

فیزیک ذرات بنیادی

کاتینگهام - گرین وود

مترجمین: دکتر محمد فرهاد رحیمی
حمیدرضا رضا زاده

ویراست دوم



فیزیک ذرات بنیادی

دبلیو. ان. کاتینگهام
دی. ای. گرین وود

دکتر محمد فوهاد رحیمی
حمیدرضا رضازاده



جز فروغ عشق اندر ذره نیست / غیر عشق اندر دل هر ذره نیست

مولوی

پیشگفتار مترجمان

فیزیک ذرات بنیادی یکی از گرایش‌های رشته فیزیک است که دانشجو می‌تواند با آن در سطح کارشناسی فیزیک و تحصیلات تکمیلی آشنا شود. شوربختانه تاکنون درباره فیزیک ذرات بنیادی در این سطح آموزشی، تا جایی که آگاهی داریم، بیش از یک کتاب که به زبان پارسی ترجمه شده است، وجود ندارد. این دومین کتابی است که به زبان پارسی در مورد ذرات بنیادی منتشر می‌شود. ویژگی این کتاب به‌روز بودن آن به ویژه در ویرایش دوم است. نویسندگان (کاتینگهام و گرین‌وود) کوشیده‌اند تا جایی که می‌شود جستارها را ساده بیان کنند و برای آنکه سخن به درازا نکشد، برهان‌آوری برای موردهای مهم را در بخش پیوسته و پاسخ به مسأله‌ها، گسترده‌تر بیان کنند. در واقع آموزش این کتاب برای آموزگاران نیز ساده‌تر است و خود دانشجو مجبور می‌شود برای درک بهتر و ژرفتر مطلب، پاسخ مسأله‌ها را بیابد و اگر نیاز شد از راهنمای حل مسأله که در پایان کتاب آمده است، بهره‌برد.

در زمینه حل مسائل فیزیک ذرات بنیادی نیز کتابی را منتشر کرده‌ایم (رحیمی - وحید) که پرسش‌های آزمون‌های فیزیک ذرات و آزمون فراگیر (آزمون جامع) برخی از دانشگاه‌های بنام آمریکا را در آن آورده است و پاسخ آنها را هم نوشته‌ایم تا از این لحاظ هم، دانشجویان ما با کمبود روبرو نبوده و دست کم به یک منبع پارسی از مسأله‌های ذرات دسترسی داشته باشند. این کتاب را انتشارات پاپلی در مشهد در ۱۳۹۰ منتشر کرده است.

همان‌گونه که می‌دانیم آدمی در آغاز بر این باور بود که چهار آخشیح (عنصرهای چهارگانه) (آب و آتش و باد و خاک)^۱ زیربنای همه واکنش‌ها در طبیعت است، و دیگر ماده‌ها به گونه‌ای هماهنگ از این چهار درست شده‌اند یا می‌شوند. تا این که اتم کشف گردید، و بنیادی‌ترین سنگ بنای هستی شناخته شد، و آشکار گردید که اتم همه ویژگی‌های هر عنصر را دارا بوده و از لحاظ الکتریکی بی‌بار است. سپس الکترون کشف گردید که سبکتر از سبکترین اتم‌ها (هیدروژن) بود و بار منفی را یدک می‌کشید. پس از آن با کشف پرتوزایی، هسته اتم کشف شد که دارای بار مثبت بود و سرانجام پروتون‌ها و نوترون‌های درون هسته اتم کشف شدند. با کشف پرتوزایی هسته‌ای و واپاشی بتا از گرایش فیزیک ذرات بنیادی، بنیان نهاده شد، نوترینوها و پادنوترینوها کشف شدند. با افزایش انرژی شتاب‌دهنده‌های مصنوعی، اندک اندک ذرات دیگری مانند مزونها و پادذرات دیگر و پوزیترون‌ها و غیره کشف شدند.

۱- فراز آورید آخشیحان چهار کجا اندرو بست چندین نگار

برین آتش است و فرودینش خاک میان آب دارد ابا باد پاک (ابوشکور بلخی)

با کشف نیروی هسته‌ای ضعیف ذرات میانجی برهمکنش ضعیف نیز شناخته شدند (مزون‌های Z, W) نیروهای هسته‌ای به نیروهای گرانشی و الکترومغناطیسی افزوده شدند. کوشش می‌شد همان‌گونه که نیروهای الکتریکی و مغناطیسی یگانه گشته‌اند، نیروهای هسته‌ای و الکترومغناطیسی را نیز هم کاسه کنند. این بود که **مدل استاندارد** بیان شد و جای پیدا کرد. این کتاب با آغاز از این مدل به بیان دیگر جستارهای فیزیک ذرات بنیادی پرداخته است. مدل استاندارد در واقع آغازی شایسته برای آموزش ذرات بنیادی برای گرایش ذرات بنیادی در سطح کارشناسی و تحصیلات تکمیلی است. کتاب ذرات بنیادی مقدماتی، مانند فیزیک زیر اتمی، از انتشارات مرکز نشر دانشگاهی، برای آغاز کار کتاب خوبی است اما قدیمی است و باید ویرایش تازه آن آموزش داده شود.

در این کتاب کاتینگهام و گرین‌وود مدل استاندارد را در سطح دانشجویان تحصیلات تکمیلی آموزش داده‌اند و در پایان هر فصل چندین مسأله وجود دارد و راهنمایی هم برای برخی از مسأله‌ها در پایان کتاب و پیوست‌های کتاب آمده است. این دو پژوهشگر، فیزیکدانان نظری هستند که در آزمایشگاه اچ. اچ. ویلز در دانشگاه بریستول انگلستان به کار مشغولند.

پیشتر، ما کتاب مبانی فیزیک هسته‌ای (ویرایش دوم) از این نویسندگان را هم به پارسی برگردانده‌ایم که پس از شش ماه در چاپخانه دانشگاه فردوسی مشهد به چاپ دوم رسید. امیدواریم این کتاب ذرات هم، که دومین کتاب ذرات به زبان پارسی می‌باشد، مورد توجه مدرسین و دانشجویان گرامی قرار گیرد و کوشش ما بهبود یافته باشد.

اگر به اشتباهایی در این برگردان برخورد کردید، خواهشمندیم ما را آگاه کنید تا در چاپ بعدی اصلاح شوند. پیشاپیش سپاسگزار این نکویی و نوازش خوانندگان هستیم.

دکتر محمدفرهاد رحیمی، حمیدرضا رضازاده

استاد فیزیک ذرات بنیادی تجربی دانشگاه فردوسی مشهد farhimi@yahoo.com

فوق لیسانس فیزیک ذرات بنیادی hamidreza.rezazadeh@gmail.com

دیباچه

مدل استاندارد فیزیک ذرات، نظریه‌ای ریاضیاتی است که به توصیف برهمکنشهای ضعیف، الکترومغناطیسی و قوی بین لپتون‌ها و کوارک‌ها می‌پردازد. لپتون‌ها و کوارک‌ها ذرات پایه‌ای مدل استاندارد می‌باشد.

در ویرایش تازه این کتاب درسی مقدماتی برای دوره تحصیلات تکمیلی، معرفی مختصر و در عین حال دست‌یافتنی نظریه برهمکنشهای قوی، و مشاهده‌های مربوط به ناتقارنی ماده و پادماده گنجانده شده است. تاکنون دیگر آشکار گشته، که نوترینوها ذره‌های بی‌جرمی نیستند و در این کتاب پدیده‌های مربوط به این موضوع و نظریه توصیف‌کننده آن را منسجمانه ارائه می‌شود. همچنین در این کتاب نظریه برهمکنشهای قوی و پیشرفته‌های حاصل در فیزیک نوترینو گنجانده شده است. در این کتاب مفهومی‌های نظری مربوط به برهمکنشهای الکترومغناطیسی و ضعیف لپتون‌ها و کوارک‌ها تا برهمکنشهای قوی کوارک‌ها گنجانده شده است.

در این کتاب درسی معرفی به روزی از مدل استاندارد برای دانشجویان تحصیلات تکمیلی فیزیک ذرات ارائه شده است. در پایان هر فصل چندین مسأله وجود دارد، و راهنمایی‌هایی هم برای برخی از مسأله‌ها در پایان کتاب در نظر گرفته شده است. سطح ریاضیات بکار رفته در متن کتاب برای دوره تحصیلات تکمیلی فیزیک، مناسب بوده و معانی و سطح ریاضیاتی پیچیده‌تر در خود متن کتاب و در پیوستها باز شده است.

نوئل کاتینگهام و درک گرینوود فیزیک دانان نظری هستند که در آزمایشگاه اچ. اچ. ویلز در دانشگاه بریستول مشغول به کارند. انتشارات دانشگاه کمبریج دو کتاب دیگر در سطح دوره لیسانس از این دو فیزیک‌دان چاپ کرده است، *الکتريسيته و مغناطيس (1991)*¹، و *مبانی فیزیک هسته‌ای*² (ویرایش دوم 2001)، که این کتاب را نیز همین مترجمان به فارسی برگردانده‌اند و انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد آن را دو مرتبه چاپ کرده است.

1- Electricity and Magnetism

2- An Introduction to Nuclear Physics.

پیشگفتار نویسندگان بر ویرایش دوم

در هشت سالی که از ویرایش نخست این کتاب گذشته، مدل استاندارد در توصیف فیزیک ذرات در گستره انرژی زیر 2 TeV که تا کنون کاوش شده، به بی اعتباری جدی دچار نشده است. از بدو ویرایش نخست این کتاب، کشف مهمی که در فیزیک ذرات انجام گرفته است، جرم دار بودن نوترینوها بوده است. در این ویرایش نوین، فصلهایی افزوده ایم، که سبک و شیوه مدل استاندارد را گسترش می دهند و میدانهای نوترینویی دارای جرم را نیز در بر می گیرند. همچنین این امکان را که نوترینوها ذره های مایورانا، و نه ذره دیراک باشند، را در نظر گرفته ایم.

اکنون برخورد دهنده بزرگ هادرونی (LHC) در سرن، در حال راه اندازی است^۱. چشم آن می رود که در انرژی هایی که در آزمایشهای LHC میسر خواهند شد (انرژیهای حدود 20 TeV)، فیزیک میدان هیگز روشن شود و آغاز به درک «فیزیک ورای مدل استاندارد» صورت گیرد. داده های به دست آمده از «کارخانه های B » همچنان رویهم انباشته می شوند و درک ژرفتری از نقض CP را میسر می سازند، دلگرم به آنیم که در آینده هم توجه به مدل استاندارد تا مدتی ادامه خواهد یافت.

این بار هم نشر دانشگاه کمبریج بیشترین یاری رسان در نوشتن این کتاب بود. از دوشیزه و.ک. جانسون^۲ برای دستکاری مدرانه اش سپاسگزاریم. از استاد دکتر ج.گ. کورنر^۳ برای تصحیحهای ویرایش نخست سپاسگزاریم، همچنین سپاسگزار خانم پرفسور س. دیویس^۴ برای تبادل اندیشه های یاری رسانش هستیم.

۱- خوانندگان گرامی توجه دارند که این جمله مربوط به سال ۲۰۰۷ می شود. اکنون آزمایش هم انجام گرفته است.

2- V.K. Johnson

3- J.G. Körner

4- C. Davies

پیشگفتار نویسندگان بر ویرایش نخست

«مدل استاندارد» فیزیک ذرات دست آورد بیش از پنجاه سال کوشش فراوان تجربی و الهامات نظری بوده است. در این کتاب خواسته‌ایم که مقدمه‌ای فشرده و کوتاه، اما دست‌یافتنی، از ساختار نظری بزرگ و برانده مدل استاندارد ارائه دهیم. اکنون که همگان همساز با اندیشه ساخت برخورد دهنده بزرگ هادرونی در سرن هستند، مدل استاندارد همچنان مبحثی زنده و پویا خواهد بود.

زیبایی و سادگی بنیادین این نظریه را می‌توان در سطحی «کلاسیک» درک کرد؛ بدین ترتیب که میدانهای بوزونی را میدانهای کلاسیک راستین و میدانهای فرمیونی را میدانهای پادجایجا شونده کامل در نظر می‌گیریم. برای آنکه با تجربه سازگار درآید، باید نظریه کوانتیزه گردد. محاسبه بسیاری از پیامدهای این نظریه در نظریه کوانتومی اختلال انجام می‌گیرد. آن دسته از محاسبه‌هایی که در این کتاب انجام داده‌ایم تنها در پایین‌ترین مرتبه اختلال بوده است، که نیازی به بازهنجار شدن ندارند. در فصل ۸ بازهنجارش را توصیف می‌کنیم، همچنین در فصل‌های ۱۹ درباره نابهنجاریها که در طی کوانتس رخ می‌دهند، نیز بازهنجارش را به روشی توصیفی بیان کرده‌ایم.

درک کامل کامیابی و اهمیت مدل استاندارد نیاز به دانشی گسترده از فیزیک ذرات دارد که فراتر از آن چیزی است که به‌طور معمول در دوره کارشناسی فیزیک آموخته می‌شود، و نمی‌توان آن را در مقدمه‌ای کوتاه گنجانند. اما، کوشش می‌کنیم که دیدی فراگیر از دستیابی‌های هوشمندانه نمایش یافته در این مدل، و برخی از برانگیختگی‌های این کامیابی را ارائه دهیم. در فصل ۱، چکیده‌ای کوتاه از فیزیک ذرات، آنگونه که تا امروز به گونه کیفی درک شده، ارائه می‌دهیم. در فصلهای پس از آن، نظریه را گسترش می‌دهیم و در فصلهایی نیز به داده‌های تجربی می‌پردازیم. میزان داده‌های پشتیبان این نظریه بسیار زیاد است، و ما به گونه‌ای کوشش می‌کنیم که تنها بر برجسته‌ترین نتیجه‌های تجربی تکیه کنیم. مگر در موردهایی که بیان شوند، مقادارهای تجربی از گروه داده‌های ذره یا PDG (1996)^۱ آورده شده‌اند.

به‌طور معمول زمینه ریاضیاتی فرض شده در این کتاب، در دوره کارشناسی فیزیک به دست می‌آید. به ویژه باید در بکارگیری جبر ماتریسی بسیار ماهر بود؛ در پیوست یک مبحث کمکی برای یادآوری ماتریسها گنجانده شده است. اصلهای تقارن اهمیت بسزایی در ساختن این مدل دارند، و در پیوست ب، بخشی از نظریه گروه که از آن در توصیف این تقارنها بهره می‌گیریم، آمده است. ریاضیاتی که بکار می‌گیریم از نظر فنی مشکل نیستند، اما خواننده اندک اندک باید نسبت به سطح کارشناسی، با دستوربندی انتزاعی تری از نظریه فیزیکی کنار بیاید. ریز روند رسیدن به نتیجه‌ها، در صورتی که روانی متن را

خداشه دار می کردند، در بخش مسأله‌ها نهاده شده است (و راهنمایی برای پاسخ آنها نیز در پایان کتاب فراهم شده است).

این کتاب بر پایه درس گفتارهایی بنا شده است که برای دانشجویان آغازین دورهٔ تحصیل تکمیلی در دانشگاه بریستول گفته شده است و به همین سبب برای بکارگیری در این سطح، و شاید تا حدی در سالهای بالای کارشناسی، طرح ریزی شده‌اند. این کتاب تنها برای فیزیک‌پیشه گان ذرات نیست، امیدواریم فیزیک‌پیشگانی که در دیگر زمینه‌های فیزیک کار می‌کنند و علاقه‌مند به درک بیشتر جزءهای سازنده ماده هستند، این کتاب را بخوانند.

مایلیم از هر داوری که در نشر دانشگاه کمبریج طرح آغازین را خواندند و پیشنهاد داده‌اند، سپاسگزاری کنیم. گروه فیزیک در بریستول دلگرمی زیادی به کار ما داده‌اند. بسیاری از همکاران، در بریستول و دیگر جاها، در درک ما از این موضوع سهم داشته‌اند. از خانم ویکتوریا پری^۱ برای کار پردقت و درستش بر روی نسخهٔ حروف چینی شده، سپاسگزاریم، بدون کار ایشان این کتاب هیچ‌گاه پدیدار نمی‌شد.

فهرست

۳	پیشگفتار مترجمین
۵	دیاچه
۶	پیشگفتار نویسندگان بر ویرایش دوم
۷	پیشگفتار نویسندگان بر ویرایش نخست
۱۵	نمادگذاری
۲۱	فصل ۱- دید فیزیکی ذرات به طبیعت
۲۱	۱-۱ مقدمه
۲۲	۲-۱ ساختار مدل استاندارد
۲۴	۳-۱ لپتون‌ها
۲۴	۴-۱ کوارک‌ها و سیستم‌های متشکل از کوارک
۲۵	۵-۱ طیف‌نمایی سیستم‌های درست‌شده از کوارک‌های سبک
۲۹	۶-۱ کوارک‌های بیشتر
۳۱	۷-۱ رنگ کوارک
۳۵	۸-۱ پراکندگی الکترون از هسته
۳۷	۹-۱ شتابدهنده‌های ذرات
۳۹	۱۰-۱ یکاها
۴۱	فصل ۲- تبدیل‌های لورنتس
۴۱	۱-۲ دوران‌ها، انبساط و تبدیل‌های لورنتس معمول
۴۳	۲-۲ اسکالرها، چاربردارهای پادوردا و هموردا
۴۴	۳-۲ میدان‌ها
۴۶	۴-۲ تانسور لوی‌چیویتا
۴۷	۵-۲ بازگشت زمانی و وارونی فضا
۴۷	مسئله‌ها
۴۹	فصل ۳- فرمول‌بندی لاگرانژی مکانیک
۴۹	۱-۳ اصل هیلتون
۵۱	۲-۳ پایستگی انرژی
۵۲	۳-۳ سیستم‌های پیوسته
۵۵	۴-۳ نظریه میدان هموردای لورنتس
۵۵	۵-۳ معادله کلین-گوردون
۵۷	۶-۳ تانسور انرژی-تکانه
۵۹	۷-۳ میدان‌های اسکالر مختلط
۶۰	مسئله‌ها

۶۱	فصل ۴- الکترومغناطیس کلاسیک
۶۱	۱-۴ معادله‌های ماکسول
۶۳	۲-۴ چگالی لاگرانژی برای الکترومغناطیس
۶۴	۳-۴ تبدیل‌های پیمانه‌ای
۶۴	۴-۴ جوابهای معادله ماکسول
۶۶	۵-۴ وارونی فضا
۶۷	۶-۴ مزدوج بار
۶۷	۷-۴ تکانه زاویه‌ای ذاتی فوتون
۶۸	۸-۴ چگالی انرژی میدان الکترومغناطیسی
۶۹	۹-۴ میدان‌های برداری جرم‌دار
۷۰	مسئله‌ها

۷۳	فصل ۵- معادله دیراک و میدان دیراکی
۷۳	۱-۵ معادله دیراک
۷۶	۲-۵ تبدیلات لورنتس و ناوردایی لورنتس
۷۹	۳-۵ تبدیل پاریتی
۷۹	۴-۵ اسپینورها
۷۹	۵-۵ ماتریس‌های γ^μ
۸۱	۶-۵ حقیقی کردن چگالی لاگرانژی
۸۲	مسئله‌ها

۸۳	فصل ۶- جواب‌های معادله دیراک در فضای آزاد
۸۳	۱-۶ ذره دیراکی در حال سکون
۸۴	۲-۶ اسپین ذاتی ذره دیراکی
۸۵	۳-۶ امواج تخت و هلیسیتی
۸۷	۴-۶ جواب‌های با انرژی منفی
۸۹	۵-۶ انرژی و تکانه میدان دیراکی
۹۰	۶-۶ میدان‌های دیراک و مازورانا
۹۱	۷-۶ حد $m \gg E$ ، نوترینوها
۹۱	مسئله‌ها

۹۳	فصل ۷- الکترودینامیک
۹۳	۱-۷ چگالی احتمال و جریان احتمال
۹۴	۲-۷ معادله دیراک با میدان الکترومغناطیسی
۹۶	۳-۷ تبدیل‌های پیمانه‌ای و تقارن
۹۷	۴-۷ مزدوج بار
۹۹	۵-۷ الکترودینامیک میدان بردار اسکالر
۹۹	۶-۷ ذرات در انرژی‌های پایین و ممان مغناطیسی دیراکی
۱۰۱	مسئله‌ها

فصل ۸- کوانتیزه کردن میدان‌ها: QED.....	۱۰۳
۱-۸ کوانتیزه کردن میدان بوزونی و فرمیونی.....	۱۰۳
۲-۸ بستگی به زمان.....	۱۰۶
۳-۸ نظریه اختلال.....	۱۰۷
۴-۸ بازهنجارش و نظریه‌های بازهنجارپذیر میدان.....	۱۰۹
۵-۸ ممان مغناطیسی الکترون.....	۱۱۳
۶-۸ کوانتش در مدل استاندارد.....	۱۱۵
مسئله‌ها.....	۱۱۵
فصل ۹- برهمکنش ضعیف: پدیدارشناسی انرژی پایین.....	۱۱۷
۱-۹ واپاشی بتازای هسته‌ای.....	۱۱۷
۲-۹ واپاشی پیون.....	۱۱۹
۳-۹ پایستگی عدد لپتونی.....	۱۲۱
۴-۹ واپاشی میون.....	۱۲۲
۵-۹ برهمکنش نوترینوهای میون با الکترون‌ها.....	۱۲۴
مسئله‌ها.....	۱۲۶
فصل ۱۰- شکست تقارن در نظریه‌های مدل.....	۱۲۹
۱-۱۰ شکست تقارن جهانی و بوزون‌های گولدستون.....	۱۲۹
۲-۱۰ شکست تقارن موضعی و بوزون هیگز.....	۱۳۱
مسئله‌ها.....	۱۳۳
فصل ۱۱- میدان‌های جرم‌دار پیمانه‌ای.....	۱۳۵
۱-۱۱ تقارن $SU(2)$	۱۳۵
۲-۱۱ میدان‌های پیمانه‌ای.....	۱۳۷
۳-۱۱ شکست تقارن $SU(2)$	۱۳۹
۴-۱۱ تشخیص میدان‌ها.....	۱۴۱
مسئله‌ها.....	۱۴۳
فصل ۱۲- نظریه الکتروضعیف واینبرگ-سلام.....	۱۴۵
۱-۱۲ دوگانه‌های لپتونی و نظریه واینبرگ-سلام.....	۱۴۵
۲-۱۲ جفت‌شدگی لپتون با W^*	۱۴۹
۳-۱۲ جفت‌شدگی لپتون با Z	۱۵۰
۴-۱۲ پایستگی عدد لپتونی و پایستگی بار.....	۱۵۱
۵-۱۲ تقارن CP	۱۵۲
۶-۱۲ جمله‌های جرمی در L : کوشش برای گسترش.....	۱۵۴
مسئله‌ها.....	۱۵۵
فصل ۱۳- آزمون‌های تجربی نظریه واینبرگ-سلام.....	۱۵۷
۱-۱۳ در جستجوی بوزون‌های پیمانه‌ای.....	۱۵۷

۱۵۸	۲-۱۳ بوزون های W^\pm
۱۵۹	۳-۱۳ بوزون Z
۱۶۰	۴-۱۳ تعداد خانواده های لپتونی
۱۶۱	۵-۱۳ اندازه گیری پهنای جزئی
۱۶۲	۶-۳ ناتقارنی در سطح مقطع تولید چپ-راست و ناتقارنی واپاشی لپتونی بوزون Z
۱۶۴	مسأله ها

فصل ۱۴- برهمکنش های الکترومغناطیسی و ضعیف کوارک ها

۱۶۷	۱-۱۴ ساختن چگالی لاگرانژی
۱۶۹	۲-۱۴ جرم کوارک ها و ماتریس آمیختگی کوبایاشی-ماسکاو
۱۷۳	۳-۱۴ پارامتر بندی ماتریس
۱۷۴	۴-۱۴ تقارن CP و ماتریس KM
۱۷۵	۵-۱۴ برهمکنش ضعیف در حد انرژی پایین
۱۷۷	مسأله ها

فصل ۱۵- واپاشی های هادرونی بوزن های Z و W

۱۷۹	۱-۱۵ واپاشی های هادرونی Z
۱۸۱	۲-۱۵ بی تقارنی در تولید کوارک
۱۸۳	۳-۱۵ واپاشی های هادرونی بوزون W^\pm
۱۸۴	مسأله ها

فصل ۱۶- نظریه برهمکنش های قوی: کرومودینامیک کوانتمی

۱۸۵	۱-۱۶ نظریه پیمانهای موضعی $SU(3)$
۱۸۸	۲-۱۶ تبدیل های پیمانهای رنگ برای باریونها و مزونها
۱۹۰	۳-۱۶ QCD شبکه و آزادی مجانبی
۱۹۳	۴-۱۶ برهمکنش کوارک-پادکوارک در فاصله های کوتاه
۱۹۴	۵-۱۶ پایستگی کوارک ها
۱۹۵	۶-۱۶ تقارن ایزواسپین
۱۹۶	۷-۱۶ تقارن کایرال
۱۹۸	مسأله ها

فصل ۱۷- کرومودینامیک کوانتمی: محاسبه ها

۱۹۹	۱-۱۷ QCD شبکه و در بند شدگی
۲۰۲	۲-۱۷ QCD شبکه و هادرون ها
۲۰۵	۳-۱۷ QCD اختلالی و پراکندگی ناکشسان ژرف
۲۰۶	۴-۱۷ QCD اختلالی و فیزیک برخورددهنده e^+e^-

فصل ۱۸- ماتریس کوبایاشی-ماسکاو

۲۰۹	۱-۱۸ واپاشی های ضعیف لپتونی هادرون ها
-----	---------------------------------------

۱۳
۲۱۱ $ V_{ud} $ و واپاشی بتزای هسته‌ای
۲۱۲ ۳-۱۸ واپاشی‌های لپتونی بیشتر
۲۱۳ ۴-۱۸ نقض تقارن CP در واپاشی‌های کائون خشی
۲۱۵ ۵-۱۸ واپاشی‌های مزون B و آمیختگی B^0, \bar{B}^0
۲۱۷ ۶-۱۸ قضیه CPT
۲۱۷ مسأله‌ها
۲۱۹ فصل ۱۹- جرم و آمیختگی نوترینوها
۲۱۹ ۱-۱۹ جرم نوترینوها
۲۲۱ ۲-۱۹ جریان‌های ضعیف
۲۲۱ ۳-۱۹ نوسان‌های نوترینو
۲۲۴ ۴-۱۹ اثر MSW
۲۲۶ ۵-۱۹ جرم نوترینوها و مدل استاندارد
۲۲۶ ۶-۱۹ پارامتر بندی ماتریس U
۲۲۷ ۷-۱۹ پایستگی عدد لپتونی
۲۲۸ ۸-۱۹ نوترینوهای سترون
۲۲۸ مسأله‌ها
۲۲۹ فصل ۲۰- جرم و آمیختگی نوترینوها: نتیجه‌های آزمایشگاهی
۲۲۹ ۱-۲۰ مقدمه
۲۳۱ ۲-۲۰ $K\bar{2}K$
۲۳۲ ۳-۲۰ چوز
۲۳۴ ۴-۲۰ کملند
۲۳۵ ۵-۲۰ نوترینوهای خورشیدی
۲۳۶ ۶-۲۰ نوترینوهای خورشیدی
۲۳۹ ۷-۲۰ اثرهای MSW خورشیدی
۲۴۰ ۸-۲۰ چشم‌اندازهای آینده
۲۴۳ فصل ۲۱- نوترینوهای مایورانا
۲۴۳ ۱-۲۱ میدان‌های نوترینوی مایورانا
۲۴۴ ۲-۲۱ چگالی لاگرانژی مایورانا
۲۴۵ ۳-۲۱ معادله‌های میدان مایورانا
۲۴۶ ۴-۲۱ نوترینوهای مایورانا: آمیختگی و نوسان‌ها
۲۴۷ ۵-۲۱ پارامتر بندی U
۲۴۷ ۶-۲۱ نوترینوهای مایورانا در مدل استاندارد
۲۴۸ ۷-۲۱ سازوکار الاکلنگی
۲۴۹ ۸-۲۱ نوترینوهای ذرات دیراک هستند یا مایورانا؟
۲۵۱ مسأله‌ها

۲۵۳.....	فصل ۲۲- ناهنجاری‌ها
۲۵۳.....	۱-۲۲ نابهنجاری آدلر- پل- جکیو.....
۲۵۵.....	۲-۲۲ حذف نابهنجاری‌ها در جریان‌های الکتروضعیف.....
۲۵۵.....	۳-۲۲ نابهنجاری‌های لپتونی و باریونی.....
۲۵۷.....	۴-۲۲ تبدیل‌های پیمانه‌ای و عدد توپولوژیکی.....
۲۵۸.....	۵-۲۲ ناپایداری ماده، زاینده ماده.....
۲۶۱.....	پیوست الف- کمکی برای به یادآوری ماتریس‌ها
۲۶۱.....	الف (۱) تعریف‌ها و نمادگذاری.....
۲۶۲.....	الف (۲) ویژگی ماتریس‌های $n \times n$
۲۶۳.....	الف (۳) ماتریس‌های یکانی و هرمیتی.....
۲۶۵.....	الف (۴) تبدیل فی‌یرز.....
۲۶۶.....	مسئله‌ها.....
۲۶۷.....	پیوست ب- گروه‌های مدل استاندارد
۲۶۷.....	ب (۱) تعریف گروه.....
۲۶۸.....	ب (۲) دوران محورهای مختصات و گروه $SO(3)$
۲۷۰.....	ب (۳) گروه $SU(2)$
۲۷۲.....	ب (۴) گروه $SL(2, C)$ و گروه ویژه لورنتس.....
۲۷۴.....	ب (۵) تبدیل ماتریس‌های پائولی.....
۲۷۵.....	ب (۶) اسپینورها.....
۲۷۶.....	ب (۷- گروه $SU(3)$
۲۷۷.....	مسئله‌ها.....
۲۷۹.....	پیوست ج- عملگرهای آفرینش و نابودی
۲۷۹.....	ج (۱) نوسانگر هماهنگ ساده.....
۲۸۰.....	ج (۲) مجموعه‌ای از بوزونها.....
۲۸۱.....	ج (۳) جمعی از فرمیونها.....
۲۸۲.....	مسئله‌ها.....
۲۸۳.....	پیوست د- مدل پارتون
۲۸۳.....	د (۱) پراکندگی کشسان الکترون از نوکلئون‌ها.....
۲۸۴.....	د (۲) پراکندگی ناکشسان الکترون از نوکلئون‌ها: مدل پارتون.....
۲۹۰.....	د (۳) حالت‌های هادرونی.....
۲۹۱.....	مسئله‌ها.....
۲۹۳.....	پیوست ه- ماتریس‌های جرمی و آمیختگی
۲۹۳.....	ه (۱- K° و \bar{K}°
۲۹۴.....	ه (۲- B° و \bar{B}°
۲۹۷.....	راهنمایی برای حل برخی از مسئله‌ها.....
۳۱۵.....	واژه‌نامه.....

نمادگذاری

بردارهای مکان در فضای سه بعدی با $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ، یا $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ نمایش داده می شوند که $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ می باشد.

بردار کلی \mathbf{a} دارای مؤلفه های (a^1, a^2, a^3) می باشد، و $\hat{\mathbf{a}}$ بردار یکه در راستای \mathbf{a} می باشد. جزءهای حجمی در فضای سه بعدی با $d^3\mathbf{x} = dx^1 dx^2 dx^3$ نشان داده می شوند.

مختصات رویداد در فضا و زمان چهار بعدی با $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x})$ نشان داده می شوند که $x^0 = ct$ است.

جزءهای حجمی در فضا زمان چهار بعدی با $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dt d^3\mathbf{x}$ نشان داده می شوند.

شناسه های یونانی μ, ν, λ, ρ مقادارهای ۰، ۱، ۲، ۳ را می گیرند.
شناسه های لاتین i, j, k, l مقادارهای فضایی ۱، ۲، ۳ را می گیرند.

ماتریسهای پائولی

مجموعه $(\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ را با σ^μ ، و مجموعه $(\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$ را با $\tilde{\sigma}^\mu$ مشخص

می کنیم، که $\sigma^0 = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

نمایش کایرال برای ماتریسهای γ

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

کوانتش ($\hbar = c = 1$)

$$(E, \mathbf{p}) \rightarrow (i\partial/\partial t, -i\nabla), p^\mu \rightarrow i\partial^\mu$$

برای ذره‌ای با بار q در میدان الکترومغناطیسی بیرونی،

$$(E, \mathbf{p}) \rightarrow (E - q\phi, \mathbf{p} - q\mathbf{A}), p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu,$$

$$i\partial^\mu \rightarrow (i\partial^\mu - qA^\mu) = i(\partial^\mu + iqA^\mu)$$

تعریف میدانها

$$Z_\mu = W_\mu^\nu \cos\theta_w - B_\mu \sin\theta_w,$$

$$A_\mu = W_\mu^\nu \sin\theta_w + B_\mu \cos\theta_w$$

که $\sin^2\theta_w = 0.2315$ (۴) می‌باشد. $G_F = g_\nu^2 / (4\sqrt{2}M_W^2)$ ، $G_F \sin\theta_w = g_\nu \cos\theta_w = e$

فهرست نمادها

A	پتانسیل برداری الکترومغناطیسی بخش ۴-۳
A^μ	پتانسیل چاربرداری الکترومغناطیس
$A^{\mu\nu}$	تانسور قدرت میدان بخش ۱۱-۳
A_{FB}	ناتقارنی روبه جلو- روبه عقب بخش ۱۵-۲
a	دامنه موج بخش ۳-۵
a, a^\dagger	عملگر آفرینش بوزون- نابودی بوزون
B	میدان مغناطیسی
B^μ	میدان پیمانه‌ای بخش ۱۱-۱
$B^{\mu\nu}$	تانسور قدرت میدان بخش ۱۱-۲
b, b^\dagger	عملگر آفرینش فرمیون- نابودی فرمیون
D	دوتایی ایزواسپین بخش ۱۶-۶
d, d^\dagger	عملگر آفرینش پادفرمیون- نابودی پادفرمیون
d_k	میدان کوارک پایین گونه $k = 1, 2, 3$
E	میدان الکتریکی
E	انرژی

e_R, e_L, e	الکترون دیراک، میدان دو مؤلفه‌ای چپگرد، راستگرد
$F^{\mu\nu}$	تانسور قدرت میدان الکترومغناطیسی بخش ۴-۱
f	ضریب تصحیح‌های تابشی بخشهای ۱-۱۵، ۱۷-۴
f_{abc}	ثابت‌های ساختار $SU(3)$ بخش ب-۷
G^μ	میدان پیمانه‌ای ماتریسی گلوئون
$G^{\mu\nu}$	تانسور قدرت میدان گلوئون
G_F	ثابت فرمی بخش ۹-۴
$g^{\mu\nu}$	تانسور متریک
g	ثابت جفت‌شدگی قوی بخش ۱-۱۶
g_1, g_2	ثابت‌های جفت‌شدگی الکتروضعیف
H	همیلتونی بخش ۳-۱
$h(x)$	میدان هیگز
\mathcal{H}	چگالی همیلتونی بخش ۳-۳
I	عملگر ایزواسپین بخشهای ۱-۵، ۱۶-۶
J	چگالی جریان الکتریکی بخش ۴-۱
J	عملگر تکانه زاویه‌ای کل
J	ثابت یارلسکوگ بخش ۱۴-۳
J^μ	جریان شمار لپتونی بخش ۱۲-۴
j	جریان احتمال بخش ۷-۱
j^μ	جریان لپتونی بخش ۱۲-۲
K	کشش ریسمان بخش ۱۷-۱
k	بردار موج
L	دوتایی لپتونی بخش ۱۲-۱
L	لاگرانژی بخش ۳-۱
\mathcal{L}	چگالی لاگرانژی بخش ۳-۳
l^r	حجم بهنجارش بخش ۳-۵
M	ماتریس تبدیل اسپینور چپگرد بخش ب-۶

M	جرم پروتون بخش د-۱
m	جرم
N	ماتریس تبدیل اسپینور چپگرد بخش ب-۶
N	عملگر شمار بخش ج-۱
\hat{O}	عملگر کوانتمی
P	تکانه
Q^ν	$= -q_\mu q^\mu$
q	سه تایی رنگ کوارک
q^μ	انتقال تکانه-انرژی
R	ماتریس دوران بخش ب-۲
S	عملگر اسپین
S	کنش بخش ۳-۱
s	مجذور انرژی مرکز جرم
T_V^μ	تانسور تکانه-انرژی بخش ۳-۶
U	ماتریس یکانی
u_k	میدان کوارک بالاگونه $k = 1, 2, 3$
u_R, u_L	اسپینورهای دو مؤلفه‌ای چپگرد، راستگرد بخش ۶-۱
u_+, u_-	اسپینورهای دیراک بخش ۶-۳
V	ماتریس کوبایاشی-ماسکاو بخش ۱۴-۲
V	حجم بهنجارش
v	سرعت
v	$= \mathbf{v} $
v_R, v_L	اسپینورهای دو مؤلفه‌ای چپگرد، راستگرد
v_+, v_-	اسپینورهای دیراک بخش ۶-۴
W^μ	ماتریس میدان پیمانه‌ای برداری بخش ۱۱-۱
$W^{\mu\nu}$	تانسور قدرت میدان بخش ۱۱-۲
$W_\mu^-, W_\mu^+, W_\mu^0, W_\mu^1$	میدانهای بوزون W

Z_μ	میدانهای بوزون Z
$\alpha(Q^2)$	ثابت ساختار ریز مؤثر بخش ۱۶-۳
$\alpha_s(Q^2)$	ثابت ساختار قوی مؤثر ۱۶-۳
α_{latt}	ثابت جفت‌شدگی شبکه ۱۷-۱
α^i	ماتریس دیراک بخش ۵-۱
β	ماتریس دیراک بخش ۵-۱
β	$=v/c$
Γ	پهنای حالت برانگیخته، آهنگ واپاشی
γ^μ	ماتریس دیراک
γ	$= (1-\beta^2)^{1/2}$
δ	فاز کوبایاشی-ماسکاو بخش ۴-۷
ε	بردار یکه قطبش بخش ۱۴-۳
ε	شناسه هلیسیتی
θ	پارامتر افزایش $\tanh \theta = \beta, \cosh \theta = \gamma$ بخش ۲-۱ زاویه فاز، زاویه پراکندگی، پتانسیل نرده‌ای بخش ۴-۳ میدان پارامتری پیمانه‌ای بخش ۱۰-۱
	۲
θ_w	زاویه واینبرگ
Λ^{-1}	طول در بندشدگی بخش ۱۶-۳
Λ_{latt}	پارامتر شبکه بخش ۱۷-۱
Λ_a	ماتریسهای مربوط به $SU(3)$ بخش ب-۷
μ, μ_L, μ_R	میدان دیراکی میون، دو مؤلفه‌ای چپگرد، راستگرد
$V_{\tau L}, V_{\mu L}, V_{eL}$	میدان نوترینوی الکترون، نوترینوی میون، نوترینوی تاو
Π	چگالی تکانه بخش ۳-۳
ρ	چگالی بار الکتریکی
$\rho(E)$	چگالی حالت‌های نهایی با انرژی E
Σ	عملگر اسپین عمل‌کننده بر میدان دیراکی بخش ۶-۲
τ	عمر میانگین

τ_R, τ_L, τ

میدان دیراکی تاو، دو مؤلفه‌ای چپگرد، راستگرد

Φ

میدان نرده‌ای مختلط ۷-۳

ϕ

میدان نرده‌ای حقیقی بخش ۳-۲، پتانسیل نرده‌ای بخش ۴-۱، میدان

پارامتری پیمانه‌ای بخش ۱۰-۲

ϕ_0

مقدار چشم‌داشتی خلاً برای میدان هیگز

χ

میدان پارامتری پیمانه‌ای بخش ۴-۳، میدان نرده‌ای بخش ۱۰-۳

Ψ

میدان دیراکی چهار مؤلفه‌ای

Ψ_R, Ψ_L

میدان اسپینوری دو مؤلفه‌ای چپگرد، راستگرد

$\bar{\Psi}$

$\gamma^5 \Psi^\dagger$ بخش ۵-۵

ω

بسامد

۱-۱ مقدمه

بیش از یک سده می‌گذرد که جی. جی. تامسون^۱ الکترون را کشف کرده است. هنوز الکترون را ذره‌ای بدون ساختار، و یکی از ذره‌های بنیادی طبیعت می‌دانند. در مورد ذرات دیگری که پس از آن کشف شدند، مانند پروتون و نوترون، باید گفت که در آغاز پندار بر این بود که این ذره‌ها هم بنیادی‌اند اما بعدها پی به ساختار مرکب آنها برده شد.

اما بنیادی‌ترین اجزای سازنده ماده چیستند؟ چگونه دسته‌بندی می‌شوند؟ چگونه امکان برهمکنش با یکدیگر می‌یابند؟ به‌راستی از نظریه ریاضیاتی ذرات بنیادی چه چیزی باید انتظار داشته باشیم؟ از زمان کشف الکترون، و به‌ویژه در شصت سال اخیر آزمایش‌ها و تلاشهای تجربی زیادی برای رسیدن به پاسخ این پرسش‌ها صورت گرفته است. مدل استاندارد فیزیک ذرات کنونی از همین تلاشها به‌بار آمده است.

در مدل استاندارد گفته می‌شود که مواد در جهان از فرمیون‌های بنیادی تشکیل شده‌اند که از طریق میدان‌هایی که خود منشا آنها هستند، با یکدیگر برهمکنش می‌کنند. به ذره‌های مربوط به میدان‌های برهمکنشی بوزون می‌گویند.

چهار گونه میدان برهمکنشی در طبیعت شناخته شده است، که در جدول ۱-۱ آورده شده‌اند. در مقیاس فیزیک ذرات، اثر نیروهای گرانشی ناچیز می‌باشد. بنابراین در مدل استاندارد اثرات مربوط به میدان گرانشی در نظر گرفته نمی‌شود. کوانتای میدان برهمکنشی الکترومغناطیسی بین فرمیون‌های باردار الکتریکی، فوتون‌های بدون جرم هستند. کوانتای میدان‌های برهمکنشی ضعیف بین فرمیون‌ها، بوزون‌های باردار W^+ و W^- و بوزون خنثی Z می‌باشند، که به‌سال ۱۹۸۳ میلادی در سرن^۲ کشف شدند. از آنجا که بوزون‌های واسطه برهمکنش ضعیف دارای جرم هستند، برهمکنش ضعیف کوتاه‌برد می‌باشد. بنا به اصل عدم قطعیت، ذره‌ای به جرم M می‌تواند به مدت زمان \hbar/Mc^2 به حالت واسطه وجود داشته باشد. مسیری که ذره می‌تواند در طی این مدت بپیماید بیشتر از $\hbar c/M$ نمی‌باشد. چون

1- J.J. Thomson

2- CERN

جدول ۱-۱ میدان‌های برهمکنشی گوناگون

اسپین	بوزون	میدان برهمکنشی
۲	«گراویتن‌ها» فرضی	میدان گرانشی
۱	ذرات W^+, W^-, Z	میدان ضعیف
۱	فوتون‌ها	میدان الکترومغناطیسی
۱	«گلئون‌ها» فرضی	میدان قوی

$M_W \approx 80 \text{ GeV}/c^2$ و $M_Z \approx 90 \text{ GeV}/c^2$ می‌باشد، برد برهمکنش ضعیف در حدود 10^{-2} fm است.

مانند فوتون‌ها، جرم کوانتای میدان برهمکنش قوی، گلئون‌ها، هم صفر می‌باشد. در نتیجه می‌توان انتظار داشت که به همین دلیل، برد برهمکنش قوی نامتناهی باشد. اما، برخلاف میدان الکترومغناطیسی، میدان‌های گلئونی دریند هستند. در این باره در فصل‌های بعدی کتاب بحث خواهیم کرد.

در مدل استاندارد، فرمیون‌های بنیادی بر دو گونه‌اند: لپتون‌ها و کوارک‌ها. اسپین همه آنها برابر $\frac{1}{2}$ یکای \hbar می‌باشد. هنگامی که به تنهایی قرار دارند و با دیگر ذره‌ها برهمکنش نمی‌کنند، از معادله دیراک برای توصیف حرکت آنها بهره می‌بریم. درباره معادله دیراک هم در فصل‌های ۵، ۶ و ۷ بحث می‌کنیم. برهمکنش لپتون‌ها فقط به صورت برهمکنش الکترومغناطیسی (اگر باردار باشند) و برهمکنش ضعیف انجام می‌گیرد.

۲-۱ ساختار مدل استاندارد

هر نظریه‌ای در مورد ذرات بنیادی باید با نسبییت خاص سازگار باشد. ترکیب مکانیک کوانتمی، الکترومغناطیسی و نسبییت خاص، دیراک را به نوشتن معادله‌ای رهنمون ساخت که امروزه در دنیا با نام معادله دیراک شناخته می‌شود، و در کوانتیزه کردن میدان‌ها، نظریه میدان کوانتمی، کاربرد دارد. نخستین نظریه موفق میدان کوانتمی، الکترودینامیک کوانتمی^۱، به اختصار QED، می‌باشد که برهمکنش الکترون را با میدان الکترومغناطیسی توصیف می‌کند. پیروزی نسل فیزیکدانان پس از ۱۹۴۵، فاینمن^۲، شوینگر^۳، توموناگا^۴، دایسون^۵ و دیگران در برطرف کردن نامتناهی‌هایی بود که در نظریه بروز می‌کرد. کار آنها منجر به ایجاد سازگاری بی‌نظیری بین QED و آزمایش شد، که در این باره در فصل ۸ صحبت خواهیم

1- Quantum Electrodynamics

2- Feynman

3- Schwinger

4- Tomonaga

5- Dyson

کرد.

مدل استاندارد، نظریه میدان‌های برهمکنش‌کننده می‌باشد. تأکید ما بر زیبایی و سادگی این نظریه خواهد بود. می‌توان این نظریه را تا حدی به صورت «کلاسیک» درک کرد. در این صورت با میدان‌های بوزونی به صورت کاملاً کلاسیک و با میدان‌های فرمیونی به صورت میدان‌هایی کاملاً جابجاناپذیر رفتار می‌شود. برای آنکه بتوان دربارهٔ میزان کامیابی این مدل در توصیف داده‌ها داوری کرد، نیاز به کوانتیزه کردن میدان‌ها می‌باشد، اما برای رعایت اختصار این کتاب و استفاده‌پذیر بودن هرچه بیشتر آن، تنها نتیجه‌های بیرون از گسترهٔ پایین‌ترین مرتبه‌های نظریه اختلال بیان خواهد شد.

ساختار مدل استاندارد در پرتوی راهنمایی‌های حاصل از اصول تقارن ایجاد شده است. نظریه گروه، ریاضیات مورد نیاز برای تقارن را فراهم می‌آورد؛ گروه‌های بسیار مهم در فرمولبندی این مدل در پیوست ب. آورده شده است. ارتباط بین تقارن‌ها و فیزیک بسیار ژرف می‌باشد. قضیه نوتر^۱ بیان می‌دارد که در طبیعت به‌ازای هر تقارن پیوسته‌ای، قانون پایستگی وجود دارد. مثلاً با فرض همگنی فضا و زمان، لاگرانژی سیستم تحت تبدیل‌های یکنواخت در فضا و زمان، ناوردا باقی می‌ماند. بنابراین چنین تبدیلاتی عملکرد تقارن بر روی سیستم می‌باشند. می‌توان نشان داد که تقارن در فضا و زمان به ترتیب منجر به قانون‌های پایستگی اندازه حرکت و پایستگی انرژی منجر می‌شود. در این کتاب، تقارن و شکست تقارن اهمیت بسزایی خواهند داشت.

در بخش‌های بعدی همین فصل، برخی از کشف‌های برجسته و مهم را در حوزه فیزیک ذرات یادآوری خواهیم کرد. مدل استاندارد باید بتواند این یافته‌ها را با هم یکی کند. در فصل دوم به ریاضیات مورد نیاز در ساختار مدل استاندارد خواهیم پرداخت.

جدول ۱-۲ لپتون‌ها

بار الکتریکی	عمر میانگین (s)	جرم	
-e	∞	۰٫۵۱۱۰	الکترون e^-
o		$< 3 \times 10^{-6}$	نوترینوی الکترون ν_e
-e	$2,197 \times 10^{-6}$	۱۰۵٫۶۵۸	میون μ^-
o			نوترینوی میون ν_μ
-e	$(291,0 \pm 1,5) \times 10^{-15}$	۱۷۷۷	تاو τ^-
o			نوترینوی تاو ν_τ

۳-۱ لپتون‌ها

لپتون‌های شناخته شده در جدول ۱-۲ آورده شده‌اند. معادلهٔ دیراک به درستی برای فرمیون‌های باردار پرجرم، وجود پادذره را پیش‌بینی می‌کند. جرم و اسپین پادذره همانند جرم و اسپین ذره است، اما بار آن مخالف بار ذره و گشتاور مغناطیسی آن مخالف راستای اسپین می‌باشد. براساس معادله دیراک برای نوترینو ν ، وجود پادنوترینو $\bar{\nu}$ مجاز می‌باشد.

در بین لپتون‌های باردار، تنها الکترون e^- با بار $-e$ و پادذرهٔ آن e^+ پایدار هستند. تفاوت میون μ^- و تاو τ^- و پادذرات آنها، یعنی μ^+ و τ^+ ، با الکترون و پوزیترون تنها در جرم و طول عمر متناهی آن است. به نظر می‌آید که اینها ذرات بنیادی باشند. گواه‌های آزمایشگاهی خوبی دال بر وجود سه گونه نوترینوی متفاوت ν_e ، ν_μ و ν_τ به‌ازای e ، μ و τ می‌باشد.

در همهٔ برهمکنش‌های بین ذرات، بار الکتریکی پایسته می‌ماند. به نظر می‌آید که در این برهمکنش‌ها، لپتون تنها ممکن است به لپتونی دیگر تبدیل شود، و یک لپتون و پادلپتون از یک نوع تنها می‌توانند با یکدیگر آفریده یا نابود شوند. این قانون‌ها را می‌توان در واپاشی زیر مثال زد.

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$$

به‌جز مورد نوسانهای نوترینو (ر.ک. فصلهای ۱۹-۲۱) قانون پایستگی عدد لپتونی برقرار است و در این قانون، عدد پادلپتون‌ها منفی در نظر گرفته می‌شود. این قانون برای هر گونهٔ جداگانهٔ لپتون برقرار است.^۱ این قانون پایستگی به‌همراه قانون پایستگی بار الکتریکی در مدل استاندارد بسیار بارز و آشکار می‌باشد.

۴-۱ کوارک‌ها و سیستم‌های متشکل از کوارک

کوارک‌های شناخته شده در جدول ۱-۳ فهرست شده‌اند. در مدل استاندارد، کوارک‌ها همانند لپتون‌ها، جزو فرمیون‌های دیراکی با اسپین $1/2$ هستند، اما بار الکتریکی آنها برابر $2e/3$ و $-e/3$ می‌باشد. کوارک‌ها دارای عدد کوارکی هم هستند. البته عدد کوارکی پادکوارک‌ها، منفی می‌باشد. هرگز مشاهده نشده است که عدد کوارکی یک سیستم منفرد تغییر کند. اما عدد گونه‌های مختلف یا طعم‌های گوناگون کوارک به‌طور جداگانه پایسته نیستند. در برهمکنش‌های ضعیف امکان تغییر آن وجود دارد.

مشکلی که در بررسی‌های آزمایشگاهی کوارک‌ها وجود دارد، آن است که هرگز کوارک منفرد مشاهده نشده است. کوارک‌ها همواره در سیستم‌های مرکب در بند هستند. گسترهٔ چنین سیستم‌های مرکبی در حدود 1 fm می‌باشد. بنیادی‌ترین سیستم کوارکی، باریون‌ها و مزون‌ها هستند. عدد کوارکی خالص باریون‌ها سه، و عدد کوارکی خالص مزون‌ها برابر صفر می‌باشد. پروتون و نوترون باریون هستند. مزون‌ها حتماً از کوارک و پادکوارک تشکیل شده‌اند که به‌صورت گذرا با میدان برهمکنش قوی به هم مقید

۱- عدد لپتون‌های میون جداگانه پایسته، و عدد لپتون‌های الکترون جداگانه پایسته است. م.

شده‌اند. برای یک سیستم کواری معمولاً از واژه هادرون استفاده می‌شود.

پروتون از دو کواری بالا و یک کواری پایین (uud) تشکیل شده است. نوترون از دو کواری پایین و یک کواری بالا (udd) تشکیل شده است. پروتون تنها باریون پایدار می‌باشد. جرم نوترون اندکی، به اندازه $1,3 \text{ MeV}/c^2$ بیش از جرم پروتون می‌باشد. در فضای آزاد نوترون از طریق برهمکنش ضعیف $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ، به پروتون وامی‌باشد. عمر میانگین آن نزدیک به ۱۵ دقیقه است.

همهٔ مزون‌ها ناپایدار هستند. سبکترین مزون، مزون π یا «پیون» است. پیون‌های باردار π^+ و π^- به ترتیب از جفت ($\bar{u}d$) و ($u\bar{d}$) درست شده‌اند. پیون خنثی π^0 با احتمال مساوی از ($d\bar{d}$) یا ($u\bar{u}$) درست شده است. یعنی برهم‌نهی $(d\bar{d})/\sqrt{2} - (u\bar{u})$ از این دو حالت می‌باشد. جرم π^+ و π^- برابر $139,57 \text{ MeV}/c^2$ و جرم π^0 اندکی کمتر و برابر با $134,98 \text{ MeV}/c^2$ می‌باشد. سبکترین مزون بعدی، مزون η ($\approx 547 \text{ MeV}/c^2$) است که ترکیبی از $(d\bar{d})/\sqrt{2} + (u\bar{u})$ از جفت کواری-باد کواری می‌باشد و با دارا بودن مؤلفهٔ $s\bar{s}$ بر π^0 عمود می‌باشد.

۱-۵ طیف‌نمایی سیستم‌های درست‌شده از کواری‌های سبک

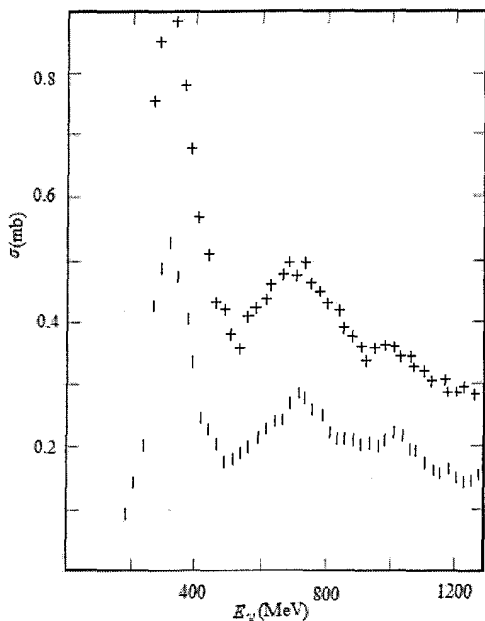
جرم کواری‌های u و d بسیار کم و از مرتبهٔ چند MeV/c^2 است. جرم این کواری‌ها به جرم الکترون نزدیکتر است تا جرم مزون یا باریون. در این مورد در فصل ۱۶ بحث خواهد شد. کواری u یا d در گستره‌ای حدود ۱ fm درنند هم هستند. پس با بهره‌گیری از اصل عدم قطعیت، تکانهٔ آن برابر $p \approx \hbar/(1 \text{ fm}) \approx 200 \text{ MeV}/c$ و در نتیجه انرژی آن $E \approx pc \approx 200 \text{ MeV}$ ، و تقریباً مستقل از جرم کواری می‌باشد. همهٔ کواری‌ها برهمکنش‌های قوی یکسانی دارند. در نتیجه، فیزیک سیستم‌های کواری سبک تقریباً مستقل از جرم کواری‌ها می‌باشد. یک تقارن ایزواسپینی تقریبی ($SU(2)$) وجود دارد (بخش ۶-۱۶)، که گواهی دال بر مدل استاندارد است.

جدول ۱-۳ ویژگی‌های کواری‌ها

جرم (mc^2)	بار الکتریکی (بر حسب e)	کواریک
۴ MeV تا ۱,۵	۲/۳	بالا
۸ MeV تا ۴	-۱/۳	پایین
۱,۳۵ MeV تا ۱,۱۵	۲/۳	افسون
۱۳۰ MeV تا ۸۰	-۱/۳	شگفت
۱۷۴ MeV تا ۱۶۹	۲/۳	سر
۴,۴ MeV تا ۴,۱	-۱/۳	ته

این تقارن دقیق نیست، زیرا جرم کوارک‌ها متفاوت با یکدیگر است و بار آنها هم با یکدیگر فرق می‌کند. شکست تقارن ناشی از تفاوت جرمی کوارک‌ها، بر تمام نظریه‌الکترومغناطیس اعمال می‌شود. در همه مواردی که دو ذره تنها در محتوی کوارکی u و d با یکدیگر فرق می‌کنند، یعنی مثلاً در یکی کوارک d و در دیگری کوارک u وجود دارد، ذره با کوارک d ، سنگینتر از ذره دارای کوارک u می‌باشد. مثلاً نوترون سنگین‌تر از پروتون است، هرچند به سبب وجود بار الکتریکی پروتون و خنثی بودن نوترون، پروتون دارای حدود $2 \text{ MeV}/c^2$ جرم هم‌ارز انرژی بیشتر از نوترون است. نتیجه می‌گیریم که کوارک d سنگینتر از کوارک u می‌باشد.

نخستین گواه بر وجود کوارک‌ها از طیف‌نمایی نوکلئون به دست آمد. پروتون و نوترون حالت‌های برانگیخته بسیاری دارند که به صورت حالت‌های تشدید در پراکندگی پروتون-نوترون و در پراکندگی پيون-نوکلئون پدیدار شدند (شکل ۱-۱). حالت‌های هادرونی دربردارنده کوارک‌های سبک هستند که با استفاده از مفهوم ایزواسپین می‌توان آنها را دسته‌بندی کرد. کوارکهای u و d را به صورت حالت‌های دوگانه $|u\rangle$ و $|d\rangle$ با $I = 1/2$ و به ترتیب $I_3 = +1/2$ و $I_3 = -1/2$ در نظر می‌گیرند. پس ایزواسپین کل باریونی متشکل از سه کوارک u یا d برابر با $I = 3/2$ یا $I = 1/2$ می‌باشد.



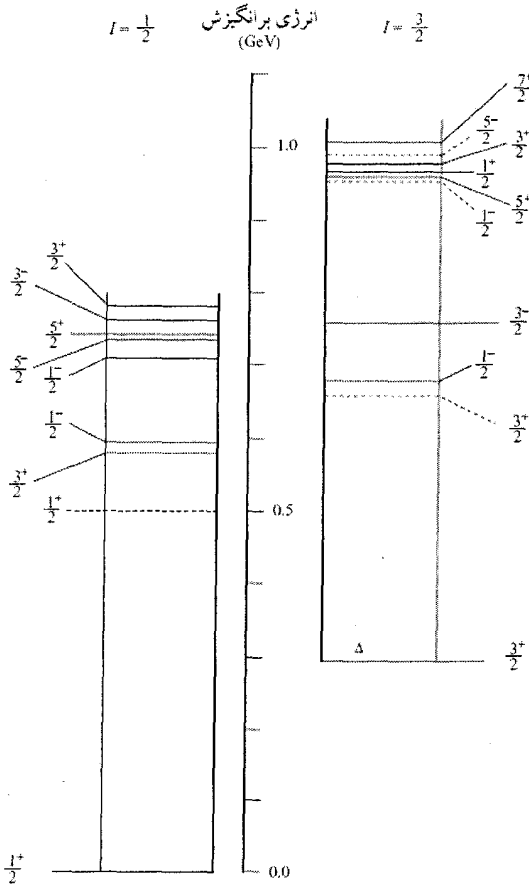
شکل ۱-۱ سطح مقطع فوتون برای تولید هادرون بر اثر برخورد فوتون به فوتون (خط چین‌ها)، و برخورد فوتون به دوترون‌ها (علامت‌های به علاوه). تفاوت بین این سطح مقطع‌ها تقریباً برابر با سطح مقطع تولید هادرون بر اثر برخورد فوتون و نوترون است. (ر.ک. (After Armstrong et al. (1972)).

حالت‌هایی با ایزواسپین $3/2$ تشکیل چهار حالت چندگانه می‌دهند که دارای انرژی‌های تقریباً واگن هستند، اما مقدار بار آنها برابر با $e(uud), e(udd), 0(udd), -e(ddd)$ می‌باشد. حالت‌هایی با ایزواسپین $1/2$ دو گانه‌هایی شبیه به پروتون و نوترون تشکیل می‌دهند، که بار آنها برابر با $e(uud), 0(udd)$ است. به منظور درک این ساختار باری برای باریون، چنین بارهای الکتریکی به کوارک‌ها نسبت داده شده است.

در شکل ۱-۲، نمودارهای تراز انرژی برای حالت‌های $I = 3/2$ و $I = 1/2$ ، حداکثر تا انرژی برانگیزش 1 GeV نشان داده شده است. تفاوت انرژی بین حالت‌ها در یک چندگانه، از مرتبه 1 MeV می‌باشد و در مقیاس شکل ۱-۲ نمی‌توان آن را نشان داد. پهنای Γ حالت‌های برانگیخته بسیار زیاد و از مرتبه 100 MeV ، متناظر با عمر میانگین $\tau = \hbar/\Gamma \sim 10^{-23} \text{ s}$ می‌باشد. انرژی همه حالت‌های برانگیخته آنقدری هست که از طریق برهمکنش قوی واپاشند. مثلاً $\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+$ را در نظر بگیرید (شکل ۱-۳). طیف سرشار حالت‌های باریونی را می‌توان برپایه مدل «پوسته‌ای» ساده سه کوارک در بند، درک و توصیف کرد. پایین‌ترین حالت دارای تکانه زاویه‌ای مداری ($L = 0$) و پاریته مثبت است. حالت‌های موجود در گروه بعدی دارای ($L = 1$) و پاریته منفی می‌باشد و همین‌گونه تا پایان. اما این مدل دارای ویژگی نادری است که امکان برازش داده‌ها را میسر می‌سازد. این ویژگی آن است که حالت‌ها تحت تعویض هر دو کوارک کاملاً متقارن هستند. برای نمونه $\Delta^{++}(uuu)$ متعلق به پایین‌ترین حالت

چندگانه $I = 3/2$ دارای $J^P = \frac{3}{2}^+$ است. اگر $L = 0$ باشد، باید اسپین‌های سه کوارک همسو $\uparrow\uparrow\uparrow$ و در نتیجه متقارن باشند تا اینکه $J = 3/2$ شود. همچنین پایین‌ترین حالت انرژی فضایی باید کاملاً متقارن باشد. برای مجموعه‌ای از فرمیون‌های همسان، تقارن تحت جابجایی دو فرمیون با یکدیگر مجاز نیست. اما بی‌گمان این مدل خواستار تقارن است و با تقارن است که خوب کار می‌کند. توضیح این مسأله را در آخر همین فصل ارائه خواهیم کرد. تنها چند حالت اندک (خطوط شکسته در شکل ۱-۲) است که نمی‌توان آنها را با بهره‌گیری از مدل ساده پوسته‌ای درک کرد.

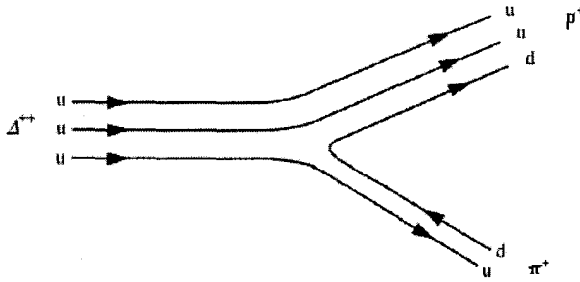
مزون‌ها از کوارک‌های سبک u و d ، و پادکوارک‌های آنها درست شده‌اند. پادکوارک‌ها هم دارای طیف سرشاری از حالت‌ها هستند و می‌توان طیف حالت‌های آنها را با بهره‌گیری از ایزواسپین‌شان دسته‌بندی کرد. علامت I_p پادکوارک‌ها مخالف علامت I_p کوارک متناظرشان می‌باشد (جدول ۱-۴). با بکارگیری قانون‌های جمع ایزواسپین، جفت‌های کوارک-پادکوارک دارای $I = 0$ یا $I = 1$ می‌باشد. حالت‌های $I = 0$ یگانه هستند و بار آنها صفر است، مانند η (شکل ۱-۴ الف). حالت‌های $I = 1$ سه‌گانه‌هایی با بار $+e, 0, -e$ می‌سازند که تقریباً واگن هستند، مانند π^+, π^0, π^- .



شکل ۱-۲ نمودار تراز انرژی برای نوکلئون و حالت‌های برانگیخته آن. این ترازها به دو دسته تقسیم می‌شوند: دوگانه ایزواسپینی ($I = \frac{1}{2}$) و چهارگانه ایزواسپینی ($I = \frac{3}{2}$). این حالت‌ها را با تکانه زاویه‌ای کل و پاریته آن J^P نشان می‌دهند. دوگانه نوکلئون (۹۳۹) N حالت پایه این سیستم است. پایین‌ترین چهارگانه، $\Delta(1232)$ می‌باشد. در مدل کواری (ر.ک. متن کتاب) این دو حالت پایین‌ترین حالت‌هایی هستند که بدون تکانه زاویه‌ای مداری ($L = 0$) کواری ممکن است تشکیل شوند. حالت‌های دیگر با خطوط توپر نشان داده شده‌اند. تفسیر این حالت‌ها روشن و آشکار است: همه آنها ساده‌ترین حالت پس از حالت ($L = 0$) هستند. اگر پاریته‌شان منفی باشد ($L = 1$)، و مثبت باشد ($L = 2$) است. خطوط خط‌چین نشان‌دهنده حالت‌هایی هستند که با بهره‌گیری از مدل سه کواری نمی‌توان تفسیر روشنی از آن را ارائه داد. شاید بتوان این خطوط را مربوط به حالت‌های برانگیخته میدان‌های کلتونی دانست.

جدول ۱-۴ اعداد کوانتمی ایزواسپین برای کواریک‌های سبک

I_z	ایزواسپین (I)	کواریک
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	u
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	\bar{u}
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	d
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	\bar{d}
o	o	s
o	o	\bar{s}

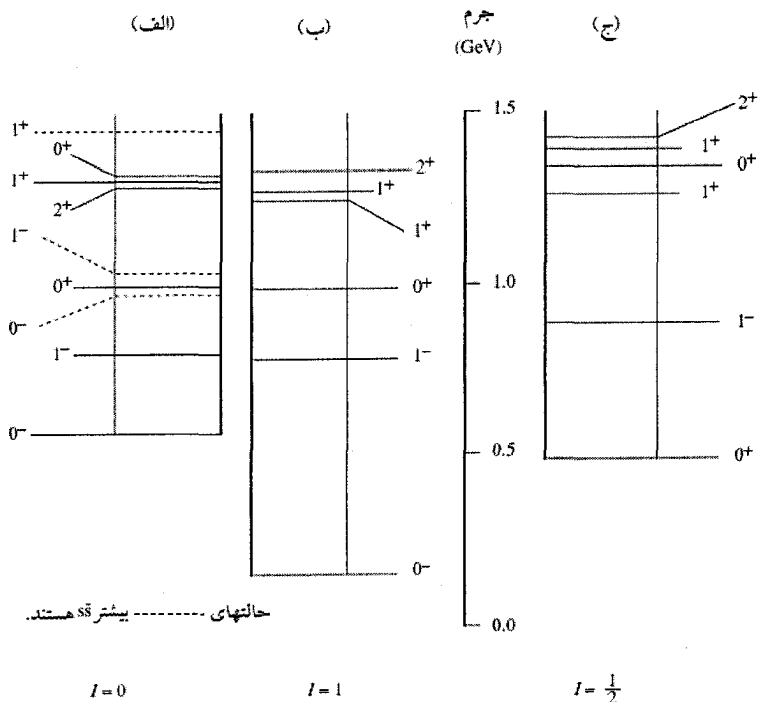


شکل ۳-۱ نمودار مدل کوآرکی برای واپاشی $\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+$. میدان کلتونی در این نمودار نشان داده نشده است، اما میدان کلتونی مسؤؤل نگهداری سیستم کوآرکی در کنار یکدیگر و آفرینش زوج $d\bar{d}$ است.

در شکل (۴-۱ ب)) طیف حالت‌هایی با $I = 1$ تا حداکثر انرژی‌های 1.5 GeV نشان داده شده‌اند. همانند مورد باریون‌ها، شکافتگی بین حالت‌ها در چند گانه ایزوتوپیک تنها در حد چند مگاالکترون‌ولت می‌باشد. یعنی پهنای حالت‌های برانگیخته به همان میزان پهنای حالت‌های برانگیخته باریونی، از مرتبه 100 MeV ، می‌باشد. در پایین‌ترین چند گانه (پیون‌ها) زوج کوآرک-پاد کوآرک حالتی با $L = 0$ می‌باشد که اسپین‌های آن به صفر جفت شده باشند. در نتیجه، $J^P = 0^-$ می‌باشد، زیرا پاریته نسبی فرمیون و پادفرمیون خلاف یکدیگر است (ر.ک. بخش ۶-۴). در نخستین حالت برانگیخته، اسپین‌ها به یک مقدار جفت می‌شوند و $J^P = 1^-$ می‌باشد. این حالت‌ها، همان مزون‌های ρ می‌باشند. با $L = 1$ و اسپین‌های جفت‌شده به $S = 1$ ، می‌توان حالت‌های $0^+, 1^+, 2^+$ را ساخت. همچنین با $L = 1$ و اسپین‌های جفت‌شده به $S = 0$ ، می‌توان حالت 1^+ را ایجاد کرد. تمامی این حالت‌ها را می‌توان در شکل ۴-۱ ب) تشخیص داد.

۱-۶ کوآرک‌های بیشتر

مزون‌ها و باریون‌های «شگفت» در اواخر دهه ۱۹۴۰ میلادی بی‌درنگ پس از کشف پیون‌ها، کشف شدند. همانند کوآرک‌های d و u ، کوآرک دیگری، s ، به نام کوآرک شگفت وجود دارد. ذره‌های شگفت در بردارنده یک یا چند کوآرک s هستند. ممکن است کوآرک s به جای کوآرک u یا \bar{d} در هر باریون یا مزونی بنشیند و باریون‌ها یا مزون‌های شگفت را به وجود آورد. با توجه به بار الکتریکی چنین باریون‌ها و مزون‌هایی درمی‌یابیم که کوآرک s ، همانند کوآرک d ، دارای بار $-e/3$ می‌باشد. طیف‌های به‌دست آمده از این ذرات به شرطی قابل درک هستند که به کوآرک s ایزواسپین $I = 0$ را نسبت دهیم. کم‌جرم‌ترین مزون‌های شگفت عبارتند از دو گانه $I = 1/2$ ، $(\bar{s}u)$ جرم 494 MeV و $K^-(\bar{s}u)$ و $(\bar{s}d)$ جرم 498 MeV . پادذرات آنها یک دو گانه دیگر می‌سازند، $K^+(u\bar{s})$ و $K^0(d\bar{s})$.



شکل ۱-۴ حالت‌های سیستم کوارک-پادکوارک $\bar{u}\bar{u}$, $\bar{u}\bar{d}$, $\bar{d}\bar{d}$ تشکیل سه گانه ایزوتوپیک ($I = 1$) می‌دهند: $\bar{d}\bar{u}$, $(\bar{u}\bar{d}-\bar{d}\bar{u})/\sqrt{2}$ ؛ و همچنین یگانه ایزوتوپیک ($I = 0$) را هم به وجود می‌آورند: $(\bar{u}\bar{u} + \bar{d}\bar{d})/\sqrt{2}$. شکل ۱-۴(الف) نمودار تراز-انرژی پایین‌ترین حالت‌های ایزویگانه است که حالت‌های خط‌چین را هم دربرمی‌گیرد. خط‌چینها نشان دهنده حالت‌های $s\bar{s}$ می‌باشد. شکل ۱-۴(ب) نمودار تراز-انرژی پایین‌ترین حالت انرژی ایزوسه‌گانه است. شکل ۱-۴(ج) نمودار تراز-انرژی از کم‌انرژی‌ترین مزون‌های K است. مزون‌های K سیستم‌های کوارک-پادکوارک $\bar{d}\bar{s}$ و $\bar{u}\bar{s}$ هستند، این سیستم‌ها و حالت‌های پادذره‌ای آن $\bar{s}\bar{d}$ و $\bar{s}\bar{u}$ دو گانه‌های ایزوتوپیکند. انرژی بیشتر آنها نسبت به حالت‌های شکل ۱-۴(ب)، تا حد زیادی به سبب جرم بیشتر کوارک s نسبت به کوارک‌های d و u می‌باشد. جابجایی نسبی بزرگ حالت 0^+ ویژگی است که هنوز برای آن تفسیری پیدا نشده است.

در شکل ۱-۴، اثر جانشینی کوارک شگفت به جای کوارک پایین در طیف مزون نشان داده شده است. در طیف شکل ۱-۴(ب) هر تراز دارای یک عضو ($\bar{d}\bar{u}$) با بار کل $-e$ است. در شکل ۱-۴(ج)، طیف مزون‌های شگفت ($\bar{s}\bar{u}$) نشان داده شده است. بین تکانه زاویه‌ای و پاریته حالت‌ها در دو طیف تناظر برقرار است. تفاوت‌های انرژی ناشی از بیشتر بودن جرم کوارک s ، تا مرتبه 200 MeV می‌باشد. اضافه بودن جرم کوارک s نسبت به کوارک‌های u و d سبب می‌شود که در هر ذره شگفتی کوارک s ناپایدار بود و با برهمکنش ضعیف واپاشد.

علاوه بر کوارک‌های u ، d و s ، کوارک‌های سنگینتر دیگری هم وجود دارند. کوارک افسون^۱ c (با جرمی حدود $1.3 \text{ GeV}/c^2$ و بار $2/3$)، کوارک ته^۲ b (با جرمی حدود $4.3 \text{ GeV}/c^2$ و بار $-1/3$) و کوارک سر^۳ t (با جرمی حدود $180 \text{ GeV}/c^2$ و بار $-2/3$). بیشترین ویژگی که در کوارک‌ها جلب توجه می‌کند، جرم آنهاست، که حتی از جرم لپتون‌ها هم نا همگون‌ترند. بررسی‌های آزمایشگاهی کوارک سر گریزان از آشکار شدن، هنوز در مرحله نوزادی خود است. اما به نظر می‌آید سه کوارک از هر شش طعم کوارک شناخته شده، می‌توانند به هم مقید شده و سیستمی از حالت‌های باریونی (یا سه پادکوارک برای تشکیل پادباریون) و هر زوج کوارک-پادکوارک می‌توانند به هم مقید شده و حالت مزونی تشکیل دهند.

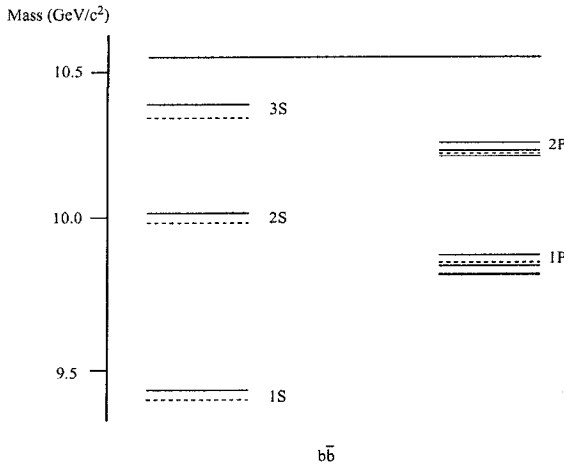
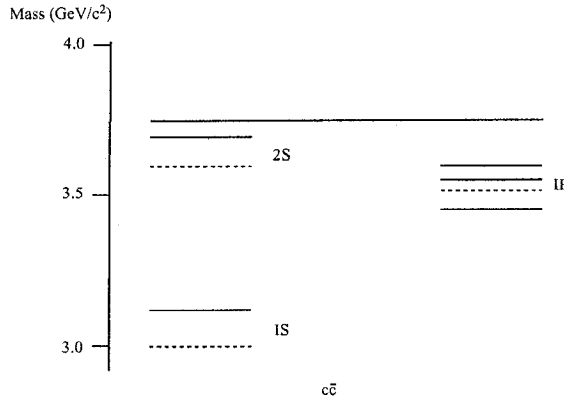
کوارک‌های c و b در ماشین‌های برخورددهنده باریکه e^+e^- کشف شدند. تشدیدهای باریک و بارزی در سطح مقطع نابودی e^+e^- مشاهده گردیدند. پهنای آنها کمتر از 15 MeV بوده و مشخص کننده حالت‌های مزونی ایجاد شده از کوارک‌های u ، d و s می‌باشند. دو گروه حالت تشدید می‌وجود دارند. گروهی با انرژی مرکز جرم حدود 3 GeV که به نام تشدید J/ψ شناخته می‌شود و حالت افسونی یا چارمونیم^۴ $c\bar{c}$ در نظر گرفته می‌شود. گروه دیگر با انرژی مرکز جرم حدود 10 GeV ، حالت تشدید Y (بوسیلان)، بر حالت باتومونیم^۵ $b\bar{b}$ در نظر گرفته می‌شود. دانش کنونی از ترازهای انرژی $c\bar{c}$ و $b\bar{b}$ در شکل ۱-۵ نشان داده شده است. در فصل ۱۷ درباره این سیستم‌ها بحث خواهیم کرد. وجود کوارک سر در سال ۱۹۹۵ در فرمی‌لب در برخوردهای $p\bar{p}$ اثبات شد.

۱-۷ رنگ کوارک

بیشتر اطلاعات در مورد فیزیک کوارک‌ها از آزمایش‌های مربوط به برخورد باریکه‌های e^+e^- به دست آمده است. در این جا آزمایشهایی که در گستره بین انرژی‌های 10 GeV و انرژی آستانه، حدود 90 GeV ، رخ می‌دهند را با امکان تولید بوزون Z ، بررسی می‌کنیم. اندازه‌گیری سطح مقطع نابودی e^+e^- ، یعنی $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ ، نسبتاً ساده و محاسبه آن در نظریه الکتروضعیف سلام واینبرگ، که در فصل ۱۲ آن را معرفی خواهیم کرد، بسیار ساده می‌باشد. در انرژی‌های مرکز جرمی که بسیار کمتر از 90 GeV می‌باشد، بخش بزرگی از سطح مقطع مربوط به فرآیند الکترومغناطیسی می‌باشد که در نمودار فاینمن شکل ۱-۶ نشان داده می‌شود. زوج میون در دستگاه مرکز جرم، که برای بیشتر برخورد دهنده‌های e^+e^- همان دستگاه آزمایشگاه است، پشت به پشت تولید

1- charmed quark
2- bottom
3- top
4- charmonium
5- bottomonium

می شوند. در مرتبه اول ثابت ساختار ریز $\alpha = e^2 / (4\pi\epsilon_0\hbar c)$ ، سطح مقطع دیفرانسیلی برای تولید میون‌هایی که با زاویه θ نسبت به باریکه فرودی ناقطیده حرکت می کنند، برابر است با



شکل ۵-۱ نمودارهای تراز انرژی برای حالت‌های چارمونیم $c\bar{c}$ و باتومونیم $b\bar{b}$ ، در زیر آستانه‌ای که این حالت‌ها می‌توانند در این انرژی آستانه از طریق برهمکنش قوی به جفت‌های مزون واپاشد (مثلاً $c\bar{c} \rightarrow c\bar{u} + u\bar{c}$) حالت‌های $1S, 2S, 3S$ دارای تکانه زاویه‌ای $L = 0$ ، و حالت‌های $1P, 2P, 3P$ دارای تکانه زاویه‌ای $L = 1$ هستند. اسپین‌های ذاتی کوآرک می‌توانند با هم جفت شوند تا مقدار $S = 0$ نتیجه شود و حالت‌هایی با تکانه زاویه‌ای کل $J = L$ به وجود آیند. این حالت‌ها با خط‌چین نشان داده شده‌اند. آشکارسازی تجربی این حالت‌ها مشکل می‌باشد. اسپین‌های ذاتی کوآرک می‌توانند با هم ترکیب شده و مقدار $S = 1$ نتیجه گردد. حالت‌های $S = 1$ با خط پر نشان داده شده‌اند. جفت‌شدگی اسپین مدار حالت‌های P با $S = 1$ منجر به حالت‌هایی با $J^P = 0^+, 1^+, 2^+$ می‌شود. جفت‌شدگی اسپین مدار در این شکل کاملاً آشکار است. همه حالت‌های نشان داده شده با $S = 1$ اندازه‌گیری شده است.

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{2s} (1 + \cos^2\theta) \sin\theta \quad (1-1)$$

که s مجذور انرژی مرکز جرم می باشد (ر.ک. Okun, 1982, p. 205). در به دست آوردن رابطه (1-1) از جرم لپتون ها صرف نظر شده است. با انتگرال گیری نسبت به θ ، سطح مقطع کل برابر می شود با

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (2-1)$$

کمیت $R(E)$ که در شکل ۱-۷ نشان داده شده است، برابر است با نسبت

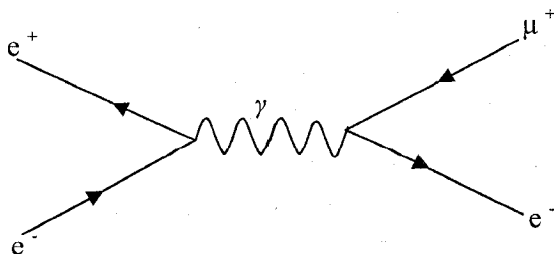
$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{ذرات برهمکنش کننده قوی})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (3-1)$$

در انرژی های پایین تر، بسیاری از حالت های هادرونی به صورت تشدیدهایی آزاد می شوند، اما به نظر می آید که در انرژی های بالای 10 GeV تا حداکثر 40 GeV ، مقدار R تقریباً ثابت $R \approx 4$ ، باشد. همانند ذره های بنیادی، کوارک ها، بجز در مقدار بار الکتریکی، دارای الکترو دینامیکی همانند میون ها می باشند. نمودارهای فاینمن که در گستره 10 GeV تا 40 GeV در صورت کسر R مطرح می باشند، در شکل ۱-۸ نشان داده شده اند. (جرم کوارک سر حدود $174 \text{ GeV}/c^2$ می باشد و در این برهمکنش شرکت نخواهد کرد.) برای هر یک از فرآیندهای کوارکی، فرمول (۲-۱) برقرار می باشد، بجز آنکه به جای e بار الکتریکی کوارک واقع در رأس نمودار، قرار می گیرد، در نتیجه

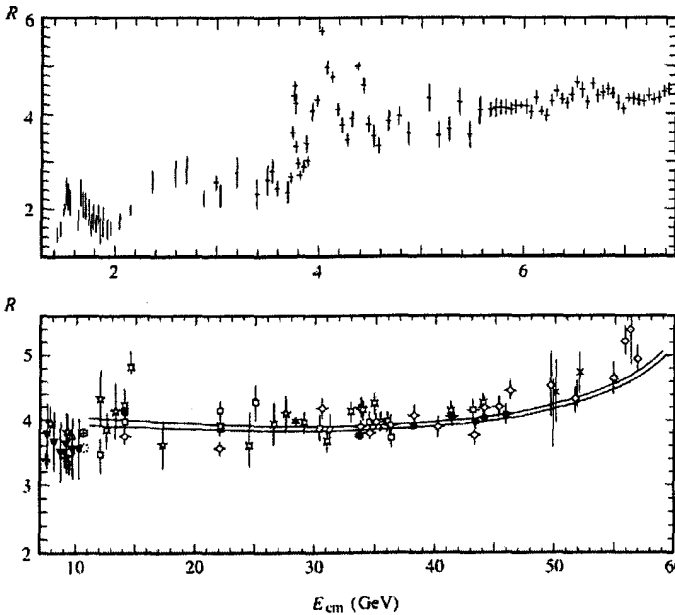
$$R = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{9} \quad (4-1)$$

این مقدار سه برابر کمتر می باشد.

در مدل استاندارد، ناهمگونی ها با معرفی مفهومی به نام رنگ کوارک برطرف می شود. هر کوارک



شکل ۱-۶ نمودار فاینمن در پایین ترین مرتبه (فصل ۸) برای تولید زوج $\mu^+\mu^-$ در برخوردهای e^+e^-



شکل ۱-۷ اندازه‌گیری $R(E)$ حاصل از ناحیهٔ تشدیدی $11 \text{ GeV} < E < 1 \text{ GeV}$ به درون ناحیهٔ $60 \text{ GeV} < E < 11 \text{ GeV}$ ، که هیچ گونه تشدید برتر و یا آستانهٔ تولید کوارک-پادکوارک ندارد. بر مبنای محاسبات، دو منحنی به‌ازای $E > 11 \text{ GeV}$ نشان داده شده است که رنگ کوارک و تصحیح‌های الکتروضعیف و اثرهای برهمکنش قوی (QCD) در آن منظور شده است. (پذیرفته شده در گروه داده‌های ذرات^۱)

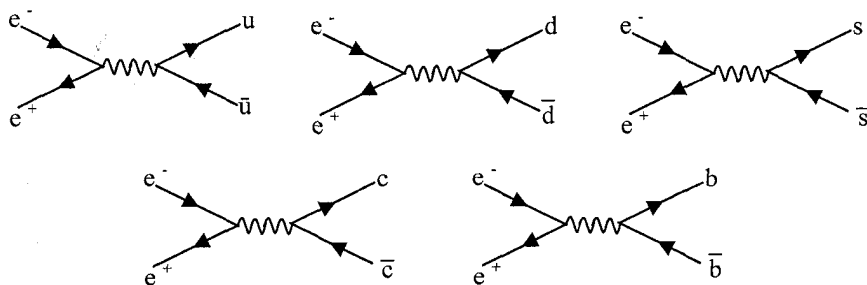
تنها دارای یک شناسهٔ طعم، u, d, s, c, b, t ، می‌باشد، اما به‌ازای هر طعم یک شناسهٔ رنگ وجود دارد. فرض می‌شود که سه حالت پایه رنگ، مثلاً قرمز، سبز و آبی (r, g, b) وجود دارد. با سه رنگ کوارکی به‌ازای هر طعم، باید R را در رابطه (۱-۴) در ۳ ضرب کنیم، و در نتیجه:

$$R = \frac{11}{3} \quad (۵-۱)$$

که با داده‌های شکل ۱-۷ بسیار سازگار است.

ابداع مفهوم رنگ نه تنها مشکل R را حل می‌کند، بلکه مهم‌تر از آن مشکل تقارن حالت‌های باریونی را نیز برطرف می‌کند. در بخش ۱-۵ دیدیم که در نبود هر عدد کوانتومی جدیدی، حالت‌های باریونی در تبادل دو کوارک کاملاً متقارن می‌باشد. اما اگر این تابع‌های حالتی در تابع حالت پادمقارن رنگ ضرب شوند، حالت کل پادمقارن می‌شود و اصل طرد پائولی برقرار می‌ماند.

دلیل قوی بر سازوکار تولید کوارک در نمودارهای فاینمن شکل ۱-۸ با ویژگی‌های دیگر در داده‌های



شکل ۱-۸. نمودارهای فاینمن پایین‌ترین مرتبه برای تولید زوج کوارک-پادکوارک در برخورد های $e^+ e^-$ در زیر آستانه Z

حاصل از برخورددهنده های $e^+ e^-$ نشان داده می‌شود. فرآیند نابودی $e^+ e^-$ در انرژی‌های بالا، هادرون‌های زیادی تولید می‌کند.

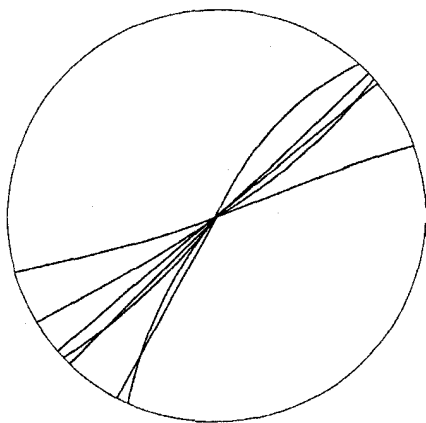
این فرآیندها در جت‌های پشت به پشت بسیار به یکدیگر همبسته می‌باشند. در شکل ۱-۹ نمونه‌ای از این مورد نشان داده شده است. (به علت وجود میدان مغناطیسی خارجی، رد ذرات باردار منحنی است: این انحنا به تکانه ذره مربوط می‌باشد.) جهت جت را می‌توان جهت در نقطه تولید تکانه کل همه هادرون‌های مربوطه در نظر گرفت. تکانه دو جت پشت به پشت برابر و جهت آنها مخالف یکدیگر می‌باشند. می‌توان جهت جت‌ها را جهت‌های آغازین جفت کوارک-پادکوارک فرض کرد. این فرض با آزمون توزیع زاویه‌ای جهت جت‌های رویدادهای دوجتی حاصل از فرآیندهای نابودی بسیاری نسبت به باریک‌های $e^+ e^-$ اثبات گردید. توزیع زاویه‌ای همانند توزیع میون‌ها (۱-۱) می‌باشد، به شرط آن که سهم Z ، که با نزدیک شدن به انرژی تولید Z بارز می‌شود، در نظر گرفته شده باشد.

جت‌های هادرونی از ترکیب کوارک و پادکوارک اصلی با جفت‌های کوارک-پادکوارک ایجاد شده از خلا نتیجه می‌شود. جزئیات دقیق این فرآیندها هنوز به تمامی درک نشده است.

۱-۸ پراکندگی الکترون از هسته

بهره‌گیری از الکترون‌ها برای کاویدن پروتون و نوترون بسیار سودمند است، زیرا برهمکنش الکترون‌ها با کوارک‌ها الکترومغناطیسی می‌باشد، که این برهمکنش به خوبی درک شده است. در این فرآیند پراکندگی، بجز در انرژی‌های بسیار بالا و زاویه پراکندگی بزرگ، می‌توان از برهمکنش ضعیف چشم‌پوشی کرد. برهمکنش قوی که از اساس وارد نمی‌شود.

در دهه ۱۹۵۰ میلادی، آزمایشهایی در استنفورد بر روی هدف‌های نوکلئون ساکن در آزمایشگاه انجام گردید و در نتیجه توزیع بار الکتریکی در پروتون و نوترون (با بهره‌گیری از داده‌های پراکندگی حاصل از هدف‌های دوتریوم) مشخص شد. این آزمایش‌های آغازینه در گستره انرژی‌های الکترون، کمتر از



شکل ۹-۱ نمونه‌ای از رویداد نابودی e^+e^- که منجر به دو جت از هادرون‌ها گردید. این شکل تصویر ردهای ذره‌باردار بر صفحه‌ای عمود بر محور e^+e^- می‌باشد. این شکل از رویدادی در آشکارساز TASSO در PETRA DESY گرفته شده است.

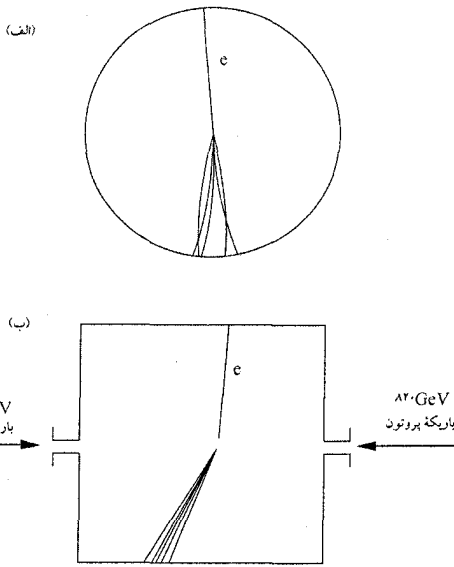
۵۰۰ MeV (Hofstadter *et al.* 1958) انجام شدند. پراکندگی در انرژی‌های بالاتر رفتار کوارک‌های پروتون را روشن‌تر کرد. در این انرژی‌ها پراکندگی کسان الکترون، که تولید مزون را هم در بر می‌گیرد، یک شگرد برتر در برهمکنش می‌شوند.

در برخورددهنده الکترون-پروتون HERA در هامبورگ، باریکه‌ای از الکترون‌ها با انرژی ۳۰ GeV با باریکه‌ای ۸۲۰ GeV از پروتون‌ها برخورد سربه‌سر می‌کند. بسیاری از ویژگی‌هایی که بر اثر برخوردهای الکترون پروتون به وجود می‌آیند در مدل پارتونی^۱ به‌خوبی توصیف می‌شود. این مدل را فاینمن در سال ۱۹۶۹ معرفی کرد. در مدل پارتونی هر پروتون موجود در باریکه را، دستگاهی از زیرذره‌هایی به نام پارتون، در نظر می‌گیرند. این پارتون‌ها همان کوارک‌ها، پادکوارک‌ها و گلوئون‌ها می‌باشند. کوارک‌ها و پادکوارک‌ها ذراتی با بار الکتریکی می‌باشند. اندیشه اصلی مدل پارتونی آن است که در انرژی، انتقال تکانه^۲ Q^2 بالا، الکترون از کوارک یا پادکوارکی آزاد پراکنده می‌شود و فرآیند پراکندگی، پیش از آنکه پس‌زده شدن کوارک یا پادکوارک مجالی برای برهمکنش با محیط دورادور کوارک، پادکوارک‌ها و گلوئون‌ها بیابد، کامل می‌شود. بنابراین در محاسبه سطح مقطع فراگیر، حالت‌های هادرونی نهایی پدیدار نمی‌شوند.

در این مدل، به‌ازای Q^2 های بالا هم الکترون و هم کوارک ضربه خورده در زاویه‌های بالا منحرف می‌گردند. در شکل ۱-۱۰ نمونه‌ای از رویداد حاصل از آشکارساز زئوس در هرا^۲ نشان داده شده است. تکانه عرضی الکترون پراکنده شده با جت حاصل از هادرون‌ها متوازن می‌شود، که می‌توان با کوارک پس‌رونده مربوط دانست. جت دیگر، جت «اثر پروتون» می‌باشد که در زاویه‌های کوچک نسبت به باریکه پروتون محصور می‌شد. رویدادهایی همانند اینها، دلیل قوی‌تری برای مدل پارتونی هستند.

1- parton model

2- ZEUS - HERA



شکل ۱-۱ در این شکل ردهای ذره توضیح داده می‌شوند. این ردها از رویدادی در آشکارساز ZEUS در HERA, DESY گرفته شده‌اند. شکل ۱-۱ (الف) رویدادی تصویر شده بر صفحه عمود بر محور باریکه‌ها می‌باشد. شکل ۱-۱ (ب) رویدادی تصویر شده بر روی صفحه گذرنده از محور باریکه‌ها است.

کامیابی مدل پارتونی در تفسیر این داده‌ها به مفهوم کوارک‌ها قوت بیشتری می‌بخشد. مدل پارتونی بخشی از زمینه اصلی کار ما نیست، بلکه دیدگاه جذاب آن و اهمیت آن در ذرات بنیادی برایمان جالب است. شرح ساده‌ای از مدل پارتونی و رابطه آن با آزمایش در پیوست آمده است.

۹-۱ شتابدهنده‌های ذرات

پیشرفت در درک طبیعت ناشی از کارکرد دوجانبه بین نظریه و آزمایش می‌باشد. در فیزیک ذرات، برای آزمایش نیاز به وجود شتابدهنده‌های بزرگ ذرات و آشکارسازهای پیچیده و مبتکرانه است، که ساخت آنها در آغاز دهه ۱۹۳۰ با شتابدهنده خطی کاکرافت والتون در کمبریج، واقع در پادشاهی بریتانیا، و همچنین سیکلوترون لارنس در برکلی، ایالات متحده آمریکا آغاز گشت. پروتون‌ها در ماشین کمبریج تا ۰.۷ MeV شتاب می‌گرفتند. نخستین سیکلوترون برکلی پروتون‌ها را تا ۱.۲ MeV شتاب می‌داد. پس از ۱۹۴۵، برای مدتی نتیجه‌های مهمی با بهره‌گیری از تابش کیهانی، چشمه‌ای از ذرات پرنانرژی، به‌دست آمد. رویدادها در امولسیون^۲ عکاسی آشکارسازی می‌شدند، اما در دهه ۱۹۵۰ شتابدهنده‌های نوین، باریکه‌هایی از ذرات با انرژی‌های روز به روز بالاتر را فراهم آوردند. برخی از این ماشین‌ها که در زمان گذشته، کنونی، یا آینده به کار رفته‌اند، می‌روند و یا خواهند رفت در جدول ۱-۵ فهرست شده است. پارامترهای جزئی این ماشین‌ها، و دیگر ماشین‌های مانند آنها، را می‌توان در (2005) PDG یافت.

جدول ۱-۵ برخی از شتابدهنده‌های ذره

تاریخ آغاز- تاریخ پایان	ذرات برخورد کننده	ماشین
۱۹۸۷	$p: 900 \text{ GeV}$ $\bar{p}: 900 \text{ GeV}$	تواترون (فرمی لب، باتاویا، II)
۱۹۹۸-۱۹۸۹	$e^+: 50 \text{ GeV}$ $e^-: 50 \text{ GeV}$	SLC (اسلک، SLAC، استنفورد)
۱۹۹۲	$e: 30 \text{ GeV}$ $p: 820 \text{ GeV}$	HERA (DESY، هامبورگ)
۲۰۰۰-۱۹۹۶	$e^+: 81 \text{ GeV}$ $e^-: 81 \text{ GeV}$	LEP2 (سرن، CERN، ژنو)
۲۰۰۸-۱۹۹۹	$e^+: 9 \text{ GeV}$ $e^-: 3.1 \text{ GeV}$	PEP-II (اسلک، SLAC، استنفورد)
۲۰۰۸	$p: 7 \text{ TeV}$ $p: 7 \text{ TV}$	LHC (سرن، CERN، ژنو)

جت هادرونی فوران پروتون از یک الکترون می‌باشد. رد الکترون پس‌رونده با e نشان داده شده است. باریکه‌های راه‌انداز و جت باقی‌مانده پروتون در لوله‌های باریکه محصور شده‌اند و آشکار نمی‌شوند.

تواترون^۱ در فرمی لب قرار دارد، جایی که کوارک سر کشف شد. هنوز کاوش‌هایی درباره فیزیک کوارک سر ادامه دارد. هرچند بخشی اساسی از مدل استاندارد به کوارک سر مربوط می‌شود، در این کتاب به اختصار درباره آن صحبت شده است. شتابدهنده به‌روز شده LEP2 در سرن می‌تواند زوج $W^+ W^-$ را بیافریند، و امکان پژوهش و بررسی مفصل برهمکنش ضعیف را فراهم آورد. در استنفورد، PEP-II و آشکارساز «باربار» $B\bar{B}$ برای مطالعه مزدوج بار، نقض پاریتی (CP) طراحی شده است. روشی که در آن نقض CP در مدل استاندارد پدیدار می‌شود در فصل ۱۸ بررسی می‌شود.

بلندپروازانه‌ترین ماشین که در آینده نزدیک ساخته می‌شود، برخورد دهنده بزرگ هادرون (LHC) در سرن می‌باشد.^۲ انتظار می‌رود که با این ماشین امکان مشاهده بوزون هیگز، در صورت وجود چنین ذره‌ای، میسر گردد. بوزون هیگز مؤلفه‌ای اساسی در مدل استاندارد می‌باشد. در فصل ۱۰ به معرفی آن می‌پردازیم. همچنین باور عمومی بر آن است که فیزیک ابرتقارن، که شاید زمینه مدل استاندارد باشد، در انرژی‌هایی،

1- TEVATRON

۲- CERN خواننده توجه دارد که هم‌اکنون این برخورد دهنده ساخته شده، و آزمایش هم انجام داده است. (ر.ک.

<http://lhc.web.cern.ch/lhc>) مترجم

تا حداکثر ۱۴ TeV، که در LHC در دسترس خواهد بود، پدیدار شود.

۱-۱ یکاها

در فیزیک ذرات معمول است که معادله‌ها به‌طور ساده‌تر پدیدار شوند. این کار با بهره‌گیری از یکاهایی صورت می‌گیرد که در آن $\hbar = 1$ و $c = 1$ باشد. در الکترومغناطیس، $\epsilon_0 = 1$ قرار می‌دهیم (تا نیروی بین بارهای q_1 و q_2 برابر با $q_1 q_2 / 4\pi r^2$ شود)، و همچنین $\mu_0 = 1$ قرار می‌دهیم تا مقدار $c^2 = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1} = 1$ شود.

البته در هر جا که برای روشن شدن بیشتر و کسب اطمینان از درک مطلب لازم باشد، و یا برای محاسبه ضرایب \hbar, c را وارد خواهیم کرد. یادآوری این مطلب مفید است که

$$\hbar c \approx 197 \text{ MeV fm}, \quad e^2 4\pi \approx 1.44 \text{ MeV fm},$$

$$\alpha = e^2 / 4\pi \hbar c \approx (1/137), \quad c \approx 3 \times 10^{12} \text{ fms}^{-1}$$

انرژی، جرم و تکانه معمولاً برحسب MeV یا GeV بیان می‌شود، و در این کتاب هم از همین قاعده پیروی خواهد شد.

معادله‌های موجود در مدل استاندارد باید با اصل نسبیت انیشتین سازگار باشند. بنا به این اصل، شکل قوانین طبیعت در هر چارچوب مرجع لختی یکسان می‌باشد. چارچوب لخت چارچوبی است که جسم آزاد در آن بدون شتاب حرکت کند. اگر میدان گرانشی زمین را میدانی خارجی در نظر بگیریم، چارچوب مقید به زمین چارچوب تقریباً لختی است. فرض می‌کنیم خواننده با مفهوم‌های دوران، تبدیل‌های لورنتس معمولی و مکانیک نسبیتی برخورد آشنا باشد. بخش عمده این فصل دربارهٔ نمادگذاری است. نمادگذاری مناسب برای بیان هر نظریه‌ای، به‌ویژه نظریهٔ نسبیتی، همانند مدل استاندارد بسیار لازم است.

۲-۱ دوران‌ها، انبساط و تبدیل‌های لورنتس معمول

رویدادی را در نظر بگیرید که مختصات زمان و مکان آن در چارچوب‌های مرجع لخت مختلف اندازه‌گیری شده است. مقادیر اندازه‌گیری شده با استفاده از تبدیل‌های لورنتس، به یکدیگر مربوط می‌شوند. عمل دوران حالت خاصی از تبدیل‌های لورنتس است. مثلاً چارچوب K' را در نظر بگیرید که به اندازهٔ زاویهٔ θ ، نسبت به چارچوب K حول محور z ها، چرخیده باشد. اگر (t, \mathbf{r}) مختصات زمان و مکان رویداد مشاهده شده در چارچوب K باشد، آنگاه همان رویداد در چارچوب K' در مختصات (t', \mathbf{r}') مشاهده می‌شود. این مختصه‌ها با تبدیل‌های زیر به هم مربوط می‌شوند.

$$t' = t$$

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$z' = z$$

(۱-۲)

همچنین رویدادهای مشاهده شده در چارچوب‌های مرجعی که نسبت به یکدیگر با سرعت ثابت حرکت می‌کنند، با بکارگیری تبدیل‌های لورنتس به یکدیگر مربوط می‌شوند. برای نمونه چارچوب مرجع K' را در نظر بگیرید که نسبت به چارچوب K ، در راستای محور z های آن با سرعت v حرکت کند. محورهای فضایی K و K' در زمان $t = 0$ برهم منطبقند. اگر (t, \mathbf{r}) مختصات زمان و مکان رویداد مشاهده شده در چارچوب مرجع K ، و (t', \mathbf{r}') هم مختصات زمان و مکان رویداد مشاهده شده در

چارچوب مرجع K' باشد، تبدیلات لورنتس به شکل زیر می‌باشند

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta z) \\ x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \gamma(z - \beta ct) \end{aligned} \quad (2-2)$$

که c سرعت نور و $\beta = v/c$ ، $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ می‌باشد.

کمیت‌های $x^0 = ct$ ، $x^1 = x$ ، $x^2 = y$ ، $x^3 = z$ را اختیار می‌کنیم. x^μ ها از نظر ابعادی همگن هستند. هر رویدادی در چارچوب K با مجموعه‌ای از x^μ ها مشخص می‌شود که $\mu = 0, 1, 2, 3$ می‌باشد. در این کتاب شاخص‌های یونانی به‌طور کلی مقادیرهای $0, 1, 2, 3$ را می‌گیرند. در نمادگذاری مرسوم‌تر، تبدیل‌های لورنتس (۲-۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \cosh \theta - x^3 \sinh \theta \\ x'^1 &= x^1 \\ x'^2 &= x^2 \end{aligned} \quad (3-2)$$

$$x'^3 = -x^0 \sinh \theta + x^3 \cosh \theta$$

که در آن $\beta = v/c = \tanh \theta$ ، و در نتیجه $\gamma = \cosh \theta$ می‌باشد.

آن دسته از تبدیل‌ها به چارچوبی با محورهای موازی را که نسبت به چارچوب نخستین در راستای دلخواهی حرکت کند، افزایش^۱ گویند. به‌طور کلی بین چارچوب‌های مرجع K و K' که مبدأ آنها در $x^0 = x^1 = x^2 = x^3 = 0$ برهم منطبق باشد، تبدیل‌های لورنتس ترکیبی از دوران و افزایش است. این تبدیل‌ها با شش پارامتر مشخص می‌شوند: سه پارامتر برای تعیین جهت‌گیری محورهای چارچوب K' نسبت به محورهای چارچوب K ، و سه پارامتر برای تعیین مؤلفه‌های سرعت چارچوب لخت K' نسبت به چارچوب لخت K . در حالت کلی، چنین تبدیلی را به شکل زیر در نظر می‌گیریم

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu \quad (4-2)$$

که در آن عناصر L^μ_ν ماتریس تبدیل حقیقی و بدون بعد هستند. در اینجا و از این پس از قاعده جمع انیشتین^۲ استفاده می‌کنیم. به‌موجب این قاعده بر روی هر شاخص «ظاهری»^۳ مکرر، جمع بسته می‌شود. بنابراین در رابطه (۴-۲) نماد $\sum_{\nu=0}^3$ در سمت راست حذف شده است. ماتریس‌های L^μ_ν تشکیل

1- boost

2- Einstein summation convention

3- dummy

گروهی به نام گروه لورنتس معمولی (مسئله ۲-۶ و پیوست ب) می‌دهند. اهمیت محل قرار گرفتن زیروند^۱ و زیروند^۲ را به زودی روشن خواهیم کرد.

بازه^۳ $(\Delta s)^2$ بین دو رویداد x^μ و $x^\mu + \Delta x^\mu$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 \quad (5-2)$$

ویژگی بنیادی تبدیل لورنتس آن است که بازه^۳ بین رویدادها ناوردا می‌ماند، یعنی

$$(\Delta s')^2 = (\Delta s)^2 \quad (6-2)$$

با معرفی تانسور متریک^۴ $(g_{\mu\nu})$ به صورت زیر، می‌توانیم $(\Delta s)^2$ را فشرده‌تر بیان کنیم.

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7-2)$$

در نتیجه داریم

$$(\Delta s)^2 = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \quad (8-2)$$

که روی شاخص‌های بالا و پایین مکرر جمع بسته می‌شود. توجه کنید که $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ، تانسور متقارن است. عناصر این تانسور در همه^۴ چارچوبهای مرجع یکسان می‌باشند.

۲-۲ اسکالر ها، چاربردارهای پادوردا و هموردا

به کمیت‌هایی، چون $(\Delta s)^2$ که تحت تبدیلات لورنتس ناوردا هستند، اسکالر گفته می‌شود. چاربردار هموردا^۴ را به صورت مجموعه‌ای از a^μ تعریف می‌کنیم که همانند مجموعه^۴ x^μ تحت تبدیلات لورنتس معمولی تبدیل شود.

$$a'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} a^{\nu} \quad (9-2)$$

نمونه^۵ آشنای چاربردار پادوردا، بردار انرژی-تکانه ذره، یعنی $(E/c, \mathbf{p})$ است.

چاربردار هموردای^۵ a_μ به جای زیروند، زبروند دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$a_{\mu} = g_{\mu\nu} a^{\nu} \quad (10-2)$$

1- subscript

2- superscript

3- metric tensor

4- contravariant four-vector

5- covariant four-vector

بنابراین اگر $a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$ باشد، آنگاه $a_\mu = (a^0, -\mathbf{a})$ می‌باشد.
می‌توانیم کمیت ناوردای $(\Delta s)^\tau$ را به صورت زیر بنویسیم.

$$(\Delta s)^\tau = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = \Delta x_\nu \Delta x^\nu$$

به طور کلی، اگر a^μ و b^μ چاربردارهای پادوردا باشند، حاصل ضرب اسکالر آنها به صورت زیر تعریف می‌شود

$$g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (11-2)$$

که تحت تبدیل لورنتس هم ناوردا می‌باشد.

می‌توان تانسور متریک هموردای $g^{\mu\nu}$ را هم به گونه‌ای تعریف کرد که

$$\alpha^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \quad (12-2)$$

باشد. عناصر $g^{\mu\nu}$ درست همان عناصر تانسور $g_{\mu\nu}$ می‌باشد.

قانون تبدیل برای بردارهای هموردا

$$\alpha'_\mu = L_\mu^\nu a_\nu \quad (13-2)$$

از قانون تبدیل بردارهای پادوردا نتیجه می‌شود (مسئله ۲-۱). توجه کنید که در حالت کلی، L_μ^ν با L_ν^μ برابر نیست (مسئله ۲-۱). با استفاده از ناوردایی حاصل ضرب اسکالر (۲-۱۱)، می‌توانیم به عبارت زیر برسیم

$$a'_\mu b'^\mu = L_\mu^\nu L_\rho^\mu a_\nu b^\rho = a_\nu b^\nu$$

و

$$a'^\mu b'_\mu = L^\mu_\nu L_\mu^\rho a^\nu b_\rho = a^\nu b_\nu$$

از آنجا که تانسورهای a_μ و b_μ دلبخواه هستند، می‌توان از عبارت بالا، نتیجه گرفت که

$$L^\mu_\nu L_\mu^\rho = L_\mu^\nu L^\mu_\rho = \delta_\nu^\rho \quad (14-2)$$

$$\delta_\nu^\rho = \delta_\rho^\nu = \begin{cases} 1, & \rho = \nu \\ 0, & \rho \neq \nu \end{cases}$$

و

۲-۳ میدان‌ها

مدل استاندارد نظریه میدان‌هاست. در چارچوب مدل استاندارد با میدان‌هایی سروکار خواهیم داشت که در هر نقطه مانند x از فضا و زمان به مانند اسکالرها، بردارها، یا تانسورها (که در همین بخش معرفی می‌کنیم) تبدیل شوند. از نماد x برای نمایش اختصاری مجموعه (x^0, x^1, x^2, x^3) بهره می‌بریم. برای

نمونه خواهیم دید که پتانسیل‌های الکترومغناطیسی تشکیل میدان چاربرداری می‌دهند و میدان الکترومغناطیسی میدانی تانسوری می‌باشد. همچنین با میدان‌های اسکالر $\phi(x)$ سروکار خواهیم داشت، که بنا به تعریف به‌سادگی تبدیل می‌یابند

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (۱۵-۲)$$

x و x' نشان‌دهندهٔ یک نقطه در فضا-زمان هستند.

می‌توانیم از میدان اسکالر، میدانی برداری بسازیم. تغییر میدان $d\phi$ را در حرکت از نقطهٔ x به نقطه‌ای در همسایگی آن مثل $x + dx$ ، در نظر بگیرید، که به‌اندازهٔ بسیار کوچک dx تغییر کرده است. در نتیجه

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

تحت تبدیل‌های لورنتس ناورد می‌ماند. از آنجا که مجموعهٔ dx^μ بردار بسیار کوچک پادوردای دلخواهی را می‌سازد، مجموعهٔ $\partial\phi/\partial x^\mu$ باید برداری هموردا بسازد (مسألهٔ ۲-۳). با پیروی از قاعدهٔ زیروندنویسی، به رابطهٔ زیر می‌رسیم

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \nabla \phi \right) = \partial_\mu \phi \quad (۱۶-۲)$$

و به‌همین ترتیب می‌توانیم بردار پادوردرا را هم به‌صورت زیر تعریف کنیم.

$$\partial^\mu \phi = g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, -\nabla \phi \right) \quad (۱۷-۲)$$

با استفاده از این دو تعریف، نتیجه می‌گیریم که

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \phi)^2 \quad (۱۸-۲)$$

و

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi \quad (۱۹-۲)$$

تحت تبدیلات لورنتس ناورد می‌باشند.

اکنون می‌توانیم کمیت‌های تانسوری مورد نیاز را تعریف کنیم. تانسورهای $T^{\mu\nu}, T_{\mu\nu}, T^\mu{}_\nu, T^\nu{}_\lambda$ و غیره را همانند کمیت‌هایی تعریف می‌کنیم که تحت تبدیل‌های لورنتس بمانند $a^\mu a^\nu, a_\mu a_\nu, a^\mu a_\nu, a^\mu a^\nu a_\lambda$ تبدیل شوند. برای نمونه

$$T'^{\mu\nu} = L^\mu_\rho L^\nu_\lambda T^{\rho\lambda}$$

با جمع بستن روی شاخص‌هایی که هم در بالا و هم در پایین تکرار می‌شوند، «ادغام» صورت می‌گیرد و در نتیجه ویژگی‌های تبدیل با شاخص‌های باقیمانده تعیین می‌شوند. مثلاً T^μ_μ کمیتی اسکالر و $T^{\mu\nu}_\mu$ چاربرداری پادورد است. تانسورهای متریک $g^{\mu\nu}$ و $g_{\mu\nu}$ از تعریف خود پیروی می‌کنند. در نتیجه شرایط زیر بر عناصر ماتریسی L^μ_ν حاکم است.

$$g_{\mu\nu} = g_{\rho\lambda} L^\rho_\mu L^\lambda_\nu \quad (20-2)$$

شرایط (20-2) و (14-2) هم‌ارز هستند.

همانند کمیت‌های اسکالر، برداری و تانسوری، موارد بسیار مهم دیگری هم موسوم به اسپینورها و میدان‌های اسپینوری^۲ وجود دارند. که دارای قواعد خوش‌تعریفی برای تغییر تحت تبدیل‌های لورنتس مختصات می‌باشند. در پیوست ب و فصل ۵ ویژگی اسپینورها را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۲-۴ تانسور لوی چیویتا^۳

تانسور لوی چیویتا $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = \begin{cases} +1 & \text{اگر } \mu, \nu, \lambda, \rho \text{ جایگشت زوجی از } 0, 1, 2, 3 \text{ باشند.} \\ -1 & \text{اگر } \mu, \nu, \lambda, \rho \text{ جایگشت فردی از } 0, 1, 2, 3 \text{ باشند.} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (21-2)$$

برای نمونه داریم، $\varepsilon_{1023} = -1$ ، $\varepsilon_{1230} = +1$ ، $\varepsilon_{0023} = 0$.

به راحتی می‌توان نشان داد که $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ در شرایط زیر صدق می‌کند.

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{\mu\nu\lambda\rho} &= \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = L^\alpha_\mu L^\beta_\nu L^\gamma_\lambda L^\delta_\rho \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\lambda\mu} \det(L) = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\mu} \end{aligned}$$

با بهره‌گیری از تعریف دترمینان (پیوست الف) درمی‌یابیم که حاصل دترمینان ماتریس تبدیل برابر یک می‌شود (مسائل ۲-۴ و ۲-۵).

نماد لوی چیویتای در سه بعد، ε_{ijk} ، هم به همان صورت تعریف می‌شود. بکارگیری نماد لوی چیویتا در تعریف حجم سودمند است. زیرا بنا به تعریف

$$\varepsilon_{ijk} A^i B^j C^k = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

1- contraction

2- spinors, spinor fields

3- Levi-Civita tensor

برابر با حجم متوازی‌السطوحی است که با بردارهای A, B, C تعریف می‌شود. با استفاده از تانسور لوی‌چیویتا در چهار بعد، می‌توانیم حجم‌های چهاربندی $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} a^\mu b^\nu c^\lambda d^\rho$ را بسازیم. ادغام شاخص‌ها سبب می‌شود که کمیت حاصل اسکالر لورنتسی بماند. در عمل، d, c, b, a را عنصرهای بسیار کوچکی موازی با محورهای $0x^\mu$ در نظر می‌گیریم، به گونه‌ای که $a = (dx^0, 0, 0, 0)$ ، $b = (0, dx^1, 0, 0)$ ، $c = (0, 0, dx^2, 0)$ ، $d = (0, 0, 0, dx^3)$ است. پس حجم عنصر فضا-زمان برابر با

$$d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dx^3 dt$$

که یک اسکالر ناوردای لورنتسی است (ر.ک. مسأله ۲-۹).

۲-۵ بازگشت زمانی^۱ و وارونی فضا^۲

عمل بازگشت زمانی به صورت زیر است:

$$x'^0 = -x^0$$

$$x'^i = x^i, \quad i = 1, 2, 3$$

و وارونی فضا هم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x'^0 = x^0$$

$$x'^i = -x^i, \quad i = 1, 2, 3$$

که البته مقدار $(\Delta s)^2$ تحت بازگشت زمانی و وارونی فضا ناوردا می‌ماند. این تبدیلات خارج از گروه لورنتسی معمولی می‌باشند، با این حال مورد توجه هستند و در فصل‌های آتی بکار خواهند رفت.

مسئله‌ها

۱-۲ نشان دهید که $L_\mu^\nu = g_{\mu\rho} L^\rho_\lambda g^{\lambda\nu}$ می‌باشد. درستی عبارت $L^0_\nu = -L^1_\nu$ را بررسی کنید.

۲-۲ با استفاده از رابطه (۲-۱۴) نشان دهید که تبدیلات وارون (۲-۹) و (۲-۱۳) به صورت زیر است.

$$\alpha^\mu = a'^\mu L_\nu^\mu, \quad a_\mu = a'_\nu L^\nu_\mu$$

و در نتیجه نشان دهید که

$$L_\nu^\mu L^\rho_\mu = \delta_\nu^\rho$$

۳-۲ ثابت کنید اگر $\phi(x)$ میدانی اسکالر باشد، مجموعه $(\partial\phi/\partial x^\mu)$ میدان برداری هموردا می‌سازد.

۴-۲ با استفاده از نتیجه مسأله (۱-۲) نشان دهید که $\det(L^\mu{}_\nu) = \det(L_\mu{}^\nu)$ و همچنین با استفاده از معادله (۱۴-۲) نشان دهید که

$$\det(L^\mu{}_\nu) = \pm 1$$

۵-۲ نشان دهید $\det(L^\mu{}_\nu)$ هم برای دوران (۱-۲) و هم برای افزایش (۳-۲)، برابر با +۱ می‌باشد. این ویژگی عمومی تبدیل‌های لورنتس معمولی می‌باشد که سبب تمایز آنها از بازتاب‌های فضایی و بازگشت زمانی (بخش ۲-۵) می‌شود. برای بازتاب‌های فضایی و بازگشت زمانی مقدار دترمینان برابر با -۱ است.

۶-۲ نشان دهید ماتریس‌های $L_\mu{}^\nu$ متناظر با تبدیل‌های لورنتس معمولی هستند که تشکیل گروه می‌دهند. ۷-۲ نشان دهید $\delta^\mu{}_\nu$ تانسور است.

۸-۲ بسامد ω و بردار موج \mathbf{k} موج الکترومغناطیسی در فضای آزاد یک چاربرداری پادوردا به شکل زیر ایجاد می‌کنند

$$k = (\omega/c, \mathbf{k})$$

ناوردای $k_\mu k^\mu = 0$ می‌باشد، که متناظر با رابطه پاشندگی $\omega^2 = c^2 \mathbf{k}^2$ است. نشان دهید اگر از چارچوب متحرکی که در راستای محور Z ها با سرعت v حرکت می‌کند، به موجی نگریسته شود که با بسامد ω در راستای Z منتشر می‌شود، در بسامد دیده شده، انتقال دوپلری به اندازه زیر رخ می‌دهد.

$$\omega' = e^{-\theta} \omega = \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} \omega$$

۹-۲ با در نظر گرفتن ژاکوبی تبدیلات لورنتس، نشان دهید عنصر چهار بعدی

$$d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

ناوردای لورنتسی می‌باشد.

۱۰-۲ نشان دهید $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ شبه تانسور^۱ می‌باشد، یعنی علامت آن تحت عمل وارونی فضا تغییر می‌کند.

در نمایه بیشتر متنهای مقدماتی مکانیک کوانتومی، به واژه «همیلتونی»^۱ برمی خورید (ر.ک. معادله (۳-۸))، در حالیکه کمتر از واژه «لاگرانژی»^۲ استفاده می شود. اما مرسوم است که نظریه های میدان کوانتومی را برحسب فرمول بندی لاگرانژی بیان کنند. در این فصل مقدمه ای در این باره ارائه خواهیم کرد.

۳-۱ اصل همیلتون

دینامیک کلاسیک سیستم مکانیکی (غیرپاشنده) از اصل همیلتون نتیجه می شود. سیستم مکانیکی بسته با لاگرانژی خود $L(q, \dot{q})$ به طور کامل توصیف می شود. متغیرهای $q(t)$ که توابعی از زمان می باشند، مجموعه مختصه های $(q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t))$ هستند که پیکربندی سیستم را در زمان t مشخص می کنند. می توان q_i ها را مختصات دکارتی مجموعه ای از نقاط برهمکنش کننده در نظر گرفت. بحث خود را محدود به موردی می کنیم که همه $q_i(t)$ ها مستقل باشند. در مکانیک غیرنسبیتی، لاگرانژی را به صورت $L = T - V$ تعریف می کنیم، که در آن $T(q, \dot{q})$ انرژی جنبشی سیستم و $V(q)$ انرژی پتانسیل آن است.

با معلوم بودن L ، می توان کنش S را به صورت زیر تعریف کرد

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt \quad (۳-۱)$$

مقدار S به مسیر انتگرال گیری در فضای q بستگی دارد. نقاط انتهایی این مسیر در زمان های t_1 و t_2 ثابتند، اما شرط خاصی یا محدودیتی بر خود مسیر وجود ندارد. به S تابعی^۳ $q(t)$ گویند. اصل همیلتون بیان می دارد که به ازای هر مسیر ویژه در فضای q ، که با معادلات حرکت مشخص می شود، مقدار S ثابت است. در نتیجه اگر در مجاورت دلخواهی از مسیر، بتوان وردشی را در نظر گرفت (شکل ۳-۱)، به طوری که $\delta S = 0$ باشد،

1- Hamiltonian
2- Lagrangian
3- functional

از آنجا که آرگومان S یک تابع است و حاصل آن یک عدد، به S تابعی می گویند. مترجم

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt$$

از آنجا که $\delta \dot{q} = d(\delta q)/dt$ می‌باشد، می‌توان از جمله دوم زیر انتگرال، به روش جزء به جزء انتگرال‌گیری کرد، در نتیجه مقدار δS برابر می‌شود با:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt \quad (2-3)$$

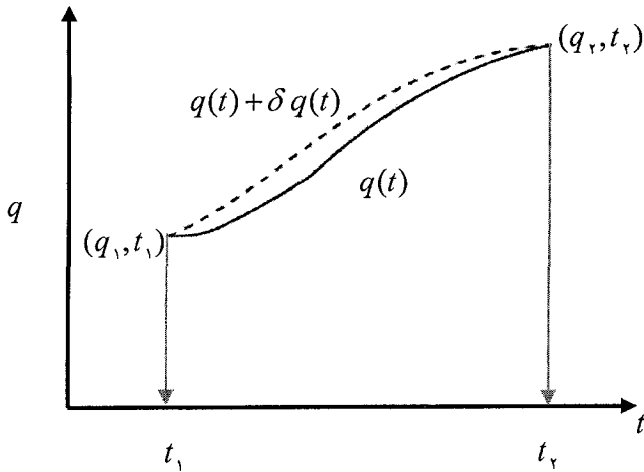
سهام «نقاط انتهایی» حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء برابر با صفر می‌باشد، زیرا مقدار $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ است.

وردش‌های $\delta q_i(t)$ دلخواه هستند. از رابطه (۲-۳) پی می‌بریم که شرط $\delta S = 0$ مستلزم آن است که

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, S \quad (3-3)$$

این مجموعه معادلات را معادلات اولر- لاگرانژ حرکت^۱ گویند. در مکانیک کلاسیک نانسیتی این معادلات هم‌ارز معادلات حرکت نیوتن هستند. مثال ساده‌ای از این موضوع، حرکت یک بعدی ذره‌ای به جرم m در پتانسیل $V(x)$ است. داریم $L = T - V = (m \dot{x}^2/2) - V(x)$. بلافاصله با استفاده از رابطه (۳-۳) درمی‌یابیم که $m \ddot{x} = -\partial V / \partial x$ است، که همان معادله حرکت نیوتن است.

می‌توان میدانی خارجی را، که ممکن است وابسته به زمان هم باشد، از طریق پتانسیل وابسته به زمان در فرمول‌بندی لاگرانژی وارد کرد. در مثال یک بعدی بالا، می‌توان به جای $V(x)$ ، پتانسیل $V(x, t)$ را قرار داد. لاگرانژی L که صریحاً به t وابسته باشد، تأثیری در به دست آوردن معادلات میدان نمی‌گذارد. شایان ذکر است که لاگرانژی یک سیستم، یکتا نمی‌باشد. یعنی می‌توانیم هر تابعی به شکل $df(q, t)/dt$ را به L اضافه کرد که $f(q, t)$ تابع دلخواهی از q و t باشد. چنین جمله‌ای در S سهمی به اندازه $[f(q_2, t_2) - f(q_1, t_1)]$ می‌گذارد که مستقل از مسیر است و در نتیجه معادلات حرکت بدون تغییر می‌مانند.



شکل ۳-۱ نمایش مسیر در فضای q که با معادلات حرکت (خطوط توپر) و مسیر همسایه (خطچین) تعیین می‌شود.

۲-۳ پایستگی انرژی

سیستم بسته‌ای از ذره‌ها را در نظر بگیرید که فقط بین خودشان برهمکنش می‌کنند. از آنجا که فیزیک سیستم بسته به گزینش ما به مبدأ مختصات بستگی ندارد، معادله‌های حرکت سیستم گفته شده، هم صریحاً به زمان t وابسته نیستند. بی‌شک قانون‌های فیزیک در زمان ارشمیدس یا نیوتن همانند قانون‌های فیزیک زمان ما بوده‌اند. بنابراین برای سیستمی بسته، باید بتوانیم لاگرانژی‌ای $L(q, \dot{q})$ بنویسیم که صریحاً به زمان وابسته نباشد. برای چنین لاگرانژی داریم

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q}_i \right]$$

$q_i(t)$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که از معادله‌های حرکت پیروی کند و به جای $\partial L / \partial q_i$ از رابطه (۳-۳) جایگذاری می‌کنیم. در نتیجه به معادله‌های زیر می‌رسیم

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q}_i \right] = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q}_i \right)$$

یا

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q}_i - L \right] = 0 \quad (۴-۳)$$

بنابراین، مقدار

$$E = \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right] \quad (۵-۳)$$

در طی حرکت، ثابت می ماند که به آن انرژی سیستم می گویند. این نتیجه مثالی از قضیه نوتر (بخش ۱-۲) است. بنا به این قضیه در این مورد قانون پایستگی وجود دارد که نتیجه تئورن لاگرانژی تحت انتقال زمان است.

برای سیستمی بسته از ذرات نانسیتی، با تابع پتانسیل $V(q_i)$ مقدار $\partial L / \partial \dot{q} = \partial T / \partial \dot{q}$ است. چون انرژی جنبشی T تابع درجه دومی از \dot{q}_i می باشد، (مسأله ۱-۳)، پس داریم $\partial T / \partial \dot{q}_i = 2T$ ، در نتیجه

$$E = 2T - (T - V) = T + V$$

می باشد. بدین ترتیب نتیجه ای از مکانیک مقدماتی را دوباره به دست آوردیم. تکانه های تعمیم یافته p_i ، به صورت زیر تعریف می شوند

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (۶-۳)$$

همیلونی سیستم هم به صورت زیر تعریف می شود

$$H(q, p) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (۷-۳)$$

معادله انرژی (۵-۳) بر حسب p و q برای سیستمی بسته برابر می شود با

$$H(p, q) = E \quad (۸-۳)$$

این معادله که پیامدی از همگنی زمان است، شالوده گذر از مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتمی می باشد.

۳-۳ سیستم های پیوسته

برای آنکه بفهمیم اصل همیلتون چگونه به سیستم های پیوسته گسترش می یابد، نمونه زیر را در نظر می گیریم. ریسمان قابل انعطافی با جرم ρ در یکای طول در نظر بگیرید که تحت کشش F بین دو نقطه ثابت در $x = l$ و $x = 0$ ثابت شده باشد. این ریسمان در صفحه دارای جابجایی عرضی اندکی است. از اثر گراتش صرف نظر می کنیم. اگر $\phi(x, t)$ مقدار جابجایی عرضی عنصر dx ریسمان از حالت تعادل در مکان x و زمان t باشد، آنگاه طول ریسمان برابر می شود با

$$\int_0^l (dx^2 + d\phi^2)^{\frac{1}{2}} = \int_0^l [1 + (\partial \phi / \partial x)^2]^{\frac{1}{2}} dx$$

کمیت های مورد نظر را بر حسب $\partial \phi / \partial x$ بیان می کنیم، که به ازای جابجایی های کوچک، مقدار کمی

دارد. مقدار کشش ریسمان برابر $\int_0^l \frac{1}{2} (\partial \phi / \partial x)^2 dx$ و انرژی پتانسیل ناشی از کشیده شدن تحت نیروی کششی F برابر با $\int_0^l \frac{1}{2} F (\partial \phi / \partial x)^2 dx$ می باشد. انرژی جنبشی ریسمان هم برابر با $\int_0^l \frac{1}{2} \rho (\partial \phi / \partial t)^2 dx$ است. در نتیجه داریم

$$L = T - V = \int_0^l \mathcal{L} dx \quad (9-3)$$

که در آن

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \quad (10-3)$$

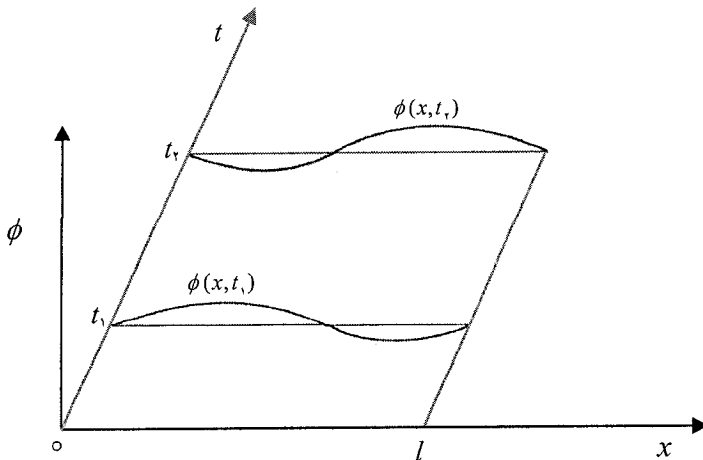
چگالی لاگرانژی^۱ خوانده می شود.

کنش متناظر با آن هم برابر با مقدار زیر است

$$S = \int_0^l dx \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(\phi, \phi')$$

به فرض $\partial \phi / \partial t = \dot{\phi}$ و $\partial \phi / \partial x = \phi'$ در نظر گرفته شده است.

بنا به اصل همپلتون، برای سطحی که حرکت واقعی ریسمان را بین جابجایی اولیه $\phi(x, t_1)$ و جابجایی نهایی $\phi(x, t_2)$ توصیف می کند، کنش مانا می باشد (شکل ۳-۲).



شکل ۳-۲ حرکت واقعی ریسمان بین جابجایی اولیه $\phi(x, t_1)$ و جابجایی نهایی $\phi(x, t_2)$ ، سبب ایجاد سطحی در فضا- زمان می شود.

$$\delta S = \int_0^l dx \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta(\dot{\phi}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} \delta(\phi') \right]$$

منظور از $\delta(\phi') = \partial(\delta\phi)/\partial x$ و $\delta(\dot{\phi}) = \partial(\delta\phi)/\partial t$ است. از هر جمله به روش جزء-به-جزء انتگرال می‌گیریم. دوباره سهم مرزها صفر می‌شود، زیرا

$$\begin{aligned} \delta\phi(x, t_1) = \delta\phi(x, t_2) &= 0 && \text{به‌ازای همه } x \text{ ها} \\ \delta\phi(0, t) = \delta\phi(l, t) &= 0 && \text{به‌ازای همه } t \text{ ها} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\delta S = - \int_0^l dx \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} \right) \right] \delta\phi \quad (11-3)$$

چون مقدار $\delta\phi(x, t)$ دلخواه است، و با توجه به شرط $\delta S = 0$ درمی‌یابیم که

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} \right) = 0 \quad (12-3)$$

با وارد کردن چگالی لاگرانژی (۱۰-۳)، برای امواج با دامنه کم بر روی ریسمان تابع موج آشنای زیر را به دست می‌آوریم.

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - F \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

با انتخاب چگالی لاگرانژی مناسب، می‌توان این سیستم‌های پیوسته را با فرمول‌بندی لاگرانژی توصیف کرد. واضح است که می‌توان این روش را به امواجی با ابعاد بالاتر نیز تعمیم داد. مشابه روابط (۳-۶) و (۳-۷) می‌توانیم چگالی تکانه را به صورت زیر

$$\Pi(\dot{\phi}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$$

و چگالی همیلتونی را هم به صورت زیر

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\phi} - \mathcal{L}$$

تعریف کنیم. چون چگالی لاگرانژی (۱۰-۳) صریحاً به زمان بستگی ندارد، پس

$$E = \int \mathcal{H} dx = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} \right) dx \quad (14-3)$$

در طی حرکت ثابت می ماند (مسأله ۳-۲). این نتیجه همانند رابطه (۳-۵) است.

۳-۴ نظریه میدان هموردای لورنتس

کنش در سه بعد به صورت زیر می باشد.

$$S = \int \mathcal{L} dx dy dz dt = \int \mathcal{L} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (15-3)$$

«عنصر حجم» $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ ناوردای لورنتسی است (بخش ۲-۴). پس اگر چگالی لاگرانژی \mathcal{L} شبیه میدان اسکالری تبدیل یابد، \mathcal{L} ناوردای لورنتسی می باشد. بدین ترتیب هموردایی معادله های میدان تضمین می شود. تقارن های دیگر مورد نیاز نظریه را می توان در خود \mathcal{L} کار گذاشت و بخش ثابتی از آن به شمار آورد.

چگالی لاگرانژی ناوردای لورنتسی را به شکل زیر در نظر بگیرید

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (16-3)$$

که در آن $\phi(x) = \phi(x^0, \mathbf{x})$ میدانی اسکالری است. در هر نقطه x در پوستار فضا-زمان، چنین چگالی لاگرانژی، تنها به میدان و مشتق های مرتبه اول آن در همان نقطه بستگی دارد. به چنین نظریه میدانی، میدان موضعی^۱ می گویند. منظور از موضعی بودن آن است که هیچ «کنشی با فاصله» صورت نمی گیرد. این امر یکی از ویژگی های مهم مدل استاندارد است. این معادله میدان به سادگی از شرط $\delta \mathcal{L} = 0$ ، و شرط صفر شدن میدان در فاصله های دور، به دست می آید. در نتیجه

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (17-3)$$

۳-۵ معادله کلین-گوردون^۲

چگالی لاگرانژی ناوردای لورنتسی

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2] = \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2]$$

که در آن $\phi(x)$ میدانی اسکالر و حقیقی و حالت ویژه ای از رابطه (۳-۱۶) است. معادله میدان (۳-۱۷) به صورت زیر درمی آید

$$-\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi = 0$$

یا

1- local

2- Klein-Gordon equation

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - m^2 \right) \phi = 0 \quad (19-3)$$

این معادله را معادله کلین-گوردون گویند.

این معادله دارای جوابهایی موج گونه است

$$\phi(\mathbf{r}, t) = a \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t + \theta_k)$$

که در آن بسامد ω_k با رابطه پاشندگی زیر به بردار موج \mathbf{k} مربوط می شود.

$$\omega_k^2 = \mathbf{k}^2 + m^2 \quad (20-3)$$

که θ_k هم زوایه فاز دلخواه می باشد.

برای آنکه ریاضی آن ساده تر شود، آن دسته از جوابهای $\phi(\mathbf{r}, t)$ را اختیار می کنیم که در مکعب

بزرگی به طول l ، و حجم $V = l^3$ و شرایط مرزی دوره ای، صدق کند. به گونه ای که

$$\mathbf{k} = (2\pi n_x/l, 2\pi n_y/l, 2\pi n_z/l) \quad \text{که در آن } n_x, n_y, n_z \text{ اعداد صحیح } 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

می باشند.

جواب کلی (۱۹-۳) از برهم نهی تابع موج های زیر تشکیل شده است.

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{a_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} + \frac{a_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} \right) \quad (21-3)$$

ضریب های $\sqrt{2\omega_k}$ برای سازگاری بعدی وارد شده اند، و ضریب های فاز در دامنه موج های مختلط a_k

جذب شده اند. روی همه مقادیر مجاز \mathbf{k} جمع بسته شده است.

با شناسه های دو برویی $E = \omega_k$ ، $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ ($\hbar = 1, c = 1$) رابطه پاشندگی برای ω_k هم ارز معادله

انیشتمین برای ذره ای آزاد است

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$$

می توانیم جواب معادله کلین-گوردون را به ازای ϕ توصیف کننده ذره اسکالر به جرم m حدس

بزنیم. با میدان اسکالر تک مؤلفه ای، هیچ برداری همراه نمی باشد و تکانه زاویه ای ذاتی مربوط به چنین

ذره ای صفر است.

خواهیم دید که چگالی لاگرانژی به شکل (۱۸-۳) در مدل استاندارد برای توصیف ذره هیگز^۱ به کار

می رود. در سطح بنیادی، حرکت کلی مزون π^0 ، که ذره ای مرکب و بدون بار است، با چگالی لاگرانژی

همانند (۱۸-۳) توصیف می شود.

۳-۶ تانسور انرژي - تکانه

معادله‌هایی که هم پایستگی انرژی و هم پایستگی تکانه خطی را بیان می‌کنند در در نظر گرفتن تغییر در \mathcal{L} مربوط به جابجایی بسیار کوچک و یکنواخت در پیوستار فضا- زمان به دست می‌آیند.

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta a^\mu \quad (22-3)$$

که δa^μ به x بستگی ندارد. متناظر با آن تغییر در ϕ به صورت زیر می‌باشد

$$\delta \phi = (\partial_\nu \phi) \delta a^\nu \quad (23-3)$$

از آنجا که \mathcal{L} صریحاً به x^μ وابسته نیست، پس داریم

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi)$$

با بکارگیری معادله میدان (۳-۱۷) برای $\partial \mathcal{L} / \partial \phi$ ، و همچنین $\delta (\partial_\mu \phi) = \partial_\mu (\delta \phi)$ ، می‌توان برابری بالا را به صورت زیر نوشت

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi \right]$$

که سپس با استفاده از رابطه (۳-۲۳)، به صورت زیر در می‌آید.

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi \right] \delta a^\nu$$

همچنین داریم

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta a^\mu = \delta^\mu_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta a^\nu$$

که مطابق رابطه (۲-۱۴) مقدار دلتای کرونگر δ^μ_ν برابر است با

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}$$

و چون مقدار δa^ν دلخواه می‌باشد، با مقایسه عبارات مربوط به $\delta \mathcal{L}$ در می‌یابیم که

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right] = 0 \quad (24-3)$$

$$\partial_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0, \quad T_{\nu}^{\mu} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} \phi)} \partial_{\nu} \phi - \delta_{\nu}^{\mu} \mathcal{L} \right] \quad (25-3)$$

T_{ν}^{μ} را تانسور انرژی-تکانه می‌گویند. مؤلفه

$$T^{\circ} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L}$$

متناظر با چگالی همیلتونی تعریف شده در رابطه (۳-۱۳) است، و از آن با نام چگالی انرژی میدان یاد می‌شود. در نظریه نسبیتی، چگالی انرژی همانند مؤلفه‌ای تانسوری تبدیل می‌شود. مؤلفه $\nu = 0$ مؤلفه‌ای از تانسور انرژی-تکانه (۳-۲۵) است، که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت.

$$\frac{\partial}{\partial t} (T^{\circ}) + \nabla \cdot \mathbf{T}_{\circ} = 0 \quad (26-3)$$

معادله بالا بیانگر پایستگی موضعی انرژی است. منظور از $\mathbf{T}_{\circ} = (T_{\circ}^1, T_{\circ}^2, T_{\circ}^3)$ همان شارش انرژی است. با انتگرال گیری از رابطه (۳-۲۶) روی کل فضا و با استفاده از قضیه واگرایی، به معادله زیر می‌رسیم

$$\frac{\partial}{\partial t} \int T_{\circ}^{\circ} d^3 \mathbf{x} = 0 \quad (27-3)$$

که سبب می‌شود میدان در فاصله‌های دور صفر شود. این معادله بیان‌کننده پایستگی انرژی کل می‌باشد. به همین رویه، مؤلفه‌های $\nu = 1, 2, 3$ در معادله (۳-۲۴) متناظر با پایستگی موضعی تکانه است. تکانه کل میدان از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P_i = \int T_i^{\circ} d^3 \mathbf{x} \quad (28-3)$$

اگر میدان در فاصله‌های دور صفر شود، تکانه کل هم مانند انرژی پایسته می‌باشد. برای معادله کلین-گوردون (۳-۱۹)، چگالی لاگرانژی برابر است با

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}$$

و چگالی انرژی میدان هم برابر است با

$$T^{\circ} = \frac{1}{2} [\dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2] \quad (29-3)$$

با بیان ϕ برحسب دامنه‌های میدان a_k, a_k^* و انتگرال گیری روی همه فضا، می‌توان انرژی کل میدان را برابر با مقدار زیر به دست می‌آید

$$H = \int T^{\circ} d^3 \mathbf{x} = \sum_k a_k^* a_k \omega_k \quad (30-3)$$

برای به دست آوردن این عبارت از خاصیت تعامد امواج تخت استفاده کرده‌ایم.

$$\frac{1}{V} \int e^{i(k-k') \cdot r} d^3r = \delta_{kk'}$$

با بهره گیری از تعریف (۳-۲۸) تکانه کل میدان را می توانیم به صورت زیر نشان دهیم

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \quad (۳-۳۱)$$

۳-۷ میدان های اسکالر مختلط

بررسی میدان های اسکالر مختلط $\Phi = (\phi_1 + i\phi_2) / \sqrt{2}$ صادق در معادله کلین-گوردون هم آموزنده است. در بخش ۷-۶ خواهیم دید که اگر میدان Φ حامل بار q باشد، آنگاه میدان Φ^* حامل بار $-q$ خواهد بود. معادله کلین-گوردون برای میدان مختلط Φ از چگالی لاگرانژی (حقیقی) زیر به دست می آید

$$\mathcal{L} = \partial_{\mu} \Phi^* \partial^{\mu} \Phi - m^2 \Phi^* \Phi \quad (۳-۳۲)$$

اکنون ابزاری معرفی می کنیم که از این پس در بیشتر جاها بهره گیری از آن را سودمند خواهیم یافت. برای به دست آوردن معادلات میدان، به جای ورودش دادن بخش های حقیقی و موهومی Φ ، می توانیم میدان Φ و مزدوج مختلط آن را مستقل از هم وردش دهیم. این دو روند هم ارز یکدیگر هستند. می بینیم که وردش Φ^* در کنش ایجاد شده از چگالی لاگرانژی (۳-۳۲) به آسانی منجر به رابطه زیر می شود.

$$-\partial_{\mu} \partial^{\mu} \Phi - m^2 \Phi = 0 \quad (۳-۳۳)$$

(مزدوج مختلط این معادله از وردش Φ به دست می آید.)

توجه کنید که چگالی لاگرانژی (۳-۳۲) برابر با مجموع همه سهم های ناشی از میدان های اسکالر ϕ_1 و ϕ_2 است.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \partial_{\mu} \Phi^* \partial^{\mu} \Phi - m^2 \Phi^* \Phi &= \frac{1}{2} [\partial_{\mu} \phi_1 \partial^{\mu} \phi_1 - m^2 \phi_1^2] \\ &+ \frac{1}{2} [\partial_{\mu} \phi_2 \partial^{\mu} \phi_2 - m^2 \phi_2^2] \end{aligned} \quad (۳-۳۴)$$

جواب عمومی معادله (۳-۳۳) از برهم نهی امواج تختی به شکل زیر به دست می آید

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{a_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \frac{b_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right) \quad (۳-۳۵)$$

که $a_{\mathbf{k}}$ و $b_{\mathbf{k}}$ در آن، عددهای مختلط مستقل از هم هستند. انرژی میدان برابر می شود با

$$H = \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}}) \omega_{\mathbf{k}} \quad (۳-۳۶)$$

خواهیم دید که می‌توان عبارت بالا را این‌گونه تفسیر کرد که گویی از میدان‌های باردار مثبت و منفی جدا از هم تشکیل شده است. (مزون‌های π^+ و π^- ذرات مرکبی هستند که حرکت کلی آنها با میدان‌های اسکالر مختلط توصیف می‌شود).

مسئله‌ها

۳-۱ نشان دهید انرژی جنبشی سیستمی از ذرات با مکان معلوم $q(t)$ ، تابع درجه دومی از \dot{q}_i است.

۳-۲ برای E داده شده در معادله (۳-۱۴)، نشان دهید $dE/dt = 0$ است.

۳-۳ برای ریسمان کشیده بخش ۳-۳، نشان دهید که چگالی همیلتونی از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2}F \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2$$

که مد نرمال n آن با دامنه A_n از رابطه زیر حاصل می‌شود

$$\phi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)$$

که $k_n = n\pi/l$ ، $\omega_n = (F/\rho)^{1/2} k_n$ است. نشان دهید انرژی کل برابر با $A_n^2 \omega_n^2 \rho l / 4$

است و بیانگر انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نوسان هماهنگ می‌باشد.

۴-۳ درستی عبارت‌های (۳-۳۰) و (۳-۳۱) را برای انرژی و تکانه میدان اسکالر حاصل از معادله (۳-۲۱)

تحقیق کنید.

۵-۳ نشان دهید می‌توان معادله شرودینگر را برای تابع موج $\psi(\mathbf{r}, t)$ ذره‌ای متحرک به جرم m در

پتانسیل $V(\mathbf{r})$ از چگالی لاگرانژی زیر به دست آورد

$$\mathcal{L} = -(1/2i) \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) - (1/2m) \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - \psi^* V \psi$$

(توجه کنید که \mathcal{L} حقیقی است اما ناوردای لورنتسی نمی‌باشد).

نظریه الکترومغناطیس ماکسول، و همچنین نظریه گرانشی انیشتین، از زیباترین نظریه‌های کلاسیکی میدان هستند. در این فصل هموردایی لورنتسی معادله‌های ماکسول را نشان خواهیم داد. همچنین نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان این معادلات را از اصل هامیلتون به دست آورد. تبدیل‌های پیمانه‌ای را معرفی می‌کنیم. در پایان، فرمول‌بندی لاگرانژی را گسترش می‌دهیم تا توانایی توصیف میدان‌های برداری جرم‌دار را داشته باشیم. این میدان‌ها در فصلهای آینده پدیدار می‌شوند.

۴-۱ معادله‌های ماکسول

در بیشتر متنهای فیزیک نظری، از دستگاه یکاها بی استفاده می‌شود که در آن نیروی بین بارهای q_1 و q_2 برابر با $q_1 q_2 / 4\pi r^2$ و مقدار سرعت نور $c = 1$ (و بنابراین مقدار $\epsilon_0 = 1, \mu_0 = 1$) می‌باشد. ما هم از این دستگاه یکاها استفاده می‌کنیم. پس معادله‌های ماکسول به شکل زیر درمی‌آیند.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (\text{الف})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (\text{ب})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{ج})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{د})$$

(۴-۱)

\mathbf{E} و \mathbf{B} به ترتیب میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، ρ و \mathbf{J} هم چگالی بار الکتریکی و چگالی جریان الکتریکی هستند. در این فصل دینامیک ρ و \mathbf{J} را در نظر نمی‌گیریم، بلکه آنها را میدان‌های «خارجی» فرض کرده تا بتوانیم آزادانه با آنها کار کنیم. معادله‌های ناهمگون (الف) و (ب) گویای پایستگی بار هستند که با معادله پیوستگی بیان می‌شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

این معادله به شکل ناوردای لورنتسی هم نوشته می‌شود:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (۲-۴)$$

در صورتی که چگالی بار-جریان را به صورت زیر فرض کنیم

$$J^\mu = (\rho, \mathbf{J}) \quad (۳-۴)$$

میدان چاربرداری پادوردا ایجاد می شود.

با وارد کردن پتانسیل اسکالر φ و پتانسیل برداری \mathbf{A} ، معادله های ناهمگون (ج) و (د) از مجموعه معادله های (۱-۴) هم ارز معادله های زیرند.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (۴-۴)$$

این پتانسیل ها را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$A^\mu = (\varphi, \mathbf{A}) \quad (۵-۴)$$

که این پتانسیل هم میدان چاربرداری پادوردا می سازد.

معادله های ماکسول را می توان بر حسب تانسور پادمقارن $F^{\mu\nu}$ نوشت. بنا به تعریف این تانسور برابر است با

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (۶-۴)$$

واضح است که میدان الکترومغناطیسی میدانی تانسوری است. مثلاً

$$F^{01} = \partial A^1 / \partial x_0 - \partial A^0 / \partial x_1 = \partial A_x / \partial t + \partial \varphi / \partial x = -E_x$$

بنابراین مؤلفه های میدان الکترومغناطیسی تحت تبدیلات لورنتس همانند مؤلفه های یک تانسور تبدیل می یابند.

معادله های همگن ماکسول متناظر با اتحادهای زیر می باشد.

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} \equiv 0 \quad (۷-۴)$$

که شاخص های λ, μ, ν می توانند مقدارهای ۰, ۱, ۲, ۳ بگیرند. معادله های ناهمگن به شکل هموردای زیر در می آیند.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad (۸-۴)$$

مثلاً با در نظر گرفتن مقدار $\nu = 0$ و توجه به این نکته که $\partial_\mu = (\partial/\partial t, \nabla)$ می باشد، ستون نخست $F^{\mu\nu}$ ، به صورت زیر در می آید.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

۴-۴ چگالی لاگرانژی برای الکترومغناطیس

اکنون در پی یافتن چگالی لاگرانژی \mathcal{L} هستیم که با استفاده از آن می‌توان از اصل هامیلتون، معادله‌های ماکسول را به دست آورد. اگر \mathcal{L} ناوردای لورنتسی باشد، کنش

$$S = \int \mathcal{L} d^4x = \int \mathcal{L} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (9-4)$$

ناوردای لورنتسی است، زیرا d^4x ناورداست (بخش ۲-۴ و ۳-۴) و معادله‌های میدان، که از شرط $\delta S = 0$ به دست می‌آید، در هر چارچوب مرجع لختی شکل یکسانی خواهند داشت.

با آنکه معادله‌های ماکسول صریحاً به پتانسیل A^μ مربوط نمی‌شوند، برای به دست آوردن این معادله‌ها از اصل هامیلتون، نیاز به وجود پتانسیل‌هایی است که در حکم میدان‌های اساسی باشند که مورد وردش قرار می‌گیرند. با توجه به نمونه «ریسمان کشیده» در بخش ۳-۴ درمی‌یابیم که \mathcal{L} نسبت به مشتق‌های اول میدان از درجه دوم می‌باشد. با گزینش ناوردای لورنتسی مناسب، درمی‌یابیم که

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \quad (10-4)$$

با وردش میدان‌های A^μ ، و همزمان ثابت نگاه داشتن چگالی جریان و چگالی بار، به معادله‌های ماکسول می‌رسیم. بخشی از جزئیات کار را نشان خواهیم داد. (مباحث پس از این، مختصرتر بیان خواهند شد!) می‌توان کنش را به صورت زیر نوشت

$$S = \int \left[-\frac{1}{4} g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} F^{\lambda\rho} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \right] d^4x \quad (11-4)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left[-\frac{1}{4} g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} F^{\lambda\rho} \delta F^{\mu\nu} - J^\mu \delta A_\mu \right] d^4x \\ &= \int \left[-\frac{1}{4} F^{\lambda\rho} (\partial_\lambda \delta A_\rho - \partial_\rho \delta A_\lambda) - J^\mu \delta A_\mu \right] d^4x \\ &= \int \left[-F^{\lambda\rho} \partial_\lambda \delta A_\rho - J^\mu \delta A_\mu \right] d^4x \quad , \quad F^{\lambda\rho} = -F^{\rho\lambda} \quad \text{زیرا} \end{aligned}$$

از جمله نخست به روش جزء به جزء انتگرال می‌گیریم. با انتخاب شرایط مناسب برای میدان‌ها، جمله‌های مرزی برابر صفر می‌شوند، در نتیجه مقدار وردش کنش برابر با عبارت زیر می‌شود

$$\delta S = \int \left[\partial_\lambda F^{\lambda\rho} - J^\rho \right] \delta A_\rho d^4x$$

با قرار دادن $\delta S = 0$ ، برای مقدار دلخواه δA_ρ ، می‌توان معادله‌های ناهمگن ماکسول (معادله ۴-۸) را

به دست آورد. (معادله‌های همگن ماکسول (۴-۷) اتحاد هستند).

۳-۴ تبدیل‌های پیمانه‌ای

چارپتانسیل $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ یکتا نیست. یعنی از پتانسیل زیر تانسور میدان الکترومغناطیسی مشابهی به دست می‌آید.

$$A^\mu + \partial^\mu \chi = (\varphi + \partial\chi/\partial t, \mathbf{A} - \nabla\chi) \quad (۱۲-۴)$$

در معادله‌های بالا، $\chi(x)$ میدان اسکالر دلخواهی است، زیرا دیگر جملاتی که در $F^{\mu\nu}$ پدیدار می‌شوند متحد با صفر می‌باشند:

$$\partial^\mu \partial^\nu \chi - \partial^\nu \partial^\mu \chi = 0$$

تبدیل $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$ به نام *تبدیل پیمانه‌ای* خوانده می‌شود.

تحت تبدیل پیمانه‌ای، به کنش (۴-۱۱) جمله ΔS اضافه می‌شود، که برابر با مقدار زیر است.

$$\begin{aligned} \Delta S &= - \int J_\mu \partial^\mu \chi d^4x \\ &= \int (\partial^\mu J_\mu) \chi d^4x \end{aligned}$$

با استفاده از روش جزء به جزء انتگرالگیری کردیم تا به عبارت خط دوم رسیدیم و دوباره فرض کردیم که مقدار جملات مرزی برابر صفر می‌شود. به‌ازای هر مقدار دلخواه χ ، ΔS برابر با صفر می‌شود، اگر و فقط اگر،

$$\partial^\mu J_\mu = \partial_\mu J^\mu = 0$$

باشد. این رابطه، همان معادله (۴-۲) است. ناوردایی پیمانه‌ای کنش مستلزم پایستگی بار الکتریکی است و از همین قانون پایستگی به دست می‌آید.

۴-۴ جوابهای معادله ماکسول

معادله‌های میدان (۴-۸) برحسب پتانسیل‌ها به صورت زیر بیان می‌شوند

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = J^\nu \quad (۱۳-۴)$$

دوباره تأکید می‌کنیم که جواب‌های این معادله‌ها را می‌توان به طرق دلخواه زیادی نوشت. همه جواب‌ها هم‌ارزند و اختلاف آنها در تبدیل‌های پیمانه‌ای است. معمول است که شرط تثبیت پیمانه اعمال شود^۱. برای نمونه در «پیمانه تابشی»، در هر مکان و در هر زمانی شرط $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ اختیار می‌شود (مسئله ۴-۲). اشکال

l- gauge fixing condition

در واقع با اعمال پیمانه، درجه‌های آزادی سیستم را مصرف می‌کنیم. مانند آن می‌ماند که راه‌های زیادی برای رسیدن به مقصد وجود داشته باشد، برای تصمیم‌گیری یک یا چند راه از این راه‌ها را مسدود کرده و دیگری را برگزینیم. - مترجم.

این کار آن است که دیگر ناوردایی لورنتسی برقرار نیست- یعنی شرط مذکور در چارچوب متحرک دیگری صادق نمی‌باشد- با این حال این شرط ویژگی‌های بسیار مهمی از نظریه را نشان می‌دهد. در پیمانه تابشی معادله میدان به ازای A° به صورت زیر درمی‌آید.

$$(\partial_i \delta^i) A^\circ = -\nabla^i A^\circ = J^\circ$$

(با قرار دادن $\nabla = 0$ در معادله (۴-۱۳) و با توجه به این که $\partial_\mu A^\mu = \partial_\circ A^\circ$ است، زیرا در پیمانه تابشی مقدار $\partial_i A^i = 0$ می‌باشد) معادله بالا دارای جوابی به شکل زیر است

$$A^\circ(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

بنابراین در پیمانه تابشی، A° به تمامی از روی چگالی بار تعیین می‌شود. هیچ پاسخی به شکل موج برای آن وجود ندارد. مؤلفه‌های برداری A^i ($i = 1, 2, 3$) در معادله موج ناهمگن صدق می‌کنند.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{J} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla A^\circ \quad (۴-۱۴)$$

بارها و جریان‌ها به مانند چشمه (و چاه) میدان \mathbf{A} عمل می‌کنند.

در فضای آزاد، $A^\circ = 0, \rho = 0, \mathbf{J} = 0$ ، جواب‌های موج تخت با بردار موج \mathbf{k} ، و بسامد $\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$ ، به صورت زیر هستند

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = a\boldsymbol{\varepsilon} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)$$

در اینجا $\boldsymbol{\varepsilon}$ بردار بیکه و a طول موج می‌باشد. بنا به شرط پیمانه‌ای، $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0$ است. بنابراین به ازای هر \mathbf{k} مشخص، تنها دو حالت قطبش مستقل، مانند $\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{k})$ و $\boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{k})$ وجود دارد که عمود بر \mathbf{k} هستند. جواب عمومی در فضای آزاد به صورت زیر می‌باشد.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1,2} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} [a_{\mathbf{k}\alpha} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + a_{\mathbf{k}\alpha}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}] \quad (۴-۱۵)$$

عدد مختلط $a_{\mathbf{k}\alpha}$ نشان‌دهنده دامنه و فاز است، امواج تخت با شرایط مرزی دوره‌ای در حجم V بهنجار می‌شوند. ضریب $\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}$ برای آسانی کار نهاده شده است.

نکته مهم در پیمانه تابشی آن است که با وجود آنکه پتانسیل برداری دارای چهار مؤلفه A^μ می‌باشد، دینامیک یکی از این مؤلفه‌ها یعنی A° مستقل نیست و مؤلفه دیگر فرآورده پیمانه می‌باشد، که با تثبیت پیمانه، حذف می‌گردد. تنها دو میدان دینامیکی فیزیکی بارز وجود دارند.

این میدان‌ها در هر پیمانه دیگری که باشند با تبدیل پیمانه‌ای به پیمانه تابشی تبدیل می‌شوند. یعنی فیزیک مسئله یکی است اما ریاضیات آن متفاوت است. بنا به همین دلایل، بهتر است که در

چارچوب ناوردای نسیتی در «پیمانه لورنتسی» کار کنیم. در پیمانه لورنتسی

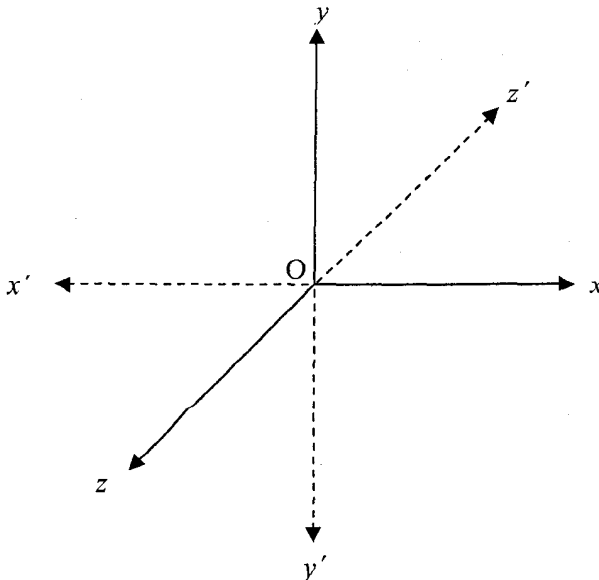
$$\partial_{\mu} A^{\mu} = 0 \quad (16-4)$$

و معادله‌های میدان به صورت زیر در می‌آیند:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) A^{\mu} = J^{\mu} \quad (17-4)$$

۴-۵ وارونی فضا

اکنون عمل وارونی فضا را بر محورهای مختصات اعمال می‌کنیم: $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$, $\nabla \rightarrow \nabla' = -\nabla$. این عمل به نام پاریتی هم شناخته می‌شود. محورهای مختصات تبدیل یافته، چپگرد هستند. بنا به قرارداد چگالی بار تحت وارونی فضا ناورد می‌باشد. یعنی اگر در لحظه‌ای از زمان $\rho^P(\mathbf{r}')$ برابر با چگالی بار در محورهای مختصات تغییر یافته باشد، آنگاه اگر $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ باشد، $\rho^P(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r})$ است. چگالی جریان به صورت $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{u}(\mathbf{r})$ می‌باشد، که $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ سرعت است و در نتیجه به شکل $d\mathbf{r}/dt$ تبدیل می‌یابد. اگر $\mathbf{J}^P(\mathbf{r}') = -\mathbf{J}(\mathbf{r})$ است. اگر $\mathbf{E}^P(\mathbf{r}') = -\mathbf{E}(\mathbf{r})$ باشد و $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ هم بمانند برداری محوری تبدیل یابد، آنگاه شکل معادله‌های ماکسول (۱-۴) در دستگاه مختصات پریم‌دار هم بدون تغییر مانده و حفظ می‌شوند.



شکل ۴-۱ مجموعه محورهای راستگرد (خطوط توپر) و مجموعه تبدیل یافته فضایی (خطوط خطچین)، به مجموعه تبدیل یافته، چپگرد گویند. (OZ به سمت بیرون از صفحه کاغذ است.)

با بکارگیری معادله (۴-۴) درمی یابیم که

$$\varphi^P(\mathbf{r}') = \varphi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{A}^P(\mathbf{r}') = -\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (18-4)$$

در نتیجه معادله های میدان در چارچوب چپگرد هم همان شکلی را دارند که در چارچوب راستگرد داشته اند. چگالی لاگرانژی (۴-۱۰) تحت وارونی فضا ناورداست. الکترومغناطیس به راستگردی یا چپگردی دستگاه های مختصات بستگی ندارد.

۴-۶ مزدوج بار

نکته جالب دیگر درباره معادله های ماکسول آن است که اگر به جای ماده، پادماده قرار گیرد، شکل این معادله ها بدون تغییر می ماند. در نتیجه جابجایی پادماده به جای ماده، هم چگالی بار و هم چگالی جریان هر دو تغییر علامت می دهند، به گونه ای که

$$\rho(\mathbf{r}) \rightarrow \rho^C(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}) \quad \text{و} \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{J}^C(\mathbf{r}) = -\mathbf{J}(\mathbf{r})$$

اگر تعریف های زیر را در نظر بگیریم، معادله های ماکسول شکل یکسانی خواهند داشت

$$\varphi^C(\mathbf{r}) = -\varphi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{A}^C(\mathbf{r}) = -\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (19-4)$$

به این عمل، مزدوج یا آمیزش بار گویند. همانند تبدیل های لورنتس و تبدیل های پارتی، لاگرانژی تحت تبدیل مزدوج بار ناوردا می ماند.

۴-۷ تکانه زاویه ای ذاتی فوتون

بدون آنکه بخواهیم در اینجا میدان الکترومغناطیسی را کاملاً کوانتیزه کنیم، می توانیم درباره تکانه زاویه ای ذاتی، یا همان اسپین، فوتون های امواج تخت (۴-۱۵) بحث کنیم.

اسپین \mathbf{S} ذره ای جرم دار به صورت تکانه زاویه ای آن ذره در چارچوب مرجعی تعریف می شود که در آن چارچوب ذره ساکن باشد. در چنین چارچوبی تکانه زاویه ای مداری $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ است و در نتیجه تکانه زاویه ای کل آن ذره برابر $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} = \mathbf{S}$ می باشد. این تعریف را نمی توان برای ذرات بدون جرم بکار برد. زیرا چنین ذراتی در هر چارچوب مرجعی با سرعت نور سیر می کنند. با این حال، برای ذره ای بدون جرم که، مثلاً در راستای z ، حرکت می کند، می توان مؤلفه J_z اسپین، یا همان J_z را تعریف کرد. چون مؤلفه J_z تکانه زاویه ای مداری برابر با $L_z = x p_y - y p_x$ و برای ذره متحرک در راستای z ، مقدار $p_x = p_y = 0$ است، در نتیجه $J_z = S_z$ می باشد.

در مکانیک کوانتومی، مؤلفه J_z عملگر تکانه زاویه ای کل سیستم از رابطه زیر به دست می آید:

$$J_z = i \hbar r_z = i \hbar \lim_{\varphi \rightarrow 0} [R_z(\varphi) - 1] \varphi \quad (20-4)$$

که در آن $R_z(\varphi)$ عملگر است که سیستم را به اندازه زاویه φ حول محور Oz در جهت مثبت

می چرخاند.

جمله‌ای از معادله (۴-۱۵) را با $\mathbf{k} = (0, 0, k)$ در راستای OZ در نظر بگیرید:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} [(a_x \varepsilon_x + a_y \varepsilon_y) e^{i(kz - \omega t)} + \text{مزدوج مختلط}] \quad (۴-۲۱)$$

دامنه موج‌های a_x و a_y اعداد مختلط هستند، بردارهای قطبش ε_x و ε_y را بردارهایی یک‌ه در راستای محورهای x و y در نظر می‌گیریم. دوران \mathbf{A} حول OZ ، به اندازه زاویه φ ، سبب تغییر دامنه موج‌ها می‌شود. می‌توان این تغییر را با معادله ماتریسی دوران بیان کرد

$$R_z(\varphi) \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

در حد $\varphi \rightarrow 0$ ، داریم

$$\lim [R_z(\varphi) - 1] / \varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

و

$$J_z = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

می‌باشد. ویژه بردارهای J_z / \hbar عبارتند از

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

با ویژه مقدار $+1$ ، و همچنین

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

با ویژه مقدار -1 .

بنابراین می‌توانیم بگوییم فوتونی که با موج تخت (۴-۲۱) نمایش داده می‌شود، دارای اسپین یک است، و فقط دو حالت اسپینی همسو و در سوی مخالف راستای حرکت آن وجود دارد. برای آن دسته از مؤلفه‌های اسپین که عمود بر راستای حرکت باشند، هیچ معنای فیزیکی نمی‌توان یافت. از نظر کلاسیکی، این امواج به ترتیب دارای قطبش دایروی راست و چپ هستند.

۴-۸ چگالی انرژی میدان الکترومغناطیسی

تحلیل چگالی انرژی میدان الکترومغناطیسی در فضای آزاد، گسترش تحلیل میدان اسکالر بخش ۳-۶ است. در این حال معادله (۳-۲۵) به صورت زیر درمی‌آید

$$T^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} A^{\lambda})} \partial_{\nu} A^{\lambda} - \delta^{\mu}_{\nu} \mathcal{L} \quad (22-4)$$

که با استفاده از این فرمول، رابطه زیر برقرار است

$$T^{\circ} = -F_{\circ\mu} F^{\circ\mu} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (23-4)$$

(مسئله ۴-۵). برحسب میدان‌های فیزیکی \mathbf{E} و \mathbf{B} ، رابطه (۲۳-۴) به شکل آشنای زیر درمی‌آید

$$T^{\circ} = \frac{1}{4} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \quad (24-4)$$

می‌توانیم این میدان‌ها را برحسب دامنه‌های میدان $a_{k\alpha}$ هم بیان کنیم. $a_{k\alpha}$ در معادله (۱۵-۴) معرفی شدند. به این ترتیب برای انرژی کل میدان رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$H = \int T^{\circ} d^3 \mathbf{x} = \sum_{k,\alpha} a_{k\alpha}^* a_{k\alpha} \omega_k \quad (25-4)$$

با همین رویه تکانه کل میدان برابر می‌شود با

$$\mathbf{P} = \sum_{k,\alpha} a_{k\alpha}^* a_{k\alpha} \mathbf{k} \quad (26-4)$$

۴-۹ میدان‌های برداری جرم‌دار

اکنون می‌خواهیم چگالی لاگرانژی (۱۰-۴) را با افزودن یک جمله ناوردای لورنتسی اصلاح کنیم.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_{\mu} A^{\mu} - J^{\mu} A_{\mu} \quad (27-4)$$

که J^{μ} جریان خارجی است. به سادگی دیده می‌شود که جمله افزوده شده در کنش، معادله‌های میدان را به شکل زیر درمی‌آورد

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} + m^2 A^{\nu} = J^{\nu} \quad (28-4)$$

از آنجا که $\partial_{\nu} \partial_{\mu} F^{\mu\nu} \equiv 0$ است، با بهره‌گیری از معادله (۲۸-۴)، داریم

$$m^2 \partial_{\nu} A^{\nu} = \partial_{\nu} J^{\nu} \quad (29-4)$$

این معادله پیامد بی‌درنگ معادله‌های میدان است. یعنی مانند معادله (۱۶-۴) شرط تثبیت پیمانه لورنتسی نیست، بلکه حاکی از آن است که A^{ν} مستقل نمی‌باشد. با بهره‌گیری از این معادله، معادله‌های میدان به شکل ساده شده زیر درمی‌آیند

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} A^{\nu} + m^2 A^{\nu} = J^{\nu} + \partial^{\nu} (\partial_{\mu} J^{\mu}) / m^2 \quad (30-4)$$

بنابراین در فضای آزاد، هر مؤلفه A^{ν} از میدان در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\frac{\partial^\nu A^\nu}{\partial t^\nu} - \nabla^\nu A^\nu + m^\nu A^\nu = 0 \quad (۳۱-۴)$$

این معادله موج با قانون‌های کوانتس $\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla$, $E \rightarrow i\partial/\partial t$ به معادله انیشتین برای ذره آزاد تبدیل می‌شود

$$E^\nu = p^\nu + m^\nu$$

پس می‌توان نتیجه گرفت زمانی که لاگرانژی اصلاح شده، کوانتیزه گردد، توصیف کننده ذراتی به جرم m مربوط به میدان چارمؤلفه‌ای است، که سه مؤلفه آن مستقل است.

جواب‌های موج تخت (۳۱-۴) عبارتند از

$$A^\nu = a\varepsilon^\nu \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t) = a\varepsilon^\nu \cos(k_\mu x^\mu)$$

که در آن $\omega_k = k^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$ است. برای برآوردن شرط $\partial_\nu A^\nu = 0$ لازم است که

$$k_\nu \varepsilon^\nu = 0 \quad (۲۳-۴)$$

باشد. مثلاً اگر موج تختی را در راستای z با $k^\nu = (0, 0, k)$ در نظر بگیریم، سه قطبش مستقل، ۱، ۲، ۳ وجود دارد که آنها را به صورت چاربردارهای پادوردا اختیار می‌کنیم

$$\varepsilon_1^\nu = (0, 1, 0, 0)$$

$$\varepsilon_2^\nu = (0, 0, 1, 0)$$

$$\varepsilon_3^\nu = (k, 0, 0, k^0)/m$$

اسپین ذاتی ذره برابر با تکانه زاویه‌ای در چارچوب مرجعی است که ذره در آن چارچوب ساکن باشد (بخش ۷-۴). در چنین چارچوبی $\mathbf{k} = 0$ و $\varepsilon_1 = (0, \varepsilon_x)$, $\varepsilon_2 = (0, \varepsilon_y)$, $\varepsilon_3 = (0, \varepsilon_z)$ همانند بخش ۷-۴، حالت‌های با قطبش $\varepsilon_x \pm i\varepsilon_y$ متناظر با $J_z = \pm 1$ است، اما اکنون حالتی با قطبش ε_z هم داریم که متناظر با $J_z = 0$ می‌باشد. زیرا عملگر r_z بر روی ε_z عمل می‌کند و مقدار $r_z \varepsilon_z = 0$ را نتیجه می‌دهد.

بنابراین لاگرانژی اصلاح شده ذرات جرم‌دار دارای اسپین ذاتی S با $S_z = 1, 0, -1$ را S توصیف می‌کند. این ذره‌های مهم در مدل استاندارد، در فصل‌های آتی پدیدار می‌شوند.

مسئله‌ها

۱-۴ نشان دهید چگالی لاگرانژی معادله (۱۰-۴) را می‌توان به شکل زیر هم نوشت

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^\nu + \mathbf{B}^\nu) - J^\mu A_\mu$$

۲-۴ با فرض آنکه در پیمانه‌ای $\nabla \cdot \mathbf{A} = f(\mathbf{r}, t) \neq 0$ باشد. عبارتی را برای تابع تبدیلی پیمانه‌ای

$\chi(\mathbf{r}, t)$ بیابید، به گونه‌ای که پتانسیل‌های جدیدی که از معادله (۴-۱۲) به دست می‌آیند در شرط پیمانه تابشی صدق کنند.

۳-۴ نشان دهید که میدان تانسوری $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{c} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ همان شکل $F^{\mu\nu}$ را دارد. با این تفاوت که جای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی با یکدیگر عوض شده است. نشان دهید

$$\frac{1}{c} \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

و حاصل تحت تبدیلات لورنتس، میدانی اسکالر است، اما تحت عمل پاریتی، شبه‌اسکالر می‌باشد.

۴-۴ نشان دهید میدان الکتریکی موج معادله (۴-۲۱) با مقدارهای $a_1 = 1, a_4 = i$ به صورت زیر می‌باشد

$$(E_x, E_y, E_z) = -\sqrt{\frac{2\omega}{V}} [\sin(kz - \omega t), \cos(kz - \omega t), 0]$$

نشان دهید که در z ثابت، \mathbf{E} به صورت تابعی از زمان در راستای مثبت حول محور z ‌ها دوران می‌کند. این تعریف قطبش دایروی راست است.

۵-۴ نشان دهید معادله (۴-۲۲) به شکل زیر درمی‌آید.

$$T^{\circ} = -F^{\circ\mu} \partial_{\circ} A_{\mu} + \frac{1}{c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

نشان دهید که می‌توان جمله $\partial_{\mu}(A_{\circ} F^{\circ\mu}) = \partial_i(A_{\circ} F^{\circ i})$ را اضافه کرد بدون آنکه در انرژی کل تغییری ایجاد کند. در نتیجه به همان شکل T° در معادله (۴-۲۳) درمی‌آید.

۶-۴ ذره‌ای به جرم m و بار q در میدان الکترومغناطیسی خارجی ثابت (ϕ, \mathbf{A}) حرکت می‌کند. نشان دهید که لاگرانژی

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - q\phi + q\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}$$

منجر به معادله ناسبتی حرکت

$$m \ddot{\mathbf{x}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})$$

می‌شود، و هامیلتونی هم برابر مقدار زیر می‌گردد

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi$$

که $\mathbf{p} = (m\dot{\mathbf{x}} + q\mathbf{A})$ می‌باشد.

۷-۴ نشان دهید اگر γL ناوردای لورنتسی باشد، کنش $S = \int L dt$ هم ناوردای لورنتسی است. نشان دهید که این شرط در لاگرانژی زیر صدق می‌کند

$$L = -m / \gamma - q A^{\mu} (dx_{\mu} / dt)$$

(این معادله، حالت نسبیتی مسأله ۶-۴ می‌باشد.)

مدل استاندارد نظریه کوانتمی میدان است. در فصل ۴ درباره میدان الکترومغناطیسی کلاسیک بحث کردیم. گذر به میدان کوانتمی در فصل ۸ صورت می‌گیرد. در این فصل بحث خود را در مورد معادله دیراک آغاز می‌کنیم. این معادله را دیراک برای توصیف تابع موج کوانتمی نسبیته یک الکترون منفرد ایجاد کرد. اما، تابع موج دیراک را به صورت میدانی در نظر می‌گیریم، و آن را همانند میدان الکترومغناطیسی کوانتیزه خواهیم کرد. معادله دیراک به صورت میدان در نظر گرفته خواهد شد. گذر به نظریه میدان را کوانتس دوم^۱ می‌گویند. این میدان، همانند تابع موج دیراک، مختلط است. نشان خواهیم داد که میدان دیراکی چگونه تحت تبدیلات لورنتس تبدیل می‌یابد. همچنین لاگرانژی ناوردای لورنتسی پیدا می‌کنیم که بتوان میدان را از آن به دست آورد.

در کوانتس، میدان‌های الکترومغناطیسی $A_\mu(x)$ و $F_{\mu\nu}(x)$ تبدیل به عملگرهای وابسته به زمان و مکان می‌شوند. مقادیر چشم‌داشتی این عملگرها در محیطی که حالت‌های کوانتمی توصیف می‌کنند، به صورت میدان‌های کلاسیکی می‌باشند. میدان‌های دیراکی $\psi(x)$ هم به صورت عملگرهای وابسته به مکان و زمان در فرآیند کوانتس درمی‌آیند. اما برخلاف میدان الکترومغناطیسی برای میدان‌های دیراکی هیچ میدان کلاسیکی که متناظر با آن قابل اندازه‌گیری باشد، وجود ندارد. این تفاوت‌ها ناشی از اصل طرد پائولی هستند، که فقط بر فرمیونها، و نه بوزونها، اعمال می‌شود. در این فصل و دو فصل پس از آن، ویژگی‌های میدان‌های دیراکی به صورت عملگری به ندرت مورد استناد قرار می‌گیرند. بلکه در بیشتر بخش‌ها، روند کار به گونه‌ای است که گویی میدان‌های دیراکی توابع مختلط معمولی هستند، هرچند در واقع این گونه نیست. می‌توان این میدان‌ها را توابع موج دیراکی برای یک ذره در نظر گرفت.

۵-۱ معادله دیراک

دیراک در تلاش برای ایجاد معادله شرودینگر برای الکترون که سازگار با نسبیت خاص باشد، معادله خود را ایجاد کرد. معادله شرودینگر برای الکترونی با تابع موج ψ به صورت زیر است

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$$

برای اطمینان از وجود تقارن بین فضا و زمان، دیراک فرض کرد که همیلتونی الکترون آزاد به شکل زیر باشد

$$H_D = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m = -i\alpha \cdot \nabla + \beta m \quad (1-5)$$

که m جرم الکترون، \mathbf{p} تکانه آن، $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ و $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ و β هم ماتریس هستند. ψ برداری ستونی است و معادله شرودینگر تبدیل به معادله دیراک چند مؤلفه‌ای می‌شود.

$$(i\partial/\partial t + i\alpha \cdot \nabla - \beta m)\psi = 0 \quad (2-5)$$

اگر این معادله برای توصیف الکترون آزادی به جرم m باشد، باید جواب‌های آن در معادله کلین-گوردون، بخش ۳-۵، صدق کند. با ضرب کردن سمت چپ معادله دیراک در عملگر $(i\partial/\partial t) - i\alpha \cdot \nabla + \beta m$ ، به رابطه زیر می‌رسیم

$$[-\partial^2/\partial t^2 + \sum_i \alpha_i^2 \partial_i \partial_i + \sum_{i < j} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \partial_i \partial_j + im \sum_i (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \partial_i - \beta^2 m^2] \psi = 0$$

که در آن $\partial_i = \partial/\partial x^i$ می‌باشد. در صورت برقراری رابطه‌های زیر، این معادله با معادله کلین-گوردون یکی می‌باشد.

$$\beta^2 = 1, \quad \alpha_i^2 = \alpha_j^2 = \alpha_k^2 = 1 \quad (3-5)$$

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0, \quad i \neq j; \quad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

رابطه‌های بالا مجموعه ماتریس‌های 2×2 اسپین پائولی را به ذهن متبادر می‌کنند.

$\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ که معمولاً به صورت زیر نمایش داده می‌شوند.

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4-5)$$

همچنین σ^0 را هم ماتریس یکه 2×2 اختیار می‌کنیم.

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

چهار ماتریس پادجابجا شونده α_i و β وجود دارند. ثابت می‌شود که باید مجموعه دیگری از ماتریس‌های پائولی را معرفی کنیم، که α_i و β ها را با ماتریس‌های 4×4 نمایش دهد. این نمایش منحصر به فرد نیست. یعنی بر حسب آنکه ویژگی‌های مختلف معادله دیراک را بخواهیم نشان دهیم،

گزینه‌های مختلفی برای نمایش ماتریس‌های دیراک وجود دارد. ما از نمایشی موسوم به نمایش کایرال^۱ استفاده خواهیم کرد. در این نمایش

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} -\sigma^i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^i \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^0 \\ \sigma^0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (5-5)$$

که منظور از ماتریس 2×2 بلوکی $\mathbf{0}$ ، ماتریس زیر می‌باشد.

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

همچنین ماتریس یکانی 4×4 را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$I = \begin{pmatrix} \sigma^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^0 \end{pmatrix}$$

می‌توان به آسانی دریافت که این ماتریس‌ها در شرایط (۳-۵) صدق می‌کنند. (در پیوست الف حاصلضرب بلوکی ماتریس‌ها توضیح داده شده است.)

از آنجا که α_i و β ماتریس‌های 4×4 هستند، تابع موج دیراکی ψ ماتریسی ستونی با چهار مؤلفه می‌باشد. با توجه به معادله نسبتی شرویدینگر، خواهیم دید که معادله دیراک پیامدهای قابل توجهی دارد. معادله دیراک ذره‌ای با تکانه زاویه‌ای ذاتی $\sigma (\hbar/2)$ و ممان مغناطیسی ذاتی $\sigma (q\hbar/2m)$ را توصیف می‌کند. q بار ذره است. همچنین جواب‌هایی با «انرژی منفی» وجود دارد که دیراک آنها را با عنوان پادذره توصیف کرد.

جگالی لاگرانژی که از اصل کنش به دست می‌آید، و منجر به معادله دیراک می‌شود، به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \psi^\dagger (i\partial/\partial t + i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla - \beta m) \psi \\ &= \psi_a^* (I_{ab} i\partial/\partial t + i\alpha_{ab} \cdot \nabla - \beta_{ab} m) \psi_b \end{aligned} \quad (6-5)$$

که آن را برحسب اندیس‌های ماتریسی نوشتیم. ψ_a^* ماتریسی سطر می‌باشد. ψ^\dagger هم، مزدوج هرمیتی ψ می‌باشد و به صورت $\psi^\dagger = \psi^T$ تعریف می‌شود. به جای آنکه بخش‌های حقیقی و موهومی ψ_a را جداگانه بردش دهیم، معمولاً ψ_a^* و ψ_a را به صورت میدان‌های مستقل از هم در نظر می‌گیرند (ر.ک. بخش ۳-۷). شرط پایا بودن $S = \int \mathcal{L} d^4x$ به‌ازای بردش دلخواه $\delta \psi_a^*$ منجر به معادله دیراک می‌شود، زیرا \mathcal{L} به مشتق‌های ψ_a^* بستگی ندارد.

۵-۲ تبدیلات لورنتس و ناوردایی لورنتس

در ادامه نمایش کایرال (۵-۵) ماتریس‌های α^i و β را به کار می‌بریم. زیرا در ادامه باید میدان دیراکی تحت تبدیلی‌های لورنتس تبدیل یابد، و در این حال استفاده از نمایش کایرال، برای این کار بسیار مناسب است. ماتریس‌های دیراکی را به صورت ماتریس‌های بلوکی 2×2 نوشته‌ایم، پس طبیعی است که میدان دیراکی چهار مؤلفه‌ای را هم همانند آن به صورت زوجی از میدان‌های دو مؤلفه‌ای بنویسیم.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (7-5)$$

که ψ_L و ψ_R به ترتیب دو مؤلفه بالایی و پایینی میدان دیراکی چهار مؤلفه‌ای هستند.

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (8-5)$$

با استفاده از تعاریف بالا، معادله دیراک (۲-۵) به صورت زیر درمی‌آید

$$i \begin{pmatrix} \sigma^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_0 \psi_L \\ \partial_0 \psi_R \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\sigma^i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_i \psi_L \\ \partial_i \psi_R \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^0 \\ \sigma^0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0 \quad (9-5)$$

پس از انجام دادن ضرب ماتریسی به دو معادله جفت شده زیر برای ψ_L و ψ_R خواهیم داشت:

$$i \sigma^0 \partial_0 \psi_L - i \sigma^i \partial_i \psi_L - m \psi_R = 0 \quad (10-5)$$

$$i \sigma^0 \partial_0 \psi_R + i \sigma^i \partial_i \psi_R - m \psi_L = 0$$

سیگماها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم و خواهیم دید که تعریف زیر بسیار با ساختار لورنتسی

سازگار است.

$$\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3), \quad \tilde{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$$

با استفاده از این نمادگذاری، معادله‌های (۱۰-۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$i \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m \psi_R = 0 \quad (11-5)$$

$$i \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m \psi_L = 0$$

برای به دست آوردن چگالی لاگرانژی (۶-۵) بر حسب ψ_L و ψ_R ، لازم است که عبارت سمت چپ

معادله (۹-۵) را در ماتریس سطری $(\psi_L^\dagger \quad \psi_R^\dagger)$ ضرب کنیم. میدان‌های مزدوج هرمیتی عبارتند از

$$\psi_L^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*), \quad \psi_R^\dagger = (\psi_3^*, \psi_4^*)$$

پس از ضرب کردن بلوک‌ها به نتیجه زیر می‌رسیم

$$\mathcal{L} = i \psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i \psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m (\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L) \quad (12-5)$$

با اعمال تغییرهای کوچک $\delta \psi_R^*$ و $\delta \psi_L^*$ معادله‌های میدان (۵-۱۱) به دست می‌آیند. برای آنکه نشان دهیم شکل لاگرانژی در همه چارچوب‌های مرجع یکسان است، باید میدان $\psi'(x')$ در چارچوب K' را به میدان $\psi(x)$ واقع در چارچوب K مربوط کنیم. x' و x یک نقطه را در فضا زمان در چارچوب‌های مختلف نشان می‌دهند، و با تبدیل لورنتس معمولی^۱ به هم مربوط می‌شوند.

$$x'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (۵-۱۳)$$

عملگر ∂_{μ} همانند برداری هموردا تحول می‌یابد، به گونه‌ای که

$$\partial'_{\mu} = L^{\nu}_{\mu} \partial_{\nu}$$

و تبدیل وارون آن

$$\partial_{\mu} = L^{\nu}_{\mu} \partial'_{\nu} \quad (۵-۱۴)$$

است. (ر.ک. مسأله ۲-۲).

در پیوست ب (معادلات (ب-۱۷) و (ب-۱۸)) نشان داده شده‌اند، و می‌توان ماتریس‌های 2×2 \mathbf{M} و \mathbf{N} با درمیانان ۱ را به این تبدیل لورنتس مربوط کنیم. ویژگی‌های این ماتریس‌های به صورت زیر است:

$$\mathbf{M}^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\nu} \mathbf{M} = L^{\nu}_{\mu} \tilde{\sigma}^{\mu} \quad (۵-۱۵)$$

$$\mathbf{N}^{\dagger} \sigma^{\nu} \mathbf{N} = L^{\nu}_{\mu} \sigma^{\mu} \quad (۵-۱۶)$$

ماتریس‌های \mathbf{M} و \mathbf{N} با رابطه (ب-۱۹) به هم مربوط می‌شوند.

$$\mathbf{M}^{\dagger} \mathbf{N} = \mathbf{N}^{\dagger} \mathbf{M} = 1 \quad (۵-۱۷)$$

چگالی لاگرانژی (۵-۱۲) را در چارچوب K' می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathcal{L} = i \psi_L^{\dagger} \mathbf{M}^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\nu} \mathbf{M} \partial'_{\nu} \psi_L + i \psi_R^{\dagger} \mathbf{N}^{\dagger} \sigma^{\nu} \mathbf{N} \partial'_{\nu} \psi_R - m (\psi_L^{\dagger} \psi_R + \psi_R^{\dagger} \psi_L) \quad (۵-۱۸)$$

در دو جمله نخست از معادله (۵-۱۴) و (۵-۱۵) و (۵-۱۶) بهره برده شده است.

با توجه به دو تعریف زیر

$$\psi'_L(x') = \mathbf{M} \psi_L(x) \quad (۵-۱۹)$$

$$\psi'_R(x') = \mathbf{N} \psi_R(x) \quad (۵-۲۰)$$

که در نتیجه داریم

$$\mathcal{L} = i \psi_L^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\nu} \partial'_{\nu} \psi'_L + i \psi_R^{\dagger} \sigma^{\nu} \partial'_{\nu} \psi'_R - m (\psi_L^{\dagger} \psi'_R + \psi_R^{\dagger} \psi'_L)$$

1- variation

2- proper Lorentz transformation

(توجه کنید که $\psi_L^\dagger \psi_R' = \psi_L^\dagger \mathbf{M}^\dagger \mathbf{N} \psi_R = \psi_L^\dagger \psi_R$ می باشد، زیرا $\mathbf{M}^\dagger \mathbf{N} = \mathbf{I}$ است. به همین رویه $\psi_R^\dagger \psi_L' = \psi_R^\dagger \psi_L$ می باشد).

با تبدیلات (۱۹-۵) و (۲۰-۵)، لاگرائژی و در نتیجه معادله های میدان در هر چارچوب مرجعی شکل یکسانی خواهند گرفت. روش ساخت \mathbf{M} و \mathbf{N} برای هر تبدیل لورنتسی در پیوست ب آمده است. نمونه ای از دوران را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$L^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (21-5)$$

دوران بالا، دوران محورهای مختصات به اندازه زاویه θ حول محور z ها می باشد، که هم ارز معادله های (۱-۲) می باشد. ماتریس متناظر \mathbf{M} آن یکانی است

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \quad (22-5)$$

در نتیجه، با توجه به معادله (۱۷-۵)، $\mathbf{N} = (\mathbf{M}^\dagger)^{-1} = \mathbf{M}$ می باشد، زیرا $\mathbf{M} \mathbf{M}^\dagger = \mathbf{1}$ است. درستی معادله های (۱۵-۵) و (۱۶-۵) را می توان بررسی کرد. به ازای همه دوران ها، ماتریس \mathbf{M} یکانی (و بنابراین برابر با \mathbf{N}) می باشد.

نمونه ای از افزایش لورنتسی به صورت زیر است

$$L^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 & 0 & -\sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \theta & 0 & 0 & \cosh \theta \end{pmatrix} \quad (23-5)$$

که افزایشی با سرعت $v/c = \tanh \theta$ در راستای محور z ها می باشد و هم ارز با معادله های (۳-۲) می باشد. ماتریس \mathbf{M} متناظر آن برابر است با

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} e^{\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-\theta/2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = (\mathbf{M}^\dagger)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{\theta/2} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \quad (24-5)$$

۵-۳ تبدیل باریتی

چگالی لاگرانژی (۵-۱۲) را می‌توان تحت ناوردایی فضای محورها، ناوردای ساخت. مختصات فضایی نقطه را از دیدگاه محورهای وارونه، با پریم مشخص می‌کنیم:

$$\mathbf{r}' = -\mathbf{r} \quad \nabla' = -\nabla \quad (۲۵-۵)$$

و در نتیجه، با توجه به تعاریف (۵-۱۰) σ^μ و $\tilde{\sigma}^\mu$ داریم

$$\tilde{\sigma}^\mu \partial'_\mu = \sigma^\mu \partial_\mu, \quad \sigma^\mu \partial'_\mu = \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \quad (۲۶-۵)$$

اگر $\psi^P(\mathbf{r}') \rightarrow \psi(\mathbf{r})$ باشد، چگالی لاگرانژی، (۵-۱۲)، ناوردای می‌باشد.

$$\psi_L^P(\mathbf{r}') = \psi_R(\mathbf{r}), \quad \psi_R^P(\mathbf{r}') = \psi_L(\mathbf{r}) \quad (۲۷-۵)$$

چگالی لاگرانژی واقعی باید تحت تبدیلی مانند تبدیل زیر (به‌ازای هر مقداری برای α) شکل خود را نگه دارد.

$$\psi_L^P(\mathbf{r}') = e^{i\alpha} \psi_R(\mathbf{r}), \quad \psi_R^P(\mathbf{r}') = e^{i\alpha} \psi_L(\mathbf{r})$$

مرسوم است که شکل (۲۷-۵) را برای تبدیل میدان تحت وارونی فضا بپذیرند.

۵-۴ اسپینورها

کمیت‌های مختلط دو مؤلفه‌ای که تحت تبدیل لورنتس، مطابق قاعده‌های (۵-۱۹) و (۵-۲۰)، تبدیل یابند، را به ترتیب اسپینورهای چپگرد و راستگرد گویند. وجود زیروندهای L و R بیانگر این انتساب می‌باشد. اغلب میدان دیراک چهار مؤلفه‌ای را اسپینور دیراکی می‌گویند.

اسپینورها دارای این ویژگی بارز هستند که می‌توان آنها را جفت‌جفت با هم درآمیخت و از آن اسکالرها، شبه‌اسکالرها، چاربردارها، شبه‌بردارها، و تانسورهای مرتبه بالاتر لورنتسی ساخت. مثلاً $(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L)$ اسکالر حقیقی و ناوردای لورنتسی است. $i(\psi_L^\dagger \psi_R - \psi_R^\dagger \psi_L)$ شبه‌اسکالری حقیقی می‌باشد، که تحت تبدیل لورنتس معمولی ناورداست، اما علامت آن تحت وارونی فضا تغییر می‌کند. با استفاده از ویژگی‌های (۵-۱۵)، (۵-۱۶) و (۵-۲۷) درمی‌یابیم که $(\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \psi_L + \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R)$ چاربردار است و مؤلفه‌های فضایی آن تحت وارونی فضا تغییر علامت می‌دهند (زیرا $-\sigma^i = \tilde{\sigma}^i$)، و $(\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \psi_L - \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R)$ یک چاربردار محوری است که مؤلفه‌های فضایی آن تحت وارونی فضا بدون تغییر علامت باقی می‌مانند.

۵-۵ ماتریس‌های γ^μ

جداسازی اسپینورهای دیراکی به مؤلفه‌های چپگرد و راستگرد در هنگام بحث دربارهٔ برهمکنش ضعیف

بسیار سودمند است. برای توصیف برهمکنش‌های الکترومغناطیسی فرمیون‌ها، مرسوم است که ماتریس‌های 4×4 به نام ماتریس‌های γ^μ را به صورت زیر تعریف کنند.

$$\gamma^0 = \beta; \quad \gamma^i = \beta \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (28-5)$$

با استفاده از ویژگی ماتریس‌های β و α^i ، رابطه‌های زیر به دست می‌آید

$$(\gamma^0)^2 = \mathbf{I}; \quad (\gamma^i)^2 = -\mathbf{I}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (29-5)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 0, \quad \mu \neq \nu$$

در نمایش کایرال

$$(\gamma^0) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^0 \\ \sigma^0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (30-5)$$

چگالی لاگرانژی (۶-۵) را بر حسب ماتریس‌های γ^μ می‌نویسیم، که به صورت زیر درمی‌آید.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (31-5)$$

که $\bar{\psi}$ ماتریسی سطری و $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ می‌باشد. معادلهٔ دیراک هم شکل متقارن زیر را به خود می‌گیرد

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (32-5)$$

ماتریس سودمند دیگر $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ می‌باشد که نمایش کایرال آن هم به شکل زیر است.

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\sigma^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^0 \end{pmatrix}$$

ماتریس‌های $\frac{1}{2}(\mathbf{I} - \gamma^5)$ ، $\frac{1}{2}(\mathbf{I} + \gamma^5)$ عملگرهای تصویر هستند که از اعمال دیراکی آنها بر روی

اسپینور دیراکی، بخش‌های چپگرد و راستگرد اسپینور به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{I} - \gamma^5)\psi = \begin{pmatrix} \sigma^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (33-5)$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{I} + \gamma^5)\psi = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (34-5)$$

اسکالر‌ها و بردارهای لورنتسی را می‌توان از اسپینورهای دومؤلفه‌ای بخش (۴-۵) ایجاد کرد و

به صورت زیر نوشت:

$$\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L = \bar{\psi} \psi \quad (\text{اسکالر})$$

$$i(\psi_L^\dagger \psi_R - \psi_R^\dagger \psi_L) = i \bar{\psi} \gamma^5 \psi \quad (\text{شبه اسکالر})$$

$$\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \psi_L + \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (\text{چاربردار پادوردا})$$

$$\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \psi_L - \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R = \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi \quad (\text{بردار محوری پادوردا})$$

توجه کنید که همه این کمیت‌ها حقیقی هستند.

۵-۶ حقیقی کردن چگالی لاگرانژی

مشکلی که چگالی لاگرانژی (۵-۶) یا (۵-۱۲) دارد، آن است که حقیقی نیست. اگر ψ را تابع موج در نظر بگیریم، L تابعی مختلط است، و اگر ψ را عملگری در نظر بگیریم، L هرمیتی نیست. در نتیجه تانسور انرژی تکانه، مختلط می‌شود. در واقع، برای بکار بردن اصل همیتون، تغییر ناچیز δS در کنش باید حقیقی باشد. جمله $-m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L)$ در معادله (۵-۱۲) حقیقی است و بخش موهومی L را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2i} \right) [i\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R \\ & \quad - (i\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R)^\dagger] \\ & = \left(\frac{1}{2i} \right) [i\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R \\ & \quad + i(\partial_\mu \psi_L^\dagger) \tilde{\sigma}^\mu \psi_L + i(\partial_\mu \psi_R^\dagger) \sigma^\mu \psi_R] \end{aligned}$$

(که در آن از ویژگی هرمیتی بودن ماتریس‌های σ^μ و $\tilde{\sigma}^\mu$ بهره برده‌ایم). عبارت آخر به صورت زیر می‌باشد

$$\left(\frac{1}{2} \right) \partial_\mu (\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \psi_L + \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R)$$

که مجموع مشتق‌هاست و سهم نقطه‌انتهایی کنش را نشان می‌دهد (ر.ک. بخش ۳-۱) در نتیجه δS حقیقی می‌باشد. می‌توان از بخش موهومی L صرف نظر کرد، و لاگرانژی را به صورت زیر در نظر گرفت

$$L = \frac{1}{2} [i(\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R)] \quad (۵-۳۵)$$

$$+ m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L) \quad (۵-۳۶)$$

برای بحث بیشتر درباره این مسأله به کتاب Olive (1997) مراجعه کنید.

مسئله‌ها

۱-۵ نشان دهید که اگر ماتریس $M = N$ را از معادله (۲۲-۵) در معادله‌های (۱۵-۵) و (۱۶-۵) وارد کنیم، ماتریس دوران (۲۱-۵) را ایجاد می‌کند.

۲-۵ نشان دهید که اگر ماتریس‌های M و $N = M^{-1}$ حاصل از معادله (۲۴-۵) را در معادله‌های (۱۵-۵) و (۱۶-۵) وارد کنیم، افزایش لورنتسی معادله (۲۳-۵) را ایجاد می‌کند.

۳-۵ نشان دهید که $\psi_L^\dagger \psi_R$ و $\psi_R^\dagger \psi_L$ تحت تبدیل‌های لورنتس ناورد هستند.

نشان دهید $\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \psi_L$ و $\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R$ تحت تبدیل‌های لورنتس، چاربردارهای پادوردا هستند.

نشان دهید $\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \sigma^\nu \psi_R$ و $\psi_R^\dagger \sigma^\mu \tilde{\sigma}^\nu \psi_L$ تحت تبدیل‌های لورنتس معمولی، تانسورهای پادوردا هستند.

۴-۵ هم‌ارزی عبارت‌های (۶-۵) و (۳۱-۵) را برای چگالی لاگرانژی نشان دهید.

۵-۵ نشان دهید γ^5 دارای ویژگی‌های زیر است

$$(\gamma^5)^2 = \mathbf{I}; \quad \gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu; \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

۶-۵ نشان دهید که $\bar{\psi} \gamma^5 \psi$ i میدانی شبه‌اسکالر و $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi = -\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$ میدان برداری محوری است.

۷-۵ نشان دهید که $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$ ، $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ می‌باشد.

در این فصل جواب‌های موج تخت معادله دیراک را نمایش می‌دهیم. نشان می‌دهیم که ذره دیراکی دارای اسپین ذاتی $\hbar/2$ است و خواهیم دید که چگونه معادله دیراک وجود پادذرات را پیش‌بینی می‌کند.

۱-۶ ذره دیراکی در حال سکون

در فصل ۵ نشان دادیم که معادله دیراک برای ذره‌ای در فضای آزاد، هم‌ارز با معادله‌های جفت‌شده دو مؤلفه‌ای زیر است

$$i \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m \psi_R = 0 \quad (1-6)$$

$$i \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m \psi_L = 0$$

این معادله‌ها دارای جواب‌هایی به شکل موج تخت هستند:

$$\psi_L = u_L e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)}, \quad \psi_R = u_R e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)} \quad (2-6)$$

که u_R و u_L اسپینورهای دو مؤلفه‌ای هستند. از آنجا که جواب‌های معادله دیراک در معادله کلین-گوردون (۱۹-۳) هم صدق می‌کند، رابطه زیر باید برقرار باشد

$$E^\gamma = p^\gamma + m^\gamma \quad (3-6)$$

ساده‌تر است که جواب را در چارچوب K' بیابیم که ذره در آن ساکن است، و سپس با استفاده از تبدیل‌های لورنتس، جواب را در چارچوبی بیابیم که ذره نسبت به آن چارچوب با سرعت v حرکت می‌کند. با استفاده از علامت پریم، کمیت‌ها را در چارچوب K' نشان‌گذاری می‌کنیم، تکانه $\mathbf{p}' = 0$ است، بنابراین معادله‌های (۱-۶) و (۳-۶) به صورت زیر درمی‌آیند

$$i \partial'_0 \psi'_L = m \psi'_R \quad i \partial'_0 \psi'_R = m \psi'_L$$

و

$$E'^\gamma = m^\gamma, \quad E' = \pm m \quad (4-6)$$

جواب‌های با انرژی مثبت $E' = m$ عبارتند از

$$\psi'_L = u e^{-im t'}, \quad \psi'_R = u e^{-im t'} \quad (5-6)$$

که

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

اسپینور دومؤلفه‌ای دلخواه است و قاعده استاندارد مکانیک کوانتومی را می‌پذیریم که بر پایه آن بستگی زمانی ویژه حالت انرژی از ضریب فازی $e^{-iEt'}$ به دست می‌آید.

در چارچوب ساکن K' ، اسپینورهای چپگرد و راستگرد با انرژی مثبت، یکی هستند. در نتیجه این جواب تحت وارونی فضا (ر.ک. بخش ۵-۳) ناوردا می‌باشد. در این حالت گفته می‌شود که پاریتی مثبت است.

۶-۲ اسپین ذاتی ذره دیراکی

عملگر اسپین ذاتی S برای ذره‌ای به جرم m ، همان عملگر تکانه زاویه‌ای ذره در چارچوب سکون ذره تعریف می‌شود. مؤلفه S در راستای Z از رابطه زیر به دست می‌آید

$$S_z = i \hbar \lim_{\phi \rightarrow 0} [R_z(\phi) - 1] / \phi$$

که $R_z(\phi)$ عملگر دوران دهنده حالت ذره به اندازه زاویه ϕ حول محور OZ است (ر.ک. بخش ۴-۷). دوران حالت حول زاویه ϕ ، هم‌ارز دوران دادن محورها به اندازه زاویه ϕ - است. در نتیجه داریم $\psi_L \rightarrow M \psi_L$ ، $\psi_R \rightarrow N \psi_R$ ، که با بهره‌گیری از (۵-۲۲) داریم

$$M = N = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{pmatrix}$$

در نتیجه

$$S_z = i \hbar \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{1}{\phi} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} - 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} - 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_z$$

در حالتی که $u_1 = 1$ ، $u_2 = 0$ باشد، داریم

$$S_z \psi'_L = (\hbar/2) \psi'_L$$

$$S_z \psi'_R = (\hbar/2) \psi'_R$$

با به کار بردن این عملگرها بر تابع موج دیراکی، به عبارت زیر می‌رسیم

$$S_z \begin{pmatrix} \psi'_L \\ \psi'_R \end{pmatrix} = (\hbar/2) \begin{pmatrix} \psi'_L \\ \psi'_R \end{pmatrix} \quad (۶-۶)$$

همچنین، در حالتی که $u_1 = 0$ ، $u_2 = 1$ می‌باشد

$$S_z \begin{pmatrix} \psi'_L \\ \psi'_R \end{pmatrix} = -(\hbar/2) \begin{pmatrix} \psi'_L \\ \psi'_R \end{pmatrix} \quad (7-6)$$

بنابراین در چارچوب سکون ذره، دو حالت مستقل وجود دارد که ویژه‌حالت‌های S_z با ویژه‌مقادیر $\pm(\hbar/2)$ می‌باشد. عملگر S_z بر تابع موج دیراکی با ماتریس زیر نشان داده می‌شود.

$$\Sigma_z = (\hbar/2) \begin{pmatrix} \sigma_z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (8-6)$$

در حالت کلی، \mathbf{S} به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\Sigma = (\hbar/2) \begin{pmatrix} \sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma \end{pmatrix} \quad (9-6)$$

همچنین، هر تابع موج دیراکی ویژه‌حالت مربع عملگر اسپین

$$\Sigma^2 = (3/4) \hbar^2 \mathbf{I}$$

با ویژه‌مقدار $\hbar^2 = (1/2)(1/2 + 1)\hbar^2$ می‌باشد. با توجه به مطالب گفته شده و با یادآوری این نکته که برای حالتی با تکانه زاویه‌ای j ، مجذور تکانه زاویه‌ای J^2 برابر با $j(j+1)\hbar^2$ است، مناسب است که بگوییم ذرهٔ دیراکی دارای اسپین ذاتی $\hbar/2$ می‌باشد.

۳-۶ امواج تخت و هلیسیتی

اکنون معادله‌ها را به چارچوب K تبدیل می‌دهیم. در K ، چارچوب K' ، ذره با سرعت v حرکت می‌کند. برای سادگی، $\mathbf{v} = (0, 0, v)$ را در راستای محور Z با $v > 0$ در نظر می‌گیریم، و حالت $u_x = 1, u_y = 0$ را بررسی می‌کنیم.

تبدیل‌های بین K و K' از رابطهٔ (۲۳-۵) و (۲۴-۵) به دست می‌آید. با استفاده از (۱۹-۵) و (۲۰-۵)

داریم

$$\psi_L = M^{-1} \psi'_L = \begin{pmatrix} e^{-\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{\theta/2} \end{pmatrix} e^{-imt'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-imt'} e^{-\theta/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_R = N^{-1} \psi'_R = \begin{pmatrix} e^{\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-\theta/2} \end{pmatrix} e^{-imt'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-imt'} e^{-\theta/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سرانجام با جایگزینی $t' = t \cosh \theta - z \sinh \theta$ (و با توجه به $m \cosh \theta = \gamma m = E$)

و $m \sinh \theta = \gamma m v = p$ و $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ می‌باشد) به عبارت زیر می‌رسیم

$$\psi_L = e^{i(pz - Et)} \begin{pmatrix} e^{-\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = e^{i(pz - Et)} \begin{pmatrix} e^{\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10-6)$$

عملگر هلیسیتی در دسته‌بندی حالت‌های موج تخت سودمند است. این عملگر را به صورت زیر تعریف می‌کنند

$$\text{هلیسیتی} = \frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad (11-6)$$

ارزش چشم‌داشتی این عملگر در حالتی معلوم برابر با اندازه همسویی اسپین ذاتی ذره با راستای حرکت ذره در آن حالت است. به ازای $p > 0$ ، $\mathbf{p} = (0, 0, p)$ ، عملگر هلیسیتی $\Sigma \cdot \mathbf{p} / |\mathbf{p}| = \Sigma_z$ می‌باشد.

بنابراین حالت (۱۰-۶) ویژه‌حالتی از عملگر هلیسیتی با هلیسیتی مثبت، $\frac{1}{2}$ است، که می‌توان آن را به صورت اسپینور دیراکی نوشت

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(pz - Et)} \begin{pmatrix} e^{-\theta/2} \\ 0 \\ e^{\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p > 0 \quad (12-6)$$

ضریب بهنجارش $\frac{1}{\sqrt{2}}$ را برای هم‌خوانی با بهنجارش استاندارد اسکالر لورنتس $\bar{\psi}\psi$ وارد می‌کنیم:

$$\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = \psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L = 1$$

به همین ترتیب برای حالت $u_1 = 0$ ، $u_2 = 1$ می‌توانیم ویژه‌حالتی با هلیسیتی منفی، یعنی $-\frac{1}{2}$ ، بسازیم:

$$\psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(pz - Et)} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\theta/2} \\ 0 \\ e^{-\theta/2} \end{pmatrix}, \quad p > 0 \quad (13-6)$$

می‌توان با بکاربردن دوران‌ها بر روی حالت‌هایی که پیدا می‌کنیم، همه امواج تخت با انرژی مثبت را تولید کنیم. هلیسیتی حالت با دوران تغییر نمی‌کند، زیرا تعریف آن بر پایه حاصلضرب اسکالر می‌باشد. تعمیم تعریف‌های (۱۲-۶) و (۱۳-۶) به موجی با بردار موج \mathbf{p} به صورت زیر می‌باشد

$$\psi_+ = e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)} u_+(\mathbf{p}) \quad (14-6)$$

که

$$u_+(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-\theta/2} |+\rangle \\ e^{\theta/2} |+\rangle \end{pmatrix}$$

و

$$\psi_- = e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - Et)} u_-(\mathbf{p}) \quad (15-6)$$

که

$$u_-(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\theta/2} |-\rangle \\ e^{-\theta/2} |-\rangle \end{pmatrix}$$

می‌باشد. در اینجا حالت‌های اسپینی پائولی $|\pm\rangle$ ویژه حالت‌های عملگرهای $\sigma \cdot \mathbf{p} / |\mathbf{p}|$ با ویژه حالت‌های ± 1 (مسألهٔ ۶-۶) هستند. حالت کلی با انرژی مثبت را می‌توان با برهم‌نهی امواج تخت ساخت.

۴-۶ جواب‌های با انرژی منفی

در چارچوب K' که در آن ذره ساکن است، جواب‌های با انرژی منفی (۴-۶) با $E' = -m$ نیز وجود دارد:

$$\psi'_L = v e^{im t'}, \quad \psi'_R = -v e^{im t'} \quad (16-6)$$

در این حالت، علامت اسپینورهای راستگرد و چپگرد v با هم فرق می‌کند. بنابراین جواب انرژی منفی تحت وارونی فضا تغییر علامت می‌دهد (ر.ک. بخش ۵-۳). در این مورد گفته می‌شود که حالت مورد نظر پاریتی منفی دارد.

با بهره‌گیری از همان تبدیل لورنتسی که در بخش ۶-۳ مورد استفاده قرار گرفت، جواب‌های ψ_+ و ψ_- به ترتیب با هلیسیتی مثبت و منفی به دست می‌آیند، که می‌توان آنها را به صورت اسپینورهای دیراکی نوشت.

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(-p z + Et)} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\theta/2} \\ 0 \\ -e^{-\theta/2} \end{pmatrix}, \quad \psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(-p z + Et)} \begin{pmatrix} -e^{-\theta/2} \\ 0 \\ e^{\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p > 0 \quad (17-6)$$

می‌توان این جواب‌ها را به صورت زیر گسترش داد:

$$\psi_+ = e^{i(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + Et)} v_+(\mathbf{p}) \quad (18-6)$$

که

$$v_+(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\theta/2} |-\rangle \\ -e^{-\theta/2} |-\rangle \end{pmatrix}$$

و

$$\psi_- = e^{i(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + Et)} v_-(\mathbf{p}) \quad (19-6)$$

که

$$v_-(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -e^{\theta/2} |+\rangle \\ e^{-\theta/2} |+\rangle \end{pmatrix}$$

حالت‌های $|+\rangle$ و $|-\rangle$ ویژه‌حالت‌های $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} / |\mathbf{p}|$ به همان صورت تعریف (۶-۱۵) بر جای می‌مانند. توجه کنید برای جواب‌های انرژی منفی ناوردای لورنتسی $\bar{\psi}\psi$ یک علامت منفی می‌گیرد.

$$\bar{\psi}\psi = \psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L = -1$$

در نگاه نخستین، به نظر می‌آید جواب‌های انرژی منفی معادلهٔ دیراک ایجاد مزاحمت کنند. در نظریهٔ کوانتمی، ذره می‌تواند بین حالت‌ها گذار کند. در نتیجه به نظر می‌آید همهٔ حالت‌های دیراکی ناپایدار باشند و به حالت‌های انرژی پایین‌تر گذار کنند. راه‌حل دیراک برای این مشکل بر این فرض استوار بود که تقریباً همهٔ حالت‌های انرژی منفی اشغال شده‌اند بنابراین بنا به اصل پائولی گذار به حالت‌های پایین‌تر ممنوع می‌باشد. حالتی با انرژی منفی یا، حفره، در حکم پادذره‌ای با انرژی مثبت رفتار خواهد کرد که جرم آن با جرم ذره یکی است اما تکانهٔ زاویه‌ای و اسپین و بار الکتریکی آن مخالف با ذره است. بدین ترتیب حالت انرژی منفی ψ_+ رابطهٔ (۶-۱۷)، که تاکنون خالی مانده بود، متناظر با پادذره‌ای با انرژی مثبت E و تکانهٔ مثبت p و هلیسیتی مثبت است، زیرا اسپین حفره مخالف اسپین حالت با انرژی منفی می‌باشد.

ذرهٔ سقوط کننده در حالت انرژی منفی خالی، در نابودی خودبخود جفت ذره-پادذره و گسیل انرژی الکترومغناطیسی بزرگتر از $2mc^2$ دیده خواهد شد. برعکس، برانگیختگی ذره از حالت با انرژی منفی به حالتی با انرژی مثبت به صورت آفرینش زوج دیده خواهد شد. وجود پوزیترون، پادذرهٔ الکترون، در سال ۱۹۳۲ میلادی به‌طور تجربی تأیید شد و به فاصله‌ای اندک آفرینش زوج پس از آن مشاهده شد.

به نظر می‌آید دریای یکنواخت از پس‌زمینهٔ حالت‌های اشغال شدهٔ انرژی منفی، با بار الکتریکی نامتناهی آن غیر قابل مشاهده باشد. به هر حال، اختیار الکترون در حکم ذره و پوزیترون در حکم پادذره، و یا برعکس کاملاً دلخواهی است. از قرار معلوم تفسیر آغازینی که از معادلهٔ دیراک به صورت معادله‌ای تک ذره کردیم، دیگر قابل دفاع نیست. به‌ناچار به نظریهٔ کوانتمی میدان رهنمون می‌شویم. در این نظریه ذره‌ها و پادذره‌ها به صورت کوانتای میدان پدیدار می‌شوند. تا حدی مانند فوتون‌ها که کوانتای میدان

الکترومغناطیسی می‌باشد. در فصل ۸ به این موضوع می‌پردازیم.

۵-۶ انرژی و تکانهٔ میدان دیراکی

چگالی لاگرانژی میدان دیراکی از رابطهٔ (۵-۳۱) به‌دست می‌آید. در اینجا با جزئیات بیشتر به این چگالی لاگرانژی می‌پردازیم:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = i \psi_a^* \partial_0 \psi_a + \bar{\psi}_b (i \gamma_{ba}^i \partial_i - m \delta_{ba}) \psi_a \quad (20-6)$$

همانند بخش ۵-۱ می‌توانیم با ψ_a و ψ_a^* مستقل از هم رفتار کنیم و تانسور انرژی تکانه را به‌صورت زیر بنویسیم

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_a)} \partial_\nu \psi_a - \mathcal{L} \delta_\nu^\mu \quad (21-6)$$

(\mathcal{L} به $\partial_\mu \psi_a^*$ بستگی ندارد).

به‌ویژه چگالی انرژی عبارتست از:

$$T^0_\nu = i \psi_a^* \partial_0 \psi_a - \mathcal{L} = \bar{\psi} (-i \gamma^i \partial_i + m) \psi \quad (22-6)$$

و چگالی تکانه برابرست با:

$$T^i_\nu = i \psi_a^* \partial_i \psi_a = i \psi^\dagger \partial_i \psi \quad (23-6)$$

جواب کلی معادلهٔ دیراک در فضای آزاد عبارتست از برهمهٔ امواج تخت ممکن، که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}, \varepsilon} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} \left(b_{\mathbf{p}\varepsilon} u_\varepsilon(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - E_{\mathbf{p}}t)} + d_{\mathbf{p}\varepsilon}^* v_\varepsilon(\mathbf{p}) e^{i(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + E_{\mathbf{p}}t)} \right) \quad (24-6)$$

که ε اندیس هلیسیتی، \pm و $b_{\mathbf{p}\varepsilon}$ و $d_{\mathbf{p}\varepsilon}$ عددهای مختلط دلخواهند. ضریب‌های $\sqrt{m/E_{\mathbf{p}}}$ به‌جای ضریب‌های $1/\sqrt{2\omega_k}$ قرار می‌گیرند که در فصل ۳ و ۴ برای گسترش میدان‌های بوزونی وارد کرده بودیم.

می‌توانیم با وارد کردن بسط میدان در T^0_ν و T^i_ν و انتگرال‌گیری از آنها روی حجم بهنجارش V ، انرژی کل و تکانهٔ کل میدان دیراکی را برحسب دامنهٔ امواج آنها بیان کنیم. نتیجه به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$H = \sum_{\mathbf{p}, \varepsilon} \left(b_{\mathbf{p}\varepsilon}^* b_{\mathbf{p}\varepsilon} - d_{\mathbf{p}\varepsilon} d_{\mathbf{p}\varepsilon}^* \right) E_{\mathbf{p}} \quad (25-6)$$

$$P = \sum_{\mathbf{p}, \varepsilon} \left(b_{\mathbf{p}\varepsilon}^* b_{\mathbf{p}\varepsilon} - d_{\mathbf{p}\varepsilon} d_{\mathbf{p}\varepsilon}^* \right) \mathbf{p} \quad (26-6)$$

$\varepsilon = \pm 1$ اندیس هلیسیتی می باشد.

به دست آوردن این نتیجه ها بر عهده خواننده گذاشته شده است. توجه کنید که هر موج تخت جواب معادله دیراک (۵-۲۳) است، یعنی

$$(\gamma^0 E_p - \gamma^i p^i) u_\varepsilon(\mathbf{p}) = m u_\varepsilon(\mathbf{p}) \quad (27-6)$$

$$(\gamma^0 E_p - \gamma^i p^i) v_\varepsilon(\mathbf{p}) = -m v_\varepsilon(\mathbf{p}) \quad (28-6)$$

همچنین لازم است که از رابطه های تعامد گوناگون استفاده کنیم. به این روابط در مسأله ۳-۶ پرداخته شده است.

برای راحتی کار، با بکارگیری رابطه های (۶-۱۴)، (۶-۱۵)، (۶-۱۸) و (۶-۱۹)، میدان دیراکی ψ (۶-۲۴) را بر حسب ψ_R و ψ_L بازنویسی می کنیم.

$$\psi_L = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \sqrt{\frac{m}{\gamma E_p}} \left[\left(b_{\mathbf{p}+} e^{-\theta/\gamma} |+\rangle + b_{\mathbf{p}-} e^{\theta/\gamma} |-\rangle \right) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - Et)} \right. \\ \left. + \left(d_{\mathbf{p}+}^* e^{\theta/\gamma} |-\rangle - d_{\mathbf{p}-}^* e^{-\theta/\gamma} |+\rangle \right) e^{i(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + Et)} \right] \quad (28-6)$$

$$\psi_R = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \sqrt{\frac{m}{\gamma E_p}} \left[\left(b_{\mathbf{p}+} e^{\theta/\gamma} |+\rangle + b_{\mathbf{p}-} e^{-\theta/\gamma} |-\rangle \right) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - Et)} \right. \\ \left. + \left(d_{\mathbf{p}+}^* e^{\theta/\gamma} |-\rangle - d_{\mathbf{p}-}^* e^{-\theta/\gamma} |+\rangle \right) e^{i(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + Et)} \right] \quad (29-6)$$

۶-۶ میدان های دیراک و مایورانا

عبارت (۶-۲۴) جواب عمومی معادله دیراک آزاد است. به ازای هر تکانه \mathbf{p} ، چهار ضریب مختلط مستقل از هم وجود دارد: $b_{\mathbf{p}+}$ ، $b_{\mathbf{p}-}$ ، $d_{\mathbf{p}+}^*$ ، $d_{\mathbf{p}-}^*$ که به ترتیب متناظر با ذرات دارای هلیسیتی $+1/2$ ، $-1/2$ و پادذره های دارای هلیسیتی $+1/2$ ، $-1/2$ هستند.

در فصل ۲۱ جواب ها را با قید $d_{\mathbf{p}-} = b_{\mathbf{p}-}$ و $d_{\mathbf{p}+} = b_{\mathbf{p}+}$ و در نتیجه $d_{\mathbf{p}+}^* = b_{\mathbf{p}+}^*$ ، $d_{\mathbf{p}-}^* = b_{\mathbf{p}-}^*$ در نظر می گیریم. این جواب ها را با نام جواب میدان های مایورانا می شناسند. خواهیم دید که در فرآیند کوانتس، میدان های دیراکی ذره ها را و همچنین پادذره ها را می آفرینند و نابود می کنند. مثلاً اگر ψ میدان الکترون باشد، این میدان پوزیترون ها را می آفریند و الکترون ها را نابود می کند، و ψ^+ الکترون ها را می آفریند و پوزیترون ها را نابود می کند. با قید مایورانا، ذره ها و پاد ذره ها یکی هستند. میدان های مایورانا

نمی‌توانند برای ذره‌های باردار الکتریکی بکار روند، اما امکان آن وجود دارد که نوترینوهای خنثی الکتریکی دارای این ویژگی باشند. هنوز بر سر این مسأله بحث است که آیا نوترینوها ذره‌های دیراکی هستند یا مایورانا.

۷-۶ حد $E \gg m$ ، نوترینوها

ضرایب امواج تخت در بسط‌های (۶-۲۵) و (۶-۲۶) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\sqrt{\frac{m}{2E}} e^{\pm \theta/\gamma} = \left\{ (1 \pm v/c) / 2 \right\}^{1/2} \quad (۶-۳۰)$$

که v سرعت ذره (مسألهٔ ۶-۱) می‌باشد. در حد انرژی بالا $E \gg m$ ، سرعت $v \rightarrow c$ می‌کند. تنها جمله‌های بارز در بسط‌های میدان که در این حد باقی می‌مانند، عبارتند از

$$\psi_L = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \left(b_{\mathbf{p}-} |-\rangle e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)} + d_{\mathbf{p}+}^* |-\rangle e^{i(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}+Et)} \right) \quad (۶-۳۱)$$

$$\psi_R = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \left(b_{\mathbf{p}+} |+\rangle e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)} + d_{\mathbf{p}-}^* |+\rangle e^{i(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}+Et)} \right) \quad (۶-۳۲)$$

در این حد، ψ_L و ψ_R کاملاً مستقل از یکدیگر هستند: ψ_L تنها ذره‌هایی با هلیسیتی منفی و پاد ذره‌هایی با هلیسیتی مثبت را، و ψ_R تنها ذره‌ها با هلیسیتی مثبت و پاد ذره‌ها با هلیسیتی منفی را، دربر می‌گیرد.

از آنجا که نوترینوها از نظر الکتریکی خنثی هستند، در آزمایش‌هایی که هدف آن بررسی برهمکنش ضعیف به تنهایی باشد، بکار می‌روند. در فصل ۹ خواهیم دید که در برهمکنش ضعیف، طبیعت تنها ψ_L را بکار می‌برد. انرژی نوترینوها معمولاً چندین مرتبه بزرگتر از جرم آنهاست، به گونه‌ای که در عمل تنها نوترینوها با هلیسیتی منفی و پادنوترینوها با هلیسیتی مثبت دیده می‌شوند. تاکنون مشخص نشده است که آیا نوترینوی با هلیسیتی مثبت «که دیدن آن مشکل است» با پادنوترینوی با هلیسیتی مثبت «که دیدن آن آسان است» یکی است یا خیر؟

مسأله‌ها

۱-۶ با بهنجارش ψ_+ که از معادلهٔ (۶-۱۴) به دست می‌آید، نشان دهید که

$$\psi_+^\dagger \psi_+ = \cosh \theta = E / m$$

(توجه کنید که این بهنجارش معمولی در مکانیک کوانتمی تک ذره نیست.)

نشان دهید احتمال آنکه این حالت با هلیسیتی مثبت در مد راستگرد یافت شود، برابر است با

$$e^{\theta} / (2 \cosh \theta) = (1 + v/c) / 2$$

و احتمال اینکه در مد چپگرد پیدا شود، برابر با $(1 - v/c)/2$ می‌باشد. برای ψ_- نتایج چگونه خواهد بود؟

۲-۶ نشان دهید حالت با هلیسیتی مثبت و انرژی منفی در معادله (۶-۱۸) به احتمال $(1 + v/c)/2$ در مد چپگرد پیدا می‌شود.

۳-۶ نشان دهید

$$u_{\pm}^{\dagger}(\mathbf{p})u_{\pm}(\mathbf{p}) = v_{\pm}^{\dagger}(\mathbf{p})v_{\pm}(\mathbf{p}) = E_p/m$$

$$u_{\pm}^{\dagger}(\mathbf{p})u_{\mp}(\mathbf{p}) = v_{\pm}^{\dagger}(\mathbf{p})v_{\mp}(\mathbf{p}) = 0$$

$$u_{\pm}^{\dagger}(\mathbf{p})v_{\pm}(-\mathbf{p}) = v_{\pm}^{\dagger}(-\mathbf{p})u_{\pm}(\mathbf{p}) = u_{\pm}^{\dagger}(\mathbf{p})v_{\mp}(-\mathbf{p}) = v_{\mp}^{\dagger}(-\mathbf{p})u_{\pm}(\mathbf{p}) = 0$$

این نتایج در مسأله ۴-۶ سودمند هستند.

۴-۶ با بکارگیری بسط موج تخت (۶-۲۴) و مؤلفه‌های تانسور انرژی-تکانه (۶-۲۲) و (۶-۲۳)، نشان دهید که انرژی و تکانه موج ψ از روابط (۶-۲۵) و (۶-۲۶) به دست می‌آید.

۵-۶ راستای تکانه \mathbf{p} را با مختصات قطبی θ, ϕ در نظر بگیرید

$$\hat{\mathbf{p}} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

نشان دهید که

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

و حالت‌های اسپینی پائولی

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) e^{-i\phi} \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

ویژه‌حالت‌های اسپینی (۶-۱۴) و (۶-۱۵) هستند. فاز کلی نامشخص است.

در این فصل لاگرانژی را برای نظریه میدانی می‌نویسیم که در آن ذره‌ها و پاد ذره‌های باردار الکتریکی دیراکی، مانند الکترون‌ها و پوزیترون‌ها، با هم برهمکنش می‌کنند. برای آنکه ارجاع به دیگر کتاب‌ها و نوشتارها آسان گردد، و همچنین برای رعایت اختصار، اسپینورهای چهارمؤلفه‌ای دیراکی و ماتریس‌های γ^μ را که در بخش ۵-۵ معرفی کردیم، بکار می‌بریم.

۱-۷ چگالی احتمال و جریان احتمال

در فصل‌های پیشین دیدیم که چگونه قانونهای پایستگی به تقارن لاگرانژی مربوط می‌شود. چگالی لاگرانژی (۵-۳۱)

$$L = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$$

تحت تبدیل زیر ناورداست.

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha} \psi(x) \quad (1-7)$$

که α فاز ثابت می‌باشد. این تبدیل‌ها تشکیل گروه $U(1)$ را می‌دهند (ر.ک. پیوست ب). و به آنها تبدیل‌های جهانی^۱ می‌گویند. یعنی در هر نقطه از فضا و زمان یکسان هستند.

اگر تغییر بسیار کوچک مستقل از فضا و زمانی را در α به صورت $\alpha \rightarrow \alpha'(x) = \alpha + \delta(x)$ بدهیم، و اگر میدان‌ها در معادله‌های میدان صدق کنند، باید وردش مرتبه اول متناظر آن δS در کنش برابر صفر باشد، زیرا برای میدان‌های واقعی S پایا می‌باشند. این وردش از اثر عملگرهای ∂_μ بر $e^{-i\delta\alpha(x)}$ ناشی می‌شود، به گونه‌ای که

$$\delta S = \int \bar{\psi} \gamma^\mu \psi i \partial_\mu e^{-i\delta\alpha} d^4x = \int \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \partial_\mu (\delta\alpha) d^4x$$

تا مرتبه اول، با انتگرال‌گیری جزء به جزء، می‌رسیم

$$\delta S = - \int \partial_\mu [\bar{\psi} \gamma^\mu \psi] \delta\alpha d^4x$$

که تنها اگر

$$\partial_{\mu}(\bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi) = 0 \quad (۲-۷)$$

باشد، مقدار انتگرال به ازای هر تابع اختیاری $\delta \alpha(x)$ صفر می شود.

در هر نقطه x از فضا و زمان، $\bar{\psi}(x) \gamma^{\mu} \psi(x)$ همانند چاربردار پادوردا تبدیل می یابد (بخش ۵-۵) و می توانیم میدان پادوردا را به صورت زیر تعریف کنیم

$$j^{\mu}(x) = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi = (P(x), \mathbf{j}(x)) \quad (۳-۷)$$

که $P(x) = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^{\dagger}(\gamma^0)^{\dagger} \psi = \psi_a^* \psi_a = \sum_{a=1}^f |\psi_a|^2$ می باشد. پس (۲-۷) شکل آشنای زیر را به خود می گیرد.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (۴-۷)$$

اگر $P(x)$ را چگالی احتمال ذره مربوط به تابع موج $\psi(x)$ و $\mathbf{j}(x)$ جریان احتمال بدانیم، عبارت (۴-۷) پایستگی موضعی ذره را بیان می کند. با انتگرال گیری روی کل فضا، و با استفاده از قضیه واگرایی، به ازای میدان هایی که در فاصله های دور صفر می شوند، داریم

$$\frac{d}{dt} \int P d^3 \mathbf{x} = 0$$

در نتیجه کمیت زیر

$$\int P(t, \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = \int \psi^{\dagger} \psi d^3 \mathbf{x}$$

ثابت و مستقل از زمان می باشد. با اختیار $\psi(x)$ به صورت تابع موجی، مقدار ثابت برابر با یک می شود، و در می یابیم که تابع موجی که یک بار بهنجار شده باشد، بهنجار برجای می ماند. در فصل ۸ خواهیم دید که در نظریه میدان دوبار کوانتیزه شده، $\int P(t, \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}$ عملگری است که تعداد ذره ها را منهای تعداد پادذره ها می شمارد و بنابراین این عدد پایسته است.

می توانستیم عبارت (۲-۷) را از معادله میدان به دست بیاوریم، اما ابزاری که در اینجا معرفی شد، و به وسیله آن قانون پایستگی به صورت پیامدی از تقارن $U(1)$ گردید می شود (۱-۷)، هر دو برآورنده و مفید می باشند.

۲-۷ معادله دیراک با میدان الکترومغناطیسی

در مکانیک کلاسیک، همیلتونی برای ذره ای با بار q که در میدان الکترومغناطیسی خارجی حرکت می کند، با پتانسیل های الکترومغناطیسی (ϕ, \mathbf{A}) ، تعیین می شوند، و از همیلتونی ذره آزاد با جایگذاری در (۳-۸) به دست می آید

$$E \rightarrow E - q\phi, \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - q\mathbf{A}$$

یا، هم ارز آن

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu \quad (5-7)$$

که $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ چاربردار انرژی تکانه ذره می باشد، برقرار باشد. (ر.ک. مسأله ۴-۶ و ۴-۷)، با استفاده از قاعده کوانتش $p_\mu \rightarrow i\partial_\mu$ و تبدیل پیمانه ای (۵-۷)، معادله دیراک در حضور میدان الکترومغناطیسی باید به صورت زیر در بیاید

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu) - m]\psi = 0 \quad (6-7)$$

و در چگالی لاگرانژی نیز باید جایگذاری متناظر برقرار باشد.

با استفاده از (۴-۱۰) و (۵-۳۱)، چگالی لاگرانژی میدان دیراکی، به همراه چگالی لاگرانژی میدان الکترومغناطیسی، با منابع جریان بار خارجی J^μ را به دست می آوریم.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[\gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu) - m]\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \quad (7-7)$$

$$= \bar{\psi}[\gamma^\mu i\partial_\mu - m]\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (J^\mu + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu$$

لاگرانژی تحت تبدیل $\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha}\psi(x)$ با ثابت α ناورداست، و همین امر همان گونه که پیشتر دیدیم، منجر به پایستگی ذره می شود.

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (8-7)$$

وردش میدان های A_μ در کنش، همانند بخش ۴-۲، منجر به معادلات ماکسول، با چگالی جریان-بار می شود.

$$J^\mu + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = J^\mu + qj^\mu \quad (9-7)$$

در (۷-۸) و (۷-۹)، $j^\mu(x)$ جریان پایسته چگالی شمار ذره ها (پاد ذره ها هم به صورت منفی شمرده شده اند)، و qj^μ جریان پایسته چگالی بار می باشد. بنابراین چگالی لاگرانژی (۷-۷) میدان الکترومغناطیسی ناشی از جریان ذره باردار و هم میدان ناشی از منابع خارجی را در بر می گیرد.

با اختیار $-e =$ بار الکترون $= q$ ، و m جرم الکترون، لاگرانژی (۷-۷) پس از کوانتیزه کردن، لاگرانژی الکترو دینامیک کوانتمی می باشد. با در نظر گرفتن توزیع جریان بار خارجی $J^\mu(x)$ ناشی از هسته اتم ها، و احتساب دینامیک هسته ها به صورت مجمعی از ذرات نقطه ای، رابطه (۷-۷) لاگرانژی پایه ای است که بخش زیادی از شیمی و دانش مواد را توصیف کرده و توضیح می دهد. برخی از کامیابی های بارز الکترو دینامیک کوانتمی را در فصل بعدی مرور خواهیم کرد.

۷-۳ تبدیل‌های پیمانه‌ای و تقارن

در فصل ۴ تأکید کردیم که چارپتانسیل A_μ یگانه نیست. یعنی پس از تبدیل‌های پیمانه‌ای، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی فیزیکی بدون تغییر به دست می‌آید

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x)$$

که $\chi(x)$ تابع دلخواهی از فضا و زمان می‌باشد.

اگر ψ جواب معادلهٔ دیراک با چارپتانسیل A_μ باشد، جواب متناظر آن در پیمانهٔ همراه با چارپتانسیل A'_μ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-iq\chi} \psi$$

تحقیق درستی این امر به سادگی امکان‌پذیر می‌باشد

$$\begin{aligned} (i\partial_\mu - q A'_\mu)\psi' &= e^{-iq\chi} \{i\partial_\mu + q \partial_\mu \chi - q(A_\mu + \partial_\mu \chi)\} \psi \\ &= e^{-iq\chi} (i\partial_\mu - q A_\mu)\psi \end{aligned}$$

در نتیجه معادلهٔ دیراک (۶-۷) هم‌ارز معادلهٔ زیر می‌باشد

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - q A'_\mu) - m]\psi' = 0$$

تبدیل‌های زیر:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x) \quad (۷-۱۰ \text{ الف})$$

$$\psi(x) \rightarrow e^{-iq\chi(x)} \psi \quad (۷-۱۰ \text{ ب})$$

حالت کلی تبدیل پیمانه‌ای موضعی را می‌سازد.

چگالی جریان بار $\psi^\dagger \gamma^\mu \psi = q j^\mu$ ، و در نتیجه کنش ایجاد کنندهٔ آن $\partial_\mu J^\mu = 0$ ، نیز تحت این تبدیل ناورداست (همانند بخش ۴-۳). شایان ذکر است که فاز میدان دیراکی باردار، مثل میدان دیراکی الکترون، فرآوردهٔ فرعی پیمانه، بدون هیچ معنای فیزیکی می‌باشد. یعنی نمی‌توان فاز را اندازه‌گیری کرد.

می‌توانیم به این تبدیل از دیدگاه دیگری نیز بنگریم. لاگرانژی (۷-۷) تحت تبدیل جهانی $U(1)$ ، یعنی $\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\alpha} \psi$ ناوردا می‌باشد که α ثابت است. اگر اکنون در پی لاگرانژی باشیم که تحت تبدیلی همانند همین تبدیل اما موضعی، یعنی $\psi \rightarrow \psi'(x) = e^{-iq\chi} \psi(x)$ ناوردا باشد، $\chi(x)$ تابعی دلخواه از فضا و مکان است، مجبوریم که میدان پیمانه‌ای A_μ ، با ویژگی تبدیلی $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi$ ، را معرفی کنیم تا جمله‌های اضافی را که به وجود می‌آید، خنثی کند.

در این دیدگاه، میدان الکترومغناطیسی به صورت پیامدی از ناوردایی لاگرانژی تحت تبدیل تقارن موضعی، پدیدار می‌شود. این دیدگاه را در فصل‌های پس از این گسترش خواهیم داد.

۷-۴ مزدوج بار

مزدوج باری عمل جایگذاری پادماده به جای ماده است، در نتیجه مثلاً الکترون پادذره پوزیترون بوده، و خود پوزیترون ذره شناخته می شود. اگر کیهان بجای ماده، دربردارنده پادماده باشد، این وضعیت یک دیدگاه طبیعی می بود. این جابجایی با جایگذاری مزدوج مختلط میدان دیراکی به جای خود میدان دیراکی، به دست می آید. جواب انرژی مثبت معادله میدان را که دارای ضریب فاز e^{-iEt} است، در نظر بگیرید. پس از مزدوج مختلط کردن، این جواب دارای ضریب فاز e^{iEt} می گردد، و بنا بر قرارداد استاندارد فازها، چنین جوابی، جواب انرژی منفی می باشد. در تفسیر «حفره» جواب های انرژی منفی مربوط به پادذره ها می شوند. اما تحت عمل مزدوج مختلط، $\bar{\psi}$ ناوردا باقی نمی ماند. برای نشان دادن این تقارن، به عملیات بیشتری نیاز است.

مزدوج مختلط معادله دیراک (۶-۷) را می گیریم:

$$[(\gamma^\mu)^* (-i\partial_\mu - q A_\mu) - m]\psi^* = 0$$

در نمایش کایرال $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ حقیقی اند و $(\gamma^2)^* = -\gamma^2$ می باشند. با ضرب معادله بالا در γ^2 و استفاده از ویژگی های ماتریسهای γ به نتیجه زیر می رسیم.

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu + q A_\mu) - m](\gamma^2 \psi^*) = 0$$

یا

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - q A_\mu^c) - m](\gamma^2 \psi^*) = 0$$

بنابراین اگر ψ جواب مثبت انرژی معادله دیراک، به ازای ذره حامل بار q باشد، $(\gamma^2 \psi^*)$ جواب انرژی منفی در میدان باری مزدوج آن $A_\mu^c = -A_\mu$ می باشد، که در بخش ۴-۶ معرفی گردید. در گزینش جزئیات این تبدیل آزادی داریم. میدان مزدوج باری ψ^c را به صورت زیر

$$\psi^c = -i\gamma^2 \psi^* \quad (۷-۱۱ الف)$$

یا، بر حسب اسپینورهای دو مؤلفه ای زیر

$$\psi_L^c = -i\sigma^2 \psi_R^* \quad \psi_R^c = i\sigma^2 \psi_L^* \quad (۷-۱۱ ب)$$

تعریف خواهیم کرد.

با استفاده از $(\gamma^2)^2 = -\mathbf{I}$ ، $(\gamma^2)^* = -\gamma^2$ ، می توانیم تبدیل (۷-۱۱ الف) را معکوس کرده و به رابطه

زیر برسیم

$$\psi = -i\gamma^2 (\psi^c)^* \quad (۷-۱۲ الف)$$

یا

$$\psi_L = -i\sigma^2 (\psi_R^c)^* \quad \psi_R = i\sigma^2 (\psi_L^c)^* \quad (۷-۱۲ ب)$$

سپس (با توجه به اینکه $(\gamma^\nu)^\dagger = -\gamma^\nu$) درمی یابیم که

$$\psi^\dagger = -i(\psi^c)^T \gamma^\nu \quad (۷-۱۳ الف)$$

یا

$$\psi_L^\dagger = i(\psi_R^c)^T \sigma^\nu, \quad \psi_R^\dagger = -i(\psi_L^c)^T \sigma^\nu \quad (۷-۱۳ ب)$$

اکنون می خواهیم دریابیم که جمله های گوناگون در چگالی لاگرانژی (۷-۷) چگونه تغییر می کنند. عبارت زیر را در نظر بگیرید

$$\bar{\psi} \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = -(\psi^c)^T \gamma^\nu \gamma^0 \gamma^\nu (\psi^c)^* = -(\psi^c)^T \gamma^0 (\psi^c)^* \quad (\text{با بهره گیری از ویژگی های ماتریس های } \gamma)$$

برای نمایش ناوردایی L باید تا فصل ۸ چشم به راه بمانیم. میدان های اسپینوری هم، همانند عملگرها پادجابجا می شوند: اگر حاصل ضرب دو میدان را با هم جابجا کنیم، علامت منفی ایجاد می گردد. همانند $\psi_a^* \psi_b = -\psi_b^* \psi_a$. بنابراین در ترانهاده گیری از آخرین عبارت بالا، علامت منفی را هم وارد کردیم و در نتیجه شکل جمله اصلی یازبایی شد:

$$\bar{\psi} \psi = (\bar{\psi}^c) \psi^c \quad (\text{زیرا } (\gamma^0)^T = \gamma^0 \text{ است.})$$

به همین ترتیب، بقیه جمله ها هم علامت منفی به دست می آورند:

$$\bar{\psi} \gamma \psi = -(\psi^c)^T \gamma^\nu \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^\nu (\psi^c)^* = (\psi^c)^\dagger (\gamma^\nu \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^\nu)^T (\psi^c)$$

اما، خواننده می تواند اثبات کند که

$$(\gamma^\nu \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^\nu)^T = -\gamma^0 \gamma^\mu$$

در نتیجه

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = -(\bar{\psi}^c) \gamma^\mu (\psi^c)$$

در نهایت،

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \gamma^\mu i \partial_\mu \psi &= -(\bar{\psi}^c) \gamma^\nu \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^\nu i \partial_\mu (\psi^c)^* = i \partial_\mu (\psi^c)^\dagger (\gamma^\nu \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^\nu)^T (\psi^c) \\ &= -i \partial_\mu (\psi^c)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu (\psi^c) \end{aligned}$$

با انتگرال گیری جزء به جزء از کنش، می توانیم به جای جمله آخر، $(\bar{\psi}^c) \gamma^\mu i \partial_\mu (\psi^c)$ را در چگالی لاگرانژی جایگزین کنیم.

می توان دریافت که شکل لاگرانژی پس از مزدوج بار، درست همان شکل پیش از انجام دادن مزدوج بار می باشد، به شرطی که پتانسیل های مزدوج بار $A_\mu^c = -A_\mu$ به صورت $A_\mu^c = -A_\mu$ (همانند بخش ۴-۶) باشد و هر چگالی بار خارجی J_μ هم علامت بار را تغییر دهد. در ماده معمولی، که ذره های دیراکی الکترون

هستند، J_μ خارجی از هسته‌های اتم ناشی می‌شود، و این جریان‌ها تحت مزدوج بار هم تغییر علامت می‌دهند.

۵-۷ الکترو دینامیک میدان باردار اسکالر

در بخش ۳-۵ معادله کلاین گوردون را معرفی کردیم

$$-\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi = 0$$

که حرکت ذره اسکالر بدون باری را توصیف می‌کند. معادله متناظر آن برای ذره اسکالر باردار از معادله کلاین-گوردون، با جایگذاری (۵-۷)، $i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - q A_\mu$ ، به دست می‌آید که در نتیجه منجر به معادله زیر می‌شود

$$[(i\partial_\mu - q A_\mu)(i\partial^\mu - q A^\mu) - m^2]\Phi = 0 \quad (14-7)$$

لزوماً یک جواب معادله (۱۴-۷) مختلط است. بنابراین ذره بارداری با اسپین صفر در میدانی الکترومغناطیسی، باید با تابع موجی مختلط و دو مؤلفه‌ای $\sqrt{2}$ $\Phi = (\phi_1 + i\phi_2)$ توصیف شود. در بخش ۳-۷ میدان‌های مختلط اسکالر را معرفی کردیم. چگالی لاگرانژی که منجر به (۱۴-۷) شد و ناوردای لورنتسی هم می‌باشد، عبارتست از

$$\mathcal{L} = -[(i\partial_\mu + q A_\mu)\Phi^*][(i\partial^\mu - q A^\mu)\Phi] - m^2 \Phi^* \Phi \quad (15-7)$$

\mathcal{L} تحت تبدیل پیمانه‌ای موضعی، $\Phi \rightarrow e^{-iq\chi}\Phi$ ، ناوردا است. توجه کنید، از آنجا که ذرات با اسپین صفر بوزون هستند، میدان‌های Φ و Φ^* با هم جابجا می‌شوند.

با گرفتن مزدوج مختلط معادله (۱۴-۷)، درمی‌یابیم که اگر $\Phi(x)$ جوابی برای ذره حامل بار q در میدانی خارجی باشد، آنگاه $\Phi^*(x)$ جواب برای ذره حامل بار $-q$ می‌باشد. میدان $\Phi^c(x) = \Phi^*(x)$ مزدوج باری Φ است. اگر پتانسیل‌های مزدوج باری دوباره به گونه‌ای تعریف شوند که $A_\mu^c = -A_\mu$ باشد، چگالی لاگرانژی (۱۵-۷) تحت مزدوج بار، $\Phi \rightarrow \Phi^c$ ، ناورداست.

مزون‌های π^+ و π^- مرکب دارای اسپین صفر و ذره‌هایی هستند که حرکت کلی آنها با معادله گسترش یافته Φ و Φ^* (۱۴-۷) توصیف می‌شود. در بحث‌های پدیدارشناختی فصل ۹ با این ذره‌ها و میدان‌های Φ و Φ^* برخورد خواهیم کرد.

۶-۷ ذرات در انرژی‌های پایین و ممان مغناطیسی دیراکی

در میدان الکترومغناطیسی، معادله‌های جفت شده دیراکی (۵-۱۰) به صورت زیر در می‌آید

$$(i\partial_0 - qA_0)\psi_L - \sigma^i (i\partial_i - qA_i)\psi_L - m\psi_R = 0 \quad (16-7)$$

$$(i\partial_0 - qA_0)\psi_R + \sigma^i (i\partial_i - qA_i)\psi_R - m\psi_L = 0$$

که σ^i ماتریس‌های اسپین پائولی هستند.

از بخش ۶-۱، درمی‌یابیم که جواب‌های معادله دیراک، که متناظر با ذره‌هایی در انرژی‌های پایین باشد، دارای ویژگی $\psi_L \approx \psi_R$ هستند. نشان خواهیم داد که در انرژی‌های پایین، تابع موج دو مؤلفه‌ای

$$\phi = e^{imt} (\psi_L + \psi_R) \quad (17-7 \text{ الف})$$

تناظر بسیار نزدیکی با تابع موج شرودینگر برای ذره دارد. ضریب e^{imt} وارد شده است، تا همانند معادله شرودینگر، انرژی جرم سکون ذره حذف گردد. اگر ترکیب متعامد را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\chi = e^{imt} (\psi_L - \psi_R) \quad (17-7 \text{ ب})$$

سپس با اضافه و کم کردن معادله‌های (۱۶-۷)، جفت معادله‌هایی هم‌ارز با معادله‌های زیر به دست می‌آوریم:

$$(i\partial_0 - qA_0)\phi - \sigma^i (i\partial_i - qA_i)\chi = 0 \quad (18-7)$$

$$(i\partial_0 - qA_0 + 2m)\chi - \sigma^i (i\partial_i - qA_i)\phi = 0$$

اگر بجای جمله $(i\partial_0 - qA_0 + 2m)\chi$ ، جمله χ را قرار دهیم، معادله شرودینگر به دست می‌آید. این تقریب در صورتی معقول و قابل قبول است که، انرژی پتانسیل کولنی qA_0 و انرژی جنبشی در مقایسه با جرم سکون ذره کوچک باشند. پس داریم

$$\chi = (\sqrt{2m})\sigma^i (i\partial_i - qA_i)\phi$$

و با جایگذاری داریم

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\sigma^i (i\partial_i - qA_i)\sigma^j (i\partial_j - qA_j) + qA_0 \right] \phi \quad (19-7)$$

ماتریس‌های اسپین پائولی دارای ویژگی زیر هستند

$$\sigma^i \sigma^j = i\varepsilon_{ijk}\sigma^k + \delta_{ij}\sigma^0$$

و بنا بر ویژگی پادتقارنی ε_{ijk} داریم

$$\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j\phi = 0, \quad \varepsilon_{ijk}A_iA_j = 0$$

همچنین $\varepsilon_{ijk}[\partial_i(A_j\phi) + A_i\partial_j\phi] = \varepsilon_{ijk}[\partial_i(A_j\phi) - A_j\partial_i\phi] = \varepsilon_{ijk}(\partial_iA_j)\phi$ و با یادآوری آنکه $\varepsilon_{ijk}(\partial_iA_j) = B_k = -B^k$ است، میدان مغناطیسی \mathbf{B} به دست

می‌آید. با بهره‌گیری از این نتیجه‌ها، (۱۹-۷)، را به صورت زیر می‌نویسیم

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} (-i\nabla - q \mathbf{A})^2 + q A_0 - \left(\frac{q \sigma}{2m} \right) \cdot \mathbf{B} \right] \phi \quad (20-7)$$

بدون جمله $-\left(\frac{q \sigma}{2m} \right) \cdot \mathbf{B}$ ، عبارت بالا معادله شرودینگر برای ذره‌ای باردار در میدان مغناطیسی می‌بود. این جمله اضافی را انرژی در میدان مغناطیسی ممان مغناطیسی ذاتی مربوط به ذره دیراک می‌دانیم. این هم یک پیامد شایان توجه دیگر از معادله دیراک است. برای الکترون با $q = -e$ ، ممان مغناطیسی همان مگنتون بوهر $\mu_B = e \hbar / 2m$ می‌باشد که ناهمسو با اسپین الکترون است. مقدار مشاهده شده برای این ممان مغناطیسی بهتر از ۱٪ با نظریه سازگار است (ر.ک. بخش ۸-۵).

با تقریب (۲۰-۷) ممان مغناطیسی هیچ اهمیتی در میدان الکترواستاتیکی خالص A_0 ندارد. در تقریب‌های بهتر، یا حل مستقیم معادله دیراک، جمله‌های «جفت‌شدگی اسپین - مدار» پدیدار می‌شود، که در فیزیک اتمی و دانش مواد دارای اهمیت است.

مسئله‌ها

۱-۷ با بکارگیری بسط موجی (۶-۲۴)، نشان دهید که می‌توان شمار پایسته ذره‌ها را به صورت زیر نوشت

$$\int P(x^0, \mathbf{x}) d^3x = \int \psi^\dagger \psi d^3x = \sum_{p, \epsilon} (b_{p, \epsilon}^* b_{p, \epsilon} + d_{p, \epsilon} d_{p, \epsilon}^*)$$

۲-۷ نشان دهید که عمل مزدوج بار بر جواب‌های انرژی مثبت (۷-۱۲) و (۷-۱۳) اثر گذاشته و منجر به جواب‌های انرژی منفی (۷-۱۷) می‌گردد.

۳-۷ نشان دهید اگر میدان‌های نوترینو را پادجایجا شونده در نظر گرفته و از جرم نوترینو چشم‌پوشی کنیم، چگالی لاگرانژی نوترینو

$$\mathcal{L} = i \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L$$

تحت عمل ترکیبی پاریتی و مزدوج بار ناورد می‌باشد. (به معادله‌های (۵-۲۶) و (۵-۲۷) توجه کنید.)

۴-۷ نشان دهید که $i \sigma^2 \psi_R^*$ تحت تبدیل‌های لورنتسی، همانند اسپینوری چپگرد تبدیل می‌یابد.

۵-۷ معادله کلین-گوردون (۷-۱۴) را از چگالی لاگرانژی (۷-۱۵) به دست آورید.

۶-۷ با بهره‌گیری از بخش ۷-۱، نشان دهید که تقارن جهانی $U(1)$ یعنی $\Phi \rightarrow e^{i\alpha} \Phi$ ، برای چگالی لاگرانژی (۷-۱۵) منجر به جریان چگالی باری پایسته می‌شود

$$q j^\mu = iq [\Phi^* (\partial^\mu \Phi) - (\partial^\mu \Phi^*) \Phi] - 2q^2 A^\mu \Phi^* \Phi$$

(توجه کنید، برخلاف نتیجه (۷-۹) برای لاگرانژی دیراک، جریان میدان مختلط اسکالر در بردارنده جمله‌ای متناسب با A^μ می‌باشد.)

۷-۷ نشان دهید که جواب‌های انرژی مثبت (۶-۱۲) و (۶-۱۳) برای معادله دیراک

$$q j^\mu = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = -e (\cosh \theta, 0, 0, \sinh \theta) = -(e E / m) (1, 0, 0, v)$$

و همچنین به‌ازای جواب‌های «انرژی منفی» (۶-۱۷)

$$q j^\mu = -(e E / m) (1, 0, 0, v)$$

با تفسیر دیراکی، حفره‌ای که با حذف کردن این حالت از دریا باقی می‌ماند، متناظر با ذره حامل بار e می‌باشد که با سرعت v در راستای محور z حرکت می‌کند.

۸-۷ نشان دهید که پس از عمل مزدوج بار، پروتون دارای بار منفی و الکترون دارای بار مثبت می‌شود.

۹-۷ پتانسیل‌های الکترومغناطیسی چگونه تحت عمل وارونی زمان، $t \rightarrow t' = -t$ ، تبدیل می‌یابند؟ نشان دهید با فرض آنکه $\psi(t)$ جواب معادله دیراک باشد، $\gamma^1 \gamma^2 \psi^*(t)$ جواب معادله وارون زمانی معادله دیراک می‌باشد.

۱۰-۷ نشان دهید، برای ذره دیراکی در میدان مغناطیسی \mathbf{B} که از پتانسیل برداری \mathbf{A} به‌دست می‌آید، هم ψ_L و هم ψ_R در معادله زیر صدق می‌کنند

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (-i\nabla - q \mathbf{A})^2 - m^2 + q \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] \psi = 0$$

توجه کنید که این معادله با معادله کلین-گوردون برای ذره اسکالر باردار در میدان مغناطیسی، به‌اندازه جمله $q \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$ تفاوت می‌کند.

۱۱-۷ با بهره‌گیری از تبدیل‌های پاریتی (۴-۱۸) و (۵-۲۷)، نشان دهید که چگالی لاگرانژی (۷-۷) تحت بازتاب فضایی ناورد است.

اکنون به کوانتیزه کردن میدان‌های الکترودینامیک، که در فصل ۷ معرفی کردیم، می‌پردازیم. تا کنون با میدان الکترودینامیکی و میدان دیراکی، به مثابه میدان‌های کلاسیکی، رفتار می‌کردیم (گو اینکه در فصل ۷ مجبور شدیم که تصدیق کنیم میدان‌های دیراکی با هم یادجایجا می‌شوند). در فرآیند کوانتیزه کردن، این میدان‌ها تبدیل به میدان‌های عملگری می‌شوند، که بر حالت‌های سیستم اثر می‌گذارند. انرژی کل میدان کلاسیک عملگر همیلتونی می‌شود، که دینامیک سیستم را تعیین می‌کند. از فرمول‌بندی عملگرهای نابودی و آفرینش بهره خواهیم برد؛ این فرمول‌بندی را برای خوانندگانی که با این فرمول‌بندی کاملاً آشنا نیستند، در پیوست ج به اختصار مرور کرده‌ایم.

الکترودینامیک کوانتمی، یا QED، بخش مهمی از مدل استاندارد می‌باشد. همچنین این نظریه، شالوده درک ما از جهان مادی در سطح اتمی است. اما در اینجا نمی‌خواهیم به پیچیدگی‌های فنی محاسبه‌های مربوط به الکترون‌ها و اتم‌ها در محیط مادی بپردازیم. در این فصل تنها وضعیت‌های بسیار ساده‌ای از فوتون‌های برهم‌کنش‌کننده، الکترون‌ها و پوزیترون‌ها را در نظر می‌گیریم. محدوده انرژی مورد بحث ما آنقدر بالاست که برای سیستم مقید الکترون‌ها و پوزیترون‌ها بتوان آن را نادیده گرفت. در چنین وضعیت‌هایی، تقریب میدان آزاد برای QED زمینه مناسبی فراهم می‌آورد که بتوانیم برهم‌کنش ذره‌ها را به شکل اختلال‌هایی بر رفتار حالت آزاد آنها بررسی و درک کنیم.

این کتاب درباره نظریه کوانتمی میدان نیست، و ناگزیر شیوه بیان نظریه اختلال در این فصل همراه با ارائه دیدی کلی و بدون ارائه جزئیات خواهد بود. اما قصد آن است که تلاش شود تا بینشی از چگونگی انجام دادن محاسبه‌ها، که در فصل‌های آتی بیان می‌شوند، به دست آید. تلاش خواهیم کرد لزوم انجام دادن بازهنجارش^۱ را، که مفهومی مهم در فرمول‌بندی مدل استاندارد است، توضیح دهیم.

۸-۱ کوانتیزه کردن میدان بوزونی و فرمیونی

ساده‌ترین میدان کلاسیکی که معرفی می‌کنیم، میدان مربوط به ذره اسکالر جرم‌دار آزاد است. چنین میدانی در معادله کلین-گوردون (۳-۱۹) صدق می‌کند. تا کنون در بسط میدان (۳-۲۱)، دامنه موج‌های

کلاسیکی a_k ، a_k^* را اعداد مختلط معمولی در نظر می‌گیریم. اکنون نظریه را کوانتیزه می‌کنیم. a_k را عملگر نابودی می‌دانیم و در نتیجه a_k^* عملگر آفرینش، مزدوج هرمیتی a_k ، می‌شود. این عملگرها از رابطه‌های جابجایی زیر پیروی می‌کنند.

$$[a_k, a_{k'}^*] = \delta_{kk'}, [a_k, a_{k'}] = 0, [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0 \quad (1-8)$$

انرژی کل میدان (۳-۳) به صورت عملگر همیلتونی در می‌آید

$$H = \sum_k a_k^\dagger a_k \omega_k = \sum_k N_k \omega_k \quad (2-8)$$

که $\omega_k = \sqrt{(k^2 + m^2)}$ می‌باشد و از رابطه‌های جابجایی به دست می‌آید. $N_k = a_k^\dagger a_k$ هم عملگر عددی (پیوست ج) می‌باشد. همانند فصل ۳ در این فصل همه ذره‌ها را در مکعبی به طول l و حجم $V = l^3$ مقید کرده و شرایط مرزی دوره‌ای را بکار می‌بریم. با تعریف همیلتونی به شکل (۸-۲)، به جای شکل مقارن‌تر زیر

$$\frac{1}{V} \sum_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) \omega_k = \sum_k (N_k + \frac{1}{V}) \omega_k \quad (3-8)$$

از سهم‌های مربوط به «انرژی نقطه صفر» دست کشیده و در نتیجه انرژی حالت خلا $|0\rangle$ ، برابر با ۰ می‌شود. ویژه حالت‌های انرژی برانگیخته همیلتونی را می‌توان به صورت مجمعی از ذره‌ها (مثلاً مزون‌های π^0 ، یا ذرات هیگز) با تعداد صحیح n_k ذره در حالت k در نظر گرفت که n_k ویژه مقدار عملگر عددی N_k می‌باشد. این ذره‌ها از آمار بوز اینشتین پیروی می‌کنند.

پیمانه تابشی در بخش ۴-۱، میدان الکترومغناطیسی در فضای آزاد بسیار همانند میدان کلین گوردون کوانتیزه می‌شود. دامنه موج‌های $a_{k\alpha}$ و $a_{k\alpha}^*$ که در بسط (۴-۱۵) پدیدار گشتند، به صورت عملگرهای نابودی و آفرینش $a_{k\alpha}$ و $a_{k\alpha}^\dagger$ در می‌آیند. انرژی کل میدان (۴-۲۵) به صورت عملگر همیلتونی در می‌آید

$$H_{em} = \sum_{k,\alpha} a_{k\alpha}^\dagger a_{k\alpha} \omega_k \quad (4-8)$$

که $\omega_k = |\mathbf{k}|$ می‌باشد. عملگرهای $a_{k\alpha}$ و $a_{k\alpha}^\dagger$ به ترتیب فوتون‌های بردار موج \mathbf{k} و قطبش α را نابود می‌کنند و می‌آفرینند. این عملگرها در رابطه‌های جابجایی زیر صدق می‌کنند

$$[a_{k\alpha}, a_{k'\alpha'}^*] = \delta_{kk'} \delta_{\alpha\alpha'}, [a_{k\alpha}, a_{k'\alpha'}] = 0, [a_{k\alpha}^\dagger, a_{k'\alpha'}^\dagger] = 0 \quad (5-8)$$

که $N(\mathbf{k}, \alpha) = a_{k\alpha}^\dagger a_{k\alpha}$ عملگر عددی می‌باشد. ویژه حالت‌های انرژی میدان تابشی متناظر با مجمعی از فوتون‌ها می‌باشد. فوتون‌ها، مانند ذره‌های اسکالر، از آمار بوز اینشتین پیروی می‌کنند (ر.ک.، مسأله ۸-۱). در کوانتیزه کردن میدان دیراکی مربوط به الکترون آزاد، دامنه موج‌ها پدیدار شده در بسط (۶-۲۴)، و

مزدوج مختلط آنها مانند عملگرهای $b_{p\varepsilon}$ و $b_{p\varepsilon}^\dagger$ الکترون‌هایی با تکانه \mathbf{p} ، و هلیسیتی ε نابود کرده و می‌آفرینند؛ $d_{p\varepsilon}$ و $d_{p\varepsilon}^\dagger$ پوزیترون‌هایی با تکانه \mathbf{p} ، و هلیسیتی ε نابود کرده و می‌آفرینند. الکترون‌ها و پوزیترون‌ها فرمیون هستند و این عملگرها در رابطه‌های پادجابجایی، مانند رابطه‌های زیر، صدق می‌کنند

$$b_{p\varepsilon} b_{p'\varepsilon'}^\dagger + b_{p'\varepsilon'}^\dagger b_{p\varepsilon} = \{b_{p\varepsilon}, b_{p'\varepsilon'}^\dagger\} = \delta_{pp'} \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \quad (6-8)$$

$$\{b_{p\varepsilon}, b_{p'\varepsilon'}\} = 0, \quad \{b_{p\varepsilon}^\dagger, b_{p'\varepsilon'}^\dagger\} = 0$$

عملگرهای $d_{p\varepsilon}$ و $d_{p\varepsilon}^\dagger$ هم از قانونهای مشابهی پیروی می‌کنند. همچنین همه عملگرهای الکترون با همه عملگرهای پوزیترون پادجابجا می‌شوند. ویژه‌مقدارهای عملگر عددی الکترون $N_p(\mathbf{p}, \varepsilon) = d_{p\varepsilon}^\dagger d_{p\varepsilon}$ و عملگر عددی پوزیترون $N_e(\mathbf{p}, \alpha) = b_{p\varepsilon}^\dagger a_{p\varepsilon}$ سازگار با اصل طرد پائولی (پیوست ج) است. الکترون‌ها و پوزیترون‌ها از آمار فرمی دیراک پیروی می‌کنند (ر.ک. مسأله ۸-۲).

پس از کوانتتش دوم، مشکل‌های مربوط به تفسیر معادله دیراک در حکم معادله موج تک ذره، از بین می‌رود. اکنون الکترون‌ها و پوزیترون‌ها موقعیت یکسانی دارند و دیگر نیازی به وجود «دریای» پر از حالت‌های انرژی منفی نمی‌باشد. انرژی کل میدان (۶-۲۵) به صورت همیلتونی زیر در می‌آید

$$H = \sum_{\mathbf{p}, \varepsilon} (b_{p\varepsilon}^\dagger b_{p\varepsilon} - d_{p\varepsilon} d_{p\varepsilon}^\dagger) E_p$$

با بکارگیری رابطه پادجابجایی، می‌توانیم به جای همیلتونی بالا، همیلتونی زیر را جایگزین کنیم

$$H = \sum_{\mathbf{p}, \varepsilon} (b_{p\varepsilon}^\dagger b_{p\varepsilon} + d_{p\varepsilon} d_{p\varepsilon}^\dagger - 1) E_p$$

از جمله ثابت انرژی نقطه صفر (که گفتیم برای الکترون‌ها، مقدار آن منفی است) صرف نظر کرده و همیلتونی زیر را برمی‌گیریم

$$H = \sum_{\mathbf{p}, \varepsilon} (b_{p\varepsilon}^\dagger b_{p\varepsilon} + d_{p\varepsilon} d_{p\varepsilon}^\dagger) E_p \quad (7-8)$$

پس انرژی حالت خلا صفر می‌باشد، و انرژی حالت‌های برانگیخته متناظر با مجموع الکترون‌ها و پوزیترون‌ها می‌باشد.

همانند مطالب گفته شده، تکانه میدان (۶-۲۶) به صورت عملگر تکانه در می‌آید.

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{p}, \varepsilon} (b_{p\varepsilon}^\dagger b_{p\varepsilon} + d_{p\varepsilon}^\dagger d_{p\varepsilon}) \mathbf{p} \quad (8-8)$$

شمار ذره‌ها پایسته است (مسأله ۷-۱) و به صورت عملگری مستقل از زمان در می‌آید

$$\int \mathbf{P}(x^\circ, \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{p}, \varepsilon} (b_{p\varepsilon}^\dagger b_{p\varepsilon} + d_{p\varepsilon}^\dagger d_{p\varepsilon}) \mathbf{p}$$

که به جای آن عملگر زیر را قرار می دهیم

$$\text{عملگر عددی پایسته} = \sum_{p, \varepsilon} (b_{p\varepsilon}^\dagger b_{p\varepsilon} + d_{p\varepsilon}^\dagger d_{p\varepsilon}) \quad (9-8)$$

این عملگر تعداد الکترون ها منهای تعداد پوزیترون ها را می شمارد، بنابراین عدد حاصل در الکترو دینامیک کوانتمی ثابت می باشد.

۲-۸ بستگی به زمان

در تصویر شرودینگر، سیستمی که با همیلتونی H توصیف می شود، در بستر زمان از حالت $|t_0\rangle$ در زمان t به حالت $|t\rangle$ در زمان t تحول می یابد، به گونه ای که

$$|t\rangle = e^{-iH(t-t_0)} |t_0\rangle$$

بنابراین جابجایی های زمانی با عملگر یکانی e^{-iHt} انجام می شود.

مقدار چشم داشتی عملگر وابسته به زمان \hat{O} در زمان t به صورت زیر می باشد

$$\langle t | \hat{O} | t \rangle = \langle t_0 | e^{iH(t-t_0)} \hat{O} e^{-iH(t-t_0)} | t_0 \rangle = \langle t_0 | \hat{O}_H(t-t_0) | t_0 \rangle$$

که

$$\hat{O}_H(t) = e^{iHt} \hat{O} e^{-iHt} \quad (10-8)$$

وابسته به t می باشد.

این معادله های آخر، منجر به تصویری موسوم به تصویر هایزنبرگ می شود. در این تصویر، حالت های سیستم ثابت مانده و عملگرها وابسته به زمان می شوند. در مورد میدان های آزاد، وابستگی به زمان عملگرهای نابودی و آفرینش بسیار ساده است. مثلاً در مورد میدان اسکالر، (ر.ک. ۳-۲۱)

$$a_k(t) = e^{-i\omega_k t} a_k, \quad a_k^\dagger(t) = e^{i\omega_k t} a_k^\dagger \quad (11-8)$$

می توان اثر عملگرها را بر حالت $|n_k\rangle$ (پیوست ج) دید. در نظریه کوانتمی میدان معمول است که در تصویر هایزنبرگ کار شود.

در مورد میدان های برهم کنش کننده، حالت های اساسی میدان آزادی که تعریف کردیم دارای هیچ

ویژه حالتی از همیلتونی کل نمی باشند. در QED می توان نوشت

$$H = H_0 + V \quad (12-8)$$

که

$$H_0 = H_0(\text{فوتونها}) + H_0(\text{الکترونها}) + H_0(\text{پوزیترونها})$$

از معادله های (۴-۸) و (۷-۸) به دست می آید. ویژه حالت های H_0 مجموعه ای از فوتون ها، الکترون ها، و

پوزیترون‌هایی هستند که آزادانه حرکت می‌کنند.

پتانسیل V از جمله A_μ $-q(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)$ در چگالی لاگرانژی $(\gamma-\gamma)$ ناشی می‌شود که در فصل ۷ آن را ساختم. در اینجا میدان‌های خارجی را حذف می‌کنیم. از آنجا که پتانسیل V به مشتق میدان‌ها بستگی ندارد، سهم آن در چگالی انرژی T^0_0 دقیقاً برابر با A_μ $q(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)$ می‌باشد، و با برابر قرار دادن $q = -e$ برای الکترون‌ها، در زمان $t = t_0$ مقدار زیر را برای پتانسیل به دست می‌آوریم

$$V(t_0) = -e \int \bar{\psi}(\mathbf{r}, t_0) \gamma^\mu \psi(\mathbf{r}, t_0) A_\mu(\mathbf{r}, t_0) d^3\mathbf{r} \quad (13-8)$$

توجه کنید که تحول زمانی پی‌درپی میدان‌ها برای میدان‌های آزاد نیست، زیرا میدان آزاد با همیلتونی کل $H = H_0 + V$ تعیین می‌شود.

می‌توانیم با بکارگیری (۴-۱۵) و (۶-۲۴) میدان‌های A_μ و ψ را در زمان اولیه t_0 بسط دهیم، و بجای دامنه موج‌ها، عملگرهای مناسب بگذاریم. با بسط V چندین جمله به وجود خواهد آمد. برای نمونه با قرار دادن $t_0 = 0$ می‌توانیم به آسانی جمله زیر را جدا بکنیم

$$-\frac{em}{\sqrt{(2V \omega_k E_p, E_{p'})}} [\bar{u}_{\epsilon'}(\mathbf{p}') \gamma^\mu v_{\epsilon''}(\mathbf{p}'')] \epsilon_\mu d_{p'\epsilon'}^\dagger d_{p''\epsilon''}^\dagger a_{k\alpha} \delta_{(k-p'-p''),0} \quad (14-8)$$

این جمله فوتونی را نابود کرده و زوج الکترون پوزیترونی را می‌آفریند. شرط $\mathbf{k} - \mathbf{p}' - \mathbf{p}'' = 0$ از انتگرال‌گیری روی فضای ضریب‌های نمایی به دست می‌آید، و آشکارا تکانه را پایسته نگاه می‌دارند.

محاسبه‌های دینامیکی را در نظریه کوانتمی میدان می‌توان به صورت محاسبه عملگر یکانی e^{-iHt} بر میدان تابشی و میدان دیراکی دانست که با بار الکترون e تعیین می‌شود. مرسوم است که کمیت بدون بُعد α ، ثابت ساختار ریز،^۱ را وارد کنیم:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

α قدرت جفت‌شدگی را مشخص می‌سازد، و مقدار آن کوچک است. در QED پیشرفت بسیاری به سبب ساختن عملگر e^{-iHt} به صورت بسطی به شکل زیر، شده است

$$e^{-iHt} = e^{-iH_0 t} [1 + e^{\hat{O}_1}(t) + e^{\hat{O}_2}(t) + \dots] \quad (15-8)$$

که $\hat{O}_n(t)$ عملگرهای وابسته به زمان هستند.

۳-۸ نظریه اختلال

برای ساخت بسط اختلالی (۸-۱۵)، می‌توان از اینجا آغاز کرد که e^{-iHt} را به ریخت زیر در نظر بگیریم:

$$e^{-iHt} = [e^{-iH\delta t}]^n, (\delta t = t/n \text{ با})$$

به ازای مقداری از n که به اندازه کافی بزرگ (و مقداری از δt که به اندازه کافی کوچک) باشد، می توان گفت که

$$e^{-iH\delta t} = 1 - iH\delta t$$

است و از جمله های مرتبه بالاتر در بسط تیلور چشم پوشی کرد. آنگاه

$$e^{-iHt} = [1 - i(H_0 + V)\delta t]^n$$

در مرتبه پایین تر نظریه اختلال، تنها جمله های خطی بر حسب V نگه داشته می شوند، به گونه ای که

$$\begin{aligned} e^{-iH_0 t} e^{\hat{O}_1(t)} &= -i \sum_{r=0}^{n-1} [1 - i(H_0\delta t)]^{n-1-r} V \delta t [1 - iH_0\delta t]^r \\ &= -i \sum_{r=0}^{n-1} e^{-iH_0(t-t')} V \delta t e^{-iH_0 t'} \end{aligned}$$

و $t' = r\delta t$ و n های بزرگ باشد.

در حد $\delta t \rightarrow 0$ ، می توانیم به جای مجموع، انتگرال قرار دهیم، تا داشته باشیم:

$$e^{\hat{O}_1(t)} = -i \int_0^t dt' e^{iH_0 t'} V e^{-iH_0 t'} \quad (16-8)$$

عملگر $e^{-iH_0 t'}$ عملگر تحول زمانی میدان ساده آزاد می باشد. اگر V را در زمان $t = 0$ همان انتگرال (8-13) در نظر بگیریم، می توانیم بنویسیم

$$\hat{O}_1(t) = i \int_0^t \bar{\psi}(\mathbf{r}', t') \gamma^\mu \psi(\mathbf{r}', t') A_\mu(\mathbf{r}', t') dt' d^3\mathbf{r}' \quad (17-8)$$

که این میدان ها دارای وابستگی زمانی به میدان ها مختل نشده آزاد می باشند. مثلاً، جمله ای مانند (8-14) دارای وابستگی زمانی خواهد بود (ر.ک. معادله (8-11)).

$$e^{-i(\omega_k - E_{p'} - E_{p''})t'} \quad (18-8)$$

تحول حالت از زمان $t/2 - t$ در گذشته به زمان $t/2$ در آینده، متناظر با انتگرال گیری در (8-17) از $t/2 - t$ تا $t/2$ می باشد. این شکل متقارن تر برای توصیف فرآیندهای پراکنده ذره مناسب است. مثلاً اگر حالت آغازین در زمان $t/2 - t$ متشکل از فوتونی در حالت (\mathbf{k}, α) باشد، عملگرهای (8-14) این فوتون را نابود کرده و الکترونی را در حالت $(\mathbf{p}', \mathcal{E}')$ و پوزیترونی را در حالت $(\mathbf{p}'', \mathcal{E}'')$ می آفریند. اگر از ضریب زمانی (8-18) حد $t \rightarrow \infty$ بگیریم، به نتیجه زیر می رسیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega_k - E_{p'} - E_{p''})t'} dt' = 2\pi \delta(\omega_k - E_{p'} - E_{p''})$$

بنابراین پایستگی انرژی، همانند پایستگی تکانه، صریح می‌باشد. در فضای آزاد برقراری هر دو قانون پایستگی برای آفرینش زوج از تک فوتون، (مسأله ۸-۳)، ناممکن است، به همین دلیل نظریه اختلال مرتبه اول هیچ سهمی ندارد. (در حضور میدان الکترومغناطیسی خارجی، همانند میدان کولنی هسته‌ها، پایستگی تکانه بین الکترون‌ها و فوتون‌ها برقرار نیست و آفرینش زوج در صورتی امکان‌پذیر است که $(\omega_k > 2m$

در زمانی که دامنه گذار مرتبه اول در زمان t برابر صفر نمی‌شود، با بهره‌گیری از (۸-۱۶) داریم

$$\langle \text{حالت نهایی} | e \hat{O}_\nu(t) | \text{حالت آغازین} \rangle = \langle f | V(\circ) | i \rangle \int_{-t/2}^{t/2} e^{-i\Delta E t'} dt'$$

که $\Delta E = E_f - E_i$ بوده و E_f و E_i به ترتیب انرژی حالت‌های آغازین $|i\rangle$ و $|f\rangle$ می‌باشد. در کتابهای درسی مکانیک کوانتمی نشان داده شده است که بستگی زمانی را می‌توان احتمال گذار، از حالت آغازین i به حالت نهایی f ، در یکای زمان تلقی کرد، که از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\text{احتمال گذار} = 2\pi \langle f | V(\circ) | i \rangle^2 \rho(E_f)$$

که $\rho(E_f)$ چگالی حالت‌های نهایی انرژی در $E_f = E_i$ می‌باشد.

به دست آوردن جمله‌های مرتبه بالاتر بسط اختلالی، سراسر است و بدون مشکل است. برای نمونه

$$\hat{O}_\nu(t) = \int_{-t/2}^{t/2} d^3x_\nu \bar{\psi}(x_\nu) \gamma^\mu \psi(x_\nu) A_\mu(x_\nu) \int_{-t/2}^{t/2} d^3x_\nu \bar{\psi}(x_\nu) \gamma^\mu \psi(x_\nu) A_\mu(x_\nu) \quad (8-19)$$

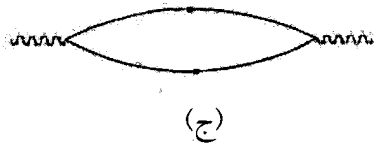
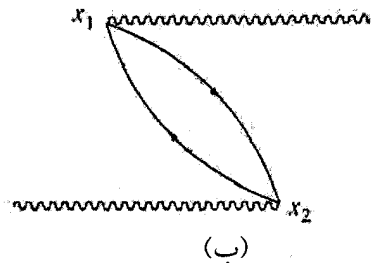
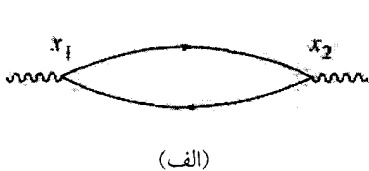
که $x_\nu = (t_\nu, \mathbf{r}_\nu)$, $x_\nu = (t_\nu, \mathbf{r}_\nu)$ و $-t/2 < t_\nu < t/2$ می‌باشد.

۸-۴ بازبینی‌های بازبینی‌پذیر میدان

در نظریه اختلال مرتبه دوم، می‌توانیم جمله‌های متناسب با آفرینش زوج در نقطه x_1 را در فضا زمان و نابودی آن در نقطه x_2 را بیرون بکشیم. این کار را می‌توان با نمودارهای شکل ۸-۱ نشان داد. در این نمودارها، زمان از چپ به راست در پیشروی است. در x_1 و x_2 تکانه پایسته است. همچنین پایستگی انرژی و تکانه زاویه‌ای نیز وجود دارد، در نتیجه فوتون «مختل ناشده‌ای» که در زمان t_2 پدیدار می‌شود، در همان حالت فوتون مختل ناشده آغازین باشد.

اشاره کردیم که در فضای آزاد آفرینش زوج حقیقی $e^- e^+$ از فوتون میسر نیست. زوج $e^- e^+$ در این نمودار، زوجی مجازی متناظر با جمله‌ای در بسط ریاضیاتی است. دامنه گذار

$$\langle \mathbf{k} | e^{-iH_\nu t} \hat{O}_\nu(t) | \mathbf{k} \rangle = e^{-i\omega_k t} \langle \mathbf{k} | \hat{O}_\nu(t) | \mathbf{k} \rangle$$



شکل ۸-۱ در این نمودارها زوج مختل ناشدهٔ الکترون-پوزیترون در نقطه x_1 فضا زمان آفریده و در نقطه x_2 نابود می‌شود. در شکل (الف) فوتون مختل ناشدهٔ آغازین در x_1 نابود و در x_2 بازآفریده می‌شود؛ در مورد (ب) وضعیت برعکس است. در (الف) و (ب) زمان از چپ به راست در پیشروی می‌باشد. همانگونه که فاینمن نشان داد مناسب است که هر دو فرآیند را با یک نمودار فاینمن نشان دهیم (ج). در همهٔ این نمودارها، پیکان‌های روی خطوط فرمیونی از راستای عدد الکترونی پیروی می‌کنند. (روی پوزیترون‌ها، این پیکان‌ها در خلاف راستای زمانی پیش می‌روند).

غیر صفر است. بدیهی است که فوتون حقیقی، موجودی مختلط می‌باشد. محاسبه‌ها نشان می‌دهد که اثر زوج مجازی $e^- e^+$ آن است که خلاء همانند محیط الکتریکی قطبش پذیر عمل کند. به‌ویژه، برهمکنش کولونی بین دو الکترون «خالص» آزمایش و مشاهده شده است. می‌توانیم این اثر را در حکم نتیجه‌ای از ابر حفاظت‌کننده^۱ پوزیترون‌های مجازی، دورادور هر الکترون لخت، پنداریم که بار منفی متناظر با زوج مجازی $e^- e^+$ به‌صورت باری در سطح حجم مقید کننده پدیدار می‌شود.

آنچه در آزمایش با عنوان بار $-e$ الکترون اندازه‌گیری می‌شود، بار حفاظت‌شده می‌باشد. برای جبران این اثر حفاظتی، باید به‌جای پارامتر e که در لاگرانژی پدیدار می‌گردد، بار «خالص» $e_0 = e + \Delta e$ قرار داده شود. با این کار در لاگرانژی، «جمله‌های تلافی کننده»^۲ به‌وجود می‌آید. $\Delta e = \alpha A_1 e$ برای خنثی کردن اثر محافظتی، برگزیده شده است. از محاسبه‌های مرتبهٔ دوم، مقدار $\Delta e = \alpha A_1 e$ به‌دست می‌آید، که A_1 کمیت بدون بعد است. با این اصلاح تا این مرتبه، بار حفاظتی الکترون، $-e$ می‌شود. در مرتبه‌های بالاتر نظریهٔ اختلال، برای Δe مقدار زیر به‌دست می‌آید

1- screening cloud

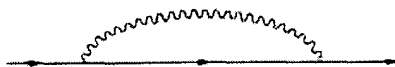
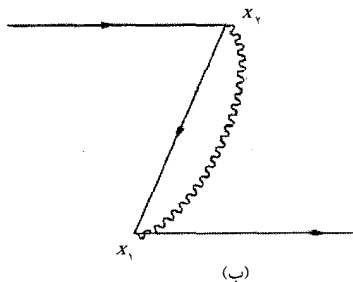
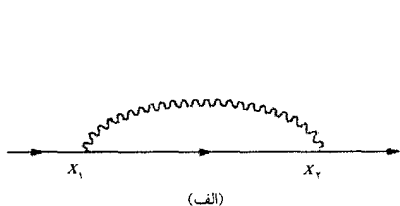
2- counter terms

$$\Delta e = e[\alpha A_\nu + \alpha^\dagger A_\nu + \dots]$$

برای هر مرتبه‌ای از نظریهٔ اختلال، هر محاسبه‌ای باید با اصلاح e را در بر داشته باشد، تا آثار بارز فیزیکی، که با جمله‌های بسط اختلالی تعیین می‌شوند، از محاسبه هم به دست آید. بار $-e$ الکترون را بازبهنجار شده می‌خوانیم. خود Δe را نمی‌توان هرگز اندازه‌گیری کرد. بخشی از آثار فیزیکی در فیزیک اتمی از جمله‌های قطبش خلاء ناشی می‌شوند که با دقت بالایی محاسبه و اندازه‌گیری می‌گردد. (ر.ک. بخش ۱۶-۳).

پارامتر دیگری که در الکترودینامیک پدیدار می‌گردد، جرم الکترون است. در نظریهٔ اختلال مرتبهٔ دوم، جرم لخت الکترون با فرآیندهای نشان داده شده در شکل ۸-۲ اصلاح می‌شود. برای جبران این موارد در این فرآیندها باید در لاگرانژی مقدار $\Delta m = m - m_0$ بگیریم، که برای جبران تغییر مقدار جرم می‌باشد. این تغییر مقدار جرم ناشی از برهمکنش الکترون- پروتون است. می‌توانیم الکترون خالص را به صورت پوشیده شده با فوتون‌های مجازی در نظر بگیریم. معلوم شده است که تا مرتبهٔ دوم $\Delta m = \alpha m B_\nu$ است، که B_ν کمیت بدون بعد دیگری است. به طور کلی

$$\Delta m = m[\alpha B_\nu + \alpha^\dagger B_\nu + \dots]$$



شکل ۸-۲ در این نمودارها فوتون مختل ناشده‌ای در نقطهٔ x_1 فضا زمان آفریده و در نقطهٔ x_2 نابود می‌شود. در مورد (الف) الکترون مختل ناشده در x_1 نابود و در x_2 بازآفریده می‌گردد؛ در مورد (ب) وضعیت برعکس است. در (الف) و (ب) زمان از چپ به راست در پیشروی می‌باشد. مناسب است که هر دو فرآیند را با یک نمودار فاینمن مشخص کنیم (ج). در همهٔ این نمودارها پیکان‌های روی خطوط فرمیونی از راستای عدد الکترونی پیروی می‌کنند. (پس روی پوزیترون‌ها، پیکان‌ها در خلاف راستای زمانی پیش می‌روند.)

همانند Δe ، مقدار Δm باید در هر مرتبه بالاتر از نظریه اختلال، اصلاح و تنظیم شود. روش قاعده مندی برای به دست آوردن پاسخ‌های فیزیکی از محاسبه‌های اختلالی وجود دارد. جرم فیزیکی m جرم بازبهنجار شده است.

نمودارهایی مانند نمودارهای شکل ۸-۳، که در آن زوج‌های مجازی $e^+ e^-$ و فوتون‌های مجازی با یکدیگر آفریده و نابود می‌شوند، و در نتیجه جمله‌هایی به وجود می‌آورند که انرژی خلاء را تصحیح می‌کنند. در نظریه اختلال انتظار تغییر انرژی می‌رود، اما از آنجا که هیچ خلاء مختل ناشده‌ای برای مقایسه وجود ندارد، چنین تغییرهایی قابل اندازه‌گیری نمی‌باشند. ثابت کیهان‌شناسی نسبیّت عام، اندازه‌ای از چگالی انرژی خلاء که مطمئناً بسیار کوچک و سازگار با مقدار آن در صفر است، به دست می‌دهد. مقدار چگالی انرژی خلاء را، در مبدأ هر چه باشد، برابر با صفر اختیار خواهیم کرد.

بدون محاسبه‌ها هم می‌توان انتظار اثرهای اختلالی بازبهنجارش بار و بازبهنجارش جرم را داشت. ویژگی نامطلوب الکترودینامیک کوانتمی آن است که هنگامی که ثابت‌های A_i و B_i محاسبه شوند، مقدار آنها نامتناهی شود، همانند تصحیح در مقدار انرژی حالت خلاء. این امر درست مانند آن است که Δe و Δm هیچ معنای فیزیکی نداشته باشند. اما این موردی است که بسط بر حسب پارامتر کوچک α منجر به تصحیح نامتناهی‌ها به کمیت‌های غیرقابل اندازه‌شود. ویژگی مهم QED آن است که با کنار نهادن مقیاس‌بندی این میدان‌ها را، که بخشی از تمهید بازبهنجارش می‌باشد، نامتناهی‌ها تنها در بازبهنجارش پارامترها این نظریه، یعنی e و m و انرژی خلاء پدیدار می‌شوند. تنها جمله‌های تلافی‌کننده نامتناهی که باید به لاگرانژی اضافه شوند، در این پارامترها قرار دارد. با انجام دادن این تنظیم‌ها، بقیه اثرهای فیزیکی قابل محاسبه و متناهی می‌باشند.

QED نظریه موضعی میدان است، یعنی نظریه‌ای است که در آن جمله‌های برهمکنشی شامل حاصل ضرب میدان‌ها در یک نقطه از فضا زمان می‌باشند. نامتناهی‌هایی مانند آنچه در QED رخ می‌دهند، در همه نظریه‌های موضعی میدان بمانند بیماری همه گیر وجود دارند. به نظریه‌های میدانی که در آن نامتناهی‌ها، تنها بر حسب شمار متناهی از پارامترهای نظریه پدیدار می‌شوند، نظریه‌های بازبهنجارپذیر^۱ گویند.

مثلاً واگرایی ضرایب A_i در Δe و B_i در Δm در سهم O_p (ر.ک. (۸-۱۹))، ناشی از ناحیه انتگرال‌گیری می‌باشد که در آن $x_1 \approx x_2$ و به ویژه $\mathbf{r}_1 \approx \mathbf{r}_2$ است. ویژگی مهم QED آن است که پارامتر بسط α و در نتیجه ضریب‌ها، اعدادی بدون بعد می‌باشند. در فصل‌های ۹ و ۲۱ با نظریه‌هایی روبرو خواهیم شد که در آنها ثابت جفت‌شدگی و بنابراین پارامترهای بسط دارای ابعادی از توان‌های عکس جرم هستند. همه این جمله‌ها در بسط‌های اختلالی باید دارای یک بعد باشند، بنابراین این ضریب‌ها دارای بعدی

هستند که بعد ثابت جفت‌شدگی را جبران می‌کند. در ناحیه‌های انتگرال‌گیری، این تابع‌های زیر انتگرال با توانهای بزرگ عکس $|\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu|$ واگرا می‌شوند، که با میل کردن $\mathbf{r}_\nu \rightarrow \mathbf{r}_\mu$ ، این جبران انجام گیرد، اما انتگرال‌ها نامتناهی باقی می‌مانند. نامتناهی‌ها به‌ازای همهٔ برهمکنش‌های چندزره‌ای رخ می‌دهند، نمی‌توان این نامتناهی‌ها را تنها با بازهنجارش جرم و ثابت جفت‌شدگی حذف کرد. چنین نظریه‌هایی نابهنجارپذیر هستند، نمی‌توان آنها را به جدیت نظریه‌های کوانتومی میدان در نظر گرفت.

۵-۸ ممان مغناطیسی الکترون

اکنون با محاسبهٔ ممان مغناطیسی الکترون، کامیابی جالب‌توجه در محاسبهٔ کمیت‌هایی با معنای فیزیکی را نشان خواهیم داد. در فصل ۷ نشان دادیم که معادلهٔ دیراک پیش از کوانتش دوم اشاره دارد که الکترون دارای ممان مغناطیسی $\mu_B = e\hbar/2m$ ناهمسو با اسپینش می‌باشد. ممان مغناطیسی الکترون با دقت بالایی اندازه‌گیری شده است: مقدار تجربی μ_e برابر است با

$$\mu_e = \mu_B(1+a)$$

که مقدار «ناهنجاری»^۱ $a = 0.0011596521884(43)$ است (Van Dyck *et al.*, 1987).

پس از کوانتش دوم، می‌توان تصحیح‌های اختلالی بر مقدار دیراک را محاسبه کرد. مقدار دیراک در عملگر \hat{O}_1 معادلهٔ (۸-۱۶) قرار دارد، و مربوط به نمودار (الف) شکل ۸-۴ می‌شود. این پایین‌ترین مرتبهٔ محاسبه منجر به نتیجهٔ دیراک $\mu_B = \mu_e$ می‌شود.

از آنجا که μ_B تنها ترکیب از پارامترهای \hbar ، m_e ، e می‌باشد، که دارای بعد ممان مغناطیسی هستند، مرتبه‌های بالاتر نظریهٔ اختلال جمله‌هایی به شکل زیر به‌دست می‌دهند

$$\mu_e = \mu_B(1 + \alpha C_1 + \alpha^2 C_2 + \alpha^3 C_3 + \alpha^4 C_4 + \dots)$$

که C_i ها ثابت‌های بدون بعد هستند. برای مقایسه نظریه با آزمایش، از مقدار پذیرفته شده در ۱۹۸۶ برای ثابت ساختار ریز استفاده می‌کنیم

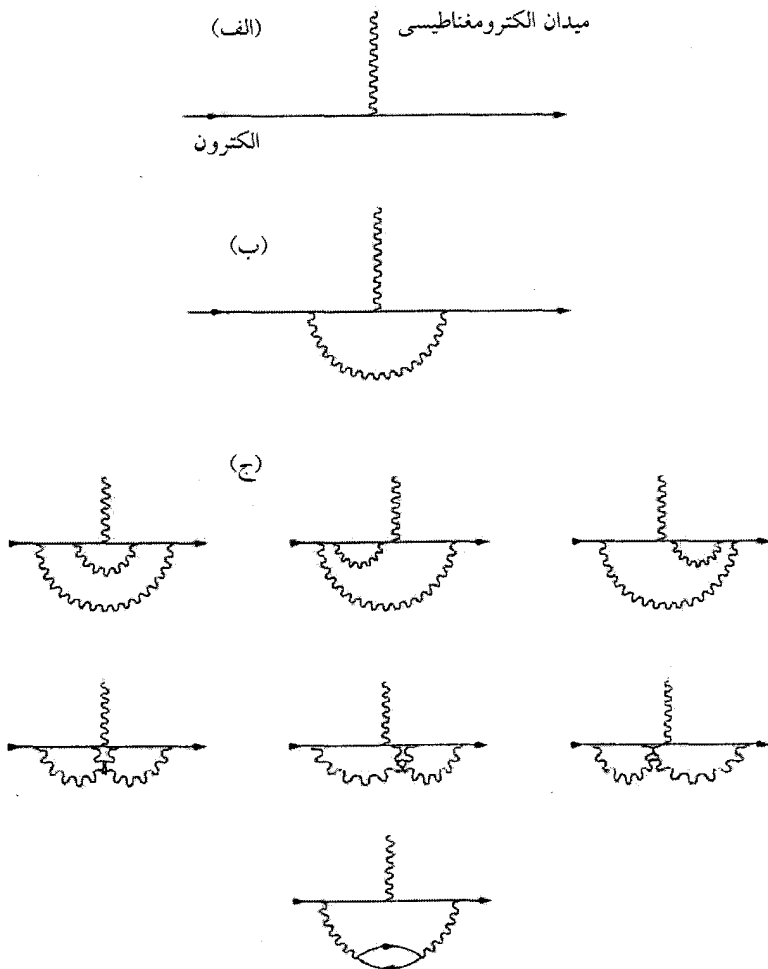
$$\alpha^{-1} = 137.0359979(32)$$

C_1 مربوط به نمودار (ب) شکل ۸-۴ می‌باشد؛ از محاسبه‌ها مقدار $C_1 = 1/(2\pi)$ به‌دست می‌آید. در نتیجه تا این مرتبه داریم

$$a = C_1, \alpha = 0.00116140974$$

که تا پنج رقم با معنا با تجربه سازگار است.

تصحیح مرتبهٔ بعد، مربوط به نمودارهای (ج) شکل ۸-۴، عبارتست از



شکل ۸-۴ نمودارهای فاینمن نظریهٔ اختلال که سهم در ممان مغناطیسی الکترون را نشان می‌دهند. ممان ناهنجار، تا مرتبهٔ α^2 ، ناشی از محاسبات مربوط به نمودارهای (ب) و (ج) می‌باشد.

$$C_1 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{197}{144} + \frac{3}{4} \zeta(3) \right) - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{12}$$

که (Z) تابع زتای ریمن می‌باشد. تا این مرتبه

$$a = 0.0115963744$$

تا هفت رقم با تجربه سازگار است.

محاسبه مرتبه‌های بالاتر نظریهٔ اختلال به سرعت از اختیار خارج می‌شوند. با بهره‌گیری از برآوردهای

عددی، مقدار $C_4 \approx -0.014$ ، $C_3 \approx 0.3792$ به دست می‌آید. در این سطح از دقت، تصحیح‌ها باید برای فرآیندهایی انجام شوند که از دیگر بخش‌های مدل استاندارد، به‌ویژه بخش مربوط به میون، می‌آیند. بنا بر جدیدترین محاسبه‌های جامع (Kinoshita and Lindquist 1990) مقدار

$$\alpha = 0.0011596521400(41 + 53 + 271)$$

تاده رقم بامعنا با تجربه سازگار است. بیشترین خطا در نظریه ناشی از عدم قطعیت در مقدار α^{-1} می‌باشد. در گستره کاربردپذیری الکترودینامیک کوانتمی، این نظریه کوانتمی مدل دقیق متحیرکننده‌ای از طبیعت ارائه می‌دهد. می‌توان اطمینان داشت که فنون بازهنجارش در نظریه اختلالی معتبر هستند.

۸-۶ کوانتشن در مدل استاندارد

در این فصل رثوس مطلب فنون «کوانتشن کانونی» را که به‌ویژه در الکترودینامیک کوانتمی بسیار پیروزمندانه هستند، بررسی کردیم. درباره این موضوع کتاب‌های بسیاری نوشته شده است. برای نمونه کتاب (Itzykson and Zuber 1980)؛ اگر کسی بخواهد سررشته‌ای مطمئن از جزئیات محاسبه‌ها داشته باشد، مجبور خواهد بود این کتابها را مطالعه کند. اما، در فصل‌های آتی بسیاری از آهنگهای واپاشی و سطح مقطع‌ها ارائه می‌شوند که باید پیش‌بینی‌های مدل استاندارد را با آزمایش مقایسه کنند. این مقدارها به‌خوبی با روشی موسوم به «تراز درختی» نظریه اختلال تقریب زده می‌شوند. نمودارهای تراز درختی دارای هیچ حلقه بسته‌ای نیستند، (ر.ک. شکل ۸-۴ (الف))، و نیازی به بازهنجارش آنها نیست. در مرتبه‌های پایین نظریه اختلال، شرایط خوبی برقرار است که می‌توان چنین مقدارهایی را به‌آسانی محاسبه کرد.

ذره‌ها و نیروهای برهمکنش‌های ضعیف و قوی را می‌توان با نظریه‌های موضعی میدان پیمانه‌ای تیز توصیف کرد. این روندهای کوانتشی در فصل‌های بعدی در سطح کلاسیک نمایش داده خواهند شد. فرآیندهای کوانتشی که در چنین گسترش‌هایی از QED بکار می‌روند، با کامیابی بسیار در روش کوانتشن انتگرال مسیر بکار گرفته می‌شوند (برای نمونه ر.ک. (Cheng and Li 1980)). هم نظریه برهمکنش ضعیف و هم نظریه برهمکنش قوی مسائل مخصوص مربوط به خودشان را مطرح می‌کنند، اما تا امروز اصول تقارن پیمانه‌ای و بازهنجارش در ساخت مدل استاندارد ضروری بوده است.

مسأله‌ها

۱-۸ حالت کلی دو ذره‌ای بوزون‌های اسکالر (بخش ۸-۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$|\text{حالت}\rangle = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2}^\dagger |0\rangle$$

که صرف نظر از بهنجارش، $f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ تابعی از \mathbf{k}_1 و \mathbf{k}_2 می باشد. (می توانیم f را تابع موج حالت بنامیم.)

نشان دهید که می توان این حالت را به صورت زیر نوشت

$$| \text{حالت} \rangle = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} g(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2}^\dagger | 0 \rangle$$

با $g(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \{f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + f(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1)\} / 2$ این حالت تحت تعویض نشانها متقارن است.

۲-۸ حالت دودزده ای کلی فرمیونها را می توان به صورت زیر نوشت

$$| \text{حالت} \rangle = \sum_{\mathbf{p}_1, \varepsilon_1, \mathbf{p}_2, \varepsilon_2} f(\mathbf{p}_1, \varepsilon_1, \mathbf{p}_2, \varepsilon_2) b_{\mathbf{p}_1, \varepsilon_1}^\dagger b_{\mathbf{p}_2, \varepsilon_2}^\dagger | 0 \rangle$$

که صرف نظر از بهنجارش، f تابعی از $\mathbf{p}_1, \varepsilon_1$ و $\mathbf{p}_2, \varepsilon_2$ می باشد.

نشان دهید که این حالت را می توان به صورت زیر هم نوشت

$$| \text{حالت} \rangle = \sum_{\mathbf{p}_1, \varepsilon_1, \mathbf{p}_2, \varepsilon_2} g(\mathbf{p}_1, \varepsilon_1, \mathbf{p}_2, \varepsilon_2) b_{\mathbf{p}_1, \varepsilon_1}^\dagger b_{\mathbf{p}_2, \varepsilon_2}^\dagger | 0 \rangle$$

با $g(\mathbf{p}_1, \varepsilon_1; \mathbf{p}_2, \varepsilon_2) = \{f(\mathbf{p}_1, \varepsilon_1; \mathbf{p}_2, \varepsilon_2) - f(\mathbf{p}_2, \varepsilon_2; \mathbf{p}_1, \varepsilon_1)\} / 2$ این حالت تحت

تعویض نشانها پادمقارن است.

۳-۸ با بهره گیری از پایستگی تکانه و انرژی نشان دهید که آفرینش زوج از یک فوتون، $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ در فضای آزاد ناممکن است.

۴-۸ چگالی انرژی میدان الکترومغناطیسی از معادله (۴-۲۴) به دست می آید. نشان دهید که انرژی کل

میدان الکتریکی بار نقطه ای q ، بیرون از کره ای به شعاع R به مرکز ذره، عبارتست از

$$\text{انرژی} = q^2 / (8\pi R)$$

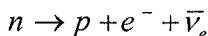
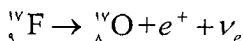
توجه کنید که این سهم کلاسیک در انرژی سکون ذره در حد $R \rightarrow 0$ نامتناهی می شود.

برهمکنش ضعیف: پدیدارشناسی انرژی پایین

در این فصل برخی از آغازینه‌های پدیدارشناسی برهمکنش ضعیف را، که راهنمایی مهم در ساخت مدل استاندارد است، بازبینی و دوره می‌کنیم. پدیدارشناسی مورد بحث به اثرهای بسیار کوچک جرم نوترینو غیرحساس است. از این اثرها چشم‌پوشی خواهد شد.

۱-۹ واپاشی بتازای هسته‌ای

در بررسی‌های آغازینه فیزیکی هسته‌ای، وجود «برهمکنش ضعیف» مسؤل واپاشی بتازای هسته‌ای دانسته شد. این واپاشی‌ها را ضعیف خواندند زیرا عمر میانگین واپاشی‌های مانند



که برای این نمونه در اندازه چند دقیقه است، در مقایسه با واپاشی‌های متداول الکترومغناطیسی هسته‌ای، با عمر میانگین نزدیک 10^{-15} s، بسیار طولانی هستند.

فیزیکدانان هسته‌ای با آزمایش‌های دقیق و مبتکرانه، جنبه‌های اصلی برهمکنش ضعیف و ویژگی‌های نوترینوی الکترون ν_e را مدون کرده‌اند. برای پایسته ماندن بار الکتریکی، نوترینو باید خنثی الکتریکی باشد، و پایستگی تکانه زاویه‌ای تنها به شرطی برقرار می‌ماند که نوترینو فرمیونی با اسپین دیراکی $1/2$ باشد. اگر نوترینوی الکترون دارای جرم باشد، مقدار آن با اطمینان بسیار کوچک است.

در سال ۱۹۵۷ میلادی، وو^۱ بنا به پیشنهاد لیو یانگ^۲ جنبه شگفت‌آور برهمکنش ضعیف، یعنی ناپایستگی پاریته در این برهمکنش، را با آزمایش تصدیق کرد. طبیعت هر دو دست خود را یکسان بکار نمی‌برد. در واقع، پایستگی پاریته تا بیشینه مقدار ممکن نقض می‌گردد، به گونه‌ای که تنها مؤلفه‌های چپگرد میدان‌های الکترونی و میدان‌های نوترینو در این برهمکنش شرکت می‌کنند.

اگر قطبش طولی الکترون‌های تولیدی بر اثر واپاشی بتازای «مجاز» را بررسی کرده و بیازماییم، این پدیده به روشنی نشان داده می‌شود. الکترونی با هلیسیتی منفی، $-1/2$ ، و سرعت v با احتمال $[1 + (v/c)]/2$ در

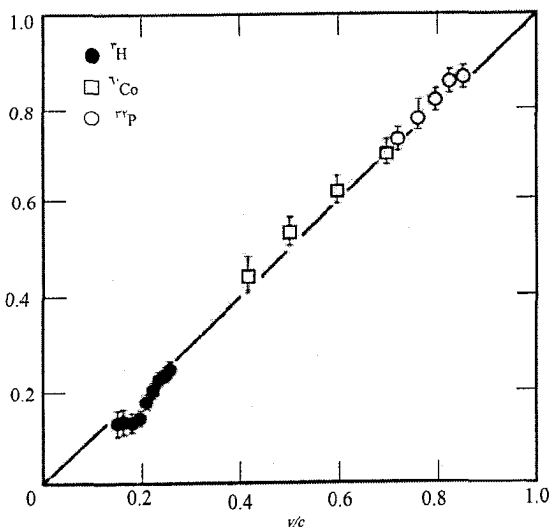
حالت چپگرد، و الکترونی با هلیستی مثبت، $+1/2$ ، با احتمال $[1 - (v/c)]^{1/2}$ در حالت راستگرد می‌باشد (بخش ۵-۶). در واپاشی‌های بتازای هسته‌ای مجاز، هیچ نیروی هسته‌ای وجود ندارد که یک حالت هلیستی را به دیگر حالت ترجیح دهد، به گونه‌ای که اگر تنها مؤلفه چپگرد میدان الکترونی در این برهمکنش شرکت کند، درجه قطبش طولی الکترون گسیلی برابر می‌شود با

$$-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{v}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{v}{c}\right) = -\frac{v}{c}$$

برای پوزیترون‌ها، این احتمال‌ها برعکس است، (بخش ۵-۶)، و قطبش طولی پوزیترون گسیلی در واپاشی بتازای مجاز $+v/c$ می‌باشد. داده‌های به‌دست آمده از چندین واپاشی این چنینی در شکل ۹-۱ نشان داده شده است.

اندازه‌گیری مستقیم هلیستی نوترینوهای گسیلی در واپاشی بتازا، تقریباً ناممکن است. اما می‌توان با اندازه‌گیری دقیق حالت‌های تکانه زاویه‌ای هسته‌های شرکت کننده، مقدار هلیستی آنها را برآورد کرد. با در نظر گرفتن خطای آزمایش، تنها نوترینوهای با هلیستی منفی و پادنوترینوهای با هلیستی مثبت در برهمکنش ضعیف شرکت می‌کنند.

در واپاشی‌های بتازای هسته‌ای انرژی کافی برای تولید هیچ یک از دو خانواده دیگر لپتون‌ها که



شکل ۹-۱ درجه اندازه‌گیری شده برای قطبش طولی P به‌ازای واپاشی‌های مجاز e^- . (داده‌ها از Koks and Van Klinken (1960)

ناکون شناخته شده‌اند، یعنی میون‌ها و نوترینوهای میون و یا لپتون‌های تاو و هم‌تاهای نوترینوی آنها، فراهم نمی‌گردد. در فصل ۱۳ خواهیم دید که احتمالاً تنها همین سه خانوادهٔ لپتونی، e, μ, τ ، وجود دارند.^۱ به نظر می‌آید هر خانواده اهمیتی همانند دیگر خانواده‌ها در طبیعت داشته باشد، مشاهده‌ای که با نام «جهان‌شمولی لپتونی»^۲ شناخته می‌شود: یعنی تنها تفاوت لپتون‌ها در جرم لپتون‌های باردار الکتریکی است:

$$m_e \approx 0.511 \text{ MeV}, m_\mu \approx 106 \text{ MeV}, m_\tau \approx 1777 \text{ MeV}$$

۹-۲ واپاشی پیون

واپاشی مزون‌های پی باردار نمونهٔ بسیار مهمی است که هم چپگردی میدان‌های لپتونی شرکت‌کننده در واپاشی بتا و هم جهان‌شمولی لپتونی را فراهم می‌آورد. این واپاشی‌ها در تابش کیهانی متداول هستند و جزء اصلی این تابش را در سطح زمین، یعنی میون‌ها، تشکیل می‌دهند. تقریباً ۱۰۰٪ پیون‌ها از راه

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \quad \pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

با آهنگ واپاشی $\sqrt{\tau}(\pi \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu) = 2.53 \times 10^{-12}$ MeV و امی‌یاشند. واپاشی‌های متناظر در الکترون‌ها، آهنگ واپاشی بسیار کمتری دارند: $\sqrt{\tau}(\pi \rightarrow e \bar{\nu}_e) = 1.23 \times 10^{-4} (\sqrt{\tau}(\pi \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu))$

به دلیل آنکه تنها میدان‌های چپگرد الکترون و نوترینو در برهمکنش شرکت می‌کنند، آهنگ واپاشی برای الکترون‌ها کاهش می‌یابد. واپاشی π^- را در چارچوب مرجع سکون پیون در نظر بگیرید (شکل ۹-۲). ذرهٔ π^- دارای اسپین صفر است، پادنوترینو دارای هلیسیتی مثبت می‌باشد. در نتیجه برای پایسته ماندن تکانهٔ زاویه‌ای در واپاشی دوجسمی، الکترون هم باید دارای هلیسیتی مثبت باشد. احتمال آنکه الکترون در حالت چپگرد باشد، $\frac{1}{2} [1 - (v_e/c)] = m_e^2 / (m_\pi^2 + m_e^2) = 1.34 \times 10^{-5}$ (مسئله ۹-۱). به همین دلیل از واپاشی μ^- جلوگیری می‌شود، اما جرم بسیار بیشتر میون سبب می‌شود که ضریب آن کمتر مؤثر باشد: $\frac{1}{2} [1 - (v_\mu/c)] = 0.36$.

چگالی لاگرانژی برهمکنش مؤثر که این ویژگی‌ها را در هم می‌آمیزد

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \alpha_\pi [j^\mu \partial_\mu \Phi_\pi + j^{\mu\dagger} \partial_\mu \Phi_\pi^\dagger] \quad (۱-۹)$$

$$j^\mu = e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{eL} + \mu_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{\mu L} + \tau_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{\tau L} \quad (۲-۹)$$

و α_π ثابت جفت‌شدگی (حقیقی) مؤثر است.

Φ_π میدان اسکالر مختلطی است که مزون‌های باردار π^\pm را توصیف می‌کند (بخش ۷-۶). پیون‌های منفی را نابود کرده، و پیون‌های مثبت می‌آفریند. میدان Φ_π میدان بنیادی در مدل استاندارد

۱- فرضیه‌های ریاضی ارائه شده است که در آنها شمار خانواده‌های لپتونی بیشتر فرض شده است. - م.

نیست، زیرا ساختار درونی پیون‌ها را نادیده می‌انگارد. چاربردار $v_{eL}, \sigma^{\mu} e_L^{\dagger}$ ساده‌ترین ساختار لورنتسی است که می‌توانیم از میدان‌های اسپینوری چپگرد، v_{eL}, e_L ، متعلق به الکترون و نوترینوی الکترون، بسازیم (ر.ک. مسأله ۳-۵). بدین ترتیب جهان‌شمولی لپتونی در مدل استاندارد جا داده می‌شود، و سه خانواده لپتون به یک روش در جریان، $^{\mu} j$ ، مشارکت می‌کنند؛ این ساختار در مدل استاندارد باقی می‌ماند. ناوردای لورنتسی L_{int} ، از ضرب اسکالر $^{\mu} j$ در $\partial_{\mu} \Phi$ ، به دست آمده و سرانجام بدین ترتیب L_{int} را حقیقی می‌سازیم. توجه کنید که L_{int} برهمکنش «نقطه‌ای» می‌باشد: $^{\mu} j$ و $\partial_{\mu} \Phi$ در یک نقطه، x ، از فضا-زمان محاسبه می‌شود. از آنجا که پیون جسمی دارای امتداد است، باید دانست که این نقطه برهمکنش را باید تقریب دانست، و نباید آن را زیاد جدی در نظر گرفت.

لاگرانژی برهمکنش مؤثر تنها در مرتبه‌های پایین‌تر نظریه اختلال استفاده می‌شود. این لاگرانژی برای محاسبه در تصحیح‌های مرتبه بالا مناسب نمی‌باشد. بنابراین هنگامی که نتیجه این محاسبه‌ها با تجربه مقایسه می‌شود، نباید انتظار دقت بالایی را داشت.

با بهره‌گیری از L_{int} در پایین‌ترین مرتبه، آهنگ واپاشی‌های جزئی برای پیون‌های در حال سکون عبارتند از (ر.ک. مسأله ۴-۹)

$$\frac{1}{\tau(\pi \rightarrow e \bar{\nu}_e)} = \frac{\alpha_{\pi}^2}{4\pi} \left(1 - \frac{v_e}{c}\right) p_e^{\nu} E_e, \quad \frac{1}{\tau(\pi \rightarrow \mu \bar{\nu}_{\mu})} = \frac{\alpha_{\pi}^2}{4\pi} \left(1 - \frac{v_{\mu}}{c}\right) p_{\mu}^{\nu} E_{\mu} \quad (3-9)$$

در این معادله‌ها، E_e, E_{μ} و p_e, p_{μ} انرژی و تکانه لپتون باردار هستند، و از قانون پایستگی انرژی و تکانه تعیین می‌شوند. ضرایب $p_e^{\nu} E_e, p_{\mu}^{\nu} E_{\mu}$ از ضرب چگالی حالتها در این عبارت برای احتمال گذار به دست می‌آید (ر.ک. مسأله ۲-۹). ضریب‌های $(1 - v_e/c)$ و $(1 - v_{\mu}/c)$ تنها پیامد شرکت کردن میدان‌های چپگرد می‌باشد.

نسبت

$$\frac{\tau(\pi \rightarrow \mu \bar{\nu}_{\mu})}{\tau(\pi \rightarrow e \bar{\nu}_e)} = \frac{m_e^2 (m_{\pi}^2 - m_e^2)^2}{m_{\mu}^2 (m_{\pi}^2 - m_{\mu}^2)^2} = 1,28 \times 10^{-2} \quad (4-9)$$

(مسأله ۳-۹). این محاسبه در پایین‌ترین مرتبه بوده، و در آن اثر تصحیح‌های ناموضعی و الکترومغناطیسی چشم‌پوشی شده است. این مقدار با مقدار آزمایشگاهی $1,23 \times 10^{-2}$ به خوبی سازگار بوده و پشتیبان محکمی برای جهان‌شمولی لپتونی می‌باشد.

مشاهدات دال بر آنند که $\sqrt{\tau(\pi \rightarrow e \bar{\nu}_e)} = 3,11 \times 10^{-18} \text{ MeV}$ و $\sqrt{\tau(\pi \rightarrow \mu \bar{\nu}_{\mu})} = 2,53 \times 10^{-14} \text{ MeV}$ می‌باشند. با توجه به این مقادیر می‌توانیم مقدار α_{π} برآورد

کنیم

$$\alpha_{\pi} = 2,09 \times 10^{-9} \text{ MeV}^{-1}$$

کوچک بودن مقدار α_{π} بازتاب دهنده ضعف برهمکنش قوی می باشد.

هرچند جرم پیون آنقدری نیست که بتواند به لپتون های تاو و اپاشد، لاگرانژی مؤثر (۹-۱) و اپاشی های زیر را هم توصیف می کند.

$$\tau^+ \rightarrow \pi^+ + \bar{\nu}_{\tau}, \quad \tau^- \rightarrow \pi^- + \nu_{\tau}$$

و در پایین ترین مرتبه نظریه اختلال، این لاگرانژی پیش بینی می کند که

$$\frac{1}{\tau(\tau \rightarrow \pi \nu_{\tau})} = \frac{\alpha_{\pi}^2}{32\pi} m_{\tau}^2 [1 - (m_{\pi}/m_{\tau})^2]^2 \quad (9-5)$$

با بهره گیری از α_{π} حاصل از واپاشی π^{\pm} برای محاسبه $\sqrt{\tau}(\tau \rightarrow \pi \nu_{\tau})$ ، آزمون دیگری برای بررسی جهان شمولی لپتون در اختیار داریم: مقدار پیش بینی شده $2,42 \times 10^{-11} \text{ MeV}$ ، با مقدار تجربی، $(2,6 \pm 0,1) \times 10^{-11} \text{ MeV}$ ، به خوبی سازگار می باشد.

۳-۹ پایستگی عدد لپتونی

در مدل لاگرانژی که تاکنون مورد بحث قرار گرفت، یک لپتون تنها می تواند به لپتونی دیگر از همان خانواده خودش تغییر کند، و لپتون و پادلپتون از هر خانواده تنها می توانند با هم آفریده یا نابود شوند. بنابراین قانون پایستگی به نام، پایستگی عدد لپتونی، (در این قانون پایستگی به پادلپتون ها علامت منفی نسبت داده می شود) وجود دارد که به ازای هر خانواده جداگانه برقرار است و در نمونه هایی که پس از این در نظر خواهیم گرفت، این موارد را خاطر نشان خواهیم کرد.

در بخش ۷-۱ دیدیم که قانون پایستگی شمار ذره ها ناشی از تقارن $U(1)$ لاگرانژی می باشد. جالب است که در یابیم این امر چگونه با لاگرانژی مدل ما جور در می آید.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

که با بهره گیری از اسپینورهای دیراکی برای میدان های لپتونی، لاگرانژی به شکل زیر در می آید

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{free}} = & \partial_{\mu} \Phi^{\dagger} \partial^{\mu} \Phi - m_{\pi}^2 \Phi^{\dagger} \Phi \\ & + \bar{\psi}_e (\gamma^{\mu} i \partial_{\mu} - m_e) \psi_e + \bar{\nu}_e \gamma^{\mu} i \partial_{\mu} \nu_e \\ & + \bar{\psi}_{\mu} (\gamma^{\mu} i \partial_{\mu} - m_{\mu}) \psi_{\mu} + \bar{\nu}_{\mu} \gamma^{\mu} i \partial_{\mu} \nu_{\mu} \\ & + \bar{\psi}_{\tau} (\gamma^{\mu} i \partial_{\mu} - m_{\tau}) \psi_{\tau} + \bar{\nu}_{\tau} \gamma^{\mu} i \partial_{\mu} \nu_{\tau}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \alpha_{\pi} [j^{\mu} \partial_{\mu} \Phi_{\pi} + j^{\mu \dagger} \partial_{\mu} \Phi_{\pi}^{\dagger}]$$

و می توان جریان j_{μ} در معادله (۹-۲) را بر حسب اسپینورهای دیراکی به صورت زیر نوشت

$$j^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5) v_e + \bar{\psi}_\mu \gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5) v_\mu + \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5) v_\tau \quad (6-9)$$

لاگرانژی $\mathcal{L}_{\text{free}}$ ، خودش دارای تقارن‌های $U(1)$ می‌باشد: یعنی هفت فاز مستقل از هفت میدان آزاد می‌باشد. با در نظر گرفتن \mathcal{L}_{int} ، تعداد این هفت فاز به چهار فاز کاهش می‌دهد که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \psi_e &\rightarrow e^{i\beta} e^{i\alpha_e} \psi_e, & v_e &\rightarrow e^{i\alpha_e} v_e; \\ \psi_\mu &\rightarrow e^{i\beta} e^{i\alpha_\mu} \psi_\mu, & v_\mu &\rightarrow e^{i\alpha_\mu} v_\mu; \\ \psi_\tau &\rightarrow e^{i\beta} e^{i\alpha_\tau} \psi_\tau, & v_\tau &\rightarrow e^{i\alpha_\tau} v_\tau; \\ \Phi_\pi &\rightarrow e^{i\beta} \Phi_\pi \end{aligned}$$

ضریب فازهای α_e ، α_μ ، α_τ مربوط به جریان‌های پایسته لپتونی می‌شوند (مسئله ۹-۶). اگر لازم است که \mathcal{L} تحت تقارن پیمانه‌ای موضعی ناوردا باشد، و بستگی آن به فضا زمان دلخواه باشد $\beta = \beta(x)$ ، همانند بخش ۵-۵، به معرفی میدان الکترومغناطیسی A^μ می‌رسیم. خواهیم دید که با معرفی جرم برای نوترینو، همه ویژگی‌های لاگرانژی مؤثری که معرفی کردیم، در مدل استاندارد برجا نمی‌ماند.

۹-۴ واپاشی میون

تحلیل واپاشی‌های میون

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad (7-9)$$

اهمیت به‌سزایی در ساختن مدل استاندارد دارد. این واپاشی‌ها تنها میدان‌های لپتونی را دربر می‌گیرند، بنابراین مانند نمونه‌ای که در مورد واپاشی پیون ذکر کردیم، فیزیک آن تحت تأثیر پدیده‌شناسی میدان‌های برهمکنش قوی تیره و مبهم نخواهد شد.

چگالی لاگرانژی مؤثری که این واپاشی‌ها را توصیف می‌کند، ذره‌های شرکت‌کننده در واکنش را با جریان‌ها جفت می‌کند. در واقع همه واپاشی‌هایی که تاکنون دیده شده‌اند و تنها لپتون‌ها را در بر می‌گیرند، به خوبی با چگالی لاگرانژی برهمکنشی مؤثر توصیف می‌شود.

$$\mathcal{L}_{\text{lepton}} = -2\sqrt{2}G_F g_{\mu\nu} j^\mu j^{\nu\dagger} \quad (8-9)$$

که j^μ را با (۹-۲) یا (۹-۶) تعریف می‌کنیم. فرمی شکلی همانند این را برای واپاشی β زا ارائه کرد، به همین دلیل به G_F ثابت فرمی می‌گویند. ضریب $2\sqrt{2}$ بنا به ملاحظه‌های تاریخی وارد شده است.

جمله‌ای که در عبارت (۸-۹) واپاشی μ^- توصیف می‌کند

$$\mathcal{L} = -2\sqrt{2}G_F g_{\mu\nu} [e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{eL} \nu_{\mu L}^\dagger \tilde{\sigma}^\nu \mu_L] \quad (9-9)$$

بزرگترین سرچشمه میون‌ها ناشی از واپاشی‌های پیونی است، و این واپاشی‌ها، همانگونه که دیدیم، تقریباً ۱۰۰٪ قطبیده هستند. چگالی لاگرانژی برهمکنشی (۹-۹) دال بر آن است که بین زاویه θ ، راستای الکترون نسبت به راستای اسپین میون، و انرژی E_e الکترون همبستگی قوی وجود دارد. در چارچوب سکون میون، در پایین‌ترین مرتبه اختلال و با چشم‌پوشی از جمله‌های $(m_e/m_\mu)^2$ ، آهنگ واپاشی به بازه زاویه‌ای $d\theta$ و بازه انرژی dE_e عبارت می‌شود از (ر.ک. Donoghue et al. 1992, p.138)

$$R(\theta, E_e) d\theta dE_e = \frac{m_\mu G_F^2}{6\pi^2} \left[\left(\frac{3}{4} m_\mu - E_e \right) + \cos\theta \left(\frac{1}{4} m_\mu - E_e \right) E_e \right] dE_e \sin\theta d\theta \quad (10-9)$$

با انتگرال‌گیری از (۱۰-۹) روی θ و E_e آهنگ واپاشی کل برای این فرآیند به دست می‌آید

$$\frac{1}{\tau(\mu \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\mu)} = \frac{m_\mu^5 G_F^2}{192\pi^2} \quad (11-9)$$

آهنگ واپاشی کل میون، که دربردارنده واپاشی‌های همراه با فوتون در حالت نهایی هم باشد، برای نمونه واپاشی‌های زیر را هم در بر بگیرد

$$\mu^- \rightarrow e^- + \gamma + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

که با دقت بالایی اندازه‌گیری شده است و مقدار آن عبارتست از

$$\tau_\mu = (2,197,03 \pm 0,000,04) \times 10^{-6} \text{ s}$$

عبارت نظری دقیق متناظر با آن که با دربرگرفتن جمله‌های $(m_e/m_\mu)^2$ و اثرهای الکترومغناطیسی، (۱۱-۹) را تصحیح کند، به مقدار زیر برای ثابت فرمی منجر می‌شود

$$G_F = 1,16639(2) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (12-9)$$

که مقدار پذیرفته شده کنونی برای این ثابت مهم می‌باشد.

آزمون‌های بعدی برای بررسی جهان‌شمولی لپتونی با واپاشی‌های زیر

$$\tau^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau, \quad \tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau$$

و مزدوج‌های مختلط آنها میسر می‌گردد. این واپاشی‌ها، همانند واپاشی میون با جمله‌های مناسبی در لاگرانژی برهمکنش (۹-۸) توصیف می‌گردد. از آنجا که هم مقدار $(m_e/m_\tau)^2$ و هم مقدار $(m_\mu/m_\tau)^2$ کوچک هستند، با توجه به فرمول مرتبه اول (۱۱-۹) که در آن بجای m_μ مقدار m_τ قرار گیرد، مقدار این آهنگها واپاشی برابر با هم و تقریباً برابر با $4 \times 10^{-11} \text{ MeV}$ پیش‌بینی می‌شود. البته این مقدارها در محدوده خطای آزمایشگاهی می‌باشند. همچنین با بهره‌گیری از این فرمول، نسبت واپاشی‌ها

عبارتست از

$$\frac{\tau(\tau \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\tau)}{\tau(\tau \rightarrow e \bar{\nu}_\tau \nu_e)} \approx \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^6$$

نسبت آهنگ‌های واپاشی برابر با 7.36×10^{-7} و نسبت توان پنجم این جرم‌ها برابر 7.43×10^{-7} می‌باشد. شایان ذکر است بعد ثابت جفت‌شدگی G_F ، از جنس $^{-2}$ (جرم) می‌باشد. برهمکنش مؤثر (۸-۹) را نمی‌توان به برهمکنشی در نظریه کوانتمی میدان ارتقا داد؛ ر.ک. بخش ۸-۴.

۵-۹ برهمکنش نوترینوهای میون با الکترون‌ها

در دهه ۱۹۶۰، باریک‌های شدید نوترینوی میون در بروکهاون و سرن طراحی و ایجاد شدند. نوترینوها (یا پادنوترینوهای) میون در شکل ذره‌های ثانویه به دست آمده از واپاشی مزون‌های π^+ (یا π^-) در حال پرواز تولید شدند. از این مشاهده دریافت شد که این باریک‌های نوترینو تقریباً تنها میون و نه الکترون تولید می‌کنند، و زمانی که در برهمکنش با هدف قرار گرفتند، تمایز بین نوترینوهای الکترون و نوترینوهای میون مشخص گردید.

انرژی مرکز جرمی \sqrt{s} که در برخورد نوترینو با الکترون ساکن در دسترس قرار می‌گیرد، نسبتاً کوچک می‌باشد. این امر به دلیل کوچک بودن جرم الکترون می‌باشد. اگر E_ν انرژی نوترینو باشد، داریم

$$s = m_e (2E_\nu + m_e) \quad (۹-۱۳)$$

است (ر.ک. مسأله ۹-۸). برای نمونه اگر $E_\nu = 30 \text{ GeV}$ باشد، آنگاه $s = (175 \text{ MeV})^2$ به دست می‌آید که بیش از یک میون تولید نمی‌کند. بیشتر برهمکنش‌های نوترینو با هسته اتم‌های هدف صورت می‌گیرد. اما، در اینجا تنها برهمکنش با الکترون را در نظر می‌گیریم.

برهمکنش

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$$

در چگالی لاگرانژی برهمکنش مؤثر (۸-۹) جا می‌گیرد. در نظریه اختلال مرتبه اول و با میانگین‌گیری روی قطبش‌های الکترون، این لاگرانژی وجود سطح مقطع دیفرانسیلی همسانگردی را در دستگاه مرکز جرم به اندازه زیر پیش‌بینی می‌کند:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G_F^2}{4\pi^2} \frac{(s - m_\mu^2)^2}{s}, \quad \sigma_{\text{tot}} = \frac{G_F^2}{\pi^2} \frac{(s - m_\mu^2)^2}{s} \quad (۹-۱۴)$$

که s مجذور انرژی مرکز جرم می‌باشد. (ر.ک. Okun 1982, p 134).

در انرژی‌های پایین دسترس‌پذیر در آزمایش، سطح مقطع سازگار با شکل نظری خود پدیدار می‌گردد.

ساختار انرژی بالا، به‌طور تجربی، به آسانی کاویده نمی‌شود، این موضوع را می‌توان از (۹-۱۳) دریافت. اما روشن است که فرمول نظری برای انرژی‌های بالا ناکافی می‌باشد. یعنی با افزایش مقدار S ، عبارت‌های (۹-۱۴) بی‌هیچ حد و حصری زیاد می‌شوند، و برای برهمکنش «نقطه‌ای»، این امر با یکانی بودن ناسازگار است. در این چارچوب نمی‌توان این عبارتها را بهتر کرد، زیرا لاگرانژی مؤثر نظریهٔ بازهنجارپذیری در اختیار ما قرار نمی‌دهد.

بارزترین نتیجه‌ای که از آزمایش‌های مربوط به برهمکنش‌های نوترینو-الکترون به‌دست می‌آید، مشاهدهٔ پراکندگی کشسان هم برای ν_μ و هم برای $\bar{\nu}_\mu$ می‌باشد:

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-,$$

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$$

با سطح مقطع‌هایی از همان مرتبهٔ بزرگی سطح مقطع تولید میون. چنین پراکندگی کشسانی در L_{int} ارائه شدهٔ ما موجود نیست (هرچند جمله‌های متناظر با $e\nu_e \rightarrow e\nu_e$ در آن وجود دارد). بنابراین باید برهمکنش ضعیف دیگری وجود داشته باشد. به‌دلیل کوچک بودن سطح مقطع‌ها در محدودهٔ انرژی‌های دسترس‌پذیر، بررسی تجربی دربارهٔ این موضوع مشکل می‌باشد. از مدل استاندارد خواهیم آموخت که لاگرانژی برهمکنش موردنیاز هم به شکل جریان-جریان می‌باشد،

$$L_{int} = \frac{-G_F}{\sqrt{2}} (j_{neutral})_\mu (j_{neutral})^\mu \quad (۹-۱۵)$$

که برحسب اسپینورهای دیراکی به‌صورت زیر در می‌آید

$$(j_{neutral})^\mu = \bar{\nu}_e \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \nu_e + \bar{\psi}_e \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \psi_e \quad (۹-۱۶)$$

جمله‌های همانند این برای خانوادهٔ لپتون μ و لپتون τ

که c_V و c_A پارامتر هستند. این جریان را به نام جریان خشی می‌خوانند زیرا مانند جریان‌های (۹-۲) هیچ تغییر باری اعمال نمی‌کند. (توجه کنید که این جریان در پراکندگی $e\nu_e \rightarrow e\nu_e$ هم شرکت می‌کند.) با بازنویسی (۹-۱۶) با اسپینورهای دو مؤلفه‌ای، در می‌یابیم که

$$(j_{neutral})^\mu = (\nu_{eL})^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{eL} + (c_V + c_A) e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu e_L \quad (۹-۱۷)$$

$$+ (c_V + c_A) e_R^\dagger \sigma^\mu e_R + \tau \quad \text{و } \mu \text{ همانند برای } \mu$$

در این شکل، میدان‌های لپتونی راستگرد همانند میدان‌های لپتونی چپگرد در جریان‌های خشی جا گرفته است. که پارامترهای c_V و c_A مربوط به زاویهٔ واینبرگ θ_W می‌باشند و همانگونه که در فصل ۱۲ (معادلهٔ (۱۲-۲۴)) خواهیم دید در مدل استاندارد پدیدار می‌شوند. زیروندهای V و A به‌ترتیب مربوط به سرشت برداری و بردارمحوری جمله‌های موجود در (۹-۱۶) می‌باشد. (ر.ک. بخش ۵-۵).

می توان انتظار داشت که جریان های خنثی در فیزیک اتمی هم حضور داشته باشند، و به راستی در این بخش از فیزیک هم حضور دارند. اما تشخیص اثر این جریان ها به طور تجربی مشکل است. برای نمونه این اثرها منجر به نقض پاریتی در اتم ها می شوند. اما در انرژی های اتمی، این برهمکنش ضعیف اثر بسیار کوچکی خواهد داشت. در واقع واپاشی دستگاه اتمی یا هسته ای ناپایدار از طریق جریان ضعیف باید همواره با واپاشی های سریعتر الکترومغناطیسی رقابت کند، و به همین دلیل هیچ گاه واپاشی های ضعیف در این دستگاه ها مشاهده نشده اند.

مسئله ها

۱-۹ در واپاشی $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ ساکن، نشان دهید که

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v_e}{c} \right) = \frac{m_e^2}{m_\pi^2 + m_e^2}$$

۲-۹ نشان دهید که چگالی حالت های نهایی برای واپاشی مسئله ۱-۹ عبارتست از

$$\rho(E) = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi p_e^2 \frac{dp_e}{dE}$$

که V حجم بهنجارش و $\frac{dp_e}{dE} = \frac{E_e}{m_\pi}$ است.

۳-۹ نسبت آهنگ های واپاشی داده شده در معادله (۴-۹) را بیابید.

۴-۹ جمله ای از \mathcal{L}_{int} که توصیف کننده $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ می باشد، عبارتست از

$$\mathcal{L}_{int} = \alpha_\pi e_L^\dagger \vec{\sigma}^\mu \nu_{eL} \partial_\mu \Phi_\mu$$

فرض کنید این جمله منجر به جمله متناظر $V(\circ)$ در همیلتونی مؤثر گردد،

$$V(\circ) = -\alpha_\pi \int e_L^\dagger \vec{\sigma}^\mu \nu_{eL} \partial_\mu \Phi_\mu d^3x$$

(این فرض را در فصل ۱۲ بررسی خواهیم کرد.)

برای این واپاشی، احتمال گذار بر یکای زمان در پایین ترین مرتبه می باشد

$$2\pi \left| \langle e_p, \bar{\nu}_{p'} | V(\circ) | \pi^-(\text{ساکن}) \rangle \right|^2 \rho(E)$$

که $\rho(E)$ در مسئله ۲-۹ داده شده است.

با بهره گیری از بسط های میدان آزاد در معادله های (۳-۳) و (۶-۲۴)، و مسئله ۶-۵، عنصر ماتریسی

بالا را حساب کرده و معادله (۳-۹) را تحقیق کنید.

۵-۹ هم ارزی عبارت های (۲-۹) و (۶-۹) را برای جریان H z تحقیق کنید.

۶-۹ لاگرانژی مؤثر بخش ۳-۹ را در نظر بگیرید، نشان دهید که جریان پایسته مربوط به تقارن $U(1)$ ، یعنی $e^{i\alpha}\psi_e \rightarrow e^{i\alpha}\psi_e, \nu_e \rightarrow e^{i\alpha}\nu_e, \psi_e \rightarrow e^{i\alpha}\psi_e$ ، همان جریان الکترون-نوترینوی الکترون است

$$j^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e + \bar{\nu}_e \gamma^\mu \nu_e$$

نشان دهید که جریان پایسته مربوط به $e^{i\beta}$ در تبدیل‌های (۷-۹) عبارتست از

$$\bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e + \bar{\psi}_\mu \gamma^\mu \psi_\mu + \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \psi_\tau + i[(\Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - \Phi \partial^\mu \Phi^\dagger)] + \alpha_\pi (j^{\mu\dagger} \Phi^\dagger - j^\mu \Phi)$$

چگالی لاگرانژی بسازید، که هنگامی که با افزایش تقارن جهانی $U(1)$ ، برای ضریب فاز $e^{i\beta}$ ، به تقارن پیمانه‌ای، میدان الکترومغناطیسی وارد می‌شود، جواب بدهد.

۷-۹ مقدار G_F را از عبارت (۹-۱۱) و طول عمر آزمایشگاهی τ_μ برآورد کنید.

۸-۹ با بهره‌گیری از ناوردای لورنتسی مناسب، معادله (۹-۱۳) را به دست آورید.

۹-۹ جمله‌ای از چگالی لاگرانژی مؤثر (۹-۸) جدا کنید که در پراکندگی زیر شرکت داشته باشد

$$e^- + \nu_e \rightarrow e^- + \nu_e$$

و جمله‌ای از (۹-۱۵) جدا کنید که در پراکندگی زیر شرکت داشته باشد

$$e^- + \nu_\mu \rightarrow e^- + \nu_\mu$$

۱۰-۹ ذره K^- همانند ذره π^- می‌باشد، که بجای کوارک s در π^- ، کوارک d نشسته است. شکل

برهمکنش مؤثر با لپتون‌ها همانند معادله (۹-۱) است، منتها بجای Φ_K مقدار Φ_π ، و بجای α_K مقدار α_π نشسته است. با بهره‌گیری از این همانندی با معادله (۹-۴)، نسبت $\tau(K \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu) / \tau(K \rightarrow \mu \bar{\nu}_e)$ را برآورد کرده و با مقدار مشاهده شده $(m_K = 493,68 \text{ MeV}) \times 10^{-10} (2,44 \pm 0,1)$ مقایسه کنید.

عمر میانگین $\tau(K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)$ برابر با $1,948 \times 10^{-8} \text{ s}$ اندازه‌گیری شده است. نسبت α_K / α_π را برآورد کنید.

۱۱-۹ آهنگ واپاشی (۹-۵) را به دست آورید.

شکست تقارن در نظریه‌های مدل

در فصل ۹ چگالی لاگرانژی‌های مؤثر برهمکنش ضعیف را ساختیم. زمانی که این چگالی لاگرانژی‌ها در مرتبه‌های پایین نظریه اختلال بکار روند، به‌خوبی پدیده‌های مشاهده شده، در انرژی‌های پایین، را توجیه می‌کنند. در مرتبه‌های بالاتر نظریه اختلال مشکلاتی، همانند مشکلات الکترودینامیک کوانتمی بروز می‌کند. اما بین این دو تفاوت مهمی وجود دارد: ثابت شده است که این نظریه‌های لاگرانژی مؤثر را نمی‌توان بهنجار کرد، و به‌همین دلیل رضایتبخش نیستند. به‌علاوه، در انرژی‌های بالاتر پدیده‌های تازه‌ای پدیدار می‌شوند، و اکنون به تجربه، به‌خوبی، معلوم شده است که ذرات میانجی برای برهمکنش ضعیف، بوزون‌های W^+ ، W^- و Z هستند. چگونه می‌توان این ذرات را در نظریه برهمکنش ضعیف با هم یکی کرد، تا نظریه بهنجارپذیر هم باشد، و دارای جلوه و ساختار زیبایی همانند QED داشته باشد؟ پاسخ در نظریه اتحاد برهمکنش‌های ضعیف و الکترومغناطیس واینبرگ-سلام نهفته است. در این فصل به نظریه‌های «مدل» در حکم مقدمه‌ای برای نظریه سلام- واینبرگ خواهیم پرداخت. ریاضیات این نظریه‌ها نسبتاً ساده است، اما مفاهیم بنیادینی در این ریاضیات موجود است که به آن نیاز خواهیم داشت.

۱-۱۰ شکست تقارن جهانی و بوزون‌های گولدستون

برای میدان اسکالر مختلطی مانند $\Phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ می‌توان چگالی لاگرانژی به‌صورت زیر نوشت

$$L = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi \quad (1-10)$$

(ر.ک. معادله (۳-۳۲))

در عبارت بالا، می‌توان $(\partial\Phi^\dagger/\partial t)(\partial\Phi/\partial t)$ را چگالی انرژی جنبشی و $\nabla\Phi^\dagger \cdot \nabla\Phi + m^2\Phi^\dagger\Phi$ را چگالی انرژی پتانسیل دانست (ر.ک. بخش ۳-۳). اگر Φ ثابت و مستقل از فضا و زمان باشد، تنها سهم را در انرژی، جمله $m^2\Phi^\dagger\Phi$ دارد. از آنجا که m^2 مثبت است، هنگامی که $\phi_1 = \phi_2 = 0$ باشد، این جمله کمینه خواهد شد. بنابراین $\phi = 0$ متناظر با حالت «خلا» می‌باشد. اکنون چگالی لاگرانژی را، که با تغییر علامت جلوی m^2 به‌دست می‌آید، بررسی می‌کنیم. چنین وضعیتی ناپایدار است، یعنی چگالی انرژی پتانسیل از پایین نامقید می‌باشد. پایداری را می‌توان با معرفی جمله

$(\Phi^\dagger \Phi)^\dagger (m^2/2\phi_0^2)$ دوباره به دست آورد. که ϕ_0^2 پارامتر (حقیقی) دیگری است. برای آسودگی، جمله ثابت $m^2\phi_0^2/2$ را اضافه می کنیم، و آنگاه

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi)$$

که

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2} [\Phi^\dagger \Phi - \phi_0^2]^2 \quad (2-10)$$

شکل V در شکل (۱-۱۰) نشان داده شده است. اکنون کمینه انرژی میدان با Φ ثابت و مستقل از فضا و زمان به دست می آید، اما به گونه ای که $|\Phi|^2 = \Phi_0^2$ باشد. چنین میدانی یکتا نیست اما با نقطه ای بر روی دایره $\phi_0 = |\Phi|$ ، در فضای حالت (ϕ_1, ϕ_0) تعریف می شود، به گونه ای که شمار حالت های خلأ نامتناهی گردد.

همانندی این موضوع با مغناطیس کمک کننده است. همیتونی توصیف کننده فرومغناطیس هایزبرگ، دارای تقارن دورانی است. یعنی برای آن همه راستاها در فضا هم ارز هستند. اما در حالت پایه آن، فرومغناطیس در راستای ویژه ای مغناطیده می شود، که این امر در نظریه مشخص نمی شود، و تقارن دورانی از بین می رود. این موضوع نمونه ای از شکست خود بخود تقارن است.

چگالی لاگرانژی (۲-۱۰) دارای تقارن جهانی $U(1)$ است یعنی به ازای هر مقدار حقیقی α ، $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L}$ ، می تواند به $\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\alpha} \Phi$ تبدیل یابد. هم ارز آن،

$$\phi_1' = \phi_1 \cos \alpha + \phi_0 \sin \alpha$$

$$\phi_0' = -\phi_1 \sin \alpha + \phi_0 \cos \alpha$$

این تبدیل ها حالت را به دور دایره (ثابت $|\Phi|^2$) در فضای حالت (ϕ_1, ϕ_0) ، می گرداند. اگر راستای ویژه ای را در فضای (ϕ_1, ϕ_0) برگزینیم، که به ازای آن Φ حقیقی باشد، و حالت خلأ را $(\phi_0, 0)$ اختیار کنیم، تقارن $U(1)$ را می شکنیم.

با بسط حول این حالت پایه $(\phi_0, 0)$ ، قرار می دهیم $\Phi = \phi_0 + (1/\sqrt{2})(\chi + i\psi)$. چگالی لاگرانژی به صورت زیر در می آید

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - \frac{m^2}{2\phi_0^2} \left[\sqrt{2} \phi_0 \chi + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\psi^2}{2} \right]^2 \quad (3-10)$$

پس از شکست تقارن $U(1)$ باید این میدان های تازه را تفسیر کنیم. (تا حد زیادی به همان روش پیشین، تا پیش از شکسته شدن تقارن فضایی، نمی توان حالت های برانگیخته فرومغناطیس را مورد بحث قرار داد.) به جای میدان مختلط Φ ، دو میدان حقیقی اسکالر جفت شده χ و ψ داریم. می نویسیم

$$L = L_{\text{free}} + L_{\text{int}}$$

که

$$L_{\text{free}} = \frac{1}{4} \partial_{\mu} \chi \partial^{\mu} \chi - m^2 \chi^2 + \frac{1}{4} \partial^{\mu} \psi \partial_{\mu} \psi \quad (4-10)$$

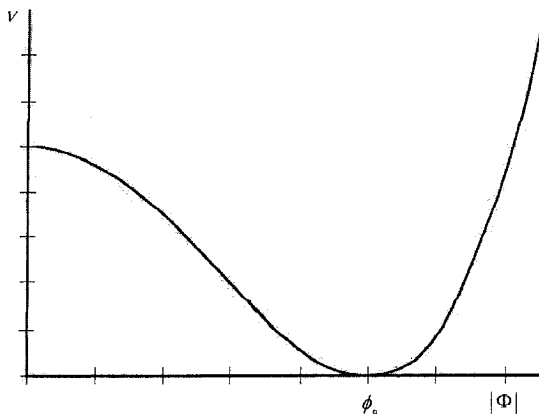
L_{free} نشان‌دهنده میدان‌های ذره آزاد می‌باشد، و همه جمله‌های موجود در L را، که بر حسب میدان‌ها از درجه دوم می‌باشند، در بر می‌گیرد. به‌ازای میدان‌های کلاسیک و نوسانهای کوچک، این جمله‌ها برتریت دارند. بقیه چگالی لاگرانژی، L_{int} ، متناظر با برهمکنشهای بین ذرات آزاد و تصحیح‌های مرتبه بالاتر حرکت آنهاست.

جمله درجه دوم $-m^2 \chi^2$ در معادله (۴-۱۰) را در نظر بگیرید. میدان χ ، متناظر با ذره اسکالاری با اسپین صفر و جرم $\sqrt{2}m$ است (در مقایسه با (۳-۱۸)). در مورد میدان ψ چنین جمله درجه دومی وجود ندارد. این مورد متناظر با وجود ذره اسکالاری با اسپین صفر، و بنابراین بدون جرم می‌باشد. این ذره‌های بدون جرم، که همواره به‌صورت نتیجه شکست تقارن جهانی پیدا می‌شوند، بوزون‌های گولدستون نامیده می‌شوند.

۲-۱۰ شکست تقارن موضعی و بوزون هیگز

اکنون می‌خواهیم با تعمیم بیشتر، چگالی لاگرانژی‌ای بسازیم که تحت تبدیلات پیمانه‌ای موضعی $U(1)$ ناورد باشد،

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-iq\theta} \Phi$$



شکل ۱-۱۰ نمودار $V = (m^2/2\phi_0^2) [\Phi^* \Phi - \phi_0^2]^2$ به‌صورت تابعی از $|\Phi|$ ؛ در اینجا Φ میدانی کلاسیک است.

که $\theta = \theta(x)$ می‌تواند وابسته به فضا و زمان باشد. برای این کار، نیاز به معرفی میدان پیمانه‌ای (بدون جرم) A_μ ، همانند بخش ۷-۵، داریم. چون

$$\mathcal{L} = \left[(\partial_\mu - iqA_\mu) \Phi^\dagger \right] \left[(\partial^\mu + iqA^\mu) \Phi \right] - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (5-10)$$

که $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ است، و دوباره

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2} \left[\Phi^\dagger \Phi - \phi_0^2 \right]^2$$

و \mathcal{L} تحت تبدیل پیمانه‌ای موضعی ناورد می‌باشد

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = e^{-iq\theta} \Phi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$$

هنگامی که میدان‌های A_μ صفر شوند، کمینه انرژی میدان به دست می‌آید، و Φ ثابت می‌باشد، که با نقطه‌ای روی دایره $|\Phi| = \phi_0$ تعریف می‌شود. هر تبدیل پیمانه‌ای هم روی این بیکریندی میدان، کمینه می‌باشد. دوباره در حالت‌های خلأ، مقدار نامتناهی داریم.

با معلوم بودن $\Phi(x)$ ، می‌توانیم همواره $\theta(x)$ را به گونه‌ای برگزینیم که میدان $\Phi'(x) = e^{-iq\theta} \Phi(x)$ حقیقی باشد. این امر تقارن را می‌شکند، زیرا دیگر برای ایجاد تبدیل‌های پیمانه‌ای بیشتر آزاد نیستیم.

با قرار دادن $\Phi'(x) = \phi_0 + h(x)/\sqrt{2}$ ، که $h(x)$ حقیقی می‌باشد، به نتیجه زیر می‌رسیم

$$\mathcal{L} = \left[(\partial_\mu - iqA'_\mu) \left(\phi_0 + h/\sqrt{2} \right) \right] \left[(\partial^\mu + iqA'^\mu) \left(\phi_0 + h/\sqrt{2} \right) \right] - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2\phi_0^2} \left[\sqrt{2}\phi_0 h + \frac{1}{2} h^2 \right]^2 \quad (6-10)$$

برای سامان‌دهی بیشتر، دوباره این چگالی لاگرانژی را به صورت زیر جدا می‌کنیم

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

پریم‌های روی میدان پیمانه‌ای را حذف می‌کنیم

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} m^2 h^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + q^2 \phi_0^2 A_\mu A^\mu$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = q^2 A_\mu A^\mu \left(\sqrt{2}\phi_0 h + \frac{1}{2} h^2 \right) - \frac{m^2 h^2}{2\phi_0^2} \left(\sqrt{2}\phi_0 h + \frac{1}{2} h^2 \right) \quad (7-10)$$

پیش از شکستن تقارن، میدان اسکالر مختلط $\Phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ ، و میدان برداری بدون جرمی

با دو حالت قطبش داشتیم (بخش ۴-۴). در L_{free} میدان اسکالر منفرد $h(x)$ متناظر با بوزون بدون اسپینی به جرم $\sqrt{2}m$ ، و میدان برداری A_μ ، متناظر با بوزون برداری به جرم $\sqrt{2}q\phi$ ، با سه مؤلفه مستقل (بخش ۴-۹) می‌باشد.

این سازوکار برای وارد ساختن جرم در نظریه، توسط هیگز (۱۹۶۴) و دیگران (مثل اندرسون، ۱۹۶۳) ابداع شد. ذره متناظر با میدان $h(x)$ را بوزون هیگز گویند. پیامد شکست تقارن موضعی میدان پیمانه‌ای، ایجاد جرم می‌باشد، و به‌جای بوزون گلدستون، که در نمونه مربوط به شکست تقارن جهانی در بخش ۱۰-۱ پدیدار شد، حالتی با قطبش طولی از این بوزون جرم‌دار با اسپین یک قرار می‌گیرد.

در نظریه «الکتروضعیف» واینبرگ و سلام، جرم ذره‌های W^\pm و Z در نتیجه شکست تقارن به‌وجود می‌آیند. نظریه حاصل را می‌توان بازبهنجار کرد، درحالی‌که نظریه پدیدارشناختی فصل ۹ را نمی‌توان بازبهنجار کرد. شکل $V(\Phi^\dagger\Phi)$ که در این فصل معرفی شد، در نظریه الکتروضعیف هم پدیدار می‌شود. ممکن است به‌نظر بیاید که این ویژگی دلخواه است. اما، می‌توان نشان داد که کلی‌ترین شکل بهنجاری‌پذیر می‌باشد.

مسئله‌ها

۱-۱۰ کدام جمله برهمکنشی در چگالی لاگرانژی مدل ارائه شده (۱۰-۳)، واپاشی بوزون جرم‌دار را، به دو بوزون گلدستون، مجاز می‌دارد؟ نشان دهید که این آهنگ واپاشی در پایین‌ترین مرتبه نظریه اختلال به‌صورت زیر است

$$\frac{1}{\tau(\chi \rightarrow \psi\psi)} = \frac{m_\chi}{128\pi} \left(\frac{m_\chi}{\phi_0} \right)^2$$

۱-۲ نشان دهید که با چگالی لاگرانژی این مدل ارائه شده (۱۰-۷)، بوزون برداری پایداری می‌ماند. اما اگر ثابت جفت‌شدگی $q < m/(2\phi_0)$ باشد، بوزون اسکالر به دو بوزون برداری و می‌باشد.

در فصل پیشین (بخش ۱۰-۲)، چگالی لاگرانژی ساده و ناوردای لورنتسی ساختیم، که باید تحت تبدیلات $U(1)$ ناوردا می‌ماند. این بایسته‌ها منجر به ارائه «میدان پیمانه‌ای» A_{μ} می‌شود. این دستگاه در حالت پایه دارای واکنی می‌باشد. شکستن تقارن موضعی منجر به پدیدار شدن میدان برداری حامل جرم، به همراه میدان هیگز اسکالری می‌شود که آن هم حامل جرم است. پیامد این برانگیزش برای وارد کردن جرم، به ایجاد نظریه کوانتمی بازبهنجارپذیر منجر می‌شود. در این فصل همان روش را برای لاگرانژی پیچیده‌تری بکار می‌بریم، که منجر به معانی فیزیکی قابل توجهی می‌گردد.

۱-۱۱ تقارن $SU(2)$

در گام بعدی برای گسترش بیشتر، که در مدل استاندارد هم، مرحله‌ای پایه‌ای می‌باشد، چگالی لاگرانژی‌ای خواهیم ساخت که تحت تبدیلات $SU(2)$ و همچنین تحت تبدیلات $U(1)$ ناوردا بماند. این اندیشه را نخستین بار یانگ و میلز مورد کنکاش قرار دادند (۱۹۴۵). یک میدان دو مؤلفه‌ای به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \end{pmatrix} \quad (1-11)$$

که هم Φ_A و هم Φ_B میدان‌های اسکالر مختلط هستند،

$$\Phi_A = \phi_1 + i\phi_2, \quad \Phi_B = \phi_3 + i\phi_4$$

و در کل منجر به چهار میدان حقیقی می‌شوند.

اگر $e^{-i\theta}$ عضوی از گروه $U(1)$ ، و U عضوی از گروه $SU(2)$ باشد (در پیوست ب. درباره آنها بحث شده است)، به گونه‌ای که $U^\dagger U = U U^\dagger = 1$ باشد، باید چگالی لاگرانژی که می‌سازیم تحت تبدیلات $SU(2) \times U(1)$ ناوردا بماند.

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\theta} U \Phi \quad (2-11)$$

چگالی لاگرانژی ساده‌ای که دارای تقارن جهانی $SU(2) \times U(1)$ باشد، عبارتست از

$$\mathcal{L}_\Phi = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (۳-۱۱)$$

که جمله‌های آن برحسب میدان‌های حقیقی به صورت زیر در می‌آید

$$\Phi^\dagger \Phi = \Phi_A^* \Phi_A + \Phi_B^* \Phi_B = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2,$$

$$\partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi = \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 + \partial_\mu \phi_3 \partial^\mu \phi_3 + \partial_\mu \phi_4 \partial^\mu \phi_4$$

اگر $V(\Phi^\dagger \Phi) = m^2 \Phi^\dagger \Phi$ باشد، چگالی لاگرانژی با چهار میدان اسکالر آزاد مستقل از هم متناظر می‌باشد، که جرم همهٔ این میدان‌ها یکسان و برابر با m است (ر.ک. (۳-۱۸)).

در مدل استاندارد، تقارن‌های جهانی $U(1)$ و $SU(2)$ به تقارن‌های موضعی تبدیل می‌شوند. می‌توان تبدیل $U(1)$ را به صورت زیر نوشت

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\theta} \Phi = \exp(-i\theta \tau^0) \Phi \quad (۴-۱۱ الف)$$

که در این جا برای ماتریس یکه، از نماد τ^0 استفاده می‌کنیم

$$B_\mu(x) \rightarrow B'_\mu(x) = B_\mu(x) + (\gamma/g_1) \partial_\mu \theta \quad (۴-۱۱ ب)$$

و همانند فصل ۷، جانشانی به شکل زیر انجام می‌دهیم.

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - (g_1/\gamma) B_\mu$$

در اینجا ثابت g_1 ، پارامتر بدون بُعد نظریه است، و بنا به قرارداد ضریب γ هم قرار می‌گیرد.

هر عنصری از $SU(2)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$U = \exp(-i\alpha^k \tau^k) \quad (۵-۱۱)$$

که α^k ها سه عدد حقیقی و τ^k ها سه مولد گروه $SU(2)$ می‌باشند. τ^k ها همان ماتریس‌های پائولی هستند:

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

برای تبدیل تقارن جهانی یا همه‌جایی $SU(2)$ ، به تقارن موضعی $SU(2)$ ، با $U = U(x)$ وابسته به مختصات فضا و زمان، باید به‌ازای هر مولد τ^k ، میدان پیمانه‌ای برداری $W_\mu^k(x)$ را معرفی کنیم. قانون تبدیل برای این ماتریس‌های

$$W_\mu(x) = W_\mu^k(x) \tau^k$$

به صورت زیر است

$$W_\mu(x) \rightarrow W'_\mu(x) = U(x) W_\mu(x) U^\dagger(x) + (\gamma i/g_1) (\partial_\mu U(x)) U^\dagger(x) \quad (۶-۱۱)$$

که گسترشی از (۴-۱۱) می‌باشد. در اینجا g_1 پارامتر بدون بعد دیگری از نظریه می‌باشد.

به ماتریس‌های زیر توجه کنید

$$\mathbf{W}_\mu(x) = \begin{pmatrix} W_\mu^\tau & W_\mu^\nu - iW_\mu^\tau \\ W_\mu^\nu + iW_\mu^\tau & -W_\mu^\tau \end{pmatrix} \quad (۷-۱۱)$$

این ماتریس‌ها هرمیتی بوده و رد آنها صفر می‌شود. می‌بایست این ویژگی‌ها تحت تبدیلات (۶-۱۱) حفظ شوند (مسئله ۱-۱۱). تبدیل جهانی $SU(2)$ ، یعنی $W'_\mu = U W_\mu U^\dagger$ ، متناظر با دوران بردارهای W_μ^k در فضای «ایزواسپین ضعیف» سه بعدی می‌باشد. این فضا را مولدهای τ^k تعریف می‌کنند. (ر.ک. پیوست ب).

سرانجام

$$D_\mu \Phi = \left[\partial_\mu + (ig_\nu/\nu) B_\mu + (ig_\tau/\nu) \mathbf{W}_\mu \right] \Phi \quad (۸-۱۱ الف)$$

به آسانی می‌توان نشان داد که

$$D'_\mu \Phi' = \left[\partial_\mu + (ig_\nu/\nu) B'_\mu + (ig_\tau/\nu) \mathbf{W}'_\mu \right] \Phi' = e^{-i\theta} U D_\mu \Phi$$

که

$$\Phi' = e^{-i\theta} U \Phi \quad (۸-۱۱ ب)$$

در نتیجه چگالی لاگرانژی که متناظر با (۳-۱۱) تحت پیمانه موضعی ناورد باشد، عبارتست از

$$\mathcal{L}_\Phi = (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (۹-۱۱)$$

اگر B_μ و \mathbf{W}_μ را بمانند چاربردارهای هموردا تبدیل بدهیم، \mathcal{L}_Φ تحت تبدیلات لورنتس هم ناورد می‌ماند.

۲-۱۱ میدان‌های پیمانه‌ای

در مورد میدان پیمانه‌ای B_μ ، تانسور قدرت میدان $B_{\mu\nu}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (۱۰-۱۱)$$

و همانند بخش ۲-۴، سهم دینامیکی چگالی لاگرانژی را برابر با $(1/4)B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$ می‌گیریم.

در معرفی تانسورهای قدرت میدان برای میدان‌های پیمانه‌ای $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ ، مشکل‌های دیگری هم وجود دارد که ناشی از سرشت ناآبلی گروه $SU(2)$ می‌شوند. این تانسور قدرت میدان را باید به شکل زیر در نظر گرفت

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} = \left[\partial_\mu + (ig_\tau/\nu) \mathbf{W}_\mu \right] \mathbf{W}_\nu - \left[\partial_\nu + (ig_\tau/\nu) \mathbf{W}_\nu \right] \mathbf{W}_\mu \quad (۱۱-۱۱)$$

تحت تبدیل $SU(2)$ ، $\mathbf{W}_\mu \rightarrow \mathbf{W}'_\mu$ ، تبدیل می‌شود که شکل تبدیل آن از (۶-۱۱) به دست می‌آید. نشان

دادن چگونگی تبدیل زیر کاری سراسرت، هر چند ملال آور، می باشد.

$$W_{\mu\nu} \rightarrow W'_{\mu\nu} = U W_{\mu\nu} U^\dagger \quad (11-12)$$

برای تأیید این نتیجه، از آنجا که $U U^\dagger = 1$ می باشد،

$$U(\partial_\mu U^\dagger) + (\partial_\mu U)U^\dagger = 0$$

تعریف پیچیده $W_{\mu\nu}$ از رابطه (11-11) به دست می آید، که برای دست یافتن به ویژگی ساده تبدیلی (11-12) لازم می باشد.

حال می توان سهم دینامیکی کل در چگالی لاگرانژی مربوط به میدان های پیمانهای را به صورت زیر اختیار کرد

$$\mathcal{L}_{\text{dyn}} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{\Lambda} \text{Tr}(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}) \quad (11-13)$$

با بهره گیری از (11-12) و ناوردایی رد ماتریس تحت چرخش دوره ای، می توانیم دریابیم که \mathcal{L}_{dyn} تحت تبدیل موضعی $SU(2)$ ناوردا می باشد.

با بکارگیری $[T^i, T^j] = \epsilon^{ijk} T^k$, etc، می توان ماتریس $W_{\mu\nu}$ را به صورت زیر نوشت

$$W_{\mu\nu} \rightarrow W_{\mu\nu}^i \tau^i \quad (11-14)$$

که

$$W_{\mu\nu}^1 = \partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1 - g_\nu (W_\mu^2 W_\nu^3 - W_\nu^2 W_\mu^3) \quad (11-15 \text{ الف})$$

$$W_{\mu\nu}^2 = \partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2 - g_\nu (W_\mu^3 W_\nu^1 - W_\nu^3 W_\mu^1) \quad (11-15 \text{ ب})$$

$$W_{\mu\nu}^3 = \partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3 - g_\nu (W_\mu^1 W_\nu^2 - W_\nu^1 W_\mu^2) \quad (11-15 \text{ ج})$$

از آنجا که $\text{Tr}(\tau^i \tau^j) = 0$, $i \neq j$ و $\text{Tr}(\tau^i)^2 = 2$ می باشد، می توانیم از (11-14) برای بیان چگالی لاگرانژی، به شکل اطمینان بخش تری، استفاده کنیم:

$$\mathcal{L}_{\text{dyn}} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\Lambda} W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} \quad (11-16)$$

در پایان این فصل خواهیم دید که میدان های $W_{\mu\nu}^1$ و $W_{\mu\nu}^2$ میدان های باردار الکتریکی هستند، و مرسوم است که در اینجا ترکیب های مختلطی تعریف کنیم

$$W_\mu^+ = (W_\mu^1 - iW_\mu^2)/\sqrt{2}, \quad W_\mu^- = (W_\mu^1 + iW_\mu^2)/\sqrt{2} \quad (11-17)$$

توجه کنید که میدان W_μ^- همیوگ مختلط میدان W_μ^+ می باشد. همچنین با استفاده از (11-15 الف) و (11-15 ب) تعریف می کنیم

$$W_{\mu\nu}^+ = (W_{\mu\nu}^1 - iW_{\mu\nu}^2) / \sqrt{2} = (\partial_\mu + i g_\nu W_\mu^2) W_\nu^+ - (\partial_\nu + i g_\mu W_\nu^2) W_\mu^+ \quad (18-11)$$

هم به همین طریق تعریف می‌کنیم.

همچنین می‌توانیم (۱۱-۱۵ ج) را به صورت زیر بنویسیم

$$W_{\mu\nu}^2 = \partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2 - i g_\nu (W_\mu^+ W_\nu^+ - W_\nu^- W_\mu^+) \quad (19-11)$$

و (۱۱-۱۶) به شکل زیر درمی‌آید

$$\mathcal{L}_{\text{dyn}} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^2 W^{\mu\nu} - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^- W^{+\mu\nu} \quad (20-11)$$

۳-۱۱ شکست تقارن $SU(2)$

در معادله (۲-۱۰)، $V(\Phi^\dagger \Phi)$ را به شکل زیر در نظر می‌گیریم.

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2} [(\Phi^\dagger \Phi) - \phi_0^2]^2 = \frac{m^2}{2\phi_0^2} [\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 - \phi_0^2]^2 \quad (21-11)$$

که ϕ_0 پارامتر تثبیت شده‌ای همانند (۲-۱۰) می‌باشد. با این عبارت برای V ، حالت خلأی دستگاه مورد نظرمان در فضای چهار بعدی میدان‌های اسکالر، واگن می‌باشد. اکنون تقارن $SU(2)$ را می‌شکنیم. سه پارامتر حقیقی $\alpha^k(x)$ در اختیار داریم که عنصری از $SU(2)$ را مشخص می‌کند. از این آزادی برای پذیرفتن پیمانه‌ای بهره می‌گیریم که در آن پیمانه، به ازای هر پیکربندی میدان $\Phi_A = 0$ (دو شرط) بوده و Φ_B حقیقی (یک شرط) می‌باشد. در این صورت حالت زمینه عبارتست از

$$\Phi_{\text{زمینه}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \quad (22-11)$$

و حالت‌های برانگیخته به شکل زیرند

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + h(x) / \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (23-11)$$

که میدان $h(x)$ حقیقی می‌باشد.

تقارن موضعی $U(1)$ باقی می‌ماند: میدان‌های (۲۳-۱۱) تحت تبدیل‌های $U(1) \times SU(2)$ به شکل

زیر، بدون تغییرند

$$e^{-i\theta/2} \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (24-11)$$

چنین ماتریس‌هایی، منجر به نمایش ماتریسی 2×2 گروه $U(1)$ می‌شود. این تقارن باقی‌مانده به شکل

تقارن $U(1)$ الکترومغناطیس در خواهد آمد.

می خواهیم که \mathcal{L}_Φ (معادله (۹-۱۱)) را بر حسب میدان $h(x)$ بیان کنیم. از معادله (۱۱-۲۱) داریم

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = m^\dagger h^\dagger + \frac{m^\dagger h^\dagger}{\sqrt{2}\phi_0} + \frac{m^\dagger h^\dagger}{\wedge\phi_0^\dagger} = V(h)$$

و از (۱۱-۸ الف) و (۱۱-۷) داریم

$$D^\mu\Phi = \begin{pmatrix} \circ \\ \partial^\mu h/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{ig_1}{2} \begin{pmatrix} \circ \\ B^\mu(\phi_0 + h/\sqrt{2}) \end{pmatrix} + \frac{ig_2}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2}W_\mu^+(\phi_0 + h/\sqrt{2}) \\ -W_\mu^-(\phi_0 + h/\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

با ضرب کردن $(D^\mu\Phi)^\dagger$ در $D^\mu\Phi$ ، درمی یابیم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi = & \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{g_1^\dagger}{2}W_\mu^-W^{+\mu}(\phi_0 + h/\sqrt{2})^\dagger \\ & + \left[\frac{g_2^\dagger}{4}W_\mu^+W^{\mu-} - \frac{g_1g_2}{2}W_\mu^+B^\mu + \frac{g_1^\dagger}{4}B_\mu B^\mu \right] (\phi_0 + h/\sqrt{2})^\dagger - V(h) \end{aligned} \quad (۲۵-۱۱)$$

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{g_1^\dagger}{2}W_\mu^-W^{+\mu}(\phi_0 + h/\sqrt{2})^\dagger \\ & + \frac{1}{4}(g_1^\dagger + g_2^\dagger)Z_\mu Z^\mu(\phi_0 + h/\sqrt{2})^\dagger - V(h) \end{aligned}$$

می نویسیم

$$Z_\mu = W_\mu^+ \cos\theta_w - B_\mu \sin\theta_w \quad (۲۶-۱۱)$$

که

$$\cos\theta_w = \frac{g_2}{(g_1^\dagger + g_2^\dagger)^{1/2}}, \quad \sin\theta_w = \frac{g_1}{(g_1^\dagger + g_2^\dagger)^{1/2}} \quad (۲۷-۱۱)$$

که θ_w رازاویه واینبرگ^۱ گوئیم.

در راستای میدان Z_μ ، ترکیب متعامد زیر را تعریف می کنیم

$$A_\mu = W_\mu^+ \sin\theta_w + B_\mu \cos\theta_w \quad (۲۸-۱۱)$$

معادله های (۱۱-۲۶) و (۱۱-۲۸) متناظر با دوران محورها در فضای (B_μ, W_μ^+) می باشد. این دوران را

می توان معکوس کرد تا به نتیجه زیر رسید

$$B_{\mu} = A_{\mu} \cos \theta_w - Z_{\mu} \sin \theta_w, \quad (29-11)$$

$$W_{\mu}^{\tau} = A_{\mu} \sin \theta_w + Z_{\mu} \cos \theta_w$$

با جایگذاری در (۱۰-۱۱) و (۱۹-۱۱) به نتایج زیر می‌رسیم

$$B_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \cos \theta_w - Z_{\mu\nu} \sin \theta_w$$

$$W_{\mu\nu}^{\tau} = A_{\mu\nu} \sin \theta_w + Z_{\mu\nu} \cos \theta_w - ig_{\tau} (W_{\mu}^{-} W_{\nu}^{+} - W_{\nu}^{-} W_{\mu}^{+})$$

که

$$A_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} \quad (\text{همان } F_{\mu\nu} \text{ فصل ۴ می‌باشد})$$

و

$$Z_{\mu\nu} = \partial_{\mu} Z_{\nu} - \partial_{\nu} Z_{\mu} \quad (30-11)$$

۴-۱۱ تشخیص میدان‌ها

اکنون در موقعیتی هستیم که جمله‌های درون چگالی لاگرانژی $L = L_{\Phi} + L_{\text{dyn}}$ را بازآرایی کنیم تا محتوی فیزیکی آن آشکار شود. در L_{dyn} (معادله (۲۰-۱۱))، معادله‌های (۲۹-۱۱) و (۳۰-۱۱) را برای بیان میدان B_{μ} و W_{μ}^{τ} بر حسب میدان‌های A_{μ} و Z_{μ} بکار می‌بریم، و سپس می‌توانیم بنویسیم

$$L = L_1 + L_2$$

که

$$L_1 = \frac{1}{4} \partial_{\mu} h \partial^{\mu} h - m^2 h^2 - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \phi_0^2 (g_1^2 + g_2^2) Z_{\mu} Z^{\mu} - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} \quad (31-11)$$

$$- \frac{1}{4} \left[(D_{\mu} W_{\nu}^{+})^* - (D_{\nu} W_{\mu}^{+})^* \right] [D^{\mu} W^{+\nu} - D^{\nu} W^{+\mu}] + \frac{1}{4} g_2^2 \phi_0^2 W_{\mu}^{-} W^{+\mu}$$

$$\text{که } D_{\mu} W_{\nu}^{+} = (\partial_{\mu} + ig_1 \sin \theta_w A_{\mu}) W_{\nu}^{+}$$

L_1 نسبتاً ساده است: می‌توان آن را به این صورت شناخت: چگالی لاگرانژی برای میدان بوزونی اسکالر خنثی آزاد و جرم‌دار $h(x)$ ، میدان بوزونی برداری خنثی آزاد و جرم‌دار $Z_{\mu}(x)$ ، و یک جفت میدان‌های بوزونی برداری باردار و جرم‌دار W_{μ}^{-} ، W_{μ}^{+} ، که با میدان الکترومغناطیسی $A_{\mu}(x)$ برهمکنش می‌کنند.

L_2 مجموع جمله‌های برهمکنشی باقیمانده است.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r = & \left(\frac{1}{4} h^\tau + \frac{1}{\sqrt{2}} h \phi_0 \right) \left(g_\tau^\nu W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{1}{Y} (g_\tau^\nu + g_\tau^\nu) Z_\mu Z^\mu \right) - \frac{m^\nu h^\tau}{\sqrt{2} \phi_0} \\ & - \frac{m^\nu h^\tau}{\lambda \phi_0^\nu} + \frac{g_\tau^\nu}{4} (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\nu^- W_\mu^+) (W^{-\mu} W^{+\nu} - W^{-\nu} W^{+\mu}) \\ & + \frac{ig_\tau}{Y} (A_{\mu\nu} \sin \theta_w + Z_{\mu\nu} \cos \theta_w) (W^{-\mu} W^{+\nu} - W^{-\nu} W^{+\mu}) \quad (32-11) \\ & - g_\tau^\nu \cos^2 \theta_w (Z_\mu Z^\mu W_\nu^- W_\mu^+ - Z_\mu Z^\nu W_\nu^- W^{+\mu}) \\ & + \frac{ig_\tau}{Y} \cos \theta_w [(Z_\mu W_\nu^- - Z_\nu W_\mu^-) (D^\mu W^{+\nu} - D^\nu W^{+\mu}) \\ & - (Z_\mu W_\nu^+ - Z_\nu W_\mu^+) (D^\mu W^{+\nu})^* - (D^\nu W^{+\mu})^*] \end{aligned}$$

بخش زیادی از تقارن $U(1) \times SU(2)$ ، که با آن آغاز کردیم، در شکست تقارن از بین می‌رود. به‌ویژه آنکه هیچ ردی از تقارن اولیه $SU(2)$ در برهمکنش توصیفی \mathcal{L}_r دیده نمی‌شود. با این وجود، دقیقاً همین ترکیب پیچیده برهمکنشهاست که نظریه را بازبهنجارپذیر می‌سازد، گویی که تقارن شکسته نشده است.

سه میدان برداری، W_μ^+ ، W_μ^- ، Z_μ ، با میانجی‌های برهمکنش ضعیف، یعنی ذره‌ها W^+ ، W^- ، Z که پیامد نظریه هستند، همگی در تجربه کشف شده‌اند. جرم این ذره‌ها عبارتند از (Particle Data Group, 2004)

$$M_W = 80.425 \pm 0.38 \text{ GeV} \quad (33-11)$$

$$M_Z = 91.1876 \pm 0.021 \text{ GeV} \quad (34-11)$$

با استفاده از (31-11) و بخش 4-9 درمی‌یابیم که

$$\phi_0 g_\tau / \sqrt{2} = M_W \quad (35-11)$$

$$\phi_0 (g_\tau^\nu + g_\tau^\nu)^{\nu\tau} / \sqrt{2} = M_Z \quad (36-11)$$

پس، با استفاده از (27-11) و چشم‌پوشی از تصحیح‌های کوانتمی بر نسبت جرمی، داریم

$$\cos \theta_w = M_W / M_Z = 0.8810 \pm 0.0016 \quad (37-11 \text{ الف})$$

معمول است که مقدار $\sin^2 \theta_w$ را نقل کنیم، که در محاسبه‌های بعدی پدیدار می‌گردد. بنا بر برآورد بالا، داریم

$$\sin^2 \theta_w = 0.2312 \pm 0.0015$$

عدم قطعیت موجود در این مقدار، بیشتر ناشی از عدم قطعیت در مقدار M_W می‌باشد. روش‌های دیگری برای برآورد $\sin^2 \theta_W$ وجود دارد، و مقدار پذیرفته شده برای آن (در سال ۱۹۹۶)

$$\sin^2 \theta_W = 0.2315 \pm 0.0004 \quad (11-37 \text{ ب})$$

بود. در محاسبه‌های پس از این هم، همین مقدار را می‌پذیریم.

در آزمایش مشخص گردید بوزون‌های W^\pm دارای بار $\pm e$ هستند. در (۱۱-۳۱) مشتق پیمانه‌ای عبارتست از

$$D_\mu W_\nu^+ = (\partial_\mu + ig_\gamma \sin \theta_W A_\mu) W_\nu^+ \quad (11-27)$$

بنابراین با توجه به جفت‌شدگی با میدان الکترومغناطیسی A_μ و (۱۱-۲۷) می‌توان دریافت که

$$e = g_\gamma \sin \theta_W = g_\gamma \cos \theta_W \quad (11-38)$$

میدان‌های W_μ^+ ، W_μ^0 و Z_μ همانند (۴-۱۵) برحسب میدان، آزاد اما با سه حالت قطبش، بسط داده می‌شوند (ر.ک. (۴-۹)). میدان کوانتومی W_μ^+ بوزون‌های W^+ را نابود کرده، و بوزون‌های W^- می‌آفریند. همچنین میدان کوانتومی W_μ^0 بوزون‌های W^- را نابود کرده، و بوزون‌های W^+ را می‌آفریند. آنچه باقی می‌ماند میدان اسکالر هیگز $h(x)$ است. با توجه به (۱۱-۳۵) مقدار چشم‌داشتی حالت خلا ϕ_0 برای میدان هیگز عبارتست از

$$\phi_0 = \frac{\sqrt{2} M_W}{g_\gamma} = \frac{\sqrt{2} M_W \sin^2 \theta_W}{e} = 180 \text{ GeV} \quad (11-39)$$

تنها پارامتری که مقدار آن از آزمایش تثبیت نمی‌شود، مقدار جرم بوزون هیگز $M_H = \sqrt{2} m$ می‌باشد. با وجود بودن بوزون هیگز، که بخشی اساسی در مدل استاندارد می‌باشد، هنوز در تجربه هیچ بوزون هیگزی شناسایی نشده است. تاکنون جستجوی تجربی بوزون هیگز نتیجه‌ای در پی نداشته است، و به همین دلیل گمان می‌رود که $M_H > 65 \text{ GeV}$ باشد. پژوهشهای نظری و تجربی کنونی مقداری نزدیک به همین حد برای M_H ارائه می‌دهند.

در بایست‌های تقارن $U(1)$ و $SU(2)$ و همچنین شکست تقارن ناشی از آن، سبب ایجاد میدان الکترومغناطیسی، میدان‌های بوزونی برداری و جرم‌دار W^\pm و Z ، و همچنین میدان اسکالر هیگز با صرف کمترین انرژی شده‌اند. در فصل بعد، میدان‌های لپتونی فرمیونی را به این میدان‌های بوزونی اضافه می‌کنیم، تا به غنای نظریه الکتروضعیف و اینبرگ-سلام دست یابیم.

مسئله‌ها

۱-۱۱ نشان دهید W'_μ تعریف شده در (۱۱-۶) هرمیتی بوده و رد آن صفر می‌باشد. (از عبارت (ب-۹) در

پیوست ب استفاده کنید: $(U = \cos \alpha \mathbf{I} + i \sin \alpha (\hat{\alpha} \cdot \tau))$.

۲-۱۱ تحقیق کنید عبارت‌های (۱۱-۱۳) و (۱۱-۱۶) برای L_{dyn} هم‌ارز یکدیگر هستند.

۳-۱۱ نشان دهید دو جمله آخر در سمت راست (۱۱-۳۱) متناظر با جفت میدان‌های بوزونی برداری باردار و جرم‌دار می‌باشند.

۴-۱۱ نشان دهید که در مرتبه سوم نظریه اختلال، بوزون هیگز می‌تواند به دو فوتون واپاشد. نمودار فاینمن مناسب برای آن را رسم کنید.

۵-۱۱ تحت تبدیلهای $SU(2)$ ، $\Phi \rightarrow \Phi'$ تبدیل می‌گردد که

$$\begin{pmatrix} \Phi'_A \\ \Phi'_B \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \end{pmatrix}$$

با بکارگیری رابطه (ب-۹)، نشان دهید که $\tau^i U^* = U \tau^i$ می‌باشد. و در نتیجه نشان دهید که

$$\begin{pmatrix} \Phi_B^{*'} \\ -\Phi_A^{*'} \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \Phi_B^* \\ -\Phi_A^* \end{pmatrix}$$

۶-۱۱ نشان دهید که ماتریس $SU(2)$ ، یعنی $\mathbf{U} = e^{i\tau\alpha}$ با $\alpha = \alpha(\sin\phi, \cos\phi, 0)$ عبارتست از

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & e^{i\phi} \sin\alpha \\ -e^{-i\phi} \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

نشان دهید که تحت تبدیلات $SU(2)$ ، یعنی $\Phi' = \mathbf{U} \Phi$ ، با اختیار $\phi = (\delta - \gamma)$ و $\alpha = -\tan^{-1}(a/b)$ می‌توان میدان مختلط دو مؤلفه‌ای

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a e^{i\delta} \\ b e^{i\gamma} \end{pmatrix}$$

را به شکل

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \Phi'_A \\ \Phi'_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\gamma} \sqrt{a^2 + b^2} \end{pmatrix}$$

درآورد. سپس نشان دهید که با یک تبدیل دیگر $SU(2)$ ، با مقدار $\alpha = \gamma(0, 0, 1)$ ، می‌توان Φ' را به شکل استاندارد (۱۱-۲۳) درآورد.

اکنون می‌خواهیم میدان‌های لپتونی را با همه میدان‌های پیمانه‌ای بوزونی، اعم از میدان الکترومغناطیسی، میدان‌های W^+ و W^- ، و میدان Z جفت کنیم. می‌دانیم که در انرژی‌های پایین این نظریه باید پدیدارشناسی فصل ۹ را باز تولید کند. این ملاحظه‌ها، به‌همراه اصول تقارن پیمانه‌ای و موضعی $U(1) \times SU(2)$ ، جفت‌شدگی‌های موردنظر را به‌طور یکتا مشخص می‌کنند.

دیدیم که سازوکار هیگز چگونه بوزون‌های W^+ و Z را جرم‌دار می‌کند. برای جرم‌دار کردن لپتون‌های باردار، یعنی الکترون، میون، تاو، هم باید این لپتون‌ها با میدان هیگز جفت شوند، سرانجام به نظریه یگانه‌شده و اینبرگ - سلام برای برهمکنش الکتروضعیف می‌رسیم.

۱-۱۲ دوگانه‌های لپتونی و نظریه و اینبرگ - سلام

در آغاز چگالی لاگرانژی برای میدان‌های لپتونی می‌سازیم که تحت تبدیل‌های $U(1)$ و $SU(2)$ ناورد باشد. اسپینور چپگرد الکترونی e_L و اسپینور نوترینوی الکترون ν_{eL} ، همانند میدان‌های هیگز در (۱-۱۱)، با یکدیگر تشکیل یک دوگانه $SU(2)$ می‌دهند.

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_A \\ L_B \end{pmatrix} \quad (1-12)$$

دوباره نمادگذاری مخصوصی بکار می‌بریم: در فصل ۶، اسپینورهای چپگرد و راستگرد به ترتیب با ψ_L و ψ_R نشان داده می‌شدند. این دوگانه تحت تبدیل $SU(2)$ دقیقاً همانند دوگانه هیگز تبدیل می‌یابد.

$$\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}' = \mathbf{U}\mathbf{L} \quad (2-12)$$

تبدیل‌های $SU(2)$ دو میدان اسپینوری را با هم درمی‌آمیزد و یک دوگانه تشکیل می‌دهد، تا ناوردایی لورنتسی، تنها برای آن دسته از میدان‌ها با ویژگی‌های تبدیل لورنتسی یکسان برقرار باشد، که بتواند با هم ترکیب شده و دوگانه تشکیل دهند.

از پدیدارشناسی فصل ۹ درمی‌یابیم که میدان‌های لپتونی راستگرد با میدان بوزونی W جفت نمی‌شوند، بنابراین e_R و ν_{nR} تحت تبدیل‌های $SU(2)$ ناورد هستند.

$$e_R \rightarrow e'_R = e_R \cdot \quad v_{eR} \rightarrow v'_{eR} = v_{eR} \quad (۳-۱۲)$$

به منظور سازگاری با قاعده تبدیل (۱۲-۲)، همه مشتق‌های پیمانه‌ای $SU(۲)$ باید دارای شکل یکسان، $\partial_\mu + i(g/2)W_\mu$ ، همانند (۱۱-۸) و (۱۱-۳۸) $g_V \sin \theta_W = e$ می‌باشند. این امر پیامد سرشت ناآبلی گروه $SU(۲)$ است. اما بر ثابت جفت‌شدگی میدان پیمانه‌ای (۱) U ، یعنی بر B_μ ، چنین قیدی وجود ندارد. (ر.ک. مسأله ۱۲-۱) می‌توانیم

$$D_\mu \mathbf{L} = [\partial_\mu + i(g_V/2)W_\mu + i(g'/2)B_\mu] \mathbf{L} \quad (۴-۱۲)$$

که مقدار g' در دسترس است. باید مقدار g' را به گونه‌ای برگزینیم که نوترینو خنثی و الکترون دارای بار الکتریکی $-e$ باشد. جمله‌های موجود در $D_\mu \mathbf{L}$ ، که با میدان الکترومغناطیسی A_μ جفت می‌شوند، ترکیب‌های خطی از W_μ^+ و W_μ^- هستند. با بهره‌گیری از (۱۱-۷) و (۱۱-۲۹) جمله‌های A_μ به صورت زیر درمی‌آیند

$$\begin{pmatrix} \partial_\mu + \{i(g_V/2) \sin \theta_W + i(g'/2) \cos \theta_W\} A_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu + \{-i(g_V/2) \sin \theta_W + i(g'/2) \cos \theta_W\} A_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$$

مشتق‌های پیمانه‌ای $\partial_\mu v_{eL}$ و $(\partial_\mu - ie A_\mu)e_L$ ، که بر اثر اعمال آنها، نوترینو از نظر الکتریکی خنثی مانده، اما سهم بار الکتریکی e_L آن، برابر با $-e$ می‌شود، با گزینش زیر به دست می‌آیند

$$g' \cos \theta_W = -g_V \sin \theta_W = -e$$

پس مشتق پیمانه‌ای کامل برای میدان‌های چپگرد به صورت زیر درمی‌آید

$$D_\mu \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \partial_\mu + i(e/\sin^2 \theta_W) Z_\mu & i\{e/\sqrt{2} \sin \theta_W\} W_\mu^+ \\ i\{e/\sqrt{2} \sin \theta_W\} W_\mu^- & \partial_\mu - ie A_\mu - ie \cot(\theta_W) Z_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \quad (۵-۱۲)$$

که برای به دست آوردن آن از (۱۱-۷)، (۱۱-۱۷) و (۱۱-۲۹) استفاده کردیم.

مشتق پیمانه‌ای e_R باید به شکل زیر باشد

$$D_\mu e_R = (\partial_\mu + i(g''/2)B_\mu) e_R \quad (۱۲-۶ الف)$$

از آنجا که الکترون دارای بار الکتریکی $-e$ می‌باشد مقدار $g'' = -2e/\cos \theta_W = -2g_V$ را اختیار می‌کنیم، (ر.ک. (۱۱-۳۸)) و در نتیجه با بکارگیری دوباره (۱۱-۲۹)،

$$D_\mu e_R = [(\partial_\mu - ie A_\mu) + ie \tan \theta_W Z_\mu] e_R \quad (۱۲-۶ ب)$$

با گزینش $g'' = -2g_V$ و $g' = -g_V$ می‌توان به آسانی دریافت که تحت تبدیل موضعی

$$U(1) \times SU(2)$$

$$L \rightarrow L' = e^{i\theta(x)} U(x) L$$

$$e_R \rightarrow e'_R = e^{i\theta(x)} e_R$$

مشتق‌های پیمانه‌ای در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند

$$D'_\mu L' = (\partial_\mu + i(g_V/\gamma)W'_\mu + i(g'/\gamma)B'_\mu)L' = e^{i\theta} U D_\mu L$$

$$D'_\mu e_{R'} = (\partial_\mu + i(g''/\gamma)B'_\mu)e_{R'} = e^{i\theta} D_\mu e_R$$

که میدان‌های W_μ و B_μ همانند (۱۱-۴) و (۱۱-۶) تبدیل می‌یابند.

اکنون می‌توانیم عبارتی برای بخش دینامیکی چگالی لاگرانژی الکترون و نوترینو الکترون بنویسیم که نسبت به تبدیل پیمانه‌ای و تبدیل لورنتسی ناورد باشد:

$$\mathcal{L}_{\text{dyn}}^e = L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu i D_\mu L + e_R^\dagger \sigma^\mu i D_\mu e_R + \nu_{eR}^\dagger \sigma^\mu i \partial_\mu \nu_{eR} \quad (12-7)$$

ناوردایی پیمانه‌ای پیامد ساختن مشتق‌های پیمانه‌ای و ناوردایی لورنتسی ناشی از ویژگی‌های اسپینوری (بخش ۴-۵) می‌باشد. (به یاد آورید که ماتریس‌های $\tilde{\sigma}^\mu$ بر اندیس‌های اسپینوری عمل می‌کنند، در حالیکه تبدیل $SU(2)$ مستقل از آن بر مؤلفه‌های دوگانهٔ میدان اسپینوری عمل می‌کند.) در کنار برهمکنش با میدان الکترومغناطیسی، که آن را به‌طور کامل مشخص کردیم، توجه کنید که به سبب عامل $D_\mu L$ ، همهٔ برهمکنش‌ها با بوزون‌های سنگین برداری انجام می‌گیرند.

سرانجام، باید لپتون‌های باردار دارای جرم باشند. سهم ناوردای پیمانه‌ای و ناوردای لورنتسی در چگالی لاگرانژی، که به الکترون جرم داده اما نوترینو را بدون جرم باقی می‌گذارد، عبارتست از (دربارهٔ جرم نوترینو در فصل ۱۹ بحث خواهیم کرد)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{mass}}^e &= -c_e \left[(L^\dagger \Phi) e_R + e_R^\dagger (\Phi^\dagger L) \right] = \\ &= -c_e \left[(\nu_L^\dagger \Phi_A + e_L^\dagger \Phi_B) e_R + e_R^\dagger (\Phi_A^\dagger \nu_L + \Phi_B^\dagger e_L) \right] \end{aligned} \quad (12-8)$$

که Φ میدان دوگانهٔ هیگز و c_e ثابت جفت‌شدگی بدون بعد می‌باشد. پس از شکست تقارن (ر.ک. (۱۱-۲۳)، $\mathcal{L}_{\text{mass}}^e$ به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^e = -c_e \phi_e (e_L^\dagger e_R + e_R^\dagger e_L) - \frac{c_e h}{\sqrt{2}} (e_L^\dagger e_R + e_R^\dagger e_L) \quad (12-9)$$

در مقایسه با چگالی لاگرانژی دیراکی (۵-۱۲)، درمی‌یابیم که $c_e \phi_e$ مربوط به جرم الکترون m_e می‌باشد. ارائه جرم، با دنبال کردن اصول شکست تقارن، سبب می‌شود که گزینه‌ای بجز معرفی برهمکنش بین میدان الکترونی و میدان هیگز $h(x)$ نداشته باشیم. در نتیجه با بهره‌گیری از (۱۱-۳۹) ثابت

جفت‌شدگی مربوط به میدان هیگز عبارتست از

$$\frac{c_e}{\sqrt{2}} = \frac{m_e}{\sqrt{2}\phi_0} = 2,01 \times 10^{-6} \quad (10-12)$$

این مقدار هم همانند مقدار خود c_e کوچک می‌باشد: نمی‌خواهیم که این جمله محاسبه‌های QED را دچار مشکل کند!

چگالی لاگرانژی کل \mathcal{L}^e برای الکترون و نوترینوی آن از رابطه (۷-۱۲) و (۸-۱۲) به دست می‌آید:

$$\mathcal{L}^e = \mathcal{L}_{\text{dyn}}^e + \mathcal{L}_{\text{mass}}^e \quad (11-12)$$

می‌توانیم جمله‌های زیر را از \mathcal{L}^e بیرون بکشیم.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Dirac}}^e = & v_{eL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu i(\partial_\mu v_{eL}) + e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu i(\partial_\mu - ieA_\mu)e_L + v_{eR}^\dagger \sigma^\mu i\partial_\mu v_{eR} \\ & + e_R^\dagger \sigma^\mu i(\partial_\mu - ieA_\mu)e_R - m_e (e_L^\dagger e_R + e_R^\dagger e_L) \end{aligned} \quad (12-12)$$

که متناظر با عبارت‌هایی است که در فصل ۶ و ۷ برای نوترینوی دیراکی بدون جرم، و الکترون دیراکی به جرم m_e و بار $-e$ در میدان الکترومغناطیسی یافتیم.

چگالی لاگرانژی‌های \mathcal{L}^μ و \mathcal{L}^τ برای لپتون‌های میون و تاو و نوترینوهای متناظر آنها با (۱۱-۱۲) تنها در پارامترهای جرمی، و در نتیجه در جفت‌شدگی با میدان هیگز متفاوت است:

$$\frac{c_\mu}{\sqrt{2}} = \frac{m_\mu}{\sqrt{2}\phi_0} = 4,15 \times 10^{-2}, \quad \frac{c_\tau}{\sqrt{2}} = \frac{m_\tau}{\sqrt{2}\phi_0} = 6,98 \times 10^{-2} \quad (13-12)$$

ثابت جفت‌شدگی g_τ در نظریه پیمان‌های $SU(2)$ ، یا هم‌ارز آن زاویه واینبرگ θ_W (ر.ک. (۱۱-۳۸))، که جفت‌شدگی با میدان‌های W^\pm و Z را تعیین می‌کند، باید برای همه لپتون‌ها یکسان باشد. این ویژگی نظریه با بهره‌گیری از گروه $SU(2)$ بر آن اعمال می‌شود و به آن جهان‌شمولی لپتونی گویند.

چگالی لاگرانژی کامل نظریه واینبرگ-سلام، \mathcal{L}^{WS} ، (واینبرگ، ۱۹۶۷؛ سلام، ۱۹۶۸) عبارتست از مجموع کل سهم لپتون‌ها، و سهم بوزون‌ها که از (۱۱-۳۱) و (۱۱-۳۲) به دست می‌آید:

$$\mathcal{L}^{\text{WS}} = \mathcal{L}^e + \mathcal{L}^\mu + \mathcal{L}^\tau + \mathcal{L}^{\text{bosons}} \quad (14-12)$$

شکل \mathcal{L}^{WS} از ملاحظات مربوط به تقارن تعیین می‌شود، که یکی تقارن‌های مربوط به ناوردای تحت تبدیلات لورنتس، و دیگری ناوردایی تحت تبدیلات $U(1)$ و $SU(2)$ می‌باشد. بوزون‌ها و لپتون‌های جرم‌دار از طریق سازوکار هیگز در شکست تقارن موضعی پدیدار می‌شود. هوفت^۱ در سال ۱۹۷۶ این موضوع را با معرفی روش‌های تحلیلی کاملاً تازه‌ای، موسوم به نظریه بازهنجارپذیری، ثابت کرد. در فصل

۱۳ خواهیم دید که حجم بزرگی از داده‌ها از این نظریه پشتیبانی می‌کنند.

۱۲-۲ جفت‌شدگی لپتون با W^\pm

جفت‌شدگی الکترون و نوترینوی الکترون با میدان‌های پیمانه‌ای W^+ و W^- ناشی از جمله‌های مناسب آن در (۱۲-۵) و (۱۲-۷) می‌باشد، که

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eW} &= -\left(g_V/\sqrt{2}\right)v_{eL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu e_{eL} W_\mu^+ - \left(g_V/\sqrt{2}\right)e_{eL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu v_{eL} W_\mu^- \\ &= -\left(g_V/\sqrt{2}\right)\left[j_e^{\mu\dagger} W_\mu^+ + j_e^\mu W_\mu^-\right] \end{aligned} \quad (15-12)$$

میدان‌های راستگرد در این برهمکنش سهمی ندارند. همانند فصل ۹ این جریان‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$j_e^\mu = e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu v_{eL}, \quad j_e^{\mu\dagger} = v_{eL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu e_L \quad (16-12)$$

میون و تاو هم جریان‌هایی این‌چنینی دارند، که در کل جریان لپتونی کل به صورت زیر درمی‌آید

$$j^\mu = \left(e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu v_{eL} + \mu_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu v_{\mu L} + \tau_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu v_{\tau L}\right) \quad (17-12)$$

و چگالی لاگرانژی برهمکنشی کل هم به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathcal{L}_{lW} = -\left(g_V/\sqrt{2}\right)\left[j^{\mu\dagger} W_\mu^+ + j^\mu W_\mu^-\right] \quad (18-12)$$

\mathcal{L}_{lepton} مؤثر در بحث واپاشی میون در بخش ۹-۴ را می‌توان به صورت حد پایین انرژی در نظریهٔ واینبرگ-سلام به دست آورد. از آنجا که جرم M_W بسیار بزرگ است، در انرژی‌های پایین جملهٔ $M_W^\dagger W_\mu^- W^{+\mu}$ در (۱۱-۳۱) از سهم W در چگالی لاگرانژی برتریت دارد، و

$$\mathcal{L}_W \approx M_W^\dagger W_\mu^- W^{+\mu} - \left(g_V/\sqrt{2}\right)\left[j^{\mu\dagger} W_\mu^+ + j^\mu W_\mu^-\right] \quad (19-12)$$

یکرندی‌های میدان فیزیکی متناظر با مقدارهای پایایی این کنش می‌باشد. با تغییر W_μ^+ و W_μ^- به طور مستقل، معادله‌های میدان زیر به دست می‌آید.

$$M_W^\dagger W_\mu^- = \left(g_V/\sqrt{2}\right)j^{\mu\dagger}, \quad M_W^\dagger W_\mu^+ = \left(g_V/\sqrt{2}\right)j^\mu \quad (20-12)$$

و با بکارگیری آنها در (۱۲-۱۹) به نتیجهٔ زیر می‌رسیم

$$\mathcal{L}_W \approx -\frac{1}{4}g_V^2 M_W^{-2} j_\mu^\dagger j^\mu \quad (21-12)$$

اگر اتحاد زیر را برقرار کنیم، \mathcal{L}_W هم‌ارز با \mathcal{L}_{lepton} مؤثر (۹-۸) می‌باشد

$$G_F = \frac{g^2}{4\sqrt{2}M_W^2} = \frac{e^2}{4\sqrt{2}M_W^2 \sin^2 \theta_W} \quad (22-12)$$

با اختیار مقدار $M_W = 80.33 \text{ GeV}$ و $M_Z = 91.187 \text{ GeV}$ و $\sin^2 \theta_W = 1 - M_W^2/M_Z^2$ مقدار $G_F = 1.12 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ به دست می آید که با مقدار پذیرفته شده تجربی، $1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ سازگاری خوبی دارد. از لحاظ تاریخی، دانستن مقدار G_F ، در کنار برآورد θ_W (ر.ک. بخش ۱۳-۱) برای پیش بینی مقدار جرم بوزون های W^\pm و Z بکار رفت، و سپس برخورددهنده پروتون-پادپروتون سرن برای یافتن آن ساخته شد.

۳-۱۲ جفت شدگی لبتون با Z

جفت شدگی لبتون ها با میدان Z را می توان از جمله های دربردارنده Z_μ در (۷-۱۲) به دست آورد:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eZ} &= -\nu_{eL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{eL} \left(\frac{e}{\sin(\varphi\theta_W)} \right) Z_\mu + e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu e_L \left(\frac{e \cos(\varphi\theta_W)}{\sin(\varphi\theta_W)} \right) Z_\mu \\ &\quad - e_R^\dagger \sigma^\mu e_R (e \tan \theta_W) Z_\mu \quad (\text{با بهره گیری از (۱۲-۵) و (۱۲-۶)}) \\ &= \frac{-e}{\sin(\varphi\theta_W)} (j_{\text{neutral}})_\mu Z^\mu \end{aligned}$$

که

$$(j_{\text{neutral}})^\mu = \nu_{eL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{eL} - \cos(\varphi\theta_W) e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu e_L + \varphi \sin^2 \theta_W e_R^\dagger \sigma^\mu e_R \quad (23-12)$$

برای $\mathcal{L}_{\tau Z}$ و $\mathcal{L}_{\mu Z}$ هم عبارتهایی مانند این وجود دارد. توجه کنید که میدان های لبتونی باردار راستگرد هم با میدان Z جفت می شوند، اما با نوترینوی راستگرد جفت نمی شوند.

حد انرژی پایین \mathcal{L}_Z را می توان همانند حد انرژی پایین \mathcal{L}_W در بخش ۱۲-۲، با همان روش تعیین ثابت های جفت شدگی، به دست آورد، و با چگالی لاگرانژی مؤثر (۹-۱۵) همسان می باشد، با مقیاسه (۱۲-۲۳) با (۹-۱۷) درمی یابیم که

$$c_A = -\frac{1}{\varphi}, \quad c_V = -\frac{1}{\varphi} + \varphi \sin^2 \theta_W \quad (24-12)$$

سطح مقطع پراکندگی کشسان الکترون-نوترینوی میون کم انرژی از چگالی لاگرانژی مؤثر محاسبه می شوند

$$\sigma(\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-) = \frac{G_F^2 s}{\pi} \left[\frac{\varphi}{3} \sin^2 \theta_W - \sin^2 \theta_W + \frac{1}{\varphi} \right] \quad (25-12)$$

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-) = \frac{G_F^2 S}{\pi} \left[\frac{4}{3} \sin^4 \theta_W - \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W + \frac{1}{12} \right] \quad (26-12)$$

که S مجذور انرژی مرکز جرم و $E_\nu \gg m_e$ می باشد (ر.ک. Perkins, 1987, p.327).

این سطح مقطع ها در انرژی پایین (کمتر از M_Z, M_W) در سرن اندازه گیری شده اند (CHARMII Collaboration, 1994)، و با بهره گیری از نسبت آنها می توان مقدار $\sin^2 \theta_W = 0.2324 \pm 0.0083$ را برآورد کرد.

ثابت فرمی G_F را از پدیده های انرژی پایین هم می توان به طور تجربی به دست آورد. مقدار e هم البته معلوم است. در نتیجه در چارچوب نظریه واینبرگ-سلام، می توان از داده های انرژی پایین، به تنهایی، با بهره گیری از (۲۲-۱۲) و (۳۷-۱۱)، جرم بوزون های پیمانه ای Z و W^\pm را برآورد کرد. (برآوردهای پیشین برای $\sin^2 \theta_W$ از پراکندگی نوترینو- هسته به دست می آمد).

۱۲-۴ پایستگی عدد لبتونی و پایستگی بار

چگالی لاگرانژی واینبرگ-سلام L^{WS} دارای تقارن های $U(1)$ مستقل جهانی دیگری هم می باشند، که تحت تبدیلات $U(1)$ ناورد است $e_R \rightarrow e^{i\alpha} e_R, e_L \rightarrow e^{i\alpha} e_L$ ، و α فاز ثابت (ر.ک. (۱۲-۷) و (۱۲-۹)) می باشد. با بهره گیری از ابزار، (که اکنون دیگر با آن آشنا هستیم)، تغییر α و در نتیجه تبدیل $\alpha \rightarrow \alpha + \delta\alpha(x)$ ، با $\delta\alpha$ وابسته به زمان و مکان، وردش مرتبه اول در کنش از بخش دینامیک L_{dyn}^e (معادله (۱۲-۷)) به دست می آید، بدین ترتیب که با انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned} \delta S &= - \int L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu L \partial_\mu (\delta\alpha) d^4x - \int e_R^\dagger \sigma^\mu e_R \partial_\mu (\delta\alpha) d^4x \\ &= \int \left[\partial_\mu (L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu L) + \partial_\mu (e_R^\dagger \sigma^\mu e_R) \right] (\delta\alpha) d^4x \end{aligned}$$

با قرار دادن $\delta S = 0$ به ازای هر $\delta\alpha$ ، به رابطه زیر می رسیم

$$\partial_\mu (v_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu v_L + e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu e_L) + \partial_\mu (e_R^\dagger \sigma^\mu e_R) = 0$$

یا

$$\partial_\mu (J_e^\mu) = 0 \quad (27-12)$$

که

$$J_e^0 = v_L^\dagger v_L + e_L^\dagger e_L + e_R^\dagger e_R \quad (28-12)$$

$$J_e^i = v_L^\dagger \tilde{\sigma}^i v_L + e_L^\dagger \tilde{\sigma}^i e_L + e_R^\dagger \sigma^i e_R$$

معادله (۱۲-۲۸)، را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{\partial J_e^\circ}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_e = 0 \quad (12-29)$$

که پایستگی عدد لپتونی الکترون را بیان می‌دارد. با اعمال تبدیلهای (۱) U مشابه، بر بخش میونی و تاو، چگالی لاگرانژی L_{WS} ، پایستگی عدد لپتونی میون و پایستگی عدد لپتونی تاو هم به دست می‌آیند. در فصل ۱۹ خواهیم دید که دربرگیری جرم دیراکی نوترینو در مدل استاندارد، منجر به کاهش این سه قانون پایستگی به یک قانون می‌شود.

همانند فصلهای ۴ و ۵، معادله‌های ناهمگن ماکسول را می‌توان با واردش دادن A_μ به دست آورد. میدان‌های باردار W^\pm همانند دیگر لپتون‌های باردار در جریان الکتریکی سهم دارند. پایستگی بار ناشی از معادله‌های ماکسول می‌باشد، اما می‌توان به‌طور مستقیم از تقارن (۱) U ، پدیدار در هر جمله چگالی لاگرانژی واینبرگ-سلام (۱۲-۱۴) هم، پایستگی بار را به دست آورد:

$$\begin{aligned} e_L &\rightarrow e^{i\alpha} e_L, e_R \rightarrow e^{i\alpha} e_R; \mu_L \rightarrow e^{i\alpha} \mu_L, \mu_R \rightarrow e^{i\alpha} \mu_R; \\ \tau_L &\rightarrow e^{i\alpha} \tau_L, \tau_R \rightarrow e^{i\alpha} \tau_R; W_\mu^+ \rightarrow e^{-i\alpha} W_\mu^+, W_\mu^- \rightarrow e^{i\alpha} W_\mu^- \end{aligned} \quad (12-30)$$

۱۲-۵ تقارن CP

در فصل ۵ (معادله ۵-۲۷)) دیدیم که تحت وارونی فضا، اسپینور چپگرد ψ_L به اسپینور چپگرد ψ_R ، و بالعکس تبدیل می‌گردد. لاگرانژی واینبرگ-سلام دارای تقارن نسبت به وارونی فضا نمی‌باشد، زیرا تنها مؤلفه‌های چپگرد تابع موج‌های لپتونی است که با میدان پیمانه‌ای W_μ جفت می‌شود. همچنین در فصل ۷ بحث کردیم که عمل مزدوج بار

$$\psi_L^C = -i\sigma^y \psi_R^*, \quad \psi_R^C = -i\sigma^y \psi_L^*$$

جواب‌های معادله دیراک برای ذره‌ها را به جواب‌های این معادله برای پادذره‌ها تبدیل می‌کنند. در نظریه واینبرگ-سلام هیچ‌گونه تقارن باری وجود ندارد.

لاگرانژی واینبرگ-سلام تقارنی را تحت عمل درهم‌آمیخته CP (مزدوج بار، پاریتی) نشان می‌دهد. این تقارن نشان می‌دهد فیزیک ذره‌ها در دستگاه راستگرد همانند فیزیک پادذره‌ها در دستگاه چپگرد می‌باشد.

تحت عمل درهم‌آمیخته CP ، میدان‌های لپتونی مطابق زیر تبدیل می‌یابند

$$\psi_L^{CP} = -i\sigma^y \psi_L^*, \quad \psi_R^{CP} = i\sigma^y \psi_R^* \quad (12-31)$$

دیگر میدان‌ها در نظریه الکتروضعیف، به ترتیب زیر تبدیل می‌یابند

$$\begin{pmatrix} \Phi_A^{CP} \\ \Phi_B^{CP} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_A^* \\ \Phi_B^* \end{pmatrix} \quad \text{میدان هیگز:}$$

میدان‌های پیمانه‌ای $U(1)$: $B_0^{CP} = -B_0, B_i^{CP} = B_i$

میدان‌های پیمانه‌ای $SU(2)$:

$$\begin{pmatrix} W_0^+ & W_0^- - iW_0^0 \\ W_0^- + iW_0^0 & -W_0^+ \end{pmatrix}^{CP} = \begin{pmatrix} W_0^+ & W_0^- + iW_0^0 \\ W_0^- - iW_0^0 & -W_0^+ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} W_i^+ & W_i^- - iW_i^0 \\ W_i^- + iW_i^0 & -W_i^+ \end{pmatrix}^{CP} = \begin{pmatrix} W_i^+ & W_i^- + iW_i^0 \\ W_i^- - iW_i^0 & -W_i^+ \end{pmatrix}$$

در نتیجه

$$W_0^{+CP} = -W_0^-, \quad W_i^{+CP} = W_i^-$$

$$Z_0^{CP} = -Z_0, \quad Z_i^{CP} = Z_i$$

$$A_0^{CP} = -A_0, \quad A_i^{CP} = A_i$$

به جای مشتق‌های فضایی میدان‌ها، منفی آنها نشسته است.

برای آنکه نشان دهیم که چگالی لاگرانژی تحت این تبدیل‌ها ناورداست، باید با دقت بیشتری پیش رفت. در اینجا این موضوع را تنها برای یک جمله نشان می‌دهیم، اما برای جمله‌ای این کار را می‌کنیم که همهٔ گام‌های لازم در کل بحث را دربرمی‌گیرد، و نشان دادن ناوردایی برای بقیه جمله‌ها را بر عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. جملهٔ زیر از عبارت (۱۲-۷)، را در نظر بگیرید

$$e_R^\dagger \sigma^\mu i \left[\partial_\mu + i(g''/2) B_\mu \right] e_R = l \quad (\text{مثلاً})$$

جایگذاری تبدیل CP میدان‌ها به جای خود میدان‌ها، و جایگذاری ∂_i به جای ∂_i ، منجر به نتیجهٔ زیر می‌گردد

$$l^{CP} = e_R^T (\sigma^\mu)^T i \left[\partial_\mu - i(g''/2) B_\mu \right] e_R^*$$

که در آن نتیجه‌های زیر بکار رفته‌اند

$$(\sigma^i)^i = 1, \quad \sigma^i \sigma^i \sigma^i = -(\sigma^i)^T$$

اکنون عملگرهای ∂_μ بر میدان‌های مزدوج اثر می‌کند. در واقع l^{CP} با l همسان نیست، بلکه همانگونه که در بخش ۳-۱ توضیح داده شد، با آن تنها در مجموع کل مشتق‌ها تفاوت می‌کند. مشتق کل هیچ پیامدی به دنبال ندارد. اگر l^{CP} را به جمله‌های $e_R^T (\sigma^\mu)^T e_R^*$ $-i \partial_\mu$ بیافزاییم، داریم

$$-i(\partial_\mu e_R^T) (\sigma^\mu)^T e_R^* + (g''/2) B_\mu e_R^T (\sigma^\mu)^T e_R^*$$

با ترانهاد کردن این عبارت، علامت منفی پدیدار می‌شود، زیرا e_R و e_R^\dagger میدان‌های فرمیونی هستند و

بنابراین با هم پادجابجا می شوند. بدین ترتیب می توانیم l را بازیابی کنیم.

۱۲-۶ جمله‌های جرمی در \mathcal{L} : کوشش برای گسترش

برای کاربردهای پس از این، که نظریه را برای کوارک‌ها هم تعمیم دهیم، این فصل را با در نظر گرفتن گسترشی ممکن برای چگالی لاگرانژی ارائه شده، به پایان می‌رسانیم. جفت‌شدگی سه خانواده لپتونی با میدان هیگز عبارتست از

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = - \sum_{i=1}^3 c_i \left[(\mathbf{L}_i^\dagger \Phi) r_i + r_i^\dagger (\Phi^\dagger \mathbf{L}_i) \right]$$

که جمع روی سه خانواده لپتون‌ها انجام می‌گیرد، و همچنین نمادگذاری (۱۲-۸) اصلاح شده است. می‌توانیم جفت‌شدگی کلی‌تری بنویسیم

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^{\text{gen}} = - \sum \left[G_{ij} (\mathbf{L}_i^\dagger \Phi) r_j + G_{ij}^* r_i^\dagger (\Phi^\dagger \mathbf{L}_i) \right]$$

این لاگرانژی تقارن $U(1) \times SU(2)$ را، با هر ماتریس 3×3 همچون G_{ij} ، حفظ می‌کند.

می‌خواهیم نشان دهیم که این شکل از لاگرانژی هیچ تفاوت اساسی با لاگرانژی، که پیش از این به‌طور کامل معرفی شد، ندارد. این امر به‌این دلیل است که همواره با کمک ماتریس‌های یکانی \mathbf{U}_L و \mathbf{U}_R می‌توان هر ماتریس مختلط دلخواهی را به صورت ماتریس قطری حقیقی در آورد (ر.ک. پیوست الف):

$$G = \mathbf{U}_L^\dagger \mathbf{C} \mathbf{U}_R$$

که به‌ازای $j \neq i$ ، مقدار $C_{ij} = 0$ است.

به‌طور کلی \mathbf{U}_L و \mathbf{U}_R یکتا می‌باشند، مگر آنکه هر دو از چپ در ماتریس «ضرب فاز» یکسانی ضرب شوند

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_3} \end{pmatrix}$$

اگر $L'_i = U_{Lij} L_j$ ، $r'_i = U_{Rij} r_j$ را تعریف کنیم، شکل اصلی جفت‌شدگی با میدان هیگز را دوباره به‌دست می‌آوریم. از آنجا که شکل جمله‌های دینامیکی در چگالی لاگرانژی، پس از اعمال این تبدیلهای یکانی، تغییری نمی‌کند (ر.ک. مسأله ۱۲-۵)، $\mathcal{L}_{\text{mass}}^{\text{gen}}$ عبارتی پیچیده‌تر برای همان فیزیک می‌باشد. سه ضرب فاز $\exp(i\alpha_k)$ متناظر با سه تقارن $U(1)$ است که منجر به پایداری عدد لپتونی الکترون، میون و تاو می‌گردد.

مسئله‌ها

۱-۱۲ میدان‌های W_μ را برابر صفر اختیار کرده و چگالی لاگرانژی دینامیکی زیر را در نظر بگیرید

$$\mathcal{L}_1 = \mathbf{L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu i (\partial_\mu + i(g'/\gamma) B_\mu) \mathbf{L}$$

با تبدیل پیمانه‌ای (۱۱-۴)،

$$B_\mu \rightarrow B'_\mu = B_\mu + (\gamma/g_1) \partial_\mu \theta$$

نشان دهید که اگر \mathbf{L} به شکل زیر تبدیل یابد، \mathcal{L}_1 ناورد باقی می‌ماند

$$\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}' = \exp[-i(g'/g_1)\theta] \mathbf{L}$$

اکنون میدان‌های B_μ را برابر با صفر اختیار کرده و چگالی لاگرانژی زیر را در نظر بگیرید

$$\mathcal{L}_2 = \mathbf{L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu i (\partial_\mu + i(g'/\gamma) W_\mu) \mathbf{L}$$

با تبدیل پیمانه‌ای (۱۱-۶)،

$$W_\mu \rightarrow W'_\mu = \mathbf{U} W_\mu \mathbf{U}^\dagger + (\gamma i/g_2) (\partial_\mu \mathbf{U}) \mathbf{U}^\dagger$$

نشان دهید که \mathcal{L}_2 ناورد باقی می‌ماند، تنها اگر

$$\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}' = \mathbf{U} \mathbf{L}, \quad g' = g_2$$

۲-۱۲ نشان دهید، برای هم‌خوانی با ساختار ریاضیاتی فصل ۱۱، اگر دو میدان در دوگانهٔ $SU(2)$ با هم قرار گیرند، باید به اندازهٔ بار الکتریکی e با یکدیگر تفاوت داشته باشند.

۳-۱۲ با بررسی (۱۲-۹) درمی‌یابیم که بوزون هیگز می‌تواند به زوج e^+e^- واپاشد. نشان دهید در چارچوب سکون ذرهٔ هیگز، الکترون و پوزیترون باید دارای هلیسیتی یکسان (مثلاً هر دو، یا دارای هلیسیتی مثبت و یا هلیسیتی منفی باشند) و همچنین تکانه‌ای با مقدار یکسان اما در راستای مخالف هم باشند.

نشان دهید که هلیسیتی نهایی حالت‌های تکانه برای این واپاشی عبارتست از

$$\rho(E_f) = \frac{V}{(2\pi)^3} p_e E_e$$

که E_e و p_e تکانه و انرژی الکترون است.

عناصر ماتریسی این گذار را محاسبه کرده و در نتیجه نشان دهید که در کمترین مرتبهٔ نظریهٔ اختلال،

$$\text{کل} = \frac{e^2}{16\pi} m_H \left(\frac{v_e}{c} \right)^2$$

که v_e سرعت الکترون است.

۴-۱۲ نشان دهید که نسبت پهنای جزئی لپتونی ذره هیگز به جرم آن تقریباً برابر است با

$$\frac{1}{16\pi} \left(\frac{m_\tau}{\phi_0} \right)^2 \approx 2 \times 10^{-6}$$

۵-۱۲ تحقیق کنید که تبدیل‌های یکانی بخش ۶-۱۲ شکل جمله‌های دینامیکی چگالی لاگرانژی را نگه می‌دارد.

۱-۱۳ در جستجوی بوزون‌های پیمانه‌ای

در فصل پیشین دیدیم که حد انرژی پایین نظریه واینبرگ - سلام به پدیدارشناسی پیروزمندانۀ فصل ۹ منجر گردید. هیچ دلیلی ندارد شک کنیم که نظریه سلام - واینبرگ همه واپاشی‌های بتازای انرژی پایین را توصیف کند، البته این نظریه پدیده‌های بسیار بیشتری از واپاشی‌های بتازا را هم توصیف می‌کند. سطح مقطع معادله (۹-۱۴) به صورت زیر درمی‌آید

$$\sigma(v_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e) = \frac{G_F^2}{\pi} \left(\frac{(s - m_\mu^2)^2}{s [1 + (s - m_\mu^2)/M_W^2]} \right) \quad (1-13)$$

در انرژی‌های بسیار بیشتر از M_W ، این عبارت منجر به مقدار $b = 1.08 \times 10^{-11}$ می‌شود. این نظریه، نظریه‌ای بازبهنجارپذیر می‌باشد، بنابراین می‌توان تصحیح‌های کوانتمی را محاسبه کرد. در انرژی‌های بالا این تصحیحا بسیار مهم می‌شوند.

آشکارترین آزمون این نظریه مشاهده بوزون‌های پیمانه‌ای حدسی W^\pm, Z می‌باشد. این بوزون‌ها با بهره‌گیری از برخورددهنده پروتون-پادپروتون با انرژی مرکز جرم 540 MeV در سال ۱۹۸۳ میلادی در سرن کشف شدند. خیلی مهم بود که، نظریه جرم و ویژگی‌های واپاشی این ذره‌های نوین را به‌درستی، تعیین کند. جرم این ذره‌ها به G_F, e ، و زاویه واینبرگ θ_W بستگی دارد (معادله (۱۱-۳۷) و (۱۲-۲۲)). مقدار G_F, e به خوبی مشخص است، و برآوردهای θ_W از مشاهده دقیق رویدادهای جریان خنثی برآورد می‌شود. در بخش ۱۲-۳ دیدیم که سطح مقطع $ev_\mu \rightarrow e\nu_\mu$ و $e\bar{\nu}_\mu \rightarrow e\bar{\nu}_\mu$ نسبت به θ_W حساس هستند. مشابهاً، سطح مقطع برای پراکندگی $\bar{\nu}$ و ν از هسته‌ها به مقدار θ_W بستگی دارد. در فصل ۱۴ درباره این موضوع، مفصل بحث خواهیم کرد. از آنجا که انرژی مرکز جرم دسترس‌پذیر در پراکندگی نوترینو- الکترون بسیار بیشتر از مقدار دسترس‌پذیر در پراکندگی نوترینو- الکترون می‌باشد (معادله (۹-۱۳))، و مقدار سطح مقطع با انرژی افزایش می‌یابد، براساس همین آزمایش‌های متداول بر روی هسته‌ها، برآوردی از مقدار θ_W به دست می‌آید، که این برآورد بسیار نزدیک به مقدار دقیق پذیرفته شده می‌باشد.

فیزیکدانان تجربی می‌دانستند در پی چه باشند!

شناسایی پیروزمندانهٔ این ذره‌ها تازه بر برآورد سطح مقطع‌های تولید ذره‌ها هم استوار است. هنوز دربارهٔ چگونگی برهمکنش کوارک‌ها با بوزون‌های W^\pm و Z بحث نکرده‌ایم، اما در فصل ۱۴ خواهیم دید که این برهمکنش‌ها همانند برهمکنش لپتون‌ها با بوزون‌های پیمانه‌ای می‌باشد. دو فرآیندی که در تولید بوزون‌های W^\pm و Z سهم دارند، در شکل ۱-۱۳ رسم شده‌اند. پروتون و پادپروتون بیرون‌رونده، به صورت جت‌هایی آمیخته از ذره‌های متحرک، در جت‌هایی نزدیک به هم و همبسته با راستاهای پروتون و پادپروتون اصلی، به صورت ماده باقی می‌مانند. این شرایط برای بازشناسایی فرآورده‌های واپاشی این بوزون‌های پیمانه‌ای از ذرات موجود در جت بازمانده، بسیار سازگار است (مسأله ۱-۱۳).

زوج کوارک-پادکوارک مسؤول تولید بوزون پیمانه‌ای، تنها بخشی از 540 GeV انرژی اصلی را با خود می‌برد، و پارامتر طراحی 540 GeV برای این اثر مجاز می‌باشد. دربارهٔ تحلیل مهم، انرژی باریکهٔ ذرهٔ بین اجزای آن، در پیوست د. بحث می‌شود.

۱-۲ بوزون‌های W^\pm

نتیجهٔ این آزمایش‌ها در سرن، و همچنین آزمایش‌های پس از آن، چشم‌داشت‌های نظری را به قوت تأیید کردند. بوزون‌های باردار W^\pm دارای جرمی برابر با

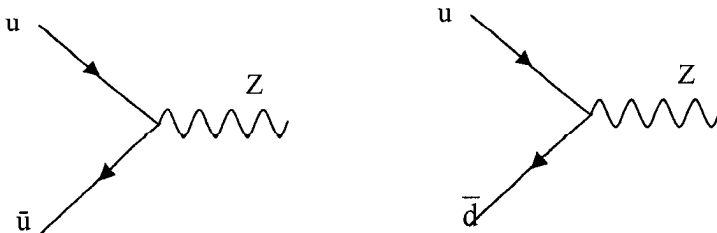
$$M_w = 80,425 \pm 0,38 \text{ GeV}$$

می‌باشد. مقدار اندازه‌گیری شده برای آهنگ واپاشی آنها به زوجهای لپتونی، عبارتست از

$$\Gamma(W^+ \rightarrow e^+ \nu_e) = 228 \pm 6 \text{ MeV}$$

$$\Gamma(W^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) = 225 \pm 9 \text{ MeV}$$

$$\Gamma(W^+ \rightarrow \tau^+ \nu_\tau) = 228 \pm 11 \text{ MeV}$$



شکل ۱-۱۳ نابودی کوارک-پادکوارک، فرآیند اساسی در تولید W و Z در برخوردهای پروتون-پادپروتون، در انرژی‌های دسترس‌پذیر، در برخورددهندهٔ امروزی می‌باشد.

و $\Gamma(W^+ \rightarrow e^+ \nu) = \Gamma(W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)$ می‌باشد. به همین ترتیب تا آخر.

در پایین‌ترین مرتبه در نظریهٔ اختلال، و با چشم‌پوشی از جمله‌های $(m_{\text{lepton}}/M_W)^2$ ، همهٔ این پهنای‌های جزئی در مدل استاندارد برابر بوده و می‌شود

$$\Gamma(W^+ \rightarrow e^+ \nu) = \frac{G_F M_W^2}{6\pi\sqrt{2}} = 226 \pm 1 \text{ MeV} \quad (2-13)$$

(مسألهٔ ۱۳-۳)، که با داده‌های تجربی سازگاری خوبی دارد.

۱۳-۳ بوزون Z

آزمایش‌هایی که منجر به آزاد شدن بوزون‌های W^\pm می‌شوند، سبب آزاد شدن Z خنثی هم می‌گردد، با این تفاوت که تاکنون جرم بوزون Z و آهنگ واپاشی‌های آن بسیار دقیق‌تر از بوزون‌های W^\pm تعیین شده‌اند. در سال ۱۹۸۹، دو برخورد دهندهٔ e^+e^- گشایش یافت: یکی LEP در سرن، و دیگری SLC در استنفورد. در این ماشین‌ها، الکترون‌ها و پوزیترون‌ها انرژی‌هایی برابر و تکانه‌هایی در خلاف یکدیگر دارند و می‌توان انرژی مرکز جرم را در حدود جرم بوزون Z تنظیم کرد. سطح مقطع تشدید برای تولید ذره در شکل ۱۳-۲، و نمودارهای فاینمن متناظر آنها در شکل ۱۳-۳ نشان داده شده است. در قلهٔ انرژی، بوزون‌های Z در حال سکون بر اثر نابودی e^+e^- به فراوانی تولید می‌شوند. این رویدادهای بسیار تمیز، داده‌های دقیقی دربارهٔ ویژگی‌های بوزون Z در اختیارمان می‌گذارد. جرم بوزون Z برابر است با

$$M_Z = 91,1876 \pm 0,0021 \text{ GeV}$$

و پهنای جزئی واپاشی نسبت به زوج‌های لپتون-پادلپتون عبارتست از

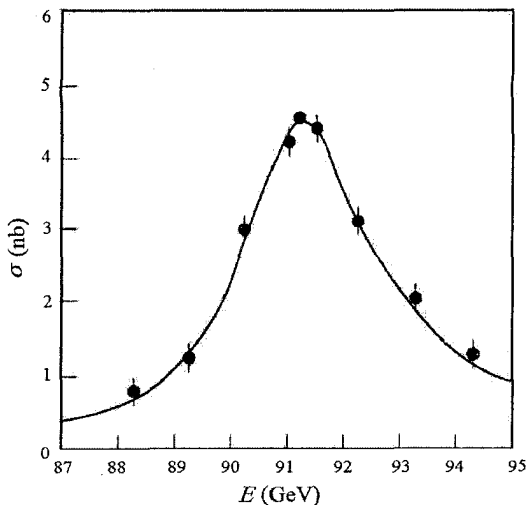
$$\Gamma(Z \rightarrow e^+e^-) = 83,91 \pm 0,20 \text{ MeV}$$

$$\Gamma(Z \rightarrow \mu^+\mu^-) = 83,99 \pm 0,40 \text{ MeV}$$

$$\Gamma(Z \rightarrow \tau^+\tau^-) = 84,09 \pm 0,40 \text{ MeV}$$

پهنای واپاشی کل، که دربردارندهٔ واپاشی به هادرون‌ها و جفت‌های $V\bar{V}$ می‌باشند، برابر است با $\Gamma(\text{کل}) = 2495 \pm 2 \text{ MeV}$.

پهنای‌های جزئی نظری برای واپاشی به جفت‌های لپتون باردار به زاویهٔ واینبرگ θ_W بستگی دارد. در پایین‌ترین مرتبه و با چشم‌پوشی از جمله‌های $(m_{\text{lepton}}/M_W)^2$ ، همهٔ این پهنای‌های جزئی در مدل استاندارد با هم برابرند و



شکل ۱۳-۲ سطح مقطع $\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^- + \mu^+\mu^- + \tau^+\tau^-)$ به صورت تابعی از E ، انرژی راه‌انداز مرکز جرم e^+e^- گروه ALEPH از CERN این داده‌های تجربی را در بیست و پنجمین کنفرانس فیزیک انرژی بالا در سنگاپور در سال ۱۹۹۰ ارائه دادند. این منحنی پیش‌بینی مدل استاندارد است، اما پارامترهایی همچون جرم Z ، متغیرهایی هستند که از روی داده‌ها تعیین می‌شوند (ر.ک. (Hansen (1991)).

$$\Gamma(Z \rightarrow e^+e^-) = \frac{G_F M_Z^2}{12\sqrt{2}\pi} = \left[(1 - 2\sin^2\theta_w)^2 + 4\sin^2\theta_w \right]$$

مقدار پذیرفته شده برای $\sin^2\theta_w = 0,2312$ بوده که در پایین‌ترین مرتبه، منجر به مقدار زیر می‌گردد.

$$\Gamma(Z \rightarrow e^+e^-) = 83,4 \text{ MeV}$$

دوباره سازگاری قابل توجهی بین نظریه و آزمایش برقرار می‌باشد.

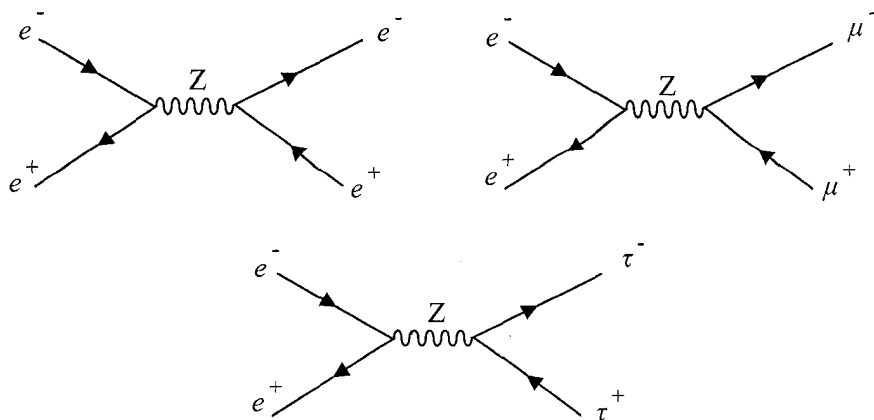
۱۳-۴ تعداد خانواده‌های لپتونی

از مدل استاندارد برای آهنگ واپاشی به جفت‌های نوترینو-پادنوترینو، مقدار زیر به دست می‌آید

$$\Gamma(Z \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e) = \Gamma(Z \rightarrow \nu_\mu \bar{\nu}_\mu) = \Gamma(Z \rightarrow \nu_\tau \bar{\nu}_\tau) = \frac{G_F M_Z^2}{12\sqrt{2}\pi} = 165,9 \text{ MeV} \quad (13-4)$$

در نتیجه پهنای جزئی برای واپاشی به هر زوج نوترینو-پادنوترینو عبارتست از

$$3\Gamma(Z \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e) = 497,6 \text{ MeV}$$



شکل ۱۳-۳ نمودارهای فاینمن پایه برای فرآیندهای شکل ۱۳-۲. منحنی برازش داده شده، دربردارندهٔ نمودارهای دیگری هستند که پینا و نمودارهای تشدید Z فرآیندهای الکترومغناطیسی همراه آن را توصیف می‌کنند.

این مقدار با پهنای جزئی (نادیدنی) Γ مربوط به زوج‌های نابود شوندهٔ بدون رد e^+e^- قابل مقایسه است، زیرا نوترینوها و پادنوترینوها تنها ذره‌هایی هستند که بدون دیده شدن از آشکارسازهای ذره می‌گیرند. به‌طور تجربی مشخص شده است که سازگاری

$$\Gamma(\text{نادیدنی}) = 498,3 \pm 4,2 \text{ MeV}$$

با مقدار مدل استاندارد تأیید برجسته بر این نظریه می‌باشد. این موضوع اشاره بر آن دارد که هیچ گونه نوترینوی سبک دیگری وجود ندارد و در نتیجه از وجود هر دو گانهٔ لپتونی «استاندارد» دیگری در طبیعت غیر از سه دو گانهٔ شناخته شده جلوگیری می‌کند. این امر نتیجه‌ای از اهمیت بنیادین مدل استاندارد می‌باشد.

۱۳-۵ اندازه‌گیری پهنای جزئی

با در نظر گرفتن اهمیت پهنای جزئی برای واپاشی Z ، کلیات چگونگی بدست آوردن این پهنای جزئی را از نتیجه‌های تجربی بیان می‌کنیم. تبادل فوتون، فرآیند چیره در سطح مقطع برای پراکندگی کشسان e^+e^- در زاویه‌های کوچک، حتی در اطراف تشدید Z ، می‌باشد و مقدار آن از QED تعیین می‌شود. زاویهٔ کوچک پراکندگی کشسان باریکه ذرات در طی گرفتن داده‌ها، به‌طور مداوم مورد بررسی و دیده‌بانی قرار گرفته است. سطح مقطع دیگر فرآیندها، مانند $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ، از آهنگ اندازه‌گیری شده برای تولید $\mu^+\mu^-$ نسبت به آهنگ پراکندگی زاویهٔ کوچک e^+e^- می‌باشد. با بهره‌گیری از این رویه نمودارهای شکل ۱۳-۲ به‌دست آمده‌اند. اکنون تحلیل بسیار ساده شده‌ای را به‌منظور بیان چگونگی

بدست آوردن پهنای جزئی ارائه می کنیم.

فرض کنید که سطح مقطعها را بتوان با فرمول ساده برایت-ویگنر توصیف کرد. برای نمونه

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{3\pi}{M_z^2} \frac{\Gamma_{ee} \Gamma_{\mu\mu}}{(E - M_z)^2 + \Gamma^2/4} \quad (5-13)$$

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) = \frac{3\pi}{M_z^2} \frac{\Gamma_{ee} \Gamma_{\text{had}}}{(E - M_z)^2 + \Gamma^2/4} \quad (6-13)$$

(ضریب ۳ ضریب اسپینی می باشد).

M_z و پهنای واپاشی کل Γ را می توان از مکان و پهنای قله تجربی بدست آورد. پس، با اختیار مقدار $\Gamma_{ee} = \Gamma_{\mu\mu}$ ، می توان با بهره گیری از (۵-۱۳) نسبت Γ_{ee} / Γ را از روی قله سطح مقطع $(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ در $E = M_z$ به دست آورد:

$$\frac{\Gamma_{ee}}{\Gamma} = \left(\frac{M_z^2 \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \text{ at } E = M_z)}{12\pi} \right)^{1/2}$$

برای به دست آوردن Γ (نادیدنی)، این گونه عمل می کنیم که

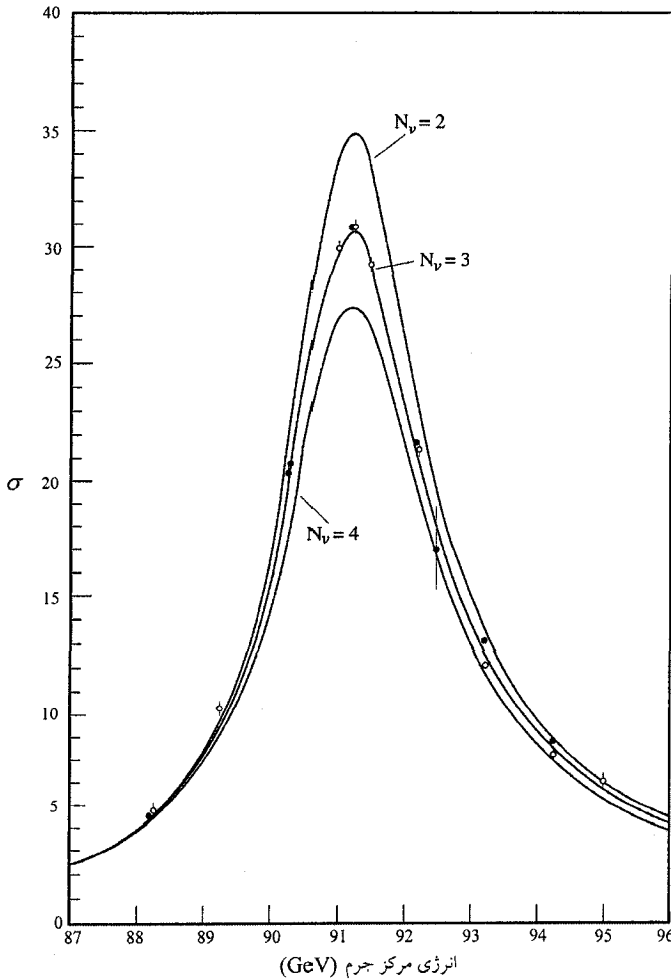
$$\Gamma(\text{نادیدنی}) = \Gamma - 3\Gamma_{ee} - \Gamma_{\text{had}}$$

در واقعیت، با این داده ها بسیار با دقت بیشتر از آنچه در بالا گفته شد، رفتار می شود. به ویژه آنکه اثرهای الکترومغناطیسی حین فرآیند برخورد، شکل ساده برایت-ویگنر را تغییر می دهد و در تحلیل واقعی باید تصحیح های مناسب صورت بگیرد.

در شکل ۱۳-۴ نتیجه چنین برآزش پیچیده تری در مقایسه با پیش بینی های مدل استاندارد با فرض وجود دو، سه، و چهار گونه نوترینوی بدون جرم، نشان داده شده است. این داده ها آشکارا بر وجود سه گونه نوترینو تأکید می کنند.

۱۳-۶ ناتقارنی در سطح مقطع تولید جیب-راست و ناتقارنی واپاشی لبتونی بوزون Z

در برخورددهنده های e^+e^- می توان جزئیات نظریه واینبرگ-سلام را آزمود. در استنفورد با باریکه SLC با انرژی های میزان شده در حد جرم بوزن Z، کار زیادی صورت گرفته است. شدت باریکه ها در SLC کمتر از شدت باریکه ها در برخورددهنده سرن می باشد، اما برتری SLC در آن است که می توان الکترون ها را همسو با راستای باریکه قطبیده کرد تا سهم نسبی الکترون هایی با هلیسیتی منفی و مثبت



شکل ۱۳-۴ سطح مقطع $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$ به صورت تابعی از E ، انرژی راه‌انداز انرژی مرکز جرم e^+e^- . این داده‌های تجربی را گروه OPAL از سیرن در بیست و پنجمین کنفرانس فیزیک انرژی بالا در سنگاپور در سال ۱۹۹۰ ارائه دادند. این داده‌ها در مقایسه با پیش‌بینی‌های مدل استاندارد اما با دو، سه، و چهار گونه نوترینو می‌باشد. آشکارا به سه گونه نوترینوی سبک توجه شده است. (ر.ک. (Mori (1991))

تغییرپذیر باشد. در فصل ۷ دیدیم که، در انرژی‌های بالا، الکترون‌های با هلیسیتی منفی و پوزیترون‌ها با هلیسیتی مثبت مربوط به میدان‌های چپگرد، و الکترون‌های با هلیسیتی مثبت و پوزیترون‌ها با هلیسیتی منفی مربوط به میدان‌های راستگرد، می‌باشند. از شکل جملهٔ برهمکنشی (۱۲-۳۳) در لاگرانژی واینبرگ-سلام، می‌توان دریافت که در برهمکنش با باریکهٔ پوزیترون ناقطبیده (که شمار پوزیترون‌هایی با هلیسیتی منفی

برابر با شمار پوزیترون‌های با هلیسیتی مثبت می‌باشد) سطح مقطع σ_L برای تولید Z از الکترون‌هایی با هلیسیتی منفی متناسب با $(\cos^2\theta_w)^2$ و سطح مقطع σ_R برای تولید Z از الکترون‌هایی با هلیسیتی مثبت متناسب با $(2\sin^2\theta_w)^2$ می‌باشد. ثابت‌های تناسب یکسان هستند، در نتیجه در پایین‌ترین مرتبه، ناتقارنی سطح مقطع چپ-راست عبارتست از

$$A_{LR} = \frac{\sigma_L - \sigma_R}{\sigma_L + \sigma_R} = \frac{(\cos^2\theta_w)^2 - (2\sin^2\theta_w)^2}{(\cos^2\theta_w)^2 + (2\sin^2\theta_w)^2} = \frac{2(1 - 4\sin^2\theta_w)}{1 + (1 - 4\sin^2\theta_w)^2}$$

از اندازه‌گیری‌های SLC (Fero, 1994) مقدار $A_{LR} = 0.1628 \pm 0.0099$ به دست می‌آید، که در نتیجه مقدار زیر برای $\sin^2\theta_w$ برآورد می‌شود.

$$\sin^2\theta_w = 0.2292 \pm 0.0013$$

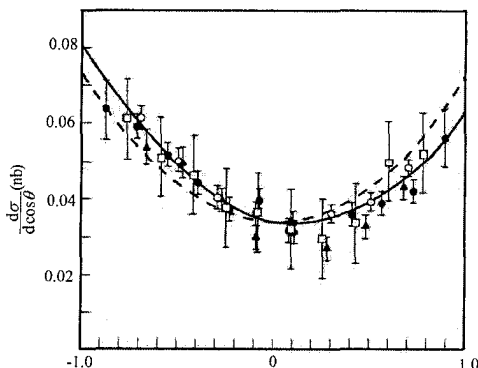
این برآورد به نسبت M_W/M_Z بستگی ندارد، زیرا بوزون‌های W^\pm در نظر گرفته نشده‌اند.

در سِرِن و در برخورددهنده پیشین e^+e^- در DESY در هامبورگ، باریکه‌های الکترون دارای هیچ گونه قطبش طولی نبودند. با این وجود اگر بوزون Z ای تشکیل شود، اسپین آن با احتمالی متناسب با $(2\sin^2\theta_w)^2$ همسو با راستای الکترون، و با احتمالی متناسب با $(\cos^2\theta_w)^2$ ناهمسو با آن می‌باشد، و در نتیجه قطبش میانگین آن در راستای باریکه $A_{LR} -$ است.

هنگامی که بوزون Z به جفت لپتون-پادلپتون وامی‌باشد، راستای لپتون هم‌بسته به راستای اسپین Z می‌باشد. بنابراین قطبش Z منجر به ناتقارنی «رو به جلو- رو به عقب» در توزیع زاویه‌ای لپتون‌ها می‌گردد. فرآیند رقیب تولید لپتون از طریق برهمکنش الکترومغناطیسی منجر به توزیع زاویه‌ای متقارن می‌گردد. ناتقارنی مشاهده شده به تداخل بین فرآیندهای Z و γ بستگی داشته و وابسته به انرژی می‌باشد. در شکل ۱۳-۵ توزیع زاویه‌ای لپتون‌ها نسبت به توزیع باریکه الکترون در انرژی مرکز جرم $E = 30 \text{ GeV}$ (زیر M_Z) نشان داده شده است. این داده‌ها از DESY گرفته شده است و مقدار برآوردی $\sin^2\theta_w = 0.212 \pm 0.014$ را به دست می‌دهد. این مقدار تأیید محکم دیگری بر سازگاری سرتاسری نظریه واینبرگ-سلام می‌باشد.

مسأله‌ها

۱-۱۳ هنگامی که باریکه‌ای از پروتونهای پرانرژی در برخورد سربه سر با پادپروتون‌ها قرار می‌گیرد، بوزون‌های W^\pm تولید می‌شوند. تکانه بوزون‌های W با تکانه این بوزون‌ها بسیار همسو می‌باشد. مؤلفه عرضی تکانه داده شده به W کوچک است. با چشم‌پوشی از این مؤلفه، و با فرض آنکه در چارچوب سکون W توزیع همسانگردی از فرآورده‌های واپاشی وجود دارد، نشان دهید که در



شکل ۱۳-۵ سطح مقطع دیفرانسیلی $d\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)/d\cos\theta$ داده‌ها در DESY در انرژی مرکز جرم e^+e^- برابر با 30 GeV به دست آمده‌اند. پیش‌بینی الکترودینامیک کوانتمی به تنهایی، با خطچین‌ها نشان داده شده است، خط توپر با داده‌ها برازش یافته و اصلاح ناشی از حضور بوزون را که منجر به این اثر تداخلی می‌گردد، نشان می‌دهد (R. Marshall, Rutherford Appleton Laboratory Report RAL 89-021)

وایشی به لپتون باردار و نوترینو، ریشه مجذور میانگین تکانهٔ عرضی لپتون تقریباً برابر با $M_W/\sqrt{6} = 33\text{ GeV}$ می‌باشد.

۱۳-۲ با توجه به جملهٔ برهمکنشی در $(12-23)$ بوزون Z با جفت الکترون پوزیترون، نشان دهید که در برخورد های ناقطبیدهٔ سر به سر e^+e^- ، احتمال آنکه اسپین بوزون Z همسو با باریکهٔ الکترون گردد،

$$\text{متناسب با } (\sin^2\theta_w)^2, \text{ و احتمال ناهمسو شدن آن متناسب با } (\cos^2\theta_w)^2 \text{ می‌باشد.}$$

۱۳-۳ با چشم‌پوشی از جمله‌های جرمی، پهناهای جزئی $(13-2)$ ، $(13-3)$ و $(13-4)$ را، به دست آورید.

$$13-4 \text{ مقدار } \cos\theta_w = M_W/M_Z \text{ را اختیار کنید و مقدار } (13-3) \text{ را محاسبه کنید.}$$

در مدل استاندارد، رنگ کوارک‌هاست که سرچشمه برهمکنش قوی آنها می‌باشد. در این فصل تنها برهمکنش‌های الکترومغناطیسی و ضعیف کوارک‌ها را بررسی خواهیم کرد و به رنگ کوارک‌ها نخواهیم پرداخت. این نظریه در همانندی بسیار نزدیکی با نظریهٔ الکتروضعیف که برای لپتون‌ها در فصل ۱۲ عنوان کردیم، ساخته خواهد شد. این نظریه برای کوارک‌ها، همانند نظریه لپتون‌ها نیست که بر پایهٔ آزمایش بنا گردد. زیرا نمی‌توان کوارک‌ها را از هادرون‌ها مجزا و جدا کرد. امکان رخ دادن آزمایش‌ها تنها در دستگاه‌های مرکب کوارکی میسر می‌باشد و چگالی لاگرانژی اصلی در انرژی‌های پایین با برهمکنش‌های قوی مبهم می‌شوند. در انرژی‌های بالاتر، و به‌ویژه از طریق واپاشی‌های هادرونی بوزون‌های Z ، می‌توان فیزیک الکتروضعیف کوارک‌های منفرد را تا حدودی توضیح داد. در فصل ۱۵ برخی از داده‌های آزمایشگاهی مربوط به این واپاشی‌ها را توضیح خواهیم داد.

۱-۱۴ ساختن چگالی لاگرانژی

در انرژی‌های پایین، باید بتوان با این مدل، واپاشی‌هایی مانند زیر را توصیف کرد

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

یا در حد کوارکی،

$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$$

ذرهٔ میانجی در این واپاشی بوزون W می‌باشد. از مقایسه واپاشی بالا با واپاشی میون زیر

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$$

که ذره میانجی آن هم بوزون W می‌باشد، این نظر القا می‌شود که مؤلفه‌های چپگرد d_L و u_L میدان‌های کوارکی باید در دوتایی $SU(2)$ با هم قرار گیرند،

$$L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad (1-14)$$

مادامی که d_L و u_L همانند e_R و ν_R هستند، تحت تبدیلات $SU(2)$ بدون تغییر باقی می‌مانند.

خواهیم دید که اگر طبیعت امکان توید تنها یک گونه کوارک بالا، و تنها یک گونه کوارک پایین را فراهم می کرد، این انتساب ساده درست می بود.

با چنین انتسابی هیچ آزادی در ایجاد برهمکنش ضعیف باقی نمی ماند. تنها یک راه برای ساختن بخش دینامیک چگالی لاگرانژی کوارکی با ناوردای پیمانه ای وجود دارد. جفت شدگی با میدان W_μ تنها با تقارن $SU(2)$ مشخص شده و جفت شدگی با میدان B_μ تنها با بارهای الکتریکی کوارکی، یعنی $2e/3$ برای کوارک u ، و $-e/3$ برای کوارک d ، تثبیت می شود. در نتیجه

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{dyn}} = & L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu i \left(\partial_\mu + i(g_\tau/2) W_\mu + (ig_1/6) B_\mu \right) L \\ & + \mu_R^\dagger \sigma^\mu i \left[d_\mu + (2ig_1/3) B_\mu \right] u_R \\ & + d_R^\dagger \sigma^\mu i \left[\partial_\mu - (ig_1/3) B_\mu \right] d_R \end{aligned} \quad (2-14)$$

که $g_\tau \sin \theta_W = g_1 \cos \theta_W = e$ می باشد.

برای همخوانی با قانون های تبدیل (۱۱-۴) و (۱۱-۶) میدان های پیمانه ای، تبدیل $U(1) \times SU(2)$ از میدان های کوارکی باید به صورت زیر باشد

$$\begin{aligned} L & \rightarrow L' = e^{-i\theta(x)/\tau} UL \\ u_R & \rightarrow u_R' = e^{-\tau i\theta(x)/\tau} u_R \\ d_R & \rightarrow d_R' = e^{\tau i\theta(x)/\tau} d_R \end{aligned} \quad (3-14)$$

با بهره گیری از (۱۱-۷) و (۱۱-۲۹)، می توان \mathcal{L}_{dyn} را بر حسب میدان های Z_μ ، W_μ^\pm و A_μ نوشت که به ریخت زیر در می آید

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{dyn}} = & L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu i \left(\partial_\mu + \frac{\tau ie}{3} A_\mu + \frac{ie}{3 \sin 2\theta_W} (1 + \tau \cos 2\theta_W) Z_\mu, \frac{ie}{\sqrt{2} \sin \theta_W} W_\mu^+ \right) L \\ & \left(\frac{ie}{\sqrt{2} \sin \theta_W} W_\mu^-, \partial_\mu - \frac{ie}{3} A_\mu - \frac{ie}{3 \sin 2\theta_W} (\tau + \cos 2\theta_W) Z_\mu \right) \\ & + u_R^\dagger \sigma^\mu i \left[\partial_\mu + \frac{\tau ie}{3} A_\mu - \frac{\tau ie}{3} \tan \theta_W Z_\mu \right] u_R \\ & + d_R^\dagger \sigma^\mu i \left[\partial_\mu - \frac{ie}{3} A_\mu + \frac{ie}{3} \tan \theta_W Z_\mu \right] d_R \end{aligned} \quad (4-14)$$

اما، در مدل استاندارد فرض می شود سه خانواده، یا سه نسل، کوارک وجود دارد. بنابراین تعداد سه

دوتایی چپگرد ($SU(2)$):

$$\begin{pmatrix} u_{L1} \\ d_{L1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{L2} \\ d_{L2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{L3} \\ d_{L3} \end{pmatrix}$$

و شش تکتایی راستگرد را معرفی می‌کنیم: $d_{R1}, u_{R1}; d_{R2}, u_{R2}; d_{R3}, u_{R3}$. برای آنکه نمادگذاری فشرده‌تر شود، خانواده کوارک‌ها را با نمایش زیر نشان خواهیم داد:

$$L_k = \begin{pmatrix} u_{Lk} \\ d_{Lk} \end{pmatrix}, u_{Rk}, d_{Rk} \quad (k = 1, 2, 3)$$

همانند لپتون‌ها، بخش دینامیکی لاگرائژی کل کوارکی را به صورت حاصل جمع زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{L}_{\text{dyn}}(\text{quark}) = \sum_{k=1}^3 \mathcal{L}_{\text{dyn}}(u_k, d_k) \quad (5-14)$$

۱۴-۲ جرم کوارک‌ها و ماتریس آمیختگی کوبایاشی-ماسکاو^۱

برای آنکه بهنجاری پذیری از بین نرود، باید تقارن پیمانه‌ای را نگاه داریم، و با جفت کردن کوارک‌ها با میدان هیگز، همانند فرآیند جرم‌دار کردن لپتون‌ها در فصل ۱۲، به کوارک‌ها نیز جرم بدهیم. برای کوارک‌های d_k این کار سراسر و بدون مشکل است. کلی‌ترین شکلی که می‌توان در نظر گرفت، و تقارن پیمانه‌ای هم نگه داشته شود، عبارتست از

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}}(d) = - \sum \left[G_{ij}^d (L_i^\dagger \Phi) d_{Rj} + G_{ij}^{d*} d_{Rj}^\dagger (\Phi^\dagger L_i) \right] \quad (6-14)$$

همانگونه که درباره لپتون‌ها در بخش (۱۲-۶) بیان کردیم. پس از شکست تقارن میدان هیگز Φ ، کوارک‌های گونه d دارای جمله جرمی می‌شوند:

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}(d) = - \phi_0 \sum \left[G_{ij}^d d_{Li}^\dagger d_{Rj} + G_{ij}^{d*} d_{Rj}^\dagger d_{Li} \right] \quad (7-14)$$

بنا بر دلیل‌های پیشین، G_{ij}^d ماتریس مختلط 3×3 ای می‌باشد. همانگونه که در بخش (۱۲-۶) بیان شد، همواره می‌توان چنین ماتریسی را با کمک دو ماتریس یکانی به بخش قطری حقیقی درآورد، به گونه‌ای که می‌توان نوشت

$$\phi_0 G^d = D_L^\dagger m^d D_R$$

که m^d ماتریس قطری حقیقی، و D_L, D_R ماتریس‌های یکانی هستند. اگر درایه‌های ماتریس قطری جدا از یکدیگر و متمایز باشند، که به تجربه اینگونه پدیدار می‌شوند، D_L, D_R یکتا هستند، مگر آنکه هر دو

ماتریس از چپ در ماتریس ضریب فاز یکسانی ضرب شوند

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_3} \end{pmatrix} \quad (۸-۱۴)$$

همانگونه که در فصل ۱۲ پی ریزی مدل استاندارد انجام شد، نوترینوها دارای جرم صفر هستند. اما به ازای کوارک‌های گونه u ، که در اینجا دوتایی‌های چپگرد را می‌سازند، نیاز به جمله‌ای جرمی داریم. برای رسیدن به این هدف ماتریسی 2×2 در فضای $SU(2)$ معرفی می‌کنیم:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{AA} & \mathcal{E}_{AB} \\ \mathcal{E}_{BA} & \mathcal{E}_{BB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

عبارت ناوردای مناسبی که می‌توانیم در فضای $SU(2)$ از دوتایی‌های Φ ، \mathbf{L}_i بسازیم، $(\Phi^T \mathcal{E} \mathbf{L}_i)$ است. $\Phi^T = (\Phi_A, \Phi_B)$ ترانزاده Φ است. (ر.ک. مسأله ۱۴-۳). سپس لاگرانژی زیر اختیار می‌شود

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}}(u) = - \sum_{ij} \left[G_{ij}^u (\mathbf{L}_i^\dagger \mathcal{E} \Phi^*) u_{Rj} + G_{ij}^{u*} u_{Rj}^\dagger (\Phi^T \mathcal{E} \mathbf{L}_i) \right] \quad (۹-۱۴)$$

که G_{ij}^u ماتریس مختلط 3×3 دیگری است. با شکست تقارن، جمله جرمی برای کوارک‌های u ایجاد می‌شود

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}(u) = -\phi_0 \sum \left[G_{ij}^u u_{Li}^\dagger u_{Rj} + G_{ij}^{u*} u_{Rj}^\dagger u_{Li} \right] \quad (۱۰-۱۴)$$

که همانگونه که چشم داشتیم، همانند رابطه (۷-۱۴) بوده و مانند آن تقارن‌های پیمان‌ه‌ای را نگه می‌دارد. می‌توانیم به همان روش این را هم به ریخت قطری حقیقی در آوریم.

$$\phi_0 \mathbf{G}^u = \mathbf{U}_L^\dagger \mathbf{m}^u \mathbf{U}_R$$

که \mathbf{U}_L و \mathbf{U}_R ماتریس‌های یکانی، و \mathbf{m}^u قطری می‌باشد.

می‌توان هم \mathbf{U}_L و هم \mathbf{U}_R را از سمت چپ در ماتریس ضریب فازی ضرب کرد، برای نمونه

$$\begin{pmatrix} e^{i\beta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta_3} \end{pmatrix}$$

این نظریه مستقیم برحسب میدان‌های کوارکی «واقعی» توصیف کرد، به ازای این میدان‌ها ماتریس‌های جرمی حقیقی هستند، به گونه‌ای که می‌توانیم شش میدان کوارکی تعریف کنیم

$$d'_{Li} = D_{Lij} d_{Lj}, \quad d'_{Ri} = D_{Rij} d_{Rj} \quad (۱۴-۱۱)$$

$$u'_{Li} = U_{Lij} u_{Lj}, \quad u'_{Ri} = U_{Rij} u_{Rj}$$

سهم جرم کوارکی در \mathcal{L} به صورت زیر در می‌آید:

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}(\text{quark}) = - \sum_{k=1}^r \left[m_i^d \left(d_{Li}^\dagger d'_{Ri} + d'_{Ri}^\dagger d_{Li} \right) + m_i^u \left(u_{Li}^\dagger u'_{Ri} + u'_{Ri}^\dagger u_{Li} \right) \right] \quad (۱۴-۱۲ الف)$$

اسپینورهای دیراک u_i را با کوارک‌های u, c, t

$$\begin{pmatrix} u'_{L1} \\ u'_{R1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u'_{L2} \\ u'_{R2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u'_{L3} \\ u'_{R3} \end{pmatrix}$$

و اسپینورهای دیراک d_i را با کوارک‌های d, s, b بازشناسی می‌کنیم،

$$\begin{pmatrix} d'_{L1} \\ d'_{R1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d'_{L2} \\ d'_{R2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d'_{L3} \\ d'_{R3} \end{pmatrix}$$

به گونه‌ای که بتوان (۱۴-۱۲ الف) را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{mass}}(\text{quark}) = & - \left[m^d \left(d_L^\dagger d_R + d_R^\dagger d_L \right) + m^u \left(u_L^\dagger u_R + u_R^\dagger u_L \right) \right] \\ & - \left[m^s \left(s_L^\dagger s_R + s_R^\dagger s_L \right) + m^c \left(c_L^\dagger c_R + c_R^\dagger c_L \right) \right] \\ & - \left[m^b \left(b_L^\dagger b_R + b_R^\dagger b_L \right) + m^t \left(t_L^\dagger t_R + t_R^\dagger t_L \right) \right] \end{aligned} \quad (۱۴-۱۲ ب)$$

جمله‌های (۱۴-۱۲ ب) متناظر با شش فرمیون دیراکی هستند.

پریم‌ها را نوشته‌ایم، و از این پس در بازمانده کتاب، به‌ازای $k=1, 2, 3$ ، نمادهای u_k, d_k میدان‌های کوارکی حقیقی را مشخص می‌کنند.

در لاگرانژی \mathcal{L}_{dyn} که در (۱۴-۲) و (۱۴-۵) ارائه شد، جمله‌های قطری، کوارک گونه u را با کوارک گونه d ، نمی‌آمیزد و این جمله‌ها تحت تبدیل‌های یکانی (۱۴-۱۱) ناوردا هستند. اما جمله‌هایی که از عناصر غیرقطری ماتریس \mathbf{W}_μ ناشی می‌شوند، از طریق جفت‌شدگی میدان‌های بوزونی \mathcal{W}^\pm کوارک‌های u و d را با هم می‌آمیزند، و این جمله‌ها تغییر زیادی می‌کنند.

جمله‌های قطری منجر به \mathcal{L}_{qZ} ، $\mathcal{L}_{q\text{Dirac}}$ می‌شوند که عبارتهای (۱۲-۱۲) و (۱۲-۲۳) را در نظریه لپتون فصل ۱۲ با یکدیگر همگام و همسو می‌کند. چگالی لاگرانژی کامل الکتروضعیف برای کوارک‌ها به صورت

$$\mathcal{L}_q = \mathcal{L}_q \text{Dirac} + \mathcal{L}_q Z + \mathcal{L}_q w + \mathcal{L}_q H$$

در می‌آید، که

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q \text{Dirac} = & \sum_i \left[u_{Li}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu i \left\{ \partial_\mu + i(\gamma e/\gamma) A_\mu \right\} u_{Li} + u_{Ri}^\dagger \sigma^\mu i \left\{ \partial_\mu + i(\gamma e/\gamma) A_\mu \right\} u_{Ri} \right] \\ & + \left[d_{Li}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu i \left\{ \partial_\mu - i(e/\gamma) A_\mu \right\} d_{Li} + d_{Ri}^\dagger \sigma^\mu i \left\{ \partial_\mu - i(e/\gamma) A_\mu \right\} d_{Ri} \right] + \mathcal{L}_q \text{mass} \end{aligned} \quad (13-14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q Z = & \sum_i \left[-u_{Li}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu u_{Li} \left(\frac{e}{\sin(\gamma\theta_w)} \right) Z_\mu \left(1 - (\gamma/\gamma) \sin^2 \theta_w \right) \right. \\ & + u_{Ri}^\dagger \sigma^\mu u_{Ri} \left(\frac{e}{\sin(\gamma\theta_w)} \right) Z_\mu \frac{\gamma}{\gamma} \sin^2 \theta_w \\ & + d_{Li}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d_{Li} \left(\frac{e}{\sin(\gamma\theta_w)} \right) Z_\mu \left(1 - (\gamma/\gamma) \sin^2 \theta_w \right) \\ & \left. - d_{Ri}^\dagger \sigma^\mu d_{Ri} \left(\frac{e}{\sin(\gamma\theta_w)} \right) Z_\mu \frac{\gamma}{\gamma} \sin^2 \theta_w \right] \end{aligned} \quad (14-14)$$

می‌باشند. در لاگرانژی $\mathcal{L}_q w$ ، یعنی بخشی از چگالی لاگرانژی، جمله‌های

$$-\frac{e}{\sqrt{\gamma} \sin(\theta_w)} \sum_i \left[u_{Li}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu u_{Li} W_\mu^+ + d_{Li}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu u_{Li} W_\mu^- \right]$$

که بر حسب میدان‌های کواریکی حقیقی (۱۴-۱۱) نوشته می‌شوند، به صورت زیر در می‌آیند

$$\mathcal{L}_{qw} = -\frac{e}{\sqrt{\gamma} \sin(\theta_w)} \left(u_L^\dagger, c_L^\dagger, t_L^\dagger \right) \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^\mu d_L \\ \tilde{\sigma}^\mu s_L \\ \tilde{\sigma}^\mu b_L \end{pmatrix} W_\mu^+ \quad (15-14)$$

جمله‌های مزدوج هرمیتی +

که $\mathbf{V} = \mathbf{U}_L \mathbf{D}_L^\dagger$ می‌باشند.

از آنجا که حاصلضرب دو ماتریس یکسانی، ماتریسی یکسانی است، پس \mathbf{V} ماتریس یکسانی 3×3

می‌باشد. عنصرهای ماتریس V در این نظریه تعیین نمی‌شوند. در این ماتریس چهار پارامتر دیگر مدل استاندارد باقی می‌ماند که در مدل تعیین نمی‌شوند. ماتریس یکانی $n \times n$ با n^2 پارامتر مشخص می‌شوند (پیوست الف)، بنابراین در ظاهر باید n^2 پارامتر از آزمایش تعیین شوند. اما می‌توان با ماتریس‌های ضریب فاز مربوط به D_L (ر.ک. (۱۴-۸)) و U_L ، پنج پارامتر از این n^2 پارامتر را در فازهای غیرفیزیکی میدان‌های کوارکی، جذب کرد. (پنج، نه شش، پارامتر غیرفیزیکی هستند، زیرا اختلاف فازها در

$$V_{ud} = \exp[i(\beta_u - \alpha_d)] V_{ud}^\circ$$

ماتریس V پدیدار می‌شوند. برای نمونه V_{ud}° حاصل به چهار پارامتر فیزیکی بستگی دارد زمانی که ضریبهای فاز بیرون کشیده شوند، ماتریس V° که موسوم به ماتریس کوبایاشی-ماسکاو (KM) (کوبایاش و ماسکاو ۱۹۷۳) می‌باشد.

۱۴-۳ پارامتربندی ماتریس^۱

ماتریس دوران 3×3 هم ماتریسی یکانی می‌باشد. ماتریس یکانی کلی‌تر را می‌توان از ضرب ماتریس‌های دوران و ماتریس‌های یکانی، ساخته شده از ضرایب فاز، ایجاد کرد. پارامتربندی یکتایی برای ماتریس KM با این روش وجود ندارد. پارامتربندی که PDG^2 انتشار داده، به صورت زیر است

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \quad (14-16)$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{i\delta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{13} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

که $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ ، $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ است. این چهار پارامتر عبارتند از سه زاویه دوران $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ و فاز δ .

مشخص است که اگر $\sin \delta = 0$ یا $s_{13} = 0$ باشد، آنگاه V حقیقی است. با کمی دقت درمی‌یابیم که اگر $s_{13} = 0$ باشد، آنگاه با تعریف دوباره میدان‌های کوارکی به شکل زیر، V حقیقی می‌شود

$$e^{i\delta} u_1 \rightarrow u_1, \quad e^{i\delta} d_1 \rightarrow d_1$$

و اگر $s_{\nu\nu} = 0$ باشد، آنگاه V با تعریف دوباره میدان‌های کوارکی به شکل زیر، حقیقی می‌شود

$$e^{-i\delta} u_{\nu} \rightarrow u_{\nu}, \quad e^{-i\delta} d_{\nu} \rightarrow d_{\nu}$$

دانشجو می‌تواند درستی این گفته‌ها را بیازماید.

بازتعریف کلی فازهای کوارکی

$$d_i \rightarrow e^{i\alpha_i} d_i, \quad u_i \rightarrow e^{i\beta_i} u_i$$

که عنصرهای ماتریس V را با تبدیل زیر تغییر می‌دهد،

$$V_{ij} \rightarrow e^{i(\alpha_i - \beta_j)} V_{ij} \quad (14-17)$$

با بهره‌گیری از آزادی پارامترندی، می‌توان سه زاویه دوران را، که همگی در ربع اول باشند، برگزید. خانم یارلسکوگ^۱ (۱۹۸۵) شرط لازم و کافی‌ای ارائه کرد که، با توجه به آن می‌توان دریافت که آیا امکان حقیقی کردن ماتریس یکانی V با چنین تغییراتی، وجود دارد یا خیر. وی بخش موهومی هر یک از n حاصل ضرب $V_{ij} V_{kl} V_{kl}^* V_{il}^* (i \neq k, j \neq l)$ را در نظر گرفت. برای نمونه

$$\text{Im}(V_{11} V_{22} V_{33}^* V_{33}^*) = J \quad \text{مثلاً} \quad (14-18)$$

J تحت تغییر فاز کلی (۱۴-۱۷) ناورد است، بنابراین اگر J صفر نباشد، نمی‌توان این کار را انجام داد و در نتیجه نمی‌توان V را حقیقی کرد. همه این n کمیت برابر با $J \pm$ هستند. در پارامترندی معادله (۱۴-۱۶) داریم

$$J = c_{12} c_{13}^2 c_{23} s_{12} s_{13} s_{23} \sin \delta \quad (14-19)$$

(شرایطی که برای حقیقی بودن ماتریس KM به دست می‌آید کاملاً در شرط $J = 0$ گنجانده می‌شوند). با تثبیت ماتریس KM، تنها تقارن جهانی (۱) U باقی می‌ماند که آن را بدون تغییر باقی می‌گذارد. می‌توان هر شش میدان کوارکی، چپ و راست، را در ضریب فاز یکسانی ضرب کرد. پیامدش این است که تنها جریان کل تعداد کوارک‌ها، و در نتیجه تعداد کل کوارک‌ها، پایسته است. در سطح ماکروسکوپی این پدیده به صورت پایستگی عدد باریونی دیده می‌شود.

۱۴-۴ تقارن CP و ماتریس KM

اکنون می‌خواهیم این موضوع را نشان دهیم که اگر نتوان ماتریس KM را با تعریف دوباره فازهای کوارکی حقیقی کرد، مدل استاندارد دارای تقارن CP (مزدوج بار، پاریتی) نمی‌باشد. در بخش ۱۲-۵ دیدیم که نظریه الکتروضعیف واینبرگ-سلام تحت عمل CP ناورد است. همانند آن CP تقارنی برای هر جمله‌ای در مدل استاندارد برهمکنشهای ضعیف و الکترومغناطیسی کوارک‌ها،

به‌جز برای جمله‌هایی که منجر به برهمکنش بین کوارک‌ها و بوزون‌های CP می‌گردد، می‌باشد. این جمله‌ها در بردارندهٔ ماتریس KM هستند.

CP میدان‌های W را که در معادلهٔ (۱۲-۳۲) تعریف می‌شوند، به‌صورت زیر تبدیل می‌کند:

$$W_{\circ}^{+CP} = -W_{\circ}^{-}, \quad W_i^{+CP} = W_i^{-}$$

و میدان‌های کوارکی همانند همهٔ میدان‌های فرمیونی دیگر تبدیل می‌یابند:

$$q_L^{CP} = -i\sigma^2 q_L^*, \quad q_R^{CP} = i\sigma^2 q_R^*$$

برای آنکه در یابیم چگونه تقارن CP نقض می‌شود، جمله‌های (۱۴-۱۵) را در نظر می‌گیریم که به‌صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\left(-e/\sqrt{2}\sin\theta_w\right)\sum_{i,j}\left[u_{Li}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}V_{ij}d_{Lj}W_{\mu}^{+}+d_{Li}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}V_{ij}^{*}u_{Li}W_{\mu}^{-}\right]$$

$$(i=u,c,t; j=d,s,b)$$

با جایگزینی تبدیل‌های CP به‌جای خود میدان‌ها، به نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

$$\left(-e/\sqrt{2}\sin\theta_w\right)\sum_{i,j}\left[-u_{Li}^T\left(\tilde{\sigma}^{\mu}\right)^T V_{ij}d_{Lj}^{*}W_{\mu}^{-}-d_{Lj}^T\left(\tilde{\sigma}^{\mu}\right)^T V_{ij}^{*}u_{Li}^{*}W_{\mu}^{+}\right]$$

که، همانند بخش ۱۲-۵، از نتایج زیر بهره برده‌ایم:

$$\left(\sigma^{\nu}\right)^T=1, \quad \sigma^{\nu}\sigma^i\sigma^{\nu}=-\left(\sigma^i\right)^T$$

برای انتقال این عبارت نسبت به شاخص‌های اسپینوری، علامت منفی ناشی از پادجایبایی میدان‌های فرمیونی وارد می‌کنیم، و بدین ترتیب عبارت تبدیل یافتهٔ CP را به‌دست می‌آوریم:

$$\left(-e/\sqrt{2}\sin\theta_w\right)\sum_{i,j}\left[d_{Li}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}V_{ij}u_{Li}W_{\mu}^{-}+d_{Li}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}V_{ij}^{*}d_{Lj}W_{\mu}^{+}\right]$$

این عبارت همانند جملهٔ اصلی است، اگر و تنها اگر به‌ازای همهٔ j, i ها، V_{ij} حقیقی باشد.

گواه آزمایشگاهی بر شکست تقارن CP نخست در سال ۱۹۶۴ میلادی، در واپاشی مزون $K^0(d\bar{s})$ پدیدار شد. این واپاشی و اشارتهای آن را در فصل ۱۸ مورد بحث قرار خواهیم داد. در آن فصل آنچه را که از آزمایش دربارهٔ پارامترهای ماتریس KM دانسته شده، بررسی می‌کنیم. جالب آنکه اثرهای نقض‌کنندهٔ CP در مدل استاندارد متناسب با J هستند.

۱۴-۵ برهمکنش ضعیف در حد انرژی پایین

با درهم آمیختن نتیجه‌های فصل ۱۲ (معادلهٔ (۱۲-۱۸)) با نتیجه‌های این فصل (معادلهٔ (۱۴-۱۵))، برهمکنش

کامل بوزون‌های W با همه فرمیون‌ها، هم لپتون‌ها و هم کوارک‌ها، مدل استاندارد را در دست داریم:

$$\mathcal{L}_{W \text{ int}} = \left(-e / \sqrt{2} \sin \theta_w \right) \left[j^{\mu \dagger} W_{\mu}^{+} + j^{\mu} W_{\mu}^{-} \right]$$

که

$$j^{\mu} = \sum_{\text{leptons}} e_{Li}^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\mu} \nu_{Li} + \sum_{ij} d_{Lj}^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\mu} u_{Li} V_{ij}^{*} \quad (i = u, c, t; j = d, s, b) \quad (20-14)$$

توجه کنید که در این فصل شاخصهای رنگ را در نظر نگرفته‌ایم. بر حسب‌های j, i بر اسپینورهای کوارکی در (۱۴-۱۵)، که با آنها هستند، بیانگر شاخص‌های رنگ می‌باشند که روی آنها هم جمع بسته می‌شود.

با حذف میدان W همانند بخش ۱۲-۲، برهمکنش مؤثر انرژی پایین را به دست می‌آوریم:

$$\mathcal{L}_{W \text{ eff}} = -2\sqrt{2} G_F j^{\mu \dagger} j^{\mu} \quad (21-14)$$

برای نمونه، بخشی از این برهمکنش مؤثر، که در اساس، مسؤوول همهٔ واپاشی‌های بتازای هسته‌ای می‌باشد، میدان الکترون و کوارک‌های u, d را ($i = j = 1$) را دربر می‌گیرد:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -2\sqrt{2} G_F \left[g_{\mu\nu} \nu_{eL}^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\mu} e_L d_L^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\nu} u_L V_{ud}^{*} \right] + \text{مزدوج هرمیتی} \quad (22-14)$$

آن بخش از برهمکنش مؤثر، که مسؤوول واپاشی ($\bar{s} \rightarrow u + \bar{u} + \bar{d}$) $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ می‌باشد، عبارتست از

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -2\sqrt{2} G_F \left[g_{\mu\nu} s_L^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\mu} u_L u_L^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\nu} d_L V_{us}^{*} V_{ud} \right] \quad (23-14)$$

همچنین برهمکنش کامل بوزون Z با همهٔ فرمیون‌ها را هم در اختیار داریم. با در هم آمیختن (۱۲-۲۳)

با (۱۴-۱۴) به نتیجهٔ زیر می‌رسیم

$$\mathcal{L}_{Z \text{ int}} = \frac{-e}{\sin(2\theta_W)} (j^{\text{neutral}})_{\mu} Z^{\mu} \quad (24-14)$$

که

$$\begin{aligned} (j^{\text{neutral}})^{\mu} = & \sum_{\text{leptons}} \left[\nu_{Li}^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\mu} \nu_{Li} - \cos(2\theta_W) e_{Li}^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\mu} e_{Li} + 2 \sin^2 \theta_W e_R^{\dagger} \sigma^{\mu} e_R \right] \\ & + \sum_i \left[u_{Li}^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\mu} u_{Li} \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W \right) - u_{Ri}^{\dagger} \sigma^{\mu} u_{Ri} \left(\frac{4}{3} \sin^2 \theta_W \right) \right. \\ & \left. - d_{Li}^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\mu} d_{Li} \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) + d_{Ri}^{\dagger} \sigma^{\mu} d_{Ri} \left(\frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) \right] \end{aligned}$$

یا حذف میدان Z ، برهمکنش مؤثر انرژی پایین را به دست می‌آوریم.

$$\mathcal{L}_{Z\text{eff}} = \left(-\frac{G_F}{\sqrt{2}} \right) (j_{\text{neutral}})_\mu (j_{\text{neutral}})^\mu \quad (25-14)$$

مسئله‌ها

۱-۱۴ تحقیق کنید که تبدیل‌های (۱۴-۳) همراه با (۱۱-۴) و (۱۱-۶) \mathcal{L}_{dyn} را ناوردای باقی می‌گذارد.
۲-۱۴ \mathcal{L}_{qZ} (معادله (۱۴-۱۴)) را از (۴-۱۴) به دست آورید.

۳-۱۴ نشان دهید که $(\Phi \mathcal{E} L)$ ناوردای $SU(2)$ می‌باشد. (نشان دهید $U^T \mathcal{E} U = \mathcal{E} \det(U)$).
۴-۱۴ چگالی لاگرانژی برهمکنش بین میدان‌های کوارکی و میدان هیگز را، که در (۱۴-۶) و (۱۴-۹) پدیدار شد، بنویسید.

ثابت جفت‌شدگی c_t را بین میدان هیگز و کوارک بالا برآورد کنید.
۵-۱۴ کدام جمله‌ها در (۱۴-۲۰) و (۱۴-۲۱) مسؤول واپاشی مزون‌های زیر هستند:

$$K^+(u \bar{s}) \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

$$D^+(c \bar{d}) \rightarrow \bar{K}^0(\bar{d}s) + e^+ + \nu_e$$

$$B^+(u \bar{b}) \rightarrow \bar{D}^0(\bar{c}u) + \pi^+(u \bar{d})?$$

نمودارهای کوارکی مناسب هر کدام را رسم کنید.

۶-۱۴ «جریان‌های خنثی تغییر کننده طعم» وجود ندارد، یعنی جمله‌هایی در جریان خنثی (۱۴-۲۴) وجود ندارد که در بردارنده تغییر طعم کوارک باشد. نمودارهای فاینمنی مرتبه‌های بالاتر نظریه اختلال را رسم کنید که واپاشی‌های جریان خنثی تغییر دهنده طعم را شبیه‌سازی کند.

$$b \rightarrow s + \gamma, \quad b \rightarrow s + e^+ + e^-$$

فصل ۱۵

واپاشی‌های هادرونی بوزن‌های Z و W

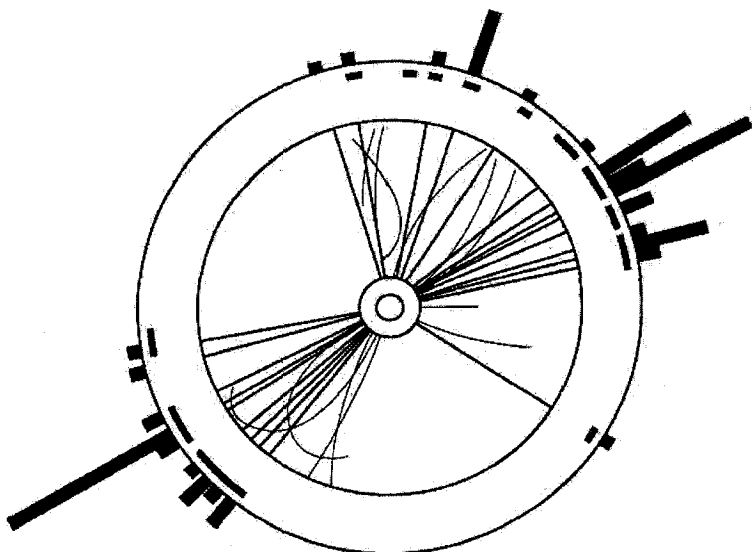
در فصل ۱۳ نتیجه واپاشی‌های لپتونی بوزون Z را، که با بهره‌گیری از برخورددهنده‌های e^+e^- از آزمایش به‌دست آمدند، توصیف کردیم. این نتیجه‌ها با پیش‌بینی‌های مدل الکتروضعیف واینبرگ-سلام سازگاری چشمگیری دارد. در این فصل به برخی از خیل بزرگ داده‌های انباشته شده در سِرِن و اِسْلَک درباره‌ی واپاشی‌های هادرونی Z خواهیم پرداخت، و سازگاری بسیار چشمگیری بین آزمایش و نظریه خواهیم یافت.

۱-۱۵ واپاشی‌های هادرونی Z

در مدل استاندارد با احتمال بسیار زیادی، واپاشی آغازینه‌ای با زوج کوارک-پادکوارک واپاشی هادرونی Z را به راه می‌اندازد. بیشتر هادرونی‌هایی که در پی این واپاشی آغازین ایجاد می‌شوند، در دو جت، متشکل از ذراتی پایدار یا درازعمر، محصورند که در چارچوب سکون Z پشت به پشت هم حرکت می‌کنند (ر.ک. شکل ۱-۱۵). جزئیات دقیق فرآیندهایی که در آفرینش چنین جتی دخالت دارند، به تمامی درک نشده است.

تکانه چنین جتی را می‌توان به‌صورت تکانه کل ذرات مربوط به آن تعریف کرد، و می‌توان فرض کرد که برابر با تکانه کوارک یا پادکوارکِ راه‌انداز، می‌باشد. انرژی سکون بوزون Z برای واپاشی به هر زوج کوارک-پادکوارک یا به زوج $t\bar{t}$ کافی می‌باشد، اما تا کنون تشخیص جتهای ناشی از کوارک‌های u, d, s یا پادکوارک‌های آنان ممکن نبوده است. با این حال بسیاری از جت‌های کوارک b را می‌توان با اطمینان از بازشناسی مزون‌های B ، مانند $(b\bar{u}, b\bar{d})$ ، که با احتمال بالایی در جتهای کوارکی b و با احتمال پایینی در دیگر جتها ایجاد می‌شوند، تشخیص داد. مشاهده بوزون‌های افسون در جتها هم، همین‌گونه در تشخیص جتهای ناشی از کوارک‌های c و پادکوارک‌های \bar{c} ، کاربرد دارند.

با مربوط کردن جتهای مشاهده شده به کوارک‌های راه‌انداز آنها، می‌توان مقایسه‌هایی با پیش‌بینی‌های مدل استاندارد درباره‌ی آهنگ واپاشی زوج‌های کوارک-پادکوارک انجام داد. نخست واپاشی Z با حالت اسپینی معلومی در نظر خواهیم گرفت. لاگرانژی برهمکنش (۴-۱۴) برای کوارک‌های d, s و b شکل یکسانی دارند و در پایین‌ترین مرتبه نظریه اختلال منجر به آهنگ واپاشی به زوج d_k, \bar{d}_k می‌شود



شکل ۱-۱۵ واپاشی هادرونی Z که با آشکارساز OPAL در سیرن ثبت شده است. می‌توان در ناحیه داخلی، رد ذرات باردار را دید. نوارهای تاریک دورادور دایره بیرونی بیان‌کننده توزیع زاویه‌ای انرژی نشسته در کالوریمتر بیرونی می‌باشد. در این شکل تصویر رویداد بر صفحه عمود بر محور باریکه نشان داده شده است (ر.ک. (Dydak (1990)).

($d_1 = d, d_2 = s, d_3 = b$)، که عبارتست از

$$\frac{d\Gamma(d_k \bar{d}_k)}{d \cos \theta} = \frac{3 G_F M_Z^2}{32 \sqrt{2} \pi} \left[\left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right)^2 (1 - \cos \theta)^2 + \left(\frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right)^2 (1 + \cos \theta)^2 \right] \quad (1-15)$$

که θ زاویه بین راستای تکانه کوارک d_k و راستای اسپین Z می‌باشد. به همین ترتیب، آهنگ واپاشی به زوج $u \bar{u}$ یا $c \bar{c}$ عبارتست از

$$\frac{d\Gamma(u_k \bar{u}_k)}{d \cos \theta} = \frac{3 G_F M_Z^2}{32 \sqrt{2} \pi} \left[\left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_w \right)^2 (1 - \cos \theta)^2 + \left(\frac{4}{3} \sin^2 \theta_w \right)^2 (1 + \cos \theta)^2 \right] \quad (1-15)$$

در این آهنگ‌های واپاشی ضریب رنگ ۳ لحاظ شده است. از جمله‌هایی که برحسب m_q / M_Z هستند،

چشم‌پوشی شده است. با انتگرال‌گیری روی θ ، آهنگ واپاشی کل به دست می‌آید.

$$\Gamma(d_k \bar{d}_k) = \frac{G_F M_Z^2}{4\sqrt{2}\pi} \left[1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_w + \frac{8}{9} \sin^4 \theta_w \right]^2 = 0,3677 \text{ GeV} \quad (3-15)$$

$$\Gamma(u_k \bar{u}_k) = \frac{G_F M_Z^2}{4\sqrt{2}\pi} \left[1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_w + \frac{32}{9} \sin^4 \theta_w \right]^2 = 0,2853 \text{ GeV} \quad (4-15)$$

این اعداد با در نظر گرفتن مقدار $\sin^2 \theta_w = 0,2315$ به دست می‌آید (ر.ک. بخش ۱۱-۴). با افزودن این آهنگ واپاشی‌ها برای همه زوج‌های کوارکی، آهنگ واپاشی کل به دست می‌آید

$$\Gamma_{q\bar{q}} = 1,6737 \text{ GeV}$$

محاسبه پایین‌ترین مرتبه، با مقداری که از آزمایش برای آهنگ واپاشی به دست می‌آید، سازگاری بسیار خوبی دارد، مقدار حاصل از آزمایش عبارتست از

$$\Gamma_{\text{آزمایش}} = 1,741 \pm 0,06 \text{ GeV}$$

در انرژی بالای تولید بوزون Z ، می‌توان، با سازگاری نسبی، اثرهای برهمکنش قوی را برآورد کرد (فصل ۱۷). هنگامی که تابش گلوئون اضافی را به حساب آوریم، مقدار نظری $\Gamma_{q\bar{q}}$ با ضریب $f = 1,038$ کاهش می‌یابد، و مقدار نظری برابر می‌شود با

$$\Gamma_{\text{نظری}} = f \Gamma_{q\bar{q}} = 1,737 \text{ GeV}$$

که بسیار نزدیک به مقدار تجربی است.

با تشخیص جتهای $b\bar{b}$ و جتهای $c\bar{c}$ (با دقت کمتری)، می‌توانیم این مدهای واپاشی جزئی را با مدل استاندارد مقایسه کنیم. مقدار برآوردهای حاصل از آزمایش عبارتست از

$$\Gamma(b\bar{b}) = 0,385 \pm 0,06 \text{ GeV},$$

$$\Gamma(c\bar{c}) = 0,275 \pm 0,025 \text{ GeV}$$

مقدارهای به دست آمده از مدل استاندارد، (۳-۱۵) و (۴-۱۵)، با ضریب f تصحیح می‌شوند

$$\Gamma(b\bar{b}) (\text{نظری}) = 0,3817 \text{ GeV},$$

$$\Gamma(c\bar{c}) (\text{نظری}) = 0,2961 \text{ GeV}$$

این سازگاری بین نظریه و آزمایش، رضایت‌بخش است.

۲-۱۵ بی‌تقارنی در تولید کوارک

در بخش ۱۳-۶ گفتیم که می‌توان باریکه الکترونی SLC را قطبیده کرد تا بوزن‌های Z با درجه قطبشی

تولید شوند که بیشتر از درجه قطبش بوزون‌های Z ای باشد که در سرن، از باریکه‌های ناقطییده، تولید می‌شوند. از (۱۵-۱) درمی‌یابیم که در توزیع زاویه‌ای کوارک‌های b درون زوج $b\bar{b}$ ناشی از واپاشی Z ، بین راستای روبه‌جلو و روبه‌عقب، ناتقارنی نسبت به راستای اسپینی Z وجود دارد. مقدار این عدم تقارن عبارتست از

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma} = \frac{\Gamma(0 < \theta < \pi/2) - \Gamma(\pi/2 < \theta < \pi)}{\Gamma(0 < \theta < \pi/2) + \Gamma(\pi/2 < \theta < \pi)} = -\frac{3}{4} \left(\frac{1 - (4/3) \sin^2 \theta_w}{1 - (4/3) \sin^2 \theta_w + (8/9) \sin^4 \theta_w} \right)$$

با اختیار مقدار $\sin^2 \theta_w = 0,2315$ مقدار $\Delta\Gamma/\Gamma = -0,7016$ به دست می‌آید. در قله توزیع جرمی Z ، آثار تداخل الکترومغناطیسی بسیار اندک است، و می‌توان انتظار داشت که در جت‌های کوارک b ، ناتقارنی «روبه‌جلو- رو به عقب»، نسبت به راستای باریکه الکترونی، وجود داشته باشد. با اندازه‌گیری جت‌های کوارک b در SLC، مقدار $\Delta\Gamma/\Gamma = -0,630 \pm 0,075$ ، مقدار b در SLC، به دست می‌آید (Prescott, 1996).

در LEP بوزون‌های Z تولیدی در برخوردهای e^-e^+ در راستای باریکه الکترونی با قطبش P قطییده می‌شوند، و در نتیجه ناتقارنی «رو به جلو- رو به عقب»، جت‌های کوارک b نسبت به راستای باریکه الکترون به صورت زیر در می‌آید

$$A_{FB}^b = P \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma}$$

از بخش ۱۳-۶ می‌دانیم که با اختیار مقدار $\sin^2 \theta_w = 0,2315$ ، خواهیم داشت $A_{LR} = -0,148$

$$A_{FB}^b(\text{نظری}) = 0,104$$

مقدار تجربی (Renton, 1996) نیز عبارتست از

$$A_{FB}^b(\text{تجربی}) = 0,0997 \pm 0,0031$$

اعداد متناظر با جت‌های کوارک c عبارتند از

$$A_{FB}^c(\text{نظری}) = 0,0719$$

$$A_{FB}^c(\text{تجربی}) = 0,0729 \pm 0,0058$$

که باز هم مدل استاندارد و تجربه با هم همخوانی دارند.

ویژگی بارز اندازه‌گیری ناتقارنی‌ها آن است که هرگونه انتساب میدان کوارکی راستگرد، به‌جای چپگرد، به دو گانه $(2) SU$ ، منجر به ناتقارنی با علامت منفی می‌شود. (پهنای کل بدون تغییر باقی می‌ماند.) این نتایج، انتساب چپگردی را تأیید می‌کنند.

۱۵-۳ واپاشی‌های هادرونی بوزون W^\pm

برخورددهنده‌های e^+e^- چشمهٔ پاکیزه‌ای از بوزون‌های Z هستند، اما هنوز برای بوزون‌های W^\pm چنین چشمهٔ پاکیزه‌ای یافت نشده است. پیامد این امر آن است که داده‌های آزمایشگاهی مربوط به واپاشی‌های W^\pm نسبت به داده‌های واپاشی‌های Z، از دقت کمتری برخوردار است. واپاشی‌های هادرونی W^\pm ، در چارچوب سکون خودش، همانند واپاشی‌های هادرونی Z، دو جت پشت به پشت هستند، که این جت‌ها نشانهٔ زوج‌های کوارکی راه‌انداز می‌باشند.

مثلاً واپاشی بوزون W^\pm را به کوارک u_i (u, u, u, c) و پادکوارک \bar{d}_j ($\bar{d}, \bar{d}, \bar{s}, \bar{b}$) در نظر بگیرید. جفت‌شدگی بوزون W^\pm به میدان‌های کوارکی از چگالی لاگرانژی \mathcal{L}_{qW} (معادلهٔ ۱۴-۱۵)، به‌دست آمده و به عناصر V_{ij} از ماتریس کوبایاشی-ماسکاو بستگی دارد. در پایین‌ترین مرتبهٔ نظریهٔ اختلال، و با چشم‌پوشی از جرم کوارک‌ها، آهنگ واپاشی دیفرانسیلی برای زوج $u_i \bar{d}_j$ عبارتست از

$$\frac{d\Gamma_{ij}}{d\cos\theta} = \frac{3G_F M_W^2}{16\sqrt{2}\pi} |V_{ij}|^2 (1 - \cos\theta)^2 \quad (5-15)$$

که θ زاویهٔ بین راستای تکانهٔ u_i و راستای اسپین W^+ می‌باشد. با انتگرال‌گیری روی θ ، آهنگ واپاشی کل به‌دست می‌آید

$$\Gamma(W^+ \rightarrow u_i \bar{d}_j) = \frac{G_F M_W^2}{2\sqrt{2}\pi} |V_{ij}|^2 = (0.677 \pm 0.06) |V_{ij}|^2 \text{ GeV} \quad (6-15)$$

هیچ داده‌ای که بر اساس آن بتوان برای هر دو جت کوارکی راه‌انداز، تصمیم گرفت، وجود ندارد. بنابراین هیچ اطلاعاتی از واپاشی W به مؤلفه‌های ماتریس KM وجود ندارد. اما می‌توانیم روی \sum_j جمع ببندیم، و از آنجا که ماتریس KM یکانی است، پس

$$\sum_{j=1}^3 |V_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^3 V_{ij} V_{ij}^* = \sum_{j=1}^3 V_{ij} V_{ij}^\dagger = 1 \quad (i = 1, 2, 3)$$

سپس با جمع بستن روی مقدارهای ممکن u_i ، یعنی کوارک‌های c, u ، و وارد کردن ضریب f ، به نتیجهٔ زیر می‌رسیم

$$\Gamma(q\bar{q}') = \frac{G_F M_W^2 f}{\sqrt{2}\pi} = 1.41 \pm 0.08 \text{ GeV}$$

این مقدار با مقدار مشاهده شده برای آهنگ واپاشی هادرونی W^+ سازگاری نزدیکی دارد:

$$\Gamma(\text{هادرونی}) = 1,44 \pm 0,04 \text{ GeV}$$

همچنین، می توان با اطمینان جتهای کوارک C را تشخیص داد. با توجه به مطالب بالا، انتظار داریم

$$\frac{\Gamma(c\bar{q}')}{\Gamma(q\bar{q}')} = 0,5$$

(همه زوجهای ممکن)

که به مقدار اندازه گیری شده $0,08 \pm 0,51$ بسیار نزدیک است.

سرانجام، به نظر می آید که هیچ دلیلی برای شک به کارآمدی مدل استاندارد، در توصیف برهمکنش بوزون های Z و W^\pm ، هم با لپتون ها و هم با کوارک ها، وجود ندارد. با این آزمایش ها، جزئیات ماتریس کوبایاشی - ماسکاو، V_{ij} تعیین نشده باقی می ماند، اما از دو آزمون یکانی بودن سربلند بیرون، آمد. برای بررسی کامل ماتریس KM، مجبوریم بر فیزیک هادرون، در انرژی پایین، تکیه کنیم. در فصل ۱۸ به این موضوع خواهیم پرداخت.

مسئله ها

- ۱-۱۵ آهنگ واپاشی (۳-۱۵)، (۴-۱۵) و (۶-۱۵) را به دست آورید. توجه کنید از جرم کوارک ها در این عبارت ها چشم پوشی شده است (ر.ک. مسأله ۱۳-۳)

در فصل ۱ مقدماتی درباره ویژگی‌های بنیادی مدل کوآرکی هادرونها بیان شد. کوآرک‌ها برچسب رنگ را بر دوش می‌کشند، و با میدان‌های گلوئونی، که میانجی برهمکنش قوی هستند، برهمکنش می‌کنند. دیدیم که در مدل استاندارد، برهمکنش الکترومغناطیسی و برهمکنش ضعیف به خوبی با نظریه‌های پیمانه‌ای توصیف می‌شوند. در مدل استاندارد، برهمکنش قوی هم با نظریه پیمانه‌ای توصیف می‌شود. در این فصل نشان می‌دهیم که این امر چگونه صورت می‌گیرد. این نظریه به نام کرومودینامیک کوانتمی (QCD) شناخته می‌شود، و ویژگی بارزش این است که در این نظریه کوآرک‌ها، همچنان که در آزمایش پدیدار می‌شوند، در بند هستند (بخش ۱-۴). در این فصل همه تمرکز خود را بر برهمکنش قوی متمرکز می‌کنیم. از برهمکنش‌های الکترومغناطیسی و ضعیف کوآرک‌ها چشم‌پوشی می‌کنیم.

۱-۱۶ نظریه پیمانه‌ای موضعی $SU(3)$

در QCD، به‌ازای هر طعم کوآرک، سه میدان وجود دارد. این میدان‌ها در سه گانه‌های رنگی جای می‌گیرند. برای نمونه سه گانه زیر به کوآرک u همبسته است.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_r \\ u_g \\ u_b \end{pmatrix}$$

که u_r, u_g, u_b اسپینورهای چهارمؤلفه‌ای دیراکی هستند، و زیروندهای r, g, b حالت‌های رنگی را نشان‌گذاری می‌کنند. (برای نمونه آبی، سبز، قرمز).

سپس فرض می‌کنیم که این نظریه تحت تبدیل‌های $SU(3)$ ناوردا هستند

$$\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}' = \mathbf{U} \mathbf{q} \quad (1-16 \text{ الف})$$

که \mathbf{q} هر یک از سه گانه‌های کوآرکی بوده، و \mathbf{U} هر عنصر وابسته به فضا و زمان، از گروه $SU(3)$ می‌باشد. روش‌های ریاضیاتی این نظریه، همانند روش‌های ریاضیاتی نظریه برهمکنش ضعیف، لپتون‌ها می‌باشد. میدان پیمانه‌ای ماتریسی 3×3 ای را به نام \mathbf{G}_μ ، همانند میدان ماتریسی \mathbf{W}_μ نظریه الکتروضعیف، معرفی می‌کنیم. تحت تبدیل $SU(3)$ ، داریم:

$$\mathbf{G}_\mu \rightarrow \mathbf{G}'_\mu = \mathbf{U} \mathbf{G}_\mu \mathbf{U}^\dagger + (i/g)(\partial_\mu \mathbf{U}) \mathbf{U}^\dagger \quad (16-1)$$

با تعریف زیر

$$D_\mu \mathbf{q} = (\partial_\mu + ig \mathbf{G}_\mu) \mathbf{q} \quad (16-2)$$

در نتیجه تحت تبدیل $SU(3)$ ، داریم

$$D'_\mu \mathbf{q}' = \mathbf{U} D_\mu \mathbf{q} \quad (16-3)$$

که در آن $D'_\mu \mathbf{q}' = (\partial_\mu + ig \mathbf{G}'_\mu) \mathbf{q}'$. پارامتر g ، که در این معادله‌ها پدیدار می‌شود، ثابت جفت‌شدگی قوی است.

\mathbf{G}_μ ، همانند \mathbf{W}_μ در نظریه الکتروضعیف، ماتریس بدون رد و هرمیتی می‌باشد، و می‌توان آن را برحسب هشت ماتریس λ_a بیان کرد. ماتریس‌های λ_a در پیوست ب، بخش (ب-۷) بیان شده‌اند.

$$\mathbf{G}_\mu = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 G_\mu^a \lambda_a \quad (16-4)$$

ضرایب $G_\mu^a(x)$ ، هشت میدان پیمانه‌ای گلوئون می‌باشند که از یکدیگر مستقل بوده و حقیقی هستند. (ضریب $\frac{1}{2}$ قراردادی است.)
ساختار یانگ-میلز (ر.ک. بخش ۱۱-۲)،

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{G}_\nu - \partial_\nu \mathbf{G}_\mu + ig (\mathbf{G}_\mu \mathbf{G}_\nu - \mathbf{G}_\nu \mathbf{G}_\mu) \quad (16-5)$$

منجر به این نتیجه می‌شود که تحت تبدیل‌های $SU(3)$ ، به شکل (۱۶-۱) ب، میدان $\mathbf{G}_{\mu\nu}$ به شکل زیر تبدیل یابد

$$\mathbf{G}'_{\mu\nu} = \mathbf{U} \mathbf{G}_{\mu\nu} \mathbf{U}^\dagger \quad (16-6)$$

چگالی لاگرانژی گلوئون، به شکل زیر می‌باشد

$$\mathcal{L}_{\text{glueon}} = -\frac{1}{4} \text{Tr}[\mathbf{G}_{\mu\nu} \mathbf{G}^{\mu\nu}] \quad (16-7)$$

از (۱۶-۱) و ناوردایی دوره‌ای رد ماتریس، در می‌یابیم که $\mathcal{L}_{\text{glueon}}$ ناوردای پیمانه‌ای است.

می‌توانیم $\mathbf{G}_{\mu\nu}$ را با بهره‌گیری از معادله (ب-۲۷) از پیوست ب، برحسب «مؤلفه‌هایش» بسط دهیم:

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 G_{\mu\nu}^a \lambda_a \quad (16-8)$$

بنابراین، با بهره‌گیری از ویژگی (ب-۲۸)، که

$$\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}$$

چگالی لاگرانژی گلوئون به شکل زیر درمی آید

$$\mathcal{L}_{\text{gluon}} = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^{\Lambda} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (9-16)$$

چگالی لاگرانژی کوآرکی را به شکل استاندارد دیراکی (معادله (۷-۷)) اختیار می کنیم:

$$\mathcal{L}_{\text{quark}} = \sum_{f=1}^{\mathcal{F}} [\bar{\mathbf{q}}_f i \gamma^\mu (\partial_\mu + ig \mathbf{G}_\mu) \mathbf{q}_f - m_f \bar{\mathbf{q}}_f \mathbf{q}_f] \quad (10-16)$$

که جمع روی همه طعمهای کوآرکی صورت گرفته و m_f جرم کوآرک «سر، واقعیت» است، که در بخش ۱۴-۲ تعریف کردیم. آشکار است که $\mathcal{L}_{\text{quark}}$ تحت تبدیل $SU(3)$ ، (با بهره گیری از (۱۶-۳))، ناورد می باشد. دانشجو باید توجه داشته باشد که نماد گذاری بسیار فشرده ای که در اینجا بکار رفته است، گسترش یافته است: همانگونه که جمع صریح روی طعم ها انجام می گیرد، جمع روی شاخص های رنگ و روی شاخصهای اسپینور چهار مؤلفه ای دیراکی و ماتریس های γ نیز صورت می گیرد. به دانشجو توصیه می کنیم که کل بسط را کامل بنویسد.

چگالی لاگرانژی برهمکنش قوی کل عبارتست از

$$\mathcal{L}_{\text{strong}} = \mathcal{L}_{\text{gluon}} + \mathcal{L}_{\text{quark}} \quad (11-16)$$

هشت میدان پیمانه ای گلوئونی هیچ جمله جرمی ندارند. میدان های گلوئونی با میدان هیگز به طور مستقیم جفت می شوند. ارتباط میدان هیگز این گونه است که به کوآرک ها جرم می دهد. معادله های میدانی از اصل کمترین کنش همیلتون ناشی می شوند. برای شش سه گانه کوآرکی، می توان به آسانی رابطه زیر را به دست آورد (ر.ک. بخش ۵-۵)

$$(i \gamma^\mu D_\mu - m_f) \mathbf{q}_f = 0 \quad (12-16)$$

به ازای هشت میدان گلوئونی، تغییر بسیار جزئی چگالی لاگرانژی نسبت به G_ν^a منجر می شود به (ر.ک. بخش ۴-۲)

$$\partial_\mu G^{a\mu\nu} = j^{a\nu} \quad (13-16)$$

که

$$j^{a\nu} = g \left[f_{abc} G_\mu^b G^{c\mu\nu} + \sum_f \bar{\mathbf{q}}_f \gamma^\nu (\lambda_a / 2) \mathbf{q}_f \right] \quad (14-16)$$

که f_{abc} ثابتهای ساختار $SU(3)$ هستند، و بنا بر تعریف

$$[\lambda_a, \lambda_b] = \lambda_a \lambda_b - \lambda_b \lambda_a = 2i \sum_{c=1}^{\Lambda} f_{abc} \lambda_c \quad (15-16)$$

(ر.ک. پیوست ب، بخش ب-۷)، پدیدار شدن آنها در اینجا ریشه در تعریف (۵-۱۶)، برای $G_{\mu\nu}$ دارد.

از آنجا که $\mathbf{G}^{\mu\nu} = -\mathbf{G}_{\mu\nu}$ است، پس

$$\partial_\nu j^{a\nu} = 0 \quad (16-16)$$

و در نتیجه هشت جریان پایسته وجود دارد. هشت جریان خنثی وجود دارد، که پیامدی از تقارن جهانی

$SU(3)$ هستند. بنابراین هشت ثابت حرکت وجود دارد، که مربوط به عملگرهای مستقل از زمان

می‌باشند

$$Q^a = \int j^{a0} d^3x \quad (17-16)$$

معادله‌های میدان، و به ویژه معادله‌های میدان گلوئونی، همانند نظریه الکترومغناطیس غیرخطی هستند.

از (۱۶-۱۴) آشکار است که هم کوارک‌ها و هم خود میدان‌های گلوئونی در جریان‌های $j^{a\nu}$ ، که منشأ

میدان‌های گلوئونی هستند، سهم دارند. کوارک‌ها از طریق میانجی‌گری میدان‌های گلوئونی با یکدیگر

برهمکنش می‌کنند. خود میدان‌های گلوئونی نیز خودبرهمکنشی هستند.

از آنجا که میدان‌های گلوئونی بدون جرمند، می‌توان پیش‌بینی کرد که نیروهای رنگ، بلند برد هستند.

با این وجود، این میدان‌ها در مقیاس طولی بزرگتر از حدود $m = 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ در بند هستند، و تاکنون نه

کوارک آزاد و نه گلوئون آزادی مشاهده نشده است.

در نظریه الکتروضعیف، تقریب «میدان آزاد»، که در آن همه ثابت‌های جفت‌شدگی برابر با صفر اختیار

می‌شود، پایه‌ای برای محاسبه‌های اختلالی موفق می‌باشد که در فصل‌های پیشین دیده‌ایم. این تقریب

میدان آزاد برای کوارک‌ها و گلوئون‌ها، بجز در مقیاس فاصله‌های بسیار کوچک ($\leq 0.1 \text{ fm}$)، یا

انرژی‌های بسیار بالا ($> 10 \text{ GeV}$)، نقطه آغاز خوبی برای انجام دادن محاسبه‌ها در QCD نیستند. برای

فیزیک انرژی پایین، یافتن پاسخ تحلیلی برای معادله‌های این نظریه بسیار دشوار می‌باشد. هرچند حالت

خلاء با پیکربندی‌های میدانی پیچیده‌ای مشخص می‌شوند، که تاکنون با آنها دست‌وپنجه نرم شده است،

هیچ اثبات تحلیلی برای در بند بودن وجود ندارد. در بند بودن در نظریه اختلال نمایش داده نمی‌شود، اما

شبه‌سازی‌های عددی قانع‌کننده نشان می‌دهند که، برای آنکه QCD نظریه قابل قبولی باشد، حتماً باید

دارای این ویژگی باشد.

۱۶-۲ تبدیل‌های پیمانانه‌ای رنگ برای باریون‌ها و مزون‌ها

از آنجا که تقارن رنگ چنین اهمیت بسزایی در نظریه برهمکنش قوی دارد، طبیعی است که این پرسش

پیش آید که چرا چنین ویژگی در ذرات، باریون‌ها و مزون‌ها، که خود از برهمکنش قوی کوارک‌ها پدید

آمده‌اند، پدیدار نیست. در اینجا می‌کوشیم تا به این پرسش پاسخ دهیم.

در بخش ۱-۴ ادعا کردیم که باریون‌ها، حتماً از سه کوارک، و مزون‌ها حتماً از جفت کوارک و پادکوارک تشکیل شده‌اند. حالت سه کوارکی را که در آن کوارک ۱ در حالت رنگی i ، کوارک ۲ در حالت رنگی j ، و کوارک ۳ در حالت رنگی k باشد، با $|i, j, k\rangle$ نشان خواهیم داد و سه شاخص رنگ را اعداد ۱، ۲، ۳ در نظر می‌گیریم. همه ویژگی‌های دیگر کوارک‌ها (مکان، اسپین، طعم) را فشرده می‌کنیم. در بخش ۱-۷ دیدیم که بنا بر اصل طرد پائولی، حالت‌های باریونی باید نسبت به تعویض شاخص‌های رنگ پادمقارن باشند. تنها ترکیب پادمقارنی که می‌توان از حالت‌های رنگی ساخت، عبارتست از

$$|\text{state}\rangle = (1/\sqrt{6}) \varepsilon_{ijk} |i, j, k\rangle \quad (16-18)$$

که ε_{ijk} این‌گونه تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_{112} = \varepsilon_{212} = \varepsilon_{221} = -\varepsilon_{122} = -\varepsilon_{221} = -\varepsilon_{212} = 1$$

و اگر هر دو تا از شاخص‌های i, j, k یکسان باشند $\varepsilon_{ijk} = 0$ است. $(1/\sqrt{6})$ ضریب بهنجارش می‌باشد.

این حالت چگونه تحت $SU(3)$ تبدیل می‌یابد؟ بحث را به تبدیل جهانی (تبدیل مستقل از فضا و زمان) محدود می‌کنیم، زیرا باریون در همه فضا گسترش یافته است. میدان‌های کوارکی مطابق $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}' = \mathbf{U}\mathbf{q}$ تبدیل می‌یابند. در نظریه کوانتمی میدان، این میدان‌ها کوارک‌ها را نابود کرده و پادکوارک‌ها را می‌آفرینند. نتیجه این است که تحت این تبدیل، حالت باریونی (۱۶-۱۸) به صورت

$$|\text{state}\rangle' = (1/\sqrt{6}) |a, b, c\rangle U_{ai}^* U_{bj}^* U_{ck}^* \varepsilon_{ijk}$$

می‌باشد، زیرا درترمینان ماتریس $SU(3)$ برابر با ۱ $\varepsilon_{ijk} U_{ai}^* U_{bj}^* U_{ck}^* = \varepsilon_{abc} \det \mathbf{U}^* = \varepsilon_{abc}$

می‌باشد. بنابراین به این نتیجه مهم می‌رسیم که تحت تبدیل $SU(3)$ ، رابطه $|\text{state}\rangle' = |\text{state}\rangle$ برقرار است. تبدیل این حالت، در واقع ضرب در ۱ می‌باشد. به این حالت، یکتایی رنگی، گفته می‌شود.

اکنون به مزون‌ها می‌پردازیم، حالت کوارک با رنگ i ، و پادکوارک با رنگ j را با $|i, j\rangle$ نشان می‌دهیم. دوباره همه ویژگی‌های دیگر کوارک‌ها را فشرده می‌کنیم. حالت‌های مزونی، ترکیب‌های خطی هستند

$$|\text{mesons}\rangle = (1/\sqrt{6}) (|1, \bar{1}\rangle + |2, \bar{2}\rangle + |3, \bar{3}\rangle) \quad (16-19)$$

تحت تبدیل $SU(3)$ ، داریم

$$|\text{mesons}\rangle' = (1/\sqrt{6}) |a, \bar{b}\rangle U_{ai}^* U_{bi}$$

اما $U_{ai}^* U_{bi} = U_{bi} U_{ia}^\dagger = \delta_{ab}$ می‌باشد، و در نتیجه

$$|\text{mesons}\rangle = |\text{mesons}\rangle'$$

حالت‌های مزونی، همانند حالت‌های باریونی یکتایی رنگی هستند.

در مدل کوارکی، می‌بینیم که تبدیل‌های کوارکی هیچ اثری بر ذرات مشاهده شده ندارند. همچنین می‌توان نشان داد که هشت عملگر رنگ گلوئون Q^a ، که با (۱۶-۱۷) تعریف می‌شوند، هنگامی که بر این حالت‌ها اثر می‌کنند، منجر به مقدار صفر می‌شود. بنابراین طبیعت به خوبی تقارن $SU(3)$ را پنهان کرده است: یعنی ذرات نسبت به تبدیل تقارن رنگ کور هستند. این مشاهده‌ها را می‌توان به QCD شبکه ربط داد، که در آن محاسبات همه حالت‌های مجاز نظریه را با این ویژگی را نشان می‌دهند.

۱۶-۳ QCD شبکه و آزادی مجانبی

در محاسبه‌های QCD به جای فضا زمان پیوسته، شبکه‌ای متناهی و بزرگ از نقطه‌ها با فضا زمان چهاربعدي جایگزین می‌شوند. میدان‌های کوارکی و گلوئونی تنها در این نقطه‌ها تعریف می‌شوند. برنامه‌های کامپیوتری پیچیده‌ای برای سروکار داشتن با چنین شبکه‌ای نوشته می‌شوند. میدان‌های گلوئونی میدان‌های بوزونی جابجا شونده هستند. میدان‌های کوارکی میدان‌های فرمیونی جابجا شونده هستند و از لحاظ فنی مشکل عددی بسیار بیشتری ایجاد می‌کنند. در واقع نخستین محاسبه‌های شبکه با چشم‌پوشی از همه میدان‌های کوارکی، حتی کوارک‌های سبک u و d ، انجام گرفته است، و در نتیجه هیچ‌گونه اثری مربوط به آفرینش و نابودی زوج کوارک مجازی در آن راه نداشت. در این تقریب فرونشاندن اچگالی لاگرانژی را، $\mathcal{L}_{\text{gluon}}$ (۱۶-۹) اختیار می‌کنند. $\mathcal{L}_{\text{gluon}}$ در فاصله‌های بزرگتر از حدود فرمی، در بند بودن را نشان می‌دهند.

در فاصله‌های کوچکتر، کمتر از حدود 0.2 fermi ، هم $\mathcal{L}_{\text{gluon}}$ و هم چگالی لاگرانژی QCD کل، ویژگی مهم دیگری، به نام آزادی مجانبی^۱ از خود نشان می‌دهند. ثابت جفت‌شدگی برهمکنش قوی مؤثر در فاصله‌های کوچکتر، که می‌توان کوارک‌ها و گلوئونها را تقریباً آزاد در نظر گرفت، بسیار کوچک شده، و می‌توان برهمکنش‌های آنها را در نظریه اختلال بررسی کرد. برای آنکه زمینه را برای بحث درباره ثابت جفت‌شدگی قوی «کنونی»^۲ آماده سازیم، نخست درباره الکترومغناطیس بحث می‌کنیم.

در فاصله‌های اتمی (حدود 10^{-10} m) برهمکنش الکترواستاتیک بین الکترون و پوزیترون با رابطه $V(r) = -e^2 / 4\pi r$ توصیف می‌شوند. در مرتبه پایین‌تر نظریه اختلال، دامنه پراکندگی کولنی

1- quenched approximation

2- asymptotic freedom

3- running

الکترون-پوزیترون، متناسب با تبدیل فوریه $V(Q^\nu)$ از $V(r)$

$$V(Q^\nu) = \int V(r) e^{iQ \cdot r} d^3r = -e^2/Q^2 \quad (۲۰-۱۶)$$

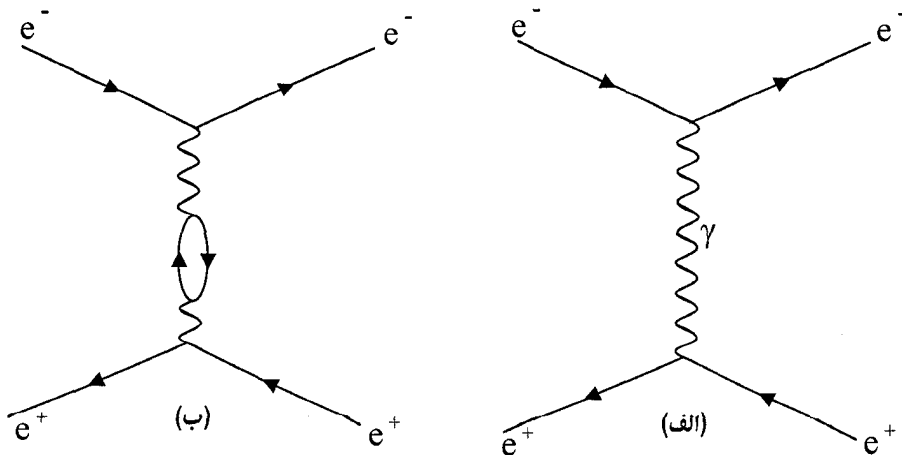
است، که Q انتقال تکانه در دستگاه مرکز جرم می‌باشد.

در نظریه QED، این نتیجه با تصحیح‌های کوانتومی تعدیل می‌شود: جفت‌های e^+e^- مجازی آفریده شده از خلا، تحت تأثیر میدان الکتریکی بار، قطبیده می‌شود، بنابراین بار اندازه‌گیری شده برای آن را، در فاصله‌های اتمی، بار «لخت» استتار شده با جفت‌های e^+e^- می‌باشد. در فاصله‌های کوتاه، این اثر استتار کاهش می‌یابد، و بار مؤثر بزرگتر می‌باشد. محاسبه‌های اختلالی در QED، که اثرهای قطبش خلا را هم دربرگیرد (شکل ۱-۱۶)، به‌ازای مقادیر Q^2 ، اصلاح می‌شود

$$V(Q^2) = -\frac{e^2}{Q^2} \frac{1}{1 - (e^2/12\pi^2) \ln(Q^2/4m^2)} \quad (۲۱-۱۶)$$

که m جرم الکترون می‌باشد. این نتیجه به‌ازای $Q^2 \gg 4m^2$ معتبر است (اما نه Q^2 ای آنچنان بزرگ که مخرج کسر صفر شود). بنابراین به‌ازای Q^2 بزرگ ثابت جفت‌شدگی مؤثر عبارتست از

$$\alpha(Q^2) = \frac{e^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{(e^2/Q^2)}{1 - (e^2/12\pi^2) \ln(Q^2/4m^2)} \quad (۲۲-۱۶)$$



شکل ۱-۱۶ (الف) نمودار فاینمن پایین‌ترین مرتبه، که تبادل تک فوتون را نمایش می‌دهد. محاسبه اختلالی مناظر با آن نتیجه (۲۰-۱۶) را بازتولید می‌کند. (ب) اصلاح پایین‌ترین مرتبه ناشی از قطبش خلا. با در نظر گرفتن این اثر، به‌ازای مقادیر بزرگ Q^2/m^2 ، نتیجه (۲۱-۱۶) به‌دست می‌آید.

که با افزایش Q^2 (یعنی کاویدن فاصله‌های کوچکتر)، مقدار آن زیاد می‌شود. زیرا $10^{-3} \approx e^2/12\pi^2$ و در نتیجه اثرهای قطبش خلاء، کوچک می‌باشند، اما در فیزیک اتمی این اثرها محاسبه و با دقت بالایی اندازه‌گیری می‌شوند.

اثرهای قطبش خلاء مشابهی در QCD رخ می‌دهد، با این تفاوت که در QCD جفت‌شدگی بسیار بزرگتر و پیامدهای آن بسیار نمایان‌تر است. اگر با همان مرتبه نظریه اختلال، که برای به‌دست آوردن (۱۶-۲۲) بکار رفت، پراکنندگی کوارک و پادکوارک محاسبه گردد، به‌ازای مقدار بزرگ Q^2 ثابت جفت‌شدگی قوی مؤثر، (Q^2) عبارتست از (ر.ک. Close, 1979, p.217)

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{g^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{g^2/4\pi}{1 + (g^2/16\pi^2) [11 - (2/3)n_f] \ln(Q^2/\lambda^2)} \quad (16-23)$$

در این عبارت، λ پارامتری از بُعد انرژی است، که به‌جای جرم الکترون پدیدار شده در QED می‌نشیند. این پارامتر ضروری مربوط به بخش بازهنجارش می‌باشد. n_f عدد مؤثر طعم‌های کوارک می‌باشد. به‌ازای مقادیرهای بسیار بزرگ، Q^2 (جرم کوارک سر) $Q^2 >$ مقدار $n_f = 6$ می‌باشد. اما به‌ازای Q^2 کوچکتر، مقدار n_f کوچکتر است. شایان ذکر است که مقدار $(11 - (2/3)n_f)$ مثبت می‌باشد. بنابراین، برخلاف آنچه که در QED رخ می‌دهد، با افزایش Q^2 ، مقدار $\alpha(Q^2)$ کاهش می‌یابد و این امر بنیان آزادی مجانبی می‌باشد. همانند QED، فرمیون‌ها با علامت منفی شرکت می‌کنند، اما گلوئون‌های مجازی که در عدد ۱۱ سهم دارند، از سهم این فرمیون‌ها مهمتر می‌باشند. این تفاوت ناشی از حضور حلقه‌های گلوئونی در QCD می‌باشد (شکل ۱۶-۲). این ویژگی QCD را گروس^۱ و ویلچک^۲ (در سال ۱۹۷۳) و پولیتزر^۳ (۱۹۷۳) کشف کردند.

با وجود آنکه معرفی دومین پارامتر ابعادی Λ لازم به‌نظر می‌آید، در واقع ثابت جفت‌شدگی مؤثر تنها به یک پارامتر بستگی دارد. می‌توانیم قرار دهیم

$$\frac{1}{g^2} - \frac{1}{16\pi^2} [11 - (2/3)n_f] \ln \lambda^2 = \frac{1}{16\pi^2} [11 - (2/3)n_f] \ln \Lambda^2 \quad (16-24)$$

و با تعریف Λ

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{g^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{4\pi}{[11 - (2/3)n_f] \ln(Q^2/\Lambda^2)} \quad (16-25)$$

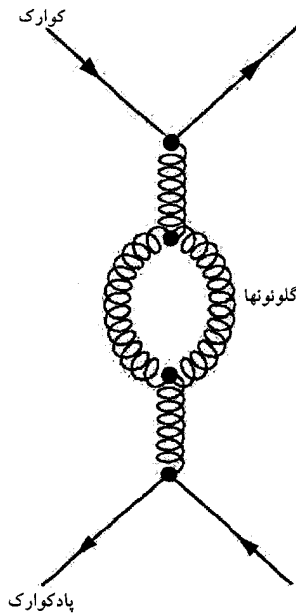
این ویژگی شایان توجه، در همه مرتبه‌های نظریه اختلال، برقرار می‌باشد. جمله‌های بالاتر در بسط

(Q^2) در، مثلاً (2005) PDG^۱، داده می‌شود.

Λ در حد مقادیرهای بزرگ Q^2 خوش تعریف بوده، و مرسوم است که در عمل به جای دو پارامتر g و Λ ، یک پارامتر Λ در حکم ثابت بنیادی QCD در نظر گرفته شود. مقدار Λ باید از آزمایش تعیین شود. همچنین شایان توجه است که به جای پارامتر بدون بعد g ، پارامتر بعددار Λ جایگزین شود. در این صورت آزادی مجانبی خود را نمایان می‌سازد، زیرا با $Q^2 \rightarrow \infty$ ، مقدار $\alpha_s(Q^2) \rightarrow 0$ می‌کند. از (۱۶-۲۵) آشکار است که نظریه اختلال در $Q^2 = \Lambda^2$ ، که ثابت جفت‌شدگی نامتناهی می‌گردد، فرو می‌شکند. مقادیرهای کوچک Q^2 ، مربوط به فاصله‌های بزرگ می‌شود. به مقیاس طولی Λ^{-1} طول در بند شدگی^۲ گویند.

۱۶-۴ برهمکنش کوارک-پادکوارک در فاصله‌های کوتاه

در نظریه QED، بین الکترون و پوزیترون، تک فوتونی تبادل می‌شود که منجر به پتانسیل کولونی زیر می‌گردد



شکل ۱۶-۲ نمودارهای فاینمن همانند شکل ۱۶-۱ با این تفاوت که تبادل گلوئون بین کوارک‌ها و پادکوارک‌ها انجام می‌گیرد. سهم پایین‌ترین مرتبه دیگری، اضافه بر قطبش خلأ، همین نمودار فاینمن می‌باشد که از خودجفت‌شدگی گلوئون ناشی می‌شود.

1- Particle Data Group
2- confinement length

$$V(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int V(Q^2) e^{-iQ \cdot r} d^3Q = \frac{e^2}{4\pi r} = -\frac{\alpha}{r}$$

که $V(Q^2) = -e^2/Q^2$ بوده و α ثابت ساختار ریز می‌باشد. در نظریه اختلال QCD، به جای تبادل تک فوتون، تبادل مجموع هشت تک گلوئون جایگزین می‌شود. در پایین‌ترین مرتبه، پتانسیل کولون‌وار، بین کوارک و پادکوارک در حالت تکتایی رنگی و فاصله جدایی r را، می‌توان به صورت زیر نشان داد (ر.ک. (Leader and Predazzi, 1982, p. 175).

$$V_{\text{QCD}}(r) = -\sum_a \frac{g^2}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \lambda_{aij} \lambda_{aji} = -\sum_a \frac{g^2}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \text{Tr}(\lambda_a \lambda_a) = -\frac{4}{3} \frac{g^2}{4\pi r} \quad (26-16)$$

ضریب $(4/3)$ ناشی از بهنجارش حالت تکتایی رنگی می‌باشد (ر.ک. (16-19). با تصحیح‌های کوانتومی، پتانسیل مؤثر در فاصله‌های کوتاه به صورت زیر در می‌آید

$$V_{\text{QCD}}(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s(r)}{r}$$

که

$$\frac{\alpha_s(r)}{r} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int \alpha_s(Q^2) e^{-iQ \cdot r} d^3Q \quad (27-16)$$

این نتیجه برای دستگاه‌های چارمونیم $c\bar{c}$ و باتومونیوم $b\bar{b}$ نتیجه‌ای بارز است، که در آنها کوارک و پادکوارک سنگین به آرامی حرکت می‌کنند. در این دستگاه‌ها، انرژی کولونی رنگ مهم‌ترین سهم در انرژی پتانسیل می‌باشد: اثرهای مغناطیسی رنگی از مرتبه نسبی v/c هستند. رفتار $\alpha_s(Q^2)$ به‌ازای مقادیرهای بزرگ Q^2 منجر به سهم برجسته $V_{\text{QCD}}(r)$ در مقادیرهای کوچک r می‌گردد (مسئله 16-5).

۱۶-۵ پایستگی کوارک‌ها

علاوه بر تقارن موضعی رنگ $SU(3)$ ، چگالی لاگرانژی (16-11)، شش تقارن جهانی $U(1)$ ، هم دارد.

$$\mathbf{q}_f \rightarrow \mathbf{q}'_f = \exp(i\alpha_f) \mathbf{q}_f \quad (28-16)$$

در مدل استاندارد این مقدار کمیت‌هایی جهانی، باقی می‌مانند و به تقارن‌های پیمانانه‌ای موضعی ارتقا نمی‌یابند. این کمیت‌های جهانی بیانگر وجود پایستگی شمار کوارک‌ها به‌ازای هر طعم کوارک می‌باشد. بنابراین در برهمکنش‌های قوی، طعم کوارک تغییر نمی‌کند. مزون‌ها و باریون‌ها را در نظر بگیرید. برای نمونه K^+ ، می‌توان آن را با $K(u\bar{s})$ با عدد کوارک ۱ برای u و عدد کوارک -1 برای s ، پروتون $P(uud)$ ، با عدد کوارک ۲ برای کوارک‌های u ، و عدد کوارک ۱ برای کوارک d ، نشان داد. تنها برهمکنش‌های ضعیف، که در واپاشی‌های ضعیف شرکت دارند، می‌توانند طعم کوارک را تغییر دهند. با

در نظر گرفتن برهمکنش ضعیف و به‌ویژه بخشی از برهمکنش ضعیف، که در ماتریس آمیختگی کوبایاشی-ماساکاوا وجود دارند، شش تقارن $U(1)$ منجر به یک تقارن می‌شود. هر عدد طعم کوارک جداگانه پایسته نیست، و تنها شمار کل کوارک‌ها، بر روی هم، پایسته است.

۱۶-۶ تقارن ایزواسپین

جرم برآورد شده برای کوارک u ، $(4 \text{ MeV} < m_u < 15 \text{ MeV})$ ، و جرم برآورد شده برای کوارک d ، $(4 \text{ MeV} < m_d < 8 \text{ MeV})$ ، درمقایسه با جرم برآورد شده برای کوارک s ، $(100 \text{ MeV} < m_s < 300 \text{ MeV})$ ، و کوارک‌های سنگین c, b, t بسیار سبکتر هستند. جرم کوارک‌های u, d هم درمقایسه با جرم سنگین‌ترین هادرون‌ها، بسیار کوچک می‌باشد: جرم مزون π^0 حدود 135 MeV ، و جرم پروتون حدود 938 MeV است. بنابراین می‌توانیم در انرژی‌های پایین از جرم همه کوارک‌ها، بجز کوارک u, d چشم‌پوشی کرد و در تقریب نخست چگالی لاگرانژی را به صورت زیر در نظر گرفت

$$\mathcal{L}_{ud} = \bar{u} i \gamma^\mu (\partial_\mu + i g \mathbf{G}_\mu) u + \bar{d} i \gamma^\mu (\partial_\mu + i g \mathbf{G}_\mu) d - m_u \bar{u} u - m_d \bar{d} d \quad (16-29)$$

که \mathbf{G}_μ ماتریس میدان گلوئونی بوده و از معادله‌های میدان (۱۶-۱۳) برای همه کوارک‌ها، بجز میدان‌های کوارک u, d که از آنها چشم‌پوشی شد، سنجیده می‌شوند. میدان‌های u, d در (۱۶-۲۹) همگی سه‌تایی‌هایی از میدان‌های فرمیونی دیراکی هستند؛ اندیس‌های رنگ و اندیس‌های دیراکی فرونشاند شده‌اند.

$$\mathbf{D}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(x) \\ \mathbf{d}(x) \end{pmatrix} \quad (16-30)$$

و به این ترتیب می‌توانیم بنویسیم

$$\mathcal{L}_{ud} = \bar{\mathbf{D}} i \gamma^\mu (\partial_\mu + i g \mathbf{G}_\mu) \mathbf{D} - \left(\frac{1}{\gamma}\right) (m_u + m_d) \bar{\mathbf{D}} \mathbf{D} - \left(\frac{1}{\gamma}\right) (m_u - m_d) \bar{\mathbf{D}} \tau_3 \mathbf{D} \quad (16-31)$$

که

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ و } \bar{\mathbf{D}} = (u^\dagger \gamma^0, d^\dagger \gamma^0)$$

\mathcal{L}_{ud} تحت تبدیل $U(1)$ ناورد است

$$\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}' = \exp(-i\alpha^0) \mathbf{D} \quad (16-32)$$

که منجر به جریان پایسته کوارکی می‌گردد (ر.ک. بخش ۴-۱)

$$J^\mu = \bar{\mathbf{D}} \gamma^\mu \mathbf{D} = \bar{u} \gamma^\mu u + \bar{d} \gamma^\mu d \quad (16-33)$$

و تحت تبدیل جهانی (۱) U نیز ناورداست

$$\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}' = \exp(-i\alpha^r \tau^r) \mathbf{D} \quad (۱۶-۳۴)$$

که منجر به جریان پایسته زیر می گردد.

$$J_r^\mu = \bar{\mathbf{D}} \gamma^\mu \tau^r \mathbf{D} = \bar{\mathbf{u}} \gamma^\mu \mathbf{u} - \mathbf{d} \gamma^\mu \mathbf{d} \quad (۱۶-۳۵)$$

(۱۶-۳۴) و (۱۶-۳۵) نشان می دهند که چگالی لاگرانژی (۱۶-۳۱) هر دو عدد کوارکی \mathbf{u}, \mathbf{d} را جداگانه پایسته نگاه می دارد.

اگر از تفاوت جرمی ($m_u - m_d$) چشم پوشی کنیم، تقارن ایزواسپین پدیدار می شود. چگالی لاگرانژی ساده شده حاصل تحت تبدیل جهانی (۲) SU ناورداست.

$$\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}' = \exp(-i\alpha^k \tau^k) \mathbf{D} \quad (۱۶-۳۶)$$

که τ^k مولدهای گروه $SU(2)$ هستند (پیوست ب، بخش ب-۳). اکنون علاوه بر جریان پایسته (۱۶-۳۵) جریان های پایسته دیگری هم وجود دارند.

$$J_1^\mu = \bar{\mathbf{D}} \gamma^\mu \tau^1 \mathbf{D}, \quad J_2^\mu = \bar{\mathbf{D}} \gamma^\mu \tau^2 \mathbf{D} \quad (۱۶-۳۷)$$

و کمیت های مستقل از زمان متناظر با آنها عبارتند از

$$\int \mathbf{D}^\dagger \tau^k \mathbf{D} d^3x, \quad k = 1, 2, 3 \quad (۱۶-۳۸)$$

تبدیل های (۲) SU متناظر با دورانهایی در فضای سه بعدی ایزواسپین می باشد. همانند عملگر تکانه زاویه ای ذاتی، $\mathbf{S} = (\sqrt{2}) \boldsymbol{\sigma}$ ، عملگر ایزواسپین را هم به صورت $\mathbf{I} = (\sqrt{2}) \boldsymbol{\tau}$ تعریف می کنیم. پس

$$\mathbf{I}^z = I_1^z + I_2^z + I_3^z = (\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حالت کوارک \mathbf{u} ویژه حالتی از \mathbf{I}^z با $I_1^z = I_2^z = 1/\sqrt{2}$ ، و حالت کوارک \mathbf{d} ، ویژه حالتی از آن با $I_1^z = I_2^z = -1/\sqrt{2}$ می باشد. ریاضیات ایزواسپین همانند ریاضیات تکانه زاویه ای می باشد. فرمول بندی ایزواسپین در رده بندی و درک حالت های هادرونی، که در فصل ۱ بیان شدند، بسیار سودمند است. اینجا با چشم پوشی از تفاوت جرمی $\mathbf{u} - \mathbf{d}$ و برهمکنش های ضعیف و الکترومغناطیس به منشأ آن در QCD پی می بریم.

۱۶-۷ تقارن کایرال

اگر از جرم کل کوارک ها چشم پوشی کنیم، تقارن های تقریبی بعدی بروز می کنند. چنین اموری در فیزیک ذرات مورد توجه هستند. چگالی لاگرانژی (۱۶-۳۱) را می توان برحسب دوتایی هایی ایزواسپین چپگرد و راستگرد $\mathbf{L} = (\sqrt{2})(1 - \gamma^5) \mathbf{D}$ و $\mathbf{R} = (\sqrt{2})(1 + \gamma^5) \mathbf{D}$ نوشت. با چشم پوشی از جمله های

جرمی، چگالی لاگرانژی گفته شده، عبارتست از

$$\mathcal{L} = \mathbf{L}^\dagger i \tilde{\sigma}^\mu (\partial_\mu + ig \mathbf{G}_\mu) \mathbf{L} + \mathbf{R}^\dagger i \sigma^\mu (\partial_\mu + ig \mathbf{G}_\mu) \mathbf{R} \quad (39-16)$$

اکنون \mathbf{L}, \mathbf{R} دوتایی‌هایی از اسپینورهای دو مؤلفه‌ای هستند، و هشت جریان پایسته وجود دارد.

$$\mathbf{L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathbf{L}, \quad \mathbf{L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \tau^k \mathbf{L}, \quad \mathbf{R}^\dagger \sigma^\mu \mathbf{R}, \quad \mathbf{R}^\dagger \sigma^\mu \tau^k \mathbf{R}, \quad k = 1, 2, 3$$

یکی از مشاهده‌های مهم، مشاهده جریان‌های $\mathbf{L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \tau^1 \mathbf{L}$ و $\mathbf{L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \tau^2 \mathbf{L}$ با میدان‌های بوزونی W^\pm در چگالی لاگرانژی (۱۴-۱۵) جفت شده، و در چگالی لاگرانژی مؤثر (۱۴-۲۲)، پدیدار می‌شوند.

ضریب کوآرکی مربوط به (۱۴-۱۵) عبارتست از $\mathbf{u}_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathbf{d}_L V_{ud}$ ، و می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{u}_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathbf{d}_L = \mathbf{L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu (\sqrt{2}) (\tau^1 + i\tau^2) \mathbf{L}, \quad (40-16)$$

$$\mathbf{d}_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathbf{u}_L = \mathbf{L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu (\sqrt{2}) (\tau^1 - i\tau^2) \mathbf{L}$$

همانگونه که در فصل ۱۸ خواهیم دید، با این مشاهده بینشی از طبیعت لاگرانژی مؤثر واپاشی بتازا به‌دست می‌آید.

تبدیل‌های تقارنی مستقل عبارتند از

$$\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}' = \exp[-i(\alpha^\circ + \alpha^k \tau^k)] \mathbf{L}, \quad \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

و

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}' = \exp[-i(\beta^\circ + \beta^k \tau^k)] \mathbf{R}, \quad \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$$

که می‌توان آنها را به‌ترتیب برحسب اسپینورهای دیراکی نوشت.

$$\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}' = \exp[-i(\alpha^\circ + \alpha^k \tau^k)(\sqrt{2})(1 - \gamma^5)] \mathbf{D} \quad (41-16)$$

$$\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}' = \exp[-i(\beta^\circ + \beta^k \tau^k)(\sqrt{2})(1 + \gamma^5)] \mathbf{D} \quad (42-16)$$

هشت عمل تقارنی مستقل را هم می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت

$$\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}' = \exp[-i(\alpha'^\circ + \alpha'^k \tau^k)] \mathbf{D} \quad (43-16)$$

که منجر به پایستگی شمار کوآرک‌ها و ایزواسپین می‌شود، و

$$\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}' = \exp[-i(\beta'^\circ + \beta'^k \tau^k) \gamma^5] \mathbf{D} \quad (44-16)$$

چهار عبارت آخری را تقارن‌های کایرال گویند.

مسأله‌ها

۱-۱۶ نشان دهید که

$$G_{\mu\nu}^a = (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) - g \sum_{b,c} f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c$$

۲-۱۶ با بهره‌گیری از مسأله ۱-۱۶، نشان دهید که جمله‌های خود جفت‌شدگی در چگالی لاگرانژی (۹-۱۶) عبارتند از

$$\mathcal{L}_{int} = g(\partial_\mu G_\nu^a f_{abc} G^{b\mu} G^{c\nu}) - (g^2/4) f_{abc} f_{ade} G_\mu^b G_\nu^c G^{d\mu} G^{e\nu}$$

۳-۱۶ عبارت (۱۴-۱۶) را برای جریان $j^{a\nu}$ برآورد کنید.

۴-۱۶ مقداری از Q را برآورد کنید که به‌ازای آن $V(Q)$ در معادله (۲۱-۱۶) نامتناهی گردد.

۵-۱۶ با بهره‌گیری از (۲۷-۱۶) نشان دهید که

$$\alpha_s(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \alpha_s(x'/r') \frac{\sin x}{x} dx$$

(توجه کنید که عبارت (۲۵-۱۶) برای $\alpha_s(x'/r')$ تنها به‌ازای مقادیر $\Delta x > \Lambda r$ برقرار است و به‌ازای مقادیرهای کوچک r ، می‌توان انتظار داشت که این گستره سهم اصلی در انتگرال داشته باشد.)

محاسبه‌های QCD به دو روش انجام می‌گیرد: در انرژی‌های پایین شبیه‌سازی‌های شبکه، و در انرژی‌های بالا محاسبه‌های اختلالی. در این فصل برخی از نتیجه‌های به‌دست آمده را متذکر می‌شویم.

۱-۱۷ QCD شبکه و دربندشدگی

در بخش ۱-۱۶ خاطر نشان کردیم که در انرژی‌های پایین، به رویه‌ای غیراختلالی در QCD نیاز داریم. «QCD شبکه» همین رویه می‌باشد. میدان‌های گلوئونی در شبکه‌ای چهار بعدی از نقطه‌ها (n, \mathbf{n}) تعریف می‌شوند، که a فاصله جدایی شبکه و n اعداد صحیح می‌باشند. به جای مشتق‌های میدانی، اختلاف‌های گسسته جایگزین می‌شود. این امر سبب به‌وجود آمدن «QCD شبکه‌ای منظم» می‌گردد. فاصله جدایی شبکه متناظر با برش فرابنفش می‌باشد، زیرا نمی‌توان طول موج‌های کوچکتر از $2a$ را بر روی این شبکه توصیف کرد. این شبکه دارای تقارن دورانی کامل در فضا نمی‌باشد، با این وجود حد $a \rightarrow 0$ ، متناظر با QCD پیوسته می‌باشد. با توان محاسباتی کنونی می‌توان شبکه‌هایی با نزدیک به 36^4 نقطه ایجاد کرد. گستره نیروی هسته‌ای قوی نزدیک به 1 fm می‌باشد. برای آنکه چنین فاصله‌ای به‌راحتی بر این شبکه سوار شود، می‌توان پیش‌بینی کرد که نمی‌خواهیم a خیلی کوچکتر از $a = 0.056 \text{ fm} / 36 = 1.56 \text{ fm}$ بماند، پس باید $\hbar c / a > 3.5 \text{ GeV}$ باشد.

در نظریه اختلالی انرژی بالا، که در بخش ۱-۱۶ توصیف شد، پارامتر بازبهنجارش λ و پارامتر جفت‌شدگی بدون بعد g ، با یکدیگر ترکیب شده و منجر به تنها یک پارامتر فیزیکی، Λ ، با بعد انرژی می‌شود. (۱۶-۲۵) رابطه بین ثابت جفت‌شدگی (Q^2) و α_s و Λ در پایین‌ترین مرتبه اختلال می‌باشد. در QCD شبکه، پارامتر غیرفیزیکی شبکه، a ، با پارامتر جفت‌شدگی بدون بعد $g(a)$ ، ترکیب شده و منجر به یک پارامتر فیزیکی Λ_{latt} با بعد انرژی می‌شود. در پایین‌ترین مرتبه نظریه اختلال «شبکه»، زمانی که $a \rightarrow 0$ میل کند، $g(a) \rightarrow 0$ میل می‌کند،

$$g^2(a) = \frac{-16\pi^2}{11 \ln(a^2 \Lambda_{\text{latt}}^2)} \quad (1-17)$$

(ر.ک. (Hasenfratz and Hasenfratz, 1985).

Λ_{latt} مستقل از مقدار a در حد $a \rightarrow 0$ می‌باشد. این ویژگی قابل توجه نظریه را، تبدیل ابعادی، گویند.

معادله (۱۷-۱) را می‌توان با (۱۶-۲۵) با n_f برابر با صفر مقایسه کرد. می‌توان به‌طور نظری نشان داد (Dashen and Gross, 1981) که

$$\frac{\Lambda_{\text{latt}}}{\Lambda} \approx \frac{1}{3}, \quad \text{ثابت} \quad (2-17)$$

مقدار دقیق این ثابت به‌نمای بازبنجاشی، که در آن Λ تعریف می‌شود، و شمار طعم کوارک‌های آن بستگی دارد. مقدار Λ_{latt} ، یا هم‌ارز آن Λ ، را باید از آزمایش تعیین کرد. در بخش ۱۷-۳ خواهیم دید که مقدار Λ نزدیک به 300 MeV می‌باشد. بنابراین مقدار $\Lambda_{\text{latt}} \sim 10 \text{ MeV}$ خواهد بود. می‌توانیم از معادله (۱۷-۱) پی برد که مقدار $a \sim 0.056 \text{ fm}$ و ثابت جفت‌شدگی g باید از مرتبه ۱ باشد.

محاسبه‌های QCD شبکه برای محاسبه انرژی پتانسیل کوارک و پادکوارک تثبیت شده در حالت تک‌تایی رنگی، به‌صورت تابعی از فاصله جدایی می‌باشد. در بخش ۱۶-۴، درباره شکل این پتانسیل در فاصله‌های کوچک بحث شد. محاسبه‌های شبکه‌ای نااختلالی در تقریب فرونشانی، با حذف اثرهای آفرینش جفت کوارک مجازی انجام می‌شود.

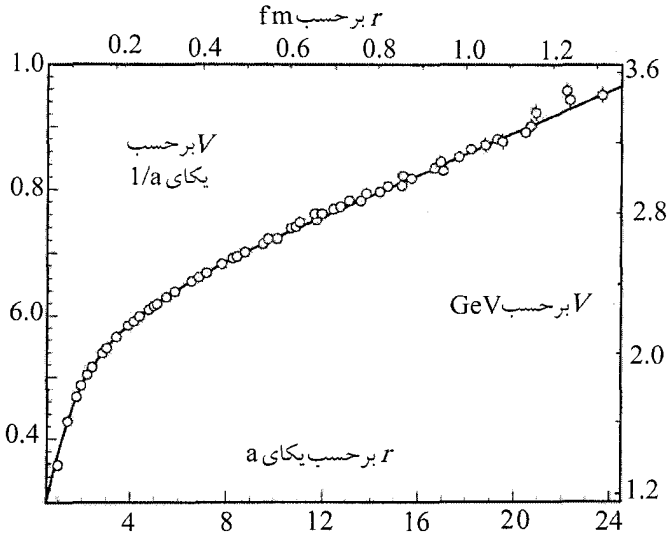
در محاسبه‌های شبکه‌ای، فاصله‌ها برحسب یکای a ، و انرژی‌ها برحسب یکای $(1/a)$ ، اندازه‌گیری می‌شود. ثابت جفت‌شدگی g ، برگزیده می‌شود، و کوارک و پادکوارک در نقاط شبکه‌ای جایگزیده می‌شوند. فاصله جدایی این نقاط شبکه‌ای، برابر $r = |\mathbf{n}|a$ ، می‌باشد، که \mathbf{n} مجموعه سه عدد صحیح است. انرژی میدان $E(r)$ ، از جفت کوارک-پادکوارک ایجاد می‌شود، و به‌ازای توالی از فاصله‌های جدایی محاسبه می‌گردد. دریافته‌اند که این انرژی میدان به‌شکل زیر می‌باشد

$$E(r) = 2A + K r - \frac{4}{3} \frac{\alpha_{\text{latt}}(r)}{r} \quad (3-17)$$

که A و K ثابت هستند و ضریب $(4/3)$ برای آسان کردن مقایسه با نتیجه‌های اختلالی بخش ۱۶-۴ وارد می‌شود. می‌توان ثابت $2A$ را سهمی در انرژی‌های سکون کوارک و پادکوارک دانست، که در جرم نظری آنها جذب شده و انرژی پتانسیل مؤثر را به شکل زیر بر جای می‌گذارد.

$$V(r) = K r - \frac{4}{3} \frac{\alpha_{\text{latt}}(r)}{r} \quad (4-17)$$

نتیجه چنین محاسبه‌هایی را، که بالی و شیلینگ در سال ۱۹۹۳ با بهره‌گیری از 32^4 شبکه انجام داده‌اند، در شکل ۱۷-۱ نشان داده شده است. در این محاسبه‌ها مقدار $g = 0.97$ اختیار شده است. در



شکل ۱۷-۱ پتانسیل تکتابی رنگی کوآرک-پادکوآرک که بر روی شبکه محاسبه شده‌اند. به ازای مقدار تثبیت شده ثابت جفت‌شدگی g (از مرتبه ۱) مقدار $V(r)$ برحسب یکاهای شبکه محاسبه می‌شود (r برحسب یکای a ، و V برحسب یکای $1/a$). نقطه‌های محاسبه شده با منحنی به شکل زیر برآزش داده می‌شود

$$V(r) = 2A + Kr - (c/r) + (f/r^2)$$

در این مثال مقدار g در ۰٫۹۷ تثبیت شده است. از این محاسبه‌ها مقدار $K = ۰٫۱۴۸$ تعیین شد؛ K کشش ریمان برحسب یکای $1/a^2$ می‌باشد. پدیدارشناسی دستگاه‌های کوآرکی $\bar{c}c$ ، $\bar{b}b$ ، اشاره به مقدار $K \approx (440 \text{ MeV})^2$ دارد. با اختیار این مقدار، $a = ۰٫۵۵ \text{ fm}$ و $1/a = 3٫۵۸ \text{ GeV}$ تعیین می‌شود. این مقدار همچنین یک نقطه را روی منحنی $g(a)$ به صورت تابعی از a مشخص می‌کند. این محاسبه‌ها را باید تکرار کرد تا a را به ازای چندین مقدار از g محاسبه کرد و اندازه آن را آزمود، که از کدام شکل مجانبی، مانند معادله (۱۷-۱)، پیروی می‌کند تا از حد پیوستار مطمئن شویم (Bali and Schilling 1993)

فاصله‌های بزرگ، جمله Kr برترت دارد. ثابت K را کشش ریمان گویند. در QCD فرونشانده بر روی شبکه، با g تثبیت شده، تنها یک پارامتر انرژی a^{-1} (یا Λ_{latt}) وجود دارد. در نتیجه K دارای بعد a^{-2} می‌باشد. بالی و شیلینگ در سال ۱۹۹۳ مقدار $K = ۰٫۱۴۷۵(29)a^{-2}$ را یافتند. در فصل ۱، شکل (۱-۵) طیف تجربی دستگاه‌های کوآرکی چارمونیوم ($c\bar{c}$) و باتومونیوم ($b\bar{b}$) نشان داده شده است. با بهره‌گیری از معادله شرودینگر، با پتانسیل برهمکنشی به شکل (۱۷-۳)، برآزش‌های بسیاری بر این طیف‌ها انجام شده است. در پایین‌ترین حالت‌های انرژی دستگاه‌های کوآرکی سنگین، کوآرک و پادکوآرک به آرامی حرکت می‌کنند، بنابراین تقریب نانسیستی تقریبی معقول است. این طیف‌ها با مقدارهای

$\alpha(r) = 0.39$ ثابت $K = (440 \text{ MeV})^{-1} = 1 \text{ GeV fm}^{-1}$ ، به خوبی برآزش می‌شوند. با اختیار $K = (440 \text{ MeV})^{-1}$ ، فاصله جدایی شبکه $a = 0.055 \text{ fm}$ و $a^{-1} = 3.62 \text{ GeV}$ می‌شود.

معادله (۱۷-۱) را می‌توان برای برآورد Λ_{latt} بکار برد. اما، این معادله (و بسط‌های بسیار پیچیده‌تر به مرتبه‌های بالاتر نظریه اختلال شبکه) تنها در حد $a \rightarrow 0$ برقرارند. برای برون‌یابی قابل اطمینان Λ_{latt} ، باید این محاسبات را به‌ازای مقادیر مختلف g تکرار کرد. حد Λ_{latt} در $a \rightarrow 0$ را می‌توان برآورد کرد. بالی و شیلینگ در سال ۱۹۹۳ مقدار $\sqrt{K}/\Lambda_{\text{latt}} = 51.9_{-1.8}^{+1.6}$ را یافتند، که با مقدار $\sqrt{K}/\Lambda_{\text{latt}} = 49.6$ (۳-۸) که Booth *et al.* (1992) از نتیجه‌های 36^4 شبکه به‌دست آوردند، سازگار است. با اختیار $\sqrt{K} = 440 \text{ MeV}$ مقدار $\Lambda_{\text{latt}} \approx 8.5 \text{ MeV}$ به‌دست آمده و از (۱۷-۲) مقدار $\Lambda \approx 255 \text{ MeV}$ به‌دست می‌آید.

در مقادیر کوچک r ، جمله شبه کولونی چیره می‌شود. دریافتند که $\alpha_{\text{latt}}(r)$ تابعی آرام‌تغییر از r می‌باشد، و همانگونه که از نظریه اختلال انتظار می‌رود (بخش ۱۶-۳)، با کاهش r ، مقدار آن کاهش می‌یابد. پتانسیل شکل ۱۷-۱ با مقدار زیر به خوبی برآزش داده می‌شود

$$\alpha_{\text{latt}}(r) = 0.236 - (0.0031 \text{ fm})/r$$

این مقدار با مقدار $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$ از QED قابل مقایسه می‌باشد.

شایان توجه است که جمله خطی که در این پتانسیل بروز می‌کند در تقریب فرونشاندن محاسبه می‌شود. اگر میدان‌های کوآرکی افت‌وخیز کننده کوانتمی هم به حساب آیند، انرژی پتانسیل بزرگ دسترس‌پذیر در فاصله‌های جدایی بزرگ جفت کوآرک و پاد کوآرک تثبیت شده، و جفت کوآرک و پاد کوآرک تولید می‌کنند. کوآرک به همسایگی پاد کوآرک تثبیت شده‌ای مهاجرت می‌کند و تکتایی رنگی تولید می‌شود، و همانند آن پاد کوآرک تکتایی دیگری با کوآرک تثبیت شده ایجاد شده، و در نتیجه منجر به دو مزون می‌گردند که به خوبی از یکدیگر جدا شده‌اند.

۲-۱۷ QCD شبکه و هادرون‌ها

به دستگاه‌های کوآرکی و پاد کوآرکی که با میدان گلوئونی به یکدیگر مربوط می‌شوند، هادرون، گویند (ر.ک. بخش ۱-۴). برای نمونه پروتون، تنها هادرون پایدار، دارای عدد کوآرک بالای دو و عدد کوآرک پایین یک می‌باشد. دستگاه‌های دیگر، مثلاً مزون‌ها، تنها به شکل گذرا با میدان‌های گلوئونی خودشان نگه‌داشته می‌شوند. همانند این کوآرک‌های ظرفیت^۱، که دستگاه کوآرکی را تعریف می‌کنند، هادرون‌ها در بردارنده جفت‌های کوآرک-پاد کوآرک، موسوم به کوآرک‌های دریا، می‌باشند که بر اثر میدان گلوئونی برانگیخته شده‌اند.

تاکنون، در بحث ما، از هادرون‌ها و دریندشدگی، از کوارک‌های دریا چشم‌پوشی شده است. در محاسبه‌های اطمینان‌بخش از هادرون‌ها، کوارک‌های دریا بویژه جفت‌هایی از $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$ ، که به سبب جرم کوچکتان نسبت به Λ_{QCD} ، کاملاً بر اثر میدان گلوئونی برانگیخته می‌شوند، باید منظور شوند. از زمان چاپ اول این کتاب، پیشرفت زیادی در QCD شبکه انجام گرفته است تا چنین جفت‌هایی منظور شوند.

وجود کوارک‌ها روی این شبکه مستلزم معرفی جرم کوارک‌ها می‌باشد. در کار Davies et al. (2204)، محاسبه‌ها با $m_u = m_d$ (حد تقارن ایزواسپین: ر.ک. بخش ۱۶-۶) انجام می‌شوند. جرم میانگین $(m_u + m_d)/2$ به همراه جرم m_b, m_c, m_s ، و ثابت جفت‌شدگی g : رویهم رفته پنج پارامتر معرفی می‌شوند. با مقدار تثبیت شده‌ای برای g ، فاصله جدایی شبکه a و چهار جرم کوارکی، از برآزش پنج جرمی، که به طریق تجربی تعیین شده‌اند، مشخص می‌گردند. این پنج جرم عبارتند از $m_\pi = 0,139 \text{ GeV}$ ، $m(b\bar{b}1s) = 9,460 \text{ GeV}$ ، $m(b\bar{b}2s) = 10,23 \text{ GeV}$ (ر.ک. شکل ۵-۱)، $m_K = 0,496 \text{ GeV}$ ، $m_D = 1,867 \text{ GeV}$ ، m_{D^+} ، یعنی $D(c\bar{s})$ حالت پایه دستگاه کوارک ظرفیت $c\bar{s}$ می‌باشد.

همانند بخش ۱۷-۱، فاصله جدایی شبکه a تابعی از g و در نتیجه جرم کوارک‌ها می‌باشد. باید این محاسبه‌ها را به‌ازای مقدارهای گوناگون g تکرار کرد تا Λ_{latt} و $g(a)$ و چهار جرم کوارکی که تابع‌هایی از a می‌باشند، برون‌یابی شوند. می‌توان این جرم‌ها را تابعی از انرژی، $\hbar c/a$ دانست. این امر که ثابت جفت‌شدگی قوی و جرم کوارک‌ها تابع‌هایی از مقدار اندازه‌گیری شده برای انرژی هستند، یک ویژگی طبیعی از QCD می‌باشد. این محاسبه‌ها به‌ازای کوارک‌های سبک در انرژی 2 GeV منجر به مقدارهای زیر می‌شوند.

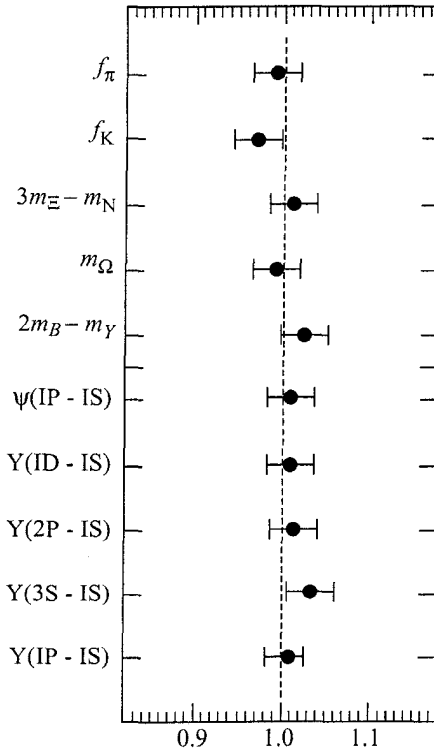
$$\left(\frac{m_u + m_d}{2} \right) (2 \text{ GeV}) = 3,2 \pm 0,4 \text{ MeV}$$

$$m_s (2 \text{ GeV}) = 87 \pm 8 \text{ MeV}, \quad m_c = 1,1 \pm 0,1 \text{ GeV}$$

$$m_b = 4,25 \pm 0,15 \text{ GeV}, \quad \alpha_s(M_Z) = 0,121 \pm 0,003$$

m_b و m_c در مقیاس جرمی خودشان ذکر شده‌اند. مرسوم است که α_s را در مقیاس بوزون Z بیان کنند. برای یافتن این پارامترها در مقیاس‌های گوناگون، بستگی انرژی آنها از معادله‌هایی همانند (۱۶-۲۵) به‌دست می‌آید.

با داشتن این مقادارها پارامترهای QCD، می‌توان اعتبار آن را، از مقایسه محاسبه‌ها با داده‌های آزمایشگاهی مستقل آزمود. هم‌اکنون محاسبه‌ها محدود به هادرونهای منفردی هستند که در برابر برهمکنش‌های قوی پایدارند. ذرات ناپایدار و یا ذرات نزدیک به ناپایدار تمایل دارند که بیرون از مرزهای



شکل ۱۷-۲ مقادرهایی در QCD شبکه تقسیم بر مقادیرهای تجربی:

$$f_{\pi} = \frac{\alpha_{\pi}}{\sqrt{2} G_F V_{ud}} \quad \text{ر.ک. بخش ۹-۲}$$

$$f_K = \frac{\alpha_K}{\sqrt{2} G_F V_{us}} \quad \text{ر.ک. مسأله ۹-۱۰}$$

m_{Ω} جرم هادرون $\Omega(sss)$ ، حالت پایه باریونی با عدد کوارکی سه برای S می‌باشد.
 $3m_{\Xi} - m_N$ ترکیبی از حالت پایه جرم‌های باریونی $\Xi(ssu)$ و نوترون $N(duu)$ می‌باشد.
 دیگر اختلاف‌های جرمی بین حالت‌های مزونی $c\bar{c}$ و $b\bar{b}$ می‌باشد. (Davies *et al.* (2004))

شبکه افت‌وخیز کنند. همچنین باریون‌ها و به‌ویژه پروتون و نوترون را، که حامل کوارک‌های ظرفیت u و d هستند، هنوز نمی‌توان با اطمینان بر روی این شبکه نشانند. با این وجود بسیاری از ویژگی‌های ذرات، معطوف به محاسبه‌های شبکه هستند و کامیابی در برآزش داده‌ها، برانگیزنده و گیرا بوده است. در شکل ۱۷-۲ نتیجه حاصل از کار Davies *et al.* (2004) نشان داده می‌شود. ده محاسبه با آزمایش مقایسه شده‌اند. نتیجه این مقایسه‌ها به‌صورت مقدار محاسبه شده تقسیم بر مقدار تجربی بیان می‌شود. مقدارهای

تجربی به خوبی معلوم شده‌اند، و خطاهایی که در بین دو قلاب در جلوی مقدار میانگین آمده‌اند، بیانگر دقت برآورد شده برای این محاسبه‌ها می‌باشد. به نظر می‌آید که با این توان محاسباتی کنونی، نظریه آزمایش بهتر از ۴٪ با هم سازگار باشند. هیچ دلیلی برای شک در مورد اعتبار QCD به منزله نظریه برهمکنشهای قوی وجود ندارد.

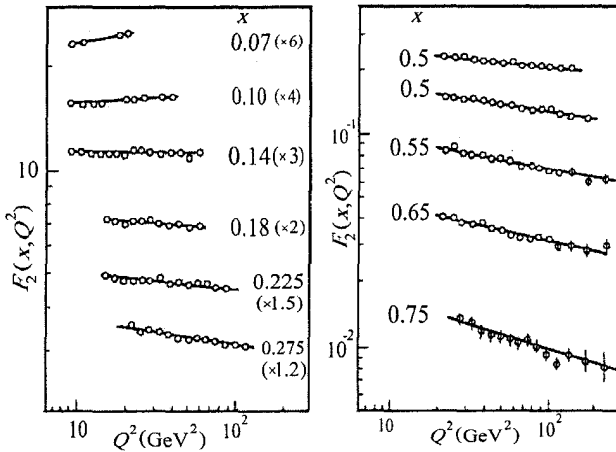
۱۷-۳ QCD اختلالی و پراکندگی ناکشسان ژرف

یکی از نخستین کاربردهای QCD اختلالی، در بستگی تابع‌های توزیع پارتونی پروتون به Q^2 بود. در مدل پارتونی پراکندگی ناکشسان الکترون-پروتون (پیوست د)، پروتون با تابع‌های توزیع پارتونی $p_i(x, Q^2)$ توصیف می‌شوند، که

$$Q^2 = -q_\mu q^\mu = (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 - (E - E')^2$$

و $q^\mu = (E - E', \mathbf{p} - \mathbf{p}')$ انرژی و تکانه انتقال یافته در پراکندگی ناکشسان الکترون بوده، و $x = Q^2 / [2M(E - E')]$ که M جرم پروتون است. پارتون‌ها به منزله کوارک‌ها، پادکوارک‌ها، و گلوئون‌ها شناخته شده‌اند. معمولاً به‌ازای مقدار تثبیت شده‌ای از Q^2 ، برای نمونه Q_0^2 ، تابع‌های توزیع $p_i(x, Q_0^2)$ از این داده‌ها به‌دست می‌آیند. تعداد تابع‌های توزیع از روی تعداد مجموعه داده‌های گسسته تعیین می‌شود. در این مرحله به‌دست آوردن تابع‌های توزیع، تنها برازش بر منحنی می‌باشد: هرچند تابع‌های $p_i(x, Q_0^2)$ باید پیامدی از QCD باشد، مسأله تعیین شکل این تابع‌ها به‌طور تحلیلی بسیار مشکل است. اما، با معلوم بودن این تابع توزیع‌ها، به شرط آنکه Q_0^2 به‌اندازه کافی بزرگ باشد، می‌توان از QCD اختلالی، برای نشان دادن چگونه تحول تابع با تغییر Q^2 ، بهره گرفت. این تحول با معادله‌های آلتارگی و پاریزی (۱۹۷۷)^۱ توصیف می‌شود، که از برهمکنش‌های کوارک-گلوئون به‌طور اختلالی بهره گرفته‌اند.

برای نمونه، شکل ۱۷-۳، داده‌های آزمایشگاهی را بر روی تابع ساختار مربوط به آن $F_2(x, Q^2)$ ، تعریف شده در پیوست د، که از گروه همکاری BCDMS (Benvenuti et al., 1989) گرفته شده نشان می‌دهد. همچنین به‌ازای مقدارهای تثبیت شده x ، پیش‌بینی‌های نظری از تحول QCD به‌صورت تابعی از Q^2 نشان داده شده‌اند. این داده‌ها دقیق هستند و شکل همه این منحنی‌ها از پارامتر منفرد Λ به‌دست می‌آید. از برازش با داده‌ها مقدار $\Lambda = 205 \pm 80 \text{ MeV}$ تعیین شود، که می‌توان با بهره‌گیری از $n_f = 5$ با $(16-25)$ به مقدار $\alpha_s(M_z^2) = 0.115 \pm 0.007$ پی برد.



شکل ۱۷-۳ تابع ساختار پروتون $F_2(x, Q^2)$. نقطه‌های تجربی با نقطه‌های به دست آمده از معادله‌های تحول با $\Lambda = 205 \text{ MeV}$ برازش داده شده‌اند. برای کمک به خواندن داده‌های بخش سمت چپ، داده‌ها با ضریبهای معلوم مقیاس‌بندی شده‌اند. برای نمونه در $x = 0.18$ نمودار از مرتبه $2F_2(0.18, Q^2)$ می‌باشد. (برگرفته از *Physics Letters B223*, Benvenuti, A.C. et al. و اندازه‌گیری حاصل از نقض‌های مقیاس‌بندی در ضریب ساختار پروتون $F_2(x, Q^2)$ در Q^2 بالا Λ (Benvenuti et al., p.490) با سپاس از (Elsevier Science-NL, Sara Burgerhartstraat 25, 1005 kv Amsterdam, The Netherlands)

۱۷-۴ QCD اختلالی و فیزیک برخورددهنده e^+e^-

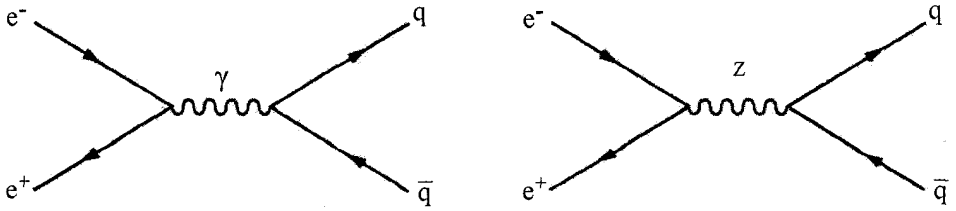
نمودارهای فاینمن اساسی برای آفرینش هادرون در آزمایشهای باریکه برخورددهنده e^+e^- ، در شکل ۱۷-۴ نشان داده شده‌اند. در گستره 10 GeV تا 40 GeV ، فرآیندهای الکترومغناطیسی چیره هستند. درباره این داده‌ها در بخش ۱-۷ بحث شد.

در نزدیکی 90 GeV ، نزدیک به انرژی مرکز جرم برای تولید Z ، برهمکنش ضعیف چیره می‌شود. درباره این داده‌ها در بخش ۱-۷ بحث شد. اما، در سطح مقطع ناشی از تابش گلوئون، سهم‌های دیگری هم وجود دارد، برای نمونه در فرآیندهای گفته شده در شکل ۱۷-۵ تصحیح مربوطه به‌سادگی بیان شده است. (ر.ک. به PDG, 1996). اگر سطح مقطع تولید هادرون را بدون تصحیح‌های تابشی با σ_0 نشان دهیم، آنگاه (تا مرتبه α_s^2) سطح مقطع σ ، با تصحیح‌ها، عبارتست از

$$\sigma = f \sigma_0$$

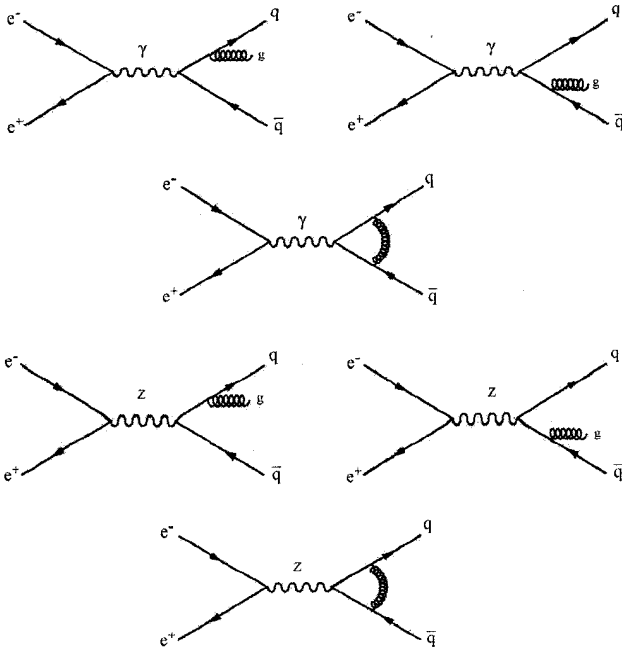
با

$$f = 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + 1.411 \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 - 12.8 \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^3 \quad (5-17)$$

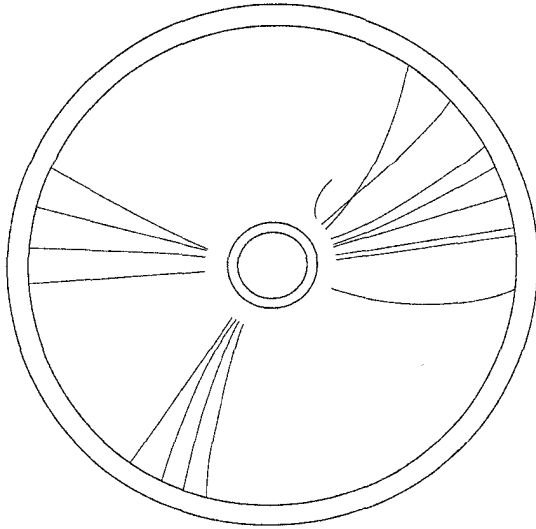


شکل ۱۷-۴ فرآیند نابودی e^+e^- به جفت کوارک-پادکوارک بدون تصحیح‌های تابشی گلوئون

و $\alpha_s(Q^2)$ در مقداری از Q^2 برابر با مجذور انرژی مرکز جرم اختیار می‌شود. برای نمونه، با اختیار کردن $\alpha_s(M_Z^2) = 0.115 \pm 0.007$ ، از بخش ۱۷-۳، منجر به مقدار $f = 1.038 \pm 0.003$ می‌شود. از این مقدار f در بخش ۱۵ استفاده شد. بهترین برازش بر واپاشی‌های هادرونی Z ، اشاره بر مقدار $f = 1.041 \pm 0.003$ دارد، که منجر به $\alpha_s(M_Z^2) = 0.123 \pm 0.007$ و $\Lambda = 310 \pm 90 \text{ MeV}$ می‌شود. سازگاری نظریه در بین دو رویه آزمایشی بسیار متفاوت: پراکندگی الکترون-پروتون و واپاشی‌های Z ، که از آنها چنین برآوردهایی به دست می‌آید، بسیار جالب می‌باشد.



شکل ۱۷-۵ تصحیح‌های تابشی گلوئونی پایین‌ترین مرتبه با آفرینش جفت کوارک-پادکوارک با نابودی e^+e^-



شکل ۱۷-۶ رویدادی سه جتی که در آشکارساز JADE واقع در برخورددهنده e^+e^- پترا PETRA در DESY گزارش شده است.

هادرون‌های آفریده شده در بیشتر فرآیندهای نابودی e^+e^- در انرژی‌های بالا، در دو جت پشت به پشت، مربوط به جفت اصلی $q\bar{q}$ می‌شود. بیشتر تابش گلوئون که در ضریب f سهم دارد، محدود به جت کوارک یا پادکوارک است. اما، بنا بر QCD اختلالی، گلوئون امکان آن را دارد که به ناحیه‌ای مجزا از فضای فاز تابیده شود و به صورت جت مجزای سوم پدیدار گردد. شکل ۱۷-۶ نمونه‌ای از چنین رویداد سه جتی می‌باشد. اندازه‌گیری چنین رویدادهای سه و حتی چهار جتی تأیید محکمتری بر نظریه QCD ارائه می‌دهند.

در فصل ۱۴، در نظریه برهمکنش ضعیف کوارک‌ها، ماتریس کوبایاشی - ماسکاو پدیدار شد:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (1-18)$$

و پارامتربندی آن به صورت زیر است

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (2-18)$$

که $c_{12} = \cos \theta_{12} > 0$, $s_{12} = \sin \theta_{12} > 0$, ...
 را با یکدیگر جفت می‌کند. این ماتریس دارای چهار پارامتر بامعنی فیزیکی است. این چهار پارامتر عبارتند از سه زاویه دوران θ_{12} , θ_{13} , θ_{23} در ربع اول، و زاویه فاز δ .

هیچ نظریه‌ای وجود ندارد که این پارامترها را به یکدیگر مربوط سازد، همچنین هیچ نظریه‌ای نیست که آنها را به جرم کوارک‌ها مربوط کند. در واقع، ممکن است به نظر بخش کوارکی مدل استاندارد جذبۀ زیبایی نداشته باشد. پارامترهای ماتریس KM باید از آزمایش تعیین شوند، و در این فصل به بیان چگونگی به دست آوردن اطلاعات تجربی می‌پردازیم.

۱۸-۱ واپاشی‌های ضعیف لپتونی هادرون‌ها

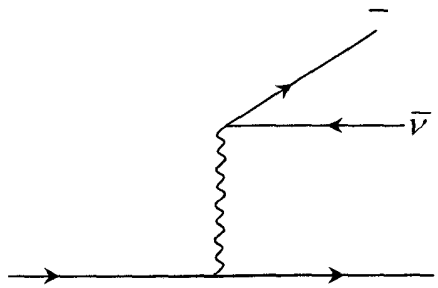
در بخش ۱۵-۳ دو قاعده جمع یکانی را، که پشتیبان اعتبار مدل استاندارد بودند، دیدیم. اندازه‌گیری‌های مستقل بسیاری وجود دارند، که هم برای آزمودن سازگاری مدل و هم برای تعیین پارامترها، بکار می‌روند. تاکنون هیچ ناسازگاری آشکاری تصدیق نشده است، و حجم زیادی از داده‌ها به‌خوبی با مقدرهای پارامتری $s_{13} = 0.0037 \pm 0.0005$, $s_{23} = 0.0413 \pm 0.0015$, $s_{12} = 0.2243 \pm 0.0016$ و $\delta = 47^\circ \pm 14^\circ$

توصیف می شوند.

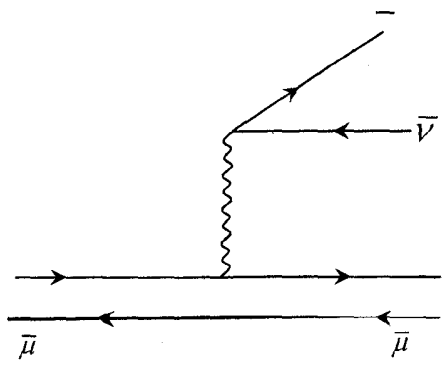
نقطه آغاز مناسب برای بررسی واپاشی های ضعیف، نخستین مرتبه نظریه اختلال در چگالی لاگرانژی معادله (۱۴-۲۱): $L = -\sqrt{2}G_F j_\mu^\dagger j_\mu$ می باشد، که j_μ از معادله (۱۴-۲۰) به دست می آید. واپاشی های لپتونی ساده ترین واپاشی از نظر تحلیلی می باشند، زیرا بخش های لپتونی عنصر ماتریس گذار را می توان با اطمینان محاسبه کرد. اگر کوارک ها به صورت منفرد دسترس پذیر می بودند، می توانستیم با اندازه گیری آهنگ واپاشی، واپاشی های لپتونی از قبیل

$$b \rightarrow c + e + \bar{\nu}_e$$

سه زاویه دورانی ماتریس KM را تعیین کنیم. در پایین ترین مرتبه نظریه اختلال، (ر.ک. شکل ۱-۱۸ (الف)) آهنگ واپاشی برای این فرآیند عبارتست از



شکل ۱-۱۸ (الف) نمودار فاینمن برای واپاشی لپتونی $b \rightarrow c + e^- + \bar{\nu}_e$



(ب) نمودار مدل کوارکی برای واپاشی

$$B^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\frac{1}{\tau(b \rightarrow c)} = \frac{G_F^2 m_b^5}{192 \pi^3} |V_{cb}|^2 f \left(\frac{m_c}{m_b} \right) \quad (3-18)$$

که $f(x) = 1 - 8x^2 + 8x^6 - x^8 - 24x^4 \ln(x)$ ضریب مربوط به فضای فاز دسترس پذیر است. این روند را نمی توان مستقیم بکار برد، زیرا کوارک های b, c به همراه دیگر کوارک ها و گلوئون های ناظر هستند (ر.ک. نمودار مدل کوارکی شکل ۱۸-۱ ب)، که در محاسبه عناصر، ماتریس برهمکنش قوی وارد می شوند. عناصر ماتریس هادرونی را می توان تا اندازه زیادی محاسبه کرد. از اندازه گیری آهنگ واپاشی، مقدار $|V_{cb}|^2$ تعیین خواهد شد.

۲-۱۸ $|V_{ud}|$ و واپاشی بتازای هسته های

تقارن ایزواسپین، (ر.ک. بخش ۶-۶)، برای تعیین عناصر ماتریسی هادرونی همه واپاشی های بتازا، مهم می باشد. چنین واپاشی هایی در جریان کوارکی وارد می شوند

$$j_q^\mu = d_L^\dagger \bar{\sigma} u_L = \bar{d} \gamma^\mu (\gamma^5) (1 - \gamma^5) u \quad (4-18)$$

در اینجا این جریان را برحسب اسپینورهای چار مؤلفه ای دیراکی u و d ، با کمک عملگر تصویر معرفی شده در (۵-۳۲)، $(\gamma^5) (1 - \gamma^5)$ ، و با توجه به $\bar{d} = d^\dagger \gamma^0$ بیان کرده ایم. همانند فصل ۱۶، در اینجا نیز کوارک های u و d را به همراه هم در دو تایی ایزواسپینی به کار می بریم.

$$\mathbf{D}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \end{pmatrix}$$

عملگر ایزواسپین $(\tau^1 - i\tau^2)$ دارای ویژگی زیر می باشد

$$\frac{1}{2} (\tau^1 - i\tau^2) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$$

بنابراین می توانیم بنویسیم (ر.ک. (۱۶-۳۱))

$$j_q^\mu = (\gamma^5) \bar{\mathbf{D}}(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\tau^1 - i\tau^2) \mathbf{D}(x) = (\gamma^5) [v^\mu(x) - a^\mu(x)] \quad (5-18)$$

که جریان را به دو بخش $v^\mu(x)$ ، که تحت وارونی فضا همانند بردار تبدیل می یابد، و بخش $a^\mu(x)$ ، که همانند بردار محوری تبدیل می یابد (بخش ۵-۵) تقسیم می کند:

$$v^\mu(x) = (\gamma^5) \bar{\mathbf{D}} \gamma^\mu (\tau^1 - i\tau^2) \mathbf{D} \quad (6-18)$$

$$a^\mu(x) = (\gamma^5) \bar{\mathbf{D}} \gamma^\mu \gamma^5 (\tau^1 - i\tau^2) \mathbf{D} \quad (7-18)$$

در بخش ۱۶-۶ دیدیم که تقارن دقیق ایزواسپینی منجر به جریان های پایسته می شود

$$V_i^\mu(x) = (\gamma/2) \bar{\mathbf{D}} \gamma^\mu \tau^i \mathbf{D} \quad (۸-۱۸)$$

بنابراین بخش برداری جریان واپاشی بتازای کوارک‌های u و d ، جریان پایسته ایزواسپینی می‌باشد. در مورد نوکلئون‌ها، دوتایی ایزواسپینی میدان‌های مؤثر دیراکی پروتون $p(x)$ و نوترون $n(x)$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$\mathbf{D}_N(x) = \begin{pmatrix} p(x) \\ n(x) \end{pmatrix} \quad (۹-۱۸)$$

چگالی لاگرانژی مؤثری که در انرژی‌های پایین فیزیک هسته‌ای، به توصیف واپاشی بتازای نوکلئون می‌پردازد، عبارتست از

$$L_{\text{eff}} = -2\sqrt{2} G_F C \left| j_e^\dagger j_N^\mu + j_e^{\mu\dagger} j_{e\mu} \right| \quad (۱۰-۱۸)$$

با

$$j_N^\mu = \frac{1}{4} \bar{\mathbf{D}}_N \gamma^\mu (1 - g_A \gamma^5) (\tau_1 - i\tau_2) \mathbf{D}_N \quad (۱۱-۱۸)$$

از گستره داده‌های تجربی هسته‌ای دریافته‌اند که

$$C = 0.9713 \pm 0.0013 \quad \text{و} \quad g_A = 1.2739 \pm 0.0019 \quad (\text{ر.ک. PDG})$$

بخش برداری جریان j_N^μ ، یک جریان ایزواسپینی پایسته در فیزیک هسته‌ای است، و متناظر با جریان ایزواسپینی پایسته بنیادی‌تر در سطح کوارکی می‌باشد. تقارن دقیق ایزواسپینی مستلزم آن است که سهمی از جریان پایسته ایزواسپینی نوکلئونی در برهمکنش مؤثر، (۱۸-۱۸) همانند جریان پایسته ایزواسپینی کوارک‌ها در (۱۸-۵، ۱۸-۶) باشد، بنابراین داریم $C = V_{ud} = 0.9713 \pm 0.0013$.

۳-۱۸ واپاشی‌های لپتونی بیشتر

برآوردهای دقیق‌تر $|V_{us}|$ ناشی از مشاهده واپاشی‌های لپتونی K می‌باشد. برای نمونه $K^- (s\bar{u}) \rightarrow \pi^0 (u\bar{u} - d\bar{d}) / \sqrt{2} + e^- + \bar{\nu}_e$ تحلیل این واپاشی‌ها با QCD شبکه، محاسبه‌های مدل کوارکی، و محاسبه‌هایی برپایه تقارن کایرال، (ر.ک. بخش ۱۶-۷)، همگی همگرا با یکدیگر، منجر به مقدار $|V_{us}| = 0.224 \pm 0.003$ می‌شود.

برآوردهای $|V_{cd}|$ و $|V_{cs}|$ را می‌توان از واپاشی‌های D به دست آورد. برای نمونه $D^- (\bar{c}d) \rightarrow \pi^0 (u\bar{u} - d\bar{d}) / \sqrt{2} + e^- + \bar{\nu}_e$ یا $D^- (\bar{c}d) \rightarrow K^0 (\bar{s}d) + e^- + \bar{\nu}_e$ واپاشی‌ها به ترتیب متناسب با $|V_{cd}|^2$ و $|V_{cs}|^2$ هستند.

اطلاعات تجربی بیشتر درباره $|V_{cd}|^2$ ، از پراکندگی ناکشسان ژرف نوترینوها از هسته‌های اتم، در طی

فرآیندهایی مانند زیر به دست می آید (ر.ک. پیوست د).

$$\nu_{\mu} + d \rightarrow \mu^{-} + c$$

هسته های اتمی چشمه سرشاری از هدفهای کوارک d می باشند. با تشخیص آن دسته از کوارک c ، که بنا به $\nu_{\mu} + d \rightarrow \mu^{-} + c$ وامی باشند، می توان به مقدار سطح مقطع تولید کوارک c ، به جای کوارک u پی برد. در کل جفت مشخصه $\mu^{+} \mu^{-}$ آفریده می شود. پس از کار فراوان در راستای خطوط بیان شده، و بدون وارد کردن شرط یکانی بودن، نتیجه می شود که

$$|V_{cd}| = 0.224 \pm 0.014, |V_{cs}| = 0.94 \pm 0.016$$

و پایشی های لپتونی مزون های B شامل $(\bar{b}d, b\bar{d}, \bar{b}u, b\bar{u})$ بهترین داده ها را در مورد $|V_{cb}|$ و $|V_{ub}|$ در اختیار قرار می دهند. تعداد سه آزمایشگاه تحقیقاتی برای اندازه گیری و پایشی های B ، ساخته شده اند که عبارتند از (Cleo) در کورنل، و (Babar) در استنفورد آمریکا، (Belle) در ژاپن. در این «کارخانه های مزون B »، چندین میلیون مزون B برای تحلیل و بررسی آفریده می شوند.

در مورد $|V_{cb}|$ ، عنصرهای ماتریس هادرونی، برای و پایشی هایی مانند $B^{-} \rightarrow D^{0} + e^{-} + \bar{\nu}_{e}$ ، را می توان با اختیار کوارک سنگین b در مزون $B^{-} (b, \bar{u})$ در تقریب نخست، محاسبه کرد. تحلیل این داده ها منجر به مقدارهای زیر گشته است

$$|V_{cb}| = 0.413 \pm 0.015, |V_{ub}| = 0.0347 \pm 0.0047$$

سه عنصر باقی مانده ماتریس KM ، کوارک s را هم در بر می گیرند. عمر میانگین کوارک s آنقدر کوتاه است که به احتمال بسیار زیاد پیش از جایگیر شدن در هادرونی با کوارک s ، وامی باشد. نمی توان از روش های گفته شده برای $(i = d, s \text{ یا } b)$ بهره گرفت.

۱۸-۴ نقض تقارن CP در و پایشی های کانون خنثی

در بخش ۱۴-۴ به این نتیجه مهم دست یافتیم که بخش کوارکی مدل استاندارد، تحت مزدوج بار، پاریتی ناوردا نمی باشد، مگر اینکه بتوان همه عنصرهای ماتریس KM را حقیقی کرد. با پارامتر بندی (۱۸-۲)، این امر مستلزم آن است که $\delta = 0$ باشد.

نقض CP نخستین بار در سال ۱۹۶۴ در و پایشی مزون های خنثی K مشاهده شد. حالت هایی با عدد کوارکی معلوم عبارتند از $K^{0} (d\bar{s})$ و $\bar{K}^{0} (\bar{d}s)$. این مزون ها در برهمکنش های قوی، مانند $\pi^{-} (\bar{u}d) + p (uud) \rightarrow K^{0} (d\bar{s}) + \Lambda (uds)$ آفریده می شوند. بدون در نظر گرفتن برهمکنش ضعیف، دو ذره K^{0} و \bar{K}^{0} دارای جرم برابرند و پایدار هستند. برهمکنش ضعیف مسؤول ناپایداری

آنهاست و اگر برای نمونه آهنگ واپاشی‌های $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ و $\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ متفاوت دیده شوند، نقض CP بارز می‌باشد. چنین تفاوتی ممکن است در نظریهٔ اختلال مرتبهٔ دوم برهمکنش ضعیف (مرتبهٔ اول در G_F ، ر.ک. (۱۴-۲۱)) رخ دهد. به این پدیده نقض مستقیم CP گویند.

$$|K^0\rangle \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle\right) \quad \text{و} \quad |K^+_1\rangle \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle\right)$$

عملگر CP بر روی K^0 و \bar{K}^0 عمل می‌کند و منجر به نتایج زیر می‌شود

$$CP|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle \quad \text{و} \quad CP|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle$$

پس $|K^+_1\rangle$ و $|K^0\rangle$ ویژه‌حالت‌های CP با ویژه‌مقدارهای به ترتیب $+1$ و -1 هستند. به تجربه، تفاوت جرمی این دو حالت برابر با $MeV \times 10^{-12} \times 3.5$ می‌باشد، که هر دو هم در واقع مشاهده شده‌اند. عمر میانگین این حالت‌ها نیز بسیار با یکدیگر اختلاف دارند.

$$\tau_S = 8.9 \times 10^{-11} \text{ s}, \quad \tau_L = 5.17 \times 10^{-8} \text{ s}$$

واپاشی‌های چیرهٔ K^0_S به دو پيون، عبارتند از: $\pi^+\pi^-$ یا $\pi^0\pi^0$. هریک از این حالت‌های دو پیونی، ویژه‌حالتی از CP با ویژه‌مقدار $+1$ هستند (مسأله ۱۸-۲). در مدهای واپاشی مزونی آن، واپاشی‌های چیرهٔ K^0_L ، به $\pi^0\pi^0\pi^0$ می‌باشد، و این سه حالت پیونی ویژه‌حالت‌هایی از CP با ویژه‌مقدار -1 هستند (مسأله ۱۸-۲). اما تقریباً از هر هزار واپاشی، سه واپاشی K^0_L به دو پيون با ویژه‌مقدار -1 برای CP می‌باشند. اگر CP پایسته می‌بود، می‌بایست K^0_L یا K^+_1 یا K^+_2 می‌داشتیم و نمی‌توانستیم دارای مدهای واپاشی دو پیونی و سه میونی باشیم. نقض CP در واپاشی‌های لپتونی K هم دیده می‌شود. این موارد نشان می‌دهند که نقض مستقیم CP مسؤول واپاشی‌های ناهنجار K^0_L نمی‌باشد، بلکه بیشتر این واپاشی‌ها ناشی از نقض CP در آمیختگی می‌باشد.

در پیوست د. نشان داده شده است که نه $|K^0_S\rangle$ و نه $|K^0_L\rangle$ هیچکدام ویژه‌حالتی از CP نمی‌باشند، بلکه هر کدام را می‌توان برحسب $|K^0\rangle$ و $|\bar{K}^0\rangle$ نوشت:

$$|K^0_S\rangle = N \left[p|K^0\rangle + q|\bar{K}^0\rangle \right]$$

(۱۲-۱۸)

$$|K^0_L\rangle = N \left[p|K^0\rangle - q|\bar{K}^0\rangle \right]$$

N ضریب بهنجارش: $\left(|p|^2 + |q|^2\right)^{-1/2}$ می‌باشد. توجه کنید که q برابر با p نیست. در پیوست د. نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان p و q را در مدل استاندارد محاسبه کرد.

می‌توان به سادگی $|K^0_S\rangle$ و $|K^0_L\rangle$ را برحسب $|K^+_1\rangle$ و $|K^+_2\rangle$ بیان کرد:

$$\begin{aligned} |K_s^0\rangle &= (N/\sqrt{2})[(p+q)|K_1^0\rangle + (p-q)|K_2^0\rangle] \\ |K_L^0\rangle &= (N/\sqrt{2})[(p-q)|K_1^0\rangle + (p+q)|K_2^0\rangle] \end{aligned} \quad (13-18)$$

با چشم‌پوشی از نقض مستقیم CP ، تنها K_1^0 می‌تواند به $\pi\pi$ واپاشد، و در نتیجه نسبت آهنگ واپاشی آنها برابر می‌شود با:

$$\frac{\Gamma(K_L) \rightarrow \pi\pi}{\Gamma(K_S) \rightarrow \pi\pi} = \frac{|p/q - 1|^2}{|p/q + 1|^2} = (5,25 \pm 0,05) \times 10^{-9} \quad (\text{از آزمایش})$$

CP تعریف $p/q = 1 + 2\varepsilon_K$ درمی‌یابیم که $|\varepsilon_K| = 2,3 \times 10^{-3}$ است؛ ε_K اندازه‌ای از نقض CP است.

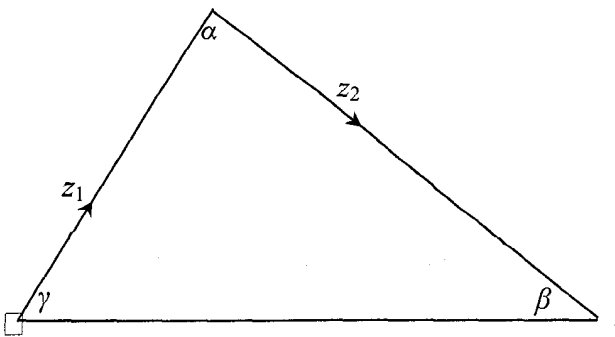
۵-۱۸ واپاشی‌های مزون B و آمیختگی B^0, \bar{B}^0

در کارخانه‌های مزون B ، بر اثر برخوردهای e^+e^- ، با باریک‌های انرژی برابر با جرم مزون، مزون B به فراوانی تولید می‌شود. این مزون تقریباً تنها به جفت‌های B^+, B^- یا B^0, \bar{B}^0 وامی‌باشد و در نتیجه چشمه‌ وافری از مزون‌های B می‌باشد. با جرمی در حدود $5,28 \text{ GeV}$ ، مزون‌های B به حالت‌های نهایی بسیار گوناگونی وامی‌باشند و بسیاری از آنها نقض CP را نشان می‌دهند. بیان چرایی این امر را می‌توان با در نظر گرفتن شرط یکانی بودن دریافت

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$z_1 + z_2 = 1 \quad (14-18)$$



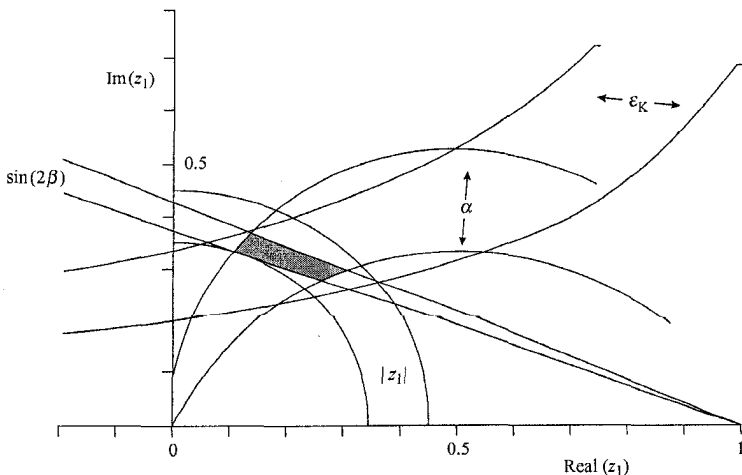
شکل ۲-۱۸ مثلث یکانی

و بنا به تعریف $Z_1 = -\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}$ و $Z_2 = -\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}$ می‌باشد. Z_1 و Z_2 اعداد مختلط هستند، و مثلی

در صفحه مختلط ایجاد می‌کنند. در شکل ۱۸-۲ مثلث مختلط نشان داده شده است. همچنین از پارامترهای داده شده در بخش ۱۸-۱ درمی‌یابیم که $V_{cd}V_{cb}^*$ تقریباً حقیقی و منفی است. با چشم‌پوشی از بخش بسیار کوچک موهومی آن، زاویه $\delta = \gamma$ ، فاز V_{ub}^* ، و β فاز V_{td}^* می‌باشد. از میان همه مثلث‌های یکانی، این مثلث تنها مثلث، با دسترسی مستقیم به عنصرهای ماتریس KM با فازهای بزرگ می‌باشد. همچنین این مثلث کوارک b و در نتیجه مزون‌های B را هم دربر می‌گیرد.

اندازه‌گیری زاویه α هم از طریق واپاشی‌های باردار و هم از طریق واپاشی‌های خنثی $B \rightarrow \pi\rho$ ، $B \rightarrow \rho\rho$ و $B \rightarrow \rho\rho$ ، و همچنین اندازه‌گیری زاویه β از طریق آمیختگی B^0 ، \bar{B}^0 ، اهمیت بسیار ویژه‌ای دارد. در پیوست د. چگونگی اندازه‌گیری $\sin(2\beta)$ در کارخانه‌های B در قالب مثالی نشان داده شده است.

مثلث یکانی با مکان رأس آن مشخص می‌گردد. رأس مثلث به دو پارامتر، مانند بخش‌های حقیقی و موهومی Z_1 نیاز دارد. یک پارامتر تعیین کنند. خطی را بر روی صفحه مختلط و پارامتر دیگر نواری با خط‌های معین می‌باشد. چهار نوار از این گونه نوارها، که از آزمایش به وجود آنها پی برده شده است، در شکل ۱۸-۳ نشان داده شده‌اند. نکته بسیار مهم که در این شکل نشان داده می‌شود، سازگاری بین چهار اندازه‌گیری مستقل است. اشاره‌ای مبنی بر شکست مدل استاندارد وجود ندارد. می‌توان فاز KM ، یعنی $\delta (\approx \nu)$ ، را در ناحیه $\delta = 57^\circ \pm 14^\circ$ مشاهده کرد. رأس مثلث یکانی در یا نزدیک به، ناحیه سایه زده شکل می‌باشد.



شکل ۱۸-۳ رأس مثلث یکانی در داخل، یا نزدیک به، ناحیه سایه خورده نمودار می‌باشد.

۱۸-۶ قضیه CPT

عمل وارونی زمان $t \rightarrow t' = -t$ را با T نشان می‌دهیم. قضیه CPT بیان می‌دارد که تحت شرایط بسیار کلی، نظریه کوانتومی میدان ناوردای لورنتسی، تحت ترکیب عمل‌های مزدوج بار، وارونی فضا، و وارونی زمان، ناوردا می‌باشد. این قضیه را پائولی در سال ۱۹۵۵ میلادی کشف کرد.

بنا بر قضیه CPT در مدل استاندارد، از آنجا که CP تقارنی از این مدل نمی‌باشد، پس وارونی زمان T هم تقارنی از این مدل نیست. می‌توان درباره شواهدی بر «پیکان زمان» اندیشید.

مسئله‌ها

۱-۱۸ نمودارهای مدل کواریکی را برای واپاشی‌های زیر رسم کنید.

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

نشان دهید که دامنه این واپاشی‌ها به ترتیب متناسب با V_{us} و V_{ud} می‌باشد، و

$$V_{us}/V_{ud} = \tan \theta_{12}$$

با چشم‌پوشی از اثرهای ناشی از تفاوت جرم کواریک‌ها، آیا مقدار محاسبه شده برای نسبت

$$\sin \theta_{12} / \alpha_K / \alpha_\pi$$

در مسئله ۹-۱۰ برابر با V_{us}/V_{ud} است. از این مشاهده برای برآورد مقدار θ_{12} بهره بگیرید.

۱۸-۲ مزون π^0 تحت عمل همیوگی بار، C ، زوج می‌باشد، یعنی $C|\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle$. همچنین

$$C|\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle \text{ و } C|\pi^-\rangle = |\pi^+\rangle \text{ است.}$$

نشان دهید که حالت‌های دو پیونی، $|\pi^0, \pi^0\rangle$ یا $|\pi^+, \pi^-\rangle$ در حالت نسبی S ، با مرکز جرم

ساکن، در رابطه $CP|\pi, \pi\rangle = |\pi, \pi\rangle$ صدق می‌کنند.

۱۸-۳ نشان دهید که حالت سه مزونی π^0, π^0, π^0 ، با تکانه زاویه‌ای صفر و مرکز جرم ساکن، در

$$\text{رابطه } CP|\pi^0, \pi^0, \pi^0\rangle = -|\pi^0, \pi^0, \pi^0\rangle \text{ صدق می‌کند.}$$

۱۸-۴ نشان دهید که مساحت مثلث شکل ۱۸-۵ برابر با $J/2$ است.

۱۸-۵ نشان دهید اگر میدان‌های کواریکی تحت تغییر فاز قرار بگیرند

$$d \rightarrow e^{i\theta_d} d, b \rightarrow e^{i\theta_b} b$$

مثلث شکل ۱۸-۵ به اندازه زاویه $(\theta_d - \theta_b)$ می‌چرخد.

در این فصل به معرفی پدیدارشناسی جرم و آمیختگی نوترینوها می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان این پدیدارشناسی را با تقارن شکسته گروه $SU(2) \times U(1)$ در مدل استاندارد همساز کرد. تا فصل ۲۱ فرض می‌کنیم که نوترینوها و پادنوترینوها فرمیون‌های دیراکی هستند که متفاوت با یکدیگرند. در فصل ۲۱ فرض را بر این قرار می‌دهیم که نوترینوها ذرات مایورانا هستند.

این پدیدارشناسی در نتیجه مشاهده این موضوع بوجود آمده است که تعداد نوترینوهای رسیده به زمین از خورشید حدود نصف تعداد چشم‌داشتی می‌باشد. تعداد چشم‌داشتی نوترینوها از دانش بشر درباره واکنش‌های هسته‌ای درون خورشید و فیزیک درون خورشید به دست می‌آید. اکنون این مشاهده‌ها این گونه توضیح داده می‌شود که با گذر زمان، ایجاد نوترینوها در درون خورشید و مشاهده آنها بر روی زمین، برخی از نوترینوهای الکترون به نوترینوهای میون و نوترینوهای تاو تبدیل می‌شوند. این تبدیل‌ها قانونهای پایستگی بخش ۹-۳ را نقض می‌کنند. نشان خواهیم داد که سبب رخ دادن این تبدیل‌ها این است که نوترینوهای الکترون، میون و تاو بدون جرم نیستند، بلکه همانگونه که پونته‌کوروو^۱ در سال ۱۹۶۸ اعلام کرد، آن است که نوترینوها دارای جرم معینی هستند، یعنی ویژه‌حالت‌های عملگر جرمی نمی‌باشند.

۱-۱۹ جرم نوترینوها

کلی‌ترین عبارت جرمی نوترینو را، که ناوردای لورنتسی باشد، و بتوان آن را در چگالی لاگرانژی مدل استاندارد وارد کرد، به صورت زیر می‌باشد:

$$L_{\text{mass}}^{\nu}(x) = -\sum_{\alpha, \beta} v_{\alpha L}^{\dagger}(x) m_{\alpha\beta} v_{\beta R}(x) + \text{مختلط مزدوج} \quad (1-19)$$

که $m_{\alpha\beta}$ ماتریس مختلط 3×3 می‌باشد، و β و α هم روی هر سه گونه نوترینوی الکترون، میون و تاو جمع بسته می‌شوند. $v_{\alpha R}(x)$ و $v_{\alpha L}(x)$ هم میدان‌های اسپینوری دو مؤلفه‌ای چپگرد و راستگرد هستند. (اینجا اندیس‌های اسپینوری حذف شده است).

ماتریس مختلط دلخواه را می‌توان با کمک دو ماتریس یکانی به صورت قطری و حقیقی درآورد

(ر.ک. مسأله الف-۴). در این صورت می‌توانیم $m_{\alpha\beta}$ را به صورت زیر بنویسیم

$$m_{\alpha\beta} = \sum_i U_{\alpha i}^{L*} m_i U_{\beta i}^R \quad (۲-۱۹)$$

که m_i ها سه مقدار جرمی مثبت و حقیقی هستند؛ U^L و U^R ماتریس‌های یکانی می‌باشند. مشخص است که می‌توان به جای $U_{\beta i}^R$ و $U_{\alpha i}^L$ ، ماتریس‌های $e^{-i\delta_i} U_{\beta i}^R$ و $e^{-i\delta_i} U_{\alpha i}^L$ قرار داد که δ_i ها سه فاز دلخواه هستند.

اگر اکنون میدان‌ها را به صورت زیر تعریف کنیم

$$v_{iL}(x) = \sum_{\alpha} U_{\alpha i}^L v_{\alpha L}(x) \quad (۳-۱۹)$$

$$v_{iR}(x) = \sum_{\alpha} U_{\alpha i}^R v_{\alpha R}(x)$$

جمله جرمی شکل استاندارد دیراکی (۵-۱۲) را به خود می‌گیرد

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^v(x) = -\sum_i m_i \left(v_{iL}^{\dagger} v_{iR} + v_{iR}^{\dagger} v_{iL} \right) \quad (۴-۱۹)$$

به آسانی می‌توان نشان داد که تبدیل‌هایی از گونه معادله‌های (۱۹-۳)، شکل دیراکی جمله‌های دینامیکی را حفظ می‌کند:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{dyn}}^v(x) &= \sum_{\alpha} i \left[v_{\alpha L}^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} v_{\alpha L} + v_{\alpha R}^{\dagger} \sigma^{\mu} \partial_{\mu} v_{\alpha R} \right] \\ &= \sum_{\alpha} i \left[v_{iL}^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} v_{iL} + v_{iR}^{\dagger} \sigma^{\mu} \partial_{\mu} v_{iR} \right] \end{aligned} \quad (۵-۱۹)$$

$(\mathcal{L}_{\text{dyn}}^v + \mathcal{L}_{\text{mass}}^v)$ چگالی لاگرانژی نوترینوهای آزاد به جرم m_1, m_2, m_3 است. از آنجا که U^L و U^R ماتریس‌های یکانی هستند، و ماتریس یکانی U در رابطه $U U^{\dagger} = U^{\dagger} U = I$ صدق می‌کند، می‌توانیم معادله‌های (۱۹-۳) را وارون کنیم و به معادله‌های زیر برسیم

$$v_{\alpha L}(x) = \sum_i U_{\alpha i}^{L*} v_{iL}(x) \quad (۶-۱۹)$$

$$v_{\alpha R}(x) = \sum_i U_{\alpha i}^{R*} v_{iR}(x)$$

نوترینوهای الکترون، میون و تاو آمیزه‌ای از نوترینوهای با جرم معین هستند. خواهیم دید که این موضوع به پدیده نوسان‌های نوترینو منجر می‌شود.

۲-۱۹ جریان‌های ضعیف

برهمکنش نوترینوها با یکدیگر و دیگر ذره‌ها از طریق جریان ضعیف می‌باشد. جریان ضعیف باردار (۲-۹)، که با استفاده از رابطه (۱۹-۶) برحسب ویژه‌میدان‌های جرم نوترینو بیان شد، به صورت زیر درمی‌آید

$$j^\mu = \sum_\alpha \alpha_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu v_{\alpha L} = \sum_{\alpha,i} \alpha_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu U_{\alpha i}^{L*} v_{iL} \quad (۷-۱۹)$$

که α_L ها میدان‌های لپتونی باردار هستند e, μ, τ .

جریان خنثی باردار (۱۷-۹) به شکل خود باقی می‌ماند: از آنجا که ماتریس U^L یکانی است، پس

$$\sum_\alpha (v_{\alpha L})^\dagger \tilde{\sigma}^\mu v_{\alpha L} = \sum_i (v_{iL})^\dagger \tilde{\sigma}^\mu v_{iL} \quad (۸-۱۹)$$

برای نمونه، که چگونه این تغییر شکل‌ها، بر فیزیک گفته شده در فصل‌های پیش، اثر می‌گذارد، برهمکنش مؤثر پیون را در نظر می‌گیریم.

$$\mathcal{L}_{int} = \alpha_\pi \left[j^\mu \partial_\mu \Phi_\pi + j^{\mu\dagger} \partial_\mu \Phi_\mu^\dagger \right]$$

فرمول آهنگ واپاشی بنابا (۳-۹) برای برهمکنش $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ به صورت سه آهنگ واپاشی زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{\tau(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)} = \frac{\alpha_\pi^2}{4\pi} \left(1 - \frac{v_e}{c} \right) p_e^\dagger E_e \left| U_{ei}^L \right|^2, \quad i = 1, 2, 3$$

در طی روند به دست آوردن نتیجه بالا، از آثار کوچک بودن جرم نوترینوها صرف نظر شده است. به سبب کوچک بودن جرم نوترینوها، (ر.ک. جدول ۱-۲) امکان تمایز تفاوت انرژی بین مدهای واپاشی، با فن‌آوری کنونی آنها، وجود ندارد. آهنگ واپاشی کل اندازه‌گیری می‌شود، و از آنجا که داریم $\sum_i U_{ei}^L U_{ei}^{L*} = 1$ ، عبارت (۳-۹) را برای آن اصلاح می‌کنیم. برای فرآیندهای $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ و $\pi^- + \nu_\tau \rightarrow \tau^-$ ، که در بخش ۲-۹ درباره آنها بحث شد، و همچنین برای نتیجه‌های واپاشی میون در بخش ۴-۹، با همین لاگرانژی مؤثر می‌توان نتیجه‌گیری مشابهی انجام داد.

۳-۱۹ نوسان‌های نوترینو

با توجه به چگالی لاگرانژی (۱-۱۹) با (۵-۱۹)، معادله‌های زیر برای نوترینوی آزاد به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} i \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu v_{\alpha L} - m_{\alpha\beta} v_{\beta R} &= 0 \\ i \sigma^\mu \partial_\mu v_{\alpha R} - m_{\beta\alpha}^* v_{\beta L} &= 0 \end{aligned} \quad (۹-۱۹)$$

این معادله‌ها گسترشی از معادله‌های دیراک (۵-۱۱) می‌باشد. در این بخش جواب این معادله‌ها را تابع‌های میدان نوترینو نمی‌دانیم بلکه درحکم موج نوترینو برای سه گونه $\alpha = e, \mu, \tau$ می‌شناسیم. به دنبال ویژه‌تابع‌های انرژی با بستگی زمانی e^{-iEt} می‌باشیم.

نوترینوهای به جرم صفر دارای جواب‌های موج مسطح با هلیسیتی منفی می‌باشند، (ر.ک. بخش ۶-۶). برای موجی که در راستای Z می‌باشد،

$$v_{\alpha L}(z, t) = e^{-iE(t-z)} f_{\alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_{\alpha R} = 0$$

که f_{α} ها ثابت هستند.

با در نظر گرفتن جرم برای نوترینوها، و بستگی f_{α} به Z ، این جواب‌ها به صورت زیر درمی‌آیند:

$$v_{\alpha L}(z, t) = e^{-iE(t-z)} f_{\alpha}(z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(۱۰-۱۹)

$$v_{\alpha R}(z, t) = e^{-iE(t-z)} g_{\alpha}(z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

با جایگذاری این جواب‌ها در معادله‌های دیراک، به مجموعه معادله‌های زیر می‌رسیم

$$i \frac{d}{dz} f_{\alpha}(z) - m_{\alpha\beta} g_{\beta}(z) = 0$$

$$\left(2E - i \frac{d}{dz} \right) g_{\gamma}(z) - m_{\alpha\gamma}^* f_{\alpha}(z) = 0$$

(۱۱-۱۹)

$$\tilde{\sigma}^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \sigma^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

به‌ازای مقدارهایی از انرژی نوترینو، که بسیار بزرگتر از جرم آنهاست، می‌توانیم از $-id g_{\gamma} / dz$ ، در مقایسه با $2E g_{\gamma}$ ، چشم‌پوشی کنیم (ر.ک. مسأله ۱۹-۱) و رابطه زیر را به دست آوریم

$$g_{\gamma}(z) = m_{\alpha\gamma}^* f_{\alpha}(z) / 2E$$

(۱۲-۱۹)

و در نتیجه با جایگذاری این سه معادله جفت‌شده، به‌ازای $f_{\alpha}(z)$ ، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$i \frac{d}{dz} f_{\beta}(z) = m_{\beta\gamma} m_{\alpha\gamma}^* f_{\alpha}(z) / 2E$$

با قطری کردن این سه معادله جفت‌شده به‌ازای $f_{\alpha}(z)$ ، به معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$i \frac{d}{dz} f_{\beta}(z) = U_{\beta i}^{L*} U_{\alpha i}^L f_{\alpha}(z) m_i^{\nu} / \nu E \quad (13-19)$$

ملاحظه می‌شود که در سمت راست، U^R پدیدار نشد، به گونه‌ای که دیگر گذاشتن بر حسب L زاید است و از این پس تا پایان این بخش $U_{\alpha i}^L = U_{\alpha i}$ قرار می‌دهیم. برای حل این معادله‌ها ترکیب‌های خطی زیر را می‌سازیم

$$f_i(z) = U_{\alpha i} f_{\alpha}(z); \quad i = 1, 2, 3 \quad (14-19)$$

که با بکارگیری معادله (۱۳-۱۹) در معادله زیر صدق می‌کنند

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dz} f_i(z) &= i U_{\alpha i} \frac{d}{dz} f_{\alpha}(z) = U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* U_{\beta j} m_j^{\nu} f_{\beta}(z) / \nu E \\ &= \delta_{ij} U_{\beta j} m_j^{\nu} f_{\beta}(z) / \nu E = \left(m_i^{\nu} / \nu E \right) f_i(z) \end{aligned} \quad (15-19)$$

این معادله‌های جفت‌نشده دارای جواب‌های ساده‌ی زیر هستند

$$f_i(z) = e^{-(m_i^{\nu} / \nu E) z} f_i(0)$$

با وارد کردن ضریب $e^{-iE(t-z)}$ ، تابع موج نوترینو ν_i به صورت زیر درمی‌آید

$$\nu_i(z, t) = e^{-iEt + i(E - m_i^{\nu} / \nu E) z} f_i(0) \quad (16-19)$$

انرژی این حالت E و تکانه آن $p_i = E - m_i^{\nu} / \nu E$ می‌باشد. به ازای $m_i^{\nu} \ll \nu E$ رابطه نسبیتهای ویژه حالت‌های جرمی ν_i برای ذره‌ای به جرم m_i برقرار می‌باشد. بنابراین نوترینوی ν_i جرمی برابر با m_i دارد. $\nu_i(z, t)$ تابع‌های موج چپگرد (۱۹-۳) هستند.

فرض کنید که در $z = 0$ نوترینوی گونه α زاده شود. تابع موج ν_{α} یک برهم‌نهی خطی از ویژه حالت‌های جرمی ν_i با $f_i(0) = U_{\alpha i} f_{\alpha}(0)$ می‌باشد. ویژه حالت‌های جرمی مختلف با فازهای مختلف گسیل می‌شوند، به طوری که گونه نوترینو، متغیری از z می‌باشد.

$$f_{\beta}(z) = U_{\beta i}^* f_i(z) = U_{\beta i}^* e^{-i(m_i^{\nu} / \nu E) z} U_{\alpha i} f_{\alpha}(0) \quad (17-19)$$

به بیان دقیق‌تر، نوترینو به شکل بسته موجی در ناحیه‌ای جایگزیده از فضا زمان حول نقطه‌ای مانند $z = 0, t = 0$ زاده می‌شود. درک درست گسیل مستلزم ساختن بسته موج مناسب می‌باشد. سرعت سیر بسته موج را تقریباً برابر با سرعت سیر نور در نظر می‌گیریم که اندکی هم اعوجاج دارد، تا پس از طی فاصله $z = D$ ، دامنه احتمال یافتن نوترینوی گونه β برابر با $f_{\beta}(D)$ $e^{-iE(t-D)}$ خواهد بود.

احتمال گذار $P_D(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta})$ برابر است با

$$P_D(v_\alpha \rightarrow v_\beta) = \left| U_{\beta i}^* e^{-i(m_i^\gamma / \gamma E)z} U_{\alpha i} \right|^2$$

$$= \sum_{i,j} U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* e^{-i(\Delta m_{ij}^\gamma D / \gamma E)}$$
(۱۸-۱۹)

بخش $\text{Re}(U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^*)$ متقارن و بخش $\text{Im}(U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^*)$ تحت تعویض i, j پادمقارن است. با بهره‌گیری از این موضوع و یکانی بودن U می‌توان احتمال گذار را نوشت

$$P_D(v_\alpha \rightarrow v_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} \text{Re}(U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^*) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ij}^\gamma D}{4E} \right)$$

$$+ 2 \sum_{i>j} \text{Im}(U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^*) \sin \left(\frac{\Delta m_{ij}^\gamma D}{2E} \right)$$
(۱۹-۱۹)

که $\Delta m_{ij}^\gamma = m_i^\gamma - m_j^\gamma$ می‌باشد.

این عبارت‌ها پدیده‌نوسان‌های نوترینو را توصیف می‌کنند. توجه داریم که از آزمایش‌های طراحی شده برای مشاهده و اندازه‌گیری نوسان‌های نوترینو (فصل ۲۰)، تنها می‌توان مقادیرهایی برای میزان اختلاف Δm_{ij}^γ به‌دست آورد، و نمی‌توان مقداری برای خود m_i به‌دست آورد. مقدار اختلاف‌های Δm_{ij}^γ باید در شرط زیر صدق کند:

$$\Delta m_{12}^\gamma + \Delta m_{23}^\gamma + \Delta m_{31}^\gamma = 0$$

اگر ضرایب c و \hbar را هم منظور کنیم، رابطه بالا به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\Delta m_{ij}^\gamma D}{4E} = \Delta m_{ij}^\gamma c^4 \left(\frac{D}{\hbar c} \right) \frac{1}{4E} = 1,27 \left(\frac{\Delta m_{ij}^\gamma c^4}{1\text{eV}^2} \right) \left(\frac{D}{1\text{km}} \right) \left(\frac{1\text{GeV}}{E} \right)$$
(۱۹-۲۰)

با در نظر گرفتن این معادله‌ها برای تابع موج‌های مزدوج مختلط v_α^c (ر.ک. بخش ۷-۴)، فرمولی همانند به‌دست می‌آید، با این تفاوت که به‌جای $U_{\alpha i}$ مزدوج مختلط آن یعنی $U_{\alpha i}^*$ ، جانشین می‌شود. اگر $\text{Im}(U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^*)$ صفر نباشد، علامت آن برای پادنوترینوها تغییر می‌کند و $P_D(\bar{v}_\alpha \rightarrow \bar{v}_\beta) \neq P_D(v_\alpha \rightarrow v_\beta)$ می‌شود. بخش لپتونی به بخش کوارکی می‌پیوندد و ناتقارنی ماده-پادماده را نشان می‌دهد.

۱۹-۴ اثر M S W

در بسیاری از آزمایش‌ها، نوسان‌های نوترینو کاملاً آزاد در نظر گرفته نمی‌شوند، بلکه در طی مسیر خود از چشمه به آشکارساز، از ماده می‌گذرند. این امر سبب می‌شود که تابع موج‌های آزادی را که در بخش‌های

پیشین بحث شد، تصحیح کنیم. به ویژه آنکه ماده در بردارنده الکترون‌هایی است که از طریق جریان‌های باردار ضعیف با نوترینوها برهمکنش می‌کنند. لاگرانژی برهمکنش مؤثر برای این فرآیند از رابطه (۹-۸) به دست می‌آید:

$$L_{int} = -\sqrt{2} G_F g_{\mu\nu} j^\mu j^{\nu\dagger}$$

که با توجه به رابطه (۹-۲)، $j^{\nu\dagger} = e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\nu e_L$ ، داریم $j^\mu = e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{eL}$ و در نتیجه

$$L_{int} = -\sqrt{2} G_F g_{\mu\nu} (e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{eL}) (\nu_{eL}^\dagger \tilde{\sigma}^\nu e_L)$$

$$= -\sqrt{2} G_F g_{\mu\nu} (e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu e_L) (\nu_{eL}^\dagger \tilde{\sigma}^\nu \nu_{eL}) \quad (19-21)$$

در مرحله آخر از تبدیل فیروز (پیوست الف) استفاده شده است.

مقدار چشم‌داشتی می‌شود $\frac{1}{\gamma} N_e(x)$ که $e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\nu e_L = e_L^\dagger e_L = \frac{1}{\gamma} N_e(x)$ ، که چگالی کل الکترونی در مکان x می‌باشد. ضریب $1/2$ ناشی از آن می‌باشد که تنها مؤلفه‌های میدان چپگرد الکترونی منظور شده‌اند. همچنین، بجز آثار ممکن فرومغناطیسی، می‌توان انتظار داشت که مقدار چشم‌داشتی برابر $e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\nu e_L = 0$ است. لازم است که چگالی لاگرانژی نوترینو دارای جمله اضافی $-\sqrt{2} G_F N_e(x) \nu_{eL}^\dagger \nu_{eL}$ باشد. این نتایج در معادله‌های تصحیح شده $f(z)$ نیز موجود است:

$$i \frac{d f_\beta(z)}{d z} - m_{\beta\gamma} m_{\alpha\gamma}^* f_\alpha(z) / 2 E - V(z) \delta_{\beta e} f_e(z) = 0$$

یا هم‌ارز آن (ر.ک. معادله ۱۹-۱۵)

$$i \frac{d f_i(z)}{d z} = \frac{m_i^2}{2 E} f_i(z) + V(z) U_{ei} U_{ej}^* f_j(z) \quad (19-22)$$

که در آن $V(z) = \sqrt{2} N_e(z) G_F$ می‌باشد.

ولفنشتاین^۱ در سال (۱۹۷۸) به اثر ماده بر انتشار نوترینوها اشاره کرد، و بعدها میخایف^۲ و سمیرنف^۳ (۱۹۸۶) با جزئیات شرح دادند. اکنون این اثر با نام M S W شناخته می‌شود.

جریان‌های ضعیف خنثی در چگالی لاگرانژی از همه گونه‌های نوترینو هم سهم هستند، و ضریب فاز مشترک دیگری در تابع موج‌های همه گونه‌ها ایجاد می‌کنند، که اثری بر نوسانات نوترینو ندارد.

1- Wolfenstein
2- Mikheyev
3- Smirnov

۱۹-۵ جرم نوترینوها و مدل استاندارد

در نظریهٔ الکتروضعیف واینبرگ-سلام برای لپتون‌ها (فصل ۱۲)، سه میدان دوتایی لپتونی چپگرد دارد:

$$\mathbf{L}_e = \begin{pmatrix} L_{eA} \\ L_{eB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_\mu = \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_\tau = \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$$

و سه یکتایی e_R , μ_R , τ_R وجود دارند. تحت تبدیلات $SU(2)$ ، داریم

$$\mathbf{L}_\alpha \rightarrow \mathbf{L}'_\alpha = \mathbf{U} \mathbf{L}_\alpha, \quad \alpha_R \rightarrow \alpha'_R = \alpha_R$$

جرم دار بودن نوترینوهای دیراکی اشاره به وجود میدان‌های راستگرد نوترینو دارد. در مدل استاندارد میدان‌های راستگرد نوترینویی، باید همانند میدان‌های راستگرد لپتون‌های باردار یکتایی $SU(2)$ باشند. در این مدل جرم نوترینوها همانند کوارک‌های u, c, t با جفت شدن با میدان هیگز ایجاد می‌شود. بنابراین جفت‌شدگی میدان هیگز با نوترینوها که تحت $SU(2)$ هم ناوردا باشد، به صورت زیر است (معادلهٔ (۱۴-۹) و (۱۴-۳))

$$L_{\text{Higgs}}^\nu = -\sum_{\alpha\beta} \left[G_{\alpha\beta}^\nu (L_\alpha^\dagger \varepsilon \Phi^*) \nu_{\beta R} - G_{\alpha\beta}^{\nu*} \nu_{\beta R}^\dagger (\Phi^T \varepsilon L_\alpha) \right] \quad (19-23)$$

که $G_{\alpha\beta}^\nu$ ماتریس مختلط 3×3 می‌باشد. شکست تقارن منجر به ایجاد جملهٔ جرمی برای نوترینو می‌شود.

$$L_{\text{mass}}^\nu = -\phi_0 \sum_{\alpha\beta} \left[G_{\alpha\beta}^\nu \nu_{\alpha L}^\dagger \nu_{\beta R} + G_{\alpha\beta}^{\nu*} \nu_{\beta R}^\dagger \nu_{\alpha L} \right] \quad (19-24)$$

اگر $G_{\alpha\beta}^\nu \phi_0$ را با $m_{\alpha\beta}$ متحد کنیم، رابطهٔ بالا جملهٔ جرمی معادلهٔ (۱۹-۱) می‌باشد.

۱۹-۶ پارامتربندی ماتریس U

پارامترهای m_e, m_μ, m_τ و g_2 را حقیقی و مثبت در نظر می‌گیریم، البته در واقع این کار قرارداد فازی می‌باشد: هر فازی از این پارامترها را می‌توان در ضریب فازهای ضرب شونده در میدان‌های لپتونی جذب کرد، و چنین ضریب فازهایی دارای هیچ معنای فیزیکی نیستند. همچنین تعریف ماتریس جرمی $m_{\alpha\beta}$ به قرارداد تعیین فاز بستگی دارد.

شش میدان نوترینوی $\nu'_{\alpha R}$ ، $\nu'_{\alpha L}$ و شش میدان لپتونی باردار α'_R ، α'_L با رابطه‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$\nu_{\alpha L} = e^{i\theta_\alpha} \nu'_{\alpha L}, \quad \nu_{\alpha R} = e^{i\gamma_\alpha} \nu'_{\alpha R}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_L \\ \alpha_R \end{pmatrix} = e^{i\theta_\alpha} \begin{pmatrix} \alpha'_L \\ \alpha'_R \end{pmatrix}$$

شکل بخش لپتونی چگالی لاگرانژی الکتروضعیف، که در فصل ۱۲ (معادلهٔ (۱۲-۱۲)) توصیف شد، و جریان باردار (معادلهٔ (۱۲-۱۶)) و جریان خنثی، (معادلهٔ (۱۲-۲۳))، که نوترینو را به میدان‌های Z و W^\pm

جفت می کنند، تحت این تبدیل ها تغییر نمی کند. شکل ماتریس جرمی نوترینو بدون تغییر باقی می ماند، اما به جای $m_{\alpha\beta}$ جمله زیر قرار می گیرد.

$$m'_{\alpha\beta} = e^{-i\theta_\alpha + i\gamma_\beta} m_{\alpha\beta}$$

با تعریف دوباره $m_{\alpha\beta}$ ، به این روش، محتوای فیزیکی نظریه بدون تغییر باقی می ماند.

ماتریس یکسانی U^L با $m_{\alpha\beta} = \sum_i U_{\alpha i}^{L*} m_i U_{\beta i}^R$ تعریف می شود. در نتیجه می توانیم $U_{\alpha i}^{L'} = e^{i(\theta_\alpha - \delta_i)} U_{\alpha i}^L$ را تعریف کنیم. ضریب های فاز $e^{i\delta_i}$ در بخش ۱۹-۱ معرفی شدند. همانگونه که در مبحث مربوط به ماتریس KM در بخش ۱۴-۲ گفته شد، زمانی که ضریب های فاز غیر فیزیکی را بیرون بکشیم، ماتریس حاصل به چهار پارامتر فیزیکی بستگی پیدا می کند. در اینجا هم ماتریس مورد نظر را همانند ماتریس KM پارامتر بندی می کنیم، با این تفاوت که به جای θ_{ν_j} ، θ_{μ_j} ، کمیت θ_{μ_j} و به جای θ_{ν_j} کمیت θ_{τ_j} را جایگذاری می کنیم. می توان ماتریس حاصل را ماتریس آمیختگی جرمی نوترینو نامید.

جمله نشان دهنده ناتقارنی ماده-پادماده در $P_D(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)$ عبارتست از (ر.ک. مسأله ۱۹-۲)

$$2 \sum_{i>j} \text{Im} (U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^*) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 D}{2E} \right)$$

○ اگر $\alpha = \beta$

$$= \begin{cases} \pm 8J \sin \left(\frac{\Delta m_{\nu_1 \nu_2}^2 D}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{\nu_2 \nu_3}^2 D}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{\nu_1 \nu_3}^2 D}{4E} \right) & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که $J = c_{e\tau} c_{e\mu}^2 c_{\mu\tau} s_{e\tau} s_{e\mu} s_{\mu\tau} \sin \delta$ ، (ر.ک. ۱۴-۱۸ و ۱۴-۱۹) می باشد. علامت منفی برای گذارهای $e \rightarrow \mu$ ، $\mu \rightarrow \tau$ ، $\tau \rightarrow e$ و علامت مثبت برای بقیه گذارها می باشد.

۱۹-۷ پایستگی عدد لپتونی

با تعریف قراردادهای مربوط به فاز، که پارامترهای مربوط به ماتریس آمیختگی نوترینو را ثابت می کند، چگالی لاگرانژی تنها دارای یک تقارن جهانی $U(1)$ می باشد. اگر همه میدان های لپتونی، اعم از باردار و خنثی، چپگرد و راستگرد در ضریب فاز $e^{i\delta}$ ضرب شوند، چگالی لاگرانژی بدون تغییر باقی می ماند. با پیروی از همان روش بخش ۷-۱، در δ تغییر جزئی دلخواهی وابسته به فضا و زمان در نظر می گیریم، و نتیجه می گیریم که جریان پایسته ای وجود دارد:

جرم و آمیختگی نوترینوها: نتیجه‌های آزمایشگاهی

سطح مقطع برای برهمکنش‌های نوترینو-لپتون و نوترینو-کوارک بسیار کوچک می‌باشد: ممکن است مجموعه داده‌های حاصل از یک آزمایش ویژه بیش از چندین سال عمومیت یابند و بکار روند. هدف آزمایش‌های نوترینو عبارتند از: تأیید وجود نوسان‌های نوترینو، آزمودن اعتبار نظریه فصل ۱۹، اندازه‌گیری پارامترهای ماتریس آمیختگی U و تعیین ویژه‌حالت‌های جرمی نوترینو. در این فصل نتیجه برخی از تازه‌ترین کارهای تجربی را ارائه و چگونگی به‌دست آوردن آنها را بیان خواهیم کرد.

۱-۲۰ مقدمه

امکان وجود نوترینوهای سترون را اکنون کناری گذاشته، می‌پنداریم که سه ویژه‌حالت جرم نوترینو وجود داشته باشد، که آنها را با $i = 1, 2, 3$ نشان‌گذاری می‌کنیم. از اندازه‌گیری نوسان‌های نوترینو، مقدار تفاوت Δm_{ij}^2 (جرم)، به‌دست می‌آید:

$$\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$$

از آزمایش برآورد می‌شود که

$$1,3 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 < |\Delta m_{\nu_{\tau\tau}}^2| < 3 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$$

$$6,5 \times 10^{-5} \text{ eV}^2 < |\Delta m_{\nu_{\tau 1}}^2| < 8,5 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$$

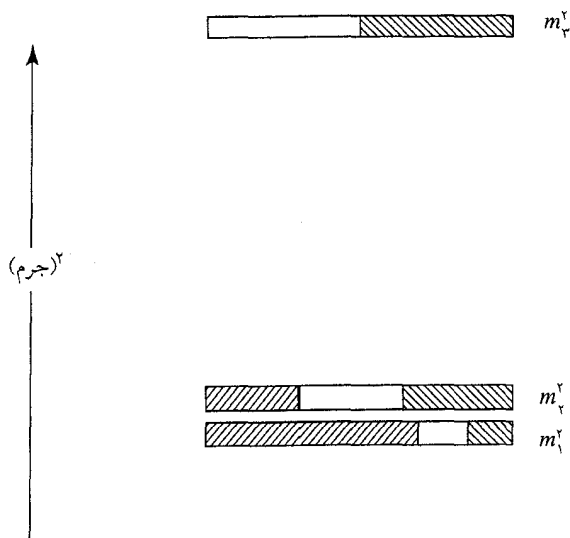
پس مقدار $\Delta m_{\nu_{\tau 1}}^2 = \Delta m_{\nu_{\tau\tau}}^2 + \Delta m_{\nu_{11}}^2$ می‌باشد.

برای انجام دادن محاسبه‌های عددی روشن‌گر در این فصل، مقدار $|\Delta m_{\nu_{\tau\tau}}^2| = 2 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$ و

$|\Delta m_{\nu_{11}}^2| = 7 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ را اختیار خواهیم کرد.

ماتریس آمیختگی یکانی 3×3 را به‌صورت تقریبی زیر در نظر می‌گیریم

$$U = \begin{bmatrix} c & s & s_{e\tau} e^{i\delta} \\ -s/\sqrt{2} & c/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ s/\sqrt{2} & -c/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (1-20)$$



شکل ۱-۲۰ طیف مجذور جرمی سه نوترینو. کسر V_e هر ویژه حالت جرمی با هاشورهای راست‌نشین، کسر V_μ سفید، و کسر V_τ با هاشورهای راست‌نشین مشخص شده‌اند (ر.ک. گزارش C. Kayser, Particle Data Group, 2004). خط پایه مجذور جرمی شناخته شده نیست.

که $C \approx \cos \theta_{e\tau} = 0,84$ و $S \approx \sin \theta_{e\tau} = 0,54$ می‌باشد.

مقدار $|S_{e\tau}|^2 < 0,05$ برآورد می‌شود. جمله $S_{e\tau} e^{i\delta}$ با $\sin \delta \neq 0$ پایستگی CP را نقض می‌کند و منجر به ناتقارنی بین ماده و پادمی می‌شود. چنین ناتقارنی هنوز، (سال ۲۰۰۶)، تشخیص داده نشده است. اگر $S_{e\tau} \neq 0$ باشد، تصحیح‌های مختلط کوچکی برای عناصر این ماتریس وجود دارد. (با اختیار $S_{e\tau} = S_{\nu\tau} = S_{\nu\mu} = S_{\nu e} = 1/\sqrt{2}$ ، $C_{e\tau} (=C_{\nu\tau}) = C_{\nu\mu} (=C_{\nu e}) = C_{\nu\tau} (=C_{\mu\tau}) = C_{\nu\mu} (=C_{\mu e}) = C_{\nu e} (=C_{\mu e}) = 1$ ، می‌توان ماتریس (۱-۲۰) را از ماتریس یکانی KM بخش ۱۴-۳ به دست آورد).

مقدار تفاوت $(\text{جرم})^2$ ، یا اشاره بر طیف ویژه حالت‌های $(\text{جرم})^2$ ، همانند شکل ۱-۲۰، با نزدیک‌ترین و کمترین مقدار جرم ویژه حالت‌ها، و یا اشاره بر حالت برعکس آن، یعنی نزدیک‌ترین و سنگین‌ترین ویژه حالت‌های $(\text{جرم})^2$ دارند. ماتریس آمیختگی کسری از حالت‌های V_e, V_μ, V_τ را که سازنده حالت‌های ۱، ۲، ۳، تعیین می‌کند. این حالت‌ها در شکل ۱-۲۰ نشان داده شده‌اند.

در بسیاری از تحلیل داده‌ها، تقریبی با $S_{e\tau} = 0$ انجام می‌گیرد. خواهیم دید که هر تحلیل ویژه‌ای بسیار ساده شده است، زیرا تعداد ویژه حالت‌های شرکت کننده جرم نوترینو از سه عدد به دو کاهش می‌یابد. بجز بحث ما درباره آزمایش جوز، همواره این تقریب را بکار خواهیم گرفت. اما، با بهبود کیفیت داده‌ها، و به ویژه اگر $S_{e\tau}$ متناهی باشد، این تقریب کنار گذاشته می‌شود. توجه به این نکته مهم است که با

$$\delta_{e\tau} = 0 \text{ هیچ گونه نقض } CP \text{ وجود ندارد.}$$

تحلیل داده‌های حاصل نوترینوهای شتابدهنده و راکتور کمترین پیچیدگی را دارند، زیرا می‌توان در سطح دقتی که تاکنون به دست آمده از اثر MSW چشم‌پوشی کرد، و فرمول (۱۹-۱۹) را مستقیم بکار برد.

۲-۲. K2K

در آزمایشگاه K2K در ژاپن باریکه نوترینوی میون، که در شتابدهنده پروتون KEK تولید شده است، مورد پژوهش قرار می‌گیرد. پروتون‌های 12 GeV به هدف آلومینیوم برخورد کرده و پیون‌های مثبت بسیاری می‌آفرینند، که مطابق $\mu^+ + \nu_\mu \rightarrow \pi^+$ (بخش ۹-۲)، و می‌باشند. ویژگی‌های این باریکه با آشکارسازهایی اندازه‌گیری می‌شود، که نزدیک به آن و در راستای جریان رو به پایین، به فاصله 300 متری از هدف پروتون نهاده شده‌اند. انرژی میانگین ν_μ برابر با $1/3 \text{ GeV}$ می‌باشد. پس مسیر پرواز تا آشکارساز سوپر کامیونکنده در معدن کومیکا^۱ برابر با 250 km می‌باشد. این آشکارساز از $22/5$ کیلوتن آب بسیار خالص (H_2O) تشکیل شده است. نوترینوهای میون از طریق واکنش آنها با نوترینوهای موجود در هسته اتم‌های اکسیژن مشاهده می‌شوند: $\nu_\mu + n \rightarrow p + \mu^-$. انرژی نوترینو E_ν را می‌توان با اندازه‌گیری انرژی و راستای میون تعیین کرد. برای رسیدن به این آشکارساز، نوترینو باید از بالاترین پوسته زمین بگذرد. در اینجا از هرگونه اثر MSW چشم‌پوشی کرده، و مقدارهایی از $\Delta m_{\nu_1}^2$ ، که در بخش ۲۰-۱ آمده، را اختیار کنیم. داریم $\Delta m_{\nu_1}^2 = 7 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ و $D = 250 \text{ km}$. از روی (۱۹-۲۰)، تابع

$$\text{نوسانی } < 10^{-3} = \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{\nu_1}^2 D}{4 E_\nu} \right) = \sin^2 \left(0.22 \left(\frac{1 \text{ GeV}}{E_\nu} \right) \right)$$

به‌ازای همه E_ν مربوط به دست

می‌آید. این مقدار آنقدر کوچک است که در دقت کنونی می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد. همچنین، از آنجا که $\Delta m_{\nu_1}^2 = \Delta m_{\nu_2}^2 + \Delta m_{\nu_3}^2$ می‌باشد، دو تابع نوسانی دیگر تقریباً برابر با یکدیگر هستند، و هر دو

$$\text{را به صورت } \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{A_i}^2 D}{4 E_\nu} \right)$$

مقدار میانگینی از $\Delta m_{\nu_1}^2$ و $\Delta m_{\nu_2}^2$ اختیار خواهیم کرد. به

دلایل تاریخی به $\Delta m_{A_i}^2$ اختلاف مجذور جرمی جوئی^۲ گویند.

با این تقریب‌ها، و اختیار $U_{e\tau} = 0$ و بهره‌گیری از ویژگی یکسانی بودن U ، معادله‌های (۱۹-۱۹) منجر به روابط زیر می‌شوند

$$P_D (v_\mu \rightarrow v_\mu) = 1 - 4 |U_{\mu\tau}|^2 \left(1 - |U_{\mu\tau}|^2 \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{At}^2 D}{4E_\nu} \right)$$

$$P_D (v_\mu \rightarrow v_e) = 0 \quad (2-20)$$

$$P_D (v_\mu \rightarrow v_\tau) = 4 |U_{\mu\tau}|^2 \left(1 - |U_{\mu\tau}|^2 \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{At}^2 D}{4E_\nu} \right)$$

از این معادله‌ها، و همچنین به سبب کوچکی مقدار $U_{e\tau}$ ، تقریباً همه نوسان‌های Δm_{At}^2 بین v_μ و v_τ می‌باشد. از آنجا که اثر MSW تنها برای نوترینوی الکترون می‌باشد، با دقت کنونی می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد. با $U_{e\tau} = 0$ ، مقدار $|U_{\mu\tau}| = \sin \theta_{\mu\tau}$ بوده و به فرمول نهایی زیر می‌رسیم:

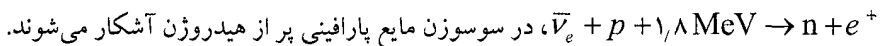
$$P_D (v_\mu \rightarrow v_\mu) = 1 - \sin^2(2\theta_{\mu\tau}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{At}^2 D}{4E_\nu} \right) \quad (3-20)$$

که برای برازش داده‌های $K2K$ است. این موضوع در شکل ۲۰-۲ نشان داده شده است. در آن تعداد رویدادها با میله‌های انرژی معین شده، به صورت تابعی از انرژی میانگین نوترینو باری هر میله نشان داده شده است. منحنی بریده بریده شکل توزیع تعداد چشم‌داشتی dN/dE_ν ، بدون نوسان می‌باشد، و اگر از آن روی E_ν انتگرال گرفته شود، آشکارا، بزرگتر از تعداد کل رویدادهای پذیرفته شده (۲۹ رویداد) است. بهترین برازش با معادله (۳-۲۰)، انجام گرفته است، تا تصحیح‌هایی همچون تفکیک‌پذیری انرژی به حساب آیند. برازش انجام شده نیز نشان داده شده است. این برازش متناظر با $\Delta m_{At}^2 = 2.18 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$ می‌باشد. $\sin^2(2\theta_{\mu\tau}) = 1$ ، $\theta_{\mu\tau} = \pi/4$ ، $\cos \theta_{\mu\tau} = \sin \theta_{\mu\tau} = 1/\sqrt{2}$ مقدار آخری مقدار $\theta_{\mu\tau}$ می‌باشد.

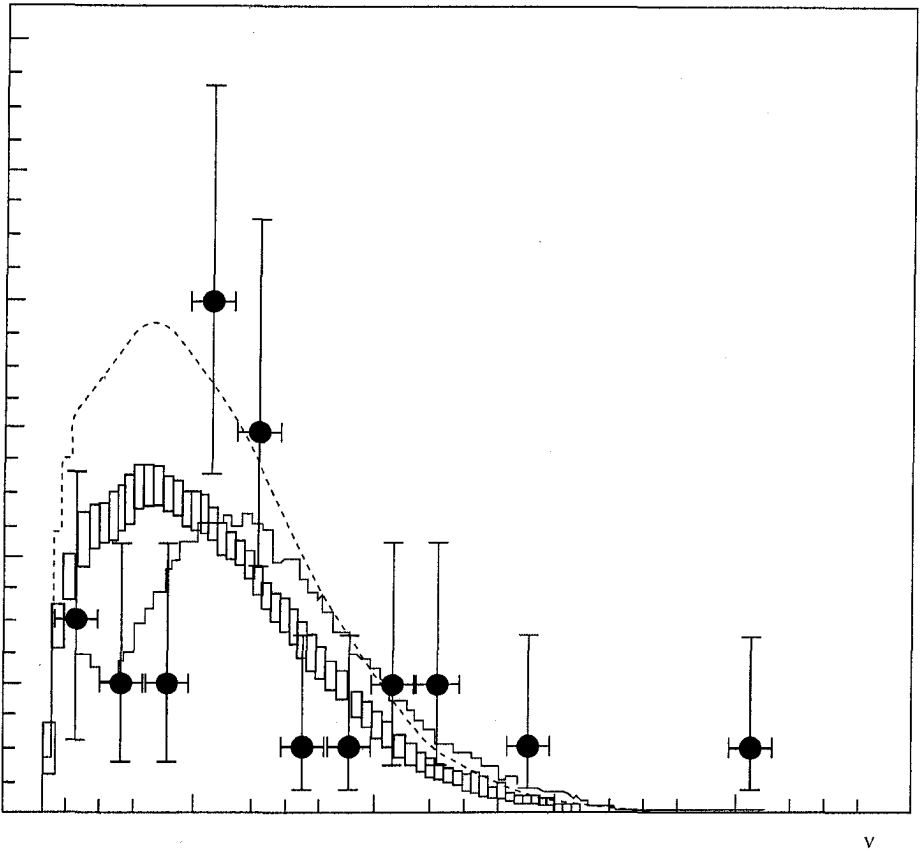
۳-۲۰ جوز

جوز دهکده‌ای است در نزدیکی ایستگاه نیروگاه هسته‌ای فرانسه. دو راکتور ایستگاه نیروگاه چشمه‌هایی پر از پادنوترینوهای الکترون $\bar{\nu}_e$ می‌باشد. شارها و توزیع انرژی، حول 3 MeV می‌باشد. در این انرژی رفتار پادنوترینوها به خوبی درک می‌شود. آشکارساز، که با جایگیری آن در ژرفای زیر زمین، در برابر میون‌های پرتوی کیهانی سپرگذاری شده است، در فاصله 1 km از راکتورها قرار دارد.

پادنوترینوها $\bar{\nu}_e$ از روی برهمکنش واپاشی بتازای معکوس‌شان با پروتون‌ها،



همانند آزمایش $K2K$ ، تابع نوسانی $(\Delta m_{\nu 11}^2 D / 4E_\nu)$ حاصل از (۱۹-۲۰)، آنقدر کوچک



شکل ۲۰-۲ داده‌های $K2K$ (M. H. Ahn et al. *Phys. Rev. Letts.* **90**, 041801 (2003)). نقطه‌های همراه با خط خطا، داده‌ها می‌باشند. نمودار قابی شکل مقدار طیف چشم‌داشتی بدون در نظر گرفتن نوسان‌ها می‌باشد، که ارتفاع قاب خطای سیستماتیک می‌باشد. خط توپر طیف با بهترین برازش می‌باشد. این نمودارها با تعداد رویدادهای مشاهده شده (۲۹ رویداد) پنج‌بار شده‌اند. به‌علاوه خط بریده، مقدار چشم‌داشتی را بدون هیچ نوسانی پنج‌بار شده به تعداد رویدادهای چشم‌داشتی (۴۴ رویداد) نشان می‌دهد.

است، که قابل چشم‌پوشی می‌باشد. (با اختیار $(D = 1 \text{ km}, E_\nu > 1.8 \text{ MeV})$ مقدارش کوچکتر از 2×10^{-3} می‌باشد. از اثر MSW نیز می‌توان چشم‌پوشی کرد، زیرا برای مواد موجود در پوسته زمین، داریم: $V(z) \sim 10^{-13} \text{ eV} \ll \Delta m_{\nu 1}^2 / 2E_\nu < \Delta m_{\nu 2}^2 / 2E_\nu$. دوباره می‌توانیم با تقریب خوبی، $\Delta m_{\nu 2}^2 / 4E_\nu = \Delta m_{\nu 1}^2 D / 4E_\nu = \Delta m_{At}^2 D / 4E_\nu$ را قرار دهیم و به نتیجه زیر برسیم

$$P_D(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e) = 1 - 4|U_{e\nu}|^2 \left(1 - |U_{e\nu}|^2\right) \sin^2\left(\Delta m_{At}^2 D / 4E_\nu\right) \quad (4-20)$$

با قرار دادن $\Delta m_{At}^2 = 2 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$ ، $D = 1 \text{ km}$ ، $\sin \theta_{e\tau} = |U_{e\tau}|$ ، از (۱۹-۲۰) در می‌یابیم

$$P_D(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e) = 1 - \sin^2(2\theta_{e\tau}) \sin^2 \left[\sqrt{2} \cdot 54 \left(\text{MeV} / E_\nu \right) \right]$$

با دقت آزمایشگاهی حاصل، هیچ کاهشی در شار آشکارساز و هیچ گونه نوسانی وجود نداشت، $\sin^2(2\theta_{e\tau}) < 0.18$ (Apollonio et al., 2003). این نتیجه را در بخش ۲۰-۱ بیان کردیم.

۲۰-۴. کملند

همانند چوز، در آشکارساز پادنوترینوی سوسوزن مایع کامیو کا (کملند^۱) از پادنوترینوهای راکتور بهره گرفته می‌شود. این چشمه‌های پادنوترینو عبارتند از گروهی از ایستگاه‌های نیروگاه هسته‌ای در ژاپن که در فاصله‌های گوناگون از حدود ۱۰۰ km تا ۲۰۰ km از آشکارساز قرار دارند. همانند چوز، در اینجا هم آشکارساز از واپاشی بتازای معکوس $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ استفاده می‌کنند.

این آزمایش برای کاوش ناحیه جرمی $\Delta m_{\nu 1}^2 \sim 7 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ طراحی شده است. برای راکتور ویژه‌ای به فاصله D از آشکارساز، با بهره‌گیری از (۱۹-۱۹) و قرار دادن $|U_{e\tau}|^2 = 0$ ، احتمال بازماندن عبارتست از

$$P_D(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e) = 1 - 4 |U_{e1}|^2 |U_{e\tau}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{\nu 1}^2 D}{4E} \right) \quad (5-20)$$

و با پارامتربندی (۱۴-۱۶) به رابطه زیر می‌رسیم.

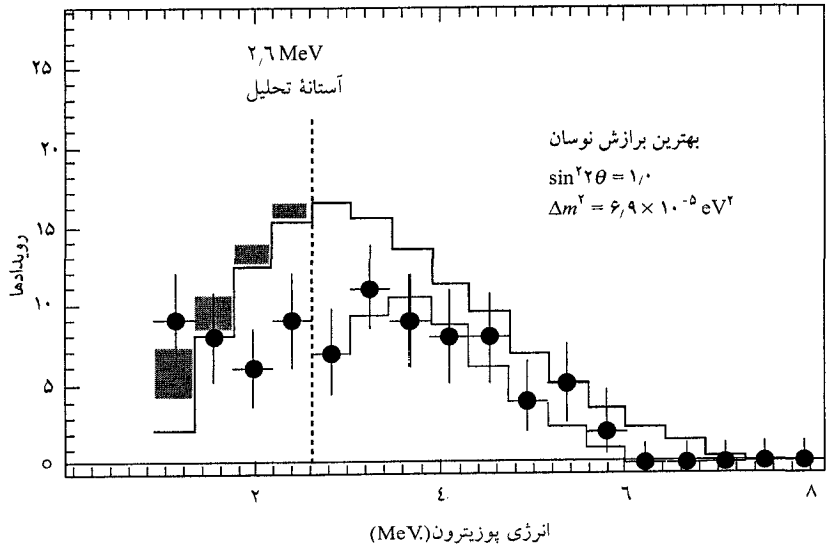
$$4 |U_{e1}|^2 |U_{e\tau}|^2 = \cos^2 \theta_{e\tau} \sin^2 2\theta_{e\tau} \approx \sin^2 2\theta_{e\tau}$$

همانند چوز، می‌توان از اثرهای MSW چشم‌پوشی کرد. مقدار اندازه‌گیری شده طیف انرژی پوزیترون با مقدار چشم‌داشتی طیف انرژی پوزیترون در صورت نبود نوسان، مقایسه می‌شود. این مقدار طیف را می‌توان از روی ویژگی‌های گوناگون راکتور به‌خوبی برآورد کرد.

در شکل ۲۰-۳ برخی از نتیجه‌های حاصل از کملند نشان داده شده است. طیف انرژی پوزیترون‌ها آشکارا، زیر مقدار بدون نوسان است. با بهره‌گیری از عبارتی بر پایه (۲۰-۵)، بهترین برازش برای این داده‌ها دارای مقادارهای زیر می‌باشد.

$$|m_{\nu 1}^2| = 6.9 \times 10^{-5} \text{ eV}^2, \quad 0.84 < \sin^2 2\theta_{e\tau} < 1$$

در تحلیل کملند برخی از خطاهای سیستماتیک ناشی از فرض ساده‌کننده $|U_{e\tau}|^2 = 0$ محاسبه شده‌اند.



شکل ۲۰-۳ داده‌های حاصل از کلمند (K. Eguchi et al. *Phys. Rev. Lett.* **90**, 021802 (2003)). توزیع انرژی پوزیترون‌های مشاهده شده، $0,۴۲۵ \text{ MeV}$ ، (دایره‌های توپر با خطهای خطا)، همراستا با توزیع‌های چشم‌داشتی بدون نوسان (نمودار بالایی)، و در بهترین برازش با بهره‌گیری از $(۲۰-۵)$ ، نوسان‌ها نیز در بر گرفته شده‌اند (نمودار پایینی). نوارهای سایه زده شده، بیان‌کننده خطای سیستماتیک در توزیع بهترین برازش می‌باشد. خط بریده عمودی متناظر با آستانه تحلیل در انرژی $۲,۶ \text{ MeV}$ می‌باشد.

۲-۵ نوترینوهای خورشیدی

زمین پی در پی در زیر بمباران پرتوهای کیهانی است، بخش بزرگی از این پرتوها، پروتون‌ها و الکترون‌های پرانرژی می‌باشند. پروتون‌ها، در برخورد با هسته اتم‌های جو زیرین، مزون‌های π ایجاد می‌کنند. مزون‌های π با زنجیره‌های زیر و امی‌باشند (بخش ۹-۲، بخش ۹-۴):



نوترینوها و پادنوترینوها در ارتفاع میانگین حدود ۲۰ km ، با انرژی تا ناحیه چندین GeV ، آفریده می‌شوند. نسبت شارش $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ به شارش $\nu_e + \bar{\nu}_e$ در حدود ۲ می‌باشد.

در آشکارسازهای آبی، همانند سوپر کمیوکنده، لپتون‌های باردار حتماً از طریق واکنش‌هایی به شکل زیر آفریده می‌شوند.

$$\nu_e + n \rightarrow e^- + p, \quad \bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n;$$

$$\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p, \quad \bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n$$

لپتون‌های باردار تابش چرنکوف گسیل می‌کنند، که اطلاعاتی درباره انرژی و راستای نوترینوی فرودی فراهم می‌آورند.

در شکل ۲۰-۴، برخی از نتیجه‌های آشکارساز سوپر کمیوکنده نشان داده شده است. این نمودارها نسبت رویدادهای ν_e گونه و ν_μ گونه را به محاسبه‌های مونت کارلو در نبود نوسان‌ها، به صورت تابعی از D/E_ν نشان می‌دهند. E_ν انرژی نوترینو و D فاصله از نقطه آفرینش در حدود ۲۰ km بالای سطح زمین تا آشکارساز می‌باشد. D از روی راستای نوترینو اندازه‌گیری می‌شود. به ازای نوترینوهای الکترونی چند GeV، تصحیح MSW، برای معادله‌ها، برای آن دسته از نوترینوهای گذرنده از زمین، در مسیرشان به آشکارساز منظور شده‌اند.

در داده‌های ν_e هیچ نشانی از نوسان نیست، اما کمبود آشکار نوترینوهای میون وجود دارد. بهترین برآزش بر این داده‌ها دارای $\Delta m_{At}^2 = 2.2 \times 10^{-2} \text{ eV}^2$ ، و همانند $K2K$ دارای $\sin^2 2\theta_{\mu\tau} = 1$ می‌باشند، که به ازای $D/E_\nu < 10^2 \text{ km/GeV}$ ، نوسان‌های $\Delta m_{\nu\mu}^2$ و $\Delta m_{\nu\tau}^2$ در یک نوسان Δm_{At}^2 ترکیب می‌شوند. نبودی آشکار نوسان‌های $\nu_e \rightarrow \nu_e$ در این داده‌ها، نخستین گواه بر کوچکی $|U_{e\tau}|^2$ می‌باشد، که اشاره‌ای دیگر بر این است که نوسان‌های Δm_{At}^2 بیشتر بین ν_τ و ν_μ می‌باشند.

۲۰-۶ نوترینوهای خورشیدی

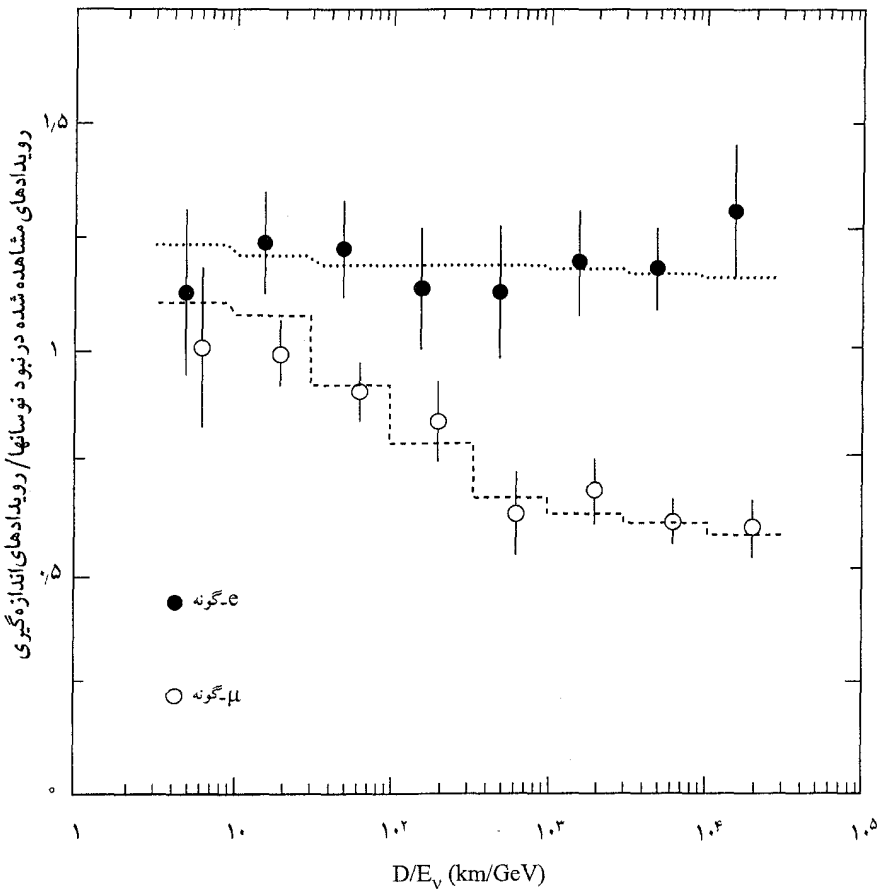
فیزیک گرمایی و هسته‌ای خورشید به خوبی درک شده است. مدل استاندارد خورشیدی، طیفهای نوترینوی خورشیدی را پیش‌بینی می‌کند و می‌توان با اطمینان شکل ۲۰-۵، را مفروض دانست.

نخستین اندازه‌گیری این طیف‌ها را ر. دیویس^۱ و همکارانش در معدن ژرف همستک در ایالات متحده آمریکا، (Davis 1964) انجام دادند. آشکارسازی این نوترینوها با برهمکنش زیر انجام گرفت

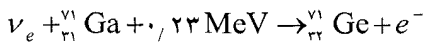


آشکارساز سوپر کمیوکنده، اندازه‌گیری‌های شار نوترینوی خورشیدی با E_ν بزرگتر از حدود ۶ MeV را هم انجام می‌دهد (Fukuda *et al.*, 1996).

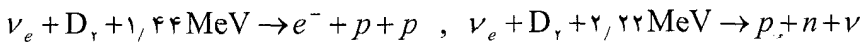
به سبب انرژی آستانه بالا، این اندازه‌گیری‌ها نسبت به شار اصلی ناشی از واکنش «pp» کور بودند. آزمایش‌های GALLEX در ایتالیا و SAGE در روسیه به منظور جبران این عیب طراحی شدند، و با واکنش زیر شار pp را آزمودند (Hampel *et al.*, 1999; Garvin *et al.*, 2003)

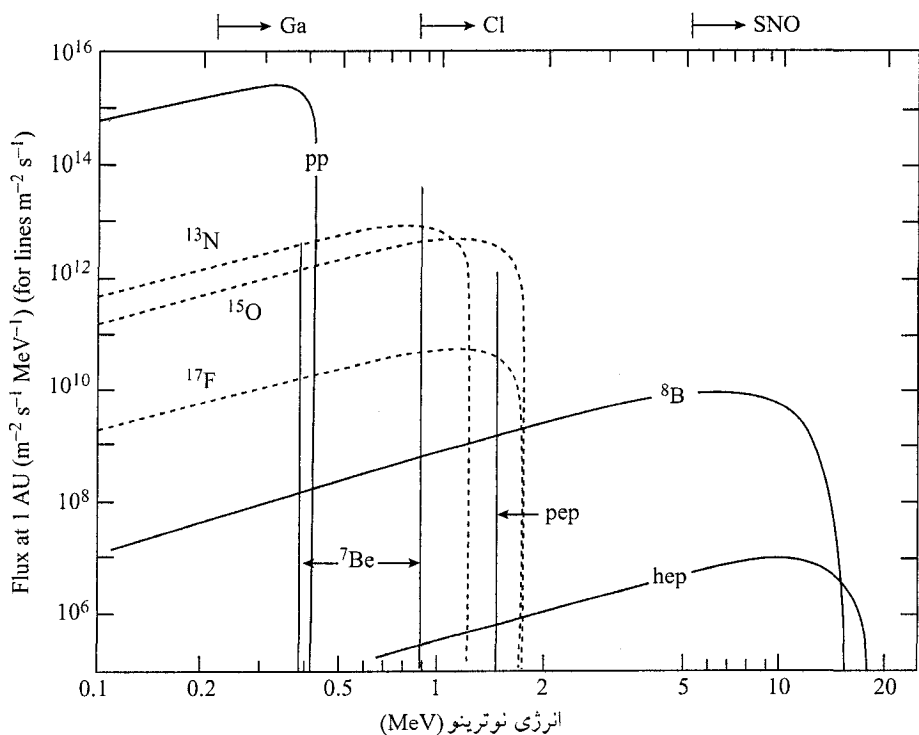


شکل ۲۰-۴ داده‌های حاصل از سوپرکامیونکنده (Y.Fukunda et al. Phys. Rev. Letts. 82, 1562 (1998)) نسبت رویدادهای اندازه‌گیری شده به رویدادهای چشم‌داشتی، در غیاب نوسان‌ها. این خطوط شکل چشم‌داشتی را به‌ازای $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ با $\Delta m_{At}^2 = 2,2 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$ و $\sin^2(\theta_{\mu\nu}) = 1$ نشان می‌دهند. هیچ نوسان $\nu_e \leftrightarrow \nu_e$ معنی‌داری مشاهده نشد.



SNO (رصدخانه نوترینوی سدبری^۱، واقع در کانادا) یک آشکارساز آبی سنگین است. نوترینوها با انرژی بیش از حدود ۵ MeV، با واکنش‌های زیر آشکار می‌شوند (Ahmad et al. 2002)





شکل ۲۰-۵ طیف‌های نوترینوی خورشیدی که در مدل استاندارد خورشیدی پیش‌بینی می‌شود. طیف‌های زنجیره pp با خطوط توپر و طیف‌های مربوط به زنجیره CNO با خطوط بریده نشان داده شده‌اند. (ر.ک. (Bachal, J. N. and Ulrich, R. K. (1988), *Rev. Mod. Phys.* **60**, 297.

نخستین واکنش از واکنش‌های بالا، برهمکنش جریان باردار بوده و تنها با نوترینوی الکترون می‌تواند به راه بیفتد. واکنش دوم، برهمکنش جریان خنثی بوده و با احتمال یکسان ممکن است با نوترینوی الکترون، نوترینوی میون، یا نوترینو تاو به راه بیفتد. در آزمایش SNO آهنگ واکنش پراکندگی کشسان نوترینو از الکترون‌ها هم اندازه‌گیری می‌شود.

$$\nu + e^- \rightarrow \nu + e^-$$

دوباره، این واکنش با نوترینویی، از هر گونه، راه‌اندازی می‌شود. اندازه‌گیری‌ها را می‌توان هم برای تفسیر شار ν_e ، یعنی $\phi(\nu_e)$ و هم برای تفسیر شار کل $\phi(\nu_e + \nu_\mu + \nu_\tau)$ بکار برد.

نتیجه‌های آغازین از آشکارساز همستک برای شار اندازه‌گیری شده، تنها برابر با حدود یک سوم از مقدار چشم‌داشتی مدل استاندارد خورشیدی، بدون در نظر گرفتن نوسان، می‌باشد. از سوپر کمپوکنده، SAGE و GALLEX حدود نیمی از آهنگ چشم‌داشتی به‌دست می‌آید. از آزمایش SNO درمی‌یابیم

که

$$\frac{\phi(\nu_e)}{\phi(\nu_e + \nu_\mu + \nu_\tau)} = 0,306 \pm 0,05$$

مقدار اندازه‌گیری شده شار نوترینوی کل، با مقدار چشم‌داشتی از مدل استاندارد خورشیدی سازگار می‌باشد و از آنجا که خورشید تنها نوترینوهای الکترون می‌آفریند، بسیاری از نوترینوها گذار به ν_μ و ν_τ را انجام می‌دهند.

۲-۷ اثرهای MSW خورشیدی

همانگونه که در بخش ۱۹-۴ نشان داده شد، ویژه‌حالت‌های موج مسطح جرمی نوترینو، به تابع‌های بستگی $f_i(z)$ دارند، که در شرط زیر صادقند

$$i \frac{df_i}{dz} = \frac{m_i^2}{2E} f_i + V(z) U_{ej}^* U_{ei} f_j \quad (6-20)$$

چشمه نوترینوهای خورشیدی، ناحیه مرکزی خورشید است، که برای آن، برطبق مدل استاندارد خورشیدی $V(0) = 7,6 \times 10^{-11} \text{ eV}$ می‌باشد. در مقایسه با $\Delta m_{21}^2 / 2E$ ، که با «پارامترهای مرجع» بخش ۲۰-۱ برابر با $(10 \text{ MeV}/E_\nu) \times 10^{-11}$ می‌باشد، آشکار است که تفسیر داده‌های حاصل از آزمایش‌های نوترینوی خورشیدی مستلزم بررسی جدی اثر MSW می‌باشد.

برای آغاز تقریب زدن، دوباره از جمله کوچک U_{e3} چشم‌پوشی می‌کنیم. با $U_{e3} = 0$ جواب معادله (۶-۲۰) برای U_{e3} عبارتست از

$$f_3(z) = e^{im_{31}^2 z / 2E} f_3(0)$$

که مستقل از $V(z)$ می‌باشد. با در نظر گرفتن $U_{e3} = 0$ ، و از آنجا که نوترینوی آغازین نوترینوی الکترون می‌باشد، پس $f_3(0) = 0$ بوده و در نتیجه $f_3(z)$ به‌ازای همه z مخالف صفر است؛ یعنی هیچ سهمی در نوسان‌ها ندارد. این تقریب دوباره تحلیل را به دو پدیده نوترینویی در $f_1(z)$ و $f_2(z)$ محدود می‌کند. پس از اندکی عملیات جبری، می‌توان نشان داد که داده‌های نوترینوی خورشیدی با معادله‌های زیر تحلیل می‌شوند.

$$i \frac{df_e}{dz} = \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} (-\cos(2\theta_{e\tau}) f_e + \sin(2\theta_{e\tau}) f_x) + V(z) f_e \quad (7-20)$$

$$i \frac{df_x}{dz} = \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} (\sin(2\theta_{e\tau}) f_e + \cos(2\theta_{e\tau}) f_x)$$

که $f_x = c_{\mu\tau} f_\mu - s_{\mu\tau} f_\tau$ ترکیبی از f_μ و f_τ بوده، و مقدار $V(z)$ از مدل استاندارد خورشیدی معلوم می‌شود. از این معادله‌ها باید انتگرال‌گیری عددی کرد.

همه داده‌های نوترینوی خورشیدی با تفسیر نوسانی سازگارند، و تحلیل این داده‌ها با احتمال بسیار بالایی (۹۵٪) سطح سازگاری) منجر به $1.9 \times 10^{-4} \text{ eV}^2 < \Delta m_{\nu 1}^2 < 3 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ و $30.2^\circ < \theta_{e\tau} < 34.9^\circ$ می‌شود. بهترین برازش با $\theta_{e\tau} = 32^\circ$ ، $\Delta m_{\nu 1}^2 = 6.9 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ می‌باشد. داده‌های نوترینوی خورشیدی قید محکمتری نسبت به کمند بر روی $\theta_{e\tau}$ می‌گذارند. همچنین، با اثر MSW، جواب معادله‌های (۷-۲۰) به علامت $\Delta m_{\nu 1}^2$ بستگی دارند. و همانگونه که در شکل ۲۰-۱ بیان شده است، مقدار آن مثبت می‌باشد.

۲۰-۸ چشم‌اندازهای آینده

چندین آزمایش طراحی شده‌اند که جرم نوترینوها و پدیده‌های آمیختگی را کاملتر بررسی خواهند کرد. بجز امکان وجود نوترینوهای سترون، که نشانه‌های وجود آن هنوز تایید نشده‌اند، هیچ گواهی برای رد کردن نظریه سه نوترینو فصل ۱۹، وجود ندارد. اما، از کیفیت داده‌های ارائه شده در این فصل می‌توان دریافت که نظریه جرم نوترینو به خوبی دیگر شاخه‌های مدل استاندارد بنا نشده است. در این نظریه، آزمایش‌هایی برای اندازه‌گیری دقیق‌تر Δm^2 و پارامترهای ماتریس آمیختگی نوترینو طراحی می‌شوند.

تمرکز اصلی کارهای تجربی کنونی بر ساخت باریکه‌های نوترینوی میون، همانند آنچه در آزمایش K2K وجود دارد، می‌باشد. سودمندی نوترینوهای آفریده شده در شتابنده، نظارت و بازرسی بر شار و توزیع انرژی آن می‌باشد. K2K آزمایشی در حال پیشرفت است، اما تا آخرهای سال ۲۰۰۶ میلادی، آزمایش‌های نوترینوی میون CMGS و MINOS (جستجوی نوسان نوترینو با تزریق)^۱ در کار خواهند بود. نوترینوهای CMGS در CERN آفریده و در GRAN SASSO، در آزمایشگاهی در زیر زمین در ایتالیا، آشکار می‌شوند. باریکه MINOS در فرمی‌لب آفریده و در معدن سوذن^۲ در مینه‌سوتا آشکار می‌شوند. در هر دو آزمایش به دنبال گواهی بر گذار نادر $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ و نوسان‌های چشم‌داشتی $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ می‌باشند. اگر از نظریه فصل ۱۹ سرپیچی نشود، انتظار می‌رود که تا سال ۲۰۱۰ محدود محکم‌تری هم برای $(2\theta_{e\tau})$ و هم برای $|\Delta m_{\nu 1}^2|$ داشته باشیم.

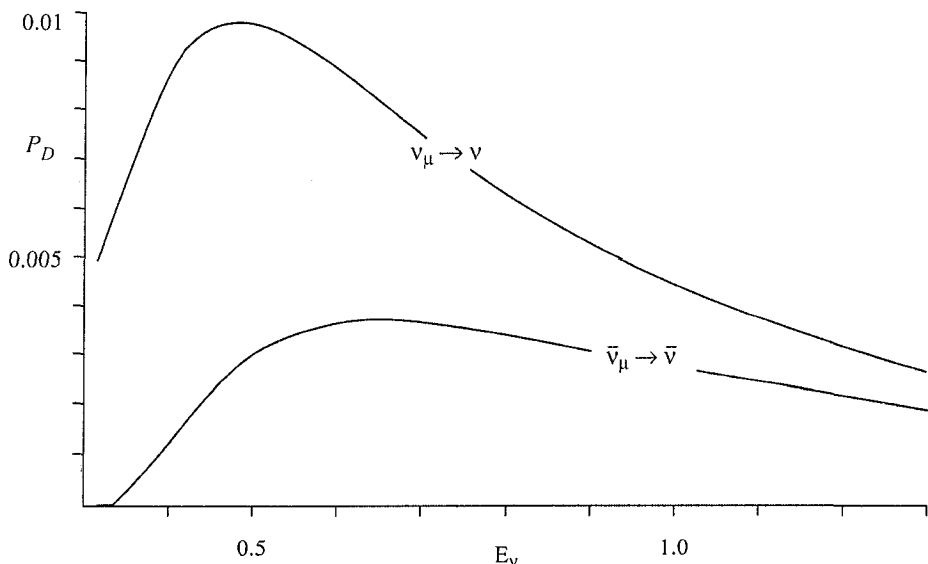
در آینده‌ای دورتر، شتابنده پروتون با شدت بسیار بالایی در توکای^۳، ژاپن ساخته خواهد شد. آزمایش T2K از K2K، با باریکه نوترینویی با شدت بسیار بالاتر، بر آن نظارت و بازرسی خواهد شد. از آشکارسازی در سوپر کمبوکنده، خط پایه $D \approx 295 \text{ km}$ به دست خواهد آمد. همچنین ارتقا شدت

1- Main Injector Neutrino Oscillation Search

2- Soudan

3- Tokai

بالا در MINOS با آزمایش تازه NOVA در حال طراحی است. تا سال ۲۰۱۵ با T2K و NOVA انتظار می‌رود که اگر $\sin^2(2\theta_{e\tau}) > 0.1$ باشد، آنگاه مقدار آن آشکار شود. اثر MSW بر این اندازه‌گیری‌ها اثر خواهد گذاشت، و می‌توان $\Delta m_{\nu\tau}^2$ را تعیین علامت کرد و ترتیب جرمی را مشخص نمود. اگر بتوان $\sin^2(2\theta_{e\tau})$ را اندازه گرفت، آنگاه اندازه‌گیری δ ، فاز نقض کننده CP ، نیز امکان‌پذیر خواهد بود. در شکل ۶-۲۰ احتمال‌های گذار $P_D(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$ و $P_D(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e)$ به صورت تابعی از E_ν با خط پایه T2K نشان داده شده است. مقدار δ برابر با 45° اختیار می‌شود و دیگر پارامترها، مجموعه‌ای پذیرفتنی هستند. هرچند مقدار این احتمال‌ها اندک است، احتمال ذره و پادذره بسیار با یکدیگر تفاوت می‌کنند (ر.ک. بخش ۱۹-۳).



شکل ۶-۲۰ منحنی بالایی $P_D(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$ است. منحنی پایینی $P_D(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e)$ است. پارامترها عبارتند از $\Delta m_{\nu\tau}^2 = 2 \times 10^{-7} \text{ eV}^2$ ، $\Delta m_{\nu\tau}^2 = 7 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ ، $\cos \theta_{\mu\tau} = 1/\sqrt{2}$ ، $\cos \theta_{e\tau} = 0.84$ ، $\delta = \pi/4$ ، $D = 295 \text{ km}$ ، $\sin \theta_{e\tau} = 0.15$ ، اثر MSW، که به زمین‌شناسی موضعی بستگی دارد، بارز و قابل محاسبه است. اما در اینجا منظور نشده است.

میدان‌های مایورانا را در بخش ۶-۶ معرفی کردیم. اگر میدان‌های نوترینو مایورانا باشند، هیچ تمایزی بین نوترینوها و پادنوترینوها وجود ندارد. همانگونه که در بخش ۶-۷ توضیح داده شد، کوچک بودن مقدار جرم نوترینو تمایز بین نوترینوی مایورانا و دیراک و در نتیجه تشخیص تجربی آنها را مشکل می‌سازد. در این فصل نظریه نوترینوهای مایورانا را مفصل توضیح داده و نشان می‌دهیم چگونه می‌توان آنها را در مدل استاندارد فیزیک ذرات جا داد. سرانجام آزمایش‌های مربوط به واپاشی بتازای دوگانه را که می‌توانند سرشت نوترینوها را تعیین کنند، توصیف خواهیم کرد.

۱-۲۱ میدان‌های نوترینوی مایورانا

میدان‌های چپگرد و راستگرد نوترینوی مایورانا را به ترتیب با $V_L(x)$ و $V_R(x)$ مشخص می‌کنیم. با بهره‌گیری از (۶-۲۸ و ۶-۲۹)، میدان‌ها را بازنشاسایی می‌کنیم:

$$b_{p+} = d_{p+}, \quad b_{p-} = d_{p-}$$

برای میدان نوترینو مایورانای با جرم m ، داریم:

$$V_L = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p \sqrt{\frac{m}{2E_p}} \left[(b_{p+} e^{-\theta/2} |+\rangle) + b_{p-} e^{\theta/2} |-\rangle \right] e^{i(p \cdot r - Et)} \\ + \left(b_{p+}^* e^{\theta/2} |-\rangle - b_{p-}^* e^{-\theta/2} |+\rangle \right) e^{i(-p \cdot r + Et)} \quad (1-21)$$

$$V_R = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p \sqrt{\frac{m}{2E_p}} \left[(b_{p+} e^{\theta/2} |+\rangle) + b_{p-} e^{-\theta/2} |-\rangle \right] e^{i(p \cdot r - Et)} \\ + \left(-b_{p+}^* e^{-\theta/2} |-\rangle + b_{p-}^* e^{\theta/2} |+\rangle \right) e^{i(-p \cdot r + Et)} \quad (2-21)$$

میدان‌های $V_L(x)$ و $V_R(x)$ مستقل نیستند. با بهره‌گیری از ۶-۵ به آسانی نشان داده می‌شود، که

$$(i\sigma^2)|-\rangle^* = |+\rangle, \quad (i\sigma^2)|+\rangle^* = -|-\rangle$$

$$v_R = (i\sigma^2)v_L^* \quad , \quad v_L = -(i\sigma^2)v_R^* \quad (3-21)$$

بنابراین هر کدام از این میدان‌ها را می‌توان از دیگری به دست آورد. پیامد این امر آن است که در هر نظریه‌ای تنها میدان‌های مایورانای چپگرد، و یا تنها میدان‌های مایورانای راست گرد پدیدار گردد.

بنا به تعریف (۷-۱۱ب) میدان مزدوج باردار v_L^c عبارتست از

$$v_L^c = -(i\sigma^2)v_R^*$$

اما بنا بر نتیجه‌های بالا داریم $-(i\sigma^2)v_R^* = v_L$ در نتیجه

$$v_L^c = v_L \quad (4-21)$$

بنابراین مزدوج‌ها باری میدان مایورانا با خود میدان یکی می‌باشد. پس جایی در نظریه نوترینوهای مایورانا برای پادنوترینوی تمایز پذیر نیست. به‌ازای تکانه‌ای معلوم، دو حالت ذره‌ای پایه وجود دارد، که می‌توانیم آنها را یک ذره با هلیسیتی $+\frac{1}{2}$ و ذره‌ای دیگر با هلیسیتی $-\frac{1}{2}$ اختیار کرد. (در این ملاحظات، نوترینوهای مایورانا تاحدودی همانند فوتون‌ها می‌باشند، با این تفاوت که فوتون‌ها دارای هلیسیتی ± 1 هستند).

۲-۲۱ چگالی لاگرانژی مایورانا

میدان مایورانا از جواب‌های معادله دیراک ساخته می‌شود. در بخش ۵-۲ دیدیم که چگالی لاگرانژی برای ذره‌ای دیراکی آزاد به جرم m عبارتست از

$$\mathcal{L}^{\text{Dirac}} = i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L)$$

برای میدان مایورانا، v_L از روی v_R تعیین می‌شود و از معادله (۳-۲۱) بالا به دست می‌آید. در این کتاب v_L را برای کار برگزیدیم، و بنابراین چگالی لاگرانژی مایورانا را به صورت زیر اختیار می‌کنیم

$$\mathcal{L}^M = \frac{1}{2} \left[i v^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu v + i (i\sigma^2 v^*)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu (i\sigma^2 v^*) - m \{ v^\dagger (i\sigma^2) v^* + v^T (-i\sigma^2) v \} \right]$$

که $v = v_L$ است. در ادامه این فصل، برای آسان‌نویسی نمادگذاری، زیروند L را نمی‌گذاریم. v میدان نوترینو چپگرد و مؤلفه‌ای است. ضرب $\frac{1}{2}$ را برای جبران دوبر شمردن منظور کرده‌ایم.

جمله دینامیکی دوم در \mathcal{L}^M هم‌ارز با جمله نخستین است (مسئله ۲۱-۱)، بنابراین می‌توان چگالی لاگرانژی را به صورت زیر نوشت

$$\mathcal{L}^M = i v^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu v - \frac{m}{2} \{ v^\dagger (i\sigma^2) v^* + v^T (-i\sigma^2) v \} \quad (5-21)$$

شایان توجه و بسیار مهم است، که با جرم متناهی m و قیدهای مایورانا، تقارن $U(1)$ را که سبب

پایستگی شمار نوترینو در حالت دیراکی می‌شد (بخش ۷-۱)، از دست می‌دهیم. خواهیم دید که با نوترینوهای مایورانا عدد کل لپتونی دیگر پایسته نیست.

توجه کنید که ضرب γ_4 در چگالی لاگرانژی، عملگر همیتونی H و عملگر تکانه \mathbf{P} برای نوترینوهای مایورانا عبارتند از

$$H = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, \varepsilon} (b_{\mathbf{p}\varepsilon}^* b_{\mathbf{p}\varepsilon} - b_{\mathbf{p}\varepsilon} b_{\mathbf{p}\varepsilon}^*) E_{\mathbf{p}} = \sum_{\mathbf{p}, \varepsilon} (b_{\mathbf{p}\varepsilon}^* b_{\mathbf{p}\varepsilon}) E_{\mathbf{p}} \quad (۶-۲۱)$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, \varepsilon} (b_{\mathbf{p}\varepsilon}^* b_{\mathbf{p}\varepsilon} - b_{\mathbf{p}\varepsilon} b_{\mathbf{p}\varepsilon}^*) \mathbf{p} = \sum_{\mathbf{p}, \varepsilon} (b_{\mathbf{p}\varepsilon}^* b_{\mathbf{p}\varepsilon}) \mathbf{p}$$

که $\varepsilon = \pm 1$ شناسه هلیسیتی می‌باشد.

۳-۲۱ معادله‌های میدان مایورانا

تغییر بسیار جزئی (وردش) $\delta \psi^*$ در کنش مایورانا منجر به معادله میدان زیر می‌گردد

$$i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi = m (i \sigma^z) \psi^*$$

(توجه کنید که سهم‌های ناشی از جمله جرمی در چگالی لاگرانژی هم وجود دارند).

در چارچوب K' که در آن نوترینوی مایورانا در حال سکون بوده،

$$p'_i v'_i = -i \partial'_i v'_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

و معادله میدان به صورت زیر درمی‌آید.

$$i \frac{\partial v'_i}{\partial t'} = m (i \sigma^z) v'_i \quad (۷-۲۱)$$

به آسانی می‌توان نشان داد که این معادله دارای دو جواب با $E = m$ ، به شکل زیر می‌باشد

$$v'_1 = b e^{-iEt'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b^* e^{-iEt'} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad v'_2 = b e^{-iEt'} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - b^* e^{-iEt'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (۸-۲۱)$$

پس می‌توانیم، همانند بخش ۶-۳، به چارچوب K تبدیل کرد، که در این چارچوب نوترینوی مایورانا با سرعت $v > 0$ در راستای Oz در حال حرکت است:

$$v_i = M^{-1} v'_i = \begin{pmatrix} e^{-\theta/\gamma} & 0 \\ 0 & e^{\theta/\gamma} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b e^{-imt'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b^* e^{-imt'} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ b e^{-imt'} e^{-\theta/\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b^* e^{-imt'} e^{\theta/\gamma} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

با جایگذاری $t' = t \cosh \theta - z \sinh \theta$ ، به عبارت زیر می‌رسیم

$$v_1 = b e^{-\theta/\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(pz-Et)} + b^* e^{\theta/\gamma} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(-pz+Et)} \quad (9-21)$$

همچنین جواب‌هایی به شکل زیر وجود دارند

$$v_2 = b e^{\theta/\gamma} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(pz-Et)} - b^* e^{-\theta/\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(-pz+Et)} \quad (10-21)$$

همه جواب‌های به شکل موج مسطح را می‌توان از جواب‌های بالا با دوران به دست آورد، و میدان عمومی (۱-۲۱) را بازیافت.

۲۱-۴ نوترینوهای مایورانا: آمیختگی و نوسان‌ها

کلی‌ترین جمله جرمی ناوردای لورنتسی را، که می‌توان در چگالی لاگرانژی معرفی کرد، عبارتست از

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}(x) = -\frac{1}{\gamma} \sum_{\alpha, \beta} v_{\alpha}^T (-i\sigma^3) v_{\beta} m_{\alpha\beta} + \text{همیوگ مختلط} \quad (11-21)$$

α, β روی هر سه گونه نوترینو e, μ, τ کار می‌کند؛ v_{α}, v_{β} میدان‌های مایورانای چپگرد هستند. یعنی $m_{\alpha\beta}$ ماتریس مختلط دلخواهی می‌باشد. برخلاف مورد نوترینوی دیراک، $m_{\alpha\beta}$ را می‌توان مقارن اختیار کرد. این امر به این دلیل می‌باشد که میدان‌های فرمیونی پادجایجا می‌شوند، در نتیجه $v_{\alpha}^T (-i\sigma^3) v_{\beta}$ نسبت به تعویض α و β مقارن است (ر.ک. مسأله ۲۱-۲).

با بهره‌گیری از ماتریس یکانی U ، می‌توان ماتریس مختلط مقارن کلی را به ماتریس قطری حقیقی، با عنصرهای قطری مثبت، تبدیل کرد (برای نمونه ر.ک. به (Horn and Johnson (1985)). اگر $m_{\alpha\beta} = m_{\beta\alpha}$ باشد، می‌توان نوشت

$$m_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{\tau} U_{\alpha i} m_i U_{\beta i} \quad (12-21)$$

که m_i ها سه جرم مثبت هستند. توجه کنید که در U هیچ ابهام فازی وجود ندارد، درحالی‌که نوترینوهای دیراکی دارای ابهام‌های فازی هستند (ر.ک. (۱۹-۲)).

اگر اکنون میدان‌ها را به صورت زیر تعریف کنیم

$$v_i(x) = \sum_{\alpha} U_{\alpha i} v_{\alpha}(x) \quad (13-21)$$

جمله جرمی شکل استاندارد مایورانا را به خود می‌گیرد:

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\frac{1}{\gamma} \sum_i m_i v_i^T (-i\sigma^3) v_i + \text{مزدوج مختلط}$$

جمله‌های دینامیکی در چگالی لاگرانژی تحت تبدیل‌های زیر شکل خود را نگه می‌دارند:

$$\mathcal{L}_{dyn} = \sum_{\alpha} i v_{\alpha}^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} v_{\alpha} = \sum_i i v_i^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} v_i$$

$(\mathcal{L}_{dyn} + \mathcal{L}_{mass})$ چگالی لاگرانژی نوترینوهای مایورانا را آزاد با جرم‌های $m_{\nu}, m_{\nu}, m_{\nu}$ است. با اارونه کردن معادله (۲۱-۱۳)، میدان‌های نوترینو به ریخت آمیزه‌ای از میدان‌های نوترینو با جرم معین پدیدار می‌شوند.

$$v_{\alpha}(x) = \sum_i U_{\alpha i}^* v_i(x) \quad (14-21)$$

شکل معادله بالا، همانند معادله (۱۹-۶)، برای نوترینوهای دیراک می‌باشد. پیامدهای آن برای جریان‌های ضعیف و نوسان‌های نوترینو همانند همان مورد‌های گفته شده در بخش ۱۹-۲، ۱۰-۳، برای نوترینوهای دیراک می‌باشد، اما پادنوترینوها در حکم نوترینوهایی تلقی می‌شوند که در واپاشی‌های برهمکنش ضعیف، دارای بار لپتونی منفی می‌باشند.

۲۱-۵ پارامتربندی U

ماتریس یکانی 3×3 ، U با نه پارامتر حقیقی مشخص می‌شوند، اما با جذب ضریب‌های فاز در تعریف میدان‌های لپتونی، همانند بخش ۱۹-۶، می‌توان $U_{\alpha i}$ را به شکل زیر بازتعریف کرد،

$$U'_{\alpha i} = e^{i\theta_{\alpha}} U_{\alpha i}$$

بدون آنکه محتوی فیزیکی نظریه تغییر کند. بنابراین می‌توان U را با $3-6=9$ پارامتر مشخص کرد. ماتریس آمیختگی نوترینوی دیراک، (بخش ۱۹-۶)، گرچه با چهار پارامتر مشخص می‌شود، ولی نیاز به گسترش بیشتری دارد، تا دو پارامتر بیشتری را دربر گیرد. می‌توان ماتریس‌ها را به صورت زیر در نظر گرفت

$$U_{Majorana} = U_{dirac} \times \begin{pmatrix} e^{i\Delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\Delta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15-21)$$

دو پارامتر پنهانی دیگر نقض‌کننده CP وجود دارد. اما Δ_1 و Δ_2 هیچ سهمی در نقض CP ، پدیده‌های نوسان فصل‌های ۱۹ و ۲۰، ندارند (ر.ک. (۱۹-۱۹) و مسأله ۲۱-۳).

۲۱-۶ نوترینوهای مایورانا در مدل استاندارد

برای آنکه نوترینوهای مایورانا را دارای جرم را در مدل استاندارد فیزیک ذرات وارد کنیم، باید تقارن $SU(2)$ برهمکنش ضعیف را نگه داریم. همانند مورد نوترینوی‌های دیراک، عبارت ناوردای $SU(2)$ مناسبی که بتوانیم از میدان دوتایی هیگز Φ و دوتایی لپتونی L_{α} بسازیم، عبارتست از $\Phi^T \varepsilon L_{\alpha}$ (ر.ک.

بخش ۱۹-۵). با شکست تقارن، این عبارت به صورت $\Phi^T \varepsilon L_\alpha = -(\phi_0 + h/\sqrt{2})v_\alpha$ درمی آید.
 مقدار چشم‌داشتی خلا هیگز و $h(x)$ میدان بوزون هیگز می‌باشد.
 از این عبارتهای ناوردای $SU(2)$ می‌توانیم چگالی لاگرانژی ناوردای $SU(2)$ را بسازیم که با شکست تقارن به صورت زیر دربیاید

$$L_{\text{mass}} = -\frac{1}{2} \left(\phi_0 + h/\sqrt{2} \right)^2 v_\alpha^T (-i\sigma^i) v_\beta K_{\alpha\beta} + \text{مزدوج مختلط} \quad (16-21)$$

$K_{\alpha\beta}$ ماتریس میدان‌های نوترینو را به میدان هیگز جفت کرده، و می‌توانیم جمله جرمی را تشخیص بدسیم

$$m_{\alpha\beta} = \phi_0^2 K_{\alpha\beta} \quad (17-21)$$

در نتیجه ماتریس جفت‌شدگی دارای بعد $^{-1}$ (جرم) می‌باشد، که به معنای وجود چگالی لاگرانژی «مؤثر» است (ر.ک. بخش ۸-۴). جمله‌های جفت‌شونده‌ای مانند این، نظریه را نابازبهنجارپذیر می‌کنند.

۷-۲۱ سازوکار الاکلنگی^۱

برای برخورد با نابازبهنجارپذیری، چگالی لاگرانژی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\mathcal{L} = i v_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu v_L + i R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu R - \frac{M}{2} (i R^T \sigma^i R - i R^\dagger \sigma^i R^*) - \mu v_L^\dagger R - \mu R^\dagger v_L \quad (18-21)$$

M و μ پارامترهای جرمی هستند؛ v_L و R به ترتیب میدان‌های اسپینوری چپگرد و راستگرد هستند. با دست کشیدن از جمله‌های جفت‌کننده v_L و R ، چگالی لاگرانژی متعلق به میدان نوترینوی چپگرد بدون جرم v_L ، و میدان نوترینوی مایورانای راستگرد با جرم M می‌باشد.

اکنون فرض می‌کنیم که M آنقدر بزرگ باشد که بتوان از جمله دینامیکی $i R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu R$ چشم‌پوشی کرد، و در نتیجه عبارت زیر باقی بماند.

$$\mathcal{L} = i v_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu v_L - \frac{M}{2} (R^T (i\sigma^i) R - R^\dagger (i\sigma^i) R^*) - \mu v_L^\dagger R - \mu R^\dagger v_L \quad (19-21)$$

تغییر بسیار جزئی (وردش) δR^* در این کنش، منجر به معادله زیر بر حسب R می‌شود:

$$M i \sigma^i R^* - \mu v_L = 0$$

با ضرب آن در $i\sigma^j/M$ معادله زیر را برای R به دست می‌آوریم.

$$R = -(\mu/M) i\sigma^2 v_L^* \quad (20-21)$$

این نتیجه را در معادله (۲۱-۱۹) جایگذاری کرده و چگالی لاگرانژی مؤثر را به دست می آوریم.

$$\mathcal{L} = i v_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu v_L + (\mu^2/2M) v_L^\dagger i\sigma^2 v_L^* + v_L^T (-i\sigma^2) v_L \quad (21-21)$$

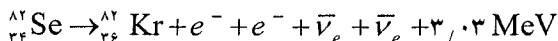
می توان با تغییر فاز $v_L \rightarrow v'_L = i v_L$ ، علامت جمله جرمی را تغییر داد. آنگاه \mathcal{L} مؤثر میدان نوترینوی آزاد به جرم $m = \mu^2/M$ خواهد بود. μ را جرم لپتونی نوعی، مانند جرم میون 10^2 MeV برگزیده، و با اختیار M به اندازه کافی بزرگ، یعنی بزرگتر از 10^7 GeV ، مقدار m جرم نوترینو را در آوریم. گسترش سازوکار الاکلنگی برای دربر گرفتن سه گونه نوترینو هم سرراست است.

R را یکتایی $SU(2)$ اختیار می کنیم، در نتیجه با جایگذاری $R(L_L^\dagger \phi) C$ ناوردای $SU(2)$ به جای $R v_L^\dagger$ ، می توان چگالی لاگرانژی (۲۱-۱۹) را سازگار با مدل استاندارد فیزیک ذرات ساخت. C ثابت جفت شدگی بدون بعد است. پس از شکست تقارن، $\mu v_L^\dagger R$ به صورت $C(\phi_0 + h(x)/\sqrt{2}) v_L^\dagger R$ درآمده، و با کنار گذاشتن موقتی جفت شدگی با بوزون هیگز، مقدار جرم $\mu = C \phi_0$ درمی آید. باید توجه کرد که هر چند هیچ ثابت جفت شدگی دارای بعدی وجود ندارد، جرم M با سازوکار هیگز به وجود نمی آید.

۲۱-۸ نوترینوها ذرات دیراک هستند یا مایورانا؟

اصلی ترین ویژگی که نوترینوهای مایورانای جرم دار را از نوترینوهای جرم دار دیراک متمایز می کند، این است که نوترینوهای مایورانا عدد لپتونی را پایسته نگه نمی دارند. همانگونه که در بخش ۲۱-۲ گفته شد، تقارن $U(1)$ ، که منجر به پایستگی عدد لپتونی در حالت دیراکی می شد، در مورد مایورانا از بین می رود. بنابراین مشاهده آزمایشگاهی فرآیند نقض کننده عدد لپتونی بسیار جالب می باشد. «واپاشی بتازای دو گانه» نوید بخش ترین پدیده برای چنین بررسی می باشد.

نخستین مشاهده واپاشی بتازای دو گانه در سال ۱۹۸۷ با واپاشی زیر انجام گرفت.

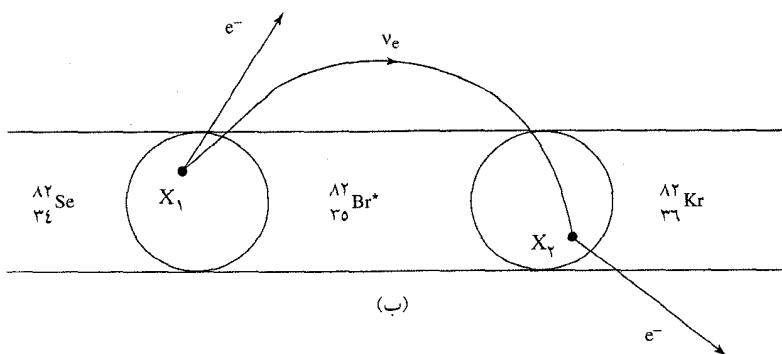
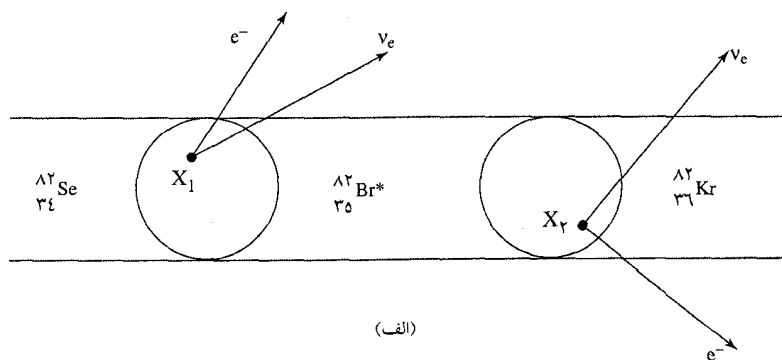


عمر میانگین این واپاشی برابر با $10^{14} (9.2 \pm 1)$ سال اندازه گرفته شده است.

اگر نوترینوها ذرات دیراکی باشند، $\bar{\nu}_e$ علامت مناسبی برای این واپاشی است. اگر نوترینوها ذرات مایورانا باشند، $\bar{\nu}$ و ν همسانند. واپاشی مشاهده شده بین این دو جنبه هیچ تمایزی نمی گذارد. این فرآیند در شکل ۲۱-۱ الف نشان داده شده است. الکترونی و $\bar{\nu}$ در حالت دیراکی، یا ν در حالت مایورانا، در هر نقطه برهمکنشی که کوآرک d به کوآرک u تبدیل یابد، آفریده می شود. بین نقطه های برهمکنش، هسته، ${}_{35}^{82}\text{Br}$ ، می شود. ممکن است هسته ${}_{35}^{82}\text{Br}$ برانگیخته شود.

اگر نوترینوها ذرات مایورانا باشند، این واپاشی می‌تواند واپاشی بتازای بدون نوترینو، همانگونه که در شکل ۲۱-۱ ب مجسم شده، باشد. نوترینو آفریده شده در X_1 ، در X_2 نابود می‌شود، و منجر به تغییر دو واحد در عدد لپتونی می‌گردد. اگر نوترینوها ذرات دیراک باشند، این فرآیند میسر نیست. در نبود نوترینوها برای سهم بدون انرژی، مجموع انرژی دو الکترون گسیلی در انرژی واپاشی دارای قله تیزی می‌شود. (انرژی پس‌زنی هسته کوچک می‌باشد).

واپاشی بتازای دو گانه و واپاشی بتازای دو گانه بدون نوترینو در مرتبه دوم اختلال در برهمکنش ضعیف مؤثر، معادله (۱۴-۲۲)، رخ می‌دهد. برای نوترینوهای مایورانا، واپاشی بتازای دو گانه و واپاشی



شکل ۲۱-۱ (الف) واپاشی بتازا با دو نوترینو برای $^{82}_{34}\text{Se}$ این واپاشی در مرتبه دوم نظریه اختلال برهمکنش ضعیف روی داده و دربر دارنده جمعی روی بسیاری از حالت‌های $^{82}_{35}\text{Br}^*$ (که با $^{82}_{35}\text{Br}^*$ نشان داده می‌شود) می‌باشد.

(ب) واپاشی بتازای بدون نوترینو. نوترینوی مایورانا آفریده شده در گذار $^{82}_{34}\text{Se} \rightarrow ^{82}_{35}\text{Br}^*$ در گذار $^{82}_{35}\text{Br}^* \rightarrow ^{82}_{36}\text{Kr}$ نابود می‌گردد. در نظریه اختلال این امر دربر دارنده جمعی روی همه حالت‌های تکانه نوترینو همانند بسیاری از حالت‌های $^{82}_{35}\text{Br}$ می‌باشد.

جدول ۱-۲۱ برگرفته از Elliot and Vogel hep / ph / 0202264 Feb 2002

حدا پایین تر نیمه عمر اندازه گیری شده برای ν	برآورد T_{ν}^{ν} (سال)	T_{ν}^{ν} (سال)	هسته
$> 9,5 \times 10^{21}$	$(2,2 \pm 1,3) 10^{25}$	$(4,2 \pm 1,2) 10^{19}$	^{48}Ca
$> 1,9 \times 10^{25}$	$(3,2 \pm 2,4) 10^{25}$	$(1,3 \pm 0,1) 10^{21}$	^{76}Ge
$> 2,7 \times 10^{22}$	$(1,3 \pm 1,0) 10^{25}$	$(9,2 \pm 1,0) 10^{19}$	^{82}Se
$> 5,5 \times 10^{22}$	$(8,4 \pm 7,2) 10^{26}$	$(8,0 \pm 0,6) 10^{18}$	^{100}Mo
$> 7,0 \times 10^{22}$	$(1,0 \pm 0,9) 10^{25}$	$(3,2 \pm 0,3) 10^{19}$	^{116}Cd

بتازای دو گانه بدون نوترینو فریندهایی رقابت کننده هستند. واپاشی های بدون نوترینو بسیار فرونشانده می شوند. از معادله میدان (۱-۲۱)، دامنه واپاشی برای مورد بدون نوترینو، با نوترینوی میانجی به جرم m_i و انرژی E_ν ، متناسب با مقدار زیر است.

$$(m_i / 2E_\nu) [e^{-\theta/2} e^{\theta/2} + e^{\theta/2} e^{-\theta/2}] = (m_i / E_\nu)$$

این دو جمله از حالت هایی با دو هلیستی ناشی می شوند. جمله $(m_i / E_\nu) e^\theta$ بر ضریب های متناظر در واپاشی بتازا با دو نوترینو چیره شده و $\theta = (2E_\nu / m_i) \approx 2 \cosh \theta = e^\theta$ ، منجر به مقدار یک می گردد.

با سه ویژه حالت جرمی نوترینو، آهنگ واپاشی متناسب با $\left| \sum_i m_i U_{ei} \right|^2 (\sqrt{E_\nu})$ خواهد بود که \bar{E}_ν انرژی میانگین نوترینو است، که ممکن است انرژی برانگیزش هسته ای، باشد.

در جدول ۱-۲۱ نیمه عمر چند واپاشی بتازا با دو نوترینو، و برآوردهای متناظر با نیمه عمر واپاشی های بدون نوترینو، داده شده است. این برآوردها نسبت به مدل هسته ای بکار رفته حساس هستند.

مسئله ها

۱-۲۱ نشان دهید $(i\sigma^2 \nu^*)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu (i\sigma^2 \nu^*) = \nu^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \nu$ می باشد.

۲-۲۱ با در نظر گرفتن میدان های اسپینوری پادجابجا شونده، نشان دهید

$$\nu_\alpha^T \sigma^2 \nu_\beta = \nu_\beta^T \sigma^2 \nu_\alpha$$

۳-۲۱ ماتریس های آمیختگی مایورانا و دیراک را به ترتیب با U^D و U^M نشان می دهند. نشان دهید

$$U_{\beta j}^M U_{\alpha j}^{M*} = U_{\beta j}^D U_{\alpha j}^{D*}$$

یکسان است.

در مدل استاندارد فیزیک ذرات، میدان‌های فرمیونی لپتون‌ها و کوارک‌ها با تبادل بوزون‌های برداری برهمکنش می‌کنند. همانگونه که در فصل ۱۰ بیان شد، برای بازهنجاری‌پذیری مدل استاندارد بایستی میدان‌های بوزونی برداری از طریق سازوکار تقارن پیمانه‌ای موضعی در این مدل وارد شوند. الزام در بازهنجارش، وارد کردن جمله‌های متقابل در لاگرانژی (فصل ۸) می‌باشد. مهم است که جمله‌های متقابل، تقارنهای پیمانه‌ای موضعی را، به‌همراه جریان‌های پایسته متناظر آنها، نگه دارند. پیامد این کار این است که یکی از قانون‌های پایستگی جریان جهانی مدل استاندارد، که در نتیجه رفتار کلاسیک با این میدان‌ها به‌دست آمده‌اند، باید در زمان کوانتش میدان‌های کلاسیک، تصحیح و تعدیل شود. این روند، نمونه‌ای از ناهنجاری می‌باشد. خواهیم دید که عدد باریونی و عدد لپتونی در نظریه کوانتمی میدان، پایستگی محکمی ندارند.

۱-۲۲ ناهنجاری آدلر-بل-جکیو^۱

بل و جکیو و مستقل از آنها، آدلر، نخستین کسانی بودند که در نظریه میدان یک ناهنجاری یافتند (ر.ک. Treiman et al., 1985). آنها جریان برداری محوری مربوط به تقارنهای کایرال، گفته شده در بخش ۱۶-۷ را در نظر گرفتند. برای درک سرشت این ناهنجاری، چگالی لاگرانژی مدلی را در نظر بگیرید

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left[\gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu) - m \right] \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1-22)$$

این چگالی لاگرانژی دارای تقارن پیمانه‌ای موضعی الکترومغناطیسی است؛ یعنی تحت تبدیل زیر ناورد است

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{-iq\chi(x)} \psi(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x) \end{aligned} \quad (2-22)$$

اگر $m = 0$ باشد، \mathcal{L} دارای تقارن کایرال جهانی می‌باشد. پس تحت تبدیل زیر ناورد است

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha\gamma^5} \psi(x) \quad (3-22)$$

که با ویژگی‌های ماتریس‌های γ به راحتی تحقیق می‌شود (بخش ۵-۵).

با اعمال تبدیل (۲۲-۳) بر چگالی لاگرانژی (۲۲-۱)، با اختیار α بسیار کوچک، و مستقل از فضا و زمان، منجر به تغییر بسیار بسیار کوچک $\delta \mathcal{L}$ در \mathcal{L} می‌گردد، که (پس از انتگرال‌گیری جزء به جزء از این کنش)، می‌توان آن را به صورت زیر اختیار کرد.

$$\delta \mathcal{L} = \alpha(x) \left[\partial_{\mu} j_A^{\mu} - 2im \bar{\psi} \gamma^0 \psi \right]$$

$$j_A^{\mu} = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \gamma^0 \psi \quad (۴-۲۲)$$

که منجر به جریان محوری می‌گردد. (ر.ک. مسأله ۵-۶)

از اصل همیلتونی، برای میدان‌هایی که از معادله‌های میدان پیروی می‌کنند، برمی‌آید که

$$\partial_{\mu} j_A^{\mu} = 2im \bar{\psi} \gamma^0 \psi \quad (۵-۲۲)$$

اگر $m = 0$ باشد، جریان محوری پایسته است:

$$\partial_{\mu} j_A^{\mu} = 0 \quad \text{if} \quad m = 0 \quad (۶-۲۲)$$

نتیجه‌های (۲۲-۵) و (۲۲-۶) از رفتار کلاسیک با میدان‌ها، به دست آمده‌اند. در نظریه کوانتمی میدان، میدان‌ها عملگرهای کوانتمی می‌شوند، و می‌توان جریان‌ها را در نظریه اختلال محاسبه کرد. دریافته‌اند که برای پایسته نگاه داشتن بار الکتریکی، و همچنین نگه‌داری الکترومغناطیس به صورت تقارن پیمانه‌ای موضعی، نظریه اختلال باید به صورت زیر باشد

$$\partial_{\mu} j_A^{\mu} = 2im \bar{\psi} \gamma^0 \psi - \frac{e^2}{2\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_{\mu} A_{\nu} \partial_{\lambda} A_{\rho} \quad (۷-۲۲)$$

با $m = 0$ ، جریان محوری پایسته نیست، اما به جای آن داریم

$$\partial_{\mu} j_A^{\mu} = -\frac{e^2}{2\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_{\mu} A_{\nu} \partial_{\lambda} A_{\rho} \quad (۸-۲۲)$$

این نابهنجاری محوری آدلر-بل-جکیو می‌باشد. دریافت شده است که تنها جمله نابهنجار در $\partial_{\mu} j_A^{\mu}$ وجود دارد. با بهره‌گیری از مسأله ۴-۳، می‌توانیم (۸-۲۲) را به شکل ناوردای پیمانه‌ای صریح بنویسیم

$$\partial_{\mu} j_A^{\mu} = -\frac{e^2}{\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (۹-۲۲)$$

شایان توجه آنکه می‌توانیم از (۸-۲۲) جریان زیر را بسازیم

$$j_{\text{total}}^{\mu} = j_A^{\mu} + \frac{e^2}{4\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} A_{\nu} F_{\lambda\rho} \quad (۱۰-۲۲)$$

که آشکارا پایسته است:

$$\partial_{\mu} j_{\text{total}}^{\mu} = 0 \quad (۱۱-۲۲)$$

j_{total}^{μ} وابسته به پیمانه است (دربر دارنده A_{ν} می‌باشد) و در نتیجه معنای فیزیکی ویژه و مهمی ندارد. با این وجود از (۱۱-۲۲) برمی‌آید که بار

$$Q(t) = \int j_{\text{total}}^0 d^3x \quad (۱۲-۲۲)$$

در زمان پایسته است. $Q(t)$ کمیت ناوردای پیمانه‌ای می‌باشد.

۲-۲۲ حذف نابهنجاری‌ها در جریان‌های الکتروضعیف

در مدل استاندارد فیزیک ذرات، نابهنجاری‌هایی، با خاستگاه و ساختاری همانند نابهنجاری محوری، گفته شده در بخش ۲۲-۱، وجود دارند. به‌ویژه آنکه در بخش الکتروضعیف، بوزون‌های پیمانه‌ای با جریان‌هایی که با دارای هر دو بخش محوری و برداری جفت می‌شوند، مانند (۱۲-۱۵) وجود دارند، که

$$j_e^{\mu} = e_L^{\dagger} \bar{\sigma}^{\mu} \nu_L = \bar{e} \gamma^{\mu} (1/2)(1-\gamma^5) \nu_e \quad (۱۳-۲۲)$$

این جریان آمیزه‌ای از بردار و بردار محوری است، که منجر به نابهنجاری‌های تهدید کننده بازبهنجاری‌پذیری بخش الکتروضعیف می‌گردد. محاسبه‌های مفصل نشان می‌دهد که، در نظریه‌ای که تنها دارای لپتون‌ها بدون کوارک است، نابهنجاری‌ها، قانون‌های پایستگی جریان‌های جفت‌شونده با بوزون‌ها را نابود می‌کنند. برعکس، در نظریه‌ای که تنها دارای کوارک‌ها بدون وجود لپتون‌هاست، دوباره نابهنجاری‌ها وجود دارند. شایان توجه آنکه نظریه‌ای که هم دارای لپتون‌ها و هم دارای کوارک‌ها است، این نابهنجاری‌ها دقیقاً حذف می‌شوند، به شرط آنکه تعداد خانواده‌های لپتونی برابر با تعداد خانواده‌های کوارک‌ها باشد، و در نتیجه جریان‌های پیمانه‌ای الکتروضعیف محکم پایسته هستند (t'Hoof t, 1976). بنابراین برابری تعداد خانواده‌های لپتون و خانواده‌های کوارک اهمیت بنیادین در بازبهنجاری‌پذیری مدل استاندارد دارد. هیچ نابهنجاری جدی وابسته به میدان‌های گلوئونی برهمکنش قوی وجود ندارد.

۳-۲۲ نابهنجاری‌های لپتونی و باریونی

اکنون به جریان‌هایی می‌پردازیم که، در حالت کلاسیک، از تقارن‌های جهانی ناشی شده و شمار لپتون‌ها و کوارک‌ها را پایسته می‌دارد. نخست وضعیتی را در نظر می‌گیریم که نوترینوها فرمیون‌های دیراکی باشند. برای نوترینوهای دیراکی جریان لپتونی پایسته‌ای از (۲۲-۲۵) به دست می‌آید

$$j_{\text{lepton}}^{\mu}(x) = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \left[\alpha_L^{\dagger}(x) \tilde{\sigma}^{\mu} \alpha_L(x) + \alpha_R^{\dagger}(x) \sigma^{\mu} \alpha_R(x) + \nu_{\alpha L}^{\dagger}(x) \tilde{\sigma}^{\mu} \nu_{\alpha L}(x) + \nu_{\alpha R}^{\dagger}(x) \sigma^{\mu} \nu_{\alpha R}(x) \right] \quad (۱۴-۲۲)$$

و در حالت کلاسیک

$$\partial_\mu (J_{\text{lepton}}^\mu) = 0 \quad (15-22)$$

این جریان پایسته، بر اثر کوانتش پایسته نیست. معادله واگرایی را باید با یادآوری (۸-۲۲) اصلاح و تعدیل کرد که در نتیجه به صورت زیر در می آید

$$\partial_\mu (J_{\text{lepton}}^\mu) = \frac{3}{64\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \left[\frac{1}{2} g_2^2 \text{Tr}(W_{\mu\nu} W_{\lambda\rho}) - g_1^2 B_{\mu\nu} B_{\lambda\rho} \right] \quad (16-22)$$

میدان‌های $W_{\mu\nu}$ ، $B_{\mu\nu}$ ، و g_1 و g_2 ثابتهای جفت‌شدگی در فصل ۱۱ معرفی شدند.

شمار کوارک‌های کل هم در حالت کلاسیکی پایسته است، اما زمانی که میدان‌های کوارکی به‌ازای هر رنگ کوانتیزه می‌شوند، جمله نابهنجاری، همانند جمله (۱۵-۲۲)، بروز می‌کند. با جمع بستن روی هر سه رنگ، به عبارت زیر می‌رسیم.

$$\partial_\mu J_{\text{quark}}^\mu = 3 \partial_\mu J_{\text{lepton}}^\mu \quad (17-22)$$

چون عدد باریونی یک سوم عدد کوارکی می‌باشد، می‌توان این مورد را به صورت زیر هم نوشت.

$$\partial_\mu J_{\text{baryon}}^\mu = \partial_\mu J_{\text{lepton}}^\mu \quad (18-22)$$

که $J_{\text{lepton}}^\mu = J_e^\mu + J_{\text{muon}}^\mu + J_{\text{tau}}^\mu$ می‌باشد.

بنابراین اگر نوترینوها ذرات دیراکی باشند، نابهنجاریها دو جریان پایسته کلاسیکی از مدل استاندارد را به یک جریان، که می‌توان آن را به $J_{\text{lepton}}^\mu - J_{\text{baryon}}^\mu$ نوشت، کاهش می‌دهد. جریان مستقل $J_{\text{baryon}}^\mu + J_{\text{lepton}}^\mu$ پایسته نیست.

اکنون می‌خواهیم جریان شمار لپتونی را در نظر بگیریم. این جریان پایسته نیست، همانگونه که درباره نابهنجاری کایرال دریافتیم، اما جریانی وابسته به آن وجود دارد، که پایسته است و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\partial_\mu (J_{\text{lepton}}^\mu - J_T^\mu) = 0 \quad (19-22)$$

که

$$J_T^\mu = \frac{3}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \left[\frac{1}{2} g_2^2 \text{Tr}(W_\nu W_{\lambda\rho}) - (i g_2/3) W_\nu W_\lambda W_\rho \right] - g_1^2 B_\nu B_{\lambda\rho} \quad (20-22)$$

را جریان توپولوژی گویند، و

$$N_T = \int J_T^\mu d^3x \quad (21-22)$$

را عدد توپولوژی گویند.

عدد لپتونی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$N_{\text{lepton}} = \int J_{\text{lepton}}^0 d^3x \quad (22-22)$$

و از (۱۹-۲۲) درمی یابیم که $N_{\text{lepton}} - N_T$ در زمان پایسته می باشد. اگر N_T به اندازه ΔN_T تغییر یابد، آنگاه N_{lepton} به اندازه ΔN_{lepton} تغییر کرده، و $\Delta N_{\text{lepton}} = \Delta N_T$ می شود.

۲۲-۴ تبدیل های پیمانه ای و عدد توپولوژیکی

آیا عدد توپولوژیکی ناوردای پیمانه ای است؟ برای سادگی بحث خود را به میدان هایی که تبدیل پیمانه ای پیکربندی میدان خلأ هستند، محدود می کنیم. پس از (۱۱-۴ب) و (۱۱-۶) داریم

$$B_\mu = (\gamma / g_\gamma) \partial_\mu \theta \quad (23-22)$$

$$W_\mu = (\gamma i / g_\gamma) (\partial_\mu U) U^\dagger \quad (24-22)$$

البته قدرت میدان های $B_{\mu\nu}$ و $W_{\mu\nu}$ در هر جایی صفر است. همچنین تنها تبدیلهای پیمانه ای را در ناحیه موضعی از فضا در نظر خواهیم گرفت، تا با تبدیل $r \rightarrow \infty$ ، $\theta \rightarrow 0$ و $U \rightarrow I$ تبدیل یابند. با بهره گیری از (۲۴-۲۲) در (۲۲-۲۰) عدد توپولوژیکی برای این پیکربندی خلأ عبارتست از

$$N_T = -\frac{1}{8\pi^2} \int \mathcal{E}^{ijkl} \text{Tr} [(\partial_i U) U^\dagger (\partial_j U) U^\dagger (\partial_k U) U^\dagger] d^4x \quad (25-22)$$

می توان نشان داد که N_T مضربی صحیح از $3, 0, \pm 3, \pm 6, \dots$ می باشد. می توانیم این موضوع را با در نظر گرفتن تبدیلهای یکانی به شکل زیر توضیح داد

$$U(\mathbf{x}) = \cos f(r) I + i \sin f(r) (\hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (26-22)$$

$\alpha = f(r) \hat{\mathbf{r}}$ در (ب-۹) اختیار می کنیم. $f(r)$ در اینجا تابعی است با این ویژگی که با $r \rightarrow \infty$ ، $f(r) \rightarrow 0$ میل کرده، و در نتیجه با $r \rightarrow \infty$ ، $U \rightarrow I$ کند. اگر $U(\mathbf{x})$ در $r=0$ تعریف شده باشد، آنگاه $\sin f(r)$ باید در آنجا صفر شود (زیرا $\hat{\mathbf{r}}$ در $r=0$ تعریف نشده است). بنابراین باید $f(0) = n\pi$ باشد، که n عددی صحیح است. این امر تنها در شرطهای مرزی $r=0$ و $r \rightarrow \infty$ برقرار است، که $f(r)$ را می توان هر تابع پیوسته و دیفرانسیل پذیری اختیار کرد.

اگر $n=0$ باشد، می توان $f(r)$ را پیوسته تغییر شکل داد تا به ازای همه مقادیرهای r ، $f(r)=0$ ، $U=I$ گردد. به تبدیلهایی مانند این، تبدیلهای یکانی «کوچک» گویند. اگر $n \neq 0$ باشد، هیچ راهی نیست که بتوان $f(r)$ را پیوسته تغییر داد و به ازای همه مقادیرهای r ، برابری $U=I$ برقرار باشد. این تبدیلهای یکانی «بزرگ» هستند. محاسبه مستقیم (۲۲-۲۵) با U به شکل (۲۲-۲۶) منجر به عبارت زیر می گردد

$$N_T = \frac{6}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 f df = 3n \quad (27-22)$$

به نظر می آید که در نظریه‌ای بدون فرمیون، نمایش‌های ناهم‌ارز بسیاری برای حالت خلأ وجود دارد، که شمار آنها با عدد توپولوژیکی N_T مشخص می‌گردد. با چشم‌پوشی از فرمیون‌ها، و رفتار کلاسیکی کردن با میدان‌های پیمانه‌ای $SU(2) \times U(1)$ و میدان هیگز، دریافت می‌شود که برای تغییر پیوسته N_T به اندازه یک واحد، اعوجاج‌های میدانی درگیر می‌شوند، که نیاز به انرژی دارند. بنا بر برآوردها، بلندای سد انرژی در پیکربندی‌های میدانی، مقدار اندکی در $(4\pi/g^2) M_W$ بوده که نزدیک به $100 M_W$ می‌شود. (1976) 't Hooft، دریافت که اگر با میدان‌ها، به مانند میدان‌های کوانتومی رفتار کنیم، تونل‌زنی کوانتومی از سد می‌تواند رخ دهد، اما از آنجا که ضریب تونل‌زنی بسیار کوچک بوده، $\exp(-16\pi^2/g^2) \approx 10^{-173}$ ، احتمال بریکای حجم در فضا-زمان، تغییر در N_T ، بسیار اندک می‌باشد.

۵-۲۲ ناپایداری ماده، زاینده ماده

با در برگیری فرمیون‌ها در مدل استاندارد، اگر میدان‌های هیگز و پیمانه‌ای از سد انرژی جدا کننده بخش‌های توپولوژیکی مختلف بگذرد، میدان‌های فرمیونی هم باید باز شوند. برای نمونه فرض کنید که $\Delta N_{\text{lepton}} = -3$ باشد. بنا بر (۱۸-۲۲) داریم $\Delta N_{\text{baryon}} = -3$. این شرط‌ها مثلاً در واپاشی ${}^3_2\text{He} \rightarrow e^+ + \mu^+ + \bar{\nu}_\tau$ برآورده می‌شوند.

با ضریب‌های فرونشانی، مانند 10^{-173} ، بسیار نامحتمل است که از زمان شکل‌گیری هسته‌های هلیوم، این هسته در کهکشان ما به این روش واپاشیده باشد.

با این وجود، این امکان وسوسه‌آمیز وجود دارد که محتوی ماده کیهان می‌توانسته است با سازوکاری نابهنجار ایجاد شده باشد. در مدل مهبانگ کیهان‌شناسی، کیهان در آغازینه‌ترین وهله تحولش بسیار داغ بوده، آنهم دمایی بسیار بالاتر از حتی ارتفاع سد جداکننده بخش‌های مختلف توپولوژی. بسته به علامت ΔN_T ، افت‌وخیزهای گرمایی بالای سد، ماده یا پادماده را می‌آفریند. ممکن است در آغاز هر دو عدد باریونی و لپتونی خالص دارای مقدار متقارن صفر بوده باشند. برای ایجاد برتری مشاهده شده ماده بر پادماده، باید نقض CP صورت بگیرد، که این موضوع یک ویژگی از مدل استاندارد است. اگر نوترینوها، فرمیونهای مایورانا باشند، اصلاح‌ها سرراست هستند. برای نمونه، با چگالی لاگرانژی مایورانا (۱۱-۲۱)، معادله (۱۹-۲۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$\partial_\mu \left(J_{\text{lepton}}^\mu - J_T^\mu \right) = m_{\alpha\beta} \left(v_\alpha^T \sigma^i v_\beta + v_\alpha^+ \sigma^i v_\alpha^* \right) \quad (28-22)$$

این را می‌توان با تغییر فازی بسیار بسیار کوچک و وابسته به فضا زمان بر روی میدان‌های لپتونی نشان داد (ر.ک. روش بخش (۱-۲۲)). اگر نوترینوها ذرات مایورانا باشند، آنگاه با این نابهنجاری‌ها، هیچ قانون پایستگی جهانی باقی نخواهد ماند.

پردهٔ آخر

آیا روند ساده‌سازی کامل بوده است؟

مدل استاندارد گسترش یافته که نوترینوهای جرم‌دار را هم دربر می‌گیرد، منجر به داده‌های آزمایشگاهی بسیار موفق‌تری تا سال ۲۰۰۶، شده است. هر نظریه‌ای که در پی آن بیاید، باید در گسترهٔ انرژی، که تاکنون مورد کنکاش قرار گرفته است، تا جہتی همانند مدل استاندارد باشد.

پرسش‌های زیادی بر جای مانده که باید پاسخ داده شوند. چرا ساختار درونی گروه الکتروضعیف و قوی، $(3)SU \times (2)SU \times (1)U$ ، با سه ثابت جفت‌شدگی g_1, g_2, g_3 ، وجود دارد؟ آیا خاستگاه جرم به‌راستی در میدان هیگز با دو پارامترش، یعنی جرم هیگز و مقدار چشم‌داشتی میدان هیگز، یافت می‌شود؟ در بخش الکتروضعیف، چرا جرم لبتون‌های باردار این مقدار هستند؟ در این بخش سه پارامتر وجود دارد. مجموعه پارامترهای دیگری هم وجود دارد که در آنها نوترینوها مجاز به داشتن جرم هستند: سه جرم نوترینو و چهار پارامتر ماتریس آمیختگی جرم (یا اگر نوترینوها میدان‌های مایورانا و نه میدان‌های دیراکی باشند، شش پارامتر برای ماتریس آمیختگی جرم). در بخش کوارکی ده پارامتر بیشتر وجود دارد: شش جرم کوارکی، و چهار پارامتر در ماتریس کوبایاشی-ماسکاو.

آیا این بیست و پنج یا بیست و شش پارامتر به‌راستی مستقلند؟

برخی از این پرسش‌ها را زمانی می‌توان پاسخ داد که فیزیک‌دانان ذرات تجربی که در LHC برخورد دهندهٔ بزرگ هادرونی در سرن درگیر کارند، در انرژی‌های بالاتر و در نتیجه در فاصله‌های کوچکتر به کاوش بپردازند، تا در یافتن خاستگاههای مشترک، آنچه اکنون اجزای گونه‌گون مدل استاندارد می‌نامیم پیشرفت حاصل آید. با این کار بیست و شش پارامتر به یک یا دو پارامتر کاهش می‌یابد.

و سؤال آخر: آیا سرعت نوترینوها بیشتر از سرعت نور نیستند؟ (مترجمین)

الف ۱) تعریف‌ها و نماد گذاری

ماتریس $A = (A_{ij})$ از مرتبه $m \times n$ که $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ آرایه‌ای مرتب از mn عدد است، که ممکن است مختلط هم باشند،

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & \dots & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} عنصر سطر i م و ستون j م می‌باشد.

بنا به تعریف، مزدوج مختلط A که به صورت A^* نوشته می‌شود، عبارتست از:

$$A^* = (A^*_{ij})$$

ترانپاده A که با A^T نشان داده می‌شود ماتریسی $n \times m$ بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^T_{ji} = (A_{ij})$$

بنا به تعریف، ماتریس هرمیتی یا الحاقی A را با A^\dagger نشان می‌دهیم که عبارتست از:

$$A^\dagger = (A^T)^* \quad \text{یا به طور معادل} \quad A^\dagger_{ji} = A^*_{ji} = A^T_{ji}$$

اگر λ و μ اعداد مختلط و A و B ماتریس‌های $m \times n$ باشند، $C = \lambda A + \mu B$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{ij} = \lambda A_{ij} + \mu B_{ij}$$

ضرب ماتریس $m \times n$ ، مانند ماتریس A در یک ماتریس $n \times l$ ، مانند B به صورت $AB = C$

تعریف می‌شود که C ماتریسی $m \times l$ بوده و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$C_{ik} = A_{ij} B_{jk}$$

در بالا، قرارداد انیشتین را به کار بردیم. یعنی روی شاخص تکراری «ظاهری» جمع بستیم، به گونه‌ای که:

$$A_{ij}B_{jk} \text{ می‌رساند که } \sum_{j=1}^n A_{ij}B_{jk}$$

ضرب ماتریس‌ها شرکت‌پذیر است: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$. از این نتیجه می‌گیریم که:

$$(\mathbf{AB})^* = \mathbf{A}^*\mathbf{B}^*, (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T, (\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger$$

ضرب بلوکی: ماتریس‌ها را می‌توان به بلوک‌هایی تقسیم کرد و با قاعده‌ای همانند ضرب عنصری ضرب کرد، البته به شرط آنکه بلوک‌ها سازگار باشند. برای نمونه

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{AE} + \mathbf{BF} \\ \mathbf{CE} + \mathbf{DF} \end{pmatrix}$$

به شرطی که ستون‌های l_1 از \mathbf{A} و ستون‌های l_2 از \mathbf{B} با سطرهای l_1 از \mathbf{E} و سطرهای l_2 از \mathbf{F} هم‌تا باشند. این مطلب با نوشتن جمع‌های مناسب اثبات می‌شود.

الف ۲) ویژگی ماتریس‌های $n \times n$

اکنون ماتریس‌های مربعی $n \times n$ را مد نظر قرار می‌دهیم. اگر \mathbf{A} و \mathbf{B} ماتریس‌های مربعی $n \times n$ باشند، هم می‌توانیم \mathbf{AB} و هم می‌توانیم \mathbf{BA} را بسازیم. به طور کلی ضرب ماتریسی جابجاپذیر نیست، یعنی به طور کلی $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

بنا به تعریف، ماتریس $n \times n$ یک‌ه، یا ماتریس یک \mathbf{I} عبارتست از $I_{ij} = \delta_{ij}$ ، که δ_{ij} دلتای کرونکر است:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

از قانون ضرب به‌ازای هر ماتریس \mathbf{A} داریم:

$$\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$$

\mathbf{A} در صورتی قطری است که به‌ازای $i \neq j$ ، مقدار $A_{ij} = 0$ باشد.

دترمینان: می‌توانیم به ماتریس مربعی \mathbf{A} دترمینان \mathbf{A} را نسبت دهیم که با $\det \mathbf{A}$ یا $|A_{ij}|$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\det \mathbf{A} = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} A_{i_1 1} A_{i_2 2} \dots A_{i_n n}$$

(قرارداد جمع را به خاطر بیاورید) که

$$\varepsilon_{i_1 j_1 \dots t} = \begin{cases} 1 & \text{if } i_1, j_1, \dots, t \text{ is even permutation of } 1, 2, \dots, n, \\ -1 & \text{if } i_1, j_1, \dots, t \text{ is odd permutation of } 1, 2, \dots, n, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

نتیجه مهم این تعریف آن است که:

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$$

همچنین توجه کنید که:

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}, \det \mathbf{I} = 1$$

اگر $\mathbf{A} \neq 0$ باشد، ماتریس \mathbf{A} را ناکین گویند و $\mathbf{A} \neq 0$ شرط لازم و کافی برای وجود وارون یکتای \mathbf{A}^{-1} است، چنانکه

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

بدیهی است که

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$$

رد ماتریس \mathbf{A} که با $\text{Tr} \mathbf{A}$ نمایش داده می‌شود، برابر با حاصل جمع عنصرهای قطری است:

$$\text{Tr} \mathbf{A} = A_{ii}$$

از این تعریف نتیجه می‌شود که

$$\text{Tr}(\mathbf{AB}) = A_{ij} B_{ji} = B_{ji} A_{ij} = \text{Tr}(\mathbf{BA})$$

و از این رو

$$\text{Tr}(\mathbf{ABC}) = \text{Tr}(\mathbf{BCA}) = \text{Tr}(\mathbf{CAB})$$

الف (۳) ماتریس‌های یکانی و هرمیتی

ماتریس‌های یکانی و هرمیتی ماتریس‌هایی مربعی هستند که اهمیت ویژه‌ای در مکانیک کوانتمی دارند. در فرمول‌بندی ماتریسی مکانیک کوانتمی، مشاهده‌پذیرهای دینامیکی با ماتریس‌های هرمیتی نمایش داده می‌شوند، در حالی که پیشرفت زمانی سیستم با ماتریس یکانی مشخص می‌شود.

ماتریس \mathbf{H} در صورتی هرمیتی است که با مزدوج هرمیتی‌اش برابر باشد:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^\dagger, H_{ij} = H_{ji}^*$$

بنابراین عنصرهای قطری ماتریس هرمیتی، حقیقی هستند و ماتریس هرمیتی $n \times n$ با $n^2 = n + 2n(n-1)/2$ عدد حقیقی مشخص می‌شود.

ماتریس \mathbf{U} یکانی است اگر

$$UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbf{I} \quad \text{یا} \quad U = U^\dagger$$

همچنین ضرب دو ماتریس یکانی نیز یکانی است.
تبدیل یکانی ماتریس \mathbf{A} تبدیلی به شکل زیر است.

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}^\dagger$$

که \mathbf{U} ماتریسی یکانی است. این تبدیل، رابطه‌های جبری زیر را برقرار نگاه می‌دارد.

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \mathbf{B}'$$

و مزدوج هرمیتی ماتریس تبدیل یافته عبارتست از:

$$(\mathbf{A}')^\dagger = \mathbf{U} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{U}^\dagger$$

همچنین

$$\text{Tr} \mathbf{A}' = \text{Tr} \mathbf{A} \quad \det \mathbf{A}' = \det \mathbf{A}$$

بنا بر قضیه مهمی در جبر ماتریس‌ها، به‌ازای هر ماتریس هرمیتی \mathbf{H} ، ماتریس یکانی \mathbf{U} وجود دارد که
 $\mathbf{H}' = \mathbf{U} \mathbf{H} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U} \mathbf{H} \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{H}_D$ ماتریسی قطری و حقیقی است.

شرط لازم و کافی برای آنکه بتوان ماتریس‌های هرمیتی \mathbf{H}_1 و \mathbf{H}_2 را با تبدیل‌های یکانی یکسان به شکل قطری درآورد، این است که:

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 = 0$$

نتیجه می‌گیریم که می‌توان با تبدیل‌های یکانی ماتریس \mathbf{M} را (ر.ک. الف-۳) به شکل قطری درآورد، اگر
و تنها اگر

$$\mathbf{M} \mathbf{M}^\dagger - \mathbf{M}^\dagger \mathbf{M} = 0$$

توجه کنید که تبدیل‌های یکانی این شرط را برآورده می‌کنند.

می‌توان با تبدیل تعمیم یافته، شامل دو ماتریس یکانی \mathbf{U}_1 و \mathbf{U}_2 ، ماتریس اختیاری \mathbf{M} را که شرط
بالا را برآورده نمی‌سازد، به شکل قطری حقیقی درآورد. می‌توان \mathbf{U}_1 و \mathbf{U}_2 ، را به گونه‌ای برگزید که
رابطه زیر قطری باشد (ر.ک. الف-۴).

$$\mathbf{U}_1 \mathbf{M} \mathbf{U}_2^\dagger = \mathbf{M}_D$$

اگر \mathbf{H} ماتریس هرمیتی باشد، ماتریس زیر یکانی است:

$$\mathbf{U} = \exp(i\mathbf{H})$$

سمت راست این معادله را می‌توان از تعریف برحسب بسط سری، درک کرد

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} + (i\mathbf{H}) + (i\mathbf{H})^2 / 2! + \dots$$

$$U^\dagger = I + (-i\mathbf{H}^\dagger) + (-i\mathbf{H}^\dagger)^2/2! + \dots = \exp(-i\mathbf{H}^\dagger) = \exp(-i\mathbf{H}) = U^{-1}$$

(عمل مزدوج هرمیتی کردن جمله به جمله انجام می‌گیرد). متقابلاً هر ماتریس یکانی U را می‌توان به این شکل بیان کرد. چون ماتریس هرمیتی $n \times n$ با n^2 عدد حقیقی تعریف می‌شود، در نتیجه ماتریس یکانی با n^2 عدد حقیقی مشخص می‌شود.

الف (۴) تبدیل فی‌یرز

به آسانی می‌توان نشان داد که هر ماتریس 2×2 ، مانند \mathbf{M} با عنصرهای مختلط را، می‌توان به شکل تبدیل خطی از ماتریس‌های $\tilde{\sigma}^\mu$ بیان کرد.

$$\mathbf{M} = Z_\mu \tilde{\sigma}^\mu$$

واز آنجا که $\text{Tr}(\tilde{\sigma}^\mu \tilde{\sigma}^\nu) = 2\delta_{\mu\nu}$ می‌باشد، $Z_\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}^\mu \mathbf{M})$ است.

عبارت $\langle a^* | \tilde{\sigma}^\mu | b \rangle \langle c^* | \tilde{\sigma}^\nu | d \rangle$ را در نظر بگیرید که $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle, |d\rangle$ میدان‌های اسپینوری دو مؤلفه‌ای هستند. با بهره‌گیری از نتیجه بالا می‌توان به جای ماتریس $|c^*\rangle\langle b|$ ، رابطه زیر را جایگزین کرد

$$|b\rangle\langle c^*| = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}^\lambda |b\rangle\langle c^*|) \tilde{\sigma}^\lambda = -\frac{1}{2} \langle c^* | \tilde{\sigma}^\lambda | b \rangle \tilde{\sigma}^\lambda$$

آخرین گام با دخالت دادن شاخص‌های اسپینوری، واضح است، و علامت منفی ناشی از تبادل میدان‌های اسپینورهای ناجابجاشونده است.
پس:

$$g_{\mu\nu} \langle a^* | \tilde{\sigma}^\mu | b \rangle \langle c^* | \tilde{\sigma}^\nu | d \rangle = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \langle a^* | \tilde{\sigma}^\mu \tilde{\sigma}^\lambda \tilde{\sigma}^\nu | d \rangle \langle c^* | \tilde{\sigma}^\lambda | b \rangle$$

با بهره‌گیری از اتحاد جبری زیر:

$$g_{\mu\nu} \tilde{\sigma}^\mu \tilde{\sigma}^\lambda \tilde{\sigma}^\nu = -2g_{\rho\lambda} \tilde{\sigma}^\rho$$

داریم

$$g_{\mu\nu} \langle a^* | \tilde{\sigma}^\mu | b \rangle \langle c^* | \tilde{\sigma}^\nu | d \rangle = g_{\rho\lambda} \langle a^* | \tilde{\sigma}^\rho | d \rangle \langle c^* | \tilde{\sigma}^\lambda | b \rangle$$

که نمونه‌ای از تبدیل فی‌یرز است.

مسئله‌ها

الف (۱) نشان دهید که

$$\varepsilon_{i j \dots l} A_{ai} A_{\beta j} \dots A_{vl} = \varepsilon_{\alpha \beta \dots v} \det A$$

الف (۲) نشان دهید که اگر A و B هرمیتی باشند پس $i(AB-BA)$ نیز هرمیتی است.الف (۳) نشان دهید که ماتریس مربعی اختیاری مانند M را می‌توان به شکل $M = A + iB$ نوشت، که A و B ماتریس‌های هرمیتی هستند. A و B را برحسب جمله‌هایی از M و M^\dagger بیابید. از این‌رو نشاندهید که می‌توان M را با تبدیل یکانی به شکل قطری درآورد، اگر و تنها اگر، $MM^\dagger - M^\dagger M = 0$.الف (۴) اگر M ماتریس مربعی دلخواهی باشد، نشان دهید که MM^\dagger ماتریس هرمیتی است و از این‌رومی‌توان آن را با ماتریس یکانی U_1 قطری کرد. در این صورت می‌توانیم بنویسیم

$$U_1 (MM^\dagger) U_1^\dagger = M_D$$

که M_D ماتریسی قطری با عنصرهای قطری حقیقی و بزرگتر مساوی صفر می‌باشد. (فرض کنید هیچکدام صفر نباشند.) ماتریس هرمیتی $H = U_1 M_D U_1^\dagger$ را تعریف کنید. نشان دهید که $V = H^{-1} M$ یکانی است و بنابراین نشان دهید که $M = U_1^\dagger M_D U_1$ ، که $U_1 = U_1 V$ ماتریس یکانی است.

مدل استاندارد با تکیه بر یکسان بودن شکل معادله‌های مدل، پیش و پس از، تبدیل‌های ویژه‌ای، ساخته می‌شود. برای نمونه، باید معادله‌ها در هر چارچوب مرجع لخت شکل یکسانی داشته باشند، به گونه‌ای که تحت تبدیل لورنتس هموردا باشند؛ تبدیل لورنتس ممکن است به صورت دوران محورها یا افزایش و یا ترکیبی از دوران و افزایش باشد. در دستگاه مختصات جدید، چگالی لاگرانژی توصیف کننده مدل استاندارد، شکلی همانند شکل پیشین می‌گیرد، و به همین دلیل گفته می‌شود که تبدیل‌های لورنتس تبدیل‌ها تقارنی می‌باشند. در مدل استاندارد، میدان‌های ذرات تقارن‌های درونی، همانند تقارن تحت تبدیل‌های مختصات دارند. این تبدیل‌های تقارنی هم با ماتریس‌ها نمایش داده می‌شوند. ویژگی تبدیل‌ها تقارنی این است که در اصول ریاضی گروه، صدق می‌کنند. این اصل‌ها در زیر آورده می‌شوند. در این پیوست برخی از ویژگی گروه‌ها را که اهمیت به‌سزایی در مدل استاندارد دارند، بیان می‌کنیم.

ب) (۱) تعریف گروه

گروه G از مجموعه‌ای از عنصرهای a, b, c, \dots ، به همراه قاعده‌ای برای آمیختن هر دو عنصر a و b از G است تا عنصر تازه ab ، که آن هم عضو G می‌باشد، ساخته شود. این قاعده باید شرط‌های زیر را برآورده سازد:

$$1- \text{قاعده شرکت پذیری: } a(bc) = (ab)c$$

۲- G دارای عنصر همانی یکتای I باشد، چنانکه به ازای هر عنصر a از G ، رابطه $aI = Ia = a$ برقرار باشد.

۳- به ازای هر عنصری از G ، عنصر وارون یکتا a^{-1} وجود داشته باشد، به گونه‌ای که $aa^{-1} = a^{-1}a = I$ باشد.

همچنین اگر به ازای هر a و b ، $ab = ba$ باشد، گروه را جابجایی‌پذیر^۱ یا آبدلی^۲ گویند. تعیین اینکه آیا مجموعه‌ای از عنصرها و قانون آمیختگی آنها، در این اصول صدق می‌کنند یا نه آسان

1- commutative

2- Abelian

است. برای نمونه، مجموعه همه اعداد صحیح، یک گروه آبلی تحت عمل جمع تشکیل می‌دهند و عنصر همانی عدد صفر است. مجموعه همه ماتریس‌های $n \times n$ ناکمین ($n > 1$) یک گروه ناآبلی تحت ضرب ماتریسی تشکیل می‌دهند. جایگشت عددهای $n, \dots, 2, 1$ ، گروهی با $n!$ عضو می‌سازند که نمونه‌ای از گروه‌های متناهی است. گروه دورانه‌های محورهاى مختصات، گروه پیوسته سه پارامتری است. یعنی یک عنصر با سه پارامتر مشخص می‌شود که بازه پیوسته‌ای از مقادیر را اختیار می‌کنند. با گروه‌های این‌چنینی بسیار سروکار خواهیم داشت.

ب-۲) دوران محورهای مختصات و گروه $SO(3)$

دوران محورهای مختصات را حول مبدأ در نظر بگیرید. اگر نقطه P در چارچوب مرجع K ، دارای مختصات (x^1, x^2, x^3) و در چارچوب K' ، که نسبت به K چرخیده است، (x'^1, x'^2, x'^3) باشد، x'^i ها با تبدیل خطی حقیقی به شکل زیر به x^i ها مربوط می‌شوند:

$$x'^i = R_j^i x^j \quad (\text{ب-۱})$$

$\mathbf{R} = (R_j^i)$ ماتریس دوران است. برای نمونه، دوران محورها حول محور z ، به اندازه زاویه θ و در جهت دست راست، معادله‌های زیر را برقرار می‌سازد.

$$x'^1 = x^1 \cos \theta + x^2 \sin \theta$$

$$x'^2 = -x^1 \sin \theta + x^2 \cos \theta$$

$$x'^3 = x^3$$

که متناظر با ماتریس زیر است:

$$\mathbf{R}_{oz}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ب-۲})$$

می‌توان x^i و x'^i را در حکم ماتریس‌های (ستونی) 3×1 ، \mathbf{x} و \mathbf{x}' دانست و تبدیل‌ها (ب-۱) را به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R} \mathbf{x}$$

ترانهاده ماتریس \mathbf{x} ، یعنی \mathbf{x}^T ، ماتریس سطری 1×3 است و ضرب نرده‌ای دو بردار \mathbf{x} و \mathbf{y} به شکل زیر است:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}' = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$$

به‌طور ویژه طول OP از $\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ به‌دست می‌آید. چون دوران محورها ضرب نرده‌ای را حفظ می‌کند،

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{y}' = \mathbf{x}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

رابطه بالا به ازای همه جفت‌های \mathbf{X} و \mathbf{y} برقرار است. از این رو

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (\text{ب-۳})$$

که \mathbf{I} ماتریس همانی است: بنابراین معکوس \mathbf{R} با ترانزاده آن \mathbf{R}^T ، برابر بوده و \mathbf{R} را ماتریس متعامد^۱ گویند. از آنجا که

$$\det \mathbf{R}^T \det \mathbf{R} = \det (\mathbf{R}^T \mathbf{R}) = \det \mathbf{I} = 1, \quad \det \mathbf{R}^T = \det \mathbf{R} \quad (\text{ب-۴})$$

$$(\det \mathbf{R})^T = 1, \quad \det \mathbf{R} = \pm 1$$

ماتریس‌های متناظر با دورانهای خالص، یا «ویژه»، دارای $\det \mathbf{R} = +1$ هستند. این امر را می‌توان با توجه به اینکه دوران‌های همانی دورانی ویژه هستند و $\det \mathbf{I} = 1$ می‌باشد، دریافت. هر دوران ویژه را میتوان به شکل دنباله‌ای از دوران‌های بی‌نهایت کوچک ساخت که از \mathbf{I} آغاز شده و بنا بر پیوستگی دترمینانی برابر ۱ دارد.

ضرب دو ماتریس متعامد، ماتریسی متعامد است، زیرا

$$(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)^T = \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^T = \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{R}_1^{-1} = (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)^{-1}$$

و اگر $\det \mathbf{R}_1 = 1$ و $\det \mathbf{R}_2 = 1$ ، آنگاه

$$\det (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2) = \det \mathbf{R}_1 \det \mathbf{R}_2 = 1$$

از این رو ماتریس‌های حقیقی 3×3 با دترمینان $\det \mathbf{R} = 1$ تحت عمل ضرب ماتریس‌ها یک گروه تشکیل می‌دهند. این گروه، گروه متعامد ویژه خوانده شده و با $SO(3)$ نمایش داده می‌شود.

ماتریس‌های متعامد با $\det \mathbf{R} = -1$ ، همچنین، ضرب نرده‌ای را نگاه می‌دارند. به آسانی درک می‌شود که وارون کردن محورهای مختصات نسبت به مبدأ، $x^i = -x^i$ ، متناظر با ماتریس‌هایی با دترمینان -1 است. دوران ناویژه کلی متناظر با وارونگی نسبت به مبدأ، به همراه دورانی ویژه، می‌باشد. ماتریس‌های دوران ناویژه تشکیل گروه نمی‌دهند زیرا ضرب دو دوران ناویژه یک دوران ویژه است.

دوران ویژه کلی را می‌توان به شکل دنباله‌ای از دوران‌ها حول سه محور مختلف ساخت. برای نمونه رابطه زیر را با نماد گذاری آشکار در نظر بگیرید:

$$\mathbf{R}(\psi, \theta, \phi) = \mathbf{R}_{\phi} \mathbf{R}_{\theta} \mathbf{R}_{\psi}$$

راستای 03° با θ و ϕ تعریف می‌شود و سپس ψ راستای نهایی $02^\circ 01^\circ$ را در صفحه‌ای عمود بر 03°

مشخص می‌سازد. بنابراین هر عنصر از $SO(3)$ تنها با سه پارامتر مشخص می‌شود. $(\psi$ و θ و ϕ را به نام زاویه‌های اولر می‌شناسند).

همچنین می‌توان تبدیل‌های (ب) ۱) را با مفهومی فعال^۱ توصیف کرد. سیستمی را که با تابع موج $\Phi(\mathbf{x})$ در چارچوب K توصیف می‌شود، در نظر بگیرید. این سیستم در چارچوب K' با $\Phi'(\mathbf{x}') = \Phi(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}')$ مشخص می‌گردد. این تفسیر انفعالی^۲ است. می‌توانیم پریما را پی‌درپی روی مختصات حذف کنیم، و با این فرض که محورها ثابت نگه داشته شده‌اند، و سیستم دوران وارون \mathbf{R}^{-1} داده شده است، این معادله را تفسیری فعال بکنیم. تابع موج سیستم دوران یافته $\Phi'(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x})$ می‌باشد.

ب) گروه $SU(2)$

ماتریسی $n \times n$ ، مانند U یکانی است، اگر $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbf{I}$ باشد. ضرب دو ماتریس یکانی نیز یکانی است. از این رو ماتریس‌های یکانی $n \times n$ تحت ضرب ماتریس‌ها، گروهی تشکیل می‌دهند که با $U(n)$ نشان داده می‌شود. از آنجا که

$$\det(UU^\dagger) = \det U \det U^* = \det U (\det U)^* = \det \mathbf{I} = 1$$

می‌توانیم بنویسیم $\det U = e^{in\alpha}$ ، که α مقداری حقیقی است.

گروه یکانی ویژه $SU(2)$ گروهی از همه ماتریس‌های یکانی 2×2 با دترمینان ۱ می‌باشد. این ماتریس‌ها یک گروه را تشکیل می‌دهند، زیرا اگر $\det U_1 = 1$ و $\det U_2 = 1$ باشد، آنگاه $\det(U_1 U_2) = \det U_1 \det U_2 = 1$ است. $SU(2)$ زیرگروهی از $U(2)$ است. هر عنصری از $U(2)$ حاصل ضرب ضریب فازی $e^{i\alpha}$ ، عنصری از $U(1)$ ، و عنصری از $SU(2)$ است.

گروه $SU(2)$ به روش شایان توجهی به گروه دوران $SO(3)$ ، که در (ب-۲) توصیف شد، مربوط می‌شود. گروه $SU(2)$ بنیان بخش الکتروضعیف مدل استاندارد است.

هر عنصر از $U(2)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$U = \exp(i\mathbf{H})$$

که \mathbf{H} ماتریسی هرمیتی است (پیوست الف). ماتریس هرمیتی 2×2 کلی را می‌توان به شکل زیر اختیار کرد:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \alpha^0 + \alpha^3 & \alpha^1 - i\alpha^2 \\ \alpha^1 + i\alpha^2 & \alpha^0 - \alpha^3 \end{pmatrix}$$

که α^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) چهار پارامتر حقیقی هستند. این گزینش ما را بر نوشتن رابطه زیر رهنمون می‌کند:

$$\mathbf{H} = \alpha^0 \mathbf{I} + \alpha^k \sigma^k \quad (\text{ب-۶})$$

که k از ۱ تا ۳ تغییر می‌کند، و

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

σ^k ها همانند ماتریسهای اسپینی پائولی هستند، و از این رو در روابط زیر را صدق می‌کنند.

$$(\alpha^j)^\dagger = \left| (\sigma^j)^\dagger \right| = (\sigma^j)^\dagger = \mathbf{I}; \sigma^j \sigma^k + \sigma^k \sigma^j = 0, j \neq k; \quad (\text{ب-۷})$$

$$[\sigma^1, \sigma^2] = \sigma^1 \sigma^2 - \sigma^2 \sigma^1 = 2i \sigma^3, \text{etc.}$$

از آنجا که ماتریس یک \mathbf{I} با همه ماتریس ها جابجا می‌شود، در حالت کلی، می‌توان عضو $U(2)$ را به شکل زیر نوشت

$$\mathbf{U} = \exp(i\alpha^0 \mathbf{I} + \alpha^k \sigma^k) = \exp(i\alpha^0) \exp(i\alpha^k \sigma^k)$$

ضریب فازی $\exp(i\alpha^0)$ به گروه $U(1)$ تعلق دارد. از این رو عناصر $SU(2)$ به شکل زیر هستند:

$$\mathbf{U}_s = \exp(i\alpha^k \sigma^k) \quad (\text{ب-۸})$$

هر عنصری را می‌توان با سه پارامتر α^k مشخص کرد؛ ماتریس های σ^k متناظر با مولدهای گروه هستند و رد هر کدام از آنها برابر صفر می‌باشد (ر.ک. ب.۱).

جبر ماتریس های σ^k این توانایی را به ما می‌دهد که این عناصر را به شکل بسته بنویسیم. بنا بر قرارداد α^k را برای ساختن بردار $\alpha = \alpha \hat{\alpha}$ در نظر می‌گیریم، که $\hat{\alpha}$ بردار یکه بوده و ضرب نرده‌ای $\alpha^k \sigma^k$ را به شکل $\alpha \hat{\alpha} \cdot \hat{\sigma}$ می‌نویسیم. به آسانی درمی‌یابیم که

$$(\hat{\alpha} \cdot \sigma)^\dagger = \hat{\alpha}^j \sigma^j \hat{\alpha}^k \sigma^k = \hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^j \mathbf{I} = \mathbf{I}$$

زیرا $\sigma^j \sigma^k + \sigma^k \sigma^j = \mathbf{I}$ و $(\sigma^j)^\dagger = \mathbf{I}$ می‌باشد. پس بسط سری توانی (ب.۸) عبارتست از:

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{I} + i\alpha (\hat{\alpha} \cdot \sigma) + \frac{(i\alpha)^2}{2!} \mathbf{I} + \dots = \cos \alpha \mathbf{I} + i \sin \alpha (\hat{\alpha} \cdot \sigma) \quad (\text{ب-۹})$$

برای برقراری رابطه‌ای بین گروه‌های $SU(2)$ و $SO(3)$ ، به هر نقطه \mathbf{x} ماتریس هرمیتی زیر را نسبت می‌دهیم

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix} \quad (\text{ب-۱۰})$$

این ماتریس دارای $\text{Tr } \mathbf{X} = 0$ و $\det \mathbf{X} = -x^k x^k$ می‌باشد.
اکنون عنصر \mathbf{U} از $SU(2)$ و ماتریس

$$\mathbf{X}' = \mathbf{U} \mathbf{X} \mathbf{U}^\dagger \quad (\text{ب-۱۱})$$

را در نظر می‌گیریم. (اکنون شاخص S را به \mathbf{U} می‌دهیم).

\mathbf{X}' نیز هرمیتی است و $\text{Tr } \mathbf{X}' = \text{Tr}(\mathbf{U} \mathbf{X} \mathbf{U}^\dagger) = \text{Tr}(\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} \mathbf{X}) = \text{Tr } \mathbf{X} = 0$ و بنابراین \mathbf{X}' به شکل زیر است:

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x'^3 & x'^1 - ix'^2 \\ x'^1 + ix'^2 & -x'^3 \end{pmatrix}$$

که x'^k با تبدیلی خطی و حقیقی به x^k مربوط می‌شود.

همچنین $\det \mathbf{X}' = \det \mathbf{U} \det \mathbf{X} \det \mathbf{U}^\dagger = \det(\mathbf{U} \mathbf{U}^\dagger) \det \mathbf{X} = \det \mathbf{X}$ است، چنانکه $x'^k x'^k = x^k x^k$ باشد.

از آنجا که طول \mathbf{X} حفظ می‌شود و می‌توان به طور پیوسته، تبدیل را از ماتریس همانی تولید کرد (ر.ک. مسأله ۳)، تبدیل باید متناظر با دورانی ویژه از محورهای مختصات، و بنابراین متناظر با ماتریس دوران $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ باشد.

برای نمونه، ماتریس $SU(2)$

$$\mathbf{U} = \exp[i(\theta/2)\sigma^3] = \cos(\theta/2)\mathbf{I} + i\sin(\theta/2)\sigma^3 = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \quad (\text{ب-۱۲})$$

در رابطه بالا از معادله (ب-۹) بهره برده‌ایم، که متناظر با ماتریس دوران $\mathbf{R}_{\sigma^3}(\theta)$ از معادله (ب-۲) است. رابطه بالا را می‌توان با ضرب مستقیم ماتریس بررسی کرد.

ماتریس‌های \mathbf{U} و $-\mathbf{U}$ تبدیل همانند (ب-۱۱) را ایجاد کرده و بنابراین متناظر با ماتریس دوران یکسانی هستند: به‌ازای هر عنصری از $SO(3)$ ، دو عنصر از $SU(2)$ متناظر با آن وجود دارند، که به‌اندازه ضریب -1 با هم اختلاف دارند. در نمونه (ب-۱۲) بالا، دوران‌های θ و $\theta + 2\pi$ حول محور σ^3 ، متناظر با ماتریس دوران یکسانی است، اما در $SU(2)$ به ترتیب منجر به ماتریس‌های \mathbf{U} و $-\mathbf{U}$ می‌شوند.

ب (۴) گروه $SL(2, \mathbb{C})$ و گروه ویژه لورنتس

مجموعه همه ماتریس‌های 2×2 با عنصرهای مختلط و دترمینان برابر با ۱، آشکارا گروهی را تحت ضرب ماتریسی می‌سازند. این گروه را به $SL(2, \mathbb{C})$ می‌شناسند. این گروه به گروه تبدیل‌های ویژه لورنتس مربوط می‌شود، درست به‌همان گونه که گروه $SU(2)$ به گروه دورانهای ویژه مربوط می‌شود.

اکنون به هر نقطه $x = (x^0, \mathbf{X})$ در فضا-زمان، ماتریس هرمیتی کلی، مانند ماتریس زیر، مربوط می‌کنیم

$$\mathbf{X}(x) = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \quad (\text{ب-۱۳})$$

که دترمینان آن عبارتست از

$$\det \mathbf{X} = (x^0)^2 - x^k x^k$$

عصری \mathbf{M} از $SL(2, \mathbb{C})$ و ماتریس \mathbf{X}' را با رابطه زیر در نظر بگیرید:

$$\mathbf{X}' = (\mathbf{M}^{-1})^\dagger \mathbf{X} \mathbf{M}^{-1} \quad \text{یا} \quad \mathbf{X}' = (\mathbf{M}^{-1})^\dagger \mathbf{X} \mathbf{M}^{-1} \quad (\text{ب-۱۴})$$

پس \mathbf{X}' نیز هرمیتی است و از این رو می‌توانیم بنوسیم

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x'^0 + x'^3 & x'^1 - ix'^2 \\ x'^1 + ix'^2 & x'^0 - x'^3 \end{pmatrix}$$

که x'^μ با تبدیلی خطی و حقیقی به x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) مربوط می‌شود. همچنین

$$\det \mathbf{M}^\dagger \mathbf{X}' \mathbf{M} = \det \mathbf{M}^\dagger \det \mathbf{X}' \det \mathbf{M} = \det \mathbf{X}' = \det \mathbf{X}$$

چنانکه

$$(x'^0)^2 - x'^k x'^k = (x^0)^2 - x^k x^k$$

از این رو ماتریس \mathbf{M} متناظر با ماتریس تبدیلهای لورنتس $\mathbf{L}(\mathbf{M})$ است. ماتریس‌های $\mathbf{L}(\mathbf{M})$ گروهی را تشکیل می‌دهند که دربردارندهٔ تبدیل همانی $\mathbf{L}(\mathbf{I}) = \mathbf{I}$ می‌باشد، و بنابراین پیوسته متناظر با تبدیل‌های لورنتس ویژه است.

تبدیل لورنتس ویژه کلی بین چارچوب‌های K و K' ، با شش پارامتر مشخص می‌شود. سه پارامتر سرعت v ، چارچوب K' را نسبت به K ، و سه پارامتر راستای چارچوب K' را نسبت به K مشخص می‌کند. ماتریس مختلط 2×2 کلی با هشت پارامتر حقیقی تعیین می‌شود. با شرط $\det \mathbf{M} = 1$ این تعداد به شش پارامتر کاهش می‌یابند. از این رو متناظر با هر تبدیل لورنتس ویژه‌ای می‌توان ماتریس \mathbf{M} ای یافت. ماتریس‌های \mathbf{M} و $-\mathbf{M}$ منجر به تبدیلهایی همانند (ب-۱۴) می‌شوند: متناظر با هر عنصر از گروه لورنتس، دو عنصر از $SL(2, \mathbb{C})$ وجود دارند.

ماتریس

$$\mathbf{P} = \exp\left[\left(\frac{\theta}{2}\right)\sigma^3\right] = \cosh\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{I} + \sinh\left(\frac{\theta}{2}\right)\sigma^3 = \begin{pmatrix} e^{\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-\theta/2} \end{pmatrix} \quad (\text{ب-۱۵})$$

متناظر با افزایش لورنتسی (۲-۳) فصل ۲ می باشد، که می توان آن را با ضرب ماتریسی مستقیم به دست آورد.

به طور کلی، افزایش لورنتسی از چارچوب K به چارچوب K' ، که با سرعت $v = \tanh \theta$ در راستای بردار یکه \hat{v} حرکت می کند، عبارتست از

$$\mathbf{P} = \exp\left[(\theta/\gamma)\hat{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right] = \cosh(\theta/\gamma)\mathbf{I} + \sinh(\theta/\gamma)\hat{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

که $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$

توجه کنید، از آنجا که ماتریس های σ^k هرمتی هستند، هر ماتریس \mathbf{P} متناظر با افزایشی لورنتسی است.

ب-۵) تبدیل ماتریس های پائولی

در بحث از تبدیل های لورنتسی، بهتر است که $\mathbf{I} = \sigma^0$ نوشته شده و نمادگذاری زیر را معرفی کنیم:

$$\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3), \quad \tilde{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) \quad (\text{ب-۱۶})$$

پس با توجه به (ب-۱۳) در می یابیم که

$$\mathbf{X}(x) = x^0 \sigma^0 + x^k \sigma^k = x_\mu \tilde{\sigma}^\mu, \quad \mathbf{X}'(x') = x'_\mu \tilde{\sigma}^\mu$$

و با بهره گیری از رابطه $\mathbf{M}^\dagger \mathbf{X}' \mathbf{M} = \mathbf{X}$ به

$$x'_\mu \mathbf{M}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathbf{M} = x_\nu \tilde{\sigma}^\nu = L^\mu_\nu \tilde{\sigma}^\nu x'_\mu$$

می رسم. (ر.ک. مسأله ۲.۲)، از آنجا که x'_μ ها اختیاری هستند، می توان نتیجه گرفت که

$$\mathbf{M}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathbf{M} = L^\mu_\nu \tilde{\sigma}^\nu \quad (\text{ب-۱۷})$$

و همچنین (مسأله ب-۶)

$$L^\mu_\nu = \frac{1}{4} \text{Tr}(\tilde{\sigma}^\nu \mathbf{M}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathbf{M})$$

می باشد. همانند آن، با در نظر گرفتن ماتریس

$$\mathbf{X}_1(x) = x^0 \sigma^0 - x^k \sigma^k = x_\nu \tilde{\sigma}^\nu$$

با $\det \mathbf{X}_1 = (x^0)^2 - x^k \sigma^k$ می توان نشان داد که ماتریس $L^\mu_\nu \sigma^\nu$ متعلق به

$SL(2, \mathbb{C})$ وجود دارد، به گونه ای که:

$$\mathbf{N}^\dagger \sigma^\mu \mathbf{N} = L^\mu_\nu \sigma^\nu \quad (\text{ب-۱۸})$$

ماتریس‌های \mathbf{M} و \mathbf{N} آشکارا مربوط به هم می‌باشند. دانشجو می‌تواند خود مستقیماً دریابد که زمانی $\mathbf{M} = \mathbf{P}$ باشد، و در آن \mathbf{P} از رابطه (ب-۱۵) و متناظر با افزایش لورنتسی به دست می‌آید، می‌توان نوشت $\mathbf{N} = \mathbf{P}^{-1}$ ، که برای افزایش لورنتسی در هر راستایی درست می‌باشد. برای دوران خالص محورها، می‌توانیم $\mathbf{M} = \mathbf{N} = \mathbf{U}$ اختیار کنیم، که \mathbf{U} ماتریس یکانی است. \mathbf{M} کلی را می‌توان به صورت حاصل ضرب افزایش لورنتسی در دوران ساخت: $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{U}$. متناظر آن از $\mathbf{N} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{U}$ به دست می‌آید.

اکنون با توجه به هریتی بودن \mathbf{P} ، یعنی $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\dagger$ ، درمی‌یابیم که \mathbf{U} در معادله $\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{I}$ صدق می‌کند و از این رو

$$\mathbf{N}\mathbf{M}^\dagger = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{U})(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{P}) = \mathbf{I} \quad (\text{ب-۱۹})$$

به گونه‌ای که \mathbf{N} وارون \mathbf{M}^\dagger می‌باشد.

نتیجه‌های (ب-۱۷)، (ب-۱۸) به همراه (ب-۱۹) همگی در ساختن کمیت‌های نرده‌ای لورنتسی، برداری و تانسورهای مرتبه بالاتر سودمندند.

ب ۶ اسپینورها

اسپینور چپگرد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

که موجودی دو مؤلفه‌ای و مختلط است، که تحت تبدیل لورنتس با ماتریس $\mathbf{L}(\mathbf{M})$ و قانون زیر تبدیل می‌یابد:

$$\mathbf{l}' = \mathbf{M}\mathbf{l} \quad (\text{ب-۲۰})$$

یعنی $l'_a = M_{ab}l_b$ ، که a و b مقدارهای ۱ و ۲ می‌گیرند. به همین گونه اسپینور راست گرد را تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad (\text{ب-۲۱})$$

که موجودی دو مؤلفه‌ای با تبدیلی به شکل زیر است

$$\mathbf{r}' = \mathbf{N}\mathbf{r}$$

الکترون‌ها و همه دیگر فرمیون‌ها در مدل استاندارد، با میدان‌های اسپینوری توصیف می‌شوند. سیاهه‌ها و اژگان چپ گرد و راست گرد در بخش ۶.۳ توضیح داده شد. اسپینورها ویژگی‌های شایان توجهی دارند به گونه‌ای که می‌توانند با هم جفت شده و کمیت‌های نرده‌ای لورنتسی، چاربردارهای لورنتسی و

تانسورهای لورنتسی مرتبه بالاتر بسازند. برای نمونه، $I^\dagger r = I^* a r_a$ کمیت اسکالر لورنتسی (مختلط) است، زیرا با بهره‌گیری از (ب-۱۹)، در می‌یابیم که

$$I^\dagger r' = (M)^\dagger N r = I^\dagger M^\dagger N r = I^\dagger r \quad (\text{ب-۲۲})$$

کمیت‌های

$$I^\dagger \tilde{\sigma} I = I^\dagger (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) I$$

$$r^\dagger \sigma r = r^\dagger (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) r$$

همانند چاربردارهای پارادوردا (حقیقی) تبدیل می‌شوند، زیرا

$$I^\dagger \tilde{\sigma}^\mu I' = I^\dagger \tilde{\sigma}^\nu I^\dagger M^\dagger \tilde{\sigma}^\mu M I = L^\mu_\nu (I^\dagger \tilde{\sigma}^\nu I) \quad (\text{ب-۲۳})$$

که با بکارگیری (ب-۱۷)، و

$$r'^\dagger \tilde{\sigma}^\mu r' = r^\dagger N^\dagger \tilde{\sigma}^\mu N r = L^\mu_\nu (r^\dagger \tilde{\sigma}^\nu r) \quad (\text{ب-۲۴})$$

با بکارگیری (ب-۱۸) به دست می‌آید.

ب-۷) گروه $SU(3)$

گروه یکانی ویژه $SU(3)$ گروهی از همه ماتریسهای یکانی 3×3 با دترمینان برابر با ۱ می‌باشد. بحث کنونی ما در موازات بحث درباره‌ی گروه $SU(2)$ است که در بخش ب-۳ گفته شد. عنصر $SU(3)$ را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$U = \exp(iH)$$

که H ماتریس هرمیتی 3×3 است. ماتریس هرمیتی 3×3 کلی با $3^2 = 9$ پارامتر حقیقی مشخص می‌شود (پیوست الف). شرط $\det U = 1$ و یا هم‌ارز آن $\text{Tr } H = 0$ (مسئله ب-۱)، شمار این پارامترها را به ۸ کاهش می‌دهد. به جای ماتریسهای σ^k که در بخش بخش ب-۳ بکار برده شد، هشت ماتریس هرمیتی بدون رد بکار می‌رود، که گلمن معرفی کرده است.

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

در حالت کلی، ماتریس هرمیتی بدون رد به شکل زیر است:

$$\mathbf{H} = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n = \begin{pmatrix} \alpha_r + \alpha_s / \sqrt{3} & \alpha_1 - i\alpha_2 & \alpha_3 - i\alpha_4 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & -\alpha_r + \alpha_s / \sqrt{3} & \alpha_5 - i\alpha_6 \\ \alpha_1 + i\alpha_4 & \alpha_3 + i\alpha_5 & -2\alpha_s / \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (\text{ب-۲۶})$$

ماتریس‌های λ_a در رابطه‌های جابجایی زیر صدق می‌کنند

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2i \sum_{c=1}^n f_{abc} \lambda_c \quad (\text{ب-۲۷})$$

که f_{abc} ثابت‌های ساختار می‌باشند (ر.ک. معادله‌های (ب-۷)). تحت تبادل هر جفت از اندیس‌ها فرد است، و f_{abc} ناصفر از جایگشت‌های $f_{۱۲۳} = 1$ ، $f_{۳۵۸} = \sqrt{3}/2$ ، $f_{۱۴۷} = f_{۲۴۶} = f_{۲۵۷} = f_{۳۴۵} = f_{۵۱۶} = f_{۶۳۷} = 1/2$ به دست می‌آیند. این ماتریس‌ها، دارای ویژگی‌های زیر هم می‌باشد

$$\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab} \quad (\text{ب-۲۸})$$

که همان دلتای کرونکر است.

این نتیجه‌ها را می‌توان با محاسبه مستقیم تأیید کرد.

مسئله‌ها

ب۱) نشان دهید که $\mathbf{U} = \exp(i\mathbf{H})$ و $\text{Tr } \mathbf{H} = 0$ و آنگاه $\det \mathbf{U} = 1$ می‌باشد. \mathbf{H} را با تبدیلی یکانی قطری کنید. \mathbf{U} نیز قطری است.

ب۲) نشان دهید که ماتریس‌های $SU(2)$ ، یعنی $\exp[i(\theta/2)\sigma^1]$ و $\exp[i(\theta/2)\sigma^2]$ به ترتیب با دوران‌های $R_{01}(\theta)$ و $R_{02}(\theta)$ متناظر هستند.

ب۳) نشان دهید ماتریس $SU(2)$ متناظر با دوران $R(\psi, \theta, \phi)$ (ر.ک. (ب-۵))، عبارتست از،

$$\begin{pmatrix} e^{i\psi/2} \cos(\theta/2) e^{i\phi/2} & e^{i\psi/2} \sin(\theta/2) e^{-i\phi/2} \\ -e^{-i\psi/2} \sin(\theta/2) e^{i\phi/2} & e^{-i\psi/2} \cos(\theta/2) e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}$$

ب۴) نشان دهید که $\mathbf{I}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \sigma^\nu \mathbf{r}$ به شکل تانسور تبدیل می‌یابد و همچنین نشان دهید

$$\mathbf{I}^\dagger (\tilde{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \tilde{\sigma}^\nu \sigma^\mu) \mathbf{r} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{I}^\dagger \mathbf{r}$$

ب۵) نشان دهید ماتریس دوران R_j^i از معادله (ب-۱) با رابطه زیر، به ماتریس \mathbf{U} از $SU(2)$ در معادله (ب-۱۱) مربوط می‌شود.

$$R_j^i = \frac{1}{4} \text{Tr}(\mathbf{U} \sigma^i \mathbf{U}^\dagger \sigma^j)$$

ب۶) با بکارگیری (ب-۱۷) نشان دهید که

$$L_\nu^\mu = \frac{1}{4} \text{Tr}(\tilde{\sigma}^\nu M^\dagger \tilde{\sigma}^\mu M)$$

ج ۱) نوسانگر هماهنگ ساده

ممکن است دانشجو عملگرهای آفرینش و نابودی را در رفتار مکانیک کوانتمی نوسانگر هماهنگ ساده دیده باشد. با این زمینه، عملگر a و مزدوج هرمیتی اش a^\dagger ساخته می‌شوند. این عملگرها در رابطه‌های جابجایی زیر صدق می‌کنند:

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad (\text{ج-۱})$$

و البته همچنین

$$[a, a] = 0, [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

عملگر $N = a^\dagger a$ هرمیتی است. ویژه‌حالت‌های بهنجار N با ویژه‌مقدارهای n را با $|n\rangle$ نمایش می‌دهیم. از آنجا که $n = \langle n | a^\dagger a | n \rangle$ مربع قدرمطلق حالت $|n\rangle$ است، n حقیقی و بزرگتر یا برابر با صفر می‌باشد، و تنها اگر $\langle n | a | n \rangle = 0$ باشد، مقدار n برابر با صفر است.

از رابطه‌های جابجایی نتیجه می‌شود که پایین‌ترین ویژه‌حالت n ، عبارتست از $n = 0$. که متناظر با حالت پایه $|0\rangle$ می‌باشد. این مطلب به این دلیل برقرار است که

$$N a | n \rangle = a^\dagger a a | n \rangle = (a a^\dagger - 1) a | n \rangle = (n - 1) a | n \rangle$$

بنابراین جدا از بهنجارش، $a | n \rangle$ ویژه‌حالتی از N با ویژه‌مقدار $(n - 1)$ است، مگر اینکه $a | n \rangle = 0$ باشد. به همین منوال $a | n - 1 \rangle$ ویژه‌حالتی از N با ویژه‌مقدار $(n - 1)$ است و به همین ترتیب بقیه ویژه‌حالت‌ها و ویژه‌مقدارها را می‌توان یافت. فرآیند باید آتقدر ادامه یابد تا به ویژه‌حالت $|0\rangle$ با ویژه‌مقدار 0 و $a | 0 \rangle = 0$ فرجام یابد، زیرا در غیر این صورت شرط $n \geq 0$ نقض می‌شود.

به همین گونه $a^\dagger | n \rangle$ جدا از شرط بهنجارش، ویژه‌حالتی از N با ویژه‌مقدار $(n + 1)$ است. بنابراین ویژه‌مقدارهای عملگر عددی N اعداد صحیح $0, 1, 2, 3, \dots$ هستند.

از آنجا که $\langle n | a^\dagger a | n \rangle = n$ می‌باشد، پس:

$$a | n \rangle = n^{1/2} | n - 1 \rangle \quad (\text{ج-۲})$$

همچنین، $\langle n | a a^\dagger | n \rangle = \langle n | a^\dagger a + 1 | n \rangle = n + 1$ ، چنانکه

$$a^\dagger | n \rangle = (n + 1)^{1/2} | n + 1 \rangle \quad (\text{ج-۳})$$

a را عملگر نابودی و a^\dagger را عملگر آفرینش می‌نامیم.

هامیلتونی نوسانگر هماهنگ ساده بر حسب a و a^\dagger به صورت زیر نوشته می‌شود

$$H = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega = \left(N + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (\text{ج-۴})$$

که ω بسامد متناظر با نوسانگر کلاسیک است (ر.ک. مسأله ج-۱). جمله $\frac{1}{2} \hbar \omega$ نقطه صفر انرژی است. از آنجا که در نظریه میدان تنها تفاوت انرژی‌ها اهمیت فیزیکی دارد، معمولاً مرسوم است که H را بارها کردن نقطه صفر انرژی و اختیار $H = a^\dagger a \hbar \omega$ بازتعریف کنند. بنابراین ممکن است حالت $|n\rangle$ را در حکم حالتی تصور کرد که در آن n ذره همسان هر یک با انرژی توسانگری $\hbar \omega$ وجود دارد. a^\dagger و a را هم ذره‌های نابودی و آفرینش می‌گوییم.

در نمایش هایزنبرگ (بخش ۸-۲) داریم

$$a(t) = e^{iHt} a e^{-iHt} = e^{iN\omega t} a e^{-iN\omega t} = e^{-i\omega t} a \quad (\text{ج-۵})$$

که می‌توان آن را با در نظر گرفتن اثر $a(t)$ بر حالت $|n\rangle$ و با توجه به اینکه دو عبارت به‌ازای $a(t)$ به نتیجه یکسانی می‌رسند، زیرا

$$e^{\pm iN\omega t} |n\rangle = e^{\pm i n \omega t} |n\rangle$$

درک کرد. همچنین

$$a^\dagger(t) = e^{i\omega t} a^\dagger$$

ج-۲) مجموعه‌ای از بوزون‌ها

برای مجمعی از ذره‌های همسان هم می‌توان فرمول‌بندی عملگری را همانند پیش، گسترش داد. نخست فرمول‌بندی را برای زمانی که ذره‌ها بوزن باشند، می‌سازیم.

(ج) U_i را مجموعه کاملی از حالت‌های تک‌ذره‌ای در نظر بگیرید، که \otimes نشان‌دهنده مختصات فضا و اسپین ذره است. عملگرهای نابودی و آفرینش a_i و a_i^\dagger را برای هر حالت تعریف می‌کنیم، به‌گونه‌ای که در رابطه‌های جابجایی زیر صدق کنند:

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, [a_i, a_j] = 0, [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \quad (\text{ج-۷})$$

هر حالتی از سیستم را می‌توان با عمل کردن روی حالت خلأ $|0\rangle$ ، که ذره‌ای در آن وجود ندارد، و

به ازای همه $n \geq 0$ $|0\rangle$ می‌باشد، ساخت. برای نمونه، حالت سه ذره‌ای که دو ذره در حالت u_1 و یک ذره در حالت u_2 دارد (جدا از بهنجارش)، از رابطه $|0\rangle = a_1^\dagger a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle$ به دست می‌آید. آشکارا، چنین حالتی تحت جابجایی دو ذره متقارن است زیرا همه عملگرهای آفرینش جابجا می‌شوند و این ذره‌ها از آمار بوز-انشتین پیروی خواهند کرد.

از رابطه‌های جابجایی نتیجه می‌شود که عملگر عددی $N_i = a_i^\dagger a_i$ تعداد ذره‌ها را در حالت u_i نشان می‌دهد. برای مورد بوزون‌های نابهمکنش کننده، $(\xi) u_i$ را می‌توان به شکل ویژه‌حالت‌های انرژی تک ذره اختیار کرد، و بنابراین عملگر هامیلتونی به صورت زیر است:

$$H_0 = \sum_i a_i^\dagger a_i \varepsilon_i = \sum_i N_i \varepsilon_i \quad (\text{ج-۷})$$

که ε_i ترازهای انرژی تک ذره‌ها هستند.

در نمایش هایزنبرگ و با هامیلتونی ذره آزاد H_0 ، وابستگی زمانی عملگرهای نابودی و آفرینش مانند عملگرهای نوسانگر هماهنگ ساده می‌باشد و در نتیجه با بحثی همانند عملگرهای نوسانگر هماهنگ ساده، نتیجه می‌شود:

$$a_i(t) = e^{-i\varepsilon_i t} a_i, \quad a_i^\dagger(t) = e^{i\varepsilon_i t} a_i^\dagger \quad (\text{ج-۸})$$

ج-۳) مجموعی از فرمیون‌ها

در مورد مجموعی از فرمیون‌های همسان، عملگرهای نابودی و آفرینش را برای هر حالت تک ذره $(\xi) u_i$ با b_i و b_i^\dagger تعریف می‌کنیم، که پادجابجاپذیر هستند:

$$\{b_i, b_j^\dagger\} = b_i b_j^\dagger + b_j^\dagger b_i = \delta_{ij}, \quad \{b_i, b_j\} = 0, \quad \{b_i^\dagger, b_j^\dagger\} = 0 \quad (\text{ج-۹})$$

به ویژه

$$(b_i)^\dagger = 0, \quad (b_i^\dagger)^\dagger = 0 \quad (\text{ج-۱۰})$$

بنابراین دو فرمیون به سبب پیروی از اصل پائولی نمی‌توانند از حالتی همانند نابود و یا در حالتی همانند آفریده شوند.

عملگر عددی $N_i = b_i^\dagger b_i$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$N_i^\dagger = b_i^\dagger b_i b_i^\dagger b_i = b_i^\dagger (1 - b_i^\dagger b_i) b_i = b_i^\dagger b_i = N_i$$

یا

$$N_i (N_i - 1) = 0$$

چنانکه ویژه مقدارهای N_i عبارتند از ۰ و ۱ هستند. این هم با اصل پائولی سازگاری دارد. حالت

فرمیونی بس ذره‌ای را می‌توان با عمل کردن عملگر آفرینش روی حالت خلأ $|\circ\rangle$ ساخته شود. برای نمونه $|\circ\rangle b_1^\dagger b_2^\dagger b_3^\dagger |\circ\rangle$ حالتی با فرمیون در هر یک از حالت‌های u_1, u_2, u_3 می‌باشد. چنین حالتی تحت جابجایی ذرات پادمتقارن است و ذره‌ها از آمار فرمی دیراک پیروی می‌کنند.

در مورد مجمع‌هایی از فرمیون‌های نابرمکنش کننده، عملگر هامیلتونی عبارتست از:

$$H_0 = \sum_i b_i^\dagger b_i \varepsilon_i \quad (\text{ج-۱۱})$$

و در نمایش هایزنبرگ

$$b_i(t) = e^{-i\varepsilon_i t} b_i, \quad b_i^\dagger(t) = e^{i\varepsilon_i t} b_i^\dagger \quad (\text{ج-۱۲})$$

مسئله‌ها

ج-۱) با مقیاس‌بندی دوباره مختصات‌ها

$$P = p / (m\hbar\omega)^{1/2}, \quad X = x (m\omega/\hbar)^{1/2}$$

هامیلتونی نوسانگر همانگ ساده:

$$H = (p^2/2m) + (m\omega^2 x^2/2)$$

به صورت زیر در می‌آید

$$H = (\hbar\omega/2) + (P^2 + X^2)$$

و

$$[X, P] = i$$

نشان دهید اگر $a = (1/\sqrt{2})(X + iP), a^\dagger = (\sqrt{2})(X - iP)$ آنگاه داریم

$$H = \left(a a^\dagger + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad \text{و} \quad [a, a^\dagger] = 1$$

ج-۲) نشان دهید که تابع موج بهنجار شده حالت پایه نوسانگر همانگ ساده عبارتست از

$$(m\omega/\pi\hbar)^{1/4} \exp(-m\omega x^2/2\hbar)$$

ج-۳) با بکارگیری رابطه‌های جابجایی برای فرمیون‌ها نشان دهید که حالت $|\circ\rangle b_i^\dagger$ ویژه حالتی از $N_i = b_i^\dagger b_i$ با ویژه مقدار ۱ می‌باشد.

ج-۴) نشان دهید که ماتریس‌های $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $\mathbf{b}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ در رابطه‌های جابجایی برای

عملگرهای آفرینش و نابودی فرمیون صدق می‌کنند.

د-۱) پراکندگی کشسان الکترون از نوکلئون‌ها

در سال ۱۹۵۰ آزمایش‌هایی روی پراکندگی کشسان الکترون از هدف‌های نوکلئونی ساکن در آزمایشگاه، انجام شد، که منجر به آشکار گشتن توزیع بار در پروتون‌ها و نوترون‌ها گردید. این توزیع باری به وضوح اندازه نوکلئون‌ها را نشان می‌دهند.

سطح مقطع دیفرانسیلی را برای پراکندگی کشسان الکترون‌ها در انرژی‌های بالا از یک ذره دیراکی به جرم M و بار e می‌توان در QED محاسبه کرد. برای پراکندگی از ذره‌ای دیراکی ناقطیبه، که در آغاز در چارچوب آزمایشگاه ساکن بوده است، و در همین چارچوب الکترون پراکنده شده، با زاویه θ نسبت به راستای فرودی، بیرون می‌آید، سطح مقطع دیفرانسیلی عبارتست از:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^2(\theta/2)} \left(\frac{E'}{E}\right)^2 \left[\cos^2(\theta/2) + \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2(\theta/2) \right]$$

در محاسبه سطح مقطع دیفرانسیلی بالا، تنها مرتبه اول ثابت ساختار ریز، $\alpha = e^2/4\pi$ ، در نظر گرفته و از جرم الکترون در مقایسه با انرژی اش چشم‌پوشی شده است. همچنین

چاربردار تکانه انرژی آغازین الکترون: (E, \mathbf{p})

چاربردار تکانه انرژی نهایی الکترون: (E', \mathbf{p}')

انتقال انرژی-تکانه: $q^\mu = (E - E', \mathbf{p} - \mathbf{p}')$

$$Q^2 = -q_\mu q^\mu = (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 - (E - E')^2$$

(برای نمونه، ر.ک. Gross, 1993, p.294)

توجه شود که Q^2 ناوردای لورنتسی است. برای پراکندگی کشسان به‌ازای انرژی معلوم، از پایستگی انرژی و تکانه با کمک زاویه θ ، همه کمیت‌های دیگر موجود در عبارت، تعیین می‌شوند. برای نمونه:

$$Q^2 = 4E E' \sin^2(\theta/2) \quad (د-۲)$$

که انرژی E' از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$M(E - E') - 2EE' \sin^2(\theta/2) = 0 \quad (3-د)$$

(مسأله د-۱)

با اختیار M برای جرم پروتون، فرمول (د-۱) به درستی با داده‌های آزمایشی برآزش نمی‌یابد، زیرا پروتون گشتاور مغناطیسی غیر عادی، تقریباً برابر با $(e\hbar/2M)$ ، ۱٫۷۹ دارد، و انتظار نداریم که این مقدار برآزیده با آزمایش باشد. به طور کلی‌تر، پراکندگی کشسان از پروتون گسترش یافته ناقطبیده عبارتست از:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^2(\theta/2)} \left(\frac{E'}{E}\right) \left[\left\{ f_1^2(Q^2) + \frac{Q^2}{4M^2} f_2^2(Q^2) \right\} \cos^2(\theta/2) \right. \\ \left. + \frac{Q^2}{2M^2} \left\{ f_1(Q^2) + f_2(Q^2) \right\} \sin^2(\theta/2) \right] \quad (4-د)$$

با معلوم بودن اسپین ۱/۲ پروتون و اینکه گشتاور دوقطبی الکتریکی ندارد، شکل این عبارت تعیین می‌شود. $f_1(Q^2)$ عامل ساختار دیراکی پروتون نامیده می‌شود و $f_2(Q^2)$ عامل ساختار مربوط به گشتاور مغناطیسی ناهنجار است. در $Q=0$ ، مقدار $f_1(0)=1$ و $f_2(0) \approx 1.79$ (متناظر با گشتاور ناهنجار) می‌باشد. عامل‌های ساختار مغناطیسی و الکتریکی عبارتند از:

$$G_E(Q^2) = f_1(Q^2) - \frac{Q^2}{4M^2} f_2(Q^2) \quad (5-د)$$

$$G_M(Q^2) = f_1(Q^2) + f_2(Q^2) \quad (6-د)$$

را می‌توان در حد نانسیستی به شکل تبدیل‌های فوریه از توزیع بار الکتریکی و توزیع گشتاور مغناطیسی پروتون تفسیر کرد (مسأله د-۲). اندازه پروتون از روی مقدارهای به دست آمده آزمایشگاهی این دو کمیت نتیجه گرفته می‌شود. هم $f_1(Q^2)$ و هم $f_2(Q^2)$ با افزایش Q^2 به سرعت کاهش می‌یابند (شکل د-۱). برای نوترون نیز همانند پروتون، می‌توان عامل‌های ساختاری تعریف و در آزمایشگاه مقدار آن را تعیین کرد (با بهره‌گیری از اطلاعات پراکندگی از هدف‌های دوتریوم). این تحلیل با مدل کواریکی سازگار است. از آنجا که کواریک دارای بار الکتریکی است، توزیع گشتاور مغناطیسی و بار باید در پی توزیع بار کواریکی و توزیع گشتاور مغناطیسی کواریکی باشد.

د-۲) پراکندگی ناکشسان الکترون از نوکلئون‌ها: مدل پارتون

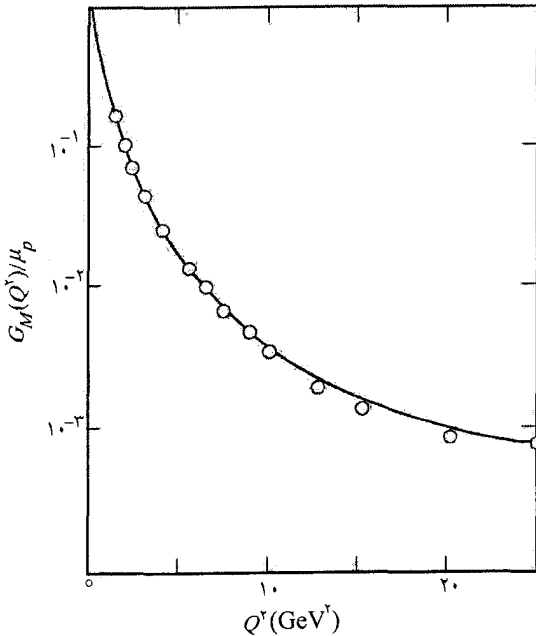
در آغاز آزمایش‌های پراکندگی کشسان در انرژی‌های الکترونی، (کمتر از ۵۰۰ MeV)، انجام می‌شدند. پراکندگی در انرژی‌های بالاتر رفتار کواریک‌ها را در نوکلئون‌ها بیشتر آشکار کرده و ویژگی‌هایی را

آشکار می کند که برای پیگیری فیزیک ذرات، حتی در انرژی های بالاتر آتی، بسیار محکم می باشند. به جز به ازای مقدارهای کوچک Q^2 ، در انرژی های بالاتر پراکندگی ناکشسان، که همه فرآورده های هادرونی را دربر بگیرد، یک مد چیره می شود. در مورد پراکندگی ناکشسان، θ و E' متغیرهای مستقلند. در کل، زیادی متغیرهای مستقل دیگر بسیاری هم وجود دارند که سیستم های هادرونی نهایی را توصیف می کنند، اما هر سطح مقطع دیفرانسیلی بسیار مهم $d^2\sigma/dE' d\Omega$ ، سطح مقطع فراگیر نامیده شده و همه حالات های هادرونی نهایی ممکن را در بر می گیرد.

در برخورد الکترون پروتون HERA واقع در هامبورگ، باریکه ای از الکترون های ۳۰ گیگا الکترون ولتی با باریکه ای از پروتون های ۸۲۰ گیگا الکترون ولتی برخورد سر به سر می کنند. بسیاری از ویژگی هایی که در پی برخورد الکترون- پروتون شناسایی شدند، با مدل پارتونی توصیف می شوند. این مدل را فاینمن در ۱۹۶۹ معرفی کرد.

در مدل پارتونی، هر پروتون در باریکه در حکم سیستمی از زیرذره ها به نام پارتون ها، در نظر گرفته می شود. این پارتون ها عبارتند از کوارک ها، پاد کوارک ها و گلوئون ها. کوارک ها و پاد کوارک ها، پارتون هایی با بار الکتریکی هستند. انرژی و تکانه پروتون P^+ را روی گونه های مختلف پارتون i ، با توزیع احتمالی ویژه، در نظر می گیریم. شمار میانگین پارتون های گونه i در پروتون را با انرژی و تکانه ای در بازه x, P^+ تا $(x + dx)P^+$ ، که $0 < x < 1$ باشد، به صورت $p_i(x) dx$ می نویسیم. در اینجا برچسب i همه گونه های کوارک ها، پاد کوارک ها و گلوئون ها ($u, \bar{u}, d, \bar{d}, s, \bar{s}$ و غیره) را در بر می گیرد. هم مقیاس بندی انرژی و هم مقیاس بندی تکانه، با ضریب یکسانی، اطمینان می دهد که همه پارتون ها سرعتی برابر با پروتون دارند. از هر تکانه عرضی که ممکن است پارتون داشته باشد، چشم پوشی می کنیم. بنابراین در این مدل، هر پارتون در باریکه HERA زیرباریکه ای از پارتون ها در نظر گرفته می شود. می توان پیامدهای این مدل را برای سطح مقطع فراگیر، به آسانی در چارچوب سکون پروتون نشان داد. در این چارچوب، پارتون با کسر تکانه- انرژی x ، همانند ذره ای ساکن به جرم M رفتار می کند. به ازای $Q^2 < M_w^2$ ، پراکندگی چیره، پراکندگی الکترومغناطیسی از پارتون های باردار خواهد بود: یعنی کوارک ها و پاد کوارک ها با اسپین ۱/۲. برای پراکندگی کشسان از پارتونی از گونه i با جرم مؤثر M داریم:

$$\frac{d^2\sigma^i}{dE' d\Omega} = \frac{(x M) E}{E'} \delta \left\{ (E' - E)(x M) + 2E E' \sin^2(\theta/2) \right\} \left(\frac{d\sigma^i}{d\Omega} \right)_{\text{elastic}} \quad (7-d)$$



شکل د-۱ این شکل عامل ساختار دوقطبی مغناطیسی اندازه گیری شده برای پروتون را نشان می دهد. این

داده ها با عبارت ساده $G_M(Q^2) = \mu_p \left[\frac{1}{1 + Q^2/\beta^2} \right]^2$ به خوبی نشان داده می شوند، که $\mu_p = 2,79$ ، $\beta = 0,84 \text{ GeV}$ می باشد. به ازای $Q^2 < 3 \text{ GeV}^2$ ، مقدار $G_E(Q^2)G_M(Q^2)/\mu_p$ اما به ازای $Q^2 > 5 \text{ GeV}^2$ تنها $G_M(Q^2)$ را می توان به درستی اندازه گیری کرد (رک. Coward et al., 1968)

که $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{elastic}}$ همان چیزی است که در (د-۴) آمد، با این تفاوت که بجای M ، مقدار xM ، و

بجای α^2 ، مقدار $q_i^2 \alpha^2$ جایگزین شود. بسته به گونه پارتون، مقدار $q_i^2 = (1/3)^2$ یا $q_i^2 = (2/3)^2$ می باشد. با انتگرال گیری روی E' ، تابع δ در (د-۷) انرژی لازم برای پراکندگی کشسان تحت زاویه θ را، بنا بر شرط (د-۳) با xM به جای M ، بر می گزیند.

(توجه کنید که $a > 0$) $(\delta(aE' - b)) = (E'/b)\delta(E' - b/a)$. اگر تعریف کنیم:

$$\nu = E' - E$$

پس

$$\frac{d^2\sigma^i}{dE' d\Omega} = \frac{(xM)E}{E'} \delta\{(xM)\nu - Q^2/2\} \left(\frac{d\sigma^i}{d\Omega} \right)_{\text{elastic}} \quad (\text{د-۸})$$

با میانگین گیری روی شمار زیادی از برخوردها، و با این فرض که پارتون‌ها ناهمدوس پراکنده می‌شوند، سطح مقطع فراگیر در مدل پارتون عبارتست از:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} &= \int \frac{(xM)E}{E'} \delta\{(xM)v + Q^2/2\} \left(\sum_i p_i(x) \left(\frac{d\sigma^i}{d\Omega} \right)_{\text{elastic}} \right) dx \\ &= \frac{x}{v} \frac{E}{E'} \sum_i p_i(x) \left(\frac{d\sigma^i}{d\Omega} \right)_{\text{elastic}} \end{aligned} \quad (9-د)$$

که

$$x = Q^2 / 2Mv \quad (10-د)$$

و روی همه گونه‌های پارتون‌های باردار جمع می‌زنیم. سرانجام آشکارا فرمول پراکندگی کلی کشسان (د-۴) را وارد می‌کنیم:

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4M E' \sin^2(\theta/2)} \left[\frac{M}{2v} F_2(x, Q^2) \cos^2(\theta/2) + F_1(x, Q^2) \sin^2(\theta/2) \right] \quad (11-د)$$

که

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_i p_i(x) q_i^2 \left\{ (f_v^i)^2 + \frac{v}{2Mx} (f_v^i)^2 \right\} \quad (12-د)$$

$$F_1(x, Q^2) = \frac{1}{2} \sum_i p_i(x) q_i^2 \left\{ (f_v^i) + (f_v^i)^2 \right\} \quad (13-د)$$

(با بکارگیری (د-۱۰)، $Q^2/4x^2M^2 = v/2Mx$)

در حقیقت شکل (د-۱۱) برای سطح مقطع پراکندگی فراگیر، برحسب دو تابع ساختار $F_1(x, Q^2)$ و $F_2(x, Q^2)$ ، کاملاً کلی است و به مدلی که معرفی کرده‌ایم بستگی ندارد.

طول موج \hbar/Q اندازه‌ای از مقیاسی است که در آن مقیاس ساختار پروتون در آزمایش پراکندگی الکترون کاویده می‌شود. به‌ازای مقدار اندک Q ، به‌گونه‌ای که \hbar/Q در مقایسه با اندازه پروتون بزرگ باشد، می‌توان پیش بینی کرد که الکترون از کل پروتون، به‌طور همدوس پراکنده می‌شود. به‌ازای مقادیرهای بزرگ Q ، است که مدل پارتون جالب می‌شود. به‌ازای Q^2 بزرگتر از چند GeV^2 ، به نظر می‌رسد که پراکندگی ناهمدوس پارتونها چیره باشد و کوارک‌ها و پادکوارک‌های درون پروتون آشکارا رفتاری بسیار نزدیک و همانند ذره‌های آزاد دارند: می‌توان گشتاور ناهنجار آنها را نادیده گرفت و

$f_v^i = 0$ قرار داد. پس از (د-۱۲) و (د-۱۳)

$$F_+(x, Q^2) = 2x F_1(x, Q^2) \tag{۱۴-د}$$

این معادله، به نام رابطه کالن-گروس^۱ خوانده می‌شود، و به خوبی با آزمایش سازگار است. اگر پارتون‌های باردار ذره‌های دیراکی بدون ساختار باشند، به‌ازای همه مقادارهای Q^2 ، تساوی $f_+^i = 0$ برقرار است، چنانکه:

$$F_+(x, Q^2) = x \sum_i p_i(x) q_i^+ = F_+(x) \tag{۱۵-د}$$

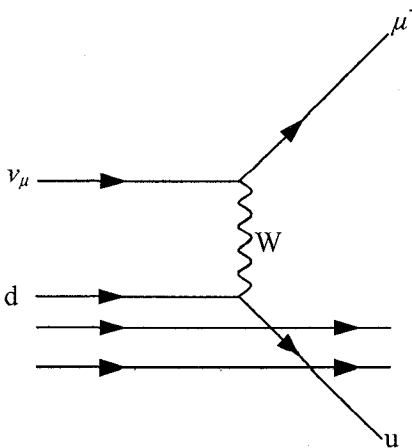
$$F_1(x, Q^2) = \frac{1}{2} \sum_i p_i(x) q_i^+ = F_1(x) \tag{۱۶-د}$$

و F_+ و F_1 هر دو، تنها به پارامتر بدون بعد $x = Q^2 / 2Mv$ بستگی دارند. این مقیاس را مقیاس بیورکن می‌نامند.

در شکل ۱۷-۳، $F_+(x, Q^2)$ روی گستره پهنی از مقادارهای Q^2 و x کشیده شده است. می‌توان دید که مدل خام و ساده پارتون کاملاً درست نمی‌باشد، مگر اینکه وابستگی به Q^2 در مقایسه با عامل ساختار ککسان پروتون ضعیف باشد (شکل د-۱). معمول است که (د-۱۲) را به شکل زیر بازنویسی کنیم

$$F_+(x, Q^2) = x \sum_i p_i(x, Q^2) q_i^+ \tag{۱۷-د}$$

که وابستگی به Q^2 ، را به جای عامل ساختار پارتون به خود توزیع پارتونی مربوط می‌سازد. (ر.ک. بحث معادله‌ها آلتارلی-پاریزی در QCD در بخش ۱۷-۳).



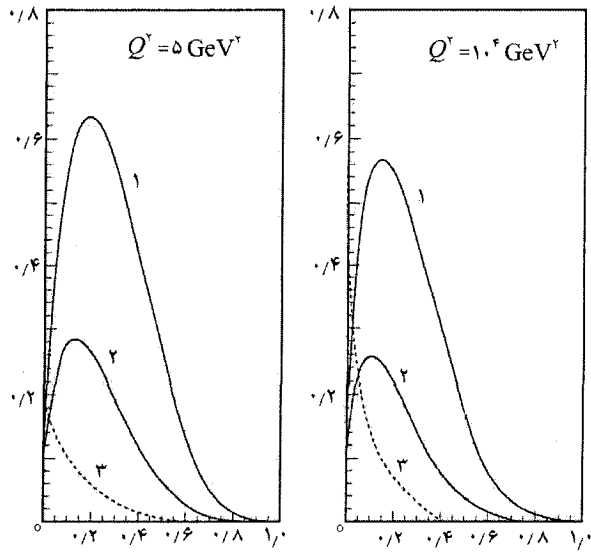
شکل د-۲ توضیح تبدیل نوترینوی میون به میون در پراکندگی از کوارک d در نوکلئون. این شکل وجود «کوارک ظرفیت» را بیان می‌دارد. در واقع، پراکندگی دیگری از جفت‌های کوارک-پادکوارک وجود دارد که از میدان گلوئونی ناشی می‌شود.

برای تعیین توزیع پارتونی منحصراً به فرد $p_i(x, Q^2)$ ، که در معادله (د-۱۷) معرفی شد، به اطلاعاتی بیش از آنچه در تابع ساختار پروتون وجود دارد، نیاز است. با بکارگیری هدف‌های دوترونی و تقارن ایزواسپینی بین نوترون و پروتون ($u \leftrightarrow d, \bar{u} \leftrightarrow \bar{d}$)، نوترون مورد بررسی قرار گرفته است و از داده‌های نوترونی اطلاعات مستقل بیشتری به دست می‌آید. برهمکنش ضعیف بین کوارک‌ها و لپتون‌ها در فصل ۱۴ بررسی می‌شود. از سطح مقطع فراگیر نوترینو و پادنوترینو روی هدف‌های پرتونی و دوترونی (شکل د-۲)، چهار رابطه مستقل دیگر به دست می‌آید، چنانکه با نادیده گرفتن سهم کوارک‌های سنگین‌تر، می‌توان توزیع پارتون‌های منحصراً بفرد $u, d, s, \bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ را برآورد کرد. در این تقریب (د-۱۷) می‌شود:

$$F_1(x) \approx \frac{2}{9} [x u(x) + x \bar{u}(x)] + \frac{1}{9} [x d(x) + x \bar{d}(x) + x s(x) + x \bar{s}(x)] \quad (د-۱۸)$$

که $u(x) = p_u(x)$ و غیره.

در شکل د-۳ مجموعه‌های پذیرفتنی از توزیع پارتون را برای پروتون در $Q^2 = 5 \text{ GeV}^2$ و $Q^2 = 10^4 \text{ GeV}^2$ نشان داده می‌شود. با دقت کنونی داده‌ها، این منحنی‌ها را تنها می‌توان در حکم نشانه



شکل د-۳ منحنی ۱ عبارتست از $x(u(x) - \bar{u}(x))$ (رک. معادله (د-۱۸)). منحنی ۲ عبارتست از $x(d(x) - \bar{d}(x))$ ، تابع توزیع کوارک ظرفیت u می‌نامند. منحنی ۳ عبارتست از $x(u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x))$ گونه ۳ توزیع کوارک دریا را نشان می‌دهد. با نادیده گرفتن تولید جفت‌های $c\bar{c}$ ، $b\bar{b}$ و $t\bar{t}$ منحنی ۳ از

خوبی از شکلشان در نظر گرفت. این منحنی‌ها به گونه‌ای ساخته شده‌اند که بار کل پارتون برابر با e باشد:

$$\sum_i \int_0^1 q_i p_i(x) dx = 1$$

اما توجه به این نکته مهم است که پارتونهای باردار، تنها نیمی از همهٔ تکانه را با خود می‌برند:

$$\sum_i \int_0^1 x p_i(x) dx \approx 1/2$$

بقیهٔ تکانه را احتمالاً گلوئون‌هایی که از نظر الکتریکی خنثی هستند، حمل می‌کنند.

د-۳) حالت‌های هادرونی

اندیشهٔ اصلی مدل پارتون ساده این است که به‌ازای Q^2 بزرگ، الکترون از کوارک یا پاد کوارک بنیادی و آزاد پراکنده می‌شود و فرآیند پراکندگی، پیش از آنکه کوارک پس‌زده زمان کافی برای برهمکنش با کوارک‌ها، پاد کوارک‌ها و گلوئون‌های دورادور خودش داشته باشد، کامل می‌شود. بنابراین در محاسبه سطح مقطع فراگیر حالت‌های هادرونی نهایی آشکار نمی‌شوند.

در این مدل، به‌ازای Q^2 بزرگ، هم الکترون و هم کوارک ضربه دیده تحت زاویه‌های بزرگ منحرف می‌شوند. در شکل ۱-۱۰ نمونه‌ای از رویدادی در آشکارساز ژئوس^۱ واقع در هیرا نشان داده می‌شود. تکانه عرضی الکترون پراکنده شده با جتی از هادرون‌ها، ممکن است وابسته با کوارک پس‌زن، هم‌ارز شود. جت دیگر، جت پروتون باقیمانده، به زاویه‌های کوچک نسبت به باریکه پروتون، محدود می‌شود. رویدادهای این چینی پشتیبانی نیرومند بیشتری برای مدل پارتونی هستند.

با تفسیر داده‌های پراکندگی ناکشسان ژرف در مدل پارتونی، در می‌یابیم که نوکلئون‌ها دارای محتوای \bar{u} و \bar{d} ، و همچنین دربرداندهٔ جفت‌های کوارک-پاد کوارک $s\bar{s}$ باشند (شکل د-۳). این مطالب چه قدر با مدل کوارکی ساده نوکلئونهای ساکن توصیف شده در فصل ۱ سازگار است؟ یک کوارک از مدل سه کوارکی نوکلئون، که بیشتر کوارک سازنده^۲ نامیده می‌شود، کوارک بنیادی در نظر گرفته می‌شود، که آراسته به میدان برهمکنش قوی بوده و خودش جفت‌های کوارک-پاد کوارک افت‌وخیزی را القا می‌کند. چنین کوارک‌هایی در مدل پارتونی، همچون کوارک‌های بنیادی‌تر، مورد توجه قرار می‌گیرند.

در نظریه کوانتمی میدان، ساختن تبدیل‌های لورنتسی روی تابع موج درونی سیستم برهمکنش‌کننده آمیخته‌ای همچون نوکلئون کاری ساده نیست. محتوای کوارک و گلوئون پروتون به چارچوب وابسته هستند. به سبب اتساع زمان، مقیاس زمانی دینامیک درونی نوکلئون در چارچوبی که تکانه‌اش بزرگ

1- ZEUS

2- constituent quark

باشد، طولانی می‌گردد و در این چارچوب توزیع پارتونی روی زمان برهمکنش با الکترون در آزمایش پراکندگی ناکشسان ژرف، تثبیت خواهد شد. توزیع پارتون‌ها در این مدل برای نمایش توزیع‌ها در این چارچوب «تکانه نامتناهی»، اختیار می‌شود.

مسئله‌ها

د-۱) معادله (د-۲) و (د-۳) را ثابت کنید.

د-۲) در مکانیک کوانتمی، سطح مقطع دیفرانسیلی برای الکترونی با انرژی $m_e \gg E$ ناشی از پتانسیل الکتروستاتیکی ثابت $\phi(r)$ از تقریب بورن و با نادیده گرفتن اثر اسپین الکترون، عبارتست از

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{E}{2\pi} \right)^2 \left(e \int \phi(r) e^{iq \cdot r} d^3x \right)^2$$

که q تفاوت بین بردارهای موج آغازین و نهایی الکترون است.

الف) نشان دهید که $q = |\mathbf{q}| = 2E \sin(\theta/2)$ می‌باشد (θ زاویه پراکندگی است).

ب) معادله پواسون، $\nabla^2 \phi = -\rho$ ، پتانسیل $\phi(r)$ را به چگالی بار $\rho(r)$ مربوط می‌کند. با توجه به

$$\nabla^2 e^{iq \cdot r} = -q^2 e^{iq \cdot r}$$

که جزء به جزء نشان دهید که

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{E}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{q^2} \left(e \int \rho(r) e^{iq \cdot r} d^3x \right)^2$$

بنابراین همان‌گونه که در این نمونه ساده نشان داده شد، می‌توان سطح مقطع اندازه‌گیری شده را برای پی بردن به تبدیل فوریه توزیع بار بکار برد.

د-۳) با اختیار Q^2 و v ، در حکم متغیرهای مستقل به جای E' و θ ، نشان دهید که

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2\sigma}{dE' d(\cos\theta)} = \frac{E E'}{\pi} \frac{d^2\sigma}{dQ^2 dv}$$

هـ-۱) K° و \bar{K}°

پدیدارشناسی از پیشرفت زمانی مزونی باردار الکتریکی $|P\rangle$ ساکن با معادله زیر توصیف می‌شود

$$i \frac{d}{dt} |P\rangle = [m - (i/\tau)\Gamma] |P\rangle \quad (\text{هـ-۱})$$

و جواب آن عبارتست از

$$|P(t)\rangle = |P(0)\rangle e^{-imt - (\tau/\tau)\Gamma t}$$

در اینجا m جرم مزون، Γ آهنگ واپاشی و $1/\Gamma$ عمر میانگین مزون است.

مزون‌های خنثی الکتریکی، برای نمونه $K^\circ(d\bar{s})$ و $B^\circ(d\bar{b})$ ، که دارای پادمزون متمایز هستند، در این نمونه $\bar{K}^\circ(s\bar{d})$ و $B^\circ(b\bar{d})$ ، می‌توانند به گونه‌ای با هم آمیخته گردند که (و-۱) به دو معادله جفت شده تبدیل شود. برای K° و \bar{K}° این معادله‌ها عبارتند از:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} |K^\circ\rangle \\ |\bar{K}^\circ\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m - (i/\tau)\Gamma & -p^\tau \\ -q^\tau & m - (i/\tau)\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |K^\circ\rangle \\ |\bar{K}^\circ\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{هـ-۲})$$

p^τ و q^τ دو عدد مختلط هستند. می‌توان ماتریس‌های جرمی 2×2 را به شکل هامیلتونی مؤثر H_{weak} نظر گرفت. برابری عنصرهای قطری H_{weak} با ناوردایی CPT ضمانت می‌شود. برهمکنش ضعیف عنصرهای غیر قطری زیر را تولید می‌کند:

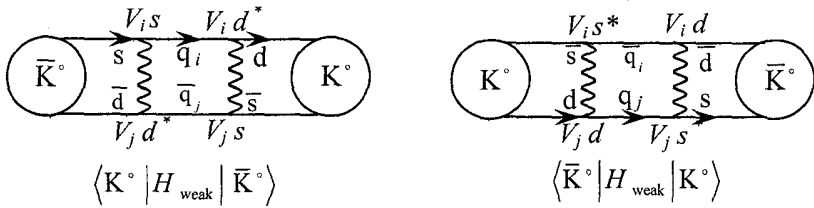
$$\langle K^\circ | H_{\text{weak}} | \bar{K}^\circ \rangle = -p^\tau, \quad \langle \bar{K}^\circ | H_{\text{weak}} | K^\circ \rangle = -q^\tau$$

در شکل (هـ-۱) سهم در p^τ و q^τ نشان داده می‌شود.

با جایگذاری در (هـ-۲) می‌توان دید که ویژه‌حالت‌های H_{weak} عبارتند از

$$|K_S\rangle = N [p |K^\circ\rangle + q |\bar{K}^\circ\rangle] \quad (\text{هـ-۳})$$

$$|K_L\rangle = N [p |K^\circ\rangle - q |\bar{K}^\circ\rangle] \quad (\text{هـ-۴})$$



شکل ه-۱ نمودارهای کواری، چگونگی برهمکنش ضعیف را با بوزون های W ایجاد کننده آمیختگی را نشان می دهند. q_i و q_j هر یک از کوارک های s, u یا t با بار $e(2/3)$ هستند. عنصرهای ماتریس آمیختگی متناسب با حاصل ضرب چهار ضریب KM در نمودارها می باشد.

که به ترتیب دارای ویژه مقدارهای $m - i\Gamma/2 - pq$ و $m - i\Gamma/2 + pq$ هستند.

را $N = (|p|^2 + |q|^2)^{-1/2}$ ضریب بهنجارش است. علامت ریشه مربعی، $p, q = \sqrt{p^* q^*}$ را به گونه ای برمی گزینیم که $\text{Im}(pq)$ مثبت باشد؛ آنگاه میانگین عمر K_L از K_S بلندتر است.

تفاوت جرمی $\Delta m = 2\text{Real}(pq)$ ، (از آزمایش $3 \times 10^{-12} \text{ MeV}$)، می باشد. باید m را

جرم میانگین K_S و K_L بدانیم. عمر میانگین آنها عبارتست از $\tau_L \approx \frac{1}{\Gamma - 2\text{Im}(pq)}$ و

$\tau_S \approx \frac{1}{\Gamma + 2\text{Im}(pq)}$ (از آزمایش $\tau_S \approx 10^{-11} \text{ s}$ ، $\tau_L \approx 5 \times 10^{-8} \text{ s}$) زیروندهای S و L مربوط به عمرهای طولانی و کوتاه می باشند.

از برآوردهای شبکه تابع موج های حالت مقید و دیگر اصلاح های QCD، می توان p^* و q^* را با نظریه اختلال در برهمکنش ضعیف محاسبه کرد. در شکل (ه-۱) نابرابری p و q به سبب مختلط بودن برخی از ضریب های KM ، یعنی V_{is} و غیره، نشان داده می شود. پیامدش این می شود که نه $|K_L\rangle$ و نه $|K_S\rangle$ هیچ کدام ویژه حالت CP نمی باشند (ر.ک. بخش (۱۸-۴)).

ه-۲) \bar{B}^0 و B^0

جفت مزون B خشی یعنی B^0 و \bar{B}^0 با سازوکاری همانند مزون های K خشی با هم درمی آمیزند. البته پارامترهای m, Γ, p^* و q^* مقدارهای متفاوت می گیرند.

به ازای جفت B ، مقدار $\text{Im}(pq)$ بسیار کوچکتر از Γ است، به گونه ای که عمر میانگین این دو تقریباً با هم برابرند. دو ذره با جرم مختلف وجود دارد:

$$|B_L\rangle = N [p|B^0\rangle + q|\bar{B}^0\rangle]$$

$$|B_H\rangle = N [p|B^\circ\rangle - q|\bar{B}^\circ\rangle]$$

زیروندهای L و H به جرم این دو مزون برمی‌گردد: سبک و سنگین.

برای آمیختگی $B^\circ \bar{B}^\circ$ ، شرایط مناسب این است که کوارک سر، $\bar{q}_i = \bar{t}$ ، $q_i = t$ ، سهمی چیره در p^\dagger و q^\dagger داشته باشد، p^\dagger متناسب با $(V_{tb} V_{td}^*)^\dagger$ و q^\dagger متناسب با $(V_{tb}^* V_{td})^\dagger$ می‌باشد (ر.ک. شکل ه-۱) محاسبه‌ها منجر به عبارت‌های زیر می‌شوند:

$$p = \sqrt{m_B m_t} \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_B F_{tt} V_{tb} V_{td}^* \quad (ه-۵)$$

$$q = \sqrt{m_B m_t} \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_B F_{tt} V_{tb}^* V_{td}$$

(Donoghue et al., 1992, p.395.)

همه سهم‌های دیگر به‌اندازه ضریب‌های $(m_c / m_t)^\dagger$ ، کوچکتر هستند. m_B جرم مزون B ، و $f_B \approx 0.3 \text{ GeV}$ ، «ثابت واپاشی لپتونی» آن، و F_{tt} عددی بدون بعد است که با تقریب خیلی خوبی حقیقی می‌باشد.

با F_{tt} حقیقی، و $\text{Im}(pq) = 0$ ، B_L و B_H دارای عمر میانگین یکسانی هستند. با در نظر گرفتن خطای آزمایشگاهی، چنین برابری دیده می‌شود. همچنین $|p| = |q|$ و $p = |p| e^{i\beta}$ ، $q = |q| e^{-i\beta}$ می‌باشد.

(ر.ک. مثلث یکانی شکل ۱۸-۲). از این رو

$$|B_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{i\beta}|B^\circ\rangle + e^{-i\beta}|\bar{B}^\circ\rangle]$$

$$|B_H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{i\beta}|B^\circ\rangle - e^{-i\beta}|\bar{B}^\circ\rangle]$$

مزون B_L یا مزون B_H ساکن، با زمان به‌طور مستقل به‌صورت زیر پیشرفت می‌کنند

$$|B_L(t)\rangle = |B_L(0)\rangle e^{-i(m - \Delta m / 2)t - t / \tau}$$

$$|B_H(t)\rangle = |B_H(0)\rangle e^{-i(m + \Delta m / 2)t - t / \tau}$$

پس از اندک عملیات جبری، درمی‌یابیم که B° یا \bar{B}° آغازین با زمان پیشرفت می‌کند تا به‌صورت آمیخته زیر درآید:

$$\begin{aligned} |B^{\circ}_{\text{phy}}(t)\rangle &= \left[\cos\left(\frac{\Delta m t}{2}\right) |B^{\circ}\rangle + ie^{-i\beta} \sin\left(\frac{\Delta m t}{2}\right) |\bar{B}^{\circ}\rangle \right] e^{-im-t/\tau} \\ |\bar{B}^{\circ}_{\text{phy}}(t)\rangle &= \left[ie^{i\beta} \sin\left(\frac{\Delta m t}{2}\right) |B^{\circ}\rangle + \cos\left(\frac{\Delta m t}{2}\right) |\bar{B}^{\circ}\rangle \right] e^{-im-t/\tau} \end{aligned} \quad (\text{ه-۷})$$

اگر مزون در زمان t به حالت نهایی $|f\rangle$ واپاشد، دامنه واپاشی برای B° نخستین، عبارتست از:

$$\langle f | B^{\circ}_{\text{phy}}(t) \rangle = \left[\cos\left(\frac{\Delta m t}{2}\right) A_f + ie^{-i\beta} \sin\left(\frac{\Delta m t}{2}\right) \bar{A}_f \right] e^{-im-t/\tau}$$

و برای \bar{B}° نخستین

$$\langle f | \bar{B}^{\circ}_{\text{phy}}(t) \rangle = \left[ie^{i\beta} \sin\left(\frac{\Delta m t}{2}\right) A_f + \cos\left(\frac{\Delta m t}{2}\right) \bar{A}_f \right] e^{-im-t/\tau}$$

\bar{B}°
اگر $\bar{B}^{\circ} \rightarrow f$ و $B^{\circ} \rightarrow f$ دامنه واپاشی های $\bar{A}_f = \langle f | \bar{B}^{\circ}_{\text{phy}}(t) \rangle$ و $A_f = \langle f | B^{\circ}_{\text{phy}}(t) \rangle$ پاریته بار (CP) برای f برابر با +۱ باشد، پس با حالت $(B^{\circ} - \bar{B}^{\circ})$ با $CP = -1$ جفت نمی شود؛ از این رو $A_f = \bar{A}_f$ می باشد. پس آهنگ های واپاشی عبارتند از:

$$\text{Rate}(B^{\circ}_{\text{phy}}(t) \rightarrow f) = |A_f|^2 e^{-t/\tau} [1 + \sin(\gamma\beta) \sin(mt)] \quad (\text{ه-۹})$$

$$\text{Rate}(\bar{B}^{\circ}_{\text{phy}}(t) \rightarrow f) = |A_f|^2 e^{-t/\tau} [1 - \sin(\gamma\beta) \sin(mt)]$$

اگر f ، دارای $CP = -1$ باشد، عبارتی همانند (ه-۹) نتیجه می شود، با این تفاوت که باید جای علامت های + و - جابجا شوند.

در Belle, Babarm, Cleo، مزون های B° و \bar{B}° ، جفت جفت تولید می شوند. اگر یکی از مزون ها، دستخوش واپاشی لپتونی با لپتون دارای بار منفی شود، چنین مزونی باید \bar{B}° باشد. در چنین زمانی همتای آن، B° بوده و وابستگی زمانی در واپاشی دوم است که اندازه گیری می شود.

به همین سان، لپتون دارای بار مثبت نشان دهنده واپاشی B° می باشد که همتایش، \bar{B}° ، را ترک می کند. این فرآیند را نشان دار کردن گویند. با ردیابی وابستگی زمانی مزون های نشان دار، تفاوت جرمی Δm و $\sin 2\beta$ اندازه گیری می شوند.

فرمول های p^+ و q^+ برای K° و \bar{K}° هم الگویی همانند فرمول واپاشی های B دارند، با این تفاوت که سهم های کوارک سر، با ضریب های بسیار کوچک KM، فرونشانده می شوند. کوارک های c و u سهم بارزی دارند و سادگی فرمول برای مزون های B ناپدید می شود.

راهنمایی برای حل برخی از مسأله‌ها

فصل دوم

۱-۲ $a'_\mu = L_\mu^\nu a_\nu$ که در نتیجه $a'_\mu = g_{\mu\rho} a'^\rho = g_{\mu\rho} L_\lambda^\rho a^\lambda = g_{\mu\rho} L_\lambda^\rho g^{\lambda\nu} a_\nu$

$$L_\mu^\nu = g_{\mu\rho} L_\lambda^\rho g^{\lambda\nu} \quad L_\mu^\nu = g_{\mu\rho} L_\lambda^\rho g^{\lambda\nu}$$

۲-۲ $a'_\mu = L_\mu^\nu a'_\nu$. از سمت چپ در $L_\mu^\rho \cdot L_\mu^\rho a'^\mu = L_\mu^\rho \cdot L_\mu^\nu a^\nu = a^\rho$ ضرب می‌کنیم. یا

$$a_\mu = a'_\nu L_\nu^\mu \quad a^\mu = a'^\nu L_\nu^\mu$$

۳-۲ $d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} dx^\mu = \frac{\partial\phi}{\partial x'^\nu} dx'^\nu = \frac{\partial\phi}{\partial x'^\nu} L_\mu^\nu dx^\mu$ زیرا dx^μ ها دلخواهی هستند،

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial\phi}{\partial x'^\nu} L_\mu^\nu$$

این تبدیل میدان برداری همورد است (مسأله ۲-۲).

$$\det(L_\mu^\nu) = \det(g_{\mu\rho}) \det(L_\lambda^\rho) \det(g^{\lambda\nu}) = (-1)^3 \det(L_\lambda^\rho) \quad ۴-۲$$

می‌یابیم که $\det(L_\mu^\nu) \det(L^\mu_\rho) \det(\delta^\nu_\rho) = 1$ و نتیجه مورد نظر در پی آن می‌آید.

۶-۲ توجه کنید که اگر $\det L_\nu = 1$ و $\det L_\nu = 1$ ، آنگاه $\det L_\nu = 1$ می‌باشد.

$$\delta'^{\mu\nu} = L^\mu_\rho L_\nu^\lambda \delta_\lambda^\rho = L^\mu_\rho L_\nu^\rho = \delta_\nu^\mu \quad ۷-۲$$

۸-۲ با بهره‌گیری از مسأله (۲-۲) داریم $\delta'^{\mu\nu} = L^\mu_\rho L_\nu^\lambda \delta_\lambda^\rho = \delta_\nu^\mu$ $\omega' = \omega \cosh \theta - k \sinh \theta = \omega (\cosh \theta - \sinh \theta) = e^{-\theta} \omega$ (۳-۲)

از آنجا که $v/c = \tanh \theta$ نتیجه در پی می‌آید.

$$\det(\partial x'^\mu / \partial x^\nu) = \det(L^\mu_\nu) = 1 \quad ۹-۲$$

۱۰-۲ عمل وارونی فضا را می‌توان به صورت $x'_\mu = P_\mu^\nu x_\nu$ نوشت. پس تانسور $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ به صورت زیر

تبدیل می‌یابد

$$\varepsilon'_{\mu\nu\lambda\rho} = P_\mu^\alpha P_\nu^\beta P_\lambda^\gamma P_\rho^\delta \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \det \mathbf{P} = -\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$$

فصل سوم

۱-۳ x_i ($i = 1, \dots, 3N$) را مختصات دکارتی ذرات در نظر می‌گیریم. از آنجا که

$$q_j = (x_i / \partial q_j) \dot{q}_j \quad \text{پس داریم}$$

$$T = (m / 2) \dot{x}_i \dot{x}_i = (m / 2) (\partial x_i / \partial q_j) (\partial x_i / \partial q_k) \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$\frac{dE}{dt} = \int \left[\dot{\phi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \ddot{\phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \ddot{\phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} \dot{\phi}' \right] dx \quad ۲-۳$$

از جمله $(\partial \mathcal{L} / \partial \phi') (\partial \dot{\phi} / \partial x)$ انتگرال گیری جزء به جزء گرفته و از (۳-۱۲) بهره می‌بریم.

۴-۳ از رابطه تعامد و پاشندگی (۳-۲۰) بهره می‌بریم. توجه کنید که H و P^i چاربردار پادوردا (H, \mathbf{P}) را می‌سازند.

۵-۳ ψ^* را واردش می‌دهیم

$$\delta S = \int \delta \mathcal{L} dt d^3x = \int \left[-(\mathbf{1} / \mathbf{v} i) \left(\delta \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial (\delta \psi^*)}{\partial t} \psi \right) - (\mathbf{1} / 2m) \nabla (\delta \psi^*) \cdot \nabla \psi - \delta \psi V \psi \right] dt d^3x$$

از جمله‌های دربر دارنده $\nabla (\delta \psi^*) / \partial t$ و $\nabla (\delta \psi^*)$ انتگرال گیری جزء به جزء می‌گیریم که در نتیجه داریم

$$\delta S = \int \left[-(\mathbf{1} / i) \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{1} / 2m) \nabla^2 \psi - V \psi \right] \delta \psi^* dt d^3x$$

به‌ازای هر $\delta \psi^*$ درست می‌باشد، تابع زیر انتگرال باید صفر شود. در نتیجه

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -(\mathbf{1} / 2m) \nabla^2 \psi + V \psi$$

فصل ۸

$$۱-۴ \quad \mathcal{L} = -(\mathbf{1} / 4) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu$$

$$F^{01} = -E_x = -F_{01}, \quad F^{11} = -B_x = F_{11}$$

$$۲-۴ \quad \text{اگر } \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \chi \text{ باشد، باید } \nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot (\mathbf{A} - \nabla \chi) = f - \nabla^2 \chi = 0$$

عبارتست از

$$\chi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$$

۳-۴

$$\vec{F}_{0i} = (\varepsilon_{0123} F^{12} + \varepsilon_{0132} F^{31}) / 2 = (F^{12} - F^{21}) / 2 = (-B_x - B_x) / 2 = -B_x, \text{ etc.}$$

۴-۴

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} \left[(\varepsilon_x + i\varepsilon_y) e^{i(kz - \omega t)} + (\varepsilon_x - i\varepsilon_y) e^{-i(kz - \omega t)} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} \left[r \cos(kz - \omega t), -r \sin(kz - \omega t), 0 \right]$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \sqrt{\frac{r\omega}{V}} \left[\sin(\omega t - kz), -\cos(\omega t - kz), 0 \right]$$

در هر صفحه‌ای با z ثابت، \mathbf{E} در راستای مثبت حول محور z ‌ها می‌گردد.

۴-۵ اگر میدان‌ها در بی‌نهایت صفر شوند، جمله $\partial_i (A_\mu F^{\circ\mu}) = \partial_\mu (A_\mu F^{\circ\mu})$ سهمی در انرژی ندارد. بنابراین چگالی انرژی یکتا نیست، و می‌توان آن را به صورت زیر اختیار کرد

$$T^{\circ} = -F^{\circ\mu} \partial_\mu A_\mu + \partial_\mu (A_\mu F^{\circ\mu}) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$= -F^{\circ\mu} (\partial_\mu A_\mu - \partial_\mu A_\mu) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

و از آنجا که بنا بر (۴-۸) در فضای آزاد $\partial_\mu F^{\circ\mu} = 0$ می‌شود، پس داریم

$$T^{\circ} = -F^{\circ\mu} F_{\circ\mu} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

۴-۶ $L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - q\phi + q \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}$ بوده و $p^i = (\partial L / \partial \dot{x}^i) = m \dot{x}^i + q A^i$ تکانه‌های

تعمیم یافته هستند. معادله حرکت $(d p^i / dt) = (\partial L / \partial x^i)$ عبارتست از

$$m \ddot{x}^i + q (\partial A^i / \partial t) + q (\partial A^i / \partial x^j) \dot{x}^j = -q (\partial \phi / \partial x^i) + q \dot{x}^j (\partial A^j / \partial x^i)$$

که منجر به $m \ddot{x}^i = q [-(\partial \phi / \partial x^i) - q (\partial A^i / \partial t)] - q F^{ij} \dot{x}^j$ می‌شود. (توجه کنید که $\partial^i = -\partial / \partial x^i$ تعریف (۴-۶) را مد نظر داشته باشید. $i = 1$ گرفته می‌شود که،

$$m \ddot{x}^i = q (E_x - F^{12} \dot{y} - F^{13} \dot{z}) = q (E_x - \dot{y} B_z - \dot{z} B_y)$$

عمل می‌شود.

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = p^i \dot{x}^i - L = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} - q \mathbf{A}) / m$$

$$- \left[(\mathbf{p} - q \mathbf{A})^2 / 2m - q\phi + q (\mathbf{p} - q \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} / m \right] = (\mathbf{p} - q \mathbf{A})^2 / 2m + q\phi$$

۴-۷ $\int L dt = \int (\gamma L) d\tau$ می‌باشد، که $d\tau = dt / \gamma$ ناوردای لورنتسی است (ر.ک. (۲-۵))؛ τ

«زمان ویژه» است.

فصل ۵

۳-۵ تحت تبدیل‌های (۱۹-۵) و (۲۰-۵)،

$$\psi_R^{\prime\dagger} \psi_L' = \psi_R^{\dagger} \mathbf{N}^{\dagger} \mathbf{M} \psi_L = \psi_R^{\dagger} \psi_L$$

$$\psi_R^{\prime\dagger} \psi_R' = \psi_L^{\dagger} \mathbf{M}^{\dagger} \mathbf{N} \psi_R = \psi_L^{\dagger} \psi_R$$

$$\psi_R^{\prime\dagger} \sigma^{\mu} \psi_R' = \psi_R^{\dagger} \mathbf{N}^{\dagger} \sigma^{\mu} \mathbf{N} \psi_R = L^{\mu}_{\nu} \psi_R \sigma^{\nu} \psi_R$$

$$\psi_R^{\prime\dagger} \tilde{\sigma}^{\mu} \psi_L' = \psi_L^{\dagger} \mathbf{M}^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\mu} \mathbf{M} \psi_L = L^{\mu}_{\nu} \psi_L^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\nu} \psi_L$$

$$\psi_R^{\prime\dagger} \sigma^{\mu} \tilde{\sigma}^{\nu} \psi_L' = \psi_R^{\dagger} \mathbf{M}^{\dagger} \sigma^{\mu} \mathbf{M} \mathbf{N}^{\dagger} \sigma^{\nu} \mathbf{N} \psi_L \quad (\text{چون } \mathbf{M} \mathbf{N}^{\dagger} = \mathbf{I})$$

$$= L^{\mu}_{\lambda} = L^{\mu}_{\rho} \psi_R^{\dagger} \sigma^{\lambda} \tilde{\sigma}^{\rho} \psi_L$$

۴-۵ با بهره‌گیری از (۲۸-۵)، چگالی لاگرانژی (۳۱-۵) به صورت زیر درمی‌آید

$$\psi^{\dagger} \beta (i\beta \partial_0 + i\beta \alpha_i \partial_i - m) \psi = \psi^{\dagger} (i\partial_0 + i\alpha_i \partial_i - \beta m) \psi, \quad (\beta^{\nu} = \mathbf{I} \text{ زیرا})$$

$$i\bar{\psi} \gamma^{\nu} \psi = i(\psi_L^{\dagger} \quad \psi_R^{\dagger}) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^{\nu} \\ \sigma^{\nu} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma^{\nu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^{\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = i(\psi_L^{\dagger} \psi_R - \psi_R^{\dagger} \psi_L) \quad ۶-۵$$

این عبارت تحت تبدیلهای لورنتس ویژه ناورداست، اما تحت عمل پاریتی (۲۷-۵)، تغییر علامت می‌دهد. ۷-۵ نتیجه‌ها از تعریف‌های (۳۰-۵) و (۴-۵) به دست می‌آیند.

فصل ۶

$$\psi_+^{\dagger} \psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle + | e^{-\theta/2}, \langle + | e^{\theta/2}) \begin{pmatrix} e^{-\theta/2} | + \rangle \\ e^{\theta/2} | + \rangle \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [e^{-\theta} \langle + | + \rangle + e^{\theta} \langle + | + \rangle] = \cosh \theta = \gamma = E/m$$

و با بهره‌گیری از (۱۴-۶) احتمال مد راستگرد عبارتست از

$$= \frac{e^{\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}} = \frac{e^{\theta}}{2 \cosh \theta} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{c} \right), \text{ چون } \tanh \theta = \frac{v}{c}$$

$$u_+^{\dagger}(\mathbf{p}) u_+(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{\theta} + e^{-\theta}) = \cosh \theta = E/m, \quad u_+^{\dagger}(\mathbf{p}) u_-(\mathbf{p}) = 0 \quad (\langle + | - \rangle = 0 \text{ زیرا})$$

$$\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} | + \rangle = | + \rangle \quad \text{و} \quad \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} | - \rangle = - | - \rangle$$

$$\sigma \cdot (\hat{\mathbf{p}}) | + \rangle = - | + \rangle \quad \text{و} \quad \sigma \cdot (\hat{\mathbf{p}}) | - \rangle = | - \rangle$$

۵-۵ آشکار است که $| + \rangle$ و $| - \rangle$ بهنجار شده‌اند، با جایگذاری مستقیم و بهره‌گیری از اتحادهای

مثلاًتی درمی یابیم که $\langle + | \sigma \cdot \mathbf{p} | + \rangle = | + \rangle$ ، $\langle - | \sigma \cdot \mathbf{p} | - \rangle = - | - \rangle$ می باشد.

فصل ۷

۱-۷ این نتیجه با بهره گیری از ویژگیهای تعامد امواج مسطح و ویژگی های به دست آمده از مسأله ۶-۳ به دست می آید.

۲-۷ برای نمونه،

$$\psi_+^c = -i\gamma^r \psi_+^* = \left(i/\sqrt{2} \right) e^{-i(pz - Et)} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^r \\ \sigma^r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\theta/2} & | + \rangle \\ e^{\theta/2} & | + \rangle \end{pmatrix}$$

$$\sigma^r | + \rangle = i | - \rangle \Rightarrow \psi_+^c = \left(i/\sqrt{2} \right) e^{-i(pz - Et)} \begin{pmatrix} e^{\theta/2} & | - \rangle \\ -e^{-\theta/2} & | - \rangle \end{pmatrix}$$

تحت عمل پاریتی (۲۶-۵) و (۲۷-۵)، $\psi_L \rightarrow \psi_R$ ، $\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \rightarrow \sigma^\mu \partial_\mu$ ، تحت عمل مزدوج بار،

$\psi_R \rightarrow i\sigma^r \psi_L^*$ تبدیل می شود. در نتیجه با ترکیب این دو عمل، داریم

$$i\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L \rightarrow i\psi_L^\dagger \sigma^r \sigma^\mu \sigma^r \partial_\mu \psi_L^* = -i\partial_\mu \psi_L^\dagger (\sigma^r \sigma^\mu \sigma^r)^r \psi_L$$

(به یاد داشته باشید زمانی که میدانهای اسپینوری با یکدیگر عوض می شوند، باید علامت منفی وارد گردد).

اما $(\sigma^r \sigma^\mu \sigma^r)^T = \tilde{\sigma}^\mu$ است.

سرانجام، با انتگرال گیری جزء به جزء از کنش، چگالی لاگرانژی $i\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L$ به دست می آید.

۴-۷ بنا به (۲۰-۵) داریم $\psi_R \rightarrow \psi_R' = \mathbf{N} \psi_R$ ، $\psi_R \rightarrow \psi_R' = \mathbf{N} \psi_R$ ، $i\sigma^r \psi_R^* \rightarrow i\sigma^r \mathbf{N}^* \psi_R^*$ ، اما $\sigma^r \mathbf{N}^* = \mathbf{M} \sigma^r$ این

رابطه به ازای هر \mathbf{M} ، \mathbf{N} که از (۲۴-۵) به دست آید، درست بوده، و در حالت کلی برقرار است.

۵-۷ با ورودش Φ^* ، کنش، پس از انتگرال گیری جزء به جزء به صورت زیر در می آید

$$\delta S = \int \left\{ - \left[(i\partial_\mu + qA_\mu) \delta \Phi^* \right] \left[(i\partial^\mu - qA^\mu) \Phi \right] - m^r \delta \Phi^* \Phi \right\} dt d^r x$$

$$= \int \delta \Phi^* \left\{ (i\partial_\mu - qA_\mu) (i\partial^\mu - qA^\mu) \Phi - m^r \Phi \right\} dt d^r x$$

و چون این برابری به ازای هر $\delta \Phi^*$ برقرار است، معادله کلین-گوردون حاصل می شود.

۶-۷ اگر $\Phi \rightarrow e^{i\alpha} \Phi$ ، با $\alpha = \alpha(x)$ کوچک، پس از انتگرال گیری جزء به جزء داریم

$$(i\partial_\mu + qA_\mu) (e^{i\alpha} \Phi) = e^{i\alpha} (i\partial_\mu + qA_\mu) \Phi - (\partial_\mu \alpha) e^{i\alpha} \Phi$$

$$\delta S = \int \left\{ - (\partial_\mu \alpha) \Phi^* \left[(i\partial^\mu - qA^\mu) \Phi \right] + \left[(i\partial^\mu + qA^\mu) \Phi^* \right] (\delta_\mu \alpha) \Phi \right\} dt d^r x$$

$$= \int \alpha(x) \partial_\mu \left\{ \Phi^* \left[(i\partial^\mu - qA^\mu) \Phi \right] - \left[(i\partial^\mu + qA^\mu) \Phi^* \right] \Phi \right\} dt d^r x$$

در نتیجه، جریان

$$j^\mu = i \left[\Phi^* (\partial^\mu \Phi) - (\partial^\mu \Phi^*) \Phi \right] - \gamma q A^\mu \Phi^* \Phi$$

همانند j^μ پایسته است. (توجه کنید که $j^\mu = -\partial \mathcal{L} / \partial A_\mu$ جریان الکتریکی است).

۷-۷ با محاسبه مستقیم برای نمونه، به ازای هلیسیتی مثبت و با اختیار $\mu = 3$ بررسی کنید

$$q j^3 = -e \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^3 \psi$$

$$= -(e/\gamma) \left(e^{-\theta/\gamma} \langle + | + \rangle + e^{\theta/\gamma} \langle + | + \rangle \right) \begin{pmatrix} -\sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\theta/\gamma} | + \rangle \\ e^{\theta/\gamma} | + \rangle \end{pmatrix}$$

$$= -e \sinh \theta, \quad \left(\text{چون } \sigma^3 | + \rangle = | + \rangle \right)$$

۸-۷ خطوط میدان الکتریکی در راستای $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}' = -\mathbf{E}$ وارونه می‌شوند.

۹-۷ با فرض آنکه $\rho(t) \rightarrow \rho'(t') = \rho(-t)$ باشد، اگر $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}' = \mathbf{E}$ ، $\mathbf{B}' \rightarrow -\mathbf{B}$ ، پس

$\mathbf{J}' \rightarrow -\mathbf{J}$ شکل معادله‌های ماکسول یکسان و بدون تغییر می‌ماند، یا هم‌ارز آن

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = -\mathbf{A}$$

با گرفتن مزدوج مختلط (۷-۶) و ضرب از چپ در $\gamma^1 \gamma^3$ ، به نتیجه زیر می‌رسیم.

$$\gamma^1 \gamma^3 \left[\gamma^{\mu*} (-i\partial_\mu - qA_\mu) - m \right] \psi^* = 0$$

اکنون

$$\gamma^1 \gamma^3 (\gamma^0)^* = \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3, \quad \gamma^1 \gamma^3 (\gamma^i)^* = -\gamma^i \gamma^1 \gamma^3 \quad \text{for } i = 1, 2, 3$$

و نتیجه به دست می‌آید.

فصل ۸

جفت $e^+ e^-$ در چارچوب مرجعی (چارچوب مرکز جرم) آفریده می‌شود که در آن تکانه کل این جفت صفر باشد. در این چارچوب، فوتون دارای تکانه صفر می‌گشت و در نتیجه انرژی آن صفر می‌شد: یعنی پایستگی انرژی نقض می‌شد.

فصل ۹

بنا بر پایستگی انرژی، داریم $m_\pi = E_e + E_\nu$. بنا بر پایستگی تکانه $p_e = p_\nu$ می‌باشد. همچنین

$$E_\nu = p_\nu, \quad E_e^\nu = p_e^\nu + m_e^\nu, \quad p_e = p_e / E_e$$

در نتیجه، $p_e = \frac{m_\pi^\nu - m_e^\nu}{2m_\pi}$ ، $(m_\pi - p_e)^\nu = E_e^\nu = p_e^\nu + m_e^\nu$ می‌باشد. آنگاه

$$E_e = m_\pi - p_e = \frac{m_\pi^v + m_e^v}{\gamma m_\pi}$$

$$\frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{v}{c} \right) = \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{m_\pi^v - m_e^v}{m_\pi^v + m_e^v} \right) = \frac{m_e^v}{m_\pi^v + m_e^v}$$

۲-۹ انرژی نهایی می شود $E = E_e + E_v = E_e + p_e$ پس

$$\frac{dE}{dp_e} = \frac{dE_e}{dp_e} + 1 = \frac{P_e}{E_e} + 1 = \frac{E_e + P_e}{E_e} = \frac{M_\pi}{E_e}$$

۳-۳ با بهره گیری از (۱-۹) داریم

$$\left(1 - \frac{v_e}{c} \right) = p_e^v E_e = \frac{m_e^v}{\gamma m_\pi^v} = (m_\pi^v + m_e^v)^v$$

با عبارتی همانند لپتون های μ .

۴-۹ از آنجا که پيون در حال سکون می باشد، تنها جمله $\partial \Phi / \partial t$ سهم دارد. از (۳-۳۵)، ضربی در L_{int} وجود دارد، که جمله زیر برخاسته از آن است.

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \frac{(-i m_\pi)}{\sqrt{2 m_\pi}} a_0$$

از مسأله ۵-۶ در می یابیم که ضرب \bar{V} عبارتست از

$$\frac{1}{\sqrt{V}} d_{p'}^\dagger e^{i(-p' \cdot r)} | - \rangle_{p'}$$

از (۶-۲۴)، ضرب e_L^\dagger عبارتست از

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m_e}{E_p}} b_p^\dagger e^{i(-p \cdot r)} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\theta/2} \langle + |_p$$

(تنها این جمله هلیسیتی شرکت می کند.)

با انتگرال گیری روی حجم $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$ می شود، و ضرب V در نتیجه به ازای \mathbf{p} معلوم، خواهد شد

$$\langle e_{p, \bar{v}_{-p}} | V(0) | \pi^- \rangle = \frac{(-i)}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m_\pi}{2}} \sqrt{\frac{m_e}{E_e}} \frac{\alpha_\pi}{\sqrt{2}} e^{-\theta/2}$$

(توجه کنید که $| - \rangle_{-p} = | + \rangle_p$ می باشد.)

در نتیجه آهنگ گذار S به دست می آید. ضرب π در چگالی حالت ها از جمع بستن روی همه راستاهای

\mathbf{p} به دست می آید. همچنین $(E_e/m_e) = \cosh \theta$ و $e^{-\theta}/\cosh \theta = (1 - \tanh \theta) = (1 - v/c)$

می باشد.

$$G_F \approx \left(\frac{192\pi^2}{\tau m_\mu^5} \right)^{1/2} = 1,166 \times 10^{-5} (\text{GeV})^{-2} \quad 7-9$$

۸-۹ مربع انرژی مرکز جرم عبارتست از $s = (m_e + E_\nu)^2 - p_\nu^2 = m_e^2 + 2m_e E_\nu$
 ۹-۹ عبارت (۸-۹) دربر دارنده جمله زیر می باشد

$$-2\sqrt{2}G_F g_{\mu\nu} e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{eL} \nu_{eL}^\dagger \tilde{\sigma}^\nu e_L$$

عبارت (۹-۱۵) در بر دارنده جمله زیر می باشد

$$(G_F/\sqrt{2}) g_{\mu\nu} \nu_{\mu L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{\mu L} \bar{\psi}_e \gamma^\nu (c_\nu - c_A \gamma^5) \psi_e$$

۱۰-۹

$$\frac{\tau(K \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu)}{\tau(K \rightarrow e \bar{\nu}_e)} = \frac{m_e^2 (m_K^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2 (m_K^2 - m_\mu^2)^2} = 2,57 \times 10^{-6}$$

$$\frac{1}{\tau(K \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu)} = \frac{\alpha_K^2}{4\pi} \left(1 - \frac{v_\mu}{c} \right) p_\mu^2 E_\mu \quad ((13-9) \text{ ر.ک.})$$

$$\text{که داریم} \left(1 - \frac{v_\mu}{c} \right) p_\mu^2 E_\mu = \frac{m_\mu^2}{4m_K} (m_K^2 - m_\mu^2)^2 \quad (\text{ر.ک. مسأله ۹-۳}).$$

در نتیجه $\alpha_K = 5,82 \times 10^{-1} \text{ MeV}^{-1}$ می شود، و چون $\alpha_\pi = 2,09 \times 10^{-9}$ (در متن)، پس مقدار

$$\alpha_K/\alpha_\pi = 0,28 \text{ می گردد.}$$

۹-۱۱ واپاشی $\tau^- \rightarrow \pi^- + \nu_\tau$ را در نظر بگیرید. جمله ای در L_{int} که این واپاشی را ایجاد می کند، عبارتست از $\nu_{\tau L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \tau_L \partial_\mu \Phi^\dagger$. آنگاه تکانه پيون برابر با \mathbf{p} باشد. تکانه نوترینو برابر با $-\mathbf{p}$ می شود و انرژی برهمکنش دربر دارنده جمله

$$\frac{\alpha_\pi}{\sqrt{V}} \frac{i}{\sqrt{2}E_\pi} a_\pi^\dagger(-\mathbf{p}) b_\nu^\dagger(\mathbf{p}) b_\tau(\mathbf{0}) \langle - | \mathbf{p} (\sigma^\mu E_\pi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

اکنون $\langle - | \mathbf{p} (\sigma^\mu E_\pi - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) = \langle - | \mathbf{p} (E_\pi + p_\nu) = \langle - | \mathbf{p} m_\tau$

می شود، که θ و ϕ زاویه های قطبی \mathbf{p} هستند.

$$\langle \pi_{-\mathbf{p}}, \nu_{\mathbf{p}} | V | \tau \rangle = \frac{\alpha_\pi}{\sqrt{V}} \frac{i}{\sqrt{2}E_\pi} m_\tau \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta/2) e^{i\phi}$$

در نتیجه می شود. آهنگ واپاشی

می‌شود: از $p(m_\tau) = \frac{V}{(2\pi)^\tau} \frac{(m_\tau^\tau - m_\pi^\tau) E_\pi}{4m_\tau^\tau m_\tau}$ که $\frac{1}{\tau} = 2\pi \int | \langle f | V | i \rangle |^2 p(m_\tau) d\Omega$ بوده، و از انتگرال گیری زاویه‌ای ضریب 2π به دست می‌آید.

فصل ۱۰

۱-۱۰ جمله $\chi \psi^\tau \sqrt{2} \phi_0 (m^\tau / 2\phi_0^\tau)$ میدان‌های χ و ψ را به هم پیوند داده و مقدار جرم عبارتست از $m = m_\chi / \sqrt{2}$. از آنجا که ذرات χ بدون جرم هستند، انرژی نهایی برابر با $E = 2p$ ، و ضریب چگالی حالتها برای این واپاشی عبارتست از

$$\rho(E) = \frac{V}{(2\pi)^\tau} 4\pi p^\tau \frac{dp}{dE}$$

که $\frac{dp}{dE} = \frac{1}{2}$ بوده، و ضریب 4π ناشی از انتگرال گیری زاویه‌ای می‌باشد.

در عنصر ماتریسی $\langle \mathbf{p}, -\mathbf{p} | V | \chi \rangle$ ساکن χ ، میدان χ منجر به ضریب $1/\sqrt{2m_\chi}$ حاصل از بسط (۲۱-۳) شده، و از هر یک از میدان‌های χ ضریب $1/\sqrt{2p}$ به دست می‌آید. در نتیجه

$$2\pi | \langle \mathbf{p} | V | i \rangle |^2 \rho(E) = 2\pi \frac{m_\chi}{8\phi_0^\tau} \frac{1}{2m_\chi} \frac{1}{4p^\tau} \frac{4\pi p^\tau}{(2\pi)^\tau} = \frac{m_\chi}{128\pi} \left(\frac{m_\chi}{\phi_0} \right)^\tau$$

۱-۲ واپاشی بوزون برداری منفرد نیاز به جمله‌ای در \mathcal{L}_{int} دارد که برحسب A_μ خطی باشد. اگر پایستگی انرژی بتواند برقرار باشد، جمله $A_\mu A^\mu h (\sqrt{2}\phi_0 q^\tau)$ واپاشی بوزون اسکالر را مجاز می‌دارد، یعنی $m_h = \sqrt{2}m > 2(\sqrt{2}q\phi_0)$ می‌باشد.

فصل ۱۱

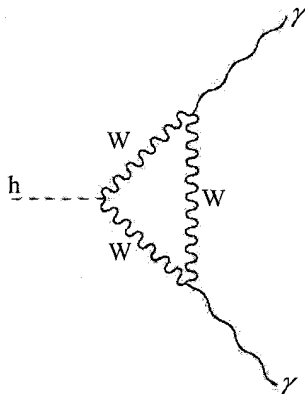
$$1-11 \text{ در } \text{Tr}(UWU^\dagger) = \text{Tr}(U^\dagger UW) = \text{Tr}(W) = 0 \text{ و } (UWU^\dagger)^\dagger = UWU^\dagger$$

صدق می‌کند.

۱۱-۲ توجه کنید که $(\hat{\alpha} \cdot \tau)^\tau = \mathbf{I}$ و $(\partial_\mu \alpha^j) \alpha^j = 0$ است. زیرا $\alpha^j \alpha^j = 1$ می‌باشد. می‌توان جمله $(\partial_\mu \alpha^j / g_\tau)$ را به صورت ترکیب خطی از ماتریس‌های τ^j با ضریب‌های حقیقی نوشت. هر ماتریس τ^j هرمیتی و دارای رد صفر می‌باشد.

۱۱-۳ جمله آخر را می‌توان به صورت $(W_\mu^\nu W^\mu{}_\nu + W_\mu^\nu W^\nu{}_\mu) / 4$ نوشت، و در نبود میدان‌های الکترومغناطیسی، می‌توان با جمله‌هایی که جلوتر از این جمله می‌آیند، همین‌گونه رفتار کرد.

بنابراین دو میدان مستقل وجود دارند که جرم هر کدام $g_V \phi_0 / \sqrt{2}$ می‌باشد. (ر.ک. بخش ۴-۹).
 ۱۱-۴ چگالی لاگرانژی برهمکنش (۱۱-۳۲) دربر دارنده جمله $h W_\mu^- W^{+\mu} (g_V' / \sqrt{2})$ بوده که میدان h را به میدان‌های باردار W جفت می‌کند.



۱۱-۵ چگالی لاگرانژی برهمکنش (۱۱-۳۲) را در نظر بگیرید $U = \cos \alpha \mathbf{I} + i \sin \alpha \tau \cdot \hat{\alpha}$. آنگاه $U^* = \cos \alpha \mathbf{I} - i \sin \alpha (\tau^1 \hat{\alpha}^1 - \tau^2 \hat{\alpha}^2 + \tau^3 \hat{\alpha}^3)$ بوده و با بهره‌گیری از رابطه زیر به دست می‌آید، $\tau^1 \tau^1 = -\tau^2 \tau^2$ ، $\tau^1 \tau^2 = -\tau^2 \tau^1$

$$\tau^1 U^* = \left[\cos \alpha \mathbf{I} + i \sin \alpha (\tau^1 \hat{\alpha}^1 + \tau^2 \hat{\alpha}^2 + \tau^3 \hat{\alpha}^3) \right] \tau^1$$

در نتیجه $i \tau^1 U^* = \mathbf{U} (i \tau^1)$ و $i \tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

۱۱-۶ با بهره‌گیری از (ب-۹) داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \cos \alpha \mathbf{I} + i \sin \alpha (\sin \phi \tau^1 + \cos \phi \tau^2) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & i \sin \alpha (\sin \phi - \cos \phi) \\ i \sin \alpha (\sin \phi + \cos \phi) & \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

فصل ۱۲

۱۲-۱ دو میدان را $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$ اختیار می‌کنیم. برای آنکه ناوردایی پیمانه‌ای موضعی برقرار بماند، جمله

دینامیکی در چگالی لاگرانژی باید، به صورت $L_1 (\partial_\mu + i(g_V/2) W_\mu) L_1^\dagger \bar{\sigma}^\mu i$ باشد. جمله‌هایی وجود دارد که L_1 و L_2 را می‌آمیزد. برای نمونه

$$-(g_V/2) L_1^\dagger \bar{\sigma}^\mu (W_\mu^1 - i W_\mu^2) L_2 = -(g_V/2) L_1^\dagger \bar{\sigma}^\mu L_2 W_\mu^+$$

عملگر W_{μ}^{\dagger} بار الکتریکی e را نابود می کند، بنابراین برای پایستگی بار $L_{\nu}^{\dagger} \vec{\sigma} L_{\nu}$ ، باید بار e را بیافریند.

۳-۱۲ ذره هیگز ساکن دارای تکانه و اندازه حرکت زاویه ای صفر می باشد. بنابراین e^{+} و e^{-} دارای تکانه صفر هستند. اگر هلیسیتی این دو مخالف یکدیگر می بود، تکانه زاویه ای مداری آنها دارای مؤلفه $+1$ یا -1 در راستای حرکتشان می باشد. این امر امکان پذیر نیست، زیرا $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0$ می باشد. حالت های نهایی تکانه زاویه ای عبارتند از

$$\rho(E) = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi p_e^2 \frac{dp_e}{dE}$$

انرژی نهایی $E = 2E_e$ بوده، که $E_e = m_e v_e$ می باشد. در نتیجه

$$\frac{dp_e}{dE} = \frac{1}{2} \frac{dp_e}{dE_e} = \frac{E_e}{2p_e} \quad \text{و} \quad p(E_e) = \frac{V}{(2\pi)^3} p_e E_e$$

جمله برهمکنشی در (۹-۱۲) عبارتست از $(c_e \sqrt{2}) h \bar{\psi} \psi$ - از (۶-۲۴) و (۳-۲۱) در می یابیم که

$$[\bar{\mu}_-(\mathbf{p}) v_-(-\mathbf{p})] \quad \text{یا} \quad \langle f | V | i \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2m_H}} \frac{m_e}{E_e} [\bar{\mu}_+(\mathbf{p}) v_+(-\mathbf{p})]$$

اکنون $\bar{\mu}_{\pm}(\mathbf{p}) v_{\pm}(-\mathbf{p}) = \sinh \theta$ و $E_e / m_e = \cosh \theta$ می باشد. بنابراین آهنگ واپاشی به هلیسیتی های مثبت عبارتست از

$$2\pi \langle f | V | i \rangle \rho(E) = 2\pi \frac{c_e^2}{2} \frac{1}{2m_H} \tanh^2 \theta \frac{1}{(2\pi)^3} p_e E_e$$

همچنین $E_e = m_H / 2$ و $\tan \theta = v_e / c = p_e / E_e$ می باشد. آهنگ واپاشی به هلیسیتی های منفی هم همین مقدار می باشد و نتیجه به دست می آید.

۴-۱۲ از آنجا که $c_{\tau} > c_{\mu} > c_e$ است (ر.ک. (۱۲-۱۳))، واپاشی به $\tau^+ \tau^-$ در پهنای جزئی لپتونیک جیره می باشد. همچنین چون جرم هیگز خیلی بزرگتر از جرم τ می باشد، $v_{\tau} \approx c$. پس داریم:

$$\frac{\Gamma}{m_H} \approx \frac{c_{\tau}^2}{16\pi} = \frac{1}{16\pi} \left(\frac{m_{\tau}}{\phi_0} \right)^2$$

فصل ۱۳

۱۳-۱ در چارچوب سکون W ، با چشم پوشی از جرم لپتون، $E_l = p_l = M_W / 2$ ، و $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_\nu$ و $p_l^2 = M_W^2 / 4 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ می باشد. با اختیار محور x ها برای راستای باریکه، مجذور

میانگین تکانه عرضی عبارتست از $\overline{p_x^2} + \overline{p_y^2} = (\frac{2}{3}) p_l^2 = M_w^2 / 6$

۱۳-۲ از (۱۲-۲۳) درمی‌یابیم که Z_μ را میدان‌های الکترونی راستگرد با جفت‌شدگی $e \tan \theta_w = \frac{2e \sin^2 \theta_w}{\sin(2\theta_w)}$ و همچنین میدان‌های چپگرد با جفت‌شدگی $-e \cos(2\theta_w) / \sin(2\theta_w)$ می‌سازند. در برخورد‌های سربه‌سر در انرژی‌های بالا، مؤلفه راستگرد الکترون (پوزیترون) دارای هلیسیتی مثبت (منفی) می‌باشد. در نتیجه اسپین کل برابر با $+1$ در راستای باریکه الکترون است. اسپین مؤلفه‌های چپگرد برعکس آن است. به‌ازای باریکه‌های ناقطبیده، مؤلفه‌های چپگرد و راستگرد به‌طور برابر اشغال می‌شوند، و نتیجه مورد نظر به‌دست می‌آید.

۱۳-۴ واپاشی $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ را در چارچوب سکون W^- در نظر بگیرید. بدون آنکه از کلیت مسأله کاسته شود، می‌توانیم برای W^- مقادیر اسپین $J_z = 0, J = 1$ را اختیار کنیم (ر.ک. بخش ۴-۹). چگالی لاگرانژی برهمکنش برای این واپاشی (با بهره‌گیری از (۱۲-۱۵) و (۱۲-۱۶)) عبارتست از

$$\mathcal{L} = -(\frac{g_v}{\sqrt{2}}) j^{\nu} W_{\nu}^{-}$$

اگر تکانه الکترون \mathbf{p} باشد، تکانه نوترینو $-\mathbf{p}$ است. با چشم‌پوشی از جرم الکترون (ر.ک. مسأله ۶-۵) عنصر ماتریسی برای این واپاشی برابر می‌شود با

$$\langle f | V | i \rangle = \frac{g_v}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2} M_w V} \langle - | \sigma^z | + \rangle$$

$\langle - | \sigma \cdot \mathbf{p} | - \rangle = - | - \rangle$ ، $\langle \sigma \cdot (-\mathbf{p}) | + \rangle = - | + \rangle$ همچنین از مسأله (۶-۶) در می‌یابیم که $\langle - | \sigma^z | + \rangle = -\sin \theta e^{i\phi}$ پس آهنگ واپاشی برابر می‌شود با

$$\Gamma = 2\pi \int |\langle f | V | i \rangle|^2 d\Omega \frac{V}{(2\pi)^3} p_e^2 \frac{dp_e}{dE}$$

که $dp_e/dE = 1/2$ ، $p_e = M_w/2$ منجر به مقدار زیر برای آهنگ واپاشی می‌شوند

$$\Gamma = \frac{g_v^2}{48\pi} M_w^3 = \frac{G_F M_w^3}{6\pi\sqrt{2}} \quad (\text{بنا بر (۱۲-۲۲)})$$

برای یافتن آهنگ واپاشی برای $\Gamma(Z \rightarrow \nu \bar{\nu})$ ، باید اندک محاسبه‌ای انجام داد، که در آن M_z به‌جای M_w و $e/\sin 2\theta_w = g_v/\sqrt{2} \cos \theta_w = g_v M_z/\sqrt{2} M_w$ به‌جای ثابت جفت‌شدگی $g_v/\sqrt{2}$ بنشینند. (از (۱۲-۲۳)، (۱۱-۳۸) و (۱۱-۳۷ الف) بهره بردیم.) پس

$$\Gamma(Z \rightarrow \nu \bar{\nu}) = \frac{G_F M_z^3}{12\pi\sqrt{2}}$$

می‌شود. در (۱۲-۲۳) دو جمله هستند که در $\Gamma(Z \rightarrow e^+ e^-)$ سهم هستند و منجر به

$$\Gamma(Z \rightarrow e^+ e^-) = \Gamma(Z \rightarrow \nu \bar{\nu}) \left[(\sin^2 \theta_w)^2 + (\cos^2 \theta_w)^2 \right]$$

۴-۱۳ ۳ MeV، ۸۳

فصل ۱۴

۳-۱۴ تحت تبدیل $SU(2)$ ، و با بهره‌گیری از الف-۲،

$$(\Phi^T \varepsilon L) \rightarrow (\Phi^T U^T \varepsilon U L)$$

$$U^T \varepsilon U = \begin{bmatrix} U_{AA} & U_{BA} \\ U_{AB} & U_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{AA} & U_{AB} \\ U_{BA} & U_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \text{Det}(U) \\ -\text{Det}(U) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (\text{Det}(U)) \varepsilon = \varepsilon$$

زیرا $\text{Det}(U) = 1$ است. بنابراین $(\Phi^T U^T \varepsilon U L) = (\Phi^T \varepsilon L)$ می‌باشد.

۴-۱۴ از (۱۱-۲۳)، داریم

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + h / \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

با وارد کردن این جمله در (۱۴-۶) جمله‌های جفت‌شوندگی به دست می‌آیند

$$(-1/\sqrt{2}) \sum [G_{ij}^d d_{Li}^\dagger d_{Rj} h + \text{مزدوج مختلط}]$$

جمله‌هایی مانند این جمله از (۱۴-۹) و (۱۴-۴۰) ناشی می‌شوند. با بکار بردن از جرم کوارک‌ها، این جمله‌ها به صورت زیر درمی‌آیند

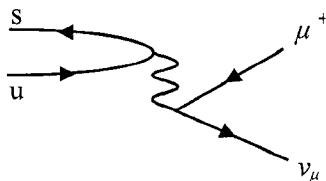
$$(-1/\sqrt{2}\phi_0) \sum [m_i^d (d_{Li}^\dagger d_{Rj} + d_{Ri}^\dagger d_{Lj}) + m_i^u (u_{Li}^\dagger u_{Rj} + u_{Ri}^\dagger u_{Lj})] h$$

جفت‌شدگی با کوارک سر، عبارتست از

$$c_i = \frac{m_i}{\sqrt{2}\phi_0} \approx \frac{180 \text{ GeV}}{\sqrt{2} \times 180 \text{ GeV}} \approx 0.7$$

۵-۱۴ برای $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu^+$ ، جمله‌های

$$s_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu u_L V_{us}^* \text{ from } j^\mu, \nu_{\mu L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mu_L \text{ from } j^{\mu \dagger}$$

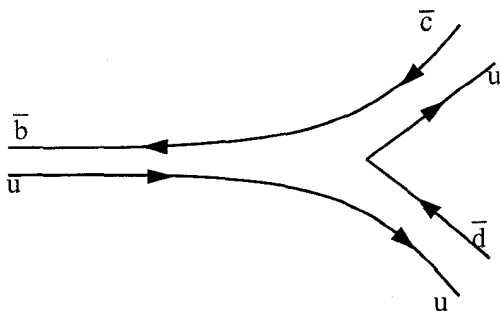
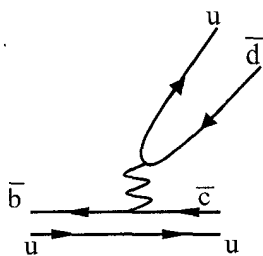
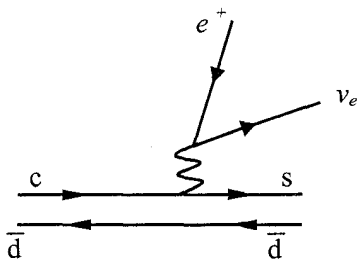


در مرتبه دوم نظریه اختلال سهم دار می شوند. (ر.ک. (الف)).

(الف)

(ب)

(ج)



برای $D^+ \rightarrow K^0 + e^+ + \nu_e$

$$s_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu c_L V_{cs}^* \text{ from } j^\mu, \nu_{eL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu e_L \text{ from } j^{\mu\dagger}$$

برای $B^+ \rightarrow D^0 + \pi^+$

$$b_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu c_L V_{cb}^* \text{ from } j^\mu, u_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d_L V_{ud} \text{ from } j^{\mu\dagger}$$

فصل ۱۵

آهنگ واپاشی برای $Z \rightarrow d\bar{d}$ حاصل از (۳-۱۵) را می توان با آهنگ واپاشی برای $Z \rightarrow e^+e^-$ ، که در پاسخ مسأله (۳-۱۳) محاسبه شده، مقایسه کرد. با مقایسه چگالی لاگرانژی برهمکنش (۲۳-۱۲) و (۴-۱۴) درمی یابیم که، به جای جمله موجود در جفت شدگی چپگرد $1 - 2\sin^2\theta_W \cos 2\theta_W$ ، جمله

می‌شود. با در برگیری ضریب ۳ برای رنگ و جایگذاری $(1/3) \sin^2 \theta_W$ به جای $\sin^2 \theta_W$ در آهنگ (۳-۱۳) آهنگ (۳-۱۵) به دست می‌آید.

برای $Z \rightarrow u \bar{u}$ هم همین گونه است. از مقایسه (۲۳-۱۲) با (۱۴-۱۴)، در می‌یابیم که به جای $\sin^2 \theta_W$ جمله $(2/3) \sin^2 \theta_W$ نشسته است.

آهنگ واپاشی در (۶-۱۵) را می‌توان با آهنگ در (۲-۱۳)، که در پاسخ مسأله ۱۳-۳ محاسبه شده، مقایسه کرد. از مقایسه برهمکنش‌های (۱۸-۱۲) و (۲۰-۱۴) در می‌یابیم که به جای $g_2/\sqrt{2}$ جمله $eV_{ij}/\sqrt{2} \sin \theta_W = g_2 V_{ij}/\sqrt{2}$ نشسته است. با در برگیری ضریب ۳ برای رنگ، آهنگ (۱۵-۶) از آهنگ (۲-۱۳) به دست می‌آید.

فصل ۱۶

۱-۱۶

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu + ig(G_\mu G_\nu - G_\nu G_\mu)$$

$$= (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) (\lambda_a / 2) + i(g/4)(G_\mu^b G_\nu^c \lambda_b \lambda_c - G_\nu^c G_\mu^b \lambda_c \lambda_b)$$

$$(\lambda_b \lambda_c - \lambda_c \lambda_b) = 2if_{abc} \lambda_a \quad ((\text{ر.ک.}) \text{ب-} (27))$$

$$\Rightarrow G_{\mu\nu} = [(\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) - gf_{abc} G_\mu^b G_\nu^c] (\lambda_a / 2)$$

۲-۱۶ اینها جمله‌های درجه سوم و چهارم از میدان‌های G در (۹-۱۶) هستند.

۳-۱۶ با وردش G_ν^a به عبارت زیر می‌رسیم

$$\delta S = \int [-(1/2)G^{a\mu\nu} \delta G_{\mu\nu}^a - g \sum_f \bar{q}_f \gamma^\nu G_\nu^a (\lambda_a / 2) q_f] d^4x$$

$$-(1/2)G^{a\mu\nu} \delta G_{\mu\nu}^a = -G^{a\mu\nu} \partial_\mu (\delta G_\nu^a) + g G^{c\mu\nu} G_\mu^b \delta G_\nu^a f_{abc}$$

(دو سهم برابر در سمت راست وجود دارند.) با انتگرال‌گیری جزء به جزء در می‌یابیم که

$$\delta S = \int [\partial_\mu G^{a\mu\nu} - g G^{c\mu\nu} G_\mu^b f_{abc} - g \sum_f \bar{q}_f \gamma^\nu (\lambda_a / 2) q_f] \delta G_\nu^a d^4x$$

$$(f_{cba} = -f_{abc})$$

زیرا δG_ν^a (۱۴-۱۶) دلخواه هستند.

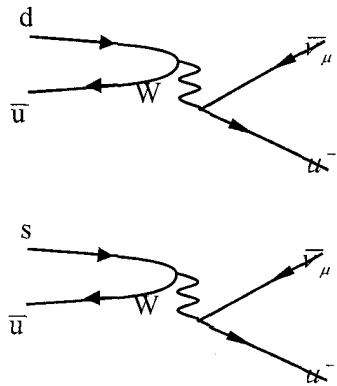
$$Q^2 / 4m^2 = e^{12x^2/e^2} = e^{2\pi/\alpha} = 1,06$$

$$2m \sim 1 \text{ MeV}, Q^2 \sim 1,06^2 (\text{MeV})^2$$

۴-۱۶

۵-۱۶ $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r} = Q r \cos \theta$ و $d^3Q = Q^2 dQ d(\cos \theta) d\phi$ اختیار کنید. که (Q, θ, ϕ) مختصات قطبی \mathbf{Q} هستند. \mathbf{r} را هم $(0, 0, r)$ اختیار کنید.

فصل ۱۸



۱-۱۸

از (۱۴-۱۵)، جمله‌های برهمکنشی برحسب $\bar{u}dW^+$ و $\bar{u}sW^+$ به ترتیب در بردارنده ضریب‌های V_{ud} و V_{us} هستند. مسأله (۹-۱۰) نشان می‌دهد که $\alpha_K / \alpha_\pi \approx 0,28$ می‌باشد. با برابر قرار دادن نسبت V_{us}/V_{ud} مقدار $\sin \theta_{12} \approx 0,27$ به دست می‌آید.

۲-۱۸ تابع موج درونی دو پیون در \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 در حالت S، تابعی است تنها از $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ و $|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2|$ هم تحت C و هم تحت P ناورداست.

$$CP |\pi^0 \pi^0\rangle = |\pi^0 \pi^0\rangle \quad \text{و} \quad CP |\pi^+ \pi^-\rangle = |\pi^+ \pi^-\rangle$$

۳-۱۸ تابع موج درون سه پیون در \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 و \mathbf{r}_3 به دو مختصه نسبی، مانند $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ و $\mathbf{r}_{13} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3$ بستگی دارند. برای آنکه تحت دوران‌های $(J=0)$ ناوردا بمانند، می‌توان تابع موج درونی را تابعی از تنها سه اسکالر: $\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{13}$ ، $\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{23}$ و $\mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{r}_{23}$ در نظر گرفت. این اسکالرها تحت C و P ناوردا هستند، زیرا پاریتی درونی π^0 منفی است،

$$CP |\pi^0 \pi^0 \pi^0\rangle = -|\pi^0 \pi^0 \pi^0\rangle$$

۴-۱۸ ناحیه مثلثی که از مبدأ و نقطه‌های $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, 0)$ و $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, 0)$ ایجاد می‌شود، عبارتست از

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left| \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{r}_\nu \right| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left| x_\nu y_\nu - x_\nu y_\nu \right| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left| \text{Im} \left(z_\nu^* z_\nu \right) \right|$$

$$z_\nu = x_\nu + i y_\nu, z_\nu^* = x_\nu - i y_\nu$$

بنابراین مساحت مثلث یکانی برابر با $J / \sqrt{2}$ می‌شود.

۱۸-۵ همهٔ عدد‌های مختلط به $z_i' = e^{i(\theta_a - \theta_b)} z_i$ تبدیل شده‌اند و مثلث تحت زاویهٔ دوران می‌کند.

فصل ۱۹

$$\left(U_{\beta j}^* U_{\alpha j} U_{\beta i} U_{\alpha i}^* \right) = \left(U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \right)^* \quad (۱۹-۲) \text{ الف}$$

$$\Rightarrow \text{Im} \left(U_{\beta j}^* U_{\alpha j} U_{\beta i} U_{\alpha i}^* \right) = -\text{Im} \left(U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \right)$$

(ب) زیرا U یکانی است. $\sum_i F_{\beta \alpha i j} = \text{Im} \left(\partial_{\alpha \beta} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \right) = \text{Im} \left(\left| U_{\alpha j} \right|^2 \right) = 0$.

نمونه $F_{\beta \alpha i j} + F_{\beta \alpha r j} = 0$ و $F_{\beta \alpha i r} + F_{\beta \alpha r r} = 0$ در نتیجه $F_{\beta \alpha i r} + F_{\beta \alpha r i} = 0$ می‌باشد.

$$\sum_{i>j} F_{\mu e i j} \sin \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E} \right) = -J \left[\sin \left(\frac{\Delta m_{\nu 1}^2 L}{2E} \right) + \sin \left(\frac{\Delta m_{\nu 2}^2 L}{2E} \right) - \sin \left(\frac{(\Delta m_{\nu 1}^2 + \Delta m_{\nu 2}^2) L}{2E} \right) \right] \quad (ج)$$

و نتیجه به دست می‌آید.

فصل ۲۱

$$۱-۲۱ \quad (\mathbf{i} \sigma^\nu \mathbf{v}^*)^\dagger \sigma^\dagger \partial_\mu (\mathbf{i} \sigma^\nu \mathbf{v}^*) = E$$

به $E = v_i \sigma_{ij}^\nu \sigma_{jk}^\mu \sigma_{kl}^\nu \partial_\mu v_i^*$ (روی شاخص‌های تکرار شده، جمع بسته شده است.)، می‌رسیم. اما

از جبر ماتریس‌های پائولی می‌دانیم که $\sigma_{ij}^\nu \sigma_{jk}^\mu \sigma_{kl}^\nu = \tilde{\sigma}_{ii}^\mu$.

اسپینوری $E = -\partial_\mu \tilde{\sigma}_{ii}^\mu \partial_\mu v_i = v^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu v$ و با دست کشیدن از مشتق کل که هیچ سهمی در این

کنش ندارد، $E = v_i^* \tilde{\sigma}_{ii}^\mu \partial_\mu v_i = v^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu v$ می‌گردد.

۲-۲۱ شاخص‌های اسپینوری را وارد می‌کنیم

$$v_\alpha^\dagger \sigma^\nu v_\beta = v_{\alpha i} \sigma_{ij}^\nu v_{\beta j} = -v_{\alpha i} \sigma_{ji}^\nu v_{\beta j} = v_{\beta j} \sigma_{ij}^\nu v_{\alpha i} = v_\beta^\dagger \sigma^\nu v_\alpha$$

۲۱-۳ با بهره‌گیری از (۲۱-۱۵)

$$U_{\beta j}^M U_{\alpha j}^{M*} = U_{\beta j}^D e^{i\Delta j} U_{\alpha j}^{D*} e^{-i\Delta j} = U_{\beta j}^D U_{\alpha j}^{D*}$$

واژه‌نامه

باریون، ۱۸۹

بازبینی‌جارش، ۱۰۳، ۱۰۹، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۵، ۱۹۲، ۱۹۹، ۲۵۳
 برهمکنش ضعیف، ۲۱، ۲۲، ۲۵، ۳۰، ۳۵، ۳۸، ۷۹، ۹۱، ۱۱۵،
 ۱۲۹، ۱۴۲، ۱۶۸، ۱۷۵، ۱۸۵، ۱۹۵، ۲۰۶، ۲۰۹، ۲۱۳، ۲۴۷،
 ۲۵۰

برهمکنش قوی، ۲۲، ۲۴، ۳۲، ۳۴، ۳۵، ۱۱۵، ۱۲۱، ۱۲۲،
 ۱۶۷، ۱۸۱، ۱۸۵، ۱۸۷، ۱۸۸، ۲۱۱، ۲۵۵

بوزون W، ۱۶۷

بوزون Z، ۱۵۹، ۱۷۶، ۱۷۹، ۱۸۱، ۲۰۳

بوزون گلدستون، ۱۳۳

بوزون هیگگز، ۲۸، ۳۱، ۳۴، ۲۴۹

بوزون، ۲۱، ۲۲، ۳۱، ۳۳، ۹۹، ۱۳۳، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۵۵، ۱۵۸، ۱۵۹،
 ۱۶۲، ۱۶۵، ۱۶۷، ۱۸۳

پ

پادذره، ۲۴، ۷۵، ۸۸، ۲۴۱

پاریتی، ۳۸، ۶۶، ۶۷، ۷۱، ۷۹، ۸۴، ۸۷، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۲۶، ۱۵۲،
 ۲۱۳

پراکندگی ناکشسان ژرف، ۲۰۵، ۲۱۲

پروتون، ۲۱، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۳۵، ۳۶، ۳۸، ۱۰۲، ۱۱۱، ۱۵۰،
 ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۹۴، ۱۹۵، ۲۰۲، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۱۲،
 ۲۳۱، ۲۴۰

پیمانه تابشی، ۶۴، ۶۵، ۷۱، ۱۰۴

پیمانه لورنتسی، ۶۶، ۶۹

ت

تانسور انرژی تکانه، ۸۱، ۸۹

تانسور متریک، ۴۳

تانسور، ۴۳، ۴۴، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۵۷، ۵۸، ۶۲، ۶۴، ۶۶، ۸۹، ۹۲، ۱۳۷،
 تبدیل ابعادی، ۲۰۰

تبدیل پیمانه‌ای موضعی، ۹۶، ۱۳۲

تبدیل پیمانه‌ای، ۶۴، ۶۵، ۹۵، ۹۹، ۱۳۲، ۱۴۷، ۱۵۵، ۲۵۷

تبدیل جهانی، ۹۶، ۱۳۷، ۱۸۹، ۱۹۶

تبدیل فیبرز، ۲۲۵

تبدیل‌های پیمانه‌ای رنگ، ۱۸۸

تبدیل‌های لورنتس، ۴۱، ۴۲، ۴۵، ۴۶، ۴۸، ۶۶، ۶۷، ۷۶، ۸۲،
 ۸۳، ۱۰۱

تشدید، ۳۱، ۳۴

تصویر هاینرنگ، ۱۰۶

آ

آزادی مجانبی، ۱۹۰، ۱۹۲، ۱۹۳

الف

اثر MSW، ۲۲۴، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱

اسپین ذاتی، ۷۰، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶

اسپینور چپگرد، ۱۵۲

اسپینور، ۷۹، ۸۰، ۸۴، ۸۶، ۱۴۵، ۱۵۲، ۱۸۷

اسپینورهای چپگرد، ۸۴

اسپینورهای، ۱۸۵، ۱۹۷

استفورد، ۳۸، ۳۹، ۲۱۳

اسکالر، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۵۵، ۵۶، ۵۹، ۶۰، ۶۲، ۶۷، ۷۹،
 ۸۶، ۹۹، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۱۵، ۱۲۰، ۱۳۰، ۱۳۲، ۱۳۳،
 ۱۳۵، ۱۳۹، ۱۴۱

اصل طرد پائولی، ۳۴، ۷۳، ۱۰۵، ۱۸۹

اصل نسبیت انیشتین، ۴۱

اصل هامیلتون، ۶۱، ۶۳

افزایش، ۴۲، ۴۸، ۷۸، ۸۲، ۱۲۵، ۱۲۷، ۱۵۷، ۱۹۲

الکترودینامیک کوانتومی، ۱۶۵

الکترون، ۷۳، ۷۴، ۸۸، ۹۰، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۴،
 ۱۰۵، ۱۰۷، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰،
 ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۷، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰،
 ۱۵۲، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷،
 ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۹۲، ۱۹۱، ۱۹۰، ۱۷۶، ۲۰۵، ۲۰۷، ۲۱۹،
 ۲۲۰، ۲۳۲، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۵۰

انرژی، ۲۳، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۵، ۳۶، ۳۹،
 ۴۹، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۸، ۶۹، ۷۱، ۷۵، ۸۱،
 ۸۳، ۸۴، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۱، ۹۲، ۹۵، ۹۷، ۱۰۰، ۱۰۱،
 ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۷، ۱۰۹، ۱۱۲، ۱۱۶، ۱۱۸، ۱۲۰،
 ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۴۳، ۱۴۹، ۱۵۰،
 ۱۵۱، ۱۵۵، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۷۵، ۱۷۶،
 ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۴، ۱۸۸، ۱۹۲، ۱۹۴، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱،
 ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۱۵، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۳۱،
 ۲۳۲، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۴۰، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۸، ۲۵۹

ایزواسپین ضعیف، ۱۳۷

ب

باتومونیوم، ۱۹۴، ۲۰۱

بار الکتریکی، ۶۱، ۶۴، ۸۸، ۱۱۷، ۱۴۶، ۱۵۵، ۲۵۴

جفت‌شدگی با میدان هیگز، ۱۴۸، ۱۵۴
جهان‌شمولی لپتونی، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۳، ۱۴۸

چ

چاربردار پادوردا، ۴۳، ۹۴
چاربردار هموردا، ۴۳
چارمونیم، ۳۱، ۳۲، ۱۹۴، ۲۰۱
چیگر، ۶۶، ۶۷، ۷۹، ۸۰، ۸۷، ۹۲، ۱۰۱، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹،
۱۲۰، ۱۲۵، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۵۲، ۱۶۳، ۱۶۷، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۸۲،
۲۴۸، ۲۴۶، ۲۴۴، ۲۴۳، ۲۲۷، ۲۲۵، ۲۲۳، ۲۱۹، ۲۱۹

چگالی لاگرانژی برای، ۱۴۱، ۲۴۴
چگالی لاگرانژی مؤثر، ۱۲۷، ۱۵۰، ۱۹۷، ۲۴۹
چگالی لاگرانژی، ۸۹

ح

حالت خلا، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۱۲، ۱۳۰، ۱۴۳، ۱۸۸، ۲۵۸

خ

خانواده‌های کوارک، ۲۵۵
خانواده‌های لپتونی، ۱۶۰

د

دو قاعده جمع یکانی، ۲۰۹
دوتایی لپتونی چیگر، ۲۲۶

ذ

ذرات دیراکی، ۲۵۶
ذره‌های دیراکی، ۹۱، ۹۸

ر

رنگ، ۳۱، ۳۳، ۳۴، ۱۶۷، ۱۷۶، ۱۸۰، ۱۸۵، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹،
۱۹۰، ۱۹۴، ۱۹۵، ۲۵۶

ز

زاویه واینبرگ، ۱۲۵، ۱۴۰، ۱۴۸، ۱۵۷، ۱۵۹

س

سازوکار الاکلنگی، ۲۴۸، ۲۴۹
سیرن، ۳۸، ۱۲۴، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۷۹، ۱۸۰،
۱۸۲، ۲۵۹

ش

شبه تانسور، ۴۸
شبکه و هادرون‌ها، ۲۰۲
شبه تانسور، ۴۸
شناونده، ۲۳۱، ۲۴۰

تقارن (۲) SU، ۱۳۵، ۱۶۸، ۲۴۷
تقارن CP، ۱۵۲، ۱۷۴، ۱۷۵، ۲۱۳
تقارن (1) U، ۹۴، ۱۴۰، ۱۵۲، ۱۹۵، ۲۴۴، ۲۴۹
تقارن ایزواسپین، ۱۹۵، ۲۱۱
تقارن جهانی، ۱۳۳، ۱۳۵، ۱۷۴، ۱۸۸، ۱۹۴، ۲۲۷
تقارن کایرال، ۱۹۶، ۲۱۲، ۲۵۳
تقارن موضعی، ۹۶، ۱۳۶، ۱۴۸، ۱۹۴
تقارن (۳) SU، ۱۹۰

تقارن، ۲۳، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۳۴، ۹۳، ۹۶، ۹۷، ۱۰۱، ۱۱۵، ۱۲۱،
۱۲۲، ۱۲۷، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۹،
۱۴۲، ۱۴۳، ۱۶۹، ۱۶۸، ۱۷۰، ۱۸۸، ۱۹۶، ۱۹۹، ۲۰۳، ۲۵۳،
۲۵۴

تقریب فرونشانده، ۱۹۰، ۲۰۲

تقریب فرونشانی، ۲۰۰

تکانه، ۵۴، ۵۷، ۵۸، ۸۳، ۸۵، ۸۹، ۹۲، ۱۰۵، ۱۰۷، ۱۰۹، ۱۱۶،
۱۲۰، ۱۵۵، ۱۶۴، ۱۹۱، ۲۵۰

تکنایی رنگی، ۱۹۴، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲

تواترون، ۳۸

ث

ثابت جفت‌شدگی برهمکنش قوی، ۱۹۰
ثابت ساختار ریز، ۳۲، ۱۰۷، ۱۱۳، ۱۹۴

ج

جت، ۳۵، ۳۶، ۳۸، ۱۵۸، ۱۷۹، ۱۸۳، ۲۰۸
جرم بوزون Z، ۱۵۹
جرم کوارک، ۲۵
جرم کوارکی، ۲۵۹

جرم، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۳۰، ۳۱، ۳۳، ۳۹، ۵۰، ۵۲،
۵۶، ۶۰، ۶۷، ۷۰، ۷۱، ۷۴، ۸۴، ۸۸، ۹۱، ۹۵، ۱۰۰، ۱۰۱

۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۷، ۱۱۹، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۴، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳،
۱۳۵، ۱۳۶، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲،
۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۹، ۱۷۰

۱۷۱، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۷، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۵، ۱۹۶، ۲۰۰، ۲۰۳،
۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۹، ۲۱۳، ۲۱۵، ۲۱۷، ۲۱۹، ۲۲۰،
۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۶، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۴۰، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۶

۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۱

جریان خنثی، ۱۲۵، ۱۷۷، ۱۸۸، ۲۲۱، ۲۲۶، ۳۳۸

جریان‌های ضعیف خنثی، ۲۲۱

جریان‌های ضعیف باردار، ۲۲۱

جریان‌های ضعیف خنثی، ۲۲۵

جریان‌های ضعیف، ۲۲۱، ۲۴۷

جفت‌شدگی اسپین مدار، ۳۲، ۱۰۱

۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۷، ۱۹۰، ۱۸۹، ۱۸۸، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴،
 ۱۹۵، ۱۹۶، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۵، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۱۳،
 ۲۱۶، ۲۲۹، ۲۴۹، ۲۵۵
 کوارک‌های دریا، ۲۰۲، ۲۰۳
 کوارک‌های ظرفیت، ۲۰۲، ۲۰۴
 کوانتاش دوم، ۷۳، ۱۱۳

گ

گرانش، ۵۲
 گروه (۲) SU، ۱۳۵، ۱۴۶، ۱۴۸، ۱۹۶
 گروه (۳) SU، ۱۸۵
 گشتاور مغناطیسی، ۲۴
 گلوئون، ۱۸۱، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۹۰، ۱۹۳، ۱۹۴، ۲۰۵، ۲۰۶،
 ۲۰۷، ۲۰۸

ل

لاگرانژی، ۲۳، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۸، ۵۹،
 ۶۰، ۶۱، ۶۳، ۶۷، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۳، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹،
 ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۹، ۹۳، ۹۵، ۹۶، ۹۸، ۹۹، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۷،
 ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵،
 ۱۲۷، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸،
 ۱۴۱، ۱۴۵، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳،
 ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۶۳، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲،
 ۱۷۷، ۱۷۹، ۱۸۳، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۹۰، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷،
 ۱۹۸، ۲۱۰، ۲۱۲، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۴۴،
 ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۸
 لپتون، ۲۴، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۵، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۹، ۱۶۴، ۱۶۵،
 ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۵۵
 لپتونی، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۵

م

ماتریس آمیختگی نوترینو، ۲۲۷
 ماتریس کوبیاشی -ماسکاو، ۱۷۳، ۱۸۳، ۱۸۴، ۲۰۹، ۲۵۹
 ماتریس‌های اسپین پائولی، ۱۰۰
 مدل کوارکی، ۲۸، ۲۹، ۱۸۵، ۱۹۰، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۷،
 مزدوج بار، ۳۸، ۶۷، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۵۲، ۱۷۴، ۲۱۳،
 ۲۱۷
 مسزون، ۲۵، ۳۰، ۳۲، ۳۶، ۵۶، ۱۷۵، ۱۹۵، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۱۳،
 ۲۱۵، ۲۱۵
 مزون B، ۲۱۳، ۲۱۵
 معادلات اولر - لاگرانژ، ۵۰
 معادله دیراک، ۲۲، ۲۴، ۱۵۲، ۲۴۴

شکست تقارن، ۲۳، ۲۶، ۱۳۳، ۱۳۹، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۶۹، ۲۲۶،
 ۲۴۸، ۲۴۹

شکست تقارن CP، ۱۷۵

شکست خودبخود تقارن، ۱۳۰
 شمار کوارک‌ها، ۱۹۴، ۱۹۷
 شمار لپتون‌ها، ۲۵۵

ط

طعم کوارک، ۳۱، ۱۸۵، ۱۹۴
 طول، ۵۲، ۵۶، ۱۰۴، ۱۲۷، ۱۹۳

ع

عدد توپولوژی، ۲۵۶
 عملگر آفرینش، ۱۰۴
 عملگر نابودی، ۱۰۴

ف

فرمی‌لب، ۳۱، ۳۸، ۲۴۰
 فرمیون، ۲۹، ۱۰۵، ۱۷۱، ۲۵۸
 فوتون، ۲۶، ۶۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۶، ۱۲۳، ۱۴۴،
 ۱۶۱، ۱۹۱، ۱۹۴

ق

قاعده جمع انیشتین، ۴۲
 قانون پایستگی، ۱۲۱، ۱۲۰، ۶۴، ۵۲
 قانونهای پایستگی، ۹۳، ۲۱۹، ۲۵۳، ۲۵۵
 قضیه نوتر، ۵۲
 قضیه CPT، ۲۱۷
 قطبش خلاء، ۱۱۱، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳
 قطبش، ۶۵، ۶۸، ۷۰، ۷۱، ۱۰۴، ۱۱۱، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۲۳، ۱۴۳،
 ۱۶۴، ۱۹۱، ۱۸۲، ۱۹۲، ۱۹۳

ک

کشش ریسمان، ۵۳، ۲۰۱
 کنش، ۴۹، ۵۳، ۵۵، ۵۹، ۶۳، ۶۴، ۶۹، ۷۱، ۷۵، ۸۱، ۹۳، ۹۵،
 ۹۶، ۹۸، ۱۴۹، ۱۵۱، ۱۸۷، ۲۴۵، ۲۴۸، ۲۵۴
 کوارک بالا، ۲۵
 کوارک پایین، ۲۵، ۳۰، ۲۰۲
 کوارک ته، ۳۱
 کوارک سر، ۳۱، ۳۸، ۲۱۳
 کوارک شگفت، ۲۹
 کوارک، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵،
 ۳۶، ۳۸، ۱۲۷، ۱۵۸، ۱۶۸، ۱۷۱، ۱۷۷، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱

۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱	معادله‌های آتارگی و پاریزی، ۲۰۵
۲۳۲، ۲۳۶، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷	مگنتون بوهر، ۱۰۱
۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۹	میدان W ، ۱۷۶
نوترینوهای دیراکی، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۵۱، ۲۵۵	میدان Z ، ۱۴۵، ۱۵۰، ۱۷۶
نوترینوهای سترون، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۴۰	میدان اسپینوری، ۱۴۵، ۱۴۷
نوترینوهای مایورانا، ۲۳۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۹، ۲۵۰	میدان اسکالر مختلط، ۱۳۲
نوترینوی خورشیدی، ۲۳۶، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰	میدان اسکالر، ۴۵، ۵۶، ۶۰، ۶۴، ۶۸، ۱۰۶، ۱۱۹، ۱۲۹، ۱۳۶، ۱۴۳
نوترینوی دیراکی، ۱۴۸	۱۴۳
نوترینوی میون، ۱۲۴، ۱۵۰، ۲۳۱، ۲۳۸، ۲۴۰	میدان الکترومغناطیسی، ۲۲، ۶۲، ۶۴، ۶۷، ۶۸، ۷۱، ۷۳، ۸۹، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۹، ۱۰۴، ۱۰۹، ۱۱۶، ۱۲۲، ۱۲۷، ۱۴۱، ۱۴۳
نوسانهای نوترینو، ۲۴، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۴، ۲۲۹، ۲۴۷	۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸
و	میدان پیمان‌های گلوئون، ۱۸۶
وایشی بتازای دوگانه، ۲۴۳، ۲۴۹، ۲۵۰	میدان پیمان‌های، ۹۶، ۱۱۵، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۴۶
وایشی لپتونی بوزون Z ، ۱۶۲	۱۵۲، ۱۵۸، ۱۸۷
وایشی لپتونی، ۱۶۲	میدان دیراک، ۷۹
وایشی میون، ۱۲۲، ۱۶۷، ۲۲۱	میدان دیراکی، ۹۵، ۹۶، ۹۷
وایشی هادرونی، ۱۷۹	میدان هیگنز، ۱۳۵، ۱۴۳، ۱۴۵، ۱۴۷، ۱۵۲، ۱۵۴، ۱۸۷، ۲۲۶، ۲۴۸، ۲۵۸، ۲۵۹
وایشی، ۲۴، ۲۹، ۱۱۵، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳	میدان‌های اسپینوری چپگرد، ۱۲۰
۱۲۴، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۳۳، ۱۴۹، ۱۵۵، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰	میدان‌های اسپینوری، ۴۶، ۹۸، ۲۱۹، ۲۴۸، ۲۵۱
۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۷، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۹، ۱۸۰	میدان‌های اسکالر مختلط، ۵۹، ۶۰
۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۹۷، ۱۹۸، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴	میدان‌های برداری جرم‌دار، ۶۱، ۶۹
۲۱۵، ۲۲۱، ۲۳۲، ۲۳۴، ۲۴۳، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۸	میدان‌های مایورانا، ۹۰، ۲۴۳، ۲۵۹
وایشی‌های لپتونی بوزون Z ، ۱۷۹	میون، ۱۱۵، ۱۱۹، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۴۵، ۱۴۸، ۱۴۹
وایشی‌های هادرونی بوزون‌های Z ، ۱۶۷، ۱۷۹	۱۵۲، ۱۵۴، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۳۱، ۲۳۶، ۲۴۰، ۲۴۹
وارونی زمان، ۱۰۲، ۲۱۷	
وارونی فضا، ۴۷، ۴۸، ۶۶، ۶۷، ۷۹، ۸۴، ۸۷، ۱۵۲، ۲۱۱، ۲۱۷	
ه	ن
هادرون، ۲۵، ۲۶، ۳۸، ۱۸۴، ۲۰۲، ۲۰۴، ۲۰۶	ناقارنی، ۱۶۲، ۱۶۴، ۱۸۲، ۲۲۴، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۳۰
هامبورگ، ۳۶، ۳۸، ۱۶۴	ناهنجاری، ۱۱۳، ۲۵۳
هلیستی، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۱۰۵، ۱۱۷، ۱۱۸	نظریه اختلال، ۲۳، ۱۲۹، ۱۳۳، ۱۴۴، ۱۵۵، ۱۵۹، ۱۷۹، ۱۸۳، ۱۸۸، ۱۹۰، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۹، ۲۰۲، ۲۱۰، ۲۱۴، ۲۵۰
۱۱۹، ۱۵۵، ۱۶۲، ۱۶۳، ۲۲۲، ۲۴۴، ۲۴۵	۲۵۴
همیلتونی، ۴۹، ۵۲، ۵۴، ۵۸، ۶۰، ۷۴، ۹۴، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵	نمایش کایرال، ۷۵، ۷۶، ۸۰، ۹۷
۱۰۶، ۱۰۷، ۱۲۶، ۱۳۰، ۲۴۵، ۲۵۴	نمودار فاینمن، ۳۱، ۳۳، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۴۴، ۱۹۱، ۱۹۳، ۲۱۰
ی	نوترون، ۲۱، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۳۵، ۲۰۴، ۲۱۲
یگها، ۶۱	نوترینو، ۲۴، ۱۰۱، ۱۱۷، ۱۱۹، ۱۲۲، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۷، ۱۶۰، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۵، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱

مرجعها

- Ahmad, Q. R. *et al.* (2002) *Phys. Rev. Lett.* **89**, 011301.
- Altarelli, G. and Parisi, G. (1977). *Nucl. Phys.* **B126**, 298.
- Anderson, P. W. (1963). *Phys. Rev.* **130**, 439.
- Apollonio, M. *et al.* (2003) *Eur. Phys. J.* **C27**, 331.
- Armstrong, T. A., Hogg, W. R., Lewis, G. M. *et al.* (1972). *Phys. Rev.* **D5**, 1640; *Nucl. Phys.* **B41**, 445.
- Bali, G. S. and Schilling, K. (1993). *Phys. Rev.* **D47**, 661.
- Bartelt, J., Csorna, S. E., Egyed, Z. *et al.* (1993). *Phys. Rev. Lett.* **71**, 4111.
- Benvenuti, A. C., Bollini, D., Bruni, G. *et al.* (1989). *Phys. Lett.* **B223**, 490.
- Booth, S. P., Henty, D. S., Hulsebos, A., Irving, A. C., Michael, C. and Stephenson, P. W. (1992). *Phys. Lett.* **B294**, 385.
- CHARM II Collaboration (1994). *Phys. Lett.* **B335**, 246.
- Cheng, T. P. and Li, L. F. (1984). *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. Oxford: Clarendon Press.
- Close, F. (1979). *An Introduction to Quarks and Partons*. New York: Academic Press.
- Coward, D. H., DeStaebler, H., Early, R. A. *et al.*, (1968). *Phys. Rev. Lett.* **20**, 292.
- Dashen, R. and Gross, D. J. (1981). *Phys. Rev.* **D23**, 2340.
- Davies, C. *et al.* (2004) *Phys. Rev. Lett.* **92**, 022001.
- Davis, R. (1964) *Phys. Rev. Lett.* **12**, 303.
- Donoghue, J. F., Golowich, E. and Holstein, B. R. (1992). *Dynamics of the Standard Model*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Dydak, F. (1990). In *Proceedings of the 1989 International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies*, ed. M. Riordan, p. 249. Singapore: World Scientific.
- Eichten, E., Gottfreid, K., Kinoshita, T., Lane, K. D. and Yan, T. M. (1980). *Phys. Rev.* **D21**, 203.
- Fero, M. J. (1994). In *Proceedings of the XXVII International Conference on High Energy Physics*, eds B. J. Bussey and I. G. Knowles, p. 399. Bristol: Institute of Physics Publishing.
- Fukuda, Y. *et al.* (1996) *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1683.
- Gavrin, V. N. *et al.* (2003) *Nuc. Phys. B* (Proc. Suppl.) **118**.
- Gross, D. J. and Wilczek, F. (1973) *Phys. Rev.* **D8**, 3633.
- Gross, F. (1993). *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*. New York: Wiley.
- Hampel, W. *et al.* (1999) *Phys. Lett.* **B447**, 127.
- Hansen, J. R. (1991) In *Proceedings of the 25th International Conference on High Energy Physics*, eds K. K. Phua and Y. Yamaguchi, p. 343. Singapore: World Scientific.
- Hasenfratz, A. and Hasenfratz, P. (1985) *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **35**, 559.
- Higgs, P. W. (1964) *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508.
- Hofstadter, R., Bumillar, F. and Yearian, M. R. (1958) *Rev. Mod. Phys.* **30**, 482.

- Horn, R. A. and Johnson, C. R. (1985). *Matrix Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Itzykson, C. and Zuber, J. B. (1980) *Quantum Field Theory*. New York: McGraw-Hill.
- Jarlskog, C. (1985) *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1039.
- Kinoshita, T. and Lindquist, W. B. (1990) *Phys. Rev.* **42**, 636.
- Kobayashi, M. and Maskawa, J. (1973) *Prog. Theor. Phys.* **49**, 652.
- Koks, F. W. J. and Van Klinken, J. (1976) *Nucl. Phys.* **A272**, 61.
- Leader, E. and Predazzi, E. (1982) *Gauge Theories and the New Physics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Mikheyev, S. P. and Smirnov, A. Yu. (1986) *Nuovo Cimento* **C9**, 17.
- Mori, T. (1991). In *Proceedings of 25th International Conference on High Energy Physics*, eds K. K. Phua and Y. Yamaguchi, p. 360. Singapore: World Scientific.
- Okun, L. B. (1982). *Leptons and Quarks*. Amsterdam: North-Holland.
- Olive, D. I. (1997). In *Electron*, ed. M. Springford, p. 39. Cambridge: Cambridge University Press.
- Particle Data Group (1996) *Phys. Rev.* **D54**, 1. (2006) W. M. Yao *et al.* *J. Phys.* G33 1.
- Perkins, D. H. (1987) *Introduction to High Energy Physics*, 3rd edn. Menlo Park, CA: Addison-Wesley.
- Politzer, H. D. (1973) *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346.
- Pontecorvo, B. (1968) *Sov. Phys. JETP.* **26**, 984.
- Prescott, C. Y. (1996) In *17th International Symposium on Lepton-Photon Interactions*, eds Z. P. Zheng and H. S. Chen, p. 130. Singapore: World Scientific.
- Renton, P. B. (1996) In *17th International Symposium on Lepton-Photon Interactions*, eds Z. P. Zheng and H. S. Chen, p. 35. Singapore: World Scientific.
- Salam, A. (1968). In *Elementary Particle Theory* (Nobel Symp. No. 8), ed. N. Svartholm. Stockholm: Almquist & Wiksell.
- Skwarnicki, T. (1996) In *17th International Symposium on Lepton-Photon Interactions*, eds Z. P. Zheng and H. S. Chen, p. 238. Singapore: World Scientific.
- t'Hooft, G. (1976) *Phys. Rev. Lett.* **37**, 8.
- Treiman, S. B., Jackiw, R., Zumino, B. and Witten, E. (1985). *Current Algebra and Anomalies*. Singapore: World Scientific.
- Van Dyck, R. S., Schwinger, P. B. and Dehmel, H. G. (1987). *Phys. Rev. Lett.* **59**, 26.
- Weinberg, S. (1967). *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264.
- Wolfenstein, L. (1978) *Phys. Rev.* **D17**, 2369.
- Yang, C. N. and Mills, R. L. (1954) *Phys. Rev.* **96**, 191.