شصتمین سال تأسیس دانشگاه فردوسی مشهد
۱۳۸۸

دانشگاه فردوسی مشهد
انتشارات دانشگاه
شماره ۴۳۸

چاپ سوم

فضاهای متریک
با طعم توپولوژی

ویرایش جدید

تألیف مجید میرزاوزیری / دانشیار گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

Metric Spaces
With A Topological Flavour

Ferdowsi University of Mashhad
Majid Mirzavaziri

کتاب برگزیده سال ۱۳۸۴ خراسان

Ferdowsi University of Mashhad
Publication
No. 438

Metric Spaces
with a topological flavour

By: Majid Mirzavaziri

فضاهای متریک(با طعم توپولوژی) کتابی است که به عنوان اولین درس در زمینه فضاهای متریک می‌تواند مورد مطالعه قرار گیرد. این کتاب در عین حال که با دیدگاهی توپولوژیکی به مبحث فضاهای متریک می‌نگرد، با زبانی ساده به شرح مفاهیم و احکام مورد بحث در اینگونه فضاها می‌پردازد.

از این‌رو کتاب حتی برای دانشجویی که تنها با ریاضیات عمومی آشناست به راحتی قابل درک است و شاید بتوان آن را **مبانی آنالیز** نامید. روش بیان مطالب مطرح شده در کتاب و طرز ارائه مفاهیم و قضایا به گونه‌ای است که دانشجو را با مباحث رودررو می‌سازد و همانند آموزشی شفاهی با دانشجو به سوال و جواب می‌پردازد. این شیوه باعث می‌گردد این کتاب به عنوان منبعی خودآموز مورد استفاده متعلم واقع شود. از طرف دیگر گرچه در برهان‌ها جزیی‌ترین مطالب نیز مورد توجه قرارگرفته است، با این حال هدف اصلی کتاب که در حقیقت ایجاد زمینه مناسب برای آشنایی با توپولوژی است نیز در سراسر کتاب حفظ گردیده است. لذا **فضاهای متریک (با طعم توپولوژی)** را می‌توان از طرفی درسی پیشرفته در فضاهای متریک و از طرفی دیگر درسی مقدماتی در توپولوژی دانست.

مجید میرزاوزیری، نویسنده کتاب، که هم‌اکنون عضو هیات علمی **دانشگاه فردوسی مشهد** است در تالیف کتاب سعی داشته تا با ارائه مثال‌های روشن، چه در خلال درس و چه در بخشی مجزا از هرفصل، و مسائل متنوع در انتقال مفاهیم تخصصی این شاخه از ریاضیات و ایجاد انگیزه در دانشجویان، گامی موثر در راستای آشناسازی علاقه‌مندان با این زمینه محض و در عین حال کاربردی از ریاضیات بردارد.

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فردوسی مشهد

انتشارات، شمارهٔ ۴۳۸

فضاهای متریک

با طعم توپولوژی

(چاپ دوم - با ویرایش جدید)

تألیف:

دکتر مجید میرزاوزیری

دانشیار گروه ریاضی دانشگاه فردوسی

مقدمهٔ ویرایش دوم

ایراداتی در چاپ اول کتاب وجود داشت که همکاران گرامی و دانشجویان محترم آنها را به من گوشزد کردند. در این میان لازم می‌دانم از همکار محترم **سرکار خانم دکتر معصومه فشندی** که با دقت بسیار کتاب را مورد بررسی قرار دادند و نکاتی ارزشمند را خاطر نشان کردند تشکر کنم.

مهم‌ترین ایرادی که همه اصرار بر رفع آن داشتند کوچک بودن حروف بود. در ویرایش حاضر از حروف درشت‌تر و زیباتری استفاده شده است، غلط‌های تایپی درست شده‌اند، صورت چند تمرین تغییر کرده است و حاشیه‌های کنار متن از قسمت عطف به قسمت بیرونی انتقال یافته‌اند.

نظرات اصلاحی خوانندگان محترم بی شک می‌تواند در برطرف کردن ایرادهای باقیمانده مؤثر باشد. لذا منتظر شنیدن نظرات اصلاحی شما از طریق نامه‌ای که به mirzavaziri@math.um.ac.ir یا madjid@mirzavaziri.com ارسال خواهید نمود هستم.

دانشگاه فردوسی مشهد

مجید میرزاوزیری

زمستان ۱۳۸۵

۰

مقدمه

مطالبی که در این کتاب خواهید دید چند سالی است که با تدریس در دانشگاه تجربه شده و سعی گردیده است تا نظرات سازندهٔ دانشجویان در رفع کاستی‌ها اعمال گردد، گرچه هنوز هم با ایده‌آلی که مد نظر است فاصله دارد.

تجربهٔ تدریس نشان می‌دهد که دانشجویان فقط علاقه‌مند به یادگیری مباحث علمیِ صرف نیستند و ترجیح می‌دهند علاوه بر آن، به طریقی ملموس با تاریخ علم مورد بحث نیز آشنا شوند. همچنین اکثر دانشجویان از مطالعهٔ مطالب علمی در قالبی تکراری و یکنواخت گریزان هستند و پشت سر هم آمدن تعاریف و قضایا چندان به نظر ایشان خوش نمی‌آید. از این رو در تألیف کتاب حاضر کوشش شده است تا به این مهم توجه شود.

Euclid of Alexandria (325-265BC)

بحث در مورد فضاهای متریک، به خودی خود آن قدر ظریف و پرکار است که شمه‌ای ز بیانش به صد رساله نیز بر نمی‌آید، مخصوصاً آن که در این کتاب سعی شده است تا علاوه بر این مبحث، گوشه چشمی به توپولوژی نیز داشته باشیم و با طعم این مبحث ریاضی کام

خود را شیرین سازیم. روشن است که با افزودن چاشنی توپولوژی به مبحث اصلی کتاب، قصد ارائه بحثی تخصصی و مفصل را در مورد آن نداریم و تنها به اشاره‌ای مجمل قانع هستیم.

آشنایی با فضاهای متریک نیازمند پیش نیازهایی است و در این کتاب فرض را بر آن گذاشته‌ایم که خواننده با آن‌ها آشنا می‌باشد. اندک اطلاعاتی در زمینهٔ منطق، نظریهٔ مجموعه‌ها و توابع، چیزی است که به طور طبیعی خواننده‌ای که گام در مسیر فضاهای متریک می‌گذارد باید با آن‌ها آشنا باشد. مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ آن قدر معروف هستند که نیازی به معرفی آن‌ها نیست چرا که در این کتاب قصد نداریم به شیوه‌ای نظریه مجموعه‌ای به نمایاندن اعداد و ساختن آن‌ها بپردازیم. اما از آن جایی که ساختن $\mathbb{R}$ از روی $\mathbb{Q}$ به شیوهٔ دنباله‌های کوشی بحثی آنالیزی است حیف دیدیم که در این کتاب از آن سخنی به میان نیاوریم.

به علاوه هرچه بیش‌تر در مورد ساختارهای مختلف $\mathbb{R}$ بدانیم درک ما از مباحث فضاهای متریک آسان‌تر خواهد شد. می‌دانیم که ساختارهای ترتیبی (نسبت کوچک‌تری)، جبری (اعمال جمع و ضرب) و آنالیزی (تابع قدرمطلق) روی $\mathbb{R}$ هر یک به ایجاد جنبه‌های مختلف قدرت $\mathbb{R}$ کمک می‌کنند و فرض را بر این می‌گذاریم که خواننده به خوبی این مطالب را در درس‌های ریاضیات عمومی فراگرفته است. همچنین آشنایی اندکی با فضاهای برداری، نظریهٔ ماتریس‌ها، نظریهٔ اعداد و نظریهٔ گراف در درک بهتر مثال‌ها مفید است. خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، اصل لانهٔ کبوتری، اصل کمال و نکاتی در مورد سوپریمم و اینفیمم نیز آن قدر معروفند که دانستن آن‌ها توسط دانشجویی که در حال گذراندن درسی در فضاهای متریک است بدیهی به نظر می‌رسد. لذا همّ خود را بیش‌تر صرف مباحث

هنگامی که جوانی اولین قضیه را نزد اقلیدس فراگرفت، پرسید: در قبال چیزهایی که یاد می‌گیرم چه عایدم خواهد شد؟ اقلیدس برده‌ای را فراخواند و گفت: سکه‌ای به وی ده! چون او می‌خواهد از چیزی که یاد گرفته است بهره‌ای ببرد.

اصلی خواهیم کرد و توان خود را در بررسی جزئیات متمرکز می‌کنیم.

در این کتاب، مجموعه‌های معمولی را با A، B و ...، مجموعه‌های اندیس گذار را با $\mathbb{I}$ و $\mathbb{J}$، و مجموعه‌های جهتدار را با Λ و Γ نمایش می‌دهیم. همچنین برای نشان دادن انتهای تعاریف از علامت $\clubsuit$، مثال‌ها از $\spadesuit$، برهان‌ها از $\blacksquare$ و تبصره‌ها از $\diamond$ استفاده می‌کنیم. لذا اگر در مطالعهٔ اولیهٔ کتاب چیزی به نظر مشکل آمد می‌توان از ابتدای بحث تا علامت مورد نظر را حذف کرد. نکتهٔ دیگری که لازم به ذکر است این است که در این کتاب کلمه‌های تابع و نگاشت را به مفهومی معادل به کار برده‌ایم و تمایزی بین این دو کلمه قائل نمی‌شویم. فقط اگر در برخی جاها کلمهٔ نگاشت به چشم می‌خورد به دلیل مصطلح بودن آن می‌باشد.

در تهیهٔ کتاب، منابع زیادی استفاده گردیده‌اند که به دو دلیل از ذکر مرجع به صورت موردی در خلال درس اجتناب شده است. اول آن که مشخص کردن مرجع در کتاب‌های درسی متداول نیست و دوم آن که برای برخی مطالب بسیار معروف تعیین منبعی خاص به عنوان مرجع تقریباً غیر ممکن است. با این حال برای حفظ امانت، منابع اصلی (چاپی و الکترونیکی) استفاده شده در انتهای کتاب آمده است.

در حاشیهٔ صفحات کتاب، جملات و عکس‌هایی آمده است که تا حدودی مرتبط با مطلب مورد بحث است. در هر بخش سعی شده نامی از بزرگان ریاضیات در ابتدای بخش‌ها یا در جایی که اصطلاحی منسوب به فردی خاص است بیاید. اما جملاتی که گویندهٔ آن‌ها مشخص نیست در زمرهٔ جملات طنز هستند که با حروفی متفاوت آمده‌اند.

دو نفر نقش اساسی در شکل‌گیری کتاب حاضر داشته‌اند که نه به جهت انجام وظیفه و تعارفات رسمی بلکه به دلیل احساسات قلبی

خود لازم می‌دانم که حتماً در این جا از آن‌ها نام ببرم. همسرم کیمیا نارنجانی و فرزندم کامیار آنچنان در فراهم آوردن محیطی آرام و ایجاد انگیزه در ادامهٔ تألیف مؤثر بودند که بعید می‌دانم بتوانم حتی در چند صحیفه از زحمات به واقع بی چشم‌داشت و آسمانی آن‌ها تشکر کنم چه رسد که در این چند سطر با نگارش ضعیف خود قادر به ابراز قدردانی از ایشان باشم.

دانشجویان زیادی در ارائه ایده‌های نو، غلط گیری از نسخه‌های اولیهٔ کتاب و پیشنهادهای جالب در مورد نکات کتاب مرا مورد لطف خود قرار دادند و بتدریج آن قدر تعداد آن‌ها زیاد شد که مجال نام بردن از همهٔ آن‌ها در این جا نیست.

از آقای وحید عرفانیان به دلیل زحماتی که برای طراحی روی جلد و آماده‌سازی کتاب جهت چاپ متحمل شدند تشکر می‌کنم.

Mohammad Ali Pourabdollah (1945)

به علاوه از ویراستاران محترم علمی و ادبی کتاب که با دقتی مثال زدنی به تصحیح کتاب پرداختند بسیار متشکرم و اگر در جایی نظر آن‌ها اعمال نشده است صرفاً از روی عادت غلطی است که در نگارش پیدا کرده‌ام. مثلاً نوشتن آن گاه به صورت سر هم چیزی است که گرچه برای ما بسیار متداول است، با آئین نگارش ادیبان به صورت آن گاه تفاوت دارد و بعید نیست که در جایی، ناخواسته اشتباهی از این نوع به چشم نیامده باشد، گرچه در به کار بردن این رسم‌الخط درست سعی وافر گردیده است.

Assadollah Niknam (1950)

اما از همه مهم‌تر انگیزه‌ام برای تألیف این کتاب است. بی‌شک هر شاگردی وظیفهٔ خود می‌داند که به نوعی از اساتید خود قدردانی کند و تنها دلیل من برای تألیف این کتاب، اظهار ارادت به دکتر محمد علی پورعبدالله و دکتر اسدالله نیکنام می‌باشد.

وقتی کتاب را می‌نوشتم روزی به همسرم گفتم بی اغراق اکثر

اوقات فکر می‌کنم این دو نفر جملات را در دستم می‌گذارند تا بنویسم و فرزندم پاسخ داد باید هم این گونه باشد چون ایشان همهٔ این مطالب را به تو آموخته‌اند. با خود اندیشیدم برهانی از این محکم‌تر نمی‌توان ارائه داد و به یاد بیتی از لسان‌الغیب افتادم که می‌فرماید: سرِ ارادتِ ما وآستانِ حضرتِ دوست، که هرچه بر سرِ ما می‌رود ارادتِ اوست...

دانشگاه فردوسی مشهد
مجید میرزاوزیری
پاییز ۱۳۸۳

فهرست

۱

فاصله

۱.۱ مقدمه

Maurice Rene Frechet (1878-1973)

شاید بتوان گفت مهم‌ترین گام برای پیشبرد ریاضیات، وحدت بخشیدن و تعمیم دادن مفاهیم شناخته شده در آن است. معمولاً تعاریف بسیار پیچیده در ریاضیات از ایده‌های بسیار آسان نهفته در مفاهیم مقدماتی حاصل شده است. مثلاً با الهام گرفتن از مفهومی مقدماتی مانند جمع اعداد می‌توان به تعریف عمل در یک گروه رسید و بدین ترتیب به مفهومی جدید دست یافت. حتی تحقق یافتن بسیاری از نتایج عمیق و اثبات قضایای پیشرفته نیز در بسیاری از موارد بر اساس تکنیک‌هایی آسان حاصل شده است.

در این میان مفهوم فضاهای متریک و حقایق مربوط به آن الگو برداری بسیار زیبایی را از مفهوم فاصله در فضاهای اقلیدسی به دست می‌دهد. گرچه به طور معمول وقتی کلمهٔ فاصله را می‌شنویم تصوری مبتنی بر هندسه اقلیدسی در ذهن ایجاد می‌شود؛ اما می‌توان با اندکی

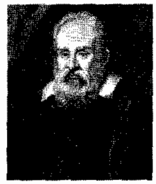
تعمق، خواص اساسی مفهوم فاصله را دریافت؛ مستقل از آن که معیاری برای سنجش دور یا نزدیک بودن نقاط یا اشیا در خط، صفحه یا فضای سه بعدی وجود داشته یا نداشته باشد. به عبارت دیگر گرچه دیدگاهی اقلیدسی نسبت به هندسهٔ فضا، خواص بسیاری از مفهوم فاصله را در ذهن ایجاد می‌کند، با این حال خواص اساسی مفهوم فاصله شاید بیش از سه یا چهار ویژگی نباشد و همهٔ آنچه که ما به عنوان خواص مفهوم فاصله می‌شناسیم از این سه یا چهار مورد قابل نتیجه‌گیری باشد. اجازه دهید ببینیم وقتی که کلمهٔ فاصله را می‌شنویم چه چیزهایی در ذهن ما ایجاد می‌شود. برای آن که دیدگاه خود را از هندسه اقلیدسی کاملاً مستقل نماییم، اجازه دهید تصور کنیم که در سیاره‌ای (فضایی) دیگر هستیم و منظور از متر ابزاری است که برای سنجیدن فاصلهٔ دو شی (که ممکن است هر چیزی باشد) به کار می‌بریم. اگر در این سیاره ابزاری به نام متر به دست ما دهند، برای آن که کمیت اندازه‌گیری شده توسط این متر برای ما قابل درک باشد و بتوانیم کم یا زیاد بودن فاصله را تخمین بزنیم، توقع داریم که این متر، با اعداد حقیقی مدرج شده باشد. این شاید مهم‌ترین ویژگی باشد که در درک درست فاصلهٔ بین اشیاء سیاره‌ای که در آن هستیم موثر است. نکتهٔ بعدی که از اهمیت زیادی برخوردار می‌باشد این است که اگر به عنوان مثال در نقطه‌ای مانند x در سیاره ایستاده باشیم، متر باید فاصلهٔ ما تا خودمان را برابر صفر نشان دهد و به علاوه برای ما مطلوب خواهد بود اگر متر به گونه‌ای باشد که وقتی فاصلهٔ ما تا نقطه‌ای دیگر مانند y را برابر صفر اعلام کرد، بتوانیم با اطمینان کامل بگوییم که هم اکنون در نقطهٔ y هستیم. همچنین روشن است که فاصلهٔ نقطهٔ x تا y باید برابر با فاصلهٔ نقطهٔ y تا x باشد و به عبارت دیگر توقع داریم که مترمان متقارن باشد. اما ویژگی دیگری نیز هست که ما به طور طبیعی

توقع داریم که برقرار باشد، گرچه این ویژگی تا حدود زیادی مبتنی بر نگرش اقلیدسی ما نسبت به مفهوم فاصله می‌باشد. این ویژگی مهم که نتایج عمیق مفهوم فاصله از آن ناشی می‌شود این است که فاصلهٔ نقطه‌ای مانند x تا نقطه‌ای دیگر مانند y باید نسبت به فاصلهٔ x تا هر نقطهٔ دیگری مانند z به اضافهٔ فاصلهٔ z تا y کمتر یا مساوی باشد. این همان چیزی است که ما اغلب آن را نامساوی مثلث یا قضیهٔ حمار می‌نامیم. به عبارت دیگر می‌توان گفت در هر مثلث با رئوس x، y و z بهترین راه برای رسیدن از x به y آن است که روی ضلع xy حرکت کنیم.

این چهار خاصیت ساده اساس تعریف فاصله یا متر می‌باشد و همان گونه که در این فصل خواهیم دید در بسیاری موارد می‌توانیم نتایجی مشابه آنچه در مورد فاصلهٔ معمولی می‌دانیم را از همین چهار خاصیت ساده حاصل کنیم، گرچه در مثال‌های زیادی می‌بینیم که درک اقلیدسی ما کاملاً با آنچه در فضاهای متریک اتفاق می‌افتد متفاوت است.

در این فصل بر آن شده‌ایم تا علاوه بر ذکر تعاریف مقدماتی مربوط به فضاهای متریک و برخی قضایای مهم آن، با ارائه مثال‌های متنوع در انتهای فصل، این مفاهیم را روشن‌تر سازیم. البته در خلال بخش‌ها برای مفاهیم ارائه شده مثال‌هایی می‌آوریم، ولی از آن جا که بررسی مثال‌های بیش‌تر باعث درک بهتر مفاهیم می‌شود بخش مستقلی را به مثال‌ها تخصیص خواهیم داد.

۲.۱ مفاهیم مقدماتی



Galileo Galilei (1564-1642)

آنچه قابل اندازه‌گیری است اندازه بگیرید و اگر چنین نیست آن را اندازه پذیر کنید.

با توجه به توضیحاتی که در مقدمه آمد، تابع قدرمطلق روی فضای اقلیدسی ایدهٔ مناسبی برای تعریف زیر می‌باشد.

۱.۲.۱ تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه باشد. تابع $d : X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک متریک[1] یا متر روی X می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

i. به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $d(x,y) \geq 0$؛

ii. به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $d(x,y) = 0$ فقط و فقط وقتی که $x = y$؛

iii. به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $d(x,y) = d(y,x)$؛

iv. به ازای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (نامساوی مثلث[2]).

در صورتی که d یک متر روی X باشد (X,d) را یک فضای متریک[3] می‌نامیم و می‌گوییم فضای X به متر d مجهز شده است. ♣

۲.۲.۱ مثال. با شناختی که از خواص تابع قدر مطلق روی اعداد حقیقی داریم می‌توانیم بگوییم که $\mathbb{R}$ با متر زیر یک فضای متریک است.

$$d(x,y) = |x-y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

---

[1] metric
[2] triangle inequality
[3] metric space

گاهی اوقات این فضا را به صورت $(\mathbb{R}, |.|)$ نمایش می‌دهیم و آن را فضای اقلیدسی اعداد حقیقی[۴] می‌نامیم. ♠

۳.۲.۱ مثال. روی $\mathbb{R}^n$ متر $d_۲$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\begin{aligned} d_۲(x,y) &= (\sum_{i=۱}^{n} |x_i - y_i|^۲)^{\frac{۱}{۲}}, \\ x &= (x_۱, \ldots, x_n)\ ,\ y = (y_۱, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

بررسی شرایط i، ii و iii در تعریف متر بسیار ساده است. اما برای آن که نامساوی مثلث را اثبات کنیم به ذکر دو نامساوی می‌پردازیم. ♠

۴.۲.۱ لم. فرض کنیم $p, q \in \mathbb{R} < ۰$ و نیز $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$. در این صورت به ازای هر دو عدد حقیقی مثبت مانند u و v داریم

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q},$$

و تساوی دقیقاً هنگامی اتفاق می‌افتد که $u^p = v^q$.

Otto Ludwig Hölder (1859-1937)

برهان. برای v ی ثابت تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(u) = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} - uv$$

در این صورت داریم $f'(u) = u^{p-۱} - v$ پس $f'(u) = ۰$ نتیجه می‌دهد که $v = u^{p-۱}$. اما داریم $\frac{p+q}{pq} = \frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$. پس $q + p = pq$ و لذا $q(p-۱) = p$ و در نتیجه $p - ۱ = \frac{p}{q}$. از این جا نتیجه می‌شود که اولاً $p - ۱ > ۰$ چون p و q مثبت هستند و ثانیاً داریم

$$u^{\frac{p}{q}} = u^{p-۱} = v$$

[۴] Euclidean space of real numbers

پس $u^p = v^q$ نقطهٔ اکسترمم تابع f را به دست خواهد داد و چون $f''(u) = (p-۱)u^{p-۲} > ۰$، لذا از این طریق نقطهٔ مینیمم حاصل می‌شود که برابر است با

$$\frac{u^p}{p} + \frac{u^p}{q} - u \cdot u^{p-۱} = u^p(\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q}) - u^p = u^p - u^p = ۰$$

بنابر این همواره $f(u) \geq ۰$ و تساوی دقیقاً هنگامی اتفاق می‌افتد که $u^p = v^p$. ■

۵.۲.۱ قضیه (نامساوی هولدر[۵]). فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}^n$ که $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ و $y = (y_۱, \ldots, y_n)$. همچنین فرض کنیم $۰ < p, q \in \mathbb{R}$ و نیز $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$. در این صورت

$$\sum_{i=۱}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{۱}{p}} \left(\sum_{i=۱}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{۱}{q}}$$

برهان. فرض کنیم $a = (\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^p)^{\frac{۱}{p}}$ و $b = (\sum_{i=۱}^{n} |y_i|^q)^{\frac{۱}{q}}$. حال اگر داشته باشیم $u_i = \frac{|x_i|}{a}$ و $v_i = \frac{|y_i|}{b}$، آن گاه بنابر لم فوق داریم

$$\begin{aligned} \sum_{i=۱}^{n} |(\frac{x_i}{a})(\frac{y_i}{b})| &= \sum_{i=۱}^{n} u_i v_i \leq \sum_{i=۱}^{n} (\frac{u_i^p}{p} + \frac{v_i^q}{q}) \\ &= \frac{۱}{p} \sum_{i=۱}^{n} \frac{|x_i|^p}{a^p} + \frac{۱}{q} \sum_{i=۱}^{n} \frac{|y_i|^q}{b^q} \\ &= \frac{۱}{pa^p} \sum_{i=۱}^{n} |x_i|^p + \frac{۱}{qb^q} \sum_{i=۱}^{n} |y_i|^q \\ &= (\frac{۱}{pa^p})a^p + (\frac{۱}{qb^q})b^q = \frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱. \end{aligned}$$

بنابر این

$$\sum_{i=۱}^{n} |x_i y_i| \leq ab = \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{۱}{p}} \left(\sum_{i=۱}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{۱}{q}}. \blacksquare$$

---

[۵] Hölder inequality

حالت خاص این نامساوی برای $p = q = ۲$، نامساوی کوشی-شوارتز[٦] نامیده می‌شود.

Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)

۶.۲.۱ قضیه (نامساوی مینکوفسکی[٧]). فرض کنیم $x = (x_{۱}, \ldots, x_n)$ و $y = (y_{۱}, \ldots, y_n)$ نقاطی در $\mathbb{R}^n$ باشند و $۱ \leq p \in \mathbb{R}$. در این صورت

$$\left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{۱}{p}} \leq \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{۱}{p}} + \left(\sum_{i=۱}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{۱}{p}}$$

برهان. برای $p = ۱$ حکم واضح است، اما برای $p > ۱$ با توجه به نتیجهٔ فوق اگر q عددی باشد که $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$ آن گاه داریم

Hermann Minkowski (1864-1909)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=۱}^{n} |x_i + y_i|^p &= \sum_{i=۱}^{n} |x_i + y_i||x_i + y_i|^{p-۱} \\
&\leq \sum_{i=۱}^{n} (|x_i| + |y_i|)|x_i + y_i|^{p-۱} \\
&= \sum_{i=۱}^{n} |x_i||x_i + y_i|^{p-۱} + \sum_{i=۱}^{n} |y_i||x_i + y_i|^{p-۱} \\
&\leq \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{۱}{p}} \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i + y_i|^{(p-۱)q}\right)^{\frac{۱}{q}} \\
&\quad + \left(\sum_{i=۱}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{۱}{p}} \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i + y_i|^{(p-۱)q}\right)^{\frac{۱}{q}} \\
&= \left(\left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{۱}{p}} + \left(\sum_{i=۱}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{۱}{p}}\right) \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{۱}{q}}.
\end{aligned}$$

---

[٦] Cauchy-Schwarz inequality

[٧] Minkowski inequality

حال اگر $(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p)^{\frac{1}{q}}$ صفر نباشد، آن گاه با تقسیم طرفین نامساوی به دست آمده بر

$$(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p)^{\frac{1}{q}}$$

داریم

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

اما $\frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}$ و لذا حکم برقرار است. همچنین اگر $(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p)^{\frac{1}{q}}$ صفر باشد، آن گاه حکم به وضوح برقرار است. ■

این دو نامساوی نشان می‌دهد که می‌توانیم مثال ۳.۲.۱ را به صورت زیر تعمیم دهیم.

۷.۲.۱ مثال. روی $\mathbb{R}^n$ متر d_p را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} d_p(x,y) &= \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \\ x &= (x_1,\dots,x_n),\ y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

که $1\leq p\in\mathbb{R}$. در این صورت $(\mathbb{R},d_p)$ یک فضای متریک می‌باشد.

اجازه دهید به بررسی **نامساوی مثلث** بپردازیم.

فرض کنیم $x,y,z\in\mathbb{R}^n$ که $z=(z_1,\dots,z_n)$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} d_p(x,y) &= \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i+z_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= d_p(x,z)+d_p(z,y). \spadesuit \end{aligned}$$

در حقیقت اثبات نامساوی مثلث در مثال ۳.۲.۱ یک سطر است ... البته اگر به اندازهٔ کافی از سمت راست شروع کنیم!

شرط $p \geq ۱$ در مثال فوق ضروری است مگر در حالت $n = ۱$. این مطلب را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

مثال فوق در حقیقت بی‌نهایت متر مختلف روی $\mathbb{R}^n$ به دست می‌دهد که فقط حالت $p = ۲$ همان متر اقلیدسی است. اما مثال‌های فضاهای متریک فقط محدود به این نیست. در حقیقت شاید این تصور ایجاد شود که مفهوم فاصله را تنها می‌توان برای نقاطی که در فضای یک، دو یا حتی n بعدی قراردارند تعریف کرد. مثال بعدی ما نشان می‌دهد که این تصور درسف نیست. نکتهٔ جالب این است که برای هر مجموعهٔ دلخواهی که اعضای آن ممکن است به هر شکل باشند می‌توان متر تعریف کرد.

۸.۲.۱ مثال. فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه باشد. تابع $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$d(x, y) = \begin{cases} ۱ & x \neq y \\ ۰ & x = y \end{cases}$$

واضح است که شرایط اول، دوم و سوم تعریف متر برقرار است. همچنین اگر $x, y, z \in X$ اعضای دلخواهی باشند، آن گاه تنها در صورتی ممکن است نامساوی مثلث دچار مشکل شود که داشته باشیم $d(x, y) = ۱$ اما $d(x, z) + d(z, y) = ۰$، که این یعنی $x \neq y$ ولی $x = z = y$ که تناقض است. ♠

این متر را متر گسسته[۸] یا متر بدیهی روی X و فضای (X, d) را فضای متریک گسسته[۹] می‌نامیم. بعداً خواهیم دید که فضای گسسته (X, d) مثال نقض بسیار خوبی برای برخی از حدس‌های کلی است که

یک تراژدی ریاضی، انهدام حدسی زیبا توسط... حقیقتی نازیباست!

[۸] discrete metric
[۹] discrete metric space

مشابه با فضاهای اقلیدسی توقع داریم در فضاهای متریک نیز برقرار باشد.

مثال فوق نیز دستهٔ وسیعی از فضاهای متریک را به دست می‌دهد که حائز اهمیت است.

لازم به ذکر است که متر تعریف شده روی $\mathbb{R}^n$ یعنی d_p را به همان شکل می‌توان روی $\mathbb{C}^n$ نیز تعریف کرد و لذا تاکنون به اندازهٔ کافی مثال در مورد فضاهای متریک داریم. اما بد نیست چند نامثال نیز ارائه دهیم، به عبارت دیگر نمونه‌هایی از تعریف تابع d را بررسی می‌کنیم که متر نباشد.

۹.۲.۱ مثال. روی $\mathbb{R}$ تابع d را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d(x,y) = x - y \qquad\qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

روشن است که شرط اول متر به وضوح برقرار نمی‌باشد. ♠

۱۰.۲.۱ مثال. روی $\mathbb{R}$ تابع d را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d(x,y) = |x - ۲y| \qquad\qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

واضح است که از $d(x,y) = ۰$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $x = y$. ♠

۱۱.۲.۱ مثال. روی $\mathbb{R}$ تابع d را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d(x,y) = |x^۲ - y^۲| \qquad\qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

اجازه دهید ببینیم کدام شرایط برقرار است. داریم

$$\begin{aligned}
&d(x,y) = |x^۲ - y^۲| \geq ۰;\\
&x = y \Longrightarrow d(x,y) = |x^۲ - y^۲| = |x^۲ - x^۲| = ۰;\\
&d(x,y) = |x^۲ - y^۲| = |y^۲ - x^۲| = d(y,x);\\
&d(x,y) = |x^۲ - y^۲| = |x^۲ - z^۲ + z^۲ - y^۲|\\
&\qquad\qquad \leq |x^۲ - z^۲| + |z^۲ - y^۲| = d(x,z) + d(z,y).
\end{aligned}$$

تنها شرطی که برقرار نیست این است که از $d(x,y)=0$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $x=y$. ♠

شاید بتوان این مشکل را به نوعی برطرف کرد. تعریف زیر را ببینید.

۱۲.۲.۱ تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه باشد. تابع $d: X\times X\to\mathbb{R}$ را یک شبه متریک[۱۰] یا شبه متر روی X می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

i. به ازای هر $x,y\in X$ داشته باشیم $d(x,y)\geq 0$؛

ii. به ازای هر $x\in X$ داشته باشیم $d(x,x)=0$؛

iii. به ازای هر $x,y\in X$ داشته باشیم $d(x,y)=d(y,x)$؛

iv. به ازای هر $x,y,z\in X$ داشته باشیم $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ (نامساوی مثلث).

در صورتی که d یک شبه متر روی X باشد، گوییم (X,d) یک فضای شبه متریک[۱۱] است. ♣

در حقیقت مثال فوق یک شبه متر روی $\mathbb{R}$ می‌باشد. قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که توسط هر شبه متر روی X می‌توان یک متر تعریف کرد.

۱۳.۲.۱ لم. فرض کنیم (X,d) یک فضای شبه متریک باشد. نسبت $\sim$ را روی X به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x\sim y \Longleftrightarrow d(x,y)=0,\qquad x,y\in X.$$

---

[۱۰] pseudometric

[۱۱] pseudometric space

در این صورت $\sim$ یک نسبت هم‌ارزی روی X است.

برهان. با توجه به شرط ii در تعریف شبه متر داریم $d(x,x) = 0$ و لذا $x \sim x$، پس $\sim$ بازتابی است. همچنین با توجه به شرط iii اگر $x \sim y$ آن گاه $d(x,y) = 0$ و در نتیجه $d(y,x) = 0$ و لذا $y \sim x$، پس $\sim$ متقارن است. به علاوه اگر $x \sim y$ و $y \sim z$ آن گاه $d(x,y) = 0$ و $d(y,z) = 0$. پس $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = 0$ که نتیجه می‌دهد $x \sim z$. لذا $\sim$ متعدی است. ∎

مجموعهٔ همهٔ رده‌های هم ارزی روی X تحت نسبت هم‌ارزی $\sim$ را با $\hat{X} = X_{/\sim}$ نمایش می‌دهیم.

۱۴.۲.۱ قضیه. فرض کنیم (X,d) یک فضای شبه متریک باشد. روی $\hat{X}$ تابع $\hat{d}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\hat{d}([x],[y]) = d(x,y) \qquad [x],[y] \in \hat{X}.$$

در این صورت $(\hat{X},\hat{d})$ یک فضای متریک است.

برهان. اولاً $\hat{d}$ خوشتعریف است، زیرا اگر $[x],[y],[z],[w] \in \hat{X}$ و

$$([x],[y]) = ([z],[w])$$

آن گاه $[x] = [z]$ و $[y] = [w]$ و یا $x \sim z$ و $y \sim w$. بنابر این

$$\begin{aligned}
\hat{d}([x],[y]) = d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y) \\
&= 0 + d(z,y) \\
&= d(z,y) \\
&\leq d(z,w) + d(w,y) \\
&= d(z,w) + 0 \\
&= d(z,w) = \hat{d}([z],[w]).
\end{aligned}$$

به همین ترتیب $\hat{d}([z],[w]) \leq \hat{d}([x],[y])$. ثانیاً واضح است که $\hat{d}([x],[y]) \geq ۰$ و $\hat{d}([x],[x]) = ۰$ و اگر $\hat{d}([x],[y]) = ۰$ آن گاه $d(x,y) = ۰$ پس $x \sim y$ و لذا $[x]=[y]$.

ثالثاً فرض کنیم $[x],[y],[z] \in \hat{X}$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\hat{d}([x],[y]) = d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y)\\ &= \hat{d}([x],[z]) + \hat{d}([z],[y]).\end{aligned}$$

بنابر این $(\hat{X},\hat{d})$ یک فضای متریک است. ■

۱۵.۲.۱ مثال. به مثال قبلی باز می‌گردیم. نسبت هم‌ارزی $\sim$ را روی $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x \sim y \Longleftrightarrow |x^۲ - y^۲| = ۰ \Longleftrightarrow x = \pm y.$$

بنابر این

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{R}} &= \{[x] \mid x \in \mathbb{R}\}\\ &= \{\{x,-x\} \mid x \in \mathbb{R}\},\end{aligned}$$

و لذا می‌توان $\hat{d}$ را روی $\hat{\mathbb{R}}$ به صورت زیر تعریف کرد.

$$\hat{d}([x],[y]) = d(x,y) = |x^۲ - y^۲|. \spadesuit$$

اگر به اساس تعریف مترهای اقلیدسی توجه کنیم می‌بینیم که همگی آن‌ها از تعریف تابعی شبیه تابع قدر مطلق نتیجه شده است. این شیوه تنها مخصوص فضاهایی است که در آن‌ها عمل جمع و ضرب اسکالر تعریف شده باشد، یعنی فضاهای برداری. به تعریف بعد توجه کنید.

۱۶.۲.۱ تعریف. فرض کنیم X فضایی برداری باشد. تابع $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک نرم[۱۲] روی X می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

i. به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $\|x\| \geq \circ$؛

ii. به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $\|x\| = \circ \Longleftrightarrow x = \circ$؛

iii. به ازای هر $x \in X$ و هر اسکالر α داشته باشیم $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|$؛

iv. به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلث).

در صورتی که $\|\cdot\|$ یک نرم روی X باشد می‌گوییم $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نرمدار[۱۳] است. ♣

۱۷.۲.۱ قضیه. فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نرمدار باشد. تابع d را روی X به صورت

$$d(x, y) = \|x - y\|, \qquad x, y \in X$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت (X, d) یک فضای متریک می‌باشد.

برهان. واضح است که d خوشتعریف است و به ازای هر $x, y \in X$ داریم

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x - y\| \geq \circ; \\ d(x,y) &= \circ \Longleftrightarrow \|x - y\| = \circ \Longleftrightarrow x - y = \circ \Longleftrightarrow x = y; \\ d(x,y) &= \|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-۱|\, \|y - x\| = d(y, x); \end{aligned}$$

---
[۱۲] norm
[۱۳] normed space

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \\ &\leq \|x-z\| + \|z-y\| \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

پس (X,d) یک فضای متریک است. ■

اکنون آماده‌ایم تا به بررسی گونه‌های مختلف نقاط و زیرمجموعه‌های یک فضای متریک بپردازیم.

اولین کشفیات هندسی کودک، توپولوژیکی هستند. اگر از او بخواهید مربع یا مثلثی برای شما بکشد، دایره‌ای بسته رسم خواهد کرد.
Jean Piaget (1896-1980)

۱۸.۲.۱ تعریف. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد. برای $x \in X$ و $\mathbb{R} \ni r > 0$، گوی باز[۱۴] یا همسایگی باز[۱۵] به‌مرکز[۱۶] x وشعاع[۱۷] r، که با نماد $N_r(x)$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$N_r(x) = \{y \mid y \in X\ ,\ d(x,y) < r\}.$$

همچنین گوی بسته[۱۸] یا همسایگی بسته[۱۹] به مرکز x و شعاع r با نماد $N_r[x]$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$N_r[x] = \{y \mid y \in X\ ,\ d(x,y) \leq r\}. \clubsuit$$

گرچه کلمهٔ گوی و حتی ظاهر تعریف فوق شکلی شبیه دایره را در ذهن القا می‌کند اما مثال‌های زیر نشان می‌دهد که گوی‌ها در فضاهای متریک می‌توانند هر شکلی داشته باشند.

---

[۱۴] open ball
[۱۵] open neighborhood
[۱۶] center
[۱۷] radius
[۱۸] closed ball
[۱۹] closed neighborhood

۱۹.۲.۱ مثال. روی $\mathbb{R}^2$ متر d_2 را که به صورت زیر تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} d_2(P,Q) &= \sqrt{|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2}, \\ P &= (x_1,y_1),\ Q=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

در این صورت

$$\begin{aligned} N_1(0,0) &= \{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2}<1\} \\ &= \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\} \end{aligned}$$

که داخل دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع یک می‌باشد. ♠

۲۰.۲.۱ مثال. روی $\mathbb{R}^2$ متر d_1 که به صورت زیر تعریف می‌شود را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} d_1(P,Q) &= |x_1-x_2|+|y_1-y_2|, \\ P &= (x_1,y_1),\ Q=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

در این صورت

$$N_1(0,0)=\{(x,y) \mid |x|+|y|<1\}$$

که داخل لوزی با رئوس $(1,0)$، $(0,1)$، $(-1,0)$ و $(0,-1)$ است. ♠

۲۱.۲.۱ مثال. روی $\mathbb{R}^2$ متر d_M را که به صورت زیر تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} d_M(P,Q) &= \max\{|x_1-x_2|\ ,\ |y_1-y_2|\}, \\ P &= (x_1,y_1),\ Q=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

در این صورت

$$N_{۱}(\circ,\circ)=\{(x,y) \mid \max\{|x|\,,\ |y|\}<۱\}$$

که داخل مربع با رئوس $(۱,۱)$، $(-۱,۱)$، $(-۱,-۱)$ و $(۱,-۱)$ می‌باشد. ♠

۲۲.۲.۱ مثال. روی $\mathbb{R}^{۲}$ متر گسسته d را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$\begin{aligned} N_{۱}(\circ,\circ) &= \{(x,y) \mid d((x,y),(\circ,\circ))<۱\} \\ &= \{(x,y) \mid d((x,y),(\circ,\circ))=\circ\} \\ &= \{(x,y) \mid (x,y)=(\circ,\circ)\}=\{(\circ,\circ)\} \end{aligned}$$

که فقط یک نقطه می‌باشد. ♠

۲۳.۲.۱ تعریف. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $A\subseteq X$. نقطهٔ $x\in A$ را یک نقطهٔ درونی[۲۰] برای A نامیم هرگاه عددی مانند $r_{\circ}>\circ$ موجود باشد به قسمی که $N_{r_{\circ}}(x)\subseteq A$. مجموعهٔ نقاط درونی A را درون[۲۱] A نامیده و با A° یا $\operatorname{int}(A)$ نمایش می‌دهیم. ♣

۲۴.۲.۱ مثال. روی $\mathbb{R}$ متر اقلیدسی را در نظر می‌گیریم. در این صورت نقطهٔ $x=\frac{۱}{۲}$ برای بازهٔ $A=(\circ,۱)$ یک نقطهٔ درونی است زیرا

$$N_{\frac{۱}{۴}}(\frac{۱}{۲})=\{x \mid |x-\frac{۱}{۲}|<\frac{۱}{۴}\}=(\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۴})\subseteq A. \spadesuit$$

---

[۲۰] interior point
[۲۱] interior

۲۵.۲.۱ مثال. روی $\mathbb{R}$ متر اقلیدسی را در نظر می‌گیریم. در این صورت نقطهٔ $x = ۱$ برای بازهٔ $A = [۰, ۱]$ نقطهٔ درونی نیست زیرا اگر $r > ۰$ عددی دلخواه باشد، آن گاه

$$N_r(۱) = \{x \mid |x - ۱| < r\} = (۱ - r, ۱ + r) \not\subseteq [۰, ۱]. \spadesuit$$

۲۶.۲.۱ مثال. روی $\mathbb{R}$ متر گسسته d را در نظر می‌گیریم. در این صورت نقطهٔ $x = ۱$ برای بازهٔ $A = [۰, ۱]$ یک نقطهٔ درونی است، زیرا

$$\begin{aligned} N_{\frac{۱}{۲}}(۱) = \{x \mid d(x, ۱) < \frac{۱}{۲}\} &= \{x \mid d(x, ۱) = ۰\} \\ &= \{x \mid x = ۱\} = \{۱\} \subseteq [۰, ۱]. \spadesuit \end{aligned}$$

بنابراین درونی بودن یک نقطه برای یک مجموعه به متر فضا بستگی دارد.

۲۷.۲.۱ تعریف. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد و $A \subseteq X$. مجموعهٔ A را یک مجموعهٔ باز[۲۲] نامیم هرگاه $A \subseteq A^\circ$. $\clubsuit$

روشن است که همواره $A^\circ \subseteq A$ و لذا A باز است فقط و فقط وقتی که $A = A^\circ$.

۲۸.۲.۱ مثال. در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی بازهٔ $A = [۰, ۱]$ باز نیست، زیرا مثلاً $۱ \in A$ ولی ۱ نقطهٔ درونی برای A نیست. $\spadesuit$

۲۹.۲.۱ مثال. در $\mathbb{R}$ با متر گسسته بازهٔ $A = [۰, ۱]$ باز است، زیرا اگر $x \in A$ نقطهٔ دلخواهی باشد، آن گاه با فرض $r_۰ = \frac{۱}{۲}$ داریم $N_{\frac{۱}{۲}}(x) = \{x\} \subseteq A$. $\spadesuit$

---

[۲۲] open set

مثال‌های فوق نشان می‌دهد که مفهوم نقطهٔ درونی و باز بودن یک مجموعه، کاملاً به متر تعریف شده روی فضا وابسته است و ممکن است با تغییر متر فضا، نقطه‌ای که با متر نخست درونی بود دیگر با متر جدید درونی نباشد. این مطلب در مورد گونه‌های دیگر نقاط و زیرمجموعه‌های فضاهای متریک که بعداً تعریف خواهیم کرد نیز صادق است.

۳۰.۲.۱ قضیه. در هر فضای متریک هر گوی باز مجموعه‌ای باز است.

برهان. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $x \in X$ و $r \in \mathbb{R}$ دلخواه باشند. نشان می‌دهیم هر نقطهٔ $N_r(x)$ مانند y نقطه‌ای درونی برای $N_r(x)$ است. قرار می‌دهیم

$$r_\circ = \frac{۱}{۲}(r - d(x,y))$$

توجه داریم که چون $y \in N_r(x)$ پس $d(x,y) < r$ و لذا $r_\circ$ ارائه شده در بالا عددی مثبت است. ادعا می‌کنیم $N_{r_\circ}(y) \subseteq N_r(x)$. فرض کنیم $z \in N_{r_\circ}(y)$. لذا

$$\begin{aligned} d(z,x) &\leq d(z,y) + d(y,x) \\ &< r - d(x,y) + d(x,y) = r. \end{aligned}$$

پس $z \in N_r(x)$. این مطلب نشان می‌دهد که y نقطهٔ درونی $N_r(x)$ است و چون y دلخواه بود پس $N_r(x) \subseteq N_r(x)^\circ$ و لذا $N_r(x)$ باز است. ■

قضیهٔ زیر نیز به سادگی قابل اثبات است.

۳۱.۲.۱ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد. در این صورت ϕ و X مجموعه‌هایی باز هستند. ■

حال که اثبات شد همسایگی‌های باز، مجموعه‌هایی بازهستند بد نیست به خاصیت هاسدورفی[۲۳] فضاهای متریک نیز اشاره‌ای داشته باشیم.

Felix Hausdorff (1868-1942)

۳۲.۲.۱ قضیه. هر فضای متریک هاسدورف است. به این معنی که اگر (X,d) فضایی متریک باشد و $x,y \in X$ که $x \neq y$، آن گاه دو مجموعهٔ باز مجزا موجودند که x در یکی و y در دیگری قرار دارد.

برهان. چون $x \neq y$ پس $d(x,y) \neq ۰$. فرض کنیم $r_۰ = \frac{d(x,y)}{۳} > ۰$. در این صورت داریم

$$x \in N_{r_۰}(x) \quad , \quad y \in N_{r_۰}(y) \quad , \quad N_{r_۰}(x) \cap N_{r_۰}(y) = \phi.$$

زیرا اگر به برهان خلف z ی موجود باشد که $z \in N_{r_۰}(x) \cap N_{r_۰}(y)$ آن گاه داریم

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < r_۰ + r_۰ < ۳r_۰ = d(x,y).$$

این تناقض نشان می‌دهد که فرض خلف باطل و لذا حکم محقق است. ■

قضیهٔ زیر برهانی بسیار ساده دارد.

۳۳.۲.۱ قضیه. در هر فضای گسسته مانند (X,d) هر مجموعه‌ای باز است.

برهان. فرض کنیم $A \subseteq X$. نشان می‌دهیم هر $x \in A$ درونی است. برای این منظور داریم

$$\begin{aligned} N_{\frac{۱}{۲}}(x) &= \{y \mid d(x,y) < \frac{۱}{۲}\} \\ &= \{y \mid d(x,y) = ۰\} = \{y \mid y = x\} = \{x\} \subseteq A. \end{aligned}$$

[۲۳] Hausdorff property

و لذا حکم برقرار است. ■

۳۴.۲.۱ تعریف. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد و $A \subseteq X$. نقطهٔ $x \in X$ را یک نقطهٔ چسبیدگی[۲۴] برای A نامیم هرگاه به ازای هر $r > ۰$ داشته باشیم $N_r(x) \cap A \neq \phi$. مجموعه نقاط چسبیدگی A را بستار[۲۵] A نامیده و با $\overline{A}$ یا $\mathrm{cl}(A)$ نمایش می‌دهیم. ♣

توجه کنید که نقطهٔ چسبیدگی یک مجموعه ممکن است متعلق به مجموعه نباشد اما هر نقطه از A یک نقطهٔ چسبیدگی برای A است. زیرا اگر $x \in A$ آن گاه $x \in N_r(x) \cap A$ و لذا $N_r(x) \cap A$ مخالف تهی خواهد بود.

۳۵.۲.۱ مثال. در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی $x = ۱$ نقطهٔ چسبیدگی برای بازهٔ $A = (۰, ۱)$ است. زیرا فرض کنیم $r > ۰$ دلخواه باشد. در این صورت

$$N_r(۱) \cap A = (۱ - r, ۱ + r) \cap (۰, ۱) \neq \phi. \spadesuit$$

اما برای همین مجموعه و همین نقطه، تحت متر گسسته وضعیت متفاوت است.

۳۶.۲.۱ مثال. در $\mathbb{R}$ با متر گسسته نقطهٔ $x = ۱$ نقطهٔ چسبیدگی برای بازهٔ $A = (۰, ۱)$ نیست. زیرا مثلاً برای $r_۰ = \frac{۱}{۲} > ۰$ داریم

$$N_{r_۰}(۱) \cap A = \{۱\} \cap (۰, ۱) = \phi. \spadesuit$$

و لذا چسبیده بودن یک نقطه به یک مجموعه به متر فضا بستگی دارد.

---

[۲۴] cluster point
[۲۵] closure

۳۷.۲.۱ تعریف. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $A\subseteq X$. مجموعهٔ A را یک مجموعهٔ بسته[۲۶] نامیم هرگاه $\overline{A}\subseteq A$. ♣

واضح است که همواره $A\subseteq\overline{A}$ و لذا A بسته است فقط و فقط وقتی که $\overline{A}=A$.

۳۸.۲.۱ مثال. در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی بازهٔ $A=[۰,۱]$ بسته است، زیرا اگر $x\notin A$ آن گاه دو حالت اتفاق می‌افتد.

حالت اول: $۱<x$. در این صورت قرار می‌دهیم $r_۰=\frac{x-۱}{۲}>۰$. بنابر این

$$N_{r_۰}(x)\cap A=(x-r_۰,x+r_۰)\cap[۰,۱]=\phi$$

چون $x-r_۰=\frac{x+۱}{۲}>۱$.

حالت دوم: $x<۰$. در این صورت قرار می‌دهیم $r_۰=\frac{-x}{۲}>۰$. بنابر این

$$N_{r_۰}(x)\cap A=(x-r_۰,x+r_۰)\cap[۰,۱]=\phi$$

چون $x+r_۰=\frac{x}{۲}<۰$. لذا در هر حالت $x\notin\overline{A}$. پس $\overline{A}\subseteq A$ و لذا A بسته است. ♠

۳۹.۲.۱ مثال. در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی بازهٔ $A=(۰,۱)$ بسته نیست، زیرا مثلاً $۱\in\overline{A}$ ولی $۱\notin A$. ♠

۴۰.۲.۱ قضیه. در هر فضای متریک هر گوی بسته مجموعه‌ای بسته است.

برهان. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد، $x\in X$ و $r\in\mathbb{R}$ دلخواه. نشان‌می‌دهیم اگر $y\notin N_r[x]$ آن گاه y نقطهٔ چسبیدگی

---
[۲۶] closed set

برای $N_r[x]$ نیست. فرض کنیم $y \notin N_r[x]$. قرار می‌دهیم

$$r_\circ = \frac{1}{2}(d(x,y) - r)$$

توجه داریم که چون $y \notin N_r[x]$ پس $d(x,y) > r$ و لذا $r_\circ > \circ$. ادعا می‌کنیم

$$N_{r_\circ}(y) \cap N_r[x] = \phi$$

زیرا اگر به برهان خلف $z \in N_{r_\circ}(y) \cap N_r[x]$ آن گاه $d(z,y) < r_\circ$ و $d(z,x) \leq r$. اما

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y) \\ &< r + r_\circ \\ &< r + d(x,y) - r = d(x,y), \end{aligned}$$

و این تناقض است. پس $\overline{N_r[x]} \subseteq N_r[x]$ و لذا $N_r[x]$ بسته است. ■

قضیهٔ زیر نیز به سادگی قابل اثبات است.

۴۱.۲.۱ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد. در این صورت ϕ و X مجموعه‌هایی بسته هستند. ■

۴۲.۲.۱ قضیه. در هر فضای گسسته مانند (X,d) هر مجموعه‌ای بسته است.

برهان. فرض کنیم $A \subseteq X$. اگر $x \notin A$ آن گاه با فرض $r_\circ = \frac{1}{2} > \circ$ داریم

$$N_{r_\circ}(x) \cap A = \{x\} \cap A = \phi,$$

پس $x \notin \overline{A}$. لذا $\overline{A} \subseteq A$ و در نتیجه A بسته است. ■

ممکن است بسته بودن گوی‌های بسته در فضاهای متریک و دیدگاه اقلیدسی ما این تصور را ایجاد کند که بستار یک گوی باز، گوی بسته با همان شعاع است. معمولاً فضای گسسته مثال نقض خوبی برای نشان دادن نادرستی حدس‌های کلی است.

ریاضیدان اولی: برهان تو اشتباه است. من برای آن مثال نقض دارم.
دومی: اشکالی ندارد. من دو برهان دارم!

۴۳.۲.۱ مثال. فضای گسسته (X,d) را در نظر می‌گیریم. در این فضا داریم

$$N_r(x)=\begin{cases}\{x\} & r\leq ۱\\ X & r>۱\end{cases}\qquad N_r[x]=\begin{cases}\{x\} & r<۱\\ X & r\geq ۱\end{cases}$$

همچنین می‌دانیم که در این فضا هر مجموعه‌ای هم باز و هم بسته است. بنابر این

$$\overline{N_۱(x)}=N_۱(x)=\{x\},\qquad\qquad N_۱[x]=X.$$

و لذا اگر این فضا حداقل دو نقطه داشته باشد آن گاه $\overline{N_۱(x)}\neq N_۱[x]$. ♠

ذکر این نکته ضروری است که مفاهیم باز و بسته بودن نقیض یکدیگر نمی‌باشند. به عبارت دیگر ممکن است مجموعه‌ای نه باز باشد و نه بسته یا هم باز باشد و هم بسته. در هر صورت بسته بودن باز نبودن را نتیجه نخواهد داد و بالعکس.

۴۴.۲.۱ تعریف. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $A\subseteq X$. نقطهٔ $x\in X$ را یک نقطهٔ حدی[۲۷] یا نقطهٔ انباشتگی[۲۸] برای A نامیم هرگاه به ازای هر $r>۰$ داشته باشیم

$$(N_r(x)\setminus\{x\})\cap A\neq\phi$$

[۲۷] limit point
[۲۸] accmulation point

یا به طور معادل

$$N_r(x) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi.$$

مجموعهٔ نقاط حدی A را مجموعهٔ مشتق[۲۹] A نامیده و با A' نمایش می‌دهیم. ♣

۴۵.۲.۱ مثال. در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی مجموعهٔ $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم $A' = \{0\}$. اولاً 0 نقطهٔ حدی A است، زیرا اگر $r > 0$ عددی دلخواه باشد آن گاه بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی عددی طبیعی مانند n_0 موجود است به طوری که $\frac{1}{n_0} < r$ و لذا $\frac{1}{n_0} \in N_r(0)$. پس $N_r(0) \cap (A \setminus \{0\}) \neq \phi$ و لذا $0 \in A'$.
ثانیاً اگر $0 \neq x \in \mathbb{R}$، آن گاه نشان می‌دهیم $x \notin A'$ در صورتی که $x < 0$ یا $x > 1$ این مطلب واضح است. اما اگر $0 < x \leq 1$ آن گاه در صورتی که x به صورت $\frac{1}{n}$ نباشد عددی مانند $n_0 \in \mathbb{N}$ موجود است به قسمی که $\frac{1}{n_0+1} < x < \frac{1}{n_0}$. لذا با فرض

$$r_0 = \frac{1}{2} \min\{\frac{1}{n_0} - x \,,\ x - \frac{1}{n_0 + 1}\} > 0$$

واضح است که $N_{r_0}(x) \cap (A \setminus \{x\}) = \phi$. و در صورتی که x به صورت $\frac{1}{n_0}$ باشد با فرض $r_0 = \frac{1}{2n_0(n_0+1)}$ داریم $N_{r_0}(x) \cap (A \setminus \{x\}) = \phi$، زیرا تنها عدد به صورت $\frac{1}{n}$ که در $N_{r_0}(x)$ موجود است همان عدد $x = \frac{1}{n_0}$ می‌باشد. بنابر این هر $0 \neq x \in \mathbb{R}$ نقطه‌ای غیر حدی برای A است و لذا $A' = \{0\}$. ♠

این مثال نشان می‌دهد که در حالت کلی بین A و A' هیچ نوع رابطهٔ شمولی برقرار نیست. به عبارت دیگر ممکن است $A' \not\subseteq A$ و $A \not\subseteq A'$.

[۲۹] derived set

۴۶.۲.۱ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

برهان. اولاً $A \subseteq \overline{A}$ و ثانیاً با توجه به تعریف نقطهٔ حدی و نقطهٔ چسبیدگی واضح است که هر نقطهٔ حدی یک نقطهٔ چسبیدگی است و لذا $A' \subseteq \overline{A}$. پس $A \cup A' \subseteq \overline{A}$.

بالعکس، فرض کنیم $x \in \overline{A}$ ولی $x \notin A$. بنابر این برای هر $r > 0$ داریم

$$N_r(x) \cap (A \setminus \{x\}) = N_r(x) \cap A \neq \phi.$$

لذا $x \in A'$. در نتیجه $\overline{A} \subseteq A \cup A'$ و در نتیجه حکم برقرار است. ■

۴۷.۲.۱ نتیجه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت A بسته است فقط و فقط وقتی که $A' \subseteq A$.

برهان. فرض کنیم A بسته باشد. پس $A' \subseteq A \cup A' = \overline{A} = A$. بالعکس، اگر $A' \subseteq A$ آن گاه $\overline{A} = A \cup A' \subseteq A \cup A = A$ و لذا A بسته است. ■

گرچه تأکید کردیم که مفاهیم باز و بسته بودن نقیض یکدیگر نمی‌باشند، با این حال این دو مفهوم به نوعی دوگان یکدیگر می‌باشند. قضیهٔ زیر را ببینید.

۴۸.۲.۱ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت A باز است فقط و فقط وقتی که A^c بسته باشد.

برهان. فرض کنیم A باز باشد. برای آن که نشان دهیم A^c بسته است کافی است اثبات کنیم که $\overline{A^c} \subseteq A^c$. فرض کنیم $x \in \overline{A^c}$. لذا برای هر $r > 0$ داریم

$$N_r(x) \cap A^c \neq \phi$$

و یا

$$N_r(x) \not\subseteq A.$$

این مطلب نشان می‌دهد که x نمی‌تواند نقطهٔ درونی برای A باشد. بنابر این $x \notin A^\circ = A$ پس $x \notin A$ و یا $x \in A^c$. بنابر این A^c بسته است.

بالعکس، فرض کنیم A^c بسته باشد. برای آن که نشان دهیم A باز است اثبات می‌کنیم که هر نقطهٔ آن درونی است. پس فرض کنیم $x \in A$ و دلخواه. لذا $x \notin A^c = \overline{A^c}$. بنابر این با توجه به تعریف نقطهٔ چسبیدگی عددی مانند $r_\circ > \circ$ موجود است به قسمی که

$$N_{r_\circ}(x) \cap A^c = \phi$$

و یا

$$N_{r_\circ}(x) \subseteq A$$

پس x نقطهٔ درونی است و لذا $x \in A^\circ$. در نتیجه A باز است. ■

این قضیه برهانی دیگر برای بسته بودن زیرمجموعه‌های فضاهای گسسته به دست می‌دهد. چون در فضای گسسته هر مجموعه‌ای باز است و متمم هر مجموعهٔ باز بسته است پس هر مجموعه‌ای بسته است. اما به طریقی دیگر نیز همین مطلب را می‌توانیم اثبات کنیم.

۴۹.۲.۱ قضیه. در هر فضای گسسته مانند (X, d) برای هر $A \subseteq X$ داریم $A' = \phi$.

برهان. فرض کنیم $x \in X$. قرار می‌دهیم $r_\circ = \frac{1}{2} > \circ$. در این صورت داریم

$$(N_{r_\circ}(x) \setminus \{x\}) \cap A = (\{x\} \setminus \{x\}) \cap A = \phi \cap A = \phi.$$

پس $x \notin A'$. لذا $A' = \phi$. ■

با توجه به این قضیه نیز می‌توان گفت که چون $A' = \phi \subseteq A$ برای هر زیرمجموعه مانند A از فضای گسسته، لذا A بسته است.

قضیهٔ بعد نیز تضمین می‌کند که زیرمجموعه‌های متناهی هر فضای متریک بسته‌اند.

۵۰.۲.۱ قضیه. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک و $A \subseteq X$ مجموعه‌ای متناهی باشد. در این صورت $A' = \phi$ و لذا A بسته است.

برهان. فرض کنیم $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ و $x \in X$. قرار می‌دهیم

$$r_0 = \frac{1}{2} \min\{d(x, a) \mid a \in A \ , \ a \neq x\} > 0.$$

در این صورت $N_{r_0}(x) \cap (A \setminus \{x\}) = \phi$، زیرا اگر به برهان خلف فرض کنیم

$$y \in N_{r_0}(x) \cap (A \setminus \{x\})$$

آن گاه داریم

$$d(y, x) < r_0, \qquad y \in A \ , \ y \neq x.$$

که این با توجه به مینیمم بودن r_0 امکان ندارد. لذا $x \notin A'$ و چون x دلخواه بود پس $A' = \phi$. حال چون $A' = \phi \subseteq A$ پس A بسته است. ■

همان گونه که دیدیم مفاهیم باز و بسته بودن دوگان یکدیگر می‌باشند. به نظرمی‌رسد که بین بستارگیری و درون گرفتن از مجموعه‌ها هم باید ارتباطی وجود داشته باشد.

۵۱.۲.۱ قضیه. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت

$$\overline{A}^c = (A^c)^\circ \quad \text{و} \quad (A^\circ)^c = \overline{A^c}.$$

برهان. ابتدا فرض کنیم $x \in \overline{A}^c$. پس $x \notin \overline{A}$ و لذا $r_\circ > \circ$ ی موجود است به قسمی که

$$N_{r_\circ}(x) \cap A = \phi$$

و یا

$$N_{r_\circ}(x) \subseteq A^c.$$

پس $x \in (A^c)^\circ$. لذا $\overline{A}^c \subseteq (A^c)^\circ$. به همین ترتیب اثبات می‌شود که $(A^c)^\circ \subseteq \overline{A}^c$. حال اگر در همین رابطه به جای A قرار دهیم A^c داریم

$$((A^c)^c)^\circ = (\overline{A^c})^c.$$

پس $A^\circ = (\overline{A^c})^c$ و یا $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$.■

این قضیه همچنین نشان می‌دهد که درون یک مجموعه همواره باز است. زیرا $A^\circ = (\overline{A^c})^c$ و چون $\overline{A^c}$ بسته است پس متمم آن باز می‌باشد.

گاهی اوقات لازم است که از اجتماع یا اشتراک چند مجموعه بستار یا مشتق بگیریم یا درون آن‌ها را محاسبه کنیم. از این رو بررسی امکان پذیر بودن این امر مفید خواهد بود. قبل از آن به اثبات چند لم می‌پردازیم.

۵۲.۲.۱ لم. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت $\overline{A}$ و A' همواره مجموعه‌هایی بسته هستند.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که $(A')' \subseteq A'$. به برهان خلف فرض کنیم $x \in (A')'$ ی هست که $x \notin A'$. چون $x \notin A'$ پس $r_\circ > \circ$ موجود است به قسمی که

$$N_{r_\circ}(x) \cap (A \setminus \{x\}) = \phi \qquad (*)$$

از طرفی چون $x \in (A')'$ پس برای هر $r > 0$ از جمله برای $r = r_0$ داریم

$$N_{r_0}(x) \cap (A' \setminus \{x\}) \neq \phi.$$

و لذا $y \in A'$ یی موجود است به قسمی که $y \in N_{r_0}(x)$ و $y \neq x$. اما گوی‌ها مجموعه‌هایی باز هستند و لذا $r_1 > 0$ ی موجود است به قسمی که

$$N_{r_1}(y) \subseteq N_{r_0}(x).$$

از طرفی می‌توان r_1 را کوچک‌تر از $d(x,y)$ در نظر گرفت و لذا $x \notin N_{r_1}(y)$. اما چون $y \in A'$ پس برای هر $r > 0$ از جمله برای $r = r_1$ داریم

$$N_{r_1}(y) \cap (A \setminus \{y\}) \neq \phi.$$

یعنی z ی موجود است به قسمی که

$$z \in N_{r_1}(y) \subseteq N_{r_0}(x) \ , \ z \neq x \ , \ z \neq y \ , \ z \in A.$$

بنابر این

$$N_{r_0}(x) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi.$$

که در تناقض با (*) می‌باشد. پس فرض خلف باطل است و لذا $(A')' \subseteq A'$ یعنی A' بسته است.

با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد که $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$ و لذا $\overline{A}$ بسته است.

■

بسته بودن $\overline{A}$ نتیجه می‌دهد که $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. ممکن است به نظر برسد که همچنین همواره داریم $(A')' = A'$. مثال زیر نشان می‌دهد که چنین نیست.

۵۳.۲.۱ مثال. در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی دیدیم که اگر

$$A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

آن گاه $A' = \{0\}$ (به مثال ۴۵.۲.۱ مراجعه کنید). همچنین بنابر قضیهٔ ۵۰.۲.۱ مجموعهٔ مشتق هر مجموعهٔ متناهی تهی است. لذا $(A')' = \phi$. بنابر این $(A')' \neq A'$. ♠

۵۴.۲.۱ لم. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک باشد و $A, B \subseteq X$. در این صورت $A \subseteq B$ نتیجه می‌دهد که $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ و $A' \subseteq B'$ و نیز $A^\circ \subseteq B^\circ$.

برهان. فرض کنیم $A \subseteq B$ و $x \in \overline{A}$ و $r > 0$ دلخواه باشد. در این صورت داریم

$$\phi \neq N_r(x) \cap A \subseteq N_r(x) \cap B,$$

پس $N_r(x) \cap B \neq \phi$ و لذا $x \in \overline{B}$. به همین ترتیب از $x \in A'$ نتیجه می‌شود که $x \in B'$. همچنین اگر $x \in A^\circ$ آن گاه $r_0 > 0$ ی موجود است به قسمی که

$$N_{r_0}(x) \subseteq A \subseteq B$$

و لذا $x \in B^\circ$. ■

۵۵.۲.۱ قضیه. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک و $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های آن باشد. در این صورت

.i $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{I}} \overline{A}_\alpha \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha \in \mathbb{I}} A_\alpha}$؛

.ii $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{I}} A'_\alpha \subseteq (\bigcup_{\alpha \in \mathbb{I}} A_\alpha)'$؛

$$.iii\quad \bigcap_{\alpha\in\mathbb{I}} A_\alpha^\circ \subseteq (\bigcap_{\alpha\in\mathbb{I}} A_\alpha)^\circ$$؛

$$.iv\quad \bigcap_{\alpha\in\mathbb{I}} \overline{A}_\alpha \subseteq \overline{\bigcap_{\alpha\in\mathbb{I}} A_\alpha}$$؛

$$.v\quad \bigcap_{\alpha\in\mathbb{I}} A'_\alpha \subseteq (\bigcap_{\alpha\in\mathbb{I}} A_\alpha)'$$؛

$$.vi\quad \bigcup_{\alpha\in\mathbb{I}} A_\alpha^\circ \supseteq (\bigcup_{\alpha\in\mathbb{I}} A_\alpha)^\circ$$.

همچنین برای خانواده‌ای متناهی از مجموعه‌ها مانند $\{A_۱,\dots,A_n\}$ داریم

$$.i'\quad \bigcup_{i=۱}^{n} \overline{A}_i = \overline{\bigcup_{i=۱}^{n} A_i}$$؛

$$.ii'\quad \bigcup_{i=۱}^{n} A'_i = (\bigcup_{i=۱}^{n} A_i)'$$؛

$$.iii'\quad \bigcap_{i=۱}^{n} A_i^\circ = (\bigcap_{i=۱}^{n} A_i)^\circ$$.

برهان. فرض کنیم $\beta \in \mathbb{I}$. داریم $A_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathbb{I}} A_\alpha$. لذا طبق لم فوق $\overline{A}_\beta \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha\in\mathbb{I}} A_\alpha}$. بنابر این

$$\bigcup_{\beta\in\mathbb{I}} \overline{A}_\beta \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha\in\mathbb{I}} A_\alpha}.$$

به همین ترتیب قسمت ii اثبات می‌شود.

برای اثبات iii داریم

$$\bigcap_{\alpha\in\mathbb{I}} A_\alpha \subseteq A_\beta$$

پس

$$(\bigcap_{\alpha\in\mathbb{I}} A_\alpha)^\circ \subseteq A_\beta^\circ$$

لذا

$$(\bigcap_{\alpha\in\mathbb{I}} A_\alpha)^\circ \subseteq \bigcap_{\beta\in\mathbb{I}} A_\beta^\circ.$$

به همین ترتیب سه قسمت دیگر نیز اثبات می‌شود.

اما برای حالتی که خانواده متناهی باشد به عنوان نمونه قسمت iii' را اثبات می‌کنیم. فرض کنیم $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i^\circ$. پس برای هر $1 \le i \le r$، داریم $x \in A_i^\circ$ و لذا $r_i > 0$ ی موجود است به قسمی که $N_{r_i}(x) \subseteq A_i$ و اگر فرض کنیم $r_0 = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$ آن گاه

قاعده‌ای طلایی برای اساتید: باید حقیقت را بگویید، و هیچ چیز به جز آن نگویید... اما نه همهٔ آن را!

$$N_{r_0}(x) \subseteq N_{r_i}(x) \subseteq A_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

و لذا $N_{r_0}(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$. در نتیجه $x \in (\bigcap_{i=1}^n A_i)^\circ$. ■

۵۶.۲.۱ تبصره. در کلیهٔ قسمت‌های i تا vi قضیهٔ فوق شمول می‌تواند اکید باشد (حتی اگر در iv، v و vi خانوادهٔ مذکور متناهی باشد). مثال زیر این مطلب را روشن می‌سازد. همچنین توجه نمایید که در فضای گسسته قضیهٔ فوق نکتهٔ مهمی به دست نمی‌دهد چرا که در این فضا برای هر زیرمجموعه مانند A داریم $A^\circ = \overline{A} = A$ و $A' = \phi$. ◊

۵۷.۲.۱ مثال. در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی مجموعهٔ شمارای $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$ را در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $A_n = \{r_n\}$. در این صورت چون مجموعه‌های متناهی در هر فضایی بسته هستند $\overline{A}_n = A_n$. از طرفی می‌دانیم $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (چرا؟). لذا داریم

$$\overline{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} = \overline{\bigcup_{n=1}^\infty \{r_n\}} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \supsetneq \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^\infty \{r_n\} = \bigcup_{n=1}^\infty \overline{\{r_n\}} = \bigcup_{n=1}^\infty \overline{A}_n.$$

این، مثال نقضی برای تساوی در قسمت i قضیهٔ فوق خواهد بود.

با همین مثال می‌توان تساوی ii را نیز رد کرد. زیرا

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)' = (\bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\})' = \mathbb{Q}' = \mathbb{R} \supsetneqq \phi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\}' = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n.$$

برای آن که مثال نقضی برای قسمت iii قضیهٔ فوق ارائه دهیم فرض می‌کنیم $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. در این صورت

$$\begin{aligned}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^\circ &= (\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}))^\circ = \{0\}^\circ = \phi \\ &\subsetneqq \{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})^\circ = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^\circ.\end{aligned}$$

برای آن که تساوی را در iv، v و vi رد کنیم، مثالی از خانواده‌ای متناهی می‌آوریم تا حالت خانوادهٔ دلخواه نیز پاسخ داده شود. برای این منظور فرض کنیم $A = \mathbb{Q}$ و $B = \mathbb{Q}^c$. در این صورت

$$\overline{A \cap B} = \overline{\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c} = \overline{\phi} = \phi \subsetneqq \mathbb{R} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{Q}^c} = \overline{A} \cap \overline{B},$$

$$(A \cap B)' = (\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c)' = \phi' = \phi \subsetneqq \mathbb{R} = \mathbb{Q}' \cap (\mathbb{Q}^c)' = A' \cap B'.$$

اما برای قسمت vi نیز همین A و B مفید خواهند بود. داریم

$$(A \cup B)^\circ = (\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c)^\circ = \mathbb{R}^\circ = \mathbb{R} \supsetneqq \phi \mathbb{Q}^\circ \cup (\mathbb{Q}^c)^\circ = A^\circ \cup B^\circ. \spadesuit$$

مثال فوق علاوه بر آن که مثال نقضی برای تساوی قسمت‌های مختلف قضیهٔ قبل می‌باشد، در عین حال نشان می‌دهد که در حالت کلی اجتماع دلخواه از مجموعه‌های بسته مجموعه‌ای بسته نیست و اشتراک دلخواه از مجموعه‌های باز نیز مجموعه‌ای باز نمی‌باشد. توجه داریم که $\{r_n\}$ ها مجموعه‌هایی بسته‌اند ولی $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\}$ بسته نیست. همچنین $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ها بازند اما مجموعهٔ $\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ باز نیست. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که در حالت متناهی چنین اتفاقی نخواهد افتاد.

از این پس معمولاً مجموعه‌های باز را با حرف G و مجموعه‌های بسته را با حرف F نمایش خواهیم داد.

۵۸.۲.۱ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد. در این صورت

i. اجتماع دلخواه از مجموعه‌های باز مجموعه‌ای باز است؛

ii. اشتراک متناهی از مجموعه‌های باز مجموعه‌ای باز است؛

iii. اشتراک دلخواه از مجموعه‌های بسته مجموعه‌ای بسته است؛

iv. اجتماع متناهی از مجموعه‌های بسته مجموعه‌ای بسته است.

برهان. i. فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌های باز باشد و $x \in \bigcup_{\alpha\in\mathbb{I}} G_\alpha$. لذا $\alpha_\circ \in\mathbb{I}$ ی هست که $x \in G_{\alpha_\circ}$ و چون $G_{\alpha_\circ}$ باز است پس $x \in G^\circ_{\alpha_\circ}$ و لذا $r_\circ > \circ$ ی موجود است به قسمی که

$$N_{r_\circ}(x) \subseteq G_{\alpha_\circ} \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathbb{I}} G_\alpha,$$

پس $x \in (\bigcup_{\alpha\in\mathbb{I}} G_\alpha)^\circ$ و لذا $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{I}} G_\alpha$ باز است.

ii. فرض کنیم $\{G_\text{۱},\dots,G_n\}$ خانواده‌ای متناهی از مجموعه‌های باز باشد. طبق قضیهٔ قبل داریم

$$(\bigcap_{i=\text{۱}}^n G_i)^\circ = \bigcap_{i=\text{۱}}^n G_i^\circ = \bigcap_{i=\text{۱}}^n G_i.$$

لذا $\bigcap_{i=\text{۱}}^n G_i$ باز است.

iii. فرض کنیم $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌های بسته باشد و $x \in \overline{\bigcap_{\alpha\in\mathbb{I}} F_\alpha}$. بنابر این برای $r > \circ$ داده شده داریم

$$\phi \neq N_r(x) \cap (\bigcap_{\alpha\in\mathbb{I}} F_\alpha) \subseteq N_r(x) \cap F_\beta, \qquad \beta \in \mathbb{I}.$$

پس $x \in \overline{F_\beta}$ و چون F_β بسته است، پس به ازای هر $\beta \in \mathbb{I}$ داریم $x \in F_\beta$ و لذا $x \in \bigcap_{\beta\in\mathbb{I}} F_\beta$. در نتیجه $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{I}} F_\alpha$ بسته است.

iv. فرض کنیم $\{F_1,\dots,F_n\}$ خانواده‌ای متناهی از مجموعه‌های بسته باشد. طبق قضیهٔ قبل داریم

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} F_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{F_i} = \bigcup_{i=1}^{n} F_i.$$

لذا $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ بسته است. ■

۵۹.۲.۱ تبصره. در دو قضیه‌ای که اثبات شد، کافی بود تنها احکام مربوط به بسته بودن را اثبات کنیم و از این مطلب استفاده کنیم که برای هر A داریم $\overline{A}^c = (A^c)^\circ$ و $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$. از این رو با متمم گیری احکام مربوط به باز بودن قابل نتیجه‌گیری بود. ◊

قضیهٔ بعد شناخت جالبی در مورد درون و بستار یک مجموعه به دست می‌دهد.

۶۰.۲.۱ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت

$$A^\circ = \bigcup_{\text{باز } G \subseteq A} G,$$

و نیز

$$\overline{A} = \bigcap_{\text{بسته } A \subseteq F} F.$$

برهان. برای اثبات قسمت اول اگر $G \subseteq A$ باز باشد آن گاه $G = G^\circ \subseteq A^\circ$ و لذا

$$\bigcup_{\text{باز } G \subseteq A} G \subseteq A^\circ.$$

بالعکس، چون A° باز و مشمول در A است پس A° یکی از همین G هایی است که می‌خواهیم اجتماع آن‌ها را محاسبه کنیم. لذا

$$A^\circ \subseteq \bigcup_{\text{باز } G \subseteq A} G.$$

همچنین برای اثبات قسمت دوم اگر $A \subseteq F$ و مجموعهٔ F بسته باشد آن گاه $\overline{A} \subseteq \overline{F} = F$ و لذا

$$\overline{A} \subseteq \bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ \text{بسته}}} F.$$

بالعکس، چون $\overline{A}$ بسته و شامل A است پس $\overline{A}$ یکی از همین F هایی است که می‌خواهیم اشتراک آن‌ها را محاسبه کنیم. لذا

$$\bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ \text{بسته}}} F \subseteq \overline{A}. \blacksquare$$

تا کنون سه نوع مختلف از نقاط (درونی، چسبیدگی و حدی) و دو نوع مختلف از زیرمجموعه‌ها (باز و بسته) در یک فضای متریک را مورد بررسی قرار داده‌ایم. اما هنوز گونه‌های مختلف دیگری از نقاط و مجموعه‌ها باقی مانده است که هر یک در روشن ساختن مفاهیم و درک بهتر ساختار فضاهای متریک موثر است. اکنون که شناختی کافی در مورد مجموعه‌های باز و بسته به دست آوردیم، می‌توانیم به بررسی گونه‌های جدیدی از نقاط و زیرمجموعه‌ها بپردازیم.

تفاوت یک ریاضیدان درون‌گرا و یک ریاضیدان برون‌گرا در این است که ریاضیدان درون‌گرا هنگامی که با شما حرف می‌زند به کفش‌های خود نگاه می‌کند و ریاضیدان برون‌گرا به کفش‌های شما!

۶۱.۲.۱ تعریف. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq X$. نقطهٔ $x \in X$ را یک نقطهٔ بیرونی[30] برای A نامیم هرگاه $x \in (A^c)^\circ$. مجموعهٔ نقاط بیرونی A را بیرون[31] A نامیده و با $\operatorname{ext}(A)$ نمایش می‌دهیم. ♣

همان گونه که دیدیم $(A^c)^\circ = \overline{A}^c$ و لذا می‌توان گفت $\operatorname{ext}(A) = \overline{A}^c$. این تعریف چندان برای ما جدید نیست و در حقیقت نیازی به ارائه مثال نیز نمی‌باشد.

---

[30] exterior point

[31] exterior

۶۲.۲.۱ تعریف. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq X$. نقطهٔ $x \in X$ را یک نقطهٔ مرزی[۳۲] برای A می‌نامیم هرگاه $x \in \overline{A} \cap \overline{A^c}$. مجموعهٔ نقاط مرزی A را مرز[۳۳] A نامیده و با $\partial(A)$ یا $\mathrm{bd}(A)$ یا $\mathrm{fr}(A)$ نمایش می‌دهیم. ♣

از تعریف نقطهٔ مرزی می‌توان نتیجه گرفت که $x \in \partial(A)$ فقط و فقط وقتی که برای هر $r > 0$ داشته باشیم

$$N_r(x) \cap A \neq \phi \quad \text{و} \quad N_r(x) \cap A^c \neq \phi.$$

و لذا می‌توانیم تعریف نقطهٔ مرزی را به صورت معادل فوق نیز بیان کنیم.

۶۳.۲.۱ قضیه. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت

$$X = A^\circ \cup \mathrm{ext}(A) \cup \partial A$$

و سه مجموعهٔ A°، $\mathrm{ext}A$ و ∂A دو بدو مجزا هستند.

برهان. فرض کنیم $x \in X$ ولی $x \notin A^\circ$ و $x \notin \mathrm{ext}A$. چون $x \notin A^\circ$ پس برای هر $r > 0$ داریم $N_r(x) \nsubseteq A$ و یا

$$N_r(x) \cap A^c \neq \phi.$$

و چون $x \notin \mathrm{ext}A$ پس برای هر $r > 0$ داریم $N_r(x) \nsubseteq A^c$ و یا

$$N_r(x) \cap A \neq \phi.$$

لذا $x \in \partial A$.

---

[۳۲] boundary point, frontier point

[۳۳] boundary, frontier

حال به برهان خلف فرض کنیم $x \in A^\circ \cap \partial A$. چون $x \in A^\circ$ پس $r_\circ > \circ$ ی موجود است به قسمی که $N_{r_\circ}(x) \subseteq A$ و یا $N_{r_\circ}(x) \cap A^c = \phi$. اما از آن جایی که $x \in \partial A$ پس به ازای هر $r > \circ$ از جمله برای $r = r_\circ$ باید داشته باشیم $N_{r_\circ}(x) \cap A^c \neq \phi$. این تناقض نشان می‌دهد که $A^\circ \cap \partial A = \phi$. به همین ترتیب می‌توان اثبات کرد که $\text{ext}A \cap \partial A = \phi$. همچنین داریم

$$A^\circ \cap \text{ext}A \subseteq A \cap A^c = \phi$$

و لذا $A^\circ \cap \text{ext}A = \phi$. ■

۶۴.۲.۱ قضیه. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. در این صورت

i. زیر مجموعهٔ F از X بسته است فقط و فقط وقتی که $\partial F \subseteq F$؛

ii. زیر مجموعهٔ G از X باز است فقط و فقط وقتی که $\partial G \cap G = \phi$.

برهان. i. فرض کنیم $F \subseteq X$ بسته باشد. در این صورت واضح است که

$$\partial F = \overline{F} \cap \overline{F^c} \subseteq \overline{F} = F.$$

بالعکس، فرض کنیم $\partial F \subseteq F$. برای آن که نشان دهیم F بسته است باید اثبات کنیم که $\overline{F} \subseteq F$. به برهان خلف فرض کنیم چنین نباشد پس $x \in \overline{F}$ ی هست که $x \notin F$. چون $x \notin F$ لذا $x \in F^c \subseteq \overline{F^c}$. بنابر این

$$x \in \overline{F} \cap \overline{F^c} = \partial F \subseteq F.$$

پس $x \in F$ که تناقض است. لذا F بسته می‌باشد.

ii. فرض کنیم $G \subseteq X$ باز باشد. در این صورت با توجه به قضیهٔ قبل داریم

$$\partial G \cap G = \partial G \cap G^{\circ} = \phi.$$

بالعکس، فرض کنیم $\partial G \cap G = \phi$. نشان می‌دهیم هر نقطهٔ G درونی است. فرض کنیم $x \in G$. چون $\partial G \cap G = \phi$ پس $x \notin \partial G = \overline{G} \cap \overline{G^c}$. بنابر این $x \notin \overline{G}$ یا $x \notin \overline{G^c}$ و چون $x \in G \subseteq \overline{G}$ پس باید $x \notin \overline{G^c}$ و با توجه به تعریف نقطهٔ چسبیدگی نتیجه می‌شود که $r_\circ > \circ$ ی موجود است به قسمی که $N_{r_\circ}(x) \cap G^c = \phi$ و یا

$$N_{r_\circ}(x) \subseteq G.$$

پس $x \in G^{\circ}$ و لذا G باز است. ■

۶۵.۲.۱ لم. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت ∂A بسته است.

برهان. چون $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ و دو مجموعهٔ $\overline{A}$ و $\overline{A^c}$ بسته هستند لذا اشتراک این دو مجموعهٔ بسته، یعنی ∂A، نیز بسته است. ■

۶۶.۲.۱ قضیه. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت

$$\partial(\partial A) \subseteq \partial A.$$

برهان. می‌دانیم ∂A بسته است. همچنین یک مجموعه بسته است فقط و فقط وقتی که شامل مرز خود باشد. بنابر این $\partial(\partial A) \subseteq \partial A$. ■

گرچه از نظر شهودی ممکن است تصور شود که باید $\partial(\partial A) = \partial A$ با این حال مثال بعد نشان می‌دهد که در حالت کلی ممکن است شمول مذکور در قضیهٔ فوق سره باشد.

۶۷.۲.۱ مثال. در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی فرض کنیم $A = \mathbb{Q}$. در این صورت

$$\partial\, \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R},$$
$$\partial(\partial \mathbb{Q}) = \partial \mathbb{R} = \phi.$$

لذا $\partial\partial A \subsetneq \partial A$. ♠

اما همواره می‌توان اثبات کرد که $\partial(\partial(\partial A)) = \partial(\partial A)$ (چگونه؟).

همان طور که تا کنون دیدیم معمولاً احکام مربوط به فضاهای گسسته به صورتی کلی بیان می‌شوند. یادآوری می‌کنیم که مثلاً در هر فضای گسسته هر مجموعه باز است، هر مجموعه بسته است و مشتق هر مجموعه تهی است. از این جمله می‌توان قضیهٔ زیر را نیز بیان کرد.

۶۸.۲.۱ قضیه. در هر فضای گسسته مانند (X,d) مرز هر مجموعه تهی است.

برهان. فرض کنیم $A \subseteq X$. داریم

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} = A \cap A^c = \phi. \blacksquare$$

این بخش را با یک تعریف، مثال و قضیه‌ای ساده به پایان می‌بریم.

۶۹.۲.۱ تعریف. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد. نقطهٔ $x \in A$ را یک نقطهٔ منزوی[۳۴] برای A نامیم هرگاه $x \notin A'$. ♣

به عبارت دیگر x نقطهٔ منزوی برای A است هرگاه $r_\circ > \circ$ ی موجود باشد به قسمی که

$$N_{r_\circ}(x) \cap A = \{x\}.$$

اجازه دهید یک مثال ساده را با هم ببینیم.

[۳۴] isolated point

۱.۲.۷۰ مثال. در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی فرض کنیم $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. در این صورت داریم $A' = \{0\}$ و لذا هر نقطهٔ A نقطه‌ای منزوی برای A می‌باشد. ♠

۱.۲.۷۱ قضیه. در هر فضای گسسته مانند (X, d) هر نقطه از یک مجموعهٔ دلخواه نقطه‌ای منزوی برای آن است.

برهان. فرض کنیم $A \subseteq X$. روشن است که $A' = \phi$ نتیجه می‌دهد که هر نقطهٔ A غیر حدی و لذا منزوی می‌باشد. ■

در این جا ذکر یک نکته ضروری به نظر می‌رسد. دیدیم که کلیهٔ تعاریف ما در مورد انواع مختلف نقطه‌ها در یک فضای متریک مبتنی بر همسایگی‌های باز می‌باشد. به عنوان مثال در تعریف نقطهٔ چسبیدگی برای یک مجموعه مانند A گفتیم که $x \in \overline{A}$ هرگاه به ازای هر $r > 0$ مجموعهٔ $N_r(x) \cap A$ ناتهی باشد. اما به جای استفاده از همسایگی‌های باز به طور معادل می‌توان این تعاریف را با مجموعه‌های باز نیز بیان کرد. مثلاً می‌توان گفت $x \in \overline{A}$ هرگاه به ازای هر مجموعهٔ باز شامل x مانند G مجموعهٔ $G \cap A$ ناتهی باشد. واضح است که اگر با تعریف اخیر $x \in \overline{A}$ آن گاه با تعریف قبلی نیز $x \in \overline{A}$. بالعکس، فرض کنیم با تعریف اول $x \in \overline{A}$ و مجموعهٔ G مجموعهٔ باز دلخواهی شامل x باشد. حال چون $x \in G$ و مجموعهٔ G باز است پس $r_0 > 0$ ی موجود است به قسمی که $N_{r_0}(x) \subseteq G$ و چون تعریف اول برقرار است $N_{r_0}(x) \cap A \neq \phi$، بنابر این $\phi \neq N_{r_0}(x) \cap A \subseteq G \cap A$ و لذا $G \cap A \neq \phi$. یعنی تعریف دوم نیز محقق است. در مورد بقیهٔ تعاریف نیز می‌توان به همین شکل عمل کرد.

همان طور که دیدیم احکام مذکور در این بخش با تکنیک‌هایی بسیار ساده اثبات شدند و در حقیقت برهان قضایا چیزی جز تلفیق تعاریف با یکدیگر نبود. با این حال تأکید می‌گردد که همین تعاریف

مقدماتی اساس ساختار فضاهای متریک را تشکیل می‌دهد و درک بهتر این ترفندهای آسان تبحر ما را در دریافت مفاهیم عمیق بعدی تضمین خواهد کرد. در هر صورت، اکنون آماده‌ایم تا با تعاریف و احکام پیشرفته دست و پنجه نرم کنیم.

۳.۱ مباحث پیشرفته

همان گونه که در بخش قبل دیدیم اجتماع دلخواه از مجموعه‌های باز مجموعه‌ای باز است و اشتراک دلخواه از مجموعه‌های بسته مجموعه‌ای بسته می‌باشد. اما نشان دادیم که در حالت کلی اشتراک دلخواه از مجموعه‌های باز لزوماً باز نیست و اجتماع دلخواه از مجموعه‌های بسته نیز لزوماً بسته نمی‌باشد. با این حال مجموعه‌هایی که به صورت اشتراک شمارا از مجموعه‌های باز یا اجتماع شمارا از مجموعه‌های بسته می‌باشند حائز اهمیت هستند.

Paul Richard Halmos (1916)

تنها راه یاد گرفتن ریاضیات انجام دادن آن است.

۱.۳.۱ تعریف. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد. زیر مجموعهٔ A از X را یک مجموعهٔ G_δ[۳۵] می‌نامیم هرگاه خانواده‌ای شمارا از زیرمجموعه‌های باز X مانند $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ موجود باشد به قسمی که $A=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

زیرمجموعهٔ A از X را یک مجموعهٔ F_σ[۳۶] می‌نامیم هرگاه خانواده‌ای شمارا از زیرمجموعه‌های بستهٔ X مانند $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ موجود باشد به قسمی که $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. ♣

---

[۳۵] G_δ set

[۳۶] F_σ set

در نماد G_δ حرف G از کلمهٔ آلمانی *Gebiet* به معنی مجموعهٔ باز و حرف δ از کلمهٔ آلمانی *Durchschnitt* به معنی اشتراک اقتباس شده است. همچنین در نماد F_σ حرف F از کلمهٔ فرانسوی *Fermé* به معنی بسته و حرف σ از کلمهٔ فرانسوی *Somme* به معنی اجتماع گرفته شده است.

مفاهیم G_δ و F_σ دوگان یکدیگر می‌باشند به این معنا که شرط لازم و کافی برای آن که A مجموعه‌ای G_δ باشد آن است که A^c یک مجموعهٔ F_σ باشد. همچنین به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که اشتراک شمارا از مجموعه‌های G_δ مجموعه‌ای G_δ و اجتماع شمارا از مجموعه‌های F_σ مجموعه‌ای F_σ است.
همچنین همواره مجموعه‌های باز G_δ و مجموعه‌های بسته F_σ هستند.

۲.۳.۱ مثال. در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی مجموعهٔ $\{۰\}$ مجموعه‌ای G_δ است زیرا

$$\{۰\} = \bigcap_{n=۱}^{\infty} (-\frac{۱}{n}, \frac{۱}{n}).$$

همچنین مجموعهٔ $\mathbb{Q} = \{r_۱, r_۲, \ldots\}$ مجموعه‌ای F_σ است زیرا $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=۱}^{\infty} \{r_n\}$. ♠

از آن جایی که در هر فضای گسسته هر مجموعه‌ای هم باز و هم بسته می‌باشد، می‌توان نتیجه گرفت که در این گونه فضاها هر مجموعه‌ای G_δ و F_σ است. همچنین با توجه به آن که مجموعه‌های تک عضوی در هر فضایی بسته می‌باشند می‌توان نتیجه گرفت که مجموعه‌های شمارا همواره F_σ هستند.

می‌توان مفاهیم G_δ و F_σ را تعمیم داد و مجموعه‌های $G_{\delta\sigma}$ و $F_{\sigma\delta}$ را تعریف کرد. مثلاً یک مجموعهٔ $G_{\delta\sigma}$ مجموعه‌ای است که بتوان آن را به صورت اجتماع شمارایی از مجموعه‌های G_δ نوشت. توجه کنید که با

توجه به تعریف F_σ یک مجموعهٔ $(G_\delta)_\sigma$ مجموعه‌ای است که اجتماع (σ) شمارا از مجموعه‌های G_δ (به جای F به معنی بسته) باشد.

این روند را می‌توان ادامه داد و مجموعه‌های جدیدتری تعریف کرد.

Félix Edouard Justin Emile Borel (1871-1956)

۳.۳.۱ تعریف. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد. اگر A مجموعه‌ای باشد که با استفاده از مجموعه‌های باز فضا و به کارگیری تعدادی شمارا عمل متمم گیری، اجتماع و اشتراک به دست آید، آن گاه A را یک مجموعهٔ بُرِل[۳۷] می‌نامیم. ♣

دیدیم که مجموعه‌های بسته در هر فضای متریک F_σ هستند، اما نکتهٔ جالب این است که این گونه مجموعه‌ها همواره G_δ نیز می‌باشند. لذا می‌توان گفت که هر مجموعهٔ باز نیز مجموعه‌ای F_σ است. قبل از آن که این مطلب را اثبات کنیم به چند تعریف و قضیه احتیاج داریم.

۴.۳.۱ تعریف. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد و $\phi \neq A \subseteq X$. مجموعهٔ A را یک مجموعهٔ کراندار[۳۸] نامیم هرگاه

$$\sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\} < \infty,$$

و در این صورت این سوپریمم را قطر[۳۹] A نامیده و با $\mathrm{diam}(A)$ یا $d(A)$ نمایش می‌دهیم. قرار داد می‌کنیم که ϕ کراندار است و $\mathrm{diam}(\phi) = 0$. ♣

۵.۳.۱ مثال. در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی بازهٔ $(0,2)$ مجموعه‌ای کراندار با قطر ۲ است در حالیکه مثلاً خود $\mathbb{R}$ کراندار نیست. اما در $\mathbb{R}$ با متر گسسته از آن جایی که فاصلهٔ هر دو نقطه ۰ یا ۱ است هر مجموعه‌ای

---

[۳۷] Borel set
[۳۸] bounded set
[۳۹] diameter

کراندار است و اگر تک عضوی نباشد قطر آن برابر ۱ و در غیر این صورت برابر صفر می‌باشد. ♠

۶.۳.۱ قضیه. فرض کنیم A مجموعه‌ای کراندار در فضای متریک (X,d) باشد. در این صورت $\overline{A}$ نیز کراندار است و $\operatorname{diam}(\overline{A}) = \operatorname{diam}(A)$.

برهان. فرض کنیم $x, y \in \overline{A}$. نیز فرض کنیم $r > ۰$ داده شده باشد. با توجه به تعریف نقطهٔ چسبیدگی داریم

$$N_{\frac{r}{۲}}(x) \cap A \neq \phi, \qquad N_{\frac{r}{۲}}(y) \cap A \neq \phi.$$

لذا $x', y' \in A$ ی موجودند به قسمی که

$$d(x, x') < \frac{r}{۲}, \qquad d(y, y') < \frac{r}{۲}.$$

بنابر این داریم

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,x') + d(x',y') + d(y',y) \\ &< \frac{r}{۲} + \operatorname{diam}(A) + \frac{r}{۲} = \operatorname{diam}(A) + r. \end{aligned}$$

پس $\operatorname{diam}(A) + r$ کران بالایی برای مجموعهٔ $\{d(x,y) \mid x, y \in \overline{A}\}$ می‌باشد و لذا $\overline{A}$ کراندار است و $\operatorname{diam}(\overline{A}) \leq \operatorname{diam}(A) + r$. چون r دلخواه بود پس $\operatorname{diam}(\overline{A}) \leq \operatorname{diam}(A)$. از طرفی $A \subseteq \overline{A}$ نتیجه می‌دهد که $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(\overline{A})$ و لذا حکم برقرار است. ■

۷.۳.۱ تعریف. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد و $\phi \neq A \subseteq X$. برای هر $x \in X$ فاصله x تا A با نماد $d(x,A)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}.$$

همچنین برای دو مجموعهٔ $\phi \neq A, B \subseteq X$ فاصلهٔ A و B با نماد $d(A, B)$ به صورت

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A \;,\; b \in B\}$$

تعریف می‌شود. ♣

۸.۳.۱ مثال. در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی مجموعهٔ $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $d(\circ, A) = \circ$ گرچه $\circ \notin A$. و اگر $B = \{۲, ۳, ۴, ۵ \ldots\}$ و $C = \{n + \frac{1}{n} \mid n \in B\}$ آن گاه $d(B, C) = \circ$ گرچه $A \cap B = \phi$ و مجموعه‌های A و B هر دو بسته هستند. ♠

واضح است که

۹.۳.۱ قضیه. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک باشد و $\phi \neq A, B \subseteq X$. در این صورت

i. A کراندار است فقط و فقط وقتی که عددی مانند $r_\circ > \circ$ و نقطه‌ای مانند $x_\circ \in X$ موجود باشد به قسمی که $A \subseteq N_{r_\circ}(x_\circ)$، بالاخص هر گوی باز کراندار است؛

ii. شرط لازم و کافی برای آن که قطر یک مجموعه مانند A برابر $\circ$ باشد آن است که A تک عضوی باشد؛

iii. برای هر $x \in X$ داریم $d(x, A) = d(\{x\}, A)$؛

iv. $d(A, B) = \inf\{d(a, B) \mid a \in A\} = \inf\{d(b, A) \mid b \in B\}$. ■

ممکن است این تصور ایجاد شود که تابع $d(A, B)$ که برای زیرمجموعه‌های ناتهی فضای متریک تعریف می‌شود متر است. اما همان طور که دیدیم نه تنها $d(A, B) = \circ$ نتیجه نمی‌دهد که

$A = B$ بلکه ممکن است $d(A,B)$ برابر صفر باشد در حالی که A و B هیچگونه اشتراکی نداشته باشند. با این حال خاصیت‌های $d(A,B) \geq \circ$، $d(A,A) = \circ$ و $d(A,B) = d(B,A)$ برقرار هستند. اما نامساوی مثلث برقرار نمی‌باشد. زیرا مثلاً اگر در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی فرض کنیم $A = \{۱\}$، $B = \{۲\}$ و $C = \{۱,۲\}$ آن گاه

$$d(A,B) = ۱ \not\leq \circ + \circ = d(A,C) + d(C,B).$$

به جای بررسی نزدیک‌ترین فاصله می‌توان دورترین فاصله را (در صورت وجود) مورد بررسی قرار داد.

۱۰.۳.۱ تعریف. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک و $\phi \neq A \subseteq X$ مجموعه‌ای کراندار باشد. برای هر $x \in X$ دورترین فاصلهٔ[۴۰] x تا A با نماد $D(x,A)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$D(x,A) = \sup\{d(x,a) \mid a \in A\}.$$

همچنین برای دو مجموعهٔ کراندار $\phi \neq A, B \subseteq X$ دورترین فاصلهٔ A و B با نماد $D(A,B)$ به صورت

$$D(A,B) = \sup\{d(a,b) \mid a \in A \ , b \in B\}$$

تعریف می‌شود. ♣

" بدیهی "، خطرناک‌ترین کلمه در ریاضیات است.

شرط کراندار بودن A و B در تعریف فوق کاملاً ضروری است. در حقیقت شرط لازم و کافی برای آن که سوپریمم‌های فوق الذکر موجود باشند ان است که A و B کراندار باشند. همچنین بدیهی است که با تعریف فوق $D(A,A)$ همان قطر A می‌باشد.

[۴۰] farthest distance

مجدداً می‌توان بررسی کرد که این تابع جدید D تعریف شده روی زیرمجموعه‌های کراندار یک فضای متریک چه خواصی از خواص متر را داراست. در حقیقت $D(A,B) \geq 0$ و نیز داریم $D(A,B) = D(B,A)$. ولی همان طور که گفتیم $D(A,A) = \mathrm{diam}(A) > 0$ مگر آن که A تک عضوی باشد. اما نامساوی مثلث برقرار است.

۱۱.۳.۱ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد و A، B و C زیرمجموعه‌هایی کراندار از آن. در این صورت

$$D(A,B) \leq D(A,C) + D(C,B).$$

برهان. فرض کنیم $a \in A$، $b \in B$ و $c \in C$ عناصر دلخواهی باشند. بنابر نامساوی مثلث در مورد d و تعریف D داریم

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) \leq D(A,C) + D(C,B).$$

بنابراین $D(A,C) + D(C,B)$ کران بالایی برای مجموعهٔ $\{d(a,b) \mid a \in A \ , b \in B\}$ می‌باشد وچون سوپریمم کوچک‌ترین کران پایین است، حکم برقرار می‌باشد. ■

می‌توان با تلفیقی از تعاریف توابع d و D فوق الذکر روی مجموعه‌ها، تعریف جدید زیر را به دست آورد.

۱۲.۳.۱ تعریف. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد و $\phi \neq A, B \subseteq X$ مجموعه‌هایی کراندار باشند. خروج از مرکز[۴۱] B نسبت به A با نماد $\tau(A,B)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau(A,B) = \sup\{d(a,B) \mid a \in A\}. \clubsuit$$

---

[۴۱] eccentricity

ببینیم τ چه خواصی از خواص متر را دارد. واضح است که $\tau(A,B) \geq \circ$. همچنین داریم

$$\tau(A,A) = \sup\{d(a,A) \mid a \in A\} = \sup\{\circ\} = \circ.$$

اما $\tau(A,B) = \circ$ نتیجه نخواهد داد که $A = B$، زیرا مثلاً اگر در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی فرض کنیم $A = \mathbb{Q} \cap [\circ, ۱]$ و $B = \mathbb{Q}^c \cap [\circ, ۱]$ آن گاه

$$\begin{aligned}
\tau(A,B) &= \sup\{d(a,B) \mid a \in A\} \\
&= \sup\{\inf\{d(a,b) \mid b \in \mathbb{Q}^c \cap [\circ, ۱]\} \mid a \in \mathbb{Q} \cap [\circ, ۱]\} \\
&= \sup\{\circ \mid a \in \mathbb{Q} \cap [\circ, ۱]\} = \circ,
\end{aligned}$$

گرچه $A \cap B = \phi$. به علاوه τ متقارن نیست، زیرا اگر مثلاً در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی فرض کنیم $A = \{۱, ۲\}$ و $B = \{۳, ۵\}$ آن گاه

$$\tau(A,B) = \sup\{۲, ۱\} = ۲ \neq ۳ = \sup\{۱, ۳\} = \tau(B,A).$$

با این حال τ در نامساوی مثلث صدق می‌کند. این مطلب را در قضیهٔ بعد اثبات خواهیم کرد.

۱۳.۳.۱ تعریف. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد و $\phi \neq A \subseteq X$. همسایگی باز به مرکز A و شعاع r با نماد $N_r(A)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_r(A) = \{x \mid d(x,A) < r\}.$$

همچنین همسایگی بسته به‌مرکز A و شعاع r با نماد $N_r[A]$ به صورت

$$N_r[A] = \{x \mid d(x,A) \leq r\}$$

تعریف می‌شود. ♣

۱۴.۳.۱ لم. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک و τ تابع خروج از مرکز باشد. در این صورت

i. $\tau(A,B) < r \Longrightarrow A \subseteq N_r(B)$؛

ii. $A \subseteq N_r(B) \Longrightarrow \tau(A,B) \leq r$.

برهان. i. فرض کنیم $\tau(A,B) < r$ و نیز $a \in A$ دلخواه. در این صورت با توجه به آن که $\tau(A,B)$ سوپریمم $\{d(a,B) \mid a \in A\}$ می‌باشد نتیجه می‌شود که $d(a,B) \leq \tau(A,B) < r$ و لذا $a \in N_r(B)$.

ii. فرض کنیم $A \subseteq N_r(B)$. پس برای هر $a \in A$ داریم $d(a,B) < r$ و لذا r کران بالایی برای $\{d(a,B) \mid a \in A\}$ می‌باشد و چون سوپریمم کوچک‌ترین کران بالا است پس داریم $\tau(A,B) \leq r$. ■

۱۵.۳.۱ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک و τ تابع خروج از مرکز باشد. در این صورت τ در نامساوی مثلث صدق می‌کند.

برهان. فرض کنیم $\phi \neq A,B,C \subseteq X$ مجموعه‌هایی کراندار باشند و $\tau(A,C) < r$ و $\tau(C,B) < s$. لذا $A \subseteq N_r(C)$ و $C \subseteq N_s(B)$. در نتیجه

$$A \subseteq N_{r+s}(B).$$

زیرا اگر $a \in A$ آن گاه $d(a,C) < r$ = $\inf\{d(a,c) \mid c \in C\}$ و لذا $c_\circ \in C$ ی هست که $d(a,c_\circ) < r$ زیرا در غیر این صورت برای هر $c \in C$ باید داشته باشیم $r \leq d(a,c)$. بنابراین داریم $r \leq d(a,C)$ که تناقض است. همچنین با توجه به آن که $\tau(C,B) < s$ نتیجه می‌شود که $d(c_\circ,B) < s$ و لذا وجود دارد $b_\circ \in B$ به قسمی که $d(c_\circ,b_\circ) < s$. بنابر این

$$d(a,B) \leq d(a,b_\circ) \leq d(a,c_\circ) + d(c_\circ,b_\circ) < r+s,$$

و لذا $a \in N_{r+s}(B)$. اما $A \subseteq N_{r+s}(B)$ نتیجه می‌دهد که $\tau(A,B) \leq r+s$. حال r را به طور نزولی به $\tau(A,C)$ و نیز s را به طور نزولی به $\tau(C,B)$ میل می‌دهیم، داریم

$$\tau(A,B) \leq \tau(A,C) + \tau(C,B). \blacksquare$$

اینفیمم و سوپریمم مذکور در تعاریف d، D و τ ممکن است در هیچ نقطه‌ای پذیرفته نشود. حتی در حالتی که مجموعه‌ها بسته هستند.

۱۶.۳.۱ مثال. در $X = (۰, ۱)$ با متر اقلیدسی قرار می‌دهیم $A = \{\frac{۱}{۴}\}$ و $B = [\frac{۱}{۲}, ۱)$. در این صورت A و B در X بسته‌اند (چرا؟). با این حال داریم

$$\begin{aligned} D(A,B) &= \sup\{d(a,b) \mid a \in A\ ,\ b \in B\} \\ &= \sup\{d(\frac{۱}{۴}, b) \mid b \in [\frac{۱}{۲}, ۱)\} = \frac{۳}{۴}. \end{aligned}$$

ولی این سوپریمم در هیچ نقطه‌ای پذیرفته نمی‌شود. همچنین در فضای $X = (۰, ۱) \cup (۲, ۳)$ اگر قرار دهیم $A = \{\frac{۱}{۴}\}$ و $B = (۲, ۳)$ آن گاه

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \inf\{d(a,b) \mid a \in A\ ,\ b \in B\} \\ &= \inf\{d(\frac{۱}{۴}, b) \mid b \in (۲, ۳)\} = \frac{۷}{۴}. \end{aligned}$$

ولی این اینفیمم در هیچ نقطه‌ای پذیرفته نمی‌شود. به علاوه

$$\tau(A,B) = \sup\{d(a,B) \mid a \in A\} = d(\frac{۱}{۴}, B) = \frac{۷}{۴}.$$

و این سوپریمم نیز هیچ گاه پذیرفته نمی‌شود. ♠

دیدیم که در هر فضایی گوی‌های باز مجموعه‌هایی باز و گوی‌های بسته مجموعه‌هایی بسته‌اند. قضیهٔ زیر نتیجه‌ای مشابه را در مورد $N_r(A)$ و $N_r[A]$ به دست می‌دهد.

۱۷.۳.۱ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت برای هر $r > ۰$ همسایگی باز $N_r(A)$ مجموعه‌ای باز و همسایگی بسته $N_r[A]$ مجموعه‌ای بسته است.

برهان. فرض کنیم $x \in N_r(A)$. نشان می‌دهیم x نقطه‌ای درونی برای $N_r(A)$ می‌باشد. برای این منظور $\varepsilon > ۰$ را عددی دلخواه در نظر می‌گیریم. بنابر خاصیت مشخصه اینفیمم چون

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$$

لذا عضوی از A مانند $a_۰$ موجود است به قسمی که $d(x,a_۰) < d(x,A) + \varepsilon$. قرار می‌دهیم

$$r_۰ = \frac{۱}{۲}(r - d(x,A)) > ۰$$

و اثبات می‌کنیم که $N_{r_۰}(x) \subseteq N_r(A)$. فرض کنیم $y \in N_{r_۰}(x)$. بنابر این

$$\begin{aligned} d(y,A) \le d(y,a_۰) &\le d(y,x) + d(x,a_۰) \\ &< r_۰ + d(x,A) + \varepsilon \\ &= \frac{r}{۲} - \frac{d(x,A)}{۲} + d(x,A) + \varepsilon \\ &= \frac{r}{۲} + \frac{d(x,A)}{۲} + \varepsilon. \end{aligned}$$

حال اگر ε را به سمت صفر میل دهیم داریم

$$d(y,A) \le \frac{۱}{۲}(r + d(x,A)) < \frac{۱}{۲}(r + r) = r.$$

بنابر این $y \in N_r(A)$ و لذا $N_{r_۰}(x) \subseteq N_r(A)$ یعنی x نقطهٔ درونی $N_r(A)$ است.

برای اثبات بسته بودن $N_r[A]$ فرض کنیم $x \notin N_r[A]$ و نشان می‌دهیم $x \notin \overline{N_r[A]}$. قرار می‌دهیم

$$r_\circ = \frac{۱}{۲}(d(x, A) - r) > \circ.$$

توجه داریم که $x \notin N_r[A]$ نتیجه می‌دهد که $d(x, A) > r$ و لذا $r_\circ$ عددی مثبت است. ادعا می‌کنیم

$$N_{r_\circ}(x) \cap N_r[A] = \phi. \qquad (*)$$

به برهان خلف اگر چنین نباشد آن گاه $y \in N_{r_\circ}(x)$ یی هست که $d(y, A) \leq r$. حال برای $\varepsilon > \circ$ بنابر خاصیت مشخصهٔ اینفیمم عضوی از A مانند $a_\circ$ موجود است به قسمی که $d(y, a_\circ) < r + \varepsilon$. لذا داریم

$$\begin{aligned} d(x, A) \leq d(x, a_\circ) &\leq d(x, y) + d(y, a_\circ) \\ &< r_\circ + r + \varepsilon \\ &= \frac{۱}{۲}(d(x, A) - r) + r + \varepsilon \\ &= \frac{۱}{۲}(d(x, A) + r) + \varepsilon \end{aligned}$$

حال اگر ε را به سمت صفر میل دهیم داریم

$$d(x, A) \leq \frac{۱}{۲}(d(x, A) + r)$$

و یا $d(x, A) \leq r$. بنابر این $x \in N_r[A]$ که تناقض است. پس $(*)$ برقرار است و لذا

$$x \notin \overline{N_r[A]}. \blacksquare$$

دیدیم که گرچه توابع d، D و τ متر نیستند، اما خواص بسیار جالبی دارند. از این جمله می‌توان به قضیهٔ زیر اشاره کرد.

۱۸.۳.۱ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد. در این صورت

i. d روی هر متغیر خود نزولی است؛

ii. D روی هر متغیر خود صعودی است؛

iii. τ روی متغیر اول خود صعودی و روی متغیر دوم خود نزولی است.

برهان. i. چون d تابعی متقارن است کافی است روی متغیر اول بحث کنیم. فرض کنیم A، B و C زیرمجموعه‌هایی ناتهی از X باشند که $A \subseteq C$. نشان می‌دهیم $d(A,B) \geq d(C,B)$. در حقیقت با توجه به نزولی بودن تابع اینفیمم داریم

$$d(A,B) = \inf\{d(a,B) \mid a \in A\} \geq \inf\{d(c,B) \mid c \in C\} = d(C,B).$$

ii. مجدداً چون D متقارن است فقط روی متغیر اول بحث می‌کنیم. اگر $\phi \neq A,B,C \subseteq X$ و $A \subseteq C$، آن گاه چون تابع سوپریمم صعودی است، داریم

$$\begin{aligned} D(A,B) &= \sup\{d(a,b) \mid a \in A\ ,\ b \in B\} \\ &\leq \sup\{d(c,b) \mid c \in C\ ,\ b \in B\} = D(C,B). \end{aligned}$$

iii. فرض کنیم $\phi \neq A,B,C,E \subseteq X$ و $A \subseteq C$ و $B \subseteq E$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \tau(A,B) &= \sup\{d(a,B) \mid a \in A\} \\ &\leq \sup\{d(c,B) \mid c \in C\} \\ &= \tau(C,B). \end{aligned}$$

و نیز

$$\begin{aligned}\tau(A,B) &= \sup\{d(a,B) \mid a\in A\}\\ &= \sup\{\inf\{d(a,b)\mid b\in B\}\mid a\in A\}\\ &\geq \sup\{\inf\{d(a,e)\mid e\in E\}\mid a\in A\}\\ &= \sup\{d(a,E)\mid a\in A\} = \tau(A,E). \blacksquare\end{aligned}$$

حال اجازه دهید به مسأله‌ای که در ابتدای این بخش مورد بحث بود بازگردیم. یادآوری می‌کنیم که بحث در مورد مجموعه‌های G_δ و F_σ و بررسی G_δ بودن مجموعه‌های بسته منجر به ارائه تعاریف d، D و τ و خواص آن‌ها گردید. پس اکنون به اثبات G_δ بودن مجموعه‌های بسته در فضاهای متریک می‌پردازیم.

۱۹.۳.۱ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک و $F\subseteq X$ مجموعه‌ای بسته باشد. در این صورت F یک مجموعهٔ G_δ است.

برهان. قرار می‌دهیم

$$G_n = N_{\frac{1}{n}}(F), \qquad n\in\mathbb{N}.$$

در این صورت بنابر قضیهٔ ۱۷.۳.۱ مجموعه‌های G_n باز هستند. ادعا می‌کنیم $F=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. واضح است که به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $F\subseteq G_n$ و لذا $F\subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. بالعکس، فرض کنیم $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. در این صورت به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $x\in G_n$ و یا $d(x,F)<\frac{1}{n}$ و اگر n را به سمت بی‌نهایت میل دهیم داریم $d(x,F)=0$. ادعا می‌کنیم $x\in\overline{F}$ و چون F بسته است پس $x\in F$. اما برای اثبات $x\in\overline{F}$ فرض کنیم $r>0$ داده شده باشد. پس بنابر خاصیت مشخصه اینفیمم عضوی از F مانند y موجود است به قسمی که $d(x,y)<r$ و یا

$y \in N_r(x)$. لذا

$$N_r(x) \cap F \neq \phi.$$

و این یعنی $x \in \overline{F}$. ■

توجه کنید که در قضیهٔ فوق در حقیقت به این مطلب نیز اشاره شد که $d(x, F) = 0$ نتیجه می‌دهد $x \in \overline{F}$ و اگر F بسته باشد این بدان معنی است که $\{d(x,y) \mid y \in F\}$ اینفیمم خود را در این حالت می‌پذیرد. اما آیا این مطلب کلیت دارد ؟ قبلاً به این سوال پاسخ منفی داده‌ایم.

همان طور که در بخش قبل دیدیم با استفاده از مفهوم فاصله و همسایگی در فضاهای متریک می‌توان انواع مختلفی از نقاط یک مجموعه مانند درونی، بیرونی، چسبیدگی، حدی، مرزی و منزوی را تعریف کرد که منجر به تعریف دو گونه مختلف زیرمجموعه‌های فضاهای متریک موسوم به باز و بسته گردید.

همچنین دیدیم که باز و بسته بودن یک مجموعه که در ابتدا توسط نقاط درونی و چسبیدگی تعریف شد با استفاده از مفاهیم دیگر نیز به طور معادل قابل بیان است. اکنون به چند تعریف دیگر در مورد نقاط و زیر مجموعه‌های فضاهای متریک می‌پردازیم که در بررسی فضاهای متریک از اهمیت زیادی برخوردار است.

ای جوان! در ریاضیات چیزها را درک نمی‌کنی، تنها باید به آن‌ها عادت کنی.
John von Neumann (1903-1957)

۲۰.۳.۱ تعریف. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq X$. نقطهٔ $x \in X$ را یک نقطهٔ تراکم[۴۲] برای A می‌نامیم هرگاه به ازای هر $r > 0$ مجموعهٔ $N_r(X) \cap A$ ناشمارا باشد. ♣

روشن است که با این تعریف هر نقطهٔ تراکم یک نقطهٔ حدی و لذا یک نقطهٔ چسبیدگی برای A می‌باشد. همچنین اگر X فضایی شمارا

[۴۲] condensation point

باشد هیچ مجموعه‌ای در آن نمی‌تواند نقطهٔ تراکم داشته باشد. به علاوه از آن جایی که در فضاهای گسسته برای هر زیر مجموعه مانند A داریم $A' = \phi$ می‌توان نتیجه گرفت که در فضاهای گسسته نقطهٔ تراکم نداریم.

۲۱.۳.۱ مثال. در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی، فرض کنیم $A = (\circ, \text{۱})$. در این صورت مجموعهٔ نقاط تراکم A برابر $[\circ, \text{۱}]$ می‌باشد. ♠

۲۲.۳.۱ قضیه. در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی هر مجموعهٔ ناشمارا نقطهٔ تراکم دارد.

برهان. فرض کنیم A مجموعه‌ای ناشمارا باشد ولی به برهان خلف نقطهٔ تراکم نداشته باشد. لذا هیچ x حقیقی، و بالاخص هیچ x گویا، نقطهٔ تراکم A نیست. بنابراین برای هر $x \in \mathbb{Q}$ عددی مانند $r_x > \circ$ موجود است به قسمی که $N_{r_x}(x) \cap A$ مجموعه‌ای شمارا می‌باشد. اما داریم

$$\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} N_{\frac{r_x}{\text{۲}}}(x)$$

لذا

$$R = \overline{\mathbb{Q}} \subseteq \overline{\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} N_{\frac{r_x}{\text{۲}}}(x)} \subseteq \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} N_{r_x}(x).$$

بنابر این داریم

$$A = \mathbb{R} \cap A = (\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} N_{r_x}(x)) \cap A = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} (N_{r_x}(x) \cap A).$$

اما مجموعهٔ اخیر اجتماع شمارایی از مجموعه‌های شمارا می‌باشد و لذا مجموعه‌ای شماراست. بنابر این A مجموعه‌ای شماراست که با فرض قضیه در تناقض است. ■

در حقیقت می‌توان قضیهٔ بهتر زیر را اثبات نمود.

۲۳.۳.۱ قضیه. در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی مجموعهٔ نقاط تراکم هر مجموعهٔ ناشمارا مجموعه‌ای ناشماراست.

برهان. فرض کنیم A مجموعه‌ای ناشمارا و B مجموعهٔ نقاط تراکم A باشد و به برهان خلف B مجموعه‌ای شمارا باشد. بنابر این $A \setminus B$ مجموعه‌ای ناشمارا خواهد بود که هیچ نقطهٔ تراکمی ندارد. (چون در $A \setminus B$ تمام نقاط تراکم ممکن A را برداشته‌ایم) و این با قضیهٔ فوق در تناقض است. ■

حتی قضیهٔ جالب‌تری به صورت زیر می‌توان بیان نمود.

۲۴.۳.۱ قضیه. در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی هر مجموعهٔ ناشمارا دارای تعدادی ناشمارا نقطهٔ تراکم در خود می‌باشد.

برهان. فرض کنیم A مجموعه‌ای ناشمارا و B مجموعهٔ نقاط تراکم A و به برهان خلف $A \cap B$ شمارا باشد. در این صورت باز هم $A \setminus B$ مجموعه‌ای ناشمارا خواهد بود که هیچ نقطهٔ تراکمی ندارد که تناقض است. ■

اجازه دهید ببینیم کلید طلایی برهان قضایای فوق چیست. در حقیقت نکتهٔ اساسی استفاده شده در قضایای فوق وجود مجموعهٔ $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ است. به عبارت دیگر این که $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی دارای زیرمجموعه‌ای شمارا مانند $\mathbb{Q}$ است که $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ویژگی قدرتمندی است که ما را قادر به اثبات قضایای فوق نمود.

۲۵.۳.۱ تعریف. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک باشد و $A, B \subseteq X$. مجموعهٔ A را در B چگال[۴۳] گوییم هرگاه $B \subseteq \overline{A}$. بالاخص A را در X چگال گوییم هرگاه $\overline{A} = X$. ♣

---

[۴۳] dense

چگال بودن مجموعهٔ A در مجموعهٔ B هنگامی جالب خواهد بود که $A \subset B$. واضح است که هر فضایی در خود چگال است و در فضاهای گسسته تنها زیرمجموعهٔ چگال فضا خود فضا می‌باشد چون اگر در یک فضای گسسته مانند X داشته باشیم $\overline{A} = X$ آن گاه با توجه به بسته بودن A داریم $A = X$.

۲۶.۳.۱ تعریف. فضای متریک (X, d) را تفکیک پذیر[۴۴] نامیم هرگاه دارای زیرمجموعه‌ای چگال و شمارا باشد. ♣

به عنوان مثال $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی تفکیک پذیر است چون $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ اما با متر گسسته تفکیک پذیر نیست. در حقیقت یک فضای گسسته تفکیک پذیر است فقط و فقط وقتی که شمارا باشد.

نکتهٔ اساسی در اثبات قضایای فوق تفکیک پذیری $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی بود. تعریف بعد که بیش‌تر در فضاهایی موسوم به فضاهای توپولوژیک[۴۵] مورد بحث قرار می‌گیرد، در فضاهای متریک معادل تفکیک پذیر بودن فضا می‌باشد. در حقیقت یک فضای متریک حالت خاصی از فضاهای توپولوژیک است. اجازه دهید کمی بیش‌تر در مورد این فضاها صحبت کنیم. همان گونه که دیدیم در یک فضای متریک ابتدا فاصله تعریف می‌شود و سپس به بررسی باز بودن مجموعه‌ها می‌پردازیم. حال اگر بدون تعریف فاصله، ابتدا مجموعه‌های باز فضا را مشخص کنیم چه وضعیتی پیش خواهد آمد؟ روشن است که نمی‌توانیم هر مجموعهٔ دلخواهی را در دستهٔ مجموعه‌های باز قرار دهیم و باید اصول مشخصی را رعایت کنیم. مثلاً باید همواره مجموعهٔ تهی و خود فضا را باز تلقی کنیم. همچنین باید این مجموعه‌های باز بگونه‌ای اختیار شوند که اشتراک متناهی از آن‌ها و اجتماع دلخواه از

---

[۴۴] separable

[۴۵] topological space

آن‌ها در آن خانواده باشد. بدین ترتیب خانواده‌ای از مجموعه‌ها داریم که آن‌ها را باز تلقی می‌کنیم. حال می‌توان تعاریف نقاط درونی، چسبیدگی، حدی، بیرونی، مرزی، منزوی و مفاهیم گفته شدهٔ دیگر را به جای همسایگی‌های باز توسط مجموعه‌های باز بازنویسی کرد و لذا همین مباحث در فضاهای توپولوژیک همانند فضاهای متریک قابل بررسی است. به علاوه مباحث جدید جالب و پرسش‌های جدیدی نیز مطرح می‌شود. مثلاً می‌توان این پرسش را مطرح کرد که آیا پس از تعریف مجموعه‌های باز می‌توانیم متری روی فضا تعریف کنیم که تحت این متر، مجموعه‌های باز فضا دقیقاً همان مجموعه‌هایی باشند که ما باز تلقی کردیم؟ چنین فضاهایی متریک پذیر[۴۶] نامیده می‌شوند. معمولاً خانوادهٔ مجموعه‌های باز فضا را با τ نمایش می‌دهیم و آن را توپولوژی[۴۷] می‌نامیم و می‌گوییم (X,τ) یک فضای توپولوژیک است. در این کتاب هدف ما این است که تعاریف معادلی برای مفاهیم ارائه شده به دست دهیم که قابل تعمیم به فضاهای توپولوژیک نیز باشد. بدیهی است که البته به دنبال ارائه بحثی مفصل در مورد فضاهای توپولوژیک نخواهیم بود، گرچه بد نیست که هر از گاهی طعمی از توپولوژی را بچشیم!

Ernst Leonard Lindelöf (1870-1946)

۲۷.۳.۱ تعریف. فضای متریک (X,d) را یک فضای لیندلف[۴۸] نامیم هرگاه به ازای هر خانواده از مجموعه‌های باز مانند $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ که $X=\bigcup_{\alpha\in\mathbb{I}} G_\alpha$، زیرخانواده‌ای شمارا از آن خانواده مانند $\{G_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ موجود باشد به قسمی که $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{\alpha_n}$. ♣

[۴۶] metrizable
[۴۷] topology
[۴۸] Lindelöf space

۲۸.۳.۱ مثال. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک گسستهٔ ناشمارا باشد. در این صورت خانوادهٔ $\{N_1(x)\}_{x\in X}$ که همان $\{\{x\}\}_{x\in X}$ می‌باشد دارای این خاصیت است که $X \subseteq \cup_{x\in X}\{x\}$ ولی هیچ زیر خانواده‌ای شمارا از آن موجود نیست که اجتماع اعضای آن مساوی X باشد. لذا یک فضای گسسته ناشمارا لیندلف نیست. ♠

قبل از آن که به اثبات معادل بودن مفاهیم تفکیک پذیری و لیندلف بودن بپردازیم قصد داریم مفهوم دیگری را معرفی کنیم که معادل هر دو مفهوم می‌باشد. از این رو اثبات معادل بودن را به بعد موکول می‌کنیم.

ابتدا اجازه دهید صورت معادلی برای چگال بودن زیرمجموعه‌ای از یک فضا ارائه دهیم. همان طور که در انتهای بخش قبل گفتیم، مفهوم نقطهٔ چسبیدگی را می‌توان توسط مجموعه‌های باز به جای همسایگی باز نیز بیان نمود. این مطلب به اثبات قضیهٔ زیر کمک می‌کند.

۲۹.۳.۱ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد. زیرمجموعهٔ A از X در X چگال است فقط و فقط وقتی که به ازای هر زیرمجموعهٔ باز ناتهی مانند G داشته باشیم $A\cap G\neq\phi$.

برهان. فرض کنیم A در X چگال باشد و G زیرمجموعه‌ای باز و ناتهی از X باشد. چون G ناتهی است $x\in X$ ی هست که $x\in G$. اما $x\in X=\overline{A}$ و با توجه به آنچه در فوق اشاره شد، هر زیرمجموعهٔ بازشامل x از جمله G باید با A اشتراک داشته باشد.

بالعکس، اگر به ازای هر زیرمجموعهٔ باز ناتهی از X مانند G داشته باشیم $A\cap G\neq\phi$، ادعا می‌کنیم $X=\overline{A}$. فرض کنیم $x\in X$ و G مجموعهٔ بازی شامل x باشد چون $A\cap G\neq\phi$ نتیجه می‌شود که $x\in\overline{A}$. لذا $X\subseteq\overline{A}$ و چون به طور بدیهی $\overline{A}\subseteq X$ پس حکم برقرار است. ■

مفهومی که در زیر ارائه می‌شود یکی از مفاهیم اساسی در فضاهای توپولوژیک می‌باشد. در این جا ما این تعریف را در فضاهای متریک مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۳۰.۳.۱ تعریف. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد خانوادهٔ $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ از زیرمجموعه‌های باز X را یک پایه[۴۹] برای X می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x\in X$ و هر زیرمجموعهٔ باز X شامل x مانند G، عضوی از $\mathbb{I}$ مانند $\alpha_\circ$ موجود باشد به قسمی که $x\in G_{\alpha_\circ}\subseteq G$. ♣

به عبارت دیگر $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ پایه‌ای برای X است هرگاه هر زیرمجموعهٔ باز X را بتوان به صورت اجتماعی از G_α ها نوشت. این برداشت اخیر شاید بتواند اصطلاح پایه را مشابه با فضاهای برداری توجیه کند. در فضاهای برداری هر عنصر فضا به صورت ترکیبی خطی از عناصر پایه است و در این جا هر مجموعهٔ باز فضا به صورت اجتماعی از عناصر پایه می‌باشد. البته تفاوتی که وجود دارد این است که در فضاهای برداری ترکیب خطی مذکور منحصر به فرد است ولی در این جا این گونه نیست.

خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌های باز فضا، به وضوح، پایه‌ای از فضای متریک است. با این حال می‌توان از بین کلیهٔ مجموعه‌های باز برخی از آن‌ها را انتخاب نمود به قسمی که پایه‌ای را تشکیل دهند.

۳۱.۳.۱ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد. در این صورت خانوادهٔ

$$\{N_r(x)\}_{x\in X, r>\circ}$$

پایه‌ای برای X است.

---

[۴۹] base

برهان. فرض کنیم $x \in X$ دلخواه و G زیرمجموعهٔ بازی از X شامل x باشد. چون G باز است و $x \in G$ لذا نقطهٔ x نقطهٔ درونی برای G است و در نتیجه $r_\circ > \circ$ ی موجود است به قسمی که $x \in N_{r_\circ}(x) \subseteq G$. این مطلب نشان می‌دهد که خانوادهٔ $\{N_r(x)\}_{x\in X, r>\circ}$ در شرط پایه‌بودن صدق می‌کند. ■

قبلاً دیدیم که در تعریف انواع مختلف نقاط به جای عبارت همسایگی باز شامل x می‌توان مجموعهٔ باز شامل x را قرار داد و تعاریف جدید معادل همان تعاریف می‌باشند. لازم به ذکر است که با همان استدلال می‌توان گفت که اگر در تعاریف، به جای عبارت همسایگی باز شامل x عبارت عضوی از پایه شامل x را قرار دهیم باز هم تعاریف به دست آمده معادل تعاریف قبلی می‌باشند. این مطلب برای تعاریفی که بعداً نیز خواهیم آورد معتبر است. در حقیقت فایدهٔ این کار بیش‌تر هنگامی مشخص می‌شود که بخواهیم تعریف خاصی را در مورد نقطه‌ای از فضا بررسی کنیم. به عنوان مثال اگر پایهٔ انتخاب شده ما بگونه‌ای باشد که حتی‌المقدور مجموعه‌های کمتری از فضا داخل آن باشد یا مجموعه‌های عضو آن از نوع خاصی باشد برای بررسی $x \in \overline{A}$ کافی است فقط برای این نوع مجموعه‌های خاص مانند G شامل x تحقیق کنیم که $A \cap G \neq \phi$. در عمل ممکن است تحقیق این امر ساده‌تر از تعریف اصلی باشد.

۱.۳.۳۲ تعریف. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد و $x \in X$. خانوادهٔ $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ از زیرمجموعه‌های باز X شامل x را یک پایهٔ موضعی[۵۰] می‌نامیم هرگاه به ازای هر مجموعهٔ باز شامل x مانند G عنصری از $\mathbb{I}$ مانند $\alpha_\circ$ موجود باشد به قسمی که $G_{\alpha_\circ} \subseteq G$. ♣

---

[۵۰] local base

قضیهٔ بعد نشان می‌دهد که هر فضای متریک در اصل اول شمارایی[۵۱] صدق می‌کند، یعنی در هر نقطه مانند $x \in X$ پایه‌ای موضعی و شمارا وجود دارد.

۳۳.۳.۱ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد و $x \in X$ دلخواه. در این صورت پایه‌ای موضعی و شمارا در x وجود دارد.

برهان. خانوادهٔ $\{N_{\frac{1}{n}}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ را در نظر می‌گیریم. روشن است که این خانواده شماراست. حال اگر G مجموعهٔ باز دلخواهی شامل x باشد، چون $x \in G$ و مجموعهٔ G باز است پس $r_\circ > \circ$ موجود است به قسمی که $N_{r_\circ}(x) \subseteq G$ و با توجه به خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی $n_\circ \in \mathbb{N}$ ی موجود است به قسمی که $\frac{1}{n_\circ} < r_\circ$. لذا $N_{\frac{1}{n_\circ}} \subseteq N_{r_\circ}(x) \subseteq G$. ■

۳۴.۳.۱ تعریف. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد. گوییم X در اصل دوم شمارایی[۵۲] صدق می‌کند هرگاه دارای پایه‌ای شمارا باشد. ♣

حال می‌توانیم به اثبات معادل بودن سه مفهومی که تا کنون ذکر کرده‌ایم بپردازیم.

۳۵.۳.۱ قضیه. در یک فضای متریک (X,d) سه شرط زیر معادلند :

i. X تفکیک پذیر است؛

ii. X در اصل دوم شمارایی صدق می‌کند؛

iii. X لیندلف است.

---

[۵۱] first axiom of countability
[۵۲] second axiom of countability

برهان. $i \Longrightarrow ii$. فرض کنیم X تفکیک پذیر باشد. لذا زیرمجموعه‌ای شمارا مانند A از X موجود است به قسمی که $\overline{A} = X$. خانوادهٔ $\{N_{\frac{1}{n}}(x)\}_{x\in A, n\in\mathbb{N}}$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که با توجه به شمارا بودن A و $\mathbb{N}$ این خانواده شماراست. همچنین چون همسایگی‌ها باز هستند این خانواده، خانواده‌ای از مجموعه‌های باز می‌باشد. حال فرض کنیم $x \in X$ دلخواه و G مجموعهٔ بازی شامل x باشد. چون $x \in G$ و مجموعهٔ G باز است، لذا $r_\circ > \circ$ ی موجود است به قسمی که $N_{r_\circ}(x) \subseteq G$. بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی $n_\circ \in \mathbb{N}$ ی موجود است به قسمی که $\frac{1}{n_\circ} < r_\circ$ و در نتیجه $N_{\frac{1}{n_\circ}}(x) \subseteq N_{r_\circ}(x) \subseteq G$. حال همسایگی $N_{\frac{1}{2n_\circ}}(x)$ را در نظر می‌گیریم، چون $x \in X = \overline{A}$ باید داشته باشیم $N_{\frac{1}{2n_\circ}}(x) \cap A \neq \phi$ و لذا عضوی از A مانند $a_\circ$ موجود است به قسمی که $a_\circ \in N_{\frac{1}{2n_\circ}}(x)$. ادعا می‌کنیم $x \in N_{\frac{1}{2n_\circ}}(a_\circ) \subseteq G$. زیرا اولاً از $a_\circ \in N_{\frac{1}{2n_\circ}}(x)$ نتیجه می‌شود که $d(x, a_\circ) < \frac{1}{2n_\circ}$ و لذا $x \in N_{\frac{1}{2n_\circ}}(a_\circ)$ و ثانیاً اگر $y \in N_{\frac{1}{2n_\circ}}(a_\circ)$ دلخواه باشد داریم

$$d(x,y) \leq d(x,a_\circ) + d(a_\circ, y) < \frac{1}{2n_\circ} + \frac{1}{2n_\circ} = \frac{1}{n_\circ}.$$

لذا $y \in N_{\frac{1}{n_\circ}}(x)$. پس $x \in N_{\frac{1}{2n_\circ}}(a_\circ) \subseteq N_{\frac{1}{n_\circ}}(x) \subseteq G$ و لذا خانوادهٔ مذکور در شرط پایه بودن صدق می‌کند.

$ii \Longrightarrow iii$. فرض کنیم X پایه‌ای شمارا مانند $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ داشته باشد و $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌های باز باشد که $X = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{I}} H_\alpha$. به ازای هر $x \in X$ عضوی از $\mathbb{I}$ مانند α_x موجود است به قسمی که $x \in H_{\alpha_x}$ و چون خانوادهٔ $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ پایه است لذا عددی طبیعی مانند n_x موجود است به قسمی که $x \in G_{n_x} \subseteq H_{\alpha_x}$. بنابر این $X = \bigcup_{x\in X} G_{n_x}$. حال به ازای هر n_x لااقل یک $\alpha_{n_x} \in\mathbb{I}$ وجود دارد

که $G_{n_x} \subseteq H_{\alpha_{n_x}}$. کافی است ما فقط یکی از این H_α ها را (با توجه به اصل انتخاب) انتخاب کنیم. لذا تعداد $H_{\alpha_{n_x}}$ های انتخاب شده شماراست (چون G_{n_x} ها شماراست) و در نتیجه داریم

$$X = \bigcup G_{n_x} \subseteq \bigcup H_{\alpha_{n_x}},$$

که اجتماع اخیر روی تعدادی شمارا از اعضای خانوادهٔ $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ می‌باشد.

$i \Longrightarrow iii$. فرض کنیم X لیندلف باشد. $n \in \mathbb{N}$ را ثابت در نظر می‌گیریم. خانوادهٔ $\{N_{\frac{1}{n}}(x)\}_{x\in X}$ دارای این خاصیت است که $X = \bigcup_{x\in X} N_{\frac{1}{n}}(x)$ و لذا زیر خانواده‌ای شمارا از این خانواده مانند $\{N_{\frac{1}{n}}(x_{n,m})\}_{m\in\mathbb{N}}$ موجود است به قسمی که $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} N_{\frac{1}{n}}(x_{n,m})$. حال مجموعهٔ

$$A = \{x_{n,m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

را در نظر می‌گیریم. واضح است که این مجموعه شماراست. ادعا می‌کنیم A در X چگال است. فرض کنیم $x \in X$. نیز فرض کنیم $r > 0$ داده شده باشد. بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی $n \in \mathbb{N}$ ی هست که $\frac{1}{n} < r$. چون $x \in X = \bigcup_{m=1}^{\infty} N_{\frac{1}{n}}(x_{n,m})$، پس $m \in \mathbb{N}$ ی هست که $x \in N_{\frac{1}{n}}(x_{n,m})$ و یا $x_{n,m} \in N_{\frac{1}{n}}(x)$. لذا با توجه به آن که $x_{n,m} \in A$ داریم

$$\phi \neq N_{\frac{1}{n}}(x) \cap A \subseteq N_r(x) \cap A.$$

و در نتیجه $N_r(x) \cap A \neq \phi$ یعنی $x \in \overline{A}$. ■

حال که معادل بودن این سه مفهوم در فضاهای متریک اثبات شد، مجدداً به بحث در مورد نقاط تراکم باز می‌گردیم. گفتیم که کلید طلایی اثبات این مطلب که زیرمجموعه‌های ناشمارای $\mathbb{R}$ با متر

اقلیدسی دارای تعداد ناشمارا نقطهٔ تراکم در خود هستند تفکیک پذیر بودن $\mathbb{R}$ می‌باشد. حال می‌توان گفت

۳۶.۳.۱ قضیه. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک و تفکیک پذیر و A زیرمجموعه‌ای ناشمارا از آن باشد. در این صورت اگر B مجموعهٔ نقاط تراکم A باشد آن گاه $A \cap B$ ناشماراست.

برهان. به برهان خلف فرض کنیم $A \cap B$ شمارا باشد. لذا $C = A \setminus B$ مجموعه‌ای ناشماراست که نقطهٔ تراکم ندارد. بنابر این به ازای هر $x \in X$ عددی مانند $r_x > 0$ موجود است به قسمی که $N_{r_x}(x) \cap C$ مجموعه‌ای شماراست. حال چون خانوادهٔ $\{N_{r_x}(x)\}_{x \in X}$ دارای این خاصیت است که $\bigcup_{x \in X} N_{r_x}(x) = X$ و فضای متریک X تفکیک پذیر و در نتیجه لیندلف است زیر خانواده‌ای شمارا از آن مانند $\{N_{r_{x_n}}(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ موجود است به قسمی که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{r_{x_n}}(x_n)$. اما داریم

$$C = X \cap C = (\bigcup_{n=1}^{\infty} N_{r_{x_n}}(x_n)) \cap C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (N_{r_{x_n}}(x_n) \cap C).$$

از طرفی $N_{r_{x_n}}(x_n) \cap C$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ شماراست و اجتماع شمارا از آن‌ها نیز شمارا می‌باشد. لذا C شماراست که تناقض است. ■

۳۷.۳.۱ تعریف. زیرمجموعهٔ A از فضای متریک (X, d) را بی‌کاست[۵۳] نامیم هرگاه داشته باشیم $A = A'$. ♣

۳۸.۳.۱ مثال. در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی مجموعهٔ $A = [0, 1]$ مجموعه‌ای بی کاست است ولی مجموعهٔ $B = [0, 1] \cup \{2\}$ بی‌کاست نیست. ♠

---

[۵۳] perfect

روشن است که هر مجموعهٔ بی‌کاست بسته است. همچنین در هر فضای متریک گسسته تنها زیر مجموعهٔ بی‌کاست فضا مجموعهٔ تهی می‌باشد.

۳۹.۳.۱ مثال. در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی مجموعهٔ $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ بی‌کاست نیست. در حقیقت $A' = \{0\}$ و $(A')' = \phi$. ♠

این مثال نشان می‌دهد که در حالت کلی چنین نیست که مشتق یک مجموعه، مجموعه‌ای بی‌کاست باشد.

۴۰.۳.۱ قضیه. مجموعهٔ همهٔ نقاط تراکم هر زیر مجموعه از یک فضای متریک تفکیک پذیر، بی‌کاست است.

برهان. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک تفکیک پذیر و A زیرمجموعه‌ای از آن و B مجموعهٔ نقاط تراکم A باشد. واضح است اگر B تهی باشد حکم برقرار است، لذا فرض کنیم B ناتهی باشد. اولاً هر نقطهٔ B حدی است. زیرا فرض کنیم $x \in B$ و $r > 0$ داده شده باشد. می‌توان نوشت

$$N_r(x) \setminus \{x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (N_{\frac{r}{n}}(x) \setminus N_{\frac{r}{n+1}}(x))$$

و لذا

$$(N_r(x) \setminus \{x\}) \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty} ((N_{\frac{r}{n}}(x) \setminus N_{\frac{r}{n+1}}(x)) \cap A).$$

حال چون x نقطهٔ تراکم A است سمت چپ تساوی فوق مجموعه‌ای ناشماراست و از آن جایی که اجتماع سمت راست روی تعدادی شمارا مجموعه است، لذا باید $n_0 \in \mathbb{N}$ ی موجود باشد به قسمی که مجموعهٔ

$$(N_{\frac{r}{n_0}}(x) \setminus N_{\frac{r}{n_0+1}}(x)) \cap A$$

ناشمارا باشد و لذا با توجه به قضیهٔ فوق نقطهٔ تراکمی از خود را در خود دارد اما هر نقطهٔ تراکم مجموعهٔ اخیر نقطهٔ تراکمی از A نیز هست و لذا $(N_r(x) \setminus \{x\}) \cap A$ نقطهٔ تراکمی از A را در خود دارد. در نتیجه $(N_r(x) \setminus \{x\}) \cap B \neq \phi$. این مطلب نشان می‌دهد که $x \in B'$ و لذا $B \subseteq B'$.

ثانیاً فرض کنیم $x \in B'$. ادعا می‌کنیم $x \in B$. به برهان خلف فرض کنیم چنین نباشد. چون $x \notin B$ پس $r_0 > 0$ ی موجود است به قسمی که $N_{r_0}(x) \cap A$ مجموعه‌ای شماراست. از طرفی چون $x \in B'$ پس به ازای هر $r > 0$ از جمله برای $r = r_0$ داریم

$$N_{r_0}(x) \cap (B \setminus \{x\}) \neq \phi.$$

و لذا $y \in B$ یی موجود است به قسمی که $y \in N_{r_0}(x)$. اما گوی‌ها مجموعه‌هایی باز هستند و لذا $r_1 > 0$ ی موجود است به قسمی که

$$N_{r_1}(y) \subseteq N_{r_0}(x).$$

اما چون $y \in B$ پس برای هر $r > 0$ از جمله برای $r = r_1$ مجموعهٔ $N_{r_1}(y) \cap A$ ناشماراست. اما $N_{r_1}(y) \cap A \subseteq N_{r_0}(x) \cap A$ و لذا $N_{r_0}(x) \cap A$ ناشماراست که تناقض است. پس $B' \subseteq B$. ■

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966)

ریاضیات نه چیزی بیش‌تر و نه چیزی کمتر از بخش دقیق اندیشهٔ ما است.

این بخش را با یک تعریف و یک مثال به پایان می‌بریم.

۴۱.۳.۱ تعریف. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک باشد. یک زیرمجموعه مانند A از X را هیچ‌جا چگال[۵۴] نامیم هرگاه $(\overline{A})^\circ = \phi$. ♣

۴۲.۳.۱ مثال. در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی مجموعهٔ $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ هیچ‌جا چگال است. زیرا $\overline{A} = A \cup \{0\}$ و $(\overline{A})^\circ = \phi$. همچنین در

---
[۵۴] nowhere dense

هر فضای گسسته تنها زیر مجموعهٔ هیچ‌جا چگال فضا مجموعهٔ تهی است. زیرا اگر $(\overline{A})^\circ = \phi$ آن گاه با توجه به آن که $A = \overline{A}$ و نیز $A = A^\circ = (\overline{A})^\circ$ نتیجه می‌شود که $A = \phi$. ♠

۴.۱ ساختن فضاهای متریک جدید

در این بخش به ارائه روش‌های مختلف برای ساختن فضاهای متریک جدید می‌پردازیم، اما قبل از آن باید مشخص شود که منظور ما از فضای جدید چیست. آیا صرفاً در نظر گرفتن مجموعه‌ای جدید از اشیا به عنوان نقاط فضا یا حتی ارائه تعریفی جدید برای مشخص کردن فاصلهٔ بین نقاط می‌تواند فضایی جدید به دست دهد؟ بهتر است قبل از هر چیز تعریفی دقیق برای معادل بودن دو متر ارائه دهیم.

۱.۴.۱ تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ای از نقاط و d_1 و d_2 دو متر روی آن باشند. d_1 و d_2 را معادل[55] گوییم، هرگاه اعداد مثبتی مانند α و β موجود باشند به قسمی که به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$\alpha d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le \beta d_1(x,y). \clubsuit$$

با یک مثال تعریف را روشن می‌سازیم.

۲.۴.۱ مثال. در مثال‌های ۳.۲.۱ و ۲۱.۲.۱ دیدیم که روی $\mathbb{R}^2$ دو متر مختلف d_2 و d_M به صورت زیر می‌توان تعریف کرد.

$$\begin{aligned} d_2(P,Q) &= ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{\frac{1}{2}} \\ d_M(P,Q) &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}, \end{aligned}$$

[55] equivalent

$$P = (x_۱, y_۱),\ Q = (x_۲, y_۲) \in \mathbb{R}^۲.$$

حتی می‌توان این دو متر را روی $\mathbb{R}^n$ به جای $\mathbb{R}^۲$ نیز به طریق مشابه تعریف کرد. واضح است که

$$|x_۱ - x_۲| \leq ((x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲)^{\frac{۱}{۲}},$$

و

$$|y_۱ - y_۲| \leq ((x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲)^{\frac{۱}{۲}}.$$

و لذا

$$d_M(P, Q) \leq d_۲(P, Q).$$

همچنین

$$\begin{aligned} d_۲(P, Q) &= ((x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲)^{\frac{۱}{۲}} \\ &\leq (d_M(P, Q)^۲ + d_M(P, Q)^۲)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۲} d_M(P, Q). \end{aligned}$$

بنابر این اعداد $\alpha = ۱$ و $\beta = \sqrt{۲}$ را یافتیم به قسمی که

$$\alpha d_M(P, Q) \leq d_۲(P, Q) \leq \beta d_M(P, Q).$$

این مطلب نشان می‌دهد که $d_۲$ و d_M معادلند. ♠

می‌توان در حالت کلی برای $d_۲$ و d_M که روی $\mathbb{R}^n$ تعریف شده اند نیز معادل بودن آن‌ها را اثبات کرد.

۳.۴.۱ قضیه. فرض کنیم $d_۱$ و $d_۲$ دو متر معادل روی فضای X باشند. در این صورت زیرمجموعهٔ G از X نسبت به $d_۱$ باز است فقط و فقط وقتی که نسبت به $d_۲$ باز باشد.

برهان. چون $d_۱$ و $d_۲$ معادلند، اعدادی مثبت مانند α و β موجود است به قسمی که به ازای هر $x, y \in X$ داریم

$$\alpha d_۱(x,y) \leq d_۲(x,y) \leq \beta d_۱(x,y)$$

حال فرض کنیم $G \subseteq X$ نسبت به $d_۱$ باز باشد، یعنی برای $x \in G$ دلخواه عددی مانند $r_۱ > ۰$ موجود باشد به قسمی که

$$N_{r_۱}^{d_۱}(x) \subseteq G,$$

که در آن

$$N_{r_۱}^{d_۱}(x) = \{y \in X \mid d_۱(x,y) < r_۱\}.$$

ادعا می‌کنیم G نسبت به $d_۲$ نیز باز است. فرض کنیم $x \in G$ دلخواه و $r_۱ > ۰$ همان عددی باشد که در فوق اشاره شد. قرار می‌دهیم $r_۲ = \alpha r_۱ > ۰$. در این صورت

$$N_{r_۲}^{d_۲}(x) \subseteq G.$$

زیرا اگر $y \in N_{r_۲}^{d_۲}(x)$ دلخواه باشد، آن گاه

$$d_۲(x,y) < r_۲$$

و لذا

$$\alpha d_۱(x,y) \leq d_۲(x,y) < r_۲ = \alpha r_۱$$

و در نتیجه $d_۱(x,y) < r_۱$ و یا $y \in N_{r_۱}^{d_۱}(x) \subseteq G$. بنابراین $y \in G$. پس هر نقطه G نسبت به $d_۲$ درونی است یعنی G نسبت به $d_۲$ باز است. به همین ترتیب چون $\frac{۱}{\beta} d_۲(x,y) \leq d_۱(x,y)$ با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد که اگر G نسبت به $d_۲$ باز باشد نسبت به $d_۱$ نیز باز است. ■

قضیه فوق را گاهی اوقات به این صورت نیز بیان می‌کنند که دو متر معادل توپولوژی‌های یکسانی را روی یک فضا به دست می‌دهند. سؤالی که پیش می‌آید این است که آیا عکس قضیهٔ فوق نیز درست است؟ به عبارت دیگر اگر $d_۱$ و $d_۲$ دو متر روی مجموعهٔ X باشند به قسمی که $G \subseteq X$ نسبت به $d_۱$ باز باشد فقط و فقط وقتی که نسبت به $d_۲$ باز باشد، آیا لزوماً $d_۱$ و $d_۲$ معادلند؟ مثال زیر را ببینید.

۴.۴.۱ مثال. فرض کنیم $X = \mathbb{N}$ و مترهای $d_۱$ و $d_۲$ به ترتیب مترهای اقلیدسی و گسسته روی X باشند. در این صورت $d_۱$ و $d_۲$ توپولوژی‌های یکسانی روی X به دست می‌دهند، زیرا با متر اقلیدسی برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $N_{\frac{۱}{۲}}(n) = \{n\}$ و لذا هر نقطه‌ای در هر زیرمجموعه درونی است و در نتیجه با متر اقلیدسی هر زیرمجموعهٔ X باز است. اما این دو متر به مفهوم فوق معادل نیستند. زیرا اگر چنین نباشد، آن گاه عددی مثبت مانند α موجود است به قسمی که به ازای هر $n, m \in \mathbb{N}$ باید داشته باشیم

$$\alpha|n-m| \leq d_۲(n,m) \leq ۱.$$

و لذا با فرض $m = ۱$، برای هر n داریم

$$n \leq \frac{۱}{\alpha} + ۱.$$

و این یعنی $\mathbb{N}$ کراندار است که تناقض می‌باشد. ♠

این مثال ارائه تعریف زیر را موجه می‌سازد.

۵.۴.۱ تعریف. دو متر $d_۱$ و $d_۲$ روی مجموعهٔ X را به طور توپولوژیکی معادل[۵۶] می‌نامیم هرگاه $d_۱$ و $d_۲$ توپولوژی‌های یکسانی

---

[۵۶] topologically equivalent

روی X به دست دهند. به عبارت دیگر به ازای هر $G \subseteq X$ داشته باشیم G نسبت به d_1 باز است فقط و فقط وقتی که نسبت به d_2 باز باشد. ♣

ریشه‌های یادگیری تلخ است اما ثمر شیرین دارد.
Aristotle (384-322BC)

در فصل‌های بعد صورت‌های معادلی برای این تعریف ارائه خواهیم داد. دیدیم که تغییر تعریف متر روی مجموعه‌ای خاص ممکن است واقعاً فضایی جدید را به دست ندهد، اما سؤالی که پیش می‌آید این است که اگر مجموعهٔ نقاط تغییر کند آیا فضایی جدید به وجود خواهد آمد؟ مثلاً اگر X و Y دو مجموعهٔ متمایز باشند، آیا می‌توان تعبیری برای معادل بودن دو فضای متریک (X, d_1) و (Y, d_2) ارائه کرد؟ از آن جایی که پاسخ به این سؤال نیازمند دانستن مفاهیمی سطح بالاتر در فضاهای متریک است، این امر را به فصل‌های بعدی موکول می‌کنیم. لذا در این بخش توجه خود را به حالتی معطوف می‌کنیم که دو متر مختلف روی مجموعه‌ای مشخص تعریف شده باشند. بنابر این فرض کنیم مجموعه‌ای مشخص مانند X به ما داده شده است، سؤال این است که چگونه می‌توان یک متر روی X تعریف کرد؟ دیدیم که متر گسسته روی هر مجموعه‌ای قابل تعریف است. اما آیا این تنها روش ممکن است ؟

روش متداول در ریاضیات این است که توسط مثال‌های شناخته شده مثال‌های جدید بسازیم. این کار ممکن است با در نظر گرفتن یک نمونه یا یک خانواده از نمونه‌های موجود صورت پذیرد. در این بخش به ترتیب این حالت‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اجازه دهید با یک قضیه ساده کار را شروع کنیم.

۶.۴.۱ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد و $n \in \mathbb{N}$. نیز فرض کنیم d_n روی $X \times X$ به صورت

$$d_n(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+nd(x,y)}, \qquad x,y \in X$$

تعریف شده باشد. در این صورت (X,d_n) نیز فضایی متریک است.

برهان. واضح است که d_n در شرایط اول، دوم و سوم متر صدق می‌کند. پس کافی است نامساوی مثلث را اثبات کنیم. برای این منظور تابع $f(t) = \frac{t}{1+nt}$ را در نظر می‌گیریم. اولاً داریم

$$f'(t) = \frac{1+nt-nt}{(1+nt)^2} = \frac{1}{(1+nt)^2} > 0$$

پس f تابعی صعودی است. ثانیاً برای هر $r,s \geq 0$ داریم

$$\begin{aligned} f(r+s) &= \frac{r+s}{1+n(r+s)} = \frac{r}{1+nr+ns} + \frac{s}{1+nr+ns} \\ &\leq \frac{r}{1+nr} + \frac{s}{1+ns} = f(r)+f(s). \end{aligned}$$

حال فرض کنیم $x,y,z \in X$. چون d متر است داریم

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

و چون f صعودی است با توجه به آنچه که در ثانیاً اشاره کردیم

$$\begin{aligned} f(d(x,y)) &\leq f(d(x,z)+d(z,y)) \\ &\leq f(d(x,z)) + f(d(z,y)). \end{aligned}$$

بنابر این

$$d_n(x,y) \leq d_n(x,z) + d_n(z,y).$$

لذا نامساوی مثلث نیز برقرار است. ■

توجه داریم که (X, d_n) فضایی کراندار است. در حقیقت به ازای هر $x, y \in X$ داریم

$$d_n(x, y) < ۱.$$

سؤال این است که آیا d و d_n معادلند؟

۷.۴.۱ قضیه. فرض کنیم $d_۱$ و $d_۲$ دو متر روی X باشند. در این صورت اگر

$$d(x, y) = \max\{d_۱(x, y)\ ,\ d_۲(x, y)\} \qquad x, y \in X,$$

آن گاه (X, d) نیز یک فضای متریک است.

برهان. باز هم تنها نکته غیر بدیهی، بررسی نامساوی مثلث است. فرض کنیم $x, y, z \in X$. داریم

$$d_۱(x, y) \leq d_۱(x, z) + d_۱(z, y),$$
$$d_۲(x, y) \leq d_۲(x, z) + d_۲(z, y)$$

و لذا

$$d_i(x, y) \leq \max\{d_۱(x, z), d_۲(x, z)\} + \max\{d_۱(z, y), d_۲(z, y)\}.$$

بنابر این

$$\max\{d_۱(x, y), d_۲(x, y)\} \leq d(x, z) + d(z, y)$$

و یا

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

بنابر این (X, d)فضایی متریک است. ■

قضیه فوق را می‌توان به استقرا به تعدادی متناهی متر مانند d_1، ...، d_n تعمیم داد. اما آیا برای تعدادی نامتناهی متر نیز برقرار است؟ چه فرض یا فرض‌هایی باید اضافه شود؟

اگر به اثبات نامساوی مثلث در مثال ۷.۲.۱ برای فضای $(\mathbb{R}^n, d_p)$ توجه کنیم به سادگی می‌توانیم قضیهٔ زیر را اثبات کنیم.

۸.۴.۱ قضیه. فرض کنیم d_1 و d_2 دو متر روی مجموعهٔ X باشند و

$$d(x,y) = (d_1(x,y)^p + d_2(x,y)^p)^{\frac{1}{p}}, \qquad x,y \in X.$$

در این صورت (X,d) نیز یک فضای متریک است. ■

این قضیه را نیز می‌توان به استقرا برای تعدادی متناهی متر تعمیم داد.

اگر به قضایای فوق توجه کنیم می‌بینیم که در این احکام یک نمونه از یک مجموعه با یک متر در نظر گرفته شده و فضایی ظاهراً جدید ساخته شده است. آیا می‌توان از متر روی یک مجموعه به تعریف متری روی زیرمجموعه‌های آن و یا بالعکس دست یافت؟ ما این کار را در هر دو جهت انجام خواهیم داد.

ریاضیات، ۵۰ درصد فرمول و ۵۰ درصد برهان است، و... ۵۰ درصد دیگر آن تصور است!

۹.۴.۱ تعریف. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد و $\phi \neq Y \subseteq X$. واضح است که اگر تعریف d را روی Y تحدید کنیم، کلیه شرایط متر حفظ می‌شود. در حقیقت اگر این تابع جدید نیز با d نمایش داده شود، d کلیهٔ شرایط متر را از متر تعریف شده بر روی X به ارث می‌برد. متر تعریف شده توسط d روی Y را متر القایی[۵۷] و فضای (Y,d) را زیرفضای القایی[۵۸] X می‌نامیم. ♣

[۵۷] induced metric
[۵۸] induced subspace

سؤالی که پیش می‌آید این است که آیا در باز یا بسته بودن زیرمجموعه‌های X بعد از تعریف متر القایی تغییری ایجاد می‌شود؟ واضح است که زیر مجموعه‌هایی از X مدنظر ما هستند که زیر مجموعهٔ Y نیز باشند. به عبارت دیگر اگر $H \subseteq Y$ در فضای (X, d) باز باشد آیا در فضای (Y, d) نیز باز است ؟ توجه داریم که در این جا صحبت از دو متر مختلف روی فضای Y نیست. در حقیقت مسالهٔ اصلی این است که زیر مجموعهٔ H ممکن است در فضای Y مورد توجه قرار گیرد یا در فضای X. اجازه دهید به ذکر مثالی بپردازیم.

۱۰.۴.۱ مثال. فضای $X = \mathbb{R}$ با متر اقلیدسی را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $Y = [۰, ۱)$. می‌دانیم $H = [۰, \frac{۱}{۲})$ در فضای X نه بسته است و نه باز. اما همین مجموعه در زیرفضای القایی Y با متر القایی اقلیدسی مجموعه‌ای باز است. تنها نکته‌ای که ممکن است عجیب به نظر برسد این است که چرا نقطه صفر در فضای Y نقطه‌ای درونی برای H است. در حقیقت داریم

$$\begin{aligned} N^Y_{\frac{۱}{۴}}(۰) &= \{x \in Y \mid |x - ۰| < \frac{۱}{۴}\} \\ &= (-\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴}) \cap Y = [۰, \frac{۱}{۴}) \subseteq A, \end{aligned}$$

که در آن $N^Y_{\frac{۱}{۴}}(۰)$ همسایگی به مرکز صفر و شعاع $\frac{۱}{۴}$ می‌باشد. همچنین مجموعهٔ $E = [\frac{۱}{۲}, ۱)$ که در فضای X نه باز و نه بسته است در فضای Y مجموعه‌ای بسته می‌باشد. ممکن است تصور شود که در فضای Y داریم $۱ \in \bar{E}$ و چون $۱ \notin E$ لذا E بسته نیست. اما باید توجه شود که در فضای Y اصولاً نقطهٔ ۱ موجود نیست و لذا اصلاً امکان ندارد که $۱ \in \bar{E}$. ♠

مثال فوق نشان می‌دهد که ممکن است بدون تغییر دادن متر تنها با تغییر دیدگاه خود نسبت به یک مجموعه برداشت های مختلفی در

مورد باز یا بسته بودن آن به دست آوریم. قضیه زیر شناخت جالبی در مورد زیر فضاهای القایی به دست می‌دهد.

۱۱.۴.۱ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک و (Y,d) زیر فضایی القایی از آن باشد. در این صورت $H \subseteq Y$ نسبت به Y باز است فقط و فقط وقتی که زیر مجموعه‌ای نسبت به X باز مانند G از X موجود باشد به قسمی که $H = G \cap Y$.

برهان. فرض کنیم $H \subseteq Y$ نسبت به Y باز باشد. بنابر این برای هر $h \in H$ عددی مانند $r_h > 0$ موجود است به قسمی که $N_{r_h}^Y(h) \subseteq H$. اما

$$N_{r_h}^Y(h) = \{x \in Y \mid d(x,h) < r_h\} = N_{r_h}^X(h) \cap Y.$$

قرار می‌دهیم

$$G = \cup_{h\in H} N_{r_h}^X(h).$$

در این صورت G نسبت به X باز است و داریم

$$\begin{aligned} H &= H \cap Y \\ &= (\cup_{h\in H}\{h\}) \cap Y \subseteq (\cup_{h\in H} N_{r_h}^X(h)) \cap Y \\ &= \cup_{h\in H} N_{r_h}^Y(h) \\ &\subseteq H. \end{aligned}$$

بنابراین

$$H = G \cap Y.$$

بالعکس، فرض کنیم مجموعهٔ نسبت به X بازی مانند G موجود باشد به قسمی که $H = G \cap Y$. نیز فرض کنیم $h \in H$. چون $h \in H \subseteq G$ و

G نسبت به X باز است، لذا $r > ۰$ ی موجود است به قسمی که

$$N_r^X(h) \subseteq G$$

و لذا

$$N_r^Y(h) = N_r^X(h) \cap Y \subseteq G \cap Y = H.$$

بنابراین h نسبت به Y نقطهٔ درونی برای H است و لذا H نسبت به Y باز است. ■

در قضیهٔ بعد به نوعی در مورد عکس این موضوع بحث می‌کنیم. به عبارت دیگر این بار قصد داریم از متر روی زیرمجموعه‌ها به متر روی مجموعه دست یابیم.

۱۲.۴.۱ قضیه. فرض کنیم X یک مجموعه و Y و Z زیرمجموعه‌هایی از آن باشند که $Y \cap Z \neq \phi$ و نیز $X = Y \cup Z$. نیز فرض کنیم $d_۱$ متری روی Y و $d_۲$ متری روی Z باشد. در این صورت

$$d(u,v) = \begin{cases} d_۱(u,v) & u,v \in Y \\ d_۲(u,v) & u,v \in Z \\ \inf\{d_۱(u,t) + d_۲(t,v) \mid t \in Y \cap Z\} & u \in Y, v \in Z \\ \inf\{d_۲(u,t) + d_۱(t,v) \mid t \in Y \cap Z\} & u \in Z, v \in Y \end{cases}$$

برای $u,v \in X$ یک متر روی X می‌باشد.

برهان. فقط به اثبات نامساوی مثلث می‌پردازیم و یکی از حالت‌ها مانند $u \in Y$ و $v,w \in Z$ را در نظر می‌گیریم و $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$ را اثبات می‌کنیم. بقیهٔ حالات نیز به همین ترتیب اثبات می‌شود.

برای $t \in Y \cap Z$ داریم

$$d(u,v) \ \leq \ d_۱(u,t) + d_۲(t,v)$$

$$\begin{aligned} &\leq d_۱(u,t)+d_۲(t,w)+d_۲(w,v) \\ &= d_۱(u,t)+d_۲(t,w)+d(w,v) \end{aligned}$$

و با اینفیمم گرفتن روی t داریم

$$d(u,v) \leq d(u,w)+d(w,v). \blacksquare$$

حال فرض کنیم که خانواده‌ای متناهی از فضاهای متریک مانند $\{(X_i,d_i)\}_{i=۱}^n$ داریم. اگر بتوانیم روی مجموعهٔ $X=\prod_{i=۱}^n X_i$ توسط d_i ها متری تعریف کنیم، بحث در مورد انتقال خواص این فضاهای متریک به فضای X جالب خواهد بود. این که در این جا خود را به تعدادی متناهی فضای متریک محدود می‌کنیم از این جهت است که هنوز شناخت مبسوطی در مورد دنباله‌های نامتناهی از نقاط یک فضای متریک نداریم. در فصل‌های بعدی که تبحر لازم برای برخورد با حالات نامتناهی را کسب کردیم به بحث در مورد خانواده‌ای نامتناهی از فضاهای متریک نیز خواهیم پرداخت. اما اکنون فقط تعدادی متناهی فضای متریک در نظر می‌گیریم و حاصلضرب دکارتی آن‌ها را به یک فضای متریک تبدیل می‌کنیم. در حقیقت این کار به بی‌نهایت روش امکان پذیر است. مجدداً مثال ۷.۲.۱ ایدهٔ این کار را به ما می‌دهد و برهان دقیقاً به همان روش است.

۱۳.۴.۱ قضیه. فرض کنیم $\{(X_i,d_i)\}_{i=۱}^n$ خانواده‌ای متناهی از فضاهای متریک باشد و

$$X=\prod_{i=۱}^n X_i.$$

در این صورت اگر $p \geq ۱$ آن گاه

$$d_p(x,y) = (\sum_{i=۱}^n d_i(x_i,y_i)^p)^{\frac{۱}{p}},$$

$$x = (x_۱, \dots, x_n),\ y = (y_۱, \dots, y_n) \in X$$

یک متر روی X تعریف می‌کند. ■

۱۴.۴.۱ قضیه. فرض کنیم $\{(X_i, d_i)\}_{i=۱}^{n}$ خانواده‌ای متناهی از فضاهای متریک باشد و

$$X = \prod_{i=۱}^{n} X_i.$$

در این صورت

$$d_M(x,y) = \max\{d_i(x_i, y_i) \mid i = ۱, \dots n\},$$
$$x = (x_۱, \dots, x_n)\ ,\ y = (y_۱, \dots, y_n) \in X$$

یک متر روی X تعریف می‌کند. ■

بررسی مفاهیم مربوط به فضاهای متریک از قبیل نقاط درونی، چسبیدگی، حدی، مرزی، بیرونی، منزوی و تراکم برای زیرمجموعه‌ای از X برحسب زیرمجموعه‌های تصویری آن در X_i ها می‌تواند تمرین مناسبی برای آزمودن توانایی شما در درک مفاهیم بخش‌های قبلی باشد.

David Hilbert (1862-1943)

هنر ریاضی ورزیدن متشکل از یافتن حالتی خاص است که منشأ همهٔ کلیت‌ها باشد.

۵.۱ مثال‌ها

گرچه در بخش‌های قبلی به اندازهٔ کافی برای مفاهیم مطرح شده مثال ارائه شده است، با این حال این بخش را به مثال‌ها اختصاص می‌دهیم. مثال‌ها از جهت‌های بسیاری حائز اهمیت هستند. اول آن که بررسی مثال‌های مختلف باعث ایجاد ایدهٔ یک تعریف کلی می‌شود و

دوم آن که بررسی مثال‌ها معمولاً احکامی را به ذهن متبادر می‌سازد که گاهی اوقات اثبات می‌شوند و گاهی اوقات از طریق یافتن مثال نقض‌های جدید رد می‌شوند.

ارائه مثال در این بخش به سه روش صورت می‌پذیرد. یک دسته از مثال‌ها زیرمجموعه‌هایی جالب از فضای اقلیدسی هستند. دستهٔ دیگر از طریق تعریف متری جدید روی همان مجموعهٔ اعداد معمولی حاصل می‌شوند و دستهٔ سوم مثال‌هایی از فضاهای متریک می‌باشند که مجموعهٔ زمینهٔ آن‌ها اشیائی غیر از عدد هستند. برای معرفی این دستهٔ سوم از مثال‌ها باید اندکی با مفاهیم مربوط به این اشیا آشنا باشیم. مثلاً می‌خواهیم روی ماتریس‌ها، گراف‌ها، مجموعهٔ توابع یا چیزهای دیگر متر تعریف کنیم. از آن جایی که به بحثی عمیق در مورد این اشیا احتیاج نداریم از ارائه مفاهیم پیش نیاز در این مورد خودداری می‌کنیم و فرض را بر این می‌گذاریم که این اندک آشنایی را داریم. همچنین در این فصل سعی می‌کنیم از ذکر توضیحات جزئی پرهیز کنیم، زیرا این کار این موقعیت خوب را برای شما فراهم می‌آورد که خود را محک بزنید و ببینید تا چه حد مفاهیم بخش‌های قبلی را فراگرفته‌اید.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)

۱.۵.۱ مثال. در این مثال به معرفی مجموعهٔ کانتور[۵۹] می‌پردازیم. این مجموعه از اهمیت ویژه‌ای در آنالیز ریاضی برخوردار می‌باشد و در بسیاری از مباحث مربوط به آنالیز ظاهر می‌شود.

بازهٔ $[0, 1]$ را در نظر می‌گیریم. این بازه را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم که عبارتند از

$$[0, \tfrac{1}{3}] \qquad [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}] \qquad [\tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{3}]$$

---

[۵۹] Cantor set

حال بازهٔ یک سوم میانی را کنار می‌گذاریم، پس بازه‌های زیر باقی می‌ماند.

$$[0, \frac{1}{3}] \qquad [\frac{2}{3}, \frac{3}{3}]$$

همین کار را با بازه‌های جدید انجام می‌دهیم، یعنی بازه‌های یک سوم میانی آن‌ها را کنار می‌گذاریم، داریم

$$[0, \frac{1}{9}] \quad [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \qquad [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \quad [\frac{8}{9}, \frac{9}{9}]$$

اگر این کار را ادامه دهیم در مرحلهٔ n ام بازه‌های زیر را داریم

$$[0, \frac{1}{3n}][\frac{2}{3n}, \frac{3}{3n}] \qquad [\frac{6}{3n}, \frac{7}{3n}][\frac{8}{3n}, \frac{9}{3n}] \dots$$

$$[\frac{3^n-9}{3n}, \frac{3^n-8}{3n}][\frac{3^n-7}{3n}, \frac{3^n-6}{3n}] \quad [\frac{3^n-3}{3n}, \frac{3^n-2}{3n}][\frac{3^n-1}{3n}, \frac{3^n}{3n}]$$

اجتماع این بازه‌ها را F_n می‌نامیم. چون این بازه‌ها بسته هستند و تعداد آن‌ها متناهی است پس اجتماع آن‌ها نیز بسته است. قرار می‌دهیم

$$C = \cap_{n=1}^{\infty} F_n$$

در این صورت C نیز بسته است. C را مجموعهٔ کانتور می‌نامیم.

اجازه دهید کمی دقیق‌تر به عضوهای C نگاه کنیم. می‌دانیم هر عدد حقیقی مانند r نمایشی در مبنای ۳ به صورت

$$r = \varepsilon_k \varepsilon_{k-1} \dots \varepsilon_1 \varepsilon_0 . \varepsilon_{-1} \varepsilon_{-2} \dots$$

دارد که ε_i ها ۰، ۱ یا ۲ هستند و در حقیقت

$$r = \varepsilon_k 3^k + \varepsilon_{k-1} 3^{k-1} + \dots + \varepsilon_1 3 + \varepsilon_0 + \varepsilon_{-1} \frac{1}{3} + \varepsilon_{-2} \frac{1}{32} + \dots$$

که البته ممکن است دو نمایش مختلف برای r وجود داشته باشد، مثلاً در مبنای ۳ دو نمایش زیر را برای ۱ داریم

$$۱ = ۰/۲۲۲\ldots$$

حال اگر $r \in [۰, ۱]$ آن گاه نمایشی به صورت $r = ۰.\varepsilon_۱\varepsilon_۲\ldots$ دارد و اگر رقم اول بعد از ممیز ۱ باشد و r نمایش دیگری نداشته باشد آن گاه $\frac{۱}{۳} < r < \frac{۲}{۳}$. توجه کنید که $\frac{۱}{۳}$ نمایش

$$\frac{۱}{۳} = ۰/۱ = ۰/۰۲۲۲\ldots$$

را در مبنای ۳ دارد. بنابراین در مرحلهٔ اول که یک سوم میانی را حذف می‌کنیم در حقیقت اعدادی را در نظر می‌گیریم که رقم اول بعد از ممیز آن‌ها ۱ نیست. به همین ترتیب در مرحلهٔ بعد با حذف بازه‌های یک سوم میانی اعدادی در نظر گرفته می‌شوند که رقم دوم بعد از ممیز آن‌ها ۱ نیست. لذا مجموعهٔ کانتور متشکل از همهٔ اعدادی در بازهٔ $[۰, ۱]$ است که در نمایش مبنای سهٔ آن‌ها رقم ۱ نیامده است. این مطلب نشان می‌دهد که مجموعهٔ کانتور زیرمجموعه‌ای ناشمارا و بسته از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ است که شامل هیچ بازه‌ای نمی‌باشد، یعنی درون آن تهی است. ♠

هیچ کس نمی‌تواند ما را از بهشتی که کانتور برای ما خلق کرده است براند.
David Hilbert (1862-1943)

مثال فوق را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد.

۲.۵.۱ مثال. مجدداً بازهٔ $[۰, ۱]$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم

$$\theta_۱, \theta_۲, \ldots$$

اعدادی در بازهٔ $(۰, ۱)$ باشند. این بار در مرحلهٔ اول بازهٔ $\theta_۱$ ام میانی را برمی‌داریم، یعنی بازه‌های

$$[۰, \frac{۱-\theta_۱}{۲}] \qquad [\frac{۱+\theta_۱}{۲}]$$

را در نظر می‌گیریم. سپس برای بازه‌های حاصل بازه‌های θ_2 ام میانی را برمی‌داریم و این کار را ادامه می‌دهیم. اشتراک این مجموعه‌ها را مجموعهٔ کانتور تعمیم یافته متناظر با اعداد[۶۰] $\theta_1, \theta_2, \ldots$ می‌نامیم. ♠

توجه کنید که مجموعهٔ کانتور در حقیقت متناظر با اعداد $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$ می‌باشد. بررسی خواص این مجموعه تمرین مناسبی برای درک مجموعهٔ کانتور است. می‌توان این ایده را در ابعاد بالاتر نیز به کار برد. مثلاً اگر به جای بازهٔ $[0, 1]$ مربع $[0, 1] \times [0, 1]$ را در نظر بگیریم و این حذف کردن‌های متوالی را انجام دهیم به تعمیم دو بعدی مجموعهٔ کانتور خواهیم رسید.

حال می‌خواهیم به ارائه مثال در مورد متری غیراقلیدسی و غیر گسسته روی مجموعهٔ اعداد بپردازیم. اگر توجه کنید همهٔ مثال‌های ما در بخش‌های قبل محدود به همین دو متر بود. برای درک مثال بعد لازم است کمی نظریه اعداد بدانید، ولی فقط کمی!

۳.۵.۱ مثال. فرض کنیم p عددی اول باشد. ابتدا یک متر روی $\mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم و سپس آن را به $\mathbb{Q}$ تعمیم می‌دهیم. فرض کنیم m و n دو عدد صحیح دلخواه باشند. $|m-n|$ را در نظر می‌گیریم. اگر این عدد برابر صفر نباشد، می‌توان آن را به صورت $p^\alpha \beta$ نوشت که α عددی طبیعی یا 0 است و β مضرب p نیست، به عبارت دیگر p^α بیش‌ترین توان ممکن از p است که مقسوم‌علیه $|m-n|$ می‌باشد. این عدد α را با $e(p, m-n)$ نمایش می‌دهیم. حال فاصلهٔ m تا n را با نماد $|m-n|_p$ بصورت

$$|m-n|_p = \begin{cases} \frac{1}{p^{e(p,m-n)}} & m \neq n \\ 0 & m = n \end{cases}$$

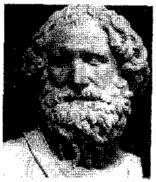
---

[۶۰] generalized Cantor set associated with the numbers

تعریف می‌کنیم. این تعریف را می‌توان به اعداد گویا به صورت زیر تعمیم داد.

فرض کنیم r و s دو عدد گویا باشند و $|r-s| = \frac{a}{b}$. قرار می‌دهیم

$$|r-s|_p = \begin{cases} \frac{1}{p^{e(p,a)-e(p,b)}} & r \neq s \\ 0 & r = s \end{cases}$$



Archimedes of Syracuse (287-212BC)

یوریکا! یوریکا! (یافتم! یافتم!)

می‌توان نشان داد (چگونه؟) که تعریف فوق یک متر روی $\mathbb{Q}$ به دست می‌دهد و حتی نامساوی مثلث به صورت جالب زیر برقرار است

$$|r-s|_p \leq \max\{|r-t|_p, |t-s|_p\} \qquad r,s,t \in \mathbb{Q}.$$

متری مانند d که به جای نامساوی مثلث در نامساوی بهتر $d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}$ صدق کند متر غیر ارشمیدسی[۶۱] نامیده می‌شود. در این گونه فضاها می‌توان اثبات کرد که هر مثلثی متساوی‌الساقین است. زیرا فرض کنیم x، y و z رئوس یک مثلث متساوی‌الساقین در یک فضای متریک غیر ارشمیدسی[۶۲] مانند (X,d) باشند و مثلاً xy ضلع بزرگ‌تر باشد. در این صورت

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}.$$

مثلاً فرض کنیم $\max\{d(x,z), d(z,y)\} = d(x,z)$. لذا $d(x,y) \leq d(x,z)$ و چون $d(x,y)$ ضلع بزرگ‌تر بود پس $d(x,z) \leq d(x,y)$ و در نتیجه $d(x,z) = d(x,y)$. پس مثلث xyz متساوی‌الساقین است و ساق، ضلع بزرگ‌تر!

فضای متریک $(\mathbb{Q}, |.|_p)$ را فضای اعداد گویای p-ادیک[۶۳] می‌نامیم[۶۴]. ♠

[۶۱] non-Archimedian metric
[۶۲] non-Archimedian metric space
[۶۳] rational p-adic numbers space
[۶۴] گاهی اوقات ترجمهٔ اعداد p-یی را نیز به کار می‌برند.

اکنون به معرفی چند فضای متریک می‌پردازیم که روی مجموعه‌هایی غیر از اعداد تعریف شده‌اند.

۴.۵.۱ مثال. فرض کنیم $M_{nm}(\mathbb{C})$ مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های $n \times m$ با درآیه‌های مختلط باشد. یک عضو دلخواه از این مجموعه را می‌توان به صورت $A = [a_{ij}]_{nm}$ یا به طور مختصر $A = [a_{ij}]$ نمایش داد. می‌توان این مجموعه را با $\mathbb{C}^{nm}$ یکی گرفت و لذا مترهای d_p مذکور در مثال ۷.۲.۱ را می‌توان روی این مجموعه تعریف کرد. اما مترهای دیگری نیز وجود دارد که در زیر به شرح آن‌ها می‌پردازیم. بدین منظور نرم‌هایی روی این مجموعه تعریف می‌کنیم و همان طور که می‌دانیم هر فضای نرمدار مانند $(X, \|.\|)$ را می‌توان به سادگی با تعریف $d(x,y) = \|x-y\|$ به یک فضای متریک تبدیل کرد. در این جا به معرفی این نرم‌ها می‌پردازیم و تأکید می‌کنیم که بررسی جزئیات و نرم بودن توابع ارائه شده را هرگز فراموش نکنید. این حداقل کاری است که برای آزمودن خود باید انجام دهید!

نرم ماکزیمم جمع ستونی[۶۵] با نماد $\|.\|_C$ به صورت

$$\|A\|_C = \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad A = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{C})$$

تعریف می‌شود. همچنین نرم ماکزیمم جمع سطری[۶۶] با نماد $\|.\|_R$ به صورت

$$\|A\|_R = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|, \qquad A = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{C})$$

تعریف می‌شود. نرم دیگری که از اهمیت ویژه‌ای در نظریهٔ عملگرها[۶۷]

[۶۵] maximum column sum norm
[۶۶] maximum row sum norm
[۶۷] operator theory

برخوردار است نرمی موسوم به نرم عملگری[۶۸] می‌باشد. فرض کنیم $\|\cdot\|_۱$ و $\|\cdot\|_۲$ به ترتیب نرم‌های دلخواهی روی $\mathbb{C}^m$ و $\mathbb{C}^n$ باشند. اگر x ماتریس ستونی با درآیه‌های $x_۱,\ldots,x_m$ باشد آن گاه برای هر ماتریس $n\times m$ مانند $A=[a_{ij}]$ داریم $Ax\in\mathbb{C}^n$. حال نرم عملگری القا شده توسط[۶۹] $\|\cdot\|_۱$ و $\|\cdot\|_۲$ روی $M_{nm}(\mathbb{C})$ به صورت

$$\|A\|_{۱۲}=\max\{\|Ax\|_۲ \quad | \quad \|x\|_۱=۱\}$$

تعریف می‌شود. ♠

فضای متریک بعدی که معرفی می‌کنیم روی رئوس یک گراف[۷۰] تعریف می‌شود.

۵.۵.۱ مثال. فرض کنیم $G=(V,E)$ گرافی همبند[۷۱] با مجموعه رئوس متناهی V و مجموعه یال‌های متناهی E باشد، یعنی بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. روی V متر d را به صورت

$$d(u,v)=\text{طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن بین } u \text{ و } v$$

تعریف می‌کنیم. شرط متناهی بودن گراف و وجود مسیر بین هر دو رأس، d را خوشتعریف می‌سازد. همچنین متقارن بودن این متر به دلیل جهتدار نبودن گراف واضح است. ♠

۶.۵.۱ مثال. دیدیم که وجود متر روی یک فضا کمک می‌کند بتوانیم کراندار بودن را برای زیرمجموعه‌های آن تعریف کنیم. لذا اگر

---

[۶۸] operator norm

[۶۹] operator norm induced by

[۷۰] graph

[۷۱] connected

Z مجموعه‌ای دلخواه و (X, d) فضایی متریک باشد آن گاه برای هر نگاشت مانند $f : Z \to X$، می‌توان گفت f یک نگاشت کراندار[۷۲] است هرگاه $f(Z)$ زیرمجموعه‌ای کراندار از X باشد. مجموعهٔ همهٔ نگاشت‌های کراندار روی Z به توی X را با $\mathcal{B}(Z, X)$ نمایش می‌دهیم. روی این مجموعه متری با نماد d_∞ به صورت

$$d_\infty(f, g) = \sup\{d(f(z), g(z)) \mid z \in Z\}, \qquad f, g \in \mathcal{B}(Z, X)$$

تعریف می‌شود. ♠

بررسی مفاهیم مربوط به فضاهای متریک در مورد فضاهای ارائه شده در این بخش بسیار سودمند خواهد بود. البته در فصل‌های بعدی نیز در هر فصل بخشی را به مثال‌ها اختصاص می‌دهیم و مجدداً این فضاها را با توجه به مفاهیم جدید ارائه شده در آن فصل‌ها مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

این بخش را با مثالی دیگر به پایان می‌بریم.

۷.۵.۱ مثال. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک، $\mathcal{B}_0$ خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های کراندار و ناتهی X و نیز $\mathcal{H}$ خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های بستهٔ $\mathcal{B}_0$ باشد. اگر τ تابع خروج از مرکز باشد، تابع σ را روی $\mathcal{H}$ به صورت

$$\sigma(A, B) = \max\{\tau(A, B), \tau(B, A)\}, \qquad A, B \in \mathcal{H}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت σ یک متر روی $\mathcal{H}$ است که متر هاسدورف[۷۳] روی $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود. ♠

البته نمونه‌های بسیار زیادی از فضاهای متریک وجود دارد که در کاربرد نیز اهمیت فراوانی دارند. به هر حال این اندک شاید در درک

---

[۷۲] bounded mapping
[۷۳] Hausdorff metric

بهتر از مفاهیم این فصل مؤثر باشد. بررسی جزئیات مطالب گفته شده در این بخش، قدرت شما را برای ورود به مباحث بعدی افزایش می‌دهد.

۶.۱ تمرین‌ها

Omar Khayyam (1048-1131)

از جرمِ گِلِ سیاه تا اوجِ زحل، کردم همه مشکلاتِ کلی را حل بگشادم بندهایِ مشکل به حیَل، هر بند گشاده شد به جز بندِ اجل

اهمیت حل کردن تمرین‌ها و مسائل را هرگز فراموش نکنید، چرا که به قول هالموس، مسائل قلب ریاضیات هستند. اگر نتوانستید تمرینی را حل کنید ناامید نشوید. در حقیقت این خوش اقبال بودن شما را نشان می‌دهد. چون این مطلب باعث می‌شود دوباره درس را بخوانید و اگر این بخت را داشته باشید که باز هم حل نشود بارها و بارها درس را مرور می‌کنید و اهمیت ترفندهای به کار رفته در برهان‌ها را بهتر درک خواهید کرد.

تصور کنید تمرینی در همان ابتدا بی تحمل سختی حل شود. در این صورت آیا لذتی از حل مشکل خواهید برد؟ تمرین حل کردن همانند صخره نوردی است. اگر به وسیلهٔ یک بالابر شما را به بالای صخره ببرند تا پرچم خود را بر چکاد آن به اهتزاز درآورید، در درون خود احساس کامیابی خواهید کرد؟ این که هر کسی با مطالعهٔ مبحثی از ریاضیات لزوماً نمی‌تواند همهٔ مسأله‌های مربوط به آن مبحث را حل کند و این کار احتیاج به نوعی ممارست و ابتکار دارد، ریاضیات را زیبا می‌سازد. حل یک مسأله توسط شما برتری شما را در استدلال و خلاقیت نشان می‌دهد و هرچه مسأله‌ای سخت‌تر باشد، از حل آن بیش‌تر لذت خواهید برد. نگران نباشید و فکر نکنید اگر اصلاً حل نشود چه اتفاقی خواهد افتاد. راهنمایی اهل فن می‌تواند بسیار مؤثر

باشد. به جنبه‌های مثبت حل مسأله فکر کنید و از درگیر شدن با مسأله نهراسید.

۱.۶.۱ نشان دهید شرط اول در تعریف متر زائد است و می‌توان آن را از شرط‌های دیگر نتیجه گرفت. همچنین نشان دهید اگر شرط اول را داشته باشیم و نامساوی مثلث به صورت

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$$

برقرار باشد آن گاه شرط متقارن بودن زائد است.

۲.۶.۱ فرض کنیم یک پادمتر[۷۴] تابعی باشد که کلیهٔ خواص متر را دارد مگر نامساوی مثلث و نامساوی مثلث در جهت عکس همواره برقرار باشد. آیا چنین تعریفی اصولاً فایده‌ای دارد؟

۳.۶.۱ فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد. ثابت کنید

$$|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w),$$

که در آن $x,y,z,w \in X$.

۴.۶.۱ نشان دهید اگر $p < ۱$ آن گاه d_p یک متر روی $\mathbb{R}^n$ نیست (مثال ۷.۲.۱ را ببینید).

۵.۶.۱ نشان دهید در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ داریم $\mathbb{Q}' = \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^{c\prime} = \overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R}$.

۶.۶.۱ برای $A = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n,m \in \mathbb{N}\}$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ مجموعهٔ A' را تعیین کنید.

---

[۷۴] antimetric

۷.۶.۱ نشان دهید در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ مجموعه‌های ϕ و $\mathbb{R}^n$ تنها زیرمجموعه‌های هم باز هم بستهٔ $\mathbb{R}^n$ هستند.

۸.۶.۱ مجموعهٔ نقاط حدی مجموعهٔ

$$A = \{(-۱)^n(۱ + \frac{۱}{n})^{n-۱} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

را در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ بیابید.

۹.۶.۱ آیا هر نقطه از یک زیرمجموعهٔ باز فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ نقطه‌ای حدی از آن است؟

۱۰.۶.۱ آیا این حکم درست است که برای هر زیرمجموعهٔ باز مانند G از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ تعدادی متناهی نقطه مانند $x_۱$، ...، x_n موجود است که $G \cup \{x_۱, \dots x_n\}$ بسته باشد؟

۱۱.۶.۱ آیا این حکم درست است که هر زیرمجموعهٔ بسته مانند F از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ که درون آن تهی است حداکثر شماراست؟

۱۲.۶.۱ فرض کنیم G زیرمجموعه‌ای باز و کراندار و F زیرمجموعه‌ای بسته از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد که $G \subseteq F$. ثابت کنید اعدادی حقیقی مانند $\alpha_۱$، ...، α_n و نیز اعدادی حقیقی مانند $\beta_۱$، ...، β_n موجودند که $F \subseteq \cup_{i=۱}^{n}(\alpha_i, \beta_i) \subseteq G$.

۱۳.۶.۱ ثابت کنید اگر $G_۱$ و $G_۲$ زیرمجموعه‌های بازی از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشند آن گاه $G_۱ + G_۲$ نیز باز است.

۱۴.۶.۱ فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای ناشمارا از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد. آیا A لزوماً نقطهٔ حدی گویا دارد؟

۱۵.۶.۱ فرض کنیم $\mathcal{A}$ خانواده‌ای متناهی از گوی‌های باز در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ باشد که اجتماع آن‌ها شامل E است. ثابت کنید زیرخانواده‌ای دو به دو مجزا از گوی‌های باز مانند $B_۱$، ...، B_n در $\mathcal{A}$ موجود است به قسمی که $E \subseteq \cup_{i=۱}^{n} ۳B_i$، که در آن $۳B_i$ گوی بازی است که مرکز آن همان مرکز B_i است و شعاع آن ۳ برابر شعاع B_i می‌باشد.

۱۶.۶.۱ آیا خانواده‌ای نامتناهی از گوی‌های بسته مانند $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ به ترتیب با مراکز $c_۱$، $c_۲$، ... در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ موجود است به قسمی که $\{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ نقطهٔ حدی نداشته باشد، مجموع مساحت F_n ها متناهی باشد و هر خط در صفحه حداقل یکی از F_n ها را قطع کند؟

۱۷.۶.۱ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d_۲(x, a) = r\}$ را یک ابَرکُره [۷۵] به مرکز a و شعاع r می‌نامیم. فرض کنیم $n \geq ۲$ و S خانواده‌ای از ابرکره‌ها در $\mathbb{R}^n$ باشد که اشتراک هر دو تا از آن‌ها حداکثر یک نقطه دارد. نیز فرض کنیم M مجموعهٔ نقاطی باشد که حداقل متعلق به دو ابرکرهٔ متفاوت از S هستند. ثابت کنید M شماراست.

۱۸.۶.۱ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ فرض کنیم

$$A = \{(x, y) \mid xy > ۱\}.$$

آیا A بسته است؟ آیا A باز است؟

۱۹.۶.۱ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ فرض کنیم

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^۲ \mid x^۲ + y^۲ < ۱\}.$$

مجموعه‌های A° و $\bar{A}$ را بیابید.

---

[۷۵] hypersphere

۲۰.۶.۱ سه متر مختلف روی $\mathbb{N}$ مثال بزنید که هیچ یک مضرب دیگری نباشد.

۲۱.۶.۱ شکلی هندسی برای توصیف یک فضای گسسته با یک، دو، سه و چهار نقطه ارائه دهید. آیا می‌توانید یک فضای پنج نقطه‌ای گسسته را با یک شکل نشان دهید؟

۲۲.۶.۱ فرض کنیم (X, d) فضایی متریک باشد که شامل یک زیرمجموعهٔ باز متناهی مانند G است. ثابت کنید هر زیرمجموعهٔ G باز می‌باشد.

۲۳.۶.۱ ثابت کنید هر زیرمجموعه از فضای متریک (X, d) باز است فقط و فقط وقتی که هیچ زیرمجموعهٔ X نقطهٔ حدی نداشته باشد.

۲۴.۶.۱ فرض کنیم $\|.\|$ نرمی روی $\mathbb{C}^n$ باشد. برای چه ماتریس‌های $n \times n$ ی مانند N تابع

$$\|x\|_N = \|Nx\|, \qquad x \in \mathbb{C}^n$$

یک نرم روی $\mathbb{C}^n$ است؟

۲۵.۶.۱ ثابت کنید هر دو نرم دلخواه روی $\mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$ معادلند.

۲۶.۶.۱ آیا این حکم درست است که اگر A و B زیرمجموعه‌هایی مجزا از یک فضای متریک باشند آن گاه بستار A و درون B مجزا هستند؟

۲۷.۶.۱ ثابت کنید در هر فضای متریک مانند (X, d) برای هر زیرمجموعه از X مانند A همواره داریم $\bar{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = ۰\}$.

۲۸.۶.۱ آیا احکام $\overline{A^\circ} = A$, $\bar{A} \cap A = A$, $\bar{A}^\circ = A^\circ$ برای یک زیرمجموعه مانند A از یک فضای متریک درست است؟

۲۹.۶.۱ ثابت کنید فضاهای متریک نرمال[۷۶] هستند، بدین معنی که برای هر دو مجموعهٔ بستهٔ مجزا مانند E و F دو مجموعهٔ باز مجزا مانند H و G موجودند به قسمی که $E \subseteq H$ و $F \subseteq G$.

۳۰.۶.۱ ثابت کنید در هر فضای متریک یک زیرمجموعه باز است فقط و فقط وقتی که اجتماعی از گوی‌های باز باشد.

۳۱.۶.۱ فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای دلخواه از فضای متریک (X, d) باشد. ثابت کنید همواره $\partial(\partial(\partial(A))) = \partial(\partial(A))$.

۳۲.۶.۱ ثابت کنید $\mathbb{Q}$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ یک مجموعهٔ G_δ نیست.

۳۳.۶.۱ ثابت کنید در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ زیرمجموعه‌هایی وجود دارند که نه G_δ هستند و نه F_σ.

۳۴.۶.۱ ثابت کنید در هر فضای متریک داریم

$$\inf\{d(x, A) \mid x \in B\} = \inf\{d(x, B) \mid x \in A\},$$

که در آن A و B زیرمجموعه‌های دلخواهی از X هستند.

۳۵.۶.۱ آیا اشتراک هر دو زیرمجموعهٔ شمارا و چگال از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ ناتهی است؟

---

[۷۶] normal

۳۶.۶.۱ فرض کنیم F زیرمجموعه‌ای بسته از $\mathbb{R}^n$ باشد و A مجموعهٔ همهٔ نقاطی مانند a در $\mathbb{R}^n$ که دقیقاً یک نقطه مانند x_a در F موجود باشد به قسمی که

$$|x_a - a| = \inf\{|x-a| \mid x \in F\}.$$

ثابت کنید A در $\mathbb{R}^n$ چگال است.

Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848)

۳۷.۶.۱ فرض کنیم (X,d) فضایی متریک، G زیرمجموعه‌ای باز و A زیرمجموعه‌ای دلخواه از X باشد. ثابت کنید $\overline{G \cap A} = \overline{G \cap \overline{A}}$ و نتیجه بگیرید که اشتراک یک زیرمجموعهٔ باز و چگال با یک زیرمجموعهٔ چگال مجموعه‌ای چگال است.

۳۸.۶.۱ ثابت کنید هر زیرمجموعهٔ نامتناهی و کراندار در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^k$ نقطهٔ حدی دارد. این حکم به قضیهٔ بولزانو–وایرشتراس[۷۷] معروف است.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)

۳۹.۶.۱ فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد که در آن هر زیرمجموعهٔ نامتناهی نقطهٔ حدی دارد. ثابت کنید X تفکیک پذیر است.

۴۰.۶.۱ ثابت کنید هر زیرمجموعهٔ باز از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ اجتماع شمارایی از بازه‌های باز دو به دو مجزاست.

۴۱.۶.۱ ثابت کنید هر مجموعهٔ بی‌کاست ناتهی در $\mathbb{R}^k$ ناشماراست.

۴۲.۶.۱ ثابت کنید مجموعهٔ نقاط منزوی هر زیرمجموعه از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ شماراست.

---

[۷۷] Bolzano-Weierstrass theorem

۴۳.۶.۱ ثابت کنید هر خانواده از مجموعه‌های باز دو به دو مجزا در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^k$ لزوماً شماراست. خانواده‌ای ناشمارا از مجموعه‌های بستهٔ دو به دو مجزا در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ مثال بزنید.

۴۴.۶.۱ ثابت کنید هر مجموعهٔ بستهٔ ناشمارا مانند F در $\mathbb{R}^k$ را می‌توان به صورت $A \cup B$ نوشت که A بی‌کاست و B شماراست. این حکم به قضیهٔ کانتور-بندیکسون [۷۸] معروف است.

Ivar Otto Bendixson (1861-1935)

۴۵.۶.۱ ثابت کنید در هر فضای متریک، بستار هر مجموعهٔ هیچ‌جا چگال و هر زیرمجموعه از یک مجموعهٔ هیچ‌جا چگال مجموعه‌ای هیچ‌جا چگال است.

۴۶.۶.۱ ثابت کنید که اجتماع متناهی از مجموعه‌های هیچ‌جا چگال مجموعه‌ای هیچ‌جا چگال است.

۴۷.۶.۱ فرض کنیم F زیرمجموعه‌ای بسته و A زیرمجموعه‌ای دلخواه از فضای متریک (X,d) باشند که $F^\circ = A^\circ = \phi$. ثابت کنید $(F \cup A)^\circ = \phi$.

۴۸.۶.۱ فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد و (Y,d) زیرفضایی القایی از آن. شرطی لازم و کافی برای $A \subseteq Y$ مجموعه‌ای G_δ باشد را برحسب زیرمجموعه‌های G_δ ی X بیان و اثبات کنید و برای زیرمجموعه‌های F_σ نیز حکم مشابهی ارائه دهید.

۴۹.۶.۱ ثابت کنید d_2 و d_M روی $\mathbb{R}^n$ معادلند ولی با متر گسسته معادل نیستند.

---
[۷۸] Cantor-Bendixson theorem

۵۰.۶.۱ فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد و $d_n(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+nd(x,y)}$. آیا d و d_n معادلند؟ آیا d و d_n به طور توپولوژیکی معادلند؟

۵۱.۶.۱ فرض کنیم d_1، ...، d_n مترهایی روی X باشند. توسط این مترها مترهای جدیدی روی X تعریف کنید و معادل بودن آن‌ها را بررسی کنید.

۵۲.۶.۱ فرض کنیم d_1، ...، d_n بترتیب مترهایی روی X_1، ...، X_n باشند. توسط این مترها مترهای جدیدی روی $X = \prod_{i=1}^n X_i$ تعریف کنید و معادل بودن آن‌ها را بررسی کنید. همچنین ارتباطی بین زیرمجموعه‌های باز X_i ها و X بیابید و آن را اثبات کنید.

۵۳.۶.۱ فرض کنیم a و b دو عدد اصم باشند. نشان دهید $(a,b)\cap\mathbb{Q}$ در فضای القایی $(\mathbb{Q}, \|\cdot\|)$ هم باز و هم بسته است.

۵۴.۶.۱ فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد. ثابت کنید $\tilde{d}(x,y) = (d(x,y))^{\frac{1}{2}}$ نیز یک متر روی X تعریف می‌کند. برای چه توابعی مانند f تابع $\tilde{d} = f\circ d$ همواره یک متر است؟

۵۵.۶.۱ فرض کنیم X یک مجموعه و (Y, d_Y) یک فضای متریک باشد. برای چه توابعی مانند $f : X \to Y$ تابع $d_X(x,y) = d_Y(f(x), f(y))$ یک متر روی X به دست می‌دهد؟ در حالت خاص که $X = \mathbb{R}$ و نیز Y فضای اقلیدسی باشد، آیا هر متری روی X از همین طریق به دست می‌آید؟

۵۶.۶.۱ فضای $M_n(\mathbb{C})$ متشکل از همهٔ ماتریس‌های $n\times n$ را با نرم عملگری القا شده توسط نرم اقلیدسی در نظر می‌گیریم. فرض کنیم A

ماتریسی با درآیه‌های حقیقی باشد که به ازای هر عدد طبیعی مانند k،

$$\|A^k - A^{k-1}\| \leq \frac{1}{2002k}.$$

ثابت کنید به ازای هر k ی طبیعی داریم $\|A^k\| \leq 2002$.

۵۷.۶.۱ ثابت کنید در یک فضای متریک غیر ارشمیدسی هر نقطه درون یک گوی باز مرکز همان گوی با همان شعاع است.

۵۸.۶.۱ ثابت کنید برای یک فضای متریک مانند (X,d) کوچک‌ترین عدد اصلی $\mathfrak{a}$ وجود دارد به قسمی که X پایه‌ای مانند $\mathcal{B}$ دارد که $\mathrm{Card}\ \mathcal{B} = \mathfrak{a}$. این عدد را وزن[۷۹] X می‌نامیم. بنابراین X در اصل دوم شمارایی صدق می‌کند فقط و فقط وقتی که وزن آن کوچک‌تر یا مساوی عدد اصلی $\mathbb{R}$ یعنی $\aleph$، باشد. نشان دهید وزن X کوچک‌ترین عدد اصلی مانند $\mathfrak{a}$ با این خاصیت است که زیرمجموعه‌ای مانند M با شرط $\mathrm{Card\ M} = \mathfrak{a}$ موجود باشد به قسمی که $\bar{M} = X$. نشان دهید اگر وزن X برابر $\mathfrak{a}$ باشد آن گاه عدد اصلی خانواده‌ای دو به دو مجزا از مجموعه‌های باز در X نمی‌تواند از $\mathfrak{a}$ بیش‌تر باشد.

۵۹.۶.۱ فضای $M_n(\mathbb{C})$ متشکل از همهٔ ماتریس‌های $n \times n$ بادرآیه‌های مختلط را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید

$$\|A\|_r = \sum_{i=1}^{n} \max\{|a_{i1}|, \ldots, |a_{in}|\}, \qquad A \in M_n(\mathbb{C})$$

یک نرم روی این فضا تعریف می‌کند. این نرم را نرم جمع ماکزیمم سطری[۸۰] می‌نامیم. فرض کنیم $\|\cdot\|_1$ نرم تعریف شده به صورت $\|\cdot\|_p$ برای $p = 1$ روی $\mathbb{C}^n$ یعنی

$$\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$$

---

[۷۹] weight

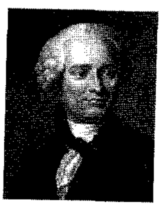
[۸۰] row maximum sum norm

باشد. ثابت کنید اگر $\|\cdot\|_{11}$ نرم عملگری القا شده به وسیلهٔ $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_1$ روی $M_n(\mathbb{C})$ باشد آن گاه داریم $\|\cdot\|_r \le \|\cdot\|_{11}$. همچنین نشان دهید که اگر $\|A\|_r < 1$ آن گاه $I - A$ ماتریسی معکوسپذیر است که در آن I ماتریس همانی در $M_n(\mathbb{C})$ می‌باشد.

۲

دنباله‌ها و تورها

۱.۲ مقدمه



Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783)

همان طور که در فصل قبل دیدیم، بررسی مفهوم فاصله روی نقاط یک مجموعه به درک نسبی ما از هندسه آن مجموعه کمک می‌کند و باعث می‌شود تا برخی مفاهیم مقدماتی و پیشرفته که از مفهوم فاصله نشأت می‌گیرد به وجود آید، که در پی آن مسائل ساده و پیچیدهٔ مختلفی نیز ظاهر می‌گردد و دیدیم که چگونه می‌توان بر حل این مسائل فائق آمد.

اما باید اعتراف کنیم که هدف اصلی ما از تعریف فاصله روی نقاط یک مجموعه نه تنها بررسی مباحث هندسی این مجموعه، بلکه مفاهیم حدی روی آن نیز می‌باشد و شاید بتوان گفت که این موضوع اخیر از اهمیت بیش‌تری نیز برخوردار است. برای آن که بتوانیم در مورد مفهوم حد در یک مجموعه چه به عنوان حد توابع تعریف شده روی آن و چه در حالت ساده‌تر به عنوان حد خود نقاط مجموعه صحبت

کنیم باید بتوانیم در مورد مفهوم میل کردن صحبت کنیم و میل کردن یعنی کم شدن فاصله. لذا می‌توان گفت تعریف فاصله روی نقاط یک مجموعه، نقطهٔ شروع خوب و پیش نیاز مناسبی برای تعریف میل کردن و نهایتاً تعریف حد می‌باشد.

به سادگی می‌توان پیش بینی کرد که منظور از میل کردن مجموعه‌ای از نقاط یک فضای متریک مانند (X,d) به نقطه‌ای مانند x کم شدن فاصله بین آن‌ها می‌باشد، اما آنچه حائز اهمیت است این است که این کم شدن تا چه میزانی باید صورت گیرد. اگر کم شدن فاصله به مفهوم صفر شدن فاصله باشد، عملاً در بسیاری از موارد دست ما بسته می‌شود، چون در بسیاری حالات می‌توان به هر اندازه دلخواه به نقطه x نزدیک شد، گرچه هیچ گاه نمی‌توانیم دقیقاً به خود نقطه x برسیم. پس میزان لازمی برای نزدیک شدن به نقطه x مد نظر است که به فراخور مسأله تعیین می‌شود و می‌تواند هر عدد مثبتی اعم از کوچک یا بزرگ باشد. این که برای حصول به این میزان لازم چه کارهایی کافی است تا انجام شود به وضعیت فضای ما و نقاط مورد بحث بستگی دارد.

در این فصل به این مفهوم دقت خواهیم بخشید و مفاهیم و مسائل حاصله از آن را مورد بررسی قرار خواهیم داد. لازم به ذکر است که این فصل به مفهوم میل کردن نقاط یک فضای متریک به یکدیگر می‌پردازد و مفهوم حد توابع تعریف شده روی فضاهای متریک را به فصل دیگری موکول می‌کنیم. همانند فصل قبل با تعاریف مقدماتی شروع می‌کنیم و سپس به مفاهیم پیچیده خواهیم پرداخت.

۲.۲ همگرایی

قبل از آن که در مورد میل کردن مجموعه‌ای از نقاط به نقطه‌ای خاص صحبت کنیم باید مشخص کنیم این مجموعه نقاط چه مجموعه‌ای باید باشد.

Julius Wihelm Richard Dedekind (1831-1916)

اعداد، مخلوقات آزاد ذهن بشر هستند.

به دلیل ساده شدن بحث ابتدا مجموعه‌ای شمارا از نقاط را در نظر می‌گیریم. واضح است که وقتی این مجموعه شمارا باشد می‌توان اعضای آن را توسط $\mathbb{N}$ شماره‌گذاری کرد. به بیان دقیق‌تر می‌توان این مجموعه را یک دنباله تلقی کرد.

۱.۲.۲ تعریف. فرض کنیم X یک مجموعه باشد. هر تابع بر $\mathbb{N}$ به توی X یک دنباله[1] در X نامیده می‌شود. ♣

مقدار این تابع در نقطهٔ $n \in \mathbb{N}$ را با x_n نمایش می‌دهیم و خود دنباله را با نماد

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

یا به اختصار توسط $\{x_n\}$ مشخص می‌کنیم. ذکر چند نکته در این جا ضروری به نظر می‌رسد. اول این که دنبالهٔ $\{x_n\}$ را نباید با مجموعه $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ اشتباه گرفت. در حقیقت دو تفاوت اساسی بین دنباله و مجموعه وجود دارد. در یک دنباله می‌توانیم جمله تکراری داشته باشیم چون کاملاً قابل پیش بینی است که یک تابع می‌تواند یک به یک نباشد و لذا این امکان وجود دارد که برای m و n متمایزی در $\mathbb{N}$ داشته باشیم $x_n = x_m$. اما همان طور که می‌دانیم در مجموعه تکرار جایز نیست. به علاوه در دنباله ترتیب اهمیت دارد زیرا مثلاً دنباله‌ای که برای آن $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$، با دنباله‌ای که $x_1 = 2$ و $x_2 = 1$ کاملاً

---

[1] sequence

متفاوت است. گرچه نماد مجموعه و دنباله یکی است با این حال با ذکر کلمه " دنباله " بر تفاوت این دو تأکید می‌کنیم. لذا آمدن کلمه دنباله در جمله مورد بحث ابهام این نماد گذاری را از بین خواهد برد.

دوم این که بین دنبالهٔ $\{x_n\}$ و مجموعهٔ مقادیر $\{x_n\}$ یعنی مجموعه $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ که در قضایا ظاهر می‌شوند باید تمایز قائل شد. چون گرچه دنباله $\{x_n\}$ مجموعه‌ای نامتناهی از زوج مرتب‌های (n, x_n) را مشخص می‌سازد با این حال ممکن است مجموعه مقادیر $\{x_n\}$ مجموعه‌ای متناهی باشد.

سوم این که تعریف دنباله به این شکل ما را در بررسی رفتار زیرمجموعه‌ای دلخواه از فضای متریک محدود نمی‌کند و اگر بخواهیم رفتار زیرمجموعه‌ای متناهی از فضای متریک را بررسی کنیم می‌توانیم آن را به عنوان دنباله‌ای با مجموعه مقادیر متناهی تلقی کنیم. البته این تعریف از جهتی ما را در انتخاب زیرمجموعهٔ دلخواه از نقاط X محدود می‌کند و آن این است که طبق این تعریف فقط مجازیم رفتار زیرمجموعه‌های شمارا از X را مورد بررسی قرار دهیم و همان طور که قبل از تعریف ذکر شد آن حالت کلی را به بعد موکول می‌کنیم و اکنون برای ساده شدن بحث به دنباله‌ها می‌پردازیم.

در تعریف دنباله دیدیم که X می‌تواند مجموعه‌ای دلخواه و نه فضای متریک باشد. اما فضاهای متریک کمک می‌کند بتوانیم رفتار دنباله را مورد بررسی قرار دهیم.

۲.۲.۲ تعریف. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در آن باشد. گوییم دنباله $\{x_n\}$ به حد[۲] $x \in X$ همگراست[۳] یا به نقطهٔ

---

[۲] limit
[۳] converges

زندگی همگراست یا واگرا؟

x میل می‌کند[۴] و می‌نویسیم $x_n \to x$ هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $n \geq K_\varepsilon$ داشته باشیم $d(x_n, x) < \varepsilon$. در غیر این صورت دنباله را واگرا[۵] می‌نامیم. ♣

عدد $\varepsilon > 0$ ظاهر شده در تعریف همگرایی دنباله، همان میزان لازم نزدیک شدن به نقطه x را تعیین می‌کند و این که تحقق شرط برای هر $\varepsilon > 0$ مد نظر است بدین معنی است که این شرط برای هر ε ی که مقدار آن بسته به نوع مسأله هر عدد مثبتی می‌تواند باشد باید برقرار گردد. همچنین کاری که کافی است انجام دهیم تا همگرایی $\{x_n\}$ به x تضمین شود آن است که K_ε را در $\mathbb{N}$ بیابیم. این که عدد مذکور به صورت K_ε نوشته شده است تأکیدی بر آن است که عدد مورد نظر باید صرفاً تابعی از ε باشد و معرفی این عدد به عنوان تابعی از n کاملاً اشتباه است چرا که سور عمومی مربوط به n پس از انتخاب K_ε ظاهر می‌شود. البته از آن جایی که x نقطه ثابتی است این K_ε می‌تواند تابعی از نقطه ثابت x نیز باشد.

اجازه دهید با چند مثال موضوع را روشن کنیم.

۳.۲.۲ مثال. در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم این دنباله همگرا به 0 می‌باشد. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی عددی مانند $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ موجود است به قسمی که $\frac{1}{K_\varepsilon} < \varepsilon$ و لذا برای هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K_\varepsilon} < \varepsilon.$$

پس $\frac{1}{n} \to 0$. ♠

---

[۴] tends

[۵] divergent

به سبک استدلالی که در مثال فوق آمد بسیار دقت کنید. این روند همواره برای اثبات همگرایی یک دنباله در یک فضای متریک به کار خواهد رفت.

۴.۲.۲ مثال. دنباله ثابت $x_n = ۲$ در فضای $\mathbb{R}$ با متر گسسته را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم این دنباله به ۲ همگراست. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. قرار می‌دهیم $K_\varepsilon = ۱$. در این صورت به ازای هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$d(x_n, ۲) = d(۲, ۲) = ۰ < \varepsilon. \spadesuit$$

آیا این مثال، خاصِ فضای گسسته است؟

۵.۲.۲ قضیه. در هر فضای متریک مانند (X, d) هر دنبالهٔ از مرتبه‌ای به بعد ثابت مانند $\{x_n\}$ همگرا به همان مقدار ثابت است.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. می‌دانیم عددی مانند $K \in \mathbb{N}$ و عددی ثابت مانند c موجود است به قسمی که برای هر $n \geq K$ داریم $x_n = c$. قرار می‌دهیم $K_\varepsilon = K \in \mathbb{N}$. در این صورت به ازای هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$d(x_n, c) = d(c, c) = ۰ < \varepsilon. \blacksquare$$

ذکر چند مثال از دنباله‌های واگرا نیز خالی از فایده نخواهد بود.

۶.۲.۲ مثال. دنبالهٔ $\{(-۱)^n\}$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ واگراست. به برهان خلف فرض کنیم این دنباله همگرا و مثلاً همگرا به x باشد. پس به ازای هر $\varepsilon > ۰$ از جمله برای $\varepsilon = ۱ > ۰$، باید عددی مانند $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که برای هر $n \geq K_\varepsilon$ از جمله برای $n = ۲K_\varepsilon$

و $n = ۲K_\varepsilon + ۱$ به ترتیب داشته باشیم

$$|(-۱)^{۲K_\varepsilon} - x| < \varepsilon$$
$$|(-۱)^{۲K_\varepsilon+۱} - x| < \varepsilon$$

و لذا

$$\begin{aligned} ۲ &= |(-۱)^{۲K_\varepsilon} - (-۱)^{۲K_\varepsilon+۱}| \\ &\leq |(-۱)^{۲K_\varepsilon} - x + x - (-۱)^{۲K_\varepsilon+۱}| \\ &\leq |(-۱)^{۲K_\varepsilon} - x| + |x - (-۱)^{۲K_\varepsilon+۱}| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = ۲\varepsilon = ۲ \end{aligned}$$

که تناقض است. لذا $\{(-۱)^n\}$ واگراست. ♠

مجدداً به شیوهٔ استدلال توجه کنید و روند نمادین اثبات واگرایی را به خاطر بسپارید!

۷.۲.۲ مثال. دنبالهٔ $\{\frac{۱}{n}\}$ در فضای $\mathbb{R}$ با متر گسسته واگراست. به برهان خلف فرض کنیم این دنباله همگرا و مثلاً همگرا به x باشد. پس به ازای هر $\varepsilon > ۰$ از جمله برای $\varepsilon = \frac{۱}{۲} > ۰$ باید عددی مانند $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $n \geq K_\varepsilon$ داشته باشیم

$$d(\frac{۱}{n}, x) < \varepsilon = \frac{۱}{۲}.$$

و با توجه به تعریف متر گسسته داریم $d(\frac{۱}{n}, x) = ۰$. یعنی به ازای هر $n \geq K_\varepsilon$ باید داشته باشیم $x = \frac{۱}{n}$ و چون x عدد ثابتی است این امکان ندارد. پس $\{\frac{۱}{n}\}$ واگراست. ♠

آخرین جملهٔ یک ریاضیدان: و اکنون به صفر همگرا می‌شوم. (البته اگر فضا گسسته نباشد!)

حال که نمونه‌هایی از دنباله‌های واگرا را مشاهده کردیم، قبل از هر چیز اجازه دهید یکتایی حد دنباله‌ها را اثبات کنیم.

۸.۲.۲ قضیه. در هر فضای متریک مانند (X, d) حد هر دنباله در صورت وجود منحصر به فرد است.

برهان. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد و x و y دو نقطه از X که $x_n \to x$ و $x_n \to y$. برای $\varepsilon > ۰$ داده شده $K_۱ \in \mathbb{N}$ و $K_۲ \in \mathbb{N}$ یی موجودند که به ازای هر $n \geq K_۱$ داریم

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{۲}$$

و به ازای هر $n \geq K_۲$ داریم

$$d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{۲}$$

پس برای $K = \max\{K_۱, K_۲\}$ داریم

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, x_K) + d(x_K, y) \\ &< \tfrac{\varepsilon}{۲} + \tfrac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon. \end{aligned}$$

لذا برای هر $\varepsilon > ۰$ داریم $d(x, y) < \varepsilon$ و چون x و y نقاط ثابتی هستند پس $d(x, y) = ۰$ و لذا $x = y$. ■

دیدیم که در هر فضای متریک هر دنبالهٔ از مرتبه‌ای به بعد ثابت همگراست. نکته جالب این است که در هر فضای گسسته عکس این مطلب نیز لزوماً درست است. اگر از فصل اول به خاطر داشته باشید معمولاً احکام در فضای گسسته به شکلی کلی و بدیهی بیان می‌شوند. قضیهٔ زیر نیز نمونه‌ای از همین دست است.

۹.۲.۲ قضیه. در هر فضای گسسته مانند (X, d)، دنباله $\{x_n\}$ همگراست فقط و فقط وقتی که از مرتبه‌ای به بعد ثابت باشد.

برهان. طرف دیگر قبلاً اثبات شده است، لذا فرض می‌کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا و مثلاً همگرا به x باشد. پس برای $\varepsilon = \frac{۱}{۲} > ۰$ باید

عددی مانند $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که برای هر $n \geq K_\varepsilon$ داشته باشیم

$$d(x_n, x) < \varepsilon = \frac{۱}{۲}$$

و بنابر تعریف متر گسسته نتیجه می‌شود که برای هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم $x_n = x$. یعنی $\{x_n\}$ از مرتبه K_ε به بعد ثابت است. ■

این که در تعریف همگرایی برای n های بزرگ‌تر یا مساوی K_ε رفتار دنبالهٔ $\{x_n\}$ مدنظر است نشان می‌دهد که به طور کلی تغییر تعریف تعدادی متناهی از جملات یک دنباله نباید در همگرایی یا واگرایی آن موثر باشد. قضیه بعد را ببینید.

۱۰.۲.۲ قضیه. فرض کنیم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله در فضای متریک (X, d) باشند که فقط در تعدادی متناهی جمله با هم فرق دارند. به عبارت دیگر فرض کنیم عددی مانند $K \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $n \geq K$ داشته باشیم $x_n = y_n$. در این صورت $x_n \to x$ فقط و فقط وقتی که $y_n \to x$.

برهان. فرض کنیم $x_n \to x$ و نیز $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. پس عددی مانند $K' \in \mathbb{N}$ موجود است به قسمی که به ازای هر $n \geq K'$ داریم

$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

قرار می‌دهیم $K_\varepsilon = \max\{K, K'\}$. در این صورت برای هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$d(y_n, x) = d(x_n, x) < \varepsilon.$$

پس $y_n \to x$. با تعویض $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در استدلال فوق $y_n \to x$ نتیجه می‌دهد که $x_n \to x$. ■

مثلاً با توجه به آن که در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ داریم $\frac{1}{n} \to 0$ می‌توان نتیجه گرفت که اگر $\{y_n\}$ دنباله‌ای باشد که به صورت

$$y_n = \begin{cases} n^{n^n} & n \leq 100000 \\ \frac{1}{n} & n > 100000 \end{cases}$$

تعریف شده است، آن گاه $\{y_n\}$ نیز به 0 همگراست. به عبارت دیگر قضیه فوق بیان می‌دارد که " جوجه را آخر پاییز می‌شمارند! "

حال اجازه دهید به ارتباط مفهوم جدید معرفی شده در این فصل یعنی همگرایی دنباله‌ها بامفاهیم معرفی شده در فصل قبل بپردازیم. گاهی اوقات مفهوم همگرایی دنباله‌ها کمک می‌کند که مفاهیم قبلی آسان‌تر بیان شوند و برای حل مسایل، ساده‌تر به کار آیند.

۱۱.۲.۲ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک و A زیرمجموعه‌ای از آن باشد. در این صورت

i. $x \in \bar{A}$ فقط و فقط وقتی که دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در A موجود باشد به قسمی که $x_n \to x$.

ii. $x \in A'$ فقط و فقط وقتی که دنباله‌ای با جملات متمایز مانند $\{x_n\}$ در A موجود باشد به قسمی که $x_n \to x$.

iii. $x \in A'$ فقط و فقط وقتی که دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در $A \setminus \{x\}$ موجود باشد به قسمی که $x_n \to x$.

برهان. i. فرض کنیم $x \in \bar{A}$. پس برای هر $r > 0$ از جمله $r = \frac{1}{n} > 0$ داریم

$$N_{\frac{1}{n}}(x) \cap A \neq \phi$$

و لذا نقطه‌ای مانند $x_n \in A$ هست که $x_n \in N_{\frac{1}{n}}(x)$ و یا $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. بنابراین دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در A یافتیم و ادعا می‌کنیم $x_n \to x$.

فرض کنیم $\varepsilon > \circ$ داده شده باشد. بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ی هست که $\frac{\text{۱}}{K_\varepsilon} < \varepsilon$ و لذا برای هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$d(x_n, x) < \frac{\text{۱}}{n} \leq \frac{\text{۱}}{K_\varepsilon} < \varepsilon.$$

پس $x_n \to x$.

بالعکس، فرض کنیم دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در A موجود باشد به قسمی که $x_n \to x$. ادعا می‌کنیم $x \in \bar{A}$. فرض کنیم $r > \circ$ داده شده باشد. چون $x_n \to x$ پس برای هر $\varepsilon > \circ$ از جمله برای $\varepsilon = r > \circ$ باید عددی مانند $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $n \geq K_\varepsilon$ داشته باشیم

$$d(x_n, x) < \varepsilon = r$$

و یا $x_n \in N_r(x)$. اما $x_n \in A$، لذا

$$N_r(x) \cap A \neq \phi,$$

یعنی $x \in \bar{A}$.

ii و iii. برهان در این قسمت‌ها مشابه قسمت i است، منتهی توجه داریم که وقتی $x \in A'$، برای هر $r > \circ$ مجموعهٔ

$$N_r(x) \cap A$$

نامتناهی است و لذا می‌توان x_n ها را متمایز و مخالف x اختیار نمود و بالعکس، اگر x_n ها متمایز و یا در $A \setminus \{x\}$ باشند در هر حالت x_n ی یافت می‌شود که در

$$N_r(x) \cap (A \setminus \{x\})$$

قرار دارد. ■

همان طور که در قسمت انتهایی بخش دوم فصل اول اشاره کردیم، می‌توان مفاهیم فضای متریک را به جای گوی باز توسط مجموعهٔ باز نیز بیان کرد. توجه کنید که در این جا مفهوم همگرایی دنباله در حقیقت توسط همسایگی باز تعریف می‌شود: دنباله $\{x_n\}$ را همگرا به x گوییم اگر به ازای هر همسایگی باز مانند $N_\varepsilon(x)$ عددی مانند K_ε یافت شود به قسمی که به ازای هر $n \geq K_\varepsilon$ داشته باشیم $x_n \in N_\varepsilon(x)$.

اجازه دهید مفهوم همگرایی را با مجموعه‌های باز به صورت معادل بیان کنیم.

۱۲.۲.۲ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد. در این صورت دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا به x است فقط و فقط وقتی که به ازای هر مجموعهٔ باز مانند G در X که $x \in G$ عددی مانند $K_G \in \mathbb{N}$ یافت شود به قسمی که به ازای هر $n \geq K_G$ داشته باشیم $x_n \in G$.

برهان. فرض کنیم $x_n \to x$ و نیز G مجموعهٔ بازی در X شامل x باشد. چون $x \in G$ و مجموعهٔ G باز است پس x نقطهٔ درونی برای G است و لذا $r_\circ > \circ$ ی موجود است به قسمی که $N_{r_\circ}(x) \subseteq G$. اما از آن جایی که $x_n \to x$ برای هر $\varepsilon > \circ$ از جمله برای $\varepsilon = r_\circ > \circ$ باید عددی مانند $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $n \geq K_\varepsilon$ داشته باشیم

$$d(x_n, x) < \varepsilon = r_\circ.$$

و یا $x_n \in N_{r_\circ}(x)$. قرار می‌دهیم $K_G = K_\varepsilon$. در این صورت برای هر $n \geq K_G$ داریم

$$x_n \in N_{r_\circ}(x) \subseteq G.$$

بالعکس، فرض کنیم برای هر مجموعهٔ باز مانند G شامل x، عددی مانند $K_G \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $n \geq K_G$ داشته باشیم $x_n \in G$. برای $\varepsilon > ۰$ داده شده، قرار می‌دهیم $G = N_\varepsilon(x)$. واضح است که گزارهٔ فوق برای این G چیزی جز تعریف همگرایی دنباله نخواهد بود. ■

مفهوم دیگری که می‌توان ارتباط آن را با همگرایی دنباله‌ها مورد بررسی قرار داد مفهوم کرانداری است. از آن جایی که تعریف کرانداری برای زیرمجموعه‌های فضای متریک از قبل تعریف شده است، برای تعریف دنباله کراندار مشکلی نداریم.

۱۳.۲.۲ تعریف. دنبالهٔ $\{x_n\}$ در فضای متریک (X,d) را کراندار[۶] گوییم هرگاه مجموعهٔ مقادیر آن یعنی $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ زیرمجموعه‌ای کراندار از (X,d) باشد. ♣

واضح است که با توجه به کراندار بودن زیرمجموعه‌های متناهی فضای متریک می‌توان گفت که دنبالهٔ $\{x_n\}$ کراندار است فقط و فقط وقتی که از مرتبه‌ای به بعد کراندار باشد، چون قبل از این مرتبه، مجموعهٔ مقادیر دنباله زیرمجموعه‌ای متناهی از فضاست.

۱۴.۲.۲ قضیه. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا در فضای متریک (X,d) باشد. در این صورت $\{x_n\}$ کراندار است.

برهان. فرض کنیم $\{x_n\}$ همگرا به نقطه‌ای مانند x در X باشد. پس به ازای هر $\varepsilon > ۰$ از جمله $\varepsilon = ۱$ عددی مانند $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ موجود است به قسمی که به ازای هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$d(x_n, x) < \varepsilon = ۱.$$

---

[۶] bounded

بنابراین برای هر دو نقطهٔ دلخواه از مجموعهٔ $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ مانند x_n و x_m که $n, m \geq K_\varepsilon$ داریم

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < ۱ + ۱ = ۲.$$

یعنی دنبالهٔ $\{x_n\}$ از مرتبهٔ K_ε به بعد کراندار و لذا با توجه به توضیحات فوق دنباله‌ای کراندار می‌باشد. ■

به جای اصطلاح "از مرتبه‌ای به بعد" گاهی اوقات اصطلاح "نهایتاً" را به کار می‌بریم. تعریف زیر را ببینید.

ریاضیات همانند عشق است. ایده‌ای مکرراً ساده که می‌تواند نهایتاً پیچیده شود.

۱۵.۲.۲ تعریف. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در مجموعهٔ X و نیز P خاصیتی تعریف شده بر X باشد. گوییم دنباله $\{x_n\}$ نهایتاً[۷] خاصیت P دارد هرگاه عددی مانند $K_P \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $n \geq K_P$ نقطه x_n خاصیت P داشته باشد. گوییم دنبالهٔ $\{x_n\}$ مکرراً[۸] خاصیت P دارد هرگاه به ازای هر $K \in \mathbb{N}$ عددی مانند $n \geq K$ موجود باشد به قسمی که x_n خاصیت P داشته باشد. ♣

توجه کنید که اگر $\{x_n\}$ نهایتاً خاصیت P داشته باشد، مکرراً این خاصیت را دارد ولی عکس این مطلب لزوماً درست نیست.

۱۶.۲.۲ مثال. دنبالهٔ $\{(-۱)^n\}$ مکرراً برابر ۱ است ولی نهایتاً چنین نیست. ♠

با استفاده از اصطلاح‌های "نهایتاً" و "مکرراً" می‌توان مفاهیم قبلی را مجدداً بیان کرد. مثلاً دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا به x است هرگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$ این دنباله نهایتاً در $N_\varepsilon(x)$ واقع شود و یا این که به ازای هر مجموعهٔ باز شامل x مانند G، این دنباله نهایتاً در G قرار گیرد. یا مثلاً می‌توان گفت دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا به x نیست هرگاه $\varepsilon_۰ > ۰$ ی

---

[۷] eventually
[۸] frequently

موجود باشد که این دنباله مکرراً در خارج $N_{\varepsilon_\circ}(x)$ باشد یا به طور معادل می‌توان این مطلب را با مجموعه‌های باز شامل x بیان کرد. همچنین می‌توان گفت که در هر فضای گسسته یک دنباله همگراست فقط و فقط وقتی که نهایتاً ثابت باشد.

برای آن که رفتار یک دنباله را مورد بررسی قرار دهیم بهتر است به زیردنباله‌های آن توجه کنیم.

۱۷.۲.۲ تعریف. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در مجموعه X و $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای اکیداً صعودی از اعداد طبیعی باشد. دنبالهٔ

$$\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$$

را زیردنبالهٔ[۹] $\{x_n\}$ می‌نامیم. در حالت‌های خاص $n_k = ۲k$ و $n_k = ۲k - ۱$، زیردنباله‌های $\{x_{۲k}\}$ و $\{x_{۲k-۱}\}$ به ترتیب زیردنباله‌های زوج[۱۰] و فرد[۱۱] دنبالهٔ $\{x_n\}$ نامیده می‌شوند. ♣

واضح است که اگر $x_n \to x$ آن گاه به ازای هر زیردنباله از $\{x_n\}$ مانند $\{x_{n_k}\}$ نیز داریم $x_{n_k} \to x$. این مطلب بدان دلیل است که به ازای هر $\varepsilon > ۰$، دنبالهٔ $\{x_n\}$ و به وضوح همهٔ زیردنباله‌های آن نهایتاً در $N_\varepsilon(x)$ قرار خواهند گرفت. عکس این مطلب گرچه درست است ولی خالی از فایده می‌باشد زیرا اگر بدانیم هر زیردنباله از $\{x_n\}$ همگرا به x است پس بالاخص خود $\{x_n\}$ نیز به عنوان زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ همگرا به x خواهد بود، یعنی از قبل می‌دانستیم که $\{x_n\}$ همگراست. با این حال حکم جالب در این حالت این است که بگوییم اگر زیردنباله‌های زوج و فرد $\{x_n\}$ هردو به x همگرا باشند آن گاه

---

[۹] subsequence
[۱۰] even subsequence
[۱۱] odd subsequence

$\{x_n\}$ نیز به x همگراست که البته اثبات ساده‌ای دارد. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. پس نقاط $x_{۲n}$ و $x_{۲n-۱}$ نهایتاً در $N_\varepsilon(x)$ واقعند و لذا می‌توان گفت که $\{x_n\}$ نهایتاً در $N_\varepsilon(x)$ قراردارد.

۱۸.۲.۲ مثال. دنبالهٔ $\{(-۱)^n\}$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ واگراست چون زیردنبالهٔ زوج آن به ۱ و زیردنباله فرد آن به ۱− همگراست. ♠

سؤالی که پیش می‌آید این است که آیا لزوماً هر دنباله دارای زیردنباله‌ای همگراست؟ مثال $\{n\}$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ نشان می‌دهد که پاسخ در حالت کلی منفی است، اما بعداً خواهیم دید که پاسخ‌هایی جزئی نیز برای این سؤال تحت شرایطی خاص وجود دارد. همچنین می‌توان این سؤال را مطرح کرد که آیا کرانداری لزوماً همگرایی را نتیجه خواهد داد؟ مثال $\{(-۱)^n\}$ پاسخی منفی برای این سؤال مهیا می‌سازد. بعداً خواهیم دید که چه شرایط اضافی دیگری یک دنبالهٔ کراندار را مجبور می‌سازد تا همگرا باشد.

دیدیم که بررسی رفتار زیردنباله‌های یک دنباله در بررسی رفتار خود دنباله نقشی به سزا دارد. اما نقش زیردنباله‌ها خیلی عمیق‌تر از آن است که در این اندک خلاصه شود. در حقیقت بررسی رفتار زیردنباله‌ها منجر به تعریفی بسیار مهم و کارآمد در نظریهٔ دنباله‌ها خواهد شد. برای آن که این تعریف و صورت‌های معادل آن را مطالعه کنیم مقدماتی چند مورد نیاز است. ابتدا تعریف زیر را ببینید.

۱۹.۲.۲ تعریف. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای متریک (X,d) باشد. مجموعهٔ

$$\{x \mid \text{زیردنباله‌ای از } \{x_n\} \text{ همگرا به } x \text{ وجود دارد}\}$$

مجموعهٔ حدود زیردنباله‌ای[۱۲] دنبالهٔ $\{x_n\}$ نامیده می‌شود و با $\overline{\{x_n\}}$ نمایش داده می‌شود. ♣

این نماد گذاری منطبق بر نمادگذاری ما در مورد بستار یک مجموعه مانند A در فضاهای متریک می‌باشد. اما قضیهٔ ۱۱.۲.۲ این نماد را بهتر موجه می‌سازد.

۲۰.۲.۲ قضیه. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای متریک (X,d) باشد و

$$A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

در این صورت $\overline{\{x_n\}} \cup A = \bar{A}$.

برهان. فرض کنیم $x \in \overline{\{x_n\}}$. در این صورت زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ مانند $\{x_{n_k}\}$ موجود است به قسمی که $x_{n_k} \to x$. فرض کنیم $r > 0$ داده شده باشد. چون $x_{n_k} \to x$، به ازای هر $\varepsilon > 0$ از جمله $\varepsilon = r > 0$ عددی مانند $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ موجود است به قسمی که به ازای هر $k \geq K_\varepsilon$ داریم $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon = r$ و یا $x_{n_k} \in N_r(x)$ و چون $x_{n_k} \in A$، داریم

$$N_r(x) \cap A \neq \phi.$$

پس $x \in \bar{A}$. از طرفی می‌دانیم $A \subseteq \bar{A}$، بنابراین $\overline{\{x_n\}} \cup A \subseteq \bar{A}$.

بالعکس، فرض کنیم $x \in \bar{A} \setminus A$. لذا $x \in A'$ و در نتیجه بنابر قضیهٔ ۱۱.۲.۲ دنباله‌ای با جملات متمایز در A و از اینرو زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ موجود است که به x همگراست. بنابراین $x \in \overline{\{x_n\}}$. ■

۲۱.۲.۲ نتیجه. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای دلخواه در فضای متریک (X,d) باشد. در این صورت مجموعهٔ حدود زیردنباله‌ای آن یعنی $\overline{\{x_n\}}$ زیرمجموعه‌ای بسته از X می‌باشد. ■

---
[۱۲] subsequences limit points

در همین فصل مجدداً به این مفهوم باز خواهیم گشت.

این که نقاط یک دنبالهٔ همگرا به x مانند $\{x_n\}$ نهایتاً در مجموعهٔ باز دلخواه G شامل x قرار می‌گیرند به این معنی است که این نقاط به یکدیگر نزدیک می‌شوند. کوشی اولین کسی بود که این حقیقت را مورد توجه قرار داد و تعریف بعد را مدیون وی هستیم.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

مردمان می‌میرند اما پندار آن‌ها پایدار است.

۲۲.۲.۲ تعریف. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای متریک (X,d) باشد. این دنباله کوشی[۱۳] نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $m,n > K_\varepsilon$ داشته باشیم

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon. \clubsuit$$

به عبارت دیگر $\{x_n\}$ کوشی است اگر به ازای هر $\varepsilon > ۰$ نقاط دنباله نهایتاً به فاصله حداکثر ε از یکدیگر باشند. روشن است که این تعریف را می‌توان توسط مجموعه‌های باز به جای همسایگی باز نیز بیان کرد.

۲۳.۲.۲ قضیه. هر دنباله همگرا مانند $\{x_n\}$ در یک فضای متریک مانند (X,d) دنباله‌ای کوشی است.

برهان. فرض کنیم $\{x_n\}$ همگرا به x باشد و $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. لذا عددی مانند $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ موجود است به قسمی که به ازای هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{۲}$$

[۱۳] Cauchy

و نیز به ازای هر $m \geq K_\varepsilon$ داریم

$$d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

پس برای $m, n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon.$$

لذا $\{x_n\}$ کوشی است. ■

واضح است که تعدیلی از برهان قضیهٔ ۱۴.۲.۲ حکم زیر را نتیجه خواهد داد.

۲۴.۲.۲ قضیه. هر دنباله کوشی در یک فضای متریک کراندار است. ■

دیدیم که هر دنباله همگرا دنباله‌ای کوشی می‌باشد اما آیا عکس این مطلب نیز لزوماً درست است؟ مثال زیر پاسخی منفی به این سؤال می‌دهد.

۲۵.۲.۲ مثال. دنباله $\{\frac{۱}{n}\}$ را در فضای $X = (۰, ۱]$ با متر اقلیدسی القایی در نظر می‌گیریم. چون این دنباله در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ همگراست پس در $\mathbb{R}$ کوشی و لذا در X نیز کوشی است. اما این دنباله در X همگرا نیست چون حد هر دنباله در صورت وجود منحصر به فرد است و $۰ \notin X$. ♠

این مثال نشان می‌دهد که ضعف موجود، ناشی از فضا و نه خود دنباله می‌باشد. به عبارت دیگر این فضا چیزی کم دارد و آن حد دنبالهٔ کوشی $\{\frac{۱}{n}\}$ است. شاید نقطهٔ صفر حفره‌ای در این فضاست که باعث ضعف آن شده است. به نظر می‌رسد فضایی که در آن هر دنباله کوشی

همگرا باشد از نوعی کمال برخوردار است که آن را سزاوار تعریف زیر می‌سازد.

۲۶.۲.۲ تعریف. فضای متریک (X,d) را تام یا کامل[۱۴] می‌نامیم هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد. ♣

زندگی تنها برای دو چیز زیباست. کشف ریاضیات و یاد دادن آن.
Siméon Denis Poisson (1781-1840)

در همین فصل خاصیت کمال را برای $\mathbb{R}$ اثبات خواهیم کرد. اما اکنون در وضعیتی هستیم که تنها می‌توانیم تام نبودن یک فضا را اثبات کنیم. مثلاً فضای $X = (۰, ۱]$ با متر اقلیدسی القایی، تام نیست چون دنبالهٔ کوشی و غیر همگرای $\{\frac{۱}{n}\}$ را در خود دارد.

برای آن که اثبات کنیم یک دنبالهٔ کوشی همگراست، یکی از روش‌ها این است که اثبات کنیم این دنباله حداقل یک زیردنباله همگرا دارد.

۲۷.۲.۲ قضیه. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی در فضای متریک (X,d) باشد که زیردنباله‌ای همگرا به x مانند $\{x_{n_k}\}$ دارد. در این صورت $\{x_n\}$ نیز همگرا به x است.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. چون $\{x_n\}$ کوشی است پس $K_۱ \in \mathbb{N}$ ی موجود است به قسمی که به ازای هر $m,n \geq K_۱$ داریم

$$d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

و چون $x_{n_k} \to x$ پس $K_۲ \in \mathbb{N}$ یی موجود است به قسمی که به ازای هر $k \geq K_۲$ داریم

$$d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

---
[۱۴] complete

قرار می‌دهیم $K_\varepsilon = \max\{K_1, K_2\} \in\mathbb{N}$. در این صورت به ازای هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_{K_\varepsilon}}) + d(x_{n_{K_\varepsilon}}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

پس $x_n \to x$. ■

سؤالی که پیش می‌آید این است که تحت چه شرایطی زیرفضاهای یک فضای تام، خود فضایی تام هستند؟ مثال $X = (0, 1]$ به عنوان زیرفضایی از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ نشان می‌دهد که همیشه زیرفضای یک فضای تام فضایی تام نیست. و ظاهراً شرط یا شرایطی مورد نیاز است.

۲۸.۲.۲ قضیه. فرض کنیم (X, d) فضایی تام باشد. در این صورت زیرفضای (Y, d) از (X, d) تام است فقط و فقط وقتی که بسته باشد.

برهان. فرض کنیم (Y, d) تام باشد. ادعا می‌کنیم $Y = \bar{Y}$ و این ادعا را به روش دنباله‌ای اثبات می‌کنیم. فرض کنیم $x \in \bar{Y}$. بنابر قضیهٔ ۱۱.۲.۲ دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در Y موجود است به قسمی که $x_n \to x$. پس $\{x_n\}$ در X همگرا و لذا کوشی است. در نتیجه $\{x_n\}$ در Y کوشی است و چون Y تام است پس $\{x_n\}$ همگرا به نقطه‌ای مانند y از Y است. اما حد هر دنباله یکتاست و لذا $x = y \in Y$. پس Y بسته است.

بالعکس، فرض کنیم Y بسته و $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی در Y باشد. چون $\{x_n\}$ در Y کوشی است پس در X نیز کوشی است و چون X تام است لذا $\{x_n\}$ در X همگرا به نقطه‌ای مانند x است. بنابراین $\{x_n\}$ دنباله‌ای در Y همگرا به x می‌باشد و لذا مجدداً طبق قضیهٔ ۱۱.۲.۲ داریم $x \in \bar{Y}$. اما Y بسته است و لذا $x \in \bar{Y} = Y$. پس دنبالهٔ کوشی $\{x_n\}$ در Y همگرا به x است و لذا Y تام می‌باشد. ■

دقت کنید که تام بودن X نقشی اساسی در برهان قضیهٔ فوق دارد. به عبارت دیگر در حالت کلی بسته بودن و تام بودن معادل یکدیگر

نیستند. مثلاً فضای $X = (\circ, ۱]$ در خود X بسته است ولی تام نیست.

دیدیم که تام نبودن یک فضا ضعفی است که فضا به دلیل فقدان برخی نقاط یا به عبارت دیگر وجود برخی حفره‌ها به آن دچار می‌شود. اما آیا می‌توانیم این حفره‌ها را پر کنیم؟ در حقیقت این حفره‌ها باید توسط نقاطی که نمی‌دانیم چه هستند پر شود. برای آن که مثال روشن‌تر شود فضای متریک $(\mathbb{Q}, |.|)$ را در نظر بگیرید. اگر کسی اعداد حقیقی را نشناسد و مثلاً نداند که $\sqrt{۲}$ چیست چگونه می‌تواند حفره $\sqrt{۲}$ را توسط موجودی ناشناخته پرکند؟ توجه کنید که $\mathbb{Q}$ بسیار متخلخل است، به عبارت دیگر تعداد حفره‌های $\mathbb{Q}$ بسیار بیش‌تر از تعداد نقاط خود $\mathbb{Q}$ می‌باشد. یک روش برای ترمیم $\mathbb{Q}$ استفاده از برش‌ها می‌باشد. مفهومی که ذهن هوشمند دِدِکیند[۱۵] قادر به ابداع آن شد. در این جا نمی‌خواهیم از این روش استفاده کنیم، گرچه این روش زیبا ارزش مطالعه و یادگیری را دارد. در عوض می‌خواهیم با استفاده از دنباله‌های کوشی به ترمیم فضا بپردازیم. از آن جایی که این پر کردن حفره‌ها برای هر فضای متریک میسر است، به جای اثبات آن در حالت خاص $\mathbb{Q}$ آن را در حالت کلی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

ابتدا اجازه دهید بار دیگر اصل سؤال را با خود مرور کنیم و به آن دقت بخشیم. فرض کنیم (X, d) فضایی غیر تام باشد. این فضا حفره یا حفره‌هایی دارد. به عبارت دیگر حداقل یک دنبالهٔ کوشی و غیر همگرا در این فضا وجود دارد. می‌خواهیم فضای بزرگ‌تری که آن را با $\tilde{X}$ نشان می‌دهیم بیابیم که این حفره‌ها را پر کند. به عبارت دیگر باید $X \subseteq \tilde{X}$ و نیز $\tilde{X}$ فضایی تام باشد. اما به علاوه علاقه‌مند هستیم این فضا کوچک‌ترین فضای ممکن با این خاصیت باشد (چرا غیر از پر کردن حفره‌ها، نقاط جدید بی‌فایدهٔ دیگری را نیز در نظر

---

[۱۵] Dedekind

بگیریم؟). مثلاً برای $X = (0, 1)$ می‌توان $\tilde{X} = [0, 1]$ را در نظر گرفت و نیازی نیست فضای عظیم $\mathbb{R}$ در نظر گرفته شود. به عبارت ساده‌تر علاقه‌مندیم $\tilde{X}$ یی بیابیم که X در آن چگال باشد.

توجه کنید که ما نماد $\tilde{X}$ را به $\bar{X}$ ترجیح می‌دهیم، چون اگر X یک فضای متریک باشد آن گاه X در خود X بسته است و لذا $\bar{X} = X$. در نتیجه ما با در نظر گرفتن $\bar{X}$ هیچ کار مهمی انجام نداده‌ایم و در X متوقف شده‌ایم. اما $\tilde{X}$ این مفهوم را در ذهن متبادر می‌سازد که از X خارج شده‌ایم. اکنون چگال بودن X در $\tilde{X}$ یعنی $\bar{X} = \tilde{X}$ که این بستارگیری در فضای بزرگ‌تر $\tilde{X}$ انجام می‌شود و در این فضای جدید دیگر $\bar{X}$ خود X نیست. این فضای $\tilde{X}$ را تتمیم X می‌نامیم.

۲۹.۲.۲ تعریف. فرض کنیم (X, d) فضایی غیر تام باشد. فضای متریک $(\tilde{X}, \tilde{d})$ را یک تتمیم[۱۶] فضای (X, d) نامیم هرگاه $(\tilde{X}, \tilde{d})$ فضایی تام باشد که X در آن چگال است. ♣

دقت کنید گفتیم یک تتمیم، چون هنوز نمی‌دانیم که تتمیم یک فضای متریک منحصر به فرد است یا نه. البته اثبات خواهیم کرد که تتمیم‌های یک فضای متریک غیر تام با هم به نوعی معادل هستند. این مفهوم را در قضیه‌ای که خواهد آمد دقت می‌بخشیم. اما قبل از آن یک لم کوچک را اثبات می‌کنیم.

۳۰.۲.۲ لم. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد، $x_n \to x$ و نیز $y_n \to y$. در این صورت دنبالهٔ $\{d(x_n, y_n)\}$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ به $d(x, y)$ همگراست.

---

[۱۶] completion

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. چون $x_n \to x$ پس $K_۱ \in \mathbb{N}$ ی هست به قسمی که به ازای هر $n \geq K_۱$ داریم

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{۲}$$

و نیز چون $y_n \to y$ پس $K_۲ \in \mathbb{N}$ یی هست به قسمی که به ازای هر $n \geq K_۲$ داریم

$$d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

اما

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$

پس

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y).$$

و به طور مشابه

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$$

پس

$$d(x, y) - d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + (y_n, y).$$

لذا

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y).$$

بنابراین با فرض $K_\varepsilon = \max\{K_۱, K_۲\} \in \mathbb{N}$ برای هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon.$$

لذا $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$. ■

اما عکس مطلب فوق لزوماً درست نیست. مثلاً اگر $x_n = (-۱)^n$ و $y_n = ۰$ آن گاه

$$d(x_n, y_n) = |(-۱)^n - ۰| = ۱$$

پس $d(x_n, y_n) \to 1$، گرچه دنبالهٔ $\{x_n\}$ واگراست.

در قضیهٔ بعد این فرض را می‌پذیریم که فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ تام است. این مطلب را بعداً در همین فصل اثبات خواهیم کرد. مطمئن باشد هیچ کلکی در کار نیست و کمال $\mathbb{R}$ مستقیماً اثبات می‌شود، اما ترجیح می‌دهیم خواص مربوط به دنباله‌ها و فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ را به صورت بخشی جداگانه بیاوریم تا هم تأکیدی بر این خواص باشد و هم این خواص در یک جا جمع‌آوری گردد.

۳۱.۲.۲ قضیه. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک باشد. در این صورت فضایی تام مانند $(\tilde{X}, \tilde{d})$ موجود است به قسمی که X را می‌توان زیرمجموعه‌ای از $\tilde{X}$ تلقی کرد. به عبارت دیگر تابعی حافظ فاصله[۱۷] مانند $\tilde{\alpha} : X \to \tilde{X}$ وجود دارد که $\overline{\tilde{\alpha}(X)} = \tilde{X}$. به علاوه $(\tilde{X}, \tilde{d})$ یکتاست بدین مفهوم که اگر $(\hat{X}, \hat{d})$ فضای تام دیگری با همین خاصیت باشد (یعنی تابعی حافظ فاصله مانند $\hat{\alpha} : X \to \hat{X}$ موجود باشد به قسمی که $\overline{\hat{\alpha}(X)} = \hat{X}$) آن گاه تابعی حافظ فاصله و برو مانند $\varphi : \tilde{X} \to \hat{X}$ موجود است به قسمی که $\varphi o \tilde{\alpha} = \hat{\alpha}$.

برهان. اثبات را در چند گام ارائه خواهیم کرد.

اصل بقای سختی‌ها: هیچ روش ساده‌ای برای اثبات حکمی عمیق وجود ندارد!

گام اول. فرض کنیم $\mathcal{C}$ خانوادهٔ همهٔ دنباله‌های کوشی در X باشد. نسبت $\sim$ را روی $\mathcal{C}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \iff d(x_n, y_n) \to 0$$

که در آن $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ اعضای دلخواهی از $\mathcal{C}$ هستند. اولاً $\sim$ به صورت خوشتعریفی روی کل $\mathcal{C}$ تعریف می‌شود و ثانیاً $\sim$ نسبتی هم‌ارزی روی $\mathcal{C}$ است. زیرا فرض کنیم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ اعضای دلخواهی

[۱۷] تابع $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ را حافظ فاصله (distance preserving) می‌نامیم هرگاه $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$ به ازای هر $x, y \in X$.

از $\mathcal{C}$ باشند، پس $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ کوشی هستند و در نتیجه $\{d(x_n, y_n)\}$ دنباله‌ای کوشی در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ است، چون

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n).$$

حال چون $\{d(x_n, y_n)\}$ کوشی است و بنابر فرض ما $\mathbb{R}$ تام است پس همگرا به عددی نامنفی می‌باشد و چون حد منحصر به فرد است پس $\sim$ خوشتعریف می‌باشد.

واضح است که $\{x_n\} \sim \{x_n\}$ چون $d(x_n, x_n) = 0 \to 0$. همچنین متقارن بودن d متقارن بودن $\sim$ را نتیجه خواهد داد. به علاوه اگر $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ و نیز $\{y_n\} \sim \{z_n\}$ آن گاه خواهیم داشت $d(x_n, y_n) \to 0$ و نیز $d(y_n, z_n) \to 0$ و لذا نامساوی مثلث نتیجه می‌دهد که $d(x_n, z_n) \to 0$ یعنی $\{x_n\} \sim \{z_n\}$. پس $\sim$ نسبتی هم‌ارزی روی $\mathcal{C}$ است.

گام دوم. قرار می‌دهیم

$$\tilde{X} = \mathcal{C}/_\sim = \{[\{x_n\}] \mid \{x_n\} \in \mathcal{C}\},$$

که در آن $[\{x_n\}]$ ردهٔ هم‌ارزی $\{x_n\}$ تحت نسبت هم‌ارزی $\sim$ می‌باشد. روی $\tilde{X}$ متر $\tilde{d}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{d}([\{x_n\}], [\{y_n\}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

چون $\{d(x_n, y_n)\}$ به ازای هر $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ از $\mathcal{C}$ همگراست، $\tilde{d}$ خوشتعریف است.

گام سوم. $\tilde{d}$ واقعاً یک متر روی $\tilde{X}$ می‌باشد. زیرا اولاً برای هر $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در $\mathcal{C}$ چون $\{d(x_n, y_n)\}$ همگرا به عددی نامنفی است پس $\tilde{d}([\{x_n\}], [\{y_n\}]) \geq 0$.

ثانیاً از آن جایی که $d(x_n, y_n) = d(y_n, x_n)$ پس $\tilde{d}$ متقارن است.

ثالثاً $\tilde{d}([\{x_n\}], [\{y_n\}]) = 0$ فقط و فقط وقتی که $d(x_n, y_n) \to 0$ و این معادل است با $x_n \sim y_n$ که معادل $[\{x_n\}] = [\{y_n\}]$ می‌باشد.

رابعاً برای هر $[\{x_n\}]$، $[\{y_n\}]$ و $[\{z_n\}]$ داریم

$$\begin{aligned}
\tilde{d}([\{x_n\}], [\{y_n\}]) &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \\
&\leq \lim_{n\to\infty}(d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) \\
&= \tilde{d}([\{x_n\}], [\{y_n\}]) + \tilde{d}([\{y_n\}], [\{z_n\}]).
\end{aligned}$$

گام چهارم. $(\tilde{X}, \tilde{d})$ تام است. زیرا فرض کنیم $\{u_m\}$ دنباله‌ای کوشی در $\tilde{X}$ باشد. چون $\tilde{X}$ برابر $\mathcal{C}/_\sim$ است، پس هر u_m به صورت یک ردهٔ هم‌ارزی می‌باشد، یعنی می‌توان نوشت

$$u_m = [\{x_{m,k}\}_{k\in\mathbb{N}}]$$

ادعا می‌کنیم که

$$\{x_{n,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

دنباله‌ای کوشی در X است و $u_m \to [\{x_{n,n}\}]$.

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. چون $\{u_m\}$ کوشی است پس عددی مانند $K_1 \in \mathbb{N}$ موجود است به قسمی که به ازای هر $m, n \geq K_1$ داریم

$$\tilde{d}(u_m, u_n) < \varepsilon$$

و لذا

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m,k}, x_{n,k}) < \varepsilon.$$

چون ε دلخواه است پس $\lim_{k\to\infty} d(x_{m,k}, x_{n,k}) = 0$ به ازای هر $m, n \geq K_1$. لذا با توجه به تعریف حد برای همین $\varepsilon > 0$ عددی مانند

$K_2 \in \mathbb{N}$ موجود است به قسمی که به ازای هر $k \geq K_2$ داریم

$$|d(x_{m,k}, x_{n,k}) - 0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

بنابراین اگر به جای k در عبارت فوق m قرار دهیم، داریم

$$d(x_{m,m}, x_{n,m}) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad n \geq K_1, m \geq \max\{K_1, K_2\}.$$

همچنین با توجه به کوشی بودن دنبالهٔ $\{x_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ عددی مانند $K_3 \in \mathbb{N}$ موجود است به قسمی که به ازای هر $k, l \geq K_3$ داریم

$$d(x_{n,k}, x_{n,l}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

و اگر قرار دهیم $k = m$ و $l = n$ داریم

$$d(x_{n,m}, x_{n,n}) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad n, m \geq K_3.$$

پس اگر قرار دهیم $K_\varepsilon = \max\{K_1, K_2, K_3\} \in \mathbb{N}$ آن گاه به ازای هر $m, n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$d(x_{m,m}, x_{n,n}) \leq d(x_{m,m}, x_{n,m}) + d(x_{n,m}, x_{n,n}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

یعنی $\{x_{n,n}\}$ دنباله‌ای کوشی در X است. در نتیجه $[\{x_{n,n}\}] \in \tilde{X}$.

حال نشان می‌دهیم که $u_m \to [\{x_{n,n}\}]$. بدین منظور باید برای $\varepsilon > 0$ داده شده، عددی مانند $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ بیابیم که به ازای هر $m \geq K_\varepsilon$ داشته باشیم

$$\tilde{d}(u_m, [\{x_{n,n}\}]) < \varepsilon$$

و یا

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{m,n}, x_{n,n}) < \varepsilon.$$

K_ε ی که در پی آن هستیم می‌تواند همان K_ε ارائه شده در بالا باشد، زیرا برای این K_ε به ازای هر $m \geq K_\varepsilon$ و هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$d(x_{m,n}, x_{n,n}) < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

این مطلب، طبق تعریف حد، نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{m,n}, x_{n,n}) = ۰ < \varepsilon,$$

به ازای هر $m \geq K_\varepsilon$. پس $\{u_m\}$ به نقطهٔ $[\{x_{n,n}\}]$ از $\tilde{X}$ همگراست.

گام پنجم. فضای X در $\tilde{X}$ می‌نشیند. به عبارت دقیق‌تر تابع

$$\tilde{\alpha} : X \to \tilde{X}$$

$$\tilde{\alpha}(x) = [\{x\}_{n\in\mathbb{N}}]$$

که در آن $\{x\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنبالهٔ ثابت با مقدار ثابت x می‌باشد، وجود دارد به قسمی که $\tilde{\alpha}$ حافظ فاصله می‌باشد. زیرا به ازای هر $x, y \in X$ داریم

$$\begin{aligned}\tilde{d}(\tilde{\alpha}(x), \tilde{\alpha}(y)) &= \tilde{d}([\{x\}], [\{y\}]) \\ &= \lim_{n\to\infty} d(x,y) = d(x,y).\end{aligned}$$

گام ششم. مجموعهٔ X در $\tilde{X}$ چگال است. به عبارت دیگر $\overline{\tilde{\alpha}(X)} = \tilde{X}$. زیرا اگر u عنصر دلخواهی از $\tilde{X}$ باشد آن گاه $u = [\{x_n\}]$ که $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی در X است. حال دنبالهٔ $\{u_m\}$ را در $\tilde{\alpha}(X)$ معرفی می‌کنیم که $u_m \to u$. در نتیجه بنابر قضیهٔ ۱۱.۲.۲ نقطهٔ u یک نقطهٔ چسبیدگی برای $\tilde{\alpha}(X)$ می‌باشد و لذا حکم حاصل خواهد شد.

اما $\{u_m\}$ را به صورت

$$u_m = \tilde{\alpha}(x_m) \in \tilde{\alpha}(X) \subseteq \tilde{X}, \qquad m \in \mathbb{N}$$

معرفی می‌کنیم.

حال فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. چون $\{x_n\}$ در X کوشی است پس $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ی موجود است به قسمی که به ازای هر $m, n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

و لذا به ازای هر $m \geq K_\varepsilon$ ثابت داریم

$$\begin{aligned} \tilde{d}(u_m, u) &= \tilde{d}(\tilde{\alpha}(x_m), [\{x_n\}]) \\ &= \tilde{d}([\{x_m\}_{n\in\mathbb{N}}], [\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_m, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

بنابراین $u_m \to u$.

گام هفتم. فضای $(\tilde{X}, \tilde{d})$ یکتاست. به عبارت دیگر اگر $(\hat{X}, \hat{d})$ فضای تام دیگری با یک تابع حافظ فاصله مانند

$$\hat{\alpha} : X \to \hat{X}$$

موجود باشد به قسمی که $\hat{\alpha}(X)$ در $\hat{X}$ چگال باشد، آن گاه تابعی حافظ فاصله و برو مانند

$$\varphi : \tilde{X} \to \hat{X}$$

که به شرح زیر تعریف می‌شود وجود خواهد داشت که $\varphi \circ \tilde{\alpha} = \hat{\alpha}$.

فرض کنیم $u \in \tilde{X}$. در این صورت چون $\overline{\tilde{\alpha}(X)} = \tilde{X}$، بنابر قضیهٔ ۱۱.۲.۲، دنباله‌ای مانند $\{u_m\}$ در $\tilde{\alpha}(X)$ موجود است به قسمی که $u_m \to u$. اما $u_m \in \tilde{\alpha}(X)$ ایجاب می‌کند که x_m ی در X وجود دارد به قسمی که $u_m = \tilde{\alpha}(x_m)$. قرار می‌دهیم $v_m = \hat{\alpha}(x_m)$. در این صورت $v_m \in \hat{\alpha}(X) \subseteq \hat{X}$. ادعا می‌کنیم $\{v_m\}$ دنباله‌ای همگرا در $\hat{X}$ می‌باشد. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. چون $\{u_m\}$ همگراست پس کوشی

-چرا حقوق می خوانی؟
-که شغل خوبی پیدا کنم.
-چرا شغل خوب؟
-که درآمد زیادی داشته باشم.
-چرا درآمد زیاد؟
-که هرچه می خواهم بخرم.
-چرا؟
-که شاد باشم.
-من ریاضی می خوانم و در یک گام به همین نتیجه می‌رسم!

می‌باشد و لذا $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ی موجود است به قسمی که به ازای هر $m, n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$\tilde{d}(u_m, u_n) < \varepsilon.$$

بنابراین به ازای هر $m, n \geq K_\varepsilon$، با توجه به این که $\hat{\alpha}$ و $\tilde{\alpha}$ فاصله را حفظ می‌کنند داریم

$$\begin{aligned}
\hat{d}(v_m, v_n) &= \hat{d}(\hat{\alpha}(x_m), \hat{\alpha}(x_n)) \\
&= d(x_m, x_n) \\
&= \tilde{d}(\tilde{\alpha}(x_m), \tilde{\alpha}(x_n)) \\
&= \tilde{d}(u_m, u_n) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

لذا $\{v_m\}$ در $\hat{X}$ کوشی است و چون $\hat{X}$ تام است پس $\{v_m\}$ به نقطه‌ای مانند v که آن را با $\hat{u}$ نمایش می‌دهیم همگراست. حال برای $u \in \tilde{X}$ تعریف می‌کنیم

$$\varphi(u) = \hat{u}.$$

اولاً φ خوشتعریف است. زیرا اگر $u \in \tilde{X}$ و دو دنباله مانند $\{u_m\}$ و $\{t_m\}$ در $\tilde{\alpha}(X)$ داشته باشیم که $u_m \to u$ و $t_m \to u$، آن گاه دنباله‌های $\{x_m\}$ و $\{y_m\}$ در X موجودند به قسمی که

$$u_m = \tilde{\alpha}(x_m), \qquad t_m = \tilde{\alpha}(y_m).$$

بنابراین با فرض

$$v_m = \hat{\alpha}(x_m), \qquad s_m = \hat{\alpha}(y_m),$$

دنباله‌های $\{v_m\}$ و $\{s_m\}$ در $\hat{X}$ به ترتیب همگرا به v و s خواهند بود. حال داریم

$$\hat{d}(v_m, s_m) = \hat{d}(\hat{\alpha}(x_m), \hat{\alpha}(y_m))$$

$$\begin{aligned} &= d(x_m, y_m) \\ &= \tilde{d}(\tilde{\alpha}(x_m), \tilde{\alpha}(y_m)) \\ &= \tilde{d}(u_m, t_m) \to d(u, u) = 0 \end{aligned}$$

پس $\hat{d}(v_m, s_m) \to 0$. اما بنابر لم ۳۰.۲.۲ می‌دانیم $\hat{d}(v_m, s_m) \to \hat{d}(v, s)$ و چون حد یکتاست، نتیجه می‌شود که $\hat{d}(v, s) = 0$ و لذا $v = s$.

ثانیاً به ازای هر $x \in X$ داریم

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \tilde{\alpha})(x) &= \varphi(\tilde{\alpha}(x)) = \varphi([\{x\}_{m\in\mathbb{N}}]) \\ &= \lim_{m\to\infty} \hat{\alpha}(x) = \hat{\alpha}(x). \end{aligned}$$

بنابراین $\varphi \circ \tilde{\alpha} = \hat{\alpha}$.

ثالثاً φ حافظ فاصله است چون به ازای هر $u, t \in \tilde{X}$ دنباله‌های $\{u_m\}$ و $\{t_m\}$ در $\tilde{\alpha}(X)$ وجود دارند که $u_m \to u$ و $t_m \to t$ و لذا دنباله‌های $\{x_m\}$ و $\{y_m\}$ در X موجودند به قسمی که $u_m = \tilde{\alpha}(x_m)$ و $t_m = \tilde{\alpha}(y_m)$. بنابراین

$$\begin{aligned} \hat{d}(\varphi(u), \varphi(t)) &= \hat{d}(\lim_{m\to\infty} \hat{\alpha}(x_m), \lim_{m\to\infty} \hat{\alpha}(y_m)) \\ &= \lim_{m\to\infty} \hat{d}(\hat{\alpha}(x_m), \hat{\alpha}(y_m)) \\ &= \lim_{m\to\infty} d(x_m, y_m) \\ &= \lim_{m\to\infty} \tilde{d}(\tilde{\alpha}(x_m), \tilde{\alpha}(y_m)) \\ &= \tilde{d}(\lim_{m\to\infty} \tilde{\alpha}(x_m), \lim_{m\to\infty} \tilde{\alpha}(y_m)) \\ &= \tilde{d}(\lim_{m\to\infty} u_m, \lim_{m\to\infty} t_m) = \tilde{d}(u, t). \end{aligned}$$

رابعاً φ بروست. زیرا اگر $v \in \hat{X}$ آن گاه چون $\overline{\hat{\alpha}(X)} = \hat{X}$ پس دنباله‌ای مانند $\{v_m\}$ در $\hat{\alpha}(X)$ موجود است به قسمی که $v_m \to v$. اما

$v_m \in \hat{\alpha}(X)$ ایجاب می‌کند که x_m ی در X وجود دارد به قسمی که $v_m = \hat{\alpha}(x_m)$. قرار می‌دهیم $u_m = \tilde{\alpha}(x_m)$. با استدلالی مشابه آنچه در ابتدای همین گام آوردیم می‌توان نشان داد که $\{u_m\}$ همگرا به نقطه‌ای مانند u در $\tilde{X}$ است. به علاوه داریم

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \varphi(\lim_{m\to\infty} u_m) = \varphi(\lim_{m\to\infty} \tilde{\alpha}(x_m)) \\ &= \lim_{m\to\infty} \hat{\alpha}(x_m) = \lim_{m\to\infty} v_m = v. \end{aligned}$$

و این نشان می‌دهد که φ بروست. ■

این قضیهٔ به ظاهر ملال آور حاوی نکاتی ارزنده است و اکیداً توصیه می‌شود که با کلیهٔ جزئیات مورد مطالعه قرار گیرد. (نگران نباشید! اثبات‌های طولانی ترفندهای بیش‌تری را در مقایسه با برهان‌های کوتاه می‌آموزانند. حیف نیست غذایی لذیذ، سریع و بی درک طعم دلنشین آن، به یکباره بلعیده شود؟)

گرچه در این قضیه یک فضای متریک مانند (X, d) در فضای $(\tilde{X}, \tilde{d})$ می‌نشیند و این تابع نشاندن تابع شمول نیست، با این حال می‌توان فرض کرد که $X = \tilde{\alpha}(X)$ و لذا X زیرفضایی از $\tilde{X}$ تلقی خواهد شد. به علاوه دقت کنید که اگر X تام باشد تتمیم آن خود X است.

این قضیه نشان می‌دهد که هر فضای متریک مانند X دارای تتمیم است و لذا بالقوه وجود تعداد بسیار زیادی فضای تام را نتیجه می‌دهد. اما تا کنون فقط یک نمونه از فضاهای تام یعنی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ را می‌شناسیم (که اثبات آن هم برای بعد وعده داده شده است!). البته می‌دانیم که همهٔ زیرمجموعه‌های بستهٔ این فضا هم تام هستند (قضیهٔ ۲۸.۲.۲) ولی این هنوز کافی نیست. یک نکتهٔ دیگر که می‌دانیم این است که هر فضای گسسته تام است زیرا

۳۲.۲.۲ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضای گسستهٔ دلخواهی باشد. در این صورت $\{x_n\}$ در X کوشی است فقط و فقط وقتی که از مرتبه‌ای به بعد ثابت باشد.

(و می‌دانیم که این شرط اخیر معادل با همگرایی دنباله در فضای گسسته می‌باشد.)

برهان. فرض کنیم $\{x_n\}$ کوشی باشد. پس به ازای هر $\varepsilon > 0$ از جمله $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ باید عددی مانند $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $m, n \geq K_\varepsilon$ داشته باشیم $d(x_m, x_n) < \frac{1}{2}$. و لذا بنابر تعریف متر گسسته باید داشته باشیم $d(x_m, x_n) = 0$ و یا $x_m = x_n$. بنابراین از مرتبهٔ K_ε به بعد دنبالهٔ $\{x_n\}$ ثابت است. ■

مجدداً در فصل‌های بعد شرایطی را به دست می‌آوریم که تحت آن‌ها فضای ما تام باشد.

نه یک بار و نه دوبار بلکه بیرون از شمار، ایده‌هایی یکسان ظهور خود را در دنیا آشکار می‌سازند.
Aristotle
(384-322BC)

اما اجازه دهید به عنوان حسن ختام این بخش، کاربردی مهم از تام بودن فضا در نظریهٔ تقریب را ارائه دهیم. قضیه‌ای که خواهد آمد یکی از جذاب‌ترین و پرکاربردترین قضایای آنالیز به شمار می‌رود.

۳۳.۲.۲ تعریف. فرض کنیم (X, d_1) و (Y, d_2) دو فضای متریک باشند و φ نگاشتی از X به Y. نگاشت φ را یک نگاشت انقباضی قوی[۱۸] با ثابت[۱۹] انقباضی $r < 1$ نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) \leq r d_1(x, y) \qquad (*) \clubsuit$$

دقت کنید که در این تعریف $r < 1$ و نیز در $(*)$ علامت $\leq$ آمده است و این به هیچ وجه با حالتی که $r \leq 1$ و در $(*)$ علامت $<$ آمده باشد معادل نیست.

---

[۱۸] strongly contractive mapping
[۱۹] constant

۳۴.۲.۲ تعریف. فرض کنیم X و Y دو مجموعه و φ یک نگاشت باشد. نقطهٔ $x_\circ \in X$ را یک نقطهٔ ثابت[۲۰] برای φ نامیم هرگاه $\varphi(x_\circ) = x_\circ$. ♣

با اندکی توجه می‌توان فهمید که برای هر معادله مانند $f(x) = g(x)$، در حقیقت به نوعی در جست و جوی نقطه‌ای ثابت هستیم. فی‌الواقع می‌توان این معادله را به صورت‌های

$$f(x) - g(x) + x = x$$

یا

$$\frac{f(x)}{g(x)} - ۱ + x = x$$

یا

$$(\frac{f(x)}{g(x)})x = x$$

یا صورت‌های دیگر تبدیل کرد که همگی از نوع $\varphi(x) = x$ هستند و یافتن ریشه برای معادلهٔ اصلی معادل یافتن ریشه برای معادلهٔ اخیر می‌باشد. لذا یافتن نقطهٔ ثابت برای یک تابع صرف نظر از خود مسأله در حل معادلات نیز بسیار حائز اهمیت است.

۳۵.۲.۲ قضیه. فرض کنیم (X, d) یک فضای تام باشد و $\varphi : (X, d) \to (X, d)$ یک نگاشت انقباضی قوی با ثابت انقباضی $r < ۱$. در این صورت φ دقیقاً یک نقطهٔ ثابت دارد.

برهان. اولاً نقطهٔ ثابت در صورت وجود منحصر به فرد است. زیرا اگر x و y دو نقطهٔ ثابت متمایز برای φ باشند، داریم

$$d(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq rd(x, y) < d(x, y),$$

---

[۲۰] fixed point

که تناقض است. ثانیاً برای اثبات وجود نقطهٔ ثابت φ، فرض کنیم $x_۰$ نقطهٔ دلخواهی از X باشد. دنبالهٔ $\{x_n\}$ را به صورت بازگشتی

$$x_{n+۱} = \varphi(x_n)$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت به استقرا روی n اثبات می‌کنیم که

$$d(x_{n+۱}, x_n) \leq r^n d(x_۱, x_۰), \qquad n \in \mathbb{N} \qquad (*)$$

برای $n = ۱$ روشن است که

$$d(x_۲, x_۱) = d(\varphi(x_۱), \varphi(x_۰)) \leq r d(x_۱, x_۰).$$

حال فرض کنیم $(*)$ به ازای n برقرار باشد. داریم

$$\begin{aligned} d(x_{n+۲}, x_{n+۱}) &= d(\varphi(x_{n+۱}), \varphi(x_n)) \\ &\leq r d(x_{n+۱}, x_n) \\ &\leq r.r^n d(x_۱, x_۰) = r^{n+۱} d(x_۱, x_۰). \end{aligned}$$

بنابراین $(*)$ به استقرا برقرار است. حال اگر $m, n \in \mathbb{N}$ و مثلاً $m \geq n$، آن گاه می‌توان نوشت $m = n + k$ که k یک عدد صحیح نامنفی می‌باشد. لذا داریم

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= d(x_{n+k}, x_n) \\ &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k-۱}) + d(x_{n+k-۱}, x_n) \\ &\leq r^{n+k-۱} d(x_۱, x_۰) + d(x_{n+k-۱}, x_n) \quad \text{بنابر } (*) \\ &\leq r^{n+k-۱} d(x_۱, x_۰) + d(x_{n+k-۱}, x_{n+k-۲}) \\ &\quad + d(x_{n+k-۲}, x_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq r^{n+k-1}d(x_1,x_0)+r^{n+k-2}d(x_1,x_0) \\ &\quad +d(x_{n+k-2},x_n) \qquad \text{بنابر } (*) \\ &\leq \dots \\ &\leq (r^{n+k-1}+r^{n+k-2}+\dots+r^n)d(x_1,x_0) \\ &= (\sum_{i=n}^{m-1} r^i)d(x_1,x_0). \end{aligned}$$

حال چون $\sum_{i=1}^{\infty} r^i$ یک سری هندسی با قدر نسبت کوچک‌تر از ۱ می‌باشد، پس همگراست و لذا برای $\varepsilon > 0$ داده شده K_ε ی هست به قسمی که به ازای هر $m \geq n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$(\sum_{i=n}^{m-1} r^i)d(x_1,x_0) < \varepsilon$$

و لذا

$$d(x_m,x_n) < \varepsilon.$$

بنابراین دنبالهٔ $\{x_n\}$ در X کوشی است و چون X تام است پس این سری همگرا به نقطه‌ای مانند x از X است.

ادعا می‌کنیم دنبالهٔ $\{\varphi(x_n)\}$ همگرا به $\varphi(x)$ می‌باشد. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. چون $x_n \to x$ پس $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ی هست به قسمی که به ازای هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$d(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{r+1}.$$

لذا

$$d(\varphi(x_n),\varphi(x)) \leq rd(x_n,x) < r\frac{\varepsilon}{r+1} < \varepsilon.$$

بنابراین $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$. اما $\varphi(x_n) = x_{n+1} \to x$ و چون حد منحصر به فرد است پس $\varphi(x)$ برابر x است و لذا x نقطهٔ ثابت φ می‌باشد. ■

قضیهٔ فوق نه تنها وجود نقطهٔ ثابت برای یک تابع انقباضی قوی در فضاهای تام را اثبات می‌کند، بلکه روشی ساختنی برای ارائه نقطهٔ ثابت به دست می‌دهد. این نوع قضیه‌ها در مقایسه با قضیه‌های وجودی، یعنی قضیه‌هایی که صرفاً به اثبات وجود یک چیز بدون ارائه روشی ساختنی می‌پردازند، قضیه‌های ساختاری نامیده می‌شوند. این قضیه کاربردهای زیادی در محاسبات عددی و آنالیز عددی دارد.

اکنون آماده‌ایم که خود را با مفاهیم پیچیده‌تری رو در رو سازیم.

۳.۲ تورها

همان طور که در توضیحات قبل و بعد از تعریف دنباله متذکر شدیم، بررسی رفتار یک دنباله در یک فضای متریک حالت خاصی از بررسی رفتار نقاط یک مجموعه در یک فضای متریک می‌باشد. در حقیقت در بخش قبل به دنباله‌ها پرداختیم چون زیرمجموعه‌ای شمارا از فضای ما هستند و درک آن‌ها و مفاهیم مرتبط با آن‌ها آسان‌تر است.

Eliakim Hastings Moore (1862-1932)

اما می‌توان تعمیم تعریف یک دنباله را به صورت زیر مورد مطالعه قرار داد. قبل از آن یک تعریف از نظریهٔ مجموعه‌ها را یادآوری می‌کنیم.

۱.۳.۲ تعریف. یک رابطه مانند $\preceq$ روی یک مجموعه مانند Λ ترتیبی جزئی[21] نامیده می‌شود هرگاه منعکس، متعدی و پادمتقارن باشد. در این حالت $(\Lambda, \preceq)$ را یک مجموعهٔ به طور جزئی مرتب[22] می‌نامیم. این مجموعه از بالا (پایین) جهتدار[23] نامیده می‌شود هرگاه

[21] partial ordering
[22] partially ordered set (poset)
[23] upward (downward) directed

هر زیرمجموعهٔ دو عضوی از آن تحت رابطهٔ $\preceq$ از بالا (پایین) کراندار باشد. Λ را یک مجموعهٔ جهتدار [۲۴] می‌نامیم هرگاه هم از بالا و هم از پایین جهتدار باشد. ♣

در حالت خاص که Λ تحت رابطهٔ $\preceq$ مرتبط [۲۵] باشد یعنی به ازای هر $\alpha, \beta \in \Lambda$ داشته باشیم $\alpha \preceq \beta$ یا $\beta \preceq \alpha$، آن گاه Λ جهتدار خواهد بود. لذا مثلاً $\Lambda = \mathbb{R}$ تحت رابطهٔ ترتیبی معمولی یک مجموعهٔ جهتدار است.

فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه باشد و $\Lambda = \mathcal{P}(X)$. در این صورت Λ تحت رابطهٔ شمول $\subseteq$ یک مجموعهٔ جهتدار می‌باشد چون به ازای هر زیرمجموعهٔ دو عضوی $\{A, B\}$ از Λ می‌توان گفت که $A \cup B$ و $A \cap B$ به ترتیب کران‌های بالا و پایین $\{A, B\}$ هستند. این مطلب نشان می‌دهد که $\mathrm{Card}(\Lambda)$ می‌تواند به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ باشد و Λ محدود به مجموعه‌های شمارا یا حداکثر همعدد با $\mathbb{R}$ نمی‌شود.

۲.۳.۲ تعریف. فرض کنیم $(\Lambda, \preceq)$ مجموعه‌ای جهتدار و X مجموعه‌ای دلخواه باشد. در این صورت هر خانوادهٔ اندیسدار مانند $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ از عناصر X که توسط مجموعهٔ Λ اندیسگذاری شده باشد یک تور [۲۶] در X اندیس شده [۲۷] یا جهتدار شده [۲۸] به وسیلهٔ Λ نامیده می‌شود. ♣

در حالت خاص $\Lambda = \mathbb{N}$، با رابطهٔ معمولی روی $\mathbb{N}$، تور $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ همان دنبالهٔ $\{x_n\}$ می‌باشد و لذا تور تعمیمی از مفهوم دنباله است. اما در تور اندیس‌ها می‌توانند از مجموعه‌ای قوی‌تر از $\mathbb{N}$ بیایند و لذا

---

[۲۴] directed set

[۲۵] connected

[۲۶] net

[۲۷] indexed (by)

[۲۸] directed (by)

ممکن است یک تور شمارا نباشد، مثل تور $\{\frac{1}{r^2+1}\}_{r\in[0,1]}$ که توری ناشمارا است.

هر چیز باید به ساده‌ترین شکل ممکن باشد. اما نه ساده‌تر از آن.
Albert Einstein
(1879-1955)

چرا مطلب را تا این حد پیچانده‌ایم؟ ما می‌خواستیم زیرمجموعه‌ای دلخواه از عناصر X را در نظر بگیریم و برای این کار این زیرمجموعه را توسط یک مجموعهٔ جهتدار مانند Λ اندیسگذاری کردیم، آیا واقعاً برای در نظر گرفتن یک زیرمجموعهٔ دلخواه از X باید این قدر سختی متحمل شویم؟ نکتهٔ مهم این است که جهتدار بودن Λ در تعریف همگرایی یک تور نقشی اساسی دارد. از این پس در تور بودن $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ این فرض مستتر است که Λ مجموعه‌ای جهتدار می‌باشد و دیگر قید نمی‌شود.

۳.۳.۲ تعریف. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک و $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ توری در آن باشد. تور $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ را همگرا به حد x گوییم و می‌نویسیم $x_\lambda \to x$ یا $\lim_\lambda x_\lambda = x$ هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ اندیسی مانند $\lambda_\varepsilon \in \Lambda$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $\lambda \succeq \lambda_\varepsilon$ داشته باشیم

$$d(x_\lambda, x) < \varepsilon.$$

در غیر این صورت تور $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ واگرا نامیده می‌شود. ♣

به عبارت دیگر می‌توان گفت که $x_\lambda \to x$ هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ نقاط تور Λ–نهایتاً در $N_\varepsilon(x)$ واقع شوند. همچنین می‌توان تعریف همگرایی تور را با استفاده از مجموعه‌های باز به جای همسایگی‌های باز نیز بیان کرد.

می‌توانیم قضایای بخش قبل را مجدداً توسط تورها بازسازی کنیم، اما آیا واقعاً نیازی به تکرار کردن برهان‌ها وجود دارد؟ اگر در حکم قضیه‌ای وجود یک دنباله مد نظر بوده‌است و در این جا قصد داشته باشیم آن قضیه را توسط تورها بیان کنیم پس حکم، وجود یک تور را

می‌طلبد. اما از آن جایی که در برهان قبلی یک دنباله یافته‌ایم و هر دنباله خود یک تور است پس در حقیقت یک تور پیدا شده است و نیازی به ارائه برهانی جدید نیست. به عنوان مثال در قضیه‌ای داشتیم که اگر $x \in \bar{A}$ آن گاه دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در A موجود است به قسمی که $x_n \to x$. با خیال راحت می‌توانیم بگوییم که اگر $x \in \bar{A}$ آن گاه توری مانند $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ در A موجود است به قسمی که $x_\lambda \to x$.

همچنین اگر در فرض قضیه‌ای گفته باشیم "به ازای هر دنباله... " آن گاه این عبارت به "به ازای هر تور... " تبدیل می‌شود و چون به ازای هر تور فرضی برقرار است و دنباله حالت خاصی از تور است در حقیقت همان فرض قبلی (حتی قوی‌تر از آن) را داریم و همان استدلال کار می‌کند.

پس چه چیزی برای اثبات باقی می‌ماند و اصولاً معرفی مفهوم تور چه مزیتی را به وجود خواهد آورد؟

قضایایی وجود دارد که در حکم آن‌ها "به ازای هر دنباله..." آمده است و اثبات این قضایا کمکی به اثبات حکم جدید نخواهد کرد. همچنین حالاتی وجود دارد که در فرض قضیه آمده است "دنباله‌ای وجود دارد که..." ولی در مسأله‌ای خاص این دنباله یافت نمی‌شود و به جای آن یک تور یافت خواهد شد. و لذا به قضیه‌ای جدید نیاز است که با فرض وجود تور و استدلالی جدید حکمی جدید را به دست دهد.

به هر حال آنچه مهم است این است که تورها ابزار قدرتمندی هستند برای مواردی که دنباله ضعیف‌تر از آن است تا حکم مورد نظر را به دست دهد. مثلاً فضاهای توپولوژیک نمونهٔ بارزی از استفادهٔ قدرتمند تورها در اثبات احکام می‌باشند.

با این توضیحات به سراغ قضایای بخش قبل می‌رویم و آن‌ها را بازنویسی یا ترمیم می‌کنیم. در ابتدا بد نیست مثال‌هایی از تور همگرا و واگرا ارائه شود.

۴.۳.۲ مثال. در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ تور $\{\frac{1}{r^2+1}\}_{r\in[0,1]}$ که در آن $[0,1]$ با ترتیب معمولی مرتب شده است به $\frac{1}{2}$ همگرا می‌باشد، زیرا فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. می‌توان فرض کرد که $\varepsilon < \frac{1}{2}$. قرار می‌دهیم $r_\varepsilon = 2\sqrt{\frac{1-2\varepsilon}{1+2\varepsilon}} \in [0,1]$. در این صورت به ازای هر $r \geq r_\varepsilon$ داریم

$$r^2 \geq r_\varepsilon^2 = (\frac{1-2\varepsilon}{1+2\varepsilon}) \times 4$$

و لذا

$$r^2 + 2\varepsilon r^2 \geq 4(1-2\varepsilon)$$

و یا

$$\varepsilon(2r^2+8) \geq 4 - r^2$$

بنابراین

$$|\frac{1}{r^2+1} - \frac{1}{2}| < \frac{4-r^2}{2r^2+8} \leq \varepsilon.$$

در نتیجه $\lim_r \frac{1}{r^2+1} = \frac{1}{2}$. ♠

توجه کنید که مجموعهٔ اندیسگذار و ترتیب آن در مقدار حد بسیار مهم است. مثلاً اگر مجموعهٔ اندیسگذار $\mathbb{R}$ با ترتیب معمولی باشد آن گاه $\lim_r \frac{1}{r^2+1} = 0$ و اگر مجموعهٔ اندیسگذار $[0,1]$ ولی با ترتیب معکوس ترتیب معمولی باشد آن گاه $\lim_r \frac{1}{r^2+1} = 1$. از این رو بهتر است در حالاتی که بیم ابهام می‌رود نماد واضح‌تر $\lim_{(\Lambda,\preceq)} x_\lambda$ را به کار بریم.

۵.۳.۲ مثال. در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ تور $\{(-۱)^{[r]}\}_{r\in\mathbb{R}}$ واگراست. زیرا به برهان خلف اگر چنین نباشد و مثلاً به x همگرا باشد، آن گاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$ از جمله $\varepsilon = ۱ > ۰$ باید اندیسی مانند $r_\varepsilon \in \mathbb{R}$ موجود باشد که به ازای هر $r \geq r_\varepsilon$ داشته باشیم

$$|(-۱)^{[r]} - x| < \varepsilon.$$

لذا برای $r = ۲[r_\varepsilon]$ و $r = ۲[r_\varepsilon] + ۱$ به ترتیب داریم

$$|۱ - x| = |(-۱)^{[۲[r_\varepsilon]]} - x| < \varepsilon$$

و

$$|-۱ - x| = |(-۱)^{[۲[r_\varepsilon]+۱]} - x| < \varepsilon.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} ۲ &= |۱ - x - (-۱ - x)| \\ &\leq |۱ - x| + |-۱ - x| \\ &< ۲\varepsilon = ۲, \end{aligned}$$

که تناقض است. ♠

دقیقاً مشابه دنباله‌ها می‌توان اثبات کرد که هر تور ۸-نهایتاً ثابت در هر فضای متریک همگرا به همان مقدار ثابت است. و البته می‌توان اثبات کرد که در فضای گسسته عکس این مطلب نیز برقرار است.

قضایای زیر نیز عیناً به روش دنباله‌ها اثبات می‌شود.

۶.۳.۲ قضیه. در هر فضای متریک حد هر تور در صورت وجود منحصر به فرد است. ■

۷.۳.۲ قضیه. فرض کنیم $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ و $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ دو تور Λ–نهایتاً برابر باشند[۲۹]. در این صورت $x_\lambda \to x$ فقط و فقط وقتی که $y_\lambda \to x$. ■

۸.۳.۲ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک و A زیرمجموعه‌ای از آن باشد. در این صورت

i. $x \in \bar{A}$ فقط و فقط وقتی که توری مانند $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ در A موجود باشد به قسمی که $x_\lambda \to x$؛

ii. $x \in A'$ فقط و فقط وقتی که توری با جملات متمایز مانند $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ در A موجود باشد به قسمی که $x_\lambda \to x$؛

ii. $x \in A'$ فقط و فقط وقتی که توری مانند $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ در $A \setminus \{x\}$ موجود باشد به قسمی که $x_\lambda \to x$. ■

بد نیست به عنوان تمرین این قضایا را برای خود اثبات کنید.
دقیقاً شبیه دنباله‌ها می‌توان تور کراندار را تعریف کرد.

۹.۳.۲ تعریف. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک و $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ توری در آن باشد. $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ را کراندار نامیم هرگاه مجموعهٔ مقادیر آن یعنی $\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ زیرمجموعه‌ای کراندار از (X,d) باشد. ♣

آیا می‌توان گفت که هر تور همگرا لزوماً کراندار است؟ پاسخ منفی است. مثال زیر را ببینید.

---

[۲۹] این بدان معنی نیست که این دو تور فقط در تعدادی متناهی اندیس متفاوت هستند، گرچه در حالت خاص $\Lambda = \mathbb{N}$ این مطلب دقیقاً معادل آن است که دو دنباله فقط در تعدادی متناهی نقطه متفاوت هستند.

۱۰.۳.۲ مثال. در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ تور $\{x_r\}_{r\in[0,1]}$ که $[0,1]$ ترتیب معمولی دارد را به صورت

$$x_r = \begin{cases} \frac{1}{r} & 0 < r < \frac{1}{2} \\ r & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. واضح است که $\{x_r \mid r \in [0,1]\}$ در $\mathbb{R}$ کراندار نیست گرچه $x_r \to 1$. ♠

این مثال تعریف Λ-نهایتاً کراندار را موجه می‌سازد.

۱۱.۳.۲ تعریف. تور $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ از فضای متریک (X,d) را Λ-نهایتاً کراندار[30] می‌نامیم هرگاه اندیسی مانند $\lambda_0 \in \Lambda$ موجود باشد به قسمی که $\{x_\lambda \mid \lambda \succeq \lambda_0\}$ زیرمجموعه‌ای کراندار از X باشد. ♣

دقت کنید که در حالت خاص دنباله‌ها، تعریف نهایتاً کراندار برای یک دنباله خالی از فایده است چون یک دنباله، نهایتاً کراندار است فقط و فقط وقتی که کراندار باشد. اما برای تورها این تعریف کارآمدی است.

۱۲.۳.۲ قضیه. هر تور همگرا در هر فضای متریک مانند (X,d) نهایتاً کراندار است.

برهان. فرض کنیم $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ توری همگرا به x در X باشد. لذا به ازای هر $\varepsilon > 0$ از جمله برای $\varepsilon = 1$ اندیسی مانند $\lambda_\varepsilon \in \Lambda$ موجود است به قسمی که به ازای هر $\lambda \succeq \lambda_\varepsilon$ داریم

$$d(x_\lambda, x) < \varepsilon = 1.$$

و لذا به ازای هر $\lambda_1, \lambda_2 \succeq \lambda_\varepsilon$ داریم

$$\begin{aligned} d(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) &\leq d(x_{\lambda_1}, x) + d(x, x_{\lambda_2}) \\ &< 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

[30] Λ-eventually bounded

یعنی مجموعهٔ $\{x_\lambda \mid \lambda \succeq \lambda_\varepsilon\}$ در X کراندار و در نتیجه $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ Λ-نهایتاً کراندار است. ■

واضح است که عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست همان طور که برای دنباله‌ها چنین نبود.

تعریف زیرتور نیازمند دقت بیش‌تری است.

تعریف دقیق کلمهٔ "دقیق" چیست؟

۱۳.۳.۲ تعریف. فرض کنیم $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ توری در مجموعهٔ X باشد، Γ یک مجموعهٔ جهتدار دیگر باشد و $N:\Gamma\to\Lambda$ یک نگاشت با این خاصیت که برای هر اندیس مانند $\lambda_0\in\Lambda$ اندیسی مانند $\gamma_0\in\Gamma$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $\gamma\succeq\gamma_0$ داشته باشیم $N(\gamma)\succeq\lambda_0$. در این صورت $\{x_{N(\gamma)}\}_{\gamma\in\Gamma}$ زیرتوری[۳۱] از تور $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ نامیده می‌شود. ♣

۱۴.۳.۲ قضیه. فرض کنیم $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ توری همگرا به x در فضای متریک (X,d) باشد. در این صورت هر زیرتور آن نیز همگرا به x است.

برهان. فرض کنیم $\{x_{N(\gamma)}\}_{\gamma\in\Gamma}$ زیرتور دلخواهی از $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ باشد و $\varepsilon>0$ داده شده باشد. چون $x_\lambda\to x$، اندیسی مانند $\lambda_\varepsilon\in\Lambda$ موجود است به قسمی که به ازای هر $\lambda\succeq\lambda_\varepsilon$ داریم

$$d(x_\lambda,x)<\varepsilon.$$

اما برای λ_ε اندیسی مانند $\gamma_\varepsilon\in\Gamma$ موجود است به قسمی که به ازای هر $\gamma\succeq\gamma_\varepsilon$ داریم $N(\gamma)\succeq\lambda_\varepsilon$ و لذا

$$d(x_{N(\gamma)},x)<\varepsilon.$$

و این یعنی $x_{N(\gamma)}\to x$. ■

---

[۳۱] subnet

۱۵.۳.۲ تعریف. فرض کنیم $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ توری در فضای متریک (X,d) باشد. مجموعهٔ

$$\{x \mid \text{زیرتوری از } \{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \text{ همگرا به } x \text{ وجود دارد}\}$$

را مجموعهٔ حدود زیرتوری[۳۲] تور $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ می‌نامیم و با نماد $\overline{\{x_\lambda\}}_{\lambda\in\Lambda}$ نمایش می‌دهیم. ♣

قضیهٔ زیر به سادگی قابل اثبات است.

۱۶.۳.۲ قضیه. فرض کنیم $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ توری در فضای متریک (X,d) باشد و

$$A = \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}.$$

در این صورت $\overline{\{x_\lambda\}}_{\lambda\in\Lambda} \cup A = \bar{A}$. ■

۱۷.۳.۲ نتیجه. به ازای هر تور مانند $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ در فضای متریک (X,d) مجموعهٔ حدود زیرتوری آن یعنی $\overline{\{x_\lambda\}}_{\lambda\in\Lambda}$ زیرمجموعه‌ای بسته از X می‌باشد. ■

تعریف تور کوشی کاملاً شبیه دنبالهٔ کوشی است.

۱۸.۳.۲ تعریف. تور $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ در فضای متریک (X,d) را کوشی نامیم هرگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$ اندیسی مانند $\lambda_\varepsilon \in \Lambda$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $\lambda, \mu \succeq \lambda_\varepsilon$ داشته باشیم

$$d(x_\lambda, x_\mu) < \varepsilon. ♣$$

قضایای زیر نیز به سادگی قابل اثبات است.

۱۹.۳.۲ قضیه. هر تور همگرا مانند $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ در یک فضای متریک مانند (X,d)، کوشی است. ■

---
[۳۲] subnets limit points

۲۰.۳.۲ قضیه. هر تور کوشی نهایتاً کراندار است. ■

واضح است فضایی که هر تور کوشی در آن همگرا باشد فضایی تام است، زیرا وقتی همهٔ تورهای کوشی همگرا باشند همهٔ دنباله‌های کوشی نیز به طریق اولی همگرا خواهند بود. لذا قضیهٔ بعد از یک طرف چیز مهمی نمی‌گوید و از طرف دیگر قابل توجه است. ابتدا برای ساده شدن برهان دو لم آسان را اثبات می‌کنیم.

۲۱.۳.۲ لم. فرض کنیم $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ توری کوشی در فضای متریک (X,d) باشد که زیرتوری مانند $\{x_{N(\gamma)}\}_{\gamma\in\Gamma}$ همگرا به x دارد. در این صورت $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ نیز همگرا به x است.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. چون $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ کوشی است پس اندیسی مانند $\lambda_0 \in \Lambda$ موجود است به قسمی که به ازای هر $\lambda, \mu \succeq \lambda_0$ داریم

$$d(x_\lambda, x_\mu) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

همچنین از آن جایی که $x_{N(\gamma)} \to x$، اندیسی مانند $\gamma_0 \in \Gamma$ موجود است به قسمی که به ازای هر $\gamma \succeq \gamma_0$ داریم

$$d(x_{N(\gamma)}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (**)$$

حال بنابر تعریف زیرتور برای $\lambda_0 \in \Lambda$ اندیسی مانند $\gamma_1 \in \Gamma$ موجود است به قسمی که به ازای هر $\gamma \succeq \gamma_1$ داریم $N(\gamma) \succeq \lambda_0$. همچنین چون Γ از بالا جهتدار است پس $\{\gamma_0, \gamma_1\}$ کران بالایی مانند γ_2 دارد. قرار می‌دهیم $\mu_0 = N(\gamma_2)$. در این صورت می‌دانیم $\gamma_2 \succeq \gamma_0$ و $\mu_0 \succeq \lambda_0$ (توجه کنید که علامت $\succeq$ بین اعضای Λ ترتیب روی Λ و بین اعضای Γ ترتیب روی Γ را بدون هیچ ابهامی نمایش می‌دهد).

بنابراین با فرض $\lambda_\varepsilon = \lambda_\circ$ به ازای هر $\lambda \succeq \lambda_\varepsilon$ داریم

$$\begin{aligned} d(x_\lambda, x) &\leq d(x_\lambda, x_{\mu_\circ}) + d(x_{\mu_\circ}, x) \\ &= d(x_\lambda, x_{\mu_\circ}) + d(x_{N(\gamma_\mathrm{۲})}, x) \\ &< \frac{\varepsilon}{\mathrm{۲}} + \frac{\varepsilon}{\mathrm{۲}} = \varepsilon, \end{aligned}$$

بنابر $(*)$ و $(**)$. ■

۲۲.۳.۲ لم. هر زیرتور یک تور کوشی، خود، کوشی است.

برهان. فرض کنیم $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ توری کوشی و $\{x_{N(\gamma)}\}_{\gamma\in\Gamma}$ زیرتوری از آن باشد و $\varepsilon > \circ$ داده شده باشد. چون $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ کوشی است، پس اندیسی مانند $\lambda_\varepsilon \in \Lambda$ موجود است به قسمی که به ازای هر $\lambda, \mu \succeq \lambda_\varepsilon$ داریم

$$d(x_\lambda, x_\mu) < \varepsilon.$$

اما با توجه به تعریف زیرتور، برای $\lambda_\varepsilon \in \Lambda$ اندیسی مانند $\gamma_\varepsilon \in \Gamma$ موجود است به قسمی که به ازای هر $\gamma \succeq \gamma_\varepsilon$ داریم $N(\gamma) \succeq \lambda_\varepsilon$.

حال به ازای هر $\gamma, \delta \succeq \gamma_\varepsilon$ داریم $N(\gamma), N(\delta) \succeq \lambda_\varepsilon$ و لذا

$$d(x_{N(\gamma)}, x_{N(\delta)}) < \varepsilon \qquad (*)$$

پس برای $\varepsilon > \circ$ اندیس $\gamma_\varepsilon \in \Gamma$ را یافتیم به قسمی که $\gamma, \delta \succeq \gamma_\varepsilon$ عبارت $(*)$ را نتیجه می‌دهد و این یعنی $\{x_{N(\gamma)}\}_{\gamma\in\Gamma}$ کوشی است. ■

۲۳.۳.۲ قضیه. فضای متریک (X, d) تام است فقط و فقط وقتی که هر تور کوشی در آن همگرا باشد.

برهان. فرض کنیم $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ توری کوشی در X باشد. یک زیردنباله مانند $\{x_{N(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ از این تور انتخاب می‌کنیم. بنابر لم ۲۲.۳.۲

چون این زیردنباله زیرتور است و خود تور $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ کوشی است پس این دنباله در X کوشی است و چون X تام است لذا $\{x_{N(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ به نقطه‌ای مانند x در X همگراست. لذا تور $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ دارای زیردنباله‌ای (و لذا زیرتوری) همگرا می‌باشد و بنابر لم ۲۱.۳.۲ همگرا خواهد بود.

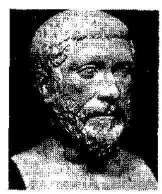
طرف دیگر همان طور که در توضیح قبل از لم ۲۱.۳.۲ گفتیم روشن است. ■

خوشبختانه (یا شاید متأسفانه) نیازی به قضیه‌ای طاقت‌فرسا (یا شاید دلپذیرا) مشابه قضیهٔ ۳۱.۲.۲ نیست، زیرا بنابر قضیهٔ فوق تتمیم فضای متریک (X,d) تحت تورهای کوشی همان تتمیم تحت دنباله‌های کوشی می‌باشد.

گرچه این بخش با همهٔ مفاهیم لذت‌بخش آن در این جا به پایان می‌رسد، اما نگران نباشید! باز هم به این مباحث باز خواهیم گشت.

۴.۲ به فضای اقلیدسی برویم

بهتر نبود اول خواص $\mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^k$) را دربارهٔ دنباله‌ها بررسی می‌کردیم و پس از آن به بررسی مفهوم کلی دنباله‌ها در فضاهای متریک با ایده گرفتن از فضاهای اقلیدسی می‌پرداختیم؟ به نظر می‌رسد به دو دلیل این روش بهتر است. اول این که قضایای کلاسیک دنباله‌ها در فضاهای اقلیدسی تا حدودی آشناست و شاید تکرار آن در نظر اول ملال‌آور جلوه کند و توانی برای مطالعهٔ بخش‌های بعدی باقی نگذارد. دوم این که هدف اصلی این کتاب بررسی مفاهیم تعمیم یافته در فضاهای متریک است و مفاهیم کلاسیک دانسته فرض شده و طفیلی محسوب می‌شود. با این همه اکنون که کتاب مدون شده و در



Pythagoras
of Samos
(569-475BC)

دست شماست امکان تغییر در ترتیب مطالب نیست! یا خود را تطبیق دهید و یا به هر ترتیب که تمایل دارید آن را مطالعه کنید (البته اگر چیزی دستگیرتان شد!).

اما نکتهٔ مهم این است که چه چیزی $\mathbb{R}^k$ را توانمندتر از یک فضای متریک صرف می‌سازد؟ همان طور که می‌دانیم $\mathbb{R}^k$ یک فضای برداری است که برای بردارهای آن اندازه تعریف شده است. به عبارت دیگر در $\mathbb{R}^k$ عمل جمع، ضرب اسکالر و نرم داریم که ساختارهای جبری، جبر خطی و آنالیزی را به طور توأم برای $\mathbb{R}^k$ فراهم می‌سازد. شاید این مطلب در ابتدا چندان مهم به نظر نرسد، اما توجه به این نکته ضروری است که همهٔ توانمندی‌های جبر، جبر خطی و آنالیز یکجا در کنار هم می‌آیند تا مسأله‌ای حل شود (و البته مسائل جدید پیکارطلب جدیدی نیز به وجود خواهند آمد). وجود مبدأ و موضعی ساختن مسائل کلی به مسائلی در مبدأ به قدری مهم است که جز با درگیر شدن در این گونه مسائل نمی‌توان تأثیر اعجاب‌آور آن را فهمید.

$\mathbb{R}$ از این هم بهتر است! زیرا نسبت ترتیبی $\leq$ نیز علاوه بر قوای سه‌گانهٔ فوق‌الذکر به کمک می‌آید. در حقیقت $\mathbb{R}$ میدانی مرتب و فضایی نرمدار است. از طرف دیگر گرچه $\mathbb{C}$ میدان مرتب نیست ولی به طور جبری بسته می‌باشد که مزیتی برای آن محسوب می‌شود. در این بخش به $\mathbb{R}$ نظری می‌افکنیم و برخی قضایای آشنا و ناآشنا را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

اگر هر نقطه از $\mathbb{R}^k$ را به صورت $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_k)$ که در آن x_i ها در $\mathbb{R}$ هستند نمایش دهیم آن گاه هر دنباله مانند $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در $\mathbb{R}^k$ نمایشی به صورت $\boldsymbol{x}_n=(x_{1,n},\ldots,x_{k,n})$ خواهد داشت که $\{x_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنبالهٔ مؤلفه i ام دنبالهٔ $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ نامیده می‌شود.

۱.۴.۲ قضیه. فرض کنیم $\{\boldsymbol{x}_n\}$ دنباله‌ای در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^k$ باشد. در این صورت $\{\boldsymbol{x}_n\}$ همگرا به $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_k)$ است فقط و فقط وقتی که به ازای هر $1 \le i \le k$ دنبالهٔ مؤلفه i ام $\{x_{i,n}\}$ همگرا به x_i باشد.

برهان. فرض کنیم $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ و نیز $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. لذا $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ی موجود است به قسمی که به ازای هر $n \ge K_\varepsilon$ داریم

$$\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\|_2 \le \left(\sum_{i=1}^k (x_{n.i} - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

بنابراین

$$|x_{n,i} - x_i| \le \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\|_2 < \varepsilon.$$

لذا $x_{n,i} \to x_i$.

بالعکس، فرض کنیم به ازای هر $1 \le i \le k$ داشته باشیم $x_{n,i} \to x_i$ پس اعدادی مانند $K_i \in \mathbb{N}$ موجودند به قسمی که به ازای هر $n \ge K_i$ داریم

$$|x_{n,i} - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}.$$

حال با فرض $K_\varepsilon = \max\{K_1,\ldots,K_k\}$ به ازای هر $n \ge K_\varepsilon$ داریم

$$\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\|_2 \le \left(\sum_{i=1}^k (x_{n,i} - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon^2}{k}\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

بنابراین $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$. ■

این قضیه کمک می‌کند تا از این پس بحث خود را روی $\mathbb{R}$ متمرکز کنیم.

۲.۴.۲ قضیه. فرض کنیم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشند که به ترتیب همگرا به x و y هستند. در این صورت $x_n \pm y_n \to x \pm y$.

برهان. برای $\varepsilon > ۰$ داده شده $K_۱, K_۲ \in \mathbb{N}$ یی موجودند به قسمی که به ازای هر $n \geq K_۱$ و هر $n \geq K_۲$ به ترتیب داریم

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

و

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

قرار می‌دهیم $K_\varepsilon = \max\{K_۱, K_۲\}$. در این صورت برای هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$\begin{aligned} |(x_n \pm y_n) - (x \pm y)| &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon. \end{aligned}$$

بنابراین $x_n \pm y_n \to x \pm y$. ■

۳.۴.۲ قضیه. فرض کنیم در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ داشته باشیم $x_n \to x$ و $y_n \to y$. در این صورت $x_n y_n \to xy$.

برهان. چون $\{y_n\}$ همگراست، پس کراندار است و لذا $M > ۰$ ی هست که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $|y_n| \leq M$. همچنین چون $x_n \to x$، لذا $K_۱ \in \mathbb{N}$ ی هست به قسمی که به ازای هر $n \geq K_۱$ داریم

$$|x_n - x| \leq \frac{\varepsilon}{۲M}.$$

به علاوه چون $y_n \to y$ پس $K_۲ \in \mathbb{N}$ یی هست به قسمی که به ازای هر $n \geq K_۲$ داریم

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{۲(|x| + ۱)}.$$

قرار می‌دهیم $K_\varepsilon = \max\{K_۱, K_۲\}$. در این صورت برای هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x y_n + x y_n - xy| \\ &\leq |x_n - x||y_n| + |x||y_n - y| \\ &< \frac{\varepsilon}{۲M}.M + |x|.\frac{\varepsilon}{۲(|x| + ۱)} \leq \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon. \end{aligned}$$

لذا $x_n y_n \to xy$. ■

۴.۴.۲ قضیه. فرض کنیم $x_n \to x$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$. در این صورت اگر $x > ۰$ آن گاه از مرتبه‌ای به بعد $x_n > ۰$.

به عبارت دیگر هر دنبالهٔ همگرا به عددی مثبت نهایتاً مثبت است (و به همین ترتیب برای حدود منفی).

برهان. با فرض $\varepsilon = \frac{x}{۲} > ۰$ واضح است که دنباله نهایتاً در $N_\varepsilon(x) = (\frac{x}{۲}, \frac{۳x}{۲})$ قرار دارد که بازه‌ای در اعداد حقیقی مثبت می‌باشد. ■

برهان فوق نشان می‌دهد که قضیهٔ بالا را به شکلی بهتر نیز می‌توان بیان کرد.

۵.۴.۲ قضیه. فرض کنیم $x_n \to x \neq ۰$. در این صورت $\{|x_n|\}$ نهایتاً از پایین توسط عدد ثابت مثبتی کراندار است و لذا $\{\frac{۱}{|x_n|}\}$ از بالا کراندار می‌باشد. ■

عدد ثابت مثبت قضیهٔ فوق که کران پایین $\{|x_n|\}$ می‌باشد همان $\frac{|x|}{۲}$ است.

۶.۴.۲ قضیه. فرض کنیم $x_n \to x$ و $y_n \to y \neq ۰$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$. در این صورت $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$.

برهان. می‌توان فرض کرد که $y > \text{۰}$. بنابر قضیهٔ فوق عددی مانند $K_\text{۱} \in \mathbb{N}$ موجود است به قسمی که به ازای هر $n \geq K_\text{۱}$ داریم $\frac{\text{۱}}{|y_n|} < \frac{\text{۲}}{y}$. حال چون $x_n \to x$ پس $K_\text{۲} \in \mathbb{N}$ یی موجود است به قسمی که به ازای هر $n \geq K_\text{۲}$ داریم

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon y}{\text{۴}}.$$

و چون $y_n \to y$ پس $K_\text{۳} \in \mathbb{N}$ یی موجود است به قسمی که به ازای هر $n \geq K_\text{۳}$ داریم

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon y^\text{۲}}{\text{۴}(|x| + \text{۱})}.$$

قرار می‌دهیم $K_\varepsilon = \max\{K_\text{۱}, K_\text{۲}, K_\text{۳}\}$. در این صورت برای هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$\begin{aligned}
|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}| &= |\frac{x_n y - x y_n}{y_n y}| = |\frac{x_n y - xy + xy - x y_n}{y_n y}| \\
&\leq \frac{\text{۱}}{|y_n||y|}(|x_n - x||y| + |x||y - y_n|) \\
&< \frac{\text{۲}}{y^\text{۲}}(\frac{\varepsilon y^\text{۲}}{\text{۴}} + \frac{|x|\varepsilon y^\text{۲}}{\text{۴}(|x| + \text{۱})}) \\
&\leq \text{۲}(\frac{\varepsilon}{\text{۴}} + \frac{\varepsilon}{\text{۴}}) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

بنابراین $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$. ■

عکس نقیض قضیهٔ ۴.۴.۲ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

۷.۴.۲ قضیه. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد که از مرتبه‌ای به بعد $x_n < l \in \mathbb{R}$. در این صورت $\lim_{n\to\infty} x_n \leq l$. همچنین اگر $x_n \leq l$ از مرتبه‌ای به بعد، آن گاه $\lim_{n\to\infty} x_n \leq l$. ■

توجه کنید که در هر دو حالتِ $>$ و $\leq$ در حکم داریم $\leq$. مثلاً $1 > 1 - \frac{1}{n}$ در صورتی که

$$\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n}) = 1.$$

همچنین این قضیه را می‌توان با $x_n > l$ به جای $x_n < l$ نیز بیان کرد که حکم $\lim_{n\to\infty} x_n \geq l$ را نتیجه می‌دهد.

ریاضیات، زبانی است که آفریدگار برای انشاء جهان به کار برده است.

همان طور که گفتیم رابطهٔ $\leq$ تعریف شده روی $\mathbb{R}$ کمک می‌کند تا بتوانیم مفاهیم و احکام جدیدی را در مورد دنباله‌های حقیقی بیان کنیم. مثلاً یکنوا بودن یک دنباله در فضاهای متریک کلی قابل تعریف نیست ولی در $\mathbb{R}$ تعریف می‌شود.

۸.۴.۲ تعریف. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد. $\{x_n\}$ را صعودی[۳۳] نامیم هرگاه به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $x_n \leq x_{n+1}$ و نزولی[۳۴] نامیم هرگاه به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $x_n \geq x_{n+1}$. به علاوه $\{x_n\}$ اکیداً صعودی[۳۵] یا اکیداً نزولی[۳۶] است هرگاه نامساوی‌های مذکور اکید باشند. همچنین هر دنبالهٔ صعودی یا نزولی، یکنوا[۳۷] و هر دنبالهٔ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی اکیداً یکنوا[۳۸] نامیده می‌شود. ♣

به طریق مشابه می‌توان از مرتبه‌ای به بعد صعودی (نزولی) یا اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) را تعریف کرد و از آن جایی که در بحث دنباله‌ها رفتار دنباله از مرتبه‌ای به بعد مد نظر است، در همهٔ قضایای

[۳۳] ascending, increasing
[۳۴] descending, decreasing
[۳۵] strictly ascending, strictly increasing
[۳۶] strictly descending, strictly decreasing
[۳۷] monotone
[۳۸] strictly monotone

مورد بحث می‌توان مثلاً به جای صعودی، از مرتبه‌ای به بعد صعودی قرار داد و باز هم حکم برقرار است.

۹.۴.۲ قضیه. هر دنبالهٔ صعودی و از بالا کراندار مانند $\{x_n\}$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ همگراست.

برهان. فرض کنیم

$$A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

چون A ناتهی و بنابر فرض از بالا کراندار است پس بنابر اصل کمال سوپریممی مانند x دارد. ادعا می‌کنیم $x_n \to x$. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. بنابر خاصیت مشخصهٔ سوپریمم $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ی هست به قسمی که

$$x - \varepsilon < x_{K_\varepsilon}.$$

لذا به ازای هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$x - \varepsilon < x_{K_\varepsilon} \leq x_n \leq x < x + \varepsilon,$$

و لذا

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

پس $x_n \to x$. ■

اگر در قضیهٔ بالا به جای صعودی، از مرتبه‌ای به بعد صعودی قرار دهیم باز هم حکم برقرار است ولی دقت کنید که اگر این مرتبه را K بنامیم داریم

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq K\}.$$

به علاوه از آن جایی که هر دنبالهٔ اکیداً صعودی دنباله‌ای صعودی است پس این قضیه را با عبارت اکیداً صعودی نیز می‌توان بین کرد. به طریق مشابه می‌توان قضیهٔ زیر را اثبات کرد.

۱۰.۴.۲ قضیه. هر دنبالهٔ نزولی و از پایین کراندار مانند $\{x_n\}$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ همگرا است. ■

این قضیه با عبارات از مرتبه‌ای به بعد نزولی، اکیداً نزولی و از مرتبه‌ای به بعد اکیداً نزولی نیز قابل اثبات است.

این قضایا اهمیت بسیاری در بررسی دنباله‌های خاص، بویژه دنباله‌های بازگشتی دارد. البته این نتیجه‌گیری مختص دنباله‌های بازگشتی نیست و کاربرد فراوانی در بررسی دنباله‌های خاص دارد که چند نمونه از آن‌ها را در تمرین‌ها خواهید دید.

رابطهٔ $\leq$ روی $\mathbb{R}$ کمک می‌کند بتوانیم حد یک دنباله را توسط حدود دنباله‌هایی که به آن فشار می‌آورند اثبات کنیم. قضیهٔ بعد به قضیهٔ فشار موسوم است.

۱۱.۴.۲ قضیه. فرض کنیم $\{x_n\}$، $\{y_n\}$ و $\{z_n\}$ دنباله‌هایی در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشند که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$x_n \leq y_n \leq z_n.$$

همچنین فرض کنیم $x_n \to x$ و $z_n \to x$. در این صورت $y_n \to x$.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. چون $x_n \to x$ پس $K_1 \in \mathbb{N}$ ی موجود است به قسمی که به ازای هر $n \geq K_1$ داریم

$$x - \varepsilon < x_n.$$

همچنین چون $z_n \to x$ پس $K_2 \in \mathbb{N}$ یی موجود است به قسمی که به ازای هر $n \geq K_2$ داریم

$$z_n < x + \varepsilon.$$

قرار می‌دهیم $K_\varepsilon = \max\{K_1, K_2\}$. در این صورت به ازای هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$x - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < x + \varepsilon,$$

و لذا

$$|y_n - x| < \varepsilon.$$

پس $y_n \to x$. ■

اگر شرط $x_n \leq y_n \leq z_n$ از مرتبه‌ای به بعد برقرار باشد، کماکان همان حکم برقرار است.

۱۲.۴.۲ نتیجه. فرض کنیم $x_n \to 0$ و نیز $\{y_n\}$ دنباله‌ای کراندار در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت $x_n y_n \to 0$.

برهان. چون $\{y_n\}$ کراندار است پس $M > 0$ ی هست که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$|y_n| \leq M$$

و یا

$$-M \leq y_n \leq M.$$

و لذا

$$-Mx_n \leq x_n y_n \leq Mx_n.$$

اما $x_n M \to 0$ و $-x_n M \to 0$. پس طبق قضیهٔ فوق $x_n y_n \to 0$. ■

حال به اثبات تام بودن فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ خواهیم پرداخت که از قبل وعدهٔ آن را داده بودیم. توجه داریم که تام بودن $\mathbb{R}$ در پرتو قضیهٔ ۱.۴.۲ تام بودن $\mathbb{R}^k$ را نتیجه خواهد داد. اما قبل از اثبات تام بودن $\mathbb{R}$ به معرفی یک تعریف و اثبات دو قضیه می‌پردازیم.

۱۳.۴.۲ تعریف. فرض کنیم $\{x_n\}$دنباله‌ای در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد. نقطهٔ x_{n_0} از این دنباله را یک نوک[۳۹] برای آن نامیم هرگاه به ازای هر $n \geq n_0$ داشته باشیم $x_n \leq x_{n_0}$. ♣

توجه کنید که x_n های بعد از x_{n_0} با یکدیگر مقایسه نمی‌شوند و لذا این شرط اصلاً بدان معنی نیست که دنباله بعد از نقطهٔ x_{n_0} نزولی باشد.

۱۴.۴.۲ قضیه. هر دنباله مانند $\{x_n\}$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ دارای زیردنباله‌ای یکنواست.

برهان. اندیس‌هایی را در نظر می‌گیریم که در آن‌ها نوک اتفاق افتاده است. اگر این اندیس‌ها نامتناهی باشند یک زیردنبالهٔ نزولی یافته‌ایم چون طبق تعریف نوک اگر x_{n_1} و x_{n_2} دو نوک باشند و $n_1 < n_2$ آن گاه $x_{n_1} \geq x_{n_2}$. لذا اگر بی‌نهایت اندیس بیابیم که در آن‌ها نوک اتفاق افتاده است در حقیقت زیردنباله‌ای نزولی از $\{x_n\}$ یافته‌ایم. بنابراین فرض کنیم تعداد نوک‌ها متناهی است. لذا عددی مانند $K \in \mathbb{N}$ موجود است به قسمی که به ازای هر $n \geq K$ نقطهٔ x_n یک نوک برای دنباله نیست. چون x_K نوک نیست پس اندیسی مانند n_1 موجود است به قسمی که $x_K < x_{n_1}$ و چون x_{n_1} نوک نیست پس اندیسی مانند n_2 موجوداست به قسمی که $x_{n_1} < x_{n_2}$. بدین ترتیب دنباله‌ای مانند $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ از نقاط $\{x_n\}$ داریم که صعودی است. لذا زیردنباله‌ای صعودی برای $\{x_n\}$ یافتیم. ■

هر جا عدد هست زیبایی هست.
Proclus Diadochus
(411-485)

۱۵.۴.۲ قضیه. هر دنبالهٔ کراندار در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ دارای زیردنباله‌ای همگراست.

---
[۳۹] tip

برهان. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}$ باشد. بنابر قضیهٔ فوق $\{x_n\}$ دارای زیردنباله‌ای یکنواست و چون $\{x_n\}$ کراندار است، این زیردنباله نیز کراندار خواهد بود. بنابراین $\{x_n\}$ دارای زیردنباله‌ای یکنوا و کراندار می‌باشد که طبق قضایای ۹.۴.۲ و ۱۰.۴.۲ همگراست. ■

۱۶.۴.۲ قضیه. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ (و لذا $\mathbb{R}^k$) تام است.

برهان. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی در $\mathbb{R}$ باشد. بنابر قضیهٔ ۲۴.۲.۲ این دنباله کراندار است و بنابر قضیهٔ فوق زیردنباله‌ای همگرا دارد و لذا بنابر قضیهٔ ۲۷.۲.۲ خود دنبالهٔ $\{x_n\}$ نیز همگرا است. ■

اثبات قضیهٔ فوق مرهون وجود تعریف نوک برای دنباله‌های حقیقی است که آن هم به خاطر وجود رابطهٔ $\leq$ روی $\mathbb{R}$ می‌باشد. پذیرفته‌اید که $\leq$ چه قدر مهم است؟ اگر هنوز باور ندارید بقیهٔ مطلب را بخوانید.

وجود رابطهٔ $\leq$ روی $\mathbb{R}$ ما را قادر می‌سازد که در مورد سوپریمم و اینفیمم زیرمجموعه‌های آن صحبت کنیم. این کار در قضایای ۹.۴.۲ و ۱۰.۴.۲ بسیار مفید بود. حال می‌خواهیم به مجموعهٔ حدود زیردنباله‌ای یک دنباله در $\mathbb{R}$ بپردازیم. از آن جا که می‌خواهیم بحث کلی‌تر باشد به جای $\mathbb{R}$ دستگاه وسعت‌یافتهٔ اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ را در نظر می‌گیریم و برای هر $x \in \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم $-\infty < x < +\infty$. بدین ترتیب می‌توان گفت که هر زیرمجموعه ناتهی از $\mathbb{R}^*$ سوپریمم دارد. زیرا اگر از بالا کراندار باشد طبق اصل کمال سوپریممی در $\mathbb{R}$ دارد و در غیر این صورت می‌توان سوپریمم آن را $+\infty$ تلقی کرد. همچنین می‌توان گفت دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا به $+\infty$ است هرگاه به ازای هر $M > 0$ عددی مانند $K_M \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $n \geq K_M$ داشته باشیم $x_n \geq M$. به طریق مشابه می‌توان $x_n \to -\infty$ را تعریف کرد که منطبق بر شناخت کلاسیک ما از حدود $+\infty$ و $-\infty$ است و نیازی به بحث بیش‌تر ندارد.

حال فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}$ باشد و $\overline{\{x_n\}}$ مجموعهٔ حدود زیردنباله‌ای آن در $\mathbb{R}^*$، یعنی ممکن است $+\infty$ و یا $-\infty$ نیز به عنوان حدود زیردنباله‌های $\{x_n\}$ در $\overline{\{x_n\}}$ ظاهر شده باشد. با توجه به توضیحات فوق چون $\overline{\{x_n\}}$ همواره ناتهی است بحث در مورد سوپریمم و اینفیمم آن کاملاً موجه است.

۱۷.۴.۲ تعریف. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد و $\overline{\{x_n\}}$ مجموعهٔ حدود زیردنباله‌ای آن در $\mathbb{R}^*$. حد بالایی[۴۰] این دنباله با نماد $\limsup_n x_n$ برابر $\sup \overline{\{x_n\}}$ تعریف می‌شود. به طور مشابه حد پایینی[۴۱] این دنباله با نماد $\liminf_n x_n$ برابر $\inf \overline{\{x_n\}}$ می‌باشد. ♣

۱۸.۴.۲ قضیه. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت

$$\limsup_n x_n = +\infty$$

فقط و فقط وقتی که $\{x_n\}$ از بالا کراندار نباشد. به طور مشابه

$$\liminf_n x_n = -\infty$$

فقط و فقط وقتی که $\{x_n\}$ از پایین کراندار نباشد.

برهان. فرض کنیم $\limsup_n x_n = +\infty$. بنابراین $\sup \overline{\{x_n\}} = +\infty$ و این بدان معنی است که $\overline{\{x_n\}}$ از بالا کراندار نیست. لذا به ازای هر $M \in \mathbb{N}$ عددی مانند $\alpha_M \in \overline{\{x_n\}}$ موجود است به قسمی که $\alpha_M > M$. اما α_M حد زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ است و این بدان معنی است که برای بی‌نهایت اندیس مانند n داریم $x_n > M$. پس برای M های متمایز در

---

[۴۰] limit superior

[۴۱] limit inferior

$\mathbb{N}$ می‌توان اندیس‌های متمایزی مانند n_M انتخاب کرد که $x_{n_M} > M$. لذا $\{x_{n_M}\}_{M\in\mathbb{N}}$ زیردنباله‌ای همگرا به $+\infty$ از $\{x_n\}$ است و در نتیجه $\{x_n\}$ از بالا کراندار نیست.

بالعکس، فرض کنیم $\{x_n\}$ از بالا کراندار نباشد. در این صورت $\{x_n\}$ زیردنباله‌ای همگرا به $+\infty$ دارد و لذا $+\infty \in \overline{\{x_n\}}$ و در نتیجه $\limsup_n x_n = +\infty$.

حکم قسمت بعد به طریق مشابه اثبات می‌شود. ■

از این پس توجه خود را به دنباله‌های کراندار در $\mathbb{R}$ معطوف می‌کنیم زیرا در غیر این صورت $\limsup_n x_n$ و $\liminf_n x_n$ مشخص خواهند بود.

۱۹.۴.۲ لم. فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای ناتهی و از بالا کراندار در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت $\sup A \in \bar{A}$.

برهان. چون A ناتهی و از بالا کراندار است، بنابر اصل کمال سوپریمم دارد. این سوپریمم را α می‌نامیم. ادعا می‌کنیم $\alpha \in \bar{A}$. فرض کنیم $r > ۰$ داده شده باشد. بنابر خاصیت مشخصهٔ سوپریمم عضوی از A مانند $a_۰$ موجود است به قسمی که

$$\alpha - r < a_۰.$$

اما با توجه به کران بالا بودن α داریم

$$a_۰ \leq \alpha < \alpha + r.$$

بنابراین

$$\alpha - r < a_۰ < \alpha + r$$

و لذا $a_۰ \in N_r(\alpha) \cap A$. پس

$$N_r(\alpha) \cap A \neq \phi.$$

و این یعنی $\alpha \in \bar{A}$. ■

می‌توان حکم مشابهی در مورد زیرمجموعه‌های ناتهی و از پایین کراندار ارائه داد.

۲۰.۴.۲ نتیجه. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت

$$\limsup_n x_n, \liminf_n x_n \in \overline{\{x_n\}}.$$

برهان. در حالتی که $\{x_n\}$ کراندار نباشد، طبق برهان قضیهٔ ۱۸.۴.۲ حکم واضح است. اما اگر $\{x_n\}$ کراندار باشد $\limsup_n x_n$ و $\liminf_n x_n$ اعدادی حقیقی هستند و لذا قضیهٔ فوق، با توجه به بسته بودن $\overline{\{x_n\}}$ بنابر نتیجهٔ ۲۱.۲.۲، حکم را ایجاب خواهد کرد. ■

۲۱.۴.۲ نتیجه. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت

$$\limsup_n x_n = \max \overline{\{x_n\}},$$
$$\liminf_n x_n = \min \overline{\{x_n\}}$$

برهان. چون $\sup \overline{\{x_n\}} = \limsup_n x_n \in \overline{\{x_n\}}$ پس این سوپریمم در حقیقت ماکزیمم می‌باشد. به همین ترتیب برای قسمت بعد حکم اثبات می‌شود. ■

حکم فوق در حقیقت بیان می‌دارد که حد بالایی و پایینی یک دنباله، خود، حدود زیردنباله‌ای آن هستند. بدین ترتیب تعریف معادل دیگری برای حد بالایی و حد پایینی به صورت قضیهٔ بعد به دست خواهد آمد. اما قبل از آن ذکر یک نکتهٔ بدیهی ضروری است.

اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا باشد آن گاه $\overline{\{x_n\}}$ یک عضو دارد و آن هم $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ می‌باشد. لذا در این حالت $\limsup_n x_n = \liminf_n x_n = x$. بالعکس، اگر

$$\limsup_n x_n = \liminf_n x_n$$

آن گاه $\sup \overline{\{x_n\}} = \inf \overline{\{x_n\}}$ و این یعنی $\overline{\{x_n\}}$ تک عضوی است و لذا همهٔ زیردنباله‌های $\{x_n\}$ به یک عدد مشخص همگرا هستند و در نتیجه $\{x_n\}$ همگراست.

۲۲.۴.۲ قضیه. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت

$$\alpha = \limsup_n x_n$$

فقط و فقط وقتی که دو شرط زیر توأماً برقرار باشد:

i. به ازای هر $\varepsilon > 0$، بی‌نهایت اندیس مانند n موجود باشد به قسمی که $\alpha - \varepsilon < x_n$؛

ii. به ازای هر $\varepsilon > 0$، فقط تعدادی متناهی اندیس n موجود باشد به قسمی که $\alpha + \varepsilon < x_n$.

برهان. فرض کنیم $\alpha = \limsup_n x_n$. طبق قضیهٔ فوق $\alpha = \max \overline{\{x_n\}}$. بنابراین زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ موجود است که همگرا به α می‌باشد و لذا به ازای هر $\varepsilon > 0$ نقاط این زیردنباله نهایتاً در $N_\varepsilon(\alpha)$ قرار دارند و این بدان معنی است که این نقاط نهایتاً بزرگ‌تر از $\alpha - \varepsilon$ هستند. لذا بی‌نهایت اندیس مانند n یافت می‌شود به قسمی که $\alpha - \varepsilon < x_n$. پس i برقرار است.

حال به برهان خلف فرض کنیم ii برقرار نباشد. پس $\varepsilon_\circ > \circ$ ی هست به قسمی که بی‌نهایت اندیس مانند n با شرط $x_n > \alpha + \varepsilon_\circ$ موجودند. در نتیجه زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ داریم که همهٔ نقاط آن بعد از $\alpha + \varepsilon_\circ$ قرار دارند. حال چون $\{x_n\}$ کراندار است این زیردنباله نیز کراندار می‌باشد و طبق قضیهٔ ۱۵.۴.۲ دارای زیردنباله‌ای همگراست که حد آن نیز طبق قضیهٔ ۷.۴.۲ بزرگ‌تر یا مساوی $\alpha + \varepsilon_\circ$ می‌باشد. پس زیردنباله‌ای از زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ و لذا زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ یافتیم که همگرا به عددی بزرگ‌تر یا مساوی $\alpha + \varepsilon_\circ$ می‌باشد و این با کران بالا بودن α برای $\overline{\{x_n\}}$ در تناقض است. لذا ii نیز برقرار است.

هیچ شاخه‌ای از ریاضیات، حتی شاخه‌های مجرد، وجود ندارد که روزی در پدیده‌ای از دنیای حقیقی به کار نرود.
Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856)

بالعکس، فرض کنیم i و ii برقرار باشند. i می‌گوید که به ازای هر $\varepsilon > \circ$ زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ موجود است به قسمی که حد آن بزرگ‌تر یا مساوی $\alpha - \varepsilon$ می‌باشد و لذا با فرض $\varepsilon = \frac{1}{m} > \circ$ زیردنباله‌هایی با حدود بزرگ‌تر یا مساوی $\alpha - \frac{1}{m}$ داریم. پس به ازای هر $m \in \mathbb{N}$ اعدادی بزرگ‌تر یا مساوی $\alpha - \frac{1}{m}$ در $\overline{\{x_n\}}$ موجودند و لذا داریم

$$\alpha - \frac{1}{m} \leq \sup \overline{\{x_n\}}.$$

و چون m دلخواه و α و $\sup \overline{\{x_n\}}$ ثابت هستند، بنابراین

$$\alpha \leq \sup \overline{\{x_n\}}.$$

اما ii می‌گوید که هیچ زیردنباله‌ای با حد بزرگ‌تر یا مساوی $\alpha + \varepsilon$ نداریم، یعنی به ازای هر $\varepsilon > \circ$ عدد $\alpha + \varepsilon$ کران بالایی برای $\overline{\{x_n\}}$ است. پس

$$\sup \overline{\{x_n\}} \leq \alpha + \varepsilon,$$

چون سوپریمم کوچک‌ترین کران بالاست. حال با توجه به دلخواه بودن $\varepsilon > 0$ و ثابت بودن α و $\sup \overline{\{x_n\}}$ و این که

$$\alpha \leq \sup \overline{\{x_n\}} \leq \alpha + \varepsilon$$

نتیجه می‌گیریم که $\alpha = \sup \overline{\{x_n\}} = \limsup_n x_n$. ■

به طور مشابه می‌توان گفت

۲۳.۴.۲ قضیه. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت

$$\beta = \liminf_n x_n$$

فقط و فقط وقتی که دو شرط زیر توأماً برقرار باشد:

i. به ازای هر $\varepsilon > 0$، بی‌نهایت اندیس مانند n موجود باشد به قسمی که $x_n < \beta + \varepsilon$؛

ii. به ازای هر $\varepsilon > 0$، فقط تعدادی متناهی اندیس n موجود باشد به قسمی که $x_n < \beta - \varepsilon$. ■

تعریف معادل دیگری نیز برای حدود بالایی و پایینی یک دنباله وجود دارد که به شرح زیر به بیان آن خواهیم پرداخت و در قضیهٔ بعدی این تعریف معادل ارائه خواهد شد.

۲۴.۴.۲ تعریف. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد و $k \in \mathbb{N}$. دم[۴۲] T_k از این دنباله به صورت

$$T_k = \{x_n \mid n \geq k\}.$$

---

[۴۲] tail

تعریف می‌شود. ♣

در حالتی که $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار باشد، این دم‌ها نیز کراندارند و لذا می‌توان در مورد سوپریمم و اینفیمم آن‌ها بحث نمود. توجه کنید که $T_{k+1} \subseteq T_k$ و لذا $\sup T_{k+1} \leq \sup T_k$.

۲۵.۴.۲ قضیه. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} \limsup_n x_n &= \inf\{\sup T_k \mid k \in \mathbb{N}\} \\ &= \inf_k \sup_{n \geq k} x_n. \end{aligned}$$

برهان. فرض کنیم $\alpha_k = \sup T_k$ و $\alpha = \inf_k \alpha_k$. ادعا می‌کنیم $\alpha = \limsup_n x_n$. برای این منظور از قضیهٔ ۲۲.۴.۲ استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. نیز فرض کنیم شرط i قضیهٔ ۲۲.۴.۲ برقرار نباشد. پس فقط تعدادی متناهی n هست که $\alpha - \varepsilon < x_n$. در نتیجه از مرتبه‌ای مانند $K \in \mathbb{N}$ به بعد به ازای هر $n \geq K$ داریم $x_n < \alpha - \varepsilon$. یعنی $\alpha - \varepsilon$ کران بالایی برای T_K است و چون α_K کوچک‌ترین کران بالای T_K می‌باشد، پس

$$\alpha_K \leq \alpha - \varepsilon.$$

اما $\alpha = \inf_k \alpha_k$ و لذا $\alpha \leq \alpha_K$. در نتیجه

$$\alpha_K \leq \alpha - \varepsilon < \alpha \leq \alpha_K,$$

که تناقض است. پس شرط i قضیهٔ ۲۲.۴.۲ برقرار است.

حال برای اثبات شرط ii قضیهٔ ۲۲.۴.۲ توجه می‌کنیم که چون $\alpha = \inf_k \alpha_k$ پس برای $\varepsilon > 0$ داده شده عددی مانند $k_0 \in \mathbb{N}$ موجود است به قسمی که

$$\alpha_{k_0} < \alpha + \varepsilon.$$

اما با توجه به توضیح قبل از قضیه، دنبالهٔ $\{\alpha_k\}$ نزولی است. در نتیجه به ازای هر $n \geq k \geq k_\circ$ داریم

$$\begin{aligned} x_n &\leq \alpha_k && \text{چون } \alpha_k = \sup T_k \\ &\leq \alpha_{k_\circ} && \text{چون } \{\alpha_k\} \text{ نزولی است} \\ &< \alpha + \varepsilon. \end{aligned}$$

پس به ازای هر $n \geq k_\circ$ داریم $x_n < \alpha + \varepsilon$ یعنی شرط ii برقرار است.

■

به طور مشابه می‌توان گفت

۲۶.۴.۲ قضیه. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} \liminf_n x_n &= \sup\{\inf T_k \mid k \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup_k \inf_{n \geq k} x_n. \ \blacksquare \end{aligned}$$

دیدیم که $\{\alpha_k\}$ در قضیهٔ ۲۵.۴.۲ دنباله‌ای نزولی است و چون کراندار است پس طبق قضیهٔ ۱۰.۴.۲ داریم $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \inf_k \alpha_k$. بنابراین می‌توان گفت

$$\limsup_n x_n = \lim_{k\to\infty} \sup T_k = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} x_n.$$

این مطلب نماد $\limsup_n$ را برای حد بالایی موجه می‌سازد. به طریق مشابه داریم

$$\liminf_n x_n = \lim_{k\to\infty} \inf T_k = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} x_n.$$

همچنین توجه کنید که حکم قضیهٔ ۲۲.۴.۲ را به صورت ساده‌تر زیر نیز می‌توان بیان کرد:

$\alpha = \limsup_n x_n$ فقط و فقط وقتی که

i. به ازای هر $\varepsilon > 0$، مکرراً داشته باشیم $\alpha - \varepsilon < x_n$؛

ii. به ازای هر $\varepsilon > 0$، نهایتاً داشته باشیم $x_n < \alpha + \varepsilon$.

توجه کنید که چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است $<$ با $\leq$ در تعریف فوق کاملاً معادل است.

به طور مشابه می‌توان گفت
$\beta = \liminf_n x_n$ فقط و فقط وقتی که

i. به ازای هر $\varepsilon > 0$، مکرراً داشته باشیم $x_n < \beta + \varepsilon$؛

ii. به ازای هر $\varepsilon > 0$، نهایتاً داشته باشیم $\beta - \varepsilon < x_n$.

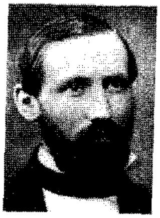
دانستن هر سه تعریف معادل برای حدود بالایی و پایینی بسیار مهم است و نمی‌توانید از یادگیری آن‌ها چشم‌پوشی کنید، چون هر مسأله‌ای با تعریفی خاص ساده‌تر حل می‌شود و بهتر درک می‌گردد.

مجدداً تأکید می‌کنیم تنها چیزی که باعث شد بتوانیم احکام متنوع این بخش را اثبات کنیم همکاری سخاوتمندانهٔ $\leq$ با متر اقلیدسی بود. ضمن قدردانی از $\leq$ متذکر می‌شویم که این قضایا و تعاریف و مفاهیم، خاص $(\mathbb{R}, |.|, \leq)$ نیست و اصولاً در هر فضایی که علاوه بر متر رابطه‌ای مانند $\leq$ داشته باشیم نیز این مفاهیم را می‌توان معرفی کرد.

۵.۲ مثال‌ها

مجدداً در این فصل نیز بخشی بسیار کوتاه را برای مثال‌ها در نظر گرفته‌ایم و همانند فصل قبل تأکید می‌کنیم که دانستن مثال‌های بیش‌تر هم در درک مطلب اهمیت دارد و هم باعث می‌شود کاربردهای

مختلف مباحث مجرد را به وضوح ببینیم. در این فصل نیز کمتر به جزئیات می‌پردازیم و بررسی نکات ظریف را جهت تمرین به شما واگذار می‌کنیم.



Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

چون در بسیاری از مثال‌ها مجبوریم مجموع جملات دنباله‌ای خاص را در نظر بگیریم، با مفهوم سری مواجه خواهیم شد. از طرفی مبحث سری‌ها موضوعی آشنا در فضای اقلیدسی است و می‌شد آن را در بخش قبل بیاوریم و از طرف دیگر این مبحث گرچه در فضاهای متریک به طور کلی قابل تعمیم نیست اما به راحتی در فضاهای نرم‌دار قابل بررسی است و لذا می‌توانستیم آن را در اوایل همین فصل نیز معرفی کنیم. اما از آن جایی که موضوع اصلی این کتاب، فضاهای متریک می‌باشد بهتر دیدیم سری‌ها را در این جا مورد مطالعه قرار دهیم. به هر حال چون عنوان این بخش را مثال‌ها در نظر گرفته‌ایم قصد نداریم حکمی در این بخش ارائه دهیم.

اجازه دهید ببینیم چه چیزی ما را در تعریف سری برای یک فضای متریک به طور کلی محدود می‌کند. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای متریک (X,d) باشد. قصد داریم مجموع جملات این دنباله را مورد مطالعه قرار دهیم. اولین سؤالی که مطرح می‌شود این است که مجموع در یک فضای متریک چه مفهومی می‌تواند داشته باشد. پس بهتر است به جای فضای متریک، یک فضای نرم‌دار مانند $(X,\|.\|)$ در نظر بگیریم. حال می‌توان دنبالهٔ $\{s_n\}$ را در نظر گرفت که به صورت $s_n = x_1 + \ldots + x_n$ تعریف می‌شود. واضح است بگوییم سری[۴۳] $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ همگراست هرگاه دنبالهٔ $\{s_n\}$ در فضای نرم‌دار X همگرا به حدی مانند s باشد و در این حالت می‌نویسیم $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$. بدین ترتیب می‌توان قضایای مربوط به سری‌ها در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ را به

---

[۴۳] series

فضاهای نرمدار تعمیم داد. مثلاً می‌توان در مورد محک کوشی[۴۴] برای سری‌ها و شرط لازم همگرایی صحبت کرد. این مطالب را در این بخش دانسته فرض می‌کنیم تا بهتر بتوانیم به موضوع مورد نظر خود بپردازیم.

از آن جایی که در فضاهای نرمدار می‌توان در مورد همگرایی سری‌ها نیز صحبت کرد و اگر این فضا تام باشد محک کوشی نیز برای همگرایی سری‌ها به عنوان ابزاری قدرتمند مورد توجه است، فضاهای نرمدار کامل در آنالیز بسیار مطلوبند. روشن است که اگر یک فضای نرمدار تام نباشد می‌توان تتمیم آن را در نظر گرفت و لذا تا کنون با فضاهای نرمدار تام بسیار زیادی آشنا شده‌ایم. چنین فضاهایی فضای باناخ[۴۵] نامیده می‌شوند.

Stefan Banach (1892-1945)

در فصل قبل برای خانواده‌ای متناهی از فضاهای متریک، متری روی حاصلضرب دکارتی این خانواده تعریف کردیم و این سؤال مطرح شد که اگر این خانواده نامتناهی باشد آیا باز هم می‌توان این کار را انجام داد. اکنون ابزارهای کافی برای مواجه شدن با این مسأله را داریم. از آن جایی که در این حالت نیز به طور توپولوژیکی معادل بودن دو فضای متریک مورد سؤال است، بهتر است شرطی لازم و کافی برای به طور توپولوژیکی معادل بودن دو فضای متریک با استفاده از دنباله‌ها بیابیم. قضیهٔ ۱۱.۲.۲ همواره در این گونه مواقع به کمک ما آمده است. دو فضای متریک (X,d_1) و (X,d_2) معادلند هرگاه $G \subseteq X$ نسبت به d_1 باز باشد فقط و فقط وقتی که نسبت به d_2 چنین باشد یا به طور معادل $F \subseteq X$ نسبت به d_1 بسته باشد فقط و فقط وقتی که نسبت به d_2 چنین باشد. لذا در پرتو قضیهٔ ۱۱.۲.۲ می‌توان

[۴۴] Cauchy criterion
[۴۵] Banach space

گفت دو فضای متریک (X, d_1) و (X, d_2) به طور توپولوژیکی معادلند فقط و فقط وقتی که به ازای هر دنباله در X مانند $\{x_n\}$ داشته باشیم $x_n \to x$ تحت d_1 فقط و فقط وقتی که $x_n \to x$ تحت d_2.

۱.۵.۲ مثال. فرض کنیم $\{(X_i, d_i)\}_{1\leq i\leq n}$ خانواده‌ای متناهی از فضاهای متریک باشد. دیدیم که مترهای مختلفی می‌توان روی $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ تعریف کرد. اگر d هر یک از این مترها روی X باشد آن گاه به ازای هر دنباله مانند $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ که در آن $x_m = (x_{m,1}, \ldots, x_{m,n})$ داریم $x_m \to x = (x_1, \ldots, x_n)$ فقط و فقط وقتی که $x_{m,i} \to x_i$ به ازای هر $1 \leq i \leq n$. چنین متری یک متر حاصلضربی[46] روی X نامیده می‌شود. واضح است که در چنین حالتی X تام است فقط و فقط وقتی که X_i ها تام باشند. ♠

چگونه می‌توان اثبات کرد که همهٔ این مترهای حاصلضربی با هم معادلند؟

۲.۵.۲ مثال. فرض کنیم $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد و $X = \prod_{n=0}^{\infty} X_n$. اگر $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ و $y = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ دو عضو متمایز X باشند آن گاه کوچک‌ترین اندیس ممکن که آن را با $m(x,y)$ نمایش می‌دهیم وجود دارد که $x_{m(x,y)} \neq y_{m(x,y)}$ حال روی X متر d را به صورت

René Louis Baire (1874-1932)

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{1}{1+m(x,y)} & x \neq y \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. می‌توان نشان داد (چگونه؟) که d واقعاً یک متر روی X است. این متر را متر بئر[47] روی X می‌نامیم. ♠

---

[46] product metric

[47] Baire metric

آیا می‌توانید همگرایی یک دنباله در این فضای متریک را توصیف کنید؟

۳.۵.۲ مثال. فرض کنیم $\{(X_n, d_n)\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای از فضاهای متریک باشد و دنبالهٔ $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای دلخواه از اعداد اکیداً مثبت که $\sum_{n=0}^{\infty} k_n < +\infty$. روی مجموعهٔ $X = \prod_{n=0}^{\infty} X_n$ متر d را به صورت

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

برای $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ و $y = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ در X تعریف می‌کنیم. این متر، یک متر حاصلضربی روی X است، یعنی یک دنباله در X همگراست فقط و فقط وقتی که نقطه به نقطه همگرا باشد.

در حالت خاص برای $(X_n, d_n) = (\mathbb{C}, |.|)$ متر حاصل روی $\prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}$ متر همگرایی نقطه به نقطه[۴۸] نامیده می‌شود. ♠

در مثال ۶.۵.۱ دیدیم که می‌توان روی $B(Z, X)$ متشکل از همهٔ نگاشت‌های کراندار از Z به X متر d_∞ را که به صورت

$$d_\infty(f, g) = \sup\{d(f(z), g(z)) \mid z \in Z\}, \qquad f, g \in B(Z, X)$$

تعریف می‌شود در نظر گرفت. اجازه دهید همگرایی دنباله‌ها در این فضا را بررسی کنیم.

۴.۵.۲ مثال. یک دنباله مانند $\{\varphi_n\}$ در فضای $(B(Z, X), d_\infty)$ همگرا به حدی مانند φ در $B(Z, X)$ است فقط و فقط وقتی که شرط زیر برقرار باشد:

به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $z \in Z$ و هر $n \geq K_\varepsilon$ داشته باشیم $d(\varphi_n(z), \varphi(z)) < \varepsilon$.

[۴۸] metric of pointwise convergence

به عبارت دیگر یک دنباله در $\mathcal{B}(Z, X)$ همگرا به یک حد است فقط و فقط وقتی که به طور یکنواخت[۴۹] روی Z به آن حد همگرا باشد. از این رو متر d_∞ را متر همگرایی یکنواخت[۵۰] روی $\mathcal{B}(Z, X)$ می‌نامند. ♠

مثال بعدی از اهمیت بسیار زیادی در آنالیز برخوردار می‌باشد.

۵.۵.۲ مثال. فرض کنیم $p \geq 1$ عددی حقیقی باشد. مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های مختلط مانند $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ که $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$ را با ℓ_p نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$\|x\|_p = (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \qquad x = \{x_n\} \in \ell_p$$

در این صورت $\|.\|_p$ یک نرم روی ℓ_p می‌باشد. همچنین می‌توان این تعریف را به صورت زیر به حالت $p = \infty$ تعمیم داد.

فرض کنیم ℓ_∞ مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های کراندار مختلط باشد. تعریف می‌کنیم

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} |x_n|, \qquad x = \{x_n\} \in \ell_\infty$$

در این صورت برای $1 < p < p' < +\infty$ داریم

$$\ell_1 \subsetneqq \ell_p \subsetneqq \ell_{p'} \subsetneqq \ell_\infty. ♠$$

بررسی احکام مذکور در مثال‌های این بخش را فراموش نکنید. این مثال‌ها الفبای مباحث سطح بالاتر در آنالیز می‌باشد که در دوره‌های تکمیلی با آن‌ها آشنا خواهید شد.

---

[۴۹] uniformly

[۵۰] metric of uniform convergence

۶.۲ تمرین‌ها

یکی از روش‌های حرفه‌ای شدن در حل مسأله این است که خودتان مسأله طرح کنید. برای این کار می‌توانید به قضایای موجود نگاه کنید و سعی کنید با کم کردن فرض‌های قضیه و قوی کردن حکم‌های آن نتایج جدیدی به دست آورید. ممکن است نتوانید فرضی را از قضیه‌ای کم کنید. پس باید بتوانید توسط یک مثال نقض اهمیت وجود فرض مذکور را اثبات کنید. گاهی اوقات سعی در یافتن مثال نقض برای یک حدس می‌تواند شما را به یافتن برهانی برای حدس رهنمون سازد و یا بالعکس ممکن است تلاش کنید تا حدسی را اثبات کنید و در استدلال شما ضعفی موجود باشد که قابل برطرف کردن نباشد و با تأمل در آن بتوانید مثال نقض را بیابید. به هر حال آنچه شما به عنوان یک قضیهٔ ساده با برهانی ابتکاری، زیبا و کوتاه مشاهده می‌کنید شاید مدت‌ها افکار ریاضیدانان بسیاری را به خود مشغول کرده باشد و تاریخی طولانی در پس آن استدلال کوتاه باشد. سعی کنید با مطالعهٔ برهان‌ها نه فقط درستی اثبات و مراحل استدلال را فرابگیرید، بلکه آن برهان را به دید ترفندی بنگرید که می‌توان با آن بر مسأله‌ای جدید فائق شد. بدین ترتیب شما نیز خواهید توانست بر پیکرهٔ عظیم ریاضیات نامی از خود درج کنید.

Godfrey Harold Hardy (1877-1947)

برهان خلف، که اقلیدس بسیار عاشق آن بود، یکی از ظریف‌ترین سلاح‌های ریاضیدانان است. این کار بسیار زیباتر از طعمه فکنی در بازی شطرنج است. یک بازیکن شطرنج...

۱.۶.۲ ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن که هر زیرمجموعهٔ فضای متریک (X,d) باز باشد آن است که هر دنبالهٔ همگرا در X از مرتبه‌ای به بعد ثابت باشد.

۲.۶.۲ ثابت کنید هر فضای تام ناتهی که نقطهٔ منزوی نداشته باشد ناشماراست.

۳.۶.۲ فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای متریک (X,d) باشد. با استفاده از قضیهٔ ۱۱.۲.۲ ثابت کنید مجموعهٔ حدود زیردنباله‌ای این دنباله یعنی $\overline{\{x_n\}}$ بسته است.

...ممکن است مهرهٔ پیاده یا حتی غیر پیاده‌ای را برای قربانی شدن پیشکش کند، اما یک ریاضیدان کل بازی را تقدیم می‌کند.

۴.۶.۲ فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای متریک (X,d) باشد. ثابت کنید

$$\overline{\{x_n\}} = \cap_{n=1}^{\infty} \overline{\{x_k \mid k \geq n\}}.$$

چه نتیجه‌ای از این مطلب می‌گیرید؟

۵.۶.۲ فرض کنیم (X,d) فضایی متریک و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در آن باشد. ثابت کنید $x_n \to x$ فقط و فقط وقتی که هر زیردنبالهٔ $\{x_n\}$ زیردنباله‌ای همگرا به x داشته باشد.

۶.۶.۲ فرض کنیم (X,d) فضایی متریک و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در آن باشد که $x_n \to x$. ثابت کنید هر جایگشت از $\{x_n\}$ نیز همگرا به x است. به عبارت دیگر اگر σ جایگشتی روی $\mathbb{N}$ باشد آن گاه $\{x_{\sigma(n)}\}$ نیز همگرا به x است.

۷.۶.۲ فضای متریک (X,d) را از رستهٔ اول[۵۱] نامیم هرگاه بتوان آن را به صورت اجتماعی شمارا از مجموعه‌های هیچ‌جا چگال در X نوشت. در غیر این صورت X از رستهٔ دوم[۵۲] نامیده می‌شود. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک تام و G زیرمجموعه‌ای باز از آن باشد. ثابت کنید G در X از رستهٔ دوم می‌باشد. این حکم به قضیهٔ رستهٔ بئر[۵۳] معروف است.

---

[۵۱] first category
[۵۲] second category
[۵۳] Baire category theorem

۸.۶.۲ فرض کنیم $\{F_n\}$ دنباله‌ای نزولی از مجموعه‌های بسته و کراندار در فضای متریک تام (X,d) باشد به قسمی که $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$. نشان دهید $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ دقیقاً یک عضو دارد.

۹.۶.۲ فرض کنیم B و C زیرمجموعه‌هایی کراندار از فضای متریک (X,d) باشند و τ تابع خروج از مرکز. با استفاده از دنباله‌ها ثابت کنید $\tau(B,C) = 0$ فقط و فقط وقتی که C در B چگال باشد، یعنی $B \subseteq \bar{C}$.

۱۰.۶.۲ نشان دهید عدد اصلی یک فضای تفکیک پذیر نمی‌تواند از عدد اصلی $\mathbb{R}$ یعنی $\aleph$ بیش‌تر باشد.

۱۱.۶.۲ فرض کنیم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنبالهٔ کوشی در فضای متریک (X,d) باشند. ثابت کنید دنبالهٔ $\{d(x_n, y_n)\}$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ همگراست.

۱۲.۶.۲ دو دنبالهٔ $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در فضای متریک (X,d) را هم‌متقارب[۵۴] می‌نامیم هرگاه داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. ثابت کنید هم‌متقارب بودن یک نسبت هم‌ارزی است. نشان دهید $x_n \to x$ فقط و فقط وقتی که $\{x_n\}$ هم‌متقارب با دنبالهٔ ثابت $\{x\}$ باشد. همچنین نشان دهید که اگر یکی از دو دنبالهٔ هم‌متقارب $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ همگرا باشد، دیگری نیز چنین است و $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

۱۳.۶.۲ نشان دهید که اگر یکی از دو دنبالهٔ هم‌متقارب $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ کوشی باشد، دیگری نیز چنین است. نتیجه بگیرید که اگر زیرمجموعه‌ای چگال مانند M در X موجود باشد که هر دنبالهٔ کوشی در M همگرا باشد آن گاه X تام است.

---

[۵۴] equiconvergent

۱۴.۶.۲ فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای دلخواه از فضای متریک (X,d) باشد. ثابت کنید به ازای هر دنبالهٔ دلخواه در $\bar{A}$ دنباله‌ای هم‌متقارب با آن در A وجود دارد.

۱۵.۶.۲ فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای متریک (X,d) باشد. آیا از $d(x_{n+1},x_n) \to 0$ می‌توان نتیجه گرفت که $\{x_n\}$ همگراست؟ کوشی چطور؟

۱۶.۶.۲ تابعی مثال بزنید که در شرط $d_2(\varphi(x),\varphi(y)) < d_1(x,y)$ صدق کند ولی انقباضی قوی نباشد و نقطهٔ ثابت نیز نداشته باشد.

۱۷.۶.۲ ثابت کنید تابع $f(x) = 1 + \arctan(x)$ در فضای اقلیدسی $[1,\infty)$ نقطهٔ ثابت دارد.

۱۸.۶.۲ فرض کنیم $S(\mathbb{Z})$ مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های صحیح همگرا باشد. آیا $S(\mathbb{Z})$ شماراست؟ اگر $S(\mathbb{Q})$ مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های گویای همگرا باشد چطور؟

۱۹.۶.۲ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ فرض کنیم

$$x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4, x_{n+3} = 2 + (x_n - 2)^{\frac{1}{3}}$$

مقادیر $\limsup_n x_n$ و $\liminf_n x_n$ را تعیین کنید.

۲۰.۶.۲ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ برای دو دنبالهٔ دلخواه $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ آیا

$$\limsup_n (x_n + y_n) \leq \limsup_n x_n + \limsup_n y_n$$

درست است؟ اگر پاسخ منفی است، چه شرطی لازم است تا نامساوی برقرار شود؟ مثالی ارائه دهید که نامساوی فوق اکید باشد.

۲۱.۶.۲ فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد و

$$\alpha = \limsup_n \frac{x_{n+۱}}{x_n}, \beta = \liminf_n \frac{x_{n+۱}}{x_n}.$$

i. ثابت کنید اگر $\alpha < ۱$ آن گاه $\{x_n\}$ همگراست.

ii. ثابت کنید اگر $\beta > ۱$ آن گاه $\{x_n\}$ واگراست.

iii. مثالی ارائه دهید که $\alpha = ۱$ ولی دنباله واگرا باشد.

iv. مثالی ارائه دهید که $\beta = ۱$ ولی دنباله همگرا باشد.

۲۲.۶.۲ فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا و $\{y_n\}$ دنباله‌ای کوشی در زیرفضایی نه لزوماً تام از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشند. در مورد دنبالهٔ $\{x_n y_n\}$ چه چیزی می‌توان گفت؟

۲۳.۶.۲ فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد. ثابت کنید

$$\liminf_n \frac{x_{n+۱}}{x_n} \leq \liminf_n (x_n)^{\frac{۱}{n}} \leq \limsup_n (x_n)^{\frac{۱}{n}} \leq \limsup_n \frac{x_{n+۱}}{x_n}.$$

مثالی ارائه دهید که نامساوی‌های فوق اکید باشند.

Ernesto Cesáro (1859-1906)

۲۴.۶.۲ فرض کنیم $x_n \to x$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$. ثابت کنید $\frac{x_۱+\ldots+x_n}{n} \to x$. آیا عکس این مطلب نیز درست است؟

دنبالهٔ $\{\frac{x_۱+\ldots+x_n}{n}\}$ به مجموع چزاروی [۵۵] دنبالهٔ $\{x_n\}$ معروف است.

۲۵.۶.۲ دنبالهٔ $\{x_n\}$ را به صورت بازگشتی

$$x_۱ = \sqrt{۲}, x_{n+۱} = \sqrt{۲ + \sqrt{x_n}}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید $\{x_n\}$ صعودی و از بالا کراندار است و نتیجه بگیرید که همگراست. آیا می‌توانید مقدار حد آن را تعیین کنید.

[۵۵] Cesáro summation

۲۶.۶.۲ فرض کنیم (X, d) فضایی متریک و $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا در آن باشد. برای مجموعهٔ $A \subseteq X$، فرض کنیم f_A تابع تعریف شده بر X به صورت $f_A(x) = d(x, A)$ باشد. ثابت کنید در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ داریم

$$f_A(x_n) \to f_A(\lim_{n\to\infty} x_n),$$

و نتیجه بگیرید که اگر c عدد نامنفی دلخواهی باشد آن گاه مجموعه‌های

$$\{x \in X \mid f_A(x) \leq c\},$$

$$\{x \in X \mid f_A(x) \geq c\}$$

هر دو بسته‌اند. بالاخص نشان دهید که $\bar{A} = \{x \in X \mid f_A(x) = ۰\}$.

۲۷.۶.۲ فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم این فضا یک نرم عملگری روی $M_n(\mathbb{R})$ متشکل از همهٔ ماتریس‌های $n \times n$ القا می‌کند که آن را با $\|.\|$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید به ازای هر ماتریس A در $M_n(\mathbb{R})$ اگر $\limsup_n \|A^{n+۱} - A^n\| < \frac{۱}{۴}$ آن گاه

$$\limsup_n \|A^{n+۱} - A^n\|^{\frac{۱}{n}} < ۱.$$

همچنین نشان دهید به جای $\frac{۱}{۴}$ نمی‌توان عدد بزرگ‌تری قرار داد.

۲۸.۶.۲ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ فرض کنیم

$$a_۰ = \sqrt{۲}, a_{n+۱} = \sqrt{۲ - \sqrt{۴ - a_n^۲}}$$

$$b_۰ = ۲, b_{n+۱} = \frac{۲b_n}{۲ + \sqrt{۴ + b_n^۲}}$$

i. ثابت کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ نزولی و همگرا به صفر هستند.

ii. ثابت کنید $\{۲^n a_n\}$ صعودی، $\{۲^n b_n\}$ نزولی و هر دو همگرا به یک حد می‌باشند.

iii. نشان دهید عددی ثابت مانند c هست که برای هر n داریم $۰ < b_n - a_n < \frac{c}{۸^n}$.

۲.۶.۲۹ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ نشان دهید دنبالهٔ $\{(۱ + \frac{۱}{n})^n\}$ صعودی و از بالا کراندار و لذا همگرا است. حد این دنباله را با e نمایش می‌دهیم.

۲.۶.۳۰ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای باشد که $\frac{x_n}{n} \to ۰$. آیا می‌توان گفت بی‌نهایت n هست که $x_{n-i} + x_{n+i} < ۲x_n$ برای $i = ۱, \ldots, n-۱$؟

۲.۶.۳۱ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ فرض کنیم $\{r_n\}_{n=۰}^{\infty}$ دنباله‌ای باشد که $r_n \to ۰$. نیز فرض کنیم S مجموعهٔ همهٔ اعدادی باشد که به صورت $r_{i_۱} + \ldots + r_{i_{۱۹۹۴}}$ قابل بیان هستند که

$$i_۱ < \ldots < i_{۱۹۹۴}.$$

نشان دهید هر بازهٔ ناتهی مانند (a, b) شامل زیربازه‌ای ناتهی مانند (c, d) است که مجموعهٔ S را قطع نمی‌کند.

۲.۶.۳۲ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ آیا $\sqrt{۲}$ حد زیردنباله‌ای از اعداد به صورت $n^{\frac{۱}{۳}} - m^{\frac{۱}{۳}}$ می‌باشد؟

۲.۶.۳۳ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ فرض کنیم d عددی ثابت باشد. برای هر $m \geq ۰$ دنبالهٔ $\{a_m(j)\}_{j \geq ۰}$ را توسط

$$a_m(۰) = \frac{d}{۲^m}, a_m(j + ۱) = (a_m(j))^۲ + ۲a_m(j)$$

تعریف می‌کنیم. $\lim_{n \to \infty} a_n(n)$ را در صورت وجود بیابید.

۳۴.۶.۲ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$،

i. فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد که

$$a_1 = 1, a_{n+1} > \frac{3}{2}a_n.$$

ثابت کنید $\frac{a_n}{(\frac{3}{2})^{n-1}}$ یا حد دارد یا به بی‌نهایت همگراست.

ii. ثابت کنید برای هر $\alpha > 1$ دنباله‌ای با خاصیت فوق وجود دارد که $\frac{a_n}{(\frac{3}{2})^{n-1}} \to \alpha$.

۳۵.۶.۲ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد که

$$a_n \geq 0, a_{2n} - a_{2n+1} \leq a_n^2, a_{2n+1} - a_{2n+2} \leq a_n a_{n+1}$$

و

$$\limsup_n n a_n < \frac{1}{4}.$$

ثابت کنید $\limsup_n a_n^{\frac{1}{n}} < 1$.

۳۶.۶.۲ ثابت کنید فضای نرمدار $(X, \|.\|)$ باناخ است فقط و فقط وقتی که هر سری مطلقاً همگرا[۵۶]، همگرا باشد. به عبارت دیگر از همگرایی $\sum |x_n|$ بتوان همگرایی $\sum x_n$ را نتیجه گرفت.

۳۷.۶.۲ روی مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های با مقادیر ۰ و ۱ برای دو دنبالهٔ $x = \{x_n\}$ و $y = \{y_n\}$ که $x \neq y$ تعریف می‌کنیم

$$d(x, y) = \frac{1}{2^n},$$

که در آن n کوچک‌ترین اندیسی است که $x_n \neq y_n$. ثابت کنید d یک متر غیر ارشمیدسی است.

---

[۵۶] absolutely convergent

۳۸.۶.۲ فرض کنیم $\mathbb{Q}_p$ فضای اعداد گویای p–ادیک باشد. ثابت کنید در تتمیم این فضا، شرط لازم همگرایی برای سری‌ها کافی نیز می‌باشد.

۳۹.۶.۲ فرض کنیم $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از فضاهای متریک باشد که $\operatorname{diam} X_n \leq ۱$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$. تعریف می‌کنیم

$$d(x, y) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^n} d_n(x_n, y_n), \quad x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in X = \prod_{n=۱}^{\infty} X_n$$

ثابت کنید d یک متر روی X است. آیا d حاصلضربی است؟

۴۰.۶.۲ فرض کنیم $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از فضاهای متریک باشد و d متری حاصلضربی روی $X = \prod_{n=۱}^{\infty} X_n$. ثابت کنید برای هر دنباله مانند $\{A_n\}$ که $A_n \subseteq X_n$ داریم

$$\overline{\prod_{n=۱}^{\infty} A_n} = \prod_{n=۱}^{\infty} \overline{A_n}$$

و نتیجه بگیرید که حاصلضرب مجموعه‌های بسته مجموعه‌ای است بسته.

۴۱.۶.۲ ثابت کنید ℓ_p برای $۱ \leq p \leq \infty$ فضایی باناخ است.

۴۲.۶.۲ ثابت کنید اگر $p < ۱$ آن گاه نامساوی مثلث در $\|\cdot\|_p$ تعریف شده روی ℓ_p برقرار نیست.

۴۳.۶.۲ فرض کنیم $c_۰$ زیرفضای ℓ_∞ متشکل از همهٔ دنباله‌های همگرا به ۰ باشد. نشان دهید $c_۰$ در ℓ_∞ بسته و لذا فضایی تام است.

۴۴.۶.۲ فرض کنیم X زیرفضایی از $\ell_۱$ متشکل از همهٔ دنباله‌هایی باشد که فقط تعدادی متناهی از جملات آن‌ها غیر صفر است. نشان دهید X تام نیست.

۴۵.۶.۲ آیا ℓ_∞ تفکیک پذیر است؟

۳

حد و پیوستگی

۱.۳ مقدمه

فصل دنباله‌ها و تورها گرچه به خودی خود حائز اهمیت است، مقدمه‌ای برای معرفی مفهوم حد توابع نیز محسوب می‌شود. در حقیقت بررسی مفهوم حد برای یک تابع در مقایسه با حد دنباله‌ها نوعی نگرش پیوسته در مقابل دیدگاه گسسته‌ای که دنباله‌ها به دست می‌دهند به وجود می‌آورد.

Giuseppe Peano (1858-1932)

این که حد دنباله‌ها را نوع گسستهٔ حد توابع تلقی می‌کنیم از این جهت است که دنباله‌ها توابعی هستند که بر $\mathbb{N}$ با متر اقلیدسی تعریف شده‌اند و با این متر این فضا از نظر توپولوژیکی چیزی جز یک فضای گسسته نیست. بدین دلیل است که گاهی اوقات مسائل مربوط به $\mathbb{N}$ را ریاضیات گسسته و مسائل مربوط به $\mathbb{R}$ را ریاضیات پیوسته می‌نامند. البته این مطلب تا حدودی با تعریف شهودی ما از گسسته و پیوسته انطباق دارد، گرچه پیوستگی به خودی خود مفهومی عمیق است که

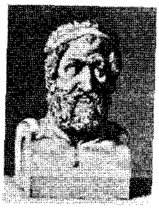
نیازمند دقت است.

توابع پیوسته نقش بسیار مهمی در مباحث ریاضی بالاخص آنالیز، توپولوژی و هندسه دارند. انتقال، انبساط، انقباض و دوران‌های پیوسته در هندسه، تغییر شکل‌های توپولوژیکی پیوسته و بسیاری مباحث دیگر از عمده مفاهیمی هستند که مفهوم پیوستگی نقش مهمی را در آن‌ها ایفا می‌کند.

ریاضیات کلاسیک ارتباطی تنگاتنگ با مفهوم پیوستگی (مخصوصاً به صورت اپسیلون-دلتا) دارد، اما در آنالیز و فضاهای متریک تعمیم‌های مختلفی از این مفهوم و نمونه‌های خاصی از آن تحت شرایطی اضافی را شاهد هستیم که پیوستگی یکنواخت و نیم‌پیوستگی مثال‌هایی از آن هستند.

در این فصل به معرفی مفهوم پیوستگی و صورت‌های معادل آن و مفاهیم مرتبط با آن خواهیم پرداخت و ارتباط آن را با مفاهیم معرفی شده در فصل‌های قبلی، بالاخص دنباله‌ها مورد مطالعه قرار می‌دهیم. آنچه پیوستگی را مهم می‌سازد همین ارتباط آن با مفاهیم فضاهای متریک است. در حقیقت به دنبال آن هستیم که مفهومی برای همسان بودن فضاهای متریک بیابیم. به طور بدیهی توقع داریم که این همسان بودن به گونه‌ای تعریف شود که در فضاهای همسان، باز و بسته بودن حفظ شود. این زیاد متوقعانه نخواهد بود، همان طور که در جبر نیز برداشت ما از همریختی، حفظ شدن اعمال می‌باشد.

۲.۳ تعاریف مقدماتی



Zeno of Sidon (150-70 BC)

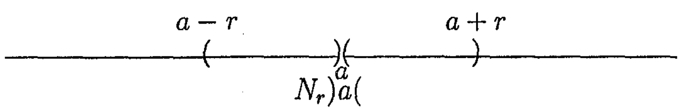
در سراسر این فصل (X, d_1) و (Y, d_2) را دو فضای متریک در نظر می‌گیریم. قصد داریم حد و پیوستگی تابعی که از (X, d_1) به (Y, d_2) تعریف شده است را معرفی کنیم.

همان طور که در تعاریف کلاسیک نیز قید می‌گردد برای بررسی حد یک تابع در نقطه‌ای مانند a لزومی ندارد که این تابع در نقطهٔ a تعریف شده باشد و کافی است در اطراف a تعریف شده باشد. البته منعی برای تعریف شدن تابع در نقطهٔ a نداریم ولی برای آن که دستمان باز باشد، اجازه می‌دهیم که تابع در a تعریف شده یا نشده باشد.

۱.۲.۳ تعریف. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک باشد و $a \in X$. برای $0 < r \in \mathbb{R}$ همسایگی باز محذوف[1] به مرکز a و شعاع r با نماد $N_r)a($ عبارت است از

$$N_r)a(= N_r(a) \setminus \{a\}. \clubsuit$$

از نماد $N_r'(a)$ به این دلیل استفاده نمی‌کنیم که A' را برای مجموعهٔ نقاط حدی A به کار برده‌ایم. به علاوه نماد $N_r)a($ با شکل زیر در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ سازگار است:



[1] punctured open neighborhood

۲.۲.۳ تعریف. فرض کنیم $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ تابعی باشد که در یک همسایگی محذوف a تعریف شده است. گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می‌کند برابر ℓ است و می‌نویسیم

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر x اگر

$$0 < d_1(x, a) < \delta$$

آن گاه

$$d_2(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

یا به طور معادل اگر

$$x \in N_\delta)a($$

آن گاه

$$f(x) \in N_\varepsilon(\ell). \clubsuit$$

واضح است که در $N_\delta)a($، این همسایگی محذوف تحت d_1 و در $N_\varepsilon(\ell)$، این همسایگی تحت d_2 تلقی می‌گردد.

تعریف فوق تعریف اپسیلون-دلتا برای حد[۲] نامیده می‌شود که اولین بار توسط کوشی ارائه شده است. بعداً خواهیم دید که تعاریف دیگری نیز به طور معادل برای حد وجود دارد.

این که در این تعریف عبارت " حد $f(x)$ " به جای " حدی از $f(x)$ " به کار رفته است تلویحاً این مفهوم را به ذهن متبادر می‌سازد که حد هر تابع در صورت وجود منحصر به فرد است.

---

[۲] $\varepsilon - \delta$ definition for limit

۳.۲.۳ قضیه. فرض کنیم $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ یک تابع باشد. در این صورت $\lim_{x\to a}f(x)$ در صورت وجود یکتاست.

برهان. فرض کنیم ℓ_1 و ℓ_2 دو حد مختلف برای $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می‌کنند باشند. لذا به ازای هر $\varepsilon>0$ از جمله $0<\varepsilon=\frac{d_2(\ell_1,\ell_2)}{2}$ باید اعدادی مانند $\delta_1>0$ و $\delta_2>0$ موجود باشند به قسمی که به ازای هر x داشته باشیم

$$0<d_1(x,a)<\delta_1 \;\Rightarrow\; d_2(f(x),\ell_1)<\varepsilon,$$

$$0<d_1(x,a)<\delta_2 \;\Rightarrow\; d_2(f(x),\ell_2)<\varepsilon.$$

بنابراین با فرض $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$ برای هر $x\in X$ که $0<d_1(x,a)<\delta$ داریم

$$d_2(f(x),\ell_1)<\varepsilon, \qquad d_2(f(x),\ell_2)<\varepsilon.$$

و لذا

$$\begin{aligned} d_2(\ell_1,\ell_2) &\le d_2(\ell_1,f(x))+d_2(f(x),\ell_2)\\ &< \varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon=d_2(\ell_1,\ell_2), \end{aligned}$$

که تناقض است. ■

ریاضیات، یک بازی است که بر اساس قواعد سادهٔ مشخصی توسط علامت‌هایی بی معنی روی کاغذ انجام می‌شود.
David Hilbert (1862-1943)

تأکید می‌کنیم که $\delta>0$ معرفی شده در تعریف حد صرفاً تابعی از ε و نقطهٔ ثابت a است و لذا معرفی δ به عنوان تابعی از x کاملاً اشتباه می‌باشد. برای آن که سوء تفاهمی پیش نیاید می‌توان نماد δ_ε یا $\delta_{\varepsilon,a}$ را به کار برد. در هر صورت همواره یادمان هست که δ تابعی از ε و a و مستقل از x می‌باشد.

نکتهٔ دیگری که لازم به ذکر است این است که در تعریف اپسیلون-دلتا برای حد به جای هر یک از کوچک‌تری‌ها در تعریف

می‌توان کوچک‌تر یا مساوی قرار داد (البته غیر از > 0) و تعریف معادلی حاصل خواهد شد. لذا سه صورت معادل زیر به دست می‌آید.

۴.۲.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ تابعی باشد که در یک همسایگی محذوف از a تعریف شده است. در این صورت $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ فقط و فقط وقتی که

i. به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $x \in X$،

$$0 < d_1(x, a) \leq \delta \Rightarrow d_2(f(x), \ell) < \varepsilon;$$

ii. به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $x \in X$،

$$0 < d_1(x, a) \leq \delta \Rightarrow d_2(f(x), \ell) \leq \varepsilon;$$

iii. به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $x \in X$،

$$0 < d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), \ell) \leq \varepsilon. \blacksquare$$

همچنین شرط مذکور در تعریف اپسیلون-دلتا برای حد را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $x \in X$

$$x \in N_\delta)a(\Rightarrow f(x) \subset N_\varepsilon(\ell)$$

و یا

$$x \in N_\delta)a(\Rightarrow x \in f^{-1}(N_\varepsilon(\ell)).$$

اما

$$\forall x(x \in N_\delta)a(\Rightarrow x \in f^{-1}(N_\varepsilon(\ell)))$$

معادل است با

$$N_\delta)a(\subseteq f^{-1}(N_\varepsilon(\ell))$$

بنابراین قضیهٔ زیر را داریم.

۵.۲.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ تابعی باشد که در یک همسایگی محذوف از a تعریف شده است. در این صورت $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ فقط و فقط وقتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به قسمی که

$$N_\delta)a(\subseteq f^{-1}(N_\varepsilon(\ell)). \blacksquare$$

فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود و مثلاً برابر ℓ باشد، ممکن است f در a تعریف شده باشد یا نشده باشد. اگر f در a تعریف شده باشد و $f(a) = \ell$ حالت مناسبی پیش می‌آید چون در این صورت همسایگی محذوف در تعریف، به همسایگی تبدیل خواهد شد. اما اگر f در a تعریف شده باشد ولی $f(a) \neq \ell$ آن گاه نقطهٔ a در شرط

$$d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), \ell) < \varepsilon$$

صدق نخواهد کرد. متأسفانه این حالت زیاد پیش می‌آید، پس توابعی که برای آن‌ها $\lim_{x\to a} f(x)$ برابر $f(a)$ است شایستهٔ تعریفی خاص هستند که آن‌ها را از توابع دیگری که چنین نیستند متمایز سازد.

۶.۲.۳ تعریف. فرض کنیم $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ یک تابع باشد. f را در نقطهٔ a پیوسته[۳] گوییم هرگاه f در a تعریف شده باشد و

---

continuous[۳]

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. تابع f را پیوسته نامیم هرگاه در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد. اگر f در a پیوسته نباشد f را در a ناپیوسته[۴] می‌نامیم. ♣

ناپیوستگی در نقطهٔ a بر دو نوع است: نوع اول این که f در a حد داشته باشد ولی این حد با $f(a)$ برابر نباشد (ممکن است f در a اصلاً تعریف نشده باشد) که این ناپیوستگی را قابل رفع یا برداشتنی[۵] می‌نامیم. نوع دوم این است که f در a حد نداشته باشد. در این حالت ضعف تابع f به هیچ وجه قابل رفع نیست.

بیش‌تر هدف ما مطالعه در مورد توابع پیوسته می‌باشد و به قضایای مربوط به توابع پیوسته خواهیم پرداخت، گرچه با اندکی تعدیل در برخی احکام و برهان‌ها می‌توان آن‌ها را طوری ترمیم کرد که برای توابعی که حد دارند نیز قابل بیان باشد.

بنابر قضیهٔ ۵.۲.۳ در حالتی که f در a پیوسته باشد می‌توان گفت به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $\delta > ۰$ موجود است به قسمی که

$$N_\delta(a) \subseteq f^{-۱}(N_\varepsilon(\ell)).$$

شکل اخیر، تعریف نقطهٔ درونی را برای a به عنوان عضو مجموعهٔ $f^{-۱}(N_\varepsilon(\ell))$ در ذهن ایجاد می‌کند و اگر f در هر نقطه پیوسته باشد بدان معنی است که هر نقطهٔ این مجموعه درونی است و لذا این مجموعه باز است.

۷.۲.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d_۱) \to (Y, d_۲)$ یک تابع باشد. در این صورت f در a پیوسته است فقط و فقط وقتی که به ازای هر مجموعهٔ باز شامل $f(a)$ مانند H در Y داشته باشیم $a \in (f^{-۱}(H))^\circ$.

---

[۴] discontinuous
[۵] removable

برهان. فرض کنیم f در a پیوسته و H زیرمجموعهٔ بازی از Y شامل $f(a)$ باشد. چون $f(a)$ عضوی از H است و مجموعهٔ H باز می‌باشد، پس $f(a)$ نقطه‌ای درونی برای H است و در نتیجه $r_\circ > \circ$ ی موجود است به قسمی که

$$N_{r_\circ}(f(a)) \subseteq H.$$

حال چون f در a پیوسته است، پس به ازای هر $\varepsilon > \circ$ از جمله $\varepsilon = r_\circ > \circ$ عددی مانند $\delta > \circ$ موجود است به قسمی که

$$\begin{aligned} N_\delta(a) &\subseteq f^{-1}(N_\varepsilon(f(a))) \\ &= f^{-1}(N_{r_\circ}(f(a))) \\ &\subseteq f^{-1}(H). \end{aligned}$$

و این یعنی a نقطهٔ درونی برای $f^{-1}(H)$ است.

بالعکس، فرض کنیم برای هر H باز شامل $f(a)$ در Y داشته باشیم $a \in (f^{-1}(H))^\circ$. بنابراین برای $\varepsilon > \circ$ داده شده چون $H = N_\varepsilon(f(a))$ مجموعهٔ بازی در Y شامل $f(a)$ است پس a عضوی از $(f^{-1}(H))^\circ$ می‌باشد و لذا $\delta > \circ$ ی موجود است به قسمی که

$$N_\delta(a) \subseteq f^{-1}(H) = f^{-1}(N_\varepsilon(f(a))).$$

بنابراین به ازای هر $x \in X$ اگر $x \in N_\delta(a)$ آن گاه $f(x) \in N_\varepsilon(f(a))$ و این یعنی f در a پیوسته است. ■

۸.۲.۳ نتیجه. فرض کنیم $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ یک تابع باشد. در این صورت f پیوسته است فقط و فقط وقتی که به ازای هر مجموعهٔ باز مانند H در Y مجموعهٔ $f^{-1}(H)$ در X باز باشد.

برهان. شرط $N_\delta(a) \subseteq f^{-1}(H)$ برای هر a بدین معنی است که هر نقطهٔ $f^{-1}(H)$ درونی است و لذا $f^{-1}(H)$ در X باز است.

بالعکس، اگر $f^{-1}(H)$ برای هر H باز باشد پس $f^{-1}(N_\varepsilon(f(a)))$ نیز برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $a \in X$ باز است و لذا هر نقطهٔ آن از جمله نقطهٔ a نقطه‌ای درونی است که بنابر قضیهٔ فوق معادل پیوستگی f در a است و چون این مطلب برای هر a برقرار است لذا f پیوسته می‌باشد. ■

قضیهٔ فوق را گاهی اوقات به این صورت بیان می‌کنند که $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ پیوسته است فقط و فقط وقتی که هر مجموعهٔ باز در Y را به مجموعه‌ای باز در X بر گرداند. با توجه به آن که "F بسته است فقط و فقط وقتی که F^c باز باشد" می‌توان گفت

۹.۲.۳ قضیه. تابع $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ پیوسته است فقط و فقط وقتی که هر مجموعهٔ بسته در Y را به مجموعه‌ای بسته در X بر گرداند. ■

لازم است در این جا مثالی از توابع پیوسته و ناپیوسته ارائه شود. از آن جایی که مفهوم پیوستگی در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ آشناست باید به ذکر مثال در فضایی دیگر بپردازیم. در سراسر کتاب این سنت را اعمال کردیم که مثال غیر اقلیدسی ما فضای گسسته باشد. اما در این جا حکمی که داریم چندان قابل به عرض نیست.

۱۰.۲.۳ قضیه. فرض کنیم (X, d_1) فضایی گسسته و (Y, d_2) فضای متریک دلخواهی باشد. در این صورت هر تابع مانند $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ پیوسته است.

برهان. فرض کنیم H در Y باز باشد. چون $f^{-1}(H)$ زیرمجموعه‌ای از فضای گسستهٔ (X, d_1) است و در این فضا هر

زیرمجموعه‌ای باز است پس $f^{-1}(H)$ در X باز و لذا f پیوسته است. ■

می‌توان برای اثبات قضیهٔ فوق از روش اپسیلون-دلتا نیز کمک گرفت. در این جا برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $\delta = \frac{1}{2} > 0$ حکم را به وضوح نتیجه خواهد داد.

مثال‌های بعدی نیز نمونه‌هایی کلی هستند که به صورت قضیه ارائه خواهد شد.

جوهر ریاضیات، آزادی آن است.
Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)

۱۱.۲.۳ قضیه. تابع ثابت

$$\begin{aligned} f : (X, d_1) &\longrightarrow (Y, d_2) \\ f(x) &= y_0 \end{aligned}$$

همواره پیوسته است.

برهان. برای هر مجموعهٔ باز مانند H در Y داریم

$$f^{-1}(H) = \begin{cases} X & y_0 \in H \\ \phi & y_0 \notin H \end{cases}$$

و چون ϕ و X باز هستند پس f هر مجموعهٔ باز را به مجموعه‌ای باز برمی‌گرداند و لذا پیوسته است. ■

۱۲.۲.۳ قضیه. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک، $x_0 \in X$ دلخواه و تابع d_{x_0} به صورت

$$\begin{aligned} d_{x_0} : (X, d) &\longrightarrow (\mathbb{R}, |.|) \\ d_{x_0}(x) &= d(x, x_0), \end{aligned}$$

تعریف شده باشد. در این صورت d_{x_0} پیوسته است.

برهان. فرض کنیم $a \in X$ دلخواه و نیز $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. قرار می‌دهیم $\delta = \varepsilon > 0$. در این صورت برای هر $x \in X$ اگر $d(x,a) < \delta$ آن گاه

$$d_{x_\circ}(x) = d(x, x_\circ) \leq d(x,a) + d(a, x_\circ)$$

پس

$$d_{x_\circ}(x) - d_{x_\circ}(a) \leq d(x,a).$$

و به طریق مشابه

$$d_{x_\circ}(a) = d(a, x_\circ) \leq d(a,x) + d(x, x_\circ)$$

پس

$$d_{x_\circ}(a) - d_{x_\circ}(x) \leq d(x,a).$$

لذا

$$|d_{x_\circ}(x) - d_{x_\circ}(a)| \leq d(x,a) < \delta = \varepsilon.$$

یعنی $d_{x_\circ}$ در a پیوسته و لذا تابعی پیوسته است. ■

به نظر می‌رسد تابع همانی همواره تابعی پیوسته است، اما این مطلب همان طور که در مثال بعد خواهیم دید لزوماً درست نیست.

۱۳.۲.۳ مثال. فرض کنیم X یک مجموعه، d_1 متر گسسته و d_2 متری غیر گسسته روی آن باشد، یعنی چنین نباشد که هر زیرمجموعهٔ X تحت d_2 باز باشد. در این صورت تابع همانی

$$\begin{aligned} I : (X, d_2) &\longrightarrow (X, d_1) \\ I(x) &= x \end{aligned}$$

ناپیوسته است. زیرا فرض کنیم H زیرمجموعه‌ای از X باشد که تحت متر d_2 باز نیست. چون هر زیرمجموعه از (X, d_1) باز است پس H

تحت d_1 باز می‌باشد ولی $I^{-1}(H) = H$ تحت d_2 باز نیست. لذا I نمی‌تواند پیوسته باشد. ♠

تعریف معادل دیگری برای پیوستگی با استفاده از دنباله‌ها وجود دارد که به تعریف دنباله‌ای[6] برای پیوستگی معروف است.

۱۴.۲.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ یک تابع باشد. در این صورت f در a پیوسته است فقط و فقط وقتی که به ازای هر دنباله مانند $\{x_n\}$ در X که $x_n \to a$ داشته باشیم $f(x_n) \to f(a)$.

برهان. فرض کنیم f در a پیوسته و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد که $x_n \to a$. همچنین فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. چون f در a پیوسته است پس $\delta > 0$ ی موجود است به قسمی که به ازای هر $x \in X$ اگر

$$d_1(x, a) < \delta$$

آن گاه

$$d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon \qquad (*)$$

حال چون $x_n \to a$ پس برای این $\delta > 0$ عددی مانند $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (در حقیقت باید بگوییم K_δ ولی چون δ خود تابعی از ε است پس می‌توان گفت K_ε) موجود است به قسمی که به ازای هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$d_1(x_n, a) < \delta.$$

و لذا بنابر $(*)$ داریم

$$d_2(f(x_n), f(a)) < \varepsilon.$$

و این یعنی $f(x_n) \to f(a)$.

---

[6] sequential definition

بالعکس، فرض کنیم به ازای هر $\{x_n\}$ که $x_n \to a$ داشته باشیم $f(x_n) \to f(a)$. ادعا می‌کنیم f در a پیوسته است. اگر چنین نباشد $\varepsilon_\circ > \circ$ ی موجود است که به ازای هر $\delta > \circ$ از جمله برای $\delta = \frac{1}{n}$ نقطه‌ای مانند $x_n \in X$ هست به قسمی که

$$d_1(x_n, a) < \frac{1}{n} \qquad (\dagger)$$

ولی

$$d_2(f(x_n), f(a)) \not< \varepsilon_\circ \qquad (\ddagger)$$

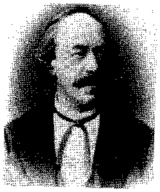
لذا دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در X یافتیم که بنابر $(\dagger)$ طبق قضیهٔ فشار داریم $x_n \to a$ ولی با توجه به $(\ddagger)$ داریم $f(x_n) \not\to f(a)$ و این خلاف فرض است. ■

قضیهٔ فوق را گاهی اوقات به این صورت بیان می‌کنند که f پیوسته است فقط و فقط وقتی که حد دنباله‌ها را حفظ کند.

می‌توان تعریف معادلی برای پیوستگی با استفاده از تورها نیز ارائه داد.

۱۵.۲.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ یک تابع باشد. در این صورت f در a پیوسته است فقط و فقط وقتی که به ازای هر تور مانند $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ در X که $x_\lambda \to a$ داشته باشیم $f(x_\lambda) \to f(a)$. ■

تاکنون چند تعریف معادل برای پیوستگی دیدیم که هر یک به نوبهٔ خود حائز اهمیت است. برای آن که کاربردی از این تعاریف را ببینیم چند قضیه را مورد بررسی قرار خواهیم داد که با استفاده از این تعاریف اثبات می‌شوند. در هر یک از این قضایا سعی می‌کنیم صورتی خاص از تعریف پیوستگی را به کار بریم تا همهٔ صورت‌ها مورد آزمون قرار گیرد.



Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903)

۱۶.۲.۳ تعریف. فرض کنیم $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ یک تابع باشد. گوییم f در شرط لیپ‌شیتز[۷] با ثابت M صدق می‌کند هرگاه عددی ثابت مانند $M>0$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $x,y\in X$ داشته باشیم

$$d_2(f(x),f(y))\leq Md_1(x,y).\ \clubsuit$$

قبلاً دیدیم که اگر f در شرط لیپ‌شیتز با ثابت کوچک‌تر از ۱ صدق کند انقباضی قوی نامیده می‌شود.

۱۷.۲.۳ قضیه. فرض کنیم $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ یک تابع باشد که در شرط لیپ‌شیتز با ثابت M صدق می‌کند. در این صورت f پیوسته است.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد و $a\in X$ نقطهٔ دلخواهی باشد. قرار می‌دهیم $\delta=\frac{\varepsilon}{M}>0$. در این صورت به ازای هر $x\in X$ اگر $d_1(x,a)<\delta$ آن گاه

$$d_2(f(x),f(a))\leq Md_1(x,a)<M\delta=M(\frac{\varepsilon}{M})=\varepsilon.$$

لذا f در a پیوسته و در نتیجه تابعی پیوسته می‌باشد. ■

۱۸.۲.۳ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک و A زیرمجموعه‌ای ناتهی از آن باشد. در این صورت تابع

$$\begin{aligned} f_A:(X,d) &\longrightarrow (\mathbb{R},|.|)\\ f_A(x) &= d(x,A)=\inf\{d(x,a)\mid a\in A\}\end{aligned}$$

---
[۷] Lipschitz condition

پیوسته است.

برهان. تابع f_A در شرط لیپ‌شیتز با ثابت ۱ صدق می‌کند و لذا با توجه به قضیهٔ فوق پیوسته است. ■

۱۹.۲.۳ قضیه. فرض کنیم $f, g : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ دو تابع پیوسته باشند و A زیرمجموعه‌ای چگال از X. اگر به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم

$$f(a) = g(a)$$

آن گاه به ازای هر $x \in X$ داریم

$$f(x) = g(x).$$

برهان. فرض کنیم $x \in X$. چون $X = \bar{A}$ بنابر قضیهٔ ۱۱.۲.۲ دنباله‌ای مانند $\{a_n\}$ در A موجود است به قسمی که $a_n \to x$. اما پیوستگی f و g نتیجه می‌دهد که $f(a_n) \to f(x)$ و به علاوه $g(a_n) \to g(x)$. حال چون f و g بر A با هم مساویند داریم

$$f(a_n) = g(a_n)$$

و یکتایی حد ایجاب می‌کند که $f(x) = g(x)$. ■

قضیهٔ فوق را گاهی اوقات به این صورت بیان می‌کنند که هر تابع پیوسته به وسیلهٔ مقادیرش روی زیرمجموعه‌ای چگال از فضا به طور دقیق مشخص می‌شود.

۲۰.۲.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ تابعی پیوسته باشد و $x_0 \in X$. در این صورت

$$\{x \in X \mid f(x) = f(x_0)\}$$

زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X است.

برهان. این مجموعه در حقیقت همان $f^{-1}(\{f(x_0)\})$ می‌باشد و چون $\{f(x_0)\}$ مجموعه‌ای متناهی و لذا بسته در Y است، پیوستگی f بسته بودن $f^{-1}(\{f(x_0)\})$ را نتیجه می‌دهد. ■

دیدیم تابع پیوسته تابعی است که هر مجموعهٔ باز را به مجموعه‌ای باز برگرداند. طبیعی است توابعی را بررسی کنیم که هر مجموعهٔ باز را به مجموعه‌ای باز می‌نگارند.

۲۱.۲.۳ تعریف. فرض کنیم $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ یک تابع باشد. f را یک نگاشت باز[8] نامیم هرگاه به ازای هر مجموعهٔ باز مانند G در X، مجموعهٔ $f(G)$ در Y باز باشد. همچنین f یک نگاشت بسته[9] است هرگاه به ازای هر مجموعهٔ بسته مانند F در X، مجموعهٔ $f(F)$ در Y بسته باشد. ♣

در این جا سه سؤال مطرح می‌شود. آیا پیوستگی با باز بودن معادل است؟ آیا پیوستگی با بسته بودن معادل است؟ آیا باز بودن با بسته بودن معادل است؟ اجازه دهید چند مثال را بررسی کنیم.

۲۲.۲.۳ مثال. فرض کنیم d متر گسسته روی $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت تابع همانی

$$\begin{aligned} I:(\mathbb{R},d) &\longrightarrow (\mathbb{R},|.|) \\ I(x) &= x \end{aligned}$$

تابعی پیوسته و غیر باز و غیر بسته است. چون هر مجموعه در $(\mathbb{R},d)$ باز است پس I پیوسته است، اما $\{0\}$ در $(\mathbb{R},d)$ باز است ولی

[8] open mapping
[9] closed mapping

$I(\{\circ\}) = \{\circ\}$ در $(\mathbb{R}, |.|)$ باز نیست. همچنین بازهٔ $(\circ, ۱)$ در $(\mathbb{R}, d)$ بسته است ولی $I((\circ, ۱)) = (\circ, ۱)$ در $(\mathbb{R}, |.|)$ بسته نیست. ♠

لذا پیوستگی، باز یا بسته بودن را نتیجه نخواهد داد.

۲۳.۲.۳ مثال. تابع علامت[10] یعنی

$$\begin{aligned} \mathrm{sgn} &: (\mathbb{R}, |.|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|) \\ \mathrm{sgn}(x) &= \begin{cases} -۱ & x < \circ \\ \circ & x = \circ \\ ۱ & x > \circ \end{cases} \end{aligned}$$

نه پیوسته است و نه باز، اما بسته است. چون $(-\frac{۱}{۲}, ۲)$ در $\mathbb{R}$ باز است ولی

$$\mathrm{sgn}^{-۱}((-\frac{۱}{۲}, ۲)) = [\circ, +\infty)$$

باز نیست، این تابع پیوسته نیست. همچنین چون $(\circ, +\infty)$ در $\mathbb{R}$ باز است ولی

$$\mathrm{sgn}((\circ, +\infty)) = \{۱\}$$

در $\mathbb{R}$ باز نیست، این تابع باز نیست. اما برای هر F بسته در $\mathbb{R}$ داریم $\mathrm{sgn}(F) \subseteq \{-۱, \circ, ۱\}$ و چون $\{-۱, \circ, ۱\}$ مجموعه‌ای متناهی است لذا هر زیرمجموعهٔ آن نیز متناهی است و در نتیجه $\mathrm{sgn}(F)$ مجموعه‌ای متناهی و لذا بسته در $\mathbb{R}$ می‌باشد. ♠

لذا بسته بودن، باز بودن یا پیوستگی را نتیجه نخواهد داد.

۲۴.۲.۳ لم. فرض کنیم $f : X \to Y$ تابعی یک به یک باشد. در این صورت به ازای هر $A \subseteq X$ داریم

$$f(A^c) = f(X) \setminus f(A).$$

---

[10] sign

برهان. فرض کنیم $y \in f(A^c)$. پس x ی در A^c هست به قسمی که $y = f(x)$. اگر y عضوی از $f(A)$ باشد آن گاه $x' \in A$ ی هست که $y = f(x')$. بنابراین $f(x) = f(x')$ و چون f یک به یک است، داریم $x = x'$ که با $x \notin A$ و $x' \in A$ در تناقض است.

بالعکس، فرض کنیم $y \in f(X) \setminus f(A)$. در این صورت $x \in X$ ی هست که $y = f(x)$ ولی $y \notin f(A)$. بنابراین $x \notin A$. لذا $y = f(x)$ که $x \in A^c$. در نتیجه $y \in f(A^c)$. ■

۲۵.۲.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ تابعی یک به یک باشد. در این صورت f باز است فقط و فقط وقتی که بسته باشد.

برهان. فرض کنیم f باز و F زیرمجموعه‌ای بسته از X باشد. لذا F^c در X باز است و در نتیجه $f(F^c)$ در Y باز می‌باشد. اما $f(F^c) = f(X) \setminus f(F)$. با توجه به آن که X در X باز و لذا $f(X)$ در Y باز است، باز بودن نسبت به Y معادل باز بودن نسبت به زیرفضای القایی $f(X)$ می‌باشد. حال $f(X) \setminus f(F)$ در Y باز است، پس $f(F)$ در Y بسته می‌باشد.

قسمت دیگر نیز به همین ترتیب اثبات می‌شود. ■

۲۶.۲.۳ نتیجه. فرض کنیم $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ تابعی یک به یک باشد. در این صورت f پیوسته است فقط و فقط وقتی که f^{-1} باز (یا به طور معادل، بسته) باشد. ■

۲۷.۲.۳ تعریف. هر تابع یک به یک، برو، پیوسته و باز مانند $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ یک همسانریختی[۱۱] نامیده می‌شود. اگر بین (X, d_1) و (Y, d_2) یک همسانریختی موجود باشد، آن گاه این دو فضا را همسانریخت[۱۲] می‌نامیم. ♣

---

[۱۱] homeomorphism
[۱۲] homeomorphic

این همان چیزی است که توقع داشتیم. دو فضای متریک هنگامی عیناً مثل هم تلقی می‌شوند که تناظری یک به یک بین آن‌ها موجود باشد که حافظ مجموعه‌های باز (و لذا مجموعه‌های بسته) باشد. به عبارت دیگر این تابع باید حافظ توپولوژی فضا باشد درست همان طور که در جبر، یک همریختی حافظ اعمال است.

من به ریاضیات تنها به عنوان هنری خلاق علاقه‌مندم.
Godfrey Harold Hardy (1877-1947)

واضح است که هر نگاشت حافظ فاصله، حافظ مجموعه‌های باز نیز می‌باشد. اگر دو فضای متریک همسانریخت باشند، هر مسأله آنالیزی در یکی را می‌توان بدون ابهام به دیگری انتقال داد و لذا حل مسأله در یکی، حکم را در دیگری نیز نتیجه خواهد داد. به نظر می‌رسد اثبات همسانریخت بودن برای دو فضای خاص، ساده‌تر از اثبات همسانریخت نبودن باشد. چون در حالت اول صرفاً باید یک همسانریختی ارائه شود در حالی که در حالت دوم باید اثبات شود که هیچ تابع یک به یک، برو، پیوسته و باز بین دو فضا وجود ندارد. با این حال کافی است اثبات کنیم ساختاری آنالیزی در یک فضا وجود دارد که در دیگری نیست. این مطلب موجب خواهد شد که دو فضا نتوانند با یکدیگر همسانریخت شوند. به عنوان مثال فضای گسستهٔ $\mathbb{R}$ با فضای اقلیدسی همسانریخت نمی‌باشد زیرا در یکی هر مجموعه‌ای باز است در صورتی که در دیگری چنین نیست.

واضح است که نسبت همسانریختی بین فضاهای متریک نسبتی هم‌ارزی است و لذا می‌توان روی رده‌های هم‌ارزی تحت این نسبت بحث کرد که از آن صرف نظر می‌کنیم.

قبلاً تأکید کردیم که در تعریف اپسیلون-دلتا برای حد یا پیوستگی، δ می‌تواند وابسته به ε و a باشد و باید مستقل از x تعریف گردد. فرض کنیم $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ تابعی باشد که در هر نقطه مانند $y\in X$ پیوسته است (استفاده از حرف y به جای a بدین دلیل است که

متغیر بودن آن را القا کنیم، چون معمولاً a برای نقطه‌ای ثابت به کار می‌رود). اگر تعریف اپسیلون-دلتا برای پیوستگی در هر y را بنویسیم داریم

$$\forall y \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{\varepsilon,y} > 0 \forall x (d_1(x,y) < \delta_{\varepsilon,y} \Rightarrow d_2(f(x),f(y)) < \varepsilon).$$

توجه داریم که چون سور وجودی برای δ بعد از سور عمومی برای y آمده است لذا δ می‌تواند تابعی از y باشد. اما اگر سور عمومی y را به بعد از سور وجودی δ انتقال دهیم گزاره‌ای که حاصل می‌شود مفهوم بسیار متفاوتی دارد. در حقیقت پس از آن دیگر δ نمی‌تواند تابعی از y باشد و صرفاً تابعی از ε خواهد بود. این تغییر کوچک که در ابتدا چندان مهم به نظر نمی‌آید، گرچه تعریف قبلی را نتیجه می‌دهد، به هیچ‌وجه با تعریف قبلی معادل نیست و اساس معرفی مفهومی جدید خواهد شد.

۲۸.۲.۳ تعریف. فرض کنیم $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ یک تابع باشد. f را پیوستهٔ یکنواخت[۱۳] گوییم هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta_\varepsilon > 0$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $x, y \in X$ اگر

$$d_1(x,y) < \delta$$

آن گاه

$$d_2(f(x),f(y)) < \varepsilon. \clubsuit$$

روشن است که هر تابع پیوستهٔ یکنواخت تابعی پیوسته است، گرچه عکس این مطلب در حالت کلی لزوماً درست نیست. همچنین دقت کنید که بر خلاف پیوستگی که بر اساس آن پیوستگی در نقطه‌ای

---

[۱۳] uniformly continuous

خاص مانند a کاملاً معنی داشت، پیوستگی یکنواخت در یک نقطه اساساً بی‌معنی است و این مفهوم فقط در یک مجموعه قابل بحث است.

۲۹.۲.۳ مثال. تابع

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}, |.|) &\to (\mathbb{R}, |.|) \\ f(x) &= x^{۲} \end{aligned}$$

روی هر مجموعهٔ کراندار مانند A پیوستهٔ یکنواخت است ولی روی کل $\mathbb{R}$ پیوستهٔ یکنواخت نیست.

برای اثبات پیوستگی یکنواخت روی مجموعه‌ای کراندار مانند A فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. چون A کراندار است پس عددی مانند $M > ۰$ موجود است به قسمی که به ازای هر $x \in A$ داریم $|x| \leq M$. لذا با فرض $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{۲M} > ۰$ (توجه کنید که M عددی ثابت است و لذا δ صرفاً تابعی از ε می‌باشد) برای هر $x, y \in A$ اگر

$$|x - y| < \delta_\varepsilon$$

آن گاه

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^{۲} - y^{۲}| = |x - y|\,|x + y| < \delta_\varepsilon |x + y| \\ &\leq \delta_\varepsilon(|x| + |y|) \leq \delta_\varepsilon(M + M) = ۲M\delta_\varepsilon \\ &= ۲M(\frac{\varepsilon}{۲M}) = \varepsilon. \end{aligned}$$

لذا f بر A پیوستهٔ یکنواخت است.

اما f بر $\mathbb{R}$ پیوستهٔ یکنواخت نیست. زیرا اگر چنین نباشد پس به ازای هر $\varepsilon > ۰$ از جمله $\varepsilon = ۱$ عددی مانند δ_ε وجود دارد

به قسمی که به ازای هر x و y از جمله $x = n + \frac{\delta_\varepsilon}{۲}$ و $y = n$ چون $|x-y| = \frac{\delta_\varepsilon}{۲} < \delta_\varepsilon$ پس

$$\begin{aligned} ۱ = \varepsilon &> |f(x) - f(y)| \\ &= |x^۲ - y^۲| \\ &= |n^۲ + n\delta_\varepsilon + \frac{\delta_\varepsilon^۲}{۴} - n^۲| \\ &= n\delta_\varepsilon + \frac{\delta_\varepsilon^۲}{۴}. \end{aligned}$$

اما از آن جایی که δ_ε عددی ثابت است نامساوی اخیر بدان معنی است که مجموعهٔ اعداد طبیعی از بالا کراندار می‌باشد که تناقض است. ♠

مثال فوق نشان می‌دهد که پیوستگی یکنواخت علاوه بر آن که به ضابطهٔ تابع و مترهای تعریف شده روی دامنه و برد بستگی دارد به دامنهٔ مورد بحث نیز وابسته است.

در احکام قبلی هر جا که δ ی ارائه شده فقط وابسته به ε بوده است در حقیقت اثباتی برای پیوستگی یکنواخت تابع ارائه داده‌ایم. بنابراین قضایای زیر را داریم.

۳۰.۲.۳ قضیه. فرض کنیم $(X, d_۱)$ فضایی گسسته و $(Y, d_۲)$ فضای متریک دلخواهی باشد. در این صورت هر تابع مانند $f : (X, d_۱) \to (Y, d_۲)$ پیوستهٔ یکنواخت است.

برهان. برای $\varepsilon > ۰$ داده شده قرار می‌دهیم $\delta_\varepsilon = \frac{۱}{۲} > ۰$. ■

۳۱.۲.۳ قضیه. تابع ثابت

$$\begin{aligned} f : (X, d_۱) &\longrightarrow (Y, d_۲) \\ f(x) &= y_۰ \end{aligned}$$

همواره پیوستهٔ یکنواخت است.

برهان. برای $\varepsilon > ۰$ داده شده قرار می‌دهیم $\delta_\varepsilon = ۱ > ۰$. ■

کوتاه‌ترین لطیفهٔ ریاضی: فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد!

۳۲.۲.۳ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک، $x_\circ \in X$ دلخواه و تابع $d_{x_\circ}$ به صورت

$$\begin{aligned} d_{x_\circ} : (X,d) &\longrightarrow (\mathbb{R}, |.|) \\ d_{x_\circ}(x) &= d(x, x_\circ), \end{aligned}$$

تعریف شده باشد. در این صورت $d_{x_\circ}$ پیوستهٔ یکنواخت است.

برهان. برای $\varepsilon > ۰$ داده شده قرار می‌دهیم $\delta_\varepsilon = \varepsilon > ۰$. ■

۳۳.۲.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d_۱) \to (Y, d_۲)$ یک تابع باشد که در شرط لیپ‌شیتز با ثابت M صدق می‌کند. در این صورت f پیوسته یکنواخت است.

برهان. برای $\varepsilon > ۰$ داده شده قرار می‌دهیم $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{M}$. ■

۳۴.۲.۳ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک و A زیرمجموعه‌ای ناتهی از آن باشد. در این صورت تابع

$$\begin{aligned} f_A : (X,d) &\longrightarrow (\mathbb{R}, |.|) \\ f_A(x) &= d(x, A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\} \end{aligned}$$

پیوسته یکنواخت است.

برهان. برای $\varepsilon > ۰$ داده شده قرار می‌دهیم $\delta_\varepsilon = \varepsilon > ۰$. ■

دیدیم که برای پیوستگی تعاریف معادلی وجود داشت. برای پیوستگی یکنواخت نیز چنین است که طی چند قضیه آن‌ها را بیان می‌کنیم. البته از پیوستگی یکنواخت احکامی نتیجه می‌شود و نیز

شرایطی وجود دارند که پیوستگی یکنواخت را نتیجه می‌دهند. به عبارت دیگر شرایطی لازم که کافی نیستند و نیز شرایطی کافی که لازم نیستند هم وجود دارند که در این فصل و مباحث بعدی به ذکر آن‌ها خواهیم پرداخت.

۳۵.۲.۳ قضیه. فرض کنیم $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ یک تابع باشد. در این صورت f پیوستهٔ یکنواخت است فقط و فقط وقتی که به ازای هر دو دنباله مانند $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در X که $d_1(x_n,y_n)\to 0$ داشته باشیم $d_2(f(x_n),f(y_n))\to 0$.

برهان. فرض کنیم f پیوستهٔ یکنواخت باشد و $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله در X باشند که

$$d_1(x_n,y_n)\to 0.$$

نیز فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. چون f پیوستهٔ یکنواخت است پس $\delta_\varepsilon>0$ ی موجود است به قسمی که به ازای هر $x,y\in X$ اگر

$$d_1(x,y)<\delta_\varepsilon$$

آن گاه

$$d_2(f(x),f(y))<\varepsilon \qquad (*)$$

حال چون $d_1(x_n,y_n)\to 0$ پس برای این $\delta_\varepsilon>0$ عددی مانند $K_\varepsilon\in\mathbb{N}$ موجود است به قسمی که به ازای هر $n\geq K_\varepsilon$ داریم

$$d_1(x_n,y_n)<\delta_\varepsilon.$$

و لذا بنابر $(*)$ نتیجه می‌شود که

$$d_2(f(x_n),f(y_n))<\varepsilon.$$

و این یعنی $d_۲(f(x_n), f(y_n)) \to ۰$.

بالعکس، فرض کنیم به ازای هر دو دنباله مانند $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در X که $d_۱(x_n, y_n) \to ۰$ داشته باشیم $d_۲(f(x_n), f(y_n)) \to ۰$. ادعا می‌کنیم f پیوستهٔ یکنواخت است. اگر چنین نباشد $\varepsilon_۰ > ۰$ ی موجود است به قسمی که به ازای هر $\delta > ۰$ از جمله برای $\delta = \frac{۱}{n}$ نقاطی مانند $x_n, y_n \in X$ موجودند که

$$d_۱(x_n, y_n) < \frac{۱}{n} \qquad (\dagger)$$

ولی

$$d_۲(f(x_n), f(y_n)) \not< \varepsilon_۰ \qquad (\ddagger)$$

لذا دنباله‌هایی مانند $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در X یافتیم که بنابر $(\dagger)$ و قضیهٔ فشار $d_۱(x_n, y_n) \to ۰$ ولی با توجه به $(\ddagger)$ داریم $d_۲(f(x_n), f(y_n)) \not\to ۰$ و این تناقض است. ■

صورت معادل مذکور در قضیهٔ بالا برای پیوستگی یکنواخت را تعریف دنباله‌ای پیوستگی یکنواخت می‌نامند.

به طور مشابه می‌توان قضیهٔ زیر را اثبات کرد.

۳۶.۲.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d_۱) \to (Y, d_۲)$ یک تابع باشد. در این صورت f پیوستهٔ یکنواخت است فقط و فقط وقتی که به ازای هر دو تور مانند $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ و $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ در X که $d_۱(x_\lambda, y_\lambda) \to ۰$ داشته باشیم $d_۲(f(x_\lambda), f(y_\lambda)) \to ۰$. ■

مجدداً مثال $f(x) = x^۲$ را بررسی می‌کنیم.

۳۷.۲.۳ مثال. تابع

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}, |.|) &\longrightarrow (\mathbb{R}, |.|) \\ f(x) &= x^۲ \end{aligned}$$

روی $\mathbb{R}$ پیوستهٔ یکنواخت نیست. زیرا اگر فرض کنیم

$$x_n = n + \frac{۱}{n},$$
$$y_n = n$$

آن گاه $|x_n - y_n| = \frac{۱}{n} \to ۰$ ولی

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |x_n^۲ - y_n^۲| = ۲ + \frac{۱}{n^۲} \to ۲ \neq ۰. \spadesuit$$

تعریف معادل دیگری برای پیوستگی یکنواخت به شرح زیر وجود دارد.

۳۸.۲.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d_۱) \to (Y, d_۲)$ یک تابع باشد. در این صورت f پیوستهٔ یکنواخت است فقط و فقط وقتی که به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $\delta_\varepsilon > ۰$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر زیرمجموعه از X مانند A اگر

$$\mathrm{diam} A < \delta_\varepsilon$$

آن گاه

$$\mathrm{diam} f(A) < \varepsilon.$$

برهان. فرض کنیم f پیوستهٔ یکنواخت باشد و $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. بنابراین $\delta_\varepsilon > ۰$ ی موجود است به قسمی که به ازای هر $x, y \in X$ اگر

$$d_۱(x, y) < \delta_\varepsilon$$

آن گاه

$$d_۲(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{۲} \qquad (*)$$

حال فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از X باشد که $\mathrm{diam} A < \delta_\varepsilon$. ادعا می‌کنیم $\mathrm{diam} f(A) < \varepsilon$. فرض کنیم $a, b \in f(A)$.

بنابراین A $x, y \in A$ یی موجودند که $a = f(x)$ و $b = f(y)$ و لذا $d_1(x, y) \leq \text{diam}A < \delta_\varepsilon$. بنابراین با توجه به $(*)$ داریم

$$d_2(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

لذا $\frac{\varepsilon}{2}$ کران بالایی برای $\{d_2(a, b) \mid a, b \in f(A)\}$ می‌باشد و چون سوپریمم کوچک‌ترین کران بالاست پس

$$\text{diam}f(A) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

بالعکس، فرض کنیم شرط مذکور در قضیه برقرار باشد و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. لذا $\delta_\varepsilon > 0$ ی موجود است به قسمی که به ازای هر $A \subseteq X$ اگر

$$\text{diam}A < \delta_\varepsilon$$

آن گاه

$$\text{diam}f(A) < \varepsilon.$$

فرض کنیم $x, y \in X$ و نیز $d_1(x, y) < \delta_\varepsilon$. بنابراین با فرض $A = \{x, y\}$ داریم

$$\text{diam}A = d_1(x, y) < \delta_\varepsilon$$

و لذا با توجه به $(*)$ داریم

$$d_2(f(x), f(y)) = \text{diam}f(A) < \varepsilon.$$

بنابراین f پیوستهٔ یکنواخت است. ■

تابع پیوستهٔ $f(x) = \frac{1}{x}$ را روی بازهٔ $(0, 1]$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. به سادگی اثبات می‌شود که این تابع پیوستهٔ یکنواخت نیست. چند نکته در مورد این تابع حائز اهمیت است. اول این که دنبالهٔ $\{\frac{1}{n}\}$ که در بازهٔ $(0, 1]$ قرار دارد کوشی است اما $f(\frac{1}{n}) = n$ و در نتیجه دنبالهٔ $\{f(\frac{1}{n})\}$ کوشی نیست. لذا این مطلب در حالت کلی

درست نیست که توابع پیوسته دنباله‌های کوشی را به دنباله‌ای کوشی می‌نگارند. همچنین بازهٔ $[۰, ۱)$ کراندار است در حالی که $f((۰, ۱])$ کراندار نیست. لذا این مطلب نیز درست نیست که توابع پیوسته مجموعه‌های کراندار را به مجموعه‌ای کراندار می‌نگارند. در مورد توابع پیوستهٔ یکنواخت تقریباً چنین حالاتی اتفاق نخواهد افتاد.

حقیقت عظیم، گزاره‌ای است که نقیض آن نیز حقیقتی عظیم است.
Niels Henrik David Bohr (1885-1962)

۳۹.۲.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d_۱) \to (Y, d_۲)$ یک تابع پیوستهٔ یکنواخت باشد و $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی در X. در این صورت دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ در Y کوشی است.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. چون f پیوستهٔ یکنواخت است پس $\delta_\varepsilon > ۰$ ی موجود است که به ازای هر $x, y \in X$ اگر

$$d_۱(x, y) < \delta_\varepsilon$$

آن گاه

$$d_۲(f(x), f(y)) < \varepsilon. \qquad (*)$$

و چون $\{x_n\}$ کوشی است پس برای این $\delta_\varepsilon > ۰$ عددی مانند $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ موجود است به قسمی که به ازای هر $m, n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$d_۱(x_m, x_n) < \delta_\varepsilon.$$

و لذا بنابر $(*)$ داریم

$$d_۲(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon.$$

بنابراین $\{f(x_n)\}$ کوشی است. ■

از این قضیه نتیجه می‌شود که تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ پیوستهٔ یکنواخت نیست. عکس قضیهٔ فوق در حالت کلی لزوماً درست نیست. این

قضیه را معمولاً به این صورت بیان می‌کنند که توابع پیوستهٔ یکنواخت کوشی بودن را حفظ می‌کنند.

۴۰.۲.۳ مثال. تابع

$$\begin{aligned} f:(\mathbb{R},|.|) &\longrightarrow (\mathbb{R},|.|) \\ f(x) &= x^{2} \end{aligned}$$

پیوستهٔ یکنواخت نیست ولی هر دنبالهٔ کوشی را به دنباله‌ای کوشی می‌نگارد. زیرا فرض کنیم $\{x_n\}$ در $\mathbb{R}$ کوشی باشد. پس با توجه به تام بودن $\mathbb{R}$ دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا به نقطه‌ای مانند x است و چون f پیوسته است پس $f(x_n) \to f(x)$. بنابراین دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ همگرا و لذا کوشی است. ♠

در مورد رفتار توابع پیوستهٔ یکنواخت با مجموعه‌های کراندار موضوع کمی پیچیده‌تر است. ابتدا مثال زیر را ببینید.

۴۱.۲.۳ مثال. فرض کنیم d متر گسسته روی $\mathbb{R}$ باشد. تابع همانی

$$\begin{aligned} I:(\mathbb{R},d) &\longrightarrow (\mathbb{R},|.|) \\ I(x) &= x \end{aligned}$$

یک تابع پیوستهٔ یکنواخت است. اما این تابع فضای کراندار $(\mathbb{R},d)$ را به فضای غیر کراندار $(\mathbb{R},|.|)$ می‌برد (دقت کنید که در فضای گسسته هر زیرمجموعه‌ای کراندار است). ♠

لذا حتی توابع پیوستهٔ یکنواخت کرانداری مجموعه‌ها را در حالت کلی حفظ نمی‌کنند و ظاهراً به مفهومی عمیق‌تر نیاز داریم.

۴۲.۲.۳ تعریف. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک و A زیرمجموعه‌ای از آن باشد. برای $\varepsilon > 0$ خانوادهٔ $\{N_\varepsilon(x)\}_{x\in A}$ را یک ε–تور برای A می‌نامیم. ♣

توجه کنید که همسایگی‌های $N_\varepsilon(x)$ مانند توری روی مجموعهٔ A پهن شده‌اند و این اصطلاح، برگرفته از مفهوم تور که قبلاً در مورد آن صحبت کردیم نمی‌باشد.

۴۳.۲.۳ تعریف. زیرمجموعهٔ A از فضای متریک (X,d) را به طور کلی کراندار[۱۴] نامیم هرگاه برای هر ε–تور از آن، تعدادی متناهی نقطه از A مانند x_1، ...، x_n موجود باشد به قسمی که

$$A \subseteq \cup_{i=1}^{n} N_\varepsilon(x_i). \clubsuit$$

قضیهٔ بعد با برداشت شهودی ما از این مفهوم مطابقت دارد.

۴۴.۲.۳ قضیه. در هر فضای متریک مانند (X,d) هر مجموعهٔ به طور کلی کراندار مجموعه‌ای کراندار است.

برهان. فرض کنیم A به طور کلی کراندار باشد. پس به ازای هر $\varepsilon > 0$ از جمله $\varepsilon = 1$ باید برای ε–تور A نقاطی مانند x_1، ...، x_n موجود باشد که

$$A \subseteq \cup_{i=1}^{n} N_1(x_i).$$

حال چون همسایگی‌ها در هر فضایی کراندارند و اجتماع متناهی از مجموعه‌های کراندار، کراندار است، لذا A مجموعه‌ای کراندار خواهد بود. ■

عکس قضیهٔ فوق لزوماً درست نیست. مثلاً هر فضای گسسته کراندار است ولی اگر نامتناهی باشد به طور کلی کراندار نیست چون برای $\frac{1}{2}$–تور یک فضای گسستهٔ نامتناهی مانند (X,d) اگر نقاطی مانند x_1، ...، x_n از X موجود باشد که

$$X \subseteq \cup_{i=1}^{n} N_{\frac{1}{2}}(x_i)$$

---

[۱۴] totally bounded

آن گاه

$$X \subseteq \cup_{i=1}^{n}\{x_i\} = \{x_1, \ldots, x_n\},$$

چون در فضای گسسته $N_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\}$. بنابراین X باید متناهی باشد که تناقض است.

حال می‌توان به بررسی رفتار توابع پیوستهٔ یکنواخت روی مجموعه‌های به طور کلی کراندار پرداخت.

۴۵.۲.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ یک تابع پیوستهٔ یکنواخت و $A \subseteq X$ مجموعه‌ای به طور کلی کراندار باشد. در این صورت $f(A)$ در Y به طور کلی کراندار است.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. چون f پیوستهٔ یکنواخت است پس $\delta_\varepsilon > 0$ ی موجود است به قسمی که به ازای هر $x, y \in A$ اگر

$$d_1(x, y) < \delta_\varepsilon$$

آن گاه

$$d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon \qquad (*)$$

حال چون A به طور کلی کراندار است برای δ_ε–تور $\{N_{\delta_\varepsilon}(y)\}_{y\in A}$ نقاطی مانند y_1، ...، y_n موجودند که

$$A \subseteq \cup_{i=1}^{n} N_{\delta_\varepsilon}(y_i) \qquad (\dagger)$$

ادعا می‌کنیم

$$f(A) \subseteq \cup_{i=1}^{n} N_\varepsilon(f(y_i)) \qquad (\ddagger)$$

فرض کنیم $f(x) \in f(A)$. چون $x \in A$، بنابر $(\dagger)$ عددی مانند i_0 که $1 \le i_0 \le n$ موجود است به قسمی که

$$x \in N_{\delta_\varepsilon}(y_{i_0})$$

و یا

$$d_1(x, y_{i_0}) < \delta_\varepsilon.$$

و لذا با توجه به (*) داریم

$$d_2(f(x), f(y_{i_0})) < \varepsilon.$$

در نتیجه

$$f(x) \in N_\varepsilon(f(y_{i_0})) \subseteq \cup_{i=1}^{n} N_\varepsilon(f(y_i)).$$

بنابراین (‡) برقرار است و این یعنی شرط به طور کلی کراندار بودن برای ε−تور $f(A)$ حاصل شده است. پس $f(A)$ به طور کلی کراندار می‌باشد. ■

واضح است که عکس قضیهٔ فوق درست نیست. مثلاً تابع علامت هر مجموعهٔ به طور کلی کراندار را به زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ متناهی $\{1, 0, -1\}$ می‌برد که به وضوح به طور کلی کراندار است ولی تابع علامت حتی پیوسته هم نیست.

همچنین دقت کنید که با توجه به قضیهٔ فوق و قضیهٔ قبل از آن هر تابع پیوستهٔ یکنواخت هر مجموعهٔ به طور کلی کراندار را به مجموعه‌ای کراندار می‌نگارد.

قضیهٔ فوق را اغلب به این صورت بیان می‌کنند که توابع پیوستهٔ یکنواخت به طور کلی کراندار بودن را حفظ می‌کنند.

مجدداً در فصل بعد به مفهوم به طور کلی کراندار بودن باز خواهیم گشت. در حقیقت این مطلب یکی از اساسی‌ترین مفاهیم در مبحث فشردگی می‌باشد.

اکنون آماده‌ایم خود را با مفاهیم سخت‌تری محک بزنیم.

۳.۳ نیم‌پیوستگی

Claude Ambrose Rogers (1920)

احتمالاً با خود می‌گویید مگر از این سخت‌تر هم می‌شود. واقعیت امر این است که آنچه گفتیم و خواهیم گفت اصلاً سخت نیست. این که گاهی اوقات با این صفات از مباحث یاد می‌کنیم بیش‌تر بدان جهت است که مفاهیم را مهم‌تر جلوه دهیم.

در این بخش مفاهیمی مرتبط با پیوستگی را معرفی می‌کنیم که در سطوح بالاتر مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

۱.۳.۳ تعریف. فرض کنیم $f : (X, d) \to \mathbb{R}^*$ یک تابع باشد. f را نیم‌پیوسته از بالا[۱۵] در نقطهٔ $a \in X$ نامیم هرگاه برای هر $u \in \mathbb{R}^*$ که $f(a) < u$ عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $x \in X$ اگر

$$d(x, a) < \delta$$

آن گاه

$$f(x) < u.$$

به طور مشابه f نیم‌پیوسته از پایین[۱۶] در نقطهٔ $a \in X$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر $s \in \mathbb{R}^*$ عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $x \in X$ اگر

$$d(x, a) < \delta$$

آن گاه

$$f(x) > s.$$

---

[۱۵] upper semicontinuous

[۱۶] lower semicontinuous

fرا نیم‌پیوسته از بالا بر X نامیم هرگاه در هر نقطه از X نیم‌پیوسته از بالا باشد. همچنین f را نیم‌پیوسته از پایین بر X نامیم هرگاه در هر نقطه از X نیم‌پیوسته از پایین باشد. ♣

در تعریف فوق f به توی $\mathbb{R}^*$ در نظر گرفته شده تا حالات خاصی که توابع مورد بحث ما مقادیر $+\infty$ و $-\infty$ را نیز می‌پذیرند شامل شود. در حقیقت چون هیچ متری روی $\mathbb{R}^*$ تعریف نکرده‌ایم نمی‌توانیم در مورد پیوسته بودن توابع از (X,d) به $\mathbb{R}^*$ مبتنی بر مفهوم پیوستگی در فضاهای متریک صحبتی به میان آوریم. لذا این تعریف با تلفیقی از تعریف پیوستگی و ایده گرفتن از آن مفهوم، به نوعی تعمیم آن به $\mathbb{R}^*$ می‌باشد. اجازه دهید ببینیم اگر f به توی $\mathbb{R}$ باشد این تعریف چه می‌گوید.

۲.۳.۳ قضیه. فرض کنیم $f:(X,d)\to(\mathbb{R},|.|)$ یک تابع باشد. در این صورت f در $a\in X$ نیم‌پیوسته از بالا است فقط و فقط وقتی که به ازای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $\delta>0$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $x\in X$ اگر

$$d(x,a)<\delta$$

آن گاه

$$f(x)<f(a)+\varepsilon.$$

برهان. فرض کنیم f در a نیم‌پیوسته از بالا باشد و $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنابراین با فرض $u=f(a)+\varepsilon$ با توجه به تعریف نیم‌پیوستگی از بالا عددی مانند $\delta>0$ موجود است به قسمی که به ازای هر $x\in X$ اگر

$$d(x,a)<\delta$$

آن گاه

$$f(x) < u = f(a) + \varepsilon.$$

بالعکس، فرض کنیم شرط قضیه برقرار باشد و $u \in \mathbb{R}^*$ با شرط $u > f(a)$ دلخواه باشد. اگر $u = +\infty$ آن گاه حکم به وضوح برقرار است و اگر $u = -\infty$، فرض $f(a) < u$ نمی‌تواند درست باشد چون f حقیقی مقدار است. پس می‌توان فرض کرد که $u \in \mathbb{R}$. حال می‌توان نوشت

$$\varepsilon = u - f(a) > 0$$

و لذا بنابر شرط قضیه عددی مانند $\delta > 0$ موجود است به قسمی که به ازای هر $x \in X$ اگر

$$d(x, a) < \delta$$

آن گاه

$$f(x) < f(a) + \varepsilon = u.$$

بنابراین f در a نیم‌پیوسته از بالا می‌باشد. ■

به طور مشابه می‌توان گفت

۳.۳.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d) \to (\mathbb{R}, |.|)$ یک تابع باشد. در این صورت f در $a \in X$ نیم‌پیوسته از پایین است فقط و فقط وقتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $x \in X$ اگر

$$d(x, a) < \delta$$

آن گاه

$$f(a) - \varepsilon < f(x). \blacksquare$$

با تلفیق این دو قضیه می‌توان گفت

۴.۳.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d) \to (\mathbb{R}, |.|)$ یک تابع باشد. در این صورت f در $a \in X$ نیم‌پیوسته از بالا و پایین است فقط و فقط وقتی که در a پیوسته باشد. ■

دقت کنید که در دو قضیهٔ ۲.۳.۳ و ۳.۳.۳ تنها فرض $f(a) \in \mathbb{R}$ کافی بود و لذا می‌توانیم در این قضیه‌ها فرض کنیم که f تابعی به توی $\mathbb{R}^*$ است ولی $f(a) \in \mathbb{R}$. همچنین تعریف نیم‌پیوستگی از بالا ایجاب می‌کند که "اگر $f(a) = +\infty$ آن گاه f در a نیم‌پیوسته از بالا می‌باشد " و به طور مشابه "اگر $f(a) = -\infty$ آن گاه f در a نیم‌پیوسته از پایین می‌باشد ".

گرچه پیوستگی، نیم‌پیوستگی از بالا و پایین را نتیجه می‌دهد اما نیم‌پیوستگی از بالا به تنهایی پیوستگی را نتیجه نخواهد داد. به عبارت دیگر توابعی وجود دارند که نیم‌پیوسته از بالا هستند ولی نیم‌پیوسته از پایین نمی‌باشند.

۵.۳.۳ مثال. تابع

$$f : (\mathbb{R}, |.|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$$
$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in [۰, ۱] \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نیم‌پیوسته از بالا می‌باشد ولی نیم‌پیوسته از پایین نیست. زیرا فرض کنیم $a \in \mathbb{R}$. اگر $a \in [۰, ۱]$ واضح است که برای $\varepsilon > ۰$ داده شده، $\delta = ۱ > ۰$ شرط قضیهٔ ۲.۳.۳ را تأمین می‌کند. زیرا اگر $x \in \mathbb{R}$ آن گاه

$$|x - a| < \delta$$

نتیجه می‌دهد که

$$f(x) \leq ۱ < ۱ + \varepsilon = f(a) + \varepsilon.$$

(حتی بدون استفاده از شرط $|x-a|<\delta$ نیز نامساوی اخیر برقرار است.)

اما اگر $a \notin [0,1]$، آن گاه چون $[0,1]$ بسته و $[0,1]^c$ باز است پس عددی مانند $\delta > 0$ موجود است به قسمی که

$$N_\delta(a) \subseteq [0,1]^c.$$

و لذا برای $\varepsilon > 0$ همین $\delta > 0$ شرط قضیهٔ ۲.۳.۳ را برقرار خواهد کرد. زیرا اگر x عدد دلخواهی در $\mathbb{R}$ باشد که

$$|x-a|<\delta$$

آن گاه $x \in [0,1]^c$ و لذا

$$f(x) = 0 < \varepsilon = f(a)+\varepsilon.$$

ولی این تابع مثلاً در نقطهٔ $a = 0$ نیم‌پیوسته از پایین نمی‌باشد. زیرا اگر چنین نباشد پس به ازای هر $\varepsilon > 0$ از جمله $\varepsilon = 1$ باید عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ اگر

$$|x-a|<\delta$$

آن گاه

$$0 = 1-\varepsilon = f(a)-\varepsilon < f(x).$$

ولی با فرض $x = -\frac{\delta}{2}$ داریم $|x| < \delta$ و لذا باید $0 < f(x) = 0$ که امکان ندارد. ♠

همانند مفاهیم پیوستگی و پیوستگی یکنواخت صورت‌های معادلی برای نیم‌پیوستگی نیز وجود دارد که نمونه‌ای از آن را در قضایای ۲.۳.۳ و ۳.۳.۳ دیدیم. صورت‌های معادل دیگری نیز وجود دارد که در قضایای بعد می‌آید.

۶.۳.۳ قضیه. فرض کنیم $f:(X,d)\to\mathbb{R}^*$ یک تابع باشد. در این صورت f در $a\in X$ نیم‌پیوسته از بالا است فقط و فقط وقتی که به ازای هر دنباله مانند $\{x_n\}$ در X که $x_n\to a$ داشته باشیم

$$\limsup_n f(x_n)\le f(a).$$

برهان. فرض کنیم f در a نیم‌پیوسته از بالا باشد و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X که $x_n\to a$. نیز فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. می‌توان فرض کرد که $f(a)\in\mathbb{R}$ و بنابر قضیهٔ ۲.۳.۳ عددی مانند $\delta>0$ موجود است به قسمی که به ازای هر $x\in X$ اگر

$$d(x,a)<\delta$$

آن گاه

$$f(x)<f(a)+\varepsilon \qquad (*)$$

حال چون $x_n\to a$ پس برای این $\delta>0$ عددی مانند $K\in\mathbb{N}$ موجود است به قسمی که به ازای هر $n\ge K$ داریم

$$d(x_n,a)<\delta$$

و لذا طبق $(*)$ داریم

$$f(x_n)<f(a)+\varepsilon.$$

بنابراین اگر زیردنباله‌ای از $\{f(x_n)\}$ به عددی مانند α همگرا باشد باید داشته باشیم

$$\alpha\le f(a)+\varepsilon.$$

لذا $f(a)+\varepsilon$ کران بالایی برای $\overline{\{f(x_n)\}}$ می‌باشد و در نتیجه با توجه به آن که سوپریمم، کوچک‌ترین کران بالاست داریم

$$\limsup_n f(x_n)\le f(a)+\varepsilon.$$

بزرگ‌ترین ریاضیدانان، همچون ارشمیدس، نیوتن و گاوس، همواره نظریه و کاربردها را در اندازه‌ای یکسان در هم می‌آمیزند.

Felix Christian Klein (1849-1925)

اما نامساوی فوق به ازای هر ε برقرار است، پس

$$\limsup_n f(x_n) \leq f(a).$$

بالعکس، فرض کنیم شرط مذکور در قضیه برقرار باشد ولی f در a نیم‌پیوسته از بالا نباشد. لذا $\varepsilon_\circ > \circ$ ی موجود است به قسمی که به ازای هر $\delta > \circ$ از جمله $\delta = \frac{1}{n} > \circ$ نقطه‌ای مانند $x_n \in X$ موجود است که

$$d(x_n, a) < \frac{1}{n} \qquad (\dagger)$$

ولی

$$f(x_n) \not< f(a) + \varepsilon_\circ \qquad (\ddagger)$$

لذا دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در X یافتیم که طبق قضیهٔ فشار و $(\dagger)$ داریم $x_n \to a$ اما بنابر $(\ddagger)$ دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ دارای کران پایین $f(a) + \varepsilon_\circ$ است، پس

$$f(a) < f(a) + \varepsilon_\circ \leq \limsup_n x_n$$

که خلاف فرض است. ■

به طور مشابه می‌توان گفت

۷.۳.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d) \to \mathbb{R}^*$ یک تابع باشد. در این صورت f در $a \in X$ نیم‌پیوسته از پایین است فقط و فقط وقتی که به ازای هر دنباله مانند $\{x_n\}$ در X که $x_n \to a$ داشته باشیم

$$f(a) \leq \liminf_n f(x_n). \ ■$$

صورت معادل بعدی برای نیم‌پیوستگی نیز جالب است.

۸.۳.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d) \to \mathbb{R}^*$ یک تابع باشد. در این صورت f بر X نیم‌پیوسته از بالا است فقط و فقط وقتی که به ازای هر $u \in \mathbb{R}^*$، مجموعهٔ

$$G_u = \{x \in X \mid f(x) < u\}$$

زیرمجموعهٔ بازی از X باشد.

برهان. فرض کنیم f بر X نیم‌پیوسته از بالا باشد و $u \in \mathbb{R}^*$ داده شده باشد. نیز فرض کنیم $a \in G_u$. بنابر تعریف نیم‌پیوستگی از بالا عددی مانند $\delta > 0$ موجود است به قسمی که به ازای هر $x \in X$ اگر

$$d(x, a) < \delta$$

آن گاه

$$f(x) < u.$$

به عبارت دیگر به ازای هر $x \in X$ اگر

$$x \in N_\delta(a)$$

آن گاه

$$x \in G_u.$$

بنابراین

$$N_\delta(a) \subseteq G_u$$

و لذا a نقطه‌ای درونی برای G_u می‌باشد. بنابراین G_u باز است.

بالعکس، فرض کنیم G_u برای هر $u \in \mathbb{R}^*$ باز باشد. بنابراین هر $a \in G_u$ نقطه‌ای درونی برای G_u است و لذا عددی مانند $\delta > 0$ موجود است به قسمی که $N_\delta(a) \subseteq G_u$ و یا به طور معادل به ازای

هر $x \in X$ اگر $d(x,a) < \delta$ آن گاه $f(x) < u$. اما اگر $u = +\infty$ آن گاه عددی مانند u' در $\mathbb{R}$ انتخاب می‌کنیم که $f(a) < u'$ و لذا f در همسایگی $N_\delta(a)$ حقیقی مقدار است. درنتیجه در هر حالت f بر X نیم‌پیوسته از بالا می‌باشد. ■

به طور مشابه می‌توان گفت

۹.۳.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (X,d) \to \mathbb{R}^*$ یک تابع باشد. در این صورت f بر X نیم‌پیوسته از پایین است فقط و فقط وقتی که به ازای هر $s \in \mathbb{R}^*$، مجموعهٔ

$$H_s = \{x \in X \mid s < f(x)\}$$

زیرمجموعهٔ بازی از X باشد. ■

۱۰.۳.۳ نتیجه. فرض کنیم $f : (X,d) \to \mathbb{R}^*$ یک تابع باشد. اگر f نیم‌پیوسته از بالا باشد آن گاه برای هر $t \in \mathbb{R}^*$ مجموعهٔ $\{x \in X \mid f(x) \leq t\}$ مجموعه‌ای G_δ در X است.

برهان. اگر $t = +\infty$ آن گاه

$$\{x \in X \mid f(x) \leq +\infty\} = X$$

و اگر $t = -\infty$ آن گاه

$$\{x \in X \mid f(x) \leq -\infty\} = \cap_{n=1}^{\infty}\{x \in X \mid f(x) < -n\}.$$

بنابراین فرض کنیم $t \in \mathbb{R}$. در این صورت

$$\{x \in X \mid f(x) \leq t\} = \cap_{n=1}^{\infty}\{x \in X \mid f(x) < t + \frac{1}{n}\}.$$

لذا در هر حالت، مجموعهٔ مذکور G_δ است. ■

۱۱.۳.۳ نتیجه. فرض کنیم $f : (X,d) \to \mathbb{R}^*$ یک تابع باشد. اگر f نیم‌پیوسته از پایین باشد آن گاه برای هر $t \in \mathbb{R}^*$ مجموعهٔ $\{x \in X \mid t \leq f(x)\}$ مجموعه‌ای G_δ در X است. ■

مثال ۵.۳.۳ را می‌توان در حالت کلی به صورت زیر بیان کرد.

۱۲.۳.۳ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک و F زیرمجموعه‌ای از آن باشد. در این صورت تابع مشخصهٔ F یعنی

$$\chi_F \quad : \quad X \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$$

$$\chi_F(x) \quad = \quad \begin{cases} ۱ & x \in F \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نیم‌پیوسته از بالا است فقط و فقط وقتی که F بسته باشد.

برهان. فرض کنیم χ_F نیم‌پیوسته از بالا باشد. بنابراین طبق قضیهٔ ۸.۳.۳ به ازای هر $u \in \mathbb{R}$ از جمله $u = ۱$ باید مجموعهٔ $G_u = \{x \in X \mid \chi_F(x) < u\}$ باز باشد. اما $G_۱ = F^c$، لذا F^c باز و در نتیجه F بسته است.

بالعکس، اگر F بسته باشد، آن گاه برای هر $u \leq ۱$ در $\mathbb{R}$ داریم $G_u = F^c$. که با توجه به بسته بودن F، مجموعهٔ G_u باز خواهد بود و برای هر $u > ۱$ در $\mathbb{R}$ داریم $G_u = X$ که به وضوح باز می‌باشد. پس طبق قضیهٔ ۸.۳.۳ تابع χ_F نیم‌پیوسته از بالا است. ■

۱۳.۳.۳ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک و G زیرمجموعه‌ای از آن باشد. در این صورت تابع مشخصهٔ G یعنی χ_G نیم‌پیوسته از پایین است فقط و فقط وقتی که G باز باشد. ■

گرچه تعاریف دیگری نیز در مورد دنباله‌های متشکل از توابع و پیوستگی و همپیوستگی آن‌ها وجود دارد، به همین مقدار اکتفا می‌کنیم و مجدداً به عنوان ضمیمه‌ای بر مباحث این فصل به مفاهیم کلاسیک

بازمی‌گردیم. شاید بتوان در فضای اقلیدسی، همانند مبحث دنباله‌ها، نتایج جدیدی در مورد توابع پیوسته به دست آورد.

۴.۳ باز هم فضای اقلیدسی

Aristotle
(384-322BC)

در فصل قبل دیدیم که وجود اعمال جمع و ضرب و رابطهٔ کوچک‌تری در $\mathbb{R}$ چگونه باعث شد بتوانیم نتایج عمیق‌تری در این فضا با استفاده از این ابزار قدرتمند به دست آوریم. از آن جایی که تعریفی معادل برای پیوستگی با استفاده از دنباله‌ها وجود دارد می‌توان نتایج آن فصل را برای فصل حاضر بازسازی کرد. به عنوان مثال مجموع، تفاضل، حاصلضرب و خارج‌قسمت حدود توابع و بحث در مورد پیوستگی آن‌ها به سادگی میسر است، لذا این مطالب را دانسته فرض می‌کنیم. همچنین می‌توان با استفاده از قضیهٔ ۱.۴.۲ برخی نتایج را در مورد توابع روی $\mathbb{R}^k$ به دست آورد. در این بخش به جای پرداختن به این گونه نتیجه گیری‌های ساده که به نوعی تکرار مکررات است (هم تکرار دانسته‌های کلاسیک شما و هم تکرار مطالب انتهایی بخش قبل)، به برخی قضایای مهم‌تر در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ می‌پردازیم.

وجود رابطهٔ $\leq$ در $\mathbb{R}$ کمک می‌کند بتوانیم در مورد حد چپ و حد راست یک تابع در یک نقطه صحبت کنیم.

۱.۴.۳ تعریف. فرض کنیم $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ یک تابع باشد که در یک نیم‌همسایگی راست از نقطهٔ a مانند $(a, a+r)$ تعریف شده است. گوییم حد $f(x)$ وقتی x از سمت راست به a میل می کند برابر

$\ell \in \mathbb{R}$ است و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$$

هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ اگر

$$a < x < a + \delta$$

آن گاه

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon. \clubsuit$$

توجه کنید که در این تعریف مهم نیست f حقیقی مقدار باشد بلکه اگر (X, d) فضای متریک دلخواهی باشد نیز این تعریف قابل بیان است.

۲.۴.۳ تعریف. فرض کنیم $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (X, d)$ یک تابع باشد که در یک نیم‌همسایگی راست از نقطهٔ a مانند $(a, a + r)$ تعریف شده است. گوییم حد $f(x)$ وقتی x از سمت راست به a میل می‌کند برابر ℓ است و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$$

هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ اگر

$$a < x < a + \delta$$

آن گاه

$$d(f(x), \ell) < \varepsilon. \clubsuit$$

به طور مشابه می‌توان حد $f(x)$ وقتی x از سمت چپ به a میل می‌کند را با نماد $\lim_{x\to a^-} f(x)$ تعریف کرد.

واضح است که $\lim_{x\to a} = \ell$ فقط و فقط وقتی که $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$.

۳.۴.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (X, d)$ یک تابع باشد. در این صورت

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$$

فقط و فقط وقتی که به ازای هر دنباله مانند $\{x_n\}$ در $\mathbb{R}$ که $x_n \to x$ و نیز $x_n > a$ داشته باشیم $f(x_n) \to \ell$.

برهان. فرض کنیم $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$ و دنبالهٔ $\{x_n\}$ دنبالهٔ دلخواهی در $\mathbb{R}$ باشد که $x_n \to a$ و نیز $x_n > a$. همچنین فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. بنابر تعریف حد راست عددی مانند $\delta > 0$ موجود است به قسمی که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ اگر

$$a < x < a + \delta$$

آن گاه

$$d(f(x), \ell) < \varepsilon \qquad (*)$$

ریاضیدان، کسی است که شباهت‌ها را بین قضایا دریابد...

حال برای این $\delta > 0$ چون $x_n \to a$ پس $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ی موجود است (توجه داریم که این عدد تابعی از δ است که δ خود تابعی از ε می‌باشد) به قسمی که به ازای هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$|x_n - a| < \delta$$

و یا

$$a - \delta < x_n < a + \delta$$

اما می‌دانیم $x_n > a$، پس

$$a < x_n < a + \delta$$

و لذا $(*)$ نتیجه می‌دهد که

$$d(f(x_n), \ell) < \varepsilon.$$

بنابراین $f(x_n) \to \ell$.

بالعکس، فرض کنیم شرط مذکور در قضیه برقرار باشد ولی $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \ell$. پس $\varepsilon_\circ$ی موجود است به قسمی که به ازای هر $\delta > \circ$ از جمله $\delta = \frac{\text{۱}}{n} > \circ$ عددی مانند $x_n \in \mathbb{R}$ موجود است که

$$a < x_n < a + \frac{\text{۱}}{n} \qquad (\dagger)$$

ولی

$$d(f(x_n), \ell) \not< \varepsilon_\circ \qquad (\ddagger)$$

پس دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در $\mathbb{R}$ یافتیم که $x_n > a$ و بنابر $(\dagger)$ و قضیهٔ فشار $x_n \to a$ ولی بنابر $(\ddagger)$ داریم $f(x_n) \not\to \ell$ که متناقض با شرط مذکور می‌باشد. ■

به طور مشابه می‌توان گفت

۴.۴.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (X, d)$ یک تابع باشد. در این صورت

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$$

فقط و فقط وقتی که به ازای هر دنباله مانند $\{x_n\}$ در $\mathbb{R}$ که $x_n \to x$ و نیز $x_n < a$ داشته باشیم $f(x_n) \to \ell$. ■

وجود رابطهٔ $\leq$ در $\mathbb{R}$ کمک می‌کند بتوانیم در مورد توابع صعودی و نزولی صحبت کنیم.

۵.۴.۳ تعریف. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را صعودی[۱۷] نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ اگر $x < y$ آن گاه $f(x) \leq f(y)$. همچنین f را

---

[۱۷] increasing

اکیداً صعودی[۱۸] نامیم هرگاه به ازای هر $x,y \in \mathbb{R}$ اگر $x < y$ آن گاه $f(x) < f(y)$.

به طور مشابه می‌توان تابع نزولی[۱۹] و اکیداً نزولی[۲۰] را تعریف کرد. تابعی که صعودی یا نزولی باشد یکنوا[۲۱] و اگر اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد اکیداً یکنوا[۲۲] نامیده می‌شود. ♣

۶.۴.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ تابعی صعودی باشد. در این صورت برای هر $a \in \mathbb{R}$ حدود چپ و راست f در a موجودند و به علاوه داریم

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf\{f(x) \mid x > a\},$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \sup\{f(x) \mid x < a\}.$$

برهان. چون f صعودی است پس برای $x > a$ داریم $f(x) \geq f(a)$. لذا $f(a)$ کران پایینی برای مجموعهٔ ناتهی $\{f(x) \mid x > a\}$ می‌باشد و در نتیجه بنابر اصل کمال اینفیمم این مجموعه موجود و مثلاً برابر α است. ادعا می‌کنیم $\lim_{x\to a^+} f(x) = \alpha$. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. بنابر خاصیت مشخصهٔ اینفیمم عددی مانند x_0 موجود است که $x_0 > a$ و

$$f(x_0) < \alpha + \varepsilon.$$

با فرض $\delta = x_0 - a > 0$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ اگر

$$a < x < a + \delta = a + x_0 - a = x_0$$

---

[۱۸] strictly increasing
[۱۹] decreasing
[۲۰] strictly decreasing
[۲۱] monotone
[۲۲] strictly monotone

آن گاه چون f صعودی و α کران پایین است، داریم

$$\alpha - \varepsilon < \alpha \leq f(x) \leq f(x_\circ) < \alpha + \varepsilon$$

و لذا

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

بنابراین $\lim_{x\to a^+} f(x) = \alpha$.

به همین ترتیب قسمت دیگر حکم اثبات می‌شود. ■

۷.۴.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ تابعی نزولی باشد. در این صورت برای هر $a \in \mathbb{R}$ حدود چپ و راست f در a موجودند و به علاوه داریم

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \sup\{f(x) \mid x > a\},$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \inf\{f(x) \mid x < a\}. \blacksquare$$

به علاوه چون توابع اکیداً یکنوا، یکنوا هستند پس احکام مشابهی برای توابع اکیداً یکنوا وجود دارد. قضایای فوق کمک می‌کند اطلاع جالبی در مورد نقاط ناپیوستگی توابع یکنوا به دست آوریم.

۸.۴.۳ قضیه. نقاط ناپیوستگی هر تابع یکنوا مانند $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ حداکثر شماراست.

برهان. می‌توان فرض کرد که f صعودی است. فرض کنیم D مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی f باشد. بنابر قضیهٔ ۶.۴.۳ داریم

$$D = \{a \in \mathbb{R} \mid \sup_{x<a} f(x) < \inf_{x>a} f(x)\}.$$

برای هر $a \in D$ چون حدود چپ و راست برابر نیستند پس عددی گویا مانند r_a وجود دارد که

$$\sup_{x<a} f(x) < r_a < \inf_{x>a} f(x).$$

در حقیقت بی‌نهایت عدد گویا در این بین وجود دارد و بنابر اصل انتخاب می‌توان یکی از آن‌ها را انتخاب کرد و r_a نامید.

ریاضیدان بهتر، کسی است که بتواند شباهت بین برهان‌ها را ببیند...

فرض کنیم $a, b \in D$ و نیز $a \neq b$، مثلاً $a < b$. پس به ازای هر x که $a < x < b$ داریم

$$r_a < \inf_{x>a} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{x<b} f(x) < r_b$$

و لذا $r_a < r_b$، بنابراین $r_a \neq r_b$. این مطلب نشان می‌دهد که تناظر $a \mapsto r_a$ بر D به توی اعداد گویا یک به یک است و لذا $\mathrm{Card} D \leq \mathrm{Card}\ \mathbb{Q}$. اما از آن جایی که $\mathbb{Q}$ شماراست می‌توان نتیجه گرفت که D حداکثر شماراست. ■

این موضوع که مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی توابع یکنوا شماراست در حالت کلی برای یک تابع دلخواه لزوماً درست نیست. مثال بعدی را ببینید.

۹.۴.۳ مثال. تابع مشخصهٔ $\mathbb{Q}$ یعنی $\chi_{\mathbb{Q}}$ را در نظر می‌گیریم. این تابع در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست چون $\mathbb{Q}$ نه باز است و نه بسته و لذا مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی این تابع ناشماراست. ♠

به علاوه ممکن است مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی تابعی شمارا باشد ولی آن تابع یکنوا نباشد. مثال‌های بدیهی زیادی وجود دارد ولی بهتر است مثال بعدی را نیز ببینید.

۱۰.۴.۳ مثال. تابع

$$f : (\mathbb{R}, |.|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}^c \text{ یا } x = 0 \\ \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \text{ (که } \frac{m}{n} \text{ حتی‌المقدور ساده شده است)} \end{cases}$$

در هر نقطهٔ اصم یا $a = 0$ پیوسته و در هر نقطهٔ گویای غیر صفر ناپیوسته است. به عبارت دیگر اگر D مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی f

باشد داریم

$$D = \mathbb{Q} \setminus \{0\} \qquad (*)$$

توجه کنید که شرط تحویل ناپذیر بودن $\frac{m}{n}$، یعنی این که $\frac{m}{n}$ تا حد ممکن ساده شده است، برای این است که f خوشتعریف باشد. زیرا در غیر این صورت مثلاً در مورد $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ نمی‌توان فهمید که مقدار f در این نقطه برابر $\frac{1}{2}$ است یا $\frac{1}{4}$. برای اثبات $(*)$ نشان می‌دهیم که به ازای هر $a \in \mathbb{R}$،

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0,$$

و لذا f فقط در نقاطی پیوسته است که برابر صفر تعریف شده باشد. برای اثبات ادعای فوق فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی $N \in \mathbb{N}$ ی هست که $\frac{1}{N} < \varepsilon$. فرض کنیم a عدد دلخواهی در $\mathbb{R}$ باشد. تعداد کسرهایی که مخرج آن‌ها ۱، ۲، ...، $N-1$ است و در همسایگی $(a-1, a+1)$ قرار دارند متناهی است چون برای هر عدد مشخص مانند i که $1 \leq i \leq N-1$ فقط تعدادی متناهی m موجود است به قسمی که $a - 1 < \frac{m}{i} < a + 1$. چون تعداد این کسرها متناهی است پس عددی مانند $\delta > 0$ موجود است به قسمی که در همسایگی محذوف $N_\delta)a($ هیچ یک از این کسرها نیامده باشد (در حقیقت می‌توان δ را مینیمم فاصلهٔ a تا این کسرها که تعداد آن‌ها متناهی است در نظر گرفت)، فقط در مورد خود نقطهٔ a نمی‌توان کاری انجام داد و اگر a یکی از این کسرها باشد روشن است که نمی‌توان δ یی یافت که در همسایگی نامحذوف $N_\delta(a)$ هیچ یک از این کسرها نیامده باشد.

بنابراین $\delta > 0$ ی یافتیم که در همسایگی محذوف $N_\delta)a($ فقط و فقط کسرهایی مانند $\frac{m}{n}$ وجود دارد که $n \geq N$. بنابراین به ازای هر $x \in$

$\mathbb{R}$ اگر

$$0 < |x-a| < \delta$$

آن گاه $f(x)$ یا برابر صفر است و یا برابر $\frac{1}{n}$ که $n \geq N$. لذا

$$|f(x) - 0| = |f(x)| = f(x) \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \spadesuit$$

در این مثال دیدیم که $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. آیا می‌توان تابعی مانند f مثال زد که مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی آن مثلاً برابر $\mathbb{Q}^c$ باشد؟ به طور کلی می‌توان این سؤال را مطرح کرد که چه مجموعه‌هایی مانند D می‌توانند مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی یک تابع مانند $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ باشند؟ در قضیهٔ بعد پاسخی برای این سؤال نه تنها در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ بلکه در هر فضای متریک دلخواه می‌یابیم.

۱۱.۴.۳ تعریف. فرض کنیم X یک مجموعه ، (Y, d) فضایی متریک و $f : X \to (Y, d)$ یک تابع باشد. برای هر $A \subseteq X$ نوسان[۲۳] f بر A بانماد $\omega(f, A)$ برابر $\operatorname{diam} A$ تعریف می‌شود. ♣

توجه کنید که در حقیقت $\omega(f, -)$ تابعی از مجموعهٔ توانی X یعنی $\mathcal{P}(X)$ متشکل از کلیهٔ زیرمجموعه‌های X به توی $\mathbb{R}^*$ می‌باشد، زیرا ممکن است $\omega(f, A)$ برابر $+\infty$ شود. لذا می‌توان گفت

$$\begin{aligned} \omega(f, -) : \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ \omega(f, A) &= \operatorname{diam} A. \end{aligned}$$

برای هر $A \subseteq X$.

۱۲.۴.۳ لم. برای هر $f : X \to (Y, d)$ نوسان f تابعی صعودی است. به عبارت دیگر برای هر $A \subseteq B$ داریم $\omega(f, A) \leq \omega(f, B)$.

---

[۲۳] oscillation

برهان. با توجه به صعودی بودن تابع سوپریمم، حکم واضح است. ■

۱۳.۴.۳ تعریف. فرض کنیم $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ یک تابع باشد و $A\subseteq X$. برای هر $a\in A'$ و هر $\varepsilon>0$ قرار می‌دهیم

$$\omega(f,A,\varepsilon)=\omega(f,N_\varepsilon)a(\cap A).$$

(توجه کنید که چون $a\in A'$ پس $N_\varepsilon)a(\cap A$ ناتهی است و لذا عبارت فوق موجه است.)

نوسان f در a با نماد $\omega(f,a)$ به صورت

$$\omega(f,a)=\inf_{\varepsilon>0}\omega(f,a,\varepsilon)$$

تعریف می‌شود[۲۴]. ♣

۱۴.۴.۳ قضیه. فرض کنیم $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ یک تابع باشد. در این صورت اگر $\lim_{x\to a}f(x)$ موجود باشد آن گاه $\omega(f,a)=0$.

برهان. در ابتدا توجه می‌کنیم که چون $\lim_{x\to a}f(x)$ موجود است پس f در یک همسایگی محذوف از a مانند $A=N_r)a($ تعریف شده است و چون $a\in A'$ پس بحث در مورد $\omega(f,a)$ موجه است.

فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. چون $\lim_{x\to a}f(x)$ موجود و مثلاً برابر ℓ است، بنابر تعریف حد $\delta>0$ ی موجود است به قسمی که به ازای هر $x\in X$ اگر

$$0<d_1(x,a)<\delta$$

[۲۴]توجه کنید که ممکن است f بر کل X تعریف نشده باشد و در این حالت A می‌تواند دامنهٔ f باشد.

آن گاه

$$d_2(f(x), \ell) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

واضح است که این δ می‌تواند آن قدر کوچک باشد که $N_\delta(a) \subseteq A$ و لذا $N_\delta(a) \cap A = N_\delta(a)$. بنابراین با توجه به $(*)$ برای هر $x, y \in N_\delta(a)$ چون $f(x), f(y) \in f(N_\delta(a) \cap A)$ داریم

$$\begin{aligned} d_2(f(x), f(y)) &\leq d_2(f(x), \ell) + d_2(\ell, f(y)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

لذا ε کران بالایی برای $\{d_2(f(x), f(y)) \mid f(x), f(y) \in f(N_\delta(a) \cap A)\}$ می‌باشد و چون سوپریمم کوچک‌ترین کران بالاست، پس

$$\operatorname{diam} f(N_\delta(a) \cap A) \leq \varepsilon$$

و یا

$$\omega(f, a, \delta) = \omega(f, N_\delta(a) \cap A) \leq \varepsilon.$$

پس برای هر $\varepsilon > 0$ عضوی از مجموعهٔ

$$\{\omega(f, a, \delta) \mid \delta > 0\}$$

یافتیم که کوچک‌تر یا مساوی ε است و لذا با توجه به خاصیت مشخصهٔ اینفیمم داریم

$$\inf\{\omega(f, a, \delta) \mid \delta > 0\} = 0.$$

بنابراین $\omega(f, a) = 0$. ■

عکس قضیهٔ فوق در حالت کلی لزوماً درست نیست. مثال زیر را ببینید.

۱۵.۴.۳ مثال. تابع

$$f : (\circ, \mathsf{1}) \subseteq (\mathbb{R}, |.|) \longrightarrow (\mathbb{R} \setminus \{\circ\}, |.|)$$
$$f(x) = x$$

را در نظر می‌گیریم. با فرض $A = (\circ, \mathsf{1})$، چون $\circ \in A'$ پس می‌توان در مورد $\omega(f, \circ)$ صحبت کرد و در حقیقت داریم $\omega(f, \circ) = \circ$ زیرا

$$\begin{aligned} \omega(f, \circ) &= \inf_{\varepsilon > \circ} \omega(f, \circ, \varepsilon) \\ &= \inf_{\varepsilon > \circ} \omega(f, N_\varepsilon) \circ (\cap(\circ, \mathsf{1})) \\ &= \inf_{\varepsilon > \circ} \operatorname{diam} f(N_\varepsilon) \circ (\cap(\circ, \mathsf{1})) \\ &= \inf_{\varepsilon > \circ} \operatorname{diam}(\circ, \varepsilon) \\ &= \inf_{\varepsilon > \circ} \varepsilon \\ &= \circ. \end{aligned}$$

اما واضح است که $\lim_{x \to \circ} f(x)$ در $\mathbb{R} \setminus \{\circ\}$ موجود نیست. ♠

به هر حال این مشکل ناشی از ضعف مجموعهٔ $\mathbb{R} \setminus \{\circ\}$ است و نه خود تابع f. قضیهٔ زیر را ببینید.

بهترین ریاضیدان، کسی است که بتواند به شباهت بین نظریه‌ها توجه کند...

۱۶.۴.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d_\mathsf{1}) \to (Y, d_\mathsf{2})$ یک تابع باشد. اگر برای نقطه‌ای مانند $a \in X$ داشته باشیم $\omega(f, a) = \circ$ و فضای Y تام باشد، آن گاه $\lim_{x \to a} f(x)$ موجود است.

برهان. همان طور که دیدیم تعریف پیوستگی را می‌توان با استفاده از دنباله‌ها به طور معادل بیان نمود و همان گونه که متذکر شدیم برای حد توابع نیز می‌توان این تعاریف را به گونه‌ای تعدیل کرد که برقرار باشد. مثلاً $\lim_{x \to a} f(x)$ موجود و برابر ℓ است فقط و فقط وقتی که به

ازای هر دنباله مانند $\{x_n\}$ در X که $x_n \to a$ ولی $x_n \neq a$ داشته باشیم $f(x_n) \to \ell$.

حال فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای دلخواه در X باشد که $x_n \to a$ ولی $x_n \neq a$. ابتدا نشان می‌دهیم $\{f(x_n)\}$ در Y کوشی است. فرض کنیم $\varepsilon > \circ$ داده شده باشد. بنابر خاصیت مشخصهٔ اینفیمم چون $\omega(f, a) = \circ$ پس عضوی از مجموعهٔ $\{\omega(f, a, \delta) \mid \delta > \circ\}$ و در نتیجه $\delta > \circ$ ی موجود است به قسمی که

$$\omega(f, a, \delta) < \omega(f, a) + \varepsilon = \circ + \varepsilon = \varepsilon.$$

و در نتیجه

$$\operatorname{diam} f(N_\delta)a() = \omega(f, N_\delta)a() = \omega(f, a, \delta) < \varepsilon.$$

بنابراین به ازای هر $f(x), f(y) \in f(N_\delta)a()$ داریم

$$d_\text{۲}(f(x), f(y)) < \varepsilon \qquad (*)$$

حال چون $x_n \to a$ پس برای این $\delta > \circ$ عددی مانند $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (مجدداً تأکید می‌کنیم، در حقیقت K_δ که چون δ تابع ε است می‌نویسیم K_ε) موجود است به قسمی که به ازای هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم

$$d_\text{۱}(x_n, a) < \delta,$$

و به همین ترتیب برای هر $m \geq K_\varepsilon$ داریم

$$d_\text{۱}(x_m, a) < \delta.$$

اما $x_n \neq a$ و $x_m \neq a$ لذا

$$\circ < d_\text{۱}(x_n, a) < \delta,$$

$$\circ < d_\text{۱}(x_m, a) < \delta.$$

پس $x_n, x_m \in N_\delta)a($ و لذا $f(x_n), f(x_m) \in f(N_\delta)a()$. در نتیجه بنابر (*) داریم

$$d_۲(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon.$$

لذا $\{f(x_n)\}$ دنباله‌ای کوشی در Y می‌باشد و چون Y تام است پس همگرا به نقطه‌ای مانند ℓ از Y است. ادعا می‌کنیم $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

مجدداً از روش دنباله‌ای استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $\{y_n\}$ دنباله‌ای دلخواه در X باشد که $y_n \to a$ ولی $y_n \neq a$. برای δ ی فوق‌الذکر عددی مانند $K'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ موجود است به قسمی که به ازای هر $n \geq K'_\varepsilon$ داریم

$$d_۱(y_n, a) < \delta$$

و چون $y_n \neq a$ پس $y_n \in N_\delta)a($. بنابراین با توجه به (*) برای هر $n \geq \max\{K_\varepsilon, K'_\varepsilon\}$ داریم

$$d_۲(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon.$$

حال چون $f(x_n) \to \ell$ پس $K''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ی موجود است به قسمی که به ازای هر $n \geq K''_\varepsilon$ داریم

$$d_۲(f(x_n), \ell) < \varepsilon.$$

قرار می‌دهیم $K = \max\{K_\varepsilon, K'_\varepsilon, K''_\varepsilon\}$. در این صورت به ازای هر $n \geq K$ داریم

$$\begin{aligned} d_۲(f(y_n), \ell) &\leq d_۲(f(y_n), f(x_n)) + d_۲(f(x_n), \ell) \\ &< \varepsilon + \varepsilon = ۲\varepsilon. \end{aligned}$$

و این یعنی $f(y_n) \to \ell$. پس $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. ■

مثال قبلی نشان می‌دهد که شرط تام بودن Y در قضیهٔ فوق اساسی است.

۱۷.۴.۳ قضیه. فرض کنیم $f:(X,d_۱)\to(Y,d_۲)$ یک تابع باشد. در این صورت تابع

$$\begin{aligned}\Omega:(X,d_۱) &\longrightarrow \mathbb{R}^*\\ \Omega(a) &= \omega(f,a)\end{aligned}$$

نیم‌پیوسته از بالا می‌باشد.

برهان. در نقاطی که $\Omega(a)$ برابر $+\infty$ باشد این تابع نیم‌پیوسته از بالاست، لذا می‌توان از قضیهٔ ۲.۳.۳ استفاده کرد. فرض کنیم $a\in X$ نقطهٔ دلخواهی باشد که $\Omega(a)\in\mathbb{R}$. نیز فرض کنیم $\varepsilon>۰$ داده شده باشد. بنابر خاصیت مشخصهٔ اینفیمم $\delta'>۰$ ی هست که

$$\omega(f,a,\delta')<\omega(f,a)+\frac{\varepsilon}{۲}.$$

بنابراین به ازای هر $x\in X$ اگر

$$۰<d_۱(x,a)<\delta'$$

آن گاه چون $x,y\in N_{\delta'}(a)$ پس $f(x),f(y)\in f(N_{\delta'}(a))$ و لذا

$$d_۲(f(x),f(y))<\omega(f,a)+\frac{\varepsilon}{۲}=\Omega(a)+\frac{\varepsilon}{۲} \qquad (*)$$

حال قرار می‌دهیم $\delta=\frac{\delta'}{۲}$. در این صورت به ازای هر $z\in X$ اگر

$$d_۱(z,a)<\delta$$

آن گاه

$$\Omega(z)<\Omega(a)+\varepsilon.$$

زیرا اگر $z = a$ آن گاه نامساوی فوق واضح است و اگر $z \neq a$، آن گاه به ازای هر $f(x)$ و $f(y)$ در $f(N_\delta)z()$ چون $x, y \in N_\delta)z($ پس

$$d_1(x, z) < \delta,$$

$$d_1(y, z) < \delta,$$

و لذا

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &\leq d_1(x, z) + d_1(z, y) \\ &< \delta + \delta = 2\delta = \delta'. \end{aligned}$$

در نتیجه با توجه به $(*)$ داریم

$$d_2(f(x), f(y)) < \Omega(a) + \frac{\varepsilon}{2}$$

پس $\Omega(a) + \frac{\varepsilon}{2}$ کران بالایی برای مجموعهٔ

$$\{d_2(f(x), f(y)) \mid f(x), f(y) \in N_\delta)z()\}$$

می‌باشد و چون سوپریمم کوچک‌ترین کران بالاست پس

$$\operatorname{diam} f(N_\delta)z() \leq \Omega(a) + \frac{\varepsilon}{2} < \Omega(a) + \varepsilon.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \Omega(z) = \omega(f, z) &= \inf_{r>0} \omega(f, z, r) \\ &\leq \omega(f, z, \delta) = \omega(f, N_\delta)z() \\ &= \operatorname{diam} f(N_\delta)z() < \Omega(a) + \varepsilon. \end{aligned}$$

بنابراین Ω در a نیم‌پیوسته از بالا است. ■

۱۸.۴.۳ نتیجه. فرض کنیم $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ یک تابع باشد. در این صورت مجموعهٔ $\{x\in X \mid \omega(f,x)=0\}$ مجموعه‌ای G_δ در X است.

برهان. بنابر نتیجهٔ ۱۰.۳.۳ چون Ω نیم‌پیوسته از بالا است پس برای هر $t\in\mathbb{R}^*$ از جمله $t=0$ مجموعهٔ

$$\{x\in X \mid \Omega(x)\leq t\}$$

مجموعه‌ای G_δ در X است. اما

$$\begin{aligned}\{x\in X \mid \Omega(x)\leq 0\} &= \{x\in X \mid 0\leq\Omega(x)\leq 0\}\\ &= \{x\in X \mid \Omega(x)=0\}\\ &= \{x\in X \mid \omega(f,x)=0\}. \blacksquare\end{aligned}$$

حال به سادگی می‌توان قضیهٔ زیر را اثبات کرد.

۱۹.۴.۳ قضیه. فرض کنیم $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ یک تابع و Y فضایی تام باشد. در این صورت مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی f مجموعه‌ای F_σ در X است.

برهان. فرض کنیم D مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی f باشد. بنابر قضیه‌های ۱۴.۴.۳ و ۱۶.۴.۳ داریم

$$D=\{x\in X \mid \omega(f,x)\neq 0\}.$$

چون بنابر قضیهٔ فوق متمم این مجموعه G_δ است پس D مجموعه‌ای F_σ می‌باشد. ■

لذا توانستیم به سؤالی که مطرح کردیم پاسخ دهیم. بنابراین هیچ تابع f ی وجود ندارد که مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی آن $\mathbb{Q}^c$ باشد چون $\mathbb{Q}^c$ مجموعه‌ای F_σ نیست.

سؤال دیگری که پیش می‌آید این است که اگر D یک مجموعهٔ F_σ دلخواه باشد آیا تابعی مانند $f : (X, d_۱) \to (Y, d_۲)$ وجود دارد که مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی آن دقیقاً برابر D باشد؟ فضای گسسته نشان می‌دهد که لزوماً پاسخ مثبت نیست، چون هر تابعی که بر یک فضای گسسته تعریف شده باشد پیوسته است و لذا مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی آن همواره ϕ است. در صورتی که در این فضا هر مجموعه‌ای بسته و لذا F_σ است. اما در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ وضعیت فرق می‌کند.

۲۰.۴.۳ قضیه. فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای F_σ از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت تابعی مانند $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ موجود است که مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی آن دقیقاً برابر D می‌باشد.

برهان. چون D مجموعه‌ای F_σ است، پس دنباله‌ای از مجموعه‌های بسته $\mathbb{R}$ مانند $\{F_n\}$ موجود است به قسمی که

$$D = \cup_{n=۱}^{\infty} F_n.$$

و می‌توان تصور کرد که ریاضیدان نهایی کسی است که بتواند شباهت بین شباهت‌ها را مشاهده کند.
Stefan Banach (1892-1945)

قرار می‌دهیم

$$E_۰ = \phi,$$

$$E_n = \cup_{k=۱}^{n} F_k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

در این صورت $D = \cup_{n=۱}^{\infty} E_n$ و دنبالهٔ $\{E_n\}$ صعودی است. فرض کنیم

$$A_n = E_n \setminus E_{n-۱}.$$

بنابراین $\{A_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های دو به دو مجزاست که $\cup_{n=۱}^{\infty} A_n = D$.

حال فرض کنیم

$$B_n = (A_n \setminus A_n^\circ) \cup (A_n^\circ \cap \mathbb{Q}).$$

چون $B_n \subseteq A_n$ و دنبالهٔ $\{A_n\}$ دو به دو مجزاست پس $\{B_n\}$ نیز چنین است.

تابع $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ را به صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{ی موجود باشد که } x \in B_n \; n \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. روشن است که چون B_n ها دو به دو مجزا هستند، f خوشتعریف است.

ادعا می‌کنیم به ازای هر $a \in D^c$،

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

فرض کنیم $a \in D^c$ دلخواه و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. در این صورت بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی $N \in \mathbb{N}$ ی هست که $\frac{1}{N} < \varepsilon$. اما $a \notin D = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ و لذا $a \notin E_N$ و چون E_N بسته است پس $a \notin \overline{E_N}$ و لذا $\delta > 0$ ی موجود است به قسمی که

$$N_\delta(a) \cap E_N = \phi.$$

اما $\{E_N\}$ صعودی است و لذا به ازای هر i که $1 \leq i \leq N$ داریم

$$N_\delta(a) \cap E_i = \phi.$$

پس برای $x \in N_\delta(a)$، اگر n ی موجود باشد که $x \in B_n$ آن گاه $x \in A_n$ و لذا $x \in E_n$ و در نتیجه باید $n > N$. بنابراین $f(x)$ یا برابر صفر است و یا برابر $\frac{1}{n}$ که $n > N$. لذا می‌توان گفت به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ اگر

$$|x - a| < \delta$$

آن گاه

$$|f(x) - ۰| = |f(x)| = f(x) \leq \frac{۱}{N+۱} < \varepsilon.$$

لذا طبق تعریف حد در این حالت $\lim_{x \to a} f(x) = ۰ = f(a)$. یعنی در این حالت f در a پیوسته است.

اما اگر $a \in D$، ادعا می‌کنیم f در a پیوسته نیست. فرض کنیم $a \in D$، لذا $N \in \mathbb{N}$ ی هست که $a \in A_N$. بنابراین $a \notin E_{N-۱}$ و چون $E_{N-۱}$ بسته است پس $a \notin \overline{E_{N-۱}}$ و لذا $r_۰ > ۰$ ی موجود است که

$$N_{r_۰}(a) \cap E_{N-۱} = \phi.$$

برای آن که نشان دهیم f در a پیوسته نیست قرار می‌دهیم $\varepsilon_۰ = \frac{۱}{N(N+۱)}$. فرض کنیم $\delta > ۰$ داده شده باشد. حال دو حالت پیش می‌آید:

حالت اول. $a \notin A_N^\circ$. بنابراین به ازای هر $r > ۰$ و از جمله برای $r = \delta > ۰$ داریم

$$N_\delta(a) \not\subseteq A_N$$

و لذا

$$N_\delta(a) \cap A_N^c \neq \phi.$$

حال اگر عددی اصم مانند x در $N_\delta(a) \cap A_N^c$ موجود باشد، آن گاه

$$x \in N_\delta(a) \cap A_N^c \cap (A_N^\circ \cap \mathbb{Q})^c \subseteq N_\delta(a) \cap B_N^c$$

و در نتیجه x ی در $N_\delta(a)$ موجود است که $f(x) \neq \frac{۱}{N}$. پس

$$۰ \leq f(x) \leq \frac{۱}{N+۱} \text{ یا } \frac{۱}{N-۱} \leq f(x) \qquad (*)$$

و اگر چنین عدد اصمی موجود نباشد، آن گاه

$$N_\delta(a) \cap A_N^c \subseteq \mathbb{Q}.$$

پس مجموعهٔ باز $N_\delta(a) \cap A_N^c$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Q}$ است و لذا $\mathbb{Q}$ شامل یک بازه می‌باشد که تناقض است.

همچنین $a \notin A_N^\circ$ نتیجه می‌دهد که $a \in B_N$ و لذا $f(a) = \frac{1}{N}$.
بنابراین دو نقطهٔ a و x در $N_\delta(a)$ یافتیم که بنابر (*)،

$$|f(a) - f(x)| = |\frac{1}{N} - f(x)| \geq \frac{1}{N(N+1)} = \varepsilon_\circ.$$

لذا در این حالت نقیض تعریف $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ اثبات شد.

حالت دوم. $a \in A_N^\circ$. بنابراین $r_\circ > \circ$ ی هست که

$$N_{r_\circ}(a) \subseteq A_N$$

و لذا

$$N_{r_\circ}(a) = (N_{r_\circ}(a))^\circ \subseteq A_N^\circ$$

و در نتیجه با فرض $r_1 = \min\{r_\circ, \delta\} > \circ$ داریم

$$N_{r_1}(a) \subseteq A_N^\circ.$$

حال $x_1 \in \mathbb{Q}$ و $x_2 \in \mathbb{Q}^c$ را در $N_{r_1}(a)$ انتخاب می‌کنیم (چون هر همسایگی در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ شامل بی‌نهایت عدد گویا و بی‌نهایت عدد اصم است، این انتخاب موجه می‌باشد). بنابراین

$$x_1 \in B_N, \qquad x_2 \notin B_N$$

و چون $N_{r_1}(a) \subseteq N_\delta(a)$، پس x_1 و x_2 یی در $N_\delta(a)$ یافتیم که

$$f(x_1) = \frac{1}{N},$$

$$\circ \leq f(x_2) \leq \frac{1}{N-1} \text{ یا } \frac{1}{N+1} \leq f(x_2).$$

لذا

$$|f(x_۱) - f(x_۲)| = |\frac{۱}{N} - f(x_۲)| \geq \frac{۱}{N(N+۱)} = \varepsilon_۰.$$

بنابراین در این حالت نیز نقیض تعریف حد اثبات شد.

پس f در a پیوسته است فقط و فقط وقتی که $a \notin D$. لذا مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی f دقیقاً برابر D است. ■

نکتهٔ جالب در مورد توابع تعریف شده در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ این است که در حالتی خاص، توابع پیوسته خود به خود پیوستهٔ یکنواخت می‌باشند. اما قبل از آن قضیهٔ دیگری را اثبات می‌کنیم.

۲۱.۴.۳ قضیه. فرض کنیم $f : ([a,b], |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت $f([a,b])$ زیرمجموعهٔ کرانداری از $\mathbb{R}$ خواهد بود.

برهان. به برهان خلف فرض کنیم $f([a,b])$ کراندار نباشد. پس به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ باید x_n ی در $[a,b]$ موجود باشد به قسمی که

$$|f(x_n)| \geq n \qquad (*)$$

حال چون $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $[a,b]$ است و $[a,b]$ مجموعه‌ای کراندار می‌باشد، پس $\{x_n\}$ کراندار است و لذا بنابر قضیهٔ ۱۵.۴.۲ زیردنباله‌ای همگرا مانند $\{x_{n_k}\}$ دارد. فرض کنیم $x_{n_k} \to x$، چون $\{x_{n_k}\}$ دنباله‌ای در $[a,b]$ است و $[a,b]$ بسته می‌باشد پس $x \in \overline{[a,b]} = [a,b]$. حال چون f در x پیوسته است و $x_{n_k} \to x$ لذا $f(x_{n_k}) \to f(x)$. بنابراین $\{f(x_{n_k})\}$ همگرا و لذا کراندار می‌باشد که با $(*)$ در تناقض است. ■

نکتهٔ مهم در قضیهٔ فوق این است که نه تنها f کراندار است بلکه مقادیر ماکزیمم و مینیمم خود را اختیار می‌کند.

۲۲.۴.۳ قضیه. فرض کنیم $f:([a,b],|.|)\to(\mathbb{R},|.|)$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت x^* و x_* ی در $[a,b]$ موجودند به قسمی که

$$f(x^*)=\max_{a\le x\le b} f(x),$$
$$f(x_*)=\min_{a\le x\le b} f(x).$$

برهان. می‌دانیم

$$M=\sup_{a\le x\le b} f(x),$$
$$m=\inf_{a\le x\le b} f(x)$$

بنابر قضیهٔ فوق موجودند. حال فرض کنیم مثلاً M اختیار نشود. پس هیچ x ی در $[a,b]$ نیست که $f(x)=M$ و لذا به ازای هر $x\in[a,b]$ داریم

$$f(x)<M \qquad (*)$$

حال تابع

$$\begin{aligned} g:([a,b],|.|) &\longrightarrow (\mathbb{R},|.|)\\ g(x) &= \frac{۱}{M-f(x)} \end{aligned}$$

را در نظر می‌گیریم. بنابر $(*)$ تابع g خوشتعریف است و چون f پیوسته است و مخرج g هیچ گاه صفر نمی‌شود پس g نیز پیوسته است و لذا با توجه به قضیهٔ فوق g بر $[a,b]$ کراندار است. لذا عددی مانند $K>۰$ موجود است به قسمی که به ازای هر $x\in[a,b]$ داریم

$$g(x)=|g(x)|\le K$$

و یا

$$M-f(x)\ge\frac{۱}{K}>۰.$$

و لذا

$$f(x) \leq M - \frac{۱}{K}, \qquad x \in [a,b]$$

پس $M - \frac{۱}{K}$ کران بالایی برای مقادیر f است و چون M کوچک‌ترین کران بالاست باید داشته باشیم $M \leq M - \frac{۱}{K}$ که تناقض است.

به همین ترتیب حکم دیگر در مورد مینیمم f اثبات می‌شود. ■

حال به اثبات پیوسته یکنواخت بودن توابع پیوستهٔ تعریف شده روی $[a,b]$ می‌پردازیم.

۲۳.۴.۳ قضیه. هر تابع پیوسته مانند $f : ([a,b], |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ پیوستهٔ یکنواخت است.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. برای هر $y \in [a,b]$، چون f در y پیوسته است، عددی مانند $\delta'_{\varepsilon,y} > ۰$ موجود است به قسمی که به ازای هر x اگر

$$|x - y| < \delta'_{\varepsilon,y}$$

آن گاه

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

قرار می‌دهیم

$$\delta_{\varepsilon,y} = \sup\{\delta'_{\varepsilon,y} \mid \text{گزاره فوق‌الذکر را در } y \text{ برآورده می‌سازد } \delta'_{\varepsilon,y}\} > ۰.$$

چون این مجموعه ناتهی است می‌توان در مورد سوپریمم آن صحبت کرد، فقط ممکن است این سوپریمم برای y یی برابر $+\infty$ شود که در این حالت چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. اما اگر $\delta_{\varepsilon,y} < +\infty$ برای هر $y \in [a,b]$، آن گاه ادعا می‌کنیم که $\delta_{\varepsilon,y}$ تابعی پیوسته از y خواهد

بود. به عبارت دیگر اگر تعریف کنیم

$$\varphi : ([a,b], |.|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$$
$$\varphi(y) = \delta_{\varepsilon,y}$$

نمادهای جبری هنگامی استفاده می‌شوند که دقیقاً نمی‌دانیم در مورد چه چیزی صحبت می‌کنیم!

آن گاه φ تابعی پیوسته است. برای اثبات این ادعا فرض کنیم $y_\circ$ نقطهٔ ثابتی در $[a,b]$ باشد و $\eta > \circ$ داده شده باشد. باید عددی مانند $\theta > \circ$ بیابیم به قسمی که به ازای هر $y \in [a,b]$ اگر

$$|y - y_\circ| < \theta$$

آن گاه

$$|\varphi(y) - \varphi(y_\circ)| < \eta.$$

قرار می‌دهیم $\theta = \frac{\eta}{۲} > \circ$. حال به ازای هر $y \in [a,b]$ اگر $|y - y_\circ| < \theta$ آن گاه

$$y_\circ - \theta < y < y_\circ + \theta$$

و لذا

$$\varphi(y_\circ) - ۲\theta < \varphi(y) < \varphi(y_\circ) + ۲\theta \qquad (*)$$

چون به برهان خلف اگر مثلاً $\varphi(y_\circ) + ۲\theta < \varphi(y)$ آن گاه

$\varphi(y_\circ) + ۲\theta \in \{\delta'_{\varepsilon,y} \mid$ گزاره فوق را در y برآورده می‌سازد $\delta'_{\varepsilon,y}\} > \circ.$

و لذا باید $\varphi(y_\circ) + ۲\theta \le \varphi(y_\circ)$ که تناقض است.

بنابراین $(*)$ برقرار است، یعنی

$$\varphi(y_\circ) < \varphi(y) < \varphi(y_\circ) + \eta$$

و یا

$$|\varphi(y) - \varphi(y_\circ)| < \eta.$$

و این یعنی φ در $y_\circ$ پیوسته است. حال چون φ تابعی پیوسته بر $[a, b]$ است بنابر قضیهٔ فوق y_* ی در $[a, b]$ موجود است به قسمی که

$$\varphi(y_*) = \min_{a \leq y \leq b} \varphi(y),$$

و این یعنی $\delta_{\varepsilon, y_*}$ عددی است که شرط پیوستگی را در هر y برآورده می‌سازد. چون y_* عدد ثابتی است قرار می‌دهیم $\delta_\varepsilon = \delta_{\varepsilon, y_*}$ و لذا δ_ε فقط وابسته به ε است. پس برای $\varepsilon > \circ$ داده شده عدد $\delta_\varepsilon > \circ$ را یافتیم به قسمی که به ازای هر $x, y \in [a, b]$ اگر

$$|x - y| < \delta_\varepsilon$$

آن گاه

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

و لذا f بر $[a, b]$ پیوستهٔ یکنواخت است. ■

این قضایا برهان‌های ساده‌تری دارند ولی در این فصل با این ابزار اندک این برهان یک شاهکار است. بعداً به روشی دیگر این قضیه‌ها را اثبات خواهیم کرد. ممکن است سؤال شود که اگر برهان ساده‌تری وجود دارد، چه نیازی به یادگیری این برهان است. گاهی اوقات در یک برهان طولانی، که برخی آن را زشت می‌پندارند، نکاتی ارائه می‌شوند که می‌توانند ترفندهای زیبایی را به ما آموزش دهند. بدین دلیل شاید ارائه این گونه برهان‌ها، برای یک معلم وظیفه‌ای باشد در جهت تکمیل آموختن ترفندها، گرچه یک متعلم در باز پس دادن آموخته‌های خود این وظیفه را در خود نمی‌بیند که برهان‌های طولانی را به عنوان راه حلی در پاسخ مسائل فراگیرد. به هر حال

شیوه‌های مختلف برای اثبات احکام، هر کدام در جایی اهمیت خود را نشان می‌دهند و شاید نتوان گفت استدلال زیبا، برهانی است که به کوتاه‌ترین صورت ممکن بیان شده باشد. البته اگر در یک مسابقهٔ علمی برای مقایسه کردن راه حل‌های کشف شده در مسأله‌ای خاص شرکت کرده باشیم، مسلماً زیباترین پاسخ، همان راه حل کوتاهی است که مانند گوهری کوچک در میان سنگ‌های عظیم بی‌مقدار می‌درخشد، ولی در امر آموزش، مسأله کاملاً فرق می‌کند.

تعبیر شهودی ما از پیوستگی یک تابع در فضای اقلیدسی این است که نمودار آن بریدگی ندارد. در زیر قصد داریم تعریف ریاضی دقیقی برای این تعبیر شهودی ارائه دهیم و ببینیم که آیا عدم وجود بریدگی در نمودار یک تابع شرطی لازم و کافی برای پیوستگی است یا نه. بهتر است ابتدا نمودار یک تابع تعریف شود.

۲۴.۴.۳ تعریف. فرض کنیم $f : X \to Y$ یک تابع باشد. نمودار[۲۵] f با نماد $G(f)$ برابر

$$\{(x, y) \mid y = f(x)\} \subseteq X \times Y$$

تعریف می‌گردد. ♣

توجه کنید که $G(f) \subseteq X \times Y$ و اگر X و Y دو فضای متریک باشند می‌توان $X \times Y$ را به یک فضای متریک تبدیل کرد و لذا بحث در مورد $G(f)$ به عنوان زیرمجموعه‌ای از فضای متریک $X \times Y$ جالب است. در قضیهٔ بعد d را یک متر حاصلضربی دلخواه روی $X \times Y$ در نظر می‌گیریم.

۲۵.۴.۳ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d_۱) \to (Y, d_۲)$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت $G(f)$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از $(X \times Y, d)$ است.

---

[۲۵] graph

برهان. فرض کنیم $z \in \overline{G(f)}$. بنابر قضیهٔ ۱۱.۲.۲ دنباله‌ای مانند $\{z_n\}$ در $G(f)$ موجود است به قسمی که $z_n \to z$. اما $z_n \in G(f)$ نتیجه می‌دهد $z_n = (x_n, y_n)$ که $x_n \in X$ و به علاوه $y_n = f(x_n) \in Y$. همچنین چون $z \in X \times Y$ پس $z = (x, y)$ که $x \in X$ و $y \in Y$. حال بنابر حاصلضربی بودن d داریم

$$
\begin{aligned}
x_n &\to x, \\
f(x_n) &= y_n \to y.
\end{aligned}
$$

اما f پیوسته است و لذا $f(x_n) \to f(x)$. و چون حد هر دنباله یکتاست پس $y = f(x)$. لذا $z = (x, y) = (x, f(x)) \in G(f)$. پس $G(f)$ بسته است. ■

اما عکس قضیهٔ فوق لزوماً درست نیست. مثال زیر را ببینید.

۲۶.۴.۳ مثال. تابع

$$
\begin{aligned}
f &: ([\circ, \pi], |.|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|) \\
f(x) &= \begin{cases} \tan x & x \neq \frac{\pi}{۲} \\ \circ & x = \frac{\pi}{۲} \end{cases}
\end{aligned}
$$

پیوسته نیست ولی نمودار آن بسته است. ♠

ولی بسته بودن نمودار و بریدگی نداشتن آن خیلی با هم فرق دارد. اگر نمودار f بریدگی داشته باشد نقطه‌ای مانند x وجود دارد که f در x جهش می‌کند، یعنی حد چپ و راست آن با هم برابر نیست، یا نمودار f در x حفره دارد، یعنی حد چپ و راست برابر است ولی با مقدار $f(x)$ برابر نیست. به هر حال وجود بریدگی در نمودار بدین معنی است که f مقدار یا مقادیر خاصی را در بین مقادیر خود نمی‌پذیرد. از این رو به نظر می‌رسد عدم بریدگی در نمودار به

طور شهودی باید بدین معنی باشد که f کلیهٔ مقادیر میانی خود را در نقاط میانی می‌پذیرد.

۲۷.۴.۳ تعریف. فرض کنیم $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ یک تابع باشد. گوییم f در خاصیت مقدار میانی[۲۶] صدق می‌کند هرگاه به ازای هر دو نقطهٔ a و b در دامنهٔ f و هر مقدار میانی λ بین $f(a)$ و $f(b)$ نقطه‌ای میانی مانند c بین a و b موجود باشد به قسمی که $\lambda = f(c)$. ♣

قضیهٔ بعد به قضیهٔ مقدار میانی برای توابع پیوسته معروف است.

۲۸.۴.۳ قضیه. هر تابع پیوسته مانند $f : ([a, b], |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کند.

برهان. فرض کنیم $\alpha, \beta \in [a, b]$ و نیز $f(\alpha) < \lambda < f(\beta)$. واضح است که $\alpha \neq \beta$، مثلاً فرض کنیم $\alpha < \beta$. تابع

$$\begin{aligned} g : ([\alpha, \beta], |.|) &\longrightarrow (\mathbb{R}, |.|) \\ g(x) &= f(x) - \lambda \end{aligned}$$

را در نظر می‌گیریم. در این صورت g تابعی پیوسته بر $[\alpha, \beta]$ است و به علاوه

$$g(\alpha) = f(\alpha) - \lambda < 0,$$

$$g(\beta) = f(\beta) - \lambda > 0.$$

فرض کنیم

$$c = \sup\{x \in [\alpha, \beta] \mid g(x) < 0\}.$$

چون g بر $[\alpha, \beta]$ کراندار است و $g(\alpha) < 0$، پس مجموعهٔ فوق از بالا کراندار و ناتهی است و لذا این فرض موجه است.

---

[۲۶] mean value property

حال اگر $c < x \leq \beta$ آن گاه x نمی‌تواند متعلق به مجموعهٔ فوق‌الذکر باشد و لذا $g(x) \not< \circ$. بنابراین برای هر $c < x \leq \beta$ داریم $g(x) \geq \circ$ و لذا

$$g(c) = \lim_{x \to c^+} g(x) \geq \circ.$$

همچنین با توجه به خاصیت مشخصهٔ سوپریمم برای هر $\varepsilon > \circ$ از جمله $\varepsilon = \frac{۱}{n}$ نقطه‌ای مانند x_n هست که $c - \frac{۱}{n} < x_n$ و به علاوه $g(x_n) < \circ$. در نتیجه

$$c - \frac{۱}{n} < x_n \leq c,$$

$$g(x_n) < \circ.$$

و لذا $x_n \to c$ و نیز $x_n \leq c$. پس

$$g(x_n) \to \lim_{x \to c^-} g(x) = g(c).$$

اما $g(x_n) < \circ$ ایجاب می‌کند که $g(c) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) \leq \circ$.
بنابراین $g(c) = \circ$ و لذا $f(c) = \lambda$. ■

۲۹.۴.۳ نتیجه. فرض کنیم $f : ([a,b], |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت

$$f([a,b]) = [m, M]$$

که

$$m = \min_{a \leq x \leq b} f(x),$$

$$M = \max_{a \leq x \leq b} f(x).$$

برهان. این حکم نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ ۲۲.۴.۳ و قضیهٔ فوق می‌باشد. ■

حکم فوق را به این صورت بیان می‌کنند که " هر تابع پیوسته هر بازهٔ بسته را به بازه‌ای بسته می‌نگارد ".

۳۰.۴.۳ نتیجه. فرض کنیم $f : ([a,b],|.|) \to (\mathbb{R},|.|)$ تابعی پیوسته باشد و $f(a)f(b) < ۰$. در این صورت f ریشه‌ای در $[a,b]$ دارد.

برهان. شرط قضیه ایجاب می‌کند که صفر نقطه‌ای میانی برای f است و لذا f باید مقدار صفر را بین a و b بپذیرد. ■

۳۱.۴.۳ قضیه. هر تابع پیوسته مانند $f : ([a,b],|.|) \to ([a,b],|.|)$ حداقل یک نقطهٔ ثابت دارد.

برهان. تابع $g(x) = f(x) - x$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$g(a) = f(a) - a \geq ۰,$$

$$g(b) = f(b) - b \leq ۰.$$

لذا صفر نقطه‌ای میانی برای g است. پس عددی مانند c بین a و b هست که $g(c) = ۰$ و یا $f(c) = c$. ■

فرض کنیم می‌خواهیم نمودار تابعی یک به یک را در صفحه رسم کنیم. اگر با گذاشتن قلم روی کاغذ تصمیم بگیریم که به طرف بالا حرکت کنیم با توجه به یک به یک بودن تابع آیا می‌توانیم زمانی به پایین برگردیم؟ به عبارت دیگر آیا می‌توان نتیجه گرفت که هر تابع یک به یک اکیداً یکنواست؟ مثال زیر را ببینید.

۳۲.۴.۳ مثال. تابع

$$\begin{aligned} f &: [۰,۲] \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= \begin{cases} x & ۰ \leq x \leq ۱ \\ ۱ - x & ۱ < x \leq ۲ \end{cases} \end{aligned}$$

تابعی یک به یک است ولی یکنوا نمی‌باشد. ♠

آنچه حدس فوق را در ذهن تقویت می‌کرد این بود که فکر می‌کردیم نباید قلم را از روی کاغذ برداریم. به عبارت دیگر در ذهن خود تابعی یک به یک را تصور می‌کردیم که در خاصیت مقدار میانی نیز صدق می‌کند.

۳۳.۴.۳ قضیه. فرض کنیم $f:([a,b],|.|)\to(\mathbb{R},|.|)$ تابعی یک به یک باشد که در خاصیت مقدار میانی صدق می کند. در این صورت f اکیداً یکنواست.

برهان. چون f یک به یک است پس $f(a)\neq f(b)$ و مثلاً می‌توان فرض کرد که $f(a)<f(b)$. پس باید اثبات کنیم که f اکیداً صعودی است. به برهان خلف فرض کنیم f بر $[a,b]$ اکیداً صعودی نباشد. لذا x و y یی موجودند که $a\leq x<y\leq b$ ولی $f(y)\leq f(x)$. چون یک به یک است پس $f(y)<f(x)$. حال دو حالت وجود دارد:

حالت اول. $f(b)<f(x)$. عددی مانند λ در $(f(b),f(x))$ انتخاب می‌کنیم. بنابر خاصیت مقدار میانی باید c_1 ی در (x,b) موجود باشد که

$$f(c_1)=\lambda.$$

همچنین این λ در $(f(a),f(x))$ نیز می‌باشد و لذا c_2 یی در (a,x) هست که

$$f(c_2)=\lambda.$$

اما یک به یک بودن f نتیجه می‌دهد که $c_1=c_2$، ولی $x<c_1<b$ و $a<c_2<x$ که تناقض است.

حالت دوم. $f(x)<f(b)$. پس $f(y)<f(b)$. حال عددی مانند λ در $(f(y),f(b))$ انتخاب می‌کنیم. c_1 ی هست که $y<c_1<b$ و

$$f(c_1)=\lambda.$$

و چون λ در $(f(x), f(y))$ است پس c_2 یی هست که $x < c_2 < y$ و

$$f(c_2) = y,$$

که باز هم $c_1 = c_2$ را نتیجه می‌دهد که یک تناقض است. ■

گرچه اعمال جبری و رابطهٔ کوچک‌تری روی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ نتایج فراوان دیگری را نیز در پی دارد، اما در همین جا این بحث را به پایان می‌رسانیم تا بتوانیم ابزارهای قوی‌تری را در فصل‌های بعد به دست آوریم. توجه داریم که هدف اصلی ما در این کتاب فضاهای متریک به طور کلی و نه فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ می‌باشد.

۵.۳ مثال‌ها

Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968)

بتدریج که اطلاعات ما در مورد مفاهیم فضاهای متریک بیش‌تر می‌گردد می‌توانیم با مثال‌های سطح بالاتری از این فضاها آشنا شویم.

در بخش مثال‌های فصل اول تنها قادر بودیم روی مجموعه‌هایی از اشیا که در آن مرحله برای ماآشنا بود، متر تعریف کنیم و در فصل قبل دیدیم که موجودات ریاضی جدیدی که با آن‌ها سر و کار پیدا کردیم، یعنی دنباله‌ها، چگونه باعث شدند مجموعهٔ زمینهٔ ما برای تعریف یک فضای متریک جدید، مانند ℓ_p شکل بگیرد. در این جا نیز فضای توابع پیوسته زمینهٔ مناسبی برای آشنایی با مثال‌های جدید خواهد بود.

در فصل دنباله‌ها به اندک اطلاعاتی در مورد سری‌ها احتیاج داشتیم. در این جا نیز باید مقداری در مورد انتگرال توابع تعریف شده روی $\mathbb{R}$ بدانیم که این مختصر را دانسته فرض می‌کنیم.

فراموش نکنید که در این فصل نیز باید جزئیات احکام ارائه شده را خودتان بررسی کنید.

۱.۵.۳ مثال. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. مجموعهٔ همهٔ توابع پیوستهٔ مختلط مقدار کراندار روی X را با $\mathcal{BC}(X)$ نمایش می‌دهیم. این مجموعه همراه با اعمال جمع و ضرب اسکالر نقطه‌ای یعنی

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad f, g \in \mathcal{BC}(X)$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \qquad \alpha \in \mathbb{C}, f \in \mathcal{BC}(X)$$

به یک فضای برداری تبدیل می‌شود و می‌توان یک نرم روی آن با نماد $\|.\|_\infty$ به صورت

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}, \qquad f \in \mathcal{BC}(X)$$

تعریف کرد. توجه داریم که کراندار بودن f وجود سوپریمم را تضمین می‌کند.

در حالت خاص $X = [a, b]$ با متر اقلیدسی، نیازی به شرط اضافی کراندار بودن نیست و همان طور که در قضیهٔ ۲۱.۴.۳ دیدیم چون $|f|$ از $[a, b]$ به $\mathbb{R}$ پیوسته است، f خود به خود کراندار خواهد شد. لذا در این حالت فضای حاصل را با $\mathcal{C}([a, b])$ نمایش می‌دهیم. این فضای متریک یک فضای باناخ می‌باشد. ♠

حال که $\mathcal{BC}(X)$ یک فضای متریک است می‌توانیم در مورد توابع تعریف شده روی این فضای متریک صحبت کنیم.

۲.۵.۳ مثال. فرض کنیم $x_\circ$ نقطهٔ ثابت دلخواهی از X باشد. تابع $\varphi_{x_\circ} : \mathcal{BC}(X) \to (\mathbb{C}, |.|)$ را به صورت

$$\varphi_{x_\circ}(f) = f(x_\circ), \qquad f \in \mathcal{BC}(X)$$

تعریف می‌کنیم. $\varphi_{x_\circ}$ را نگاشت ارزیابی در $x_\circ$[۲۷] می‌نامیم. به سادگی می‌توان نشان داد که $\varphi_{x_\circ}$ یک تابع پیوستهٔ یکنواخت است و لذا مجموعهٔ

$$\varphi_{x_\circ}^{-1}(\{\circ\}) = \{f \in \mathcal{BC}(X) \mid f(x_\circ) = \circ\}$$

مجموعه‌ای بسته در $\mathcal{BC}(X)$ است[۲۸]. ♠

۳.۵.۳ مثال. تابع $\varphi : \mathcal{C}([a, b]) \to (\mathbb{C}, |.|)$ را به صورت

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x)dx, \qquad f \in \mathcal{C}([a, b])$$

تعریف می‌کنیم. توجه داریم که هر تابع پیوسته، انتگرالپذیر است و لذا φ روی کل $\mathcal{C}([a, b])$ تعریف می‌شود. φ یک تابع پیوستهٔ یکنواخت روی $\mathcal{C}([a, b])$ است. ♠

۴.۵.۳ مثال. فرض کنیم g عضو دلخواهی از $\mathcal{C}([a, b])$ باشد. تابع $\varphi_g : \mathcal{C}([a, b]) \to (\mathbb{C}, |.|)$ که به صورت

$$\varphi_g(f) = \int_a^b f(x)g(x)dx, \qquad f \in \mathcal{C}([a, b])$$

تعریف می‌شود نیز یک تابع پیوستهٔ یکنواخت روی $\mathcal{C}([a, b])$ می‌باشد. ♠

فضایی که در مثال بعدی ارائه می‌شود را می‌توان در مقایسه با حالت گسستهٔ ℓ_p به عنوان تعمیم پیوستهٔ آن در نظر گرفت.

۵.۵.۳ مثال. فرض کنیم $1 \leq p \in \mathbb{R}$. مجموعهٔ همهٔ توابع انتگرالپذیر روی بازهٔ $[a, b]$ مانند $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ را که برای آن‌ها

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty$$

---

[۲۷] evaluation mapping at $x_\circ$

[۲۸] در حقیقت این مجموعه ایده‌آلی بسته در این فضا است.

در نظر می‌گیریم. اگر تعریف کنیم

$$\|f\|_p = (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

آن گاه $d_p(f,g) = \|f-g\|_p$ یک شبه نرم روی این فضا است که فضای متریک حاصل از آن تام نیست و تتمیم آن با $L_p([a,b])$ نمایش داده می‌شود. مجموعهٔ همهٔ توابع پیوسته روی $[a,b]$ زیرفضایی از $L_p([a,b])$ است و در حقیقت تحت متر d_p در آن چگال می‌باشد. لذا $\mathcal{C}([a,b])$ از طرفی با نرم $\|.\|_\infty$ فضایی تام و از طرفی با متر القایی d_p فضایی غیر تام است. البته این مطلب که تتمیم فضاهای متریک منحصر به فرد است نباید ما را به اشتباه بیندازد چون در این جا دو فضای متریک مختلف تحت دو متر مختلف داریم. ♠

این بخش کوتاه را با مثال جالب بعد به پایان می‌بریم.

۶.۵.۳ مثال. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد. در این صورت مجموعهٔ همهٔ توابعی مانند $f:(X,d)\to(\mathbb{C},|.|)$ را که در شرط لیپ‌شیتز صدق می‌کنند در نظر می‌گیریم و آن را با $\mathrm{Lip}(X,d)$ نمایش می‌دهیم. اگر

$$M_f = \sup \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}, \qquad f \in \mathrm{Lip}(X,d)$$

و $\|.\|_\infty$ نرم تعریف شده روی $\mathcal{BC}(X)$ باشد، آن گاه

$$\|f\| = \|f\|_\infty + M_f$$

یک نرم روی $\mathrm{Lip}(X,d)$ تعریف می‌کند. توجه داریم که $\mathrm{Lip}(X,d) \subseteq \mathcal{BC}(X)$ و لذا $\|f\|_\infty$ در عبارت فوق تعریف شده است. $\mathrm{Lip}(X,d)$ با این نرم تعریف شده یک فضای باناخ می‌باشد. ♠

۶.۳ تمرین‌ها

همان طور که در فصل قبل نیز گفته شد، اگر به هر مسأله‌ای به دید نقطهٔ شروع برای کارهای تحقیقی نگاه کنید درمی‌یابید که یک مسأله ممکن است حاوی مسائل فراوان دیگری باشد که در آن مستتر است.

ضعیف کردن فرض‌ها، قوی کردن احکام، سعی در کلی ساختن نمونه‌های ارائه شده در مسائل و یا جست و جو برای یافتن مثال‌های نقضی که حدس‌های ما را رد خواهند کرد زمینه را برای ورود به قلمرو عظیم و فرح‌بخش پژوهش‌های ریاضی فراهم می‌آورد. فراموش نکنید که شما نیز ممکن است زمانی مرزهای این قلمروی زیبا را وسعت دهید.

Giuseppe Vitali (1875-1932)

۱.۶.۳ فرض کنیم $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ و $g : (Y, d_2) \to (Z, d_3)$ توابعی پیوسته باشند. ثابت کنید $g \circ f$ نیز پیوسته است. آیا در حالت کلی از این که $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ و به علاوه $\lim_{y\to \ell} g(y) = \ell'$ می‌توان نتیجه گرفت که $g \circ f$ در a حد دارد؟

۲.۶.۳ قضیهٔ ۴.۲.۳ را اثبات کنید.

۳.۶.۳ ثابت کنید $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ پیوسته است فقط و فقط وقتی که به ازای هر زیر مجموعه مانند A از X داشته باشیم $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

۴.۶.۳ فرض کنیم $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ تابعی پیوسته و $A \subseteq X$ در X چگال باشد. نشان دهید $f(A)$ در $f(X)$ چگال است.

۵.۶.۳ همهٔ توابع پیوسته به توی یک فضای گسسته را مشخص کنید.

۶.۶.۳ ثابت کنید اگر x نقطه‌ای منزوی از فضای متریک (X,d) باشد آن گاه هر تابع تعریف شده در x پیوسته است.

۷.۶.۳ ثابت کنید تحدید هر تابع پیوسته به هر زیرفضا تابعی پیوسته است.

۸.۶.۳ فرض کنیم $f:(X=A\cup B,d_۱)\to(Y,d_۲)$ تابعی باشد که تحدید آن به A و B پیوسته است. ثابت کنید اگر A و B هر دو بسته یا هر دو باز باشند آن گاه f روی X نیز پیوسته است. در حالت کلی اگر شرط هر دو باز یا هر دو بسته بودن A و B را نداشته باشیم آیا حکم برقرار است؟

۹.۶.۳ فرض کنیم $(X,d_۱)$ فضایی تام باشد و $\varphi: A\subseteq(X,d_۱)\to(Y,d_۲)$ تابعی پیوسته که A زیرمجموعهٔ دلخواهی از X است. تعریف می‌کنیم

$$d(x,y)=d_۱(x,y)+d_۲(\varphi(x),\varphi(y)),\qquad x,y\in A$$

ثابت کنید d یک متر روی A است که به طور توپولوژیکی معادل متر القا شده توسط $d_۱$ روی A می‌باشد.

۱۰.۶.۳ فرض کنیم (X,d) فضایی تام و G زیرمجموعه‌ای باز از آن باشد. اگر در مسأله بالا قرار دهیم $f(x)=\frac{۱}{d(x,G^c)}$ آن گاه متر جدید d' روی G به صورت

$$d'(x,y)=d(x,y)+|f(x)-f(y)|,\qquad x,y\in G$$

تعریف می‌شود. ثابت کنید (G,d') فضایی تام است و نتیجه بگیرید که هر زیرمجموعهٔ باز یک فضای تام را می‌توان توسط متری معادل دوباره متریک ساخت به قسمی که تام شود.

۱۱.۶.۳ ثابت کنید هر تابع پیوستهٔ یکنواخت تعریف شده روی یک زیرمجموعهٔ چگال یک فضای متریک به توی یک فضای متریک تام را می‌توان به طور منحصر به فرد به کل فضا توسیع داد به قسمی که روی کل فضا پیوستهٔ یکنواخت باشد. این تابع جدید را توسیع پیوستهٔ یکنواخت تابع مورد نظر می‌نامند. نشان دهید اگر f انقباضی باشد، توسیع پیوستهٔ یکنواخت آن نیز چنین است. آیا برای یک تابع پیوسته توسیع پیوسته داریم؟ این مطلب را برای حالتی که f روی زیرمجموعه‌ای نه لزوماً چگال از یک فضای متریک تعریف شده است برای توابع پیوسته و پیوستهٔ یکنواخت بررسی کنید. آیا این توسیع در صورت وجود منحصر به فرد است؟

۱۲.۶.۳ فرض کنیم (X,d) فضایی متریک و ρ متری حاصلضربی روی $X \times X$ باشد. نشان دهید $d : (X \times X, \rho) \to (\mathbb{R}, |.|)$ تابعی پیوسته است.

۱۳.۶.۳ فرض کنیم (X,d) فضایی تام و ناتهی و $f : (X,d) \to (X,d)$ تابعی پیوسته باشد که به ازای هر $x, y \in X$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} d(f^n(x), f^n(y))$ همگراست. نشان دهید f نقطهٔ ثابت منحصر به فرد دارد.

۱۴.۶.۳ فرض کنیم $f : (X,d) \to (X,d)$ تابعی باشد که در شرط لیپ‌شیتز صدق می‌کند. آیا تابع $g : (X,d) \to (\mathbb{R}, |.|)$ که به صورت $g(x) = d(x, f(x))$ تعریف می‌شود پیوسته است؟

۱۵.۶.۳ تابع $f : (X, d_1) \to (Y, x_2)$ را به طور موضعی باز[۲۹] (به طور موضعی بسته[۳۰]، به طور موضعی کراندار[۳۱]) نامیم هرگاه به ازای

[۲۹] locally open
[۳۰] locally closed
[۳۱] locally bounded

هر $x \in X$ زیرمجموعه‌ای باز از X مانند G شامل x موجود باشد به قسمی که تابع $f|_G$ تابعی باز (بسته، کراندار) باشد. ثابت کنید هر تابع پیوسته، به طور موضعی کراندار است. نشان دهید هر تابع به طور موضعی باز، تابعی باز است. واضح است که یک تابع به طور موضعی کراندار لزوماً کراندار نیست. آیا هر تابع به طور موضعی بسته، تابعی بسته است؟

۱۶.۶.۳ تابع $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ را همسانریختی موضعی[۳۲] نامیم هرگاه برای هر نقطه مانند $x \in X$ زیرمجموعه‌های باز G و H به ترتیب از X و Y موجود باشند به قسمی که $f|_G$ یک همسانریختی از G بروی H باشد. شرطی لازم و کافی برای آن که یک همسانریختی موضعی، همسانریختی باشد ارائه دهید.

۱۷.۶.۳ فرض کنیم (X, d) فضایی متریک و E و F زیرمجموعه‌هایی بسته، ناتهی و مجزا از آن باشند. ابتدا نشان دهید که برای هر $x \in X$ داریم

$$d(x, E) + d(x, F) > 0.$$

بنابراین تابع $f_{E,F} : (X, d) \to ([0, 1], |.|)$ که به صورت

$$f_{E,F}(x) = \frac{d(x, E)}{d(x, E) + d(x, F)}, \qquad x \in X$$

تعریف می‌شود خوشتعریف است. ثابت کنید $f_{E,F}$ تابعی پیوسته است و به علاوه

$$E = \{x \in X \mid f_{E,F}(x) = 0\},$$

$$F = \{x \in X \mid f_{E,F}(x) = 1\}.$$

---

[۳۲] local homeomorphism

همچنین نشان دهید که $f_{E,F}$ در شرط لیپ‌شیتز صدق می‌کند فقط و فقط وقتی که $d(E,F) > ۰$. ثابت کنید این تابع بر متغیر اول، یعنی E، نزولی و بر F صعودی است.

۱۸.۶.۳ تابع $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ را مطلقاً پیوسته[۳۳] نامیم هرگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $\delta_\varepsilon > ۰$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر خانوادهٔ متناهی از بازه‌های دو به دو مجزا مانند $\{[x_i, y_i]\}_{۱\leq i\leq n}$ اگر

$$\sum_{i=۱}^{n}(y_i - x_i) < \delta_\varepsilon$$

آن گاه

$$\sum_{i=۱}^{n}|f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon.$$

نشان دهید هر تابع مطلقاً پیوسته، پیوستهٔ یکنواخت و لذا پیوسته است. همچنین ثابت کنید اگر f در شرط لیپ‌شیتز صدق کند آن گاه مطلقاً پیوسته می‌باشد. با استفاده از مجموعهٔ کانتور تابعی بسازید که پیوسته باشد ولی مطلقاً پیوسته نباشد.

۱۹.۶.۳ ثابت کنید تابع

$$\begin{aligned} f &: ([۰,۱] \cup (۲,۳], |.|) \longrightarrow ([۰,۲], |.|) \\ f(x) &= \begin{cases} x & x \in [۰,۱] \\ x - ۱ & x \in (۲,۳] \end{cases} \end{aligned}$$

تابعی پیوسته و یک به یک بر $[۰,۱] \cup (۲,۳]$ بروی $[۰,۲]$ است که باز نیست.

[۳۳] absolutely continuous

۲۰.۶.۳ فرض کنیم $f : (X,d) \to (\mathbb{R}, |.|)$ تابعی پیوسته باشد و

$$P = \{x \in X \mid f(x) \geq ٠\},$$

$$S = \{x \in X \mid f(x) = ٠\}.$$

نشان دهید P و S بسته‌اند و S شامل مرز P می‌باشد. مثالی ارائه دهید که $S \setminus \partial P \neq \phi$.

۲۱.۶.۳ تابع $f : I \to \mathbb{R}$ که I بازه‌ای در $\mathbb{R}$ است را محدب[۳۴] نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in I$ و هر $٠ \leq \lambda \leq ١$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (١ - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (١ - \lambda) f(y).$$

ثابت کنید اگر I بازهٔ بسته‌ای باشد آن گاه هر تابع محدب روی آن پیوسته است. آیا این مطلب در مورد بازه‌های باز نیز درست است.

وظیفهٔ یک معلم، و بالاخص معلم ریاضی این است که دانشجویانش را با مسائل آشنا سازد تا حقایق.
Paul Richard Halmos (1916-2006)

۲۲.۶.۳ فرض کنیم f تابعی پیوسته و صعودی از فضای اقلیدسی $[a,b]$ به خود $[a,b]$ باشد که $f(a) = a$. نیز فرض کنیم

$$A = \{x \in [a,b] \mid x \leq f(x)\}.$$

ثابت کنید $f(A) = A$.

۲۳.۶.۳ فرض کنیم $f : ([٠,١], |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ تابعی پیوسته و هیچ‌جا یکنوا[۳۵] بر $[٠,١]$ باشد، یعنی بر هیچ زیربازه‌ای از $[٠,١]$ یکنوا نباشد. نشان دهید مجموعهٔ نقاطی که f بر $[٠,١]$ مینیمم موضعی خود را می‌پذیرد در $[٠,١]$ چگال است.

---

[۳۴] convex

[۳۵] nowhere monotone

۲۴.۶.۳ ثابت کنید هر تابع صعودی مانند $f : ([0, 1], |.|) \to ([0, 1], |.|)$ نقطهٔ ثابت دارد. با ذکر یک مثال نشان دهید که این مطلب در حالت کلی برای توابع نزولی درست نیست.

۲۵.۶.۳ ثابت کنید هیچ تابع پیوسته‌ای مانند f بر فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ وجود ندارد که به ازای هر عدد حقیقی مانند c معادلهٔ $f(x) = c$ درست دو جواب داشته باشد.

۲۶.۶.۳ آیا تابعی یکنوا مانند $f : ([0, 1], |.|) \to ([0, 1], |.|)$ هست که به ازای هر $y \in [0, 1]$ معادلهٔ $f(x) = y$ تعدادی ناشمارا جواب داشته باشد؟

۲۷.۶.۳ فرض کنیم $\{r_n\}$ دنبالهٔ اعداد گویای مثبت باشد. تابع $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = \sum_{r_n < x} \frac{x - r_n}{2}$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید f پیوسته است. آیا f پیوستهٔ یکنواخت است؟

۲۸.۶.۳ ثابت کنید تابع $f(x) = \sin x^2$ روی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ پیوستهٔ یکنواخت نیست.

۲۹.۶.۳ ثابت کنید در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ تابع $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ روی کل $\mathbb{R}$ پیوستهٔ یکنواخت است.

۳۰.۶.۳ مثالی از یک تابع پیوسته در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ ارائه دهید که روی یک مجموعهٔ بسته تعریف شده باشد و پیوستهٔ یکنواخت نباشد.

۳۱.۶.۳ فضای $\mathbb{C}^k$ را با مترهای d_p و d_M در نظر می‌گیریم. ثابت کنید به ازای هر x در $\mathbb{C}^k$ داریم $\lim_{p\to\infty} d_p(x, 0) = d_M(x, 0)$. از این جهت گاهی اوقات d_M را با d_∞ نیز نمایش می‌دهند.

۳۲.۶.۳ فرض کنیم $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ تابعی باشد که به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$،

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

ثابت کنید اگر f در یک نقطه پیوسته باشد، در تمام نقاط پیوسته است. همهٔ توابع پیوسته با این خاصیت را تعیین کنید. آیا تابعی ناپیوسته که در این شرط صدق کند وجود دارد؟

۳۳.۶.۳ مسأله بالا را برای تابعی که در یکی از شرط‌های

$$f(x+y) = f(x)f(y),$$

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

$$f(xy) = f(x)f(y),$$

صدق می‌کند حل کنید. این گونه مسائل به معادلهٔ تابعی[۳۶] معروفند.

۳۴.۶.۳ فرض کنیم c عددی ثابت باشد. همهٔ توابع پیوسته مانند $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ را بیابید که $f(x) = f(x^۲ + c)$.

۳۵.۶.۳ فرض کنیم $a, b \in (۰, \frac{۱}{۲})$ و $g : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ تابعی پیوسته باشد که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$g(g(x)) = ag(x) + b$$

نشان دهید عددی ثابت مانند c هست که $g(x) = cx$.

۳۶.۶.۳ فرض کنیم $f : ([۰, ۱], |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ تابعی پیوسته باشد که به ازای هر x, y در $[۰, ۱]$،

$$xf(y) + yf(x) \leq ۱.$$

ثابت کنید $\int_۰^۱ f(x)dx \leq \frac{\pi}{۴}$ و مثالی ارائه دهید که تساوی برقرار باشد.

---

[۳۶] functional equation

۳۷.۶.۳ فرض کنیم $f : ([a, b], |.|) \to ([a, b], |.|)$ تابعی پیوسته باشد و p نقطهٔ دلخواهی در $[a, b]$. تعریف می‌کنیم

$$p_\circ = p,$$

$$p_{n+۱} = f(p_n), \qquad n = \circ, ۱, \ldots$$

ثابت کنید اگر $T_p = \{p_n \mid n = \circ, ۱, \ldots\}$ بسته باشد متناهی است.

۳۸.۶.۳ تابعی غیر ثابت مانند $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مثال بزنید که متناوب باشد ولی کوچک‌ترین دورهٔ تناوب نداشته باشد. نشان دهید اگر $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ پیوسته، متناوب و غیر ثابت باشد آن گاه حتماً دارای کوچک‌ترین دورهٔ تناوب است.

۳۹.۶.۳ فرض کنیم $f : ([\circ, ۱], |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ تابعی پیوسته باشد. گوییم f محور x ها را در نقطهٔ a قطع می کند اگر $f(a) = \circ$ ولی در هر همسایگی از a اعدادی مانند b و c موجود باشند که $f(b) < \circ$ و $f(c) > \circ$. مثالی از تابعی پیوسته ارائه دهید که خط حقیقی را بی‌نهایت بار قطع کند. آیا می‌تواند ناشمارا مرتبه خط حقیقی را قطع کند؟ از مجموعهٔ کانتور استفاده کنید.

۴۰.۶.۳ کلیهٔ توابع پیوسته تعریف شده از $[\circ, ۱]$ به مجموعهٔ کانتور با متر اقلیدسی را توصیف کنید.

۴۱.۶.۳ آیا این مطلب درست است که هر تابع پیوسته حقیقی مقدار روی یک مجموعهٔ بسته، ماکزیمم و مینیمم خود را می‌پذیرد؟ روی مجموعه‌های بسته و کراندار چطور؟

۴۲.۶.۳ آیا در فضای اقلیدسی تابعی پیوسته بر $(\circ, ۱)$ هست که نقاط ناپیوستگی آن شمارا و چگال در $(\circ, ۱)$ باشد؟

۴۳.۶.۳ فرض کنیم $f:([\circ,\text{۱}],|.|)\to(\mathbb{R},|.|)$ تابعی پیوسته باشد و F زیرمجموعه‌ای بسته از $\mathbb{R}$ که $f([\circ,\text{۱}])\cap F=\phi$. نشان دهید عددی مانند $\delta>\circ$ موجود است به قسمی که به ازای هر $x\in[\circ,\text{۱}]$ و هر $y\in F$ داریم $|f(x)-y|\geq\delta$.

۴۴.۶.۳ زیرمجموعه‌ای نامتناهی و تام از فضای اقلیدسی $\mathbb{Q}$ بیابید که همسانریخت با $\mathbb{N}$ نباشد.

۴۵.۶.۳ فرض کنیم f تابعی یک به یک از فضای اقلیدسی $\mathbb{N}$ بروی فضای اقلیدسی $\mathbb{Q}$ باشد. ثابت کنید f در هر نقطه پیوسته و $f^{-\text{۱}}$ در هر نقطه ناپیوسته است.

۴۶.۶.۳ ثابت کنید مجموعهٔ $F=\{f\in\mathcal{C}([\circ,\text{۱}])\mid f([\circ,\frac{\text{۱}}{\text{۳}}])\cap f([\frac{\text{۲}}{\text{۳}},\text{۱}])\neq\phi\}$ در $\mathcal{C}([\circ,\text{۱}])$ بسته است.

۴۷.۶.۳ ثابت کنید که بر مجموعهٔ توابع پیوسته روی $[a,b]$ مترهای القا شده توسط $\|.\|_\infty$ و d_p معادل نیستند.

۴۸.۶.۳ نشان دهید که تابع $T:(\mathcal{C}([\circ,\text{۱}]),\|.\|_\infty)\to(\mathcal{C}([\circ,\text{۱}]),\|.\|_\infty)$ که به صورت

$$T(f)(x)=\frac{x^{\text{۲}}}{\text{۲}}-\frac{\text{۱}}{\text{۶}}\int_\circ^x(f(t))^{\text{۴}}dt,\qquad x\in[\circ,\text{۱}]$$

تعریف می‌شود نقطهٔ ثابت دارد.

۴۹.۶.۳ در $\mathrm{Lip}(X,d)$ برای f و g تعریف می‌کنیم

$$(fg)(x)=f(x)g(x).$$

ثابت کنید $\|fg\|\leq\|f\|\,\|g\|$.

۴

فشردگی

۱.۴ مقدمه

Pavel Samuilovich Urysohn (1898-1924)

این فصل را به مفهومی بسیار مهم از آنالیز اختصاص می‌دهیم. همانند مفاهیم دیگری که در این کتاب مورد بررسی قرار گرفته شده است این مفهوم جدید، موسوم به فشردگی، نیز دارای صورت‌های معادلی است که هر کدام از آن‌ها نقش مهمی در به دست آوردن احکام و نتایج مربوط به فضاهای متریک ایفا می‌کنند.

روشن است که ارائه یک مفهوم جدید از دو دیدگاه حائز اهمیت است. یکی این که با تسهیل در بیان عبارات طولانی باعث می‌شود نگرش شهودی بهتری نسبت به مفاهیم قبلی داشته باشیم و دیگر این که باعث به وجود آمدن مسائلی جدید می‌شود که حل آن‌ها زمینه‌های تحقیقی فراوانی را ایجاد می‌کند.

در بسیاری موارد ما با خانواده‌ای دلخواه از اشیا از قبیل مجموعه‌های باز، بسته، و یا حتی خانواده‌ای دلخواه از اعداد سر و کار

داریم و بنا به دلایل تکنیکی برای ما مطلوب است که این خانوادهٔ دلخواه به خانواده‌ای متناهی از اشیا تبدیل شود. برای آن که تصوری از مسأله داشته باشید، مثلاً اگر خانواده‌ای از اعداد مثبت داشته باشیم و بخواهیم اینفیمم این خانواده را در نظر بگیریم، در حالت کلی این اینفیمم دیگر لزوماً مثبت نخواهد بود. مثلاً خانواده $\{r\}_{r>0}$ از اعداد مثبت دارای اینفیمم صفر است. اما اگر بتوانیم تحت شرایطی خاص زیرخانواده‌ای متناهی از خانوادهٔ مذکور را پیدا کنیم که دقیقاً دارای همان ویژگی‌های خانوادهٔ اولیه باشد، اینفیمم مورد نظر به مینیمم تبدیل خواهد شد که به وضوح عضوی از آن خانواده و لذا عددی مثبت است. مثلاً تابع پیوستهٔ $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ را در نظر بگیرید. برای $\varepsilon>0$ داده شده، در هر نقطه مانند y عددی مانند $\delta_{\varepsilon,y}>0$ موجود است که تعریف پیوستگی را برآورده می‌سازد، لذا اگر اینفیمم خانوادهٔ $\{\delta_{\varepsilon,y}\}_{y\in X}$ مثبت و مثلاً برابر δ_ε باشد، این δ_ε تعریف پیوستگی یکنواخت را برآورده می‌سازد و لذا f پیوستهٔ یکنواخت است. اما مشکل این جاست که در حالت کلی لزومی ندارد که این اینفیمم مثبت باشد مگر آن که خانواده‌ای متناهی را جایگزین خانوادهٔ اصلی کنیم.

تعریف اصلی فشردگی که در فضاهای توپولوژیک به طور کلی قابل بیان است ابزاری توانا برای تحویل خانواده‌های دلخواه به خانواده‌ای متناهی است که کاربردهای فراوانی دارد. این تعریف در فضاهای متریک شکل‌های ساده‌تری به خود می‌گیرد که در این فصل به عنوان صورت‌های معادل تعریف فشردگی ارائه خواهند شد. طبق معمول با ارائه تعریفی جدید در جست و جوی یافتن احکامی دربارهٔ ارتباط این مفهوم با مفاهیم قبلی نیز خواهیم بود و لذا طبیعی است که ارتباط فشردگی با باز یا بسته بودن، کراندار بودن، دنباله‌ها، تام بودن، پیوستگی و پیوستگی یکنواخت را مورد مطالعه قرار دهیم. اجازه دهید

طبق معمول با تعاریف اصلی کار را شروع کنیم.

۲.۴ تعاریف اصلی

Pavel Sergeevich Aleksandrov (1896-1982)

فرض کنیم فضای متریک (X,d) کشوری است که در نقاط مختلف آن مانند x حوزه‌های استحفاظی به صورت مجموعه‌های باز شامل x و یا همسایگی‌های باز شامل x به صورت $N_{r_x}(x)$ وجود دارد.

این حوزه‌های استحفاظی کل این کشور را پوشش می‌دهند. به عبارت دیگر هر نقطه از کشور در یک حوزهٔ استحفاظی واقع شده است. در مورد تعداد این حوزه‌های استحفاظی چیزی نمی‌دانیم، البته اگر این حوزه‌ها به صورت $N_{r_x}(x)$ در هر نقطهٔ x باشند، آن گاه تعداد آن‌ها درست برابر تعداد نقاط X است ولی در حالت کلی که در بعضی نقطه‌ها حوزه‌های استحفاظی قرار داده‌ایم و فقط شرط پوشیده شدن X توسط آن‌ها را پذیرفته‌ایم حتی چیزی در مورد تعداد آن‌ها هم نمی‌دانیم. سؤالی که پیش می‌آید این است که آیا می‌توان تعدادی متناهی از این حوزه‌ها را انتخاب کرد که باز هم X را بپوشانند؟ همان طور که خواهیم دید در برخی موارد این کار امکان‌پذیر و در مواردی دیگر غیر ممکن است. لذا بررسی حالت مطلوبی که هر پوشش قابل تحویل به پوششی با تعدادی متناهی عضو باشد موجه و قابل تأمل است.

۱.۲.۴ تعریف. فرض کنیم A یک مجموعه باشد. خانوادهٔ $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ یک پوشش[۱] برای A نامیده می‌شود هرگاه $A\subseteq\cup_{\alpha\in\mathbb{I}}A_\alpha$. ♣

[۱] covering

۲.۲.۴ تعریف. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $A \subseteq X$. پوشش $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ برای A را یک پوشش باز[۲] نامیم هرگاه هر عضو این خانواده زیرمجموعه‌ای باز از X باشد. ♣

۳.۲.۴ تعریف. فرض کنیم $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ پوششی برای مجموعهٔ A باشد و $\mathbb{J}\subseteq\mathbb{I}$. در این صورت $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{J}}$ را زیرپوشش[۳] $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ می‌نامیم هرگاه $A \subseteq \cup_{\alpha\in\mathbb{J}}A_\alpha$. این زیرپوشش را زیرپوشش متناهی[۴] گوییم هرگاه $\mathbb{J}$ مجموعه‌ای متناهی باشد. ♣

یک زیرپوشش متناهی را معمولاً به صورت $\{A_{\alpha_1},\dots,A_{\alpha_n}\}$ یا $\{A_{\alpha_i}\}_{1\leq i\leq n}$ نمایش می‌دهیم.

با توضیحات ابتدای این بخش، حالت مطلوب برای ما حالتی است که هر پوشش باز زیرپوششی متناهی داشته باشد. تعریف بعد را با هم ببینیم.

۴.۲.۴ تعریف. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $K \subseteq X$. مجموعهٔ K را فشرده[۵] نامیم هرگاه هر پوشش باز آن زیرپوششی متناهی داشته باشد. در غیر این صورت K را نافشرده یا غیر فشرده می‌نامیم. ♣

ممکن است ابهامی در تعریف فوق وجود داشته باشد که باز بودن عناصر پوشش باید نسبت به فضای X باشد یا نسبت به زیرفضای القایی K. قبل از هر چیز برای آن که خیال خود را راحت کنیم اثبات می‌کنیم که هیچ فرقی نمی‌کند.

---

[۲] open covering
[۳] subcovering
[۴] finite subcovering
[۵] compact

۵.۲.۴ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد و $K \subseteq Y \subseteq X$. در این صورت K نسبت به (X,d) فشرده است فقط و فقط وقتی که نسبت به (Y,d) فشرده باشد.

برهان. فرض کنیم K نسبت به (X,d) فشرده باشد. و $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ پوشش نسبت به Y بازی برای K باشد. طبق قضیهٔ ۱۱.۴.۱ چون H_α نسبت به Y باز است پس مجموعهٔ نسبت به X بازی مانند G_α موجود است به قسمی که

$$H_\alpha = G_\alpha \cap Y.$$

حال داریم

$$K \subseteq \cup_{\alpha\in\mathbb{I}} H_\alpha \subseteq \cup_{\alpha\in\mathbb{I}} G_\alpha,$$

و لذا $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ پوشش نسبت به X بازی برای K می‌باشد و چون K نسبت به X فشرده است لذا زیرپوششی متناهی مانند $\{G_{\alpha_i}\}_{1\leq i\leq n}$ برای K موجود است و در نتیجه

$$K \subseteq \cup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}.$$

بنابراین

$$K = K \cap Y \subseteq (\cup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}) \cap Y = \cup_{i=1}^{n} (G_{\alpha_i} \cap Y) = \cup_{i=1}^{n} H_{\alpha_i}.$$

پس $\{H_{\alpha_i}\}_{1\leq i\leq n}$ زیرپوششی متناهی از پوشش $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ برای K می‌باشد و لذا K نسبت به Y فشرده است.

بالعکس، فرض کنیم K نسبت به Y فشرده باشد و $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ پوشش نسبت به X بازی برای K باشد. بنابراین

$$H_\alpha = G_\alpha \cap Y$$

با توجه به قضیهٔ ۱۱.۴.۱ نسبت به Y باز است. همچنین داریم

$$K = K \cap Y \subseteq (\cup_{\alpha \in \mathbb{I}} G_\alpha) \cap Y = \cup_{\alpha \in \mathbb{I}} (G_\alpha \cap Y) = \cup_{\alpha \in \mathbb{I}} H_\alpha.$$

پس $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ پوشش نسبت به Y بازی برای K است و چون K نسبت به Y فشرده است. لذا زیرپوششی متناهی مانند $\{H_{\alpha_i}\}_{1 \leq i \leq n}$ برای K وجود دارد. بنابراین

$$K \subseteq \cup_{i=1}^{n} H_{\alpha_i} \subseteq \cup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}.$$

پس زیرپوشش متناهی $\{G_{\alpha_i}\}_{1 \leq i \leq n}$ را برای K یافتیم و لذا K نسبت به X فشرده است. ■

جهان را نمی‌توان خواند مگر زبان آن را آموخته باشیم و با علائمی که بدان نوشته شده است آشنا شویم. جهان به زبان ریاضیات نوشته شده است و حروف آن مثلث، دایره و شکل‌های هندسی دیگر است که بدون آن مفاهیم درک کلمه‌ای ساده برای بشر غیر ممکن است.
Galileo Galilei (1564-1642)

حال که ابهام تعریف ۴.۲.۴ برطرف شد اجازه دهید کمی بیش‌تر در مورد این تعریف صحبت کنیم. وجود سور عمومی برای پوشش باز در این تعریف نکته‌ای است که بسیار باید مورد توجه قرار گیرد. دقت کنید ارائه پوششی باز که زیرپوششی متناهی داشته باشد هیچ فایده‌ای ندارد! این نکته در ابتدای کار که کمی مبتدی هستیم به چشم نمی‌آید و حتی بسیار دیده شده است که فردی کلیهٔ مفاهیم و قضایای مربوط به فشردگی را فراگرفته است اما هنوز در درک این سور عمومی مشکل دارد. این که شما پوششی باز برای K ارائه دهید و سپس برای پوشش باز خود زیرپوششی متناهی پیدا کنید اصلاً مهم نیست، بلکه مهم این است که برای هر پوشش باز دلخواه (آن هم نه دلخواه شما!) زیرپوشش متناهی یافت شود. زیرا اگر چنین نباشد شاید دلمان بخواهد که پوشش $\{X\}$ را برای K مثال بزنیم که مطمئناً هم باز است و هم K را می‌پوشاند و روشن است که زیرپوشش متناهی نیز دارد، چرا که اصولاً این پوشش، خود متناهی است!

برای آن که این تعریف بیش‌تر ملموس شود با مثال‌هایی ساده کار را شروع می‌کنیم.

۶.۲.۴ مثال. فرض کنیم X فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت مجموعهٔ $\mathbb{R}$ فشرده نیست، زیرا پوشش بازی برای آن وجود دارد که زیرپوشش متناهی ندارد. در حقیقت اگر فرض کنیم G_n بازهٔ $(-n,n)$ باشد، آن گاه G_n ها باز هستند و به علاوه

$$\mathbb{R} \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} G_n,$$

اما این پوشش زیرپوشش متناهی ندارد. زیرا اگر به برهان خلف زیرپوششی مانند $\{G_{n_i}\}_{1\leq i\leq N}$ موجود باشد آن گاه باید داشته باشیم

$$\mathbb{R} \subseteq \cup_{i=1}^{N}(-n_i,n_i) = (-n_N,n_N).$$

لذا $\mathbb{R}$ باید کراندار باشد که غیر ممکن است. ♠

به نظر می‌رسد اثبات فشرده نبودن ساده‌تر باشد، چون در این حالت خودمان پوشش را ارائه می‌دهیم و سپس باید اثبات کنیم که زیرپوشش متناهی وجود ندارد.

در این جا ذکر یک نکته ضروری به نظر می‌رسد. فرض کنیم پوششی مانند $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ مثال زده‌ایم و قصد داریم اثبات کنیم زیرپوشش متناهی ندارد. اگر بخواهیم به برهان خلف عمل کنیم باید زیرپوشش را مثلاً به صورت $\{G_{n_i}\}_{1\leq i\leq N}$ در نظر بگیریم و معلوم نیست که این اندیس‌های n_1، n_2، ...، n_N به چه صورتی و با چه فاصله‌های در پشت سر هم آمده‌اند. اما اگر فرض کنیم

$$M = \max\{n_1,\ldots,n_N\}$$

آن گاه با توجه به آن که

$$\cup_{i=1}^{N} G_{n_i} \subseteq \cup_{n=1}^{M} G_n,$$

در صورتی که قرار باشد $\{G_{n_i}\}_{1\leq i\leq N}$ زیرپوشش باشد، $\{G_n\}_{1\leq i\leq M}$ نیز زیرپوشش خواهد بود و لذا می‌توان فرض کرد که اندیس‌ها پشت سر هم آمده‌اند.

ضمناً توجه کنید که ما حرف K را به مجموعه‌های فشرده تخصیص دادیم همان طور که F را برای مجموعه‌های بسته و G را برای مجموعه‌های باز به کار می‌بردیم. لذا از این پس در جایی که بیم ابهام در نمادگذاری وجود داشته باشد برای اعداد طبیعی (مثلاً در K_ε برای دنباله‌ها) از حرف دیگری استفاده می‌کنیم. مثلاً ممکن است در بحث همگرایی برای دنباله‌ای خاص برای $\varepsilon > 0$ داده شده عدد $M_\varepsilon \in\mathbb{N}$ را معرفی کنیم.

مثال به ظاهر سخت‌تر مثالی از یک مجموعهٔ فشرده خواهد بود.

۷.۲.۴ مثال. در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ مجموعهٔ

$$K = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

فشرده است. زیرا فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ پوشش باز دلخواهی برای K باشد. چون $0 \in K$ و نیز $K \subseteq \cup_{\alpha\in\mathbb{I}} G_\alpha$ پس $\alpha_0 \in\mathbb{I}$ ی موجود است که $0 \in G_{\alpha_0}$. حال چون G_{α_0} باز است، 0 نقطه‌ای درونی برای آن است و لذا $r_0 > 0$ ی موجود است به قسمی که

$$N_{r_0}(0) \subseteq G_{\alpha_0}.$$

حال بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، عددی مانند M در $\mathbb{N}$ هست که $\frac{1}{M} < r_0$ و لذا به ازای هر $n \geq M$ داریم

$$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{M} < r_0.$$

بنابراین $\frac{1}{n} \in N_{r_0}(0) \subseteq G_{\alpha_0}$.

از طرفی $\frac{۱}{۱}, \frac{۱}{۲}, \dots, \frac{۱}{M-۱} \in K \subseteq \cup_{\alpha\in\mathbb{I}} G_\alpha$ و لذا $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ...، $\alpha_{M-۱}$ ی در $\mathbb{I}$ موجودند به قسمی که

$$\frac{۱}{i} \in G_{\alpha_i}, \qquad ۱ \le i \le M-۱.$$

بنابراین

$$K = \{\frac{۱}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{۰\} \subseteq \cup_{i=۰}^{M-۱} G_{\alpha_i}.$$

لذا زیرپوششی متناهی از $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ برای K یافتیم و در نتیجه K فشرده است. ♠

این مثال را می‌توان به صورت کلی زیر بیان کرد.

۸.۲.۴ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک و $\{x_n\}$دنباله‌ای همگرا به x در آن باشد. دراین صورت مجموعهٔ $K = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ در X فشرده است.

برهان. فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ پوشش باز دلخواهی برای K باشد. چون $x \in K \subseteq \cup_{\alpha\in\mathbb{I}} G_\alpha$ پس $\alpha_۰$ ی در $\mathbb{I}$ هست که $x \in G_{\alpha_۰}$ و چون $G_{\alpha_۰}$ باز است پس x نقطه‌ای درونی است و لذا $r_۰ > ۰$ ی موجود است که

$$N_{r_۰}(x) \subseteq G_{\alpha_۰}.$$

اما $x_n \to x$ و لذا به ازای هر $\varepsilon > ۰$ از جمله $\varepsilon = r_۰ > ۰$ باید عددی مانند $M_{r_۰} \in\mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $n \ge M_{r_۰}$ داشته باشیم

$$x_n \in N_{r_۰}(x) \subseteq G_{\alpha_۰}.$$

از طرفی $x_۱, \dots, x_{M_{r_۰}-۱} \in K \subseteq \cup_{\alpha\in\mathbb{I}} G_\alpha$ و لذا $\alpha_۱$، ...، $\alpha_{M_{r_۰}-۱}$ ی در $\mathbb{I}$ موجودند به قسمی که

$$x_i \in G_{\alpha_i}, \qquad ۱ \le i \le M_{r_۰} - ۱.$$

بنابراین

$$K = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subseteq \cup_{i=0}^{M_{r_0}-1} G_{\alpha_i}.$$

لذا زیرپوششی متناهی از $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ برای K یافتیم و در نتیجه K فشرده است. ■

طبق سنت معمول خود در این کتاب بعد از مثال‌های اقلیدسی به فضاهای گسسته می‌پردازیم. از آن جایی که حکم مربوط به فضاهای گسسته و فشردگی بسیار کلی و ساده است آن را به صورت یک قضیه ارائه می‌کنیم. اما قبل از آن یک قضیهٔ بسیار ساده را ببینید.

۹.۲.۴ قضیه. در هر فضای متریک مانند (X, d) هر مجموعهٔ متناهی مانند $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$ فشرده است.

برهان. فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ پوشش باز دلخواهی برای K باشد. برای هر $1 \le i \le n$ چون $x_i \in K \subseteq \cup_{\alpha \in \mathbb{I}} G_\alpha$ پس α_i یی در $\mathbb{I}$ هست به قسمی که $x_i \in G_{\alpha_i}$ و لذا

$$K = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \cup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}.$$

پس K فشرده است. ■

نکتهٔ جالب این است که در هر فضای گسسته عکس این مطلب نیز برقرار است.

۱۰.۲.۴ قضیه. در هر فضای متریک گسسته مانند (X, d) یک مجموعه مانند K فشرده است فقط و فقط وقتی که متناهی باشد.

برهان. فرض کنیم K فشرده باشد، پس به ازای هر پوشش باز، از جمله پوشش باز $\{N_{\frac{1}{2}}(x)\}_{x \in K}$، باید زیرپوششی متناهی برای K یافت شود. توجه داریم که هر همسایگی باز در هر فضای متریک باز است

و لذا مجموعه‌های ارائه شده باز می‌باشند، به علاوه واضح است که این مجموعه‌ها K را می‌پوشانند چون هر $x \in K$ لااقل در مرکز همسایگی حول x آمده است.

بنابراین $x_۱$، ...، x_n ی در K موجودند که

$$K \subseteq \cup_{i=۱}^{n} N_{\frac{۱}{۲}}(x_i).$$

اما در فضای گسسته داریم $N_{\frac{۱}{۲}}(x) = \{x\}$ و لذا

$$K \subseteq \cup_{i=۱}^{n} \{x_i\} = \{x_۱, \ldots, x_n\},$$

و در نتیجه K متناهی است.

قسمت عکس نیز که برای هر فضای متریک در قضیهٔ فوق اثبات شد. ■

در قضیهٔ ۸.۲.۴ دیدیم که هر دنبالهٔ همگرا مانند $\{x_n\}$ همراه با حد خود، مانند x، مجموعه‌ای فشرده مانند K از فضای متریک را تشکیل می‌دهد. آیا وجود x در K شرطی اساسی برای فشرده بودن آن است؟ برهان قضیهٔ ما به طور اساسی از وجود x استفاده کرد و در حقیقت وجود یا عدم وجود هر تعداد متناهی (یا شاید حتی نامتناهی) از نقاط دیگر دنباله در K تأثیری بر فشرده بودن آن ندارد. این تأثیر مهم وجود x در K به دلیل نوع برهان ارائه شده است یا واقعاً وجود x این قدر مهم می‌باشد؟ قضیهٔ بعد نشان می‌دهد که وجود x واقعاً مهم است چون باعث می‌شود K مجموعه‌ای بسته باشد.

۱۱.۲.۴ قضیه. هر مجموعهٔ فشرده مانند K در هر فضای متریک مانند (X, d) بسته است.

برهان. برای آن که اثبات کنیم K بسته است نشان می‌دهیم K^c باز است. لذا فرض کنیم x نقطهٔ دلخواهی از K^c باشد. برای هر $y \in K$

چون $x \neq y$ بنابر خاصیت هاسدورفی فضاهای متریک عددی مانند $r_y > ۰$ موجود است به قسمی که

$$N_{r_y}(x) \cap N_{r_y}(y) = \phi \qquad (*)$$

حال خانوادهٔ $\{N_{r_y}(y)\}_{y\in K}$ پوشش بازی برای K است و چون K فشرده می‌باشد، نقاطی مانند $y_۱$، ...، y_n در K موجودند به قسمی که

$$K \subseteq \cup_{i=۱}^{n} N_{r_{y_i}}(y_i) \qquad (**)$$

قرار می‌دهیم $r_۰ = \min\{r_{y_۱}, \ldots, r_{y_n}\} > ۰$. ادعا می‌کنیم

$$N_{r_۰}(x) \subseteq K^c.$$

زیرا اگر به برهان خلف y یی موجود باشد به قسمی که $y \in N_{r_۰}(x) \cap K$، آن گاه بنابر $(**)$ عددی مانند $i_۰$ که $۱ \leq i_۰ \leq n$ موجود است به قسمی که $y \in N_{r_{y_{i_۰}}}(y_{i_۰})$. از طرفی

$$y \in N_{r_۰}(x) \subseteq N_{r_{y_{i_۰}}}(x),$$

چون $r_۰ \leq r_{y_{i_۰}}$. لذا

بزرگ‌ترین لحظات زندگی یک ریاضیدان چند لحظه بعد از اثبات حکم می‌باشد... البته درست چند لحظه قبل از آن که اشتباه را در اثباتش بیابد!

$$y \in N_{r_{y_{i_۰}}}(x) \cap N_{r_{y_{i_۰}}}(y_{i_۰})$$

و این با $(*)$ در تناقض است.

پس $N_{r_۰}(x) \subseteq K^c$ و لذا x نقطه‌ای درونی برای K^c است. در نتیجه K^c باز و لذا K بسته می‌باشد. ■

قدرت اعجاب‌آور فشرده بودن را دیدید؟ خانوادهٔ دلخواه $\{r_y\}_{y\in K}$ از اعداد مثبت را داشتیم و نمی‌توانستیم از آن مینیمم بگیریم و در حقیقت اگر اینفیمم می‌گرفتیم شاید بدون آن که متوجه اشتباه اثبات

خود شویم از آن می‌گذشتیم. فشرده بودن به یاری ما آمد و زیرخانوادهٔ متناهی $\{r_{y_i}\}_{1\leq i\leq n}$ را یافتیم و از آن مینیمم گرفتیم! این تکنیکی بسیار کارآمد در مبحث فشردگی است که بارها و بارها به کمک ما می‌شتابد.

۱۲.۲.۴ قضیه. هر زیرمجموعهٔ بسته مانند F از یک مجموعهٔ فشرده مانند K در فضای متریک (X,d) خود مجموعه‌ای فشرده است.

برهان. فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ پوشش باز دلخواهی برای F باشد. چون F بسته است، F^c باز است و نیز داریم

$$K\subseteq X=F\cup F^c\subseteq(\cup_{\alpha\in\mathbb{I}}G_\alpha)\cup F^c.$$

پس $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}\cup\{F^c\}$ پوشش بازی برای K است و چون K فشرده است α_1، ...، α_n ی در $\mathbb{I}$ موجودند که

$$K\subseteq(\cup_{i=1}^n G_{\alpha_i})\cup F^c.$$

دقت کنید که ممکن است F^c در این زیرپوشش نیامده باشد، اما به هر حال افزودن F^c به این زیرپوشش مشکلی در پوشش بودن آن به وجود نخواهد آورد.

حال داریم

$$F\subseteq K\subseteq(\cup_{i=1}^n G_{\alpha_i})\cup F^c,$$

اما F^c تأثیری در پوشاندن F ندارد و لذا

$$F\subseteq\cup_{i=1}^n G_{\alpha_i}.$$

پس زیرپوششی متناهی برای F یافتیم و لذا F فشرده است. ■

۱۳.۲.۴ نتیجه. زیرمجموعهٔ F از مجموعهٔ فشردهٔ K فشرده است فقط و فقط وقتی که بسته باشد. ■

در حکم فوق بسته بودن F نسبت به K معادل بسته بودن آن نسبت به X است چون K خود زیرمجموعه‌ای بسته از X می‌باشد. لذا ابهامی در حکم فوق باقی نخواهد ماند.

قبلاً در مورد اجتماع و اشتراک زیرمجموعه‌های بسته و زیرمجموعه‌های باز فضاهای متریک بحث کرده‌ایم. بد نیست بحث مشابهی در مورد زیرمجموعه‌های فشرده داشته باشیم.

۱۴.۲.۴ قضیه. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک باشد. در این صورت

i. اجتماع هر خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های فشرده مانند $\{K_i\}_{۱\leq i\leq n}$ مجموعه‌ای فشرده است؛

ii. اشتراک هر خانوادهٔ دلخواه از مجموعه‌های فشرده مانند $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ مجموعه‌ای فشرده است.

برهان. i. فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ پوشش باز دلخواهی برای $K = \cup_{i=۱}^{n} K_i$ باشد. بنابراین به ازای هر $۱ \leq i \leq n$ داریم

$$K_i \subseteq K \subseteq \cup_{\alpha\in\mathbb{I}} G_\alpha,$$

و لذا $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ پوشش بازی برای K_i است و چون K_i فشرده است $\alpha_{i_۱}$، ...، $\alpha_{i_{n_i}}$ یی در $\mathbb{I}$ موجودند به قسمی که

$$K_i \subseteq \cup_{j=۱}^{n_i} G_{\alpha_{i_j}}.$$

بنابراین

$$K = \cup_{i=۱}^{n} K_i \subseteq \cup_{i=۱}^{n} \cup_{j=۱}^{n_i} G_{\alpha_{i_j}}.$$

لذا زیرپوششی متناهی برای K یافتیم و در نتیجه K فشرده است.

ii. فرض کنیم $K=\cap_{\alpha\in\mathbb{I}}K_\alpha$. چون K_α ها فشرده و لذا بسته‌اند K نیز بسته است و با فرض $\alpha_\circ\in\mathbb{I}$ و ثابت داریم $K\subseteq K_{\alpha_\circ}$. پس K زیرمجموعه‌ای بسته از مجموعهٔ فشردهٔ $K_{\alpha_\circ}$ است و بنابر قضیهٔ فوق فشرده می‌باشد. ■

قضیهٔ فوق در قسمت i برای حالتی که خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌های فشرده داشته باشیم لزوماً درست نیست. مثلاً $\mathbb{R}=\cup_{r\in\mathbb{R}}\{r\}$ و چون مجموعه‌های متناهی فشرده‌اند پس $\{r\}$ ها فشرده می‌باشند ولی دیدیم که $\mathbb{R}$ فشرده نیست.

حال به بررسی ارتباط بین فشردگی و کرانداری می‌پردازیم.

۱۵.۲.۴ قضیه. هر مجموعهٔ فشرده در هر فضای متریک مانند (X,d) کراندار است.

برهان. پوشش باز $\{N_1(x)\}_{x\in K}$ را برای K در نظر می‌گیریم. چون K فشرده است x_1، ...، x_n ی در K موجودند که

$$K\subseteq\cup_{i=1}^{n}N_1(x_i).$$

اما همسایگی‌ها کراندارند (در حقیقت $\mathrm{diam}N_r(x)\leq 2r$)، اجتماع متناهی از مجموعه‌های کراندار مجموعه‌ای کراندار است و زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ کراندار مجموعه‌ای است کراندار. لذا K کراندار است. ■

بعداً خواهیم دید که در حقیقت K قطر خود را می‌پذیرد.

تاکنون دیدیم که هر مجموعهٔ فشرده در هر فضای متریک بسته و کراندار است. اما آیا عکس این مطلب نیز لزوماً درست است؟ دو مثال بعد پاسخی منفی به این سؤال می‌دهند.

۱۶.۲.۴ مثال. فرض کنیم (X,d) فضایی گسسته باشد که X مجموعه‌ای است نامتناهی. در این صورت X بسته و کراندار است اما

طبق قضیهٔ ۴.۲.۱۰ فشرده نمی‌باشد. ♠

وجود این مثال نقض، خاص فضاهای گسسته نیست.

۴.۲.۱۷ مثال. فرض کنیم X فضای $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی القا شده از $\mathbb{R}$ باشد. مجموعهٔ

$$A = [۰, \sqrt{۲}] \cap \mathbb{Q}$$

را در نظر می‌گیریم. چون این مجموعه به صورت اشتراک زیرمجموعه‌ای بسته از $\mathbb{R}$ یعنی $[۰, \sqrt{۲}]$ با زیرفضای $\mathbb{Q}$ می‌باشد پس مجموعه‌ای بسته در $\mathbb{Q}$ است. به علاوه A کراندار است، در حقیقت $\mathrm{diam} A = \sqrt{۲}$. پس A در $\mathbb{Q}$ بسته و کراندار است اما فشرده نمی‌باشد، زیرا پوشش باز

$$\{(-۱, \sqrt{۲} - \frac{۱}{n}) \cap \mathbb{Q}\}_{n \in \mathbb{N}}$$

برای A زیرپوششی متناهی ندارد. توجه کنید که عناصر این پوشش واقعاً باز هستند چون به صورت اشتراک مجموعه‌ای نسبت به $\mathbb{R}$ باز با زیرفضای $\mathbb{Q}$ می‌باشند. اما اگر

$$A \subseteq \cup_{n=۱}^{N}((-۱, \sqrt{۲} - \frac{۱}{n}) \cap \mathbb{Q})$$

آن گاه

$$[۰, \sqrt{۲}] \cap \mathbb{Q} = A \subseteq (-۱, \sqrt{۲} - \frac{۱}{N}) \cap \mathbb{Q}$$

که تناقض است، زیرا بی‌نهایت عدد گویا بین $\sqrt{۲} - \frac{۱}{N}$ و $\sqrt{۲}$ وجود دارد. ♠

بعداً اثبات می‌کنیم که مجموعه‌های فشرده چیزی قوی‌تر از مجموعه‌های کراندار هستند یعنی به طور کلی کراندارند. اما به طور

کلی کراندار بودن و بسته بودن نیز فشرده بودن را نتیجه نخواهد داد. ما در جست و جوی شرطی لازم و کافی برای فشردگی خواهیم بود.

اجازه دهید ببینیم توابع پیوسته روی مجموعه‌های فشرده چه تأثیری می‌گذارند. در فصل قبل دیدیم که f تابعی پیوسته است فقط و فقط وقتی که هر مجموعهٔ باز را به مجموعه‌ای باز برگرداند یا به طور معادل هر مجموعهٔ بسته را به مجموعه‌ای بسته برگرداند. با این حال اگر f هر مجموعهٔ باز را به باز بنگارد یا بسته را به بسته بنگارد لزوماً پیوسته نخواهد بود. در مورد فشردگی نیز حکم جالبی وجود دارد.

۱۸.۲.۴ قضیه. فرض کنیم $f:(X,d_۱)\to(Y,d_۲)$ تابعی پیوسته و $K\subseteq X$ مجموعه‌ای فشرده باشد. در این صورت $f(K)$ در Y فشرده است.

برهان. فرض کنیم $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ پوشش باز دلخواهی برای $f(K)$ در Y باشد. چون H_α در Y باز و f پیوسته است پس $G_\alpha=f^{-۱}(H_\alpha)$ در X باز خواهد بود و به علاوه داریم

$$K\subseteq\cup_{\alpha\in\mathbb{I}}G_\alpha.$$

زیرا فرض کنیم $x\in K$. در این صورت $f(x)\in f(K)$ و چون $f(K)\subseteq\cup_{\alpha\in\mathbb{I}}H_\alpha$ پس $\alpha_\circ\in\mathbb{I}$ ی موجود است که $f(x)\in H_{\alpha_\circ}$ و در نتیجه

$$x\in f^{-۱}(H_{\alpha_\circ})=G_{\alpha_\circ}.$$

لذا $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ پوشش بازی برای مجموعهٔ فشردهٔ K در X خواهد بود و در نتیجه $\alpha_۱$، ...، α_n ی در $\mathbb{I}$ موجودند به قسمی که

$$K\subseteq\cup_{i=۱}^{n}G_{\alpha_i}.$$

بنابراین
$$f(K) \subseteq f(\cup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i})$$
و در نتیجه
$$f(K) \subseteq \cup_{i=1}^{n} H_{\alpha_i}.$$
پس زیرپوششی متناهی از $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ برای $f(K)$ یافتیم و لذا $f(K)$ در Y فشرده است. ■

قضیهٔ فوق را می‌توان به این صورت بیان کرد که توابع پیوسته مجموعه‌های فشرده را به فشرده می‌نگارند. اما آیا این شرط پیوستگی را نتیجه خواهد داد؟ یعنی اگر f هر زیرمجموعهٔ فشرده از X را به زیرمجموعه‌ای فشرده از Y تصویر کند آیا لزوماً f پیوسته خواهد بود؟

۱۹.۲.۴ مثال. تابع علامت از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ به $\{1, 0, -1\}$ تعریف شده است و لذا هر مجموعه‌ای و بالاخص هر مجموعهٔ فشرده‌ای را به زیرمجموعه‌ای از $\{1, 0, -1\}$ می‌نگارد و چون این مجموعه متناهی است، هر زیرمجموعهٔ آن نیز متناهی و در نتیجه فشرده می‌باشد. پس تابع علامت هر مجموعهٔ فشرده‌ای را به مجموعه‌ای فشرده تصویر می‌کند. ولی روشن است که این تابع پیوسته نیست. ♠

بنابراین از این طریق تعریف معادل جدیدی برای پیوستگی حاصل نخواهد شد.

در حالتی که X خود مجموعه‌ای فشرده باشد قضیهٔ فوق نتیجهٔ جالبی خواهد داشت.

۲۰.۲.۴ قضیه. فرض کنیم (X, d_1) فضایی فشرده و $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت f نگاشتی بسته خواهد بود.

برهان. فرض کنیم F زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X باشد. چون X فشرده و F بسته است، بنابر قضیهٔ ۱۲.۲.۴ مجموعهٔ F زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از X می‌باشد و بنابر قضیهٔ فوق $f(F)$ در Y فشرده و بنابر قضیهٔ ۱۱.۲.۴ بسته خواهد بود. پس f هر مجموعهٔ بسته از X را به مجموعه‌ای بسته در Y تصویر می‌کند و لذا نگاشتی بسته می‌باشد. ■

۲۱.۲.۴ نتیجه. فرض کنیم (X, d_1) فضایی فشرده و $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ تابعی پیوسته و یک به یک باشد. در این صورت f یک همسانریختی از X بروی $f(X)$ می‌باشد.

برهان. چون f یک به یک است باز بودن آن معادل بسته بودنش می‌باشد و لذا حکم واضح است. ■

یک ریاضیدان، همانند یک نقاش یا یک شاعر آفرینندهٔ الگو است. اگر الگوهایش بیش‌تر از آن دو دیگر ماندگار باشد بدین دلیل است که به وسیلهٔ اندیشه خلق شده است.
Godfrey Harold Hardy (1877-1947)

این که توابع پیوسته مجموعه‌های فشرده را به فشرده می‌نگارند نتیجهٔ جالبی برای توابع حقیقی مقدار به همراه دارد.

۲۲.۲.۴ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d) \to (\mathbb{R}, |.|)$ تابعی پیوسته و K زیرمجموعه‌ای فشرده از X باشد. در این صورت f روی K مقادیر ماکزیمم و مینیمم خود را می‌پذیرد.

برهان. چون K در X فشرده و f پیوسته است، $f(K)$ در $\mathbb{R}$ فشرده و لذا طبق قضایای ۱۱.۲.۴ و ۱۵.۲.۴ بسته و کراندار می‌باشد. چون $f(K)$ کراندار و ناتهی است، لذا طبق اصل کمال سوپریمم و اینفیمم آن موجود است. اما سوپریمم و اینفیمم هر مجموعه در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ نقاط چسبیدگی آن هستند و لذا $\sup f(K), \inf f(K) \in \overline{f(K)} = f(K)$ پس این سوپریمم و اینفیمم به ماکزیمم و مینیمم تبدیل خواهند شد. ■

در فصل حد و پیوستگی دیدیم که تابع $d_{x_0} : (X, d) \to (\mathbb{R}, |.|)$ با ضابطهٔ $d_{x_0}(x) = d(x_0, x)$ پیوسته است. بنابراین نتیجهٔ جالب زیر

حاصل می‌شود.

۲۳.۲.۴ قضیه. فرض کنیم K زیرمجموعه‌ای فشرده از فضای متریک (X,d) باشد. در این صورت K فاصلهٔ خود تا هر $x_\circ \in X$ را می‌پذیرد. به عبارت دیگر x ی در K هست که

$$d(x_\circ, K) = d(x_\circ, x).$$

برهان. تابع پیوستهٔ $d_{x_\circ}$ را روی K در نظر می‌گیریم. چون K فشرده است، طبق قضیهٔ فوق، این تابع مینیمم خود را روی K می‌پذیرد و لذا x ی در K هست که

$$d_{x_\circ}(x) = \min_{y\in K} d_{x_\circ}(y) = \inf\{d(x_\circ, y) \mid y \in K\} = d(x_\circ, K).$$

بنابراین حکم برقرار است. ■

دقت کنید که شرط فشرده بودن K در قضیهٔ فوق اساسی است و نمی‌توان آن را با شرط ضعیف‌تر بسته بودن عوض کرد.

۲۴.۲.۴ مثال. مجموعهٔ $F = [\circ, \sqrt{۲}] \cap \mathbb{Q}$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{Q}$ بسته است، اما برای $x_\circ = ۲$ داریم $d(x_\circ, F) = ۲ - \sqrt{۲}$ و روشن است که این فاصله هیچ گاه پذیرفته نمی‌شود. ♠

جالب به نظر می‌رسد که در مورد فاصلهٔ بین دو مجموعه و این که آیا این فاصله در حالت کلی لزوماً پذیرفته می‌شود یا نه نیز بحث کنیم. اما این مطلب پیش نیازهایی را می‌طلبد و از این رو آن را به بخش بعد موکول می‌کنیم.

این بخش را با نگاهی به زیرمجموعه‌های فشردهٔ فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ و نهایتاً ارتباط فشردگی با پیوستگی یکنواخت به پایان می‌بریم. قضیهٔ هاینه-بُرل که در ادامه خواهد آمد یکی از مهم‌ترین قضایای آنالیز

کلاسیک می‌باشد که در این بخش با استفاده از همین تعاریف مقدماتی آن را اثبات می‌کنیم و در بخش بعد توضیح می‌دهیم که چگونه وجود صورت‌های معادل تعریف فشردگی اثبات آن را ساده‌تر خواهد کرد.

تاکنون دیدیم که هر زیرمجموعهٔ فشرده از یک فضای متریک بسته و کراندار می‌باشد. به علاوه مثال‌هایی ارائه دادیم که نشان می‌داد در حالت کلی عکس این مطلب لزوماً درست نیست. اما در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ (و نیز $\mathbb{R}^k$) وضع فرق می‌کند. اجازه دهید با یک قضیهٔ جالب موسوم به قضیهٔ جعبهٔ چینی [6] کار را شروع کنیم.

۲۵.۲.۴ قضیه. فرض کنیم $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از بازه‌های بستهٔ تودرتو در $\mathbb{R}$ باشد. به عبارت دیگر فرض کنیم

$$I_۱ \supseteq I_۲ \supseteq \dots$$

در این صورت $\cap_{n=۱}^{\infty} I_n$ ناتهی است.

برهان. فرض کنیم

$$I_n = [a_n, b_n]$$

که $a_n \leq b_n$. چون $\{I_n\}$ نزولی است پس $\{a_n\}$ صعودی و $\{b_n\}$ نزولی می‌باشد. لذا هر b_n کران بالایی برای مجموعهٔ $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ و نیز هر a_n کران پایینی برای مجموعهٔ $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ است. چون $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ناتهی و از بالا کراندار است طبق اصل کمال سوپریممی مانند α دارد. ادعا می‌کنیم $\alpha \in \cap_{n=۱}^{\infty} I_n$. زیرا α کران بالایی برای $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ است و لذا به ازای هر $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq \alpha.$$

---

[6] Chinese Box Theorem

و چون α کوچک‌ترین کران بالا و هر b_n کران بالایی برای $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ است لذا به ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\alpha \leq b_n.$$

پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\alpha \in [a_n, b_n] = I_n$. در نتیجه $\alpha \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$ و لذا $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ ناتهی است. ■

دقت کنید که طبق برهان فوق اگر قرار دهیم $\beta = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ آن گاه برای β نیز داریم $\beta \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$ و لذا

$$[\alpha, \beta] \subseteq \cap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

نامگذاری این قضیه به عنوان جعبهٔ چینی در $\mathbb{R}^3$ با مسماتر است. در $\mathbb{R}^3$ به جای بازه‌های بسته باید از مکعب‌های بسته صحبت به میان آوریم. در حالت کلی می‌توان تعریف زیر را در نظر گرفت.

۲۶.۲.۴ تعریف. فرض کنیم

$$I_i = [a_i, b_i]$$

که $1 \leq i \leq k$. در این صورت $I = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$ یک ابَرمکعب بستهٔ k− بعدی[7] در $\mathbb{R}^k$ نامیده می‌شود. ♣

در حالت ۱− بعدی همان بازهٔ بسته، ۲− بعدی مستطیل بسته و ۳− بعدی مکعب بسته را داریم.

می‌توان قضیهٔ جعبهٔ چینی را به این صورت بیان کرد که اشتراک هر خانوادهٔ شمارا از ابرمکعب‌های بستهٔ k− بعدی نزولی ناتهی است. البته شمارا بودن خانوادهٔ مذکور شرطی اساسی نیست و فقط بیان قضیه را ساده می‌سازد. اگر $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ خانواده‌ای نزولی یا توری نزولی از

---

[7] k-dimensional closed hypercube

ابرمکعب‌های بستهٔ k– بعدی باشد نیز حکم همان است. وجه تسمیهٔ این قضیه ظاهراً این است که چینی‌ها جعبه‌هایی مکعب شکل به صورت تودرتو داشتند که در داخل کوچک‌ترین جعبه گوهری گرانبها را قرار می‌دادند. گوهر α ی قضیهٔ ما نیز در جعبهٔ $[\alpha,\beta]$ قرار دارد! اکنون می‌بینیم که این دفینهٔ ارزشمند چگونه گوهر خود را سخاوتمندانه در اختیار برهان قضیهٔ هاینه-بُرل[۸] قرار خواهد داد.

Heinrich Eduard Heine (1821-1881)

۲۷.۲.۴ قضیه. زیرمجموعهٔ K از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ فشرده است فقط و فقط وقتی که بسته و کراندار باشد.

برهان. قبلاً دیدیم که در هر فضای متریک هر مجموعهٔ فشرده، بسته و کراندار است. لذا فرض کنیم K بسته و کراندار باشد. چون K کراندار است پس بازه‌ای مانند $[a,b]$ موجود است که K زیرمجموعهٔ آن می‌باشد و اگر بتوانیم نشان دهیم $[a,b]$ فشرده است، چون K زیرمجموعه‌ای بسته از مجموعهٔ فشردهٔ $[a,b]$ می‌باشد، قضیهٔ ۱۲.۲.۴ نتیجه خواهد داد که K فشرده است. لذا کافی است اثبات شود که $[a,b]$ فشرده می‌باشد.

به برهان خلف فرض کنیم $[a,b]$ فشرده نباشد. پس پوشش بازی مانند $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ موجود است که هیچ زیرپوشش متناهی ندارد. دو بازهٔ $[a,\frac{a+b}{2}]$ و $[\frac{a+b}{2},b]$ را در نظر می‌گیریم. لااقل یکی از این بازه‌ها توسط تعدادی متناهی عضو از اعضای پوشش پوشیده نخواهد شد. این بازه را $[a_1,b_1]$ می‌نامیم. این کار را به طور استقرایی ادامه می‌دهیم و اگر بازهٔ $[a_n,b_n]$ مشخص شده باشد، بازهٔ $[a_{n+1},b_{n+1}]$ را یکی از دو بازهٔ $[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}]$ و $[\frac{a_n+b_n}{2},b_n]$ که توسط تعدادی متناهی از اعضای پوشش پوشیده نمی‌شود در نظر می‌گیریم. لذا دنباله‌ای نزولی از بازه‌های بسته

---
[۸] Heine-Borel Theorem

به صورت $[a_n, b_n]$ داریم که هیچکدام توسط تعدادی متناهی از اعضای پوشش پوشیده نمی‌شوند و به علاوه

$$\operatorname{diam}[a_n, b_n] = \frac{\operatorname{diam}[a, b]}{۲^n} = \frac{b - a}{۲^n}.$$

بنابر قضیهٔ جعبهٔ چینی $\cap_{n=۱}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \phi$ و لذا نقطه‌ای مانند $x_\circ$ در این اشتراک وجود دارد. چون $x_\circ \in [a, b] \subseteq \cup_{\alpha\in\mathbb{I}}G_\alpha$، پس $\alpha_\circ$ ی در $\mathbb{I}$ هست که $x_\circ \in G_{\alpha_\circ}$ و چون $G_{\alpha_\circ}$ باز است پس $x_\circ$ نقطهٔ درونی است و لذا $r_\circ > \circ$ ی هست که

$$N_{r_\circ}(x_\circ) \subseteq G_{\alpha_\circ}.$$

اما $x_\circ$ در هر $[a_n, b_n]$ قرار دارد و چون قطر این بازه‌ها به صفر میل می‌کند پس $n_\circ \in \mathbb{N}$ ی هست که

$$[a_{n_\circ}, b_{n_\circ}] \subseteq N_{r_\circ}(x_\circ).$$

بنابراین $[a_{n_\circ}, b_{n_\circ}]$ فقط توسط یکی از اعضای پوشش یعنی $G_{\alpha_\circ}$ پوشیده شد و این متناقض با انتخاب $[a_n, b_n]$ ها می‌باشد. ■

واضح است که این قضیه با همین تکنیک به $\mathbb{R}^k$ تعمیم می‌یابد، اما باید دقت داشت که برای زیرفضاهای $\mathbb{R}^k$ این قضیه لزوماً درست نیست. مثلاً درمثال ۱۷.۲.۴ در $(\mathbb{Q}, |.|)$ زیرمجموعه‌ای بسته و کراندار ارائه کردیم که فشرده نبود.

فشرده بودن بازه‌های بسته در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ را مدیون قضیهٔ جعبهٔ چینی هستیم. توجه کنید که $\cap_{n=۱}^{\infty}(\circ, \frac{۱}{n}) = \phi$ نشان می‌دهد که بسته بودن این بازه‌ها نقشی اساسی در حکم دارد و واضح است که نه قضیهٔ جعبهٔ چینی و نه حکم فشرده بودن بازه‌های بسته برای بازه‌های باز برقرار نخواهد بود.

در فصل قبل دیدیم که توابع پیوسته روی بازه‌های بستهٔ $[a, b]$ خود به خود پیوستهٔ یکنواخت می‌باشند. این حکم عمیق تنها به دلیل فشرده بودن $[a, b]$ حاصل شد. گرچه در آن جا به این مفهوم جدید، یعنی فشرده بودن، اشاره‌ای نکردیم و حکم را به طریقی دیگر به اثبات رساندیم، با این حال شکل کلی قضیه به صورت زیر است.

۲۸.۲.۴ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d_۱) \to (Y, d_۲)$ تابعی پیوسته و K زیرمجموعه‌ای فشرده از X باشد. در این صورت f بر K پیوستهٔ یکنواخت است.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. برای هر $y \in K$ ی ثابت، چون f در y پیوسته است، پس $\delta_{\varepsilon,y} > ۰$ ی موجود است به قسمی که اگر

$$d_۱(x, y) < \varepsilon$$

آن گاه

$$d_۲(f(x), f(y)) < \varepsilon \qquad (*)$$

حال چون K فشرده است، پوشش باز $\{N_{\frac{\delta_{\varepsilon,y}}{۲}}(y)\}_{y\in K}$ برای K زیرپوششی متناهی دارد و لذا $y_۱$، ...، y_n ی در K موجودند که

$$K \subseteq \cup_{i=۱}^{n} N_{\frac{\delta_{\varepsilon,y_i}}{۲}}(y_i).$$

حال قرار می‌دهیم

$$\delta_\varepsilon = \frac{۱}{۲} \min\{\delta_{\varepsilon,y_۱}, \dots, \delta_{\varepsilon,y_n}\} > ۰$$

در این صورت به ازای هر $x, y \in K$ اگر

$$d_۱(x, y) < \delta_\varepsilon$$

آن گاه چون $y \in K$ پس $i_\circ$ ی هست که $۱ \leq i_\circ \leq n$ و به علاوه

$$d_۱(y, y_{i_\circ}) < \frac{\delta_{\varepsilon, y_{i_\circ}}}{۲}.$$

و لذا بنابر $(*)$ داریم

$$d_۲(f(y), f(y_{i_\circ})) < \frac{\varepsilon}{۲} \qquad (\dagger)$$

همچنین

$$\begin{aligned} d_۱(x, y_{i_\circ}) &\leq d_۱(x, y) + d_۱(y, y_{i_\circ}) \\ &< \delta_\varepsilon + \frac{\delta_{\varepsilon, y_{i_\circ}}}{۲} \\ &\leq \frac{\delta_{\varepsilon, y_{i_\circ}}}{۲} + \frac{\delta_{\varepsilon, y_{i_\circ}}}{۲} = \delta_{\varepsilon, y_{i_\circ}}. \end{aligned}$$

و لذا بنابر $(*)$ داریم

$$d_۲(f(x), f(y_{i_\circ})) < \frac{\varepsilon}{۲} \qquad (\ddagger)$$

بنابراین با توجه به $(\dagger)$ و $(\ddagger)$ داریم

$$\begin{aligned} d_۲(f(x), f(y)) &\leq d_۲(f(x), f(y_{i_\circ})) + d_۲(f(y_{i_\circ}), f(y)) \\ &< \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon. \end{aligned}$$

و لذا δ_ε شرط پیوستگی یکنواخت را برآورده می‌سازد. ■

اگر این قضیه به نظرتان سخت می‌آید به خاطر نمادگذاری‌های آن است وگرنه اساس اثبات بسیار ساده است. چند بار آن را با دقت بخوانید تا ترفند اثبات را درک نمایید. اشیا و مفاهیم ریاضی موجوداتی لطیف و دوست‌داشتنی هستند که تنها از طریق انس گرفتن با آن‌ها، لذت آشنایی با ایشان را درک خواهید کرد.

۳.۴ صورت‌های معادل

Mark Aronovich Naimark (1909-1978)

در این بخش به ارائه صورت‌های معادل تعریف فشردگی در فضاهای متریک و احکام مربوط به آن‌ها خواهیم پرداخت. همان گونه که در فصل حد و پیوستگی دیدیم مفاهیم مختلف در یکدیگر تلفیق می‌شوند و به کمک هم می‌آیند تا درک یکدیگر را آسان‌تر سازند. دیدیم که تعریف دنباله‌ای پیوستگی چگونه به عنوان صورتی معادل برای حل مسائل مفید واقع شد. در این جا نیز امیدواریم بتوانیم پلی بین فشردگی و دنباله‌ها بیابیم.

قضیهٔ ۵.۲.۴ نشان داد که فرقی بین بحث در مورد زیرفضای فشرده و فضای فشرده وجود ندارد و لذا از این پس در مورد فضای فشرده صحبت می‌کنیم.

۱.۳.۴ قضیه. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک فشرده باشد. در این صورت هر زیرمجموعهٔ نامتناهی مانند A از X دارای نقطه‌ای حدی در X است.

برهان. اگر A در X نقطهٔ حدی نداشته باشد آن گاه برای هر $x \in X$ عددی مانند $r_x > 0$ موجود است به قسمی که

$$(N_{r_x}(x) \setminus \{x\}) \cap A = \phi$$

و یا

$$N_{r_x}(x) \cap A \subseteq \{x\}.$$

حال پوشش باز $\{N_{r_x}(x)\}_{x\in X}$ را در نظر می‌گیریم. چون X فشرده است پس x_1، ...، x_n ی در X موجودند که

$$X \subseteq \cup_{i=1}^{n} N_{r_{x_i}}(x_i),$$

و لذا

$$\begin{aligned} A = X \cap A &\subseteq (\cup_{i=1}^{n} N_{r_{x_i}}(x_i)) \cap A = \cup_{i=1}^{n} (N_{r_{x_i}}(x_i) \cap A) \\ &\subseteq \cup_{i=1}^{n} \{x_i\} = \{x_1, \ldots, x_n\}, \end{aligned}$$

که با نامتناهی بودن A در تناقض است. ■

بعداً خواهیم دید که عکس این قضیه نیز درست است.

تعریف فشردگی به وضوح نتیجه می‌دهد که هر مجموعهٔ فشرده به طور کلی کراندار است و لذا اثباتی دیگر برای کراندار بودن مجموعه‌های فشرده از این طریق به دست می‌آید. عکس این مطلب لزوماً درست نیست. مثال زیر را ببینید.

۲.۳.۴ مثال. فرض کنیم I بازه‌ای دلخواه (باز یا بسته) و کراندار در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد. چون طول این بازه متناهی است، برای هر $\varepsilon > 0$ ثابت، $\varepsilon-$ تور $\{N_\varepsilon(x)\}_{x \in I}$ دارای زیرتوری متناهی است، یعنی x_1، ...، x_n ی در I موجودند به قسمی که

$$I \subseteq \cup_{i=1}^{n} N_\varepsilon(x_i).$$

پس هر بازه‌ای به طور کلی کراندار است. اما بازه‌های باز به وضوح غیر فشرده هستند. ♠

به نظر می‌رسد که به طور کلی کراندار بودن برای اثبات فشردگی کم است. شاید اضافه کردن فرض بسته بودن بتواند این ضعف را برطرف سازد. البته در مثال فوق چنین است ولی در حالت کلی این مطلب درست نیست. مثلاً بازهٔ (a, b) خود به عنوان یک فضای متریک در خود بسته و طبق استدلال بالا به طور کلی کراندار است، اما واضح است که فشرده نمی‌باشد. در حقیقت حلقهٔ گمشده‌ای که در جست و

جوی آن هستیم تام بودن است و نه بسته بودن. ابتدا چند قضیه را به عنوان مقدمه اثبات می‌کنیم.

۳.۳.۴ قضیه. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک به طور کلی کراندار باشد. در این صورت X تفکیک پذیر است.

برهان. برای $n \in \mathbb{N}$ ابتدا $\frac{1}{n}$− تور $\{N_{\frac{1}{n}}(x)\}_{x\in X}$ را در نظر می‌گیریم. چون X به طور کلی کراندار است $x_{n,1}$، ...، x_{n,k_n} ی در X موجودند که

$$X \subseteq \cup_{i=1}^{k_n} N_{\frac{1}{n}}(x_{n,i}) \qquad (*)$$

حال ادعا می‌کنیم $A = \{x_{n,i} \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k_n\}$ که به وضوح شماراست در X چگال می‌باشد.

فرض کنیم $x \in X$. برای آن که نشان دهیم $x \in \bar{A}$ فرض کنیم $r > 0$ داده شده باشد. بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی $n_0 \in \mathbb{N}$ ی هست که $\frac{1}{n_0} < r$. حال چون $x \in X$، بنابر $(*)$ (به ازای $n = n_0$) عددی مانند i_0 موجوداست که $1 \leq i_0 \leq k_{n_0}$ ونیز

$$d(x, x_{n_0,i_0}) < \frac{1}{n_0} < r.$$

لذا

$$x_{n_0,i_0} \in A \cap N_r(x),$$

و در نتیجه $A \cap N_r(x) \neq \phi$ و لذا $x \in \bar{A}$. ■

۴.۳.۴ نتیجه. هر فضای به طور کلی کراندار در اصل دوم شمارایی صدق می کند. ■

۵.۳.۴ نتیجه. هر فضای فشرده، تفکیک پذیر است و در اصل دوم شمارایی صدق می کند. ■

۶.۳.۴ قضیه. مجموعهٔ A در فضای متریک (X,d) به طور کلی کراندار است فقط وفقط وقتی که هر دنباله در آن زیردنباله‌ای کوشی داشته باشد.

برهان. فرض کنیم A به طور کلی کراندار و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در A باشد. چون A به طور کلی کراندار است ۱− تور $\{N_1(x)\}_{x\in A}$ دارای زیرتوری متناهی است و چون تعداد اعضای این زیرتور متناهی است پس باید بنابر اصل لانهٔ کبوتری یکی از اعضای تور موجود باشد که بی‌نهایت نقطه از دنباله در آن آمده باشد. این عضو تور را با A_1 نمایش می‌دهیم. پس A_1 زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ را در خود دارد که آن را با $\{x_k^{(1)}\}$ نشان می‌دهیم. حال چون A_1 به طور کلی کراندار است، زیردنباله‌ای از $\{x_k^{(1)}\}$ که با $\{x_k^{(2)}\}$ نمایش می‌دهیم موجود است که در یکی از اعضای $\frac{1}{2}$− تور $\{N_{\frac{1}{2}}(x)\}_{x\in A_1}$ آمده است.

بدین ترتیب به طور استقرایی زیردنباله‌هایی تودرتو مانند $\{x_k^{(n)}\}$ داریم که در A_n قرار دارند و می‌دانیم که $\operatorname{diam}A_n \le \frac{1}{n}$. حال زیردنبالهٔ قطری[۹] شکل زیر را در نظر می‌گیریم.

$$
\begin{array}{l}
x_1^{(1)}\ \ , x_2^{(1)}, \ldots, x_k^{(1)}, \ldots \\
x_1^{(2)}\ \ , x_2^{(2)}, \ldots, x_k^{(2)}, \ldots \\
\ \vdots \\
x_1^{(n)}\ \ , x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots \\
\ \vdots
\end{array}
$$

به عبارت دیگر دنبالهٔ $\{x_n^{(n)}\}$ را در نظر می‌گیریم. این دنباله زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ است که کوشی می‌باشد، زیرا برای $\varepsilon > 0$ داده

[۹] diagonal subsequence

شده بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ی هست که $\frac{1}{K_\varepsilon} < \varepsilon$ و لذا به ازای هر $m, n \geq K_\varepsilon$ داریم $x_m^{(m)}, x_n^{(n)} \in A_n$ و در نتیجه

$$d(x_m^{(m)}, x_n^{(n)}) \leq \mathrm{diam} A_n \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K_\varepsilon} < \varepsilon.$$

پس $\{x_n\}$ دارای زیردنبالهٔ کوشی $\{x_n^{(n)}\}$ می‌باشد.

بالعکس، فرض کنیم هر دنباله در A زیردنباله‌ای کوشی داشته باشد ولی A به طور کلی کراندار نباشد. پس $\varepsilon_0 > 0$ ی موجود است که ε_0- تور $\{N_{\varepsilon_0}(x)\}_{x \in A}$ زیرتوری متناهی ندارد و لذا برای $x_1 \in A$ نقطه‌ای مانند x_2 در A موجود است که $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$. به همین ترتیب می‌توان نقطهٔ x_3 را در A یافت که

$$d(x_1, x_3) \geq \varepsilon_0,$$

$$d(x_2, x_3) \geq \varepsilon_0.$$

به طور استقرایی می‌توان دنبالهٔ $\{x_n\}$ را ساخت که به ازای هر $m, n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم

$$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0.$$

بدین منظور اگر x_1، ...، x_n معرفی شده باشند، چون A به طور کلی کراندار نیست x_{n+1} ی موجود است که

$$d(x_i, x_{n+1}) \geq \varepsilon_0, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

بدین ترتیب دنبالهٔ $\{x_n\}$ را در A ساختیم که هیچ زیردنبالهٔ کوشی ندارد و این متناقض با فرض است. ■

برای آن که به مقصود خود برسیم نکتهٔ دیگری باقی مانده است که باید متذکر شویم. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک با پایهٔ B باشد.

برای آن که فشرده بودن X را محک بزنیم به جای در نظر گرفتن پوشش باز دلخواه $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ می‌توان پوشش باز $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ متشکل از عناصر پایه را در نظر گرفت. چون اگر $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ پوشش باز دلخواهی باشد آن گاه برای هر $x \in X$ عضوی از $\mathbb{I}$ مانند α_x موجود است که $x \in G_{\alpha_x}$ و بنابر تعریف پایه عضوی از پایه مانند B_{α_x} موجوداست که $x \in B_{\alpha_x} \subseteq G_{\alpha_x}$. بنابراین $\{B_{\alpha_x}\}_{x\in K}$ نیز پوششی برای K است و اگر این پوشش اخیر زیرپوشش متناهی داشته باشد آن گاه پوشش اولیه $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ نیز دارای زیرپوشش متناهی خواهد بود، چون برای هر α_x داریم $B_{\alpha_x} \subseteq G_{\alpha_x}$. بالعکس، اگر هر پوشش باز مانند $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ برای K زیرپوشش متناهی داشته باشد آن گاه روشن است که بالاخص هر پوشش باز مانند $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ متشکل از عناصر پایه نیز چنین است. به طور خلاصه

۷.۳.۴ قضیه. فضای متریک (X,d) فشرده است فقط و فقط وقتی که هر پوشش باز آن مانند $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ متشکل از عناصر پایهٔ X، زیرپوششی متناهی داشته باشد. ■

اما نتیجهٔ جالب‌تر زیر قابل توجه است.

در دنیا سه نوع ریاضیدان وجود دارد: آن‌هایی که شمردن بلدند و آن‌هایی که شمردن بلد نیستند!

۸.۳.۴ نتیجه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد که در اصل دوم شمارایی صدق می‌کند. در این صورت X فشرده است فقط و فقط وقتی که هر پوشش باز شمارا از آن مانند $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دارای زیرپوششی متناهی باشد.

برهان. چون در این حالت X پایهٔ شمارا دارد حکم واضح است. ■

اکنون آماده‌ایم صورت‌های معادل مختلف فشردگی را ارائه دهیم. اجازه دهید از ابتدا شروع کنیم.

۹.۳.۴ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد که در اصل دوم شمارایی صدق می‌کند و هر زیرمجموعهٔ نامتناهی X در X نقطهٔ حدی دارد. در این صورت X فشرده است.

برهان. به برهان خلف فرض کنیم X فشرده نباشد. بنابر حکم فوق پوششی شمارا و باز مانند $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ برای X موجود است که هیچ زیرپوشش متناهی ندارد.

چون G_1 مجموعهٔ X را نمی‌پوشاند پس x_1 ی در X هست که در G_1 نیست. و چون $G_1 \cup G_2$ مجموعهٔ X را نمی‌پوشاند پس x_2 یی در X هست که در $G_1 \cup G_2$ نیست و می‌توان این x_2 را متمایز با x_1 اختیار کرد چون در حقیقت $X \setminus (G_1 \cup G_2)$ نامتناهی است، زیرا در غیر این صورت X توسط تعدادی متناهی عضو پوشش پوشیده خواهد شد. بنابراین به طور استقرایی می‌توانیم دنبالهٔ $\{x_n\}$ در X را بسازیم که جملات آن دو به دو متمایزند و به علاوه $x_n \notin \cup_{i=1}^{n} G_i$. حال مجموعهٔ

$$A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

مجموعه‌ای نامتناهی در X است و لذا باید نقطه‌ای حدی مانند x در X داشته باشد.

اما $x \in X \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} G_n$ و لذا $n_0 \in \mathbb{N}$ ی موجود است که $x \in G_{n_0}$. طبق تعریف نقطهٔ حدی باید $A \cap G_{n_0}$ نامتناهی باشد و در نتیجه اندیسی مانند $n \in \mathbb{N}$ موجود است که $n > n_0$ و نیز $x_n \in A \cap G_{n_0}$. اما می‌دانیم

$$x_n \notin G_1 \cup \ldots \cup G_{n_0} \cup \ldots \cup G_n$$

که تناقض است. ■

۱۰.۳.۴ قضیه. فضای متریک (X,d) فشرده است فقط و فقط وقتی که هر دنبالهٔ آن زیردنباله‌ای همگرا داشته باشد.

برهان. فرض کنیم X فشرده و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در آن باشد. اگر

$$A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

مجموعه‌ای متناهی باشد آن گاه طبق اصل لانه کبوتری دنبالهٔ $\{x_n\}$ باید دارای زیردنباله‌ای ثابت باشد که به وضوح همگراست. اما اگر A نامتناهی باشد، آن گاه A زیرمجموعه‌ای نامتناهی از فضای X است و چون X فشرده است طبق قضیهٔ ۱.۳.۴ نقطه‌ای حدی خواهد داشت که بنابر قضیهٔ ۱۱.۲.۲ حد زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ خواهد بود.

بالعکس، فرض کنیم هر دنباله در X زیردنباله‌ای همگرا داشته باشد. چون هر دنبالهٔ همگرا کوشی است، پس در این فضا هر دنباله دارای زیردنباله‌ای کوشی است و بنابر قضیهٔ ۶.۳.۴ فضای X به طور کلی کراندار است. لذا بنابر نتیجهٔ ۴.۳.۴ فضای X در اصل دوم شمارایی صدق می‌کند و نتیجهٔ ۸.۳.۴ نشان می‌دهد که فشرده بودن X معادل این است که هر پوشش باز شمارا از آن زیرپوشش متناهی داشته باشد. حال اگر X فشرده نباشد آن گاه پوشش باز شمارایی مانند $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ از X موجود است که زیرپوشش متناهی ندارد و استدلال قضیهٔ فوق به طور مشابه دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ را به دست می‌دهد که زیردنباله‌ای همگرا ندارد و این متناقض با فرض است. ■

۱۱.۳.۴ قضیه. فضای متریک (X, d) فشرده است فقط و فقط وقتی که به طور کلی کراندار و تام باشد.

برهان. فرض کنیم X فشرده باشد. واضح است که X به طور کلی کراندار است. حال اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی در X باشد بنابر قضیهٔ فوق زیردنباله‌ای همگرا دارد و بنابر قضیهٔ ۲۷.۲.۲ خود دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگراست، پس X تام است.

بالعکس، اگر X به طور کلی کراندار و تام باشد و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X، آن گاه بنابر قضیهٔ ۶.۳.۴ دنبالهٔ $\{x_n\}$ زیردنباله‌ای کوشی دارد که با توجه به تام بودن X این زیردنباله همگراست و لذا بنابر قضیهٔ ۱۰.۳.۴ فضای X فشرده می‌باشد. ■

قضیهٔ زیر بسیار بهتر از قضیهٔ ۸.۳.۴ می‌باشد چرا که بدون فرض شمارای دوم بودن فضا همان حکم را به دست می‌دهد.

۱۲.۳.۴ قضیه. فضای متریک (X,d) فشرده است فقط و فقط وقتی که هر پوشش باز و شمارا برای آن زیرپوشش متناهی داشته باشد.

برهان. اگر X فشرده باشد آن گاه بنابر تعریف فشردگی، هر پوشش باز شمارای آن زیرپوشش متناهی دارد.

بالعکس، فرض کنیم هر پوشش باز شمارا برای X زیرپوششی متناهی داشته باشد. نشان می‌دهیم هر دنباله مانند $\{x_n\}$ در X زیردنباله‌ای همگرا دارد. مجموعهٔ

$$A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم

$$G = \cup_{n=1}^{\infty} N_{\frac{1}{n}}(x_n).$$

قرار می‌دهیم $H = \bar{G}^c$. بنابراین H باز است و داریم

$$X \subseteq (\cup_{n=1}^{\infty} N_{\frac{1}{n}}(x_n)) \cup H.$$

لذا زیرپوششی متناهی از این پوشش شمارا وجود دارد و مثلاً می‌توان نوشت

$$X \subseteq (\cup_{i=1}^{M} N_{\frac{1}{n_i}}(x_{n_i})) \cup H$$

و در نتیجه

$$A \subseteq X \subseteq (\cup_{i=1}^{M} N_{\frac{1}{n_i}}(x_{n_i})) \cup H.$$

حال اگر بی‌نهایت نقطه از A در یکی از $N_{\frac{1}{n_i}}(x_{n_i})$ ها باشد آن گاه زیردنباله‌ای همگرا به x_{n_i} را تشکیل خواهند داد و در غیر این صورت از مرتبه‌ای مانند L به بعد باید داشته باشیم

$$x_n \in H = \bar{G}^c, \qquad n \geq L.$$

بنابراین $x_L \in \bar{G}^c$ و لذا $x_L \notin \bar{G}$. اما می‌دانیم

$$x_L \in N_{\frac{1}{L}}(x_L) \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} N_{\frac{1}{n}}(x_n) \subseteq \bar{G}.$$

این تناقض نشان می‌دهد که $\{x_n\}$ باید زیردنباله‌ای همگرا داشته باشد و لذا بنابر قضیهٔ ۱۰.۳.۴ فضای X فشرده است. ■

حال به سادگی با توجه به قضایای ۱.۳.۴ و ۹.۳.۴ و قضیهٔ فوق می‌توان گفت

۱۳.۳.۴ قضیه. فضای متریک (X, d) فشرده است فقط و فقط وقتی که هر زیرمجموعهٔ نامتناهی از X در X نقطهٔ حدی داشته باشد. ■

در حالت کلی این مفاهیم در فضاهای توپولوژیک تعریف می‌شوند و لزوماً معادل فشردگی نیستند. اما همان طور که دیدیم در فضاهای متریک همگی این شرایط، معادل فشردگی هستند.

هر فضای متریک به طور کلی کراندار پیش‌فشرده[۱۰] نامیده می‌شود.

اگر X دارای این خاصیت باشد که هر دنبالهٔ آن زیردنباله‌ای همگرا داشته باشد آن گاه این فضا فشردهٔ دنباله‌ای[۱۱] نامیده می‌شود.

---

[۱۰] precompact

[۱۱] sequentially compact

اگر X دارای این خاصیت باشد که هر پوشش باز شمارای آن زیرپوشش متناهی داشته باشد، به طور شمارا فشرده[۱۲] نامیده می‌شود.
اگر X دارای این خاصیت باشد که هر زیرمجموعهٔ نامتناهی آن نقطهٔ حدی داشته باشد، به طور شمارا فشردهٔ ضعیف[۱۳] نامیده می‌شود.
لذا تاکنون اثبات کرده‌ایم که فشردگی، فشردهٔ دنباله‌ای بودن، به طور شمارا فشردگی، به طور شمارا فشردگی ضعیف و نیز پیش‌فشرده و تام بودن در فضاهای متریک (و البته برای زیرمجموعه‌های فضاهای متریک) با هم معادلند. اما هنوز هم می‌توان صورت‌های معادل دیگری برای فشردگی ارائه داد.

۱۴.۳.۴ تعریف. گوییم خانوادهٔ $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ خاصیت مقطع متناهی[۱۴] دارد هرگاه اشترک هر زیرخانوادهٔ متناهی آن ناتهی باشد. همچنین $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ خاصیت مقطع کل[۱۵] دارد هرگاه اشتراک کل اعضای خانواده ناتهی باشد. ♣

۱۵.۳.۴ قضیه. فضای متریک (X,d) فشرده است فقط و فقط وقتی که هر خانوادهٔ با خاصیت مقطع متناهی از مجموعه‌های بستهٔ آن مانند $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ خاصیت مقطع کل داشته باشد.

برهان. فرض کنیم X فشرده باشد و $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های بسته در X با خاصیت مقطع متناهی باشد. قرار می‌دهیم $G_\alpha = F_\alpha^c$. چون F_α بسته است پس G_α باز است و اگر $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ خاصیت مقطع کل نداشته باشد آن گاه

$$\cap_{\alpha\in\mathbb{I}} F_\alpha = \phi$$

---

[۱۲] countably compact
[۱۳] weak countably compace
[۱۴] finite intersection property
[۱۵] total intersection property

و لذا

$$\cup_{\alpha\in\mathbb{I}}G_\alpha = \cup_{\alpha\in\mathbb{I}}F_\alpha^c = \phi^c = X.$$

پس $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ پوشش بازی برای X است و چون X فشرده است لذا α_1، …، α_n ی در $\mathbb{I}$ موجودند به قسمی که

$$X \subseteq \cup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$$

و در نتیجه

$$\cap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \cap_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}^c = (\cup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i})^c \subseteq X^c = \phi,$$

که با خاصیت مقطع متناهی داشتن خانوادهٔ $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ در تناقض است.

بالعکس، فرض کنیم شرط مذکور در قضیه برقرار باشد و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد. دنبالهٔ $\{T_n\}$ را که

$$T_n = \{x_k \mid k \geq n\}$$

در نظر می‌گیریم. در حقیقت $\{T_n\}$ دم دنبالهٔ $\{x_n\}$ است و داریم

$$T_1 \supseteq T_2 \supseteq \dots$$

بنابراین خانوادهٔ $\{\overline{T_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ از مجموعه‌های بسته خاصیت مقطع متناهی دارد و لذا باید خاصیت مقطع کل داشته باشد، یعنی

$$\cap_{n=1}^{\infty}\overline{T_n} \neq \phi.$$

پس x ی در X هست که $x \in \cap_{n=1}^{\infty}\overline{T_n}$. ادعا می‌کنیم $\{x_n\}$ زیردنباله‌ای همگرا به x دارد. به ازای هر $n \in\mathbb{N}$ چون $x \in \overline{T_n}$ پس هر همسایگی از x و بالاخص همسایگی $N_{\frac{1}{n}}(x)$ باید T_n را قطع کند، یعنی x_{n_k} یی در T_n هست که

$$0 \leq d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{n}.$$

لذا قضیهٔ فشار نتیجه می‌دهد که زیردنبالهٔ $\{x_{n_k}\}$ از دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا به x می‌باشد. پس $\{x_n\}$ زیردنباله‌ای همگرا دارد و بنابر قضیهٔ ۱۰.۳.۴ فضای X فشرده است. ■

قضیهٔ فوق گاهی اوقات قضیهٔ اشتراکی کانتور[۱۶] نامیده می‌شود.

۱۶.۳.۴ نتیجه. در هر فضای فشرده، هر خانوادهٔ ناتهی از مجموعه‌های ناتهی بسته و تودرتو خاصیت مقطع کل دارد. ■

این همان حکمی است که در حالت فضای اقلیدسی آن را قضیهٔ جعبهٔ چینی نامیدیم.

صورت‌های معادل دیگری برای فشردگی به وضوح توسط تورها به دست می‌آید.

۱۷.۳.۴ قضیه. فضای متریک (X,d) فشرده است فقط و فقط وقتی که هر تور آن زیرتوری همگرا داشته باشد. ■

دیدیم که هر تابع حقیقی مقدار پیوسته روی فضایی فشرده، کراندار است. فضایی که هر تابع پیوستهٔ حقیقی مقدار روی آن کراندار باشد شبه‌فشرده[۱۷] نامیده می‌شود.

در حقیقت راه حلی شگفت انگیز برای این قسمت قضیه وجود دارد که چون در حاشیه نمی‌گنجد آن را برای تمرین باقی گذاشته‌ایم!

۱۸.۳.۴ قضیه. فضای متریک (X,d) فشرده است فقط و فقط وقتی که شبه‌فشرده باشد.

برهان. اگر X فشرده باشد آن گاه بنابر قضیهٔ ۲۲.۲.۴ شبه‌فشرده خواهد بود.

بالعکس، فرض کنیم X شبه‌فشرده باشد. بنابر تمرین ۱۳.۵.۴ فضای X به طور کلی کراندار است. پس کافی است نشان دهیم که X تام می‌باشد. به برهان خلف اگر چنین نباشد، آن گاه دنباله‌ای کوشی

---

[۱۶] Cantor's Intersection Theorem

[۱۷] pseudocompact

مانند $\{x_n\}$ در X هست که همگرا نیست و لذا تتمیم X یعنی $\tilde{X}$ شامل نقطه‌ای مانند $x_\circ$ است که $x_\circ \notin X$ و به علاوه $x_n \to x_\circ$. بنابراین $\tilde{d}(x, x_\circ)$ هیچ گاه برای $x \in X$ برابر صفر نخواهد شد و لذا تابع

$$g : (X, d) \to (\mathbb{R}, |.|)$$
$$g(x) = \frac{۱}{\tilde{d}(x, x_\circ)}$$

تابعی پیوسته روی X خواهد بود. پس g کراندار است و لذا عددی مانند M موجود است به قسمی که به ازای هر $x \in X$ داریم

$$\frac{۱}{\tilde{d}(x, x_\circ)} = |\frac{۱}{\tilde{d}(x, x_\circ)}| \leq M$$

و لذا به ازای هر $x \in X$ داریم

$$\tilde{d}(x, x_\circ) \geq \frac{۱}{M}.$$

این مطلب نشان می‌دهد که $\{x_n\}$ نمی‌تواند به $x_\circ$ همگرا باشد. بنابراین فرض خلف باطل است، یعنی $\{x_n\}$ باید در X همگرا باشد. پس X به طور کلی کراندار و تام و لذا فشرده است. ■

زیرمجموعهٔ A از فضای متریک X را به طور نسبی فشرده [۱۸] می‌نامند هرگاه $\bar{A}$ فشرده باشد. اگر X تام باشد، به طور نسبی فشرده بودن معادل به طور کلی کراندار بودن است. چون اگر A به طور نسبی فشرده باشد آن گاه $\bar{A}$ فشرده و لذا به طور کلی کراندار است، پس A به طور کلی کراندار می‌باشد. و بالعکس، اگر A به طور کلی کراندار باشد آن گاه $\bar{A}$ نیز به طور کلی کراندار خواهد بود و چون $\bar{A}$ در فضای تام X بسته است پس تام است. لذا $\bar{A}$ به طور کلی کراندار و تام است و در نتیجه فشرده می‌باشد.

---

[۱۸] relatively compact

حال که صورت‌های معادل فشردگی ارائه شد، با اثبات چند حکم، کارآمد بودن آن‌ها را نشان خواهیم داد. البته تاکنون در خود این قضایا از این صورت‌های معادل بارها استفاده کرده‌ایم و توانایی آن‌ها را مشاهده نموده‌ایم.

به عنوان اولین حکم اثبات می‌کنیم که مجموعه‌های فشرده قطر خود را می‌پذیرند.

۱۹.۳.۴ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک و K زیرمجموعه‌ای فشرده از آن باشد. در این صورت K قطر خود را می‌پذیرد. به عبارت دیگر $x_\circ$ و $y_\circ$ ی در K موجودند که

$$\operatorname{diam}K = d(x_\circ, y_\circ).$$

برهان. بنابر قضیهٔ ۱۵.۲.۴ مجموعهٔ K کراندار است و لذا $\operatorname{diam}K$ موجود می‌باشد. اما

$$\operatorname{diam}K = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in K\},$$

و چون سوپریمم هر زیرمجموعهٔ فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ یک نقطهٔ چسبیدگی برای آن است، بنابر قضیهٔ ۱۱.۲.۲ دنباله‌ای مانند $\{d(x_n, y_n)\}$ موجود است که $x_n, y_n \in K$ و

$$d(x_n, y_n) \to \operatorname{diam}K \qquad (*)$$

اما $\{x_n\}$ دنباله‌ای در مجموعهٔ فشردهٔ K است و لذا زیردنباله‌ای همگرا مانند $\{x_{n_k}\}$ دارد. فرض کنیم $x_{n_k} \to x_\circ \in K$. حال دنبالهٔ $\{y_{n_k}\}$ نیز زیردنباله‌ای همگرا مانند $\{y_{n_{k_l}}\}$ دارد. فرض کنیم $y_{n_{k_l}} \to y_\circ \in K$. چون دنبالهٔ $\{x_{n_k}\}$ همگرا به $x_\circ$ است پس هر زیردنبالهٔ آن نیز به $x_\circ$ همگراست و لذا

$$x_{n_{k_l}} \to x_\circ,$$

$$y_{n_{k_l}} \to y_\circ.$$

اما اکنون لم ۳۰.۲.۲ نتیجه می‌دهد که

$$d(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}) \to d(x_\circ, y_\circ)$$

و چون حد منحصر به فرد است، با توجه به (*) داریم

$$d(x_\circ, y_\circ) = \mathrm{diam}K,$$

که $x_\circ, y_\circ \in K$. پس K قطر خود را می‌پذیرد. ■

در قضیهٔ ۲۳.۲.۴ دیدیم که هر زیرمجموعهٔ فشرده از یک فضای متریک فاصلهٔ خود تا هر نقطه از آن فضا را می‌پذیرد. همچنین در مثال ۲۴.۲.۴ گفتیم که این شرط را نمی‌توان با شرط ضعیف‌تر بسته بودن عوض کرد. اما در برخی فضاها این کار امکان‌پذیر است.

۲۰.۳.۴ تعریف. گوییم فضای متریک (X,d) خاصیت هاینه-بُرل[۱۹] دارد هرگاه فشرده بودن در این فضا معادل بسته و کراندار بودن باشد. ♣

در قضیهٔ هاینه-بُرل دیدیم که فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ (و نیز $\mathbb{R}^k$) خاصیت هاینه-بُرل دارد. اکنون می‌توانیم دلیل ساده‌تری برای این مطلب بیاوریم. برای آن که نشان دهیم هر مجموعهٔ بسته و کراندار در $\mathbb{R}$ فشرده است کافی است اثبات کنیم که هر بازهٔ بسته مانند $[a,b]$ فشرده است. اما هر بازهٔ کراندار به طور کلی کراندار است و اگر بسته باشد، چون فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ تام است، تام نیز خواهد شد. پس هر بازهٔ بسته به طور کلی کراندار و تام است و لذا فشرده می‌باشد.

۲۱.۳.۴ قضیه. فرض کنیم (X,d) خاصیت هاینه-بُرل داشته باشد و $x_\circ$ نقطهٔ دلخواهی از X باشد. در این صورت هر مجموعهٔ بسته مانند F فاصلهٔ خود تا $x_\circ$ را می‌پذیرد. به عبارت دیگر x ی در F هست که

$$d(x_\circ, F) = d(x_\circ, x).$$

---
[۱۹] Heine-Borel property

برهان. نقطه‌ای مانند a در F انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $r_\circ = d(x_\circ, a)$. در این صورت چون همسایگی‌های بسته مجموعه‌هایی بسته می‌باشند و اشتراک دو مجموعهٔ بسته مجموعه‌ای بسته است، لذا $K = N_{r_\circ}(x_\circ) \cap F$ بسته است. از طرفی

$$K = N_{r_\circ}(x_\circ) \cap F \subseteq N_{r_\circ}(x_\circ),$$

و چون $N_{r_\circ}(x_\circ)$ کراندار است، پس K نیز کراندار می‌باشد. لذا K بسته و کراندار است و چون X خاصیت هاینه-بُرل دارد K فشرده می‌باشد. بنابراین با توجه به قضیهٔ ۲۳.۲.۴ نقطه‌ای مانند $x \in K \subseteq F$ هست که

$$d(x_\circ, K) = d(x_\circ, x).$$

اما $d(x_\circ, K)$ همان $d(x_\circ, F)$ می‌باشد. ■

گرچه حکم فوق تحت شرط خاصیت هاینه-بُرل داشتن X اثبات شد ولی این شرط لازم نیست. مثلاً فضاهای گسسته خاصیت هاینه-بُرل ندارند ولی برای هر $x_\circ$ در فضا و هر F بسته در آن داریم

$$d(x_\circ, F) = \circ \text{ یا } ۱,$$

که در هر حالت این فاصله در F پذیرفته می‌شود.

نکتهٔ جالب‌تر قضیهٔ بعدی است.

۲۲.۳.۴ قضیه. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک و $K_۱$ و $K_۲$ زیرمجموعه‌های فشرده‌ای از آن باشند. در این صورت $K_۱$ و $K_۲$ فاصلهٔ خود را می‌پذیرند. به عبارت دیگر $x_\circ$ ی در $K_۱$ و نیز $y_\circ$ ی در $K_۲$ موجودند به قسمی که

$$d(K_۱, K_۲) = d(x_\circ, y_\circ).$$

برهان. چون

$$d(K_۱, K_۲) = \inf\{d(x,y) \mid x \in K_۱, y \in K_۲\}$$

پس $d(K_۱, K_۲)$ یک نقطهٔ چسبیدگی برای مجموعهٔ فوق‌الذکر است و لذا بنابر قضیهٔ ۱۱.۲.۲ دنباله‌ای مانند $\{d(x_n, y_n)\}$ هست که $x_n \in K_۱$، و $y_n \in K_۲$

$$d(x_n, y_n) \to d(K_۱, K_۲).$$

حال چون $K_۱$ فشرده است پس $\{x_n\}$ زیردنباله‌ای همگرا مانند $\{x_{n_k}\}$ دارد و چون $K_۲$ فشرده است پس $\{y_{n_k}\}$ زیردنباله‌ای همگرا مانند $\{y_{n_{k_l}}\}$ دارد. اکنون فرض کنیم که $x_{n_k} \to x_\circ \in K_۱$ و $y_{n_{k_l}} \to y_\circ \in K_۲$. پس

$$x_{n_{k_l}} \to x_\circ,$$

$$y_{n_{k_l}} \to y_\circ,$$

و لذا

$$d(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}) \to d(x_\circ, y_\circ).$$

بنابراین $d(K_۱, K_۲) = d(x_\circ, y_\circ)$ که $x_\circ \in K_۱$ و $y_\circ \in K_۲$. ■

حتی اگر یکی از مجموعه‌ها بسته باشد ولی فشرده نباشد حکم درست نیست. مثلاً در مثال ۲۴.۲.۴ دیدیم که مجموعهٔ $\{۲\}$ فشرده و مجموعهٔ $[\circ, \sqrt{۲}] \cap \mathbb{Q}$ بسته است ولی فاصلهٔ این دو مجموعه پذیرفته نمی‌شود.

۲۳.۳.۴ قضیه. فرض کنیم K زیرمجموعه‌ای فشرده و F زیرمجموعه‌ای بسته از فضای متریک (X, d) باشد و $K \cap F = \phi$. در این صورت

$$d(K, F) > \circ.$$

برهان. به برهان خلف اگر $d(K,F)=0$ آن گاه دنباله‌ای مانند $\{d(x_n,y_n)\}$ موجود است که $x_n\in K$، $y_n\in F$ و

$$d(x_n,y_n)\to 0.$$

اما K فشرده است و لذا $\{x_n\}$ زیردنباله‌ای مانند $\{x_{n_k}\}$ دارد که همگرا به نقطه‌ای مانند x_0 از K است و داریم

$$d(x_0,y_n)\to 0.$$

پس در فضای X داریم

$$y_n\to x_0,$$

و لذا بنابر قضیهٔ ۱۱.۲.۲ نتیجه می‌شود که $x_0\in\bar{F}=F$. پس $x_0\in K\cap F$ که متناقض با فرض مجزا بودن K و F می‌باشد. ■

فشرده بودن K شرطی اساسی است و نمی‌توان همین حکم را برای دو مجموعهٔ بسته بیان کرد. مثال زیر را ببینید.

۲۴.۳.۴ مثال. در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ فرض کنیم

$$F_1=\{n\mid n\in\mathbb{N},n\geq 2\},$$
$$F_2=\{n+\frac{1}{n}\mid n\in F_1\}.$$

در این صورت F_1 و F_2 بسته‌اند و $F_1\cap F_2=\phi$ ولی

$$d(F_1,F_2)=0.$$

زیرا دنبالهٔ $\{|n-(n+\frac{1}{n})|\}$ که در مجموعهٔ

$$\{|a-b|\mid a\in F_1,b\in F_2\}$$

قرار دارد همگرا به صفر است. ♠

۲۵.۳.۴ نتیجه. در هر فضای متریک مانند (X,d) هر دو مجموعهٔ بستهٔ مجزا مانند $F_۱$ و $F_۲$ را می‌توان توسط دو مجموعهٔ باز مجزا جدا کرد. به عبارت دیگر دو مجموعهٔ باز و مجزا مانند $G_۱$ و $G_۲$ موجودند به قسمی که

$$F_۱ \subseteq G_۱ \quad \text{و} \quad F_۲ \subseteq G_۲.$$

برهان. چون X فشرده و $F_۱$ و $F_۲$ بسته‌اند بنابر قضیهٔ ۱۲.۲.۴ این مجموعه‌ها فشرده می‌باشند و لذا بنابر قضیهٔ ۲۲.۳.۴ داریم

$$d(F_۱,F_۲) = \min\{d(x,y) \mid x \in F_۱, y \in F_۲\} > ۰,$$

چون $F_۱$ و $F_۲$ مجزا هستند. حال فرض کنیم

$$\delta = \frac{۱}{۴} d(F_۱,F_۲) > ۰.$$

در این صورت بنابر قضیهٔ ۱۷.۳.۱ مجموعه‌های

$$G_۱ = N_\delta(F_۱),$$

$$G_۲ = N_\delta(F_۲).$$

باز هستند و

$$F_۱ \subseteq G_۱ \quad \text{و} \quad F_۲ \subseteq G_۲.$$

اما $G_۱ \cap G_۲ = \phi$. چون اگر به برهان خلف z ی در $G_۱ \cap G_۲$ موجود باشد آن گاه

$$d(z,F_۱) < \delta, \qquad d(z,F_۲) < \delta,$$

و لذا برای این $\delta > ۰$ طبق خاصیت مشخصهٔ اینفیمم x ی در $F_۱$ و نیز y یی در $F_۲$ موجود است که

$$d(z,x) < d(z,F_۱) + \frac{\delta}{۲} < \delta + \frac{\delta}{۲},$$

$$d(z,y) < d(z,F_۲) + \frac{\delta}{۲} < \delta + \frac{\delta}{۲}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y) < ۲\delta + \delta = ۳\delta \\ &< d(F_۱,F_۲) \leq d(x,y), \end{aligned}$$

که تناقض است. ■

قضیهٔ فوق را در توپولوژی به این صورت بیان می‌کنند که فضاهای متریک فشرده، نرمال[۲۰] هستند.

در قضیهٔ ۸.۲.۴ دیدیم که برای هر دنبالهٔ همگرا مانند $\{x_n\}$ که مثلاً $x_n \to x$ مجموعهٔ

$$K = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

فشرده است. اکنون این مطلب به نظر بسیار روشن می‌آید، چون هر دنباله در این مجموعه زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ یا دنباله‌ای ثابت را در خود دارد که به وضوح همگرا می‌باشد.

اما در حالتی که $\{x_n\}$ همگرا نباشد هیچ یک از مجموعه‌های $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$، $\overline{\{x_n\}}$ و $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \overline{\{x_n\}}$ لزوماً فشرده نخواهند بود. مثلاً $\mathbb{Q}$ را می‌توان دنباله‌ای در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ انگاشت که $\bar{\mathbb{Q}}$ یعنی مجموعهٔ حدود زیردنباله‌ای دنبالهٔ $\mathbb{Q}$ برابر کل $\mathbb{R}$ است ولی هیچ یک از مجموعه‌های $\mathbb{Q}$، $\bar{\mathbb{Q}}$ و $\mathbb{Q} \cup \bar{\mathbb{Q}}$ فشرده نیستند.


Henri Léon Lebesgue (1875-1941)

این بخش را با قضیه‌ای معروف به لم عدد لِبِگ[۲۱] به پایان می‌بریم.

۲۶.۳.۴ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضایی فشرده باشد. در این صورت به ازای هر پوشش باز X مانند $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ عددی مانند $\varepsilon_۰ > ۰$

---

[۲۰] normal

[۲۱] Lebesgue's Number Lemma

موجود است به قسمی که به ازای هر $x \in X$، همسایگی $N_{\varepsilon_\circ}(x)$ مشمول در یکی از G_α ها خواهد بود.

برهان. چون X فشرده است α_1، ...، α_n ی در $\mathbb{I}$ موجودند که

$$X \subseteq \cup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \qquad (*)$$

حال توابع

$$f_i : (X, d) \to (\mathbb{R}, |.|)$$

$$f_i(x) = d(x, G^c_{\alpha_i})$$

برای $1 \leq i \leq n$ پیوسته‌اند و لذا تابع

$$f : (X, d) \to (\mathbb{R}, |.|)$$

$$f(x) = \max_{1 \leq i \leq n} f_i(x)$$

نیز پیوسته است. در نتیجه بنابر قضیهٔ ۲۲.۲.۴ تابع f مینیمم خود را می‌پذیرد. یعنی $x_\circ$ ی هست که به ازای هر $x \in X$ داریم

$$f(x_\circ) \leq f(x).$$

حال اگر $f(x_\circ) = \circ$ آن گاه

$$\max_{1 \leq i \leq n} f_i(x_\circ) = \circ$$

و لذا

$$d(x_\circ, G^c_{\alpha_i}) = \circ, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

و چون $G^c_{\alpha_i}$ بسته است و X فشرده می‌باشد، پس $G^c_{\alpha_i}$ فشرده است و در نتیجه بنابر قضیهٔ ۲۳.۲.۴ این فاصله باید پذیرفته شود، یعنی $x_\circ \in G^c_{\alpha_i}$ و لذا

$$x_\circ \notin \cup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i},$$

که متناقض با (*) است. پس $f(x_\circ) > \circ$. قرار می‌دهیم

$$\varepsilon_\circ = \frac{f(x_\circ)}{۲} > \circ.$$

در این صورت به ازای هر $x \in X$ داریم

$$\varepsilon_\circ < f(x) = \max_{۱\leq i\leq n} f_i(x),$$

و لذا $i_\circ$ی هست که $۱ \leq i_\circ \leq n$ و به علاوه

$$\varepsilon_\circ < f_{i_\circ}(x) = d(x, G^c_{\alpha_{i_\circ}}).$$

بنابراین برای هر y اگر $d(x,y) < \varepsilon_\circ$ آن گاه

$$d(x,y) < d(x, G^c_{\alpha_{i_\circ}}),$$

و لذا $y \notin G^c_{\alpha_{i_\circ}}$. چون در غیر این صورت باید داشته باشیم

$$d(x, G^c_{al_{i_\circ}}) \leq d(x,y)$$

که تناقض است. بنابراین $y \in G_{\alpha_{i_\circ}}$ و لذا $N_{\varepsilon_\circ}(x) \subseteq G_{\alpha_{i_\circ}}$. ■

عدد $\varepsilon_\circ$ مذکور در لم فوق عدد پوششی لُبِگ[۲۲] نامیده می‌شود.

Alfréd Haar (1885-1933)

در همین جا این بخش را به پایان می‌بریم. گرچه هنوز هم مطالب زیادی برای گفتن باقی مانده است، اما مجبوریم چیزهایی را هم برای تمرین باقی بگذاریم!

۴.۴ مثال‌ها

تعریف مجموعه‌های فشرده در فضاهای متریک کمک می‌کند بتوانیم مثال‌های جالبی را در این بخش ارائه دهیم. این مثال‌ها در درک

[۲۲] Lebesgue's covering number

بهتر مفاهیم فضاهای متریک بسیار مؤثر است و تحقیق درستی احکام ارائه شده باعث می‌شود کلیهٔ مفاهیم مطرح شده در این کتاب مجدداً مرور گردد. واضح است در این بخش اشارهٔ بسیار مجملی به مثال‌ها خواهیم داشت. باید پذیرفت که اینک آن قدر در درک مطالب مهارت حاصل شده است که توضیح مطالب جزئی با دقتی موشکافانه همانند بخش‌های ابتدایی کتاب، ملال‌آور جلوه خواهد کرد.

۱.۴.۴ مثال. مجموعهٔ کانتور در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ زیرمجموعه‌ای ناشمارا، بسته و کراندار با درون تهی است که بی‌کاست نیز می‌باشد. لذا مجموعهٔ کانتور زیرمجموعه‌ای فشرده با درون تهی از $\mathbb{R}$ است. ♠

۲.۴.۴ مثال. تتمیم فضای اعداد p-ادیک فشرده نیست. اما در این فضا زیرمجموعهٔ اعداد صحیح p-ادیک، فشرده می‌باشد. به علاوه هر نقطه در این فضا یک همسایگی دارد که بستار آن فشرده است. ♠

۳.۴.۴ مثال. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک فشرده باشد. می‌دانیم هر تابع پیوسته مانند $f:(X,d)\to(X,d)$ کراندار است یعنی $f(X)$ زیرمجموعه‌ای کراندار از X می‌باشد، چون X فشرده و لذا $f(X)$ فشرده و در نتیجه کراندار است. بنابراین توابع پیوسته از X به X زیرفضایی از فضای $\mathcal{B}(X,X)$ متشکل از توابع کراندار از X به X با متر

$$d_\infty(f,g)=\sup\{d(f(x),g(x))\mid x\in X\},\qquad f,g\in\mathcal{B}(X,X)$$

می‌باشدکه آن را با $\mathcal{C}(X,X)$ نمایش می‌دهیم. حال فرض کنیم $\mathrm{Iso}(X,X)$ زیرفضای همهٔ توابع حافظ فاصله از $\mathcal{C}(X,X)$ باشد. این زیرفضا، زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از $\mathcal{C}(X,X)$ است. ♠

۴.۴.۴ مثال. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $\mathcal{H}$ خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌های بسته و کراندار از X. می‌دانیم که

$$\sigma(A,B)=\max\{\tau(A,B),\tau(B,A)\}, \qquad A,B\in\mathcal{H}$$

که در آن τ تابع خروج از مرکز است یک متر روی $\mathcal{H}$ است که آن را متر هاسدورف نامیدیم. تابع $\varphi:(X,d)\to(\mathcal{H},\sigma)$ که به صورت $\varphi(x)=\{x\}$ تعریف می‌شود تابعی حافظ فاصله است که X را در $\mathcal{H}$ می‌نشاند. همچنین توابع $\cup$ و $\cap$ از $\mathcal{H}$ به $\mathcal{H}$ پیوسته‌اند. به علاوه X تام (به طور کلی کراندار، فشرده) است هرگاه $\mathcal{H}$ چنین باشد. ♠

۵.۴.۴ مثال. فرض کنیم $\{(X_n,d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای از فضاهای متریک باشد. همچنین فرض کنیم d متری حاصلضربی روی $X=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$. در این صورت X فشرده است فقط و فقط وقتی که همهٔ X_n ها فشرده باشند. ♠

Andrei Nikolaevich Tikhonov (1906-1993)

حکم فوق به قضیهٔ تیخونوف[۲۳] معروف است. نکتهٔ جالب این است که اگر خانوادهٔ مذکور دلخواه باشد هم این حکم درست است و معادل اصل انتخاب می‌باشد!

۶.۴.۴ مثال. فرض کنیم (X,d) فضایی فشرده باشد. در این صورت هر تابع پیوستهٔ مختلط مقدار روی X کراندار است و لذا $BC(X)$ متشکل از کلیهٔ توابع پیوسته خواهد بود. از این رو در این حالت این فضا را با $C(X)$ نمایش می‌دهند. ♠

برای آن که مثال‌های ارائه شده را خوب درک کنید بد نیست سری به فصل‌های قبلی بزنید و مجدداً مطالب قبلی را مرور کنید. اکنون می‌فهمید آنچه قبلاً در مفاهیم مقدماتی برایتان سخت جلوه می‌کرد آن قدرها هم پر هیبت نیست!

[۲۳] Tychonov Theorem

۵.۴ تمرین‌ها

سعی کنید همهٔ تمرین‌های این فصل را با استفاده از همهٔ تعاریف معادل فشردگی حل کنید.

این کار علاوه بر آن که تبحر شما را در حل مسائل بیش‌تر می‌کند، به نوعی تکرار برهان قضایای مربوط به صورت‌های معادل تعریف فشردگی نیز خواهد بود. همچنین این کار باعث می‌شود ترفندهای به کار رفته در قضایا را نه صرفاً به عنوان تکنیکی برای ارائه برهان آن قضایا، بلکه به عنوان شیوه‌ای برای مواجه شدن با مسائل جدید نیز بنگرید.

John Robert Ringrose (1932)

۱.۵.۴ آیا این مطلب درست است که مجموعهٔ نقاط منزوی هر مجموعهٔ فشرده متناهی است؟

۲.۵.۴ فرض کنیم (X, d_1) فضایی فشرده و (Y, d_2) فضای متریک دلخواهی باشد. ثابت کنید اگر d متر حاصلضربی دلخواهی روی $X \times Y$ باشد آن گاه به ازای هر $y \in Y$ و هر مجموعهٔ باز شامل $X \times \{y\}$ در $X \times Y$ مانند U، مجموعهٔ بازی مانند G در Y شامل y هست که $X \times G \subseteq U$.

۳.۵.۴ ثابت کنید $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ پیوسته است فقط و فقط وقتی که بر هر زیرمجموعهٔ فشرده از X مانند K پیوسته باشد.

۴.۵.۴ آیا توابع پیوسته مجموعه‌های فشرده را به فشرده برمی‌گردانند؟

۵.۵.۴ فرض کنیم $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ خانواده‌ای از پایین جهتدار از مجموعه‌های فشرده و ناتهی در فضای متریک (X, d) باشد و

$F = \cap_{\alpha\in\Lambda} F_\lambda$. آیا می‌توان نتیجه گرفت که $F \neq \phi$؟ آیا می‌توان نتیجه گرفت که به ازای هر زیرمجموعهٔ باز مانند G از X که $F \subseteq G$ عددی مانند λ در Λ موجود است که $F_\lambda \subseteq G$؟

۶.۵.۴ فرض کنیم (X,d) فضایی فشرده و $f : (X,d) \to (X,d)$ تابعی حافظ فاصله باشد. ثابت کنید f بروست. نشان دهید اگر به جای شرط فشرده بودن X شرط تام بودن آن را قرار دهیم، حکم لزوماً برقرار نخواهد بود.

۷.۵.۴ فرض کنیم (X,d) فضایی فشرده و $f : (X,d) \to (\mathbb{R},|.|)$ تابعی باشد که به ازای هر $r \in \mathbb{R}$ مجموعهٔ $G_r = \{x \in X \mid f(x) < r\}$ در X باز باشد. ثابت کنید f از بالا کراندار است. آیا این شرط با نیم‌پیوستگی ارتباطی دارد؟ مثالی از یک تابع با شرایط فوق ارائه دهید که از پایین کراندار نباشد.

۸.۵.۴ فرض کنیم $f : (X,d) \to (X,d)$ تابعی پیوسته باشد و $A = \cap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$. ثابت کنید A فشرده و ناتهی است و $f(A) = A$.

۹.۵.۴ فرض کنیم $f(X,d_1) \to (Y,d_2)$ یک تابع، $\overline{f(X)}$ مجموعه‌ای فشرده در Y و نمودار f در فضای حاصلضربی $X \times Y$ فشرده باشد. ثابت کنید f پیوسته است.

۱۰.۵.۴ فرض کنیم $f : (X,d_1) \to (Y,d_2)$ یک تابع و X فضایی فشرده باشد. نشان دهید f پیوسته است فقط و فقط وقتی که $G(f)$ در فضای حاصلضربی $X \times Y$ فشرده باشد.

۱۱.۵.۴ فرض کنیم (X,d_1) فضایی فشرده و f تابعی پیوسته از (X,d_1) به فضای متریک (Y,d_2) باشد. ثابت کنید نمودار f در فضای حاصلضربی $X \times Y$ فشرده است.

۱۲.۵.۴ ثابت کنید A به طور کلی کراندار است فقط و فقط وقتی که $\bar{A}$ چنین باشد.

۱۳.۵.۴ فرض کنیم (X, d) فضایی باشد که به طور کلی کراندار نیست. نشان دهید تابعی پیوسته و غیر کراندار بر X به توی $(\mathbb{R}, |.|)$ وجود دارد.

۱۴.۵.۴ فرض کنیم C زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد و

$$A = \{x + \sin x \mid x \in C\}.$$

اگر C کراندار باشد آیا می‌توان نتیجه گرفت که $\bar{A}$ فشرده است؟

۱۵.۵.۴ ثابت کنید هیچ دنباله‌ای از مجموعه‌های فشرده مانند $\{K_n\}$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ وجود ندارد که اولاً به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $K_n \subseteq \mathbb{Q}$ و ثانیاً به ازای هر زیرمجموعهٔ فشرده مانند K از $\mathbb{Q}$ عددی مانند $n_\circ \in \mathbb{N}$ موجود باشد که $K \subseteq K_{n_\circ}$.

۱۶.۵.۴ فرض کنیم A مجموعهٔ اعدادی در $[\circ, ۱]$ باشد که در بسط اعشاری آن‌ها فقط ۰، ۲ و ۳ آمده است. آیا A فشرده است؟ آیا A بی‌کاست است؟ آیا A شماراست؟

۱۷.۵.۴ ثابت کنید مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ای‌های از درجهٔ حداکثر ۲۰۰۵ در فضای $\mathcal{C}([\circ, ۱])$ با نرم $\|.\|_\infty$ فشرده است. آیا مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ای‌ها در این فضا فشرده است؟

۱۸.۵.۴ فرض کنیم (X, d) فضایی متریک باشد و d متری حاصلضربی روی $X = \prod_{n=۱}^{\infty} X$. ثابت کنید مجموعهٔ $S = \{x \in X \mid x_n = f(x_{n+۱}), \forall n \in \mathbb{N}\}$ در X فشرده است.

۱۹.۵.۴ فضای متریک (X, d) را به طور موضعی فشرده[۲۴] می‌نامیم هرگاه هر $x \in X$ یک همسایگی داشته باشد که بستار آن فشرده باشد. فرض کنیم X به طور موضعی فشرده باشد یا در اصل اول شمارایی صدق کند. ثابت کنید اگر $F \subseteq X$ مجموعه‌ای باشد که به ازای هر مجموعهٔ فشرده مانند K در X مجموعهٔ $F \cap K$ بسته باشد، آن گاه F در X بسته است.

۲۰.۵.۴ ثابت کنید $N_1(0)$ در فضای $C([0, 1])$ با نرم $\|.\|_\infty$ بسته و کراندار است ولی فشرده نیست.

۲۱.۵.۴ فرض کنیم F مجموعه‌ای بسته و K مجموعه‌ای فشرده در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد. ثابت کنید $K + F$ فشرده است. اگر F_1 و F_2 بسته باشند، آیا لزوماً $F_1 + F_2$ بسته است؟

۲۲.۵.۴ فرض کنیم (X, d) فضایی فشرده باشد و $f : (X, d) \to (X, d)$ تابعی باشد که به ازای هر $x, y \in X$

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

نشان دهید f نقطهٔ ثابت دارد. با ذکر یک مثال نشان دهید که شرط فشرده بودن X را نمی‌توان با شرط تام بودن آن عوض کرد.

۲۳.۵.۴ روی $2^{\mathbb{N}}$ متر d را برای دو دنبالهٔ متمایز $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به صورت

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \frac{1}{k}$$

تعریف می‌کنیم که k کوچک‌ترین اندیسی است که این دو دنباله، متفاوت تعریف شده‌اند. ثابت کنید این فضا فشرده است.

---

[۲۴] locally compact

۵

همبندی

۱.۵ مقدمه

Constantin
Carathéodory
(1873-1950)

یکی از مفاهیم مهم دیگر در مبحث فضاهای متریک همبندی می‌باشد. از یک نظر می‌توان همبندی یک فضای متریک را از مفاهیم هندسهٔ فضاهای متریک دانست و از نظر دیگر این مفهوم در شناخت توپولوژیکی فضاهای متریک مفید است.

تعریف همبندی، همان گونه که در مورد تعاریف دیگر این کتاب نیز متذکر شدیم، هم در حل مسأله‌های قبلی به کار می‌آید و هم باعث می‌شود مسائل جدیدی به وجود آیند که خود آن‌ها زمینهٔ پژوهش‌هایی نو خواهد شد. این تعریف باعث ایجاد نسبتی هم‌ارزی روی یک فضای متریک می‌شود که بررسی دسته‌های هم‌ارزی تحت این نسبت جالب و سودمند است.

همبند بودن یک فضای متریک کاملاً به متری که روی آن تعریف شده وابسته است و از مفاهیم ساختاری این فضاها می‌باشد که تحت

همسانریختی حفظ می‌شود. تا کنون مشاهده کرده‌ایم که مفاهیم تعریف شده روی فضاهای متریک در فضاهای گسسته به سادگی بررسی می‌شوند و معمولاً احکامی که در مورد فضاهای گسسته بیان می‌شوند کلی و بدیهی هستند. مثلاً در یک فضای گسسته، مرز هر مجموعه تهی است، هیچ مجموعهٔ چگال سره نداریم، یک دنباله همگراست فقط و فقط وقتی که از مرتبه‌ای به بعد ثابت باشد، یک دنباله کوشی است فقط و فقط وقتی که از مرتبه‌ای به بعد ثابت باشد و بالاخره یک زیرمجموعه فشرده است فقط و فقط وقتی که متناهی باشد. به عبارت دیگر دنبالهٔ همگرا، دنبالهٔ کوشی و زیرمجموعهٔ فشردهٔ نامتناهی نداریم. در این فصل می‌بینیم که در مورد همبندی نیز چنین است، یعنی در فضاهای گسسته مجموعهٔ همبند غیر بدیهی نداریم.

در این فصل مفهوم همبندی و صورت‌های معادل آن را معرفی خواهیم کرد و به بررسی ارتباط این مفهوم با مفاهیم قبلی مخصوصاً پیوستگی و فشردگی می‌پردازیم. البته سنت معمول خود در این کتاب را رعایت می‌کنیم و مفاهیم مقدماتی و پیشرفته را در بخش‌های جداگانه‌ای دسته‌بندی خواهیم کرد و با ارائه مثال حدس‌های مختلف را رد می‌کنیم یا ایده‌ای برای اثبات آن حدس‌ها خواهیم یافت. به هر حال یا این فصل واقعاً ساده است یا شما تبحر لازم (ولی نه کافی!) را برای درک مفاهیم فضاهای متریک پیدا کرده‌اید. البته احتمال وضعیت دوم بیش‌تر است.

۲.۵ مجموعه‌های منفک و مؤلفه‌ها

کسانی که با نظریهٔ گراف آشنایی دارند با شنیدن کلمهٔ همبندی وجود نوعی مسیر بین دو نقطه را تصور می‌کنند و از این رو شاید یک تعریف مناسب برای فضای همبند این باشد که بتوان از هر نقطه در فضا به هر نقطهٔ دیگر رفت.

Michael Hartley Freedman (1951)

اما این رفتن از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر در فضاهای متریک چه مفهومی می‌تواند داشته باشد؟ این نگرش نیازمند دقتی بیش‌تر است و لذا بحث در این مورد را به بعد موکول می‌کنیم. اما می‌توان به جای این تصور هندسی، نگاهی توپولوژیکی به مساله داشت. تعبیر شهودی ما از همبند بودن این است که فضا یک تکه باشد، یعنی نتوان فضا را به صورت اجتماعی از دو مجموعهٔ ناتهی مجزا نوشت. اما اگر تعریف به همین سادگی باشد تعبیری نظریه مجموعه‌ای است، یعنی اگر تعریف به همین سادگی باشد در آن صورت هر مجموعه با بیش از یک عضو مانند A را می‌توان به صورت $\{x\} \cup (A \setminus \{x\})$ نوشت که x عضو دلخواهی از A است و لذا هر مجموعهٔ با بیش از یک عضو اجتماع دو مجموعهٔ ناتهی مجزاست. پس کار به این سادگی نیست!

ممکن است تصور شود که تعریف درست این است که یک فضای همبند فضایی است که نتوان آن را به صورت اجتماع دو مجموعهٔ ناتهی نوشت که آن دو مجموعه با بستار مجزا باشند. اما تحت این تعریف بسیاری از فضاهایی که از نظر شهودی ناهمبند می‌باشند همبند خواهند شد. مثلاً درک شهودی ما به ما می‌گوید که همبند بودن فضاها باید به گونه‌ای تعریف شود که $\mathbb{Q}$ به عنوان زیرفضایی از فضای اقلیدسی ناهمبند باشد چرا که معتقدیم $\mathbb{Q}$ دارای خلل‌های فراوانی است. اما به هیچ وجه $\mathbb{Q}$ را نمی‌توان به صورت اجتماع دو مجموعهٔ

ناتهی با بستار مجزا نوشت. با این حال به تعریف خیلی نزدیک شده‌ایم.

شرط $\bar{A} \cap B = \phi$ یا $A \cap \bar{B} = \phi$ چطور است؟ روشن است که نمی‌توان فقط یکی از این شرط‌ها را در نظر گرفت مگر این که این دو شرط معادل باشند، چرا که باید شرط ما نسبت به A و B متقارن باشد. اما چنان که خواهیم دید این شرایط معادل نیستند، پس مجبوریم هر دو را در نظر بگیریم.

۱.۲.۵ تعریف. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. زیرمجموعه‌های A و B از X را منفک[۱] گوییم هرگاه $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \phi$. ♣

۲.۲.۵ مثال. در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ مجموعه‌های

$$A = [۰, ۱] \cap \mathbb{Q}, \qquad B = [۰, ۱] \cap \mathbb{Q}^c$$

مجزا هستند ولی منفک نمی‌باشند. ♠

۳.۲.۵ مثال. در فضای $X = (۰, ۲) \setminus \{۱\}$ با متر القایی اقلیدسی مجموعه‌های

$$A = (۰, ۱), \qquad B = (۱, ۲)$$

منفک هستند. ♠

۴.۲.۵ مثال. در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ مجموعه‌های

$$A = (۰, ۱], \qquad B = (۱, ۲)$$

---

[۱] separated

مجزا هستند ولی منفک نمی‌باشند، چون

$$A \cap \bar{B} = (۰, ۱] \cap [۱, ۲] = \{۱\},$$

گرچه

$$\bar{A} \cap B = [۰, ۱] \cap (۱, ۲) = \phi. \spadesuit$$

لذا منفک بودن دو مجموعه کاملاً به فضا و متر تعریف شده روی آن وابسته است.

به هر حال واضح است که هر دو مجموعهٔ منفک مانند A و B مجزا هستند، چون

$$A \cap B \subseteq \bar{A} \cap B = \phi.$$

اما عکس این مطلب همان گونه که از مثال‌های فوق بر می‌آید لزوماً برقرار نیست. با این حال در فضای گسسته حکمی بدیهی وجود دارد.

۵.۲.۵ قضیه. در هر فضای گسسته مانند (X, d) دو زیرمجموعه مانند A و B منفکند فقط و فقط وقتی که مجزا باشند.

برهان. واضح است که در فضای گسسته چون هر مجموعه‌ای بسته است، پس

$$\bar{A} = A, \qquad \bar{B} = B.$$

و لذا شرط منفک بودن با مجزا بودن معادل است. ■

۶.۲.۵ قضیه. در هر فضای متریک هر دو مجموعهٔ بستهٔ مجزا منفکند. ■

۷.۲.۵ قضیه. در هر فضای متریک مانند (X, d) هر دو مجموعهٔ باز مجزا مانند G و H منفکند.

برهان. فرض کنیم $x \in G$. در این صورت x نقطه‌ای درونی برای G است و لذا $r_\circ > \circ$ی هست که

$$N_{r_\circ}(x) \subseteq G.$$

حال اگر به برهان خلف $x \in \bar{H}$، آن گاه برای هر $r > \circ$ از جمله $r = r_\circ > \circ$ باید داشته باشیم

$$N_{r_\circ}(x) \cap H \neq \phi$$

و لذا

$$G \cap H \neq \phi,$$

که متناقض با فرض مجزا بودن G و H است. به همین ترتیب $\bar{G} \cap H$ نیز تهی است. ■

۸.۲.۵ تعریف. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. زیرمجموعهٔ D از X را ناهمبند[۲] نامیم هرگاه دو مجموعهٔ منفک ناتهی مانند A و B از X موجود باشند به قسمی که

$$D = A \cup B.$$

در این صورت $\{A, B\}$ را یک ناهمبندی[۳] برای D می‌نامیم. هر زیرمجموعه مانند C که ناهمبند نباشد همبند[۴] نامیده می‌شود. ♣

پس تلویحاً این فرض را پذیرفته‌ایم که معمولاً مجموعه‌های همبند را با C و ناهمبند را با D نمایش دهیم. اگر به خاطر داشته باشید مجموعه‌های بسته را با F، باز را با G و فشرده را با K نمایش می‌دادیم.

---

[۲] disconnected
[۳] disconnection
[۴] connected

نکته‌ای در این تعریف هست که باید مد نظر قرار گیرد. فرض کنیم خود X ناهمبند باشد. لذا یک ناهمبندی مانند $\{A, B\}$ برای آن وجود دارد. حال چون

$$\bar{A} \cap B = \phi$$

پس $\bar{A} \subseteq B^c$. از طرفی

$$A \cup B = X$$

و لذا $B^c = A$ بنابراین $\bar{A} \subseteq B^c = A$ و در نتیجه A مجموعه‌ای بسته است. به همین دلیل B باید مجموعه‌ای بسته باشد. ولی داریم

$$B^c = A, \qquad A^c = B,$$

و چون A و B بسته‌اند پس A^cو B^c بازند و لذا B و A باز خواهند بود.

۹.۲.۵ تعریف. زیرمجموعهٔ M از فضای متریک (X, d) را بستاز[۵] می‌نامیم هرگاه هم بسته و هم باز باشند. ♣

معمولاً زیرمجموعه‌های بستاز را با M نمایش می‌دهیم. با این تعریف و توضیحات فوق می‌توان گفت

۱۰.۲.۵ قضیه. فضای متریک (X, d) ناهمبند است فقط و فقط وقتی که زیرمجموعه‌ای بستاز و سره (ناتهی و متمایز با X) داشته باشد.

برهان. فرض کنیم M بستاز باشد و $\phi \neq M \neq X$. در این صورت $N = M^C$ نیز بستاز و ناتهی است و لذا $\{M, N\}$ یک ناهمبندی برای X می‌باشد. بالعکس، اگر یک ناهمبندی مانند $\{A, B\}$ برای X داشته باشیم، طبق توضیحات فوق هم A و هم B بستاز و ناتهی هستند و لذا زیرمجموعه‌ای بستاز و سره در X یافته‌ایم. ■

---

[۵] clopen

۱۱.۲.۵ نتیجه. فضای متریک (X,d) همبند است فقط و فقط وقتی که تنها زیرمجموعه‌های بستاز آن ϕ و خود X باشند. ■

اجازه دهید قبل از آن که به بررسی مفهوم همبندی در مورد زیرمجموعه‌های یک فضای متریک بپردازیم مثال‌هایی از فضاهای همبند و ناهمبند ارائه دهیم. به نظر می‌رسد اثبات ناهمبند بودن بسیار ساده‌تر از همبند بودن باشد، چون اگر بخواهیم اثبات کنیم که X ناهمبند است کافی است یک ناهمبندی برای آن ارائه دهیم در صورتی که برای اثبات همبند بودن یک فضا باید استدلال کنیم که هیچ زیرمجموعهٔ بستاز سره‌ای در آن وجود ندارد.

۱۲.۲.۵ مثال. فضای $X = (۰, ۱) \cup (۱, ۲)$ را با متر القایی اقلیدسی در نظر می‌گیریم. در این جا $(۰, ۱)$ زیرمجموعه‌ای بستاز و سره از فضا می‌باشد و لذا X ناهمبند است. ♠

۱۳.۲.۵ مثال. فضای $X = (۰, ۱] \cup [۲, ۳]$ با متر القایی اقلیدسی ناهمبند است زیرا $(۰, ۱]$ زیرمجموعه‌ای بستاز و سره از این فضا می‌باشد. ♠

۱۴.۲.۵ قضیه. هر فضای متریک گسسته با بیش از یک نقطه مانند (X,d) ناهمبند است.

برهان. فرض کنیم x نقطهٔدلخواهی در X باشد. چون $\{x\}$ ناتهی است و فضا بیش از یک نقطه دارد، پس $\{x\}$ زیرمجموعه‌ای سره از X است. اما در این فضا هر زیرمجموعه‌ای بستاز است و در نتیجه $\{x\}$ زیرمجموعه‌ای بستاز و سره از X است. بنابراین X ناهمبند است. ■

اما در مورد زیرمجموعه‌های یک فضای متریک، موضوع اندکی متفاوت است. فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای ناهمبند از فضای متریک (X,d) باشد. در این صورت یک ناهمبندی مانند $\{A, B\}$ برای D

وجود دارد ولی A و B لزوماً در X بستاز نخواهند بود گرچه در D به عنوان یک فضای متریک با متر القا شده از X این مجموعه‌ها بستاز هستند، چون در این حالت D خود فضایی متریک با ناهمبندی $\{A, B\}$ می‌باشد. پس برای اثبات ناهمبند بودن D نباید لزوماً به دنبال زیرمجموعه‌هایی سره و بستاز نسبت به X باشیم. مثلاً در مثال بالا اگر $D = (۰, ۱] \cup [۲, ۳]$ را به عنوان زیرمجموعه‌ای از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم، آن گاه در ناهمبندی $\{(۰, ۱], [۲, ۳]\}$ مجموعهٔ $(۰, ۱]$ نسبت به $\mathbb{R}$ بستاز نخواهد بود گرچه نسبت به D چنین است.

پس در مورد زیرمجموعه‌های یک فضای متریک باید به دنبال مجموعه‌هایی منفک و ناتهی باشیم که این مجموعه‌ها نسبت به زیرمجموعهٔ مورد نظر و نه نسبت به خود فضا بستاز می‌باشند.

آیا " عدم، وجود " یک ناهمبندی برای زندگی است؟

۱۵.۲.۵ قضیه. در هر فضای متریک مانند (X, d) هر مجموعهٔ تک عضوی مانند $C = \{x\}$ همبند است.

برهان. اگر به برهان خلف $\{A, B\}$ یک ناهمبندی برای C باشد، آن گاه

$$A \cup B = C = \{x\}$$

و چون مجموعه‌های منفک مجزا هستند، لذا x باید دقیقاًدر یکی از A یا B باشد و امکان ندارد که در دیگری باشد. لذا مجموعهٔ دیگر تهی خواهد شد که با ناهمبندی بودن $\{A, B\}$ برای C در تناقض است. ■

۱۶.۲.۵ تعریف. هر زیرمجموعهٔ تک عضوی مانند $C = \{x\}$ از یک فضای متریک مانند (X, d) را یک زیرمجموعهٔ همبند بدیهی فضا می‌نامیم. ♣

۱۷.۲.۵ قضیه. در هر فضای متریک مانند (X, d) هر مجموعهٔ متناهی با بیش از یک عضو مانند $D = \{x_۱, \ldots, x_n\}$ ناهمبند است.

برهان. قرار می‌دهیم

$$A = \{x_1\},$$
$$B = \{x_2, \ldots, x_n\}.$$

چون D حداقل دو عضو دارد، پس A و B ناتهی هستند. اما A و B متناهی و لذا بسته می‌باشند. بنابراین A و B دو مجموعهٔ بستهٔ ناتهی مجزا هستند و لذا $\{A, B\}$ یک ناهمبندی برای D است. ■

۱۸.۲.۵ تعریف. زیرمجموعه‌های متناهی با بیش از یک عضو مانند

$$D = \{x_1, \ldots, x_n\}, \qquad n \geq 2$$

از فضای متریک (X, d) را زیرمجموعه‌های ناهمبند بدیهی فضا می‌نامیم. ♣

۱۹.۲.۵ تعریف. فضای متریک (X, d) را ناهمبند کلی[۶] می‌نامیم هرگاه زیرمجموعهٔ همبند غیر بدیهی نداشته باشد. ♣

۲۰.۲.۵ قضیه. هر فضای متریک گسسته مانند (X, d) ناهمبند کلی است.

برهان. فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای با بیش از یک عضو در X باشد که مثلاً x عضو دلخواهی از آن است. قرار می‌دهیم

$$A = \{x\},$$
$$B = D \setminus \{x\}.$$

در این صورت چون در فضای گسسته هر مجموعه‌ای بسته است، لذا A و B دو مجموعهٔ بستهٔ ناتهی مجزا هستند و در نتیجه $\{A, B\}$ یک ناهمبندی برای D می‌باشد. ■

---

[۶] totally disconnected

اشتباه نکنید! ناهمبندی فوق‌الذکر برای یک مجموعهٔ دلخواه مانند D فقط در فضاهای گسسته معتبر است. مثلاً در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ مجموعه‌های $\{۰\}$ و $(۰,۱)$ به وضوح منفک نیستند و لذا یک ناهمبندی تشکیل نمی‌دهند.

توجه کنید که هنوز حتی نتوانسته‌ایم یک مجموعهٔ همبند غیر بدیهی مثال بزنیم. مثال‌های معمولی ما در این کتاب یا در فضای اقلیدسی هستند و یا در فضای گسسته. دیدیم که در فضاهای گسسته حکمی بسیار بدیهی و کلی وجود دارد و لذا در فضاهای گسسته نمی‌توان مثالی از یک مجموعهٔ همبند غیر بدیهی ارائه داد. از این رو اگر بخواهیم مثالی نزدیک از یک مجموعهٔ همبند غیر بدیهی بیاوریم می‌توانیم از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ کمک بگیریم. اصلاً اجازه دهید به مشخص‌سازی زیرمجموعه‌های همبند فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ بپردازیم.

در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ به دلیل وجود اعمال جبری دستمان اندکی بازتر است. برای آن که بحث کمی کلی‌تر شود، ابتدا تعریفی که در فضاهای برداری (و لذا در $\mathbb{R}$) وجود دارد را ارائه می‌دهیم. فضای برداری $\mathbb{R}^۲$ درک شهودی مناسبی از این تعریف را به دست می‌دهد.

۲۱.۲.۵ تعریف. فرض کنیم V فضایی برداری باشد. زیرمجموعهٔ C از V را محدب[۷] می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x,y \in C$ و هر $t \in\mathbb{R}$ که $۰ \leq t \leq ۱$ داشته باشیم

$$tx + (۱ - t)y \in C. \clubsuit$$

حرف C برای مجموعه‌های محدب از این جهت انتخاب شده است که کلمهٔ انگلیسی $Convex$ به معنی محدب همانند کلمهٔ انگلیسی $Connected$ به معنای همبند با حرف C شروع می‌شود. به علاوه

[۷] convex

محدب بودن همبندی را نتیجه می‌دهد (چرا؟) و لذا این قرارداد با نماد قبلی ما تعارضی ندارد.

دقت کنید که در تعریف فوق $tx + (1 - t)y$ برای $0 \leq t \leq 1$ در حقیقت کلیهٔ نقاط روی خط واصل x و y را به دست می‌دهد که برای $t = 1$ نقطهٔ x و برای $t = 0$ نقطهٔ y حاصل می‌شود. لذا تعریف فوق می‌گوید که C محدب است هرگاه برای هر دو نقطه از آن کلیهٔ نقاط روی خط واصل بین آن دو نقطه نیز در C باشند. این تعریف به توضیحی که در ابتدای این بخش گفتیم نزدیک است. به عبارت دیگر در یک مجموعهٔ محدب می‌توان از هر نقطه مانند x در C به هر نقطهٔ دیگر از آن مانند y توسط خط واصل بین این دو نقطه عبور کرد و لذا مسیری از x به y وجود دارد و در حقیقت می‌توان از x به y رفت.

زیرمجموعه‌های محدب فضای برداری $\mathbb{R}$ شکلی آشنا دارند. قبل از آن که این زیرمجموعه‌ها را دقیقاً مشخص کنیم به حکمی ساده توجه کنید.

۲۲.۲.۵ لم. زیرمجموعهٔ ناتهی I از $\mathbb{R}$ به صورت بازه است فقط و فقط وقتی که به ازای هر $x, y \in I$ و هر $z \in \mathbb{R}$ که z بین x و y باشد داشته باشیم $z \in I$.

برهان. فرض کنیم I به صورت بازه باشد و x و y دو نقطهٔ دلخواه از I باشند که $x < y$. در این صورت

$$[x, y] \subseteq I$$

و لذا به ازای هر $z \in \mathbb{R}$ که $x < z < y$ داریم

$$z \in [x, y] \subseteq I.$$

پس $z \in I$.

بالعکس، اگر شرط مذکور در لم برقرار باشد، قرار می‌دهیم

$$\alpha = \inf I, \qquad \beta = \sup I,$$

که $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$. به عبارت دیگر اگر I از بالا (پایین) کراندار باشد آن گاه β (α) بنابر اصل کمال موجود است و اگر I از بالا (پایین) کراندار نباشد آن گاه $\beta = +\infty$ ($\alpha = -\infty$).

بحث را در حالتی که I کراندار باشد ادامه می‌دهیم. در حالتی که I کراندار نباشد به همین روش (و حتی ساده‌تر) می‌توان استدلال کرد.

ادعا می‌کنیم $(\alpha, \beta) \subseteq I \subseteq [\alpha, \beta]$. فرض کنیم $\alpha < z < \beta$. بنابراین اعدادی مانند α' و β' موجودند که $\alpha < \alpha' < z < \beta' < \beta$. حال بنابر خاصیت مشخصهٔ اینفیمم و سوپریمم اعضایی از I مانند x و y موجودند به قسمی که

$$x < \alpha',$$

$$\beta' < y.$$

و لذا $x < z < y$ که $x, y \in I$ و در نتیجه بنابر شرط مذکور در بالا داریم $z \in I$.

همچنین برای هر $r \in I$ با توجه به آن که α کران پایین و β کران بالاست داریم

$$\alpha \leq x \leq \beta$$

و لذا $x \in [\alpha, \beta]$. بنابراین I به یکی از شکل‌های

$$(\alpha, \beta),$$

$$[\alpha, \beta),$$

$$(\alpha, \beta],$$

$$[\alpha, \beta]$$

می‌باشد و لذا بازه است. ■

۲۳.۲.۵ قضیه. زیرمجموعهٔ ناتهی C از $\mathbb{R}$ محدب است فقط و فقط وقتی که به صورت بازه باشد.

برهان. فرض کنیم C محدب باشد. از لم فوق استفاده می‌کنیم. اگر x و y دو عضو دلخواه C باشند و z بین x و y باشد آن گاه z روی خط واصل بین x و y قرار دارد و لذا با توجه به محدب بودن C داریم $z \in C$. پس C بازه است.

بالعکس، اگر C بازه باشد آن گاه برای هر $x, y \in C$ و هر $\circ \leq t \leq \text{۱}$ نقطهٔ $z = tx + (\text{۱} - t)y$ نقطه‌ای بین x و y می‌باشد و در نتیجه $z \in C$. پس C محدب است. ■

بعداً در مورد همبند بودن زیرمجموعه‌های محدب بحث خواهیم کرد، اما اکنون توجه خود را به زیرمجموعه‌های همبند فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ معطوف می‌کنیم.

۲۴.۲.۵ قضیه. زیرمجموعهٔ ناتهی C از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ همبند است فقط و فقط وقتی که محدب و یا، به طور معادل، به صورت بازه باشد.

برهان. فرض کنیم C همبند باشد ولی به صورت بازه نباشد. پس x و y یی در C موجودند که مثلاً $x < y$ و عددی مانند z هست که $x < z < y$ ولی $z \notin C$. قرار می‌دهیم

$$A = (-\infty, z) \cap C,$$
$$B = (z, +\infty) \cap C.$$

ادعا می‌کنیم $\{A, B\}$ یک ناهمبندی برای C است. اولاً چون $x < z$ و نیز $x \in C$ پس $x \in A$ و لذا A ناتهی است. به دلیلی مشابه $y \in B$ و

لذا B ناتهی است. ثانیاً داریم

$$\begin{aligned} A \cup B &= ((-\infty, z) \cap C) \cup ((z, +\infty) \cap C) \\ &= ((-\infty, z) \cup (z, +\infty)) \cap C) \\ &= (\mathbb{R} \setminus \{z\}) \cap C = C, \end{aligned}$$

چون $z \notin C$. ثالثاً داریم

$$\begin{aligned} \bar{A} \cap B &= \overline{((-\infty, z) \cap C)} \cap ((z, +\infty) \cap C) \\ &\subseteq (-\infty, z] \cap (z, +\infty) = \phi. \end{aligned}$$

به همین دلیل $A \cap \bar{B} = \phi$. پس $\{A, B\}$ یک ناهمبندی برای C است و لذا C ناهمبند است که متناقض با فرض اولیهٔ ما می‌باشد.

بالعکس، فرض کنیم C به صورت بازه باشد ولی همبند نباشد. لذا یک ناهمبندی مانند $\{A, B\}$ برای C وجود دارد. چون A و B ناتهی هستند پس x_0 ی در A و نیز y_0 ی در B موجودند. همچنین چون A و B منفکند پس مجزا می‌باشند و لذا $x_0 \neq y_0$. مثلاً فرض کنیم $x_0 < y_0$. حال فرض کنیم

$$A_1 = C \cap [x_0, y_0] \cap A.$$

چون $A_1 \subseteq [x_0, y_0]$ پس A_1 کراندار است و چون $x_0 \in A_1$ پس A_1 ناتهی است. لذا بنابر اصل تمامیت $\alpha = \sup A_1$ موجود می‌باشد. حال چون $\alpha \in \bar{A_1} \subseteq \overline{[x_0, y_0]} = [x_0, y_0]$ پس α نقطه‌ای بین x_0 و y_0 می‌باشد. اما

$$x_0 \in A \subseteq A \cup B = C,$$

$$y_0 \in B \subseteq A \cup B = C.$$

لذا $x_\circ, y_\circ \in C$ و چون C بازه است پس $\alpha \in C$. بنابراین

$$\alpha \in C = A \cup B \qquad (*)$$

اما $\alpha \in \bar{A_1} \subseteq \bar{A}$ و چون $\bar{A} \cap B = \phi$ پس $\alpha \notin B$. از طرفی برای هر x که $x > \alpha$ داریم $x \notin A$ چون α کران بالای A است، و لذا

$$[\alpha, y_\circ] \subseteq C \setminus A = (A \cup B) \setminus A = B$$

چون A و B مجزا هستند. پس $\alpha \in [\alpha, y_\circ] = \overline{[\alpha, y_\circ]} \subseteq \bar{B}$ و چون $A \cap \bar{B} = \phi$ پس $\alpha \notin A$. بنابراین $\alpha \notin A \cup B$ که با $(*)$ در تناقض است. ■

گرچه همبند بودن معادل محدب بودن در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ می‌باشد ولی در حالت کلی لزوماً چنین نیست. مثلاً علامت ∞ به عنوان شکلی در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ همبند و غیر محدب است (چرا؟).

همهٔ ما در بی‌نهایت غرق هستیم. اما آیا مسیری مستقیم برای رسیدن به آن را یافته‌ایم؟

اکنون دستهٔ وسیعی از مثال‌های غیر بدیهی برای مجموعه‌های همبند داریم. حال می‌توانیم سؤالاتی از قبیل همبند بودن اجتماع، اشتراک، درون و بستار مجموعه‌های همبند را مورد بررسی قرار دهیم.

فرض کنیم C_1 و C_2 دو مجموعهٔ همبند در فضایی متریک باشند. آیا لزوماً اجتماع و اشتراک این مجموعه‌ها همبند است؟ مثال‌های زیر نشان می‌دهد که پاسخ در حالت کلی منفی است.

۲۵.۲.۵ مثال. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد و $x, y \in X$ که $x \neq y$. قرار می‌دهیم

$$C_1 = \{x\},$$

$$C_2 = \{y\}.$$

در این صورت $C_۱ \cup C_۲ = \{x, y\}$. لذا واضح است که $C_۱$ و $C_۲$ همبند هستند در صورتی که $C_۱ \cup C_۲$ همبند نیست. ♠

۲۶.۲.۵ مثال. در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ فرض کنیم

$$C_۱ = (۰, ۱),$$

$$C_۲ = (۱, ۲).$$

در این صورت $C_۱$ و $C_۲$ بازه‌اند و لذا همبند می‌باشند. اما $C_۱ \cup C_۲$ بازه نیست و در نتیجه همبند نیست. ♠

۲۷.۲.۵ مثال. در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ فرض کنیم $C_۱$ یک مربع و $C_۲$ شکلی به صورت حرف U باشد که فقط در دو انتهای بالایی با آن مربع اشتراک دارد. در این صورت $C_۱$ و $C_۲$ همبند هستند (چرا؟) ولی $C_۱ \cap C_۲$ به وضوح همبند نمی‌باشد. ♠

پس حکمی که می‌توان ارائه داد چیست؟ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ پاسخ بسیار ساده است.

۲۸.۲.۵ قضیه. فرض کنیم $C_۱$ و $C_۲$ دو مجموعهٔ همبند غیر مجزا در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشند. در این صورت $C_۱ \cap C_۲$ و $C_۱ \cup C_۲$ نیز همبند هستند.

برهان. روشن است که اگر $C_۱$ و $C_۲$ مجزا باشند $C_۱ \cap C_۲$ تهی است و چیزی برای بحث باقی نمی‌ماند. اما اگر $C_۱$ و $C_۲$ همبند و غیر مجزا باشند آن گاه $C_۱$ و $C_۲$ بازه‌اند و لذا $C_۱ \cap C_۲$ نیز بازه است و می‌دانیم که هر بازه‌ای در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ همبند است.

همچنین اگر $C_۱$ و $C_۲$ همبند و غیر مجزا باشند آن گاه $C_۱$ و $C_۲$ بازه‌اند و $C_۱ \cup C_۲$ نیز بازه می‌باشد و لذا همبند است. ■

اما حکم مربوط به اجتماع را می‌توان به طور کلی در فضاهای متریک بیان کرد. ابتدا یک لم را با هم ببینیم.

۲۹.۲.۵ لم. فرض کنیم A و B مجموعه‌هایی منفک و ناتهی از فضای متریک (X,d) باشند و C زیرمجموعه‌ای همبند از X که $C \subseteq A \cup B$. در این صورت یا $C \subseteq A$ یا $C \subseteq B$.

برهان. فرض کنیم

$$C \nsubseteq A, \qquad C \nsubseteq B.$$

پس

$$B_1 = C \cap B \neq \phi, \qquad A_1 = C \cap A \neq \phi.$$

ادعا می‌کنیم $\{A_1, B_1\}$ یک ناهمبندی برای C است. داریم

$$A_1 \cup B_1 = (C \cap A) \cup (C \cap B) = C \cap (A \cup B) = C.$$

همچنین

$$\bar{A_1} \cap B_1 = \overline{(C \cap A)} \cap (C \cap B) \subseteq \bar{A} \cap B = \phi.$$

به همین ترتیب $A_1 \cap \bar{B_1} = \phi$. لذا $\{A_1, B_1\}$ یک ناهمبندی برای C است و چون C همبند بود، این تناقض می‌باشد. ■

۳۰.۲.۵ قضیه. فرض کنیم C_1 و C_2 دو مجموعهٔ همبند غیر مجزا در فضای متریک (X,d) باشند. در این صورت $C = C_1 \cup C_2$ نیز همبند است.

برهان. به برهان خلف فرض کنیم C ناهمبند باشد. لذا یک ناهمبندی مانند $\{A, B\}$ برای C وجود دارد. داریم

$$C_1, C_2 \subseteq C = A \cup B.$$

لذا بنابر لم فوق باید داشته باشیم

$$C_۱ \subseteq A \qquad \text{یا} \qquad C_۱ \subseteq B,$$
$$C_۲ \subseteq A \qquad \text{یا} \qquad C_۲ \subseteq B.$$

اگر $A \subseteq C_۱$ و $A \subseteq C_۲$ آن گاه

$$A \cup B = C = C_۱ \cup C_۲ \subseteq A$$

و لذا $B \subseteq A$ که متناقض با مجزا و ناتهی بودن A و B می‌باشد.

به همین ترتیب امکان ندارد که $C_۱ \subseteq B$ و $C_۲ \subseteq B$. بنابراین مثلاً حالت

$$C_۱ \subseteq A, \qquad C_۲ \subseteq B$$

اتفاق می‌افتد. اما در این صورت داریم

$$C_۱ \subseteq \bar{C_۱} \subseteq \bar{A}, \qquad C_۲ \subseteq B$$

و لذا

$$C_۱ \cap C_۲ \subseteq \bar{A} \cap B = \phi,$$

که متناقض با فرض غیر مجزا بودن $C_۱$ و $C_۲$ می‌باشد. ■

این حکم را می‌توان به هر تعداد متناهی مجموعهٔ همبند به صورت زیر تعمیم داد.

۳۱.۲.۵ قضیه. فرض کنیم $C_۱$، ...، C_n مجموعه‌هایی همبند در فضای متریک (X, d) باشند و جایگشتی از ۱، ۲، ...، n مانند σ موجود باشد که

$$C_{\sigma(۱)} \cap C_{\sigma(۲)} \neq \phi,$$

$$C_{\sigma(۲)} \cap C_{\sigma(۳)} \neq \phi,$$

$$\dots$$

$$C_{\sigma(n-۱)} \cap C_{\sigma(n)} \neq \phi.$$

در این صورت $C = \cup_{i=۱}^{n} C_i$ نیز همبند است.

برهان. بنابر قضیهٔ فوق $C_{\sigma(۱)} \cup C_{\sigma(۲)}$ همبند است اما

$$(C_{\sigma(۱)} \cup C_{\sigma(۲)}) \cap C_{\sigma(۳)} \neq \phi$$

و لذا $C_{\sigma(۱)} \cup C_{\sigma(۲)} \cup C_{\sigma(۳)}$ همبند است و به همین ترتیب اجتماع کل مجموعه‌ها همبند خواهد بود. ■

به عنوان حالتی خاص می‌توان حکم زیر را بیان کرد.

۳۲.۲.۵ نتیجه. فرض کنیم $C_۱$، ...، C_n مجموعه‌هایی همبند و دو به دو غیر مجزا در فضای متریک (X, d) باشند. در این صورت $C = \cup_{i=۱}^{n} C_i$ نیز همبند است. ■

اما برای یک زنجیر نیز حکمی مشابه وجود دارد.

۳۳.۲.۵ قضیه. فرض کنیم $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ زنجیری از مجموعه‌های همبند در یک فضای متریک مانند (X, d) باشد. در این صورت $C = \cup_{\alpha \in \mathbb{I}} C_\alpha$ نیز همبند است.

برهان. به برهان خلف فرض کنیم C ناهمبند باشد. لذا یک ناهمبندی مانند $\{A, B\}$ برای آن وجود دارد. در نتیجه بنابر لم ۲۹.۲.۵ به ازای هر $\alpha \in \mathbb{I}$ داریم

$$C_\alpha \subseteq A \qquad \text{یا} \qquad C_\alpha \subseteq B \qquad (*)$$

حال فرض کنیم برای $\alpha_۰$ ی در $\mathbb{I}$ داشته باشیم

$$C_{\alpha_۰} \subseteq A \qquad\qquad (**)$$

ادعا می‌کنیم برای هر $\alpha \in \mathbb{I}$ باید داشته باشیم

$$C_\alpha \subseteq A.$$

زیرا اگر α عضو دلخواهی از $\mathbb{I}$ باشد، آن گاه

$$C_\alpha \subseteq C_{\alpha_\circ} \qquad \text{یا} \qquad C_{\alpha_\circ} \subseteq C_\alpha.$$

اگر $C_\alpha \subseteq C_{\alpha_\circ}$ آن گاه بنابر (**) باید $C_\alpha \subseteq A$ و اگر $C_{\alpha_\circ} \subseteq C_\alpha$ آن گاه باز هم باید $C_\alpha \subseteq A$، چون اگر چنین نباشد آن گاه بنابر (*) باید $C_\alpha \subseteq B$ و لذا باید $C_{\alpha_\circ} \subseteq B$ که متناقض با (**) است.

پس به ازای هر $\alpha \in \mathbb{I}$ داریم $C_\alpha \subseteq A$ و لذا

$$A \cup B = C = \cup_{\alpha \in \mathbb{I}} C_\alpha \subseteq A.$$

بنابراین $B \subseteq A$ که متناقض با مجزا و ناتهی بودن A و B می‌باشد. ■

گرچه همین قضیه برای حکم بعدی که مد نظر ما است کافی می‌باشد، اما به نظر می‌رسد که شرط زنجیر بودن خانوادهٔ $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ کمی قوی است و می‌توان آن را با شرط ضعیف‌تر دو به دو مجزا بودن خانوادهٔ $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ عوض کرد. بعداً در مورد این مطلب در تمرین‌ها بحث خواهیم کرد. به هر حال می‌توان گفت که اگر $\cap_{\alpha \in \mathbb{I}} C_\alpha \neq \phi$ آن گاه باز هم $\cup_{\alpha \in \mathbb{I}} C_\alpha$ همبند خواهد بود (چرا؟).

اکنون که با مفهوم همبندی آشنا شدیم می‌توانیم در مورد مجموعه‌های همبند بیشین فضا صحبت کنیم. اگر زیرمجموعه‌های یک فضای متریک مانند (X, d) را تحت نسبت $\subseteq$ در نظر بگیریم، مجموعه‌ای مرتب حاصل می‌شود که در این مجموعه می‌توان عنصر بیشین را مورد بررسی قرار داد. واضح است که در یک فضای متریک مجموعه‌های همبند مختلفی ممکن است وجود داشته باشد که از نظر

بزرگی قابل مقایسه با یکدیگر نیستند و لذا بحث در مورد بزرگ‌ترین مجموعهٔ همبند در یک فضای متریک بی معنی است. از طرف دیگر می‌توان مجموعه‌ای همبند مانند C را در نظر گرفت که هیچ مجموعهٔ همبندی بزرگ‌تر از آن وجود نداشته باشد. به عبارت دیگر هیچ مجموعهٔ همبند دیگری مانند $C_۱$ شامل آن نباشد.

۳۴.۲.۵ تعریف. زیرمجموعهٔ همبند C از فضای متریک (X, d) را یک مؤلفه همبند[8] فضا نامیم هرگاه به ازای هر مجموعهٔ همبند فضا مانند $C_۱$ که $C \subseteq C_۱$ داشته باشیم $C_۱ = C$. ♣

به عبارت دیگر یک مؤلفه همبند یک زیرمجموعهٔ همبند بیشین از فضا است.

تاکنون دو سؤال در مورد اجتماع و اشتراک مجموعه‌های همبند را مورد بررسی قرار داده و پاسخ‌هایی برای آن‌ها یافتیم. طرح این گونه سؤالات گاهی اوقات باعث ایجاد زمینه‌هایی برای پژوهش می‌شود، البته مشروط بر آن که سؤال جدید باشد و پاسخ درست!

نظر داور در مورد مقالهٔ یک ریاضیدان جوان: مقالهٔ شما شامل مطالب جدید زیاد و مطالب درست بسیاری است. ولی متأسفانه آنچه جدید است درست نیست و آنچه درست است جدید نمی‌باشد!

سؤال بعدی این است که آیا درون و بستار مجموعه‌های همبند در یک فضا لزوماً همبند هستند؟ در مورد درون همان طور که مثال بعدی ما نشان می‌دهد پاسخ منفی است، اما در مورد بستار قضیهٔ جالبی داریم.

۳۵.۲.۵ مثال. در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ فرض کنیم

$$C = N_۱[(-۱, ۰)] \cup N_۱[(۱, ۰)].$$

در این صورت C همبند است (چرا؟) اما

$$C^\circ = N_۱((-۱, ۰)) \cup N_۱((۱, ۰))$$

[8] connected component

که ناهمبند می‌باشد، زیرا $\{N_1((-1,0)), N_1((1,0))\}$ یک ناهمبندی برای آن است. ♠

۳۶.۲.۵ قضیه. فرض کنیم C زیرمجموعهٔ همبندی از فضای متریک (X,d) باشد. همچنین فرض کنیم C_1 زیرمجموعه‌ای از X باشد که

$$C \subseteq C_1 \subseteq \bar{C}.$$

در این صورت C_1 نیز همبند است. بالاخص بستار هر مجموعهٔ همبند مجموعه‌ای همبند است.

برهان. به برهان خلف فرض کنیم C_1 ناهمبند و $\{A_1, B_1\}$ یک ناهمبندی برای آن باشد. در این صورت

$$C \subseteq C_1 = A_1 \cup B_1$$

و لذا بنابر لم ۲۹.۲.۵ داریم

$$C \subseteq A_1 \qquad \text{یا} \qquad C \subseteq B_1.$$

مثلاً فرض کنیم $C \subseteq A_1$. در این صورت $\bar{C} \subseteq \bar{A_1}$ و لذا

$$B_1 \subseteq A_1 \cup B_1 = C_1 \subseteq \bar{C} \subseteq \bar{A_1}.$$

بنابراین $B_1 \subseteq \bar{A_1}$ و این با منفک و ناتهی بودن A_1 و B_1 در تناقض است. ■

۳۷.۲.۵ قضیه. هر مؤلفه همبند یک فضای متریک مانند (X,d) مجموعه‌ای بسته است.

برهان. فرض کنیم C یک مؤلفه باشد. چون C همبند است، بنابر قضیهٔ فوق $\bar{C}$ نیز همبند است. اما داریم $C \subseteq \bar{C}$ و لذا با توجه به تعریف مؤلفه نتیجه می‌گیریم که $\bar{C} = C$، یعنی C بسته است. ■

۳۸.۲.۵ قضیه. مولفه‌های همبند یک فضای متریک مانند (X,d) فضا را افراز می‌کنند.

برهان. اولاً هر مؤلفه ناتهی است زیرا اگر ϕ یک مؤلفه باشد، آن گاه $\{x\}$ مجموعه‌ای همبند و شامل ϕ است که $\{x\} \neq \phi$ و این با تعریف مؤلفه بودن در تناقض است.

ثانیاً اگر $C_۱$ و $C_۲$ دو مؤلفه متمایز باشند آن گاه باید $C_۱ \cap C_۲ = \phi$ زیرا در غیر این صورت بنابر قضیهٔ ۳۰.۲.۵ باید مجموعهٔ $C_۱ \cup C_۲$ نیز همبند باشد و چون $C_۱, C_۲ \subseteq C_۱ \cup C_۲$، بنابر تعریف مؤلفه داریم

$$C_۱ = C_۱ \cup C_۲ = C_۲,$$

که متناقض با متمایز بودن $C_۱$ و $C_۲$ می‌باشد.

ثالثاً اجتماع مؤلفه‌ها برابر X است. زیرا واضح است که

$$\text{اجتماع مولفه‌ها} \subseteq X,$$

و بالعکس اگر x عضو دلخواهی از X باشد، ادعا می‌کنیم مؤلفه‌ای از X وجود دارد که شامل x است. بدین منظور فرض کنیم

$$\mathcal{P} = \{C \mid \text{است } x \text{ شامل } X \text{ زیرمجموعه‌ای همبند از } C\}.$$

در این صورت $\mathcal{P}$ ناتهی است زیرا $\{x\} \in \mathcal{P}$. می‌توان $\mathcal{P}$ را توسط نسبت $\subseteq$ مرتب کرد و لذا $(\mathcal{P}, \subseteq)$ مجموعه‌ای ناتهی و به طور جزئی مرتب است. فرض کنیم $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ زنجیری در $\mathcal{P}$ باشد. بنابر قضیهٔ ۳۳.۲.۵ مجموعهٔ $C = \cup_{\alpha\in\mathbb{I}} C_\alpha$ نیز همبند است و چون C_α شامل x است C نیز چنین است. پس $C \in \mathcal{P}$ کران بالایی برای زنجیر $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ است و لذا هر زنجیر در $\mathcal{P}$ از بالا کراندار است و در نتیجه بنابر لم زرن $\mathcal{P}$ دارای عنصری بیشین است که طبق تعریف، یک مؤلفه از X می‌باشد و روشن است که شامل x است. ■

استدلال قضیهٔ فوق نشان می‌دهد که هر x دقیقاً در یک مؤلفه همبند X قرار دارد.

با توجه به قضیهٔ فوق صورت معادلی برای همبندی به دست می‌آید.

۳۹.۲.۵ قضیه. فضای متریک (X, d) همبند است فقط وفقط وقتی که تنها یک مؤلفه داشته باشد.

برهان. فرض کنیم X همبند و C مؤلفه‌ای از آن باشد. چون $C \subseteq X$، بنابر تعریف مؤلفه باید داشته باشیم $X = C$. پس فقط یک مؤلفه داریم که آن هم خود X است.

بالعکس، فرض کنیم X فقط یک مؤلفه داشته باشد. بنابر قضیهٔ فوق X برابر اجتماع مؤلفه‌هایش می‌باشد و لذا این مؤلفه باید خود X باشد. بنابراین X همبند است. ■

می‌دانیم که بین افرازها و نسبت‌های هم‌ارزی تناظری یک به یک وجود دارد و لذا باید نسبتی هم‌ارزی روی X وجود داشته باشد که تحت آن دسته‌های هم‌ارزی همان مؤلفه‌های همبندی باشند.

۴۰.۲.۵ تعریف. فرض کنیم x و y دو نقطه از فضای متریک (X, d) باشند. در این صورت گوییم x همبند به[۹] y است و می‌نویسیم $x \leftrightarrow y$ هرگاه زیرمجموعه‌ای همبند از X مانند C موجود باشد که $x, y \in C$ ♣

واضح است که x همبند به y است فقط و فقط وقتی که مؤلفه‌ای همبند از X مانند C موجود باشد که $x, y \in C$ زیرا هر مجموعهٔ همبند زیرمجموعه‌ای از یک مؤلفه است.

---

[۹] is connected to

۴۱.۲.۵ قضیه. نسبت همبند به یکدیگر بودن در یک فضای متریک مانند (X,d)، یک نسبت هم‌ارزی روی X است و در حقیقت

$$X/\leftrightarrow = \{C \mid \text{مولفه‌ای همبند از } X \text{ است } C\}.$$

برهان. اولاً $\leftrightarrow$ منعکس است، زیرا برای هر $x \in X$ داریم $x \in \{x\}$ که $\{x\}$ زیرمجموعه‌ای همبند از X است.

ثانیاً $\leftrightarrow$ متقارن است، زیرا برای هر $x, y \in X$ اگر $x \leftrightarrow y$ آن گاه زیرمجموعه‌ای همبند مانند C موجود است به قسمی که $x, y \in C$ و لذا $y, x \in C$، پس $y \leftrightarrow x$.

ثالثاً $\leftrightarrow$ متعدی است، زیرا برای هر $x, y, z \in X$ اگر $x \leftrightarrow y$ و $y \leftrightarrow z$ آن گاه مؤلفه‌هایی همبند مانند C_1 و C_2 موجودند که $x, y \in C_1$ و $y, z \in C_2$ و لذا $y \in C_1 \cap C_2$. پس $C_1 = C_2$ و لذا $x, z \in C_1$ و در نتیجه $x \leftrightarrow z$.

بنابراین $\leftrightarrow$ نسبتی هم‌ارزی است که به صورت

$$x \leftrightarrow y \Longleftrightarrow x, y \in C \text{ مولفه‌ای از } X \text{ مانند } C \text{ موجود باشد که }$$

تعریف می‌شود و لذا دسته‌های هم‌ارزی $[x]$ همان مؤلفه‌های همبند فضا می‌باشند. ■

اکنون که ارتباط بین همبندی، اجتماع، اشتراک، درون و بستار را مورد مطالعه قرار دادیم به بررسی ارتباط بین همبندی و پیوستگی می‌پردازیم. دیدیم که هر تابع پیوسته هر مجموعهٔ باز را به باز برمی‌گرداند، بسته را به بسته برمی‌گرداند و فشرده را به فشرده می‌نگارد. ببینیم توابع پیوسته با زیرمجموعه‌های همبند چه می‌کنند.

۴۲.۲.۵ قضیه. فرض کنیم $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ تابعی پیوسته و C زیرمجموعه‌ای همبند از X باشد. در این صورت $f(C)$ در Y همبند است.

برهان. تابع

$$f|_C : C \to f(C)$$

را در نظر می‌گیریم. این تابع که مجدداً آن را با f نمایش می‌دهیم پیوسته است. حال به برهان خلف فرض کنیم $f(C)$ همبند نباشد. بنابراین فضای متریک $f(C)$ ناهمبند است و بنابر قضیهٔ ۱۰.۲.۵ زیرمجموعه‌ای بستاز و سره مانند N از $f(C)$ موجود است. اما f پیوسته است و لذا $M = f^{-1}(N)$ در C بستاز می‌باشد. اما M سره است. زیرا اگر $M = \phi$ آن گاه $N = \phi$، چون در غیر این صورت y یی در N موجود است و لذا با توجه به آن که $N \subseteq f(C)$ پس x ی در C هست که $y = f(x)$. در نتیجه $x \in f^{-1}(N) = M$ و لذا $M \neq \phi$. به همین ترتیب $M \neq C$ چون $N \neq f(C)$. بنابراین M زیرمجموعه‌ای بستاز و سره از C است و لذا C ناهمبند می‌باشد که تناقض است. ■

خاصیت مقدار میانی برای توابع تعریف شده روی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ معادل این است که هر بازه به یک بازه تصویر شود و چون بازه بودن در $\mathbb{R}$ معادل همبند بودن است، پس خاصیت مقدار میانی برای توابع پیوسته روی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ بیان می‌دارد که هر تابع پیوسته هر مجموعهٔ همبند را به مجموعه‌ای همبند می‌نگارد و این چیزی نیست جز حکم قضیهٔ فوق‌الذکر که بیان می‌دارد توابع پیوسته همبندی را حفظ می‌کنند.

دیدیم که برای هر $x_\circ \in X$ تابع $d_{x_\circ} : (X, d) \to (\mathbb{R}, |.|)$ تابعی پیوسته است و لذا اگر X همبند باشد $d_{x_\circ}(X)$ زیرمجموعه‌ای همبند از $\mathbb{R}$ خواهد بود که یک بازه است.

۴۳.۲.۵ قضیه. هر فضای متریک همبند با بیش از یک نقطه مانند (X, d) ناشمارا است.

برهان. چون X بیش از یک نقطه دارد پس تابع

$$d_{x_\circ} : (X, d) \to (\mathbb{R}, |.|)$$

تابع ثابت صفر نمی‌باشد و لذا $d_{x_\circ}(X)$ زیرمجموعه‌ای همبند، و لذا بازه‌ای، با بیش از یک نقطه در $\mathbb{R}$ می‌باشد. اما چنین بازه‌ای ناشماراست و در نتیجه $d_{x_\circ}(X)$ ناشماراست. چون $d_{x_\circ}$ تابع است پس نتیجه می‌گیریم که $\text{Card}\ X \geq \text{Card}\ d_{x_\circ}(X)$. بنابراین X نیز ناشماراست. ■

۴۴.۲.۵ نتیجه. هر فضای متریک شمارا مانند (X, d) ناهمبند کلی است.

برهان. فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای با بیش از یک عضو در X باشد. چون X شماراست D نیز شماراست. اکنون D با متر القا شده از X فضایی متریک و شماراست که بیش از یک نقطه دارد و طبق قضیهٔ فوق ناهمبند می‌باشد. پس X ناهمبند کلی است. ■

این که توابع پیوسته همبندی را حفظ می‌کنند صورت معادل دیگری برای همبندی به دست می‌دهد.

۴۵.۲.۵ قضیه. فضای متریک (X, d) ناهمبند است فقط و فقط وقتی که تابعی پیوسته مانند f از (X, d) به روی $\{\circ, 1\}$ موجود باشد.

برهان. چون $\{\circ, 1\}$ فقط دو نقطه دارد، هر متری روی آن معادل متر گسسته می‌باشد که همان متر القایی اقلیدسی از $\mathbb{R}$ است. لذا در صورت قضیه ابهامی در مورد متر تعریف شده روی $\{\circ, 1\}$ وجود ندارد.

فرض کنیم (X, d) ناهمبند باشد. بنابراین زیرمجموعه‌ای بستاز و سره مانند M از X وجود دارد. قرار می‌دهیم $f = \chi_M$، یعنی f روی

M برابر ۱ و بقیهٔ جاها برابر ۰ تعریف شده است. در این صورت سره بودن M برو بودن f را نتیجه می‌دهد، زیرا هم x ی در M موجود است و هم y یی در M^c و لذا $f(x) = ۱$ و $f(y) = ۰$.

اما f پیوسته است، زیرا زیرمجموعه‌های $\{۰, ۱\}$ عبارتند از ϕ، $\{۰\}$، $\{۱\}$ و $\{۰, ۱\}$ که همگی بسته‌اند و داریم

$$f^{-۱}(\phi) = \phi,$$

$$f^{-۱}(\{۰\}) = M^c,$$

$$f^{-۱}(\{۱\}) = M,$$

$$f^{-۱}(\{۰, ۱\}) = X,$$

که همگی بسته هستند.

بالعکس، فرض کنیم f ی پیوسته از X به روی $\{۰, ۱\}$ موجود باشد. قرار می‌دهیم

$$M = f^{-۱}(\{۱\}).$$

در این صورت با توجه به برو بودن f مجموعه‌های M و M^c ناتهی هستند و لذا M سره است. به علاوه داریم

$$M = f^{-۱}(\{۱\}),$$

$$M^c = f^{-۱}(\{۰\}).$$

و با توجه به پیوسته بودن f و بسته بودن $\{۱\}$ و $\{۰\}$ نتیجه می‌شود که M و M^c بسته‌اند و لذا M بستاز است. بنابراین M ی بستاز و سره در X یافتیم و لذا X ناهمبند است. ■

در بخش بعد مفاهیم سطح بالاتری دربارهٔ همبندی را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

۳.۵ همبندی مسیری

در بخش قبل گفتیم که یک فضای متریک همبند را می‌توان به تعبیر شهودی فضایی دانست که در آن بتوان از هر نقطه مانند x به هر نقطهٔ دیگر مانند y توسط یک مسیر رفت. اما منظور از یک مسیر و رفتن از x به y به طور دقیق و ریاضی چه می‌تواند باشد؟ تصور اقلیدسی ما از یک مسیر یا یک منحنی در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ تابعی پیوسته مانند $f : [\circ, \text{۱}] \to \mathbb{R}^n$ است که نقاط x و y را توسط $f(\circ) = x$ و $f(\text{۱}) = y$ به هم متصل می‌کند.

Benoit Mandelbrot (1924)

به عنوان حالتی خاص می‌توان خط راست بین دونقطهٔ x و y را که با تابع $f(t) = tx + (\text{۱} - t)y$ مشخص می‌شود در نظر گرفت. پیوستگی این تابع به وضوح عدم بریدگی در رفتن از x به سمت y را ایجاب خواهد کرد و لذا تصور اقلیدسی ما می‌گوید که این بهترین تعریف برای مسیر و رفتن از x به y را به دست می‌دهد.

۱.۳.۵ تعریف. هر تابع پیوسته مانند $f : ([\circ, \text{۱}], |.|) \to (X, d)$ را یک مسیر [۱۰] در X می‌نامیم. نقطهٔ $x = f(\circ)$ را ابتدای[۱۱] مسیر و $y = f(\text{۱})$ را انتهای[۱۲] مسیر نامیده و می‌گوییم مسیر f نقطهٔ x را به y متصل می‌کند. ♣

واضح است که با توجه به همبند بودن بازهٔ $[\circ, \text{۱}]$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ و پیوسته بودن تابع f می‌توان نتیجه گرفت که $f([\circ, \text{۱}])$ زیرمجموعه‌ای همبند از X است، زیرا توابع پیوسته همبندی را حفظ می‌کنند.

---

[۱۰] path
[۱۱] initial
[۱۲] terminal

گاهی اوقات به جای آن که f را مسیر بنامیم از مجموعهٔ $f([\circ, ۱])$ در X به عنوان یک مسیر بین x و y یاد می‌کنیم.

۲.۳.۵ تعریف. فضای متریک (X, d) را همبند مسیری[۱۳] نامیم هرگاه هر دو نقطهٔ آن را بتوان توسط مسیری در X به یکدیگر متصل کرد. ♣

بنابراین مثلاً نمودار هر تابع پیوسته روی بازه‌ای بسته مانند $[a, b]$ را می‌توان زیرمجموعه‌ای همبند مسیری از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ در نظر گرفت.

اکنون این سؤال مطرح شود که همبندی و همبندی مسیری چه ارتباطی با یکدیگر دارند؟ تعریف همبندی مسیری نشان می‌دهد که هر زیرمجموعهٔ همبند مسیری خود همبند است. اما این مطلب احتیاج به اثبات دارد.

۳.۳.۵ قضیه. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک و C یک زیرمجموعهٔ همبند مسیری از آن باشد. در این صورت C همبند است.

برهان. نقطهٔ $x \in C$ را ثابت در نظر می‌گیریم. برای هر $y \in C$ تابعی پیوسته مانند

$$f_y : ([\circ, ۱], |.|) \to (C, d)$$

وجود دارد که مثلاً $f_y(\circ) = x$ و $f_y(۱) = y$. چون f_y پیوسته و $[\circ, ۱]$ همبند است، پس $f_y([\circ, ۱])$ زیرمجموعه‌ای همبند از C می‌باشد. حال خانوادهٔ $\{f_y([\circ, ۱])\}_{y \in C}$ را در نظر می‌گیریم. هر عضو این خانواده شامل x است زیرا

$$x = f_y(\circ) \in f_y([\circ, ۱]).$$

---

۱۳ pathwise connected

بنابراین $\{f_y([\circ, \text{۱}])\}_{y \in C}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های همبند است که اشتراک کل اعضا ناتهی است و لذا $\cup_{y \in C} f_y([\circ, \text{۱}])$ همبند خواهد شد. اما داریم

$$\cup_{y \in C} f_y([\circ, \text{۱}]) = C.$$

زیرا برای هر $y \in C$ واضح است که

$$f_y([\circ, \text{۱}]) \subseteq C$$

و از طرفی

$$y = f_y(\text{۱}) \in f_y([\circ, \text{۱}]).$$

بنابراین C مجموعه‌ای همبند می‌باشد. ■

گرچه همبندی مسیری همواره همبندی را نتیجه می‌دهد، با این حال عکس این مطلب لزوماً برقرار نیست، ولی در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ همبند مسیری بودن دقیقاً معادل بازه بودن است که آن هم معادل همبند بودن می‌باشد.

۴.۳.۵ مثال. در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^\text{۲}$ فرض کنیم C نمودار تابع

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad (\mathbb{R}^+ \cup \{\circ\}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|) \\ f(x) \quad &= \quad \begin{cases} \sin \frac{\text{۱}}{x} & x \neq \circ \\ \circ & x = \circ \end{cases} \end{aligned}$$

باشد. در این صورت C همبند است زیرا پیوسته بودن تابع f روی $\mathbb{R}^+$ نتیجه می‌دهد که اگر C ناهمبند باشد آن گاه هر ناهمبندی برای C مانند $\{A, B\}$ باید مثلاً به صورت $A = \{(\circ, \circ)\}$ و $B = C \setminus \{(\circ, \circ)\}$ باشد. لذا $(\circ, \circ)$ نباید نقطهٔ چسبیدگی برای $C \setminus \{(\circ, \circ)\}$ باشد. اما هر همسایگی مبدأ نمودار f را قطع می‌کند و لذا $(\circ, \circ) \in \overline{C \setminus \{(\circ, \circ)\}}$ که تناقض است.

بنابراین C همبند است. اما C همبند مسیری نیست چون مثلاً هیچ تابع پیوسته‌ای نمی‌تواند مبدأ را به نقطهٔ $(\frac{۲}{\pi}, ۱)$ وصل کند. چون اگر چنین تابع پیوسته‌ای وجود داشته باشد باید از C یعنی نمودار f عبور کند و چون f در مبدأ پیوسته نیست این کار امکان ندارد. ♠

این که زیرمجموعه‌های همبند مسیری همبند هستند دستهٔ وسیعی از مجموعه‌های همبند را برای ما مهیا می‌سازد. مثلاً به عنوان یک حالت خاص در فضاهای نرمدار می‌توان حکم زیر را بیان کرد.

۵.۳.۵ قضیه. در هر فضای نرمدار مانند $(X, \|.\|)$ هر مجموعهٔ محدب مانند C همبند مسیری و لذا همبند است.

برهان. برای هر دو نقطه از C مانند x و y خط راست

$$f : ([۰, ۱], |.|) \to (X, \|.\|)$$

$$f(t) = tx + (۱ - t)y$$

تابعی پیوسته است که x را به y متصل می‌کند و بنابر محدب بودن C این خط کاملاً در C قرار دارد یعنی $f([۰, ۱]) \subseteq C$. پس C همبند مسیری و لذا همبند است. ■

نکته‌ای که به طور تلویحی در برهان قضایای فوق به کار رفت این بود که C به عنوان زیرمجموعه‌ای از فضای متریک (X, d) همبند مسیری است فقط و فقط وقتی که خود به عنوان یک فضای متریک با متر القایی از X همبند مسیری باشد. و این مطلب آن قدر واضح است که نیازی به اثبات ندارد.

مشابه مفهوم همبندی در این جا نیز می‌توان مؤلفه‌های همبند مسیری یک فضای متریک را تعریف کرد. از آن جایی که استدلال‌ها کاملاً مشابه بحث قبلی است از ذکر جزئیات خودداری می‌کنیم، اما

اشاره می‌کنیم که مؤلفه‌های همبند مسیری فضا نیز فضا را افراز می‌کنند و لذا نسبتی هم‌ارزی روی X وجود دارد که تحت آن دسته‌های هم‌ارزی همان مؤلفه‌های همبند مسیری فضا خواهند شد. واضح است که X همبند مسیری است فقط و فقط وقتی که تنها یک مؤلفه همبند مسیری داشته باشد. به علاوه به طور مشابه می‌توان گفت که اجتماع دو مجموعهٔ همبند مسیری غیر مجزا یک مجموعهٔ همبند مسیری است.

همچنین می‌توان به بررسی رفتار توابع پیوسته با مجموعه‌های همبند مسیری پرداخت.

۶.۳.۵ قضیه. فرض کنیم $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ تابعی پیوسته و C یک زیرمجموعهٔ همبند مسیری از X باشد. در این صورت $f(C)$ در Y همبند مسیری است.

برهان. فرض کنیم z و w نقاط دلخواهی از $f(C)$ باشند. در این صورت x و y یی در C موجودند که

$$z=f(x),$$

$$w=f(y),$$

و چون C همبند مسیری است پس تابعی پیوسته مانند

$$g:([0,1],|.|)\to(C,d_1)$$

وجود دارد که

$$x=g(0),$$

$$y=g(1).$$

بنابراین

$$f\circ g:([0,1],|.|)\to(f(C),d_2)$$

تابعی پیوسته است که

$$(f \circ g)(\circ) = f(g(\circ)) = f(x) = z,$$

$$(f \circ g)(\setminus) = f(g(\setminus)) = f(y) = w.$$

لذا z توسط تابع پیوستهٔ $f \circ g$ به w متصل می‌شود. پس $f(C)$ همبند مسیری است. ■

بنابراین می‌توان گفت که توابع پیوسته همبندی مسیری را حفظ می‌کنند.

دیدیم که همبندی مسیری همبندی را نتیجه می‌دهد اما عکس این مطلب لزوماً برقرار نیست. با این حال خواص همسایگی‌ها در فضاهای اقلیدسی کمک می‌کند بتوانیم تحت شرطی خاص در مورد عکس موضوع نیز صحبت کنیم. از آن جایی که این حکم به طور کلی‌تری نیز قابل بیان است بحثی کلی ارائه می‌کنیم و سپس در حالت خاص به فضاهای اقلیدسی خواهیم پرداخت. ابتدا یک تعریف ساده را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

از یک ریاضیدان خواستند تا میزی طراحی کند. او در ابتدا میزی بدون پایه طراحی کرد. سپس میزی با تعدادی نامتناهی پایه طراحی کرد و بقیهٔ عمر خود را صرف این کرد که حکم را برای میزی با ؟ پایه (که ؟ لزوماً عددی طبیعی نیست) تعمیم دهد!

۷.۳.۵ تعریف. فضای متریک (X, d) را به طور موضعی همبند مسیری[۱۴] نامیم هرگاه برای هر نقطهٔ آن مانند x و هر همسایگی از آن نقطه مانند $N_r(x)$ مجموعه‌ای باز و همبند مسیری مانند C موجود باشد به قسمی که $x \in C \subseteq N_r(x)$. ♣

۸.۳.۵ قضیه. هر فضای نرمدار مانند $(X, \|.\|)$ به طور موضعی همبند مسیری است.

برهان. در فضاهای نرمدار هر همسایگی محدب است زیرا اگر $N_r(z)$ یک همسایگی و x و y نقاطی دلخواه از آن باشند، آن گاه برای

[۱۴] locally pathwise connected

هر $\text{۰} \leq t \leq \text{۱}$ داریم

$$\begin{aligned} \|tx + (\text{۱}-t)y - z\| &= \|tx + (\text{۱}-t)y - (tz + (\text{۱}-t)z)\| \\ &= \|t(x-z) + (\text{۱}-t)(y-z)\| \\ &\leq t\|x-z\| + (\text{۱}-t)\|y-z\| \\ &< tr + (\text{۱}-t)r = r. \end{aligned}$$

بنابراین $tx + (\text{۱}-t)y \in N_r(z)$.

حال فرض کنیم z نقطه‌ای دلخواه از X باشد و $N_r(z)$ یک همسایگی دلخواه از آن. چون هر مجموعهٔ محدبی همبند مسیری است پس $C = N_r(z)$ مجموعه‌ای باز و همبند مسیری در X است که $z \in C \subseteq N_r(z)$ و در نتیجه X به طور موضعی همبند مسیری می‌باشد. ■

بنابراین می‌توان گفت که فضاهای اقلیدسی به طور موضعی همبند مسیری هستند و لذا به طور موضعی همبند[۱۵] نیز می‌باشند.

اما چنین نیست که هر فضای متریک لزوماً به طور موضعی همبند مسیری باشد. مثلاً $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی یک فضای ناهمبند کلی است (چرا؟) و چون همسایگی باز تک نقطه‌ای در $\mathbb{Q}$ نداریم پس نمی‌توانیم مجموعه‌ای باز و همبند مسیری در $\mathbb{Q}$ پیدا کنیم.

۹.۳.۵ قضیه. در هر فضای متریک به طور موضعی همبند مسیری مانند (X, d)، برای هر x در X مؤلفه همبند مسیری شامل x باز است.

برهان. چون مؤلفه‌های همبند مسیری فضا را افراز می‌کنند پس برای هر x در X یک مؤلفه همبند مسیری منحصر به فرد مانند C_x وجود دارد که شامل x است.

[۱۵] locally connected

برای آن که نشان دهیم C_x باز است فرض کنیم y نقطهٔ دلخواهی در C_x باشد. همسایگی $N_1(y)$ را در نظر می‌گیریم. چون X به طور موضعی همبند مسیری است پس مجموعه‌ای باز و همبند مسیری مانند C موجود است به قسمی که

$$y \in C \subseteq N_1(y).$$

بنابراین اگر نسبت هم‌ارزی $\leftrightarrow$ را به صورت

$$a \leftrightarrow b \iff \text{مسیری از } a \text{ به } b \text{ موجود باشد}$$

تعریف کنیم آن گاه چون $y \in [x] = C_x$ و نیز $C \subseteq [y]$ پس $C \subseteq [x]$. بنابراین C مجموعهٔ بازی شامل y است که زیرمجموعهٔ C_x می‌باشد و لذا y نقطهٔ درونی برای C_x است و در نتیجه C_x مجموعه‌ای باز خواهد بود. ■

۱۰.۳.۵ قضیه. فرض کنیم C زیرمجموعه‌ای باز و همبند از فضای متریک به طور موضعی همبند مسیری (X, d) باشد. در این صورت C همبند مسیری است.

برهان. فرض کنیم x نقطهٔ دلخواهی از C باشد و C_x مؤلفه همبند مسیری شامل x به عبارت دیگر $C_x = [x]$. چون C باز است و مؤلفه‌های همبند مسیری نیز باز هستند، بنابراین $C \cap C_x$ زیرمجموعه‌ای باز از زیرفضای C خواهد بود.

حال به برهان خلف فرض کنیم x_0 و y_0 ی در C باشند که هیچ مسیری از x_0 به y_0 در C موجود نباشد. پس $x_0 \notin [y_0]$ و لذا C_{x_0} و C_{y_0} دو مؤلفه متمایز و در نتیجه مجزا هستند. قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} A &= C_{x_0} \cap C, \\ B &= \cup_{y \notin [x_0]} (C_y \cap C). \end{aligned}$$

در این صورت طبق توضیحات فوق A و B باز و مجزا هستند و $C = A \cup B$. از طرفی $A \neq \phi$ و چون $y_\circ \notin [x_\circ]$ پس B نیز ناتهی است. لذا یک ناهمبندی برای C یافتیم که با فرض همبند بودن C در تناقض است. ■

حکم فوق با حذف شرط به طور موضعی همبند مسیری بودن (X, d) لزوماً برقرار نیست. مثلاً اگر X را مجموعهٔ C در مثال ۴.۳.۵ در نظر بگیریم آن گاه X با متر القایی اقلیدسی یک فضای متریک همبند است و چون هر فضایی در خود باز است پس X باز نیز می‌باشد. ولی دیدیم که X همبند مسیری نیست.

تاکنون ارتباط همبندی و همبندی مسیری را با برخی مفاهیم قبلی مورد بررسی قرار داده‌ایم. اجازه دهید ببینیم همبندی و فشردگی چه ارتباطی دارند.

۱۱.۳.۵ تعریف. زیرمجموعهٔ C از فضای متریک (X, d) را یک زیر مجموعهٔ پیوستار[۱۶] نامیم هرگاه فشرده و همبند باشد. ♣

۱۲.۳.۵ قضیه. فرض کنیم فضای متریک (X, d) همبند باشد. در این صورت به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\varepsilon > \circ$ عددی مانند $n \in \mathbb{N}$ و نقاطی مانند x_1، ...، x_n در X موجودند به قسمی که

$$x_1 = x,$$

$$x_n = y,$$

$$d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon, \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

به عبارت دیگر اگر X همبند باشد آن گاه بین هر دو نقطهٔ آن تعدادی متناهی گام به طول کم‌تر از ε در X موجود است.

---

[۱۶] continuum

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. $x \in X$ را ثابت در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم C_ε مجموعهٔ همهٔ y هایی باشد که از x به y با تعدادی متناهی گام به طول کم‌تر از ε می‌توان رفت.

ادعا می‌کنیم $C_\varepsilon = X$. اولاً C_ε باز است زیرا اگر y نقطهٔ دلخواهی از C_ε باشد آن گاه

$$N_\varepsilon(y) \subseteq C_\varepsilon.$$

برای اثبات این امر فرض کنیم z نقطهٔ دلخواهی از $N_\varepsilon(y)$ باشد. در این صورت گام از y به z طول کم‌تر از ε دارد و چون از x به y با تعدادی متناهی گام با طول کم‌تر از ε می‌توانیم برویم اگر این گام اخیر یعنی از y به z را نیز اضافه کنیم، از x به z با تعدادی متناهی گام با طول کم‌تر از ε رفته‌ایم و لذا $z \in C_\varepsilon$. بنابراین y نقطه‌ای درونی برای C_ε است و لذا C_ε باز است.

ثانیاً C_ε بسته است. فرض کنیم $z \in \overline{C_\varepsilon}$. بنابراین طبق قضیهٔ ۱۱.۲.۲ دنباله‌ای مانند $\{y_n\}$ در C_ε موجود است که $y_n \to z$. لذا عددی مانند $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ هست که به ازای هر $n \geq K_\varepsilon$ داریم $d(y_n, z) < \varepsilon$ و یا

$$z \in N_\varepsilon(y_n).$$

اما دیدیم برای $y_n \in C_\varepsilon$ داریم $N_\varepsilon(y_n) \subseteq C_\varepsilon$ و در نتیجه $z \in C_\varepsilon$. بنابراین C_ε بسته است. لذا C_ε زیرمجموعه‌ای بستاز از X است و چون X همبند است پس $C_\varepsilon = \phi$ یا $C_\varepsilon = X$. اما $C_\varepsilon \neq \phi$ زیرا $x \in C_\varepsilon$. پس $C_\varepsilon = X$ و در نتیجه از x به هر نقطه‌ای از X با تعداد متناهی گام با طول کم‌تر از ε می‌توان رفت. ■

۱۳.۳.۵ قضیه. فرض کنیم (X, d) فضایی فشرده باشد که در آن به ازای هر $\varepsilon > 0$ بتوان از هر نقطه به هر نقطه با تعدادی متناهی گام به طول کم‌تر از ε رفت. در این صورت X همبند است.

برهان. به برهان خلف فرض کنیم X همبند نباشد، پس زیرمجموعه‌ای بستاز و سره مانند M دارد. چون M بسته و X فشرده است پس بنابر قضیهٔ ۱۲.۲.۴ مجموعهٔ M فشرده است. به همین دلیل M^c نیز فشرده خواهد بود. اما $M \cap M^c = \phi$ و لذا بنابر قضیهٔ ۲۳.۳.۴ داریم

$$d(M, M^c) > 0.$$

حال فرض کنیم $\varepsilon = \frac{1}{2}d(M, M^c)$. نقاط $x \in M$ و $y \in M^c$ را در نظر می‌گیریم. توجه داریم که M سره است و لذا M و M^c ناتهی هستند. طبق فرض باید بتوانیم از x تا y توسط تعدادی متناهی گام با طول کم‌تر از ε برویم. اما در این میان نقاطی مانند $x' \in M$ و $y' \in M^c$ هستند که پشت سر هم آمده‌اند و لذا باید $d(x', y') < \varepsilon$. بنابراین

$$d(x', y') < \varepsilon < d(M, M^c) \leq d(x', y')$$

که تناقض است. ■

دقت کنید که در شرط مذکور در قضایای بالا رفتن از x به y توسط گام‌های متناهی به معنی رفتن از روی مسیری پیوسته نیست و لذا تحت این شرط X لزوماً همبند مسیری نخواهد بود. واضح است که اگر فضا همبند مسیری و فشرده باشد برهان بسیار ساده‌تر می‌شود. به هر حال در قضیهٔ ۱۲.۳.۵ کاری به فشرده بودن یا نبودن فضا نداریم اما در قضیهٔ فوق شرط فشرده بودن مهم است. لذا می‌توان گفت که در فضاهای فشرده، پیوستار بودن معادل شرط مذکور در این قضایا است.

احکام و تعریف دیگری در مورد زیرمجموعه‌های پیوستار فضاهای متریک وجود دارد که آن‌ها را به عنوان تمرین باقی می‌گذاریم.

۴.۵ تمرین‌ها

Abu Arrayhan Muhammad ibn Ahmad Al-Biruni (973-1048)

اگر دقت کرده باشید در این فصل بخشی مجزا برای مثال‌ها نداشتیم. اگر بخواهید نمونه‌هایی از فضاهای همبند را برای خود جمع‌آوری کنید ساده‌ترین کار این است که مؤلفه‌های همبند فضاهای متریک ارائه شده در فصل‌های قبل را در نظر بگیرید.

این کار را می‌توانید در مورد همبندی مسیری نیز انجام دهید. بدین ترتیب با تمرینی طولانی مواجه هستید که اندوخته‌های شما را در سراسر کتاب، مجدداً برایتان بازخوانی خواهد کرد و از این طریق می‌توانید معلومات کسب شدهٔ خود را محک بزنید. هیچ نکته‌ای را بدیهی تلقی نکنید و هرگز تصور نکنید که آنچه در این کتاب آمده برای شما کافی است. حقیقت امر این است که اندک مطالب گرد آمده در این کتاب در برابر قلهٔ سترگ فضاهای متریک واقعاً ناچیز است و آنچه این جا با هم بدان پرداختیم نخستین گام در پیمودن این شاخهٔ تنومند از ریاضیات می‌باشد.

۱.۴.۵ فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک همبند باشد و نقطه‌ای مانند $x_\circ \in X$ موجود باشد به قسمی که

$$d(x_\circ, x) \neq ۱, \qquad x \in X.$$

ثابت کنید X فضایی کراندار است.

۲.۴.۵ فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد، $x_\circ$ نقطهٔ دلخواهی از آن و $\delta > \circ$. ثابت کنید مجموعه‌های

$$A = \{x \mid d(x, x_\circ) > \delta\},$$

$$B = \{x \mid d(x, x_\circ) < \delta\}$$

منفک هستند و نتیجه بگیرید که هر فضای همبند با حداقل دو نقطه ناشماراست.

۳.۴.۵ فرض کنیم $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های همبند فضای متریک (X,d) باشد و C زیرمجموعه‌ای همبند از X که هر C_α را قطع می‌کند. ثابت کنید $C\cup(\cup_{\alpha\in\mathbb{I}}C_\alpha)$ همبند است.

۴.۴.۵ فرض کنیم $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های همبند فضای متریک (X,d) باشد و نقطه‌ای مانند x موجود باشد که در هر C_α یا C'_α قرار دارد. به علاوه فرض کنیم x حتماً در یکی از C_α ها آمده باشد. نشان دهید $\cup_{\alpha\in\mathbb{I}}C_\alpha$ نیز همبند است. آیا شرط وجود x در یکی از C_α ها واقعاً لازم است؟

۵.۴.۵ شرطی لازم و کافی برای آن که اجتماع دو مجموعهٔ همبند، همبند باشد ارائه دهید. آیا می‌توانید آن را به خانواده‌ای متناهی تعمیم دهید؟ به خانواده‌ای دلخواه چطور؟

۶.۴.۵ فرض کنیم $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ خانواده‌ای از پایین جهتدار از مجموعه‌های همبند فضای متریک (X,d) باشد. آیا اشتراک اعضای این خانواده لزوماً همبند است؟ اگر هر C_α فشرده نیز باشد، آیا اشتراک اعضای این خانواده لزوماً پیوستار است؟

۷.۴.۵ ثابت کنید درون و بستار هر مجموعهٔ محدب در یک فضای نرمدار مجموعه‌ای محدب است.

۸.۴.۵ فرض کنیم C زیرمجموعه‌ای محدب از فضای نرمدار $(X,\|.\|)$ باشد و $x\in X$ دلخواه. ثابت کنید نزدیک‌ترین نقطهٔ C به x موجود و منحصر به فرد است.

۹.۴.۵ ثابت کنید فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ محدب و لذا همبند مسیری است و نتیجه بگیرید که $\mathbb{R}^n$ همبند است.

۱۰.۴.۵ ثابت کنید ϕ و $\mathbb{R}^n$ تنها زیرمجموعه‌های بستاز فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ هستند و لذا $\mathbb{R}^n$ همبند است.

۱۱.۴.۵ فرض کنیم C زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد و

$$A = \{x + \sin x \mid x \in C\}.$$

آیا از همبند بودن C می‌توان نتیجه گرفت که A نیز همبند است؟

۱۲.۴.۵ ثابت کنید هر زیرمجموعهٔ باز فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ اجتماع شمارایی از بازه‌های باز دو به دو مجزاست.

۱۳.۴.۵ آیا فضاهای اقلیدسی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^۲$ همسانریخت هستند؟

۱۴.۴.۵ آیا برای مجموعه‌های فشردهٔ فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ همبندی و همبندی مسیری معادلند؟

۱۵.۴.۵ آیا می‌توانید شرطی لازم و کافی برای آن که در یک فضای متریک همبندی و همبندی مسیری معادل باشند ارائه دهید؟

۱۶.۴.۵ فرض کنیم $f : (X, d_۱) \to (Y, d_۲)$ تابعی پیوسته و X همبند مسیری باشد. ثابت کنید نمودار f در فضای حاصلضربی $X \times Y$ همبند مسیری است. این مطلب را در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ معمولاً به این صورت بیان می‌کنیم که برای رسم یک تابع پیوسته روی یک بازه قلم را از روی کاغذ برنمی‌داریم.

۱۷.۴.۵ تابع $f : (X, d_۱) \to (Y, d_۲)$ را یکنوا نامیم هرگاه به ازای هر $y \in Y$ مجموعهٔ $f^{-۱}(y)$ در X همبند باشد. ثابت کنید اگر Y همبند و f یکنوا و برو باشد آن گاه X نیز همبند است.

یکی از سؤالات امتحان این بود: بهترین سؤالی که شنیده‌اید را بنویسید و به آن پاسخ دهید. دانشجویی نوشته بود بهترین سؤال همین سؤالی است که در امتحان آمده و بهترین پاسخ چیزی است که من در این جا نوشته‌ام!

۱۸.۴.۵ فرض کنیم C مجموعه‌ای همبند در فضای متریک (X,d) باشد. نقطهٔ x را یک نقطهٔ برشی[۱۷] برای C نامیم هرگاه $C \setminus \{x\}$ ناهمبند باشد. ثابت کنید هر مجموعهٔ پیوستار حداقل دو نقطهٔ غیر برشی دارد و اگر دقیقاً دو نقطهٔ غیر برشی داشته باشد آن گاه با فضای اقلیدسی $[\circ, \text{۱}]$ همسانریخت است.

۱۹.۴.۵ فرض کنیم C مجموعه‌ای پیوستار و A و B زیرمجموعه‌هایی دلخواه از فضای متریک (X,d) باشند. C را تحویل ناپذیر[۱۸] از A تا B نامیم هرگاه C هم A و هم B را قطع کند ولی هیچ زیرمجموعهٔ سرهٔ پیوستاری از C چنین نباشد. ثابت کنید اگر C تحویل ناپذیر از A تا B باشد آن گاه هر نقطهٔ $A \cap C$ یک نقطهٔ حدی از $C \setminus A$ است.

۲۰.۴.۵ فرض کنیم (X,d) فضایی متریک، C زیرمجموعه‌ای پیوستار و x و y نقاطی از X باشند که $x, y \in C$. ثابت کنید C شامل زیرمجموعه‌ای تحویل ناپذیر از $\{x\}$ تا $\{y\}$ است.

۲۱.۴.۵ فرض کنیم

$$X = \{(t, \circ) \mid \circ < t \leq \text{۱}\} \cup \{(\frac{\text{۱}}{n}, t) \mid n \in \mathbb{N}, \circ \leq t \leq \text{۱}\}.$$

تابع d را روی $X \times X$ به صورت

$$d(x,y) = \text{طول کوتاه‌ترین مسیر در } X \text{ از } x \text{ به } y$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید (X,d) یک فضای متریک است. آیا متر d با متر اقلیدسی معادل است؟ آیا متر d با متر اقلیدسی به طور توپولوژیکی

---

[۱۷] cut point
[۱۸] irreducible

معادل است؟ آیا X همبند، همبند مسیری، فشرده، کراندار، به طور کلی کراندار و تام است؟ آیا به طور موضعی این خواص را دارد؟

۲۲.۴.۵ ثابت کنید مجموعهٔ اعداد صحیح p–ادیک با مجموعهٔ کانتور همسانریخت است.

۲۳.۴.۵ آیا حاصلضرب یک خانوادهٔ دلخواه از مجموعه‌های همبند در فضای حاصلضربی همبند است؟ در مورد همبندی مسیری چطور؟

منابع

[۱] و. رودین، اصول آنالیز ریاضی، ترجمهٔ ع. ا. عالم زاده، انتشارت علمی و فنی، تهران، ۱۳۶۲

[۲] ت. م. آپوستل، آنالیز ریاضی، ترجمهٔ ع. ا. عالم زاده، انتشارت دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ۱۳۵۹

[1] C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, 1989.

[2] A. Brown, C. Pearcy, *An Introduction to Analysis*, Springer-Verlag, 1995.

[3] E. Hairer, G. Wanner, *Analysis by Its History*, Springer, 1996.

[4] J. J. O'Connor, E. F. Robertson, *The MacTutor of History Mathematics Archive*, University of St Andrews, 2004.

[5] G. K. Pedersen, *Analysis Now*, Springer-Verlag, 1989.

[6] M. H. Protter, C. B. Morrey, *A First Course in Real Analysis*, Springer, 1991.

[7] C. C. Pugh, *Real Mathematical Analysis*, Springer, 2002.

[8] *Annual William Lowell Putnam Competition*, 1985-2003.

[9] *International Competition in Mathematics for University Students*, 1994-2003.

[10] http://comedy.clari.net/rhf/jokes/

[11] http://en.wikipedia.org/

[12] http://golum.riv.csu.edu.au/ sbuckley/maths/funpage/

[13] http://maths.leeds.ac.uk/ kisilv/

[14] http://www.cs.utexas.edu/users/ndurene/

[15] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Quotations/

[16] http://www.math.niu.edu/ rusin/known-math/

[17] http://www.math.sunysb.edu/ zakeri/

[18] http://www-maths.mcs.st-andrews.ac.uk/

[19] http://www.xs4all.nl/ jcdverha/scijokes/

فهرست نمادها

فهرست الفبایی