

سنگرا

# فیزیک ستاره‌ها

دوم  
ویرایش

فیلیپس

ترجمه: دکتر محمود بهار - دکتر حسین گل‌نبی

فیلیپس

# فیزیک ستارہا

ویرایش دوم

ترجمہ: داکٹر محمود بہار - داکٹر حسین گل نبی

# به نام خدا

## فهرست

صفحه	عنوان	صفحه	عنوان
۲۷	انقباض یک پیش ستاره	۷	مقدمه‌ی مترجمین
۲۹	شرایط ستاره شدن		
۳۲	خورشید	۹	<b>مفاهیم اساسی اخترفیزیک</b>
۳۶	فشار، چگالی و دما	۹	۱-۱ ترکیب نوکلئونی مهبانگ
۳۵	تابش خورشیدی	۱۰	تاریخچه‌ی جهان
۳۸	همجوشی گرما هسته‌ای در خورشید	۱۱	سنتز هلیوم
۴۱	سنتز هسته‌ای در ستاره	۱۴	۲-۱ انقباض گرانشی
	جرم ستاره و حد همجوشی	۱۶	سقوط آزاد
۴۱	گرما هسته‌ای	۱۸	تعادل هیدروستاتیکی
۴۵	گیراندازی نوترون		تعادل یک گاز حاوی ذرات
۴۶	چرخه‌های حیات ستاره	۲۰	غیرنسبیتی
۴۶	آهنگ تحول ستاره	۲۲	تعادل یک گاز حاوی ذرات فرانسییتی
۴۸	پایان تحول ستاره	۲۳	تعادل و ضریب بی دررو
۵۰	فراوانی عناصر شیمیایی	۲۵	۳-۱ تشکیل شدن ستاره
		۲۵	شرایط رُمبش گرانشی

صفحه	عنوان	صفحه	عنوان
۱۰۲	جو ستاره‌ها	۵۲	۷-۱ نمودار هرتز شپرونگ - راسل
۱۰۸	۶-۲ واکنش‌ها در دمای بالا	۵۲	درخشندگی
۱۰۹	تولید زوج الکترون - پوزیترون	۵۳	دمای سطح
۱۱۰	تجزیه‌ی نوری هسته‌ها	۵۴	درخشندگی و دمای سطح
۱۱۱	خلاصه	۵۷	خوشه‌های ستاره‌ای
۱۱۵	مسئله‌های فصل ۲	۵۹	خلاصه
		۳۶	مسئله‌های فصل ۱
<b>۱۱۹</b>	<b>انتقال گرما در ستاره‌ها</b> <b>۳</b>	<b>۶۹</b>	<b>خواص ماده و تابش</b> <b>۲</b>
۱۱۹	۱-۳ انتقال گرما با حرکت تصادفی	۶۹	۱-۲ گاز ایده‌آل
۱۲۱	حرکت تصادفی الکترون‌ها و یون‌ها	۷۰	چگالی حالت‌ها
۱۲۳	حرکت تصادفی فوتون‌ها	۷۱	انرژی داخلی
۱۲۶	۲-۳ انتقال گرما با همرفت	۷۴	فشار در گاز ایده‌آل
۱۲۷	شرط بحرانی برای همرفت	۷۶	گاز کلاسیکی ایده‌آل
۱۲۹	۳-۳ شیب دما در ستاره‌ها	۷۹	۲-۲ الکترون‌ها در ستاره‌ها
۱۳۳	۴-۳ سرد شدن کوتوله‌های سفید	۸۱	گاز الکترونی پهن‌کن
۱۳۸	خلاصه	۸۳	نمودار چگالی - دما
۱۴۰	مسئله‌های فصل ۳	۸۶	الکترون‌ها در خورشید
		۸۸	الکترون‌ها در ستاره‌های پرجرم
		۸۹	۳-۲ فوتون‌ها در ستاره‌ها
<b>۱۴۳</b>	<b>همجوشی گرما هسته‌ای در ستاره‌ها</b> <b>۴</b>	۸۹	گاز فوتونی
۱۴۳	۱-۴ فیزیک همجوشی گرما هسته‌ای	۹۳	فشار تابش در ستاره‌ها
۱۴۴	نفوذ در سد	۹۴	۴-۲ معادله‌ی ساها
۱۴۸	سطح مقطع همجوشی	۱۰۰	۵-۲ یونش در ستاره‌ها
۱۵۰	آهنگ واکنش گرما هسته‌ای	۱۰۰	داخل ستاره‌ها

صفحه	عنوان	صفحه	عنوان
۲۱۲	جرم‌های کمینه و بیشینه‌ی ستاره‌ها	۱۵۵	۲-۴ سوختن هیدروژن
۲۱۳	جرم کمینه‌ی یک ستاره‌ی رشته‌ی اصلی	۱۵۷	زنجیره‌ی پروتون - پروتون
۲۱۶	جرم بیشینه‌ی یک ستاره‌ی رشته‌ی اصلی	۱۶۱	چرخه‌ی کربن - ازت
۲۱۹	یکای اصلی جرم ستاره‌ها	۱۶۴	نوترینوهای خورشیدی
۲۲۱	خلاصه	۱۷۱	۳-۴ سوختن هلیوم
۲۲۳	مسئله‌های فصل ۵	۱۷۳	تولید شدن ${}^8\text{Be}$
۲۲۷	<b>۶</b> <b>سرانجام تحول ستاره‌ها</b>	۱۷۶	تولید شدن ${}^{12}\text{C}^*$
۲۲۷	۱-۶ کوتوله‌های سفید	۱۷۹	تولید شدن کربن
۲۲۸	جرم و چگالی مرکزی	۱۸۱	مصرف شدن کربن
۲۳۴	جرم و شعاع	۱۸۲	چه می‌شد اگر؟
۲۳۹	۲-۶ رُمبش هسته‌ی مرکزی یک ستاره	۱۸۳	۴-۴ سوختن پیشرفته
۲۴۰	آغاز رُمبش	۱۸۷	خلاصه
۲۴۱	تجزیه‌ی نوری هسته‌ای	۱۹۲	مسئله‌های فصل ۴
۲۴۳	گیراندازی الکترون	۱۹۵	<b>۵</b> <b>ساختار ستاره‌ها</b>
۲۴۵	عواقب بعدی	۱۹۵	۱-۵ مقدمه
۲۵۲	۳-۶ ستاره‌های نوترونی	۱۹۸	۲-۵ مدل‌های ستاره‌ای ساده
۲۵۲	ماده‌ی داخل ستاره‌های نوترونی	۲۰۰	فشار در داخل ستاره
۲۵۵	اندازه‌ی ستاره‌های نوترونی	۲۰۳	چگالی و دما در داخل یک ستاره
انرژی‌بستگی گرانشی ستاره‌های		۲۰۴	ستاره‌ای با چگالی مرکزی بالا
۲۵۷	نوترونی	۲۰۵	۳-۵ مدل‌سازی برای خورشید
		۲۰۶	فشار، چگالی و دما
		۲۰۷	درخشندگی خورشید

صفحه	عنوان	صفحه	عنوان
۳۰۱	نکات قابل توجه		ستاره‌های نوترونی چرخان و
۳۰۱	خلاصه	۲۵۸	تپ‌اخترها
۳۰۴	مسئله‌های فصل ۷	۲۶۲	جرم بیشینه‌ی یک ستاره‌ی نوترونی
	راهنمایی برای حل کردن مسئله‌های	۲۶۷	سیاهچاله‌ها ۴-۶
۳۰۷	انتخابی	۲۷۱	خلاصه
۳۰۷	فصل ۱	۲۷۴	مسئله‌های فصل ۶
۳۰۹	فصل ۲		
۳۱۰	فصل ۳	۲۸۱	<b>خورشید لوزه‌شناسی</b> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">۷</span>
۳۱۱	فصل ۴	۲۸۲	مقدمه ۱-۷
۳۱۱	فصل ۵	۲۸۳	موج‌های فشار و گرانش ۲-۷
۳۱۲	فصل ۶	۲۸۴	انتشار موج‌های فشار
۳۱۳	فصل ۷	۲۸۸	انتشار موج‌های گرانش
۳۱۵	کتاب‌شناسی	۲۸۹	موج‌های درون خورشید ۳-۷
۳۱۸	واژه‌نامه	۲۹۲	مدهای عادی نوسان ۴-۷
۳۲۸	نمایه	۲۹۶	تقریب‌زنی سرعت ثابت
		۲۹۸	تقریب‌زنی WKB

## مقدمه‌ی مترجمین:

دانشجوها به طور طبیعی به اخترفیزیک علاقه‌مندند، زیرا زیبایی و توان فیزیک را نمایش می‌دهد. اخترفیزیک موضوع پیچیده و شگفت‌انگیزی نیست، و از این‌رو سهم فزاینده‌ای در آموزش علم فیزیک پیدا کرده است. اما در مقابل، تعداد کتاب‌های درسی مربوط به این شاخه‌ی علمی برای دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشد، کم است؛ و از این کتاب‌ها بعضی بسیار ابتدایی و توصیفی، و بعضی بسیار فنی و دانشنامه‌ای هستند. بنابراین داشتن کتابی برای رفع نواقص موجود، امری ضروری به نظر می‌رسد.

برای مطالعه‌ی ساختار ستاره‌ها، دانشجوها باید اطلاعات لازم در مورد پدیده‌های فیزیکی مربوط را داشته باشند. بدون اغراق می‌توان گفت که این اطلاعات به همه‌ی شاخه‌های فیزیک، مانند گرانش، ترمودینامیک، مکانیک آماری، مکانیک و فیزیک کوانتومی، فیزیک هسته‌ای، اپتیک، ...، مربوط‌اند. در این کتاب، مؤلف به این نیاز توجه کرده و کوشیده است پیش از بیان هر مطلبی، فیزیک مربوط را به قدر لازم توضیح دهد و بین فیزیک و اخترفیزیک تعادل مناسب را برقرار کند.

شاید مناسب باشد این کتاب را «کاربرد فیزیک در ستاره‌شناسی» بنامیم، زیرا بدون درک مفاهیم بنیادی فیزیک، درک ستاره‌شناسی مشکل است. بر این مبنا، مؤلف اسم کتاب را «فیزیک ستاره‌ها» گذاشته است.

در فصل اول این کتاب، مفاهیم اخترفیزیکی با استفاده از ایده‌های فیزیک پایه تشریح شده است. واضح است که دانشجوهای سال آخر کارشناسی فیزیک و شاخه‌های وابسته‌ی آن، با این مبانی آشنا هستند. خواص ماده و تابش در فصل ۲، انتقال گرما در فصل ۳، همجوشی گرماسته‌ای در فصل ۴، ساختار ستاره‌ها در فصل ۵، و سرانجام تحول ستاره‌ها، یعنی خواص کوتوله‌های سفید، ستاره‌های نوترونی و سیاهچاله‌ها در فصل ۶ مورد بحث قرار گرفته است.

فصل ۷ تحت عنوان خورشید لرزه‌شناسی به ویرایش دوم کتاب افزوده شده است که در آن پیش از بحث درباره‌ی مدهای عادی نوسان خورشید، فیزیک انتشار موج‌ها تشریح شده است. در پایان هر فصل تعدادی مسأله درج شده است که برای حل کردن آن‌ها می‌توان از راهنمایی‌های پایان کتاب استفاده کرد.

امیدواریم ترجمه‌ی این کتاب خوب به درک فیزیک ستاره‌ها کمک کند و کاربرد واقعی فیزیک در یکی از شاخه‌های پیشرفته‌ی علم را نشان دهد.

چاپ و نشر کتاب حاضر توسط انتشارات مبتکران صورت گرفته است و بهتر است از مدیر فهیم و دانش‌دوست این مؤسسه‌ی فرهنگی، آقای یحیی دهقانی، قدردانی کنیم. از خانم لیلا مهرعلی‌پور به خاطر حروف‌نگاری دقیق و مسئولانه صمیمانه سپاسگزاریم. واضح است که ارائه‌ی این خدمت بدون کمک کارکنان محترم بخش‌های تولید، چاپ و توزیع ممکن نمی‌شد، لذا از همکاری این افراد نیز تشکر می‌کنیم.

در خاتمه ضمن قدردانی از مؤلف این کتاب، منتظر نظریات سازنده‌ی همکاران و دانشجویان برای رفع اشتباه‌ها و کاستی‌ها هستیم.

محمود بهار - حسین گل‌نبی



# ۱ مفاهیم اساسی اختر فیزیک

هدف این کتاب، کشف خواص درون ستاره‌ها و شناخت ساختار و سیر تحول آن‌ها است. این کار عمدتاً با استفاده از فیزیک گرمایی و هسته‌ای برای ماده و تابش در دماها و فشارهای بالا صورت می‌گیرد. اما قبل از ادامه‌ی بحث و به کار بردن این نوع فیزیک، بهتر است کلیات موضوع را با استفاده از فیزیک مقدماتی بررسی کنیم. در این مرور مختصر و سریع، مفاهیمی را معرفی می‌کنیم که برای درک تحول ستاره‌ها بنیادی‌اند، مرتبه‌ی بزرگی بعضی کمیت‌های ستاره‌شناختی مهم را معرفی می‌کنند، و اطلاعات مشاهده‌ای اساسی در مورد ستاره‌ها را به دست می‌دهند. قسمت عمده‌ی موضوعات در فصل‌های بعدی کتاب و در مراجع درج شده در آخر کتاب، به طور مشروح مورد بررسی قرار گرفته‌اند. ما بحث خود را با توجه به فرایندهایی آغاز می‌کنیم که ماده‌ی خام به کار رفته در ساختن ستاره‌های اولیه را تولید کرده‌اند.

## ۱-۱ ترکیب نوکلئونی مهبانگ

در نظر اول، ماده‌ی موجود در جهان شامل هیدروژن و هلیوم، با مقدار کمی از عناصر سنگین‌تر مانند کربن، اکسیژن، و آهن است. امروزه معلوم شده است که کل هلیوم با واکنش‌های هسته‌ای تولید شده است که در حین چند دقیقه‌ی اول جهان صورت گرفته‌اند؛ این فرایند را سنتز هسته‌ای اولیه یا سنتز هسته‌ای مهبانگ می‌نامند. ما این فصل مقدماتی را با معرفی بسیار مختصر سنتز هسته‌ای مهبانگ شروع می‌کنیم، تا خواننده منشاء و ماهیت ماده‌ی خام به کار رفته در ساختار ستاره‌های اولیه را بشناسد.

## تاریخچه‌ی جهان

برای درک تاریخ جهان، باید دو واقعیت مهم در مورد جهان فعلی را در نظر گرفت: اولاً جهان در حالت انبساط است به طوری که اگر به زمان‌های گذشته برگردیم، معلوم می‌شود که چگالی جهان در ۱۰ تا ۲۰ میلیون سال پیش، بی‌نهایت بوده است. ثانیاً تمام فضا با تابش گرمایی در دمای تقریبی  $3K$  پر شده است، و تابش زمینه‌ای مایکروویو کیهانی توسط پنزیاس<sup>۱</sup> و ویلسون<sup>۲</sup> در سال ۱۹۶۵ میلادی کشف شده است. این واقعیت‌ها با این ایده که جهان با یک فراپاشی ناگهانی، یعنی مه‌بانگ آغاز شده است، سازگار است.

مه‌بانگ یک پدیده‌ی موضعی نیست که ماده از یک نقطه از فضا در تمام جهت‌ها به بیرون پرتاب شده باشد. مه‌بانگ به طور هم‌زمان در همه جای فضا صورت گرفته است. اگر جهان بسته است، یعنی دارای حجم محدودی از فضا اما بدون مرز است، در زمان وقوع مه‌بانگ، همه جا فقط به اندازه یک نقطه بوده است. اما اگر جهان باز است، مه‌بانگ در تمام فضای نامتناهی رخ داده است. برطبق مدل استاندارد مه‌بانگ، جهان در طی مراحل زیر گسترش یافته است:

● یک نانو ثانیه بعد از مه‌بانگ، جهان از گاز ذرات بنیادی، یعنی کوارک‌ها و پادکوارک‌ها، لپتون‌ها و پادلپتون‌ها، نوترینوها و پادنوترینوها، گلوئون‌ها و فوتون‌ها، پر شد. وقتی دما به پایین‌تر از  $10^{14} K$  رسید، کوارک‌ها، پادکوارک‌ها و گلوئون‌ها از بین رفتند و به ذرات با جرم کم‌تر تبدیل شدند. خوشبختانه به خاطر زیاد بودن (به مقدار کم) تعداد کوارک‌ها از تعداد پادکوارک‌ها، تعدادی از کوارک‌ها باقی ماندند و پروتون‌ها و نوترون‌های موجود در جهان فعلی را تشکیل دادند. وقتی دما کاهش یافت، لپتون‌ها و پادلپتون‌های سنگین‌تر نیز از بین رفتند.

● در بازه‌ی زمانی یک میلی ثانیه تا یک ثانیه بعد از مه‌بانگ، جهان شامل گازی از نوترون‌ها و پروتون‌ها، الکترون‌ها و پوزیترون‌ها، نوترینوها و پادنوترینوها، و فوتون‌ها شد. وقتی دما کاهش یافت، چگالی جهان بسیار کم شد و نوترینوها به طور مؤثر با ماده برهم کنش کردند؛ این امر در دمای حدود  $10^9 K$  رخ داد. نوترینوهایی که برهم کنش انجام ندادند و

نوترینوهایی که از هم جدا شدند، گاز جهانی فعلی را تشکیل دادند زیرا به خاطر انبساط فضا، تا دمای تقریبی  $2\text{K}$  سرد شده‌اند. تاکنون آشکارسازی این نوترینوهای زمینه ممکن نشده است. بلافاصله بعد از جدا شدن نوترینوها از یکدیگر، زوج‌های الکترون - پوزیترون، تمام پوزیترون‌ها و اغلب الکترون‌ها را از بین برد.

● بعد از  $100$  ثانیه، نوترون‌ها با پروتون‌ها ترکیب شدند و هسته‌های سبک را به وجود آوردند و نهایتاً جهانی به وجود آوردند که در آن تقریباً  $75\%$  جرم آن هیدروژن و  $25\%$  آن هلیوم است. نحوه‌ی تعیین این درصدها را با استفاده از نسبت نوترون‌ها به پروتون‌ها در جهان در هنگام جدا شدن نوترینوها، بعداً شرح خواهیم داد.

● بعد از  $300000$  سال، دما به  $4000\text{K}$  کاهش یافت که برای تشکیل اتم‌های پایدار خیلی کم بود. هسته‌های هیدروژن و هلیوم با الکترون‌ها ترکیب شدند و اتم‌های هیدروژن خنثی و هلیوم را به وجود آوردند. در نتیجه، فوتون‌های موجود در جهان نتوانستند برهم‌کنش قوی با ماده انجام دهند؛ به عبارت دیگر، جهان برای تابش الکترومغناطیسی تراگذر شد. این تابش، که از برهم‌کنش با ماده در دمای نزدیک  $4000\text{K}$  آزاد شده بود، به خاطر انبساط فضا، امروزه تازمانی تقریبی  $3\text{K}$  سرد شده است. این تابش، همان تابش زمینه‌ی مایکروویو کیهانی است که اولین بار توسط پنزیاس و ویلسون آشکار شد. این تابش اندکی گرم‌تر از تابش نوترینویی زمینه در دمای  $2\text{K}$  است که تاکنون آشکار نشده است، زیرا برخلاف نوترینوها، فوتون‌ها با گرمای تولید شده از تباهی الکترون - پوزیترون در جهان اولیه گرم شده‌اند.

● جهان به انبساط و سرد شدن ادامه داد تا به حالت متراکم امروزی با قسمت اعظم ماده‌ی موجود در ستاره‌ها، کهکشان‌ها و خوشه‌های کهکشان‌ها، رسید.  
این تاریخچه‌ی جهان در جدول ۱-۱ خلاصه شده است.

### سنتز هلیوم

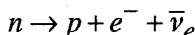
اکنون به فرایندهایی می‌پردازیم که منجر به تشکیل شدن هلیوم و دیگر هسته‌های اتمی سبک شدند. برای فهمیدن این فرایندها، اتفاقاتی را مرور می‌کنیم که برای گاز نوترون‌ها و پروتون‌ها هنگام انبساط جهان و سرد شدن آن از دمای  $10^{10}\text{K}$  تا  $10^9\text{K}$  رخ داده‌اند. هر دوترونی که از

جدول ۱-۱ تاریخچه‌ی جهان بر طبق وقوع مهانگ. وقتی جهان سرد شد، کوارک‌ها، فوتون‌ها و نوترون‌ها تولید شدند؛ فوتون‌ها و نوترون‌ها، هلیوم و دیگر هسته‌های سبک را به وجود آوردند، و سپس هسته‌ها و الکترون‌ها با هم ترکیب شدند و اتم‌های خنثی را تشکیل دادند. این امر منجر به جهان امروزی شد که در آن، ماده در ستاره‌ها و کهکشان‌ها متمرکز است و فوتون‌ها و نوترینوها در دماهای تقریبی ۳K و ۲K، یک گرمای زمینه‌ی جهانی را به وجود آورده‌اند.

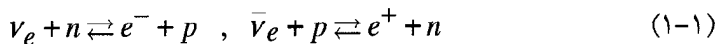
رویدادها	دما (تقریبی) kT	زمان کیهانی (تقریبی)
کوارک‌ها نوترون‌ها و پروتون‌ها را تشکیل دادند	$10^2 \text{ MeV}$	$10^{-4} \text{ s}$
نوترینوها از هم جدا شدند	$1 \text{ MeV}$	$1 \text{ s}$
تباهی الکترون - پوزیترون صورت گرفت	$0.5 \text{ MeV}$	$4 \text{ s}$
هلیوم و دیگر هسته‌های سبک تشکیل شدند	$0.1 \text{ MeV}$	$3 \text{ min}$
اتم‌ها تشکیل شدند و فوتون‌ها از هم جدا شدند	$0.3 \text{ MeV}$	$3 \times 10^5 \text{ yr}$

برخورد نوترون - پروتون به وجود می‌آید، سریعاً تجزیه می‌شد، زیرا انرژی گرمایی درگیر غالباً از انرژی بستگی دوترون، یعنی  $2.2 \text{ MeV}$ ، بیش‌تر بود. تنها هسته‌هایی که در این دماها وجود داشتند، پروتون‌ها و نوترون‌های تنها بودند.

در شرایط عادی یک نوترون با عمر متوسط تقریبی ۱۵ دقیقه واپاشی بتا انجام می‌دهد و به یک پروتون، یک الکترون و یک پادنوترینو تبدیل می‌شود:



اما در دما و چگالی بالاتر، بر اثر برخوردهای گرمایی نوترینوها، پادنوترینوها، الکترون‌ها و پوزیترون‌ها، نوترون‌ها می‌توانند به پروتون‌ها، و پروتون‌ها می‌توانند به نوترون‌ها تبدیل شوند. در جهان اولیه، به ویژه نوترون‌ها و پروتون‌ها به طور پیوسته برطبق واکنش‌های زیر به یک‌دیگر تبدیل می‌شدند:



چون نوترون‌ها از پروتون‌ها سنگین‌ترند، بنابراین برای به وجود آمدن یک نوترون، در مقایسه با پروتون، انرژی بیش‌تری باید از گاز گرفته شود. پس، تعداد نوترون‌ها بسیار کم‌تر از تعداد پروتون‌ها بوده است. در واقع، نسبت نوترون‌ها به پروتون‌ها در دمای تعادل T، از ضریب

بولتزمن<sup>۱</sup> به دست می آید:

$$\frac{N_n}{N_p} = \exp[-\Delta mc^2 / kT] \quad (2-1)$$

در این معادله  $\Delta m$  اختلاف جرم نوترون - پروتون و مساوی با  $1/3 \text{ MeV}/c^2$  است.

ضریب بولتزمن در معادله ی (۲-۱) نشان می دهد که وقتی جهان در حال انبساط سرد شده است، نسبت نوترون ها به پروتون ها سریعاً کاهش یافته است. اما هنگامی که دما و چگالی کاهش یافت، تعداد واکنش های نوترینویی (۱-۱) نیز کم شد و نوترون ها و پروتون ها با آهنگ کم تری به یک دیگر تبدیل شدند. ظاهراً آهنگ های واکنش تا حدی کم شدند که تعادل گرمایی برقرار شود. در نتیجه واکنش های نوترینویی صورت نگرفتند، و تغییر سریع تعداد نوترون ها و پروتون ها متوقف شد. محاسبات نشان می دهند که وقتی دما کم تر از  $10^1 \text{ K}$  بود، نسبت نوترون ها به پروتون ها مقدار تقریبی و ثابت  $\frac{1}{5}$  بود. در واقع این نسبت به آرامی کاهش یافته است زیرا نوترون ها پایدار نیستند و واپاشی بتا با عمر متوسط ۱۵ دقیقه انجام می دهند و به پروتون تبدیل می شوند.

بعد از چند دقیقه، وقتی واپاشی نوترون باعث شد نسبت نوترون ها به پروتون ها به حدود  $\frac{1}{7}$  کاهش یابد، جهان به قدر کافی سرد شد تا واکنش های دو جسمی بتوانند حالت های مقید نوترون ها و پروتون ها را به وجود آورند. در دمای تقریبی  $10^9 \text{ K}$ ، بر اثر گیراندازی تابشی نوترون - پروتون،  $n + p \rightarrow d + \gamma$ ، تعداد قابل ملاحظه ای از هسته های دوترون تولید می شوند که به خوبی با تجزیه ی نوری دوترون،  $\gamma + d \rightarrow n + p$ ، رقابت می کند. گیر افتادن نوترون ها و پروتون ها توسط دوترون ها، باعث تشکیل شدن تریتون ها و هلیوم - ۳ می شود. این هسته ها نیز به نوبه خود پروتون ها و نوترون ها را گیر می اندازند تا هلیوم - ۴ تشکیل شود. چون هلیوم - ۴ پایدارترین هسته در این ناحیه از جدول تناوبی است، تقریباً تمام نوترون های برانگیخته شده در دمای  $10^9 \text{ K}$ ، به هلیوم - ۴ تبدیل شده اند. علاوه بر این، نبودن هسته های پایدار با عددهای جرمی ۵ و ۸، مانع تشکیل شدن هسته های سنگین تر، به جز مقدار کمی لیتیوم - ۷، شده است.

بنابراین، سنتز هسته‌ای مهبانگ گازی از نوترون‌ها و پروتون‌ها به وجود آورد و هلیوم - ۴ و مقداری هسته‌های سبک دیگر، یعنی دوترون‌ها، هلیوم - ۳ و هسته‌های لیتیوم - ۷ تولید شدند. تمام نوترون‌ها در این ساختار مصرف شدند، ولی بسیاری از پروتون‌ها باقی ماندند. در واقع، نظریه‌ی سنتز هسته‌ای مهبانگ فراوانی هلیوم - ۴ را به صراحت پیشگویی می‌کند، ولی این پیشگویی در مورد هسته‌های سبک دیگر چندان قابل اعتماد نیست و به چگالی نادقیق جهان بستگی دارد؛ برای مثال رجوع کنید به *Bernstein et al. (1989)*.

ما می‌توانیم فراوانی هلیوم - ۴ تولید شده در مهبانگ را با توجه به این نکته برآورد کنیم که این مقدار با نسبت نوترون‌ها به پروتون‌ها در جهان پیش از سنتز هسته‌ای حساب شده است.

چون این نسبت در حدود  $\frac{1}{7}$  بود، می‌توانیم ۲ نوترون و ۱۴ پروتون را در نظر بگیریم. این تعداد نوترون و پروتون فقط یک هسته‌ی هلیوم - ۴ شامل ۲ نوترون و ۲ پروتون را تشکیل دادند و ۱۲ پروتون باقی ماند. در نتیجه ۱۶ یکای جرم اتمی از نوترون‌ها و پروتون‌ها، فقط یک هسته‌ی هلیوم به جرم ۴ تولید کردند. بنابراین کسری از جرم که به هلیوم تبدیل شده است،  $\frac{4}{16}$  یا ۲۵٪ بوده است.

پس، سنتز هسته‌ای مهبانگ جهانی به وجود آورده است که در آن تقریباً ۲۵٪ جرم هلیوم است. جرم باقی‌مانده (۷۵٪) که عمدتاً هیدروژن است، از پروتون‌های اضافی تشکیل شده است. این ماده، ماده‌ی خام ستاره‌های اولیه بوده است.

## ۱-۲ انقباض گرانشی

گرانش نیروی راه‌انداز تحول ستاره‌ای است و از همه مهم‌تر، باعث متراکم شدن ماده و در نتیجه تشکیل شدن ستاره‌ها می‌شود. گرانش شرایطی را به وجود می‌آورد که نیروهای هسته‌ای نقش سازنده‌ای را در همجوشی گرماهسته‌ای بازی می‌کنند. بعد از تبدیل شدن هیدروژن به هلیوم در مرکز متراکم و داغ ستاره‌ها، غالباً تراکم بیش‌تر و تبدیل شدن هلیوم به عنصرهای سنگین‌تر مانند کربن، اکسیژن و آهن صورت می‌گیرد و گرد و غبار ستاره از آن خارج می‌شود که ما همگی از آن ساخته شده‌ایم.

برای معرفی چند ویژگی ساده و عمومی انقباض گرانشی، در شکل ۱-۱ یک سیستم کروی به جرم  $M$  و شعاع  $R$  را در نظر گرفته‌ایم که در آن تنها نیروهای مؤثر مربوط به خاصیت خود گرانشی و فشار داخلی است. برای ساده‌تر کردن تحلیل، فرض می‌کنیم تقارن کروی وجود دارد و حرکت دورانی صورت نمی‌گیرد. چگالی و فشار در فاصله‌ی  $r$  از مرکز سیستم را با  $\rho(r)$  و  $P(r)$  نشان می‌دهیم.

ابتدا رابطه‌ای برای شتاب عنصر جرمی واقع در فاصله‌ی  $r$  از مرکز به دست می‌آوریم. جرم ماده محصور در یک پوسته‌ی کروی به شعاع  $r$  برابر است با

$$m(r) = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'$$

که به صورت یک جرم گرانشی واقع در مرکز عمل می‌کند و یک شتاب گرانشی رو به داخل مساوی با

$$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2}$$

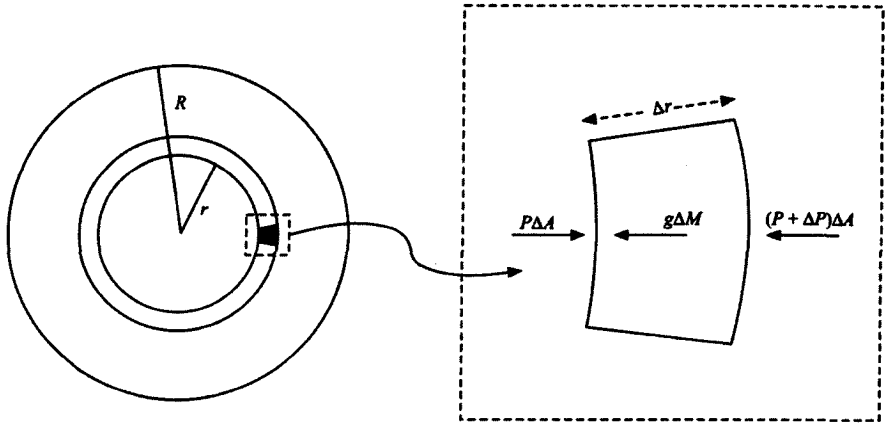
تولید می‌کند. به طور کلی، یک نیروی ناشی از گرادیان فشار نیز وجود دارد. برای پیدا کردن این نیرو، یک عنصر حجمی کوچک واقع در بین شعاع‌های  $r$  و  $r + \Delta r$  با مساحت مقطع  $\Delta A$  و حجم  $\Delta r \Delta A$  را مطابق شکل ۱-۱ در نظر می‌گیریم. اگر فشار در سطح خارجی حجم با فشار در سطح داخلی آن مساوی نباشد، یک نیروی برآیند تولید می‌شود. در واقع، نیروی رو به داخل وارد بر عنصر حجمی، که از گرادیان فشار ناشی می‌شود برابر است با

$$\left[ P(r) + \frac{dP}{dr} \Delta r - P(r) \right] \Delta A = \frac{dP}{dr} \Delta r \Delta A$$

با توجه به این که جرم عنصر حجمی  $\Delta M = \rho(r) \Delta r \Delta A$  است، نتیجه می‌گیریم که شتاب رو به داخل هر عنصر جرمی در فاصله‌ی  $r$  از مرکز، که از گرانش و فشار ناشی می‌شود، برابر است با

$$-\frac{d^2 r}{dt^2} = g(r) + \frac{1}{\rho(r)} \cdot \frac{dP}{dr} \quad (۳-۱)$$

توجه کنید که برای مقابله با گرانش، فشار باید به طرف مرکز افزایش یابد.



**شکل ۱-۱** یک سیستم کروی به جرم  $M$  و شعاع  $R$ . نیروهای وارد بر یک عنصر کوچک به حجم  $\Delta r \Delta A$  در فاصله  $r$  از مرکز، که از گرانش و فشار ناشی می‌شود، نشان داده شده‌اند. شتاب گرانشی جرم  $m(r)$  واقع در فاصله  $r$ ، یک نیروی رو به داخل تولید می‌کند که مساوی با  $g(r)\Delta M = g(r)\rho(r)\Delta r \Delta A$  است. اگر یک گرادیان فشار ناصفر در فاصله  $r$  وجود داشته باشد، اختلاف فشار در سطوح داخلی و خارجی باعث می‌شود یک نیروی اضافی تولید شود که می‌تواند با گرانش مقابله کند.

### سقوط آزاد

اکنون فرض می‌کنیم که گرادیان فشار برای مقابله با رمبش گرانشی وجود ندارد. در این صورت، هر عنصر جرمی واقع در فاصله  $r$ ، با شتاب  $g(r) = Gm(r)/r^2$  به طرف مرکز حرکت می‌کند. تقارن کروی ایجاب می‌کند که هر پوسته‌ی کروی از ماده به طرف مرکز همگرا شود. مخصوصاً، پوسته‌ای از ماده که شامل جرم  $m$  است بر اثر گرانش با شتاب رو به داخل  $Gm_0/r^2$  رمبیده می‌شود، و وقتی انرژی پتانسیل گرانشی پوسته کاهش می‌یابد، انرژی جنبشی آن افزایش پیدا می‌کند. برای پیدا کردن سرعت رو به داخل پوسته‌ای با شعاع  $r$ ، فرض می‌کنیم که پوسته ابتدا در شعاع  $r_0$  ساکن و شامل جرمی است که در طول رمبش ثابت می‌ماند. سرعت رو به داخل پوسته را می‌توان از معادله‌ی پایستگی انرژی به دست آورد:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{dr}{dt} \right]^2 = \frac{Gm_0}{r} - \frac{Gm_0}{r_0}$$



بنابراین، زمان لازم برای سقوط آزاد پوسته تا مرکز کره، برابر است با

$$t_{FF} = \int_{r_0}^0 \frac{dt}{dr} dr = - \int_{r_0}^0 \left[ \frac{\gamma G m_0}{r} - \frac{\gamma G m_0}{r_0} \right]^{-\frac{1}{2}} dr$$

این رابطه را با استفاده از پارامتر  $x = r/r_0$  به صورت زیر ساده می‌کنیم

$$t_{FF} = \left[ \frac{r_0^3}{\gamma G m_0} \right]^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \left[ \frac{x}{1-x} \right]^{\frac{1}{2}} dx$$

انتگرال واقع در این معادله را می‌توان با جاگذاری  $x = \sin^2 \theta$  حساب کرد که مساوی با  $\pi/2$  می‌شود.

نشان داده‌ایم که مدت زمان سقوط آزاد پوسته‌ای به شعاع  $r_0$  شامل جرم  $m_0$ ، به  $m_0/r_0^3$  بستگی دارد، یعنی از چگالی متوسط ماده‌ی محصور حساب می‌شود. از این جا نتیجه می‌گیریم که در غیاب یک گرادیان فشار داخلی، کره‌ای با چگالی یکنواخت اولیه‌ی  $\rho$  در مدت زمانی به طور کامل رمبیده می‌شود که برابر است با

$$t_{FF} = \left[ \frac{3\pi}{32G\rho} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4-1)$$

رمبش بر اثر گرانش هرگز به طور کامل و بدون مخالفت صورت نمی‌گیرد. در عمل، انرژی آزاد شده توسط میدان گرانشی سیستم در حال رمبش معمولاً به صورت حرکت گرمایی اتفاقی اجزای تشکیل دهنده‌ی سیستم تلف می‌شود، که آن هم فشاری تولید می‌کند که با رمبش بیش‌تر مخالفت می‌کند. با وجود این، اگر انرژی به آسانی بر اثر تابش تلف شود، یا اگر اجزای تشکیل دهنده‌ی سیستم در حال رمبش بتواند انرژی را با برانگیزش یا تفکیک جذب کند، سقوط آزاد یک تقریب خوب است. برای مثال، اگر ابر حاصل از هیدروژن مولکولی در بین ستاره‌ها نسبت به تابش‌های خود تراگذر باشد، یا مادامی که مولکول‌های هیدروژن اتمی بتوانند به هیدروژن اتمی تجزیه شوند، یا مادامی که هیدروژن اتمی بتواند یونیده شود، ابر بین ستاره‌ای هیدروژن مولکولی می‌تواند به آسانی رمبش پیدا کند. اما انرژی گرانشی آزاد شده در یک ابر تیره‌ی متشکل از هیدروژن‌های یونیده، به صورت حرکت گرمایی داخلی جذب می‌شود. در نتیجه فشار داخلی افزایش می‌یابد که آهنگ رمبش را کاهش می‌دهد و این ابر به تعادل هیدروستاتیکی می‌رسد.

## تبادل هیدروستاتیکی

شکل ۱-۱ و معادله‌ی (۳-۱) نشان می‌دهند که مقدار ماده‌ی واقع در فاصله‌ی  $r$  از مرکز یک سیستم کروی، به شرطی در تبادل هیدروستاتیکی خواهد بود که گرادیان فشار در فاصله‌ی  $r$  برابر باشد با

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \quad (5-1)$$

کل سیستم به شرطی در حال تعادل خواهد بود که این معادله به ازای تمام شعاع‌های  $r$  معتبر باشد. در این صورت، می‌توان یک رابطه‌ی ساده بین فشار داخلی متوسط و انرژی پتانسیل گرانشی سیستم به دست آورد.

برای به دست آوردن این رابطه، معادله‌ی (۵-۱) را در  $4\pi r^3$  ضرب می‌کنیم و از  $r=0$  تا  $r=R$  انتگرال می‌گیریم:

$$\int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} dr = - \int_0^R \frac{Gm(r)\rho(r)4\pi r^3}{r} dr$$

هر دو طرف این معادله معنی فیزیکی ساده‌ای دارند. طرف راست معادله، انرژی پتانسیل گرانشی سیستم است:

$$E_{GR} = - \int_{m=0}^{m=M} \frac{Gm(r)}{r} dm \quad (6-1)$$

در این معادله،  $dm$  جرم میان  $r$  و  $r+dr$ ، یعنی  $\rho(r)4\pi r^2 dr$  است. از طرف چپ معادله می‌توان به صورت جزء به جزء انتگرال گرفت:

$$\left[ P(r)4\pi r^3 \right]_0^R - 3 \int_0^R P(r)4\pi r^2 dr$$

جمله‌ی اول صفر است زیرا فشار در سطح خارجی  $r=R$  صفر است. جمله‌ی دوم مساوی با  $3\langle P \rangle V$  است که در آن  $V$  حجم سیستم و  $\langle P \rangle$  فشار متوسط حجمی است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که فشار متوسط لازم برای نگهداری یک سیستم با انرژی گرانشی  $E_{GR}$  و حجم  $V$ ، برابر است با

$$\langle P \rangle = -\frac{1}{3} \frac{E_{GR}}{V} \quad (7-1)$$

به عبارت دیگر، فشار متوسط با یک سوم چگالی انرژی گرانشی ذخیره شده برابر است. این رابطه‌ی فشار متوسط لازم برای نگهداری یک سیستم خود - گرانشی را قضیه‌ی ویریا می‌نامند. منشاء فیزیکی این فشار به خود سیستم بستگی دارد. در فصل ۲ فشار تولید شده توسط گازهای کلاسیکی و کوانتومی با ذرات غیرنسبیتی و فرانسبیتی را در نظر خواهیم گرفت. اما فعلاً می‌خواهیم رابطه‌ی بین فشار و چگالی انرژی داخلی ناشی از حرکت انتقالی ذره‌ها را به دست آوریم، ضمناً روی تفاوت‌های عمیق در رفتار سیستم‌های غیرنسبیتی و فرانسبیتی تأکید خواهیم کرد.

برای به دست آوردن این رابطه، یک گاز با  $N$  ذره در جعبه‌ای به حجم  $L^3$  را که اضلاع آن در راستای محورهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  قرار دارند، در نظر می‌گیریم. ابتدا یک ذره‌ی گاز با سرعت  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  و تکانه‌ی  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$  را بررسی می‌کنیم. وقتی که این ذره در جعبه به این طرف و آن طرف می‌جهد، در بازه‌های زمانی منظم به دیواره‌های مکعب برخورد می‌کند. آهنگ برخورد این ذره به یکی از دیواره‌ها در راستای عمود بر محور  $z$ ، مساوی با  $v_z/2L$  است و ذره در هر برخورد، تکانه‌ی  $2p_z$  را به دیواره وارد می‌کند. بنابراین، آهنگ انتقال تکانه به واحد سطح دیوار،  $p_z v_z/L$  است. اکنون تمام ذرات درون جعبه را در نظر می‌گیریم. فشار ناشی از این ذره‌ها که به یک دیوار با مساحت  $L^2$  در راستای عمود بر محور  $z$  وارد می‌شود، برابر است با

$$P = \frac{N}{L^3} \langle p_z v_z \rangle$$

در این جا براکت‌ها مقدار متوسط مربوط به تمام ذره‌ها را نشان می‌دهند. اگر گاز همسانگرد باشد، تمام راستاهای حرکت برای ذره‌ها یکسان‌اند و داریم

$$\langle p_x v_x \rangle = \langle p_y v_y \rangle = \langle p_z v_z \rangle = \langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \rangle / 3$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z \quad \text{که در آن:}$$

در نتیجه، فشار وارد بر هر دیوار جعبه یکسان و برابر است با

$$P = \frac{n}{3} \langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \rangle \quad (A-1)$$

که در آن  $n$  تعداد ذره‌ها در واحد حجم جعبه است.

اگرچه این رابطه‌ی فشار در یک گاز ایده‌آل با استفاده از فیزیک کلاسیکی به دست آمد، اما برای حالتی که اثرهای کوانتومی مهم‌اند، مانند یک گاز الکترونی تبهگن، نیز معتبر است؛ به بخش ۱-۲ رجوع کنید. علاوه بر این، موقعی که حرکت ذرات گاز را با نسبت خاص توصیف می‌کنیم، باز هم رابطه‌ی مذکور معتبر است.

اکنون دو نوع گاز ایده‌آل، یک گاز با ذرات غیرنسبیتی و یک گاز با ذرات فرانسبیتی را با هم مقایسه می‌کنیم. رابطه‌ی عمومی بین انرژی  $\epsilon_p$  و تکانه‌ی  $p$  ی ذره‌ای به جرم  $m$ ، به صورت زیر است:

$$\epsilon_p^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

سرعت ذره  $v = pc^2 / \epsilon_p$  است. حد غیرنسبیتی آشنا با فرض  $p \ll mc$  به دست می‌آید، در

$$نتیجه داریم  $\epsilon_p = mc^2 + p^2 / 2m$  و  $v = p / m$ .$$

حد فرانسبیتی کم‌تر آشنا با فرض  $p \gg mc$  به دست می‌آید، در نتیجه  $\epsilon_p = pc$  و  $v = c$ . شکل رابطه‌ی عمومی (۸-۱) برای فشار یک گاز ایده‌آل، در حالت‌های غیرنسبیتی و فرانسبیتی به صورت زیر است:

● برای گازی با ذرات غیرنسبیتی به جرم  $m$ ،  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = mv^2$  و فشار برابر است با

$$P = \frac{2}{3} n \left\langle \frac{1}{2} mv^2 \right\rangle = \frac{2}{3} \quad (\text{چگالی انرژی جنبشی انتقالی}) \quad (9-1)$$

● برای گازی با ذرات فرانسبیتی،  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = pc$  و فشار برابر است با

$$P = \frac{1}{3} n \langle pc \rangle = \frac{1}{3} \quad (\text{چگالی انرژی جنبشی انتقالی}) \quad (10-1)$$

اکنون نشان می‌دهیم که تبدیل ضریب  $\frac{2}{3}$  به  $\frac{1}{3}$  برای حالت فرانسبیتی، اثر چشمگیری روی تعادل هیدروستاتیکی گازها تحت گرانش، دارد.

### تعادل یک گاز حاوی ذرات غیرنسبیتی

گازی با حجم  $V$  را در نظر بگیرید که که تحت تأثیر گرانش قرار دارد. اگر این گاز ایده‌آل و ذرات آن غیرنسبیتی باشد، در آن صورت فشار متوسط اعمال شده بر طبق معادله‌ی (۹-۱)

برابر است با

$$\langle P \rangle = \frac{2}{3} \frac{E_{KE}}{V}$$

که در آن  $E_{KE}$  انرژی جنبشی ناشی از حرکت انتقالی تمام ذرات گاز است. مقایسه‌ی این مقدار با فشار متوسط لازم برای تعادل هیدروستاتیکی، یعنی معادله‌ی (۷-۱)، نشان می‌دهد که ارتباط انرژی‌های گرانشی و جنبشی یک گاز غیرنسبیتی در تعادل هیدروستاتیکی تحت گرانش خود ذره‌ها، به صورت زیر است

$$2E_{KE} + E_{GR} = 0 \quad (11-1)$$

اگر ذره‌ها درجات آزادی برانگیخته‌ی داخلی نداشته باشند، انرژی کل گاز با مجموع انرژی‌های جنبشی و گرانشی ذره‌ها برابر است:  $E_{TOT} = E_{KE} + E_{GR}$ . معادله‌ی (۱۱-۱) ایجاب می‌کند که این انرژی کل را بتوانیم برحسب انرژی جنبشی یا انرژی گرانشی ذره‌ها بیان کنیم. در نتیجه خواهیم داشت

$$E_{TOT} = -E_{KE} \quad \text{و} \quad E_{TOT} = \frac{1}{2} E_{GR} \quad (12-1)$$

معادلات (۱۱-۱) و (۱۲-۱) اهمیت ویژه‌ای در اختریف یک دارند. این معادله‌ها درستی قضیه‌ی ویریال برای یک سیستم خود - گرانشی با ذرات غیرنسبیتی در تعادل هیدروستاتیکی را توصیف می‌کنند.

اولین نکته‌ای که باید توجه کرد این است که اگر چنین سیستمی در حال تعادل هیدروستاتیکی باشد، با یک انرژی بستگی  $-E_{TOT}$  مقید است، که برابر با انرژی جنبشی داخلی ناشی از حرکت انتقالی ذرات گاز است. این امر ایجاب می‌کند که ابرهای بسیار مقید گاز دارای ذراتی با انرژی جنبشی زیاد باشند؛ به عبارت دیگر، ابرهای گازی باید بسیار داغ باشند.

نکته‌ی دومی که باید تذکر داد این است که اگر سیستم به آرامی تحول پیدا کند و در نزدیکی تعادل هیدروستاتیکی باقی بماند، تغییرات انرژی‌های گرانشی و جنبشی به تغییر انرژی کل بستگی خواهند داشت؛ برای مثال، ۱٪ کاهش در انرژی کل، با ۲٪ کاهش در انرژی گرانشی و ۱٪ افزایش در انرژی جنبشی همراه است.

این تغییرات، رفتار بسیاری از سیستم‌های اخترفیزیکی را مشخص می‌کنند. برای مثال، یک ابر گازی را در نظر می‌گیریم که انرژی خود را با تابش سطحی از دست می‌دهد. اگر اتلاف انرژی از سطح یک ابر گازی با آزاد شدن انرژی گرانشی جبران شود، انرژی گرانشی کاهش می‌یابد و انرژی گرمایی داخلی افزایش پیدا می‌کند، در نتیجه این ابر متراکم و داغ‌تر می‌شود. در واقع، برای تراکم در نزدیکی تعادل هیدروستاتیکی، نصف انرژی گرانشی آزاد شده، از طریق سطح تابش می‌شود و نصف دیگر آن به صورت گرما تلف می‌شود؛ این گرما باعث می‌شود فشار مورد نیاز برای مقابله با نیروهای گرانشی در ابر در حال تراکم، افزایش یابد. اما اگر انرژی تلف شده از سطح را بتوانیم با آزاد کردن انرژی هسته‌ای توسط همجوشی گرما هسته‌ای تأمین کنیم، انرژی کل  $E_{KE} + E_{GR}$  ثابت می‌ماند و نیازی به متراکم شدن ابر گازی نیست؛ خورشید این گونه عمل می‌کند. اما اگر همجوشی هسته‌ای انرژی بیش‌تری تولید کند، انرژی کل افزایش می‌یابد. این امر باعث افزایش انرژی گرانشی و کاهش انرژی جنبشی می‌شود؛ در نتیجه ابر گازی منبسط و سرد می‌شود. برعکس، اگر واکنش‌های هسته‌ای انرژی‌گیر باشند، ابر گازی متراکم و گرم شود.

### تعادل یک گاز حاوی ذرات فرانسیتی

اکنون نشان می‌دهیم که وقتی یک گاز حاوی ذرات فرانسیتی تحت تأثیر گرانش قرار می‌گیرد، وضعیت آن در تعادل هیدروستاتیکی کاملاً متفاوت می‌شود. در این حالت، فشار درون گاز از معادله‌ی (۱-۱۰) به دست می‌آید، و در نتیجه فشار متوسط در سیستم، با یک سوم چگالی انرژی جنبشی متوسط برابر است. اگر این فشار را با فشار متوسط مورد نیاز برای تعادل هیدروستاتیکی، یعنی معادله‌ی (۱-۷) مساوی قرار دهیم متوجه می‌شویم که رابطه‌ی انرژی‌های جنبشی و گرانشی به صورت زیر است

$$E_{KE} + E_{GR} = 0 \quad (1-13)$$

به عبارت دیگر، تعادل هیدروستاتیکی به شرطی برقرار می‌شود که انرژی بستگی صفر باشد. اکنون ما سیستمی داریم که در شرف مقید بودن و نامقید بودن است. در واقع، وقتی به حد فرانسیتی می‌رسیم، انرژی بستگی کاهش می‌یابد و سیستم به راحتی در هم می‌ریزد. این نوع

ناپایداری در ستاره‌هایی اتفاق می‌افتد که قسمت عمده‌ی فشار از طریق تابش، یعنی از گازی حاوی ذرات فرانسبیتی به نام فوتون‌ها، تولید می‌شود. ضمناً این ناپایداری در ستاره‌هایی ظاهر می‌شود که با فشار گاز الکترون‌های تبهگن و بسیار پرانرژی حفظ می‌شوند. این ناپایداری‌ها را به طور مفصل در بخش‌های ۴-۵ و ۶-۱ مورد بحث قرار خواهیم داد.

### تعادل و ضریب بی‌دررو

پایداری تعادل هیدروستاتیکی گاز را غالباً با ضریب بی‌درروی  $\gamma$  توصیف می‌کنند. این کار مخصوصاً موقعی مفید است که ذرات گاز دارای درجات آزادی ارتعاشی و دورانی باشند.

از ضریب بی‌درروی  $\gamma$  برای توصیف رابطه‌ی بین فشار و حجم یک گاز در فرایند تراکم یا انبساط بی‌دررو استفاده می‌شود. برای چنین فرایندی،  $PV^\gamma$  یک مقدار ثابت است، یعنی برای تغییرات بی‌درروی کوچک حجم و فشار، داریم

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$$

یا

$$d(PV) = P dV + V dP = -(\gamma - 1) P dV$$

چون در یک تراکم یا انبساط بی‌دررو انتقال انرژی صورت نمی‌گیرد، تغییر انرژی داخلی سیستم را فقط از کار انجام شده حساب می‌کنند. اگر انرژی داخلی ناشی از انرژی جنبشی انتقالی و درجات آزادی داخلی برانگیخته‌ی ذرات گاز را با  $E_{IN}$  نشان دهیم، خواهیم داشت

$$dE_{IN} = -P dV$$

و از آنجا داریم

$$dE_{IN} = \frac{1}{\gamma - 1} d(PV)$$

اگر ضریب بی‌درروی  $\gamma$  ثابت باشد، می‌توانیم رابطه‌ی مفید زیر بین انرژی داخلی و فشار گاز را به دست آوریم:

$$E_{IN} = \frac{1}{(\gamma - 1)} PV$$

اکنون یک گاز خود گرانش با ضریب بی‌درروی  $\gamma$  را که در حال تعادل هیدروستاتیکی است، در نظر می‌گیریم. در چنین گازی، فشار متوسط را می‌توانیم برحسب انرژی داخلی و  $\gamma$ ، و با استفاده از قضیه‌ی ویریال  $(\gamma-1)$ ، برحسب انرژی پتانسیل گرانشی بیان کنیم:

$$\langle P \rangle = (\gamma-1) \frac{E_{IN}}{V} = -\frac{1}{3} \frac{E_{GR}}{V}$$

بنابراین، یک گاز خود گرانش با ضریب بی‌درروی  $\gamma$  به شرطی در حال تعادل هیدروستاتیکی خواهد بود که داشته باشیم:

$$3(\gamma-1)E_{IN} + E_{GR} = 0 \quad (14-1)$$

معادلات (11-1) و (13-1) حالت‌های خاصی از رابطه‌ی عمومی بین انرژی داخلی و انرژی پتانسیل گرانشی یک گاز هستند. این حالت‌های خاص را می‌توان از معادله‌ی (14-1) با این شرط به دست آورد که ذرات گاز درجات آزادی داخلی برانگیخته نداشته باشند، به طوری که  $E_{IN} = E_{KE}$  یعنی انرژی جنبشی داخلی ناشی از حرکت انتقالی ذره‌ها باشد، و سپس برای ذرات غیرنسبیتی  $\gamma = \frac{5}{3}$  و برای ذرات فرانسبیتی  $\gamma = \frac{4}{3}$  را قرار دهیم.

انرژی کل یک گاز با ضریب بی‌درروی  $\gamma$  در تعادل هیدروستاتیکی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$E_{TOT} = E_{IN} + E_{GR} = -(3\gamma-4)E_{IN} \quad (15-1)$$

بادآوری می‌شود که اگر  $\gamma > \frac{4}{3}$  باشد، گاز مقید است. علاوه بر این، اگر  $\gamma$  نزدیک به  $\frac{4}{3}$  باشد، انرژی بستگی کم است و در نتیجه تغییرات کوچک انرژی کل باعث تغییرات بسیار بزرگ در انرژی‌های داخلی و گرانشی می‌شود. برای مثال، اگر  $\gamma$  به اندازه‌ی ۱٪ بزرگ‌تر از  $\frac{4}{3}$  باشد، یک واحد کاهش در انرژی کل، منجر به ۲۵ واحد افزایش در انرژی جنبشی داخلی و ۲۶ واحد کاهش در انرژی پتانسیل گرانشی خواهد شد. واضح است که پایدار بودن چنین سیستمی مشکوک است. در واقع، هرگاه  $\gamma$  از  $\frac{4}{3}$  کم‌تر باشد، منتظر ناپایدار شدن سیستم هستیم. در این ارتباط توجه می‌کنیم که برای ذراتی که درجات آزادی داخلی برانگیخته ندارند و غیرنسبیتی هستند،  $\gamma = \frac{5}{3}$  است، اما وقتی که اکثر آن‌ها فرانسبیتی می‌شوند،  $\gamma$  به  $\frac{4}{3}$  میل



می‌کند. موقعی که فرایندهایی وجود دارند که راه‌های جدیدی را برای جذب گرما، مانند تفکیک مولکول‌ها، یونش اتم‌ها، واپاشی فوتونی هسته‌های اتم یا تولید ذره‌ها باز می‌کند، ضریب بی‌دررو می‌تواند به  $\frac{4}{3}$  نیز میل کند. چنین فرایندهایی تمایل دارند تعادل هیدروستاتیکی را برقرار کنند.

### ۱-۳ تشکیل شدن ستاره

به نظر می‌رسد که بسیاری از ستاره‌ها به صورت خوشه‌ای تشکیل شده باشند. دو نوع خوشه‌ی مشخص وجود دارد: کروی و باز. خوشه‌ی کروی توده‌ی متراکمی از هزاران ستاره است. مطالعه‌ی طیف‌های آن‌ها نشان می‌دهد که ستاره‌های عضو این نوع خوشه‌ها عناصر سنگین مانند کربن، اکسیژن و آهن را ندارند. این نبود عناصر سنگین نشان می‌دهد که این ستاره‌ها قدیمی‌اند و از هیدروژن و هلیوم اولیه تشکیل شده‌اند. در مقابل، خوشه‌های باز مجموعه‌ی رقیقی از ۵۰ تا ۱۰۰۰ ستاره هستند. این ستاره‌ها پر از عناصر سنگین هستند. این ستاره‌ها نسبتاً جوان هستند و ماده‌ی تشکیل دهنده‌ی آن‌ها پر از عناصر به وجود آورنده‌ی نسل‌های قدیمی‌تر ستاره‌ها است.

ما هنوز به طور کامل نمی‌دانیم که چگونه ستاره‌ها از ابرهای گازی بین ستاره‌ها تولید شده‌اند. به نظر می‌رسد که این ابرها برای چگال شدن به صورت ستاره، انرژی جنبشی خیلی زیاد و تکانه‌ی زاویه‌ای بسیار بزرگی داشته‌اند. امروزه علاقه‌ی زیادی به درک چگونگی فوران این انرژی و تکانه‌ی زاویه‌ای مازاد وجود دارد. علی‌رغم این عدم قطعیت، بعضی جنبه‌های عمومی تشکیل شدن ستاره‌ها را می‌توان معرفی کرد. برای انجام این کار، یک توصیف کیفی برای انقباض گرانشی ابرها با چگالی یکنواخت ارائه می‌کنیم.

### شرایط رمبش گرانشی

برای شروع فرایند چگالش و تبدیل شدن به خوشه‌ای از ستاره‌ها، ابر گازی باید به قدر کافی متراکم شود تا نیروهای جاذبه‌ی گرانشی با اثرهای پاشندگی فشار داخلی خشی شوند.

مخصوصاً، اگر بزرگی انرژی پتانسیل گرانشی انرژی جنبشی داخلی بیش‌تر باشد، ابر مقید می‌شود. برای چگال شدن ابری به شعاع  $R$  و جرم  $M$  که دارای  $N$  ذره با جرم متوسط  $\bar{m}$  در دمای یکنواخت  $T$  است، یک شرط تقریبی به دست می‌آوریم؛ برای سهولت، فرض می‌کنیم که این ابر از مقدار زیادی هیدروژن تشکیل شده است.

انرژی پتانسیل گرانشی را می‌توان به کمک معادله‌ی (۱-۶) به صورت زیر حساب کرد:

$$E_{GR} = -f \frac{GM^2}{R} \quad (16-1)$$

در این رابطه  $f$  یک ضریب عددی است که به توزیع چگالی در داخل ابر بستگی دارد. مستقیماً می‌توان نشان داد که برای یک ابر کروی با چگالی یکنواخت  $f = \frac{3}{5}$  است، اما هرچه به طرف مرکز ابر پیش می‌رویم اگر چگالی افزایش یابد، مقدار بزرگ‌تری برای  $f$  به دست می‌آید؛ در محاسبه‌ی تقریبی ما، مقدار یک را برای  $f$  در نظر می‌گیریم. انرژی جنبشی گرمایی

ابر با توجه به این نکته به دست می‌آید که سهم هر ذره از انرژی،  $\frac{3}{2}kT$  است. پس داریم

$$E_{KE} = \frac{3}{2} NkT \quad (17-1)$$

شرط بحرانی برای چگال شدن برابر است با

$$|E_{GR}| > E_{KE} \quad (18-1)$$

این شرط نشان می‌دهد ابری به شعاع  $R$  به شرطی می‌تواند چگال شود که جرم آن از مقدار

$$M_J = \frac{3kT}{2G\bar{m}} R$$

بیش‌تر باشد. ضمناً معلوم می‌شود که ابری به جرم  $M$  به شرطی چگال می‌شود که چگالی متوسط آن از مقدار

$$\rho_J = \frac{3}{4\pi M^2} \left[ \frac{3kT}{2G\bar{m}} \right]^3 \quad (19-1)$$

بیش‌تر باشد. پانویس  $J$  به این علت به کار رفته است که مقادیر بحرانی جرم و چگالی را غالباً جرم و چگالی جینز<sup>۱</sup> می‌نامند.

در واقع بهتر است این شرط چگال شدن را برحسب چگالی متوسط ابر بنویسیم. می‌دانیم که مقدار چگالی بحرانی که از معادله‌ی (۱-۱۹) به دست می‌آید، کم است و از این رو اگر جرم ابر زیاد باشد، این چگالی به راحتی حاصل می‌شود. برای مثال، ابری از هیدروژن مولکولی در دمای  $20\text{K}$  با جرم  $2 \times 10^{33}\text{kg}$ ، که معادل  $1000$  برابر جرم خورشید است، به شرطی می‌تواند چگال شود که چگالی آن به  $10^{-22}\text{kg m}^{-3}$  برسد؛ که در حدود  $10^5$  مولکول در هر مترمکعب است. برای یک ابر مشابه با جرمی معادل جرم خورشید، چگالی بحرانی یک میلیون برابر بیش‌تر است:

این مطالب نشان می‌دهند که چگال شدن ابر گازی و تبدیل شدن آن به ستاره‌ها در چند مرحله صورت می‌گیرد. ابتدا ابر گازی با جرم زیاد، متراکم می‌شود؛ جرم این ابر ممکن است هزاران برابر جرم خورشید باشد. وقتی ابر متراکم شد و چگالی آن به قدر کافی افزایش یافت، قسمت‌های کوچکی از آن به طور مستقل متراکم می‌شوند. نهایتاً، ابر به چندین قسمت تقسیم می‌شود، که جرم هر قسمت قابل مقایسه با جرم خورشید است. سپس این قسمت‌ها متراکم می‌شوند و یک خوشه از ستاره‌های اولیه یعنی پیش‌ستاره‌ها<sup>۱</sup> را تشکیل می‌دهند.

### انقباض یک پیش‌ستاره

معادله‌ی (۱-۱۹) ایجاب می‌کند که وقتی یک ابر در دمای  $20\text{K}$  به چگالی  $10^{-16}\text{kg m}^{-3}$  می‌رسد، قسمتی از جرم آن که قابل مقایسه با جرم خورشید (یعنی  $2 \times 10^{30}\text{kg}$ ) است می‌تواند به طور مستقل متراکم (منقبض) شود. در این مرحله، یک پیش‌ستاره با شعاعی از مرتبه‌ی  $10^{15}\text{m}$  که تقریباً یک میلیون برابر شعاع خورشید است، تشکیل می‌شود. این ستاره بدون مخالفت فشار داخلی، در صورتی که انرژی داخلی آن به حرکت گرمایی تصادفی (اتفاقی) تبدیل نشود، آزادانه رمبیده می‌شود. این امر تا موقعی ممکن است که کسر بزرگی از انرژی آزاد شده، برای تفکیک مولکول‌های هیدروژن و برای یونیده کردن اتم‌های هیدروژن، جذب شود.

انرژی لازم برای تفکیک یک مولکول هیدروژن  $\varepsilon_D = 4.75 \text{ eV}$ ، و انرژی لازم برای یونیده شدن یک اتم هیدروژن،  $\varepsilon_I = 13.6 \text{ eV}$  است. بنابراین انرژی لازم برای تفکیک و یونیده شدن تمام هیدروژن‌های موجود در پیش‌ستاره‌ای به جرم  $M$ ، تقریباً برابر است با

$$\frac{M}{2m_H} \varepsilon_D + \frac{M}{m_H} \varepsilon_I$$

که در آن  $m_H$  جرم اتم هیدروژن است. اگر فرض کنیم که این انرژی از طریق رمبش گرانشی یک پیش‌ستاره از شعاع آغازی  $R_1$  تا شعاع پایانی  $R_2$  تأمین می‌شود، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{GM^2}{R_2} - \frac{GM^2}{R_1} \approx \frac{M}{2m_H} \varepsilon_D + \frac{M}{m_H} \varepsilon_I \quad (20-1)$$

در حالت خاص، انرژی لازم برای تفکیک و یونیده کردن هیدروژن در یک پیش‌ستاره با جرمی مساوی با جرم خورشید،  $3 \times 10^{39} \text{ J}$  است. این پیش‌ستاره آزادانه از شعاع آغازی  $R_1 \approx 10^{15} \text{ m}$  تا شعاع پایانی  $R_2 \approx 10^{11} \text{ m}$  رمبیده می‌شود، یعنی شعاع ستاره به اندازه‌ی ۱۰۰۰۰ برابر کوچک می‌شود و به ۱۰۰ برابر شعاع خورشید می‌رسد. مقیاس زمانی این رمبش از معادله‌ی (۴-۱) به دست می‌آید، که زمان سقوط آزاد برای جسمی با چگالی آغازی  $\rho$  را نشان می‌دهد. در این حالت،  $\rho \approx 10^{-16} \text{ kg m}^{-3}$  و مقیاس زمانی از مرتبه‌ی ۲۰۰۰۰ سال است. وقتی قسمت اعظم هیدروژن یونیده، و پیش‌ستاره به طور فزاینده نسبت به تابش خود تیره می‌شود، انرژی گرانشی آزاد شده به انرژی تصادفی گرمایی الکترون‌ها و یون‌ها تبدیل می‌شود. در نتیجه فشار داخلی افزایش می‌یابد و رمبش پیش‌ستاره آرام، و تعادل هیدروستاتیکی برقرار می‌شود.

برآورد دمای داخلی متوسط یک پیش‌ستاره در مدتی که انقباض آرام جای رمبش سریع گرانشی را می‌گیرد، آسان است. برای انجام این کار، از قضیه‌ی ویربال (۱-۱۱) برای پیدا کردن رابطه انرژی جنبشی داخلی و انرژی گرانشی پیش‌ستاره در نزدیکی تعادل هیدروستاتیکی، استفاده می‌کنیم. انرژی جنبشی گرمایی یون‌های هیدروژن و الکترون‌ها در پیش‌ستاره در دمای داخلی  $T$ ، برابر است با

$$E_{KE} \approx \frac{M}{m_H} 3kT \quad (21-1)$$

انرژی گرانشی در پایان رمبش سریع، از معادله‌ی (۱-۲۰) به دست می‌آید؛ چون  $R_1 \gg R_2$ ، پس می‌توان نوشت:

$$E_{GR} \approx -\frac{GM^2}{R_2} \approx -\left[ \frac{M}{2m_H} \varepsilon_D + \frac{M}{m_H} \varepsilon_I \right] \quad (22-1)$$

برطبق قضیه‌ی ویریال (۱-۱۱)، داریم

$$2E_{KE} + E_{GR} = 0$$

بنابراین، یک پیش‌ستاره در دمای زیر به تعادل هیدروستاتیکی می‌رسد

$$kT \approx \frac{1}{12} [\varepsilon_D | 2\varepsilon_I ] \approx 2,6 eV \quad (23-1)$$

این دما متناظر با دمای داخلی متوسط  $30000K$  است. توجه کنید که این برآورد مستقل از جرم پیش‌ستاره است.

انقباض آرام پیش‌ستاره تحت تأثیر تیرگی قسمت داخلی یونیده ستاره است. این تیرگی آهنگ اتلاف انرژی به صورت تابش از سطح ستاره، و در نتیجه آهنگ آزاد شدن انرژی گرانشی را تنظیم می‌کند. مقیاس زمانی برای این انقباض از مرتبه‌ی  $10^7$  تا  $10^8$  سال است. باز هم می‌توان از قضیه‌ی ویریال استفاده کرد، زیرا پیش‌ستاره در نزدیکی حالت تعادل هیدروستاتیکی باقی می‌ماند. برطبق معادله‌های (۱-۱۱) و (۱-۱۲)، نصف انرژی گرانشی از سطح ستاره آزاد می‌شود، نصف دیگر به صورت انرژی جنبشی داخلی ذخیره می‌شود. دما و فشار در مرکز پیش‌ستاره تا زمانی افزایش می‌یابد که شرایط برای همجوشی گرماهسته‌ای هیدروژن مناسب شود. انرژی آزاد شده از طریق همجوشی هسته‌ای، نیاز به آزاد شدن انرژی گرانشی را کم می‌کند، و منقبض شدن پیش‌ستاره متوقف می‌شود. ستاره شدن واقعی موقعی حاصل می‌شود که آهنگ واکنش هسته‌ای برای جبران انرژی تابش شده از سطح، کافی باشد.

### شرایط ستاره شدن

هیچ جسمی که دارای خاصیت خود گرانشی است، به ستاره تبدیل نمی‌شود. وجود گاز داغی از الکترون‌ها و یون‌های کلاسیکی، تنها راه برای مقابله با گرانش نیست. یک گاز سرد و چگال از الکترون‌های تبهگن نیز می‌تواند با گرانش مقابله کند. در چنین گازی، الکترون‌ها تابع قوانین

مکانیک کوانتومی هستند و پایین‌ترین حالت‌های انرژی ممکن را برطبق اصل انحصار پائولی اشغال می‌کنند. یک گاز الکترونی تبهگن در مقابل انقباض مقاومت می‌کند که این امر به خاطر انرژی گرمایی تصادفی الکترون‌ها نیست، بلکه به این علت است که انرژی جنبشی کل الکترون‌ها دارای یک مقدار کمینه است که با افزایش چگالی، زیاد می‌شود. در واقع، در یک جسم در حال انقباض اگر الکترون‌ها تبهگن شوند، افزایش دمای آن جسم متوقف می‌شود. این امر به شرطی صورت می‌گیرد که فاصله‌ی متوسط بین الکترون‌ها در سیستم در حال انقباض، با طول موج دوبروی الکترون‌ها قابل مقایسه باشد.

طول موج دوبروی مکانیک کوانتومی یک الکترون از رابطه‌ی  $\lambda = h/p$  به دست می‌آید که در آن  $h$  ثابت پلانک و  $p$  تکانه الکترون است. چون انرژی جنبشی یک الکترون در یک گاز کلاسیکی در دمای  $T$  تقریباً مساوی با  $kT$  است، تکانه الکترون در حدود  $(m_e kT)^{1/2}$  و طول موج دوبروی نوعی آن برابر است با

$$\lambda \approx \frac{h}{(m_e kT)^{1/2}} \quad (24-1)$$

مکانیک کلاسیکی به شرطی در این مورد معتبر است که تابع‌های موج الکترون‌ها همپوشانی نداشته باشند؛ به عبارت دیگر، فاصله‌ی متوسط بین الکترون‌ها باید از  $\lambda$  بزرگ‌تر باشد. این شرط موقعی حاصل می‌شود که چگالی گاز یونیده در نامساوی زیر صدق کند

$$\rho \ll \frac{\bar{m}}{\lambda^3} \approx \bar{m} \frac{(m_e kT)^{3/2}}{h^3} \quad (25-1)$$

در این جا  $m$  جرم متوسط ذره‌ها در گاز یونیده است؛ برای هیدروژن یونیده  $m = 0.5 \text{ amu}$  جرم متوسط یک پروتون و یک الکترون است.

به راحتی می‌توان نشان داد که با افزایش چگالی داخلی پیش‌ستاره، دمای داخلی آن ابتدا زیاد می‌شود. با قرار دادن رابطه‌ی تقریبی انرژی گرانشی، یعنی معادله‌ی (۱-۱۶)، و رابطه‌ی کلاسیکی انرژی جنبشی داخلی، یعنی معادله‌ی (۱-۱۷)، در شرط تعادل هیدروستاتیکی

$$2E_{KE} + E_{GR} = 0$$

خواهیم داشت

$$kT \approx \frac{GM\bar{m}}{3R} \approx G\bar{m}M \frac{2}{3} \rho^{\frac{1}{3}} \quad (26-1)$$

می‌بینیم که دما متناسب با  $\rho^{\frac{1}{3}}$  است. این وضع تا زمانی ادامه می‌یابد که چگالی به قدر کافی کم و نامساوی (۲۵-۱) برقرار باشد، تا الکترون‌ها از قوانین مکانیک کلاسیکی پیروی کنند. وقتی چگالی به مقدار

$$\rho \approx \bar{m} \frac{(m_e kT)^{\frac{2}{3}}}{h^3} \quad (27-1)$$

می‌رسد، مکانیک کوانتومی اهمیت پیدا می‌کند و الکترون‌ها تبهگن شدن را آغاز می‌کنند. در نتیجه، اگر گاز بیش‌تر متراکم شود، دمای آن به مقدار زیاد افزایش پیدا نمی‌کند. در یک پیش‌ستاره در حال انقباض دمای لازم برای تبهگن شدن الکترون‌ها را می‌توان با قرار دادن چگالی بحرانی مشخص شده با معادله‌ی (۲۷-۱) در معادله‌ی (۲۶-۱)، برآورد کرد. در نتیجه خواهیم داشت

$$kT \approx G\bar{m}M \frac{2}{3} \frac{1}{\bar{m}} \frac{1}{3} \frac{(m_e kT)^{\frac{1}{3}}}{h}$$

که بعد از مرتب کردن، به صورت زیر در می‌آید

$$kT \approx \left[ \frac{G^{\frac{2}{3}} \bar{m}^{\frac{1}{3}} m_e}{h^{\frac{2}{3}}} \right] M^{\frac{2}{3}} \quad (28-1)$$

در حوالی این دما، الکترون‌های تبهگن مقاومت در مقابل تراکم و انقباض گرانشی بیش‌تر را آغاز می‌کنند و دیگر باعث افزایش دما نمی‌شوند.

معادله‌ی (۲۸-۱) مقدار بیشینه‌ی تقریبی دمای داخلی متوسط یک پیش‌ستاره در حال انقباض را به دست می‌دهد. به نقش کلیدی جرم  $M$  پیش‌ستاره توجه کنید. اگر جرم خورشید،  $2 \times 10^30 \text{ kg}$ ، را به جای  $M$  قرار دهیم، دمای بیشینه‌ی  $kT \approx 1 \text{ keV}$  را به دست می‌آوریم. به عبارت دیگر، اگر جرم خورشید بر اثر گرانش منقبض شود، دمای داخلی متوسط آن به حدود  $10^7 \text{ K}$  می‌رسد، و دمای مرکزی آن حتی از این مقدار بالاتر می‌رود؛ این دما بیش‌تر از دمای لازم برای راه‌اندازی واکنش‌های گرماسته‌ای و همجوشی هیدروژن و تبدیل

شدن آن به هلیوم است. اما انقباض پیش‌ستاره‌های سبک‌تر از خورشید، دماهای داخلی کم‌تری را تولید می‌کند. محاسبات دقیق نشان می‌دهند که جرم کمینه‌ی لازم برای شروع شدن واکنش گرمایسته‌ای، و در نتیجه ستاره شدن واقعی، در حدود  $0.08$  جرم خورشید است. پیش‌ستاره‌های با جرم کم‌تر از این مقدار، به اشیایی تبدیل می‌شوند که در آن‌ها فشار الکترون‌های تبهگن با گرانش مقابله می‌کند؛ این شی‌ها را غالباً کوتوله‌های قهوه‌ای می‌نامند.

گستره‌ی ممکن جرم ستاره‌ها را در فصل ۵ معرفی خواهیم کرد. در آن‌جا جرم کمینه‌ی یک ستاره را به تفصیل بررسی می‌کنیم و توضیح می‌دهیم که برای ستاره شدن، یک جرم بیشینه و یک جرم کمینه وجود دارد. ضمناً نشان خواهیم داد که فشار تولید شده بر اثر تابش در داخل یک ستاره موقعی زیاد است که جرم آن بسیار بیش‌تر از جرم خورشید باشد. این امر ایجاب می‌کند که تعادل هیدروستاتیکی یک ستاره‌ی سنگین به فشار تابشی آن، یعنی به فشار ناشی از گاز فوتون‌ها بستگی داشته باشد. اما همان‌طور که در بخش ۱-۲ گفته شد، وقتی ذرات گاز فرانسیتی می‌شوند، تعادل هیدروستاتیکی به هم می‌خورد؛ یعنی برطبق معادله‌ی (۱-۱۳) انرژی بستگی کم می‌شود، و تغییرات کم انرژی کل با تغییرات زیاد انرژی‌های داخلی و گرانشی همراه است. با توجه به این نکات، ستاره‌های با جرم‌های بیش‌تر از  $100-50$  برابر جرم خورشید، به آسانی از هم می‌پاشند. در واقع چنین ستاره‌هایی کم‌یاب‌اند.

## ۴-۱ خورشید

خورشید، نزدیک‌ترین ستاره به ما، نقش ویژه‌ای را به عنوان چشمه‌ی اطلاعات اخترفیزیکی دقیق بازی می‌کند. برای مثال، ما جرم، شعاع، شکل هندسی و سن آن، و ضمناً درخشندگی و طیف تابش الکترومغناطیسی ناشی از سطح آن را می‌دانیم. از این اطلاعات مشاهده‌ای در مدل‌های نظری خورشید برای پیشگویی مشخصات فیزیکی قسمت داخلی خورشید استفاده می‌شود. دقیق‌ترین مدل خورشید، مدل خورشیدی استاندارد است که توسط باکال<sup>۱</sup> (۱۹۸۹) ارائه شده است. بعضی پارامترهای ورودی این مدل و بعضی خاصیت‌های خورشیدی محاسبه شده، در جدول ۱-۲ درج شده‌اند.



جدول ۱-۲ خواص فیزیکی اصلی خورشید\*

مقدار	خاصیت
$M_{\odot} = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$	جرم
$R_{\odot} = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$	شعاع
$L_{\odot} = 3,86 \times 10^{26} \text{ W}$	درخشندگی فوتونی
$T_E = 5780 \text{ K}$	دمای سطحی مؤثر
$t_{\odot} \approx 4,55 \times 10^9 \text{ yr}$	سن
$\rho_c = 1,48 \times 10^5 \text{ kg m}^{-3}$	چگالی مرکزی
$T_c = 15,6 \times 10^6 \text{ K}$	دمای مرکزی
$P_c = 2,29 \times 10^{16} \text{ Pa}$	فشار مرکزی

\* خاصیت‌های اندازه‌گیری شده عبارت‌اند از: جرم، شعاع، درخشندگی فوتونی و دمای سطح. برآورد سن خورشید عمدتاً بر مبنای مطالعات زمین‌شناختی صورت گرفته است. خاصیت‌های مربوط به مرکز خورشید به کمک مدل خورشیدی استاندارد حساب شده‌اند؛ برای کسب اطلاعات بیش‌تر رجوع کنید به (Bahcall (1989).

هدف ما در این بخش معرفی خورشید با ساده‌ترین جمله‌ها برای نشان دادن مفاهیم اخترشناختی پایه و تعیین کردن مرتبه‌ی بزرگی کمیت‌های اخترشناختی است.

### فشار، چگالی و دما

خورشید ستاره‌ای به جرم  $M_{\odot} \approx 2 \times 10^{30} \text{ kg}$  است. انقباض گرانشی خورشید در حدود ۵ بیلیون سال پیش بر اثر آغاز «سوختن هیدروژن»، یعنی همجوشی گرما هسته‌ای هیدروژن و تبدیل شدن آن به هلیوم، متوقف شده است. شعاع خورشید در مرحله سوختن مستمر هیدروژن،  $R_{\odot} \approx 7 \times 10^8 \text{ m}$  و چگالی متوسط آن  $\langle \rho \rangle = 1,4 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  است. مدت زمان سقوط گرانشی جسمی با این چگالی، از معادله‌ی (۱-۴) به دست می‌آید:

$$t_{FF} = \left[ \frac{3\pi}{32G(\rho)} \right]^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2} \text{hour}$$

چون این مدت زمان ارتباطی با خورشید قابل مشاهده ندارد، با اطمینان نتیجه می‌گیریم که خورشید در حال سقوط آزاد نیست و گرادیان فشار داخلی خورشید باید نقش اساسی در مقابله با گرانش داشته باشد. در واقع، چون هیچ مدرکی در مورد تغییرات زیاد خورشید در طول عمر زمین به دست نیامده است، می‌توانیم نتیجه بگیریم که خورشید دست کم به مدت ۴٫۵ بیلیون سال در حال تعادل هیدروستاتیکی (تقریبی) بوده است. تعادل هیدروستاتیکی خورشید ایجاب می‌کند تا ما بتوانیم از قضیه‌ی ویریال برای پیدا کردن فشار متوسط نگهدارنده‌ی خورشید استفاده کنیم؛ با استفاده از معادله‌های (۷-۱) و (۱۶-۱) داریم

$$\langle P \rangle = -\frac{1}{3} \frac{E_{GR}}{V} \approx \frac{GM_{\odot}^2}{4\pi R_{\odot}^4} \approx 1.0^{14} \text{ Pa} \quad (29-1)$$

بنابراین، قسمت داخلی خورشید محیطی را به وجود می‌آورد که در آن ماده و تابش در دمای بالا برهم کنش می‌کنند به طوری که فشار متوسط در آن‌جا در حدود یک بیلیون برابر فشار جو و چگالی در آن‌جا بسیار بیش‌تر از چگالی آب معمولی است. فیزیک مورد نیاز برای شناخت ماده و تابش در این شرایط فوق‌العاده را در فصل ۲ مرور می‌کنیم؛ در آن‌جا یونیده شدن گازها و معادله‌های حالت برای گازهای غیرنسبیتی، فرانسبیتی، کلاسیکی و کوانتومی را مورد بحث قرار خواهیم داد. این بحث نشان می‌دهد که می‌توانیم به سادگی فرض کنیم که خورشید ابتدا توسط فشار گاز کلاسیکی ایده‌آل الکترون‌ها و یون‌ها حفظ شده است. بنابراین، فشار متوسط داخل خورشید برابر است با

$$\langle P \rangle = \frac{\langle \rho \rangle}{\bar{m}} kT_I \quad (30-1)$$

که در آن  $T_I$  دمای داخلی نوعی و  $\bar{m}$  جرم متوسط ذرات گاز است. برای هیدروژن یونیده، جرم متوسط یک پروتون و یک الکترون مساوی با  $\bar{m} = 0.5 \text{ amu}$  است. در واقع، در مدل خورشیدی استاندارد فرض می‌شود که خورشید از ماده‌ای تشکیل شده است که ۷۱٪ آن هیدروژن، ۲۷٪ آن هلیوم و ۲٪ آن عناصر سنگین مانند کربن، اکسیژن و آهن است. اگر یونیده شدن کامل باشد، جرم متوسط ذرات گاز  $\bar{m} \approx 0.61 \text{ amu}$  خواهد بود.

به آسانی می‌توان معادله‌های (۱-۲۹) و (۱-۳۰) را با هم ترکیب و دمای نوعی درون خورشید را برآورد کرد. در نتیجه خواهیم داشت

$$kT_I \approx \frac{GM_{\odot} \bar{m}}{3R_{\odot}} \approx 0.75 \text{ keV} \quad \text{یا} \quad T_I \approx 6 \times 10^6 \text{ K} \quad (1-31)$$

البته، دمای واقعی داخل خورشید، مانند چگالی و فشار آن، به طرف مرکز خورشید افزایش می‌یابد. دما، چگالی و فشار مرکزی که از مدل خورشیدی استاندارد به دست می‌آید، در جدول ۱-۲ درج شده است.

### تابش خورشیدی

توان کل تابش شده از خورشید، یعنی درخشندگی  $L_{\odot}$  آن، در حدود  $4 \times 10^{26} \text{ W}$  است. علاوه بر این، خورشید با تقریب اول یک تابش کننده‌ی جسم سیاه با مساحت  $4\pi R_{\odot}^2$  و دمای سطحی مؤثر  $T_E \approx 6000 \text{ K}$  است. بنابراین داریم

$$L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_E^4 \quad (1-32)$$

که در آن  $\sigma$  ثابت استفان<sup>۱</sup> مساوی با  $5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  است. چون  $kT_E \approx 0.5 \text{ eV}$ ، کل تابش در قسمت مرئی طیف الکترومغناطیسی قرار دارد.

ملاحظه می‌کنیم که دمای سطحی مؤثر  $T_E \approx 6000 \text{ K}$  به اندازه‌ی یک هزارم دمای داخلی نوعی  $T_I \approx 6000000 \text{ K}$  است که از معادله‌ی (۱-۳۱) به دست می‌آید. علت این تفاوت را با مطالعه‌ی سازوکار فرار کردن تابش از خورشید، می‌توان فهمید.

هنگامی که الکترون‌ها و یون‌ها در داخل خورشید برهم کنش می‌کنند، تابش الکترومغناطیسی گسیل می‌کنند که آن هم با الکترون‌ها و یون‌ها برهم کنش می‌کند. در واقع، با تقریب اول می‌توان خورشید را به صورت کراه‌ای از الکترون‌ها و یون‌های در حال تعادل با تابش الکترومغناطیسی در دمای  $T_I$  در نظر گرفت. اگر این تابش می‌توانست آزادانه فرار کند، بدون آن که تعادل ترمودینامیکی را به هم بزند، خورشید به صورت یک تابش کننده‌ی جسم سیاه در دمای  $T_I$  ظاهر می‌شد. در آن صورت درخشندگی خورشید از رابطه‌ی زیر به دست می‌آمد

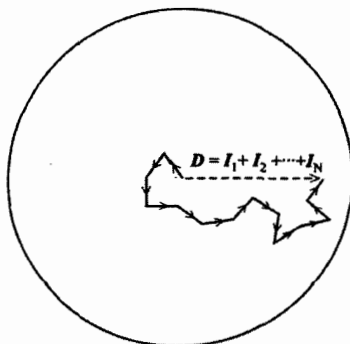
$$L_{\odot} \approx 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_1^4 \quad (1-33)$$

و تابش در ناحیه‌ی پرتوهای X طیف الکترومغناطیسی قرار می‌گرفت زیرا  $kT_1 \approx 0.5 \text{ keV}$  می‌شد.

خوشبختانه در همسایه‌های سیاره‌ی زمین، این تابش نمی‌تواند آزادانه فرار کند؛ این تابش به‌طور بسیار وسیع در داخل خورشید تیره به تله می‌افتد و زمین توسط پرتوهای X به خاکستر تبدیل نمی‌شود! تابش داخل خورشید به‌طور پیوسته توسط الکترون‌ها و یون‌ها پراکنده، جذب و گسیل می‌شود. در نتیجه گرادیان دما به وجود می‌آید، و انرژی تابشی به آرامی به طرف سطح نفوذ می‌کند و در آن‌جا به صورت تابش مرئی فرار می‌کند. سازوکار مهم برای نفوذ تابشی، یک گشت تصادفی است که در آن فوتون‌ها مطابق شکل ۱-۲ پراکنده، جذب و گسیل می‌شوند.

ما طول مسیر آزاد یک فوتون در داخل خورشید را با  $l$  نشان می‌دهیم. در عمل، توزیعی از مسیرهای آزاد با یک مقدار میانگین وجود دارد که به ناحیه‌ی داخلی خورشید بستگی دارد. برای ساده کردن تحلیل تا حد امکان، فرض می‌کنیم که  $l$  یک مشخصه‌ی طولی ثابت فوتون‌ها در سرتاسر داخل خورشید است. بعد از  $N$  برهم‌کنش، و بعد از  $N$  جابه‌جایی برداری در جهت‌های تصادفی، انرژی تابشی فوتون مسافت برداری زیر را مطابق شکل ۱-۲ می‌پیماید:

$$\mathbf{D} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \dots + \mathbf{I}_N$$



شکل ۱-۲ سازوکار گشت تصادفی برای نفوذ تابشی یک رشته با  $N$  گام در جهت‌های تصادفی منجر به یک جابه‌جایی برداری  $\vec{D} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \dots + \vec{l}_N$  می‌شود.

مربع مسافت خالص پیموده شده در  $N$  گام، برابر است با

$$D^2 = l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_N^2 + 2(\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_3 + \dots)$$

اگر ما از تعداد زیادی گشت تصادفی میانگین بگیریم، جمله‌های شامل حاصل ضرب‌های نرده‌ای حذف می‌شوند زیرا جهت هر گام، تصادفی است. بنابراین، مسافت مربع میانگین پیموده شده مساوی با  $l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_N^2$  یا  $Nl^2$  است.

برای آن‌که یک فوتون بتواند از خورشید فرار کند، باید در یک مسافت قابل مقایسه با شعاع خورشید نفوذ کند و پیمودن این مسافت به طور متوسط به  $R_{\odot}^2 / l^2$  گام نیاز دارد. چون مدت زمان هر گام  $l/c$  است، که در آن  $c$  تندی نور است، مدت زمان فرار گشت تصادفی تقریباً برابر است با

$$t_{RW} \approx \frac{R_{\odot}^2}{cl} \quad (34-1)$$

در مقابل، مدت زمان فرار مستقیم تابش از خورشید  $R_{\odot}/c$  است که با ضربی از  $l/R_{\odot}$  از زمان فرار گشت تصادفی کوتاه‌تر است. بنابراین، نفوذ تابشی از طریق گشت تصادفی، آهنگ فرار انرژی از خورشید را با ضریب  $l/R_{\odot}$  آهسته می‌کند. نتیجه می‌گیریم که درخشندگی واقعی خورشید که از معادله‌ی (۳۲-۱) به دست می‌آید، با ضریب  $l/R_{\odot}$  از درخشندگی به دست آمده از معادله‌ی (۳۳-۱)، یعنی درخشندگی مربوط به حالتی که تابش بدون مانع از خورشید فرار می‌کند، کم‌تر است. این امر ایجاب می‌کند که دمای سطحی مؤثر و دمای داخلی نوعی خورشید تقریباً با رابطه زیر به هم مربوط باشند

$$T_E \approx \left[ \frac{l}{R_{\odot}} \right]^{\frac{1}{4}} T_I \quad (35-1)$$

با استفاده از مقادیر  $T_E \approx 6000 \text{ K}$  و  $T_I \approx 6000000 \text{ K}$ ، مسیر آزاد میانگین مؤثر برای نفوذ تابشی در خورشید، در حدود یک میلی‌متر به دست می‌آید، یعنی خورشید بسیار تیره است. اما با استفاده از معادله (۳۴-۱) مدت زمان نوعی برای نفوذ تابش از مرکز خورشید به طرف خارج آن و فرار کردن تابش از خورشید، در حدود ۵۰۰۰۰ سال به دست می‌آید.

ضمناً با استفاده از این تحلیل ساده و تقریبی می‌توان ارتباط درخشندگی ستاره‌ای مانند

خورشید با جرم آن را فهمید. با استفاده از معادله‌ی (۱-۳۵) و رابطه‌ی بین دمای داخلی و جرم و شعاع خورشید در معادله‌ی (۱-۳۱)، می‌توان رابطه‌ی تقریبی درخشندگی یعنی معادله‌ی (۱-۳۲) را به دست آورد. در نتیجه خواهیم داشت

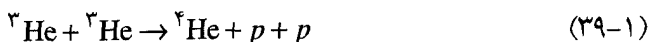
$$L_{\odot} \approx 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_I^4 \frac{l}{R_{\odot}} \approx \frac{(4\pi)^2}{35} \frac{\sigma}{k^4} G^4 \bar{m}^4 \langle \rho \rangle l M_{\odot}^3 \quad (1-36)$$

این معادله نشان می‌دهد که درخشندگی ستاره‌ای مانند خورشید باید به صورت تابعی از جرم آن سریعاً افزایش یابد.

در فصل ۳، نفوذ تابشی را به تفصیل شرح خواهیم داد. این بحث مقدماتی را با تأکید بر این نکته خاتمه می‌دهیم که نفوذ تابشی شارش تابش را محدود می‌کند و اجازه نمی‌دهد خورشید گرمای خود را به صورت فاجعه‌آمیز از دست بدهد. نفوذ تابشی، درخشندگی و در نتیجه آهنگ آزاد شدن انرژی از طریق همجوشی گرماهسته‌ای در مرکز خورشید را معین می‌کند.

### همجوشی گرماهسته‌ای در خورشید

همجوشی گرماهسته‌ای را در فصل ۴ به تفصیل توضیح خواهیم داد. در این جا به این نکته اشاره می‌کنیم که درخشندگی خورشید به طور مستمر با زنجیره‌ای از واکنش‌های گرماهسته‌ای به نام زنجیره‌ی پروتون - پروتون تولید می‌شود. واکنش‌های غالب عبارت‌اند از



در این واکنش‌ها  $d$  معرف دوترون یا  ${}^2\text{H}$ ، یکی از ایزوتوپ‌های هیدروژن با عدد جرمی ۲، است. این واکنش‌ها گرمازا هستند و انرژی گرماهسته‌ای کل آزاد شده از آن‌ها در حدود  $26\text{MeV}$  به ازای هر هسته‌ی  ${}^4\text{He}$  تولید شده است. این انرژی باید با آهنگ  $4 \times 10^{26} \text{W}$  آزاد شود تا درخشندگی خورشیدی را تولید کند.

تمام واکنش‌های زنجیره‌ی پروتون - پروتون با تأخیر و ممانعت صورت می‌گیرند زیرا یک سد کولنی می‌خواهد هسته‌های با بار مثبت را دور از یک‌دیگر نگهدارد. اما این احتمال معنی‌دار وجود دارد که اگر دما زیاد باشد هسته‌ها از نظر مکانیک کوانتومی بتوانند در سد کولنی تونل بزنند. برهم‌کنش لازم برای شروع شدن همجوشی در هر یک از این واکنش‌ها، متفاوت است: واکنش (۱-۳۷) با برهم‌کنش هسته‌ای ضعیف، واکنش (۱-۳۸) با برهم‌کنش الکترومغناطیسی و واکنش (۱-۳۹) با برهم‌کنش هسته‌ای قوی صورت می‌گیرد. در نتیجه، واکنش اول زنجیره یعنی واکنش (۱-۳۷)، آهسته‌ترین واکنش است. همان‌طور که در فصل ۴ خواهیم دید، یک پروتون در مرکز خورشید پیش از جوش خوردن با پروتون دیگر و تولید کردن یک دوترون، به طور متوسط ۵ بیلیون سال صبر می‌کند. سپس دوترون تولید شده قاپیده می‌شود تا در مدت تقریبی یک ثانیه یک  ${}^3\text{He}$  تشکیل شود و مدت زمان لازم برای برخورد دو هسته‌ی  ${}^3\text{He}$  و تشکیل شدن یک هسته‌ی  ${}^4\text{He}$  تقریباً ۳۰۰۰۰۰ سال است.

می‌توان نتیجه گرفت که واکنش اول زنجیره یعنی واکنش ضعیف و آهسته (۱-۳۷)، آهنگ آزاد شدن انرژی در زنجیره‌ی پروتون - پروتون را معین می‌کند. این واکنش یک تنگه به وجود می‌آورد که در آنجا مقدار زیادی از سوخت هیدروژن به تدریج فراوری می‌شود. یکی از نتیجه‌ها این است که اگرچه توان کل آزاد شده بسیار زیاد و در حدود  $4 \times 10^{26} \text{ W}$  است، چگالی توان بسیار کم است. هر کیلوگرم از خورشید به طور متوسط فقط  $0.2 \text{ mW}$  تولید می‌کند؛ این توان در حدود ۱۰۰۰۰ برابر کوچک‌تر از چگالی توان تولید شده با فعالیت سوخت و سازی بدن انسان است.

مشاهده می‌کنیم که واکنش ضعیف (۱-۳۷) ایجاب می‌کند که وقتی پروتون‌ها مصرف می‌شوند، نوترینوها گسیل شوند. چهار پروتون لازم است تا یک هسته‌ی  ${}^4\text{He}$  تولید و انرژی  $26 \text{ MeV}$ ، یعنی  $4.24 \times 10^{-13} \text{ J}$  آزاد شود. بنابراین، مصرف پروتون‌ها برای تولید

درخشندگی فوتونی خورشیدی  $4 \times 10^{26} \text{ W}$ ، برابر است با

$$(4 \times 4 \times 10^{26}) / (4.24 \times 10^{-13}) = 4 \times 10^{38}$$

پروتون بر ثانیه

همجوشی این پروتون‌ها با گسیل دست کم  $2 \times 10^{38}$  نوترینو در هر ثانیه همراه است. این

نوترینوهای تولید شده در واکنش ضعیف، می‌توانند به طور ضعیف و از طریق برهم کنش هسته‌ای ضعیف، با یک‌دیگر برهم کنش کنند. برخلاف پروتون‌ها، نوترینوها از خورشید عبور می‌کنند و تقریباً بدون ممانعت از خورشید فرار می‌کنند. اگر این نوترینوها در زمین آشکارسازی شوند، می‌توانند اطلاعات بدون واسطه‌ای از واکنش‌های گرماهسته‌ای مرکز خورشید را به ما بدهند. نیازی به گفتن نیست که آشکارسازی زمینی ذراتی که می‌توانند بدون ممانعت از خورشید عبور کنند، کار مشکلی است. آشکارسازی نوترینوهای خورشیدی و مسأله‌ی نوترینوهای خورشیدی را در فصل ۴ مورد بحث قرار خواهیم داد.

همجوشی گرماهسته‌ای نه فقط انقباض خورشید را به تعویق می‌اندازد، بلکه به عنوان تنظیم‌کننده‌ی دمای خورشید مانند یک ترموستات گرماهسته‌ای، عمل می‌کند. اگر دما افزایش یابد، آهنگ واکنش هسته‌ای افزایش می‌یابد و انرژی تولید شده بیش‌تر از انرژی فرار کرده خواهد بود. چون خورشید تقریباً در حال تعادل هیدروستاتیکی باقی می‌ماند، می‌توانیم با استفاده از قضیه‌ی ویریال بررسی کنیم که وقتی انرژی کل خورشید از این طریق افزایش می‌یابد، چه اتفاقی می‌افتد. معادله‌های (۱-۱۱) و (۱-۱۲) نشان می‌دهند که انرژی گرانشی افزایش و انرژی داخلی کاهش خواهد یافت؛ به عبارت دیگر، خورشید منبسط و سرد خواهد شد. اگر دما کاهش یابد، مجموعه‌ای از رویدادهای موازی اتفاق خواهند افتاد: چون انرژی آزاد شده از واکنش‌های هسته‌ای به قدر کافی زیاد نخواهد بود تا بتواند اتلاف انرژی خورشید را تأمین کند، در نتیجه انرژی کل کاهش خواهد یافت؛ این کاهش انرژی کل باعث خواهد شد خورشید منقبض شود و دمای آن بالاتر برود.

این ترموستات گرماهسته‌ای، انقباض گرانشی را به تأخیر انداخته و خورشید را دست کم به مدت  $4/5$  بیلیون سال به صورت پایا نگهداشته است. تا زمانی که هیدروژن کافی در مرکز خورشید وجود دارد تا زنجیره‌ی پروتون - پروتون تکرار شود و درخشندگی خورشیدی مورد نیاز  $W = 4 \times 10^{26}$  را تولید کند، وضعیت فعلی خورشید ادامه خواهد یافت. در خورشید تقریباً  $7 \times 10^{56}$  پروتون وجود دارد، که اگر با آهنگ  $4 \times 10^{38}$  در هر ثانیه مصرف شود، در مدت ۶ بیلیون سال بعدی فقط ۱۰٪ پروتون‌ها مصرف خواهد شد. به طور کلی، سوختن هیدروژن در خورشید در حدود ۱۰ بیلیون سال ادامه خواهد داشت، و بعد از آن هسته‌ی مرکزی خورشید



منقبض و داغ خواهد شد تا آن که دما و چگالی به قدر کافی بالا برود و همجوشی گرماهسته‌ای هلیوم آغاز شود. در آن صورت، لایه‌های خارجی خورشید منبسط خواهند شد تا یک غول قرمز تشکیل شود، و خورشید مرحله‌ی بعدی تحول ستاره‌ای خود را شروع خواهد کرد.

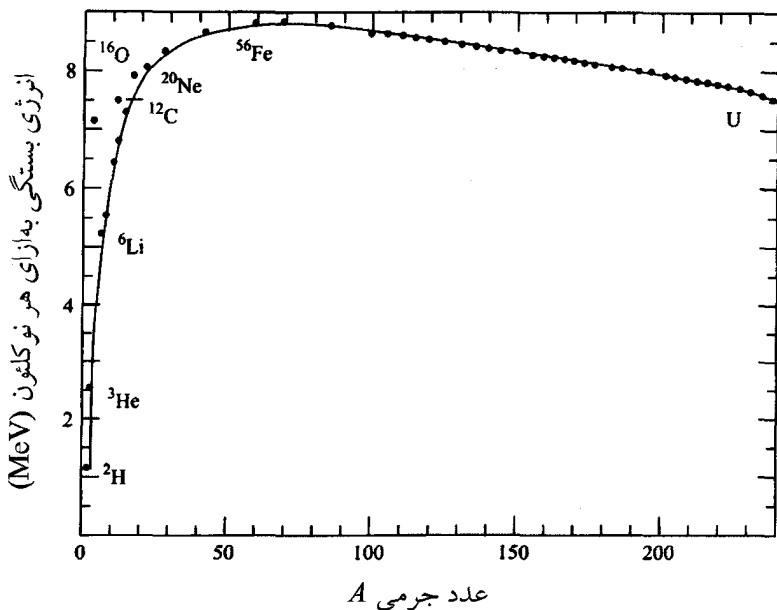
## ۱-۵ سنتز هسته‌ای در ستاره

در تحول ستاره‌ای، انرژی پتانسیل گرانشی از طریق انقباض آزاد می‌شود، و وقتی سوخت‌های هسته‌ای شروع به سوختن می‌کنند تا فرار انرژی تابشی از سطح ستاره را جبران کنند، این امر متوقف می‌شود. خاکسترهای مجموعه‌ای از واکنش‌های هسته‌ای می‌توانند سوخت واکنش‌های بعدی باشند. برای مثال، هلیوم تولید شده در همجوشی هیدروژن ممکن است در انقباض گرانشی بعدی بسوزد و کربن تولید کند. در واقع، رشته‌ای از مراحل گرماهسته‌ای وجود دارد. هر مرحله می‌تواند در توقف موقتی انقباض گرانشی مؤثر باشد مشروط بر این که منجر به آزاد شدن انرژی از طریق تشکیل شدن هسته‌های مقیدتر بیش‌تری بشود.

انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون هسته‌های اتمی در شکل ۱-۳ نشان داده شده است. بیشینه‌ی پهن در نزدیکی عدد جرمی ۵۶ نشان می‌دهد که هسته‌های نزدیک آهن در جدول تناوبی بیش‌ترین بستگی را به هم دارند. بنابراین، انتظار داریم رشته واکنش‌های گرماهسته‌ای در ستاره‌ها موقعی پایان یابد که هسته‌های نزدیک آهن تولید شوند. این هسته‌ها، یعنی ایزوتوپ‌های  $\text{Ni}$ ،  $\text{Co}$ ،  $\text{Fe}$ ،  $\text{Mn}$ ،  $\text{Cr}$ ، خاکستر هسته‌ای تولید می‌کنند که نمی‌تواند بسوزد. مراحل اصلی همجوشی گرماهسته‌ای در ستاره‌ها و دمای تقریبی لازم برای شروع شدن هر مرحله، در جدول ۱-۳ درج شده‌اند.

## جرم ستاره و حد همجوشی گرماهسته‌ای

همه‌ی ستاره‌ها نمی‌توانند دمای لازم برای آغاز کردن تمام مراحل همجوشی گرماهسته‌ای و سنتز کردن آهن را کسب کنند. یادآوری می‌کنیم که وقتی الکترون‌های داخل ستاره تبه‌گن می‌شوند، یعنی وقتی که فاصله‌ی متوسط بین الکترون‌ها با طول موج دو بروی نوعی الکترون‌ها قابل مقایسه می‌شود، افزایش دمای داخل ستاره‌ی در حال انقباض متوقف می‌شود. در بخش



شکل ۳-۱ انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون در هسته‌های اتمی. یک بیشینه‌ی پهن در عدد جرمی ۵۶ دیده می‌شود که نشان می‌دهد وقتی دو هسته‌ی سبک با هم جوش می‌خورند تا یک هسته‌ی سنگین‌تر تشکیل دهند، به شرطی انرژی آزاد می‌شود که عدد جرمی هسته‌ی تشکیل شده از ۵۶ کم‌تر باشد.

جدول ۳-۱ مراحل اصلی سوختن گرما هسته‌ای در ستاره‌ها. خاکسترهای یک مرحله سوختن، به شرطی می‌تواند سوخت مرحله‌ی بعدی باشد که جرم ستاره در حال انقباض به قدری زیاد باشد که به دمای گیرانش تقریبی مشخص داده شده برسد.

فرایند	سوخت	محصولات	دمای گیرانش تقریبی (K)
سوختن هیدروژن	هیدروژن	هلیوم	$1 \times 10^7$
سوختن هلیوم	هلیوم	کربن، اکسیژن	$1 \times 10^8$
سوختن کربن	کربن	اکسیژن، نئون، سدیم، منیزیم	$1 \times 10^8$
سوختن نئون	نئون	اکسیژن، منیزیم	$1 \times 10^9$
سوختن اکسیژن	اکسیژن	منیزیم تا گوگرد	$2 \times 10^9$
سوختن سیلیسیوم	سیلیسیوم	آهن و عناصر نزدیک آن	$3 \times 10^9$

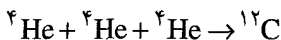
۳-۱ دیدیم که دمای بیشینه‌ی ممکن تقریباً با  $M^{\frac{4}{3}}$  متناسب است؛ معادله‌ی (۱-۲۸) را ببینید. بنابراین، جرم یک ستاره‌ی در حال انقباض، دمای بیشینه‌ی قابل حصول و در نتیجه مرحله‌ی همجوشی گرما هسته‌ای دسترس‌پذیر را مشخص می‌کند.

پیش از این گفتیم که فقط ستاره‌های با جرم بیش‌تر از  $0.08 M_{\odot}$  می‌توانند به حالت ستاره شدن برسند و هیدروژن را بسوزانند. در واقع دو سازوکار برای سوختن هیدروژن وجود دارد. زنجیره‌ی پروتون - پروتون در ستاره‌هایی مانند خورشید اهمیت دارد. اما در اغلب ستاره‌های پر جرم، هیدروژن‌ها همجوشی می‌کنند و از طریق مجموعه‌ای از واکنش‌ها که کربن در آن‌ها به عنوان کاتالیزور عمل می‌کند، به هلیوم تبدیل می‌شوند؛ این واکنش‌ها را چرخه کربن - ازت می‌نامند که ازت یکی از محصولات مهم این نوع سوختن هیدروژن است. این روش‌ها و روش‌های دیگر همجوشی گرما هسته‌ای را در فصل ۴ به تفصیل مورد بحث قرار خواهیم داد.

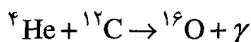
وقتی سوختن هیدروژن در مرکز ستاره متوقف می‌شود، هسته‌ی مرکزی هلیومی ستاره بر اثر گرانش منقبض و داغ‌تر می‌شود. این دمای افزایش یافته باعث سوختن هیدروژن در پوسته‌ی اطراف هسته می‌شود. ضمناً این دما باعث افزایش فشار و انبساط بیش‌تر لایه‌های خارجی‌تر ستاره می‌شود. موقعی سوختن هیدروژن در پوسته ادامه می‌یابد، هلیوم بیش‌تری تولید شده و بر روی هسته‌ی مرکزی هلیومی انباشته می‌شود که داغ‌تر و چگال‌تر می‌شود. اگر جرم ستاره به قدر کافی زیاد باشد، هسته‌ی مرکزی به مقدار زیاد داغ و چگال می‌شود تا هسته‌های هلیوم با یک‌دیگر جوش بخورند و هسته‌های کربن را تشکیل دهند. سوختن هلیوم انرژی‌ای آزاد می‌کند که باعث انبساط و سرد شدن هسته‌ی مرکزی می‌شود، و هسته‌ی مرکزی سردتر باعث انقباض جزئی لایه‌های خارجی‌تر ستاره می‌شود. اکنون ستاره یک گول قرمز است که قسمت عمده‌ی درخشندگی آن با سوختن هلیوم در مرکز داغ و چگال ستاره حاصل می‌شود. دمای این هسته‌ی مرکزی بین  $10^8$  و  $2 \times 10^8$  K و چگالی آن بین  $10^5$  و  $10^8 \text{ kg m}^{-3}$  است. برای رسیدن به این شرایط، جرم اولیه‌ی ستاره باید بیش‌تر از  $0.5 M_{\odot}$  باشد.

در واقع، نبودن هسته‌های پایدار با عددهای جرمی ۵ و ۸ شدیداً مانع سوختن هلیوم می‌شود. تنها راه موجود، همجوشی سه هسته‌ی  $^4\text{He}$  برای تولید  $^{12}\text{C}$  از طریق واکنش سه

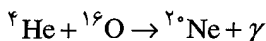
ذره‌ای زیر است



این واکنش سه ذره‌ای، عملاً در دو مرحله صورت می‌گیرد. دو هسته‌ی  ${}^4\text{He}$  با هم جوش می‌خورند و یک هسته  ${}^8\text{Be}$  ناپایدار تولید می‌کنند، اما حضور موقتی آن برای گیراندازی هسته‌ی  ${}^4\text{He}$  سوم و تشکیل شدن  ${}^{12}\text{C}$  کافی است. برای انجام این امر چگالی بالا و دمای بالا لازم است. ما می‌دانیم که در سنتز هسته‌ای مهبانگ، هلیوم تولید شده، ولی نسوخته است؛ در آن حالت دما به قدر کافی زیاد، اما چگالی بسیار کم بوده است. برای تشکیل و تحول ستاره‌های با جرم زیاد، وجود چگالی و دمای بالا برای سوختن هلیوم الزامی است. با سوختن هلیوم نه تنها کربن، بلکه یک عنصر حیاتی دیگر به نام اکسیژن، از طریق واکنش زیر تولید می‌شود



علاوه بر این، مقدار کمی  ${}^{20}\text{Ne}$  نیز از طریق واکنش زیر تولید می‌شود



هنگامی که هلیوم در مرکز ستاره مصرف می‌شود، سوختن هلیوم به پوسته‌ی اطراف هسته‌ی مرکزی متشکل از کربن و اکسیژن سرایت می‌کند و یک ساختار پیاز مانند برای ستاره ایجاد می‌کند که در آن یک لایه‌ی خارجی هیدروژن‌سوز، یک لایه‌ی داخلی هلیوم‌سوز و یک هسته‌ی مرکزی پر از کربن و اکسیژن دارد؛ لایه‌های خارجی‌تر ستاره در این مرحله‌ی تحول، به مقدار زیاد منبسط می‌شوند.

ستاره‌هایی که دارای جرم  $8M_{\odot}$  یا بیشتر هستند، بعد از سوزاندن هلیوم می‌توانند به تحول ادامه دهند و کربن را در دمای تقریبی  $5 \times 10^8 \text{K}$  بسوزانند تا عناصری مانند نئون، سدیم و منیزیم تولید کنند. اگر دما از  $10^9 \text{K}$  بیشتر شود، سوختن کربن می‌تواند باعث تجزیه‌ی نوری نئون شود و هسته‌های اکسیژن و هلیوم تولید کند؛ سپس هسته‌های هلیوم توسط هسته‌های نئون تجزیه نشده گیر می‌افتند و منیزیم تولید می‌کنند. بعد از آن، سوختن اکسیژن در دمای تقریبی  $2 \times 10^9 \text{K}$  صورت می‌گیرد تا عناصر بین منیزیم و گوگرد تولید

شوند. ستاره‌های با جرم  $11M_{\odot}$  یا بیش‌تر، می‌توانند به دمای تقریبی  $3 \times 10^9 \text{ K}$  برسند که این دما برای سوختن سیلیسیوم، یعنی مرحله‌ی پایانی همجوشی گرما هسته‌ای، لازم است. این امر باعث تشکیل شدن هسته‌های نزدیک آهن در جدول تناوبی می‌شود. این نوع ستاره‌ها ساختاری پیدا می‌کنند که شامل لایه‌های هم‌مرکز متشکل از هیدروژن، هلیوم، کربن، نئون، اکسیژن و سیلیسیوم در اطراف هسته‌ی مرکزی آهنی و عناصر نزدیک آن، است.

به طور خلاصه، جرم یک ستاره چگونگی تبدیل شدن هیدروژن به عناصر سنگین‌تر را مشخص می‌کند. ستاره‌های در حال انقباض با جرم تقریبی بین  $0.1M_{\odot}$  و  $0.5M_{\odot}$  به دمایی می‌رسند که برای سوزاندن هیدروژن لازم است ولی به قدر کافی داغ نمی‌شوند تا هلیوم را نیز بسوزانند. ستاره‌هایی که جرم آن‌ها تقریباً بین  $0.5M_{\odot}$  و  $8M_{\odot}$  است، هیدروژن و هلیوم را می‌سوزانند، و ستاره‌هایی با جرم بین  $8M_{\odot}$  و  $11M_{\odot}$  در ادامه‌ی سوزاندن هلیوم، کربن را نیز می‌سوزانند. بالاخره، ستاره‌های با جرم بیش‌تر از  $11M_{\odot}$  می‌توانند دماهایی را کسب کنند که برای آغاز کردن هر یک از مراحل همجوشی گرما هسته‌ای لازم است.

### گیراندازی نوترون

همجوشی گرما هسته‌ای سازوکاری را برای آزاد شدن انرژی و تولید عناصر تا آهن در جدول تناوبی ایجاد می‌کند. ضمناً ما به سازوکار دیگری برای توجیه وجود عناصر سنگین‌تر از آهن نیاز داریم. به طور کلی، برای تولید این عنصرها انرژی لازم است و همجوشی هسته‌های باردار تأثیری ندارد. این عنصرها وجود خودشان را مدیون گیرافتادن نوترون هستند.

نوترون‌ها بر اثر برخورد‌های هسته‌ای و تجزیه‌ی نوری، در مراحل آخر تحول ستاره آزاد می‌شوند. چون نوترون‌ها از نظر الکتریکی خنثی هستند، به آسانی توسط یک هسته گیر می‌افتند تا هسته‌ی سنگین‌تری با همان بار تولید کنند. بنابراین، وجود نوترون‌ها می‌تواند باعث تولید ایزوتوپ‌های پرنوترون شود. چنین ایزوتوپ‌هایی ظاهراً با واپاشی بتا تجزیه می‌شوند؛ یک نوترون در داخل هسته به یک پروتون تبدیل می‌شود و عدد اتمی هسته به اندازه‌ی یک واحد افزایش می‌یابد. تصور بر این است که عناصر سنگین‌تر از آهن با رشته‌هایی از واکنش‌های گیراندازی نوترون، بعد از واپاشی‌های بتا، تولید شده باشند.

تولید شدن نوترون‌ها در یک ستاره‌ی تحول یافته معمولاً یک فرایند آرام است و هر هسته‌ای که با گیراندازی نوترون تولید می‌شود، زمان کافی برای واپاشی بتا را خواهد داشت. این فرایند تشکیل شدن هسته‌های اتمی را *فرایند s* می‌نامند که *s* معرف آرام (slow) است. با وجود این، تولید شدن نوترون در مرحله‌ی پایانی یک ستاره پرجرم ممکن است بسیار سریع صورت گیرد. بعداً خواهیم دید که این مرحله شامل رُمیش یک هسته‌ی مرکزی آهنی است که در بین چیزهای دیگر می‌تواند باعث بیرون پریدن لایه‌های خارجی‌تر ستاره و تشکیل شدن یک ابر نواختر باشد. در این مرحله انفجاری، هسته‌ها پیش از انجام واپاشی بتا می‌توانند نوترون‌های زیادی را گیر بیندازند. این فرایند را *فرایند r* می‌نامند که *r* معرف سریع (rapid) است. انواع هسته‌های تولید شده با این دو فرایند، بسیار متفاوت‌اند. برای مثال، هیچ عنصر بعد از بیسموت ( $Z = 83$ ) نمی‌تواند با فرایند *s* تولید شود، در حالی که فرایند *r* می‌تواند عناصر بعد از بیسموت را تولید کند.

## ۱-۶ چرخه‌های حیات ستاره

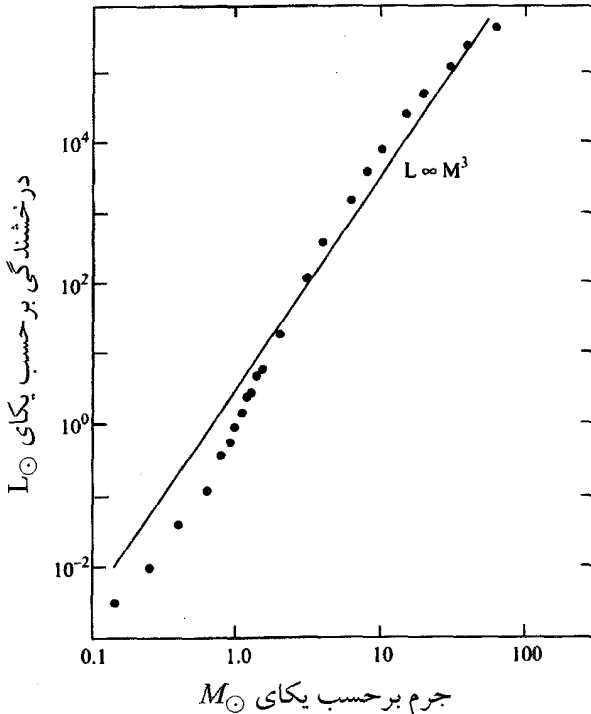
مهبانگ، به جهانی متشکل از هیدروژن و هلیوم با رگه‌هایی از عناصر سبک منجر شده است. این ماده‌ی اولیه با چرخه‌ای از تشکیل و تحول ستاره که ماده در داخل ستاره و در فضای میان ستاره‌ها به پس و پیش منتقل شده است، با عناصر سنگین غنی شده است. یکی از هدف‌های اصلی اخترفیزیک استفاده از این چرخه برای توجیه فراوانی عناصر شیمیایی در جهان فعلی است.

## آهنگ تحول ستاره

در بحث مربوط به خورشید در بخش ۱-۴ دیدیم که درخشندگی خورشید آهنگ مصرف سوخت هسته‌ای را مشخص می‌کند. به ویژه معادله‌ی (۱-۳۶) نشان می‌دهد که درخشندگی یک ستاره به صورت تابعی از جرم آن افزایش می‌یابد. در واقع، اگر مسیر آزاد میانگین  $l$  برای نفوذ تابشی نسبت عکس با چگالی داشته باشد، درخشندگی به دست آمده از معادله‌ی (۱-۳۶) با مکعب جرم ستاره متناسب خواهد بود. شکل ۱-۴ رابطه‌ی واقعی جرم  $M$  و درخشندگی

$L$  ستاره‌هایی مانند خورشید را که هیدروژن می‌سوزانند، نشان می‌دهد. مشاهده می‌کنیم که درخشندگی با  $M^\alpha$  متناسب است، که  $\alpha$  برای ستاره‌های پرجرم در حدود ۳ و برای ستاره‌های سبک‌تر از خورشید در حدود ۳/۵ است.

این افزایش سریع درخشندگی با جرم یک دلیل مهم دارد و نشان می‌دهد که ستاره‌های پرجرم علی‌رغم داشتن منابع بزرگ‌تر سوخت، عمر کوتاه‌تری دارند. چون ذخیره‌ی سوخت با  $M$  متناسب است، طول عمر سوختن هیدروژن در ستاره‌های با جرم زیاد با  $M^{-2}$  متناسب و در ستاره‌های با جرم کم با  $M^{-2/5}$  متناسب است. چون طول عمر سوختن هیدروژن در خورشید در حدود ۱۰ بیلیون سال است، نتیجه می‌گیریم که ستاره‌ای به جرم  $10 M_\odot$  هیدروژن



شکل ۴-۱ رابطه‌ی جرم - درخشانی برای ستاره‌هایی که هیدروژن می‌سوزانند و ترکیب شیمیایی آن‌ها مشابه خورشید است. این داده‌های مربوط به ستاره‌ها از جدول ۳-۱۳ در بخش ستاره‌شناسی و اخترفیزیک کتاب درسی تألیف فردریک<sup>۱</sup> (۱۹۸۹) گرفته شده است.

را به مدت تقریبی  $10^5$  میلیارد سال می‌سوزاند، در حالی که طول عمر سوختن هیدروژن در ستاره‌ای به جرم  $0.5M_{\odot}$ ، بیش از  $50$  میلیارد سال است.

در واقع، آهنگ کل تمام فرآیندهای همجوشی هسته‌ای در داخل یک ستاره، و در نتیجه آهنگ تحول ستاره، عمدتاً به جرم آن بستگی دارد؛ ستاره‌های پرجرم بسیار سریع‌تر تحول پیدا می‌کنند. چون طول عمر جهان  $20-10$  میلیارد سال است، وقت کافی برای نسل‌های زیادی از ستاره‌های پرجرم وجود داشته است، ولی زمان تحول ستاره‌های سبک‌تر از خورشید، کافی نبوده است.

### پایان تحول ستاره

در یک ستاره هنگامی که همجوشی هسته‌ای دیگر نمی‌تواند فشار لازم برای مقابله با انقباض گرانشی را تولید کند، سرنوشت آن به طور قاطع به جرم باقی مانده در هسته‌ی مرکزی بستگی پیدا می‌کند. در این مرحله، ستاره باید یک چشمه‌ی غیرگرمایی، مثلاً گاز الکترون‌های تبهگن، برای ایجاد فشار داشته باشد. با وجود این، یادآوری می‌کنیم که اگر فشار تولید شده توسط ذرات فرانسیتی با گرانش مقابله کند، برقراری تعادل هیدروستاتیکی به هم می‌خورد. این اصل کلی، حد بالایی را برای جرم ستاره معین می‌کند که با گاز الکترونی تبهگن تأمین می‌شود. در فصل ۶ نشان خواهیم داد که اگر جرم هسته‌ی مرکزی ستاره از یک مقدار بحرانی بیش‌تر باشد، الکترون‌های تبهگن به قدر کافی نسیتی می‌شوند و تعادل هیدروستاتیکی را به هم می‌زنند. این جرم در حدود  $1.4M_{\odot}$  است و جرم چاندرااسکار<sup>۱</sup> نامیده می‌شود.

بنابراین، سرنوشت یک ستاره‌ی تحول یافته به طور قاطع به این امر بستگی دارد که جرم هسته‌ی مرکزی آن از جرم چاندرااسکار کم‌تر یا بیش‌تر است. جرم هسته‌ی مرکزی ستاره‌ای مانند خورشید که با فشار الکترون‌های تبهگن حفظ می‌شود، از  $1.4M_{\odot}$  کم‌تر است. این ستاره پس از آن‌که لایه‌های رقیق خارجی خود را از دست داد، یک کوتوله‌ی سفید<sup>۲</sup>، یعنی شیء متراکمی با شعاع تقریبی  $10^7$  m و چگالی تقریبی  $10^9 \text{ kg m}^{-3}$  تشکیل می‌دهد که به آرامی و



بدون انقباض چشمگیر، سرد می‌شود زیرا نگهدارنده‌ی مکانیکی آن از فشاری ناشی می‌شود که نسبت به دما حساس نیست.

ستاره‌های پر جرم یک ساختار پیاز مانند با هسته‌ی مرکزی آهنی دارند. در این ستاره‌ها هنگامی که سیلیسیوم باعث ذخیره شدن آهن بیشتر می‌شود، جرم هسته‌ی مرکزی ستاره افزایش می‌یابد. سرانجام وقتی جرم هسته‌ی مرکزی از حد چاندرا سکار بیش تر شود، هسته‌ی مرکزی به طور فاجعه‌آمیز رمبیده خواهد شد؛ این رمبش را در بخش ۶-۲ مورد بحث قرار خواهیم داد. با تقریب اول می‌توان گفت که رمبش یک سقوط آزاد بر اثر گرانش است که با گرادیان فشار داخلی مقابله نشده است زیرا انرژی با فرایندهایی مانند تجزیه‌ی نوری آهن و واپاشی بتای معکوس جذب شده است. قسمت عمده‌ی انرژی گرانشی آزاد شده توسط پالس (تپ) نوترینوها حمل می‌شود. اما کسر کوچکی از این انرژی گرانشی ممکن است برای پرتاب کردن کسر بزرگی از جرم ستاره به فضای میان ستاره‌ای و تشکیل شدن یک ابرنواختر، مصرف شود. سنتز هسته‌ای ستاره‌ای در این مراحل پایانی تحول ستاره کامل می‌شود. مخصوصاً، عناصر سنگین تر از آهن با گیراندازی نوترون تولید می‌شوند.

جرم پایانی هسته‌ی مرکزی رمبیده شده نقش عمده‌ای را در محصول نهایی تحول یک ستاره پر جرم بازی می‌کند. محتمل ترین نتیجه، تشکیل شدن یک ستاره‌ی نوترونی، یعنی یک ستاره‌ی متشکل از نوترون‌های تبهگن است. برای چنین شیئی یک جرم ممکن بیشینه وجود دارد که مشابه جرم چاندرا سکار برای یک ستاره‌ی متشکل از الکترون‌های تبهگن، است. در مورد این جرم حدی در بخش ۶-۳ توضیح خواهیم داد. این جرم احتمالاً در حدود  $3M_{\odot}$  است، ولی مقدار دقیق آن معلوم نیست زیرا میزان تراکم‌پذیری ماده‌ی هسته‌ای در چگالی‌های بالا معلوم نیست. تصور بر این است که اگر جرم هسته‌ی مرکزی رمبیده از این حد بیش تر شود، امکان توقف رمبش گرانشی وجود ندارد و در نتیجه یک سیاه چاله<sup>۱</sup> تولید می‌شود.

یکی از عدم قطعیت‌ها در مطالعه‌ی مسیر تحول یک ستاره، عدم قطعیت در مقدار ماده‌ی پرتاب شده به فضای میان ستاره‌ای در هنگام تحول یک ستاره است. این کاهش جرم می‌تواند روی آهنگ و سرنوشت نهایی تحول ستاره مؤثر باشد. ستاره‌ها حتی در زمان سوزاندن

1. black hole

هیدروژن در هنگام تحول نیز ماده از دست می‌دهند؛ مثلاً باد خورشیدی در هر سال در حدود  $10^{-13} M_{\odot}$  از جرم خورشید را حمل می‌کند. هنگامی که ستاره‌ها متحول می‌شوند و لایه‌های رقیق خارجی آن‌ها منبسط می‌شود، خروج جرم از آن‌ها شدیدتر می‌شود. علاوه بر این، مراحل پایانی تحول غالباً با کاهش جرم چشم‌گیر همراه است. هنگامی که ستاره‌های با جرم متوسط، مانند خورشید، سوخت هسته‌ای خود را به بیرون پرتاب می‌کنند، لایه‌های خارجی‌تر خود را به صورت یک ابر در حال انبساط به نام سحابی سیاره‌ای به بیرون می‌افشانند. برعکس، ستاره‌های پرجرم غالباً با یک پرتاب انفجاری ماده به صورت ابر نواخت، به حیات خود پایان می‌دهند. این ماده و ماده‌ی پرتاب شده به صورت سحابی سیاره‌ای توسط ستاره‌های با جرم کم‌تر و ماده‌ی تلف شده در مراحل اولیه‌ی تحول ستاره، ماده‌ی خام برای نسل‌های بعدی ستاره‌ها را تشکیل می‌دهند.

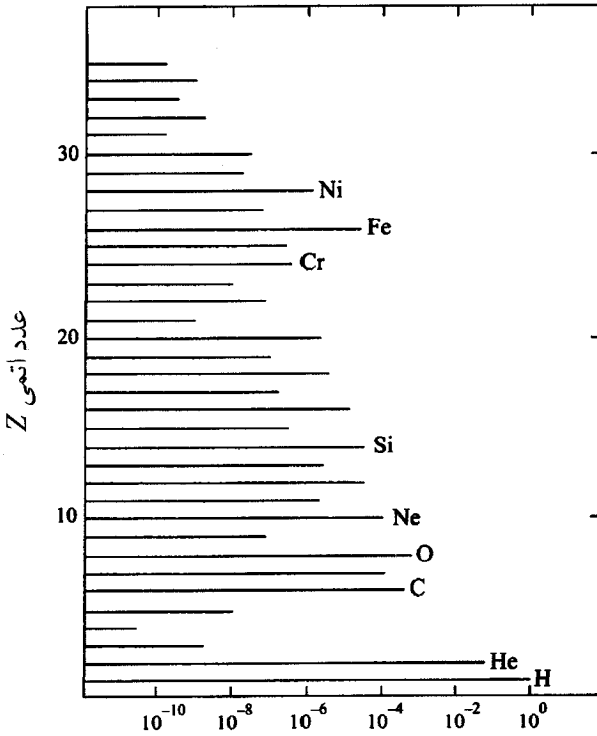
### فراوانی عناصر شیمیایی

چرخه‌ی تشکیل شدن ستاره، تحول و مرگ آن منجر به تولید مقدار زیادی هیدروژن اولیه و هلیوم و عناصر سنگین‌تر شده است. به ویژه، عناصر شیمیایی مشاهده شده در منظومه‌ی خورشیدی، عمدتاً بازتابی از اثر مرکب سنتز هسته‌ای در حین مه‌بانگ و سنتز هسته‌ای در حین تحول نسل‌های قدیمی‌تر ستاره‌های نزدیک به ما است.

فراوانی نسبی عنصرها در منظومه‌ی خورشیدی برحسب عدد اتمی  $Z$  آن‌ها در شکل ۵-۱

رسم شده است. مهم‌ترین ویژگی‌های قابل ذکر عبارت‌اند از:

- غالب بودن هیدروژن و هلیوم، که عمدتاً حاصل سنتز هسته‌ای در حین مه‌بانگ است.
- نبود مشخص عناصر بین هلیوم و کربن با عددهای جرمی و پایدار ۵ و ۸، که نشانه‌ی مشکل بودن ساخته شدن آن‌ها از هیدروژن و هلیوم است.
- قله‌ها متناظر با محصولات عمده‌ی سنتز ستاره‌ای، یعنی کربن، اکسیژن، نئون، سیلیسیوم و عناصر نزدیک آهن هستند. فراوانی زیاد ازت، عنصر بین کربن و اکسیژن، به خاطر سوختن هیدروژن در چرخه‌ی کربن - ازت است.



فراوانی نسبت به هیدروژن

شکل ۱-۵ فراوانی عنصرها در منظومه‌ی خورشیدی نسبت به فراوانی هیدروژن. غالب بودن هیدروژن و هلیوم ناشی از سنتز هسته‌ای در حین مه‌بانگ است. همجوشی گرماسته‌ای در ستاره‌ها ترجیحاً هلیوم، کربن، اکسیژن، نئون، سیلیسیوم و عناصر نزدیک به آهن را تولید می‌کند. فراوانی عناصر بعد از آهن در جدول تناوبی کم است؛ مثلاً، فراوانی نقره، طلا و سرب نسبت به هیدروژن به ترتیب  $1 \times 10^{-11}$ ،  $6 \times 10^{-12}$  و  $1 \times 10^{-10}$  است. این‌گونه عنصرها در مراحل بعدی تحول ستاره بر اثر گیراندازی نوترون‌ها توسط هسته‌های سبک‌تر، بعد از واپاشی بتا، تولید شده‌اند. داده‌ها از جدول 3.06 از بخش ستاره‌شناسی و اخترفیزیک کتاب درسی تألیف فردریک (۱۹۸۹) گرفته شده‌اند.

به طور کلی، همجوشی گرماسته‌ای یعنی سوختن هیدروژن، هلیوم، کربن، اکسیژن، نئون و سیلیسیوم، مسئول تولید عنصرها با عدد اتمی  $30 < Z < 12$  است. عناصر با عدد اتمی  $Z > 30$  وجود خود را مدیون فرایند گیراندازی نوترون، به ویژه در مراحل پایانی تحول ستاره هستند. علاوه بر این، مقادیر کمی از عناصر سرتاسر جدول تناوبی بر اثر برخوردهای پرتو کیهانی تولید می‌شوند؛ در واقع کسر قابل ملاحظه‌ای از عناصر بین هلیوم و کربن از این طریق تولید شده‌اند.

هر عنصر غالباً چندین ایزوتوپ طبیعی دارد؛ فراوانی نسبی این ایزوتوپ‌ها اطلاعات دیگری از سازوکارهای سنتز هسته‌ای به ما می‌دهند. ضمناً، بعضی از این ایزوتوپ‌ها ناپایدارند. در واقع، وجود مستمر هسته‌های پرتوزایی مانند  $^{235}\text{U}$ ،  $^{238}\text{U}$  و  $^4\text{K}$ ، با نیم‌عمرهای بیش از  $10^9$  سال، نشان می‌دهند که منظومه‌ی خورشیدی تقریباً  $4/5$  بیلیون سال پیش از این تشکیل شده است؛ به مسأله‌ی ۱-۸ رجوع کنید.

## ۷-۱ نمودار هرتزسپرونگ - راسل<sup>۱</sup>

این فصل مقدماتی را با تشریح مختصر بعضی خواص مشاهده‌ای ستاره‌ها پایان می‌بریم. ذکر این نکته مهم است که ستاره‌ها نسبت به تابش الکترومغناطیسی تیره‌اند و از این‌رو ستاره‌شناس‌ها در ثبت کردن اطلاعات واقعی محدودیت دارند. علاوه بر این، اندازه‌ی زاویه‌ای حتی نزدیک‌ترین ستاره‌ها فقط در حدود چند هزارم ثانیه است. بنابراین، به جز موارد استثنایی نادر، یک ستاره به صورت یک چشمه‌ی نقطه‌ای تابش دیده می‌شود که ناظر می‌تواند درخشندگی و دمای سطح را از آن استنباط کند.

### درخشندگی

روشنایی مشاهده شده‌ی یک ستاره را معمولاً به عنوان بزرگی ظاهری معرفی می‌کنند. بزرگی ظاهری ستاره‌هایی که به سختی با چشم غیرمسلح دیده می‌شوند، در حدود ۶ است و مقدار آن برای ستاره‌های روشن‌تر کم‌تر است؛ صورت فلکی شعرای یمانی (sirius A) که روشن‌ترین ستاره در آسمان است، دارای بزرگی ظاهری  $1/4-$  است. این مقیاس لگاریتمی است به طوری که هر  $10$  برابر افزایش در روشنایی، بزرگی ظاهری را به اندازه  $2/5$  برابر کاهش می‌دهد. بنابراین اگر شارهای انرژی دریافت شده از دو ستاره  $f_1$  و  $f_2$  باشند، اختلاف بزرگی ظاهری آن‌ها برابر است با

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10}(f_1 / f_2) \quad (40-1)$$

چون شار انرژی حاصل از یک ستاره با درخشندگی آن نسبت مستقیم و با مربع فاصله از آن نسبت عکس دارد، اختلاف بزرگی‌های ظاهری دو ستاره با درخشندگی یکسان در فواصل  $d_1$  و  $d_2$  برابر است با

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10} (d_2^2 / d_1^2) = 5 \log_{10} (d_1 / d_2)$$

تابش ناشی از یک ستاره تا فراتر از قسمت مرئی طیف الکترومغناطیسی ادامه می‌یابد. برای در نظر گرفتن این موضوع، ستاره‌شناس‌ها روشنایی مرئی یک ستاره را با بزرگی بصری  $m_V$ ، و روشنایی در کل طیف الکترومغناطیسی را با بزرگی تابش سنجی  $m_B$  تعریف می‌کنند؛ اختلاف  $m_B - m_V$  را تصحیح تابش سنجی می‌نامند.

بزرگی (قدر) تابش سنجی مطلق متناظر با روشنایی یک ستاره هنگام اندازه‌گیری در فاصله‌ی ۱۰ پارسک توسط یک آشکارساز فرضی است که این آشکارساز نسبت به کل طیف الکترومغناطیسی حساس است. پارسک یکای ستاره‌شناختی استاندارد فاصله است. پارسک به اندازه‌ی فاصله‌ی زمین تا خورشید است. مقدار عددی یک پارسک برابر است با

$$1 \text{ pc} = 3.086 \times 10^{16} \text{ m} = 3.26 \text{ سال نوری} \quad (41-1)$$

یادآوری می‌کنیم که تعیین دقیق فاصله یکی از مشکلات اساسی در ستاره‌شناسی بوده و هست، و برای این کار باید بزرگی تابش سنجی یک ستاره را داشته باشیم.

چون بزرگی تابش سنجی مطلق معرف روشنایی یک ستاره در یک فاصله‌ی خاص است، مقدار مطلق درخشندگی را به ما می‌دهد. در واقع، برای ستاره‌ای با درخشندگی  $L$ ، بزرگی تابش سنجی مطلق  $M_B$  از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$M_B = -2.5 \log_{10} (L / L_{\odot}) + 4.77 \quad (42-1)$$

در این رابطه  $L_{\odot} \approx 4 \times 10^{26} \text{ W}$  مقدار درخشندگی خورشید است. توجه کنید که بزرگی تابش سنجی مطلق خورشید ۴٫۷۷ است و ضمناً توجه کنید که برای گستره‌ی درخشندگی‌های  $10^{-4} L_{\odot}$  تا  $10^6 L_{\odot}$ ، بزرگی تابش سنجی از ۱۵+ تا ۱۰- کاهش می‌یابد.

## دمای سطح

دمای سطحی مؤثر یک ستاره،  $T_E$ ، به صورت دمای جسم سیاهی با همان جرم که درخشندگی

یکسانی را ایجاد می‌کند، تعریف می‌شود. برای ستاره‌ای با درخشندگی  $L$  و شعاع  $R$ ، داریم

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_E^4 \quad (۴۳-۱)$$

که در آن  $\sigma$  ثابت استفان است. برای خورشید،  $T_E \approx 6000\text{K}$  است.

رنگ یک ستاره، مقدار دمای سطح آن را مشخص می‌کند. دمای رنگ یک ستاره با اندازه‌گیری بزرگی دمای آن با استفاده از یک صافی  $B$  که طول موج‌های اطراف  $440\text{nm}$ ، و سپس با استفاده از یک صافی  $V$  که طول موج‌های اطراف  $550\text{nm}$  را عبور می‌دهد، معین می‌شود. تفاوت این بزرگی‌ها را به صورت  $B-V$  نشان می‌دهند و آن را شاخص رنگ می‌نامند؛ برای یک ستاره‌ی آبی  $B-V$  منفی و برای یک ستاره‌ی سرخ، مقدار آن مثبت است. دمای رنگ به دمای طیف جسم سیاه پلانک<sup>۱</sup> بستگی دارد که مقدار مشاهده شده‌ی شاخص رنگ را به دست می‌دهد.

یک منبع اطلاعات دیگر برای دمای سطح، وجود خط‌های جذبی در طیف ستاره است. وقتی که تابش از فوتوسفر، یعنی جایی که بیش‌ترین تابش مشاهده شده تولید می‌شود، عبور می‌کند، تابش با طول موج‌های خاص توسط یون‌ها و اتم‌ها جذب می‌شود تا طیفی شامل خط‌های جذبی تاریک به دست آید. وجود خط‌های جذبی در طیف به ما کمک می‌کند تا ستاره‌ها را برحسب نوع طیف آن‌ها دسته‌بندی کنیم. نوع طیف به میزان برانگیختگی و یونش اتم‌ها و یون‌ها در فوتوسفر بستگی دارد. انواع طیف‌ها را با یکی از حروف  $K, G, F, A, B, O$  یا  $M$  نشان می‌دهند، و این رشته نشان می‌دهد که دمای سطح از  $3000\text{K}$  تا  $30000\text{K}$  کاهش یافته است.

### درخشندگی و دمای سطح

خاصیت‌های مشاهده شده‌ی اصلی یک ستاره، یعنی درخشندگی و دمای سطح آن، بی‌ارتباط با هم نیستند. بستگی آن‌ها به یک‌دیگر را معمولاً در یک نمودار دوبعدی به نام نمودار هرتزشپرونگ - راسل نشان می‌دهند که در آن محور قائم معرف درخشندگی و محور افقی معرف دمای سطح است؛ به دلایل تاریخی، دما به طرف راست محور افقی کاهش می‌یابد. اگر

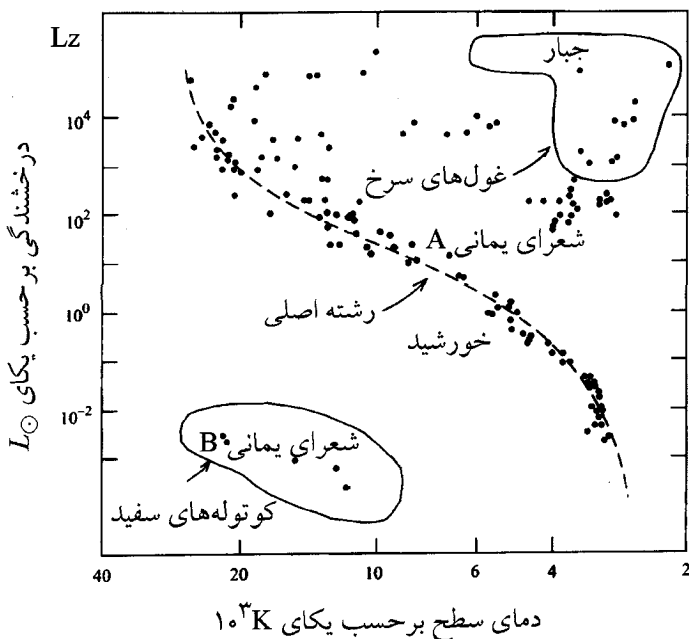
ستاره‌ها را به صورت یک نقطه با مختصات  $(T_E, L)$  بر روی این نمودار نشان دهیم، جمعیت ستاره‌ها در بعضی ناحیه‌ها بیش‌تر از نواحی دیگر است. نواحی مختلف نمودار H-R در شکل ۱-۶ نشان داده شده‌اند. در بسیاری از نمودارهای H-R، درخشندگی یک ستاره را با بزرگی آن، و دمای سطح ستاره را با نوع طیف یا شاخص رنگ آن،  $B-V$ ، نمایش می‌دهند. برای تفسیر نمودار H-R باید به خاطر داشت که تشکیل شدن و تحول ستاره یک فرآیند در حال پیشرفت است. نمودار H-R یک عکس فوری از ستاره‌ها در مراحل مختلف تحول آن‌ها را به ما نشان می‌دهد.

وقتی ستاره‌ها تحول پیدا می‌کنند، بیش‌تر عمر خود را صرف سوزاندن هیدروژن می‌کنند. بنابراین، ستاره‌هایی که مانند خورشید هیدروژن می‌سوزانند، باید در یک ناحیه از نمودار H-R قرار گیرند. این ناحیه را رشته اصلی<sup>۱</sup> می‌نامند. در حدود ۹۰٪-۸۰٪ ستاره‌های مشاهده شده ستاره‌های رشته اصلی هستند. داغ‌ترین ستاره‌ها در رشته‌ی اصلی ابرغول‌های آبی و غول‌های آبی هستند. سردترین ستاره‌ها کوتوله‌های سرخ هستند.

از رابطه‌ی بین جرم و درخشندگی یک ستاره‌ی هیدروژن سوز می‌توان برای تعیین جرم ستاره با توجه به موقعیت آن در رشته‌ی اصلی، استفاده کرد. با توجه به بخش ۱-۶ و شکل ۱-۴ یادآوری می‌کنیم که درخشندگی ستاره‌ای به جرم  $M$  با  $M^\alpha$  متناسب است که  $\alpha$  عددی بین ۳ و ۳/۵ است. این رابطه‌ی جرم - درخشندگی ایجاب می‌کند که وقتی در رشته‌ی اصلی پایین می‌آییم، با ستاره‌هایی با جرم‌های کم‌تر مواجه شویم. در واقع گستره‌ی جرم‌ها از مقدار تقریبی  $50 M_\odot$  در بالای رشته‌ی اصلی تا  $0.1 M_\odot$  در پایین رشته‌ی اصلی است. دلایل فیزیکی وجود این حدهای جرمی بالاتر و پایین‌تر در ستاره‌های رشته‌ی اصلی، در پایان بخش ۱-۳ توضیح داده شد و در فصل ۵ نیز مورد بحث قرار خواهد گرفت.

یک ستاره واقع در راستای رشته‌ی اصلی، تحول پیدا نمی‌کند. وقتی یک پیش‌ستاره منقبض می‌شود و هیدروژن می‌سوزاند، به طرف رشته‌ی اصلی تحول می‌یابد. وقتی هیدروژن در ناحیه‌ی سوختن هسته‌ای تمام می‌شود، ستاره به طرف خارج رشته‌ی اصلی تحول می‌یابد و به طرف ناحیه‌ی غول سرخ نمودار H-R می‌رود. مدل‌های نظری نشان می‌دهند که سوختن

هیدروژن در هسته‌ی مرکزی ستاره متوقف می‌شود ولی در پوسته‌ی باریکی که به طرف خارج حرکت می‌کند، ادامه می‌یابد. هسته‌ی مرکزی ستاره منقبض و داغ می‌شود، اما لایه‌های خارجی‌تر منبسط می‌شوند تا ستاره‌ای با درخشندگی بیشتر و دمای سطحی کم‌تر تشکیل دهند. با استفاده از معادله‌ی (۱-۴۳) می‌توانیم نشان دهیم که یک ستاره واقع در ناحیه‌ی غول سرخ نمودار H-R با مشخصات  $L = 1000 L_{\odot}$  و  $T_E = 4000 K$ ، دارای شعاع تقریبی  $70 R_{\odot}$  است. چنین ستاره‌ای در آسمان به طور واضح دیده می‌شود. مثال معروف در این مورد، بدالجوزا (منکب الجوزا)<sup>۱</sup> در صورت فلکی جبار<sup>۲</sup> است.



شکل ۱-۶ یک نمودار هرترزشپرونگ - راسل. این نمودار یک عکس فوری از درخشندگی و دمای سطح ستاره‌ها در مراحل مختلف تحول آن‌ها را نشان می‌دهد. بسیاری از ستاره‌های مشاهده شده در راستای نواری به نام رشته‌ی اصلی دسته‌بندی می‌شوند؛ این‌ها ستاره‌هایی مانند خورشید هستند که هیدروژن می‌سوزانند. هنگامی که یک ستاره تحول پیدا می‌کند، انقباض هسته‌ی مرکزی آن با انبساط لایه‌های خارجی‌تر آن همراه می‌شود تا ستاره‌های درخشان با دمای سطحی کم، یعنی غول‌های سرخ، را به وجود آورد. سرانجام ستاره‌ای با جرم بسیار بیش‌تر از خورشید، یک شیئی متراکم به نام کوتوله‌ی سفید است که توسط الکترون‌های تبهگن حفظ می‌شود. تحول یک ستاره‌ی با جرم بیش‌تر ممکن است به تشکیل شدن یک ستاره‌ی نوترونی یا یک سیاهچاله منجر شود.



هنگامی که دما و چگالی در مرکز ستاره افزایش می‌یابد، هلیوم و سپس سوخت‌های هسته‌ای دیگر شروع به سوختن می‌کنند. اما، این سوخت‌ها می‌سوزند یا نه، به جرم ستاره بستگی دارد؛ به بخش ۱-۵ رجوع کنید. در طول این حالت تحول، ستاره دارای یک پوشش خارجی‌تر در اطراف یک هسته‌ی چگال و داغ می‌شود. این ستاره در ناحیه‌ی سمت راست و بالای نمودار  $H-R$ ، یعنی در ناحیه‌ی با درخشانی بیش‌تر و دمای سطحی کم‌تر قرار می‌گیرد. چون مقیاس زمانی برای حالت‌های تحول کوچک است، این ناحیه از نمودار  $H-R$  جمعیت زیادی ندارد. مشاهدات نشان می‌دهند که یک ستاره با جرم متوسط در آخر عمر با پرتاب کردن لایه‌های خارجی‌تر خود یک سحابی سیاره‌ای به وجود می‌آورد که با محیط بین ستاره‌ها مخلوط می‌شود و اثری با درخشندگی کم و دمای سطحی بالا در ناحیه کوتوله سفید نمودار  $H-R$  به‌جا می‌ماند. معروف‌ترین کوتوله‌ی سفید، شعرای یمانی  $B$  است که با ستاره‌ی روشن دنباله‌ی اصلی، یعنی شعرای یمانی  $A$ ، یک منظومه دوتایی تشکیل می‌دهند. در واقع، فرض وجود شعرای یمانی  $B$  توسط بسل<sup>۱</sup> در سال ۱۸۳۴ برای توجیه این واقعیت ارائه شد که به نظر می‌رسد شعرای یمانی  $A$  در آسمان می‌لنگد؛ بعداً مشاهده شد که این ستاره باید درخشندگی کم و دمای سطحی بالا داشته باشد. یک کوتوله‌ی سفید نوعی دارای درخشندگی  $L = L_{\odot} / 100$  و دمای سطح  $T_E = 16000 K$  است، شعاع آن از معادله‌ی (۱-۴۳) در حدود  $R_{\odot} / 70$  به دست می‌آید. چنین ستاره‌ای صرفاً به این علت می‌درخشد که از تحول هسته‌ی داغ یک غول سرخ، تولید شده است. این ستاره با گذشت زمان سرد شده و پژمرده می‌شود؛ برای کسب اطلاعات بیش‌تر به بخش ۳-۴ رجوع کنید.

نمودارهای هرتزشپرونگ - راسل اهمیت عملی و تاریخی زیادی در ستاره‌شناسی دارند، زیرا ارتباط اساسی محاسبات نظری در مورد تحول ستاره‌ها و مشاهدات را مشخص می‌کنند.

### خوشه‌های ستاره‌ای

خوشه‌های ستاره‌ای در کهکشان ما دو دسته‌اند: خوشه‌های کروی که به صورت کروی در اطراف مرکز کهکشان در هاله‌ی کهکشانی توزیع شده‌اند؛ و خوشه‌های باز که در سطح،

بازوهای ماریچی و هسته‌ی کهکشان یافت می‌شوند. مشخصات اصلی آن‌ها در جدول ۴-۱ درج شده است.

باید دانست که قدیمی‌ترین ستاره‌های کهکشان ما در خوشه‌های کروی پیدا شده‌اند. ستاره‌های این خوشه‌ها را ستاره‌های جمعیت II می‌نامند. این ستاره‌ها در جهان قدیم از ماده‌ای تشکیل شده‌اند که عمدتاً شامل هیدروژن و هلیوم بوده است. برعکس، ستاره‌های خوشه‌های باز، یعنی ستاره‌های جمعیت I، جوانترند. در این ستاره‌ها فراوانی عناصر سنگین‌تر از هلیوم چشمگیر است زیرا آن‌ها از ماده‌ای تشکیل شده‌اند که توسط نسل‌های قدیمی‌تر ستاره‌ها فراوری شده است.

سن یک خوشه‌ی ستاره‌ای را می‌توان از نمودار H-R آن خوشه برآورد کرد. این امر امکان‌پذیر است زیرا هر ستاره همان سن و ترکیب شیمیایی خوشه را دارد، ولی مدت زمان تحول از جرم خوشه تعیین می‌شود. سن رشته‌ی اصلی سنگین‌ترین ستاره‌ها از مرتبه‌ی میلیون‌ها سال، و سن سبک‌ترین ستاره‌ها از مرتبه‌ی بیلیون‌ها سال است. از این‌جا نتیجه می‌گیریم که وقتی سن خوشه بالا می‌رود، ستاره‌ها به طور پیشرونده به طرف خارج انتهای بالایی رشته‌ی اصلی حرکت می‌کنند. برای مثال، ستاره‌ای از نوع طیفی O با جرم  $40M_{\odot}$ ، بعد از  $10^6$  تا  $10^7$  سال از رشته‌ی اصلی خارج می‌شود در حالی که ستاره‌ای از نوع A با جرم  $3M_{\odot}$  بعد از

جدول ۴-۱ مشخصات خوشه‌های ستاره‌ای کروی و باز

خوشه‌های کروی	خوشه‌های باز
تعداد تقریبی مشاهده شده	۱۲۵
تعداد ستاره‌ها در خوشه	$10^5 - 10^7$
نوع ستاره	جمعیت II
قطر (پارسک)	۵-۳۰
مکان	هاله‌ی کهکشانی سطح، بازوهای ماریچی و هسته‌ی کهکشان
سن (سال)	$10^6 - 10^9$

$10^8$  سال از رشته‌ی اصلی خارج می‌شود. منظور این است که سن خوشه را می‌توان با ارزیابی سن سنگین‌ترین ستاره‌ها که هنوز در رشته‌ی اصلی باقی مانده‌اند، معین کرد. واضح است که برای این ارزیابی به یک نظریه‌ی معتبر در مورد تحول ستاره‌ها نیاز داریم که در آن ترکیب شیمیایی ستاره‌ها و کاهش جرم آن‌ها در نظر گرفته شده باشد.

## خلاصه

### ستاره‌های مه‌بانگ

- واکنش‌های هسته‌ای در جهان قدیم، جهانی را به وجود آوردند که در حدود ۲۵٪ جرم آن هلیوم و باقی مانده عمدتاً هیدروژن بود. این نسبت هلیوم به هیدروژن عمدتاً توسط نسبت نوترون‌ها به پروتون‌های موجود در هنگامی معین شده است که تبدیل شدن نوترون‌ها و پروتون‌ها به یکدیگر توسط واکنش‌های (۱-۱) متوقف شده باشد.

### انقباض گرانشی

- اگر انرژی گرانشی آزاد شده توسط جسم‌ها جذب یا به بیرون تابیده شود، جسم‌ها می‌توانند سریعاً رمبش پیدا کنند. مدت زمان سقوط آزاد یک جسم با چگالی یکنواخت  $\rho$  تحت اثر گرانش برابر است با

$$t_{FF} = \left[ \frac{3\pi}{32G\rho} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4-1)$$

- گرادیان فشار لازم برای برقراری تعادل هیدروستاتیکی برابر است با

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \quad (5-1)$$

- فشار متوسط لازم برای حفظ سیستمی با انرژی گرانشی  $E_{GR}$  و حجم  $V$  از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\langle P \rangle = -\frac{1}{3} \frac{E_{GR}}{V} \quad (7-1)$$

- انرژی جنبشی داخلی و انرژی گرانشی یک گاز با ذرات غیرنسبیتی، در تعادل هیدروستاتیکی به صورت زیر است

$$\gamma E_{KE} + E_{GR} = 0 \quad (11-1)$$

مهم‌ترین نتیجه‌ی این رابطه این است که وقتی یک سیستم خودگرانش انرژی از دست می‌دهد، انرژی گرانشی آن کاهش و انرژی جنبشی داخلی آن افزایش پیدا می‌کند. در واقع، نصف انرژی گرانشی آزاد شده، تلفات انرژی را جبران می‌کند و نصف دیگر برای افزایش انرژی جنبشی مصرف می‌شود.

- رابطه‌ی متناظر با یک گاز فرانسبیتی به صورت زیر است

$$E_{KE} + E_{GR} = 0 \quad (13-1)$$

این رابطه نشان می‌دهد که وقتی محتویات سیستم فرانسبیتی می‌شود، معادله‌ی هیدروستاتیکی از اعتبار می‌افتد.

### تشکیل شدن ستاره

- در گازی به جرم  $M$  که جرم متوسط ذرات تشکیل دهنده‌ی آن  $\bar{m}$  است، این ذره‌ها به شرطی در دمای  $T$  در قید گرانشی یک‌دیگر خواهند بود که چگالی متوسط گاز از مقدار بحرانی زیر بیش‌تر باشد

$$\rho_J = \frac{3}{4\pi M^2} \left[ \frac{3kT}{2G\bar{m}} \right]^3 \quad (14-1)$$

- افزایش دمای یک جسم در حال انقباض به شرطی متوقف می‌شود که الکترون‌ها تبهگن شوند. دمای بیشینه‌ی یک جسم در حال انقباض با جرم  $M$ ، تقریباً برابر است با

$$kT \approx \left[ \frac{G^2 \bar{m}^{\frac{1}{3}} m_e}{h^2} \right] M^{\frac{4}{3}} \quad (28-1)$$

در نتیجه، فقط اجسامی با جرم بیش‌تر از  $0.08 M_{\odot}$  می‌توانند دمای لازم برای آغاز کردن همجوشی هسته‌ای و تبدیل شدن به یک ستاره‌ی واقعی را کسب کنند. برای یک ستاره‌ی معمولی نیز جرم بیشینه‌ای وجود دارد که مقدار آن در گستره‌ی  $(50-100) M_{\odot}$  واقع است.

علت امر این است که فشار تابشی، یعنی فشار ناشی از ذرات فرانسبیتی، در ستاره‌های سنگین اهمیت بیش‌تری پیدا می‌کند و اعتبار تعادل هیدروستاتیکی زیر سؤال می‌رود.

### خورشید

● جرم و شعاع خورشید عبارت‌اند از  $M_{\odot} \approx 2 \times 10^{30} \text{ kg}$  و  $R_{\odot} \approx 7 \times 10^8 \text{ m}$ .

● فشار متوسط درون خورشید برابر است با

$$\langle P \rangle = -\frac{1}{3} \frac{E_{GR}}{V} \approx \frac{GM_{\odot}^2}{4\pi R_{\odot}^4} \approx 10^{14} \text{ Pa} \quad (29-1)$$

● دمای داخلی نوعی درون خورشید از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$kT_I \approx \frac{GM_{\odot} \bar{m}}{3R_{\odot}} \approx 0.5 \text{ keV} \quad \text{یا} \quad T_I \approx 6 \times 10^6 \text{ K} \quad (31-1)$$

● دمای مؤثر سطح خورشید  $T_E = 6000 \text{ K}$ ، هزار برابر کوچک‌تر از دمای داخلی نوعی آن است.

● درخشندگی خورشید  $L_{\odot} \approx 4 \times 10^{26} \text{ W}$  است که از رابطه‌ی تقریبی زیر به دست می‌آید

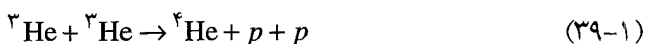
$$L_{\odot} \approx \frac{(\frac{4}{3}\pi)^2}{\pi^5} \frac{\sigma}{k^4} G^4 \bar{m}^4 \langle \rho \rangle l M_{\odot}^3 \quad (36-1)$$

در این جا  $l$  مسیر آزاد میانگین مؤثر برای نفوذ تابشی در خورشید است.

● درخشندگی خورشید آهنگ همجوشی گرماسته‌ای در داخل آن را مشخص می‌کند.

هیدروژن با واکنش‌های زنجیره‌ی پروتون - پروتون به هلیوم تبدیل می‌شود و واکنش‌های

غالب عبارت‌اند از



● درخشندگی خورشیدی  $4 \times 10^{26} \text{ W}$  نشان می‌دهد که تقریباً تعداد  $4 \times 10^{38}$  پروتون در هر

ثانیه مصرف می‌شود و دست کم  $2 \times 10^{38}$  نوترینو در هر ثانیه گسیل می‌شود.

### ستاره‌های در ستاره‌ها

- عناصر شیمیایی مشاهده شده در منظومه‌ی خورشیدی عمدتاً محصول ستاره‌های در حین مه‌بانگ و ستاره‌های در حین تحول ستاره هستند.
- اندازه‌ی بزرگی همجوشی گرماسته‌ای در یک ستاره از جرم آن معین می‌شود. اگر جرم ستاره بیش‌تر از  $0.08 M_{\odot}$  باشد، هیدروژن در آن می‌سوزد. اگر جرم ستاره بیش‌تر از  $0.05 M_{\odot}$  یا مساوی با آن باشد، پس از سوختن هیدروژن، هلیوم نیز می‌سوزد. ستاره‌هایی که جرم آن‌ها در بین  $8 M_{\odot}$  و  $11 M_{\odot}$  قرار دارد، تا مرحله‌ی کربن پیش می‌روند. هر مرحله از همجوشی هسته‌ای تا ستاره‌های نزدیک آهن، در ستاره‌هایی با جرم بیش از  $11 M_{\odot}$  اتفاق می‌افتد.
- گیراندازی نوترون در مراحل پایانی تحول ستاره باعث تشکیل شدن عناصر سنگین‌تر از آهن می‌شود.

### چرخه‌های حیات ستاره

- جرم یک ستاره هنگام تحول ستاره و سرنوشت غایی آن را مشخص می‌کند. ستاره‌هایی مانند خورشید به آرامی تحول می‌یابند و نهایتاً به کوتوله‌های سفید تبدیل می‌شوند. ستاره‌های سنگین‌تر سریعاً تحول می‌یابند و وقتی جرم هسته‌ی مرکزی آهنی آن‌ها از حد چاندراسکار (حدود  $1.4 M_{\odot}$ ) بیش‌تر می‌شود، ستاره‌ها به صورت فاجعه‌آمیز رمبیده می‌شوند. لایه‌های خارجی‌تر این ستاره‌ها به صورت یک ابرنواختر پرتاب می‌شوند و ماده‌ی باقی‌مانده یک ستاره‌ی نوترونی یا سیاهچاله تشکیل می‌دهد. به خاطر کم شدن جرم ستاره‌های در حال تحول، محیط بین ستاره‌ها سرشار از عناصر سنگین است؛ از این نظر، تشکیل شدن سحابی سیاره‌ای توسط ستاره‌های با جرم متوسط و ابرنواختر توسط ستاره‌های سنگین، اهمیت ویژه‌ای دارد.

### نمودار هرتزشپرونگ - راسل

- نمودار H-R رابطه‌ی دو خاصیت مشاهده‌ای مهم یک ستاره، یعنی درخشندگی و دمای سطح آن را نشان می‌دهد. نواحی خاصی از نمودار H-R به مراحل ویژه‌ی تحول

ستاره‌ها تعلق دارند؛ مثلاً ستاره‌هایی که هیدروژن می‌سوزانند در روی رشته‌ی اصلی واقع‌اند. نمودار  $H-R$  نقش کلیدی در ربط دادن مشاهدات و محاسبات نظری تحول ستاره‌ها داشته است.

## مسئله‌های فصل ۱

۱-۱ کره‌ای به جرم  $M$  و شعاع  $R$  را در نظر بگیرید. انرژی پتانسیل گرانشی کره را با این فرض حساب کنید که (الف) چگالی کره مستقل از فاصله تا مرکز کره است، و (ب) چگالی کره برطبق رابطه‌ی زیر به طرف مرکز کره افزایش می‌یابد

$$\rho(r) = \rho_c(1 - r/R)$$

در هر دو حالت (الف) و (ب)، فشار داخلی متوسط مورد نیاز برای برقراری تعادل هیدروستاتیکی را به دست آورید، و معین کنید که فشار داخل کره چگونه به فاصله از مرکز بستگی دارد.

۲-۱ خوشه‌ی کروی M13 در صورت فلکی هرکول<sup>۱</sup> (به زانو نشسته) شامل تقریباً  $۰.۵$  میلیون ستاره است که جرم متوسط آن‌ها در حدود نصف جرم خورشید است. با استفاده از معیار جینز<sup>۲</sup> (۱-۱۹) بررسی کنید که آیا این خوشه در جهان قدیم درست بعد از سرد شدن جهان به قدر کافی برای تشکیل شدن اتم‌های خنثی از الکترون‌ها و هسته‌ها، تشکیل شده است؟ در آن موقع چگالی جهان  $\rho \approx 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$  و دما  $T \approx 10^4 \text{ K}$  بوده است.

۳-۱ موقعی که خورشید به طرف رشته‌ی اصلی متحول می‌شد، تحت گرانش منقبض شد تا تقریباً در حال تعادل هیدروستاتیکی بماند، و دمای داخلی آن از مقدار تقریبی  $30000 \text{ K}$ ، معادله‌ی (۱-۲۳)، تا حدود  $6 \times 10^6 \text{ K}$ ، معادله‌ی (۱-۳۱)، تغییر کرد. (این مرحله‌ی تحول ستاره را مرحله‌ی کلوین - هلمهولتز<sup>۳</sup> می‌نامند). انرژی کل تابش شده در این انقباض را پیدا کنید. فرض کنید درخندگی خورشید در حین انقباض قابل مقایسه با

درخشندگی فعلی خورشید بوده است و مدت زمان رسیدن به رشته‌ی اصلی را برآورد کنید.

۴-۱ رشته‌ی اصلی خوشه ستاره‌ای پروین<sup>۱</sup> (ثریا) شامل ستاره‌هایی با جرم کم‌تر از  $۶M_{\odot}$  است؛ ستاره‌های سنگین‌تر قبلاً متحول شده و از رشته‌ی اصلی خارج شده‌اند. سن خوشه‌ی پروین را برآورد کنید.

۵-۱ انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون  ${}^{56}\text{Fe}$  در حدود  $۸/۸\text{MeV}$  است. انرژی آزاد شده از هر کیلوگرم ماده توسط گروهی از واکنش‌ها را که هیدروژن را جوش داده و به آهن تبدیل می‌کند، برآورد کنید.

۶-۱ با توجه به این‌که درخشندگی خورشید  $۴ \times 10^{26}\text{W}$  و بزرگی تابش سنجی مطلق آن  $M_B = ۴,۷۲$  است، در چه فاصله‌ای می‌توان خورشید را با چشم غیرمسلح دید (چشم غیرمسلح می‌تواند یک ستاره را با بزرگی ظاهری ۶ ببیند). در این حالت تعداد فوتون‌های تابیده به چشم در هر ثانیه را برآورد کنید.

۷-۱ بدون انجام محاسبه‌ی دقیق در مورد ساختار ستاره‌ها، حدهای مفیدی را می‌توان برای فشار در مرکز ستاره تعیین کرد. ستاره‌ای به جرم  $M$  و شعاع  $R$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $P(r)$  فشار در فاصله‌ی  $r$  از مرکز ستاره و  $m(r)$  جرم محصور شده توسط کره‌ای به شعاع  $r$  باشد. نشان دهید که در تعادل هیدروستاتیکی، تابع زیر با  $r$  کاهش می‌یابد

$$P(r) + Gm(r)^2 / \Lambda \pi r^4$$

سپس نشان دهید که فشار مرکزی در نامساوی زیر صدق می‌کند

$$P_c > \frac{1}{6} \left[ \frac{4\pi}{3} \right]^{\frac{1}{3}} G \langle \rho \rangle^{\frac{4}{3}} M^{\frac{2}{3}}$$

در این نامساوی  $\langle \rho \rangle$  چگالی متوسط است.



اگر فرض کنیم که چگالی  $\rho(r)$  با افزایش  $r$  کاهش می‌یابد، می‌توانیم یک حد پایین‌تر، و علاوه بر آن، یک حد بالاتر برای فشار مرکزی، تعیین کنیم. نشان دهید که

$$P_C > \frac{1}{2} \left[ \frac{4\pi}{3} \right]^{\frac{1}{3}} G \langle \rho \rangle^{\frac{4}{3}} M^{\frac{2}{3}}$$

علاوه بر آن نشان دهید که

$$P_C < \frac{1}{2} \left[ \frac{4\pi}{3} \right]^{\frac{1}{3}} G \rho_C^{\frac{4}{3}} M^{\frac{2}{3}}$$

که در این جا  $\rho_C$  چگالی مرکزی است.

۸-۱ سن خورشید چه قدر است؟ دو چیز را با اطمینان می‌دانیم: خورشید پیرتر از منظومه‌ی خورشیدی است و منظومه‌ی خورشیدی با قدیمی‌ترین سنگ‌های آن هم سن است. در عمل، فعالیت‌های تکتونیکی به سنگ‌های با گستره‌ی سنی وسیع دست یافته است، اما قدیمی‌ترین سنگ‌های زمینی و قدیمی‌ترین سنگ‌های شهابی‌ها و سنگ‌های ماه، سنی در حدود  $4,55 \times 10^9$  سال دارند. در نتیجه، سن پذیرفته شده برای منظومه‌ی خورشیدی  $4,55 \times 10^9$  سال است و این سن حد پایین برای سن خورشید است.

در این مسأله نشان می‌دهیم که چگونه از ایزوتوپ‌های پرتوزای طبیعی اورانیوم،  $^{238}\text{U}$  و  $^{235}\text{U}$ ، می‌توان برای تعیین سن سنگ‌ها استفاده کرد. هر دو ایزوتوپ با انجام تعدادی واپاشی  $\alpha$  و واپاشی  $\beta$  به ایزوتوپ‌های پایدار سرب تبدیل می‌شوند؛ زنجیره‌ی واپاشی  $^{235}\text{U}$  به  $^{207}\text{Pb}$ ، و زنجیره‌ی واپاشی  $^{238}\text{U}$  به  $^{206}\text{Pb}$  ختم می‌شود. بنابراین، هسته‌های اورانیوم در یک سنگ به طور نمایی با زمان واپاشی می‌کنند:

$$N_5(t) = N_5(0)e^{-\lambda_5 t} \quad \text{و} \quad N_8(t) = N_8(0)e^{-\lambda_8 t}$$

برای ساده سازی، آخرین رقم عدد جرمی ایزوتوپ را به عنوان پانویس به کار برده‌ایم. ثابت‌های واپاشی  $\lambda_5$  و  $\lambda_8$  برای دو ایزوتوپ با نیم‌عمرهای سال  $T_5 = \ln 2 / \lambda_5 = 0,7 \times 10^9$  و سال  $T_8 = \ln 2 / \lambda_8 = 4,5 \times 10^9$  متناظرند. این بزرگی این نیم‌عمرها برای تعیین کردن سن تخته سنگ‌ها که سنی بیش از بیلیون سال دارند، بسیار مناسب است.

اکنون مجموعه‌ای از نمونه‌های سنگ را در نظر بگیرید که در یک زمان تشکیل شده‌اند، ولی ترکیب شیمیایی آن‌ها متفاوت است. ترکیب شیمیایی سنگ‌ها به این علت متفاوت است که عناصر شیمیایی متفاوت با فرایندهای متفاوتی در تشکیل شدن سنگ همکاری می‌کنند. اما در فرآیندهای تشکیل شدن سنگ، یک ایزوتوپ نسبت به دیگری ارجحیتی ندارد. برای مثال، هنگام تشکیل شدن سنگ، فراوانی‌های نسبی  $^{238}\text{U}$  و  $^{235}\text{U}$  در هر نمونه‌ای باید یکسان باشد. به طور مشابه، فراوانی‌های نسبی  $^{207}\text{Pb}$  و  $^{206}\text{Pb}$  نیز در هر نمونه‌ای باید یکسان باشد. اما با گذشت زمان که واپاشی  $^{238}\text{U}$  و  $^{235}\text{U}$  باعث تولید شدن هسته‌های  $^{207}\text{Pb}$  و  $^{206}\text{Pb}$  می‌شود، این فراوانی‌ها تغییر می‌کنند.

● نسبت افزایش تعداد هسته‌های  $^{207}\text{Pb}$  نسبت به افزایش تعداد هسته‌های  $^{206}\text{Pb}$  را در نظر بگیرید. نشان دهید که این نسبت برای تمام سنگ‌هایی که هم‌زمان تشکیل شده‌اند، یکسان است و نشان دهید که این نسبت از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\frac{N_V(t) - N_V(0)}{N_F(t) - N_F(0)} = \frac{N_D(t)}{N_A(t)} \frac{e^{\lambda_D t} - 1}{e^{\lambda_A t} - 1}$$

● نموداری را در نظر بگیرید که در آن فراوانی‌های اندازه‌گیری شده‌ی  $^{207}\text{Pb}$  و  $^{206}\text{Pb}$  در نمونه‌های سنگ‌ها،  $N_V(t)$  در راستای محور  $y$ ، و  $N_F(t)$  در راستای محور  $x$ ، رسم شده‌اند. نشان دهید که اگر تمام نمونه‌ها در یک زمان تشکیل شده باشند، نمودار به صورت یک خط راست خواهد بود.

● می‌دانیم که نسبت تولید طبیعی  $^{235}\text{U}$  به  $^{238}\text{U}$  مساوی با  $0.0071\%$  است. گرادیان (شیب) خط راست برای نمونه‌های سنگ با سن (الف) یک بیلیون سال، (ب) ۳ بیلیون سال و (پ) ۵ بیلیون سال، را حساب کنید.

۹-۱ وقتی سوختن هسته‌ای در هسته‌ی مرکزی یک ستاره متوقف می‌شود، شار انرژی گذرنده از هسته‌ی مرکزی و در نتیجه گرادیان دما در هسته‌ی مرکزی، صفر می‌شود. هسته‌ی مرکزی تکدام می‌شود و گرادیان فشار لازم برای هسته‌ی مرکزی و پوشش خارجی منحصراً از گرادیان زیاد چگالی تأمین می‌شود. با وجود این، اگر هسته‌ی تکدام

بسیار سنگین باشد، ناپایدار می‌شود. در آن صورت هسته منقبض و پوشش خارجی منبسط می‌شود. این مقدار حدی برای جرم هسته‌ی مرکزی تکدما را حد شونبرگ - چاندراسکار<sup>۱</sup> می‌نامند (شونبرگ، ۱۹۴۲). این حد تقریباً یک دهم جرم کل ستاره است. اما اگر تبهگن بودن الکترون در هسته‌ی مرکزی اهمیت پیدا کند، جرم هسته‌ی مرکزی می‌تواند بیش‌تر باشد؛ این وضعیت مانند ستاره‌های با جرم کم‌تر است که در آن‌ها هسته‌ی مرکزی چگالی بیش‌تری دارد.

در این مسأله، فیزیک مربوط به حد شونبرگ - چاندراسکار را در نظر می‌گیریم. ستاره‌ای به جرم  $M$  و شعاع  $R$  را در نظر می‌گیریم که جرم هسته‌ی مرکزی تکدمای آن  $M_c$ ، شعاع آن  $R_c$  و حجم آن  $V_c$  است. فرض کنید  $T_c$  دمای یکنواخت هسته‌ی مرکزی و  $P_c$  فشار وارد بر هسته از طرف پوشش خارجی باشد. در بخش ۱-۲ معادله‌ی (۷-۱)، یعنی قضیه‌ی ویریال برای کل ستاره را با ضرب کردن معادله‌ی تعادل هیدروستاتیکی (۱-۵) در  $4\pi r^3$  و انتگرال گرفتن از مرکز ستاره تا سطح آن (که فشار صفر است)، به دست آوردیم.

● اکنون از این رابطه از مرکز تا لبه‌ی هسته‌ی مرکزی تکدما در نقطه‌ی  $r = R_c$  که فشار آن  $P_c$  است، انتگرال بگیرید و نشان دهید که در تعادل هیدروستاتیکی، داریم

$$3V_c P_c - 3\langle P \rangle_c = E_{GC}$$

که در آن  $\langle P \rangle_c$  فشار متوسط هسته‌ی مرکزی و  $E_{GC}$  انرژی پتانسیل گرانشی هسته است.

● فرض کنید هسته‌ی مرکزی شامل یک گاز ایده‌آل با ذرات غیرنسبیتی است و نشان دهید که

$$3V_c P_c = 2E_{KC} + E_{GC}$$

که در آن  $E_{KC}$  انرژی جنبشی انتقالی ذرات گاز در هسته‌ی مرکزی است.

● اکنون فرض کنید که هسته‌ی مرکزی شامل یک گاز کلاسیکی ایده‌آل است که جرم متوسط ذرات آن  $\bar{m}_c$  است و نشان دهید که

$$P_c = \frac{A}{R_c^3} - \frac{B}{R_c^4}$$

که در آن  $A$  و  $B$  ثابت‌های مثبت هستند.

- $P_c$  را به صورت تابعی از  $R_c$  رسم کنید و نشان دهید که مقدار بیشینه‌ی آن برابر است با

$$P_0 = C \frac{(kT_c)^4}{G^3 \bar{m}_c^4 M_c^2} \quad \text{و} \quad R_0 = D \frac{GM_c \bar{m}_c}{kT_c}$$

که در آن  $C$  و  $D$  ثابت‌های عددی از مرتبه‌ی یک هستند.

- با استفاده از نمودار خود نشان دهید که  $P_0$  فشار بیشینه‌ای است که هسته‌ی مرکزی می‌تواند تحمل کند و هنوز در حال تعادل هیدروستاتیکی باشد. برای انجام این کار می‌توانید نشان دهید که اگر شعاع هسته‌ی مرکزی از  $R_0$  بزرگ‌تر باشد، هر افزایش کوچک در فشار هسته‌ی مرکزی با انقباض هسته همراه است، لذا هسته‌ی مرکزی در حالت تعادل پایدار می‌ماند. اما اگر شعاع هسته‌ی مرکزی از  $R_0$  کوچک‌تر شود، هسته در یک تعادل ناپایدار قرار می‌گیرد و هر کاهش شعاع با کاهش فشار وارد بر هسته همراه است.

- اکنون توجه کنید که مقادیر  $P_c$  و  $T_c$  به جرم کل  $M$  و شعاع  $R$  ستاره بستگی دارند؛ مشابه با معادله‌های (۱-۲۹) و (۱-۳۱) می‌توان نوشت

$$P_c \propto \frac{GM^2}{R^4} \quad \text{و} \quad T_c \propto \frac{GM\bar{m}}{R}$$

- که در آن  $\bar{m}$  جرم متوسط ذرات گاز درون ستاره است. نشان دهید که وقتی شرط زیر برقرار می‌شود،  $P_c$  از فشار بیشینه‌ای که هسته‌ی مرکزی می‌تواند تحمل کند، کم‌تر است:

$$\frac{M_c}{M} < \alpha \left[ \frac{\bar{m}}{\bar{m}_c} \right]^2$$

در این جا  $\alpha$  یک ثابت عددی است.

- مقدار نظری ثابت  $\alpha$  در حدود ۰٫۴ است. این مقدار ایجاب می‌کند که به ازای

$$\bar{m}_c = 2\bar{m} \quad \text{جرم بیشینه‌ی هسته‌ی مرکزی تک‌دما در حدود } 0.1M \text{ باشد.}$$

## خواص ماده و تابش

در داخل ستاره‌ها ماده و تابش در دمای بالا فشاری ایجاد می‌کنند که با انقباض گرانشی آن‌ها مقابله می‌کند. در چنین محیطی شرایط فرین‌اند: یعنی اتم‌ها یونیده‌اند، الکترون‌ها می‌توانند تبهگن و فرانسیمی شوند، و فشار تابش می‌تواند بسیار زیاد باشد. به هر حال، علی‌رغم این پیچیدگی، بسیاری از خاصیت‌های داخل ستاره‌ها را با در نظر گرفتن ساده‌ترین سیستم ترمودینامیکی، یعنی یک گاز ایده‌آل، می‌توان درک کرد. اما ما باید فراتر از یک گاز ایده‌آل آشنا که در آن ذره‌ها کلاسیکی و غیرنسبیتی هستند، یعنی عمومی‌ترین حالت گاز ایده‌آل را در نظر بگیریم. در این فصل توجه خاصی به خواص گازهای الکترونی و فوتونی خواهیم کرد و ارتباط آن‌ها با ساختار ستاره را در نظر خواهیم گرفت. علاوه بر این، تفکیک و تجزیه مولکول‌ها، یونش اتم‌ها، تجزیه‌ی نوری هسته‌های اتمی و تولید شدن زوج ذره - پاد ذره را نیز مطالعه خواهیم کرد.

### ۱-۲ گاز ایده‌آل

در یک گاز ایده‌آل تعداد زیادی از ذره‌ها حالت‌های کوانتومی‌ای را اشغال می‌کنند که برهم کش این ذره‌ها تأثیری روی انرژی این حالت‌ها ندارد. این ذره‌ها می‌توانند اتم‌ها، یون‌ها، الکترون‌ها، فوتون‌ها، نوترینوها و غیره باشند. در این نوع گاز، غالباً اثرهای مکانیک کوانتومی و نسبیت خاص اهمیت دارند؛ فقط در شرایط خاصی می‌توان این ذره‌ها را تقریباً مانند ذره‌های کلاسیکی و غیرنسبیتی در نظر گرفت.

## چگالی حالت‌ها

درات گاز می‌توانند مانند موج‌ها عمل کنند و ما می‌توانیم از این خاصیت‌های موج مانند برای تعیین حالت‌های کوانتومی ممکن اشغال شده توسط این ذره‌ها استفاده کنیم. فرض می‌کنیم این ذره‌ها در یک جعبه‌ی مکعبی به حجم  $V = L^3$  محصور شده‌اند. محصور شدن در چنین جعبه‌ای ایجاب می‌کند حالت‌های کوانتومی را با موج‌های ایستاده‌ای به صورت

$$\sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z$$

با بردار  $\mathbf{k}$  نمایش دهیم

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = (n_x, n_y, n_z) \frac{\pi}{L} \quad (1-2)$$

در این رابطه  $n_x$ ،  $n_y$  و  $n_z$  عددهای درست مثبت‌اند؛ به عبارت دیگر، تعداد درستی از نیم موج‌ها می‌توانند در بین صفحات متقابل جعبه بگنجند.

برای شمردن حالت‌های کوانتومی با بردارهای موج متفاوت، می‌توانیم از عددهای کوانتومی  $n_x$ ،  $n_y$  و  $n_z$  استفاده کنیم. برای مثال، اگر مقدار  $k_x$  تا  $k_x + dk_x$  افزایش یابد، دارای  $(L/\pi)dk_x$  مقدار مجزا خواهد بود. بنابراین، تعداد حالت‌های کوانتومی با بردار موج  $\mathbf{k}$  و مؤلفه‌های بین  $k_x$  و  $k_x + dk_x$ ،  $k_y$  و  $k_y + dk_y$ ،  $k_z$  و  $k_z + dk_z$  برابر است با

$$\left[ \frac{L}{\pi} \right]^3 dk_x dk_y dk_z$$

برای توجیه هندسی این نتیجه می‌توان یک فضای  $k$  را با مختصات مثبت  $k_x$ ،  $k_y$  و  $k_z$  تعریف کرد که در آن هر عنصر حجمی شامل تعداد زیادی حالت کوانتومی با چگالی  $[L/\pi]^3$  حالت در واحد حجم، است.

ما می‌خواهیم حالت‌های کوانتومی با بردار موج  $\mathbf{k}$  را که بزرگی آن بین  $k$  و  $k + dk$  است، شناسایی کنیم. این حالت‌ها حجم فضای  $k$  (به ازای  $k_x$ ،  $k_y$  و  $k_z$  مثبت) در بین دو کره به شعاع‌های  $k$  و  $k + dk$  را اشغال می‌کنند. این حجم مساوی با  $4\pi k^2 dk / 8$  است، و تعداد حالت‌ها با عدد موج بین  $k$  و  $k + dk$  برابر است با

$$\left[ \frac{L}{\pi} \right]^3 \frac{4\pi k^2 dk}{8} \quad (2-2)$$

خواص ذره مانند این حالت‌ها موقعی ظاهر می‌شود که بخواهیم تکانه‌ی ذره را اندازه بگیریم. رابطه‌ی دوبروی<sup>۱</sup>، یعنی  $p = h/\lambda$ ، نشان می‌دهد که اگر بزرگی بردار موج  $k$  باشد، بزرگی تکانه‌ی آن  $p = \hbar k$  خواهد بود که در آن  $\hbar = h/2\pi$  است. بنابراین، اگر  $p = \hbar k$  را در معادله‌ی (۲-۲) قرار دهیم، رابطه‌ی زیر را برای تعدادی حالت کوانتومی به دست خواهیم آورد که دارای تکانه‌ای با بزرگی بین  $p$  و  $p + dp$  هستند:

$$g(p)dp = \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp$$

اگر ذره‌ها دارای تکانه‌ی زاویه‌ای ذاتی یا اسپین باشند، باید این نتیجه را اصلاح کرد. برای هر حالت با تکانه‌ی معین، حالت‌های کوانتومی متعددی متناظر با سمتگیری‌های مختلف اسپین ذره، یا به عبارت دیگر، متناظر با قطبش‌های ذره می‌توانند وجود داشته باشند. بنابراین، اگر  $g_s$  تعداد قطبش‌های مستقل ذره باشد، تعداد حالت‌های کوانتومی که بزرگی تکانه‌ی آن‌ها بین  $p$  و  $p + dp$  قرار دارد، برابر است با

$$g(p)dp = g_s \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad (۳-۲)$$

یادآوری می‌کنیم که پروتون‌ها، نوترون‌ها و الکترون‌ها دارای اسپین  $\frac{1}{2}$  و  $g_s = 2$  هستند. اسپین نوترینوها نیز  $\frac{1}{2}$  است ولی فقط یک قطبش دارند، یعنی  $g_s = 1$ . فوتون‌ها دارای اسپین ۱ و  $g_s = 2$  هستند، که متناظر با دو قطبش مستقل یک موج الکترومغناطیسی است.

### انرژی داخلی

انرژی جنبشی داخلی گاز به سه عامل بستگی دارد: چگالی حالت‌ها، انرژی‌ها، حالت کوانتومی، و تعداد ذره‌ها در هر حالت. چگالی حالت‌ها،  $g(p)dp$ ، از معادله‌ی (۳-۲) به دست می‌آید. با توجه به نسبییت خاص، انرژی  $\mathcal{E}_p$  ذره‌ای به جرم  $m$  در یک حالت کوانتومی با تکانه‌ی  $p$ ، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\mathcal{E}_p = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (۴-۲)$$

اگر تعداد متوسط ذره‌ها در یک حالت با انرژی  $\epsilon_p$  را به صورت  $f(\epsilon_p)$  نشان دهیم، انرژی داخلی گاز را می‌توانیم به صورت زیر به دست آوریم

$$E = \int_0^{\infty} \epsilon_p f(\epsilon_p) g(p) dp \quad (5-2)$$

به طور مشابه، تعداد کل ذره‌ها در گاز برابر است با

$$N = \int_0^{\infty} f(\epsilon_p) g(p) dp \quad (6-2)$$

خواص ترمودینامیکی ماکروسکوپی گاز را می‌توان با دمای  $T$ ، فشار  $P$  و پتانسیل شیمیایی  $\mu$  آن توصیف کرد. این عوامل مشخص می‌کنند که انرژی داخلی گاز چگونه با انتقال گرما یا آنتروپی، بر اثر تراکم یا انبساط، و با انتقال ذره‌ها، تغییر می‌کند؛ اگر آنتروپی گاز به اندازه‌ی  $dS$ ، حجم آن به اندازه‌ی  $dV$  و تعداد ذره‌ها به اندازه‌ی  $dN$  تغییر کند، در آن صورت داریم

$$dE = TdS - PdV + \mu dN \quad (7-2)$$

برقرار شدن تعادل ترمودینامیکی با فرایندهایی مشخص می‌شود که منجر به دما، فشار و پتانسیل شیمیایی یکنواخت می‌شوند؛ و هنگامی که تعادل برقرار می‌شود،  $T$ ،  $P$  و  $\mu$  با یک معادله‌ی حالت به هم مربوط می‌شوند.

از دیدگاه میکروسکوپی، دما، فشار و پتانسیل شیمیایی می‌توانند توزیع دمای ذره‌ها در حالت‌های تعادل را مشخص کنند. این توزیع به این امر بستگی دارد که ذره‌ها فرمیون‌های<sup>۱</sup> مشابه هستند یا بوزون‌های<sup>۲</sup> مشابه.

● فرمیون‌های مشابه از آمار فرمی - دیراک<sup>۳</sup> پیروی می‌کنند که در آن، اشغال شدن حالت‌ها با اصل طرد پائولی<sup>۴</sup> محدود می‌شود؛ یعنی بیش از یک ذره نمی‌تواند در یک حالت کوانتومی معین حضور داشته باشد و تعداد متوسط ذره‌ها برابر است با

$$f(\epsilon_p) = \frac{1}{\exp[(\epsilon_p - \mu)/kT] + 1} \quad (8-2)$$

● بوزون‌های مشابه از آمار بوز - اینشتین<sup>۵</sup> پیروی می‌کنند که در آن، هر تعداد ذره می‌تواند در

1. fermion      2. boson      3. Fermi-Dirac  
4. Pauli        5. Bose-Einstein



یک حالت کوانتومی معین حضور داشته باشند. در این صورت، تعداد متوسط ذره‌ها برابر است با

$$f(\varepsilon_p) = \frac{1}{\exp[(\varepsilon_p - \mu)/kT] - 1} \quad (9-2)$$

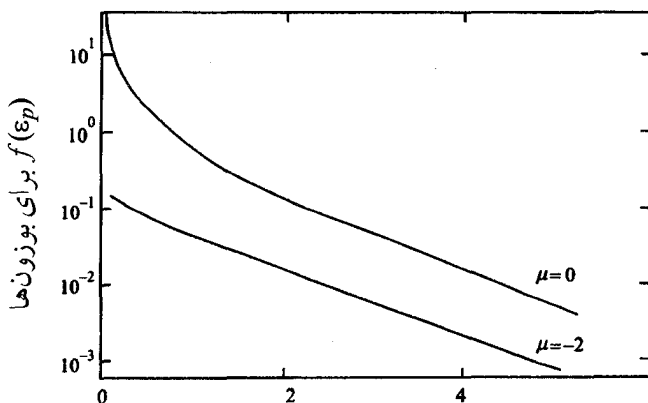
این تابع‌های توزیع در شکل ۱-۲ نشان داده شده‌اند؛ این شکل نشان می‌دهد که با کاهش پتانسیل شیمیایی یا با افزایش دما، اشغال شدن متوسط هر حالت کاهش می‌یابد. وقتی این اتفاق می‌افتد، توابع توزیع فرمیون‌ها و بوزون‌ها به یک نوع تابع توزیع میل می‌کنند، که این توزیع برای یک گاز کلاسیکی رقیق، مناسب است. در یک گاز کلاسیکی رقیق، حالت‌های با کم‌ترین انرژی  $\varepsilon_p = mc^2$  به ندرت اشغال می‌شوند. در واقع، احتمال اشغال شدن چنین حالت‌هایی در شرایط زیر، بسیار کم‌تر از یک خواهد بود

$$\exp[(mc^2 - \mu)/kT] \gg 1 \quad (10-2)$$

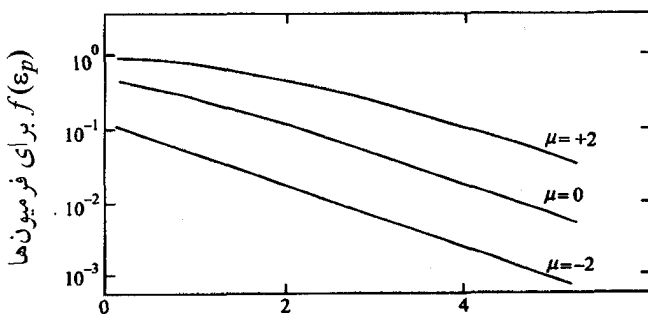
در این حالت می‌توان از مقدار +۱ در تابع توزیع فرمیون‌ها (۱-۲) و از مقدار -۱ در تابع توزیع بوزون‌ها (۹-۲) چشمپوشی کرد و برای فرمیون‌ها و بوزون‌ها، تعداد متوسط ذره‌ها در یک حالت کوانتومی برابر خواهد بود با

$$f(\varepsilon_p) \approx \exp[-(\varepsilon_p - \mu)/kT] \ll 1 \quad (11-2)$$

پس، نتیجه می‌گیریم که اگر میزان اشغال شدن هر حالت کوانتومی کم باشد، گاز بوزون‌ها و گاز فرمیون‌ها خواص مشابهی دارند. این امر که در یک حالت معین حداکثر یک فرمیون و هر تعداد بوزون می‌توانند حضور داشته باشند، درست نیست زیرا میزان اشغال شدن متوسط هر حالت بسیار کم‌تر از یک است. علاوه بر این، گازهای رقیق مانند سیستم‌های کلاسیکی ذره‌ها عمل می‌کنند زیرا فاصله‌ی بین ذره‌ها به ناظر اجازه می‌دهد مسیر حرکت آن‌ها را شناسایی کند و ذره‌های مشابه را تشخیص دهد. مخصوصاً، مشابه بودن ذره‌ها هیچ اثر کوانتومی ندارد. در این وضعیت، بوزون‌ها و فرمیون‌ها از آمار کلاسیکی ماکسول - بولتزمن<sup>۱</sup> پیروی می‌کنند؛ آن‌ها مانند ماکسولیون<sup>۲</sup> رفتار می‌کنند. بعداً خواهیم دید که رفتار کوانتومی و کلاسیکی گازهای الکترونی، نقش مهمی در فیزیک ستاره‌ها بازی می‌کنند.



انرژی حالت  $\epsilon_p$  بر حسب یکای  $kT$



انرژی حالت  $\epsilon_p$  بر حسب یکای  $kT$

شکل ۱-۲ تعداد متوسط بوزون‌ها و فرمیون‌ها در یک حالت کوانتومی با انرژی  $\epsilon_p$ ، برای مقادیر مختلف پتانسیل شیمیایی. مقیاس انرژی به ازای  $kT=1$  انتخاب شده است؛ میزان اشغال شدن متوسط یک حالت به ازای  $\mu=-2$  و  $\mu=2$  در شکل بالا نشان دهنده‌ی میزان اشغال شدن متوسط به ازای  $\mu=-2kT$  و  $\mu=2kT$  است.

### فشار در گاز ایده‌آل

در بخش ۱-۲ از مباحث کلاسیکی برای پیدا کردن روابط بین فشار و چگالی انرژی داخلی یک گاز ایده‌آل استفاده کردیم. ما از این رابطه‌ها استفاده کردیم تا نشان دهیم که وقتی ذرات گاز بیش‌تر نسبتی می‌شوند، تعادل هیدروستاتیکی یک گاز خود گرانش به هم می‌خورد. در این‌جا تأکید می‌کنیم که هر جا فیزیک کوانتومی صدق کند، این رابطه‌ها نیز معتبرند.

با توجه به رابطه‌ی ترمودینامیکی اساسی (۲-۷) معلوم می‌شود که تغییر انرژی داخلی از تغییر حجم  $dV$  در آنتروپی ثابت و با تعداد ثابت ذره‌ها، با مقدار  $-PdV$  یعنی کار انجام شده روی سیستم، برابر است. در چنین فرآیندی، تعداد ذره‌ها در هر حالت کوانتومی ثابت می‌ماند، و انرژی داخلی تغییر می‌کند زیرا انرژی هر حالت کوانتومی به حجم بستگی دارد. بنابراین، با استفاده از معادله‌ی (۲-۵)، درمی‌یابیم که فشار در یک گاز ایده‌آل برابر است با

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = -\int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon_p}{dV} f(\varepsilon_p) g(p) dp \quad (12-2)$$

برای پیدا کردن بستگی انرژی حالت کوانتومی به حجم محصور کننده‌ی ذره‌ها،  $\varepsilon_p$  را به صورت تابعی از  $p$ ، و  $p$  را به صورت تابعی از  $V$  در نظر می‌گیریم و می‌نویسیم

$$\frac{d\varepsilon_p}{dV} = \frac{d\varepsilon_p}{dp} \frac{dp}{dV}$$

با توجه به معادله‌ی (۲-۱)، بردار موج و در نتیجه تکانه، با  $L$  نسبت معکوس دارد. چون

$$P \propto V^{-\frac{1}{3}}, \quad V = L^3$$

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{p}{3V}$$

هم‌چنین، از رابطه‌ی (۲-۴) بین انرژی و تکانه، داریم

$$\frac{d\varepsilon_p}{dp} = \frac{pc^2}{\varepsilon_p} = v_p$$

که در آن  $v_p$  تندی یک ذره با تکانه‌ی  $p$  است. بنابراین خواهیم داشت

$$\frac{d\varepsilon_p}{dV} = -\frac{pv_p}{3V}$$

با قرار دادن این نتیجه در معادله‌ی (۲-۱۲)، رابطه‌ی زیر برای فشار یک گاز ایده‌آل به دست می‌آید

$$P = \frac{1}{3V} \int_0^{\infty} pv_p f(\varepsilon_p) g(p) dp = \frac{N}{3V} \langle pv_p \rangle \quad (13-2)$$

که در آن، براکت‌ها،  $\langle \rangle$ ، مقدار متوسط روی  $N$  ذره از گاز را نشان می‌دهند. معلوم می‌شود که معادله‌ی (۲-۱۳) با معادله‌ی (۱-۸) که با استفاده از فیزیک کلاسیکی به دست آمد، سازگار است.

به آسانی می‌توان دید که وقتی ذرات گاز غیرنسبیتی یا فرانسبیتی هستند، فشار گاز با چگالی انرژی جنبشی آن نسبت مستقیم دارد. برای ذرات غیرنسبیتی  $\varepsilon_p = mc^2 + p^2/2m$  و  $v_p = p/m$ ، و فشار گاز برابر است با

$$P = \frac{2N}{3V} \langle \frac{p^2}{2m} \rangle = \frac{2}{3} \text{ چگالی انرژی جنبشی} \quad (14-2)$$

برای ذرات فرانسبیتی  $\varepsilon_p = pc$  و  $v_p = c$ ، و فشار گاز برابر است با

$$P = \frac{N}{3V} \langle pc \rangle = \frac{1}{3} \text{ چگالی انرژی جنبشی} \quad (15-2)$$

تأکید می‌کنیم که این رابطه‌های فشار گاز، در مورد شکل عمومی‌تر یک گاز ایده‌آل نیز به کار می‌روند. این امر که ذرات گاز بوزون یا فرمیون باشند، یا آن‌ها یک گاز چگال (که در آن اثرهای کوانتومی مهم است) یا یک گاز رقیق (که فیزیک کلاسیکی برای آن مناسب است) تشکیل بدهند، اهمیت ندارد.

### گاز کلاسیکی ایده‌آل

دانشجویان با تعداد زیادی از خواص گاز ایده‌آل کلاسیکی آشنا هستند. ما در اینجا دو هدف داریم: توجه کردن به اثرهای سینماتیک نسبیتی و فهمیدن این امر که چه موقعی ذرات گاز را نمی‌توان با مکانیک کلاسیکی توصیف کرد. ابتدا نشان می‌دهیم که معادله‌ی حالت برای یک گاز ایده‌آل کلاسیکی، حتی موقعی که ذره‌ها نسبیتی هستند، معتبر است.

یک گاز هنگامی کلاسیکی است که میزان اشغال شدن متوسط هر حالت کوانتومی کم باشد و از معادله‌ی (۲-۱۱) به دست آید. فشار در چنین گازی را می‌توان با قرار دادن معادله‌های (۲-۳) و (۲-۱۱) در معادله‌ی (۲-۱۳) به دست آورد

$$P = \frac{1}{3V} \exp[\mu/kT] \int_0^\infty p v_p \exp[-\varepsilon_p/kT] g_s \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad (16-2)$$

اکنون از رابطه‌ی نسبیتی بین انرژی و تکانه، یعنی معادله‌ی (۲-۴) برای به دست آوردن  $d\varepsilon_p = v_p dp$  و نوشتن انتگرال در معادله‌ی (۲-۱۶) به صورت زیر استفاده می‌کنیم

$$\int_0^\infty p^3 \exp[-\varepsilon_p/kT] v_p dp = -kT \int_0^\infty p^3 d(\exp[-\varepsilon_p/kT])$$

بعد از انتگرال گیری داریم

$$\int_0^{\infty} p^3 \exp[-\varepsilon_p/kT] v_p dp = 3kT \int_0^{\infty} \exp[-\varepsilon_p/kT] p^2 dp$$

با قرار دادن این نتیجه در معادله‌ی (۲-۱۶)، رابطه‌ی زیر برای فشار گاز ایده‌آل کلاسیکی به دست می‌آید

$$P = \frac{kT}{V} \exp[\mu/kT] \int_0^{\infty} \exp[-\varepsilon_p/kT] g_s \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad (۲-۱۷)$$

اکنون برای محاسبه‌ی تعداد کل ذرات گاز، این رابطه را با معادله‌ی (۲-۶) مقایسه می‌کنیم. برای یک گاز کلاسیکی، شکل معادله‌ی (۲-۶) به صورت زیر است

$$N = \exp[\mu/kT] \int_0^{\infty} \exp[-\varepsilon_p/kT] g_s \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad (۲-۱۸)$$

با این مقایسه، معادله‌ی حالت زیر مستقیماً به دست می‌آید

$$P = \frac{N}{V} kT = nkT \quad (۲-۱۹)$$

تأکید می‌کنیم که این معادله‌ی حالت برای ذرات کلاسیکی حتی در صورت نسبیتی بودن نیز، معتبر است. اما، هنگامی که ذره‌ها بسیار پرانرژی می‌شوند، به خاطر تولید شدن ذره، سهم بیش‌تری در فشار خواهند داشت. معادله‌ی حالت را می‌توان با رابطه‌های بین فشار و چگالی انرژی جنبشی، یعنی معادله‌های (۲-۱۴) و (۲-۱۵) مقایسه کرد. در نتیجه معلوم می‌شود که انرژی جنبشی متوسط یک ذره در یک گاز کلاسیکی، اگر غیرنسبیتی باشد مساوی با  $\frac{3}{2}kT$  و اگر فرانسیبیتی باشد مساوی با  $3kT$  است.

اکنون به تشریح شرط ذره‌ها برای تشکیل دادن یک گاز کلاسیکی می‌پردازیم. یک گاز موقعی کلاسیکی است که میزان اشغال شدن متوسط هر حالت کوانتومی کم‌تر از یک باشد. این امر موقعی محقق می‌شود که پتانسیل شیمیایی در نامساوی (۲-۱۰) صدق کند. اگر یک رابطه‌ی ضمنی برای پتانسیل شیمیایی یک گاز کلاسیکی به دست آوریم، نامساوی (۲-۱۰) به شکل مفیدتری نوشته می‌شود.

پتانسیل شیمیایی یک گاز کلاسیکی متشکل از ذرات غیرنسبیتی را می‌توان با قرار دادن  $\varepsilon_p = mc^2 + p^2/2m$  در معادله‌ی (۲-۱۸) برای تعداد کل ذرات گاز به دست آورد. بعد از

انتگرال گیری داریم

$$N = \exp[(\mu - mc^2)/kT] g_s \frac{V}{h^3} (\sqrt{\pi} mkT)^{\frac{3}{2}} \quad (20-2)$$

این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mu - mc^2 = -kT \ln \left[ \frac{g_s n_Q}{n} \right] \quad (21-2)$$

که در آن  $n$  مساوی با  $N/V$ ، چگالی ذره‌ها در گاز، است و  $n_Q$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$n_Q = \left[ \frac{\sqrt{\pi} mkT}{h^2} \right]^{\frac{3}{2}} \quad (22-2)$$

بعداً خواهیم دید که  $n_Q$  یک پارامتر مهم در فیزیک آماری است؛ این پارامتر را چگالی عددی کوانتومی می‌نامند.

برای یک گاز کلاسیکی با ذرات فرانسیتی نیز می‌توان محاسبه‌ی مشابهی را انجام داد. اگر از انرژی سکون ذره‌ها،  $mc^2$ ، چشمپوشی کنیم و مقدار  $\varepsilon_p = pc$  را در معادله‌ی (۲-۱۸) قرار دهیم، پتانسیل شیمیایی به دست می‌آید

$$\mu = -kT \ln \left[ \frac{g_s n_Q}{n} \right] \quad (23-2)$$

در این‌جا چگالی عددی کوانتومی برابر است با

$$n_Q = \lambda \pi \left[ \frac{kT}{hc} \right]^3 \quad (24-2)$$

هرجا لازم باشد تفاوت چگالی عددی کوانتومی برای یک گاز غیرنسیتی و یک گاز فرانسیتی را با استفاده از نمادهای  $n_{QUR}$  و  $n_{QNR}$  مشخص خواهیم کرد.

از این روابط پتانسیل شیمیایی می‌توان برای روشن کردن معنی فیزیکی نامساوی (۲-۱۰)، یعنی شرط کلاسیکی بودن یک گاز، استفاده کرد. با توجه به معادله‌ی (۲-۲۱) معلوم می‌شود که اگر چگالی ذره‌ای واقعی  $n$  کوچک‌تر از چگالی کوانتومی  $n_Q$  باشد، نامساوی زیر برقرار خواهد بود

$$\exp[(mc^2 - \mu)/kT] \gg 1$$

به سادگی معلوم می‌شود که با این روش دقیق می‌توان گفت که فاصله‌ی متوسط بین ذرات گاز از طول موج دوبروی نوعی آن‌ها بیش‌تر است. برای ذرات غیرنسبیتی  $\lambda = h/p \approx h/(mkT)^{\frac{1}{2}}$  است و اگر  $n \ll (mkT/h^2)^{\frac{3}{2}} \approx n_{QNR}$  باشد، فاصله‌ی بین ذره‌ها از مقدار  $\lambda$  بیش‌تر خواهد بود. برای ذرات فرانسبیتی،  $\lambda = h/p \approx hc/kT$  است و اگر  $n \ll (kT/hc)^3 \approx n_{QUR}$  باشد، فاصله‌ی بین ذره‌ها از مقدار  $\lambda$  بیش‌تر خواهد بود. به زبان ساده، ذرات گاز به شرطی کلاسیکی هستند که طول موج دوبروی آن‌ها کوچک باشد. در بخش ۲-۳ دیدیم که فوتون‌ها هرگز یک گاز کلاسیکی تشکیل نمی‌دهند، زیرا پتانسیل شیمیایی فوتون‌ها ثابت و مساوی با صفر است. اما، گازهای تشکیل شده از ذرات جرم‌دار، مانند الکترون‌ها و یون‌ها، بسته به چگالی آن‌ها به صورت کلاسیکی یا کوانتومی رفتار می‌کنند. چگالی لازم برای عدم سازگاری با فیزیک کلاسیکی، در گازهای متشکل از ذرات سبک، کم‌تر است زیرا ذرات سبک‌تر دارای طول موج دوبروی بلندتر هستند. بنابراین، وقتی یک ستاره متبض می‌شود و چگالی آن افزایش می‌یابد، الکترون‌ها یعنی سبک‌ترین ذره‌ها در قسمت داخلی یونیده‌ی ستاره، عدم سازگاری با فیزیک کلاسیکی را نشان می‌دهند. الکترون‌ها اولین ذره‌هایی هستند که گاز کوانتومی تشکیل می‌دهند. بسیاری از ویژگی‌های ساختار ستاره‌ها تحت تأثیر این رفتار کوانتومی قرار دارند.

## ۲-۲ الکترون‌ها در ستاره‌ها

هنگامی که ماده‌ی ستاره‌ای فشرده می‌شود، الکترون‌ها اولین ذراتی هستند که نقش خود را تغییر می‌دهند. آن‌ها ابتدا یک گاز کلاسیکی رقیق و سپس یک گاز کوانتومی چگال تشکیل می‌دهند. علاوه بر این، وقتی که چگالی گاز افزایش می‌یابد، الکترون‌ها به طور فزاینده نسبیتی می‌شوند. این روند را با در نظر گرفتن الکترون‌ها در خورشید، نشان می‌دهیم.

در فصل ۱ فرض کردیم که خورشید جسمی با چگالی متوسط  $1.4 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  متشکل از الکترون‌ها و یون‌هایی است که یک گاز ایده‌آل غیرنسبیتی تشکیل می‌دهند، یعنی ذرات کلاسیکی هستند. با در نظر گرفتن فشار لازم برای حفظ خورشید، دریافتیم که دمای نوعی این

گاز کلاسیکی  $6 \times 10^6 \text{ K}$  است. به آسانی می‌توان ثابت کرد که الکترون‌ها در خورشید واقعاً غیرنسبیتی و کلاسیکی هستند. اولاً، الکترون‌ها غیرنسبیتی‌اند زیرا انرژی گرمایی نوعی  $kT$  در مقایسه با انرژی سکون الکترون کم است؛ در واقع،  $kT \approx 10^{-3} mc^2$ . ثانیاً، چگالی خورشیدی متوسط  $1.4 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  نشان می‌دهد که چگالی عددی الکترون‌ها  $n$  در حدود  $6 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$  است. این عدد را باید با چگالی عددی کوانتومی  $n_Q$  برای الکترون‌ها در دمای  $6 \times 10^6 \text{ K}$  مقایسه کرد. با استفاده از معادله‌ی (۲-۲۲) معلوم می‌شود که  $n_Q$  در حدود  $3 \times 10^{31} \text{ m}^{-3}$  است. بنابراین، الکترون‌ها در خورشید تقریباً یک گاز رقیق با چگالی عددی بسیار کم‌تر از چگالی عددی کوانتومی، تشکیل می‌دهند. به عبارت دیگر، آن‌ها یک گاز کلاسیکی تشکیل می‌دهند. اگر توجه خود را به الکترون‌ها در هسته‌ی مرکزی خورشید معطوف کنیم، متوجه خواهیم شد که حتی در این ناحیه‌ی چگال، الکترون‌ها گازی تشکیل می‌دهند که تقریباً کلاسیکی است.

بنابراین، در حال حاضر الکترون‌ها در خورشید یک گاز با ذرات کلاسیکی غیرنسبیتی تشکیل می‌دهند. با وجود این، به آسانی می‌توان دید که وقتی هسته‌ی مرکزی خورشید منقبض می‌شود، اثرهای کوانتومی اهمیت پیدا می‌کنند. برطبق معادله‌ی (۱-۱۱)، وقتی هسته‌ی مرکزی خورشید منقبض می‌شود، انرژی جنبشی گرمایی افزایش می‌یابد. وقتی شعاع هسته‌ی مرکزی  $R$  خورشید کاهش می‌یابد، دمای  $T$  در هسته‌ی مرکزی خورشید (با جرم  $M$ ) افزایش پیدا می‌کند. در مقایسه با معادله‌ی (۱-۳۱) می‌توان نوشت

$$kT \approx \frac{GM\bar{m}}{3R} \quad (2-25)$$

برطبق معادله‌ی (۲-۲۲)، وقتی دمای هسته‌ی مرکزی افزایش می‌یابد، چگالی کوانتومی الکترون‌ها افزایش پیدا می‌کند؛ در واقع،  $n_Q \propto T^{\frac{3}{2}}$ . اگر این بستگی دمایی را با معادله‌ی (۲-۲۵) ترکیب کنیم، معلوم می‌شود که  $n_Q \propto R^{-\frac{3}{2}}$  در حالی که چگالی عددی واقعی الکترون‌ها به صورت  $n \propto R^{-3}$  افزایش پیدا می‌کند. پس، وقتی هسته‌ی مرکزی منقبض می‌شود،  $n$  بسیار سریع‌تر از  $n_Q$  افزایش می‌یابد و  $n$  بیش‌تر از  $n_Q$  خواهد شد. به عبارت



دیگر، فرآیند انقباض منجر به تشکیل شدن یک گاز الکترونی می‌شود که در آن اثرهای کوانتومی مهم‌ترند. علاوه بر این، خواهیم دید که اگر این گاز کوانتومی چگال‌تر شود، الکترون‌ها نسبیتی خواهند شد.

بنابراین، در هنگام تحول ستاره، الکترون‌ها در زمان‌های مختلف از قواعد متفاوت پیروی می‌کنند. ما قبلاً با معادله‌ی حالت گاز کلاسیکی الکترون‌ها آشنا شده‌ایم. اکنون لازم است معادله‌ی حالت گاز کوانتومی الکترون‌ها را پیدا کنیم.

### گاز الکترونی تبهگن

اثرهای کوانتومی موقعی غالب می‌شوند که چگالی عددی الکترون‌ها نسبت به چگالی کوانتومی آن‌ها بیش‌تر باشد. این شرط چگالی بالا مانند شرط دمایی پایین است. به ویژه  $n \gg n_Q$  هم‌ارز با  $kT \ll h^2 n^{2/3} / 2\pi m$  است مشروط بر این که  $n_Q$  از معادله غیرنسبیتی (۲-۲۲) حساب شود. بنابراین، گاز کوانتومی یک گاز سرد است، ولی معیار سردی آن با چگالی گاز مشخص می‌شود؛ مثلاً در یک گاز بسیار چگال، دمایی یک بیلیون درجه ممکن است سرد باشد. یک گاز سرد الکترونی را گاز تبهگن می‌نامند زیرا الکترون‌ها درحالت‌هایی باکم‌ترین انرژی ممکن قرار گرفته‌اند. الکترون‌ها، فرمیون‌های مشابه هستند و از اصل طرد پائولی پیروی می‌کنند. بنابراین، الکترون‌ها باید طوری توزیع شده باشند که هر حالت کوانتومی، تا یک انرژی معین، به طور کامل با یک الکترون اشغال شود و حالت‌های کوانتومی با انرژی بالاتر، خالی بمانند. این نوع توزیع الکترون‌ها باید حد دمایی صفر توزیع فرمی - دیراک (۲-۸) باشد. در واقع، اگر پتانسیل شیمیایی در دمایی صفر را مساوی با انرژی  $\mathcal{E}_F$  قرار دهیم، از معادله‌ی (۲-۸) نتیجه‌ی زیر برای تعداد متوسط الکترون‌ها در یک حالت کوانتومی با انرژی  $\mathcal{E}_p$  به دست می‌آید:

$$f(\mathcal{E}_p) = \begin{cases} 1 & \mathcal{E}_p \leq \mathcal{E}_F \\ 0 & \mathcal{E}_p > \mathcal{E}_F \end{cases}$$

انرژی پرانرژی‌ترین الکترون‌ها در یک گاز الکترونی سرد، یعنی  $\mathcal{E}_F$ ، را انرژی فرمی می‌نامند؛ تکانه‌ی متناظر با این انرژی، یعنی  $p_F$  را تکانه‌ی فرمی می‌نامند.

چون هر حالتی تا حالت‌های با تکانه‌ی  $p_F$  توسط یک الکترون اشغال می‌شود و تمام حالت‌های دیگر خالی می‌مانند، تعداد کل الکترون‌ها در یک گاز تبهگن، همان تعداد حالت‌ها با تکانه کم‌تر از  $p_F$  است. با استفاده از معادله‌ی (۲-۳) برای چگالی حالت‌ها داریم

$$N = \int_0^{p_F} g_s \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp = \frac{\Lambda \pi V}{3 h^3} p_F^3 \quad (2-26)$$

که در آن  $g_s = 2$  را برای نشان دادن دو حالت اسپینی مستقل الکترون به کار برده‌ایم. این معادله برای تعداد الکترون‌ها را می‌توان به صورت دیگری مرتب کرد تا تکانه‌ی فرمی برحسب چگالی الکترونی به دست آید:

$$p_F = \left[ \frac{3n}{\Lambda \pi} \right]^{\frac{1}{3}} h \quad (2-27)$$

باید توجه کرد که این رابطه برای تکانه‌ی فرمی نشان می‌دهد که طول موج دوبروی پارانرژی‌ترین الکترون‌ها در یک گاز تبهگن، یعنی  $\lambda = h/p_F$ ، قابل مقایسه با  $n^{-\frac{1}{3}}$ ، یعنی فاصله‌ی متوسط بین الکترون‌ها، است.

معادله‌ی حالت یک گاز تبهگن را با محاسبه‌ی انرژی داخلی آن می‌توان به دست آورد. ما دو حالت خاص متناظر با الکترون‌های غیرنسبیتی و فرانسبیتی را در نظر می‌گیریم. الکترون‌ها در یک گاز تبهگن به شرطی غیرنسبیتی هستند که  $p_F \ll mc$  باشد که متناظر با  $n \ll (mc/h)^3$  است و  $h/mc = 2.4 \times 10^{-12} \text{ m}$  طول موج کامپتون<sup>۱</sup> الکترون است. در این حالت، برای به دست آوردن انرژی داخلی گاز می‌توان  $\epsilon_p = mc^2 + p^2/2m$  را در معادله‌ی

$$E = \int_0^{p_F} \epsilon_p g_s \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad (2-28)$$

قرارداد تا مقدار زیر حاصل شود

$$E = N \left[ mc^2 + \frac{3 p_F^2}{10 m} \right] \quad (2-29)$$

اکنون یادآوری می‌کنیم که برطبق معادله‌ی (۲-۱۴)، فشار در یک گاز ایده‌آل غیرنسبیتی با  $\frac{2}{3}$

برابر چگالی انرژی جنبشی آن برابر است. پس، فشار در یک گاز غیرنسبیتی، یعنی گاز تبهگن، برابر است با

$$P = n \frac{p_F^2}{\omega m} \quad (30-2)$$

با استفاده از معادله‌ی (۲-۲۷) می‌توان تکانه‌ی فرمی را برحسب چگالی الکترونی بیان کرد؛ در نتیجه معادله‌ی حالت به صورت زیر به دست می‌آید

$$P = K_{NR} n^{\frac{5}{3}} \quad K_{NR} = \frac{h^2}{\omega m} \left[ \frac{3}{8\pi} \right]^{\frac{2}{3}} \quad \text{که در آن} \quad (31-2)$$

اگر الکترون‌های تبهگن عمدتاً فرانسبیتی باشند، معادله‌ی حالت به شکل دیگری درمی‌آید. در این صورت،  $n \gg n_{QR}$  و  $n \gg (mc/h)^3$ ، رابطه‌ی تقریبی برای انرژی داخلی با قراردادن  $\varepsilon_p = pc$  در معادله‌ی (۲-۲۸) به دست می‌آید. در نتیجه داریم

$$E = N \frac{3}{4} p_F c \quad (32-2)$$

و فشار که از معادله‌ی (۲-۱۵) به دست می‌آید، با  $\frac{1}{3}$  چگالی انرژی جنبشی گاز برابر است:

$$P = n \frac{1}{4} p_F c \quad (33-2)$$

نهایتاً معادله‌ی حالت به صورت زیر در می‌آید

$$P = K_{UR} n^{\frac{4}{3}} \quad K_{UR} = \frac{hc}{4} \left[ \frac{3}{8\pi} \right]^{\frac{1}{3}} \quad \text{که در آن} \quad (34-2)$$

از معادله‌های (۲-۳۱) و (۲-۳۴) چنین استنباط می‌شود که فشار یک گاز تبهگن با چگالی افزایش می‌یابد، ولی موقعی که ذره‌ها فرانسبیتی می‌شوند، سرعت این افزایش کم‌تر می‌شود. در بخش ۶-۱ خواهیم دید که این معادله اهمیت زیادی در پایداری کوتوله‌های سفید دارد.

### نمودار چگالی - دما

دانستن این موضوع که الکترون‌ها چه موقعی تبهگن و نسبیتی می‌شوند، در نظریه‌ی تحول ستاره‌ها بسیار مهم است. با تغییر کردن دما و چگالی، معادله‌ی حالت به آرامی تغییر می‌کند و

اگر الکترون‌ها کلاسیکی یا تبهگن، و غیرنسبیتی یا فرانسیتی، باشند این معادله به شکل ساده‌ای در می‌آید. برای مثال، اگر  $n \gg n_{QUR}$  و  $n \gg (mc/h)^3$  باشد، الکترون‌ها فرانسیتی و تبهگن هستند و معادله‌ی حالت آن‌ها به صورت  $P = K_{UR} n^{\frac{4}{3}}$  است. اگر دما افزایش و چگالی کاهش پیدا کند، به ازای  $n \ll n_{QUR}$  و  $kt \gg mc^2$ ، الکترون‌ها کلاسیکی و فرانسیتی می‌شوند و معادله‌ی حالت آن‌ها به صورت  $P = nkT$  است.

حالت‌های کلاسیکی، کوانتومی، غیرنسبیتی و فرانسیتی الکترون‌ها در یک گاز ایده‌آل در شکل ۲-۲ نشان داده شده است. با تقریب اول، خط‌های مرزی بین حالت‌های مختلف نمودار  $n-T$ ، با چهار معادله‌ی زیر مشخص می‌شوند

$$n = n_{QNR} \approx 2 \times 10^{21} T^{\frac{3}{2}} \text{ m}^{-3}$$

$$n = n_{QUR} \approx 8 \times 10^6 T^3 \text{ m}^{-3}$$

$$n = (mc/h)^3 \approx 7 \times 10^{34} \text{ m}^{-3}$$

$$T = mc^2/k \approx 6 \times 10^9 \text{ K}$$

شکل ۲-۲ نشان می‌دهد که گازهای الکترونی چگال به شرطی تبهگن هستند که زیاد داغ نباشند، و ضمناً گازهای الکترونی داغ به شرطی کلاسیکی هستند که زیاد چگال نباشند.

در عمل، گاز الکترونی ایده‌آل نیست زیرا الکترون‌ها برهم کنش می‌کنند. تصحیح اساسی معادله‌ی حالت معمولاً به خاطر برهم کنش الکتروستاتیکی بین الکترون‌ها و یون‌ها صورت می‌گیرد.

در یک گاز کلاسیکی وقتی چگالی افزایش می‌یابد، این تصحیح اهمیت بیش‌تری پیدا می‌کند. این موضوع، بستگی نسبت انرژی الکتروستاتیکی برهم کنش و انرژی جنبشی گرمایی، به چگالی را نشان می‌دهد. این نسبت تقریباً برابر است با

$$\frac{E_{ES}}{kT} \approx \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 kT} n^{\frac{1}{3}} \quad (2-35)$$

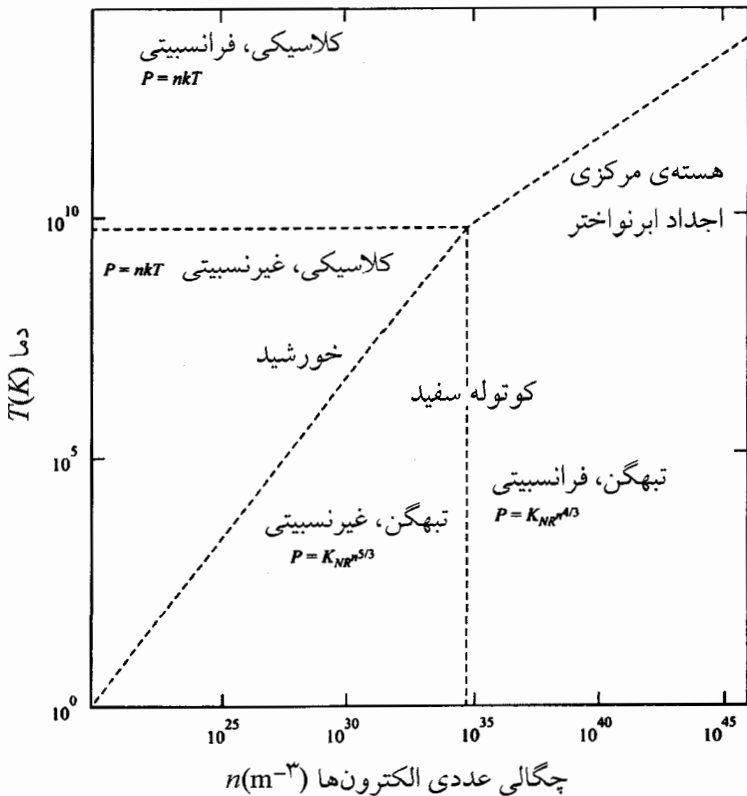
که در آن  $Z$  بار روی یون و  $n^{\frac{1}{3}}$  فاصله‌ی نوعی بین یک یون و یک الکترون است.

برعکس، تصحیح الکتروستاتیکی در چگالی بالا در یک گاز تبهگن، از اهمیت کم‌تری

برخوردار است. در این حالت، انرژی جنبشی نوعی الکترون‌ها از تکانه‌ی فرمی تعیین می‌شود که آن هم به چگالی بستگی دارد؛ معادله‌ی (۲-۲۷) را ببینید. اگر الکترون‌ها غیرنسبیتی باشند، نسبت انرژی الکتروستاتیکی به انرژی جنبشی تقریباً برابر است با

$$\frac{E_{ES}}{p_F^2 / 2m} \approx \frac{Ze^2 n^{\frac{1}{3}}}{4\pi\epsilon_0 p_F^2 / 2m} \approx \frac{Ze^2 2m}{4\pi\epsilon_0 h^2} n^{-\frac{1}{3}} \quad (2-36)$$

بنابراین، وقتی چگالی یک گاز تبهگن افزایش می‌یابد، اهمیت برهم‌کنش‌های الکتروستاتیکی کم‌تر می‌شود و می‌توان از تقریب گاز ایده‌آل استفاده کرد.



شکل ۲-۲ معادله‌ی حالت یک گاز الکترونی ایده‌آل در دمای  $T$  و چگالی  $n$  الکترون در هر مترمکعب. مقادیر نوعی برای دما و چگالی الکترون‌ها در یک فلز معمولی، در خورشید، در یک کوتوله‌ی سفید و در هسته‌ی آهنی یک ستاره تحول یافته درست پیش از ابرنواختر شدن.

## الکترون‌ها در خورشید

نقش متغیر الکترون‌ها در تحول ستاره‌ها را می‌توان با در نظر گرفتن الکترون‌ها در خورشید، نشان داد. فعلاً برطبق مدل‌های نظری خورشید، مرکز خورشید شامل الکترون‌هایی با چگالی تقریبی  $8 \times 10^{31} \text{ m}^{-3}$  در دمای تقریبی  $1.6 \times 10^7 \text{ K}$  است. اگر این دما را در معادله‌ی (۲-۲۲) قرار دهیم، چگالی کوانتومی الکترون‌ها  $1.5 \times 10^{32} \text{ m}^{-3}$  به دست می‌آید که بیش‌تر از چگالی واقعی آن‌ها است. این امر نشان می‌دهد که الکترون‌ها را در مرکز خورشید می‌توان به صورت یک گاز کلاسیکی در نظر گرفت، اما برای بررسی دقیق‌تر باید تصحیحات کوچک مربوط به تبهگنی را وارد کنیم.

هنگامی که خورشید تحول پیدا می‌کند، مقدار هیدروژن در مرکز آن کاهش و مقدار هلیوم افزایش می‌یابد. ظاهراً سوختن هیدروژن منحصر به پوسته‌ی اطراف یک هسته‌ی مرکزی هلیومی کوچک اما در حال رشد است. مدل‌های تحول نشان می‌دهند که دما تا حدود  $2 \times 10^7 \text{ K}$  افزایش می‌یابد و چگالی الکترونی به حدود  $3 \times 10^{32} \text{ m}^{-3}$  می‌رسد. در این صورت اثرهای تبهگنی الکترونی بسیار مهم می‌شود زیرا چگالی کوانتومی در این دما یعنی مقدار  $2 \times 10^{32} \text{ m}^{-3}$  قابل مقایسه با چگالی واقعی الکترون‌ها است.

وقتی خورشید در نمودار هرتز شپرونک - راسل از رشته‌ی اصلی به طرف ناحیه‌ی غول سرخ متحول می‌شود (شکل ۱-۶)، مدل‌های تحول پیشگویی می‌کنند که یک هسته‌ی مرکزی هلیومی با دمای تقریبی  $10^8 \text{ K}$  و چگالی الکترونی  $3 \times 10^{34} \text{ m}^{-3}$  به وجود می‌آید. چگالی کوانتومی در این دما  $2 \times 10^{33} \text{ m}^{-3}$  است که در حدود یک دهم چگالی واقعی است. علی‌رغم دمای  $10^8 \text{ K}$ ، ما یک گاز تبهگن سرد داریم که اغلب الکترون‌های آن برطبق اصل طرد پائولی، حالت‌های دارای پایین‌ترین انرژی را اشغال می‌کنند.

اگرچه دمای  $10^8 \text{ K}$  برای تبهگن کردن الکترون‌ها به قدر کافی سرد است، اما برای آغاز کردن همجوشی هلیوم و تشکیل دادن کربن به قدر کافی داغ است. با توجه به مطالب بخش ۱-۴، انرژی همجوشی آزاد شده باعث افزایش انرژی گرانشی و کاهش انرژی داخلی می‌شود. اگر هسته‌ی مرکزی خورشید شامل ماده ناتبهگن باشد، سازوکار مهار همجوشی مورد بحث در

بخش ۱-۴ عملی می‌شود؛ اگر انرژی همجوشی نتواند فرار کند، هسته‌ی مرکزی منبسط و سرد می‌شود، و آهنگ همجوشی کاهش می‌یابد. با وجود این، وقتی همجوشی هلیوم در خورشید آغاز می‌شود، هسته‌ی مرکزی آن شامل گاز کلاسیکی یون‌ها و گاز تبهگن الکترون‌ها می‌شود، که این گاز الکترونی قسمت اعظم فشار را تولید می‌کند. رها شدن انرژی مازاد همجوشی در این ماده، با یک انبساط و کاهش در انرژی الکترون‌های تبهگن همراه است، در حالی که دما به طور قابل ملاحظه کاهش پیدا نمی‌کند. در نتیجه آهنگ همجوشی مهار نمی‌شود. بنابراین، سوختن هلیوم در خورشید باعث آزاد شدن انفجار انرژی به صورت فرار گرما به نام درخش هلیومی می‌شود؛ توان قله‌ی این درخش ممکن است  $10^{11}$  برابر درخشندگی فعلی خورشید باشد. اما فقط کسری از این انرژی به صورت تابش فرار می‌کند، و قسمت اعظم انرژی باعث انبساط سریع هسته‌ی مرکزی خورشید می‌شود که تبهگنی الکترونی را افزایش می‌دهد. ظاهراً همجوشی هلیوم به طریق مهار شده در هسته‌ی مرکزی کم‌تر چگال ماده ناتبهگن صورت می‌گیرد.

خورشید جرم کافی برای انجام فرایند بعد از سوختن هلیوم را ندارد. لذا انتظار می‌رود که پایان حیات خورشید به صورت یک کوتوله‌ی سفید خنثی باشد که قسمت اعظم آن کربن و اکسیژن است. جرم این کوتوله‌ی سفید نامعلوم است زیرا تلفات جرم آن در هنگام تبدیل شدن به غول سرخ و تبدیل شدن به سحابی سیاره‌ای معلوم نیست. اما اگر یک کوتوله‌ی سفید با جرم  $0.5M_{\odot}$  تشکیل شود، چگالی مرکزی آن از مرتبه‌ی  $10^9 \text{ kg m}^{-3}$  و دمای اولیه آن بعد از کامل شدن سوختن هلیوم، از مرتبه  $10^8 \text{ K}$  خواهد بود. در مرکز این کوتوله‌ی سفید الکترون‌ها تبهگن و بخشی از آن‌ها نسبی می‌شوند. در واقع، یک گاز الکترونی با چگالی عددی  $3 \times 10^{35} \text{ m}^{-3}$ ، با تکانه‌ی فرمی به اندازه‌ی  $0.8mc$  و با انرژی فرمی به مقدار  $1.3mc^2$  تشکیل می‌شود؛ برطبق معادله‌های (۲-۲۲) و (۲-۲۴)، چنین گازی تا زمانی که دمایش کم‌تر از  $10^9 \text{ K}$  بماند، تبهگن خواهد بود. برخلاف الکترون‌ها، یون‌های کربن در کوتوله‌ی سفید، ذره‌های پرجرم با طول موج‌های دوبروی کوتاه، هستند. آن‌ها یک سیستم کلاسیکی با انرژی گرمایی متوسط  $\frac{1}{2}kT$  برای هر درجه‌ی آزادی کلاسیکی تشکیل می‌دهند، که وقتی انرژی به

فضا فرار می‌کند، این سیستم به آرامی سرد می‌شود. گرانش تمایل دارد یون‌ها و الکترون‌ها را متراکم کند، اما عمدتاً الکترون‌ها در مقابل گرانش مقاومت می‌کنند. در واقع یک کوتوله‌ی سفید با گرادیان فشار ایجاد شده در یک گاز تبهگن، که بخشی از آن مربوط به الکترون‌های نسبیستی است، حفظ می‌شود.

### الکترون‌ها در ستاره‌های پرجرم

الکترون‌ها در ستاره‌های پرجرم نقش متفاوتی را نسبت به خورشید بازی می‌کنند. ابتدا باید توجه کرد که ستاره‌های پرجرم می‌توانند پیش از تأثیر تبهگنی الکترونی روی تحول آن‌ها، شدیداً متحول شوند. برای فهمیدن این موضوع، معادله‌ی (۲-۲۵) نشان می‌دهد که در هسته‌ی مرکزی یک ستاره به جرم  $M$  و شعاع  $R$ ، دمای داخلی ایجاد شده توسط یک گاز یونیده‌ی کلاسیکی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$kT \approx \frac{GM\bar{m}}{3R} \propto M^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{1}{3}}$$

این معادله نشان می‌دهد که وقتی ستاره منقبض می‌شود، دمای آن افزایش می‌یابد، اما اگر جرم  $M$  ستاره بیش‌تر باشد، ستاره در چگالی جرمی کم‌تر  $\rho$  به آن دما می‌رسد. بنابراین، وقتی سوخت‌های هسته‌ای در یک ستاره‌ی پرجرم شروع به سوختن می‌کنند، الکترون‌ها کم‌تر تبهگن می‌شوند زیرا سوختن در چگالی کم‌تری صورت می‌گیرد. مخصوصاً، مدل‌های نظری نشان می‌دهند که ستاره‌ای با جرم بیش‌تر از  $11M_{\odot}$  به طور عادی در تمام مراحل سوختن گرماهسته‌ای، بدون تأثیر روی تبهگن شدن الکترون‌ها، تحول پیدا می‌کند.

با وجود این، در پایان تحول ستاره‌های بسیار پرجرم، تبهگنی الکترونی نقش جالبی را بازی می‌کند. ظاهراً یک هسته‌ی مرکزی آهنی تشکیل می‌شود. وقتی انرژی بیش‌تری از همجوشی هسته‌ای تولید نمی‌شود، این هسته‌ی مرکزی منقبض می‌شود و الکترون‌ها تبهگن می‌شوند. هر چه میزان ذخیره‌ی آهن بیش‌تر شود، جرم این هسته‌ی تبهگن نیز افزایش می‌یابد و هنگامی که جرم آن از جرم چاندارسکار (حدود  $1.4M_{\odot}$ ) بیش‌تر شد، سریعاً رمبیده می‌شود. قسمتی از انرژی آزاد شده از این رمبش، احتمال پرتاب لایه‌های خارجی‌تر ستاره به صورت یک ابرنواختر را بالا می‌برد. منشاء این ناپایداری را باید در هسته‌ی آهنی پیش از رمبش جستجو کرد.



مدل‌های نظری برای ستاره‌های با تحول بالا نشان می‌دهند که پیش از رمبش، هسته‌ی آهنی دمای تقریبی  $8 \times 10^9 \text{ K}$  و چگالی تقریبی  $4 \times 10^{12} \text{ kg m}^{-3}$  را دارد. به آسانی می‌توان نشان داد که الکترون‌های هسته‌ی مرکزی ستاره در این مرحله تبهگن و عمدتاً فرانسیتی هستند. اولاً، تراکم الکترون تقریباً  $10^{29} \text{ m}^{-3}$  است که نشان می‌دهد تکانه‌ی فرمی آن باید حدود  $12 \text{ mc}$  باشد. ثانیاً، برطبق معادله‌ی (۲-۲۴)، تراکم کوانتومی الکترون‌های فرانسیتی در دمای  $8 \times 10^9 \text{ K}$  در حدود ۱۰۰۰ برابر کم‌تر از تراکم واقعی است. بنابراین، گازی از الکترون‌های تبهگن داریم که برطبق اصل طرد پائولی حالت‌های دارای پایین‌ترین انرژی را اشغال می‌کنند. اما چون چگالی بسیار زیاد است، اغلب این الکترون‌ها فرانسیتی‌اند؛ در واقع، انرژی متوسط آن‌ها  $9 \text{ mc}^2$  است. رمبیده شدن هسته‌ی مرکزی ستاره نتیجه‌ی مستقیم طبیعت فرانسیتی گاز الکترونی است که تلاش می‌کند ستاره را حفظ کند. همان‌طور که در بخش ۱-۲ بحث شد، وقتی فشار گاز ذرات فرانسیتی با گرانش مقابله می‌کند، تعادل هیدروستاتیکی به هم می‌خورد. در واقع، به طور صریح در بخش ۶-۱ نشان خواهیم داد که گاز الکترونی تبهگن فرانسیتی نمی‌تواند جرم بیش‌تر از  $1/4 M_{\odot}$  را حفظ کند.

## ۲-۳ فوتون‌ها در ستاره‌ها

یک ستاره تقریباً شامل ماده و تابشی است که در تعادل ترمودینامیکی‌اند. در واقع، فشار ناشی از تابش در داخل ستاره همان اهمیتی را دارد که فشار ناشی از الکترون‌ها و یون‌ها دارد. به این دلیل، بعضی خواص تابش جسم سیاه، یا به عبارت دیگر، خواص یک گاز فوتونی در حال تعادل ترمودینامیکی را مرور می‌کنیم.

## گاز فوتونی

تابش الکترومغناطیسی در حال تعادل در یک کاواک (حفره) جسم سیاه را می‌توان مانند گاز ایده‌آل فوتون‌ها در نظر گرفت. این گاز ساده‌ترین گاز ایده‌آل است زیرا تمام ذرات آن با یک سرعت، یعنی با سرعت نور، حرکت می‌کنند. خاصیت غیرعادی گاز فوتونی این است که

تعداد ذرات آن می‌تواند تغییر کند؛ فوتون‌ها، بوزون‌های با جرم صفر هستند که می‌توانند به وجود بیایند و از بین بروند. یادآوری می‌کنیم که تغییر انرژی داخلی هر گازی از معادله‌ی (۷-۲) به دست می‌آید

$$dE = TdS - PdV + \mu dN$$

که در آن جمله‌ی سوم شامل پتانسیل شیمیایی  $\mu$  و تعداد ذرات  $N$  است که اثر تغییر تعداد ذره‌ها را توصیف می‌کند. در یک گاز فوتونی،  $N$  آزادانه می‌تواند تغییر کند؛ به ویژه، فوتون‌ها از بین می‌روند یا به وجود می‌آیند تا تعادل برقرار شود. برای مثال، در انرژی ثابت  $E$  و حجم ثابت  $V$ ، تعداد فوتون‌ها آنقدر تغییر می‌کند تا آنتروپی  $S$  بیشینه شود. این تعادل را با رابطه زیر مشخص می‌کنند

$$\frac{\partial S}{\partial N} = -\frac{\mu}{T} = 0 \quad (۳۷-۲)$$

به طور مشابه، به ازای  $T$  و  $V$  ثابت، فوتون‌ها از بین می‌روند یا به وجود می‌آیند تا انرژی آزاد  $F = E - TS$  بیشینه شود. چون

$$dF = -SdT - PdV + \mu dN \quad (۳۸-۲)$$

لذا چنین تعادلی را با مساوی صفر قرار دادن  $\partial F / \partial N$  یا  $\mu$ ، مشخص می‌کنند. بنابراین، یک گاز فوتونی در حال تعادل دارای پتانسیل شیمیایی صفر است. خواص این گاز را می‌توان با قرار دادن  $\mu = 0$  در تابع توزیع بوز-اینشتین [معادله‌ی (۹-۲)] شناخت.

تعداد فوتون‌ها در حالت‌های با تکانه‌ی بین  $p$  و  $p + dp$  را با استفاده از معادله‌ی (۳-۲) برای چگالی حالت‌ها و معادله‌ی (۹-۲) برای تابع توزیع، می‌توان به دست آورد

$$N(p) dp = \frac{1}{\exp(\epsilon_p / kT) - 1} g_s \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad (۳۹-۲)$$

در این رابطه  $\epsilon_p = pc$  و  $g_s = 2$  است زیرا فوتون یک ذره با جرم صفر و دارای دو حالت قطبش است. تعداد فوتون‌ها در واحد حجم برابر است با

$$n = \frac{1}{V} \int_0^\infty N(p) dp = 8\pi \left[ \frac{kT}{hc} \right]^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx \quad (۴۰-۲)$$

که در آن یک متغیر انتگرال بدون بعد به صورت  $x = pc/kT$  را وارد کرده‌ایم. به طور مشابه، انرژی واحد حجم در گاز فوتونی برابر است با

$$u = \frac{1}{V} \int_0^{\infty} \epsilon_p N(p) dp = 8\pi \left[ \frac{kT}{hc} \right]^3 kT \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (41-2)$$

انتگرال‌های معادلات (۲-۴۰) و (۲-۴۱) را می‌توان به تابع ویژه‌ای به نام تابع زتای ریمان<sup>۱</sup> با نماد  $\zeta$  مربوط کرد. بسط دو جمله‌ای زیر را در نظر می‌گیریم

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \int_0^{\infty} x^2 [e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots] dx$$

و اگر از هر جمله‌ی آن انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2 \left[ \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots \right] = 2\zeta(3) = 2,404$$

به طور مشابه داریم

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = 6 \left[ \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right] = 6\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}$$

بنابراین، معادله‌ی (۲-۴۰) برای چگالی تعداد فوتون‌ها و معادله‌ی (۲-۴۱) برای چگالی انرژی فوتون‌ها را می‌توان به صورت زیر ساده کرد

$$n = bT^3 \quad b = 2,404 \times \frac{8\pi k^3}{h^3 c^3} = 2,03 \times 10^7 \text{ K}^{-3} \text{ m}^{-3} \quad (42-2)$$

و

$$u = aT^4 \quad a = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} = 7,565 \times 10^{-16} \text{ JK}^{-4} \text{ m}^{-3} \quad (43-2)$$

این دو معادله نشان می‌دهند که  $u = 2,70nkT$ . بنابراین، انرژی متوسط یک فوتون در یک گاز فوتونی در دمای  $T$  مساوی با  $2,70kT$  است؛ مقادیر متناظر برای ذرات غیرنسبیتی و فرانسبیتی در یک گاز کلاسیکی رقیق، به ترتیب  $\frac{3}{2}kT$  و  $3kT$  هستند؛ به پاراگراف بعد از معادله‌ی (۲-۱۹) رجوع کنید.

فوتون‌ها فشاری ایجاد می‌کنند که فشار تابش نامیده می‌شود. برطبق معادله‌ی (۲-۱۵)، فشار ناشی از ذرات فرانسیتی  $\frac{1}{3}$  چگالی انرژی جنبشی است، لذا فشار تابش در دمای  $T$  برابر است با

$$P_r = \frac{1}{3}u = \frac{1}{3}aT^4 \quad (۲-۴۴)$$

پیدا کردن رابطه‌ی بین خاصیت‌های یک گاز فوتونی و خاصیت‌های یک جسم سیاه تابش کننده، آسان است. یک جسم سیاه تابش کننده در دمای  $T$  را با ایجاد یک سوراخ کوچک در سطح محصور کننده‌ی یک گاز فوتونی در حال تعادل در دمای  $T$ ، می‌توان ساخت. فوتون‌ها مانند ذرات گاز فوران کننده‌ی معمولی با آهنگ  $nc/4$  از واحد سطح فرار می‌کنند؛ یعنی، آن‌ها به طور متوسط با تندی  $\frac{1}{4}c$  تندی واقعی ذره‌ها به طرف سوراخ حرکت یا از آن فرار می‌کنند. به طور مشابه، آهنگ فرار انرژی از واحد سطح،  $uc/4$  است. این مقدار را می‌توان مساوی با  $\sigma T^4$ ، یعنی توان تابش شده از واحد سطح یک جسم سیاه، قرار داد تا مقدار ثابت استفان به دست بیاید

$$\sigma = ac/4 = 5,67 \times 10^{-8} \text{WK}^{-4}\text{m}^{-2} \quad (۲-۴۵)$$

فوتون‌ها با تمام انرژی‌ها یا بسامدهای ممکن تابش می‌شوند. واضح است که شدت تابش شده با یک بسامد خاص،  $c/4$  برابر چگالی انرژی فوتون در این بسامد است. اگر از معادله‌ی (۲-۳۹) و  $\epsilon_p = pc = hv$  استفاده کنیم، فرمول پلانک<sup>۱</sup> برای شدت تابش شده در گستره‌ی بسامدی  $\nu$  و  $\nu + d\nu$  به دست می‌آید

$$I_\nu d\nu = \frac{c}{4} u_\nu d\nu = \frac{c}{4} \frac{hv}{\exp(hv/kT) - 1} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \quad (۲-۴۶)$$

این معادله نشان می‌دهد که شدت  $I_\nu$  و چگالی انرژی  $u_\nu$  یک بیشینه در بسامد  $\nu = 2,82kT/h$  دارند. به عبارت دیگر، مهم‌ترین انرژی یک فوتون در تابش با دمای  $T$  مساوی با  $2,82kT$ ، یعنی اندکی بیش‌تر از انرژی متوسط  $2,70kT$  است.

## فشار تابش در ستاره‌ها

برای فهمیدن ویژگی‌های کمی تابش گرمایی، خاصیت‌های تابش در دو دمای خاص، یعنی دمای فوتوسفر (فوتون کره) خورشید ( $6 \times 10^3 \text{ K}$ ) و دمای نوعی داخل خورشید ( $6 \times 10^6 \text{ K}$ ) را درج کرده‌ایم.

باید توجه کرد که فشار تابش در سطح خورشید با توجه به استانداردهای زمینی بسیار کم است، مثلاً مانند فشاری است که یک لایه کره‌ی مالیده شده بر روی نان به نان وارد می‌کند. در داخل خورشید، فشار تابش بسیار زیاد و بیش از یک میلیون برابر فشار جو زمین است. به هر حال، این فشار بسیار کم‌تر از فشار لازم برای حفظ کردن خورشید در مقابل گرانش است، برطبق معادله‌ی (۱-۲۹)، این فشار  $10^{14} \text{ Pa}$  است. بنابراین، در بخش ۱-۴ حق داشتیم از فشار تابش چشمپوشی و فرض کنیم که خورشید عمدتاً با فشار تولید شده از الکترون‌ها و یون‌ها حفظ می‌شود.

با وجود این، به آسانی می‌توان نشان داد که فشار تابش در ستاره‌های بسیار سنگین‌تر از خورشید را نمی‌توان فراموش کرد. برای انجام چنین کاری، معادله‌ی (۱-۱۱) نشان می‌دهد که انرژی جنبشی گرمایی یک ستاره در تعادل هیدروستاتیکی، به انرژی پتانسیل گرانشی آن بستگی دارد. این امر باعث می‌شود دمای داخلی نوعی  $T_I$  در ستاره‌ای به جرم  $M$  و شعاع  $R$ ، تقریباً متناسب با  $M/R$  باشد. چگالی الکترون‌ها و یون‌ها با  $M/R^3$  متناسب است و این ذره‌ها فشار «گازی» زیر را تولید می‌کنند

$$P_g = n_e k T_I + n_i k T_I \propto \frac{M^2}{R^4} \quad (47-2)$$

برعکس، فشار تابش از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$P_r = \frac{1}{3} a T_I^4 \propto \frac{M^4}{R^4} \quad (48-2)$$

در نتیجه، داریم

$$\frac{P_r}{P_g} \propto M^2 \quad (49-2)$$

جدول ۱-۲ خاصیت‌های گرمایی تابش الکترومغناطیسی در دو دما\*

خاصیت	دمای سطح خورشید	دمای داخل خورشید
	$6 \times 10^3 \text{ K}$	$6 \times 10^6 \text{ K}$
انرژی فوتونی متوسط (eV)	۱٫۴	$1/4 \times 10^3$
چگالی فوتون ( $\text{m}^{-3}$ )	$4 \times 10^{18}$	$4 \times 10^{27}$
چگالی انرژی تابش ( $\text{J m}^{-3}$ )	۱	$1 \times 10^{12}$
فشار تابش ( $\text{Pa}$ )	۰٫۳۳	$0.33 \times 10^{12}$
شدت تابش ( $\text{MW m}^{-2}$ )	۷۳	$73 \times 10^{12}$

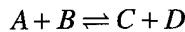
\* دمای  $6 \times 10^3 \text{ K}$  دمای نوعی سطح خورشید و  $6 \times 10^6 \text{ K}$  دمای نوعی داخل خورشید است.

بنابراین، نسبت فشار تابشی تولید شده توسط فوتون‌ها به فشار «گازی» تولید شده توسط الکترون‌ها و یون‌ها، با جرم ستاره افزایش پیدا می‌کند. این نسبت برای خورشید کم است. اما در فصل ۵ خواهیم دید که اگر جرم ستاره بیش از  $50 M_{\odot}$  باشد، فشار تابش بسیار بیش‌تر از فشار «گاز» خواهد بود. علاوه بر این، یادآوری می‌کنیم که اگر فشار حفظ‌کننده ستاره توسط ذرات فرانسبیتی ایجاد شود، تعادل هیدروستاتیکی یک سیستم خود گرانش به هم می‌خورد. بنابراین، فشار تابشی احتمالاً اثر ناپایدار کننده روی ستاره‌های پر جرم دارد.

## ۲-۴ معادله‌ی ساها<sup>۱</sup>

بر اثر تابش، مولکول‌ها تجزیه، اتم‌ها یونیده و هسته‌های اتم‌ها توسط نور تجزیه می‌شوند. سازوکارهای واکنش‌های مورد نظر پیچیده و متنوع‌اند. با وجود این، اگر فرض کنیم ماده و تابش در تعادل ترمودینامیکی هستند، نتایج ساده و مفیدی به دست می‌آیند. برای نشان دادن ایده‌های کلی، فرض می‌کنیم هیدروژن در حال تعادل با تابش است و معادله‌ی ساها برای یونیده شدن هیدروژن اتمی را به دست می‌آوریم.

ما این کار را با در نظر گرفتن اهمیت فیزیکی پتانسیل شیمیایی آغاز می‌کنیم. در سیستمی که فقط یک نوع ذره وجود دارد، ذره‌ها از ناحیه‌ی یا پتانسیل شیمیایی بالا به طرف ناحیه‌ی یا پتانسیل شیمیایی پایین حرکت می‌کنند تا پتانسیل شیمیایی در همه جا یکسان شود. به طور مشابه، اگر سیستم شامل انواع ذره‌های  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  باشد که از طریق واکنش‌های زیر به یکدیگر تبدیل می‌شوند



موقعی تعادل ترمودینامیکی برقرار می‌شود که مجموع پتانسیل‌های شیمیایی ذره‌های  $A$  و  $B$  با مجموع پتانسیل‌های شیمیایی ذره‌های  $C$  و  $D$  برابر باشد، یعنی

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(C) + \mu(D)$$

از این ایده‌ها برای یونیده کردن هیدروژن می‌توان استفاده کرد.

الکترون در اتم هیدروژن می‌تواند حالت‌های مقید با انرژی‌های مجزای  $\epsilon_n$  را که با عدد کوانتومی  $n=1, 2, \dots$  مشخص می‌شوند، اشغال کند. وقتی اتم یونیده می‌شود، الکترون می‌تواند حالت‌های نامقید با تکانه‌ی  $p$  و انرژی  $\epsilon_p$  را اشغال کند. این ترازهای انرژی در شکل ۲-۳ نشان داده شده‌اند.

برهم کنش با فوتون‌ها می‌تواند باعث برانگیخته و یونیده شدن اتم هیدروژن شود. در واقع، در دماهای بالا یک وضعیت پویا به وجود می‌آید که اتم‌ها به طور مداوم برانگیخته و یونیده می‌شوند، و الکترون‌ها به طور مداوم گیر می‌افتند و اتم‌ها مجدداً برانگیخته می‌شوند. اگر فرض کنیم که اتم‌ها، یون‌ها، الکترون‌ها و فوتون‌ها در تعادل ترمودینامیکی هستند، می‌توانیم کسر اتم‌هایی را که برانگیخته و یونیده می‌شوند، پیدا کنیم. به ویژه، تعداد اتم‌های هیدروژن در حالت‌های با انرژی  $\epsilon_n$  را با توجه به واکنش‌های تأخیری زیر می‌توان پیدا کرد

$$\gamma + H_n \rightleftharpoons e^- + p \quad (50-2)$$

چون پتانسیل شیمیایی فوتون صفر است، تعادل ترمودینامیکی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mu(H_n) = \mu(e) + \mu(p) \quad (51-2)$$

اگر چگالی به قدر کافی کم باشد، می‌توانیم فرض کنیم که الکترون‌ها، پروتون‌ها و اتم‌های هیدروژن، مانند ذرات کلاسیکی در یک گاز ایده‌آل رفتار می‌کنند؛ و اگر آن‌ها غیرنسبیتی

باشند، برای برآورد پتانسیل‌های شیمیایی می‌توان از معادله‌ی (۲-۲۱) استفاده کرد:

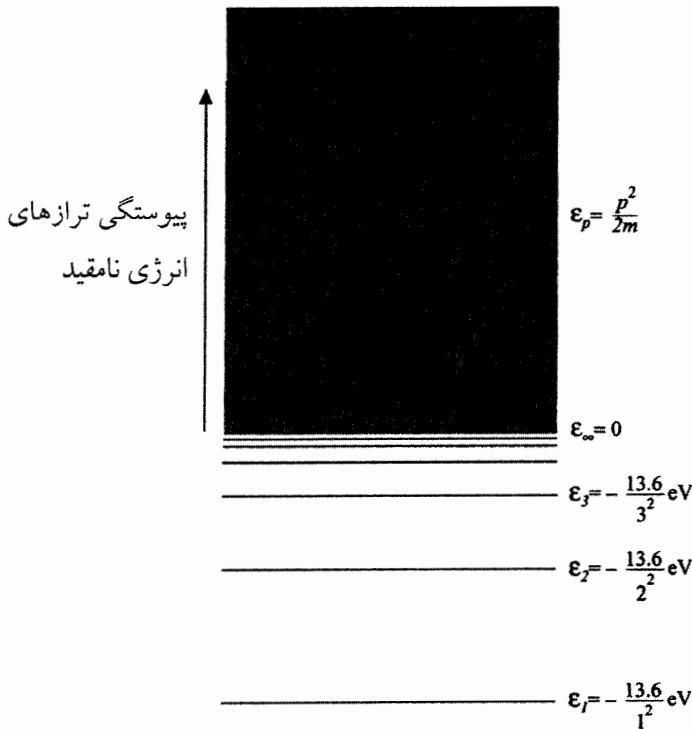
$$\mu(e) = m_e c^2 - kT \ln \left[ \frac{g_e n_{Qe}}{n_e} \right] \quad (۵۲-۲)$$

$$\mu(p) = m_p c^2 - kT \ln \left[ \frac{g_p n_{Qp}}{n_p} \right] \quad (۵۳-۲)$$

$$\mu(H_n) = m(H_n) c^2 - kT \ln \left[ \frac{g(H_n) n_{Qp}}{n(H_n)} \right] \quad (۵۴-۲)$$

در این معادله‌ها  $n_e$  و  $n_p$  چگالی‌های عددی الکترون‌ها و پروتون‌ها، و  $n(H_n)$  چگالی عددی اتم‌های هیدروژن درحالتی با انرژی  $\epsilon_n$  هستند؛ جرم چنین اتمی،  $m(H_n)$ ، برابر است با

$$m(H_n) c^2 = m_e c^2 + m_p c^2 + \epsilon_n$$



شکل ۲-۳ ترازهای انرژی مقید و نامقید اتم هیدروژن.



چگالی‌های عددی کوانتومی را با پانویس  $Q$  نشان داده‌ایم. چون این چگالی‌های عددی به جرم ذره بستگی دارند (۲-۲۲)، چگالی‌های عددی کوانتومی برای اتم‌ها و یون‌های هیدروژن تقریباً برابرند و آن‌ها را با  $n_{Qp}$  نشان می‌دهیم. تعداد حالت‌های کوانتومی با انرژی معین را با  $g$  نشان می‌دهیم. چون الکترون‌ها و پروتون‌ها هر دو دارای اسپین  $\frac{1}{2}$  هستند،  $g_e = 2$  و  $g_p = 2$  است. تعداد حالت‌های اتم هیدروژن  $g(H_n)$  با انرژی  $\epsilon_n$ ، از تبهگنی ناشی از اسپین و تکانه‌ی زاویه‌ای مدار، نسبی الکترون و پروتون در اتم تعیین می‌شود. چندین حالت تکانه زاویه‌ای مدار با یک انرژی  $\epsilon_n$  می‌توانند وجود داشته باشند؛ به ازای  $n=2$ ، سه حالت  $p$  و یک حالت  $s$  وجود دارد. به طور کلی، تعداد کل حالت‌های اتم هیدروژن با انرژی  $\epsilon_n$ ، مساوی با  $g(H_n) = g_n g_e g_p = n^2$  است که در آن  $g_n = n^2$  است.

با قرار دادن این پتانسیل‌های شیمیایی در شرط (۲-۵۱)، معادله‌ی ساها برای چگالی‌های تعادلی الکترون‌ها، پروتون‌ها و اتم‌های هیدروژن در یک گاز ایده‌آل با دمای  $T$ ، به دست می‌آید. در نتیجه داریم

$$\frac{n(H_n)}{n_e n_p} = \frac{g_n}{n_{Qe}} \exp[-\epsilon_n / kT] \quad (۵۵-۲)$$

در این رابطه چگالی عددی کوانتومی الکترون‌ها برابر است با

$$n_{Qe} = \left[ \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{\frac{3}{2}} \approx 2 \times 10^{21} T^{\frac{3}{2}} \text{ m}^{-3} \quad (۵۶-۲)$$

چون معادله‌ی ساها (۲-۵۵) بسیار مهم است، برای درک معنی فیزیکی آن با فراست بیش‌تر، به طریق دیگری نیز آن را به دست می‌آوریم. معادله‌ی ساها نتیجه‌ی یک وضعیت پویا است که در آن آهنگ واکنش  $\gamma + H_n \rightarrow e^- + p$  با آهنگ واکنش  $e^- + p \rightarrow \gamma + H_n$  متناسب برابری می‌کند. چون آهنگ واکنش اول با  $n(H_n)$  و آهنگ واکنش دوم با  $n_e n_p$  متناسب است، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{n(H_n)}{n_e n_p} = f_n(T)$$

در این رابطه  $f_n(T)$  تابعی از دما است. ما انتظار داریم  $f_n(T)$  با احتمال مقید بودن یک

الکترون نسبت مستقیم، و با احتمال نامقید بودن یک الکترون نسبت معکوس داشته باشد. برای نشان دادن درستی این مطلب، یک الکترون و یک پروتون را در جعبه‌ای با حجم واحد در دمای  $T$  در نظر می‌گیریم. اولاً تعداد  $g_e g_n$  حالت مقید با انرژی  $\epsilon_n$  در دسترس الکترون قرار دارد. علاوه بر این، الکترون برای قرار گرفتن در چنین حالتی، باید انرژی  $\epsilon_n$  را از محیط کسب کند، و احتمال کسب انرژی با ضریب بولتزمن  $\exp[-\epsilon_n/kT]$  متناسب است. بنابراین احتمال مقید شدن الکترون در حالتی با انرژی  $\epsilon_n$ ، متناسب است با

$$g_e g_n \exp[-\epsilon_n/kT]$$

ثانیاً، چگالی حالت‌های نامقید دسترس‌پذیر برای الکترون با تکانه‌ی بین  $p$  و  $p+dp$  و انرژی جنبشی  $\epsilon_p$ ، از معادله‌ی (۲-۳) به دست می‌آید و احتمال کسب این انرژی با  $\exp[-\epsilon_p/kT]$  متناسب است. بنابراین، احتمال نامقید بودن الکترون با هر انرژی مثبت، متناسب است با

$$\int_0^\infty \exp[-\epsilon_p/kT] g_e \frac{1}{h^3} 4\pi p^2 dp = g_e n_{Qe}$$

اگر فرض کنیم ثابت‌های تناسب این دو احتمال برابر هستند، و اگر  $f_n(T)$  را مساوی با نسبت احتمال‌ها قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{n(H_n)}{n_e n_p} = f_n(T) = \frac{g_e g_n \exp[-\epsilon_n/kT]}{g_e n_{Qe}}$$

این معادله همان معادله‌ی ساها (۲-۵۵) است.

وقتی الکترون مقید می‌شود، می‌تواند در هر یک از حالت‌های مقید مشخص شده با عدد کوانتومی  $n$  مقید باشد. چگالی عددی اتم‌های هیدروژن نایونیده، با جمع کردن برای تمام مقادیر  $n$  به دست می‌آید. با استفاده از معادله‌ی ساها (۲-۵۵) داریم

$$\frac{n(H)}{n_e n_p} = \frac{1}{n_{Qe}} \sum_{n=1}^{n=\infty} g_n \exp[-\epsilon_p/kT] \quad (۵۷-۲)$$

این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{n(H)}{n_e n_p} = \frac{Z}{n_{Qe}} \exp[E_i/kT] \quad (۵۸-۲)$$

که در آن  $E_i = -\epsilon_1 = 13.6 \text{ eV}$ ، انرژی یونش حالت پایه و  $Z$  تابع زیر است

$$Z = \sum_{n=1}^{n=\infty} g_n \exp[-(\epsilon_n - \epsilon_1)/kT] \quad (59-2)$$

توجه کنید که  $\epsilon_n - \epsilon_1$  انرژی برانگیختگی حالت  $n$ ام است. تابع  $Z$  را یک تابع پاره‌ای می‌نامند. همان‌طور که دیده می‌شود، این تابع از یک جمع واگرا به دست می‌آید. اما در عمل،  $Z$  از مرتبه‌ی واحد است زیرا جمع موقعی به پایان می‌رسد که مقدار  $n$  متناظر با حالتی باشد که گستره‌ی فضایی آن قابل مقایسه با فاصله‌ی بین ذرات گاز باشد.

بالاخره، نماد را اندکی تغییر می‌دهیم و به جای  $n_p$  مقدار  $n(\text{H}^+)$  را به کار می‌بریم. پس، برطبق معادله‌ی (۵۸-۲)، نسبت اتم‌های یونیده به اتم‌های نایونیده‌ی هیدروژن در یک گاز در دمای  $T$ ، تقریباً برابر است با

$$\frac{n(\text{H}^+)}{n(\text{H})} \approx \frac{n_{Qe}}{n_e} \exp[-E_i/kT] \quad (60-2)$$

یادآوری می‌کنیم که درجه‌ی یونش شدیداً به دما بستگی دارد. اما این درجه با چگالی عددی الکترون‌ها  $n_e$  نیز نسبت عکس دارد. نتیجه می‌گیریم که اگر چگالی گاز کاهش یابد، یونش افزایش پیدا می‌کند. پس، اگر گاز بسیار رقیق باشد، اتم‌هایی که یونیده می‌شوند، به ندرت یک الکترون را جذب می‌کنند.

برای تشریح بستگی شدید یونش به دما، از معادله‌ی (۶۰-۲) لگاریتم می‌گیریم

$$\ln \left[ \frac{n(\text{H}^+)}{n(\text{H})} \right] = F - \frac{E_i}{kT} \quad F = \ln \left[ \frac{n_{Qe}}{n_e} \right] \quad \text{که در آن} \quad (61-2)$$

در سرتاسر این بخش فرض کردیم که الکترون‌ها یک گاز کلاسیکی با شرط  $n_e \ll n_{Qe}$  تشکیل می‌دهند. بنابراین،  $F$  یک تابع مثبت است که به آرامی با دما تغییر می‌کند. برطبق معادله‌ی (۶۱-۲)، موقعی که دما از  $kT = E_i/(F+1)$  تا  $kT = E_i/(F-1)$  بالا می‌رود، نسبت  $n(\text{H}^+)/n(\text{H})$  از  $e^{-1}$  تا  $e^{+1}$  یعنی از ۰٫۳۷ تا ۲٫۷۲ افزایش می‌یابد. پس، موقعی که  $F$  بزرگ است، مانند گاز الکترونی بسیار رقیق، یونش در حوالی دمای  $kT = E_i/F$  با سرعت آغاز می‌شود.

## ۲-۵ یونش در ستاره‌ها

در این بخش بعضی نتایج بسیار مهم یونش ماده در قسمت‌های داخلی ستاره و در نواحی خارجی تر ستاره را مورد بحث قرار می‌دهیم.

### داخل ستاره‌ها

برای درک درجه‌ی یونش در قسمت‌های داخلی ستاره‌ها، برای ساده کردن موضوع، ابتدا ماده‌ای را در نظر می‌گیریم که عمدتاً از هیدروژن تشکیل شده است. چگالی عددی اتم‌های هیدروژن، پروتون‌ها (یا یون‌های  $H^+$ )، و الکترون‌ها را به ترتیب با  $n(H)$ ،  $n(H^+)$  و  $n_e$  نشان می‌دهیم. اگر از جرم الکترون‌ها چشم‌پوشی کنیم، چگالی جرمی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\rho = [n(H) + n(H^+)]m_H \quad (۲-۶۲)$$

که در آن  $m_H$  جرم اتم هیدروژن است. علاوه بر این، چگالی‌های عددی ذره‌ها را می‌توان برحسب چگالی و کسر هیدروژن یونیده شده، بیان کرد. اگر این کسر را به صورت  $x(H)$  نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم

$$n_e = n(H^+) = x(H)\rho/m_H \quad \text{و} \quad n(H) = [1 - x(H)]\rho/m_H \quad (۲-۶۳)$$

کسر اتم‌های یونیده، یعنی  $x(H)$  را می‌توان با قرار دادن معادله‌ی (۲-۶۳) در معادله‌ی ساها (۲-۶۰) و استفاده کردن از انرژی یونش  $E_i = 13.6 \text{ eV}$  به دست آورد. در نتیجه داریم

$$\frac{[1 - x(H)]}{x(H)^2} \approx \frac{\rho/m_H}{1.0 \times 10^{21} T^{3/2}} \exp[158000/T] \quad (۲-۶۴)$$

که در آن  $T$  برحسب کلوین است. در بخش ۱-۴ مدل ساده‌ای را در نظر گرفتیم که در آن خورشید به صورت کره‌ای از گاز یونیده با چگالی متوسط  $1.4 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  در دمای  $6 \times 10^6 \text{ K}$  بود. در این چگالی و دما، از معادله‌ی (۲-۶۴) مقدار  $[1 - x(H)]/x(H)^2 \approx 0.055$  به دست می‌آید که نشان می‌دهد کسر هیدروژن‌های یونیده شده یعنی  $x(H)$ ، در حدود ۹۵٪ است. در واقع، این محاسبه مقدار واقعی درجه‌ی یونش را به ما نمی‌دهد. در این چگالی،

معادله‌ی (۲-۶۴) دقیق نیست زیرا حتی اگر تعداد الکترون‌ها و یون‌های هیدروژن آنقدر کم باشد که یک گاز ایده‌آل تشکیل دهند، اتم‌های هیدروژن به قدر کافی زیادند؛ اندازه‌ی اتم‌های هیدروژن با فاصله‌ی نوعی بین ذره‌ها یعنی  $m \approx 10^{-10} \text{ m}$   $d = (\rho/m_H)^{-\frac{1}{3}}$  قابل مقایسه است. اتم‌ها شدیداً با ذرات گاز برخورد می‌کنند و احتمال یونیده شدن را افزایش می‌دهند.

اکنون ادامه‌ی یونیده شدن اتم‌های سنگین در خورشید را بررسی می‌کنیم. حتی اگر الکترون‌های داخلی این اتم‌ها بسیار مقید باشند، یونش تقریباً کامل است. علت اصلی این است که مقادیر کم این اتم‌ها که در یک گاز الکترونی رقیق غوطه‌ورند، بر اثر یونیده شدن هیدروژن به وجود آمده‌اند. برای نشان دادن این موضوع، تعداد کمی اتم کربن در یک گاز هیدروژن در دمای  $T = 6 \times 10^6 \text{ K}$  و چگالی  $\rho = 1.4 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  را که به طور کامل یونیده شده و تعداد  $n_e \approx \rho/m_H \approx 8 \times 10^{29}$  الکترون آزاد در هر مترمکعب به وجود آورده است، در نظر می‌گیریم. چون بار هسته‌ی کربن ۶ است، انرژی یونش آخرین الکترون در کربن  $Z^2$  یا  $36$  برابر انرژی یونش هیدروژن است. ما با استفاده از معادله‌ی (۲-۶۰) می‌توانیم نسبت تقریبی اتم‌های کربن کاملاً یونیده به اتم‌های کربن که فقط ۵ الکترون از دست داده‌اند، را پیدا کنیم. این نسبت که به چگالی عددی الکترون‌های تولید شده از یونش هیدروژن بستگی دارد، برابر است با

$$\frac{n(6)}{n(5)} \approx \frac{10^{21} T^{\frac{3}{2}}}{n_e} \exp[-36 \times 158000/T] \approx 10 \quad (2-65)$$

این محاسبه، مانند محاسبه‌ی قبلی، درجه‌ی دقیق یونش را به ما نمی‌دهد. اما این محاسبه نشان می‌دهد که تقریباً تمام اتم‌های داخل ستاره‌ای مانند خورشید، به طور کامل یونیده‌اند.

یونش کامل، تحلیل خواص ماده‌ی داخل ستاره‌ها را آسان می‌کند. مخصوصاً، ما می‌توانیم روابط ساده‌ای برای تعداد کل ذره‌ها و جرم متوسط آن‌ها به دست آوریم: فرض کنید  $X_1$ ،  $X_4$  و  $X_A$  کسرهای جرمی هیدروژن، هلیوم و عناصر سنگین باشند. اگر ماده یونیده نشده باشد، تعداد اتم‌های H و He و تعداد اتم‌های سنگین در واحد حجم برابر است با

$$n_1 = X_1 \rho / m_H, \quad n_4 = X_4 \rho / 4 m_H \quad \text{و} \quad n_A = X_A \rho / A m_H \quad (2-66)$$

وقتی یک اتم هیدروژن یونیده می‌شود، دو ذره ی گازی، یک پروتون و یک الکترون، تولید می‌کند. یک اتم هلیوم یونیده کامل ۳ ذره، یعنی یک هسته و دو الکترون تولید می‌کند، در حالی که یک اتم سنگین یونیده کامل با عدد جرمی  $A$  و عدد اتمی  $Z$ ، یک هسته و  $Z$  الکترون، کلاً در حدود  $A/2$  ذره تولید می‌کند. بنابراین، تعداد کل ذره‌ها در واحد حجم در یک گاز کاملاً یونیده برابر است با

$$n \approx 2n_1 + 2n_4 + \frac{A}{2}n_A = \left[ 2X_1 + \frac{3}{4}X_4 + \frac{1}{2}X_A \right] \rho / m_H$$

چون  $X_1 + X_4 + X_A = 1$ ، در نتیجه داریم

$$n \approx [1 + 3X_1 + 0.5X_4] \rho / 2m_H \quad (67-2)$$

پس، جرم متوسط ذرات گاز برابر است با

$$\bar{m} = \rho / n \approx 2m_H / [1 + 3X_1 + 0.5X_4] \quad (68-2)$$

برای مثال، مدل خورشیدی استاندارد (باکال، ۱۹۸۹) فرض می‌کند که خورشید از ماده‌ای با کسرهای جرمی  $X_1 = 0.71$ ،  $X_4 = 0.27$  و  $X_A = 0.02$  تشکیل شده است که وقتی یونیده می‌شود، گازی از ذره‌ها با جرم متوسط  $\bar{m} \approx 0.61 \text{ amu}$  تولید می‌کند. این مدل استاندارد پیشگویی می‌کند که سوختن هیدروژن در خورشید مقدار هیدروژن موجود در آن را کاهش و مقدار هلیوم موجود در آن را افزایش داده است، لذا فعلاً کسرهای جرمی آن‌ها در نواحی مرکزی خورشید در حدود  $X_1 = 0.34$ ،  $X_4 = 0.64$  و  $X_A = 0.02$  است؛ جرم متوسط ذرات این ماده  $0.85 \text{ amu}$  است.

بالاخره، بهتر است روابطی برای تعداد الکترون‌ها و تعداد یون‌ها در واحد حجم یک گاز کاملاً یونیده به دست بیاوریم. به طور مستقیم می‌توان نشان داد که این رابطه‌ها عبارت‌اند از

$$n_e \approx [1 + X_1] \rho / 2m_H \quad \text{و} \quad n_i \approx [2X_1 + 0.5X_4] \rho / 2m_H \quad (69-2)$$

### جو ستاره‌ها

با توجه به مطالب بخش ۱-۷ یادآوری می‌کنیم که ستاره‌ها را بر طبق نوع طیف آن‌ها دسته‌بندی می‌کنند. این دسته‌بندی که با حروف O، B، A، F، G، K یا M مشخص

می‌شود، عمدتاً یک شیب ثابت در دمای سطح  $30000\text{K}$  تا حدود  $3000\text{K}$  را نشان می‌دهند. اتم‌ها در جو ستاره‌ها در این دماها سریعاً یونیده می‌شوند. علاوه بر این، اگر ترکیب شیمیایی، دما و چگالی جو ستاره‌ها معلوم باشد، درجه‌ی یونش نمونه‌های اتمی مختلف را با استفاده از معادله‌ی ساها می‌توان برآورد کرد. به طور کلی عناصر فلزی ( $\text{Ca}$ ،  $\text{K}$ ،  $\text{Al}$ ،  $\text{Mg}$ ،  $\text{Na}$ ،  $\text{Li}$ ) و غیره) با انرژی یونش حدود  $5\text{eV}$  به طور غالب یونیده می‌شوند. عناصری مانند  $\text{H}$ ،  $\text{C}$ ،  $\text{N}$ ،  $\text{O}$ ،  $\text{F}$ ،  $\text{P}$ ،  $\text{S}$ ،  $\text{Cl}$ ،  $\text{Ar}$  که گستره‌ی انرژی‌های یونش آن‌ها از  $10$  تا  $20\text{eV}$  است، حتی در داغ‌ترین جو ستاره‌ها فقط به مقدار کم یونیده می‌شوند.

وضعیت کلی را با در نظر گرفتن یونش سه عنصر  $\text{H}$ ،  $\text{Na}$  و  $\text{He}$ ، که انرژی‌های یونش آن‌ها به ترتیب  $5.14$ ،  $13.6$  و  $24.6\text{eV}$  است، می‌توان فهمید. اگر این انرژی‌های یونش را در معادله‌ی ساها قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{n(\text{Na}^+)}{n(\text{Na})} \approx \frac{10^{21} T^{\frac{3}{2}}}{n_e} \exp[-60000/T] \quad (70-2)$$

$$\frac{n(\text{H}^+)}{n(\text{H})} \approx \frac{10^{21} T^{\frac{3}{2}}}{n_e} \exp[-158000/T] \quad (71-2)$$

$$\frac{n(\text{He}^+)}{n(\text{He})} \approx \frac{10^{21} T^{\frac{3}{2}}}{n_e} \exp[-286000/T] \quad (72-2)$$

ضرایب نمایی در این معادله‌ها باعث تفاوت زیاد درجه‌ی یونش این عناصرها هستند. برای مثال، در دمای  $6000\text{K}$  که دمای جو خورشید است، داریم

$$\frac{n(\text{Na}^+)}{n(\text{Na})} \approx 10^7 \frac{n(\text{H}^+)}{n(\text{H})} \quad \text{و} \quad \frac{n(\text{He}^+)}{n(\text{He})} \approx 10^{-10} \frac{n(\text{H}^+)}{n(\text{H})} \quad (73-2)$$

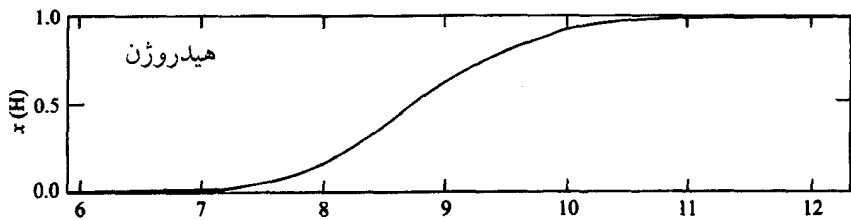
یونیده شدن عناصر فلزی نقش مؤثری را در جو ستاره‌ها بازی می‌کند. با توجه به معادله‌ی (73-2) معلوم می‌شود که ضریب یونش سدیم  $10^7$  برابر یونش هیدروژن است. این ضریب، فراوانی کم سدیم نسبت به هیدروژن در جو ستاره‌ها را جبران می‌کند؛ این فراوانی در ستاره‌هایی مانند خورشید، در حدود  $10^{-6}$  است. بنابراین، اگرچه قسمت اعظم ماده‌ی ستاره‌ای شامل هیدروژن و هلیوم با رگه‌هایی از عناصر سنگین‌تر است، اغلب الکترون‌های آزاد در جو

ستاره‌ها ناشی از یونیده شدن عناصر فلزی مانند سدیم است. علاوه بر این، درجه‌ی یونش عناصر دیگر، مانند هیدروژن و هلیوم، به چگالی عددی این الکترون‌ها بستگی دارد. در جو خورشید،  $T$  و  $n_e$  نوعاً از مرتبه‌ی  $6000\text{K}$  و  $10^{19}\text{m}^{-3}$  هستند. اگر این مقادارها را در معادله‌ی ساها قرار دهیم، خواهیم داشت

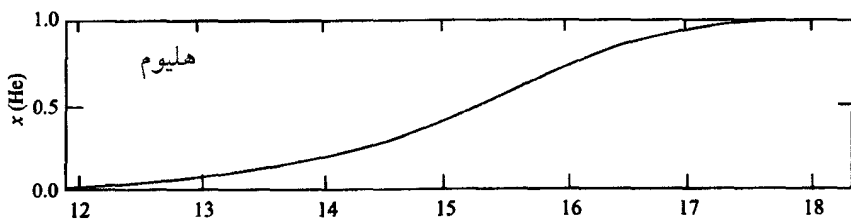
$$\frac{n(\text{H}^+)}{n(\text{H})} \approx 10^{-4}, \quad \frac{n(\text{He}^+)}{n(\text{He})} \approx 10^{-14} \quad \text{و} \quad \frac{n(\text{Na}^+)}{n(\text{Na})} \approx 10^3 \quad (۷۴-۲)$$

می‌بینیم که در جو خورشید هیدروژن به طور جزئی، هلیوم به ندرت، و سدیم به طور غالب یونیده می‌شود. درجه‌ی یونش در جو ستاره‌های داغ‌تر، بیش‌تر است. در واقع، آن‌طور که شکل ۲-۴ نشان می‌دهد، اگر  $n_e$  در حدود  $10^{19}\text{m}^{-3}$  باقی بماند، ۵۰٪ هیدروژن در دمای تقریبی  $9000\text{K}$  و ۵۰٪ هلیوم در دمای حدود  $15500\text{K}$  یونیده می‌شود.

این نکته‌ها به ما کمک می‌کنند تا رابطه‌ی بین دمای سطح و دسته‌بندی طیفی یک ستاره را توضیح دهیم.



دما برحسب یکای  $10^3\text{K}$



دما برحسب یکای  $10^3\text{K}$

شکل ۲-۴ درجه‌ی نسبی یونش هیدروژن و هلیوم تابعی از دمای گاز با چگالی عددی الکترون‌های آزاد  $n_e = 10^{19}\text{m}^{-3}$



مبنای دسته‌بندی طیفی، مشاهده‌ی خطوط سیاه در طیف ناشی از جذب شدن فوتون‌ها با انرژی‌های خاص توسط اتم‌ها و یون‌ها در جو ستاره است. برای مثال، مشاهده‌ی خطوط جذبی متعلق به سری بالمر<sup>۱</sup> نشان می‌دهد که در آن دما بعضی اتم‌های هیدروژن در تراز  $n=2$  شکل ۲-۳ قرار دارند، برانگیزش نوری این اتم‌ها تا حالت‌های  $n=3,4$  و بالاتر، باعث می‌شود خطوط سیاه سری بالمر ظاهر شوند. اما اگر فوتوسفر (فوتون کره) بسیار داغ یا بسیار سرد باشد، اتم‌ها در حالت  $n=2$  حضور نخواهند داشت: اگر دما بسیار زیاد باشد، قسمت اعظم هیدروژن یونیده خواهد شد و اگر دما بسیار پایین باشد، قسمت اعظم هیدروژن در حالت پایه‌ی هیدروژن اتمی یا به شکل هیدروژن مولکولی خواهد بود. در نتیجه، خطوط جذبی سری بالمر فقط در ستاره‌های نوع A و نوع F، که دمای سطح آن‌ها بین  $11000\text{K}$  و  $6000\text{K}$  است، ظاهر می‌شوند.

این مطالب در مورد خطوط جذبی عناصر دیگر نیز معتبر است. به طور خلاصه، طیف‌های ستاره‌های نوع داغ O و نوع B که دمای سطح آن‌ها بین  $30000\text{K}$  و  $12000\text{K}$  است، با خطوط جذبی ناشی از وجود هلیوم یک‌بار یونیده مشخص می‌شوند؛ این خط‌ها در طیف ستاره‌های سردتر وجود ندارند. خطوط جذبی ناشی از هیدروژن اتمی در طیف ستاره‌های نوع A و نوع F، که دمای سطح آن‌ها بین  $11000\text{K}$  و  $6000\text{K}$  است، ظاهر می‌شوند. بالاخره، خطوط ناشی از وجود فلزات خنثی به طور ویژه در طیف‌های ستاره‌های سردتر دیده می‌شوند که متعلق به ستاره‌های نوع G، K و M با دمای سطح بین  $6000\text{K}$  و  $3000\text{K}$  هستند.

خطوط طیفی ناشی از جذب فوتون‌ها با انرژی‌های خاص در یک زمینه‌ی تیره و روشن دیده شده‌اند. این زمینه بر اثر جذب و گسیل فوتون‌ها با پیوستاری از انرژی‌ها در ناحیه‌ی مرئی طیف الکترومغناطیسی تولید شده است. برای مثال، وقتی الکترون‌ها در جو ستاره‌ها با شتاب از کنار یون‌ها عبور می‌کنند، فوتون‌ها گسیل و جذب می‌شوند؛ این فرایندها، که معمولاً پرتو ترمزی و پرتو ترمزی معکوس نامیده می‌شوند، در جو ستاره‌های داغ از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. اما جو ستاره‌های سردتر، تیره و روشن بودن را با فرایند بسیار جالب، یعنی تولید و نابودی مستمر یون‌های منفی هیدروژن ایجاد می‌کنند.

یون  $H^-$  حالت مقیدی از یک پروتون و دو الکترون است. این یون یک سیستم دو الکترونی مانند اتم هلیوم است. اما بار روی هسته‌ی آن فقط  $Z=1$  است و الکترون دوم فقط با انرژی بستگی  $0.75\text{eV}$ ، یعنی با طول موج بسیار بلند  $1650\text{nm}$ ، برطبق واکنش زیر جذب و گسیل می‌شود



با وجود این، گازی از اتم‌های هیدروژن فوتون‌های مرئی را فقط به شرطی با این روش جذب و گسیل می‌کند که الکترون‌های آزاد وجود داشته باشند. به عبارت دیگر، یک گاز تراگذر هیدروژن نایونیده‌ی داغ به خاطر وجود الکترون‌های آزاد می‌تواند تیره و تاریک بشود. اکنون نشان می‌دهیم که مقدار کمی از عناصر فلزی آسان یونیده شده در چنین گازی می‌تواند این الکترون‌ها را تولید کند. با این فرض که عناصر فلزی (که با  $M$  نشان داده می‌شود) وجود دارند و بخشی از آن‌ها یونیده شده و مخلوطی از اتم‌ها، الکترون‌ها و یون‌ها را تولید می‌کنند، می‌توانیم مدلی برای وضعیت فوق بسازیم. رابطه‌ی چگالی عددی این ذره‌ها و کسر یونش عنصر  $x(M)$  به صورت زیر است

$$n_e = n(M^+) = x(M)[n(M) + n(M^+)] \quad (76-2)$$

اگر فرض کنیم که انرژی یونش تمام عناصر فلزی مانند سدیم است، از معادله‌ی ساها خواهیم داشت

$$\frac{[1-x(M)]}{x(M)^2} \approx \frac{[n(M) + n(M^+)]}{10^{21} T^{\frac{3}{2}}} \exp[60000/T] \quad (77-2)$$

چگالی عددی یون‌های  $H^-$  در تعادل پویا، از واکنش  $\gamma + H^- \rightleftharpoons e^- + H$  تعیین می‌شود که در آن چگالی عددی الکترون‌ها را از یونش اتم‌های فلزی به دست می‌آورند. معادله‌ی ساها برای نسبت تعداد یون‌های  $H^-$  به تعداد اتم‌های  $H$ ، برابر است با

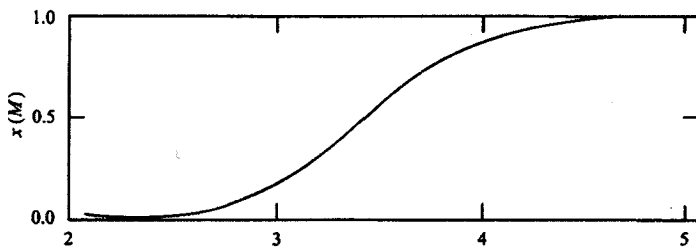
$$\frac{n(H^-)}{n(H)} \approx \frac{n_e}{10^{21} T^{\frac{3}{2}}} \exp[8700/T] \quad (78-2)$$

در این رابطه چگالی عددی الکترون‌ها  $n_e$  از معادله‌های (76-2) و (77-2) به دست می‌آید.

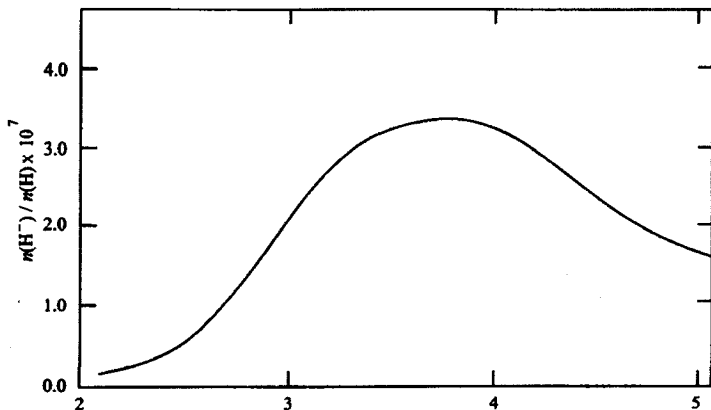
یک محاسبه‌ی عددی ساده بر مبنای معادله‌های (۲-۷۷) و (۲-۷۸)، نقش دوگانه‌ی فلزات آسان یونیده و یون‌های سست پیوند  $H^-$  در جو ستاره‌ها را نشان می‌دهد. کسر  $x(M)$  اتم‌های فلزی یونیده شده و چگالی عددی  $n_e$  الکترون‌های آزاد تا آن‌جا با دما افزایش می‌یابد که اتم‌های فلزی در دمای تقریبی  $4000\text{K}$  یونیده می‌شوند. چگالی عددی یون‌های  $H^-$  این تغییر در تعداد الکترون‌های آزاد را نشان می‌دهد. وقتی الکترون‌ها در دسترس قرار می‌گیرند، تعداد یون‌های  $H^-$  با دما افزایش می‌یابد، اما بعد از آن وقتی  $n_e$  به اشباع می‌رسد و وقتی دما به خاطر وجود یک یون سست پیوند  $H^-$  خیلی داغ می‌شود، یون‌های  $H^-$  کاهش می‌یابند. بستگی دمایی  $n(H^-)/n(H)$  در شکل ۲-۵ برای حالت ویژه‌ی نشان داده شده است که فراوانی اتم‌های فلزی به گونه‌ای است که وقتی آن‌ها یک‌بار یونیده می‌شوند، چگالی عددی الکترون‌های آزاد  $10^{19}\text{m}^{-3}$  می‌شود.

بر طبق شکل ۲-۵، در دمای حدود  $3000\text{K}$  فراوانی الکترون‌های آزاد و یون‌های  $H^-$  کم، اما مؤثر است. در این دما، یون‌های  $H^-$  به طور مستمر تولید و نابود می‌شوند، و وقتی این اتفاق می‌افتد، تابش مرئی گسیل و جذب می‌شود. اگر دما تا پایین‌تر از  $3000\text{K}$  کاهش یابد، تعداد الکترون‌های آزاد کم می‌شود و تعداد یون‌های  $H^-$  در تعادل با این الکترون‌ها حتی با سرعت بیش‌تری کاهش می‌یابد. به ویژه، یون‌های  $H^-$  دیگر تولید و نابود نمی‌شوند و تابش مرئی نیز گسیل و جذب نمی‌شود. در نتیجه، گاز تیره و روشن دیده نمی‌شود. این پدیده در جو ستاره نشان می‌دهد که: دمای سطح مشاهده شده‌ی چنین جوئی، همیشه بالاتر از  $3000\text{K}$  یا در آن حدود است.

این نتیجه دلیل مهمی برای تحول یک ستاره بعد از خارج شدن از رشته‌ی اصلی است. موقع خروج ستاره از رشته‌ی اصلی، روشنایی آن افزایش و دمای سطح آن کاهش می‌یابد، به طوری که ستاره در نمودار  $H-R$  به طرف بالا و راست حرکت می‌کند. با وجود این، دمای سطح مرئی نمی‌تواند از  $3000\text{K}$  کم‌تر شود. بنابراین، ستاره روشنایی خود را فقط با منبسط شدن خود در دمای سطحی تقریباً ثابت می‌تواند افزایش دهد. در این فاز تحول، ستاره ناحیه‌ای از نمودار  $H-R$  را اشغال می‌کند که شاخه‌ی غول نامیده می‌شود.



دما برحسب یکای  $10^3 K$



دما برحسب یکای  $10^3 K$

**شکل ۲-۵** یونش نسبی اتم‌های فلزی سدیم مانند و نسبت تعداد یون‌های  $H^-$  به تعداد اتم‌های  $H$  به صورت تابعی از دما. وقتی که اتم‌های فلزی با چگالی عددی اولیه  $10^{19} m^{-3}$  به طور فزاینده یونیده می‌شوند، الکترون‌های آزاد شده توسط اتم‌های هیدروژن گیر می‌افتند و یون‌های  $H^-$  سست پیوند را به وجود می‌آورند. این یون‌های  $H^-$  با افزایش دما تفکیک می‌شوند. تشکیل شدن و تفکیک شدن  $H^-$  یک فرایند پویا است که اگر دما از  $3000 K$  کم‌تر شود، دیگر اتفاق نمی‌افتد و تابش مرئی دیگر تولید و جذب نمی‌شود. در دمای پایین‌تر از  $3000 K$ ، گاز دیگر تیره و روشن دیده نمی‌شود.

## ۲-۶ واکنش‌ها در دمای بالا

تا این جا به برهم کنش تابش اتم‌ها پرداختیم. وقتی دما به چند بیلیون درجه می‌رسد، برهم کنش تابش با ماده باعث بروز دو فرایند می‌شود: تولید زوج الکترون - پوزیترون و تجزیه‌ی نوری هسته‌های اتمی. هر دوی این فرایندها در ستاره‌های پرجرم تحول یافته اهمیت دارند. در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان نتایج ساده و قدرتمندی برای فرایندها را، با این

شرط که فرایندها در یک سیستم نزدیک به تعادل ترمودینامیکی صورت می‌گیرند، به دست آورد.

### تولید زوج الکترون - پوزیترون

زوج‌های الکترون - پوزیترون موقعی می‌توانند تولید شوند که انرژی گرمایی  $kT$  قابل مقایسه با  $m_e c^2$  باشد. چگالی‌های عددی تعادلی الکترون‌ها و پوزیترون‌ها،  $n(e^-)$  و  $n(e^+)$  را می‌توان از واکنش‌های زیر به دست آورد

$$\gamma + \gamma \rightleftharpoons e^- + e^+ \quad (۷۹-۲)$$

با توجه به این‌که پتانسیل شیمیایی یک گاز فوتونی صفر است، مجموع پتانسیل‌های شیمیایی الکترون و پوزیترون را مساوی صفر قرار می‌دهیم

$$\mu(e^-) + \mu(e^+) = 0 \quad (۸۰-۲)$$

اگر الکترون‌ها و پوزیترون‌ها یک گاز کلاسیکی تشکیل دهند، ما می‌توانیم از معادله‌ی (۲۱-۲) برای پتانسیل‌های شیمیایی استفاده کنیم تا رابطه‌ی زیر به دست آید

$$n(e^-)n(e^+) = 4n_Q^2 \exp[-2m_e c^2 / kT] \quad (۸۱-۲)$$

که در آن  $n_Q$  چگالی عددی کوانتومی الکترون‌ها یا پوزیترون‌ها است.

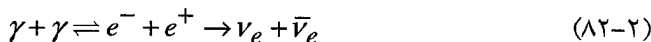
در یک ستاره چگالی عددی الکترون‌ها از تعداد الکترون‌های تولید شده در یونش ماده‌ی ستاره‌ای به دست می‌آید. در نواحی مرکزی داغ ستاره‌های تحول یافته، فقط رگه‌هایی از هیدروژن سوخته نشده باقی می‌ماند، و برطبق معادله‌ی (۲-۶۹)، چگالی الکترون‌ها در

چگالی جرمی  $\rho$  تقریباً مساوی با  $n(e^-) \approx \rho / 2m_H$  است. به عنوان مثال، ماده‌ای با  $\rho \approx 10^7 \text{ kg m}^{-3}$  و  $T \approx 10^9 \text{ K}$  را در نظر می‌گیریم. در نتیجه داریم  $n(e^-) \approx 3 \times 10^{33} \text{ m}^{-3}$  و

چگالی عددی تعادلی پوزیترون‌ها که از معادله‌ی (۲-۸۱) به دست می‌آید،  $n(e^+) \approx n(e^-) / 100$  است.

با وجود این، معادله‌ی (۲-۸۱) در چگالی‌های بالاتر که الکترون‌ها تبهگن هستند، معتبر نیست. در این صورت، از تولید زوج ممانعت به عمل می‌آید زیرا یک الکترون به شرطی می‌تواند تولید شود که یک حالت کوانتومی اشغال نشده وجود داشته باشد. بنابراین، تولید

زوج در دمای بالا و چگالی کم صورت می‌گیرد. در نتیجه، احتمال تولید زوج در مرکز ستاره‌های بسیار پرجرم که در چگالی‌های نسبتاً کم به دماهای بالا می‌رسند، زیاد است. اهمیت اخترفیزیکی تولید زوج این است که می‌تواند به تولید نوترینوها منجر شود:



اغلب زوج‌های الکترون - پوزیترون نابود می‌شوند و فوتون تولید می‌کنند. اما در حدود یک زوج از هر  $۱۰^{۲۲}$  زوج، نوترینو تولید می‌کند. این یکی از سازوکارهای تولید نوترینو است که می‌تواند در نواحی مرکزی داغ ستاره‌های بسیار تحول یافته صورت گیرد. نوترینوهایی که به این صورت تولید می‌شوند، بدون ممانعت می‌توانند از قسمت داخلی ستاره فرار کنند و یک سازوکار بسیار مؤثر برای اتلاف انرژی به وجود آورند.

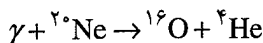
اتلاف انرژی توسط نوترینوها موقعی در ستاره‌ها مهم می‌شود که هسته‌ی مرکزی آن‌ها به دمای  $۱۰^۹$  K در چگالی خاصی برسد که الکترون‌ها زیاد تبهگن نباشند، یعنی چگالی کم‌تر از  $۱۰^۹ \text{kgm}^{-۳}$  یا در حدود آن باشد. توجه کنید که اگرچه این اتلاف انرژی را غالباً سرمایه‌ی نوترینویی می‌نامند، اما منجر به سرد شدن ستاره نمی‌شود. اثر عمده‌ی سرمایه‌ی نوترینویی افزایش آهنگ همجوشی گرماسته‌ای برای حفظ شرایط پایا در داخل ستاره است. در نتیجه، اتلاف انرژی توسط نوترینوها، آهنگ تحول ستاره را تسریع می‌کند.

### تجزیه‌ی نوری هسته‌ها

پدیده‌ی دومی که بر اثر برهم کنش تابش با ماده در دماهای بالا صورت می‌گیرد، شکافته شدن هسته‌های اتمی است. این فرایند مانند یونش اتم‌ها است که با توجه به مطالب بخش ۲-۵، در حوالی دمای  $۳۰۰۰$  K اهمیت پیدا می‌کند. چون انرژی‌های بستگی هسته‌ای نوعاً یک میلیون برابر انرژی‌های بستگی اتمی هستند، تجزیه‌ی نوری هسته‌ای در دماهای یک میلیون برابر  $۳۰۰۰$  K، یعنی در دمای تقریبی  $۳ \times ۱۰^۹$  K چشمگیر می‌شود.

در بخش ۴-۴ خواهیم دید که تجزیه‌ی نوری در مراحل پیشرفته‌ی سوختن هسته‌ای در ستاره‌های پرجرم صورت می‌گیرد، مثلاً سوختن نئون با تجزیه‌ی نوری  ${}^2\text{Ne}$  بر طبق واکنش

زیر آغاز می شود



هسته های  ${}^4_2\text{He}$  آزاد شده می توانند توسط هسته های تجزیه نشده ی  ${}^2_0\text{Ne}$  گیر بیفتند و  ${}^{24}_{12}\text{Mg}$  تولید کنند. ضمناً تجزیه ی نوری نقش کلیدی در سوختن سیلیسیوم، یعنی آخرین مرحله ی سوختن هسته ای، دارد و باعث تشکیل شدن هسته های نزدیک آهن در جدول تناوبی می شود.

### خلاصه

#### گاز ایده آل

- در یک گاز ایده آل، ذره ها حالت هایی را اشغال می کنند که تحت تأثیر برهم کنش های بین ذره ها قرار نمی گیرند. تعداد حالت های کوانتومی که بزرگی تکانه ی آن ها بین  $p$  و  $p + dp$  قرار دارد، برابر است با

$$g(p) dp = g_s \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad (۳-۲)$$

تعداد متوسط ذره ها در حالتی با انرژی  $\epsilon_p$ ، به شرطی از معادله ی (۲-۸) به دست می آید که ذره ها فرمیون های مشابه باشند، و اگر ذره ها بوزون های مشابه باشند، تعداد ذره ها از معادله ی (۲-۹) حساب می شود:

$$f(\epsilon_p) = \frac{1}{\exp[(\epsilon_p - \mu)/kT] \pm 1}$$

در این رابطه علامت + برای فرمیون ها و علامت - برای بوزون ها به کار می رود.

- فشار در یک گاز ایده آل برابر است با

$$P = \frac{1}{3V} \int_0^\infty p v_p f(\epsilon_p) g(p) dp \quad (۱۳-۲)$$

که اگر ذرات گاز غیرنسبیتی باشند این مقدار با  $\frac{2}{3}$  چگالی انرژی جنبشی، و اگر ذره ها

فرانسبیتی باشند این مقدار با  $\frac{1}{3}$  چگالی انرژی جنبشی برابر است.

- اگر چگالی عددی ذره‌ها در یک گاز ایده‌آل از چگالی عدد کوانتومی کم‌تر باشد، توزیع آن‌ها در حالت‌های کوانتومی به صورت زیر خواهد بود

$$f(\varepsilon_p) \approx \exp[-(\varepsilon_p - \mu)/kT] \quad (۱۱-۲)$$

- این ذره‌ها یک گاز کلاسیکی تشکیل می‌دهند. در چنین گازی، چگالی عددی ذرات غیرنسبیتی برابر است با

$$n_Q = \left[ \frac{\sqrt[3]{\pi m k T}}{h} \right]^3 \quad (۲۲-۲)$$

- و برای ذرات فرانسبیتی، چگالی عددی کوانتومی برابر است با

$$n_Q = \lambda \pi \left[ \frac{kT}{hc} \right]^3 \quad (۲۴-۲)$$

- پتانسیل شیمیایی یک گاز ایده‌آل از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\mu = mc^2 - kT \ln \left[ \frac{g_s n_Q}{n} \right] \quad (۲۱-۲)$$

### الکترون‌ها در ستاره‌ها

- اگر چگالی عددی الکترون‌ها خیلی بیش‌تر از چگالی عددی کوانتومی باشد، الکترون‌ها یک گاز تبهگن تشکیل می‌دهند که تمام الکترون‌ها حالت‌های کوانتومی را با تکانه‌ای کم‌تر از تکانه‌ی فرمی یا مساوی با آن، به طور کامل اشغال می‌کنند. رابطه‌ی تکانه‌ی فرمی و چگالی عددی الکترون‌ها عبارت است از

$$p_F = \left[ \frac{\sqrt[3]{3n}}{\lambda \pi} \right] \frac{1}{3} h \quad (۲۷-۲)$$

- معادله‌ی حالت یک گاز الکترونی تبهگن غیرنسبیتی به صورت زیر است

$$P = K_{NR} n^{\frac{5}{3}} \quad K_{NR} = \frac{h^2}{5m} \left[ \frac{\sqrt[3]{3}}{\lambda \pi} \right]^3 \quad \text{که در آن} \quad (۳۱-۲)$$

- اگر الکترون‌ها عمدتاً فرانسبیتی باشند، این معادله به صورت زیر در می‌آید

$$P = K_{UR} n^{\frac{4}{3}} \quad K_{UR} = \frac{hc}{4} \left[ \frac{\sqrt[3]{3}}{\lambda \pi} \right]^3 \quad \text{که در آن} \quad (۳۴-۲)$$



- حالت‌های کلاسیکی، کوانتومی، غیرنسبیتی و فرانسبیتی برای یک گاز الکترونی در شکل ۲-۲ نشان داده شده‌اند. خواص گازهای الکترونی در حالت‌های متفاوت، نقش کلیدی را در تحول ستاره‌ها بازی می‌کنند.

### فوتون‌ها در ستاره‌ها

- تابش گرمایی را می‌توان به صورت یک گاز فوتونی در نظر گرفت که از بوزون‌های با جرم صفر و پتانسیل شیمیایی صفر تشکیل شده است.

- تعداد فوتون‌ها در واحد حجم برابر است با

$$n = bT^3 \quad b = 2,03 \times 10^7 \text{ K}^{-3} \text{ m}^{-3} \quad \text{که در آن} \quad (42-2)$$

- در یک گاز فوتونی، انرژی در واحد حجم برابر است با

$$u = aT^4 \quad a = 7,565 \times 10^{-16} \text{ JK}^{-4} \text{ m}^{-3} \quad \text{که در آن} \quad (43-2)$$

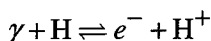
- فشار تابش برابر است با

$$P_r = \frac{1}{3} aT^4 \quad (44-2)$$

- این فشار در خورشید کم است ولی در ستاره‌های پر جرم بسیار مهم است. با توجه به معادله‌ی (۴۹-۲)، نسبت فشار تابش به فشار گاز در ستاره‌ای به جرم  $M$  با  $M^2$  متناسب است.

### معادله‌ی ساها

- یونیده شدن هیدروژن اتمی و بازترکیب آن به صورت زیر صورت می‌گیرد



که در حالت تعادل رابطه‌ی پتانسیل‌ها به صورت  $\mu(\text{H}) = \mu(e^-) + \mu(\text{H}^+)$  خواهد بود.

چگالی‌های عددی تعادلی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند

$$\frac{n(\text{H}^+)}{n(\text{H})} \approx \frac{n_e}{n_e} \exp[-E_i / kT] \quad (60-2)$$

در این رابطه  $E_i$  انرژی یونش اتم هیدروژن است.

## یونش در ستاره‌ها

- یونش در داخل ستاره‌ها تقریباً به صورت کامل صورت می‌گیرد و تعداد ذره‌ها در واحد حجم در یک گاز کاملاً یونیده برابر است با

$$n \approx [1 + 3X_1 + 0.5X_4] \rho / 2m_H \quad (2-67)$$

- که در آن  $X_1$  و  $X_4$  کسرهای جرمی هیدروژن و هلیوم هستند. تعداد الکترون‌ها و تعداد یون‌ها در واحد حجم برابر است با

$$n_e \approx [1 + X_1] \rho / 2m_H \quad \text{و} \quad n_i \approx [2X_1 + 0.5X_4] \rho / 2m_H \quad (2-69)$$

- یونش در جو ستاره‌ها جزئی است. غالباً قسمت اعظم الکترون‌ها توسط عناصر فلزی آسان یونیده تولید می‌شود. این الکترون‌ها و میزان دمای آن‌ها درجه‌ی یونش هیدروژن و هلیوم در جو ستاره‌ها را معین می‌کنند. نوعاً  $50\%$  هیدروژن در دمای  $9000\text{K}$  و  $50\%$  هلیوم در دمای  $15500\text{K}$  یونیده می‌شود؛ شکل ۲-۴ را ببینید.

- سطح تیره و روشن یک ستاره مربوط به جذب و گسیل مستمر فوتون‌های مرئی است. این امر موقعی صورت می‌گیرد که الکترون‌ها با شتاب از کنار یون‌ها عبور می‌کنند، و یون‌های  $H^-$  سست پیوند تشکیل و شکسته می‌شوند. نقش دوگانه‌ی عناصر فلزی آسان یونیده و یون‌های سست پیوند  $H^+$  نشان می‌دهد که دمای کمینه‌ی سطح مشاهده شده‌ی یک ستاره در حدود  $3000\text{K}$  است؛ شکل ۲-۵ را ببینید.

## واکنش‌ها در دماهای بالا

- تولید زوج الکترون - پوزیترون در یک گاز الکترونی ناتبهنگن موقعی زیاد می‌شود که  $kT$  قابل مقایسه با  $m_e c^2$  باشد. چگالی‌های عددی تعادلی الکترون‌ها و پوزیترون‌ها از رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند

$$n(e^-)n(e^+) = 4n_0^2 \exp[-2m_e c^2 / kT] \quad (2-81)$$

- تولید زوج منجر به تولید نوترینو می‌شود. اتلاف انرژی توسط نوترینوها در ستاره‌های پرجرم، آهنگ تحول ستاره را افزایش می‌دهد.

- در مراحل پایانی تحول یک ستاره‌ی پرجرم، دمای مرکزی می‌تواند به بالاتر از  $3 \times 10^9 \text{ K}$  برسد. در این دما و بالاتر از آن، فوتون‌های گرمایی پراورژی می‌توانند هسته‌های اتمی را بشکافند. تجزیه‌ی نوری هسته‌ها نقش مهمی را در سوختن نئون و سیلیسیوم بازی می‌کند.

## مسأله‌های فصل ۲

- ۱-۲ یک گاز ایده‌آل متشکل از الکترون‌های غیرنسبیتی تبهگن با چگالی عددی  $n$  را در نظر بگیرید و رابطه‌ای برای انرژی فرمی به دست آورید. اکنون فرض کنید که دمای گاز  $T$  است و چگالی عددی کوانتومی  $n_Q$  آن که از معادله‌ی (۲-۲۲) به دست می‌آید، با چگالی عددی واقعی برابر است؛ در چنین گازی اثرهای کوانتومی  $n$  مهم است ولی الکترون‌ها به طور کامل تبهگن نخواهند بود. نسبت  $kT$  به انرژی فرمی را پیدا کنید.
- ۲-۲ اهمیت نسبی برهم کنش‌های الکتروستاتیکی بین الکترون‌های تبهگن و یون‌ها در یک فلز معمولی با چگالی تقریبی  $10^4 \text{ kg m}^{-3}$  و در یک کوتوله‌ی سفید با چگالی تقریبی  $10^8 \text{ kg m}^{-3}$  را مقایسه کنید. در هر دو مورد دمایی را برآورد کنید که الکترون‌ها در پایین‌تر از آن دما واقعاً تبهگن هستند.
- ۳-۲ در یک گاز الکترونی تبهگن ایده‌آل اگر الکترون‌ها غیرنسبیتی باشند، فشار از معادله‌ی (۲-۳۱) به دست می‌آید و اگر الکترون‌ها عمدتاً فرانسبیتی باشند، از معادله‌ی (۲-۳۴) استفاده می‌شود. از رابطه‌ی نسبیتی بین انرژی و تکانه، یعنی  $\mathcal{E}_p^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$  استفاده کنید و نشان دهید که رابطه‌ی عمومی فشار در یک گاز تبهگن ایده‌آل به صورت زیر است

$$P = K_{UR} n^{\frac{5}{3}} I(x)$$

که در آن  $x = p_F / mc$  و

$$I(x) = \frac{3}{2x^4} \left[ x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2x^2}{3} - 1 \right) + \ln [x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}}] \right]$$

ثابت کنید که در یک گستره‌ی مناسب، این رابطه‌ی فشار به ترتیب به معادله‌های (۲-۳۱)

و (۲-۳۴) تبدیل می‌شود. (از این رابطه‌ی عمومی فشار در یک گاز تبهگن ایده‌آل در بخش مربوط به کوتوله‌های سفید در فصل ۶ استفاده خواهد شد).

۴-۲ تمام جو یک ستاره تقریباً هیدروژن است. فرض کنید ۵۰٪ مولکول‌های هیدروژن به اتم‌های هیدروژن تفکیک می‌شوند و فشار آن  $10^6 \text{ Pa}$  است. با دانستن این موضوع که انرژی بستگی مولکول هیدروژن  $4/48eV$  است، دما را برآورد کنید.

۵-۲ در جهان قدیم، الکترون‌ها و پوزیترون‌ها همراه با فوتون‌ها در دمای بسیار بالا حضور داشتند. چگالی عددی الکترون‌ها و پوزیترون‌ها تقریباً مساوی بوده و از تعادل ترمودینامیکی به وجود آمده با واکنش‌های زیر تعیین شده است

$$\gamma + \gamma \rightleftharpoons e^- + e^+$$

در نتیجه الکترون‌ها و پوزیترون‌ها، هر دو، یک گاز متشکل از فرمیون‌های فرانسییتی با پتانسیل شیمیایی صفر به وجود آورده‌اند.

باز هم محاسبه برای بوزون‌های فرانسییتی با پتانسیل شیمیایی صفر را که به معادله‌های (۲-۴۲) و (۲-۴۳) منجر شد، در نظر بگیرید و نتایج متناظر برای فرمیون‌ها را به دست آورید. به ویژه نشان دهید که تعداد فرمیون‌ها در واحد حجم و چگالی انرژی این فرمیون‌ها از روابط زیر به دست می‌آید

$$n_F = \frac{3}{4} b T^3 \quad \text{و} \quad u_F = \frac{V}{8} a T^4$$

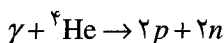
در واقع، تمام فشار در جهان قدیم از یک گاز متشکل از فوتون‌ها، الکترون‌ها، پوزیترون‌ها و سه نوع نوترینو و پادنوترینو ناشی شده است. در این گاز کلاً ۸ نوع فرمیون فرانسییتی در تعادل با فوتون‌ها در دمای زیاد  $T$ ، حضور داشتند. با دانستن این که الکترون‌ها و پوزیترون‌ها دارای اسپین  $\frac{1}{2}$  با دو قطبش، و نوترینوها و پادنوترینوها دارای

اسپین  $\frac{1}{2}$  و فقط دارای یک قطبش هستند، رابطه‌ای برای این فشار به دست آورید.

۶-۲ تولید شدن زوج الکترون - پوزیترون در یک گاز الکترونی تبهگن با انرژی فرمی  $\varepsilon_F$  را در نظر بگیرید، و رابطه‌ای مانند معادله‌ی (۲-۸۱)، برای چگالی عددی تعادلی

پوزیترون‌ها به دست آورید. برای این چگالی عددی در ماده‌ی ستاره‌ای در  $T = 10^9 \text{ K}$  و  $\rho = 10^{10} \text{ kg m}^{-3}$ ، یک محاسبه‌ی عددی انجام دهید.

۷-۲ وقتی هسته‌ی مرکزی یک ستاره‌ی پرجرم از حد چاندرااسکار بیش‌تر می‌شود، ستاره می‌رُمد. در حین این رمبش، انرژی توسط تجزیه‌ی نوری  ${}^4\text{He}$  از طریق واکنش زیر جذب می‌شود



انرژی لازم برای انجام این واکنش،  $Q = 28.30 \text{ MeV}$  است. فرض کنید این واکنش با واکنش معکوس آن در حال تعادل است. وقتی چگالی هلیوم  $10^{12} \text{ kg m}^{-3}$  است، در چه دمایی ۵۰٪ آن به نوکلئون‌ها تجزیه می‌شود؟

۸-۲ یک گاز الکترونی کلاسیکی با چگالی عددی  $n_e = 10^{30} \text{ m}^{-3}$  را در نظر بگیرید که با تابش در دمای  $T$  در حال تعادل است. در چه دمای  $T$  فشار تابش با فشار الکترون‌ها مساوی می‌شود؟

۹-۲ درخشندگی  $L$  یک کوتوله‌ی سفید و دمای مؤثر سطح آن،  $T$ ، عبارت‌اند از

$$L = 0.01 L_{\odot} \quad \text{و} \quad T_E = 160000 \text{ K}$$

- شعاع این ستاره را برآورد کنید.
- اگر جرم ستاره  $M = M_{\odot}$  باشد، چگالی متوسط ستاره را برآورد کنید.
- از معادله‌ی (۳-۴۳) برای برآورد دمای داخلی ستاره،  $T_I$ ، استفاده کنید و نشان دهید که الکترون‌ها عمدتاً تبهگن هستند.
- وقتی یک کوتوله‌ی سفید کربنی به اندازه‌ی کافی سرد می‌شود، یون‌های کربن می‌توانند متبلور شوند و احتمال چشمک زدن کوتوله مانند یک الماس در آسمان افزایش می‌یابد. یک شرط تقریبی برای متبلور شدن این است که انرژی گرمایی  $kT$  یک یون از  $\frac{1}{6}$  انرژی پتانسیل برهم کنش بین دو یون نزدیک به هم، کم‌تر باشد. وقتی دمای داخلی یک کوتوله‌ی سفید  $T_I$  است، چگالی آن چه قدر باید باشد تا شرط متبلور شدن برقرار شود؟

## انتقال گرما در ستاره‌ها

دو سازوکار اساسی برای ترابرد گرما در ستاره‌ها وجود دارد. سازوکار اول به حرکت گرمایی تصادفی ذره‌ها بستگی دارد. ذره‌ها حرکت و برهم‌کنش می‌کنند و انرژی را از نواحی داغ به نواحی سرد منتقل می‌کنند. اگر ذره‌ها الکترون‌ها یا یون‌ها باشند، این فرایند را رسانش گرمایی می‌نامند. اگر ذره‌ها فوتون‌ها باشند، این فرایند را پخش یا نفوذ تابشی می‌نامند. سازوکار دوم به حرکت جمعی ذره‌ها بستگی دارد و انتقال گرما به طریق همرفت نامیده می‌شود. اگر اختلاف دما به قدر کافی زیاد باشد، بر اثر بالا رفتن شارهای داغ و پایین آمدن شارهای چگال سرد، گرما از نواحی داغ به نواحی سرد منتقل می‌شود. انتقال گرما یک موضوع مشکل و پیچیده است. در این فصل به تشریح ایده‌های اساسی می‌پردازیم و از آن‌ها برای درک چگونگی انتقال گرمای ناشی از همجوشی هسته‌ای در مرکز ستاره به سطح ستاره، استفاده می‌کنیم.

### ۳-۱ انتقال گرما با حرکت تصادفی

گازی را در نظر بگیرید که دمای  $T$  آن بستگی زیادی به مختصه‌ی  $x$  ندارد، لذا گرما در راستای  $x$  در بین ناحیه‌هایی شارش پیدا می‌کند که تقریباً در تعادل ترمودینامیکی قرار دارند. سازوکار میکروسکوپی مؤثر این شارش گرما، حرکت تصادفی ذرات گاز است. به طور کلی این ذره‌ها پیش از برخورد، با یک توزیع تندی در تمام راستاها و با توزیعی از مسیرهای آزاد، حرکت می‌کنند. برای سهولت فرض می‌کنیم که یک ششم ذره‌ها با تندی  $v$  در راستای  $x$  حرکت می‌کنند و پیش از برخورد مسافت  $l$  را طی می‌کنند. انرژی گرمایی در واحد حجم در نقطه‌ی  $x$  را به صورت  $u(x)$  نشان می‌دهیم.

ما تحلیل موضوع را با این فرض شروع می‌کنیم که سطحی در نقطه‌ی  $x$  وجود دارد و ذره‌ها از این سطح عبور می‌کنند. اگر اختلاف دمایی در دو طرف این سطح وجود داشته باشد، انرژی گرمایی ذره‌هایی که از طرف پایین به این سطح می‌رسند، با انرژی گرمایی ذراتی که از طرف بالا به این سطح می‌رسند، متفاوت است. در نتیجه، یک مقدار خالص انرژی از این سطح منتقل می‌شود. همان‌طور که شکل ۱-۳ نشان می‌دهد، ذراتی که از طرف پایین به سطح می‌رسند، به‌طور متوسط از ناحیه‌ای واقع در  $x-l$  شروع به حرکت می‌کنند و انرژی را که از سطح عبور می‌دهند با  $u(x-l)$  متناسب است، در حالی که ذراتی که از طرف بالا به سطح می‌رسند، از  $x+l$  شروع به حرکت می‌کنند و انرژی را که از سطح عبور می‌دهند با  $u(x+l)$  متناسب است. بنابراین، آهنگ انتقال انرژی از واحد سطح برابر است با

$$j(x) \approx \frac{1}{6}vu(x-l) - \frac{1}{6}vu(x+l) \approx -\frac{1}{3}vl \frac{du}{dx} \quad (1-3)$$

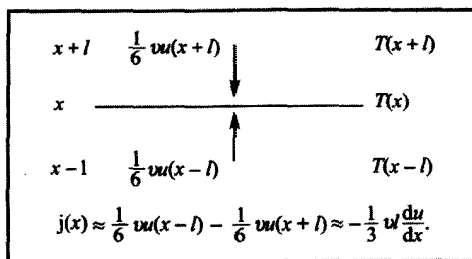
چون  $u$  و  $T$  تابعی از  $x$  هستند، داریم

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dT} \frac{dT}{dx} = C \frac{dT}{dx} \quad (2-3)$$

در این رابطه  $C$  ظرفیت گرمایی واحد حجم است. بنابراین، چگالی شار گرما که از سطح واقع در نقطه‌ی  $x$  عبور می‌کند، با شیب (گرادیان) دما نسبت مستقیم دارد:

$$j(x) = -K \frac{dT}{dx} \quad K \approx \frac{1}{3}v l C \quad \text{به ازای} \quad (3-3)$$

ضریب  $K$  در معادله‌ی (۳-۳) را ضریب رسانندگی گرمایی گاز می‌نامند. یک محاسبه‌ی بسیار پیچیده، که در آن توزیع تندی ذره‌ها، راستاها و مسیرهای آزاد در نظر گرفته شده است،



شکل ۱-۳ انتقال انرژی از یک سطح واقع در نقطه‌ی  $x$ ، بر اثر حرکت گرمایی تصادفی ذره‌ها.

نتیجه‌ی مشابهی را برای  $K$  به دست می‌دهد، ولی به جای  $v$  و  $l$  مقدار میانگین  $\bar{v}$  و مسیر آزاد میانگین  $\bar{l}$  قرار می‌گیرند.

برای توصیف رسانش گرما توسط الکترون‌ها و یون‌هایی که به صورت تصادفی در یک پلاسما حرکت می‌کنند، ابتدا از معادله‌ی (۳-۳) استفاده می‌کنیم. سپس، از آن معادله برای توصیف رسانش گرما توسط فوتون‌هایی که به صورت تصادفی حرکت می‌کنند و معمولاً آن را پخش تابشی می‌نامند، استفاده می‌کنیم.

### حرکت تصادفی الکترون‌ها و یون‌ها

اهمیت رسانش گرمایی توسط الکترون‌ها و یون‌ها در یک پلاسما را با استفاده از نتایج آشنای نظریه‌ی جنبشی گازها می‌توان مورد تأکید قرار داد. برای الکترون‌های کلاسیکی با چگالی عددی  $n_e$  در دمای  $T$  داریم

$$u_e = \frac{3}{2} n_e kT, \quad C_e = \frac{3}{2} n_e K \quad \text{و} \quad \bar{v}_e \approx [3kT/m_e]^{1/2} \quad (4-3)$$

انتقال گرما بر اثر برخورد الکترون - الکترون چندان اهمیتی ندارد، زیرا دو الکترون مشابه انرژی را به مقدار زیاد به هم منتقل می‌کنند به طوری که مشخصات گاز یونیده پیش و پس از برخورد تغییر نمی‌کند. در انتقال گرما برخوردهای الکترون - یون مؤثرند و مسیر آزاد میانگین در معادله‌ی (۳-۳) مسیر آزاد میانگین یک الکترون برای برخورد با یک یون است. این مقدار مساوی با  $1/n_i \sigma$  است که  $n_i$  چگالی عددی یون‌ها و  $\sigma$  سطح مقطع برخورد الکترون - یون است. [رابطه‌ی بین مسیر آزاد میانگین و سطح مقطع برخورد را در بخش ۴-۱ به تفصیل توضیح خواهیم داد؛ معادله‌ی (۴-۱۵) را ببینید]. مقدار تقریبی سطح مقطع برخورد الکترون - یون  $\pi r^2$  است که  $r$  فاصله‌ای است که انرژی پتانسیل یک زوج الکترون - یون در آن فاصله قابل مقایسه با انرژی جنبشی گرمایی است؛ اگر الکترون در این فاصله به طرف یون حرکت کند، انرژی منتقل شده به یون زیاد خواهد بود. برای یونی با بار  $Z$  این فاصله از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \approx kT \quad (5-3)$$



با قرار دادن این نتیجه‌ها در معادله‌ی (۳-۳)، مقدار تقریبی زیر برای ضریب رسانندگی گرمایی ناشی از الکترون‌ها به دست می‌آید

$$K_e \approx \frac{k}{2\pi} \frac{n_e}{n_i} \left[ \frac{3kT}{m_e} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{4\pi\epsilon_0 kT}{Ze^2} \right]^2 \quad (۶-۳)$$

رسانندگی گرمایی ناشی از یون‌ها،  $K_i$ ، با قرار دادن  $n_i$  به جای  $n_e$  و  $m_i$  به جای  $m_e$  در معادله‌ی (۶-۳) به دست می‌آید. اگر پلاسما را کاملاً یونیده و به صورت  $n_e = Zn_i$  در نظر بگیریم، داریم

$$K_i = \frac{1}{Z^2} \left[ \frac{m_e}{m_i} \right]^{\frac{1}{2}} K_e \quad (۷-۳)$$

چون  $Z > 1$  و  $m_i \gg m_e$ ، نتیجه می‌گیریم که  $K_i \ll K_e$ ؛ علت امر این است که تعداد یون‌ها از الکترون‌ها کم‌تر است و یون‌ها بسیار آرام‌تر از الکترون‌ها حرکت می‌کنند. بنابراین، حرکت گرمایی تصادفی یون‌ها در مقایسه با حرکت گرمایی تصادفی الکترون‌ها سازوکار کم‌اثری برای انتقال گرما است.

در واقع در اغلب ستاره‌ها رسانش گرما توسط الکترون‌ها و یون‌ها اهمیت کم‌تری دارد. در این میان ستاره‌های کوتوله‌ی سفید یک استثنا هستند. در این ستاره‌ها الکترون‌ها یک گاز تبهگن چگال با رسانندگی گرمایی بالا، مانند فلزها، تشکیل می‌دهند. در این ستاره‌ها معادله‌ی (۳-۳) هنوز معتبر است ولی معادله‌ی (۴-۳) باید اصلاح شود تا تبهگنی نیز در نظر گرفته

شود. اگر انرژی فرمی  $\epsilon_F$  بیش‌تر از  $kT$  باشد، تندی الکترون با ضریب تقریبی  $(\epsilon_F/kT)^{\frac{1}{2}}$  افزایش و ظرفیت گرمایی با ضریب تقریبی  $kT/\epsilon_F$  کاهش می‌یابد. در یک گاز تبهگن مسیر آزاد میانگین برای برخورد الکترون نیز طولانی‌تر است زیرا یک الکترون فقط به شرطی می‌تواند پراکنده شود که یک حالت اشغال نشده برای پر شدن وجود داشته باشد. پس، نتیجه‌ی نهایی این است که گرما در داخل یک کوتوله‌ی سفید عمدتاً توسط الکترون‌های تبهگن منتقل می‌شود. در واقع، داخل یک کوتوله‌ی سفید دارای رسانندگی بالا و تقریباً یکنواخت است که اطراف آن با پوشش نارسانایی از الکترون‌ها و یون‌های ناتبهگن احاطه شده است. انتقال گرما در این پوشش را در بخش ۳-۴ مورد بحث قرار خواهیم داد.

## حرکت تصادفی فوتون‌ها

برای تأکید روی اهمیت پخش تابشی، یعنی رسانش گرمایی توسط فوتون‌ها، از معادله‌ی (۳-۳) نیز می‌توانیم استفاده کنیم. با توجه به مطالب بخش ۲-۳، فوتون‌های گرمایی با سرعت نور حرکت می‌کنند و برطبق معادله‌ی (۲-۴۳) گازی تشکیل می‌دهند که چگالی انرژی و ظرفیت گرمایی آن از روابط زیر به دست می‌آید

$$u_r = aT^4 \quad \text{و} \quad C_r = 4aT^3 \quad (۸-۳)$$

بنابراین، چگالی شار گرمایی ناشی از پخش تابشی برابر است با

$$j(x) = -K_r \frac{dT}{dx} \quad K_r \approx \frac{4}{3} c \bar{a} T^3 \quad \text{به ازای} \quad (۹-۳)$$

در این رابطه می‌توان  $K_r$  را به صورت ضریب رسانش گرمایی ناشی از حرکت تصادفی فوتون‌ها در نظر گرفت.

برای روشن شدن مطلب، ما باید  $\bar{\lambda}$  یعنی مسیر آزاد میانگین برای برخورد یک فوتون در ماده‌ی ستاره‌ای را بدانیم. ساده‌ترین حالت مربوط به دماهای بالا و چگالی‌های بسیار کم است که در داخل ستاره‌های پرجرم رشته‌ی اصلی پیدا می‌شود. فرایند غالب در آن‌جا پراکندگی تامسون<sup>۱</sup> توسط الکترون‌ها است و داریم

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{n_e \sigma_T} \quad \sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left[ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right]^2 \quad \text{که در آن} \quad (۱۰-۳)$$

سطح مقطع پراکندگی تامسون،  $\sigma_T$ ، را با در نظر گرفتن تابش کلاسیکی یک الکترون شتاب‌دار، یا به طور کلی از الکتروپدینامیک کوانتومی به دست می‌آورند. ضریب رسانش گرمایی توسط فوتون‌ها را با قرار دادن مسیر آزاد میانگین در معادله‌ی (۳-۹) می‌توان پیدا کرد. بهتر است این نتیجه را با معادله‌ی (۳-۶)، یعنی ضریب رسانش متناظر توسط الکترون‌ها مقایسه کنیم. بعد از انجام عملیات جبری داریم

$$\frac{K_r}{K_e} \approx \sqrt{3} Z \frac{P_r}{P_e} \left[ \frac{m_e c^2}{kT} \right]^{\frac{5}{2}} \quad (۱۱-۳)$$

در این رابطه  $P_e$  و  $P_r$  به ترتیب فشار تابش و فشار الکترون‌ها هستند که از معادلات (۲-۴۴) و (۲-۱۹) به دست می‌آیند و البته باز هم فرض بر این است که  $n_e = Zn_i$ . برای نشان دادن این موضوع، شرایط داخل خورشید را در نظر می‌گیریم: برای پلاسمای هیدروژن در دمای  $6 \times 10^6 \text{ K}$  و چگالی  $1.4 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  داریم

$$kT \approx 10^{-3} m_e c^2, \quad P_r = 3 \times 10^{11} \text{ Pa} \quad \text{و} \quad P_e = 7 \times 10^{13} \text{ Pa}$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله‌ی (۳-۱۱)، مقدار  $K_r \approx 2 \times 10^5 K_e$  به دست می‌آید. پس نتیجه می‌گیریم که پخش تابشی سازوکار مهم‌تری برای انتقال گرما در خورشید، نسبت به رسانش گرمایی توسط الکترون‌ها، است.

این نتیجه‌گیری، تا زمانی درست است که جذب فوتون‌ها در خورشید را در نظر بگیریم. پایستگی انرژی و تکانه نشان می‌دهد که یک فوتون نمی‌تواند ضمن برهم‌کنش با یک ذره‌ی آزاد، جذب شود. در عمل، جذب شدن فوتون در برهم‌کنش با یک الکترون در حضور یک یون صورت می‌گیرد و این امر در چگالی بالاتر و دمای پایین‌تر اهمیت پیدا می‌کند. اگر الکترونی که برهم‌کنش می‌کند ابتدا به یک یون وابسته باشد، فرایندی به نام جذب مقید - آزاد خواهیم داشت؛ و اگر الکترون ابتدا وابسته نباشد، فرایند جذب آزاد - آزاد را خواهیم داشت. این فرایندها را یونش نوری و پرتو ترمزی معکوس نیز می‌نامند.

جذب آزاد - آزاد و جذب مقید - آزاد، هر دو مسیر آزاد میانگینی ایجاد می‌کنند که با بسامد فوتون تغییر می‌کند. بنابراین، تحلیل منجر به معادلات (۳-۳) و (۳-۹) باید اصلاح شود. یادآوری می‌کنیم که معادله‌ی (۲-۴۶) تابش جسم سیاه ناشی از فوتون‌های با بسامد بین  $\nu$  و  $\nu + d\nu$  را توصیف می‌کند. چگالی انرژی و ظرفیت گرمایی ناشی از فوتون‌ها در این گستره‌ی بسامدی، از روابط زیر به دست می‌آیند

$$u_\nu d\nu = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} 4\pi \frac{\nu^2}{c^3} d\nu \quad \text{و} \quad C_\nu d\nu = \frac{\partial u_\nu}{\partial T} d\nu \quad (12-3)$$

اگر  $\bar{T}_\nu$  مسیر آزاد میانگین در بسامد  $\nu$  باشد، ضریب رسانش ناشی از فوتون‌ها با همه‌ی بسامدها برابر است با

$$K_r = \int_0^\infty \frac{1}{3} c \bar{l}_\nu C_\nu d\nu \quad (13-3)$$

نتیجه می‌گیریم که از معادله‌ی (۳-۹) هنوز هم می‌توان برای توصیف پخش تابشی استفاده کرد مشروط بر این که مسیر آزاد میانگین در همه‌ی بسامدها را به صورت زیر حساب کنیم

$$\bar{l} = \frac{\int_0^{\infty} \bar{l}_\nu C_\nu d\nu}{4aT^3} \quad (14-3)$$

این مقدار میانگین را میانگین روزلند<sup>۱</sup> می‌نامند، که باید در بسامدهای حدود  $2\pi/kT/h$  غالب باشد؛ در بسامدهایی که  $\bar{l}_\nu$  زیاد است، یعنی جایی که ماده‌ی ستاره‌ای تقریباً تراگذر است، این مقدار میانگین بیشینه است.

بدون توجه به سازوکار غالب برای پراکندگی یا جذب فوتون، مسیر آزاد میانگین فوتون از احتمال برهم کنش الکترون با یک یون حساب می‌شود. این مسیر آزاد به چگالی عددی الکترون‌ها و یون‌ها،  $n_e$  و  $n_i$ ، و به سطح مقطع‌های برهم کنش،  $\sigma_e$  و  $\sigma_i$ ، بستگی دارد. احتمال برهم کنش در فاصله‌ی  $dx$  مساوی با  $(n_e\sigma_e + n_i\sigma_i)dx$  است و مسیر آزاد میانگین برابر است با

$$\bar{l} = \frac{1}{n_e\sigma_e + n_i\sigma_i} \quad (15-3)$$

چون  $n_i$  و  $n_e$  هر دو با چگالی جرمی  $\rho$  ماده‌ی ستاره‌ای متناسب‌اند، معمولاً می‌نویسند  $\bar{l} = 1/\rho\kappa$  و خواص انتقال تابشی را برحسب  $\kappa$ ، یعنی تیرگی ماده‌ی ستاره‌ای مشخص می‌کنند. مخصوصاً، چگالی شار گرمای تابشی را که از معادله‌ی (۳-۹) حساب می‌شود، به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$j(x) = -\frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\rho\kappa} \frac{dT}{dx} \quad (16-3)$$

در این جا سازوکارهای پیچیده‌ی مربوط به تیرگی ماده‌ی ستاره‌ای را با دقت بررسی نمی‌کنیم، بلکه فقط ویژگی‌های بسیار مهم آن را در نظر می‌گیریم.

جذب مقید - آزاد در دماهای پایین که کسر بزرگی از اتم‌ها فقط به طور جزئی یونیده‌اند، مهم است. جذب آزاد - آزاد در دماهای بالاتر که یونش تقریباً کامل است، غالب است. این سازوکارها یک تیرگی متوسط را ایجاد می‌کنند که با چگالی افزایش و با دما کاهش می‌یابد:

$$\kappa \propto \rho T^{-3/5} \quad (17-3)$$

این امر را قانون کرامرز<sup>۱</sup> می‌نامند. پراکندگی الکترون یک تیرگی زمینه‌ای ثابت ایجاد می‌کند که در دماهای بالا و چگالی‌های پایین، غالب است. این تیرگی ثابت را با استفاده از معادلات (۱۰-۳) و (۶۹-۲) می‌توان به دست آورد:

$$\kappa_{es} = n_e \sigma_T / \rho = (1 + X_1) \sigma_T / 2m_H \approx (1 + X_1) \times 0.02 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1} \quad (18-3)$$

در این جا  $X_1$  کسر جرمی هیدروژن در ماده‌ی ستاره‌ای است.

برای نمایش عددی، سه مکان در داخل خورشید را در نظر می‌گیریم و بعضی مقادیر تقریبی تیرگی و چگالی را همراه با مقادیر متناظر مسیر آزاد میانگین یک فوتون،  $\bar{l} = 1/\kappa\rho$ ، را در زیر درج می‌کنیم.

مکان	تیرگی ( $\text{m}^2 \text{kg}^{-1}$ )	چگالی ( $\text{kg m}^{-3}$ )	مسیر آزاد میانگین (mm)
$0.0 R_{\odot}$	۰٫۱	$1.5 \times 10^5$	۰٫۰۷
$0.6 R_{\odot}$	۱٫۰	$3.5 \times 10^2$	۳٫۰
$0.9 R_{\odot}$	۱۰	$1.2 \times 10^1$	۸٫۰

باید توجه کرد که فاصله‌ی میانگین پیموده شده توسط فوتون‌ها در مکان‌های مختلف در داخل خورشید، زیادتر از مقدار تقریبی ۱mm است که در بخش ۱-۴ برای مقدار متوسط  $\bar{l}$  در داخل خورشید، به کار بردیم.

## ۲-۳ انتقال گرما با همرفت

در بخش اخیر حرکت تصادفی فوتون‌ها، الکترون‌ها و یون‌ها در یک ماده و اثر آن روی رسانش گرما را شرح دادیم. اما هنگامی که یک میدان نیرو وجود دارد، گرما ممکن است با حرکت جمعی ذره‌ها منتقل شود. در یک ستاره، این میدان نیرو را گرانش تولید می‌کند. وقتی یک بسته‌ی گاز در ستاره به طرف بالا حرکت می‌کند، گاهی ممکن است به یک محیط سردتر

و بسیار چگال وارد شود و بر اثر خاصیت شناوری (سبک شدن) به صعود خود ادامه دهد. یک بسته‌ی گاز در حال پایین رفتن نیز اگر به یک محیط گرم‌تر با چگالی کم‌تر وارد شود، به حرکت نزولی خود ادامه می‌دهد. در این صورت، جریان‌های پیچیده و غیرقابل پیشگویی به وجود می‌آیند که گرما را با سرعت بیش‌تر از نواحی گرم به نواحی سرد منتقل می‌کنند (همرفت). در واقع، همرفت آن‌چنان مؤثر است که نسبت به تمام سازوکارهای انتقال گرما غالب‌تر است. اما همرفت فقط موقعی صورت می‌گیرد که بزرگی شیب دما از یک مقدار بحرانی ویژه بیش‌تر باشد.

### شرط بحرانی برای همرفت

یک گاز ایده‌آل در یک میدان گرانشی را در نظر بگیرید. ما دما، فشار و چگالی در ارتفاع  $x$  را به صورت  $T$ ،  $P$ ، و  $\rho$  و مقادیر آن‌ها در ارتفاع  $x + \Delta x$  را به صورت  $T + \Delta T$ ،  $P + \Delta P$  و  $\rho + \Delta \rho$  نشان می‌دهیم. چون این گاز از قانون گازهای ایده‌آل پیروی می‌کند، داریم

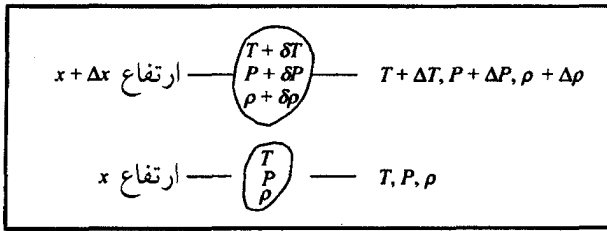
$$\rho \propto P/T$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta P}{P} - \frac{\Delta T}{T} \quad (۱۹-۳)$$

اکنون یک بسته‌ی گازی در ارتفاع  $x$  را مطابق شکل ۳-۲ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که دما، فشار و چگالی گاز در این بسته و محیط اطراف آن، سازگارند. به طور کلی، اگر بسته‌ی گاز تا ارتفاع  $x + \Delta x$  جابه‌جا شود، با محیط اطراف سازگار نخواهد بود. بنابراین، تغییرات دما، فشار و چگالی بسته‌ی گاز جابه‌جا شده را به صورت  $T + \delta T$ ،  $P + \delta P$  و  $\rho + \delta \rho$  نشان می‌دهیم. می‌توانیم فرض کنیم که فشار درون بسته سریعاً به محیط جدید پاسخ می‌دهد به طوری که  $\delta P = \Delta P$ . ضمناً فرض می‌کنیم که زمان کافی برای همرفت گرما به محیط وجود ندارد و بسته‌ی گاز جابه‌جا شده به طور بی‌دررو منبسط می‌شود تا فشار آن با فشار محیط اطراف سازگار شود. برای یک فرایند بی‌دررو  $P \propto \rho^\gamma$  است، در نتیجه داریم

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{1}{\gamma} \frac{\delta P}{P} \quad (۲۰-۳)$$

اگر چگالی بسته‌ی گاز از چگالی گاز محیط کم‌تر باشد، بسته سبک می‌شود و به حرکت خود



شکل ۲-۳ جابه‌جا شدن یک بسته‌ی گاز از ارتفاع  $x$  به ارتفاع  $x + \Delta x$ .

به‌طرف بالا ادامه می‌دهد، یعنی همرفت با شرط زیر صورت می‌گیرد

$$\delta \rho < \Delta \rho \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\gamma} \frac{\delta P}{P} < \frac{\Delta P}{P} - \frac{\Delta T}{T} \quad (21-3)$$

ما می‌توانیم  $\delta P = \Delta P$  را قرار دهیم زیرا فشار درون بسته‌ی گاز سریعاً تغییر می‌کند تا با محیط اطراف خود سازگار شود، لذا شرط همرفت را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{\Delta T}{T} < \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{\Delta P}{P} \quad (22-3)$$

به عبارت دیگر، شیب بحرانی دما برای همرفت عبارت است از

$$\frac{dT}{dx} < \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{T}{P} \frac{dP}{dx} \quad (23-3)$$

توجه کنید که شیب‌های دما و فشار در این معادله منفی‌اند. برای انجام همرفت، لازم است دما سریعاً با ارتفاع کاهش یابد. این افت دما از مقدار ضریب بی‌درروی  $\gamma$  و افت فشار حساب می‌شود.

می‌دانیم که ضریب بی‌درروی یک گاز کلاسیکی ایده‌آل به درجات آزادی ذرات گاز بستگی دارد. مخصوصاً اگر  $s$  درجه‌ی آزادی کلاسیکی وجود داشته باشد و انرژی گرمایی

متوسط هر درجه‌ی آزادی  $\frac{1}{2}kT$  باشد، در نتیجه خواهیم داشت

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{1 + s/2}{s/2} \quad (24-3)$$

برای ذرات گاز که سه درجه آزادی انتقال دارند،  $s = 3$  و در نتیجه  $\gamma = \frac{5}{3}$  است. اما اگر تعداد

درجات آزادی بیش‌تر باشد،  $\gamma$  کوچک‌تر خواهد بود. پس اگر ذرات گاز با تحریک درجات

آزادی داخلی مانند دوران یا ارتعاش بتوانند گرما را جذب کنند،  $\gamma$  کوچک‌تر است و شیب بحرانی دما برای همرفت (۳-۲۳) کم‌تر خواهد بود. اگر گرما با تفکیک مولکول‌ها یا یونش اتم‌ها نیز جذب شود، باز هم این شیب بحرانی دما کاهش می‌یابد.

عامل مهم دیگر در معادله‌ی (۳-۲۳)، یعنی افت فشار با ارتفاع، به شدت گرانش بستگی دارد. مخصوصاً اگر فرض کنیم تعادل هیدروستاتیکی در ناحیه‌ای برقرار است که شتاب گرانشی در آنجا  $g$  است، خواهیم داشت

$$\frac{dP}{dx} = -g\rho(x) \quad (۲۵-۳)$$

معلوم می‌شود که هر جا  $g$  کوچک است، افت فشار نیز کم است و همرفت به آسانی صورت می‌گیرد.

در عمل، جریان‌های همرفت می‌توانند گرما را به خوبی منتقل کنند. در واقع، این فرایند آن‌چنان مؤثر است که در بسیاری از موارد، تمام گرمای تولید شده می‌تواند سریعاً منتقل شود و شیب دما به مقدار بحرانی داده شده در معادله‌ی (۳-۲۳) برسد.

### ۳-۳ شیب دما در ستاره‌ها

شیب دما در هر نقطه از داخل ستاره، از آهنگ شارش انرژی به طرف سطح و سازوکار حاکم بر این شارش انرژی حساب می‌شود. در عمل، مهم‌ترین سازوکارها برای شارش انرژی در ستاره‌ها غالباً پخش تابشی و همرفت هستند.

فرض کنید در داخل یک ستاره  $L(r)$  معرف آهنگ شارش انرژی به طرف خارج یک سطح کروی به شعاع  $r$  است. آزاد شدن انرژی هسته‌ای در مرکز داغ ستاره ایجاب می‌کند که  $L(r)$  با  $r$  تا ناحیه‌ای افزایش یابد که در آنجا انرژی آزاد نمی‌شود. در واقع، اگر  $\mathcal{E}(r)$  معرف توان هسته‌ای تولید شده در واحد حجم در فاصله‌ی  $r$  از مرکز باشد، توان تولید شده در یک پوسته‌ی محصور به  $r$  و  $r+dr$  مساوی با  $\mathcal{E}(r)4\pi r^2 dr$  خواهد بود. شارش توان به طرف خارج ستاره برابر است با

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \mathcal{E}(r) \quad (۲۶-۳)$$



توان تولید شده در پوسته به این توان اضافه می‌شود، لذا در خارج از نواحی مرکزی تولید کننده‌ی توان،  $L(r)$  ثابت می‌ماند و به مقدار درخشندگی سطح ستاره نزدیک می‌شود.

فرض می‌کنیم پخش تابشی سازوکار غالب برای انتقال گرما باشد. در این صورت، شارش توان به طرف خارج مساوی با  $L(r) = 4\pi r^2 j(r)$  است که در آن  $j(r)$  از معادله‌ی (۳-۱۶) به دست می‌آید. در نتیجه داریم

$$\frac{L(r)}{4\pi r^2} = -\frac{4ac[T(r)]^3}{3\rho(r)\kappa(r)} \frac{dT}{dr} \quad (27-3)$$

در این رابطه دمای  $T$ ، چگالی  $\rho$  و تیرگی  $\kappa$  به  $r$  بستگی دارند. در واقع، بهتر است به این امر بیندیشیم که ستاره چگونه توان تولید شده در داخل ستاره را به سطح آن منتقل می‌کند. اگر این انتقال با پخش تابشی صورت گیرد، شیب دما برابر است با

$$\left[ \frac{dT}{dr} \right]_{rad} = -\frac{3\rho(r)\kappa(r)}{4ac[T(r)]^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2} \quad (28-3)$$

از معادله‌ی (۳-۲۸) برای انتقال گرما در خورشید نیز، البته با وارد کردن مقادیر عددی مناسب، می‌توان استفاده کرد. ما فرض می‌کنیم که شارش توان در خورشید به یک مقدار ثابت مساوی با درخشندگی سطح  $W = 4 \times 10^{26}$  در فاصله‌ی حدود  $0.4 R_{\odot}$  از مرکز خورشید، می‌رسد. اگر از تقریب‌های زیر برای دما، چگالی و تیرگی در این فاصله یعنی

$$T \approx 5 \times 10^6 \text{ K}, \quad \rho \approx 5 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \quad \text{و} \quad \kappa \approx 0.5 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$$

استفاده کنیم، شیب دما در حدود  $-0.3 \text{ K m}^{-1}$  به دست می‌آید. باید توجه کرد که تغییر نسبی دما در یک فاصله‌ی قابل مقایسه با مسیر آزاد فوتون (در حدود  $0.4 \text{ mm}$ ) فقط  $10^{-12}$  است. این امر نشان می‌دهد که محاسبه‌ی تقریبی پخش تابشی درست است: قسمت داخلی خورشید چگال و تیره است، و تابش به آرامی می‌تواند در آن و در ناحیه‌هایی که در تعادل ترمودینامیکی موضعی هستند، پخش شود.

اما اگر شیب دما به مقدار بحرانی برای انجام همرفت برسد، پخش تابشی سازوکار غالب برای انتقال گرما نخواهد بود. برطبق معادله‌ی (۳-۲۳)، این شیب بحرانی دما برابر است با

$$\left[ \frac{dT}{dr} \right]_{conv} = \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \quad (29-3)$$

که در آن، شیب دما از تعادل هیدروستاتیکی به دست می‌آید:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \quad (۳-۳۰)$$

در عمل، موقعی که شیب دما به مقدار بحرانی ارائه شده با معادله‌ی (۳-۲۹) می‌رسد، همرفت غالب‌تر از پخش تابشی می‌شود. در واقع، همرفت آن‌چنان مؤثر است که تقریباً هر مقدار توان را می‌تواند منتقل کند و به ندرت لازم است که شیب دما از این مقدار بحرانی بیش‌تر باشد. همرفت به ویژه در مناطق یونش و در هسته‌ی مرکزی ستاره‌های پرجرم رشته‌ی اصلی اهمیت دارد.

مناطق یونش در لایه‌های سطحی ستاره‌ها، جایی که اتم‌ها و یون‌ها به طور پیوسته انرژی را با یونش جذب و با بازترکیب آزاد می‌کنند، به وجود می‌آیند. همرفت به دو دلیل مورد توجه است. اولاً تیرگی  $\kappa$  بیش‌تر و شیب دما برای انتقال تابشی [معادله‌ی (۳-۲۸)] نیز بیش‌تر است. ثانیاً شیب دمای لازم برای انجام همرفت [معادله‌ی (۳-۲۹)] زیاد نیست زیرا ضریب بی‌درروی  $\gamma$  در حدود واحد است؛ به بیان فیزیکی، همرفت به این علت مورد توجه است که بسته‌ی گاز در حال صعود به مقدار زیاد سرد نمی‌شود و اگر بازترکیب الکترونی بتواند مقداری از انرژی لازم برای انبساط گاز را تأمین کند، بسته‌ی گاز تقریباً شناور می‌ماند.

در خورشید یک منطقه‌ی همرفت وجود دارد که درست در زیر فوتوسفر واقع است. خورشید لرنزه‌نگاری نشان می‌دهد که لبه‌ی زیرین منطقه‌ی همرفت در ارتفاع  $R_{\odot}(0.287 \pm 0.003)$  قرار دارد؛ به فصل ۷ رجوع کنید. در منطقه‌ی همرفت بسته‌های داغ گاز که به طور جزئی یونیده‌اند صعود می‌کنند و بسته‌های گاز سردتر به طرف پایین برمی‌گردند. در نتیجه، در قاعده‌ی فوتوسفر دانه‌های روشن، نامنظم و تراگذر تشکیل می‌شوند. انرژی منتقل شده در فوتوسفر آزاد و سپس بر اثر پخش تابشی به سطح خورشید منتقل می‌شود.

همرفت در نواحی تولید انرژی در ستاره‌ها نیز می‌تواند مهم باشد. مهم‌ترین حالت موقعی پیش می‌آید که توان گرماهسته‌ای در ناحیه‌ی کوچک نزدیک مرکز تولید شود. در این حالت، مقادیر زیادی از انرژی به ناحیه‌ای منتقل می‌شود که شتاب گرانشی در آن‌جا کم است؛ در نتیجه فشار به تدریج کاهش می‌یابد، و بسته‌ی گاز در حال صعود تقریباً شناور می‌ماند زیرا نیازی به انبساط بیش‌تر ندارد.

از نظر کمی می‌توان مقدار  $L(r)/m(r)$  یعنی توان تولید شده در واحد جرم در داخل هسته‌ای به شعاع  $r$  را در نظر گرفت. اگر این نسبت از یک مقدار بحرانی بیش‌تر شود، هسته‌ی مرکزی دارای خاصیت همرفت می‌شود. برای پیدا کردن این مقدار بحرانی، شیب دمای تابشی [معادله‌ی (۳-۲۸)] را با شیب بحرانی برای همرفت [معادله‌ی (۳-۲۹)] مساوی قرار می‌دهیم و با استفاده از معادله‌ی (۳-۳۰) داریم

$$\frac{3\rho\kappa}{4acT^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2} = \frac{(\gamma-1) T}{\gamma} \frac{Gm(r)\rho}{P r^2}$$

اگر به جای  $aT^4/3$  فشار تابشی  $P_r$  را قرار دهیم، متوجه می‌شویم که مقدار  $L(r)/m(r)$  لازم برای همرفت برابر است با

$$\left[ \frac{L(r)}{m(r)} \right]_{crit} = \frac{(\gamma-1) 16\pi Gc}{\gamma} \frac{P_r}{\kappa P} \quad (3-31)$$

اگر  $L(r)/m(r)$  از این مقدار کم‌تر باشد، انرژی می‌تواند بدون انجام همرفت و فقط از طریق پخش تابشی از هسته‌ی مرکزی منتقل شود. اما اگر از این مقدار بیش‌تر باشد، همرفت غالب است. بنابراین، یک هسته‌ی مرکزی همرفتی به شعاع  $r$  به شرطی به وجود می‌آید که توان تولید شده در واحد حجم درون  $r$ ، از حد تعیین شده با معادله‌ی (۳-۳۱) بیش‌تر باشد.

همرفت در هسته‌ی مرکزی ستاره‌های پرجرم رشته‌ی اصلی، یعنی در جایی اتفاق می‌افتد که سوختن توسط چرخه‌ی کربن - ازت صورت می‌گیرد. این فرایند، که در فصل ۴ مطالعه خواهد شد، شدیداً به دما بستگی دارد؛ در واقع، توان تلف شده با  $T^{17}$  متناسب است. وقتی در نزدیکی مرکز ستاره دما به  $r$  کاهش می‌یابد، توان هسته‌ای تولید شده سریعاً کم می‌شود تا نواحی تولیدکننده‌ی کوچک که همرفت در آن‌جا غالب است، به وجود آید. ناحیه‌ی مولد مرکزی ستاره‌های کم جرم، مانند خورشید، بزرگ‌تر است و همرفت در آن‌جا به ندرت صورت می‌گیرد. علت امر این است که سوختن هیدروژن در چنین ستاره‌هایی از طریق زنجیره‌ی پروتون - پروتون صورت می‌گیرد که نسبت به چرخه‌ی کربن - ازت بستگی کم‌تری به دما دارد.

اغلب مدل‌های خورشیدی نشان می‌دهند که همرفت در هسته‌ی مرکزی خورشید اهمیتی ندارد. برای مثال، اگر طرف راست معادله‌ی (۳-۳۱) را با استفاده از مقادیر مناسب هسته‌ی

خورشید، یعنی  $\gamma = \frac{5}{3}$ ،  $P = 1,73 \times 10^{16} \text{ Pa}$ ،  $T = 13,7 \times 10^6 \text{ K}$  و  $\kappa = 0,138 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$  حساب کنیم، متوجه می‌شویم که همرفت فقط به شرطی صورت می‌گیرد که تولید توان در واحد جرم از  $1,5 \times 10^{-3} \text{ W kg}^{-1}$  بیش‌تر باشد. در عمل، توان تولید شده در حدود  $1,35 \times 10^{-3} \text{ W kg}^{-1}$  است که از مقدار بحرانی برای همرفت کم‌تر است.

### ۳-۴ سرد شدن کوتوله‌های سفید

در انتهای این فصل به مطالعه‌ی فیزیکی مربوط به کاهش دما و درخشندگی یک کوتوله‌ی سفید می‌پردازیم. هدف اول ما نشان دادن نقش انتقال گرما در ستاره‌ها است. هدف دوم ما نشان دادن چگونگی محاسبه‌ی سن یک کوتوله‌ی سفید از روی درخشندگی آن است. این امر امکان‌پذیر است زیرا کوتوله‌ی سفید یک ستاره‌ی خنثی، یعنی یک جسم مرده بدون چشمه‌ی توان داخلی است. همان‌طور که هر کاشفی می‌داند زمان مرگ را می‌توان از دمای جسد ستاره معین کرد. از این زمان می‌توان برای برآورد سن کوتوله‌ی سفید و هم‌چنین سن سیستم ستاره‌ای که کوتوله‌ی سفید به آن تعلق دارد، استفاده کرد.

قسمت اعظم یک کوتوله‌ی سفید از یک سیستم چگال متشکل از یون‌ها و الکترون‌های تبهگن تشکیل شده است که با پوشش نازکی از ذرات گاز کلاسیکی احاطه شده است. این ستاره عمدتاً با همرفت گرما توسط الکترون‌ها در قسمت داخلی ستاره، و با پخش تابش در پوشش خارجی، سرد می‌شود. مدت زمان سرد شدن طولانی است زیرا انرژی گرمایی یون‌ها در قسمت داخلی بالا است و تیرگی گاز تشکیل دهنده‌ی پوشش نیز زیاد است. در واقع، مقیاس زمانی سرد شدن در حدود یک بیلیون سال است که به قدر کافی زیاد است و می‌توان مطمئن شد که بسیاری از کوتوله‌های سفید هنوز مشاهده نشده‌اند، اما آن‌قدر کوتاه است که می‌توان مطمئن بود که بسیاری از کوتوله‌های سفید دارای درخشندگی کم هستند.

اکنون یک مدل ساده برای سرد شدن کوتوله‌ی سفید متشکل از یک کره‌ی داغ فلز مانند احاطه شده با یک گاز یونیده‌ی نارسانا را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که دمای قسمت داخلی تقریباً یکنواخت است زیرا رسانندگی گرمایی الکترون‌های تبهگن خیلی زیاد است؛

چنین الکترون‌هایی انرژی را با مسیرهای آزاد زیاد منتقل می‌کنند زیرا آن‌ها می‌توانند فقط در حالت‌های کوانتومی اشغال نشده پراکنده شوند. دمای این قسمت داخلی تک‌دما را با  $T_I$  نشان می‌دهیم. ضمناً فرض می‌کنیم که انرژی گرمایی یون‌ها، که نوعاً  $\frac{3}{2}kT_I$  برای هر یون است و به صورت گرما تلف می‌شود، عمدتاً با پخش تابشی به پوشش خارجی منتقل می‌شود. بنابراین، خواص نارسانایی پوشش خارجی، اتلاف انرژی در فضای خارجی را تنظیم می‌کند و از این رو رابطه‌ی بین درخشندگی  $L$  ستاره و کاهش پایای دمای داخلی  $T_I$  را معین می‌کند. باید توجه کرد که وقتی انرژی تلف می‌شود، تغییر کمی در ساختار ستاره ایجاد می‌شود زیرا ساختار توسط الکترون‌های تبهگنی که نمی‌توانند انرژی تلف کنند، حفظ می‌شود.

وظیفه‌ی اول ما در نظر گرفتن تغییرات فشار، دما و چگالی در پوشش خارجی کوتوله‌ی سفید است. فرض می‌کنیم که گاز یونیده در این پوشش، کلاسیکی و ایده‌آل و تابع معادله‌ی حالت  $P = \rho kT / \bar{m}$  است. در این پوشش یک شیب فشار وجود دارد که بر اثر تعادل هیدروستاتیکی به وجود می‌آید و از معادله‌ی (۳-۳۰) حساب می‌شود و شیب دمایی تولید شده با شارش گرما به طرف سطح نیز با پخش تابشی تولید می‌شود و از معادله‌ی (۳-۲۸) حساب می‌شود. در نتیجه داریم

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho(r)}{r^2} \quad \text{و} \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{\frac{3}{4}\rho(r)\kappa(r)}{4\pi r^2} \frac{L}{\kappa} \quad (۳۲-۳)$$

چون انرژی تولید نمی‌شود،  $L$  درخشندگی سطح است. ضمناً، به جای  $m(r)$ ، مقدار  $M$  یعنی جرم کل ستاره را قرار داده‌ایم زیرا قسمت اعظم جرم ستاره در داخل پوسته‌ی آن متمرکز شده است. این دو معادله را می‌توان به صورت زیر ترکیب کرد

$$\frac{dP}{dT} = \left[ \frac{16\pi acG}{3} \frac{M}{L} \right] \frac{T^3}{\kappa} \quad (۳۳-۳)$$

تیرگی گاز یونیده در پوشش خارجی ستاره به دما، چگالی و ترکیب شیمیایی آن بستگی دارد. در این محاسبه فرض می‌کنیم که تیرگی از جذب مقید - آزاد ناشی می‌شود و ۹۰ درصد جرم از هلیوم و ۱۰ درصد باقی مانده از عناصر سنگین‌تر تشکیل شده است. بنابراین، تیرگی مناسب برابر است با

$$\kappa = \kappa_0 \rho T^{-3/5} = 4,34 \times 10^{19} \rho T^{-3/5} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1} \quad (34-3)$$

این رابطه با قانون کرامرز [معادله‌ی (۳-۱۷)] سازگار است. ما می‌توانیم از معادله‌ی گاز ایده‌آل برای نوشتن رابطه‌ی تیرگی بر حسب دما و فشار استفاده کنیم:

$$\kappa = \left[ \frac{\kappa_0 \bar{m}}{k} \right] P T^{-4/5} \quad (35-3)$$

با قرار دادن این مقدار در معادله‌ی (۳-۳۳) معادله‌ی دیفرانسیل زیر برای رابطه‌ی بین فشار و دما در پوشش ستاره به دست می‌آید

$$\frac{dP}{dT} = C \frac{T^{7/5}}{P} \quad C = \left[ \frac{16\pi ac G k M}{3\kappa_0 \bar{m} L} \right] \quad \text{به ازای} \quad (36-3)$$

اگر از این رابطه انتگرال بگیریم و از شرط مرزی  $P=0$  به ازای  $T=0$  استفاده کنیم، داریم

$$\frac{P^2}{2} = C \frac{T^{8/5}}{8/5} \quad (37-3)$$

هرچه به مرکز کوتوله‌ی سفید نزدیک‌تر شویم، فشار، دما و چگالی آن افزایش می‌یابد. از این میان چگالی الکترون‌ها برای ما مهم‌تر است زیرا وقتی به قسمت داخلی کوتوله‌ی سفید نزدیک‌تر می‌شویم، الکترون‌ها تبهکن می‌شوند. این چگالی را با توجه به این نکته می‌توان پیدا کرد که  $\frac{2}{3}$  ذره‌های گاز یونیده‌ی پوشش کوتوله‌ی سفید، الکترون‌ها هستند. بنابراین،

الکترون‌ها  $\frac{2}{3}$  فشار را با چگالی عددی زیر تولید می‌کنند

$$n_e = \frac{2}{3} \frac{P}{kT} \quad (38-3)$$

اگر این رابطه را با معادله‌ی (۳-۳۷) ترکیب کنیم، داریم

$$n_e = \frac{2}{3k} \left[ \frac{C}{4,25} \right]^{\frac{1}{2}} T^{\frac{13}{4}} \quad (39-3)$$

وقتی مقدار  $n_e$  به چگالی عددی کوانتومی داده شده با معادله‌ی (۲-۲۲) میل می‌کند، یعنی وقتی  $n_e$  به مقدار

$$n_Q = \left[ \frac{2\pi m_e kT}{h^3} \right]^{\frac{3}{2}} \quad (40-3)$$

میل می‌کند، الکترون‌ها دیگر یک گاز کلاسیکی تشکیل نمی‌دهند. گذار از گاز الکترونی کلاسیکی در پوشش، به گاز الکترونی کوانتومی در قسمت داخلی ستاره موقعی صورت می‌گیرد که  $n_e \approx n_Q$  باشد. قسمت داخلی ستاره موقعی شدیداً رسانا و تک‌دما می‌شود که الکترون‌ها به ازای  $n_e \gg n_Q$  تبهگن شوند. در حالت خاص، رابطه‌ی تقریبی دمای قسمت داخلی تک‌دما،  $T_I$ ، را با این فرض می‌توان به دست آورد که در این دما  $n_e = 10 n_Q$  است. بنابراین از معادلات (۳-۳۹) و (۳-۴۰) داریم

$$10 \left[ \frac{2\pi m_e k T_I}{h^2} \right]^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3k} \left[ \frac{C}{4,25} \right]^{\frac{1}{2}} T_I^{\frac{13}{4}} \quad (۳-۴۱)$$

اگر از تعریف ثابت  $C$  در معادله‌ی (۳-۳۶) استفاده کنیم، و اگر خورشید را به عنوان استاندارد جرم و درخشندگی در نظر بگیریم، رابطه‌ی تقریبی زیر برای  $T_I$  به دست می‌آید

$$T_I \approx (7 \times 10^7 \text{ K}) \left[ \frac{L/L_\odot}{M/M_\odot} \right]^{\frac{2}{5}} \quad (۳-۴۲)$$

بالاخره، می‌توانیم معادله‌ی (۳-۴۲) را مجدداً مرتب کنیم و درخشندگی یک کوتوله‌ی سفید را برحسب جرم و دمای قسمت داخلی تک‌دما‌ی آن بیان کنیم

$$L \approx \left[ \frac{T_I}{7 \times 10^7 \text{ K}} \right]^{\frac{5}{2}} \left[ \frac{M}{M_\odot} \right] L_\odot \quad (۳-۴۳)$$

باید توجه کرد که این رابطه‌ی تقریبی بین درخشندگی  $L$  و دمای داخلی  $T_I$  به این علت به دست می‌آید که پوشش نارسانای کوتوله‌ی سفید اتلاف انرژی در فضای خارجی را تنظیم می‌کند.

چشمه‌ی انرژی برای درخشندگی یک کوتوله‌ی سفید، انرژی گرمایی یون‌های کلاسیکی در قسمت داخلی ستاره است. این ذخیره‌ی انرژی بسیار زیاد است. برای مثال، اگر یک کوتوله‌ی سفید به جرم  $M$  شامل یون‌های کربن به صورت یک گاز کلاسیکی باشد، انرژی گرمایی آن برابر خواهد بود با

$$E \approx \frac{3}{2} N k T_I = \frac{3}{2} \left[ \frac{M}{12 m_H} \right] k T_I \quad (۳-۴۴)$$

برای ستاره‌ای به جرم  $0,4 M_\odot$  در دمای  $10^8 \text{ K}$ ، مقدار انرژی گرمای مساوی با  $8 \times 10^{40} \text{ J}$

است. در عمل، هنگامی که کوتوله‌ی سفید سرد می‌شود، یون‌ها متبلور می‌شوند و یک شبکه‌ی بلوری به وجود می‌آورند. گرمای ویژه از  $\frac{3}{4}Nk$  به  $3Nk$  افزایش می‌یابد و سپس وقتی که دما به زیر دمای دمای جامد می‌رسد، گرمای ویژه کاهش می‌یابد.

با داشتن درخشندگی یک کوتوله‌ی سفید [معادله‌ی (۳-۴۳)] و ذخیره‌ی انرژی داخلی آن [معادله‌ی (۳-۴۴)]، آهنگ سرد شدن آن را می‌توان پیدا کرد. اگر آهنگ کاهش انرژی داخلی را مساوی با درخشندگی قرار دهیم، داریم

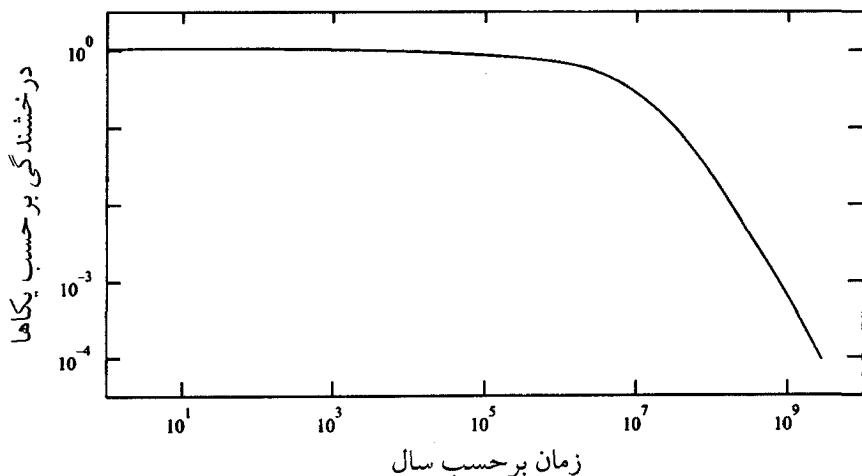
$$\frac{dT_I}{dt} = -\alpha \left[ \frac{T_I}{\gamma \times 10^7 \text{ K}} \right]^{\frac{5}{2}} \quad \alpha \approx \frac{\gamma}{3k} \left[ \frac{12m_H}{M_\odot} \right] L_\odot \approx 6 \text{ K در هر سال} \quad (3-45)$$

از این معادله‌ی دیفرانسیل ساده می‌توان انتگرال گرفت تا رابطه‌ی دمای داخل کوتوله‌ی سفید برحسب زمان به دست آید. سپس این رابطه را می‌توان در معادله‌ی (۳-۴۳) قرار داد تا درخشندگی برحسب زمان حساب شود. دمای اولیه‌ی داخلی و درخشندگی از رویدادهایی که به تشکیل کوتوله سفید منجر می‌شوند، تعیین می‌شود. برای مثال، اگر کوتوله‌ی سفید از سوختن کامل هلیوم به وجود آمده باشد، دمای داخلی آن در حدود  $10^8 \text{ K}$  خواهد بود و اگر جرم کوتوله‌ی سفید  $0.4 M_\odot$  باشد، درخشندگی اولیه‌ی آن در حدود  $L_\odot$  خواهد بود.

شکل ۳-۳ درخشندگی در حال کاهش یک کوتوله‌ی سفید کربنی به جرم  $0.4 M_\odot$  با دمای داخلی اولیه‌ی  $10^8 \text{ K}$  را نشان می‌دهد. توجه کنید که مدت زمان سرمایش حساب شده از درخشندگی تقریبی  $L_\odot$  تا  $10^{-4} L_\odot$ ، یک بیلیون سال است.

این محاسبه‌ی ساده فقط برای سرد شدن کوتوله‌های سفید به کار می‌رود. برای مقایسه‌ی دقیق بین نظریه و مشاهده باید خواص گرمایی یون‌ها، اتلاف گرما با گسیل نوترینوها و آزاد شدن انرژی بر اثر تنه‌نشین شدن با گرانش، دقیقاً بررسی شود؛ به مقاله‌ی شاپیرو<sup>۲</sup> و توکولسکی<sup>۳</sup> (۱۹۸۳) رجوع کنید. این مقایسه در ستاره‌شناسی به کار می‌رود و برای برآورد سن کوتوله‌های سفید و سن سیستم‌های ستاره‌ای که کوتوله‌ها به آن تعلق دارند، به کار می‌رود.





شکل ۳-۳ درخشندگی در حال کاهش یک کوتوله‌ی سفید کربنی در حال سرد شدن که دارای جرم  $0.4 M_{\odot}$  و دمای داخلی اولیه‌ی  $10^8 K$  است.

### خلاصه

#### انتقال گرما با حرکت تصادفی

- چگالی شار گرما که از حرکت گرمایی تصادفی ذره‌ها با تندی متوسط  $\bar{v}$ ، مسیر آزاد میانگین  $\bar{l}$  و ظرفیت گرمایی واحد حجم  $C$  ناشی می‌شود برابر است با

$$j(x) = -K \frac{dT}{dx} \quad K \approx \frac{1}{3} \bar{v} \bar{l} C \quad \text{به ازای} \quad (3-3)$$

حرکت تصادفی الکترون‌ها، یون‌ها و فوتون‌ها می‌تواند باعث رسانش گرما بشود.

- رسانش با فوتون‌ها، یا پخش تابشی، اهمیت ویژه‌ای دارد. چگالی شار تابشی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$j(x) = -K_r \frac{dT}{dx} \quad K_r \approx \frac{4}{3} c \bar{l} a T^3 \quad \text{به ازای} \quad (9-3)$$

- انتقال گرما با پخش تابشی را معمولاً برحسب تیرگی  $\kappa = 1/\rho \bar{l}$  توصیف می‌کنند. چگالی شار تابشی برابر است با

$$j(x) = -\frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\rho \kappa} \frac{dT}{dx} \quad (16-3)$$

تیرگی ثابت زمینه که از پراکندگی الکترون ناشی می‌شود برابر است با

$$\kappa_{es} \approx (1 + X_1) \times 0.02 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1} \quad (18-3)$$

در چگالی بالا و دمای پایین، جذب مقید - آزاد و جذب آزاد - آزاد باعث بروز تیرگی می‌شود که رابطه‌ی چگالی و دمای آن برطبق قانون کرامرز به صورت زیر است

$$\kappa \propto \rho T^{-3/5} \quad (17-3)$$

### انتقال گرما با همرفت

● اگر شیب دما در یک گاز ایده‌آل کلاسیکی از رابطه‌ی زیر به دست بیاید، یک بسته‌ی گاز در حال صعود شناور می‌ماند و به صعود خود ادامه می‌دهد، و یک بسته‌ی گاز در حال نزول به سقوط خود ادامه می‌دهد

$$\frac{dT}{dx} < \frac{(\gamma-1) T}{\gamma P} \frac{dP}{dx} \quad (23-3)$$

وقتی این شیب بحرانی دما حاصل می‌شود، معمولاً غالب‌ترین سازوکار انتقال گرما رسانش است.

### شیب دما در ستاره‌ها

● اگر شارش توان به طرف خارج یک ستاره با پخش تابشی صورت گیرد، شیب دما برابر است با

$$\left[ \frac{dT}{dr} \right]_{rad} = - \frac{3 \rho(r) \kappa(r) L(r)}{4ac [T(r)]^3 4\pi r^2} \quad (28-3)$$

● اگر شیب دما به مقدار بحرانی

$$\left[ \frac{dT}{dr} \right]_{conv} = \frac{(\gamma-1) T}{\gamma P} \frac{dP}{dr} \quad (29-3)$$

برسد، غالب‌ترین سازوکار برای انتقال گرما، همرفت است.

## سرد شدن کوتوله‌های سفید

● مسأله‌ی مهم سرد شدن کوتوله‌های سفید، بسیاری از ایده‌های معرفی شده در این فصل را نشان می‌دهد. در کوتوله‌های سفید انتقال گرما با پخش تابشی به طرف لایه‌های خارجی ستاره، و رسانش گرما با الکترون‌های تبهگن به طرف قسمت داخلی ستاره صورت می‌گیرد.

## مسأله‌های فصل ۳

۱-۳ اگر رابطه‌ی بسامد و دما با مسیر آزاد میانگین یک فوتون به صورت

$$\bar{l}_\nu \propto \nu^3 T^{-\frac{1}{2}}$$

باشد، نشان دهید که تیرگی متوسط از قانون کرمرز [معادله‌ی (۳-۱۷)] پیروی می‌کند.

۲-۳ تیرگی به ترکیب شیمیایی ماده‌ی ستاره بستگی دارد. توضیح دهید چرا تیرگی آزاد -

آزاد با  $(1+X_1)(X_1+X_4)$ ، و تیرگی مقید - آزاد با  $X_A(1+X_1)$  متناسب است؟ در

این جا  $X_1$ ،  $X_4$  و  $X_A$  کسرهای جرمی هیدروژن، لیتیوم و عناصر سنگین تر هستند.

۳-۳ نشان دهید که انتقال گرما با پخش تابشی باعث می‌شود شیب فشار تابش ناصفر شود

که با شارش گرمای تابش شده متناسب است. با یادآوری این نکته که بزرگی نیروی

فشاری وارد بر واحد حجم یک شاره با شیب فشار برابر است، چگالی شار گرمایی

تابش شده‌ای را پیدا کنید که جوّ یک ستاره با گرانس سطحی  $g$  را حفظ می‌کند. سپس

نشان دهید که درخشندگی بیشینه‌ی ستاره‌ای به جرم  $M$  از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$L_{max} = 4\pi cGM / \kappa$$

که در آن  $\kappa$  تیرگی در نزدیکی سطح ستاره است. مقدار عددی این درخشندگی را با این

فرض برآورد کنید که سطح ستاره به قدر کافی داغ است تا تیرگی حاصل از پراکندگی

الکترون غالب باشد. (این درخشندگی بیشینه را درخشندگی ادینگتون<sup>۱</sup> می‌نامند).

۴-۳ می‌دانیم که ضریب بی‌درروی  $\gamma$  با نسبت ظرفیت‌های گرمایی در فشار ثابت و در

حجم ثابت، برابر است. نشان دهید که برای یک گاز کلاسیکی ایده‌آل، شیب بحرانی

دما برای انجام همرفت [معادله‌ی (۳-۲۳)] را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\left[ \frac{dT}{dx} \right]_{conv} = -\frac{g}{C_p}$$

در این رابطه  $C_p$  ظرفیت گرمایی واحد حجم در فشار ثابت و  $g$  شتاب گرانشی است. (توجه کنید که اگر ظرفیت گرمایی بر اثر جذب گرما با برانگیزش و / یا تفکیک ذره‌ها زیاد شود، شیب دمایی لازم برای همرفت کم‌تر می‌شود).

۵-۳ دما و فشار تقریبی در پوشش خارجی یک کوتوله‌ی سفید با این فرض در بخش ۳-۴ به دست آمد که تعادل هیدروستاتیکی برقرار است و شار گرما با پخش تابشی صورت می‌گیرد. نشان دهید که نتایج حاصل با چشمپوشی از همرفت به دست آمده‌اند.

۶-۳ با استفاده از معادله‌ی (۳-۳۷) نشان دهید که شیب دمایی تابشی در پوشش خارجی گاز کلاسیکی اطراف یک کوتوله‌ی سفید از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{GM\bar{m}}{4\pi 5r^2k}$$

یک کوتوله‌ی سفید به جرم  $M = 0.4 M_\odot$  و شعاع  $R = R_\odot / 100$  با دمای داخلی  $10^7 \text{ K}$  را در نظر بگیرید و ضخامت پوشش خارجی آن را برآورد کنید.

۷-۳ از معادله‌ی (۳-۴۵) انتگرال بگیرید و نشان دهید که زمان لازم برای سرد شدن یک کوتوله‌ی سفید کربنی به جرم  $M$ ، از دمای داخلی زیاد تا دمای داخلی بسیار کم  $T_I$ ، تقریباً برابر است با

$$t = \frac{3}{5} \frac{kT_I}{L} \frac{M}{12m_H}$$

که در آن  $L$  درخشندگی متناظر با  $T_I$  است.

۸-۳ کمیت‌های فیزیکی در نزدیکی مرکز یک ستاره در جدول زیر درج شده‌اند. با چشمپوشی از فشار تابش و با این فرض که جرم متوسط ذرات گاز  $\bar{m} = 0.7 \text{ amu}$  است، مشخص کنید انتقال گرما با همرفت صورت می‌گیرد یا با تابش.

$r$	$m(r)$	$L(r)$	$T(r)$	$\rho(r)$	$\kappa$
$0.1 R_\odot$	$0.028 M_\odot$	$24.2 L_\odot$	$2.2 \times 10^7 \text{ K}$	$3.1 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$	$0.040 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$

## همجوشی گرماهسته‌ای در ستاره‌ها

همجوشی گرماهسته‌ای در ستاره‌ها با انقباض گرانشی فعال می‌شود. چون دافعه‌ی کولنی شدیداً مانع همجوشی هسته‌ای است، اولین سوخت هسته‌ای برای انجام همجوشی، هسته‌های سبک با بار الکتریکی کم هستند. انرژی آزاد شده از این سوخت، یک توقف موقتی در انقباض ستاره ایجاد می‌کند، و انقباض موقعی مجدداً آغاز می‌شود که این سوخت از ستاره خارج شود. بنابراین، دمای داخلی ستاره تا جایی افزایش می‌یابد که سوخت دسترس‌پذیر بعدی، شامل سوخت‌های با جرم بیش‌تر، بسوزند. به این ترتیب، ستاره می‌تواند از یک رشته مراحل سوختن هسته‌ای عبور کند که انقباض گرانشی را متوقف می‌کند و به تأخیر می‌اندازد. این توقف‌های گرماهسته‌ای نه تنها عمر یک ستاره را طولانی می‌کنند، بلکه نقش سازنده‌ای در ترکیب شدن هسته‌های اتمی سنگین‌تر بازی می‌کنند. ما این فصل کتاب را با تشریح مبانی فیزیکی همجوشی گرماهسته‌ای آغاز می‌کنیم.

### ۴-۱ فیزیک همجوشی گرماهسته‌ای

ویژگی قابل توجه و شگفت‌آور همجوشی گرماهسته‌ای این است که در دماهای بسیار پایین صورت می‌گیرد. در واقع، وقتی مفهوم همجوشی هسته‌ای برای اولین بار در مورد تحول ستاره‌ها بیان شد، افراد زیادی این جمله‌ی غلط را به کار بردند که ستاره‌ها به قدر کافی داغ نیستند تا همجوشی در آن‌ها صورت گیرد. اما پاسخ سر آرتور ادینگتون<sup>۱</sup> به این افراد اشتباه

1. Sir Arthur Eddington

کننده بسیار قاطع بود: «ما در مورد این سخن نقادانه که ستاره‌ها به قدر کافی داغ نیستند تا این فرایند صورت گیرد، بحث نمی‌کنیم؛ ما به آن‌ها می‌گوییم که بروند و جای داغ‌تری پیدا کنند.» ما می‌دانیم که همجوشی هسته‌ای در ستاره‌ها قطعاً به خواص موج مانند هسته‌های اتمی بستگی دارد.

### نفوذ در سد

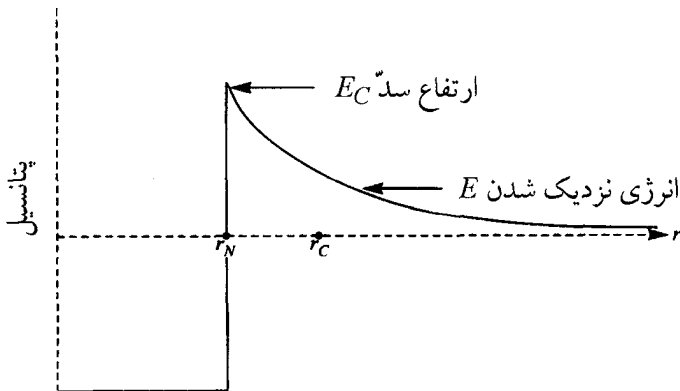
دو هسته با بارهای  $Z_A$  و  $Z_B$  با جرم‌های  $m_A$  و  $m_B$  را در نظر بگیرید. در فاصله‌های زیاد  $r$  این ذره‌ها با پتانسیل کولنی دافعه  $Z_A Z_B e^2 / 4\pi\epsilon_0 r$  برهم کنش می‌کنند. اما در فاصله‌های قابل مقایسه با یک فرمی ( $10^{-15}$  m) آن‌ها با یک پتانسیل هسته‌ای جاذبه‌ی قوی برهم کنش می‌کنند به طوری که تغییر انرژی پتانسیل کل برهم کنش مطابق شکل ۴-۱ صورت می‌گیرد. توجه کنید که سد پتانسیل الکتریکی مانع نزدیک شدن هسته‌ها به یک‌دیگر و همجوشی آن‌ها با یک‌دیگر می‌شود. در این جا سازوکار کلاسیکی برخورد سربه‌سر صورت می‌گیرد: وقتی هسته‌ها به یک‌دیگر نزدیک می‌شوند، انرژی جنبشی به طور فزاینده به انرژی پتانسیل تبدیل می‌شود تا آن که انرژی پتانسیل به صفر می‌رسد. در نتیجه هسته‌ها موقتاً متوقف می‌شوند و به عقب می‌جهند. نزدیک‌ترین فاصله‌ی هسته‌ها از یک‌دیگر،  $r_C$ ، متناظر با نقطه‌ای است که در آن‌جا انرژی پتانسیل به انرژی نزدیکی  $E$  می‌رسد. وقتی مقدار انرژی به  $E$  می‌رسد،  $r_C$  برابر است با

$$E = \frac{Z_A Z_B e^2}{4\pi\epsilon_0 r_C} \quad (1-4)$$

بنابر فیزیک کلاسیکی، همجوشی به شرطی صورت می‌گیرد که  $r_C$  از  $r_N$ ، یعنی برد برهم کنش هسته‌ای بین هسته‌ها، کم‌تر باشد. به بیان دیگر، همجوشی به شرطی امکان‌پذیر است که هسته‌ها انرژی جنبشی کافی برای بالا رفتن از سد پتانسیلی به ارتفاع

$$E_C = \frac{Z_A Z_B e^2}{4\pi\epsilon_0 r_N} \approx \frac{1.4 Z_A Z_B}{(r_N \text{ برحسب فرمی})} \text{ MeV} \quad (2-4)$$

را داشته باشند. ارتفاع این سد در مقایسه با انرژی‌های گرمایی نوعی هسته‌ها در ستاره‌ها،



شکل ۴-۱ نمایش پتانسیل‌های کولنی و هسته‌ای بین دو هسته با بارهای  $Z_A$  و  $Z_B$ . فاصله  $r_C$  نزدیک‌ترین فاصله‌ی هسته‌ها از یک‌دیگر با انرژی نزدیک  $E$  است. فاصله  $r_N$  معرف بُرد نیروهای هسته‌ای کوتاه‌برد است.  $E_C$  ارتفاع سد کولنی برای جدا نگه‌داشتن هسته‌ها است.

بیش‌تر است. برای مثال، وقتی دما  $10^7 \text{ K}$  است، مقدار  $kT$  از مرتبه‌ی  $1 \text{ keV}$  است نه از مرتبه‌ی  $1 \text{ MeV}$ . علاوه بر این، تعداد هسته‌ها با انرژی گرمایی حدود  $1 \text{ MeV}$ ، بسیار کم است؛ اگر  $E = 1$  و  $kT = 1 \text{ keV}$  باشد، این تعداد از مرتبه‌ی  $\exp(-E/kT)$  یا  $\exp(-1000)$  است. بنابراین، در نظر اول، دافعه‌ی کولنی یک سد غیرقابل نفوذ برای انجام همجوشی در ستاره‌ها ایجاد می‌کند.

در واقع، نزدیک‌ترین فاصله‌ی متناهی یک فاصله‌ی تصویری است و آلاً همجوشی در کم‌تر از انرژی‌های  $E_C$  صورت می‌گیرد. بنابر مکانیک کوانتومی، احتمال نفوذ کردن هسته‌ها در سد کولنی و رسیدن آن‌ها به ناحیه‌ای با برهم کنش هسته‌ای قوی، وجود دارد. در این ناحیه امکان دارد هسته‌ها با هم جوش بخورند و یک هسته‌ی سنگین‌تر تولید کنند. دلیل فیزیکی نفوذ در سد این است که تابع موج نزدیک شدن هسته‌ها به یک‌دیگر می‌تواند به داخل ناحیه‌ی ممنوع برای ذرات کلاسیکی، نشت کند. این تابع موج  $\psi(\mathbf{r})$ ، را با حل کردن معادله‌ی شرودینگر برای دو هسته در پتانسیل  $V(r)$  می‌توان پیدا کرد:

$$\left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_r} + V(r) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (4-3)$$

در این جا جرم کاهیده  $m_r$  از رابطه‌ی  $m_r = m_A m_B / (m_A + m_B)$  به دست آمده است. اکنون با شناختن تابع موج می‌توانیم جای هسته را با این فرض معین کنیم که احتمال حضور هسته‌ها در بین فاصله‌های  $r$  و  $r + dr$  مساوی با  $|\psi(r)|^2 4\pi r^2 dr$  است.

برای ادراک مکانیک موجی نفوذ در سد، مثلاً یک سد با ارتفاع ثابت  $E_C$  را مطابق شکل ۲-۴ در نظر می‌گیریم. وقتی ذره‌ای با انرژی  $E$  از سمت راست به این سد نزدیک می‌شود، تابع موج آن در ناحیه‌ی مجاز کلاسیکی به صورت سینوسی نوسان می‌کند. وقتی موج به ناحیه‌ی ممنوع کلاسیکی نفوذ می‌کند، انرژی جنبشی  $E - E_C$  منفی است و معادله‌ی تابع موج فرودی به صورت زیر است

$$\nabla^2 \psi(r) = \chi^2 \psi(r) \quad (4-4)$$

که در آن  $\chi$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E = -\frac{\hbar^2 \chi^2}{2m_r} + E_C \quad (5-4)$$

می‌توان نتیجه گرفت که هر چه  $r$  کوچکتر می‌شود تابع موج فرودی به صورت نمایی کاهش می‌یابد. در واقع اگر تکانه‌ی زاویه‌ای مداری وجود نداشته باشد، داریم

$$\psi(r) = \frac{\exp(\chi r)}{r} \quad (6-4)$$

احتمال نفوذ کردن هسته‌ها در سد کولنی تقریباً برابر است با

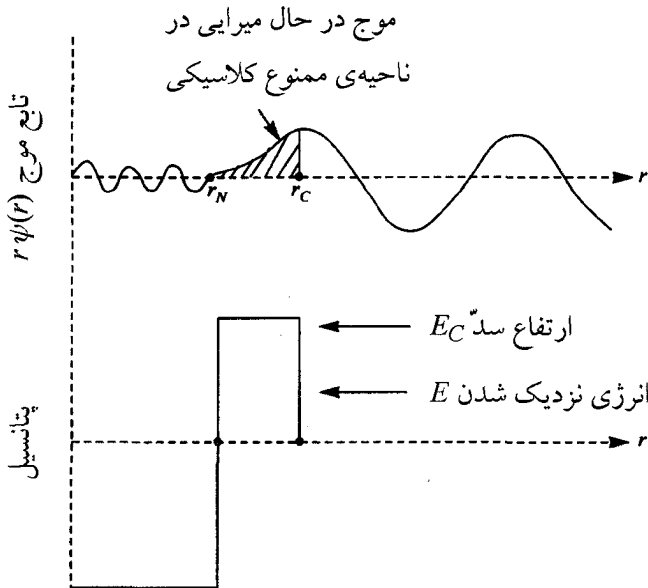
$$\text{احتمال نفوذ کردن} \approx \frac{|\psi(r_N)|^2 4\pi r_N^2}{|\psi(r_C)|^2 4\pi r_C^2} = \left| \exp[-\chi(r_C - r_N)] \right|^2 \quad (7-4)$$

برای محاسبه‌ی دقیق‌تر باید احتمال چگالی جریان ذره‌ها و بازتاب آن‌ها از مرز داخلی را در نظر گرفت، ولی نتیجه‌ی ارائه شده با معادله‌ی (۷-۴) برای منظور ما کافی است.

این نتیجه ممکن است با احتمال نفوذ در سدی با ارتفاع متغیر، مانند سد کولنی در شکل ۱-۴، سازگار باشد. در این حالت، پارامتر  $\chi$ ، که کاهش نمایی تابع موج در ناحیه‌ی ممنوع کلاسیکی را نشان می‌دهد، به  $r$  بستگی دارد. برای هسته‌هایی با جرم کاهیده  $m_r$ ، داریم

$$E = -\frac{\hbar^2 [\chi(r)]^2}{2m_r} + \frac{Z_A Z_B e^2}{4\pi \epsilon_0 r} \quad (8-4)$$





شکل ۲-۴ تابع موج مربوط به نفوذ کردن ذره‌ها در سدی با ارتفاع ثابت  $E_C$ ؛ انرژی نزدیک شدن این ذره‌ها،  $E$ ، از ارتفاع سد کم‌تر است. این تابع موج  $\psi(r)$  به طور سینوسی در ناحیه‌ی مجاز خارجی‌تر و داخلی‌تر نوسان می‌کند. دامنه‌ی این موج به طور نمایی در ناحیه‌ی ممنوع کلاسیکی کاهش می‌یابد. در هنگام همجوشی گرماسته‌ای در ستاره‌ها، طول موج حرکت نسبی هسته‌ها در ناحیه‌ی مجاز کلاسیکی خارجی‌تر در مقایسه با برد نیروهای هسته‌ای  $r_N$  بسیار بلند است.

و معادله‌ی متناظر با معادله‌ی (۴-۷) عبارت است از

$$\text{احتمال نفوذ} \approx \left| \exp\left[-\int_{r_N}^{r_C} \chi(r) dr\right] \right|^2 \quad (4-9)$$

این انتگرال را با قرار دادن  $r = r_C \cos^2 \theta$  می‌توان حساب کرد. بهتر است نتیجه را برحسب انرژی نسبی  $E$  هسته‌ها و انرژی  $E_G$  که انرژی گاموف<sup>۱</sup> نامیده می‌شود، بنویسیم. انرژی گاموف به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E_G = (\pi \alpha Z_A Z_B)^2 m_r c^2 \quad (4-10)$$

که در آن  $\alpha$  ثابت ساختار ریز بدون بُعد است:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad (11-4)$$

در نتیجه از معادله‌ی (۴-۹) داریم

$$\text{احتمال نفوذ} \approx \exp\left[-\left(\frac{E_Q}{E}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad (12-4)$$

بنابراین، لازم نیست هسته‌ها از سد پتانسیل جداکننده‌ی هسته‌های باردار عبور کنند تا عمل همجوشی را انجام دهند. در عمل، ستاره‌ها با تنظیم دمای خود چنان آرام متحول می‌شوند که انرژی گرمایی متوسط هسته‌ها از سد کولنی بسیار کم‌تر است. بنابراین آهنگ همجوشی با احتمال نفوذ کردن در سد، متناسب است. چون این احتمال بسیار کم است، همجوشی با آهنگ کم صورت می‌گیرد و سوخت هسته‌ای به مدت زیادی مصرف می‌شود. می‌دانیم که نفوذپذیری سد به طور کامل با انرژی گاموف آن [معادله‌ی (۴-۱۰)] توصیف می‌شود. برای همجوشی دو پروتون،  $E_G$  مساوی با  $493 \text{ keV}$  است. اگر دما در حدود  $10^7 \text{ K}$  باشد، انرژی گرمایی نوعی  $kT$  در حدود  $1 \text{ keV}$  است، و احتمال نفوذ برای دو پروتون با این انرژی نوعی  $\exp[-(E_G/kT)^{\frac{1}{2}}] \approx \exp[-22]$  است. البته پروتون‌هایی با انرژی جنبشی بیش‌تر وجود دارند که شانس بهتری برای نفوذ کردن در سد کولنی دارند.

### سطح مقطع همجوشی

احتمال همجوشی را معمولاً برحسب سطح مقطع همجوشی بیان می‌کنند. برای تعریف کردن سطح مقطع یک واکنش خاص، ذره‌ای را در نظر می‌گیریم که از محیطی شامل  $n$  ذره‌ی هدف در واحد حجم عبور می‌کند. احتمال انجام واکنش ذره‌ی فردی هنگام پیمودن فاصله‌ی بی‌نهایت کوچک  $\Delta x$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Delta x = \sigma n \Delta x = \text{احتمال انجام شدن برهم‌کنش در مسافت } \Delta x \quad (13-4)$$

در این جا  $\sigma$  سطح مقطع واکنش است. بنابراین، احتمال انجام نشدن واکنش در مسافت  $\Delta x$  مساوی با  $[1 - \sigma n \Delta x]$  است. احتمال عبور ذره از مسافت متناهی  $x$  بدون انجام واکنش را

می‌توان از تقسیم کردن مسافت  $x$  به  $N$  بازه به ضخامت  $\Delta x = x/N$  به دست آورد، و سپس احتمال‌های انجام نشدن واکنش در هر بازه را با هم جمع کرد. در نتیجه خواهیم داشت

$$x \text{ مسافت در واکنش نشدن انجام} = \lim_{N \rightarrow \infty} [1 - \sigma n x / N]^N = \exp[-\sigma n x] \quad (14-4)$$

مسیر آزاد میانگین پیموده شده پیش از انجام واکنش برابر است با

$$\bar{l} = \int_0^{\infty} x \exp[-\sigma n x] \sigma n dx = \frac{1}{n\sigma} \quad (15-4)$$

سطح مقطع واکنش  $\sigma$  مساحت مؤثر هدف است که با احتمال انجام واکنش در یک برخورد، متناسب است. مانسته‌ی کلاسیکی سطح مقطع واکنش، برخورد بین یک توپ کوچک با پنجره‌ای به مساحت  $1 \text{ m}^2$  است؛ اگر شانس شکسته شدن شیشه‌ی پنجره  $10\%$  باشد، سطح مقطع واکنش  $0.1 \text{ m}^2$  خواهد بود. سطح مقطع هسته‌ای به انرژی هسته‌ها و برهم‌کنش‌های الکترومغناطیسی و هسته‌ای آن‌ها بستگی دارد. به ویژه، موقعی که انرژی هسته به انرژی لازم برای تشکیل حالت هسته‌ای مشترک می‌رسد، سطح مقطع غالباً یک رفتار تشدید از خود نشان می‌دهد. یکایی که معمولاً برای سطح مقطع هسته‌ای به کار می‌برند، بارن است که مساوی با  $10^{-28} \text{ m}^2$  است؛ یک سطح مقطع هسته‌ای بسیار بزرگ در حدود یک بارن است، ولی مقادیر عادی سطح مقطع‌های هسته‌ای در حدود میلی بارن و میکرو بارن هستند.

در این بخش سطح مقطع مورد نظر مربوط به همجوشی دو هسته است. در انرژی‌های کم، این سطح مقطع با احتمال نفوذ در سد کولنی جداکننده‌ی هسته‌ها متناسب است. بنابراین از معادله‌ی (۴-۱۲) استفاده می‌کنیم و سطح مقطع همجوشی هسته‌ها با انرژی  $E$  را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} \exp \left[ - \left( \frac{E_G}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (16-4)$$

بستگی سطح مقطع همجوشی به انرژی، با افزایش احتمال نفوذ در سد کولنی بارزتر می‌شود. ضریب  $S(E)$  که از فیزیک همجوشی حساب می‌شود، به آرامی با انرژی تغییر می‌کند؛ اما اگر انرژی به یک تشدید هسته‌ای نزدیک شود، مقدار این ضریب یک قله پیدا می‌کند. ضریب  $1/E$  به این علت معرفی شده است که سطح مقطع هسته‌ای در انرژی‌های کم غالباً با مربع

طول موج دوبروی برای حرکت نسبی هسته‌ها پیش از همجوشی، متناسب است؛ اگر  $P$  نکانه‌ی نسبی هسته‌ها باشد، داریم  $\lambda^2 = h^2 / p^2 = h^2 / 2m_r E$ .

در عمل، اندازه‌گیری سطح مقطع همجوشی در انرژی‌های اخت‌فیزیکی، یعنی در انرژی‌های بسیار پایین‌تر از سد کولنی، مشکل است. استفاده از انرژی‌های زیاد برای اندازه‌گیری سطح مقطع‌های بزرگ‌تر، آسان‌تر است. بنابراین پیشنهاد شده است از معادله‌ی (۴-۱۶) برای سطح مقطع و برونیابی داده‌ها تا انرژی‌های اخت‌فیزیکی کم‌تر، استفاده شود. این پیشنهاد برای محاسبه آهنگ‌های واکنش گرماسته‌ای وابسته به دما نیز بسیار مفید است.

### آهنگ واکنش گرماسته‌ای

یک گاز یونیده‌ی داغ شامل هسته‌های  $A$  و  $B$  با چگالی عددی  $n_A$  و  $n_B$  را در نظر بگیرید که می‌توانند با سطح مقطع همجوشی  $\sigma$ ، با هم جوش بخورند. فعلاً از حرکت هسته‌های  $B$  چشم‌پوشی می‌کنیم و فرض می‌کنیم همه‌ی هسته‌های  $A$  با تندی  $v$  حرکت می‌کنند. برطبق معادله‌ی (۴-۱۵)، یک هسته از نوع  $A$  پیش از همجوشی با یک هسته از نوع  $B$ ، مسافت متوسط  $1/n_B \sigma$  را در مدت زمان متوسط  $\tau_A = 1/n_B \sigma v$  طی می‌کند. بنابراین، در واحد حجم گاز،  $n_A$  هسته از نوع  $A$  داریم که با آهنگ  $R_{AB} = n_A n_B \sigma v$  در هر ثانیه با هسته‌های نوع  $B$  همجوشی می‌کند.

البته می‌دانیم که هر دو نوع هسته حرکت می‌کنند و سطح مقطع همجوشی آن‌ها به تندی نسبی  $v_r$  هسته‌ها بستگی دارد. اگر  $P(v_r) dv_r$  معرف احتمال بودن تندی نسبی در بین مقادیر  $v_r$  و  $v_r + dv_r$  باشد، در آن صورت مقدار متوسط حاصل ضرب سطح مقطع همجوشی و تندی نسبی برابر است با

$$\langle \sigma v_r \rangle = \int_0^{\infty} \sigma v_r P(v_r) dv_r \quad (17-4)$$

اگر این روش متوسط‌گیری را به کار ببریم، مدت زمان میانگین برای همجوشی یک هسته‌ی نوع  $A$  با یک هسته‌ی نوع  $B$  برابر است با

$$\tau_A = \frac{1}{n_B \langle \sigma v_r \rangle} \quad (18-4)$$

ضمناً آهنگ همجوشی  $A-B$  در واحد حجم برابر است با

$$R_{AB} = n_A n_B \langle \sigma v_r \rangle \quad (۱۹-۴)$$

هنگام استفاده از این معادله‌ها برای همجوشی هسته‌های مشابه، باید دقت کرد. حاصل ضرب  $n_A n_B$  در معادله‌ی (۱۹-۴) معرف تعداد زوج هسته‌هایی است که می‌توانند همجوشی را انجام دهند. وقتی آهنگ همجوشی برای هسته‌های مشابه با چگالی عددی  $n$  را حساب می‌کنیم، به جای  $n_A n_B$  باید مقدار  $n(n-1)/2$ ، یا عملاً مقدار  $n^2/2$  را قرار دهیم.

در اغلب موارد مربوط به اخت‌فیزیک، هسته‌ها یک گاز کلاسیکی غیرنسبیتی با یک توزیع تندی تشکیل می‌دهند که به صورت توزیع ماکسول - بولتزمن<sup>۱</sup> است. علاوه بر این، به آسانی می‌توان نشان داد که توزیع ماکسولی برای هسته‌های  $A$  و  $B$ ، منجر به توزیع ماکسولی تندی نسبی به صورت زیر می‌شود

$$P(v_r) dv_r = \left[ \frac{m_r}{\sqrt{\pi} kT} \right]^{\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{m_r v_r^2}{2kT} \right] 4\pi v_r^2 dv_r \quad (۲۰-۴)$$

اگر این توزیع را در معادله‌ی (۱۷-۴) قرار دهیم و متغیر انتگرال‌گیری را به انرژی

$$E = \frac{1}{2} m_r v_r^2$$

$$\langle \sigma v_r \rangle = \left[ \frac{\lambda}{\pi m_r} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{kT} \right]^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} E \sigma(E) \exp \left[ -\frac{E}{kT} \right] dE \quad (۲۱-۴)$$

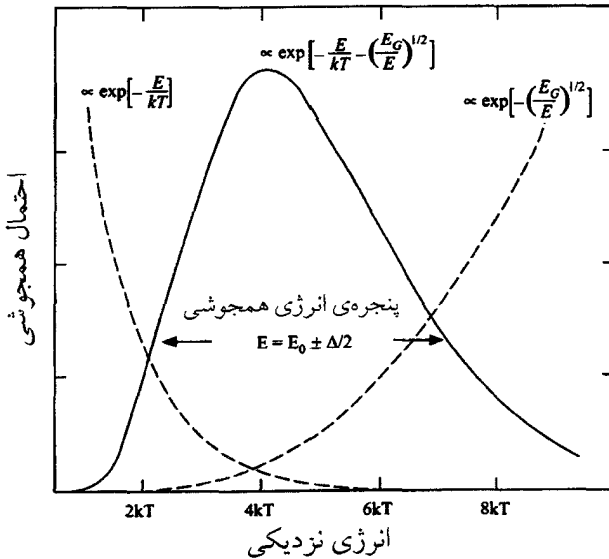
اگر معادله‌ی (۱۶-۴) برای سطح مقطع همجوشی را در معادله‌های (۲۱-۴) و (۱۹-۴) قرار دهیم، رابطه‌ی زیر برای آهنگ همجوشی هسته در واحد حجم به دست می‌آید

$$R_{AB} = n_A n_B \left[ \frac{\lambda}{\pi m_r} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{kT} \right]^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} S(E) \exp \left[ -\frac{E}{kT} - \left( \frac{E_G}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \right] dE \quad (۲۲-۴)$$

توجه کنید که هسته‌ها برای انجام واکنش در انرژی  $E$ ، باید انرژی  $E$  را از محیط کسب کنند، و احتمال کسب موفق انرژی با ضریب بولتزمن  $\exp[-E/kT]$  در معادله‌ی (۲۲-۴) متناسب است. علاوه بر این، هسته‌ها برای انجام همجوشی باید ابتدا در سد کولنی جداکننده‌ی هسته‌ها نفوذ

کنند، و احتمال نفوذ آن‌ها از ضریب  $\exp[-(E_G/E)^{1/2}]$  در معادله‌ی (۴-۲۲) به دست می‌آید. وقتی عمل نفوذ در سد صورت می‌گیرد، گاهی نیروهای هسته‌ای می‌توانند باعث همجوشی هسته‌ها شوند. خاصیت فیزیکی همجوشی در ضریب  $S(E)$  در معادله‌ی (۴-۲۲) نهفته است. چون ضریب هسته‌ای  $S(E)$  معمولاً به آرامی با انرژی تغییر می‌کند، بستگی جمله‌ی داخل انتگرال در معادله‌ی (۴-۲۲) به انرژی، با توابع نمایی کسب انرژی و نفوذ در سد تعیین می‌شود. همان‌طور که در شکل ۴-۳ نشان داده شده است، حاصل ضرب این دو تابع نمایی موقعی بیشینه می‌شود که مقدار انرژی  $E$  مساوی باشد با

$$E_0 = \left[ \frac{E_G (kT)^2}{4} \right]^{1/3} \quad (۴-۲۳)$$



شکل ۴-۳ پنجره‌ی انرژی برای همجوشی هسته‌ها با انرژی گاموف  $E_G$  و دمای  $T$ . هسته‌ها برای واکنش در انرژی  $E$ ، باید انرژی  $E$  را از محیط کسب کنند، و احتمال کسب موفق انرژی با ضریب بولتزمن  $\exp[-E/kT]$  متناسب است. هسته‌ها برای انجام همجوشی، باید ابتدا در سد کولنی جدا کننده‌ی آن‌ها نفوذ کنند، و احتمال نفوذ آن‌ها با ضریب  $\exp[-(E_G/E)^{1/2}]$  تعیین می‌شود. حاصل ضرب این دو ضریب نشان می‌دهد که همجوشی غالباً در پنجره‌ی انرژی  $E_0 \pm \Delta/2$  صورت می‌گیرد. همان‌طور که این شکل نشان می‌دهد، برای همجوشی دو پروتون در دمای  $2 \times 10^7 \text{ K}$ ،  $E_G = 29.0 \text{ kT}$ ،  $E_0 = 4.72 \text{ kT}$  و  $\Delta = 4.78 \text{ kT}$  است.

ضمناً شکل ۴-۳ نشان می‌دهد که همجوشی غالباً در گستره‌ی انرژی باریکی در حوالی انرژی همجوشی  $E_0$  صورت می‌گیرد. برای پیدا کردن پهنای این پنجره برای همجوشی می‌توانیم بسط تیلور<sup>۱</sup> در حوالی  $E_0$  را انجام دهیم تا تقریب زنی زیر صورت گیرد

$$\exp\left[-\frac{E}{kT} - \left(\frac{E_G}{E}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \approx \exp\left[-3\left(\frac{E_G}{4kT}\right)^{\frac{1}{3}}\right] \exp\left[-\left(\frac{E-E_0}{\Delta/2}\right)^2\right] \quad (24-4)$$

که در آن  $\Delta$  یعنی پهنای پنجره‌ی انرژی همجوشی، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\Delta = \frac{4}{3^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{3}}} E_G^{\frac{1}{6}} (kT)^{\frac{5}{6}} \quad (25-4)$$

این روابط  $E_0$  و  $\Delta$  نشان می‌دهند که همجوشی غالباً در انرژی‌هایی صورت می‌گیرد که از دمای گاز و انرژی گاموف سد کولنی به دست می‌آیند. یادآوری می‌کنیم که انرژی گاموف به بار هسته‌ها و جرم کاهیده‌ی آن‌ها مطابق معادله‌ی (۴-۱۰) بستگی دارد:

$$E_G = (\pi\alpha Z_A Z_B)^2 m_p c^2$$

برای مثال، انرژی گاموف برای دو پروتون،  $E_G = 493 \text{ keV}$  است. وقتی دما  $2 \times 10^8 \text{ K}$  است،  $kT = 1.7 \text{ keV}$  و همجوشی دو پروتون به احتمال زیاد در انرژی  $E_0 = 7.7 \text{ keV}$  صورت می‌گیرد. نیم‌پهنای پنجره‌ی انرژی همجوشی، یعنی  $\Delta/2$ ، مساوی با  $4.1 \text{ keV}$  است.

در اغلب موارد ضریب هسته‌ای  $S(E)$  در عرض پنجره‌ی انرژی همجوشی تقریباً ثابت است. بنابراین به جای آن می‌توان مقدار ثابت  $S(E_0)$  را قرار داد و معادله‌ی (۴-۲۲) را به صورت زیر ساده کرد

$$R_{AB} = n_A n_B \left[ \frac{\Lambda}{\pi m_p} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{kT} \right]^{\frac{3}{2}} S(E_0) \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{E}{kT} - \left(\frac{E_G}{E}\right)^{\frac{1}{2}}\right] dE \quad (26-4)$$

مقدار انتگرال در این معادله را با استفاده از تقریب زنی (۴-۲۴) می‌توان به دست آورد که برابر مقدار بیشینه‌ی جمله‌ی داخل انتگرال به ازای  $E = E_0$  است. وقتی مقادیر عددی ثابت‌های مختلف را در معادله‌ی (۴-۲۶) قرار می‌دهیم، آهنگ همجوشی به صورت زیر به دست می‌آید

$$R_{AB} = 6.48 \times 10^{-24} \frac{n_A n_B}{A_r Z_A Z_B} S(E_0) \left( \frac{E_G}{4kT} \right)^{\frac{1}{3}} \exp \left[ -3 \left( \frac{E_G}{4kT} \right)^{\frac{1}{3}} \right] m^{-3} s^{-1} \quad (27-4)$$

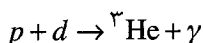
که در آن  $A_r$  جرم کاهیده‌ی هسته‌ها برحسب یکای جرم اتمی و  $S(E_0)$  ضریب همجوشی هسته‌ای برحسب  $\text{keV} \cdot \text{barn}$  است.

اکنون یک مدل سه پارامتری برای همجوشی گرماهسته‌ای داریم. این پارامترها ضریب همجوشی هسته‌ای  $S(E_0)$ ، انرژی گاموف  $E_G$ ، و دمای  $T$  هستند. ضریب هسته‌ای به واکنش هسته‌ای ویژه‌ای که صورت می‌گیرد بستگی دارد؛ عملاً مقدار آن را در آزمایش‌های صورت گرفته در شتاب‌دهنده‌ها اندازه می‌گیرند. انرژی گاموف به بار هسته‌ها و جرم کاهیده‌ی آن‌ها بستگی دارد و همراه با دما مشخص می‌کند که اثر سد کولنی روی همجوشی گرماهسته‌ای چگونه است.

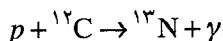
اثرهای عمده‌ی سد کولنی را با توجه به جملات نشان دهنده‌ی بستگی نمایی به  $E_G$  و  $T$ ، می‌توان معرفی کرد. با این کار متوجه می‌شویم که ضرایب کلیدی در رابطه‌ی آهنگ همجوشی عبارت‌اند از

$$R_{AB} \propto n_A n_B S(E_0) \exp \left[ -3 \left( \frac{E_G}{4kT} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \quad (28-4)$$

جمله‌ی نمایی در معادله‌ی (۲۸-۴) را می‌توان به صورت یک ضریب کاهنده‌ی ناشی از سد کولنی در نظر گرفت. این جمله به وضوح نشان می‌دهد که اگر نمونه‌های زیادی وجود داشته باشند، تمایل زیادی دارند تا در حضور سدهای کولنی کوچک‌تر، با سرعت زیاد در همجوشی گرماهسته‌ای شرکت کنند. برای مثال، می‌توانیم واکنش‌های زیر را با هم مقایسه کنیم



و



انرژی گاموف برای این دو واکنش همجوشی به ترتیب  $0.657 \text{ MeV}$  و  $35.5 \text{ MeV}$  است. در دمای  $2 \times 10^7 \text{ K}$  این واکنش‌های همجوشی به ترتیب با ضرایب  $\exp(-14)$  و  $\exp(-52)$  کاهش می‌یابند.



جمله‌ی نمایی در معادله‌ی (۴-۲۸) نیز نشان می‌دهد که آهنگ همجوشی سریعاً با دما افزایش می‌یابد. در واقع معادله‌ی (۴-۲۸) ایجاب می‌کند که

$$\frac{dR_{AB}}{dT} \approx \left[ \frac{E_G}{4kT} \right]^{\frac{1}{3}} \frac{R_{AB}}{T} \quad (۴-۲۹)$$

برای همجوشی پروتون‌ها و دوترون‌ها در دمای حدود  $2 \times 10^7 \text{ K}$ ، داریم

$$\frac{dR_{pd}}{dT} \approx ۴,۶ \frac{R_{pd}}{T} \quad (۴-۳۰)$$

این مقدار نشان می‌دهد که وقتی  $T$  در حوالی  $2 \times 10^7 \text{ K}$  تغییر می‌کند، آهنگ همجوشی پروتون - دوترون به صورت تابعی از  $T^{۴/۶}$  تغییر می‌کند. در واقع، وقتی ضریب  $T^{-\frac{2}{3}}$  در معادله‌ی (۴-۲۷) را در نظر می‌گیریم، آهنگ همجوشی تقریباً متناسب با  $T^۴$  می‌شود. وابسته بودن به دما در واکنش‌های با سد کولنی بزرگ‌تر، بارزتر است. برای همجوشی پروتون‌ها با هسته‌های  $^{12}\text{C}$ ، آهنگ همجوشی در حوالی دمای  $2 \times 10^7 \text{ K}$  متناسب با  $T^{۱۷}$  است.

اگرچه سد کولنی نقش عمده‌ای را در شکل دادن خواص تمام واکنش‌های گرماسته‌ای دارد، اما آهنگ‌های واقعی به برهم‌کنش‌هایی بستگی دارند که باعث همجوشی می‌شوند. در این مورد ممکن است برهم‌کنش‌های قوی، الکترومغناطیسی و ضعیف هسته‌ای نقش داشته باشند. اثر نهایی در ضریب هسته‌ای  $S(E)$  خلاصه شده است. در قسمت‌های بعدی این فصل کتاب، واکنش‌های گرماسته‌ای ویژه‌ای را در نظر خواهیم گرفت. اما در این‌جا بهتر است توجه کنیم که اگر واکنش با برهم‌کنش‌های ضعیف هسته‌ای صورت گیرد، ضریب  $S(E)$  کوچک خواهد بود؛ این نوع واکنش‌ها در گسیل شدن نوترینو نقش دارند. برای واکنش‌های که به صورت الکترومغناطیسی صورت می‌گیرند، مقدار  $S(E)$  بزرگ است و فوتون تولید می‌شود. مقدار  $S(E)$  برای واکنش‌های مبتنی بر برهم‌کنش‌های قوی هسته‌ای، بزرگ‌تر است.

## ۴-۲ سوختن هیدروژن

تشکیل شدن ستاره با انقباض گرانشی یک ابر متشکل از هیدروژن، هلیوم، و رگه‌هایی از عناصر شیمیایی دیگر آغاز می‌شود. این انقباض تا زمانی با سرعت ادامه می‌یابد که اتم‌ها

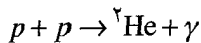
یونیده شوند و انرژی بتواند به آسانی از ابر فرار کند. در نتیجه ابر به آرامی و در حالتی نزدیک به تعادل هیدروستاتیکی منقبض می‌شود؛ نیمی از انرژی گرانشی آزاد شده به صورت تابش تلف می‌شود و نیم دیگر نیز خود ابر را گرم می‌کند. این انقباض ادامه می‌یابد تا یک چشمه‌ی انرژی دیگر غیر از گرانش فعال شود. اولین چشمه از این دست که در دمای حدود  $10^6 \text{ K}$  فعال می‌شود، همجوشی گرماسته‌ای پروتون‌ها با هسته‌های سبک، مانند  $\text{D}$ ،  $\text{Li}$ ،  $\text{Be}$  و  $\text{B}$  است. این عمل با واکنش‌های سریع و بمب مانند همراه است. اما فقط مقدار محدودی از انرژی آزاد می‌شود زیرا تعداد هسته‌های سبک کم است و سریعاً مصرف می‌شوند. برای آن‌که این گاز یونیده‌ی داغ بتواند حیات خود به عنوان یک ستاره را آغاز کند، باید راهی برای مصرف کردن سوخت هسته‌ای متشکل از ماده‌ی هسته‌ای غالب، یعنی پروتون‌ها، پیدا کند. منظور این است که باید راهی برای سوزاندن هیدروژن معمولی پیدا شود.

اثر نهایی سوختن هیدروژن، تبدیل شدن پروتون‌ها به هسته‌های  ${}^4\text{He}$  است. یادآوری می‌کنیم که در مرحله‌ای از زنجیره‌ی واکنش‌های سوختن هیدروژن، پروتون‌ها باید به نوترون‌ها تبدیل شوند و این تبدیل فقط می‌تواند با فرایند ضعیف هسته‌ای صورت گیرد. فرایند غالب به صورت  $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$  است و در این حالت، نتیجه‌ی نهایی زنجیره‌ی سوختن هیدروژن عبارت است از



کاهش جرم در این تبدیل ایجاب می‌کند انرژی جنبشی  $24.69 \text{ MeV}$  آزاد شود. اما هر یک از پوزیترون‌ها بلافاصله با یک الکترون نابود می‌شود و انرژی اضافی  $1.02 \text{ MeV} = 2m_e c^2$  را آزاد می‌کند تا انرژی کل آزاد شده  $26.73 \text{ MeV}$  بشود. با وجود این، درصد کوچکی از این انرژی صرف انرژی جنبشی نوترینوها می‌شود. این انرژی در محل نمی‌ماند بلکه تقریباً بدون برهم‌کنش فرار می‌کند.

سوختن هیدروژن موقعی یک فرایند سر راست و سریع می‌شود که حالت مقید دو پروتون برانگیخته شده باشد. چنین حالتی می‌تواند ایزوتوپ هلیوم، یعنی  ${}^2\text{He}$  باشد و هیدروژن از طریق واکنش الکترومغناطیسی شروع به سوختن می‌کند:



و هر  ${}^2\text{He}$  با واپاشی بتا به یک دوترون تبدیل می‌شود. اما نیروی هسته‌ای بین دو پروتون به قدر کافی قوی نیست تا یک حالت مقید  ${}^2\text{He}$  را تولید کند. در واقع، نبود حالت مقید  ${}^2\text{He}$  باعث می‌شود سوختن هیدروژن یک فرایند ظریف و آرام باشد. همان‌طور که بت<sup>۱</sup> در سال ۱۹۳۹ برای اولین بار توضیح داد، دو راه اساسی برای سوختن هیدروژن، یعنی زنجیره‌ی پروتون - پروتون و چرخه‌ی کربن - ازت، وجود دارد.

### زنجیره‌ی پروتون - پروتون

یک راه مطمئن اما آرام برای رفع مشکل ایجاد شده به خاطر نبود حالت مقید  ${}^2\text{He}$ ، جوش دادن پروتون‌ها از طریق واکنش هسته‌ای ضعیف زیر است



سازوکار مهم در این واکنش این است که یکی از پروتون‌ها واپاشی معکوس بتا به صورت  $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$  انجام می‌دهد و سپس نوترون تولید شده به پروتون دیگر می‌پیوندد تا یک دوترون تشکیل شود. مرحله‌ی اول در این سازوکار، یک فرایند مجازی است زیرا انرژی حداقل  $1.8\text{MeV}$  لازم است تا یک پروتون به یک نوترون، یک پوزیترون و یک نوترینوی بدون جرم تبدیل شود. اما این انرژی از انرژی آزاد شده در هنگام تشکیل شدن یک دوترون با انرژی بستگی  $2.225\text{MeV}$ ، بیش‌تر است.

به هر حال، ویژگی مهم واکنش (۴-۳۲) بسیار آرام بودن آن است. در واقع، این واکنش آن‌قدر آرام است که اندازه‌گیری سطح مقطع آن به طور تجربی در روی زمین ممکن نیست. اما برطبق محاسبات نظری، ضریب  $S$  هسته‌ای آن  $S_{pp}(0) = 3.8 \times 10^{-22} \text{KeV} \cdot \text{barn}$  است. بنابراین، نیم‌عمر میانگین یک پروتون پیش از همجوشی و آهنگ همجوشی پروتون - پروتون در ماده‌ی ستاره‌ای را می‌توان با استفاده از این مقدار  $S_{pp}$  و معادلات (۴-۱۸)، (۴-۱۹) و (۴-۲۷) حساب کرد. ما می‌توانیم آهنگ همجوشی در مرکز خورشید را با فرض  $T = 15 \times 10^6 \text{K}$

$\rho = 10^5 \text{ kg m}^{-3}$  و کسر جرمی هیدروژن  $X_1 = 0.75$ ، برآورد کنیم. بنابراین، چگالی عددی پروتون‌ها  $n_p = X_1 \rho / m_H = 3 \times 10^{31} \text{ m}^{-3}$  و آهنگ همجوشی پروتون - پروتون  $\sim 5 \times 10^{13} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-3}$  است. این مقادیر نشان می‌دهند که یک پروتون در مرکز خورشید پیش از همجوشی با یک پروتون دیگر، به طور متوسط به مدت  $9 \times 10^9$  سال سرگردان می‌ماند. این زمان نجومی طولانی مقیاسی برای سوختن هیدروژن در طول عمر خورشید است.\*

هنگامی که دوترون‌ها با واکنش (۴-۳۲) تشکیل می‌شوند، راه برای انجام واکنش‌های بسیار سریع‌تر برای ترکیب شدن هسته‌های  ${}^4\text{He}$  باز می‌شود. سه رشته واکنش وجود دارند که شاخه‌های اصلی زنجیره‌ی پروتون - پروتون را تشکیل می‌دهند. این شاخه‌ها با شماره‌های I، II و III در شکل ۴-۴ نشان داده شده‌اند.

یک دوترون که با واکنش (۴-۳۲) تشکیل می‌شود، تقریباً بلافاصله توسط واکنش دوم در زنجیره‌ی پروتون - پروتون مصرف می‌شود:



ضریب  $S$  این واکنش الکترومغناطیسی  $S_{pd}(0) = 2.75 \times 10^{-4} \text{ keV} \cdot \text{barn}$  است که مرتبه‌ی بزرگی آن ۱۸ برابر ضریب  $S$  واکنش ضعیف هسته‌ای (۴-۳۲) است. در نتیجه، یک دوترون در مرکز خورشید بیش از همجوشی با یک پروتون، تقریباً به مدت یک ثانیه حضور دارد. توجه کنید که چون دوترون‌ها با واکنش هسته‌ای ضعیف تولید و با واکنش الکترومغناطیسی مصرف می‌شوند، انتظار می‌رود فراوانی تعادلی دوترون‌ها کم باشد. اگر از معادله‌ی (۴-۱۹) استفاده کنیم، متوجه می‌شویم که آهنگ تغییر چگالی عددی دوترون‌ها برابر است با

$$\frac{dn_d}{dt} = \frac{1}{2} n_p^2 \langle \sigma v_r \rangle_{pp} - n_p n_d \langle \sigma v_r \rangle_{pd} \quad (4-34)$$

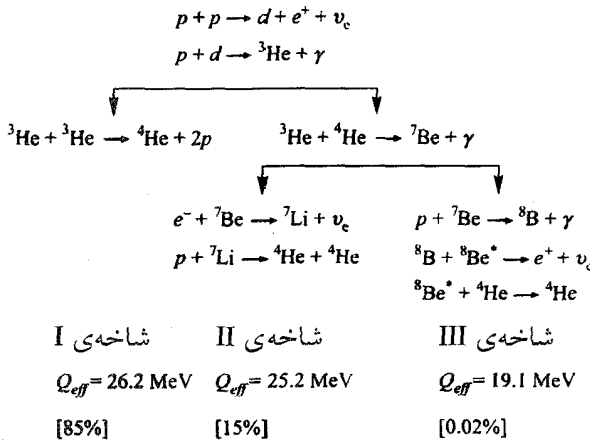
\* گاهی گفته می‌شود که اگر سوختن هیدروژن به جای واکنش هسته‌ای ضعیف (۴-۳۲) با یک واکنش الکترومغناطیسی آغاز می‌شد، این مقیاس زمانی کوتاه‌تر بود. اما این طور نیست زیرا آهنگ کلی سوختن هیدروژن با توجه به آهنگ فرار انرژی از ستاره، یعنی باتوجه به تیرگی آن تعیین می‌شود. اگر سوختن هیدروژن با یک واکنش الکترومغناطیسی آغاز شده بود، این واکنش تقریباً همان آهنگ واکنش ضعیف (۴-۳۲) ادامه می‌یافت، البته در دما و چگالی کم‌تر.

بنابراین، چگالی عددی دوترون‌ها افزایش می‌یابد و به مقدار تعادلی زیر می‌رسد

$$\frac{n_d}{n_p} = \frac{\langle \sigma v_r \rangle_{pp}}{2 \langle \sigma v_r \rangle_{pd}} \approx \frac{S_{pp}(0)}{2S_{pd}(0)} \quad (۳۵-۴)$$

پس، نسبت دوترون به پروتون در مرکز ستاره‌ای مانند خورشید، از نسبت سطح مقطع ضعیف هسته‌ای به سطح مقطع الکترومغناطیسی تعیین می‌شود. برخلاف این، دوتریوم در جهان نسبتاً فراوان است؛ تقریباً ۱۵٪ از اتم‌های هیدروژن، اتم‌های دوتریوم هستند. واضح است که دوتریوم جهانی نمی‌تواند محصولی از واکنش‌های گرما هسته‌ای در ستاره‌هایی مانند خورشید باشد. در واقع، دوتریوم در جهان بسیار قدیم، چند دقیقه پس از مهانگ، تولید شده است.

یک هسته  ${}^3\text{He}$  که با واکنش (۴-۳۳) تشکیل شده است، می‌تواند با دو روش نشان داده شده در شکل ۴-۴ فراوری شود. این هسته می‌تواند شاخه‌ی I زنجیره را با همجوشی با



شکل ۴-۴ سه شاخه‌ی کامل‌کننده‌ی زنجیره‌ی پروتون - پروتون با نتیجه‌ی نهایی  ${}^4\text{He} + Q_{\text{eff}}$  در  ${}^4\text{p} \rightarrow {}^4\text{He} + Q_{\text{eff}}$  این جا  $Q_{\text{eff}}$  انرژی مؤثر آزاد شده در شاخه است؛ این مقدار شامل انرژی نابودی پوزیترون‌ها است ولی انرژی خارج شده توسط نوترینوها را شامل نمی‌شود. توجه کنید که یک هسته‌ی موجود  ${}^4\text{He}$  که به عنوان واسطه در شاخه‌های II و III عمل می‌کند، از بین می‌رود و دو هسته‌ی  ${}^4\text{He}$  جدید تولید می‌شود. برطبق مدل خورشیدی استاندارد باکال (۱۹۸۹)، از کل زمان زنجیره‌ی پروتون - پروتون در خورشید، ۸۵٪ مربوط به شاخه‌ی I، ۱۵٪ مربوط به شاخه‌ی II و ۰٫۰۲٪ مربوط به شاخه‌ی III است.

هسته  ${}^3\text{He}$  دیگر کامل کند، یا می‌تواند با یک هسته  ${}^4\text{He}$  جوش بخورد. روش جانشین دوم باعث تشکیل شدن  ${}^7\text{Be}$  می‌شود که می‌تواند به دو طریق فراوری شود، و ضمناً باعث پایان یافتن زنجیره‌ی پروتون - پروتون توسط شاخه‌های II و III، مطابق شکل ۴-۴، می‌شود. توجه کنید که هسته  ${}^4\text{He}$  موجود به عنوان یک واسطه در پایان زنجیره‌ی پروتون - پروتون در شاخه‌های II یا III عمل می‌کند؛ این هسته وقتی با هسته  ${}^3\text{He}$  جوش می‌خورد از بین می‌رود ولی دو هسته  ${}^4\text{He}$  دیگر به جای آن تولید می‌شوند.

واکنش همجوشی پروتون - پروتون (۴-۳۲) اولین و آرام‌ترین حلقه در زنجیره‌ی پروتون - پروتون است، و آهنگ آزاد شدن انرژی در کل زنجیره را مشخص می‌کند. این آهنگ با حاصل ضرب آهنگ همجوشی پروتون - پروتون  $R_{pp}$  و انرژی آزاد شده در هر همجوشی پروتون - پروتون برابر است. با وجود این توجه کنید که لازم است دو همجوشی پروتون - پروتون صورت گیرد تا یک هسته  ${}^4\text{He}$  توسط شاخه‌ی I تولید شود، اما اگر زنجیره توسط شاخه‌های II و III کامل شود، فقط یک همجوشی پروتون - پروتون کافی است. بنابراین، انرژی آزاد شده توسط هر همجوشی پروتون - پروتون در زنجیره به اهمیت نسبی سه شاخه‌ی زنجیره بستگی دارد. بنابر مدل خورشیدی استاندارد (باکال، ۱۹۸۹)، از کل زمان زنجیره‌ی پروتون - پروتون خورشید، ۸۵٪ مربوط به شاخه‌ی I، ۱۵٪ مربوط به شاخه‌ی II و ۰٫۰۲٪ مربوط به شاخه‌ی III است. پس می‌توان نتیجه گرفت که انرژی متوسط آزاد شده در هر همجوشی پروتون - پروتون در خورشید برابر است با

$$0,85 \times \frac{26,7}{4} + 0,15 \times 25,7 = 15 \text{ MeV} \quad (4-36)$$

اگر ما این مقدار را با مقدار برآوردی  $5 \times 10^{13} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}$  برای آهنگ همجوشی پروتون - پروتون در مرکز خورشید ترکیب کنیم، آهنگ تولید انرژی  $120 \text{ W m}^{-3}$  به دست می‌آید.

بالاخره بهتر است یک رابطه‌ی تقریبی برای آهنگ تولید انرژی به دست آوریم که بستگی انرژی به دما، چگالی و کسر جرمی هیدروژن را نشان دهد. وابسته بودن آهنگ همجوشی پروتون - پروتون به دما را با استفاده از انرژی گاموف مناسب،  $E_G = 493 \text{ keV}$  و معادله‌ی

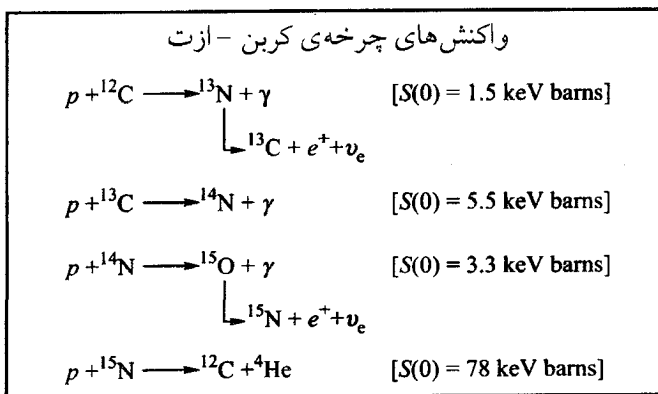
(۴-۲۷)، می‌توان مشخص کرد؛ برای دماهای نزدیک  $T = 15 \times 10^6 \text{ K}$ ، یعنی دمای نوعی در مرکز خورشید، آهنگ همجوشی تقریباً با  $T^4$  متناسب است. این آهنگ با  $n_p^2$  یا با  $X_1^2 \rho^2$  متناسب است. بنابراین، آهنگ تولید انرژی توسط زنجیره‌ی پروتون - پروتون با  $X_1^2 \rho^2 T^4$  متناسب است. اگر آهنگ تولید انرژی در شرایط  $T = 15 \times 10^6 \text{ K}$ ،  $\rho = 10^5 \text{ kg m}^{-3}$  و  $X_1 = 0.75$  را مساوی با مقدار عددی  $120 \text{ W m}^{-3}$  در نظر بگیریم، معلوم می‌شود که آهنگ تولید انرژی توسط زنجیره‌ی پروتون - پروتون برابر است با

$$\varepsilon_{pp} = 9.5 \times 10^{-37} X_1^2 \rho^2 T^4 \text{ W m}^{-3} \quad (4-37)$$

### چرخه‌ی کربن - ازت

برای سوختن هیدروژن در ستاره‌های رشته‌ی اصلی که جرم آن‌ها قابل مقایسه با جرم خورشید است، می‌توان زنجیره‌ی پروتون - پروتون را در نظر گرفت، اما این امر در مورد ستاره‌های با جرم بیشتر صدق نمی‌کند. اگرچه دمای داخلی این نوع ستاره‌ها اندکی از دمای خورشید بیش‌تر است، اما درخشندگی آن‌ها بسیار زیادتر است و آن را نمی‌توان با بستگی زنجیره‌ی پروتون - پروتون به  $T^4$  توجیه کرد. یادآوری می‌کنیم که این بستگی دمایی، تابع سد کولنی بین دو پروتون است؛ به معادله‌ی (۴-۲۹) رجوع کنید. برای توجیه درخشندگی ستاره‌های پرجرم رشته‌ی اصلی، مانند شعرای یمانی A، به سازوکار دمایی دیگری برای سوختن هیدروژن نیاز داریم، سازوکاری که باید تابع سد کولنی بزرگ‌تری باشد. در چنین سازوکاری باید عناصر سنگین حضور داشته باشند. اما چون فراوانی این عناصر کم است، آن‌ها باید بازیابی شوند تا سوختن هیدروژن ادامه یابد.

در واقع، کربن که از سوختن هلیوم در نسل‌های قدیمی ستاره‌ها تولید شده است، می‌تواند در یک چرخه‌ی تقریباً مسدودی از واکنش‌ها به نام چرخه‌ی کربن - ازت، بازیابی شود. همان‌طور که شکل ۴-۵ نشان می‌دهد، نتیجه‌ی نهایی این چرخه، تبدیل شدن هیدروژن به هلیوم است.



شکل ۴-۵ سوختن هیدروژن در چرخه‌ی کربن - ازت. نتیجه‌ی نهایی این رشته واکنش‌ها  $4p \rightarrow {}^4\text{He} + Q_{\text{eff}}$  است. انرژی مؤثر آزاد شده‌ی  $Q_{\text{eff}}$  مساوی با  $23/8 \text{ MeV}$  است؛ این انرژی شامل انرژی نابودی پوزیترون‌ها است، اما شامل انرژی جنبشی نوترینوها نیست. توجه کنید که هسته‌های کربن و ازت موقتاً به یکدیگر تبدیل می‌شوند ولی مجدداً به چرخه برمی‌گردند. آهنگ انجام این واکنش‌ها به سدهای کولنی موجود و ضرایب تقریبی  $S$  بستگی دارد.

اگرچه چرخه‌ی کربن - ازت آغاز و انجامی ندارد، بهتر است فرض کنیم که با گیر افتادن یک پروتون توسط یک هسته‌ی  ${}^{12}\text{C}$  آغاز می‌شود. بعد از این اتفاق، یک پروتون با واپاشی بتا به یک نوترون تبدیل می‌شود، دو پروتون دیگر گیر می‌افتند، پروتون دوم با واپاشی بتای دیگر به نوترون تبدیل می‌شود، و بالاخره پروتون چهارم گیر می‌افتد و یک هسته‌ی جدید  ${}^{12}\text{C}$  و یک هسته‌ی  ${}^4\text{He}$  تولید می‌شود. اثر نهایی این رشته، تبدیل  $4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e$  است و هنوز یک هسته‌ی  ${}^{12}\text{C}$  در چرخه وجود دارد. بنابراین، کربن به عنوان یک واسطه برای سوختن هیدروژن عمل می‌کند. در واقع، چرخه‌های دیگری، مخصوصاً چرخه‌ی مربوط به  ${}^{16}\text{O}$ ، نیز وجود دارند. تا این‌جا چرخه‌ی کربن - ازت که در شکل ۴-۵ نشان داده شده است، مهم‌ترین چرخه است.

آهنگ تولید انرژی توسط چرخه‌ی کربن - ازت تابع آرام‌ترین واکنش در چرخه است. با در نظر گرفتن سدهای کولنی و ضریب  $S$ ، در شکل ۴-۵، نتیجه می‌گیریم که آرام‌ترین واکنش عبارت است از





عمر متوسط یک هسته‌ی  ${}^{14}\text{N}$  در مرکز خورشید را با این فرض می‌توان برآورد کرد که چگالی  $10^5 \text{ kg m}^{-3}$ ، دما  $15 \times 10^6 \text{ K}$ ، کسر جرمی هیدروژن  $0.5$  و ضریب  $S$  هسته‌ای  $3/3 \text{ keV} \cdot \text{barn}$  است. با قرار دادن این مقادیر در معادله‌های (۴-۱۸)، (۴-۱۹) و (۴-۲۷)، معلوم می‌شود که عمر متوسط هسته‌ی  ${}^{14}\text{N}$  در خورشید، پیش از همجوشی با یک پروتون،  $5 \times 10^8$  سال است. آهنگ همجوشی در واحد حجم به چگالی عددی هسته‌های ازت در مرکز خورشید بستگی دارد. در مدل خورشیدی استاندارد، فراوانی  ${}^{14}\text{N}$  در مرکز خورشید تقریباً  $0.06\%$  است که نشان می‌دهد چگالی عددی هسته‌های ازت در حدود  $2.6 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$   $= 0.06 \rho / 14 m_H$  است. چون عمر متوسط هر یک از این هسته‌ها  $5 \times 10^8$  سال است، آهنگ همجوشی آن‌ها تقریباً  $1/6 \times 10^{12} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}$  است. اما با توجه به واکنش (۴-۳۲)، پروتون‌ها با آهنگ زیادتر  $5 \times 10^{13} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}$  با هم جوش می‌خورند. نتیجه می‌گیریم که چرخه‌ی کربن - ازت چشمه‌ی مهمی برای تولید انرژی در خورشید نیست. در واقع، محاسبات دقیق نشان می‌دهند که  $0.98/4\%$  انرژی خورشیدی توسط زنجیره‌ی پروتون - پروتون و فقط  $1/6\%$  آن توسط چرخه‌ی کربن - ازت تولید می‌شود.

به هر حال، وجود سدهای کولنی بزرگ‌تر در چرخه‌ی کربن - ازت ایجاب می‌کند که آهنگ همجوشی شدیداً با دما افزایش یابد. به‌ویژه اگر انرژی گاموف مربوط به واکنش (۴-۳۸) را محاسبه و از معادله‌ی (۴-۲۷) استفاده کنیم، آهنگ همجوشی متناسب با  $T^{18}$  به دست می‌آید. در چرخه‌ی کربن - ازت بستگی انرژی تولید شده به دما نیز همین‌طور، یعنی بسیار شدیدتر از بستگی انرژی به  $T^4$  در زنجیره‌ی پروتون - پروتون، است. بنابراین، انتظار داریم چرخه‌ی کربن - ازت مهم‌ترین چشمه‌ی تولید انرژی در ستاره‌های پرجرم رشته اصلی باشد که هیدروژن را در دماهای بالاتر از دمای مرکز خورشید می‌سوزانند.

بالاخره متوجه می‌شویم که چرخه‌ی کربن - ازت نقش مهمی در سنتز هسته‌ای ستاره‌ها دارد. این چرخه نه تنها هیدروژن را به هلیوم تبدیل می‌کند، بلکه  ${}^{14}\text{C}$  حاصل از سوختن

هلیوم در ستاره‌های نسل‌های قدیمی‌تر را به  $^{12}\text{C}$ ،  $^{13}\text{C}$  و  $^{14}\text{N}$  و  $^{15}\text{N}$  تبدیل می‌کند. در واقع اگر فرض کنیم شرایط تعادل برقرار است و از نشت انرژی از این چرخه چشمپوشی کنیم، فراوانی نسبی این هسته‌ها نسبت معکوس با آهنگ همجوشی آن‌ها خواهد داشت. برای مثال، در مرکز ستاره‌ای که هیدروژن با چرخه‌ی کربن - ازت در دمای  $50 \times 10^6 \text{ K}$  می‌سوزد، فراوانی نسبی  $^{12}\text{C}$ ،  $^{13}\text{C}$ ،  $^{14}\text{N}$  و  $^{15}\text{N}$  به ترتیب ۴٪، ۱٪، ۹۵٪ و ۰/۰۰۴٪ است. علت فراوانی زیاد  $^{14}\text{N}$  این است که آهنگ همجوشی آن آرام‌ترین آهنگ در چرخه است. در واقع، مقدار زیاد و مهم ازت در سیستم خورشیدی، محصول سوختن هیدروژن با چرخه‌ی کربن - ازت در نسل‌های قدیمی‌تر ستاره‌های نزدیک است. عناصر دیگر نیز توسط چرخه‌های دیگر واکنش‌ها، همراه با چرخه‌ی کربن - ازت، تولید شده‌اند.

### نوترینوهای خورشیدی

بدون تردید سوختن هیدروژن از طریق زنجیره‌ی پروتون - پروتون و چرخه‌ی کربن - ازت، چشمه‌ی حیاتی توان برای ستاره‌های رشته‌ی اصلی است. اما جزئیات کمی از این امر مشاهده شده است زیرا کل این فرایند در پشت میلیون‌ها کیلومتر ماده‌ی ستاره‌ای پنهان شده است. البته این پنهان ماندن کامل نیست. نوترینوهای تولید شده در اثر سوختن هیدروژن تقریباً بدون برهم‌کنش می‌توانند از قلب یک ستاره فرار کنند. آن‌ها هنگام انجام این کار، اطلاعات درونی مربوط به اتفاقات واقعی داخل ستاره را به بیرون منتقل می‌کنند. آشکارسازی این نوترینوها واقعاً مشکل است. نوترینوها نه تنها هنگام فرار از ستاره شدیداً برهم‌کنش می‌کنند، بلکه هنگام رسیدن به زمین نیز برهم‌کنش می‌کنند. به هر حال، نوترینوهای خارج شده از نزدیک‌ترین ستاره، یعنی خورشید، اولین بار در سال ۱۹۶۸ در یک آزمایش ساده توسط دیویس<sup>۱</sup> در معدن طلای هومستیک<sup>۲</sup> در داکوتای جنوبی<sup>۳</sup> آشکارسازی شدند. این آزمایش تکامل یافت و داده‌ها به مدت بیش از ۳۰ سال جمع‌آوری شدند. مشکل دیرینه‌ی تطبیق دادن نتایج این آزمایش با پیشگویی‌های نظری را مشکل نوترینوی خورشیدی می‌نامند.

سوختن هیدروژن حتماً با گسیل نوترینوها همراه است. نوترینوها موقعی تولید می‌شوند که برهم کنش ضعیف هسته‌ای یک پروتون را از طریق  $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$  به یک نوترون تبدیل می‌کند. این امر باید دو بار در فرایند سوختن هیدروژن به صورت  $4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e$  اتفاق بیفتد. شار نوترینوها را می‌توان با توجه به این واقعیت پیدا کرد که اطلاعات هر  ${}^4\text{He}$  با آزاد شدن دو نوترینو و انرژی گرمایی  $Q_{\text{eff}}$  همراه است که برطبق شکل‌های ۴-۴ و ۴-۵، در حدود  $26\text{MeV}$  است. بنابراین اگر سوختن هیدروژن چشمه‌ی توان برای درخشندگی  $L_{\odot} = 3.84 \times 10^{26}\text{W}$  باشد، نوترینوها باید با آهنگ  $\dot{N} = 1.86 \times 10^{38}\text{s}^{-1}$  آزاد شده باشند.

هر نوترینو برای فرار از خورشید باید مسافت تقریبی  $R_{\odot} = 7 \times 10^8\text{m}$  را طی کند. احتمال برهم کنش در حین این فرار،  $\sigma n R_{\odot}$  است که  $\sigma$  سطح مقطع متوسط برهم کنش با یک الکترون یا یک هسته، و  $n$  چگالی متوسط الکترون‌ها و هسته‌ها در خورشید است. چون  $\sigma$  از مرتبه‌ی  $10^{-48}\text{m}^2$  و  $n$  تقریباً از مرتبه‌ی  $10^{30}\text{m}^{-3}$  است، احتمال برهم کنش مقدار بی‌معنی  $10^{-9}$  است. بنابراین، نوترینوها تقریباً بدون ممانعت از خورشید فرار می‌کنند و ۸ دقیقه بعد به زمین، در فاصله‌ی  $1.5 \times 10^{11}\text{m}$  می‌رسند. شار نوترینوهایی که مستقیماً از قلب خورشید می‌آیند، در زمین  $F_{\nu} = 6.6 \times 10^{14}\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$  است که زیاد اما تقریباً غیرقابل آشکارسازی است. این شار نوترینوها حاصل ترکیب واکنش‌ها و واپاشی‌ها در زنجیره‌ی پروتون-پروتون و در چرخه‌ی کربن-ازت است. این فرایندها را با توجه به شکل‌های ۴-۴ و ۴-۵ می‌توان شرح داد. واضح است که در هر فرایند نوترینوها با طیف انرژی فرایند گسیل می‌شوند، ولی آهنگ گسیل آن‌ها به جزئیات سوختن هیدروژن در داخل خورشید بستگی دارد. بهترین پیشگویی‌ها برای این آهنگ‌ها بر مبنای یک مدل خورشیدی دقیق به نام مدل خورشیدی استاندارد<sup>۱</sup> ارائه شده‌اند. این مدل، که توسط باکال در کتاب او به نام *اخترفیزیک نوترینویی* آمده است، در واقع یک رشته از مدل‌های تحول ستاره‌ها است. این رشته با یک ستاره با ترکیب همگن مشابه با آنچه در سطح خورشید مشاهده شده است آغاز می‌شود، و مدل‌های بعدی با در نظر گرفتن

تغییرات ایجاد شده در ترکیب ستاره بر اثر سوختن هیدروژن، حساب شده‌اند. این رشته باید با داده‌های معلوم مانند سن، جرم، شعاع، ترکیب سطح و درخشندگی فعلی ستاره تطبیق کند. پیشگویی‌های مدل خورشیدی استاندارد در مورد شار نوترینوهای حاصل از فرایندهای مختلف که در داخل خورشید صورت می‌گیرند، در جدول ۴-۱ درج شده است. برطبق انتظار، اکثریت نوترینوها از واکنش اولیه‌ی زنجیره‌ی پروتون - پروتون ناشی می‌شوند، ولی این نوترینوها انرژی کمی دارند که هرگز از  $0.420 \text{ MeV}$  بیش‌تر نمی‌شود. نوترینوهای ناشی از گیرافتادن الکترون توسط  ${}^7\text{Be}$ ، یعنی واکنش معرف شاخه‌ی II در زنجیره‌ی پروتون - پروتون، از نظر تعداد در اولویت بعدی قرار دارند. شار نوترینوهای ناشی از واپاشی  ${}^8\text{B}$  در شاخه‌ی III زنجیره، در حدود یک ده‌هزارم است اما این نوترینوها بسیار پرانرژی هستند. علاوه بر این، نوترینوهای ناشی از واپاشی بتای  ${}^{13}\text{N}$  و  ${}^{15}\text{O}$  در چرخه‌ی کربن - ازت نیز وجود دارند. تعداد این نوترینوها کم است زیرا چرخه‌ی کربن - ازت فقط ۱.۶٪ درخشندگی خورشید را تولید می‌کند. به‌طور کلی، شار ناشی از این فرایندها در سطح زمین  $F_{\nu} = 6.6 \times 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$  است.

اولین آزمایش برای آشکارسازی نوترینوهای خورشیدی توسط دیویس انجام شد. اساس این آزمایش گیراندازی نوترینوها مطابق واکنش زیر بود



عیب اصلی این واکنش این است که فقط نوترینوهای با انرژی بیش از  $0.81 \text{ MeV}$  را می‌توان آشکار کرد. این آستانه‌ی زیاد انرژی باعث می‌شود نوترینوهای ناشی از واکنش همجوشی اولیه‌ی پروتون - پروتون آشکار نشوند؛ همان‌طور که جدول ۴-۱ نشان می‌دهد، انرژی بیشینه‌ی این نوترینوها  $0.420 \text{ MeV}$  است. علاوه بر این، انرژی نوترینوهای ناشی از گیرافتادن الکترون توسط  ${}^7\text{Be}$  فقط اندکی از مقدار آستانه بیش‌تر است و احتمال گیرافتادن آن‌ها توسط  ${}^{37}\text{Cl}$  بسیار کم است. اما، انرژی اغلب نوترینوهای ناشی از واپاشی  ${}^8\text{B}$  از انرژی آستانه برای آشکارسازی بیش‌تر است. در واقع، اگرچه این نوترینوها سهم کمی در شار نوترینویی خورشید دارند، انتظار می‌رود آهنگ گیراندازی توسط  ${}^{37}\text{Cl}$  را افزایش دهند. بالاخره، نوترینوهای ناشی از دو فرایند واپاشی بتا در چرخه‌ی کربن - ازت، انرژی کافی برای

آشکار شدن را دارند. آهنگ گیراندازی واقعی به شار فرودی نوترینوها، تعداد هسته‌های هدف  $^{37}\text{Cl}$  و سطح مقطع گیراندازی برای انرژی متوسط، بستگی دارد. برای نوترینوهای ناشی از واپاشی  $^8\text{B}$ ، سطح مقطع گیراندازی متوسط  $^{37}\text{Cl}$  مساوی با  $\bar{\sigma} = 1.06 \times 10^{-46} \text{ m}^2$  است و برای هدفی که شامل هسته‌های  $N(^{37}\text{Cl})$  است آهنگ گیراندازی برابر است با

$$R(^8\text{B}) = F_{\nu} (^8\text{B}) N(^{37}\text{Cl}) \bar{\sigma} = 6.1 \times 10^{-36} N(^{37}\text{Cl}) \quad (4-40)$$

به خاطر کم بودن احتمال گیرافتادن نوترینوها، از یکای ویژه‌ای به نام یکای نوترینوی خورشیدی (SNU) در اخترفیزیک نوترینویی استفاده می‌شود. این یکا آهنگ گیرافتادن نوترینوها در  $10^{36}$  هسته‌ی هدف در هر ثانیه است. معادله‌ی (4-40) نشان می‌دهد که آهنگ گیراندازی نوترینوها در واپاشی بتای  $^8\text{B}$  در خورشید باید SNU  $6.1$  باشد. ضمناً باکال نشان داد که آهنگ گیراندازی نوترینوها در  $^7\text{Be}$ ،  $^{13}\text{N}$  و  $^{15}\text{O}$  به ترتیب باید SNU  $1.1$ ، SNU  $1.1$  و SNU  $0.3$  باشد. علاوه بر این انتظار می‌رود آهنگ گیرافتادن نوترینوهای خورشیدی تولید شده با واکنش  $p + e^- + p \rightarrow d + \nu_e$  باید مساوی با SNU  $0.2$  باشد. به طور کلی، آهنگ پیشگویی شده برای گیرافتادن نوترینوهای خورشیدی در  $^{37}\text{Cl}$  برابر است با

**جدول ۴-۱** شار نوترینوهای ناشی از بعضی فرایندهای معرفی شده در شکل‌های ۴-۴ و ۴-۵. شار نوترینوهای ناشی از فرایندهای ویژه در زنجیره‌ی پروتون - پروتون و چرخه‌ی کربن - ازت در داخل خورشید. علاوه بر این‌ها، تعداد کمی نوترینو نیز توسط واکنش‌های  $p + e^- + p \rightarrow d + \nu_e$  و  $p + ^3\text{He} \rightarrow ^4\text{He} + e^+ + \nu_e$  تولید می‌شوند؛ برای کسب اطلاعات بیش‌تر به باکال (۱۹۸۹) رجوع کنید.

فرایند	شار نوترینوها ( $10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ )	انرژی بیشینه‌ی نوترینوها (MeV)
$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$	$6.0 (1 \pm 0.2)$	۰٫۴۲۰
$e^- + ^7\text{Be} \rightarrow ^7\text{Li} + \nu_e$	$0.47 (1 \pm 0.15)$	۰٫۸۶۱
$^8\text{B} \rightarrow ^8\text{Be} + e^+ + \nu_e$	$5.8 \times 10^{-4} (1 \pm 0.37)$	۱۵
$^{13}\text{N} \rightarrow ^{13}\text{C} + e^+ + \nu_e$	$0.06 (1 \pm 0.50)$	۱٫۱۹۹
$^{15}\text{O} \rightarrow ^{15}\text{N} + e^+ + \nu_e$	$0.05 (1 \pm 0.58)$	۱٫۷۳۲

$$(۴-۴۱) \text{SNU} (۲,۶ \pm ۷,۹) = \text{آهنگ پیشگویی شده}$$

دیویس و همکارانش به مدت بیش از ۳۰ سال داده‌ها را جمع‌آوری کرده و آزمایش آشکارسازی نوترینوهای خورشیدی را کامل کردند. کار این افراد یکی از آزمایش‌های طاقت‌فرسا و مؤثر در زمینه‌ی اخترفیزیک بوده است. کم بودن احتمال گیر افتادن نوترینوها ایجاب می‌کند که به یک هدف بسیار بزرگ شامل هسته‌های  $^{37}\text{Cl}$  نیاز داشته باشیم. این هدف با ۶۱۰ تن مایع خشکشویی به نام پرکلرواتیلن،  $\text{C}_2\text{Cl}_4$ ، تهیه شد. با توجه به این که ۲۴٪ از کلر طبیعی  $^{37}\text{Cl}$  و ۷۶٪ آن  $^{35}\text{Cl}$  است، به آسانی می‌توان نشان داد که این هدف دارای  $2 \times 10^{30}$  هسته  $^{37}\text{Cl}$  است. آهنگ گیراندازی  $1\text{SNU}$  در این هدف باعث می‌شود  $2 \times 10^{-6}$  گیراندازی در هر ثانیه، یا یک گیراندازی در هر ۶ روز صورت گیرد. هر گیراندازی فقط از طریق اتم پرتوزای  $^{37}\text{Ar}$  تولید شده، قابل آشکارسازی است. این اتم‌های آرگون پرتوزا با برانگیختن هلیوم و شمرده شدن توسط شمارنده‌های تناسبی با شمارش زمینه کم، آشکار شدند. بنابراین، آهنگ زمینه ناشی از پرتوهای کیهانی باید تفریق شود. دیویس و همکارانش در سال ۱۹۸۴ آهنگ تولید  $^{37}\text{Ar}$  را  $0,4 \pm 0,4$  اتم در هر روز گزارش کردند (آهنگ زمینه  $0,8 \pm 0,3$  اتم در هر روز بوده است). داده‌های آزمایشی تا سال ۱۹۹۸، آهنگ گیراندازی نوترینوهای خورشیدی توسط  $^{37}\text{Cl}$  را به مقدار زیر نشان دادند

$$(۴-۴۲) \text{SNU} (0,17 \pm 2,55) = \text{آهنگ مشاهده شده}$$

تفاوت بین آهنگ گیراندازی مشاهده‌شده (۴-۴۲) و آهنگ گیراندازی پیشگویی شده (۴-۴۱) برای نوترینوهای خورشیدی در  $^{37}\text{Cl}$ ، یک موضوع حیاتی و مهم بوده و هست، به طوری که ۵۰۰ صفحه از کتاب باکال به نام/اخترفیزیک نوترینویی\* را به خود اختصاص داده است.

\* چون این ادعا ممکن است شما را پریشان خاطر کند، بهتر است دست کم یکی از نتایج مثبت آن را شرح دهیم: آزمایش  $^{37}\text{Cl}$  به وضوح ثابت می‌کند که چرخه‌ی کربن - ازت نقش کمی در خورشید دارد. برطبق مدل خورشیدی استاندارد، ۱/۶٪ از درخشندگی توسط چرخه‌ی کربن - ازت تولید می‌شود و سهم مربوط به نوترینوهای ناشی از واپاشی بتای  $^{13}\text{N}$  و  $^{15}\text{O}$  در آهنگ گیراندازی نوترینوهای خورشیدی،  $0,4\text{SNU}$  است. اگر چرخه‌ی کربن - ازت یک حالت غالب برای سوختن هیدروژن در خورشید بود، آهنگ گیراندازی مورد انتظار باید  $25\text{SNU}$  می‌شد، که ده برابر بزرگ‌تر از آهنگ گیراندازی مشاهده شده است.

نوترینوهای خورشیدی<sup>۱</sup> را با پراکندگی نوترینو - الکترون نیز می‌توان آشکار کرد. در واقع، داده‌های مربوط به نوترینوها با این روش اولین بار توسط آشکارساز کامیوکانده II<sup>۲</sup> در ژاپن به دست آمده‌اند. آشکارساز کامیوکانده شامل یک مخزن زیرزمینی بزرگ آب است که با شمارنده‌های تکثیر کننده‌ی نور احاطه شده است که تابش چرنکوف گسیل شده توسط الکترون‌های شتاب دیده تا سرعت‌های نزدیک سرعت نور و تولید شده بر اثر برهم کنش با نوترینوی پرنرژی را ثبت می‌کنند. این روش آشکارسازی فواید زیادی نسبت به آزمایش  $^{37}\text{Cl}$  دارد. این روش می‌تواند زمان دقیق رسیدن نوترینوها را ثبت و راستای فرود نوترینوها را نیز مشخص کند. در واقع، یک قله‌ی واضح متناظر با نوترینوهایی که از طرف خورشید می‌آیند، مشاهده می‌شود. این آزمایش شار نوترینوی خورشیدی کوچک‌تر از حد انتظار را نیز ثبت می‌کند؛ آهنگ ثبت شده در حدود نصف دقت نظری است.

اما باید تأکید کرد که آزمایش کامیوکانده و آزمایش  $^{37}\text{Cl}$  فقط می‌توانند نوترینوهای پرنرژی را آشکار کنند. بنابراین، هر دو آزمایش اساساً نوترینوهای ناشی از واپاشی  $^9\text{B}$  در شاخه‌ی III زنجیره‌ی پروتون - پروتون را ثبت می‌کنند که این زنجیره قسمت کوچکی از فرایند سوختن هیدروژن است. پس، قبل از هر گونه نتیجه‌گیری در مورد سوختن هیدروژن در خورشید، لازم است آزمایش‌های حساس به شاخه‌های I و II زنجیره نیز انجام شوند.

در دو تا از این آزمایش‌ها، گروه‌های SAGE و GALLEX از اوایل سال ۱۹۹۱ به جمع‌آوری داده‌ها پرداختند. مبنای این آزمایش‌های رادیوشیمیایی واکنش زیر است



انرژی آستانه برای این واکنش فقط  $0.233\text{ MeV}$  است که بسیار کم‌تر از انرژی بیشینه‌ی نوترینوهای ناشی از واکنش همجوشی پروتون - پروتون اولیه (۴-۳۲) است. در واقع، این نوترینوها باید نصف آهنگ شمارش در آزمایش‌های  $^{71}\text{Ga}$  را تولید کنند. اما مانند آزمایش  $^{37}\text{Cl}$ ، در شناسایی محصولات پرتوزای گیراندازی نوترینوها یک مشکل جدی وجود دارد، که در این آزمایش‌ها در حدود یک اتم  $^{71}\text{Ge}$  در هر روز در هدفی به جرم چندین تن گالیوم بوده است.

داده‌های به دست آمده در آزمایش‌های SAGE و GALLEX تا سال ۱۹۹۸ را می‌توان با هم ترکیب کرد تا مقدار زیر برای آهنگ گیراندازی نوترینوهای خورشیدی توسط  $^{71}\text{Ga}$  به دست آید

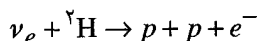
$$(4-24) \quad \text{SNU} (9 \pm 77) = \text{آهنگ مشاهده شده}$$

این نتایج آزمایشی را می‌توان با دو پیشگویی نظری مقایسه کرد. پیشگویی اول، آهنگ گیراندازی کمینه‌ی SNU ۸۰ در گالیوم است که نشان می‌دهد درخشندگی خورشیدی مشاهده شده فقط ناشی از واکنش‌های هسته‌ای، بدون توجه به مدل خورشیدی استاندارد، است. در پیشگویی دوم، آهنگ مورد انتظار SNU ۱۳۲ است که توسط مدل خورشیدی استاندارد پیشگویی شده است؛ رجوع کنید به باکال (۱۹۸۹). مانند آزمایش کلر، دلیل روشن این است که تعداد نوترینوهایی که از خورشید می‌رسند، از مقدار مورد انتظار کم‌ترند.

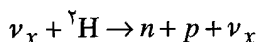
بحث اساسی در پیشنهاد‌های اصلی برای آزمایش‌های مربوط به نوترینوهای خورشیدی این بود که نوترینوهای خورشیدی تولید شده، خوش رفتارند. اما نتایج آزمایش‌ها اعتماد ما نسبت به این بحث را کم‌رنگ کرده است و باعث شده است فیزیک نوترینوها مورد ارزیابی مجدد قرار گیرد. در واقع، اکنون بر مبنای دلایل نظری می‌توان پذیرفت که الکترون، میوون و نوترینوهای تاو، ذرات بدون جرم خوش‌رفتار نیستند، بلکه ذراتی با جرم‌های کم هستند که هنگام انتشار در ماده می‌توانند به یک‌دیگر تبدیل شوند. در واقع، آزمایش کامیوکانده در مورد پرتو کیهانی نوترینوهای میوون‌ی در سال ۱۹۹۸ یک مدرک تجربی به دست داد که نوترینوهای میوون‌ی هنگام عبور از زمین می‌توانند به نوترینوهای تاو تبدیل شوند. اگر نوترینوهای الکترونی به طور مشابه رفتار کنند، آهنگ آشکارسازی نوترینوهای خورشیدی در روی زمین کم خواهد بود، زیرا هیچ یک از آزمایش‌های مربوط به نوترینوهای خورشیدی نتوانسته‌اند یک نوترینوی الکترونی گسیل شده در هنگام سوختن هیدروژن را، که موقع عبور از خورشید یا زمین به یک نوترینوی میوون‌ی یا تاوی تبدیل می‌شود، آشکار کند. این همان فیزیک جالب ذرات بنیادی است ولی باعث تزلزل اختریفیزیک می‌شود و ایجاب می‌کند که در مورد اطلاعات اختریفیزیکی به دست آمده از نوترینوها تردید شود.



آشکارسازی نوترینوهای میوئونی یا تاوی خورشید، می‌تواند مدرکی برای تبدیل شدن نوترینوهای الکترونی به نوترینوهای میوئونی یا تاوی باشد. آزمایشی که توانست این کار را انجام دهد، در سال ۱۹۹۹ در سودبوری<sup>۱</sup> در اونتاریو<sup>۲</sup> انجام شد. مبنای این آزمایش، پراکنده شدن نوترینوها در ۱۰۰۰ تن آب سنگین بود. این آزمایش طرح شده بود تا شار نوترینوهای الکترونی خورشیدی برطبق واکنش زیر



و شار تمام انواع نوترینوها برطبق واکنش زیر، اندازه‌گیری شود:



با توجه به عدم قطعیت‌های نظری و تجربی موجود، ما فعلاً هیچ جانشینی برای این موضوع نداریم و این بخش مربوط به نوترینوهای خورشیدی را ناتمام می‌گذاریم. مسأله‌ی نوترینوهای خورشیدی بر مبنای فیزیک و شیمی آشکارسازی نوترینوها، و بر مبنای قابلیت مدل خورشیدی استاندارد، و با توجه به خواص نوترینوها مورد توجه قرار گرفته است. بنابراین، این امر می‌تواند یک مشکل مربوط به آزمایش، یک مشکل مربوط به مدل خورشیدی، یا به احتمال زیاد یک مشکل مربوط به خود نوترینوها باشد.

### ۳-۴ سوختن هلیوم

سوختن هلیوم باعث تولید شدن دو عنصر شیمیایی حیاتی، یعنی اکسیژن و کربن می‌شود. در واقع ۶۵٪ از بدن انسان اکسیژن و ۱۸٪ آن کربن است. علاوه بر این، ۰٫۸۵٪ و ۰٫۳۹٪ از ماده‌ی منظومه شمسی به ترتیب از اکسیژن و کربن تشکیل شده است؛ فقط فراوانی هیدروژن و هلیوم بیش‌تر است. بنابراین، سوختن هلیوم یک فرایند مهم و ضمناً یک فرایند جالب است. سوختن هیدروژن در مرکز یک ستاره موقعی متوقف می‌شود که قسمت اعظم هیدروژن در هسته‌ی مرکزی ستاره به هلیوم تبدیل شده باشد. در غیاب همجوشی هسته‌ای، هسته‌ی مرکزی ستاره منقبض و انرژی گرانشی آن به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود. تقریباً نصف این انرژی از

هسته‌ی مرکزی فرار می‌کند و نصف دیگر آن باعث افزایش دما می‌شود. دمای زیاد باعث سوختن هیدروژن در پوسته‌ی اطراف توده‌ی هلیومی می‌شود، و هرچه هلیوم بیش‌تری تولید شود، جرم هسته‌ی مرکزی هلیومی افزایش می‌یابد. اگر جرم ستاره به قدر کافی زیاد یعنی در حدود  $0.5M_{\odot}$  یا بیش‌تر باشد، هسته‌ی هلیومی داغ و چگال می‌شود و هلیوم می‌سوزد؛ این سوختن معمولاً در دماهای بین  $10^8$  و  $2 \times 10^9 \text{ K}$  و در چگالی‌های بین  $10^5$  و  $10^8 \text{ kg m}^{-3}$  صورت می‌گیرد.

به پایان رسیدن سوختن هیدروژن در مرکز یک ستاره و آغاز شدن سوختن هلیوم، اثر عمیقی روی ساختار کلی و ظاهر بیرونی ستاره دارد. افزایش دمای ناشی از انقباض آغازی توده‌ی هلیومی ستاره باعث افزایش فشار و انبساط وسیع پوشش بیرونی آن می‌شود. وقتی سوختن هلیوم آغاز می‌شود، انرژی آزاد شده باعث انبساط و سرد شدن هسته‌ی مرکزی می‌شود و سرد شدن نیز باعث انقباض جزئی پوشش بیرونی می‌شود. اثر نهایی، تولید شدن یک ستاره با هسته‌ی چگال و پوشش بیرونی بسیار گسترده - یعنی یک غول قرمز - است.

سوختن هلیوم در غیاب هسته‌های پایدار با جرم‌های ۵ و ۸، که موادی برای تشکیل کربن هستند، به تأخیر می‌افتد. اما وجود واحدهای مبتنی بر کربن مانند ما و شما ایجاب می‌کند که تعدادی واکنش برای تولید کربن در ستاره‌ها انجام شود؛ این واکنش‌ها نبودن هسته‌های پایدار با جرم‌های ۵ و ۸ را جبران می‌کنند. این رشته واکنش‌ها اولین بار در سال ۱۹۵۲ توسط سالپتر<sup>۱</sup> معرفی شدند. در سال ۱۹۵۴ هویل<sup>۲</sup> نشان داد که مؤثر بودن این رشته واکنش‌ها به وجود یک حالت برانگیخته‌ی (فعالاً) نامعلوم کربن - ۱۲ بستگی دارد. این رشته واکنش‌ها سه مرحله دارند:

۱. تولید شدن تعداد کم و گذرا از هسته‌های  ${}^7\text{Be}$  ناپایدار از طریق واکنش زیر

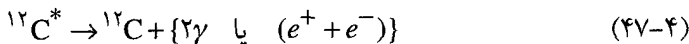


۲. تولید شدن تعداد کم و گذرا از هسته‌های کربن - ۱۲ در یک حالت برانگیخته، که به

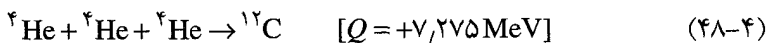
صورت  ${}^{12}\text{C}^*$  نشان داده می‌شود، از طریق واکنش زیر



۳. واپاشی کسر کوچکی از هسته‌های کربن - ۱۲ از این حالت برانگیخته به حالت پایه، از طریق واکنش زیر



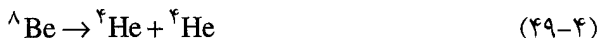
اثر نهایی این رشته عبارت است از



این همجوشی سه هسته‌ی  $^4\text{He}$ ، سه ذره‌ی آلفا را فرایند سه آلفا می‌نامند. توجه کنید که دو مرحله‌ی اول فرایند سه آلفا شامل واکنش‌هایی است که هسته‌ها را تولید و نابود می‌کنند. اگر این واکنش‌ها در حال تعادل ترمودینامیکی باشند، می‌توان یک رابطه‌ی ساده و دقیق برای آهنگ فرایند سه آلفا به دست آورد. برای انجام این کار، هر مرحله از فرایند را به ترتیب در نظر می‌گیریم.

### تولید شدن $^8\text{Be}$

حالت پایه‌ی  $^8\text{Be}$  یک حالت با تکانه‌ی زاویه‌ای صفر و پاریتی مثبت،  $J^\pi = 0^+$  است. این ذره ناپایدار است زیرا بسیار سنگین‌تر از دو هسته‌ی  $^4\text{He}$ ، با افزونی جرم - انرژی  $Q = 91,8 \text{ keV} = (m_\alpha - 2m_\alpha)c^2$ ، است. این ذره با نیم‌عمر متوسط  $\tau = 2,6 \times 10^{-16} \text{ s}$  به دو هسته‌ی  $^4\text{He}$  با انرژی آزاد شده‌ی  $91,8 \text{ MeV}$  واپاشی می‌کند:



برعکس، دو هسته‌ی  $^4\text{He}$  می‌توانند با هم جوش بخورند و با واکنش گرماگیر زیر که انرژی  $91,8 \text{ keV}$  را جذب می‌کند، یک هسته‌ی  $^8\text{Be}$  تشکیل دهند:



در واقع، احتمال برهم کنش دو هسته‌ی  $^4\text{He}$  به شرطی زیاد می‌شود که آن‌ها با انرژی نسبی  $E \approx 91,8 \text{ keV}$  و با تکانه‌ی زاویه‌ای صفر به هم برسند. علت زیاد شدن احتمال برهم کنش این است که هسته‌های  $^4\text{He}$  می‌توانند یک حالت میانی، یا تشدید متناظر با حالت پایه‌ی  $^8\text{Be}$  تشکیل دهند.

تشکیل شدن هسته‌های ناپایدار  $^8\text{Be}$  در گاز داغ هلیوم یونیده به شرطی به خوبی انجام می‌شود که تشدید با انرژی  $91.8\text{keV}$  در بین پنجره‌ی انرژی همجوشی دو هسته‌ی  $^4\text{He}$  صورت گیرد. با توجه به بخش ۴-۱ یادآوری می‌شود که احتمال جفت شدن هسته‌ها برای کسب انرژی  $E$  از یک گاز در دمای  $T$  و نفوذ کردن آن‌ها در سد کولنی جدا کننده‌ی آن‌ها، به ازای  $E = E_0$  دارای بیشینه‌ای با پهنای  $\Delta$  است؛ شکل ۴-۳ و معادلات (۴-۲۳) و (۴-۲۵) را ببینید. این پنجره‌ی انرژی همجوشی، از انرژی گاموف برای دو هسته‌ی  $^4\text{He}$  به دست می‌آید که برطبق معادله‌ی (۴-۱۰) مساوی با  $31.6\text{MeV}$  است. یک محاسبه‌ی ساده نشان می‌دهد که وقتی دما از  $10^8\text{K}$  بیش‌تر می‌شود، برای تشکیل شدن  $^8\text{Be}$  پنجره‌ی انرژی در طرف راست قرار دارد؛ در واقع، در دمای  $T = 1 \times 10^8\text{K}$  پنجره‌ی انرژی همجوشی درست در زیر تشدید  $E = (83 \pm 31)\text{keV}$  قرار دارد، در حالی که در دمای  $T = 2 \times 10^8\text{K}$ ، پنجره‌ی انرژی درست بالاتر از  $E = (132 \pm 55)\text{keV}$  قرار دارد.

البته، هر هسته‌ی تشکیل شده‌ی  $^8\text{Be}$  سریعاً به دو هسته‌ی  $^4\text{He}$  واپاشی می‌کند. اما در چگالی بالا و هنگامی که دما از  $10^8\text{K}$  بیش‌تر است، آهنگ تشکیل شدن می‌تواند کافی باشد و تعداد قابل ملاحظه‌ای از هسته‌های  $^8\text{Be}$  هسته‌های  $^4\text{He}$  را تولید کنند. علاوه بر این، اگر مقدار واپاشی (۴-۴۹) و مقدار تشکیل شدن (۴-۵۰) به تعادل ترمودینامیکی برسند، تعداد هسته‌های  $^8\text{Be}$  در حالت پایا را می‌توان با مساوی قرار دادن پتانسیل شیمیایی یک هسته‌ی  $^8\text{Be}$  و پتانسیل شیمیایی یک هسته‌ی  $^4\text{He}$  به دست آورد.

برطبق معادله‌ی (۲-۲۱)، پتانسیل شیمیایی برای هسته‌هایی با جرم  $m_A$  و چگالی عددی

$n_A$  در یک گاز کلاسیکی در دمای  $T$  برابر است با

$$\mu_A = m_A c^2 - kT \ln \left[ \frac{g_A n_{QA}}{n_A} \right] \quad (51-4)$$

که در آن چگالی عددی کوانتومی  $n_{QA}$  از معادله‌ی (۲-۲۲) به دست می‌آید:

$$n_{QA} = \left[ \frac{2\pi m_A kT}{h^2} \right]^{\frac{3}{2}} \quad (52-4)$$

و  $g_A$  یک ضریب چندگانگی تکانه‌ی زاویه‌ای است که برای حالت‌های با تکانه‌ی زاویه‌ای صفر مانند حالت‌های پایه‌ی  ${}^4\text{He}$  و  ${}^9\text{Be}$ ، مساوی با یک است. با قرار دادن این مقدار در شرایط تعادل

$$\mu_\lambda = \mu_\alpha + \mu_\beta \quad (۵۳-۴)$$

نتیجه‌ی زیر برای تعداد هسته‌های  ${}^9\text{Be}$  در گاز هسته‌های  ${}^4\text{He}$  در دمای  $T$ ، به دست می‌آید

$$\frac{n_\lambda}{n_\alpha} = \frac{g_\lambda}{g_\alpha} \left[ \frac{h^2}{2\pi m_\alpha kT} \right]^{3/2} \exp[-(m_\lambda - 2m_\alpha)c^2/kT] \quad (۵۴-۴)$$

به نقش کلیدی ضریب بولتزمن در رابطه‌ی اختلاف جرم - انرژی  $91.8\text{keV} = (m_\lambda - 2m_\alpha)c^2$  توجه کنید؛ این مقدار انرژی باید از محیط گرم اطراف گرفته شود تا یک  ${}^9\text{Be}$  تشکیل شود.

اکنون می‌توانیم تعداد هسته‌های  ${}^9\text{Be}$  در یک گاز هلیومی چگال و داغ را حساب کنیم. برای مثال، اگر چگالی گاز هلیوم  $\rho = 10^8 \text{kgm}^{-3}$  و دما  $T = 2 \times 10^8 \text{K}$  باشد، چگالی عددی هسته‌های  ${}^4\text{He}$  مساوی با  $n_\alpha \approx \rho/m_\alpha = 1.5 \times 10^{34} \text{m}^{-3}$  و چگالی عددی هسته‌های  ${}^9\text{Be}$  مساوی با  $7 \times 10^{26} \text{m}^{-3}$  خواهد بود. به عبارت دیگر، به ازای هر ۲۰ میلیون هسته‌ی  ${}^4\text{He}$ ، فقط یک هسته‌ی  ${}^9\text{Be}$  وجود دارد. اما ضریب بولتزمن در معادله‌ی (۵۴-۴) نشان می‌دهد که اگر دما کاهش یابد، تعداد هسته‌های  ${}^9\text{Be}$  سریعاً کم می‌شود. این ضریب در دمای  $2 \times 10^8 \text{K}$  مساوی با  $\exp(-5)$  و در دمای  $1 \times 10^8 \text{K}$  مساوی با  $\exp(-10)$  است. در این دمای کم‌تر، به ازای هر ۲ میلیون هسته‌ی  ${}^4\text{He}$  فقط یک هسته‌ی  ${}^9\text{Be}$  وجود دارد.

نتیجه می‌گیریم که وقتی هسته‌ی مرکزی هلیومی یک ستاره به دمایی بالاتر از  $10^8 \text{K}$  می‌رسد، در حالت تعادل دینامیکی، کسر کوچکی از هسته‌ی مرکزی ستاره از هسته‌های  ${}^9\text{Be}$  تشکیل می‌شود. این تغییر تعداد بسیار سریع صورت می‌گیرد و عمر هر هسته‌ی  ${}^9\text{Be}$  به طور متوسط  $2.6 \times 10^{-16}$  ثانیه است. به هر حال، این هسته‌ها ماده‌ی خام کافی برای مرحله‌ی بعدی فرایند سه آلفا را تأمین می‌کنند.

تولید شدن  $^{12}\text{C}^*$ 

مرحله‌ی بعدی فرایند سه آلفا به وجود هسته‌های  $^{12}\text{C}^*$ ، یعنی هسته‌های کربن در حالت برانگیخته‌ی  $^0+$ ، بستگی دارد. این حالت ظاهراً اتفاقی آن قدر مهم است که هویل وجود آن برای سوختن هلیوم در غول‌های قرمز را پیشگویی کرده است. مخصوصاً او نشان داده است که برای آن که سوختن هلیوم در دمای پایینی مانند  $T = 1,2 \times 10^8 \text{K}$  انجام شود، همجوشی  $^4\text{He}$  و  $^8\text{Be}$  باید به صورت تشدیدی افزایش یابد. علاوه بر این، او نشان داد که تشدید  $^4\text{He} - ^9\text{Be}$  باید در انرژی تقریباً  $300 \text{keV}$  بالاتر از مقدار آستانه صورت گیرد. چنین تشدید متناظر با یک حالت برانگیخته‌ی کربن - ۱۲ با انرژی برانگیزش  $7,65 \text{MeV}$  است.

بعداً این حالت برانگیخته‌ی کربن - ۱۲ در همان جایی پیدا شد که پیشگویی شده بود. تکانه‌ی زاویه‌ای آن صفر و پاریتته‌ی آن زوج،  $J^\pi = 0^+$  است و انرژی برانگیزش بالاتر از حالت پایه‌ی کربن - ۱۲ برابر است با

$$(m_{12}^* - m_{12})c^2 = (7,6542 \pm 0,0015) \text{MeV} \quad (55-4)$$

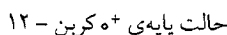
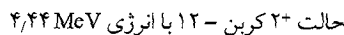
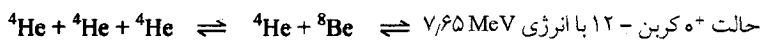
همان طور که در شکل ۴-۶ نشان داده شده است، انرژی این حالت اندکی بالاتر از مقدار آستانه برای یک هسته‌ی  $^4\text{He}$  و یک هسته‌ی  $^8\text{Be}$  و اندکی بالاتر از مقدار آستانه برای سه هسته‌ی  $^4\text{He}$  است. در واقع، داریم

$$(m_{12}^* - 3m_{\alpha})c^2 = 379,5 \text{keV} \quad \text{و} \quad (m_{12}^* - m_{\alpha} - m_{\alpha})c^2 = 287,7 \text{keV} \quad (56-4)$$

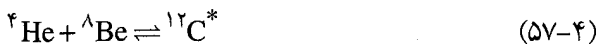
قبل از این دیدیم که در گاز چگال هلیوم در دمای حدود  $10^8 \text{K}$  یا بالاتر، گاهی هسته‌های  $^4\text{He}$  با هم جوش می‌خورند و هسته‌های  $^8\text{Be}$  ناپایدار به وجود می‌آورند که معمولاً واپاشی می‌کنند و به دو هسته‌ی  $^4\text{He}$  تبدیل می‌شوند. اکنون می‌بینیم که این هسته‌های  $^8\text{Be}$  به ندرت می‌توانند با هسته‌های  $^4\text{He}$  جوش بخورند و هسته‌های  $^{12}\text{C}^*$  را تشکیل دهند، و هر هسته‌ی  $^{12}\text{C}^*$  پیش از واپاشی به  $^4\text{He}$  و  $^8\text{Be}$ ، به مدت کوتاهی حضور دارد. این امر موقعی صورت می‌گیرد که تشدید، که در انرژی  $287,7 \text{keV}$  بالاتر از آستانه‌ی  $^4\text{He} - ^4\text{Be}$  اتفاق می‌افتد، در حدود پنجره‌ی انرژی مربوط به همجوشی این هسته‌ها باشد. با استفاده از معادلات (۴-۲۳) و

(۴-۲۵) به آسانی می‌توان نشان داد که این امر موقعی محقق می‌شود که دمای گاز اندکی بالاتر از  $10^8 \text{K}$  باشد؛ برای مثال، وقتی دما  $T = 2 \times 10^8 \text{K}$  است، پنجره‌ی انرژی همجوشی  ${}^4\text{He} - {}^8\text{Be}$ ،  $E = (232 \pm 73) \text{keV}$  است.

بنابراین، وقتی دمای گاز هلیوم یونیده تا  $10^8 \text{K}$  بالا می‌رود، برخوردهای بین  ${}^4\text{He}$  ها باعث می‌شود تعداد کمی هسته‌ی  ${}^8\text{Be}$  و  ${}^{12}\text{C}^*$  ناپایدار تولید شود. تعداد تعادلی  ${}^8\text{Be}$  از معادله‌ی (۴-۵۴) به دست می‌آید. تعداد تعادلی  ${}^{12}\text{C}^*$  را با توجه به واکنش‌های



**شکل ۴-۶** انرژی‌های آستانه و ترازهای انرژی کربن-۱۲ در هنگام سوختن هلیوم. حالت  ${}^+ \text{ کربن-۱۲}$  با انرژی  $7,65 \text{ MeV}$ ، که به صورت  ${}^{12}\text{C}^*$  نشان داده می‌شود، فقط به اندازه‌ی  $7,3795 \text{ MeV}$  بالاتر از انرژی آستانه‌ی سه هسته‌ی  ${}^4\text{He}$  قرار دارد. کربن از حضور موقتی هسته‌های  ${}^8\text{Be}$  و  ${}^{12}\text{C}^*$  ناپایدار، که با هسته‌های  ${}^4\text{He}$  در دما و چگالی بالا قرار دارند، تولید می‌شود. تعداد کمی از هسته‌های  ${}^{12}\text{C}^*$  با واپاشی به حالت پایه‌ی کربن-۱۲، از این مجموعه‌ی دینامیکی خارج می‌شوند. انرژی فعال‌سازی برای تولید کربن، انرژی لازم برای تولید یک هسته‌ی  ${}^{12}\text{C}^*$ ، یعنی  $7,3795 \text{ MeV}$  است. انرژی آزاد شده در تولید کربن، با اختلاف انرژی آستانه برای سه هسته‌ی  ${}^4\text{He}$  و انرژی حالت پایه‌ی کربن-۱۲، یعنی  $7,275 \text{ MeV}$ ، برابر است.



و در نظر گرفتن شرط زیر می‌توان حساب کرد

$$\mu_{\text{He}} + \mu_{\text{Be}} = \mu_{12}^* \quad (58-4)$$

در تشابه کامل با معادلات (۵۳-۴) و (۵۴-۴) داریم

$$\frac{n_{12}^*}{n_{\text{He}} n_{\text{Be}}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{h^2}{2\pi m_{\text{He}} kT} \right]^{\frac{3}{2}} \exp[-(m_{12}^* - m_{\text{He}} - m_{\text{Be}})c^2/kT] \quad (59-4)$$

ضمناً یادآوری می‌کنیم که چگالی عددی  $(n_{\text{Be}})$  هسته‌های  ${}^8\text{Be}$  از معادله (۵۴-۴) به دست می‌آید. بنابراین، از ترکیب معادله (۵۹-۴) با معادله (۵۴-۴) داریم

$$\frac{n_{12}^*}{n_{\text{He}}^2} = 3^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{h^2}{2\pi m_{\text{He}} kT} \right]^{\frac{3}{2}} \exp[-(m_{12}^* - 3m_{\text{He}})c^2/kT] \quad (60-4)$$

توجه کنید که اگرچه هسته‌های ناپایدار  ${}^8\text{Be}$  نقش قاطعی در برقراری تعادل بازی می‌کنند، تعداد هسته‌های  ${}^{12}\text{C}^*$  فقط از دما، چگالی عددی هسته‌های  ${}^4\text{He}$  و اختلاف انرژی بین یک هسته  ${}^{12}\text{C}^*$  و سه هسته  ${}^4\text{He}$  به دست می‌آید. در واقع، معادله (۶۰-۴) را مستقیماً می‌توان از تعادل برقرار شده با واکنش‌های زیر به دست آورد



قبل از این دیدیم که چگالی عددی هسته‌های  ${}^4\text{He}$  و  ${}^8\text{Be}$  در یک گاز هلیوم با چگالی جرمی  $10^8 \text{ kg m}^{-3}$  و دمای  $2 \times 10^8 \text{ K}$ ، به ترتیب مساوی با  $n_{\text{He}} = 1.5 \times 10^{34} \text{ m}^{-3}$  و  $n_{\text{Be}} = 7 \times 10^{26} \text{ m}^{-3}$  است. اکنون با استفاده از معادله (۶۰-۴) می‌توانیم نشان دهیم که چگالی عددی هسته‌های  ${}^{12}\text{C}^*$  در همان گاز،  $n_{12}^* = 3 \times 10^{14} \text{ m}^{-3}$  است. ضمناً توجه کنید که ضریب بولتزمن  $\exp[-(m_{12}^* - 3m_{\text{He}})c^2/kT]$  در معادله (۶۰-۴) ایجاب می‌کند که با کاهش دما، چگالی عددی هسته‌های  ${}^{12}\text{C}^*$  نیز سریعاً کاهش یابد.

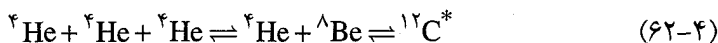
بنابراین، وقتی هسته‌ی مرکزی هلیومی یک ستاره به دمای بالاتر از  $10^8 \text{ K}$  می‌رسد، هسته‌ی مرکزی دارای تعداد کمی هسته‌ی  ${}^{12}\text{C}^*$  می‌شود که در تعادل دینامیکی با تعداد زیادی از



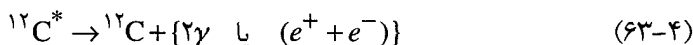
هسته‌های  ${}^8\text{Be}$  و تعداد بسیار زیادتری از هسته‌های  ${}^4\text{He}$  قرار دارند. در مرحله‌ی پایانی فرایند سه آلفا کسر کوچکی از هسته‌های  ${}^{12}\text{C}^*$  از این مجموعه‌ی دینامیکی خارج می‌شوند.

### تولید شدن کربن

دو مرحله‌ی اول در فرایند سه آلفا از طریق واکنش‌های زیر می‌توانند هسته‌های  ${}^8\text{Be}$  و  ${}^{12}\text{C}^*$  را تولید کنند



تقریباً تمام هسته‌های  ${}^{12}\text{C}^*$  تولید شده به همان جایی برمی‌گردند که از آن‌جا آمده‌اند؛ اما تعداد کمی از آن‌ها نشت می‌کنند و به طریق زیر به حالت پایه‌ی کربن - ۱۲ واپاشی می‌کنند



مدت زمان متوسط این واپاشی  $\tau({}^{12}\text{C}^* \rightarrow {}^{12}\text{C}) = 1,8 \times 10^{-16} \text{ s}$  و انرژی آزاد شده  $7,65 \text{ MeV}$  است. این نشت برگشت‌ناپذیر شدیداً روی تعادل دینامیکی برقرار شده با معادله‌ی (۶۲-۴) اثر می‌کند، زیرا فقط تعداد کمی از هسته‌های  ${}^{12}\text{C}^*$ ، تقریباً یک هسته از هر  $2500$  هسته، به حالت پایه واپاشی می‌کنند. بنابراین، هنوز هم می‌توانیم از معادلات (۴-۵۴) و (۴-۶۰) برای پیدا کردن تعداد هسته‌های  ${}^8\text{Be}$  و هسته‌های  ${}^{12}\text{C}^*$  استفاده کنیم. آهنگ تولید هسته‌های کربن - ۱۲ در حالت پایه با حاصل ضرب چگالی عددی هسته‌های  ${}^{12}\text{C}^*$  و آهنگ واپاشی آن‌ها برابر است

$$\frac{dn_{12}}{dt} = \frac{n_{12}^*}{\tau({}^{12}\text{C}^* \rightarrow {}^{12}\text{C})} \quad (۶۴-۴)$$

اگر از معادله‌ی (۴-۶۰) استفاده کنیم، آهنگ تولید برابر است با

$$\frac{dn_{12}}{dt} = \frac{n_{\alpha}^3}{\tau({}^{12}\text{C}^* \rightarrow {}^{12}\text{C})} \left[ \frac{h^2}{2\pi m_{\alpha} kT} \right]^3 \exp[-(m_{12}^* - 3m_{\alpha})c^2 / kT] \quad (۶۵-۴)$$

بنابراین، آهنگ تولید شدن کربن در گاز هلیوم دردمای بالا، از رابطه‌ی بسیار ساده‌ی (۴-۶۵) به دست می‌آید. علت این سادگی به نقش هسته‌های  ${}^8\text{Be}$  و  ${}^{12}\text{C}^*$  در برقراری تعادل

ترمودینامیکی مربوط است. یادآوری می‌شود که آهنگ تولید به دو عامل بستگی دارد. عامل اول اختلاف جرم - انرژی  $(m_{12}^* - 3m_p)c^2$  است که به عنوان انرژی فعال‌سازی به فرایند داده می‌شود، یعنی مقدار انرژی که باید کسب شود تا  $^{12}\text{C}^*$  را به عنوان حالت میانی تولید کند. عامل دوم مدت زمان متوسط واپاشی به حالت پایه، یعنی  $\tau(^{12}\text{C}^* \rightarrow ^{12}\text{C})$  است. این دو عامل با دقت اندازه‌گیری شده‌اند: انرژی فعال‌سازی  $3795\text{keV}$  و مدت زمان واپاشی متوسط  $1.8 \times 10^{-16}\text{s}$  است.

انرژی آزاد شده در فرایند سه آلفا مستقیماً به آهنگ تولید شدن کربن بستگی دارد. برای تولید شدن یک هسته‌ی کربن - ۱۲، ابتدا انرژی  $(m_{12}^* - 3m_p)c^2$  جذب می‌شود تا هسته‌ی میانی  $^{12}\text{C}^*$  تولید شود، و سپس موقعی که این حالت میانی به حالت پایه واپاشی می‌کند، انرژی  $(m_{12}^* - m_{12})c^2 = 7.275\text{MeV}$  آزاد می‌شود. انرژی خالص آزاد شده  $(3m_p - m_{12})c^2$  است و آهنگ تولید انرژی توسط فرایند سه آلفا برابر است با

$$\varepsilon_{3\alpha} = (3m_p - m_{12})c^2 \frac{dn_{12}}{dt} \quad (4-66)$$

به عنوان یک مثال عددی ویژه، سوختن هلیوم در گاز هلیوم در دمای  $T = 2 \times 10^8\text{K}$  و چگالی  $\rho = 10^8\text{kg m}^{-3}$  را مجدداً بررسی می‌کنیم. برطبق معادله‌ی (۴-۶۰)،  $n_{12}^* = 3 \times 10^{14}\text{m}^{-3}$  است. بنابر معادله‌ی (۴-۶۵)، هسته‌های کربن - ۱۲ با آهنگ  $1.9 \times 10^{30}\text{m}^{-3}\text{s}^{-1}$  تولید می‌شوند. ضمناً برطبق معادله‌ی (۴-۶۶)، انرژی با آهنگ  $2.2 \times 10^{18}\text{W m}^{-3}$  تولید می‌شود. اما این آهنگ نسبت به دما بسیار حساس است. بستگی آهنگ سه آلفا به دما، عمدتاً مربوط به ضریب بولتزمن در معادله‌ی (۴-۶۵) است. انرژی در نمای این ضریب، یعنی  $(m_{12}^* - 3m_p)c^2 = 3795\text{keV}$ ، انرژی لازم برای تشکیل شدن حالت میانی  $^{12}\text{C}^*$  است؛ این مقدار، انرژی فعال‌سازی برای تولید شدن کربن است. چون این انرژی فعال‌سازی در دماهای سوختن هلیوم بسیار بیش‌تر از  $kT$  است، ضریب بولتزمن به شرطی شدیداً تغییر می‌کند که دما تغییر کند. برای مثال، اگر دما از  $2 \times 10^8\text{K}$  به  $10^8\text{K}$  کاهش یابد، ضریب بولتزمن از  $\exp(-22)$  به  $\exp(-44)$  کاهش پیدا می‌کند.

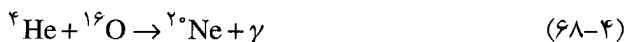
## مصرف شدن کربن

چون کربن در مرکز یک‌غول قرمز وجود دارد، اکسیژن از طریق واکنش زیر می‌تواند تولید شود



آهنگ تولید شدن اکسیژن را می‌توان با استفاده از معادلات همجوشی گرماسته‌ای ارائه شده در بخش ۴-۱ حساب کرد. بنابر معادله‌ی (۴-۲۷)، آهنگ همجوشی عمدتاً به مقدار ضریب هسته‌ای  $S$  در انرژی  $E_0$  در پنجره‌ی انرژی لازم برای همجوشی  ${}^4\text{He}$  و  ${}^{12}\text{C}$  بستگی دارد. در این پنجره‌ی انرژی همجوشی یا در نزدیکی آن هیچ تشدید صوری نمی‌گیرد و مقدار مناسب ضریب  $S$  کوچک، اما نادقیق است؛ به ازای مقدار  $E_0$  در حدود  $300\text{keV}$ ، مقدار  $S$  در ناحیه‌ی  $0.3\text{MeV} \cdot \text{barn}$  قرار دارد.

بعد از تولید شدن اکسیژن ممکن است نئون از طریق واکنش زیر تولید شود



در عمل این واکنش در هنگام سوختن هلیوم، آن هم به ندرت، صورت می‌گیرد. واضح است که بزرگ شدن سد کولنی مانع انجام واکنش (۴-۶۸) می‌شود. علاوه بر این، در انرژی‌های نزدیک پنجره‌ی انرژی همجوشی هیچ تشدید صوری صورت نمی‌گیرد. در واقع، یک حالت برانگیخته‌ی  $J^\pi = 2^-$  با انرژی برانگیزش  $4.97\text{MeV}$  برای نئون وجود دارد که در نگاه اول می‌تواند آهنگ همجوشی  ${}^4\text{He} - {}^{16}\text{O}$  را افزایش دهد. اما چنین نیست زیرا  ${}^4\text{He}$  و  ${}^{16}\text{O}$  نمی‌توانند با هم مزدوج شده و یک حالت با پارите‌ی منفی با تکانه‌ی زاویه‌ای ۲ را تولید کنند؛ حالت پایه‌ی هر دو هسته،  $0^+$  است و اگر آن‌ها با تکانه زاویه‌ای مداری نسبی  $l=2$  با هم مزدوج شوند تا یک حالت با تکانه‌ی زاویه‌ای کل  $J=2$  را به وجود آورند، پارите مثبت است زیرا  $l=+1$  ( $-1$ ) $^\pi = +1$ . تا زمانی که  ${}^4\text{He}$  و  ${}^{16}\text{O}$  را در نظر می‌گیریم، حالت  $2^-$  برای  ${}^{20}\text{Ne}$  یک حالت با پارите‌ی غیرطبیعی خواهد بود.

بنابراین، سوختن هلیوم عمدتاً شامل دو فرایند است، فرایند سه آلفا و تولید شدن اکسیژن با گیرافتادن تابشی  ${}^4\text{He}$  توسط  ${}^{12}\text{C}$ . تولید شدن هسته‌های سنگین‌تر  ${}^{20}\text{Ne}$ ،  ${}^{24}\text{Mg}$ ،  ${}^{28}\text{Si}$  و غیره با گیرافتادن تابشی  ${}^4\text{He}$  در هنگام سوختن هلیوم، به خوبی صورت نمی‌گیرد.

باید توجه کرد که سوختن هلیوم باعث پرش از هلیوم به کربن می‌شود. این پرش باعث گذر از هسته‌های پایدار بین  $A=6$  و  $A=11$  می‌شود که هسته‌های  ${}^6\text{Li}$ ،  ${}^9\text{Be}$ ،  ${}^{10}\text{B}$  و  ${}^{11}\text{B}$  هستند. این امر با وجود تعداد کم این هسته‌های سبک در منظومه‌ی شمسی سازگار است. این هسته‌ها در ستاره‌ها تولید نشده‌اند، بلکه در ابتدا با واکنش‌های خرد کننده در محیط میان ستاره‌ای، یعنی برخوردهای بین فوتون‌های پرتوهای کیهانی پرنرژی و هسته‌هایی مانند  ${}^{12}\text{C}$ ، تولید شده‌اند. این نوع هسته‌ها به مقدار بسیار کم در حین مه‌بانگ نیز تولید شده‌اند.

### چه می‌شد اگر؟

با توجه به آن‌چه گفته شد نتیجه می‌گیریم که محصولات سوختن هلیوم در حال تعادل‌اند. در هنگام سوختن هلیوم، دو فرایند سه آلفا که کربن را تولید می‌کند (۴-۴۸) و تولید شدن اکسیژن که کربن را مصرف می‌کند (۴-۶۷)، با هم رقابت می‌کنند. نسبت کربن به اکسیژن در منظومه‌ی خورشیدی عمدتاً به تعامل تعادلی بین این دو فرایند رقیب وابسته است، و مقدار کل کربن و اکسیژن موجود عمدتاً به بی‌تأثیر بودن واکنش تولید نئون (۴-۶۸) بستگی دارد. فکر کردن به این موضوع که اگر این تعادل متفاوت بود چه اثری روی محیط اطراف ما داشت، جالب است. برای مثال، اگر به خاطر وجود تشدید در نزدیکی پنجره‌ی انرژی همجوشی، تولید شدن اکسیژن افزایش پیدا می‌کرد، کربن تولید شده با فرایند سه آلفا تقریباً با همان آهنگ مصرف می‌شد. این امر باعث می‌شد اکسیژن در محیط اطراف ما زیاد و کربن کم باشد. وضعیت مشابهی موقعی به وجود می‌آمد که حالت برانگیخته‌ی  ${}^8\text{O}$  در کربن - ۱۲ اندکی بالاتر قرار می‌گرفت. در این صورت، همان‌طور که ضریب بولتزمن در معادله‌ی (۴-۶۵) نشان می‌دهد، آهنگ سه آلفا آرام‌تر می‌شد و هر کربن تولید شده سریعاً به اکسیژن تبدیل می‌شد. علاوه بر این، اگر حالت برانگیخته‌ی  ${}^4\text{Mg}$  مربوط به  ${}^{20}\text{Ne}$  دارای عددهای کوانتومی  ${}^{2+}$  به جای  ${}^{2-}$  می‌شد، اغلب کربن‌ها و اکسیژن‌های تولید شده در هنگام سوختن هلیوم، به نئون تبدیل می‌شدند.

این فرض‌ها از این اصل آنتروپی پشتیبانی می‌کنند که فیزیک باید در جهت توفیق تحولات بیولوژیکی گام بردارد. به نظر می‌رسد سوختن هلیوم کاملاً با این اصل توافق دارد. این موضوع

نشان می‌دهد که تغییرات اندک حالت‌های برانگیخته به ظاهر ملالت‌آور هسته‌ها می‌تواند به آسانی به تشکیل شدن یک منظومه‌ی شمسی منجر شود. در این منظومه دلزدگی و ملالت چندان اهمیت ندارد زیرا در پیرامون آن کسی نمی‌تواند وجود داشته باشد تا ملول باشد.

#### ۴-۴ سوختن پیشرفته

وقتی که یک ستاره‌ی پرجرم تحول پیدا می‌کند و دما و چگالی در مرکز آن به طور پیشرونده افزایش می‌یابند، سوختن هسته‌ای در چند مرحله صورت می‌گیرد. اگر جرم یک ستاره به قدر کافی زیاد، یعنی از  $8M_{\odot}$  بیش‌تر یا در همان حدود، باشد ستاره بعد از سوختن هلیوم به مراحل سوختن پیشرفته برای هسته‌های سنگین می‌رسد. به نظر می‌رسد فرایندهای زیر صورت می‌گیرند:

۱. وقتی سوختن هلیوم در مرکز ستاره متوقف می‌شود، یک هسته‌ی مرکزی از جنس کربن و اکسیژن متبعض می‌شود و دما افزایش می‌یابد. سوختن کربن موقعی آغاز می‌شود که در چگالی حدود  $3 \times 10^9 \text{ kg m}^{-3}$  دما به مقدار  $5 \times 10^8 \text{ K}$  برسد. سوختن کربن باعث می‌شود نئون، سدیم و منیزیم از طریق واکنش‌های زیر تولید شوند



۲. بعد از سوختن کربن، سوختن نئون به شرطی آغاز می‌شود که دما به مقدار  $10^9 \text{ K}$  برسد. در این دما، فوتون‌های گرمایی پرنرژی از طریق واکنش تجزیه‌ی نوری زیر هسته‌های  $^{20}\text{Ne}$  را تجزیه می‌کنند



سپس هسته‌های  $^4\text{He}$  آزاد شده می‌توانند با هسته‌های تجزیه نشده‌ی  $^{20}\text{Ne}$  واکنش کنند و  $^{24}\text{Mg}$  به وجود آورند



۳. بعد از سوختن نئون، هسته‌ی مرکزی ستاره عمدتاً شامل  $^{16}\text{O}$  و  $^{24}\text{Mg}$  می‌شود. سوختن اکسیژن به شرطی آغاز می‌شود که دما به مقدار  $2 \times 10^9 \text{K}$  برسد، و مهم‌ترین محصول آن  $^{28}\text{Si}$  است که با واکنش زیر تولید می‌شود



۴. سوختن سیلیسیوم به شرطی آغاز می‌شود که دما به مقدار  $3 \times 10^9 \text{K}$  برسد. در این دما سیلیسیوم توسط فوتون‌های گرمایی پرنانرژی به تدریج نابود می‌شود و هسته‌های  $^4\text{He}$ ، پروتون و نوترون آزاد می‌شوند. سپس این ذرات سبک با هسته‌های تجزیه نشده ترکیب می‌شوند تا هسته‌های با جرم بسیار زیاد تولید کنند. در این حادثه تعدادی واکنش‌های گیراندازی و تجزیه‌ی نوری با هم رقابت می‌کنند و اثر نهایی آن‌ها این است که هسته‌های با پیوندهای ضعیف به هسته‌های با پایداری بیش‌تر تبدیل می‌شوند.

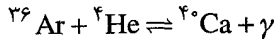
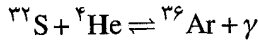
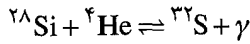
فیزیک مربوط به این سوختن پیشرفته تا حدی مانند همجوشی گرماهسته‌ای است که در مورد سوختن هیدروژن و هلیوم بیان کردیم. اما موقعی که دما از  $10^9 \text{K}$  بیش‌تر می‌شود، نوع جدیدی از پدیده‌های فیزیکی اتفاق می‌افتند: یعنی هسته‌ها توسط فوتون‌های گرمایی پرنانرژی تجزیه می‌شوند و سپس ماده‌ی هسته‌ای تولید شده از این طریق، به پایدارترین شکل خود واپاشی می‌کند. بعداً این ایده‌ها را با در نظر گرفتن نقش تجزیه‌ی نوری هسته‌ها در سوختن سیلیسیوم، به اختصار شرح خواهیم داد.

تجزیه‌ی نوری هسته‌ها در فیزیک هسته‌ای، مانند یونش اتم‌های فیزیک اتمی است. با توجه به بخش ۲-۵ یادآوری می‌کنیم که یونش اتمی در حوالی  $3000 \text{K}$  اهمیت پیدا می‌کند. چون انرژی‌های بستگی هسته‌ای نوعاً چند میلیون برابر انرژی‌های بستگی اتمی هستند، تجزیه‌ی نوری هسته‌ها در دماهایی چشمگیر می‌شود که یک میلیون برابر بیش‌تر از  $3000 \text{K}$ ، یعنی در حدود  $3 \times 10^9 \text{K}$  باشند.

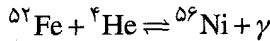
در مرحله‌ی سوختن سیلیسیوم، تعدادی واکنش تجزیه‌ی نوری و گیراندازی رخ می‌دهند. برای نشان دادن اصل اساسی مورد نظر، بخشی از این واکنش‌ها را در نظر می‌گیریم که با تولید شدن هسته‌های  $^4\text{He}$  در هنگام تجزیه‌ی نوری هسته‌های  $^{28}\text{Si}$ ، آغاز می‌شوند:



این فرایند به آرامی انجام می‌شود زیرا انرژی فوتون گرمایی باید بیش‌تر از  $۹,۹۸\text{MeV}$  باشد. هسته‌های  ${}^4\text{He}$  آزاد شده با تجزیه‌ی نوری می‌توانند تعدادی واکنش را به راه بیندازند که گوگرد، آرگون، هلیوم و غیره را به صورت زیر تولید می‌کنند:



و



این واکنش‌ها بسیار سریع‌تر از تجزیه‌ی نوری اولیه‌ی  ${}^{28}\text{Si}$  که فرایند تولید را با آزاد کردن هسته‌های  ${}^4\text{He}$  آغاز می‌کند، صورت می‌گیرند. در واقع، مقیاس زمانی برای تولید شدن هسته‌های سنگین‌تر، متأثر از تجزیه‌ی نوری آرام  ${}^{28}\text{Si}$  با پیوند محکم است. چون واکنش‌های تولید به تعادل ترمودینامیکی می‌رسند، چگالی‌های عددی نسبی را می‌توان با مساوی قرار دادن پتانسیل‌های شیمیایی به دست آورد. برای مثال، اگر واکنش اول این رشته را در نظر بگیریم و مجموع پتانسیل‌های شیمیایی  ${}^{28}\text{Si}$  و  ${}^4\text{He}$  را مساوی با پتانسیل شیمیایی  ${}^{32}\text{S}$  قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\mu_{28} + \mu_4 = \mu_{32} \quad (۷۶-۴)$$

معلوم می‌شود که ارتباط چگالی‌های عددی این هسته‌ها به صورت زیر است

$$\frac{n_{28}n_4}{n_{32}} \approx \left[ \frac{\sqrt{2\pi m_p kT}}{h^3} \right]^2 \exp[-Q/kT] \quad (۷۷-۴)$$

که در آن  $Q$  انرژی لازم برای آزاد شدن یک هسته‌ی  ${}^4\text{He}$  از یک هسته‌ی  ${}^{32}\text{S}$  است:

$$Q = [m_{28} + m_4 - m_{32}]c^2 \approx ۶,۹۵\text{MeV}$$

در این جا  $m_p$  جرم کاهیده برای سیستم  ${}^{28}\text{Si} - {}^4\text{He}$  است. با توجه به معادله‌ی (۷۷-۴) معلوم می‌شود که فراوانی  ${}^{32}\text{S}$  نسبت به  ${}^{28}\text{Si}$ ، از دما و چگالی عددی  ${}^4\text{He}$  در هنگام

سوختن سیلیسیوم، تعیین می‌شود. مثلاً اگر این چگالی عددی  $10^{34} \text{ m}^{-3}$  باشد، نسبت تعادلی  $^{28}\text{Si}$  به  $^{32}\text{S}$  در دمای  $5 \times 10^9 \text{ K}$ ، در حدود ۱ تا ۴ خواهد بود.

از نکته‌های مشابه می‌توان برای تشریح فراوانی  $^{36}\text{Ar}$ ،  $^{40}\text{Ca}$  و غیره نسبت به  $^{28}\text{Si}$ ، استفاده کرد. یادآوری می‌کنیم که فراوانی این هسته‌ها و هسته‌های دیگر، به ضریب بولتزمن  $\exp[-Q/kT]$  که شامل انرژی تجزیه است، بستگی دارد. بنابراین، هسته‌های با پیوند محکم همیشه مورد توجه‌اند.

با در نظر گرفتن شکل ۱-۳ یادآوری می‌کنیم که هر چه عدد جرمی  $A$  به ۵۶ نزدیک می‌شود، انرژی بستگی هر نوکلئون افزایش می‌یابد. بنابراین تجزیه‌ی  $^{28}\text{Si}$  و آرایش بعدی نوکلئون‌ها، هسته‌هایی با بیش‌ترین پایداری در جدول تناوبی در حوالی  $A=56$ ، یعنی ایزوتوپ‌های  $\text{Cr}$ ،  $\text{Mn}$ ،  $\text{Fe}$ ،  $\text{Co}$  و  $\text{Ni}$  را به وجود می‌آورد. چون انرژی بستگی هر نوکلئون به ازای  $A=56$  بیشینه می‌شود، اگر ذره‌های سبک گیر بیفتند تا هسته‌هایی با عدد جرمی  $A > 56$  تشکیل دهند، انرژی را از گاز کسب می‌کنند. به این دلیل هسته‌های بعد از گروه آهن در جدول تناوبی، در هنگام سوختن سیلیسیوم تشکیل نمی‌شوند.

بنابراین، سوختن سیلیسیوم حاصل گیراندازی تابشی و واکنش‌های تجزیه‌ی نوری هستند که سیلیسیوم را در دریایی از ذرات آلفا، پروتون‌ها و نوترون‌ها ذوب می‌کند تا عناصر سنگین‌تر با عددهای جرمی ۳۰ تا ۵۶ را تولید کند. در واقع، سوختن سیلیسیوم را غالباً ذوب شدن سیلیسیوم می‌نامند. با این نامگذاری تأکید می‌شود که سازوکار مورد نظر متفاوت است. غیر از سوختن نئون، این تنها مرحله‌ای از سوختن هسته‌ای است که در آن تجزیه‌ی هسته‌ها با فوتون‌های گرمایی پرنرژی صورت می‌گیرد.

بالاخره، نشان می‌دهیم که مقیاس زمانی به کار رفته در مراحل سوختن پیشرفته، بسیار کوتاه‌تر از مقیاس زمانی سوختن هیدروژن یا هلیوم است. دلیل اول این است که آهنگ تولید انرژی هسته‌ای تابع آهنگ اتلاف انرژی از ستاره است. اتلاف انرژی در دماهای بالاتر در حین سوختن پیشرفته، بیش‌تر است. برای مثال، در این دماها نوترینوها می‌توانند از برخورد‌های الکترون - پوزیترون و با سازوکارهای دیگر تولید شوند، و اتلاف انرژی توسط گسیل نوترینو



می‌تواند زیاد باشد. مقیاس‌های زمانی مربوط به سوختن هسته‌ای برای ستاره‌ای به جرم  $25M_{\odot}$ ، در جدول ۴-۲ درج شده‌اند. حادثه‌ی سوختن هسته‌ای با سوختن سیلیسیوم پایان می‌یابد؛ در نتیجه یک هسته‌ی مرکزی متشکل از پایدارترین هسته‌ها در جدول تناوبی در حوالی عدد جرمی ۵۶ به وجود می‌آید، که از آن نمی‌توان انرژی بیش‌تری خارج کرد. در فصل ۶ خواهیم دید که ستاره‌ای که از مرحله‌ی سوختن سیلیسیوم می‌گذرد، نوعی فاجعه ایجاد می‌کند زیرا موقعی که جرم آن از حد چاندرااسکار  $1.4M_{\odot}$  بیش‌تر می‌شود، هسته‌ی مرکزی آن تحت گرانش شدیداً منقبض می‌شود.

جدول ۴-۲ مقیاس زمانی برای مراحل سوختن هسته‌ای یک ستاره با جرم  $25M_{\odot}$  و دمای مرکزی و چگالی در آن مراحل. مبنای این داده‌ها محاسبات ویور<sup>۱</sup> است که توسط رالفس<sup>۲</sup> و رادنی<sup>۳</sup> (۱۹۸۸) ارائه شده است.

مرحله	مقیاس زمانی	دما	چگالی ( $\text{kg m}^{-3}$ )
سوختن هیدروژن	$7 \times 10^6$ سال	۰.۰۶	$5 \times 10^4$
سوختن هلیوم	$5 \times 10^5$ سال	۰.۲۳	$7 \times 10^5$
سوختن کربن	۶۰۰ سال	۰.۹۳	$2 \times 10^8$
سوختن نئون	یک سال	۱.۷	$4 \times 10^9$
سوختن اکسیژن	۶ ماه	۲.۳	$1 \times 10^{10}$
سوختن سیلیسیوم	یک روز	۴.۱	$3 \times 10^{10}$

## خلاصه

### فیزیک همجوشی هسته‌ای

- همجوشی هسته‌ای می‌تواند در انرژی  $E$  کم‌تر از سد کولنی جدا کننده‌ی هسته‌ها، صورت گیرد. احتمال نفوذ در این سد تقریباً برابر است با

$$\text{احتمال نفوذ} \approx \exp \left[ - \left( \frac{E_G}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (12-4)$$

که در آن  $E_G$ ، انرژی گاموف به بارهای الکتریکی روی هسته‌ها، یعنی  $Z_A$  و  $Z_B$ ، و به جرم کاهیده  $m_r$  آن‌ها بستگی دارد. انرژی گاموف برابر است با

$$E_G = (\pi\alpha Z_A Z_B)^2 m_r c^2 \quad (10-4)$$

● بستگی سطح مقطع همجوشی به انرژی،  $\sigma(E)$ ، با افزایش احتمال نفوذ در سد کولنی، بارزتر می‌شود. سطح مقطع را معمولاً به صورت زیر نمایش می‌دهند

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} \exp \left[ - \left( \frac{E_G}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (16-4)$$

تابع  $S(E)$  از خواص هسته‌ای همجوشی حساب می‌شود و به جز انرژی‌های حوالی تشدید هسته‌ای، به آرامی با انرژی تغییر می‌کند.

● آهنگ واکنش گرماسته‌ای در واحد حجم برای دو هسته‌ی  $A$  و  $B$ ، با چگالی‌های عددی  $n_A$  و  $n_B$ ، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$R_{AB} = n_A n_B \langle \sigma v_r \rangle \quad (19-4)$$

● اگر هسته‌ها یک گاز کلاسیکی غیرنسبیتی در دمای  $T$  تشکیل دهند، سرعت نسبی  $v_r$  آن‌ها دارای یک توزیع ماکسولی (۴-۲۰) است و آهنگ همجوشی آن‌ها برابر است با

$$R_{AB} = n_A n_B \left[ \frac{\Lambda}{\pi m_r} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{kT} \right]^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty S(E) \exp \left[ - \frac{E}{kT} - \left( \frac{E_G}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \right] dE \quad (22-4)$$

● مقدار نمایی در این معادله با احتمال کسب انرژی  $E$  از محیط اطراف و نفوذ در سد کولنی، متناسب است. این احتمال به ازای  $E = E_0$  دارای یک قله به پهنای  $\Delta$  مطابق شکل ۴-۳ است که برطبق معادلات (۴-۲۳) و (۴-۲۵) داریم

$$E_0 = \left[ \frac{E_G (kT)^2}{4} \right]^{\frac{1}{3}} \quad \text{و} \quad \Delta = \frac{4}{3^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}}} E_G^{\frac{1}{6}} (kT)^{\frac{5}{6}}$$

در نتیجه، همجوشی گرماسته‌ای عمدتاً در انرژی‌های واقع در پنجره‌ی انرژی  $E_0 \pm \Delta/2$  صورت می‌گیرد.

● اگر ضریب همجوشی هسته‌ای  $S(E)$  برای انرژی‌های واقع در پنجره‌ی انرژی همجوشی تقریباً ثابت باشد، آهنگ همجوشی برابر خواهد بود با

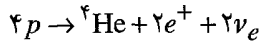
$$R_{AB} = 6,48 \times 10^{-24} \frac{n_A n_B}{A_r Z_A Z_B} S(E_e) \left( \frac{E_G}{4kT} \right)^{\frac{2}{3}} \exp \left[ -3 \left( \frac{E_G}{4kT} \right)^{\frac{1}{3}} \right] m^{-3} s^{-1} \quad (27-4)$$

این رابطه ایجاب می‌کند که بستگی آهنگ همجوشی به دما تقریباً به صورت زیر باشد

$$R_{AB} \propto T^a \quad a \approx \left[ \frac{E_G}{4kT} \right]^{\frac{1}{3}} \quad \text{که در آن}$$

### سوختن هیدروژن

- سوختن هیدروژن باعث می‌شود پروتون‌ها به هسته‌های  ${}^4\text{He}$  تبدیل شوند. محتمل‌ترین تبدیل شامل گسیل دو پوزیترون و دو نوترینوی الکترونی است، یعنی



اگر انرژی نابودی پوزیترون‌ها را در نظر بگیریم، به ازای هر  ${}^4\text{He}$  تولید شده، مقدار انرژی  $26,73 \text{ MeV}$  آزاد می‌شود؛ درصد کمی از این انرژی توسط نوترینوها که بدون انجام برهم‌کنش فرار می‌کنند، حمل می‌شود.

- در خورشید، سوختن هیدروژن غالباً با زنجیره‌ی پروتون - پروتون که در شکل ۴-۴ نشان داده شده است، صورت می‌گیرد. در این زنجیره سه شاخه‌ی اصلی وجود دارد که با I، II و III مشخص شده‌اند. آهنگ کل زنجیره‌ی پروتون - پروتون به واکنش اول این زنجیره بستگی دارد:



در خورشید، از کل زمان زنجیره‌ی پروتون - پروتون، ۸۵٪ مربوط به شاخه‌ی I، ۱۵٪ مربوط به شاخه‌ی II و ۰۰۲٪ مربوط به شاخه‌ی III است. انرژی آزاد شده در این زنجیره به ازای هر همجوشی پروتون - پروتون،  $15 \text{ MeV}$  است. این انرژی آزاد شده همراه با آهنگ همجوشی پروتون - پروتون محاسبه شده، ایجاب می‌کند که آهنگ تولید شدن انرژی توسط زنجیره‌ی پروتون - پروتون مساوی باشد با

$$\varepsilon_{pp} = 9,5 \times 10^{-37} X_1^2 \rho^2 T^4 \text{ W m}^{-3} \quad (37-4)$$

که در آن  $X_1$  کسر جرمی هیدروژن است.

● در ستاره‌های رشته‌ی اصلی که بسیار پرجرم‌تر از خورشید هستند، سوختن هیدروژن عمدتاً از طریق چرخه‌ی کربن - ازت مطابق شکل ۴-۵، صورت می‌گیرد. در این چرخه‌ی واکنش‌ها،  $^{12}\text{C}$  به صورت یک کاتالیزور در تبدیل پروتون‌ها به هسته‌های  $^4\text{He}$  عمل می‌کند.

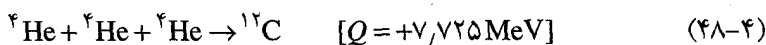
● اصولاً نوترینوهایی که در هنگام سوختن هیدروژن آزاد می‌شوند، می‌توانند اطلاعات مستقیمی از واکنش‌های واقعی را به ما بدهند. شار مورد انتظار نوترینوهای خورشیدی که بر اثر واکنش‌های ویژه در زنجیره‌ی پروتون - پروتون و در چرخه‌ی کربن - ازت تولید می‌شوند، در جدول ۴-۱ درج شده‌اند. آزمایش‌های طرح شده برای آشکارسازی نوترینوهای خورشیدی، مقادیر اندازه‌گیری شده‌ی شارها را با دقتی بهتر از نتایج مورد انتظار نظری به دست می‌دهند.

● در مورد نوترینوهای خورشیدی، با توجه به اعتبار مدل‌های خورشیدی و با در نظر گرفتن خواص نوترینوها، روی فیزیک و شیمی آشکارسازی نوترینوها توجه زیادی شده است. این امر می‌تواند یک مشکل مربوط به آزمایش، یک مشکل مربوط به مدل خورشیدی، یا اساساً یک مشکل مربوط به خود نوترینوها باشد. شواهد نشان می‌دهند که نوترینوهای گسیل شده در خورشید ممکن است بعداً به میوئون یا نوترینوهای تاوی تبدیل شوند.

### سوختن هلیوم

● سوختن هلیوم باعث تولید کربن می‌شود که مقداری از آن به اکسیژن تبدیل می‌شود.

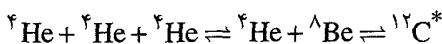
● کربن از طریق فرایند سه آلفا یعنی معادلات (۴-۴۵) و (۴-۴۷) تولید می‌شود. نتیجه‌ی نهایی فرایند سه آلفا به صورت زیر است



در فرایند سه آلفا، هسته‌های ناپایدار  $\text{Be}$  و هسته‌های کربن - ۱۲ در حالت برانگیخته‌ی

$^{12}\text{C}^*$  (هسته‌های  $^{12}\text{C}^*$ ) نقش کلیدی را بازی می‌کنند. برخورد‌های بین هسته‌های  $^4\text{He}$

باعث می‌شود تعداد کمی هسته‌های  $^8\text{Be}$  و  $^{12}\text{C}^*$  از طریق واکنش‌های زیر تولید شوند



تعداد هسته‌های  ${}^8\text{Be}$  و  ${}^{12}\text{C}^*$  به ترتیب از معادلات (۴-۵۴) و (۴-۶۰) تعیین می‌شوند. تعداد بسیار کمی از هسته‌های  ${}^{12}\text{C}^*$  براثر واپاشی به حالت پایه  ${}^{12}\text{C}$  مطابق معادله‌ی (۴-۶۳)، از این مجموعه خارج می‌شوند. آهنگ تولید هسته‌های کربن - ۱۲ در حالت پایه، برابر است با

$$\frac{dn_{12}}{dt} = \frac{n_{\text{He}}^3}{\tau({}^{12}\text{C}^* \rightarrow {}^{12}\text{C})} \left[ \frac{h^2}{2\pi m_{\text{He}} kT} \right]^3 \exp[-(m_{12}^* - 3m_{\text{He}})c^2 / kT] \quad (۴-۶۵)$$

دو عامل در این آهنگ تولید دخیل‌اند: انرژی لازم برای تشکیل شدن هسته‌ی  ${}^{12}\text{C}^*$ ، یعنی انرژی فعال‌سازی  $(m_{12}^* - 3m_{\text{He}})c^2$ ، و مدت زمان متوسط واپاشی  ${}^{12}\text{C}^*$  به حالت پایه، یعنی  $\tau({}^{12}\text{C}^* - {}^{12}\text{C})$ .

● بعضی از هسته‌های کربن تولید شده، از طریق واکنش زیر به اکسیژن تبدیل می‌شوند



● مقدار نسبی کربن و اکسیژن تولید شده در هنگام سوختن هلیوم به تأثیر نسبی فرایند تولید کننده‌ی کربن یعنی فرایند سه آلفا و واکنش تولید اکسیژن که کربن را مصرف می‌کند، بستگی دارد. هسته‌های سنگین‌تر از  ${}^{16}\text{O}$  ابتدا در هنگام سوختن هلیوم تولید نمی‌شوند زیرا آهنگ گیر افتادن  ${}^4\text{He}$  توسط  ${}^{16}\text{O}$  آرام است؛ معادله‌ی (۴-۶۸) را ببینید.

### سوختن پیشرفته

● اگر جرم یک ستاره از مقدار  $8M_{\odot}$  بیش‌تر باشد، تحول آن تا بعد از سوختن هلیوم نیز ادامه می‌یابد. یعنی مراحل سوختن کربن، نئون، اکسیژن و سیلیسیوم نیز صورت می‌گیرند؛ به جدول ۴-۲ رجوع کنید.

● پدیده‌ی اصلی جدیدی که در سوختن پیشرفته ظاهر می‌شود، تجزیه‌ی نوری هسته‌ها توسط فوتون‌های گرمایی پرنانرژی در دماهای بالاتر از  $10^9\text{K}$  است. در واقع، سوختن سیلیسیوم شامل ترتیب مجدد ماده‌ی هسته‌ای در یک زنجیره توسط تعدادی واکنش تجزیه‌ی نوری و

گیراندازی است. چون این ترتیب مجدد باعث می‌شود هسته‌ها به پایدارترین شکل خود برسند، هسته‌های نزدیک آهن در جدول تناوبی تشکیل می‌شوند.

● هنگامی که تحول یک ستاره بعد از سوختن سیلیسیوم نیز ادامه می‌یابد، انرژی بیش‌تری نمی‌تواند از واکنش‌های هسته‌ای در هسته‌ی مرکزی آهنی خارج شود. وقتی جرم چنین ستاره‌ای از جرم چاندرااسکار  $1.4 M_{\odot}$  بیش‌تر می‌شود، هسته‌ی مرکزی آن شدیداً منقبض می‌شود.

## مسئله‌های فصل ۴

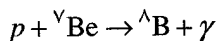
۱-۴ نزدیک‌ترین فاصله‌ی کلاسیکی دو پروتون با انرژی نزدیک  $2\text{keV}$ ، چه قدر است؟ احتمال نفوذ این پروتون‌ها در سد کولنی جداکننده‌ی آن‌ها را برآورد کنید. این احتمال را با احتمال متناظر برای دو هسته‌ی  ${}^4\text{He}$  با همان انرژی نزدیک مقایسه کنید.

۲-۴ دیدیم که نفوذ کوانتومی در یک سد کولنی نقش مؤثری در همجوشی گرماهسته‌ای بازی می‌کند. این نفوذ نقش عمده‌ای در واپاشی آلفا توسط هسته‌هایی مانند  ${}^{235}\text{U}$  بازی می‌کند. برطبق ساده‌ترین مدل واپاشی آلفا، ذره‌ی آلفا با پتانسیل شبیه شکل ۴-۱ در داخل هسته تشکیل می‌شود و به تله می‌افتد. بنابراین آهنگ متوسط واپاشی،  $\lambda$ ، با حاصل ضرب بسامد  $\nu$  برخورد ذره‌ی آلفا به سد محصور کننده‌ی آن و احتمال نفوذ در سد کولنی، برابر است؛ این احتمال از معادله‌ی (۴-۱۲) به دست می‌آید. برای آهنگ واپاشی آلفا رابطه‌ای تقریبی برحسب  $\nu$ ،  $E_G$  و انرژی  $E$  آزاد شده توسط آلفا، بنویسید. نیم‌عمر واپاشی آلفا برای  ${}^{235}\text{U}$  مساوی با سال  $7.1 \times 10^8 = 0.69/\lambda = \tau_{1/2}$  و انرژی آزاد شده توسط آلفا  $E = 4.68\text{MeV}$  است. انرژی آزاد شده توسط آلفا در واپاشی  ${}^{239}\text{Pu}$  مساوی با  $5.24\text{MeV}$  است. نیم‌عمر این ایزوتوپ پلوتونیوم را حساب کنید.

۳-۴ فرض کنید درخشندگی خورشید،  $4 \times 10^{26}\text{W}$ ، از سوختن هیدروژن با زنجیره‌ی پروتون - پروتون در شکل ۴-۴ حاصل می‌شود. بنابراین شار مورد انتظار نوترینوهای تولید شده با واکنش‌های همجوشی اولیه‌ی پروتون - پروتون، به شرطی تقریباً ثابت

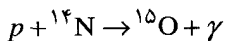
است که اهمیت نسبی شاخه‌های I و II معلوم باشد. حد بالا و حد پایین این شار نوترینوها را مشخص کنید.

۴-۴ شار نوترینوهای پرنانرژی واپاشی  $^8\text{Be}$  در شاخه‌ی III زنجیره‌ی پروتون - پروتون شدیداً به دمای مرکزی خورشید بستگی دارد. برای تأیید این امر نشان دهید که اگر دمای  $T$  در حدود  $1.5 \times 10^7 \text{ K}$  باشد، آهنگ واکنش تولید کننده‌ی  $^8\text{Be}$ ، یعنی



تقریباً با  $T^{14}$  متناسب است. در واقع، اگر بستگی دمایی واکنش‌های تولید کننده‌ی  $^7\text{Be}$  را نیز در نظر بگیریم، آهنگ تولید موضعی نوترینوها از واپاشی  $^8\text{Be}$  متناسب با  $T^{24}$  است؛ به باکال (۱۹۸۹) رجوع کنید.

۵-۴ سوختن هیدروژن با چرخه‌ی کربن - ازت در شکل ۴-۵ در نظر بگیرید. نشان دهید که در دمای  $1.5 \times 10^7 \text{ K}$ ، آرام‌ترین واکنش در این چرخه



است و از طریق آن بستگی چرخه‌ی کربن - ازت به دما در خورشید را برآورد کنید. تصور بر این است که  $1/6\%$  از درخشندگی خورشید توسط چرخه‌ی کربن - ازت تولید می‌شود. اگر دمای مرکزی خورشید به اندازه‌ی  $1\%$  افزایش یابد، این درخشندگی چه قدر تغییر می‌کند؟

۶-۴ اگر چگالی هلیوم  $10^8 \text{ kg m}^{-3}$  و دمای آن  $10^8 \text{ K}$  باشد، هنگام سوختن هلیوم توان تولید شده از هر کیلوگرم هلیوم چه قدر است؟ اگر انرژی برانگیزش حالت  $^+ \text{C}$  کربن -  $12$  به جای  $7.65 \text{ MeV}$  مقدار  $7.66 \text{ MeV}$  باشد، توان تولید شده چه قدر تغییر می‌کند؟

۷-۴ در هنگام تحول ستاره‌ها و افزایش دمای مرکزی آن‌ها، تجزیه‌ی نوری هسته‌ها نقش مهم و فزاینده‌ای بازی می‌کند. با استفاده از نتایج ۲-۳ رابطه‌ای برای تعداد فوتون‌ها در واحد حجم یک گاز در دمای  $T$  با انرژی بالاتر از  $9.98 \text{ MeV}$  (انرژی کمینه‌ی لازم برای خارج کردن یک هسته‌ی  $^4\text{He}$  از یک هسته‌ی  $^{28}\text{Si}$ ) را به دست آورید. اگر دما

از  $1 \times 10^9 \text{ K}$  به  $4 \times 10^9 \text{ K}$  افزایش یابد، تغییر نسبی تعداد فوتون‌های تولید شده چه قدر خواهد بود؟

۸-۴ بهره‌وری عملی از همجوشی گرماهسته‌ای به عنوان یک چشمه‌ی انرژی در روی زمین، به بالا رفتن دمای پلاسمای شامل دوتریوم و تریتیوم یونیده تا دمای گیرانش  $T_{ign} \simeq 2 \times 10^8 \text{ K}$  بستگی دارد؛ در این دما آهنگ تولید انرژی با همجوشی دوترون‌ها و تریتون‌ها سریع‌تر از آهنگ اتلاف انرژی با تابش است. مقدار قابل ملاحظه‌ای از انرژی برای گرم کردن پلازما تا دمای گیرانش لازم است. مقدار زیادتری از انرژی باید با همجوشی آزاد شود تا این فرایند باصرفه باشد. بنابراین، پلاسمای داغ باید برای مدت کمینه‌ی ویژه‌ای محبوس شود. نشان دهید که اگر پلازما دارای تعداد مساوی دوترون‌ها و تریتون‌ها باشد، این مدت زمان احتباس کمینه تقریباً برابر است با

$$n_i \tau > \frac{12kT_{ign}}{\langle \sigma v_r \rangle Q_{dep}}$$

که در آن  $n_i$  تعداد یون‌ها در واحد حجم،  $\sigma$  سطح مقطع همجوشی دوترون - تریتون و  $Q_{dep}$  انرژی ذخیره شده در هر همجوشی است. (این نتیجه را شرط بی‌سود و زیان لاوسون<sup>۱</sup> می‌نامند. برای یک پلاسمای دوتریوم - تریتیوم در دمای  $2 \times 10^8 \text{ K}$ ،  $n_i \tau$  باید از  $1.6 \times 10^{20} \text{ m}^{-3} \text{ s}$  بیش‌تر باشد. بنابراین یک پلاسمای رقیق با چگالی  $n_i = 10^{20} \text{ m}^{-3}$  دست کم باید  $1/6$  ثانیه محبوس شود تا بی‌سود و زیان باشد).



# ۵ ساختار ستاره‌ها

برای تحلیل کامل ساختار ستاره‌ها، به محاسبات کاملاً پیچیده و حل عددی تعدادی معادله‌ی دیفرانسیل نیاز است. هدف این فصل کتاب، معتدل کردن این محاسبات به کمک مقایسه است. در این راستا باید از مدل‌های ساده برای درک ایده‌های اساسی ساختار ستاره‌ها استفاده کرد. ما بحث خود را به ستاره‌های با ترکیب شیمیایی همگن محدود می‌کنیم. در این جا ساختار ستاره‌های رشته‌ی اصلی، مانند خورشید، را در نظر می‌گیریم. جرم کمینه‌ی یک ستاره‌ی رشته‌ی اصلی را با توجه به دمای لازم برای سوختن هیدروژن، و جرم بیشینه‌ی آن را با توجه به اثر پایدار کننده‌ی فشار تابشی، برآورد می‌کنیم. نشان می‌دهیم که این حدهای بالا و پایین برای جرم ستاره‌ها، با یک جرم ستاره‌ای اصلی  $M_*$  مقایسه می‌شود که مقدار آن از جرم نوکلئون و مقدار بدون بُعد شدت برهم کنش گرانشی بین نوکلئون‌ها تعیین می‌شود. از خواننده‌ی کتاب تقاضا می‌شود بعضی مفاهیم فصل‌های قبلی در مورد ساختار ستاره‌ای را مرور کند.

## ۱-۵ مقدمه

یک ستاره قسمت اعظم عمر خود را در حالتی به سر می‌برد که به آرامی تحول می‌یابد؛ این حالت به تعادل هیدروستاتیکی و ترمودینامیکی بسیار نزدیک است و شیب فشار داخلی به قدری است که می‌تواند ستاره را مطابق معادله‌ی (۱-۵) حفظ کند:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \quad (1-5)$$

در این معادله  $m(r)$  جرم کره‌ای به شعاع  $r$  است که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2-5)$$

شیب دمای داخلی به قدری است که می‌تواند شار توان به طرف سطح ستاره را تأمین کند. اگر انتقال انرژی با پخش (نفوذ) تابشی صورت گیرد، با استفاده از معادله‌ی (۳-۲۸) می‌توان نوشت

$$\frac{dT}{dr} = \frac{3}{4ac} \frac{\kappa(r)\rho(r)}{[T(r)]^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2} \quad (3-5)$$

که در آن برطبق معادله‌ی (۳-۲۶) داریم

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon(r) \quad (4-5)$$

یادآوری می‌شود که  $L(r)$  توان تولید شده در کره‌ای به شعاع  $r$  و  $\varepsilon(r)$  چگالی توان در فاصله‌ی  $r$  است.

معادلات (۱-۵) تا (۴-۵) معادلات اساسی ساختار ستاره‌اند. فرض‌های به کار رفته برای این معادله‌ها، تقارن کروی، تعادل هیدروستاتیکی تحت گرانش نیوتونی، و شارش انرژی با نفوذ تابشی هستند. فرض پخش تابشی را باید طوری اصلاح کرد که انتقال انرژی با همرفت، مثلاً در لایه‌های خارجی خورشید یا در هسته‌ی مرکزی ستاره‌های پرجرم رشته‌ی اصلی، یا انتقال انرژی با رسانش مثلاً در یک کوتوله‌ی سفید را، شامل شود.

اگر به معادلات اساسی ساختار ستاره، معادلات ارتباط دهنده‌ی فشار، تیرگی و توان به چگالی و دمای ماده‌ی ستاره را اضافه کنیم می‌توانیم ساختار ایستای ستاره را مشخص کنیم:

$$P = P(\rho, T), \quad \kappa = \kappa(\rho, T) \quad \text{و} \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T) \quad (5-5)$$

این معادلات مربوط به خواص ماده و تابش در داخل ستاره‌ها را در فصل‌های قبلی مورد بحث قرار داده‌ایم. اکنون بارزترین نتایج آن‌ها را بیان می‌کنیم.

در فصل ۲ فشار تولید شده توسط ماده و تابش را در نظر گرفتیم. سه چشمه‌ی مهم این فشار، الکترون‌ها و یون‌های کلاسیکی، الکترون‌های تبهگن، و تابش یا فوتون‌ها معرفی شدند. چگالی عددی الکترون‌ها و یون‌ها در یک پلاسمای کاملاً یونیده، به کسر جرمی هیدروژن، هلیوم و عناصر سنگین‌تر یعنی  $X_1$ ،  $X_4$  و  $X_A$  در پلاسمای بستگی دارد. بنابر معادلات (۲-۶۷)

و (۶۹-۲) داریم

$$n_e \approx [1 + X_1] \rho / 2m_H \quad (۶-۵)$$

$$n_i \approx [2X_1 + 0.5X_2] \rho / 2m_H \quad (۷-۵)$$

و

$$n = n_e + n_i \approx [1 + 2X_1 + 0.5X_2] \rho / 2m_H \quad (۸-۵)$$

همان‌طور که در بخش ۲-۱ بحث کردیم، این ذره‌ها می‌توانند یک گاز کلاسیکی یا کوانتومی تشکیل دهند. مخصوصاً الکترون‌ها و یون‌ها با چگالی‌های کم، یک گاز کلاسیکی با فشار زیر را به وجود می‌آورند

$$P = n_e kT + n_i kT = nkT \quad (۹-۵)$$

الکترون‌ها با چگالی‌های زیاد می‌توانند یک گاز کوانتومی تبهگن تشکیل دهند که فشار آن از معادله‌ی (۳۱-۲) به دست می‌آید

$$P = K_{NR} n_e^{\frac{5}{3}} \quad K_{NR} = \frac{h^2}{\Delta m_e} \left[ \frac{3}{8\pi} \right]^{\frac{2}{3}} \quad \text{که در آن} \quad (۱۰-۵)$$

البته در چگالی‌های خیلی بالا الکترون‌های تبهگن فرانسیتی می‌شوند و فشار به مقداری می‌رسد که از معادله‌ی (۳۴-۲) به دست می‌آید

$$P = K_{UR} n_e^{\frac{4}{3}} \quad K_{UR} = \frac{hc}{4} \left[ \frac{3}{8\pi} \right]^{\frac{1}{3}} \quad \text{که در آن} \quad (۱۱-۵)$$

بالاخره، در دمای بالا فشار ناشی از تابش یا فوتون‌ها می‌تواند با فشار گاز ناشی از الکترون‌ها و یون‌ها قابل مقایسه شود. فشار تابشی در دمای  $T$  از معادله‌ی (۴۴-۲) به دست می‌آید

$$P = \frac{1}{3} a T^4 \quad a = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} \quad \text{به ازای} \quad (۱۲-۵)$$

تیرگی محیط ستاره‌ای از برهم کنش تابش با الکترون‌ها، یون‌ها و اتم‌ها تعیین می‌شود. در فصل ۳ سه فرایند را معرفی کردیم. از پراکندگی تامسون توسط الکترون‌ها می‌توان تیرگی ثابت زمینه توسط معادله‌ی (۱۸-۳) را به دست آورد

$$\kappa_{es} = (1 + X_1) \times 0.2 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1} \quad (۱۳-۵)$$

جذب مقید - آزاد و جذب آزاد - آزاد، یک تیرگی وابسته به چگالی و دما را به دست می‌دهند که با قانون کرامرز (۳-۱۷) توصیف می‌شود:

$$\kappa \propto \rho T^{-3/5} \quad (14-5)$$

جذب مقید - آزاد و جذب آزاد - آزاد در دماهای پایین و چگالی‌های بالا در ستاره‌های رشته‌ی اصلی مانند خورشید، اهمیت دارد. اما تیرگی ثابت زمینه ناشی از پراکندگی تامسون، در دماهای بالاتر و چگالی‌های پایین‌تر در ستاره‌های رشته اصلی سنگین‌تر از خورشید، غالب می‌شود.

تولید توان گرماسته‌ای در فصل ۴ مورد بحث قرار گرفت. در آن‌جا چندین زنجیره‌ی مهم واکنش‌ها را معرفی کردیم. در این فصل کتاب فقط به سوختن هیدروژن در ستاره‌های رشته‌ی اصلی توجه می‌کنیم. در خورشید، سوختن هیدروژن غالباً توسط واکنش‌های زنجیره‌ی پروتون - پروتون صورت می‌گیرد؛ بنابر معادله‌ی (۴-۳۷)، توان تولید شده تقریباً برابر است با

$$\varepsilon_{pp} = 9.5 \times 10^{-37} X_1^2 \rho^2 T^4 \text{ W m}^{-3} \quad (15-5)$$

## ۲-۵ مدل‌های ستاره‌ای ساده

معادلات اساسی ساختار ستاره، یعنی معادلات (۱-۵) تا (۴-۵)، مسأله‌ی محاسبه‌ی ساختار یک ستاره را به حل چهار معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول در چهار تابع نامعلوم  $m(r)$ ،  $P(r)$ ،  $T(r)$  و  $L(r)$  ساده می‌کنند. در این‌جا برای به دست آوردن یک جواب متحد به چهار شرط مرزی نیاز داریم. دو تا از این شرط‌ها ساده و عبارت‌اند از  $m(0) = 0$  و  $L(0) = 0$ ، که با هم سازگارند زیرا وقتی شعاع  $r$  یک کره به صفر میل می‌کند، جرم و انرژی تولید شده در داخل کره باید به صفر میل کنند. دو شرط مرزی دیگر را با تعیین فشار و دما در نزدیکی سطح ستاره می‌توان مشخص کرد؛ در عمل برای این منظور باید اطلاعاتی درباره‌ی خواص جو ستاره داشته باشیم. در عوض، مدل‌های تقریبی ساختار ستاره بر مبنای معادلات (۱-۵) تا (۴-۵) را در نظر می‌گیریم که به سادگی امکان بررسی خواص عمومی ساختار ستاره را فراهم می‌کنند. یک روش مرسوم برای انجام این‌کار، ترکیب کردن معادله‌ی تعادل هیدروستاتیکی (۱-۵) و

معادله‌ی توصیف کننده‌ی پایستگی جرم (۵-۲) است که معادله‌ی مرتبه‌ی دوم زیر را به دست می‌دهد

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ \frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right] = -4\pi G \rho \quad (۵-۱۶)$$

این معادله شامل دو تابع نامعلوم  $P(r)$  و  $\rho(r)$  است. با این فرض که رابطه‌ی ساده‌ای بین فشار و چگالی وجود دارد که در سرتاسر ستاره معتبر است، می‌توان معادله‌ی (۵-۱۶) را به صورت معادله‌ای با یک تابع نامعلوم ساده کرد. این روش با مدل‌های چندمنظوره برای ساختار ستاره سازگار است. مثلاً به ویژه یک مدل چندمنظوره با اندیس  $n$  با پیشنهاد رابطه‌ی بین فشار و چگالی به صورت زیر، به دست می‌آید

$$P = K \rho^{(n+1)/n} \quad (۵-۱۷)$$

که در آن  $K$  یک مقدار ثابت است. وقتی این رابطه را در معادله‌ی (۵-۱۶) قرار می‌دهیم، معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم غیرخطی زیر برای چگالی درون ستاره‌ها حاصل می‌شود

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ \frac{r^2}{\rho} \frac{d}{dr} (K \rho^{(n+1)/n}) \right] = -4\pi G \rho \quad (۵-۱۸)$$

یک جواب عددی متحد برای این معادله را با در نظر گرفتن دو شرط مرزی می‌توان به دست آورد. دو شرط مربوط به تابع  $\rho(r)$  عبارت‌اند از

$$\rho = \rho_c \quad \text{و} \quad \frac{d\rho}{dr} = 0 \quad r = 0 \quad \text{به ازای} \quad (۵-۱۹)$$

در این جا شرط دوم بلافاصله با جانشانی معادله‌ی (۵-۱۷) در معادله‌ی (۵-۱) و استفاده از شرط مرزی  $m(0) = 0$  به دست می‌آید. بنابراین، به ازای یک مقدار ثابت برای چگالی مرکزی  $\rho_c$ ، از جواب عددی معادله‌ی (۵-۱۸) تابع چگالی  $\rho(r)$  به دست می‌آید. بنابراین، شعاع  $R$  ستاره همان مقدار  $r$  است که به ازای آن  $\rho(r)$  مساوی با صفر و جرم کل ستاره  $M = m(R)$  است. فشار در داخل ستاره را با استفاده از معادله‌ی (۵-۱۷)، و خواص گرمایی ستاره را با استفاده از معادله‌ی حالت  $P = P(\rho, T)$  و معادلات ستاره‌ای (۵-۳) و (۵-۴) می‌توان به دست آورد.

مدل‌های چندمنظوره‌ی مبتنی بر رابطه‌ی ساده‌ی (۵-۱۷) بین فشار و چگالی، نقش مهمی را در تکامل نظریه‌ی ساختار ستاره‌ها خصوصاً پیش از اختراع کامپیوترهای توانمند، بازی

کرده‌اند. بنابراین، آن‌ها را در بسیاری از کتاب‌های اخترفیزیک به طور کامل شرح می‌دهند. اما علی‌رغم ساده‌سازی شدید نشان داده شده با معادله‌ی (۵-۱۷)، هنوز مدل‌های چندمنظوره می‌توانند جواب عددی یک معادله‌ی دیفرانسیل پیچیده را به ما بدهند.

یک روش ساده‌تر، حدس زدن یک شکل مناسب برای تابع چگالی  $\rho = \rho(r)$  در داخل ستاره، و استفاده کردن از این تابع به عنوان نقطه‌ی شروعی برای پیدا کردن جواب تقریبی معادلات (۵-۱) تا (۵-۴) است. بعداً به نوبت می‌توان این معادله‌ها را حل کرد. از معادلات (۵-۱) و (۵-۲) می‌توان انتگرال گرفت تا تابع فشار  $P(r)$  به دست آید. بعد از آن می‌توان از معادله‌ی حالت  $P = P(\rho, T)$  برای پیدا کردن تابع دمایی  $T(r)$  استفاده کرد، و آن را می‌توان با تابع تیرگی  $\kappa = \kappa(\rho, T)$  ترکیب کرد تا شار توان  $L(r)$  با استفاده از معادله‌ی (۵-۳) به دست آید. این شار توان را می‌توان با شار توان  $L(r)$  پیدا شده با انتگرال‌گیری از معادله‌ی (۵-۴) با استفاده از چگالی توان هسته‌ای  $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$ ، مقایسه کرد. البته می‌دانیم هیچ ضمانتی وجود ندارد که دو رابطه‌ی  $L(r)$  مشابه باشند. عملاً اگر تابع چگالی پیشنهادی اولیه ساده باشد، تقریباً هیچ شباهتی بین دو تابع وجود نخواهد داشت.

یک نظریه در این باره توسط کلایتون<sup>۱</sup> در سال ۱۹۸۶ ارائه شد. نقطه‌ی شروع، پارامتری کردن ساده‌ی تابع فشار  $P = P(r)$  در داخل ستاره است. این کار بسیار موفقیت‌آمیزتر از انتخاب یک تابع اولیه برای چگالی  $\rho(r)$  است زیرا تابع فشار را می‌توان با توجه به خواص تعادل هیدروستاتیکی انتخاب کرد. در آینده خواهیم دید که مدل کلایتون می‌تواند جواب‌های درست و مستدلی را در مورد خورشید به ما بدهد.

### فشار در داخل ستاره

فشار در مرکز یک ستاره نسبت به فشار متوسط داخل ستاره شدیداً افزایش می‌یابد. برای مثال، فشار در مرکز خورشید در حدود  $2 \times 10^{16}$  Pa است که تقریباً ۲۰۰ برابر فشار متوسطی است که از معادله‌ی (۱-۷) به دست می‌آید:

$$\langle P \rangle = -\frac{E_{GR}}{3V} \quad (20-5)$$

در این رابطه  $E_{GR}$ ، انرژی پتانسیل گرانشی، برابر است با

$$E_{GR} \approx \frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}} \quad (21-5)$$

برای مدل‌سازی تغییرات بزرگ فشار داخل یک ستاره، توجه می‌کنیم که شیب فشار مطابق معادله‌ی تعادل هیدروستاتیکی (۱-۵) تولید می‌شود. به آسانی می‌توان نشان داد که برطبق این معادله شیب فشار در مرکز و در سطح ستاره به صفر میل کند. در نزدیکی مرکز ستاره که  $r$  کوچک است، جرم محصور  $m(r)$  تقریباً  $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_c$  برابر چگالی مرکزی  $\rho_c$  است و معادله‌ی (۱-۵) به صورت زیر ساده می‌شود

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi}{3} G \rho_c^2 r \quad (22-5)$$

در نزدیکی سطح ستاره، که شعاع  $r$  بیش‌ترین ماده‌ی ستاره‌ای را احاطه کرده است،  $m(r)$  تقریباً با  $m(R)$  یا با جرم کل  $M$  برابر است و معادله‌ی (۱-۵) به صورت زیر درمی‌آید

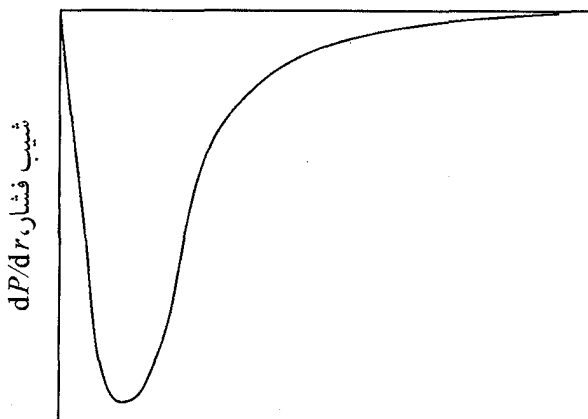
$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM \rho(r)}{r^2} \quad (23-5)$$

بنابراین، تعادل هیدروستاتیکی ایجاب می‌کند که شیب فشار در داخل یک ستاره، در مرکز صفر باشد. این شیب ابتدا به طور خطی با  $r$  تغییر می‌کند، اما وقتی چگالی در نزدیکی سطح کاهش می‌یابد، شیب سرانجام به صفر میل می‌کند. اساس مدل کلاپتون حدس زدن شکل ساده‌ای برای تابع فشار داخل ستاره است که این محدودیت‌ها در آن در نظر گرفته شده باشد. چنین حدسی می‌تواند یک نقطه‌ی شروع منطقی برای محاسبه‌ی ساختار ستاره، مخصوصاً برای ستاره‌ای با ترکیب شیمیایی همگن، باشد.

اگر ترکیب شیمیایی ستاره یکنواخت باشد، تغییرات فشار، مانند شکل ۱-۵، باید هموار باشد. با استفاده از روش کلاپتون، شیب فشار داخل چنین ستاره‌ای را با استفاده از رابطه‌ی شیب فشار به صورت زیر، مدل‌سازی می‌کنیم:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi}{3} G \rho_c^2 r \exp(-r^2/a^2) \quad (24-5)$$

فاصله از مرکز ستاره،  $r$



شکل ۵-۱ تغییرات نوعی شیب فشار  $dP/dr$  در داخل ستاره‌ای با ترکیب شیمیایی همگن. در نزدیکی مرکز ستاره، شیب فشار به طور خطی با  $r$  تغییر می‌کند، و در نزدیکی سطح ستاره با  $\rho(r)/r^2$  متناسب است.

در این رابطه  $a$  یک پارامتر طولی است که باید مشخص شود. این رابطه شیب فشار در  $r$  های کوچک را با دقت نشان می‌دهد؛ به معادله‌ی (۵-۲۲) رجوع کنید. برعکس، نمایش شیب فشار در  $r$  های بزرگ، بسیار تقریبی است. به هر حال، شیب فشار کوچک لازم در نزدیکی سطح ستاره را به شرطی می‌توان مجدداً تولید کرد که مقدار پارامتر طولی  $a$  در مقایسه با شعاع  $R$  ستاره، کوچک باشد. ضمناً، این پارامتر طولی، مکان مقدار کمینه‌ی  $dP/dr$  در فاصله‌ی  $r = a/\sqrt{2}$  از مرکز ستاره را مشخص می‌کند.

فشار داخل ستاره از انتگرال‌گیری معادله‌ی (۵-۲۴) و به کار بردن شرط مرزی فشار صفر در  $r = R$ ، به دست می‌آید:

$$P(r) = \frac{2\pi}{3} G \rho_c^2 a^2 [\exp(-r^2/a^2) - \exp(-R^2/a^2)] \quad (۵-۲۵)$$

این روش نمایش فشار داخل یک ستاره، گروهی از مدل‌های ستاره‌ای را معرفی می‌کند که هر یک از آن‌ها با مقادیر ویژه‌ی  $\rho_c$ ،  $a$  و  $R$  مشخص می‌شود. روابط متناظر با چگالی و دما را می‌توان به صورت زیر به دست آورد.



### چگالی و دما در داخل یک ستاره

برای پیدا کردن روابط چگالی و دما، ابتدا  $m(r)$ ، یعنی جرم ماده‌ی ستاره‌ای محصور در کره‌ای به شعاع  $r$  را حساب می‌کنیم. برای انجام این کار، معادلات (۵-۱) و (۵-۲) را با هم ترکیب می‌کنیم:

$$Gm(r)dm = -4\pi r^2 dP$$

بعد از انتگرال‌گیری از این رابطه داریم

$$G \frac{1}{r} m^2(r) = -4\pi \int_0^r r'^2 \frac{dP}{dr'} dr'$$

اگر ما رابطه‌ی (۵-۲۴) برای شیب فشار را در رابطه‌ی بالا قرار دهیم، خواهیم داشت

$$m(r) = \frac{4\pi a^3}{3} \rho_c \Phi(x) \quad (۵-۲۶)$$

که در آن  $x$  مساوی با  $r/a$  است و

$$\Phi^2(x) = 6 \int_0^x x'^5 \exp(-x'^2) dx' = 6 - 3(x^6 + 2x^4 + 2) \exp(-x^2) \quad (۵-۲۷)$$

با در دست داشتن این رابطه برای  $m(r)$ ، به آسانی می‌توان چگالی و دمای داخل ستاره را پیدا کرد. چگالی  $\rho(r)$  را مستقیماً می‌توان به دست آورد که عبارت است از

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dm}{dr} = \rho_c \left[ \frac{x^3 \exp(-x^2)}{\Phi(x)} \right] \quad (۵-۲۸)$$

برای پیدا کردن دمای  $T(r)$  لازم است معادله‌ی حالت ماده‌ی ستاره‌ای را بدانیم. برای مثال، اگر فرض کنیم ستاره با یک گاز کلاسیکی ایده‌آل حفظ شده است، با استفاده از معادلات (۵-۸) و (۵-۹) داریم

$$T(r) = \frac{\bar{m} P(r)}{k \rho(r)} \quad \bar{m} = \frac{\gamma m_H}{[1 + 3X_1 + 0.5X_2]} \quad \text{به ازای} \quad (۵-۲۹)$$

توزیع‌های چگالی و دما که با معادلات (۵-۲۸) و (۵-۲۹) ارائه شده‌اند، به ازای  $r$ ‌های کوچک معتبرترند، زیرا در آن‌جا معادله‌ی (۵-۲۴) دقیقاً شیب فشار قبلی را مجدداً تولید می‌کند. به ویژه، ما می‌توانیم از رفتار  $x$ ‌های کوچک در تابع  $\Phi(x)$  به صورت

$$\Phi(x) = \left[ x^6 - \frac{3}{4}x^8 + \frac{3}{10}x^{10} - \frac{1}{12}x^{12} + \dots \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۵-۳۰)$$

برای به دست آوردن روابط زیر برای چگالی و دما در  $r$  های کوچک، استفاده کنیم:

$$\rho(r) = \rho_c \left[ 1 - \frac{5}{8} \frac{r^2}{a^2} + \dots \right] \quad \text{و} \quad T(r) = T_c \left[ 1 - \frac{3}{8} \frac{r^2}{a^2} + \dots \right] \quad (31-5)$$

### ستاره‌ای با چگالی مرکزی بالا

اگر جرم ستاره به طرف مرکز آن متراکم شده باشد، یعنی چگالی مرکزی آن خیلی بیشتر از چگالی متوسط آن باشد، مدل کلايتون بسیار ساده می‌شود. اگر این اتفاق بیفتد، پارامتر طولی  $a$  در مقایسه با شعاع  $R$  ستاره کوچک است و از جملات متناسب با  $\exp(-a^2/R^2)$  می‌توان چشمپوشی کرد. یادآوری می‌کنیم که این تقریب زنی موقعی قابل قبول است که مدل کلايتون برای خورشید به کار رود؛ در بخش بعد نشان خواهیم داد که در این حالت  $a = R_{\odot}/5.4$  است.

وقتی پارامتر طولی  $a$  کوچک است، جرم کل ستاره برابر است با

$$M = m(R) = \frac{4\pi\rho_c a^3}{3} \Phi(R/a) \approx \frac{4\pi\rho_c a^3 \sqrt{6}}{3} \quad (32-5)$$

از این جا نتیجه می‌گیریم که چگالی متوسط ستاره در حدود  $\sqrt{6}(a/R)^3 \rho_c$  است. علاوه بر این، به سادگی می‌توان نشان داد که چگالی در  $r=a$  مساوی با  $0.53\rho_c$  است و  $28\%$  جرم ستاره در کره‌ای به شعاع  $a$  قرار دارد. علاوه بر این، می‌توان رابطه‌ی بسیار مفیدی بین فشار و چگالی در مرکز ستاره به دست آورد. با قرار دادن  $r=0$  در معادله‌ی (5-25)، فشار مرکزی به صورت زیر به دست می‌آید

$$P_c \approx \frac{2\pi}{3} G \rho_c^2 a^2$$

اگر از معادله‌ی (5-32) برای بیان  $a$  بر حسب  $M$  و  $\rho_c$  استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$P_c \approx \left[ \frac{\pi}{36} \right]^{\frac{1}{3}} G M^{\frac{2}{3}} \rho_c^{\frac{4}{3}} \quad (33-5)$$

که در آن ضریب عددی  $(\pi/36)^{\frac{1}{3}}$  تقریباً مساوی با  $0.44$  است.

این معادله رابطه‌ی بین فشار و چگالی در مرکز یک ستاره را پیشگویی می‌کند که انتظار می‌رود تقریباً برای هر ستاره‌ی همگن که جرم آن به طرف مرکز متراکم شده است، معتبر باشد.

علاوه بر این، تا زمانی که مقدار پارامتر  $a$  کوچک است، این رابطه به مقدار ویژه‌ی پارامتر  $a$  بستگی ندارد. در این جا یادآوری می‌کنیم که مدل‌های دیگر برای ساختار ستاره‌ها رابطه‌ی مشابهی را ارائه می‌کنند. برای مثال، معادله‌ی (۳۳-۵) به مقدار کم با مدل‌های چندمنظوره‌ی ساختار ستاره‌ای توافق دارد. یک مدل چندمنظوره با ضریب  $n$ ، با فرض معادله‌ی (۱۷-۵) و حل کردن معادله‌ی دیفرانسیل (۱۸-۵) تعریف می‌شود. می‌توان نشان داد که با استفاده از یک

مدل چندمنظوره با ضریب  $n = \frac{3}{2}$  داریم

$$P_c = 0.48 GM^{\frac{2}{3}} \rho_c^{\frac{4}{3}} \quad (34-5)$$

و از یک مدل چندمنظوره با ضریب  $n = 3$  داریم

$$P_c = 0.36 GM^{\frac{2}{3}} \rho_c^{\frac{4}{3}} \quad (35-5)$$

ضمناً پیشنهاد می‌شود به مسئله‌ی ۱-۷ رجوع کنید. در قسمت آخر این مسأله از شما خواسته شده تا نشان دهید که در شرایط کاملاً عمومی یک حد بالاتر برای فشار مرکزی وجود دارد که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$P_c < \left[ \frac{\pi}{6} \right]^{\frac{1}{3}} GM^{\frac{2}{3}} \rho_c^{\frac{4}{3}} \quad (36-5)$$

بنابراین، در بسیاری از حالت‌ها، فشار مرکزی لازم برای حفظ کردن ستاره تقریباً از معادله‌ی (۳۵-۵) به دست می‌آید. این معادله یک راه ساده و تقریباً مطمئن را برای به کار بردن شرط تعادل هیدروستاتیکی در محاسبات ساختار ستاره به ما نشان می‌دهد که در بخش ۴-۵ از آن برای برآورد جرم‌های کمینه و بیشینه‌ی ستاره‌ها استفاده خواهیم کرد. ضمناً از این روش برای تحلیل کوتوله‌های سفید در بخش ۶-۱ نیز استفاده خواهیم کرد.

### ۳-۵ مدل‌سازی برای خورشید

انتقال گرما و همجوشی گرمایسته‌ای، مشخصه‌های اصلی مدل خورشیدی هستند. در مدل‌های واقعی خورشید ترکیب شیمیایی و تغییرات این ترکیب در هنگام تحول خورشید، در نظر گرفته شده است. این ترکیب شیمیایی، تیرگی ماده‌ی درون خورشید ناشی از بعضی عناصر کم

مقدار اما مؤثر را مشخص می‌کند. انتقال انرژی معمولاً بر اثر پخش تابشی صورت می‌گیرد، ولی انتقال همرفتی در ناحیه‌ی نزدیک به سطح خورشید، غالب‌تر است. در معادله‌ی حالت، یعنی رابطه‌ی بین فشار، دما و چگالی، اثر تبهگنی الکترونی که در نزدیکی مرکز خورشید بارز می‌شود، در نظر گرفته شده است؛ ضمناً در معادله‌ی حالت، فشار ناشی از فوتون‌ها یا تابش نیز به حساب آمده است. بالاخره، انرژی گرماسته‌ای توسط واکنش‌های زنجیره‌ی پروتون - پروتون، و تا حدی توسط واکنش‌های چرخه‌ی کربن - ازت، تولید می‌شود.

مدل خورشیدی استاندارد به طور گسترده یکی از واقعی‌ترین مدل‌ها برای خورشید است. این مدل چارچوبی برای تفسیر تمام خواص مشاهده‌ای، از جمله شار نوترینوهای خورشیدی است. توصیف کاملی از این مدل پیچیده توسط باکال (۱۹۸۹) ارائه شده است.

اما اهداف این بخش کتاب چندان مبهم نیست. ما می‌خواهیم با استفاده از مدل کلایتون برمبنای دستورالعمل (۵-۲۴) برای شیب فشار، درک ساده‌ای از خورشید داشته باشیم. البته این دستورالعمل برای خورشید فعلی مناسب نیست. سوختن هیدروژن در طول ۵ بیلیون سال اخیر باعث شده است ترکیب ماده‌ی خورشیدی در نزدیکی مرکز خورشید شدیداً تغییر کند. در نتیجه، چگالی و شیب فشار نیز شدیداً تغییر کرده است. با وجود این، دستورالعمل شیب فشار، نقطه‌ی شروع قابل قبولی برای یک مدل خورشیدی اولیه‌ی همگن از نظر شیمیایی، است. چنین مدل ساده‌ای در مقایسه با مدل‌های واقعی بسیار ناقص است. اما علی‌رغم این امر، خواهیم دید که به کمک این مدل می‌توان تغییرات فشار، چگالی و دمای درون خورشید را به خوبی بررسی کرد. علاوه بر این، نشان خواهیم داد که این مدل مقدار درخشندگی خورشیدی را با دو روش مستقل، یعنی با فرض آزاد شدن انرژی هسته‌ای توسط واکنش‌های زنجیره‌ی پروتون - پروتون، و با فرض انتقال گرما توسط پخش تابشی، به طور دقیق به ما می‌دهد.

## فشار، چگالی و دما

با استفاده از مدل کلایتون (۱۹۸۶)، پیشگویی‌های ارائه شده با مدل ساده را با نتایج عددی حاصل از محاسبه‌ی ساختار ستاره‌ها توسط استرومگرن<sup>۱</sup> مقایسه می‌کنیم؛ این نتایج عددی برای

یک خورشید همگن از نظر شیمیایی، در جدول ۶-۵ مقاله‌ی کلایتون (۱۹۶۳) درج شده است. به ویژه، استرومگرن نتایج زیر برای فشار، چگالی و دما در مرکز خورشید را ارائه کرده است:

$$P_c = 1.65 \times 10^{16} \text{ Pa}, \quad \rho_c = 9.0 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3} \quad \text{و} \quad T_c = 13.7 \times 10^6 \text{ K} \quad (37-5)$$

همان‌طور که معادله‌ی (۵-۲۵) نشان می‌دهد، مدل کلایتون با سه پارامتر مشخص می‌شود: چگالی مرکزی  $\rho_c$ ، پارامتر طولی  $a$  و شعاع  $R$ . برای ستاره‌ای با چگالی مرکزی بالا با استفاده از معادله‌ی (۵-۳۲) می‌توان پارامتر طولی  $a$  را برحسب جرم  $M$  و چگالی مرکزی  $\rho_c$  بیان کرد. بنابراین برای ساختن مدل خورشید،  $R = R_\odot$  و  $M = M_\odot$  را در نظر می‌گیریم و  $\rho_c$  را مساوی با مقدار استرومگرن  $9 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$  قرار می‌دهیم. در نتیجه پارامتر طولی  $a = R_\odot / 5.4$  به دست می‌آید.

برطبق معادله‌ی (۵-۳۳)، فشار مرکزی لازم برای حفظ کردن یک ستاره با چگالی مرکزی زیاد  $\rho_c$  و جرم  $M_\odot$ ، برابر است با

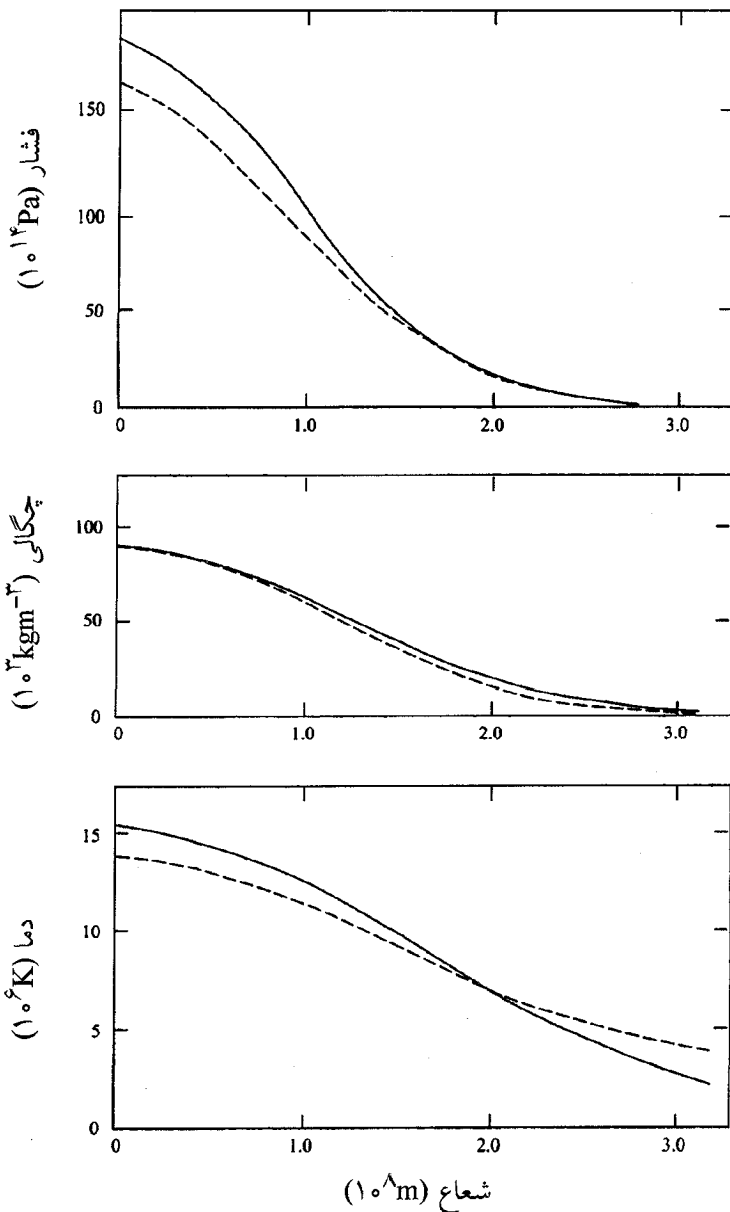
$$P_c \approx 0.44 GM_\odot^2 \rho_c^2 \quad (38-5)$$

از این رابطه فشار مرکزی  $P_c = 1.9 \times 10^{16} \text{ Pa}$  به دست می‌آید که اندکی بیش‌تر از مقدار استرومگرن  $1.65 \times 10^{16} \text{ Pa}$  است. برای محاسبه‌ی دمای مرکزی، فرض می‌کنیم که ماده‌ی واقع در مرکز خورشید، یک گاز کلاسیکی ایده‌آل با کسرهای جرمی  $X_1 = 0.71$  و  $X_4 = 0.27$  است. با توجه به این فرض، دمای مرکزی مساوی با  $T_c = 16 \times 10^6 \text{ K}$  به دست می‌آید.

برای پیدا کردن تغییرات فشار، چگالی و دما در داخل خورشید، مقدار مناسب پارامتر طولی  $a = R_\odot / 5.4$  را می‌پذیریم و سپس از معادله‌های (۵-۲۵)، (۵-۲۸) و (۵-۲۹) برای پیدا کردن نتایج نشان داده شده در شکل ۵-۲، استفاده می‌کنیم. این شکل سازگاری خوب بین نتایج حاصل از مدل ساده‌ی کلایتون و نتایج حاصل از حل عددی معادلات مربوط به ساختار ستاره، را نشان می‌دهد.

### درخشندگی خورشید

از توزیع دما و توزیع چگالی که در شکل ۵-۲ نشان داده شده‌اند می‌توان برای برآورد



شکل ۲-۵ فشار، چگالی و دما در یک خورشید همگن با کسرهای جرمی  $X_1 = 0.71$  و  $X_4 = 0.27$ .  
 خط چین‌ها نتایج حل کامپیوتری توسط استرومگرن را نشان می‌دهند؛ به جدول ۵-۶ در مقاله‌ی کلاپتون (۱۹۸۳)  
 رجوع کنید. خط‌های پر مربوط به مدل ساده‌ی کلاپتون هستند که در بخش ۲-۵ به ازای  
 $a = R_{\odot} / 5.4 = 1.29 \times 10^8 \text{ m}$  توصیف شد.

درخشندگی خورشید با دو روش مستقل استفاده کرد. اولاً، می‌توانیم از معادله‌ی (۴-۵) انتگرال بگیریم و رابطه‌ی درخشندگی برحسب توان کل ناشی از همجوشی گرماهسته‌ای را به دست آوریم. ثانیاً ما می‌توانیم از معادله‌ی (۳-۵) استفاده کنیم و شار توان ناشی از پخش تابشی را برآورد کنیم. این دو مقدار برآوردی باید با هم سازگار باشند. در واقع، وابسته بودن شدید واکنش‌های هسته‌ای به دما در خورشید به حدی است که توان هسته‌ای تولید شده با اتلاف توان توسط پخش تابشی به طرف سطح خورشید، برابر است. علاوه بر این، این برآوردها برای درخشندگی نیز باید با درخشندگی محاسبه شده، یعنی  $W \approx 3 \times 10^{26}$  برای خورشید همگن اولیه، قابل مقایسه باشند.

برای پیدا کردن درخشندگی خورشیدی ناشی از همجوشی هسته‌ای، فرض می‌کنیم که انرژی خورشید توسط واکنش‌های زنجیره‌ی پروتون - پروتون برطبق معادله‌ی (۵-۱۵) تولید می‌شود. در واقع، توان تولید شده توسط زنجیره‌ی پروتون - پروتون در خورشید اولیه اندکی کم‌تر بوده است زیرا موقعی که فراوانی هلیوم - ۴ کم‌تر بود، اثر شاخه‌ی II در این زنجیره نیز کم‌تر بوده است. اگر معادله‌ی اصلاح شده‌ی (۵-۱۵) را در معادله‌ی (۴-۵) قرار دهیم و از آن انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$L_{\odot} = 8.74 \times 10^{-37} X_1^2 \int_0^{R_{\odot}} 4\pi r^2 [\rho(r)]^2 [T(r)]^4 dr \quad (39-5)$$

اگر چگالی و دما را از معادلات (۵-۲۸) و (۵-۲۹) حساب کنیم، درخشندگی برابر خواهد بود با

$$L_{\odot} = 8.74 \times 10^{-37} X_1^2 4\pi a^3 \rho_c^2 T_c^4 I \quad (40-5)$$

که در آن  $I$  به صورت انتگرال زیر است

$$I = \int_0^{R_{\odot}/a} \frac{\Phi^2(x) \exp(-2x^2)}{x^4} dx$$

برای محاسبه‌ی این انتگرال از بسط (۵-۳۰) استفاده می‌کنیم:

$$I = \int_0^{R_{\odot}/a} \left[ x^2 - \frac{3}{4} x^4 + \frac{3}{10} x^6 - \dots \right] \exp(-2x^2) dx$$

اگر  $a$  در مقایسه با  $R_{\odot}$  کوچک باشد، حد بالای انتگرال را می‌توان بی‌نهایت در نظر گرفت تا یک سری از انتگرال‌ها به دست بیاید. هر جمله از این سری را با استفاده از انتگرال

استاندارد زیر می‌توان حساب کرد

$$\int_0^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = (\pi/4\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

این انتگرال‌ها با دیفرانسیل گرفتن نسبت به  $\alpha$  به دست آمده است. اگر مقادیر عددی سری انتگرال‌ها را با هم جمع کنیم خواهیم داشت

$$I = 0.078(\pi/2)^{\frac{1}{2}} \quad (41-5)$$

با قرار دادن این نتیجه در معادله‌ی (۴۰-۵) داریم

$$L_{\odot} = 1.0 \times 10^{-36} a^3 X_1^2 \rho_c T_c^4$$

اگر از معادله‌ی (۳۲-۵) برای بیان  $a$  برحسب جرم و چگالی مرکزی خورشید استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$L_{\odot} = 1.0 \times 10^{-36} \frac{3}{4\pi\sqrt{6}} M_{\odot} X_1^2 \rho_c T_c^4 \quad (42-5)$$

برای به دست آوردن یک مقدار عددی برای این کمیت، مقادیر  $X_1 = 0.71$ ، درخشندگی خورشیدی  $5 \times 10^{26} \text{ W}$  به دست بیاید. این برآورد مبتنی بر همجوشی گرماهسته‌ای توسط زنجیره‌ی پروتون - پروتون را باید با درخشندگی خورشید همگن اولیه که از محاسبات کامپیوتری به دست آمده است، مقایسه کرد.

انتقال گرما با پخش تابشی، راه دیگری را برای برآورد درخشندگی خورشید به ما نشان می‌دهد. البته این برآورد تقریبی خواهد بود. علت امر این است که این مدل هیچ محدودیتی را برای شیب دما در نظر نمی‌گیرد تا مطمئن شویم که شارش گرما با تولید توان در داخل خورشید مطابقت دارد؛ برای مثال، وقتی تولید توان با دور شدن از مرکز خورشید کاهش می‌یابد، شارش گرما باید به صفر میل کند. ضمناً، این مدل برای فاصله‌های زیاد جواب درست نمی‌دهد و فقط برای مقادیر  $r$  بیش‌تر از ناحیه‌ی مرکزی تولیدکننده‌ی توان، شارش توان  $L(r)$  را می‌توان مساوی با  $L_{\odot}$  در نظر گرفت. به هر حال، متوجه خواهیم شد که این مدل هنوز می‌تواند یک مقدار برآوردی مفید برای درخشندگی خورشیدی ناشی از پخش تابشی



گرما را به دست بدهد.

رابطه‌ی بین شیب دما و شارش توان ناشی از پخش تابشی در یک ستاره، به صورت معادله‌ی (۳-۵) است. برای جلوگیری از اشتباه بین پارامتر طولی  $a$  در مدل کلایتون و ثابت تابشی که آن‌هم با  $a$  نشان داده می‌شود، ثابت تابشی را برحسب ثابت استفان  $\sigma$  (که مساوی با  $ac/4$  است)، بیان می‌کنیم. با مرتب کردن مجدد معادله‌ی (۳-۵)، شارش توان به طرف خارج ستاره در شعاع  $r$  به صورت زیر خواهد بود

$$L(r) = -\frac{16\sigma}{3} \frac{4\pi r^2 [T(r)]^4}{\kappa(r)\rho(r)} \frac{dT}{dr} \quad (۴۳-۵)$$

شارش توان را در ناحیه‌ی مرکزی خورشید، که  $r$  کوچک است و چگالی دما از معادله‌ی (۳۱-۵) به دست می‌آیند، در نظر می‌گیریم. اگر تیرگی از قانون کرامرز (۱۴-۵) تبعیت کند، مقدار آن در فاصله‌ی کوچک  $r$  از مرکز خورشید برابر است با

$$\kappa(r) \approx \kappa_c \left[ 1 + \frac{11}{16} \frac{r^2}{a^2} \right]$$

که در آن  $\kappa_c$  تیرگی در مرکز خورشید است. شیب دما را می‌توان با دیفرانسیل گرفتن از سری (۳۱-۵) برای  $T$  به دست آورد. اگر فقط جملات مرتبه‌ی  $r^2/a^2$  را نگهداریم، معلوم می‌شود که از معادله‌ی (۴۳-۵) یک رابطه‌ی تقریبی برای شارش توان در فاصله‌ی کوچک  $r$  از مرکز خورشید به دست می‌آید:

$$L(r) \approx 16\pi\sigma \frac{T_c^4}{\kappa_c \rho_c} \frac{r^3}{a^2} \left[ 1 - \frac{19}{16} \frac{r^2}{a^2} \right] \quad (۴۴-۵)$$

اگر مقادیر  $T_c = 16 \times 10^6 \text{ K}$ ،  $\rho_c = 9.0 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$  و مقدار مناسب تیرگی در این چگالی و دما یعنی  $\kappa_c = 0.14 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$  را قرار دهیم و از  $a = R_\odot / 5.4$  استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$L(r) \approx 3 \times 10^{29} \frac{r^3}{R_\odot^3} \left[ 1 - 35 \frac{r^2}{R_\odot^2} \right] \text{ W} \quad (۴۵-۵)$$

همان‌طور که انتظار داریم، شارش توان ابتدا با  $r$  افزایش می‌یابد، اما مشابه با یک مدل واقعی، مقدار آن به یک مقدار ثابت میل نمی‌کند. علی‌رغم این نارسایی، این مدل نشان می‌دهد که

به ازای  $r = R_{\odot} / 10$ ، شارش توان به طرف خارج که از معادله‌ی (۵-۴۵) به دست می‌آید به مقدار  $2 \times 10^{26} \text{ W}$  می‌رسد. بنابراین، مرتبه‌ی بزرگی شارش توان ناشی از پخش تابشی قابل مقایسه با  $5 \times 10^{26} \text{ W}$ ، یعنی مقدار برآوردی درخشندگی خورشیدی ناشی از همجوشی گرما هسته‌ای، است. در یک مدل واقعی برای خورشید، توان تولید شده با همجوشی گرما هسته‌ای دقیقاً همان مقدار لازم برای تأمین توان منتقل شده به طرف سطح خورشید است. اگر چنین نبود، خورشید منقبض یا منبسط می‌شد تا به مقدار درست خود برسد.

### ۴-۵ جرم‌های کمینه و بیشینه‌ی ستاره‌ها

گستره‌ی جرم اکثر ستاره‌های رشته‌ی اصلی تقریباً از  $0.1 M_{\odot}$  تا  $50 M_{\odot}$  است. بنابراین دو سؤال مطرح می‌شود: کدام ثابت‌های اساسی طبیعت مرتبه‌ی بزرگی جرم یک ستاره رشته‌ی اصلی را معین می‌کنند؟ ضمناً چرا گستره‌ی جرم ستاره‌ها این قدر محدود است؟ در فصل ۱ به‌طور خلاصه به این سؤال‌ها جواب دادیم و اکنون به‌طور مفصل به تشریح آن‌ها می‌پردازیم. در این بخش خواهیم دید که اگر جرم ستاره خیلی کوچک‌تر از جرم خورشید باشد، انقباض گرانشی دمای داخلی ستاره را تا حدی بالا می‌برد که برای راه‌اندازی همجوشی گرما هسته‌ای و تولید کردن یک ستاره واقعی کافی نیست. ضمناً خواهیم دید که اگر جرم ستاره خیلی بیش‌تر از جرم خورشید باشد، در آن صورت فشار تابشی غالب می‌شود. در نتیجه، انرژی بستگی ستاره کم می‌شود و هر اتلاف یا کسب کوچک انرژی، با تغییر زیادی در انرژی جنبشی گرمایی و انرژی پتانسیل گرانشی همراه خواهد بود؛ به عبارت دیگر، تعادل هیدروستاتیکی ستاره به هم می‌خورد.

نکته‌ی کلیدی برای محاسبه‌ی جرم‌های کمینه و بیشینه‌ی ستاره‌ها شرط لازم برای تعادل هیدروستاتیکی است. ما این شرط را با استفاده از یک روش ساده و تقریبی، با تأکید بر فشار در مرکز ستاره، به کار می‌بریم. برای انجام این کار، از معادله‌ی (۵-۳۳) استفاده می‌کنیم. این معادله نشان می‌دهد که رابطه‌ی فشار و چگالی مرکزی ستاره‌ای به جرم  $M$  در حال تعادل هیدروستاتیکی به صورت زیر است

$$P_C \approx \left[ \frac{\pi}{36} \right]^{\frac{1}{3}} GM^{\frac{2}{3}} \rho_C^{\frac{4}{3}} \quad (۴۶-۵)$$

این رابطه تقریباً برای هر ستاره‌ی همگن از نظر شیمیایی که به طرف مرکز متراکم‌تر می‌شود و چگالی مرکزی آن از چگالی متوسط بیش‌تر است، صدق می‌کند. فشاری که از معادله‌ی (۵-۴۶) به دست می‌آید، فشار مرکزی لازم برای حفظ کردن ستاره است. خواهیم دید که رابطه جرم‌های کمینه و بیشینه‌ی ستاره‌ها را می‌توان با بررسی منشاء این فشار پیدا کرد.

### جرم کمینه‌ی یک ستاره‌ی رشته‌ی اصلی

یک سیستم در حال انقباض برای ستاره شدن باید جرم کافی داشته باشد تا بتواند دمای مرکزی زیاد برای انجام همجوشی هسته‌ای را تولید و اتلاف انرژی از سطح را جبران کند. برای پیدا کردن جرم کمینه‌ی لازم برای رسیدن به این دمای گیرانش، ابری از یک گاز یونیده در حال انقباض با جرم  $M$  را در نظر می‌گیریم.

در آغاز اتلاف انرژی از سطح ستاره توسط انقباض گرانشی تأمین می‌شود. فشار کم است و الکترون‌ها و یون‌ها تقریباً یک گاز کلاسیکی ایده‌آل ایجاد می‌کنند به طوری که رابطه‌ی فشار و دمای مرکزی به صورت زیر است

$$P_C = \frac{\rho_C}{m} kT_C \quad (۴۷-۵)$$

در این رابطه  $\bar{m} = 2m_H / [1 + 3X_1 + 0.5X_2]$  جرم متوسط ذرات گاز است؛ به معادلات (۵-۸) و (۵-۹) رجوع کنید. اگر فشار تولید شده توسط گاز ایده‌آل در حدود فشار لازم برای حفظ کردن سیستم باشد، انقباض کم است و ابر گازی در حالتی نزدیک به حالت تعادل هیدروستاتیکی قرار دارد. اگر فشار حاصل از معادلات (۵-۴۶) و (۵-۴۷) را مساوی هم قرار دهیم، رابطه‌ی زیر برای دمای مرکزی در انقباض آرام، به دست می‌آید

$$kT_C \approx \left[ \frac{\pi}{36} \right]^{\frac{1}{3}} G \bar{m} M^{\frac{2}{3}} \rho_C^{\frac{1}{3}} \quad (۴۸-۵)$$

ملاحظه می‌کنیم که وقتی چگالی ابر گازی در حال انقباض افزایش می‌یابد، دما به طور پایا بالا می‌رود.

دمای یک ابر گازی در حال تراکم تا جایی بالا می‌رود که مقدار زیادی انرژی توسط همجوشی گرماهسته‌ای آزاد می‌شود، یا الکترون‌ها در مرکز ستاره تبهگن می‌شوند. در حالت اول، تنها انرژی هسته‌ای می‌تواند اتلاف انرژی از سطح را جبران کند، در نتیجه نیاز به تراکم و آزاد شدن انرژی گرانشی برطرف می‌شود. در حالت دوم، الکترون‌ها بنابر اصل طرد پائولی<sup>۱</sup> پایین‌ترین تراز انرژی ممکن را اشغال می‌کنند؛ الکترون‌ها در مقابل تراکم مقاومت، و جرم را حفظ می‌کنند. بنابراین، اگر الکترون‌ها پیش از رسیدن به دمای گیرانش همجوشی گرماهسته‌ای تبهگن شوند، ستاره شدن امکان‌پذیر نیست.

برای برآورد دمای بیشینه‌ی قابل دسترس در مرکز یک ابر گازی در حال تراکم، فرض می‌کنیم که الکترون‌ها در مرکز ستاره به طور کامل تبهگن می‌شوند و یون‌ها کلاسیکی هستند. در این مرحله فشار مرکزی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$P_c = K_{NR} n_e^{\frac{5}{3}} + n_i k T_c \quad (49-5)$$

در این رابطه مقدار ثابت  $K_{NR}$  از معادله‌ی (۵-۱۰) به دست می‌آید. چگالی عددی الکترون‌ها و یون‌ها را می‌توان برحسب چگالی مرکزی [با استفاده از معادلات (۵-۶) و (۵-۷)] بیان کرد. با وجود این، برای ساده کردن محاسبات جبری، فرض می‌کنیم جرم ستاره کلاً از هیدروژن تشکیل شده است و در نتیجه  $n_e = n_i = \rho_c / m_H$  در این صورت داریم

$$P_c = K_{NR} \left[ \frac{\rho_c}{m_H} \right]^{\frac{5}{3}} + \frac{\rho_c}{m_H} k T_c \quad (50-5)$$

باز هم تعادل هیدروستاتیکی به شرطی برقرار می‌شود که این فشار با فشار لازم برای حفظ کردن جرم، مساوی باشد. با مساوی قرار دادن فشار به دست آمده از معادله‌ی (۵-۵۰) با فشار به دست آمده از معادله‌ی (۵-۴۶)، دمای مرکزی ستاره به صورت زیر به دست می‌آید

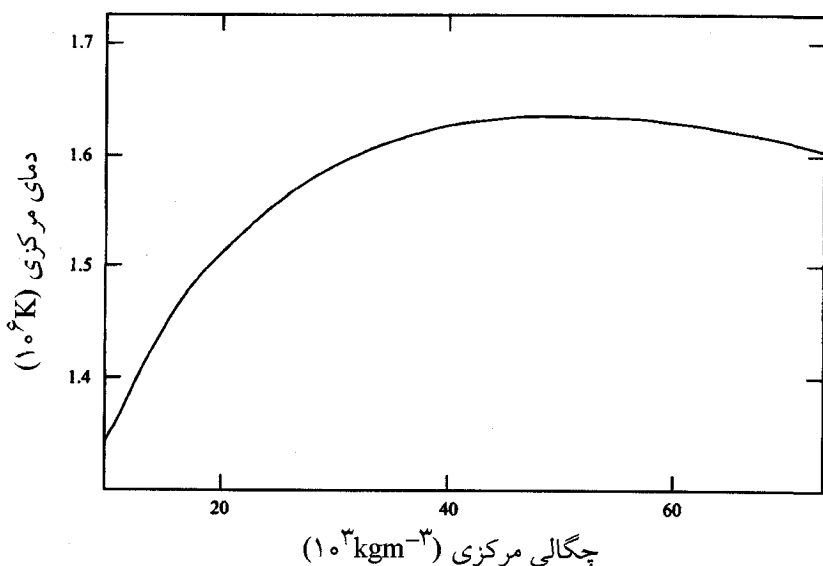
$$k T_c \approx \left[ \frac{\pi}{36} \right]^{\frac{1}{3}} G m_H M^{\frac{1}{3}} \rho_c^{\frac{1}{3}} - K_{NR} \left[ \frac{\rho_c}{m_H} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (51-5)$$

معادله‌ی (۵-۵۱) دمای مرکزی جرم در حال انقباض هیدروژن را در مرحله‌ای به دست

می‌دهد که الکترون‌ها در مرکز به طور کامل تبهگن شده‌اند و یون‌ها کلاسیکی‌اند. برخلاف معادله‌ی (۴۸-۵)، در این جا دو جمله وجود دارد. جمله‌ی اول مربوط به یون‌های کلاسیکی و جمله‌ی دوم مربوط به الکترون‌های تبهگن است. جمله‌ی دوم در چگالی بالا اهمیت پیدا می‌کند، و وقتی این جمله مهم شد، هنگامی که جرم منقبض می‌شود، افزایش دما سریعاً متوقف می‌شود. این رفتار در شکل ۳-۵ نشان داده شده است؛ این شکل چگونگی تغییرات دما در مرکز یک ابر در حال انقباض با جرم  $M_{\odot}/16$ ، با افزایش چگالی را نشان می‌دهد. همان‌طور که انتظار می‌رود، وقتی  $\rho_c$  افزایش می‌یابد ابتدا دما بالا می‌رود. با وجود این، وقتی فشار ناشی از الکترون‌های تبهگن بسیار مهم می‌شود، دما با سرعت کم‌تری افزایش می‌یابد؛ در نتیجه فشار الکترون‌های تبهگن غالب، و افزایش دما متوقف می‌شود. برای پیدا کردن مقدار بیشینه‌ی دما، معادله‌ی (۵۱-۵) را به صورت زیر مرتب می‌کنیم

$$kT_c = A\rho_c^{\frac{1}{3}} - B\rho_c^{\frac{2}{3}}$$

بنابراین محاسبات مقدماتی نشان می‌دهند که در چگالی  $(A/2B)^3$ ،  $kT_c$  به مقدار بیشینه‌ی  $A^2/4B$  می‌رسد. با جانمایی مقادیر  $A$  و  $B$  معلوم می‌شود که دمای بیشینه در مرکز توده‌ای



شکل ۳-۵ دما در مرکز ابر هیدروژنی در حال تراکم با جرم  $M_{\odot}/16$  به صورت تابعی از چگالی مرکزی.

از هیدروژن در حال تراکم برابر است با

$$[kT_c]_{max} \approx \left[ \frac{\pi}{36} \right]^{\frac{1}{3}} \frac{G^{\frac{1}{2}} m_H^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{4} K_{NR}} M^{\frac{1}{3}} \quad (52-5)$$

یک معادله‌ی مشابه و با دقت کم‌تر در فصل ۱ اثبات شد؛ به معادله‌ی (۱-۲۸) رجوع کنید. اکنون شرط ستاره شدن جرم در حال تراکم را به کار می‌بریم. این شرط ایجاب می‌کند که برای همجوشی گرماسته‌ای هیدروژن، دمای مرکزی پیشینه به دمای گیرانش برسد. اگر این دمای گیرانش را با  $T_{ign}$  نشان دهیم، جرم کمینه‌ی برای یک ستاره‌ی واقعی برابر است با

$$M_{min} \approx \left[ \frac{36}{\pi} \right]^{\frac{1}{3}} \left[ \frac{4 K_{NR}}{G^{\frac{1}{2}} m_H^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{3}} [kT_{ign}]^{\frac{1}{3}} \quad (53-5)$$

در واقع دمای گیرانش یک ماده به محیط آن بستگی دارد. در دمای گیرانش توان تولید شده در یک ناحیه‌ی خاص با توان تلف شده در آن ناحیه برابر می‌شود. وقتی این اتفاق می‌افتد، آن ناحیه داغ می‌شود و «آتش» گسترش می‌یابد. اگر این دمای گیرانش برای هیدروژن را در حدود  $1.5 \times 10^6 \text{ K}$  یعنی یک دهم دمای مرکزی خورشید، در نظر بگیریم جرم کمینه‌ی یک ستاره از معادله‌ی (۵-۵۳) مساوی با  $0.05 M_{\odot}$  به دست می‌آید؛ محاسبات دقیق‌تر، جرم نزدیک به  $0.08 M_{\odot}$  را به دست می‌دهند.

### جرم پیشینه‌ی یک ستاره‌ی رشته‌ی اصلی

با توجه به مطالب بخش ۱-۲ از فصل ۱ می‌دانیم که اگر فشار مقابله‌کننده با انقباض گرانشی توسط گازی از ذرات فرانسیتی تولید شود، تعادل هیدروستاتیکی یک ستاره به هم می‌خورد. این امر نشان می‌دهد که اگر تابش یک چشمه‌ی غالب برای فشار داخلی باشد، ستاره به آسانی می‌تواند متلاشی شود. این خاصیت عمومی یک حد بالاتر را برای جرم یک ستاره‌ی رشته‌ی اصلی معرفی می‌کند. برای معین کردن این حد، فشار ناشی از الکترون‌ها، یون‌ها و فوتون‌ها در مرکز یک ستاره‌ی داغ و پرجرم را در نظر می‌گیریم و آن را با فشار لازم برای حفظ کردن ستاره مقایسه می‌کنیم.

ما فرض می‌کنیم که الکترون‌ها، یون‌ها و فوتون‌ها در دمای  $T_c$  و چگالی  $\rho_c$  در مرکز ستاره در حال تعادل گرمایی قرار دارند. این فشار مرکزی  $P_c$  با مجموع فشار گازی  $P_g$  ناشی از الکترون‌ها و یون‌ها، و فشار تابشی  $P_r$  ناشی از فوتون‌ها برابر است<sup>۱</sup>. در دمای بالا و چگالی کم، الکترون‌ها و یون‌ها یک گاز ایده‌آل کلاسیکی تشکیل می‌دهند که فشار گازی آن برابر است با

$$P_g = \frac{\rho_c}{m} k T_c \quad (54-5)$$

برطبق معادله‌ی (۵-۱۲)، فوتون‌ها یک گاز کوانتومی ایده‌آل تشکیل می‌دهند که فشار آن برابر است با

$$P_r = \frac{1}{3} a T_c^4 \quad (55-5)$$

بهتر است سهم نسبی فشار گازی و تابشی به فشار کل  $P_c = P_r + P_g$  را با استفاده از

پارامتر  $\beta$  به صورت زیر توصیف کنیم

$$P_g = \beta P_c \quad \text{و} \quad P_r = (1 - \beta) P_c \quad (56-5)$$

بنابراین به آسانی می‌توان  $T_c$  را از معادله‌های (۵-۵۵) و (۵-۵۴) حذف کرد و  $P_c$  را برحسب  $\rho_c$  و  $\beta$  به صورت زیر به دست آورد

$$P_c = \left[ \frac{3(1-\beta)}{a\beta^4} \right]^{\frac{1}{3}} \left[ \frac{k\rho_c}{m} \right]^{\frac{4}{3}} \quad (57-5)$$

باز هم، اگر این فشار با فشار لازم برای حفظ کردن ستاره مساوی باشد، تعادل هیدروستاتیکی برقرار می‌شود. با مساوی قرار دادن فشار حاصل از معادله‌ی (۵-۵۷) و فشار حاصل از معادله‌ی (۵-۴۶) داریم

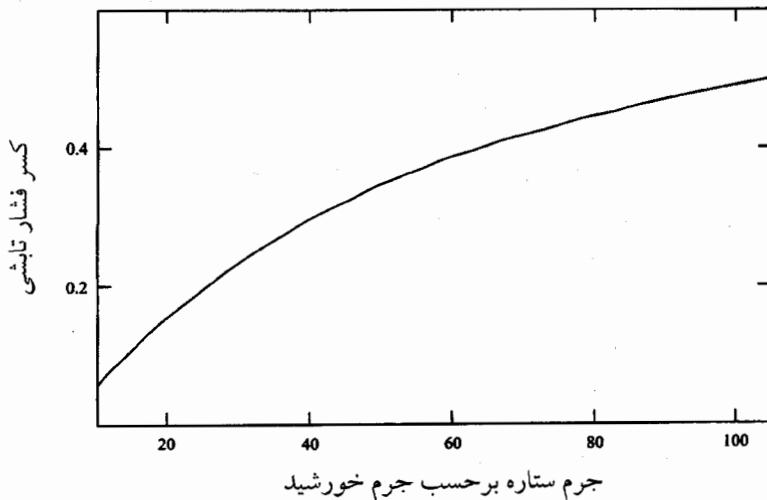
$$\left[ \frac{\pi}{36} \right]^{\frac{1}{3}} GM^{\frac{2}{3}} = \left[ \frac{3(1-\beta)}{a\beta^4} \right]^{\frac{1}{3}} \left[ \frac{k}{m} \right]^{\frac{4}{3}} \quad (58-5)$$

یادآوری می‌کنیم که  $(1-\beta)$  و  $\beta$  معرف سهم نسبی «تابش» و «گاز» در فشار مرکزی هستند؛

۱. البته فشار تابشی را می‌توان به صورت فشار ناشی از گاز فوتون‌ها در نظر گرفت. علی‌رغم این امر، به طور مرسوم از صفت گازی برای توصیف فشار ناشی از الکترون‌ها و یون‌ها استفاده می‌کنیم.

برطبق تعریف، هر دو مقدار از واحد کم‌ترند. با توجه به معادله‌ی (۵-۵۸) معلوم است که جرم  $M$  ستاره مقدار  $\beta$  را مشخص می‌کند و اگر  $M$  افزایش یابد،  $\beta$  کاهش پیدا می‌کند. بنابراین، فشار تابشی  $P_r = (1-\beta)P_c$  در ستاره‌های پرجرم بسیار مهم است. این موضوع در شکل ۴-۵ نشان داده شده است، که در آن منحنی  $P_r/P_c$  به صورت تابعی از جرم ستاره رسم شده است؛ برای  $\bar{m}$  مقدار  $0.61 \text{amu}$  را در نظر گرفته‌ایم.

با توجه به مطالب فصل ۱ می‌دانیم که برای ستاره‌ای که با فشار ناشی از حرکت تصادفی ذرات فرانسیتی مانند فوتون‌ها حفظ شده است، انرژی بستگی کم است. علاوه بر این، آزاد شدن یا جذب شدن مقدار کم انرژی در چنین ستاره‌ای، با تغییرات زیاد انرژی جنبشی داخلی و انرژی پتانسیل گرانشی همراه است. نتیجه می‌گیریم که فشار تابشی یک اثر بی‌ثباتی روی ستاره‌های پرجرم دارد. در عمل، اهمیت فزاینده‌ی فشار تابشی در ستاره‌های پرجرم که در شکل ۴-۵ نشان داده شده است، یک حد بالاتر را برای جرم ستاره‌های رشته‌ی اصلی معرفی می‌کند. مقدار برآوردی  $100 M_{\odot}$  برای جرم بیشینه‌ی یک ستاره‌ی رشته‌ی اصلی به ازای  $0.5 < (1-\beta)$  به دست می‌آید؛ در این‌جا فرض شده است که کم‌تر از ۵۰٪ فشار در مرکز ستاره مربوط به تابش است. در واقع، ستاره‌های با جرم بزرگ‌تر از  $50 M_{\odot}$  نادرند.



شکل ۴-۵ سهم نسبی فشار تابشی به فشار گازی در مرکز ستاره‌ای به جرم  $M$ . توجه کنید که در اغلب ستاره‌های پرجرم، فشار تابشی بسیار زیاد است.



## یکای اصلی جرم ستاره‌ها

دیدیم که حد پایین و حد بالا برای جرم ستاره‌ها چگونه با توجه به شرایط همجوشی گرم‌ماسته‌ای و اثر بی‌ثباتی فشار تابشی، تعیین می‌شوند. حد پایین را از معادله‌ی (۵-۵۳) و حد بالا را از معادله‌ی (۵-۵۸) می‌توان به دست آورد. گستره‌ی جرم‌ها برای ستاره‌های رشته‌ی اصلی بسیار کوچک و نوعاً از حدود  $0.1M_{\odot}$  تا حدود  $50M_{\odot}$  است. بنابراین، به نظر می‌رسد که جرم خورشید یکای مناسبی برای جرم تمام ستاره‌های رشته‌ی اصلی است. اکنون این نتایج را مجدداً بررسی می‌کنیم و ثابت‌های اساسی طبیعت را که جرم یک ستاره‌ی رشته‌ی اصلی در حدود جرم خورشید را مشخص می‌کنند، معرفی می‌کنیم.

برای این منظور، یک معیار بدون بعد را برای شدت برهم‌کنش گرانشی بین دو نوکلئون معرفی می‌کنیم. چون جرم متوسط یک نوترون و یک پروتون تقریباً با جرم یک اتم هیدروژن برابر است، جرم نوکلئون را با  $m_H$  نشان می‌دهیم. انرژی پتانسیل گرانشی دو نوکلئون به فاصله‌ی  $r$  از یکدیگر،  $-Gm_H^2/r$  است. مقدار این انرژی برای نوکلئون‌هایی به فاصله‌ی بنیادی  $\hbar/m_Hc$  از یکدیگر، برحسب یکای انرژی حالت سکون  $m_Hc^2$ ، برابر است با

$$\alpha_G = \frac{Gm_H^2}{\hbar c} = 5.9 \times 10^{-39} \quad (5-59)$$

این عدد کوچک بدون بعد معیاری برای شدت برهم‌کنش گرانشی بین نوکلئون‌ها است. معیار  $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = \frac{1}{137}$  متناظر برای شدت برهم‌کنش الکترومغناطیسی، ثابت ساختار ریز است. چون ما معمولاً از ثابت پلانک در این کتاب استفاده می‌کنیم، نتیجه می‌گیریم که تعاریف  $\alpha$  و  $\alpha_G$  شامل  $\hbar$  یا  $h/2\pi$  هستند.

جرم کمینه‌ی یک ستاره‌ی رشته‌ی اصلی از معادله‌ی (۵-۵۳) به دست می‌آید. این معادله شامل ثابت  $K_{NR}$  است که مطابق معادله‌ی (۵-۱۰) به ثابت پلانک و جرم الکترون بستگی دارد. اگر از معادله‌ی (۵-۱۰) استفاده کنیم، جرم کمینه‌ی ستاره را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$M_{min} \approx 16 \left[ \frac{kT_{ign}}{m_e c^2} \right]^{\frac{3}{4}} \alpha_G^{-\frac{3}{4}} m_H \quad (5-60)$$

اگر مقدار  $T_{ign}$  را در حدود  $1/5 \times 10^8 \text{ K}$  یعنی در حدود یک دهم دمای مرکزی خورشید در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$M_{min} \approx 0.03 \alpha_G^{-3/2} m_H \quad (61-5)$$

یک مقدار برآوردی برای جرم پیشینه‌ی یک ستاره‌ی رشته اصلی را می‌توان از معادله‌ی (58-5) به ازای  $(1-\beta) = 0.5$  به دست آورد؛ این عدد با این فرض انتخاب می‌شود که  $50\%$  فشار در مرکز ستاره از تابش ناشی می‌شود. با استفاده از معادله‌ی (5-12) برای مربوط کردن ثابت تابشی  $a$  به ثابت پلانک و سرعت نور، و با این فرض که جرم متوسط  $\bar{m} = 0.61 m_H$  است، جرم پیشینه‌ی یک ستاره به دست می‌آید:

$$M_{max} \approx 56 \alpha_G^{-3/2} m_H \quad (62-5)$$

با توجه به معادلات (61-5) و (62-5)، جرم زیر را معرفی می‌کنیم

$$M_* = \alpha_G^{-3/2} m_H = 1.85 M_\odot \quad (63-5)$$

و این جرم را به عنوان جرم ستاره‌ای بنیادی در نظر می‌گیریم که مقیاس جرم برای ستاره‌های رشته‌ی اصلی است. این جرم فقط به جرم نوکلئون و شدت یرهم کنش گرانشی بدون بعد بین نوکلئون‌ها بستگی دارد. بنابراین یک ستاره‌ی رشته‌ی اصلی دراز عمر و پایدار به شرطی به وجود می‌آید که  $M \approx M_*$  باشد، همجوشی گرماهسته‌ای به شرطی آغاز می‌شود که  $M \ll M_*$  باشد، و فشار تابشی به شرطی ناپایدار می‌شود که  $M \gg M_*$  باشد. از این نظر، نقش  $M_*$  به عنوان یک جرم ستاره‌ای بنیادی نشان می‌دهد که تعداد نوکلئون‌ها در یک ستاره‌ی نوعی فقط از  $\alpha_G$  به دست می‌آید. این تعداد برابر است با

$$N_* = \frac{M_*}{m_H} = \alpha_G^{-3/2} = 2 \times 10^{57} \quad (64-5)$$

## خلاصه

### مقدمه

- محاسبات مربوط به ساختار ستاره‌ها با استفاده از چهار معادله‌ی اصلی، یعنی معادلات (۵-۱) تا (۵-۴) صورت می‌گیرد که تعادل هیدروستاتیکی، پایستگی جرم، انتقال گرما و تولید توان در یک ستاره را مشخص می‌کنند. این معادله‌ها معادله‌های دیفرانسیل برای چهار تابع نامعلوم  $P(r)$ ،  $m(r)$ ،  $T(r)$  و  $L(r)$  هستند. اصولاً این معادله‌ها را به شرطی می‌توان حل کرد که یک معادله‌ی حالت برای ماده‌ی ستاره و روابط تیرگی و تولید توان را نیز داشته باشیم.

### مدل ساده برای یک ستاره

- برای شناخت دقیق‌تر ساختار ستاره‌ها می‌توان فرض کرد که شکل تحلیلی شیب فشار به صورت ساده‌ی زیر است

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi}{3} G \rho_c^2 r \exp(-r^2/a^2) \quad (24-5)$$

- این رابطه شیب فشار را برای  $r$  های کوچک با دقت و برای  $r$  های بزرگ با تقریب زیاد به دست می‌دهد. هرگاه جرم، شعاع و چگالی مرکزی یک ستاره مشخص باشد، پارامتر  $a$  ثابت خواهد بود و در آن صورت روابط ساده‌ای را برای چگالی درون ستاره می‌توان به دست آورد؛ به معادله‌ی (۵-۲۸) رجوع کنید. اگر معادله‌ی حالت معلوم باشد، توزیع دما را نیز می‌توان به دست آورد؛ به معادله‌ی (۵-۲۹) رجوع کنید.
- هرچه جرم ستاره به طرف مرکز متراکم‌تر شود، رابطه‌ی بین فشار و چگالی در مرکز ستاره ساده‌تر می‌شود:

$$P_c \approx \left[ \frac{\pi}{36} \right]^{\frac{1}{3}} GM^{\frac{2}{3}} \rho_c^{\frac{4}{3}} \quad (23-5)$$

روابط مربوط به مدل‌های دیگر ساده‌ترند. از این رابطه‌ی فشار - چگالی می‌توان به عنوان یک راه ساده و مستقیم برای به کار بردن شرط تعادل هیدروستاتیکی، مانند بخش ۴-۵، برای برآورد جرم‌های کمینه و بیشینه‌ی ستاره‌های رشته‌ی اصلی استفاده کرد.

### مدل سازی برای خورشید

- فشار، چگالی و دمای داخل خورشید را با این فرض می‌توان باز تولید کرد که ساختار ستاره تابع شیب فشار (۵-۲۴) است؛ شکل ۵-۲ را ببینید.
- با در نظر گرفتن همجوشی گرما هسته‌ای و با توجه به انتقال گرما توسط بخش تابشی، می‌توان درخشندگی خورشید را حساب کرد. در هر دو مورد، برآوردها قابل مقایسه با درخشندگی مشاهده شده‌اند؛ به معادلات (۵-۴۲) و (۵-۴۵) رجوع کنید.

### جرم‌های کمینه و بیشینه‌ی ستاره‌ها

- جرم بنیادی ستاره‌ها را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$M_* = \alpha_G^{\frac{3}{2}} m_H = 1,85 M_{\odot} \quad (5-63)$$

که در آن  $\alpha_G$  مقدار بدون بعد شدت برهم کنش گرانشی بین دو نوکلئون، و  $\alpha_G = Gm_H^2 / \hbar c$  است. این جرم بنیادی یکای طبیعی برای جرم تمام ستاره‌ها است. این جرم متعلق به ستاره‌ای است که  $2 \times 10^{57}$  نوکلئون دارد؛ به معادله‌ی (۵-۶۴) رجوع کنید.

- یک ابر هیدروژنی در حال تراکم به شرطی به ستاره‌ی واقعی تبدیل می‌شود و همجوشی گرما هسته‌ای هیدروژن در آن آغاز می‌شود که جرم این ابر از جرم ارائه شده با معادله‌ی (۵-۵۳) بیش‌تر باشد. این جرم کمینه برابر است با

$$M_{min} \approx 0,03 M_* \quad (5-61)$$

- اگر جرم یک ستاره از مقدار بیشینه‌ی

$$M_{max} \approx 56 M_* \quad (5-62)$$

بیش‌تر باشد، فشار تابشی داخلی از فشار گاز بیش‌تر می‌شود، و تعادل هیدروستاتیکی ستاره به هم می‌خورد.

## مسئله‌های فصل ۵

۱-۵ ستاره‌ای به جرم  $M$  و شعاع  $R$  را در نظر بگیرید که شیب فشار در آن به صورت زیر است

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi}{3} G \rho_c^2 r \exp(-r^2/a^2)$$

در این رابطه  $a$  پارامتر طولی و  $\rho_c$  چگالی مرکزی است؛ به معادله‌ی (۵-۲۴) رجوع کنید. با استفاده از نظریه‌ی ویريال (۱-۷)، رابطه‌ای برای انرژی پتانسیل گرانشی  $E_{GR}$  این ستاره به دست آورید. نشان دهید که اگر پارامتر طولی  $a$  کوچک‌تر از شعاع  $R$  باشد، انرژی پتانسیل گرانشی تقریباً برابر است با

$$E_{GR} \approx \frac{1}{3} \frac{R}{a} \frac{GM^2}{R}$$

۲-۵ خانواده‌ای از ستاره‌ها را که از نظر شیمیایی همگن هستند در نظر بگیرید که به جرم‌ها و شعاع‌ها از هر نظر مشابه‌اند. شباهت این ستاره‌ها به یکدیگر به حدی است که برای هر تعداد ستاره از این خانواده با جرم  $M$  و شعاع  $R$ ، چگالی در فاصله‌ی  $r$  از مرکز ستاره را می‌توان به صورت تابعی از  $x = r/R$  به شکل زیر نوشت

$$\rho(r) = \frac{M}{R^3} F_\rho(x)$$

در این رابطه، تابع  $F_\rho(x)$  برای کل خانواده یکسان است. به طور مشابه، جرم محصور در کره‌ای به شعاع  $r$  در داخل ستاره را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$m(r) = M F_m(x)$$

در این جا باز هم  $F_m(x)$  برای تمام خانواده یکسان است.

فرض کنید معادله‌ی حالت برای ماده‌ی ستاره‌ای همان معادله‌ی گاز کلاسیکی ایده‌آل است، و تیرگی این ماده از قانون کرامرز (۵-۱۴) پیروی می‌کند، و ضمناً انرژی هسته‌ای توسط زنجیره‌ی پروتون - پروتون مطابق معادله‌ی (۵-۱۵) تولید می‌شود. با استفاده از معادلات اصلی ساختار ستاره‌ها، یعنی معادلات (۵-۱) تا (۵-۴)، رابطه‌های تعیین کننده‌ی فشار، دما، شارش توان ناشی از پخش تابشی و شارش توان ناشی از همجوشی هسته‌ای را اثبات کنید:

$$P(r) = \frac{M^{\Upsilon}}{R^{\Upsilon}} F_{\rho}(x)$$

$$T(r) = \frac{M}{R} F_T(x)$$

$$L_{rad}(r) = \frac{M^{5/5}}{R^{5/5}} F_{rad}(x)$$

$$L_{fus}(r) = \frac{M^{\Upsilon}}{R^{\Upsilon}} F_{fus}(x)$$

باز هم تابع‌ها در این رابطه‌ها برای تمام خانواده‌ی ستاره‌ها یکسان هستند.

توجه کنید که وقتی ستاره منقبض می‌شود، شارش توان ناشی از پخش تابشی به آرامی افزایش می‌یابد و شارش توان ناشی از همجوشی هسته‌ای به سرعت افزایش می‌یابد. در واقع، این افزایش سریع توان همجوشی فقط بعد از رسیدن دمای مرکزی به مقدار حدود ۱۰ میلیون درجه‌ی کلون اتفاق می‌افتد. با ترسیم تغییرات این شارش‌های توان به صورت تابعی از  $R$ ، نشان دهید که چگونه ستاره‌های متعلق به این خانواده متراکم می‌شوند تا نهایتاً شعاع‌ها و درخشندگی‌های آن‌ها به مقادیر تقریبی زیر برسند

$$R \propto M^{1/0.77} \quad \text{و} \quad L \propto M^{5/4.5}$$

بالاخره، نشان دهید که این خانواده‌ی ستاره‌ها در راستای یک خط از نمودار هرتزشپرونگ - راسل به صورت

$$L \propto T_E^{4/12}$$

قرار می‌گیرند، که در این جا  $T_E$  دمای مؤثر سطح ستاره است.

۳-۵ خانواده‌ای از ستاره‌ها را در نظر بگیرید که در آن‌ها تیرگی ناشی از پراکندگی تامسون توسط الکترون‌ها غالب است، و انرژی هسته‌ای در آن‌ها توسط چرخه‌ی کربن - ازت تولید می‌شود. این امر ایجاب می‌کند که تیرگی مستقل از چگالی و دما باشد [به معادله‌ی (۵-۱۳) رجوع کنید]، و ضمناً آهنگ تولید انرژی هسته‌ای با  $\rho^2 T^{18}$  متناسب باشد (به بخش ۴-۲ رجوع کنید). مانند مسأله‌ی ۵-۲، برای ستاره‌های این خانواده یک رابطه بین شعاع و جرم، و یک رابطه بین درخشندگی و جرم، به دست آورید. ضمناً

خطی را بر روی نمودار هرتزشپرونگ - راسل پیدا کنید که درخشندگی و دمای مؤثر سطح این ستاره‌ها را نشان دهد.

۴-۵ در شرایط کاملاً عادی، رابطه‌ی فشار مرکزی  $P_c$  حفظ‌کننده‌ی ستاره‌ای به جرم  $M$ ، به صورت زیر است

$$P_c < \left[ \frac{\pi}{6} \right]^{\frac{1}{3}} GM^{\frac{2}{3}} \rho_c^{\frac{4}{3}}$$

که در آن چگالی مرکزی ستاره است؛ به مسأله‌ی ۱-۷ رجوع کنید. فرض کنید قسمتی از این فشار، که به صورت  $\beta P_c$  نشان داده می‌شود، از گاز کلاسیکی و ایده‌آل الکترون‌ها و یون‌ها با جرم متوسط  $\bar{m}$  ناشی می‌شود، و فرض کنید که بقیه‌ی فشار، که به صورت  $(1-\beta)P_c$  نشان داده می‌شود، از تابش ناشی می‌شود. نشان دهید که با استفاده از نامساوی بالا می‌توان یک کران بالا به ازای کمیت  $(1-\beta)\beta^4$  به دست آورد. از این کران برای تعیین مقادیر حدی کسر فشار ناشی از تابش در مرکز ستاره‌هایی با جرم  $M_{\odot}$ ،  $4M_{\odot}$  و  $40M_{\odot}$ ، استفاده کنید.

## سرانجام تحول ستاره‌ها

یک ستاره از چندین مرحله‌ی سوختن هسته‌ای که انقباض گرانشی را به تأخیر می‌اندازند، عبور می‌کند. ضمناً وزن ستاره با انواع سازوکارهای پرتاب ماده به فضای خارج، کاهش می‌یابد. نهایتاً، همجوشی هسته‌ای در مرکز ستاره نمی‌تواند انرژی کافی برای تحمل فشار دمایی بالا را تأمین کند و ستاره بر اثر گرانش منقبض می‌شود. به این ترتیب یک شیئی متراکم تشکیل می‌شود که می‌تواند یک کوتوله‌ی سفید، یک ستاره‌ی نوترونی یا یک سیاهچاله باشد. ما این فصل را با شناخت کوتوله‌های سفید، یعنی ستاره‌های متراکمی که عمدتاً با فشار الکترون‌های تبهگن حفظ می‌شوند، آغاز می‌کنیم. ضمناً این مطلب مهم را ثابت می‌کنیم که جرم یک کوتوله‌ی سفید نمی‌تواند از حد چاندرااسکار، یعنی جرم تقریبی  $1.4 M_{\odot}$ ، بیش‌تر شود. در این فصل مقدمه‌ای برای فیزیک ستاره‌های نوترونی، یعنی اشیاء متراکمی که با فشار نوترون‌های تبهگن حفظ می‌شوند، بیان می‌کنیم و فرایندهای مؤثر برای شکل‌گیری این ستاره‌ها را شرح می‌دهیم. به ویژه، جرم بیشینه‌ی یک ستاره‌ی نوترونی را مشخص می‌کنیم و می‌پذیریم که تمام اشیاء متراکم با جرمی بیش از این مقدار باید اشیاء کاملاً رمبیده‌ای باشند که تنها نمود بارز آن‌ها میدان‌های گرانشی شدید است. این بقایای جدا شده‌ی ماده را سیاهچاله می‌نامند.

### ۱-۶ کوتوله‌های سفید

خورشید از فاز سوختن هیدروژن و سپس از فاز سوختن هلیوم می‌گذرد و ستاره‌ای با یک هسته‌ی مرکزی کربن - اکسیژن به وجود می‌آورد که پوششی از هلیوم و هیدروژن احاطه شده



است. بعد از آن، بر اثر انقباض گرانشی هسته‌ی مرکزی کربن - اکسیژن، دمای آن افزایش می‌یابد. این دمای در حال افزایش، آهنگ سوختن هلیوم در پوسته‌ی اطراف هسته‌ی مرکزی را تسریع می‌کند، و در نتیجه پوسته منبسط و از هسته دور می‌شود، تا یک سحابی سیاره‌ای تشکیل دهد. اما تراکم هسته‌ی مرکزی تا حدی دمای لازم برای سوختن کربن را تولید می‌کند. در نتیجه انتظار می‌رود هسته‌ی مرکزی‌ای که پوسته‌اش را از دست داده است، به صورت یک کوتوله‌ی سفید داغ درآید. وقتی این کوتوله‌ی سفید سرد می‌شود، فشار تولید شده با حرکت گرمایی یونها کم‌اهمیت می‌شود و فقط فشار ناشی از الکترون‌های تبهگن می‌توانند کل فشار لازم برای نگهداری ستاره را تولید کند.

### جرم و چگالی مرکزی

ابتدا رابطه‌ی بین چگالی مرکزی کوتوله‌ی سفید و جرم آن را در نظر می‌گیریم. برای به دست آوردن این رابطه، چگالی عددی الکترون‌ها در مرکز ستاره را برحسب چگالی مرکزی  $\rho_c$  می‌نویسیم:

$$n_e = Y_e \frac{\rho_c}{m_H} \quad (1-6)$$

که در آن  $Y_e$  تعداد الکترون‌ها به ازای هر نوکلئون است؛ بنابر معادله‌ی (۵-۶)،  $Y_e$  تقریباً مساوی با  $[1 + X_1]/2$  است. اکنون فرض می‌کنیم که ستاره با فشار گاز متشکل از الکترون‌های تبهگن غیرنسبیتی حفظ می‌شود. این فشار را که از معادله‌ی (۵-۱۰) به دست می‌آید، می‌توان به صورت زیر نوشت

$$P = K_{NR} n_e^{\frac{5}{3}} = K_{NR} \left[ \frac{Y_e \rho_c}{m_H} \right]^{\frac{5}{3}} \quad (2-6)$$

اگر این فشار را با فشار مرکزی لازم برای حفظ کردن ستاره، که از معادله‌ی تقریبی (۵-۳۳) به دست می‌آید، مساوی قرار دهیم داریم

$$K_{NR} \left[ \frac{Y_e \rho_c}{m_H} \right]^{\frac{5}{3}} \approx \left[ \frac{\pi}{36} \right]^{\frac{1}{3}} GM^{\frac{2}{3}} \rho_c^{\frac{4}{3}} \quad (3-6)$$

این معادله را مجدداً مرتب می‌کنیم و از رابطه‌ی  $KNR$  در معادله‌ی (۵-۱۰) استفاده می‌کنیم تا مقدار پیشگویی شده‌ی زیر برای چگالی مرکزی یک کوتوله‌ی سفید سرد به جرم  $M$  به دست آید

$$\rho_c \approx \frac{3}{Y_e^5} \left[ \frac{M}{M_*} \right]^2 \frac{m_H}{(h/m_e c)^3} \quad (۴-۶)$$

در این رابطه  $M_*$  جرم ستاره‌ای بنیادی است که با معادله‌ی (۵-۶۳) به صورت زیر تعریف شده است

$$M_* = \alpha_G^{-\frac{3}{2}} m_H = 1.85 M_\odot \quad (۵-۶)$$

در هنگام اثبات معادله‌ی (۴-۶) فرض کردیم که کوتوله‌ی سفید فقط با فشار گازی الکترون‌های تبهگن غیرنسبیتی حفظ می‌شود. اما در بخش ۲-۲ دیدیم که وقتی چگالی عددی الکترون‌ها از  $(m_e c/h)^3$  بیشتر می‌شود، الکترون‌های تبهگن نسبیتی می‌شوند. در واقع، وقتی چگالی عددی مساوی با  $(8\pi/3)(m_e c/h)^3$  می‌شود، تکانه‌ی فرمی الکترون‌ها که از معادله‌ی (۲۷-۲) به دست می‌آید، مساوی با  $m_e c$  می‌شود. نتیجه می‌گیریم که در کوتوله‌ی سفید اگر چگالی بیش از  $m_H/(h/m_e c)^3$  باشد، الکترون‌ها نسبیتی می‌شوند. بنابراین، معادله‌ی غیرنسبیتی (۴-۶) به شرطی معتبر است که جرم  $M$  کوتوله‌ی سفید از  $M_*$  کم‌تر باشد.

به عنوان مثال، یک کوتوله‌ی سفید کربنی به جرم  $0.4 M_\odot$  را در نظر می‌گیریم. چگالی مرکزی پیشگویی شده توسط معادله‌ی (۴-۶) مساوی با  $4.6 m_H/(h/m_e c)^3$  یا در حدود  $5.4 \times 10^8 \text{ kg m}^{-3}$  است. در این چگالی، تکانه‌ی فرمی الکترون‌ها  $0.65 m_e c$  و انرژی جنبشی فرمی آن‌ها  $0.19 m_e c^2$  است. پس، استفاده از سینماتیک غیرنسبیتی، در بهترین حالت نیز بسیار تقریبی است. واضح است که برای کوتوله‌های سفیدی که جرمشان بسیار بیش‌تر از  $0.4 M_\odot$  است، باید اثرهای نسبیتی برای برآورد فشار گاز الکترون‌های تبهگن را به طور کامل در نظر بگیریم.

وقتی اثرهای نسبیتی را در نظر می‌گیریم، چگالی مرکزی حساب شده برای یک کوتوله‌ی سفید بسیار بیش‌تر از مقدار پیشگویی شده توسط معادله‌ی (۴-۶) به دست می‌آید. به ویژه،

چگالی که به صورت تابعی از جرم  $M$  کوتوله‌ی سفید در نظر گرفته می‌شود، بسیار سریع‌تر از  $M^2$  افزایش می‌یابد. علت امر این است که وقتی چگالی افزایش می‌یابد و الکترون‌ها بسیار نسبیته می‌شوند، معادله‌ی حالت اصلاح می‌شود. در واقع، وقتی الکترون‌ها در چگالی‌های بسیار بیش‌تر از  $m_H / (h/m_e c)^3$  فرانسبیته می‌شوند، به جای معادله‌ی حالت غیرنسبیته (۶-۲) از معادله‌ی زیر استفاده می‌شود

$$P = K_{UR} n_e^{\frac{4}{3}} = K_{UR} \left[ \frac{Y_e \rho_c}{m_H} \right]^{\frac{4}{3}} \quad (6-6)$$

که در آن  $K_{UR}$  از ثابت‌های بنیادی  $h$  و  $c$  مطابق معادله‌ی (۵-۱۱) به دست می‌آید. اگر این فشار ناشی از الکترون‌های فرانسبیته بتواند ستاره‌ای به جرم  $M$  را حفظ کند، داریم

$$K_{UR} \left[ \frac{Y_e \rho_c}{m_H} \right]^{\frac{4}{3}} \approx \left[ \frac{\pi}{36} \right]^{\frac{1}{3}} G M^{\frac{2}{3}} \rho_c^{\frac{4}{3}} \quad (7-6)$$

اگر در مفاد یک مدل فرض شده باشد که کوتوله‌ی سفید فقط به الکترون‌های تبهگن برای نگهداری بستگی دارد، این معادله باید به عنوان معادله‌ای برای جرم کوتوله‌ی سفیدی در نظر گرفته شود که چگالی مرکزی آن بسیار بیش‌تر از  $m_H / (h/m_e c)^3$  است و چگالی مرکزی آن به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. این جرم را جرم چاندرااسکار می‌نامند. چون چگالی در معادله‌ی (۶-۷) حذف می‌شود، این جرم با  $Y_e$  و ثابت‌های بنیادی مانند  $G$ ،  $m_H$  و  $K_{UR}$  معین می‌شود و برابر است با

$$M_{CH} \approx \left[ \frac{36}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{Y_e}{m_H} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{K_{UR}}{G} \right]^{\frac{3}{2}} \quad (8-6)$$

اگر ثابت  $K_{UR}$  را با استفاده از معادله‌ی (۵-۱۱) برحسب  $h$  و  $c$  بیان کنیم و تعریف (۶-۵) برای جرم ستاره‌ای بنیادی  $M_*$  را بپذیریم، خواهیم داشت

$$M_{CH} \approx 2.3 Y_e^{\frac{1}{2}} M_* = 4.3 Y_e^{\frac{1}{2}} M_{\odot} \quad (9-6)$$

برای فهمیدن مفهوم جرم چاندرااسکار، رشته‌ای از کوتوله‌های سفید با جرم در حال افزایش را در نظر می‌گیریم. وقتی که جرم ستاره افزایش می‌یابد، الکترون‌های تبهگن در مرکز ستاره به‌طور فزاینده نسبیته می‌شوند. وقتی جرم ستاره کم است، چگالی مرکزی آن برطبق معادله‌ی

(۶-۴) با جرم افزایش می‌یابد. وقتی جرم بیش‌تر می‌شود، چگالی با سرعت بیش‌تری افزایش می‌یابد و هنگامی که جرم به مقدار  $M_{CH}$  می‌رسد، چگالی باید بی‌نهایت شود. در واقع اگر چگالی بسیار بیش‌تر از  $m_H / (h/m_e c)^3$  شود، ستاره می‌رمبد و باید از مفاهیم فیزیکی جدیدی برای توجیه رویدادها استفاده شود. فعلاً نتیجه‌ای که می‌گیریم این است که یک گاز الکترونی تبهگن نمی‌تواند ستاره‌ای با جرم بیش از جرم چاندرااسکار را حفظ کند.

مفهوم فیزیکی جرم چاندرااسکار را با در نظر گرفتن یک مدل عمومی برای کوتوله‌ی سفید می‌توان توضیح داد. تا این‌جا دو مدل بحرانی مبتنی بر معادلات (۶-۲) و (۶-۶) را در نظر گرفتیم؛ یک مدل می‌گوید که ستاره با گاز رقیقی از الکترون‌های تبهگن غیرنسبیتی حفظ می‌شود، و مدل دیگر می‌گوید که ستاره با گاز چگالی الکترون‌های تبهگن فرانسبیتی حفظ می‌شود. اکنون مدلی را معرفی می‌کنیم که در آن هر دو نوع گاز الکترونی تبهگن غیرنسبیتی و فرانسبیتی در نظر گرفته می‌شوند. برای این منظور، ستاره‌ای را در نظر می‌گیریم که با یک گاز متشکل از الکترون‌های تبهگن حفظ می‌شود که سینماتیک آن با رابطه‌ی دقیق بین انرژی و تکانه به صورت زیر مشخص می‌شود

$$\varepsilon_p^2 = m_e^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (۱۰-۶)$$

فشار این گاز را می‌توان با استفاده از معادله‌ی (۲-۱۳) و این نکته که سرعت ذره‌ای با تکانه‌ی  $p$  مساوی با  $v_p = pc^2 / \varepsilon_p$  است، به دست می‌آورد. چون تمام الکترون‌ها در یک گاز تبهگن تمام حالت‌های با تکانه‌ی کم‌تر از تکانه‌ی فرمی  $p_F$  را به طور کامل اشغال می‌کنند، فشار گاز برابر است با

$$P = \frac{1}{3V} \int_0^{p_F} \frac{p^2 c^2}{\varepsilon_p} g(p) dp \quad g(p) dp = \frac{2V}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad (۱۱-۶)$$

که در آن

اگر تکانه‌های بدون بعد  $x = p/m_e c$  را در این معادله وارد کنیم، خواهیم داشت

$$P = \frac{4\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \int_0^{x_F} \frac{x^4}{(1+x^2)^{1/2}} dx \quad (۱۲-۶)$$

حد بالای این انتگرال، تکانه‌ی فرمی بدون بعد  $x_F$  است که از معادله‌ی (۲-۲۷) به دست می‌آید:

$$x_F = \frac{p_F}{m_e c} = \left[ \frac{3 n_e}{\lambda \pi} \right]^{\frac{1}{3}} \frac{h}{m_e c} = \left[ \frac{3 Y_e \rho_c}{\lambda \pi m_H} \right]^{\frac{1}{3}} \frac{h}{m_e c} \quad (13-6)$$

بعد از انتگرال‌گیری و مرتب کردن جملات، رابطه‌ی زیر برای فشار به دست می‌آید

$$P = K_{UR} n_e^{\frac{4}{3}} I(x_F) \quad (14-6)$$

که در آن داریم

$$I(x) = \frac{3}{2x^4} \left[ x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2x^2}{3} - 1 \right) + \ln \left[ x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right] \quad (15-6)$$

چون از معادله‌ی (۶-۱۰) استفاده کردیم، رابطه‌ی دقیق بین انرژی و تکانه، یعنی معادله‌ی (۶-۱۴)، فشار ناشی از یک گاز الکترونی تبهگن ایده‌آل با هر مقدار چگالی را به دست می‌دهد. این فشار برحسب تکانه‌ی فرمی بدون بعد  $x_F$ ، که برطبق معادله‌ی (۶-۱۳) به چگالی بستگی دارد، بیان می‌شود. در چگالی‌های زیاد، تکانه‌ی فرمی بزرگ است و  $x_F \gg 1$  در این حالت، انتگرال  $I(x_F)$  به مقدار واحد میل می‌کند و از معادله‌ی (۶-۱۴) فشاری به دست می‌آید که با فشار حاصل از معادله‌ی (۶-۶) یعنی فشار گاز الکترون‌های تبهگن فرانسیتی برابر است. در چگالی‌های کم، تکانه‌ی فرمی کوچک است و  $x_F \ll 1$  در این صورت انتگرال  $I(x_F)$  به مقدار  $4x_F/5$  میل می‌کند و از معادله‌ی (۶-۱۴) فشاری به دست می‌آید که با فشار حاصل از معادله‌ی (۶-۲)، یعنی فشار گاز الکترون‌های تبهگن غیرنسبیتی برابر است.

اکنون تعادل هیدروستاتیکی ستاره‌ای را در نظر می‌گیریم که با گاز الکترون‌های تبهگن ایده‌آل با هر مقدار چگالی، حفظ می‌شود. اگر فشار حاصل از معادله‌ی (۶-۱۴) را با فشار لازم برای حفظ کردن ستاره‌ای به جرم  $M$  مساوی قرار دهیم، داریم

$$K_{UR} \left[ \frac{Y_e \rho_c}{m_H} \right]^{\frac{4}{3}} I(x_F) \approx \left[ \frac{\pi}{36} \right]^{\frac{1}{3}} GM^{\frac{2}{3}} \rho_c^{\frac{4}{3}} \quad (16-6)$$

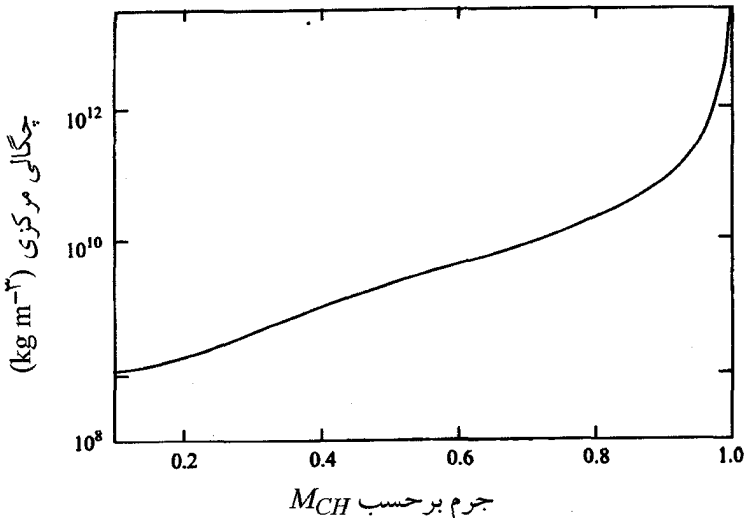
با ترتیب مجدد این رابطه می‌توان رابطه‌ی زیر را برای جرم ستاره به دست آورد

$$M \approx [I(x_F)]^{\frac{3}{2}} M_{CH} \quad (17-6)$$

در این جا جرم چاندراسکار  $M_{CH}$  از معادله‌ی (۶-۹) به دست می‌آید.

معادله‌ی (۶-۱۷) جرم یک کوتوله‌ی سفید را برحسب  $x_F$  به دست می‌دهد که آن هم از طریق معادله‌ی (۶-۱۳) به چگالی مرکزی  $\rho_c$  بستگی دارد. برعکس، از این معادله می‌توان چگالی مرکزی یک کوتوله‌ی سفید به جرم  $M$  را به دست آورد. نتایج محاسبات اولیه با استفاده از معادله‌های (۶-۱۷) و (۶-۱۳) به ازای  $Y_e = 0.5$ ، در شکل ۶-۱ نشان داده شده است. همان‌طور که انتظار داریم، وقتی جرم کوتوله‌ی سفید افزایش می‌یابد، چگالی مرکزی نیز زیاد می‌شود. در ابتدا افزایش جرم مطابق معادله‌ی (۶-۴) صورت می‌گیرد، که این معادله برای الکترون‌های تبهگن غیرنسبیتی معتبر است. بعداً که الکترون‌ها نسبیتی می‌شوند، چگالی با سرعت بیش‌تری افزایش می‌یابد. بالاخره، هنگامی که جرم کوتوله‌ی سفید به حدود جرم چاندرااسکار می‌رسد، الکترون‌ها فرانسبیتی می‌شوند و چگالی به بی‌نهایت میل می‌کند.

برآورد مقدار جرم چاندرااسکار (۶-۹) بر مبنای رابطه‌ی تقریبی بین چگالی مرکزی و فشار، یعنی معادله‌ی (۵-۳۳) صورت می‌گیرد. برآورد دقیق را به شرطی می‌توان انجام داد که از مدل چند منظوره‌ای استفاده کنیم که رابطه‌ی بین چگالی و فشار آن در سرتاسر ستاره به صورت  $P(r) \propto [\rho(r)]^{\frac{4}{3}}$  باشد؛ این رابطه با معادله‌ی (۶-۶)، یعنی معادله‌ی فشار گاز الکترون‌های



شکل ۶-۱ چگالی در مرکز کوتوله‌ی سفیدی به جرم  $M$  که توسط فشار گاز ایده‌آل الکترون‌های تبهگن حفظ می‌شود. توجه کنید که وقتی جرم به حدود جرم چاندرااسکار  $M_{CH}$  می‌رسد، چگالی به بی‌نهایت میل می‌کند.

تبهگن فرانسییتی سازگار است. در این جا ضریب عددی در معادله‌ی (۵-۳۳)، که مساوی با  $0.44$  است، با مقدار  $0.36$  تعویض، و مقدار جرم چاندرااسکار به اندازه‌ی زیر پیشگویی می‌شود

$$M_{CH} \approx 3.1 Y_e M_* = 5.8 Y_e M_{\odot} \quad (6-18)$$

در بسیاری از کوتوله‌های سفید در حدود دو نوکلئون به ازای هر الکترون وجود دارد و  $Y_e \approx 0.5$  است که وقتی در معادله‌ی (۶-۱۸) قرار می‌دهیم، جرم چاندرااسکار در حدود  $1.4 M_{\odot}$  به دست می‌آید.

چاندرااسکار در سال ۱۹۳۱ ابتدا به این نتیجه رسید که یک مقدار بیشینه برای جرم کوتوله‌ی سفید وجود دارد. او در سال ۱۹۳۴ درباره‌ی مفهوم ژرف این کشف مهم چنین تأکید کرد: طول حیات یک ستاره کم جرم مسلماً باید با طول حیات یک ستاره‌ی پر جرم متفاوت باشد. برای یک ستاره‌ی کم جرم، مرحله‌ی کوتوله‌ی سفید شدن یک گام اولیه برای رسیدن به خاموشی کامل است. یک ستاره‌ی پر جرم نمی‌تواند به مرحله‌ی کوتوله‌ی سفید شدن وارد شود، و اتفاقات دیگری برای آن می‌افتد.

در قسمت‌های بعدی این فصل کتاب خواهیم دید که چنین تفکری به این نتیجه رسید که سرانجام ممکن تحول ستاره‌ها، ستاره‌های نوترونی و سیاهچاله‌ها هستند. در این جا، صرفاً به این امر توجه می‌کنیم که یک ستاره‌ی با جرم بیش‌تر از حد چاندرااسکار نمی‌تواند یک کوتوله‌ی سفید پایدار تشکیل دهد و ضمناً علت این ناپایداری آن است که الکترون‌های تبهگن در ستاره، فرانسییتی‌اند. این امر به نتیجه‌ی کلی مورد بحث در بخش ۱-۲ مربوط می‌شود که: در هر ستاره‌ای که توسط گاز ذرات فرانسییتی حفظ می‌شود، تعادل هیدروستاتیکی به هم می‌خورد.

## جرم و شعاع

بنابر معادله‌ی (۶-۴)، و به طور کلی‌تر با توجه به شکل ۶-۱، چگالی کوتوله‌ی سفید با افزایش جرم آن سریعاً افزایش می‌یابد. این امر باعث می‌شود با افزایش جرم کوتوله‌ی سفید اندازه‌ی آن کاهش یابد.

برای پیدا کردن رابطه‌ی بین جرم و شعاع یک کوتوله‌ی سفید، به یک مدل برای توزیع چگالی نیاز داریم. اگر اکثر الکترون‌های تبهگن غیرنسبیتی باشند، ساختار ستاره شبیه مدل چندمنظوره به ازای  $P \propto \rho^{\frac{5}{3}}$  خواهد بود، که در آن صورت می‌توان نشان داد چگالی متوسط  $\rho_c / \rho_e$  است. با توجه به این داده‌ها و معادله‌ی (۴-۶)، چگالی متوسط یک کوتوله‌ی سفید با جرم  $M$  تقریباً برابر است با

$$\langle \rho \rangle \approx \frac{0.51}{Y_e^5} \left[ \frac{M}{M_*} \right]^{\frac{1}{3}} \frac{m_H}{(h/m_e c)^3} \quad (19-6)$$

ضمناً شعاع کوتوله‌ی سفید برابر است با

$$R = \left[ \frac{3M}{4\pi \langle \rho \rangle} \right]^{\frac{1}{3}} \approx 0.177 Y_e^{\frac{5}{3}} \left[ \frac{M_*}{M} \right]^{\frac{1}{3}} \alpha_G^{-\frac{1}{2}} \frac{h}{m_e c} \quad (20-6)$$

برای به دست آوردن معادله‌ی اخیر، از تعریف  $M_*$  در معادله‌ی (۵-۶) استفاده کرده‌ایم. توجه کنید که اندازه‌ی مشخصه‌ی یک کوتوله‌ی سفید قبلاً با ثابت بنیادی  $\alpha_G = 5.9 \times 10^{-39}$  و طول موج کامپتون الکترون،  $h/m_e c = 2.4 \times 10^{-12}$  m تعیین شده است. این اندازه‌ی مشخصه برابر است با

$$\alpha_G^{-\frac{1}{2}} \frac{h}{m_e c} \approx 3 \times 10^7 \text{ m} \quad (21-6)$$

ضمناً می‌دانیم که چگالی مشخصه‌ی کوتوله‌ی سفید برابر است با

$$\frac{m_H}{(h/m_e c)^3} \approx 1 \times 10^8 \text{ kg m}^{-3} \quad (22-6)$$

علاوه بر این، اگر از جرم و اندازه‌ی خورشید به عنوان استاندارد استفاده کنیم، معلوم می‌شود که شعاع تقریبی یک کوتوله‌ی سفید به ازای  $Y_e = 0.5$ ، برابر است با

$$R \approx \frac{R_{\odot}}{74} \left[ \frac{M_{\odot}}{M} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (23-6)$$

همان‌طور که انتظار داریم، با افزایش جرم یک کوتوله‌ی سفید، شعاع آن کاهش می‌یابد. در هنگام اثبات این رابطه‌ی جرم - شعاع فرض کردیم که الکترون‌های تبهگن غیرنسبیتی‌اند، و این امر فقط در مورد کوتوله‌های سفید کم جرم به کار می‌رود. اما این موضوع با داده‌های مشاهده‌ای



محدود در مورد جرم‌ها و شعاع‌های کوتوله‌های سفید چندان سازگار نیست. جدول ۱-۶ بعضی از این داده‌ها را نشان می‌دهد؛ این داده‌ها محدودند زیرا جرم را فقط به شرطی می‌توان تعیین کرد که کوتوله‌ی سفید عضوی از یک سیستم دوتایی یا سه‌تایی باشد. باید توجه کرد که شعاع‌های مشاهده شده با مقادیر به دست آمده از معادله‌ی (۶-۲۳) قابل مقایسه‌اند، و برحسب انتظار، با افزایش جرم کوتوله‌ی سفید، شعاع آن کاهش می‌یابد.<sup>۱</sup>

از رابطه‌ی جرم - شعاع (۶-۲۳) می‌توان برای پیدا کردن رابطه‌ی درخشندگی یک کوتوله‌ی سفید با جرم آن، استفاده کرد. با توجه به فصل ۱ یادآوری می‌کنیم که درخشندگی یک ستاره از طریق رابطه‌ی (۱-۳۳) به دمای مؤثر سطح  $T_E$  و شعاع  $R$  آن بستگی دارد:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_E^4 \quad (۶-۲۴)$$

بنابراین رابطه‌ی جرم - شعاع (۶-۲۳) ایجاب می‌کند که یک کوتوله‌ی سفید به جرم  $M$ ، دارای درخشندگی زیر باشد

$$L \approx \frac{1}{74^2} \left[ \frac{M_{\odot}}{M} \right]^{\frac{4}{3}} \left[ \frac{T_E}{6000} \right]^4 L_{\odot} \quad (۶-۲۵)$$

برای مثال، یک کوتوله‌ی سفید به جرم  $M = 0.4 M_{\odot}$  و دمای  $T = 10^4 \text{ K}$  دارای درخشندگی تقریبی  $3 \times 10^{-3} L_{\odot}$  است.

جدول ۱-۶ جرم‌ها و شعاع‌های کوتوله‌های سفید با استفاده از مشاهدات اپتیکی\*

شعاع (برحسب $R_{\odot}$ )	جرم (برحسب $M_{\odot}$ )	کوتوله‌ی سفید
$(0.00074 \pm 0.0006)$	$(1.053 \pm 0.028)$	شعرای یمانی B
$(0.0124 \pm 0.0005)$	$(0.48 \pm 0.02)$	40 Eri B
$(0.0115 \pm 0.0012)$	$(0.50 \pm 0.05)$ یا $(0.72 \pm 0.08)$	Stein 2051

\* برای کسب اطلاعات بیشتر رجوع کنید به Shapiro and Taukolsky (1983)

۱. از معادله‌ی ساختار ستاره برای کوتوله سفید، می‌توان به صورت عددی انتگرال گرفت. این محاسبه درمسأله‌ی ۱۱-۶ انجام شده، و رابطه‌ی جرم - شعاع به دست آمده از این محاسبه، در شکل ۶-۴ نشان داده شده است.

در بخش ۳-۴ دیدیم که آهنگ سرد شدن یک کوتوله‌ی سفید عمدتاً از پخش تابشی به طرف لایه‌ی نارسانای خارجی تری تعیین می‌شود که قسمت داخلی تبهگن تکدما را احاطه کرده است. معادله‌ی (۶-۲۵) نشان می‌دهد که وقتی یک کوتوله‌ی سفید سرد می‌شود، درخشندگی آن کاهش می‌یابد و دمای سطح آن طوری تغییر می‌کند که  $L$  با  $T_E^4$  متناسب باشد. این امر ایجاب می‌کند که کوتوله‌ی سفید در راستای خط ویژه‌ای از نمودار هرتزشپرونک - راسل، مانند شکل ۶-۲، سرد شود. علاوه بر این، چون وضعیت خط سرد شدن کوتوله‌های سفید با جرم کوتوله‌های سفید مشخص می‌شود و چون جرم‌های کوتوله‌های سفید در یک گسترده‌ی باریک قرار دارند، انتظار می‌رود تمام کوتوله‌های سفید یک نوار باریک در نمودار هرتزشپرونک - راسل را اشغال کنند. گستره‌ی باریک جرم‌ها برای کوتوله‌های سفید به خاطر حد بالای دقیق و حد پایین نادقیق است. واضح است که جرم کوتوله‌ی سفید نمی‌تواند از حد چاندراسکار  $1.4 M_{\odot}$  بیش‌تر باشد. علاوه بر این، سن متناهی جهان نشان می‌دهد که جرم هر نوع کوتوله‌ی سفید مشاهده شده نمی‌تواند خیلی کم باشد؛ علت امر این است که هر کوتوله‌ی سفید مشاهده شده باید از تحول یک ستاره‌ی رشته‌ی اصلی به وجود آمده باشد و اگر جرم ستاره کم باشد ستاره با سرعت بسیار کم متحول می‌شود. برای جهانی که سن آن ۱۰ تا ۲۰ بیلیون سال است، فقط برای جرم‌های بیش از  $0.25 M_{\odot}$  یا در همان حدود، دقت کافی برای تحول و تولید کوتوله‌های سفید وجود داشته است.

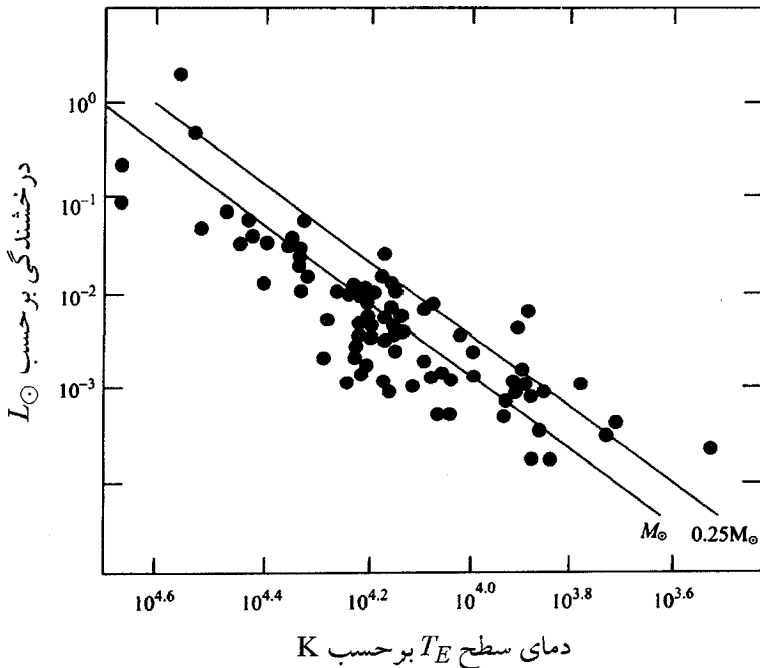
بالاخره، از رابطه‌ی جرم - شعاع (۶-۲۳) برای برآورد شدت گرانش در سطح یک کوتوله‌ی سفید و برای فهمیدن انتقال گرانشی تابش‌های فرار کرده از این سطح به سوی طول موج‌های سرخ، می‌توان استفاده کرد.

ما انتظار داریم شتاب گرانشی در روی یک کوتوله‌ی سفید با توجه به استانداردهای ستاره‌ای یا حتی استانداردهای خورشیدی، بسیار زیاد باشد. با استفاده از معادله‌ی (۶-۲۳) معلوم می‌شود که شتاب در روی کوتوله‌ی سفیدی به جرم  $M$ ، برابر است با

$$g = \frac{GM}{R^2} \approx 74^2 \left[ \frac{M}{M_{\odot}} \right]^{\frac{5}{3}} \frac{GM_{\odot}}{R_{\odot}^2} \quad (6-26)$$

مقدار عددی این شتاب در روی سطح ستاره‌ای به جرم  $0.4 M_{\odot}$  تقریباً  $4 \times 10^5 \text{ ms}^{-2}$  است. انتقال گرانشی تابش‌های فرار کرده از سطح ستاره به سوی سرخ، از بزرگی انرژی پتانسیل گرانشی در روی سطح تعیین می‌شود. بنابراین نسبت عام، تغییر نسبی طول موج تابش برابر است با

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \left[ 1 - \frac{2GM}{Rc^2} \right]^{-\frac{1}{2}} - 1 \approx \frac{GM}{Rc^2} \quad (27-6)$$



شکل ۲-۶ وضعیت کوتوله‌های سفید بر روی نمودار هرتزشپرونگ - راسل. مدلی که بر مبنای ستاره‌ی حفظ شده با گاز الکترون‌های تبه‌کن غیرنسبیتی ساخته شده است، رابطه‌ی بین درخشندگی و دمای سطح را به صورت معادله‌ی (۲۵-۶) به دست می‌دهد. خط‌های قطری، این رابطه را برای ستاره‌های با جرم  $M = 0.25 M_{\odot}$  و  $M = M_{\odot}$  نشان می‌دهند. در واقع، در کوتوله‌های سفید پر جرم، اثرهای نسبیتی مهم‌اند و این امر شعاع پیشگویی شده برای ستاره‌ای با جرم  $M = M_{\odot}$  را کاهش می‌دهد و خط قطری به طرف پایین منتقل می‌شود. وضعیت مشاهده شده‌ی کوتوله‌های سفید در این نمودار متناظر با داده‌های جمع‌آوری شده توسط سوینی<sup>۱</sup> است؛ برای کسب اطلاعات بیش‌تر رجوع کنید به Shapiro and Teukolsky (1983)

یک راه میان‌بر برای فهمیدن این نتیجه، در نظر گرفتن فوتونی با بسامد  $\nu$  با جرم مؤثر  $m = h\nu/c^2$  و انرژی کل  $h\nu - GmM/R$  در روی سطح ستاره است. هنگامی که فوتون فرار می‌کند، انرژی پتانسیل گرانشی آن افزایش و بسامد آن کاهش می‌یابد تا انرژی پایسته بماند. در نتیجه، تغییر بسامد در هنگام فرار فوتون مساوی با  $\Delta\nu = -GmM/Rh = -GM\nu/Rc^2$  است. با استفاده از رابطه‌ی جرم - شعاع (۶-۲۳)، متوجه می‌شویم که انتقال گرانشی به سوی سرخ در مورد کوتوله‌ی سفیدی به جرم  $M$  تقریباً برابر است با

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \nu^4 \left[ \frac{M}{M_{\odot}} \right]^{\frac{4}{3}} \frac{GM_{\odot}}{R_{\odot}c^2} \quad (۶-۲۸)$$

برای مثال، انتقال به سوی سرخ برای کوتوله‌ی سفید Eri B برابر است با  $\Delta\lambda/\lambda = (7,97 \pm 0,43) \times 10^{-5}$ . جرم این کوتوله‌ی سفید  $0,48 M_{\odot}$  است و انتقال به سوی سرخ از معادله‌ی (۶-۲۸) مساوی با  $\Delta\lambda/\lambda \approx 6 \times 10^{-5}$  به دست می‌آید.

## ۶-۲ رمبش هسته‌ی مرکزی یک ستاره

ستاره‌ای که جرمش از  $11 M_{\odot}$  بیش‌تر یا در همان حدود است، انتظار می‌رود با عبور از تمام مراحل سوختن هسته‌ای متحول شود. همان‌طور که در فصل ۴ گفته شد، این فرایند با سوختن هیدروژن در دمای تقریبی  $2 \times 10^7 \text{ K}$  آغاز می‌شود و در دماهای بالاتر سوختن هلیوم، نئون، اکسیژن و سیلیسیوم به ترتیب صورت می‌گیرد. سوختن سیلیسیوم در دمای تقریبی  $3 \times 10^9 \text{ K}$  باعث می‌شود ستاره‌ای با هسته‌ی مرکزی آهنی تولید شود که اطراف آن را پوسته‌های هم‌مرکز شامل سیلیسیوم، اکسیژن، نئون، کربن، هلیوم و هیدروژن احاطه کرده‌اند. چون انرژی نمی‌تواند از طریق همجوشی گرما هسته‌ای آهن آزاد شود، هسته‌ی مرکزی متراکم می‌شود. در ابتدا این تراکم را با فشار گاز چگال الکترون‌های تبهگن در هسته می‌توان کنترل کرد. اما چون سوختن سیلیسیوم در پوسته‌ی احاطه‌کننده، آهن بیش‌تری را به هسته‌ی مرکزی وارد می‌کند، الکترون‌های تبهگن در هسته‌ی مرکزی به طور فزاینده‌ی نسبی می‌شوند. وقتی جرم هسته‌ی مرکزی به حد چاندرااسکار  $1,4 M_{\odot}$  می‌رسد، الکترون‌ها فرانسبیتی می‌شوند و دیگر نمی‌توانند

هسته‌ی مرکزی را حفظ کنند. در این مرحله، هسته‌ی مرکزی ستاره در آستانه‌ی انفجار قرار می‌گیرد.

## آغاز رمبش

وقتی جسمی بر اثر گرانش منقبض می‌شود، انرژی گرانشی به انرژی داخلی تبدیل می‌شود. اگر این امر به همجوشی هسته‌ای گرمازا منجر شود، انرژی جنبشی داخلی افزایش می‌یابد، فشار بالا می‌رود و با انقباض مقابله می‌شود. اگر یک فرایند جذب کننده‌ی انرژی فعال شود، عکس این حالت رخ می‌دهد؛ یعنی انرژی جنبشی جذب می‌شود، تأثیر فشار کاهش می‌یابد و انقباض گرانشی به رمبش گرانشی تبدیل می‌شود. بنابراین، یک بخاری ستاره‌ای مانع انقباض گرانشی می‌شود، اما یک یخچال ستاره‌ای می‌تواند باعث رمبش بدون کنترل بشود.

دو فرایند جذب انرژی، یعنی دو یخچال ممکن وجود دارند که می‌توانند هسته‌ی مرکزی آهنی یک ستاره را وادار به رمبش بدون کنترل بکنند. این فرایندها تجزیه‌ی نوری هسته‌های اتمی و گیراندازی الکترون‌ها از طریق واپاشی معکوس بتا هستند. در تجزیه‌ی نوری، انرژی جنبشی برای گسستن پیوندهای هسته‌های اتمی مصرف می‌شود؛ و در واپاشی معکوس بتا، انرژی جنبشی الکترون‌های تبهگن به انرژی جنبشی نوترینوهای الکترونی تبدیل می‌شود و این نوترینوها از هسته‌ی مرکزی ستاره فرار می‌کنند. فرایندهای جذب انرژی آن‌چنان مؤثرند که رمبش هسته‌ی مرکزی ستاره تقریباً بدون مخالفت صورت می‌گیرد. در واقع، هسته‌ی مرکزی می‌تواند تقریباً آزادانه تحت گرانش رمبیده شود. بنابر معادله‌ی (۱-۴)، مقیاس زمانی برای چنین رمبشی، البته اگر رمبش آغاز شده باشد، فقط به چگالی هسته‌ی مرکزی بستگی دارد. انتظار می‌رود چگالی در حدود  $10^{12} \text{ kg m}^{-3}$ ، و مدت زمان رمبش هسته‌ی مرکزی بسیار کوتاه باشد:

$$t_{FF} = \left[ \frac{3\pi}{32G\rho} \right]^{\frac{1}{2}} \approx 1 \text{ ms} \quad (29-6)$$

در سطرهای بعدی دو فرایند جذب انرژی را که می‌توانند این نوع رمبش انفجاری را باعث شوند، به اختصار شرح می‌دهیم.

## تجزیه‌ی نوری هسته‌ای

وقتی هسته‌ی مرکزی ستاره منقبض می‌شود، دما بالا می‌رود و نهایتاً مرحله‌ای پیش می‌آید که فوتون‌های گرمایی انرژی کافی برای تجزیه‌ی نوری هسته‌های آهن را به دست می‌آورند؛ هسته‌های بسیار مقید آهن به هسته‌های با تقید کم‌تر تبدیل می‌شوند، و انرژی جذب می‌شود. در محاسبات واقعی باید کل گستره‌ی هسته‌های ممکن را در نظر گرفت. با وجود این، بهتر است فرض کنیم که مرحله‌ای پیش آمده است که هسته‌های بسیار مقید  $^{56}\text{Fe}$  در کنار نوترون‌ها و دو هسته‌ی بسیار مقید  $^4\text{He}$  قرار دارند و عامل این همزیستی واکنش‌های مستقیم و معکوس زیر هستند



در قسمت بعدی ذره‌ی واکنش کننده را با عدد جرمی  $A$  آن مشخص می‌کنیم.

تجزیه‌ی نوری  $^{56}\text{Fe}$  یک واکنش گرماگیر است که انرژی زیر را جذب می‌کند

$$Q = (13m_4 + 4m_n - m_{56})c^2 = 124.4 \text{ MeV} \quad (31-6)$$

بنابراین، یک کیلوگرم آهن انرژی تقریبی  $2 \times 10^{14} \text{ J}$  را جذب می‌کند که این انرژی معادل ۵۰ کیلو تن TNT است.

کسری از آهن موجود در ستاره را که در یک دما و چگالی معین تجزیه می‌شود، با استفاده از روشی که برای یونش اتمی در فصل ۲ و سوختن هلیوم و سیلیسیوم در فصل ۴ به کار بردیم، می‌توانیم برآورد کنیم. در این جا فرض می‌کنیم که واکنش‌های (۳۰-۶) به تعادل ترمودینامیکی می‌رسند به طوری که پتانسیل‌های شیمیایی ذرات واکنش کننده در معادله‌ی زیر صدق می‌کنند

$$\mu_{56} = 13\mu_4 + 4\mu_n \quad (32-6)$$

بنابر معادله‌ی (۲-۲۱) یا معادله‌ی (۴-۵۱)، پتانسیل شیمیایی ذره‌ای با عدد جرمی  $A$  برابر است با

$$\mu_A = m_A c^2 - kT \ln \left[ \frac{g_A n_{QA}}{n_A} \right] \quad (33-6)$$

و چگالی عددی کوانتومی  $n_{QA}$  برابر است با

$$n_{QA} = \left[ \frac{2\pi m_A kT}{h^2} \right]^{\frac{3}{2}} \quad (۳۴-۶)$$

معلوم می‌شود که رابطه‌ی چگالی‌های عددی تعادلی ذرات واکنش‌کننده به صورت زیر است

$$\frac{(n_p)^{13} (n_n)^4}{n_{56}} = \frac{(g_p)^{13} (g_n)^4 (n_{Q_4})^{13} (n_{Q_1})^4}{g_{56} n_{Q_{56}}} \exp[-Q/kT] \quad (۳۵-۶)$$

ضرایب آماری  $g_A$  به تکانه‌ی زاویه‌ای ذره بستگی دارند. برای اسپین  $\frac{1}{2}$  نوترون،  $g_1 = 2$  است. برای هسته‌های  ${}^4\text{He}$  و  ${}^{56}\text{Fe}$  مقادیر  $g_4 = 1$  و  $g_{56} = 1$  را با این فرض در نظر می‌گیریم که تمام هسته‌های  ${}^4\text{He}$  و  ${}^{56}\text{Fe}$  در حالت پایه با اسپین صفر قرار دارند. بنابراین به آسانی می‌توان نشان داد که با توجه به معادله‌ی (۳۵-۶) وقتی چگالی و دمای هسته‌ی مرکزی ستاره به  $\rho = 10^{12} \text{ kg m}^{-3}$  و  $T = 10^9 \text{ K}$  می‌رسد، تقریباً سه چهارم آهن تجزیه می‌شود.

در دماهای بالاتر انتظار می‌رود هسته‌های  ${}^4\text{He}$  نیز از طریق واکنش‌های زیر تجزیه شوند



باز هم درجه‌ی تفکیک (تجزیه) را می‌توان با مساوی قرار دادن پتانسیل‌های شیمیایی به دست آورد؛ مسأله ۶-۲ در انتهای این فصل کتاب را ببینید.

حساب کردن انرژی کل جذب شده در این فرایندهای تجزیه‌ی نوری آسان است. به خاطر دارید که جرم هسته‌ی آهنی در حال رمبش ستاره قابل مقایسه با جرم چاندراسکار  $1.4 M_{\odot}$  است، لذا انرژی تقریبی  $4 \times 10^{44} \text{ J}$  در تجزیه‌ی نوری هسته‌های  ${}^{56}\text{Fe}$  و انرژی اضافی  $1 \times 10^{45} \text{ J}$  نیز توسط تجزیه‌ی نوری بعدی هسته‌های  ${}^4\text{He}$  جذب می‌شود. بنابراین، انرژی کل جذب شده در تجزیه‌ی نوری هسته‌ی آهنی ستاره و انرژی داده شده به نوترون‌ها و فوتون‌ها تقریباً برابر است با

$$E_{\text{photo}} \approx 1.4 \times 10^{45} \text{ J} \quad (۳۷-۶)$$

این مقدار انرژی قابل توجه است و معادل انرژی تابش شده توسط خورشید در یک دوره‌ی ۱۰ بیلیون ساله است. شکی نیست که جذب شدن این انرژی بسیار زیاد می‌تواند یک رمبش بدون کنترل در هسته‌ی مرکزی ستاره ایجاد کند.

## گیراندازی الکترون

در محیط‌های معمولی، یک نوترون ذره ناپایداری با نیم‌عمر  $10^7 \times 25$  دقیقه است. این ذره از طریق واپاشی بتا، به یک پروتون، یک الکترون و یک نوترینو تجزیه می‌شود:



الکترون و نوترینویی که در این واپاشی تولید می‌شوند، دارای انرژی ترکیبی  $1.3 \text{ MeV}$  هستند، که این انرژی با تفاضل انرژی معادل جرم یک نوترون و یک پروتون برابر است. بنابراین، وقتی نوترون‌ها واپاشی می‌کنند، الکترون‌ها با انرژی‌های تا  $1.3 \text{ MeV}$  تولید می‌شوند. نتیجه می‌گیریم که اگر الکترون‌ها با این انرژی‌ها نتوانند تولید شوند، نوترون‌ها قادر به واپاشی نیستند. برای رسیدن به این منظور، می‌توان نوترون‌ها را به گاز چگال متشکل از الکترون‌های تبهگن وارد کرد تا برطبق اصل طرد پائولی تمام حالت‌های الکترونی با انرژی بالاتر از  $1.3 \text{ MeV}$  به طور کامل اشغال شوند. چگالی این گاز الکترونی را با توجه به این امر می‌توان پیدا کرد که تکانه‌ی بیشینه‌ی یک الکترون در یک گاز تبهگن، یعنی تکانه‌ی فرمی، برابر است با

$$p_F = h \left[ \frac{3n_e}{8\pi} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (39-6)$$

و انرژی بیشینه، یعنی انرژی بیشینه‌ی الکترون برابر است با

$$\varepsilon_F^e = p_F^2 c^2 + m_e^2 c^4 \quad (40-6)$$

علاوه بر این، اگر گاز چگال‌تر باشد، الکترون‌ها با انرژی بالاتر از  $1.3 \text{ MeV}$  نیز وجود دارند و ممکن است توسط پروتون‌ها گیر بیفتند و برطبق فرایند واپاشی معکوس بتا، نوترون تولید کنند:



این تبدیل پروتون‌ها به نوترون‌ها را غالباً نوترون‌سازی (نوترونش) می‌نامند.

در عمل، پروتون‌ها در هسته‌ی مرکزی یک ستاره‌ی پرجرم تحول یافته، آزاد نیستند بلکه در هسته‌های اتمی مقیدند. با این حال، آن‌ها می‌توانند الکترون‌های پرانرژی را گیر بیندازند و نوترون به وجود آورند، و در حین این عمل، هسته‌هایی تولید کنند که دارای نوترون‌های زیادتری هستند. در هسته‌ی مرکزی ستاره‌ها نوترون‌سازی موقعی آغاز می‌شود که  $^{56}\text{Fe}$ ، یعنی ماده عمده، بتواند واپاشی معکوس بتا انجام دهد:





این امر از نظر انرژی موقعی ممکن می‌شود که چگالی هسته‌ی آهنی در حال انقباض به مقدار  $1.1 \times 10^{12} \text{ kg m}^{-3}$  رسیده باشد؛ در این چگالی انرژی فرمی الکترون‌ها با انرژی آستانه‌ی  $m_e c^2 + 3.7 \text{ MeV}$  مورد نیاز برای انجام واپاشی معکوس بتای  ${}^{56}\text{Fe}$ ، برابر است. معمولاً نتیجه‌ی واپاشی بتای  ${}^{56}\text{Mn}$  یک هسته‌ی  ${}^{56}\text{Fe}$  با نیم‌عمر  $2.6$  ساعت است، ولی در هسته‌ی مرکزی ستاره،  ${}^{56}\text{Mn}$  یک الکترون را از گاز تبهگن چگال جذب می‌کند و یک هسته‌ی  ${}^{56}\text{Cr}$  تشکیل می‌دهد. این هسته نیز هنگامی که چگالی به  $1.5 \times 10^{13} \text{ kg m}^{-3}$  می‌رسد، می‌تواند یک الکترون را گیر بیندازد.

اگر چگالی در هسته‌ی مرکزی ستاره از  $10^{14} \text{ kg m}^{-3}$  بیش‌تر شود، گیر افتادن الکترون در هسته‌ها توسط واپاشی معکوس بتا، تسریع می‌شود. نوترینوهای تولیدشده به‌طورضعیف با ماده برهم‌کنش، و انرژی ذخیره شده توسط الکترون‌های تبهگن را به بیرون منتقل می‌کنند. وقتی فشار ایجاد شده با این الکترون‌ها حذف می‌شود، هسته‌ی مرکزی ستاره سریعاً رمبیده می‌شود.

برآورد کردن اتلاف انرژی ناشی از گیراندازی الکترون در هسته‌ی مرکزی ستاره، آسان است. اولاً می‌دانیم که یک هسته‌ی آهنی هم جرم با جرم چاندرااسکار دارای تقریباً  $10^{57}$  الکترون است که می‌توانند  $10^{57}$  نوترینوی الکترونی تولید کنند. ثانیاً، فرض می‌کنیم که انرژی متوسط یک الکترون گیر افتاده در حدود  $10 \text{ MeV}$  است؛ این مقدار متناظر با انرژی متوسط یک الکترون تبهگن در حالتی است که چگالی هسته‌ی مرکزی ستاره  $2 \times 10^{13} \text{ kg m}^{-3}$  است.

بنابراین، انرژی کل تلف شده توسط گیراندازی الکترون، برابر است با

$$E_{cap} \approx 10^{57} \times (10 \times 1.6 \times 10^{-13}) = 1.6 \times 10^{45} \text{ J} \quad (۴۳-۶)$$

این انرژی به صورت انفجاری از نوترینوهای الکترونی از ستاره خارج می‌شود. اگر این نوترینوها آزادانه فرار کنند، طول عمر این انفجار قابل مقایسه با مدت زمان میلی ثانیه برای سقوط آزاد هسته‌ی مرکزی تحت اثر گرانش [معادله‌ی (۶-۲۹)] خواهد بود. با وجود این، اغلب این نوترینوها با ماده‌ی چگال تشکیل شده از هسته‌ی مرکزی رمبیده برهم‌کنش می‌کنند. در واقع، محاسبات نظری نشان می‌دهند که وقتی شعاع هسته‌ی مرکزی ستاره در حدود چند

کیلومتر و چگالی آن  $10^{14} \text{ kg m}^{-3}$  است، مسیر آزاد میانگین نوترینوها قابل مقایسه با اندازه‌ی هسته‌ی مرکزی خواهد بود. نوترینوها، که قبلاً از هسته‌ی مرکزی در حال انفجار خارج شده‌اند، اکنون در همان انفجار به تله می‌افتند. به این علت، اغلب نوترینوهای الکترونی تشکیل شده توسط گیراندازی الکترون، پیش از پخش شدن به طرف خارج هسته‌ی مرکزی رمبیده، به مدت چند ثانیه به تله می‌افتند.

### عراقب بعدی

دیدیم که گیراندازی الکترون و / یا تجزیه‌ی نوری می‌تواند رمبش هسته‌ی آهنی یک ستاره‌ی پرجرم را آغاز کند. این رمبش سریع و تقریباً بدون مخالفت صورت می‌گیرد تا آن‌که ستاره به چگالی قابل مقایسه با چگالی ماده‌ی هسته‌ای می‌رسد. این چگالی را می‌توان از فرمول معروف شعاع یک هسته‌ی متشکل از  $A$  نوکلئون، حساب کرد؛ شعاع هسته‌ی اتم برابر است با

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad \text{که در آن } r_0 = 1,2 \times 10^{-15} \text{ m} \quad (44-6)$$

چگالی چنین هسته‌ای برابر است با

$$\rho_{nuc} = \frac{3Am_N}{4\pi R^3} = \frac{3m_N}{4\pi r_0^3} = 2,3 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3} \quad (45-6)$$

در این رابطه  $m_N$  جرم نوکلئون است. واضح است که وقتی چگالی هسته‌ای به مقدار  $\rho_{nuc}$  می‌رسد، تبهگنی نوترونی و نیروهای هسته‌ای در هسته‌ی مرکزی پر از نوترون اهمیت پیدا می‌کنند. علاوه بر این، هنگامی که چگالی هسته‌ی مرکزی ستاره دو یا سه برابر چگالی ماده‌ی هسته‌ای معمولی می‌شود، نیروهای هسته‌ای با متراکم شدن مخالفت و رمبش را متوقف می‌کنند. در این صورت انتظار می‌رود هسته‌ی مرکزی ستاره شدیداً واجهد و یک موج ضربه تولید کند که از ماده‌ی ستاره‌ای در حال سقوط به طرف مرکز، عبور کند. محاسبات نظری نشان می‌دهند که این موج ضربه می‌تواند سقوط ماده‌ی ستاره‌ای اطراف هسته‌ی مرکزی به طرف داخل را معکوس کند و ماده را به طرف خارج، به صورت یک ابرنواختر<sup>۱</sup>، پرتاب کند.

ابرنواختر یک انفجار بسیار پرانرژی است: انرژی جنبشی مشاهده شده‌ی این انفجار در حدود  $10^{44}$  J و انرژی اپتیکی خارج شده از آن، در طول یک سال بعد از انفجار، از مرتبه‌ی  $10^{42}$  J است. در طبقه‌بندی رصدی مکان این انفجارها، به وجود یا عدم وجود خط‌های هیدروژن در طیف‌های اپتیکی آن‌ها توجه می‌شود: ابرنواختر نوع II دارای خط‌های هیدروژن است ولی ابرنواختر نوع I این خط‌ها را ندارد. آن‌ها تفاوت‌های دیگری نیز دارند: ابرنواختر نوع II غالباً با ستاره‌های جوان همراه است در حالی که ابرنواختر نوع I با ستاره‌های پیرتر همراه است؛ و کاهش درخشندگی ابرنواختر نوع II به صورت منظم و با تغییر زیاد صورت می‌گیرد در حالی که کاهش درخشندگی ابرنواختر نوع I معمولاً با تغییر کم و تدریجی صورت می‌گیرد.

رمبش هسته‌ی آهنی یک ستاره‌ی پرجرم، تقریباً علت اصلی به وجود آمدن یک ابرنواختر نوع II است. رمبش هسته‌ی مرکزی ستاره ممکن است مسئول به وجود آمدن ابرنواختر نوع I باشد، ولی به نظر می‌رسد اغلب ابرنواخترها از ترکیدن گرماسته‌ای یک ستاره تولید می‌شوند. این وضعیت مربوط به یک کوتوله‌ی سفید متشکل از کربن - اکسیژن است که می‌تواند با جذب کردن جرم از یک ستاره‌ی همسایه، جرم خود را افزایش دهد. وقتی جرم این کوتوله‌ی سفید از حد چاندراسکار  $1.4M_{\odot}$  بیش‌تر می‌شود، کوتوله متراکم می‌شود و همجوشی گرماسته‌ای کربن و اکسیژن را که تاکنون خاموش بوده‌اند، به راه می‌اندازد. چون این ماده تبهگن است، سازوکار کنترل‌کننده‌ی همجوشی مورد بحث در انتهای بخش ۱-۴، به راه نمی‌افتد. یادآوری می‌کنیم که آزاد شدن انرژی در یک ستاره باعث منبسط شدن ستاره و همراه با آن باعث کاهش انرژی جنبشی داخلی آن می‌شود. کاهش انرژی جنبشی داخلی طبیعتاً دما و آهنگ همجوشی را کاهش می‌دهد. اما در یک ماده‌ی تبهگن، انرژی الکترون‌های تبهگن را کاهش می‌دهد و اثر کمی روی دما دارد، در نتیجه آهنگ همجوشی بدون کنترل می‌ماند. بنابراین، گیرانش ناگهانی همجوشی گرماسته‌ای در یک کوتوله‌ی سفید، یک بمب همجوشی به اندازه‌ی یک ستاره ایجاد می‌کند. در نتیجه کوتوله‌ی سفید تقریباً به طور کامل منفجر می‌شود و هیچ هسته‌ی مرکزی از آن باقی نمی‌ماند.

اکنون به رمبش هسته‌ی آهنی یک ستاره‌ی پرجرم برمی‌گردیم. رمبش، واجهش و موج ضربه‌ی مربوط به آن، هر سه دارای فیزیک پیچیده‌ای هستند. همان‌طور که خواهیم دید، در یک لحظه مقدار بسیار زیادی انرژی گرانشی آزاد می‌شود. اما معلوم نیست چه مقدار انرژی و تکانه به لایه‌های خارجی ستاره منتقل می‌شود، و به هیچ وجه نمی‌دانیم که رمبش هسته‌ی مرکزی همیشه به تولید شدن یک ابرنواختر منجر می‌شود یا خیر. با این حال، انتظار می‌رود نتیجه‌ی رمبش باقی ماندن یک هسته‌ی مرکزی، یعنی یک ستاره‌ی نوترونی یا یک ستاره‌ی نوترونی پرجرمی بشود که این ستاره می‌رمبد و به یک سیاهچاله تبدیل می‌شود. در قسمت‌های بعدی این فصل کتاب، ستاره‌های نوترونی را با دقت و سیاهچاله‌ها را با اختصار بررسی خواهیم کرد. در این‌جا فعلاً توجه خود را به انرژی تشکیل شدن یک ستاره‌ی نوترونی، یعنی انرژی که در هنگام تشکیل شدن یک ستاره‌ی نوترونی آزاد می‌شود، معطوف می‌کنیم. ضمناً نشان می‌دهیم که آتش‌بازی همراه با هر ابرنواختری، از دیدگاه انرژی، یک موضوع فرعی بی‌معنی است.

انرژی تشکیل شدن یک ستاره‌ی نوترونی عمدتاً از تغییر بستگی گرانشی ناشی از رمبش هسته‌ی مرکزی حساب می‌شود. درست پیش از رمبش، یک هسته‌ی مرکزی با جرمی قابل مقایسه با جرم خورشید و شعاعی در حدود  $1000 \text{ km}$  داریم. پس از رمبش، یک ستاره‌ی نوترونی با جرمی در حدود خورشید اما با شعاعی در حدود  $10 \text{ km}$  داریم. بستگی گرانشی آغازی ناچیز است و انرژی گرانشی آزاد شده در این رمبش همان انرژی بستگی گرانشی ستاره‌ی نوترونی است. برای یک ستاره‌ی نوترونی به جرم  $M$  و شعاع  $R$ ، این انرژی بستگی تقریباً برابر است با

$$E_B \approx \frac{GM^2}{R} = 3 \times 10^{46} \left[ \frac{M}{M_{\odot}} \right]^2 \left[ \frac{10 \text{ km}}{R} \right] \text{ J} \quad (46-6)$$

تأکید می‌کنیم که انرژی تشکیل شدن که از معادله‌ی (۴۶-۶) به دست می‌آید،  $10$  برابر انرژی لازم برای تجزیه‌ی نوری هسته‌های آهنی در هسته‌ی مرکزی ستاره است؛ به معادله‌ی (۳۷-۶) رجوع کنید. ضمناً این انرژی  $10$  برابر انرژی تلف‌شده در گیراندازی الکترون است؛ به معادله‌ی (۴۳-۶) رجوع کنید. علاوه بر این، این انرژی بسیار بیش‌تر از انرژی مربوط به اثرهای جنبشی

و مرئی هر ابرنواختری است که ممکن است بر اثر رمبش تولید شده باشد. انرژی جنبشی نوعی بقایای یک ابرنواختر فقط  $10^{44}$  J است. بنابراین، در هنگام تشکیل شدن یک ستاره‌ی نوترونی بر اثر رمبش هسته‌ی مرکزی، ما باید در حدود ۹۰٪ انرژی آزاد شده را به حساب آوریم. پیش از تشکیل شدن یک ستاره‌ی نوترونی متراکم، باید یک مرحله‌ی میانی مهم وجود داشته باشد، مرحله‌ای که با اتلاف انرژی تقریبی  $3 \times 10^{46}$  J، معادل انرژی بستگی نوعی یک ستاره‌ی نوترونی، مشخص می‌شود.

به نظر می‌رسد که این مرحله‌ی میانی تشکیل شدن یک ستاره‌ی نوترونی داغ و متورم باشد که بر اثر گسیل نوترینوها سرد و متراکم می‌شود. این ستاره‌ی نوترونی متورم تقریباً یک پلاسمای چگال از نوترون‌ها، پروتون‌ها، هسته‌ها، الکترون‌ها، فوتون‌ها و نوترینوها است که بر اثر گرانش در کنار هم نگه داشته شده‌اند؛ دما و چگالی نوعی این پلاسمای از مرتبه‌ی  $10^{11}$  K و  $10^{14}$  kgm<sup>-3</sup> است. این پلاسمای نسبت به فوتون‌ها کاملاً تیره است و انرژی کمی توسط تابش‌های الکترومغناطیسی از آن فرار می‌کند. در عوض، سرد شدن این پلاسمای با گسیل نوترینوها صورت می‌گیرد. این ذرات با برهم کنش ضعیف، پیش از برهم کنش می‌توانند چندین متر در پلاسمای حرکت کنند. این ذره‌ها با فرایند گشت تصادفی، که در بخش ۱-۴ مورد بحث قرار گرفت، از ستاره‌ی نوترونی فرار می‌کنند. اگر مسیر آزاد میانگین آن‌ها  $\bar{\lambda}$  باشد، پیش از فرار از سطح ستاره‌ای به شعاع  $R$ ، در حدود  $R^2/l^2$  مرتبه برهم کنش می‌کنند. بنابراین، مدت زمان فرار از مرتبه‌ی  $R^2/c$  است.

فقط کسری از نوترینوهای فراری از گیراندازی الکترون به وجود می‌آیند. بنابراین، ستاره‌ی نوترونی داغ و متورم آن قدر داغ است که تعداد زیادی زوج نوترینو - پادنوترینو تولید می‌شوند. ساده‌ترین سازوکار تولید، نابودی یک زوج الکترون - پوزیترون است که به اختصار در بخش ۲-۶ مورد بحث قرار گرفت، اما سازوکارهای دیگری، مانند واپاشی پلاسمونی، تولید نوترینوی فوتونی و پرتوترمزی نوترینویی نیز اهمیت دارند.

سه نوع زوج نوترینو - پادنوترینو می‌توانند تولید شوند. این زوج‌ها را به صورت  $\bar{\nu}_e, \nu_e$  و  $\bar{\nu}_\mu, \nu_\mu$  و  $\bar{\nu}_\tau, \nu_\tau$  نشان می‌دهند. نوترینوی  $\nu_e$  با آشناترین لپتون، یعنی الکترون همراه

است. نوترینوهای  $\nu_\tau$  و  $\nu_\mu$  با ذرات سنگین باردار ناپایدار به نام‌های میوئون<sup>۱</sup> و تائون<sup>۲</sup>، ذراتی که بسیار شبیه الکترون‌ها ولی با جرم‌های  $106\text{MeV}/c^2$  و  $1784\text{MeV}/c^2$ ، همراه هستند. پادنوترینوهای  $\bar{\nu}_e$ ،  $\bar{\nu}_\mu$  و  $\bar{\nu}_\tau$  به ترتیب با پادالکترون (پوزیترون)، پادمیوئون و پادتائون همراه هستند. انواع مختلف نوترینوها و پادنوترینوها بسیار مشابه‌اند. همه‌ی آن‌ها فرمیون‌های<sup>۳</sup> با برهم کنش ضعیف هستند و جرمشان صفر یا بسیار کم است. با وجود این، آن‌ها با یک‌دیگر تفاوت دارند و این تفاوت را با چگونگی برهم کنش آن‌ها می‌توان نشان داد. برای مثال، یک برهم کنش ضعیف می‌تواند یک  $\nu_e$  را به یک الکترون تبدیل کند، اما آن را به یک میوئون یا تائون تبدیل نمی‌کند.

چون جرم‌های این نوترینوها صفر یا بسیار کم است، هر سه زوج نوترینو - پادنوترینو توسط فرایندهای گرمایی در ستاره‌ی نوترونی داغ تولید می‌شوند. به طور کلی شش نوع ذره با برهم کنش ضعیف، تولید می‌شوند:  $\nu_e$ ،  $\bar{\nu}_e$  و  $\nu_\mu$ ،  $\bar{\nu}_\mu$  و  $\nu_\tau$ ،  $\bar{\nu}_\tau$ . این ذره‌ها قسمت اعظم انرژی بستگی ستاره‌ی نوترونی را از آن خارج می‌کنند. علاوه بر این انتظار می‌رود هر یک از این شش نوع ذره با برهم کنش ضعیف، تقریباً  $\frac{1}{9}$  انرژی بستگی ستاره را حمل کنند. بنابراین، اگر انرژی بستگی ستاره‌ی نوترونی  $3 \times 10^{46} \text{J}$  باشد، هر نوع نوترینو انرژی تقریبی  $0.5 \times 10^{46} \text{J}$  را حمل می‌کند. مدت زمان این فرایند سرد شدن، مدت زمان لازم برای نفوذ کردن یک نوترینو در سطح ستاره‌ی نوترونی است. این مدت زمان از مرتبه‌ی  $R^2/\bar{t}c$  است. به‌طور خلاصه، نشانه‌ی درست عواقب بعدی رمبش هسته‌ی مرکزی یک ستاره، تولید شدن یک ابرنواختر نیست بلکه تولید شدن تپ شدیدی از نوترینوها است. مشاهده‌ی انرژی این نوترینوها و مدت زمان تپ معلوم می‌کند که چگونه رمبش گرانشی با فرایندهای برهم کنش ضعیف صورت می‌گیرد.

آشکارسازی نوترینوهای ناشی از رمبش هسته‌ی مرکزی یک ستاره، مسأله‌ی پیچیده‌ای است. اگر نوترینوها بتوانند از یک ستاره‌ی نوترونی داغ فرار و در لایه‌های خارجی ستاره‌ی در حال رمبش نفوذ کنند، از هردستگاه آشکارسازی نیز عبور می‌کنند. مشکل مشابه در آشکارسازی

نوترینوهای خارج شده از خورشید نیز وجود داشت، که در بخش ۴-۲ مورد بحث قرار گرفت. اما روش‌های آشکارسازی نوترینوهای ناشی از رمبش هسته‌ی مرکزی ستاره، متفاوت و تا حدی آسان‌تر است، زیرا این نوترینوها بسیار پرانرژی‌تر از نوترینوهای خورشیدی هستند. از این روش‌ها اولین بار در ۲۳ فوریه سال ۱۹۸۷ با موفقیت استفاده شد؛ در آن موقع دو آشکارساز زمینی سنگین، آشکارساز کامیوکانده (KII) II<sup>۱</sup> در ژاپن و آشکارساز ایروین - میشیگان - بروکهاون (IMB)<sup>۲</sup> در ایالات متحده، نوترینوهای ناشی از ابرنواختر SN1987A را آشکار کردند.

طراحی آشکارسازهای KII و IMB مشابه بود و هر دوی آن‌ها شامل حجم زیادی آب بسیار خالص بودند که هزاران لامپ تکثیر کننده‌ی نور در اطراف آن قرار داشتند. ترکش نوترینویی ناشی از ابرنواختر SN1987A از طریق واکنش زیر آشکار می‌شد

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+ \quad (۶-۴۷)$$

اگر پوزیترون‌ها با سرعتی بیش از سرعت فاز نور در آب بازتابند، تابش چرنکوف<sup>۳</sup> گسیل می‌کنند که با لامپ‌های تکثیر کننده‌ی نور واقع در اطراف آب، آشکار می‌شود. واکنش جذب  $\bar{\nu}_e$  [معادله‌ی (۶-۴۷)] محتمل‌ترین واکنش برای نوترینوها و پادنوترینوهای ناشی از ابرنواختر هستند. در آزمایش فوق از هر  $10^{15}$  ذره‌ی  $\bar{\nu}_e$  فرودی فقط یک ذره آشکار شد. داده‌های مربوط به آشکارسازهای KII و IMB در شکل ۶-۳ نشان داده شده‌اند.

اولاً متذکر می‌شویم که فقط ۲۰ نوترینو آشکار شد. ثانیاً، همان‌طور که شکل ۶-۳ نشان می‌دهد، مدت زمان تپ در حدود ۱۰ ثانیه بود. این مدت زمان را می‌توان با  $R^2 / \bar{t}c$  مشخص کرد که مدت زمان لازم برای عبور یک نوترینو با مسیر آزاد میانگین  $\bar{t}$  از یک ستاره‌ی نوترونی در حال سرد شدن (به شعاع  $R$ ) است. برای مثال، اگر  $R = 10^4 \text{ km}$  و  $\bar{t} = 10^{-4} \text{ s}$  باشد، مدت زمانی با همان مرتبه‌ی بزرگی به دست می‌آید.

ثالثاً، وقتی کارایی آشکارساز و فاصله‌ی ابرنواختر SN1987A، در حدود ۵۰ kpc را در نظر می‌گیریم، انرژی کل تابش  $\bar{\nu}_e$  بین  $0.7 \times 10^{46} \text{ J}$  و  $0.5 \times 10^{46} \text{ J}$  به دست می‌آید که در حدود

1. Kamio kande

2. Irvine-Michigan-Brookhaven

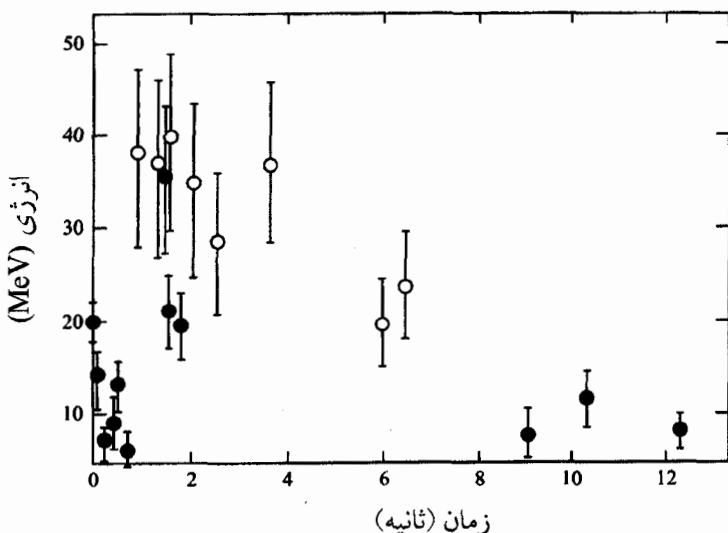
3. Cerenkov

$\frac{1}{6}$  انرژی بستگی یک ستاره‌ی نوترونی است و با داده‌های شکل ۳-۶ سازگار است.

بالاخره، انرژی‌های مشاهده شده‌ی نوترینوهای آشکار شده، با طیف انرژی ناشی از یک تابشگر نوترینویی «جسم سیاه» در دمای مؤثر  $T_E \approx 5 \times 10^9 \text{ K}$  سازگار است؛ این دما چند ده میلیون برابر دمای مؤثر سطح خورشید است<sup>۱</sup>. در واقع، بسیاری از بحث‌های کیفی به کار رفته در فصل ۱ برای توصیف نحوه‌ی نفوذ فوتون‌های خورشیدی، در مورد نفوذ نوترینوهای ناشی از یک ستاره‌ی نوترینویی در حال سرد شدن نیز معتبرند. به ویژه با استفاده از معادله‌ی (۱-۳۵) می‌توانیم رابطه‌ی تقریبی بین دمای داخلی نوعی  $T_I$  و دمای سطحی مؤثر  $T_E$  یک ستاره‌ی نوترونی در حال سرد شدن را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$T_E \approx \left[ \frac{I}{R} \right]^{\frac{1}{4}} T_I \quad (۴۸-۶)$$

اگر فرض کنیم که مسیر آزاد میانگین مشخصه برای نوترینوهای داخل یک ستاره‌ی نوترونی



شکل ۳-۶ انرژی و مدت زمان رسیدن نوترینوهای ابرنواختر SN1987A هنگام ثبت شدن با آشکارسازهای کامیوکانده II و IMB. در کل ۲۰ نوترینو آشکار شد و مدت زمان تپ نوترینویی در حدود ۱۰ ثانیه بود.

۱. در مسأله‌ی ۳-۶ انتهای این فصل کتاب از شما خواسته شده است تا نشان دهید که انرژی متوسط نوترینوهای ناشی از چنین تابشگری در دمای  $T$  مساوی با  $3/15 kT$  است.



در حال سرد شدن  $R^{-4}$  باشد (این عدد با مدت زمان مشاهده شده‌ی تپ نوترینویی سازگار است)، در نتیجه دمای داخلی نوعی ستاره بین  $10^{11} \text{K}$  و  $10^{12} \text{K}$  به دست می‌آید. به‌طور کلی، آشکار شدن  $20$  نوترینوی ناشی از ابرنواختر SN1987A توسط آشکارسازهای KII و IMB، بسیاری از باورهای مورد انتظار نظری مربوط به عواقب رمبش هسته‌ی آهنی یک ستاره‌ی پرجرم را مورد تأیید قرار داد. این رویداد یکی از جالب‌ترین حوادث اختریفیزیکی قرن بود. این امر باعث شد شاخه‌ی جدیدی از ستاره‌شناسی به نام ستاره‌شناسی نوترینویی فراکیهانی به وجود آید. مدیران پژوهش‌های علمی باید توجه کنند که هر دو آشکارساز KII و IMB برای منظور دیگری، یعنی برای مشاهده‌ی واپاشی پروتون، طراحی و ساخته شده بودند.

### ۳-۶ ستاره‌های نوترونی

یک ستاره‌ی نوترونی به صورت بقایای داغ هسته‌ی مرکزی رمبیده‌ی یک ستاره‌ی پرجرم متولد می‌شود. دمای داخلی این ستاره در آغاز بین  $10^{11} \text{K}$  و  $10^{12} \text{K}$  است. این ستاره بر اثر گسیل نوترینوها سریعاً سرد می‌شود و انتظار می‌رود در مدت یک روز به دمایی از مرتبه‌ی  $10^9 \text{K}$  و در مدت  $100$  سال به دمایی از مرتبه‌ی  $10^8 \text{K}$  برسد. از نظر استانداردهای زمینی و خورشیدی، این دماها خیلی زیادند ولی در مقایسه با استانداردهای مربوط به چگالی‌های زیاد ماده‌ی داخل یک ستاره‌ی نوترونی، دماهای کمی هستند؛ الکترون‌ها، پروتون‌ها و تمام نوترون‌های داخل یک ستاره‌ی نوترونی تبهگن هستند و پایین‌ترین حالت‌های ممکن سازگار با اصل طرد پائولی را اشغال می‌کنند. اکنون به تشریح رابطه‌ی ماهیت ماده‌ی داخل یک ستاره‌ی نوترونی با چگالی آن می‌پردازیم.

### ماده‌ی داخل ستاره‌های نوترونی

در محیط‌های معمولی، پایدارترین شکل ماده‌ی هسته‌ای شامل هسته‌های حوالی  $^{56}\text{Fe}$  در جدول تناوبی است. هسته‌های کم‌جرم پایداری کم‌تری دارند زیرا کسر بیش‌تری از نوکلئون‌های آن‌ها در نزدیکی سطح قرار دارند، و هسته‌های سنگین‌تر نیز پایداری کم‌تری دارند زیرا اثر

دفاعی کولنی بین پروتون‌ها بیش‌تر است. بهترین ماده، با کم‌ترین انرژی بستگی هر نوکلئون، حوالی  ${}^{56}\text{Fe}$  است.

این ماده به خاطر وجود الکترون‌های نسبتی تغییر یافته است. همان‌طور که در بخش ۶-۲ توضیح داده شد، الکترون‌های تبهگن در یک ستاره‌ی رمبیده انرژی کافی برای القای واپاشی معکوس بتا را دارند. در نتیجه پروتون‌ها به نوترون‌ها تبدیل شده‌اند و هسته‌های پرنوترون تشکیل شده‌اند. در این صورت نیروهای کولنی اهمیت کم‌تری دارند و هسته‌های پرنوترون سنگین‌تر از  ${}^{56}\text{Fe}$ ، از نظر انرژی مناسب‌ترند. برای مثال، به نظر می‌رسد  ${}^{78}\text{Ni}$  و  ${}^{56}\text{Fe}$  پایدارترین هسته‌ها در گاز الکترونی در چگالی حدود  $10^{14}\text{ kg m}^{-3}$ ، باشند.

وقتی چگالی از  $4 \times 10^{14}\text{ kg m}^{-3}$  بیش‌تر می‌شود، پدیده‌ی جدیدی به نام بارش نوترونی صورت می‌گیرد. نوترن‌ها از هسته‌های پرنوترون می‌بارند به طوری که نوترون‌های آزاد، هسته‌ها و الکترون‌ها در حال تعادل با یکدیگر «زندگی» می‌کنند. معادله‌ی حالت این شکل ماده برای چگالی‌های کم‌تر از  $\rho_{nuc} = 2.3 \times 10^{17}\text{ kg m}^{-3}$ ، یعنی چگالی ماده‌ی هسته‌ای معمولی، به خوبی شناخته شده است. در چگالی‌های بالاتر، هسته‌ها در یک‌دیگر فرو می‌روند و یک گاز چگال متشکل از الکترون‌ها، پروتون‌ها و نوترون‌ها تشکیل می‌شود. در این صورت معادله‌ی حالت بستگی شدیدی به برهم‌کنش بین نوکلئون‌ها پیدا می‌کند، که برهم‌کنش پیچیده و ناشناخته‌ای است. در چگالی‌های حدود  $10^{18}\text{ kg m}^{-3}$ ، پیچیدگی‌ها و عدم قطعیت‌ها بیش‌تر می‌شود به طوری که از نظر انرژی تولید پیون‌ها، میون‌ها و هیپرون‌ها امکان‌پذیر می‌شود. در چگالی‌های بالاتر از این، حتی انتظار می‌رود درجه‌ی آزادی کوآرک‌ها نیز نقش داشته باشد.

برای فهمیدن این امر که چرا نوترون‌ها ذره‌ی غالب ستاره‌های نوترونی هستند، ناشیانه از برهم‌کنش‌ها چشمپوشی می‌کنیم و یک گاز ایده‌آل متشکل از الکترون‌ها، پروتون‌ها و نوترون‌های تبهگن را در نظر می‌گیریم. در چگالی‌های بالا، نوترون‌ها در این گاز وجود دارند زیرا واپاشی معمولی بتا، یعنی  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  برطبق اصلی طرد پائولی صورت نمی‌گیرد؛ این واپاشی انجام نمی‌شود زیرا گسیل یک پروتون یا یک الکترون باید از حالتی صورت گیرد که قبلاً به طور کامل اشغال شده است.

بهتر است واپاشی ممکن یکی از پرنرژی‌ترین نوترون‌های موجود را در نظر بگیریم که انرژی آن با انرژی فرمی نوترون،  $\varepsilon_F(n)$ ، برابر است. اگر انرژی‌های پروتون و الکترون گسیل شده، از انرژی‌های فرمی پروتون و الکترون یعنی از  $\varepsilon_F(p)$  و  $\varepsilon_F(e)$  کم‌تر باشد، چنین نوترونی نمی‌تواند واپاشی کند. نتیجه می‌گیریم که تمام نوترون‌ها با انرژی‌های بالاتر از  $\varepsilon_F(n)$  به شرطی برطبق اصل پائولی پایدار می‌شوند که:

$$\varepsilon_F(n) < \varepsilon_F(p) + \varepsilon_F(e) \quad (۴۹-۶)$$

برعکس، نوترون‌ها با شرط زیر می‌توانند واپاشی بتا انجام دهند

$$\varepsilon_F(n) > \varepsilon_F(p) + \varepsilon_F(e) \quad (۵۰-۶)$$

در واقع، در حال تعادل بودن نوترون‌ها، پروتون‌ها و الکترون‌ها در دمای صفر با شرط زیر مشخص می‌شود

$$\varepsilon_F(n) = \varepsilon_F(p) + \varepsilon_F(e) \quad (۵۱-۶)$$

با توجه به این‌که پتانسیل شیمیایی یک گاز فرمی در دمای صفر همان انرژی فرمی است، همین نتیجه را می‌توان به دست آورد. بنابراین، معادله‌ی (۵۱-۶) رابطه‌ی بین پتانسیل‌های شیمیایی است که تعادل برقرار شده در دمای صفر را توسط فرایندهای زیر مشخص می‌کند

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad \text{و} \quad e^- + p \rightarrow n + \nu_e \quad (۵۲-۶)$$

در این‌جا نوترینوها نقشی بازی نمی‌کنند زیرا آن‌ها فرار می‌کنند.

چگالی‌های عددی تعادلی نوترون‌ها، پروتون‌ها و الکترون‌ها،  $n_n$ ،  $n_p$  و  $n_e$ ، را که در معادله‌ی (۵۱-۶) صدق می‌کنند، با توجه به این نکته می‌توان پیدا کرد که تکانه‌ی فرمی یک ذره برطبق معادله‌ی (۲۷-۲) به چگالی عددی آن بستگی دارد:

$$p_F = \left[ \frac{3n}{8\pi} \right]^{\frac{1}{3}} h \quad (۵۳-۶)$$

وقتی چگالی از مرتبه‌ی  $\rho_{nuc}$  است، نوترون‌ها و پروتون‌ها تقریباً غیرنسبیتی هستند و رابطه‌ی انرژی‌های فرمی و تکانه‌های آن‌ها به صورت زیر است

$$\varepsilon_F(n) \approx m_n c^2 + \frac{p_F(n)^2}{2m_n} \quad \text{و} \quad \varepsilon_F(p) \approx m_p c^2 + \frac{p_F(p)^2}{2m_p} \quad (۵۴-۶)$$

با وجود این، الکترون‌های سبک فرانسبیتی‌اند و رابطه‌ی بین انرژی فرمی الکترون و تکانه‌ی الکترون به صورت زیر است

$$\varepsilon_F(e) \approx p_F(e)c \quad (۵۵-۶)$$

با توجه به این که ماده‌ی ستاره‌های نوترونی خنثی است، به ازای تعداد مساوی الکترون‌ها و پروتون‌ها،  $n_e = n_p$  را قرار می‌دهیم و رابطه‌ی بین تعداد نوترون‌ها و پروتون‌ها در گاز ایده‌آل در حال تعادل را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\left[ \frac{3n_p}{8\pi} \right]^{\frac{1}{3}} hc + \left[ \frac{3n_p}{8\pi} \right]^{\frac{1}{3}} \frac{h^2}{2m_p} - \left[ \frac{3n_n}{8\pi} \right]^{\frac{1}{3}} \frac{h^2}{2m_n} \approx m_n c^2 - m_p c^2 \quad (۵۶-۶)$$

چون اختلاف جرم نوترون - پروتون  $1/3 \text{ MeV}/c^2$  است، پیدا کردن تعداد نسبی نوترون‌ها و پروتون‌ها در هر چگالی معین آسان است. برای مثال، در یک ستاره‌ی نوترونی با چگالی نوعی  $\rho = 2 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$ ، مقادیر  $n_n \approx 1 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$  و  $n_e = n_p \approx n_n / 200$  به دست می‌آیند، یعنی به ازای هر ۲۰۰ نوترون یک الکترون می‌تواند مانع واپاشی نوترون شود. نتیجه می‌گیریم که نوترون‌ها غالب‌ترین ذره‌ی تشکیل دهنده‌ی ماده‌ی ستاره‌ی نوترونی در چگالی‌های مرتبه‌ی  $10^{17} \text{ kg m}^{-3}$  هستند.

### اندازه‌ی ستاره‌های نوترونی

اکنون مدل گاز تبهگن ایده‌آل ساده برای ماده‌ی داخل یک ستاره‌ی نوترونی را با دقت بیشتری بررسی و رابطه‌ی چگالی مرکزی و شعاع ستاره با جرم آن را مطالعه می‌کنیم. برای انجام ساده‌ی این کار می‌توانیم از تحلیل مربوط به کوتوله‌های سفید در بخش ۶-۱ استفاده کنیم. در این تحلیل فرض کردیم که کوتوله‌ی سفید با فشار یک گاز ایده‌آل متشکل از الکترون‌های تبهگن حفظ می‌شود. اکنون فرض می‌کنیم که یک ستاره‌ی نوترونی با فشار یک گاز ایده‌آل متشکل از نوترون‌های تبهگن حفظ می‌شود.

چون نوترون‌ها غالب‌ترین ذره‌ی تشکیل دهنده‌ی ستاره هستند، چگالی عددی نوترون‌ها مستقیماً از چگالی جرمی ستاره حساب می‌شود. در مرکز یک ستاره داریم

$$n_n \approx \frac{\rho_c}{m_n} \quad (۵۷-۶)$$

معادله‌ی متناظر برای یک کوتوله‌ی سفید، معادله‌ی (۶-۱) است. معادلات مربوط به کوتوله‌ی سفید، یعنی معادلات (۶-۲) تا (۶-۴) را طوری می‌توان اصلاح کرد که بتوانند تعادل هیدروستاتیکی یک ستاره‌ی نوترونی را توصیف کنند؛ برای این منظور به جای جرم الکترون باید جرم نوترون را قرار داد و  $Y_e$  را مساوی با یک انتخاب کرد. در ضمن، از اختلاف جرم اتم هیدروژن  $m_H$  و جرم نوترون  $m_n$  چشمپوشی می‌کنیم؛ مقدار این اختلاف کم‌تر از ۱٪ است. به این ترتیب، نتیجه می‌گیریم که گاز نوترون‌های غیرنسبیتی تبهگن به شرطی می‌تواند یک ستاره‌ی نوترونی به جرم  $M$  را حفظ کند که چگالی آن برابر باشد با

$$\rho_c \approx 3 \left[ \frac{M}{M_*} \right]^2 \frac{m_n}{(h/m_n c)^3} \quad (۵۸-۶)$$

جرم بنیادی ستاره‌ای  $M_*$  از معادله‌ی (۶-۵) به دست می‌آید ولی در مورد یک ستاره‌ی نوترونی، بهتر است آن را برحسب جرم نوترون و به صورت زیر بیان کنیم

$$M_* = \alpha_G^{-\frac{1}{2}} m_n = 1.85 M_\odot \quad (۵۹-۶)$$

شعاع ستاره‌ی نوترونی را می‌توان با استفاده از معادله‌ی (۶-۲۰) به دست آورد

$$R \approx 0.77 \left[ \frac{M_*}{M} \right]^{\frac{1}{3}} \alpha_G^{-\frac{1}{2}} \frac{h}{m_n c} \quad (۶۰-۶)$$

یادآوری می‌شود که اندازه‌ی مشخصه‌ی یک ستاره‌ی نوترونی قبلاً با معیار بدون بعد شدت گرانس،  $\alpha_G = 5.9 \times 10^{-39}$ ، و طول موج کامپتون نوترون،  $h/m_n c = 1.3 \times 10^{-15} \text{ m}$  به دست آمده است. این اندازه‌ی مشخصه برابر است با

$$\alpha_G^{-\frac{1}{2}} \frac{h}{m_n c} \approx 17 \text{ km} \quad (۶۱-۶)$$

این مقدار تقریباً ۲۰۰۰ بار کوچک‌تر از اندازه‌ی نوعی یک کوتوله‌ی سفید است که از معادله‌ی (۶-۲۱) به دست می‌آید.

تأکید روی این نکته مهم است که رابطه‌ی (۶-۶۰) برای شعاع یک ستاره‌ی نوترونی بسیار تقریبی است و به تعداد فرض‌های اشتباه‌آمیز ما بستگی دارد. به ویژه، از برهم کنش بین

نوترون‌ها در چگالی زیاد ستاره‌های نوترونی، نمی‌توان چشمپوشی کرد. علاوه بر این، اثرهای نسبیتی می‌توانند مهم باشند. در واقع، وقتی چگالی گاز نوترونی به  $m_n (h/m_n c)^3$  می‌رسد، تکانه‌ی نوترون‌ها در یک گاز تبهگن قابل مقایسه با  $m_n c$  می‌شود و در نتیجه معادله‌ی (۶-۵۸) ایجاب می‌کند که اثرهای نسبیتی فقط در ستاره‌های نوترونی با جرم بسیار کم‌تر از  $M_*$  بی‌اهمیت باشند. علاوه بر این، میدان‌های گرانشی در ستاره‌های نوترونی بسیار قوی هستند و فقط از نظریه‌ی اینشتین در مورد گرانش، و نه نظریه‌ی نیوتون، باید برای برقراری شرایط تعادل هیدروستاتیکی استفاده می‌شود. یک شاخص برای استفاده از گرانش نیوتونی با تقریب مناسب، کوچک بودن نسبت انرژی پتانسیل گرانشی به انرژی جرم حالت سکون یک ذره در سطح یک ستاره‌ی نوترونی است. با استفاده از معادله‌ی (۶-۶۰)، این نسبت به صورت زیر به دست می‌آید

$$\frac{GM}{Rc^2} \approx 0.12 \left[ \frac{M}{M_*} \right]^{\frac{4}{3}} \quad (۶۲-۶)$$

نتیجه می‌گیریم که اگر جرم ستاره‌ی نوترونی در مقایسه با  $M_*$  کوچک باشد، میدان‌های گرانشی فقط نیوتونی هستند.

علی‌رغم وجود این شباهت درباره‌ی دقت معادله‌ی (۶-۶۰)، این معادله‌ی شعاع یک ستاره نوترونی، می‌تواند مقادیر مفیدی را برای بعضی خواص مهم ستاره‌ی نوترونی به دست بدهد.

### انرژی بستگی گرانشی ستاره‌های نوترونی

در بخش ۶-۲ دیدیم که انرژی بستگی گرانشی یک ستاره‌ی نوترونی، خاصیت مهمی است. این انرژی تقریباً با انرژی که در هنگام رمبش هسته‌ی مرکزی ستاره به صورت تابش نوترینویی گسیل می‌شود، برابر است. این انرژی بستگی را به راحتی می‌توان برآورد کرد. با استفاده از معادله‌ی (۶-۶۰) یا مستقیماً با استفاده از معادله‌ی (۶-۶۲)، معلوم می‌شود که انرژی بستگی یک ستاره‌ی نوترونی به جرم  $M$  تقریباً برابر است با

$$E_B \approx \frac{GM^2}{R} \approx 0.12 \left[ \frac{M}{M_*} \right]^{\frac{4}{3}} M_* c^2 = \left[ \frac{M}{M_*} \right]^{\frac{4}{3}} 7 \times 10^{46} \text{ J} \quad (۶۳-۶)$$

این انرژی با مقداری که برای محاسبه‌ی انرژی تشکیل شدن ستاره‌های نوترونی در بخش ۶-۲ برآورد کردیم، سازگار است؛ به معادله‌ی (۶-۴۶) رجوع کنید. ضمناً متوجه می‌شویم که اگر جرم ستاره‌ی نوترونی در مقایسه با  $M_*$  کوچک باشد، انرژی بستگی ستاره فقط در مقایسه با انرژی جرم در حال سکون آن کوچک خواهد بود. این هم شاخص دیگری برای مهم بودن اثرهای نسبیتی در ستاره‌های نوترونی پرجرم است.

### ستاره‌های نوترونی چرخان و تپ اخترها

بعد از کشف شدن نوترون در سال ۱۹۳۲ توسط چادویک<sup>۱</sup>، به زودی امکان وجود ستاره‌های نوترونی مطرح شد. در سال ۱۹۳۴، با آده<sup>۲</sup> و تسویکی<sup>۳</sup> به طور تجربی وجود ابرنواخترها را با رمبیده شدن ستاره‌های عادی به ستاره‌های نوترونی مرتبط دانستند، و اولین مدل‌های نظری برای ستاره‌های نوترونی در سال ۱۹۳۹ توسط اینهایمر<sup>۴</sup> و وولکوف<sup>۵</sup> ارائه شد. اما شگفتا که توجه ستاره‌شناسی و نظری به ستاره‌های نوترونی نشد تا آن که در سال ۱۹۶۷ تپ اخترها در رصداهای تصادفی توسط هویش<sup>۶</sup> و بل<sup>۷</sup> کشف شدند.

تپ اخترها تابش‌های تپی با بازه‌های زمانی کوتاه و بسیار منظم گسیل می‌کنند. بسیاری از تپ اخترها با دوره‌های تناوب چند میلی ثانیه تا چند ثانیه مشاهده شده‌اند. اما مشهورترین تپ اختر در مرکز سحابی خرچنگی<sup>۸</sup>، باقی مانده‌ی یک ابرنواختر قرار دارد که بنابر نوشته‌های تاریخی چینی در سال ۱۰۵۴ پیش از میلاد ظاهر شده است. دوره‌ی تناوب سحابی خرچنگی ۳۳ میلی ثانیه است؛ ضمناً تندی چرخش این سحابی در حال کم شدن است، به طوری که دوره‌ی تناوب آن در هر ۹۰ سال به اندازه‌ی یک میلی ثانیه افزایش می‌یابد.

شناخته شدن تپ اخترهای با ستاره‌های نوترونی در حال چرخش که در اواخر دهه‌ی ۱۹۶۰ کشف شدند، باعث شد توجه جدیدی به فیزیک ستاره‌های نوترونی بشود.

مبنای بحث اصلی مشخص کننده‌ی تفاوت تپ اخترها و ستاره‌های نوترونی، کوتاه بودن دوره‌ی تناوب تپ اختر است. این موضوع را با در نظر گرفتن تندی بیشینه‌ی چرخش یک

1. Chadwick

2. Baade

3. Zwicky

4. Oppenheimr

5. Volkoff

6. Hewish

7. Bell

8. Crab Nebula

ستاره می‌توان درک کرد. با توجه به این که اگر ستاره‌ای با تندی زیاد بچرخد ماده از آن به بیرون پرتاب می‌شود، بسامد زاویه‌ای بیشینه، و دوره‌ی تناوب کمینه‌ی متناظر را با مساوی قرار دادن جاذبه‌ی گرانشی در سطح ستاره و نیروی مرکز گریزی که ماده را به بیرون می‌راند، می‌توان حساب کرد؛ این، شرط بی‌وزنی در سطح ستاره است. با توجه به این شرط داریم

$$\frac{GM}{R^2} = R\omega_{max}^2 \quad \text{و} \quad \tau_{min} = \frac{2\pi}{\omega_{max}} = 2\pi \left[ \frac{R^3}{GM} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (64-6)$$

اگر شعاع از معادله‌ی (۶-۶۰) حساب شود، معلوم می‌شود که دوره‌ی تناوب کمینه‌ی چرخش یک ستاره‌ی نوترونی به جرم  $M$ ، برابر است با

$$\tau_{min} \approx 11 \left[ \frac{M_*}{M} \right] \alpha_G^{-\frac{1}{2}} \frac{h}{m_n c^2} = 0.6 \left[ \frac{M_*}{M} \right] \text{ms} \quad (65-6)$$

این رابطه نشان می‌دهد که یک ستاره‌ی نوترونی با جرم خورشید، می‌تواند با دوره‌ی تناوب کوتاه یک میلی ثانیه بچرخد بدون آن‌که به بیرون کشیده شود. با توجه به معادله‌ی (۶-۶۴) معلوم می‌شود که امکان چرخش سریع، به خاطر چگالی زیاد ستاره‌های نوترونی است؛ اجسام با چگالی کم‌تر، مانند کوتوله‌های سفید، نمی‌توانند با تندی زیاد بچرخند. بنابراین، تپ اختر واقع در مرکز سحابی خرچنگی، که دوره تناوبش ۳۳ میلی ثانیه است، نمی‌تواند یک کوتوله‌ی سفید چرخان باشد و مطمئناً یک ستاره‌ی نوترونی چرخان است.

خاصیت دیگری که باید مورد توجه قرار گیرد، گشتاور لختی یک ستاره‌ی نوترونی است.

گشتاور لختی کره‌ای با چگالی یکنواخت برابر است با

$$I = \frac{2}{5} MR^2 \quad (66-6)$$

برای یک ستاره‌ی نوترونی با شعاعی که از معادله‌ی (۶-۶۰) به دست می‌آید، داریم

$$I \approx 0.24 \left[ \frac{M}{M_*} \right]^{\frac{1}{3}} \alpha_G^{-\frac{5}{2}} m_n \left[ \frac{h}{m_n c} \right]^2 = \left[ \frac{M}{M_*} \right]^{\frac{1}{3}} 2.5 \times 10^{38} \text{kg m}^2 \quad (67-6)$$

از این برآورد گشتاور لختی یک ستاره‌ی نوترونی می‌توان برای به دست آوردن مدرک دیگری برای تعیین هویت تپ اختر خرچنگی با یک ستاره‌ی نوترونی چرخان، استفاده کرد.



تندی چرخش تب اختر خرچنگی در حال کاهش است؛ بسامد زاویه‌ای  $\omega = 19 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}$  آن دقیقاً ثابت نیست بلکه با آهنگ

$$\frac{d\omega}{dt} = -2,4 \times 10^{-9} \text{ s}^{-2} \quad (68-6)$$

تغییر می‌کند که متناظر با افزایش تقریباً یک میلی ثانیه به دوره‌ی تناوب آن در هر ۹۰ سال است. اگر این تب اختر یک ستاره‌ی نوترونی چرخان باشد، انرژی دورانی آن،  $E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$ ، نیز برطبق رابطه‌ی زیر کاهش می‌یابد

$$\frac{dE_{rot}}{dt} = I \omega \frac{d\omega}{dt} \quad (69-6)$$

اگر گشتاور لختی را سازگار با مقدار برآوردی معادله‌ی (۶۷-۶)، مثلاً  $I = 10^{38} \text{ kg m}^2$ ، فرض بکنیم، نتیجه می‌گیریم که آهنگ اتلاف انرژی دورانی ستاره‌ی نوترونی در مرکز تب اختر خرچنگی،  $4,6 \times 10^{31} \text{ W}$  است. این اتلاف انرژی با درخشندگی برآوردی سحابی خرچنگی،  $5 \times 10^{31} \text{ W}$ ، قابل مقایسه است. بنابراین به احتمال زیاد توان تلف شده توسط یک ستاره‌ی نوترونی که با تندی زیاد می‌چرخد، چشمه‌ی درخشندگی سحابی خرچنگی است.

محتمل‌ترین سازوکار برای اتلاف انرژی توسط یک ستاره‌ی نوترونی چرخان، تابش دوقطبی مغناطیسی است؛ در این مورد به هر کتاب خوب الکترومغناطیس، مانند کتاب بارگر<sup>۱</sup> و اولسون<sup>۲</sup> (۱۹۸۷) رجوع کنید. اگر دوقطبی مغناطیسی یک ستاره‌ی نوترونی چرخان نسبت به محور چرخش منحرف شده باشد، دوقطبی مغناطیسی چرخان تابش‌های الکترومغناطیسی تولید می‌کند؛ برای ستاره‌ای که دوقطبی مغناطیسی  $m$  آن تحت زاویه‌ی  $\theta$  نسبت به تندی زاویه‌ای  $\omega$  می‌چرخد، انرژی زیر تابش می‌شود

$$P = \frac{2}{3c^3} \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \right] m^2 \omega^4 \sin^2 \theta \quad (70-6)$$

اگر این سازوکار مسئول آهنگ مشاهده شده‌ی اتلاف انرژی از تب اختر خرچنگی، یعنی  $5 \times 10^{31} \text{ W}$  باشد، دوقطبی مغناطیسی سحابی خرچنگی برابر است با

$$m \sin \theta \approx 4 \times 10^{27} \text{ A m}^2 \quad (71-6)$$

نتیجه می‌گیریم که اگر شعاع ستاره‌ی نوترونی در حدود  $R = 10 \text{ km}$  باشد، میدان مغناطیسی در سطح ستاره‌ی نوترونی تقریباً برابر است با

$$B \approx \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} \approx 10^8 \text{ T} \quad (۷۲-۶)$$

این میدان مغناطیسی بسیار بزرگ است و چگالی انرژی مغناطیسی متناسب با آن  $B^2 / 2\mu_0 = 4 \times 10^{21} \text{ J m}^{-3}$  است. اما چنین میدانی می‌تواند با گیرافتادن شار مغناطیسی در حین رمبیده شدن ستاره به یک ستاره‌ی نوترونی بسیار متراکم، تولید شود. شار مغناطیسی گذرنده از هر حلقه‌ای که با یک شاره بسیار رسانا حرکت می‌کند، ثابت است. بنابراین، متراکم شدن یک هسته‌ی مرکزی آهنی با شعاع  $1000 \text{ km}$  و تبدیل شدن آن به یک ستاره‌ی نوترونی با شعاع  $10 \text{ km}$ ، می‌تواند میدان مغناطیسی داخلی را با ضریب  $10^4$  افزایش دهد.

در مورد تابش دوقطبی مغناطیسی به‌عنوان سازوکار اتلاف انرژی از تپ اختر، بحث تاریخی جدی صورت گرفته است: این سازوکار، سن تپ اختر خرچنگی را در حدی معین می‌کند که با تاریخ تولید سحابی خرچنگی توسط ابرنواختر، یعنی سال  $1054$  پیش از میلاد، سازگار است. برای اثبات این موضوع، معادله‌ی (۶-۷۰) نشان می‌دهد که این سازوکار، آهنگ اتلاف انرژی را متناسب با  $\omega^4$  پیشگویی می‌کند. بنابراین، آهنگ تغییر انرژی دورانی برابر است با

$$\frac{dE_{rot}}{dt} = I\omega \frac{d\omega}{dt} \propto \omega^4$$

پس، تندی زاویه‌ای ستاره در معادله‌ی دیفرانسیل زیر صدق می‌کند

$$\frac{d\omega}{dt} = -C\omega^3 \quad (۷۳-۶)$$

در این رابطه  $C$  یک مدت زمان ثابت است که برای ستاره‌ی نوترونی در سحابی خرچنگی، مقدار  $3/5 \times 10^{-16} \text{ s}$  به دست می‌آید؛ در این‌جا از مقادیر فعلی تندی زاویه‌ای و شتاب،  $\omega = 190 \text{ s}^{-1}$  و  $d\omega/dt = -2/4 \times 10^{-9} \text{ s}^{-2}$  استفاده کرده‌ایم. اگر از معادله‌ی (۶-۷۳) انتگرال

بگیریم و در لحظه‌ی  $t = 0$  مقدار  $\omega = \omega_i$  را در آن قرار دهیم، داریم

$$t = \frac{1}{2C} \left[ \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_i^2} \right] \quad (۷۴-۶)$$

با جانمایی مقدار فعلی برای تندی زاویه‌ای، نتیجه می‌گیریم که ستاره‌ی نوترونی در سحابی خرچنگی به مدت متناهی زیر چرخیده است

$$t < \frac{1}{2C\omega^2} = 4 \times 10^1 \text{ s} = 1253 \text{ سال} \quad (6-75)$$

متوجه می‌شویم که این مدت‌زمان با سن تاریخی سحابی خرچنگی، یعنی  $1054 - 2009 = 955$  سال قابل مقایسه است. در واقع، اگر سرعت زاویه‌ای آغازی ستاره‌ی نوترونی در حدود  $400 \text{ s}^{-1}$  بود، این مدل سن تاریخی درست را به ما می‌داد. با وجود این، باید توجه کرد که کاهش تندی زاویه‌ای، کاهش پایای توصیف شده با معادله‌ی (6-73) نیست. هنگامی که تغییراتی در داخل ستاره‌ی نوترونی صورت می‌گیرد، لحظه به لحظه تندی زاویه‌ای به مقدار کم یا زیاد افزایش می‌یابد؛ برای مثال، دوره تناوب ۳۳ میلی ثانیه‌ای تپ اختر خرچنگی ناگهان در ۲۹ اوت سال ۱۹۸۹ به اندازه‌ی تقریبی ۳ نانوثانیه کاهش یافت.

بالاخره، توجه کنید که فیزیک مربوط به سازوکارهای گسیل تپ اختر، بسیار پیچیده است. در بین همه آن‌ها، میدان‌های مغناطیسی که با تندی زیاد می‌چرخند، شدیداً با پلاسمای اطراف ستاره‌های نوترونی برهم‌کنش می‌کنند. در نتیجه، بسیاری از ویژگی‌های مشاهده شده در مورد تپ اخترها را با استفاده از مدل‌های ساده نمی‌توان درک کرد.

### جرم بیشینه‌ی یک ستاره‌ی نوترونی

نوترون‌ها تقریباً همان نقشی را در حفظ کردن یک ستاره‌ی نوترونی بازی می‌کنند که الکترون‌ها در حفظ کردن یک کوتوله‌ی سفید. به طور مشابه نیز نوترون‌ها ممکن است در این امر ناموفق باشند. درست مانند الکترون‌های تبهگن که نمی‌توانند یک کوتوله‌ی سفید با جرم بیش‌تر از یک حد بحرانی، حد چاندراسکار، را حفظ کنند نوترون‌های تبهگن نیز نمی‌توانند یک ستاره‌ی نوترونی با جرم بیش از یک مقدار معین را حفظ کنند.

فیزیک حاکم بر حد چاندراسکار، روشن است. وقتی جرم کوتوله‌ی سفید به این حد میل می‌کند، چگالی مرکزی افزایش می‌یابد و الکترون‌های تبهگن به طور فزاینده نسبتی می‌شوند. در حد چاندراسکار، الکترون‌ها فرانسیتی هستند، چگالی به «بی‌نهایت» میل می‌کند و ستاره

می‌رمد. انتظار می‌رود فرایند مشابه توسط نوترون‌ها در یک ستاره‌ی نوترونی صورت گیرد، اما تفاوت‌های مهمی بین آن‌ها وجود دارد. اولاً، برخورد‌های بین نوترون‌ها در چگالی‌های بالا در ستاره‌های نوترونی، بسیار مهم‌اند. ثانیاً، میدان‌های گرانشی بسیار قوی هستند و برای توصیف تعادل یک ستاره‌ی نوترونی تحت اثر گرانش، باید از نظریه‌ی اینشتین، و نه از نظریه‌ی نیوتون، استفاده کرد. با این همه، این تفاوت‌های مهم شرط اصلی وجود یک جرم بیشینه برای یک ستاره‌ی نوترونی را تغییر نمی‌دهد. تأثیر عمده‌ی این تفاوت‌ها مشکل‌تر شدن محاسبه‌ی این جرم بیشینه است.

مقدار واقعی جرم بیشینه‌ی یک ستاره‌ی نوترونی نقش کلیدی در تحقیقات مربوط به سیاهچاله‌ها در ستاره‌شناسی را بازی می‌کند. گاهی جرم‌های ستاره‌ها در سیستم‌های دوتایی را از حرکت نسبی مشاهده شده‌ی آن‌ها تعیین می‌کنند. اگر یکی از اعضاء سیستم دوتایی یک شیئی متراکم با جرمی بیش از جرم بیشینه‌ی نظری یک ستاره‌ی نوترونی باشد، این شیء مطمئناً یک سیاهچاله است.

ما بحث خود در مورد جرم ستاره‌های نوترونی را با تحلیل کوتوله‌های سفید و پیدا کردن مانسته‌ی ستاره‌ی نوترونی برحسب جرم چاندراسکار، آغاز می‌کنیم. در این جا از برهم کنش بین نوترون‌ها چشمپوشی می‌کنیم و فشار یک گاز نوترونی فرانسیتی را با فشار لازم برای حفظ کردن ستاره‌ای با جرم  $M$ ، مساوی می‌گیریم. مشابه با معادلات (۶-۷)، (۶-۸) و (۶-۱۸)، به رابطه‌ی زیر برای جرم بیشینه‌ی ستاره می‌رسیم که توسط گاز ایده‌آل نوترون‌های تبهگن حفظ می‌شود:

$$M_{max} \approx 3.1 M_* = 5.8 M_{\odot} \quad (6-17)$$

برای یک کوتوله‌ی سفید، مقدار  $Y_e = 1$  را در رابطه‌ی جرم چاندراسکار قرار می‌دهیم.

برهم کنش‌های بین نوترون‌ها در یک ستاره‌ی نوترونی مهم‌اند. آن‌ها نقش مهمی در تعیین مقدار بیشینه‌ی جرم یک ستاره‌ی نوترونی دارند. این برهم کنش‌ها در فاصله‌های بین نوکلئونی حدود  $1.4 \text{ fm}$  جاذبه‌اند اما در فاصله‌های کوتاه‌تر، دافعه‌اند. این امر نشان می‌دهد که ماده‌ی یک ستاره‌ی نوترونی در چگالی‌های بالا به سختی متراکم می‌شود. اما در چگالی‌های بالا نوترون‌های تبهگن انرژی کافی برای تولید ذرات جدید مانند هیپرون‌ها و پیون‌ها را دارند. اگر

این اتفاق بیفتد، فشار ناشی از نوترون‌های تهگن پرنرژژی کاهش می‌یابد، اما فشار تولید شده توسط ذرات جدید کم است. بنابراین، تولید شدن ذره‌ها تا حدی ماده ستاره‌ی نوترونی را قابل تراکم می‌کند، و این اثر قسمتی از اثر دافعه‌ی کوتاه‌برد بین نوترون‌ها را خنثی می‌کند. نهایتاً، برهم‌کنش‌های بین نوترون‌ها جرم بیشینه‌ی نظری یک ستاره‌ی نوترونی را افزایش می‌دهد.

نظریه‌ی اینشتین درباره‌ی گرانش، نسبت عام، نیز اثر قاطعی در تعیین جرم بیشینه‌ی یک ستاره‌ی نوترونی دارد. همان‌طور که در معادله‌ی (۶-۶۲) نشان داده شد، انرژی بستگی گرانشی یک ستاره‌ی نوترونی پرجرم با جرم سکون آن، یا به بیان دقیق‌تر، با جرم ذرات تشکیل دهنده‌ی آن در حال سکون و جدا از یک‌دیگر، قابل مقایسه است. جرم برآوردی  $5/8 M_{\odot}$  که از معادله‌ی (۶-۷۶) به دست می‌آید، متناظر با جرم سکون یک ستاره است. بستگی گرانشی ایجاب می‌کند که جرم واقعی ستاره بسیار کم‌تر از این باشد. اما تا این‌جا مهم‌ترین اثر در بین اثرهای نسبیتی گرانش، یعنی ماهیت جاذبه‌ی بودن گرانش، در چگالی‌ها و فشارهای بالا بارزتر می‌شود. این امر باعث کاهش جرم بیشینه‌ی نظری یک ستاره‌ی نوترونی می‌شود.

برای نشان دادن اهمیت اثر افزایشی گرانش در چگالی‌ها و فشارهای بالا، معادله‌ی تعادل هیدروستاتیکی یک توزیع جرم کروی را مجدداً بررسی می‌کنیم. در فصل اول این کتاب نشان دادیم که شیب فشار داخلی لازم برای مقابله با گرانش نیوتونی، از معادله‌ی (۱-۵) به دست می‌آید:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gmp}{r^2} \quad (۶-۷۷)$$

که در آن  $m(r)$  جرم محصور در کره‌ای به شعاع  $r$  و  $\rho(r)$  چگالی در فاصله‌ی  $r$  است. معادله‌ی متناظر در نظریه‌ی گرانش اینشتین به صورت زیر است

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \times \frac{(1+P/\rho c^2)(1+4\pi r^3 P/mc^2)}{(1-2Gm/rc^2)} \quad (۶-۷۸)$$

توجه کنید که اگر سرعت نور،  $c$ ، به بی‌نهایت میل کند، معادله‌ی نیوتونی برای تعادل هیدروستاتیکی مجدداً به دست می‌آید.

تفاوت اساسی بین نظریه‌ی نیوتون و نظریه‌ی اینشتین، در چشمه‌ی میدان گرانشی است. در نظریه‌ی نیوتون این چشمه چگالی جرم، و در نظریه اینشتین این چشمه تا نسور انرژی -

تکانه، چیزی که به چگالی انرژی و فشار بستگی دارد، است. در نتیجه، در هر شیئی بسیار متراکم، انرژی و فشار می‌توانند میدان‌های گرانشی تولید کنند. این امر در معادله‌ی (۶-۷۸) نشان داده شده است و جمله‌های  $m(r)c^2$  و  $\rho(r)c^2$  معرف انرژی محصور در شعاع  $r$  و چگالی انرژی در فاصله‌ی  $r$  هستند. مطلب مهم‌تر این است که فشار  $P$  در طرف راست معادله ظاهر شده است. این بستگی فشار به گرانش، اثر زیادی روی پایداری ستاره‌های نوترونی دارد. این امر ایجاب می‌کند که افزایش فزاینده‌ی فشار لازم برای مقابله با رمبش گرانشی، نهایتاً باعث مغلوب شدن خودش بشود زیرا منجر به قوی‌تر شدن میدان گرانشی می‌شود؛ گرانش قوی‌تر و رمبش آسان‌تر است.

مبنای محاسبه‌ی واقعی خاصیت‌های ستاره‌های نوترونی، معادله‌ی نسبیّت عام برای تعادل هیدروستاتیکی، و معادله‌ی حالتی برای ماده‌ی ستاره‌ی نوترونی به صورت  $P = P(\rho)$  است، که در آن برهم کنش‌های هسته در نظر گرفته شده است. از معادله‌ی (۶-۷۸) به ازای  $\rho = \rho_c$  در نقطه‌ی  $r = 0$  تا  $\rho = 0$  در فاصله‌ی  $r = R$  انتگرال می‌گیریم. از این طریق می‌توان شعاع  $R$  و جرم  $M = m(R)$  به ازای هر مقدار معلوم چگالی مرکزی را حساب کرد. به ویژه، جرمی را که ستاره به ازای آن رمبش پیدا می‌کند، می‌توان پیدا کرد. اولین محاسبه از این نوع در سال ۱۹۳۹ توسط اپنهایمر و وولکوف انجام شد. آن‌ها دریافته‌اند که جرم بیشینه‌ی یک ستاره‌ی متشکل از نوترون‌های بدون برهم کنش،  $1.7M_{\odot}$  است. این جرم از جرم برآورد شده با معادله‌ی (۶-۷۶) کم‌تر است زیرا در نسبیّت عام وقتی که نوترون‌ها نسبیّتی می‌شوند، اثر افزایشی گرانش باعث رمبش ستاره در یک چگالی متناهی می‌شود، در حالی که وقتی نوترون‌ها فرانسیّتی می‌شوند چنین اتفاقی نمی‌افتد.

تعدادی محاسبه با استفاده از معادلات حالت متناظر با گستره‌ی ممکن تراکم‌پذیری ماده‌ی ستاره‌ی نوترونی، انجام شده است. گستره‌ی جرم‌های بیشینه‌ی پیشگویی شده از  $M_{\odot}$  تا  $3M_{\odot}$  است. در واقع، آشکار شدن ستاره‌های نوترونی با جرم‌های حدود  $1.5M_{\odot}$  در سیستم‌های دوتایی نشان می‌دهد که تراکم‌پذیری ماده‌ی ستاره‌ی نوترونی زیاد است.

برای نشان دادن نقش صریح اثر افزایشی گرانش در ستاره‌های نوترونی ناشی از نسبیّت عام، ما یک مدل فرین اما بسیار ساده را برای ماده‌ی داخل یک ستاره‌ی نوترونی در نظر می‌گیریم.

ما ماده‌ای با چگالی ثابت  $\rho_0$  در حال تعادل هیدروستاتیکی تحت اثر گرانش نیوتونی را پیدا می‌کنیم. با انتگرال‌گیری از معادله‌ی (۶-۷۷)، فشار در چنین ستاره‌ای به دست می‌آید:

$$P(r) = G \frac{\gamma \pi}{3} \rho_0^2 (R^2 - r^2) \quad (۶-۷۹)$$

در این جا  $R$  با رابطه‌ی  $P(R) = 0$  تعریف می‌شود. معلوم می‌شود که فشار با مربع  $R$  افزایش می‌یابد و در مرکز ستاره به مقدار زیر می‌رسد

$$P_c = G \frac{\gamma \pi}{3} \rho_0^2 R^2 = \left[ \frac{\pi}{6} \right]^{\frac{1}{3}} GM^{\frac{1}{3}} \rho_0^{\frac{4}{3}} \quad (۶-۸۰)$$

در این رابطه  $M = m(R)$  جرم ستاره است. باید توجه کرد که این فشار به ازای هر مقدار متناهی جرم ستاره، نیز متناهی است. بدون تعجب نتیجه می‌گیریم که گرانش نیوتونی هیچ محدودیتی برای جرم یک ستاره‌ی ساخته شده از ماده‌ی هسته‌ای تراکم‌ناپذیر ایجاد نمی‌کند. رابطه‌ی متناظر در نسبیت عام برای فشار داخل یک ستاره با چگالی ثابت را با انتگرال‌گیری

از معادله‌ی (۶-۷۸) می‌توان به دست آورد. بعد از انجام عملیات جبری، داریم

$$P = \rho_0 c^2 \left[ \frac{(1 - 2GM r^2 / R^3 c^2)^{\frac{1}{2}} - (1 - 2GM / Rc^2)^{\frac{1}{2}}}{3(1 - 2GM / Rc^2)^{\frac{1}{2}} - (1 - 2GM r^2 / R^3 c^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (۶-۸۱)$$

فشار در مرکز ستاره برابر است با

$$P_c = \rho_0 c^2 \left[ \frac{1 - (1 - 2GM / Rc^2)^{\frac{1}{2}}}{3(1 - 2GM / Rc^2)^{\frac{1}{2}} - 1} \right] \quad (۶-۸۲)$$

با توجه به منجر این معادله معلوم می‌شود که فشار مرکزی فقط با شرط زیر متناهی می‌شود

$$\frac{GM}{Rc^2} < \frac{4}{9} \quad (۶-۸۳)$$

این نامساوی را برحسب جرم ستاره و چگالی ثابت  $\rho_0$  آن می‌توان بازنویسی کرد. اما پیش از انجام این کار باید چگالی ثابت را برحسب جرم نوترون بنویسیم:

$$\rho_0 = \frac{\gamma m_n}{4\pi r_n^3} \quad r_n = f_n \frac{h}{m_n c} \quad \text{که در آن} \quad (۶-۸۴)$$

در این رابطه  $f_n$  پارامتر طولی بدون بعد است. توجه کنید که چگالی ماده‌ی هسته‌ای معمولی  $\rho_{nuc} = 2,3 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$  متناظر با  $f_n = 0,9$  است. اکنون می‌توانیم معادله‌ی (۶-۸۳) را بازنویسی کنیم و نشان دهیم که فشار در مرکز یک ستاره‌ی نوترونی با چگالی ثابت به شرطی متناهی می‌شود که جرم ستاره از مقدار زیر کم‌تر باشد

$$M_{max} = \left[ \frac{8\pi f_n}{9} \right]^{\frac{3}{2}} M_* \quad (۶-۸۵)$$

بار دیگر معلوم می‌شود که بزرگی یک جرم ستاره‌ای مهم، از مرتبه‌ی  $M_*$ ، یعنی از مرتبه‌ی جرم ستاره‌ای بنیادی تعریف شده با معادله‌ی (۶-۵۹) است.

از معادله‌ی (۶-۸۵) نتیجه می‌گیریم که حتی ماده‌ی تراکم‌ناپذیر نیز ممکن است بر اثر گرانش رمبیده شود. مخصوصاً، نسبت عام اینشتین یک‌حد بالا برای یک ستاره‌ی ساخته شده از ماده‌ی هسته‌ای تراکم‌ناپذیر پیشنهاد می‌کند؛ اگر جرم ستاره از این حد بیش‌تر شود، فشار داخلی لازم برای حفظ کردن ستاره بی‌نهایت می‌شود. این جرم بیشینه به مقدار چگالی ثابت مفروض بستگی دارد. برای ستاره‌ای که از ماده‌ای با چگالی دو برابر چگالی معمولی ماده‌ی هسته‌ای ساخته شده است، پارامتر طولی  $f_n$  مساوی با ۰,۷، و جرم بیشینه  $2,7 M_*$  یا  $5 M_{\odot}$  است.

به‌طور خلاصه، ما دو برآورد تقریبی برای جرم بیشینه‌ی یک ستاره‌ی نوترونی داشتیم: یکی از آن‌ها مبتنی بر پایداری یک‌گاز ایده‌آل تراکم‌پذیر تحت اثر گرانش نیوتونی، معادله‌ی (۶-۷۶)، و دیگری مبتنی بر پایداری ماده‌ی هسته‌ای تراکم‌ناپذیر با چگالی ثابت تحت اثر گرانش نسبیتی عام، معادله‌ی (۶-۸۵)، بود. مفید بودن این برآوردها در مقادیر عددی آن‌ها نیست، بلکه در ایده‌های فیزیکی به‌کار رفته برای به دست آوردن آن‌ها است. در محاسبات واقع‌گرایانه باید تراکم‌پذیری ماده‌ی ستاره‌ی نوترونی و نسبت عام‌را در نظر گرفت. نتیجه‌ی مورد توافق این محاسبات آن است که جرم ممکن بیشینه‌ی یک ستاره‌ی نوترونی احتمالاً از  $3 M_{\odot}$  و مشخصاً از  $5 M_{\odot}$  کم‌تر است.

## ۴-۶ سیاهچاله‌ها

اکنون به بررسی سرنوشت یک هسته‌ی مرکزی در حال رمبش می‌پردازیم که بسیار پر جرم‌تر از آن است که بتواند در پایان حیات به یک ستاره‌ی نوترونی تبدیل شود. هر چه رمبش ادامه



می‌یابد، میدان گرانشی قوی‌تر و قوی‌تر و فشار داخلی نیز بیش‌تر و بیش‌تر می‌شود. اما چشمه‌ی میدان گرانشی در نسبیت عام، چگالی انرژی و فشار است. بنابراین، افزایش فشار باعث تسریع مراحل پایانی رمبش می‌شود. برطبق نسبیت عام، ستاره به ناحیه‌ای از فضا - زمان وارد می‌شود که سیاهچاله نامیده می‌شود. در این صورت هیچ چیز نمی‌تواند رمبش را متوقف کند. هیچ چیز، حتی نور نیز نمی‌تواند فرار کند، و هیچ قسمتی از باقی‌مانده‌ی هسته مرکزی ستاره‌ای رمبیده نمی‌تواند از میدان گرانشی بسیار قوی آن فرار کند. رمبش گرانشی، یعنی سازوکار اصلی تحول ستاره‌ای، تا حالت نهایی، یعنی تراکم بی‌نهایت ادامه می‌یابد.

در پاراگراف آغازی، رمبش را به یک سیاهچاله، به یک نیروی فزاینده‌ی جاذبه‌ی گرانشی نسبت دادیم. اما این توصیف نامناسب فضا و زمان را به صورت دو مفهوم مجزا در نظر می‌گیرد. روش درست این است که یک سیاهچاله را بر مبنای واپیچش مفهوم متحد فضا - زمان توصیف کنیم. در نسبیت عام، گرانش یک نیرو نیست بلکه واپیچش خواص هندسی فضا - زمان ناشی از وجود ماده و تابش است. بنابراین، خورشید فقط یک «تورفتگی» نوری در فضا - زمان ایجاد می‌کند، اما هسته‌ی مرکزی رمبیده‌ی یک ستاره‌ی پر جرم می‌تواند یک «حفره» ایجاد کند. هیچ چیز نمی‌تواند از این حفره فرار کند زیرا در این ناحیه‌ی واپیچیده از فضا - زمان هیچ راهی به طرف خارج وجود ندارد؛ همه‌ی راه‌ها به طرف مرکز حفره هستند. این حفره راه بازگشت ندارد. اندازه‌ی یک سیاهچاله به جرم شیئی رمبیده بستگی دارد. این اندازه، شعاع شوارتزشیلد<sup>۱</sup> است:

$$R_{sch} = \frac{2GM}{c^2} \quad (۸۶-۶)$$

برای یک جرم رمبیده‌ی مساوی با  $10 M_{\odot}$ ، شعاع شوارتزشیلد  $30 \text{ km}$  است. شعاع شوارتزشیلد مرز سطح یک طرفه‌ی سیاهچاله را مشخص می‌کند. این مرز شامل یک ناحیه‌ی نامرئی فضا است که در آن تمام حرکت‌ها به طرف مرکز صورت می‌گیرند.

یک سیاهچاله موقعی تشکیل می‌شود که شعاع یک ستاره‌ی رمبیده به شعاع شوارتزشیلد

۱. بنابر توافق، رابطه‌ی درست برای شعاع شوارتزشیلد را می‌توان با در نظر گرفتن سرعت فرار نیوتونی یک ذره از شیئی به جرم  $M$  و شعاع  $R$  و مساوی قرار دادن آن با  $c$ ، به دست آورد.

میل کند. اگر یک ناظر دور بتواند رمبش را مشاهده کند، او ستاره را در این شعاع منجمد خواهد دید، زیرا زمان در میدان گرانشی شدید در سطح ستاره به سوی توقف پیش می‌رود. این میدان گرانشی باعث یک انتقال گرانشی به سوی سرخ می‌شود که مشخص می‌کند ستاره به شعاع شوارتزشیلد رسیده است. در واقع، تغییر نسبی طول موج تابش خارج شده از سطح یک ستاره از معادله‌ی (۶-۲۷) به دست می‌آید، و وقتی این معادله را برحسب شعاع ستاره و شعاع شوارتزشیلد می‌نویسیم، به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left[ 1 - \frac{R_{sch}}{R} \right]^{-\frac{1}{2}} - 1 \quad (۸۷-۶)$$

این معادله نشان می‌دهد که وقتی  $R$  به مقدار  $R_{sch}$  میل می‌کند، انتقال به سوی سرخ به بی‌نهایت میل می‌کند. در نتیجه بسامد تابش به صفر میل می‌کند به طوری که انرژی فرار کرده از ستاره نیز به صفر میل می‌کند. در واقع، درخشندگی بر طبق رابطه‌ی زیر به صورت نمایی کاهش می‌یابد

$$L \propto \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right] \quad \text{که در آن } \tau = \frac{R_{sch}}{c} \quad (۸۸-۶)$$

برای یک جرم رمبیده‌ی مساوی با  $10M_{\odot}$ ، داریم  $\tau = 10^{-4}$  s.

با وجود این، از نظر یک ناظر دوردست، ستاره منجمد و در تاریکی ناپدید می‌شود. از نظر ناظر واقع در شعاع شوارتزشیلد، ستاره هنوز فعال و زنده است. در واقع، چنین ناظری تمام اتفاقات مربوط به کوارک‌ها، الکترون‌ها، نوترینوها و فوتون‌ها در داخل سیاهچاله را خواهد «دید». متأسفانه، این ناظر از بقیه‌ی جهان قطع رابطه خواهد کرد و قادر نخواهد بود سهمی در اشاعه‌ی دانش داشته باشد.

آشکارسازی یک سیاهچاله، یعنی شیئی که تنها اثر بارز آن یک میدان گرانشی شدید است، کار آسانی نیست. پیدا کردن هر مدرکی برای وجود آن باید تصادفی باشد زیرا سیاهچاله را نمی‌توان دید. اما جاذبه‌ی گرانشی بسیار زیاد یک سیاهچاله می‌تواند وجود آن را اثبات کند.

برای مثال، وقتی ماده‌ی گازی به طرف یک سیاهچاله کشیده می‌شود، انرژی جنبشی پیدا می‌کند و بسیار داغ می‌شود. دمای نهایی این گاز و ماهیت تابش آن، پیش از پنهان شدن دائمی در شعاع شوارتزشیلد، معیاری برای شدت میدان گرانشی است که گاز به آن میدان وارد شده

است. به ویژه، انتظار می‌رود انباشته شدن ماده بر روی یک سیاهچاله، با تابش پرتو X همراه باشد. اما، تابش پرتو X مشابه ممکن است توسط ماده‌ی گازی در حال ورود به میدان گرانشی شدید یک ستاره‌ی نوترونی نیز تولید شود. حال اگر جرم شیئی متراکم مورد نظر از جرم ممکن پیشینه‌ی یک ستاره‌ی نوترونی بیش‌تر باشد، وجود ستاره‌ی نوترونی منتفی می‌شود. هر شیئی متراکم با جرمی بیش از این حد، اشتباهاً، به عنوان یک سیاهچاله رصد خواهد شد.

مناسب‌ترین روش مرسوم برای آشکارسازی سیاهچاله‌ها مبتنی بر مشاهده‌ی چشمه‌های متراکم پرتو X، سیستم‌های دوتایی شامل یک ستاره‌ی معمولی مرئی و یک شیئی متراکم نامرئی است. پس از ورود جرم ستاره‌ی معمولی به میدان گرانشی شدید حاصل از شیئی متراکم نامرئی، پرتوهای X تولید می‌شوند. اطلاعات مربوط به حرکت نسبی سیستم دوتایی را می‌توان از طیف تابش ستاره‌ی معمولی به دست آورد، و از این اطلاعات می‌توان برای تعیین حدود جرم شیئی متراکم نامرئی استفاده کرد. اگر این جرم از  $3M_{\odot}$  بیش‌تر باشد، شیئی متراکم احتمالاً یک سیاهچاله است. اگر این جرم از  $5M_{\odot}$  بیش‌تر باشد، این شیئی مطمئناً یک سیاهچاله است!

برطبق مقاله‌ی مک کلیتوک<sup>۱</sup> (۱۹۹۲)، چهار چشمه‌ی دوتایی پرتو X مدرک مؤکدی برای وجود سیاهچاله‌های ستاره‌ای به ما ارائه می‌کنند. این چشمه‌ها ماکیان<sup>۲</sup> X-1 و A0620-00 در کهکشان ما، و LMC X-1 و LMC X-3 در آبرمازلانی بزرگ<sup>۳</sup> هستند. در هر مورد، جرم شیئی متراکم نامرئی در سیستم دوتایی در حدود  $3M_{\odot}$  است. مقدار برآوردی جرم واقعی به مدل به‌کار رفته بستگی دارد. این جرم به فرض‌های به‌کاررفته برای سمتگیری مدار سیستم دوتایی و به‌جرم همراه مرئی آن بستگی دارد. باوجود این، فرض‌های منطقی پیشنهاد می‌کنند که این چهار سیستم دوتایی دارای اشیاء متراکمی هستند که گستره‌ی جرم آن‌ها از  $6M_{\odot}$  تا  $12M_{\odot}$  است. این امکان که تحول یک ستاره می‌تواند به تشکیل شدن یک سیاهچاله منجر شود، اولین بار در دهه‌ی ۱۹۳۰، بلافاصله بعد از کشف چاندرااسکار در مورد مقدار پیشینه‌ی جرم یک کوتوله‌ی سفید، پیشنهاد شد. وجود این پیشینه ایجاب می‌کند که یک هسته‌ی مرکزی ستاره‌ای پرجرم بتواند رمبش پیدا کند و به ناحیه‌ای از فضای گرانش وارد شود. بسیاری از اخترشناس‌ها

این رویداد برای تحول ستاره‌ای را نامعقول یا دست کم غیرقابل قبول می‌دانستند. ادینگتون، برطبق معمول، نظر خود را به روشنی در سال ۱۹۳۵ به صورت زیر نوشت:

ظاهراً ستاره باید تابش کند و متراکم شود و متراکم شود تا، به گمان من، موقعی که گرانش به قدر کافی شدید و مانع فرار تابش‌ها شد، شعاع ستاره به چند کیلومتر می‌رسد و نهایتاً ستاره می‌تواند آرام بگیرد ... من فکر می‌کنم باید قانونی در طبیعت وجود داشته باشد که بتواند جلو این رفتار ناپسند ستاره را بگیرد.

اما باور فعلی این است که یک سیاهچاله، مانند یک کوتوله‌ی سفید و ستاره‌ی نوترونی، پایان مطلوب تحول ستاره است. این باور بر اصول نظری مؤکد مبتنی است و با مدارک به‌دست آمده از ستاره‌شناسی رصدی، مورد تأیید قرار گرفته است.

گرانش نیروی راه‌انداز تحول ستاره است. این نیرو باعث تشکیل یک ستاره و رسیدن آن به دماهایی است که همجوشی گرماسته‌ای را ممکن می‌کنند. انرژی آزاد شده از این همجوشی فقط انقباض گرانشی ماده‌ی داخل ستاره را به تأخیر می‌اندازد. پایان این حادثه ممکن است یک کوتوله‌ی سفید یا یک ستاره‌ی نوترونی، یعنی ستاره‌ای باشد که در آن ماده‌ی سرد با نیروی گرانش مخالفت می‌کند. پایان دیگر می‌تواند یک سیاهچاله باشد که در آن گرانش حاکم مطلق است. این رویداد پاک و پاکیزه است - زیرا از ماده‌ی رمبیده، به جز یک میدان گرانشی شدید، چیزی باقی نمی‌ماند.

## خلاصه

### کوتوله‌های سفید

- یک کوتوله‌ی سفید ستاره‌ای است که تقریباً با فشار گاز ایده‌آل الکترون‌های تبهگن حفظ می‌شود.
- در مرکز یک کوتوله‌ی سفید کم‌جرم، الکترون‌های تبهگن غیرنسبیتی‌اند، و چگالی مرکزی برطبق رابطه‌ی زیر با جرم  $M$  کوتوله‌ی سفید افزایش می‌یابد

$$\rho_c \approx \frac{3}{Y_e} \left[ \frac{M}{M_*} \right]^2 \frac{m_H}{(h/m_e c)^2} \quad (4-6)$$

در این رابطه  $Y_e$  تعداد الکترون‌ها به ازای هر نوکلئون و  $M_*$  جرم بنیادی ستاره‌ای است که برطبق معادله (۵-۶۳) تعریف می‌شود. هنگامی که جرم افزایش می‌یابد، الکترون‌ها نسبی می‌شوند و چگالی سریعاً افزایش پیدا می‌کند. هنگامی که جرم ستاره به حد چاندراسکار می‌رسد، الکترون‌ها فرانسیتی می‌شوند و چگالی مرکزی مطابق شکل ۶-۱ به بی‌نهایت میل می‌کند. به عبارت دیگر، ستاره رمبیده می‌شود.

● حد چاندراسکار، جرم یک کوتوله‌ی سفیدی است که چگالی مرکزی آن به بی‌نهایت میل می‌کند. وقتی این حالت پیش می‌آید، کوتوله‌ی سفید دارای جرم بیشینه‌ی ممکن می‌شود. رابطه‌ی فشار - چگالی (۶-۶) مقداری برآوردی برای  $M_{CH}$  به دست می‌دهد که از معادله‌ی (۶-۹) حساب می‌شود. مقدار دقیق‌تر، برطبق یک مدل چندمنظوره، برابر است با

$$M_{CH} \approx 3.1 Y_e^2 M_* \quad (۶-۱۸)$$

این مقدار متناظر با جرم تقریبی  $1.4 M_\odot$  است.

● شعاع یک کوتوله‌ی سفید تابعی است که با جرم کاهش می‌یابد. برای کوتوله‌های سفید کم‌جرم، رابطه‌ی تقریبی بین شعاع و جرم به صورت زیر است

$$R \approx 0.777 Y_e^2 \left[ \frac{M_*}{M} \right]^{\frac{1}{3}} \alpha_G^{-\frac{1}{2}} \frac{h}{m_e c} \quad (۶-۲۰)$$

با توجه به این رابطه، اندازه‌ی مشخصه‌ی یک کوتوله‌ی سفید برابر است با

$$\alpha_G^{-\frac{1}{2}} \frac{h}{m_e c} \approx 3 \times 10^7 \text{ m} \quad (۶-۲۱)$$

اگر از خورشید به عنوان استاندارد جرم و اندازه استفاده کنیم، به ازای  $Y_e = 0.5$  خواهیم داشت

$$R \approx \frac{R_\odot}{\sqrt{4}} \left[ \frac{M_\odot}{M} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (۶-۲۳)$$

از این رابطه‌ی جرم - شعاع می‌توان برای به دست آوردن روابط درخشندگی و انتقال گرانشی به سوی سرخ تابش‌های ناشی از یک کوتوله‌ی سفید، برحسب جرم آن، استفاده کرد؛ به معادلات (۶-۲۵) و (۶-۲۸) رجوع کنید.

## رمبش یک ستاره

- تجزیه‌ی نوری هسته‌ای و گیراندازی الکترون دو سازوکار ممکن برای جذب انرژی هستند که می‌توانند باعث رمبش بدون کنترل یک هسته‌ی آهنی بشوند.
- انرژی تشکیل شدن یک ستاره‌ی نوترونی، اساساً انرژی بستگی گرانشی یک ستاره‌ی نوترونی است:

$$E_B \approx \frac{GM^2}{R} = 3 \times 10^{46} \left[ \frac{M}{M_\odot} \right]^2 \left[ \frac{10 \text{ km}}{R} \right] \text{ J} \quad (۴۶-۶)$$

این مقدار، از انرژی جذب‌شده توسط تجزیه‌ی نوری هسته‌ای یا توسط گیراندازی الکترون، بیش‌تر است. قسمت عمده‌ی این انرژی به صورت تابش نوترینوی گسیل می‌شود؛ شکل ۳-۶ را ببینید.

## ستاره‌های نوترونی

- اگر فرض کنیم که در یک ستاره‌ی نوترونی فشار گاز ایده‌آل الکترون‌های غیرنسبیتی تبهگن با گرانش مخالفت می‌کند، در آن صورت شعاع ستاره‌ای با جرم  $M$  از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$R \approx 0.177 \left[ \frac{M_*}{M} \right]^{\frac{1}{2}} \alpha_G^{-\frac{1}{2}} \frac{h}{m_n c} \quad (۶۰-۶)$$

این رابطه نشان می‌دهد که اندازه‌ی مشخصه‌ی یک ستاره‌ی نوترونی برابر است با

$$\alpha_G^{-\frac{1}{2}} \frac{h}{m_n c} \approx 17 \text{ km} \quad (۶۱-۶)$$

- مقادیر برآوردی جرم و شعاع نوعی یک ستاره‌ی نوترونی این فرضیه را تأیید می‌کنند که تپ اخترها ستاره‌های نوترونی هستند که با تندی زیاد می‌چرخند.
- جرم ستاره‌های نوترونی نمی‌تواند از یک مقدار حدی بحرانی، مانند حد چاندراسکار برای کوتوله‌های سفید، بیش‌تر باشد. با وجود این، میدان‌های گرانشی شدیدند و باید از نسبیت عام استفاده شود. محاسبه‌ی مقدار واقعی جرم پیشینه‌ی ممکن یک ستاره‌ی نوترونی به خاطر عدم قطعیت در تراکم‌پذیری ماده‌ی ستاره‌ی نوترونی در چگالی‌های بالا، مشکل است. این جرم احتمالاً در حدود  $3M_\odot$ ، و مطمئناً کم‌تر از  $5M_\odot$  است.

## سیاهچاله‌ها

- اگر جرم هسته‌ی مرکزی رمبیده‌ی یک ستاره از جرم بیشینه‌ی یک ستاره‌ی نوترونی بیش‌تر باشد، ستاره به طور کامل رمبیده می‌شود و یک سیاهچاله تشکیل می‌دهد.
- هر روشی برای آشکارسازی یک سیاهچاله به مشاهده‌ی اثرات میدان گرانشی شدید آن بستگی دارد. مشاهده‌ی بعضی چشمه‌های متراکم پرتوهای X، وجود میدان‌های گرانشی شدید ناشی از اشیاء متراکم را نشان می‌دهد که این اشیاء بسیار پرجرم‌اند و نمی‌توانند ستاره‌ی نوترونی باشند. به اشتباه فکر می‌شود که این شیئی‌ها سیاهچاله‌اند.

## مسأله‌های فصل ۶

۱-۶ برطبق معادله‌ی (۴-۶)، اگر جرم جسمی که توسط الکترون‌های تبهگن حفظ می‌شود به صفر میل کند، چگالی آن نیز به صفر میل می‌کند. این نتیجه‌ی غیرفیزیکی به خاطر نادیده گرفتن برهم کنش‌های الکترومغناطیسی بین الکترون‌ها و یون‌ها به دست می‌آید. در واقع، وقتی فشار کاهش می‌یابد، چگالی به مقداری متناظر با چگالی ماده‌ی اتمی غیرمتراکم معمولی میل می‌کند، چون اندازه‌ی یک اتم از مرتبه‌ی شعاع بوهر است، این چگالی تقریباً برابر است با

$$\rho_{atomic} = \frac{m_H}{a_B^3}$$

که در آن  $a_B$ ، شعاع بوهر، را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$a_B = \frac{1}{\alpha_{EM}} \frac{\hbar}{m_e c}$$

ثابت ساختار ریز  $\alpha_{EM}$  یک معیار بدون بعد برای شدت برهم کنش‌های

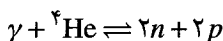
الکترومغناطیسی، و مساوی با  $\frac{1}{137} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$  است. نشان دهید که وقتی جرم

جسمی که توسط الکترون‌های تبهگن حفظ می‌شود قابل مقایسه با

$$M_P = \left[ \frac{\alpha_{EM}}{\alpha_G} \right]^{\frac{3}{2}} M_H = \alpha_{EM}^{\frac{3}{2}} M_* = 0.001 M_{\odot}$$

باشد، چگالی مرکزی آن قابل مقایسه با چگالی‌های اتمی معمولی خواهد شد. ملاحظه می‌کنید که این جرم را می‌توان برحسب جرم بیشینه‌ی جسمی با ماده‌ی اتمی معمولی، یعنی برحسب جرم بیشینه‌ی جسمی مانند یک سیاره، معرفی کرد. در واقع، جرم مشتری  $0.00095 M_{\odot}$  است.

۲-۶ انرژی لازم برای تجزیه‌شدن هسته‌ی  ${}^4\text{He}$  به دو نوترون و دو پروتون،  $Q = 28.3 \text{ MeV}$  است. رابطه‌ای برای تعداد هسته‌های  ${}^4\text{He}$ ، نوترون‌ها و پروتون‌هایی که بر طبق واکنش‌های زیر در دمای  $T$  در حال تعادل با هم قرار دارند، پیدا کنید:



۳-۶ دمای لازم برای تجزیه شدن ۵۰٪ هسته‌ها به ازای چگالی  $10^{12} \text{ km}^{-3}$  را حساب کنید. فرض کنید یک ستاره‌ی نوترونی داغ و متورم، تابشی از نوترون‌های گرمایی را از سطح ستاره (به شعاع  $R$ ) در دمای مؤثر  $T_E$  گسیل می‌کند. ضمناً فرض کنید سه نوع نوترینوی بدون جرم (یا تقریباً بدون جرم)  $\nu_e$ ،  $\nu_{\mu}$ ،  $\nu_{\tau}$  و پادذره‌های آن‌ها به تعداد مساوی، در حال تعادل گرمایی با پتانسیل شیمیایی صفر، گسیل می‌شوند. نشان دهید که درخشندگی ستاره از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$L_{\nu} = \frac{21}{8} \sigma T_E^4 4\pi R^2$$

در این رابطه  $\sigma$  ثابت استفان است. رابطه‌ای برای انرژی متوسط یک نوترینو در این تابش پیدا کنید. [راهنمایی: به فصل ۲ و مسأله‌ی ۲-۵ رجوع کنید].

۴-۶ انفجار به طرف بیرون لایه‌های خارجی‌تر یک ستاره‌ی پرجرم بر اثر موج ضربه‌ی تولید شده توسط واجهش هسته‌ی مرکزی، محتمل‌ترین سازوکار برای تولید شدن یک ابرنواختر بر اثر رمبش گرانشی است. یک سازوکار جایگزین ممکن، مربوط به نوترینوها است. تابش نوترینویی هسته‌ی مرکزی رمبیده می‌تواند تکانه را به طرف بیرون منتقل کند و باعث انفجار شود. با در نظر گرفتن مسأله‌ی ۳-۳ نشان دهید که این سازوکار به شرطی می‌تواند مؤثر باشد که درخشندگی نوترینویی از مقدار زیر بیش‌تر باشد

$$L_{\nu} > \frac{4\pi cGM}{\kappa_{\nu}}$$



در این رابطه  $M$  جرم هسته‌ی مرکزی، رمبیده و  $K_{\nu}$  تیرگی نوترینویی است. با توجه به این که تیرگی نوترینویی از مرتبه‌ی  $10^{-18} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$  است، نشان دهید که درخشندگی نوترینویی مورد انتظار  $10^{45} \text{ W}$  برای انجام انفجار کافی نیست.

۵-۶ آشکارسازی نوترینوهای (اکثراً  $\bar{\nu}_e$ ) ناشی از ابرنواختر SN1987A در فاصله‌ی  $50 \text{ kpc}$  از زمین، اطلاعات باارزشی در مورد جرم بیشینه‌ی ممکن نوترینوی الکترونی به ما داده است. یک رابطه‌ی عمومی برای تندی نوترینویی با جرم  $m$  و انرژی  $E$  را به صورت کسری از سرعت نور بنویسید، و ثابت کنید که نوترینوهای بسیار پرانرژی با تندی بیش‌تری حرکت می‌کنند و زودتر به زمین می‌رسند. نشان دهید که اگر جرم نوترینو  $30 \text{ eV} c^{-2}$  باشد، اختلاف زمانی رسیدن نوترینوهای با انرژی‌های بین  $10$  و  $15 \text{ MeV}$  به زمین،  $10^8$  است.

۶-۶ یک گاز تبهگن ایده‌آل متشکل از الکترون‌ها، پروتون‌ها و نوترون‌ها، تعادل برقرار شده با واکنش‌های (۶-۵۲) را در نظر بگیرید. فرض کنید تعداد الکترون‌ها و پروتون‌ها یکسان است و فرض کنید که چگالی آن‌قدر بالا است که تمام ذرات تبهگن فرانسبیتی‌اند. نشان دهید که نسبت چگالی عددی این ذره‌ها به صورت زیر است

$$n_e : n_p : n_n = 1 : 1 : 8$$

۷-۶ تندی زاویه‌ای بیشینه‌ی چرخش یک کوتوله‌ی سفید نوعی را حساب کنید.

۸-۶ نسبت شعاع شوارتزشیلد به شعاع واقعی یک جسم، پارامتر قاطعی برای تأکید بر اهمیت نسبیت عام است. نشان دهید که برای یک ستاره‌ی رشته‌ی اصلی، مانند خورشید، با دمای داخلی نوعی  $T_I$ ، این نسبت تقریباً برابر است با

$$\frac{R_{sch}}{R} \approx \frac{kT_I}{m_H c^2}$$

نشان دهید که برای یک کوتوله‌ی سفید داریم

$$\frac{R_{sch}}{R} \approx \frac{m_e}{m_H}$$

و برای یک ستاره‌ی نوترونی داریم

$$\frac{R_{sch}}{R} \approx 1$$

۹-۶ تب اختر خرچنگی یک ستاره‌ی نوترونی چرخان است که توسط یک ابرنواختر در ۱۰۵۴ سال پیش از میلاد تشکیل شده است. در حال حاضر تندی زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای عبارت‌اند از

$$\omega = 19.0 \text{ s}^{-1} \quad \text{و} \quad \frac{d\omega}{dt} = -2.4 \times 10^{-9} \text{ s}^{-2}$$

اگر تابش گرانشی باعث کند شدن چرخش تب اختر خرچنگی بشود، آهنگ اتلاف انرژی جنبشی با  $\omega^2$  متناسب خواهد بود. با استفاده از این مدل، رابطه‌ای برای  $\omega$  و وابسته به زمان به دست آورید. نشان دهید که این مدل سنی را برای تب اختر پیشگویی می‌کند که از سن واقعی آن کم‌تر است.

۱۰-۶ بار دیگر مسأله‌ی ۳-۳ را در نظر بگیرید که در آن درخشندگی بیشینه، یعنی درخشندگی ادینگتون برای ستاره‌ای به جرم  $M$  را، برآورد کردید. برای یک جرم ستاره‌ای  $M_{\odot}$ ، نشان دهید که درخشندگی ادینگتون در حدود  $10^{31} \text{ W}$  است.

یک سیستم دوتایی را در نظر بگیرید که ماده‌ی انباشته شده بر روی یک شیئی متراکم، درخشندگی  $10^{31} \text{ W}$  را تولید می‌کند که در حدود مقدار بیشینه‌ی ممکن برای ستاره‌ای به جرم  $M_{\odot}$  است.

● نشان دهید که اگر شیئی متراکم یک کوتوله‌ی سفید باشد، در آن صورت در ناحیه‌ی فرابنفش تابش می‌کند، اما اگر یک ستاره‌ی نوترونی باشد، در آن صورت در ناحیه‌ی پرتوهای  $X$  تابش می‌کند.

● با استفاده از معادله‌ی (۶-۶۲) نشان دهید که اگر شیئی متراکم یک ستاره‌ی نوترونی باشد، درخشندگی با آهنگ انباشته شدن جرم  $M_{\odot} 10^{-8}$  در هر سال، سازگار است.

۱۱-۶ فرض کنید که فشار در داخل یک کوتوله‌ی سفید تماماً از الکترون‌های تبهگن ناشی می‌شود و از معادله‌ی (۶-۱۲) به دست می‌آید:

$$P = \frac{8\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \int_0^{x_F} \frac{x^4}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} dx$$

در این جا  $x_F$  تکانه‌ی فرمی بدون بعد است. رابطه‌ی این تکانه با چگالی ستاره در

شعاع  $r$ ، به صورت زیر است

$$x_F = \frac{p_F}{m_e c} = \left[ \frac{Y_e \rho}{\Lambda \pi m_H} \right]^{\frac{1}{3}} \frac{h}{m_e c}$$

در این رابطه  $Y_e$  تعداد الکترون‌ها به ازای هر نوکلئون است.

● نشان دهید که

$$\frac{dP}{d\rho} = Y_e \frac{m_e c^2}{m_H} \frac{1}{3} \frac{x_F^2}{(1+x_F^2)^{\frac{1}{3}}}$$

● ساختار ستاره از دو معادله‌ی دیفرانسیل هموند مرتبه‌ی اول  $m(r)$  و  $\rho(r)$  پیروی

می‌کند:

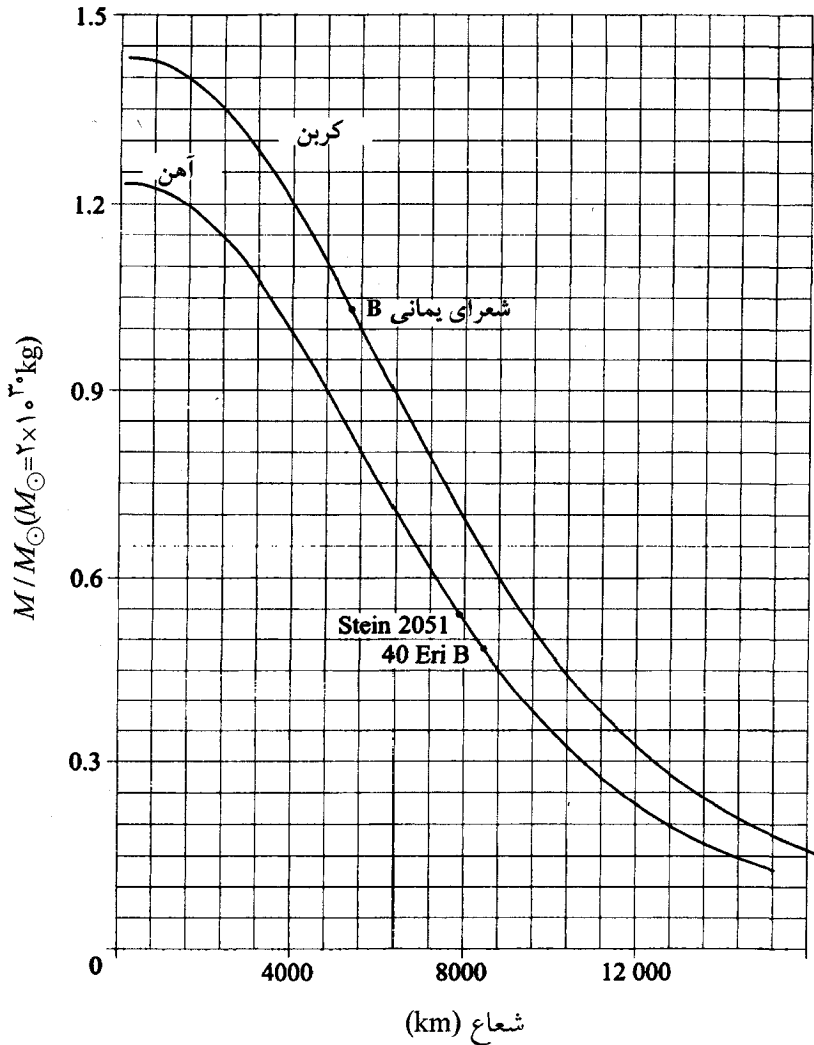
$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \frac{d\rho}{dP}$$

و

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

یک روش محاسباتی برای انتگرال‌گیری عددی از این دو معادله‌ی دیفرانسیل هموند ارائه کنید.

جرم‌ها و شعاع‌های ستاره‌های کوتوله‌ی سفید از این نوع محاسبات به دست می‌آیند، که قسمتی از پروژه‌ی دوره‌ی کارشناسی یان گلاس<sup>۱</sup> و سیمون برمن<sup>۲</sup> بوده است و در شکل ۶-۴ نشان داده شده‌اند.



شکل ۶-۴ جرم‌ها و شعاع‌های ستاره‌های کوتوله‌ی سفید از محاسبه‌ی انجام شده در مسأله‌ی ۶-۱۱ به دست آمده‌اند. دو مقدار برای تعداد الکترون‌ها به ازای هر نوکلئون انتخاب شده‌اند:  $Y_e = 26/56$  برای یک کوتوله‌ی سفید آهنی و  $Y_e = 6/12$  برای یک کوتوله‌ی سفید کربنی. وجود یک جرم بیشینه به طور واضح نشان داده شده است. جرم‌ها و شعاع‌های سه کوتوله‌ی سفید که در جدول ۶-۱ ارائه شده است، نیز نشان داده شده‌اند.

## خورشید لرزه‌شناسی

خورشید لرزه‌شناسی، علم مطالعه‌ی نوسانات درونی خورشید است. خورشید، مانند هر جرم خود گرانش متشکل از یک گاز تراکم‌پذیر، به صورت‌های مختلف می‌تواند نوسان کند. با این وجود، برای دامنه‌های کوچک نوسان، هر حرکت نوسانی پیچیده را می‌توان به صورت برهم نهش حرکت‌های ساده‌ای به نام مدهای عادی نوسان در نظر گرفت، که هر مد دارای بسامد و شکل معینی است. برای معرفی کردن این نوع مدهای نوسان باید اطلاعاتی درباره‌ی درون خورشید داشته باشیم، که عمدتاً وجود عناصر اصلی در مدل خورشیدی استاندارد را تأیید می‌کنند.

در این فصل کتاب، فیزیک لازم برای شناخت خورشید لرزه‌ها را بیان می‌کنیم. ابتدا دو نوع موج را در نظر می‌گیریم که ممکن است در خورشید تولید شوند: موج فشار و موج گرانش. سپس مدهای عادی نوسان خورشید را مطالعه می‌کنیم و نحوه‌ی به دست آوردن بسامدها و شکل‌های این مدها را با حل کردن مسأله‌ی ویژه مقدار موج، شرح می‌دهیم. این موضوع را با بحث کوتاهی درباره‌ی استفاده از داده‌های به دست آمده از خورشید لرزه‌ها برای آزمودن مدل‌های خورشیدی، به پایان می‌رسانیم.

برای تحلیل دقیق‌تر، و برای ارائه‌ی یک بحث جدی در مورد جنبه‌های مشاهده‌ای موضوع، پیشنهاد می‌شود به مقاله‌های گاه<sup>۱</sup> و توامر<sup>۲</sup> (۱۹۹۱)، تورک<sup>۳</sup> - چیز<sup>۴</sup> و همکاران (۱۹۹۳)، و استیکس<sup>۵</sup> (۱۹۸۹) رجوع کنید.

## ۱-۷ مقدمه

در سال ۱۹۷۵ میلادی کشف شد که طیف بسامدهای مجزا ممکن است به حرکت عمودی در نور کره‌ی خورشیدی مربوط باشد. عملاً در هر لحظه چندین میلیون مد نوسان مربوط به سرعت‌های عمودی وجود دارند که با دوره‌های تناوب بین ۳ و ۱۲ دقیقه و با دامنه‌های از مرتبه‌ی  $3\text{cms}^{-1}$ ، نوسان می‌کنند. برهم نهش این مدها، با توزیع اتفاقی مدها، نقش‌های گذرایی از حرکت در سطح خورشید با دامنه‌های از مرتبه‌ی  $1\text{kms}^{-1}$  را ایجاد می‌کند. مطالعه‌ی این مدهای نوسان، یعنی خورشید لرزه‌شناسی، اطلاعات باارزشی در مورد خواص درونی خورشید به دست می‌دهد.

برای مشخص کردن یک مد نوسان خورشیدی می‌توان دو خاصیت سطحی را اندازه گرفت: بسامد نوسان و تعداد نوسانات در سطح خورشید. تعداد این نوسانات با یک عدد موج افقی  $k_h$  مشخص می‌شود که تعداد نوسانات در سطح در مسافت  $2\pi$  را به دست می‌دهد. بعداً نشان می‌دهیم که بهتر است  $k_h$  را از طریق معادله‌ی زیر به یک عدد درست  $l$  ربط دهیم:

$$k_h = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R_\odot} \quad (1-7)$$

عدد درست  $l$  را درجه‌ی مُد نوسان می‌نامند.

اندازه‌گیری بسامد و عدد موج افقی یک مد نوسان خورشیدی بسیار مشکل است. یک راه این است که انتقال داپلری کوچک ناشی از حرکت نوسانی را مشاهده کنیم؛ انتقال به سوی سرخ مربوط به دور شدن خورشید از ناظر و انتقال به سوی آبی مربوط به نزدیک شدن خورشید به ناظر است. یک روش جانشین، مشاهده‌ی افت و خیزهای کوچک شدت نور خورشید است. به هر حال در همه‌ی مشاهدات، معیار کلی برای اندازه‌گیری، استفاده از اصول آنالیز فوریه است.

اگر زمان تفکیک آشکارساز  $\Delta t$  باشد، در آن صورت مدهای با بسامدهای تا  $1/\Delta t$  را می‌توان آشکار کرد. اگر مدت زمان مشاهده  $T$  باشد، در آن صورت مدهای با بسامدهای کوچک  $1/T$  را می‌توان آشکار کرد. ضمناً مدت زمان مشاهده می‌تواند قدرت تفکیک بسامدی

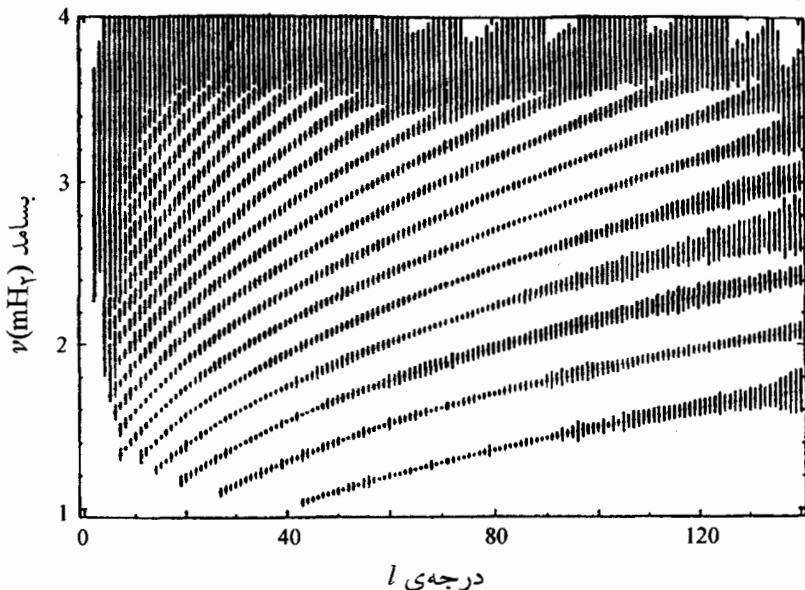
اندازه‌گیری‌ها را معین کند: در مدت زمان مشاهده‌ی  $T$ ، دو بسامد  $\nu$  و  $\nu + \Delta\nu$  را به شرطی می‌توان از هم تفکیک کرد که اختلاف فاز آن‌ها،  $2\pi\Delta\nu T$ ، قابل مقایسه با  $2\pi$  باشد.

از معیار متناظر، برای اندازه‌گیری عدد موج افقی  $k_h$  یک مد استفاده می‌شود. اگر قدرت تفکیک فضایی  $\Delta x$  باشد، بزرگ‌ترین عدد موجی که می‌توان آشکار کرد،  $k_h \approx 2\pi/\Delta x$  است. اگر سطح خورشید در طول مسافت  $X$  پویش شود، کوچک‌ترین عدد موجی که می‌توان مشخص کرد،  $k_h \approx 2\pi/X$  است، و اگر  $\Delta k_h \approx 2\pi/X$  باشد می‌توان مدهای با عدد جرم‌های  $k_h$  و  $k_h + \Delta k_h$  را از هم تفکیک کرد. بعد از اندازه‌گیری عدد موج، درجه‌ی  $l$  مد را می‌توان از معادله‌ی (۷-۱) به دست آورد.

بسامدهای اندازه‌گیری شده‌ی  $\nu$  و درجه‌های  $l$  مدهای نوسان خورشیدی بی‌ارتباط با هم نیستند. این همبستگی را می‌توان بر روی یک منحنی دوبعدی که محور قائم آن معرف بسامد و محور افقی آن معرف درجه است، نشان داد. وقتی مدها را با یک نقطه با مختصات  $(l, \nu)$  بر روی این منحنی نشان می‌دهیم، معلوم می‌شود که آن‌ها بر روی رشته‌ای از منحنی‌ها، به نام خط‌الرأس، مطابق شکل ۷-۱، قرار دارند. تحلیل این نوع داده‌ها باعث مشخص شدن چندین هزار مد نوسان شده است. این توان‌مندی داده‌های مربوط به خورشید لرزه‌ها را فقط بعد از دانستن پاسخ سه سؤال کلیدی زیر می‌توان فهمید: چه نوع موج‌هایی می‌توانند در درون خورشید منتشر شوند، آن‌ها چگونه به تله افتاده‌اند و چگونه تشدید می‌شوند؟

## ۷-۲ موج‌های فشار و گرانش

موج‌های فشار و گرانش در یک جو، نوسانات فشار و چگالی را در یک گاز تراکم‌پذیر ایجاد می‌کنند. با وجود این، نیروی برگشت دهنده‌ی مسئول در این نوسانات در هر مورد متفاوت است. در یک موج فشار، نیروی برگشت دهنده به خاطر افت و خیزهای شیب فشار تولید می‌شود، اما در یک موج گرانش، نیروی برگشت دهنده به خاطر شناور شدن گاز در میدان گرانشی تولید می‌شود. در این بخش، خاصیت‌های امواج فشار و گرانش در یک جو ساده را که فشار گرانش در آن ثابت است، بررسی می‌کنیم.



شکل ۷-۱ نمودار بسامد - درجه برای مدهای نوسان خورشیدی مشاهده شده. یک مد با درجه‌ی  $l$  و بسامد  $\nu$  با یک نقطه‌ی با مختصات  $(l, \nu)$  بر روی یک منحنی دو بعدی، که محور افقی آن معرف درجه‌ی  $l$  و محور قائم آن معرف بسامد  $\nu$  است، مشخص می‌شود. توجه کنید که این مدها بر روی رشته‌ای از منحنی‌های خوش تعریف به نام خط‌الرأس قرار دارند. بعداً خواهیم دید که هر خط‌الرأس متناظر با مقدار خاص یک عدد درست به نام مرتبه‌ی شعاعی  $\mu$  است. (با کسب اجازه از Libbert K.G. and Woodward M.F. *Nature*, 345, 779. Copyright 1990 Macmillan Magazines Limited)

### انتشار موج‌های فشار

شما مطالبی در مورد موج‌های فشار شنیده‌اید؛ این موج‌ها موقعی موج‌های صوتی نامیده می‌شوند که بسامد نوسان آن‌ها در گستره‌ی شنوایی  $20\text{ Hz}$  تا  $20000\text{ Hz}$  باشد. موضوع مورد نظر ما اثر گرانش بر روی موج‌های فشار است. به ویژه، جوی را در نظر می‌گیریم که بر اثر گرانش، چگالی آن با ارتفاع کم می‌شود و نشان می‌دهیم که موج‌های فشار فقط به شرطی می‌توانند منتشر شوند که بسامد آن‌ها از یک بسامد قطع  $\omega_c$  بیش‌تر باشد.

یک لایه از جو را در بین ارتفاعات  $x$  و  $x+dx$  در نظر می‌گیریم. وزن واحد سطح این لایه  $g\rho(x)dx$  است که در آن  $\rho(x)$  چگالی جو و  $g$  شتاب گرانشی ثابت است. این لایه به شرطی در تعادل هیدروستاتیکی خواهد بود که این وزن با  $P(x) - P(x+dx)$ ، یعنی افت



فشار در دو طرف لایه، برابر باشد. وقتی این شرط برقرار می‌شود، جوی که از یک گاز کلاسیکی ایده‌آل با ذراتی به جرم  $\bar{m}$  در دمای یکنواخت  $T$  تشکیل شده است، دارای شیب چگالی

$$\frac{d\rho}{dx} = -\frac{\rho(x)}{H} \quad \text{یا} \quad \rho(x) = \rho(0)e^{-x/H} \quad (2-7)$$

است که در آن  $H = kT/\bar{m}g$  ارتفاع مقیاس در جو است؛ به مسأله‌ی ۷-۱ رجوع کنید.

وقتی یک موج فشار به طور قائم در این جو منتشر می‌شود، ذرات گاز به طور قائم و به مقدار کم جابه‌جا می‌شوند، در نتیجه افت و خیزهایی در چگالی و فشار به وجود می‌آورند که آن‌ها را به ترتیب به صورت  $\rho'(x,t) - \rho(x)$  و  $P'(x,t) - P(x)$  نشان می‌دهیم. فرض کنید  $\xi(x,t)$  معرف جابه‌جایی صفحه‌ی ذرات در لحظه‌ی  $t$  باشد؛ مکان بدون آشفتگی این ذره‌ها  $x$  است. بنابراین، ذراتی که مکان بدون آشفتگی آن‌ها  $x + dx$  است، به اندازه‌ی

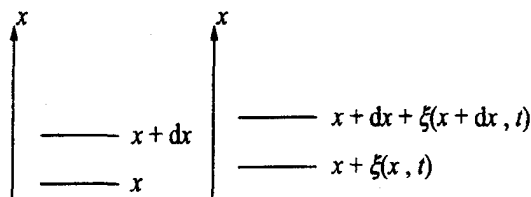
$$\xi(x+dx, t) = \xi(x, t) + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$$

جابه‌جا می‌شوند. پس، ذراتی که ابتدا در لایه‌ای به ضخامت  $dx$  قرار داشتند، در لحظه‌ی  $t$  در لایه‌ای به ضخامت  $(1 + \partial \xi / \partial x) dx$  قرار دارند؛ یعنی افزایش نسبی ضخامت به اندازه‌ی  $\partial \xi / \partial x$  است که در شکل ۷-۲ نشان داده شده است.

اگر ضخامت لایه افزایش یابد، چگالی کاهش می‌یابد و برعکس. در واقع، برای تغییرات کوچک، تغییر نسبی ضخامت مساوی و مخالف با تغییر نسبی چگالی است. در نتیجه داریم

$$\left[ \frac{\rho'(x,t) - \rho(x)}{\rho(x)} \right] = -\frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (3-7)$$

اگر گرمای وارد شده به لایه و خارج شده از آن ناچیز باشد، این افت و خیزهای چگالی همراه با افت و خیزهای فشار خواهد بود که از رابطه‌ی بی‌دررو زیر به دست می‌آید



شکل ۷-۲ جابه‌جایی قائم لایه‌ای از ذرات گاز بر اثر انتشار یک موج فشار. توجه کنید که افزایش ضخامت لایه  $\xi(x+dx, t) - \xi(x, t) = (\partial \xi / \partial x) dx$  است.

$$\left[ \frac{P'(x,t) - P(x)}{P(x)} \right] = \gamma \left[ \frac{\rho'(x,t) - \rho(x)}{\rho(x)} \right] \quad (۴-۷)$$

در این جا  $\gamma$  نسبت گرمای ویژه در فشار ثابت به گرمای ویژه در حجم ثابت است. به خاطر این افت و خیزهای فشار، نیروی وارد به هر طرف لایه نمی‌تواند به مدت زیادی در حال تعادل باشد و لایه یک شتاب رو به بالا پیدا می‌کند که از معادله‌ی نیوتون برای حرکت به دست می‌آید:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x} (P' - P) \quad (۵-۷)$$

از ترکیب معادلات (۳-۷)، (۴-۷) و (۵-۷)، و با استفاده از معادله‌ی چگالی تعادلی (۲-۷)، می‌توان مشخصات موج‌های فشار در یک جو تک‌دما را به راحتی به دست آورد. مراحل این محاسبه به صورت زیر است.

ابتدا معادله‌ی حرکت (۵-۷) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{c_s^2}{H} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (۶-۷)$$

که در آن، داریم

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \quad (۷-۷)$$

اگر ارتفاع مقیاس  $H$  به بی‌نهایت میل کند، چگالی جو یکنواخت است و معادله‌ی حرکت برای موج‌های فشار، به معادله‌ی موج شناخته شده برای موج‌های بدون پراش که با سرعت صوت  $c_s$  منتشر می‌شوند، به دست می‌آید.

سپس یک موج سینوسی با بسامد زاویه‌ای  $\omega$  را به دست می‌آوریم. انتظار داریم هنگام انتشار این موج به طرف بالا با سرعت ثابت در جهت کاهش چگالی  $\rho(x)$ ، چگالی انرژی

$\frac{1}{4} \rho \omega^2 \xi^2$  آن ثابت بماند. با این فرض، مقدار<sup>۱</sup>

$$\xi(x,t) = \frac{X(x)}{\sqrt{\rho(x)}} e^{i\omega t}$$

۱. البته موج حقیقی با یک تابع حقیقی، یعنی قسمت حقیقی  $\xi(x,t)$  توصیف می‌شود. از تابع نمایی مختلط صرفاً برای ساده کردن ریاضیات استفاده شده است.

را در معادله‌ی (۶-۷) قرار می‌دهیم و متوجه می‌شویم که تابع  $X(x)$  در معادله‌ی دیفرانسیل زیر صدق می‌کند

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{(\omega^2 - \omega_c^2)}{c_s^2} X = 0 \quad (۸-۷)$$

در این معادله، پارامتر بسامدی یا بسامد زاویه‌ای بحرانی برابر است با

$$\omega_c = \frac{c_s}{\sqrt{H}} \quad (۹-۷)$$

به سادگی معلوم می‌شود که با شرط

$$k = \pm \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_c^2)}{c_s^2}}$$

تابع  $X(x) = Ae^{-ikx}$  جواب معادله‌ی (۷-۸) است. اگر علامت مثبت را برای  $k$  انتخاب کنیم، یعنی موج به طور قائم به طرف بالا حرکت کند، موجی با مشخصات زیر خواهیم داشت: به ازای  $\omega > \omega_c$  داریم

$$\text{Re}[\xi(x,t)] = \frac{A}{\sqrt{\rho(r)}} \cos(\omega t - kx) \quad k = \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_c^2)}{c_s^2}} \quad \text{که در آن } (۱۰-۷)$$

به ازای  $\omega < \omega_c$  داریم

$$\text{Re}[\xi(x,t)] = \frac{A}{\sqrt{\rho(r)}} e^{-\chi x} \cos(\omega t) \quad \chi = \sqrt{\frac{(\omega_c^2 - \omega^2)}{c_s^2}} \quad \text{که در آن } (۱۱-۷)$$

تأکید می‌کنیم که انتشار موج به مقدار بسامد بالاتر یا پایین‌تر از بسامد بحرانی  $\omega_c$  که از معادله‌ی (۹-۷) به دست می‌آید، بستگی دارد. اگر  $\omega > \omega_c$  باشد، موج فشار می‌تواند با سرعت ثابت به طور قائم به طرف نواحی چگال‌تر جو منتشر شود و دامنه‌ی آن متناسب با  $\rho^{-\frac{1}{2}}$  افزایش می‌یابد در حالی که چگالی انرژی  $\frac{1}{2} \omega^2 \xi^2 \rho$  آن ثابت می‌ماند. اما اگر  $\omega < \omega_c$  باشد، موج منتشر نمی‌شود؛ در واقع جابه‌جایی موج در تمام ارتفاعات به صورت پله‌ای است ولی دامنه‌ی موج به صورت نمایی با ارتفاع کاهش می‌یابد.

نتیجه می‌گیریم که  $\omega_c = c_s / \sqrt{2}H$  بسامد کمینه‌ی انتشار موج‌های فشار در یک جو تک‌دما در ارتفاع مقیاس  $H$  است. اگر حالت مشکل یک جو با دمای غیریکنواخت و میدان گرانشی غیریکنواخت را در نظر می‌گیریم، در می‌یافتیم که بسامد قطع از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\omega_c^2 = \frac{c_s^2}{4H^2} \left( 1 - 2 \frac{dH}{dx} \right) \quad (12-7)$$

### انتشار موج‌های گرانش

در معادله‌ی (۵-۷) ما فقط نیروی برگشت دهنده‌ی ناشی از افت و خیز شیب فشار را وارد کردیم، در حالی که نیروی شناوری گاز نیز می‌تواند نیروی برگشت دهنده‌ای تولید کند که نوسانات را حفظ می‌کند. برای فهمیدن این امر، جابه‌جایی کوچک قائم یک بسته از گاز را در نظر می‌گیریم. اگر این بسته به ناحیه‌ای وارد شود که وزن بسته از نیروی بالا برنده‌ی گاز کم‌تر باشد، بسته به صورت یک جریان همرفتی به صعود خود ادامه می‌دهد. اگر عکس این حالت باشد، بسته‌ی گاز نزول می‌کند و حول موضع تعادل خود نوسان می‌کند. بسامد زاویه‌ای این نوسانات را غالباً بسامد برون - وایسالا<sup>۱</sup> می‌نامند؛ ما آن را بسامد شناوری می‌نامیم و با  $N$  نشان می‌دهیم.

با ادامه دادن بحث همرفت در بخش ۳-۲، می‌توانیم رابطه‌ای برای بسامد شناوری به دست آوریم. وقتی یک بسته‌ی گاز در یک جو از مکان  $x$  تا مکان  $x + \Delta x$  به طرف بالا جابه‌جا می‌شود، نیروی رو به بالای وارد بر واحد جرم گاز جابه‌جا شده برابر است با

$$F = \frac{g}{\rho} [\Delta \rho - \delta \rho]$$

در این جا  $\Delta \rho = \rho(x + \Delta x) - \rho(x)$  اختلاف چگالی جو در ارتفاعات  $x$  و  $x + \Delta x$ ، و  $\delta \rho$  افزایش چگالی بسته‌ی گاز هنگام جابه‌جا شدن است. اگر این نیروی وارد بر واحد جرم را به صورت زیر بنویسیم

$$F = -N^2 \Delta x \quad N^2 = -\frac{g}{\rho} \left[ \frac{\Delta \rho}{\Delta x} - \frac{\delta \rho}{\Delta x} \right] \quad \text{که در آن} \quad (13-7)$$

واضح است که هرگاه  $N^2$  مثبت باشد، بسته‌ی گاز با بسامد زاویه‌ای  $N$ ، یعنی بسامد شناوری، نوسان می‌کند. در مسأله‌ی ۷-۴ نشان خواهیم داد که

$$N^2 = -g \left[ \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dx} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \right] \quad (۱۴-۷)$$

وقتی نوسانات شناوری در اجزاء مجاور جو به طور مناسب همراستا می‌شوند، یک موج گرانش منتشر می‌شود. ساده‌ترین مثال، مربوط به موجی است که وقتی بسته‌های مجاور گاز (در راستای افقی) با فاز مناسب به طرف بالا و پایین حرکت می‌کنند، در راستای افقی منتشر می‌شود. اگر تعداد بسته‌های گاز واقع در مسافت افقی  $2\pi$  مساوی با  $k$  باشد، سرعت فاز موج  $N/k$  است. موج‌های گرانش بسیار پیچیده می‌توانند در راستاهای دیگر هم منتشر شوند، ولی ما به این موضوع نمی‌پردازیم. در عوض، روی خاصیت‌های امواج گرانش که برای بحث در مورد موج‌های درون خورشید لازم است، تأکید می‌کنیم:

- موج‌های گرانش فقط می‌توانند در لایه‌های پایدار جو منتشر شوند؛ در یک ناحیه‌ی همرفتی، بسته‌های جابه‌جا شده‌ی گاز برنمی‌گردند و نوسان نمی‌کنند؛ این امر را در مسأله‌ی ۷-۴ به صورت واضح نشان داده‌ایم.
- بسامد شناوری، بسامد بیشینه‌ی ممکن برای انتشار یک موج گرانش است. بسامد زاویه‌ای موج‌های گرانش افقی  $N$  است. بسامد این موج‌ها در راستاهای دیگر از  $N$  کم‌تر است زیرا برای جابه‌جایی‌های غیرقائم، نیروی برگشت دهنده‌ی شناوری کم‌تر است.

### ۷-۳ موج‌های درون خورشید

در این بخش نحوه‌ی انتشار موج‌های گرانش و فشار و چگونگی به تله افتادن آن‌ها در درون خورشید را شرح می‌دهیم. بسامدهای قطع  $N$  و  $\omega_c$  در این مورد نقش مهمی را بازی می‌کنند. هنگامی که یک موج فشار از خورشید عبور می‌کند، انتظار داریم سرعتش مطابق شکل ۷-۳ تغییر کند. این شکل مربع سرعت به دست آمده از مدل خورشیدی استاندارد را برای خورشیدی نشان می‌دهد که فراوانی جرم هلیوم اولیه‌ی آن  $X_4 = 0.28$  و سن آن  $4.6 \times 10^9$  سال است. برای فهمیدن معنی منحنی شکل ۷-۳، یادآوری می‌کنیم که  $c_s$  از معادله‌ی (۷-۷)

به دست می‌آید و فرض بر این است که گاز خورشیدی تقریباً یک گاز کلاسیکی ایده‌آل است. معلوم می‌شود که

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{\gamma k T}{\bar{m}}} \quad (15-7)$$

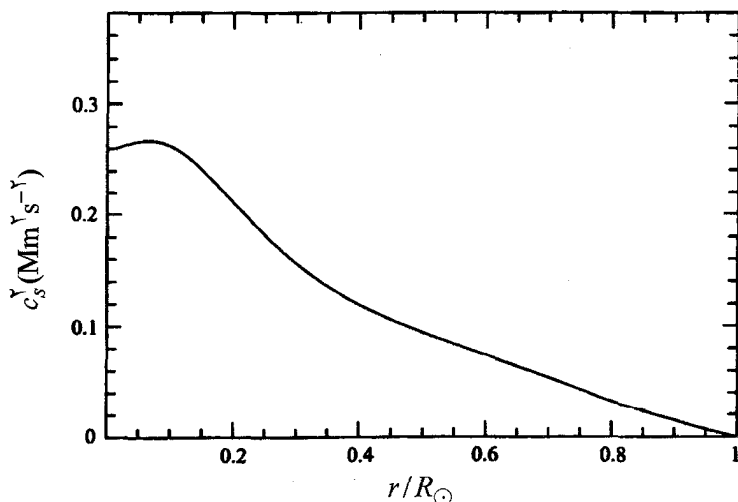
می‌بینیم که  $c_s$  با  $\sqrt{T}$  نسبت مستقیم و با  $\sqrt{\bar{m}}$  نسبت عکس دارد. این امر نشان می‌دهد که سرعت موج‌های فشار در هنگام نزدیک شدن به نواحی مرکزی داغ خورشید افزایش می‌یابد، ولی این افزایش سرعت در هنگام ورود به ناحیه‌ی همجوشی هسته‌ای کم است؛ در این ناحیه مقدار  $\bar{m}$  بیش‌تر است زیرا هیدروژن به هلیوم تبدیل شده است.

مرتبه‌ی بزرگی  $c_s$  به راحتی از معادله‌ی (۷-۱۵) مشخص می‌شود. اگر دمای نوعی درون خورشید را که از معادله‌ی (۱-۳۱) به دست می‌آید مساوی با  $T = T_I = 6 \times 10^6 \text{ K}$ ، و

$$\bar{m} = 0.61 \text{ amu} \quad \text{و} \quad \gamma = \frac{5}{3} \quad \text{را در نظر بگیریم، داریم}$$

$$c_s \approx 4 \times 10^5 \text{ ms}^{-1} \quad (16-7)$$

بسامد کمینه  $\omega_c$  برای انتشار موج فشار در قسمت داخلی خورشید را نیز می‌توان به‌طور تقریبی به‌دست آورد. مدل‌های خورشیدی نشان می‌دهند که در شعاع  $r \approx R_\odot / 3$  که  $m(r) \approx 0.7 M_\odot$



شکل ۷-۳ مربع سرعت موج‌های فشار در درون خورشید که با استفاده از مدل خورشیدی استاندارد برای خورشیدی به دست آمده است که فراوانی جرم هلیوم اولیه‌ی آن  $X_4 = 0.28$  و سن آن  $4.6 \times 10^9$  سال است.

است، دما مساوی با  $T_I = 6 \times 10^6 \text{ K}$  است. شتاب گرانش در این شعاع  $g = Gm(r)/r^2 = 6.3 GM_{\odot} / R_{\odot}^2 = 6.3 \times 274 \text{ ms}^{-2}$  است و اگر  $\bar{m} = 0.6 \text{ amu}$  باشد، ارتفاع  $H \approx kT_I / \bar{m}g \approx 4.7 \times 10^7 \text{ m}$  خواهد بود. وقتی این مقدار  $H$  را و مقدار برآوردی  $c_s$  از معادله‌ی (۷-۱۶) را در معادله‌ی (۷-۹) قرار می‌دهیم، معلوم می‌شود که بسامد قطع موج فشار برابر است با

$$\omega_c \approx 4 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (7-17)$$

این بسامد متناظر با دوره‌ی تناوب تقریبی ۲۵ دقیقه است.

برآورد مقدار بسامد شناوری  $N$  در داخل خورشید بسیار مشکل است زیرا همان‌طور که معادله‌ی (۷-۱۴) نشان می‌دهد مقدار  $N^2$  به تفاضل دو جمله بستگی دارد که یکی از شیب فشار و دیگری از شیب دما به دست آمده است. با وجود این، مقدار  $N^2$  در قسمت داخلی غیرهمرفتی خورشید مثبت است، اما در ناحیه‌ی همرفتی که از شعاع  $r \approx 0.7 R_{\odot}$  شروع می‌شود، شیب دمایی زیاد باعث می‌شود همرفت به حدی برسد که مقدار  $N^2$  به صفر میل کند یا منفی شود. منظور این است که در پایین ناحیه‌ی همرفتی، بسامد شناوری باید صفر شود. اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم بفهمیم موج‌های فشار و گرانش چگونه در داخل خورشید به اطراف انتشار پیدا می‌کنند.

موج‌های گرانش در خورشید در هنگام رسیدن به ناحیه‌ای که بسامد آن‌ها از بسامد شناوری  $N$  بیش‌تر می‌شود، میرا می‌شوند. محاسبات مدل خورشیدی نشان می‌دهند که بسامد شناوری در قسمت اعظم درون خورشید تقریباً  $3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  است و برحسب انتظار، در پایین ناحیه‌ی همرفتی در شعاع  $r \approx 0.7 R_{\odot}$  به صفر میل می‌کند. بنابراین، موج‌های گرانش با بسامد  $\omega$  پایین‌تر از  $3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  یا با دوره‌ی تناوب بالاتر از ۳۵ دقیقه، می‌توانند در قسمت داخلی خورشید منتشر شوند، ولی هنگام وارد شدن به قسمت‌های نزدیک ناحیه‌ی همرفتی که  $N$  از  $\omega$  کوچک‌تر است، باز می‌تابند. بنابراین، موج‌های گرانش درونی به مقدار زیاد در پایین ناحیه‌ی همرفتی به تله می‌افتند و آشکارسازی آن‌ها در سطح خورشید مشکل است. نوسانات کم بسامد خورشید با دوره‌های تناوب یک ساعت و بیش‌تر گزارش شده است، اما شناسایی

آن‌ها از طریق موج‌های گرانش داخلی، قطعی نیست.

در مقابل، موج‌های فشار درون خورشید می‌توانند تا نزدیک سطح خورشید نفوذ کنند. بسامد کمینه برای انتشار در قسمت داخلی خورشید از معادله‌ی تقریبی (۷-۱۷) به دست می‌آید؛ این بسامد  $\omega_c \approx 4 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  متناظر با دوره‌ی تناوب ۲۵ دقیقه است. هر چه موج به سطح خورشید نزدیک‌تر می‌شود، کاهش  $c_s$  باعث افزایش سریع  $\omega_c$  می‌شود، و در  $500 \text{ km}$  بالاتر از سطح قابل رؤیت خورشید،  $\omega_c$  به مقدار بیشینه‌ی  $\omega_c \approx 3.5 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  می‌رسد که متناظر با دوره‌ی تناوب ۳ دقیقه است؛ به مسأله‌ی ۷-۳ رجوع کنید. بنابراین، موج‌های با دوره‌های تناوب بیش‌تر از ۳ دقیقه در نزدیکی سطح خورشید به طرف پایین باز می‌تابند؛ این موج‌ها اگر به ناحیه‌ای وارد شوند که مقدار موضعی  $\omega_c$  به  $\omega$  میل می‌کند، باز می‌تابند. این موج‌های فشار محبوس شده در نور کره‌ی خورشیدی با دوره‌های تناوب بین ۳ و ۱۲ دقیقه مشاهده شده‌اند. در واقع، حرکت مشاهده شده، نتیجه‌ی مستقیم موج‌های فشار میرا است.

## ۷-۴ مدهای عادی نوسان

اکنون توجه خود را به مدهای عادی نوسان مربوط به موج‌های فشار محبوس در درون خورشید معطوف می‌کنیم. ما این موج‌های فشار را در داخل یک گلوله‌ی کروی گازی با شعاع خورشید، با دماهای  $T$ ، با فشارهای  $P$  و چگالی‌های  $\rho$  قابل مقایسه با مقادیر مشابه در درون خورشید، در نظر می‌گیریم. مسأله‌ی پیدا کردن مدهای عادی نوسان موج‌های فشار محبوس در این گلوله‌ی خورشیدی، یک مسأله و ویژه مقدار موج است که مشابه مسأله‌ی فیزیک اتم هیدروژن در مکانیک کوانتومی است.<sup>۱</sup>

در بخش ۷-۲ موج‌های فشار را در یک جو تکدما با گرانش ثابت در نظر گرفتیم. به ویژه

نشان دادیم که وقتی بسامدها بسیار بیش‌تر از بسامد قطع  $\omega_c$  هستند، توزیع موج  $\rho^{\frac{1}{2}} \xi$  می‌تواند به صورت سینوسی با دامنه‌ی ثابت و مقدار نوسانات  $k = \omega / c_s$  باشد؛ به معادله‌ی

۱. عکس این موضوع در مورد معادله‌ی شرودینگر صادق است. در این حالت مسأله‌ی اتم هیدروژن بسیار شبیه مسائل ویژه مقدار موج در فیزیک کلاسیکی است.



(۷-۱۰) رجوع کنید. در مقایسه، یک موج فشار در درون خورشید موقعی این‌گونه عمل می‌کند که بسامد آن کاملاً بیش‌تر از مقدار موضعی  $\omega_c$  باشد. در این صورت، موج را به طور تقریبی می‌توان با معادله‌ی موج سه بعدی زیر توصیف کرد

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (7-18)$$

در این معادله  $c_s$  سرعت موج موضعی است. تابع نرده‌ای  $\psi(\mathbf{r}, t)$  را که توزیع موج را نشان می‌دهد، می‌توان به صورت  $\frac{1}{c_s^2} \rho^{\frac{1}{2}} \xi_r$  در نظر گرفت، که  $\xi_r$  جابه‌جایی شعاعی است. مدهای عادی نوسان با بسامد زاویه‌ای  $\omega$  را از جواب معادله‌ی (۷-۱۸) به صورت زیر

می‌توان به دست آورد

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ R(r) Y_{lm}(\theta, \phi) e^{i\omega t} \right] \quad (7-19)$$

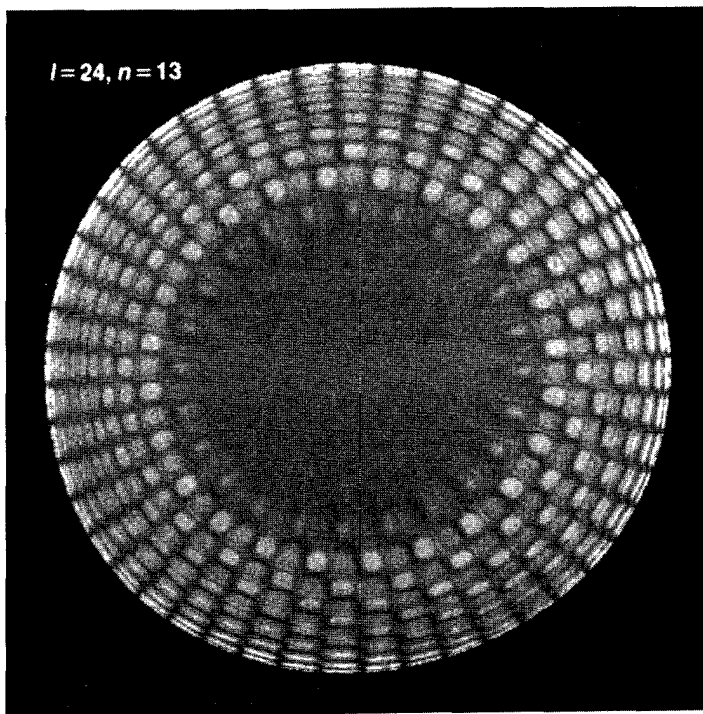
در این جا  $r$ ،  $\theta$ ،  $\phi$  مختصات قطبی کروی هستند و مبدأ مختصات در مرکز خورشید قرار دارد،  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  هماهنگ‌های کروی هستند که شکل‌های زاویه‌ای ممکن مدها را مشخص می‌کنند، و  $R(r)$  توابع توصیف‌کننده‌ی شکل‌های شعاعی ممکن مدها هستند.

هماهنگ‌های کروی با عددهای درست  $l$  و  $m$  مشخص شده‌اند؛ به ازای هر مقدار درست مثبت  $l$ ،  $l+1$  مقدار ممکن برای عدد درست  $m$  وجود دارد که گستره‌ی آن از  $-l$  تا  $+l$  است. مد  $l=0$  تقارن کروی دارد و مدهای  $l=1, 2, 3, \dots$  شکل‌های زاویه‌ای دارند که پیچیدگی آن‌ها بیش‌تر می‌شود. عدد درست  $l$  را درجه‌ی مد می‌نامند. به ازای هر مقدار  $l$ ، رشته‌ای از توابع شعاعی  $R(r)$  وجود دارند که هر یک از آن‌ها را با یک عدد درست  $n$  به نام مرتبه‌ی شعاعی مد مشخص می‌کنند.

ضمناً یادآوری می‌کنیم که چون  $c_s$  فقط به مختصه‌ی شعاعی  $r$  بستگی دارد، این سیستم تقارن دورانی دارد و مدهایی که مقادیر  $n$  و  $l$  آن‌ها مساوی، اما مقادیر  $m$  آن‌ها متفاوت است، بسامدهای یکسان دارند. این تبهگنی موقعی حذف می‌شود که دوران خورشید را در نظر بگیریم. بنابراین هر بسامدی به  $l+1$  مؤلفه شکافته می‌شود که فاصله‌ی جدایی آن‌ها از بسامد دوران خورشید به دست می‌آید؛ بسامد دوران متوسط خورشید  $440 \text{ nHz} \approx \Omega/2\pi$  است. این

اثر مانسته‌ی اثر زیمان<sup>۱</sup> در فیزیک اتمی است که در آن‌جا تقارن دورانی به خاطر وجود میدان مغناطیسی خارجی به هم می‌خورد، در نتیجه ترازهای انرژی به عدد کوانتومی مغناطیسی  $m$  بستگی پیدا می‌کنند.

مد ممکن نوسان به ازای  $l=24$  و  $n=13$  در شکل ۷-۴ نشان داده شده است. این شکل یک سطح مقطع دایره‌ای را از مرکز خورشید نشان می‌دهد که در آن، نواحی دارای حرکت تناوبی به طرف مرکز خورشید و به طرف خارج خورشید، با سایه روشن‌ها نشان داده شده‌اند.



شکل ۷-۴ تصویر کامپیوتری برای ساختار شعاعی یک مد نوسان خورشید با درجه‌ی  $l=24$  و مرتبه‌ی شعاعی  $n=13$ . این تصویر یک سطح مقطع دایره‌ای را از مرکز خورشید نشان می‌دهد که در آن، نواحی دارای حرکت تناوبی به طرف مرکز خورشید و به طرف خارج خورشید، با سایه روشن‌ها نشان داده شده‌اند. دوره‌ی تناوب مشاهده شده برای این مد در حدود  $5/4$  دقیقه است. (با اقتباس از J.W. Leibacher, R.W. Noyes, J. Toome and R.K. Ulrich, 1985, *Scientific American*, 252, 40)

اگر ما معادله‌ی (۷-۱۹) را در معادله‌ی موج (۷-۱۸) قرار دهیم، معلوم می‌شود که تابع شعاعی  $R(r)$  در معادله‌ی دیفرانسیل زیر صدق می‌کند

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\omega^2}{c_s^2} \right] R = 0 \quad (۷-۲۰)$$

اکنون می‌توانیم رابطه‌ی بین درجه‌ی مد و عدد موج افقی آن را به دست آوریم؛ در ابتدای بخش ۷-۱ به این موضوع اشاره کردیم. مجموعه‌ای از مختصات دکارتی را در نظر می‌گیریم که برای آن‌ها محور  $x$  در راستای محور قائم موضعی گذرنده از مرکز خورشید، و محورهای  $y$  و  $z$  در راستای محورهای افقی موضعی قرار دارند. اگر جواب معادله‌ی موج را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ f(x) e^{i(\omega t - k_y y - k_z z)} \right]$$

از لاپلاسی  $\nabla^2$  روی  $\psi$  داریم

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (k_y^2 + k_z^2) \right] \psi$$

که به جای جمله‌ی

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \psi$$

در معادله‌ی (۷-۲۰) ظاهر شده است. مقایسه‌ی این دو رابطه به ازای  $r = R_\odot$ ، نشان می‌دهد که ارتباط عدد موج افقی روی سطح به صورت  $k_h = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$ ، و درجه‌ی  $l$  یک مد به صورت زیر است

$$k_h = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R_\odot} \quad (۷-۲۱)$$

بنابراین، با مشاهده‌ی سطح خورشید که مقدار  $k_h$  را به دست می‌دهد، می‌توان  $l$  مد نوسان را به دست آورد.

در معادله‌ی دیفرانسیل (۷-۲۰)، مقدار  $R(r) = u(r)/r$  را قرار می‌دهیم و متوجه می‌شویم که تابع شعاعی  $u(r)$  در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left( k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u = 0 \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2} \quad \text{که در آن} \quad (۲۲-۷)$$

جواب‌های این معادله‌ی دیفرانسیل باید در شرایط مرزی مناسب صدق کنند. شرط اول،  $u(r) = 0$  به ازای  $r = 0$  است؛ این شرط نشان می‌دهد که مقدار موج، که با  $u(r)/r$  متناسب است، در مبدأ، متناهی است. شرط دوم ایجاب می‌کند که  $u(r)$  در نزدیکی سطح خورشید کاهش یابد به طوری که هر جا  $\omega_c > \omega$  است به یک موج در حال کاهش نمایی وصل شود. این محاسبه‌ی ساده شده، با قرار دادن  $u(r) = 0$  در  $r \approx R_\odot$ ، این رفتار را شبیه سازی می‌کنیم. معادله‌ی دیفرانسیل (۲۲-۷) و شرایط مرزی آن، یک مسأله‌ی ویژه مقدار به وجود می‌آورد. جواب‌های این معادله، که ویژه تابع‌های شعاعی نامیده می‌شوند، فقط موقعی وجود دارند که پارامتر  $\omega$  مقادیر ویژه‌ای را، به نام ویژه بسامدهای مدهای عادی نوسان، احراز کند. به ازای هر مقدار  $l$ ، رشته‌ای از ویژه تابع‌های  $u(r)$  را داریم که تعداد مدها در بین  $r = 0$  و  $r = R_\odot$  در حال افزایش است؛ هر چه تعداد مدها بیش تر باشد، مقدار بسامدهای نوسان نیز بیش تر است. این رشته را با مرتبه‌ی شعاعی مشخص می‌کنند. در واقع، یک ویژه تابع با مرتبه‌ی شعاعی  $n$  دارای  $n-1$  مد در بین  $r = 0$  و  $r = R_\odot$  است.

بعضی از این ویژه تابع‌ها و ویژه بسامدها نسبت به خواص درون خورشید بسیار حساس‌اند. این واقعیت را مسأله‌ی ۷-۶ به سادگی نشان می‌دهد که به ازای  $kr \ll 1$ ، ویژه تابع‌های شعاعی  $u(r)$  با درجه‌ی  $l$  متناسب با  $r^{l+1}$  هستند. این نتیجه ایجاب می‌کند که ویژه تابع‌های با مقادیر زیاد  $l$  در نزدیکی مرکز خورشید دارای دامنه‌های کوچک باشند، در حالی که ویژه تابع‌های با مقادیر کم  $l$  تا عمق زیاد در درون خورشید نفوذ می‌کنند.

### تقریب زنی سرعت ثابت

برای نشان دادن ایده‌های اساسی مسأله‌ی ویژه مقدار برای نوسانات خورشیدی، و برای ارزیابی مرتبه‌ی بزرگی مربوط، روشی بسیار تقریبی را به کار می‌بریم که در آن موج‌های فشار با سرعت ثابت، که از معادله‌ی (۷-۱۶) به دست می‌آید،  $c_s = 4 \times 10^5 \text{ ms}^{-1}$ ، در خورشید منتشر می‌شوند.

در این تقریب زنی، پیدا کردن ویژه تابع‌ها و ویژه بسامدها به ازای  $l=0$  اهمیتی ندارد. ویژه تابع‌های شعاعی مربوط به  $l=0$ ، که در معادله‌ی (۷-۲۲) و شرایط مرزی  $u(r)=0$  در  $r=0$  و در  $r=R_{\odot}$  صدق می‌کنند، عبارت‌اند از

$$u(r) = \sin k r \quad k = \frac{n\pi}{R_{\odot}} \quad \text{به ازای}$$

در این جا  $n$  یک عدد درست مثبت است. در نتیجه ویژه بسامدهای مدها به ازای  $l=0$  و مرتبه‌ی شعاعی  $n$  عبارت‌اند از

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{k c_s}{2\pi} = n \frac{c_s}{2R_{\odot}} = n(0.3 \text{ mHz})$$

با وجود این، وقتی معادله‌ی موج (۷-۱۸) را می‌نوشتیم فرض کردیم که بسامدها از بسامد قطع، که از معادله‌ی (۷-۱۷) به دست می‌آید، بزرگ‌ترند؛ بسامد قطع  $\omega_c = 4 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  یا  $\nu_c = \omega_c / 2\pi = 0.64 \text{ mHz}$  است. بنابراین، رابطه‌ی قبلی برای بسامدهای مدهای  $l=0$ ، فقط موقعی با این فرض سازگار است که مرتبه‌ی شعاعی  $n$  بزرگ‌تر باشد.

اکنون به محاسبه‌ی بسامدهای مدها برای یک مقدار عمومی  $l$  می‌پردازیم. این بسامدها را با توجه به این نکته می‌توان به دست آورد که جواب معادله‌ی (۷-۲۲) را که با شرط مرزی  $u(0)=0$  سازگار است، می‌توان برحسب جمله‌های یک تابع بسل کروی از مرتبه‌ی  $l$  نوشت؛ در واقع داریم

$$u(r) = r j_l(kr) \quad (7-23)$$

ویژه بسامدهای ممکن از شرط مرزی در  $r=R_{\odot}$  حساب می‌شوند:

$$j_l(kR_{\odot}) = 0 \quad (7-24)$$

برای مدهایی که  $kR_{\odot} \gg 1$  است، این شرط مرزی به صورت زیر است

$$j_l(kR_{\odot}) \approx \frac{\sin(kR_{\odot} - l\pi/2)}{R_{\odot}} \approx 0$$

که ایجاب می‌کند

$$kR_{\odot} \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

در این جا عدد درست  $n$  مرتبه‌ی شعاعی است. نتیجه می‌گیریم که ویژه بسامدهای مدهای با مقادیر بالاتر  $n+l/2$  عبارت‌اند از

$$\nu \approx \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{c_S}{2R_{\odot}} = \left( n + \frac{1}{2} \right) (0.3 \text{ mHz}) \quad (25-7)$$

باید توجه کرد که برای مقادیر یکسان  $l$ ، اما برای مقادیر متوالی  $n$ ، فاصله‌ی بین بسامدهای مدها یکسان است:

$$\nu_{n+1,l} - \nu_{n,l} \approx \frac{c_S}{2R_{\odot}} \quad (26-7)$$

فاصله‌ی بین بسامدها با عکس زمان عبور موج از خورشید، برابر است که با تقریب زنی سرعت ثابت، مساوی با ۵۷ دقیقه است. در محاسبات دقیق‌تر، که تغییرات  $c_S$  در هنگام عبور کامل از خورشید در نظر گرفته می‌شود، فاصله‌ی بین بسامدهای با مقدار  $l$  یکسان تقریباً مساوی است، این فاصله متناظر با زمان تقریبی عبور از خورشید، یعنی ۱۲۳ دقیقه است. شکل ۱-۷ نشان می‌دهد که فاصله‌ی بین بسامدهای نوسان مشاهده شده نیز تقریباً یکسان است.

باز هم یادآوری می‌کنیم که در تقریب زنی سرعت ثابت، مدهای بسامدهای بالا با مقدار یکسان  $n+l/2$ ، تبهگن‌اند. در واقع، اختلاف بسامد بین این مدها کم است و نسبت به تغییر سرعت موج فشار در هنگام عبور از خورشید، حساس است.

### تقریب‌زنی WKB

تغییر سرعت موج فشار هنگام عبور از خورشید را با استفاده از تقریب‌زنی ونزل - کرامرز - بریلوین<sup>۱</sup> (WKB) بررسی می‌کنند. برای انجام این کار، معادله‌ی (۷-۲۲) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + [K(r)]^2 u(r) = 0 \quad [K(r)]^2 = \frac{\omega^2}{[c_S(r)]^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \quad \text{که در آن} \quad (27-7)$$

در تقریب زنی WKB فرض می‌شود تابع  $K(r)$  به آرامی با  $r$  تغییر می‌کند. مخصوصاً وقتی

$[K(r)]^2$  مثبت است، تابع  $K(r)$  عدد موج یک ویژه تابع نوسانی  $u(r)$  است که به آرامی تغییر می‌کند.

با توجه به معادله‌ی (۷-۲۷) روشن است که هر ویژه تابع دارای یک مقدار  $[K(r)]^2$  است که وقتی موج به اعماق خورشید نفوذ می‌کند این مقدار کاهش می‌یابد و در شعاع  $r = R_f$  به صفر میل می‌کند. مقدار  $R_f$  از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\frac{R_f}{c_s(R_f)} = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\omega} \quad (۷-۲۸)$$

بنابراین، در تقریب زنی WKB، ویژه تابع  $u(r)$  به ازای  $r > R_f$  با عدد موج  $K(r)$  نوسان می‌کند، اما به ازای  $r < R_f$  که  $[K(r)]^2 < 0$  است این تابع به صورت نمایی کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر، ویژه تابع یک موج نوسانی است که طول موج آن به  $r$  بستگی دارد و در یک کاواک بین شعاع‌های  $r = R_\odot$  و  $r = R_f$  محبوس شده است. با توجه به معادله‌ی (۷-۲۸) معلوم می‌شود که هر چه مقدار  $l$  کوچک‌تر باشد، عمق کاواک بیش‌تر است. برای مثال، اگر از تابع سرعت نشان داده شده در شکل ۷-۳ استفاده کنیم، از معادله‌ی (۷-۲۸) به ازای  $l = 5$  مقدار  $R_f \approx 0.7R_\odot$  به دست می‌آید، ولی به ازای  $l = 40$  مقدار  $R_f \approx 0.7R_\odot$  حاصل می‌شود. ویژه بسامدها از این شرط به دست می‌آیند که فاصله‌ی بین نقطه بازتاب داخلی و نقطه‌ی بازتاب خارجی موج نوسانی، تقریباً مضرب درستی از نصف طول موج است. به بیان دقیق‌تر، اختلاف فاز بین  $R_f$  و  $R_\odot$  برابر است با

$$\Phi = \int_{R_f}^{R_\odot} K(r) dr = (n + \alpha)\pi \quad (۷-۲۹)$$

که در آن  $n$  یک عدد درست مثبت (مرتبه‌ی شعاعی) است، و  $\alpha$  پارامتری است که ثابت می‌کند موج نوسانی داخل کاواک به طور هموار به موج‌های میرا شونده‌ی خارج کاواک وصل می‌شود. بهتر است این شرط را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{(n + \alpha)\pi}{\omega} = \int_{R_f}^{R_\odot} \left( \frac{1}{[c_s(r)]^2} - \frac{l(l+1)}{r^2 \omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} dr \quad (۷-۳۰)$$

ویژه بسامد، مرتبه‌ی شعاعی و درجه‌ی هر مد نوسان تقریباً از معادله‌ی (۷-۳۰) پیروی

می‌کنند. باید توجه کرد که تابع زیر انتگرال و حد پایین انتگرال در طرف راست معادله، هر دو تابعی از متغیر  $s = \sqrt{l(l+1)}/\omega$  هستند. نتیجه می‌گیریم که طرف چپ معادله‌ی (۷-۳۰)، یعنی  $(n+\alpha)\pi/\omega$  نیز تابعی از  $s$  است. این نتیجه را قانون دووال<sup>۱</sup> می‌نامند که برای به دست آوردن مرتبه‌ی شعاعی  $n$  مدهای مشاهده شده نوسان خورشید بسیار مفید است.

با استفاده از معادله‌ی (۷-۳۰) می‌توان فهمید که آیا مدل خورشیدی می‌تواند مقادیر درستی را برای تابع سرعت  $c_s(r)$  به ما بدهد؟ داده‌های مشاهده‌ای در مورد بسامدها و عددهای موج افقی، مقادیری را برای  $\omega$  و  $l$  به دست می‌دهند. با تحلیل این داده‌ها می‌توان مقدار پارامتر  $\alpha$  و مقدار مرتبه‌ی شعاعی  $n$  برای یک مد با درجه‌ی  $l$  و بسامد  $\omega$  را به دست آورد. پس، مقدار  $(n+\alpha)\pi/\omega$  برای مدی با بسامد  $\omega$  و درجه‌ی  $l$  را می‌توان با مقدار طرف راست معادله‌ی (۷-۳۰) که با استفاده از مدل خورشیدی حساب شده است، مقایسه کرد.

در واقع، استفاده از مدل خورشیدی صریح الزامی نیست، زیرا تابع سرعت  $c_s(r)$  را مستقیماً می‌توان از ترکیب معادله‌ی (۷-۳۰) با داده‌های خورشید لرزه‌ای حساب کرد. روش کار به صورت زیر است. از مشاهده‌ی چند هزار مد موج فشار می‌توان مقادیر  $\omega$  و  $l$  را به دست آورد. سپس از این داده‌ها می‌توان برای محاسبه‌ی مقادیر  $n$  و پارامتر  $\alpha$  استفاده کرد و بعد از آن مقادیر طرف چپ معادله‌ی (۷-۳۰) را به صورت تابعی از  $s = \sqrt{l(l+1)}/\omega$  به دست آورد. با معلوم بودن این تابع و مشتق آن، که آن‌ها را  $F(s)$  و  $F'(s)$  می‌نامیم، و با داشتن اطلاعات مناسب در مورد معادلات انتگرالی، می‌توانیم معادله‌ی (۷-۳۰) را به صورت زیر تغییر دهیم

$$\frac{r}{R_{\odot}} = \exp \left[ -\frac{\gamma}{\pi} \int_{t(R_{\odot})}^{t(r)} \frac{F'(s)}{(s^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}} ds \right] \quad t(r) = r/c_s(r) \quad \text{که در آن (۷-۲۷)}$$

وقتی انتگرال را برای مقادیر معلوم  $c_s$  حساب می‌کنیم، مقداری را برای  $r$  به دست می‌آوریم که این مقدار سرعت برای آن مقدار  $r$  مناسب است. بنابراین، معادله‌ی (۷-۳۱) یک معادله‌ی ضمنی برای تابع  $c_s(r)$  است.



## نکات قابل توجه

وقتی خطاهای نظری ناشی از کاربرد تقریب زنی WKB را ارزیابی می‌کنیم، می‌توانیم مقایسه‌ی معنی‌داری با داده‌های خورشید لرزه‌ای انجام دهیم. در واقع، این داده‌ها با سرعت موج‌های فشار به‌دست آمده از مدل خورشیدی استاندارد برای خورشیدی به سن  $4/6$  بیلیون سال، سازگارند، این سرعت در شکل ۷-۳ نشان داده شده است. گذشته از این، داده‌های خورشید لرزه‌ای در کنار زدن مدل‌های خورشیدی که در آن‌ها فراوانی عناصر سنگین کم است و کنار زدن مدل‌های خورشیدی که در آن‌ها هلیوم تولید شده از طریق همجوشی در قسمت مرکزی با هیدروژن موجود در خارج از قسمت مرکزی مخلوط شده‌اند، نقش مؤثری داشته است. علاوه بر این، معلوم شده است که در پایین ناحیه‌ی همرفتی خورشید، انحنای تابع  $c_s(r)$  تغییر می‌کند؛ به مسأله‌ی ۷-۸ رجوع کنید. این تغییر، مکان پایین ناحیه‌ی همرفتی خورشید را در عمق  $(0.287 \pm 0.003)R_{\odot}$  مشخص کرده است، و برای پیدا کردن مشکوک‌ترین پارامتر در مدل‌های خورشیدی، - یعنی پارامتر طول اختلاط به کار رفته برای توصیف همرفت کمک کرده است.

با وجود این، داده‌های خورشید لرزه‌ای محدودیت جدی برای یک مدل خورشیدی ایجاد نمی‌کنند، زیرا همان‌طور که معادله‌ی (۷-۱۵) نشان می‌دهد، هر مدلی که دما و جرم متوسط ذرات گاز در مکان‌های مختلف درون خورشید را با دقت توصیف کند، مقادیر درستی را برای تابع سرعت  $c_s(r)$  به ما خواهد داد. به هر حال، داده‌های خورشید لرزه‌ای، اجزاء کلیدی مدل خورشیدی استاندارد را تأیید کرده‌اند. این امر نشان می‌دهد که مسأله‌ی نوترینوی خورشیدی مورد بحث در بخش ۴-۲، ارتباط زیادی به اختریف‌یک ندارد بلکه این مشکل بیش‌تر به فیزیک نوترینو مربوط می‌شود. بدون شک، خورشید لرزه‌شناسی نقش نافذی را در اختریف‌یک داشته و خواهد داشت.

## خلاصه

### مقدمه

- مطالعه‌ی مدهای نوسان خورشید را خورشید لرزه‌شناسی می‌نامند. یک مد نوسان را با اندازه‌گیری دو خاصیت سطحی می‌توان معرفی کرد: بسامد نوسان  $\omega$  و عدد موج افقی  $k_h$ . معیارهای اندازه‌گیری  $\omega$  و  $k_h$  از اصول آنالیز فوریه پیروی می‌کنند.

### موج‌های فشار و گرانش

- بسامد کمینه‌ی یک موج فشار در حال انتشار، برابر است با

$$\omega_c = \frac{c_s}{\sqrt{H}} \quad (9-7)$$

- بسامد بیشینه‌ی یک موج گرانش در حال انتشار، بسامد شناوری  $N$  است که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$N^2 = -g \left[ \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dx} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \right] \quad (14-7)$$

### موج‌های درون خورشید

- سرعت موج‌های فشار درون خورشید برابر است با

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{\gamma kT}{\bar{m}}} \quad (15-7)$$

مقدار نوعی  $c_s$  در حدود  $4 \times 10^5 \text{ ms}^{-1}$  است.

- مقادیر نوعی بسامدهای بیشینه برای موج‌های فشار در حال انتشار در داخل خورشید  $4 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  و در نزدیکی سطح خورشید  $3/5 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  است. این مقادیر نشان می‌دهند که موج‌های با دوره‌های تناوب کم‌تر از ۲۵ دقیقه می‌توانند در داخل خورشید منتشر شوند، اما تمام موج‌های با دوره‌های تناوب کم‌تر از ۳ دقیقه، بر اثر بازتاب در نزدیکی سطح خورشید، در داخل خورشید به تله می‌افتند.
- موج‌های گرانش داخلی با دوره‌های تناوب کم‌تر از ۳۵ دقیقه می‌توانند در داخل خورشید منتشر شوند، اما قسمت اعظم آن‌ها در پایین ناحیه‌ی همرفتی خورشید به تله می‌افتند.

### مدهای عادی نوسان

- شکل یک مد عادی نوسان را که از موج‌های فشار درون خورشید ناشی می‌شود، می‌توان با یک هماهنگ‌گروی با عددهای درست  $l$  و  $m$  و یک تابع شعاعی مشخص شده با عدد درست  $n$  توصیف کرد. عدد درست  $l$  را درجه‌ی مد و عدد درست  $n$  را مرتبه‌ی شعاعی

مد می‌نامند. رابطه‌ی بین درجه‌ی یک مد و عدد موج افقی آن،  $k_h$ ، به صورت زیر است

$$k_h = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R_\odot} \quad (21-7)$$

● ویژه بسامدهای مدهای نوسان خورشید را با حل کردن یک مسأله‌ی ویژه مقدار موج با معادله‌ی دیفرانسیل

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + [K(r)]^2 u(r) = 0 \quad [K(r)]^2 = \frac{\omega^2}{[c_s(r)]^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \quad \text{که در آن } (27-7)$$

و در نظر گرفتن شرایط مرزی در مرکز و در سطح خورشید، می‌توان حل کرد. ورودی نظری اصلی این مسأله‌ی ویژه مقدار، سرعت یک موج فشار درون خورشید است.<sup>۱</sup>

● اختلاف بسامدهای مدهای با مقادیر یکسان  $l$  ولی با مقادیر متفاوت  $n$ ، تقریباً برابر است با

$$\nu_{n+1,l} - \nu_{n,l} \approx \frac{c_s}{2R_\odot} \quad (26-7)$$

مدهای با مقادیر یکسان  $n+l/2$  تقریباً تبهگن‌اند.

● سرعت یک موج فشار در داخل خورشید که از مدل خورشیدی استاندارد به دست می‌آید، با داده‌های خورشید لرزه‌ای سازگار است. داده‌های خورشید لرزه‌ای در کنار زدن مدل‌های خورشیدی با فراوانی کم عناصر سنگین، و در کنار زدن مدل‌های خورشیدی که در آن‌ها هلیوم تولید شده با همجوشی در قسمت مرکزی با اکسیژن موجود در اطراف هسته‌ی مرکزی مخلوط شده است، نقش مهمی داشته‌اند. معلوم شده است که مکان پایین ناحیه‌ی همرفتی خورشید در عمق  $(0.287 \pm 0.003)R_\odot$  قرار دارد.

۱. با انجام محاسبات دقیق‌تر داریم

$$[K(r)]^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c_s^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right)$$

که در آن  $N$  و  $\omega_c$ ، بسامدهای قطع در نقاط مختلف خورشید، نیز باید معلوم باشند.

## مسئله‌های فصل ۷

۱-۷ نشان دهید که شیب فشار لازم برای تعادل هیدروستاتیکی در یک جو، در جایی که شتاب گرانشی  $g$  است، برابر است با

$$\frac{dP}{dx} = -g\rho(x)$$

فرض کنید که گاز یک گاز کلاسیکی ایده‌آل با معادله‌ی حالت  $P = \rho kT / \bar{m}$  است که در آن  $\bar{m}$  جرم متوسط ذرات گاز است، و نشان دهید که چگالی تعادلی جو برابر است با

$$\frac{d\rho}{dx} = -\frac{\rho(x)}{H} \quad \text{یا} \quad \rho(x) = \rho(0)e^{-x/H}$$

در این جا  $H = kT / \bar{m}g$  ارتفاع مقیاس جو است.

۲-۷ نشان دهید که اگر  $\omega > \omega_c$  باشد، سرعت‌های فاز و گروه موج معادله‌ی (۷-۱۰) عبارت‌اند از

$$v_p = c_s \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_c^2}} \quad \text{و} \quad v_g = c_s \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_c^2}{\omega^2}}$$

منحنی تغییرات  $v_p$  و  $v_g$  را بر حسب  $\omega$  رسم کنید.

۳-۷ در ارتفاع  $500 \text{ km}$  بالاتر از سطح مرئی خورشید، دمای جو به مقدار کمینه‌ی تقریبی

$4170 \text{ K}$  می‌رسد. در این ارتفاع، جرم متوسط ذرات گاز،  $\bar{m} = 1.26 \text{ amu}$  و  $\gamma = \frac{5}{3}$

است. ارتفاع مقیاس  $H$  را پیدا کنید و نشان دهید که مقدار  $\omega_c$ ، که تقریباً مساوی با  $c_s / 2H$  است، متناظر با دوره‌ی تناوب تقریبی ۳ دقیقه است.

۴-۷ معادله‌ی (۷-۱۳) برای بسامد شناوری  $N$  را در نظر بگیرید و مانند بخش ۳-۲، فرض

کنید که بسته‌ی گاز جابه‌جا شده فشار خود را سریعاً تنظیم می‌کند تا با اطراف خود سازگار و به طور بی‌دررو منبسط شود. نشان دهید که در این حالت داریم

$$N^2 = -g \left[ \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dx} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \right]$$

ضمناً نشان دهید که اگر افت دما چنان زیاد باشد که با شرط همرفت معادله‌ی (۳-۲۳)

سازگار شود، بسامد شناوری  $N$  صفر می‌شود. این امر ثابت می‌کند که نیروهای

شناوری در ناحیه‌ی همرفتی جو باعث نوسان نمی‌شوند. اکنون نشان دهید که در یک جو تک‌دما رابطه‌ی زیر برقرار است

$$N^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{g}{H}$$

۵-۷ انتشار موج‌های فشار و گرانش در جو زمین، نقش بسامد قطع  $\omega_c$  به دست آمده از معادله‌ی (۷-۹) و بسامد شناوری  $N$  به دست آمده از معادله‌ی (۷-۱۴) را به خوبی نشان می‌دهد. با چشمپوشی از تغییرات دما در جو زمین نشان دهید که بسامد زاویه‌ای کمینه برای موج‌های فشار برابر است با

$$\omega_c = 2,1 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

این بسامد متناظر با دوره‌ی تناوب تقریبی ۵ دقیقه است. همچنین نشان دهید که بسامد زاویه‌ای بیشینه برای موج‌های گرانش برابر است با

$$N = 1,9 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

این بسامد متناظر با دوره‌ی تناوب تقریبی ۵/۵ دقیقه است. توجه کنید که هر موجی در بازه‌ی بسامدی بین  $N$  و  $\omega_c$ ، یک موج میرا است.

۶-۷ مقدار  $u(r) \propto r^l$  را در معادله‌ی دیفرانسیل شعاعی (۷-۲۲) قرار دهید و نشان دهید که برای مقادیر کوچک  $kr$

$$u(r) \propto r^{l+1}$$

جوابی برای معادله است که با شرط مرزی  $u(r) = 0$  در  $r = 0$  صدق می‌کند.

۷-۷ با جاگذاری مستقیم در معادله‌ی (۷-۲۲) و با استفاده از نماد  $u_j$  برای نشان دادن جواب مربوط به  $l = j$ ، نشان دهید که جواب مربوط به  $l = j + 1$  برابر است با

$$u_{j+1} = -\frac{du_j}{dr} + (j+1) \frac{u_j}{r}$$

با داشتن این رابطه و داشتن جواب مربوط به  $l = 0$  به صورت  $u_0 = \sin kr$ ، نشان دهید که جواب مربوط به  $l = 1$  برابر است با

$$u_1(r) = -k \cos kr + \frac{\sin kr}{r}$$

نشان دهید که مقادیر ممکن  $k$  برای مدهای  $l=1$  از معادله‌ی زیر به دست می‌آیند

$$\tan k R_{\odot} = k R_{\odot}$$

این معادله را به صورت ترسیمی حل کنید و نشان دهید که دو مقدار پایین‌تر برای  $k$ ، متناظر با  $k R_{\odot} = 4,49$  و  $k R_{\odot} = 7,73$  هستند. اکنون نشان دهید که بسامدهای

مدهای مربوط به  $l=1$  و مرتبه‌ی شعاعی بزرگ  $n$ ، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند

$$\nu \approx \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{c_s}{2R_{\odot}} \approx \left( n + \frac{1}{2} \right) (0,3 \text{ mHz})$$

۸-۷ در ناحیه‌ی همرفتی یک ستاره، رابطه‌ی بین شیب‌های دما و فشار به صورت معادله‌ی (۲۹-۳) است:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$$

فرض کنید که گاز یک گاز کلاسیکی ایده‌آل است و نشان دهید که تغییرات شعاعی

سرعت موج‌های فشار،  $c_s = \sqrt{\gamma P / \rho}$ ، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند

$$\frac{dc_s^2}{dr} = -g(\gamma-1)$$

در این جا  $g$  شتاب گرانشی است.

# راهنمایی برای حل کردن مسأله‌های انتخابی

## فصل ۱

۱-۱ از معادلات (۶-۱)، (۷-۱) و (۵-۱) استفاده کنید.

۲-۱ از رابطه‌ی قبل از معادله‌ی (۱۹-۱) برای برآورد جرم کمینه‌ای که در دما و چگالی داده شده می‌تواند بر اثر گرانش متراکم شود، استفاده کنید.

۴-۱ به خاطر بیاورید که درخشندگی ستاره‌ای به جرم  $M$ ، با  $M^\alpha$  متناسب است و مقدار  $\alpha$  بین ۳ و ۳٫۵ است؛ شکل ۴-۱ را ببینید.

۶-۱ شار انرژی ناشی از خورشید در فاصله‌ی ۱۰ pc را حساب کنید. چنین خورشیدی مانند ستاره‌ای با بزرگی ۴٫۷۲ برابر دیده می‌شود. از معادله‌ی (۴۰-۱) برای مقایسه‌ی شار انرژی دریافت شده از ستاره‌های با بزرگی‌های ۶ و ۴٫۷۲ برابر خورشید استفاده کنید.

۷-۱ با فرض

$$F(r) = \left[ P(r) + \frac{Gm(r)^2}{\lambda \pi r^4} \right]$$

نشان دهید که  $dF/dr < 0$  است. اولین کران پایین  $P_c$  از شرط  $F(0) > F(R)$  تعیین می‌شود. دومین کران پایین و حد بالای  $P_c$  را می‌توان با توجه به شرط

$$m(r) > \frac{4\pi}{3} \rho > r^3 \quad , \quad m(r) < \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3$$

و استفاده از رابطه‌ی زیر به دست آورد

$$\frac{dF}{dr} + \frac{Gm(r)^2}{2\pi r^5} = 0$$

۸-۱ وقتی  $N_V$  را در راستای محور  $y$  و  $N_6$  را در راستای محور  $x$  برای سنگ‌های با سن

$t$  رسم می‌کنیم، خط راستی با شیب

$$\frac{N_6(t) [e^{\lambda_5 t} - 1]}{N_8(t) [e^{\lambda_8 t} - 1]}$$

به دست می‌آید. این شیب‌ها برای سنگ‌هایی با سن‌های ۱، ۳ و ۵ بیلیون سال، به ترتیب ۰،۰۷۲، ۰،۲۳۶ و ۰،۸۵۹ هستند.

۹-۱ با انتگرال‌گیری از  $r=0$  تا  $r=R_C$  داریم

$$\int_0^{R_C} 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} dr = - \int_0^{R_C} \frac{Gm(r)\rho(r)4\pi r^2}{r} dr$$

از طرف چپ، انتگرال جزء به جزء می‌گیریم:

$$4\pi R_C^3 P_C - 3 \int_0^{R_C} P(r) 4\pi r^2 dr = 3V_C P_C - 3\langle P \rangle_C$$

اگر هسته‌ی مرکزی یک گاز ایده‌آل با ذرات غیرنسبیتی تشکیل شده باشد، می‌توانیم از

معادله‌ی (۹-۱) استفاده کنیم و فشار را با  $\frac{2}{3}$  چگالی انرژی جنبشی انتقالی مساوی قرار

دهیم:  $\langle P_C \rangle = \frac{2}{3} E_{KC} / V_C$ . در نتیجه، فشار وارد بر هسته‌ی مرکزی در حال تعادل

هیدروستاتیکی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$3V_C P_C = 2E_{KC} + E_{GC}$$

اکنون فرض می‌کنیم که هسته‌ی مرکزی از یک گاز کلاسیکی ایده‌آل تشکیل شده است

که در دمای یکنواخت  $T_C$  جرم متوسط ذرات آن  $\bar{m}$  است. تعداد این ذره‌ها در هسته‌ی

مرکزی  $N_C = M_C / \bar{m}_C$  است و انرژی جنبشی انتقالی برابر است با

$$E_{KC} = \frac{3}{2} N_C k T_C$$

انرژی پتانسیل گرانشی به نحوه‌ی توزیع جرم  $M_C$  در کره‌ای به شعاع  $R_C$  بستگی

دارد؛ برطبق معادله‌ی (۱-۱۶) داریم

$$E_{GC} \approx \frac{GM_C^2}{R_C}$$



نتیجه می‌گیریم که اگر فشار وارد بر هسته‌ی مرکزی به اندازه‌ی

$$3V_C P_C = 3N_C kT_C - \frac{GM_C^2}{R_C}$$

باشد، هسته‌ی مرکزی در حال تعادل هیدروستاتیکی خواهد بود. اگر از  $V_C = \frac{4}{3}\pi R_C^3$  استفاده کنیم، داریم

$$P_C = \frac{A}{R_C^3} - \frac{B}{R_C^4}$$

در این جا  $A$  و  $B$  مقادیر ثابتی هستند.

## فصل ۲

۲-۲ از معادله‌ی (۲-۳۶) استفاده کنید.

۴-۲ معادله‌ی ساها متناظر با واکنش  $\gamma + H_\gamma \rightleftharpoons H + H$  را به دست آورید:

$$\frac{n(H)n(H)}{n(H_\gamma)} = \left[ \frac{\pi m_H kT}{h^3} \right]^2 \exp[-(4,48 \text{ eV})/kT]$$

و از معادله‌ی  $P = [n(H) + n(H_\gamma)]kT$  استفاده کنید. شرط مربوط به تجزیه‌ی  $50^\circ$  درصد، یعنی  $n(H_\gamma) = 2n(H)$  را اعمال کنید.

۵-۲ محاسبه تقریباً مانند محاسبه‌ی معادله‌های (۲-۴۲) و (۲-۴۳) است. اگر به جای

بوزون‌ها، فرمیون‌های بدون جرم را در نظر بگیرید، انتگرال‌هایی به دست می‌آیند که در مخرج آن‌ها به جای  $e^x - 1$  مقدار  $e^x + 1$  قرار دارد. هر یک از انتگرال‌ها را به صورت یک سری بسط دهید، این سری‌ها را مرتب کنید و آن‌ها را برحسب جمله‌های تابع زتای ریمان بنویسید. برای مثال، وقتی چگالی فرمیون‌ها را محاسبه می‌کنید، انتگرال زیر به دست می‌آید

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x + 1} = 2 \left[ \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \dots \right] = 2 \left[ \left( \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots \right) - 2 \left( \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} + \dots \right) \right]$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x + 1} = 2 \left[ \zeta(3) - \frac{1}{4} \zeta(3) \right] = \frac{3}{2} \zeta(3)$$

۶-۲ تعادل برقرار شده بر طبق رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$\gamma + \gamma \rightleftharpoons e^+ + e^-$$

برای پتانسیل شیمیایی گاز رقیقی از پوزیترون‌ها از معادله‌ی (۲-۲۱) و از انرژی فرمی برای پتانسیل شیمیایی گاز چگال الکترون‌های تبهگن، استفاده کنید.

۸-۲ اگر  $P_e = P_r$  باشد، داریم

$$n_e kT = \frac{1}{3} a T^4$$

که از آن‌جا  $T = 3,8 \times 10^9 \text{ K}$  به دست می‌آید.

۹-۲ ● از  $L = 4\pi\sigma R^2 T_E^4$  استفاده کنید. در نتیجه  $R = 0,013 R_\odot$  به دست می‌آید.

● چگالی متوسط  $3,4 \times 10^7 \text{ kgm}^{-3}$  است.

● از معادله‌ی (۳-۴۳) داریم  $kT_I = 1,6 \times 10^3 \text{ eV}$ . با استفاده از چگالی جرمی،

چگالی‌های عددی متوسط یون‌ها و الکترون‌ها را پیدا کنید. با استفاده از معادله‌ی

(۲-۲۷) نشان دهید که انرژی فرمی متوسط  $1,7 \times 10^4 \text{ eV}$  است، که ۱۰ برابر

بزرگ‌تر از  $kT_I$  است.

● بزرگی پتانسیل الکتروستاتیکی بین دو یون با بار  $Z$  و به فاصله‌ی  $r = n_i^{-1/3}$  از

یک‌دیگر را، پیدا کنید. تعداد یون‌ها را به چگالی جرمی ربط دهید و نشان دهید که

اگر  $\rho$  برحسب  $\text{kgm}^{-3}$  باشد، بزرگی انرژی پتانسیل تقریباً  $Z^2 \rho^{1/3} \text{ eV}$  خواهد بود.

### فصل ۳

۱-۳ تیرگی برابر با  $\kappa = 1/\rho \bar{L}$  است و مسیر آزاد میانگین به ازای مقدار متوسط بسامد از

معادله‌ی (۳-۱۴) به دست می‌آید.

۳-۳ فشار تابش برابر با  $P_r = aT^4/3$  است، در نتیجه از معادله‌ی (۳-۲۸) داریم

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{\rho \kappa}{c} \frac{L}{4\pi r^2}$$

این شیب فشار را با نیروی گرانشی وارد بر واحد حجم ماده در نزدیکی سطح ستاره،

مساوی قرار دهید.

- ۵-۳ از معادله‌ی (۳-۳۷) برای ربط دادن نسبی دما و فشار در نقاط نزدیک به هم در پوسته‌ی کتوله‌ی سفید استفاده کنید، و با شرط همرفت معادله‌ی (۳-۲۲) مقایسه کنید.
- ۸-۳ اگر شیب دما بیش‌تر از حد تعیین شده با معادله‌ی (۳-۲۹) باشد، همرفت غالب می‌شود. این شرط معادل آن است که توان تولید شده به ازای واحد جرم در داخل شعاع  $r$  از مقدار بحرانی ارائه شده با معادله (۳-۳۱) بیش‌تر باشد.

## فصل ۴

- ۱-۴ از معادله‌ی (۴-۱۲) استفاده کنید.
- ۳-۴ توجه کنید که برای تولید کردن یک هسته‌ی  ${}^4\text{He}$  از طریق شاخه‌ی I، دو همجوشی پروتون - پروتون لازم است، در حالی که اگر هسته‌ی  ${}^4\text{He}$  از طریق شاخه‌ی II تولید شود، فقط یک همجوشی لازم است.
- ۴-۴ از معادله‌ی (۴-۲۹) استفاده کنید.
- ۵-۴ باز هم از معادله‌ی (۴-۲۹) استفاده کنید.
- ۶-۴ از معادلات (۴-۶۵) و (۴-۶۶) استفاده کنید.
- ۷-۴ از معادله‌ی (۲-۴۶) استفاده کنید. در هنگام محاسبه توجه کنید که  $kT$  در مقایسه با  $9.98\text{MeV}$  کوچک است.
- ۸-۴ انرژی تولید شده با همجوشی در مدت زمان  $\tau$  را با انرژی لازم برای گرم کردن گاز تا دمای  $T_{ign}$  مساوی قرار دهید. انرژی همجوشی را می‌توان از معادله‌ی (۴-۱۹) به دست آورد. انرژی گرمایش تقریباً با انرژی جنبشی ذره‌ها در گاز یونیده در دمای  $T_{ign}$  برابر است؛ با حساب کردن انرژی لازم برای یونیده شدن گاز، درستی این امر را تأیید کنید.

## فصل ۵

- ۱-۵ مقدار  $EGR$  را به صورت یک انتگرال شامل  $P(r)$  به دست آورید و این انتگرال را به روش جزء به جزء حل کنید. برای قسمت آخر از معادله‌ی (۵-۳۲) استفاده کنید.

۴-۵ خورشید تا زمانی متراکم می‌شود که  $L_{fus}$  به  $L_{rad}$  میل کند. در این مرحله داریم:

$$\frac{M^6}{R^7} \propto \frac{M^{5/5}}{R^{5/5}}$$

برای قسمت آخر از  $L \propto R^2 T_E^4$  استفاده کنید.

۴-۵ اگر

$$\beta = \frac{P_g}{P_c} = \frac{\rho_c k T_c}{\bar{m} P_c} \quad \text{و} \quad (1-\beta) = \frac{P_r}{P_c} = \frac{a T_c^4}{3 P_c}$$

باشد، داریم

$$\frac{(1-\beta)}{\beta^2} = \frac{a}{3} \left[ \frac{\bar{m}}{k} \right]^4 \frac{P_c^3}{\rho_c^4}$$

از نامساوی مربوط به  $P_c$  داریم

$$\frac{(1-\beta)}{\beta^2} < \frac{a}{3} \left[ \frac{\bar{m}}{k} \right]^4 \frac{\pi}{6} G^3 M^2$$

## فصل ۶

۳-۶ این مسأله تفاوت کمی با مسأله‌ی ۲-۵ دارد. این مسأله رابطه‌ی توان تابش شده از یک

تابشگر جسم سیاه نوترینویی را با چگالی انرژی در یک گاز نوترینویی مشخص می‌کند؛

بحثی که به معادلات (۲-۴۵) و (۲-۴۶) منجر شده است، می‌تواند مفید باشد. ضمناً

توجه کنید که برخلاف فوتونها یا الکترون‌ها، هر نوترینو فقط یک قطبش ممکن دارد.

۵-۶ سرعت نوترینویی به جرم  $m$  با انرژی  $E$ ، برابر است با

$$\frac{v}{c} = 1 - \frac{m^2 c^4}{2E^2} \quad \text{به شرط } E \gg mc^2$$

مسافت  $50 \text{ kpc}$  در حدود  $1.6 \times 10^5$  سال نوری است.

۶-۶ مشابه با معادله‌ی (۶-۵۶) نشان دهید که رابطه‌ی چگالی‌های عددی الکترون‌ها،

پروتون‌ها و نوترون‌های فرانسیتیی تبهگن در یک گاز بسیار چگال، به صورت زیر است

$$\frac{1}{n_e^2} + \frac{1}{n_p^2} = n_n^2$$

۸-۶ از معادلات (۳۱-۱)، (۲۰-۶) و (۶۰-۶) استفاده کنید.

۹-۶ اصلاحات مناسب را در تحلیل منجر به معادلات (۷۳-۶)، (۷۴-۶) و (۷۵-۶) انجام دهید.

۱۰-۶ درخشندگی ادینگتون از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$L = \frac{4\pi cGM}{\kappa} \quad \text{که در آن } \kappa = 0.02(1 + X_1)m^2 \text{kg}^{-1}$$

● از تعریف دمای مؤثر سطح، یعنی معادله‌ی (۴۳-۱) استفاده کنید، مقدار فرضی شعاع شیئی متراکم را به طور مستدل در نظر بگیرید و توجه کنید که بر طبق مطالب بخش ۲-۳، انرژی متوسط یک فوتون تابش شده از یک جسم سیاه در دمای  $T$ ، مساوی با  $2.70kT$  است.

● فرض کنید که درخشندگی با آهنگ اتلاف انرژی گرانشی ماده‌ی انباشته شده در سطح ستاره‌ی نوترونی، قابل مقایسه است.

۱۱-۶ برای انتخاب مقداری برای چگالی مرکزی و انتگرال گرفتن از آن به طرف خارج ستاره، ساده‌ترین روش محاسبه آغاز کردن از  $r=0$  و  $m=0$  است. وقتی شعاع به این مقدار می‌رسد و جرم ستاره  $m(r)$  در این شعاع است، چگالی مساوی صفر است. در نتیجه یک مقدار جدید برای چگالی مرکزی می‌توان انتخاب و محاسبه را تکرار کرد. گستره‌ی چگالی‌های مرکزی انتخاب شده که در شکل ۶-۴ به کار رفته‌اند، از  $10^8 \text{kgm}^{-3}$  تا  $10^{16} \text{kgm}^{-3}$  است. بهتر است  $r$ ،  $\rho(r)$  و  $m(r)$  را با استفاده از متغیرهای بدون بعد توصیف کنیم و از قاعده‌ی انتگرال‌گیری رانگ - کوتا<sup>۱</sup> مرتبه‌ی چهار استفاده کنیم.

## فصل ۷

۷-۲ رابطه‌های عمومی سرعت‌های فاز و گروه یک موج با رابطه‌ی پراش  $\omega = \omega(k)$  عبارت‌اند از

$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad , \quad v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

۴-۷ تمام ایده‌های اصلی را می‌توان در بخش ۳-۲ پیدا کرد.

۵-۷ فرض کنید  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ ،  $T = 300 \text{ K}$  و  $\gamma = 1/4$ .

۶-۷ یک معادله‌ی درجه دو برای  $\gamma$  به دست آورید و جوابی از آن را انتخاب کنید که به

ازای  $u(r) = 0$ ،  $r = 0$  باشد.

۷-۷ برای حل کردن معادله‌ی  $\tan k R_{\odot} = k R_{\odot}$  می‌توان نقاط تلاقی منحنی‌های

$y = \tan k R_{\odot}$  و  $y = k R_{\odot}$  را به دست آورد.

## کتاب‌شناسی

فهرست کتاب‌ها و مقالاتی که صراحتاً در متن کتاب به آن‌ها اشاره شده است، و کتاب‌ها و مقالات دیگری که می‌توانند برای خواننده جالب باشند.

- Baade, W. and Zwicky, F. (1934) Supernovae and cosmic rays, *Physical Review*, **45**, 138.
- Bahcall, J. N. (1989) *Neutrino Astrophysics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Bahcall, J. N. (1990) The solar neutrino problem, *Scientific American*, May 1990.
- Barger, V. D. and Olsson, M. G. (1987) *Classical Electricity and Magnetism*, Allyn and Bacon, Boston MA.
- Bernstein, J., Brown, L. S. and Feinberg, G. (1989) Cosmological helium production simplified, *Reviews of Modern Physics*, **61** (1), 25.
- Bethe, H. A. (1939) Energy production in stars, *Physical Review*, **55**, 434.
- Bethe, H. A. and Brown, G. E. (1985) Supernovae, *Scientific American*, April 1985.
- Bowers, R. and Deeming, T. (1984) *Astrophysics I: Stars*, Jones and Bartlett, Boston.
- Burrows, A. (1989) Neutrinos from supernovae, in *Supernovae*, edited by A. G. Petschek, Springer-Verlag, New York.
- Burrows, A. (1991) The SN1987 neutrino signal and the future, in *Supernovae*, edited by S. E. Woosley, Springer-Verlag, New York.
- Chandrasekhar, S. (1931) The maximum mass of ideal white dwarfs, *Astrophysical Journal*, **74**, 81.
- Chandrasekhar, S. (1934) Stellar configurations with degenerate cores, *Observatory*, **57**, 373.
- Clayton, D. D. (1983) *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*, University of Chicago Press, Chicago IL.
- Clayton, D. D. (1986) Solar structure without computers, *American Journal of Physics*, **54**, 354.

- Eddington, A. S. (1935) Minutes of the Royal Astronomical Society, *Observatory*, **58**, 37.
- Fredrick, L. W. (1989) Astronomy and strophysics, *Physics Vade Mecum*, edited by H. L. Anderson, American Institute of Physics, New York, Ch. 3.
- Goldberg, H. and Scadron, M. D. (1981) *Physics of Stellar Evolution and Cosmology*, Gordon and Breach, New York.
- Gough, D. and Toomre, J. (1991) Seismic observations of the solar interior, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **29**, 627.
- Hewish, A., Bell, S. J., Pilkington, J. D. H., Scott, P. F. and Collins, R. A. (1968) Observation of rapidly pulsating radio source, *Nature*, **217**, 709.
- Hoyle, F., Dunbar, D. N. F., Wenzel, W. A. and Whaling, W. (1953) A state of  $^{12}\text{C}$  predicted from astrophysical evidence, *Physical Review*, **92**, 1095.
- IMB Collaboration (1987) Bionta et al., *Physical Review Letters*, **58**, 1494.
- Kamiokande II Collaboration (1987) Hirata et al., *Physical Review Letters*, **58**, 1490.
- Kittel, C and Kroemer, H. (1980) *Thermal Physics*, W. H. Freeman San Francisco CA.
- McClintock, J. (1992) in *Proceedings of the Texas-ESO-CERN symposium on relativistic astrophysics, cosmology and fundamental particles*, edited by J. D. Barrow, L. Mestel and P. A. Thomas, New York Academy of Science Publications.
- Nauenberg, M. and Weisskopf, V. F. (1978) Why does the sun shine? *American Journal of Physics*, **46**, 23.
- Oppenheimer, J. R. and Volkoff, G. M. (1939) On massive neutron cores, *Physical Review*, **55**, 374.
- Rolfs, C. E. and Rodney, W. S. (1988) *Cauldrons in the Cosmos: Nuclear Astrophysics*, University of Chicago Press, Chicago IL.
- Salpeter, E. E. (1952) Nuclear reactions without hydrogen *Astrophysical Journal*, **115**, 327.



- Salpeter, E. E. (1966) Dimensionless ratios and stellar structure, in *Perspectives in Modern Physics: Essays in Honor of Hans A. Bethe*, edited by R. Marshak, Inter-science, New York.
- Schönberg, M. and Chandrasekhar, S. (1942) *Astrophysics Journal*, **155**, 183.
- Sexl, R. and Sexl, H. (1979) *White Dwarfs-Black Holes: An Introduction to Relativistic Astrophysics*, Academic Press, New York.
- Shapiro, S. L. and Teudolsky, S. A. (1983) *Black Holes, White, Dwarfs, and Neutron Stars*, John Wiley, New York.
- Shkolovskii, I. S. (1978) *Stars, Their Birth, Life and Death*, W. H. Freeman, San Francisco CA.
- Stix, M. (1989) *The Sun*, Springer-Verlag, New York.
- Tayler, R. J. (1972) *The Stars, Their Structure and Evolution* Springer-Verlag, New York.
- Turck-Chièze et al. (1993) The solar interior, *Physics Reports*, **230**, 57.
- Weisskopf, V. F. (1975) of atoms, mountains, and stars: a study in qualitative physics, science, **187**, 605.

واژه‌نامه

Abundances of chemical elements in solar system

فراوانی عناصر شیمیایی در منظومه‌ی خورشیدی

Accretion of matter onto compact objects

انباشته شدن ماده بر روی اشیاء متراکم

Adiabatic processes

فرآیندهای بی‌دررو

Age of solar system

سن منظومه خورشیدی

Age of star clusters

سن خوشه‌های ستاره‌ای

Alpha particle decay

واپاشی ذره‌ی آلفا

Anthropic principle

اصل آنتروپی

Barrier penetration

نفوذ در سد

Big bang nucleosynthesis

سنتز هسته‌ای مهیانگ

Binding energy of nuclei

انرژی بستگی هسته‌ها

Black holes

سیاهچاله‌ها

Bose-Einstein distribution

توزیع بوز - اینشتین

Bound-free absorption

جذب مقید - آزاد

Brunt-Väisälä frequency

بسامد برون - وایسالا

Buoyancy frequency

بسامد شناوری

Carbon burning

سوختن کربن

Carbon-nitrogen cycle

چرخه‌ی کربن - ازت

Carbon, nuclear energy levels relevant to helium burning

ترازهای انرژی هسته‌ای مربوط به سوختن هلیوم

Carbon production

تولید کربن

Chandrasekhar mass limit for white dwarf

حد جرم چاندرااسکار برای کوتوله‌ی سفید

Chemical potential	پتانسیل شیمیایی
for ideal classical gas	~ گاز کلاسیکی ایده‌آل
for ideal degenerate gas	~ گاز تبهگن ایده‌آل
for photon gas	~ گاز فوتونی
for reacting particles in equilibrium	~ ذرات واکنش‌کننده در حال تعادل
Clayton, D. D., simple stellar model	مدل ستاره‌ای ساده‌ی کلایتون
CN or CNO cycles, <i>see</i> Carbon-nitrogen cycle	چرخه‌های CN یا CNO، رجوع کنید به چرخه‌ی کربن - نیتروژن - ازت
Colour index of star	ضریب رنگ ستاره
Conduction of heat, due to random thermal motion	رسانش گرمای ناشی از حرکت گرمایی اتفاقی
Convection in sun	همرفت در خورشید
Convection, critical temperature gradient	همرفت، شیب دمای بحرانی
Convection in ionization zones	همرفت در نواحی یونش
Convective stellar core	هسته‌ی مرکزی همرفتی ستاره
Cooling of white dwarfs	سرد شدن کوتوله‌های سفید
Cosmic background radiation	تابش زمینه‌ی کیهانی
Coulomb barrier for nuclear reactions	سد کولنی برای واکنش‌های هسته‌ای
Crab pulsar	تپ اختر خرجنگی
Cross-section	سطح مقطع
for electrons in plasma	~ الکترون‌ها در پلاسما
for nuclear fusion	~ همجوشی هسته‌ای
for photons in plasma	~ فوتون‌ها در پلاسما
relation to mean free path	رابطه‌ی ~ با مسیر آزاد میانگین
Davis, R., <sup>37</sup> Cl solar neutrino experiment	دیویس، آزمایش نوترینوی خورشیدی با <sup>37</sup> Cl

Degeneracy	تبهگنی
Condition for effect on electron-positron pair production	شرط ~ برای
effect on nuclear burning	اثر ~ روی تولید زوج الکترون - پوزیترون
Degenerate gas of electrons	اثر ~ روی سوختن هسته‌ای
effect on neutron decay	گاز تبهگن الکترون‌ها
equations of state for	اثر ~ روی واپاشی نوترون
Degenerate gas of neutrons, protons and electrons	معادلات حالت برای ~
Density of states	گاز تبهگن نوترون‌ها، پروتون‌ها و الکترون‌ها
Deuterium production by hydrogen burning	چگالی حالت‌ها
Early universe	تولید دوتریوم با سوختن هیدروژن
big bang nucleosynthesis	جهان قدیم
pressure and temperature of	سنتز هسته‌ای مه‌بانگ ~
Eddington luminosity	فشار و دمای ~
Effective surface temperature	درخشندگی ادینگتون
Electron-positron pair production	دمای مؤثر سطح
Electron capture during stellar core collapse	تولید زوج الکترون - پوزیترون
Energy generation by thermonuclear reactions	گیراندازی الکترون در هنگام رمبش هسته‌ی مرکزی ستاره
Energy transport	تولید انرژی با واکنش‌های گرما هسته‌ای
by conduction	انتقال انرژی
by convection	~ با رسانش
by radiative diffusion	~ با همرفت
	~ با نفوذ تابشی

Fermi-Dirac distribution	توزیع فرمی - دیراک
Fermi energy and momentum	انرژی و تکانه‌ی فرمی
Free fall under gravity	سقوط آزاد بر اثر گرانش
Free-free absorption	جذب آزاد - آزاد
Fundamental stellar mass, $M_*$	جرم ستاره‌ای بنیادی، $M_*$
Fusion, <i>see</i> Thermonuclear fusion	همجوشی، رجوع کنید به همجوشی گرماهسته‌ای
Gamow energy for Coulomb barrier penetration in nuclear fusion	انرژی گاموف برای نفوذ در سد کولنی در همجوشی هسته‌ای
Gamow energy window and peak for thermonuclear fusion	پنجره و قله‌ی انرژی گاموف برای همجوشی گرماهسته‌ای
General relativity	نسبیت عام
GALLEX solar neutrino experiment	آزمایش نوترینوی خورشیدی GALLEX
Globular star clusters	خوشه‌های ستاره‌ای جهانی
Gravitational contraction	انقباض گرانشی
Gravitational potential energy	انرژی پتانسیل گرانشی
Gravitational redshift	جاب‌جایی گرانشی به سوی سرخ
Gravity waves	امواج گرانشی
in sun	~ در خورشید
Heat transfer	انتقال گرما
Helioseismology	خورشید لرزه‌شناسی
Helium abundance due to big bang nucleosynthesis	فراوانی هلیوم ناشی از سنتز هسته‌ای مهبانگ
Helium burning	سوختن هلیوم

Helium flash	درخشش هلیومی
Hertzprung-Russell diagram	نمودار هرتزشپرونک - راسل
Hydrogen burning	سوختن هیدروژن
proton-proton chain	زنجیره‌ی پروتون - پروتون ~
carbon-nitrogen cycle	چرخه‌ی کربن - ازت ~
Hydrogen miunus ion, $H^-$ , effect on opacity of stellar atmospheres	یون منفی هیدروژن، $H^-$ ، اثر روی تیرگی جو ستاره
Hydrostatic equilibrium	تعدادل هیدروستاتیکی
in general relativity	~ در نسبیت عام
pressure and density at stellar centre	~ فشار و چگالی در مرکز ستاره
virial theorem	~ نظریه‌ی ویریا
IMB supernova neutrino experiment	آزمایش نوترینوهای ابرنواختر توسط IBM
Ideal gas	گاز ایده‌آل
condition to be classical	شرط تبهگن بودن ~
chemical potential for	پتانسیل شیمیایی برای ~
pressure of	فشار ~
Ionization	یونش
in stellar interiors	~ در قسمت‌های داخلی ستاره
in stellar atmospheres	~ در جو ستاره‌ها
Saha equation	معادله‌ی ~ ساها
Jeans mass and density	جرم و چگالی جینز
Jupiter	مشتری

Kamiokande	کامیوکانده
solar neutrino experiment	آزمایش نوترینوی خورشیدی ~
supernova neutrino experiment	آزمایش نوترینوی ابرنواختر ~
Kelvin-Helmholtz stage of stellar evolution	مرحله‌ی تحول ستاره‌ای کلوین - هلمهولتز
Kramers' law for opacity	قانون کرامرز برای تیرگی
Luminosity	درخشندگی
of the sun	~ خورشید
of white dwarfs	~ کوتوله‌های سفید
relation to absolute bolometric magnitude	رابطه‌ی ~ با بزرگی تابش سنجی
Magnitude	بزرگی، قدر
Main sequence	رشته‌ی اصلی
Mass limits	حدود جرم
for main sequence stars	~ برای ستاره‌های رشته‌ی اصلی
for neutron stars	~ برای ستاره‌های نوترونی
for white dwarfs	~ برای کوتوله‌های سفید
for planets	~ برای سیاره‌ها
Mass-luminosity relation for main sequence stars	رابطه‌ی جرم - درخشندگی برای ستاره‌های رشته‌ی اصلی
Mass-radius relation for white dwarfs	رابطه‌ی جرم شعاع برای کوتوله‌های سفید
Mean free path	مسیر آزاد میانگین
Mean burning	سوختن متوسط
Modes of oscillation of sun	مدهای نوسان خورشید
degree of mode	درجه‌ی ~

eigervalue problem for	مسأله ویژه مقدار برای ~
horizontal wave number for	عدد موج افقی ~
radial order of mode	مرتبه‌ی شعاعی ~
Neon burning	سوختن نئون
Neutrino cooling	سرمايش نوترینویی
Neutrino Mixing	اختلاط نوترینویی
Neutrinos	نوترینوهای
from stellar core collapse	~ ناشی از رمبش هسته‌ی مرکزی ستاره
from sun	~ ناشی از خورشید
Neutron capture	گیراندازی نوترینو
Neutronization	نوترونش
Neutron stars	ستاره‌های نوترونی
formation of	تشکیل شدن ~
maximum mass of	جرم کمینه‌ی ~
rotation of	چرخش ~
Nitrogen, synthesis of	ازت، سنتز ازت
Opacity	تیرگی
Open star clusters	خوشه‌های ستاره‌ای باز
Oxygen burning	سوختن اکسیژن
Oxygen formation in helium burning	تشکیل شدن اکسیژن در هنگام سوختن هلیوم
Pair production	تولید زوج
Parsec	پارسک



Photodisintegration of nuclei	تجزیه‌ی نوری هسته‌ها
during stellar core collapse	~ در هنگام رمبش هسته‌ی مرکزی ستاره
in silicon burning	~ در هنگام سوختن سیلیسیوم
Photon gas	گاز فوتونی
Photosphere	نور کره، فوتوسفر
minimum temperature for	دمای کمینه‌ی ~
Polytrope models for stellar structure	مدل‌های چندمنظوره برای ساختار ستاره‌ها
Population I and II stars	ستاره‌های جمعیت I و II
Pressure waves	موج‌های فشار
Cut-off frequency	بسامد قطع ~
in sun	~ در خورشید
phase and group velocities	سرعت‌های فاز و گروه ~
Protostar	پیش‌ستاره
Pulsars	تپ اخترها
Quantum concentration	چگالی عددی کوانتومی
Quantum tunneling	تونل زنی کوانتومی
Radiation pressure	فشار تابش
effect on stability of stars	اثر ~ روی پایداری ستاره‌ها
Radiative diffusion	نفوذ تابشی
Random walk	گشت تصادفی
Red giant	غول قرمز
Rotating neutron stars	ستاره‌های نوترونی چرخان
Rosseland mean	میانگین روزلند

Saha equation	معادله‌ی ساها
SAGE solar neutrino experiment	آزمایش نوترینوی خورشیدی SAGE
Salpeter, E. E.	سالپتر
Schrönberg-Chandrasekhar limit for isothermal stellar core mass	حد شرونبرگ - چاندراسکار برای جرم هسته‌ی مرکزی تک‌دمای ستاره
Schwarzschild radius	شعاع شوارتزشیلد
Silicon burning	سوختن سیلیسیوم
Sirius	سیریوس
SNU, solar neutrino unit	یکای نوترینوی خورشیدی
Solar oscillation-see Modes of Oscillation of Sun	نوسان خورشیدی - رجوع کنید به مدهای نوسان خورشید
Solar, <i>see</i> Sun	خورشیدی - رجوع کنید به خورشید
Spectral classification	طبقه‌بندی طیفی
Standard Solar Model	مدل خورشیدی استاندارد
Star formation	تشکیل شدن ستاره
Stellar atmosphere	جو ستاره
Stellar core collapse	رهمش هسته‌ی مرکزی ستاره
Stellar models	مدل‌های ستاره
Stellar nucleosynthesis	سنتز هسته‌ای ستاره
Stellar structure	ساختار ستاره
fundamental equations for	معادلات بنیادی ~
Sudbury neutrino experiment	آزمایش سودبری برای نوترینو
Sun	خورشید
basic properties	خواص اساسی ~
simple solar model	مدل خورشیدی ساده

solar neutrinos	نوترینوهای خورشیدی
Standard Solar Model	مدل خورشیدی استاندارد
Supernovae	ابرنواخترها
Temperature gradients in stars	شیب‌های دما در ستاره‌ها
Thermonuclear fusion	پخش گرما هسته‌ای
Lawson break-even condition	شرط شکست - لاوسون برای ~
Thomson scattering	پراکندگی تامسون
Virial theorem, hydrostatic equilibrium	قضیه‌ی ویریال، تعادل هیدروستاتیکی
White dwarfs	کوتوله‌های سفید
cooling of	سرد شدن ~
maximum mass of	جرم بیشینه‌ی ~
position of Hertzsprung-Russell diagram	مکان نمودار هرتزسپرونگ - راسل برای ~
structure of	ساختار ~
X-ray binary systems	سیستم‌های دوتایی پرتو X

## نمایه

- ابر نواخترها ۲۴۶، ۲۵۸  
 ادینگتون، سر آرتور ۱۴۰، ۱۴۳، ۲۷۱، ۲۷۷  
 ازت، سنتز ازت ۵۰، ۱۳۲، ۱۶۲، ۲۲۴  
 آزمایش نوترینوی خورشیدی GALLEX ۱۶۹، ۱۷۰  
 آزمایش نوترینوی خورشیدی SAGE ۱۶۹، ۱۷۰  
 اصل آنتروپی ۱۸۲  
 انتقال انرژی ۲۳، ۱۲۰، ۱۹۶، ۲۰۶  
 انتقال گرما ۱۱۹، ۱۴۰، ۲۰۵، ۲۲۱  
 انرژی بستگی هسته‌ها ۱۲، ۶۴، ۱۸۶، ۲۱۸، ۲۷۳  
 انرژی پتانسیل گرانشی ۱۶، ۹، ۲۱۲، ۲۳۸، ۲۵۷  
 انرژی و تکانه‌ی فرمی ۸۱، ۱۱۲، ۲۲۹، ۲۷۷  
 انقباض گرانشی ۱۴، ۶۹، ۱۴۳، ۲۱۲، ۲۷۱  
 بت ۱۵۷  
 بزرگی‌ها ۴۶  
 بسامد برونت - وایسالا ۲۸۸  
 بسامد شناوری ۲۸۸، ۲۸۹، ۳۰۲، ۳۰۵  
 پتانسیل شیمیایی ۵۳، ۷۲، ۹۰، ۱۱۶، ۲۴۱  
 پراکندگی تامسون ۱۲۳، ۱۹۷، ۲۲۴  
 تابش زمینه‌ی کیهانی ۱۰، ۱۱  
 تبهگنی ۸۶، ۱۲۲، ۲۰۶، ۲۴۵، ۲۹۳  
 تب اختر خرجنگی ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۷۷  
 تب اخترها ۲۵۸، ۲۶۲، ۲۷۳  
 تجزیه‌ی نوری هسته‌ها ۶۹، ۱۱۰، ۱۸۴، ۲۴۷  
 تشکیل شدن ستاره ۲۵، ۵۰، ۶۰، ۱۵۵  
 تعادل هیدروستاتیکی ۱۷، ۵۹، ۱۳۱، ۲۲۲، ۳۰۴  
 توزیع بوز - اینشتین ۹۰  
 توزیع فرمی - دیراک ۸۱  
 تولید انرژی با واکنش‌های گرما هسته‌ای ۳۲، ۱۸۸، ۱۵۰  
 تولید زوج الکترون - پوزیترون ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۴  
 تولید زوج ۱۰۹، ۱۱۴  
 تولید کربن ۱۷۲، ۱۷۷، ۱۹۰  
 تیرگی ۲۹، ۱۲۵، ۱۵۸، ۲۲۴  
 پارسک ۵۳، ۵۸

- جابه‌جایی گرانشی به سوی سرخ ۲۳۸، ۲۳۹،  
 ۲۶۹، ۲۷۲، ۲۸۲  
 جذب آزاد - آزاد ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۳۹، ۱۹۸  
 جذب مفید - آزاد ۱۲۴، ۱۳۴، ۱۳۹، ۱۳۹۸  
 جرم ستاره‌ای بنیادی،  $M_*$  ۲۲۰، ۲۲۹، ۲۳۰،  
 ۲۶۷  
 جرم نوترینو ۲۷۶  
 جرم و چگالی جینز ۲۶  
 جهان قدیم ۵۸، ۵۹، ۶۳، ۱۱۶  
 جو ستاره‌ها ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۱۴  
 چرخه‌ی کربن - ازت ۵۰، ۱۵۷، ۱۶۱، ۲۲۴  
 چگالی حالت‌ها ۷۰، ۸۱، ۸۲، ۹۸  
 چگالی عددی کوانتومی ۷۸، ۱۱۲، ۱۷۴، ۲۴۱  
 حد جرم چاندراسکار برای کوتوله‌ی سفید  
 ۴۸، ۶۷، ۱۹۲، ۲۳۹، ۲۶۳  
 خورشید لرزه‌شناسی ۲۸۱، ۲۸۲، ۳۰۱  
 خورشید ۲۲، ۱۲۴، ۲۰۵، ۳۰۳  
 خوشه‌های ستاره‌ای باز ۵۷، ۵۸  
 خوشه‌های ستاره‌ای جهانی ۵۷، ۵۸  
 درخش هلیومی ۸۷  
 درخشندگی ادینگتون ۸۷  
 درخشندگی ۳۲، ۱۱۷، ۲۲۲، ۲۷۷  
 دمای مؤثر سطح ۶۱، ۱۱۷، ۲۲۴، ۲۵۱  
 رابطه‌ی جرم شعاع برای کوتوله‌های سفید  
 ۸۳، ۱۱۶، ۱۴۰، ۲۰۵، ۲۷۳  
 رشته‌ی اصلی ۶۴، ۱۰۷، ۱۶۴، ۲۲۰  
 رمبش هسته‌ی مرکزی ستاره ۲۴۰، ۲۴۶،  
 ۲۵۰، ۲۵۷  
 ساختار ستاره ۶۹، ۱۳۲، ۱۹۸، ۲۲۲  
 سالپتر ۱۷۲  
 ستاره‌های جمعیت I و II ۵۵، ۵۸  
 ستاره‌های نوترونی چرخان ۲۵۸  
 ستاره‌های نوترونی ۲۲۷، ۲۴۷، ۲۵۲، ۲۷۳  
 سد کولنی برای واکنش‌های هسته‌ای ۳۹،  
 ۱۴۵، ۱۹۲  
 سرمایه‌ی نوترینویی ۱۱۰  
 سطح مقطع ۱۲۱، ۱۲۵، ۱۱۸، ۲۹۴  
 سقوط آزاد بر اثر گرانش ۴۹  
 سن خوشه‌های ستاره‌ای ۶۴  
 سن منظومه خورشیدی ۱۷۱  
 سنتز هسته‌ای ستاره ۹، ۱۴، ۴۹، ۵۰، ۱۶۳  
 سنتز هسته‌ای مهبانگ ۹، ۴۴، ۵۹  
 سوختن اکسیژن ۴۲، ۴۴، ۱۸۴، ۱۸۷  
 سوختن سیلیسیوم ۴۵، ۱۱۱، ۱۹۱، ۲۳۹

همرفت در خورشید ۱۲۶، ۲۰۶، ۲۸۸، ۳۰۱

۳۰۶

هوایل، فرد ۱۷۲، ۱۷۶

وایشی ذره‌ی آلفا ۱۷۳، ۱۹۲

یکای نوترینوی خورشیدی ۱۶۷

یونش ۵۴، ۱۰۰، ۱۳۱، ۱۸۴، ۲۴۱

نسبیت عام ۲۳۸، ۲۶۴، ۲۷۳، ۲۷۶

نفوذ تابشی ۳۶، ۶۱، ۱۱۹، ۱۹۶

نفوذ در سد ۱۱۴، ۱۴۶، ۱۸۸، ۱۹۲

نمودار هرتزشپرونگ - راسل ۵۲، ۸۶، ۲۲۴،

۲۳۷

نوترونش ۲۲۷، ۲۴۳

نور کره، فوتوسفر ۵۴، ۹۳، ۱۰۵، ۱۳۱

هسته‌ی مرکزی همرفتی ستاره ۱۳۲