای نور را به دنبال خود می‌کشد). با وجود این، مانند قبل، سرعت نور (که به طور موضعی توسط مخروط نور تعیین می‌شود) هنوز یک سرعت حدی است، از این رو مخروطهای نور و مسیرهای وابسته به پرتوهای نور هنوز آن قسمتهایی از فضا زمان را که می‌توانند تحت تأثیر یک رویداد خاص قرار گیرند معین می‌کنند. اگر دوران به اندازه کافی بزرگ باشد، ممکن است مخروطهای نور بتوانند آنقدر کج شوند که در یک دستگاه مختصات معلوم افقی به نظر آیند؛ عالم مانای دوار گودل مثالی از یک فضا زمان است که در آن این امر اتفاق می‌افتد، در این عالم اگر به اندازه کافی از هر ناظری دور شویم مخروطهای نور می‌چرخند (شکل ۵-۲۷). در این صورت از لحاظ نظری نقضهای علیتی در این فضا زمان امکانپذیر می‌شوند، زیرا خطهای بسته زمان‌گونه می‌توانند وجود داشته باشند. از این رو اصولاً یک پیرمرد می‌تواند در کنار یک مرد جوان، که خود (یعنی همان شخص) او در دوران ابتدایی‌تر تاریخ زندگی خود است، بایستد و با او صحبت کند! (شکل ۵-۲۸). اصولاً برای هر ناظری در این فضا زمان این امکان وجود دارد که از هر رویدادی در تاریخ کهکشان به هر رویداد ماقبل آن در تاریخ کهکشان سفر کند، کافی است با شتاب از جهانخط کهکشان به اندازه کافی دور شود و دوباره به آن بازگردد. شواهدی دال بر اینکه چنین چیزی می‌تواند در عالم واقعی اتفاق بیافتد در دست نداریم، اما از طرف دیگر این امکان (که متجر به پیدایش پارادوکسهای علیتی مختلفی می‌شود) با مشاهده یا آزمایش رد نشده است. ادعا نمی‌کنیم که عالم واقعی شبیه به این عالم است، بلکه فقط می‌گوییم که مدلهایی از فضا زمان خمیده وجود دارند که در آنها چنین چیزی از لحاظ نظری امکانپذیر است.



شکل ۲۷-۵ عالم مانای گودل. در روی محور، مخروطهای نور عمودی هستند، اما دور از محور دوران سبب کج شدن آنها می شود، این کج شدن با افزایش فاصله از محور افزایش می یابد به طوری که بالاخره مخروطها افقی می شوند، در این هنگام آنها خطوط بسته زمان گونه اند (منحنیهایی که رسم شده اند در همه جا در جهت راستای زمان گونه مخروطهای نوری موضعی به سوی آینده هستند).



شکل ۲۸-۵ در عالمی با خطوط زمان گونه بسته، جهانخطها می توانند دوباره به خودشان برگردند و از این رو این امکان وجود خواهد داشت پیرمردی در کنار خودش که مرد جوانی است بایستد.

تمرین ۱۷-۵

در ناحیه ای از بازه فضا زمان ds^2 ، برابر است با

$$ds^2 = -(\lambda - \alpha/r)dt^2 + dr^2/(\lambda - \alpha/r) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

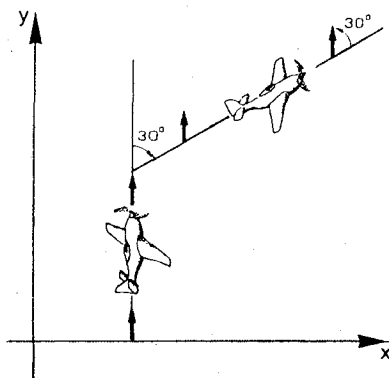
که در آن α مقداری ثابت است. معادله مخروطی صفر در شعاع r را به‌ازای θ و ϕ ثابت پیدا کنید. به‌ازای چه مقداری از r انتظار دارید که افقی وجود داشته باشد؟

۷-۵ انتشار موازی در امتداد یک خم

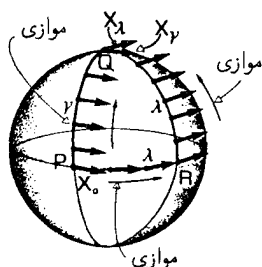
اکنون غالب اثرهای عمده‌ای را که در فضاها و فضازمانهای تخت رخ می‌دهند به‌طور کیفی مرور کرده‌ایم. ویژگی دیگری وجود دارد که تاکنون بدان اشاره نکرده‌ایم و آن مفهوم انتشار موازی در امتداد یک خم است. گرچه این مفهوم نقش مهمی را در صورتگرایی ریاضی فضازمانهای خمیده ایفا می‌کند، اما در فصلهای بعدی از ایده‌هایی که در این فصل معرفی شده‌اند استفاده نشده است، و از این رو این فصل را می‌توان در مطالعه اولیه ایده فضازمان خمیده از قلم انداخت.

نقطه P در فضازمان خمیده را در نظر می‌گیریم؛ در آن نقطه راستای x را انتخاب می‌کنیم، منحنی γ را که از P آغاز و به نقطه دیگری مانند Q ختم می‌شود در نظر می‌گیریم. می‌توان با حرکت در امتداد منحنی γ جهتی مانند x در هر نقطه از γ در نظر گرفت که تغییراتی که در جهت به‌وجود می‌آید را دنبال و آن را طوری تصحیح کرد که x موازی با جهت اولیه، x ، باقی بماند. مثلاً در یک هواپیما می‌توان امتداد محور هواپیما را جهت اولیه در نظر گرفت؛ اگر هواپیما بعداً به‌اندازه 30° به‌راست بگردد، در بخش بعدی مسافت جهت موازی 30° به‌طرف چپ جهت جدید هواپیما خواهد بود (شکل ۲۹-۵). چنین برداری را، موازی انتقال یافته در امتداد γ می‌نامیم. در این صورت ژئودزیک خمی است که جهت آن در امتداد خودش به‌طور موازی انتقال یافته است، یعنی جهت آن بدون تغییر است.

انتقال موازی در امتداد یک خم به‌ما امکان می‌دهد که بردارهایی را که در یک فضازمان دور از هم قرار دارند مقایسه کنیم؛ گرچه، هیچ مفهوم "موازی" خوش تعریفی از نقاط دور از هم (مثلاً



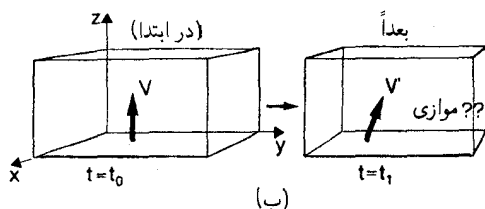
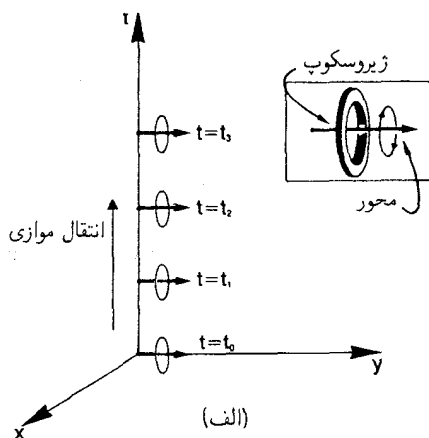
شکل ۲۹-۵ انتقال موازی یک جهت در امتداد مسیر یک هواپیما. در ابتدا جهت در امتداد محور هواپیماست، اما بعد از اینکه مسیر آن به‌اندازه 30° به‌راست منحرف می‌شود، این جهت به‌اندازه 30° به‌طرف چپ محور هواپیماست.



شکل ۵-۳ انتقال موازی جهت x روی سطح یک کره: هرگاه در امتداد مسیر γ از P به Q انتقال داده شود، در بردار x_γ را تعریف می‌کند: هرگاه در امتداد λ از راه R انتقال داده شود، در Q بردار x_λ را تعریف می‌کند. بردارهای x_λ و x_γ با یکدیگر موازی نیستند!

لندن و نیویورک) به مفهوم مطلق وجود ندارد زیرا نتیجه به مسیر انتخابی بین این دو نقطه بستگی دارد. مثلاً، یک کره (شکل ۵-۳) و حرکت در امتداد خم γ را در نظر می‌گیریم که در امتداد دایره عظیمه از P (روی خط استوا) به Q (قطب شمال) قرار دارد؛ مثلاً با هدایت مستقیم یک کشتی به طرف جلو در تمام طول مسیر. اگر x_0 در P در امتداد خط استوا به طرف راست باشد، در این صورت در تمام نقاط γ بردار موازی انتقال یافته x عمود بر جهت γ باقی می‌ماند، و بنابراین بردار x_γ در Q را تعریف خواهد کرد. اکنون حرکت از P به Q را در امتداد قطعه λ' خط استوا از نقطه P به نقطه R که به اندازه یک چهارم طول محیط استوا است و سپس از R به Q در امتداد دایره عظیمه λ'' در نظر می‌گیریم، این دو قطعه را با هم به عنوان منحنی λ از P به Q تعریف می‌کنیم. در حین انتقال موازی x در امتداد λ' ، این بردار همواره در راستای λ' است؛ هنگامی که در نقطه R مسیر جدید به اندازه 90° می‌چرخد، ابتدا بردار x عمود بر جهت حرکت خواهد بود و تا رسیدن به نقطه Q همین‌طور باقی می‌ماند و بردار x_λ را در Q مشخص می‌کند. این بردار در آنجا بر بردار x_γ عمود است. بدین ترتیب انتقال موازی یک بردار از P به Q در امتداد دو مسیر مختلف γ و λ در حالت کلی به نتیجه‌های متفاوتی در Q منجر می‌شود؛ به زبان ریاضی که انتقال موازی انتگرال‌پذیر نیست. پس روشن است که انتقال موازی x_γ از P تا Q در امتداد γ و سپس بازگشت از P به Q در امتداد λ ، به برداری موازی با x_λ منجر می‌شود؛ بدین ترتیب انتقال موازی به دور یک حلقه بسته به چرخش بردار می‌انجامد. مقدار این چرخش معیاری از مقدار خمیدگی حلقه است؛ در یک فضای تخت با توپولوژی عادی، چرخش صفر خواهد بود.

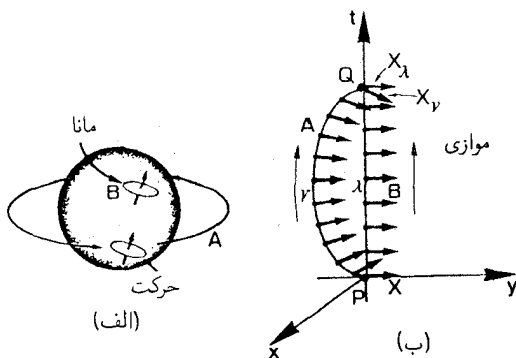
ایده انتقال موازی را می‌توان به فضازمان گسترش داد. انتقال موازی بردار x در امتداد یک ژئودزیک زمان‌گونه نماینده وضعیت فیزیکی استفاده از یک ژيروسکوپ کامل (یا یک دستگاه مکانیکی هم‌ارز، مانند آونگ فوکو) است که همواره به جهت واحدی اشاره می‌کند و بنابراین به ما می‌گوید چه راستایی در زمانهای بعد در تاریخ ما با یک جهت خاص در یک زمان گذشته موازی است [شکل ۵-۳۱ (الف) و (ب)]. این اساس چارچوبهای مرجع غیردوار است که مبنای



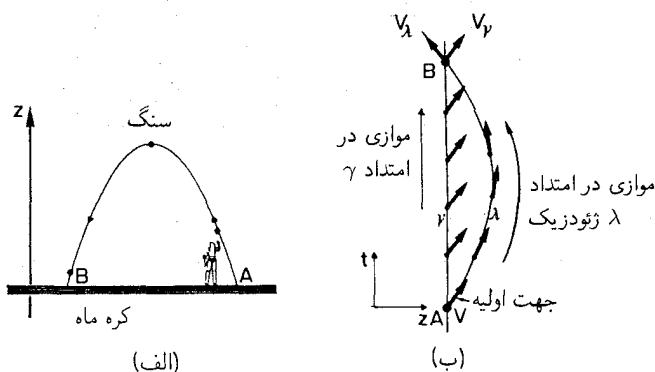
شکل ۳۱-۵ (الف) انتقال موازی یک ژيروسکوپ در امتداد یک جهانخط در فضا زمان. (ب) این انتقال جهتهای موازی را در یک محل اما در زمانهای مختلف (مثلاً، در این اتاق کدام جهت موازی با جهتی است که یک ساعت قبل قائم بود؟) تعریف می‌کند.

مطالعات معمول در مکانیک را تشکیل می‌دهد، و مثلاً در سیستمهای هدایتی لخت کشتی، هواپیما و سفینه فضایی تحقق یافته است. از آنجا که ذره‌ها در سقوط آزاد و پرتوهای نور روی ژئودزیکهای فضا زمان حرکت می‌کنند، جهت‌های زمان‌گونه جهانخطهای آنها به‌طور موازی در امتداد ژئودزیکها منتشر می‌شوند.

باز هم اگر جهانخطهای مختلفی رویدادهای P و Q را به یکدیگر متصل کنند، در این صورت از انتقال موازی برداری که در P است در امتداد این دو جهانخط، در حالت کلی، دو بردار متفاوت در Q نتیجه می‌شود. از طرفی، استفاده از ژيروسکوپهایی که در مسیرهای مختلف به دور زمین گردانده می‌شوند مبنای آزمون ظریفی است برای اثبات درستی نسبیّت عام (شکل ۳۲-۵). از طرف دیگر، اساس اینکه چگونه ژئودزیکها می‌توانند نمایشگر سقوط آزاد باشند را توضیح می‌دهد. ذره‌ای را در نظر بگیرید که از سطح کره ماه به طرف بالا پرتاب می‌شود و به‌صورت آزاد سقوط می‌کند [شکل ۳۳-۵ (الف)]. از آنجا که مقاومت هوا وجود ندارد، ذره در حال سقوط آزاد است



شکل ۳۲-۵ (الف) اندازه‌گیری خمیدگی فضازمان با انتقال ژيروسکوپها در مسیرهای مختلف به دور زمین و مقایسه جهت نهایی آنها با ژيروسکویی که در "خانه مانده است" انجام می‌گیرد. (ب) این عمل انتقال موازی در امتداد مسیرهای فضازمانی مختلف بین رویدادهای یکسان را با یکدیگر مقایسه می‌کند.



شکل ۳۳-۵ (الف) ذره‌ای که از سطح کره ماه در رویداد A پرتاب می‌شود و دوباره، پس از سقوط آزاد، در رویداد B به سطح ماه باز می‌گردد (و بنابراین در فضازمان روی یک ژئودزیک حرکت می‌کند). (ب) نمودار فضازمان این وضعیت. v جهت اولیه حرکت ذره به طور موازی در امتداد γ جهانخط ناظر از A به B منتقل می‌شود و در B بردار v_λ را مشخص می‌کند. با وجود این، پس از انتقال موازی در امتداد مسیر ژئودزیکی λ ذره از A به B، جهت v_λ را مشخص می‌کند. بردارهای v_λ و v_γ با هم موازی نیستند (v_γ در جهت $+z$ ، و v_λ در جهت $-z$ است). این متناظر با این حقیقت است که (الف)، وقتی ذره ناظر را ترک می‌کند، حرکت آن به طرف بالاست اما هنگام بازگشت ذره حرکت آن به طرف پایین است.

و بنابراین مسیر فضازمان آن ژئودزیکی است که جهانخط ناظر را در رویداد A ترک و دوباره در رویداد B به آن باز می‌گردد [شکل ۳۳-۵ (ب)]. سرعت آن به طور موازی در امتداد مسیر از A تا B منتقل می‌شود، و زاویه‌ای که با جهانخط ناظر می‌سازد متقابل است با زاویه‌ای که جهت اولیه

پس از انتقال موازی در امتداد مسیر ناظر از A به B می‌سازد. این امر بدین سبب امکانپذیر است که انتقال موازی در مسیرهای مختلفی که A را به B متصل می‌کند به جهت‌های متفاوتی در B می‌انجامد. اثر مشابهی در مورد دایره‌های عظیمه روی سطح زمین رخ می‌دهد؛ در هر مورد این نتیجه مستقیم خمیدگی فضا یا فضازمان است.

تمرینها

۱۸-۵ دایره‌ای را در نظر می‌گیریم که روی سطح یک مخروط رسم شده است و فاصله نقطه‌های آن از رأس مخروط ثابت است. روی این سطح جهتی را انتخاب کنید که بر دایره عمود است، و آن را به‌طور موازی دور دایره منتقل کنید. جهت آن پس از یک دور زدن به اندازه چه زاویه‌ای تغییر خواهد کرد؟ در مورد خمیدگی این سطح چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ [همان‌طور که قبلاً بحث شد، ممکن است برای وضوح مشاهده آنچه رخ می‌دهد "پهن کردن" مخروط در یک صفحه مفید باشد.]

تمرین کامپیوتری ۱۴

(الف) هندسه یک فضازمان با تانسور متریک قطری زیر نشان داده می‌شود

$$ds^2 = -A^2 dT^2 + B^2 dX^2 + C^2 dY^2 + D^2 dZ^2 \quad (*)$$

که در آن A, B, C, D و تابعی از مختصات $\{T, X, Y, Z\} = \{x^j\}$ هستند، که در یک زیر روال به نام METRIC تعریف شده‌اند. یک مثال ساده $A = 1, B = T, C = T, D = T$ است.

(۱) ترتیبی بدهید که مختصات $X(T), Y(T), Z(T)$ متعلق به یک خم در فضازمان باشد که نقطه شروع آن (T^0, X^0, Y^0, Z^0) و نقطه پایان آن (T^1, X^1, Y^1, Z^1) است. این کار را به صورت تحلیلی (یعنی با ارائه فرمولهای مناسب برای منحنی برحسب توابعی ساده) و یا به صورت جدولی از اعداد در زیر روال CURVE ذخیره کنید. به عنوان یک مثال می‌توانید $X(T) = T^2, Y(T) = T, Z(T) = 0$ را در نظر بگیرید.

(۲) دوره زمانی (T^0, T^1) را با شاخص $J (J = 1, 2, \dots, M)$ به M قسمت مساوی تقسیم کنید، فاصله J ام در زمان $T(J)$ شروع می‌شود. زیرروالی به نام STEP بنویسید که (الف) از CURVE مختصات $X(J), Y(J), Z(J)$ متناظر با $T(J)$ را تعیین کند و؛ (ب) نموهای DX, DY, DZ و در فاصله J ام پیدا کند و (از METRIC) توابع A, B, C, D را که مقادیر آنها در $T(J)$ تعیین شده است بیابد و؛ (ج) مقدار تقریب DS^2 فاصله (*) را بیابد، که در آن

$$DS^2 = -A^2 DT^2 + B^2 DX^2 + C^2 DY^2 + D^2 DZ^2$$

(د) اگر DS^2 منفی، مثبت و یا صفر باشد به I برابر با -1 ، 0 ، $+1$ اشاره و سپس واژه‌های مناسب "زمان‌گونه"، "صفر" یا "فضاگونه" را چاپ کند و؛ (و) اگر $I = -1$ ، $TAU = SQR(-DS^2)$ را پیدا کند؛ اگر $I = +1$ ، $DIST = SQR(DS^2)$ را بیابد.

(۳) برنامه اصلی شما PROPER باید به‌طور جداگانه TAU ، $DIST$ که مقادیر آنها را STEP از ابتدا تا انتهای منحنی تعیین کرده است جمع بزند، و حاصل جمع $TAU - TOTAL$ و $DIST - TOTAL$ را چاپ کند. اگر در تمام مراحل $I = -1$ باشد "زمان‌گونه"؛ اگر در تمام مراحل $I = 0$ باشد "صفر"؛ اگر در تمام مراحل $I = +1$ باشد "فضاگونه" را چاپ کند.

(ب) با استفاده از برنامه خود، (۱) با تغییر دادن تعداد گامهای M ، ببینید آیا این تقریب انتگرال خط که ویژه‌زمان را در امتداد منحنیهای زمان‌گونه در فضا زمان به دست می‌دهد پایدار است یا خیر؛ (۲) مثالهایی از پارادوکس دوقلوها در نسبیت خاص را بررسی کنید؛ (۳) رفتار ساعتها را در متریکهای شوارتس شیلد و رابرتسون-واکر که در دو فصل آینده توصیف خواهند شد، پس از آشنایی مورد بررسی قرار دهید.

مثالهای ویژه

درک مفاهیم و پیامدهای آنچه که در این فصل تشریح شد معمولاً مشکل است، از این رو در فصلهای بعدی ماهیت فضا زمانهای ویژه قابل توجه را بررسی می‌کنیم. ساده‌ترین مثالهای فضا زمانهای خمیده آنهایی هستند که توسط یک جسم پرجرم منزوی مانند یک ستاره، و یا تمام ماده موجود در عالم تولید می‌شوند. فضا زمان اطراف یک جسم پرجرم را در فصل بعد بررسی خواهیم کرد، و رمبش گرانشی چنین اجسامی را که منجر به تشکیل سیاهچاله می‌شود توصیف خواهیم کرد. در فصل آخر، نگاهی به ساده‌ترین مدل‌های معتبر عالم در حال انبساط خواهیم انداخت.

ستاره‌های گروهی و رمبش ستاره‌ای

در این فصل به دو مسئله که در اخترفیزیک دارای اهمیت‌اند می‌پردازیم: اول، توصیف میدان گرانشی خورشید که بر دینامیک منظومهٔ شمسی حکمفرماست؛ و دوم، بحث در ماهیت میدان گرانشی یک ستارهٔ پرجرم و اینکه چگونه رمبش ستاره‌ای رخ می‌دهد و به پیدایش "سیاهچاله" منجر می‌شود، تحلیل این موضوعها بر مبنای یک جواب دقیق معادله‌های میدان اینشتین، یعنی حل شوارتس‌شیلد (که کارل شوارتس‌شیلد در سال ۱۹۱۷، (۱۲۹۶ شمسی)، کمی قبل از مرگش در جنگ جهانی اول، کشف کرد) قرار دارد.

۱-۶ حل شوارتس‌شیلد

یک جسم پرجرم تنها، مانند زمین، خورشید و یا یک ستاره در فضا زمان تهی اطراف خود ایجاد خمیدگی می‌کند. اگر فرض کنیم که این شیء دارای تقارن گروهی است و از تمام اشیای پرجرم دیگر دور است، در این صورت می‌توان به کمک معادله‌های میدان اینشتین نشان داد که فضا زمان اطراف آن را جواب خارجی شوارتس‌شیلد به دست می‌دهد. متریک آن در مختصات مناسب به صورت زیر است

$$ds^2 = -(1 - 2m/r)dt^2 + (1 - 2m/r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1-6)$$

که در آن m جرم جسم است که با یکاهای هندسی اندازه گرفته می‌شود. در اینجا r مختصه شعاعی، θ و ϕ مختصات زاویه‌ای معمول هستند، و t مختصه زمان است. هر چند، در زیر نشان خواهیم داد که r ویژه فاصله و t ویژه زمان در امتداد خمهای مختصاتی نیستند. صورت ۱-۶ برای $r > R_s$ معتبر است، که در آن مقدار مختصه r روی سطح جسم است؛ برای $R_s > r > 0$ ، بازه دیگری (حل داخلی) ساختار داخلی جسم را توصیف می‌کند. بزودی خواهیم دید که برای یک ستاره ایستا باید $R_s > 2m$ باشد.

در این عبارتها، جرم m به‌طور طبیعی برحسب یکاهای هندسی داده می‌شود. این یکاها همان یکاهایی هستند که برای فاصله‌های فضایی به‌کار می‌روند (زیرا در ۱-۶ m/r باید بدون بعد باشد). جرم m در این یکاها با جرم M که برحسب یکاهای معمولی فاصله بیان می‌شود با فرمول $m = GM/c^2$ مربوط می‌شود که در آن G ثابت گرانشی و c سرعت نور است. برای حفظ هماهنگی با بخشهای قبل اغلب فاصله‌ها را برحسب زمان سیر نور اندازه می‌گیریم، از این رو جرمها را هم برحسب یکاهای زمان اندازه خواهیم گرفت! (برحسب این یکاها جرم m^* برابر است با m/c). معنای این یکاها را می‌توان تا حدودی از آنچه در زیر می‌آید فهمید

$$\begin{aligned} \text{جرم زمین} &: 6 \times 10^{27} \text{g} \Leftrightarrow 0.44 \text{cm} \Leftrightarrow 1.5 \times 10^{-11} \text{s} \\ \text{جرم خورشید} &: 2 \times 10^{33} \text{g} \Leftrightarrow 1.5 \times 10^5 \text{cm} \Leftrightarrow 5 \times 10^{-6} \text{s} \end{aligned}$$

همان‌طور که قبلاً گفتیم، شیء مورد نظر ممکن است یک سیاره، خورشید، و یا یک ستاره باشد، اما در تحلیلی که در زیر می‌آید، معمولاً برای سهولت از آن به‌عنوان ستاره نام خواهیم برد.

تقارنها

روشن است که فضا زمان ایستاست (یعنی با گذشت زمان تغییر نمی‌کند)، زیرا صورت ۱-۶ مستقل از زمان است. ناظرهایی را که برای آنها r ، θ ، و ϕ ثابت هستند "ناظرهای ایستا" می‌نامیم، زیرا آنها نسبت به آن ستاره حرکت ندارند؛ و طبق اندازه‌گیری آنها تمام خواص فیزیکی فضا زمان با گذشت زمان ثابت باقی می‌مانند.

فضا زمان نیز نسبت به جسم مرکزی تقارن کروی دارد. این مطلب آنقدرها هم روشن نیست، تا اینکه متوجه بشویم که جمله r^2 در صورت متریک همان صورت متریکی است که یک کره دویبعدی یکانی را توصیف می‌کند (معادله ۱-۵ را ببینید)، که طبیعتاً نسبت به مرکز کره تقارن کروی دارد. این تنها قسمتی از متریک است که در آن θ و ϕ وجود دارند؛ از این رو فضا زمان توصیف شده دارای همان تقارن دویکره است، یعنی، نسبت به مرکز ستاره‌ای که میدان گرانشی را تولید می‌کند تقارن کروی دارد.

فاصله‌ها و زمانها

هنگامی که فاصله از سطح ستاره را در جهت شعاعی، و ویژه‌زمانها را برای ناظری که در r ، θ ، و ϕ ثابت قرار دارد محاسبه می‌کنیم، وجود ضریب $1 - 2m/r$ در فرم متریک به این معناست که جوابها با جوابهای فضا-زمان تخت یکی نیستند، به‌آسانی می‌توان پیامدهای این دو ضریب را برای هندسه فضا-زمان استنتاج کرد. [شکل ۱-۶ (الف)]

هندسه‌های سه‌بعدی. ابتدا ضریب $(1 - 2m/r)^{-1}$ را در جمله dr^2 در نظر می‌گیریم. این ضریب هندسهٔ رویه‌های $\{t = \text{const.}\}$ را تعیین می‌کند. اهمیت مختصهٔ r که در اینجا به‌کار رفته است در این است که این مختصه یک "مختصهٔ سطح" است؛ یعنی، طوری انتخاب شده است که مساحت یک کرهٔ دوبعدی که تعریف آن $\{r = \text{const.}, t = \text{const.}\}$ است دقیقاً $4\pi r^2$ باشد (این بلافاصله از فرم ۱-۶ نتیجه می‌شود، که با قرار دادن $dt = 0$ و $dr = 0$ به فرم متریک دوبکره با سطحی برابر با $4\pi r^2$ تبدیل می‌شود). هر چند، این مختصه مستقیماً فاصله‌های بین این دو کره را اندازه نمی‌گیرد (در صورتی که در مورد فضا-زمان تخت این فواصل را اندازه می‌گیرد). در واقع، فاصله‌ای که شخص در امتداد عمود بر این کره‌ها در زمان t ، از کرهٔ $r = r_1$ تا کرهٔ $r = r_2$ اندازه می‌گیرد، با انتگرال‌گیری از ۱-۶ و قرار دادن $dt = 0$ ، $d\theta = 0$ ، و $d\phi = 0$ به دست می‌آید

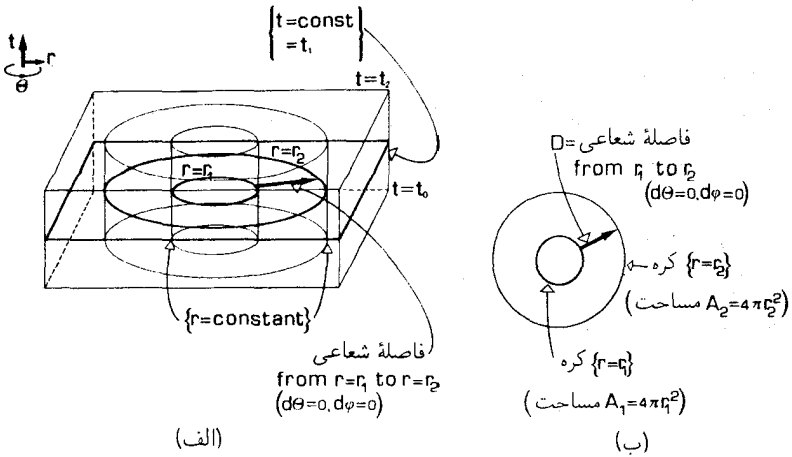
$$D = \int (1 - 2m/r)^{-1/2} dr$$

که برابر است با

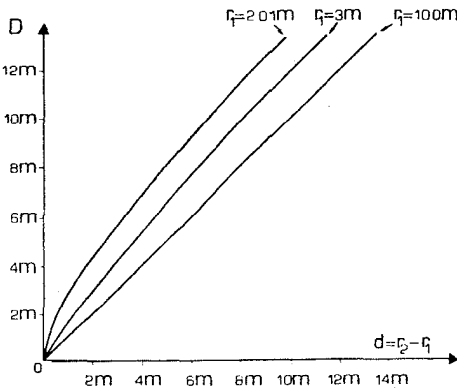
$$D = r_2(1 - 2m/r_2)^{1/2} - r_1(1 - 2m/r_1)^{1/2} + 2m \{ \log_e [(r_2 - 2m)^{1/2} + r_2^{1/2}] - \log_e [(r_1 - 2m)^{1/2} + r_1^{1/2}] \} \quad (2-6)$$

[شکل ۱-۶ (ب)]. این از فاصلهٔ متناظر در فضا-زمان تخت، یعنی $d = r_2 - r_1$ بزرگتر است. شکل ۲-۶ رابطهٔ بین D و d به‌ازای مقادیر مختلف r_1 را نشان می‌دهد. این نشان می‌دهد که چگونه خمیدگی فضا-زمان منجر به خمیدگی فضا-مقطعه‌ها $\{t = \text{const.}\}$ در این فضا-زمانها می‌شود، و بیانگر آن این واقعیت است که $d \neq D$ (در صورتی که در فضا-زمان تخت، این دو الزاماً با یکدیگر برابرند).

مختصهٔ زمان. سپس، ضریب $1 - 2m/r$ را در جملهٔ dt^2 در نظر می‌گیریم. این نشان می‌دهد که چگونه مختصهٔ زمان t به ویژه‌زمان T که یک ناظر ایستا اندازه می‌گیرد مربوط می‌شود. در فضا-زمان تخت و در مختصات معمولی، این دو یکسان هستند. گرچه، در اینجا، در حالی که مختصهٔ زمان t برای مشخص کردن گذشت زمان در امتداد تاریخ ناظرهای ایستا، و حتی همزمان کردن زمانهایی به‌کار می‌رود که ناظرهای مختلف از این نوع اندازه می‌گیرند (زیرا رویه‌های $\{t = \text{const.}\}$



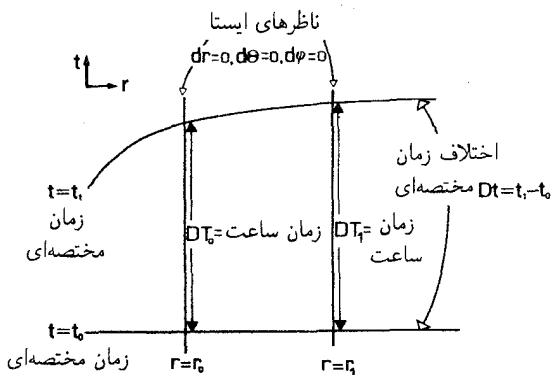
شکل ۱-۶ (الف) یک نمودار فضازمان برای حل شوارتس شیلد، زاویه ϕ حذف شده است. استوانه‌ها نماینده رویه‌های $\{r = \text{const.}\}$ هستند، D هم فاصله شعاعی از رویه $r = r_1$ تا رویه $r = r_2$ است. (ب) یک مقطع فضایی $\{t = \text{const.}\}$ حل شوارتس شیلد. رویه‌های $\{r = \text{const.}\}$ کره هستند.



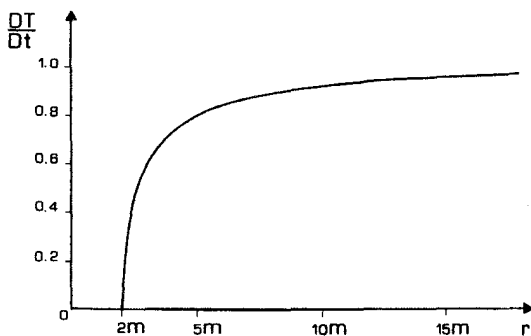
شکل ۲-۶ فاصله D بین کره‌های $r = r_1$ و $r = r_2$ ، که به صورت تابعی از $d = r_2 - r_1$ به‌ازای r_1 برابر با 2.7° ، 3° و 1° رسم شده است.

برای چنین ناظرهایی رویه‌های آنتیت هستند، با وجود این مختصه t مستقیماً ویژه‌زمانی را که آنها اندازه می‌گیرند نمایش نمی‌دهد. از روی فرم متریک می‌توان خواند که ویژه‌زمانی که یک ناظر ایستا (که برای او $d\theta = 0$ ، $d\phi = 0$ ، و $dr = 0$) بین مختصه‌های زمانی t_1 و t_2 اندازه می‌گیرد از رابطه $DT = \int (\lambda - 2m/r)^{1/2} dt$ به‌دست می‌آید، در نتیجه

$$DT = (\lambda - 2m/r)^{1/2} Dt \quad (3-6)$$



(الف)



(ب)

شکل ۳-۶ (الف) رابطه بین زمان ساعت و زمان مختصه‌ای با تغییر در مقدار مختصه شعاعی r تغییر می‌کند. (ب) فاصله ویژه‌زمان DT تقسیم بر فاصله زمان مختصه‌ای Dt متناظر با آن که به صورت تابعی از r رسم شده است.

که در آن Dt اختلاف زمان مختصه‌ای: $Dt \equiv t_1 - t_0$ [شکل ۳-۶ (الف)] است. بدین ترتیب DT همیشه کوچکتر از Dt است (به ازای $r > R_s > 2m$)، و به تدریج که r از R_s بزرگتر می‌شود، این اختلاف کاهش می‌یابد [شکل ۳-۶ (ب)].

رفتار مجانبی

در فاصله‌های بسیار دور از جسم، هنگامی که r بسیار بزرگ می‌شود، ضریب $(2m/r)$ قابل چشمپوشی و ds^2 با متریک فضا-زمان تخت در مختصات قطبی کروی منطبق می‌شود. بنابراین این جواب نماینده فضا-زمانی است که به طور مجانبی تخت است، و متناظر با وضعیت فیزیکی در فواصلی است که به اندازه کافی از زمین یا خورشید دورند و میدان گرانشی آنها قابل چشمپوشی است. برای بررسی بیشتر این مطلب می‌توان از تقریب $1 + 2m/r \simeq (1 - 2m/r)^{-1}$ که در

آن $1 \ll |2m/r|$ ، برای به دست آوردن فرم متریک تقریبی زیر استفاده کرد

$$ds^2 = -(1 - 2m/r)dt^2 + (1 + 2m/r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (۱۶-الف)$$

که در فاصله‌های دور از ستاره معتبر است. در واقع برای ستاره‌ها و سیاره‌های معمولی این فرم همه جا خارج از سطح آنها تقریب خوبی است، زیرا شرط $r > R_s$ مستلزم آن است که $m/r < m/R_s$ و در مورد زمین و خورشید داریم

$$\begin{aligned} \text{زمین} \quad m/R_s = 69 \times 10^{-10}, \quad R_s = 64 \times 10^8 \text{ cm}, \quad \text{جرم} = 0.44 \text{ cm} \\ \text{خورشید} \quad m/R_s = 21 \times 10^{-6}, \quad R_s = 7 \times 10^{10} \text{ cm}, \quad \text{جرم} = 15 \times 10^5 \text{ cm} \end{aligned}$$

بنابراین، حتی در نزدیکی‌های سطح زمین، $m/r < 69 \times 10^{-10}$ ، در مورد خورشید، $m/r < 21 \times 10^{-6}$ از این رو، در هر دو مورد ۱۶-الف تقریب خوبی برای ۱۶-ع خواهد بود. در این صورت ۲-ع نیز با تقریب خوب برابر $D = \int (1 + m/r) dr$ است که از آن نتیجه می‌شود

$$D = r_2 - r_1 + m \log_e(r_2/r_1) \quad (۲۶-الف)$$

و (۳-ع) با تقریب خوب برابر است با

$$DT = (1 - m/r)Dt \quad (۳۶-الف)$$

روشن است که هر قدر r بزرگتر باشد، ۱۶-الف تقریب بهتری برای متریک فضازمان ۴-۲۹ است، در حالی که ۲۶-الف و ۳۶-الف تقریب‌هایی برای نتیجه‌های فضای تخت $D = r_2 - r_1$ و $DT = Dt$ هستند.

تکینگی

روشن است که اگر مقدار r به $2m$ نزدیک شود مسائلی در متریک پیش خواهد آمد، زیرا در آن صورت DT به سمت صفر می‌رود، ضریب dt^2 در ۱۶-ع به سمت صفر می‌رود، و ضریب dr^2 واگرا می‌شود. ما نباید در این بخش، که فرض بر این است که $r > R_s > 2m$ نگران این مسائل باشیم (و در واقع هم، همان‌طور که دیدیم، در شرایط اختریفی یکی معمولی در منظومه شمسی، $R_s \gg 2m$). گرچه در بخش بعد هنگام بررسی رمبش گرانشی، باید "تکینگی" در فرم متریک را وقتی r به $2m$ نزدیک می‌شود، بررسی کنیم.

انتقالهای به سرخ

یکی از پیامدهای ۳-۶ این است که در این فضا زمانها انتقالهای به سرخ گرانشی مشاهده می شود (همانند عالم ریندلر). ببینیم چرا این طور است.

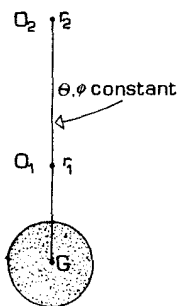
دو ناظر ایستا را در نظر می گیریم که به طور شعاعی نسبت به یکدیگر قرار دارند، یعنی مقادیر θ و ϕ برای آنها یکی است اما مقادیر r آنها متفاوت و برابر r_1 و r_2 است (شکل ۴-۶). پرتو نوری که به طور شعاعی و به طرف خارج از r_1 به r_2 سفر می کند از شرایط $d\theta = 0$ ، $d\phi = 0$ و $ds^2 = 0$ پیروی می کند (دو شرط اول از شعاعی بودن مسیر نتیجه می شوند، و شرط سوم ناشی از حرکت با سرعت نور است). در این صورت از ۱-۶ نتیجه می شود که در امتداد پرتو نور، جابه جایی dr و dt با $dr/dt = 1 - 2m/r$ به یکدیگر مربوط می شوند. بنابراین اگر نور در زمان t_1 به وسیله O_1 گسیل شود و در زمان t_2 توسط O_2 دریافت شود [شکل ۵-۶ (الف) را ببینید]، به دست می آوریم

$$t_2 - t_1 = r_2 - r_1 + 2m \log_e \left\{ (r_2 - 2m) / (r_1 - 2m) \right\}$$

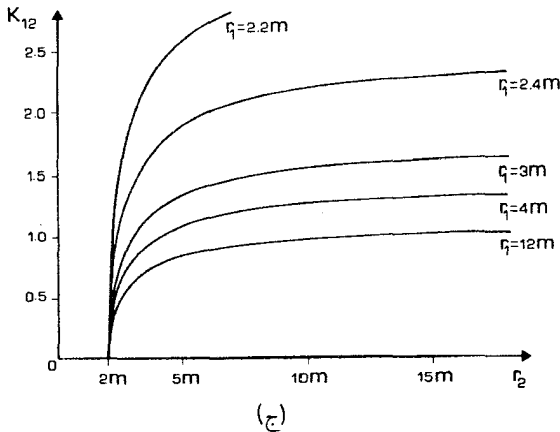
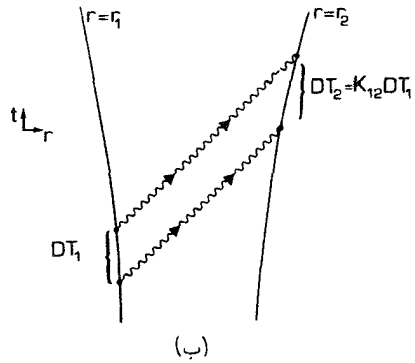
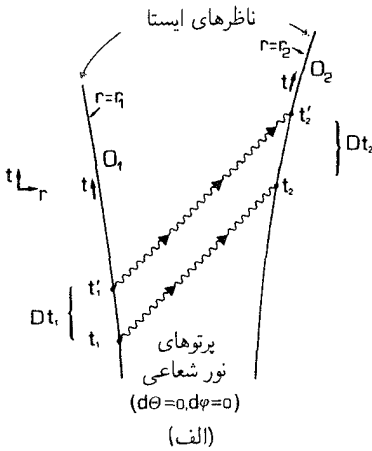
اکنون توجه کنید که سمت راست معادله به طور صریح به t_1 و t_2 بستگی ندارد بلکه به r_1 و r_2 بستگی دارد. بدین ترتیب اگر علامت دومی را O_1 در زمان t'_1 ارسال و O_2 در زمان t'_2 دریافت کند [شکل ۵-۶ (الف) را ببینید]، در این صورت باز هم

$$t'_2 - t'_1 = r_2 - r_1 + 2m \log_e \left\{ (r_2 - 2m) / (r_1 - 2m) \right\}$$

اگر این دو را از یکدیگر کم کنیم، می بینیم که اختلاف زمانی $Dt_2 \equiv t'_2 - t_2$ بین این تپها از نظر دریافت کننده و اختلاف زمانی $Dt_1 \equiv t'_1 - t_1$ از نظر ارسال کننده با رابطه $Dt_1 = Dt_2$ به یکدیگر مربوط می شوند، یعنی آنها یکی هستند!



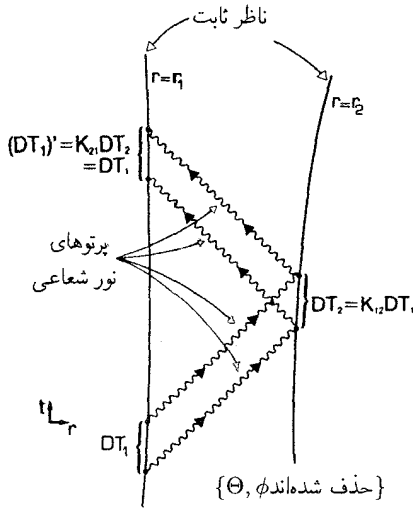
شکل ۴-۶ دو ناظر ایستای O_1 و O_2 که بر روی یک خط شعاعی واحد (θ و ϕ ثابت)، اما در مقادیر مختلف r یعنی r_1 و r_2 قرار دارند.



شکل ۵-۶ الف) علائم نوری شعاعی در t_1 و t_1' (در فاصله مختصه‌ای Dt_1) توسط O_1 گسیل و در t_2 و t_2' (در فاصله مختصه‌ای Dt_2) توسط O_2 دریافت می‌شوند. ب) طبق تعریف انتقال به سرخ گرانشی نسبت بین بازه‌های ویژه‌زمان Dt_2 و Dt_1 است. ج) انتقال به سرخ گرانشی $K_{12} = 1 + z$ که برحسب r_2 و به‌ازای مقادیر مختلف r_1 رسم شده است.

در این آزمایش می‌توان، به‌صورتی روشن، ضریب K را تعریف کرد، درست همان‌طور که برای فضا‌زمان تخت تعریف کردیم. آیا نتیجه‌ای که هم اکنون ثابت کردیم به معنای $K = 1$ است؟ خیر! — زیرا نشان داده‌ایم که زمانهای مختصه‌ای یکی هستند نه ویژه‌زمانها. برای تعیین نسبت ویژه‌زمانها باید از معادله ۳-۶ استفاده کنیم. می‌بینیم که

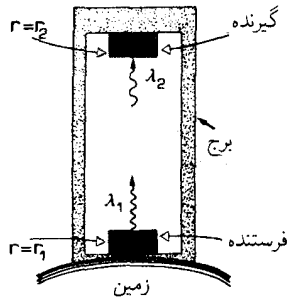
$$K_{12} \equiv Dt_2/Dt_1 = (1 - 2m/r_2)^{1/2} / (1 - 2m/r_1)^{1/2} \quad (4-6)$$



شکل ۶-۶ ماهیت دوجانبه انتقال به سرخ گرانشی. بازه ویژه زمان DT_1 بین پرتوهای نور شعاعی در $r = r_1$ یک بازه ویژه زمان $DT_2 = K_{12} DT_1$ در $r = r_2$ تولید می‌کند. بازتابش این علامتها بازه ویژه زمان $DT_1' = K_{21} DT_2 = K_{21} K_{12} DT_1 = DT_1$ در $r = r_1$ تولید می‌کند.

این رابطه انتقال به سرخ گرانشی است که در این فضا زمانها [شکل ۵-۶ (ب)] مشاهده می‌شود. نوری را که به طور شعاعی به طرف خارج می‌رود می‌توان در حال "بالا رفتن" از یک چاه پتانسیل در نظر گرفت که در این کار تعدادی از انرژی خود را از دست می‌دهد و بنابراین هنگام دریافت سرخ‌تر از هنگام گسیل است. K نیز دقیقاً مانند فضا زمان تخت اندازه گرفته می‌شود (بخش ۳-۱ را ببینید). در اینجا هم K ، مانند مورد فضا زمان تخت، نسبت مشاهده شده بین زمان تمام رویدادهاست که در محل شیء و در محل ناظر اندازه گرفته می‌شوند؛ ارجاع به آن به عنوان اثر انتقال به سرخ نشانه‌گذاری آن با یکی از سراسرترین راههای اندازه‌گیری آن است [شکل ۵-۶ (ج)].

K_{12} ، مانند مورد فضای تخت، مستقل از t_1 و DT_1 است. این اساساً بدان سبب است که در هر دو مورد فضا زمانها ایستا هستند (یعنی در اثر گذشت زمان تغییر نمی‌کنند). هر چند، در این مورد، برخلاف مورد انتقالهای دوپلر برای ناظرهای لخت در فضا زمان تخت، این اثر دوجانبه نیست. در واقع، اکنون به روشنی داریم $K_{12} = 1/K_{21}$ ؛ یعنی اینکه، نوری که از r_2 به r_1 به طرف داخل می‌رود از میدان گرانشی انرژی می‌گیرد و از این رو به آبی منتقل می‌شود نه به سرخ. این یک پیامد دیگر نیز دارد و آن اینکه، برخلاف وضعیت ناظرهای لخت در فضا زمان تخت، اندازه‌گیری فاصله‌ها با رادار نشان خواهد داد که ضریب K برابر ۱ است (ضریب K_{12} در سفر به طرف خارج با ضریب K_{21} در سفر به طرف داخل جبران خواهد شد، و در نتیجه روی هم رفته تغییری در طول موج مشاهده نمی‌شود؛ شکل ۶-۶). این تفاوتها با مورد عالم مینکوفسکی بدین سبب بروز



شکل ۷-۶. آزمون انتقال به سرخ گرانشی با استفاده از نوری که از پای برج هاروارد در نقطه $r = r_1$ گسیل و در نزدیکی رأس برج در نقطه $r = r_2$ جذب می‌شود.

می‌کنند که انتقال به سرخ مشاهده شده ناشی از ناهمگنی فضا زمان است و نه انتقال دوپلر در یک فضا زمان همگن؛ ضریب K اکنون ناشی از میدان گرانشی ستاره است (که ضریب $1 - 2m/r$ در فرم متریک نماینده آن است). این وضعیت بسیار شبیه به وضعیت ناظرهای شتابدار ایستا در عالم ریندلر است (بخش ۴-۳)، و این تعجب‌آور نیست: براساس اصل هم‌ارزی چنین انتظاری را داریم. در مورد میدان ضعیف ($m/r \ll 1$)، رابطه ۴-۶ به صورت

$$K_{12} = 1 + m/r_1 - m/r_2 \quad (4-6 \text{ الف})$$

درمی‌آید. این مطلب، برای مثال، در مورد انتقال به سرخ گرانشی ناشی از زمین یا خورشید در منظومه شمسی معتبر است.

طبق این نتایج، نوری را که ستاره‌های چگال (مثلاً کوتوله‌های سفید) گسیل می‌کنند هنگام دریافت در زمین از خود انتقال به سرخ گرانشی نشان می‌دهند. این مطلب با مشاهده تأیید شده است. باز هم اگر بتوان طول‌موجهایی را که دقیقاً گسیل شده‌اند را با حساسیت کافی اندازه‌گیری کرد، می‌توان این اثر را برای نوری که به طور شعاعی به طرف خارج از زمین حرکت می‌کند (یعنی از سطح زمین به طور عمودی به طرف بالا می‌رود) مشاهده کرد، و این مطلب نیز (همان‌طور که در بخش ۵-۵ گفته شد) برای نوری که از پای برج هاروارد گسیل و در نزدیکیهای رأس آن دریافت شد با مشاهده تأیید شده است (شکل ۷-۶). بدین ترتیب انتقال به سرخ گرانشی پدیده‌ای است که از نظر تجربی به خوبی تأیید شده است.

ویژگیهای دیگر

فرم متریک ۱-۶ پیامدهای بسیار دیگری نیز دارد. به‌ویژه، می‌توان مدار ذره‌ها را در میدان گرانشی که این فرم نماینده آن، و خم شدن نور در نتیجه این میدان است را به دست آورد، هر چند، روشهایی

که برای به دست آوردن این نتایج مورد استفاده قرار می‌گیرند، به روشهای ریاضی پیشرفته‌تر از آنی که در این کتاب مجاز می‌شماریم نیازمند است.

این موضوع را بیش از این در اینجا دنبال نخواهیم کرد، فقط متذکر می‌شویم که این محاسبه‌ها مبنای آزمونهای کلاسیک نسبیت عام را تشکیل می‌دهند که در آنها مسیر پرتوهای نور (به‌ویژه مشاهده‌های مشهور خم شدن نور توسط خورشید) و حرکت سیارات و سفینه‌های فضایی در منظومه شمسی (به‌ویژه مشاهده حضيض سیاره عطارد) بررسی می‌شوند. اکنون با دنبال کردن سفینه‌های فضایی در منظومه شمسی و اندازه‌گیری راداری فاصله آن تا بازتابنده‌هایی که در سیاره مریخ قرار داده شده‌اند داده‌های بسیار خوبی در دست داریم. هم‌اکنون بهترین شاهد موجود، که با بررسی حرکت نور و اجسام پرجرم در منظومه شمسی به دست آمده، آن است که هندسه فضا-زمان منظومه شمسی در واقع به‌خوبی با فرم متریک شوارتس شیلد ۱-۶ نمایش داده می‌شود.

نتیجه

شواهد خوبی وجود دارند که نشان می‌دهند حل شوارتس شیلد، میدان گرانشی یک جسم پرجرم منزوی، مثلاً یک ستاره کروی، را با دقت توصیف می‌کند، زیرا ظاهراً آن هندسه، فضا-زمان منظومه شمسی را با دقت بسیار زیادی توصیف می‌کند. بدین ترتیب ویژگیهای هندسی که در بالا توصیف شد ویژگیهای موضعی فضا-زمان بسیاری از نواحی عالم را مشخص می‌کند.

تمرینها

۱-۶ یک پرتو نور را در میدان گرانشی جسمی با تقارن کروی در نظر می‌گیریم که با ۱-۶ توصیف شده است. مطلوب است سرعت مختصه‌ای آن (الف) اگر به صورت شعاعی و (ب) اگر به صورت عرضی حرکت کند. آیا وابسته بودن به فاصله اصل ناوردایی سرعت نور اینشتین را نقض می‌کند؟

۲-۶ از آسانسوری که با سرعت ۲۰ متر بر ثانیه در یک کانال عمودی در خارج از یک آسمانخراش حرکت می‌کند علامت نوری گسیل می‌شود. هنگامی که آسانسور در ارتفاع ۱۰۰ متری از زمین قرار دارد ناظری که در پای کانال ایستاده است علامت را ثبت می‌کند. انتقال به سرخ ناشی از (الف) اثر دوپلر، (ب) اثر گرانش را حساب کنید. (شعاع زمین را می‌توان 6000 km در نظر گرفت).

۳-۶ اثر گرانشی زمین بر ماه ناشی از خمیدگی فضا-زمان است که زمین در فاصله ماه ایجاد می‌کند. (الف) فاصله بین سطح زمین تا کره ماه و پیرامون مدار ماه C را حساب کنید؛ با استفاده از آن نسبت $R = C/d$ ، یعنی نسبت C به فاصله مرکز زمین تا ماه، d ، را بیابید؛ (ب) نسبت DT/Dt ، یعنی نسبت ویژه‌زمان به زمان مختصه‌ای در مدار ماه را حساب کنید، (ج) انتقال به سرخ گرانشی از سطح کره زمین تا سطح کره ماه را حساب کنید. [شعاع زمین 6000 km است و فاصله میانگین از مرکز زمین تا مرکز ماه 386000 km است؛ اینها را پس از تعدیل به یکاهای مناسب

به‌عنوان مقادیر مناسب برای مختصهٔ r در ۱-۶ به‌کاربرید. توجه داشته باشید که ما فرم ds^2 در داخل زمین را نمی‌دانیم.]

همین‌طور، اثرهای خمیدگی مدار زمین را که از خورشید ناشی می‌شود حساب کنید. همین اثر ناچیز است که ما را در مدار تقریباً دایره‌ای شکل به‌دور خورشید نگه می‌دارد! [فاصلهٔ بین مرکز خورشید تا زمین را $1.496 \times 10^8 \text{ km}$ بگیرید.]

۴-۶ در مورد خم شدن نور و حرکت تقدیمی حضيض،^۱ و آزمونهای دیگر نسبت عام^۲ مطالعه کنید.

۲-۶ رمبش کروی و تشکیل سیاهچاله

اکنون که فضا زمان اطراف یک جسم کروی منزوی را مطالعه کردیم، می‌توانیم بررسی کنیم که چه اتفاق می‌افتد، هرگاه چنین جسمی، مثلاً یک ستارهٔ پرجرم که تمام سوخت هسته‌ای خود را سوزانده است، در اثر رمبش یک سیاهچاله تشکیل دهد. دو اثر بسیار مهم حاصل تشکیل یک تکینگی در نقطهٔ پایان رمبش، و وقوع حدود علیتی ("افق رویداد") هستند که ارتباط بین یک ناظر خارجی و ستاره رمبنده را محدود می‌کنند و مانع مشاهدهٔ تکینگی توسط یک ناظر خارجی می‌شوند. ویژگیهای عمدهٔ این محدودیتهای علیتی به‌سادگی پیامد، درک ماهیت فضا زمانهای خمیده و مخروطهای صفر آنها هستند.

یکتایی حل و مسئلهٔ تکینگی

یک نتیجهٔ توانمند به‌نام قضیهٔ برکهوف نشان می‌دهد که حل شوارتس شیلد (فرم متریک ۱-۶) میدان گرانشی خارجی هر ستارهٔ دارای تقارن کروی را نه تنها برای موارد ایستا در حالت‌های انبساط، رمبش و یا تپش نیز نمایش می‌دهد. بنابراین این فرم متریک کاربرد بسیار گسترده‌ای دارد.

فرم ۱-۶ در $r = 2m$ به‌روشنی تکیه است: در این نقطه ضریب dt^2 صفر و ضریب dr^2 واگرا می‌شود. در ابتدا می‌توان شک کرد که این امر مستلزم بدرفتاری خود فضا زمان در آن نقطه است. با این وجود، بررسیهای انجام شده نشان می‌دهد که این‌طور نیست: بلکه این مختصه‌ها هستند که بدرفتارند. بنابراین این تکینگی یک تکینگی مختصاتی است نه یک تکینگی فیزیکی (اما، چنانکه بعداً خواهیم دید، دارای اهمیت فیزیکی است).

رمبش یک ستاره: استفاده از مختصهٔ صفر

ستاره‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن چگالی ماده به‌اندازه‌ای زیاد است که نیروهای گرانشی بر سایر نیروها غلبه دارند، ستاره مچاله می‌شود و در نهایت می‌رمبد و یک سیاهچاله تشکیل می‌دهد. در

1. A. Eddington, *Space, Time and Gravitation*, Harper Torchbooks, 1959.

2. C. M. Will, 'Gravitation theory' *Scientific American*, November 1974.

این صورت سطحش کاهش می‌یابد و به‌صفر می‌رسد، از این رو R_s هم کاهش می‌یابد و به‌صفر می‌رسد؛ روشن است که در این صورت یک تکینگی فیزیکی به‌وجود می‌آید (ستاره به حجم صفر رمبیده است). طی رَمبش، هندسه داخلی ستاره را متریک‌هایی دینامیکی توصیف می‌کند که در اینجا آنها را بررسی نمی‌کنیم. آنچه که مورد نظر ماست حل خارجی ستاره رمبیده است.

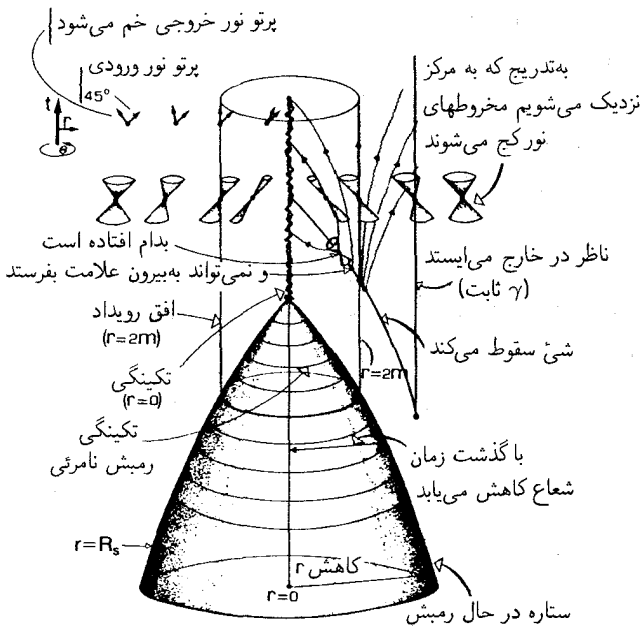
طی رَمبش، سطح ستاره بالاخره به مقدار بحرانی $R_s = 2m$ می‌رسد و از آن کمتر می‌شود. از این رو، برای اینکه حل خارجی را در تمام زمانها نشان دهیم، به یک دستگاه مختصات جدید نیاز داریم که رویه $r = 2m$ را به‌طور منظم بدون تکینگی در برگیرد. انواع مختلف چنین مختصاتی را می‌توان یافت.^۱ یکی از آنها، مختصات ادینگتون-فینکلشتاین است که به‌ویژه برای بررسی رَمبش گرانشی مناسب است. ما جزئیات پیچیده تغییرات مختصات را دنبال نمی‌کنیم، بلکه توجه خود را به فرم متریک حاصل برای فضا زمان خارجی معطوف می‌کنیم، این فرم را می‌توان به‌صورت

$$ds^2 = -(1 - 2m/r)dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (5-6)$$

برای $r > R_s$ نوشت، که در آن مختصه $v \equiv t + r + 2m \log_e \{ (r/2m) - 1 \}$ طوری است که مخروطهای نوری گذشته که مرکز آنها روی ستاره قرار دارد رویه‌های $\{v = \text{const.}\}$ هستند. برای مشاهده آن، یک جابه‌جایی شعاعی $\{\phi = \text{const.}, \theta = \text{const.}, v = \text{const.}\}$ روی این رویه‌ها را در نظر می‌گیریم. چون $dv = 0$ ، $d\theta = 0$ و $d\phi = 0$ ، مؤلفه‌های این جابه‌جایی $(dx^a) = (0, dr, 0, 0)$ هستند؛ از آنجا که در فرم متریک جمله‌ای به‌صورت dr^2 وجود ندارد، 5-6 نشان می‌دهد که فرم متریک ds^2 به‌ازای این جابه‌جایی صفر است، یعنی، این یک پرتو نور است. v را یک مختصه صفر می‌نامیم (کاربرد این مختصات در فضا زمان تخت دوبعدی در تمرین 4-18 بررسی شد؛ شباهت بین 5-6 و فرم متریک $(*)$ که در آنجا برای فضا زمان تخت به‌دست آمد با استفاده از مختصات صفر فوراً ظاهر می‌شود).

اما باید تأکید کنیم که به‌ازای $r > 2m$ ، رابطه 5-6 درست همان حل خارجی شوارتس‌شیلد 1-6 برحسب مختصات جدید است. امتیاز این مختصات خوش‌رفتاری آنها در $r = 2m$ است (هرگاه این شرط برقرار باشد، 5-6 به‌همان بازه فضا زمان تخت برحسب مختصات مضاعف صفر تبدیل می‌شود، و فضا زمان تخت کاملاً منظم است؛ با معادله $(***)$ در تمرین 4-18 مقایسه کنید). همان‌طور که خواهیم دید، $\{r = 2m\}$ یک رویه صفر است که به آن افق رویداد می‌گویند. استفاده از فرم 5-6 این امکان را می‌دهد که جواب را تا $r < 2m$ ادامه دهیم، و بینیم بر سر جسمی که از افق رویداد عبور می‌کند و از خارج $(r > 2m)$ به‌داخل $(r < 2m)$ می‌رود چه می‌آید.

می‌توان فضا زمانی را که 5-6 نماینده آن است به شکلی مناسب رسم کرد که در آن یکی از



شکل ۸-۶ نمودار فضا-زمان رمبش یک ستاره و تشکیل سیاهچاله. محور عمودی نمایندهٔ زمان است، و r و θ مختصات قطبی در صفحه‌های عمود بر محور t (زاویه ϕ حذف شده است) هستند. خطوط v ثابت با جهت قائم زاویه 45° می‌سازند. شعاع ستاره به صفر می‌رسد، در آنجا یک "تکینگی" (با چگالی بینهایت) روی محور تشکیل می‌شود. رویه $r = 2m$ افق رویداد را تشکیل می‌دهد، که رویدادها را در برمی‌گیرد و نمی‌توان از خارج آنها را مشاهده کرد. پرتوهای نور ورودی در روی خطهای v ثابت حرکت می‌کنند، در حالی که جهت پرتوهای نور خروجی به فاصله شعاعی بستگی دارد. به تدریج که r کاهش می‌یابد، مخروطهای نور به طرف مبدأ فضایی کج می‌شوند، و روی رویه $r = 2m$ ("افق رویداد") عمودی هستند.

مولدهای مخروطهای گذشتهٔ صفر (رویه‌های $\{v = \text{const.}\}$) با محور قائم زاویه 45° بسازد، رویه‌های $\{r = \text{const.}\}$ استوانه‌هایی هستند که با خط مرکزی در $r = 0$ موازی‌اند (شکل ۸-۶). یکی از مختصه‌های زاویه‌ای از میان رفته است، اما تقارن گروهی در نمودارهایی که نسبت به تغییرات مختصه θ ناوردا هستند مشهود است. توجه کنید که رویه‌های $\{t = \text{const.}\}$ در این نمودار صفحه‌های افقی نیستند.

این نمودار هم حل داخلی و هم حل خارجی ۵-۶ را نمایش می‌دهد. حل داخلی-یعنی، ستاره‌گروی ربنده- را داخل سطح ستاره ($r = R_s$)، که R_s یک تابع نزولی از زمان است) نمایش می‌دهد. روشن است که شعاع با گذشت زمان کاهش می‌یابد تا اینکه به صفر برسد؛ باقیمانده‌های ستاره در $r = 0$ یک "تکینگی" تشکیل می‌دهند (که بعداً دربارهٔ آن بحث خواهیم کرد). سعی

نکرده‌ایم که جزییات حل داخلی را (که به معادله حالت ماده در ستاره بستگی دارد) نشان دهیم. نکته مهم فقط این است که توجه داشته باشیم که درون ستاره در داخل سطح نشان داده شده قرار دارد.

خارج از سطح ستاره، حل خارجی را داریم که با فرم متریک ۵-۶ نمایش داده می‌شود، که همان حل شوارتس‌شیلد برحسب مختصات جدید است. یک ویژگی آن است که با رفتن از مقادیر بزرگ r به مقادیر کوچک r ، مخروطهای نور، که طبق معمول با معادله $ds^2 = 0$ تعیین می‌گردند، "کج" می‌شوند. اکنون می‌توانیم به اهمیت رویه $\{r = 2m\}$ پی برد. این رویه یک رویه صفر است، یعنی با پرتوهای نور (پرتوهای $r = 2m$ ، $\{\phi = \text{const.}, \theta = \text{const.}\}$) تولید شده است. در تمام نقاط، پرتوهای نور "ورودی" با جهت قائم زاویه 45° می‌سازند. اینها مسیر نوری را که به طور شعاعی در جهت داخل و به طرف مرکز گسیل می‌شود نشان می‌دهند (مثلاً با نشانه رفتن یک چراغ قوه به طرف مرکز ستاره و فشار دادن دکمه "روشن" برای یک لحظه). همین طور، پرتوهای نور "خروجی" مسیر نوری را که از مرکز ستاره به طور شعاعی در جهت خارج گسیل می‌شود نشان می‌دهند (مثلاً با نشانه رفتن یک چراغ قوه در مرکز ستاره به طرف خارج و فشار دادن دکمه "روشن" برای یک لحظه کوتاه). این پرتوها در خارج از رویه $\{r = 2m\}$ به طرف خارج کج می‌شوند؛ و در داخل این رویه، به طرف داخل کج می‌شوند. روی رویه، پرتوها دقیقاً عمودی هستند، یعنی آنها خطوط r ثابت هستند (که پیامد این واقعیت است که ضریب dr^2 در متریک ۵-۶ روی رویه صفر می‌شود). پرتوهای نور در هر نقطه سمت‌گیری مخروط نور را نشان می‌دهند؛ و تمام ویژگیهای علیتی این فضا زمان از رفتار مخروطهای نور موضعی نتیجه می‌شوند [با شکل ۴-۱۷ (ب) مقایسه کنید].

تمرینها

۵-۶ پرتوهای نور شعاعی را در متریک ۵-۶ در نظر می‌گیریم. ثابت کنید که جابه‌جایی مختصات dv و dr در امتداد پرتوهای نور از طریق

$$\{2dr - (1 - 2m/r)dv\}dv = 0$$

به یکدیگر مربوط می‌شوند. از آنجا نشان دهید که پرتوهای نور ورودی با $dv = 0$ و پرتوهای نور خروجی با $dr = 1/2(1 - 2m/r)dv$ داده می‌شوند؛ و بنابراین تأیید کنید که مخروطهای نور موضعی در شکل ۸-۶ (که در آن خطهای $\{v = \text{const.}\}$ با جهت قائم زاویه 45° می‌سازند، در حالی که خطهای $\{r = \text{const.}\}$ عمودی هستند) نشان داده شده‌اند.

۶-۶ نشان دهید که تبدیل از مختصه t به مختصه v در $r = 2m$ خوشرفتار نیست. [این ویژگی، برای اینکه بتوان تکنیکی ظاهری در ۱-۶ را حذف کرد تا فرم ۵-۶ که در $r = 2m$ منظم است به دست آید، ضروری است].

افق رویداد

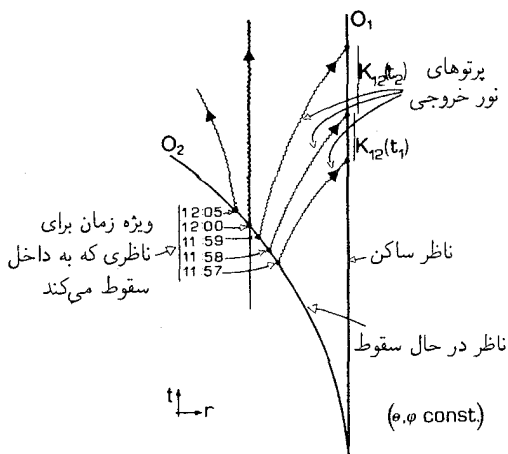
مهمترین ویژگی نشان داده شده در شکل ۶-۸ آن است که افق رویداد (رویۀ $r = 2m$) یک "رویۀ به دام اندازی" یکطرفه است، که می‌گذارد تابش و ماده به ناحیۀ داخلی ($r < 2m$) بیفتند اما نمی‌گذارد هیچ ماده یا تابشی از آن فرار کند.^۱ مشخصاً، در این شعاع بحرانی ($r = 2m$) یعنی شعاع شوارتس شیلد) پرتو نور خروجی می‌کوشد که از ستاره خارج شود اما میدان گرانشی ستاره، که دقیقاً آنقدر قوی است که بتواند پرتو را در آن فاصله از ستاره نگه دارد، مانع از این کار می‌شود. نوری که درست در خارج افق رویداد گسیل شده باشد می‌تواند (با تعقیب پرتوهای صفر خروجی) فرار کند و به بینهایت برود. نوری که درست در داخل گسیل شود نمی‌تواند فرار کند؛ پرتوهای نور خروجی شعاعی در اثر میدان گرانشی به عقب کشیده می‌شوند و در $r = 0$ به داخل تکینگی می‌افتند. روشن است هیچ شیء پرجرمی که در داخل افق رویداد قرار دارد نمی‌تواند فرار کند، چون نمی‌تواند سرعت بیشتر از سرعت نور داشته باشد. بدین ترتیب تاریخهای آیندۀ ممکن این شیء با پرتوهای ورودی و خروجی، که نمایندۀ حرکت شعاعی به سوی داخل و خارج با سرعت نور هستند، محدود می‌شود؛ از این رو بدون توجه به راههای شتابگیری، سرنوشت هر ناظر و یا جسمی که از افق به ناحیۀ داخل عبور کند الزاماً افتادن به داخل تکینگی در $r = 0$ است. اسم "سیاهچاله" به این علت است؛ هیچ نوع تابش و یا علامتی نمی‌تواند از داخل به خارج برسد. این برای ناظر خارجی یک ناحیۀ ناشناخته است، که ابداً با هیچ نوع روش مشاهده‌ای نمی‌تواند ببیند که در داخل چه اتفاق می‌افتد.

به دام‌اندازی گرانشی نور و ماده برای شعاعهای بسیار کوچک اتفاق می‌افتد. مثلاً، در مورد جسمی با جرم خورشید، m برحسب یکاهای مناسب 1.5 km است و از این رو شعاع شوارتس شیلد 3 km است. بدین ترتیب خورشید را (که شعاع آن 696000 km است) باید آن قدر متراکم کنیم تا شعاع آن کمتر از 3 km شود تا خمیدگی فضا زمان به اندازه کافی برای تولید اثر به دام‌اندازی بزرگ باشد. همین طور، باید زمین را تا شعاع تقریباً 9 cm متراکم کنید تا در داخل افق رویداد خود قرار گیرد.

مشاهده رمبش از خارج

رمبش را از دیدگاه یک ناظر خارجی بررسی می‌کنیم (شکل ۶-۹ را ببینید). ناظر O_1 که در خارج افق رویداد قرار دارد می‌بیند که ستاره منقبض می‌شود و شعاع آن به $r = 2m$ نزدیک می‌شود اما هرگز به آن نمی‌رسد؛ روشن است که اگر سطح ستاره در $r = 2m$ و یا $r < 2m$ قرار داشته باشد هیچ پرتو نوری نمی‌تواند به ناظر برسد. بدین ترتیب رمبش نهایی در پس افق رویداد پنهان

۱. این وضعیت را در اینجا به طور کلاسیکی بررسی می‌کنیم. هرگاه اثرهای کوانتومی حائز اهمیت شوند، وضعیت فرق خواهد کرد که در آخر این فصل اجمالاً بدان اشاره خواهد شد.



شکل ۹-۶ ناظر O_2 هر دقیقه علامت نوری شعاعی گسیل می‌کند؛ ناظر ساکن O_1 این علامت را هر بار به فاصله طولانیتری دریافت می‌کند، به نظر ناظر خارجی O_1 دقیقه آخری که ناظر O_2 به داخل می‌رود تا از افق رویداد عبور کند تا ابد طول می‌کشد. بدین ترتیب O_1 در تصاویر O_2 انتقال به سرخ مشاهده می‌کند که مدام افزایش می‌یابد؛ در نتیجه O_2 به تدریج از نظر محو می‌شود.

است. ناظر O_2 که به طرف داخل ستاره حرکت می‌کند و به آن طرف افق رویداد می‌افتد تمامی رمبش را واقعاً خواهد دید، اما خود او هم ناگزیر زمان کوتاهی پس از آن به داخل تکینگی کشیده خواهد شد، و راهی هم برای او وجود ندارد که علامتی برای ناظر خارجی O_1 بفرستد و آنچه را که می‌بیند گزارش دهد. همین‌طور، به محض اینکه O_2 از افق عبور کند O_1 دیگر نمی‌تواند ببیند که چه بر سر او می‌آید.

فرض کنید O_2 طبق اندازه‌گیری ساعتش در ساعت $12:00$ از افق عبور کند. نوری که او در ساعت $12:00$ گسیل کرده است هرگز به O_1 نخواهد رسید، زیرا در فاصله $r = 2m$ باقی می‌ماند. قبل از این وقت، در هر زمانی که O_2 نوری گسیل کند به O_1 خواهد رسید. برای توضیح بیشتر علامتی که او در $11:57$ ، $11:58$ و $11:59$ فرستاده در شکل ۹-۶ نشان داده شده است.

روشن است که اگر O_1 و O_2 در یک فاصله شعاعی باشند، یک ضریب K وجود دارد که صرفاً با اثر انتقال به سرخ دوپلر تعیین می‌شود. گرچه، همان‌طور که در بخش قبل گفته شد به تدریج که O_2 از O_1 دور می‌شود، یک انتقال به سرخ گرانشی در ضریب K سهمیم خواهد شد. ویژگی تعیین‌کننده آن است که نوری که در فاصله یک دقیقه‌ای از $11:59$ تا $12:00$ گسیل می‌شود بینهایت زمان می‌برد تا توسط O_1 دریافت شود (علامت دوم هرگز نمی‌رسد). نوری که در فاصله $11:57$ تا $11:58$ و $11:58$ تا $11:59$ گسیل شده است باید از چاههای پتانسیل گرانشی

بالا رود که هر بار عمیقتر می‌شود، از این رو انتقال به سرخ مشاهده شده (و در نتیجه ضریب K) هر بار بزرگتر می‌شود. در حدی که O_2 از افق عبور کند، ضریب K بینهایت بزرگ می‌شود (اتساع زمان مشاهده شده بدون حد افزایش می‌یابد، معادله ۶-۴ را ببینید). بدین ترتیب می‌توان افق رویداد را با عنوان رویه انتقال به سرخ بینهایت مشخص کرد. جهان ریندلر که در بخش ۳-۴ مورد بحث قرار گرفت دقیقاً مدلی برای این وضعیت است.

از این بحث، روشن می‌شود که انتقال به سرخ مشاهده شده سطح ستاره نیز، با نزدیک شدن این سطح به افق به‌طور مداوم افزایش می‌یابد. با افزایش انتقال به سرخ شدت مشاهده شده نور دریافتی از آن ستاره کاهش خواهد یافت، از این رو (از خارج) مشاهده می‌شود که با نزدیک شدن آن به افق ستاره کم کم محو می‌شود و ناظر خارجی انتقال به سرخی را مشاهده می‌کند که هر دم بزرگتر می‌شود. در اینجا باید توجه داشت که سرعت عبور ناظر O_2 و سطح ستاره از افق رویداد کاملاً متناهی است (و در واقع از c کوچکتر است)؛ انتقال به سرخ نامتناهی مشاهده شده یک انتقال به سرخ گرانشی در فضا زمان ایستا، یعنی حل خارجی شوارتس‌شیلد است (توجه داشته باشید که حتی از نظر خانواده ناظرهای ایستا در فضا زمان انتقال به سرخ بینهایت خواهد شد). در حالی که ضرایب K برای علائم ورودی و خروجی در خارج از $r = 2m$ دو جانبه‌اند، اما نمی‌توان دو جانبه‌گی آنها را در $r < 2m$ بررسی کرد، زیرا O_1 نمی‌تواند علائم خروجی را از آنجا دریافت کند. O_2 علائم ورودی را با انتقال به آبی فزاینده دریافت می‌کند اما علائم خروجی اصلاً دریافت نمی‌شوند. بدین ترتیب از هنگام عبور سطح ستاره از افق رویداد تا انهدام نهایی آن در تکینگی مرکزی، ناظر خارجی نمی‌تواند شاهد آن باشد.

تکینگی مرکزی

سرنوشت ماده‌ای که در ستاره است و آن ناظر و یا هر شیء دیگری که به درون تکینگی مرکزی در $r = 0$ سقوط می‌کند چیست؟ این یک تکینگی فیزیکی حقیقی است که در آن میدان گرانشی بیکران است. از این رو نیروهای کشندی وابسته که با نزدیک شدن ذرات به مرکز (که در آن خمیدگی فضا زمان واگرا می‌شود) افزایش بیشتری می‌یابند آنها را تکه تکه خواهد کرد. فضا زمان خود در آنجا فرو می‌پاشد؛ مدل ما از فضا و زمان را نمی‌توان بیش از آن ادامه داد. بدین ترتیب نظریه مورد استناد ما (نسبیت عام) پایان فضا زمان را در تکینگی پیش‌بینی می‌کند. نظریه‌های بنیادی تری که گرانس را با نظریه کوانتومی وحدت می‌بخشد ممکن است پیش‌بینیهای دیگری بکنند، اما نظریه کلاسیک پیش‌بینی می‌کند که نقطه پایانی رمبش گرانشی کروی فروریختن قوانین فعلی فیزیک در تکینگی است، یعنی جایی که فضا زمان خود به پایان تکین می‌رسد. هر چند این تکینگی برای دنیای خارج قابل رؤیت نیست؛ افق رویداد حجاب آن است.^۱

۱. نگاه کنید به:

وجود سیاهچاله

آیا سیاهچاله‌ها واقعاً در عالم وجود دارند؟ طبق باور ما، که بر مبنای نظری استوار است سیاهچاله‌های بسیاری باید در نقطه پایانی زندگی ستاره‌های پرجرمی که نمی‌توان آنها را با هیچ نیروی شناخته شده فیزیکی از رمبش بازداشت به وجود آیند. آشکارسازی سیاهچاله‌ها، درست به علت ماهیتشان تا حدی مشکل است (آشکارسازی جسمی که تابش را جذب می‌کند و چیزی گسیل نمی‌کند آسان نیست!). با این وجود شواهد نسبتاً خوبی مبنی بر مشاهده آثار میدانهای گرانشی آنها را در چند شیء ستاره‌گونه متراکم که پرتو x پراورزی گسیل می‌کنند در دست است. این تابش را ماده‌ای گسیل می‌کند که به سبب شتاب حاصل از میدان گرانشی بسیار قوی یک شیء متراکم گرم شده است؛ از تجزیه و تحلیل تابش نتیجه می‌گیریم که جرم مرکزی باید آنقدر متراکم باشد که احتمالاً در واقع یک سیاهچاله است.^۱ بنابراین شواهد منطقی دال بر وجود چند سیاهچاله با جرم ستاره‌ای در کهکشان ما وجود دارد.

یک مکتب فکری دیگر نیز وجود دارد که معتقد است سیاهچاله‌های بزرگتری در مرکز اشیای شبه‌ستاره‌ای به وجود می‌آیند که جاذبه گرانشی آنها گازهای اطراف را شتاب می‌دهد و گرم می‌کند و بدین وسیله موتوری فراهم می‌آورد که این اشیاء به کمک آن مقادیر عظیمی تابش گسیل می‌کنند. بسیاری از اخترشناسان وجود یک سیاهچاله در مرکز اشیای شبه‌ستاره‌ای را "با صرفه‌ترین" توضیح برای پدیده مشاهده شده می‌دانند. این امکان نیز وجود دارد که سیاهچاله‌های نسبتاً سنگینی در مرکز بسیاری از کهکشانها، و شاید هم کهکشان خودمان به وجود آیند.^۲ این هنوز هم یک مسئله حل نشده است. با وجود این، سیاهچاله‌ها می‌توانند چندین پدیده نجومی را توجیه کنند که درک آنها از هر راه دیگر مشکل است.

اثرهای کوانتومی

اگر نظریه کوانتوم را به حساب آوریم، سیاهچاله‌ها دیگر کاملاً کدر نیستند، زیرا اصل عدم قطعیت مکانیک کوانتومی عدم قطعیت در موضع مخروط نور را مجاز می‌سازد و می‌توان انتظار داشت که تابش نشت کند. در واقع، استیون هاکینگ نشان داده است که در نتیجه اثرهای کوانتومی انتظار می‌رود که سیاهچاله را تابش جسم سیاه که دمای آن به جرم سیاهچاله بستگی دارد گسیل کند.

۱. نگاه کنید به:

K. S, Thorne "The search for black holes" *Scientific American*, Dec 1974.

۲. مثلاً نگاه کنید به:

T. Geballe "The central parsec of the galaxy" *Scientific American*, July 1979.

R. Blandford, M. Begelman and M. Rees Cosmic jets *Scientific American*, May 1982.

J. Burns and R. Price 'Centaurus A' *Scientific American*, November 1983.

هر چند ما این اثرها را بیش از این در اینجا بررسی نخواهیم کرد، زیرا به علت برهم‌کنش نظریه کوانتومی با فضازمانهای خمیده مبحث پیچیده‌ای است که بالاتر از سطح این کتاب است.^۱

چرخش

سرانجام باید متذکر شد که در اینجا تنها سیاهچاله‌های (با تقارن کروی) غیر دوار در نظر گرفته شده‌اند. در جهان واقعی انتظار داریم که آنها بچرخند؛ در این صورت ویژگیهای هندسی پیچیده گوناگونی در کار خواهد بود.^۲ مسئله‌ای که مطرح می‌شود این است که آیا، وقتی چرخش به حساب آورده شود، هر رمبش ستاره پرچرم به سیاهچاله می‌انجامد (یعنی آیا یک افق رویداد الزاماً پدید می‌آید) یا نه؟ شوق دیگر، خلق یک "تکینگی برهنه" قابل رؤیت برای دنیای خارج است. طبق دیدگاه اکثریت چنین چیزی روی نمی‌دهد، اما این مسئله هنوز کاملاً حل نشده است.^۳

تمرینها

۷-۶ یک ژئودزیک شعاعی $x^i(v)$ در حل شوارتس شیلد، که در آن v یک پارامتر آفین است با سه ویژگی مشخص می‌شود: (الف) $\phi = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ ، (ب) $\sum_{ij} g_{ij} (dx^i/dv)(dx^j/dv) \equiv \varepsilon$ در امتداد ژئودزیک ثابت است (اندازه بردار مماس $X^i \equiv dx^i/dv$ در امتداد یک ژئودزیک ثابت است زیرا به طور موازی منتشر می‌شود)، (ج) $dt/dv = E/(1 - 2m/r)$ که در آن $E (\neq 0)$ ثابت است (این پایستگی انرژی برای ذره نسبت به چارچوب ایستاست).

(۱) اگر $x^i(v)$ صفر باشد مقدار ε چقدر است؟ اگر $x^i(v)$ زمان‌گونه باشد علامت آن چیست؟

(۲) نشان دهید که (الف) و (ج) منجر به معادله زیر می‌شود

$$(dr/dv)^2 - E^2 = \varepsilon(1 - 2m/r) \quad (*)$$

۱. مثلاً برای بحث در این مورد نگاه کنید به

S. W. Hawking "The quantum mechanics of black holes" *Scientific American*, January 1977.

۲. مثلاً نگاه کنید به:

Royer Penrose "Black holes" *Scientific American*, May 1972.

۳. مثلاً نگاه کنید به:

P. Davies *The Edge of Infinity* Dent and Sons 1981; T. Rothman et al *Frontiers of Modern Physics* Chapter 2, Dover 1985.

که جابه‌جایی dr را به نمو پارامتر آفین dv مربوط می‌سازد؛ با استفاده از (ج) رابطه زیر را

$$dr/dt = \pm \{1 + (\varepsilon/E^2)(1 - 2m/r)\}^{1/2} (1 - 2m/r) \quad (**)$$

بین جابه‌جاییهای dr و dt به دست آورید.

۸-۶ نوعی کهکشانی با شعاع 10^{22} cm و جرم 10^{17} cm در نظر بگیرید، و فرض کنید که این کهکشان در اثر گرانش می‌رمبد؛ در چه شعاعی از نظر بقیه عالم نامرئی می‌شود؟
 ۹-۶ در یک نمودار جرم بر حسب شعاع (با استفاده از مقیاس لگاریتمی)، نقاطی را رسم کنید که زمین، خورشید، کهکشان‌های ترین ۸-۶ و هر تعداد از اشیای نجومی دیگر را نمایش دهد. خط $r = 2m$ را نیز رسم کنید. به کمک این نمودار نشان دهید که هیچ سیاره، ستاره، خوشه ستاره، یا کهکشانی شرط $R_s > 2m$ را نقض نمی‌کند.
 ۱۰-۶ شواهد مبنی بر وجود سیاهچاله‌ها (الف) به شکل باقیمانده‌های رمبش ستاره‌های پر جرم و (ب) در مرکز کهکشان خودمان را مطالعه کنید.^۱

تمرین کامپیوتری ۱۵

۱. (الف) با استفاده از معادله (**), در تمرین ۷-۶، زیرروال با نام GEODESIC برای تعیین یک تقریب عددی برای منحنی ژئودزیک $R(T)$ بنویسید که از نقطه (T_1, R_1) شروع شود، و ثابت ε/E^2 را با EPS نشان دهد [یک نمو زمان DT انتخاب کنید و سپس به ازای $J = 1, 2, \dots$ مکرراً نمو متناظر $DR(J)$ را حساب کنید و از آنجا نقطه بعدی $T(J), R(J)$ را روی منحنی پیدا کنید، اگر مقادیر اولیه $T_1 = T_1$ و $R_1 = R_1$ باشند]. (ب) برای T_1 و $R_1 > 2M$ و $DR(J) = 0$ تقریب عددی پیشنهاد شده دیگر معتبر نخواهد بود) مقادیری انتخاب کنید. با استفاده از زیرروال GEODESIC ژئودزیک γ را که نتیجه می‌شود پیدا کنید، و نشان دهید که به ازای زمانهای مختصه‌ای به دلخواه بزرگ این منحنی هرگز از $R = 2M$ عبور نمی‌کند. (ج) اکنون با استفاده از برنامه PROPER تمرین کامپیوتری ۱۴ نشان دهید که در امتداد این ژئودزیک ویژه زمان قبل از رسیدن به $R = 2M$ متناهی است.

۲. اگر می‌توانید، ژئودزیکهای صفر خروجی شعاعی از γ به ناظری که در فاصله شعاعی $R = R_1$ ساکن می‌ماند را [با استفاده از روشهای مشابه روشهای قسمت ۱] حساب کنید، این ژئودزیکها از γ در زمانهای $T(J)$ شروع می‌شوند. با استفاده از برنامه PROPER تمرین

۱. مثلاً نگاه کنید به مقالات *Scientific American*، صفحات ۲۸۰، ۲۸۱، و ۲۸۲

The Cambridge Encyclopaedia of Astronomy, ed. S. Mitton Cambridge University Press, 1979; N. Henbest and M. Marten *The New Astronomy* Cambridge University Press, 1983.

کامپیوتری ۱۴، فاصله‌های ویژه‌زمانهای متناظر DTAU-OBS و DTAU-EMIT بین پرتوهای نور را که با γ و O اندازه گرفته می‌شوند تعیین کنید. از آنجا انتقال به سرخ نورگسیل شده توسط γ را طبق اندازه‌گیری O صریحاً حساب کنید. نشان دهید چگونه، وقتی که γ به $r = 2m$ نزدیک می‌شود، انتقال به سرخ واگرا می‌شود.



مدلهای ساده کیهانشناسی

در این آخرین فصل اصلی، نگاهی به مدلهای فضا زمان خمیده هندسه بزرگ مقیاس عالم خواهیم انداخت. این مدلها مشاهده‌های ما را در مورد انتقال به سرخ منظم کهکشانهای دور برحسب انبساط عالم توضیح می‌دهد که از یک حالت گرم اولیه به دنبال یک تکینگی فضا زمان (مهبانگ) ایجاد شده است، که مبدأ عالم و در واقع مبدأ خود فضا زمان است.

قبلاً در فصل ۴ یک مدل عالم در حال انبساط (عالم میلن) را بررسی کردیم؛ هر چند آن مدل مدلی برای عالم فضا-تخت بود و اثرهای گرانی را به حساب نمی‌آورد. در این فصل ما از همان مفهوم استفاده می‌کنیم که یک مدل عالم فضا زمانی است که در آن مجموعه‌ای از جهانخطهای مرجع تعریف شده‌اند (“جهانخطهای اصلی“)، که حرکت میانگین ماده در آن عالم را نمایش می‌دهند. (با بخش ۳-۴ مقایسه کنید). اما، اکنون نگاهی به پیامدهای استفاده از معادله‌های میدان اینشتین برای تعیین خمیدگی فضا زمان می‌اندازیم. شاید، مانند مورد سیاهچاله‌ها، شگفت‌ترین ویژگی حاصل، پیدایش حدود علیتی در فضا زمان باشد که به ایجاد “افقهای ذره” می‌انجامد. خواص این افقهای ذره را به تفصیل بررسی خواهیم کرد؛ اگر ماهیت فضا زمانهای خمیده و ویژگیهای مخروطهای نور در این فضا زمانها را به خوبی درک کنیم، می‌توانیم افقهای ذره را بفهمیم.

۱-۷ هندسه فضا زمان

ساده‌ترین مدل‌های کیهانشناسی با فرض اینکه ویژگی‌های بزرگ مقیاس عالم از نظر فضایی همگن هستند، یعنی در تمام نقطه‌های فضا یکسان‌اند، و در اطراف ما همسانگرد نیز هستند، یعنی در تمام جهت‌های اطراف ما یکی هستند، به دست می‌آیند. روشن است که این فرضها به طور موضعی حقیقت ندارند، اما ممکن است در مقیاسهای بسیار بزرگ تقریب خوبی باشند، به خصوص وقتی میانگین را روی حجمهایی که اندازه آنها از 600 میلیون سال نوری به بالاست حساب می‌کنیم (که به طور قابل ملاحظه‌ای بزرگتر از ابرخوشه کهکشانهاست). از این فرضها نتیجه می‌شود که عالم باید حول هر نقطه‌ای همسانگرد باشد، یعنی هر ناظری خواص بزرگ مقیاس عالم را در تمام جهت‌های اطراف خود یکسان خواهد دید. به دلایلی تاریخی، ما مدل‌های عالمی را که در آنها این شرط دقیقاً برقرار است مدل‌های عالم فریدمن-لومتر-رابرتسون-واکر^۱ یا FLRW خواهیم خواند.

فرم متریک

در فضازمانهای FLRW، مختصات را می‌توان طوری انتخاب کرد که بازه ناوردا به صورت زیر درآید

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \{ dr^2 + f^2(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \} \quad (1-7)$$

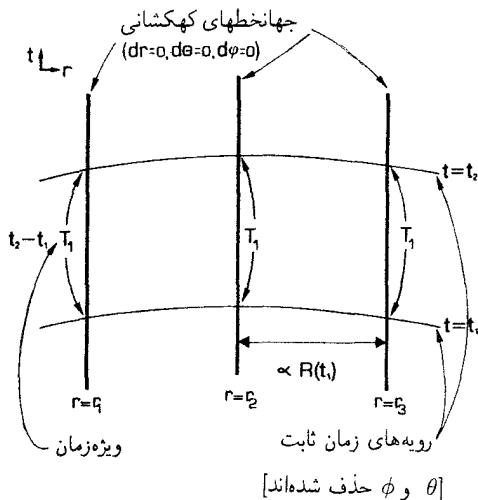
که در آن t یک مختصه زمان، θ و ϕ مختصات زاویه‌ای استاندارد، و r مختصه‌ای است که فاصله شعاعی فضایی را اندازه می‌گیرد و به ماهیت مدل عالم بستگی دارد و $f(r)$ برابر با r ، $\sin r$ یا $\sinh r$ است.^۲ جهانخطهای اصلی، که حرکت میانگین ماده در عالم را نمایش می‌دهند، خمهای $\{r, \theta, \phi\}$ ثابت هستند. مانند بخش ۳-۴ ناظرهایی را که روی این جهانخطها حرکت می‌کنند "ناظرهای اصلی" خواهیم نامید؛ طبق تعریف، این ناظر با سرعت متوسط ماده در عالم حرکت می‌کند، و از این رو مشاهده‌های او عالم را از نظریک ناظر که با سرعت متوسط ماده در عالم حرکت می‌کند نمایش می‌دهد. به دلیل همگنی فضایی، چگالی ماده μ و فشار آن p در عالم فقط تابعی از مختصه زمان t است. بدین ترتیب در این عالم هیچگونه شیب فضایی ناشی از یک کمیت فیزیکی وجود ندارد تا سبب شود که ناظرهای اصلی به طور غیرلخت حرکت کنند؛ و در واقع از فرم متریک ۱-۷ نتیجه می‌شود که آنها در حال سقوط آزاد هستند (یعنی، فقط تحت اثر گرانش و لختی حرکت می‌کنند با بخش ۳-۵ مقایسه کنید).

از فرم متریک ۱-۷ بلافاصله نتیجه می‌شود که مختصه t ویژه‌زمان را در امتداد این خطهای

۱. (فریدمن روسی، لومتر بلژیکی و رابرتسون آمریکایی بودند و واگر انگلیسی است).

Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker

۲. تابع $\sinh r$ سینوس هیپربولیک است که در بحث عالم ریندلر معرفی شد (بخش ۳-۴).



شکل ۱-۷ جهانخطهای $\{r, \theta, \phi\}$ ثابت به کیهکشانها و ناظرها در عالم FLRW. ویژه زمان در امتداد این جهانخطها بین رویه های زمان ثابت همان اختلاف بین زمانهای مختصه ای است.

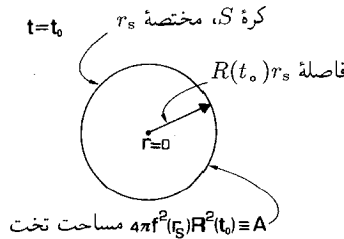
شارش اندازه می گیرد (شکل ۱-۷). گرچه این امر چندان روشن نیست اما ۱-۷ همگنی فضایی را ایجاب می کند، تمام کمیت های فیزیکی و هندسی در رویه های $\{t = \text{const.}\}$ یکنواخت هستند. فرم ۱-۷ این مطلب را برای هر ناظر اصلی نیز ایجاب می کند، این فضا زمانها در اطراف هر نقطه همسانگرد هستند، یعنی تمام جهتها هم ارزند (از این رو مثلاً یک ناظر اصلی نمی تواند به جهت خاصی اشاره کند و بگوید که "مرکز عالم در آن جهت قرار دارد"، زیرا هیچ جهتی بر جهت دیگر ترجیح ندارد). این امر، همانند فصل قبل، برای ناظری که در مبدأ $r = 0$ قرار دارد صادق است زیرا θ و ϕ تنها به صورت متریک دوبکره در ۱-۷ ظاهر می شوند، که تقارن کروی دارد. از همگنی فضایی این مدل عالم، پیداست که این امر در مورد هر ناظر اصلی صادق است.

تمرین ۱-۷

با در نظر گرفتن یک جابه جایی دلخواه $dx^a = (0, dx^1, dx^2, dx^3)$ در رویه $t = t_0$ نشان دهید که این رویه از نظر فضا زمان بر جهانخطهای $\{r, \theta, \phi = \text{const.}\}$ متعامد است (معادله ۵-۶۳ را ببینید). از آنجا نتیجه بگیرید که این جابه جایی برای یک ناظر اساسی لحظه ای است.

مقطعه های فضایی

رویه های $\{t = \text{const.}\}$ برای تمام ناظرهای اصلی به طور موضعی رویه های همزمانی هستند زیرا آنها (از نظر فضا زمانی) بر جهانخطهای ماده متعامدند. در فضا زمان آنها رویه های همگنی



شکل ۲-۷ مختصه r برخلاف مورد حل شوارتس‌شیلد نه فاصله شعاعی است و نه یک مختصه مساحت (فصل ۶) بود. مساحت A برای یک کره با مختصه r_s در $t = t_0$ برابر $4\pi f^2(r_s)R^2(t_0)$ است و فاصله شعاعی آن از مبدأ $R(t_0)r_s$ است.

هستند، یعنی تمام کمیت‌های فیزیکی بر روی آنها ثابت هستند (به‌ویژه $p = p(t)$ ، $\mu = \mu(t)$). بررسی تفصیلی هندسه این رویه‌ها آموزنده است. رویه $t = t_0$ را در نظر بگیرید که فرم متریک آن به‌صورت زیر است

$$ds^2 = R^2(t_0) \{ dr^2 + f^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \} \quad (2-7)$$

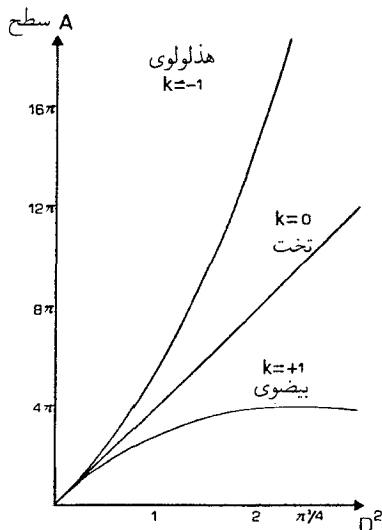
(که از ۱-۷ با قرار دادن $t = t_0$ و $dt = 0$ به‌دست می‌آید).

درست مانند مختصات قطبی کروی در فضا زمان تخت، از این رو در اینجا مرکز مختصات در نقطه (دلخواه) O که در آن $r = 0$ است قرار دارد، که این نقطه با هر نقطه دیگری روی این رویه‌ها هم‌ارز است. اگر از این نقطه در امتداد یک شعاع به‌طرف مقدار مختصه r برابر با r_s برویم (شکل ۲-۷)، به یک دایره S با متریک

$$ds^2 = R^2(t_0) f^2(r_s)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3-7)$$

خواهیم رسید که مساحت آن $A = 4\pi R^2(t_0) f^2(r_s)$ است. طبق ۲-۷ فاصله بین O و این کره برابر با $D = R(t_0)r_s$ است. پیامدهای آن به فرم $f(r)$ مورد استفاده بستگی دارد. فضای تخت. اگر $f(r) = r$ باشد، در این صورت $r_s^2 = 4\pi R^2(t_0) A$ و با رابطه معمولی بین A و D را داریم، یعنی $A = 4\pi D^2$. این دقیقاً همان رابطه‌ای است که در فضای اقلیدسی صادق است، و در واقع این درست مورد فضا-مقطعه تخت است (یعنی حالتی است که خمیدگی رویه‌ها صفر باشد). این فضا-مقطعه تا بینهایت ادامه دارند؛ بدین‌گونه این عالم از نظر فضایی نامتناهی است. بنابراین، برای مثال، این عالم حاوی بینهایت کهکشان خواهد بود (به‌علت همگنی فضایی توزیع کهکشانها).

فضای هذلولوی. اگر $f(r) = \sinh r$ ، $A = 4\pi R^2(t_0) \sinh^2 r_s$ باشد با دور شدن از یک نقطه، مساحت کره S بزرگتر از مساحت همان کره در فضای اقلیدسی می‌شود زیرا $\sinh^2 r > r^2$



شکل ۳-۷ هندسه موضعی فضاهای سه بعدی با زمان ثابت درعالمهای FLRW با مساحت کره‌ای به شعاع D مشخص می‌شود. در اینجا این سطح برحسب D^2 برای فضاهای بیضوی ($k = +1$)، تخت ($k = 0$)، و هذلولوی ($k = -1$) ترسیم شده است (ما $R(t_0) = 1$ را اختیار کرده‌ایم؛ در این صورت $D = r_s$).

(شکل ۳-۷). این مورد متعلق به فضای سه بعدی هذلولوی با خمیدگی منفی ثابت $1/R^2(t_0)$ است، که با رابطه زیر مشخص می‌شود.

$$A = 4\pi R^2(t_0) \sinh^2(D/R(t_0))$$

که نشان می‌دهد چگونه فاصله D مساحت سطح A برای یک دو-کره که مرکز آن هر نقطه در سه فضا است مربوط می‌شود. فضا-مقطعه‌ها باز هم تا بینهایت ادامه دارند؛ این فضا نیز از لحاظ فضایی نامتناهی و حاوی بینهایت کهکشان است.

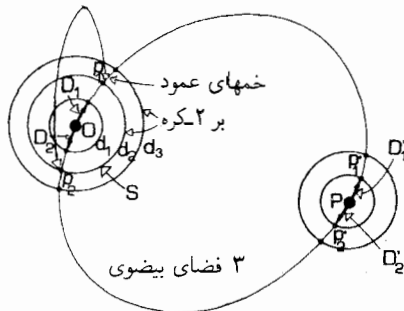
فضای بیضوی. اگر $f(r) = \sin r$ باشد، در این صورت $A = 4\pi R^2(t_0) \sin^2 r_s$ است. اکنون با دور شدن از هر نقطه، مساحت کره S کوچکتر از مساحت همان کره در فضای اقلیدسی می‌شود زیرا $\sin^2 r < r^2$ (شکل ۳-۷). این مورد متعلق به یک سه فضای بیضوی با خمیدگی مثبت ثابت $1/R^2(t_0)$ است، که با رابطه زیر مشخص می‌شود

$$A = 4\pi R^2(t_0) \sin^2(D/R(t_0))$$

که نشان می‌دهد چگونه D به مساحت سطح A یک دو-کره که مرکز آن در هر نقطه از فضای سه بعدی است مربوط می‌شود.

$$k=+1$$

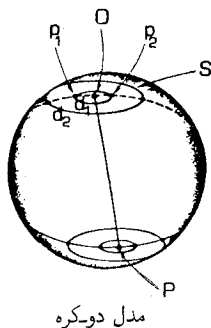
نقطه‌های مقابل در یک ۲-کره



شکل ۷-۴ هندسهٔ کلی یک سه‌فضای بیضوی ($k = +1$). ژئودزیکهایی که از نقطهٔ O در دو جهت مخالف D_1 و D_2 امتداد دارند یک سری از دو-کره‌ها را در نقطه‌های مقابل p_1 و p_2 قطع می‌کنند. چون مساحت دو-کره‌ها بالاخره به صفر می‌رسد، ژئودزیکها بالاخره در نقطهٔ P ، یعنی نقطهٔ مقابل O ، به یکدیگر می‌رسند. آنها در دو جهت مخالف D_1' و D_2' به P نزدیک می‌شوند؛ بنابراین ژئودزیک‌هایی که از O در جهت D_1 شروع و بدون انحراف ادامه می‌یابد از جهت D_1' به P می‌رسد. از P عبور می‌کند، و در جهت D_2' ادامه می‌یابد، و بالاخره از جهت D_2 به O باز می‌گردد.

در این مورد یک ویژگی جدید بروز می‌کند. با افزایش D مساحت A تا یک بیشینه افزایش و سپس کاهش می‌یابد، و سرانجام در نقطهٔ P ، که "نقطهٔ مقابل O " است، به صفر می‌رسد. از آن پس A دوباره افزایش می‌یابد، به یک بیشینه می‌رسد، و دوباره کاهش می‌یابد و به صفر می‌رسد. برای درک مطلب، فرض کنید از نقطهٔ O بر روی یک ژئودزیک در جهت دلخواه D_1 و جهت مخالف آن D_2 حرکت کنیم. در فاصلهٔ d از O دو-کرهٔ S که مرکز آن در O است این خمها را در دو نقطهٔ p_1 و p_2 که نقطه‌های مقابل یکدیگر بر S هستند قطع می‌کنند (شکل ۷-۴). با افزایش فاصلهٔ d مساحت کره S به یک بیشینه می‌رسد و سپس دوباره کاهش می‌یابد. با نزدیک شدن مساحت به صفر ژئودزیکها به نقطهٔ P که در سه‌فضا در مقابل O قرار دارد نزدیک می‌شوند؛ منحنیها درست از دو جهت مخالف D_1' و D_2' به P نزدیک می‌شوند (زیرا آنها هر رویه مانند S را در نقاطی از S قطع می‌کنند که مقابل یکدیگرند). بنابراین وضعیت به‌قرار زیر است: یک ژئودزیک که از O در جهت D_1 امتداد می‌یابد، از تمام نقاطی مانند p_1 عبور می‌کند، و از جهت D_1' به P می‌رسد. P را در جهت D_2' پشت سر می‌گذارد، از تمام نقطه‌های p_2 عبور می‌کند و از جهت D_2 به O بازمی‌گردد (شکل ۷-۴). بنابراین، الزاماً این عالم از نظر فضایی بسته است: اگر از نقطهٔ O در امتداد یک شعاع در هر جهتی حرکت کنیم، از نقطهٔ مقابل نقطهٔ P عبور می‌کنیم و به O بازمی‌گردیم. حداکثر فاصلهٔ هر نقطه در فضا از O نمی‌تواند از فاصلهٔ O تا P زیادتر شود، و حجم کل سه‌فضا متناهی است.

اگر به هندسهٔ یک دو-کره به شعاع a نگاهی بیندازیم، یک مدل دقیق برای این وضعیت به‌دست



شکل ۵-۷ تشابه دوبعدی شکل ۴-۷ ژئودزیکهای که از نقطه O روی دو-کره در دو جهت مخالف امتداد دارند دوباره در P، نقطه مقابل O، با یکدیگر برخورد می‌کنند. در بین راه هر دایره به مرکز O را در نقطه‌های متقابل P_۱ و P_۲ قطع می‌کنند.

می‌آوریم که در آن دقیقاً همین چیزها با یک بعد کمتر اتفاق می‌افتد (شکل ۵-۷). اگر از نقطه‌ای مانند O روی دو-کره شروع کنیم و فاصله d را در امتداد دایره‌های عظیمه‌ای که جهت‌های اولیه آنها در O مخالف یکدیگر است طی کنیم، به نقاط متقابل P_۱ و P_۲ دایره C می‌رسیم که پیرامون آن $2\pi a \sin(d/a)$ است. این دایره‌ها در نقطه P که نقطه مقابل O روی دو-کره است کانونی می‌شوند؛ اگر در امتداد یکی از آنها بدون تغییر جهت به حرکت ادامه دهیم، از جهت مخالف به نقطه O باز خواهیم گشت. این یک مدل دقیق برای هندسه فضاهای سه‌بعدی با خمیدگی ثابت است. نحوه گسترش دایره‌های C از نقطه O و بازکانونی شدن آنها در نقطه مقابل آن P، چگونگی انجام این عمل توسط دو-کره‌های S در فضای کامل سه‌بعدی را به خوبی نشان می‌دهد.

اینکه این مورد دوبعدی مدل خوبی از فضای سه‌بعدی کامل را ارائه می‌کند تصادفی نیست، زیرا مدل دو-کره مورد بحث در واقع مقطعی از فضاهای سه‌بعدی با خمیدگی ثابت است. برای پی بردن به این مطلب، روی دو-کره S با قرار دادن $\theta = \pi/2$ دایره‌ای انتخاب می‌کنیم (به طوری که $d\theta = 0$ و مختصه دایره ϕ است)؛ در این صورت ۲-۷ به صورت زیر درمی‌آید

$$ds^2 = R^2(t_0)(dr^2 + \sin^2 r d\phi^2) \quad (4-7)$$

که فرم متریک یک مقطع دوبعدی از فضای کامل سه‌بعدی است. هر چند، این یک متریک دو-کره است با خواصی که هم اکنون مورد بحث قرار دادیم.

پس می‌بینیم که در مورد بیضوی، فضا-مقطعه‌ها الزاماً متناهی هستند، و در نتیجه این عالم حاوی تعدادی متناهی کهکشان است.

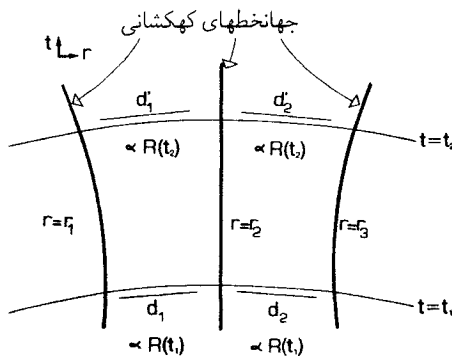
فضاهای سه‌بعدی را که با متریک ds^2 رابطه ۲-۷ داده شده است و هندسه آنها را هم اکنون به تفصیل بررسی کردیم، سه فضاهای با خمیدگی ثابت K می‌گویند. خمیدگی K به زمان t_0 بستگی

دارد؛ می‌توان آن را به صورت $k = k/R^2(t_0)$ نوشت، که در آن $k = +1$ برای فضای بیضوی، $k = 0$ برای فضای تخت، و $k = -1$ برای فضای هذلولوی است (یعنی k برابر با $+1$ ، 0 یا -1 است هرگاه $f(r)$ به ترتیب برابر با $\sin r$ ، r ، یا $\sinh r$ باشد).

تابع مقیاس و تکامل زمان

بحث بالا سبب می‌شود که انتظار داشته باشیم تمام فاصله‌ها روی رویه‌های $\{t = \text{const.}\}$ مثل $R(t)$ ، تمام سطحها مثل $R^2(t)$ ، و تمام حجمها مثل $R^3(t)$ باشد. در واقع هم همین‌طور است؛ مثلاً مقیاس حجم کل عالمهای متناهی ($k = +1$) مثل $R^3(t)$ است. اما ذرات بنیادی این مدلها (که نماینده خوشه‌های کهکشانی در عالم هستند) را می‌توان در مواضع ثابتی روی این رویه‌ها تصور کرد، زیرا مقدار مختصات r ، θ ، و ϕ آنها ثابت است. بدین ترتیب، مقیاس تمام فاصله‌های بین آنها هم مثل $R(t)$ خواهد بود (شکل ۶-۷)؛ این مستقیماً از ۲-۷ نتیجه می‌شود زیرا توجه داریم که این فاصله عبارتی است که فقط به مختصات فضایی بستگی دارد که در $R(t)$ ضرب شده است. به این علت اغلب به تابع $R(t)$ تابع مقیاس مدل عالم گویند.

همان‌طور که نمادی که برای این تابع مورد استفاده قرار گرفته است نشان می‌دهد، با گذشت زمان R تغییر می‌کند. در این مورد، مقیاس فاصله بین تمام ذره‌ها در این عالم $R(t)$ است، که با افزایش R افزایش و با کاهش R کاهش می‌یابد. از این رو فرم متریک ۱-۷ این مفهوم بسیار مهم را بیان می‌کند که عالم می‌تواند با زمان تکامل یابد. توجه کنید که نه تنها فاصله بین تمام کهکشانها با $R(t)$ تغییر می‌کند، بلکه خود فضا-زمان نیز تکامل می‌یابد: خمیدگی سه‌فضاهای $\{t = \text{const.}\}$ مانند $k/R^2(t)$ تغییر می‌کند؛ چگالی ماده تغییر خواهد کرد، و می‌توان نشان داد که این تغییر نمایانگر قسمتی از خمیدگی فضا-زمان است؛ به علاوه، در حالت $k = +1$ ، حجم کل این سه‌فضاها با گذشت زمان تغییر می‌کند.



شکل ۶-۷ مقیاس فاصله بین کهکشانها $R(t)$ است: در $t = t_1$ ، فاصله‌ها متناسب با $R(t_1)$ ؛ در $t = t_2$ ، فاصله‌های $R(t_2)$ متناسب‌اند.

نحوه تغییر $R(t)$ را معادله‌های میدان گرانشی اینشتین تعیین می‌کنند، و به مقدار ماده و تابش در عالم بستگی دارد. همان‌طور که به‌زودی خواهیم دید، شواهد دال بر این است که ما در یک عالم در حال انبساط زندگی می‌کنیم که در آن هم اکنون $R(t)$ در حال افزایش است و از صفر به مقدار کنونی خود رسیده است. توجه به دو ویژگی چنین انبساطی حائز اهمیت است. اولاً این انبساط، انبساط کلی عالم است؛ بنابراین انبساط در چیزی نیست (چیزی خارج از عالم وجود ندارد که عالم در آن بسط یابد، زیرا این عالم تمامی آن چیزی است که وجود دارد!) در حالت‌های $k = 0$ و $k = -1$ ، مقاطع فضایی نامتناهی و بدون لبه هستند، و انبساط افزایش دائم فاصله بین هر دو کهکشان در این عالم است. در حالت $k = +1$ ، مقاطع فضایی متناهی هستند اما باز هم لبه ندارند، در اینجا هم انبساط از دیار فاصله بین هر جفت کهکشان است. نکته دوم این است که انبساط به‌طور همسانگرد و بدون مرکز صورت می‌گیرد؛ هر ناظر اصلی کهکشانه‌ای اصلی دیگر را می‌بیند که به تساوی در تمام جهتها از او دور می‌شوند. نحوه وقوع این انبساط در بحث راجع به عالم میلان توصیف شد [بخش ۴-۳، شکل ۴-۴ (ب) را ببینید]؛ در مورد کنونی، علت آن است که می‌توانیم، هر کهکشانی را انتخاب کنیم و آن را مبدأ مختصات قرار دهیم، متریک همان فرم ۱-۷ را خواهد داشت.

معادله‌های میدان سه امکان را برای این انبساط برحسب مقدار ثابت k (که خمیدگی فضایی را تعیین می‌کند) مجاز می‌دارند. در بخش بعد رفتارهای مختلفی را که معادله‌های اینشتین پیشگویی می‌کنند توصیف خواهیم کرد و در بخش بعد از آن خواهیم دید که چگونه انتقال‌های به‌سرخ مشاهده شده شواهد مستقیمی دال بر اینکه $R(t)$ واقعاً تغییر می‌کند فراهم می‌آورند.

تمرین ۲-۷

در حالت $k = +1$ ، فضا-مقطع دوعبده‌ای که با قراردادن $\theta = 1/2\pi$ در ۲-۷ به‌دست می‌آید و فرم متریک ۴-۷ را به‌دست می‌دهد در نظر می‌گیریم، در آنجا ناظرهای اصلی در محل‌هایی قرار دارند که مقادیر r و ϕ ثابت است. اکنون فرض می‌کنیم که $R(t)$ به‌طور یکنواخت از صفر افزایش می‌یابد یک بادکنک (خیلی محکم) را در نظر می‌گیریم که کهکشانهایی روی آن ترسیم شده‌اند، به تدریج که بادکنک باد می‌شود، اندازه بادکنک به‌طور یکنواخت بزرگ و بزرگتر می‌شود، توضیح دهید چرا می‌توانیم این بادکنک را مدل دقیقی برای وضعیت بالا بدانیم. توجه کنید انبساطی که این مدل ترسیم می‌کند مرکزی ندارد؛ هر کهکشانی به تساوی از هر کهکشان دیگر دور می‌شود.

۲-۷ تکامل عالم

با استفاده از معادله‌های میدان اینشتین، می‌توان مستقیماً معادله‌های تکامل زمانی $R(t)$ را تعیین کرد. معلوم شده است که این معادله‌ها را می‌توان با بررسی اثر گرانشی بر روی کره‌ای از ماده در

مدلی از عالم که نظریه نیوتونی پیش‌گویی می‌کند نیز به دست آورد. ۱ جزئیات این معادله‌ها را در اینجا نخواهیم آورد، بلکه فقط جوابهای آنها را مورد بحث قرار می‌دهیم.

عالم ایستای اینشتین

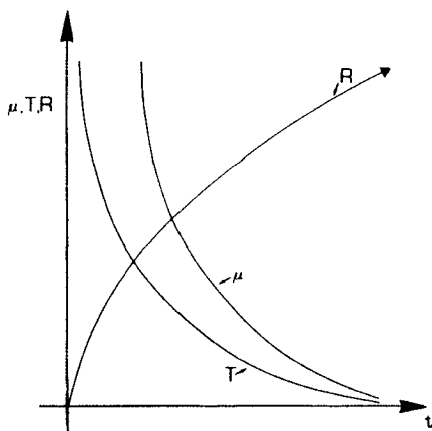
اگر "ثابت کیهانشناختی" Λ غیر صفر باشد، یک جواب استثنایی، یعنی عالم ایستای اینشتین، امکانپذیر می‌شود. این جمله اختیاری اضافی در معادله‌های اینشتین نماینده یک نیروی دافعه عمومی متناسب با فاصله است و با نیروهای گرانشی که تمایل به رماندن مدل عالم دارند متوازن می‌شود و از این رو جواب ایستا را ممکن می‌سازد. این جواب با متریک γ -۱ نمایش داده می‌شود که در آن $R(t) = R_0$ یک مقدار ثابت، و $k > 0$ است؛ یعنی دارای مقاطع فضایی بسته است. این مدل عالم، که ابتدا اینشتین آن را در سال ۱۹۱۷ (۱۲۹۶ شمسی) یافت، یک فضا-زمان خمیده است که یک حل ایستای دقیق معادله‌های میدان گرانشی است.

این مدل شبیه به عالم مینکوفسکی است که در بخش ۳-۴ مورد بحث قرار گرفت، بجز اینکه دارای مقاطع فضایی با خمیدگی مثبت است و از این رو تنها تعداد محدودی کیهکشان در چنین مدل عالمی وجود دارد. این عالم در اثر گذشت زمان تغییر نمی‌کند، و بنابراین در بعد زمان نامتناهی است. در این عالم انتقال به سرخ منظمی پیش‌بینی نمی‌شود. به علاوه، این عالم ناپایدار است: اگر چگالی دستخوش افت و خیز شود، یا عالم می‌رمبد و به یک تکینگی تبدیل می‌شود زیرا نیروهای گرانشی بر نیروهای دافعه ناشی از ثابت کیهانشناختی فائق می‌آیند، و یا تا ابد انبساط می‌یابد زیرا ثابت کیهانشناختی بر نیروی جاذبه ماده غلبه می‌کند. به این دلایل، عالم ایستای اینشتین را مدل خوبی برای عالم حقیقی نمی‌دانند، و ما هم بیش از این به آن نخواهیم پرداخت. از این پس مانند اینشتین فرض می‌کنیم که "ثابت کیهانشناختی" Λ صفر است (هیچ دلیلی برای $\Lambda \neq 0$ وجود ندارد). در این صورت معادله‌های میدان نمی‌توانند حل ایستا داشته باشند.

عالم‌های تکامل‌یابنده

اگر چگالی انرژی و فشار در عالم مثبت باشند، معادله‌های میدان اینشتین ایجاب می‌کنند که عالم باید به طور منحصر به فرد از حالتی بینهایت متراکم انبساط یابد، "مه‌بانگ داغ"، و با پیر شدن عالم آهنگ انبساط کند شود. ابتدا انبساط اولیه عالم، و سپس رفتار آن را در زمانهای بعد در نظر می‌گیریم.

۱. مثلاً نگاه کنید به



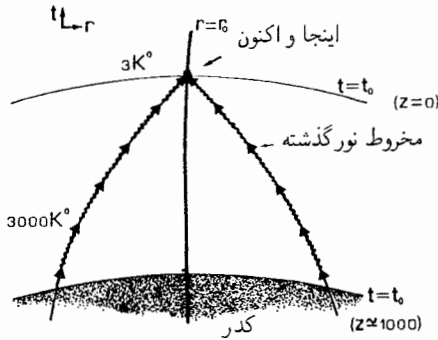
شکل ۷-۷ چگالی μ ، دمای T و ضریب مقیاس R عالم برحسب زمان رسم شده‌اند. در $t = 0$ ، تکینگی "مهبانگ" داغ، متناظر با چگالی و دمای بینهایت در حجم صفر است!

عالم اولیه. در تمامی موارد، زمانهای اولیه (وقتی که عالم از تابش پر شده است، با بحثی که در زیر می‌آید مقایسه کنید)، تکامل طبق رابطه زیر صورت می‌گیرد

$$R(t) \propto t^{1/2} \quad (5-7)$$

که در آن مختصه زمان طوری انتخاب شده است که $t = 0$ مبدأ عالم باشد (که در آنجا $R = 0$). این به ویژه ایجاب می‌کند که شروع انبساط عالم از آن زمان باشد، یعنی وقتی که ماده در عالم بینهایت متراکم است (زیرا در آن هنگام $R(t) = 0$) و چگالی و دما بینهایت بزرگ هستند (شکل ۷-۷). این همان "مهبانگ داغ" — مبدأ تکینة عالم — است. تا آنجا که فیزیک کلاسیک می‌تواند پیش‌بینی کند، خمیدگی فضا-زمان در آنجا نامتناهی است و فضا، زمان، و حتی قوانین فیزیک قبل از آن وجود ندارند: بدین ترتیب آنجا مبدأ عالم است. از قوانین فیزیک تنها پس از رویداد خلقت می‌توانیم برای درک تکامل عالم استفاده کنیم.

در زمانهای اولیه، فیزیکی که بتواند به درک تکامل عالم کمک کند به خوبی شناخته نشده است، و نظریه‌های ما درباره آنچه اتفاق می‌افتد جنبه حدس و گمان دارد. گرچه، در زمانهای در حدود یک ثانیه پس از شروع انبساط به بعد فیزیک مورد نظر نسبتاً شناخته شده است. عالم پُر از مخلوط بسیار گرمی از ذرات و تابش برهم‌کنش کننده بوده است که با یکدیگر در تعادل بودند، با انبساط عالم این مخلوط سرد شده است (دمای T متناسب است با $1/R$ ، و در $t = 1$ s برابر 10^9 K بوده است شکل ۷-۷ را ببینید). با کاهش دما تشکیل عناصر (ستاره‌ای) در دمایی در حدود 10^8 K صورت گرفته است، و سپس هنگامی که دما به حدود 3000 K رسیده است ماده و تابش



شکل ۷-۸ تابش جسم سیاه که در امتداد مخروط نور گذشته از راه می‌رسد. قبل از زمان جدایی t_d عالم کدر، انتقال به سرخ بزرگتر از 1000° و دما بالاتر از 3000°K بوده است، اکنون دمای تابش 3°K است.

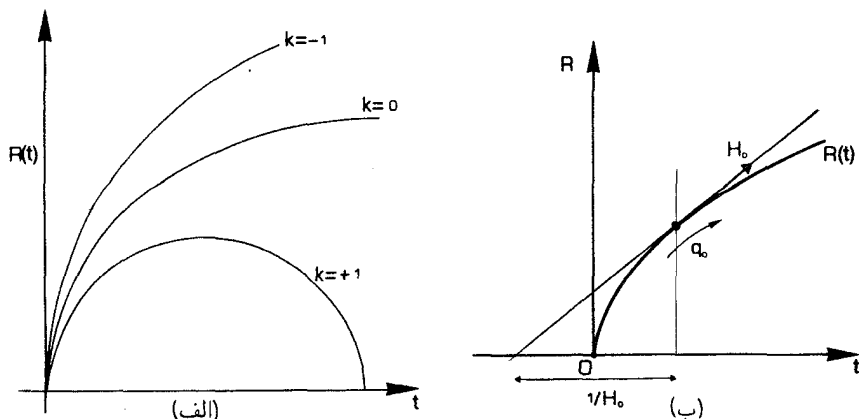
در عالم از یکدیگر جدا شده‌اند (در زمانهای قبل از آن عالم برای تابش الکترومغناطیسی کدر بود زیرا الکترونها که آزادانه بین هسته‌ها حرکت می‌کردند نور را به شدت پراکنده می‌کردند، اما پس از آن عالم شفاف شد زیرا الکترونها برای تشکیل اتمها در قید هسته‌ها درآمدند). باقیمانده‌های تابش از آن زمان را اکنون به صورت تابش جسم سیاه در دمای T تقریباً 3°K با گیرنده‌های رادیویی بسیار حساس و آشکارسازهای تابش فرورسرخ مشاهده شده‌اند.^۱ گرچه آشکارسازی این تابش به سبب دمای پایین بسیار مشکل است، اما کشف آن در سال ۱۹۶۵ (۱۳۴۴ شمسی) حائز اهمیت بسیار بود، زیرا شاهد مستقیمی دال بر وجود مرحله اولیه داغ در عالم در زمانی بود که $R(t)$ خیلی کوچکتر از مقدار کنونی بوده است. به علاوه، این تابش گواه مستقیمی است بر شرایطی که در آن اوایل (در زمان جدا شدن، خیلی قبل از به وجود آمدن ستاره‌ها یا کهکشانها، شکل ۷-۸ را ببینید) وجود داشته‌اند. ممکن نیست بتوان با تجزیه و تحلیل تابش الکترومغناطیسی اطلاعاتی درباره زمانهای قبل از زمان جدایی به دست آورد، زیرا قبل از جدایی عالم کدر بوده است. به علاوه، همسانگردی این دما (که در تمام جهتها با دقت یک قسمت در 10^4 یکسان است) بهترین دلیل برای یکنواختی عالم در لحظه‌های اولیه است؛ باقیمانده‌های بسیار کوچکی از ناهمسانگردی که آشکارسازی شده است را می‌توان ناشی از حرکت ما نسبت به سرعت بنیادی در وضعیت فضا زمانی ما دانست.^۲

۱. نگاه کنید به

P. Peebles and D. T. Wilkinson, "The Primeval fireball" *Scientific American*, June 1967.

۲. نگاه کنید به

R. Muller 'The Cosmic background radiation and the new aether drift', *Scientific American*, May 1978.



شکل ۷-۹ (الف) ضریب $R(t)$ که برحسب زمان t ترسیم شده است. به ازای $k = -1$ و $k = 0$ ، این ضریب بدون حد افزایش می‌یابد؛ به ازای $k = +1$ ، ضریب تا مقدار حداکثری افزایش پیدا می‌کند و سپس دوباره کاهش می‌یابد و به صفر می‌رسد. (ب) ثابت هابل H_0 شیب منحنی $R(t)$ در زمان t_0 است، و پارامتر شتاب منفی q_0 انحنای منحنی در آنجاست.

فیزیک دخیل در مراحل اولیهٔ عالم بسیار پیچیده است. یک خلاصهٔ کوتاه، و مراجعی برای مطالعهٔ بیشتر در پیوست این بخش آورده شده است.

عالم بعدی. رفتار بعدی عالم برحسب اینکه خمیدگی فضا مثبت، صفر، و یا منفی باشد، متفاوت است [شکل ۷-۹ (الف) را ببینید]. اگر $k = -1$ ، عالم یک عالم کم چگالی است که به راحتی تا ابد منبسط می‌شود؛ اگر $k = 0$ ، عالم یک عالم با چگالی بالاست که فقط می‌تواند تا ابد انبساط یابد؛ اگر $k = +1$ ، عالم یک عالم با چگالی بالاست که تا یک مقدار بیشینهٔ $R(t)$ منبسط می‌شود و سپس دوباره در آینده می‌رمبد و به یک تکینگی دوم، شبیه تکینگی اولیه که عالم از آن آغاز شده بود، منتهی می‌شود.

روشن است که یافتن -1 ، $+1$ و 0 k جالب توجه بسیار است، زیرا این مطلب نه تنها تعیین می‌کند که فضا-مقطعهای عالم منتهای هستند یا نامتهای (همان‌طور که در بالا بحث شد) بلکه این را هم تعیین می‌کند که عالم تا به ابد انبساط می‌یابد یا خیر. سعی بر این است که مقدار k را با مشاهده‌های نجومی کهکشانهای دوردست تعیین و با استفاده از اینها رفتار $R(t)$ را تعیین کنند و از آنجا مقدار k را به دست آورند.

پارامترهای اساسی. پارامترهای اساسی که مدل‌های عالم مختلف را مشخص می‌کنند عبارت‌اند از ثابت هابل

$$H_0 = \left[\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right].$$

و پارامتر شتاب منفی

$$q_0 = \left[-\frac{1}{RH_0^2 \frac{d^2 R}{dt^2}} \right]$$

که در آن شاخص زیرین $^{\circ}$ به معنای آن است که "در زمان t_0 ارزیابی شده است". اولین ثابت آهنگ انبساط عالم را مشخص می‌کند (بحث عالم میلن در بخش ۳-۴ را ببینید)، و ثابت دومی مشخص‌کننده آهنگی است که با آن انبساط عالم کند می‌شود [شکل ۷-۹ (ب)]. طبق معادله‌های میدان اینشتین، q_0 با مقدار ماده در عالم نسبت مستقیم دارد؛ اگر $q_0 > 1/2$ ، ما در یک عالم با چگالی بالا هستیم ($k = +1$) که دوباره خواهد رمبید، در صورتی که اگر $q_0 < 1/2$ ، در یک عالم کم چگالی هستیم ($k = -1$) که تا ابد انبساط خواهد یافت. حالت بحرانی $q_0 = 1/2$ (عالم اینشتین-دوسیه) مقاطع فضایی تخت ($k = 0$) و صورت ساده‌ای برای $R(t)$ دارد: در این مورد

$$R(t) \propto (t - t_1)^{2/3} \quad (۶-۷)$$

که در آن t_1 یک ثابت است (اگر این قانون انبساط در تمام راه بازگشت به تکینگی اولیه صحیح بود، t_1 زمانی می‌شد که در آن انبساط آغاز شده است؛ هر چند، همان‌طور که دیدیم، چنین نیست). مشاهده‌های کنونی ما نشان می‌دهد که چگالی ماده در عالم برای باز رمبیدن زیاده از حد کم است؛ بالاترین چگالی که از مشاهده‌های مستقیم به دست آمده متناظر با $q_0 \simeq 0$ است. گرچه چگالی‌های مشاهده شده کمتر از مقدار پیش‌بینی شده برای چگالی بحرانی است، اما برای درک ماهیت تکامل عالم، معمول این است که برای زمانهای اولیه از ۵-۷ و برای زمانهای بعدی از ۶-۷ استفاده کنند، و عبارتهای مربوط به R را در یک زمان بحرانی t_c ، که در آن گذار از عالم تحت سیطره تابش به عالم تحت سیطره ماده صحت گرفته است، را در R_c مساوی بگیرند. همین‌طور عبارتهای مربوط به \dot{R} باید در t_c برابر باشند. ثابت هابل برآوردی از سن عالم را به دست می‌دهد. در حالت $q_0 = 0$ ، در یک عالم تهی هستیم که سن آن $t_0 = 1/H_0$ است؛ این همان مدل میلن است که در بخش ۳-۴ مورد بحث قرار گرفت (یک عالم تهی با انبساط خطی^۱). اگر $q_0 = 1/2$ (حالت بحرانی) باشد، در $(1/H_0) \times 2/3 = t_0$ است. برآوردهای کنونی از H_0 نشان می‌دهند که $1/H_0$ تقریباً برابر $10^9 \times 15$ سال است. ترکیب این مقدار با برآوردهای کنونی از سن ستاره‌ها در خوشه‌های گویسان (بین ۱۴ و $10^9 \times 18$ سال) نشان می‌دهد، که در یک عالم با چگالی زیاد سن ستاره‌ها در مقایسه با سن عالم می‌تواند به نحو نامطلوبی بزرگ باشد. هر چند، در مورد مقدار ثابت هابل عدم

۱. دقیقتر بگوییم، عالم چهاربعدهی میلن دارای فرم متریک ۱-۷ است که در آن $k = -1$ ، $R(t) = t$ و $q_0 = 0$. این یک فضا-زمان تخت است اما دارای مقاطع فضایی با خمیدگی منفی است.

قطعیت قابل ملاحظه‌ای وجود دارد، از این رو مباحثات بر مبنای سن را باید با احتیاط تلقی کرد. در بخش بعد، ما معادله‌هایی را که مبنای مقایسه مستقیم این مدل‌های عالم با مشاهدات اشیای دوردست در عالم قرار داده می‌شوند را بررسی خواهیم کرد.

پیوست: فیزیک آغاز عالم اولیه

ماده‌ای که در آغاز، در ابتدای عالم اولیه آفریده شد یک گاز خیلی گرم متشکل از ذرات بنیادی (پروتونها، الکترونها، پوزیترونها، نوترینوها، و غیره) و فوتونها (یعنی تابش) بود که با یکدیگر در تعادل بودند. به سبب فرایند تولید زوج که در بخش ۳-۷ بررسی شد، فوتونها در اثر برخورد زوجهای ذره-پادذره تولید می‌کنند؛ برعکس، ذره‌ها با پادذره‌ها برخورد و فوتون تشکیل می‌دهند. در اثر انبساط این گاز دمای آن پایین می‌آید. اکنون این مطلب را با جزئیات بیشتر بررسی می‌کنیم. ممکن است انتظار داشته باشیم که با انبساط عالم، طول موج λ برای تابشهای موجود، درست مانند هر مقیاس دیگر طول، مانند $R(t)$ تغییر کند. بررسی معادله‌های ماکسول برای تابش الکترومغناطیسی نشان می‌دهد که این دقیقاً همان چیزی است که اتفاق می‌افتد. اما، طول موج λ و بسامد ν برای تابش با رابطه‌ی اساسی $c = \nu\lambda$ به یکدیگر مربوط می‌شوند، از این رو تغییرات ν به صورت $\nu/R(t)$ است. به علاوه، انرژی نور با رابطه‌ی $E = h\nu$ (که h یک ثابت است) به ν مربوط است. بنابراین E به صورت $\nu/R(t)$ تغییر می‌کند. پس دمای T برای تابش جسم سیاه در تعادل در یک عالم در حال انبساط به صورت $\nu/R(t)$ تغییر خواهد کرد، زیرا T معیاری از انرژی میانگین تابش است. در واقع هم چنین است؛ بررسی بیشتر ترمودینامیک چنین تابشی مؤید این نتیجه‌گیری است. که، با انبساط عالم، تابش طبق قانون $T \propto \nu/R$ سرد می‌شود.^۱

با سرد شدن عالم، برهم‌کنشهایی که در دماهای بسیار بالا امکانپذیر هستند از دمای آستانه‌شان پایینتر می‌روند و دیگر رخ نمی‌دهند، و بدین وسیله سبب می‌شوند که چندین تعادل مختلف برهم بخورد. به علاوه، اثر برهم‌زننده فوتونها با کاهش دما کاهش می‌یابد، از این رو تعداد زیادی ذره و ساختار پیچیده به وجود می‌آید. به‌ویژه، عناصر سبک (هلیوم، دوتریم، لیتیم، تریتم) با سنتز هسته‌ای در دماهایی نزدیک به 10^8 K آفریده می‌شوند. ستاره‌ها و کهکشانها بسیار دیرتر، وقتی که تابش تا 3000 K سرد شده است تشکیل می‌شوند، و ستاره‌های نسل دوم و منظومه شمسی حتی دیرتر از آنها تشکیل می‌شوند. ما سنتز عناصر را در اینجا بررسی نمی‌کنیم، اما خواننده را برای تفصیل بیشتر به کتابهای دیگر ارجاع می‌دهیم.^۲ هر چند، دو نکته به‌ویژه حائز اهمیت‌اند و باید ذکر شوند.

۱. مثلاً نگاه کنید به

E. Harrison, *Cosmology*, Cambridge University Press, 1981.

۲. مثلاً نگاه کنید به

Dennis Sciama *Modern Cosmology*, Cambridge University Press, 1976; Stephen Weinberg *The First Three Minutes*, Basic Books, 1977.

اولاً، می‌توان مشاهدات مربوط به فراوانی عناصر در عالم را با پیشگوییهای این مدلها مقایسه کرد. بر این مبنا که عناصر سبک (هیدروژن، دوتریم، هلیوم) در عالم گرم اولیه آفریده شده‌اند. اما عناصر سنگینتر (مانند کربن، نیتروژن، اکسیژن، آهن) در فرایندهای بعدی در ستاره‌ها به وجود آمده‌اند، بعضی از ستاره‌ها بعداً این عناصر را با انفجارهای ابرنواختری در فضا پخش کرده‌اند. در واقع به این دلیل است که خورشید باید یک ستاره نسل دوم باشد: سیاره‌های منظومه شمسی از عناصر پرچرم تشکیل شده‌اند که باید در درون ستاره‌ای متعلق به نسل قدیمتری به وجود آمده باشند. ثانیاً، در زمانهای اولیه تابش موجود در عالم با ماده گرم در تعادل نزدیک به سر می‌برد. این ماده یونیده است، یعنی اتمها به اجزای تشکیل‌دهنده خود یعنی نوکلئونها و الکترونها تجزیه شده‌اند و به جای اینکه به صورت اتم با یکدیگر پیوند داشته باشند به طور مستقل در آن گاز حرکت می‌کنند. در این صورت تابش، به صورت تابش جسم سیاه در دمایی مناسب با آن مرحله از تکامل عالم است. الکترونهای آزاد به شدت با تمامی تابش الکترومغناطیسی برهم‌کنش می‌کنند. این به معنای آن است که در آن زمان عالم برای نور، امواج رادیویی، پرتوهای x ، و غیره کدر است؛ مانند درون خورشید، یک فوتون (یعنی یک ذره نور) قبل از برخورد با یک الکترون و پراکندگی توسط آن تنها می‌تواند فاصله بسیار کوتاهی را طی کند. اما، در زمانهای بعدی (هنگامی که دمای عالم به $3000^\circ K$ کاهش می‌یابد) الکترونها و نوکلئونها دوباره ترکیب و اتمها را تشکیل می‌دهند. الکترونهای آزاد اکنون با نوکلئونها پیوند نزدیک دارند، و از این رو دیگر مانند قبل نور را پراکنده نمی‌کنند، و عالم شفاف می‌شود، و تابش اغلب بدون اینکه با اتمها برهم‌کنش کند از میان آنها آزادانه عبور می‌کند؛ بدین ترتیب زمان ترکیب مجدد (الکترونها و نوکلئونها) زمان جدا شدن ماده از تابش نیز هست. تابشی که در زمانهای اولیه با ماده در تعادل بود، از آن پس تابش جسم سیاه باقی می‌ماند و دمای آن در اثر انبساط عالم پیوسته کاهش می‌یابد. همان‌طور که در بالا ذکر شد، هم اکنون منظومه شمسی در باقیمانده‌های رقیق این تابش جسم سیاه غوطه‌ور است.^۱

تمرین ۳-۷

رابطه میان ثابت هابل و سن عالم را (الف) در مورد عالمی که تحت سیطره ماده است (یعنی ۶-۷ صادق است)، و (ب) در مورد عالمی که تحت سیطره تابش است (یعنی ۵-۷ صادق است) تعیین کنید.

۳-۷ کمیتهای قابل مشاهده

ویژگیهای اصلی قابل مشاهده برای اشیای دوردست در عالم انتقال به سرخ، زاویه‌های ظاهری، و درخشندگی ظاهری آنهاست. از این ویژگیها برای برآورد فاصله‌های ستاره‌ها، کهکشانها، و اشیای

۱. برای جزئیات بیشتر به کتابهایی که در پانوشته صفحه‌های ۲۹۸ و ۲۹۹ آمده‌اند مراجعه کنید.

شبه‌ستاره‌ای استفاده شده است؛ بدین ترتیب اندازهٔ عالم را از طریق آنها تعیین می‌کنیم. بحث نسبتاً مفصل در این بخش برای فهمیدن بحث‌های علیتی که در بخش بعد خواهد آمد ضروری نیست.

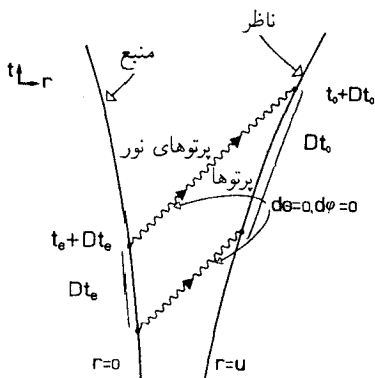
انتقال به سرخ

محاسبهٔ مسیرهای پرتوهای نور شعاعی از فرم بنیادی ۱-۷ آسان است. بر روی آنها، $d\theta = 0 = d\phi$ (چون آنها ژئودزیک‌های شعاعی هستند که بر روی آنها θ و ϕ ثابت‌اند) و $ds^2 = 0$ (که بیانگر این امر است که آنها پرتوهای نور هستند). در این صورت از ۱-۷ پیداست که روی این منحنیها، $dr = dt/R(t)$ (هم dr و هم dt را برای ژئودزیک‌های آینده خروجی مثبت بگیرد). پس اگر کهکشانی O_1 در $r = 0$ و در زمان $t = t_e$ نوری گسیل کند، و ناظر O_2 در $r = u$ و در زمان $t = t_o$ آن را دریافت کند (شکل ۱-۷)، داریم

$$u = \int \frac{dr}{R(t)} \quad (۷-۷)$$

که در آن انتگرال از زمان t_e گسیل نور تا زمان t_o مشاهدهٔ آن محاسبه می‌شود. همین‌طور، نوری که O_1 اندکی بعد در زمان $t_e + Dt_e$ گسیل می‌کند و O_2 در $t_o + Dt_o$ دریافت می‌کند از رابطهٔ ۷-۷ پیروی خواهد کرد اما اکنون انتگرال از زمان $t_e + Dt_e$ تا زمان $t_o + Dt_o$ محاسبه می‌شود.

اکنون، ویژگی تعیین‌کننده این است که u ثابت است (زیرا مختصهٔ r ناظرهای اصلی ثابت است) از این رو مقدار سمت راست ۷-۷ برای هر دو پرتو نور یکسان است. بنابراین می‌توانیم دو انتگرال را برابر قرار دهیم. اکنون اگر ما این عبارتها را تقریب بزینم و در نظر داشته باشیم که Dt_o



شکل ۱-۷ یک منبع نور واقع در $r = 0$ در t_e و $t_e + Dt_e$ پرتوهای نور شعاعی گسیل می‌کند، و ناظری واقع در $r = u$ آنها را در t_o و $t_o + Dt_o$ دریافت می‌کند.

و Dt_e کوچک هستند و در نتیجه $R(t)$ در فاصلهٔ مربوطه تقریباً ثابت است، درمی‌یابیم که $Dt_e/R(t_e) = Dt_o/R(t_o)$. بنابراین، نسبت فاصله‌های زمانی مشاهده شده برابر است با

$$K = Dt_o/Dt_e = R(t_o)/R(t_e) = 1 + z \quad (A-7)$$

(رابطهٔ آخر از ۳-۳ نتیجه می‌شود). ما نتیجه را برای یک کهکشان در مبدأ مختصات محاسبه کرده‌ایم، اما به دلیل همگنی عالم این نتیجه در مورد هر زوج کهکشان صادق است (همیشه می‌توان گسیلنده را به عنوان مبدأ مختصات تعیین کرد).

این عبارت نشان می‌دهد که چگونه انتقال‌های به سرخ مشاهده شده اندازهٔ انبساطی را که در عالم صورت گرفته است به دست می‌دهد؛ بنابراین طبق ۸-۷، انتقال‌های به سرخ اندازهٔ نسبت ضریب مقیاس در زمان مشاهده و در زمان گسیل را مستقیماً به دست می‌دهد. توجه داشته باشید که در این مورد، اثر کاملاً دوجانبه است؛ انتقال به سرخی که O_2 برای نوری که در t_e گسیل و در t_o دریافت شده است مشاهده می‌کند عیناً همان است که O_1 مشاهده می‌کند. هر چند، مقدار K برای هیچ جفت کهکشان خاص ثابت باقی نمی‌ماند؛ بلکه تغییرات زمانی آن مستقیماً دینامیک انبساط یا انقباض عالم را بازتاب می‌دهد. بدین ترتیب، K تابعی از t_e (یا t_o) است. عالم میلن که در بخش ۳-۴ توصیف شد مدلی دقیق برای این وضعیت است.

ضریب K را می‌توان مستقیماً با اندازه‌گیری انتقال به سرخ در طیف کهکشانهای دور دست مشاهده کرد (شکل ۳-۴). در زمان نوشتن این کتاب، انتقال‌های به سرخ تا $z = 3.2$ برای کهکشانها اندازه گرفته شده است که با نوری آشکار شده‌اند که گسیل آن هنگامی که عالم تقریباً یک هفتم سن کنونی خود را داشته است صورت گرفته است. در مورد اشیای شبه‌ستاره‌ای، انتقال به سرخی به بزرگی ۳٫۸ اندازه گرفته شده است. که مجدداً متناظر با مشاهدهٔ این اشیاء در زمانی بسیار قدیم (در حدود 10^9 سال قبل) است، که آنها ۴٫۸ بار به ما نزدیکتر از اکنون بودند. در مورد تابش زمینهٔ میکروموج کیهانی، از آنجا که دمای تابش به صورت $1/R(t)$ تغییر می‌کند و دمای کنونی آن $3K$ است، دمای این تابش در زمان متناظر با انتقال به سرخ z برابر با $T = 3(1+z)K$ خواهد بود. از این رو تابشی که ما آشکار ساخته‌ایم را مادهٔ گرم چگال در ابتدای عالم در دمایی تقریباً برابر با $3000K$ (هنگامی که عالم شفاف می‌شود) و در انتقال به سرخی تقریباً برابر با 1000 گسیل شده است (شکل ۸-۷). از آنجا که در ابتدای عالم (وقتی $t \rightarrow 0$) $R(t) \rightarrow 0$ ، انتقال به سرخ دریافتی از زمانهای اولیه اگر می‌توانست از مادهٔ بین راه عبور کند، به بینهایت میل می‌کرد. در حقیقت، به علت کدر بودن مادهٔ سرراه، نمی‌توانیم از زمانهای بسیار بسیار اولیه تابش الکترومغناطیسی دریافت

۱. مثلاً نگاه کنید به

کنیم، اما ممکن است روزی بتوانیم نوترینوهایی دریافت کنیم که در انتقال به سرخی تقریباً برابر با 10^9 گسیل شده‌اند. اگر می‌توانستیم امواج بسیار ضعیف گرانشی را آشکار سازیم، علی‌الاصول می‌توانستیم تا زمانهای بسیار دورتر را مشاهده کنیم.

تمرینها

۴-۷ فرض کنید پرتوهای نوری که O_1 در بازه Dt_e گسیل می‌کند در O_2 بازتابیده می‌شود و دوباره O_1 آنها را دریافت می‌کند. بازه Dt' بین دریافت آنها را O_1 چقدر اندازه خواهد گرفت. نتیجه‌ای را که به دست می‌آورید با نتیجه‌ای که از جواب شوارتس شیلد به دست می‌آید (بخش ۶-۱) مقایسه کنید.

۵-۷ با استفاده از معادله (۷-۸) نشان دهید که مقیاس λ مانند $R(t)$ است. [رابطه بین دوره و طول موج نور را در نظر بگیرید.]

برای مقایسه مدل‌های عالم با مشاهدات مربوط به اشیای دور، باید علاوه بر انتقال به سرخ، مشخصه دیگری از جسم مورد مشاهده را اندازه گرفت تا بتوان رابطه‌ای قابل مشاهده به دست آورد و آن را با نظریه مقایسه کرد. راه مستقیمی برای تعیین زمان گسیل تابش، که همان زمان نگاه کردن به زمان گسیل نور است وجود ندارد. فاصله شیء را می‌توان از اندازه ظاهری و یا از درخشندگی آن برآورد کرد؛ و این کمیتها را می‌توان با دانستن خواص ذاتی چشمه از فرم متریک ۷-۱ پیشگویی کرد. این ویژگیها را به نوبت بررسی خواهیم کرد.

زاویه‌های ظاهری

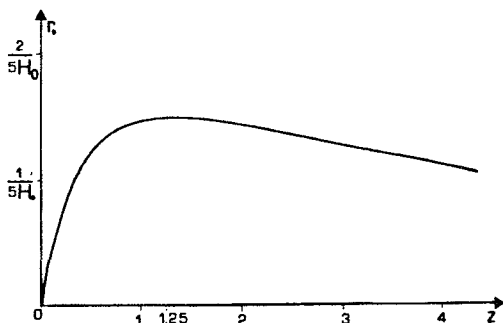
درست همان‌طور که اندازه ظاهری یک جسم در عالم مینکوفسکی را بررسی کردیم (بخش ۴-۳)، می‌توانیم شیئی به طول D با مختصه شعاعی $u = r$ را در نظر بگیریم که از نظر ناظری که در $r = 0$ قرار دارد اندازه زاویه‌ای ظاهری آن α است [شکل ۴-۲۸ (الف)]. در آن مورد از متریک فضای تخت ۴-۳۲ ج رابطه ۴-۳۴ را به دست آوردیم؛ با استفاده از همان روشها، برای این مورد به دست می‌آوریم

$$\alpha = D/r_0 \quad (۷-۹ الف)$$

که در آن "فاصله سطح" r_0 طبق تعریف برابر است با

$$r_0 = R(t_e)f(u) = R(t_0)f(u)/(1+z) \quad (۷-۹ ب)$$

که در آن u از ۷-۷ به دست می‌آید، t_e زمان گسیل نور، و t_0 زمان مشاهده آن است. به کمک این معادله می‌توانیم، با معلوم بودن فاصله، اندازه زاویه‌ای هر جسمی را که اندازه آن معلوم باشد



شکل ۱۱-۷ رابطه بین "فاصله سطح" r_0 ، که زاویه‌های ظاهری را از طریق معادله ۹-۷ الف تعیین می‌کند، و انتقال به سرخ z در یک عالم تحت تسلط ماده با مقاطع فضایی تخت ($k=0$)، در $z=1.25$ فاصله سطح یک بیشینه دارد؛ متناظر با آن قطرهای زاویه‌ای ظاهری در این انتقال به سرخ دارای یک کمینه خواهند بود.

پیشگویی کنیم، یا برعکس می‌توانیم این فاصله را با اندازه‌گیری اندازه زاویه‌ای آن شیء برآورد کنیم. در یک عالم تحت سیطره ماده تخت ($k=0$)، ۶-۷ معتبر است. این مستلزم آن است که $R(t_0) = \beta(t_0 - t_1)^{2/3}$ و $H_0 = (2/3)(t_0 - t_1)^{-1}$ باشد، که در آن β یک ثابت است. همچنین از ۶-۷ داریم $f(u) = (3/\beta)[(t_0 - t_1)^{1/3} - (t_e - t_1)^{1/3}]$ از ۸-۷ نتیجه می‌شود که در این مورد $(t_0 - t_1) = (t_e - t_1)(1+z)^{3/2}$ ، و پس از قرار دادن $R(t_0)$ و $f(u)$ در ۹-۷ ب، به دست می‌آوریم

$$r_0 = (2/H_0)(1+z)^{-2} \{1+z - (1+z)^{1/2}\} \quad (10-7)$$

این رابطه در شکل ۱۱-۷ ترسیم شده است. ویژگی قابل توجه در اینجا این است که این کمیت در $z=5/4$ دارای یک بیشینه است، و پس از آن کاهش می‌یابد. یک سری چشمه را در نظر می‌گیریم که دارای ویژگی‌هایی هستند که دقیقاً تعریف شده است و می‌توان از آنها برای تعریف قطرهای زاویه‌ای استفاده کرد (مثلاً کهکشانهای مشخص شده)، و فرض می‌کنیم اندازه ذاتی تمام آنها D یکسان است. در این صورت، طبق ۹-۷ الف، در چنین عالمی قطر زاویه‌ای ظاهری این مجموعه اشیا یکنواخت در انتقال به سرخ $z=5/4$ به بیک کمینه خواهد رسید و پس از آن افزایش می‌یابد (شکل ۵-۲۶). این دقیقاً وضعیتی است که در شکل ۵-۲۱، نشان داده شده است، اما برای مشاهده‌هایی که در تمام جهتها و در تمام زمانها انجام می‌شود معتبر است (زیرا این رفتار از مقدار t_0 یا H_0 مستقل است). بدین‌گونه، در این عالما وضعیت به‌گونه‌ای است که در شکل ۵-۲۵ (ب) نشان داده شده است، که در آن تمامی مخروط نور گذشته هرنظر دوباره در $z=5/4$ کانونی می‌شود.

بررسی معادله‌های مربوطه نشان می‌دهد که می‌توان انتظار داشت بازکانونی شدن مشابهی

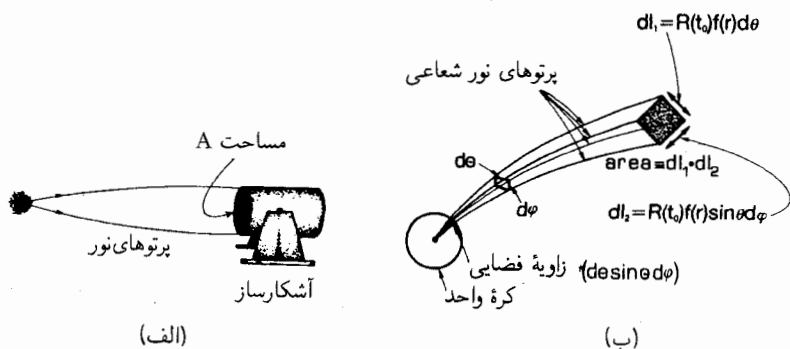
در تمام مدل‌های عالم در حال انبساط رخ دهد که دارای با فرم متریک ۱-۷ و حاوی ماده معمولی هستند (به‌طور دقیقتر، ماده با چگالی انرژی مثبت). متأسفانه، تحقیق این رفتار پیشگویی شده با مشاهده مشکل است، زیرا اندازه ذاتی کهکشانها و چشمه‌های رادیویی تفاوت بسیار دارد، و اکثر کهکشانها کناره‌های بیرونی دقیقاً مشخصی ندارند (کناره‌ها در تاریکی شب محو می‌شوند).

تمرین ۶-۷

معادله ۹-۷ را از ۱-۷ به دست آورید. معادله ۱۰-۷ را به دست آورید و نشان دهید که r_0 در $z = 5/4$ یک بیشینه دارد.

درخشندگیهای مشاهده شده

در اینجا هم می‌توانیم اساساً محاسبه‌ای را که قبلاً برای مورد فضا زمان تخت در بخش ۳-۴ انجام شده بود دنبال کنیم. چشمه‌ای با درخشندگی L ، یعنی چشمه‌ای که با آهنگ L در تمام جهتها تابش گسیل می‌کند را در نظر می‌گیریم. مختصاتی انتخاب می‌کنیم که مبدأ آن در چشمه باشد، یعنی چشمه در $r = 0$ قرار داشته باشد. وقتی برای دریافت این تابش آشکارسازی را مستقر می‌کنیم، این آشکارساز (که مساحت آن مثلاً A است) دسته خاصی از پرتوهای نوری که از چشمه صادر می‌شود را قطع می‌کند [شکل ۱۲-۷ (الف)]. اگر این دسته از پرتوها را با جابه‌جایی زاویه‌ای $(d\theta, d\phi)$



شکل ۱۲-۷ (الف) یک دسته پرتو نور که از چشمه‌ای گسیل می‌شود و آشکارسازی با مساحت A آن را دریافت می‌کند. (ب) رابطه بین مساحت A دسته پرتوی نور در محل آشکارساز و زاویه فضایی در چشمه. پهنای باریکه در جهت θ در محل آشکارساز برای پرتوهای نور شعاعی با زاویه فضایی $\sin\theta d\theta d\phi$ در محل چشمه برابر با $dl_1 = R(t_0)f(r) \sin\theta d\phi$ در جهت ϕ همین‌طور پهنای در جهت ϕ خواهد بود با $dl_2 = R(t_0)f(r) d\theta$. این صورت مساحت در محل آشکارساز برابر با $A = dl_1 dl_2$ است.

مشخص کنیم، کسری از نور L که چشمه در این جهتها در واحد زمان گسیل می‌کند برابر است با

$$P = \frac{1}{4\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

اگر فرض کنیم که محیط جذب کننده‌ای در بین راه نباشد، تمام این فوتونها به گیرنده می‌رسند. در اینجا سه اثر رخ می‌دهد که شدت تابشی را که گیرنده آشکار می‌سازد تعیین می‌کنند.

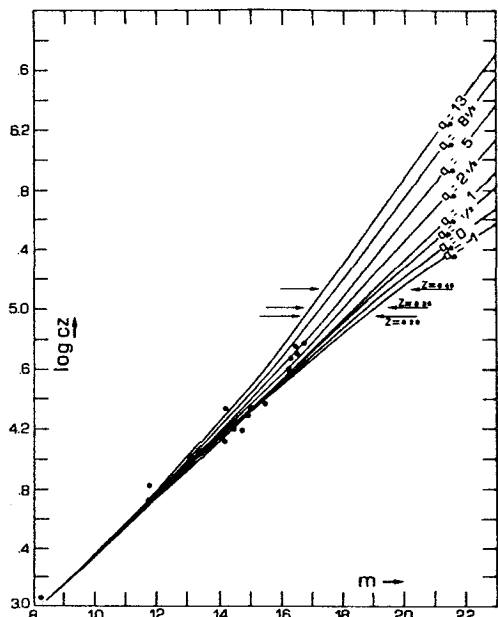
اولاً، در محل آشکارساز (که در آن $t = t_0$ و $r = u$)، این تابش روی سطحی به مساحت A پخش می‌شود [شکل ۷-۱۲ (ب)]. به سهولت می‌توان این مساحت را به زاویه‌های $d\theta$ و $d\phi$ در چشمه ربط داد زیرا پرتوهای نور شعاعی هستند، یعنی θ و ϕ روی پرتوها ثابت هستند. بدین ترتیب، این دسته پرتوهای نور با θ ، $d\theta$ ، ϕ ، و $d\phi$ در آشکارساز مشخص می‌شوند. بنابراین، طبق فرم متریک ۷-۱، مساحت A برابر است با عبارت $A = R^2(t_0) f^2(u) \sin \theta \, d\theta \, d\phi$. از آنجا که فوتونها پایستارند، تمام فوتونهایی که به داخل دسته پرتو نور گسیل شده‌اند در محل آشکارساز دریافت خواهند شد. از این رو، آهنگ دریافت فوتونها در واحد سطح توسط آشکارساز متناسب با P است و با مساحت سطح A نسبت عکس دارد؛ این نسبت را حساب می‌کنیم، آهنگ دریافت فوتون در واحد سطح با $R^2(t_0) f^2(u)$ نسبت عکس دارد.

ثانیاً، انرژی هر فوتون با بسامد آن ν متناسب است که، به علت انتقال به سرخ، با $1+z$ نسبت عکس دارد.

بالاخره، چون فوتونها پایستارند، آهنگ دریافت آنها با آهنگ گسیل آنها یکی است، البته اگر ضریب انتقال دوپلر $K = 1+z$ وجود نداشت. از آنجا که این ضریب تمام بازه‌های زمانی را که چشمه و ناظر اندازه می‌گیرند به یکدیگر ربط می‌دهد؛ پس بازه زمانی را که چشمه و ناظر برای تراگسیل و دریافت هر مجموعه ویژه از فوتونها اندازه می‌گیرند را هم به یکدیگر مربوط می‌کند. بدین ترتیب، نسبت آهنگ دریافت آنها به آهنگ گسیل آنها با $1+z$ نسبت عکس دارد (با معادله ۷-۸ مقایسه کنید). اگر تمام این عوامل را به حساب بیاوریم، شار تابش (تابش دریافتی در واحد سطح در واحد زمان) که در چشمه اندازه گرفته می‌شود برابر است با

$$F = \frac{L}{4\pi(1+z)^2 r_0^2} \quad (11-7)$$

که در آن r_0 با ۷-۹ ب تعریف شده است. به کمک معادله‌های ۷-۹ و ۷-۷ می‌توانیم، با معلوم بودن $R(t)$ (از معادله‌های میدان اینشتین)، شار تابش (یا "درخشندگی ظاهری") هر چشمه با درخشندگی ذاتی معلوم L را در انتقال به سرخ z محاسبه کنیم. یعنی، به کمک اینها می‌توانیم برای هر مدل عالم یک رابطه درخشندگی-انتقال به سرخ نظری بنا کنیم. ماهیت این منحنیها در شکل ۷-۱۳ نشان داده شده است، در این شکل، مطابق معمول، شار مشاهده شده چشمه برحسب



شکل ۱۳-۷ خمهای بزرگی انتقال به سرخ: $\log(cz)$ ، که در آن z انتقال به سرخ، برحسب m ، بزرگی ظاهری چشمه، که عملاً لگاریتم شار تابش دریافتی F است رسم شده است.

بزرگی m آن بیان شده است که از رابطه $m = -2.5 \log_{10} F + K_1$ ، به دست می‌آید که در آن K_1 یک مقدار ثابت است و F از رابطه ۱۱-۷ به دست می‌آید.

اصولاً، این رابطه‌های نظری را می‌توان با رصدهای نجومی کهکشانه‌های دوردست مقایسه کرد و دید که کدامیک از مقادیر $k = +1$ ، $k = 0$ یا $k = -1$ برازش بهتری به رصدها می‌دهند و با اندازه‌گیری $R(t_0)$ خمیدگی فضا-زمان را تعیین کرد. متأسفانه، مشکلات رصدی بسیارند و در تفسیر آنها نیز مسائل بسیاری وجود دارد. به‌ویژه، برآورد درخشندگی ذاتی L چشمه در زمان گسیل نور مشاهده شده مشکل است، گاهی زمان گسیل هزارها میلیون سال قبل است، که در آن زمان ممکن است درخشندگی چشمه با درخشندگی چشمه‌های مشابه در حال حاضر تفاوت بسیار داشته باشد. تا کنون این مشکلات ما را از تعیین رضایتبخش حتی علامت k با این روش بازداشته است. هرگاه شواهد مربوط به طول عمر عالم و فراوانی عناصر سبک را هم به حساب آوریم، اگر بتوان از وزن این شواهد نتیجه‌ای گرفت، نتیجه آن است که ما در یک عالم با چگالی کم ($k = -1$) زندگی می‌کنیم که تا ابد انبساط خواهد یافت.^۱ هر چند، به دلایل نظری مربوط به این

۱. مثلاً نگاه کنید به:

ایده که عالم باید از نظر فضایی بسته باشد و به ایده "عالم تورمی" (بخش ۵-۷ را ببینید). بسیاری از اخترشناسان بر این باورند که عالم در واقع یک عالم با چگالی زیاد است، خیلی شبیه به مدل اینشتین-دوسیته ($k = 0$)، که حاوی مقدار زیادی "ماده تاریک" است که هنوز آشکار نشده‌ایم. در واقع ۹۸٪ جرم عالم می‌تواند از ماده پنهان (مثلاً سیاهچاله‌ها، نوترینوها، یا ذرات غریب) تشکیل شده باشد.

روشنایی ظاهری

درست همان‌طور که ۳۴-۴ و ۳۵-۴ به رابطه روشنایی ۳۶-۴ در مورد عالم مینکوفسکی انجامید اکنون هم ۹-۷ الف و ۱۱-۷ دوباره به همان رابطه روشنایی ۳۶-۴ منجر می‌شوند

$$I = I_0 / (1 + z)^4 \quad (12-7)$$

یعنی، در یک مدل عالم در حال انبساط با فضا زمان خمیده، روشنایی سطحی ظاهری I یک شیء دور دست تنها به روشنایی سطحی ذاتی I_0 آن شیء در هنگام گسیل تابش و انتقال به سرخ مشاهده شده آن بستگی دارد. دوباره به پارادوکس آلبر می‌رسیم (تمرین ۴-۱۹): هر پرتو نور سرانجام یا با رویه یک ستاره برخورد می‌کند و یا وارد ماده گرم عالم اولیه می‌شود؛ پس چرا آسمان شب را به روشنی سطح یک ستاره مشاهده نمی‌کنیم؟

حل این پارادوکس در معادله ۱۲-۷ و ایده عالم در حال انبساط نهفته است. اولین ویژگی عمده که به چشم می‌خورد ضریب $1/(1+z)^4$ است، که نشان می‌دهد روشنایی سطحی نوری که از کهکشانها یا ستاره‌های دور می‌آید، هر چه به زمانهای قدیمتر نگاه کنیم ضعیفتر می‌شود و انتقال به سرخ افزایش می‌یابد. عامل دوم آن است که چون عالم در حال انبساط در یک گذشته متناهی آغاز شده است، کهکشانها و ستاره‌ها در زمانهای اولیه وجود نداشته‌اند و یا در هنگام مشاهده هنوز فرصت کافی برای اینکه پرنور بسوزند نداشته‌اند؛ بنابراین در زمانهای اولیه I_0 بسیار کوچک بوده است. ممکن است برخی از پرتوهای نور با ماده بین راه برخورد نکرده باشند و بتوانیم به کمک آنها مستقیماً ماده گرم اولیه را در عالم اولیه ببینیم که روشنایی سطحی آنها به قدری زیاد است که می‌تواند ما را بسوزاند و از بین ببرد. بدین ترتیب شکل جدید این پارادوکس آن است که ابتدا به نظر می‌رسد که تمامی آسمان باید حداقل در دمای ماده در هنگام جدایی ماده از تابش باشد (تقریباً 3000K). (معادله ۱۲-۷ را ببینید) اما انتقال به سرخ این دما را کاهش می‌دهد و به یک تابش 3K بی‌خطر می‌رساند که فقط می‌توان آن را با گیرنده‌های بسیار حساسی آشکار ساخت.

این بحث به آسمان شب هنگام مربوط می‌شود؛ با وجود این، همین بحث در مورد آسمانی که در طول روز توسط خورشید پنهان نشده است نیز معتبر است. پس علت اینکه در عکس روی

جلد روشنایی هیچ جای آسمان به اندازه روشنایی سطح خورشید هم نیست انبساط عالم از ابتدای آن در یک زمان متناهی در گذشته است.

تمرینها

۷-۷ نحوه به دست آوردن معادله ۱۱-۷ را بررسی کنید، و معادله ۱۲-۷ را به دست آورید.
 ۸-۷ شمارش مقدار: فرض کنید که در یک مدل عالم FLRW چگالی اشیا واقع در فاصله مختصه‌ای r از ناظر n باشد. انتظار دارید چند جسم را در فاصله r و $r + dr$ در گستره زاویه‌ای $d\theta$ و $d\phi$ در حول جهت (θ, ϕ) مشاهده کنید؟
 [راهنمایی: (۱) ویژه فاصله dl متناظر با dr در فاصله r از ناظر را بیابید. (۲) سطح dA بین $d\theta$ و $d\phi$ را در این فاصله تعیین کنید. (۳) از آنجا ویژه حجم dV متناظر با $dr, d\theta, d\phi$ را بیابید و به کمک آن تعداد dN و تعداد این اجسام در حجم dV را از معادله $dN = n dV$ به دست آورید.]

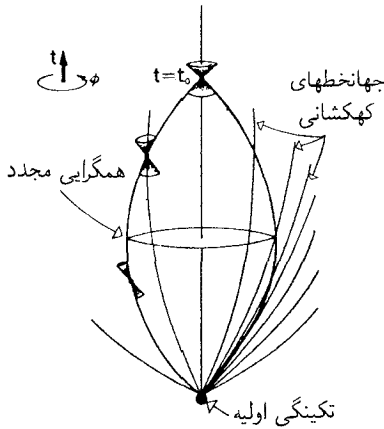
۷-۴ مخروط نور، حدود مشاهده‌ای، و افقها

آخرین مبحثی را که می‌خواهیم در بررسی ویژگیهای فضا زمانهای FLRW مطرح کنیم، ماهیت علیتی آنهاست.

بازکانونی کردن و تکینگی اولیه

هم اکنون نحوه تغییر مساحت یک باریکه نور در حین انتشار از یک چشمه به سوی آینده را محاسبه کردیم. با انجام محاسباتی از همین نوع برای ناظر O که در زمان t_0 رصد می‌کند، با قرار دادن t_0 به جای t فقط، می‌بینیم که مساحت سطح مقطع مخروط نور گذشته کامل در فاصله متناظر با انتقال به سرخ z برابر است با $4\pi R^2(t_0) f^2(u)$ (زیرا انتگرال $\sin\theta d\theta d\phi$ روی تمام دو کره برابر 4π است). با استفاده از ۸-۷ می‌توان آن را به صورت $(1+z)^{-2} 4\pi R^2(t_0) f^2(u)$ نوشت. اکنون مخروط نور گذشته خود را در زمانهای هر چه دورتر در نظر می‌گیریم؛ در این صورت t_0 ثابت است (از این رو $R(t_0)$ نیز ثابت است)، اما به تدریج که به تکینگی اولیه نزدیک می‌شویم $0 \rightarrow R(t_0)$ و $0 \rightarrow z$. در زمانهایی به اندازه کافی دور، $R(t)$ از ۵-۷ به دست می‌آید و از این رو u (که از ۷-۷ به دست می‌آید) همگراست و به یک حد متناهی میل می‌کند؛ از این جهت $f(u)$ ، مقدار k هر چه باشد، از بالا بسته است. بنابراین، این مساحت (که در ابتدا وقتی مخروط نور را به سوی گذشته دنبال می‌کردیم افزایش می‌یافت) بالاخره در $z \rightarrow \infty$ به صفر می‌رسد. قبل از انجام این کار، باید مقدار آن روی یک رویه بازهمگرایی که بین ما و تکینگی اولیه قرار دارد به پیشینه خود برسد (شکل ۷-۱۴).

در بخش قبل، این نتیجه را در مورد خاص عالم تحت سیطره ماده با $k = 0$ اثبات کردیم.



شکل ۱۴-۷ بازهمگرایی مخروط نور گذشته در رویداد $t = t_0$ ؛ اگر از زمان $t = t_0$ به گذشته برگردیم، مساحت سطح مقطع مخروط نور در رویه بازهمگرایی، به بیشینه خود می‌رسد و سپس کاهش می‌یابد و در تکینگی اولیه به صفر می‌رسد.

در آنجا دیدیم که بازهمگرایی می‌تواند در گذشته‌ای نسبتاً نزدیک در مقیاس کیهانشناسی صورت گیرد (در آن مورد، بازهمگرایی در انتقال به سرخ $z = 5/4$ رخ می‌داد). اجسام با انتقال به سرخ بیشتر دارای قطرهای زاویه‌ای به‌طور غیرعادی زیاد هستند و این به دلیل "همگرایی گرانشی" ناشی از وجود ماده در عالم است. همان‌طور که در بالا اشاره شد، کهکشانها و QSO (اشیای شبه‌ستاره‌ای)هایی را رصد کرده‌ایم که ظاهراً بسیار دورترند (در انتقال به سرخهای بزرگتر از ۳).

وجود یک تکینگی اولیه، روشن است که گذشته خود ما، یعنی ناحیه‌ای از فضا-زمان که می‌تواند با رویدادهای علیتی وضعیت کنونی ما را تحت تأثیر قرار دهد (با بخش ۱-۲ مقایسه کنید)، در داخل این مخروط نور، که سطح مقطع آن با نزدیک شدن به تکینگی اولیه به صفر می‌رسد، به دام افتاده است. این نشان می‌دهد که در زمانهای بسیار نزدیک به ابتدای عالم، فیزیک معمولی به صورت جدی نقض می‌شود. گرچه، در اینجا سؤال مهمی مطرح می‌شود: مدل‌های عالم کاملاً هموار و همسانگرد FLRW که از آنها استفاده می‌کنیم (و با فرم متریک ۱-۷ نمایش داده می‌شوند) بسیار آرمانی‌اند. در عالم واقعی ما اکنون ناهمگنیها و بی‌قاعدگیهای بسیاری را مشاهده می‌کنیم، که می‌توانند نماینده ناهمسانگردیها و ناهمگنیهای عمده در زمانهای خیلی نزدیک به ابتدای عالم باشند (مثلاً ممکن است ناشی از یک "گردشاری کلی" یا چرخش عالم باشند)؛ آیا اینها می‌توانند به اجتناب از تکینگی اولیه در مدل‌های عالم واقعیت‌تر از آنچه که تا کنون در نظر گرفته‌ایم بینجامند؟ ویژگی کلیدی این است که حتی در چنین مدل‌های عالم واقعیت‌تری باز هم انتظار داریم که رویه بازکانونی شدن وجود داشته باشد (زیرا وجود آنها در ناحیه‌های اخیر که انحرافشان از مدل‌های عالم هموار شده نسبتاً جزئی است پیش‌بینی شده است). قسمتی از ریاضیات ابداعی راجر پن‌روز و

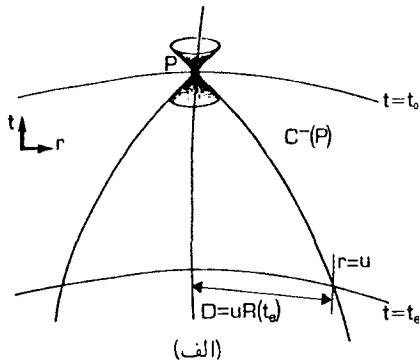
استیون هاکنینگ نشان می‌دهد که اگر بازکانونی شدن رخ دهد چون گرانش یک اثر جاذبه‌ای کلی بر نور وارد می‌کند. گذشتهٔ علیتی ما حتماً در داخل یک مخروط نور که مساحت آن در گذشتهٔ دور به صفر میل می‌کند به دام خواهد افتاد؛ و در نتیجه می‌توان مطمئن بود که هر قدر هم عالم اولیه ناهمسانگرد و ناهمگن باشد، یک تکینگی اولیه در گذشتهٔ ما وجود خواهد داشت.^۱ بدین ترتیب، نظریهٔ نسبیت عام فروریختن ساختار فضا زمان و فیزیک شناخته شده در عالم اولیه را در تمام مدل‌های عالم واقعی پیش‌بینی می‌کند. برای بررسی بیشتر این مطلب باید به یک نظریهٔ کوانتومی گرانی که نسبیت عام حد کلاسیکی آن است روی آوریم. ماهیت چنین نظریه‌ای مسئله‌ای است که هنوز با حل کامل آن فاصلهٔ بسیار داریم.

افق‌های ذره

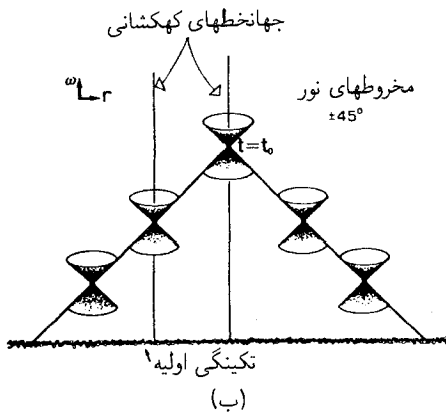
معادلهٔ ۷-۷ با حدود انتگرال‌گیری t_0 و t_e نشان می‌دهد که هرگاه ناظر O در $r = 0$ و در زمان t_0 برای مشاهده انتقال به سرخ مناظر با زمان t_e به عقب نگاه کند تا چه مسافتی را (برحسب مختصهٔ شعاعی r) می‌تواند ببیند [شکل ۷-۱۵ (الف)]. علی‌الاصول، برای او هر ماده‌ای که مقدار مختصهٔ r آن کوچکتر یا مساوی با u باشد قابل مشاهده است. یک مقدار ثابت برای t_0 در نظر می‌گیریم. در این صورت فاصلهٔ بیشینه u_{\max} که می‌توان با نگاه کردن به زمانهای دور و دورتر دید از $0 \rightarrow t_e$ به دست می‌آید، در اینجا $t = 0$ متناظر است با ابتدای عالم (در آنجا $R = 0$). بررسی شکلی از $R(t)$ که معادله‌های اینشتین تجویز می‌کنند نشان می‌دهد که u_{\max} متناهی است، بدین ترتیب ناظر O در هر زمانی تنها می‌توانند تعدادی متناهی کهکشان را ببیند (یعنی آنهایی که مقدار r آنها از مقدار u_{\max} کمتر است). مثلاً، در یک عالم تخت تحت سلطه ماده، ۷-۶ معتبر است. برای سهولت، قرار می‌دهیم $t_1 = 0$ و ثابت تناسب را α می‌نامیم. داریم $R(t) = \alpha t^{2/3}$. در این صورت ۷-۷ نشان می‌دهد که $u = 3(t_0^{1/3} - t_e^{1/3})/\alpha$ ؛ اگر $t_e \rightarrow 0$ به مقدار حدی $u_{\max} = 3t_0^{1/3}/\alpha$ میل می‌کند.

ویژگی اساسی این است که این عدد متناهی است؛ گرچه، تعداد بینهایت کهکشان در عالمی با توپولوژی استاندارد (کهکشانهایی به‌ازای مقادیر بینهایت بزرگ مختصهٔ r وجود دارند) که در آن $k = 0$ یا $k = -1$ وجود دارند. بدین‌گونه در این موارد آن کسری از ماده در عالم که می‌توانیم دیده باشیم — یا در واقع آن کسری از ماده که ما می‌توانستیم با آن به‌گونه‌ای ارتباط علیتی داشته باشیم — بسیار کوچک است (در یک عالم نامتناهی این کسر به‌طور قطع صفر است). اگر $k = +1$ ، این کسر متناهی اما کوچکتر از یک است. بدین ترتیب یک ویژگی اساسی عالم محدود بودن نواحی و

۱. برای خلاصه‌ای از این موضوع نسبتاً تخصصی نگاه کنید به:



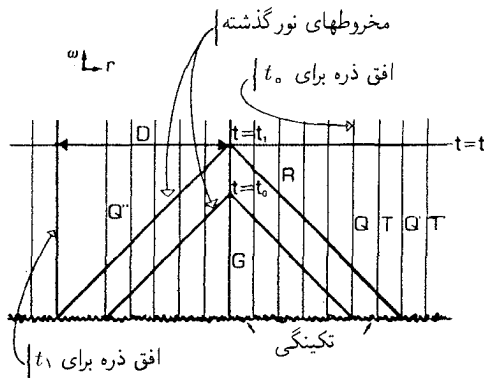
(الف)



(ب)

شکل ۱۵-۷ (الف) یک ناظر در زمان t_0 می‌تواند تا مقدار مختصه شعاعی u را با نوری که در زمان t_0 یا پس از آن گسیل می‌کند ببیند. (ب) شکل ۱۴-۷ که در مختصات جدید رسم شده است و در آن تمام مخروطهای نور با امتداد قائم زاویه 45° می‌سازند (مانند نمودارهای فضای تخت در فصلهای ۱ تا ۴). جهانخطهای کهکشانی قائم هستند و تکنیکی اولیه با یک خط افقی نشان داده شده است و نه یک نقطه تنها.

ماده‌ای است که یک ناظر دلخواه می‌تواند با آن ارتباط علیتی برقرار کند؛ تعداد زیادی کهکشان وجود دارند که بدون توجه به آشکارسازهایی که به‌کار می‌بریم هرگز نمی‌توانیم امیدوی به دیدنشان داشته باشیم، (زیرا اگر قوانین فیزیک، تا آنجا که در حال حاضر می‌دانیم معتبر باشند، علامت نمی‌توانند به‌طور موضعی سریعتر از نور حرکت کنند). اگر می‌توانستیم صبورانه هزارها میلیون سال منتظر بمانیم شاید می‌توانستیم برخی از کهکشانهایی را که قبلاً پنهان بودند ببینیم، اما هرگز همه آنها را نخواهیم دید. در هر زمان بعدی در عالمی که $k = 0$ یا $k = 1$ باشد، در هر آینده دوری، باز هم کهکشانهایی وجود خواهند داشت که یک ناظر نمی‌تواند ببیند یا از لحاظ علیتی تحت اثر آنها قرار گیرد؛ در واقع بینهایت کهکشان از این نوع وجود خواهند داشت.



شکل ۱۶-۷ در مختصات شکل ۱۵-۷ (ب)، روشن می‌شود که ناظری که در کهکشان G است می‌تواند در $t = t_0$ کهکشانهای R و Q را ببیند اما T و Q' را نمی‌بیند در $t = t_1$ ، کهکشانهای T و Q'' مرئی می‌شوند اما T' مرئی نیست. بدین ترتیب در هر زمانی، G یک افق ذره دارد که کهکشانهای مرئی را از نامرئی جدا می‌سازد. قطر D برای افق ذره در زمان $t = t_1$ نشان داده شده است.

این ویژگی را مشکل می‌توان از یک نمودار عادی فضا-زمان عالم فهمید زیرا به تدریج که $R \rightarrow 0$ همه چیز زیاد از حد فشرده می‌شود (شکل ۱۴-۷ را ببینید). گرچه، می‌توانیم با انتخاب مختصاتی جدید از این رویداد اجتناب کنیم و این خواص علیتی را بسیار روشنتر می‌کند. به خصوص، می‌توانیم مختصاتی را انتخاب کنیم که در آن مخروطهای نوری در عالم زاویه 45° با قائم بسازند، همان‌طور که در نمایش استاندارد فضا-زمان تخت می‌ساختند. (در مورد عالم با $k = 0$ ، مختصه فضایی r است، و مختصه زمان w ، که زمان همدیس نامیده می‌شود برابر با

$$w = \int_0^t \frac{d\tau}{R(\tau)}$$

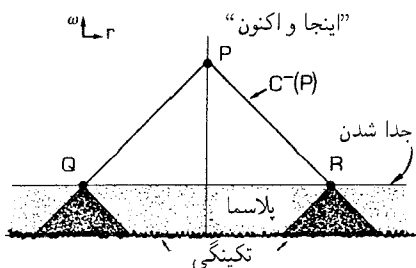
است.) هرگاه از چنین مختصاتی استفاده کنیم، نتیجه مانند نمودار همدیس شکل ۱۵-۷ (ب) است. جریمه‌ای که برای این نمایش واضح روابط علیتی می‌پردازیم این است که نمایش فاصله‌های فضایی در این نمودار به نحو نامطلوبی در نزدیکی تکینگی اولیه و پیچیده می‌شود (مقیاس فاصله‌های مختصه‌ای که مستقیماً در نمودار نمایش داده شده است باید با ضرب در $R(t)$ تغییر داده شود تا مطابق فاصله‌های فضایی اندازه‌گیری شده باشد).

محدودیت‌های علیتی. شکل ۱۵-۷ (ب) به روشنی ماهیت محدودیت‌های علیتی در این مدل‌های عالم را نشان می‌دهد. در زمان t_0 ، گذشته علیتی کهکشان G در داخل مخروط نور گذشته آن C^- است، که مرز پایین آن تکینگی اولیه در $R = 0$ است (شکل ۱۶-۷). جهانخط‌های اصلی در این نمودار خط‌های قائم هستند. بدین ترتیب، ناظر G کهکشانهای Q و R را خواهد دید؛ اما، کهکشان

T دیده نخواهد شد (زیرا تاریخ گذشته‌ی او مخروط نور گذشته C^- را قطع نمی‌کند). کهکشان Q دقیقاً مورد حدی است: این “ذره” ای است که کهکشان‌هایی را که G در زمان t_0 دیده است از کهکشان‌هایی که ندیده است جدا می‌سازد. به‌گفته‌ی ریندلر، می‌توانیم مجموعه‌ی تمام کهکشان‌هایی را که کهکشان‌های دیده شده را از آن‌هایی که دیده نشده‌اند جدا می‌سازد به‌عنوان افق ذره G (در زمان t_0) تعریف کنیم. در زمان بعدی t_1 ، افق ذره ناظر G حرکت کرده است. پس در t_1 ، کهکشان‌های T و Q مرئی هستند؛ افق ذره به Q' رفته است و T' هنوز دیده نمی‌شود. بنابراین علی‌الاصول با گذشت زمان، کهکشان‌های جدیدی را می‌توان پس از عبور از افق ذره G مشاهده کرد (آنها در زمان t_0 مرئی نیستند اما در زمانی مانند t'_1 قابل مشاهده می‌شوند). اندازه فیزیکی افق ذره در زمان t_0 (یعنی فاصله در آن زمان تا ذراتی که در مقدار مختصه $u = u_{\max}$ قرار دارند) برابر است با $D = R(t_0)u_{\max}$. از آنجا که $R(t_0) = \alpha(t_0)^{2/3}$ ، داریم $D = 3t_0$. این برحسب ثابت هابل H_0 برابر با $D = 2/H_0$ است. (این کمی غیردقیق است زیرا عالم اولیه تحت سیطره تابش است، از این رو در زمان‌های اولیه رابطه $5-7$ معتبر است نه $6-7$ ؛ گرچه، این خطا کوچک است.) چگونه کهکشان‌های جدید مرئی می‌شوند — آیا به‌صورت جرعه‌ای از عدم، نمایان می‌شوند؟ خیر، و دلیل آن تنها این نیست که آنها در زمان‌های اولیه تشکیل نشده‌اند. در بحث فعلی فرض می‌کنیم که اشیای درخشانی در هر زمان ابتدایی دلخواهی قابل مشاهده باشند. نکته اینجاست که در حداقل ذره، حد $R \rightarrow 0$ برقرار است، اما طبق $8-7$ این درست شرط نامتناهی بودن z است. بدین‌گونه، افق را می‌توان رویه‌ی حدی دانست که در آن انتقال به‌سرخ کهکشان‌های مشاهده شده واگرا می‌شود. بنابراین، به‌نظر می‌رسد که چشمه به‌تدریج ظاهر می‌شود، و با کاهش انتقال به‌سرخ شدت تابش دریافتی به‌طور یکنواخت افزایش می‌یابد (هرگاه z بینهایت باشد، تابش دریافتی صفر می‌شود، $7-11$ را ببینید).

با این توضیح روشن می‌شود که چگونه وجود افق‌های ذره اساساً ذراتی را که می‌توان در چنین عالم‌هایی مشاهده کرد محدود می‌سازد. این وضع کاملاً با وضعیت در عالم‌های میلن که در بخش $3-4$ مورد بحث قرار گرفت متفاوت است. در آن مثال، وضعیت به‌گونه‌ای است که در شکل $4-42$ نشان داده شده است. هیچ افق ذره‌ای وجود ندارد — هر ناظر در هر کهکشان‌ی می‌تواند همواره تمام کهکشان‌های دیگر موجود در عالم را مشاهده کند. راجر پن‌روز متذکر شده است که این اختلاف اساساً ناشی از این واقعیت است که در مورد FLRW، کرانه‌ی عالم (تکینگی اولیه) فضاگونه است، و این همواره وجود افق‌های ذره را ایجاد می‌کند [با شکل $7-15$ (ب) مقایسه کنید]، در صورتی‌که در مورد میلن کرانه‌ی عالم یک رویه‌ی نورگونه (صفر) است، که مستلزم نبود افق‌های ذره است.

پیامدهای فیزیکی. وجود افق‌های ذره به دلایل فیزیکی و فلسفی بسیار قابل توجه است. از نظر فیزیکی، وجود این افق‌ها، ابعاد فضایی مناطقی را که می‌توانسته‌اند در هر زمانی با یکدیگر ارتباط

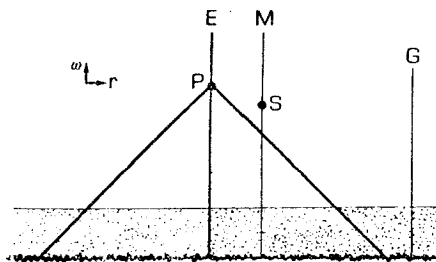


شکل ۱۷-۷ رویدادهای Q و R در زمان جدایی روی مخروط نور گذشته P هستند، اما بین آنها ارتباط علیتی نمی‌تواند وجود داشته باشد، زیرا گذشته علیتی آنها (که تکینگی اولیه مرز آن است) یکدیگر را قطع نمی‌کند. بنابراین تعجب‌آور است که تابش زمینه میکروموجی دریافتی از آنها دارای دمای مشاهده‌شده یکسان است.

علیتی داشته باشند محدود می‌کند. این یک محدودیت اساسی است که بر فرایندهایی مانند تشکیل کهکشانها اثر می‌گذارد، زیرا اندازه مجموعه‌های ذرات برهم‌کنش کننده‌ای را که می‌توانند کهکشانها و یا خوشه‌های کهکشانی را تشکیل دهند محدود می‌کند. به علاوه وجود این افقها همسانگردی مشاهده شده در تابش زمینه میکروموجی، یعنی این واقعیت را که در هر جهت که نگاه کنیم دمای این تابش را یکسان می‌بینیم به یک معمای بزرگ تبدیل می‌کند: ظاهراً این همسانگردی نمایانگر آن است که شرایط در مناطقی که توانسته‌اند هیچ ارتباط علیتی با یکدیگر داشته باشند بسیار مشابه بوده است، (شکل ۱۷-۷).

این مسئله‌ای بنیادی است که تنها به راههای زیر قابل حل است (۱) یک نظریه کامل برای خلقت داشته باشیم که پیشگویی کند شرایط اولیه باید حتی برای مناطقی که از نظر علیتی بی‌ارتباطاند یکنواخت باشد؛ یا (۲) از برخی از فرضهای معمولی در فیزیک، مانند معادله‌های حالت یا معادله‌های میدان صرف‌نظر کنیم (همان‌گونه که مثلاً در "عالم تورمی" اتفاق می‌افتد، در این عالم معادله‌های حالت با خواص غیرعادی به علت اثرهای کوانتومی موجود در عالم اولیه، به وجود می‌آیند، بخش بعد را ببینید)؛ یا (۳) یک توپولوژی متفاوت با نظریه استاندارد برای عالم در نظر می‌گیریم، که نتیجه آن یک عالم کوچک باشد که تا کنون بارها به آن برخورد کرده‌ایم زیرا توپولوژی مقاطع فضایی، توپولوژی "طبیعی" که معمولاً فرض می‌کنیم نیست. امکان سوم را در بخش آخر این فصل اجماً بررسی می‌کنیم.

پیامدهای فلسفی. از نظر فلسفی، افقهای ذره نشان می‌دهند که با توجه به درک معمول ما از مدل‌های عالم FLRW، فقط کسر کوچکی از تمام ماده موجود در عالم را مشاهده کرده‌ایم. این توان ما را در تعیین ساختار فضازمانی که در آن زندگی می‌کنیم، و همچنین برای پیشگویی آینده آن به نحو اساسی محدود می‌کند. بنابراین، در شرایط عادی، نمی‌توانیم اکیداً پیشگویی کنیم که ماه فردا درخواهد آمد (حتی اگر فرض کنیم که قوانین فیزیکی بدون تغییر باقی بمانند)، زیرا ما



شکل ۷-۱۸ جهانخطهای زمین و ماه در یک مدل عالم FLRW. یک منبع G تابش گرانشی خارج از مخروط گذشته زمین در رویداد P (که در P از زمین قابل رؤیت نیست) می‌تواند ماه را در رویداد S نابود کند. بنابراین پیشگویی اینکه فردا ماه درخواهد آمد بر مبنای فرضیه‌ای است که مبنای مشاهداتی ندارد.

تمام داده‌های لازم برای آن پیشگویی را در اختیار نداریم (شکل ۷-۱۸). مثلاً، یک موج گرانشی از چشمه‌ای که هنوز ندیده‌ایم یا ارتباط علیتی با آن نداشته‌ایم ممکن است ماه را در طی روز نابود سازد و پیشگویی ما غلط از آب درآید. اگر افق‌هایی وجود نداشتند، می‌توانستیم تمام ماده موجود در عالم را ببینیم نه اینکه تنها به نمونه‌ای دسترسی داشته باشیم که، همانند مدل‌های استاندارد با چگالی پایین، صفر درصد کل ماده موجود در عالم را تشکیل بدهد. در یک عالمی بدون افق ذره، ارتباط مشاهده‌ای ما با عالم، و به‌ویژه، توان ما برای دانستن قطعی اینکه چه چیز در آن هست و در آینده (در مقیاس کیهانشناسی) چه می‌تواند اتفاق بیافتد، با عالم‌های دارای افق ذره بسیار متفاوت خواهد بود. تجزیه و تحلیل مفصل مسائل موجود در تعیین ساختار عالم در نتیجه وجود این افق‌ها را می‌توان در مقاله "کیهانشناسی و تحقیق‌پذیری" یافت.^۱

تمرین ۷-۹

قانون انبساط عالم تحت سیطره تابش ۷-۵ برای زمان‌های قبل از t_d مفروض است، اندازه فیزیکی D افق ذره در زمان $t = t_d$ متناظر با جدایی $(1 + z = 1 + z_d = 1000)$ را برحسب تابع شعاع $R(t_d)$ در زمان جدایی حساب کنید. اکنون قانون ۷-۶ انبساط عالم تحت سیطره ماده از زمان حال t_0 تا زمان جدایی را در نظر بگیرید و نتیجه را دوباره برحسب ثابت هابل برای زمان حاضر H_0 بیان کنید. [برای این کار باید مقادیر R و \dot{R} را در t_d جفت کنید.]

اندازه فیزیکی کنونی D' متناظر با D چیست؟ (این اندازه کنونی بزرگترین ناحیه‌ای است که می‌توانست در زمان جدایی برهم‌کنش فیزیکی داشته باشد.) با فرض $k = 0$ ، اندازه زاویه‌ای D طبق اندازه‌گیری یک ناظر در زمان t_0 چقدر است؟ به اختصار توضیح دهید که چرا این بزرگترین

1. "Cosmology and verifiability" in *Physical Sciences and the History of Physics*, ed. R. S. Cohen and M. W. Wartofsky, Reidel, 1984.

مقیاس زاویه‌ای است که در آن فرایندهای فیزیکی عادی می‌توانند همسانگردی مشاهده شده در تابش زمینه میکروموجی را توضیح دهند.

۷-۵ حالت پایا و عالمهای تورمی

یک مدل عالم جالب توجه که چندین بار در موقعیتهای مختلف مورد توجه قرار گرفته است، عالم دوسیه است، که ابتدا اخترشناس هلندی ویلم دوسیه آن را در سال ۱۹۱۷ (۱۲۹۶ شمسی) کشف کرد. این عالم دارای متریک ۷-۱ فضا-مقطعی تخت و انبساط نمایی است: $k = 0$ ، $R(t) = \exp(Ht)$ و H ثابت است.

این عالم در ابتدا به‌عنوان یک جواب معادله‌های میدان اینشتین در خلا کشف شد که در آن ثابت کیهانشناسی Λ (با بحث عالم ایستای اینشتین در بالا مقایسه کنید) غیرصفر است. اما چون این عالم حاوی ماده نیست، مشکل بتوان از آن به‌عنوان مدلی برای عالم واقعی استفاده کرد؛ و هنگامی که جامعه اخترشناسان مدل‌های عالم انبساطی فریدمن و لومتر را در سال ۱۹۳۰ (۱۳۰۹ شمسی) کشف کردند این مدل عموماً کنار گذاشته شد.

عالم حالت پایا

عالم دوسیه را هرمن باندی، تامی گلد، و فرد هویل دوباره در سال ۱۹۴۸ (۱۳۲۶ شمسی) به‌عنوان مدل عالم حالت پایا کشف کردند. آنها نشان دادند که این مدل تنها مدل عالم در حال انبساط است که حول هر نقطه‌ای همسانگرد است و همچنین "اصل کیهانشناسی کامل" درباره آن صادق است؛ طبق این اصل تمام نقاط فضا زمان هم‌ارزند، و شرایط فیزیکی در همه جا و در همه زمانها در عالم یکسان است. مثلاً، از این فرم برای $R(t)$ فوراً نتیجه می‌شود که "ثابت هابل" واقعاً در این عالم در فضا و در زمان ثابت است (در واقع $H_0 = H$). به‌ویژه، در ابتدای این مدل عالم مهبانگ داغ وجود ندارد؛ مانند عالم ایستای اینشتین، این عالم همواره بدون تغییر وجود دارد.^۱

در حالت کلی در یک مدل عالم در حال انبساط، چگالی ماده به مرور زمان (با دور شدن کهکشانها از یکدیگر در این مدل) کاهش می‌یابد. بدین ترتیب برای رسیدن به یک مدل عالم حالت پایا که در آن انبساط امکانپذیر است، باید معادله‌های میدان اینشتین در نسبیت عام و قوانین پایستگی چگالی انرژی کل ماده که با معادله‌های میدان ارتباط نزدیک دارد را کنار گذارد. هویل مجموعه جدیدی از معادله‌های میدان پیشنهاد کرد که در آن ناپایستگی ماده به‌سبب یک میدان C^* در فضا زمان بود، که عملاً به یک جمله مؤثر Λ در این معادله‌ها و آفرینش مداوم ماده به‌طور

۱. نگاه کنید به:

F. Hoyle "The steady-state universe" *Scientific American*, September 1956.

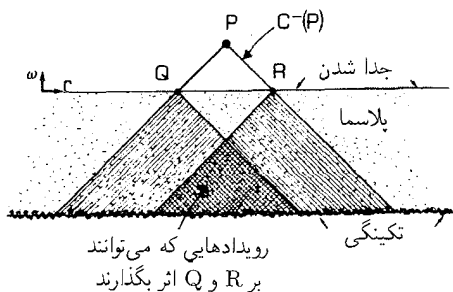
یکنواخت در سراسر عالم می‌انجامید. اما، شواهدی که در آن زمان از شمارش منابع رادیویی وجود داشت نشان می‌داد که عالم در یک حالت پایا نبود، و کشف تابش زمینه میکروموجی در سال ۱۹۶۵ (۱۳۴۴ شمسی)، که به "تابش بازمانده" از حالت داغ اولیه عالم تعبیر شد، سبب پذیرش مدل‌های استاندارد مهبانگ شد که در بالا شرح آن رفت.

عالم تورمی

در حالی که معلوم شده است مدل‌های مهبانگی در توصیف بیشتر تاریخ عالم رضایتبخش‌اند، یک سری مسائل در درک شرایط اولیه در مدل‌های استاندارد پیش آمده‌اند، به‌ویژه مسائل علیتی در ارتباط با وجود افق‌های ذره (بخش قبل را ببینید). این مسائل باعث شد که اخیراً آلن گوث و دیگران مدل جدیدی را برای عالم اولیه پیشنهاد کنند: "عالم تورمی". این همان مدل حالت پایاست که در هیئت جدیدی ظاهر شده است؛ ایده اساسی آن است که اثرهای میدان کوانتومی در عالم اولیه همراه با شکسته شدن تقارن نیروهای بنیادی طبیعت که در نتیجه کاهش انرژی برهم‌کنش میانگین در عالم روی داد، عملاً به پیدایش یک جمله Λ در معادله‌های میدان گرانشی انجامید، و از این رو برای مدلی یک انبساط نمایی روی داد.^۱ در طی این دوره شعاع عالم $R(t)$ به سرعت و به مقدار بسیار زیاد افزایش یافت، در حالی که فشار و چگالی عملاً ثابت ماندند؛ در نتیجه اندازه منطقه‌ای که در زمان جدایی در داخل افق ذره قرار دارد به میزان قابل ملاحظه‌ای بزرگتر از مدل استاندارد و عملاً بزرگتر از تمامی عالم قابل رؤیت است. این مطلب ارتباط علیتی بین منطقه‌های مختلفی که اکنون در جهت‌های مختلف آسمان برای ما قابل رؤیت هستند را امکان‌پذیر می‌سازد، و بنابراین در چنین عالمی اثرهای علیتی می‌توانند همسانگردی اندازه‌گیری شده تابش زمینه را توضیح دهند.

این امر را می‌توان با توجه به اینکه تابع نمایی $R(t)$ در $7-7$ می‌تواند مقادیری بسیار بزرگتر از u در مدل استاندارد داشته باشد تا اندازه‌ای فهمید. با نگاهی به نمودار همدیسی که در این مورد به دست می‌آید چگونگی این مطلب روشن می‌شود (شکل ۷-۱۹). این درست مانند مورد قبل است (شکل ۷-۱۷)، به استثنای یک ویژگی مهم: لحظه‌های اولیه عالم (که برحسب ویژه زمان، کسر بسیار کوچکی از ثانیه است) انبساط عملاً از رویه آخرین پراکندگی شروع می‌شود، به طوری که در این نمودار علیتی، مهبانگ در زمان همدیسی بسیار زودتر از مورد قبل قرار دارد. معنای این مطلب همپوشانی قسمت بزرگی از گذشته نقطه‌های P و Q را ایجاب می‌کند (در مدل استاندارد این دو مجزا هستند)، که به نوبه خود توضیح می‌دهد که چگونه برخی علت‌های مشترک می‌تواند بر دامای زمینه میکروموجی که اکنون در جهت‌های مخالف در آسمان مشاهده می‌کنیم، تأثیر گذارد.

۱. مثلاً نگاه کنید به



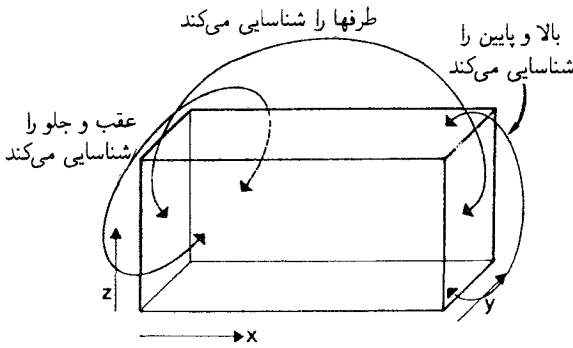
شکل ۷-۱۹ وضعیت عالم تورمی. در مختصات علیتی، تکینگی اولیه نسبت به مورد قبل (شکل ۷-۱۷) در گذشته بسیار دورتری قرار دارد. در نتیجه گذشته‌های علیتی R و Q تا حدود زیادی یکدیگر را می‌پوشانند؛ از این رو، یک علت فیزیکی مشترک می‌تواند شرایط مشابه موجود در R و Q را تبیین کند که منجر به همسانگردی تابش زمینه میکروموجی کیهانی مشاهده شده می‌شود. گرچه، هنوز اثرهای علیتی بر R وجود دارند که نمی‌توانند بر Q اثری داشته باشند و برعکس.

این تحلیل جالب توجهی برای مسائل علیتی وابسته به وجود افقهای ذره در مدل عادی است. اگرچه، باید به چند نکته توجه کرد. اولاً، از شکل ۷-۱۹ روشن است که هرچند قسمت اعظم گذشته علیتی P و Q مشترک است اما برخی از قسمتهای گذشته آنها مشترک نیست. بدین ترتیب آنها در معرض تأثیرهای مستقل هستند، دانش کامل به تمام داده‌هایی که به R منجر می‌شوند با دانش کامل به داده‌هایی که به Q منجر می‌شوند یکی نیست. ثانیاً نظریه فیزیکی مربوط به این پیشنهاد جالب هنوز بر پایه‌های محکمی استوار نیست، و هنوز شواهد تجربی آن را تأیید نمی‌کنند. ثالثاً، در محدوده این مدل مسائلی در ارتباط با موضوع تشکیل کهکشانها وجود دارد. از این رو، فعلاً این مدل را باید یک مدل بسیار جالب توجه، اما اثبات نشده در مورد آنچه ممکن است رخ داده باشد دانست.

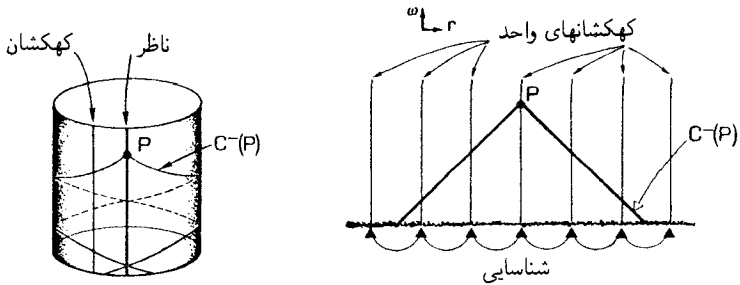
۷-۶ عالمهای کوچک

یک مورد استثنایی در بالا ذکر شد که جا دارد به اختصار به آن بپردازیم. این مورد مربوط به "عالم کوچک" است که در آن ویژگیهای خمیدگی و تاریخ انبساط با مدل‌های عالم FLRW یکسان است، اما توپولوژی، یعنی همبندی سراسری آن، با مدل‌های معمولی متفاوت است.

ساده‌ترین مدل چنین عالمی مدل فضا-تخت ($k = 0$) با توپولوژی چنبره‌ای است. در این صورت فضا-مقطعهها $\{t = \text{const.}\}$ تخت اما از لحاظ فضایی بسته‌اند (شکل ۷-۲۰). اگر به اندازه فاصله d_x در جهت x پیش برویم دوباره به جای اولمان برمی‌گردیم؛ همین‌طور اگر به اندازه d_y در جهت y و به اندازه d_z در جهت z حرکت کنیم فضا-مقطعهها بسته می‌شوند. حجم این فضا-مقطعهها متناهی است، و تعداد کهکشانها در این عالم متناهی است.

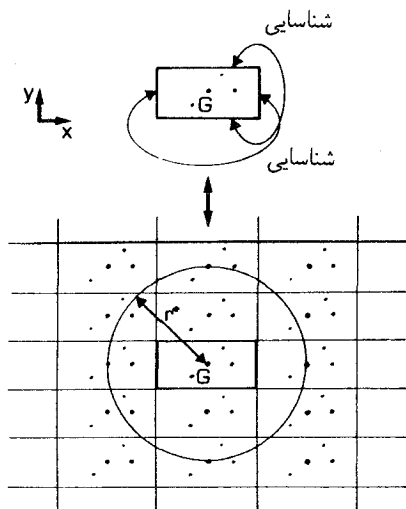


شکل ۲۰-۷ یک "عالم کوچک" که از یک مقطع مدل عالم FLRW با $k = 0$ (که از نظر فضا تخت است) با شناسایی طرفهای مقابل یک قطعه مکعب مستطیل شکل در یک فضا-مقطع $\{t = \text{const.}\}$ ساخته می‌شود. این بدان معناست که مثلاً وقتی ناظری که در جهت z حرکت می‌کند به وجه بالایی می‌رسد، راه خود را به طرف بالا از موضع متناظر در وجه پایینی ادامه می‌دهد.



شکل ۲۱-۷ نمایش یک بعد فضایی (و بعد زمان) در یک "عالم کوچک". تمام خطهای قائم نماینده یک کهکشان واحد هستند، و از این رو با یکدیگر همانندند، بدین ترتیب دو نمودار هم‌ارزند. مخروط نور گذشته رویداد P جهانخط کهکشان را به دفعات قطع می‌کند. و از این رو یک ناظر تصویرهای متعددی از هر کهکشان را مشاهده می‌کند. به‌ویژه او تصاویر بسیاری از کهکشان خودش در گذشته را می‌بیند.

با وجود این، چنین مدل عالمی نامتناهی به‌نظر می‌رسد؛ در واقع، این عالم با مدل عالم FLRW تخت که در بالا مورد بحث قرار گرفت یکسان به‌نظر می‌آید. با استفاده از یک نمایش یک‌بعدی (شکل ۲۱-۷)، وقتی که فضا-مقطعها بر روی خود بسته می‌شوند، ساده‌ترین راه برای دیدن اینکه چه اتفاق خواهد افتاد "باز کردن" فضا-زمان برای به دست آوردن فضا-مقطعها است که ظاهراً نامتناهی هستند، اما در آنها تمامی اشیایی که درست به فاصله d از یکدیگر نمایش داده شده‌اند در واقع یک شیء واحد هستند. در این صورت به‌سادگی می‌توان دید که چگونه مخروط نور گذشته ما می‌تواند جهانخط یک کهکشان واحد را چندین بار قطع کند و این امکان را می‌دهد که



شکل ۷-۲۲ نمایش دوبعدی یک عالم کوچک در زمان $t = t_0$. ضلعهای مقابل مستطیل شناسایی شده‌اند، بنابراین وضعیت عملاً مانند وضعیتی است که در آن یک سلول پایهٔ بینهایت بار در صفحهٔ اقلیدسی تکرار شده باشد. اگر به فاصلهٔ r^* که با انتقال به سرخ z^* مشخص می‌شود نگاه کنیم، همان سلول واحد را به دفعات می‌بینیم. این مدل عالم در یک مقیاس به اندازهٔ کافی بزرگ الزاماً از حیث فضا همگن به نظر می‌رسد حتی اگر سلول پایه ناهمگن باشد.

تصویرهای بسیاری از یک شیء واحد ببینیم. بدین ترتیب، این عالم کوچک با فضای متناهی به نظر آن ناظر یک مدل عالم FLRW نامتناهی می‌آید، زیرا او تصویرهای متعددی از هر کهکشان را می‌بیند که با زیاد شدن فاصله محو می‌شوند. این را می‌توان در یک نمودار دوبعدی یک فضا-مقطع دوبعدی $\{t = \text{const.}\}$ در این عالم نیز مشاهده کرد (شکل ۷-۲۲). در عالم کوچک، پس از طی مسافت L در جهت x و یا y دوباره به جای اول می‌رسیم. در اینجا با "بازکردن" مدل عالم، می‌بینیم که از نظر رصدی این کار معادل وضعیتی است که سلول واحد پایه و محتویات آن دقیقاً به‌طور نامعین در تمام جهتها تکرار می‌شوند. در این صورت با نگاه به اطرافمان در تمام جهتها تا رسیدن به یک انتقال به سرخ حدی z^* ، یک ماده را چندین و چند بار می‌بینیم. این اثر تقریباً مشابه با اثر آویختن چند صد مدل کهکشان در یک جعبه است که اطراف و بالا و پایین آن آینه است؛ به نظر می‌رسد که کهکشانها تا بینهایت ادامه دارند، زیرا هر کهکشان با بازتابهای چندگانه تصاویر زیادی از خود به وجود می‌آورد.^۱

اثبات اینکه عالم واقعی چنین نیست بسیار مشکل است، عالمی که در آن تعداد نسبتاً کمی

۱. این اثر در مقالهٔ زیر نمایش داده شده است:

شیء تعداد بسیار زیادی تصویر درست می‌کنند، زیرا به آسانی نمی‌توان تشخیص داد که تمام تصاویر یک شیء در چنین عالمی متعلق به همان شیء واحد هستند. علت آن است که تصاویر مختلف این شیء را با انتقال به سرخ‌های متفاوت، در جهت‌های مختلف، با زاویه‌های ظاهری مختلف، در مراحل مختلف از تاریخ آن و ظاهراً از وجوه مختلف می‌بینیم (مثلاً ممکن است یک کهکشان مارپیچی را در یک جهت از لبه آن و در جهت دیگر از بالای صفحه آن ببینیم).

برای برتر شمردن این مدل‌های عالم چند دلیل وجود دارد. یکی اینکه، برخلاف مدل معمول، در این عالمها در زمانهای اخیر افق ذره وجود ندارد (تمام ماده موجود در عالم را دیده‌ایم) و از این‌رو مسئله پیشگویی که قبلاً مطرح شد پیش نمی‌آید — می‌توان پیشگویی کرد که ماه فردا در خواهد آمد زیرا در این مورد داده‌های کافی برای پیشگویی در دست داریم (تمام منابعی را که ممکن است در حرکت ماه دخالت کنند دیده‌ایم). ثانیاً، مسئله شرایط مرزی که گریبان بسیاری از نظریه‌های فیزیکی را می‌گیرد و اینشتین و ویلر هم بر آن تأکید کرده‌اند، از بین می‌رود، زیرا در این موارد عالم مرز فضایی ندارد، از این‌رو دیگر مجبور نیستیم قبل از تعیین رفتار میدانهای فیزیکی مقادیر آنها را در بینهایت معین کنیم، و ثالثاً، در چنین مدل‌هایی، همگنی و همسانگردی ظاهری عالم به‌نحو شایسته‌ای توضیح داده می‌شود — عالم همگن و همسانگرد به‌نظر می‌آید زیرا ما یک منطقه واحد را به دفعات می‌بینیم. این ساده‌ترین دلیلی است که می‌توان برای همگنی تصور کرد.

تمرینها

۷-۱۰ در یک عالم حالت پایا، یک قانون انبساط نمایی $R(t) = \exp Ht$ که در آن H ثابت است برای تمام زمانها معتبر است. در این مورد تکینگی اولیه وجود ندارد (به‌یاد داشته باشید که معادله‌های اینشتین صادق نیستند). بنابراین در محاسبه افق ذره باید مقادیر t را از $-\infty$ تا t_0 در نظر بگیریم؛ یعنی $u = \int_{-\infty}^{t_0} dt/R(t)$. نشان دهید که افق ذره وجود ندارد.

با توجه به این نشان دهید، که اگر در زمانهای اخیر عالم دارای یک قانون انبساط نمایی باشد اما دورانی وجود داشته باشد $t_{I1} < t < t_{II}$ که در آن در لحظات اولیه عالم $(t_I < t_a)$ یک انبساط نمایی رخ دهد در این صورت مقیاس افق اکنون بسیار بزرگتر از مدل استاندارد خواهد بود، و در واقع می‌تواند از اندازه عالم مرئی تجاوز کند.

اگر می‌توانید، تمرین ۷-۹ را تکرار کنید، اما اکنون انبساط عالم را برای مدت زمان Δt که $R(t)/R_0$ از 10^{-56} به 10^{-27} می‌رسد نمایی در نظر بگیرید (یعنی $R = \mu \exp \nu t$ ، که در آن μ و ν ثابت هستند). نتایج خود را با نتایج تمرین ۷-۹ مقایسه کنید.

۷-۱۱ در یک مدل عالم کوچک $\{k = 0\}$ که در آن $R(t)$ فرم تحت سیطره ماده ۷-۱ ج را دارد، تعداد تصاویر قابل رؤیت هر کهکشان را تا انتقال به سرخ $z = 1$ برآورد کنید. $t_1 = 0$ ، و مقیاس طول شناسایی 40°Mpc است. [تعداد دفعاتی را که سلول واحد پایه در ناحیه قابل رؤیت عالم تا انتقال به سرخ جای می‌گیرد را برآورد کنید].

(الف) هندسهٔ عالم سه‌بعدی اینشتین-دوسیته با بازهٔ زیر توصیف می‌شود

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\{dx^2 + dy^2\}$$

(۱) کاری کنید که مختصات همحرکت $(XI(J), YI(J))$ متعلق به M کهکشان $(J = 1, 2, \dots, M)$ یا از طریق صفحهٔ کلید وارد شوند و یا به‌طور کتره‌ای طوری انتخاب شوند که، $XI(J)$ و $YI(J)$ به‌ترتیب بین حدود $XIMAX, XIMIN$ و $YIMAX, YIMIN$ قرار داشته باشند. (۲) فرض کنید تابع $R(T)$ در زیرروال $EVOLVE$ مشخص شود. زیرروال $PLOT$ را طوری بنویسید که هرگاه زمان T داده شود، وضعیت فضایی کهکشان J را با رسم نقطهٔ (X, Y) که در آن X و Y به‌ترتیب فاصله از مبدأ در امتداد محور x ها و در امتداد محور y ها هستند به‌طور گرافیک نمایش دهد $(X = R(T) * XI(J)$ و $Y = R(T) * YI(J)$ ؛ اگر نقطه در خارج از محدودهٔ مناسبی از مقادیر X و Y قرار گیرد باید آن را نادیده بگیرد. (۳) اکنون یک نمایش گرافیکی از انبساط عالم به روش زیر درست کنید. فرض کنید $R(T) = A * T^{2/3}$ که در آن A ثابت است، و ترتیبی بدهید که وضعیتهای متوالی تمام کهکشانش در یک سری بازه‌های زمانی بین $T = 0$ و $T = TMAX$ ترسیم شود (مقدار $R(T)$ را مکرراً حساب کنید، و سپس زیرروال ترسیم را بخوانید؛ می‌توانید با انتخاب مناسب (الف) مقیاس وضعیت A تمام کهکشانش را در یک زمان دلخواه T_0 تغییر دهید).

(ب) فرض کنید از کهکشان G در مبدأ $(X = 0, Y = 0)$ در زمان T_1 نوری گسیل شود. نشان دهید چگونه کرهٔ نوری که G گسیل کرده است با گذشت زمان در اطراف آن در تمام جهتها پراکنده می‌شود. این کار را با (۱) انتخاب زمان T_2 و محاسبهٔ مقدار $\{(T_2)^{1/3} - (T_1)^{1/3}\} * (3/A) = U$ و (۲) ترسیم دایره $U^2 = (R(T))^2 * (X^2 + Y^2)$ انجام دهید. آیا می‌توانید از این کار برای نشان دادن پیدایش افق ذره استفاده کنید؟ [تذکر: می‌توانید با انتخاب T_2 بزرگتر یا کوچکتر از T_1 ، پیشرفت نور به جلو و یا به عقب را دنبال کنید.]

(ج) وضعیتهای متوالی کهکشانش و نور را در صفحهٔ (T, X) رسم کنید و از این طریق نمودار فضا-زمان این مدل عالم در حال انبساط را به‌دست آورید.

نتیجه‌گیری

به‌طور کلی، مدل‌های عالمی که در این فصل شرح داده شدند مسلماً بسیار ساده‌تر از آنند که بتوانند بسیاری از ویژگیهای جزئی عالم واقعی را توصیف کنند؛ اما یک دیدگاه ایده‌آلی خوشایند فراهم می‌آورند که به کمک آن می‌توانیم بسیاری از ویژگیهای عالم واقعی، از جمله مه‌بانگ داغ، انبساط عالم، و وجود افقها را بفهمیم. در هر مورد، در توافق با مشاهدات کنونی، مبدایی برای عالم در یک تکینگی وجود دارد که در آن تمام قوانین فیزیکی شناخته شده نقض می‌شوند و خود فضا-زمان

آغاز می‌گردد (و این تا حدودی شبیه به پایان فضا زمان در یک تکینگی است که در انتهای رمبش گرانشی اشیای پرجرم پدید می‌آید). به‌رغم کوشش‌های متهورانه، تبیین "خلقت عالم" هنوز دور از دسترس علوم تجربی است.^۱

مدل استاندارد، به علت وجود افق‌های ذره دارای مسائل علیتی است. مفهوم عالم تورمی ممکن است راهی برای غلبه بر این مسائل باشد، اما اکنون این مفهوم هنوز یک پیشنهاد قابل تأمل است. مفهوم "عالم کوچک" هم امکانی است که برخی از ویژگی‌های مشاهده شده عالم را به نحوی جالب توجه توضیح می‌دهد؛ اثبات یا نفی آن مشکل خواهد بود. در هر مورد با استفاده از نمودارهای فضا زمان می‌توانیم بسیاری از ویژگی‌های ممکن عالم فیزیکی را که فهم آنها از راه‌های دیگر نسبتاً مشکل است به روشنی دریابیم.

۱. خواننده‌ای که به ایده‌های فلسفی مربوط به این موضوع علاقه‌مند است در کتاب هریسون که در پانوشت صفحه ۲۹۹ آمده است و همچنین در کتاب زیر بحث هیجان‌انگیزی را خواهد یافت.

سخن آخر

خواننده‌ای که به اینجا رسیده است مفهوم فضا‌زمان و کاربرد آن در نمایش رمیش اشیای پر جرم و تشکیل سیاهچاله، و نیز محدودیتهای علیتی را که لازمهٔ مدل‌های استاندارد عالم در حال انبساط است کاملاً درک کرده است. او می‌تواند، برای تعیین اثر حرکت نسبی بر روی زمان، طول، همزمانی، و سرعت نسبی در فضا‌زمان تخت، محاسباتی را بر مبنای حساب K بانندی انجام دهد و پیامدهای سادهٔ پایستگی انرژی و تکانهٔ نسبیتی را محاسبه کند. او تصویری دربارهٔ معنای فرم متریک فضا‌زمان و چگونگی تعیین ویژگیهای فضا‌زمانهای خمیدهٔ ساده از آن را دارد. اگر پیوسته‌ها را مطالعه کند، مفاهیم اساسی چاربردار و چارتانسور در فضا‌زمان تخت، و به‌ویژه اینکه چگونه انرژی و تکانه در یک چاربردار و میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در یک چارتانسور متحد می‌شوند را خواهد آموخت. مباحثی که مورد بررسی قرار گرفته‌اند و رابطهٔ آنها با یکدیگر با دقت در فهرست راهنما داده شده است، استفاده از آن را به خواننده‌ای که می‌خواهد بداند در این کتاب کدام موضوع در کجا آمده است توصیه می‌کنیم.

مراجع برای مطالعهٔ بیشتر

اگر در کارمان موفق شده باشیم، خواننده علاقه‌مند شده است که دربارهٔ نظریهٔ نسبیت و کاربردهای آن در فیزیک و اخترفیزیک بیشتر بداند. در سراسر کتاب به‌طور پراکنده به کتابها و مقالات دیگر ارجاع شده است، و خواننده تمام آنها را جالب توجه خواهد یافت. در خاتمه چند پیشنهاد برای مطالعهٔ بیشتر، در سطح کتاب حاضر و در سطح پیشرفته‌تر را ارائه می‌کنیم.

کتابهای بسیاری وجود دارند که نسبیت خاص را از دیدگاههای مختلف ارائه می‌کنند. به خواننده‌ای که می‌خواهد وارد جزئیات بیشتری تقریباً در سطح کتاب حاضر شود کتابهای

A. P. French *Special Relativity* (Nelson, 1968);

E. F. Taylor and J. A. Wheeler *Space-Time Physics* (Freeman, 1966);

را توصیه می‌کنیم؛ این کتابها پیامدهای فیزیکی نسبیت خاص را به تفصیل بررسی می‌کنند (که اساس آن در اینجا ارائه شده است، اما مورد بحث مفصل قرار نگرفته است). برای مطالعه بیشتر در مورد نسبیت عام تقریباً در سطح کتاب حاضر کتاب کلاسیک ادینگتون

Space, Time and Gravitation (Harper Torchbooks, 1959);

را پیشنهاد می‌کنیم. این کتاب برای اولین بار در سال ۱۹۲۰ منتشر شد.

مبانی ریاضی و نسبیت عام. برای اینکه نسبیت خاص و یا نسبیت عام را با تفصیل بیشتر بدانیم به ریاضیاتی بیش از آنچه در این کتاب آمده نیاز خواهیم داشت. برای انجام کار دقیق در نسبیت خاص باید، به‌عنوان پایه، حساب دیفرانسیل و انتگرال پایه را به‌خوبی دانست، مثلاً آنچه که

در

R. Courant and F. John *Introduction to Calculus and Analysis* (Interscience, 1965);

ارائه شده است. پایه اضافی برای درک ریاضیات نسبیت عام دانستن حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع چندمتغیره است، به‌ویژه دانستن معنا و نحوه استفاده از مشتقات جزئی است که مثلاً در

M. R. Spiegel *Vector Analysis* (Schaum, 1959);

آمده است. مطالب این کتاب برای کارهای پیشرفته‌تر در نسبیت خاص هم مورد نیاز است.

بیشتر کتابهای مقدماتی در نسبیت عام از این پایه شروع می‌کنند و به تدریج ریاضیات اضافی مورد نیاز را معرفی می‌کنند، به‌ویژه مفاهیم تانسور (که در اینجا به‌اختصار در پیوست معرفی شده است) و مشتقهای تانسوری (که در اینجا نیامده است). شاخه‌ای از ریاضیات که برای بررسی کامل نسبیت عام مورد نیاز است هندسه ریمانی و یا هندسه دیفرانسیل نامیده می‌شود. کتاب

J. L. Synge and A. Schild *Tensor Calculus* (Dover, 1978);

در این موضوع به‌خوبی بحث کرده است. در مورد نسبیت عام کتابهای زیادی وجود دارد؛ که به سبکهای مختلف نوشته شده‌اند، و هر خواننده کتابی را می‌پسندد. ما به‌عنوان مقدمه کتابهای

B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, 1985); W. Rindler *Essential Relativity* (Springer, 1977);

و یا

C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler *Gravitation* (Freeman, 1973);

را پیشنهاد می‌کنیم. هر یک از این کتابها قبل از بحث در مورد نسبیت خاص و نسبیت عام و کاربردهای آنها، ایده‌های پیش‌نیاز در هندسه دیفرانسیل را به تفصیل ارائه می‌کند. مطالعه یکی از این کتابها به‌عنوان پایه را قبل از به‌دست گرفتن کتابهای پیشرفته‌ای نظیر

S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, 1972);

S. W. Hawking and G. F. R. Ellis *The Large Scale Structure of Space Time* (Cambridge University Press, 1973).

توصیه می‌کنیم

کاربردها. در خاتمه، جذابیت این نظریه‌ها در کاربردهای آنها در جهان فیزیکی است. برخی از این کاربردها در کتابهای پیشرفته‌ای که در بالا ذکر شدند مورد بحث قرار گرفته است، اما قبل از اینکه بتوان از این کتابها بهره‌مند شد به مقدار قابل توجهی آمادگی در ریاضیات نیاز داریم. اما، کتابهای مختلفی وجود دارند که این کاربردها را در سطحی تقریباً برابر سطح کتاب حاضر معرفی می‌کنند. نسبیّت خاص (همراه با مکانیک کوانتومی) به‌طور کلی پیامدهای اساسی در فیزیک دارند (مثلاً نگاه کنید به

R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* Addison-Wesley, 1963).

به‌ویژه برای فیزیک ذرات بنیادی (مثلاً نگاه کنید به

J. E. Dodd, *The Ideas of Particle Physics*, Cambridge University Press, 1984).

نسبیّت خاص و نسبیّت عام هر دو در درک اختریف یک انرژی بالا دارای اهمیت‌اند، و این برهم‌کنش در

F. Hoyle and J. V. Narlikar *The Physics-Astronomy Frontier* (freeman, 1980);

به‌خوبی مورد بحث قرار گرفته است.

بالاخره یکی از جذابترین کاربردها در مطالعه خود عالم، یعنی کیهانشناسی است. دو کتاب مقدماتی عالی با سبکهای کاملاً مختلف عبارت‌اند از:

S. Weinberg, *The First Three Minutes* (Basic Books, 1977);

و

M. Rowan-Robinson *Cosmology* (Oxford University Press, 1977).

کتاب

E. R. Harrison, *Cosmology* (Cambridge University Press, 1981);

یک بررسی دقیق و عمیق در سطح کتاب حاضر است، که به ایده‌های نسبیّت عام و رمبش‌گرانشی هم می‌پردازد. اگر قرار باشد که از میان تمام کتابهای عالی موجود تنها یکی را انتخاب کنیم و به‌عنوان همراهی برای کتاب حاضر توصیه کنیم، همین کتاب آخر را انتخاب می‌کنیم.

پیوست الف

انتگرالهای خطی

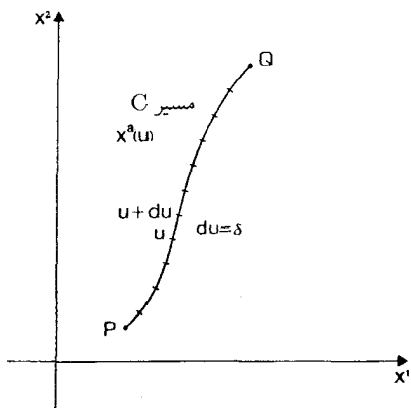
در این کتاب گاهی از مفهوم انتگرال خطی استفاده می‌کنیم؛ برای مثال، انتگرال خطی معرف فاصله بین نقطه ابتدایی و انتهایی یک خم در فضا در امتداد آن خم، و ویژه‌زمان در امتداد یک خم زمان‌گونه در فضا-زمان است (معادله‌های ۴-۲۶ و ۴-۲۵ را ببینید). به بیان دقیق، مفهوم مورد بررسی ما انتگرال تابع دلخواه f در امتداد یک مسیر خاص C از نقطه ابتدایی P تا نقطه انتهایی Q است، که آن را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$I = \int_C f \, du$$

در اینجا، f تابعی از مختصات (x^a) است که برای توصیف فضا به کار می‌رود، $f = f(x^a)$ ، و مسیر C (با پارامتر u) هم برحسب مختصات: $x^a = x^a(u)$ مشخص می‌شود. مقدار انتگرال باید از $u = u_P$ (که متناظر با نقطه ابتدایی P است) تا $u = u_Q$ (که با نقطه انتهایی Q متناظر است) محاسبه شود.

مفهوم انتگرال خطی

ایده اساسی در اینجا همان ایده معمول انتگرالهاست. مسیر C را در نظر بگیرید که به n گام مساوی تقسیم شده است، هر یک به طول پارامتری δ (پس $\delta = u_P - u_Q/n$). مقدار f را در نقطه وسط هر یک از این بازه‌ها تعیین می‌کنیم (شکل الف-۱). طبق تعریف



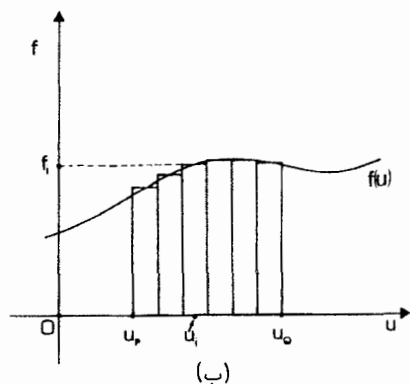
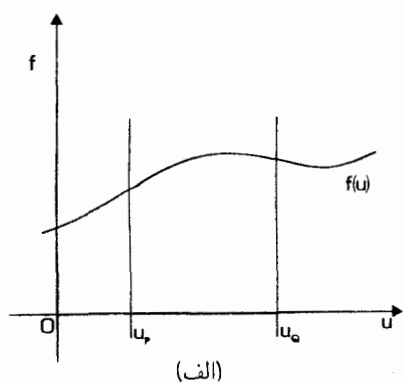
شکل الف-۱ مسیر C از P تا Q که برحسب پارامتر خم u به صورت $(x^a) = (x^a(u))$ مشخص می‌شود. این مسیر را به n قطعه هر یک به طول پارامتری δ تقسیم می‌کنیم.

$$S_n = \sum_{i=1}^n f_i \delta = \sum_{i=1}^n f_i (u_P - u_Q) / n \quad (\text{الف-۱})$$

که در آن f_i مقدار تابع در نقطهٔ وسط بازهٔ i ام است، و $\sum_{i=1}^n$ جمع روی تمام جمله‌ها از $i = 1$ تا n است. کمیت S_n به سادگی جمع مقادیر f در نقطه‌های مختلف مسیر ضریب طول δ است که بر روی آن مقدار تابع حساب شده است. این یک تقریب برای مقداری است که می‌خواهیم محاسبه کنیم. سپس طول هر گام δ را بسیار کوچک و تعداد قطعه‌های n را بسیار بزرگ اختیار می‌کنیم؛ در این صورت این تقریب دقیقتر می‌شود. در حد n بسیار بزرگ مقدار حدی S_n همان انتگرال I مورد نظر ماست:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad (\text{الف-۲})$$

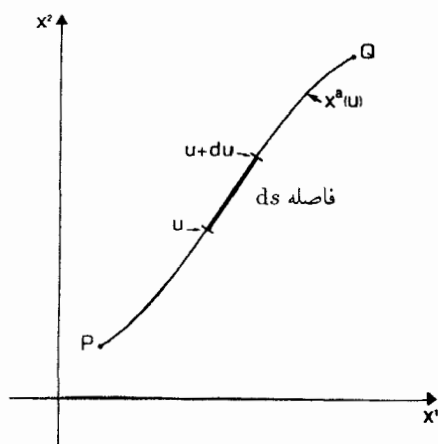
از نظر هندسی می‌توان این کمیت را به صورت زیر در نظر گرفت، نمودار مقدار f را بر حسب پارامتر u در امتداد منحنی در نظر می‌گیریم، یعنی $f(x^a(u))$ [شکل الف-۲ (الف) را ببینید]؛ به یاد دارید که $(x^a) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ ، با شاخصهای ۰، ۱، ۲، ۳ مختصات مختلف را نشان می‌دهند و نه "توانهای x " را. مستطیلهای به ارتفاع f_i و پهنای δ [شکل الف-۲ (ب)] این منحنی را تقریباً به صورت پله‌ای درمی‌آورد. در حد n بینهایت بزرگ و δ بینهایت کوچک می‌شود، مقداری که به دست می‌آید به روشنی مساحت زیر منحنی از u_P تا u_Q است. طبق تعریف این حد انتگرال I نیز هست، و از این رو I مساحت زیر این منحنی است.



شکل الف-۲ (الف) نمودار مقادیر تابع $f(x^a)$ بر حسب پارامتر خم u ، در امتداد منحنی. (ب) تقریب پله‌ای تابع به وسیله مقادیر f_i در نقطه‌های وسط بازه‌هایی به پهنای δ . مساحت زیر این منحنیها S_n است؛ با زیاد شدن تعداد بازه‌ها پهنای آنها کاهش می‌یابد، حد S_n برابر است با مساحت زیر منحنی که طبق تعریف همان انتگرال I است.

کاربردها

ساده‌ترین کاربرد محاسبه طول L منحنی C از یک نقطه ابتدایی P ، تا نقطه انتهایی Q است؛ در این مورد f را برابر ds/du انتخاب می‌کنیم که آهنگ تغییر فاصله در امتداد منحنی نسبت به پارامتر خم u است (در هر نقطه روی منحنی، $f du$) نمو فاصله ds متناظر با هر یک از نموهای بسیار کوچک پارامتری du است؛ با شکل الف-۳ مقایسه کنید). در این مورد، S_n تقریبی از طول



شکل الف-۳ مسیری از P تا Q که با پارامتر u مشخص می‌شود. در امتداد این مسیر فاصله بین دو نقطه با پارامترهای u و $u + du$ برابر با ds است.

کل L منحنی کامل است، و این حد الف-۲ است که طول L منحنی از P تا Q را تعریف می‌کند. یک کاربرد مهم دیگر محاسبه W ، یا کار انجام شده توسط نیرویی است که بر یک جسم اثر می‌کند و جسم را در امتداد مسیر C از نقطه P به نقطه Q می‌برد. در این حالت $f = dW/du$ ، یعنی آهنگ انجام کار نسبت به پارامتر خم u [در هر نقطه از منحنی، $(f du)$ نماینده کار انجام شده در اثر حرکت جسم در امتداد منحنی به اندازه فاصله پارامتری بسیار کوچک du است]. در این صورت S_n تقریبی از کل کار انجام شده W در حرکت در امتداد کل منحنی و حد الف-۲ است که W را تعریف می‌کند.

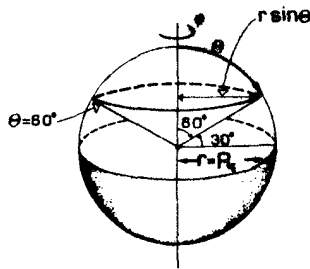
ارزیابی

در عمل، انتگرالهای خطی را به راههای مختلف ارزیابی می‌کنند: (۱) نموداری، (۲) عددی، (۳) تحلیلی، یا (۴) از جدولها. در هر یک از سه مورد اول، شیوه حدی فوق را به کار می‌بریم. در مورد (۱) نمودار $f(u)$ را بر حسب u رسم می‌کنیم و مساحت زیر این منحنی را برآورد می‌کنیم؛ در (۲) با استفاده از ماشین حساب مجموع S_n را به ازای مقادیر هر چه بزرگتر n محاسبه می‌کنیم؛ و در مورد (۳) از روشهای استاندارد انتگرالگیری استفاده می‌کنیم که خوانندگانی که حساب دیفرانسیل و انتگرال را خوانده‌اند با آن آشنا هستند (برخی از این روشها در مثالها و تمرینهای زیر نشان داده شده‌اند، به‌ویژه تمرین الف-۴ را ببینید). در مورد چهارم، از کاری که قبلاً شخص دیگری با استفاده از روشهای (۱) تا (۳) انجام داده است و به‌صورت جدول ارائه شده است استفاده می‌شود. در ادامه این پیوست نحوه انتگرالگیری تحلیلی با استفاده از اصول اولیه را نشان می‌دهیم، و بدین ترتیب مفهوم انتگرالگیری را با مثال روشن خواهیم ساخت. تمرینهای زیر انتگرالگیری را با استفاده از روشهای نموداری و عددی و نیز استفاده از فرمولهای ساده نشان می‌دهد.

مثال اول. اگر مسیر متناظر با تغییر یکی از مختصات باشد در حالی که بقیه مختصات ثابت بمانند ارزیابی انتگرال به‌ویژه ساده می‌شود. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم اندازه دور زمین را روی مدار $30^\circ N$ محاسبه کنیم. انتخاب طبیعی مختصات کروی قطبی r ، θ ، و ϕ است شکل الف-۴ را ببینید، در این صورت منحنی متناظر است با اینکه ϕ از 0° تا 2π تغییر کند در حالی که r ، θ ، و t در مقادیر مانند $r = R_e$ یعنی شعاع زمین، $\theta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ، و $t = t_0$ ثابت بماند. معادله‌های منحنی $(x^a) = (x^a(u))$ عبارت خواهند بود از

$$r = R_e, \quad \theta = 60^\circ, \quad \phi = u, \quad t = t_0.$$

که در آن مختصه ϕ را به‌عنوان پارامتر خم u انتخاب کرده‌ایم. از هندسه خم، نتیجه می‌شود که $f = ds/du = r \sin \theta$ این را می‌توان از متریک فضا زمان تخت در مختصات قطبی ۴-۲۹



شکل الف-۴ نقطه‌ای روی سطح زمین در عرض جغرافیایی $30^\circ N$ در مختصات کروی قطبی متناظر است با $r = R_e$ و $\theta = 60^\circ$. برای پیدا کردن طول این مدار ϕ را از 0° تا 360° تغییر می‌دهیم.

نیز به دست آورد که اگر سرعت نور c باشد به صورت زیر درمی‌آید

$$ds^2 = -dt^2 + \{dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\}$$

روی این منحنی، $dr = d\theta = dt = 0$ ، و از این رو $ds^2 = r^2 \sin^2\theta d\phi^2$ که همان نتیجه را می‌دهد. بنابراین طول برابر است با

$$\begin{aligned} L &= \int f du = \int r \sin\theta d\phi = \int_{u=0}^{u=2\pi} R_e \sin 60^\circ du \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(R_e \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3} \delta \right) \right\} \end{aligned}$$

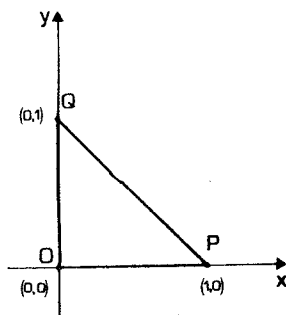
که در آن $\delta = 2\pi/n$ و n بازه مساوی وجود دارد. از آنجا که R_e ، $1/\sqrt{3}$ ، و δ از i مستقل است می‌توان آنها را از علامت جمع بیرون آورد و نوشت

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ R_e \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3} (2\pi/n) \sum_{i=1}^n 1 \right\}$$

چون این مجموع متشکل از تکرار یک جمله واحد، یعنی 1 (n مرتبه) است، پس ضریب $1/n$ حذف می‌شود، و محاسبه حد بدیهی است و به دست می‌آوریم

$$L = R_e \sqrt{3} \pi$$

مثال دوم. به عنوان مثال دوم محیط یک مثلث، مثلاً مثلث شکل الف-۵ را با استفاده از



شکل الفسه مثلث OPQ با رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(0, 1)$ در مختصات دکارتی (x, y) .

انتگرال خطی محاسبه می‌کنیم. این مساحت برابر است با مجموع سه سهم $\int f \, du$ برای OP، PQ، و OQ که در آن (طبق قضیه فیثاغورس، یا فرم متریک $ds^2 = dx^2 + dy^2$).

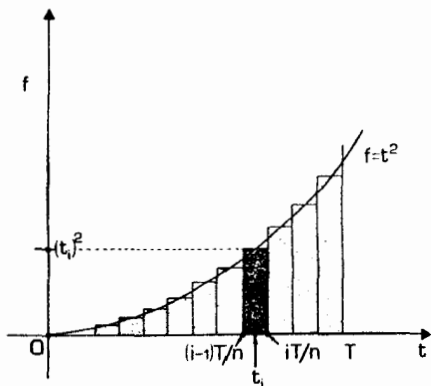
$$f = ds/du = \{(dx/du)^2 + (dy/du)^2\}^{1/2}$$

روی OP داریم $y = 0$ و از این رو $dy = 0$ ؛ با انتخاب $u = x$ ، $dx/du = 1$ و $\int_{OP} ds = \int_{x=0}^{x=1} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \{n(1/n)\} = 1$ همین‌طور روی OQ، $x = 0$ ، $dx = 0$ و $\int_{OQ} ds = \int_{y=0}^{y=1} dy = 1$ ، برای پاره‌خط PQ، $x = u$ ، $y = 1 - u$ ، بنابراین $ds/du = \{1^2 + (-1)^2\}^{1/2} = \sqrt{2}$ است. بنابراین اندازه کل محیط $2 + \sqrt{2}$ است (که البته می‌توان آن را به کمک هندسه ابتدایی، آسانتر کرد).

مثال سوم. در هر دو مثال بالا، محاسبه بسیار ساده بود زیرا کمیت زیر علامت انتگرال ثابت بود؛ به سهولت می‌توان چنین ثابتی را از علامت جمع بیرون آورد. به عنوان مثال نهایی انتگرالی را در نظر می‌گیریم که این‌طور نباشد.

فرض کنید اتومبیلی به مدت T در امتداد جاده مستقیمی با سرعت v متناسب با زمان t حرکت می‌کند ($v = kt$ که k ثابت است)، و نیروی F که موتور در حین حرکت وارد می‌آورد αv باشد (α ثابت). در این صورت کار انجام شده در طول مسافت برابر است با $W = \int F \, dx$ که در آن x فاصله‌ای است که در زمان t طی شده است. اما $dx/dt = v$ ، و از این رو $dx = v \, dt$

$$W = \int_{t=0}^{t=T} (\alpha v)(v \, dt) = \alpha k^2 \int_{t=0}^{t=T} t^2 \, dt$$



شکل الف-۶ برای محاسبه $\int_{t=0}^{t=T} t^2 dt$ ، فاصله $[0, T]$ را به n بازه هر کدام به پهنای $\delta = T/n$ تقسیم می‌کنیم. در این صورت t_i مقدار t در وسط بازه i ام است؛ ارتفاع منحنی $f = t^2$ در آن نقطه است. مساحت زیرمنحنی برابر با حد مساحت زیرمستطیلهاست وقتی $\delta \rightarrow 0$.

T را به n بازه برابر تقسیم می‌کنیم و S_n را به صورت زیر می‌نویسیم

$$S_n = \sum_{i=1}^n t_i^2 \delta$$

که در آن $t_i = (i - 1/2)T/n$ مقدار t در نقطه وسط فاصله i ام است، و $\delta = T/n$ برابر با پهنای هر بازه است (شکل الف-۶). بدین ترتیب

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left\{ \left(i - \frac{1}{2} \right) T/n \right\}^2 T/n = (T/n)^3 \sum_{i=1}^n \left(i^2 - i + \frac{1}{4} \right)$$

با استفاده از نتیجه‌های $\sum_{i=1}^n i^2 = 1/6 n(n+1)(2n+1)$ و $\sum_{i=1}^n i = 1/2 n(n+1)$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{t=T} t^2 dt &= (T^3/n^3) \left\{ \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2} n(n+1) + \frac{1}{4} n \right\} \\ &= (T^3/12n^3)(4n^2 - 1) \end{aligned}$$

در حدی که $n \rightarrow \infty$ ، جمله $4n^2 - 1$ در عبارت $(4n^2 - 1)/12n^3$ غالب می‌شود و حد S_n برابر با $1/3 T^3$ است، و در نتیجه $W = 1/3 \alpha k^2 T^3$ می‌بینیم که در این مورد، سوختی که اتمبیل مصرف می‌کند به مکعب زمان مسافت بستگی دارد!

تمرینها

الف-۱ $\int_{t=0}^{t=1} t^2 dt$ را به صورت نموداری و به شیوه زیر محاسبه کنید: (۱) منحنی $f = t^2$ را بین دو حد داده شده رسم کنید. (۲) مقداری برای n انتخاب کنید، مکان نقطه‌های t_i که وسط بازه‌هایی به پهنای δ بین $t = 0$ و $t = 1$ هستند را رسم کنید، و مستطیلهایی به ارتفاع $f_i = t_i^2$ که مرکزشان نقطه‌های t_i است رسم کنید. (۳) مساحت کل S_n این مستطیلهای را حساب کنید. (۴) همین کار را برای مقادیر بزرگتر n تکرار کنید. (۵) مساحت A زیرمنحنی را با شمردن مربعها و کسر مربعهای زیرمنحنی کاغذ رسم برآورد کنید. (۶) نشان دهید که با افزایش n مساحت S_n به مساحت A میل می‌کند.

[توجه: بد نیست ابتدا یک سری مستطیل را در نظر بگیرید که مساحت آنها بیشتر از مساحت زیرمنحنی باشد و سری دیگری را در نظر بگیرید که مساحت آنها کوچکتر از مساحت زیرمنحنی باشد؛ در این صورت مساحت منحنی الزاماً بین مساحت‌های این دو مجموعه از مستطیلهای قرار می‌گیرد. و این روش گاهی راه سریعی برای تعیین گستره امکانات مساحت زیرمنحنی است.]
 الف-۲ محاسبه را برای $f = 1$ و $f = t$ تکرار کنید و به ترتیب $\int_{t=0}^{t=1} 1 dt$ و $\int_{t=0}^{t=1} t dt$ را تعیین کنید.

الف-۳ با استفاده از اصول اولیه $\int_{t=0}^{t=T} dt$ را حساب کنید، از روش مثال سوم استفاده کنید.
 الف-۴ فرض کنید که ثابت کرده‌ایم $\int_{t=0}^{t=T} 1 dt = T$ ، $\int_{t=0}^{t=T} t dt = 1/2 T^2$ و $\int_{t=0}^{t=T} t^2 dt = 1/3 T^3$ نتیجه $\int_{t=0}^{t=T} t^n dt$ چه می‌تواند باشد؟

الف-۵ دایره‌ای را در صفحه اقلیدسی در نظر بگیرید، که معادله آن در مختصات قطبی $\{r, \theta\}$ با $\{r = r_0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ داده می‌شود. با استفاده از بازه $4-2\pi$ ثابت کنید که (الف) فاصله شعاعی D از مبدأ تا دایره برابر با $D = r_0$ است، و (ب) محیط C دایره برابر $2\pi r_0$ است. [ممکن است نتایج تمرین الف-۴ سودمند باشد].

الف-۶ $\int x ds$ را روی مسیره‌های بسته زیر در صفحه اقلیدسی حساب کنید (الف) $y = 0$ ، $0 \leq x \leq 1$ ؛ (ب) $x^2 + y^2 = 1$ بین $(0, 0)$ و $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ؛ (ج) $x = y$ بین $(0, 0)$ و $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

تمرین کامپیوتری ۱۶

برنامه‌ای بنویسید که به عنوان ورودی (الف) حدود پایینی و بالایی T^0 و T^1 ، (ب) تعداد تقسیمه‌های N را بپذیرد، و سپس با روشی که معادل با مراحل (۲) و (۳) در تمرین الف-۱ است مجموع S_N را که مقدار تقریبی انتگرال تابع $F(T)$ بین حدود T^0 و T^1 را می‌دهد حساب کند (تابع $F(T)$ در انتهای برنامه در یک زیرروال مشخص می‌شود).
 با استفاده از این برنامه نتیجه‌های به دست آمده در تمرینهای الف-۱ و الف-۲ را تأیید کنید.

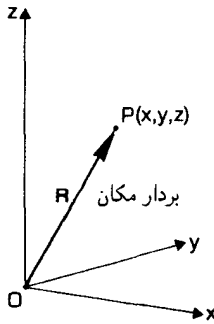
پیوست ب

چار بردارها و دینامیک نسبیتی

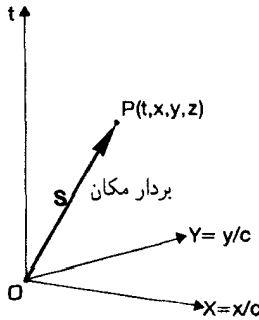
در سراسر این کتاب، بر وحدت یافتن مفاهیم فضا و زمان در یک موجود واحد به نام فضا-زمان تأکید بسیار شده است. در اینجا و در پیوست بعدی به توصیف ابزار کاری می‌پردازیم که به کمک آن کمیت‌های سه‌بعدی و یک‌بعدی مجزا با یکدیگر ترکیب می‌شوند و کمیت‌های چهاربعدی واحدی را که بردارها و تانسورهای فضا-زمان نام دارند می‌سازند. در این پیوست ابتدا مفهوم بردار مکان فضا-زمان را بررسی می‌کنیم و سپس آن را به ایده کلی چار بردار تعمیم می‌دهیم. چگونگی ساختن ناورداها از این چار بردارها را نیز بررسی می‌کنیم.

ب-۱ بردارهای مکان

در فضا-زمان نیوتونی محاسبه‌ها اغلب برحسب سه بردارها انجام می‌گیرد که کمیت‌هایی دارای بزرگی و جهت‌اند. یک مثال بردار مکان \mathbf{R} است که جابه‌جایی از مبدأ O تا نقطه‌ای مانند P در فضای تخت را نشان می‌دهد (شکل ب-۱). برای نمایش یک بردار به سه عدد، یعنی مؤلفه‌های آن در جهت‌های x ، y ، و z نیاز داریم (زیرا بدون هر یک از این مؤلفه‌ها اطلاع ما برای مشخص کردن اینکه \mathbf{R} کدام مکان P را نمایش می‌دهد ناکافی است)؛ مؤلفه‌های R^i متعلق به بردار مکان \mathbf{R} در مختصات دکارتی همان مختصات نقطه P یعنی $(x, y, z) = (R^i)$ هستند. مثلاً، اگر جسمی در فضای اقلیدسی در مکان $(x = 1, y = 3, z = 0)$ قرار داشته باشد، در این صورت بردار مکان آن $\mathbf{R} = (1, 3, 0)$ است. این را می‌توان یک پیکان در فضای سه‌بعدی از مبدأ O تا مکان آن شیء دانست. سه سرعت \mathbf{v} و سه تکانه \mathbf{p} نیوتونی یک ذره نمونه‌های دیگری از سه بردار هستند،



شکل ب-۱ بردار مکان R نقطه P در فضای سه بعدی که با مختصات (x, y, z) توصیف می شود.



شکل ب-۲ بردار مکان S نقطه P در فضا زمان چهار بعدی که با مختصات $(t, x/c, y/c, z/c)$ توصیف می شود.

هر یک از آنها را هم می توان پیکانی در مکان ذره تصور کرد.

ابزار طبیعی محاسبات در فضا زمان چهار بعدی نسبت خاص چار بردارها هستند، که پیکانهایی در فضا زمان اند که با ۴ مؤلفه توصیف می شوند. ساده ترین نمونه یک چار بردار مکان S است که جابه جایی از مبدأ O تا نقطه یا رویداد P در فضا زمان را نشان می دهد و مؤلفه های آن در یک چارچوب مرجع F بر حسب مختصات کانونیک مینکوفسکی عبارت اند از $S^0 = t, S^1 = X, S^2 = Y, S^3 = Z$ ، یعنی $S^2 = Y, S^3 = Z$

$$(S^a) = (t, X, Y, Z) = (t, x/c, y/c, z/c) \quad (ب-۱)$$

(شکل ب-۲). بدین ترتیب، اگر رویداد P دارای مختصات $t = ۴, X = ۳, Y = ۰, Z = ۵$ باشد، در این صورت $S^0 = ۴, S^1 = ۳, S^2 = ۰, S^3 = ۵$ و از این رو بردار مکان P نسبت به $O, (S^a) = (۴, ۳, ۰, ۵)$ است.

اگر چارچوب مرجع F را تغییر دهیم و چارچوب مرجع F' را که نسبت به F دارای حرکت است

۱. پراپرتیها در (S^a) تأکید می کنند که ما مؤلفه های S^0, S^1, S^2, S^3 را مجموعاً به صورت یک شیء واحد در نظر می گیریم. با درک این مطلب معمولاً پراپرتیها را می توان حذف کرد، ما هم در مواقع مناسب این کار را خواهیم کرد.

در نظر بگیریم، بردار S مؤلفه‌های متفاوتی خواهد داشت (اگرچه دقیقاً معرف همان جابه‌جایی قبلی است) زیرا از مختصات دیگری استفاده شده است. اگر چارچوب F' با سرعت v نسبت به F در جهت $+x$ حرکت کند، مؤلفه‌های S در چارچوب مرجع جدید ($S^{a'}$) خواهند بود که برابرند با

$$(S^{a'}) = (t', X', Y', Z',) = (t', x'/c, y'/c, z'/c) \quad (\text{ب-۲})$$

که در آن مختصات جدید مینکوفسکی $(X^a) = (t', x^i/c)$ از طریق تبدیل لورنتس ۴-۵ الف تا ج به مختصات قدیمی $(X^a) = (t, x^i/c)$ مربوط می‌شوند.^۱ این نشان می‌دهد که

$$S^{0'} = \gamma(v)(S^0 - VS^1), \quad S^{1'} = \gamma(v)(S^1 - VS^0), \quad S^{2'} = S^2, \quad S^{3'} = S^3 \quad (\text{ب-۳الف})$$

که در آن $V = v/c = ۳/۵$ مثلاً اگر $\gamma(v) \equiv (1 - V^2)^{-1/2}$ و $V \equiv v/c$ باشد $\gamma = ۵/۴$ است. فرض کنید $(S^a) = (۴, ۳, ۰, ۵)$ ؛ در این صورت $(S^{a'})$ توسط ب-۳ الف تعیین می‌شود، بنابراین $S^{0'} = (۵/۴)(۴ - (۳/۵)۳) = (۵/۴)(۱۱/۵) = ۱۱/۴$ ، $S^{1'} = (۵/۴)(۳ - (۳/۵)۴) = (۵/۴)(۳/۵) = ۳/۴$ ، $S^{2'} = ۵$ ، $S^{3'} = ۰$ ، یعنی $(S^{a'}) = (۱۱/۴, ۳/۴, ۰, ۵)$.

برعکس، مؤلفه‌های قدیم بردار را می‌توان با تبدیل وارون به دست آورد (۴-۳الف تا ج)، که نشان می‌دهد

$$S^0 = \gamma(v)(S^{0'} + VS^{1'}), \quad S^1 = \gamma(v)(S^{1'} + VS^0), \quad S^2 = S^{2'}, \quad S^3 = S^{3'} \quad (\text{ب-۳ب})$$

تمرین ب-۱

با استفاده از ب-۳ نشان دهید که اگر $V = ۳/۵$ و $(S^a) = (۱۱/۴, ۳/۴, ۰, ۵)$ باشد، در این صورت $(S^a) = (۴, ۳, ۰, ۵)$ است. نشان دهید که این نتیجه تأیید می‌کند که ب-۳ وارون ب-۳الف است.

ب-۲ چارچودارها (فضازمان تخت)

ویژگی مشخصه یک بردار فضازمان آن است که این بردار یک پیکان یا جابه‌جایی در فضازمان است که با چهار مؤلفه نشان داده می‌شود. از نظر هندسی روشن است که مؤلفه‌های تمام این‌گونه

۱. برای نشان دادن x, y, z از x^i یا x^j ($i, j = ۱, ۲, ۳$) استفاده می‌کنیم در صورتی‌که X^a یا X^b ($a, b = ۰, ۱, ۲, ۳$) را برای نشان دادن $t, x/c, y/c, z/c$ به‌کار می‌گیریم.

جابه‌جاییها وقتی چارچوب مرجع تغییر کند به‌نحوی یکسان تبدیل خواهند یافت. اما بردار مکان S نمایندهٔ یک جابه‌جایی از مبدأ O تا رویداد P در فضا-زمان است که ویژگیهای تبدیل آن را می‌دانیم (ب-۳ را ببینید)، بنابراین اطلاعاتی دربارهٔ چگونگی تبدیل یک چاربردار به‌دست می‌دهد. بدین ترتیب این ویژگیهای تبدیل، یک چاربردار عمومی A را مشخص می‌کنند که کمیتی با مؤلفه‌های A^a ($a = 0, 1, 2, 3$) است که به‌صورت زیر تبدیل می‌شوند.

$$A^{0'} = \gamma(v)(A^0 - VA^1), \quad A^{1'} = \gamma(v)(A^1 - VA^0) \quad (\text{ب-۴})$$

$$A^{2'} = A^2, \quad A^{3'} = A^3$$

وقتی چارچوب F' با سرعت v در جهت $+x$ نسبت به چارچوب F حرکت کند، می‌توان این را به‌نحوی مناسب، به‌صورت زیر نوشت

$$A^{a'} = \sum_a L_a^{a'} A^a \quad (\text{ب-۵الف})$$

که در آن ماتریس تبدیل $L = [L_a^{a'}]$ عبارت است از

$$[L_a^{a'}] = \begin{bmatrix} \gamma & -V\gamma & 0 & 0 \\ -V\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب-۶الف})$$

که در آن a شمارهٔ ستونها و a' شمارهٔ سطرهاست، و علامت جمع در ب-۵الف بر روی تمام مقادیر شاخص a ، یعنی $(0, 1, 2, 3)$ است. ب-۵الف به‌طور صریح عبارت است از

$$A^{a'} = L_0^{a'} A^0 + L_1^{a'} A^1 + L_2^{a'} A^2 + L_3^{a'} A^3$$

بدین ترتیب، مثلاً، اگر $a' = 0'$ باشد، به‌دست می‌آوریم

$$A^{0'} = L_0^{0'} A^0 + L_1^{0'} A^1 + L_2^{0'} A^2 + L_3^{0'} A^3$$

اکنون با قرار دادن از سطر اول ب-۶الف اولین معادلهٔ ب-۴ به‌دست می‌آید. همین‌طور، با قرار دادن a' برابر با $1'$ ، $2'$ ، $3'$ ، به‌ترتیب معادله‌های دیگر ب-۴ را به‌دست می‌آوریم، و بنابراین نشان می‌دهیم که ب-۵الف، ب-۶الف و ب-۴ هم‌ارزند.^۱

۱. اگر با نمادگذاری ماتریسی آشنا هستید، ب-۵ را می‌توان به‌راحتی به‌صورت ماتریسی نوشت: $A' = LA$ و A را دو ماتریس ستونی در نظر می‌گیریم، ب-۵ معادل با معادلهٔ ماتریسی $A' = LA$ است.

تبدیل وارون. درست همان طور که ب-۵ الف از ب-۳ الف مشتق شده است، از ب-۳ ب نیز درمی یابیم که تبدیل وارون، که مؤلفه های A^a در چارچوب اولیه را بر حسب مؤلفه های $A^{a'}$ در چارچوب نهایی به دست می دهد، برابر خواهد بود با

$$A^a = \sum_{a'} (L^{-1})_{a'}^a A^{a'} \quad (\text{ب-۵})$$

که در آن تبدیل $L^{-1} = [(L^{-1})_{a'}^a]$ است، یعنی وارون L ، عبارت است از

$$[(L^{-1})_{a'}^a] = \begin{bmatrix} \gamma & V\gamma & 0 & 0 \\ V\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب-۶})$$

که در آن a شماره سطرها و a' شماره ستونهاست، و علامت جمع در ب-۵ بر روی تمام مقادیر شاخص a' است.

تمرینها

ب-۲ تبدیل ب-۵ الف را به ازای $V = 4/5$ بر بردارهای (الف) $(A^a) = (1, 0, 0, 0)$ ؛ (ب) $(B^a) = (0, 1, 0, 0)$ ؛ (ج) $(C^a) = (1, 1, 0, 0)$ اعمال کنید.

ب-۳ تبدیل وارون ب-۵ را به صورتی مشابه با ب-۴ بنویسید. از آنجا به طور صریح نشان دهید که ب-۵ وارون ب-۵ الف است، یعنی برای هر بردار A تبدیل (A^a) به $(A^{a'})$ و بازگشت دوباره با به کار گرفتن ب-۵ الف و سپس ب-۵ تبدیل همانی را می دهد.

تبدیلهای عمومی. تبدیلهای ب-۵ و ب-۶ نماینده تغییر سرعت $\pm v$ در جهت x هستند. روشن است که تبدیلهای مشابهی برای تغییرات سرعت در جهت y و یا z وجود دارد. به علاوه با اختصاص مقادیر مناسب به $L_{\alpha}^{a'}$ ب-۵ الف برای چرخش محوره های مختصات نیز صادق خواهد بود (مثلاً $L_1^{a'} = 1 = L_1^{a'}$ ، $L_2^{a'} = \cos \theta = -L_2^{a'}$ ، $L_3^{a'} = \sin \theta = L_3^{a'}$ نماینده یک چرخش در صفحه (y, z) است). در واقع ب-۵ و ب-۶ تبدیلهای تبدیل مؤلفه های یک چارچوب را هنگام یک تغییر دلخواه چارچوب مرجع به دست می دهد، در صورتی که ماتریسهای تبدیل L و L^{-1} به طور مناسب انتخاب شوند.

تمرین ب-۴

شکل ماتریسهای L و L^{-1} را برای تغییر سرعت v در جهت z بنویسید (یعنی، مؤلفه های ب-۶ الف و ب-۶ ب را صریحاً تعیین کنید). تمرین ب-۳ را با این تبدیل تکرار کنید.

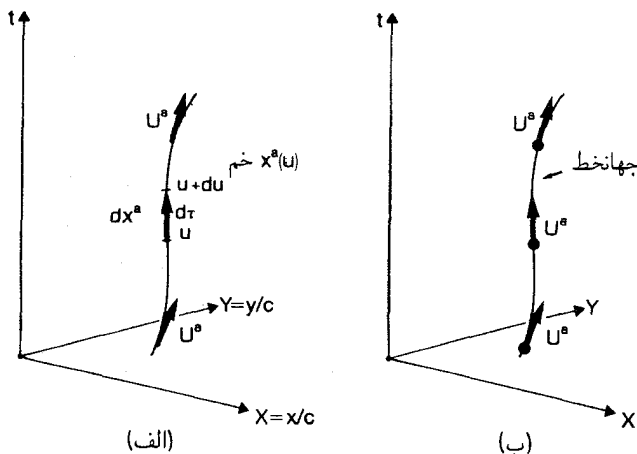
ب-۳ چارسرعت و چارتکانه

چارسرعت و چارتکانه که به نوبت بررسی خواهیم کرد، دو چاربردار مهم‌اند. طبق تعریف، درک مفهوم سرعت الزاماً منوط به درک مفهوم مشتقگیری است (در این مورد مشتقگیری از مؤلفه‌های بردار مکان) بنابراین، از این پس، ناچار باید حساب دیفرانسیل و انتگرال را بدانیم.

چارسرعت. فرض کنید ذره‌ای روی خم $(x^a(u))$ در فضا زمان حرکت می‌کند. جابه‌جایی (dx^a) در امتداد مسیر متناظر با نمو پارامتری du یک چاربردار است [شکل ب-۳ الف]؛ ویژه‌زمان $d\tau$ در امتداد این جابه‌جایی که ذره اندازه می‌گیرد ناوردای $d\tau = (-ds^2)^{1/2}$ است که در آن ds^2 از ۲۵-۴ ب و ج به دست می‌آید. سه سرعت نیوتونی این ذره بردار v با مؤلفه‌های $df/dt = (dx^i/dt) = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$ در مختصات دکارتی است، که در آن df/dt آهنگ تغییر تابع f نسبت به پارامتر t است. این یک پیکان در فضای سه‌بعدی است که جهت آن جهت حرکت ذره است. چارسرعت U پیکانی در فضا زمان در جهت جهانخط ذره است [شکل ب-۳ ب]، و تعمیم طبیعی سه سرعت v به چهار بعد است. چارسرعت چاربرداری با مؤلفه‌های زیر است

$$U^a = dx^a/d\tau \quad (\text{ب-۳ الف})$$

که مانند یک چاربردار تبدیل می‌شود، زیرا (dx^a) چنین است و، در حالی که $d\tau$ ناورداست. در مختصات مینکوفسکی $(dx^a) = (dt, dx/c, dy/c, dz/c)$ و بنابراین طبق ۳-۴ و قاعدهٔ



شکل ب-۳ الف) روی خم $(X^a(u))$ جابه‌جایی dx^a متناظر با نمو پارامتری du یک چاربردار است. (ب) چارسرعت (U^a) با dx^a موازی است، و بدین ترتیب جهت آن در امتداد جهانخط در هر نقطه است، و جهت خم در فضا زمان را نشان می‌دهد.

زنجیری برای تعویض متغیر در مشتقگیری داریم،

$$(U^a) = (dx^a/dt)(dt/d\tau) = \gamma(v)(1, v_x/c, v_y/c, v_z/c) = \gamma(v)(1, \mathbf{v}/c) \quad (\text{ب-۷})$$

بدین ترتیب قسمت فضایی چاربردار همان $\gamma(v)\mathbf{v}/c$ است، در حالی که قسمت زمانی $\gamma(v)$ ، یا ضریب اتساع زمان است (که نشان می‌دهد چگونه زمان مختصه‌ای با ویژه زمان تغییر می‌کند). فرض کنید مثلاً ذره با سرعت $3/5c$ در جهت $z+$ در حرکت باشد. در این صورت $\mathbf{v} = (0, 0, 3/5)$ و $\gamma(v) = 5/4$ ، بنابراین $(U^a) = 5/4(1, 0, 0, 3/5) = (5/4, 0, 0, 3/4)$.

اگر چارسرعت را در چارچوب سکون F' ذره بنویسیم، در این صورت $\mathbf{v}' = 0$ و بنابراین $\gamma(v') = 1$ و $(U'^a) = (1, 0, 0, 0)$. پس در این مورد، همان‌طور که انتظار می‌رود، چارسرعت کاملاً در امتداد محور زمان است و مؤلفه فضایی ندارد (یک ذره در چارچوب خودش ساکن است!). چارچوب F' با سرعت \mathbf{v} نسبت به چارچوب F حرکت می‌کند؛ اگر محور x ها را در جهت \mathbf{v} اختیار کنیم و رابطه‌های تبدیل ب-۵ را اعمال کنیم، مؤلفه‌های (U^a) در دستگاه F را، که ذره نسبت به آن با سرعت v در جهت x حرکت می‌کند، از این مؤلفه‌های چارچوب سکون به دست می‌آوریم. حال اگر محورهای فضایی را بچرخانیم، دوباره ب-۷ را برای یک چارچوب مرجع دلخواه به دست می‌آوریم. بدین ترتیب فرم ب-۷ اساساً پیامد فرمول تبدیل ب-۵ است.

تمرینها

ب-۵ نشان دهید که ب-۷ با تبدیل از چارچوب سکون F' ذره به چارچوب F ناظر در حالت ویژه‌ای که ذره نسبت به ناظر در جهت $x+$ حرکت می‌کند به دست می‌آید.

ب-۶ طبق اندازه‌گیری ناظر O چاربردار سرعت ذره P برابر است با $(U^a) = (5/3, 4/3, 0, 0)$. ضریب اتساع زمان برای P نسبت به O چیست؟ سه سرعت P نسبت به O چیست؟

ب-۷ با استفاده از ویژگیهای تبدیل بردار چارسرعت، قانون جمع سرعت‌های نسبی را برای سرعت‌های موازی به دست آورید (معادله ۳-۱۵).

چارته‌کانه. تعمیم طبیعی چهاربعدی برداز سه‌تکانه $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ چاربردار $\mathbf{U} = m_0 \mathbf{U}$ است که در آن m_0 جرم سکون ذره است (جرم ذره که در چارچوب سکون آن اندازه گرفته می‌شود) و \mathbf{U} چارسرعت است. طبق ب-۷، مؤلفه‌های \mathbf{P} در مختصات مینکوفسکی عبارت‌اند از

$$(P^a) = (m_0 dx^a/d\tau) = m_0 \gamma(v)(1, v_x/c, v_y/c, v_z/c) = m_0 \gamma(v)(1, \mathbf{v}/c) \quad (\text{ب-۸الف})$$

یعنی $\mathbf{P} = (\gamma(v)m_0, \gamma(v)m_0 \mathbf{v}/c)$ مثلاً، اگر جرم سکون $m_0 = ۱۲$ باشد و ذره با سرعت $3/5c$ در جهت $z+$ حرکت کند، در این صورت $(U^a) = (5/4, 0, 0, 3/4)$ و از این رو $(P^a) = ۱۲(U^a) = ۱۲(5/4, 0, 0, 3/4) = (۱۵, 0, 0, ۹)$ فضایی چارسرعت و چارتکانه با ابعاد سه سرعت و سه تکانه تفاوت دارد. ضرایب $1/c$ در (U^a) و (P^a) از قرارداد ما در مورد تعریف (X^a) برحسب $X = x/c$ و غیره ناشی می شود، زیرا می خواهیم فاصله را برحسب مدت سیر نور اندازه بگیریم. یک قرارداد دیگر که در بسیاری از کتابها پذیرفته شده است ضرب بردار مکان، چارسرعت، و چارتکانه در ضریب c است. در این حالت مؤلفه زمان بردار مکان ct خواهد بود و نه t .

تعریف چارتکانه نشان می دهد که این کمیت در چارچوب سکون F' ذره، که با $\mathbf{v}' = 0$ تعریف می شود، برابر با $(P'^a) = (m_0, 0, 0, 0)$ است. در واقع می توان به Λ الف را با استفاده از رابطه های تبدیل Λ برای محاسبه مؤلفه های P^a در یک چارچوب عمومی از این مؤلفه های چارچوب سکون به دست آورد. این تبدیل به صراحت نشان می دهد که سه تکانه نسبیتی (یعنی، مؤلفه های فضایی چارتکانه) چیزی جز جرم سکون در حرکت نسبی نیست. بدین ترتیب در نظریه نسبیت، جرم سکون و سه تکانه در یک کمیت چهاربعدی وحدت می یابند و تبدیل لورنتس به یکدیگر مربوط می شوند (برخلاف نظریه نیوتونی، که در آن به طور مستقل تعریف شده اند)؛ در واقع، قاعده تبدیل Λ است که ماهیت نسبیتی سه تکانه را تعیین می کند.

تمرینها

Λ ب- الف را با تبدیل از چارچوب سکون F' ذره به چارچوب ناظر F ، در مورد خاصی که ذره در جهت $x+$ نسبت به ناظر حرکت می کند، به دست آورید.
 ب- ۹ ناظر O چارتکانه ذره P را برابر $(P^a) = (۱۵, ۱۲, 0, 0)$ اندازه می گیرد. جرم سکون P چیست؟ سه سرعت P نسبت به O چیست؟
 پایستگی چارتکانه. اهمیت چارتکانه در آن است که در برخورد ذرات پایسته است

$$\sum P^a_{\text{اولیه}} = \sum P^a_{\text{نهایی}} \quad (a = 0, \dots, 3) \quad (\text{ب-} ۹)$$

که در آن علامت جمع روی تمام ذرات دخیل در برخورد است؛ در این صورت طبق Λ ب- الف

$$\sum [\gamma m_0]_{\text{اولیه}} = \sum [\gamma m_0]_{\text{نهایی}}, \quad \sum [\gamma m_0 \mathbf{v}]_{\text{اولیه}} = \sum [\gamma m_0 \mathbf{v}]_{\text{نهایی}} \quad (\text{ب-} ۱۰)$$

اینها را می توان با تعریف $E = mc^2$ و $\boldsymbol{\pi} = m\mathbf{v}$ که در آن $m(v) = \gamma(v)m_0$ (متن اصلی را ببینید)، به صورت شگافتتری درآورد؛ در این صورت Λ ب- الف به شکل زیر درمی آید

$$\mathbf{P} = (E/c^2, \boldsymbol{\pi}/c) = (m, \boldsymbol{\pi}/c) \quad (\text{ب-} ۱۱)$$

و ب-۱° به صورت زیر درمی آید

$$\sum E_{\text{اولیه}} = \sum E_{\text{نهایی}} \quad \sum \pi_{\text{اولیه}} = \sum \pi_{\text{نهایی}} \quad (\text{ب-۱۱})$$

که اولی قانون پایستگی انرژی نسبیتی E و دومی قانون پایستگی سه تکانه π است. همان طور که در متن اصلی بحث شد، این پیشگوییها در چندین هزار برخورد آزموده شده اند (معادله های ۳-۳۱ و ۳-۳۸ و بحث حاضر را ببینید). این نشان می دهد که چگونه در نظریه نسبیت رابطه چهاربعدی واحد ب-۹، که قوانین پایستگی انرژی و تکانه را وحدت می بخشد، جایگزین قوانین مجزای پایستگی انرژی و تکانه در نظریه نیوتونی می شود. به علاوه اگر قوانین تبدیل ب-۵ را در مورد ب-۹ به کار ببریم، روشن می شود که آنچه را که در یک چارچوب پایستگی انرژی می دانیم در چارچوب دیگر پایستگی تکانه است؛ اینها در واقع وجوه مختلف پدیده فیزیکی بنیادی واحدی هستند.

تمرینها

ب-۱° ناظر O ذره ای را می بیند که در جهت x با انرژی E و سه تکانه نسبیتی π حرکت می کند، و داریم $E = |\pi|c$. نشان دهید که ناظر O' نیز که در جهت x با سرعت v نسبت به O حرکت می کند این رابطه را صادق خواهد دانست، یعنی برای او $E' = |\pi'|c$ است. [این رابطه برای ذره با جرم سکون صفر، مانند فوتون، صادق خواهد بود.]

ب-۱۱ با استفاده از ویژگیهای تبدیل مجموعی از چارتکانه ها نشان دهید که غیرممکن است بدون پایستگی انرژی، تکانه پایسته باشد.

ب-۱۲ ناظری ذره P_1 با جرم سکون ۴ را می بیند که از سمت چپ با سرعت $v = 1/2c$ نزدیک می شود و با ذره مشابهی P_2 که از سمت راست با سرعت $1/2c$ نزدیک می شود برخورد می کند. چارتکانه هر ذره را پیدا کنید، و چارتکانه اولیه کل هر دو ذره را بیابید. نشان دهید که در این چارچوب سه تکانه نسبیتی اولیه کل صفر است.

پس از برخورد، جرم سکون هر یک از ذرات M_1 است. آنها از یکدیگر دور می شوند، P_1 با سرعت $v = 1/3c$ به طرف چپ می رود. سرعت حرکت P_2 به طرف راست چقدر است؟ M_1 چقدر است؟

ب-۱۳ ناظری که از چارچوب F استفاده می کند چارتکانه کل دستگاهی از ذرات را برابر با $(P^a) = (M, \Pi/c)$ اندازه می گیرد. نشان دهید که جرم سکون مؤثر یکتای M_0 و چارسرعت (U^a) با رابطه $P^a = M_0 U^a$ ($a = 0, \dots, 3$)، تعریف می شود. کدام معادله ها M_0 و (U^a) را برحسب M و Π تعریف می کنند؟ (U^a) را برحسب سرعت v نسبت به چارچوب F بنویسید و از آنجا مجموعه دیگری از عبارات را برای مؤلفه های P^0 و P^i تعیین کنید، این مؤلفه ها را برابر قرار دهید و M_0 و v را برحسب M و Π پیدا کنید.]

با تغییر به چارچوب سکون ناظری که با چارسرعت (U^a) حرکت می‌کند، مؤلفه‌های جدید چارتکانه عبارت خواهد بود از $(P'^a) = (M', \mathbf{\Pi}'/c)$. نشان دهید $M' = M$ و $\mathbf{\Pi}' = \mathbf{0}$. [چارچوب F' که در آن این شرط آخر صادق است چارچوب مرکز جرم نامیده می‌شود. محاسبات برخوردار معمولاً در این چارچوب به ساده‌ترین صورت انجام می‌گیرد.]

ب-۱۴ پروتونی با پروتون ساکن دیگری برخورد می‌کند. ذرات خروجی عبارت‌اند از یک پروتون p ، یک نوترون n ، و یک پيون باردار π . با فرض اینکه (تقریباً) $m_p = m_n = 6m_\pi$ کمینه انرژی ذرات متحرک برای امکانپذیر شدن این واکنش را بیابید. [راهنمایی: در چارچوب مرکز جرم، که سه‌تکانه کل صفر است. پیکربندی با کمینه انرژی آن است که هر سه ذره تولید شده ساکن باشند.]

چارنیرو. در مختصات مینکوفسکی در فضا-زمان تخت، تعمیم چهاربعدي قانون نیروی نیوتون $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ عبارت است از

$$f^a = dP^a/d\tau \quad (a = 0, \dots, 3) \quad (\text{ب-۱۲ الف})$$

در اینجا f چارنیروست، که در چارچوب عمومی با تبدیل لورنتس ب-۵ با استفاده از فرم چارچوب سکون $\mathbf{f} = (0, \mathbf{F}/c)$ تعیین می‌شود که در آن \mathbf{F} سه‌نیروی نیوتونی است؛ سمت راست، عبارت طبیعی چاربردار برای آهنگ تغییر تکانه است (گفتیم چاربردار زیرا \mathbf{P} یک چاربردار است و τ ناوردا). اگر ب-۵ را در مورد $(f'^a) = (0, \mathbf{F}/c)$ به‌کار ببریم و \mathbf{F} با \mathbf{v} موازی باشد داریم

$$(f'^a) = \gamma(v)(vF^1/c^t, F^1/c, 0, 0) = \gamma(v)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}/c^t, \mathbf{F}/c)$$

همچنین بر طبق ۳-۴ $d\mathbf{P}/d\tau = (d\mathbf{P}/dt)(dt/d\tau) = \gamma(v)d\mathbf{P}/dt$. بدین ترتیب بر طبق ب-۸ معادله ب-۱۲ الف معادل است با

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = dE/dt, \quad \mathbf{F} = d\mathbf{\pi}/dt \quad (\text{ب-۱۲ ب})$$

مؤلفه‌های فضایی این معادله قانون نسبیتی نیرو هستند (۳-۳۵ ب)، و مؤلفه زمان، آهنگ تغییر معادله انرژی نسبیتی است. دوباره می‌بینیم که چگونه در نظریه نسبیت یک معادله چهاربعدي معادله‌هایی را که در نظریه نیوتونی مجزا بودند وحدت می‌بخشد، و در واقع نشان می‌دهد که آنها جنبه‌های مختلف یک پدیده بنیادی هستند. با اعمال ب-۵ در ب-۱۲ می‌بینیم که آنچه در یک چارچوب معادله آهنگ تغییر انرژی است در چارچوب دیگر معادله آهنگ تغییر تکانه می‌شود و برعکس.

تمرینها

ب-۱۵ گزاره آخر را با ب-۱۲ الف از یک چارچوب به چارچوب دیگر اثبات کنید. (مثال خاصی را که در آن انرژی در یک چارچوب ثابت است بررسی کنید).

ب-۱۶ فرض کنید بر موشکی هیچ نیرویی وارد نمی‌آید، یعنی $f^a = 0$ ($a = 0, \dots, 3$). نشان دهید که هم جرم سکون و هم سه سرعت v آن ثابت هستند. از آنجا نشان دهید که سه تکانه نسبی و چارسرعت (U^a) آن ثابت اند. آیا می‌توانید این رابطه را وارون کنید، یعنی از یک چارسرعت ثابت نتیجه بگیرید که نیرویی بر موشک اثر نمی‌کند؟ اگر نمی‌توانید، برای این نتیجه‌گیری به چه اطلاعات اضافی‌ای احتیاج دارید؟

ب-۴ ناورداها

هر مؤلفه چاربردار (A^a) به چارچوب مرجع مورد استفاده بستگی دارد؛ اما، کمیت

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \equiv -(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2 \quad (\text{ب-۱۳})$$

تحت ب-۵ ناورداست، و این با جایگذاری مستقیم به سادگی نشان داده می‌شود؛ یعنی

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{ب-۱۴})$$

مثلاً، اگر $(A^a) = (4, 3, 0, 5)$ ، در این صورت

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = -4^2 + 3^2 + 0^2 + 5^2 = -16 + 9 + 25 = 18$$

اگر چارچوب جدیدی را که با سرعت $v = 3/5c$ در جهت x در حرکت است انتخاب کنیم، در این صورت $(A'^a) = (11/4, 3/4, 0, 5)$ بنابراین

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}' = -(11/4)^2 + (3/4)^2 + 0 + 5^2 = -121/16 + 9/16 + 25 = 18$$

که مقدار آن مانند قبل است. اما، آن سرعت انتخاب شده امتیاز خاصی ندارد؛ جایگزینی مستقیم نشان می‌دهد که عبارت ب-۱۳ الف برای تمام تغییرات سرعت ب-۵ ناورداست.

در واقع، تغییر چارچوب مرجع هر چه باشد، ب-۱۳ ناورداست (ناوردایی در اثر چرخش روشن است و هر تغییر سرعت را می‌توان با یک چرخش به صورت ب-۵ درآورد). بدین ترتیب، این کمیت ناورداست: مقدار آن برای تمام ناظرها یکی است.

تمرینها

ب-۱۷ نوردایی ب-۱۴ تحت ب-۵ را با محاسبه صریح مقدار عبارت سمت چپ ب-۱۳ و ب-۵الف ثابت کنید.

ب-۱۸ مقدار $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ را در موارد زیر پیدا کنید (الف) $(A^a) = (1, 0, 0, 0)$ ؛ (ب) $(A^a) = (0, 1, 0, 0)$ ؛ (ج) $(A^a) = (1, 1, 0, 0)$ ؛ (د) $(A^a) = (5, 3, 2, 0)$.
بزرگیها. نوردایی ب-۱۳ ایجاب می‌کند که $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ یک ویژگی با اهمیت چاربردار \mathbf{A} باشد، زیرا تمام ناظرها، بدون توجه به حالت حرکتشان، در مورد مقدار آن اتفاق نظر دارند. توجه کنید که این کمیت می‌تواند مثبت، صفر، و یا منفی باشد.

به‌عنوان مثال، چارسرعت (U^a) یک جسم که در چارچوب سکون آن جسم اندازه گرفته می‌شود دارای مؤلفه‌های $(U^a) = (1, 0, 0, 0)$ است و از این رو $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = -1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = -1$ است. (چرا؟ زیرا یک ناورداست!) همین‌طور، هر بردار \mathbf{A} که نماینده یک جابه‌جایی کوچکتر از سرعت نور باشد (پیکان متناظر با آن در داخل مخروط صفر قرار دارد) یک $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ نوردای منفی خواهد داشت. از طرف دیگر، یک جابه‌جایی لحظه‌ای در فضا دارای $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ مثبت خواهد بود. بدین‌سبب اگر نوردای $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ منفی باشد، بردار \mathbf{A} را زمان‌گونه گویند، و بزرگی زمان‌گونه طبق تعریف برابر است با $|\mathbf{A}| = (-\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})^{1/2}$ ؛ اگر $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ مثبت باشد، بردار را فضاگونه گویند و بزرگی فضاگونه طبق تعریف برابر است با $|\mathbf{A}| = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})^{1/2}$ ؛ و اگر صفر باشد، بردار را نورگونه (یا صفر) گویند.

مثالهای ویژه نوردای $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ عبارت‌اند از (الف) $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}$ که در آن \mathbf{S} بردار مکان ب-۱ است؛ این چیزی جز نوردای فاصله S^2 نیست (معادله ۴-۱۶ را ببینید)؛ (ب) $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}$ که در آن \mathbf{U} بردار چارسرعت ب-۷ است؛ همان‌طور که دیدیم، مقدار آن -۱ است (\mathbf{U} یک بردار یکه زمان‌گونه است)؛ و (ج) $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$ که در آن \mathbf{P} بردار چارتکانه ب-۸ است؛ مقدار آن، همان‌طور که از ب-۱۳ و ب-۸ نتیجه می‌شود، برابر $-m_0^2$ است، از این‌رو این یک بردار زمان‌گونه با بزرگی m_0 است. توجه کنید که بزرگی (فضاگونه/زمان‌گونه) یک بردار را می‌توان در چارچوبی محاسبه کرد که شکل ساده‌ای دارد، مثلاً در مورد چارتکانه چارچوب مرکز جرم F' را انتخاب می‌کنیم که در آن $P^{a'} = (m_0, 0, 0, 0)$ است؛ مقداری که در این چارچوب محاسبه شود مقدار تمام چارچوبها خواهد بود (دقیقاً به این دلیل که یک ناورداست).

با استفاده از ب-۸، معادله ب-۱۳ برای \mathbf{P} را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$m_0^2 c^4 = E^2 - \pi^2 c^2 \quad (\text{ب-۱۵})$$

که در آن π^2 مربع بزرگی سه‌تکانه نسبیتی (یعنی $\pi^2 = \pi_x^2 + \pi_y^2 + \pi_z^2$) است. از آنجا که معادله ب-۱۵ در تمام چارچوبهای مرجع صادق است، همراه با ب-۱۱ در محاسبه اثرات برخورد

ذرات بسیار سودمند است. یک کاربرد خاص مورد ذرات با جرم سکون صفر است، که در آن حد $\{m_0 \rightarrow 0, v \rightarrow c\}$ را محاسبه می‌کنیم، در این صورت

$$m_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E^2 = \pi^2 c^2 \quad (\text{ب-۱۶ الف})$$

هم‌ارزی پیامد ب-۱۵ است. اگر این رابطه در یک چارچوب صادق باشد در تمام چارچوبها صادق خواهد بود، زیرا رابطه‌ای است ناورداء، و با استفاده از آن می‌توان πc را در ب-۸ جایگزین E کرد. در این صورت به دست می‌آوریم

$$m_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (P^a) = (\pi/c, \boldsymbol{\pi}/c) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = 0 \quad (\text{ب-۱۶ ب})$$

که نشان می‌دهد در این مورد \mathbf{P} یک بردار صفر است، که نماینده حرکت با سرعت نور است. این یک نتیجه‌گیری رضایتبخش است زیرا فوتون یک ذره با جرم سکون صفر است.

تمرین ب-۱۹

با استفاده از ب-۱۳ و ب-۷ نشان دهید که چارسرعت (U^a) ذره‌ای با حرکت دلخواه زمان‌گونه و بزرگی ۱ است.

به‌عنوان مثالی از کاربرد معادله ب-۹، یعنی معادله پایستگی چارتکانه، دوباره تمرین ۳-۲۵ را در نظر می‌گیریم. ذره ورودی با جرم سکون M_0 و سرعت $3/5c$ دارای چارتکانه $(E_1/c^2, \pi_1/c, 0, 0) = \mathbf{P}_1$ خواهد بود، که در آن

$$E_1 = \gamma \left(\frac{3}{5} \right) M_0 c^2 = \frac{5}{4} M_0 c^2, \quad \pi_1 = \gamma \left(\frac{3}{5} \right) M_0 \times \frac{3}{5} c = \frac{3}{4} M_0 c$$

ذره ساکن با جرم $4/5 M_0$ دارای چارتکانه $(7/4 M_0, 0) = \mathbf{P}_2$ خواهد بود. چاربردار ذره جدید برابر خواهد بود با $(E_2/c^2, \pi_2/c, 0, 0) = \mathbf{P}_2$ ، که در آن

$$E_2 = \gamma(v) m_0 c^2, \quad \pi_2 = \gamma(v) m_0 v$$

m_0 جرم سکون و v سرعت آن است. از پایستگی چارتکانه نتیجه می‌شود

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2 \quad (*)$$

اکنون به سادگی، می توان مؤلفه های جداگانه این معادله چاربرداری را مساوی قرار داد و یا از ناورداها استفاده کرد. ما این راه اخیر را دنبال می کنیم. ناوردای ب-۱۳ را برای هر دو طرف (*) تشکیل می دهیم و با استفاده از

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_1 &= -M_0^2, & \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_2 &= -\left(\frac{\gamma}{4}M_0\right)^2 \\ \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 &= -\left(\frac{5}{4}M_0\right)\left(\frac{\gamma}{4}M_0\right), & \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_2 &= -m^2. \end{aligned}$$

به دست می آوریم $m_0 = 3/4\sqrt{15}M_0$. همین طور، از

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_2$$

با استفاده از $\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_2 = -\gamma/4 M_0 \cdot E_2/c^2$ در می یابیم که

$$E_2 = 3M_0 \cdot c^2 = \gamma(v) \left(\frac{3}{4}\sqrt{15}\right) M_0 \cdot c^2$$

بنابراین مانند قبل $\gamma(v) = 4/15\sqrt{15}$ و $v/c = 1/4$.

تمرینها

ب-۲۰ درستی ب-۱۵ و ب-۱۶ را تحقیق کنید.

ب-۲۱ فوتون ذره ای با جرم سکون صفر است. نشان دهید که یک الکترون آزاد منزوی نمی تواند فوتون گسیل و یا جذب کند. [از قوانین پایستگی انرژی و تکانه در مورد گسیل یک فوتون واحد توسط یک الکترون استفاده کنید.]

نمایش با تانسور متریک. معادله ب-۱۳ را می توان برحسب مؤلفه های g_{ab} تانسور متریک (۵-۵) را ببینید) به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \sum_{a,b} g_{ab} A^a A^b \quad (\text{ب-۱۷})$$

که در آن جمع بر روی تمام مقادیر شاخصهای a و b است. هم ارزی ب-۱۳ و ب-۱۷ را می توان از فرم تانسور متریک ۵-۶ دریافت، یعنی $g_{00} = -1$ و $g_{11} = g_{22} = g_{33} = +1$ و در غیر این صورت $g_{ab} = 0$ ، که اگر از مختصات مینکوفسکی استفاده کنیم همواره صادق است. برای

تحقیق درستی این هم‌ارزی عبارت جمع را مانند تمرین ۵-۸ صریحاً بنویسید و سپس مؤلفه‌های تانسور متریک را قرار دهید. این فرمولبندی چندین امتیاز دارد. اول اینکه در هر دستگاه مختصاتی معتبر است، در صورتی که ب-۱۳، در صورتی معتبر است که از مختصات مینکوفسکی استفاده شود؛ دوم اینکه هم در فضا زمان خمیده و هم در فضا زمان تخت معتبر است. به علاوه، فرمول بنیادی ۵-۵ الف برای ds^2 برحسب مؤلفه‌های تانسور متریک عملاً یک حالت خاص این عبارت است.

در مورد دو جابه‌جایی، ضرب اسکالر را مانند ۴-۳۱ تعریف کردیم. مقایسه این با ب-۱۷ نشان می‌دهد که می‌توان ضرب اسکالر دو بردار \mathbf{A} و \mathbf{B} را به صورت کمیت زیر تعریف کرد

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{a,b} g_{ab} A^a B^b$$

می‌توان نشان داد که این نیز یک ناورداست، و ب-۱۷ مورد خاصی از این فرمول است. \mathbf{A} و \mathbf{B} تنها در صورتی متعامدند که $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ باشد.

تمرین ب-۲۲

(الف) هم‌ارزی ب-۱۳ و ب-۱۷ را در صورتی که از مختصات مینکوفسکی استفاده شود، نشان دهید. (ب) ضرب اسکالر $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ دو چاربردار را در صورتی که از مختصات مینکوفسکی استفاده شود بنویسید، و نشان دهید که این ضرب تحت ب-۵ ناورداست.

ب-۵ فضا زمانهای خمیده

تا کنون چاربردارها را در فضا زمانهای تخت بررسی کرده‌ایم و دستگاههای مختصات منحصر به مختصات مینکوفسکی بود. با وجود این، در فضا زمان تخت می‌توانیم از هر مختصاتی همراه با مؤلفه‌های برداری وابسته به آن استفاده کنیم (نه فقط در تبدیل بین دو چارچوب مرجع که نسبت به هم با سرعت ثابت حرکت می‌کنند، بلکه مثلاً در تبدیل به چارچوبهای شتابدار یا دستگاههای مختصات خمیده خطی)؛ و این مدلی برای رابطه در یک فضا زمان خمیده عمومی فراهم می‌آورد. تبدیلهای عمومی. با یک تغییر مختصات دلخواه در فضا زمان تخت رابطه‌های ب-۵ باز هم تغییر مؤلفه‌های برداری را می‌دهند، اما اکنون ماتریسهای \mathbf{L} و \mathbf{L}^{-1} هر ماتریس ناتکینی هستند که وارون یکدیگر باشند، یعنی به‌ازای $3', \dots, 3'$ ، $a', b' = 0', \dots, 3'$

$$\sum_a L_a^{a'} (\mathbf{L}^{-1})_{b'}^a = \delta_{b'}^{a'} \quad (\text{ب-۱۸})$$

که در آن $\delta_{b'}^{a'} = 1$ اگر $a' = b'$ و در غیر این صورت برابر صفر است؛ اینها مؤلفه‌های ماتریس واحدند،^۱ که این ویژگی را دارند که هر برداری را به خودش تبدیل می‌کنند، یعنی

$$\sum_b \delta_b^a X^b = X^a \quad (\text{ب-۱۹})$$

(این را می‌توان به آسانی، مثلاً با قراردادن $a = 0$

$$\sum_b \delta_b^0 X^b = \delta_0^0 X^0 + \delta_1^0 X^1 + \delta_2^0 X^2 + \delta_3^0 X^3 = X^0 + 0 + 0 + 0 = X^0$$

و غیره نشان داد.)

اینکه تبدیل ب-۵ و وارون تبدیل ب-۵ الف است پیامد خاصیت وارونی ب-۱۸ است. اگر از ب-۵ در ب-۵ الف بگذاریم، به دست می‌آوریم

$$A^{a'} = \sum_a L_a^{a'} A^a = \sum_a L_a^{a'} \sum_{c'} (\mathbf{L}^{-1})_{c'}^a A^{c'} = \sum_{c'} \left\{ \sum_a L_a^{a'} (\mathbf{L}^{-1})_{c'}^a \right\} A^{c'}$$

$$A^{c'} = \sum_{c'} \delta_{c'}^{c'} A^{c'} = A^{c'}$$

گام دوم تا آخر از ب-۱۸، و گام آخر از ب-۱۹ نتیجه می‌شود رابطه ب-۱۸ به‌ویژه برای فرمهای \mathbf{L} و \mathbf{L}^{-1} که در ب-۶ الف و ب-۶ ب آمده‌اند صادق است، و این را می‌توان مستقیماً بررسی کرد؛ مثلاً اگر قرار دهیم $a' = 0'$ و $b' = 0'$ ، به دست می‌آوریم

$$\sum_a L_a^{0'} (\mathbf{L}^{-1})_{0'}^a = L_0^{0'} (\mathbf{L}^{-1})_{0'}^0 + L_1^{0'} (\mathbf{L}^{-1})_{0'}^1 + L_2^{0'} (\mathbf{L}^{-1})_{0'}^2 + L_3^{0'} (\mathbf{L}^{-1})_{0'}^3$$

$$= (\gamma)(\gamma) + (-V\gamma)(\gamma V) + 0 + 0 = \gamma^2(1 - V^2) = 1 = \delta_0^{0'}$$

چنانکه باید باشد. همین‌طور، می‌توانیم تمام مؤلفه‌های دیگر ب-۱۸ را نیز بررسی کنیم. بدین ترتیب، ب-۱۸ به‌طور فشرده وارونی ب-۶ ب و ب-۶ الف را خلاصه می‌کند.

۱. در نمادگذاری ماتریسی، ب-۱۸ می‌شود $\mathbf{L}\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{I}$.

تمرین ب-۲۳

اگر مختصات دکارتی $(x^i) = (x, y, z)$ را به مختصات قطبی $(x^{i'}) = (\rho, \theta, z)$ در فضای اقلیدسی تبدیل کنیم، ماتریس \mathbf{L} برای تبدیل مؤلفه‌های بردار عبارت است از

$$[L_{i'}^i] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -(\rho/\rho) \sin \theta & (\rho/\rho) \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یعنی، برای هر بردار \mathbf{A} با مؤلفه‌های A^i و $A^{i'}$ ، و به‌ازای $i = 1, 2, 3$ و $i' = 1, 2, 3'$

$$A^{i'} = \sum_i L_{i'}^i A^i$$

تبدیل صریحی که $A^{i'}$ را برحسب A^i به‌ازای $i' = 1, 2', 3'$ به‌دست می‌دهد به‌دست آورید. ماتریس وارون \mathbf{L}^{-1} را تعیین کنید، و تبدیل وارونی را که A^i را برحسب $A^{i'}$ می‌دهد به‌طور صریح پیدا کنید. به‌ویژه، مؤلفه‌های دکارتی میدانهای برداری با مؤلفه‌های قطبی $(W^{i'}) = (1, 0, 0)$ ؛ $(Y^{i'}) = (0, 1, 0)$ ؛ $(Z^{i'}) = (0, 0, 1)$ را پیدا کنید.

چاربردارهای فضای خمیده. ساختار تبدیل فوق برای فضا زمانهای خمیده نیز معتبر است؛ یعنی یک چاربردار \mathbf{A} در فضا زمان خمیده کمیتی با مؤلفه‌های A^a است که برای ماتریس ناتکین \mathbf{L} با تغییر عمومی در بردارهای پایه مطابق بـ۵الف و ب تبدیل می‌شود، \mathbf{L}^{-1} ماتریس وارون است که از بـ۱۸ پیروی می‌کند.

نمونه‌هایی از چاربردارها در فضا زمانهای خمیده عبارت‌اند از چارسرعت $(U^a) = (dx^a/d\tau)$ و چارتکانه $(P^a) = (m_0 U^a)$ یک ذره. هر چند، نباید عجولانه نتیجه‌ای گرفت: بردار $d\mathbf{P}/d\tau$ به بـ۱۲الف تحت یک تغییر چارچوب کلی چاربردار نیست. در واقع

$$d(P^{a'})/d\tau = \frac{d}{d\tau} \left(\sum_a L_a^{a'} P^a \right) = \sum_a L_a^{a'} \frac{d}{d\tau} P^a + \sum_a \left(\frac{d}{d\tau} L_a^{a'} \right) P^a$$

جمله اول طرف راست شکل صحیح بـ۵الف برای یک چاربردار را دارد، اما جمله دوم، اگر صفر نباشد، این‌طور نیست. این جمله تنها در صورتی صفر است که کمیت‌های $L_a^{a'}$ ثابت باشند، که این در مورد یک تبدیل عمومی صحت نخواهد داشت (اما برای تبدیل لورنتس در فضا زمان تخت صادق است. در نتیجه $d(P^a)/d\tau$ در حالت کلی مانند یک چاربردار تبدیل نمی‌شود. این

۱. اغلب مؤلفه‌های برداری را برحسب پایه‌های طبیعی می‌دهند که مختصات مورد استفاده آن را تعریف می‌کند. در این صورت \mathbf{L} فرم خاصی دارد: ماتریس ژاکوبی مشتقات جزئی است، یعنی اگر مختصات جدید $x^{a'} = x^a(x^a)$ باشند، در این صورت $L_a^{a'} = \partial x^{a'}/\partial x^a$ است.

در مورد هر مشتق چاربردار صادق است؛ جملات اضافی باید به این تعریف اضافه شود تا تحت یک تغییر پایه عمومی مانند یک بردار تبدیل شود. روش انجام این کار در حساب تانسوری توصیف می‌شود، که ما در اینجا به آن نخواهیم پرداخت.^۱

تانسور متریک. در مورد فضازمانهای خمیده، باز هم می‌توان ضرب اسکالر فضازمان بردار A با خودش را در هر چارچوب مرجعی مانند معادله ب-۱۷ نوشت. طبق ب-۱۸، این کمیت بدون توجه به تغییر چارچوب مرجع ناورد است، در صورتی که مؤلفه‌های تانسور متریک g_{ab} به صورت زیر تبدیل شوند

$$g_{a'b'} = \sum_{a,b} (\mathbf{L}^{-1})_{a'}^a (\mathbf{L}^{-1})_{b'}^b g_{ab} \quad (\text{ب-۲۰ الف})$$

هنگامی که بردارها مانند ب-۵ تبدیل می‌شوند از آنجا که ضرب اسکالر یک بردار در خودش باید در واقع ناورد باشد (به چارچوب مرجع و یا دستگاه مختصاتی که در آن محاسبه می‌شود بستگی ندارد)، ب-۲۰ الف باید نحوه تبدیل مؤلفه‌های تانسور متریک باشد.^۲ این مطلب بخصوص ناوردایی فرم متریک ۵-۵ تحت یک تغییر چارچوب دلخواه (و از این رو هر مختصاتی که در فضازمان خمیده مورد استفاده قرار گیرد) را تضمین می‌کند. ب-۲۰ الف نه تنها در فضازمانهای خمیده معتبر است بلکه چگونگی تبدیل تانسور متریک در اثر تغییرهای دلخواه مختصات در فضازمان تخت نیز هست (زیرا فضازمان تخت جز حالت خاصی از یک فضازمان خمیده نیست).

از آنجا که ب-۲۰ الف تغییر تانسور متریک تحت تمام تغییرهای مختصات را توصیف می‌کند، می‌توان این سؤال را مطرح کرد که چه چیز خاصی در مورد تبدیلهای لورنتس (مانند ب-۵) وجود دارد، که نماینده تغییر از یک مجموعه مختصات مینکوفسکی به مجموعه دیگر است؟ پاسخ آن است که این تبدیلهای دقیقاً فرم متریک ویژه ۵-۶ ب را حفظ می‌کنند. بدین ترتیب، مثلاً فرض کنید که در ابتدا متریک دارای این فرم است، و تبدیل L انجام می‌شود که با ب-۶ الف داده شده است و وارون آن L^{-1} از ب-۶ ب به دست می‌آید. از جمع‌زنی ب-۲۰ الف با تانسور متریک $[g_{ab}]$ در ۵-۶ ب داریم

$$g_{a'b'} = -(\mathbf{L}^{-1})_{a'}^0 (\mathbf{L}^{-1})_{b'}^0 + (\mathbf{L}^{-1})_{a'}^1 (\mathbf{L}^{-1})_{b'}^1 + (\mathbf{L}^{-1})_{a'}^2 (\mathbf{L}^{-1})_{b'}^2 + (\mathbf{L}^{-1})_{a'}^3 (\mathbf{L}^{-1})_{b'}^3$$

۱. برای آشنایی با این بحث مثلاً نگاه کنید به

J. L. Synge and A. Schild *Tensor Calculus* (Dover, 1959).

۲. ب-۲۰ الف در شکل ماتریسی آن عبارت است از $\mathbf{g}' = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{g} (\mathbf{L}^{-1})^T$ در جایی که T ترانهاده را نشان می‌دهد.

در این صورت، مثلاً اگر قرار دهیم $a' = 0'$ و $b' = 0'$ ، با استفاده از ب-۶ داریم

$$g_{0'0'} = -(\mathbf{L}^{-1})_{0'}^0, (\mathbf{L}^{-1})_{0'}^0 + (\mathbf{L}^{-1})_{0'}^1, (\mathbf{L}^{-1})_{0'}^1 + (\mathbf{L}^{-1})_{0'}^2, (\mathbf{L}^{-1})_{0'}^2 + (\mathbf{L}^{-1})_{0'}^3, (\mathbf{L}^{-1})_{0'}^3 \\ = -\gamma^2 + (V\gamma)^2 + 0 + 0 = \gamma^2(V^2 - 1) = -1$$

که نشان می‌دهد این مؤلفه مقدار خود را طبق ۵-۶ حفظ کرده است. همین‌طور هر مؤلفه‌ای فرم خود را حفظ می‌کند، و این یک راه نوینی برای تعریف تبدیل لورنتس است، و آن تبدیلی است که فرم مؤلفه‌های تانسور متریک را حفظ می‌کند. یک تبدیل عمومی در فضا-زمان تخت و یا خمیده این کار را نخواهد کرد.

تمرینها

ب-۲۴ نشان دهید که اگر متریک طبق ب-۲۰ الف و بردارها طبق ب-۵ الف تبدیل شوند، در این صورت ضرب اسکالر ب-۱۷ یک ناورد است به شرطی که \mathbf{L}^{-1} طبق ب-۱۸ تعریف شده باشد.

ب-۲۵ مؤلفه‌های جدید $g_{i'j'}$ تانسور متریک را تعیین کنید. هرگاه مختصات دکارتی (x^i) را با استفاده از ب-۲۰ الف به مختصات قطبی $(x^{i'})$ تبدیل کنیم، ماتریس تبدیل هم همان ماتریس تمرین ب-۲۳ است. صریحاً نشان دهید که $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$ ، $\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}$ و $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}$ ناوردا هستند؛ این بردارها مانند بردارهای تمرین ب-۲۳ تعریف شده‌اند.

ب-۲۶ کمیت (W_a) را از بردار (X^b) طبق رابطه $W_a = \sum_b g_{ab} X^b$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که ویژگیهای تبدیل (W_a) عبارت‌اند از

$$W_{a'} = \sum_a (\mathbf{L}^{-1})_{a'}^a W_a, \quad W_a = \sum_{a'} L_a^{a'} W_{a'}$$

قرارداد جمع‌زنی. سرانجام، توجه داریم که در هر موردی که جمع‌زدن روی شاخصها پیش می‌آید (ب-۵، ب-۱۷، ب-۱۸، ب-۱۹، ب-۲۰ الف را ببینید)، هر شاخصی که جمع زده می‌شود دقیقاً دوبار، یکبار در بالا و یکبار در پایین ظاهر می‌شود. معنای این ویژگی آن است که می‌توانیم بگوییم کدام شاخص را باید با کدام شاخص دیگر جمع زد، برای این‌کار کافی است توجه داشته باشیم که این نوع شاخصها به صورت جفتهای تکراری ظاهر می‌شوند (یکی بالا، یکی پایین). بنابراین، می‌توانیم با استفاده از نمادگذاری ساده شده در نوشتن بسیار صرفه‌جویی کنیم: می‌توانیم علامتهای جمع را حذف کنیم، و بدانیم که هرگاه شاخصها به صورت جفت تکراری ظاهر می‌شوند باید جمع زد. بدین ترتیب مثلاً می‌توانیم ب-۲۰ الف را به صورت زیر بنویسیم

$$g_{a'b'} = (\mathbf{L}^{-1})_{a'}^a (\mathbf{L}^{-1})_{b'}^b g_{ab} \quad (\text{ب-۲۰})$$

باید روی a و b جمع بزنیم زیرا هر یک از آنها شاخص تکراری است (یکی بالا، یکی پایین). این را قرارداد جمع‌زنی اینشتین می‌گویند. به‌عنوان یک مثال دیگر، ضرب اسکالر $A \cdot B$ دو بردار برابر است با

$$A \cdot B = g_{ab} A^a B^b \quad (ب-۲۱)$$

باید روی a و b جمع بزنیم.

تمرینها

ب-۲۷ جمع‌زنیهایی را که عبارتهای (الف) $X^a W_a$ ، (ب) $g_{ab} X^a Y^b$ را ایجاب می‌کنند صریحاً بنویسید.

ب-۲۸ فرض کنید که (W_a) مانند تمرین ب-۲۶ تبدیل می‌شود، ثابت کنید که کمیت $S = Y^a W_a$ که در آن برداری Y^a است که طبق ب-۵ تبدیل می‌شود ناورداست.

تمرین کامپیوتری ۱۷

برنامه‌ای بنویسید که به‌عنوان ورودی مؤلفه‌های $L(A, B)$ یک ماتریس تبدیل L از چارچوب F به چارچوب F' ، و مؤلفه‌های $LI(A, B)$ ماتریس وارون L^{-1} را بپذیرد. این برنامه باید ابتدا بررسی کند که $L(A, B)$ و $LI(A, B)$ در واقع ماتریسهایی وارون‌اند، و سپس مؤلفه‌های $X(B)$ بردار X و مؤلفه‌های $G(A, B)$ تانسور متریک را به‌عنوان ورودی بخواند. پس از آن باید (۱) مؤلفه‌های جدید $X'(A)$ آن بردار و $G'(A, B)$ متریک را طبق معادله‌های ب-۵ و ب-۲۰ محاسبه کند و (۲) ضرب اسکالر $X \cdot X$ را قبل و بعد از تبدیل محاسبه کند. این کمیت باید ناوردا باشد، و از این‌رو تفاضل $X' \cdot X' - X \cdot X$ می‌تواند درستی محاسبات را امتحان کند. فرض کنید که معلوم شود این مقدار تقریباً و نه تحقیقاً صفر است؛ این اختلاف را ناشی از چه چیزی می‌توان یافت؟ [شما می‌توانستید ماتریس تبدیل را طوری انتخاب کنید که یک دوران فضایی را نمایش دهد، یعنی یک "خیز" ب-۵؛ یا یک تبدیل عمومی‌تر.]

چارتکانه P ذره‌ای با جرم سکون M^0 را در نظر بگیرید که در چارچوب F' ساکن است. با استفاده از برنامه خود چارتکانه آن را در F' حساب کنید. برنامه را طوری تغییر دهید که چارتکانه چندین ذره را با یکدیگر جمع کند و جمع کل چارتکانه‌ها را در چارچوب F به‌دست دهد، و ضرب این چارتکانه کل در خودش $P \cdot P$ را پیدا کند. چه نوع ویژگی تبدیلی را می‌توان از این کمیت انتظار داشت؟ با استفاده از برنامه‌تان درستی آنچه را که از این کمیت انتظار می‌رود تحقیق کنید. برنامه را طوری تنظیم کنید که بتواند مورد ذرات با جرم سکون صفر را نیز به حساب بیاورد. چارتکانه کل مجموعه‌ای از ذرات با جرم سکون صفر را تعیین کنید و بزرگی آن را بیابید. چند مورد دیگر را هم بیازمایید، و دربارهٔ جوابتان اظهار نظر کنید.

پیوست ج

چارتانسورها، الکترومغناطیس و پایستگی انرژی-تکانه

در پیوست ب مفهوم چاربردار را بررسی کردیم. اینها اشیای ساده هندسی در فضا زمان هستند، که برای نمایش تمام اشیای فیزیکی و هندسی جالب توجه از پیچیدگی کافی برخوردار نیستند (چاربردارها با چهار مؤلفه مستقل توصیف می شوند، اما بسیاری از کمیت‌های هندسی و فیزیکی برای توصیف کامل به مؤلفه‌های بیشتری نیاز دارند). برای نمایش اشیای پیچیده‌تر، به چارتانسورها نیاز داریم. اینها اشیای کلتری هستند که رفتار آنها، به طوری که بزودی دقیقاً مشخص خواهیم کرد، شبیه بردارهاست، اما تعداد مؤلفه‌های آنها بیشتر است (شاخصهای بیشتری دارند). در قسمت عمده این پیوست تانسورهای عمومی با یک یا دو شاخص را بررسی می‌کنیم؛ و سرانجام آن را به تانسورهای با تعدادی دلخواه شاخص به طور خلاصه تعمیم می‌دهیم.

ج-۱ چارتانسورهای ساده و معادله‌های تانسوری

تا کنون با سه نمونه از تانسورها مواجه شده‌ایم؛ بردار A با مؤلفه‌های A^a ، تانسور متریک g با مؤلفه‌های g_{ab} ، و کمیت W (یک فرم-۱) با مؤلفه‌های W_a تمرین ب-۲۶ را ببینید. در هر مورد مؤلفه‌هایی که برای نمایش یک کمیت فیزیکی یا هندسی به کار می‌روند به چارچوب مرجع و مختصات مورد استفاده بستگی دارند. برای سهولت چگونگی تغییر مؤلفه‌ها با تغییر مختصات را خلاصه می‌کنیم (که در ب-۵ الف و ب، ب-۲۰ و تمرین ب-۲۶ آمده‌اند).

$$A^{a'} = L_a^{a'} A^a \quad (\text{ج-۱ الف})$$

$$W_{a'} = (L^{-1})_{a'}^a W_a \quad (\text{ج-۱ ب})$$

$$g_{a'b'} = (L^{-1})_{a'}^a (L^{-1})_{b'}^b g_{ab} \quad (\text{ج-۱ ج})$$

که در آن ماتریسهای تبدیل L و L^{-1} وارون یکدیگرند

$$L_c^{a'} (L^{-1})_{b'}^c = \delta_{b'}^{a'}, \quad (L^{-1})_{c'}^a L_b^{c'} = \delta_b^a \quad (\text{ج-۲})$$

با ب-۱۸ مقایسه کنید؛ $\delta_a^b = 1$ اگر $a = b$ ، و در غیر این صورت صفر است). قرارداد جمع‌زنی را اکنون و در آنچه خواهد آمد رعایت می‌کنیم (روی هر شاخص تکراری جمع می‌بندیم، پیوست ب را ببینید). در نتیجه روابط وارون عبارت‌اند از

$$A^a = (L^{-1})_{a'}^a A^{a'} \quad (\text{ج-۳ الف})$$

$$W_a = L_a^{a'} W_{a'} \quad (\text{ج-۳ ب})$$

$$g_{ab} = L_a^{a'} L_b^{b'} g_{a'b'} \quad (\text{ج-۳ ج})$$

(مثلاً اثبات اینکه ج-۳ الف وارون ج-۱ الف است از ب-۱۹ نتیجه می‌شود). این روابط برای هر تغییر مختصاتی در فضا-زمان تحت اعتبار دارند؛ به‌ویژه، در مورد تغییر مختصات مینکوفسکی به‌ازای سرعت v در جهت x معتبرند، که در این صورت L و L^{-1} از ب-۵ الف و ب به‌دست می‌آیند.

تعمیم به‌تانسور عمومی T که دارای تعداد دلخواهی شاخص بالایی و تعداد دلخواهی شاخص پایینی است روشن است، اما برای سهولت فعلاً تانسورهایی را بررسی خواهیم کرد که حداکثر دو شاخص داشته باشند؛ و این شامل موارد مهمی است که از نظر فیزیکی قابل توجه هستند.

تانسورهای دوشاخه‌ی. بنابراین علاوه بر مواردی که در ج-۱ تا ج-۳ آمد مورد تانسورهای T و S را بررسی خواهیم کرد که مؤلفه‌های آنها نسبت به یک چارچوب انتخابی، به‌صورت T^{ab} و S_a^b است که در آنها [چون فضا-زمان چهاربعدی است با مؤلفه‌های x^a ($a = 0, 1, 2, 3$)] هر شاخص تمام مقادیر $0, 1, 2, 3$ را می‌گیرد هرگاه چارچوب دیگری انتخاب شود، همان کمیت هندسی با مجموعه دیگری از مؤلفه‌ها نمایش داده می‌شود. در اینجا ایده اصلی این است که ج-۱ را به‌عنوان مدلی در نظر بگیریم که نشان می‌دهد چگونه شاخصهای بالایی و پایینی تبدیل می‌شوند. در هر مورد، شاخص قدیم پس از جمع‌زدن بر روی آن در ماتریس تبدیل، که آن را با شاخص جدیدی جایگزین می‌کند، حذف می‌شود؛ انتخاب ماتریس تبدیل (ماتریس به‌پیش L یا ماتریس وارون L^{-1}) مورد استفاده از آنجا نتیجه می‌شود که شاخص نهایی باید در مکان درستی

باشد (بالا یا پایین). اگر این طرح را دنبال کنیم، مؤلفه‌های \mathbf{T} و \mathbf{S} باید به صورت زیر تبدیل شوند

$$T^{a'b'} = L_a^{a'} L_b^{b'} T^{ab}, \quad S_{c'}^a = L_a^{a'} S_c^a (\mathbf{L}^{-1})_{c'}^c \quad (\text{ج-۴الف و ب})$$

این روابط چگونگی به دست آوردن مؤلفه‌های جدید از مؤلفه‌های قدیم را توصیف می‌کند. برعکس، برای به دست آوردن مؤلفه‌های قدیم از مؤلفه‌های جدید، تبدیلهای وارون عبارت‌اند از

$$T^{ab} = (\mathbf{L}^{-1})_{a'}^a (\mathbf{L}^{-1})_{b'}^b T^{a'b'}, \quad S_c^a = (\mathbf{L}^{-1})_{a'}^a S_{c'}^a L_c^{c'} \quad (\text{ج-۵الف و ب})$$

در هر مورد، رابطه‌ها باید به‌ازای هر مقدار "شاخصهای آزاد" (در ج-۴الف، a' و b' ؛ در ج-۴ب، a' و c' ؛ در ج-۵الف، a و b ؛ در ج-۵ب، a و b) صادق باشد. در این صورت جزئیات معنای رابطه بالا از قرارداد جمع‌زنی نتیجه می‌شود: همانند رابطه‌های ج-۱الف و ج، که در بخش قبل به تفصیل مورد بحث قرار گرفت، کافی است تمام جملاتی را که جمع‌زنی ایجاب می‌کند بنویسیم سپس مقادیر تانسور و مؤلفه‌های ماتریس تبدیل را جایگزین کنیم.

یک مثال. به‌عنوان مثال ج-۴ب را در مورد فضای دوبعدی در نظر می‌گیریم. در این مورد رابطه بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$S_{c'}^a = L_1^{a'} S_1^a (\mathbf{L}^{-1})_{c'}^1 + L_2^{a'} S_2^a (\mathbf{L}^{-1})_{c'}^2 + L_3^{a'} S_3^a (\mathbf{L}^{-1})_{c'}^3 + L_4^{a'} S_4^a (\mathbf{L}^{-1})_{c'}^4 \quad (\text{ج-۶الف})$$

که به‌ازای هر یک از مقادیر $1'$ و $2'$ شاخصهای آزاد a' و c' معتبر است، مثلاً به‌ازای $1' = a'$ و $c' = 1'$

$$S_{1'}^1 = L_1^1 S_1^1 (\mathbf{L}^{-1})_{1'}^1 + L_2^1 S_2^1 (\mathbf{L}^{-1})_{1'}^2 + L_3^1 S_3^1 (\mathbf{L}^{-1})_{1'}^3 + L_4^1 S_4^1 (\mathbf{L}^{-1})_{1'}^4$$

فرض می‌کنیم \mathbf{L} نماینده یک چرخش باشد: $L_1^1 = \cos \theta = L_2^2$ و $L_1^2 = -\sin \theta = -L_2^1$. در این صورت رابطه بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$S_{1'}^1 = (\cos^2 \theta) S_1^1 + (\sin \theta \cos \theta) (S_1^2 + S_2^1) + (\sin^2 \theta) S_2^2$$

اگر فرض کنیم که مشخصات \mathbf{S} در چارچوب اولیه $S_1^1 = 1 = S_2^2$ و $S_1^2 = S_2^1 = 0 = S_1^2 = S_2^1$ است، یعنی

$$S_b^a = \delta_b^a$$

در این صورت می‌بینیم که $S_1^{a'} = 1$ ؛ یعنی مؤلفه $S(1, 1)$ تحت چرخش ناورداست. همین‌طور اگر به a' و c' در ج-۶ الف تمام مقادیر دیگر $(1, 2)$ ، $(2, 1)$ ، و $(2, 2)$ را بدهیم، می‌بینیم که تمام این مؤلفه‌ها تحت چرخش ناوردا هستند. آیا این یک ویژگی خاص چرخش فضایی است؟ برای بررسی بیشتر این مطلب، به ج-۶ الف باز می‌گردیم و اکنون یک ماتریس تبدیل دلخواه L را در ج-۶ ب جایگزین می‌کنیم، به دست می‌آوریم

$$S_{c'}^{a'} = L_1^{a'} (L^{-1})_{c'}^1 + L_4^{a'} (L^{-1})_{c'}^4 = \delta_{c'}^{a'} \quad (\text{ج-۶ ج})$$

گام آخر از ج-۶ نتیجه می‌شود. بدین ترتیب کمیت S ، که در چارچوب اولیه با ج-۶ ب تعریف و به‌طور تانسوری ج-۶ الف تبدیل می‌شود، در تمام مختصات دارای مؤلفه‌های (ج-۶ ب) یکسان است، بدون توجه به تبدیلی که انجام شود.

معادله‌های تانسوری. اهمیت قواعد تبدیلی که نمونه‌ای از آن در (ج-۱ تا ج-۵) آورده شد، آن است که اگر یک معادله تانسوری در یک چارچوب صادق باشد، در تمام چارچوبها صادق است؛ روشن است که می‌خواهیم تمام معادله‌های فیزیکی واقعی این خاصیت را دارا باشند (اعتبار یک معادله نباید به ناظری که اندازه‌گیری را انجام می‌دهد و یا دستگاه مختصاتی که مورد استفاده قرار می‌دهد بستگی داشته باشد). به‌عنوان نمونه‌ای از آنچه گفته شد، فرض می‌کنیم که می‌دانیم معادله

$$R_b^a = S_b^a \quad (\text{ج-۷})$$

در یک دستگاه مختصات که در آن R_b^a و S_b^a مؤلفه‌های تانسوری هستند که طبق (ج-۴ ب) تبدیل می‌شوند صادق است؛ در این صورت (ج-۷) به‌ازای جمیع مقادیر شاخصهای a و b صادق است. در نتیجه در هر چارچوب دیگری، به‌ازای جمیع مقادیر a' و b'

$$\begin{aligned} R_{b'}^{a'} &= L_a^{a'} R_b^a (L^{-1})_{b'}^b && (\text{زیرا } R \text{ از ج-۴ پیروی می‌کند}) \\ &= L_a^{a'} S_b^a (L^{-1})_{b'}^b && (\text{طبق ج-۷ در چارچوب قدیم}) \\ &= S_{b'}^{a'} && (\text{زیرا } S \text{ از ج-۴ پیروی می‌کند}) \end{aligned}$$

که نتیجه بیان شده را اثبات می‌کند. در مورد معادله‌های تانسوری دیگر، که شاخصهای آزاد در سمت راست و چپ یکی هستند (یعنی، اگر شاخص آزاد a در بالا در سمت چپ باشد، یک شاخص آزاد a هم در بالا در سمت راست وجود داشته باشد؛ اگر شاخص آزاد d در پایین در سمت چپ باشد، یک شاخص آزاد d هم در پایین در سمت راست وجود داشته باشد؛ و غیره) اثبات مشابه است. یک مورد خاص مهم این است که اگر تانسوری در یک چارچوب مرجع صفر باشد (به‌طوری

که تمام مؤلفه‌های آن در آن چارچوب صفر باشند)، در این صورت در تمام چارچوبهای دیگر صفر است. ما بخصوص می‌خواهیم که این ویژگی در مورد کمیت‌های مهم فیزیکی صدق کند. نباید یک کمیت فیزیکی غیر صفر را بتوان با تغییر دستگاه مختصات و یا چارچوب مرجع صفر کرد.

عملیات تانسوری. معادله تانسوری (ج-۷) نسبتاً ساده است. می‌توان با استفاده از چهار عمل اصلی تانسوری معادله‌های پیچیده‌تری ساخت. این عملیات عبارت‌اند از

۱. ترکیب خطی. مثلاً با در دست داشتن تانسورهای $[R^{ab}]$ و $[S^{ab}]$ ، و اعداد λ و μ می‌توانیم یک تانسور جدید $[T^{ab}]$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$T^{ab} = \lambda R^{ab} + \mu S^{ab}$$

توجه کنید که این‌کار تنها در مورد تانسورهای هم نوع، یعنی با شاخصهای بالا و پایین یکسان، امکانپذیر است.

۲. تشکیل ضرب تانسوری. مثلاً، با داشتن دو بردار دلخواه (R^a) و (S_b) می‌توانیم یک تانسور جدید $[T_b^a]$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$T_b^a = R^a S_b$$

۳. بالا بردن و پایین آوردن شاخصها. یک تانسور دلخواه با شاخص بالایی a را در نظر می‌گیریم، می‌توانیم با ضرب این تانسور در تانسور متریک، تانسوری بسازیم که آن شاخص را در پایین داشته باشد. مثلاً $[T_b^a]$ مفروض است، می‌توانیم شاخص a را پایین بیاوریم تا $[T_{cb}]$ به دست آید. که در آن $T_{cb} = g_{ca} T_b^a$. می‌توانیم $[T_b^a]$ و $[T_{cb}]$ را آرایه مختلفی از مؤلفه‌هایی بدانیم که شیء هندسی واحدی را توصیف می‌کنند. برعکس، می‌توانیم هر شاخص پایینی b را با ضرب در تانسور متریک وارون $[g^{bd}]$ بالا ببریم، یعنی تانسوری که طبق رابطه زیر تبدیل می‌شود

$$g^{bd} g_{dc} = \delta_c^b \quad (\text{ج-۸})$$

که در آن δ_b^a مؤلفه‌های تانسور واحد هستند (با ب-۱۸ مقایسه کنید). بدین ترتیب، مثلاً $T_b^a = g^{ad} T_{db}$ را بالا می‌برد.

۴. ادغام تانسور. یک تانسور را می‌توانیم با جمع بستن بر روی هر جفت از شاخصهای آن (یکی بالایی، دیگری پایینی) خلاصه کنیم. مثلاً، با داشتن تانسور $[S_b^a]$ (که می‌توان آن را با انجام مکرر عملیات قبل ساخت)، می‌توانیم با ادغام شاخصهای b و d کمیت T را بسازیم؛ یعنی،

$$T = S_b^b \quad (\text{ج-۹ الف})$$

که در آن جمع روی تمام مقادیر شاخص b صورت می‌گیرد. این کمیت الزاماً ناورداست، یعنی کمیتی است که بر سر مقدار آن تمام ناظرها توافق دارند:

$$T' = T \quad (\text{ج-۹})$$

برای اثبات، ج-۴ را ادغام و از ج-۲ استفاده می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$T' = S^{a'}_{a'} = S^a_b (L^{-1})^b_{a'} L^a_{a'} = S^a_b \delta^b_a = S^a_a = T$$

انتظار داریم که تمام کمیت‌های اسکالر دارای اهمیت فیزیکی (یعنی، کمیت‌های بدون شاخص ناوردا باشند، و از این رو اینکه بتوان به سادگی ناورداها را با ادغام تانسورها ساخت بسیار سودمند است. فضازمان خمیده. در فضازمان تخت می‌توان مختصات مینکوفسکی $(t, x/c, y/c, z/c)$ را برای تمام فضا یافت و در این صورت مؤلفه‌های تانسور متریک g_{ab} به شکل متعارف

$$g_{00} = -1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \quad g_{ab} = 0, \quad a \neq b$$

در می‌آیند (۵-۶ را ببینید)، یعنی

$$[g_{ab}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ج-۱۰})$$

از ج-۸ نتیجه می‌شود که مؤلفه‌های متریک وارون g^{ab} نیز همین شکل استاندارد را دارند: $g^{00} = -1, g^{11} = g^{22} = g^{33} = 1, g^{ab} = 0$ اگر $a \neq b$.

تبدیل لورنتس این فرم را حفظ می‌کند، یعنی فرم تحت تبدیل ب-۲ که در آن L نماینده یک تبدیل لورنتس ب-۵ است ناورداست. می‌توان از هر تغییر چارچوب L دیگری نیز استفاده کرد به شرط آنکه این ماتریس ناکین باشد؛ در حالت کلی این کار فرم متریک را پیچیده‌تر می‌کند. قوانین تبدیل ج-۱ تا ج-۵ همگی در فضازمانهای خمیده معتبر باقی خواهند ماند، همین‌طور تمام نتایجی که بتوان از آنها استنتاج کرد. هر چند، در فضازمان خمیده مختصات را نمی‌توان طوری انتخاب کرد که همه جا تانسور متریک فرم کانونیک داشته باشد؛ تنها کار ممکن این است که آن را در نقطه‌ای مانند P به این فرم درآورد. به‌طور دقیقتر، می‌توان مختصات را طوری انتخاب کرد که g_{ab} در P فرم ج-۱۰ را داشته باشد؛ در این صورت، در حالت کلی، g_{ab} در نقطه دیگری مانند Q چنین فرمی را نخواهد داشت. مجموعه دیگری از مختصات را می‌توان طوری انتخاب کرد که

g_{ab} در نقطه Q فرم ج-۱ را داشته باشد، این مختصات در حالت کلی در نقطه P این فرم را نخواهد داشت.

تمرینها

ج-۱ ثابت کنید که تانسور چهاربعدی S_b^a که مؤلفه‌های آن در یک چارچوب $S_b^a = \delta_b^a$ است، همین مؤلفه‌ها را در تمام چارچوبها دارد.

ج-۲ ثابت کنید که کمیت $W \equiv W_{ab} X^a X^b$ یک ناورداست در صورتی که این کمیتها چنانکه از شاخصهایشان پیداست تانسور باشند. اگر W در یک چارچوب صفر شود، آیا در تمام چارچوبها صفر می‌شود؟

فرض کنید W_{ab} پادمتقارن باشد، یعنی $W_{ab} = -W_{ba}$. مقدار W در این مورد را حساب کنید.

ج-۳ ثابت کنید که اگر تانسور T_{ab} در یک چارچوب متقارن باشد، یعنی به ازای جمیع مقادیر a و b $T_{ab} = T_{ba}$ ، در این صورت در تمام چارچوبها متقارن است. همین نتیجه را برای تانسورهای پادمتقارن بیان و اثبات کنید. اگر W_{ab} پادمتقارن باشد، مقدار نوردای $g^{ab} W_{ab}$ چقدر است؟

ج-۴ نشان دهید که مؤلفه‌های تانسور متریک g_{ab} دارای فرم متعارف ج-۱ هستند اگر و تنها اگر مختصات مورد استفاده از نظر یکی از ناظرها مختصات مینکوفسکی $(t, x/c, y/c, z/c)$ باشند. [راهنمایی: (۱) ویژه‌زمان در امتداد خم $\{x = \text{const.}, y = \text{const.}, z = \text{const.}\}$ ؛ و همچنین (۲) ویژه‌فاصله در امتداد خم $\{t = \text{const.}, y = \text{const.}, z = \text{const.}\}$ ؛ و (۳) معنای $g_{01} = 0$ و $g_{12} = 0$ را در نظر بگیرید.]

با استفاده از قانون تبدیل ج-۱ ج، نشان دهید که مؤلفه‌های تانسور متریک این فرم متعارف را تحت تبدیل لورنتس ب-۶ حفظ می‌کنند.

ج-۵ فضای تخت در مختصات مینکوفسکی داده شده است. مؤلفه‌های تانسور متریک وارون g^{ab} را تعیین کنید. از آنجا مؤلفه‌های X_a بردار $X^b = (1, 1, 0, 0)$ و مؤلفه‌های T^{cd} تانسور T_{ab} را بیابید که در آن $T_{00} = \mu$ ، $T_{11} = T_{22} = T_{33} = p$ ، نشان دهید که در حالت کلی، اگر T_{ab} متقارن باشد، T^{cd} نیز همین‌طور است. به‌صراحت نشان دهید که این نتیجه کلی در مورد خاصی که هم اکنون بررسی کردیم صادق است.

ج-۲ میدان الکترومغناطیسی

پدیده‌های الکترومغناطیسی معمولاً برحسب دو سه‌بردار، میدان الکتریکی \mathbf{E} ، و میدان مغناطیسی \mathbf{B} درک می‌شوند.^۱ بنابراین ممکن است تصور کنیم که از دیدگاه فضا-زمان چاربردارهای الکتریکی

۱. مثلاً نگاه کنید به

و مغناطیسی متناظر وجود دارند. اما، این درست نیست. آسانترین راه برای درک این مطلب آن است که به این واقعیت تجربی توجه داشته باشیم که حرکت درکناریک میدان الکتریکی، یک میدان مغناطیسی قابل مشاهده تولید می‌کند؛ به هر حال، اعمال قانون تبدیل برداری ج-۱ بر چاربردار B^a که میدان مغناطیسی را نمایش می‌دهد نمی‌تواند چنین نتیجه‌ای بدهد (اگر چنین نمایشی صحیح بود در صورت صفر شدن میدان مغناطیسی در یک چارچوب در تمام چارچوبها صفر می‌شد).

تانسور میدان ماکسول. نمایش صحیح سه بردارهای \mathbf{E} و \mathbf{B} آن است که آنها مؤلفه‌های یک تانسور پادمتقارن ۴ بعدی $[F^{ab}]$ ($F^{ab} = -F^{ba}$)، یا تانسور میدان الکترومغناطیسی هستند. رابطه بین \mathbf{E} ، \mathbf{B} و $[F^{ab}]$ عبارت است از

$$[F^{ab}] = c \begin{bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ج-۱۱})$$

برای اینکه نشان دهیم این نمایش صحیح است، به نوبت قانون نیروی لورنتس، ویژگیهای تبدیل \mathbf{E} و \mathbf{B} ، و معادله‌های ماکسول را در نظر می‌گیریم.

تمرین ج-۶

(الف) فرض کنید $\mathbf{E} = c(1, 0, 0)$ و $\mathbf{B} = (0, 2, 0)$. تانسور نمایش آن کدام است؟ (ب) فرض کنید تانسور $[F^{ab}]$ برابر است با

$$[F^{ab}] = c \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \\ -3 & -2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که این تانسور پادمتقارن است و میدانهای الکتریکی و مغناطیسی آن را بیابید. قانون نیروی لورنتس. حرکت ذره در اثر نیروهای الکترومغناطیسی را معادله تکانه ب-۱۲ ب تعیین می‌کند، در این معادله سه نیروی الکترومغناطیسی \mathbf{F} وارد بر ذره‌ای با بار الکتریکی e که با سه سرعت \mathbf{v} حرکت می‌کند از قانون نیروی لورنتس پیروی می‌کند. این قانون بیانگر این واقعیت است که نیروی ناشی از میدان الکتریکی \mathbf{E} مستقل از \mathbf{v} است در حالی که نیروی ناشی از میدان

مغناطیسی \mathbf{B} به \mathbf{v} بستگی دارد، و هر دو متناسب با بار e هستند. به طور صریح داریم

$$d\boldsymbol{\pi}/dt = \mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{ج-۱۲})$$

که در آن \times ضرب برداری است.^۱ این معادله میدانهایی را که بر ذره اثر می‌کنند مشخص می‌کند؛ در واقع میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} با اندازه‌گیری حرکت ذرات باردار و استفاده از این معادله تعیین می‌شوند. در مختصات مینکوفسکی در فضا-زمان تخت،^۲ فرمولبندی چهاربعدی این قانون نیرو به صورت زیر است

$$dP^a/d\tau = f^a = (e/c)F^{ab}U_b \quad (\text{ج-۱۳})$$

بدین ترتیب چارنیروی \mathbf{f} (ب-۱۲ را ببینید) از چارسرعت ذره \mathbf{U} تعیین می‌شود (ب-۷ را ببینید). برای نشان دادن هم‌ارزی این فرم با ج-۱۲، توجه کنید که متریک صورت متعارف ج-۱۰ را می‌گیرد و U^a با ب-۷ تعیین می‌شود، از این رو $(U^b) = (g^{ba}U_a) = \gamma(-1, \mathbf{v}/c)$ ، در حالی که طبق ب-۱۲ داریم $(f^a) = \gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}/c^2, \mathbf{F}/c)$. به یاد داریم که $dP^a/d\tau = \gamma dP^a/dt$ و $(P^a) = (E/c^2, \boldsymbol{\pi}/c)$ ، پس می‌توانیم ضرایب γ/c را در ج-۱۳ ساده کنیم و به ازای $a = 1$ داریم

$$\begin{aligned} d\pi_x/dt = F_x &= e\{F^{10}(-1) + F^{11}(v_x/c) + F^{12}(v_y/c) + F^{13}(v_z/c)\} \\ &= e(+E_x + 0 + cB_z v_y/c - cB_y v_z/c) = e\{E_x + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x\} \end{aligned} \quad (\text{ج-۱۲ الف})$$

که مؤلفه x ج-۱۲ است. همین‌طور $a = 2$ و $a = 3$ مؤلفه‌های y و z ج-۱۲ را می‌دهد، و این نشان می‌دهد قسمت فضایی ج-۱۳ با قانون نیروی لورنتس ج-۱۲ هم‌ارز است، و آهنگ تغییر تکانه را می‌دهد، و این تأییدی است بر اینکه کمیتهای E_i و B_i در ج-۱۱ در واقع مؤلفه‌های سه‌بردار الکتریکی \mathbf{E} و سه‌بردار مغناطیسی \mathbf{B} هستند. اگر در ج-۱۳ قرار دهیم $a = 0$ ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (dE/dt)/c = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c &= e\{F^{00}(-1) + F^{01}(v_x/c) + F^{02}(v_y/c) + F^{03}(v_z/c)\} \\ &= e\{0 + E_x v_x/c + E_y v_y/c + E_z v_z/c\} \end{aligned}$$

۱. برای تفصیل بیشتر نگاه کنید به

M. Spiegel. *Schaum Vector Analysis*, 1959.

۲. اگر در فضا-زمان تخت از مختصات خمیده خطی استفاده کنیم، و یا در فضا-زمان خمیده از مختصات عمومی استفاده کنیم، چند جمله اضافی باید به این معادله‌ها بیفزاییم تا به صورت معادله‌های تانسوری درآیند (زیرا آنها شامل مشتقات می‌شوند).

که معادله انرژی را می‌دهد

$$dE/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{ج-۱۴})$$

که یکی از پیامدهای ج-۱۲ است. بدین ترتیب به صراحت نشان داده‌ایم که ج-۱۳ به درستی هم آهنگ تغییر انرژی (مؤلفه زمان آن) و هم آهنگ تغییر تکانه (مؤلفه‌های فضایی آن) ناشی از سه میدانهای الکترومغناطیسی \mathbf{E} و \mathbf{B} را مانند ج-۱۱ به صورت یک چار تانسور پادمقارن F^{ab} نمایانده شده‌اند، به دست می‌دهد. هر کجا که از نیروهای الکتریکی استفاده شود (موتورهای الکتریکی، رله‌ها، لامپهای تلویزیون، و غیره) این معادله‌ها دارای اهمیت‌اند، و مثلاً بر حرکت ماریپیچی پرتوهای کیهانی در فضای بین ستاره‌ها نیز حکمفرما هستند.

تمرینها

ج-۷ در ج-۱۳ قرار دهید $a = 2$ و $a = 3$ ، و از آنجا دو مؤلفه دیگر ج-۱۲ را به دست آورید. با استفاده از این معادله‌ها نشان دهید که اگر یک پرتو کیهانی در فضای بین ستاره‌ها که در آن $\mathbf{E} = 0$ اما $\mathbf{B} \neq 0$ است حرکت کند. در این صورت (الف) انرژی پایسته است، و از این رو سرعت حرکت ثابت است؛ (ب) تکانه موازی با میدان مغناطیسی ثابت است. [مسیر ذره یک ماریپیچ خواهد بود.]

ج-۸ قانون نیروی لورنتس را به طور صریح در موردی که $\mathbf{E} = c(1, 0, 0)$ و $\mathbf{B} = (0, 2, 0)$ بنویسید. آیا از این معادله‌ها می‌توان دید که یکی از مؤلفه‌های تکانه ثابت است؟

ج-۹ با استفاده از تقارن $[F^{ab}]$ نشان دهید که ج-۱۳ ایجاب می‌کند که $U_a dP^a/d\tau = 0$ از آنجا نتیجه بگیرید که $dm_0/d\tau = 0$. [راهنمایی: $U_a = g_{ab}U^b$ که اگر از مختصات مینکوفسکی استفاده شود g_{ab} ها ثابت هستند؛ و $P^a = m_0 U^a$ که در آن $U^a U_a = -1$]

ج-۳ تبدیل میدان الکترومغناطیس

از آنجا که $[F^{ab}]$ یک تانسور است، مؤلفه‌های آن $F^{a'b'}$ در یک چارچوب دیگر از رابطه زیر به دست می‌آیند

$$F^{a'b'} = L_{a'}^{a'} L_{b'}^{b'} F^{ab} \quad (\text{ج-۱۵})$$

که در آن $F^{a'b'}$ به میدانهای الکتریکی و مغناطیسی \mathbf{E}' و \mathbf{B}' که در چارچوب جدید اندازه گرفته می‌شوند از طریق رابطه ج-۱۱ پریم‌دار مربوط می‌شوند. برای مشاهده اثر حرکت نسبی بر میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، از مختصات مینکوفسکی استفاده می‌کنیم (بنابراین $E_1 = E_x$ ، و غیره)

و اثر حرکت در جهت x را در نظر می‌گیریم؛ در این صورت \mathbf{L} و \mathbf{L}^{-1} از ب-۶ به دست می‌آید. محاسبات اکنون ساده‌اند؛ مثلاً

$$E'_{x'} = F^{\circ' \vee'} = L_a^{\circ'} L_b^{\vee'} F^{ab}$$

تنها L های غیر صفر در جمع دوگانه به رابطه زیر منجر می‌شوند

$$\begin{aligned} E'_{x'} &= L_a^{\circ'} L_b^{\vee'} F^{\circ \circ} + L_a^{\circ'} L_b^{\vee'} F^{\circ \vee} + L_a^{\circ'} L_b^{\vee'} F^{\vee \circ} + L_a^{\circ'} L_b^{\vee'} F^{\vee \vee} \\ &= \gamma^{\vee} E_x - \gamma^{\vee} (v/c) E_x = E_x \end{aligned}$$

همین‌طور

$$cB'_{y'} = F^{\vee \vee'} = L_a^{\vee'} L_b^{\vee'} F^{ab} = L_a^{\vee'} (L_b^{\circ'} F^{\vee \circ} + L_b^{\vee'} F^{\vee \vee}) = (\gamma v/c) E_z + \gamma c B_y$$

مجموعه کامل کمیت‌های تبدیل یافته عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} E'_{x'} &= E_x, & E'_{y'} &= \gamma(E_y - vB_z), & E'_{z'} &= \gamma(E_z + vB_y) \\ B'_{x'} &= B_x, & B'_{y'} &= \gamma(B_y + (v/c^{\vee})E_z), & B'_{z'} &= \gamma(B_z - (v/c^{\vee})E_y) \end{aligned} \quad (\text{ج-۱۶})$$

که اگر $v = 0$ ، همان‌طور که انتظار می‌رود، به تبدیل همانی تحویل می‌یابد.

تمرینها

ج-۱۰ فرض کنید $v = 4/5$ ، $\mathbf{E} = c(3, 2, 0)$ ، و $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = (1, 4, 0)$ و \mathbf{B}' و \mathbf{E}' را بیابید.
ج-۱۱ رابطه‌های وارون ج-۱۵ عبارت‌اند از $F^{ab} = (\mathbf{L}^{-1})_a^{\circ'} (\mathbf{L}^{-1})_b^{\vee'} F^{a'b'}$. با استفاده از این رابطه، تبدیل وارون ج-۱۶ را مستقیماً تعیین کنید. آیا راه ساده‌ای برای استنتاج نتایج به دست آمده به‌طور مستقیم از ج-۱۶ به نظر تان می‌رسد؟

ج-۱۲ فرض کنید در چارچوب F هم \mathbf{E} و هم \mathbf{B} غیرصفر و بر یکدیگر عمودند. نشان دهید که می‌توان چارچوبی مانند F' یافت که در آن میدان الکتریکی صفر باشد [راهنمایی: ابتدا محورها را بچرخانید تا \mathbf{E} در جهت y قرار گیرد و \mathbf{B} در جهت z ؛ سپس از ج-۱۶ استفاده کنید].

مجموعه نتایج ج-۱۶، که مستقیماً از قانون تبدیل تانسور ج-۱۵ حاصل می‌شوند، از این جهت قابل توجه‌اند که رابطه عمیق بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را نشان می‌دهند. مثلاً

اگر از چارجوب F شروع کنیم که در آن یک میدان الکتریکی در جهت y وجود دارد، یعنی $\mathbf{E} = (0, E_y, 0)$ ، و میدان مغناطیسی وجود ندارد، یعنی $\mathbf{B} = (0, 0, 0)$ ، در این صورت اگر به چارجوب F' که با سرعت v در جهت x حرکت می‌کند تبدیل کنیم، با استفاده از ج-۱۶ می‌بینیم که

$$\mathbf{E}' = (0, \gamma E_y, 0), \quad \mathbf{B}' = (0, 0, -\gamma(v/c^2)E_y)$$

بدین ترتیب اگر نسبت به یک میدان الکتریکی حرکت داشته باشیم، یک میدان مغناطیسی اندازه می‌گیریم. این در واقع اساساً منشأ میدانهای مغناطیسی را به صورت زیر توضیح می‌دهد: فرض کنید ذره بارداري نسبت به ناظر O در حرکت باشد. در چارجوب سکون F ذره، بار آن یک میدان الکتریکی ثابت تولید می‌کند، اما میدان مغناطیسی تولید نمی‌کند (این پیامد معادله‌های ماکسول است، که در زیر مورد بحث قرار می‌گیرند). طبق ج-۱۶، ناظر O در چارجوب F' خود میدان مغناطیسی برآیند را اندازه می‌گیرد. بدین ترتیب یک جریان الکتریکی، که چیزی جز بارهای متحرک نسبت به آن ناظر نیستند، میدانهای مغناطیسی تولید می‌کنند.

مثال: یک بار واحد. برای نشان دادن این نکته بار نقطه‌ای e را در نظر می‌گیریم که در مبدأ چارجوب F ساکن است. میدان الکتریکی حاصل از این بار در این چارجوب؛ شعاعی و به طرف خارج خواهد بود و بزرگی آن در فاصله r از مبدأ $e/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ است که در آن ϵ_0 مقداری ثابت است (این یک نتیجه استاندارد است که از معادله‌های ماکسول حاصل می‌شود.^۱) این میدان مغناطیسی با گذشت زمان ثابت می‌ماند و ذره در چارجوب F ساکن است، و از این رو در این چارجوب میدان مغناطیسی صفر خواهد بود (این هم از معادله‌های ماکسول نتیجه می‌شود). بدین ترتیب میدان در مختصات دکارتی برابر خواهد بود با

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) = (e/4\pi\epsilon_0)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(x, y, z), \quad \mathbf{B} = (0, 0, 0) \quad (\text{ج-۱۷})$$

در چارجوب F' که با سرعت v در جهت x نسبت به F حرکت می‌کند میدانهای الکتریکی و مغناطیسی E' و B' طبق ج-۱۶ و ج-۱۷ برابرند با

$$\begin{aligned} E' &= (E'_{x'}, E'_{y'}, E'_{z'}) = (e/4\pi\epsilon_0)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(x, \gamma y, \gamma z) \\ B' &= (B'_{x'}, B'_{y'}, B'_{z'}) = (\gamma v e / 4\pi\epsilon_0 c^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(0, z, -y) \end{aligned}$$

۱. مثلاً نگاه کنید به

مختصات (t, x, y, z) متعلق به چارچوب F هستند؛ برحسب مختصات F' یعنی (t', x', y', z') (با استفاده از ب-۱ تا ب-۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} E' &= (\gamma e / 4\pi\epsilon_0) \{\gamma^2 (x' + vt')^2 + y'^2 + z'^2\}^{-3/2} (x' + vt', y', z') \\ B' &= (\gamma ev / 4\pi\epsilon_0 c^2) \{\gamma^2 (x' + vt')^2 + y'^2 + z'^2\}^{-3/2} (0, z', -y') \end{aligned} \quad (\text{ج-۱۸})$$

بدین ترتیب در چارچوب F' میدانهای الکتریکی و مغناطیسی وابسته به زمان وجود دارند. این اثر منشأ میدان مغناطیسی ناشی از یک جریان الکتریکی در سیم است، که در بخش بعد به تفصیل نشان خواهیم داد.

تمرین ج-۱۳

ذره‌ای به جرم m و بار e در چارچوب F در میدانهای ثابت الکتریکی و مغناطیسی E و B که به ترتیب در جهتهای y و z قرار دارند، حرکت می‌کند. در $t = 0$ ذره در مبدأ است و با سرعت u در جهت x حرکت می‌کند.

(۱) میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را در چارچوب F' که با سرعت v در جهت x حرکت می‌کند بنویسید.

(۲) نشان دهید که اگر $v/c = eB/E$ و $u = v$ ، یکی از جوابهای ممکن معادله حرکت (در چارچوب F') عبارت است از

$$x' = z' = 0, \quad y' = (c'/\alpha) \{ (1 + \alpha^2 t'^2 / c'^2)^{1/2} - 1 \}$$

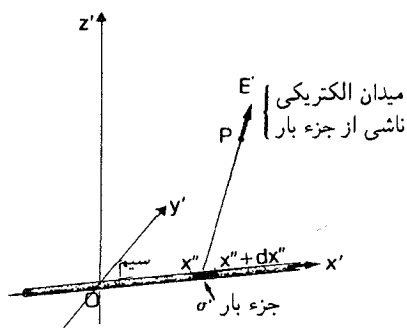
که در آن $\alpha = eE'/m$. فرم این جواب را در چارچوب F بنویسید.

(۳) نشان دهید که اگر $v/c = E/cB$ و $u = 0$ ، یکی از جوابهای ممکن عبارت است از

$$x' = -(v/\beta) \sin \beta t', \quad y' = (v/\beta) (1 - \cos \beta t'), \quad z' = 0$$

که در آن $\beta = eB'/m\gamma(v)$. فرم این جواب را در F بنویسید.

میدان الکترومغناطیسی یک جریان خطی. با استفاده از فرمول تبدیل ج-۱۶، می‌توان جزئیات این را که چگونه یک جریان الکتریکی می‌تواند میدان مغناطیسی تولید کند و نه میدان الکتریکی فهمید. این محاسبه‌ها نسبتاً طولانی هستند و نشان می‌دهند که چگونه نسبیت مبنای پدیده‌های الکترومغناطیسی است، اما ممکن است خواننده بخواهد در نوبت اول این توضیحات مفصل را حذف کند و به سراغ بحث ناوردها برود.



شکل ج-۱ جزء بار $\sigma' dx''$ متعلق به جریانی که در امتداد محور x' در چارچوب F' جاری است. در نقطه P به مختصات (x', y', z') یک میدان الکتریکی E' تولید می‌کند.

به عنوان مقدمه باید میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ناشی از یک بار خطی را حساب کنیم. فرض کنید که خطی با بار یکنواخت σ' در واحد طول (σ' ثابت) در امتداد محور x' در یک چارچوب مینکوفسکی F' ساکن است. میدان الکتریکی در نقطه (x', y', z') برابر مجموع یا انتگرال سهمهای ج-۱۷ متعلق به تمام عناصر بار $\sigma' dx''$ در نقاط $(x'', 0, 0)$ روی محور x' (شکل ج-۱) است. بدین ترتیب

$$E' = (1/4\pi\epsilon_0) \int \sigma' \{ (x' - x'')^2 + y'^2 + z'^2 \}^{-3/2} (x' - x'', y', z') dx''$$

انتگرال روی تمامی خط گرفته می‌شود. محاسبه انتگرال نشان می‌دهد که

$$E' = (\sigma'/2\pi\epsilon_0) (y'^2 + z'^2)^{-1/2} (0, y', z') \quad (\text{ج-۱۹})$$

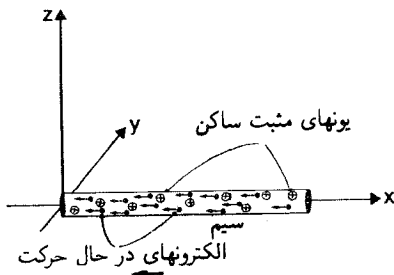
روشن است که در این چارچوب میدان مغناطیسی صفر است. در چارچوب F که با سرعت v در جهت x' نسبت به F' حرکت می‌کند، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی طبق ج-۱۶ و ج-۱۹ عبارت‌اند از

$$E = (\sigma/2\pi\epsilon_0) (y^2 + z^2)^{-1/2} (0, y, z) \quad (\text{ج-۲۰ الف})$$

$$B = (\sigma v/2\pi\epsilon_0 c^2) (y^2 + z^2)^{-1/2} (0, z, -y)$$

که در آن از رابطه

$$\sigma = \gamma\sigma' \quad (\text{ج-۲۰ ب})$$



شکل ج-۲ یک جریان الکتریکی در امتداد محور x متشکل از یونهای مثبت ایستا و الکترونهاي است که در جهت منفی x حرکت می‌کنند.

بین چگالی بار در چارچوب F و چگالی بار σ' در چارچوب F' استفاده کرده‌ایم (این پیامد لزوم یکی بودن بار کل هر دو چارچوب است، و از دیدگاه F واحد طول در F' ظاهراً به اندازه ضرب $1/\gamma$ متقبض می‌شود؛ از این رو $\sigma' \times 1 = \sigma \times 1/\gamma$).

اکنون سیم بلندی را در نظر می‌گیریم که از نظر الکتریکی خنثی است و در چارچوب F در امتداد محور x قرار دارد و در آن جریانی با چگالی j جاری است. جریان متشکل از الکترونهاي است که چگالی بار آنها مثلاً $-\sigma_- = -\sigma$ است و میانگین سرعت آنها نسبت به F مثلاً $-v$ است. یک چگالی بار مساوی و با علامت مثبت $\sigma_+ = \sigma$ از بارهای مثبت روی یونهای مس نیز وجود دارد که در سیم ساکن می‌ماند در حالی که جریان الکتریکی جاری است (شکل ج-۲). چگالی جریان برابر با $\sigma v = \sigma_-(-v) = j$ است. ما باید هر دوی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی تولید شده توسط بارهای مثبت و منفی را در نظر بگیریم.

چون بارهای مثبت در چارچوب F ساکن‌اند از به‌کار بردن ج-۱۹ در این چارچوب نتیجه می‌شود که آنها میدانهای الکتریکی و مغناطیسی \mathbf{E}^+ و \mathbf{B}^+ را تولید می‌کنند که برابرند با

$$\mathbf{E}^+ = (\sigma/2\pi\epsilon_0)(y^2 + z^2)^{-1/2}(\sigma, y, z), \quad \mathbf{B}^+ = (0, 0, 0)$$

برای یافتن میدانهای \mathbf{E}^- و \mathbf{B}^- الکترونهاي متحرک، چارچوب F' را در نظر می‌گیریم که با الکترونها حرکت می‌کند، یعنی با سرعت $-v$ در جهت x نسبت به F . چگالی بار الکترونها در F' برابر خواهد بود با $\sigma'_- = \sigma_-/\gamma$ زیرا F' چارچوب سکون بار است. با تبدیل از F به F' ، که با سرعت $+v$ در جهت x' نسبت به F حرکت می‌کند، طبق ج-۲۰ و تعریف σ و j می‌بینیم که

$$\mathbf{E}^- = -(\sigma/2\pi\epsilon_0)(y^2 + z^2)^{-1/2}(0, y, z)$$

$$\mathbf{B}^- = (j/2\pi\epsilon_0 c^2)(y^2 + z^2)^{-1/2}(0, -z, y)$$

بنابراین کل میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ناشی از جریان الکتریکی و بارهای سیم برابرند با

$\mathbf{B} = \mathbf{B}^+ + \mathbf{B}^-$ و $\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-$ از نتیجه‌های بالا داریم

$$\mathbf{E} = (0, 0, 0), \quad \mathbf{B} = (j/2\pi\epsilon_0 c^2)(y^2 + z^2)^{-1}(0, -z, y) \quad (\text{ج-۲۱ الف})$$

این همان نتیجه مشهور است که جریان j در یک سیستم مستقیم یک میدان الکتریکی صفر، و یک میدان مغناطیسی با بزرگی $j/2\pi\epsilon_0 r^2$ در فاصله r از سیم و در جهت مماس بر دایره حول سیم تولید می‌کند. بدین ترتیب، مثلاً بر بار آزمون q که با سرعت u موازی سیم و به فاصله r از آن حرکت می‌کند نیرویی مطابق با ج-۱۲ وارد می‌آید که در آن u را به جای v و q را به جای e قرار می‌دهیم، یعنی

$$\mathbf{F} = q(u_y B_z - u_z B_y, u_z B_x - u_x B_z, u_x B_y - u_y B_x)$$

با استفاده از $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ و ج-۲۱، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{F} = (qu)(j/2\pi\epsilon_0 c^2 r^2)(0, -y, -z) \quad (\text{ج-۲۲})$$

که شعاعی و به طرف داخل سیم و بزرگی آن $(qu)(j/2\pi\epsilon_0 c^2 r)$ است.

اکنون نتیجه استاندارد برای تولید میدان مغناطیسی توسط جریان داخل یک سیم را به دست آورده‌ایم، و برای این کار به طور عمده از خواص تبدیل میدانهای الکتریکی و مغناطیسی استفاده کرده‌ایم. برای درک بیشتر اینکه نظریه نسبیت مبنای پدیده الکترومغناطیسی را تشکیل می‌دهد، خوب است که میدان کل را از چارچوب سکون F'' متعلق به بار آزمون در نظر بگیریم. از آنجا که این بار در این چارچوب ساکن است، از طرف میدانهای مغناطیسی موجود نیرویی بر آن وارد نمی‌آید: $u'' = 0$ ، از این رو طبق ج-۱۲ $\mathbf{F}'' = q\mathbf{E}''$. بدین ترتیب نیروی شعاعی وارد بر آن باید ناشی از میدان الکتریکی باشد، که خود باید ناشی از یک بار غیر صفر باشد که در این چارچوب اندازه گرفته می‌شود. در چارچوب F مجموع چگالی بارها صفر است؛ چگونه ممکن است مجموع آنها در F'' صفر نباشد؟

برای ساده کردن محاسبه‌ها، قرار می‌دهیم $u = -v$ ، یعنی بار q با الکترونها مولد جریان حرکت می‌کند، و چارچوبهای F' و F'' یکی هستند. اگر نتیجه نهایی ج-۲۱ را به این چارچوب تبدیل کنیم، می‌بینیم که

$$\mathbf{E}' = (\gamma v)(\sigma v/2\pi\epsilon_0 c^2 r'^2)(0, y', z')$$

$$\mathbf{B}' = \gamma(\sigma v/2\pi\epsilon_0 c^2 r'^2)(0, -z', y') \quad (\text{ج-۲۱ ب})$$

که تأییدی بر وجود یک میدان الکتریکی شعاعی در آنجاست؛ بزرگی آن $(\gamma v)(j/2\pi\epsilon_0 c^2 r')$ است. یک میدان مغناطیسی متغیر، یک میدان الکتریکی تولید می‌کند، اما در این مورد میدان مغناطیسی تغییر نمی‌کند، از این رو تنها جمله منبع برای این میدان الکتریکی باید یک چگالی بار غیر صفر σ' باشد که در این چارچوب اندازه گرفته می‌شود، حتی اگر در چارچوب F چگالی بار صفر باشد.

یکی از راههای درک این مطلب آن است که توجه داشته باشیم که در ج-۲۰، σ' چگالی بار در چارچوب سکون خودش است در صورتی که σ چگالی بار در چارچوبی است که نسبت به چارچوب سکون حرکت می‌کند. طبق اصل نسبیت، این رابطه را می‌توان از دیدگاه هر ناظری به‌کار برد. اگر آن را در مورد حاضر برای الکترونها به‌کار ببریم، σ'_- (چگالی بار در چارچوب F') چگالی چارچوب سکون است، از این رو

$$\sigma_- = \gamma \sigma'_- \Leftrightarrow \sigma'_- = -\sigma/\gamma \quad (\text{ج-۲۳ الف})$$

اگر آن را در مورد بارهای مثبت به‌کار ببریم، σ_+ (چگالی بار در چارچوب F است) چگالی بار در چارچوب سکون است، بنابراین

$$\sigma'_+ = \gamma \sigma_+ = \gamma \sigma \quad (\text{ج-۲۳ ب})$$

بدین ترتیب، چگالی بارکل در چارچوب F' برابر است با $\sigma' = \sigma'_- + \sigma'_+ = \sigma(\gamma^2 - 1)/\gamma$ یعنی

$$\sigma' = \sigma\gamma(v/c)^2 \quad (\text{ج-۲۳ ج})$$

با قرار دادن ج-۱۹ مقادیری که برای مؤلفه‌های میدان الکتریکی به‌دست می‌آوریم همانهایی هستند که قبلاً به‌دست آوردیم (ج-۲۱ ب را ببینید). بدین ترتیب، اختلاف بین چگالیهای بار الکتریکی، که منبع میدان الکتریکی در چارچوب F' است، از ماهیت دوجانبگی اثر انقباض طول ج-۲۰ ب ناشی می‌شود، که چگالیهای بار در دو چارچوب را به یکدیگر مربوط می‌سازد.^۱ میدان مغناطیسی در چارچوب F' نتیجه حرکت بارهای مثبت با سرعت $+v$ نسبت به این چارچوب است.

گرچه انقباض طول دخیل در ج-۲۳ بسیار بسیار کوچک است. چون v/c بسیار کوچک است، اما اثر آن قابل ملاحظه است زیرا چگالی ρ بسیار بزرگ است (با تعداد بسیار زیادی الکترون سروکار داریم)؛ بدین ترتیب اثر انقباض طول نسبیتی در اینجا مهم است اگرچه سرعتهای دخیل بسیار پایین هستند.

۱. می‌توان این سؤال را مطرح کرد که چرا چگالی بار در چارچوب F صفر است. پاسخ آن است که خودمان این حالت را برای بررسی انتخاب کرده‌ایم؛ می‌توانستیم محاسبه‌های مشابه (اما پیچیده‌تری) را در مورد سیمی که در چارچوب F باردار است انجام دهیم.

تمرینها

ج-۱۴ در یک چارچوب لخت F ، یک بار خطی با چگالی e بر واحد طول در امتداد محور x قرار دارد و با سرعت u در جهت x حرکت می‌کند. نشان دهید در چارچوب لخت F' که میدان مغناطیسی صفر می‌شود، چگالی بار برابر است با $e' = e/\gamma$. میدان الکتریکی در F' را حساب کنید و از آنجا هم میدان الکتریکی و هم میدان مغناطیسی را در F بیابید.

ج-۱۵ سرعت سوق الکترونها در سیم، که جریان را تولید می‌کند فقط $v = 6 \times 10^{-2} \text{ cm/s}$ است. $V = v/c$ را بیابید و ضریب انقباض طول متناظر γ را حساب کنید. اگر در هر cm^2 سیم 10^{23} الکترون آزاد وجود داشته باشد که هر یک حامل بار e است، σ' را برحسب e با استفاده از ج-۲۳ بیابید.

ج-۱۶ بخش ۸ نسبت خاص تألیف آ. پی فرنج را بخوانید. در این بخش بحث مفصلی دربارهٔ ویژگیهای انتقال یک نیرو شده است.

ناوردهای الکترومغناطیسی. اکنون رابطهٔ عمیقی را که نشان داده‌ایم به‌واسطهٔ آن میدانهای الکتریکی و مغناطیسی با یکدیگر در یک فرم چهاربعدی وحدت می‌یابند و آنها را از طریق ویژگیهای تبدیلیشان به‌صورت مؤلفه‌های یک چارتانسور به‌یکدیگر مرتبط می‌کند، و در واقع این اساس ماهیت نیروهای مغناطیسی است. به‌ویژه، ماهیت تانسوری $[F^{ab}]$ ایجاب می‌کند که اگر در یک چارچوب $[F^{ab}] = 0$ باشد، در تمام چارچوبها صفر است؛ یعنی نمی‌توان با تغییر سرعت، از صفر یک میدان الکترومغناطیسی غیر صفر ساخت. (گرچه، می‌توان یک \mathbf{B} صفر را به غیر صفر تغییر داد به شرطی که $\mathbf{E} \neq 0$ ، یا یک \mathbf{E} صفر را به غیر صفر تغییر داد به شرط اینکه $\mathbf{B} \neq 0$ باشد). فرض کنید $[F^{ab}]$ صفر نشود. می‌دانیم که مؤلفه‌های \mathbf{E} و \mathbf{B} در صورت تغییر چارچوب مرجع تغییر می‌کنند، می‌توان پرسید که آیا کمیت‌هایی وجود دارند که به هنگام این تغییر ناوردا باشند؛ در این صورت این کمیتها باید دارای اهمیت خاص فیزیکی باشند زیرا تمام ناظرها در مورد مقدار آنها اتفاق نظر دارند. با استفاده از فرمولبندی چهاربعدی می‌توانیم این سؤال را به‌گونه‌ای دیگر مطرح کنیم: ناوردهای تانسور $[F^{ab}]$ (که با ج-۱۱ تعریف شده‌اند) کدام‌اند؟

از آنجا که این تانسور پادمتقارن است ($F^{ab} = -F^{ba}$)، ناوردای واضح F_a^a صفر است. اولین ناوردای واضح غیر صفر کمیت زیر است

$$Q_1 \equiv F^{ab} F_{ab} \quad (\text{ج-۲۴ الف})$$

برای محاسبهٔ این کمیت در مختصات مینکوفسکی، باید ابتدا شاخصهای $[F^{ab}]$ را "پایین بیاوریم"

تا $F_{cd} = g_{ca}g_{db}F^{ab}$ به دست آید. از ج-۱۰ و ج-۱۱ به دست می آوریم

$$[F_{cd}] = c \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ج-۲۵})$$

با استفاده از این عبارت و ج-۱۱، کمیت ج-۲۴ الف برابر می شود با

$$Q_1 = 2\{-(E_x)^2 - (E_y)^2 - (E_z)^2\} + 2c^2\{(B_x)^2 + (B_y)^2 + (B_z)^2\}$$

یعنی

$$Q_1 = 2(c^2 B^2 - E^2) \quad (\text{ج-۲۴ ب})$$

از آنجا که این کمیت ناورداست (برای تمام ناظرها $Q'_1 = Q_1$)، می بینیم که اگر \mathbf{E} و \mathbf{B} یک چارچوب دارای بزرگی نسبیتی یکسان باشند ($c^2 B^2 = E^2$)، بزرگی آنها در تمام چارچوبها یکسان است ($c^2 B'^2 = E'^2$).

تعریف ناوردای دوم کاملاً بر یک تانسور کاملاً پادمتقارن $[\eta^{abcd}]$ بستگی دارد (اگر جای دو شاخص مجاور را عوض کنیم، علامت η^{abcd} عوض می شود، مثلاً $\eta^{abcd} = -\eta^{bacd}$)، که در مختصات مینکوفسکی دارای مختصه $\eta^{1122} = 1$ است. چون این تانسور کاملاً پادمتقارن است. شاخصهای a, b, c, d هر مؤلفه غیر صفر باید جایگشتی از اعداد $0, 1, 2, 3$ باشد (یعنی هیچ دو شاخصی نمی توانند مقدار یکسانی داشته باشند)، و مقدار هر مؤلفه غیر صفری را می توان از $\eta^{1122} = 1$ با تعویض شاخصهای مجاور پیدا کرد (مثلاً $1 = \eta^{1122} = +\eta^{1023} = -\eta^{1032}$). ناوردا عبارت است از

$$Q_2 = F_{ab}\eta^{abcd}F_{cd} \quad (\text{ج-۲۶ الف})$$

مقدار این کمیت، با استفاده از ج-۲۵ برابر است با

$$Q_2 = 4(F_{0,1}F_{12} + F_{0,2}F_{21} + F_{0,3}F_{13}) = 4c(-E_x B_x - E_y B_y - E_z B_z)$$

(برای تعیین ضرایب جلویی، توجه کنید که اگر در جمع زنی $a = 0$ ، گستره b به ترتیب $1, 2, 3$ است که اولین عامل هر یک از جملات داخل پرانتز را می دهند. وقتی مقدار b برابر 1 است، جمله های

غیر صفر در c و d عبارت‌اند از F_{22} و $-F_{22}$ که با یکدیگر جمع می‌شوند، زیرا F_{cd} پادمقارن است، و جمعاً دو جمله F_{01} ، F_{23} حاصل می‌شود، همین‌طور، دو جزء این جمله به‌ازای $b = 0$ ، $c = 0$ و $d = 0$ حاصل می‌شود). بدین ترتیب

$$Q_2 = -\lambda c \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{ج-۲۶})$$

چون این کمیت ناورد است (برای تمام ناظرها $Q_1 = Q_2$)، می‌بینیم که اگر \mathbf{E} و \mathbf{B} در یک چارچوب متعام باشند، در تمام چارچوبها متعامند.

اگر Q_1 و Q_2 هر دو صفر باشند مورد جالب توجهی پیش می‌آید. این مورد میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متعام با بزرگی یکسان است. اگر میدانی در یک چارچوب دارای این ویژگی باشد در تمام چارچوبها این ویژگی را دارد؛ و این دقیقاً حالتی است که در مورد امواج الکترومغناطیسی تخت روی می‌دهد. چون اینها شرایطی ناوردا هستند، اگر برای یک ناظر صادق باشند، برای تمام ناظرهای دیگر نیز صادق‌اند.

تمرینها

ج-۱۷ (الف) نشان دهید که کمیت F_a^a صفر است. (ب) درستی عبارتهای ج-۲۵، ج-۲۴ و ج-۲۶ را تحقیق کنید.

ج-۱۸ فرض کنید که در یک چارچوب F ، $\mathbf{E} = \alpha(0, 1, 0)$ و $\mathbf{B} = \beta(0, 0, 1)$ (الف) E^i ، B^i و $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ را پیدا کنید. (ب) در این چارچوب Q_1 و Q_2 چقدر هستند؟ (ج) مقادیر آنها در چارچوب F' که با سرعت $v = \frac{4}{5}c$ در جهت x حرکت می‌کند چقدر است؟

ج-۴ معادله‌های ماکسول

حرکت یک بار در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی معلوم از ج-۱۲ پیروی می‌کند. میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} از معادله‌های ماکسول تعیین می‌شوند که نشان می‌دهد چگونه بار الکتریکی ρ منبعی برای میدان الکتریکی و جریان الکتریکی \mathbf{j} منبعی برای میدان مغناطیسی است. در فضای تخت، این معادله‌ها عبارت‌اند از

$$(۱) \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (۲) \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (۳) \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (۴) \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

(ج-۲۷ الف)

که در آن $\nabla \cdot \mathbf{A}$ دیورژانس میدان برداری \mathbf{A} و $\nabla \times \mathbf{A}$ تا و \mathbf{A} است،^۱ و ϵ_0 و μ_0 ثابتهایی هستند که ارتباط آنها به صورت زیر است

$$\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2 \quad (\text{ج-۲۷})$$

معنای معادله‌های ماکسول به تفصیل در جلد دوم درسهای فیزیک فاینمن و همچنین به نحوی غیر فنی‌تر در آشنایی با مفهوم و ساختار فیزیک مورد بحث قرار گرفته‌اند.^۲
فرم چهاربعدی. فرم چهاربعدی معادله‌های ماکسول در فضا-زمان، در مختصات مینکوفسکی،^۳ عبارت‌اند از

$$\frac{1}{c} \frac{\partial F^{ab}}{\partial x^b} = \frac{1}{\epsilon_0} J^a, \quad \frac{\partial F_{ab}}{\partial x^c} + \frac{\partial F_{ca}}{\partial x^b} + \frac{\partial F_{bc}}{\partial x^a} = 0 \quad (\text{ج-۲۸ الف و ب})$$

که در آن چاربردار جریان (J^a) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(J^a) = (\rho, \mathbf{j}/c) \quad (\text{ج-۲۸ ج})$$

$\partial/\partial x^a$ عملگر مشتق جزئی است، و شاخص a را یک شاخص پایینی به حساب می‌آوریم. هم‌ارزی سه‌بعدی. برای مشاهده هم‌ارزی این فرم چهاربعدی با صورت سه‌بعدی ج-۲۷ الف ابتدا ج-۲۸ الف و سپس ج-۲۸ ب را بررسی می‌کنیم. اگر در ج-۲۸ الف قرار دهیم $a = 0$ ، به دست می‌آوریم

$$(\frac{1}{c})(\partial F^{00}/\partial x^0 + \partial F^{01}/\partial x^1 + \partial F^{02}/\partial x^2 + \partial F^{03}/\partial x^3) = J^0/\epsilon_0.$$

یعنی، طبق ج-۱۱ و ج-۲۸ ج

$$(\frac{1}{c})(\partial E_x/\partial(x/c) + \partial E_y/\partial(y/c) + \partial E_z/\partial(z/c)) = \rho/\epsilon_0.$$

۱. برای تفصیل بیشتر نگاه کنید به، مثلاً

M. Spiegel *Vector Analysis*, Schaum.

2. R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, 1964); L. N. Cooper *An Introduction to The Meaning and Structure of Physics* (Harper and Row, 1968).

۳. اگر دز فضا-زمان تخت از مختصات خمیده خطی و یا در فضا-زمان خمیده از مختصات عمومی استفاده شود، باید چند جمله اضافی به این معادله‌ها افزود تا به صورت معادله‌های تانسوری درآیند (زیرا شامل مشتقها هستند).

که همان $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ است، یعنی معادله ج-۲۷ الف، اگر در ج-۲۸ الف قرار دهیم $a = 1$ داریم

$$(\frac{1}{c})(\partial F^{10}/\partial x^0 + \partial F^{11}/\partial x^1 + \partial F^{12}/\partial x^2 + \partial F^{13}/\partial x^3) = J^1/\epsilon_0$$

یعنی، طبق ج-۱۱ و ج-۲۸ ج

$$(\frac{1}{c})\{-\partial E_x/\partial t + c \partial B_z/\partial(y/c) - c \partial B_y/\partial(z/c)\} = j_x/\epsilon_0 c$$

که مؤلفه x ، $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + (\frac{1}{c^2})\partial \mathbf{E}/\partial t$ است؛ همین طور با قرار دادن $a = 2$ و $a = 3$ مؤلفه های y و z معادله شماره (۴) ج-۲۷ الف را به دست می آوریم. اکنون به معادله ج-۲۸ ب می پردازیم. در ج-۲۸ ب قرار می دهیم $a = 1, b = 2, c = 3$ داریم

$$\partial F_{12}/\partial x^2 + \partial F_{21}/\partial x^1 + \partial F_{23}/\partial x^3 = 0$$

یعنی طبق ج-۲۵

$$c \partial B_z/\partial(z/c) + c \partial B_y/\partial(y/c) + c \partial B_x/\partial(x/c) = 0$$

که همان $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ است، یعنی معادله شماره (۲) ج-۲۷ الف در ج-۲۸ ب قرار می دهیم $a = 0, b = 2, c = 3$ داریم

$$\partial F_{01}/\partial x^1 + \partial F_{10}/\partial x^0 + \partial F_{23}/\partial x^3 = 0$$

یعنی طبق ج-۲۵

$$-\partial E_y/\partial(x/c) + \partial E_z/\partial(y/c) + c \partial B_x/\partial t = 0$$

که مؤلفه x ، $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ است. همین طور، با قرار دادن $a = 0, b = 3, c = 1$ و $a = 0, b = 1, c = 2$ مؤلفه های y و z معادله شماره (۳) ج-۲۷ الف را به دست می آوریم. ویژگیهای تبدیلی بار، اکنون دیدیم که (در مختصات مینکوفسکی در فضای تخت) چارمعادله های ج-۲۸ با سه معادله های ج-۲۷ الف کاملاً هم ارزند، از این رو ج-۲۸ در واقع نسخه چهاربعدی معادله های ماکسول است. چیزی که اکنون روشن می شود آن است که معادله های (۱) و (۴)

ج-۲۷ الف مؤلفه‌های یک معادله چهاربعدی ج-۲۸ الف هستند، و هرگاه ناظر چارسرعت را تغییر دهد به یکدیگر تبدیل می‌شوند. همین‌طور، معادله‌های دوم و سوم ج-۲۷ الف نیز مؤلفه‌های یک معادله چهاربعدی هستند، و بر اثر تغییر چارسرعت باز به یکدیگر تبدیل می‌شوند. هرگاه چنین تغییری صورت پذیرد، چارجریان (J^a) باید مانند یک چاربردار تبدیل شود. در چارچوب سکون F' بارهای الکتریکی حاضر $z' = 0$ ، و از این رو $(J^{a'}) = (\rho_0, 0, 0, 0)$ که در آن ρ_0 چگالی بار ساکن است (چگالی بار در این چارچوب سکون). اگر به چارچوب F تبدیل کنیم، طبق ب-۵ داریم

$$(J^a) = \gamma \rho_0 (1, v/c) = \rho_0 (U^a) \quad (\text{ج-۲۹ الف})$$

که در آن (U^a) چارسرعت بار است؛ طبق ج-۲۸ ج این نشان می‌دهد که

$$\rho = \gamma \rho_0, \quad j = \rho v \quad (\text{ج-۲۹ ب})$$

این معادله‌ها این واقعیت را تصریح می‌کنند که جریان باری است که نسبت به ناظر حرکت می‌کند. این ویژگی برای ماهیت نیروهای مغناطیسی حیاتی است، زیرا یکی دانستن جریان و بارهای متحرک این واقعیت را تصریح می‌کند که ناظری که از کنار یک بار الکتریکی می‌گذرد برای میدان مغناطیسی یک جمله منبع j تعیین خواهد کرد، در حالی که ناظر ساکن نسبت به آن بار چنین کاری را نخواهد کرد. این امر (از دیدگاه معادله‌های ماکسول) توضیح می‌دهد که چرا، همان‌گونه که در بالا بحث شد، می‌توانیم حرکت نسبت به یک بار را منبع میدانهای مغناطیسی بدانیم. بدین ترتیب، ویژگیهای تبدیل $[F^{ab}]$ و (J^a) همراه با قانون نیروی لورنتس ج-۱۲ و معادله‌های ماکسول ج-۲۸ به تحلیل سازگاری از نیروی وارد بر ذره بدون توجه به چارچوب مرجع مورد استفاده می‌انجامد. برای کاوش بیشتر این مطلب از ج-۲۹ برای به دست آوردن نتیجه ج-۲۳ از راهی دیگر استفاده می‌کنیم. این نتیجه در تحلیل ما از نیروی ناشی از بارهای متحرک در یک سیم، تعیین‌کننده بود؛ اکنون تحلیل را بر مبنای این واقعیت قرار می‌دهیم که جریان یک چاربردار است. خواننده ممکن است هنگامی که اولین بار این کتاب را می‌خواند محاسبه‌های مفصل را نادیده بگیرد و به سراغ پایستگی بار برود.

با بازگشت به مسئله جریان الکتریکی در سیم که در بالا بررسی کردیم، اکنون چاربردارهای جریان (J_+^a) و (J_-^a) ناشی از بارهای مثبت و منفی داخل سیم را در نظر می‌گیریم. از آنجا که چارچوب سکون بارهای مثبت F است، داریم $(J_+^a) = \rho_+ (1, 0, 0, 0)$ که در آن ρ_+ چگالی بار-ساکن برای بارهای مثبت است؛ با تبدیل به چارچوب F' (با ج-۲۹ مقایسه کنید)، به دست می‌آوریم

$$(J_+^{a'}) = \gamma \rho_+ (1, v/c) = \rho'_+ (1, v/c)$$

که چگال بارهای مثبت ρ'_+ را در چارچوب F' تعریف می‌کند. مؤلفهٔ زمان این معادله عبارت است از

$$\rho'_+ = \gamma \rho_+ \quad (\text{ج-۳۰ الف})$$

چارچوب سکون بارهای منفی F' است، از این رو $(J'^0) = \rho'_-(1, 0, 0, 0)$ که در آن ρ'_- چگالی بار-ساکن برای بارهای منفی است؛ با تبدیل به چارچوب F به دست می‌آوریم $(J^0) = \gamma \rho'_-(1, -v/c) = \rho_-(1, -v/c)$ که عبارت اخیر چگالی بارهای منفی را در چارچوب F تعریف می‌کند. مؤلفهٔ زمان این معادله عبارت است از

$$\rho_- = \gamma \rho'_- \quad (\text{ج-۳۰ ب})$$

چون سیم یکنواخت است (و از این رو مساحت آن، بدون توجه به چارچوب مرجع، ثابت است)، چگالیهای خطی σ با چگالیهای حجم ρ متناسباند؛ چون چگالیهای خطی در چارچوب F برابرند، چگالیهای حجمی نیز مساوی هستند؛ یعنی

$$\rho_+ = -\rho_- \equiv \rho, \quad \rho > 0 \quad (\text{ج-۳۰ ج})$$

معادله‌های ج-۳۰ با ج-۲۳ متناظرند، و به کمک آنها می‌توانیم همان نتیجه‌های قبل را به دست آوریم. در این رهیافت تأکید بر آن است که ویژگیهای تبدیل چگالی بار ρ مانند یک اسکالر نیست بلکه ویژگیهای مؤلفهٔ زمان‌گونه یک چاربردار است. اگر ρ اسکالر بود، هیچ نوع میدان الکتریکی در چارچوب F' وجود نمی‌داشت و بنابراین در آن چارچوب هیچ نیرویی بر ذره وارد نمی‌آمد؛ از این رو ناظر ساکن نسبت به سیم (یعنی ناظری که از چارچوب مرجع F استفاده می‌کند) می‌دید که نیرویی بر ذره اثر نمی‌کند [زیرا (f^a) یک چاربردار است] و بنابراین هیچ میدان مغناطیسی وجود ندارد.

تمرینها

ج-۱۹ در ج-۲۸ الف $a = 2$ و در ج-۲۸ ب $a = 0, b = 1, c = 2$ قرار دهید، و از آنجا به صراحت دو مؤلفهٔ دیگر معادله‌های ماکسول ج-۲۷ الف را از ج-۲۸ به دست آورید.

ج-۲۰ الف) مجموعه‌ای از بارها با چگالی ρ در چارچوب F ساکن است؛ در این چارچوب جریانی اندازه گرفته نمی‌شود. یک پرتو کیهانی با سرعت $v = 12/13c$ در جهت x از کنار این بارها عبور می‌کند. چگالی بار و جریانی را که در چارچوب سکون پرتو کیهانی F' اندازه گرفته می‌شود تعیین کنید. ب) مقدار ناوردای $J^a J_a$ را حساب کنید، و با استفاده از ج-۲۹ رابطه‌ای بین این ناوردا و کمیت‌های \vec{j} و ρ به دست آورید.

ج-۲۱ درباره مفهوم فیزیکی معادله‌های ماکسول یکی از کتابهایی را که در ابتدای این بخش ذکر شدند مطالعه کنید.

پایستگی بار. از معادله‌های ماکسول ج-۲۸ الف، نتیجه می‌شود

$$(\nabla/c)\partial^2 F^{ab}/\partial x^a \partial x^b = (\nabla/\epsilon_0)\partial J^a/\partial x^a$$

طرف چپ معادله صفر است زیرا $[F^{ab}]$ پادمتقارن است ($F^{ab} = -F^{ba}$) و برای هر تابع f داریم $\partial^2 f/\partial x^a \partial x^b = \partial^2 f/\partial x^b \partial x^a$. بدین ترتیب طرف راست معادله صفر می‌شود، از این رو

$$\partial J^a/\partial x^a = 0 \quad (\text{ج-۳۱})$$

که همان معادله پایستگی بار است. اگر این معادله را در چارچوب مینکوفسکی بنویسیم و از ج-۲۸ ج استفاده کنیم، معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$\partial \rho/\partial t + \nabla \cdot j = 0 \quad (\text{ج-۳۱ الف})$$

یعنی، آهنگ تغییر بار نسبت به زمان برابر منفی دیورژانس جریان است؛ و این صورت معمول معادله پایستگی است.^۱ نکته جالب در این محاسبه آن است که، با استفاده از نمادگذاری چهاربعدی، اثبات اینکه پایستگی بار پیامد معادله‌های ماکسول است چقدر ساده می‌شود؛ پایستگی بار مستقیماً از این معادله‌ها و پادمتقارن بودن $[F^{ab}]$ نتیجه می‌شود.

تمرین ج-۲۲

الف) درستی نحوه استنتاج ج-۳۱ را به صورت زیر تحقیق کنید. با استفاده از ج-۱۱ عبارت $\partial^2 f^{ab}/\partial x^a \partial x^b$ را صریحاً بنویسید و نشان دهید که جمله‌های آن حذف می‌شوند (ب) ج-۳۱ الف را از ج-۳۱ به دست آورید. (ج) آیا ج-۳۱ الف در تمام چارچوبها یکسان است، یا خیر؟

۱. مثلاً نگاه کنید به

ج-۵ تانسور تنش-انرژی

به عنوان آخرین مثال یک چارتانسور مهم، تانسور تنش-انرژی $[T^{ab}]$ را اجمالاً بررسی می‌کنیم. این تانسور متقارن است، یعنی

$$T^{ab} = T^{ba} \quad (\text{ج-۳۲})$$

که برای هر ماده یا میدان فیزیکی در فضا-زمان تعریف شده است. این تانسور نماینده انرژی، تکانه، و تنش و وابسته به آن ماده (جامد، شاره، گاز، پلاسما، مجموعه‌ای از ذرات بنیادی، یا هر چیز دیگر) یا میدان (میدان الکترومغناطیسی، میدان زنده‌ای، میدان اسپینور و غیره) است.

مؤلفه‌های آن، در یک چارچوب مینکوفسکی در فضا-زمان تخت عبارت‌اند از: $T^{\circ\circ}$ چگالی انرژی نسبی ماده یا میدانها؛ $T^{i\circ} = T^{\circ i} = q^i/c$ ($i = 1, 2, 3$) که در آن q^i را می‌توان شار یا انرژی در نظر گرفت که از رویه‌ای عمود بر جهت i می‌گذرد، و یا مؤلفه i چگالی تکانه. برحسب یگانه‌های مناسب این کمیتها برابرند، زیرا رابطه $E = mc^2$ ایجاب می‌کند که

$$(\text{جرم گذرنده از رویه در واحد زمان}) \times c^2 = \text{انرژی گذرنده از رویه در واحد زمان}$$

سرانجام $T^{ij} = \Pi^{ij}/c^2$ ($i, j = 1, 2, 3$) که در آن Π^{ij} مؤلفه i شار تکانه، یا تنش است که از رویه‌ای عمود بر جهت j می‌گذرد. این مقدار برابر Π^{ji} است زیرا، در غیر این صورت، تکانه زاویه‌ای موضعی حفظ نمی‌شد: یک جزء شاره می‌توانست خود به خود شروع به چرخش کند.^۱ ماده آزاد از فشار. به عنوان مثالی ساده، جریان ماده بی برهم‌کنش و آزاد از فشاری را در نظر می‌گیریم که با یک چارسرعت (U^a) (ب-۷ را ببینید) و ویژه چگالی انرژی μ_0 (که چگالی انرژی طبق اندازه‌گیری ناظری است که با ماده حرکت می‌کند) بیان شده است. در این مورد تانسور تنش-انرژی از رابطه زیر به دست می‌آید

$$T^{ab} = \mu_0 U^a U^b \quad (\text{ج-۳۳})$$

برای تعبیر این تانسور، از یک چارچوب مینکوفسکی F در فضا-زمان تخت استفاده می‌کنیم. طبق ب-۷ داریم

$$T^{\circ\circ} = \mu_0 \gamma^2 \quad (\text{ج-۳۴ الف})$$

۱. مثلاً نگاه کنید به

اما در نسبیت خاص، جرم مؤثر حجمی از ماده متحرک، γ برابر جرم سکون آن است، در حالی که یک حجم متحرک ظاهراً با ضریب γ کاهش می‌یابد (زیرا طول در جهت حرکت با ضریب γ کوتاهتر به نظر می‌رسد). بنابراین، از نظر ناظری که ماده نسبت به او با سرعت v حرکت می‌کند، چگالی انرژی با ضریب γ^2 بیشتر به نظر می‌آید، از این رو $\mu_0 \gamma^2$ همان چگالی انرژی مشاهده شده است که مؤلفه (00) تانسور $[T^{ab}]$ ایجاد می‌کند. همین طور، می‌بینیم که

$$T^{0i} = \mu_0 \gamma^2 v^i / c = \mu v^i / c \quad (\text{ج-۳۴ ب})$$

که قسمت فضایی چگالی تکانه نسبیتی است. همین طور داریم $T^{0i} n_i = (\mu/c) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ که در آن \mathbf{n} یک بردار واحد فضایی در چارچوب سکون ماده است. این درست $1/c^2$ برابر شار انرژی است که از رویه‌ای عمود بر \mathbf{n} می‌گذرد. سرانجام

$$T^{ij} = \mu_0 \gamma^2 v^i v^j / c^2 = \mu v^i v^j / c^2 \quad (\text{ج-۳۴ ج})$$

که از آن نتیجه می‌شود $T^{ij} n_j = \mu (v^i/c^2) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ که درست $1/c^2$ برابر شار مؤلفه i تکانه‌ای است که از رویه‌ای عمود بر بردار واحد \mathbf{n} می‌گذرد. توجه کنید در حالی که ج-۳۴ را با استفاده از ج-۳۳ و جایگذاری از ب-۷ به دست آورده‌ایم، می‌توانستیم ج-۳۴ را با اعمال قانون تبدیل تانسور بر صورت چارچوب سکون ج-۳۳ و با ماتریس تبدیل L ب-۶ نیز به دست آوریم. این یک دلیل نامگذاری تانسور است: چگالی انرژی، چگالی تکانه، و تنش قسمتهایی از یک کمیت چهاربعدی هستند، و به‌هنگام تغییر چارچوب مرجع به یکدیگر تبدیل می‌شوند.

تمرین ج-۲۳

با استفاده از ج-۳۳ و روشی که هم اکنون گفته شد ج-۳۴ را در موردی که $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ به دست آورید (یعنی با استفاده از تبدیل تانسوری با L که در ب-۶ آمده است).

پایستگی انرژی-تکانه. تانسور تنش-انرژی دارای این ویژگی است که واگرایی آن صفر است، که بدان معناست که در یک چارچوب مرجع مینکوفسکی در فضا-زمان تخت

$$\partial T^{ab} / \partial x^b = 0 \quad (\text{ج-۳۵})$$

(در یک فضا-زمان خمیده، یا در فضا-زمان تخت در مختصات عمومی، باید به‌این معادله جمله‌های بیشتری افزود تا با مشتق‌به‌درستی با روش تانسوری برخورد شود). مؤلفه زمان‌گونه این معادله، معادله پایستگی انرژی نسبیتی است، در حالی که قسمتهای فضاگونه مؤلفه‌های معادله پایستگی

تکانه نسبیتی هستند. مثلاً در موردی که در بالا توصیف شد، با استفاده از ج-۳۴ به ازای $a = 0$ به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial T^{0b}}{\partial x^b} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu v_x/c)}{\partial(x/c)} + \frac{\partial(\mu v_y/c)}{\partial(y/c)} + \frac{\partial(\mu v_z/c)}{\partial(z/c)} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu \mathbf{v}) = 0 \quad (*)$$

که معادله پیوستگی هیدرودینامیک است. به ازای $a = 1, 2, 3$ داریم

$$\frac{\partial T^{ib}}{\partial x^b} = \frac{\partial(\mu v^i/c)}{\partial t} + \frac{\partial(\mu v^i v^j/c^2)}{\partial(x^j/c)} + \frac{v^i}{c} \left(\frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu \mathbf{v}) \right) + \frac{\mu}{c} \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{v^j \partial v^i}{\partial x^j} \right) = 0$$

که با استفاده از معادله (*) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\mu}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = 0$$

که پایستگی تکانه برای جریان ماده را بیان می‌کند. این تأییدی است بر اینکه، شرایط ج-۳۵ همان بیان پایستگی انرژی و تکانه هستند. آنها را می‌توان به صورت زیر به شکل چهاربعدی نوشت. از رابطه $U^a U_a = -1$ نتیجه می‌شود که $U_a dU^a/d\tau = 0$ ؛ همچنین، اگر از نمادگذاری فشرده $f_{,b} \equiv \partial f/\partial x^b$ استفاده کنیم، می‌توانیم بنویسیم $df/d\tau = f_a U^a$ زیرا $U^a = dx^a/d\tau$ بنابراین، اگر ج-۳۳ را در ج-۳۵ قرار دهیم و با $[U_a]$ خلاصه کنیم، به دست می‌آوریم

$$\frac{d\mu_0}{d\tau} + \mu_0 U_{,b}^b = 0 \quad (\text{ج-۳۶ الف})$$

که معادله پایستگی انرژی به صورت چهاربعدی است. با استفاده از این رابطه در آنچه که هم اکنون قبل از ادغام در $[U_a]$ به دست آوردیم، می‌بینیم که $\mu_0 U_{,b}^b U^b = 0$ ، که نتیجه می‌دهد

$$\frac{dU^a}{d\tau} = 0 \quad (\text{ج-۳۶ ب})$$

که معادله پایستگی تکانه به صورت چهاربعدی است که همان شرط ژئودزیک بودن خطهای جریان ماده در فضا-زمان تخت است.^۱

۱. قبلاً ژئودزیک را برای یک ذره واحد به عنوان خمی تعریف کردیم که در صورتی که نیرویی وارد نشود حرکت در مسیر آن صورت می‌گیرد، یعنی خمی که برای آن $dP^a/d\tau = 0$ است (الف) در این حالت، $P^a = m_0 U^a$ (ب) که در آن m_0 جرم سکون ذره است. اگر (ب) را در (الف) قرار دهیم و با U_a ادغام کنیم، می‌بینیم که m_0 ثابت است؛ در این صورت مانند بالا لازمه (الف) و (ب) این است که $dU^a/d\tau = 0$.

تمرینها

ج-۲۴ معادله‌های ج-۳۶ را به دست آورید و گزاره آخر را بررسی کنید.

ج-۲۵ میدان چارسرعت ناظرهای اصلی در یک (فضازمان تخت) عالم میلن در مختصات دکارتی عبارت‌اند از $(U^a) = (t/\tau, X/\tau, Y/\tau, Z/\tau)$ که در آن

$$\tau = \{t^2 - (X^2 + Y^2 + Z^2)\}^{1/2}$$

نشان دهید که $U^a_{;a} = 3/\tau$ ؛ و از آنجا با استفاده از ج-۳۶ الف نتیجه بگیرید که $\mu_{;0} = M/\tau^2$ نحوه تکامل چگالی انرژی در امتداد خطهای جریان شاره است، که در آن M در امتداد این خطها ثابت است.

یک شاره کامل. تاکنون، مثالی از $[T^{ab}]$ را برای یک دستگاه ماده که تحت هیچ نیرویی نیست در نظر گرفته‌ایم. هرگاه نیروهای داخلی حضور داشته باشند، اثر آنها را می‌توان در $[T^{ab}]$ گنجانید. در مورد یک شاره کامل با ویژه چگالی μ و ویژه فشار ρ ، تانسور $[T^{ab}]$ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$T^{ab} = (\mu + p/c^2)U^aU^b + (p/c^2)g^{ab} \quad (\text{ج-۳۷})$$

در اینجا هم شرط ج-۳۵ معادله‌های هیدرودینامیک را برای این شاره تولید می‌کند، که برای سهولت به صورتی مشابه با ج-۳۶ بیان می‌شود. فرم تانسور انرژی-تکانه در ج-۳۷ همان است که معمولاً در مدل‌های عالم، همراه با یک معادله حالت مناسب که p و μ را به یکدیگر مربوط می‌سازد، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تمرینها

ج-۲۶ معادله‌های پایستگی انرژی و تکانه فضازمان تخت مشابه با ج-۳۶ را برای یک شاره کامل ج-۳۷ به دست آورید.

ج-۲۷ با استفاده از ج-۳۶ الف نشان دهید که، برای یک شاره کامل در یک عالم میلن با چارسرعتی که در تمرین ج-۲۵ آمده است، و معادله حالت $\mu/3 = p/c^2$ ، تکامل چگالی انرژی در امتداد خطهای جریان شاره با زمان عبارت است از $\mu = M/\tau^4$ ، که در آن M در امتداد این خطها ثابت است.

۱. در بحث درباره یک شاره کامل، عبارتهای $[Tab]$ در چارچوبهای مختلف را با یکدیگر مقایسه خواهیم کرد. بنابراین می‌توانیم شاخص پایین 0 را، آن‌طور که در ج-۳۳ و ج-۳۴ مورد استفاده قرار گرفت، بدون اینکه سبب اشتباهی شود حذف کنیم.

میدان الکترومغناطیسی. در مورد یک میدان الکترومغناطیسی $[F^{ab}]$ (ج-۱۱) را ببینید)، تانسور تنش-انرژی از رابطه زیر به دست می آید

$$T^{ab} = \varepsilon_0 \left(F_c^a F^{bc} = \frac{1}{4} g^{ab} F^{cd} F_{cd} \right) \quad (\text{ج-۳۸})$$

محاسبه ج-۳۸ در یک چارچوب مینکوفسکی نشان می دهد که

$$(۱) T^{00} = \frac{1}{4} \varepsilon_0 (E^i + c^i B^i), \quad (۲) T^{0i} = (1/c \mu_0) (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i \quad (\text{ج-۳۹ الف})$$

$$T^{ij} = \varepsilon_0 \left\{ \frac{1}{4} (E^i + c^i B^i) g^{ij} - E^i E^j - c^i B^i B^j \right\} \quad (\text{ج-۳۹ ب})$$

عبارت شماره (۱) ج-۳۹ الف رابطه شناخته شده چگالی انرژی میدان الکترومغناطیسی است، در حالی که عبارت شماره (۲) ج-۳۹ الف $1/c$ مؤلفه های بردار پوئین تینگ است که شار انرژی را مشخص می کند؛ ج-۳۹ ب تانسور تنش ماکسول برای میدان الکترومغناطیسی را می دهد. در واقع، اینها عبارتهایی هستند که انتظار داریم از آنها در تحلیل پدیده هایی مانند میدانهای الکترومغناطیسی کیهانی و رفتار شارهای بردار (مغناطو هیدرو دینامیک) استفاده می شود. در حالت کلی دیورژانس T^{ab} در ج-۳۸ صفر نیست. بلکه نتیجه کلی عبارت است از

$$\partial T^{ab} / \partial x^b = c F^{ac} J_c \quad (\text{ج-۳۹ ج})$$

تنها وقتی که T^{ab} میدانهای الکترومغناطیسی را با T^{ab} حرکت ذره جمع کنیم $\partial T_{ij}^{ab} / \partial x^b = 0$ است. هر چند، در موردی که جریانی وجود نداشته باشد ($J^a = 0$)، شرط ج-۳۵ برای تانسور تنش الکترومغناطیسی ج-۳۸، که در آن صورت معادله های پایستگی انرژی مغناطیسی و تکانه را می دهد، خود به خود از معادله های ماکسول ج-۲۸ الف نتیجه می شود.

تمرینها

ج-۲۸ معادله های ج-۳۹ را از ج-۳۸، به دست آورید.
ج-۲۹ در یکی از کتابهای الکترومغناطیس درباره چگالی انرژی الکترومغناطیس، بردار پوئین تینگ، و تانسور تنش ماکسول بخوانید. ببینید با استفاده از این مفاهیم در مورد پدیده هایی مانند لکه های خورشیدی و کهکشانهایی که منبع امواج رادیویی اند چه می یابید.
ناوردهای تنش-انرژی. اطلاعات مهمی در این واقیعت که $[T^{ab}]$ به صورت یک تانسور تبدیل می شود نهفته است (چیزی که در یک چارچوب انرژی است در چارچوب دیگر در فشار سهیم

می‌شود، و غیره). می‌توان مانند موارد قبل سؤال کرد که چه ناوردهایی را می‌توان از $[T^{ab}]$ ساخت، زیرا این ناوردها حاوی اطلاعات مهمی خواهند بود: آنها کمیت‌های تنش-انرژی را می‌دهند که برای تمام ناظرها یکی است. ساده‌ترین ناوردهای از این نوع عبارت‌اند از

$$T \equiv T^a_a, \quad T_{\backslash} \equiv T^{ab}T_{ab} \quad (\text{ج-۴})$$

ساده‌ترین راه مشاهده ماهیت این ناوردها در نظر گرفتن مثالهای ویژه است. در مورد ماده آزاد از فشار ج-۳۳، $T = -\mu_0$ ؛ در مورد شارۀ کامل ج-۳۷، $T = -\mu + 3p/c^2$ ؛ و در مورد میدان الکترومغناطیسی ج-۳۸، $T = 0$.

تمرینها

ج-۳۰ درستی عبارتهایی را که در بالا برای T آمده است تحقیق کنید و T_{\backslash} را در مورد (الف) یک شارۀ کامل ج-۳۷ و (ب) میدان الکترومغناطیسی ج-۳۸ بیابید.
ج-۳۱ اکنون چهار ناوردا برای میدان الکترومغناطیسی می‌شناسید: Q_1 (معادله ج-۲۴ را ببینید)، Q_2 (معادله ج-۲۶ را ببینید)، و T و T_{\backslash} (معادله ج-۴۰ را ببینید). آیا اینها از یکدیگر مستقل‌اند، یا حاوی اطلاعاتی اساساً یکسان هستند؟

فضازمان خمیده

در بسیاری موارد تأکید کردیم که عبارتهای به‌دست آمده تنها در مختصات مینکوفسکی معتبرند. همان‌طور که قبلاً گفته شد، تنها در فضازمان تخت است که می‌توانیم چنین مختصاتی را در همه جا به‌دست آوریم. هر چند، می‌توانیم چنین مختصاتی را در هر نقطه خاص مورد نظر P در فضازمان خمیده نیز بیابیم، از این‌رو عبارتهای بالا، و تعبیر این تانسورها در یک فضازمان خمیده نیز معتبر باقی می‌مانند. به‌علاوه، به‌این مطلب نیز اشاره کردیم که هرگاه مشتق‌های تانسورها ظاهر شوند، در صورت استفاده از مختصات عمومی به چند جمله اضافی نیازمندیم تا رابطه‌ها، رابطه‌های واقعی تانسوری باشند. اما اگر در فضازمان خمیده مختصات مناسبی انتخاب شود این رابطه‌ها در هر نقطه خاص P در فضازمان صادق خواهند بود؛ به‌این ترتیب این رابطه‌ها هم معنای خود را در یک فضازمان خمیده حفظ می‌کنند.

طبق نظر اینشتین، تانسور T^{ab} تنش-انرژی تمام ماده و میدانهای فیزیکی موجود، نقش بسیار مهمی در فضازمان خمیده ایفا می‌کند: این تانسور منشأ خمیدگی و از این‌رو منشأ هندسه فضازمان است. به‌زبان فیزیکی، تانسور تنش-انرژی همراه با معادله‌های حالت مناسب و شرایط مرزی تعیین‌کننده میدانهای گرانشی موجود در طبیعت هستند. نمونه‌هایی از این را در فصلهای ۶ و ۷ دیده‌ایم.

تمرین کامپیوتری ۱۸

برنامه‌ای بنویسید که به‌عنوان ورودی (۱) سرعت تبدیل V از یک چارچوب مینکوفسکی F به یک چارچوب مینکوفسکی دیگر F' ، (۲) مؤلفه‌های $E(I)$ ($I = 1, 2, 3$) یک میدان الکتریکی و $B(J)$ ($J = 1, 2, 3$) یک میدان مغناطیسی در چارچوب F ، را بپذیرد و سپس مؤلفه‌های $E \setminus (I)$ و $B \setminus (J)$ این میدانها در چارچوب F' را چاپ کند. همچنین این برنامه باید کمیتهای Q_1 و Q_2 (که در معادله‌های ج-۲۴ و ج-۲۶ آمده‌اند) را قبل و بعد از تبدیل محاسبه کند؛ درجهٔ ناوردایی این کمیتهای نشانی از دقت محاسبه‌هاست.

با استفاده از این برنامه مواردی را که در آن یکی از میدانها (۱) با سرعت نسبی چارچوبها موازی و (۲) بر آن عمود است بیازمایید. تعیین کنید که در کدام یک از موارد می‌توان (الف) یک میدان الکتریکی و (ب) یک میدان مغناطیسی را به‌صفر تبدیل کرد. کدام یک از ویژگیهای میدانهای الکترومغناطیسی را نمی‌توان با تعویض چارچوب مرجع تغییر داد؟

ج-۶ چارتانسورها و معادله‌های تانسوری

سرانجام، پس از اینکه به تفصیل نشان دادیم که چگونه چاربردارها و تانسورهای با دو شاخص عمل می‌کنند، نحوهٔ عملکرد تانسورهای پیچیده‌تر را نشان می‌دهیم.

یک تانسور کلی T دارای تعدادی دلخواه شاخص بالایی و تعدادی دلخواه شاخص پایینی خواهد بود. برای سهولت از مثال تانسوری با دو شاخص بالایی، مانند a ، b ، و دو شاخص پایینی مثلاً c و d استفاده می‌کنیم؛ این تانسور برای روشن کردن اصول کلی از پیچیدگی کافی برخوردار است. در این مورد، مؤلفه‌های T نسبت به یک چارچوب اختیاری T_{cd}^{ab} خواهد بود، و از آنجا که فضا زمان چهاربعدی با مختصات x^a ($a = 0, 1, 2, 3$) است، هر شاخص تمام مقادیر $0, 1, 2, 3$ را می‌گیرد. هرگاه چارچوب دیگری اختیار شود، همان کمیت هندسی با مجموعهٔ مختلفی از مؤلفه‌ها نمایش داده خواهد شد. فرض می‌کنیم بردارها در اثر تغییر چارچوب مانند ب-۵ تبدیل شوند؛ نحوهٔ تبدیل شاخصهای بالایی و شاخصهای پایینی به‌طور نمونه در ج-۱ تا ج-۵ آمده است. بدین ترتیب آن را به‌شیوه‌ای روشن تعمیم خواهیم داد: مؤلفه‌های تانسور T باید به‌صورت زیر تبدیل شوند

$$T_{c'd'}^{a'b'} = L_a^{a'} L_b^{b'} T_{cd}^{ab} (L^{-1})_{c'}^c (L^{-1})_{d'}^d \quad (\text{ج-۴۱})$$

که، مانند قبل، از قرارداد جمع‌زنی استفاده می‌کنیم؛ جمع‌زنی باید روی مقادیر $0, 1, 2, 3$ هر دو شاخص تکراری (یعنی شاخصهای a, b, c, d) صورت گیرد. بدین ترتیب، قاعده این است که هر شاخص بالایی مانند یک بردار با یک شاخص بالایی، و تحت همان ماتریس L تبدیل می‌شود (این ماتریس عملاً شاخص قدیمی a روی تانسور را حذف و به‌جای آن a' را قرار می‌دهد، و غیره)؛

و هر شاخص پایینی تحت ماتریس وارون L^{-1} تبدیل می‌شود (ب-۱۸ را ببینید)؛ در اینجا هم هر شاخص قدیمی، مثلاً b ، حذف می‌شود و به جای آن یک شاخص جدید، مثلاً b' ، قرار می‌گیرد. این نحوهٔ به دست آوردن مؤلفه‌های جدید از مؤلفه‌های قدیم را توصیف می‌کند. برعکس، برای به دست آوردن مؤلفه‌های قدیم از مؤلفه‌های جدید روشن است که باید به جای L از L^{-1} و به جای L^{-1} از L استفاده کرد، به طوری که شاخصهای بالا با شاخصهای پایین حذف شوند و به جای آنها شاخصهای بالای جدید قرار گیرند، و برعکس؛ یعنی

$$T_{cd}^{ab} = (L^{-1})_{a'}^a (L^{-1})_{b'}^b T_{c'd'}^{a'b'} L_c^{c'} L_d^{d'} \quad (\text{ج-۴۲})$$

که اکنون جمع‌زنی روی تمام مقادیرهای شاخصهای a' ، b' ، c' ، و d' صورت می‌گیرد. همان‌طور که قبلاً گفته شد، اهمیت زیاد قاعدهٔ تبدیل ج-۴۲، که برای هر کمیت شاخص دارای قاعدهٔ "طبیعی" است، آن است که اگر یک معادلهٔ تانسوری در یک چارچوب صادق باشد، در تمام چارچوبها صادق است. مثلاً اگر

$$T_{cd}^{ab} = S_{cd}^{ab} \quad (\text{ج-۴۳ الف})$$

به ازای تمام مقادیر شاخصهای a ، b ، c ، و d در چارچوب F برقرار باشد، در این صورت

$$T_{c'd'}^{a'b'} = S_{c'd'}^{a'b'} \quad (\text{ج-۴۳ ب})$$

نیز در هر چارچوب دیگر F' برقرار است. هر چارچوبی که مورد استفاده قرار گیرد، شاخصهای آزاد در سمت چپ و راست باید یکی باشند (یعنی، اگر یک شاخص آزاد بالایی a در سمت چپ باشد، یک شاخص آزاد بالایی a در سمت راست نیز هست؛ اگر یک شاخص آزاد پایینی d در سمت چپ باشد، یک شاخص پایینی d در سمت راست نیز هست؛ و غیره). یک مثال ویژهٔ مهم آن است که اگر یک تانسور در یک چارچوب مرجع صفر شود (یعنی تمام مؤلفه‌هایش در آن چارچوب صفر باشد)، در این صورت این تانسور در تمام چارچوبها صفر می‌شود.

تمرینها

ج-۳۲ ثابت کنید که ج-۴۲ وارون ج-۴۱ است، یعنی اگر ابتدا ج-۴۱ و سپس ج-۴۲ را به کار ببریم، به همان مؤلفه‌هایی می‌رسیم که با آنها آغاز کرده بودیم.
ج-۳۳ الف) ثابت کنید که ج-۴۳ ب از ج-۴۳ الف و ج-۴۱ نتیجه می‌شود. ب) آیا عکس آن هم نتیجه می‌شود، یعنی آیا ج-۴۳ الف از ج-۴۳ ب نتیجه می‌شود؟ اگر این‌طور است، چرا؟

(ج) نشان دهید که اگر تانسوری در یک چارچوب صفر شود، در این صورت در تمام چارچوبها صفر می شود.

عملیات تانسوری. مانند مورد تانسورهای دو شاخصی که در بخش ج-۱ مطالعه شد، می توان با استفاده از چهار عمل اصلی تانسوری معادله های پیچیده تری ساخت. اینها عبارت اند از (۱) ترکیب خطی: تانسورهای $[R_{cd}^{ab}]$ و $[S_{cd}^{ab}]$ و اعداد λ و μ را داریم، در این صورت می توانیم تانسور جدید $[T_{cd}^{ab}]$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$T_{cd}^{ab} = \lambda R_{cd}^{ab} + \mu S_{cd}^{ab}$$

توجه کنید که این کار تنها در مورد تانسورهای امکان پذیر است که از یک نوع باشند، یعنی تعداد شاخصهای بالایی و پایینی آنها یکی باشد.

(۲) تشکیل ضرب تانسوری: دو تانسور، مانند $[R^{ab}]$ و $[S_e^d]$ را داریم، می توانیم تانسور جدید $[T^{abcd}]$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$T_{ce}^{abd} = R_c^{ab} S_e^d$$

(۳) ادغام تانسوری: تانسور S_{cd}^{ab} (که ممکن است با اعمال مکرر دو عملیات قبلی ساخته شده باشد) مفروض است، می توانیم با ادغام دو شاخص a و d تانسور جدید P_c^a را بسازیم؛ یعنی

$$R_c^a = S_{cd}^{ab}$$

که در آن جمع زنی بر روی تمام مقادیر شاخص b صورت گیرد. می توان هر دو شاخص بالایی و پایینی ادغام و تعداد هر یک از شاخصهای بالایی و پایینی را یکی کم کرد. شاخصهای تکراری را "شاخصهای بدلی" گویند زیرا آنها شاخصهای آزاد نیستند، بلکه نشانگر جمع زنی هستند. برحسب آنها را می توان به دلخواه تغییر داد، به شرط اینکه از حرفهای شاخصهای آزاد استفاده نشود. بدین ترتیب، مثلاً $S_{cb}^{ab} = S_{ce}^{ae}$ (به جای b حرف e را قرار داده ایم)؛ اما در اینجا نباید به جای حرف b حرف a یا c را قرار داد (چون a و c شاخصهای آزاد هستند).

(۴) بالابردن و پایین بردن شاخصها: اگر یک شاخص بالایی a داشته باشیم، می توانیم با ضرب تانسور متریک در این تانسور، تانسوری درست کنیم که آن شاخص را در پایین داشته باشد. مثلاً T_{be}^a را داریم، می توان شاخص a را پایین آورد تا T_{cbe} به دست آید، که در آن $T_{cbe}^a = g_{ca} T_{be}^a$. T_{cbe} و T_{be}^a را می توان مؤلفه های متفاوتی دانست که یک شیء هندسی واحد را توصیف می کنند. برعکس، می توان هر شاخص پایینی b را با ضرب در تانسور متریک وارون $[g^{bd}]$ ، که با ج-۸ تعریف شده است، بالا برد. بدین ترتیب، مثلاً $T_{be}^a = g^{ad} T_{dbe}$ شاخص d در T_{dbe} را "بالا" می برد.

در شکل رسمیتر به دست آوردن ویژگیهای تانسوری، نشان دادیم که هر یک از این فرایندها واقعاً به مؤلفه‌های تانسور جدیدی منجر می‌شوند؛ اما در این معرفی نسبتاً غیررسمی، از خواننده خواسته شده است که یا صحت این مطالب را باور کند و یا خود آن را اثبات نماید (در واقع، این ویژگیها به سادگی از تعریفهای ارائه شده نتیجه می‌شوند).

تمرینها

ج-۳۴ قانون تبدیل را برای تانسوری با مؤلفه‌های T_{abc}^d بنویسید. ثابت کنید که ادغام $[T_{abc}^d]$ به صورت $[P_{ac}] = [T_{abc}^{bd}]$ یک تانسور است.

ج-۳۵ اگر ابتدا شاخص a تانسور $[T_{abcd}]$ را بالا ببریم، و سپس آن را پایین بیاوریم، چه تانسوری $[S_{abcd}]$ به دست می‌آید؟

ناورداها. یک ویژگی مهم آن است که اگر تعداد شاخصهای بالایی و پایینی یک تانسور برابر باشد، در این صورت اگر هر یک از شاخصهای بالایی را در یک شاخص پایینی ادغام کنیم به طوری که هیچ شاخصی آزاد باقی نماند، تابعی به دست می‌آید (که همان حالت خاص تانسور بدون شاخص است) که الزاماً ناورداست، یعنی کمیتی است که در مورد مقدار آن تمام ناظرها اتفاق نظر دارند. مثلاً اگر S_{bd}^{ac} را ادغام کنیم $T = S_{ab}^{ab}$ می‌شود که یک ناورداست، زیرا یک تانسور است (به دلیل اینکه با عملیات تانسوری ساخته شده است)، و مورد خاص ج-۴۱ هرگاه هیچ شاخص آزادی وجود نداشته باشد بیانگر ناوردایی $T' = T$ است.

تمرین ج-۳۶

قانون تبدیل S_{bd}^{ac} را بنویسید و سپس این تانسور را ادغام و ثابت کنید که $T = S_{ab}^{ab}$ یک ناورداست.

مشق‌گیری تانسوری. در برخی از معادله‌ها از مشتق‌گیری از مؤلفه‌های تانسور استفاده کردیم، اما فقط وقتی که مختصات دکارتی یا مینکوفسکی به کار گرفته شده بودند. در مختصات عمومی نتیجه این عملیات یک تانسور نمی‌شود؛ برای ساختن معادله‌های دیفرانسیل تانسوری به یک ساختار اضافی ("مشتق‌گیری هموردا") نیاز داریم. ما در اینجا به این موضوع نخواهیم پرداخت، زیرا این کار احتیاج به حساب تانسوری دارد که از حوصله این کتاب خارج است.

نمادهای مورد استفاده

کمیت‌های دینامیکی	یکاهای زمان
m : جرم	s: ثانیه
m_0 : جرم سکون	ms: هزارم ثانیه، یعنی 10^{-3} ثانیه
E : انرژی	μs : میلیونیم ثانیه، یعنی 10^{-6} ثانیه
E_0 : انرژی جرم سکون	یکاهای فاصله
π : سه-تکانه نسبیتی	m: متر
ناوردهای فاصله فضازمان	cm: سانتی‌متر
S^2 (ناوردای فاصله)	km: کیلومتر
ΔS^2 (ناوردای جابه‌جایی)	تابش الکترومغناطیسی
فضاهای اقلیدسی	z : انتقال به سرخ
فضازمان تخت	ν : بسامد
τ : ویژه‌زمان	یکاهای بسامد: kHz (10^3 دور بر ثانیه)
d τ : نمو ویژه‌زمان	λ : طول موج
مخروطهای نور	$\Delta\tau$: دوره
مخروط نور آینده $C^+(p)$	ضرایب نسبیتی
مخروط نور گذشته $C^-(p)$	γ : ضریب اتساع زمان و انقباض طول
	K : ضریب جابه‌جایی دوپلر

فهرست راهنما

اصل	آزمایش
~ عدم قطعیت ۲۸۱	~ مایکلسون-مورلی ۱۴۲، ۳۱
~ کیهانشناسی ۳۱۷، ۲۸۸-۲۸۵، ۲۱۳	~ هافل و کتینگ ۱۴۲، ۱۰۰، ۹۴
~ موضوع اقلیدسی ۲۸۸-۲۸۷، ۲۳۳	~ فکری با آسانسور ۲۲۸-۲۲۵
~ ناوردایی سرعت نور ۴۴، ۳۴-۳۰	~ آسمان تاریک شب (در پارادوکس آلبر) ۲۰۲، ۳۰۸-۳۰۷
~ نسبیت خاص ۲۳۳، ۲۹	~ آشکارساز شتاب ۹۹
~ والکترومغناطیس ۳۷۰-۳۶۵، ۱۴۲	~ آفرینش عالم ۳۲۴، ۳۲۳، ۳۱۱
~ و چگالی بار الکتریکی ۳۷۱	~ آونگ فوکو ۲۵۸
~ و دوجانبگی ۶۶-۶۴	
~ و دینامیکها ۲۹، ۱۴۰، ۳۴۹-۳۴۲	~ ابتدای عالم ۳۱۱
~ و سرعت ۷۱-۷۰	~ ایرکامپیوترها ۲۸
~ و یکنواختی ضریب K ۶۳	~ اتساع زمان ۳۶-۳۷، ۸۸-۱۰۰، ۱۱۲-۱۱۵، ۱۵۵-۱۵۰
~ هم‌ارزی ۲۲۵-۲۳۰، ۲۴۷، ۲۷۱-۲۷۲	~ تبدیل لورنتس ۱۵۴-۱۵۵
~ افق ۲۵۵	~ در فضا زمان تخت ۵۷-۵۹
~ ذره ۳۱۱-۳۱۷، ۳۱۹	~ فرم ds^2 ۱۸۹
~ رویداد ۲۰۹-۲۱۰، ۲۷۴-۲۸۰	~ اثر
~ الکترومغناطیس و نسبیت ۱۴۲، ۳۶۳-۳۷۹	~ دوپلر ۵۷-۶۷، ۲۷۱-۲۷۲
~ انبساط در عالم ۲۱۵-۲۱۹، ۲۴۳، ۲۹۱-۲۹۷، ۳۰۲	~ و سرعت نسبی ۶۹-۷۳، ۷۵-۷۶، ۹۲، ۱۰۰
~ انتشار موازی در امتداد یک خم ۲۵۷-۲۶۲	~ کوانتومی استیون هاکنینگ ۲۸۱، ۳۱۱-۳۱۰
~ انتقال ۱۷۹، ۱۹۶-۱۹۷، ۲۰۲	~ ادامه آفرینش ماده ۳۱۷-۳۱۸
~ به آبی ۶۲-۶۳، ۷۲، ۲۷۱، ۲۸۰	
~ به سرخ ۶۰-۶۳، ۷۲	

معادله‌های میدان گرانشی ~ ۲۴۵،

۳۱۷، ۲۹۸-۲۹۷، ۲۹۳، ۲۸۶-۲۸۵

بار الکتریکی ۱۲۵-۱۲۶، ۳۶۴، ۳۶۷-۳۷۰،

۳۷۷-۳۷۵

بایستگی ~ ۳۸۰-۳۸۱

بازگانه‌ی شدن مخروط نور گذشته ۲۵۰-۲۵۳،

۳۰۴-۳۰۵، ۳۰۹-۳۱۰

بازه‌ها ۱۸۳

برج هاروارد ۲۷۲

برخورد ۱۲۱-۱۲۴، ۱۳۶-۱۳۷، ۳۴۸،

بردارها ۳۳۶-۳۵۶، ۳۵۱-۳۵۲، ۳۵۶

بزرگیها ۳۴۷

بیت‌هایت

انتقال به سرخ ~ ۲۱۱، ۲۱۸-۲۱۹،

۲۷۸-۲۸۰، ۳۰۳، ۳۱۴-۳۱۵

چگالی و دمای عالم ~ ۲۹۵-۲۹۶،

عالم حاوی ~ کهکشان ۲۸۸-۲۹۱،

۳۱۱-۳۱۳

فضازمان خمیده ~ ۲۸۰، ۲۹۵، ۳۱۱

پاد ذره ۱۳۸-۱۳۹

پارادوکس

~ آلبر (در آسمان تاریک شب) ۲۰۲،

۳۰۷-۳۰۸

~ دوقلو ۳۴-۳۷، ۹۷-۹۹، ۱۸۹-۱۹۱،

پارامتر شتاب q ۲۹۸

بایستگی

~ انرژی ۱۳۰-۱۳۳، ۳۴۴، ۳۸۴

~ انرژی-تکانه ۱۳۱-۱۳۲، ۳۴۴، ۳۸۰،

۳۸۲

~ بار ۳۸۰-۳۸۱

~ تکانه ۱۲۲، ۳۴۲-۳۴۴

~ جرم ۱۲۳، ۱۳۱-۱۳۳

~ جرم‌وانرژی ۱۳۱-۱۳۳، ۱۳۶-۱۳۹

~ با شتاب یکنواخت ۲۰۷-۲۰۹

~ در عالم و کمیت‌های مشاهده‌پذیر

۳۰۳-۳۱۰

~ گرانشی ۲۴۷، ۲۶۹-۲۷۲،

۲۷۸-۲۸۰

~ و وافق ذره ۳۱۴

~ و وافق رویداد ۲۱۱

~ و انبساط ۲۱۵-۲۱۶، ۳۰۱-۳۰۴

~ موازی غیر انتگرال‌پذیر ۲۵۸-۲۵۹

~ خطی ۱۸۲-۱۸۴، ۳۲۷-۳۳۵

انحراف

~ ژئودزیک ۲۳۶-۲۳۹، ۲۴۸-۲۵۵

~ مسیر ۲۲۳، ۲۳۶، ۲۴۶

اندازه

~ ظاهری ۱۹۸-۱۹۹، ۲۴۸-۲۵۱،

۳۰۳-۳۰۴

~ کمینه ظاهری ۲۵۰-۲۵۱، ۲۵۴،

۳۰۳-۳۰۴

اندازه‌گیری

~ راداری سیارهٔ مریخ ۲۷۳

~ فاصله و زمان ۱۷۴، ۱۷۹، ۱۸۷-۱۸۸،

~ ناظرهای مختلف ۳۹

انرژی

~ بستگی ۱۳۷

~ ، تکانه، و جرم ۱۳۰، ۳۴۳، ۳۷۹-۳۸۰،

~ جنبشی ۱۵-۱۶، ۱۳۱، ۱۴۰

~ E ۴، ۱۳۰-۱۳۹، ۳۴۴-۳۶۵،

۳۸۱

~ بایستگی ۱۳۱-۱۳۳، ۳۴۴،

۳۸۰-۳۸۱

~ و جرم ۱۳۰-۱۴۰

ایده‌های از قبل کنار گذاشته شده ۱

اینشتین

عالم ایستای ~ ۲۹۴، ۳۱۷

- پرتوهای کیهانی ۱۱۳، ۳۶۵
 پیشگویی آینده ۳۱۵، ۳۲۲
- تابش
 ~ الکترومغناطیسی ۱۵، ۴۴، ۶۰، ۲۹۵-۲۹۶، ۳۰۰
 ~ شبه ستاره‌ای ۲۵۱-۲۵۲، ۲۸۱، ۳۰۱
 ~ عکاسی ۲۶، ۵۲، ۱۰۹-۱۱۱
 تعریف عملی همزمانی ۵۱
 تقارن
 ~ اتساع زمان ۹۴-۹۷
 ~ انقباض طول ۱۰۷-۱۰۸
 ~ کروی ۲۶۳-۲۶۵
 تقریب فضا-زمان تخت ۲۶۵
 تکامل هندسه فضا-زمان ۲۴۵، ۲۹۲
 تکانه
 پایستگی ~ ۱۲۲، ۳۴۲، ۲۴۴
 ~ P^a ، π ، ۴، ۱۲۱-۱۲۴، ۱۲۷-۱۲۸
 ۳۳۸، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۵۲، ۳۶۲، ۳۸۱
 تکوین منظومه شمسی ۲۹۹-۳۰۰، ۳۱۵، ۳۱۹
 تکنیکی ۲۶۸-۲۶۹، ۲۷۴-۲۷۶، ۲۸۰، ۲۹۷
 ~ اولیه ۲۱۸-۲۱۹، ۲۹۵، ۳۰۹-۳۱۱
 ۳۱۹
 ~ برهنه ۲۸۲
 تمرین
 ~ کامپیوتری ۲۸، ۳۹، ۵۶، ۶۷، ۷۹، ۸۶، ۱۰۱، ۱۲۹، ۱۶۴، ۱۹۳، ۲۶۱، ۲۸۳
 ۳۳۵، ۳۵۵، ۳۸۸
 ~ گرافیک کامپیوتری ۱۴۲، ۱۶۴، ۳۲۳
 ثابت هابل ۲۱۷، ۲۹۷-۲۹۸، ۳۱۳-۳۱۴
 ثانیه نوری ۲۰
 جابه‌جایی
 ~ آنی ۹۱
- تابش
 ~ الکترومغناطیسی ۱۵، ۴۴، ۶۰، ۲۹۵-۲۹۶، ۳۰۰
 ~ جسم سیاه ۲۸۱، ۲۹۵-۲۹۶، ۳۰۰-۲۹۸
 ~ زمینه میکروموج کیهانی ۲۹۵-۲۹۶، ۳۰۲، ۳۰۸، ۳۱۴-۳۱۵، ۳۱۷-۳۱۸
 ~ شار ۲۰۱-۲۰۲، ۳۱۷-۳۱۸
 تابع
 ~ K و سرعت نسبی ۶۹-۷۵
 ~ مقیاس عالم ۲۹۲
 تاقیونها ۱۱۸
 تانسور ۳۵۶-۳۵۷، ۳۸۷-۳۹۰
 ~ تنش-انرژی ۳۸۱-۳۸۶
 ~ ماکسول ۳۶۳
 ~ متریک ۲۴۰-۲۴۲، ۲۴۵، ۳۴۷-۳۴۸، ۳۶۱، ۳۵۳
 معادله‌های ~ ۳۵۹، ۳۸۹-۳۹۰
 تبدیل
 ~ اندازه‌گیری فضا و زمان ۱۴۴-۱۵۱، ۳۳۷-۳۳۹
 ~ انرژی و تکانه ۱۴۰، ۳۴۳
 ~ جریان و بار الکترومغناطیسی ۳۷۸
 ~ چاربردارها، چارتانسورها ۳۳۸، ۳۴۰-۳۴۱
 ~ سرعت ۳۴۱-۳۴۲
 ~ فعال ۱۵۸-۱۶۳
 ~ لورنتس ۵، ۱۱۹، ۱۵۰-۱۵۵، ۳۶۱
 ~ در اندازه‌گیری طول و زمان محفوظ ۱۶۱
 معادله‌های ~ ۱۵۰-۱۵۱، ۳۳۸-۳۳۹
 ~ وارون ۱۵۲، ۳۳۸-۳۳۹

حرکت	~ نورگونه ۱۷۸، ۳۴۷
جرم	~ در یکاهای هندسی ۲۶۳-۲۶۵، ۲۶۷-۲۷۰، ۲۷۸
~ سقوط آزاد ۲۳۲-۲۳۳، ۲۳۶-۲۳۷	~ سکون ۱۳۱، ۱۳۸، ۱۴۰، ۳۴۷-۳۴۸
۲۵۹-۲۶۱، ۲۸۶	~ m ۱۲۰
~ سیاره‌ها ۲۳۴-۲۳۵	~ پابستاری ~ ۱۲۰، ۱۳۲، ۱۳۰-۱۳۵
~ مطلق ۲۹	~ گرانشی ۲۲۵
~ ناظر ۹-۱۲، ۶۴-۶۵، ۶۷-۱۱۹	~ لختی ۲۲۵
~ نسبی ۲۳۷	~ وابستگی سرعت ~ ۱۲۳، ۱۲۷، ۱۲۹
~ در ذره‌های در حال سقوط آزاد ۲۳۷	~ و انرژی ۱۳۰-۱۳۹
~ ناظرها ۲۹-۳۹	~ جریان الکتریکی ۳۶۷-۳۶۸
حساب	~ جسم علیتی ۱۵
~ تانسوری ۳۲۶، ۳۵۳، ۳۹۰	~ جمع سرعتها ۳۲-۳۲، ۷۵-۷۸، ۱۵۵-۱۵۶
~ K ۵	~ جهان تصویر ۵۲
~ حضيض سیاره عطارد ۲۷۳	~ جهانخط ۱۲
~ حل کارل شوارتس شیلد ۲۶۳-۲۸۴	~ بنیادی ۱۹۴، ۲۰۲
~ خطکش ۴۳، ۴۷-۴۸، ۱۰۲-۱۰۳	~ غیرممکن ۱۲
خطوط	~ ساده ۱۹۷، ۲۰۲
~ بسته زمان‌گونه ۲۵۶	~ جهان نقشه ۵۳
~ راست موازی نامقاطع ۲۲۳، ۲۳۶-۲۳۸	چاربردار ۳۳۸-۳۵۶
~ خم شدن نور ۲۲۲-۲۲۳، ۲۳۰، ۲۴۷، ۲۷۲	~ U^a ۳۴۱
~ در افقهای ذره ۳۱۱-۳۱۶	~ چارتکانه ۳۴۲
~ در بازکانونی شدن ۲۵۲-۲۵۳	~ چارچوب مرجع ۲۹، ۱۴۵-۱۴۷، ۳۳۶-۳۳۷
۳۰۴-۳۰۵	~ بار ۱۴۷، ۳۳۷-۳۳۹، ۳۴۰-۳۴۱
~ و افق رویداد ۲۷۵-۲۷۸	~ شتابدار ۲۲۶-۲۳۲، ۳۵۰
~ و علیت ۲۵۵-۲۵۸	~ غیر دوار ۲۵۸
خمیدگی	~ چارنبرو f^a ۳۴۵
~ سطح ۲۲۳-۲۲۴، ۲۵۸-۲۵۹	~ چرخش ۱۵۸-۱۶۰
~ فضا زمان ۲۳۸، ۲۴۵، ۲۵۰، ۲۵۲	~ چشمه درخشندگی ناظر ۲۰۰-۲۰۲، ۲۴۵-۲۵۰
۲۵۸-۲۶۰، ۲۶۵، ۲۸۰	~ چگالی ماده در عالم ۲۹۸، ۳۰۷-۳۰۸
~ خورشید ۱۳۵-۱۳۶، ۱۴۱-۱۴۳، ۲۶۳-۲۶۴	
۲۶۷، ۲۷۱، ۲۷۸، ۲۹۹-۳۰۰، ۳۰۸-۳۰۹	
~ خیز ۱۶۰-۱۶۱، ۲۰۲	
دایره عظیمه ۲۲۱-۲۲۳، ۲۵۸	حد نیوتونی ۱۵۳-۱۵۴
~ درخشندگی ظاهری ۱۹۹-۲۰۱، ۳۰۵-۳۰۷	حدود علیتی ۲۳-۲۸، ۲۷۵-۲۷۸، ۳۱۱-۳۱۴

- در یک لحظه ۱۱۱
 دستگاه مختصات ۱۳، ۱۴۵-۱۴۷، ۳۳۷-۳۳۸، ۳۵۰
 دوجانبگی
 ~ انقباض طول ۱۰۷-۱۰۸، ۳۷۲
 ~ تابع K و اثر دوپلر ۶۴-۶۵
 ~ زمان اتساع ۹۴-۹۶، ۹۸
 ~ سرعت نسبی ۷۱
 همزمانی ~ ۸۵
 دینامیک ۱۱۹-۱۳۲، ۳۴۲-۳۴۴
- ذرات
 ~ بنیادی ۲۹۹
 جرم سکون صفر ~ ۱۳۴، ۳۴۸
- رابطه بزرگی انتقال به سرخ ۳۰۶-۳۰۸
 رادار ۸۷-۸۸، ۹۰، ۲۷۱-۲۷۲
 ~ و تابع K ۶۶
 ~ و طول ۱۰۲-۱۰۳
 ~ و فاصله ۴۳-۴۷
 ~ و همزمانی ۴۸-۵۲
 رنگ ۶۱-۶۳
 روشنایی ظاهری ۲۰۱، ۳۰۸
 ~ و آسمان تاریک شب ۳۰۸
 رویداد ۱۲
 ~ آینده ۲۶
 ~ گذشته ۲۶، ۲۸، ۳۱۱-۳۱۴، ۳۱۵-۳۱۸
 ریاضیات ابداعی راجر پن رز ۳۱۰، ۳۱۴
- ~ طولانیتر ۳۶، ۹۹، ۱۸۹، ۲۴۶
 ~ فاصله در فضا زمان ۳۵، ۱۰۰، ۱۶۵-۱۷۰، ۱۸۲
 ~ گونه ۲۳۳، ۳۴۷
 ژئودزیکهای ~ ۲۳۳، ۲۵۸
 ~ و همزمانی ۸۰-۸۱
 زمین ۲۶۵، ۲۷۸-۲۷۹
 زوج الکترون-پوزیترون ۱۳۸، ۲۹۹
- ژئودزیک ۲۲۳، ۲۴۶-۲۴۷، ۲۵۷-۲۵۸
 ~ در حرکت سقوط آزاد ۲۵۹-۲۶۲
 ~ صفر ۲۴۷-۲۵۵، ۲۷۵-۲۷۸، ۳۰۲-۳۰۱
 ژيروسکوپ ۲۵۸-۲۵۹
- سازگاری
 ~ فیزیک ۱۴۱
 ~ نسبی ۷۸، ۱۱۲-۱۱۸، ۱۲۷-۱۲۹
 ساعت(های) ۴۱-۴۳
 اندازه‌گیری ~ ۳۵-۱۸۲، ۲۴۲
 ~ ایده‌آلی ۴۱، ۲۴۲-۲۴۳
 ناظر قرار گرفته در ~ بی حرکت ۳۲، ۷۳
 ~ نوری ۳۲
 همزمان کردن ~ ۴۸
 سالهای نوری ۲۰-۲۱
 ستاره(ها) ۱۳۶-۱۳۷، ۲۶۳، ۲۷۱، ۲۷۲
 رمبش و تشکیل سیاهچالهها در ~ ۲۷۴-۲۷۸
 ستاره کروی
 اندازه ~ منحنیهای انتقال به سرخ ۲۷۶
 سرعت ۲۳۲-۲۳۳، ۳۵۲، ۳۶۲-۳۶۳
 ~ بدون نور ۱۶۷-۱۷۱، ۳۴۷
 ~ بزرگتر از سرعت نور ۱۷۱-۱۷۴، ۱۷۷-۱۷۹
 ~ حرکت ۲۵-۲۶
- اندازه‌گیری ~ ۴۱-۴۳
 ~ خمیده ۲۱-۲۸، ۱۷۳-۱۷۴
 ~ در حل شوارتس شیلد ۲۶۵-۲۶۸
 ~ در ناظر بی حرکت ۳۲، ۷۳، ۲۸۰-۲۸۲

- نسبی ۹۳-۹۲، ۷۳-۶۷ ~
 مبنای ~ برای جرم و تکانه ۱۴۰
 ~ و تابع K ۷۳-۶۹
 ~ و ضریب گاما ۹۳-۹۲
 یکاهای سرعت نور و ~ ۷۰-۶۹
 نور ۱۷۴-۱۷۳، ۲۱-۱۵ ~
 اثرات ~ ۵۳-۵۲، ۱۹-۱۶
 زمان پیمودن ~ ۵۳، ۲۷، ۲۵، ۱۹-۱۶
 ماهیت محدودکننده ~ ۱۷-۱۵،
 ۲۳-۲۲، ۳۱، ۷۸، ۱۲۷-۱۲۸، ۲۵۵،
 ۳۱۲-۳۱۱
 ناوردایی ~ ۱۷۳، ۳۰
 یکای ~ ۲۴۳-۲۴۲، ۶۹، ۲۴، ۲۲، ۲۰
 سطح
 ~ به دام اندازی ۲۷۸
 ~ روشنایی ستاره ۳۰۸-۳۰۷، ۲۰۱
 ~ همگن ۲۸۷-۲۸۶، ۲۰۳، ۱۹۷
 سطوح
 ~ در فاصلهٔ یکای مخصوص برای یک
 رویداد ۱۶۳
 ~ در یکای ویژه زمان در یک رویداد ۱۶۳،
 ۱۷۹، ۱۶۹
 سفینه‌های به هم بسته ۱۱۸-۱۱۵
 سن عالم ۲۹۹، ۲۹۸
 سیاهچاله‌ها ۳۰۸-۳۰۷، ۲۷۸-۲۷۴، ۲۴۵
 شتاب ۲۹
 ~ و گرانش ۲۳۲-۲۲۵
 ~ یکنواخت ۲۰۶-۲۰۵
 شدت تابش ۳۰۸-۳۰۷، ۲۰۱
 شرایط مرزی ویلر ۳۲۲
 شکافت هسته‌ای ۱۳۸
 شواهد اثرات نسبیت خاص ۱۴۲
 ~ انقباض طول ۱۱۵
 ~ برای اتساع زمان ۱۱۴، ۹۴
- ~ در جرم و پابستگی ۱۲۵
 ~ در قانون نیرو ۱۲۷-۱۲۶
 شواهد اثر نظریهٔ نسبیت خاص در ماهیت
 محدودکننده سرعت نور ۱۶-۱۵
 شواهد استاندارد کیهانشناسی
 ~ در تابش کیهانی زمینه ۲۹۷-۲۹۵
 ~ در سن ستاره‌ها ۲۹۸
 ~ در جدایی عالم ۲۹۶
 ~ فراوانی عناصر ۳۰۰
 شواهد نسبیت عام ۲۴۵، ۲۲۰-۲۱۹
 ~ در انتقال به سرخ گرانشی ۲۷۲، ۲۴۷
 ~ در خم شدن نور ۲۷۳-۲۷۲، ۲۴۷
 ~ در متریک شوارتس شیلد منظومهٔ شمسی
 ۲۷۳
 ~ در همگرایی گرانشی ۲۵۲-۲۵۰
 ~ سیاهچاله‌ها ۲۸۲-۲۸۱
 ضرب اسکالر ۳۵۰، ۲۴۲، ۱۹۱
 ضریب K ۳۰۷، ۳۰۱، ۵۹-۵۷
 ~ برعکس ۷۳
 ~ غیر دوجانبه ۲۷۱، ۲۸۰
 ~ و ضریب گاما ۹۱-۸۹
- طول
 اندازه‌گیری ~ ۱۰۳-۱۰۲
 انقباض ~ ۳۶۹، ۱۱۶-۱۱۵، ۱۰۷-۱۰۳
 ~ منحنی ۳۳۰
 طولانیترین مسیر در فضا زمان خمیده ۲۳۵-۲۳۴
 طیف ۶۳-۶۰
- عالم
 ~ از نظر فضای بسته ۳۲۲-۳۱۹، ۲۹۰
 ~ اینستا(ی) ۲۴۵
 ~ اینشتین ۳۱۷، ۲۹۴
 ~ در عالم مینکوفسکی ۱۹۷-۱۹۶

- قاعده زاویه‌های برابر برای همزمانی ۸۲
قانون
- نیرو ۱۲۵-۱۲۷، ۳۴۵، ۳۶۳-۳۶۴
نیروی لورنتس ۳۶۳
قرارداد
- جمع‌زنی ۳۵۴، ۳۵۶-۳۵۷
علامت برای سرعت ۱۵۳، ۷۰
قضیه
- برکهوف ۲۷۴
فیثاغورس ۲۳۹
قوانین
- فیزیک ۲۹، ۲۸۰، ۳۱۰-۳۱۲، ۳۱۵
نیرو و انرژی ۳۴۵، ۳۶۴-۳۶۵
- کارل شوارتس شیلد ۲۷۸
کاستی جرم ۱۳۷
کره ۲۲۲-۲۲۴، ۲۳۸-۲۳۹، ۲۶۰، ۲۶۵،
۲۹۰-۲۹۱، ۳۳۱
کمیت‌های مهم فیزیکی ۳۶۰
کندکار کردن ساعت متحرک ۹۱، ۹۲-۹۱، ۱۸۹
کوتاهترین فاصله ۲۲۱-۲۲۲، ۲۴۶
کهکشان ۵۲، ۶۲، ۲۵۲-۲۵۴، ۲۸۱،
۲۹۱-۲۹۲، ۳۰۱-۳۰۲، ۳۰۴
نامتناهی عالم ۲۸۹
کیهان‌شناسی ۳۲۷
- گرانشی
- انتقال به سرخ ~ ۲۴۷-۲۴۹، ۲۶۹-۲۷۲
به دام‌اندازی نور و ماده ~ ۲۷۸
جرم ~ ۲۰۰
رمبش ~ ۲۷۴، ۲۸۰-۲۸۱
نیروی ~ ۲۲۵-۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱،
۲۷۴-۲۷۵
همگرایی ~ ۲۵۰-۲۵۴، ۳۰۹-۳۱۰
گرانی ۱۵
- لبه مدل عالم ۲۱۸، ۲۸۰، ۲۹۵، ۳۱۰-۳۱۱
لختی
- انرژی ۱۳۴-۱۳۶
جرم ~ ۲۲۵
- ماده تاریک ۳۰۸
ماده و تابش در عالم ۲۹۵-۲۹۶، ۲۹۹-۳۰۱،
۳۰۸-۳۰۷
- ماهیت محدودکننده سرعت نور ۱۵-۱۷،
۱۲۸-۱۲۸
- مبدأ عالم ۲۹۵، ۳۱۱
متعامد ۲۸۷-۲۸۸، ۳۵۰
مختصات ۱۴۵-۱۴۷
- ادینگتون ۲۷۵
تبدیلات عمومی ۳۵۰-۳۵۲
تکینگی ۲۷۴
دکارتی ۱۸۳
زمان ۲۶۹-۲۷۰، ۲۶۷-۲۶۵، ۴۲، ۸
۲۸۶
- سیستم از دید ناظرهای مختلف ۹-۱۲،
۱۴۷-۱۵۲، ۳۳۸-۳۳۹، ۳۵۰
- صفر ۱۹۳-۱۹۴، ۲۷۴-۲۷۹
فضایی ۴۴، ۸
قطبی
- استوانه‌ای ۲۴۴، ۲۵۲
در صفحه ۱۸۵-۱۸۶
کروی ۱۸۷، ۱۹۹، ۲۶۷، ۳۳۱
همراه ۲۱۱، ۲۸۶-۲۸۷
مخروط نور
- آینده ۲۱-۲۳، ۵۲-۵۳
گذشته ۲۳-۲۴، ۵۲-۵۴، ۲۱۹-۲۵۳،
۲۷۴-۲۷۵، ۳۰۴-۳۰۵
- مدل عالم ۱۹۴، ۲۴۳-۲۴۴، ۲۸۵-۲۲۴
فضا-تخت ۱۹۴-۲۲۰

- ~ چارچوب مرجع ۳۰، ۶۱-۶۳
 ~ سرعت نور ۳۰، ۷۸، ۱۵۵-۱۵۷
 فاصله فضا زمان ~ ۱۶۵-۱۹۰، ۱۷۷،
 ۳۵۲
 ~ قوانین فیزیک ۲۹، ۲۲۶
 نسبیت
 جرم مؤثر ~ ۱۲۳
 ~ و طولهای اندازه‌گیری شده ۱۰۳-۱۰۷
 ~ همزمانی ۳۷-۴۰، ۸۱-۸۳، ۹۶-۹۸،
 ۱۱۷
 نظریه
 ~ کوانتومی ۲۸۰-۲۸۱، ۳۱۰-۳۱۱، ۳۱۸
 ~ نسبیت خاص ۲، ۱۵، ۱۱۲
 ~ نسبیت عام ۲، ۲۲۱، ۲۲۶، ۳۲۶
 نقشهٔ راداری ۵۲، ۵۴
 نقض علیتی ۲۵۵-۲۵۸
 نمودار
 ~ علیتی ۳۱۳-۳۱۴
 ~ هم‌مدیس ۳۱۳، ۳۱۸
 نوترینوها ۱۵، ۲۲۹، ۳۰۳، ۳۱۸
 نور
 پرتوهای ~ ۲۰، ۲۴۲-۲۴۳، ۲۴۷-۲۵۴،
 ۲۶۹، ۲۷۴، ۳۰۱-۳۰۲، ۳۰۵
 ~ تابش الکترومغناطیسی
 ~ در ساعت ۳۲
 نیروی(ی) ۱۲۵-۱۲۶، ۳۶۳-۳۶۴
 ~ کشندی ۲۳۶، ۲۸۰
 واپاشی موئون ۱۱۲-۱۱۵
 وحدت اثرات نسبیتی ۱۱۲-۱۱۹، ۱۲۹
 ویژه
 ~ زمان ۴۲، ۱۶۹، ۱۸۹-۱۹۱، ۲۶۶،
 ۲۷۰، ۲۸۶، ۳۴۰
 ~ طول ۱۰۸
 فضای خمیده ~ ۲۸۵-۳۲۴، ۳۸۴
 مسیر زمان‌گونه ۱۸۱، ۲۴۲-۲۴۳
 مشاهدهٔ مشهور گالیله ۲۲۵
 معادله(های)
 ~ حرکت ۱۲۴-۱۲۵، ۳۶۳-۳۶۴
 ~ ماکسول ۳۶۷، ۳۷۵-۳۷۶
 ~ میدان گرانشی ۲۴۵، ۲۸۵-۲۸۶،
 ۲۹۳-۲۹۴، ۲۹۷-۲۹۸، ۳۱۷
 موج در حوض ۱۲-۱۴
 موقعیت بردارها ۳۳۶-۳۳۸
 مؤلفه‌های تانسور متریک ۲۴۱، ۲۴۵، ۳۵۳،
 ۳۶۱
 مه‌بانگ داغ ۲۹۴-۳۰۱، ۳۱۷
 میدان الکترومغناطیسی F_{ab} ۳۶۲-۳۷۰، ۳۸۵
 تبدیلات ~ ۳۶۵-۳۶۹، ۳۷۳-۳۷۶
 میدان
 ~ الکتریکی E ۱۲۵-۱۲۶، ۳۶۲-۳۷۹
 ~ الکتریکی و مغناطیسی ۳۶۲
 ~ گرانشی ۲۲۱، ۲۲۵-۲۲۶، ۲۳۶، ۲۴۷،
 ۲۸۱، ۳۸۷
 تبدیل ~ بر اثر شتاب ۲۲۵-۲۳۲
 ~ ستاره ۲۶۳-۲۷۸
 ~ نامتناهی ۲۸۰
 ~ مغناطیسی B ۳۶۳-۳۷۸
 ~ در حرکت نسبی ۳۶۵-۳۶۶
 میلهٔ صلب ۴۴
 نابودی و آفرینش زوج ۱۳۸
 ناظرها
 ~ اصلی ۱۹۵، ۲۸۶-۲۸۷، ۳۰۱
 ~ لخت ۶۳، ۹۷-۹۸
 ناوردایی ۱۱۹، ۱۵۵-۱۵۹، ۳۴۶-۳۴۷،
 ۳۵۹-۳۶۱، ۳۹۰
 ~ الکترومغناطیسی ۳۷۳-۳۷۵
 ~ تنش-انرژی ۳۸۱

اندازه‌گیری ~ ۹۰-۸۰، ۵۲-۴۸

نسبیت در ~ ۸۵-۸۱، ۴۰-۳۷
۱۵۵-۱۵۴

~ و عکسهای مربوط ۱۹-۱۶
همسانگردی

~ تابش زمینه‌های بسیار کوچک ۲۹۶
۳۱۵-۳۱۴

مدل کیهانشناسی ~ ۲۹۳، ۲۸۷، ۲۸۵
هنگام گذار ۷۴-۷۳

هسته اتم ۱۳۸-۱۳۷

هم‌ارزی

~ جرم گرانشی و لختی ۲۳۲، ۲۲۹-۲۲۵

شتاب ناظر در اصل ~ ۲۲۶

~ ناظرها از دیدگاه اصل نسبیت ۵۶

همجوشی ۱۳۶

~ هسته‌ای ۱۳۶

همزمان کردن ساعتها ۵۰-۴۸

~ و مختصات استاندارد زمان ۵۱

همزمانی و انقباض طول ۱۰۷-۱۰۳