ستاد انقلاب فرهنگی
مرکز نشر دانشگاهی

فیزیک عمومی

جلد ۱ مکانیک

نوشتهٔ
مارچلو آلونسو
ادوارد جی. فین

ترجمهٔ
لطیف کاشیگر

مارچلو آلونسو
و
ادوارد جی. فین

فیزیک عمومی

۱

مکانیک

ترجمهٔ
لطیف کاشیگر

پیشگفتار

فیزیک علمی بنیادی است و نفوذ عمیقی درعلوم دیگر دارد. بنا براین، تنها دانشجویان فیزیک و مهندسی نیستند که باید نظرات اساسی آن را کاملا درک کنند، بلکه هرکسی که بخواهد پیشهٔ علمی‌داشته باشد (ازجملهٔ دانشجویانی که در زیست‌شناسی و ریاضی تخصص می‌گیرند) باید همین مفاهیم را فرا گیرد.

نخستین هدف از درس فیزیک عمومی (و شاید تنها دلیلی که آن را در برنامه گذارده‌اند) دادن یک دید واحد ازفیزیک به‌دانشجو است. این کار باید بدون داخل شدن خیلی زیاد به جزئیات، ولی با تجزیه و تحلیل اصول اساسی و پیامدها و حدود این اصول انجام شود. دانشجو وقت دارد کاربردهای ویژهٔ آنها را بعداً در دروس‌اختصاصی فرا گیرد. ازاین‌رو، این کتاب شما را با آنچه به باور ما، هستهٔ نظرات بنیادی فیزیک معاصر را تشکیل می‌دهد آشنا می‌کند. درگزینش‌موضوعهای مورد مطالعه و روش عرضهٔ آنها سفارشهای کمیسیون آموزش فیزیک مدارس عالی بدقت در مد نظر بوده‌اند.

تا زمانهای اخیر، فیزیک را به‌صورت انباشته‌ای از چند علم، کما بیش مربوط به‌هم، ولی بدون هیچ دیدگاه واحد واقعی، می‌آموختند. اما تقسیم بندی سنتی آن به («علم») مکانیک، گرما، صوت، اپتیک، الکترومغناطیس، و فیزیک نوین دیگر توجیه‌پذیر نیست. ما این رهیافت سنتی را رها کرده‌ایم. در عوض، با تأکید برروی قوانین بقا (پایستگی)، مفاهیم میدان و موج، و دید اتمی از ماده، نحوهٔ ارائه منطقی و یگانه‌ایی را تعقیب می‌کنیم. در سرتاسر این کتاب، ازنظریهٔ خاص نسبیت به‌عنوان یکی ازاصول راهنمایی که باید هر نظریهٔ فیزیکی با آن سازگار باشد، استفاده شده است.

مطالب مورد مطالعه به پنج قسمت (۱) مکانیک، (۲) برهم‌کنشها و میدانها، (۳) امواج، (۴) فیزیک کوانتومی، و (۵) فیزیک آماری تقسیم شده‌اند. برای بنیاد نهادن اصول اساسی لازم جهت توصیف حرکاتی که در دور و برمان مشاهده می‌شوند، از مکانیک شروع می‌کنیم. سپس، چون همهٔ پدیده‌های طبیعت نتیجهٔ برهم‌کنشها هستند و این برهم‌کنشها برحسب میدانها تجزیه و تحلیل می‌شوند، درقسمت ۲ انواع برهم‌کنشهایی را که بهتر می‌فهمیم، برهم‌کنشهای گرانشی و الکترومغناطیسی، مورد بررسی قرار گرفته‌اند؛ این

برهم کنشها مسئول بیشترین پدیده‌های ماکروسکوپیکی هستندکه‌مشاهده می‌کنیم. الکترومغناطیس را با جزئیات نسبتاً بیشتری مطرح می‌کنیم، و با فرمولبندی معادلات ماکسول آن را به‌فرجام می‌رسانیم. در قسمت ۳ پدیده‌های موجی به عنوان برآمدی ازمفهوم میدان مطرح می‌شود. بیشتر موضوعاتی را که معمولا تحت عنوانهای آکوستیک و اپتیک آورده می‌شوند، دراین قسمت گنجانده‌ایم. با وجود این، برامواج الکترومغناطیسی به عنوان بسط طبیعی معادلات ماکسول تأکید شده است. درقسمت ۴ ساختارماده، یعنی، اتمها، مولکولها، هسته‌ها، و ذرات بنیادی را تحلیل می‌کنیم — پیش از آن، تحلیلی از زمینه‌های لازم مکانیک کوانتومی آمده است. سرانجام، درقسمت ۵، دربارهٔ ویژگیهای مادهٔ کپه‌ای سخن می‌گوییم. نخست با اصول مکانیک آماری آشنا می‌شویم، و آنها را در موارد ساده، ولی اساسی، به کار می‌بندیم. ترمودینامیک را از دیدگاه مکانیک آماری مطرح می‌کنیم، و آن را با فصلی روی ویژگیهای گرمایی‌ماده پایان می‌بخشیم و نشان می‌دهیم‌که چگونه اصول مکانیک آماری و ترمودینامیک را باید به‌کار برد.

مطالب این کتاب، نه تنها درشیوهٔ ارائه، حتی در محتوای خود نیز، تازه‌اند، زیرا درآن برخی مباحث اساسی گنجانیده شده است که در اغلب کتابهای درسی فیزیک عمومی یافت نمی‌شوند و مطالبی را از قلم انداخته‌ایم که به طور سنتی در چنین کتابهایی می‌آیند. ریاضیات مورد استفاده را می‌توان در هرکتاب درسی مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال پیدا کرد. فرض براین است که دانشجو با حداقلی از مقدمات حساب دیفرانسیل و انتگرال‌آشناست و همزمان با این درس، درسی درآن موضوع گرفته است. اغلب‌کاربردهای اصول اساسی، همچنین سؤالهایی درسطح کمی بالاتر، به‌صورت مثالهای حل شده آمده‌اند. این مثالها را می‌شود، بسته به‌میل مدرس، همراه درس تدریس کرد، یا به عنوان کار انفرادی به عهدهٔ دانشجویان گذاشت. بدین‌طریق انعطاف بیشتری در تنظیم کم و کیف درس به وجود آمده است.

درحال‌حاضر، گرایش نیرومندی وجود دارد تا دربرنامه‌های همهٔ علوم مطالب جدیدی که مسئلهٔ روزاند گنجانده شوند. امیدواریم که این کتاب با بالا بردن سطح درک مفاهیم فیزیکی دانشجو و توانایی بخشیدن به وی در استفاده از رابطه‌های ریاضی مربوطه، چنین گرایشی را ارضا کند. این امر امکان خواهد داد سطح و محتوای بسیاری از درسهایی را که اکنون دربرنامهٔ دورهٔ لیسانس منظور شده‌اند بالا ببرند. درسهای سنتی مکانیک، الکترو-مغناطیس، وفیزیک نوین در دورهٔ لیسانس، بیش ازبقیه ازاین ارتقاء سطح بهره‌مند خواهند شد. بدین‌طریق، دانشجو درپایان‌آموزش لیسانس، نسبت به‌دانشجویان پیشین‌ازسطح دانش بالاتری برخوردار خواهد شد — این امتیاز برای دانشجویانی که تحصیلات خود را در همین مرحله پایان می‌دهند، امتیاز بزرگی است. همچنین از این به‌بعد جا برای گنجاندن درسهای جدیدتر و پیشرفته‌تر در برنامهٔ دورهٔ فوق لیسانس باز خواهد شد. همین گرایش درکتابهای درسی بنیادی جدید دوسال اول لیسانس سایر رشته‌های علوم نیز مشاهده می‌شود.

این دوره برای تدریس در سه نیمسال تدوین شده است. به منظور وحدت بخشی کامل به‌ارائهٔ مطالب درسه نیمسال، این دوره را می‌شود در دانشکده‌هایی‌که به‌دنبال فیزیک

عمومی در دونیمسال، در نیمسال سوم فیزیک نوین دارند، به‌کار گرفت. جهت سهولت کار، مطالب این دوره به سه جلد تقسیم شده‌اند و هرجلد تقریباً برای یک نیمسال منظور شده است. در جلد اول، مکانیک و برهم‌کنش گرانشی مطالعه می‌شود. جلد دوم به برهم‌کنشهای الکترومغناطیسی و امواج مربوط می‌شود، و اساساً موضوعات الکترومغناطیس و اپتیک را در برمی‌گیرد. فیزیک کوانتومی و آماری، ازجمله ترمودینامیک، درجلد سوم مورد بررسی قرارگرفته‌اند. هرچند سه جلدکتاب ارتباط تنگاتنگی باهم دارند و مجموعهٔ یگانه‌ای درست می‌کنند، ولی هرجلد آن را می‌توان کتاب مستقلی منظور وتدریس‌کرد. بویژه، جلد اول و دوم باهم، هم‌ارز درس فیزیک عمومی دونیمسالی است که شامل فیزیک کوانتومی نمی‌شود.

امیدواریم این دوره پاسخگوی آن گروه از معلمین فیزیکی باشد که به طور دائم و خستگی ناپذیر می‌کوشند سطح آموزش فیزیک را ارتقا بخشند. همچنین امیدواریم علاقهٔ بسیاری از دانشجویانی را که شایستگی فراگیری فیزیک کاملتر و متحولتر از درسهای سنتی را دارند برانگیزد.

دراینجا، ازهمهٔ کسانی که با یاری و دلگرمی دادن به ما انجام کامل این کار را میسر ساخته‌اند سپاسگزاریم. از همکاران ارجمند خود، بویژه پروفسور د. لازاروس[1] و س. روبروتسون[2] که زحمت خواندن متن اصلی را به خود داده‌اند، تشکر می‌کنیم، استادانی که انتقادات سازنده و نظراتشان به ما کمک کرد تا از جنبه‌های زیادی متن را تصحیح کنیم و بهبود بخشیم. ازکارمندان شرکت ادیسون ـ وسلی[3] نیز به‌خاطرتوانا‌ییها و زحمات بیدریغشان قدردانی می‌کنیم. آخرین، و بیشترین سپاسگزاریهای خود را نثار همسرانمان می‌کنیم که با بردباری و حوصلهٔ فراوان با ما همگامی کرده‌اند.

واشنگتن د. سی.
ژوئن ۱۹۶۶

مارچلو الونسو
ادوارد ج. فین

1. D. Lazarus 2. S. Robertson 3. Addison-Wesley

تذکرات آموزشی

برای کمک به مدرس جهت تنظیم برنامهٔ درسی خود، با اشاراتی به مفاهیم عمدهٔ هرفصل، خلاصه‌ای از رئوس مطالب این جلد را معرفی می‌کنیم. چنانکه در پیشگفتار اشاره شد، برای اینکه دانشجو هرچه سریعتر معدودی از نظرات اساسی را که فیزیک برپایهٔ آنها استوار است (مثلاً، قوانین بقا، واین واقعیت که پدیده‌های فیزیکی می‌توانند به برهم‌کنشهایی بین ذرات بنیادی تحویل گردند) بشناسد، دراین دوره، فیزیک به صورت یکپارچه گسترش داده شده است. دانشجو باید متوجه باشد که برای فیزیکدان یا مهندس شدن باید به درک روشنی ازاین نظرات دست یابد وتوانایی خود را در دخل وتصرف آنها افزایش دهد.

مطالب اساسی کالبد متن را تشکیل می‌دهند. در هرفصل مثالهای حل شدهٔ زیادی گنجانده شده‌اند؛ برخی ازاین مثالها ساده وکاربست عددی نظریهٔ بحث شده هستند، در حالی که برخی دیگر، یا تعمیمهای نظریه یا نتایج ریاضی آنند. بهتر است به دانشجو توصیه شود که در دور نخست مطالعهٔ هرفصل مثالها را بکلی نادیده بگیرد، سپس در دور بعد، به مثالهایی بپردازد که مدرس برمی‌گزیند وتوصیه می‌کند. بدین طریق دانشجو نظرات بنیادی را، جدا ازکاربردها یا تعمیمهای آنها، می‌آموزد.

درپایان هرفصل بخشی به مسایل اختصاص دارد. برخی ازاین مسایل بغایت ساده و برخی دیگر مشکلتر ازمسایل متوسط فیزیك عمومی هستند. ترتیب مسایل به گونه‌ای است که، با صرف‌نظر ازچند مسئلهٔ مشکلتر درپایان، با ترتیب بخشهای آن فصل می‌خوانند. زیادی وگوناگونی‌مسایل به مدرس امکان می‌دهد باتوجه به تواناییهای ویژهٔ دانشجویان، درانتخاب وحل مسایل ازآزادی بیشتری برخوردار باشد.

پیشنهاد می‌کنیم که مدرس‌مجموعه‌ای‌ازفهرست منابع مذکور درپایان هرفصل‌را درست کند، و دانشجویان را تشویق کند تا آنها را مطالعه کنند، تا بدین طریق بتوانند به مراجعه به منابع عادت کنند، و دربارهٔ هرموضوع تنها با خواندن یک توضیح وتفسیر ازآن ارضا نشوند واطلاعات تاریخی بیشتری دربارهٔ فیزیک به دست آورند.

این جلد کتاب جهت تدریس درنیمسال اول منظور شده است. (باوجود این، تدریس فصل ۱۳ را می‌توان بـه نیمسال دوم موکول کرد). براساس تجربیات شخصی خود، تعداد ساعات لازم برای آموزش بـدون اشکال مواد پیش‌بینی شده را، بـه عنوان راهنما پیشنهاد کرده‌ایم. درجـدول زمان‌بندی شده (۴۳ ساعت تـدریس) وقتی برای پرسش و آزمون از دانشجویان منظور نشده است. اینک به اظهارنظر مختصری درباره هرفصل می‌پردازیم.

فصل ۱. مقدمه (۱ ساعت)

این فصل به منظور ارائه یک دید مقدماتی ازعلمی است که دانشجو درصدد مطالعهٔ آن‌است، ازاین‌رو باید آن را بدقت بخواند. بهتر است، هنگام تدریس مباحثهٔ کوتاهی توسط مدرس سازمان داده شود.

فصل ۲. سنجش و یکاها (۱ ساعت)

به پیروی ازسفارشهای کمیسیون انجمن بین‌المللی فیزیک محض وکاربردی (IUPAP)* در بارهٔ نمادها، یکاها ونامگذاریهای علمی، دستگاه یکاهای MKSC را پذیرفته‌ایم. بـا آوردن هریکای جدیدی از MKSC درفصلهای بعـد، هم‌ارز آن را در دستگاه cgs ذکـر کرده‌ایم. مسایل این فصل به گونه‌ای طرح شده‌اند تا دانشجو بـه دریافتی از «بزرگ» و «کوچک» دست یابد.

فصل ۳. بردارها (۳ ساعت)

دراین فصل نظرات پـایـه‌ای جبر برداری را مطرح می‌کنیم ومثالهایی ازمبحث سینماتیک برای آنهـا می‌آوریم. می‌توان آموزش بخشهای ۸.۳، ۹.۳ و ۱۰.۳ را به موقعی موکول کرد که برای نخستین‌بار در متن کتاب بـه این مفاهیم نیاز پیدا می‌شود. این فصل، به سبب جاذبـهٔ فیزیکی محدودش، ممکن است به نظر دانشجو مشکل بیاید، ولـی مـدرس بـایـد ضرورت نمادگذاری برداری را به او تفهیم کند، وبا یاری جستن ازمثالهای فیزیکی بکوشد ساعات درس را زنده‌تر سازد.

فصل ۴. نیروها (۲٫۵ ساعت)

این فصل را بـه چند دلیل جلوتر جای داده‌ایم. نخست اینکه، ما را با کاربـردهای عادی بردارها آشنا می‌کند. دیگر اینکه، فرصت فراهم می‌کند تا دانشجو قبل ازمبادرت به مطالعهٔ سینماتیک مقـداری ازمحاسبات پایـه‌ای را بیاموزد. بالاخره، این کار گسترش بلاانقطاع مکانیک را ازفصل ۵ تا ۱۲ میسر می‌سازد. برای دوره‌هایی که نیازی به این مطالب احساس نشود، می‌توان ازاین فصل، بجز بخشهـای ۳.۴ (گشتاور نیرو) و ۸.۴ (مرکز جرم)، چشم پوشید. درصورت تمایل می‌توان این فصل را بعد ازبخش ۶.۷ تدریس کرد، ولـی ما این

* International Union of Pure and Applied Physics

کار را توصیه نمی‌کنیم.

قسمت ۱. مکانیک

ازفصل ۵ تا ۱۲، کتاب به طرح وبسط مفاهیم عمدهٔ مکانیک کلاسیک ونسبیتی می‌پردازد. برای سهولت، نخست دربارهٔ مکانیک یک ذرهٔ واحد گفتگو می‌کنیم. درعین حال، مکانیک دستگاههای چند ذره‌ای نیز بتفصیل زیادی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برتمایز بین دستگاه ایدال تک ذره‌ای و دستگاه واقعی چند ذره‌ای تأکید می‌شود.

فصل ۵. سینماتیک (۳٫۵ ساعت)

این فصل باید به‌طور کامل وعمیق تدریس شود. دانشجو باید ماهیت برداری سرعت وشتاب و روابط آنها را با مسیر حرکت بفهمد. مدرس باید با پافشاری واصرار زیاد این واقعیت را بفهماند که، هنگام محاسبهٔ مشتق یک بردار نسبت به زمان، هم تغییر دربزرگی و هم در راستای بردار را باید درنظر گرفت. ریاضیات مورد نیاز این فصل نسبتاً ساده است. مدرس درصورت تمایل می‌تواند تدریس بخش ۱۱۰۵ را به تأخیر اندازد و درست پیش ازشروع بخش ۱۴۰۷ دربارهٔ آن بحث کند.

فصل ۶. حرکت نسبی (۴ ساعت)

حرکت نسبی را از دیدگاه سینماتیکی مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای اینکه دانشجو اهمیت چارچوبهای مرجع را بیشتر درک کند این فصل را پیش ازفصل دینامیک می‌آوریم. از بخشهای ۴۰۶ و ۵۰۶ (دربارهٔ چارچوبهای چرخان) می‌توان صرف‌نظر کرد وبخشهای ۶۰۶ و ۷۰۶ (دربارهٔ چارچوبهای نسبیتی) را، می‌شود تا تدریس فصل ۱۱ به تأخیر انداخت.

فصل ۷. دینامیک ذره (۴ ساعت)

این فصل یکی ازفصول بسیار مهم است، و دانشجو باید کاملا آن را درک کند. به اصل بقای اندازه حرکت بیش از رابطهٔ $F = ma$ اهمیت داده شده است. حدود اعتبار قوانین حرکت ومفاهیم برهم‌کنش ونیرو باید بدقت زیاد مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرند.

فصل ۸. کار وانرژی (۳ ساعت)

ازلحاظی، این فصل‌تعمیم وگسترش فصل ۷ است، وباید عمیقاً یادگرفته شود. ازبخش ۱۰۰۸ (نیروهای مرکزی) می‌شود چشم پوشید یا آموزش آن را به فصل ۱۳ موکول کرد. مهمترین مطالب‌آن عبارتند ازمفاهیم انرژی وبقای انرژی برای یک تک ذره. دراین فصل قضیهٔ ویریال را معرفی می‌کنیم، زیرا این قضیه بیش ازپیش وبه طور گسترده‌ای هم درفیزیک و هم در شیمی به کار می‌رود.

فصل ۹. دینامیک یک دستگاه ذرات (۵ ساعت)

برای سهولت، بیشترنتایج را برای دو ذره به دست آورده‌ایم، سپس آنها را، ازطریق قیاس، به تعداد دلخواهی از ذرات تعمیم داده‌ایم. مفاهیم دما، گرما وفشار به عنوان مفاهیم آماری مناسب برای توصیف رفتار دستگاههای متشکل از چند ذره معرفی شده‌اند. این امر به ما اجازه می‌دهد ازاین مفاهیم درسراسر بقیهٔ کتاب استفاده کنیم. معادلهٔ حرکت یک گاز را از قضیهٔ ویریال به دست آورده‌ایم، زیرا بدین طریق نقش نیروهای داخلی بروشنی بیشتری به‌چشم می‌خورد؛ همچنین روش سنتی‌تر مسئله درمثال ۱۷.۹ نشان داده می‌شود. این فصل با بحثی دربارهٔ حرکت شاره‌ها به پایان می‌رسد که درصورت تمایل می‌توان آن را حذف کرد.

فصل ۱۰. دینامیک جسم سخت (۳٫۵ ساعت)

باید روی حرکت تقدیمی اندازه حرکت زاویه‌ای براثر وارد شدن گشتاور نیرو تأکید زیادی بشود. بخش حرکت ژیروسکوپی نیز مهم است، زیرا نظرات مطرح شده درآن در موارد متعددی به کار می‌آیند.

فصل ۱۱. دینامیک انرژیهای بالا (۳٫۵ ساعت)

این فصل اساساً در بارهٔ دینامیک نسبیتی است، و بیشتر روی مفاهیم سرعت دستگاه (یا چارچوب مرکز جرم) وتبدیل لورنتس برای انرژی واندازه حرکت تأکید دارد. طبعاً، در فیزیک امروز، این بحث از اهمیت بسزایی برخوردار است.

فصل ۱۲. حرکت نوسانی (۵ ساعت)

حرکت هماهنگ ساده نخست به طور سینماتیکی وسپس دینامیکی معرفی شده است. این فصل را می‌توان یا بتمامی درجای خود (پایان نیمسال اول) مورد بحث قرار داد، یا تنها به چند بخش اول آن اکتفا کرد و بخشهای باقی مانده را به فصلهای بعد درجایی که مورد نیاز هستند ارجاع کرد. ما شق اول را توصیه می‌کنیم. می‌توان نیمسال اول را با خاتمهٔ این فصل پایان بخشید.

قسمت ۲. برهم‌کنشها ومیدانها

این قسمت به مطالعهٔ برهم‌کنشهای گرانشی والکترومغناطیسی، که ازفصل ۱۳ تا ۱۷ مورد بحث قرار گرفته‌اند، اختصاص داده شده است. دراینجا روی مفهوم میدان به عنوان یک ابزار مفید برای فیزیک تأکید می‌شود. با توجه به اینکه بسیاری ازمدرسین مایلند ازگرانش درجریان نیمسال اول وبلافاصله پس از اتمام تدریس مکانیک گفتگو کنند ما فصل ۱۳ را دراین کتاب گنجانده‌ایم، ومطالعهٔ برهم‌کنشهای الکترومغناطیسی (فصل ۱۴ تا فصل ۱۷) را برای نیمسال دوم وجلد ۲ منظور داشته‌ایم.

فصل ۱۳. برهم‌کنش گرانشی (۴ ساعت)

این فصل شرح مختصری از گرانش است، که کاربرد مکانیک را در برهم‌کنش ویژه‌ای نشان می‌دهد. همچنین دانشجو را با مفهوم میدان آشنا می‌کند. این فصل طوری نوشته شده است که آن را، به طور طبیعی، با برهم‌کنش الکترومغناطیسی که در جلد دوم کتاب مورد بحث قرار می‌گیرد گره می‌زند. می‌توان از بخشهای ۵.۱۳ و ۷.۱۳ صرف نظر کرد؛ این کار به پیوستگی مطالب لطمه‌نمی‌زند. دربخش ۸.۱۳ توضیح کوتاهی دربارهٔ ایدهٔ نظریهٔ نسبیت عام آمده است.

چند تذکر به دانشجویان

این کتاب دربارهٔ مبانی فیزیک، برای دانشجویانی نوشته شده است که هدفشان تحصیل علوم و یا یکی از رشته‌های مهندسی است. مفاهیم و نظراتی که در اینجا مطرح می‌کنیم، به احتمال خیلی زیاد، بخشی از فعالیت شغلی و شیوهٔ تفکر شما خواهد شد. درک و فهم هرچه بهتر این مطالب، بقیهٔ تحصیلات شما را در دوره‌های لیسانس (دانشیابی) و فوق لیسانس (دانشوری) آسانتر خواهد ساخت.

درس فیزیکی را که اکنون شروع می‌کنیم بالطبع از درس فیزیک دورهٔ دبیرستان پیشرفته‌تر است. باید خود را برای دست و پنجه نرم کردن با شمار زیادی از مسایل دشوار آماده کنید. گاهی ممکن است درک و فهم قوانین و فنون فیزیکی فرآیندی کند و توانفرسا باشد. پیش از ورود به قلمروهایی از فیزیک که برای شما جذاب اند، باید در چیزهای دیگری مهارت کسب کنید که جاذبهٔ کمتری دارند، ولی بسیار اساسی‌اند و بدون آنها نخواهید توانست براحتی فیزیک را بفهمید و به کار گیرید.

در جریان مطالعهٔ این درس، باید دو هدف عمده را در مد نظر داشته باشید. نخست، با شمار محدودی از قوانین بنیادی و اصولی که هستهٔ فیزیک را تشکیل می‌دهند کاملا آشنا شوید. دوم، توانایی خود را در کارکردن با این نظرات و به کار بستن آنها در وضعیتهای مشخص و عینی افزایش دهید؛ به گفتهٔ دیگر، همچون یک فیزیکدان بیاندیشید و عمل کنید. می‌توانید با خواندن و بازخوانی بخشهای اصلی کتاب به هدف اول دست یابید. برای کمک به شما جهت رسیدن به هدف دوم، مثالهای حل شدهٔ زیادی در لابلای متن اصلی و همچنین مسایلی برای حل در خانه در پایان هر فصل آورده شده‌اند. ما قویاً سفارش می‌کنیم که نخست متن اصلی را بخوانید، و هنگامی که آن مطالب را کاملا فهمیدید، آنگاه به مطالعهٔ مثالهای حل شده و مسایلی بپردازید که از طرف استادتان تعیین می‌شوند. مثالها، یا کاربرد نظریه را در یک مورد مشخص نشان می‌دهند، یا با طرح کردن جنبه‌های جدید مسئلهٔ مورد گفتگو نظریه را بیشتر بسط و گسترش می‌دهند. گاهی نیز این مثالها فراهم‌آورنده توجیه و اثبات درستی نظریه‌اند.

میزان دشواری‌مسایل پایان هرفصل متفاوت‌است؛ ازمسایل‌خیلی ساده‌شروع و به‌مسایل

پیچیده‌ترختم می‌شوند. به طور کلی، بهتر است مسایل را ابتـدا با نمادها یا علایم جبری حل کنید، و در پایان مقادیر عددی را در رابطه‌ها قرار دهید. اگـر با صرف زمـان معقولی نتوانستید مسئله‌ای را حـل کنید، حل آن را موقتاً کنار بگذارید و کوشش بیشتر را به وقت دیگری موکول کنید. برای چند مسئله‌ای که خود راه حلی نمی‌یابید، بهتر است از دیگران یاری بگیـریـد. یک منبع خـود‌یار برای آموزش روش حـل مسایل، این کتـاب است:
How to Solve It (second edition) by G. Polya (Garden City, N.Y. Doubleday 1957)

فیزیک یک علم کمی است که برای بیان ایده‌های خود نیاز به ریاضیات دارد. تمام ریاضیات به کار گرفته شده دراین کتاب را می‌توانید در هرکتاب آنالیز معمولی پیدا کنید. هروقت که اثبات ریاضی مطلبی را متوجه نشدید به چنین کتابی مراجعه کنید. ولی در روبرو شدن با یک مشکل ریاضی هرگز هراس به دل راه ندهید؛ در رفع مشکل خود با استادتان مشورت کنید یا ازدانشجویان سالهای بالاترکمک بگیرید. برای یک فیزیکدان یا مهندس، ریاضیات یک ابزار است و در فراگیری نظرات فیزیکی دردرجهٔ دوم اهمیت قرار می‌گیرد. جهت کـاستن بـار شما، برخی از مفیدترین رابطه‌های ریاضی فهرست وار در پیوست پایان کتاب ذکر شده‌اند.

تمام محاسبه‌های فیزیکی را بـایـد با بهره گیری از مجموعهٔ یکدست و منسجمی از یکاها انجام داد. در این کتاب از دستگـاه یکاهای MKSC استفاده شده است. MKSC یک دستگاه قانونی و رسمی علمی است. درکلیهٔ محاسبات خود، سازگـاری و همگنی بین یکاها را بدقت زیاد کنترل کنید. همچنین، بهتر است از همان‌آغاز از ماشین حساب استفاده کنید. ارزانترین ماشین حساب کافی است تا ساعتها دروقت محاسبه صرفه جویی شود.

در پایان هرفصل فهرست گزیده‌ای از منابع آمده است. تا آنجـا که ممکن است به آنها مراجعه کنید. برخی از این کتابها به شما کمک می‌کنند تا ایدهٔ فیزیک را بـه عنوان یک علم متحول درک کنید، در حالی که برخی دیگر مطالب مطرح شـده در متن کتاب را تعمیق و تکمیل خواهند کرد.

** بسیار جای خوشحالی است، چنانکه در فهرست منابع آمـده است، دو جلد از منابع بسیارمعتبراین‌کتاب به‌نامهای مکانیک نوشتهٔ ک. ر.سایمون، وحساب دیفرانسیل وانتگرال وهندسهٔ تحلیلی نوشتهٔ ج. ب. توماس، به فارسی برگردانده شده‌اند و هم‌اکنون در دسترس علاقه مندان قرار دارند.

فهرست مطالب

فصل ۱ مقدمه

فصل ۲ سنجش و یکاها

فصل ۳ بردارها

فصل ۴ نیروها

قسمت ۱ مکانیک

فصل ۵ سینماتیک

هنگامی که اجسام سخت و همگن با یکدیگر تماس یابند، اجزاء آنها سخت به هم می‌چسبند. برای توضیح این پدیده، برخی متوسل به وجود اتمهای قلابدار شده‌اند. اما استنباط من از چسبیدن اجسام به یکدیگر این است که ذرات آنها یکدیگر را با نیرویی جذب می‌کنند. این نیرو هنگام تماس بیواسطه بسیار قوی است. اما اثر آن در فواصل دور از ذرات محسوس نیست. بنابراین در طبیعت عواملی هست که ذرات اجسام را با جاذبه‌ای نیرومند به هم می‌چسباند، وکار فلسفهٔ تجربی یافتن این عوامل است.

Optiks, Book 3, Query 31 (1703), Newton

۱

مقدمه

مطالعهٔ فیزیک ماجرایی است که موجب برانگیختن فکر و در عین حال به مبارزه طلبیدن اندیشه می‌شود. جالبتر از آن فعالیت در زمینهٔ فیزیک است. این کار شاید یکی از مطبوعترین فعالیتهای ذهن بشری باشد. زیرا بنا به تصور مؤلفین، برای روح انسان، هیچ چیز جذابتر از شناختن دنیا و پرده برداشتن از اسرار طبیعت نیست.

در اینجا، شاید ضروری نباشد که به دانشجو بگوییم فیزیک دربارهٔ چیست، چرا یک چنین چالشی به وجود می‌آید و چه فایده‌ای دربر دارد، یا اینکه روشهای آن کدامند، زیرا دانشجو خود تا اندازه‌ای با این علم آشناست.

با وجود این، به سبب همین آشنایی با فیزیک، قبل از آغاز بررسی آن در سطحی کمی بالاتر، دراین فصل لازم است باختصار موضوعات وروشهای علم فیزیک را یادآوری و تجزیه و تحلیل کنیم.

۱۰۱ فیزیک چیست؟

واژهٔ فیزیک از یک کلمهٔ یونانی به معنی طبیعت گرفته شده است و بنابراین فیزیک باید علمی باشد که مطالعهٔ تمام پدیده‌های طبیعی را دربرگیرد.

درواقع، تا ابتدای قرن نوزدهم، فیزیک را به همین معنی جامع آن درک می‌کردند و آن را «فلسفهٔ طبیعی» می‌نامیدند. ولی، درطول قرن نوزدهم و حتی تا این اواخر، فیزیک به بررسی گروه محدودتری از پدیده‌ها اختصاص یافت که پدیده‌های فیزیکی نام گرفتند و به طور مبهم چنین تعریف می‌شدند: پدیده‌هایی که در آنها ماهیت مواد مورد عمل تغییر نمی‌کند. بتدریج این تعریف ناپخته از فیزیک متروک ماند و مجدداً به همان تعریف اول که جامع و درعین حال اساسی بود برگشت شد. با پیروی ازاین نظرات، می‌توانیم بگوییم فیزیک علمی است که هدف آن مطالعهٔ عناصر متشکلهٔ ماده و برهم‌کنشها[1]ی متقابل این عنصرها می‌باشد. با پرداختن به این برهم کنشها، یک دانشمند خواص مادهٔ کپه‌ای[2] و همچنین کلیهٔ پدیده‌های طبیعی قابل مشاهده دیگررا تشریح می‌کند.

با پیشرفت دراین درس، دانشجو با نحوهٔ گسترش برنامه براساس اصول‌کلی و پایه‌ای و با چگونگی کاربست این اصول، برای درک انواع گوناگون پدیده‌های فیزیکی که ظاهراً به هم ارتباط ندارند ولی از قوانین اساسی یکسانی پیروی می‌کنند،آشنا می‌شود. یک بار که این اصول مهم بروشنی فهمیده شوند، دانشجو خواهد توانست، با کمترین تلاش و بدون نیاز به تفکر زیاد، به مسایل جدید بپردازد.

۲۰۱ شاخه‌های کلاسیک فیزیک

آدمی با ذهن کاوشگر خود همیشه می‌خواسته بداند طبیعت چگونه عمل می‌کند. در آغاز، تنها منبع کسب اطلاعات انسان حواس او بود، ازاین‌رو پدیده‌های مشاهده شده را به همان

1. interactions 2. matter in bulk

نحو که درمی‌یافت طبقه‌بندی می‌کرد. نور به بینایی مربوط می‌شد و اپتیک به صورت علمی کما بیش مستقل وابسته به بینایی گسترش یافت. صدا مربوط به شنوایی بود، و آکوستیک به صورت علم مربوط به آن توسعه پیدا کرد. گرما به یکی دیگر از حواس مربوط می‌شد و سالهای متمادی مطالعهٔ گرما (به نام ترمودینامیک) به‌صورت شاخهٔ مستقل دیگرفیزیک انجام می‌پذیرفت. بدیهی است حرکت در تمام پدیده‌هایی که مستقیماً مشاهده می‌شوند وجود دارد و علم‌الحرکات، مکانیک، قبل از سایر شاخه‌های فیزیک پیشرفت داشته است. حرکت سیاره‌ها، ناشی از برهم کنشهای گرانشی[1]، همچنین سقوط آزاد اجسام، با قوانین مکانیک بروشنی کامل تشریح شد و بدین طریق گرانش به طور سنتی به مکانیک ملحق گردید. الکترو مغناطیس، هر چند که وسیلهٔ ارتباط بین اغلب شاخه‌های فیزیک می‌باشد، چون به هیچیک ازآزمایشهای حسی پیوند نداشت، تا قبل از قرن نوزدهم به صورت شاخهٔ تنظیم یافته‌ای از فیزیک ظاهر نشده بود.

بدین‌طریق فیزیک قرن نوزدهم به چند علم یا شاخه (به نام کلاسیک) مانند مکانیک، گرما، آکوستیک، اپتیک و الکترو مغناطیس، با حداقل ارتباط، یا حتی بدون آن، تقسیم می‌شده است، به قسمی که مکانیک، چنانکه شایسته است، در رأس آنها قرار داشت. تا زمانهای اخیر فیزیک به ترتیبی که آمد تدریس می‌شد. در این اواخر شاخهٔ جدیدی به نام فیزیک نوین، که پیشرفتهای فیزیک قرن بیستم را در برمی‌گیرد، به این شاخه‌های «کلاسیک» افزوده شده است.

شاخه‌های «کلاسیک» فیزیک قلمروهای بسیار وسیع و مهم فعالیتهای تخصصی و شغلی هستند وچنین نیزخواهند ماند، ولی اکنون دیگرمعنی ندارد اصول فیزیک مانندگذشته به طور جداگانه مورد مطالعه قرار گیرد. زیرا مجموعهٔ پدیده‌های الکترومغناطیسی وفیزیک نوین خود، موجب این تفکر تازه شده‌که پدیده‌های فیزیکی با دید واحد ومنطقی‌تری موردتوجه قرارگیرند واین امریکی ازبزرگترین توفیقهای قرن‌بیستم است. دیدواحد ازپدیده‌های فیزیکی ایجاب می‌کند فیزیک کلاسیک نیز از نقطه نظر جدیدی مورد ارزیابی قرار گیرد، نه اینکه فیزیک به کلاسیک و نوین تقسیم شود. بدین طریق همیشه یک فیزیک نوین وجود خواهد داشت که شامل گسترشهای فیزیک، درزمان خود می باشد. این فیزیک نوین موجب می‌شود هرلحظه اصول و اندیشه‌های قبلی مورد تجدید نظر قرار گیرند و یا حتی دگرگون شوند. فیزیک کلاسیک و نوین باید در تمام سطوح درهم بیامیزند و به صورت اطلاعات واحد درآیند. بنابراین فیزیک مجموعه‌ای می‌شود با عناصرمعین که همیشه باید به طریقی گویا و منطقی مورد توجه قرار گیرد.

۱ ۳۰ دید ما از جهان

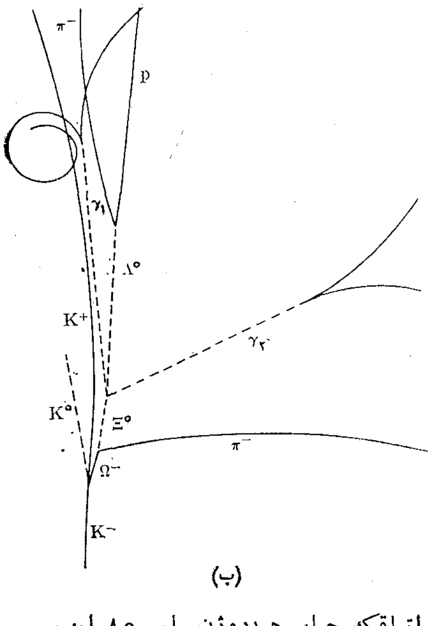
درحال حاضر ماده را متشکل از مشتی از ذرات اساسی (یا بنیادی)[2] در نظر می‌گیرند وهر جسمی چه جاندار و چه بیجان، ازاجتماع یاآرایش معینی از این ذرات تشکیل شده است.

---

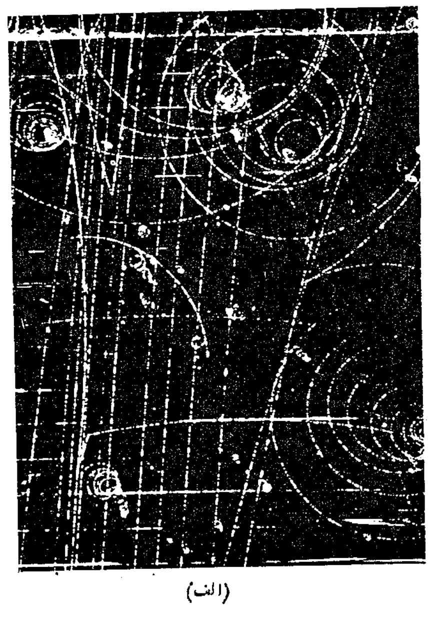
1. gravitational interactions 2. fundamental (elementary) particles

سه‌تا ازاین ذرات‌اساسی: الکترونها، پروتونها ونوترونها، به‌سبب حضورشان دراکثرپدیده‌های عادی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند.

ذرات بنیادی دیگری نیزوجود دارند (بعضی فیزیکدانها فکرمی‌کنند تعداد این ذرات بسیار زیاد است!) ولی عمرآنها بسیار کوتاه و زودگذر است، زیرا دائم در حال به وجود آمدن و از بین رفتن هستند (بنابراین ناپایدارند) و ظاهراً به طور مستقیم در بیشتر پدیده‌هایی که در دور و برمان مشاهده می‌کنیم شرکت ندارند (شکل ۱.۱). آثار وجودی آنها با وسایل مشاهدهٔ خیلی دقیق و پیچیده به ظهور رسیده است، با وجود این، هنوز نقش‌آنها در طرح کلی شناخته نشده است. چند تا ازاین ذرات مانند پیون[1] به سبب نقشی که در برهم‌کنشهای بین پروتونها ونوترونها دارند بسیارمهم‌اند. امروزه پژوهش دربارهٔ ذرات اساسی جهت دستیابی به نشانه‌هایی از ساختار جهان اهمیت بسیار یافته است.



(ب)



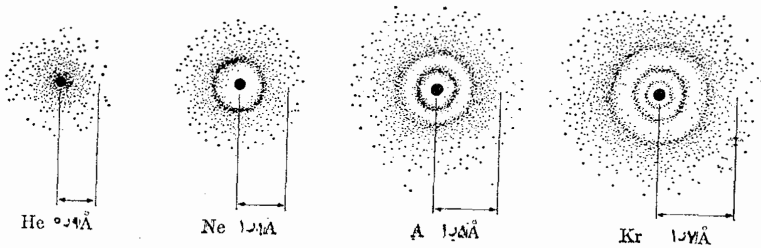
(الف)

شکل ۱.۱. (الف) رد ذرات بنیادی در یک اتاقک حباب هیدروژن مایع ۸۰ اینچی (۲m)، واقع در یک میدان مغناطیسی قوی‌که مسیرذرات رابه‌صورت منحنی درمی‌آورد. از تجزیه و تحلیل این ردها خواص ذرات مختلف را به دست می‌آورند. این عکس، که درسال ۱۹۶۴ گرفته شده است جنبهٔ تاریخی دارد، و برای اولین بار وجود ذرهٔ امگا منفی (Ω^-) را به ثبوت رساند، که قبلا توسط تئوری وجود آن پیش بینی شده بود. (ب) این نموداد، نکات مهمی راکه روی عکس ثبت شده است نشان می‌دهد. رد Ω^- خط کوتاه به سمت پایین شکل است. ردهای مربوط به ذرات دیگر نیز تعیین شده‌اند. (عکس بااجازهٔ‌آزمایشگاه ملی بروک هیون[2].)

---

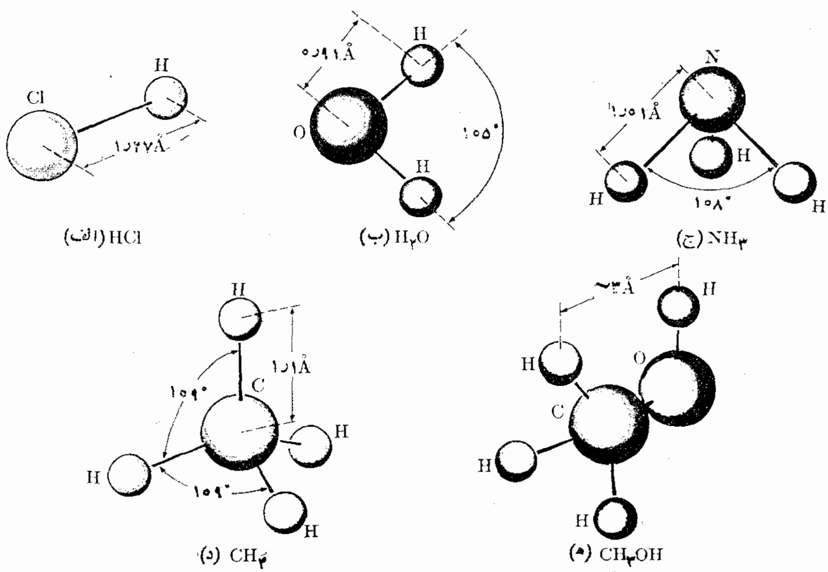
1. pion 2. Brookhaven National Laboratory

به‌زبان خیلی ساده، می‌توان گفت این سه ذرهٔ اساسی یعنی الکترون، پروتون و نوترون در گروههای کاملا مشخصی به نام اتمها حضور دارند. در یک اتم، پروتونها و نوترونها دریک منطقهٔ مرکزی خیلی‌کوچک به نام هسته[1] جمع شده‌اند (شکل ۱.۲). امروزه درحدود



شکل ۱.۲. آرایش الکترونها در اطراف هستهٔ چند اتم ساده (هلیوم: He، نئون: Ne، ارگون: A و کریپتون: Kr). چون مدار الکترونها کاملا مشخص نیست، نواحی تیره جاهایی است که احتمال وجود الکترونها در آنها بیشتر است. ($\text{Å} = 10^{-10}$ m = آنگستروم.)

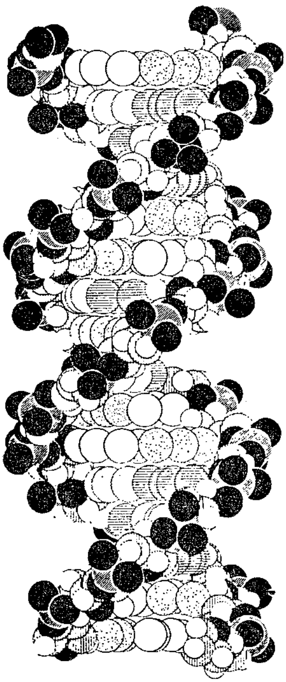
۱۰۴ «نوع» اتم کاملا متمایز شناخته شده‌اند، ولی درحدود ۱۳۰۰ «گونه» اتم متفاوت به نام ایزوتوپ[2] وجود دارد (به جدول پ. ۱ مراجعه کنید). اتمها به سهم خود اجتماع



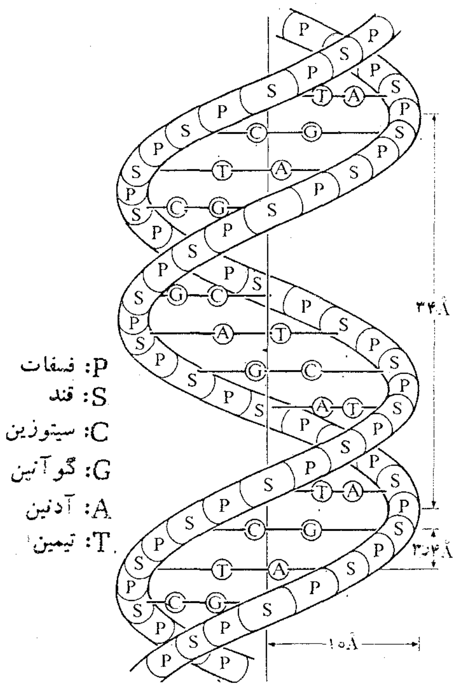
شکل ۱.۳. چند مولکول نسبتاً ساده. الکترونهای لایه‌های داخلی در ارتباط دائم با اتمهای مربوط به‌خود باقی می‌مانند، درصورتی که الکترونهای لایه‌های بیرونی، یا در فضای بین دو اتم و یا در تمام فضای مولکول، کمابیش آزاد، حرکت می‌کنند. (10^{-10}m = آنگستروم.)

---

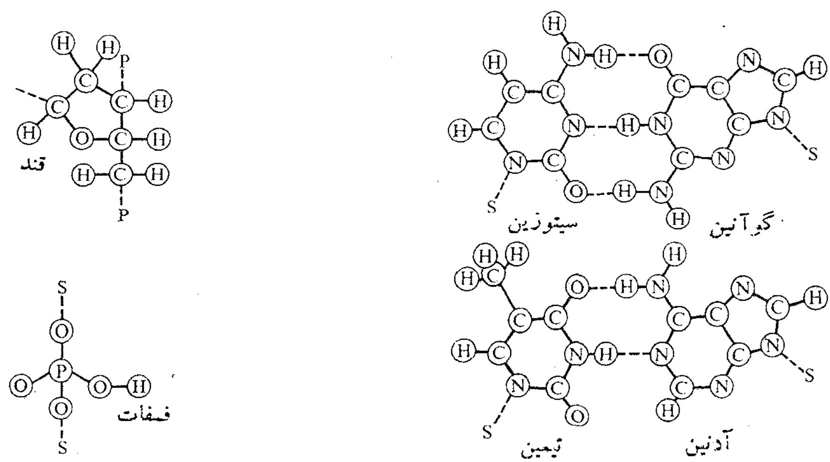
1. nucleus 2. isotope



(الف)



(ب)



شکل ۴.۱. مدل کریک ـ واتسون در مورد اسید دزوکسی ریبونوکلئیک[1] (DNA). ←

1. Crick — Watson model of desoxyribonucleic acid

دیگری به نام مولکول تشکیل می‌دهند. چنانکه می‌دانیم چندین هزار نوع مولکول مختلف وجود دارد. به نظر می‌رسد تعداد مولکولها خیلی زیاد باشد، زیرا هر روز تعداد زیادی مولکولهای جدید به طور صنعتی در آزمایشگاههای شیمی ساخته می‌شود. بعضی مولکولها تنها دارای چند اتم هستند، مانند اسید کلریدریک که از یک اتم هیدروژن و یک اتم کلر ساخته شده است (شکل ۳.۱)، در صورتی که بعضی دیگر ممکن است دارای چند صد اتم باشند. به عنوان مثال می‌توان از پروتئین‌ها، انزیمها و اسیدهای نوکلئیک[1] (DNA و RNA) یا بعضی پلیمرهای آلی مانند پلی‌اتیلن یا کلرور پلی‌وینیل (PVC) نام برد (شکل ۴.۱). بالاخره مولکولها با هم جمع شده اجسام (یا مادهٔ کپه‌ای) را تشکیل می‌دهند که به صورت جامدات، آبگونها و گازها ظاهر می‌شوند، هر چند که این تقسیم بندی چندان دقیق نیست* (شکل ۵.۱).

یک نوع ویژه و مهم مواد، موجود زنده یا مادهٔ جاندار است که پروتوپلاسم نامیده می‌شود. در پروتوپلاسم مولکولها در یک سیستم بی‌اندازه منظم قرار دارند و دارای خصوصیات وکارکردهایی کاملا متفاوت با مادهٔ بیجان هستند. بدن انسان که تکامل یافته‌ترین تمام اجسام جاندار است، در حدود 10^{28} اتم دارد که بیش از همه از کربن، هیدروژن، اکسیژن و ازت تشکیل شده است.

منظومهٔ شمسی مجموعه‌ای است از اجرام عظیم به نام سیاره‌ها که دور ستاره‌ای به اسم خورشید در گردش‌اند. یکی از این سیاره‌ها یعنی زمین ما دارای 10^{51} اتم است. خورشید تقریباً از 10^{57} اتم تشکیل شده است. منظومهٔ شمسی به سهم خود بخش کوچکی از اجتماع بزرگی از ستارگان است که کهکشان راه شیری نام دارد. کهکشان راه شیری شامل حدود 10^{11} ستاره یا 10^{70} اتم و به شکل دیسکی است به شعاع 10^{21} m یا ۱۰۰۰۰۰ سال نوری و بیشینهٔ ضخامت 10^{20} m. کهکشانهای زیادی شبیه

---

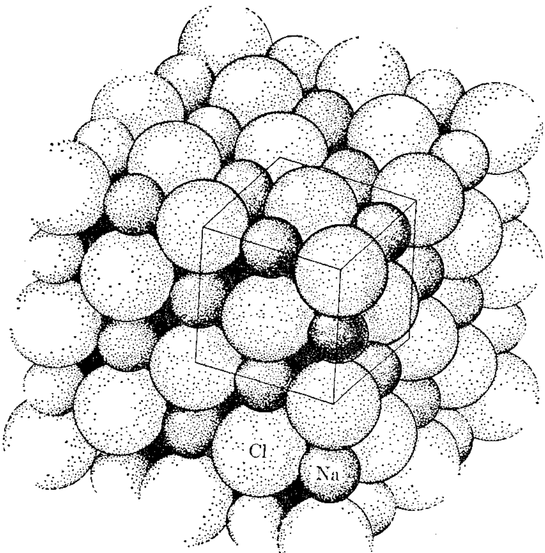
* حالت دیگری از ماده به نام پلاسما (plasma) وجود دارد و آن آمیزهٔ گازی شکل از یونهای مثبت و منفی (یا ذرات باردار) است. قسمت اعظم ماده در جهان به صورت پلاسماست.

← یکی ازدواسیدنوکلئیکی که کروموزوم راتشکیل می‌دهد، DNA، حامل اطلاعات ژنتیکی ویکی ازمولکولهای عظیم‌الجثه‌ای است که مورد مطالعهٔ دقیق قرار گرفته‌اند. پراش پرتو های X نشان می‌دهدکه DNA ازدومارپیچ پادموازی[1] تشکیل شده‌است. درهرمارپیچ قند (S) وفسفات (P) به‌دنبال‌هم‌قرارمی‌گیرند. قند به‌نام دزوکسی‌ریبوز[2] دارای ۵ اتم‌کربن است. دومارپیچ به‌وسیلهٔ پیوند جفت هیدروژنهای پایه، به‌یکدیگر مربوط شده‌اند.

یکی از جفتها از دو ماده به‌نامهای «آدنین»[3] و «تیمین»[4] (A-T) وجفت دیگر از سیتوزین[5] وگوانین[6] (C-G) تشکیل شده‌که کد ژنتیک مولکول DNA به‌نظم وترتیب هریک‌ازجفتهای پایه‌بستگی دارد. جفتهای‌پایه مانندزینه‌هایی درطول خط‌کشی مارپیچی بوده وهر زینه درحدود $11\,\mathring{A}$ می‌باشد. گام هرمارپیچ حدود $34\,\mathring{A}$ و قطرکل آن حدود $18\,\mathring{A}$ است. ($\mathring{A} = 10^{-10}$ m = آنگستروم).

1. antiparallel 2. desoxyribose 3. adenine
4. thymine 5. cytosine 6. guanine

کهکشان ما مشاهده شده‌اند (شکل ۱.۶) که نزدیکترین آنها حدود ۲ میلیون سال نوری یا $2\times10^{22}\,\mathrm{m}$ از ما فاصله دارد. جهان حدوداً دارای 10^{20} ستاره است که حدود 10^{10} کهکشان را تشکیل می‌دهند و در کل شامل 10^{80} اتم است که فضایی به شعاع در حدود $10^{26}\,\mathrm{m}$ یا 10^{10} سال نوری را اشغال می‌کنند.



شکل ۱.۵. ساختار بلورین کلرورسدیم. اتمها دریک شبکهٔ منظم هندسی درحجمی نسبتاً بزرگ قرارگرفته‌اند. این ساختار درنمای بیرونی بلور ماکروسکوپیک یافت می‌شود.

دراینجا به‌طور طبیعی چند سؤال پیش می‌آید. چرا و چگونه الکترونها، پروتونها و نوترونها به هم می‌پیوندند تا اتمها تشکیل شوند؟ چرا و چگونه اتمها به هم مربوط می‌گردند تا مولکولها را بسازند؟ چرا و چگونه مولکولها به‌هم ملحق می‌گردند تا اجسام به‌وجودآیند؟ چگونه می‌شود ماده رویهم انباشته شود تا اجسامی از ذرات غبار مانند خیلی ریز گرفته تا سیارات خیلی بزرگ و از باکتری گرفته تا این موجود عجیب یعنی انسان به وجود آید. به طور نظری با وارد کردن مفهوم برهم‌کنش می‌توان به این سؤالات اساسی پاسخ داد. می‌گوییم دریک اتم ذرات با یکدیگر برهم‌کنش می‌کنند تاشکل پایداری به‌خود گیرند. اتمها، به نوبهٔ خود با یکدیگر برهم‌کنش می‌کنند تا مولکولها تشکیل گردند و بالاخره از برهم‌کنش مولکولها جسم به وجود می‌آید. مادهٔ کپه‌ای نیز بعضی برهم‌کنشهای آشکار، مانند برهم‌کنش گرانشی از خود نشان می‌دهد.

برهم‌کنش مفهوم جدیدی نیست و ما در صدد ابراز یک نظریهٔ نوبنیاد نیستیم و نمی‌خواهیم مفاهیمی را که ازمدتهای مدید وجود داشته‌اند واژگون سازیم. ما تنها اصطلاحی

شکل ۱.۶. سحابی بزرگ[1] در صورت فلکی امرأةالمسلسله[2] که M-31 نیز نامیده می‌شود و نزدیکترین کهکشان منظم به ماست. در فاصلهٔ ۲۵۰۰۰۰۰ سال نوری یا $۲٫۵ \times ۱۰^{۲۲}$ متری منظومهٔ شمسی قرار دارد. قطر آن در حدود ۱۲۵۰۰۰ سال نوری یا $۱۰^{۲۱}$m و شامل $۱۰^{۱۱}$ ستاره است (عکس با اجازهٔ رصدخانه‌های مونت ـ ویلسون[3] و مونت پالومار[4])

را عوض و اصطلاح پذیرفته شدهٔ دیگری را بـرای تشریح ساخت جهان به‌کار می‌بریم کـه نتیجهٔ قرنها پژوهش است. مثلا از ۳۰۰ سال پیش از میلاد ارسطو درکتاب السماء و العالم[5] گفته است: آنها (اتمها) در تهی جا بجا می‌شوند، همدیگر را به چنگ می‌آورند، برخورد

1. Great Nebula 2. Andromeda 3. Mount Wilson
4. Mount Palomar Observatory 5. *De Caelo*

می‌کنند، بعضی ازآنها به هرسمتی کـه تصادف تعیین می‌کند به عقب رانده می‌شوند، بعضی دیگر برحسب تقارن شکل، قـد، وضع و بزرگی‌شان، بـا درجات متفاوت در یوغ یکدیگر گرفتار می‌آیند، بدین طریق اجسام مرکب تشکیل می‌شود. . .» بیان فوق را می‌توان با گفتار لی[1]، برندهٔ جایزهٔ نوبل، مقایسه کرد که درسال ۱۹۶۵ (۱۳۴۴ ه.ش.) گفته است* «هدف غایی علوم عبارت است از یافتن مجموعهٔ ساده‌ای از اصول اساسی کـه به وسیلهٔ این اصول تمام حقایق شناخته‌شده فهمیده می‌شوند ونتایج جدید نیز پیش‌بینی می‌گردند. چون تمام مواد از ذره‌های اساسی یکسانی ساخته شده‌انـد، زیربنای اصلی تمام علوم طبیعی بایـد برپایـهٔ قوانین حاکم برچگونگی رفتار این ذره‌های اساسی استوار گردد.»

هدف اولیهٔ یک فیزیکدان کشف برهم‌کنشهای مختلف ماده است، کـه مهمترین آنها عبارتند ازگرانشی، الکترومغناطیسی و هسته‌ای. او همچنین می‌کوشد آنها را به صورت‌کمی بیان کند و بدین جهت لازم است از ریاضیات کمک گیرد. بالاخره، درصدد فرمولـه کردن قواعد عمومی مربوط به رفتار مادهٔ کپه‌ای برمی‌آید، رفتاری کـه ناشی از این برهم‌کنشهای اساسی است. تشریح رفتار مـاده کپه‌ای الزاماً سرشتی آماری دارد، زیـرا تعداد غیرقابـل تصوری مولکول در آن دخالت دارند که بررسی دقیق حرکات یکایک آنها غیرممکن است. به‌عنوان مثال، در یک قطره آب تا 10^{20} مولکول آب وجود دارد.

فیزیک، بـرد گستره‌ای از مقادیر را، از طول حدود 10^{-15}m و جرم 10^{-31}kg (مربوط به‌یک‌الکترون) گرفته تاطول‌حدود 10^{9}m وجرم 10^{30}kg (مربوط به‌اجرام منظومهٔ شمسی) و حتی خیلی بالاتر را در برمی‌گیرد. با اینکه برای همهٔ آنها قوانین اساسی یکسان است ولی نحوهٔ بیان این قوانین و نوع تقریبی که به کار می‌رود به برد ویژهٔ مقادیر به کار گرفته شده بستگی دارد.

۴.۱ رابطهٔ بین فیزیک و سایر علوم

در بخش ۱.۱ گفته شد و در اینجا تکرار می‌کنیم که هدف فیزیک توانایی بخشیدن به مـا بـرای فهم اجزای بنیادین ماده و برهم‌کنشهای متقابل آنهاست، تـا بدین طریق پدیده‌های طبیعت از جمله ویژگیهای مـادهٔ کپه‌ای را بیان کنیم. بنا به این تعریف، مشاهده می‌شود کـه فیزیک اساسیترین علم طبیعت است. شیمی با تعریفی کـه ازآن می‌شود جنبهٔ خاصی از این برنامهٔ عظیم را اشغال می‌کند: یعنی کاربست قـوانین فیزیک در ساختن مولکولها و وسایل گوناگون عملی بـرای تبدیـل بعضی مولکولها بـه مولکولهای دیگر. زیست شناسی جهت تشریح فرایندهایی که درموجودات جاندار می‌گذرند تا حدزیادی به فیزیک و شیمی متکی است. کاربـرد اصول فیزیک و شیمی در مسایل عملی، در پژوهشها و همچنین در فعالیتهای شغلی منشأ وجـود شاخه‌هـای گوناگون مهندسی گردیده است. کاربرد مدرن هنر مهندسی و پژوهش، بدون درک عمیق از مفاهیم اساسی علوم طبیعی غیرممکن است.

---
1. T.D. Lee

* *Nature of Matter—Purposes of High Energy Physics*, Luke C.L. Yuan, editor. New York: Brookhaven National Laboratory, 1965.

فیزیک تنها ازاین نظر مهم نیست کـه زیربنای مفاهیم و تئوریهای سایر علوم طبیعی است، بلکه از نظر عملی نیز از امتیاز ویژه‌ای برخوردار است، زیـرا تکنیکهایی را فراهم می‌کند که درتمام رشته‌های پژوهشی محض یا عملی می‌توان به‌کار برد. نجوم، به تکنیکهای اپتیک، بیناب‌نمایـی[1] و رادیـویی نیازمند است. زمین شناسی روشهای گـرانـی‌سنجی[2]، اکوستیکی، مکانیکی و هسته‌ای را در تحقیقات خود به کار می‌گیرد. همین امر را می‌توان در اقیانوس شناسی، هواشناسی و زلزله شناسی و غیره بیان کرد. یک بیمارستان مـدرن مجهز به آزمایشگاههایی است که درآنها آخرین تکنیکهای فیزیک به صورتهای گوناگون به کار گرفته می‌شوند. به طور خلاصه، هیچگونه فعالیت پژوهشی، حتی در باستان شناسی، دیرینه‌شناسی، تـاریخ و هنر بـدون برخورداری از تکنیکهای مدرن فیزیک نمی‌توان انجام داد. تمام اینها در فیزیکدان این احساس رضایت را به وجود می‌آورد که وظیفهٔ او تنها افـزودن به معلومات مـا در بارهٔ طبیعت نیست، بلکه سهم عمده‌ای نیز در تـرقی اجتماعـی بشر به عهده دارد.

۵۰۱ روش تجربی

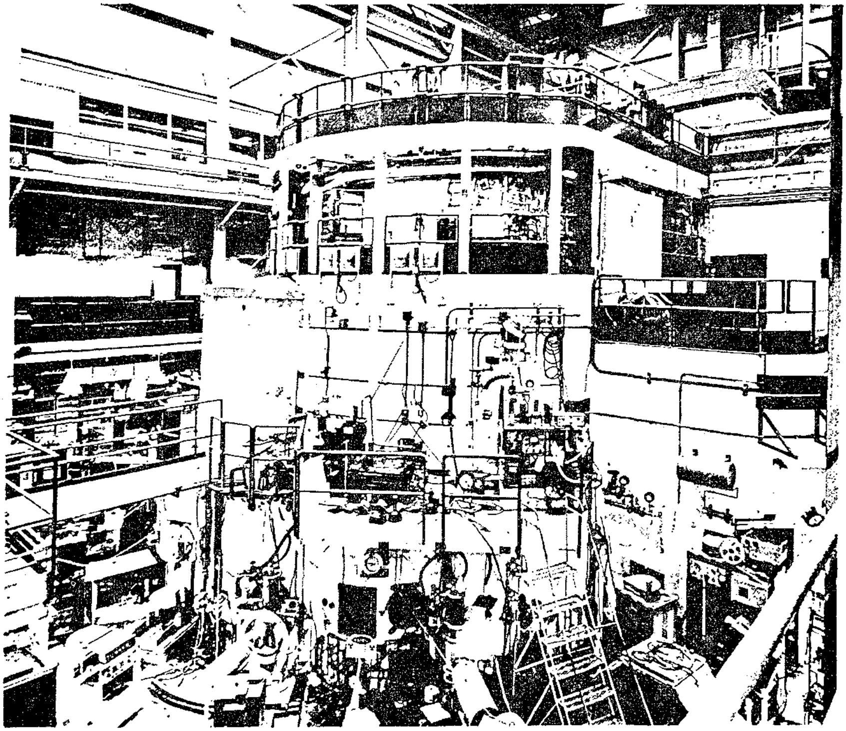
فیزیک همانند سایرعلوم طبیعی نظری یا کاربردی، بـرای رسیدن به منظور خود به مشاهده و تجربه بستگی دارد. مشاهده عبارت است از بررسی دقیق یک پدیده با یادداشت کردن و تجزیه و تحلیل عوامل و موقعیتهای گوناگون‌که روی این‌پدیده اثر دارند. متأسفانه شرایطی کـه این پدیده‌ها به طور طبیعی رخ می‌دهند بندرت سهل‌الحصول، و دربعضی حالات، بسیار اتفاقی‌اند، به طوری که تجزیه وتحلیل آنها روندی دشوار و بطیء دارد. بدین دلیل تجربه ضروری است. تجربه یا آزمایش عبارت است از مشاهدهٔ یک پدیده درشرایطی که ازپیش با دقت کافی بررسی و تنظیم شده است. بدین طریق دانشمند می‌تواند شرایط را به میل‌خود تغییر دهد، به طوری کـه بآسانی به چگونگی تغییر پدیده با توجه به شرایط جدیـد آگاهی یابـد. بدون تجربه، علوم جدیـد هرگز نمی‌توانستند به این درجه از پیشرفت نایل گردند. بدین دلیل است که آزمایشگاه برای دانشمندان این اندازه اساسی و ضروری است.

بدین منظور به شکل ۷۰۱، راکتور تحقیقاتی آزمایشگاه ملی اوک ریج[3] توجه کنید. مشاهده می‌کنیم کـه فضای اطراف راکتور از وسایـل و اسبابهای آزمایشگاهی پـر است. فیزیکدانان‌ازبعضی این‌وسایل برای‌افزایش اطلاعات‌خود دربارهٔ ویژگیهای هسته‌ها یا تجزیهٔ ساختمان بعضی مواد استفاده می‌کنند. سایـر وسایل را می‌توان جهت تهیه مواد رادیوآکتیو برای مصارف شیمیایی، پزشکی، زیست شناسی، کشاورزی یا مهندسی به‌کار برد. وسیله‌ای‌که بیوفیزیکدانان برای مطالعهٔ اثر پرتوها روی نمونه‌هـای بیولوژیکی استفاده می‌کنند ممکن است توسط دانشمندان دیگر جهت مطالعهٔ اثر پرتوها روی مـواد گوناگون به کار رود. به دانشجو توصیه می‌شود از یکی از آزمایشگاههای تحقیقاتی مدرن و مجهز بازدید کند، تـا

---

1. spectroscopy 2. gravimetry 3. Oak Ridge

شخصاً احساسی از نقش تجربه در علوم به دست آورد.



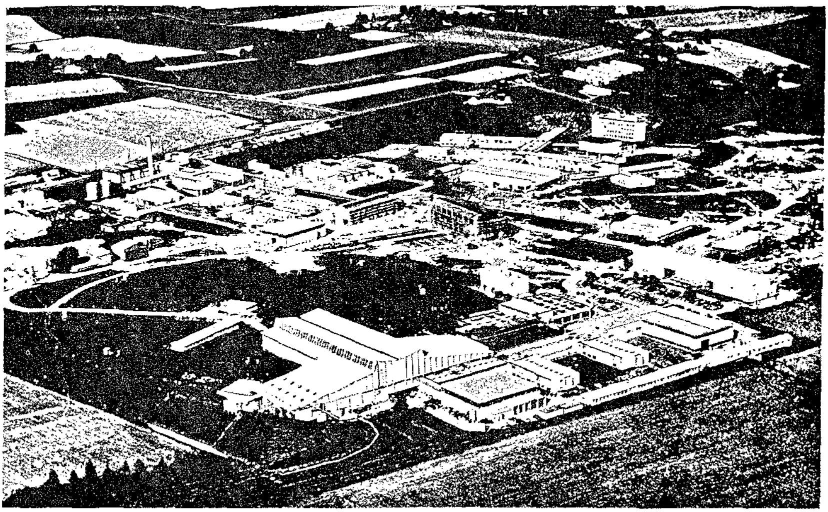
شکل ۱.۷. رآکتورهسته‌ای تحقیقاتی آزمایشگاه ملی اوک‌ریج که درتعداد بسیار زیادی از پژوهشهای بنیادی به‌کار می‌رود (عکس با اجازهٔ ORNL).

بدیهی است، تجربه تنها وسیله‌ای نیست که فیزیکدان در اختیار دارد. یک دانشمند، با استفاده ازحقایق شناخته شده، می‌تواند به‌طور نظری به شناختهای تازه‌ای دست یابد. منظور ما ازنظریه‌آن است که فیزیکدان برای وضعی که مورد بررسی اوست مدلی[1] پیشنهاد می‌کند و با یاری گرفتن از روابط اثبات شدهٔ قبلی، یک استدلال منطقی و قیاسی به مدل نسبت می‌دهد. معمولا برای بیان برهان از ابزارهای ریاضی استفاده می‌شود. امکان دارد نتیجهٔ نهایی، پدیدهٔ جدیدی را که تا کنون مشاهده نشده است پیش‌بینی کند یا روابط بین چند پدیده را به ثبوت رساند. شناختی که فیزیکدان از راه نظری به دست می‌آورد، به‌نوبهٔ خود، به‌وسیلهٔ دانشمندان دیگرمورد بررسی قرارمی‌گیرد. آنها با تجربه‌های جدید خود مدل را مورد بررسی قرار می‌دهند تا محدودیتها و نواقص آن را تعیین کنند. سپس نظریه‌پرداز در مدل خود تجدیدنظر کرده و یا آن را تغییر می‌دهد به نحوی که با اطلاعات جدید سازگاری داشته‌باشد. همین رابطهٔ تنگاتنگ بین نظریه و تجربه است‌که امکان پیشرفت و ترقی

1. model

مداوم علم را برپایه‌های بسیار محکم فراهم می‌سازد.

در زمانهای سابق، یک دانشمند می‌توانست به طور مستقل و کما بیش در انزوا کار کند (مانندگالیله، نیوتون، هویگنز[1] و دیگران) ولی، علم جدید به سبب پیچیدگی آن، عمدتاً، نتیجهٔ کار گروهی است که در آن دانشمندان نظری و تجربی همفکری کرده و با هم کار می‌کنند. منظور از «باهم» این نیست که آنها با هم زیر یک سقف جمع می‌شوند. وسایل مدرن ارتباطات تبادل‌نظرها را سریع وآسان ساخته است. فیزیکدانهایی از ملیتهای مختلف و صدها کیلومتر دور از همدیگر، می‌توانند با هم کار کرده و روی طرح پژوهشی مشترکی همکاری کنند (شکل ۸.۱). این امر نه فقط در مورد فیزیک صادق است، بلکه شامل تقریباً تمام علوم می‌شود و این نشان دهندهٔ ارزش جهانی علم است که کلیهٔ سدهای بشری را درمی‌نوردد. می‌توان امیدوار بود که علم، ازطریق این گونه همکاریها، به‌افزایش تفاهم بین انسانها کمک کند.



شکل ۸.۱. منظرهٔ عمومی سازمان پژوهشهای هسته‌ای اروپا[2] (CERN). سال تأسیس ۱۹۵۴. دراین سازمان علاوه برهمکاری دولتهای اروپایی (اتریش، اسپانیا، انگلیس، ایتالیا، بلژیک، جمهوری فدرال آلمان، دانمارک، سویس، سوئد، فرانسه، نروژ، هلند و یونان)، ایالات متحده آمریکا نیز مشارکت فعال دارد. محل آن در میرن[3] سویس نزدیک مرز فرانسه قرار گرفته است. CERN بهترین و گسترده‌ترین امکانات پژوهشهای هسته‌ای از قبیل یک سنکروسیکلوترون[4] ۶۰۰ MeV، یک سیکلوترون پروتون ۲۸ GeV (که مغناطیس آن در زیرزمین ساختمان دایره شکل قرارگرفته) و یک اتاقک حباب هیدروژن مایع به طول ۲m و... را دراختیار پژوهندگان کشورهای اروپای‌غربی قرار می‌دهد. اشخاص مشغول به‌کار دراین‌سازمان (حدود ۲۰۰۰ نفر)، از مردم کشورهای عضو، و بودجهٔ سالانهٔ آن نزدیک به ۳۰ میلیون دلار آمریکایی است.

1. Huygens
2. European Organization for Nuclear Research
3. Meyrin
4. synchro—cyclotron

فهرست منابع

1. «Truth in Physics», P. Schmidt, *Am. J. Phys.* 28, 24 (1960).
2. «Nature of Physics and Its Relation to Other Sciences», G. P. Thompson, *Am. J. Phys.* 28. 187 (1960).
3. «Empty' Space,» H. van de Hulst, *Scientific American*, November 1955, page 72.
4. «Some Reflections on Science and the Humanities,» J. Ashmore, *Physics Today*, November 1963, page 46.
5. «American Physics Comes of Age,» J. Van Vleck, *Physics Today*, June 1964, page 21.
6. «Science and Public Policy,» E. Daddario, *Physics Today*, January 1965, page 23.
7. «Physics and Biology,» W. A. Rosenblith, *Physics Today*, january 1966, page 23.
8. *Atoms and the Universe* (second edition), by G. Jones, J. Rotblat, and G. Whitrow, New York: Scribner's, 1963
9. *The Excitement of Science*, by J.R. Platt. Boston: Houghton Mifflin, 1962.
10. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, by R. Faynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison Wesley, 1933, Chaptres 1,2, and 3.
11. *Foundations of Modern Physical Science*, by G. Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Chapters 8,12,14, and 15.

۲

سنجش و یکاها

۱۰۲ مقدمه

در حالت کلی، مشاهدهٔ یک پدیده هنگامی کامل است که به اطلاعات کمی منتهی شود. دستیابی به‌چنین اطلاعاتی نیاز به سنجش[1] یک کمیت فیزیکی دارد. بنابراین سنجش اساس کار عادی روزانه فیزیکدان تجربی را تشکیل می‌دهد. لرد کلوین[2] می‌گفت شناسایی یک کمیت کامل نیست اگر نتوان‌آن را باعدد بیان کرد. هرچند که این سخن بدون شک اغراق‌آمیزاست، ولی بازتاب یک حالت فکری است که یک فیزیکدان باید درطول پژوهشهایش به‌آن وفادار بماند. درضمن، چنانکه درفصل ۱ متذکر شدیم، درنمایش یک خاصیت فیزیکی به‌صورت عددی، انسان نه تنها به استفاده از ریاضیات برای نشان دادن روابط بین کمیتهای مختلف نیاز دارد، بلکه باید توانایی به کار بردن این روابط را نیز داشته باشد. بدین‌مناسبت ریاضی زبان فیزیک راتشکیل می‌دهد؛ بدون ریاضیات درک پدیده‌های‌فیزیکی، خواه از نقطه نظر تئوری و خواه از نقطه نظر تجربی، غیر ممکن است. ریاضیات ابزار و اسباب کار یک فیزیکدان است؛ او بایدآن را با مهارت و کاردانی برای سهولت کارخود به کار گیرد نه جهت پیچیده کردن آن.

دراین فصل ما غیر از تعریف یکا[3]های لازم برای بیان نتایج سنجش، در مورد بعضی تعریفهای مهم مانند چگالی، زاویهٔ مسطحه، زاویهٔ فضایی، ارقام بامعنی ونحوهٔ تجزیه وتحلیل نتایج تجربی که درجریان مطالعهٔ کتاب به‌آنها مرتباً برخورد می‌شود، بحث می‌کنیم.

۲۰۲ سنجش

سنجش فنی است که با استفاده ازآن به یک خاصیت فیزیکی، پس از مقایسه با یک کمیت نمونه از جنس خودش، که به عنوان یکا برگزیده می‌شود، یک عدد نسبت می‌دهیم. بیشتر سنجشهایی که در آزمایشگاه انجام می‌شوند اساساً به اندازه گیری طول منتهی می‌گردند. با استفاده از این سنجش (همچنین بعضی قراردادها که به صورت فرمول بیان می‌شوند)، کمیت مورد نظر به دست می‌آید. هنگام انجام یک سنجش‌آزمایشگر باید توجه داشته باشد کمترین اختلال[4] ممکن در سیستم مورد مشاهده رخ ندهد. به عنوان مثال، هنگامی که دمای جسمی را اندازه می‌گیریم، دماسنجی را با آن در تماس قرار می‌دهیم. ولی وقتی که آنها با هم قرار گرفتند، بین دماسنج و جسمی که دمای آن باید اندازه گیری شود تبادل انرژی یا «گرما» به‌وجود می‌آید، بدین طریق جزئی تغییردر دمای جسم صورت می‌گیرد و درنتیجه کمیت مورد سنجش تغییرمی‌کند. به علاوه، تمام سنجشها، به سبب نقص فنی غیرقابل اجتناب اسبابهای سنجش، یا به سبب محدودیت حواس (بینایی و شنوایی) که باید اطلاعات را ثبت کنند، دارای خطای تجربی[5] است. ازاین رو، یک فیزیکدان تکنیک سنجش خود را باید طوری انتخاب کند که اختلال وارد در سنجش کمیت از خطای تجربی ناشی ازاسباب اندازه گیری کمتر باشد. به طور کلی، هنگامی که کمیتهای مورد سنجش به صورت

---

1. measurement 2. Lord Kelvin 3. unit 4. disturbation
5. experimental error

ماکروسکوپی باشند (یعنی اجسامی که از تعداد زیادی مولکول تشکیل می‌شوند) این کار همیشه ممکن است، زیرا در این موارد کافی است اسباب سنجشی به کارگرفته شود که اختلال حاصل از آن چندین بار ازمرتبهٔ بزرگی کمیت مورد سنجش کوچکتر باشد. بدین طریق، اختلال حاصل هر چه باشد، در مقابل خطای تجربی ناچیز خواهد بود. در موارد دیگر می‌توان مقدار اختلال را برآورد کرد و مقدار به‌دست آمده را تصحیح کرد.

در هنگام اندازه گیری ویژگیهای تک تک اتمها، مانند سنجش حرکت الکترونها، وضع بکلی فرق می‌کند. دراین موارد ما قادر نیستیم برهم کنشی به وجودآوریم که از کمیت مورد سنجش کوچکتر باشد، زیرا چنین اسبابی وجود ندارد. اختلال وارد در عمل به همان بزرگی کمیت مورد اندازه‌گیری است که حتی نمی‌توان آن را حدس زد و یا به حساب آورد. بنابراین لازم است بین اندازه گیریهای ماکروسکوپی و اندازه گیریهای اتمی تمایزی در نظر گرفته شود. برای رویارویی با کمیتهای اتمی به ساختار نظری ویژه‌ای نیاز است. در اینجا در مورد این ساختار ویژه که مکانیک کوانتومی[1] نام دارد وارد گفتگو نمی‌شویم.

یک الزام مهم دیگر این است که تعریف کمیتهای فیزیکی باید عملیاتی[2] باشد یعنی به طور ضمنی و یا صریح چگونگی سنجش کمیت تعریف شده را نشان دهد. به عنوان مثال هرگاه بگوییم سرعت، آهنگ[3] جابجایی جسمی را بیان می‌کند، تعریف عملیاتی از سرعت نشده است. برعکس، هرگاه گفته شود سرعت مسافت پیموده شده تقسیم برزمان است، سرعت به طور عملیاتی تعریف شده است.

۳.۲ کمیتهای اصلی و یکاها

قبل از سنجش هر چیزی، ابتدا باید برای کمیت مورد اندازه گیری یکایی انتخاب کرد. با توجه به نیازهای سنجش، کمیتها و یکاهای اصلی و فرعی وجود دارد. فیزیکدان چهارکمیت اصلی مستقل را می‌پذیرد: طول، جرم، زمان و بار الکتریکی.*

طول یک مفهوم اولیه است و همه به طور طبیعی معنای آن را درمی‌یابند؛ کوشش برای تعریف طول کار بیهوده‌ای است. درمورد زمان نیز چنین است. برعکس، جرم و بار الکتریکی مانند دوکمیت فوق مفاهیم ابتدایی نیستند. درفصلهای ۷ و ۱۳ مفهوم جرم به طوردقیق‌حلاجی خواهد شد، در اینجا فقط باختصار اشاره می‌کنیم که جرم، ضریبی است خاص هر ذره، که واکنش ذره را هنگام برهم کنش با سایر ذرات و همچنین شدت برهم کنشهای گرانشی آن را معین می‌کند.

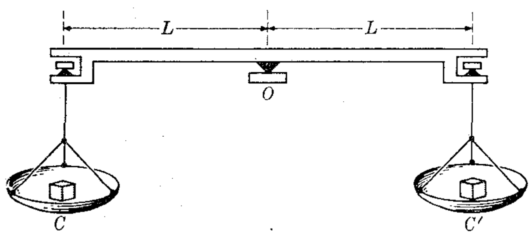
بار الکتریکی که در فصل ۱۴ مورد بحث قرار می‌گیرد، ضریب مشخصهٔ دیگر هر ذره است، که شدت برهم‌کنشهای الکترومغناطیسی آن را با ذرات دیگر تعیین می‌کند. احتمال دارد ضرایب دیگری که برهم کنشهای دیگری را بین ذرات مشخص می‌کنند وجود داشته

* با تعریف این چهار کمیت اصلی نمی‌خواهیم بگوییم که کمیت «اصلی» دیگری در فیزیک وجود ندارد، بلکه کمیتهای دیگر طوری هستند که آنها را می‌توان به صورت ترکیبی از چهار کمیت فوق درآورد، یا لزومی ندارد برای بیان آنها یکای مخصوص تعریف شود.

1. quantum mechanics 2. operational 3. rate

باشند. ولی تاکنون اثری ازآنها مشاهده نشده است. درحال حاضر لزومی برای واردکردن کمیتهای اصلی اضافی مشاهده نمی‌شود.

تعریف عملیاتی جرم را می‌توان با به کار بردن اصل ترازوی با بازوهای برابر، یعنی ترازوی متقارن نسبت به نقطهٔ آویز O، نیز پیدا کرد (شکل ۱.۲). جرمهای دو جسم C و C' با هم برابر خوانده می‌شوند هرگاه با قرار گرفتنشان در کفه‌های ترازو تعادل ترازو به هم نخورد. به طور تجربی ثابت شده است که هرگاه یک ترازو در نقطه‌ای از زمین در حال تعادل باشد، به هر نقطهٔ دیگری که انتقال داده شود ترازمندی ترازو به هم نمی‌خورد. بنابراین تساوی جرم ویژگی اجسام است و به محلی که آنها با هم مقایسه می‌شوند بستگی ندارد. اگر جرم مقایسه، یکای استاندارد باشد، جرم به صورت مضربی از جرم استاندارد به دست می‌آید. در واقع جرمی که بدین طریق به دست می‌آید جرم گرانشی[1] است (فصل ۱۳). در فصل ۷ نیز وسیلهٔ مقایسهٔ دینامیکی جرمها مورد بحث قرار می‌گیرد. جرم به دست آمده به‌طور دینامیکی، جرم لخت[2] نامیده می‌شود. چنانکه در فصل ۱۳ بحث خواهد شد، هیچگونه اختلافی بین دو روش اندازه گیری جرم پیدا نشده است.



شکل ۱.۲. ترازو با بازوهای برابر برای مقایسهٔ جرم دو جسم

بجز چند مورد استثنایی، کلمهٔ کمیتهای به کار برده شده در فیزیک را، با توجه به تعریف آنها، می‌توان به‌صورت روابط ریاضی از چهار کمیت: طول، جرم، زمان و بار-الکتریکی بیان کرد. یکای تمام این کمیتها، که کمیتهای فرعی نامیده می‌شوند، به‌نوبهٔ خود با توجه به یکاهای اصلی از روی همین روابط تعریفی آنها بیان می‌گردند. در این صورت لازم است به منظورداشتن یک دستگاه یکاهای گویا، روی یکاهای چهارکمیت اصلی توافق شود. فیزیکدانان [دریازدهمین‌کنفرانس بین‌المللی اوزان ومقیاسهاکه در ۱۹۶۰ (۱۳۳۹ ه. ش.) درپاریس برگزار شد] موافقت کردند دستگاه یکاهای MKSC را به‌کار برند.دراین کتاب نیزهمین دستگاه یکاها به‌کار رفته است. دراین دستگاه یکای چهارکمیت‌اصلی عبارتند از متر، کیلو گرم، ثانیه و کولن، و بترتیب چنین تعریف می‌شوند:

متر با علامت اختصاری m یکای طول می‌باشد وآن طولی است ۱۶۵۰۷۶۳٫۷۳ برابر طول موج در خلأ پرتو قرمز اتم کریپتون ۸۶ (^{86}Kr) درگذار ازتراز انرژی $2p_{10}$ به تراز انرژی $5d_5$ (درشرایط معینی که در متن تصویب نامه تصریح شده است). دو نماد اخیر مربوط به حالتهای فیزیکی ویژهٔ اتم کریپتون است. تابش گسیل شده بآسانی قابل شناسایی است زیرا به صورت یک خط قرمز در بیناب ظاهر می‌شود.

---
1. gravitational mass 2. inertial mass

کیلو گرم بـا علامت اختصاری kg، یکای جرم است و آن جرم کیلوگرم بین‌المللی قطعه‌ای از آلیاژ پلاتین-ایریـدیوم است که در ادارهٔ اوزان و مقیاسها در سور[1] پـاریس نگهداری می‌شود. درتمام کاربردهای عملی یک کیلوگرم برابر جرم $10^{-3}m^3$ آب مقطـر در $4°C$ است. دراین‌صورت جرم $1m^3$ آب برابر 10^3kg می‌شود. حجم‌معادل $10^{-3}m^3$ یک لیتر نـام دارد. جهت مشابهت بـا متر، می‌توان کیلو گرم را نیز به یک خاصیت اتمی وابسته ساخت. برای این‌کار می‌گوییم یک کیلوگرم برابراست باجرم $5{,}0188 \times 10^{25}$ اتم ایزوتوپ کربن ۱۲ (^{12}C). درحقیقت، این تعریف به‌عنوان معیاری جهت تعریف مقیاس بین‌المللی جرم اتمی پذیرفته شده است.

ثانیه باعلامت اختصاری s، یکای زمان است. اتحادیهٔ بین‌المللی اخترشناسی آن را برابـر ۱/۳۱۵۵۶۹۲۵٫۹۷۵ سال شمسی ۱۹۰۰ تعریف کـرده است. سال شمسی عبارت از مدت زمانی است که طول می‌کشد تا زمین در گردش خود به دورخورشید دو بارمتوالی از نقطهٔ اعتدال بهاری[2] بگذرد که تقریباً هر سال با ۱ فروردین تطبیق می‌کند (شکل ۲-۲). همچنین ثانیه را می‌توان ۱/۸۶۴۰۰ روز شمسی میانگین تعریف کرد. روز شمسی میانگین، متوسط فاصله های زمانی بین دو عبور متوالی یک نقطهٔ زمین از مقابل خـورشید در طـول یک سال می بـاشد. دشـواری انتخاب تعـریف فوق برای ثانیه این است بـه سبب کشند (جزر و مد)، دورهٔ گردش وضعی زمین بتدریج رو به کاهش است. بنابراین باید یکا را نیز بتدریج تغییر داد. بدین مناسبت بود که یک سال ویژه، یعنی سال ۱۹۰۰ (۱۲۷۹ ه. ش.) برگزیده شد.

یکای زمان را نیز همانند یکای طول می‌توان به‌یک خاصیت اتمی وابسته‌کرد؛ آنچه کـه امروز ساعتهای اتمی نـام گرفته است. به عنوان مثال مولکـول آمونیاک (NH_3) دارای ساختمان هرمی مثلث القاعده می‌باشدکه درآن سه اتم هیدروژن هرکدام دریک رأس قاعده و اتم ازت در رأس هرم قرار دارد (شکل ۲-۳). بدیهی است برای اتم ازت، وضع قرینه N' نیز وجود دارد که در فاصلهٔ یکسان از صفحهٔ H-H-H ولی در طرف دیگر قرار گرفته است. اتم ازت می‌تواند با دورهٔ ثابتی بین ایـن دو وضع تعادل نوسان کند. در ایـن صورت ثانیه را می‌توان زمان لازم برای انجام $2{,}387 \times 10^{10}$ نـوسان تعـریف کـرد. اولین ساعت اتمی، براین پایه، در سال ۱۹۴۸ دراداره ملی استانداردها ساخته شد وازآن به‌بعد ساعتهای اتمی دیگر با مواد دیگر نیز ساخته شده‌انـد. هنوز هیچگونه موافقت قطعی روی سنجهٔ[3] اتمـی زمان اتخاذ نشده است، ولی یک کوشش عمومی برای چنین تعریفـی مشاهده می‌گردد.*

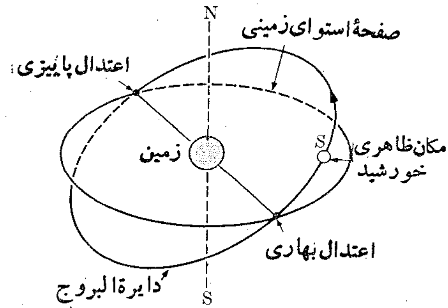
کولن[4] بـا علامت اختصاری C، یکای بـار الکتریکی است. تعریف دقیق و رسمی

1. Sevres   2. vernal equinox

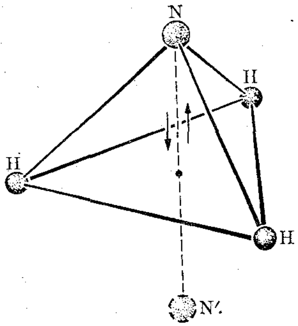
* در اکتبر ۱۹۶۴، کمیتهٔ بین‌المللی اوزان و مقیاسهـا به‌طورموقت یکای بین‌المللی زمان را از روی یک گذاراتمی خاص در اتم سزیوم (^{133}Cs) تعریف کرد. به‌این ترتیب، ثانیه موقتاً چنین تعریف‌شد: زمان‌لازم برای نوسانگری که اتمهای سزیوم رابه‌آن گذارمذکور وامی‌دارد، تا ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ بار نوسان کند.

3. standard   4. coulomb

کولن در فصل ۱۴ خواهد آمد، ولی درحال حاضر می‌توانیم بگوییم کولن قدر مطلق بار منفی موجود در $۶٫۲۴۱۸ \times ۱۰^{۱۸}$ الکترون، و یا بار مثبت موجود در همین تعداد پروتون می باشد.



شکل ۲.۲. تعریف سال شمسی



شکل ۳.۲. نوسان اتم ازت بین دو وضع متقارن در مولکول آمونیاک

یادآوری: به‌گفتهٔ دقیقتر، چهارمین یکای انتخاب شده در یازدهمین کنفرانس، غیراز متر، کیلوگرم و ثانیه، آمپر بود (به‌جای کولن) که یکای شدت جریان الکتریکی می باشد. دراین‌صورت، کولن مقدار بارالکتریکی است که درمدت یک ثانیه از مقطع یک رسانای حامل شدت جریان یک آمپر عبور می‌کند. دلیل انتخاب آمپر این است که درست کردن سنجه از شدت جریان آسانتر است. سبب به‌کاربردن کولن به‌جای آمپر دراین کتاب، بیشتر این بوده است که اساسی‌تر بودن سرشت بار الکتریکی را بیان کنیم، نه اجتناب از سفارشهای یازدهمین کنفرانس اوزان ومقیاسها. دستگاه یکاهای MKSA دستگاه یکاهای بین‌المللی است وبا علامت اختصاری SI نشان داده می‌شود.

متر و کیلوگرم یکاهایی هستند که نخستین بار در جریان انقلاب کبیر فرانسه عنوان شدند، زمانی‌که دولت تصمیم گرفت به‌جای یکاهای گوناگون ومتعدد و نامشخص آن زمان، یک دستگاه یکاهای گویا به‌وجودآورد، و ازآن موقع به‌نام دستگاه‌متری[1] شناخته می‌شوند. ابتدا متر را «یک ده میلیونیم ربع نصف‌النهار زمین» تعریف کردند. بدین منظور، با عملیاتی که چندین سال طول‌کشید، طول نصف‌النهاری را به‌طور دقیق اندازه‌گرفتند ومیله‌ای از پلاتین به‌عنوان سنجهٔ طول به‌اندازهٔ یک متر ساختند که در شرایط بسیار مشخصی در دمای $۰^{\circ}\mathrm{C}$ در ادارهٔ بین‌المللی اوزان و مقیاسها در شهر سور نگهداری می‌شود. سنجشهای دقیق بعدی نشان دادند که متر نمونهٔ ساخته شده به‌اندازهٔ $۱٫۸ \times ۱۰^{-۴}\mathrm{m}$ از طول یک ده میلیونیم نصف‌النهار زمین کوتاهتراست. بنابراین نمونهٔ ساخته شده را به‌عنوان مترسنجه انتخاب کردند وبدین طریق ارتباط دقیق آن با نصف‌النهار زمین ازبین رفت. نمونه هایی از متر سنجهٔ ساخته شده دراختیار کشورهای عضو قرار دارد. با وجود این، داشتن یک‌سنجه با مشخصات پایدار و سهل‌الحصول برای هر آزمایشگاهی دارای مزایای بیشتری است و

1. metric system

بدین مناسبت بود که پرتو قرمز ^{۸۶}Kr انتخاب گردید.

ولی آنچه مربوط به جرم است. یکای برگزیده شده از طرف دولت فرانسه گرم با علامت اختصاری g بود و آن معادل جرم یک سانتی‌مترمکعب آب مقطر در دمای $۴^\circ C$ است ($۱\,cm = ۱۰^{-۲}\,m = ۰/۳۹۳۷\,in$ و $۱cm^{۳} = ۱۰^{-۶}\,m^{۳}$). دمای $۴^\circ C$ ازاین نظر اختیار شده است که در این دما چگالی آب بیشینه است. بنابراین یک کیلو گرم برابر است با $۱۰^{۳}\,g$. قطعهٔ پلاتینی به جرم یک کیلوگرم ساخته شد و سپس تصمیم گرفته شد بدون آنکه آب ملاک قرار گیرد، همین قطعه فلز به‌عنوان کیلوگرم سنجه انتخاب شود.

در بیشتر کارهای علمی، قبل از قبول دستگاه یکاهای MKSC، دستگاه یکاهای cgs را به‌کار می بردند. دراین دستگاه یکای طول سانتی‌متر، یکای جرم‌گرم ویکای زمان همان ثانیه است. در دستگاه یکاهای cgs یکایی برای بار الکتریکی تعریف نشده است. با وجود این استات کولن[1] واب کولن[2] بترتیب برابر $(۱/۳) \times ۱۰^{-۹}\,C$ و $۱۰C$ به‌عنوان یکاهای بار الکتریکی بـه کار می‌روند. دستگاه یکاهای MKSC بتدریج در کلیهٔ کارهای علمی و عملی جانشین دستگاه یکاهای cgs می‌شود.

جدول ۲.۱. پیشوندها با توان ده

بزرگی	نماد	پیشوند	
$۱۰^{-۱۸}$	a	اتو	atto-
$۱۰^{-۱۵}$	f	فمتو	femto-
$۱۰^{-۱۲}$	p	پیکو	pico-
$۱۰^{-۹}$	n	نانو	nano-
$۱۰^{-۶}$	μ	میکرو	micro-
$۱۰^{-۳}$	m	میلی	mili-
$۱۰^{-۲}$	c	سانتی	centi-
$۱۰^{-۱}$	d	دسی	deci-
$۱۰^{۰} = ۱$	-	واحداصلی	-
۱۰	D	دکا	deca-
$۱۰^{۲}$	H	هکتو	hecto-
$۱۰^{۳}$	K	کیلو	kilo-
$۱۰^{۶}$	M	مگا	mega-
$۱۰^{۹}$	G	جیگا	giga-
$۱۰^{۱۲}$	T	ترا	tera-

1. statcoulomb 2. abcoulomb

در بیشتر کشورهای انگلیسی زبان، دستگاه یکاهای دیگری در کارهای عملی و فنی به کار می‌رود. در این دستگاه یکای طول برابر فوت با علامت اختصاری ft، یکای جرم برابر پوند با علامت اختصاری lb و یکای زمان همان ثانیه با علامت s است. معادل این یکاها در دستگاه متری برابراست با:

$$1\ \mathrm{ft} = 0/3048\ \mathrm{m} \qquad 1\ \mathrm{m} = 3/281\ \mathrm{ft}$$

$$1\ \mathrm{lb} = 0/4536\ \mathrm{kg} \qquad 1\ \mathrm{kg} = 2/205\ \mathrm{lb}$$

بالاخره انتظار می‌رود در آینده دستگاه یکاهای MKSC تنها دستگاه یکاهایی شود که در سراسر جهان در کارهای علمی و مهندسی و عمومی به کار رود.

جهت آسانی کاربرد، اضعاف واجزای یکاهای اصلی وفرعی بصورت توان ده‌به‌کار می‌روند و هرکدام به صورت پیشوندی جلو یکاها مطابق جدول ۱.۲ می‌آید.

۴.۲ چگالی

جرم واحد حجم هرجسمی را چگالی[1] یا جرم ویژهٔ آن جسم می‌نامند. بدین طریق چگالی جسمی به جرم m و حجم V برابر می‌شود با

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{۱.۲}$$

چگالی برحسب کیلوگرم برمترمکعب ($\mathrm{kg\,m^{-3}}$) بیان می‌شود. چگالی آب برابر است با

$$\rho = 10^3\mathrm{kg\,m^{-3}}\ (\text{یا}\ 1\mathrm{g\,cm^{-3}},\ 62/4\ \mathrm{lb\,ft^{-3}}).$$

معادلهٔ (۱.۲) که در تعریف چگالی نوشته می‌شود، تنها در مورد اجسام همگن، یعنی اجسامی که تمام قسمتهای آن دارای ساختمان و ترکیب یکسان می‌باشند به کار می‌رود. در غیراین‌صورت چگالی میانگین به دست می‌آید. برای یک جسم غیرهمگن، چگالی درنقاط مختلف یکسان نیست. برای به‌دست‌آوردن چگالی دریک نقطهٔ مورد نظر جرم dm درداخل حجم جزئی dV در اطراف نقطهٔ مذکور را اندازه می‌گیرند. با استفاده از رابطهٔ ۱.۲ به دست می‌آید

$$\rho = \frac{dm}{dV} \tag{۲.۲}$$

نظر به اینکه چگالی یک مفهوم آماری است، برای اینکه dV دارای معنای فیزیکی باشد بایدآنقدر بزرگ باشد تا تعداد زیادی مولکول را دربرگیرد.

چگالی نسبی[2] مفهوم مفید دیگری است. اگر ρ_1 و ρ_2 چگالیهای دو جسم مختلف باشند، چگالی نسبی آنها برابر است با

1. density 2. relative density

$$\rho_{۲۱} = \frac{\rho_۲}{\rho_۱} \qquad (۳.۲)$$

چگالی نسبی دارای یکا نیست زیرا یک کمیت نسبی می‌باشد، یعنی خارج قسمت دو کمیت از یک جنس است. معمولا چگالی نسبی هر جسمی را نسبت به‌آب که به عنوان مبنا اختیار شده است بیان می‌کنند. چگالی نسبی چند جسم نسبت به آب در جدول ۲.۲ آمده است. همهٔ مقادیر عددی، بجز آنهایی که مشخص شده‌اند، در شرایط استاندارد دما و فشار $(STP: ۰°C, ۱\ atm)$ به دست آمده‌اند.

جدول ۲.۲. چگالی (نسبت به‌آب)

جامد		آبگون		گاز	
آهن	۷٫۸۶	آب $(۴°C)$	۱٫۰۰۰	هوا	$۱٫۲۹۲۲ \times ۱۰^{-۳}$
یخ	۰٫۹۱۷	جیوه	۱۳٫۵۹	هیدروژن	$۸٫۹۸۸ \times ۱۰^{-۵}$
منیزیوم	۱٫۷۴	الکل اتیلیک	۰٫۷۹۱	اکسیژن	$۱٫۴۲۹۰۴ \times ۱۰^{-۳}$
آلومینوم	۲٫۷۰	بنزین	۰٫۶۷	ازت	$۱٫۲۵۰۵۵ \times ۱۰^{-۳}$
اورانیوم	۱۸٫۷	هوا$(-۱۴۷°C)$	۰٫۹۲	هلیوم	$۱٫۷۸۴۷ \times ۱۰^{-۴}$

۵.۲ زاویهٔ مسطحه

زاویهٔ مسطحه با دویکای درجه و رادیان اندازه‌گیری می‌شود. درفیزیک یکای دوم اهمیت بیشتری دارد. محیط دایره به ۳۶۰ درجه با علامت اختصاری (°) تقسیم می‌شود. به عنوان مثال زاویهٔ قائمه را بـه صورت °۹۰ می‌نویسند و می‌خوانند «نود درجه». هر درجه به ۶۰ دقیقه با علامت اختصاری (′) وهر دقیقه به ۶۰ ثانیه با علامت اختصاری (″) تقسیم می‌شود. بدین‌طریق زاویه‌ای به‌اندازهٔ بیست وسه درجه وچهل و دو دقیقه وسی وچهار ثانیه بدین‌صورت نوشته می‌شود: $۲۳°۴۲'۳۴''$.

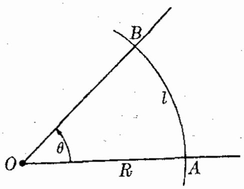
برای بیان یک زاویه برحسب رادیان، کمان AB را با شعاع اختیاری R و به مرکز O رأس زاویه، رسم می‌کنیم (شکل ۴.۲). دراین صورت اندازهٔ زاویهٔ θ برحسب رادیان، با علامت اختصاری (rad) برابر است با

$$\theta = \frac{l}{R} \qquad (۴.۲)$$

که درآن l طول کمان AB است.این روش براین پایه متکی‌است که برای یک زاویهٔ معلوم، نسبت l/R ثابت و مستقل از شعاع R است و زاویه را برحسب رادیان بیان می‌کند. توجه

داشته باشید که l و R باید برحسب یکاهای یکسان طول باشند. رابطهٔ (۴.۲) رامی‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$l = R\theta \qquad (۵.۲)$$



شکل ۴.۲

با توجه به اینکه طول محیط یک دایره برابر $۲\pi R$ است، می‌بینیم که زاویهٔ مسطحهٔ کل اطراف یک نقطه برحسب رادیان برابر است با $۲\pi R/R = ۲\pi$ rad. بنابراین ۲π رادیان معادل ۳۶۰° است:

$$۱^\circ = \frac{\pi}{۱۸۰}\,\mathrm{rad} = ۰/۰۱۷۴۵۳\ \mathrm{rad},$$

$$۱\,\mathrm{rad} = \frac{۱۸۰^\circ}{\pi} = ۵۷^\circ ۱۷' ۴۴/۹''$$

۶.۲ زاویهٔ فضایی

چنانکه شکل ۵.۲ نشان می‌دهد، زاویهٔ فضایی[1] فضای محتوی داخل یک سطح مخروطی (یا هرمی) است. اندازهٔ زاویهٔ فضایی برحسب استرادیان، باعلامت اختصاری sterad، با رسم یک سطح کروی به شعاع اختیاری R و بـه مرکز O رأس زاویه و با به کار بردن رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

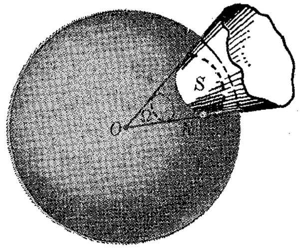
$$\Omega = \frac{S}{R^۲} \qquad (۶.۲)$$

که درآن S مساحت یک عرقچین کروی است که زاویهٔ فضایی را زیرپوشش خود می‌گیرد. چون مساحت یک کـره برابر $۴\pi R^۲$ است، در نتیجه زاویهٔ فضایی کل اطراف یک نقطه برابر ۴π می‌شود (شکل ۵.۲). زاویهٔ فضایی متشکل از سه محور متعامد OX، OY و OZ برابر $۴\pi/۸$ یا $\pi/۲$ استرادیان است (شکل۶.۲).

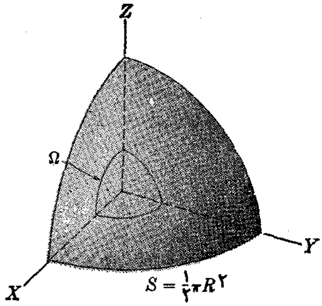
اگر زاویهٔ فضایی کوچک باشد، مساحت S برابر dS می‌شود. دراین صورت dS دیگر لزوماً یک سطح عرقچین کروی نیست، بلکه ممکن است آن را یک سطح تخت عمود بر OP در نظرگرفت به طوری که

$$d\Omega = \frac{dS}{R^۲} \qquad (۷.۲)$$

1. solid angle



شکل ۵.۲. زاویهٔ فضایی

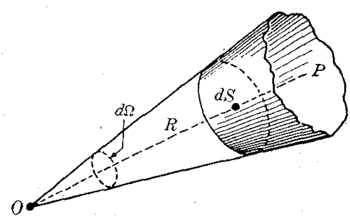


شکل ۶.۲

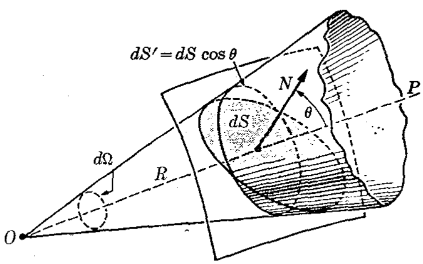
در بعضی حالات سطح dS بر OP عمود نیست، بلکه عمود بر این سطح با OP زاویهٔ θ می‌سازد (شکل ۸.۲). دراین صورت لازم است dS را روی صفحه‌ای عمود بر OP تصویر کنیم، بدین طریق به دست می‌آید $dS' = dS\cos\theta$ و بالاخره

$$d\Omega = \frac{dS\cos\theta}{R^2} \qquad (۸.۲)$$

این رابطه در بحثهای بعد بسیار مورد استفاده قرار خواهد گرفت.



شکل ۷.۲



شکل ۸.۲

۷.۲ دقت و درستی

معمولا کلمهٔ دقت[1] مضمون درستی[2] را در خود دارد. اما در دنیای سنجش منظور از دقت، میزان نادرستی است. بدین معنی که وقتی یک خاصیت فیزیکی به وسیلهٔ یک کمیت عددی و با یکایی بیان می‌شود، این کمیت عددی به بعضی سازه‌های مختلف، مانند اسباب سنجش خاص، نوع و تعداد سنجشهای انجام یافته و روشی که آزمایشگر برای خواندن زینه‌های روی اسباب به کار می‌برد، بستگی دارد. در این صورت هرگاه همراه کمیت عددی خوانده

1. precision 2. accuracy

شده، کمیت عددی دیگری که دقت اندازه گیری را می‌رساند نباشد، عدد به دست آمده به همان اندازه خوب است که بی‌مصرف. احتمال دارد عددی کاملا درست باشد ولی دقیق نباشد، زیرا شخصی که این عدد را یادداشت کرده فراموش کرده باشد حداقل اشاره‌ای به روش اندازه گیری خود کند.

برای روشن کردن مطالب فوق چند مثال می‌آوریم. هرگاه سبدی را که محتوی هفت سیب است ببینیم و بگوییم «هفت سیب در داخل سبد می بینیم» بدین طریق ارزش عددی کمیت تأیید می‌شود. این شمارش از دقت و درستی برخوردار است. زیرا تعداد سیبهای شمرده شده کم و عدد درستی است. هرگاه دو نفر باشند، یکی ازآنها به تأنی سیبها را در سبد قرار دهد و نفر دیگر به تأنی سیبها را از داخل سبد بیرون بیاورد، دراین صورت، در هرلحظه می‌توان ارزیابی درست و دقیق از سیبها به دست داد.

اکنون مسئله را کمی پیچیده‌تر می‌کنیم. تعداد سکنهٔ روستایی را در نظر می‌گیریم. در اینجا تعداد بیشتر است ولی باز هم چندان زیاد نیست و قطعاً عدد صحیح است. ناظری که در تنها کوچهٔ این روستا جای گرفته است، با زیرنظر گرفتن رفت و آمد مردم پس از یک سرشماری می‌تواند ارزیابی درستی از سکنهٔ روستا بکند، ولی مقدار عددی الزاماً دقیق نیست زیرا برای این ناظرخیلی دشوار است لحظات تولدومرگ اهالی را روشن‌کند. هرگاه این کار ازسطح روستا به‌بخش یا شهرستان کشیده شود، وظیفهٔ ناظر خیلی دشوارترمی‌شود.

حال سؤال می‌کنیم: چه نیازی به شمارش درست سکنهٔ یک بخش وجود دارد؟ در واقع برای تأمین بعضی خدمات برای تمام سکنه، نیازی به دانستن تعداددرست سکنه درهر لحظه نیست. بایدگفت ارزیابی درست تعدادساکنین منطقه‌امری است ضروری، ولی دقت این ارزیابی به‌نوع خدمت ویژهٔ موردنظربستگی دارد. مثلانوع دقت‌عددی درسرشماری، به‌منظور تأسیس مدارس جدید دریک ناحیه با نوع دقت لازم برای ایجاد مرکزآتش نشانی درهمین ناحیه یکسان نیست. هرگاه جمعیت بخشی با دقت ۱٪ داده شود بدین معنی است که عدد داده شده ممکن است یک درصد بیشتر و یا یک درصد کمتر از جمعیت حقیقی آن بخش باشد، ولی نمی‌دانیم که کدام یک از این دو است، و در خیلی از موارد اهمیت چندانی ندارد. دریک ده با ۲۰۰ نفرسکنه دقت ۱٪، بدین‌معنی است‌که تعداد سکنه را با دونفرکمتر و یا دونفر بیشتر می‌دانیم. در یک شهر ۱۰۰ ۰۰۰ نفری، دقت درحدود ۱۰۰۰ نفر است. اگر تعداد جمعیت ایران را با دقت ۱٪ بدانیم، این رقم از حدود ۳۵۰۰۰۰ نفر تجاوزمی‌کند و ما جمعیت ایران را بدرستی نمی‌دانیم. بدیهی است در بعضی شرایط دقت بالاتر از ۱٪ مورد نیاز است. درصورتی که درموارد دیگر، دقت کمتر ازآن نیز کاملا کفایت می‌کند.

تاکنون کوشش ما منحصر به خود عملیات شمارش بود و فرض را براین نهادیم که با داشتن اطلاعاتی کافی و امکان بررسی سریع این اطلاعات می‌توان جمعیت درست را به دست آورد. و نیز گفته شد که آیا لازم است این جمعیت بدقت شناخته شود یا نه. اکنون باید توجه داشته باشیم که عملیاتی وجود دارد که به عدد درستی از یکاها منتهی نمی‌شود. به عنوان مثال می‌دانیم که هر نقطه از یک اتاق، دارای دمای درستی است. ولی مقدار این دما بستگی به تعریف‌آن دارد، زیرا دمامفهومی است بشری. بااین همه ما دما راازطریق شمارش

نمی‌سنجیم بلکه طول ستون جیوه را اندازه می‌گیریم، ستونی که طول آن نمایشگر دماست. به دلایل گوناگون، طول ستون جیوه که ازخواندنهای مختلف به دست می‌آید، یکی نیست هرچند که دما ثابت مانده باشد. یکی از مهمترین دلایل گوناگونی نتیجهٔ خواندنها، آن است که فاصلهٔ بین زینه‌های خط‌کش محدود است. مثلا روی متر اندازه‌گیری فاصلهٔ بین دو زینه یک میلی متر (mm) است. بنابراین اگر طولی را با این متر خیلی دقیق اندازه بگیریم، عدد خوانده شده درهر طرف (یا انتهای طول) دارای خطایی است که می‌تواند تا ۵ر۰ mm برسد. گونه های دیگر خطا در خواندن وجود دارند که در کتابهای تخصصی مربوط به‌اندازه‌گیریها یافت می‌شوند. (به‌مراجع متون و مقاله های ذکر شده در آخر فصل مراجعه کنید.)

دقت یا میزان نادرستی یک عدد به ما اجازه می‌دهد ارقام با معنی[1] عدد مربوط به کمیت موردنظر را تعیین کنیم. به‌عنوان مثال، هرگاه سنجشی باعدد (۱٪ $\pm$ ۶۴۲ر۵۴۳۸۹) نشان داده شود، بدین معنی است که دقت خواندن روی آن در حدود ۴ر۶ است. دراین صورت باید تنها ارقامی را نگه داشت که حقیقتاً با معنی هستند. در مثال بالا، عدد باید با ۱٪ $\pm$ ۶۴۲ یا ۶ $\pm$ ۶۴۲ نشان داده شود. دراین کتاب به‌برخی خواص فیزیکی (مانند سرعت نور یاعدد آووگادرو[2]) برخورد می‌کنیم که پنج رقم با معنی اول آن نوشته شده‌اند، حتی اگر مقدار آنها بادقتهای بیشتر از آن هم معلوم باشد، و دقت نیز مشخص نشده است. اگر دانشجو بخواهد ازاین اعداد درمحاسبهٔ نادرستی استفاده کند، می‌تواند برای آخرین رقم بامعنی دقتی درحدود ۱ $\pm$ درنظر بگیرد.

هنگامی‌که لازم می‌آید با استفاده از اعدادی با دقتهای متفاوت یک رشته عملیات ریاضی انجام داده شود، آسانترین روش این است که عملیات ضرب یا هر عمل دیگری را، بدون‌توجه به‌ارقام بامعنی تا انتها انجام دهیم. تعداد ارقام بامعنی (یعنی دقت) نتیجهٔ نهایی برابر خواهد بود با تعداد ارقام با معنی عددی که کمترین دقت را داشته است.

۸.۲ سنجش در آزمایشگاه

به کمک یک مثال نسبتاً ساده، یعنی دورهٔ آونگ، روشهایی را که برای به دست آوردن مقدارعددی مربوط به‌یک خاصیت فیزیکی به‌کارمی‌روند، تشریح می‌کنیم. دورهٔ یک آونگ مدت زمانی است که طول می‌کشد تا آونگ دو بار به‌طور متوالی و در یک جهت از یک نقطهٔ معین بگذرد. آونگی را به نوسان درآورده و دورهٔ یک نوسان آن را ۵۰ بار اندازه گرفته‌ایم. جدول ۳.۲، این ۵۰ اندازه‌گیری را برحسب ثانیه نشان می‌دهد.

از جدول پیدا است که دورهٔ معینی برای آونگ وجود ندارد. کاری که ممکن‌است انجام داد این است که میانگین این ۵۰ بار اندازه‌گیری را محاسبه وسپس دقت روی این مقدار میانگین را تعیین کنیم. با جمع کردن هر ۵۰ عددی که برای دورهٔ به دست آمده و تقسیم آن برتعداد کل اندازه‌گیریها (یعنی عدد ۵۰) دورهٔ میانگین آونگ برابر ۲۴۸ر۳ ثانیه به‌دست می‌آید. (توجه داشته باشید که فعلا نتیجه را به‌صورتی که هست نگه می‌داریم،

---
1. significant figures   2. Avogadro's number

ولی بموقع آن‌را تصحیح خواهیم‌کرد.) بین مقدار میانگین به‌دست‌آمده وهریک ازاندازه-

جدول ۳.۲.

۳ر۳۲	۳ر۳۲	۳ر۲۵	۳ر۱۸	۳ر۱۲
۳ر۲۷	۳ر۴۲	۳ر۳۰	۳ر۳۳	۳ر۶۲
۳ر۲۰	۳ر۱۲	۳ر۱۵	۳ر۲۸	۳ر۳۳
۲ر۹۸	۳ر۱۸	۳ر۲۰	۳ر۱۸	۳ر۱۷
۳ر۳۸	۳ر۳۳	۳ر۳۵	۳ر۵۲	۳ر۱۷
۳ر۰۸	۳ر۳۲	۳ر۰۰	۳ر۰۲	۳ر۵۸
۳ر۳۸	۳ر۱۵	۳ر۶۳	۳ر۳۵	۳ر۲۷
۳ر۲۷	۲ر۹۰	۳ر۲۷	۳ر۱۵	۳ر۰۰
۳ر۳۷	۳ر۲۸	۳ر۲۸	۳ر۱۸	۲ر۹۷
۳ر۲۰	۳ر۲۷	۳ر۱۸	۳ر۴۵	۳ر۱۸

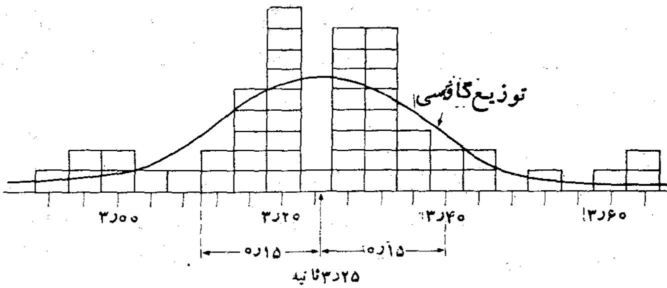
گیریها اختلافی وجود دارد. این اختلاف بین مقدار میانگین ومقدار هـر سنجش، انحراف[1] را نشان می‌دهد. مجموع مقادیر مطلق انحرافها تقسیم بردفعات اندازه‌گیری انحراف میانگین را به‌دست می‌دهد، که نمایشی از دقت اندازه‌گیری است. در مثال فـوق، انحـراف میانگین دوره ۱۲ر۰ ثانیه است. بنابراین بـرای نشان دادن دورهٔ آونگ آن‌طور کـه درآزمایشگاه به‌دست آمده باید نوشت ۱۲ر۰ $\pm$ ۲۵ر۳ ثانیه یا (تقریباً) ۴٪ $\pm$ ۲۵ر۳ ثانیه.

شیوهٔ دیگر بیان دقت یک سنجش استفاده از انحراف ریشهٔ مربعی میانگین[2] (rms) است‌که عبارت است از ریشهٔ دوم مجموع مربعات انحرافها تقسیم برتعداد سنجشها. درمورد انـدازه گیریهـای دورهٔ آونگ، انحراف rms برابر است با ۱۵ر۰ ثـانیه. ارزش آن را دارد که برای محاسبهٔ rms کمی زحمت اضافی تحمل شود، زیرا می‌توان به‌آن معنای نسبتاً ساده‌ای مربوط ساخت. اگر فرض کنیم کترگی[3] ظاهرشده در رشتهٔ سنجشها، بنیادی نبـوده، بلکه تنها ناشی از افت وخیزهای بهنجار[4] باشند، انحراف rms نشان می‌دهـد کـه تقـریباً ۲/۳ کل سنجشها در حـدود مقدار متوسط می‌باشند: به‌گفتهٔ دیگر، اکنون اطمینان داریم کـه اگر یکبار دیگـر بخواهیم دورهٔ این آونگ را با همان وسیلهٔ اولی انـدازه بگیریـم ۶۷٪ شانس وجود دارد که کمیت عددی نمایشگـر دوره از ۴۰ر۳ ثـانیه بزرگتر نبوده و نیز از ۱۰ر۳ ثانیه‌کوچکتر نباشد. برای نشان‌دادن این‌وضع، باشیوهٔ‌مختصرمتفاوتی چنین‌عمل‌می‌کنیم: روی شکل ۹.۲ نمودار ستونی تـوزیع بسامدهـای خوانـده شده ترسیم شده است. روی

---

1. deviation 2. root-mean-square deviation 3. randomness
4. normal flactuation

دفعاتی که یک خواندن و یا عدد نزدیک بـه آن تکـرار می‌شود، کترگی واضحی به‌چشم می‌خورد. ولی با افزایش دفعات سنجش و خواندن، بتدریج نقش مشخصی شروع به شکل گرفتن می‌کند و نشان می‌دهد کـه هرچه اختلاف مقدار خوانده شده با مقدار میانگین بیشتر باشد، احتمال خواندن مجدد آن کمتراست. ازاین ترسیم منحنی معروف زنگ حاصل می‌شود. تجزیه وتحلیل این منحنی نشان می‌دهدکه بتدریج که به تعداد دفعات خواندن افزوده می‌شود انحنای منحنی با وضوح بیشتری نمایان می‌شود و شکل هندسی مشخصی به‌خود می‌گیرد که آن‌را توزیع گاؤسی یا بهنجار[1] می‌نامند.



شکل ۹.۲. نمودار ستونـی تعداد سنجشهای دورهٔ یک آونگ، مطابق جـدول ۳.۲ فاصلهٔ بین دونشانه روی محورزمان ۰ر۰۴ ثانیه می‌باشد. توزیع گاؤسی‌مربوط به‌سنجش ها با خط پر رسم شده است.

فهرست منابع

1. «Symbols, Units, and Nomenclature in Physics,» *Physics Today*, June 1962, Page 20.
2. «Mathematics in the Modern World,» R. Courant, *Scientific American*, September 1964, page 40.
3. «Mathematics in the Physical Sciences,» F. Dyson, *Scientific American*, September 1964, page 128.
4. «Probability » M. Kac, *Scientific American*, September 1964, page 92.
5. «The Limits of Measurement,» R. Furth, *Scientific American*, July 1950, page48.
6. *A Brief History of Weights and Measures Standards of the United States*. Washington, D. C.: Government Printing Office. 1963.
7. *Experimentation: An Introduction to Measurement Theory and Experiment Design*, by D. Baird. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1962.
8. *Experimentation and Measurement*, by W. Youden. New York: Scholastic Book Services, Scholastic Magazines, Inc., 1962.
9. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, by R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Ghapters 5 and 6.

1. Gaussian (normal) distribution

مسئله ها

۱.۲. جرمهای اتمی داده‌شده درجدول‌پ.۱ برحسب یکای جرم‌اتمی[1]، باعلامت اختصاری amu نوشته شده‌اند. یک amu برابر است با $۱٫۶۶۰۴ \times ۱۰^{-۲۷}$kg. جرم (الف) یک اتم هیدروژن و (ب) یک اتم اکسیژن را برحسب کیلوگرم و گرم بنویسید.

۲.۲. یک مولکول آب از یک اتم اکسیژن و دو اتم هیدروژن تشکیل شده است. در یک گرم، در ۱۸ گرم و در یک سانتی‌متر مکعب آب چند مولکول وجود دارد؟

۳.۲. در بخش ۳.۲ گفتیم که یک کیلوگرم را می‌توان برابر با جرم $۵٫۰۱۸۸ \times ۱۰^{۲۵}$ اتم ایزوتوپ کربن ۱۲ (^{۱۲}C) تعریف کرد. جرم ^{۱۲}C درست برابر amu ۱۲٫۰۰۰۰ تعیین شده است. تحقیق کنید که این تعریف با مقدار داده شده برای amu در مسئلهٔ ۱.۲ سازگار است.

۴.۲. فرض کنید مولکولهای هیدروژن، اکسیژن و ازت، هرکدام از دو اتم یکسان تشکیل شده‌اند. تعداد مولکولهای هر یک از این گازها را در یک متر مکعب [درشرایط متعارفی دما وفشار (STP)] حساب‌کنید. برای محاسبه از چگالیهای نسبی داده شده در جدول ۲.۲ استفاده کنید. همین محاسبه را درمورد سایر گازها نیز انجام دهید. از این پاسخها چه نتیجهٔ کلی می‌توان گرفت؟

۵.۲. فرض‌کنید هوا از ۲۰٪ اکسیژن و ۸۰٪ ازت تشکیل شده است وهر یک از این گاز-ها دارای یک مولکول دو اتمی می‌باشند، جرم مولکولی «موثر» هوا را حساب کنید. تعداد مولکولها در یک cm^{۳} را (در STP) برآورد کنید. چند مولکول اکسیژن و چند مولکول ازت دراین حجم وجود دارد؟

۶.۲. چگالی گاز بین ستارگان درکهکشان ما درحدود $۱۰^{-۲۱}$kgm$^{-۳}$ برآورد شده‌است. به‌فرض اینکه این گاز منحصراً هیدروژن باشد، تعداد اتمهای هیدروژن در یک سانتی متر مکعب را برآورد کنید. نتیجه را با نتیجه‌ای که برای هوا (مسئلهٔ ۵.۲) به دست آمد، مقایسه کنید.

۷.۲. شعاع یک لیوان محتوی آب ۲ cm است. درطول ۲ ساعت، براثر تبخیر، ۱ mm ارتفاع آب پایین می‌رود. سرعت تبخیر آب را برحسب گرم بر ساعت برآورد کنید. چند مولکول آب در هر ثانیه از هر cm^{۲} سطح آب تبخیر می‌گردد؟ (به خواننده توصیه‌می‌کنیم شخصاً این آزمایش را انجام دهد و نتایج به دست در روز های مختلف را یادداشت کند. چرا نتیجه‌های به‌دست آمده در روزهای مختلف باهم فرق دارند؟)

۸.۲. یک مول[2] از هر ماده‌ای عبارت است از مقداری از آن ماده، برحسب گرم، که به‌طور عددی برابر جرم مولکولی همان ماده است که برحسب amu بیان شده باشد. (در مورد یک عنصر شیمیایی ونه یک جسم مرکب، جرم اتمی را به‌کار می برند). تحقیق کنید که تعدادمولکولها (یااتمها) دریک مول‌از هرماده‌ای باهم برابر ومساوی $۶٫۰۲۲۵ \times ۱۰^{۲۳}$

1. atomic mass unit 2. mole

است. این عدد را عدد آووگادرو می‌نامند که یکی از ثابتهای مهم فیزیک می‌باشد.

۹.۲ با استفاده از جدولهای پ.۱ و ۲.۲، فاصلهٔ میانگین بین مولکولها را در هیدروژن در STP (گاز)، در آب (آبگون) و در آهن (جامد) به دست آورید.

۱۰.۲ عملا تمام جرم یک اتم در هستهٔ آن است. شعاع هستهٔ اورانیوم برابر $8{,}68 \times 10^{-15}\mathrm{m}$ است. با به‌کار بردن جرم اتمی اورانیوم داده شده در جدول پ.۱، چگالی «مادهٔ هسته‌ای» را به دست آورید. این هسته شامل ۲۳۸ ذره یا «هستک»[1] می‌باشد. فاصلهٔ میانگین بین این هستکها را برآورد کنید.

۱۱.۲ با استفاده از جدول ۱.۱۳، چگالی میانگین زمین و خورشید را به‌دست آورید. اگر این مقادیر با مقادیر داده شده در جدول ۲.۲ مقایسه شوند، چه نتیجه‌ای راجع به ساختار این اجسام به دست می‌آید؟

۱۲.۲ با استفاده از اطلاعات داده شده در بخش ۳.۱، چگالی میانگین جهان را به‌دست آورید. به‌فرض اینکه توزیع اتمها درتمام جهان یکنواخت باشد، چند اتم دریک سانتی‌متر مکعب وجود خواهد داشت؟ همه اتمها را اتم هیدروژن فرض کنید.

۱۳.۲ سرعت نور در خلأ برابر است با $2{,}9979 \times 10^{8}\mathrm{m\,s^{-1}}$. آن را برحسب کیلومتر برساعت ($\mathrm{km\,hr^{-1}}$) بنویسید. یک پرتو نور چند بار دریک ثانیه دور زمین می‌چرخد؟ (برای داده‌های مورد نیاز دربارهٔ زمین به جدول ۱.۱۳ مراجعه کنید). نور در خلأ در مدت یک سال چه فاصله‌ای را می‌پیماید؟ این فاصله را یک سال نوری می‌نامند.

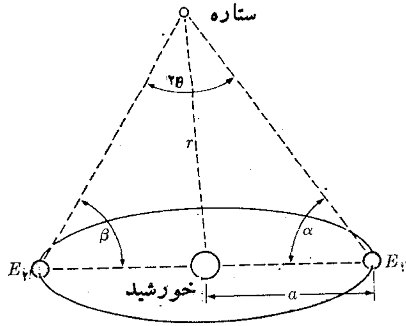
۱۴.۲ شعاع حرکت انتقالی زمین دور خورشید $1{,}49 \times 10^{11}\mathrm{m}$ است. این طول را یک واحد نجومی می‌نامند. یک سال نوری را برحسب واحد نجومی بنویسید (به مسئلهٔ ۱۳.۲ مراجعه کنید.)

۱۵.۲ اختلاف در راستای ظاهری دید یک شیئ ناشی از جابجایی مکان ناظر، اختلاف منظر[2] نامیده می‌شود (مدادی را جلو خود بگیرید؛ ابتدا چشم راست وسپس چشم چپ خود را ببندید و مداد را در دو حالت تماشا کنید. متوجه خواهیدشد که هربار خط منظر یا جای مداد تغییر می‌کند). اختلاف منظر ستاره‌ای تغییر مکان ظاهری یک ستاره است‌که از حرکت انتقالی زمین دور خورشید ناشی می‌شود. اختلاف منظر به‌طور کمی برابر است با نصف زاویهٔ حاصل از دو خط منظر یک ستاره از دوسر قطر مدار انتقالی زمین E_2 و E_1، که برخط واصل ستاره و خورشید عمود است (شکل ۱۰.۲)؛ $\theta = (180 - \alpha - \beta)/2$. زاویه های α و β در دو وضع E_1 و E_2 اندازه گیری می‌شوند. فاصلهٔ زمانی E_1 و E_2 ۶ ماه است. r فاصلهٔ ستاره از خورشید، از رابطهٔ $a = r\theta$ به‌دست می‌آید. دراین رابطه a شعاع میانگین مدار زمین به دور خورشید و θ برحسب رادیان می‌باشد. آلفا‐قنطورس[3] ستاره‌ای است با بزرگترین اختلاف منظر (یعنی نزدیکترین ستاره) به‌اندازهٔ $0{,}76''$. فاصلهٔ این ستاره را از خورشید برحسب متر، سال نوری و واحد نجومی به‌دست آورید.

۱۶.۲ یک پارسک[4] فاصلهٔ یک ستاره ازخورشید است هرگاه اختلاف‌منظر آن $1''$ باشد.

---

1. nucleon   2. parallax   3. α-Centauri   4. parsec



شکل ۱۰.۲

یک پارسک را برحسب متر، سال نوری وواحد نجومی بنویسید. فاصله برحسب پارسک را به‌صورت تابعی از اختلاف منظر برحسب ثانیهٔ کمانی بنویسید.

۱۷.۲. فاصلهٔ سانفرانسیسکو از نیویورک در امتداد بزرگترین دایره‌ای که از این دو شهر می‌گذرد (نصف‌النهار)، ۴۱۳۷ کیلومتر می‌باشد. زاویه‌ای را که قایمهای این دو محل بـا یکدیگر می‌سازند حساب کنید.

۱۸.۲. با استفاده شرح‌زیرشکل ۶.۱، قطرظاهری‌سحابی بزرگ M-۳۱ را، به‌هنگام‌مشاهده از روی زمین، تعیین کنید. آن‌را برحسب رادیان و درجـهٔ کمانـی بنویسید. همچنین زاویهٔ فضایی را که تحت‌آن سحابی دیده می‌شود به دست آورید.

۱۹.۲. با مراجعه به‌جدول توابع مثلثاتی پیوست کتاب، زاویه‌ای را پیداکنید کـه اختلاف بین سینوس و تانژانت آن برابر باشد با (الف) ۱۰٪، (ب) ۱٪ و (ج) ۰٫۱٪. همین‌کار را در مورد ($\sin\theta$ و θ) وهمچنین ($\mathrm{tg}\theta$ و θ) انجام دهید. بدیهی است θ برحسب‌رادیان بیان می‌گردد. چه نتیجه‌ای از این پاسخها می‌توان گرفت؟

۲۰.۲. سه عـدد ۴۹۲۳۸٫۴۲، $۶٫۳۸۲ \times ۱۰^{۴}$ و ۸۶٫۵۴۵ داده شده‌انـد. (الف) آنها را باهم جمع کنید. (ب) هـرسه را درهم ضرب کنید. (ج) دوعـدد اولـی را باهم جمع ودر عدد سومی ضرب کنید. (د) دوعدد آخری را درهم ضرب کنید وحاصل‌ضرب را برعدد اولی تقسیم کنید. تمام پاسخها را با اعداد مناسب با ارقام با معنی بنویسید.

۲۱.۲. از داده‌هـای جـدول ۳.۲ استفاده کرده درستی مقدار میانگین، انحراف میانگین و انحراف ریشهٔ میانگین مربعی (rms) محاسبه شده را تحقیق کنید. نتیجه را با چند رقم با معنی باید نوشت؟

۲۲.۲. جدول زیر شامل یک رشته از ده‌بار خواندن یک خاصیت فیزیکی است (به‌عنوان مثال کلفتی یک تکه کاغذ یا وزن یک پاره سنگ وغیره):

۱۱۶	۱۲۵	۱۰۸	۱۱۱	۱۱۳
۱۱۳	۱۲۴	۱۱۱	۱۳۶	۱۱۱

(الف) مقدار میانگین این عددها را به‌دست آوریـد. انحراف میانگین و انحراف rms

را تعیین کنید. (ب) نظر خودتان را در مــورد حذف یـا نگهداری قرائت ۱۳۶ بیان کنید. (اگـر آن را حذف‌کنیم، مقدار میانگین نه قرائت مانده برابر ۱۱۴٫۷ و انحراف‌استاندارد rms برابر ۵٫۶ می‌گردد.)

۲۳.۲. یک گوی کوچک یا یک مداد بردارید و بگذارید روی یک کتاب‌که به‌طورمایل نگهداری می‌شود به‌سمت پایین بغلتد. زمان لازم برای پایین آمدن گوی یا مداد از نقطه‌ای که رها می‌شود تا آنجایی کـه به‌سطح میز می‌خورد یادداشت کنید. ایـن آزمایش را ده بار (یا بیشتر) تکرار کنید. مقدار میانگین زمـان غلتیدن و دقت آن را بـرحسب انحراف rms تعیین کنید. اگر ساعت ثانیه شمار ندارید، از ضربان نبض خود می‌توانید بــه عنوان مقیاس زمان استفاده کنید.

۲۴.۲. یک سرشماری از کلاس خود به عمل آورید. قد و وزن هر دانشجو را تعیین کنید. دانشجویان دختر (یا پسری) که اختلاف سن آنها از سه سال بیشتر نباشد انتخاب کنید. قـد و وزن میانگین و انحراف rms را حساب کنید. توجه داشته باشید که در اینجا نمی‌توانید از دقت به‌گونه‌ای که در اندازه‌گیریهای پیش حرف زدید گفتگو کنید. چرا؟

۳

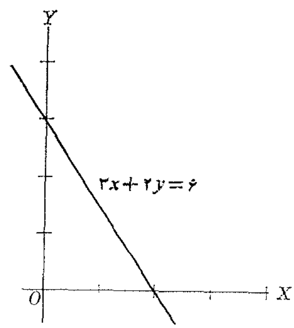
بردارها

۱.۳ مقدمه

این فصل، معرفی یا مروری است برمفاهیم اساسی جبر برداری[1]، یکی از شاخه‌های ریاضیات که برای دانشمندان فیزیک بسیار اهمیت دارد. جبر برداری از این جهت مهم است که آشنایی با آن دانشمند را توانا می‌سازد تا رابطه‌های بسیار پیچیده را با نماد[2]های خیلی ساده به صورت مختصر و کوتاه ولی دقیق و جامع بنویسد. برای مثال، در جبر مقدماتی، معادلهٔ

$$۳x + ۲y = ۶$$

نماد اختصاری تمام جفت مقدارهای ممکن x و y است که در این رابطه صدق می‌کنند. این رابطه را می‌توان به شکل دیگری نیز نمایش داد؛ یعنی، همچنانکه شکل ۱.۳ نشان می‌دهد، به کمک نمودار هندسی این معادله. هردوی این مثالها برای دانشجویی که جبر و هندسهٔ تحلیلی خوانده باشد قابل فهم است، زیرا دراین مثالها ازنمادهای اختصاری به کار رفته درعلوم مذکور استفاده شده است. به همین ترتیب وقتی این نمادهای اختصاری را فهمیده باشیم، جبر برداری مستقیماً وبراحتی قابل فهم خواهد بود.



شکل ۱.۳

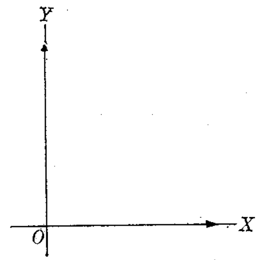
درپایان این فصل، درمی‌یابیم که نمادگذاری برداری بی‌شباهت به نمادگذاری به‌کار رفته درجبر وهندسهٔ تحلیلی نیست. اختلاف اساسی تنها درتوجیه آنهاست. مطالعهٔ عمیق این فصل همراه با حل دقیق تمرینهای مربوط، مشکلات زیادی را مرتفع وفهم فصلهای بعدی را آسانتر خواهد ساخت.

۲.۳ مفهوم راستا و سو

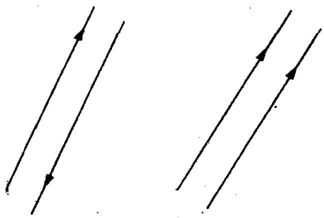
اگر یک خط راست داشته باشیم، می‌توانیم آن را در دوسوی مخالف بپیماییم. تمایز بین این دوجهت را با علامتهای باضافه و منها مشخص می‌کنند. با گزینش یک سوی مثبت، گوییم خط جهت‌دار شده است و آن را یک محور[3] می‌نامیم. محورهای مختصات x و y

1. vector algebra 2. notation 3. axis

خطهای جهت‌داری هستند که روی آنها، چنانکه شکل ۲.۳ نشان می‌دهد، جهتی به عنوان سوی مثبت انتخاب شده است. معمولاً سوی مثبت را با یک پیکان نشان می‌دهند. یک خط جهت‌دار یا محور، راستایی را مشخص می‌کند. خطهای موازی همسو، راستاهای همانند (شکل ۳.۳ الف)، ولی خطهای موازی درسوهای مخالف راستاهای متقابل را تعیین می‌کنند (شکل ۳.۳ ب).

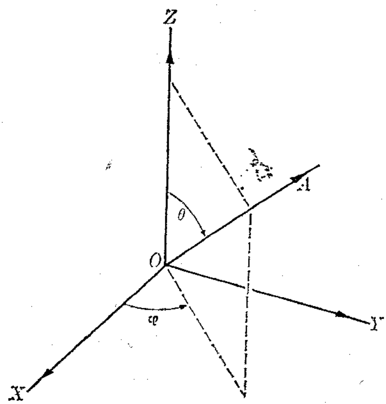


شکل ۲.۳. محورهای مختصات جهت‌دار

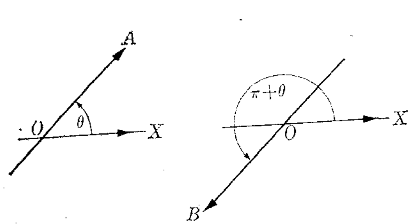


شکل ۳.۳. راستاهای موازی همسو وناهمسو

راستا دریک صفحه با زاویه تعیین می‌شود وآن زاویهٔ بین یک راستا یا محور مرجع و راستایی است که می‌خواهیم آن را نشان دهیم. این زاویه درسوی پادساعتگرد[1] اندازه‌گیری می‌شود (شکل ۴.۳). دو راستا با سوهای مخالف با زاویه‌های θ و $\pi + \theta$ (یا $\theta + 180^\circ$) مشخص می‌شوند.



شکل ۵.۳. برای تعیین یك راستا در فضا دوزاویه لازم است.



شکل ۴.۳. دریك صفحه، راستاهای مخالف با زاویه‌های θ و $\pi + \theta$ مشخص‌می‌شوند.

درفضای سه بعدی، برای تعیین یک راستا دو زاویه لازم است. نمایشی که بیشتر

1. counter - clockwise

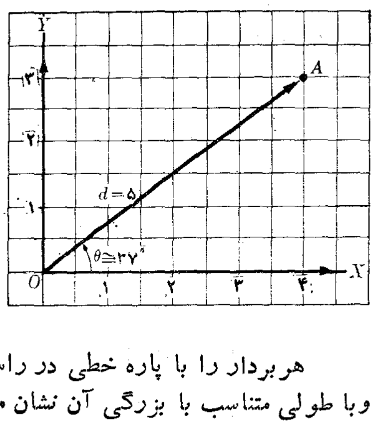
به‌کار می‌رود درشکل ۵.۳ آمده است. راستای OA با زاویه‌های زیر مشخص می‌شود:
۱) زاویهٔ θ (کمتر از ۱۸۰°) که با محور OZ می‌سازد.
۲) زاویهٔ φ بین صفحهٔ AOZ و صفحهٔ XOZ که درسوی پادساعتگرد اندازه گیری می‌شود.

راستاهای مخالف درفضای سه بعدی توسط زاویه‌های $\pi - \theta$ و $\pi + \varphi$ تعیین می‌شوند. تحقیق این مطلب را برعهدهٔ دانشجو می‌گذاریم.

۳.۳ اسکالرها وبردارها

بیشتر کمیتهای فیزیکی، با بیان اندازهٔ آنها برحسب یکای مناسب، کاملاً مشخص می‌شوند. چنین کمیتهایی را کمیتهای اسکالر می‌نامند. به عنوان مثال، برای مشخص کردن حجم یک جسم، تنها گفتن اینکه جسم چند متر مکعب یا فوت مکعب فضا را اشغال می‌کند کافی است. برای دانستن یک دما، کافی است درجهٔ دماسنجی که به طور مناسب قرار گرفته است خوانده شود. جرم، زمان، بار الکتریکی وانرژی نیز جزو کمیتهای اسکالر هستند.

سایر کمیتهای فیزیکی که برای مشخص کردن کامل آنها به غیر از اندازه، تعیین راستا نیز لازم است کمیتهای برداری نام دارند. جابجایی نمونهٔ روشنی ازکمیتهای برداری است. جابجایی یک جسم فاصلهٔ مؤثری است که در راستای معین پیموده می‌شود. به عنوان مثال، هرگاه ذره‌ای از O به A برود (شکل ۶.۳) جابجایی با فاصلهٔ $d = ۵$ و زاویهٔ $\theta \cong ۳۷^\circ$ معین می‌شود. سرعت نیز یک کمیت برداری است، زیرا حرکت با میزان جابجایی و راستای آن تعیین می‌شود. به همانگونه، نیرو وشتاب نیز کمیتهای برداری هستند. بتدریج درفصلهای آینده به سایر کمیتهای برداری برخورد خواهیم کرد.



شکل ۶.۳. جابجایی یک کمیت برداری است.

هربردار را با پاره خطی در راستا وسوی آن بردار (که با پیکانی مشخص می‌شود) وبا طولی متناسب با بزرگی آن نشان می‌دهند. درنوشتن، بردارها را با حروف سیاه مانند $\mathbf{V}$ یا با حروفی که روی آنها علامت پیکان است مانند $\vec{V}$ نشان می‌دهند که درآن V بزرگی بردار است. (دربعضی موارد، بزرگی بردار را با $|\mathbf{V}|$ نیز نشان می‌دهند.) برداری که

اندازه با بزرگی آن برابر یک باشد بردار یکا[1] نام دارد. هر برداری مانند $\mathbf{V}$ موازی با بردار یکای $\mathbf{u}$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{V} = \mathbf{u}V. \qquad (۱.۳)$$

منفی یک بردار، برداری است با همان بزرگی و همان راستا ولی درسوی مخالف. اگردو بردار $\mathbf{V}$ و $\mathbf{V}'$ موازی باشند، می‌توان نوشت

$$\mathbf{V} = \mathbf{u}V \quad و \quad \mathbf{V}' = \mathbf{u}V'$$

که $\mathbf{u}$ بردار یکا برای هردو بردار است. همچنین اگر $\lambda = V/V'$ باشد می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V}'.$$

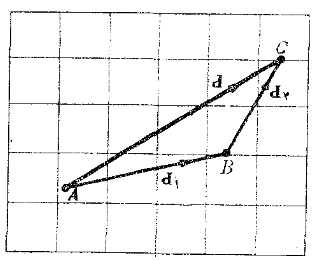
برعکس، اگر رابطهٔ فوق برای دو بردار صادق باشد آن دو بردار موازی هستند.

۴.۳ جمع بردارها

برای درک قاعدهٔ جمع بردارها ابتدا بردارهای جابجایی را درنظر می‌گیریم. اگر ذره‌ای ابتدا از نقطهٔ A تا نقطهٔ B (شکل ۷.۳) حرکت کند، جابجایی آن را می‌توان با بردار $\mathbf{d}_1$ نشان داد. بعد اگر همین ذره از B به نقطهٔ C برود، یعنی به اندازهٔ $\mathbf{d}_2$ جابجا شود، نتیجهٔ حرکت معادل یک جابجایی تنها از نقطهٔ A به نقطهٔ C یعنی $\mathbf{d}$ است که به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2$$

این رابطه برداری را نباید با رابطهٔ $d = d_1 + d_2$ که تنها نمایانگر یک مقدار است، اشتباه کرد. می‌توان این روش را برای هرکمیت برداری دیگر تعمیم داد. بنابراین گوییم $\mathbf{V}$ مجموع $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{V}_2$ است، اگر به گونه‌ای که در شکل ۸.۳ نشان داده شده است، به‌دست آید.



شکل ۷.۳. جمع برداری دوجابجایی

ازشکل ۸.۳ پیداست که جمع بردارها خاصیت جابجایی[2] دارد، یعنی اگر ترتیب جمع کردن بردارها تغییر کند برآیند آنها تغییر نمی‌کند. این ویژگی نتیجهٔ مستقیم روش

1. unit vector 2. commutation

هندسی به‌کار رفته است. رابطهٔ هندسی شکل ۸.۳ را به صورت جبری چنین بیان می‌کنند:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_۱ + \mathbf{V}_۲. \qquad (۲.۳)$$

برای محاسبهٔ بزرگی $\mathbf{V}$، ازشکل ۹.۳ داریم

$$(AC)^۲ = (AD)^۲ + (DC)^۲$$

ولی

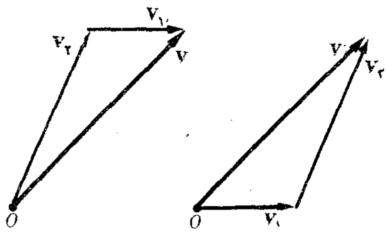
$$DC = V_۲ \sin\theta \;\; و \;\; AD = AB + BD = V_۱ + V_۲ \cos\theta.$$

بنا براین

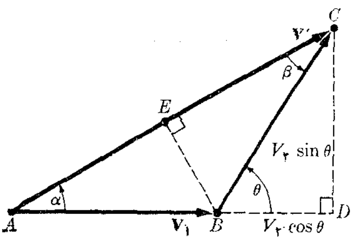
$$V^۲ = (V_۱ + V_۲\cos\theta)^۲ + (V_۲ \sin\theta)^۲ = V_۱^۲ + V_۲^۲ + ۲V_۱V_۲\cos\theta.$$

ویا

$$V = \sqrt{V_۱^۲ + V_۲^۲ + ۲V_۱V_۲\cos\theta} \qquad (۳.۳)$$



شکل ۸.۳. جمع برداری دارای خاصیت جابجایی است



شکل ۹.۳

برای تعیین راستا و سوی $\mathbf{V}$، تنها باید زاویهٔ α را به دست آورد. مطابق شکل ۹.۳، در مثلثهای ACD و BDC داریم

$$CD = BC \sin\theta \;\; و \;\; CD = AC \sin\alpha.$$

بنا براین $BC \sin\theta = AC \sin\alpha$ یا

$$\frac{V}{\sin\theta} = \frac{V_۲}{\sin\alpha}.$$

به همانگونه، $BE = V_۱ \sin\alpha = V_۲ \sin\beta$، یا

$$\frac{V_۲}{\sin\alpha} = \frac{V_۱}{\sin\beta}.$$

ازترکیب دونتیجهٔ بالا، رابطهٔ تقارنی زیر به دست می‌آید:

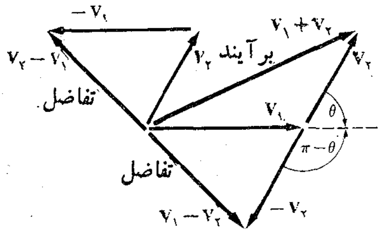
$$\frac{V}{\sin\theta} = \frac{V_۱}{\sin\beta} = \frac{V_۲}{\sin\alpha}. \qquad (۴.۳)$$

بدین طریق دو رابطهٔ مثلثاتی اساسی، قانون سینوسها وقانون کسینوسها را به دست آوردیم. درحالت خاصی که $\mathbf{V}_۱$ و $\mathbf{V}_۲$ برهم عمود باشند (شکل ۱۰.۳)، $\theta = \pi/۲$ است و رابطهٔ زیر برقرار خواهد بود:

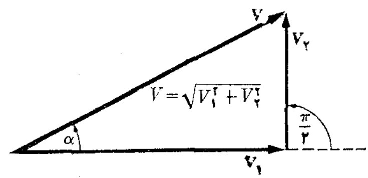
$$V = \sqrt{V_۱^۲ + V_۲^۲}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{V_۲}{V_۱}. \tag{۵.۳}$$

تفاضل دوبردار ازجمع بردار منفی (یا مخالف) بردار دوم، بـا بردار اول به دست می‌آید (شکل ۱۱.۳)؛ یعنی

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}_۱ - \mathbf{V}_۲ = \mathbf{V}_۱ + (-\mathbf{V}_۲).$$



شکل ۱۱.۳. تفاضل دوبردارخاصیت جابجایی ندارد.



شکل ۱۰.۳

توجه داشته باشید که $\mathbf{V}_۲ - \mathbf{V}_۱ = -\mathbf{D}$ است، یعنی اگر ترتیب تفریق دوبردار عوض شود، تفاضلهای حاصل در دوسوی مخالف خواهند بود. بنابراین تفاضل دوبردار خاصیت جابجایی ندارد. بزرگی تفاضل دوبردار برابر است با

$$D = \sqrt{V_۱^۲ + V_۲^۲ + ۲V_۱ V_۲ \cos(\pi - \theta)}$$

یا

$$D = \sqrt{V_۱^۲ + V_۲^۲ - ۲V_۱ V_۲ \cos\theta}. \tag{۶.۳}$$

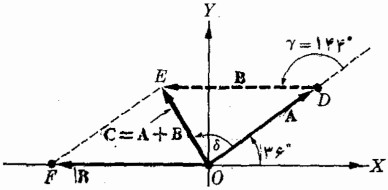
مثال ۱.۳. فرض کنیم دو بردار $\mathbf{A}$ به طول ۶ واحد که زاویه $+۳۶^\circ$ با راستای مثبت محور Xها می‌سازد و $\mathbf{B}$ به‌طول ۷ واحد و در راستای منفی محور Xها است. (الف) برآیند دوبردار را به دست آورید؛ (ب) تفاضل دوبردار چقدر است؟

حل: قبل ازاستفاده ازمعادله‌های پیش، بردارها را در دستگاه مختصات XOY رسم می‌کنیم (شکل ۱۲.۳). بنا به شکلهای ۷.۳ و ۸.۳ یا ۹.۳، می‌دانیم که برای به‌دست‌آوردن برآیند دوبردار ابتدا باید انتهای یک بردار را برابتدای بردار دیگر قرار داد. این کار را می‌توان با جابجا کردن یک یـا هر دوبردار، بدون اینکه سو و راستای آنها تغییر کند، انجام داد (شکل ۱۳.۳). به هرشیوه‌ای عمل شود، به دست می‌آید

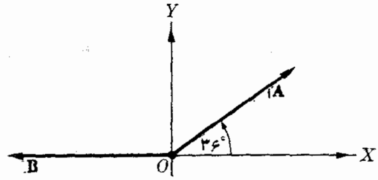
$$\mathbf{C} = \overrightarrow{OE}.$$

(الف) بنا به شکل ۱۳.۳ می‌توان نوشت

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \text{ یا } \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$



شکل ۱۳.۳



شکل ۱۲.۳

با استفاده ازمثلث ODE، C برابر A + B به‌دست می‌آید. برای‌یافتن بزرگی C با استفاده ازمعادلهٔ (۳.۳)، مشاهده می‌شود کــه A برابر V_1 و B برابر V_2 و C برابر V و بالاخره زاویهٔ $\gamma = ۱۸۰^\circ - ۳۶^\circ = ۱۴۴^\circ$ برابر θ است. بنا براین داریم

$$C = \sqrt{۳۶ + ۴۹ \times ۲ \times (۶)(۷)\cos ۱۴۴^\circ} = ۴ر۱۲۸ \text{ واحد}$$

با استفاده از رابطهٔ (۴.۳) زاویهٔ بین C و A برابر می‌شود با

$$\frac{C}{\sin\gamma} = \frac{B}{\sin\delta}$$

و یا

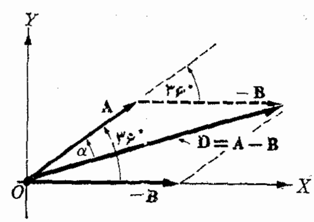
$$\sin\delta = \frac{B}{C}\sin ۱۴۴^\circ = ۰ر۹۹۶$$

بالاخره

$$\delta \cong ۸۵^\circ.$$

بنا براین C به‌طول ۴ر۱۲۸ واحد در راستایی قرار دارد که باسوی مثبت محور Xها زاویه $+ ۱۲۱^\circ = ۸۵^\circ + ۳۶^\circ$ می‌سازد.

(ب) برای بــه دست آوردن تفاضل دوبردار، بایـد همانند حساب عددی بدانیم چه کمیتی باید از کمیت دیگر کــم شود. به‌گفتهٔ دیگر، اگربردار D برابر A − B باشد (شکل ۱۴.۳)، دراین صورت B − A برابر است با D −.



شکل ۱۴.۳

درنتیجه، با استفاده از مقادیر به دست آمده درقسمت (الف) و معادلهٔ (۶.۳)، بزرگی $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ برابر است با

$$D = \sqrt{۳۶ + ۴۹ - ۲\,(۶)\,(۷)\cos ۱۴۴^\circ} = ۱۲٫۳۱ \text{ واحد}$$

برای یافتن راستای $\mathbf{D}$ معادلهٔ (۴.۳) را به‌کار می بریم:

$$\frac{D}{\sin ۳۶^\circ} = \frac{|-\mathbf{B}|}{\sin\alpha}.$$

چون $|-\mathbf{B}| = B$ است، داریم

$$\sin\alpha = \frac{B}{D}\sin ۳۶^\circ = ۰٫۳۳۴$$

و یا

$$\alpha \cong ۱۹٫۵^\circ$$

یعنی طول $\mathbf{D}$، ۱۲٫۳۱ واحد و راستای آن با محور Xهای مثبت، زاویهٔ

$$۳۶^\circ - ۱۹٫۵^\circ = ۱۶٫۵^\circ$$

می‌سازد.

حال شما ثابت کنید طول $\mathbf{B} - \mathbf{A} = -\mathbf{D}$، ۱۲٫۳۱ واحد است و این بردار با راستای مثبت محور Xها زاویهٔ $+ ۱۹۶٫۵^\circ$ می‌سازد.

۵.۳ مؤلفه‌های یك بردار

هر برداری مانند $\mathbf{V}$ را همیشه می‌توان برآیند دو (یا چند) بردار درنظر گرفت و تعداد حالتهای ممکن بینهایت است. هریک ازعناصر مجموعه بردارهایی که برآیندشان بردار $\mathbf{V}$ باشد، مؤلفهٔ[1] بردار $\mathbf{V}$ خوانده می‌شود.

ازبین مؤلفه‌های یک بردار آنچه بیشتر به کار می‌آید مؤلفه‌های عمود برهم است، یعنی بردار را برآیند دوبردار عمود برهم درنظر می‌گیرند (شکل ۱۵.۳). دراین صورت چنانکه از شکل پیداست، $\mathbf{V} = \mathbf{V}_x + \mathbf{V}_y$، با

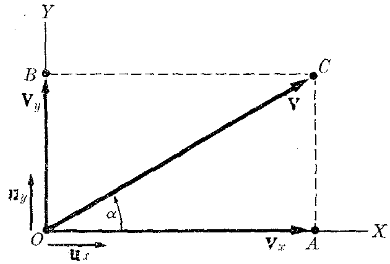
$$V_x = V\cos\alpha \quad \text{و} \quad V_y = V\sin\alpha. \tag{۷.۳}$$

هرگاه $\mathbf{u}_x$ و $\mathbf{u}_y$ بترتیب بردارهای یکای راستاهای OX و OY را مشخص کنند، مشاهده می‌شود که

$$\mathbf{V}_x = \overrightarrow{OA} = \mathbf{u}_x V_x \qquad \mathbf{V}_y = \overrightarrow{OB} = \mathbf{u}_y V_y$$

در این صورت می‌توان نوشت

1. component



شکل ۱۵.۳. مؤلفه‌های عمود برهم یك بردار درصفحه

$$\mathbf{V} = \mathbf{u}_x V_x + \mathbf{u}_y V_y \qquad (۸.۳)$$

معادلهٔ (۸.۳) نمایش یک بردار برحسب مؤلفه‌های عمودی آن درصفحه است. با به‌کاربردن معادلهٔ (۷.۳)، رابطهٔ (۸.۳) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

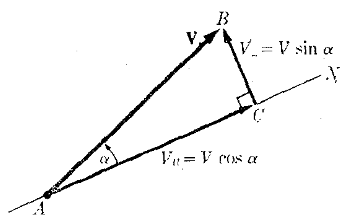
$$\mathbf{V} = \mathbf{u}_x V\cos\alpha + \mathbf{u}_y V\sin\alpha = V(\mathbf{u}_x\cos\alpha + \mathbf{u}_y\sin\alpha).$$

با مقایسهٔ این نتیجه با معادلهٔ (۱.۳)، یا به طور خیلی ساده‌تر، اگر ۱ $= V$ باشد، به این نتیجه می‌رسیم که یک بردار یکا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_x\cos\alpha + \mathbf{u}_y\sin\alpha. \qquad (۹.۳)$$

مشاهده می‌شود که مؤلفهٔ یک بردار روی یک راستای معلوم برابر است با تصویر بردار روی این راستا (شکل ۱۶.۳). از این شکل پیداست که $V_{\parallel} = V\cos\alpha$ و $V_{\perp} = V\sin\alpha$، که $V_{\perp} = BC$ مؤلفهٔ $\mathbf{V}$ در راستای عمود بر راستای انتخاب شدهٔ AN است. در نتیجه می‌توان نوشت

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\parallel} + \mathbf{V}_{\perp}.$$



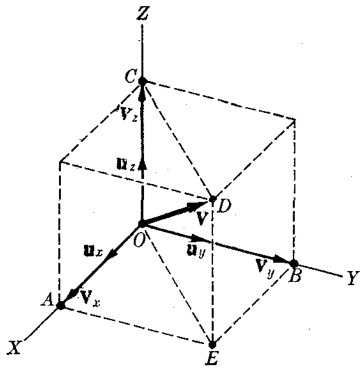
شکل ۱۶.۳. مؤلفه‌های یك بردار روی یك راستای معین

بردار $\mathbf{V}$، درفضا، دارای سه مؤلفهٔ عمود برهم $\mathbf{V}_x$ ، $\mathbf{V}_y$ و $\mathbf{V}_z$ است (شکل ۱۷.۳). دانشجو می‌تواند از روی شکل تحقیق کند که آنها را از روی روابط زیرحساب می‌کنند:

$$\begin{aligned} V_x &= V\sin\theta\cos\varphi, \\ V_y &= V\sin\theta\sin\varphi, \\ V_z &= V\cos\theta. \end{aligned} \qquad (۱۰.۳)$$

ازآنجا با یک محاسبهٔ مستقیم به دست می‌آید

$$V^{2} = V_x^{2} + V_y^{2} + V_z^{2}. \qquad (۱۱.۳)$$



شکل ۱۷.۳. مؤلفه‌های عمود برهم یك بردار درسه بعد

با تعریف بردارهای یکای $\mathbf{u}_x$، $\mathbf{u}_y$ و $\mathbf{u}_z$ که بترتیب موازی با محورهای OX، OY و OZ هستند، خواهیم داشت

$$\mathbf{V} = \mathbf{u}_x V_x + \mathbf{u}_y V_y + \mathbf{u}_z V_z. \qquad (۱۲.۳)$$

اگر α، β و γ بترتیب زاویه‌های بردار $\mathbf{V}$ بامحورهای OX، OY و OZ باشند، باتوجه به معادله‌های (۱۰.۳) داریم

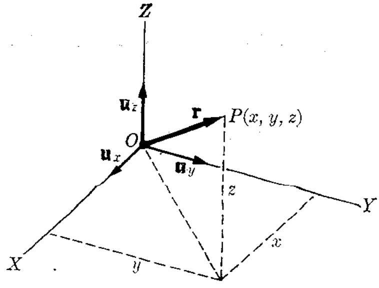
$$V_x = V\cos\alpha \quad \text{و} \quad V_y = V\cos\beta \quad \text{و} \quad V_z = V\cos\gamma$$

وبا قراردادن این رابطه‌ها درمعادلهٔ (۱۱.۳) به‌دست می‌آوریم

$$\cos^{2}\alpha + \cos^{2}\beta + \cos^{2}\gamma = ۱$$

کمیتهای $\cos\alpha$، $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ کسینوسهای هادی[1] بردار $\mathbf{V}$ نامیده می‌شوند.

یکی ازبردارهای بسیار مهم در فضای سه بعدی $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$، بردار مکان[2] نقطهٔ P به مختصات (x, y, z) است. ازشکل ۱۸.۳ پیداست که



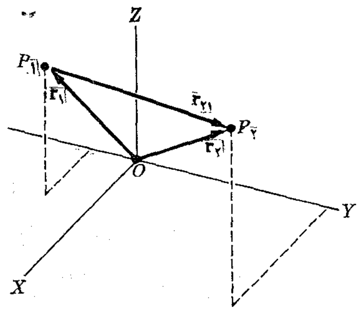
شکل ۱۸.۳. بردار مکان

1. direction cosines 2. position vector

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = \mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y + \mathbf{u}_z z. \qquad (۱۳.۳)$$

بردار مکان نسبی مربوط به دونقطهٔ $P_۱$ و $P_۲$ عبارت است از $\mathbf{r}_{۲۱} = \overrightarrow{P_۱P_۲}$. ازشکل ۱۹.۳ پیداست که $\overrightarrow{OP_۲} = \overrightarrow{OP_۱} + \overrightarrow{P_۱P_۲}$، بنا براین،

$$\mathbf{r}_{۲۱} = \overrightarrow{P_۱P_۲} = \overrightarrow{OP_۲} - \overrightarrow{OP_۱} = \mathbf{r}_۲ - \mathbf{r}_۱$$
$$= \mathbf{u}_x (x_۲ - x_۱) + \mathbf{u}_y (y_۲ - y_۱) + \mathbf{u}_z (z_۲ - z_۱). \qquad (۱۴.۳)$$



شکل ۱۹.۳

یک بار دیگر یادآوری می‌کنیم کـه $\overrightarrow{P_۱P_۲} = - \overrightarrow{P_۲P_۱}$ است. از ترکیب معادلـه‌های (۱۱.۳) و (۱۴.۳) فرمول تحلیلی فاصلهٔ بین دونقطه به دست می‌آید:

$$r_{۱۲} = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲ + (z_۲ - z_۱)^۲}.$$

مثال ۲.۳. فاصلهٔ بین دونقطهٔ $P_۱(۶, ۸, ۱۰)$ و $P_۲(-۴, ۴, ۱۰)$ را پیدا کنید.

حل: یک دستگاه مختصات سه بعدی مطابق شکل ۲۰.۳ رسم ونقطه‌های $P_۱$ و $P_۲$ را روی آن پیدا می‌کنیم. می‌بینیم که هردونقطه درصفحه‌ای موازی با صفحهٔ XOY قرار دارند، زیرا هردو نقطه در فـاصلهٔ (ارتفاع) ۱۰ واحد در راستای OZ می‌باشند. بنا به معادلهٔ (۱۴.۳) برای $\mathbf{r}_{۲۱}$ داریم

$$\mathbf{r}_{۲۱} = \mathbf{u}_x(-۴ - ۶) + \mathbf{u}_y(۴ - ۸) + \mathbf{u}_z(۱۰ - ۱۰)$$

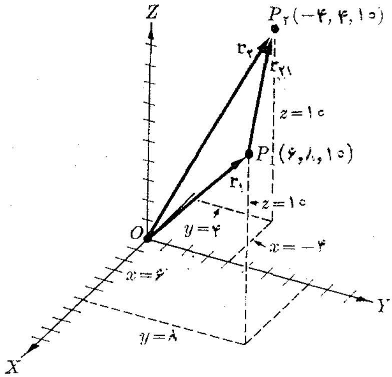
ویا

$$\mathbf{r}_{۲۱} = -۱۰\mathbf{u}_x - ۴\mathbf{u}_y.$$

با استفاده ازمعادلهٔ (۱۱.۳) بزرگی $\mathbf{r}_{۲۱}$ برابر است با

$$r_{۲۱}^۲ = ۱۰۰ + ۱۶ = ۱۱۶ \quad \text{یا} \quad r_{۲۱} = ۱۰٫۷۷ \ \text{واحد}$$

مثال ۳.۳. مؤلفه‌های برداری را که طول آن ۱۳ واحد است و راستای آن با محور Zها زاویهٔ $\theta = ۲۲٫۶°$ و تصویر آن روی صفحهٔ XOY زاویهٔ $\varphi = ۳۷°$ بـا راستای مثبت محور Xها می‌سازد بـه دست آورید (شکل ۱۷.۳). همچنین زوایای آن را با محورهای



شکل ۲۰.۳

OX و OY پیدا کنید.

حل: با استفاده ازشکل ۱۷.۳ برای این مسئله، داریم

$$V = ۱۳ \text{ واحد}, \theta = ۲۲٫۶^\circ, \cos\theta = ۰٫۹۲۳$$

$$\sin\theta = ۰٫۳۸۴, \varphi = ۳۷^\circ, \cos\varphi = ۰٫۸۰۰, \sin\varphi = ۰٫۶۰۰.$$

با به کاربردن معادله‌های (۱۰.۳) بآسانی به دست می‌آید

$$V_x = ۱۳(۰٫۳۸۴)(۰٫۸۰۰) = ۴٫۰ \quad \text{واحد}$$

$$V_y = ۱۳(۰٫۳۸۴)(۰٫۶۰۰) = ۳٫۰ \quad \text{واحد}$$

$$V_z = ۱۳ \times (۰٫۹۲۳) = ۱۲٫۰ \quad \text{واحد}$$

بنا به معادلهٔ (۱۲.۳) می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{V} = \mathbf{u}_x(۴) + \mathbf{u}_y(۳) + \mathbf{u}_z(۱۲)$$

در مورد زاویه‌های α و β که بردار $\mathbf{V}$ با محورهای OX و OY می‌سازد داریم

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{V} = ۰٫۳۰۸ \text{ یا } \alpha = ۷۲٫۱^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{V_y}{V} = ۰٫۲۳۱ \text{ یا } \beta = ۷۷^\circ.$$

مثال ۴.۳. معادلهٔ خطی موازی با بردار $\mathbf{V} = \mathbf{u}_x A + \mathbf{u}_y B + \mathbf{u}_z C$ را که ازنقطهٔ $P_\circ$ می‌گذرد بنویسید.

حل: هرگاه بردار مکان $P_\circ$ را با $\mathbf{r}_\circ$ و بردار مکان نقطهٔ غیرمشخصی مانند P روی خط مذکور را با $\mathbf{r}$ نشان دهیم (شکل ۲۱.۳)، بنا به معادلهٔ (۱۴.۳) داریم

$$\overrightarrow{P_\circ P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\circ$$

ولی بردار $\overrightarrow{P_\circ P}$ باید موازی $\mathbf{V}$ باشد، بنابراین می توانیم بنویسیم

$$\overrightarrow{P_\circ P} = \lambda \mathbf{V}$$

که درآن λ فراسنجی است که هنوز تعیین نشده است. بنابراین

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_\circ = \lambda \mathbf{V}$$

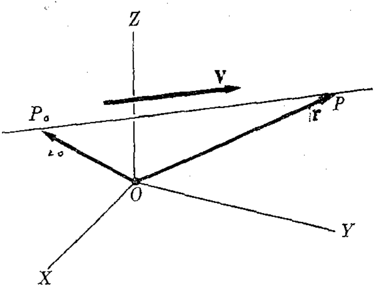
معادلهٔ یک خط است. با تغییر λ بردارمکانهای مختلف $\mathbf{r}$ به‌دست می‌آیند. تصویرهای معادلهٔ فوق روی محورهای مختصات عبارتند از

$$x - x_\circ = \lambda A,\ y - y_\circ = \lambda B,\ z - z_\circ = \lambda C$$

یا

$$\frac{x - x_\circ}{A} = \frac{y - y_\circ}{B} = \frac{z - z_\circ}{C}.$$

رابطهٔ اخیر در هندسهٔ تحلیلی برای نشان دادن معادلهٔ یک خط راست به کار می‌رود.



شکل ۲۱.۳

۶.۳ جمع چند بردار

برای جمع چند بردار $\mathbf{V}_1$، $\mathbf{V}_2$، $\mathbf{V}_3$، . . . ، شیوهٔ به‌کار رفته درشکل ۸.۳ در مورد دوبردار را تعمیم می‌دهیم. در شکل ۲۲.۳ روش مربوط بــه جمع سه بردار نشان داده شده است. بدین منظور، بردارها را یکی پس از دیگری به دنبال هم رسم می‌کنیم، بردار برآیند خطی است که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل می‌کند. دراین صورت

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \cdots \qquad (۱۵.۳)$$

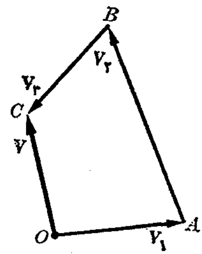
فرمول ساده‌ای برای نشان دادن $\mathbf{V}$ برحسب $\mathbf{V}_1$، $\mathbf{V}_2$، $\mathbf{V}_3$، . . . وجود ندارد، و بهترین کار استفاده از روش مؤلفه‌هاست. برای سادگی، فرض کنیم تمام بردارها در یک صفحه قرار-دارند. دراین صورت تنها به دو مؤلفه نیاز داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= (\mathbf{u}_x V_{1x} + \mathbf{u}_y V_{1y}) + (\mathbf{u}_x V_{2x} + \mathbf{u}_y V_{2y}) \\ &\qquad + (\mathbf{u}_x V_{3x} + \mathbf{u}_y V_{3y}) + \cdots \\ &= \mathbf{u}_x (V_{1x} + V_{2x} + V_{3x} + \cdots) + \mathbf{u}_y (V_{1y} + V_{2y} + V_{3y} + \cdots).\end{aligned}$$

بنا براین

$$V_x = V_{\text{۱}x} + V_{\text{۲}x} + V_{\text{۳}x} + \cdots = \sum_i V_{ix} = \sum_i V_i \cos\alpha_i$$
$$V_y = V_{\text{۱}y} + V_{\text{۲}y} + V_{\text{۳}y} + \cdots = \sum_i V_{iy} = \sum_i V_i \sin\alpha_i \qquad (\text{۱۶.۳})$$

که در آن α_i زاویه‌ای است که $\mathbf{V}_i$ با محور Xها می‌سازد و $V_i \cos\alpha_i$ و $V_i \sin\alpha_i$ مؤلفه‌های $\mathbf{V}_i$ روی محورهای OX و OY هستند. وقتی V_x و V_y به دست آمدند، از معادلهٔ (۵.۳)، $\mathbf{V}$ را حساب می‌کنیم. اکنون این روش را با یک مثال عددی روشن می‌کنیم.



شکل ۲۲.۳. جمع چند بردار

مثال ۵.۳. برآیند ۵ بردار زیر را به‌دست آورید:

$$\mathbf{V}_\text{۱} = \mathbf{u}_x(\text{۴}) + \mathbf{u}_y(-\text{۳}) \quad \text{واحد}$$
$$\mathbf{V}_\text{۲} = \mathbf{u}_x(-\text{۳}) + \mathbf{u}_y(\text{۲}) \quad \text{واحد}$$
$$\mathbf{V}_\text{۳} = \mathbf{u}_x(\text{۲}) + \mathbf{u}_y(-\text{۶}) \quad \text{واحد}$$
$$\mathbf{V}_\text{۴} = \mathbf{u}_x(\text{۷}) + \mathbf{u}_y(-\text{۸}) \quad \text{واحد}$$
$$\mathbf{V}_\text{۵} = \mathbf{u}_x(\text{۹}) + \mathbf{u}_y(\text{۱}) \quad \text{واحد}$$

حل: با استفاده از معادلهٔ (۱۶.۳)، داریم

$$V_x = \text{۴} - \text{۳} + \text{۲} + \text{۷} + \text{۹} = \text{۱۹} \quad \text{واحد}$$
$$V_y = -\text{۳} + \text{۲} - \text{۶} - \text{۸} + \text{۱} = -\text{۱۴} \quad \text{واحد}$$
$$\mathbf{V} = \mathbf{u}_x(\text{۱۹}) + \mathbf{u}_y(-\text{۱۴}) \quad \text{واحد}$$

بزرگی بردار $\mathbf{V}$ برابر می‌شود با

$$V = \sqrt{(\text{۱۹})^\text{۲} + (-\text{۱۴})^\text{۲}} = \text{۲۳٫۵۵} \quad \text{واحد}$$

از رابطهٔ $\operatorname{tg}\alpha = V_y/V_x = -\text{۰٫۷۳۸}$، یا $\alpha = -\text{۳۶٫۴}^\circ$، راستا و سوی بردار $\mathbf{V}$ به دست می‌آید. α زاویه‌ای است که راستای $\mathbf{V}$ با محور Xها می‌سازد.

۷.۳ کاربرد در مسایل سینماتیک

برای نشان دادن نحوهٔ استفاده از بردارها در پدیده‌های سادهٔ فیزیکی، مثالهایی از سینماتیک[1]

1. kinematic

را درنظرمی‌گیریم، تنها فرض مورد نیاز، پذیرش سرعت به عنوان یک کمیت برداری است.
به عنوان مثال، فرض کنیم قایقی با سرعت $\mathbf{V}_B$ نسبت به آب جابجا می‌شود. اگر آب ساکن باشد، $\mathbf{V}_B$ سرعت قایق نسبت به کسی که در ساحل ایستاده است نیز می‌باشد. ولی اگر آب با سرعتی جاری باشد، عامل جریان آب سرعت قایق را از نظم خارج می‌کند. بدین طریق، سرعت حرکت قایق که به وسیلهٔ ناظر واقع در ساحل اندازه‌گیری می‌شود، برابر است با جمع برداری $\mathbf{V}_B$ سرعت قایق نسبت به آب و $\mathbf{V}_C$ سرعت قایق ناشی از جریان آب، و داریم

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_C.$$

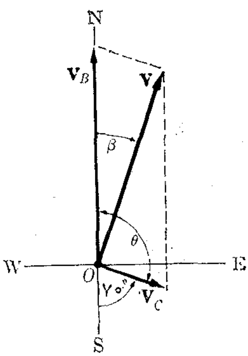
می‌توان همین شیوهٔ استدلال‌را برای‌تمام اجرام جا بجاشونده درهوا، مثلا هواپیما به کاربرد.

مثال ۶.۳. یک قایق موتوری در منطقه‌ای که جریانی به سرعت ۵ کیلومتر در ساعت در راستای ۷۰° جنوب شرقی وجود دارد، با سرعت ۱۵ کیلومتر در ساعت در راستای شمال حرکت می‌کند. سرعت برآیند قایق را به دست آورید.

حل: این مسئله از راه ترسیم روی شکل ۲۳.۳ حل شده است. در این شکل $\mathbf{V}_B$ سرعت قایق، $\mathbf{V}_C$ سرعت جریان یا سرعت انحراف قایق و $\mathbf{V}$ سرعت برآیند است که از رابطهٔ

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_C$$

به دست می‌آید. این امرمتکی به این واقعیت فیزیکی است که سرعت برآیند جمع برداری $\mathbf{V}_B$، سرعت قایق نسبت به‌آب و $\mathbf{V}_C$، سرعت قایق ناشی از جریان آب است.



شکل ۲۳.۳

چون $\theta = ۱۱۰^\circ$ است، بزرگی $\mathbf{V}$ برابر می‌شود با

$$V = \sqrt{۱۵^۲ + ۵^۲ + ۲(۱۵)(۵)\cos ۱۱۰^\circ} = ۱۴٫۱\ \mathrm{km\,hr^{-۱}}$$

برای به دست آوردن راستای $\mathbf{V}$ معادلهٔ (۴.۳) را به کار می‌بریم:

$$\frac{V}{\sin\theta} = \frac{V_C}{\sin\beta} \quad \text{یا} \quad \sin\beta = \frac{V_C \sin\theta}{V} = ۰٫۳۳۲$$

ازاینجا $\beta = ۱۹٫۴°$ به دست می‌آید. بنابراین حرکت برآیند در راستای $۱۹٫۴°$ شمال شرقی صورت می‌گیرد.

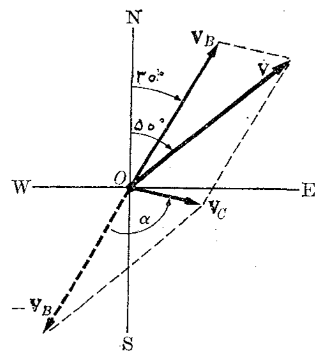
مثال ۷.۳. یک قایق موتوری دارای‌سرعت $۲۵\ \mathrm{km\,hr^{-۱}}$ در راستای $۳۰°$ شمال‌شرقی است ولی جریان آب موجب می‌شود با سرعت $۳۰\ \mathrm{km\,hr^{-۱}}$ در راستای $۵۰°$ شمال شرقی حرکت کند. سرعت جریان‌آب را پیدا کنید.

حل: اگر سرعت قایق را با $\mathbf{V}_B$ و سرعت جریان آب را با V_C و سرعت برآیند را با $\mathbf{V}$ نشان دهیم، داریم

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_C \quad \text{ویا} \quad \mathbf{V}_C = \mathbf{V} - \mathbf{V}_B.$$

در شکل ۲۴.۳ بردارهای $\mathbf{V}$ و $\mathbf{V}_B$ و نیز $\mathbf{V}_C$ تفاضل آنها رسم شده‌اند. برای محاسبهٔ $\mathbf{V}_C$ از روی شکل پیداست که زاویهٔ بین $\mathbf{V}$ و $\mathbf{V}_B$ — برابر $۱۶۰°$ است. بنابراین

$$V_C = \sqrt{۳۰^۲+۲۵^۲+۲(۳۰)(۲۵)\cos ۱۶۰°} = ۱۰٫۸\ \mathrm{km\,hr^{-۱}}$$



شکل ۲۴.۳

برای به دست آوردن راستای $\mathbf{V}_C$ ابتدا α زاویهٔ بین $\mathbf{V}$ و $\mathbf{V}_B$ — را با استفاده از معادلهٔ (۴.۳) حساب می‌کنیم:

$$\frac{V}{\sin\alpha} = \frac{V_C}{\sin ۱۶۰°} \quad \text{ویا} \quad \sin\alpha = \frac{V}{V_C}\sin ۱۶۰° = ۰٫۹۵۱$$

از اینجا $\alpha = ۷۲°$ به دست می‌آید. بنابراین زاویهٔ $\mathbf{V}_C$ با راستای شمال ـ جنوب برابر است با $۷۲° - ۳۰° = ۴۲°$، یعنی $\mathbf{V}_C$ در راستای $۴۲°$ جنوب شرقی است.

مثال ۸.۳. سرعت هواپیمایی در هوای ساکن $۲۰۰\ \mathrm{km\,hr^{-۱}}$ است. هواپیما می‌خواهد در راستای OO' یعنی $۲۰°$ شمال‌غربی ازنقطهٔ O به O' برود. بادی به‌سرعت $۳۰\mathrm{km\,hr^{-۱}}$ در راستای $۴۰°$ شمال شرقی می‌وزد. راستایی که هواپیما باید حرکت کند و نیز سرعت برآیند آن را به‌دست آورید.

حل: سرعت هواپیما را با $\mathbf{V}_a$ و سرعت باد را با $\mathbf{V}_w$ نشان می‌دهیم. سرعت برآیند برابر است با

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_a + \mathbf{V}_w.$$

بنا به خواستهٔ مسئله، $\mathbf{V}$ باید در راستای OO' باشد. سرعت $\mathbf{V}_a$ را باید طوری رسم کردکه هرگاه سرعت $\mathbf{V}_w$ به آن اضافه شود، حرکت در راستای OO' باشد. این کار را در شکل ۲۵.۳، با رسم دایره‌ای به شعاع $\mathbf{V}_a$ به مرکز انتهای بردار $\mathbf{V}_w$ و با تعیین محل تقاطع این دایره با خط OO' انجام داده‌ایم.

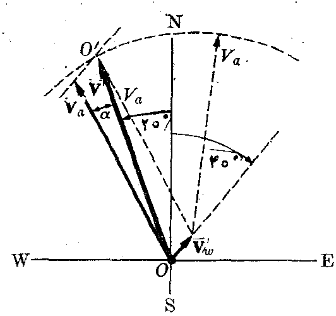
برای یافتن رابطهٔ تحلیلی، مشاهده می‌شود که زاویهٔ $\mathbf{V}$ با $\mathbf{V}_w$ برابر است با $۶۰^\circ = ۴۰^\circ + ۲۰^\circ$. بنابراین، با به‌کار بردن معادلهٔ (۴.۳) به دست می‌آید

$$\frac{V_a}{\sin ۶۰^\circ} = \frac{V_w}{\sin \alpha} \text{ و یا } \sin\alpha = \frac{V_w \sin ۶۰^\circ}{V_a} = ۰٫۱۳۰$$

ازاینجا داریم $\alpha = ۷٫۸^\circ$. دراین صورت $\mathbf{V}_a$ در راستای $۲۷٫۸^\circ$ شمال غربی قرار دارد. زاویهٔ بین $\mathbf{V}_a$ و $\mathbf{V}_w$ برابراست با $\theta = ۲۷٫۸^\circ + ۴۰^\circ = ۶۷٫۸^\circ$ وبنا به‌معادلهٔ(۳.۳) بزرگی سرعت برآیند برابر می‌شود با

$$V = \sqrt{۲۰۰^۲ + ۳۰^۲ + ۲ \times ۲۰۰ \times ۳۰ \cos ۶۷٫۸^\circ} = ۲۰۴\,\mathrm{km\,hr^{-1}}$$

به‌عهدهٔ دانشجو است که پاسخ دهد: آیا ممکن است مسئله دارای دوجواب باشد ویا حتی جوابی نداشته‌باشد؟

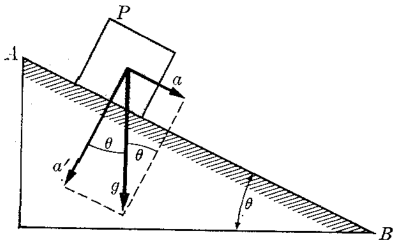


شکل ۲۵.۳

مثال ۹.۳. شتاب جسمی را که در طول یک صفحهٔ شیب‌دار با زاویهٔ شیب θ می‌لغزد به دست آورید.

حل: فرض کنیم P جسمی است که بدون مالش روی صفحهٔ شیب‌دار AB با شیب θ به سمت پایین می‌لغزد (شکل ۲۶.۳). اگر صفحهٔ شیب‌دار وجود نمی‌داشت جسم آزادانه در راستای قایم با شتاب گرانی، $g = ۹٫۸\,\mathrm{m\,s^{-۲}}$ سقوط می‌کرد (به مثال ۲.۵ مراجعه کنید). مؤلفه‌های $\mathbf{g}$ در راستای موازی و عمود برصفحه بترتیب برابرند با $a = g\sin\theta$

و $g \cos \theta$ = a'. مؤلفهٔ a، شتاب جسم P روی صفحه است.



شکل ۲۶.۳. شتاب درطول یک صفحهٔ شیب‌دار

۸.۳ ضرب اسکالر

به غیر از جمع عملهای دیگری را نیز می‌توان روی بردارها تعریف کرد. ضرب اسکالر[1] و ضرب برداری[2] دو نوع ازاین عملها هستند.

ضرب اسکالر دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ با علامت $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ($\mathbf{A}$ ضرب اسکالر در $\mathbf{B}$)، یک کمیت عددی است که از ضرب بزرگی بردار $\mathbf{A}$ دربزرگی بردار $\mathbf{B}$ در کسینوس زاویهٔ بین این دو بردار به دست می‌آید:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta. \qquad (۱۷.۳)$$

بدیهی است $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$ می‌باشد، زیرا دراین حالت زاویهٔ θ برابر صفر است. اگر دو بردار برهم عمود باشند ($\theta = \pi/2$) حاصلضرب اسکالر برابر صفر می‌شود. بدین طریق شرط عمود بودن دوبردار بریکدیگر با رابطهٔ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ نشان داده می‌شود. بنا به‌تعریف ضرب اسکالر دو بردار خاصیت جابجایی دارد، یعنی $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$، زیرا درهردوحالت $\cos \theta$ یکسان است. ضرب اسکالر نسبت به جمع خاصیت توزیع پذیری[3] دارد:

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}. \qquad (۱۸.۳)$$

برای اثبات خاصیت توزیع پذیری ضرب اسکالر، ازشکل ۲۷.۳ پیداست که

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = |\mathbf{C}||\mathbf{A} + \mathbf{B}| \cos \gamma = C\,(Ob)$$

زیرا $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \cos \gamma$ برابر است با Ob، همچنین

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = C\,A \cos \alpha = C\,(Oa)$$

و

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = C\,B \cos \beta = C\,(ab).$$

با جمع دو رابطهٔ فوق، به دست می‌آید

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = C(Oa + ab) = C(Ob).$$

1. scalar product 2. vector product 3. distributive property

بدین‌طریق رابطهٔ (۱۸.۳) اثبات می‌شود. حاصل‌ضربهای اسکالر بردارهای یکای $\mathbf{u}_x$، $\mathbf{u}_y$، $\mathbf{u}_z$ چنین می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z = ۱ \\ \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_x = ۰ \end{aligned} \qquad (۱۹.۳)$$

با نوشتن بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ برحسب مؤلفه‌های قایم و با توجه به معادلهٔ (۱۲.۳) و قانون توزیع‌پذیری معادلهٔ (۱۸.۳)، داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (\mathbf{u}_x A_x + \mathbf{u}_y A_y + \mathbf{u}_z A_z) \cdot (\mathbf{u}_x B_x + \mathbf{u}_y B_y + \mathbf{u}_z B_z) \\ &= (\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x) A_x B_x + (\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y) A_x B_y + (\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_z) A_x B_z \\ &+ (\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_x) A_y B_x + (\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y) A_y B_y + (\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_z) A_y B_z \\ &+ (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_x) A_z B_x + (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_y) A_z B_y + (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z) A_z B_z. \end{aligned}$$

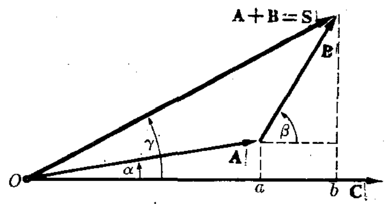
با به‌کار بستن رابطهٔ (۱۹.۳) به دست می‌آید

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \qquad (۲۰.۳)$$

رابطهٔ (۲۰.۳) دارای پهنهٔ کاربرد گسترده‌ای است. همچنین داریم

$$A^۲ = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^۲ + A_y^۲ + A_z^۲$$

که با معادلهٔ (۱۱.۳) سازگار است.



شکل ۲۷.۳. ضرب اسکالر خاصیت توزیع‌پذیری دارد.

با استفاده از ویژگیهای ضرب اسکالر می‌توان فرمول (۳.۳) مربوط به مجموع دو بردار را بآسانی به‌دست آورد. از رابطهٔ $\mathbf{V} = \mathbf{V}_۱ + \mathbf{V}_۲$ داریم

$$\begin{aligned} V^۲ &= (\mathbf{V}_۱ + \mathbf{V}_۲) \cdot (\mathbf{V}_۱ + \mathbf{V}_۲) = V_۱^۲ + V_۲^۲ + ۲\mathbf{V}_۱ \cdot \mathbf{V}_۲ \\ &= V_۱^۲ + V_۲^۲ + ۲V_۱ V_۲ \cos\theta. \end{aligned}$$

این نتیجه را می‌توان بدون هیچ مشکلی درمورد چند بردار نیز به‌کار برد. فرض کنیم

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_۱ + \mathbf{V}_۲ + \mathbf{V}_۳ + \cdots = \textstyle\sum_i \mathbf{V}_i$$

دراین صورت

$$\begin{aligned} V^۲ &= (\mathbf{V}_۱ + \mathbf{V}_۲ + \mathbf{V}_۳ + \cdots)^۲ = V_۱^۲ + V_۲^۲ + V_۳^۲ + \cdots \\ &+ ۲\mathbf{V}_۱ \cdot \mathbf{V}_۲ + ۲\mathbf{V}_۱ \cdot \mathbf{V}_۳ + \cdots + ۲\mathbf{V}_۲ \cdot \mathbf{V}_۳ + \cdots \end{aligned}$$

یا به‌صورت کلی‌تر

$$V^{۲} = \underset{\text{تمام بردارها}}{\sum_i} V_i^{۲} + ۲ \underset{\text{تمام جفتها}}{\sum_{i \neq j}} \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{V}_j.$$

مثال ۱۰.۳. زاویهٔ بین دوبردار

$$\mathbf{A} = ۲\mathbf{u}_x + ۳\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_z \quad \text{و} \quad \mathbf{B} = -\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + ۲\mathbf{u}_z$$

را به‌دست آورید.

حل: ابتدا با استفاده ازمعادلهٔ (۲۰.۳) حاصل ضرب اسکالر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را حساب می‌کنیم:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = ۲(-۱) + ۳(۱) + (-۱)۲ = -۱$$

و نیز داریم

$$A = \sqrt{۲^{۲} + ۳^{۲} + (-۱)^{۲}} = \sqrt{۱۴} = ۳٫۷۴ \ \text{واحد}$$

$$B = \sqrt{(-۱)^{۲} + (۱)^{۲} + ۲^{۲}} = \sqrt{۶} = ۲٫۴۵ \ \text{واحد}$$

بنا به‌معادلهٔ (۱۷.۳) می‌توان نوشت

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = -\frac{۱}{۹٫۱۷} = -۰٫۱۰۹$$

ازاینجا به‌دست می‌آید

$$\theta = ۹۶٫۳^{\circ}$$

مثال ۱۱.۳. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که ازنقطهٔ $P_{\circ}$ بگذرد و بر بردار

$$\mathbf{V} = \mathbf{u}_x A + \mathbf{u}_y B + \mathbf{u}_z C$$

عمود باشد.

حل: بردار مکان نقطهٔ $P_{\circ}$ را با $\mathbf{r}_{\circ}$ و بـردار مکان نقطهٔ دیگری از صفحه مانند P را با $\mathbf{r}$ نشان می‌دهیم (شکل ۲۸.۳). بنا به خواص بردارها داریم

$$\overrightarrow{P_{\circ}P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\circ}.$$

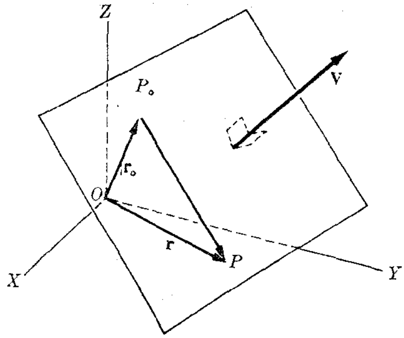
بردار $\overrightarrow{P_{\circ}P}$ باید بر بردار $\mathbf{V}$ عمود باشد. پس

$$\mathbf{V} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\circ}) = ۰$$

رابطهٔ فوق، معادله‌ای است که بایـد بردار مکان $\mathbf{r}$ مربوط به تمام نقاط صفحه، درآن صدق کند. با به کاربردن معادلهٔ (۲۰.۳) می‌توان نوشت

$$A(x - x_{\circ}) + B(y - y_{\circ}) + C(z - z_{\circ}) = ۰$$

معمولا درهندسهٔ تحلیلی،معادلهٔ صفحهٔ عمود بر یک خط معین به‌صورت فوق نوشته می‌شود.



شکل ۲۸.۳. معادلهٔ برداری یک صفحه

۹.۳ ضرب برداری

حاصل ضرب برداری دو بردار **A** و **B** که با علامت **A × B** (**A** ضرب برداری در **B**) نشان داده می‌شود، مطابق‌تعریف، برداری است در راستای عمود برصفحهٔ حاصل از **A** و **B** و درسوی جابجایی یک‌پیچ راستگرد که از **A** به سمت **B** می‌چرخد (شکل ۲۹.۳). پیچی را راستگرد گویند که، همچنانکه در شکل ۲۹.۳ نشان داده شده است، اگر دست را طوری قرار دهیم که انگشتان درسوی چرخش آن باشد، پیچ در راستای شست پیش برود. اکثر پیچهای معمولی راستگرد ساخته می‌شود.

بزرگی حاصل ضرب برداری **A × B** با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = AB\sin\theta. \qquad (۲۱.۳)$$

یک قاعدهٔ مفید دیگر برای نشان دادن سوی **A × B** از این قرار است: انگشتان شست، نشان(سبابه) ومیانی‌دست‌راست‌را مطابق‌شکل ۳۰.۳ قراردهید، اگرسوی‌انگشت نشان‌همسوی **A** و انگشت میانی درسوی **B** باشد، انگشت‌شست سوی **A × B** را نشان خواهد داد. در واقع، درحالت‌کلی بردارهای **A**، **B** و **A × B** را می‌توان بترتیب با انگشتان، ازهرانگشتی که شروع شود نشان داد، به‌شرطی که ترتیب گردش زیر حفظ شود:

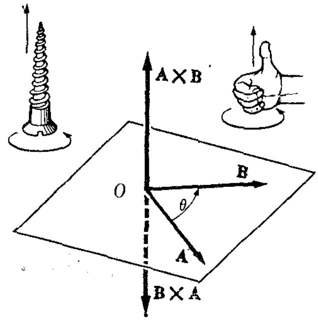
$$\text{نشان} \rightarrow \text{میانی} \rightarrow \text{شست} \rightarrow \text{نشان}$$

ازتعریف ضرب برداری پیداست که

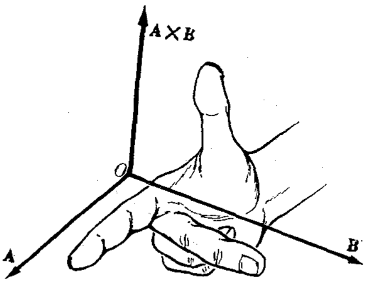
$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\,\mathbf{B}\times\mathbf{A} \qquad (۲۲.۳)$$

زیرا سوی پیشروی پیچ با تغییر ترتیب بردارها تغییر می‌کند. گوییم ضرب برداری خاصیت جابجایی ندارد. اگر دوبردار موازی باشند، $\theta = 0^\circ$ و $\sin\theta = 0$ می‌شود وحاصل‌ضرب

برداری برابر صفر است. بنابراین شرط موازی بودن دو بردار را با $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$ نشان می‌دهند. بدیهی است $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$ است.



شکل ۳ ۲۹. وضع قرارگرفتن بردارها درضرب برداری



شکل ۳۰.۳. قاعدهٔ دست راست برای ضرب برداری

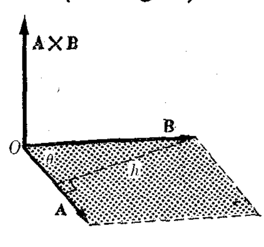
باید توجه داشت که بزرگی حاصل ضرب برداری دو بردار برابر است با مساحت متوازی الاضلاع متشکل از دوبردار، یا دو برابر مساحت مثلث حاصل از دوبردار و برآیند آنها. شکل ۳۱.۳ این موضوع را نشان می‌دهد. بزرگی $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ برابراست با $AB\sin\theta$ که درآن $B\sin\theta = h$ ارتفاع متوازی الاضلاعی به پهلوهای مجاور $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ است. پس

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = A\,h = \text{مساحت متوازی‌الاضلاع}$$

ضرب برداری نسبت به جمع خاصیت توزیع‌پذیری دارد، به‌گفتهٔ دیگر

$$\mathbf{C} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \times \mathbf{A} + \mathbf{C} \times \mathbf{B}. \qquad (۲۳.۳)$$

هرگاه سه بردار را در یک صفحه فرض کنیم اثبات رابطهٔ (۲۳.۳) آسانتر می‌شود. در این حالت (شکل ۳۲.۳)، حاصل ضربهای برداری حاصل از معادلهٔ (۲۳.۳) برصفحهٔ کتاب



شکل ۳۱.۳. حاصل‌ضرب برداری معادل مساحت متوازی‌الاضلاع است.

عمودند و کافی است ثابت شود که معادلهٔ (۲۳.۳) در مورد بزرگی‌ها صدق می‌کند. داریم

$$|\mathbf{C} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B})| = |\mathbf{C}||\mathbf{A} + \mathbf{B}|\sin\gamma = C\,(Ob)$$

همچنین

$$|\mathbf{C} \times \mathbf{A}| = C\,A\sin\alpha = C\,(Oa)$$

و

$$|\mathbf{C}\times\mathbf{B}| = C\,B\sin\beta = C\,(ab).$$

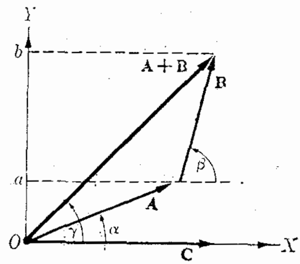
از جمع دو رابطهٔ اخیر به دست می‌آید

$$|\mathbf{C}\times\mathbf{A}| + |\mathbf{C}\times\mathbf{B}| = C\,(Oa+ab) = C\,(Ob).$$

بنابراین معادلهٔ (۲۳.۳) ازلحاظ سو وبزرگی اثبات می‌شود. درحالت کلی سه‌بردار درفضا، نحوهٔ اثبات همان است که گفته شد، ولی کمی پیچیده‌تر*.

حاصل‌ضربهای برداری بین بردارهای یکای $\mathbf{u}_x$، $\mathbf{u}_y$ و $\mathbf{u}_z$ عبارتند از

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_x\times\mathbf{u}_y &= -\mathbf{u}_y\times\mathbf{u}_x = \mathbf{u}_z\\
\mathbf{u}_y\times\mathbf{u}_z &= -\mathbf{u}_z\times\mathbf{u}_y = \mathbf{u}_x\\
\mathbf{u}_z\times\mathbf{u}_x &= -\mathbf{u}_x\times\mathbf{u}_z = \mathbf{u}_y\\
\mathbf{u}_x\times\mathbf{u}_x &= \mathbf{u}_y\times\mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z\times\mathbf{u}_z = 0
\end{aligned} \qquad (۲۴.۳)$$



شکل ۳۲.۳. ضرب برداری توزیع‌پذیر است.

با نوشتن A و B برحسب مؤلفه‌هایشان دریک دستگاه مختصات‌قایم، مطابق‌معادلهٔ (۱۲.۳) و استفاده ازقانون خاصیت توزیع‌پذیری (۲۳.۳) داریم

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= (\mathbf{u}_xA_x+\mathbf{u}_yA_y+\mathbf{u}_zA_z)\times(\mathbf{u}_xB_x+\mathbf{u}_yB_y+\mathbf{u}_zB_z)\\
&= (\mathbf{u}_x\times\mathbf{u}_x)A_xB_x+(\mathbf{u}_x\times\mathbf{u}_y)A_xB_y+(\mathbf{u}_x\times\mathbf{u}_z)A_xB_z\\
&\quad+(\mathbf{u}_y\times\mathbf{u}_x)A_yB_x+(\mathbf{u}_y\times\mathbf{u}_y)A_yB_y+(\mathbf{u}_y\times\mathbf{u}_z)A_yB_z\\
&\quad+(\mathbf{u}_z\times\mathbf{u}_x)A_zB_x+(\mathbf{u}_z\times\mathbf{u}_y)A_zB_y+(\mathbf{u}_z\times\mathbf{u}_z)A_zB_z.
\end{aligned}$$

و بالاخره با به‌کاربردن معادلهٔ (۲۴.۳) به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= \mathbf{u}_x(A_yB_z-A_zB_y)+\mathbf{u}_y(A_zB_x-A_xB_z)\\
&\quad+\mathbf{u}_z(A_xB_y-A_yB_x).
\end{aligned} \qquad (۲۵.۳)$$

رابطهٔ (۲۵.۳) را می‌توان به‌صورت دترمینان[1] نیز نوشت:

---

* برای‌اثبات درحالت کلی، مراجعه‌کنید به: توماس، جرج، ب. حساب دیفرانسیل وانتگرال وهندسه تحلیلی، ترجمهٔ علی‌اکبر جعفریان و ابوالقاسم میامئی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۹، بخش ۱۲-۷.

1. determinant

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \qquad (۲۶.۳)$$

یادآوری درمورد دترمینان. دترمینان یک علامت ساده برای قرار دادن مقادیری است که باید با رعایت گونه‌ای تقارن ترکیب شوند. یک دترمینان مرتبهٔ ۲، جدولی به تعداد جمله‌های ۲ × ۲ است که با قاعدهٔ زیر حساب می‌شود:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

عملی که صورت می‌گیرد عبارت است از ابتدا ضرب جمله‌های روی یک قطر، سپس تفریق آنها ازهمدیگر. یک دترمینان مرتبهٔ ۳ جدولی به تعداد جمله‌های ۳ × ۳ است که به‌ترتیب زیر حساب می‌شود:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

به‌ترتیبی که ستونها در هرجمله ظاهر می‌شوند توجه داشته باشید. تحقیق کنید که با به‌کار بردن این قاعده درمعادلهٔ (۲۶.۳)، معادلهٔ (۲۵.۳) به‌دست می‌آید.

مثال ۱۲.۳. مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل از دوبردار

$$\mathbf{A} = ۲\mathbf{u}_x + ۳\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_z \quad \text{و} \quad \mathbf{B} = -\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + ۲\mathbf{u}_z$$

را حساب کنید.

حل: ابتدا با استفاده ازمعادلهٔ (۲۶.۳) حاصلضرب برداری $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ را حساب می‌کنیم:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ ۲ & ۳ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۷\mathbf{u}_x - ۳\mathbf{u}_y + ۵\mathbf{u}_z.$$

بنابراین $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ درست برابر مساحت متوازی‌الاضلاع است ویا

$$\text{مساحت متوازی‌الاضلاع} = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{۴۹ + ۹ + ۲۵} = ۹٫۱۱ \text{ واحد}$$

مثال ۱۳.۳. فاصلهٔ نقطهٔ $P(۴, -۱, ۵)$ را از خطی که از نقطه‌های $P_1(-۱, ۲, ۰)$ و $P_2(۱, ۱, ۴)$ می‌گذرد به دست آورید.

حل: شکل ۳۳.۳ ترسیم هندسی مسئله را نشان می‌دهد. از این شکل پیداست که $d = P_1 P \sin\theta$. اینک فرض می‌کنیم

$$\mathbf{A} = \overrightarrow{P_1P} \quad \text{و} \quad \mathbf{B} = \overrightarrow{P_1P_2}$$

که با توجه به معادلهٔ (۱۴.۳) داریم

$$\mathbf{A} = \overrightarrow{P_۱P} = ۵\mathbf{u}_x - ۳\mathbf{u}_y + ۵\mathbf{u}_z$$
$$\mathbf{B} = \overrightarrow{P_۱P_۲} = ۲\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y + ۴\mathbf{u}_z.$$

دراین صورت

$$d = A\sin\theta = \frac{AB\sin\theta}{B} = \frac{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|}{B}.$$

درنتیجه با به‌کاربردن دترمینان (۲۶.۳)، برای محاسبهٔ حاصل‌ضرب برداری **A** و **B** به‌دست می‌آید

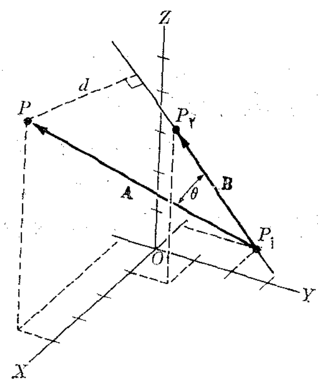
$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ ۵ & -۳ & ۵ \\ ۲ & -۱ & ۴ \end{vmatrix} = -۷\mathbf{u}_x - ۱۰\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z.$$

بنابراین

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = \sqrt{۴۹+۱۰۰+۱} = \sqrt{۱۵۰} = ۱۲٫۲۵.$$

چون $B = \sqrt{۴+۱+۱۶} = ۴٫۵۸۲$ است، خواهیم داشت

$$d = \frac{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|}{B} = \frac{۱۲٫۲۵}{۴٫۵۸۲} = ۲٫۶۷۴ \text{ واحد}$$



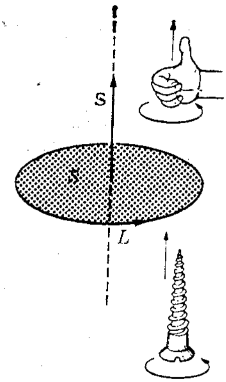
شکل ۳۳.۳

۱۰.۳ نمایش برداری یک سطح

در بحث مربوط به‌شکل ۳۱.۳ گفتیم که بزرگی حاصل‌ضرب برداری $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاعی که دوضلع مجاور آن را بردارهای **A** و **B** تشکیل می‌دهند. بنابراین می‌توان به‌هرسطحی یک بردار نسبت داد.

سطح تخت S را مطابق شکل ۳۴.۳ درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم محیط آن دارای جهتی درسوی پیکان نشان داده شده دراین شکل باشد. مطابق قرارداد بردار $\mathbf{S}$ که راستای آن عمود برسطح S و بزرگی آن برابر مساحت S می‌باشد، نمایش برداری این سطح است. سوی بردار $\mathbf{S}$ درسوی پیشروی پیچ راستگردی است که درسوی انتخاب شده برمحیط سطح می‌چرخد.

مؤلفه‌های بردار $\mathbf{S}$ دارای معنای هندسی ساده‌ای هستند. فرض کنیم که سطح S با صفحهٔ مختصات XOY زاویهٔ θ می‌سازد (شکل ۳۵.۳). تصویرصفحهٔ S روی صفحهٔ XOY برابراست با $S\cos\theta$، که درهندسهٔ فضایی باآن‌آشنا شده‌اید. عمود برسطح S نیز بامحور



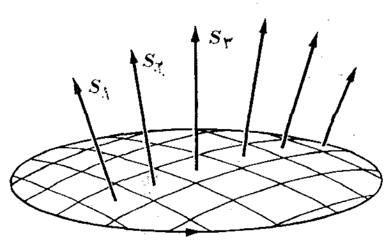
شکل ۳۴.۳. نمایش برداری یک سطح

Zها زاویهٔ θ می‌سازد بنابراین تصویر $\mathbf{S}$ روی محور Z برابر است با $S_z = S\cos\theta$. از اینجا نتیجه می‌گیریم که تصویر بردار $\mathbf{S}$ روی محور های مختصات برابر است با تصویر سطح S روی سه صفحهٔ مختصات.

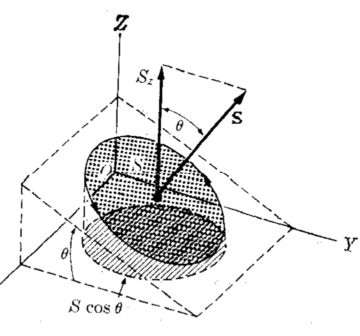
اگر سطح تخت نباشد، می‌توان‌آن را به تعداد خیلی زیاد ازسطحهای کوچک تجزیه کرد (شکل ۳۶.۳)، که هرکدام ازاین سطحها عملا تخت بوده ومی‌توان‌آن را با یک‌بردار $\mathbf{S}_i$ نشان داد. بدین‌طریق برداری که کل سطح را نشان می‌دهد برابرمی‌شود با

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_۱ + \mathbf{S}_۲ + \mathbf{S}_۳ + \cdots = \sum_i \mathbf{S}_i$$

دراین حالت، بزرگی $\mathbf{S}$ با مساحت سطح منحنی $\sum_i S_i$ برابر نیست، ولی بزرگی سه مؤلفهٔ



شکل ۳۶.۳. جمع برداری چندسطح

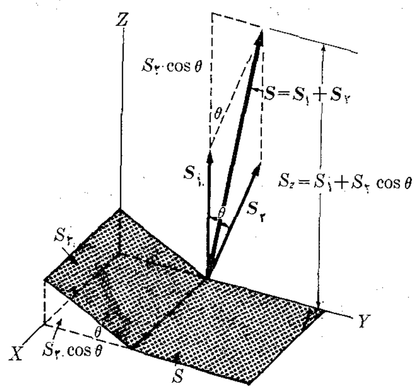


شکل ۳۵.۳. تصویر یک سطح روی یک صفحه

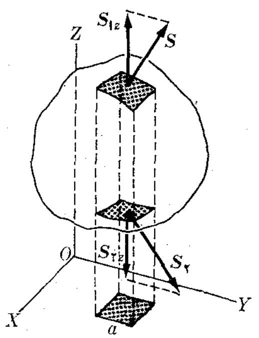
S روی‌محورهای مختصات برابر است با‌مساحت‌تصویرهای سطح برروی سه صفحهٔ‌مختصات.

به عنوان مثال، مطابق شکل ۳۷.۳ قطعه زمینی را درنظر می‌گیریم که بخشی از آن افقی وبخش دیگر بر دامنهٔ یک تپه قرار گرفته است. اگر S_1 و S_2 مساحت هریک از این قسمتها باشد مساحت زمین برابر است با $S_1 + S_2$. ولی اگر بخواهند روی این زمین ساختمان بسازند زمینی‌که واقعاً می‌شود ازآن استفاده کرد تصویر این زمین روی یک سطح افقی‌است که برابرمی‌شود با $S_1 + S_2 \cos\theta$. بردار $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ بردار نمایش این سطح است وبزرگی آن برابر با $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2\cos\theta}$ می‌باشد که از $S_1 + S_2$ کوچکتر است، ولی تصویرآن روی OZ برابر است با $S_z = S_1 + S_2\cos\theta$ که درست برابر تصویر قطعه زمین روی صفحهٔ افقی XOY است.

بالاخره مطابق شکل ۳۸.۳، سطح بسته‌ای را درنظر می‌گیریم. این سطح را به



شکل ۳۷.۳



شکل ۳۸.۳. یک سطح‌بسته با برداری به‌اندازهٔ صفر نشان داده می‌شود.

سطحهای تخت جزئی تقسیم می‌کنیم وهرجزء سطح را با بردار $\mathbf{S}_i$ که سوی آن به سمت خارج سطح است نشان می‌دهیم. همیشه می‌توان به‌ازای هریک سطح کوچک، جزء سطح دیگری پیدا کرد که ترکیب تصویرهاشان برابر صفر باشد. به عنوان مثال، مساحتهای S_1 و S_2 روی شکل ۳۸.۳، اندازهٔ تصویرشان روی XOY برابر ولی با علامت مخالف است. پس $S_{1z} = a$ و $S_{2z} = -a$ است. بنابراین کل سطح از جفت جزء سطحهایی از این‌گونه تشکیل می‌شود که مجموع بردارهای نمایش دهندهٔ آنها برابر است با

$$S_z = \sum_i S_{iz} = 0$$

همین نتیجه برای مؤلفه‌های $\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{S}_i$ روی دومحور دیگر (OX و OY) نیز به دست می‌آید. بنابراین $\mathbf{S} = 0$ می‌شود، به‌گفتهٔ دیگر، بردار نمایش یک سطح بسته برابر صفر است.

فهرست منابع

1. *Vectors, A Programmed Text for Introductory Physics*. New York: Appleton-Century-Crofts, 1962.
2. *Elementary Vectors*, by E. Wolstenholme. New York: Pergamon Press, 1964.
3. *Physical Mechanics* (third edition), by R. Lindsay. Princeton, N.J.: Van Nostrand, 1963, Section 1-3.
4. *Vector Mechanics*, by D. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964.
5. *Introduction to Engineering Mechanics*, by J. Huddleston. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961, Chapters 2 and 7.
6. *The Feynman Lectures on Physics*; Volume I, by R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1963, Chapter 11.
7. سایمون، کیث، ر. مکانیک، ترجمهٔ اعظم نیرومندراد وغلامحسین همدانی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۶، بخشهای ۳ـ۱ و ۳ـ۳.

مسئله‌ها

۱ـ۳. دوبردار به بزرگی ۶ و ۹ واحد، زاویه‌های زیر را با یکدیگر می‌سازند: (الف) 0°، (ب) 60°، (ج) 90°، (د) 150° و (ه) 180°. بزرگی بردار برآیند ونیز راستای آن را نسبت به بردار کوتاهتر درهریک ازحالتهای فوق به دست آورید.

۲ـ۳. زاویهٔ بین دوبردار به بزرگیهای ۱۰ و ۱۵ واحد را، درصورتی‌که طول برآیند آنها (الف) ۲۰ واحد، و (ب) ۱۲ واحد باشد، به دست آورید. شکل مربوط به هرکدام را رسم کنید.

۳ـ۳. زاویهٔ بین دوبردار 110° و یکی از آنها که بزرگی آن ۲۰ واحد است با بردار برآیندشان زاویهٔ 40° می‌سازد. بزرگی بردار دوم وبرآیند را به‌دست آورید.

۴ـ۳. بزرگی برآیند دوبردار ۱۰ واحد و زاویهٔ آن با یکی از بردارها به بزرگی ۱۲ واحد، 35° می باشد. بزرگی بردار دیگر و زاویهٔ بین دوبردار را پیدا کنید.

۵ـ۳. برآیند دوبردار به بزرگیهای ۸ و ۱۰ واحد با بردار بزرگتر زاویهٔ 50° می‌سازد. زاویهٔ بین دوبردار ونیز بزرگی بردار برآیند را حساب کنید.

۶ـ۳. برآیند دوبردار به بزرگی ۳۰ واحد، زاویه‌های 25° و 50° با آنها می‌سازد. بزرگی این دوبردار را پیدا کنید.

۷ـ۳. دوبردار به بزرگیهای ۸ و ۱۰ واحد زاویه‌های زیر را با یکدیگر می‌سازند: (الف) 60°، (ب) 90° و (ج) 120°. بزرگی بردار تفاضل این دوبردار و زاویه‌ای را که بردار تفاضل با بردار بزرگتر می‌سازد به‌دست آورید.

۸ـ۳. مؤلفه‌های قایم برداری به بزرگی ۱۵ واحد را، هنگامی‌که آن بردار با راستای مثبت محور OX زاویه‌های زیر را می‌سازد حساب کنید: (الف) 50°، (ب) 130°، (ج) 230° و (د) 310°.

۹.۳. سه بردار همصفحه بترتیب دارای طولهای ۶، ۵ و ۴ واحد می‌باشند. زاویهٔ بین بردار اول و دوم °۵۰ و زاویهٔ بین بردار دوم و سوم °۷۵ است. بزرگی بردار برآیند و راستای آن را نسبت به بزرگترین بردار به دست آورید.

۱۰.۳. چهار بردار همصفحه بترتیب به طولهای ۸، ۱۲، ۱۰ و ۶ واحد در دست اند. سه بردار آخر بترتیب زاویه‌های °۷۰، °۱۵۰ و °۲۰۰ با بردار اولی می‌سازند. بزرگی و راستای بردار برآیند این چهار بردار را به دست آورید.

۱۱.۳. هواپیمایی از نقطهٔ A در راستای شمال به نقطهٔ B رفته، بعد به نقطهٔ A برمی‌گردد. فاصلهٔ A تا نقطهٔ B برابر L، سرعت هواپیما نسبت به‌هوا برابر v و سرعت باد مساوی v' است. (الف) ثابت کنید که زمان رفت و برگشت در هوای آرام ($v' = ۰$) برابر است با $t_a = ۲L/v$. (ب) ثابت کنید که زمان رفت و برگشت هنگامی که باد کاملا در راستای شرق یا (غرب) بوزد برابر است با

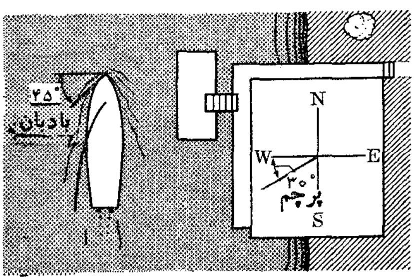
$$t_b = \frac{t_a}{\sqrt{۱ - \left(\frac{v'}{v}\right)^۲}}.$$

(ج) ثابت کنید که زمان رفت و برگشت هنگامی که باد درست در راستای شمال (یاجنوب) بوزد برابر است با

$$t_c = \frac{t_a}{۱ - \left(\frac{v'}{v}\right)^۲}.$$

(د) هنگامی که $v' = v$ باشد آیا پروازهای (ب) و (ج) انجام پذیرند؟ برای یک v' معلوم، کدام یک از زمانهای t_a یا t_c طولانی‌تر است؟

۱۲.۳. بادبان دکل بزرگ یک‌کشتی بادی، چنانکه شکل۳۹.۳ نشان می‌دهد، با زاویه °۴۵



شکل ۳۹.۳

به‌سمت عقب در اهتزاز است. ولی پرچمی‌که بربالای ساختمانی درساحل نصب شده است زاویهٔ °۳۰ باسمت‌جنوب‌غربی(°۳۰ SW) می‌سازد. (الف) اگرسرعت‌کشتی $۱۰\,\mathrm{km\,hr^{-۱}}$ باشد، سرعت باد را پیدا کنید. (ب) سرعت ظاهری باد برای ناظر روی عرشه چقدر است؟

۱۳.۳. اگر بزرگیهای مجموع و تفاضل دو بردار برابر باشند، ثابت کنید این دو بردار

بر یکدیگر عمودند.

۱۴.۳ اگر مجموع و تفاضل دو بردار بر یکدیگر عمود باشند، ثابت کنید بزرگیهای دو بردار باهم برابرند.

۱۵.۳ تحقیق کنید که بزرگیهای مجموع و تفاضل دو بردار **A** و **B** در دستگاه مختصات قایم بترتیب عبارتند از

$$S = [(A_x + B_x)^۲ + (A_y + B_y)^۲ + (A_z + B_z)^۲]^{۱/۲}$$

و

$$D = [(A_x - B_x)^۲ + (A_y - B_y)^۲ + (A_z - B_z)^۲]^{۱/۲}.$$

۱۶.۳ دو بردار

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}_x(۳) + \mathbf{u}_y(۴) + \mathbf{u}_z(-۵)$$

و

$$\mathbf{B} = \mathbf{u}_x(-۱) + \mathbf{u}_y(۱) + \mathbf{u}_z(۲)$$

در دست‌اند. (الف) بزرگی و راستای برآیند این دو بردار؛ (ب) بزرگی و راستای $\mathbf{A} - \mathbf{B}$؛ (ج) زاویهٔ **A** با **B** را پیدا کنید.

۱۷.۳ برآیند سه بردار زیر را به دست آورید:

(الف) $\mathbf{V}_۱ = \mathbf{u}_x(۵) + \mathbf{u}_y(-۲) + \mathbf{u}_z$

(ب) $\mathbf{V}_۲ = \mathbf{u}_x(-۳) + \mathbf{u}_y(۱) + \mathbf{u}_z(-۷)$

(ج) $\mathbf{V}_۳ = \mathbf{u}_x(۴) + \mathbf{u}_y(۷) + \mathbf{u}_z(۶).$

بزرگی برآیند و زاویه‌هایی را که این برآیند با محورهای OX، OY و OZ می‌سازد پیدا کنید.

۱۸.۳ سه بردار زیر در دست اند:

(الف) $\mathbf{V}_۱ = \mathbf{u}_x(-۱) + \mathbf{u}_y(۳) + \mathbf{u}_z(۴)$

(ب) $\mathbf{V}_۲ = \mathbf{u}_x(۳) + \mathbf{u}_y(-۲) + \mathbf{u}_z(-۸)$

(ج) $\mathbf{V}_۳ = \mathbf{u}_x(۴) + \mathbf{u}_y(۴) + \mathbf{u}_z(۴).$

(الف) با دستکاری مستقیم، تعیین کنید که آیا اختلافی بین حاصل ضربهای برداری $\mathbf{V}_۱ \times (\mathbf{V}_۲ \times \mathbf{V}_۳)$ و $(\mathbf{V}_۱ \times \mathbf{V}_۲) \times \mathbf{V}_۳$ وجود دارد؟

(ب) $\mathbf{V}_۱ \cdot (\mathbf{V}_۲ \times \mathbf{V}_۳)$ و $(\mathbf{V}_۱ \times \mathbf{V}_۲) \cdot \mathbf{V}_۳$ را پیدا کنید و اگر اختلافی بین آنها وجود دارد تعیین کنید. $(\mathbf{V}_۳ \times \mathbf{V}_۱) \cdot \mathbf{V}_۲$ را حساب کنید و این نتیجه را با نتیجه‌های دو حاصل ضرب اول مقایسه کنید.

۱۹.۳ حاصل ضرب $\mathbf{V}_۱ \cdot (\mathbf{V}_۲ \times \mathbf{V}_۳)$ را به‌صورت دترمینان بنویسید. ازآنجا ویژگیهای تقارنی زیر را نتیجه بگیرید:

$$\mathbf{V}_۱ \cdot \mathbf{V}_۲ \times \mathbf{V}_۳ = \mathbf{V}_۳ \cdot \mathbf{V}_۱ \times \mathbf{V}_۲ = \mathbf{V}_۲ \cdot \mathbf{V}_۳ \times \mathbf{V}_۱$$

ثابت کنید که مقدار حاصل ضرب سه بردار (حاصل ضرب مختلط) برابر است با حجم متوازی السطوحی که از این سه بردار ساخته می‌شود.

۲۰.۳. ثابت کنید که

$$\mathbf{V}_۱ \times (\mathbf{V}_۲ \times \mathbf{V}_۳) = (\mathbf{V}_۱ \cdot \mathbf{V}_۳)\mathbf{V}_۲ - (\mathbf{V}_۱ \cdot \mathbf{V}_۲)\mathbf{V}_۳$$

[راهنمایی: محور Xها را در راستای $\mathbf{V}_۳$ و محور Yها را به گونه‌ای انتخاب کنید که $\mathbf{V}_۲$ در صفحهٔ XY باشد، با بسط رابطه درستی آن را تحقیق کنید.]

۲۱.۳. فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $P_۱(۴,۵,-۷)$ و $P_۲(-۳,۶,۱۲)$ را پیدا کنید. معادلهٔ خطی را که از این دو نقطه می‌گذرد بنویسید.

۲۲.۳. فاصلهٔ نقطهٔ $P(۴,۵,-۷)$ را از خطی‌که از نقطهٔ $Q(-۳,۶,۱۲)$ می‌گذرد و موازی $\mathbf{V} = ۴\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y + ۳\mathbf{u}_z$ است به دست آورید. همچنین فاصلهٔ نقطهٔ P را از صفحه‌ای که از Q می‌گذرد و بر بردار $\mathbf{V}$ عمود است پیدا کنید.

۲۳.۳. ثابت کنید فاصلهٔ خطی که از نقطهٔ $P_۱$ می‌گذرد و با بردار $\mathbf{V}_۱$ موازی است، از خطی که از نقطهٔ $P_۲$ می‌گذرد و با $\mathbf{V}_۲$موازی است برابر $|\overrightarrow{P_۱P_۲} \cdot (\mathbf{V}_۱ \times \mathbf{V}_۲)/|\mathbf{V}_۱ \times \mathbf{V}_۲|$ است. [یادآوری: فاصلهٔ بین دو خط در فضا برابر است با طول عمود مشترک آنها.] نتیجهٔ بالا را با استفاده از مختصات $P_۱$ و $P_۲$ و مؤلفه‌های $\mathbf{V}_۱$ و $\mathbf{V}_۲$ بسط دهید، وآن را برای حالت زیر به کار ببرید: $P_۱(۴,۵,-۷)$، $P_۲(-۳,۶,۱۲)$،

$$\mathbf{V}_۲ = \mathbf{u}_x(-۲) + \mathbf{u}_y(۱) + \mathbf{u}_z(۳) \quad \text{و} \quad \mathbf{V}_۱ = \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z$$

۲۴.۳. خطی که از نقطهٔ $P_۱(۴,۵,-۷)$ می‌گذرد و با $\mathbf{V}_۱ = -۲\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y - ۴\mathbf{u}_z$ موازی است و صفحه‌ای که از نقطهٔ $Q(-۳,۶,۱۲)$ می‌گذرد و بر بردار $\mathbf{V}_۲ = \mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y + ۲\mathbf{u}_z$ عمود است داده شده‌اند. (الف) معادلهٔ هر کدام را در دستگاه مختصات قایم بنویسید. (ب) محل تقاطع خط و صفحه را پیدا کنید. (ج) زاویهٔ بین خط و صفحه را به دست آورید.

۲۵.۳. معادلهٔ خطی را پیدا کنید که از نقطهٔ $P(۴,۵,-۷)$ می‌گذرد و با فصل مشترک صفحه‌های $۳x + ۲y + ۵z = ۱۰$ و $x + y - z = ۴$ موازی است. معادلهٔ فصل مشترک دو صفحه را نیز به دست آورید.

۲۶.۳. اگر برآیند سه بردار $\mathbf{V}_۱$، $\mathbf{V}_۲$ و $\mathbf{V}_۳$ برابر صفر باشد، ثابت کنید که رابطه‌های زیر برقرارند:

$$\mathbf{V}_۱ \times \mathbf{V}_۳ = \mathbf{V}_۳ \times \mathbf{V}_۲ = \mathbf{V}_۲ \times \mathbf{V}_۱$$

از این رابطه‌ها نتیجه بگیرید که

$$\frac{V_۱}{\sin \angle V_۲V_۳} = \frac{V_۲}{\sin \angle V_۳V_۱} = \frac{V_۳}{\sin \angle V_۱V_۲}.$$

$\angle V_iV_j$ علامت زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{V}_i$ و $\mathbf{V}_j$ است.

۲۷.۳. اگر دو بردار دارای بزرگی یکسان V باشند و با یکدیگر زاویهٔ θ بسازند، ثابت

کنید که بزرگی مجموع آنها برابر $S = ۲V\cos(\theta/۲)$ و تفاضل آنها $D = ۲V\sin(\theta/۲)$ است.

۲۸.۳ با استفاده ازمؤلفه‌های $\mathbf{V}_۱$ و $\mathbf{V}_۲$ در دستگاه مختصات‌کروی [معادلۀ (۱۰.۳)]، ثابت کنید که زاویۀ بین دو بردار را می‌توان از رابطۀ زیر به دست آورد:

$$\cos\theta_{۱۲} = \sin\theta_۱ \sin\theta_۲(\varphi_۱ - \varphi_۲) + \cos\theta_۱ \ \cos\theta_۲$$

که $\theta_{۱۲}$ زاویـۀ بین دو بردار است. از این نتیجه در محاسبه‌های اختر شناسی زیاد استفاده می‌کنند. این رابطه را برای محاسبۀ زاویۀ بین قایمهای سانفرانسیسکو (با عرض جغرافیایی $۳۷°۴۵'$ شمالی وطول $۱۲۲°۲۷'$ غربی) ونیویورک (باعرض‌جغرافیایی $۴۰°۴۰'$ شمالی و طول جغرافیایی $۷۳°۵۰'$ غربی) به کار برید. پاسخ این مسئله را با پاسخ مسئلۀ ۱۷.۲ مقایسه کنید.

۲۹.۳ اگر سه بردار $\mathbf{a}_۱$، $\mathbf{a}_۲$ و $\mathbf{a}_۳$ همصفحه نباشند، بردارهای

$$\mathbf{a}^۱ = \frac{\mathbf{a}_۲ \times \mathbf{a}_۳}{\mathbf{a}_۱ \cdot \mathbf{a}_۲ \times \mathbf{a}_۳}, \ \mathbf{a}^۲ = \frac{\mathbf{a}_۳ \times \mathbf{a}_۱}{\mathbf{a}_۱ \cdot \mathbf{a}_۲ \times \mathbf{a}_۳}, \ \mathbf{a}^۳ = \frac{\mathbf{a}_۱ \times \mathbf{a}_۲}{\mathbf{a}_۱ \cdot \mathbf{a}_۲ \times \mathbf{a}_۳}$$

را بردارهـای متقابل[1] می‌نامند. ثابت کنید کـه $\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_i = ۱$ و $\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = ۰$ است. i و j می‌توانند مقادیر ۱ و ۲ و ۳ را به‌خودبگیرند. در وضع هندسی بردارهای متقابل $\mathbf{a}^۱$، $\mathbf{a}^۲$ و $\mathbf{a}^۳$ نسبت به بردارهای $\mathbf{a}_۱$، $\mathbf{a}_۲$ و $\mathbf{a}_۳$ بحث کنید.

۳۰.۳ ثابت کنید که هر برداری مانند $\mathbf{V}$ را می‌توان به یکی از دو صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{a}^۱)\mathbf{a}_۱ + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{a}^۲)\mathbf{a}_۲ + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{a}^۳)\mathbf{a}_۳ = \sum_i (\mathbf{V} \cdot \mathbf{a}^i)\mathbf{a}_i$$

$$\mathbf{V} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{a}_۱)\mathbf{a}^۱ + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{a}_۲)\mathbf{a}^۲ + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{a}_۳)\mathbf{a}^۳ = \sum_i (\mathbf{V} \cdot \mathbf{a}_i)\mathbf{a}^i$$

۳۱.۳ با نامگذاری $\mathbf{V} \cdot \mathbf{a}_i = V_i$ و $\mathbf{V} \cdot \mathbf{a}^i = V^i$ که آنها را بترتیب مؤلفه‌های همودا[2] و پادوردا[3]ی بردار $\mathbf{V}$ می‌خوانیم، و با نشان دادن $g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ و $g^{ij} = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j$، ثابت کنید

$$V^j = \sum_i V_i g^{ij}, \ V_j = \sum_i V^i g_{ij}$$

و

$$V^۲ = \sum_i V_i V^i = \sum_{ij} V_i V_j g^{ij} = \sum_{ij} V^i V^j g_{ij}.$$

این رابطه‌ها درمحاسبات برداری درهردستگاه مختصات غیرقایم بسیار اهمیت دارند و بویژه در بحث ساختمان بلوربن جامدات در فیزیک حالت جامد[4] بسیار سودمند هستند.

۳۲.۳ ثابت کنید که

$$\mathbf{a}^۱ \cdot \mathbf{a}^۲ \times \mathbf{a}^۳ = \frac{۱}{\mathbf{a}_۱ \cdot \mathbf{a}_۲ \times \mathbf{a}_۳}.$$

۳۳.۳ ثابت کنید که $\mathbf{r} = \mathbf{a}S^۲ + \mathbf{b}S + \mathbf{c}$ (که در آن $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ بردارهای ثابت و S یک اسکالر متغیر می‌باشد) نمایش یک سهمی است که در صفحۀ حاصل از بردارهای $\mathbf{a}$ و

---
1. reciprocal vectors 2. covariant 3. contravariant
4. solid-state physics

$\mathbf{b}$ قرار دارد و این صفحه از نقطه‌ای که بردار مکان آن $\mathbf{c}$ است می‌گذرد.

۳۴.۳. ثابت کنید که یک بردار یکا را در فضای سه بعدی می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_x \cos\alpha + \mathbf{u}_y \cos\beta + \mathbf{u}_z \cos\theta.$$

دراین رابطه زاویه‌های α، β و θ مطابق شکل ۱۷.۳ تعریف می‌شوند.

۳۵.۳. با استفاده از اینکه بردار نمایش یک سطح بسته برابر صفر است، ثابت کنید هر دو سطح که مرزهایشان یک منحنی بسته باشد با بردار یکسانی نشان داده می‌شوند.

۳۶.۳. سطح غیر مسدودی بــه مثلثی به رأسهای (۰, ۰, ۰) و (۲, ۰, ۰) و (۰, ۲, ۰) محدود شده است. این سطح از سه رویهٔ مثلثی‌شکل تشکیل شده که هرکدام دارای یک ضلع مشترک با مثلث محدود کنندهٔ سطح ویک رأس مشترک درنقطهٔ (a, b, c) می‌باشند. ثابت کنید که بردار نمایش کل سطح بستگی به نقطهٔ (a, b, c) ندارد. آیا ازجواب مسئلهٔ ۳۵.۳ می‌توان چنین نتیجه‌ای انتظار داشت؟

۳۷.۳. چهار وجهی حجمی است کــه بــه چهار رویــهٔ مثلثی شکل محدود می‌شود. یک چهار وجهی با رأسهایی به مختصات (۰, ۰, ۰)، (۲, ۰, ۰)، (۰, ۲, ۰) و (۱, ۱, ۱) را در نظرمی‌گیریم. (الف) بردار نمایش هررویه؛ (ب) بردار نمایش مجموعه چهاروجهی؛ (ج) بزرگی سطح چهار وجهی را پیدا کنید. آیا انتظار چنین نتیجه‌ای را برای سؤال (ب) داشتید؟

۳۸.۳. با استفاده ازشیوه‌های برداری، (الف) طول قطرهای یک مکعب؛ (ب) زاویه‌هایی که این قطرها با یالهای مجاور می‌سازنــد؛ (ج) زاویــهٔ بین قطرها با رویه‌های مجاور؛ (د) زاویهٔ بین قطرها را پیدا کنید.

۳۹.۳. رویــه‌های یک چهار وجهی منتظم از مثلثهای متساوی الاضلاع بـه ضلع a تشکیل شده انــد. بااستفاده از روشهای برداری، زاویه‌ای که هریال با رویهٔ مقابل می‌سازد وفاصلهٔ یک رأس از رویهٔ مقابل را پیدا کنید.

۴
نیروها

۱.۴ مقدمه

یکی ازموارد بسیار مهم کاربرد جبربرداری درترکیب نیروهاست. درفصل ۷، هنگام بررسی دینامیک حرکت، تعریف دقیق نیرو خواهد آمد. با این حال، برای به دست آوردن مهارت بیشتر درکارکردن با بردارها، دراینجا ترکیب نیروها، و بویژه ترازمندی[1] آنها را که کاربرد گسترده‌ای درمهندسی دارد، مطالعه می‌کنیم.

ما فعلا برای نیروهمان معنای حسی و شهودی راکه ازتجربیات روزانه ناشی می‌شود می‌پذیریم، مانند نیرویی‌که برای کشیدن یا هل‌دادن یک وزنهٔ معلوم لازم‌است، یا نیرویی‌که بعضی اسبابها وارد می‌کنند وغیره. این تعریف ایجاب می‌کند که نیرو یک کمیت برداری بوده ودارای بزرگی (یاشدت)، راستا وسو باشد. آزمایش نشان می‌دهد که نیروها بنا به قواعد جبربرداری باهم ترکیب می‌شوند. ما دراین فصل، تنها به‌بحث درمورد نیروهای‌وارد برنقطه‌های مادی ویاذرات واجسام سخت[2] می‌پردازیم.

دردستگاه MKSC یکای نیرو نیوتون (باعلامت اختصاری N) است که دربخش ۸.۷ تعریف خواهد شد. با این‌حال، در این فصل، نیرورا برحسب یکاهای دیگر، ازقبیل کیلوگرم - نیرو (kgf) پوند - نیرو (lbf)، پوندال (pdl) وتن (T) نیزبیان خواهیم کرد. این یکاها که غالباً به‌وسیلهٔ مهندسین به‌کار می‌روند، برحسب نیوتون برابرند با

$$۱\ \mathrm{kgf} = ۹٫۸\mathrm{N}, \qquad ۱\ \mathrm{lbf} = ۰٫۴۶\,\mathrm{kgf} \approx ۴٫۴۵\mathrm{N},$$

$$۱\ \mathrm{pdl} = ۰٫۰۳۱\,\mathrm{lbf} \approx ۰٫۱۳۸\,\mathrm{N}, \quad ۱\ \mathrm{T} = ۲۰۰۰\,\mathrm{lbf} \approx ۸۹۰۰\,\mathrm{N}.$$

معمولا در صنعت به‌جای پوند-نیرو و کیلوگرم-نیرو به‌طور ساده یکاهای جرم یعنی «پوند» و«کیلوگرم» را به کار می‌برند.

۲.۴ ترکیب نیروهای همرس

اگرنیروها، همرس[3] باشند (یعنی همگی به‌یک نقطه‌وارد شوند)، برآیندشان ازجمع برداری آنها، مطابق روش به کار رفته دربخش ۶.۳ به‌دست می‌آید. بنابراین $\mathbf{R}$، برآیند نیروهای همرس $\mathbf{F}_۱$، $\mathbf{F}_۲$، $\mathbf{F}_۳$، ... برابر است با

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_۱ + \mathbf{F}_۲ + \mathbf{F}_۳ + \cdots = \textstyle\sum_i \mathbf{F}_i \qquad (۱.۴)$$

اگرنیروها دریک‌صفحه، به‌عنوان مثال درصفحهٔ YX، قرارگرفته باشند، بنابه‌معادلهٔ (۱۶.۳) داریم

$$\mathbf{R} = \mathbf{u}_x R_x + \mathbf{u}_y R_y$$

که درآن

---

1. equilibirium 2. rigid body 3. concurrent

$$R_x = \sum F_{ix} = \sum F_i \cos\alpha_i$$
$$R_y = \sum F_{iy} = \sum F_i \sin\alpha_i \qquad (۲.۴)$$

بزرگی بردار $\mathbf{R}$ برابر است با $R = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$ وراستای‌آن را زاویهٔ α مشخص می‌کنند به طوری که $\operatorname{tg}\alpha = R_y/R_x$ است. باید بپذیریم که برآیند $\mathbf{R}$ از نظر فیزیکی هم‌ارز مؤلفه‌های $\mathbf{F}_{۱}$، $\mathbf{F}_{۲}$، $\mathbf{F}_{۳}$، ... می‌باشد.

مثال ۱.۴. برآیند نیروهای‌وارد برنقطهٔ O درشکل ۱.۴ را به‌دست آورید. نیروی $\mathbf{F}_{۱}$ برابر N ۱۲۰۰، نیروی $\mathbf{F}_{۲}$ برابر N ۹۰۰، نیروی $\mathbf{F}_{۳}$ برابر N ۳۰۰ ونیروی $\mathbf{F}_{۴}$ برابرN۸۰۰ است. سو و راستای نیروها در شکل مشخص شده است.

حل: ابتدا، بااستفاده از زاویه‌ای که هرنیرو باسوی مثبت محور Xها می‌سازد، هر نیرو را برحسب مؤلفه‌های آن برروی OX و OY می‌نویسیم. در این صورت به دست می‌آید

$$\mathbf{F}_{۱} = \mathbf{u}_x (۱۲۰۰)\mathrm{N}$$
$$\mathbf{F}_{۲} = \mathbf{u}_x (F_{۲}\cos ۴۰^\circ) + \mathbf{u}_y (F_{۲}\sin ۴۰^\circ) = \mathbf{u}_x (۶۸۹٫۴) + \mathbf{u}_y (۵۷۸٫۵)\mathrm{N}$$
$$\mathbf{F}_{۳} = \mathbf{u}_x (F_{۳}\cos ۱۲۰^\circ) + \mathbf{u}_y (F_{۳}\sin ۱۲۰^\circ) = \mathbf{u}_x (-۱۵۰) + \mathbf{u}_y (۲۵۹٫۸)\mathrm{N}$$
$$\mathbf{F}_{۴} = \mathbf{u}_x (F_{۴}\cos ۲۳۰^\circ) + \mathbf{u}_y (F_{۴}\sin ۲۳۰^\circ)$$
$$= \mathbf{u}_x (-۵۱۴٫۲) + ۲\mathbf{u}_y (-۶۱۲٫۸)\mathrm{N}.$$

چون $\mathbf{R} = \mathbf{F}_{۱} + \mathbf{F}_{۲} + \mathbf{F}_{۳} + \mathbf{F}_{۴}$ است، داریم

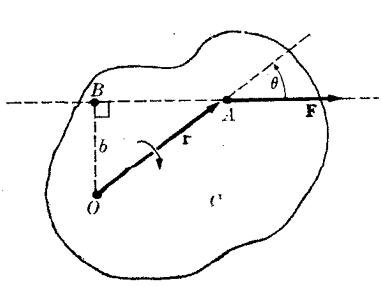
$$R_x = ۱۲۰۰ + ۶۸۹٫۴ - ۱۵۰ - ۵۱۴٫۲ = ۱۲۲۵٫۲\,\mathrm{N}$$
$$R_y = ۰ + ۵۷۸٫۵ + ۲۵۹٫۸ - ۶۱۲٫۸ = ۲۲۵٫۵\,\mathrm{N}.$$

بنابراین

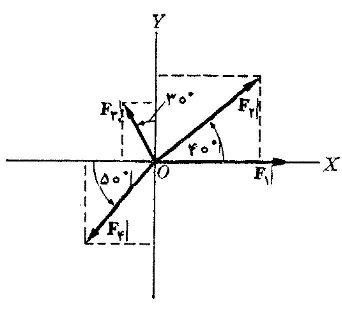
$$\mathbf{R} = \mathbf{u}_x (۱۲۲۵٫۲) + \mathbf{u}_y (۲۲۵٫۵)\mathrm{N}.$$

ازاینجا بزرگی و راستای نیروی برآیند بترتیب برابر می‌شوند با

$$R = ۱۲۴۵٫۴\,\mathrm{N} \text{ و } \alpha = ۱۰٫۴^\circ$$



شکل ۲.۴. گشتاور یک نیرو



شکل ۱.۴

۳.۴ گشتاور نیرو

فرض کنیم نیروی **F** برروی جسم C که می‌تواند دور نقطهٔ O بچرخد وارد می‌شود (شکل ۲.۴). اگرراستای **F** ازنقطهٔ O نگذرد، براثراین نیرو جسم حول نقطهٔOمی‌چرخد. تجربیات روزانه نشان می‌دهند که شدت تأثیر نیروی **F** درچرخاندن جسم C متناسب با $OB = b$ (به‌نام بازوی اهرم) یافاصلهٔ نقطهٔ O از راستای (خط اثر) نیرو افزایش می‌یابد. به عنوان مثال، هنگامی‌که دری‌را بازمی‌کنیم، همیشه ازفاصله خیلی دور ازلولاآن را می‌کشیم و یا فشار می‌دهیم ونیز سعی می‌کنیم راستای نیروی وارد بر در هنگام کشیدن یافشار دادن بر آن عمود باشد. ازاین آزمایش نتیجه می‌گیریم که می‌توان یک کمیت فیزیکی، به نام گشتاور نیرو[1] با رابطهٔ زیرتعریف کرد:

$$\tau = F\,b \qquad (۳.۴)$$

یا، گشتاورنیرو = نیرو × بازوی اهرم. بنابراین گشتاورنیرو را می‌توان برحسب‌حاصل‌ضرب یک واحد نیرو ویک واحد فاصله بیان کرد. بدین طریق دردستگاه یکاهای MKSC گشتاورنیرو برحسب نیوتون × متر، یا Nm بیان می‌شود. یکاهای دیگر مانند kgfm یا lbf ft نیز برای بیان گشتاور نیرو به‌کارمی‌روند.

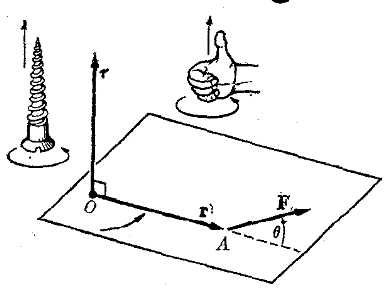
باتوجه به‌شکل ۲.۴ که $b = r\sin\theta$ است، می‌توان نوشت

$$\tau = F\,r\sin\theta. \qquad (۴.۴)$$

با مقایسهٔ این رابطه بامعادلهٔ (۳ . ۲۱)، نتیجه می‌گیریم که گشتاورنیرو را می‌توان یک کمیت برداری در نظر گرفت وبا حاصل‌ضرب برداری زیرنشان داد:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (۵.۴)$$

که در آن **r** بردار مکان نقطهٔ A یانقطهٔ اثرنیرو نسبت به نقطهٔ O است. بنا به‌خواص ضرب برداری، گشتاور نیرو را بابرداری در راستای عمود بر **r** و **F** یعنی عمود برصفحهٔ حاصل از **r** و **F** نمایش می‌دهند. سوی آن، چنانکه در شکل ۳.۴ نشان داده شده است، درسوی پیشروی یک پیچ راستگرد است که درسو وراستای **F** دور نقطهٔ O می‌پیچد.



شکل ۳.۴. رابطهٔ برداری بین گشتاور، نیرو و بردار مکان

با توجه به اینکه $\mathbf{F} = \mathbf{u}_x F_x + \mathbf{u}_y F_y + \mathbf{u}_z F_z$ و $\mathbf{r} = x\,\mathbf{u}_x + y\,\mathbf{u}_y + z\,\mathbf{u}_z$

1. torque

است و با به‌کاربردن معادلهٔ (۲۶.۳) داریم

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \mathbf{u}_x (y F_z - z F_y) +$$

$$\mathbf{u}_y (z F_x - x F_z) + \mathbf{u}_z (x F_y - y F_x) \qquad (۶.۴)$$

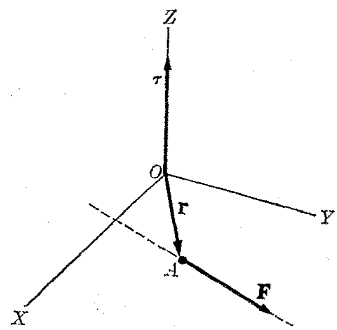
یا $\tau_x = y F_z - z F_y$ و $\tau_y = z F_x - x F_z$ و $\tau_z = x F_y - y F_x$ به ویژه، اگر $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ هردو درصفحهٔ OXY باشند، یعنی $z = ۰$ و $F_z = ۰$ باشد، خواهیم داشت

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{u}_z (x F_y - y F_x). \qquad (۷.۴)$$

و همچنانکه شکل ۴.۴ نشان می‌دهد، بردار $\boldsymbol{\tau}$ موازی محور Z هاست. بزرگی این بردار برابراست با

$$\tau = x F_y - y F_x. \qquad (۸.۴)$$

باید یادآوری کرد که با جابجا شدن نقطهٔ اثرنیرودرراستای آن، گشتاور نیروتغییر نمی‌کند، زیرا فاصلهٔ b بدون تغییر باقی می‌ماند. همچنین به‌ازای مقادیراختیاری x و y، رابطهٔ (۸.۴) معادلهٔ خط اثرنیرویی را بیان می‌کند که گشتاور آن $\boldsymbol{\tau}$ می‌باشد.



شکل ۴.۴

مثال ۲.۴. گشتاور نیروی وارد بر جسم شکل ۵.۴ را تعیین کنید که در آن بزرگی $\mathbf{F}$ برابر $۶\ \mathrm{N}$ است وراستای آن با محور X ها زاویهٔ ۳۰° می‌سازد و بزرگی $\mathbf{r}$، $۴۵\ \mathrm{cm}$ است و با سوی مثبت محور X ها زاویه ۵۰° می‌سازد. همچنین معادلهٔ خط اثر این نیرو را پیدا کنید.

حل: می‌توان مسئله را به دو راه مختلف حل کرد. ابتدا، از روی شکل پیداست که بازوی اهرم $\mathbf{F}$ برابر است با

$$b = r \sin ۲۰^\circ = (۰٫۴۵\ \mathrm{m})(۰٫۳۴۲) = ۰٫۱۵۴\ \mathrm{m}.$$

بنابراین گشتاور نیرو نسبت به‌نقطهٔ O برابر است با

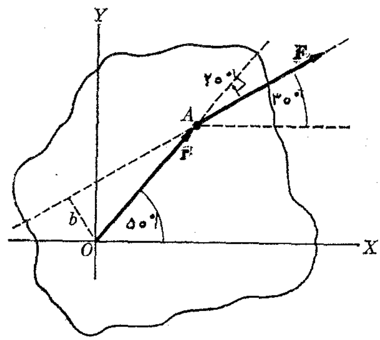
$$\tau = F\,b = (۶\,\mathrm{N})(۰٫۱۵۴\,\mathrm{m}) = ۰٫۹۲۴\,\mathrm{N\,m}.$$

به‌عبارت دقیقتر، باید نوشت $-۰٫۹۲۴\,\mathrm{N\,m}$، زیرا چرخش $\mathbf{F}$ دور نقطهٔ O در جهت ساعتگرد[1] صورت می‌گیرد، که متناظر است با پیشروی پیچ راستگرد درسوی Z های منفی، یا به‌سوی داخل کاغذ.

به عنوان روش دوم، می‌توان معادلهٔ (۸.۴) را به کار برد، زیرا مسئله در صفحه (دوبعدی) است. داریم

$$x = r\cos ۵۰^\circ = ۰٫۲۸۹\,\mathrm{m}, \quad y = r\sin ۵۰^\circ = ۰٫۳۴۵\,\mathrm{m},$$

$$F_x = F\cos ۳۰^\circ = ۵٫۱۹۶\,\mathrm{N}, \; F_y = F\sin ۳۰^\circ = ۳٫۰\,\mathrm{N}$$



شکل ۵.۴

و درنتیجه

$$\tau = xF_y - yF_x = ۰٫۸۶۷ - ۱٫۷۹۲ = -۰٫۹۲۵\,\mathrm{N\,m}$$

که با پاسخ قبلی تطبیق می‌کند. برتری روش‌دوم دراین است‌که علامت را نیزمشخص می‌کند.

برای به‌دست آوردن معادلهٔ خط اثر نیروی $\mathbf{F}$، تنها کافی است، x و y را در معادلهٔ (۸.۴) مجهول اختیار کنیم؛ به‌دست می‌آید

$$-۰٫۹۲۵ = ۳x - ۵٫۱۹۶\,y$$

یا به‌طور ساده‌تر

$$y = ۰٫۵۷۷\,x + ۰٫۱۷۸$$

۴.۴ گشتاور چند نیروی همرس

اکنون حالتی را درنظر می‌گیریم که چند نیروی $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{F}_2$، $\mathbf{F}_3$، . . . به‌نقطه‌ای مانند A وارد می‌شوند(شکل ۶.۴). گشتاور نیرویی مانند $\mathbf{F}_i$ نسبت به‌نقطهٔ O برابراست با $\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{r}\times\mathbf{F}_i$.

1. clockwise

توجه داشته باشید نوشتیم $\mathbf{r}$ نه $\mathbf{r}_i$ زیرا تمام‌نیروها به‌یک‌نقطه (A) وارد می‌شوند. گشتاور نیروی برآیند ($\mathbf{R}$) برابر است با

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$$

که درآن $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots$ و $\mathbf{r}$ همان بردارمکان‌مشترک نیروهاست. با استفاده ازخاصیت توزیع پذیری ضرب برداری، داریم

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots)$$
$$= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_3 + \cdots$$

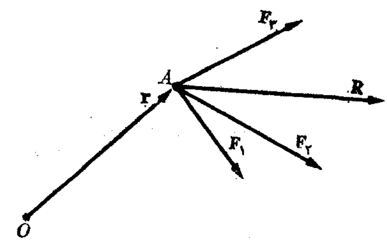
درنتیجه

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_3 + \cdots = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i \qquad (۹.۴)$$

رابطهٔ (۹.۴) بدین‌طریق بیان می‌شود: گشتاور برآیند چند نیروی همرس برابراست با جمع برداری گشتاورهای نیروهای مؤلفه.

اگـر همه نیروها در یک صفحه بـاشند و نقطهٔ O نیز در همین صفحه بـاشد، تمام گشتاورهایی که درمعادلهٔ (۹.۴) ظاهر می‌شوند، در راستای عمود برصفحه می‌باشند ومعادلهٔ برداری (۹.۴) به‌صورت اسکالر زیر نوشته می‌شود:

$$\tau = \sum_i \tau_i \qquad (۱۰.۴)$$



شکل ۶.۴. هنگامی‌که نیروها همرس باشند، گشتاورنیروی برآیند برابراست باجمع‌برداری گشتاورهای نیروهای مؤلفه.

معادلهٔ (۹.۴) ثابت می‌کند که یک نیروی واحد را می‌توان جانشین یک دستگاه نیروهای همرس‌کرد. این‌نیروی‌واحدبرآیند نیروهای‌همرس‌است‌وتازمانی‌که موضوع مطالعهٔ پدیده‌های انتقال و چرخش باشد کاملا هم‌ارز دستگاه نیروهاست.

مثال ۳.۴. سه نیرو مطابق شکل ۷.۴ به‌نقطهٔ A وارد می‌شوند که $r = ۱٫۵\ \mathrm{m}$ است و

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{u}_x(۶) + \mathbf{u}_y(۰) + \mathbf{u}_z(۰)\,\mathrm{N}$$
$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{u}_x(۶) - \mathbf{u}_y(۷) + \mathbf{u}_z(۱۴)\,\mathrm{N}$$
$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{u}_x(۵) + \mathbf{u}_y(۰) - \mathbf{u}_z(۳)\,\mathrm{N}.$$

با انتخاب نقطهٔ O به عنوان مبدأ مختصات، گشتاور برآیند این نیروها را به‌دست آورید.

حل: ابتدا با به‌کار بستن رابطهٔ $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$ که درآن $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i$ است، داریم

$$\mathbf{R} = \mathbf{u}_x(۶ + ۶ + ۵) + \mathbf{u}_y(۰ - ۷ + ۰) + \mathbf{u}_z(۰ + ۱۴ - ۳)$$
$$= \mathbf{u}_x(۱۷) - \mathbf{u}_y(۷) + \mathbf{u}_z(۱۱)\mathrm{N}.$$

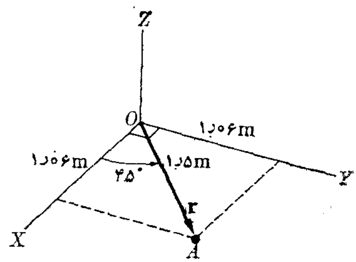
با توجه به‌اینکه $\mathbf{r} = \mathbf{u}_x(۱٫۰۶) + \mathbf{u}_y(۱٫۰۶)\,\mathrm{m}$ است و بـا استفاده ازمعادلهٔ (۶.۴) گشتاور برآیند را به‌دست می‌آوریم:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{u}_x(۱۱٫۶۶) - \mathbf{u}_y(۱۱٫۶۶) - \mathbf{u}_z(۲۵٫۴۴)\mathrm{Nm}.$$

همچنین گشتاور برآیند را می‌توان با استفاده از معادلهٔ (۹.۴) نیز پیدا کرد. با به کار بردن معادلهٔ (۶.۴) برای هرنیرو می‌توانیم بنویسیم

$$\boldsymbol{\tau}_۱ = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_۱ = \mathbf{u}_x(۰) + \mathbf{u}_y(۰) - \mathbf{u}_z(۶٫۳۶)\mathrm{Nm}$$
$$\boldsymbol{\tau}_۲ = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_۲ = \mathbf{u}_x(۱۴٫۴۸) - \mathbf{u}_y(۱۴٫۴۸) - \mathbf{u}_z(۱۳٫۷۸)\mathrm{Nm}$$
$$\boldsymbol{\tau}_۳ = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_۳ = -\mathbf{u}_x(۳٫۱۸) + \mathbf{u}_y(۳٫۱۸) - \mathbf{u}_z(۵٫۳۰)\mathrm{Nm}.$$

ازجمع سه‌گشتاورفوق، بردار $\boldsymbol{\tau}$ که قبلا پیداکرده بودیم، به‌دست می‌آید. بدین‌طریق، رابطهٔ (۹.۴) یک بار دیگر تأیید می‌شود. تحقیق کنید کـه $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R} = ۰$ است، این رابطـه نشان می‌دهد هنگامی که نیروها همرس باشند $\boldsymbol{\tau}$ و $\mathbf{R}$ برهم عمودند.



شکل ۷.۴

۵.۴ ترکیب نیروهای وارد بریک جسم سخت

هنگامی که نیروها به یک نقطه وارد نمی‌شوند، ولی بر یک جسم سخت اثر می‌کنند، لازم است دو اثرانتقال و چرخش ازیکدیگرمتمایزشوند. انتقال یک جسم سخت با جمع برداری نیروها، یعنی

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_۱ + \mathbf{F}_۲ + \mathbf{F}_۳ + \cdots = \textstyle\sum_i \mathbf{F}_i \qquad (۱۱.۴)$$

مشخص می‌شود. دراین مورد نقطهٔ اثرنیروی برآیند $\mathbf{R}$ هنوز معلوم نیست. حرکت چرخشی جسم را جمع برداری گشتاور نیروها، کـه همگی نسبت به یک نقطه به دست آمده باشند مشخص می‌کند:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_۱ + \boldsymbol{\tau}_۲ + \boldsymbol{\tau}_۳ + \cdots = \textstyle\sum_i \boldsymbol{\tau}_i \qquad (۱۲.۴)$$

در نظر اول، منطقی به‌نظر می‌رسد بپذیریم که نقطهٔ اثرنیروی $\mathbf{R}$ باید چنان باشد که‌گشتاور نیروی $\mathbf{R}$ برابر $\boldsymbol{\tau}$ باشد، وضعی که همیشه درمورد نیروهای همرس صادق است. اگراین‌امر

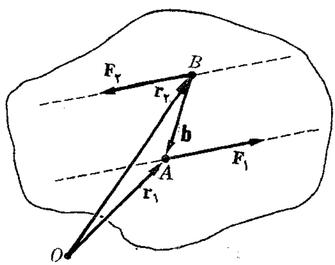
ممکن باشد، نیرویی که بدین طریق اثر می‌کند هم‌ارز دستگاه نیروهاست چه در انتقال و چه در چرخش.

ولی معمولا چنین‌امری ممکن نیست زیرا گشتاور نیروی $\mathbf{R}$ برداری است عمود بر $\mathbf{R}$ و در بیشتر موارد $\mathbf{R}$ و $\boldsymbol{\tau}$ که ازمعادله‌های (۱۱.۴) و (۱۲.۴) به‌دست می‌آیند برهم عمود نیستند. بنابراین درحالت کلی، یک دستگاه نیروهای وارد بریک جسم سخت را نمی‌توان به‌یک نیروی واحد یا برآیند نیروها کاهش داد.

به‌عنوان مثال‌ساده، یک جفت[1] رادرنظر می‌گیریم. یک جفت،مجموعهٔ دونیروی‌مساوی ولی با علامت مخالف است که در دو راستای موازی اثرمی‌کنند (شکل ۸.۴). بدیهی‌است برآیند یا جمع برداری این دو نیرو برابر صفر است، $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$، و نشان می‌دهد که یک جفت هرگز اثر انتقالی روی جسم ندارد. برعکس با توجه به اینکه $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ است، جمع برداری گشتاورها برابر است با

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1 \\ &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{b} \times \mathbf{F}_1 \qquad (۱۳.۴)\end{aligned}$$

که درآن $\mathbf{b} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ بازوی اهرم جفت[2] نامیده می‌شود. بنابراین $\boldsymbol{\tau} \neq 0$ است‌وجفت موجب یک‌حرکت چرخشی‌می‌شود. لازم است یادآوری شود که b به‌نقطهٔ O بستگی‌ندارد، درنتیجه گشتاور یک جفت مستقل از مبدایی است که محاسبه نسبت به آن صورت می‌گیرد. بدیهی است که امکان ندارد یک نیروی واحد دارای تمام این شرایط باشد.



شکل ۸.۴. جفت نیرو

به‌حالت کلی باز می‌گردیم. ملاحظه می‌شود که یک دستگاه نیرو را می‌توان به‌یک نیرو و یک جفت کاهش داد. برای حرکت انتقالی، نیروی هم‌ارز را برابر $\mathbf{R}$ انتخاب می‌کنیم و این نیرو به‌نقطه‌ای وارد می‌شود که گشتاورها نسبت به آن نقطه حساب شده‌اند، به‌طوری‌که گشتاور خود $\mathbf{R}$ برابر صفر است. برای هم‌ارزی چرخشی، جفتی اختیار می‌شود که گشتاور آن $\boldsymbol{\tau}$ باشد.

مثال ۴.۴ نیروی‌برآیند و گشتاور برآیند دستگاه نیروهای شکل ۹.۴ را به‌دست‌آورید. دراین شکل

1. couple 2. lever arm of couple

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{u}_x(3) + \mathbf{u}_y(4) + \mathbf{u}_z(4)\,\mathrm{N}$$

و

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{u}_x(-2) + \mathbf{u}_y(5) + \mathbf{u}_z(1)\,\mathrm{N}$$

و نقطهٔ اثر نیروهای $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ بترتیب

$A(0.4\,\mathrm{m}, 0.5\,\mathrm{m}, 0)$ و $B(0.4\,\mathrm{m}, -0.1\,\mathrm{m}, 0.8\,\mathrm{m})$ است.

حل: ابتدا برآیند را پیدا می‌کنیم:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{u}_x(1) + \mathbf{u}_y(9) + \mathbf{u}_z(5)\,\mathrm{N}.$$

سپس گشتاور هر نیرو را نسبت به‌نقطهٔ O، مبدأ مختصات، حساب می‌کنیم:

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{u}_x(2) + \mathbf{u}_y(-1.6) + \mathbf{u}_z(0.1)\,\mathrm{N\,m}$$
$$\boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{u}_x(-4.1) + \mathbf{u}_y(-2.0) + \mathbf{u}_z(1.8)\,\mathrm{N\,m}.$$

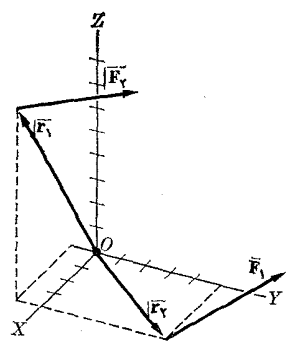
بنابراین

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{u}_x(-2.1) + \mathbf{u}_y(-3.6) + \mathbf{u}_z(1.9)\,\mathrm{N\,m}.$$

اکنون بررسی می‌کنیم که‌آیا $\mathbf{R}$ رامی‌توان به‌گونه‌ای قرار داد تا گشتاورآن برابر $\boldsymbol{\tau}$ باشد؟ برای این کار ابتدا باید ببینیم که آیا $\mathbf{R}$ و $\boldsymbol{\tau}$ برهم عمودند یا نـه. بنا به معادلهٔ (۲۰.۳) پیدا می‌کنیم

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R} = (-2.1)(1) + (-3.6)(9) + (1.9)(5) = 25.0\,\mathrm{N^2\,m}$$

$\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\tau}$ مخالف صفر است. بنابراین دستگاه نیروهای شکل ۹.۴ را نمی‌توان به یک نیروی واحد کاهش داد.



شکل ۹.۴

۶.۴ ترکیب نیروهای همصفحه

هنگامی که همهٔ نیروها دریک صفحه قرار دارند، همیشه می‌توان دستگاه نیروها را به یک نیروی $\mathbf{R}$، نیروی برآیند که ازمعادلهٔ(۱.۴) به‌دست می‌آید کاهش داد (مگراینکه $\mathbf{R} = 0$

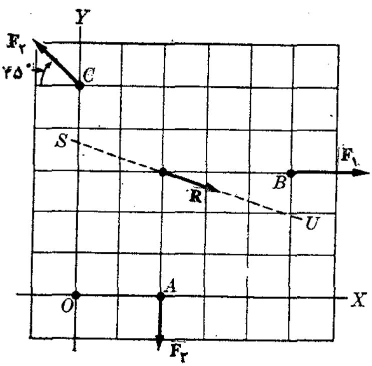
ولی $\boldsymbol{\tau} \neq 0$ باشد). زیرا در این حالت همیشه $\boldsymbol{\tau}$ بر $\mathbf{R}$ عمود است. با قراردادن O مبدأ مختصات درمرکزگشتاورها (نقطه‌ای که گشتاور نیروها نسبت به‌آن نقطه حساب می‌شوند) در صفحهٔ نیروها، مشاهده می‌شود که $\boldsymbol{\tau}_1$، $\boldsymbol{\tau}_2$ . . . و همچنین $\sum_i \boldsymbol{\tau}_i$ همگی برصفحه عمودند، چنانکه بـا به‌کاربردن معادلهٔ (۶.۴) یـا (۷.۴) و نیز از روی شکل ۴.۴ مشاهده می‌شود. بنابراین $\mathbf{R}$ و $\boldsymbol{\tau}$ برهم عمودند. $\mathbf{R}$ را می‌توان درفاصلهٔ $\mathbf{r}$ از O قرار داد به‌طوری‌که‌گشتاور آن بـرابر $\boldsymbol{\tau}$ باشد، یعنی $\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \boldsymbol{\tau}$. در این صورت رابطـهٔ اسکالر $\tau = \sum_i \tau_i$ را می‌توان جانشین رابطهٔ برداری $\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i$ کرد، زیراتمام بردارهای $\boldsymbol{\tau}_i$ همراستا هستند. τ_i ها ازمعادلهٔ (۸.۴) محاسبه می‌شوند. بنابراین‌اگر R_x و R_y مؤلفه‌های $\mathbf{R}$ دریک دستگاه مختصات قایم باشند، دراین صورت $\mathbf{R}$ را باید درنقطهٔ (x, y) قرار داد، به‌گونه‌ای که

$$xR_y - yR_x = \tau. \qquad (۱۴.۴)$$

باشد. رابطهٔ فوق معادلهٔ خط اثـر برآیند نیروهاست. بنابراین یک نقطه اثـر وجود ندارد بلکه یک خط اثر وجود دارد.

با یک اثبات ظریفتر می‌توان نشان داد کـه این نتیجه حتی بـرای حالتی کـه مرکز گشتاور نیروها درخارج ازصفحهٔ نیروها باشد نیز معتبر است.

مثال ۵.۴. برآیند دستگاه نیروهای نشان داده شده درشکل ۱۰.۴ را، کـه تمام آنها در یک صفحه قرار دارند، تعیین کنید. $F_1 = ۱۰\,\mathrm{N}$ و $F_2 = ۸\,\mathrm{N}$ و $F_3 = ۷\,\mathrm{N}$ و ضلع هرمربع برابر ۱ر۰ m است.



شکل ۱۰.۴

حل: ابتدا نیروها را به‌صورت برداری می‌نویسیم:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{u}_x(۱۰)\,\mathrm{N}$$
$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{u}_x(F_2 \cos ۱۳۵^\circ) + \mathbf{u}_y(F_2 \sin ۱۳۵^\circ) = \mathbf{u}_x(-۵٫۶۶) + \mathbf{u}_y(۵٫۶۶)\,\mathrm{N}$$
$$\mathbf{F}_3 = -\,\mathbf{u}_y(۷)\,\mathrm{N}.$$

بنابراین نیروی برآیند $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$ برابر است با

$$\mathbf{R} = \mathbf{u}_x(۴٫۳۴) + \mathbf{u}_y(-\,۱٫۳۴)\,\mathrm{N}$$

یا $R = ۴٫۵۴\text{N}$ و زاویهٔ آن با محور Xها برابرمی‌شود با $\alpha = -۱۷٫۱^\circ$. نقطهٔ اثر نیروها عبارتند از $A(۰٫۲\ \text{m}, ۰)$ و $B(۰٫۵\ \text{m}, ۰٫۳\ \text{m})$ و $C(۰, ۰٫۵\ \text{m})$. با استفاده از معادلهٔ (۸.۴) گشتاور نیروها را حساب می‌کنیم:

$$\tau_۱ = -(۰٫۳\ \text{m})(۱۰\ \text{N}) = -۳٫۰۰\ \text{Nm}$$
$$\tau_۲ = -(۰٫۵\ \text{m})(-۵٫۶۶\ \text{N}) = ۲٫۸۳\ \text{Nm}$$
$$\tau_۳ = (۰٫۲\ \text{m})(-۷\ \text{N}) = -۱٫۴۰\ \text{Nm}.$$

بنابراین $\tau = \tau_۱ + \tau_۲ + \tau_۳ = -۱٫۵۷\,\text{Nm}$ برداری است درراستای محور Zها. برای یافتن خط اثر برآیند، معادلهٔ (۱۴.۴) را با x و y اختیاری به کار می‌بریم:

$$x(-۱٫۳۴) - y(۴٫۳۴) = -۱٫۵۷$$

و یا

$$۱٫۳۴\,x + ۴٫۳۴\,y = ۱٫۵۷$$

که مربوط است به‌خط SU.

۷.۴ ترکیب نیروهای موازی

یک دستگاه نیروهای موازی با بردار یکای $\mathbf{u}$ را درنظر می‌گیریم. دراین مورد $\mathbf{F}_i = \mathbf{u}F_i$ است. دراینجا F_i، اگر $\mathbf{F}_i$ با $\mathbf{u}$ همسو باشد،مثبت، واگردرسوی مخالف آن‌باشد، منفی است. جمع برداری آنها

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{u}F_i = \mathbf{u}(\sum_i F_i) \qquad (۱۵.۴)$$

نیز موازی $\mathbf{u}$ است. از این رو بزرگی برآیند برابر می‌شود با

$$R = \sum_i F_i \qquad (۱۶.۴)$$

جمع برداری گشتاور نیروها برابر است با

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \sum_i r_i \times \mathbf{u}F_i = (\sum_i \mathbf{r}_i F_i) \times \mathbf{u}$$

که بر $\mathbf{u}$ و درنتیجه بر $\mathbf{R}$ عمود است. پس با جا دادن $\mathbf{R}$ در نقطهٔ مناسب با بردار مکان $\mathbf{r}_c$، گشتاور آن می‌تواند برابر $\boldsymbol{\tau}$ شود یعنی $\mathbf{r}_c \times \mathbf{R} = \boldsymbol{\tau}$. با استفاده ازرابطه‌های $\mathbf{R}$ و $\boldsymbol{\tau}$ که در بالاآمد می‌توان نوشت

$$\mathbf{r}_c \times \mathbf{u}(\sum_i F_i) = (\sum_i \mathbf{r}_i F_i) \times \mathbf{u}$$

یا

$$[\mathbf{r}_c(\sum_i F_i)] \times \mathbf{u} = (\sum_i \mathbf{r}_i F_i) \times \mathbf{u}.$$

این معادله هنگامی تحقق پیدا می‌کند که $\mathbf{r}_c(\sum_i F_i) = \sum_i \mathbf{r}_i F_i$ یا

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_i \mathbf{r}_i F_i}{\sum_i F_i} = \frac{\mathbf{r}_۱ F_۱ + \mathbf{r}_۲ F_۲ + \cdots}{F_۱ + F_۲ + \cdots}. \qquad (۱۷.۴)$$

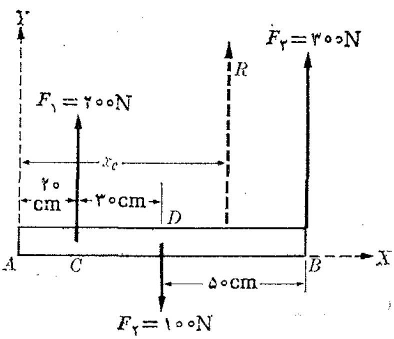
باشد. نقطهٔ تعریف شده با بردار مکان $\mathbf{r}_c$، مرکز نیروهای موازی نام دارد. ازاینجا نتیجه می‌گیریم که یک دستگاه نیروهای موازی را می‌توان به نیروی واحدی موازی با هریک از نیروها، که ازرابطهٔ (۱۵.۴) به‌دست می‌آید، کاهش‌داد. نقطهٔ اثراین نیرو از رابطهٔ (۱۷.۴) تعیین می‌شود.

معادلهٔ برداری (۱۷.۴) را می‌توان به سه معادله تجزیه کرد که هر معادله مربوط به یکی از مؤلفه‌ها روی محورهای مختصات است:

$$x_c = \frac{\sum_i x_i F_i}{\sum_i F_i}, \; y_c = \frac{\sum_i y_i F_i}{\sum_i F_i}, \; z_c = \frac{\sum_i z_i F_i}{\sum_i F_i} \qquad (۱۸.۴)$$

که درآن x_c، y_c و z_c مختصات نقطه‌ای است که با $\mathbf{r}_c$ تعریف می‌شود.

مثال ۶.۴. برآیند نیروهای وارد بر میلهٔ شکل ۱۱.۴ را به دست آورید.



شکل ۱۱.۴

حل: با انتخاب سوی مثبت به‌سمت بالا و با به کاربردن معادلهٔ (۱۶.۴) بزرگی برآیند به دست می‌آید:

$$R = \sum_i F_i = F_۱ - F_۲ + F_۳ = ۴۰۰\,\mathrm{N}.$$

برای پیدا کردن نقطهٔ اثر $\mathbf{R}$ از معادله‌های (۱۸.۴) استفاده می‌کنیم. ما در اینجا تنها به معادلهٔ اول نیاز داریم زیرا تمام نیروها موازی هستند. با انتخاب نقطهٔ A به عنوان مبدأ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_i F_i x_i}{\sum_i F_i} \\ &= \frac{(۲۰۰\,\mathrm{N})(۲۰\,\mathrm{cm}) + (-۱۰۰\,\mathrm{N})(۵۰\,\mathrm{cm}) + (۳۰۰\,\mathrm{N})(۱۰۰\,\mathrm{cm})}{۴۰۰\,\mathrm{N}} \\ &= ۷۲٫۵\,\mathrm{cm}. \end{aligned}$$

انتخاب مبدأ اصلا مهم نیست. برای نشان دادن این امر، نقطهٔ دیگری مانند D را به عنوان

مبدأ اختیار می‌کنیم. در این صورت داریم

$$x_c = \frac{(۲۰۰\ \mathrm{N})(-۳۰\ \mathrm{cm}) + (-۱۰۰\ \mathrm{N})(۰) + (۳۰۰\ \mathrm{N})(۵۰\ \mathrm{cm})}{۴۰۰\ \mathrm{N}}$$

$$= ۲۲٫۵\ \mathrm{cm}.$$

این نقطه عیناً مطابق با نقطه‌ای است که قبلا پیدا کردیم زیرا $AD = ۵۰\ \mathrm{cm}$ است.

۸.۴ مرکز جرم

به هرذره واقع در زیر تأثیر گرانی زمین، نیرویی مانند $\mathbf{W}$ به نام وزن وارد می‌شود. امتداد راستای این نیرو از مرکز زمین می‌گذرد. در بخش ۶ از فصل ۷ خواهیم دید که اگر m جرم ذره و $\mathbf{g}$ شتاب گرانی باشد، رابطهٔ زیر را داریم

$$\mathbf{W} = m\mathbf{g}. \qquad (۱۹.۴)$$

اگر چه نیروهای وزن یکدیگر را در مرکز زمین قطع می‌کنند، هنگامی که بر ذرات جسمی باابعاد نسبتاً کوچک واردمی‌شوند، می‌توان آنها را بردارهای موازی درنظرگرفت. بنا براین وزن کل یک جسم از رابطهٔ $\mathbf{W} = \sum_i m_i\mathbf{g}$ به دست می‌آید. این جمع تمام ذرات تشکیل دهندهٔ جسم را دربر می‌گیرد و به نقطه‌ای وارد می‌شود که بردار مکان آن از این رابطه به دست می‌آید:

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_i \mathbf{r}_i m_i g}{\sum_i m_i g} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}. \qquad (۲۰.۴)$$

با توجه به معادلهٔ (۱۷.۴) و با به کار بردن معادلهٔ (۱۸.۴)، مؤلفه‌های معادلهٔ(۲۰.۴) را می‌توان چنین نوشت:

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i},\ y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i},\ z_c = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}. \qquad (۲۱.۴)$$

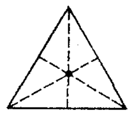
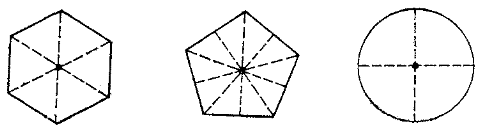
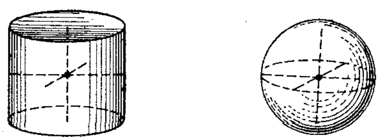
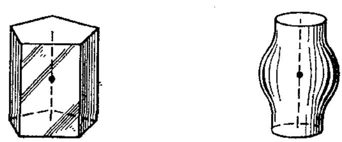
نقطه‌ای که با معادلهٔ (۲۰.۴) یا (۲۱.۴) تعریف می‌شود مرکز جرم[1] دستگاه ذرات نام دارد وآن را با علامت اختصاری CM نشان می‌دهند*. مفهوم مرکز جرم تنها مربوط به ترکیب نیروهای موازی نیست. بلکه، چنانکه در فصلهای ۹ و ۱۰ خواهد آمد، مرکز جرم نقش اساسی درتحلیل حرکت یک دستگاه ذرات، بویژه یک جسم سخت، بازی می‌کند.

اگر جسمی را در نظر بگیریم که از ذرات بسیارزیاد ومتراکم تشکیل شده باشد، می‌توان ساختار جسم را پیوسته فرض کرد. چنانچه چگالی در هر نقطه ρ باشد، می‌توان حجم

1. center of mass

* نیروی وزن عملا برنقطه‌ای وارد می‌شود که تفاوت اندکی با مرکز جرم دارد وگرانیگاه (center of gravity) خوانده می‌شود. برای مقاصد عملی هیچ فرقی بین این دو نقطه قائل نمی‌شویم مگرآنکه جسم خیلی بزرگ باشد.

جدول ۱.۴. مرکز جرم چند شکل هندسی

جای مرکز جرم	شکل
صفحهٔ مثلث شکل در محل تقاطع میانه‌ها	
صفحه به شکل چند ضلعی منتظم و دایره درمرکز هندسی شکل	
استوانه و کره در مرکز هندسی شکل	
هرم و مخروط روی خطی که رأس را به مرکز قاعده وصل می‌کند و به فاصلهٔ ۱/۴ ارتفاع آن از مرکز قاعده	
شکل با تقارن محوری درنقطه‌ای روی محور تقارن	
شکل با مرکز تقارن در مرکز تقارن	

جسم را به حجمهای جزئی dV تجزیه کرد. بنابراین جرم هر جزء برابر می‌شود با $dm = \rho dV$. در این صورت اگر در معادلات (۲۱.۴) علامت جمع را به انتگرال تبدیل کنیم، مرکز جرم از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$x_c = \frac{\int \rho x dV}{\int \rho dV},\ y_c = \frac{\int \rho y dV}{\int \rho dV},\ z_c = \frac{\int \rho z dV}{\int \rho dV}. \qquad (۲۲.۴)$$

اگر جسم همگن باشد ρ ثابت است ومی‌توان آن را از صورت و مخرج حذف کرد و نوشت

$$x_c = \frac{\int x dV}{\int dV} = \frac{1}{V}\int x dV. \qquad (۲۳.۴)$$

برای y_c و z_c نیزمعادلات مشابهی می‌توان نوشت.دراین حالت، مرکزجرم تنها ازخصوصیات هندسی جسم تعیین می‌شود.

هرگاه جسم همگن دارای نوعی تقارن باشد، محاسبات ساده‌تر می‌شود، زیرا مرکز جرم باید بر عنصر تقارن منطبق باشد. دراجسامی مانند کره، متوازی السطوح، . . . و غیره که دارای مرکز تقارن هستند، مرکز جرم جسم بر مرکز تقارن منطبق است. اگر جسم دارای محور تقارن باشد، مانند مخروط، مرکز جرم روی محور تقارن قرار دارد. (در جدول ۱.۴ مرکز جرم چند جسم که دارای شکل هندسی و گونه‌ای تقارن هستند مشخص شده است.)

مثال ۷.۴. مرکز جرم ذرات پراکنده درشکل ۱۲.۴ را پیدا کنید. ضلع هرمربع ۵cm و جرمها عبارتنداز: $m_1 = ۵$ kg، $m_2 = ۳۰$ kg، $m_3 = ۲۰$ kg و $m_4 = ۱۵$ kg.

حل: ابتدا باید جرم کل m را به دست آوریم:

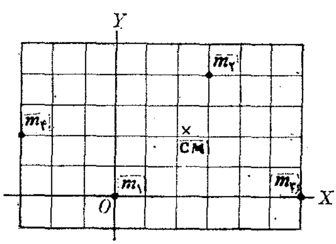
$$m = \sum_i m_i = ۵\ \text{kg} + ۳۰\ \text{kg} + ۲۰\ \text{kg} + ۱۵\ \text{kg} = ۷۰\ \text{kg}.$$

سپس ازرابطه‌های اول ودوم معادله‌های (۲۱.۴) استفاده کرده x_c و y_c را حساب می‌کنیم. جهت اختصار از نوشتن یکاها جلو اعداد صرف نظر می‌شود. به دست می‌آید

$$x_c = \frac{(۵)(۰) + (۳۰)(۱۵) + (۲۰)(۳۰) + (۱۵)(-۱۵)}{۷۰} = ۱۱٫۸\ \text{cm}$$

$$y_c = \frac{(۵)(۰) + (۳۰)(۲۰) + (۲۰)(۰) + (۱۵)(+۱۰)}{۷۰} = ۱۰٫۷\ \text{cm}.$$

بنابراین مرکز جرم در نقطه‌ای به مختصات ۱۱٫۸ cm و ۱۰٫۷ cm قرار دارد که در شکل ۱۲.۴ با CM مشخص شده است.



شکل ۱۲.۴

۹.۴ ایستا شناسی: ترازمندی یک ذره

ایستا شناسی[1] شاخه‌ای از مکانیک است که ترازمندی اجسام را بررسی می‌کند. ذره‌ای در

1. statics

حال ترازمندی است که برآیند تمام نیروهای وارد برآن برابر صفر باشد و یا

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0 \qquad (۲۴.۴)$$

معادلهٔ (۲۴.۴) معادل است با

$$\sum_i F_{ix} = 0\,,\ \sum_i F_{iy} = 0,\ \sum_i F_{iz} = 0 \qquad (۲۵.۴)$$

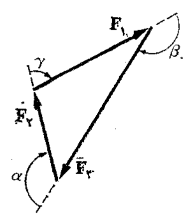
اکنون با آوردن چند مثال ساده، نحوهٔ حل مسائل مربوط بـه ترازمندی یک ذره را نشان می‌دهیم.

مثال ۸.۴. ترازمندی ذره‌ای را که سه نیرو برآن اثر می‌کنند بررسی کنید.

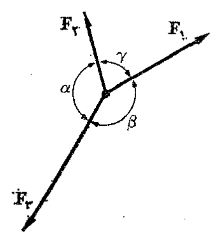
حل: فرض کنیم سه نیرو مطابق شکل ۱۳.۴ به ذره اثرمی‌کند. اگر نیروها اثر هم راخنثی کنند باید داشته باشیم: $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0$. در این صورت، اگـر با این سه نیرو یک چند ضلعی بسازیم، باید یکـ مثلث به دست آیـد (شکل ۱۴.۴). این امرنشان می‌دهد که سه نیروی همرس در حال تعادل بایـد در یک صفحه باشند. همچنین بـا استفاده از قانون سینوسها (پ.۱۵) دراین مثلث به دست می‌آید

$$\frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{F_3}{\sin\gamma} \qquad (۲۶.۴)$$

واین فرمول مهمی است‌که بزرگی نیروها را با زاویه‌هایی‌که با هم می‌سازند، مربوط‌می‌کند.



شکل ۱۴.۴



شکل ۱۳.۴

مثال ۹.۴. دربارهٔ ترازمندی ذره‌ای‌که روی‌یک سطح شیب‌دار بدون مالش‌قرار دارد بحث کنید.

حل: به ذرهٔ O واقع روی سطح شیب دار AB، مطابق شکل ۱۵.۴، نیروهـای زیر وارد می‌شوند: $\mathbf{W}$ نیروی وزن خودذره، $\mathbf{F}$ نیروی کشش و$\mathbf{N}$ نیروی واکنش عمودی صفحه.اکنون $\mathbf{F}$ و $\mathbf{N}$ را برحسب $\mathbf{W}$، α و θ حساب می‌کنیم. می‌توان با دوروش مختلف عمل کرد. با به‌کار بردن قانون سینوسها، معادلهٔ (۲۶.۴) وبا درنظرگرفتن وضع هندسی شکل‌۱۵.۴، داریم

$$\frac{F}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{N}{\sin(90^\circ + \alpha + \theta)} = \frac{W}{\sin(90^\circ - \theta)}$$

و یا

$$\frac{F}{\sin\alpha} = \frac{N}{\cos(\alpha+\theta)} = \frac{W}{\cos\theta}.$$

از اینجا برای F و N می‌توان نوشت

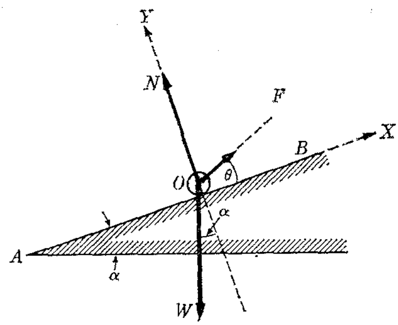
$$F = W\frac{\sin\alpha}{\cos\theta} \quad \text{و} \quad N = W\frac{\cos(\alpha+\theta)}{\cos\theta}.$$

روش دیگر عبارت است از وارد کردن محورهای OX و OY. مطابق شکل ۱۵.۴، و با استفاده از رابطهٔ اول معادلات (۲۵.۴) نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\sum_i F_{ix} = F\cos\theta - W\sin\alpha = 0$$
$$\sum_i F_{iy} = F\sin\theta - W\cos\alpha + N = 0$$

از معادلهٔ اول داریم

$$F\cos\theta = W\sin\alpha \quad \text{یا} \quad F = W\frac{\sin\alpha}{\cos\theta}$$



شکل ۱۵.۴. ترازمندی روی یک سطح‌شیب‌دار

که با نتیجهٔ اولی برای $\mathbf{F}$ تطبیق می‌کند. ازمعادلهٔ دوم، با استفاده از مقدار به دست آمده برای F، داریم

$$N = W\cos\alpha - F\sin\theta = W\cos\alpha - \frac{W\sin\alpha\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= W\frac{\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta}{\cos\theta} = W\frac{\cos(\alpha+\theta)}{\cos\theta}$$

که با مقدار به دست آمده از روش اول تطبیق می‌کند. به عهدهٔ دانشجو است که تشخیص دهد هرمسئلهٔ ویژه‌ای را باکدام روش حل کند تا زودتر و راحت‌تر به‌نتیجه برسد.

۱۰.۴ ایست شناسی: ترازمندی یک جسم سخت

هنگامی که نیرو بریک جسم سخت اثر می‌کند لازم است ترازمندی را هم نسبت به انتقال وهم نسبت به چرخش درنظر گرفت. بنابراین دوشرط زیر لازم است:

۱) جمع تمام نیروها باید برابرصفر باشد (ترازمندی در انتقال):

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0 \qquad (۲۷.۴)$$

۲) جمع تمام گشتاور نیروها نسبت به یک نقطهٔ اختیاری باید برابر صفر باشد (ترازمندی درچرخش):

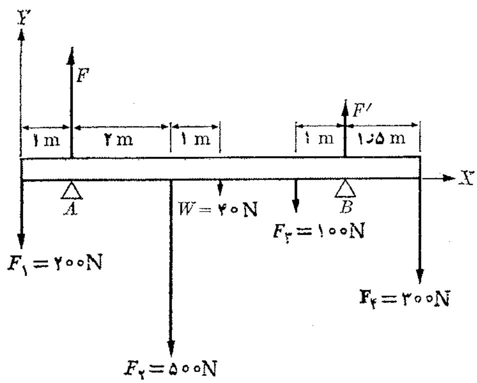
$$\sum_i \boldsymbol{\tau}_i = 0 \qquad (۲۸.۴)$$

اگر تمام نیروها دریک صفحه باشند، دو شرط فوق به سه معادلهٔ جبری زیر کاهش پیدا می‌کند:

$$\sum_i \tau_{ix} = 0 \text{ و } \sum_i F_{iy} = 0 \text{ ،} \sum_i F_{iz} = 0 \qquad (۲۹.۴)$$

چون درآن واحد سه معادلهٔ مستقل وجود دارد مسایل ایست شناسی درصفحه قابل حل نیستند مگر اینکه سه مجهول وجود داشته باشد. اکنون شما را با شیوهٔ حل چند مسئلهٔ نمونه در ایست شناسی، درصفحه، آشنا می‌کنیم.

مثال ۱۰.۴. میله‌ای به طول ۸m و وزن ۴۰N، تحت تأثیر نیروهایی که در شکل ۱۶.۴ نشان داده شده‌اند، روی نقطه‌های A و B درحال ترازمندی قرار دارد. نیروهایی را که در نقطه‌های A و B برمیله وارد می‌شوند پیدا کنید.



شکل ۱۶.۴

حل: ابتدا با به‌کار بستن شرط (۲۷.۴) برای ترازمندی درانتقال، داریم

$$\sum_i F_i = F + F' - 200 - 500 - 40 - 100 - 300 = 0$$

و یا

$$F + F' = 1140\,\mathrm{N}. \qquad (۳۰.۴)$$

سپس برای رسیدن به ترازمندی درچرخش ازمعادلهٔ (۲۸.۴) استفاده می‌کنیم. بهتر است گشتاورنیروها را نسبت به نقطهٔ A حساب کنیم، چون گشتاور نیروی F صفر خواهد شد. دراین صورت داریم

$$\sum_i \tau_i = (-200)(-1) + (F)(0) + (-500)(2) + (-40)(3) + (-100)(4{,}5) + (F')(5{,}5) + (-300)(7) = 0$$

درنتیجه $F' = ۶۳۰٫۹\mathrm{N}$. با قرار دادن بزرگی F در رابطهٔ (۳۰.۴) به دست می‌آید

$$F = ۵۰۹٫۱\mathrm{N}.$$

مثال ۱۱.۴. نردبان AB به وزن $۴۰\mathrm{N}$ بـا تکیه بردیـواری قایم بـا زمین زاویـهٔ ۶۰° می‌سازد. نیروهای وارد بـر نردبان را درنقطه‌هـای A و B پیدا کنید. غلتکی درنقطهٔ A بر نردبان سوار شده به‌گونه‌ای‌که مالش دیوار ناچیز است.

حل: نیروهـای وارد برنردبان را درشکل ۱۷.۴ نشان داده‌ایم. نیروی وزن $\mathbf{W}$ درنقطهٔ C وسط نردبان به‌آن وارد می‌شود. نیروی $\mathbf{F}_۱$ برای جلوگیری ازلغزش نردبان لازم است و از مالش زمین به وجود می‌آید. $\mathbf{F}_۲$ و $\mathbf{F}_۳$ واکنشهای عمودی زمین و دیوارند. با استفاده از سه شرط ترازمندی که درمعادلات (۲۹.۴) نوشته شده‌اند، برای دومعادلهٔ اول داریم

$$\sum_i F_{ix} = -F_۱ + F_۳ = ۰ \qquad (۳۱.۴)$$
$$\sum_i F_{iy} = -W + F_۱ = ۰$$

به فرض اینکه طول نردبان برابر L باشد، گشتاور نیروها را نسبت به نقطهٔ B پیدا می‌کنیم، تا گشتاور نیروهای مجهول $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ برابر صفر باشد. برای معادلهٔ سوم ترازمندی به دست می‌آید

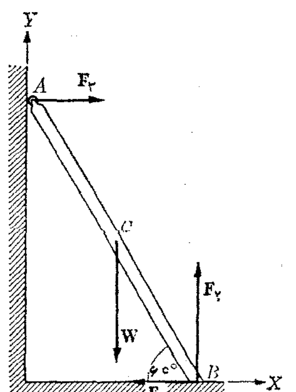
$$\sum_i \tau_i = W\left(\frac{۱}{۲}L\cos ۶۰^\circ\right) - F_۳(L\sin ۶۰^\circ) = ۰$$

یا

$$F_۳ = \frac{W\cos ۶۰^\circ}{۲\sin ۶۰^\circ} = ۱۱٫۵۲\,\mathrm{N}.$$

دراین صورت ازمعادلات (۳۱.۴) نتیجه می‌شود

$$F_۱ = F_۳ = ۱۱٫۵۲\,\mathrm{N}$$



شکل ۱۷.۴

و
$$F_{۲} = W = ۴۰\,\mathrm{N}.$$

لازم به یادآوری است که هرگاه نردبان درنقطهٔ A غلتک نداشته باشد، یک نیروی مالش موازی با دیوار قایم دراین نقطه به‌وجود می‌آید. دراین صورت چهار نیروی مجهول وجود دارد و برای حل مسئله یک فرض اضافی دیگر نیز لازم است.

فهرست منابع

1. *Physical Mechanics* (third edition), by R. Lindsay. Princeton, N.J.: Van Nostrand, 1963, Section 1-7.
2. *Vector Mechanics*, by D. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964, Chapters 3, 4, 10, and 11.
3. *Introduction to Engineering Mechanics*, by J. Huddleston. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961, Chapters 3, 5, 6, and 8.
4. *The Feynman Lectures on Physics*, volume I, by R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapter 12.
5. *Foundations of Modern Physical Science*, by G. Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Chapter 4.

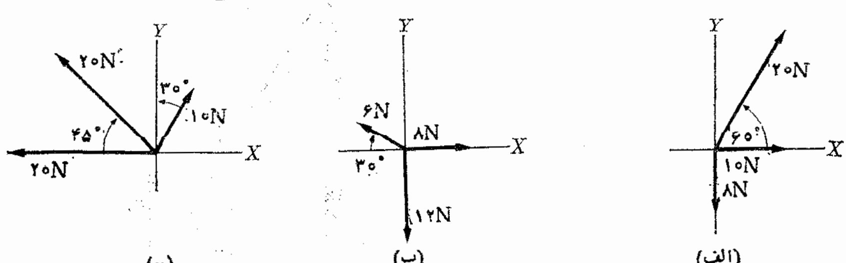
۶. سایمون،کیث، ر. مکانیک، ترجمهٔ اعظم فیرومندراد وغلامحسین همدانی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۶، بخش ۳ــ۲.

مسئله ها

۱.۴ تیر تلفنی به‌کمک یک کابل به‌طورقایم نگهداشته می‌شود. هرگاه یک سرکابل در ارتفاع ۱۰ متری تیر ثابت و سر دیگر آن در ۷ متری پای تیر به‌زمین محکم شده باشد و نیروی کششی کابل N ۵۰۰ باشد، نیروی افقی و قایم وارد به تیر تلفن چقدر است؟

۲.۴ جسمی به‌وزن N ۶۰ روی سطح افقی هموار قرار دارد و توسط میله‌ای (که با افق زاویهٔ °۳۰ می‌سازد) با نیروی ۶۰N برآن فشار می‌آورند. (الف) نیروی مؤثر درراستای عمود بر سطح چقدر است؟ (ب) نیروی موازی با سطح چقدر است؟

۳.۴ قطعه سنگی به‌وزن ۱۰۰N روی یک صفحهٔ شیب‌دار به ارتفاع ۲ متر و طول ۵ متر



شکل ۱۸.۴

توسط یک مانع نگهداری می‌شود. نیرویی را که از طرف این قطعه سنگ (الف) بر روی صفحه، و (ب) بر مانع وارد می‌شود پیدا کنید.

۴.۴. بزرگی و راستای برآیند دستگاه نیروهای نشان داده‌شده درشکل ۱۸.۴ را پیداکنید.

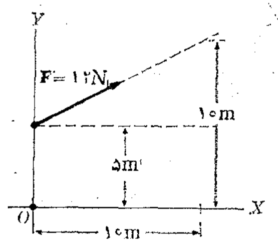
۵.۴. چهار نیروی همصفحه (۳۰ N، ۴۰ N، ۲۰ N و ۵۰ N) روی یک نقطه از جسمی اثر می‌کنند. زاویه‌هایی که این چهار نیرو باهم می‌سازند بترتیب عبارتند از °۵۰، °۳۰ و °۶۰. بزرگی برآیند را به‌دست آورده و زاویهٔ آن‌را با نیروی ۳۰ N پیدا کنید.

۶.۴. سه نیروی $\mathbf{F}_1 = \mathbf{u}_x(500)\,\mathrm{N}$، $\mathbf{F}_2 = \mathbf{u}_x(0) + \mathbf{u}_y(-200) + \mathbf{u}_z(100)\mathrm{N}$ و $\mathbf{F}_3 = \mathbf{u}_x(-100) + \mathbf{u}_y(50) + \mathbf{u}_z(-400)\mathrm{N}$ در دست است. (الف) بزرگی و راستای نیروی برآیند را تعیین کنید. (ب) اگر هر سه نیرو به‌نقطهٔ واحد (۱۵, ۳−, ۴) اثرکنند، گشتاور برآیند این نیرو هارا نسبت به مبدأ O به دست آورید. برای تعیین گشتاور برآیند از نیروی برآیند استفاده کنید.

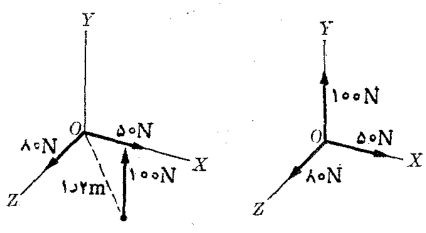
۷.۴. هرگاه هرسه نیروی‌مسئلهٔ ۶.۴ به‌نقطه‌ای‌مانند (۱۵, ۳−, ۴) واردشوند، گشتاور هر یک از این نیروها را نسبت به‌مبدأ O پیدا کنید. ثابت کنید که گشتاور برآیند بر نیروی برآیند عمود است.

۸.۴. (الف) هرگاه نیروهای مسئلهٔ ۶.۴ بترتیب $\mathbf{F}_1$ به‌نقطهٔ (۱۰, ۸, ۳)، $\mathbf{F}_2$ به نقطهٔ (۲−, ۰, ۴) و $\mathbf{F}_3$ به‌نقطهٔ (۱۰, ۲۵−, ۴) اثرکنند گشتاور برآیند این نیروهارا نسبت به‌مبدأ O پیدا کنید. (ب) $\mathbf{T} \cdot \mathbf{R}$ را پیدا کنید وکاهش کمینهٔ[1] دستگاه را نشان دهید.

۹.۴. گشتاور نیروی نشان داده شده درشکل ۱۹.۴ را نسبت به مبدأ مختصات حساب کنید. معادلهٔ خط اثر نیرو را تعیین کنید.



شکل ۱۹.۴



شکل ۲۰.۴

۱۰.۴. نیروی برآیند سه نیروی عمود برهم ۵۰ N، ۸۰ N و ۱۰۰ N (شکل ۲۰.۴) و گشتاور برآیند آنها را نسبت به‌نقطهٔ O در حالتی که (الف) سه نیرو همرس باشند، (ب) خط اثر نیروی ۱۰۰ N از محل تقاطع دو نیروی دیگر ۱٫۲ m فاصله داشته باشد، پیدا کنید.

۱۱.۴. روی مستطیل سخت $ABCD$، به اضلاع

1. minimum

$$BC = DA = ۰٫۶ \text{ m} \quad \text{و} \quad AB = CD = ۰٫۴ \text{ m}$$

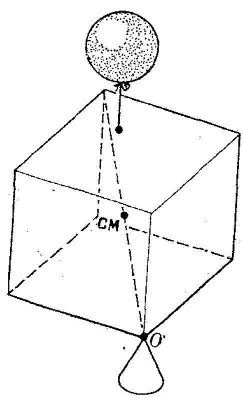
پنج نیرو بدین ترتیب اثر می‌کنند: درنقطهٔ A یک نیروی ۶ N درراستای AB، یک نیروی ۴ N در راستای AC و یک نیروی ۳ N در راستای AD؛ و در نقطهٔ C یک نیروی ۵ N در راستای CD ونیروی دیگر ۴ N در راستای CB. نیروی برآیند وهمچنین گشتاور نیروها را نسبت به نقطه‌های A، B و مرکز هندسی مستطیل را پیدا کنید.

۱۲.۴ دو نیروی موازی وهمسو به‌فاصلهٔ ۰٫۲ m از یکدیگر قرار دارند. اگر یکی از نیروها ۱۳ N ونیز خط اثر نیروی برآیند به‌فاصلهٔ ۰٫۸ m از نیروی دیگر باشد، (الف) بزرگی نیروی برآیند، و (ب) بزرگی نیروی دیگر را پیدا کنید.

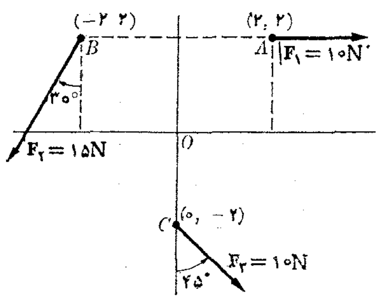
۱۳.۴ بزرگی دو نیروی موازی وهمسو ۲۰ N و ۳۰N می‌باشد. فاصلهٔ خط اثر نیروی برآیند از نیروی بزرگتر ۰٫۸ m است. فاصلهٔ بین دو نیرو را پیدا کنید.

۱۴.۴ درصورتی‌که نیروهای دو مسئلهٔ بالا ناهمسو باشند جوابهای خواسته شده رایک بار دیگر پیدا کنید.

۱۵.۴ مکعبی با چگالی یکنواخت با وزن ۴۵ N وطول هرضلع ۶۰ cm روی یکی از رأسهایش قرارگرفته است (شکل ۲۱.۴). بالن پر از گازی را (که دارای نیروی بالابر ۳۶ N است) به‌کجای آن وصل کنیم تا مکعب دروضع افقی نشان داده شده درشکل «معلق» بماند؟ نیرو در نقطهٔ O چقدر است؟



شکل ۲۱.۴

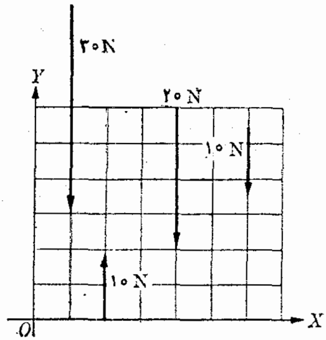


شکل ۲۲.۴

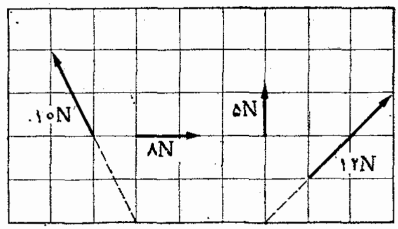
۱۶.۴ بزرگی و وضع برآیند دستگاه نیروهای نشان داده شده در شکل ۲۲.۴ را پیدا کنید. مختصات نقطه‌های A، B و C برحسب متر داده شده‌اند.

۱۷.۴ بزرگی و وضع برآیند دستگاه نیروهای نشان داده شده درشکل ۲۳.۴ راپیداکنید. ضلع هرمربع یک سانتی‌متر است.

۱۸.۴ دستگاه نیروهای شکل ۲۴.۴ را به‌حداقل‌کاهش دهید. سطح‌هرمربع 1cm^2 است.

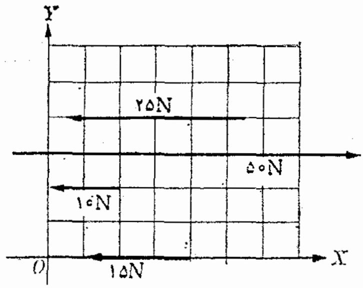


شکل ۲۴.۴



شکل ۲۳.۴

۱۹.۴ دستگاه نیروهای شکل ۲۵.۴ را به‌حداقل کاهش‌دهید. مساحت‌هرمربع $1\ cm^2$ است.



شکل ۲۵.۴

۲۰.۴ اگر $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i$ برآیند یک دستگاه نیروهای همرس و $\tau_\circ$ گشتاور آنها نسبت به نقطهٔ O باشد، ثابت کنید که گشتاور نسبت به A برابر است با

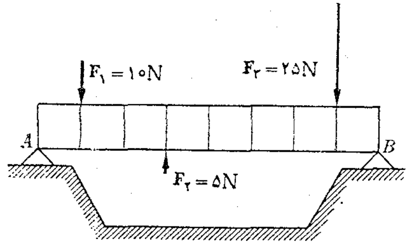
$$\boldsymbol{\tau}_A = \boldsymbol{\tau}_\circ + \mathbf{r}_{A\circ} \times \mathbf{R}.$$

۲۱.۴ میله‌ای $2\ m$ وطول $4/9 \times 10^{-2}N$ (۴۹۰۰ دین) وزن‌دارد. نیروهای‌قایم ۳۰۰۰ و ۲۰۰۰ و ۱۵۰۰ دین بترتیب از فاصلهٔ ۰، ۵۰ و ۲۰۰ سانتی‌متری از یک سر آن به سوی پایین ونیروهای قایم ۵۰۰۰ و ۱۳۰۰ دین به‌فاصلهٔ ۲۰cm و ۱۰۰cm ازهمان سربه‌سوی بالا براین میله اثر می‌کنند. بزرگی و خط اثر برآیند را پیدا کنید.

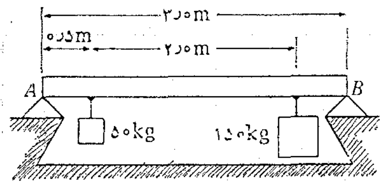
۲۲.۴ بزرگی و وضع برآیند دستگاه نیروهای نشان داده‌شده درشکل ۲۶.۴ را پیداکنید. هر قطعه از تیر AB یک دسی‌متر طول دارد. همچنین نیروهای لازم در نقاط A و B برای متعادل کردن سایر نیروها را پیدا کنید.

۲۳.۴ تیر AB یکنواخت و دارای $100\ kg$ جرم است و در دو انتهای A و B روی دو تکیه‌گاه قرار گرفته‌است و جرمهایی مطابق شکل ۲۷.۴ به‌آن اثر می‌کنند. واکنش تکیه‌گاهها را حساب کنید.

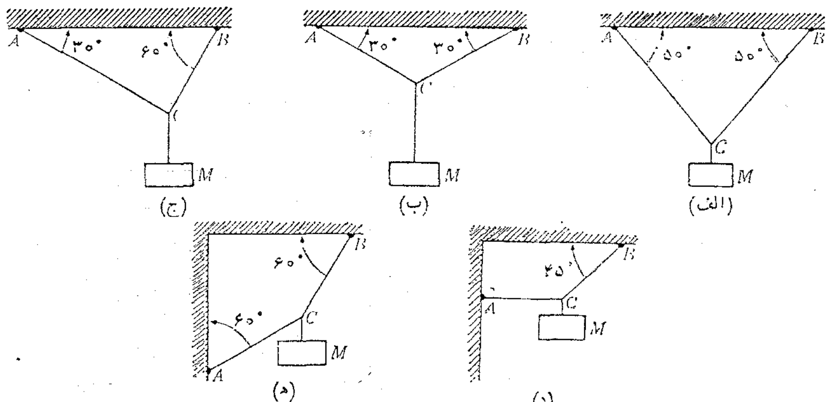
۲۴.۴ در شکل ۲۸.۴ اگر M دارای $40\ N$ وزن باشد، کشش بندهای AC و BC را پیدا کنید.



شکل ۲۶.۴

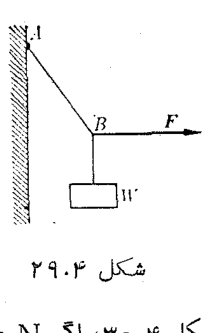


شکل ۲۷.۴

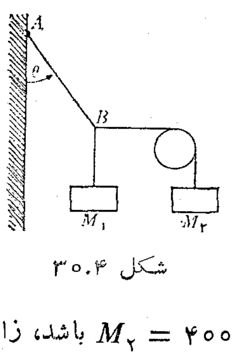


شکل ۲۸.۴

۲۵.۴. جسم نشان داده شده در شکل ۲۹.۴، دارای ۴۰۰ N وزن است. این جسم توسط ریسمان AB و نیروی افقی $\mathbf{F}$ درحال تعادل قرار دارد. اگر AB = ۱۵۰ cm و فاصلهٔ بین دیوار و جسم ۹۰ cm باشد، نیروی $\mathbf{F}$ و کشش نخ را حساب کنید.



شکل ۲۹.۴



شکل ۳۰.۴

۲۶.۴. درشکل ۳۰.۴، اگر M_1 = ۳۰۰ N و M_2 = ۴۰۰ N باشد، زاویهٔ θ وکشش نخ AB را حساب کنید.

۲۷.۴. پسری به‌وزن ۵۰۰ N ازمیله‌ای‌آویزان شده است. نیروهایی راکه هریک ازبازو-های وی به‌میله وارد می‌کند درحالات زیر حساب کنید: (الف) بازوها موازی هم هستند؛

(ب) زاویهٔ هر بازو با قایم 30° است. نیرو را به‌صورت تابعی از زاویه نمایش دهید. از این نمودار چه نتیجه می‌گیرید؟

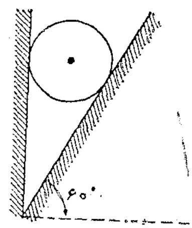
۲۸.۴ نخ $ABCD$ از نقاط ثابت A و D آویزان شده است. در نقطهٔ B وزنهٔ $120\ \mathrm{N}$ و در نقطهٔ C وزنهٔ نامعلوم W وجود دارد. اگر زاویهٔ AB باسطح افق 60°، AC افقی و CD با سطح افق زاویهٔ 30° بسازد، مقدار W را هنگامی که دستگاه در حال ترازمندی است معین کنید.

۲۹.۴ سه نخ واقع دریک صفحهٔ قایم، از نقاط مختلف یک سقف افقی آویزان اند. انتهای نخها را درنقطهٔ A به هم می بندیم و وزنهٔ W را ازآن آویزان می‌کنیم. زاویه‌ای که هریک از سه نخ با افق می‌سازند بترتیب عبارتند از 30°، 100° و 160°. کشش دو نخ اولی بترتیب $1000\ \mathrm{N}$ و $750\ \mathrm{N}$ است. کشش نخ سوم وهمچنین وزن W را حساب کنید.

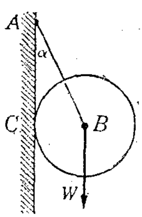
۳۰.۴ برای اینکه سه‌نیرودرحال ترازمندی باشند ثابت کنید باید همرس باشند، یعنی اگر خط اثرآنها را امتداد دهند همدیگر را دریک نقطه قطع کنند.

۳۱.۴ کره‌ای به وزن $500\ \mathrm{N}$ روی دو صفحهٔ شیب‌دار بدون مالش که بترتیب با سطح افق زاویه‌های 30° و 45° می‌سازند تکیه دارد. واکنشهای دوصفحه را روی کره حساب کنید.

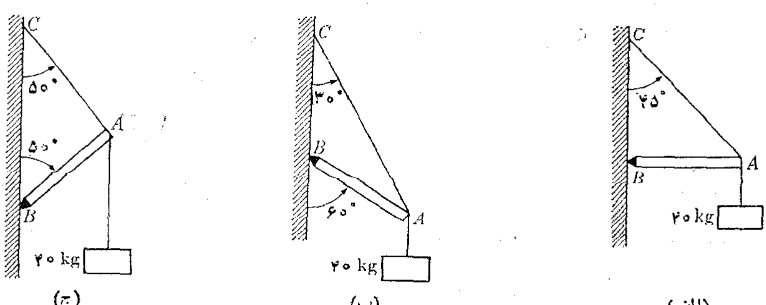
۳۲.۴ کره‌ای به وزن $500\ \mathrm{N}$ (شکل ۳۱.۴) توسط یک صفحهٔ شیب‌دار که با افق زاویهٔ 60° می‌سازد مقابل دیواری بدون مالش نگهداری می‌شود. واکنشهای دیوار وصفحه را روی کره حساب کنید.



شکل ۳۱.۴



شکل ۳۲.۴



(الف) (ب) (ج)

شکل ۳۳.۴

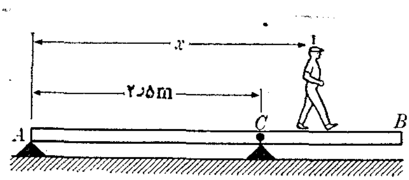
۳۳.۴. کره‌ای به‌وزن W از نخ AB آویزان و روی دیوار قایم بدون مالش AC تکیه دارد. اگر α زاویهٔ بین دیوار و نخ باشد، کشش نخ و واکنش دیوار را روی کره تعیین‌کنید.

۳۴.۴. به فرض اینکه درشکل ۳۳.۴، وزن M برابر $400\,\mathrm{N}$ و وزنهای تیر وکابل قابل چشم‌پوشی باشند، نیروهایی را که تیر BA و کابل AC به نقطهٔ A وارد می‌کنند حساب کنید.

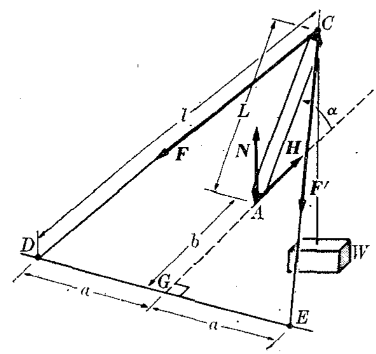
۳۵.۴. به فرض اینکه درشکل ۳۳.۴ جرم تیر $20\,\mathrm{kg}$ باشد، واکنشهای افقی وقایم درنقطهٔ B وکشش کابل AC را تعیین کنید.

۳۶.۴. درشکل ۳۴.۴ نیروهای F، F′، N و H را پیداکنید. CE و DC کابل هستند ووزن AC قابل اغماض است.

۳۷.۴. هنگامی که فاصلهٔ $AG = b$ به سمت صفر میل کند، درنتیجهٔ مسئلهٔ پیش بحث‌کنید.



شکل ۳۵.۴

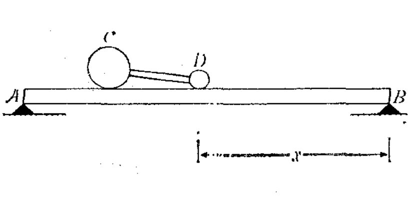


شکل ۳۴.۴

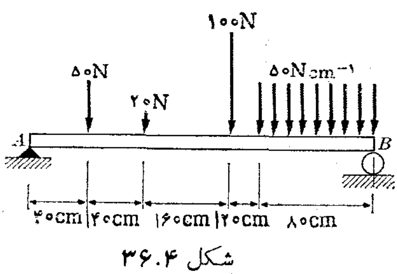
۳۸.۴. تیر یکنواخت AB در شکل ۳۵.۴ دارای ۴m طول و ۱۰۰N وزن می‌باشد و می‌تواند دور نقطهٔ ثابت C بچرخد. تیر روی نقطهٔ A تکیه دارد. شخصی به وزن ۷۵۰N از A شروع به راه رفتن روی تیر می‌کند. بیشینهٔ فاصلهٔ این شخص ازنقطهٔ A را درهنگام ترازمندی پیدا کنید. نمودار واکنش نقطهٔ A را برحسب x رسم کنید.

۳۹.۴. چنانکه شکل ۳۶.۴ نشان می‌دهد نیروهایی روی تیر AB اثر می‌کنند. بزرگی و مکان نیروی برآیند را تعیین کنید.

۴۰.۴. تیر AB درشکل ۳۷.۴ دارای ۱٫۲m طول و وزن قابل اغماض می‌باشد. کره‌های C و D (بترتیب با ۴۰ و ۲۰ کیلوگرم جرم)، که به وسیلهٔ بازویی به هم متصل‌اند، روی تیر قرار گرفته‌اند. فاصلهٔ بین مرکزهای دوکره ۰٫۳m است. فاصلهٔ x را به گونه‌ای اختیار



شکل ۳۷.۴



شکل ۳۶.۴

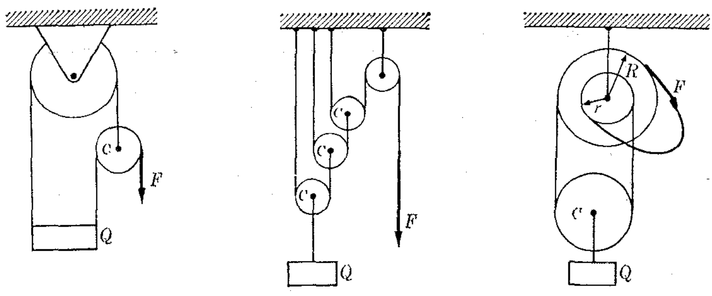
کنید که واکنش نقطهٔ B نصف واکنش نقطهٔ A باشد.

۴۱.۴. دوسر پلی به طول ۱۰۰m ووزن ۱۰۰۰۰۰N روی دوستون قرار دارند. هنگامی که سه اتومبیل روی پل بـه فاصله‌های ۳۰m، ۶۰m و ۸۰m از یک سر آن قـرار گرفته باشند و وزن اتومبیلها بترتیب ۱۵۰۰۰ N، ۱۰۰۰۰ N و ۱۲۰۰۰ N باشد واکنش پایه‌ها چقدر است؟

۴۲.۴. فرض کنید اتومبیلهـای مسئلهٔ ۴۱.۴ بـا سرعت یکسان $10\,\mathrm{ms^{-1}}$ و دریک جهت جابجا می‌شونـد. واکنش پایه‌ها را به صورت تابعی از زمـان پیدا کنید. مبدأ زمان $t = 0$ برای اتومبیلهـا وضع مسئلهٔ ۴۱.۴ است. نمـودار واکنشها را تا هنگامی که هرسه اتومبیل ازپل بگذرند امتداد دهید.

۴۳.۴. دوسر الواری به طول ۸m وجرم ۲۰kg به دوکنار نهری تکیه دارد. مردی به جرم ۱۰۰kg از روی الوار می‌گـذرد. نمودار واکنش هر سر الوار را، برحسب فاصلهٔ شخص ازیکی از دوسر آن، رسم کنید.

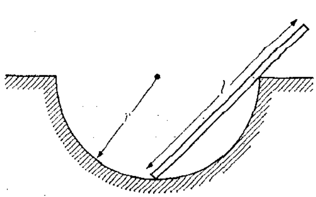
۴۴.۴. برای هریک ازحالتهای نشان داده شده درشکل ۳۸.۴، F نیروی لازم برای حفظ تـرازمندی را برحسب Q پیدا کنید. قرقره‌هایی که با C نشان داده شده‌اند متحرک هستند.



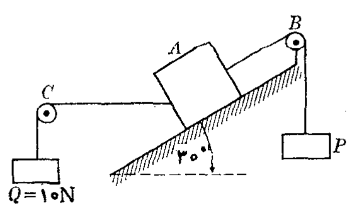
شکل ۳۸.۴

۴۵.۴. در شکـل ۳۹.۴، A، ۱۰۰۰N و Q، ۱۰۰N وزن دارنـد. وزن لازم P بـرای حفظ ترازمندی دستگاه را پیدا کنید. صفحه وقرقره‌ها بـدون مالش می‌باشند. بند AC افقی وبند AB موازی صفحه است. همچنین واکنش صفحه روی وزنهٔ A را حساب کنید.

۴۶.۴. میله‌ای به جرم m وطول l را توی یک نیمکرهٔ کاملا صیقلی به شعاع r قرارمی‌دهیم



شکل ۴۰.۴

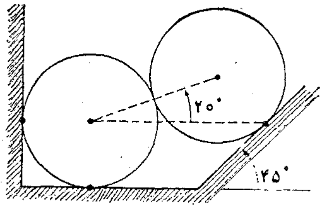


شکل ۳۹.۴

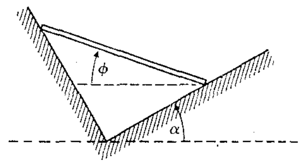
(شکل ۴۰.۴). وضع ترازمندی میله را پیدا کنید. واکنشهای نیمکره روی میله را حساب کنید. پاسخ را درحالتی که $2r > l$ و $2r < l$ باشد مورد بحث قرار دهید.

۴۷.۴. میله‌ای به جرم ۶kg وطول ۰٫۸m روی زاویهٔ قایمهٔ کاملا صیقلی مطابق شکل ۴۱.۴ قرار داده شده است. وضعیتهای ترازمندی ونیروهای واکنش را برحسب زاویهٔ α پیدا کنید.

۴۸.۴. دوکرهٔ یکسان در دستگاهی که در شکل ۴۲.۴ نشان داده شده قرار دارند. واکنش سطوح‌را روی‌کره‌ها حساب‌کنید. ثابت‌کنیدکه هرکره به‌طورمستقل دروضع ترازمندی است.

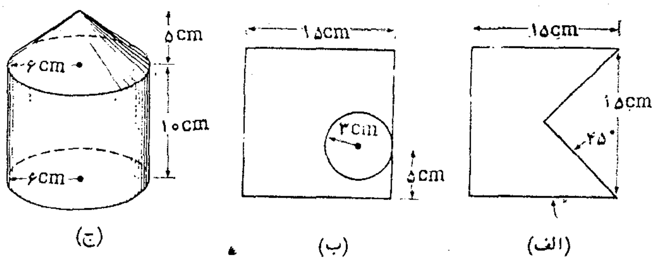


شکل ۴۲.۴



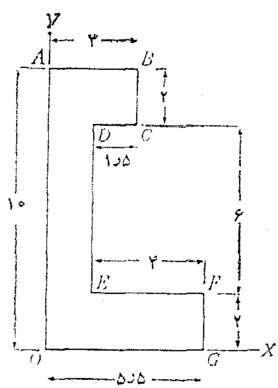
شکل ۴۱.۴

۴۹.۴. مثال ۱۱.۴ داده شده دراین فصل را، بدون تغییر داده‌های آن، با اضافه کردن نیروی مالشی (قایم) که همواره برابر $0.3F_2$ است، حل کنید.



شکل ۴۳.۴

۵۰.۴. ثابت کنید که برآیند دونیروی $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ شکل ۱۷.۴ از محل تقاطع $\mathbf{F}_3$ و $\mathbf{W}$ می‌گذرد وبرابر و درجهت مخالف برآیند آنهاست. آیا این نتیجه را می‌شد پیش‌بینی کرد؟



شکل ۴۴.۴

۵۱.۴ مرکز جرم سه جسم همگن نشان داده شده درشکل ۴۳.۴ را پیدا کنید.

۵۲.۴ با استفاده ازجدول ۱.۱۳، مرکز جرم دستگاههای زیر را پیدا کنید: (الف) زمین-ماه، (ب) زمین - خورشید.

۵۳.۴ مرکز جرم جسم همگن داده شده در شکل ۴۴.۴ را پیدا کنید. $AB = ۳\text{cm}$، $BC = ۲\text{cm}$، $CD = ۱٫۵\text{cm}$، $DE = ۶\text{cm}$، $EF = ۴\text{cm}$ و $FG = ۲\text{cm}$ می باشند.

۵۴.۴ مکان مرکز جرم مولکولهای زیر را پیدا کنید:

(الف) CO، فاصلهٔ بین اتمهای C و O برابر $۱٫۱۳ \times ۱۰^{-۱۰}\text{m}$ است. (ب) CO_2، که یک مولکول خطی است با اتم C در وسط به فاصلهٔ برابر از دو اتم O. (ج) H_2O، این مولکول به صورت زاویه‌ای است که O در رأس آن قرار دارد. فاصلهٔ O–H برابر $۰٫۹۱ \times ۱۰^{-۱۰}\text{m}$ وزاویهٔ بین دو O–H برابر ۱۰۵° است. (د) NH_3، مولکولی‌است به شکل هرم، N دررأس، فاصلهٔ N–H برابر $۱٫۰۱ \times ۱۰^{-۱۰}\text{m}$ و زاویهٔ بین دو پیوند N–H برابر ۱۰۸° است.

۵۵.۴ چهار جرم برابر در رأسهای یک چهار وجهی منتظم به ضلع a قرار دارند. مکان مرکزجرم آنها را پیدا کنید.

بخش اول

مکانیک

حرکت اساسی‌ترین و روشن‌ترین پدیده‌ای است که اطراف خود مشاهده می‌کنیم. وزش باد، امواج اقیانوسها، پرواز پرندگان، دویدن حیوانات، افتادن برگها و . . . همگی پدیده‌های حرکتی هستند. عملا می‌توان در هرفرایند قابل تصور رد حرکت چیزی را پیدا کرد. زمین‌و سیاره‌ها اطراف خورشید می‌گردند؛ حرکت الکترونها در داخل اتم موجب جذب و گسیل نور می‌شود، جابجایی الکترونها در داخل یک فلز موجب جریان الکتریکی می‌شود؛ حرکت مولکولهای گاز تولید فشار می‌کند. تجارب روزانهٔ ما حاکی از آنند که حرکت هر جسم تحت تأثیر اجسامی است که آن را احاطه کرده‌اند، یا به‌گفتهٔ دیگر در تأثیر متقابل یکدیگرقرار دارند. کاراساسی یک فیزیکدان ویا یک مهندس، قرار دادن اشیاء به‌گونه‌ای است که تحت تأثیر برهم کنشهای یکدیگر نوع خاصی ازحرکت را به وجود آورند. در لامپ تصویر تلویزیون باریکهٔ الکترونها باید طوری حرکت کند تا تصویر روی صفحهٔ تلویزیون ظاهرشود. دریک موتور حرارتی، مولکولهای مادهٔ آتش‌زای سوخته شده باید به‌گونه‌ای حرکت کنند تا پیستون یا توربینی را در سوی موردنظر جابجا کنند. یک واکنش شیمیایی نتیجهٔ بعضی حرکات اتمی و حاصل آن نظم نوینی است که مولکولهای جدیدی به‌وجود می‌آورد. نقش یک فیزیکدان کشف علل تمام این‌حرکتها ونقش یک مهندس برقرار کردن نظمی جهت ایجاد حرکتهای مفید است، حرکتهایی که زندگی را آسانتر می‌کنند. ماهیت برهم‌کنش هرچه باشد، چند قاعده و اصل کلی وجود دارد که در هرحرکتی به کار می‌روند. مجموعهٔ این اصول و نظریه‌ای که این اصول برآن متکی است مکانیک نام دارد.

برای تحلیل و پیش‌بینی ماهیت حرکتهای ناشی از برهم‌کنشهای گوناگون، مفاهیم مهمی مانند اندازه حرکت، نیرو و انرژی ابداع و تعریف شده‌اند. اگرابتدا اندازه حرکت، نیرو و(یا)انرژی شناخته شوند، آنگاه می‌توان آنهارا به‌طورکمی بیان‌کرد وقوانینی ساخت که بابهره‌گیری ازاین قوانین حرکات حاصل را پیش‌بینی کرد. اندازه حرکت، نیرو وانرژی بقدری مهم‌اند که بندرت می‌توان پدیده‌ای را بدون استفاده ازاین کمیتها تحلیل کرد.

مکانیک که علم حرکت است، علم اندازه حرکت، نیرو و انرژی نیز هست و یکی از شاخه‌های اساسی فیزیک را تشکیل می‌دهد. پیش از آغاز به بررسی هر برهم کنش ویژه باید مکانیک را کاملا شناخت. درعصر گالیله[1] نیزنقش اساسی مکانیک را می‌شناختند، جملهٔ کوتاه «هرکه حرکت را نشناسد، طبیعت را نمی‌شناسد»* مؤید این‌اندیشه است. دراین‌کتاب، ازفصل ۵ تا فصل ۱۲، مکانیک مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

آنچه‌که امروزبه‌نام علم مکانیک شناخته می‌شود، ثمره نبوغ سرایزاک نیوتون[2] است. اونظریهٔ بزرگی عرضه داشت که اصول نیوتون نامیده می‌شوند. البته بسیاری‌کسان دیگر، از جمله نام آورانی مانند ارشمیدس[3]، گالیله، کپلر[4]، دکارت[5]، هویگنز، لاگرانژ[6]، هامیلتون[7] ماخ[8]، و اینشتین[9] نیز در پیشرفت این علم سهم بسزایی داشته‌اند.

---

* Ignorato motu, ignoratur natura.

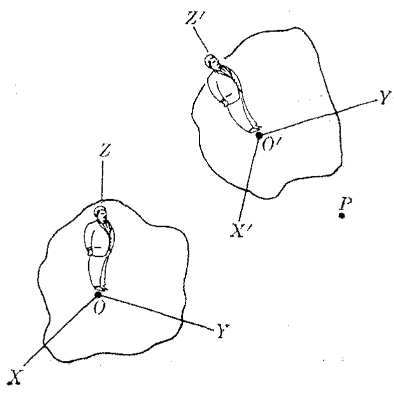
1. Galileo 2. Sir Isaac Newton 3. Archimedes
4. Kepler 5. Descartes 6. Lagrange
7. Hamilton 8. Mach 9. Einstein

۵
سینماتیک

۱.۵ مقدمه

هرگاه جای یک جسم نسبت به‌جسم دیگری برحسب زمان تغییر کند، گوییم آن جسم نسبت به‌جسم دوم درحال حرکت است. برعکس، هرگاه محل نسبی جسم برحسب زمان تغییر نکند گوییم در سکون نسبی است. سکون و حرکت هر دو مفاهیمی نسبی هستند، یعنی به شرایط جسم نسبت به‌جسم دیگری‌که به‌عنوان مرجع به‌کارمی‌رود، بستگی دارند. یک درخت و یک خانه نسبت به‌زمین ساکن ولی نسبت به‌خورشید درحال‌حرکت هستند. وقتی ترنی ازایستگاهی می‌گذرد، گوییم ترن نسبت به‌ایستگاه در حال حرکت است. با این‌حال یک مسافر در داخل قطار می‌تواند بگوید ایستگاه نسبت به‌ترن در حال حرکت است و در جهت خلاف جابجا می‌شود.

بنابراین برای تشریح حرکت، ناظر باید یک چارچوب مرجع[1] تعریف و حرکت را نسبت به‌آن تجزیه و تحلیل کند. شکل ۱.۵ دو ناظر O و O' و ذرهٔ P را نشان می‌دهد. این دوناظر بترتیب چارچوبهای‌مرجع XYZ و $X'Y'Z'$ را به‌کار می‌برند. اگر O و O' نسبت به‌هم در حال سکون باشند حرکت ذرهٔ P را یکسان مشاهده می‌کنند. ولی چنانچه O و O' نسبت به‌هم درحرکت باشند، حرکت ذرهٔ P را یکسان مشاهده نمی‌کنند.



شکل ۱.۵. دوناظرمختلف حرکت ذرهٔ P را بررسی می‌کنند.

به‌عنوان مثال، فرض کنیم دوناظر یکی روی خورشید و دیگری روی زمین قراردارند (شکل ۲.۵) و هردو حرکت ماه را مطالعه می‌کنند. برای ناظر زمینی‌که چارچوب $X'Y'Z'$ را به‌کار می‌برد، ماه یک حرکت تقریباً دایره‌ای دور زمین دارد. ولی برای ناظر روی خورشیدکه چارچوب XYZ را به‌کارمی‌برد مسیرحرکت ماه یک خط منحنی موج‌دار به‌نظر می‌رسد. با این‌حال هرگاه دو ناظر از حرکت نسبی یکدیگر آگاه باشند، براحتی می‌توانند مشاهدات خود را با هم تطبیق دهند. در فصل ۶ به طور مفصل در مسئلهٔ مهم مقایسهٔ داده‌های به‌دست آمده از مشاهدهٔ ناظرهایی که نسبت به‌هم در حال حرکت هستند بحث خواهیم کرد. درحال حاضر فرض می‌کنیم چارچوب مرجع کاملا مشخصی در اختیار داریم.

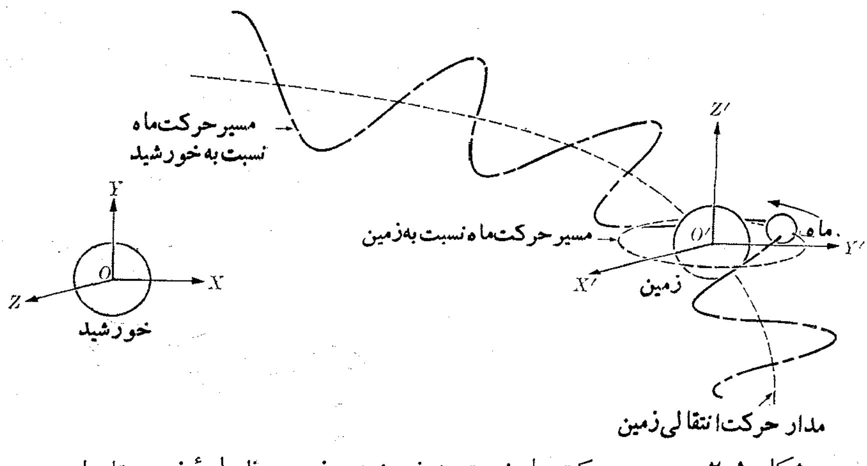
1. frame of reference

۲.۵ حرکت مستقیم‌الخط: سرعت

اگر مسیر حرکت جسمی خط مستقیم باشد آن را حرکت مستقیم الخط[1] می‌نامند. در شکل ۳.۵ محور X ها را منطبق بر مسیر حرکت فرض می‌کنیم. جای جسم به وسیلهٔ جابجایی x آن از یک نقطهٔ اختیاری مانند O به‌نام مبدأ، معین می‌شود. اصولا جابجایی را می‌توان با تابعی مانند $x=f(t)$ به‌زمان مربوط ساخت. بدیهی است، x امکان دارد منفی یا مثبت باشد. فرض‌کنیم درلحظهٔ t جسم درمکان A با $OA=x$ ودرلحظهٔ بعدی t' در نقطهٔ B با $OB=x'$ باشد. سرعت میانگین[2] جسم بین A و B با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$v_{\text{ave}}=\frac{x'-x}{t'-t}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (۱.۵)$$

که درآن $\Delta x=x'-x$ جابجایی جسم و $\Delta t=t'-t$ زمان لازم برای انجام این جابجایی است. بنابراین سرعت میانگین در طول یک زمان معین برابر است با جابجایی



شکل ۲.۵. مسیر حرکت ماه نسبت به خورشید و زمین. فاصلهٔ زمین تا ماه ۴×۱۰^{-۳} برابر فاصلهٔ زمین تا خورشید است. روی شکل، اعوجاج مسیرماه خیلی اغراق‌آمیز رسم شده است.

میانگین درواحد زمان درطول همین فاصلهٔ زمانی. برای تعیین سرعت لحظه‌ای[3] درنقطه‌ای مانند A، باید فاصلهٔ زمانی Δt تا آنجا که ممکن است کوچک باشد، به‌گونه‌ای که عملا در طول زمان Δt هیچگونه تغییری درحالت حرکت به‌وجود نیاید. به زبان ریاضی، سرعت لحظه‌ای برابر است با حد کسر درمعادلهٔ (۵.۱)، هنگامی که مخرج آن، Δt، به سمت صفر میل می‌کند. این نکته را به‌شکل زیر می‌نویسند:

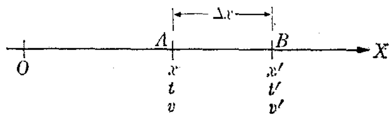
$$v=\lim_{\Delta t\to 0} v_{\text{ave}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

این رابطه همان تعریف مشتق x نسبت به t است؛ یعنی

1. rectilinear motion 2. average velocity 3. instantaneous velocity

$$v = \frac{dx}{dt}. \qquad (۲.۵)$$

به‌طوری که رابطهٔ (۲.۵) نشان می‌دهد سرعت لحظه‌ای از مشتق جابجایی نسبت به‌زمان به دست می‌آید، عملا سرعت لحظه‌ای را با مشاهدهٔ حرکت جسم در دو نقطهٔ خیلی نزدیک به هم به فاصلهٔ خیلی کوچک dx، و با اندازه‌گیری فاصلهٔ زمانی کوچک dt لازم برای رفتن جسم از وضع اول به وضع بعدی پیدا می‌کنند. ما از این پس، همیشه به جای سرعت لحظه‌ای کلمهٔ سرعت را به کار خواهیم برد.



شکل ۳.۵

اگر $v = f(t)$ را بشناسیم، می‌توانیم مکان x را با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۲.۵) پیدا کنیم. در واقع، بنا به رابطهٔ (۲.۵) داریم $dx = vdt$ و با انتگرال‌گیری به دست می‌آید

$$\int_{x_\circ}^{x} dx = \int_{t_\circ}^{t} vdt$$

که درآن $x_\circ$ مقدار x درلحظهٔ $t_\circ$ است. چون $\int_{x_\circ}^{x} dx = x - x_\circ$ است، بنابراین

$$x = x_\circ + \int_{t_\circ}^{t} vdt. \qquad (۳.۵)$$

برای درک معنای فیزیکی معادلهٔ (۳.۵) باید توجه داشت که vdt نمایش جابجایی جسم درطول زمان کوتاه dt است. بدین طریق هرگاه فاصله زمانی $t - t_\circ$ را به فاصله‌های زمانی پیاپی $dt_۱$، $dt_۲$، $dt_۳$ و . . . تقسیم کنیم، جابجایی مربوط به آنها بترتیب $v_۱\, dt_۱$، $v_۲\, dt_۲$، $v_۳\, dt_۳$ و . . . وجابجایی کل بین t و $t_\circ$ مجموع آنهاست. گوشزد می‌کنیم که $v_۱$، $v_۲$، $v_۳$ و . . . مقادیر سرعت درطی هریک از فاصله‌های زمانی است. دراین صورت، بنا به تعریف انتگرال معین داریم

$$\text{جابجایی} = x - x_\circ = v_۱\, dt_۱ + v_۲\, dt_۲ + v_۳\, dt_۳ + \cdots$$
$$= \sum_i v_i\, dt_i = \int_{t_\circ}^{t} vdt.$$

بدیهی است این جابجایی، $x - x_\circ$، با معادلهٔ (۳.۵) تطبیق می‌کند. باید توجه داشت که جابجایی Δx (یا dx) بسته به اینکه حرکت ذره به سمت راست یا چپ باشد مثبت یا منفی است، درنتیجه علامت سرعت نیز + یا − خواهد بود. بنابراین در حرکت مستقیم‌الخط، علامت سرعت سوی حرکت را نشان می‌دهد. اگر سرعت مثبت باشد حرکت درجهت $+OX$ وبرای سرعتهای منفی حرکت درسوی $-OX$ خواهد بود.

گاهی مفهوم تندی[1] را کــه به صورت نسبت فاصلــه برزمان تعریف می‌شود به کار می‌برنـد. این کمیت همیشه مثبت و مقدار عددی آن برابر است با قدر مطلق سرعت؛ یعنی تندی $= |v|$. با این حال، معمولاً تندی میانگین با سرعت میانگین یکسان نیست. همچنین نباید $x - x_\circ$، «جابجایی» درطول زمان $t - t_\circ$، را با مسافت پیموده شده درهمین فاصله زمانی یکسان گرفت. جابجایی از روی معادله (۵.۳) محاسبه می‌شود، ولی مسافت پیموده شده از رابطهٔ $\int_{t_\circ}^{t} |v|\,dt$ به دست می‌آید. به عنوان مثال، برای رفتن ازشهر A به شهر B که در ۱۰۰ کیلومتری شرق A قرار دارد، یک راننده می‌تواند ابتدا بــه شهر C واقع در ۵۰ کیلومتری غرب A رفته وسپس برگشته بــه شهر B برود. دراین صورت مسافت پیموده شده برابر ۲۰۰km ولــی جابجایی، همان ۱۰۰km است. اگر راننده ۴ ساعت در راه بــاشد تندی میــانگین $۲۰۰\text{km}/۴\text{hr} = ۵۰\text{km hr}^{-۱}$، ولــی سرعت میانگیــن $۱۰۰\text{km}/۴\text{hr} = ۲۵\text{km hr}^{-۱}$ است.

دردستگـاه یکاهای MKSC سرعت برحسب متر برثانیه یا $\text{m s}^{-۱}$ بیان می‌شود وآن سرعت جسمی است که با آهنگ ثابتی، درهرثانیه یک متر حرکت می‌کند. بـدیهی است سرعت را می‌توان با هرترکیبی از واحد زمان وطول مانند کیلومتر بر ساعت، $\text{km hr}^{-۱}$، فوت بر دقیقه وغیره نیز بیان کرد.

مثال ۵.۱ ذره‌ای روی محور xهـا به‌گونه‌ای حرکت می‌کند که وضع آن درهر لحظه با رابطهٔ $x = ۵t^۲ + ۱$ که درآن x برحسب متر و t برحسب ثـانیه است، مشخص می‌شود. سرعت میانگین این ذره را درفاصله زمانی (الف) ۲s تا ۳s؛ (ب) ۲s تا ۲٫۱s؛ (ج) ۲s تـا ۲٫۰۰۱s؛ (د) ۲s تـا ۲٫۰۰۰۰۱s حساب کنید. (ه) سرعت لحظــه‌ای ایـن ذره در $t = ۲\text{s}$ چقدر است؟

حل: ۲ ثانیه را که درتمام حالتهای مسئله مشترک است $t_\circ$ می‌نامیم. با قرار دادن $t_\circ = ۲$ در رابطهٔ $x = ۵t^۲ + ۱$ داریم $x = ۵ \times ۲^۲ + ۱ = ۲۱\text{m}$. بنابراین در هریک از حالتهای (الف)، (ب)، (ج) و (د) داریم

$$\Delta t = t - t_\circ = t - ۲ \text{ و } \Delta x = x - x_\circ = x - ۲۱$$

(الف) برای $t = ۳\text{s}$ داریم $\Delta t = t - ۲ = ۳ - ۲ = ۱\text{s}$ و

$$\Delta x = x - ۲۱ = ۴۶ - ۲۱ = ۲۵\text{m} \text{ و } x = ۵ \times ۳^۲ + ۱ = ۴۶\text{m}.$$

درنتیجه

$$v_{\text{ave}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲۵\text{m}}{۱\text{s}} = ۲۵\text{ms}^{-۱}$$

(ب) برای $t = ۲٫۱\text{s}$ به دست می‌آید $\Delta t = ۰٫۱\text{s}$ و

$$.\Delta x = ۲۳٫۰۵ - ۲۱ = ۲٫۰۵\text{m} \text{ و } x = ۵ \times (۲٫۱)^۲ + ۱ = ۲۳٫۰۵\text{m}.$$

درنتیجه

1. speed

$$v_{\text{ave}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲٫۰۵\text{m}}{۰٫۱\,\text{s}} = ۲۰٫۵\text{ms}^{-۱}.$$

(ج) برای $t = ۲٫۰۰۱\text{s}$ به دست می‌آید $\Delta t = ۰٫۰۰۱\text{s}$ و

$$x = ۵ \times ۲٫۰۰۱^{۲} + = ۲۱٫۰۲۰۰۰۵\,\text{m}$$

و

$$\Delta x = ۱٫۰۲۰۰۵ - ۲۱ = ۰٫۰۲۰۰۰۵\text{m}$$

$$v_{\text{ave}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۰٫۰۲۰۰۰۵\text{m}}{۰٫۰۰۱\,\text{s}} = ۲۰٫۰۰۵\text{ms}^{-۱}$$

(د) بر دانشجو است که تحقیق کند به ازای $t = ۲٫۰۰۰۰۱\text{s}$ سرعت میانگین برابر است با $v_{\text{ave}} = ۲۰٫۰۰۰۰۵\text{m s}^{-۱}$.

(ه) مشاهده می‌شود با کاهش تدریجی Δt، سرعت میانگین به سمت $۲۰\text{m s}^{-۱}$ میل می‌کند. بنابراین انتظار داریم $۲۰\text{m s}^{-۱}$ بزرگی سرعت لحظه‌ای در $t = ۲\text{s}$ باشد. در واقع هرگاه در رابطهٔ

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(۵t^{۲} + ۱) = ۱۰t$$

به‌جای t، ۲s را قرار دهیم، به‌دست می‌آید $v = ۲۰\text{m s}^{-۱}$ که پاسخ سؤال (ه) است.

۳.۵ حرکت مستقیم‌الخط: شتاب

درحالت کلی، سرعت یک جسم تابع زمان است. اگر درحرکتی سرعت ثابت بماند، آن حرکت را یکنواخت گویند. به شکل ۳.۵ بازمی‌گردیم وفرض کنیم جسم در لحظهٔ t درنقطهٔ A وسرعت آن v و درلحظهٔ t' درنقطهٔ B وسرعت آن v' است. شتاب میانگین بین A و B با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$a_{\text{ave}} = \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (۴.۵)$$

که درآن $\Delta v = v' - v$ نمایش تغییرسرعت و $\Delta t = t' - t$ مثل همیشه، زمان لازم برای این تغییر سرعت است. بدین طریق، شتاب میانگین درطول یك فاصله زمانی معین برابر است با تغییر سرعت در واحد زمان درطی این فاصله زمانی.

حد شتاب میانگین را هنگامی که فاصله زمانی Δt خیلی کوچک باشد شتاب لحظه‌ای می‌نامند، یعنی

$$a = \lim_{\Delta t \to ۰} a_{\text{ave}} = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

درنتیجه

$$a = \frac{dv}{dt}. \qquad (۵.۵)$$

بدین ترتیب شتاب لحظه‌ای از مشتق سرعت نسبت به زمان به دست می‌آید. درعمل، شتاب لحظه‌ای را از تغییر جزئی سرعت dv کـه درزمانی کوتاه dt رخ می‌دهد حساب می‌کنند. ازاین‌پس، جهت اختصار، به جای شتاب لحظه‌ای تنها کلمهٔ «شتاب» را به کار خواهیم برد.

درحالت‌کلی شتاب درجریان حرکت تغییر می‌کند. اگر درحرکت مستقیم‌الخطی شتاب ثابت بماند، حرکت را با شتاب ثابت[1] می‌نامند.

هرگاه قدر مطلق سرعت با زمان افزایش پیدا کند، حرکت «تندشونده»[2] واگر قدر مطلق سرعت با زمان کاهش یابد حرکت «کند شونده»[3] نامیده می‌شود.

اگر شتاب حرکتی معلوم باشد می‌توان بـا انتگرال‌گیری ازمعادلهٔ (۵.۵) سرعت را به دست آورد. ازمعادلهٔ (۵.۵) داریم $dv = adt$ و ازانتگرال این رابطه به دست می‌آید

$$\int_{v_\circ}^{v} dv = \int_{t_\circ}^{t} adt$$

که درآن $v_\circ$ سرعت درلحظهٔ $t_\circ$ است. چون $\int_{v_\circ}^{v} dv = v - v_\circ$ است، بنابراین داریم

$$v = v_\circ + \int_{t_\circ}^{t} adt. \qquad (۶.۵)$$

همانند مـورد جابجایی، معنی فیزیکی معادلـهٔ (۶.۵) بآسانی قـابل درک است. می‌دانیم adt معرف تغییر سرعت درفـاصله زمانی کوتاه dt است. پس بار دیگر، با تقسیم $t - t_\circ$ به‌فواصل زمانی کوتاه $dt_۱$، $dt_۲$، $dt_۳$ و . . .، تغییرات سرعت عبارت می‌شوند از $a_۱dt_۱$، $a_۲dt_۲$، $a_۳dt_۳$ و . . .، که درآنها $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و . . . مقادیر شتاب درهـر یک از فـواصل زمانی است. تغییر کل سرعت $v - v_\circ$ بین زمان $t - t_\circ$ برابر است با مجموع این تغییر سرعتها:

$$\text{تغییرسرعت} = v - v_\circ = a_۱dt_۱ + a_۲dt_۲ + a_۳dt_۳ + \cdots$$
$$= \sum_i a_i dt_i = \int_{t_\circ}^{t} adt.$$

می‌توان ازترکیب معادلهٔ(۵.۲) بامعادلهٔ (۵.۵) رابطه‌ای بین شتاب ومکان برقرار کرد، یعنی

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

ویا

$$a = \frac{d^۲x}{dt^۲}. \qquad (۷.۵)$$

یک رابطهٔ مهم دیگر بین شتاب ومکان به طریق زیر به دست می‌آید: از روی معادلهٔ (۵.۵) می‌نویسیم $dv = adt$. اگرطرف راست این رابطه را درطرف راست معادلهٔ (۲.۵) وطرف چپ آن را درطرف چپ همان معادله ضرب کنیم، خواهیم داشت

---

1. uniformly accelerated 2. accelerated 3. decelerated (retarded)

$$vdv = adt\left(\frac{dx}{dt}\right) = adx$$

وبا انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم $\int_{x_0}^{x} adx = \int_{v_0}^{v} vdv$، یا

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} adx. \qquad (۸.۵)$$

این معادله بخصوص هنگامی که رابطهٔ بین a و x معلوم باشد، یعنی انتگرال سمت راست معادلهٔ (۸.۵) را بتوان حساب کرد، برای محاسبهٔ سرعت بسیار مفید است.

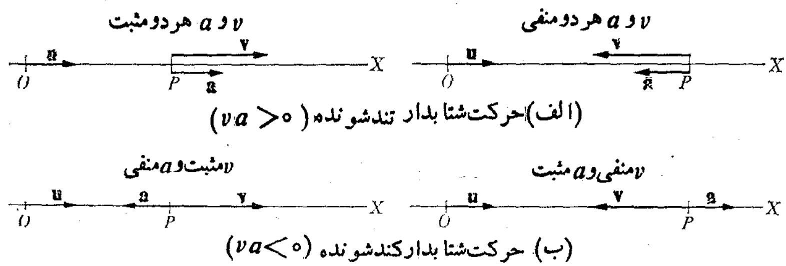
در دستگاه MKSC شتاب را برحسب متر بر مجذور ثانیه یا $(\mathrm{m/s})/\mathrm{s} = \mathrm{m\,s^{-2}}$ بیان می‌کنند و آن شتاب حرکت جسمی است که سرعت آن با آهنگ ثابتی، درهر ثانیه یک متر برثانیه افزایش می‌یابد. شتاب را می‌توان با یکاهای دیگری مثلا $(\mathrm{mi/hr})/\mathrm{s}$ نیز بیان کرد.

۴.۵ نمایش برداری سرعت وشتاب درحرکت مستقیم‌الخط

دریک حرکت مستقیم‌الخط سرعت را با برداری نشان می‌دهند که طول آن از معادلهٔ (۲.۵) به دست می‌آید و راستای آن با راستای حرکت تطبیق می‌کند (شکل ۴.۵). شتاب را نیز با برداری نشان می‌دهندکه بزرگی آن ازمعادلهٔ (۵.۵) به‌دست می‌آید، وبسته به‌اینکه شتاب مثبت یا منفی باشد، سوی بردار شتاب درسوی OX یا درجهت مخالف آن است. اگر $\mathbf{u}$ برداریکای راستای xهای مثبت باشد، می‌توان نوشت

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}\,v = \mathbf{u}\frac{dx}{dt} \quad و \quad \mathbf{a} = \mathbf{u}\frac{dv}{dt}. \qquad (۹.۵)$$

بسته به علامت dx/dt و dv/dt، بردارهای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ با بردار $\mathbf{u}$ همسو یا در سوی مخالف آن می‌باشند. اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ همسو باشند حرکت تند شونده واگر درسوی مخالف هم باشند حرکت‌کند شونده است (شکل ۴.۵). یک قاعدهٔ ساده: اگر$\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ هم علامت باشند حرکت تند شونده، درغیراین صورت حرکت کند شونده است.

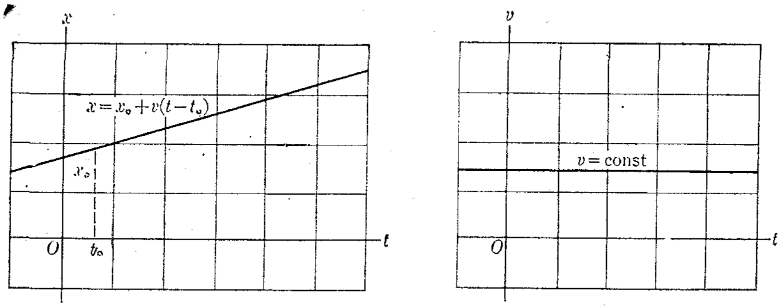


شکل ۴.۵. رابطهٔ برداری بین سرعت وشتاب درحرکت مستقیم‌الخط

مثال ۲.۵. حرکت مستقیم الخط یکنواخت.

حل: درچنین حرکتی v ثابت است. بنابراین $a = dv/dt = 0$ است، یعنی شتاب وجود ندارد همچنین اگر v ثابت باشد، از معادلهٔ (۳.۵) به‌دست می‌آید

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,dt = x_0 + v\int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v(t - t_0).$$



(الف) نمودارسرعت **(ب) نمودارجابجایی**

شکل ۵.۵. نمودار سرعت وجابجایی در حرکت یکنواخت

درشکل ۵.۵ (الف)، v برحسب t؛ ودر (ب)، x برحسب t رسم شده است.

مثال ۳.۵. حرکت مستقیم‌الخط با شتاب ثابت.

حل: درچنین حرکتی a ثابت است. بنابراین ازمعادلهٔ (۶.۵) داریم

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt = v_0 + a\int_{t_0}^{t} dt$$

ویا

$$v = v_0 + a(t - t_0) \qquad (۱۰.۵)$$

وباتوجه به رابطهٔ (۳.۵) می‌توان نوشت

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]\,dt = x_0 + v_0\int_{t_0}^{t} dt + a\int_{t_0}^{t} (t - t_0)\,dt$$

ویا

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t)^2. \qquad (۱۱.۵)$$

رابطهٔ مفید دیگری نیز ازمعادلهٔ (۸.۵) به‌دست می‌آید:

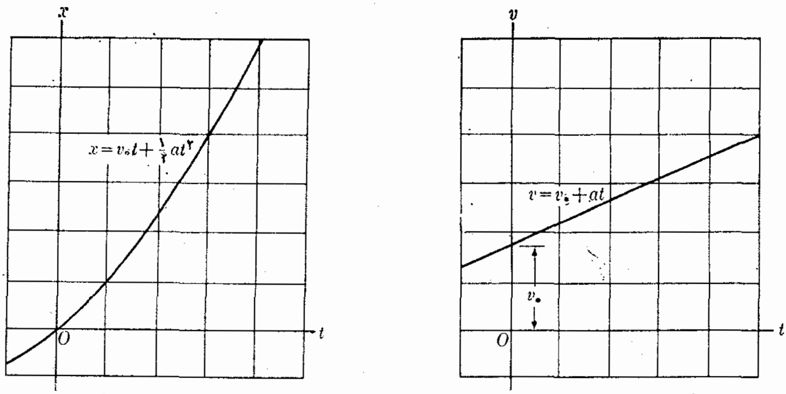
$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = a\int_{x_0}^{x} dx = a(x - x_0).$$

در نتیجه

$$v^{2} = v_{0}^{2} + 2a(x - x_{0}). \tag{۱۲.۵}$$

سقوط آزاد براثر نیروی گرانی نمونهٔ بسیار مهمی ازحرکت باشتاب ثابت است. در این مورد، اگر جهت مثبت را به سوی بالا انتخاب کنیم، تعریف می‌کنیم $a = -g$. علامت منفی نشان می‌دهد که شتاب گرانی به سمت پایین است. در سطح زمین مقدار g از یک نقطه به‌نقطهٔ دیگر تغییر می‌کند، ولی همیشه خیلی نزدیک به مقدار $g = ۹٫۸\ \mathrm{ms^{-2}}$ است. این مقدار برای تمام اجسام یکی است وتاهنگامی که از سطح زمین خیلی دور نشده‌ایم می‌توان آن را مستقل از ارتفاع درنظر گرفت. زیرا بادور شدن ازسطح زمین خواه به‌سمت داخل وخواه به‌سمت خارج آن، مقدار شتاب گرانی کاهش می‌یابد (فصل ۱۳).

می‌توان نمودار v و x را برحسب زمان رسم کرد. هرگاه برای سادگی، قرار دهیم $t_{0} = 0$ و $x_{0} = 0$، معادلهٔ (۱۰.۵) به‌صورت $v = v_{0} + at$ و معادلهٔ (۱۱.۵) به شکل $x = v_{0}t + \frac{1}{2}at^{2}$ در می‌آید. این دو معادله در شکل ۶.۵ نشان داده شده‌اند. این قبیل نمودارها برای تجزیه وتحلیل هرگونه حرکتی بسیار سودمندند.



(الف) نمودارسرعت (ب) نمودارجابجایی

شکل ۶.۵. نمودار سرعت و جابجایی درحرکت تند شونده باشتاب ثابت

مثال ۴.۵. جسمی روی محور X ها مطابق رابطهٔ

$$x = 2t^{3} + 5t^{2} + 5$$

حرکت می‌کندکه درآن x برحسب‌سانتی‌متر و t برحسب ثانیه‌است. (الف) سرعت‌وشتاب را در هرلحظه پیدا کنید. (ب) مکان، سرعت و شتاب را در $t = 2\mathrm{s}$ و $t = 3\mathrm{s}$ حساب کنید. (ج) شتاب وسرعت میانگین را بین $t = 2\mathrm{s}$ و $t = 3\mathrm{s}$ به‌دست آورید.

حل : (الف) بااستفاده ازمعادله‌های (۲.۵) و(۵.۵) می‌توان نوشت

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^{3} + 5t^{2} + 5) = 6t^{2} + 10t\ \mathrm{cm\ s^{-1}}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(۶t^۲ + ۱۰t) = ۱۲t + ۱۰\,\mathrm{cm\ s^{-۱}}$$

(ب) برای $t = ۲\,\mathrm{s}$ و با به‌کاربردن معادله‌های مربوط، به‌دست می‌آید

$$x = ۴۱\,\mathrm{cm},\ v = ۴۴\,\mathrm{cm\ s^{-۱}},\ a = ۳۴\,\mathrm{cm\ s^{-۲}}.$$

همچنین، برای $t = ۳\mathrm{s}$ داریم

$$x = ۱۰۴t,\quad v = ۸۴\,\mathrm{cm\ s^{-۱}},\ a = ۴۶\,\mathrm{cm\ s^{-۲}}$$

(ج) برای یافتن سرعت و شتاب میانگین بین $t = ۲\mathrm{s}$ و $t = ۳\mathrm{s}$، داریم $\Delta t = ۱\mathrm{s}$ ونیز از قسمت (ب) به‌دست می‌آید

$$\Delta v = ۴۰\,\mathrm{cm\ s^{-۱}},\ \Delta x = ۶۳\,\mathrm{cm}.$$

در نتیجه

$$v_{\text{ave}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۶۳\,\mathrm{cm}}{۱\mathrm{s}} = ۶۳\,\mathrm{cm\ s^{-۱}}$$

$$a_{\text{ave}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۴۰\mathrm{cm\ s^{-۱}}}{۱\mathrm{s}} = ۴۰\,\mathrm{cm\ s^{-۲}}.$$

مثال ۵.۵. شتاب جسمی که روی محور x ها حرکت می‌کند برابر است با

$$a = (۴x - ۲)\,\mathrm{m\ s^{-۲}}$$

که در آن x برحسب متر است. هرگاه $x_{\circ} = ۰$ و $v_{\circ} = ۱۰\,\mathrm{m\ s^{-۱}}$ باشد، سرعت حرکت جسم را برای هرنقطه روی محور به‌دست آورید.

حل: چون دراین‌مسئله شتاب برحسب x داده شده است نه برحسب زمان، برای پیداکردن سرعت نمی‌توان از تعریف $a = dv/dt$ استفاده کرد. به‌جای آن، معادلهٔ (۸.۵) را به‌کار می‌گیریم و درآن $v_{\circ} = ۱۰\,\mathrm{m\ s^{-۱}}$ و $x_{\circ} = ۰$ قرار می‌دهیم. به‌دست می‌آید

$$\frac{۱}{۲}v^۲ - \frac{۱}{۲}(۱۰)^۲ = \int_{\circ}^{x}(۴x - ۲)\,dx$$

و یا

$$v^۲ = ۱۰۰ + ۲[۲x^۲ - ۲x]_{\circ}^{x} = ۴x^۲ - ۴x + ۱۰۰$$

بالاخره

$$v = \sqrt{۴x^۲ - ۴x + ۱۰۰}.$$

آیا لازم است $\pm$ جلو رادیکال گذاشته شود؟ در صورتی که پاسخ مثبت باشد معنی آن چیست؟ به دانشجو توصیه می‌کنیم نمودار سرعت را برحسب x رسم کند.

با استفاده ازتعریف $v = dx/dt$، x را برحسب t و ازآنجا v و a را برحسب t

به‌دست آورید. [برای به‌دست آوردن $x(t)$ ممکن است لازم شود به جدول انتگرالها مراجعه کنید.]

مثال ۶.۵. از بام ساختمانی به بلندی $100\,\mathrm{m}$ گلوله‌ای با سرعت $98\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، در راستای قایم به‌سمت بالا شلیک می‌شود. (الف) حداکثر ارتفاعی راکه گلوله می‌تواند به‌آن برسد (ازسطح زمین) پیداکنید. (ب) زمانی‌که طول‌می‌کشد تاگلوله به‌این‌ارتفاع برسدچقدر است؟ (ج) سرعت آن هنگام برخورد با زمین چیست؟ (د) زمان کل سپری شده تا برخورد گلوله به‌زمین را حساب کنید.

حل: با استفاده از معادله‌های (۱۰.۵) و (۱۱.۵) و شکل ۷.۵ و به‌ازای $t_0 = 0$، $v_0 = 98\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ و $x_0 = x_A = 100\,\mathrm{m}$ (مبدأ مختصات نقطهٔ C در روی‌زمین فرض‌می‌شود) و

$$a = -g = -9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

در هرلحظه، می‌توان نوشت

$$v = 98 - 9{,}8\,t$$
$$x = 100 + 98\,t - 4{,}9\,t^2.$$

(الف) در بیشینهٔ ارتفاع (نقطهٔ اوج) $v = 0$ است، بنابراین $98 - 9{,}8\,t = 0$ در نتیجه $t = 10\,\mathrm{s}$. هرگاه در معادلهٔ x به‌جای t مساوی آن یعنی $10\,\mathrm{s}$ را قرار دهیم به‌دست می‌آید

$$x_B = 100 + 98 \times 10 - 4{,}9 \times (10)^2 = 590\,\mathrm{m}.$$

(ب) برای یافتن زمان لازم برای رسیدن گلوله به‌سطح زمین (یعنی نقطهٔ C)، x_C را برابر صفر قرار می‌دهیم، زیرا C مبدأ مختصات فرض شده است. دراین صورت

$$x_C = 0 = 100 + 98\,t - 4{,}9\,t^2.$$

این یک معادلهٔ درجه دوم نسبت به t است که جوابهای آن عبارتند از

$$t_C = -0{,}96\,\mathrm{s} \quad \text{و} \quad t_C = 20{,}96\,\mathrm{s}.$$

زمان منفی، مربوط به‌زمانی قبل از شلیک گلوله ($t = 0$) است و باید حذف شود، زیرا هیچگونه معنای فیزیکی دراین مسئله ندارد (ممکن است درمسایل دیگر معنی داشته باشد).

(ج) برای پیدا کردن سرعت در نقطهٔ C در رابطهٔ $v_C = 98 - 9{,}8\,t$ به جای t قرار می‌دهیم $t = 20{,}96\,\mathrm{s}$؛ به‌دست می‌آید

$$v_C = 98 - 9{,}8 \times (20{,}96) = -107{,}41\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که گلوله به‌سوی پایین حرکت می‌کند.

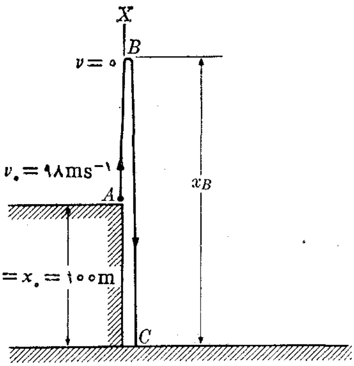
توصیه می‌شود با به‌کاربردن معادلهٔ (۱۲.۵) که دراین‌مسئله بدین‌صورت‌نوشته‌می‌شود

$$v^2 = 9604 - 19{,}6(x - 100)$$

صحت نتایج حاصل برای x_B و v_C را بررسی کنید. همچنین دانشجو می‌تواند A را مبدأ

مختصات قرار دهد و مسئله را حل کند. دراین صورت به‌دست می‌آید

$$x_\circ = x_A = \circ \text{ و } x_C = -\,۱۰۰\,\text{m}.$$



شکل ۷.۵

مثال ۷.۵. ذره‌ای مطابق‌قانون $x = t^۳ - ۳t^۲ - ۹t + ۵$ روی محور X ها حرکت می‌کند. در چه فاصله‌های زمانی حرکت ذره به سمت X های مثبت است؛ به سمت X های منفی است؛ تندشونده است؛ کندشونده است؟ نمودار x، v و a را برحسب زمان رسم‌کنید.

حل: با استفاده از معادلهٔ (۲.۵) برای سرعت لحظه‌ای داریم

$$v = \frac{dx}{dt} = ۳t^۲ - ۶t - ۹ = ۳(t+۱)(t-۳).$$

شتاب را می‌توان بااستفاده ازمعادلهٔ (۵.۵) به‌دست آورد:

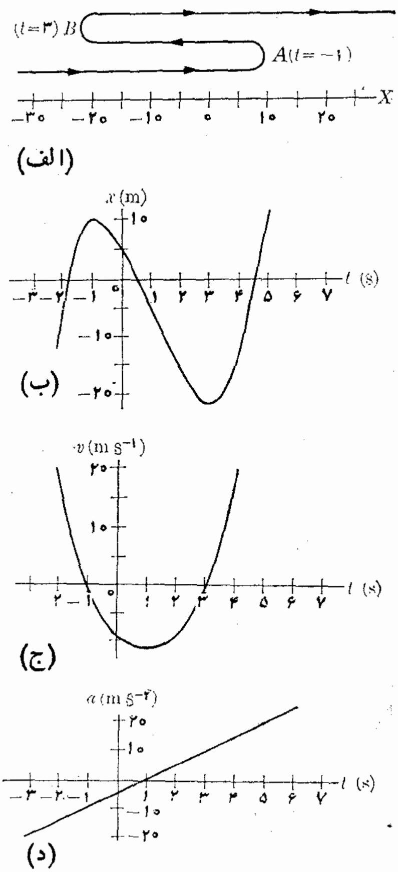
$$a = ۶t - ۶ = ۶(t-۱).$$

شکل ۸.۵ نمودار x، v و a را برحسب زمان نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که به ازای $t < -۱$ سرعت مثبت است و حرکت در سوی X های مثبت صورت می‌گیرد. به ازای $t = -۱$، $x = ۱۰$ وسرعت برابرصفراست. برای $-۱ < t < ۳$، سرعت منفی‌است و سوی حرکت عوض می‌شود و ذره درجهت X های منفی جابجا می‌شود. به ازای $t = ۳$، یعنی هنگامی‌که $x = -۲۲$ است،سرعت دوباره برابرصفرمی‌شود. به‌ازای $t > ۳$، سرعت از نو مثبت و سوی حرکت مجدداً تغییر می‌کند، ذره در سوی X های مثبت جابجا می‌شود. شکل ۸.۵ (الف) مکان تقریبی ذره را نشان می‌دهد. A و B نمایش نقاط برگشت‌اند، یعنی جاهایی که سرعت برابر صفر می‌شود.

ازنمودار سرعت و شتاب مشاهده می‌شود که برای $t < -۱$ حرکت کند شونده است (بزرگی v کاهش می‌یابد، به گفتهٔ دیگر، علامت a و v مخالف هم می‌باشد). برای $-۱ < t < ۱$ حرکت تند شونده، برای $۱ < t < ۳$ حرکت مجدداً کند شونده است و بالاخره برای $t > ۳$، حرکت تند شونده می‌شود.

این مثال نشان می‌دهد نمودار x، v و a برحسب‌زمان تاچه‌حد برای آشکارکردن مشخصات

حرکت سودمند است.



شکل ۸.۵

۵.۵ حرکت منحنی‌الخط[1]: سرعت

اکنون ذره‌ای را درنظر می‌گیریم کــه در حرکت خود مسیر خمیدهٔ P را مطابق شکل ۹.۵ طی می‌کند. درلحظهٔ t ذره درنقطهٔ A است که با بردار مکان

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OA} = \mathbf{u}_x\, x + \mathbf{u}_y\, y + \mathbf{u}_z\, z$$

نمایش داده می‌شود. درلحظهٔ t' ذره درنقطهٔ B با مکان

$$\mathbf{r}' = \overrightarrow{OB} = \mathbf{u}_x\, x' + \mathbf{u}_y\, y' + \mathbf{u}_z\, z'$$

قرار دارد. گرچه دراین مدت ذره‌کمان $AB = \Delta s$ را می‌پیماید، بردار جابجایی آن برابر

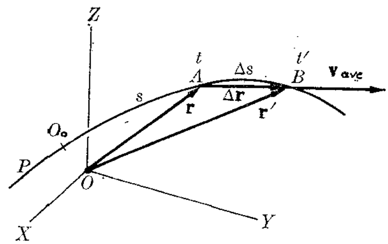
1. curvelinear motion

است با $\overrightarrow{AB} = \Delta\mathbf{r}$، ازشکل ۹.۵ پیداست که $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ می‌باشد. در نتیجه

$$\overrightarrow{AB} = \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathbf{u}_x(x' - x) + \mathbf{u}_y(y' - y) + \mathbf{u}_z(z' - z) = \mathbf{u}_x\Delta x + \mathbf{u}_y\Delta y + \mathbf{u}_z\Delta z \qquad (۱۳.۵)$$

که در آن $\Delta x = x' - x$، $\Delta y = y' - y$ و $\Delta z = z' - z$ است. سرعت میانگین نیز که یک کمیت برداری است با رابطهٔ زیرتعریف می‌شود:

$$\mathbf{v}_{\text{ave}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \qquad (۱۴.۵)$$



شکل ۹.۵. جابجایی و سرعت میانگین در یک حرکت منحنی‌الخط

با به‌کاربردن معادلهٔ (۱۳.۵) به‌دست می‌آید

$$\mathbf{v}_{\text{ave}} = \mathbf{u}_x\frac{\Delta x}{\Delta t} + \mathbf{u}_y\frac{\Delta y}{\Delta t} + \mathbf{u}_z\frac{\Delta z}{\Delta t}. \qquad (۱۵.۵)$$

سرعت میانگین با برداری موازی با بردار جابجایی $\overrightarrow{AB} = \Delta\mathbf{r}$ نشان‌داده می‌شود. برای محاسبهٔ سرعت‌لحظه‌ای، چنانکه درپیش عمل‌کردیم، باید Δt را خیلی‌کوچک بگیریم، یعنی

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_{\text{ave}} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \qquad (۱۶.۵)$$

اکنون اگر Δt به‌سمت صفر میل کند ($\Delta t \to 0$)، نقطهٔ B، چنانکه نقطه‌های B'، B''، . . . در شکل ۱۰.۵ نشان می‌دهند، به‌نقطهٔ A نزدیک می‌شود. همزمان با آن بزرگی و راستای بردار $\overrightarrow{AB} = \Delta\mathbf{r}$ و همچنین سرعت میانگین تغییر می‌کند. درحد، هنگامی‌که نقطهٔ B خیلی نزدیک به A است، بردار $\overrightarrow{AB} = \Delta\mathbf{r}$ در راستای مماس برمنحنی در نقطهٔ A یعنی AT قرار می‌گیرد. بنابراین سرعت لحظه‌ای در یک حرکت منحنی‌الخط برمسیر حرکت مماس است وبا رابطهٔ زیرنشان داده می‌شود:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \qquad (۱۷.۵)$$

با توجه به معادلهٔ (۱۵.۵)، رابطهٔ سرعت عبارت می‌شود از

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_x \frac{dx}{dt} + \mathbf{u}_y \frac{dy}{dt} + \mathbf{u}_z \frac{dz}{dt}. \quad (۱۸.۵)$$

در رابطهٔ (۱۸.۵) عبارتهای

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (۱۹.۵)$$

مؤلفه‌های سرعت روی محورهای OX، OY و OZ هستند و مقدار عددی سرعت برابر می‌شود با

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (۲۰.۵)$$

برای رسیدن از معادلهٔ (۱۶.۵) به معادلهٔ (۱۷.۵) می‌توان به گونهٔ مختصر متفاوتی نیز عمل کرد. درشکل ۹.۵، فرض کنیم $O_\circ$ یک نقطهٔ مرجع اختیاری روی منحنی مسیر باشد. کمیت $O_\circ A = s$ جای ذرهٔ مورد نظر را در جابجایی آن در طول منحنی اندازه می‌گیرد. همانند حرکت مستقیم‌الخط، بسته به جای ذره نسبت به نقطهٔ $O_\circ$، ممکن است s، مثبت یا منفی باشد. هنگامی که ذره از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رود، جابجایی Δs روی منحنی با طول کمان AB مشخص می‌شود. با ضرب و تقسیم معادلهٔ (۱۶.۵) به Δs که برابرکمان ABاست، به دست می‌آید

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to \circ} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta s \to \circ} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}\right)\left(\lim_{\Delta t \to \circ} \frac{\Delta s}{\Delta t}\right).$$

با مراجعه به شکل ۱۰.۵، می‌بینیم که درپرانتز اول هنگامی که Δt به سمت صفر میل می‌کند ($\Delta t \to \circ$)، Δs نیز بـه سمت صفر میل می‌کند ($\Delta s \to \circ$). از طرف دیگر، از شکل ۹.۵ پیداست کـه بـزرگـی کمیت برداری $\Delta \mathbf{r}$ تقریباً با Δs برابر است و هرچه نقطهٔ A به نقطهٔ B نزدیکتر شود این دو مقدار بیشتر به هم نزدیک می‌شوند. هنگامی که Δs به سمت صفرمیل‌می‌کند، حد کسر $\Delta \mathbf{r}/\Delta s$ نمایش برداری است به‌بزرگی واحد و در راستای مماس به منحنی مسیر، یعنی

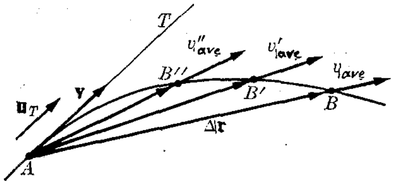
$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to \circ} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \mathbf{u}_T \quad (۲۱.۵)$$

از طرف دیگر

$$\lim_{\Delta t \to \circ} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (۲۲.۵)$$

بنابراین می‌توان $\mathbf{v}$ را به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_T \frac{ds}{dt} = \mathbf{u}_T v \quad (۲۳.۵)$$



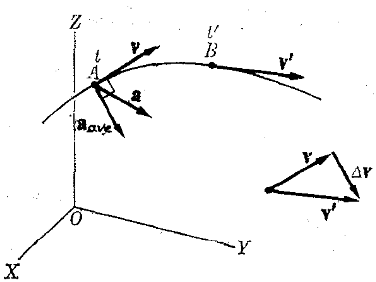
شکل ۱۰.۵. در یک حرکت منحنی الخط سرعت بر مسیر مماس است

که‌در آن ds/dt مقدار سرعت و بردار یکای $\mathbf{u}_T$ راستای آن‌را نشان‌می‌دهد. فرض $v=ds/dt$ برای مقدار سرعت با تعریف سرعت در معادلهٔ (۲.۵) سازگار است، زیرا در اینجا ds جابجایی ذره درمدت زمان dt روی‌مسیرمنحنی می باشد. بدین‌طریق نقش ds دراین‌حرکت همانند نقش dx درحرکت مستقیم الخط است. تنها فرق‌بین معادلهٔ (۲۲.۵) ومعادلهٔ (۲.۵) دخالت عنصر راستا یا بردار یکای $\mathbf{u}_T$ روی مماس‌است‌که‌پیش ازاین‌در بخش ۴.۵ واردشده‌بود.

۶.۵ حرکت منحنی الخط: شتاب

درحالت کلی، در یک حرکت منحنی الخط هم بزرگی و هم راستای سرعت تغییر می‌کند. بزرگی سرعت تغییر می کند زیرا حرکت ذره ممکن است تند یا کند شود. راستای سرعت تغییر می‌کند زیرا سرعت بر مسیر مماس است و راستای مسیر دائماً تغییر می‌کند. شکل ۱۱.۵ سرعت ذره را در لحظه‌های t و t' هنگامی که ذره بترتیب در نقطه‌های A و B قرار دارد به دست می‌دهد. تغییر برداری سرعت در حرکت از نقطهٔ A تا نقطهٔ B در مثلثی که از بردارها تشکیل شده با $\Delta\mathbf{v}$ نشان داده شده است، بـه گفتهٔ دیگر، چون در شکل ۱۱.۵، در مثلث بردارها $\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}=\mathbf{v}'$ است، درنتیجه $\Delta\mathbf{v}=\mathbf{v}'-\mathbf{v}$ می‌شود. از اینجا شتاب میانگین در طول زمان Δt را که یک کمیت برداری است چنین تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{a}_{\text{ave}}=\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \qquad (۲۴.۵)$$



شکل ۱۱.۵. شتاب در حرکت منحنی الخط

یعنی موازی $\Delta\mathbf{v}$ است. چون $\mathbf{v}=\mathbf{u}_x v_x+\mathbf{u}_y v_y+\mathbf{u}_z v_z$ است داریم

$$\Delta\mathbf{v}=\mathbf{u}_x\Delta v_x+\mathbf{u}_y\Delta v_y+\mathbf{u}_z\Delta v_z$$

و

$$\mathbf{a}_{\text{ave}} = \mathbf{u}_x \frac{\Delta v_x}{\Delta t} + \mathbf{u}_y \frac{\Delta v_y}{\Delta t} + \mathbf{u}_z \frac{\Delta v_z}{\Delta t}. \qquad (۲۵.۵)$$

شتاب لحظه‌ای که از این به بعد فقط «شتاب» نامیده می‌شود، با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{a}_{\text{ave}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

و یا

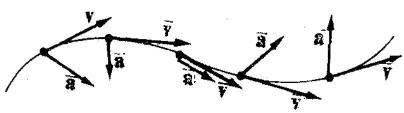
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \qquad (۲۶.۵)$$

شتاب برداری است درراستای تغییر لحظه‌ای سرعت. چون سرعت درراستای انحنای منحنی تغییر پیدا می‌کند، در حالت کلی شتاب نه عمود بر مسیر است و نه مماس بر آن، بلکه همیشه به سمت کاوی منحنی می‌باشد (شکل ۱۲.۵). با استفاده از معادلهٔ (۱۷.۵) می‌توان معادلهٔ (۲۶.۵) را به‌شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \qquad (۲۷.۵)$$

بنا به معادلهٔ (۲۵.۵) داریم

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}_x \frac{dv_x}{dt} + \mathbf{u}_y \frac{dv_y}{dt} + \mathbf{u}_z \frac{dv_z}{dt} \qquad (۲۸.۵)$$



شکل ۱۲.۵. رابطهٔ برداری بین سرعت و شتاب در حرکت منحنی الخط

به طوری که اندازهٔ مؤلفه‌های شتاب در راستای محورهای OX، OY و OZ عبارتند از

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt} \qquad (۲۹.۵)$$

یا، بنا به معادله‌های (۱۹.۵) یا (۲۷.۵)

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ و } a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \qquad (۳۰.۵)$$

و بزرگی شتاب برابر است با

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (۳۱.۵)$$

معمولا دریک حرکت منحنی الخط معادلهٔ مسیر، یا به‌گفتهٔ دیگر، مختصات ذرهٔ متحرک به صورت تابعی از زمان معلوم است. این مختصات با معادله‌های زیر داده می‌شوند:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

با به کار بستن معادله‌های (۱۹.۵) و (۲۹.۵) می‌توان سرعت و شتاب را حساب کرد. در حالتهای دیگر، مسئله درست برعکس است: مؤلفه‌های شتاب برحسب زمان معلوم می‌باشند، یعنی

$$a_x = a_x(t),\ a_y = a_y(t),\ a_z = a_z(t)$$

دراین صورت با استفاده از معادلهٔ (۲۹.۵) و انتگرال گیری از آن، مؤلفه‌های سرعت، و با انتگرال گیری از معادلهٔ (۱۹.۵) مختصات ذره به صورت توابعی از زمان به‌دست می‌آیند.

۷.۵ حرکت با شتاب ثابت

حالتی که در آن بزرگی و راستای شتاب ثابت باشد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. با ثابت بودن $\mathbf{a}$ از انتگرال معادلهٔ (۲۶.۵) به دست می‌آید

$$\int_{v_\circ}^{v} d\mathbf{v} = \int_{t_\circ}^{t} \mathbf{a}\,dt = \mathbf{a}\int_{t_\circ}^{t} dt = \mathbf{a}(t - t_\circ) \qquad (۳۲.۵)$$

که در آن $v_\circ$ سرعت در لحظهٔ $t_\circ$ است. چون $\int_{v_\circ}^{v} d\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\circ$ است، بنابراین داریم

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\circ + \mathbf{a}(t - t_\circ). \qquad (۳۳.۵)$$

می‌توان در هر لحظه سرعت را از این معادله به دست آورد. با قرار دادن $\mathbf{v}$ از معادلهٔ (۳۳.۵) در معادلهٔ (۱۷.۵) و با انتگرال گیری به دست می‌آید

$$\int_{r_\circ}^{r} d\mathbf{r} = \int_{t_\circ}^{t} [\mathbf{v}_\circ + \mathbf{a}(t - t_\circ)]dt = \mathbf{v}_\circ \int_{t_\circ}^{t} dt + \mathbf{a}\int_{t_\circ}^{t} (t - t_\circ)dt$$

که در آن $\mathbf{r}_\circ$ جای ذره در لحظهٔ $t_\circ$ است. پس

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\circ + \mathbf{v}_\circ(t - t_\circ) + \frac{۱}{۲}\mathbf{a}(t - t_\circ)^{۲}. \qquad (۳۴.۵)$$

ازاین معادله جای ذره درهر لحظه به دست‌می‌آید. می‌توان این نتایج‌را بامعادله‌های (۱۰.۵) و (۱۱.۵) که برای حرکت مستقیم‌الخط با شتاب ثابت به دست آوردیم مقایسه کرد. در حرکت مستقیم‌الخط سرعت وشتاب در راستای یکسان و سوی موافق (یا مخالف) هم هستند. در حالت کلی‌که مورد بحث ماست، $\mathbf{v}_\circ$ و $\mathbf{a}$ می‌توانند راستاهای مختلف داشته باشند. بنابراین $\mathbf{v}$ که از معادلهٔ (۳۳.۵) به‌دست می‌آید با $\mathbf{a}$ موازی نیست، ولی همیشه در صفحهٔ حاصل از $\mathbf{v}_\circ$ و $\mathbf{a}$ قرار دارد. همچنین معادلهٔ (۳۴.۵) نشان می‌دهد که انتهای بردار $\mathbf{r}$ همیشه در صفحهٔ موازی با صفحهٔ $\mathbf{v}_\circ$ و $\mathbf{a}$ که از نقطهٔ مشخص شده با $\mathbf{r}_\circ$ می‌گذرد قراردارد. از مطالب فوق نتیجه می‌گیریم که حرکت با شتاب ثابت همیشه در یک صفحه است. همچنین معادلهٔ (۳۴.۵) نشان می‌دهد که مسیر حرکت به صورت سهمی است (به مسئلهٔ ۳۳.۳ مراجعه کنید).

یکی از موارد استفادهٔ بسیار جالب و مفید این معادله‌ها کاربردآنها در حرکت یک

پرتابه[1] است. در این مورد $\mathbf{a}$ برابر شتاب گرانی، یعنی $\mathbf{g} = \mathbf{a}$ است. دستگـاه مختصات OXY را در صفحهٔ $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ انتخاب می‌کنیم. سوی مثبت Yها بـه سمت بالاست، به‌گونه‌ای که $\mathbf{g} = -\mathbf{u}_y g$ و مبدأ O بر $\mathbf{r}_\circ$ منطبق است (شکل ۱۳.۵). دراین صورت

$$\mathbf{v}_\circ = \mathbf{u}_x v_{\circ x} + \mathbf{u}_y v_{\circ y}$$

که درآن

$$v_{\circ y} = v_\circ \sin\alpha, \quad v_{\circ x} = v_\circ \cos\alpha. \tag{۳۵.۵}$$

معادلهٔ (۳۳.۵) را می‌توان برحسب مؤلفه‌ها نوشت (با قرار دادن $t_\circ = \circ$):

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_x v_x + \mathbf{u}_y v_y = (\mathbf{u}_x v_{\circ x} + \mathbf{u}_y v_{\circ y}) - \mathbf{u}_y g t$$

یا

$$v_y = v_{\circ y} - gt, \quad v_x = v_{\circ x} \tag{۳۶.۵}$$

این معادله نشان می‌دهد که مولفهٔ $\mathbf{v}$، چنانکه می بایست، در راستای OX ثابت باقی می‌ماند زیرا دراین راستا شتاب وجودندارد. همچنین،هرگاه رابطهٔ (۳۴.۵) را به‌صورت معادله‌ای بنویسیم‌کـه مؤلفه‌ها ازهم جدا شده باشند ودرآن به‌جای $\mathbf{r}_\circ = \circ$، $t_\circ = \circ$ قرار دهیم بـه دست می‌آید

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y = (\mathbf{u}_x v_{\circ x} + \mathbf{u}_y v_{\circ y})t - \mathbf{u}_y \frac{۱}{۲} g t^۲$$

یا

$$y = v_{\circ y} t - \frac{۱}{۲} g t^۲, \qquad x = v_{\circ x} t \tag{۳۷.۵}$$

که مختصات ذره را به صورت توابعی از زمان بـه دست می‌دهد. هرگاه در معادلهٔ (۳۶.۵) به جای v_y صفر قرار دهیم زمان لازم برای رسیدن پرتابه به بـالاترین نقطه، A (نقطهٔ اوج) به دست می‌آید، زیرا در این نقطه راستای سرعت افقی است. بنابراین

$$t = \frac{v_{\circ y}}{g} \quad \text{یا} \quad t = \frac{v_\circ \sin\alpha}{g}. \tag{۳۸.۵}$$

برای به دست آوردن h، ارتفاع بیشینه‌ای که پـرتابه به‌آن می‌رسد در معادلـهٔ دوم (۳۷.۵) مقدار t را از معادلهٔ (۳۸.۵) قرار می‌دهیم:

$$h = \frac{v_\circ^۲ \sin^۲\alpha}{۲g} \tag{۳۹.۵}$$

زمان پرواز، زمانی‌که لازم است تاپرتابه مجدداً به تراز زمین در نقطهٔ B برگردد، از قرار دادن $y = \circ$ در معادلهٔ (۳۷.۵) به دست می‌آیـد. بدیهی است این زمان دو بـرابـر زمانی خواهد بود که از معادلهٔ (۳۸.۵) پیدا می‌شود، یعنی $۲v_\circ \sin^۲\alpha / ۲g$.

---

1. projectile

برد[1]، $R=OB$، مسافت پیموده شده افقی است که ازقرار دادن زمان پرواز در اولین معادله از دو معادلهٔ (۳۷.۵) به دست می آید:

$$R = v_{\circ x}\frac{2v_\circ \sin\alpha}{g} = \frac{2v_\circ^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}$$

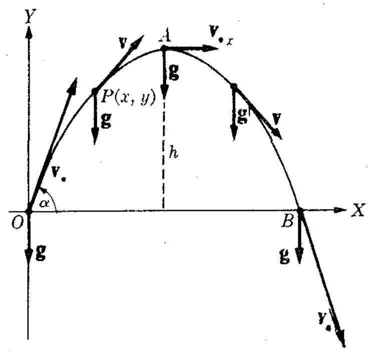
یا

$$R = \frac{v_\circ^2 \sin 2\alpha}{g}. \tag{۴۰.۵}$$

یادآوری می‌شود که به ازای $\alpha = 45^\circ$ برد بیشینه است. از حذف t بین دو معادلهٔ (۳۷.۵) معادلهٔ مسیر به دست می‌آید:

$$y = -\frac{g}{2v_\circ^2\cos^2\alpha}x^2 + x\,\mathrm{tg}\alpha. \tag{۴۱.۵}$$

رابطهٔ فوق معادلهٔ یک سهمی است زیرا $\mathrm{tg}\alpha$ و ضریب x^2 هر دو ثابت می باشند.

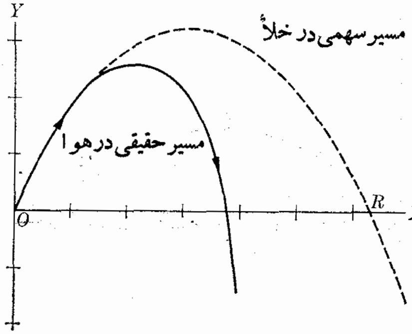


شکل ۱۳.۵. هرگاه شتاب ثابت باشد، مسیر حرکت یك سهمی است.

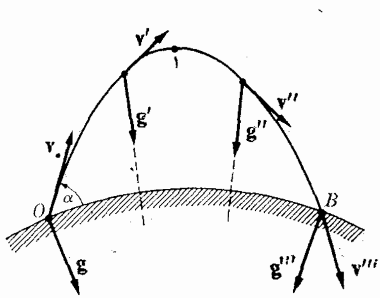
نتایجی که به دست‌آوردیم تا هنگامی ارزش دارند که: (۱) برد به قدرکافی کوچک باشد تا بتوان ازانحنای زمین صرف‌نظر کرد؛ (۲) ارتفاع ازسطح زمین به قدرکافی کوچک باشد تا بشود تغییر شتاب گرانی را نادیده گرفت؛ (۳) سرعت اولیه به قدر کافی کوچک باشد تا بتوان ازمقاومت‌هوا چشم پوشید. برای پرتابه‌های با برد خیلی‌زیاد، مانند موشکهای قاره پیما، وضع مطابق شکل ۱۴.۵ است، کـه درآن تمام بردارهای **g** متوجه مرکز زمین هستند وبا ارتفاع تغییر می‌کنند. دراین حالت مسیر پرتابه کمانی از بیضی است که درفصل ۱۳ مورد بحث قرار خواهد گرفت. هرگاه مقاومت هوا را به حساب آوریم نیز، مسیر از حالت سهمی خارج می‌شود و برد کاهش می‌یابد. شکل ۱۵.۵ مسیر واقعی پرتابه را درهوا نشان می‌دهد.

مثال ۸.۵. گلوله‌ای بـا سرعت $200\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ و بـا زاویـهٔ 40° با سطح زمین از تفنگی شلیک می‌شود. سرعت ومحل گلوله را درآغاز ثـانیهٔ بیستم پیدا کنید. همچنین برد و زمان لازم برای برگشت گلوله به سطح زمین را حساب کنید.

1. range



شکل ۱۵.۵. اثر مقاومت هوا روی حرکت یك پرتابه



شکل ۱۴.۵. مسیر یك پرتابه با برد زیاد به جای سهمی کمانی ازبیضی است.

حل: بنا به شکل ۱۶.۵ و با توجه به اینکه $v_{\circ} = ۲۰۰\mathrm{m\ s^{-۱}}$ و $\alpha = ۴۰^{\circ}$ است، به‌دست می‌آید

$$v_{\circ x} = v_{\circ} \cos\alpha = ۱۵۳٫۲\mathrm{m\ s^{-۱}}$$

و

$$v_{\circ y} = v_{\circ} \sin\alpha = ۱۲۸٫۶\mathrm{m\ s^{-۱}}.$$

بنابراین مؤلفه‌های سرعت درهرلحظه عبارتند از

$$v_x = ۱۵۳٫۲\mathrm{m\ s^{-۱}} \quad \text{و} \quad v_y = (۱۲۸٫۶ - ۹٫۸t)\,\mathrm{m\ s^{-۱}}$$

مختصات پرتابه در هرلحظه برابرند با

$$x = (۱۵۳٫۲)t\,\mathrm{m}\ ,\ y = (۱۲۸٫۶t - ۴٫۹t^{۲})\,\mathrm{m}.$$

به‌ازای $t = ۲۰\mathrm{s}$ بآسانی به دست می‌آید

$$v_x = ۱۵۳٫۲\mathrm{m\ s^{-۱}}$$
$$v_y = -\,۶۷٫۴\mathrm{m\ s^{-۱}}.$$

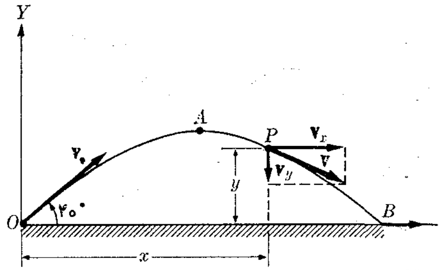
علامت منفی درمقابل v_y نشان می‌دهد که گلوله درحال پایین آمدن است. بزرگی سرعت برابر می‌شود با

$$v = \sqrt{v_x^{۲} + v_y^{۲}} = ۱۶۷٫۴\mathrm{m\ s^{-۱}}.$$

همچنین مختصات گلوله درنقطهٔ P عبارتند از

$$x = ۳۰۶۴\mathrm{m}\ ,\ y = ۶۱۲\mathrm{m}.$$

خواننده حساب خواهد کرد که ارتفاع A، نقطهٔ اوج، برابر $۸۴۳٫۷\mathrm{m}$ وبرد $R = OB$ برابر $۴۰۲۱\mathrm{m}$ و زمان لازم برای رفتن ازنقطهٔ O به نقطهٔ B برابر $۲۶٫۳۴\mathrm{s}$ است.



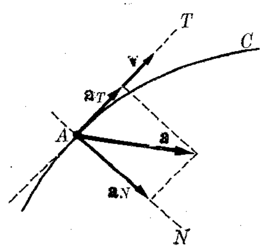
شکل ۱۶.۵. سرعت درحرکت یك پرتابه

۸.۵ مؤلفه‌های مماسی وقایم شتاب

ذره‌ای را که مسیرحرکت آن یک منحنی است درنظر می‌گیریم (شکل ۱۷.۵). برای سادگی فرض می‌کنیم منحنی مسیر دریک صفحهٔ تخت قرار دارد، ولی نتایجی که به‌دست خواهند آمد برای حرکت روی هرمنحنی دیگری معتبر انـد. درلحظهٔ t ذره با سرعت $\mathbf{v}$ و شتاب $\mathbf{a}$ درنقطهٔ A است. نظر به اینکه سوی شتاب $\mathbf{a}$ به سمت تقعر منحنی است، می‌توان آن را به‌مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{a}_T$ ــ موازی مماس AT به نام شتاب مماسی[1] ــ ومؤلفهٔ قایم $\mathbf{a}_N$ ــ موازی قایم AN به نام شتاب قایم[2] ــ تجزیه کــرد. هریک ازاین دوشتاب دارای معنای فیزیکی کاملاً مشخصی هستند. هنگامــی کـه ذره حـرکت می‌کند، بـزرگی سرعت ممکن است تغییر کند. این تغییر مربوط به شتاب مماسی است. راستای سرعت نیز احتمال دارد تغییر کند که این تغییر به‌شتاب قایم مربوط می‌شود. به‌گفتهٔ دیگر:

شتاب مماسی: تغییر در بزرگی سرعت.

شتاب قایم: تغییر در راستای سرعت.

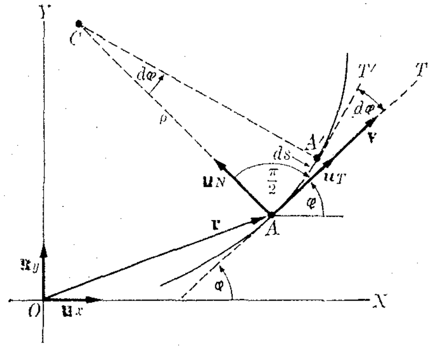


شکل ۱۷.۵. شتاب مماسی و قایم
دریك حرکت منحنی‌الخط

بردار یکای $\mathbf{u}_T$ را درنقطهٔ A ومماس بـرمنحنی رسم می‌کنیم (شکل ۱۸.۵). بنا به‌معادلهٔ (۲۳.۵) سرعت به‌صورت $\mathbf{v} = \mathbf{u}_T v$ نوشته می‌شود. بنابراین شتاب عبارت خواهد بود از

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{u}_T v) = \mathbf{u}_T \frac{dv}{dt} + \frac{d\mathbf{u}_T}{dt} v \cdot$$

1. tangential acceleration 2. normal acceleration



شکل ۱۸.۵

برای مسیرهای مستقیم‌الخط راستا و بزرگی بردار $\mathbf{u}_T$ ثابت و $d\mathbf{u}_T/dt = 0$ است. درمسیرهای منحنی، چون راستای $\mathbf{u}_T$ در طول منحنی مسیر تغییر می‌کند، بزرگی $d\mathbf{u}_T/dt$ برابر صفر نیست. بنابراین $d\mathbf{u}_T/dt$ را حساب می‌کنیم. بردار یکای $\mathbf{u}_N$ را عمود برمنحنی و درسوی کاوی آن درنظر می‌گیریم. اگر φ زاویهٔ بین مماس برمنحنی و راستای محور Xها درنقطهٔ A باشد، با استفاده ازمعادله (۹.۳) می‌توان نوشت

$$\mathbf{u}_T = \mathbf{u}_x \cos\varphi + \mathbf{u}_y \sin\varphi$$

$$\mathbf{u}_N = \mathbf{u}_x \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{u}_y \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\mathbf{u}_x \sin\varphi + \mathbf{u}_y \cos\varphi.$$

بنابراین

$$\frac{d\mathbf{u}_T}{dt} = -\mathbf{u}_x \sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} + \mathbf{u}_y \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{u}_N \frac{d\varphi}{dt}.$$

این رابطه نشان می‌دهد که بردار $d\mathbf{u}_T/dt$ برمنحنی عمود است. همچنین می‌توان نوشت

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\varphi}{ds}$$

که درآن $ds = AA'$ کمان کوچکی است که ذره درفاصله زمانی dt می‌پیماید. عمود بر منحنی در نقاط A و A' یکدیگر را درنقطهٔ C به نام مرکز انحنا[1] قطع می‌کنند. با به‌کاربردن معادلهٔ (۴.۲) وبا قرار دادن $CA = \rho$ می‌توان نوشت $ds = \rho\, d\varphi$ یا $d\varphi/ds = 1/\rho$. بنابراین $(d\varphi/dt) = (v/\rho)$ یا

$$\frac{d\mathbf{u}_T}{dt} = \mathbf{u}_N \frac{v}{\rho}. \qquad (۴۲.۵)$$

ρ شعاع انحنای[2] منحنی نام دارد. بالاخره با وارد کردن این نتیجه در رابطهٔ $d\mathbf{v}/dt$ به-

---
1. center of curvature 2. radius of curvature

دست می‌آید

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}_T \frac{dv}{dt} + \mathbf{u}_N \frac{v^۲}{\rho}. \qquad (۴۳.۵)$$

جملهٔ اول سمت‌راست رابطهٔ فوق، $\mathbf{u}_T(dv/dt)$، برداری است مماس برمنحنی، ومتناسب با مشتق بزرگی بردارسرعت‌نسبت به‌زمان؛ ومربوط است به‌شتاب‌مماسی $\mathbf{a}_T$. جملهٔ‌دوم، $\mathbf{u}_N(v/\rho)$، برداری است عمود بر منحنی ومربوط به شتاب قایم $\mathbf{a}_N$ است. $\mathbf{a}_N$ وابسته به تغییر راستاست زیرا به بردار $d\mathbf{u}_T/dt$ مربوط است. برای بزرگی هریک ازاین شتابها می‌توان نوشت

$$a_T = \frac{dv}{dt}, \quad a_N = \frac{v^۲}{\rho}. \qquad (۴۴.۵)$$

دراین صورت بزرگی شتاب درنقطهٔ A برابر می‌شود با

$$a = \sqrt{a_T^۲ + a_N^۲} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^۲ + \left(\frac{v^۲}{\rho}\right)^۲}.$$

درحرکت منحنی‌الخط یکنواخت چون بزرگی سرعت ثابت باقی می‌ماند، $\mathbf{a}_T = ۰$ است یعنی شتاب مماسی وجود ندارد. برعکس درحرکت مستقیم‌الخط، چون راستای سرعت تغییرنمی‌کند، شعاع انحنا بینهایت می‌شود ($\rho = \infty$)، در این صورت $a_N = ۰$ خواهد بود یعنی شتاب قایم وجود ندارد. باید درنظر داشت که نتایج به دست آمده برای هر حرکتی، خواه در صفحه وخواه درفضا، معتبرند.

مثال ۹.۵. دیسک D آزادانه دور یک محور افقی می‌چرخد (شکل ۱۹.۵)، و نخی به دورمحیط خارجی‌دیسک‌پیچیده است. جسم A که به‌انتهای نخ بسته‌شده است براثرسنگینی سقوط می‌کند. حرکت جسم A با شتاب ثابت وتند شونده است، ولی چنانکه در فصل ۱۰ خواهد آمد، شتاب آن از شتاب گرانی کمتر است. سرعت جسم A درلحظهٔ $t = ۰$ برابر $۰٫۰۴\,\mathrm{m\,s^{-۱}}$ و دوثانیه بعد جسم $۰٫۲\,\mathrm{m}$ به سمت پایین سقوط کرده است. شتاب مماسی وقایم جسم را در هرلحظه برای یک نقطهٔ اختیاری روی لبهٔ دیسک به دست آورید.

حل: درصورتی‌که مبدأ مختصات را درنقطهٔ $t = ۰$ بگیریم، معادلهٔ حرکت باشتاب ثابت و تند شوندهٔ جسم A عبارت می‌شود از $x = v_۰ t + (۱/۲)at^۲$. چون $v_۰ = ۰٫۰۴\,\mathrm{m\,s^{-۱}}$ است، درنتیجه داریم

$$x = ۰٫۰۴t + \frac{۱}{۲}at^۲\,\mathrm{m}.$$

به ازای $t = ۲\mathrm{s}$ باید $x = ۰٫۲\mathrm{m}$ باشد. بنابراین‌داریم $a = ۰٫۰۶\,\mathrm{m\,s^{-۲}}$، وبالاخره

$$x = ۰٫۰۴t + ۰٫۰۳t^۲\,\mathrm{m}.$$

دراین صورت سرعت A برابر است با

$$v = \frac{dx}{dt} = ۰٫۰۴ + ۰٫۰۶t \ \mathrm{m\,s^{-۱}}$$

این معادله سرعت را درهر نقطهٔ دیگری مـانند B روی لبهٔ دیسک نیز نشان می‌دهد. شتاب مماسی نقطهٔ B برابر با شتاب مماسی نقطهٔ A است:

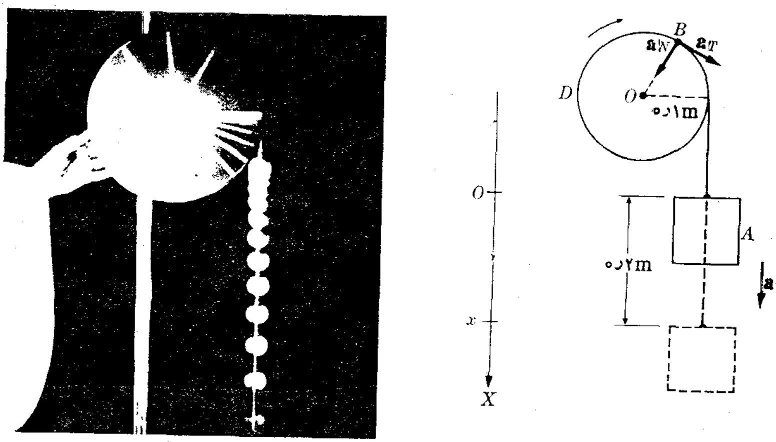
$$a_T = \frac{dv}{dt} = ۰٫۰۶ \mathrm{m\ s^{-۲}}.$$

چون مطابق شکل $\rho = ۰٫۱\mathrm{m}$ است، شتاب قایم درنقطهٔ B برابر می‌شود با

$$a_N = \frac{v^۲}{\rho} = \frac{(۰٫۰۴ + ۰٫۰۶t)^۲}{۰٫۱}$$
$$= (۰٫۰۱۶ + ۰٫۰۴۸t + ۰٫۰۳۶t^۲)\ \mathrm{m\ s^{-۲}}.$$

شتاب کل درنقطهٔ B برابر است با

$$a = \sqrt{a_N^۲ + a_T^۲}.$$



(ب) (الف)

شکل ۱۹.۵. عکس چند درخشی[1] (ب) نشان می‌دهد که حرکت با شتاب ثابت و تند شونده است. (با اندازه‌گیری روی شکل صحت این موضوع را بررسی کنید).

۹.۵ حرکت دایره‌ای: سرعت زاویه‌ای

اکنون حالت ویـژه‌ای را درنظر می‌گیریم کـه در آن مسیر حرکت یک دایره است، یعنی حرکت دایره‌ای[2]. سرعت $\mathbf{v}$، مماس بردایره، برشعاع $R = CA$ عمود است. هرگاه فاصلهٔ گردش را ازمبدا O واقع روی محیط دایره انـدازه بگیریم، بنا به شکل (۲۰.۵) خواهیم

---
1. multiflash photograph 2. circular motion

داشت $R\theta = s$. بنابراین، با به‌کاربردن معادلهٔ (۲۳.۵) و با توجه به اینکه R ثابت است به دست می‌آید

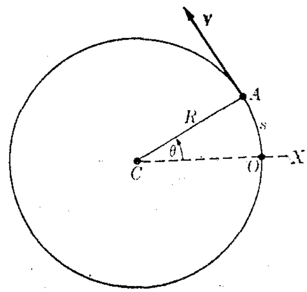
$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}. \qquad (۴۵.۵)$$

کمیت

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad (۴۶.۵)$$

یا مشتق زاویه نسبت به زمان، را سرعت زاویه‌ای می‌نامند. سرعت زاویه‌ای برحسب رادیان بر ثانیه ($\mathrm{rad\,s^{-1}}$)، یا به طور ساده‌تر $\mathrm{s^{-1}}$ بیان می‌شود. پس رابطهٔ (۴۵.۵) به صورت

$$v = \omega R \qquad (۴۷.۵)$$



شکل ۲۰.۵. حرکت دایره‌ای

درمی‌آید. سرعت زاویه‌ای رامی‌توان به‌صورت یک‌کمیت برداری درراستای عمود برسطح دایره‌ودرسوی یک‌پیچ راستگردکه درجهت جابجایی ذره‌روی دایره می‌چرخد درنظرگرفت (شکل ۲۱.۵). با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که $R = r\sin\gamma$ و $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u}_z(d\theta/dt)$ است، بنابراین به جای معادلهٔ (۴۷.۵) می‌توان نوشت $v = \omega r\sin\gamma$ که نشان می‌دهد رابطهٔ برداری زیر هم از لحاظ بزرگی و هم از لحاظ راستا، برقرار است:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (۴۸.۵)$$

این رابطه تنها هنگامی ارزش دارد که حرکت دایره‌ای یا چرخشی (حرکتی با r و γ ثابت) باشد.

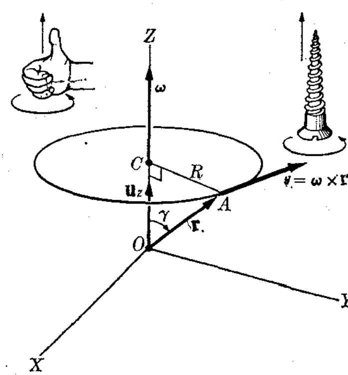
یک حالت بسیار جالب، حرکت دایره‌ای یکنواخت است، یعنی حرکتی که در آن ω ثابت باشد. دراین‌حالت، حرکت‌دوره‌ای[1] است یعنی‌ذرهٔ متحرک‌درفاصله‌های‌زمانی ثابتی از یک نقطهٔ دایره می‌گذرد. دورهٔ P زمان لازم برای پیمودن یک دور کامل دایره و بسامد[2] ν تعداد دوره‌هایی است که متحرک در واحد زمان انجام می‌دهد. به عنوان مثال، اگر ذره در t ثانیه n بار دور دایره بچرخد، $p = t/n$ و $\nu = n/t$ است. رابطهٔ زیر که موارد استعمال متعدد دارد دو کمیت فوق را به هم مربوط می‌کند:

$$\nu = \frac{1}{P}. \qquad (۴۹.۵)$$

---
1. Periodic motion 2. frequency

هنگامی که دوره برحسب ثانیه باشد بسامد را باید برحسب $^{-۱}$(ثانیه) یا $s^{-۱}$ بیان کرد. این واحد هرتز[1] نام دارد و با علامت اختصاری Hz نشان داده می‌شود. معمولا به‌جای Hz یا $s^{-۱}$ اصطلاح دور بر ثانیه (rps) به کار می‌رود. کلمهٔ هرتز از نام فیزیکدان آلمانی [۱۸۹۴–۱۸۵۷ (۱۲۷۳–۱۲۳۶ هـ. ش.)] گرفته شده است، که برای اولین بار وجود امواج الکترومغناطیسی را به‌طور تجربی اثبات کرد. گاهی اوقات بسامد یک حرکت را برحسب دور بر دقیقه (rpm) نشان می‌دهند که همان $^{-۱}$(دقیقه) است. واضح است که

$$۱\ (\text{دقیقه})^{-۱} = \frac{۱}{۶۰}\text{Hz}.$$



شکل ۲۱.۵. رابطهٔ برداری بین سرعت زاویه‌ای، سرعت خطی و بردار مکان در حرکت دایره‌ای

دوره و بسامد در همهٔ فرایندهای تناوبی که به صورت دوره‌ای انجام می‌گیرند یعنی پس از پایان هر چرخش به طور کامل تکرار می‌شوند به کار می‌رود. به عنوان مثال، حرکت زمین دور خورشید نه دایره‌ای و نه یکنواخت، بلکه دوره‌ای است. این حرکت، هر بار که زمین مدار خود را به پایان می‌رساند از نو تکرار می‌شود. دوره، زمان لازم برای انجام یک دور و بسامد تعداد این دورها در یک ثانیه است. یک هرتز معادل یک دور بر ثانیه است.

اگر ω ثابت باشد با انتگرال گیری از معادلهٔ (۴۶.۵) به دست می‌آید

$$\int_{\theta_\circ}^{\theta} d\theta = \int_{t_\circ}^{t} \omega dt = \omega \int_{t_\circ}^{t} dt \quad \text{یا} \quad \theta = \theta_\circ + \omega(t - t_\circ).$$

این رابطه را که برای حرکت دایره‌ای یکنواخت معتبر است با رابطه‌ای که در مثال ۲.۵ برای حرکت مستقیم‌الخط یکنواخت به دست آوردیم مقایسه کنید. معمولا $\theta_\circ$ و $t_\circ$ را برابر صفر قرار می‌دهند. بدین طریق به دست می‌آید

$$\theta = \omega t \quad \text{یا} \quad \omega = \frac{\theta}{t}. \qquad (۵۰.۵)$$

برای یک گردش کامل، $t = P$ و $\theta = ۲\pi$ است، در نتیجه

1. hertz

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi\nu. \qquad (51.5)$$

مثال ۱۰.۵. سرعت زاویه‌ای زمین را درحرکت وضعی آن به‌دورمحورش به‌دست آورید.

حل: ابتدا اگر توجه‌نشود، ممکن‌است دانشجومعادلهٔ (۵۱.۵)، $\omega = 2\pi/P$، را به‌کار ببرد و به جای P مقدار $8{,}640 \times 10^{4}\ \mathrm{s}$ که مربوط به روز خورشیدی میانگین است قرار دهد و نتیجهٔ نادرست به دست آورد. در شکل ۲۲.۵ نقطهٔ P را در نظر می‌گیریم (در این‌شکل برای وضوح بیشتر، مقیاس مراعات نشده است). هنگامی که زمین یک بار به‌طور کامل دور محور خودش چرخید، که روز نجومی[1] نام دارد، به سبب حرکت انتقالی زمین دور خورشید از نقطهٔ E به نقطهٔ E' منتقل می‌شود و P در P' قرار می‌گیرد. برای اینکه یک روز کامل بگذرد باید نقطه P' در جای P'' یعنی از نو در مقابل خورشید قرار گیرد. بـه‌گفتهٔ دیگر، زمین هنوز باید به اندازهٔ زاویهٔ γ بچرخد. بنابراین دورهٔ حرکت وضعی زمین (روزنجومی) مختصری کمتر از $8{,}640 \times 10^{4}\ \mathrm{s}$ است. این مقدار با اندازه‌گیری،

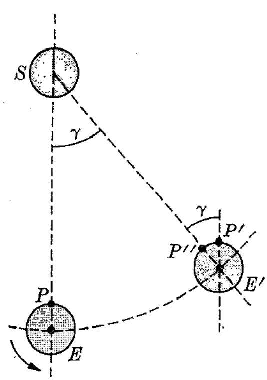
$$P = 8{,}616 \times 10^{4}\mathrm{s}$$

به دست می‌آید کـه تقریباً $240\ \mathrm{s}$ کوتاهتر از روز خورشیدی میانگین است. در این‌صورت سرعت زاویه‌ای برابر می‌شود با

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 7{,}292 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}.$$

این اختلاف $240\ \mathrm{s}$ را می‌توان به‌شیوهٔ نسبتاً آسانی برآورد کرد. زمین در ۳۶۵ روزمدار کامل خود دور خورشید را به پایان می‌برد. بنا بـه رابطهٔ γ در یک روز مختصری کمتر از 1° یعنی $0{,}01745$ رادیان می‌باشد. بنابه رابطهٔ (۵۰.۵)، زمان لازم برای چرخیدن این زاویه با سرعت زاویه‌ای داده شده در فوق، برابر می‌شود با

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{1{,}745 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad}}{7{,}292 \times 10^{-5}\,\mathrm{rads^{-1}}} = 239\ \mathrm{s}$$



شکل ۲۲.۵. روز نجومی

1. sidereal day

که به بهترین نحو با نتیجهٔ قبلی تطبیق می‌کند.

۱۰.۵ حرکت دایره‌ای: شتاب زاویه‌ای

هنگامی که سرعت زاویه‌ای حرکت ذره‌ای با زمان تغییر کند، شتاب زاویه‌ای با بردار زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \qquad (۵۲.۵)$$

چون حرکت دایره‌ای در صفحه صورت می‌گیرد، راستای $\boldsymbol{\omega}$ یکسان باقی می‌ماند و رابطهٔ (۵۲.۵) را می‌توان برای بزرگی بردارها نیز به کار برد، یعنی

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \qquad (۵۳.۵)$$

هرگاه‌شتاب زاویه‌ای‌ثابت باشد (یعنی، هنگامی‌که حرکت‌دایره‌ای و با شتاب ثابت‌است)، با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۵۳.۵) داریم

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha dt = \alpha(t - t_0)$$

یا

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0) \qquad (۵۴.۵)$$

که در آن ω_0 مقدار ω در لحظهٔ t_0 است. با قرار دادن معادلهٔ (۵۴.۵) در معادلهٔ (۴۶.۵) به دست می‌آید $d\theta/dt = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$، و با انتگرال‌گیری مجدد داریم

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt + \alpha \int_{t_0}^{t} (t - t_0)\, dt$$

به طوری که

$$\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2. \qquad (۵۵.۵)$$

این رابطه، مکان زاویه‌ای ذره را در هر لحظه به دست می‌دهد.

درحالت خاص حرکت دایره‌ای، از ترکیب معادله‌های (۴۳.۵) و (۴۷.۵) با معادلهٔ (۵۳.۵) شتاب مماسی (یا عرضی[1]) به دست می‌آید:

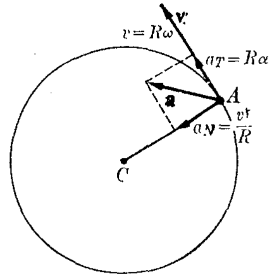
$$a_T = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha \qquad (۵۶.۵)$$

1. transverse

و شتاب قایم (یا مرکزگرا[1]) برابر است با

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R. \tag{۵۷.۵}$$

شکل ۲۳.۵، مؤلفه‌های قایم و مماسی را در یک حرکت دایره‌ای یکنواخت نشان می‌دهد.



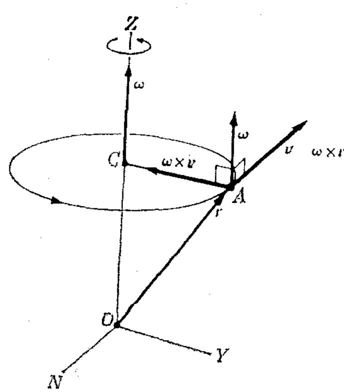
شکل ۲۳.۵. شتاب مماسی و شتاب قایم در یک حرکت دایره‌ای

باید توجه داشت که در یک حرکت دایره‌ای یکنواخت (بدون شتاب زاویه‌ای، $\alpha = 0$) شتاب مماسی وجود ندارد، ولی چون راستای سرعت تغییر می‌کند شتاب قایم یا مرکزگرا وجود دارد.

در حرکت دایره‌ای یکنواخت، می‌توان با به کار بردن معادلهٔ (۴۸.۵) شتاب را مستقیماً حساب کرد. چون ω ثابت است بنابراین داریم

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \tag{۵۸.۵}$$

زیرا $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ است. با استفادهٔ مجدد از معادلهٔ (۴۸.۵)، می‌توان شتاب را به‌صورت دیگری نیز نوشت:



شکل ۲۴.۵

1. centeripetal

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \qquad (۵۹.۵)$$

چون حرکت دایـره‌ای یکنواخت است، شتاب داده شده به وسیلهٔ معادلـه‌هـای (۵۸.۵) یا (۵۹.۵) باید شتاب مرکزگرا باشد. درستی این امر بآسانی قابل بررسی است. با توجه به شکل ۲۴.۵ مشاهده می‌شود کـه بردار $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ به سمت مـرکـز دایره است و بزرگی آن برابراست با $|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}| = \omega v = \omega^2 R$، زیرا $\boldsymbol{\omega}$ و $\mathbf{v}$ بر هم عموداند و $v = \omega R$ است. این مقدار با نتیجهٔ (۵۷.۵) که قبلا به دست آوردیم تطبیق می‌کند.

مثال ۱۱.۵. زمین به طور یکنواخت بـا سرعت زاویـه‌ای $\omega = ۷٫۲۹۳ \times ۱۰^{-۵}\,\mathrm{s}^{-۱}$ دور محور خـود مـی‌گردد. سرعت و شتاب یک نقطه از سطح زمین را بـر حسب عـرض جغرافیایی[1] آن نقطه به دست آورید.

حل: به سبب حرکت وضعی زمین، هرنقطه از سطح آن با یک حـرکت دایره‌ای یکنواخت جابجا می‌شود. عرض جغرافیایی‌نقطه‌ای‌مانند A زاویه‌ای است که شعاع $r = CA$ با شعاع CD واقع درصفحهٔ استوا می‌سازد (شکل ۲۵.۵). باگردش زمین دور NS، نقطهٔ A دایره‌ای به مرکز B و شعاع $R = AB$ طی می‌کند، به طوری که

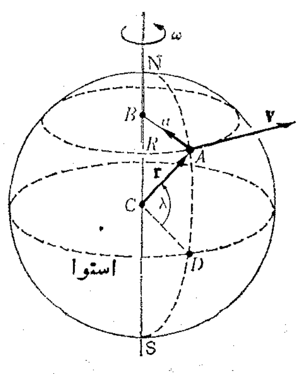
$$R = r\cos\lambda.$$

سرعت هر نقطه از سطح زمین مماس بر این دایره و در نتیجه موازی استوا است و بنا بـه معادلهٔ (۴۷.۵) بزرگی آن برابر است با

$$v = \omega R = \omega r\cos\lambda.$$

a یعنی شتاب مرکزگرا به‌سمت B است، زیرا حرکت یکنواخت‌است وبنا به معادلهٔ (۵۷.۵) بزرگی آن برابر است با

$$a = \omega^۲ R = \omega^۲ r\cos\lambda. \qquad (۶۰.۵)$$



شکل ۲۵.۵. سرعت و شتاب یک نقطه از سطح زمین

بـا قـرار دادن مقـادیـر سرعت زاویـه‌ای ($\omega = ۷٫۲۹۲ \times ۱۰^{-۵}\,\mathrm{s}^{-۱}$) و شعاع زمین

1. latitude

$(r = ۶٫۳۵ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m})$، داریم

$$v = (۴۵۹ \cos\lambda)\,\mathrm{ms}^{-۱}$$

و

$$a = ۳٫۳۴ \times ۱۰^{-۲} \cos\lambda\,\mathrm{ms}^{-۲}. \qquad (۶۱.۵)$$

در استوا مقدار v بیشینه است، یعنی $v = ۴۵۹\,\mathrm{ms}^{-۱}$ یا $۱۶۲۵\,\mathrm{km\,hr}^{-۱}$، یا تقریباً $۱۰۳۰\,\mathrm{mi\,hr}^{-۱}$ می‌باشد. ما اثر چنین سرعت بزرگی را احساس نمی‌کنیم، زیرا همیشه با چنین سرعتی جابجا می‌شویم: بدن ما همانند حواس ما به آن عادت کرده است. ولی بدیهی است اگر کوچکترین تغییری در آن رخ دهد متوجه خواهیم شد. همچنین، مقدار بیشینهٔ شتاب برابر $۳٫۳۴ \times ۱۰^{-۲}\,\mathrm{ms}^{-۲}$ است و این مقدار حدود ۳٫۰ درصد شتاب گرانی زمین است.

۱۱.۵ حرکت منحنی‌الخط در صفحه در حالت کلی

مطابق شکل ۲۶.۵، فرض‌کنیم ذره‌ای یک مسیرمنحنی درصفحه می‌پیماید. هنگامی‌که ذره در نقطهٔ A است، سرعت آن با رابطهٔ $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ داده می‌شود. با به کار بردن برداریکای $\mathbf{u}_r$ (موازی $\mathbf{r}$) و $\mathbf{u}_\theta$ (عمود بر $\mathbf{r}$)، می‌توان نوشت $\mathbf{r} = \mathbf{u}_r r$. در این صورت

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{u}_r r) = \mathbf{u}_r \frac{dr}{dt} + r\frac{d\mathbf{u}_r}{dt}. \qquad (۶۲.۵)$$

اکنون اگر مؤلفه‌های دو برداریکا در مختصات قایم را به کار ببریم، به دست می‌آید

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_x \cos\theta + \mathbf{u}_y \sin\theta \quad \text{و} \quad \mathbf{u}_\theta = -\mathbf{u}_x \sin\theta + \mathbf{u}_y \cos\theta.$$

مشاهده می‌شود که

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = -\mathbf{u}_x \sin\theta \frac{d\theta}{dt} + \mathbf{u}_y \cos\theta \frac{d\theta}{dt} = \mathbf{u}_\theta \frac{d\theta}{dt}$$

است. بنابراین سرعت ذره را می‌توان به صورت زیر نوشت:

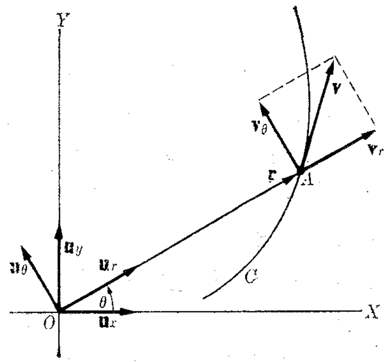
$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_r \frac{dr}{dt} + \mathbf{u}_\theta\, r\frac{d\theta}{dt}. \qquad (۶۳.۵)$$

اولین جملهٔ این معادله $[\mathbf{u}_r(dr/dt)]$ برداری است موازی با $\mathbf{r}$ و سرعت شعاعی[1] نامیده می‌شود و از تغییرفاصلهٔ ذره از نقطهٔ O ناشی می‌شود. جملهٔ دوم $[\mathbf{u}_\theta r(d\theta/dt)]$ برداری است عمود بر $\mathbf{r}$ و از تغییر راستای $\mathbf{r}$ یا چرخش ذره دور نقطهٔ O ناشی می‌شود و آن را سرعت عرضی می‌نامند. بدین طریق داریم

1. radial velocity

$$v_r = \frac{dr}{dt} \text{ و } v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = \omega r. \qquad (۶۴.۵)$$

دراینجا $\omega = d\theta/dt$ سرعت زاویه‌ای است. در حرکت دایـره‌ای سرعت شعاعی وجـود ندارد، زیرا شعاع ثابت است ($dr/dt = ۰$)؛ سرعت منحصراً عرضی است. این نکته را می‌توان با مقایسهٔ معادلهٔ (۴۵.۵) با رابطهٔ دوم معادله‌های (۶۴.۵) روشن کرد.



شکل ۲۶.۵

فهرست منابع

1. «The Perception of Motion,» H. Wallach. *Sci. Am.*, July 1959, page 56
2. «Aristotle's Notion of Speed,» R. Seeger. *Am. J. Phis.* 31, 138 (1963)
3. *Physical Mechanics*, Robert B. Lindsay. New York: Van Nostrand, 1961, Sections 1-4 and 1-5, Chapters 2 and 3.
4. *Introduction to Engineering Mechanics,* John V.Huddleston. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961, Chapter 5, Sections 6-5 and 6-6.
5. *Vector Mechanics,* D.E. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964, Chapter 5.
6. *The Feynman Lectures on Physics,* Volume I. R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M.L. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapters 5 and 8.
7. *Source Book in Physics,* W.F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 1 (Galileo); Page 50 (Descartes); Page 51 (Leibniz); Page 55 (d'Alembert).
8. *Foundations of Modern Physical Science*, Gerald Holton and D.H.D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Chapters 1-2, and 3.

۹. سایمون، کیث، ر. مکانیک، ترجمهٔ اعظم نیرومند راد وغلامحسین همدانی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۶، بخشهای ۱ـ۲، ۳ـ۴، ۵ و ۳ـ۱۱.

مسئله‌ها

۱.۵. الکترونی با سرعت $۳ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ به صفحهٔ تلویزیون می‌رسد. به فرض اینکه الکترون از حالت سکون و از فاصلهٔ $۰٫۰۴\,\mathrm{m}$ به حرکت درآمده باشد، شتاب میانگین آن را به‌دست آورید.

۲.۵. جسمی با سرعت اولیهٔ $3\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ جابجا می‌شود و دارای شتاب ثابت $4\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ درسو و راستای سرعت می‌باشد. سرعت جسم ومسافتی را که تا انتهای ثانیهٔ هفتم می‌پیماید پیدا کنید. همین مسئله را برای حالتی که شتاب و سرعت درسوی مخالف هم باشندحل‌کنید. رابطهٔ جابجایی را به‌صورت تابعی از زمان بنویسید.

۳.۵. هواپیمایی برای بلند شدن از زمین، مسیر ۶۰۰ متری را در $15\ \mathrm{s}$ می‌پیماید. به‌فرض اینکه شتاب ثابت باشد، سرعت هواپیما را در هنگام بلند شدن حساب کنید. همچنین شتاب آن را برحسب $\mathrm{m\ s^{-2}}$ به‌دست آورید.

۴.۵. اتومبیلی درمدت $15\ \mathrm{s}$ ازحالت سکون به سرعت $60\ \mathrm{km\ hr^{-1}}$ می‌رسد. (الف) شتاب میانگین اتومبیل را برحسب $\mathrm{m\ min^{-2}}$ (متر برمجذور دقیقه) و مسافت پیموده شده را پیدا کنید. (ب) به فرض ثابت بودن شتاب، چند ثانیهٔ دیگر اتومبیل باید راه برود تا سرعت آن به $80\ \mathrm{km\ hr^{-1}}$ برسد؟ در این صورت کل مسافت پیموده شده چقدر است؟

۵.۵. اتومبیلی ازحالت‌سکون شروع به‌حرکت می‌کندوباشتاب $1\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ به‌مدت یک‌ثانیه جابجا می‌شود. در این موقع راننده موتور را خاموش می‌کند و می‌گذارد سرعت اتومبیل به سبب وجود مالش، با شتاب درخلاف جهت حرکت $5\ \mathrm{cm\ s^{-2}}$ کندتر شود. سپس ترمز می‌کند و اتومبیل $5\ \mathrm{s}$ بعد از ترمزکردن می‌ایستد. مسافت کل پیموده شده توسط اتومبیل را حساب کنید. نمودار x، v و a را برحسب زمان رسم کنید.

۶.۵. جسمی با حرکت مستقیم‌الخط شتابدار تند شونده، $55\ \mathrm{cm}$ را در $2\ \mathrm{s}$ و سپس $77\ \mathrm{cm}$ را در $2\ \mathrm{s}$ بعدی می‌پیماید. سرعت اولیه و شتاب جسم را حساب کنید. جسم در ۴ ثانیهٔ بعدی چه مسافتی را خواهد پیمود؟

۷.۵. اتومبیلی درطول خط OX باشتاب ثابت حرکت می‌کند. درلحظه‌های t_1 و t_2 بترتیب در x_1 و x_2 می‌باشد. ثابت کنید که شتاب اتومبیل برابر است با

$$a = \frac{2(x_2 t_1 - x_1 t_2)}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)}.$$

۸.۵. اتومبیلی از حالت سکون با شتاب $4\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ به‌مدت $4\ \mathrm{s}$ راه می‌رود، بعد به مدت $10\ \mathrm{s}$ به‌طوریکنواخت حرکت می‌کند. سپس راننده‌ترمز می‌کند و به اتومبیل شتابی برابر با $8\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ در خلاف جهت حرکت تا هنگام ایستادن وارد می‌شود. نموداری از سرعت برحسب زمان رسم کنید و ثابت کنید مساحت محدود بین منحنی و محور زمان برابر است با کل مسافت پیموده شده.

۹.۵. اتومبیلی جلو چراغ‌قرمز ایستاده است. به‌محض سبزشدن چراغ، اتومبیل به‌مدت $6\ \mathrm{s}$ با شتاب $2\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ سرعت می‌گیرد، بعد ازآن با سرعت ثابت حرکت می‌کند. هنگام شروع به‌حرکت اتومبیل با سبز شدن چراغ، کامیونی با سرعت یکنواخت $10\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ از آن سبقت می‌گیرد. بعد از چه مدتی و پیمودن چه مسافتی این اتومبیل به کامیون می‌رسد؟

۱۰.۵. راننده‌ای که اتومبیل خود را با سرعت $45\ \mathrm{km\ hr^{-1}}$ می‌راند، در چهارراهی، متوجه چراغ قرمز می‌شود. اگر زمان واکنش راننده $0{,}7\ \mathrm{s}$ و شتاب حاصل از ترمز

$\text{۷ m s}^{-۲}$ باشد، مسافتی را کــه اتومبیل از لحظهٔ مشاهدهٔ چراغ بـه وسیلهٔ راننده تا هنگام ایستادن پیموده است حساب‌کنید. «زمان واکنش» فاصلهٔ زمانی بین‌لحظهٔ مشاهدهٔ چراغ قرمز و اقدام به‌ترمز اتومبیل است.

۱۱.۵. دو اتومبیل، A و B، بترتیب بـا سرعتهای v_A و v_B در یک سو حـرکت می‌کنند. هنگامی کــه اتومبیل A به فاصلهٔ d درعقب اتومبیل B است، A با شتاب a ترمز می‌کند. ثابت کنید بـرای اینکه بـرخـورد بین اتـومبیلهای A و B صـورت گیرد لازم است کــه $v_B - v_B > \sqrt{۲ad}$ باشد.

۱۲.۵. دو اتومبیل، A و B، در یک سو حـرکت می‌کنند. در لحظهٔ $t = ۰$ سرعت آنها بترتیب $\text{۱ m s}^{-۱}$ و $\text{۳ m s}^{-۱}$ وشتاب‌آنها بترتیب $\text{۲ m s}^{-۲}$ و $\text{۱ m s}^{-۲}$ است. اگر در لحظهٔ $t = ۰$ اتومبیل A، ۱٫۵ m جلوتر ازاتومبیل B باشد، حساب کنیدکه این‌اتومبیلها چه زمانی پهلو به پهلوی هم خواهند بود.

۱۳.۵. جسمی‌مطابق با رابطهٔ $x = ۱۶t - ۶t^۲$ درطول یک خط مستقیم جابجا می‌شود؛ در ایـن رابطه x بـرحسب متر و t بـرحسب ثانیه است. (الف) جـای جسم را در لحظهٔ $t = \text{۱ s}$ پیدا کنید. (ب) این جسم چه موقع از مبدأ می‌گذرد؟ (ج) سرعت میانگین را در فاصله زمانی $۰ < t < \text{۲ s}$ حساب‌کنید. (د) رابطهٔ کلی‌سرعت میانگین را درفاصله‌زمانی $t_۰ < t < t_۰ + \Delta t$ پیدا کنید. (ه) سرعت لحظه‌ای را حساب‌کنید. (و) سرعت لحظه‌ای را در $t = ۰$ پیدا کنید. (ز) کی و در کجاها جسم به حالت سکون درمی‌آید؟ (ح) رابطهٔ کلی شتاب میانگین را درفاصله زمانی $t_۰ < t < t_۰ + \Delta t$ به‌دست آوریـد. (ط) رابطهٔ کلی شتاب لحظه‌ای را پیدا کنید (ی) چـه زمانهایی شتاب لحظه‌ای بـرابـر صفر مـی‌شود؟ (ک) در دستگاه مختصات یکسانی تغییرات x برحسب t، v برحسب t و a برحسب t را رسم‌کنید. (ل) چه‌موقع (مواقعی) حرکت تندشونده و درچه‌موقع (مواقعی) کندشونده‌است؟

۱۴.۵. جسمی طبق رابطهٔ $v = t^۳ + ۴t^۲ + ۲$ درطول یک خط مستقیم حرکت می‌کند. اگر درهنگامی که $t = \text{۲ s}$ است، $x = \text{۴ m}$ باشد، مقدار x را در $t = \text{۳ s}$ پیدا کنید. شتاب را نیز حساب کنید.

۱۵.۵. شتاب جسمی‌که روی یک‌خط راست حرکت می‌کند بارابطهٔ $a = ۴ - t^۲$ داده شده است، که در آن a برحسب $\text{m s}^{-۲}$ و t برحسب s است، درصورتی که در $t = \text{۳ s}$،

$$x = \text{۹ m} \quad \text{و} \quad v = \text{۲ m s}^{-۱}$$

باشد، رابطهٔ سرعت وجابجایی را به‌صورت تابعی از زمان بیابید.

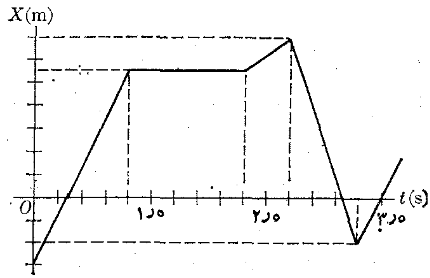
۱۶.۵. جسمی روی یک خط راست حرکت می‌کند. شتاب آن برابراست با $a = -۲x$، که در آن x بـر حسب متر و a بـر حسب $\text{m s}^{-۲}$ می‌باشد. در صورتی که در $x = ۰$، $v = \text{۴ m s}^{-۱}$ باشد، رابطهٔ بین سرعت وجابجابجایی را پیدا کنید.

۱۷.۵. شتاب جسمی‌که روی یک‌خط راست‌حرکت می‌کند برابراست با $a = -Kv^۲$، در این رابطه K یک‌ثابت است ونیزدر $t = ۰$ داریم $v = v_۰$. سرعت وجابجایی را به‌صورت

توابعی از زمان پیدا کنید. همچنین x را برحسب t و v را برحسب x به‌دست آورید.

۱۸.۵. سرعت‌جسمی را که باحرکت مستقیم‌الخط وشتاب $a = ۳۲ - ۴v$ (باشرط اولیهٔ در $t = ۰$، $x = ۰$ و $v = ۴$) جابجا می‌شود به صورت تابعی از t پیدا کنید. همچنین x را به صورت تابعی از t وبه‌صورت تابعی از v به دست آورید.

۱۹.۵. مکان متحرکی برحسب زمان در شکل ۲۷.۵ نشان داده شده است. معلوم کنید (الف) حرکت درچه محلی در سوی xهای مثبت یامنفی است؟ (ب) کی حرکت کند شونده یا تند شونده است؟ (ج) چه موقع جسم از مبدأ می‌گذرد، و (د) چه‌وقت سرعت برابر صفر است؟ همچنین نمودارهای سرعت وشتاب را برحسب زمان رسم کنید. برای فاصله‌های زمانی (الف) $t = ۱\,s$ و $t = ۳s$، (ب) $t = ۱\,s$ و $t = ۲٫۲\,s$ و (ج) $t = ۱\,s$ و $t = ۱٫۸s$، سرعت میانگین را از روی نمودار برآورد کنید.



شکل ۲۷.۵

۲۰.۵. ازبالنی که باسرعت ثابت $۱۲\,m\,s^{-۱}$ درحال پایین‌آمدن است سنگی رها می‌شود. سرعت سنگ را بعد از $۱۰s$ پیداکنید. دراین مدت چه مسافتی را پیموده است؟ همین مسئله برای حالتی که بالن با همان سرعت بالا می‌رود حل کنید.

۲۱.۵. سنگی با سرعت $۲۰\,m\,s^{-۱}$ به طور قایم به‌سوی بالا پرتاب می‌شود. چه موقع سرعت آن به $۶\,m\,s^{-۱}$ می‌رسد وارتفاع این نقطه چقدر است؟

۲۲.۵. سنگی از ته‌چاهی به ژرفای $۴۰m$ باسرعت اولیهٔ $۳۰\,m\,s^{-۱}$ به‌سمت بالا پرتاب می‌شود. چه‌مدت طول‌می‌کشد تاسنگ به‌لب‌چاه برسد ودراین هنگام سرعت‌آن چقدر است؟ در پاسخهای ممکن بحث کنید.

۲۳.۵. شخصی از بالای ساختمانی گلوله‌ای را با سرعت $۱۲\,m\,s^{-۱}$ درراستای قایم به سمت بالا پرتاب می‌کند. گلوله $۴٫۲۵\,s$ بعد به‌زمین برمی‌گردد. ارتفاع بیشینه‌ای که گلوله به‌آن رسیده چقدر است؟ بلندی ساختمان چقدر است؟ گلوله باچه سرعتی به‌زمین می‌رسد؟

۲۴.۵. جسم درحال سقوطی درثانیهٔ آخرحرکت خود $۷۵\,m$ را طی می‌کند. به فرض اینکه جسم ازحالت سکون شروع به‌حرکت کرده باشد، تعیین کنید از چه ارتفاعی رهاشده است. چه مدت طول کشیده تا به زمین برسد؟

۲۵.۵. سنگی ازپشت بام ساختمانی باسرعت $۲۹٫۴\,m\,s^{-۱}$ در راستای قایم به‌سوی بالا پرتاب می‌شود. $۴\,s$ بعد ازپرتاب سنگ اول، سنگ دیگری رهـا می‌شود تـا پایین بیافتد.

ثابت کنید که درست $4s$ بعد، سنگ اول به سنگ دوم رسیده و ازآن می‌گذرد.

۲۶.۵ در یک لحظه یک جسم را رها و جسم دیگری را با سرعت اولیهٔ $100\,\mathrm{cm\ s^{-1}}$ به‌سمت پایین پرتاب می‌کنیم. کی فاصلهٔ این دوجسم به $18\,\mathrm{m}$ می‌رسد؟

۲۷.۵ دوجسم با سرعت یکسان $100\,\mathrm{cm\ s^{-1}}$ به فاصله زمانی $4\,\mathrm{s}$ در راستای قایم به سوی بالا پرتاب می‌شوند. چه مدت بعد از پرتاب جسم اول این دو جسم به هم می‌رسند؟

۲۸.۵ جسمی رها می‌شود تا به طور آزاد سقوط کند. ثابت کنید مسافتی که این جسم در ثانیهٔ nام می‌پیماید برابراست با $g[n - (1/2)]$.

۲۹.۵ سنگی ازبالای ساختمانی رها می‌شود و بعد از $5{,}6\,\mathrm{s}$ صدای برخورد سنگ با زمین به گوش می‌رسد. اگر سرعت صوت $340\,\mathrm{m\ s^{-1}}$ باشد، ارتفاع ساختمان را حساب کنید.

۳۰.۵ سرعت زاویه‌ای دیسکی را که با حرکت یکنواخت درهر ۶ ثانیه ۱۳٫۲ رادیان می‌چرخد حساب کنید. همچنین دوره و بسامد حرکت گردشی دیسک را پیدا کنید.

۳۱.۵ چه مدت زمان لازم است که دیسک مسئلهٔ قبل به اندازهٔ (الف) 780° بچرخد؟ (ب) ۱۲ دور بگردد؟

۳۲.۵ سرعت زاویه‌ای هریک از سه عقربهٔ ساعت را حساب کنید.

۳۳.۵ سرعت زاویه‌ای، سرعت خطی وشتاب مرکزگرای ماه را حساب کنید. می‌دانیم که ماه در ۲۸ روز یک بار گردش خود را کامل می‌کند و فاصلهٔ میانگین ماه از زمین $38{,}4 \times 10^4\,\mathrm{km}$ است.

۳۴.۵ بزرگی سرعت و شتاب مرکزگرای زمین را درحرکت انتقالی آن دورخورشید پیدا کنید. شعاع مدارحرکت انتقالی‌زمین $1{,}49 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$ ودورهٔ گردش‌آن $3{,}16 \times 10^7\,\mathrm{s}$ است.

۳۵.۵ بزرگی سرعت وشتاب مرکزگرای خورشید را درحرکت خود درکهکشان راه شیری پیدا کنید. شعاع مدار حرکت انتقالی خورشید $2{,}4 \times 10^{20}\,\mathrm{m}$ و دورهٔ گردش آن $6{,}3 \times 10^{15}\,\mathrm{s}$ است.

۳۶.۵ چرخ طیاری به‌قطر ۳ متر، درهردقیقه ۱۲۰ دور می‌گردد. (الف) بسامد، (ب) دوره (ج) سرعت زاویه‌ای، و (د) سرعت خطی یک نقطه از لبهٔ چرخ را پیدا کنید.

۳۷.۵ سرعت زاویه‌ای چرخ طیاری به طور یکنواخت در ۵ ثانیه از $20\,\mathrm{rad\ s^{-1}}$ به $30\,\mathrm{rad\ s^{-1}}$ افزایش می‌یابد. شتاب زاویه‌ای و کل زاویه‌ای را که چرخیده است پیدا کنید.

۳۸.۵ سرعت زاویه‌ای چرخ طیاری به شعاع $1{,}5\,\mathrm{m}$ به طور یکنواخت از ۱۰۰ دور در دقیقه در لحظهٔ $t = 0$، تا ایستادن در $t = 4\,\mathrm{s}$، کاهش می‌یابد. شتاب قایم و مماسی یک نقطه از لبهٔ چرخ را در لحظهٔ $t = 2\,\mathrm{s}$ حساب کنید.

۳۹.۵ روی الکترونی با سرعت $4{,}0 \times 10^5\,\mathrm{m\ s^{-1}}$ یک میدان مغناطیسی اثرمی‌کند و

وآن را وامی‌دارد که یک مسیردایره‌ای به شعاع $۳٫۰ \mathrm{m}$ بپیماید. شتاب مرکز گرای الکترون را پیدا کنید.

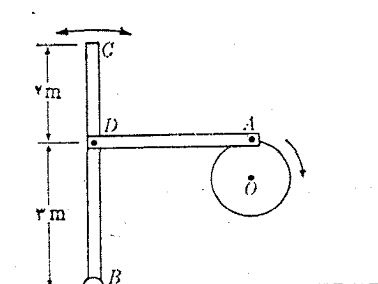
۴۰.۵ جسمی از حالت سکون (در $t = ۰$، $\theta = ۰$ و $\omega = ۰$) روی یک مسیر دایره‌ای به‌شعاع $۱٫۳ \mathrm{m}$ مطابق معادلهٔ $a = ۱۲۰t^۲ - ۴۸t + ۱۶$ شتاب می‌گیرد. مکان زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای جسم را بـه صورت توابعی از زمـان، همچنین مؤلفه‌های قایم و مماسی شتاب جسم را پیدا کنید.

۴۱.۵ نقطه‌ای مطابق رابطهٔ $s = t^۳ + ۲t^۲$ روی یک‌دایره حرکت می‌کند. دراین رابطه s برروی دایره وبرحسب متر و t برحسب ثانیه اندازه‌گیری می‌شود. اگر در لحظهٔ $t = ۲ \mathrm{s}$ شتاب کل برابر $۱۶\sqrt{۲} \mathrm{m\,s^{-۲}}$ باشد، شعاع دایره را حساب کنید.

۴۲.۵ ذره‌ای روی یک دایره مطابق قانون $\theta = ۳t^۲ + ۲t$ جابجا می‌شود. دراین رابطه θ برحسب رادیان و t برحسب ثانیه است. سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای این ذره رادر پایان ثانیهٔ چهارم به دست آورید.

۴۳.۵ چرخ بدون حرکتی به گونه‌ای شروع بـه حرکت می‌کند که سرعت زاویه‌ای آن با افزایش منظم در مدت $۶ \mathrm{s}$ به ۲۰۰ دور در دقیقه می‌رسد. پس ازآنکه چرخ مدتی با این سرعت به حرکت خود ادامـه داد، آن را تـرمـز می‌کنند. ۵ دقیقه طول می‌کشد تا چرخ از حرکت باز ایستد. اگـر چرخ کلا ۳۱۰۰ دور چرخیده باشد، زمـان کـل چرخش آن را حساب کنید.

۴۴.۵ درشکل ۲۸.۵ میلهٔ BC تحت تأثیرمیلهٔ AD نوسان می‌کند. نقطهٔ A روی‌لبهٔ چرخی بـه قطر $۲۵ \mathrm{cm}$ کـه با سرعت زاویه‌ای ۶۰ دور در دقیقه و شتاب زاویه‌ای $۶ \mathrm{rad\,s^{-۲}}$ می‌چرخد ثابت است. (الف) سرعت خطی نقطهٔ D، (ب) سرعت زاویه‌ای BC، (ج) شتاب مماسی و قایم نقطهٔ C، (د) شتاب زاویه‌ای BC و(ه) شتاب مماسی در نقطهٔ D را پیداکنید.



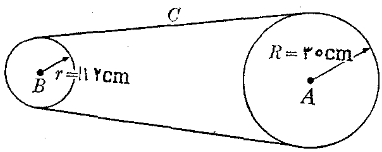
شکل ۲۸.۵

۴۵.۵ یک چرخ طیار به شعاع $۱٫۲ \mathrm{m}$ توسط نخی که دور لبهٔ آن پیچیده شده وبه سر دیگر نخ وزنه‌ای وصل شده است، دور یک محور افقی می‌چرخد. مسافت قایمی که وزنهٔ جابجامی‌شود بامعادلهٔ $x = ۴۰t^۲$ داده شده است؛ دراین رابطه x برحسب m و t برحسب s می‌باشد. سرعت و شتاب زاویه‌ای چرخ طیار را برحسب زمان حساب کنید.

۴۶.۵ مکان زاویه‌ای ذره‌ای که روی دایره‌ای به شعاع $۱٫۵ \mathrm{m}$ حرکت می‌کند، با رابطهٔ

$\theta = ۳t^۲$ داده شده است؛ در این رابطه θ بر حسب رادیان و t برحسب ثانیه است. شتاب مماسی و شتاب قایم و شتاب کل ذره را در لحظهٔ $t = ۰٫۵$ s حساب کنید.

۴۷.۵ قرقرهٔ A به‌شعاع ۳۰ cm، از حالت سکون شروع به چرخیدن می‌کند و سرعت زاویه‌ای آن به طور یکنواخت با آهنگ $۰٫۴\pi$ rad s$^{-۱}$ افزایش می‌یابد. این حرکت توسط تسمهٔ C به قرقرهٔ B منتقل می‌شود (شکل ۲۹.۵). چه رابطه‌ای بین سرعت زاویه‌ای وشعاع قرقره برقرار است؟ چقدر طول می‌کشد تا سرعت زاویه‌ای قرقرهٔ B به ۳۰۰ دوردر دقیقه برسد؟



شکل ۲۹.۵

۴۸.۵ بالنی با سرعت ۳۰۰ cm s$^{-۱}$ درست در راستای شمال حرکت می‌کند. به مدت ۲۰ s نیرویی در راستای شرق که موجب شتاب ۱۰ cm s$^{-۲}$ می‌گردد برآن‌وارد می‌شود. بعد از حذف نیرو (الف) بزرگی وراستای سرعت نهایی، (ب) معادلهٔ مسیر، (ج) فاصله از نقطهٔ شروع حرکت و (د) جابجایی از نقطهٔ شروع را تعیین کنید.

۴۹.۵ ترنی باسرعت ۷۲ km hr$^{-۱}$ درحال حرکت است. دراین هنگام فانوس‌آویزان به ته ترن که اززمین ۴٫۹ m فاصله دارد براثر لرزشهای ناشی ازحرکت ترن کنده می‌شود. مسافتی راکه ترن تارسیدن فانوس به زمین می‌پیماید حساب کنید. محل افتادن لامپ به زمین نسبت به ترن و ریلها چیست؟ مسیرآن نسبت به ترن و نسبت به ریلها چیست؟

۵۰.۵ اتومبیلی روی یک منحنی تخت‌حرکت می‌کند، به‌گونه‌ای که مختصات آن، برحسب زمان، با رابطه‌های $x = ۲t^۳ - ۳t^۲$، $y = t^۲ - ۲t + ۱$ داده می‌شود. به فرض اینکه t برحسب ثانیه ومختصات اتومبیل‌برحسب m باشد، (الف) مکان اتومبیل درلحظهٔ $t = ۱$ s، (ب) مؤلفه‌های سرعت درهرلحظه، (ج) مؤلفه‌های سرعت درلحظهٔ $t = ۱$s، (د) سرعت در هر لحظه، (ه) سرعت در لحظهٔ $t = ۰$، (و) زمان (یا زمانهایی) که سرعت برابر صفر می‌شود (ز) مؤلفه‌های شتاب در هر لحظه، (ح) مؤلفه‌های شتاب در لحظهٔ $t = ۱$ s، (ط) شتاب در هرلحظه، (ی) شتاب در لحظهٔ $t = ۰$، (ک) لحظه (یا لحظاتی) که شتاب موازی محور Yها است، را حساب کنید.

۵۱.۵ یک بازیکن بیس‌بال توپ را هنگامی که ۱ m از زمین فاصله دارد، با سرعتی برابر با ۱۶ m s$^{-۱}$ درراستایی که باسطح افق زاویهٔ °۳۰ می‌سازد پرتاب می‌کند. بازیکن دیگری در فاصلهٔ ۳۰ m از بازیکن اول و در صفحهٔ مسیر توپ قرار دارد؛ درست از لحظهٔ پرتاب توپ شروع به دویدن می‌کند. حداقل سرعتی را که این بازیکن باید داشته باشد تا بتواند هنگامی که توپ درارتفاع ۲٫۵ m از سطح زمین است به آن برسد حساب کنید. بازیکن دوم چه مسافتی را باید بدود؟

۵۲.۵. مختصات ذرهٔ متحرکی با $x = t^2$ و $y = (t-1)^2$ داده شده است. سرعت میانگین و شتاب آن را در فاصله زمانی بین t و $t + \Delta t$ پیدا کنید. نتیجه را در حالتی که $t = 2\,\text{s}$ و $\Delta t = 1\,\text{s}$ است حساب کنید و آن را با مقادیر سرعت و شتاب در لحظهٔ $t = 2\,\text{s}$ مقایسه کنید. نمودار تمام بردارهای وارد عمل را رسم کنید.

۵۳.۵. وضع ذره‌ای در لحظهٔ t با رابطهٔ $x = A\sin\omega t$ داده می‌شود. شتاب و سرعت آن را به صورت تابعی از t و x پیدا کنید.

۵۴.۵. نقطه‌ای با سرعت ثابت $1\,\text{m s}^{-1}$ جابجا می‌شود. راستای سرعت با سوی مثبت OX زاویهٔ $(\pi/2)t\,\text{rad}$ می‌سازد. اگر هنگامی که $t = 0$ است $x = y = 0$ باشند، معادلهٔ مسیر ذره را پیدا کنید.

۵۵.۵. مختصات جسم متحرکی عبارتند از $x = t^2$ و $y = (t-1)^2$. (الف) معادلهٔ مسیر را دستگاه مختصات قایم پیدا کنید [راهنمایی: t را بین معادله‌های بالا حذف کنید.] (ب) نمودار مسیر را رسم کنید. (ج) چه زمانی سرعت حداقل می‌شود؟ (د) مختصات جسم را هنگامی که سرعت برابر $10\,\text{m s}^{-1}$ است به دست آورید. (ه) شتاب مماسی و شتاب قایم را در هر لحظه حساب کنید. (و) شتاب مماسی و شتاب قایم را در لحظهٔ $t = 1\,\text{s}$ حساب کنید.

۵۶.۵. ذره‌ای روی سهمی $y = x^2$ به گونه‌ای حرکت می‌کند که در هر لحظه $v_x = 3\,\text{m s}^{-1}$ است. بزرگی و راستای سرعت و شتاب ذره را در نقطهٔ $x = 2/3\,\text{m}$ حساب کنید.

۵۷.۵. مختصات ذرهٔ متحرکی عبارتند از $x = 2\sin\omega t$ و $y = 2\cos\omega t$. (الف) معادلهٔ مسیر را در دستگاه مختصات قایم پیدا کنید. (ب) مقدار سرعت را درهر لحظه حساب کنید. (ج) مؤلفه‌های مماسی وقایم شتاب را در هر لحظه به دست آورید. نوع این حرکت را که با معادلات فوق بیان شده تعیین کنید.

۵۸.۵. اگر مختصات متحرکی برابر $x = at$ و $y = b\sin at$ باشند، ثابت کنیدکه مقدار شتاب متناسب است با فاصلهٔ جسم متحرک از محور Xها. نمودارمسیر را رسم کنید.

۵۹.۵. نقطه‌ای درصفحهٔ XY به گونه‌ای حرکت می‌کند که $v_x = 4t^3 + 4t$ و $v_y = 4t$ است. اگر متحرک در لحظهٔ $t = 0$ در نقطه‌ای به مختصات $(1, 2)$ باشد، معادلهٔ مسیر را در دستگاه مختصات قایم پیدا کنید.

۶۰.۵. ذره‌ای در صفحهٔ XY مطابق قانون $a_x = -4\sin t$ و $a_y = 3\cos t$ جابجا می‌شود. به فرض اینکه در لحظهٔ $t = 0$، $x = 0$، $y = 3$، $v_x = 4$، $v_y = 0$ باشد، (الف) معادلهٔ مسیر و (ب) مقدار سرعت ذره در لحظهٔ $\pi/4\,\text{s}$ را به دست‌آورید.

۶۱.۵. پرتابه‌ای با سرعت $600\,\text{m s}^{-1}$ وتحت زاویهٔ $60°$ با سطح افق پرتاب می‌شود. (الف) بسرد افقی، (ب) ارتفاع بیشینه (اوج)، (ج) سرعت و ارتفاع در لحظهٔ $t = 30\,\text{s}$ را حساب کنید. (د) درچه لحظه و با چه سرعتی پرتابه از ارتفاع $10\,\text{km}$ می‌گذرد؟

۶۲.۵. هواپیمای بمب‌افکنی درارتفاع $1.2\,\text{km}$ باسرعت $900\,\text{km hr}^{-1}$ به‌طور افقی

پرواز می‌کند. (الف) چه زمانی قبل از رسیدن به بالای هدف، هواپیما باید بمب خود را رها کند؟ (ب) سرعت بمب هنگام رسیدن به زمین چقدر است؟ (ج) سرعت بمب $10\,\mathrm{s}$ بعد از رها شدن چقدر است؟ (د) سرعت بمب در ارتفاع $200\,\mathrm{m}$ چقدر است؟ (هـ) بمب با چه زاویه‌ای به زمین می‌خورد؟ (و) مسافت افقی پیموده شده به وسیلهٔ بمب چقدر است؟

۶۳.۵ پرتابه‌ای با زاویهٔ $35°$ شلیک می‌شود و در فاصلهٔ افقی $4\,\mathrm{km}$ از محل شلیک به زمین برخوردمی‌کند. (الف) سرعت اولیه، (ب) طول مدت حرکت، (ج) ارتفاع بیشینه، و (د) سرعت پرتابه را درنقطهٔ اوج حساب کنید.

۶۴.۵ مسلسلی که در بالای صخره‌ای به‌ارتفاع $120\,\mathrm{m}$ قرار دارد، گلوله‌هایش با سرعت $250\,\mathrm{ms^{-1}}$ وبا زاویهٔ $30°$ بالای سطح افق شلیک می‌کند. برد گلوله‌ها (فاصلهٔ افقی، از پای صخره) را حساب کنید. اگر اتومبیلی با سرعت $60\,\mathrm{kmhr^{-1}}$ در یک جاده افقی به طرف صخره حرکت کند، باید در چه فاصله‌ای از صخره باشد تا گلوله‌ای که در آن لحظه شلیک می‌شود به‌آن اصابت کند؟ مسئله را درحالتی کـه شلیک گلوله‌ها به سمت زیر سطح افق باشد و نیز درحالتی که اتومبیل ازصخره دور می‌شود حل کنید.

۶۵.۵ تفنگی درپای تپه‌ای به شیب φ قرار دارد. اگر تفنگ با زاویهٔ α نسبت‌به سطح افق نشانه‌گیری کند وسرعت گلوله‌های آن v_0 باشد، فاصلهٔ نقطه‌ای که گلوله‌ها روی تپه می‌افتند تا پای تپه را پیدا کنید.

۶۶.۵ هواپیمایی درارتفاع h باسرعت v به‌طورافقی پرواز می‌کند. درلحظه‌ای‌که هواپیما دربالای یک توپ ضد هوایی قرار دارد روی هواپیما آتش گشوده می‌شود. حداقل v_0 سرعت پرتابه ونیز α، زاویـهٔ نشانه گیری را به‌گونه‌ای انتخاب کنید کـه گلوله به هواپیما برخورد کند.

۶۷.۵ گلوله‌های مسلسلی با سرعت $240\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ شلیک می‌شوند. اگر هـدف درفاصلهٔ $150\,\mathrm{m}$ و ارتفاع $6\,\mathrm{m}$ قرار داشته باشد، زاویه‌های هدف‌گیری را تعیین کنید.

۶۸.۵ شعاع انحنا را در بالاترین نقطهٔ مسیر یک پرتابه که تحت زاویـهٔ α با سطح افق پرتاب می‌شود پیدا کنید.

۶۹.۵ یک‌شکارچی سنجابی را دربالای شاخه درختی هدف‌گیری می‌کند. درلحظهٔ شلیک گلوله، سنجاب ازشاخه می‌پرد. نشان دهید اگـر سنجاب می‌خواست زنـده بمانـد نبایستی می پرید.

۷۰.۵ هواپیمایی باسرعت $200\,\mathrm{km\,hr^{-1}}$ درارتفاع $1\,\mathrm{km}$ به‌طور افقی پرواز می‌کند و به قصد انهدام ناوی که درهمان سوی پرواز هواپیما با سرعت $20\,\mathrm{km\,hr^{-1}}$ حرکت می‌کند بمبی را رها می‌کند. ثابت کنید که بمب را باید هنگامی کـه فاصلهٔ افقی هواپیما از ناو $730\,\mathrm{m}$ است رها کند. همین مسئله را هنگامی کـه ناو درخلاف جهت هواپیما حرکت کند حل کنید.

۷۱.۵ ثابت کنید برای حرکت دریک صفحه با شتاب ثابت $\mathbf{a}$، رابطه‌های زیر برقرارند:

$$v^{۲} = v_{\circ} + ۲\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\circ})$$

$$\mathbf{r} = \frac{۱}{۲}(\mathbf{v} + \mathbf{v}_{\circ})t.$$

۵.۷۲ چرخی به‌شعاع R با سرعت ثابت $v_{\circ}$ روی یک سطح افقی می‌غلتد. ثابت کنید که وضع یک نقطه ازمحیط چرخ با معادله‌های

$$x = R(\omega t - \sin \omega t) \quad \text{و} \quad y = R(۱ - \cos \omega t)$$

داده می‌شود. در این رابطه $\omega = v_{\circ}/R$ سرعت زاویه‌ای چرخ است و t از موقعی محاسبه می‌شود که نقطهٔ مذکور با زمین مماس باشد. مؤلفه‌های سرعت و شتاب نقطه را نیز حساب کنید.

۵.۷۳ چرخی به‌شعاع R روی یک سطح افقی می‌غلتد. ثابت کنید که در هرلحظه سرعت هرنقطه از چرخ برخط واصل این نقطه و نقطهٔ تماس چرخ با صفحه عمود است. اگر ρ فاصلهٔ این دو نقطه باشد، نشان دهید که بزرگی سرعت نقطه برابر است با $\omega\rho$. نظرتان راجع به این نتیجه‌ها چیست؟

۵.۷۴ با به‌کاربردن روشی که دربخش ۵.۱۱ شرح داده شد، ثابت کنید

$$d\mathbf{u}_{\theta}/dt = -\mathbf{u}_r d\theta/dt.$$

۵.۷۵ ثابت‌کنید که مؤلفه‌های شتاب روی بردارهای یکای $\mathbf{u}_r$، $\mathbf{u}_{\theta}$ (شکل ۵.۲۶) عبارتند از

$$a_r = \frac{d^{۲} r}{dt^{۲}} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^{۲}$$

و

$$a_{\theta} = ۲\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}}.$$

[راهنمایی: از رابطهٔ (۵.۶۳)، با توجه به مقادیر $d\mathbf{u}_r/dt$ و $d\mathbf{u}_{\theta}/dt$ استفاده کنید.]

٦

حرکت نسبی

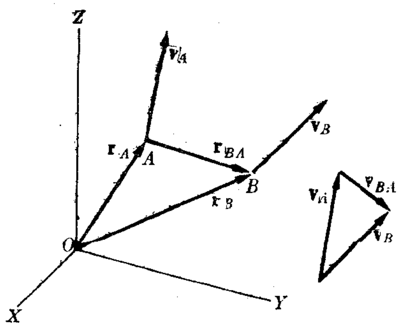
۱.۶ مقدمه

درفصل پیش اشاره کردیم که‌حرکت یک مفهوم نسبی است، بدین معنی که آن‌را باید‌همیشه نسبت به‌یک چارچوب مرجع، که‌به‌وسیلهٔ ناظرانتخاب می‌شود بیان‌کرد. ازآنجاکه‌ناظرهای مختلف می‌توانند چارچوبهای مرجع متفاوت برای خودانتخاب کنند، دانستن اینکه چگونه می‌توان مشاهدات ناظرهای مختلف را به‌هم پیوند داد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. به‌عنوان مثال، بیشتر مشاهداتی که درروی زمین به‌عمل می‌آیند، در چارچوب مرجعی‌صورت می‌گیرند که به‌زمین متصل است و درنتیجه همراه زمین جابجا می‌شوند. اخترشناسان ترجیح می‌دهند مشاهدات خود از حرکت اجرام سماوی را نسبت به ستارگان ثابت[1] انجام دهند. در فیزیک اتمی حرکت الکترونها نسبت به‌هسته تعیین می‌شود. معمولا یک آزمایشگر چارچوب مرجع خود را به گونه‌ای برمی‌گزیند که درآن بآسانی بتواند داده‌ها را جا دهد و براحتی به‌تجزیهٔ وتحلیل آنها بپردازد.

امکان تعریف یک دستگاه مطلق[2] مرجع که نسبت به فضای تهی[3] ساکن باشد، مدتها مورد بحث فیزیکدانان و فلاسفه بوده است. وقتی که فرض شد فضای تهی، ازیک مادهٔ انگاری به‌نام اتر[4] (یااثیر) با ویژگیهای ضد ونقیض و غیرممکن «پر» شده است، دستگاه مطلق دستگاهی تعریف شد که نسبت به اتردرحال سکون باشد. لیکن به‌محض اینکه اندیشهٔ ساختگی و غیرضروری اتر به دور ریخته شد، دیگر تعریف دستگاه مطلق غیرممکن گردید، زیرا درفضای تهی چیزی یافت نمی‌شودکه بتواندبه‌عنوان نقطهٔ مرجع به‌کار برود، وچنانکه دراین فصل خواهد آمد، مسئلهٔ اتر بکلی ارزش خودرا از دست داد.

۲.۶ سرعت نسبی

دو جسم A و B و ناظر O راکه سه‌وجهی $OXYZ$ رابه‌عنوان چارچوب‌مرجع برمی‌گزیند، درنظر می‌گیریم (شکل ۱.۶). سرعت A و B نسبت به O عبارتند از



شکل ۱.۶. تعریف سرعت نسبی

---

1. fixed stars 2. absolute system 3. empty space
4. ether

$$\mathbf{V}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt}, \qquad \mathbf{V}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt}. \tag{۱.۶}$$

سرعت B نسبت به A وسرعت A نسبت به B بترتیب چنین تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{V}_{BA} = \frac{d\mathbf{r}_{BA}}{dt} \qquad \mathbf{V}_{AB} = \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} \tag{۲.۶}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{BA} &= \overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \\ \mathbf{r}_{AB} &= \overrightarrow{BA} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B. \end{aligned} \tag{۳.۶}$$

چون $\mathbf{r}_{BA} = -\mathbf{r}_{AB}$ است، به دست می‌آید

$$\mathbf{V}_{BA} = -\mathbf{V}_{AB} \tag{۴.۶}$$

به گفتهٔ دیگـر، سرعت B نسبت به A برابراست با سرعت A نسبت به B باعلامت مخالف. با مشتق‌گیری از معادله‌های (۳.۶) نسبت به زمان، به‌دست می‌آید

$$\frac{d\mathbf{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} \quad \text{و} \quad \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_B}{dt}$$

ویا با به‌کار بردن معادله‌های (۱.۶) و (۲.۶) داریم

$$\mathbf{V}_{BA} = \mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A \quad \text{و} \quad \mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B \tag{۵.۶}$$

بنابراین برای پیدا کـردن سرعت نسبی دوجسم، سرعتهایشان را نسبت به ناظر از یکدیگر کم می‌کنیم. ازمشتق معادلهٔ (۵.۶) به دست می‌آید

$$\frac{d\mathbf{V}_{BA}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}_B}{dt} - \frac{d\mathbf{V}_A}{dt}.$$

رابطهٔ دیگری همانند با این رابطه برای $d\mathbf{V}_{AB}/dt$ به‌دست می‌آید. جملهٔ اول ایـن رابطه، شتاب B نسبت به A نام دارد وآن را باعلامت $\mathbf{a}_{BA}$ نشان می‌دهند. دوجملهٔ دیگرسمت‌راست بترتیب شتاب B و شتاب A نسبت به O هستند. بنابراین

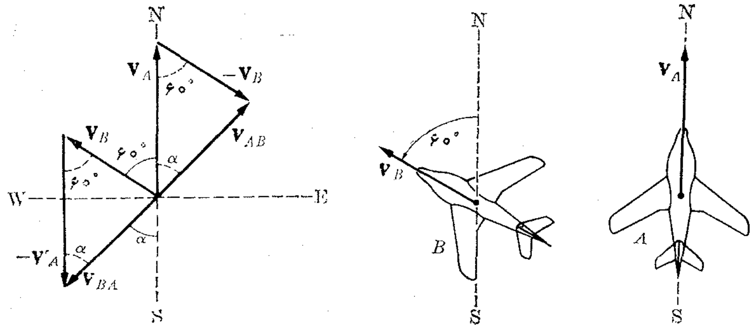
$$\mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A \quad \text{و} \quad \mathbf{a}_{AB} = \mathbf{a}_A - \mathbf{a}_B. \tag{۶.۶}$$

مثال ۱.۶. هواپیمای A باسرعت $300\,\mathrm{km\,hr^{-1}}$ نسبت‌به‌زمین به‌سمت شمال پروازمی‌کند (شکل ۲.۶). درهمین لحظه، هواپیمای B با سرعت $200\,\mathrm{km\,hr^{-1}}$ نسبت به‌زمین به‌سمت ۶۰ درجهٔ شمال غربی درحـال پرواز است. سرعت A نسبت‌به B وسرعت B نسبت به A را پیدا کنید.

حل: در شکل ۲.۶ سرعت هواپیماهای A و B نسبت بـه‌زمین در سمت راست، و درسمت چپ سرعت هواپیمای A نسبت‌به B یعنی $\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B$، وسرعت هواپیمای B نسبت A یعنی $\mathbf{V}_{BA} = \mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A$ نشان داده شده‌اند. همچنانکه معادلهٔ (۴.۶) پیش‌بینی می‌کند و از شکل پیداست $\mathbf{V}_{AB} = -\mathbf{V}_{BA}$ می‌باشد.

برای محاسبهٔ V_{AB}، با توجه به‌اینکه θ یعنی زاویهٔ بین V_A و V_B برابر ۶۰° است، معادلهٔ (۶.۳) را به‌کار می‌بریم. درنتیجه

$$V_{AB} = \sqrt{۳۰۰^۲ + ۲۰۰^۲ - ۲ \times ۳۰۰ \times ۲۰۰ \times \cos ۶۰^\circ} = ۲۶۴٫۶ \mathrm{kmhr}^{-۱}$$



شکل ۲.۶

برای به‌دست آوردن راستای V_{AB}، از قانون سینوسها یا رابطهٔ (۴.۳) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{V_B}{\sin\alpha} = \frac{V_{AB}}{\sin ۶۰^\circ} \quad \text{یا} \quad \sin\alpha = \frac{V_B}{V_{AB}} \sin ۶۰^\circ = ۰٫۶۵۴$$

از اینجا $\alpha = ۴۰٫۷^\circ$ به‌دست می‌آید. بنا براین، به‌نظر هرکدام از مسافرین هواپیمای B، هواپیمای A با سرعت $۲۶۴٫۶ \ \mathrm{kmhr}^{-۱}$ در راستا و سوی $۴۰٫۷^\circ$ شمال شرقی جابجا می‌شود. سرعت نسبی V_{BA} همین اندازه، $۲۶۴٫۶ \ \mathrm{kmhr}^{-۱}$ ودرهمین راستا ولی درسوی مخالف یعنی $۴۰٫۷^\circ$ جنوب غربی می‌باشد.

۳.۶ حرکت نسبی انتقالی یکنواخت

دو ناظر O و O' را که نسبت به‌هم دارای حرکت انتقالی یکنواخت می‌باشند درنظر می‌گیریم. این فرض بدین‌معنی است که ناظرهای O و O' نسبت به‌هم حرکت چرخشی ندارند. ناظر O شاهد جابجایی O' با سرعت $\mathbf{v}$ است، درصورتی که O' ناظر حرکت O با سرعت $-\mathbf{v}$ می‌باشد. چیزی که برای ما جالب است، توجیهی است که هرکدام از این دوناظر از حرکت یک جسم دیگر دارند. به‌عنوان مثال، یک نفر در ایستگاه قطار ایستاده است و نفر دیگر در داخل قطاری که در خط مستقیم حرکت می‌کند قرار دارد وهر دونفر، ناظر حرکت هواپیمایی هستند که بالای سر آنها پرواز می‌کند.

برای سهولت کار، محورهای OX و $O'X'$ را در امتداد خط حرکت نسبی دوناظر (شکل ۳.۶) ومحورهای $O'Y'$، $O'Z'$ را بترتیب به‌موازات OY و OZ انتخاب می‌کنیم. چون دو ناظر نسبت به یکدیگر حرکت چرخشی ندارند، محورهای مختصات همیشه به موازات هم باقی می‌مانند. همچنین فرض می‌کنیم در لحظهٔ $t = ۰$ مبدأ های مختصات O و

O'، برهم‌منطبق‌اند، به‌طوری‌که به‌فرض ثابت‌بودن $\mathbf{v}$، سرعت نسبی دوناظر، می‌توان نوشت

$$\overrightarrow{OO'} = \mathbf{v}t$$

و

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_x v.$$

اکنون ذره‌ای را در نقطهٔ A درنظر می‌گیریم. از شکل ۳.۶ پیداست که

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}.$$

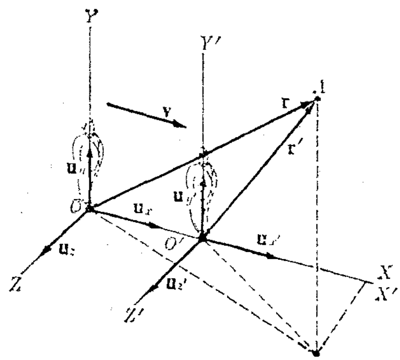
چون $\overrightarrow{OA} = \mathbf{r}$، $\overrightarrow{O'A} = \mathbf{r}$ و $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{v}t$ می‌باشند، بردارهای مکان A نسبت به O و O' با رابطهٔ زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t. \qquad (۷.۶)$$

این رابطهٔ برداری را می‌توان روی سه محور مختصات تصویر کرد. باید توجه داشت که $\mathbf{v}$ موازی بامحور OX است. بنابراین

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z \quad \text{و} \quad t' = t. \qquad (۸.۶)$$

دراینجا $t' = t$ به سه مؤلفهٔ فضایی افزوده شده است تا یادآوری شود که دوناظر زمان یکسانی به کار می‌برند؛ به عبارت دیگر، سنجشهای زمان مستقل ازحرکت ناظر فرض می‌شوند. این امر بسیار منطقی به نظر می‌رسد، ولی تنها یک فرضیه است، و ممکن است تجربه، نادرستی‌آن را ثابت کند. مجموعهٔ دستگاه معادلات (۸.۶) یا رابطهٔ برداری (۷.۶) به اضافهٔ $t' = t$، تبدیل گالیله[1] نامیده می‌شود.



شکل ۳.۶. چارچوبهای مرجع در حرکت نسبی انتقالی یکنواخت

$\mathbf{V}$، سرعت A نسبت به O چنین تعریف می‌شود:

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}_x \frac{dx}{dt} + \mathbf{u}_y \frac{dy}{dt} + \mathbf{u}_z \frac{dz}{dr}$$

1. Galilean transformation

و $\mathbf{V}'$، سرعت A نسبت به O' برابر است با

$$\mathbf{V}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{u}_{x'}\frac{dx'}{dt} + \mathbf{u}_{y'}\frac{dy'}{dt} + \mathbf{u}_{z'}\frac{dz'}{dt}.$$

توجه داشته باشید که ننوشتیم $d\mathbf{r}'/dt'$، زیرا قبلا t برابر t' فرض شده است؛ درنتیجه

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}.$$

با مشتق‌گیری از رابطهٔ (۷.۶) نسبت به زمان و با توجه به اینکه $\mathbf{v}$ ثابت است، داریم

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} - \mathbf{v}. \tag{۹.۶}$$

با توجه به اینکه $V_x = dx/dt$ و $V'_x = dx'/dt$ است، می‌توان معادلهٔ (۹.۶) را بر حسب سه مؤلفهٔ سرعت نوشت:

$$V'_{x'} = V_x - v, \quad V'_{y'} = V_y, \quad V'_{z'} = V_z. \tag{۱۰.۶}$$

این معادله‌ها را می‌توانستیم مستقیماً ازمشتق معادله‌های (۸.۶) نسبت به زمان نیز به دست آوریم. ازمعادله‌های (۹.۶) یا (۱۰.۶) قاعدهٔ گالیله جهت مقایسهٔ سرعتهای یک جسم که توسط دوناظر با حرکت انتقالی نسبی اندازه‌گیری شوند، به دست می‌آید. به عنوان مثال، اگر A به موازات محور OX جابجا شود، تنها داریم

$$V' = V - v \tag{۱۱.۶}$$

و سایر مؤلفه‌ها برابر صفر هستند. برعکس، اگر A به موازات محور OY حرکت کند، $V_y = V$ و $V_x = V_z = ۰$ خواهد بود. در این صورت $V'_{x'} = -v$، $V'_{y'} = V$ و $V'_{z'} = ۰$ است، به گونه‌ای که

$$V' = \sqrt{V^۲ + v^۲}. \tag{۱۲.۶}$$

شتابهای A نسبت به O و O' بترتیب عبارتند از $\mathbf{a} = d\mathbf{V}/dt$ و $\mathbf{a}' = d\mathbf{V}'/dt$. توجه کنید که باز هم درهر دومورد t به کار بردیم. چون $\mathbf{v}$ ثابت و درنتیجه $d\mathbf{v}/dt = ۰$ است، از معادلهٔ (۹.۶) به دست می‌آید

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}'}{dt} \quad \text{یا} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}'. \tag{۱۳.۶}$$

بنابراین درمحورهای مختصات قایم داریم

$$a'_{x'} = a_x, \quad a'_{y'} = a_y, \quad a'_{z'} = a_z. \tag{۱۴.۶}$$

به عبارت دیگر، دوناظر شتابهای یکسانی را اندازه می‌گیرند. یعنی شتاب یك ذره برای تمام ناظرهایی که نسبت به هم حرکت انتقالی یکنواخت دارند یکسان است. این نتیجه، نمونه‌ای ازیک کمیت فیزیکی ــ شتاب ذره ــ را نشان می‌دهدکه مستقل ازحرکت ناظر به‌-

نظر می‌رسد؛ به عبارت دیگـر، ما دریافتیم که درگذر ازیك چارچوب مرجع بـه چارچوب مرجع دیگر که نسبت به دستگاه اول حرکت انتقالی یکنواخت دارد، شتاب، ناوردا[1] باقی می‌ماند. این اولین برخورد مـا با یک کمیت فیزیکی است کـه پس ازیک تبدیل، ناوردا باقی می‌ماند. بعداً با کمیتهای فیزیکی دیگری برخورد خواهیم کرد کـه همین خاصیت را داشته باشند. این نتیجه، چنانکه بعداً می بینیم، درتنظیم قوانین فیزیک بسیار مؤثر است.

مثال ۲.۶. درهـوای آرام $۲۵^\circ C$ سرعت صوت برابر $۳۵۸ m\ s^{-۱}$ است. ناظری کـه با سرعت $۹۰ km\ hr^{-۱}$ حـرکت می‌کند، در حالتهای زیر بـرای صوت چـه سرعتهایـی انـدازه‌گیری می‌کند؟ (الف) ازچشمهٔ صوت دور می‌شود؛ (ب) به چشمه نزدیک می‌شود؛ (ج) در راستای عمود برانتشار صوت درهوا حرکت می‌کند؛ (د) در راستایی حرکت می‌کند که به نظرمی‌رسد صوت عمود برناظرمتحرک منتشر می‌شود. چشمه نسبت به زمین بیحرکت فرض می‌شود.

حل: دوچارچوب مرجع درنظـر می‌گیریم، یکی XYZ که متصل به زمین (شکل ۴.۶) و درنتیجه نسبت به هوا ساکن است، دیگری چارچوب $X'Y'Z'$ کـه همراه با ناظر حرکت می‌کند. محورهـای OX و $O'X'$ را همانند شکل ۳.۶ موازی بـا سرعت ناظر می‌گیریم. نسبت به XYZ چشمهٔ صوت درنقطهٔ O است، وسرعت ناظر O' برابر است با

$$v = ۹۰ km\ hr^{-۱} = ۲۵ m\ s^{-۱}$$

وسرعت صوت بـرابـر $V = ۳۵۸ m\ s^{-۱}$ است. سرعت صوت نسبت بـه $X'Y'Z'$، به‌گونه‌ای که ناظر O' ثبت می‌کند برابر V' است. با استفاده از معادلـهٔ (۹.۶) یا (۱۰.۶) بـرای حالت (الف) داریم $V' = V - v = ۳۳۳ m\ s^{-۱}$. درحالت (ب) O' در سوی منفی محور Xها جابجا می‌شود. چـون $\mathbf{v} = -\mathbf{u}_x v$ است معـادلهٔ (۱۱.۶) تغییر مـی‌کند و به صورت $V' = V + v = ۳۸۳ m\ s^{-۱}$ درمی‌آیـد. درحالت (ج) معـادلـهٔ (۱۲.۶) را به‌کار می‌بریم و بـدین طریق به دست می‌آید $V' = \sqrt{V^۲ + v^۲} = ۳۵۸٫۹ m\ s^{-۱}$. برای ناظـر درحال حرکت، به نظر می‌رسد صوت در راستایی منتشر می‌شود کـه با محور $O'X'$ زاویهٔ α' می‌سازد، به طوری که

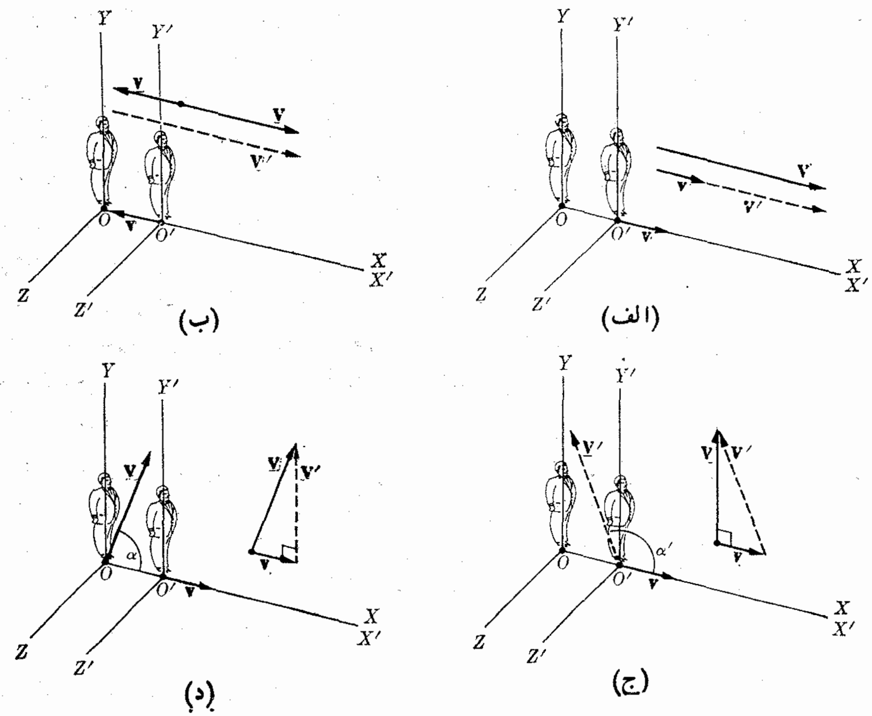
$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{V'_{y'}}{V'_{x'}} = \frac{V}{-v} = -۱۵٫۳۲ \quad \text{یا} \quad \alpha' = ۹۳٫۷^\circ$$

بالاخره، درحالت (د) راستای انتشار صوت در هوا به گونه‌ای است کـه به نظر می‌رسد O' در راستای $O'Y'$ جابجا می‌شود. دراین صورت $V'_{x'} = ۰$، $V'_{y'} = V'$ و $V'_{z'} = ۰$. درنتیجه با به کار بـردن معادلهٔ (۱۰.۶) به دست می‌آید $۰ = V_x - v$ یـا $v = V_x$ و $V' = V_y$. ازاینجا $V^۲ = V_x^۲ + V_y^۲ = V'^۲ + v^۲$، یا

$$V' = \sqrt{V^۲ - v^۲} = ۳۵۷٫۱ m\ s^{-۱}$$

است. دراین حـالت، صوت در هوای آرام در راستایی منتشر می‌شود کـه با محور Xها

---
1. invariant



شکل ۴.۶

زاویهٔ α می‌سازد به طوری که داریم

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{V'}{v} = ۱۴٫۳۸۵ \quad \text{یا} \quad \alpha = ۸۶٫۰^\circ$$

۴.۶ حرکت نسبی چرخشی یکنواخت

ناظرهای O و O' را نسبت به هم درحرکت چرخشی و بدون انتقال فرض می‌کنیم. برای سهولت کار، O و O' را دریک ناحیه ازفضا درنظر می‌گیریم. بـا اینکه هرکدام چارچوب مرجع وابسته به خود را بـه کار می‌برند، مبدأ مختصات بـرای هردو یکی است. به عنوان مثال، ناظر O که چارچوب مرجع $OXYZ$ را به کار می‌برد (شکل ۵.۶)، مشاهده می‌کند کـه چارچوب $O'X'Y'Z'$ وابسته به O' با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ می‌چرخد. برای O' وضع درست برعکس است، او مشاهده می‌کند که $OXYZ$ باسرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ — می‌چرخد.
بردار مکان ذرهٔ A نسبت به $OXYZ$ برابر است با

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y + \mathbf{u}_z z. \qquad (۱۵.۶)$$

بنابراین سرعت A، به گونه‌ای کـه ناظر O در چارچوب مرجع خود، $OXYZ$، اندازه

می‌گیرد، برابر است با

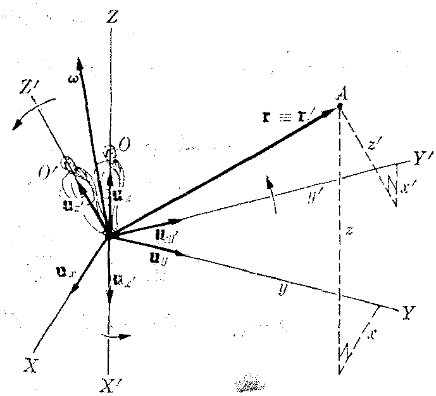
$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}_x\frac{dx}{dt} + \mathbf{u}_y\frac{dy}{dt} + \mathbf{u}_z\frac{dz}{dt}. \qquad (۱۶.۶)$$

به همین ترتیب، بردار مکان A نسبت به $X'Y'Z'$ برابر است با

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_{x'}x' + \mathbf{u}_{y'}y' + \mathbf{u}_{z'}z'. \qquad (۱۷.۶)$$

بردار مکان $\mathbf{r}$ دراین رابطه با بردار مکان در رابطهٔ (۱۵.۶) یکی است، زیرا دومبدأ برهم منطبق‌اند؛ به‌همین دلیل است که به‌جای $\mathbf{r}'$ همان $\mathbf{r}$ را نوشتیم. سرعت A آنچنانکه به‌وسیلهٔ O' نسبت به‌چارچوب مرجع خود، $O'X'Y'Z'$، اندازه‌گیری می‌شود، برابر است با

$$\mathbf{V}' = \mathbf{u}_{x'}\frac{dx'}{dt} + \mathbf{u}_{y'}\frac{dy'}{dt} + \mathbf{u}_{z'}\frac{dz'}{dt}. \qquad (۱۸.۶)$$



شکل ۵.۶. دوچارچوب مرجع درحال حرکت نسبی چرخشی یکنواخت

درمشتق‌گیری ازمعادلهٔ (۱۷.۶)، فرض شده است‌که چارچوب مرجع ناظر O' نمی‌چرخد و بدین مناسبت راستای بردارهای یکا ثابت درنظر گرفته شده است. با وجود این، ناظر O حق دارد بگوید برای او چارچوب $O'X'Y'Z'$ می‌چرخد و درنتیجه راستای بردارهای یکای $\mathbf{u}_{x'}$، $\mathbf{u}_{y'}$ و $\mathbf{u}_{z'}$ تغییر می‌کند و در محاسبهٔ مشتق معادلهٔ (۱۷.۶) نسبت به زمان باید نوشت

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}_{x'}\frac{dx'}{dt} + \mathbf{u}_{y'}\frac{dy'}{dt} + \mathbf{u}_{z'}\frac{dz'}{dt}$$
$$+ x'\frac{d\mathbf{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\mathbf{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\mathbf{u}_{z'}}{dt}. \qquad (۱۹.۶)$$

ازطرف دیگر، انتهای بردارهای $\mathbf{u}_{x'}$، $\mathbf{u}_{y'}$ و $\mathbf{u}_{z'}$ (بنا به فرض) نسبت به نقطهٔ O حرکت دایره‌ای یکنواخت دارند، وبا سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ می‌چرخند. به گفتهٔ دیگر، $d\mathbf{u}_{x'}/dt$

سرعت نقطه‌ای به فاصلهٔ واحد ازنقطهٔ O است که با حرکت دایره‌ای یکنواخت و باسرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ جابجا می‌شود. با به کار بردن معادلهٔ (۴۸.۵) داریم

$$\frac{d\mathbf{u}_{x'}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{x'}, \quad \frac{d\mathbf{u}_{y'}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{y'}, \quad \frac{d\mathbf{u}_{z'}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{z'}.$$

بنابراین، از معادلهٔ (۱۹.۶) می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{d\mathbf{u}_{x'}}{dt}x' + \frac{d\mathbf{u}_{y'}}{dt}y' + \frac{d\mathbf{u}_{z'}}{dt}z' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{x'}x' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{y'}y'$$

$$+ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{z'}z' = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{u}_{x'}x' + \mathbf{u}_{y'}y' + \mathbf{u}_{z'}z') = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (۲۰.۶)$$

با دخالت دادن این نتیجه درمعادلهٔ (۱۹.۶) و با استفاده از معادله‌های (۱۶.۶) و (۱۸.۶) بالاخره به دست می‌آوریم

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (۲۱.۶)$$

این معادله رابطهٔ بین سرعتهای $\mathbf{V}$ و $\mathbf{V}'$ ذرهٔ A را که توسط ناظرهای O و O' با حرکت نسبی چرخشی اندازه‌گیری می‌شوند به‌دست می‌دهد.

برای یافتن رابطهٔ بین شتابها، با همان شیوهٔ فوق عمل می‌کنیم. شتاب A آن گونه که به وسیلهٔ O نسبت به $OXYZ$ اندازه‌گیری می‌شود، برابر است با

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{u}_x \frac{dV_x}{dt} + \mathbf{u}_y \frac{dV_y}{dt} + \mathbf{u}_z \frac{dV_z}{dt}. \quad (۲۲.۶)$$

شتاب A آن گونه که به وسیلهٔ O' نسبت به $O'X'Y'Z'$ اندازه‌گیری می‌شود، باز هم بدون درنظر گرفتن حرکت چرخشی، برابر است با

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{V}'}{dt} = \mathbf{u}_{x'} \frac{dV'_{x'}}{dt} + \mathbf{u}_{y'} \frac{dV'_{y'}}{dt} + \mathbf{u}_{z'} \frac{dV'_{z'}}{dt}. \quad (۲۳.۶)$$

هرگاه با توجه به اینکه $\boldsymbol{\omega}$ ثابت است، از معادلهٔ (۲۱.۶) نسبت به زمان مشتق بگیریم، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (۲۴.۶)$$

از طرف دیگر چون $\mathbf{V}' = \mathbf{u}_{x'}V'_{x'} + \mathbf{u}_{y'}V'_{y'} + \mathbf{u}_{z'}V'_{z'}$ است، ازمشتق آن به دست می‌آید

$$\frac{d\mathbf{V}'}{dt} = \mathbf{u}_{x'} \frac{dV'_{x'}}{dt} + \mathbf{u}_{y'} \frac{dV'_{y'}}{dt} + \mathbf{u}_{z'} \frac{dV'_{z'}}{dt}$$

$$+ \frac{d\mathbf{u}_{x'}}{dt}V'_{x'} + \frac{d\mathbf{u}_{y'}}{dt}V'_{y'} + \frac{d\mathbf{u}_{z'}}{dt}V'_{z'}.$$

بنا به رابطهٔ (۲۳.۶)، سه جملهٔ اول نمایش $\mathbf{a}'$ و سه جملهٔ آخر، با شیوهٔ به کار رفته برای به دست آوردن معادلهٔ (۲۰.۶)، برابرند با $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}'$. برای به دست آوردن آن کافی است کمیتهای مناسب را در معادلهٔ (۲۰.۶) قرار دهیم:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{x'} V'_{x'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{y'} V'_{y'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{z'} V'_{z'}$$
$$= \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{u}_{x'} V'_{x'} + \mathbf{u}_{y'} V'_{y'} + \mathbf{u}_{z'} V'_{z'}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}'.$$

بنابراین $d\mathbf{V}'/dt = \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}'$ است. از معادله‌های (۱۶.۶) و (۲۱.۶) نیز داریم $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{V} = \mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$، به‌طوری که

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

بالاخره با قرار دادن این نتایج در رابطهٔ (۲۴.۶) به دست می‌آید

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + ۲\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \qquad (۲۵.۶)$$

این معادله رابطهٔ بین شتابهای ذرهٔ A را که به وسیلهٔ ناظرهای O و O' با حرکت چرخشی یکنواخت نسبت به هم اندازه‌گیری می‌شوند به‌دست می‌دهد. جملهٔ دوم، $۲\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}'$، شتاب کوریولی[1] نامیده می‌شود. جملهٔ سوم مشابه رابطهٔ (۵۹.۵) است و مربوط به شتاب مرکزگرا می‌باشد. شتاب کوریولی و شتاب مرکزگرا هر دو، نتیجهٔ حرکت چرخشی نسبی دو ناظر نسبت به هم هستند. در بخش بعد، با یک مثال چگونگی کاربست این روابط را نشان می‌دهیم.

۵.۶ حرکت نسبت به زمین

مطالعهٔ حرکت یک‌جسم نسبت به‌زمین، یکی ازکاربستهای بسیارجالب رابطهٔ (۲۵.۶) است. چنانکه مثال ۱۰.۵ نشان می‌دهد، سرعت زاویه‌ای زمین برابر است با

$$\omega = ۷٫۲۹۲ \times ۱۰^{-۵}\,\text{rad s}^{-۱}$$

و راستای آن محور حرکت چرخشی (وضعی) زمین می‌باشد. نقطه‌ای مانند A را روی سطح زمین در نظر می‌گیریم (شکل ۶.۶). شتاب‌گرانی اندازه‌گیری شده در نقطهٔ A از دید ناظر بدون حرکت چرخشی را $\mathbf{g}_\circ$ می‌نامیم. در این صورت $\mathbf{g}_\circ$ متناظر $\mathbf{a}$ در رابطهٔ (۲۵.۶) است. با حل معادلهٔ (۲۵.۶) بر حسب $\mathbf{a}'$، شتاب اندازه‌گیری شده به‌وسیلهٔ ناظری را که با زمین می‌چرخد به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{g}_\circ - ۲\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \qquad (۲۶.۶)$$

نخست حالتی را در نظر می‌گیریم‌که جسم ابتدا درحال سکون است، یا خیلی بکندی حرکت می‌کند، به طوری که جملهٔ کوریولی، $-۲\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}'$، درمقایسه با جملهٔ آخر، یعنی

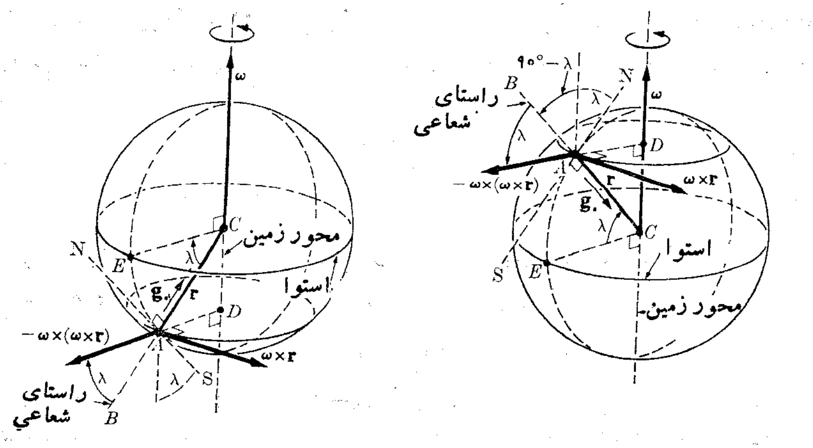
1. Coriolis acceleration

$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega}$ — صفر یا خیلی ناچیز است. شتابی کـه در این حالت انـدازه‌گیری می‌شود شتاب مؤثرگرانی نامیده می‌شود و آن را با $\mathbf{g}$ نشان می‌دهند. بنابراین

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_\circ - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \qquad (۲۷.۶)$$

$\mathbf{g}$ شتابی است که به‌کمک آونگ اندازه می‌گیرند و در فصل ۱۲ مورد بحث قرار خواهیم داد. به فرض کروی بودن زمین (در واقع مختصری با کـره متفاوت است) و عدم وجـود ناهنجاریهای محلی، می‌توان $\mathbf{g}_\circ$ را در راستای شعاعی و به سمت مرکز زمین در نظر گرفت. به سبب وجـود جملهٔ دوم در معادلهٔ (۲۷.۶) راستای $\mathbf{g}$ کـه به نام قایم خوانده مـی‌شود، مختصری از راستای شعاعی انحراف دارد و آن را با امتداد خط شاقول تعیین می‌کنند. سطح آبگونهای در حال تعادل همیشه بر راستای $\mathbf{g}$ عمود است. با وجود این، برای مقاصد عملی ودرغیاب هرگونه اختلال‌محلی، می‌توان‌راستای قایم‌را برراستای شعاعی‌منطبق درنظرگرفت.

اکنون جملهٔ آخرمعادلهٔ (۲۷.۶) یعنی $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega}$ — را بتفصیل بیشتری مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم. این عبارت را شتاب‌گریز ازمرکز[1] می‌نامند، زیرا چنانکه شکل ۶.۶ نشان مـی‌دهد، به سبب وجود علامت منفی در جلـو آن، سوی آن به سمت بیرون در راستای DA است. زاویهٔ λ کـه $r = CA$ بـا استوا می‌سازد عـرض جغرافیایی نام دارد. بنابراین بردار $\boldsymbol{\omega}$ زاویهٔ $(۹۰^\circ - \lambda)$ در نیمکرهٔ شمالی و زاویهٔ $(۹۰^\circ + \lambda)$ در نیمکرهٔ



(الف) نیمکرهٔ شمالی (ب) نیمکرهٔ جنوبی

شکل ۶.۶. شتاب گریز از مرکز ناشی از حرکت وضعی زمین

جنوبی با راستای CA می‌سازد. بزرگی $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ برابر است با

$$|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}| = \omega r \sin(۹۰^\circ \pm \lambda) = \omega r \cos\lambda$$

وراستای $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ که بر $\boldsymbol{\omega}$ عمود است به‌موازات استوا می‌باشد. با بازگشت به مثال ۱۱.۵

1. centrifugal acceleration

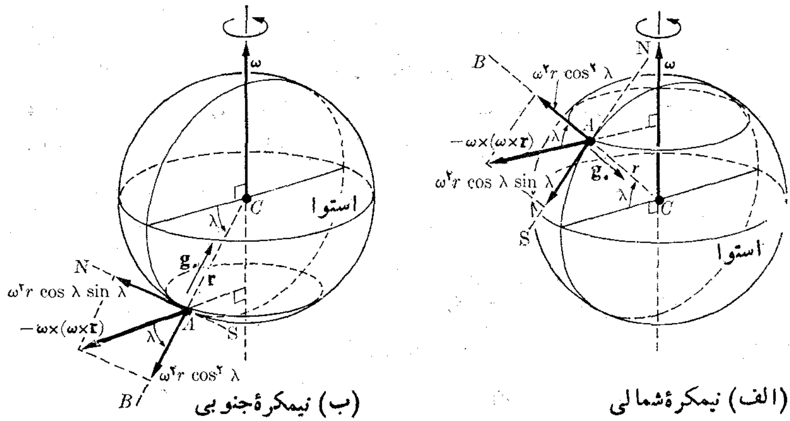
برای بزرگی شتاب گریز از مرکز، $-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$، به دست می‌آید

$$|-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})| = \omega^2 r\cos\lambda = 3.34\times 10^{-2}\cos\lambda\ \mathrm{ms^{-2}} \quad (۲۸.۶)$$

که در آن $r = 6.37\times 10^{6}\ \mathrm{m}$ شعاع زمین است. این شتاب از استوا تا قطب بتدریج کاهش می‌یابد، ولی همیشه خیلی کوچکتر از شتاب گرانی $g_0 = 9.8\ \mathrm{ms^{-2}}$ است. اندازهٔ آن در استوا بیشینه و در حدود ۰٫۳ درصد g_0 است (به مثال ۱۱.۵ مراجعه کنید).

اکنون مؤلفه‌های $-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$ را روی راستای شعاعی AB و خط شمال و جنوب (NS) در نقطهٔ A پیدا می‌کنیم. روی شکل ۷.۶ همانند شکل ۶.۶ خط AB امتداد CA نمایش راستای شعاعی است: بدیهی است بردار $\boldsymbol{\omega}$ با راستای NS زاویهٔ λ می‌سازد. چنانکه قبلاً اشاره‌کردیم شتاب گرانی $\mathbf{g}_0$ در راستای AB و سوی آن به سمت پایین است. شتاب گریز از مرکز $-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$ با AB زاویهٔ λ می‌سازد ومؤلفهٔ آن روی AB از ضرب مقدار حاصل از معادلهٔ (۲۸.۶) در $\cos\lambda$ به دست می‌آید که برابر است با

$$|-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathrm{r})|\cos\lambda = \omega^2 r\cos^2\lambda.$$



شکل ۷.۶. مؤلفه‌های شعاعی و افقی شتاب گریز از مرکز

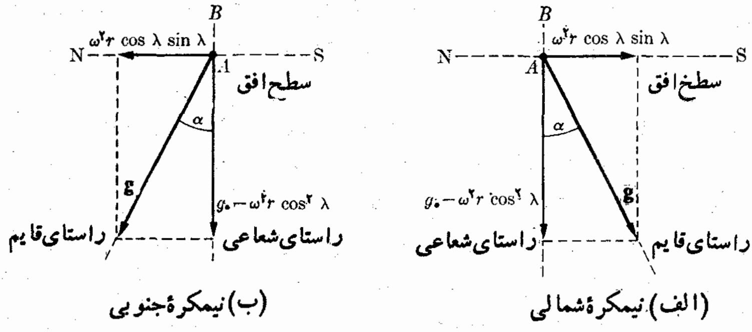
مؤلفهٔ شتاب گریز ازمرکز روی راستای NS درنیمکرهٔ شمالی به سوی جنوب (ودر نیمکرهٔ جنوبی به سمت شمال) است و مقدار آن از ضرب شتاب گریز از مرکز در $\sin\lambda$ به دست می‌آید:

$$|-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})|\sin\lambda = \omega^2 r\cos\lambda\sin\lambda.$$

هردو مؤلفه درشکل ۷.۶ نشان داده شده‌اند. بنا به‌تعریف $\mathbf{g}$ درمعادلهٔ (۲۷.۶)، مؤلفه‌های $\mathbf{g}$ درراستای شعاعی و افقی‌مطابق شکل۸.۶ می‌باشند. به‌دلیل‌کوچک بودن جملهٔ گریز ازمرکز، زاویهٔ α خیلی‌کوچک است و بزرگی $\mathbf{g}$ اختلاف محسوسی با مؤلفهٔ آن روی راستای شعاعی AB ندارد. بنا براین با تقریب کافی می‌توان نوشت

$$g = g_\circ - \omega^2 r \cos^2\lambda. \qquad (۲۹.۶)$$

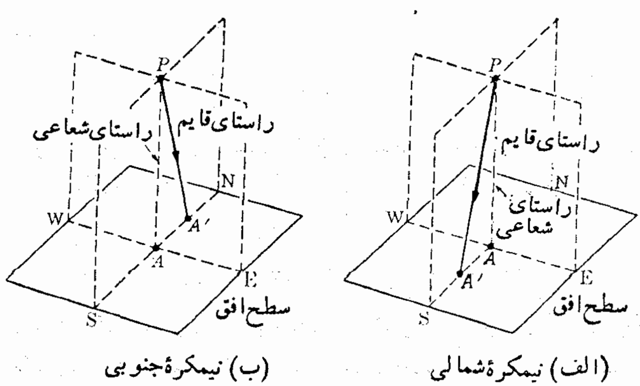
گرچه جملهٔ آخر خیلی‌کوچک است ولی افزایش شتاب گرانی را برحسب عرض جغرافیایی توجیه می‌کند. این امر با مراجعه به جدول ۱.۶ آشکار می‌شود.



شکل ۸.۶. تعریف راستای قایم و شتاب مؤثر در سقوط آزاد

مؤلفهٔ شتاب گریز از مرکز روی راستای NS، در نیمکرهٔ شمالی جسم را از راستای شعاعی AB مختصری به سمت جنوب و در نیمکرهٔ جنوبی بـه سمت شمال منحرف می‌کند. بنابراین، چنانکه از شکل ۹.۶ پیداست مسیر جسمی کـه می‌افتد از راستای شعاعی قدری انحراف دارد. مثلاً اگرجسم درغیاب حرکت چرخشی درنقطهٔ A به‌زمین می‌رسید، به سبب حرکت وضعی زمین در نقطهٔ A' به زمین می‌رسد. به سبب کوچک بودن مقدار زاویهٔ α این انحراف ناچیز و قابل چشم‌پوشی است.

اکنون جملهٔ کوریولی $-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}'$ را در نظر می‌گیریم. در حـالت سقوط جسم، $\mathbf{V}'$ در راستای قایم AB وبه‌سوی پایین می‌باشد (شکل ۱۰.۶) وبنابراین $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}'$ به‌سوی مغرب است. در نتیجه جملهٔ کـوریولی $-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}'$ بـه سمت مشرق خواهد بود. جسم

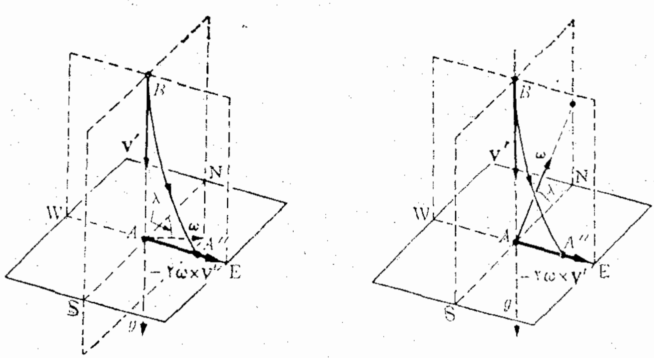


شکل ۹.۶. نمایش انحراف مسیر جسم در حال سقوط آزاد ناشی از شتاب گـریز از مرکز: در نیمکرهٔ شمالی (جنوبی) به سمت جنوب (شمال)

جدول ۱.۶. مقادیر شتاب گرانی، برحسب ms^{-2}

محـل	عرض جغرافیایی	شتاب گـرانی
قطب شمال	۹۰° ۰′	۹٫۸۳۲۱
انکوراژ[1]	۶۱° ۱۰′	۹٫۸۲۱۸
گرینویچ	۵۱° ۲۹′	۹٫۸۱۱۹
پاریس	۴۸° ۵۰′	۹٫۸۰۹۴
واشینگتن	۳۵° ۵۳′	۹٫۸۰۱۱
تهران	۳۵° ۴۴′	۹٫۷۹۴۱
کی وست[2]	۲۴° ۳۴′	۹٫۷۸۹۷
پاناما	۸° ۵۵′	۹٫۷۸۲۲
استوا	۰° ۰′	۹٫۷۷۹۹

در حال سقوط بـه سمت مشرق منحرف شده، در نقطهٔ A''، مختصری در شرق A بـه زمین می‌رسد. با ترکیب اثر کوریولی و اثر شتاب گریز از مـرکـز، هرجسم سقوط کننده‌ای در نیمکرهٔ شمالی در جنوب شرقی A ودر نیمکرهٔ جنوبی در شمال شرقی آن به‌زمین می‌رسد. این اثرکه غالباً قابل چشم پوشی است باید دربمبارانهایی که ازارتفاع خیلی زیاد صورت می‌گـیرد، و در مورد موشکهای پرتابـی قاره پیما مورد توجه قرار گیرد. به سبب سرعت



(ب) نیمکره‌جنوبی

(الف) نیمکرهٔ‌شمالی

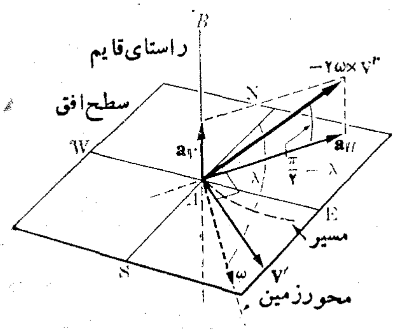
شکل ۱۰.۶. انحراف یک جسم سقوط‌کننده در نیمکرهٔ شمالی (یا جنوبی) به سمت شرق، براثر شتاب کوریولی

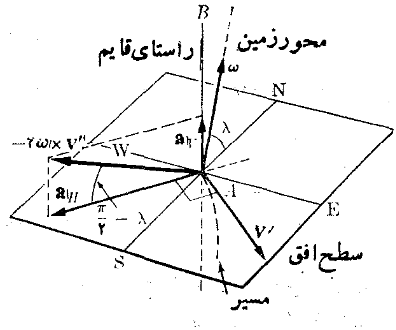
1. Anchorage
2. Key West

خیلی زیاد موشکها و ماهواره‌ها، شتاب کوریولی اثر قابل توجهی روی مسیر آنها دارد.

در مورد جسمی که به طور افقی جابجا می‌شود، بردار $-2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}'$ — که بر $\boldsymbol{\omega}$ و $\mathbf{V}'$ عمود است با سطح افق زاویهٔ $\pi/2 - \lambda$ می‌سازد و دارای مؤلفهٔ افقی $\mathbf{a}_H$ و مؤلفه قایم $\mathbf{a}_V$ است (شکل ۶.۱۱). به‌سبب‌وجودمؤلفهٔ‌افقی $\mathbf{a}_H$، مسیرجسم دیگرخط‌مستقیم نیست بلکه‌در نیمکرهٔ شمالی به سمت راست ودر نیمکرهٔ جنوبی به‌سمت چپ منحرف می‌شود. $\mathbf{a}_H$ از قطب به سمت استوا بتدریج کاهش پیدا می‌کند و در استوا برابر صفر است. بدین طریق شتاب کوریولی در استوا اثر افقی درحرکتهای افقی ندارد. اثرقایم شتاب کوریولی نیز نسبت به شتاب گرانی کوچک است و در بیشتر موارد می‌توان ازآن چشم پوشید.

اثر افقی را می‌توان در دو پدیدهٔ کاملا شناخته شده دید. یکی چرخش باد به هنگام





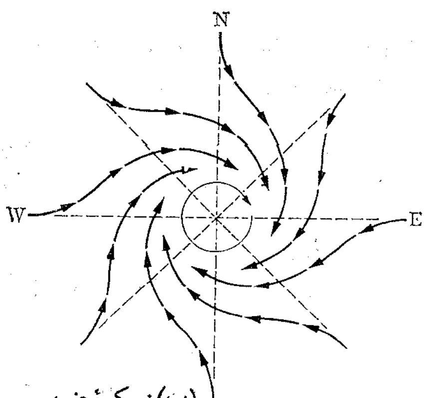
شکل ۶.۱۱. شتاب‌کوریولی. وقتی‌که جسم در نیمکرهٔ شمالی (جنوبی) افقی حرکت می‌کند، مؤلفهٔ افقی شتاب کوریولی درراستای سمت راست (چپ) راستای حرکت است. دراین حالت، $\mathbf{V}'$ درصفحهٔ افقی و $\boldsymbol{\omega}$ درصفحهٔ حاصل ازAB و NS و $\mathbf{a}_H$ بر$\mathbf{V}'$عموداست.

کولاک است: اگر یک مرکز کم فشار در جو گسترش پیدا کند، باد در راستای شعاعی به سمت این مرکز می‌وزد (شکل ۶.۱۲)، ولی شتاب کوریولی در نیمکرهٔ شمالی مولکولهای هوا را به سمت راست مسیرشان منحرف می‌کند، در نتیجه یک حرکت چرخشی در جهت پاد ساعتگرد به وجود می‌آید. فشار و دمای هوا نیز روی این حرکت تأثیر عمده دارد. این اثر به پدیدهٔ بسیار پیچیده‌ای منجر می‌شود که تشریح آن دراینجا چندان آسان نیست. نتیجهٔ نهایی آن گرد باد است که شکل ۶.۱۲ (ج) نشان داده شده است. درنیمکرهٔ جنوبی چرخش باد در سوی ساعتگرد صورت می‌گیرد.

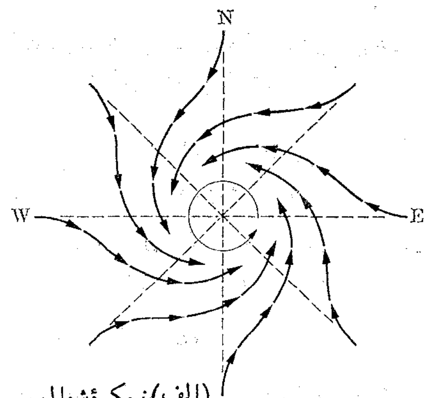
به عنوان مثال دوم، نوسانهای یک آونگ را درنظر می‌گیریم. برای نوسانهای کم‌دامنه، مسیر حرکت آونگ را می‌توان افقی فرض کرد. اگر آونگ را درآغاز در راستای شرقی - غربی به نوسان درآوریم وآن را در نقطهٔ A رها کنیم (شکل ۶.۱۳)، در غیاب حرکت وضعی زمین،آونگ به نوسانهای خودبین A و B ادامه می‌داد. ولی به سبب شتاب کوریولی ناشی از حرکت وضعی زمین، مسیر حرکت آونگ در نیمکرهٔ شمالی بتدریج به سمت راست و در نیمکرهٔ جنوبی به سمت چپ منحرف می‌شود. بنابراین در آخر نخستین

نوسان به جای آمدن به‌نقطهٔ B، به B' و در برگشت نیز به جای A، به‌نقطهٔ A' می‌رسد. در نتیجه در جریان نوسانهای کامل متوالی به نقاط A''، A'''. . . و غیره می‌آید. به گفتهٔ دیگر صفحهٔ نوسان آونگ در نیمکرهٔ شمالی در جهت ساعتگرد و در نیمکرهٔ جنوبی در جهت عکس می‌چرخد. به عهدهٔ دانشجو واگذار می‌کنیم تا تحقیق کند صفحهٔ نوسان آونگ درهر ساعت به مقدار $15^\circ \sin\lambda$ می‌چرخد در شکل ۱۳.۶ این اثر به طور اغراق آمیزی رسم شده است. این چرخش در قطب بیشینه و در استوا برابر صفر است.

این اثر از طریق یک آزمایش بصری به وسیلهٔ ژان لئون فوکو[1]، فیزیکدان فرانسوی نشان داده شد. وی در سال ۱۸۵۱ (۱۲۳۰ هـ. ش.) آونگی به طول $67\,\mathrm{m}$ از سقف گنبد انوالید[2] درپاریس آویزان کرد. آونگ درهر نوسان شنی روی دایره‌ای می‌انداخت، بدین طریق با تجربه ثابت شد که صفحهٔ نوسان آونگ درهر ساعت $11^\circ\,15'$ می‌چرخد. از آن به بعد یک آونگ فوکو درتالار مؤسسهٔ اسمیت‌سانین[3]، در واشینگتن ویکی هم در ساختمان سازمان ملل متحد در نیویورک قرار داده شده است. تجربهٔ فوکو شاهد آشکاری



(ب) نیمکرهٔ جنوبی



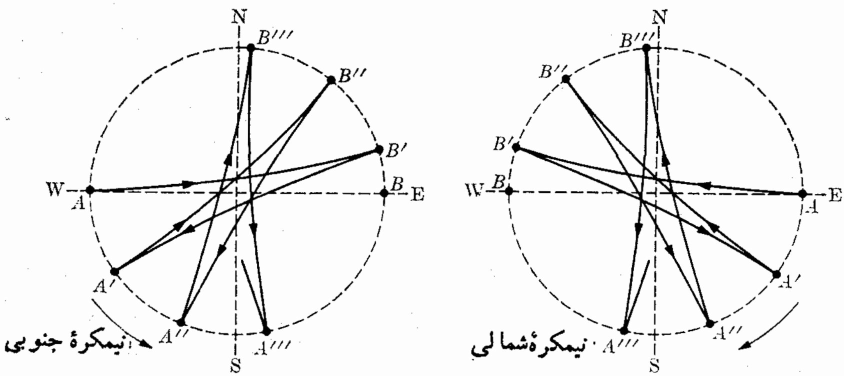
(الف) نیمکرهٔ شمالی

(ج)

شکل ۱۲.۶. چرخش باد درسوی پادساعتگرد درنیمکرهٔ شمالی (برای نیمکرهٔ جنوبی، درسوی ساعتگرد) ناشی از ترکیب اثر یک مرکز فشار کم و شتاب کوریولی. مرکز فشار کم در عکس (ج) به وسیلهٔ ماهوارهٔ تیروس[4] گرفته شده است. (عکس بااجازهٔ ناسا، مرکز فضایی گودارد[5].)

1. Jean Leon Foucault 2. Les Invalides 3. Smithsonian
4. Tiros 5. Goddard

بر حرکت وضعی زمین است. حتی اگر جو زمین همیشه پوشیده از ابر باشد، این تجربه بتنهایی کافی است که یک فیزیکدان بگوید زمین می‌چرخد.



شکل ۱۳.۶. چرخش صفحهٔ نوسان یک آونگ براثر شتاب کوریولی. (چرخش در نیمکرهٔ جنوبی درجهت عکس چرخش درنیمکرهٔ شمالی است.)

مثال ۳.۶. برای یک جسم درحال افتادن انحراف ناشی از شتاب کوریولی را حساب کنید. این انحراف را با انحراف ناشی از شتاب گریز از مرکز مقایسه کنید.

حل: از روی شکل ۱۰.۶ می‌بینیم که $\mathbf{V}'$ سرعت جسم درحال سقوط با راستای $\boldsymbol{\omega}$ زاویهٔ $\lambda + ۹۰^\circ$ می‌سازد. بنابراین بزرگی شتاب کوریولی، $-۲\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}'$، برابراست با

$$۲\omega V' \sin(۹۰^\circ + \lambda) = ۲\omega V' \cos\lambda.$$

هرگاه راستای شرق را محور Xها در نظر بگیریم، این شتاب برابر $d^۲x/dt^۲$ است:

$$\frac{d^۲x}{dt^۲} = ۲\omega V' \cos\lambda.$$

برای V'، با تقریب خوب، همان مقدار به دست آمده درفصل ۵ در مورد سقوط آزاد را به‌کار می‌بریم، یعنی $V' = gt$ و $d^۲x/dt^۲ = ۲\omega gt\cos\lambda$. با انتگرال گیری ازاین رابطه و به فرض ساکن بودن جسم درآغاز سقوط (به ازای $t = ۰$، $dx/dt = ۰$ است)، داریم

$$\frac{dx}{dt} = \omega g t^۲ \cos\lambda.$$

با انتگرال‌گیری مجدد و با در نظر گرفتن اینکه در لحظهٔ $t = ۰$ جسم در راستای قایم A قرار دارد، یعنی $x = ۰$ است، به دست می‌آید

$$x = \frac{۱}{۳}\omega g t^۳ \cos\lambda.$$

این رابطه جابجایی یک جسم درحال سقوط به سمت شرق را برحسب زمان سقوط نشان می‌دهد. اگر جسم از ارتفاع h رها شده باشد، می‌توانیم مقدار فوق را برحسب مقدار سقوط آزاد، $h = gt^۲/۲$، بنویسیم، یعنی

$$x = \frac{۱}{۳}\omega\left(\frac{۸h^۳}{g}\right)^{۱/۲}\cos\lambda = ۱٫۵۳ \times ۱۰^{-۵} h^{۳/۲}\cos\lambda.$$

به‌عنوان مثال، هرگاه $h = ۱۰۰\,\mathrm{m}$ باشد، خواهیم‌داشت $x = ۱٫۵۳ \times ۱۰^{-۲}\cos\lambda\,\mathrm{m}$. این مقدار درمقایسه با فاصلهٔ سقوط نسبتاً ناچیز است.

شتاب در راستای جنوب ناشی ازجملهٔ گریز ازمرکز، برابر است با

$$\omega^۲ r\cos\lambda\sin\lambda = ۳٫۳۴ \times ۱۰^{-۲}\sin\lambda\cos\lambda$$

و با به‌کاربردن $h = gt^۲/۲$، مقدار انحراف برابر می‌شود با

$$y = (\omega^۲ r\cos\lambda\sin\lambda)t^۲/۲ = \omega^۲ r(h/g)\cos\lambda\sin\lambda$$
$$= ۰٫۳۴۲\,h\cos\lambda\sin\lambda\ \mathrm{m}.$$

۶.۶ تبدیل لورنتس

در پایان قرن نوزدهم، وقتی که هنوز فرض می‌شد فضای تهی از ماده، پر از «اتر» است، گفتگوی دامنه‌داری راجع به‌حرکت اجسام در اتر و نحوهٔ تأثیر این حرکت برسرعت نوری که روی زمین اندازه‌گیری می‌شود جریان داشت. در آغاز فیزیکدانها فرض کرده بودند ارتعاش این اتر فرضی وابسته به‌نور است، چنانکه‌ارتعاش هوا وابسته به‌صوت می‌باشد. با فرض‌ساکن‌بودن اتر، درمی‌یابیم که نور با سرعت $c = ۲٫۹۹۷۹ \times ۱۰^۸\,\mathrm{m\,s^{-۱}}$ نسبت به اتر جابجا می‌شود. اگر زمین بدون آشفته ساختن اتر در داخل آن حرکت کند، سرعت نور نسبت به زمین بایستی به راستای انتشار نور بستگی داشته باشد. به عنوان مثال، هرگاه نور در راستا و سوی حرکت زمین انتشار پیدا کند سرعت آن $c - v$، و در خلاف جهت حرکت زمین سرعت آن باید برابر $c + v$ باشد. و نیز اگر انتشار نور در راستای عمود برراستای حرکت زمین باشد، سرعت نور نسبت به‌زمین باید برابر $\sqrt{c^۲ - v^۲}$ باشد.[به‌مثال ۲.۶ (د) مربوط به‌صوت که مشابه این مورد است مراجعه کنید.]

در سال ۱۸۸۱ (۱۲۶۰ هـ. ش.) مایکلسون[1] و مورلی[2]، فیزیکدانهای آمریکایی که یک رشته آزمایشهای تاریخی را برای اندازه‌گیری سرعت نور نسبت به زمین در راستاهای مختلف آغاز کرده بودند، باکمال تعجب مشاهده‌کردند سرعت‌نور درتمام جهات یکسان‌است*،

1. Michelson 2. Morley

* برای بررسی انتقادی‌آزمایشهای انجام یافته به‌منظور اندازه‌گیری سرعت‌نور نسبت به‌زمین در راستاهای مختلف، رجوع کنید به

R. S. Shankland, *et al.*, *Reviews of Modern Physics* 27, 167 (1955).

در صورتی که تبدیل گالیله نشان می‌دهد دو ناظری که نسبت به هم دارای حرکت یکنواخت هستند نمی‌توانند برای یک جسم سرعت یکسان اندازه بگیرند، و سرعت نسبی به‌راستای حرکت ناظر بستگی دارد. معادله‌های (۹.۶) و (۱۰.۶) مشخصاً بر این امر تاکید دارند. یک توضیح ممکن دیگر این‌است که همچنانکه زمین درحرکت خود، جو را با خودش می‌برد، اتر را نیز همراه خود می‌کشد، بنابراین در مجاورت زمین اتر نسبت به زمین ساکن باقی می‌ماند. این توضیح کمتر مقرون به حقیقت است، زیرا حرکت اتر همراه زمین باید درسایر پدیده‌های مربوط به انتشار نور نیز ظاهر شود. چنین پدیده‌هایی هرگز مشاهده نشده‌اند. با توجه به همه این دلایل، فرض وجود اتر ازطرف فیزیکدانان به‌کنار نهاده شد.

معمای آزمایشهای مایکلسون و مورلی در سال ۱۹۰۵ (۱۲۸۴ هـ. ش.) با بیان اصل نسبیت به‌وسیلهٔ اینشتین حل شد، که بعداً دربخش ۳.۱۱ بتفصیل مورد گفتگو قرار خواهد گرفت. بنا به‌این اصل

> برای تمام ناظرهایی که نسبت به هم حرکت انتقالی یکنواخت دارند، کلیهٔ قوانین طبیعت باید یکسان باشند (یعنی ناوردا باقی بمانند).

اینشتین فرض کرد که سرعت نور یک ناوردای فیزیکی[1] است و برای کلیهٔ ناظرها دارای مقدار یکسانی است. چنانکه خواهیم دید، این فرض در کاربرد اصل نسبیت درمورد قوانین الکترو مغناطیس ضروری است. با این فرضیه، تبدیل گالیله، و بویژه چهارمین‌رابطهٔ معادله‌های (۸.۶)، $t = t'$، دیگر نمی‌تواند درست باشد. چون سرعت عبارت است از فاصله تقسیم برزمان، اگر بخواهیم این خارج قسمت برای ناظرهایی که نسبت به هم در حرکت هستند ثابت بماند، چنانکه درمورد سرعت نور فرض شد، باید زمان و نیز فاصله را دستکاری کنیم. به عبارت دیگر، نباید فاصله زمانی بین دو رویداد برای ناظرهایی که نسبت به هم درحرکت هستند یکی باشد. دراین صورت تبدیل دیگری را باید جانشین تبدیل‌گالیله کرد تا سرعت نور یک ناوردا شود. همانند تبدیل گالیله، فرض می‌کنیم ناظرهای O و O' با سرعت نسبی $\mathbf{v}$ و در راستای محورهای OX و $O'X'$ حرکت می‌کنند و محورهای OY و OZ بترتیب با محورهای $O'Y'$ و $O'Z'$ موازی هستند (شکل ۱۴.۶). همچنین می‌توان فرض‌کرد دوناظر هنگامی که ازیک نقطهٔ مشترک شروع به‌حرکت می‌کنند ساعتهای خود را طوری تنظیم می‌کنند که $t = t' = 0$ باشد.

فرض کنید درلحظهٔ $t = 0$ و ازنقطهٔ مشترک آنها، یک جرقهٔ نورانی‌گسیل می‌شود. در رأس‌زمان t ناظر O مشاهده می‌کند که نور به‌نقطهٔ A می‌رسد و می‌نویسد $r = ct$، که درآن c سرعت نور است. چون

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

است، می‌توانیم بنویسیم

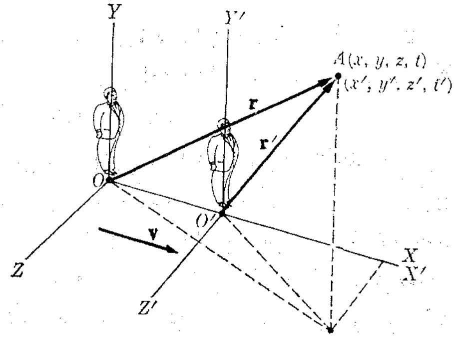
$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2. \qquad (۳۰.۶)$$

---

1. physical invariant

همچنین ناظر O' مشاهده می‌کند کــه نور در زمان t' به همان نقطهٔ A می‌رسد ولی سرعت نور همان c است. بنا براین می نویسد $r' = ct'$. درنتیجه

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2. \qquad (۳۱.۶)$$



شکل ۱۴.۶. چارچوبهای مرجع در یک حرکت نسبی انتقالی یکنواخت

اکنون باید تبدیلی پیدا کــرد کــه معادلهٔ (۳۰.۶) را به‌معادلهٔ (۳۱.۶) مربوط کند. تقارن مسئله ایجاب می‌کند که $y = y'$ و $z = z'$ باشد. از طرف دیگر، چون بـرای ناظر O، $OO' = vt$ است، بایـد بـرای $x' = 0$ (نقطهٔ O')، $x = vt$ شود. این امر اجازه می‌دهد بنویسیم $x' = k(x - vt)$ که در آن k ثابتی است کـه باید تعیین شود. چون t' با t فرق دارد، همچنین باید فرض‌کرد $t' = a(t - bx)$ که درآن a و b ثابتهایی هستند کــه باید تعیین شوند (درتبدیل گالیله $k = a = 1$ و $b = 0$ است). با قرار دادن تمام این فرضها درمعادلهٔ (۳۱.۶) خواهیم داشت

$$k^2(x^2 - 2vxt + v^2t^2) + y^2 + z^2 = c^2a^2(t^2 - 2bxt + b^2x^2)$$

یا

$$(k^2 - a^2b^2c^2)\,x^2 - 2(k^2v - ba^2c^2)\,xt + y^2 + z^2 = \left(a^2 - \frac{k^2v^2}{c^2}\right)c^2t^2.$$

این نتیجه باید معادل رابطهٔ (۳۰.۶) باشد. بنا براین

$$k^2 - a^2b^2c^2 = 1,\quad k^2v - ba^2c^2 = 0,\quad a^2 - k^2v^2/c^2 = 1$$

با حل این دستگاه معادلات سه مجهولی به‌دست می آید

$$k = a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{و} \quad b = v/c^2. \qquad (۳۲.۶)$$

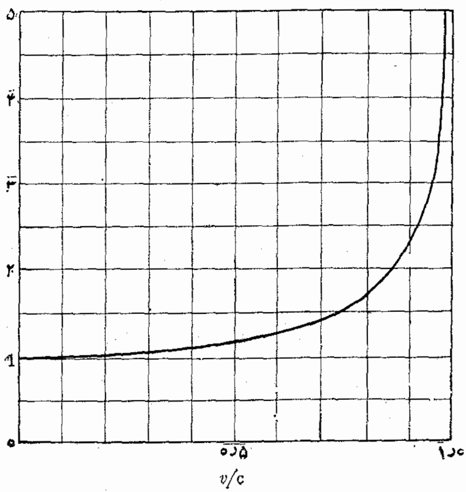
دراین‌صورت تبدیل جدید که مناسب با ناوردایی سرعت‌نور است، عبارت خواهد بود از

$$x' = k(x - vt) = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y' = y$$
$$z' = z \qquad (۳۳.۶)$$
$$t' = k(t - bx) = \frac{t - vx/c^{2}}{\sqrt{1 - v^{2}/c^{2}}}.$$

مجموعهٔ این معادله‌ها تبدیل لورنتس[1] نامیده می‌شود، زیرا نخستین بار هندریک لورنتس[2]، فیزیکدان هلندی در حدود سال ۱۸۹۰ (۱۲۶۹ هـ. ش.) این روابط را هنگام مطالعهٔ مسئلهٔ میدان الکترو مغناطیسی یک ذرهٔ درحال حرکت به‌دست آورد.

اگر متوجه باشیم که c درمقایسه با اکثر سرعتهایی کــه روی زمین مشاهده می‌شوند خیلی بزرگ است دراین صورت نسبت v/c خیلی کوچک و جمله‌های v^{2}/c^{2} و vx/c^{2} کلا قابل اغماض و k عملا برابر یک است (شکل ۱۵.۶ را ببینید). پس، ازنقطه نظرعملی فرقی بین‌تبدیل لورنتس و گالیله وجود ندارد و ما می‌توانیم تبدیل گالیله را دراکثرمسایلی که برمی‌خوریم به‌کارببریم. با وجود این، هنگام سروکارداشتن با ذرات خیلی‌سریع، مانند الکترونها در اتم یا ذرات پرتوهای کیهانی، باید تبدیل لورنتس یا نسبیتی را به‌کار بــرد. گرچه در بیشتر موارد نتایج عددی به‌دست آمده به وسیلهٔ تبدیل لورنتس با عددهای حاصل از طریق تبدیل گالیله خیلی با هم فرق ندارند، ولی از دیدگاه نظری، تبدیل لورنتس تغییر عمده‌ای در دریافتهای ما، بویژه از آنچه که مربوط به‌فضا و زمان است، به‌وجود می‌آورد.



شکل ۱۵.۶. تغییر k برحسب v/c

مثال ۴.۶. تبدیل لورنتسی را پیدا کنید که مختصات x، y، z و زمان t اندازه‌گیری شده به وسیلهٔ ناظر O را بــرحسب مختصات x'، y'، z' و زمان t' اندازه‌گیری شده به وسیلهٔ ناظر O'، بیان کند.

1. Lorentz transformation 2. Hendrik Lorentz

حل: این تبدیل لورنتس عکس تبدیل بیان شده به‌وسیلهٔ معادله‌های (۳۳.۶) است. بدیهی است معادله‌های دوم و سوم هیچ مشکلی ایجاد نمی‌کنند. یک شیوهٔ مستقیم برای بررسی رابطهٔ اول وچهارم آن است که این دو رابطه را یک دستگاه دومجهولی درنظر بگیریم و با استفاده از روشهای معمول جبری، x و t را برحسب x' و t' حل کنیم. ما در اینجا این شیوه را کنارمی‌گذاریم و از دانشجو می‌خواهیم که خود به‌صورت تمرین به‌حل آن اقدام‌کند. درعوض با یک استدلال فیزیکی‌تر با مسئله روبرو می‌شویم. از نظر ناظر O'، ناظر O در راستای X — با سرعت $\mathbf{v}$ — به عقب برمی‌گردد. بنا براین ناظر O' حق دارد برای به‌دست آوردن مقادیر x و t، اندازه‌گیری شده به‌وسیلهٔ ناظر O، برحسب x' و t'، اندازه‌گیری شده به وسیلهٔ ناظر O'، همان تبدیل لورنتس را به کار گیرد؛ بدین منظور ناظر O' فقط باید درمعادله‌های (۳۳.۶)، $-\mathbf{v}$ را جانشین $+\mathbf{v}$ کرده وجای x و t را باجای x' و t' عوض کند. بدین‌طریق به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t'+vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{۳۴.۶}$$

این رابطه نمایش تبدیل معکوس لورنتس است.

۷.۶ تبدیل سرعتها

اکنون قاعدهٔ مقایسهٔ سرعتها را جستجو می‌کنیم. مؤلفه‌های سرعت A اندازه‌گیری شده به‌وسیلهٔ O، ازاین قرارند

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} \\ V_y &= \frac{dy}{dt} \\ V_z &= \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \tag{۳۵.۶}$$

همچنین مؤلفه‌های سرعت A، اندازه‌گیری شده به‌وسیلهٔ ناظر O'، عبارتند از

$$V'_{x'} = \frac{dx'}{dt'}, \qquad V'_{y'} = \frac{dy'}{dt'}, \qquad V'_{y'} = \frac{dz'}{dt'}.$$

توجه‌کنیدکه اکنون dt' را به‌کارمی‌بریم نه dt را، زیرا دیگر t و t' یکی نیستند. ازدیفرانسیل

معادله‌های (۳۳.۶) خواهیم داشت

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{V_x - v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\, dt$$
$$dy' = dy$$
$$dz' = dz$$
$$dt' = \frac{dt - vdx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1 - vV_x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\, dt.$$

دراینجا از معادله‌های (۳۵.۶)،در معادلهٔ اول و چهارم‌به جای dx برابر آن $V_x dt$ را قرار داده‌ایم. بنابراین با تقسیم هریک ازمعادله‌های اول تا سوم برمعادلهٔ چهارم به‌دست می‌آید

$$V'_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{V_x - v}{1 - vV_x/c^2}$$
$$V'_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{V_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2} \qquad (۳۶.۶)$$
$$V'_{z'} = \frac{dz'}{dt'} = \frac{V_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2}.$$

این مجموعهٔ معادله‌ها، قانون تبدیل لورنتس برای سرعتها، یا به گفتهٔ دیگر، قانون مقایسهٔ سرعتهای یک جسم است هنگامی که به وسیلهٔ دو ناظری که نسبت به هم حرکت انتقالی یکنواخت دارند، اندازه‌گیری شود. در مواردی که سرعت نسبی دو ناظر در مقایسه با سرعت نور خیلی کم باشد معادله‌های (۳۶.۶) به معادله‌های (۱۰.۶) تبدیل می‌شوند. برای ذراتی که در راستای محور Xها جابجا می‌شوند داریم $V_x = V$ و $V_y = V_z = 0$. پس با توجه به اینکه $V'_{x'} = V'$ است (زیرا سایر مؤلفه‌ها برابر صفرند)، معادله‌های (۳۶.۶) به صورت زیر در می‌آیند:

$$V' = \frac{V - v}{1 - vV/c^2}. \qquad (۳۷.۶)$$

برای تحقیق اینکه معادلهٔ (۳۷.۶) با فرض یکسان بودن سرعت نور برای دو ناظر O و O' سازگار است، حالتی را در نظر می‌گیریم که یک علامت نوری در راستای محور X ها انتشار می‌یابد. در این صورت در معادلهٔ (۳۷.۶)، $V = c$ می‌شود و

$$V' = \frac{c - v}{1 - vc/c^2} = c.$$

بنابراین ناظر O' نیز برای نور همان‌سرعت c را اندازه‌گیری می‌کند. با حل معادلهٔ (۳۷.۶) برحسب V ، به دست می‌آوریم

$$V = \frac{V' + v}{1 + vV'/c^2}. \qquad (۳۸.۶)$$

رابطهٔ (۳۸.۶) تبدیل معکوس معادلهٔ (۳۷.۶) می‌باشد. توجه داشته باشید که هرگاه V' و v هر دوکوچکتر از c باشند، V نیز کوچکتر از c است. به علاوه سرعت v نمی‌تواند بزرگتر از c باشد، زیرا دراین صورت عبارت $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ موهومی می‌شود، و درحال حاضر چنین ضریبی هیچگونه مفهوم فیزیکی ندارد. بنابراین سرعت نور بیشینهٔ سرعتی است که فعلاً می‌توان مشاهده‌کرد.

همچنین باید توجه داشت که معادله‌های (۳۷.۶) یا (۳۸.۶) سرعتهای یك جسم را هنگامی که به‌وسیلهٔ دو ناظر متحرک نسبت به هم اندازه‌گیری می‌شوند، به یکدیگر مربوط می‌کند. ولی یک ناظرمشخص درچارچوب مرجع خود سرعتهای مختلف را مطابق قواعدی که در فصل ۳ به دست آوریم ترکیب می‌کند.

مثال ۵.۶. تحقیق کنید که قانون تبدیل‌سرعتها، معادلهٔ (۳۶.۶)، بااین فرض‌که سرعت نور برای دو ناظر یکی است سازگار می‌باشد. بدین منظور پرتو نوری را در نظر بگیرید که (الف) در دستگاه XYZ در راستای محور Yها منتشر می‌شود؛ (ب) در دستگاه $X'Y'Z'$ در راستای محور Y'ها منتشر می‌شود.

حل: (الف) در این حالت باید $V_x = 0$، $V_y = c$ و $V_z = 0$ باشد. بنابراین معادلهٔ (۳۶.۶) را می‌توان به صورت

$$V'_{x'} = -v\,,\quad V'_{y'} = c\sqrt{1 - v^2/c^2}\,,\quad V'_{z'} = 0$$

نوشت دراین صورت سرعت نسبت به $X'Y'Z'$ برابر است با

$$V' = \sqrt{V'^2_{x'} + V'^2_{y'}} = \sqrt{v^2 + c^2(1 - v^2/c^2)} = c$$

وناظر O' نیز برای سرعت نور c را به‌دست می‌آورد، چیزی‌که برای استنتاج تبدیل لورنتس الزامی بود. برای ناظر متحرک O'، به نظر می‌رسد نور نسبت به‌چارچوب $X'Y'Z'$ در راستایی منتشر می‌شود که با محور X'ها زاویه‌ای مطابق رابطهٔ زیر می‌سازد:

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{V'_{y'}}{V'_{x'}} = -\frac{c}{v}\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

(ب) اکنون حالتی را درنظرمی‌گیریم که درآن ناظر O' انتشار پرتونور را در راستای محور Yها می‌بینید. در این صورت $V'_{x'} = 0$ است واز دو معادلهٔ اول رابطهٔ (۳۶.۶) به دست می‌آید

$$0 = \frac{V_x - v}{1 - vV_x/c^2} \qquad V'_{y'} = \frac{V_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2}.$$

از معادلهٔ اول به‌دست می‌آید $V_x = v$، که اگر آن را در معادلهٔ دوم ببریم داریم

$$V'_{y'} = \frac{V_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

ولی برای ناظر O، که سرعت نور را برابر c اندازه می‌گیرد خواهیم داشت

$$c=\sqrt{V_x^2+V_x^2}=\sqrt{v^2+V_y^2} \text{ یا } V_y=\sqrt{c^2-v^2}=c\sqrt{1-v^2/c^2}$$

هرگاه این‌مقدار را در رابطهٔ پیش‌مربوط به $V'_{y'}$ قرار دهیم به‌دست می‌آید $V'_{y'}=c$. یکبار دیگر تایید می‌شود که‌ناظر O' برای‌سرعت نور c را به‌دست می‌آورد. راستایی‌که ناظر O پرتو نور را در امتدادآن می‌بیند با محور Xها زاویهٔ α می‌سازد که ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{V_y}{V_x}=\frac{c}{v}\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

می‌توان نتیجه‌های این مسئله را با نتایج مثال ۲.۶ که مربوط به صوت بود و درآن تبدیل گالیله به‌کار رفته است مقایسه کرد.

مثال ۶.۶. رابطهٔ بین شتابهای یک ذره راکه به‌وسیلهٔ دوناظر متحرک نسبت به‌هم‌اندازه گیری می‌شوند به‌دست آورید. جهت آسانی محاسبه فرض‌کنید درلحظه‌ای‌که مقایسه‌صورت می‌گیرد ذره نسبت به‌ناظر O' بیحرکت است.

حل: مؤلفه‌های شتاب ذره‌ای در راستای OX که به وسیلهٔ O' اندازه گیری می‌شود برابر است با

$$a'_{x'}=\frac{dV'_{x'}}{dt'}=\frac{dV'_{x'}}{dt}\,\frac{dt}{dt'}.$$

با به‌کار بردن مقدار $V'_{x'}$ که از رابطهٔ اول معادله‌های (۳۶.۶) به‌دست می‌آید وبادخالت دادن مشتقهای مناسب، داریم

$$\begin{aligned}a'_{x'}&=\left[\frac{a_x}{1-vV_x/c^2}+\frac{(V_x-v)\,va_x/c^2}{(1-vV_x/c^2)^2}\right]\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-vV_x/c^2}\\&=a_x\frac{(1-v^2/c^2)^{3/2}}{(1-vV_x/c^2)^3}.\end{aligned}$$

در لحظه‌ای که ذره نسبت به O' بیحرکت است داریم $V_x=v$ و

$$a'_{x'}=\frac{a_x}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}=k^3a_x.$$

با یک محاسبهٔ مشابه پیدا می‌شود که

$$a'_{y'}=\frac{a_y}{1-v^2/c^2}=k^2a_y,\quad a'_{z'}=\frac{a_z}{1-v^2/c^2}=k^2a_z.$$

این نتیجه با نتیجه‌ای کـه از معادله (۱۴.۶) در مورد تبدیل گالیله به دست آمد متفاوت است، زیرا ایـن بار شتاب برای دوناظری کـه نسبت به‌هم در حرکت انتقالی یکنواخت هستند یکسان‌نیست. به‌عبارت دیگر، شرط ناوردایی سرعت نوردرتمام چارچوبهای‌مرجعی

که نسبت به‌هم حرکت یکنواخت دارند، ناوردایی شتاب را از بین می‌برد.

دانستن رابطهٔ بین بزرگی‌شتابهای‌مشاهده شده توسط O و O' بسیارحائزاهمیت است. داریم

$$a'^{۲} = a_x'^{۲} + a_y'^{۲} + a_z'^{۲} = \frac{a_x^{۲}}{(۱ - v^{۲}/c^{۲})^{۳}} + \frac{a_y^{۲}}{(۱ - v^{۲}/c^{۲})^{۲}}$$

$$+ \frac{a_z^{۲}}{(۱ - v^{۲}/c^{۲})^{۲}} = \frac{a_x^{۲} + (a_y^{۲} + a_z^{۲})(۱ - v^{۲}/c^{۲})}{(۱ - v^{۲}/c^{۲})^{۳}}$$

$$= \frac{a^{۲} - v^{۲}(a_y^{۲} + a_z^{۲})/c^{۲}}{(۱ - v^{۲}/c^{۲})^{۳}}.$$

چون $\mathbf{v} = \mathbf{u}_x v$ و $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = -\mathbf{u}_y v a_z + \mathbf{u}_z v a_y$ است، به دست می‌آید

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{a})^{۲} = v^{۲}(a_y^{۲} + a_z^{۲}).$$

بنابراین

$$a'^{۲} = \frac{a^{۲} - (\mathbf{v} \times \mathbf{a})^{۲}/c^{۲}}{(۱ - v^{۲}/c^{۲})^{۳}}. \qquad (۳۹.۶)$$

رابطهٔ (۳۹.۶) همان رابطهٔ مورد نظر ماست. هنگامی‌که شتاب موازی سرعت باشد،

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = ۰ \quad \text{و} \quad a' = \frac{a}{(۱ - v^{۲}/c^{۲})^{۳/۲}}$$

می‌شود. این نتیجه با اندازه‌های به دست آمده برای a_x و a_x'، سازگار است. وقتی که سرعت برشتاب عمود است، $(\mathbf{v} \times \mathbf{a})^{۲} = a^{۲}v^{۲}$ و $a' = a/(۱ - v^{۲}/c^{۲})$ می‌باشد. این نتیجه برای a_y و a_z، a_y'، و a_z'، نیز معتبر است.

۸.۶ نتایج تبدیل لورنتس

ضریب $k = ۱/\sqrt{۱ - v^{۲}/c^{۲}}$ که در معادله‌های (۳۳.۶) ظاهر می‌شود نشان می‌دهد که طول اجسام وفاصله‌های زمانی بین رویدادهای مفروضی‌که به‌وسیلهٔ ناظرهای متحرک نسبت به هم اندازه‌گیری می‌شوند، ممکن است یکسان نباشد. اکنون دربارهٔ این دونکتهٔ مهم به گفتگو می‌پردازیم.

(۱) انقباض طول[۱]. می‌توان طول یک شیء را بافاصلهٔ بین دوانتهای آن تعریف‌کرد. باوجود این، اگر شیء نسبت به ناظری که می‌خواهد طول آن را اندازه بگیرد جابجا شود، جای دوانتها باید باهم یا همزمان یادداشت شود. میله‌ای را موازی $O'X'$ و ساکن نسبت به O' درنظرمی‌گیریم. هرگاه دوانتهای میله را a و b بنامیم، L' طول اندازه‌گیری‌شده به‌وسیلهٔ ناظر O' برابر است با $L' = x_b' - x_a'$. همزمانی برای O' مهم نیست، زیرا او میله را ساکن می‌بیند. ولی ناظر O که میله را درحرکت می‌بیند باید طول x_a و x_b، دوانتهای میله را، در

1. length contraction

لحظهٔ یکسان t اندازه بگیرد و $L = x_b - x_a$ را به دست آورد. با به کار بردن اولین رابطهٔ معادله‌های (۳۳.۶) درمی‌یابیم

$$x'_a = \frac{x_a - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

و

$$x'_b = \frac{x_b - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

توجه داشته باشید که درهر دو رابطه، t را یکسان به کار بردیم. اکنون این دو رابطه را از هم کم می‌کنیم. به‌دست می‌آید

$$x'_b - x'_a = \frac{x_b - x_a}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{یا} \quad L = \sqrt{1 - v^2/c^2}\ L'. \qquad (۴۰.۶)$$

نظر به اینکه ضریب $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ کوچکتر از واحد است، بنابراین L کوچکتر از L' است، یعنی ناظر O که شیء را درحرکت می‌بیند، نسبت به ناظر O' که شیء نسبت به او ساکن است، طول کوتاهتری را برای میله اندازه می‌گیرد. به بیان دیگر، طول اشیاء در حال حرکت کوتاهتر به نظر می‌رسد؛ یا، $L_{\text{ساکن}} > L_{\text{متحرک}}$.

(۲) **اتساع زمان**[1]. می‌توان یک فاصلهٔ زمانی را با زمانی که طول می‌کشد تا دو رویداد به وسیلهٔ یک ناظر اندازه گیری شود تعریف کرد. یک رویداد پدیدهٔ کاملاً معینی است‌که دریک نقطهٔ خاص ازفضا و دریک لحظهٔ معین از زمان رخ می‌دهد. مطابق این تعریف، هنگامی‌که آونگی درجریان یک نوسان خود به‌بالاترین نقطه می‌رسد یک رویداد است. این آونگ بعد از زمان معینی از نو به‌همان نقطه برمی‌گردد؛ و این رویداد دوم است. در این صورت، زمانی‌که بین این دوحادثه جریان پیدا کرده یک‌فاصله زمانی است. بنابراین، یک فاصله زمانی‌عبارت از زمانی است طول می‌کشد تا کاری صورت بگیرد، مانند نوسان کردن‌یک آونگ، چرخش یک‌الکترون دورهسته، فروپاشی یک ذرهٔ رادیواکتیو، تپش یک قلب و غیره.

دو رویداد راکه‌دریک محل x' نسبت به‌ناظر O' رخ می‌دهند درنظرمی‌گیریم. فاصله زمانی بین این دو رویداد برابر است با $T' = t'_b - t'_a$. برای ناظر O که نسبت به ناظر O' باسرعت ثابت v در راستای Xهای مثبت درحال حرکت است فاصله زمانی برابراست با $T = t_b - t_a$. برای یافتن رابطهٔ بین لحظه‌هایی که این دو حادثه رخ می‌دهند، آن‌چنانکه به‌وسیلهٔ دوناظر ثبت می‌شوند، آخرین رابطهٔ معادله‌های (۳۴.۶) را به‌کار می‌بریم. بدین طریق به دست می‌آید

$$t_a = \frac{t'_a + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad t_b = \frac{t'_b + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

---

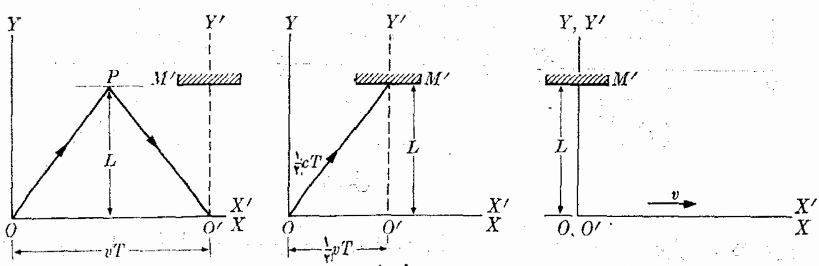
1. time dilation

توجه داشته باشید که برای هردو رابطه یک x' نوشته شده است. با کاستن t_a از t_b داریم

$$t_b - t_a = \frac{t'_b - t'_a}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \text{یا} \qquad T = \frac{T'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (۴۱.۶)$$

T' نمایش فاصله زمانی است که به‌وسیلهٔ ناظر O' که نسبت به‌نقطه یا محل رویدادها ساکن است اندازه‌گیری می‌شود و T فاصله زمانی اندازه‌گیری شده به وسیلهٔ ناظر O است که نسبت به محلی که رویدادها درآن رخ داده در حال حرکت است. به گفتهٔ دیگر، ناظر O رویدادهای رخ داده را دردو نقطهٔ مختلف فضا دیده است. چون سازه $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ از یک بزرگتر است، معادلهٔ (۴۱.۶) نشان می‌دهد که T بزرگتر از T' است. به‌نظر می‌رسد فرآیندهایی که در یک جسم رخ می‌دهند برای ناظری که جسم نسبت به او در حال حرکت است بیشتر طول می‌کشند تا برای ناظری که جسم نسبت به وی درحال سکون است؛ یا، $T_{\text{متحرک}} > T_{\text{ساکن}}$.

بسیار آموزنده است اتساع زمان و انقباض طول را بیشتر و به طور دقیقتر مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم، زیرا این نتایج درست برخلاف انتظار می‌باشند. اکنون با روش مستقیم‌تر نشان می‌دهیم که اتساع زمان و انقباض طول نتیجهٔ مستقیم ناوردایی (ثابت بودن) سرعت نور اند. دو ناظر O و O' را در نظر می‌گیریم که در طول محور Xها با سرعت v نسبت به هم در حال حرکت هستند. در شکل ۱۶.۶ آینه M' نسبت به O ساکن و روی محور Y'ها به فاصلهٔ L از مبدا قرار دارد. این فاصله درست برابر فاصله‌ای است که O اندازه می‌گیرد، زیرا موقعیت آینه بر راستای حرکت عمود است. فرض کنیم در لحظه‌ای که O و O' بر هم منطبقند نوری از مبدأ مشترک به سمت آینه گسیل می‌شود. برای دستگاهی که آینه را در حال حرکت می‌بیند، علامت نورانی تحت زاویه‌ای فرستاده می‌شود که به سرعت حرکت آینه و فاصلهٔ L بستگی دارد. فرض کنیم T و T' زمانهای ثبت شده به وسیلهٔ O و O' برای علامت نوری است که پس از بازتاب از آینه به O' برمی‌گردد. در دستگاه O' نور به مبدأ باز می‌گردد، ولی در دستگاه O نور محور Xها را در فاصلهٔ vT از



(ج) (ب) (الف)

شکل ۱۶.۶

مبدأ قطع می‌کند. مسیر علامت نورانی نسبت به O' برابر $2L = O'M'O'$ و زمان لازم برابر است با $T' = 2L/c$ زیرا O' سرعت نور را c اندازه می‌گیرد. این فاصله

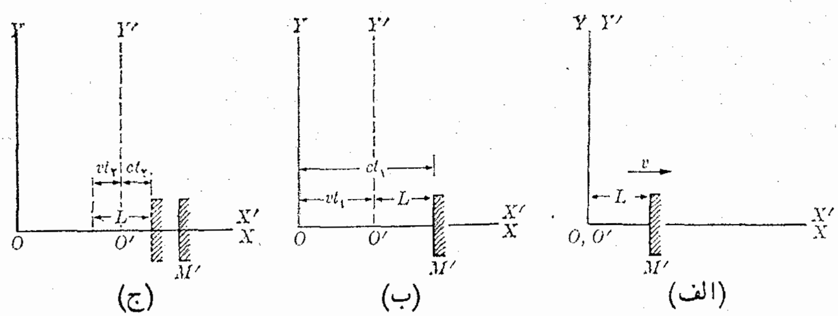
زمانی مربوط است به دو رویداد که هر دو در یک نقطه (O') نسبت به O' رخ می‌دهند.

نسبت به ناظر O که او نیز سرعت نور را c اندازه می‌گیرد، مسیر علامت نورانی عبارت است از OPO'، بنابراین برای O یک رابطهٔ زمانی وجود دارد که بنا به شکل ۱۶.۶ (ب) چنین نوشته می‌شود:

$$\left(\frac{۱}{۲}cT\right)^{۲} = \left(\frac{۱}{۲}vT\right)^{۲} + L^{۲} \quad \text{یا} \quad T = \frac{(۲L/c)}{\sqrt{۱-v^{۲}/C^{۲}}}.$$

بنابراین $T = T'\sqrt{۱ - v^{۲}/c^{۲}}$ است که همان رابطهٔ (۴۱.۶) می‌باشد. توجه داشته باشید تنها شرطی که برای به دست آوردن اتساع زمان وجود داشت ناوردایی سرعت نور برای تمام ناظرهای لخت است.

اکنون آینه M' را روی محور X'ها و عمود بر آن درنظر می‌گیریم. آینه در فاصلهٔ L' از O' قرار دارد و نسبت به آن ساکن فرض می‌شود. شکل ۱۷.۶ این وضع را نشان می‌دهد. از نو هنگامی که O و O' بر یکدیگر منطبق‌اند یک علامت نورانی به سمت آینه می‌تابانیم و زمانهای T و T' را که برای بازگشت نور به نقطهٔ O' صرف می‌شود به دست می‌آوریم. برای O' که c را به عنوان سرعت نوراندازه می‌گیرد، فاصله زمانی برابراست با $T' = ۲L'/c$. ممکن است فاصلهٔ $O'M'$ همان نباشد که O اندازه می‌گیرد، بنابراین آن را با L نشان می‌دهیم. $t_۱$، زمانی‌که نور برای رفتن از O تا آینه صرف می‌کند، از رابطهٔ $ct_۱ = L + vt_۱$ یا $t_۱ = L/(c - v)$ به دست می‌آید، زیرا M' فاصلهٔ $vt_۱$ را پیموده است. پس از بازتاب، ناظر O زمان $t_۲$ را برای رسیدن نور به O' اندازه می‌گیرد که



شکل ۱۷.۶

خود در این مدت فاصلهٔ $vt_۲$ را پیموده است. [شکل ۱۷.۶ (ج) را ببینید]. در نتیجه $ct_۲ = L - vt_۲$ یا $t_۲ = L/(c + v)$ خواهد بود. مجموع زمانی که O برای رسیدن نور به O' اندازه می‌گیرد برابر است با

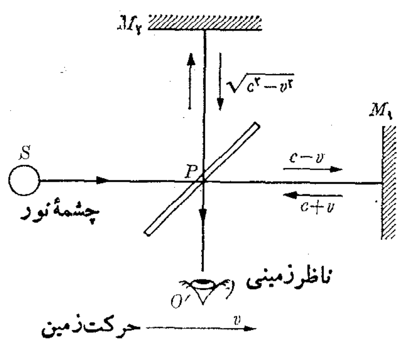
$$T = t_۱ + t_۲ = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{۲L}{c}\frac{۱}{۱-v^{۲}/c^{۲}}.$$

ولی در اینجا T و T' مربوط به دو رویداد هستند که در یک محل، نسبت به O'، رخ می‌دهند و بنابراین طبق رابطهٔ (۴۱.۶) به هم مربوط می‌شوند. در نتیجه

$$\frac{۲L/c}{۱ - v^۲/c^۲} = \frac{۲L'/c}{\sqrt{۱ - v^۲/c^۲}} \quad \text{یا} \quad L = \sqrt{۱ - v^۲/c^۲}\, L'.$$

این معادله مشابه رابطهٔ (۴۰.۶) است زیرا L' طولی است که نسبت به O' ساکن است. با این دو مثال خاص، مشاهده می‌شود که ناوردایی سرعت نور برای تمام ناظرهای لخت اثر ویژه‌ای روی نتایج به دست آمده توسط ناظرهای متحرک نسبت به هم دارد.

مثال ۷.۶. تجزیه و تحلیل آزمایش مایکلسون ـ مورلی. در آغاز بخش ۶.۶ از آزمایش مایکلسون ـ مورلی نام بردیم. اکنون باختصار به شرح آن می‌پردازیم و نتایج آن را تجزیه و تحلیل می‌کنیم. شکل ۱۸.۶ اساس آزمایش را نشان می‌دهد. S یک چشمهٔ نور تکفام[1]، $M_۱$ و $M_۲$ دو آینه و به‌فاصلهٔ یکسان L' (اندازه‌گیری‌شده به‌وسیلهٔ یک ناظرزمینی) از تیغهٔ P قرار دارند. هنگامی که نور از S به P رسید، بخشی از آن عبور کرده به $M_۱$ می‌رسد، و بخش دیگر بازتاب می‌کند و به $M_۲$ می‌رسد. پرتوهای بازتابیده از روی آینه‌های $M_۱$ و $M_۲$ بالاخره به چشم ناظر O' می‌رسند. توجه داشته باشید که مسیر نور درشکل ۱۸.۶، در دستگاه $X'Y'Z'$ رسم شده است‌که بازمین جابجا می‌شود و دستگاه که تداخل سنج[2] نامیده می‌شود، نسبت به‌آن ساکن است. (از دانشجو می‌خواهیم به عنوان تمرین، مسیر نور را برای ناظری که زمین نسبت به وی با سرعت v حرکت می‌کند رسم کند.) ابزاری که مایکلسون و مورلی عملاً به کار گرفتند در شکل ۱۹.۶ نشان داده شده است.

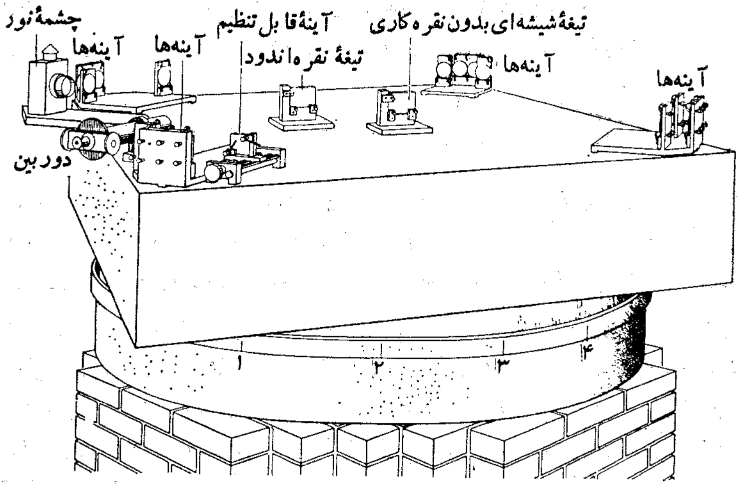


شکل ۱۸.۶. عناصر اصلی
آزمایش مایکلسون ـ مورلی

حل: فرض کنیم c سرعت اندازه‌گیری شدهٔ نور به وسیلهٔ یک ناظر ساکن نسبت به اتر باشد و نیز سرعت زمین نسبت به اتر را v می‌نامیم و تداخل سنج را به گونه‌ای قرار می‌دهیم که $PM_۱$ به موازات راستای حرکت زمین باشد.

هرگاه تبدیل گالیله را به کار گیریم، به دنبال نتایج به دست آمده از مثال ۲.۶،

1. monochromatic 2. interferometer



شکل ۱۹.۶. تداخل‌سنج به کار رفته به وسیلهٔ مایکلسون و مورلی برای اندازه‌گیری سرعت نور. یک میز حامل آینه‌ها روی یک قرص چوبی ثابت شده و قرص چوبی روی جیوه شناور است. مجموعهٔ آینه‌ها به منظور افزودن به راه نوری کل به کار گرفته می‌شوند. تیغهٔ بدون نقره دریکی ازمسیرها قرارداده شده است تایک راه نوری دیگررا که بایدازشیشهٔ آینه بگذرد جبران کند. دوربین برای دیدن فریز[1]هاست (ترسیم‌با اجازهٔ *Scientific American*)

درمی‌یابیم که نسبت به زمین، سرعت نور برای رفتن از P به M_1 برابر $c - v$ و برای رفتن از M_1 به P برابر $c + v$ و بالاخره برای رفتن از P به M_2 و یا بازگشت از M_2 به P برابر $\sqrt{c^2 - v^2}$ است. بنابراین زمان لازم اندازه‌گیری شده به وسیلهٔ ناظر زمینی O'، برای رفتن نور از P به M_1 و برگشت از M_1 به P برابر است با

$$t'_{\parallel} = \frac{L'}{c - v} + \frac{L'}{c + v} = \frac{2L'/c}{c^2 - v^2} = \frac{2L'/c}{1 - v^2/c^2}$$

درصورتی که زمان صرف شده برای رفتن نور از P به M_2 و برگشت آن، که به وسیلهٔ ناظر O' اندازه‌گیری می‌شود، برابر است با

$$t'_{\perp} = \frac{2L'}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

توجه دارید که $t'_{\parallel}$ با $t'_{\perp}$ متفاوت است و از این رو پرتوهایی که به ناظر O' می‌رسند مقداری اختلاف راه دارند و (بنا به نظریه‌ای که در فصل ۲۲ توضیح داده شده است) باید این اختلاف راه نقش تداخلی[2] معینی به وجود آورد. ولی همچنانکه قبلاً در

1. fringe   2. interference pattern

بخش ۶.۶ گفتیم، درکمال شگفتی، تداخل‌سنج هیچگونه نقشی از این نوع را نشان نمی‌دهد*؛ و این دلالت می‌کند بر آنکه $t'_{\perp} = t'_{||}$ است. برای حل این معما لورنتس، و مستقل از او، فیتز جرالد[1] فرض کردند که تمام اشیائی که در اتر جابجا می‌شوند، متحمل یک انقباض «واقعی» طول در راستای حرکتشان می‌شوند، و این انقباض طول درست به اندازه‌ای است که $t'_{\perp} = t_{||}$ شود. به عبارت دیگر، طولی که در $t'_{||}$ ظاهر می‌شود با طولی که در $t'_{\perp}$ دخالت دارد برابر نیست، زیرا طول اولی در راستای حرکت زمین و طول دومی براین راستا عمود است. با قرار دادن L به جای L' در رابطهٔ $t'_{||}$ باید داشته باشیم

$$t'_{||} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}.$$

با مساوی قرار دادن $t'_{||}$ و $t'_{\perp}$ و پس از ساده کردن به دست می‌آید

$$L = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, L'. \qquad (۴۲.۶)$$

این رابطه طولهای PM_1 و PM_2، اندازه‌گیری شده به وسیلهٔ ناظر O را که نسبت به اتر ساکن است، به هم مربوط می‌کند. ناظر O' نباید این کاهش طول را مشاهده کند، زیرا خطکشی که برای اندازه‌گیری PM_1 به کار می‌برد، در راستای حرکت زمین قرار می‌گیرد وانقباض طولی به اندازهٔ کاهش طول PM_1 پیدا می‌کند! بنا براین برای او طولهای PM_1 و PM_2 یکسان هستند. از طرف دیگر ناظر O، به نگرانی ناظر O' خواهد خندید، زیرا او O' را در حال حرکت می‌بیند، و بنا به فرضیهٔ لورنتس ـ فیتزجرالد تمام اشیائی که O' حمل می‌کند در راستای حرکت کوتاه می‌شوند. ناظر O نتیجه می‌گیرد که طول «واقعی» PM_1 برابر L و طول PM_2 برابر L' است. این اختلاف «واقعی» طول، دلیل نتیجهٔ منفی آزمایش تداخل دو پرتو نورانی است.

بدیهی است، توضیح دیگر نتیجهٔ منفی آزمایش مایکلسون ـ مورلی آن است که فرض کنیم حالت حرکت ناظر هر چه باشد، سرعت نور درتمام راستاها یکسان است. در این صورت ناظر O'، c را برای تمام مسیرهای شکل ۱۸.۶ به کار می‌برد، در نتیجه به دست می‌آید $t'_{||} - t_{\perp} = 2L'/c$. این بود وضعی که آلبرت اینشتین هنگام تنظیم اصل نسبیت خود پذیرفته بود. با وجود این، در همین جا دانشجو می‌تواند بگوید انقباض «واقعی» که لورنتس در توجیه نتیجهٔ منفی آزمایش مایکلسون ـ مورلی پیشنهاد کرده درست همان انقباضی است که ما در معادلهٔ (۴۰.۶) با به کار بردن تبدیل لورنتس و اصل ناوردایی سرعت نور به دست آوردیم. با اینهمه، یک اختلاف اساسی بین این دو فرضیهٔ

---

* درآزمایش واقعی که به‌وسیلهٔ مایکلسون انجام شد، دو بازوی تداخل‌سنج، یا به گفتهٔ دقیقتر طول دو راه نوری، اختلاف جزئی باهم داشتند، درنتیجه یک نقش تداخلی به‌وجودآمد. برای جبران این اختلاف و افزایش دقت اندازه‌گیری، مایکلسون دستگاه را چرخاند (شکل ۱۹.۶)، و گرچه نظریهٔ متکی بر تبدیل گالیله پیش‌بینی می‌کرد که بر اثر چرخش، در نقش تداخلی جابجایی صورت بگیرد، هیچگونه جابجایی مشاهده نگردید.

1. Fitzgerald

پایه که برای به دست آوردن این دو نتیجهٔ بظاهر یکسان به کار رفته‌اند وجود دارد:

۱. انقباضی‌که از رابطهٔ (۴۲.۶) وبا به‌کار بردن تبدیل گالیله به دست می‌آید یک انقباض واقعی فرض شده‌است که کلیهٔ اشیاء جا بجا شونده در اتر آن را متحمل می‌شوند، و v که در فرمول ظاهر می‌شود سرعت شیء نسبت به اتر است.

۲. انقباض (۴۰.۶) منحصراً مربوط به مقدار اندازه‌گیری شدهٔ طول شیء در حال حرکت نسبت به ناظر است و از ناوردایی سرعت نور ناشی می‌شود. v ظاهر شده در فرمول، سرعت‌شیء نسبت به‌ناظر است، ولذا انقباض نسبت به‌ناظرهای مختلف فرق می‌کند.

این نبوغ اینشتین بود که روشن‌کرد اندیشهٔ اتر مصنوعی وغیرضروری است و توجیه منطقی همان است که در (۲) بیان شده است. چنانکه در فصل ۱۱ خواهد آمد، این همان فرض اساسی است که اینشتین در تنظیم اصل نسبیت آن را به کار گرفت.

فهرست منابع

1. «The Coriolis Effect,» J. Mc Donald, *Sci., Am.*, May 1952, page 72.
2. «The Speed of Light,» J. Rush, *Sci. Am.*, August 1955, page 62.
3. «The Clock Paradox,» J. Bronowski; *Sci. Am.*, February 1963, page 134.
4. «Conversations with Albert Einstein,» R. Shankland, *Am. J. Phys.* 31, 47 (1963).
5. «Michelson-Morley Experiment,» *R.* Shankland, *Am. J. Phys.* 32, page 16 (1964); *Sci. Am.*, November 1964, page 107.
6. «Measurement of the Relativistic Time Dilation Using μ-Mesons,» D. Frisch and J. Smith, *Am. J. Phys.* 31, 342 (1963).
7. «The Geometrical Appearance of Large Objects Moving at Relativistic Speeds,» G. D. Scott and M. R. Viner, *Am. J. Phys.* 33, 534 (1965).
8. «Visual Appearance of Rapidly Moving Objects,» V. Weisskopf, *Physics Today*, September 1960, page 24.
9. «Resource Letter SRL-1 on Special Relativity Theory,» G. Holton, *Am. J. Phys.* 30, 462 (1962).
10. *An Introduction to the Special Theory of Relativity*, R. Katz. Princeton, N. J.: Momentum Books, D. Van Nostrand Co., 1964.
11. *The Special Theory of Relativity*, D. Bohm. New York: W. A. Benjamin, 1964.
12. *An Introduction to the Special Theory of Relativity*, W. G. W. Rossen. London: Butterworth & Co., 1964, Chapters 1-4.
13. *Special Relativity Theory*, selected reprints from the *Am. J. Phys.*, published by the AIP (335 E. 45th St., New York 17, N. Y.), 1962.
14. *Physical Mechanics*, Robert B. Lindsay. New York: Van Nostrand, 1961, Sections 7-11 and 7-12.
15. *Vector Mechanics*, D. E. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964, Chapter 14.
16. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. L. Sands. Reading, Mass: Addison - Wesley; 1963, Chapters 15, 18, and 20.

17. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 27 (Huygens); (Michelson and Morley).

۱۸. سایمون، کیث ر. مکانیک، ترجمهٔ اعظم نیرومنداد و غلامحسین همدانی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۶، بخشهای ۷ـ۱ تا ۷ـ۴.

مسئله‌ها

۶.۱. دو قطار A و B بترتیب با سرعتهای $۷۰\,\mathrm{kmhr^{-1}}$ و $۹۰\,\mathrm{kmhr^{-1}}$ روی دو ریل موازی حرکت می‌کنند. سرعت نسبی B را نسبت به A، هنگامی که (الف) دو قطار در یک سو، (ب) دو سوی مخالف هم، حرکت می‌کنند، حساب کنید.

۶.۲. مسئلهٔ بالا را هنگامی که زاویهٔ بین دو خط حرکت قطارها ۶۰° باشد حل کنید.

۶.۳. ترنی سرظهر شهر A را به مقصد شهر B که در $۴۰۰\,\mathrm{km}$ قرار دارد ترک می‌کند و سرعت خود را در $۱۰۰\,\mathrm{kmhr^{-1}}$ ثابت نگه می‌دارد. قطار دیگری ساعت ۱۴ شهر B را با سرعت ثابت $۷۰\,\mathrm{kmhr^{-1}}$ ترک می‌کند. در چه لحظه‌ای و در چه فاصله‌ای ازشهر A دو قطار به یکدیگر می‌رسند، اگر (الف) قطار دوم به سمت شهر A حرکت کند، (ب) قطار دوم از شهر A دور شود؟

۶.۴. راننده‌ای که اتومبیل خودرا باسرعت $۸۰\,\mathrm{kmhr^{-1}}$ می‌راند مشاهده می‌کند که رد قطره‌های باران روی شیشه‌های جانبی با خط قایم زاویهٔ ۸۰° می‌سازد. هنگامی که اتومبیل را متوقف می‌کند متوجه می‌شود که باران در واقع به طور قایم می‌بارد. سرعت باران نسبت به‌اتومبیل رادرحالتی که‌اتومبیل (الف) بیحرکت است، (ب) باسرعت $۸۰\,\mathrm{kmhr^{-1}}$ حرکت می‌کند، حساب کنید.

۶.۵. دو اتومبیل در دو جادهٔ عمود برهم، یکی به سمت شمال و دیگری به سمت شرق حرکت می‌کنند. سرعت آنها نسبت به زمین بترتیب $۶۰\,\mathrm{kmhr^{-1}}$ و $۸۰\,\mathrm{kmhr^{-1}}$ است. سرعت نسبی دواتومبیل را حساب کنید. آیا سرعت نسبی اتومبیلها به موقعیت مکانی آنها درجاده‌ای که حرکت می‌کنند بستگی دارد؟ مسئله را درحالتی که اتومبیل دوم به‌سمت غرب حرکت می‌کند مجدداً حل کنید.

۶.۶. یک کشتی با سرعت $۴\,\mathrm{kmhr^{-1}}$ نسبت به‌آب در راستای ۶۰° شمال غربی حرکت می‌کند. جریان آب به گونه‌ای است که حرکت برآیند نسبت به‌زمین باسرعت $۵\,\mathrm{kmhr^{-1}}$ به سمت مغرب انجام می‌گیرد. سرعت و راستای حرکت آب را نسبت به زمین حساب‌کنید.

۶.۷. سرعت یک قایق موتوری در آب ساکن $۵۵\,\mathrm{kmhr^{-1}}$ است. رانندهٔ میل دارد به نقطه‌ای واقع در $۸۰\,\mathrm{km}$ در ۲۰° جنوب شرقی برود. یک جریان قوی با سرعت $۲۰\,\mathrm{kmhr^{-1}}$ در راستای ۷۰° جنوب غربی وجود دارد. (الف) حساب کنید در چه راستایی باید قایق رانده شود تا درخط مستقیم به نقطهٔ مورد نظر برسد؟ (ب) مدت زمانی که برای پیمودن این مسیر طول می‌کشد تعیین کنید.

۶.۸. نهری با سرعت $3\ \mathrm{kmhr^{-1}}$ بـه سمت شمال جـریان دارد. یک قـایق با سرعت $4\ \mathrm{kmhr^{-1}}$ نسبت بـه آب به سمت شرق حرکت می‌کند. (الف) سرعت قایق را نسبت ساحل حساب کنید. (ب) اگر پهنای نهر یک کیلومتر باشد، زمان لازم برای عبور از آن را حساب کنید. (ج) مقدار انحراف قایق را به سمت شمال هنگامی کـه بـه کنارهٔ دیگر نهر می‌رسد پیدا کنید.

۶.۹. دو محل A و B بـه فاصلهٔ $1\ \mathrm{km}$ در ساحل (کاملا مستقیم) رودخـانـه‌ای قـرار دارند. شخصی به کمک یک قایق پارویی که با سرعت $4\ \mathrm{kmhr^{-1}}$ نسبت به رودخانه پیش می‌رود از A بـه B رفته بـه محل A برمی‌گردد. شخص دیگری پیـاده و با سرعت $4\ \mathrm{kmhr^{-1}}$ درطول کنارهٔ رودخانه از A به B رفته وازآنجا به A برمی‌گردد. اگر سرعت جریان آب $2\ \mathrm{kmhr^{-1}}$ باشد زمانی را که هریک ازاین دو نفر برای طی یک مسیرکامل صرف می‌کنند حساب کنید.

۶.۱۰. با استفاده از داده‌های مسئلهٔ پیش هنگامی کـه اختلاف زمانی بین دو مسیر ۶ دقیقه باشد سرعت جریان رودخانه را حساب کنید.

۶.۱۱. نهری به پهنای $1\ \mathrm{km}$ با سرعت $2\ \mathrm{kmhr^{-1}}$ جریان دارد. چقـدر طول می‌کشد تا شخصی با قایق پارویی مستقیماً به آن طرف نهر برود و برگردد؟ این زمان را با زمانی که طول می‌کشد تا شخصی با پارو زدن در خلاف جهت جریان آب یک کیلومتر بالا برود و برگردد مقایسه کنید. قایق پارویی با سرعت ثابت $4\ \mathrm{kmhr^{-1}}$ نسبت به آب حرکت می‌کند.

۶.۱۲. با استفاده از داده‌های مسئلهٔ پیش، سرعت جـریان نهر را در حالتی کـه اختلاف زمانی بین دو مسافرت‌کامل ۱۰ دقیقه باشد تعیین کنید.

۶.۱۳. یک دستگاه مختصات ثابت نسبت به‌زمین را درنظر می‌گیریم (زمین تخت و «بدون حرکت» فرض می‌شود). خمپاره‌ای باسرعت اولیهٔ $270\ \mathrm{ms^{-1}}$، ازتوپ عقب یک هواپیما که با سرعت $240\ \mathrm{ms^{-1}}$ در پـرواز است شلیک می‌شود. حرکت خمپاره را (الف) در دستگاه مختصات زمینی، (ب) دریک دستگاه مختصات وابسته بـه هواپیما، تشریح کنید. (ج) باچه زاویه‌ای باید لولهٔ توپ هدف‌گیری شود تاخمپاره هیچگونه مؤلفهٔ افقی سرعت نسبت به دستگاه مختصات زمینی نداشته باشد.

۶.۱۴. مکان ذرهٔ Q در دستگاه مختصات O با بردار

$$\mathbf{r} = [\mathbf{u}_x(6t^2 - 4t) + \mathbf{u}_y(-3t^3) + \mathbf{u}_z(3)]\,\mathrm{m}$$

اندازه گیری می‌شود. (الف) اگر مکان Q در دستگاه مختصات O' با

$$\mathbf{r}' = [\mathbf{u}_x(6t^2 + 3t) + \mathbf{u}_y(-3t^3) + \mathbf{u}_z(3)]\,\mathrm{m}$$

اندازه‌گیری شود، سرعت نسبی ثابت O' را نسبت به O تعیین کنید. (ب) ثابت کنید کـه شتاب ذره در دو دستگاه یکی است.

۶.۱۵. قطاری باسرعت $30\ \mathrm{ms^{-1}}$ از ایستگاهی می‌گذرد. یک گوی باسرعت $15\ \mathrm{ms^{-1}}$

در کف یک واگن، (الف) در سوی حرکت قطار، (ب) در سوی مخالف حرکت قطار، و (ج) عمود بر راستای حرکت قطار، حرکت می‌کند. سرعت گوی را در هرحالت نسبت به ناظری که در سکوی قطار ایستاده است پیدا کنید.

۱۶.۶. ذره‌ای با سرعت $۵۰۰\ \mathrm{ms}^{-۱}$ نسبت به زمین، در نقطه‌ای به عرض جغرافیایی ۴۵° شمالی‌مستقیم به سمت جنوب حرکت می‌کند. (الف) شتاب گریز ازمرکزذره را حساب کنید. (ب) شتاب کوریولی ذره را پیدا کنید. (ج) مسئله را برای نقطه‌ای به عرض ۴۵° جنوبی مجدداً حل کنید.

۱۷.۶. جسمی از ارتفاع ۲۰۰ متری نقطه‌ای بـه عرض جغرافیایی ۴۱° شمالی می‌افتد. انحراف به شرق را نسبت به‌آن نقطه (راستای شعاعی) پیدا کنید. مسئله را برای نقطه‌ای به عرض ۴۱° جنوبی مجددا حل کنید.

۱۸.۶. نهری درنقطه‌ای به‌عرض جغرافیایی ۴۵° شمالی (جنوبی) باسرعت $۹\ \mathrm{kmhr}^{-۱}$ به‌سمت جنوب (شمال) جریان دارد. شتاب کوریولی را پیدا کنید. ثابت کنید که درنیمکرهٔ شمالی(جنوبی) این شتاب آب را به‌سمت کنارهٔ راست (چپ) می‌راند. این اثرموجب‌می‌شود که کنارهٔ راست (چپ) کمی بیشترساییده شود، که در مواردی مشاهده شده است.

۱۹.۶. در یک هواپیمای جت که باسرعت $۴۵۰\ \mathrm{ms}^{-۱}$ در طول استوا به سمت شرق در پرواز است، شتاب کوریولی مسافرین چقدر است؟

۲۰.۶. سیارهٔ مشتری در هر۹ ساعت و ۵۱ دقیقه یک بار حول محور خود می‌گردد. شعاع مسیر حدود $۷ \times ۱۰^۴\ \mathrm{km}$ و شتاب گرانی روی آن $۲۶٫۵\ \mathrm{ms}^{-۲}$ است. حداکثر انحراف خط شاقول از راستای شعاعی مشتری چقدر است؟

۲۱.۶. مقادیر شتاب گرانی داده شده درجدول ۱.۶ را با مقادیر نظری‌که معادلهٔ (۲۹.۶) پیش بینی می‌کند مقایسه کنید.

۲۲.۶. جسمی در راستای قایم بـا سرعت $v_۰$ به سمت بالا پرتاب می‌شود. ثابت کنید کـه موقع افتادن به اندازهٔ $(۴\omega\cos\lambda\sqrt{۸h^۳/g})/۳$ بـه سـمت غـرب منحـرف می‌شـود. $h = v_۰^۲/۲g$ است.

۲۳.۶. دو ناظر O و O' که با سرعت زاویه‌ای نسبی $\boldsymbol{\omega}$ جابجا می‌شوند سرعت و شتاب نقطه‌ای راثبت می‌کنند. هنگامی که $\boldsymbol{\omega}$ ثابت نیست، رابطهٔ بین سرعتها و شتابها را پیدا کنید. مسئله را ابتدا هنگامی که دو مبدأ برهم منطبق‌اند و سپس هنگامی که جابجا شده‌اند درنظر بگیرید.

۲۴.۶. دوناظر O و O' بـا سرعت $v = ۰٫۶c$ نسبت بـه هم درحرکت انتقالی هستند. (الف) ناظر O یک میله را نسبت به خود بیحرکت وموازی راستای حرکت مشاهده می‌کند وطول آن را $۲۰\mathrm{m}$ انـدازه می‌گیرد. طول میله نسبت به ناظر O' چقـدر است؟ (ب) اگر همین میله به موازات راستای حرکت O' ونسبت به همین ناظر بیحرکت باشد، ناظرهای O و O' چه طولی برای این میله اندازه‌گیری می‌کنند؟

۲۵.۶. سرعت نسبی میله‌ای را پیدا کنید که طولی که درحال حرکت برای آن اندازه‌گیری می‌شود برابر نصف طول سکون آن باشد.

۲۶.۶. یک ناظر بیحرکت درخورشید چه اندازه کاهش دریکی ازقطرهای زمین مشاهده می‌کند؟ (سرعت حرکت انتقالی زمین دور خورشید $۳۰\mathrm{kms}^{-۱}$ و شعاع زمین در جدول ۱.۱۳ آمده است).

۲۷.۶. یک سفینهٔ فضایی که به سمت ماه درحرکت است با سرعت نسبی $۰٫۸c$ از کنار زمین می‌گذرد. (الف) به نظر یک ناظر زمینی‌مسافرت از زمین تا ماه چقدر طول می‌کشد؟ (ب) فاصلهٔ زمین تاماه به‌نظر یک مسافر این موشک چقدر است؟ این مسافرت به‌نظرمسافر داخل موشک چقدر طول می‌کشد؟

۲۸.۶. عمر میانگین یک نوترون به عنوان یک ذرهٔ آزاد در حال سکون، ۱۵ دقیقه است. نوترون خود بخود متلاشی می‌شود و از آن یک الکترون، یک پروتون و یک نوترینو[1] به دست می‌آید. نوترون باید چه حداقل سرعت میانگینی خورشید را ترک کند تا قبل از فروپاشی به زمین برسد؟

۲۹.۶. یک مزون μ[2] ذره‌ای است ناپایدار با عمر میانگین $۲ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{s}$، اگرتوسط یک ناظر بیحرکت نسبت به مزون اندازه‌گیری شود. عمر میانگین مزون برای شخصی که آن‌را با سرعت $۰٫۹c$ درحرکت می‌بیند چقدر است؟ اگر دستهٔ بزرگی از این مزونها دریک نقطه از فضا به وجود آیند، ولی تنها ۱٪ آنها به زمین برسند، ارتفاع آن نقطه را برآورد کنید.

۳۰.۶. یک هستهٔ رادیو اکتیو که با سرعت $۰٫۱c$ نسبت به آزمایشگاه حرکت می‌کند، الکترونی با سرعت $۰٫۸c$ نسبت به هسته گسیل می‌دارد. درصورتی که الکترون، نسبت به دستگاه مختصات وابسته به هسته، (الف) در راستا وسوی حرکت هسته، (ب) درسوی مخالف حرکت هسته، و (ج) در راستای عمود برحرکت هسته گسیل شود، سرعت و سوی الکترون نسبت به آزمایشگاه چیست؟

۳۱.۶. دو ناظر O و O' با سرعت نسبی $۰٫۶c$ درحرکت انتقالی می‌باشند. آنها درلحظهٔ $t = t' = ۰$ دریک نقطه قرار دارند. هنگامی که به نظر ناظر O، ۵ سال بگذرد، چقدر طول می‌کشد تا یک علامت نورانی از O به O' برسد؟ درصورتی که O و O' هردو از این اطلاعات آگاه باشند، به نظر O' از لحظه‌ای که O و O' برهم منطبق بوده‌اند چقدر گذشته است؟ لامپی واقع روی O به مدت یک سال روشن می‌ماند. تعیین کنید به نظر O' چه مدت لامپ روشن بوده است؟

۳۲.۶. مسئلهٔ پیش را هنگامی که سرعت نسبی $۰٫۹c$ باشد حل کنید.

۳۳.۶. موشکی که طول سکون آن $۶۰\mathrm{m}$ است، درخط راست از زمین دور می‌شود. هرانتهای این موشک به یک آینه مجهز است. یک علامت نوری که ازطرف زمین ارسال می‌شود به وسیلهٔ هر دو آینه منعکس وبه زمین برگشت داده می‌شود. علامت اولی درپایان $۲۰۰\mathrm{s}$ وعلامت دوم $۱٫۷۴\mathrm{s}$ بعد ازآن دریافت می‌گردد. فاصلهٔ موشک از زمین وسرعت

1. neutrino 2. μ - meson

موشک را نسبت به زمین پیدا کنید.

۳۴.۶ یک کیهان نورد می‌خواهد به ستاره‌ای که ۵ سال نوری فاصله دارد برود. سرعت موشک او را نسبت به زمین حساب کنید، درصورتی که می‌دانیم که کیهان نورد با ساعت خود این مسیر را در یک سال می‌پیماید. زمانی که یک ناظر زمینی برای مأموریت او ثبت می‌کند چقدر است؟

۳۵.۶ دانشجویی باید آزمونی را با ساعت استاد درمدت یک ساعت بگذراند. استاد با سرعت $0{,}97c$ نسبت به دانشجو حرکت می‌کند وبا مراجعه به ساعت خود، در رأس زمان تعیین شده یک علامت نورانی ارسال می‌دارد. دانشجو به محض دریافت علامت نورانی از نوشتن باز می‌ایستد. او چقدر وقت برای آزمون خود داشته است؟

۳۶.۶ یک پژوهشگر می‌خواهد با به کار بردن روش مایکلسون ـ مورلی سرعت باد را اندازه بگیرد. بدین مناسبت علامتهای صوتی در دو راستای عمود برهم می‌فرستد. او سرعت صوت را $300\,\mathrm{ms^{-1}}$ وطول مسیر را $100\,\mathrm{m}$ فرض می‌کند. اگر او بتواند اختلاف زمان $\Delta t \geqslant 0{,}001\,\mathrm{s}$ را اندازه بگیرد، حداقل سرعتی را که برای باد می‌تواند اندازه‌گیری کند چقدر است؟

۳۷.۶ ثابت کنید که شکل کلی تبدیل لورنتس، هنگامی که محورهای مختصات به کار برده شده به وسیلهٔ O و O' با سرعت نسبی آنها موازی نباشند، عبارت است از

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (k-1)\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2} - k\mathbf{v}t$$

$$t' = k(t - \mathbf{r}\cdot\mathbf{v}/c^2).$$

[راهنمایی: بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}'$ را روی راستاهای موازی وعمود بر $\mathbf{v}$ تصویر کنید؛ توجه داشته باشید که $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp}$ و $\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}/v^2$ است.]

۳۸.۶ اگر V و V' بزرگیهای سرعت یک ذره باشند که توسط ناظرهای O و O' که با سرعت نسبی v روی محور Xها حرکت می‌کنند اندازه‌گیری شده‌اند، ثابت کنید که

$$\sqrt{1 - V'^2/c^2} = \frac{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - V^2/c^2)}}{1 - vV_x/c^2}$$

و

$$\sqrt{1 - V^2/c^2} = \frac{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - V'^2/c^2)}}{1 - vV'_x/c^2}.$$

۳۹.۶ ثابت کنید که تبدیل کلی شتاب یک ذره که به وسیلهٔ O و O' اندازه‌گیری شود، هنگامی که ذره با سرعت V نسبت به O حرکت می‌کند، ازاین قرار است:

$$a'_x = \frac{a_x(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 - vV_x/c^2)^3}$$

$$a'_y = \frac{۱ - v^۲/c^۲}{(۱ - vV_x/c^۲)^۲}\left(a_y + a_x \frac{vV_y/c^۲}{۱ - vV_x/c^۲}\right)$$

$$a'_z = \frac{۱ - v^۲/c^۲}{(۱ - vV_x/c^۲)^۲}\left(a_z + a_x \frac{vV_z/c^۲}{۱ - vV_x/c^۲}\right).$$

۴۰.۶. هرگاه v تقریباً برابر c باشد، ثابت کنید که $k \approx ۱/\sqrt{۲(۱ - v/c)}$ می‌باشد و اگر v خیلی کوچکتر از c باشد، داریم $k \approx ۱ - v^۲/۲c^۲$.

۴۱.۶. ناظر O' طول هرضلع یک جعبهٔ مکعب‌شکل را، که‌نسبت به‌او ساکن‌است، $L_۰$ اندازه می‌گیرد. این جعبه به موازات یکی از اضلاعش، با سرعت v نسبت به ناظر O حرکت می‌کند. ثابت کنید حجمی را که ناظر O برای این جعبه اندازه‌گیری می‌کند برابر است با $L_۰^۳\sqrt{۱ - v^۲/c^۲}$.

۴۲.۶. ذره‌ای نسبت به ناظر O به گونه‌ای جابجا می‌شود که مکان آن در زمان t برابر $x = vt$ و $y = at^۲/۲$ ومسیر آن یک سهمی است. حرکت ذره را نسبت به ناظر O' که نسبت به ناظر O با سرعت v حرکت می‌کند بیان کنید. بویژه مسیر وشتاب آن را پیداکنید.

۴۳.۶. خط کشی به طول یک متر دریک دستگاه مختصات متحرک، با راستای حرکت زاویهٔ ۴۵° می‌سازد. اگر سرعت دستگاه مختصات متحرک $۰٫۸c$ باشد، طول و راستایی که برای خط کش در دستگاه مختصات آزمایشگاه اندازه‌گیری می‌شود چقدر است؟

۴۴.۶. بحث در همزمانی. (الف) ثابت کنید که اگر دو رویداد نسبت به ناظر O، در زمانهای $t_۱$ و $t_۲$ و در نقاطی به طولهای $x_۱$ و $x_۲$ اتفاق بیفتند ونیز $T = t_۲ - t_۱$ و $L = x_۲ - x_۱$ باشد، این رویدادها به نظر ناظر O' (که نسبت به ناظر O با سرعت v حرکت می‌کند) در زمانهای $t'_۱$ و $t'_۲$ رخ می‌دهند، به گونه‌ای که اگر $T' = t'_۲ - t'_۱$ باشد، داریم

$$T' = k(T - vL/c^۲).$$

(ب) درحالت کلی، آیا رویدادهای همزمان برای ناظر O، برای ناظر O' نیز همزمان می‌باشند؟ در چه شرایطی رویدادهای همزمان برای O برای کلیهٔ ناظرهای دیگری که نسبت به ناظر O درحرکت یکنواخت هستند همزمان می‌باشند؟ (ج) رابطه‌ای بین L و T پیدا کنید به گونه‌ای که ترتیبی‌که ناظر O' دو رویداد را مشاهده می‌کند برای ناظر O برعکس باشد. (د) فرض‌کنید رویدادهای $(x_۱, t_۱)$ و $(x_۲, t_۲)$ که‌توسط ناظر O مشاهده می‌شوند رابطهٔ علت و معلولی دارند [به گفتهٔ دیگر، $(x_۲, t_۲)$ نتیجهٔ انتشار یک علامت از $(x_۱, t_۱)$ با سرعت $V = L/T$ باشد که V لزوماً کوچکتر یا برابر c است]. آیا ممکن است ترتیب رویدادها برای ناظر O' برعکس شود؟ [توجه کنید که اگر پاسخ مثبت باشد، به موجب نظریه، $V > c$ می‌شود.]

۴۵.۶. ثابت کنید که قانون تبدیل سرعتها را می‌توان به صورت برداری زیر نوشت:

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{k(1 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{v}/c^2)}\left[\mathbf{v} + (k - 1)\frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}}{v^2}\mathbf{v} - k\mathbf{V}\right].$$

۴۶.۶. ثابت کنید که قانون تبدیل شتابها را می‌توان به صورت برداری زیر نوشت:

$$\mathbf{a}' = \frac{1}{k^3(1 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{v}/c^2)^3}\left[\mathbf{a} + \left(\frac{1}{k} - 1\right)\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{V}}{v^2}\mathbf{V} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{V})\right].$$

۷

دینامیک یک ذره

۱.۷ مقدمه

در فصل ۵، که از سینماتیک گفتگو می‌کرد، عناصری را که در «توصیف» حرکت یک‌ذره دخالت دارند مورد بحث قرارداديم. اکنون تحقیق می‌کنیم به چه دلایلی ذرات به این شکل یا شکل دیگری جابجا می‌شوند؟ چرا در نزدیکی سطح زمین، تمام اجسام با شتاب ثابت می‌افتند؟ چرا زمین به دورخورشید دریک مسیر بیضی حرکت می‌کند؟ چرا اتمها به یکدیگر می‌پیوندد تا مولکولها تشکیل شوند؟ چرا اگر یک فنر را بکشند شروع به نوسان می‌کند؟ می‌خواهیم این حرکتها و همچنین حرکتهای زیاد دیگری را که همواره در اطراف خود مشاهده می‌کنیم بفهمیم. این موضوع، نه تنها از این نظر اهمیت داردکه شناسایی بنیادی ما را از طبیعت زیاد می‌کند بلکه در مهندسی و کاربردهای عملی نیز مهم است. اگر بدانیم که به طورکلی حرکت چگونه به‌وجود می‌آید، توانایی خواهیم یافت ماشینها و وسایل دیگری را طرح کنیم که مطابق میل ما کار کنند. بررسی رابطهٔ بین حرکت یک جسم و علتهایی که این حرکت را به وجود می‌آورند، دینامیک نام دارد.

تجربیات روزانه ما حاکی است که حرکت یک جسم نتیجهٔ مستقیم برهم‌کنشهای آن جسم با اجسام اطراف خود می‌باشد. وقتی که بازیکنی ضربه‌ای به یک توپ وارد می‌کند بر اثر این برهم‌کنش حرکت توپ تغییر می‌کند. مسیر هر پرتابه نتیجه‌ای جز برهم‌کنش آن با زمین نیست. حرکت یک الکترون دور هسته نتیجهٔ برهم‌کنش این الکترون با هسته و شاید با سایر الکترونهاست. برهم‌کنشها با شیوهٔ مناسبی توسط یک مفهوم ریاضی به نام نیرو بیان می‌شوند. مطالعهٔ دینامیک درواقع، تجزیه و تحلیل رابطهٔ موجود بین نیرو و تغییرات حرکت یک جسم است.

قوانین حرکت که در این مبحث عنوان خواهیم کرد تعمیم تجزیه و تحلیل دقیقی از حرکتهای مشاهده شده در اطراف خود و گسترش این مشاهدات به‌بعضی آزمایشهای آرمانی و ساده شده می‌باشند.

۲.۷ قانون لختی

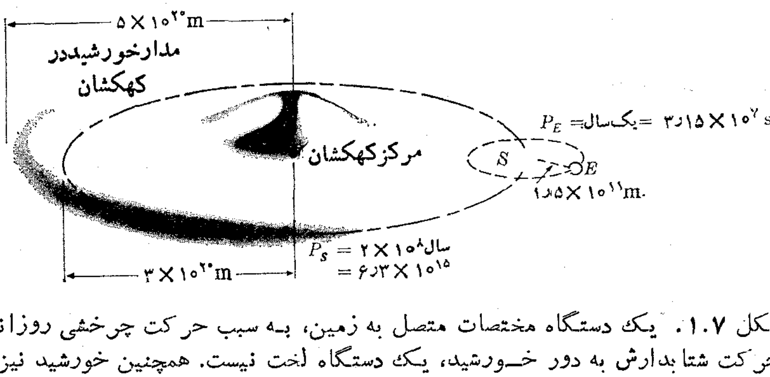
ذرهٔ آزاد، ذره‌ای است که تحت تأثیر هیچ برهم کنشی نباشد؛ به گفتهٔ درست‌تر، چنین چیزی وجود ندارد، زیرا هر ذره‌ای تحت تأثیر برهم‌کنشهای تمام ذرات دیگر دنیا قرار دارد. بنابراین، یک ذرهٔ آزاد یا باید کاملاً منزوی، و یا تنها ذرهٔ موجود در جهان باشد. و به هر حال چنین ذره‌ای قابل مشاهده نخواهد بود، زیرا در جریان مشاهده همیشه برهم‌کنشی بین مشاهده‌کننده و ذره به وجود می‌آید. معذالک، در عمل بعض ذره‌ها را می‌توان آزاد درنظر گرفت؛ خواه به دلیل اینکه به قدر کافی از سایر ذرات دورند که بتوان از برهم‌کنشهای آنها چشم پوشید، خواه به سبب اینکه برهم‌کنشهایشان با سایر ذرات به طریقی خنثی می‌شوند، به گونه‌ای که برهم‌کنش برآیند برابر صفر است.

اکنون قانون لختی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که می‌گوید:

یک ذرهٔ آزاد همیشه با سرعت ثابت، یا (درست به همان معنی) بدون شتاب حرکت می‌کند.

به عبارت دیگر، یک ذرهٔ آزاد یا روی یک خط مستقیم با سرعت ثابت جابجا می‌شود یا ساکن است (سرعت برابر صفر). این بیان، قانون اول نیوتون نیز نامیده می‌شود، زیرا آن را اولین بار سر ایزاک نیوتون [۱۶۴۲–۱۷۲۶ (۱۰۲۱–۱۱۰۶ هـ.ش.)] بیان داشته است، و این، اولین قانون از سه «قانونی» است که نیوتون در قرن هفده اعلام داشت.

بنا به‌آنچه در فصلهای ۵ و ۶ گفته شد، حرکت یک امر نسبی است. بنابراین، وقتی قانون لختی را بیان می‌کنیم باید روشن شود حرکت ذره آزاد نسبت به چه‌کس یا کدام چیز انجام می‌گیرد. ما فرض می‌کنیم حرکت ذره نسبت به ناظری انجام می‌شود که این ناظر به نوبهٔ خود یک ذره یا یک دستگاه آزاد است، یعنی در معرض هیچگونه برهم‌کنشی با بقیهٔ جهان نیست. چنین ناظری را ناظر لخت و چارچوب مرجعی را که به‌کار می‌برد چارچوب مرجع لخت می‌نامند. فرض می‌کنیم چارچوبهای لخت حرکت دورانی ندارند، زیرا وجود چرخش حاکی از آن است که شتابهایی (یا تغییراتی ناشی از تغییر راستا در سرعت)، ودر نتیجه، برهم‌کنشهایی وجود دارند که با تعریف ما ازناظر لخت که باید یک «ذرهٔ آزاد» یا بدون شتاب باشد مغایرت دارد. مطابق قانون لختی، ناظرهای لخت مختلف می‌توانند نسبت به هم با سرعت ثابتی در حرکت باشند. در این صورت، مشاهدات آنها، بسته به اینکه سرعتهای نسبیشان چقدر باشد، از طریق تبدیلات گالیله یا لورنتس به یکدیگر مربوط می‌شوند.



شکل ۱.۷. یک دستگاه مختصات متصل به زمین، به سبب حرکت چرخشی روزانه و حرکت شتابدارش به دور خورشید، یک دستگاه لخت نیست. همچنین خورشید نیز به سبب حرکتش به دور مرکز کهکشان یک چارچوب لخت نمی‌باشد. با این همه، برای مقاصد عملی، هر کدام از این دو جسم را می‌توان به عنوان یک چار چوب لخت به کار برد.

زمین به‌سبب حرکت چرخشی روزانه و برهم‌کنشش با خورشید وسایر سیاره‌ها، یک چارچوب مرجع لخت نیست. معذالک در بیشتر موارد، اثرات چرخش و بر هم‌کنش زمین ناچیز هستند و چار چوبهای مرجع وابسته به آزمایشگاههای زمین را می‌توان بدون اشتباه زیاد، چارچوبهای لخت در نظر گرفت. خورشید نیز به نوبهٔ خود یک دستگاه لخت

نیست، زیرا به سبب برهم‌کنشهایش با سایر اجرام کهکشان یک مدار منحنی دور مرکز کهکشان رسم می‌کند (شکل ۱.۷). با وجود این چون حرکت خورشید در مقایسه با حرکت زمین بیشتر به‌یک حرکت مستقیم‌الخط و یکنواخت نزدیک است (شتاب مداری‌زمین ۱۵۰ میلیون برابر خورشید است)، تشابه بین خورشید و یک چهار چوب لخت خیلی بیشتر می‌باشد.

اکنون چند تجربهٔ انجام یافته در آزمایشگاههای زمینی را، که قانون لختی را تأیید می‌کنند، دراینجا بیان می‌کنیم. یک گلولهٔ کروی واقع روی یک سطح افقی بدون مالش، تا وقتی‌که نیرویی به‌آن وارد نشده بیحرکت باقی می‌ماند، یعنی سرعت‌آن ثابت ومقدارش صفر است. فرض کنیم سطحی که گلوله روی آن قرار دارد برهم‌کنش بین زمین وگلوله را خنثی می‌کند، و بدین‌طریق گلوله از هر برهم‌کنشی آزاد است. هرگاه ضربه‌ای به‌گلوله وارد شود، همانند ضربه‌ای که به توپ بیلیارد وارد می‌کنند، گلوله یک لحظه دستخوش برهم‌کنشی می‌شود وسرعتی کسب می‌کند. ولی بلافاصله مجدداً آزاد می‌شود، وبا سرعتی‌که در لحظهٔ ضربه کسب‌کرده در خط مستقیم به حرکت درمی‌آید. اگر گلوله سخت و کاملاکروی، و سطح کاملا افقی و بدون مالش باشد، می‌توان تصور کرد که گلوله تا ابد با این روند ثابت جابجا می‌شود. عملا چنین وضعی پیش نمی‌آید، زیرا حرکت بتدریج کند شده و بالاخره گلوله می‌ایستد. می‌گوییم یک برهم‌کنش اضافی بین گلوله و سطح به وجود آمده است. این برهم‌کنش که مالش نامیده می‌شود بعداً مورد گفتگو قرار خواهد گرفت.

۳.۷ اندازه حرکت خطی

در بخش ۳.۲ با گفتن اینکه جرم عددی است که به هر ذره یا جسمی نسبت داده می‌شود و آن را با مقایسه هر جسم با جسم سنجه، با استفاده از اصل ترازوی با بازوهای برابر به دست می‌آورند، یک تعریف عملیاتی از جرم به دست دادیم. بنابراین جرم ضریبی است که یک ذره را ذرهٔ دیگر متمایز می‌کند. تعریف عملیاتی ما از جرم مقدار آن را برای ذرهٔ بیحرکت تعیین می‌کند. ولی معلوم نیست اگر ذره حرکت کند دارای همین جرم خواهد بود یا نه؛ بنابراین برای دقت بیشتر، عبارت جرم سکون را به کار می بریم. با وجود این، فعلا فرض می‌کنیم جرم مستقل از حالت حرکت جسم است و آن را باختصار جرم می‌نامیم. بعداً، در فصل ۱۱، تجزیه و تحلیل کاملی از این خصوصیت مهم خواهیم داشت، و ثابت خواهیم کرد که فرض فوق تا هنگامی که سرعت ذره نسبت به سرعت نور خیلی کوچک باشد، تقریب خوبی است.

حاصل‌ضرب جرم یک ذره در سرعت آن، اندازه حرکت خطی[1] آن ذره نام دارد. با نشان دادن اندازه حرکت با $\mathbf{p}$، می‌نویسیم

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \qquad (۱.۷)$$

1. linear momentum

اندازه حرکت خطی یک‌کمیت برداری است وسو وراستای آن باسو وراستای سرعت یکی است. اندازه حرکت مفهوم فیزیکی بسیار مهمی است، زیرا ترکیب دو عنصری است که حالت دینامیکی ذره را مشخص می‌کنند: جرم و سرعت ذره. از این پس به جای «اندازه حرکت خطی» تنها اندازه حرکت را به کار می‌بریم. در دستگاه یکاهای MKSC اندازه حرکت با یکای‌متر کیلوگرم بر ثانیه، mkgs^{-1}، بیان می‌شود. (هیچ اسم بخصوصی به این یکا داده نشده است.)

این امر راکه اندازه حرکت یک کمیت دینامیکی است که بیش از سرعت اطلاعات در اختیار ما می‌گذارد، با مثالهای سادهٔ متعددی می‌توان نشان داد. به عنوان مثال، متوقف کردن یا افزایش دادن سرعت یک کامیون بار شده خیلی دشوارتر از کامیون خالی است، حتی اگر سرعت هر دو یکسان باشد، زیرا اندازه حرکت کامیون باردار خیلی بیشتر است.

اکنون می‌توان بیان جدیدی از قانون لختی ارائه کرد و گفت

یک ذرهٔ آزاد همیشه با اندازه حرکت ثابتی حرکت می‌کند.

۴.۷ اصل بقای اندازه حرکت

یک نتیجهٔ فوری قانون لختی این است‌که یک ناظرلخت بامشاهدهٔ اینکه سرعت یا اندازه‌ـ حرکت ذره‌ای ثابت نیست، یا به عبارت دیگر، دارای شتاب است، در می‌یابد که ذره آزاد نیست (یعنی بار دیگر ذرات برهم‌کنش دارد).

اکنون یک حالت آرمانی را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم به جای مشاهدهٔ یک ذرهٔ منزوی در جهان، آنچنانکه منظور قانون لختی است، دو ذره را که تنها تحت تأثیر برهم‌ـ کنش متقابل یکدیگر قرار دارند، و از بقیهٔ جهان منزوی هستند مورد مشاهده قرار می‌دهیم. دو ذره به سبب برهم‌کنش متقابل خود دارای سرعتهای انفرادی ثابتی نیستند، بلکه سرعت آنها با زمان تغییر می‌کند و مسیر آنها، چنانکه در شکل ۲.۷ با منحنیهای (۱) و (۲) نشان داده شده‌اند، در حالت کلی منحنی است. در لحظهٔ داده شده‌ای مانند t، ذرهٔ ۱ در نقطهٔ A با سرعت $\mathbf{v}_1$ و ذرهٔ ۲ در نقطهٔ B با سرعت $\mathbf{v}_2$ می‌باشد. در لحظهٔ دیگری مانند t'، دو ذره بترتیب درنقاط A' و B' وبا سرعتهای $\mathbf{v}'_1$ و $\mathbf{v}'_2$ می‌باشند. با نشان دادن جرم ذره‌ها با m_1 و m_2، اندازه حرکت‌کل دستگاه دو ذره درلحظهٔ t برابر است با

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 \qquad (۲.۷)$$

در لحظهٔ بعدی t'، اندازه حرکت کل برابر می‌شود با

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = m_1 \mathbf{v}'_2 + m_2 \mathbf{v}'_2 \qquad (۳.۷)$$

در نوشتن معادلهٔ اخیر، پذیرفته‌ایم که جرم این ذرات مستقل از حالت حرکت آنهاست و به همین جهت، در این معادله نیز جرمهای به کار رفته در معادلهٔ (۲.۷) را به کار برده‌ایم. در غیر این صورت ناچار بودیم بنویسیم: $\mathbf{p} = m'_1 \mathbf{v}'_1 + m'_2 \mathbf{v}'_2$. نتیجهٔ مهم آزمایش ما این است که، زمانهای t و t' هر چه باشند، به عنوان نتیجهٔ مشاهده، در می‌یابیم که $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$

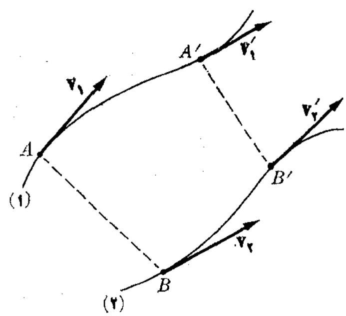
است. به عبارت دیگر،

> اندازه حرکت کل یک دستگاه متشکل از دو ذره که تنها تحت تأثیر برهم‌کنشهای متقابل هم قرار دارند، ثابت باقی می‌ماند.

این نتیجه، اصل بقای اندازه حرکت را تشکیل می‌دهد و یکی از بنیادیترین و عامترین اصول فیزیک به شمار می‌رود. به عنوان مثال، یک اتم هیدروژن را در نظر بگیرید که در آن یک الکترون دور یک پروتون می‌چرخد و آن را آنچنان منزوی فرض می‌کنیم که تنها برهم‌کنش بین الکترون و پرتون وجود داشته باشد. پس، مجموع اندازه حرکت الکترون و پروتون نسبت به یک چارچوب مرجع لخت ثابت است. به همین گونه دستگاه متشکل از زمین و ماه را می‌توان درنظرگرفت. اگر می‌توانستیم از برهم‌کنش مربوط خورشید و سایرسیاره‌ها صرفنظرکنیم، درآن صورت مجموع اندازه حرکت‌های زمین و ماه، نسبت به یک چارچوب مرجع لخت، ثابت می‌ماند.

هر چند بقای اندازه حرکت را برای دو ذره بیان داشتیم، این اصل درمورد چند ذره نیز که یک دستگاه منزوی را تشکیل می‌دهند، یعنی ذراتی که تنها تحت تأثیر برهم‌کنشهای متقابل بین خود هستند و با بقیهٔ جهان برهم‌کنشی ندارند، برقرار است. بنابراین، اصل بقای اندازه حرکت به صورت کلی آن، چنین می‌گوید:

> اندازه حرکت کل یک دستگاه ذرات منزوی ثابت است.



شکل ۲.۷. برهم‌کنش بین دو ذره

برای مثال یک مولکول هیدروژن متشکل از دو اتم هیدروژن (بنابراین دو الکترون و دو پروتون) را در نظر بگیرید. اگر مولکول منزوی باشد، یعنی تنها می‌باید برهم‌کنشهای بین این چهار ذره را بررسی‌کرد، مجموع اندازه حرکتهای آنها نسبت به یک چارچوب مرجع لخت ثابت خواهد بود. به همین‌گونه، منظومهٔ شمسی، متشکل از خورشید، سیارات و قمرهای آنها را در نظر بگیرید. اگر بتوان از برهم‌کنشهای منظومه با سایر اجرام سماوی چشم پوشید، اندازه حرکت کل آن نسبت به یک چار چوب مرجع لخت ثابت باقی می‌ماند.

تاکنون هیچ استثنایی برای اصل بقای اندازه حرکت شناخته نشده است. در واقع، هر بار که به نظر برسد در آزمایشی اصل بقای اندازه حرکت نقض شده است، فیزیکدانان

بلافاصله به دنبال یک ذرهٔ ناشناخته یا مخفی مانده‌ای می‌گرددکه قبلا متوجه آن نشده است و آن را مسئول ممکن این نقض ظاهری اصل بقای اندازه حرکت به حساب مـی‌آورد. در واقع همین پژوهشها بود که دانشمندان را به شناسایی نوترون، نوترینو، فـوتون و چندین ذرهٔ بنیادی دیگر رهنمون گشت. بعداً ما مجبور خواهیم شدکه اصل بقای اندازه حرکت را به گونه‌ای مختصر متفاوت‌تر از این بیان کنیم. با وجود این در اغلب مسایلی‌که مورد بحث ما قرار می‌گیرند، می‌توان اصل بقای اندازه حرکت را به صورتی که در این فصل بیان شد به کار برد.

اصل بقای اندازه حرکت را می‌توان به صورت ریاضی زیر نوشت:

$$\mathbf{p} = \Sigma_i \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_۱ + \mathbf{p}_۲ + \mathbf{p}_۳ + \cdots = \text{const}\cdot \qquad (۴.۷)$$

رابطهٔ (۴.۷) بدین معنی است که در یک دستگاه منزوی، تغییر اندازه حرکت یک ذره در فاصله زمانی معین برابر است بـا تغییر اندازه حرکت بقیهٔ دستگاه در همین فاصله زمانی با علامت مخالف. بدین طریق، در مورد مولکول منزوی هیدروژن، تغییر اندازه حـرکت یکی از الکترونها برابر است با مجموع تغییرات اندازه حرکتهای الکترون دیگر و پروتونها با علامت مخالف.

در مورد خاص دو ذره داریم

$$\mathbf{p}_۱ + \mathbf{p}_۲ = \text{const} \qquad (۵.۷)$$

یا

$$\mathbf{p}_۱ + \mathbf{p}_۲ = \mathbf{p}'_۱ + \mathbf{p}'_۲ \qquad (۶.۷)$$

معادلهٔ (۶.۷) را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\mathbf{p}'_۱ - \mathbf{p}_۱ = \mathbf{p}_۲ - \mathbf{p}'_۲ = -(\mathbf{p}'_۲ - \mathbf{p}_۲)\cdot \qquad (۷.۷)$$

بـالاخره به فـرض $\mathbf{p}' - \mathbf{p} = \Delta\mathbf{p}$، تغییر اندازه حـرکت بین لحظه‌هـای t و t' برابر می‌شود با

$$\Delta\mathbf{p}_۱ = -\Delta\mathbf{p}_۲ \qquad (۸.۷)$$

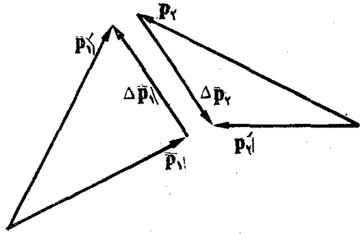
این معادله نشان می‌دهد کـه برای دو ذره که با یکدیگـر برهم کنش مـی‌کنند تغییر اندازه حرکت یک ذره در یک فاصله زمانی معین برابر است با تغییر اندازه حرکت ذرهٔ دیگر در همین فاصلهٔ زمانی با علامت مخالف (شکل ۳.۷). این نتیجه را مـی‌توان با گفتهٔ زیر نیز بیان داشت:

هر برهم‌کنشی یک تبادل اندازه حرکت به وجود می‌آورد،

به گونه‌ای که اندازه حرکتی که یک ذره «از دست می‌دهد» برابر با اندازه حرکتی است که ذرهٔ دیگر «به دست می‌آورد».

قانون لختی‌که دربخش ۲.۷ بیان شد تنها حالت خاصی ازاصل بقای اندازه حرکت است، زیرا اگربه جای چند ذره تنها یک ذرهٔ منزوی داشته باشیم، معادلهٔ (۴.۷) تنهادارای

یک جمله خواهد شد، یعنی $\mathbf{p} = \text{const}$ یا هم ارز آن، $\mathbf{v} = \text{const}$ کـه همان قانـون لختی است.



شکل ۳.۷. تبادل اندازه حرکت در نتیجهٔ برهم‌کنش بین دو ذره

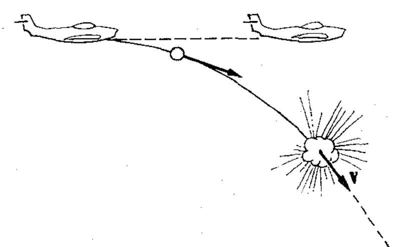
ما در اطراف خود پیوسته می‌توانیم مثالهایی برای اصل بقای اندازه حـرکت پیدا کنیم. پس زدن[1] یک اسلحهٔ آتشین مثالی از اصل بقای اندازه حرکت است. قبل ازشلیک، دستگاه تفنگ و گلوله ساکن است و اندازه حرکت کل برابر صفر می‌باشد. هنگام شلیک، پس زنی تفنگ اندازه حرکت اخذ شده به وسیلهٔ گلوله به سمت جلو را جبران مـی‌کند. به عنوان مثال دیگر، وقتی کـه یک هستهٔ پرتوزا با گسیل یک الکتـرون و یک نوترینو فرو- پاشیده[2] می‌شود، اندازه حرکت کل الکترون،نوترینو، و هستهٔ جدید برابر صفر خواهدبود، زیرا در آغاز دستگاه نسبت به چارچوب لخت متصل به آزمایشگاه در حـال سکون بـوده است. همچنین وقتی نارنجک یا بمبی در مسیر خود منفجر می‌شود، اندازه حرکت کل تمام قطعات بلافاصله بعد از انفجار باید درست مساوی اندازه حرکت نارنجک یا بمب قبل از انفجار باشد (شکل ۴.۷).

مثال ۱.۷. تفنگی به جـرم $۰٫۸۰ \text{ kg}$ گلوله‌ای به جـرم $۰٫۰۱۶ \text{ kg}$ را بـا سرعت $۷۰۰ \text{ ms}^{-۱}$ شلیک می‌کند. سرعت پس‌زنی تفنگ را حساب کنید.

حل: در ابتدا تفنگ و گلوله در حال سکون می‌باشند و اندازه حرکت کل آنها برابر صفر است. بعد از شلیک گلوله با اندازه حرکت زیر به سمت جلو به حرکت درمی‌آید:

$$p_۱ = m_۱v_۱ = (۰٫۰۱۶\text{kg}) \times (۷۰۰ \text{ ms}^{-۱}) = ۱۱٫۲۰ \text{ mkgs}^{-۱}$$

بنابراین تفنگ باید با همین اندازه حرکت ولی درسوی مخالف پس بنشیند، و داشته باشیم



شکل ۴.۷. در انفجار یک نارنجک اندازه حرکت ثابت باقی می‌ماند.

1. rocoil 2. disintegrated

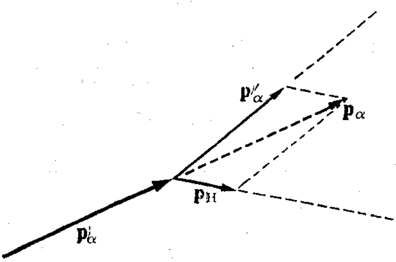
$$p_۲ = ۱۱٫۲۰ \text{ mkgs}^{-۱} = m_۲ v_۲$$

چون $m_۲ = ۰٫۸۰ \text{ kg}$ است، به‌دست می‌آید

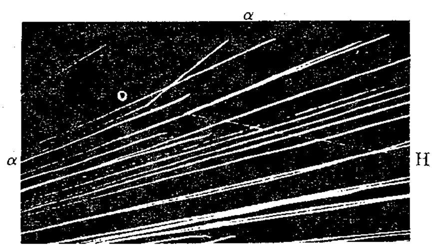
$$v_۲ = \frac{۱۱٫۲۰ \text{ mkgs}^{-۱}}{۰٫۸۰ \text{ kg}} = ۱۴٫۰ \text{ ms}^{-۱}.$$

مثال ۲۰۷. تجزیه و تحلیل بقای اندازه حرکت در جریان بر هم کنشهای بین ذرات اتمی.

حل: عکسبرداری از اتاقک ابری در شکل ۵.۷ (الف) نشان می‌دهد که یک ذرهٔ α (هستهٔ هلیوم) وارد برهم‌کنش با اتم هیدروژن می‌شود که جزو گازهای دیگر اتاقک بوده وابتدا درحال سکون است. ذرهٔ α از مسیر خود منحرف می‌شود و اتم هیدروژن نیز شروع به حرکت می‌کند. اگر جرم هر یک ازآنها معلوم باشد که در این حالت به نسبت ۴ و ۱ است و سرعتهایشان را (با ابزارهای فنی ویژه‌ای که در تجزیه و تحلیل عکسهای اتاقک ابری به‌کار می‌روند) اندازه بگیریم، می‌توانیم نمودار اندازه حرکتها را مطابق شکل ۵.۷ (ب) رسم کنیم. وقتی که، پس‌از برهم‌کنش، دو اندازه حرکت را باهم جمع‌کنیم، مجموع برابر است با اندازه حرکت ذرهٔ آلفای فرودی، یا به‌گفتهٔ دیگر $\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{p}'_\alpha + \mathbf{p}_H$.
تا کنون اصل بقای اندازه حرکت در هیچ یک از برهم‌کنشهای اتمی و هسته‌ای نقض نشده است.



(ب)



(الف)

شکل ۵.۷. اصل بقای اندازه حرکت درجریان برخورد یک ذرهٔ α (هستهٔ هلیوم) با یک پروتون (هستهٔ هیدروژن)

۵۰۷ تعریف مجدد جرم

با استفاده از تعریف اندازه حرکت [معادلهٔ (۱۰۷)]، وبا فرض اینکه جرم ذره ثابت است، می‌توان تغییر اندازه حرکت یک ذره را درفاصله زمانی Δt با رابطهٔ زیر بیان کرد:

$$\Delta \mathbf{p} = \Delta(m\mathbf{v}) = m\Delta\mathbf{v}.$$

در نتیجه رابطهٔ (۸۰۷) را می‌توان چنین نوشت:

$$m_۱ \Delta \mathbf{v}_۱ = m_۲ \Delta \mathbf{v}_۲$$

یا اگر تنها بزرگی بردارها را در نظر بگیریم داریم

$$\frac{m_۲}{m_۱} = \frac{|\Delta \mathbf{v}_۱|}{|\Delta \mathbf{v}_۲|}. \qquad (۹.۷)$$

این رابطه نشان می‌دهد که نسبت جرمهای دو ذره متناسب است با عکس نسبت تغییر سرعتها. نتیجهٔ فوق امکان می‌دهد جرم را به طور دینامیکی تعریف کنیم: در واقع، اگر ذرهٔ ۱ را ذرهٔ «سنجه» انتخاب کنیم، $m_۱$، جرم آن را می‌توان به‌عنوان یکای جرم تعریف کرد. از روی برهم کنش ذرهٔ دیگری، که در اینجا ۲ می‌نامیم، با ذرهٔ سنجه و با استفاده از معادلهٔ (۹.۷) می‌توان $m_۲$، جرم ذرهٔ ۲، را به دست آورد. این نتیجه نشان می‌دهد که می‌توان به جای تعریف عملیاتی جرم در بخش ۳.۲، این تعریف عملیاتی جدید جرم را به‌کار برد که از اصل بقای اندازه‌حرکت و این فرض که با تغییر سرعت جرم تغییر نمی‌کند نتیجه می‌شود.

۶.۷ قانون دوم و سوم نیوتون؛ مفهوم نیرو

در بیشتر موارد، حرکت یک ذرهٔ تنها مورد مشاهده قرار می‌گیرد. این امر یا به دلیل نداشتن امکانات لازم برای مشاهدهٔ ذرات دیگری است که با آن ذره بر هم کنش می‌کنند، یا به این دلیل که عمداً وجود آنها نادیده گرفته می‌شود. در این وضع، خیلی دشوار است از اصل بقای اندازه حرکت استفاده شود. با این همه، با یک شیوهٔ عملی، یعنی با دخالت دادن نیرو، می‌توان این مشکل را برطرف کرد. نظریهٔ مربوط به این امر دینامیک ذره نامیده می‌شود.

طرفین معادلهٔ (۸.۷) راکه تغییرات اندازه حرکت ذره‌های ۱ و ۲ را در فاصله‌زمانی $\Delta t = t' - t$ به هم مربوط می‌کند، بر Δt تقسیم می‌کنیم. می‌توان نوشت

$$\frac{\Delta \mathbf{p}_۱}{\Delta t} = -\frac{\Delta \mathbf{p}_۲}{\Delta t}. \qquad (۱۰.۷)$$

این رابطه نشان می‌دهد که میانگین آهنگ[1] تغییرات (برداری) اندازه حرکت ذرات در فاصله زمانی Δt از لحاظ مقدار برابر و از لحاظ جهت مخالف هم می‌باشند. اگر Δt را خیلی کوچک بگیریم، یعنی اگر حد معادلهٔ (۱۰.۷) را هنگامی که $\Delta t \to 0$ میل می‌کند حساب کنیم به دست می‌آید

$$\frac{d\mathbf{p}_۱}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_۲}{dt}. \qquad (۱۱.۷)$$

بدین طریق مشتق بردار اندازه حرکتها نسبت به زمان، در هر لحظه‌ای مانند t، با هم برابر و در سوی مخالف هم می‌باشند. بنابراین، با به کار بردن مثالهای قبلی، مشاهده می‌شود که مشتق اندازه حرکت الکترون در یک اتم هیدروژن منزوی با اندازه حرکت پروتون برابر ولی دارای علامت مخالف آن می‌باشد. همچنین اگر فرض کنیم زمین و ماه یک دستگاه منزوی را تشکیل می‌دهند، مشاهده می‌شود که مشتق اندازه حرکت زمین نسبت به زمان برابر است با مشتق اندازه حرکت ماه نسبت به زمان با علامت مخالف.

1. rate

مشتق اندازه حرکت یک ذره نسبت به زمان را «نیرو» می‌نامیم. به گفتهٔ دیگر، نیرویی که بر یک ذره «اعمال» می‌شود برابر است با

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \qquad (۱۲.۷)$$

از کلمهٔ «اعمال» گاهی برداشت اشتباه می‌شود، زیرا این فکر را القا می‌کند که چیزی به ذره وارد می‌شود. نیرو یک مفهوم ریاضی است که، بنا به تعریف، برابر است با مشتق اندازه حرکت یک ذرهٔ معلوم، که اندازه حرکت به نوبهٔ خود ناشی از برهم کنش این ذره با سایر ذرات است. بنا بر این از نظر فیزیک، نیرو را می‌توان بیان یک برهم کنش دانست. اگر ذره آزاد باشد داریم $\mathbf{p} = \text{const}$ و $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt = 0$. بنا بر این می توان گفت که بر یک ذرهٔ آزاد هیچ نیرویی وارد نمی‌شود.

معادلهٔ (۱۲.۷) قانون دوم حرکت نیوتون است؛ ولی چنانکه ملاحظه می‌شود این رابطه بیشتر یک تعریف است تا یک قانون، و نتیجهٔ مستقیم اصل بقای اندازه حرکت می باشد.

با استفاده از مفهوم نیرو، می‌توان معادلهٔ (۱۱.۷) را به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \qquad (۱۳.۷)$$

که در آن $\mathbf{F}_1 = d\mathbf{p}_1/dt$ نیروی مؤثر روی ذرهٔ ۱ به دلیل برهم کنش آن با ذرهٔ ۲ و $\mathbf{F}_2 = d\mathbf{p}_2/dt$ نیروی مؤثر روی ذرهٔ ۲ به سبب برهم کنش آن با ذرهٔ ۱ است. بالاخره نتیجه می‌گیریم

وقتی دو ذره برهم کنش می‌کنند، نیرویی که یک ذره روی ذرهٔ دیگر وارد می‌کند برابر است با نیرویی که ذرهٔ دوم روی ذرهٔ اول وارد می‌کند با علامت مخالف.

بیان فوق قانون سوم حرکت نیوتون نام دارد. این قانون نیز یکی از نتایج تعریف نیرو و اصل بقای اندازه حرکت است. گاهی آن را قانون کنش و واکنش (عمل و عکس العمل) نیز می نامند.

در اغلب مسایل می توان $\mathbf{F}_1$ (وهمچنین $\mathbf{F}_2$) را به صورت تابعی از بردار $\mathbf{r}_{12}$ که مکان نسبی دو ذره را مشخص می‌کند، و یا احتمالاً به صورت تابعی از سرعت نسبی آنها بیان کرد. بنا به معادلهٔ (۹.۷) اگر m_2 خیلی بزرگتر از m_1 باشد، تغییر سرعت نسبی m_2 خیلی کوچکتر از تغییر سرعت m_1 می شود، و می‌توان در بعضی چارچوبهای مرجع لخت ذرهٔ ۲ را عملاً ساکن فرض کرد. در این صورت می‌توان از حرکت ذرهٔ ۱ بر اثر نیروی $\mathbf{F}_1$ گفتگو کرد (شکل ۶.۷) و $\mathbf{F}_1$ را تنها تابعی از مکان یا سرعت m_1 را نظر گرفت. در این موارد، معادلهٔ (۱۲.۷) از امتیاز خاصی برخوردار است. به عنوان مثال، این حالت در مورد اجسامی که براثر نیروی جاذبهٔ زمین حرکت می‌کنند، یا الکترونی که در اتم نسبت به هسته جابجا می‌شود صدق می‌کند.

یافتن $\mathbf{F}(\mathbf{r}_{12})$ برای بیشتر برهم کنشهایی‌که درطبیعت وجود دارند یکی از مهمترین مسائل فیزیک است. این امر دقیقاً بدین سبب است که فیزیکدانان قادر بوده‌اند شکلهای

تابعی $\mathbf{F}(\mathbf{r}_{12})$ را با برهم کنشهای مختلف مشاهده شده در طبیعت مربوط سازند و در این مورد مفهوم نیرو خیلی مفید بوده است.

با استفاده از تعریف اندازه حرکت، معادلهٔ (۱۰۷)، رابطهٔ (۱۲۰۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}. \qquad (۱۴۰۷)$$

اگر m ثابت باشد داریم

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad \text{یا} \qquad \mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \qquad (۱۵۰۷)$$

می‌توان معادلهٔ (۱۵۰۷) را چنین بیان کرد:

اگر جرم ثابت باشد، نیرو برابر است با حاصل ضرب جرم در شتاب.

توجه داشته باشید که در این حالت، نیرو با شتاب همراستا و همسو است. ازمعادلهٔ (۱۵۰۷) دیده می‌شود که اگر نیرو ثابت باشد، شتاب $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ نیز ثابت است، وحرکت باشتاب ثابت خواهد بود. این وضعی است که در حرکت سقوطی اجسام در نزدیکی سطح زمین پیش می‌آید: تمام اجسام با شتاب یکسان $\mathbf{g}$ به طرف زمین سقوط می‌کنند، در نتیجه نیروی جاذبهٔ گرانشی که وزن نام دارد برابر می‌شود با

$$\mathbf{W} = m\mathbf{g}. \qquad (۱۶۰۷)$$

(به طور دقیقتر، باید بنویسیم $\mathbf{W} = m\mathbf{g}_0$ که $\mathbf{g}$ و $\mathbf{g}_0$ با رابطهٔ (۲۷۰۶) به هم مربوط می‌شوند.)

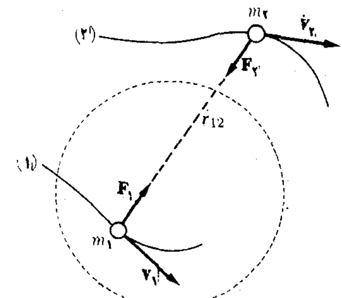
در نوشتن معادلهٔ (۱۲۰۷) فرض کردیم که ذره تنها با یک ذرهٔ دیگر برهم کنش کند، همچنانکه از بحث پیش در معادلهٔ (۱۲۰۷) نتیجه می‌شود و در شکل ۶۰۷ نشان داده شده است. ولی اگر ذرهٔ m با ذرات دیگری مانند m_1، m_2، m_3، ... برهم کنش کند (شکل ۷۰۷)، هر کدام از این ذرات موجب تغییری در اندازه حرکت ذرهٔ m می‌شوند که مطابق رابطهٔ (۱۲۰۷) با نیروهای $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{F}_2$، $\mathbf{F}_3$... مشخص می‌گردند. در این صورت آهنگ کلی تغییر اندازه حرکت ذرهٔ m برابر است با

$$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots = \mathbf{F}.$$

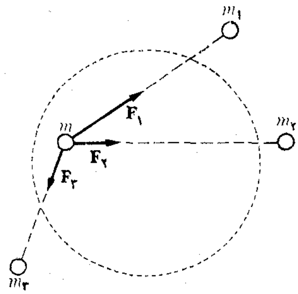
جمع برداری جمله‌های سمت راست، $\mathbf{F}$، نیروی برآیند وارد بر m نام دارد. این قاعدهٔ محاسبهٔ برآیند نیروها قبلاً در فصل ۴ به کار رفته است. در شکل ۷۰۷ برهم کنشهای ممکن بین m_1 و m_2، m_1 و m_3، m_2 و m_3، و غیره نشان داده نشده‌اند، زیرا به‌منظور فعلی‌ما ربطی پیدا نمی‌کنند. همچنین فرض کرده‌ایم که حضور ذرات m_3، m_4، ... هیچ تغییری در برهم کنش بین m و m_1 نمی‌دهد، به عبارت دیگر، هیچ اثر تداخلی وجود ندارد.

در بخشهای بعدی این فصل، که راجع به‌حرکت یک‌ذره بحث‌می‌شود، نیروی برآیند $\mathbf{F}$ را تنها تابع مختصات ذره فرض خواهیم کرد، بدین طریق حرکت سایر ذراتی راکه با این

ذره بر هم کنش می‌کنند نادیده می‌گیریم. این تقریب بسیار مفید، چنانکه در بالا نیز اشاره شد، دینامیک ذره را تشکیل می‌دهد. در فصلهای بعدی، حرکت دستگاه ذرات و نیروهای وابسته به برهم‌کنشهای مختلفی را که برای فیزیکدانان معلوم اند بررسی خواهیم کرد.



شکل ۶.۷. در نتیجهٔ اصل بقای اندازه حرکت، کنش و واکنش با هم برابر و علامت‌شان مخالف است.



شکل ۷.۷. نیروی برآیند روی ذره

۷.۷ نقدی بر مفهوم نیرو

اکنون با نظر انتقادی مفهوم نیرو را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ما این مفهوم (یعنی $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$) را در معادلهٔ (۱۲.۷) به عنوان مفهومی ریاضی معرفی کردیم که برای بیان آهنگ تغییر اندازه حرکت ذره بر اثر برهم‌کنشهایش با سایر ذرات مناسب است. لکن، تصور ما از نیرو، در زندگی عادی، تا اندازه‌ای متفاوت است. هنگامی که بازیکنی ضربه‌ای به توپی وارد می‌کند، وقتی که با چکش میخی را می‌کوبند، زمانی که یک مشت زن ضربه مستقیمی به حریف خود می‌زند، یا یک وزنه طنابی را می‌کشد، «احساس» می‌کنیم که نیرویی (درواقع، برهم کنشی) وجود دارد. البته خیلی دشوار است این تصویر حسی از نیرو را با نیرو یا برهم کنش بین خورشید و زمین آشتی داد. با وجود این، در هر دو مورد برهم‌کنشی بین دو جسم حکمفرماست. دانشجو می‌تواند بگوید این درست، ولی فاصلهٔ بین زمین وخورشید بسیارزیاد است، درصورتی که بازیکن توپ‌را «لمس» می‌کند. اتفاقاً، نکته دقیقاً در همین‌جاست که این دو پدیده بر خلاف آنچه به نظر می‌رسد چندان هم اختلاف ندارند. هر اندازه که جسم جامدی متراکم به نظر برسد، باز اتمهای آن کاملاً از هم جدا هستند و برهم کنشها، آنها را درجاهایی که قرار دارند نگه می‌دارند، درست به گونه‌ای که سیاره‌ها به‌واسطهٔ برهم‌کنشهایشان باخورشید درجای‌مشخص خودقراردارند. به‌معنای‌میکروسکوپیک، پا هرگز با توپ تماس پیدا نمی‌کند، هرچند مولکولهای آن به مولکولهای توپ نزدیک می‌شوند، و در نتیجهٔ برهم کنشهایشان، آشفتگی موقتی در نظام آنها به وجود می‌آید. بدین ترتیب، کلیهٔ نیروهای موجود در طبیعت مربوط به برهم کنشهای بین اجسامی است که در فاصلهٔ معینی از یکدیگر قرار دارند. در بعضی موارد این فاصله با مقیاس انسانی آن قدر

کوچک است که تمایل داریم آن را برابر صفر بپنداریم. درموارد دیگر، این فاصله بامقیاسهای بشری، بیش از اندازه بزرگ می‌باشد. ولی از دیدگاه فیزیک، هیچگونه اختلاف اساسی بین این دو نوع نیرو وجود ندارد. بنا بر این هنگامی که با فرایندهایی در مقیاس اتمی سروکار داریم باید در به‌کار بردن مفاهیمی حسی وماکروسکوپیک مانند «برخورد» بسیار دقیق باشیم.

این حقیقت که با اینکه دو ذره را فاصله‌ای از همدیگر جدا می‌کند ولی با هم وارد برهم کنش می‌شوند، بدین معنی است که باید سازوکاری برای انتقال برهم کنش در نظر گرفت. در فصلهای بعدی این سازوکار را بررسی خواهیم کرد؛ در اینجا فقط یادآور می‌شویم که بحث ما ایجاب می‌کند در معادلهٔ (۵.۷) تجدید نظری به عمل آید. به صورتی که معادلهٔ (۵.۷) نوشته شده است، برهم کنش بین دو ذره آنی فرض می‌شود. در صورتی که، چنانکه در فصلهای بعد بحث خواهد شد، برهم کنشها با سرعت معین، بدون شک با سرعت نور، انتشار پیدا می‌کنند. برای اینکه تأخیر حاصل از سرعت معین انتشار برهم کنش به حساب آید، باید یک جملهٔ تکمیلی در معادلهٔ (۵.۷) وارد شود. هنگامی که این تصحیح صورت بگیرد، مفهوم نیرو اهمیت خود، و قانون کنش و واکنش معنی خود را از دست می‌دهد. با وجود این، تا زمانی که حرکت ذرات در مقایسه با سرعت نور، آهسته است، یا اینکه برهم کنشها خیلی ضعیف هستند، معادلهٔ (۵.۷) و نظریه‌ای که براساس آن شکل گرفته است، از تقریب کافی، برای تشریح وضعیتهای فیزیکی برخوردار است.

۸.۷ یکاهای نیرو

از معادلات (۱۲.۷) یا (۱۵.۷) می‌بینیم که یکای نیرو باید برحسب یکای جرم و شتاب بیان شود. ازاین رو، در دستگاه یکاهای MKSC نیرو برحسب $\mathrm{m\,kg\,s^{-۲}}$ اندازه‌گیری می‌شود که نیوتون نام دارد و آن را با N نشان می‌دهند؛ به عبارت دیگر $\mathrm{N = mkgs^{-۲}}$. درنتیجه، نیوتون نیرویی است که هرگاه به جسمی به جرم یک کیلوگرم وارد شود به آن شتابی به اندازهٔ $\mathrm{۱ms^{-۲}}$ می‌دهد.

هنوز هم یکای نیرو در دستگاه یکاهای cgs به نام دین را زیاد به کار می‌برند و آن نیرویی است که هرگاه به جرم یک گرمی وارد شود به آن شتابی برابر $\mathrm{۱\,cms^{-۲}}$ می‌دهد؛ یا اینکه $\mathrm{cmgs^{-۲}} =$ ۱ دین. چون $\mathrm{۱kg = ۱۰۰۰\,g}$ و $\mathrm{۱m = ۱۰۰\,cm}$ است، به دست می‌آید: دین $\mathrm{N = (۱۰^۲cm)\,(۱۰۰۰\,g) = ۱۰^۵}$.

دو یکای دیگر نیز برای نیرو بوفور به وسیلهٔ مهندسین به کار می‌روند. این یکاها بر اساس رابطهٔ (۱۶.۷) که وزن یک جسم را تعریف می‌کند بیان می‌شوند. یکی کیلوگرم‌نیرو با علامت اختصاری kgf می‌باشد و آن وزن جسمی به جرم یک کیلوگرم است. بدین طریق، اگر m را برابر یک کیلوگرم در معادلهٔ (۱۶.۷) قرار دهیم به دست می‌آید $\mathrm{kgf = g\,N = ۹٫۸۰۷\,N}$. یکای دیگر، پوند نیرو باعلامت اختصاری lbf، نیرویی است برابر با وزن جسمی به جرم یک پوند. در اینجا نیز با قرار دادن $m = ۱\ \mathrm{lb}$ در معادلهٔ

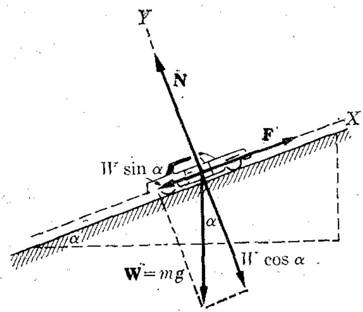
(۱۶.۷) به دست می‌آید $1\,\text{lbf} = 4{,}448\,\text{N}$ توجه داشته باشید جرمی‌که برحسب کیلوگرم یا پوند اندازه‌گیری شود و وزن آن که بر حسب کیلوگرم نیرو یا پوند نیرو اندازه‌گیری شود با عددهای یکسانی بیان می‌شوند.

هرچند که وزن، یک نیرو است و باید با نیوتون (N) بیان شود، معمولاً، از نیروی چند کیلوگرمی، و نه چند کیلوگرم نیرو، صحبت می‌شود.

مثال ۳.۷. اتومبیلی بـه جـرم $1000\,\text{kg}$ درخیابان سربالایی به شیب $20°$ بالا می‌رود. نیروی موتور را هنگامی کـه اتومبیل (الف) دارای حـرکت یکنواخت است (ب) با شتاب $0{,}2\,\text{ms}^{-2}$ حرکت می‌کند، پیدا کنید. در هر دو مورد نیروی وارد بـر اتومبیل از طـرف خیابان را حساب کنید.

حل: فرض کنید جرم اتومبیل برابر m باشد؛ نیروهای وارد بر اتـومبیل در شکل (۸.۷) نشان داده‌شده‌اند وعبارتند از وزن آن، $\mathbf{w} = m\mathbf{g}$ که به‌سمت پایین است، نیروی موتور $\mathbf{F}$ که به سمت سربالایی و نیروی $\mathbf{N}$ ناشی از خیابان که عمود بـر آن است. با به‌کار بردن دو محور نشان داده شده در شکل و معادلهٔ (۱۵.۷)، درمی‌یابیم که حرکت در راستای محور Xها در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$F - mg\sin\alpha = ma \quad \text{یا} \quad F = m(a + g\sin\alpha).$$



شکل ۸.۷

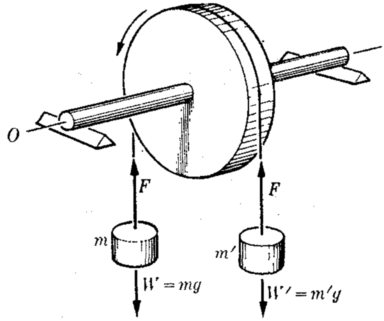
حرکتی در راستای محور Yها وجود ندارد، بنا بر این

$$N - mg\cos\alpha = 0 \quad \text{یا} \quad N = mg\cos\alpha.$$

ملاحظه می‌شود که نیروی $\mathbf{N}$ حاصل از خیابان، مستقل از شتاب اتومبیل و مقدار عـددی آن برابر $9210\,\text{N}$ است. بر عکس، نیروی موتور $\mathbf{F}$ به شتاب بستگی دارد. وقتی کـه اتومبیل با حرکت یکنواخت جابجا می‌شود داریم $a = 0$ و $F = mg\sin\alpha$ که درمثال ما برابر است با $F = 3350\,\text{N}$. هنگامی کـه اتـومبیل با شتاب $0{,}2\,\text{ms}^{-2}$ حـرکت می‌کند، $F = 3550\,\text{N}$ می‌شود.

به دانشجو توصیه می‌کنیم مسئله را بـرای حالتی کـه اتومبیل به سمت پایین حرکت می‌کند، حل کند.

مثال ۴.۷. درشکل ۹.۷ شتابهایی را کـه جرمهای m و m' با آن شتابها جابجا می‌شوند تعیین کنید. فرض کنید چرخ بدون مالش اطراف O حرکت می‌کند و از هرگونه اثـر جرم



شکل ۹.۷

چرخ صرف نظر می‌شود (این اثرها را بعداً در فصل ۱۰ مورد بررسی قرار خواهیم داد).
حل: فرض کنیم حرکت در راستاو سوی نشان داده شده با پیکان صورت می‌گیرد، به گونه‌ای که جرم m می‌افتد وجرم m' به سمت بالا می‌رود. ریسمان، غیر قابل انبساط فرض می‌شود؛ در این صورت هر دو جرم با شتاب یکسان a حرکت می‌کنند. دو جسم از طریق ریسمان برهم کنش می‌کنند، و بر یکدیگر نیروی مساوی و مخالفی را وارد می‌کنند که آن را با F نشان می‌دهیم. معادلهٔ حرکت سقوطی m با شتاب a عبارت از $mg - F = ma$ و معادلهٔ حرکت m' به سمت بالا، وبا همان شتاب a عبارت است از $F - m'g = m'a$.

با جمع کردن دو معادلهٔ فوق F حذف می‌شود و برای مقدار مشترک شتاب a به دست می‌آوریم

$$a = \frac{m - m'}{m + m'} g.$$

نیروی کششی ریسمان برابر می‌شود با

$$F = \frac{۲mm'}{m + m'} g.$$

گاهی برای مطالعهٔ قوانین حرکت شتابدار از وسیلهٔ مشابهی به نام ماشین آتوود[1] استفاده می‌شود. یکی از برتریهای این دستگاه است،که با انتخاب m و m' خیلی نزدیک به‌هم، می‌توان شتاب a را به‌قدر کافی کوچک کرد و این امرمشاهدهٔ حرکت را بسیار آسان می‌کند.

مثال ۵.۷. جسمی به‌جرم $۱۰\,\mathrm{kg}$ براثر نیروی $F = (۱۲۰t + ۴۰)\,\mathrm{N}$ در خط مستقیم جابجا می‌شود. در لحظهٔ $t = ۰$ جسم در نقطهٔ $x_۰ = ۵\mathrm{m}$ با سرعت اولیهٔ $v_۰ = ۶\mathrm{ms}^{-۱}$ قرار دارد. سرعت و مکان جسم را در لحظات بعد به دست آورید.

حل: با به کار بردن معادلهٔ (۱۵.۷) به دست می‌آوریم

$$(۱۲۰t + ۴۰) = ۱۰a \quad \text{یا} \quad a = (۱۲t + ۴)\,\mathrm{ms}^{-۲}$$

از اینجا، با شیوه‌ای که در مثال ۲.۵ به کار رفت عمل می‌کنیم. چون در یک حرکت مستقیم‌الخط $a = dv/dt$ است، پس

$$dv/dt = ۱۲t + ۴$$

1. Atwood's machine

با انتگرال گیری از این رابطه به دست می آید

$$\int_{۶}^{v} dv = \int_{۰}^{t} (۱۲t + ۴)\, dt \quad \text{یا} \quad v = ۶t^۲ + ۴t + ۶\mathrm{ms}^{-۱}$$

با قرار دادن $v = dx/dt$ و انتگرال گیری مجدد داریم

$$\int_{۵}^{x} dx = \int_{۰} v\, dt = \int_{۰}^{t} (۶t^۲ + ۴t + ۶)\, dt$$

$$x = ۲t^۳ + ۲t^۲ + ۶t + ۵\mathrm{m}.$$

این رابطه امکان می‌دهد مکان جسم را در هر لحظهٔ دلخواه به دست آوریم.

۹.۷ نیروهای مالش

زمانی که دو جسم با هم تماس پیدا کنند، مانند کتابی که روی میزی قرار می‌گیرد، مقاومتی به وجود می آید که با حرکت *نسبی* دو جسم مخالفت می‌کند. به عنوان مثال، فرض کنید کتابی را روی میزی با سرعتی می‌کشیم. پس از رها کردن، حرکت کتاب بتدریج کند می‌شود و بالاخره می‌ایستد. از بین رفتن اندازه حرکت نشان می‌دهد که نیرویی با حرکت مخالفت می‌کند؛ این نیرو را *نیروی مالش لغزشی* می‌نامند. نیروی مالش از برهم کنش مولکولهای دو جسم ناشی می‌شود، که بر حسب اینکه دو جسم از مواد یکسان یا مختلف تشکیل شده باشند بترتیب نیروی همدوسش[1] یا دوسش[2] نامگذاری می‌شوند. مالش پدیدهٔ نسبتاً پیچیده‌ای است و به‌عوامل زیادی مانند حالت وجنس سطحها، سرعت نسبی آنها وغیره بستگی دارد. بتجربه ثابت می‌شود که نیروی مالش $\mathbf{F}_f$ کمیتی است که در بیشتر کاربردهای عملی، می‌توان آن‌را با نیروی عمودی $\mathbf{N}$ که یک جسم را به جسم دیگر می‌فشارد متناسب گرفت (شکل ۱۰.۷). ثابت این تناسب *ضریب مالش* نام دارد که‌آن را با f نشان می‌دهند می‌دهند. پس

$$\text{نیروی مالش لغزشی} = F_f = fN. \qquad (۱۷.۷)$$

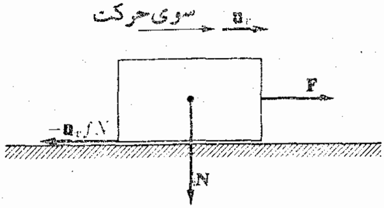
نیروی مالش لغزشی همیشه با حرکت جسم مخالفت می‌کند و در نتیجه در سوی مخالف سرعت می‌باشد. می‌دانیم که با تقسیم بردار سرعت بر بزرگی آن، بردار یکا در راستای حرکت به‌دست می‌آید: $\mathbf{u}_v = \mathbf{v}/v$. می‌توان ازاین تعریف استفاده کرد و رابطهٔ (۱۷.۷) را به صورت برداری زیر نوشت:

$$\mathbf{F}_f = -\mathbf{u}_v fN.$$

به عنوان مثال، در مورد شکل (۱۰.۷) اگر سوی $\mathbf{F}$ نیروی مؤثر برای جابجا کردن جسم به سمت راست باشد (فرضاً ناشی از کشیدن ریسمانی که به آن وصل شده است)، نیروی برآیند افقی به سمت راست برابر است با $\mathbf{F} - \mathbf{u}_v fN$. با به‌کار گرفتن معادلهٔ (۱۵.۷)، معادلهٔ حرکت جسم به دست می آید:

---

1. cohesion 2. adhesion



شکل ۱۰.۷ . نیروی مالش با حرکت مخالفت می‌کند و به‌نیروی عمودی بستگی دارد.

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - \mathbf{u}_v fN.$$

معمولاً دو نوع ضریب مالش وجود دارد: ضریب ایستایی[1] مالش، f_s، که هرگاه در نیروی عمودی ضرب شود، حداقل نیروی لازم را برای به‌حرکت در آوردن نسبی دوجسم در حال تماس و درحالت سکون نسبت را به‌هم به‌دست می‌دهد. ضریب جنبشی[2] مالش، f_k، که اگر آن را در نیروی عمودی ضرب کنیم نیروی لازم برای نگهداری دو جسم در حرکت نسبی یکنواخت به دست می‌آید. از آزمایشهایی که تا کنون روی مواد مختلف انجام گرفته ثابت شده است که f_s بزرگتر از f_k است. در جدول ۱.۷ مقادیر f_s و f_k برای چند جسم داده شده‌اند.

جدول ۱.۷. ضرایب مالش (سطحهای خشك)*

مواد	f_s	f_k
فولاد روی فولاد (سخت)	۰٫۷۸	۰٫۴۲
فولاد روی فولاد (نرم)	۰٫۷۴	۰٫۵۷
سرب روی فولاد (نرم)	۰٫۹۵	۰٫۹۵
مس روی فولاد (نرم)	۰٫۵۳	۰٫۳۶
نیکل روی نیکل	۱٫۱۰	۰٫۵۳
چدن روی چدن	۱٫۱۰	۰٫۱۵
تفلن روی تفلن (یا روی فولاد)	۰٫۰۴	۰٫۰۴

* این عددها را باید فقط به عنوان مقادیر متوسط پذیرفت، زیرا ضرایب مالش کمیتهای ماکروسکوپیکی هستند که به ویژگیهای میکروسکوپیك دو ماده بستگی دارند، بنابراین درمقادیر آنها کاهشها یا افزایشهای زیادی مشاهده می‌شود.

1. static coeffcent
2. kinetic coefficient

مالش یک مفهوم آماری است، زیرا نیروی $\mathbf{F}_f$ نمایش مجموع تعداد زیادی برهم‌کنش بین مولکولهای دو جسم در حال تماس می‌باشد. بدیهی است غیر ممکن است تک تک این برهم‌کنشهای مولکولی را به حساب آورد، بنابراین آنها را به صورت جمعی و با یک شیوهٔ تجربی به دست می‌آورند و به طور تقریبی با ضریب مالش نمایش می‌دهند.

درمثالهای زیرچگونگی حل مسایل دینامیک راکه درآنها نیروهای مالش بین جامدات دخالت دارند نشان می‌دهیم.

مثال ۶.۷ جسمی به جرم ۰٫۸۰ kg روی یک سطح شیب دار به شیب °۳۰ قرار دارد. چه نیرویی باید به جسم وارد شود تا (الف) جابجایی به سمت بالا باشد، (ب) جابجایی به سمت پایین باشد؟ در هر دو حالت حرکت جسم را یکبار یکنواخت و بار دوم با شتاب $0.10\ \mathrm{ms^{-2}}$ فرض کنید. ضریب مالش لغزشی روی صفحه ۰٫۳۰ است.

حل: ابتدا حرکت جسم به سمت بالا را بررسی می‌کنیم. نیروهای وارد بر جسم در شکل ۱۱.۷ (الف) رسم شده‌اند. این نیروها عبارتند از وزن $W = mg$ در راستای قایم به سمت پایین، نیروی اعمال شدهٔ F (که به سمت بالای سطح فرض می‌کنیم) ونیروی مالش F_f که همیشه در سوی مخالف حرکت است و در این حالت به سمت پایین خواهد بود.* اگر نیروی وزن در راستاهای موازی و عمود بر صفحهٔ حرکت تجزیه شود، با استفاده از رابطهٔ (۱۵.۷)، حرکت جسم در صفحه چنین نوشته می‌شود:

$$F - mg\sin\alpha - F_f = ma.$$

بنا به معادلهٔ (۱۷.۷) باید نوشت $F_f = fN$. ولی در شکل ۱۱.۷ (الف) مشاهده می‌شود که نیروی عمودی که جسم را روی صفحه می‌فشارد برابر $mg\cos\alpha$ است. در نتیجه $F_f = f\,mg\cos\alpha$، و معادلهٔ حرکت به صورت زیر درمی‌آید:

$$F - mg(\sin\alpha + f\cos\alpha) = ma.$$

از رابطهٔ فوق به دو صورت می‌توان استفاده کرد. با داشتن شتاب a می‌توانیم نیروی اعمال شدهٔ F را حساب کنیم. یا بر عکس، اگر نیروی F در دست باشد می‌توان شتاب a را پیدا کرد. در حالت اول داریم

$$F = m[\alpha + g(\sin\alpha + f\cos\alpha)].$$

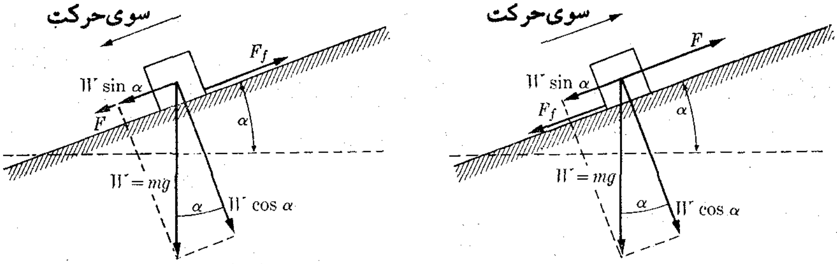
به‌عنوان مثال، اگر حرکت یکنواخت باشد، $a = 0$ است. با قرار دادن مقادیر عددی مربوط، به دست می‌آید $F = 5.95\ \mathrm{N}$. هنگامی که جسم با شتاب $0.10\ \mathrm{ms^{-2}}$ جابجا می‌شود داریم $F = 6.03\ \mathrm{N}$.

وقتی که جسم روی سطح شیب دار پایین می‌آید، نیروها مطابق آنچه که در شکل ۱۱.۷ (ب) آمده است خواهند بود. در اینجا سوی نیروی F به سمت پایین فرض شده

---

* نیروی دیگری که در شکل نشان داده نشده نیرویی است که سطح بر جسم وارد می‌کند. در این مسئله احتیاجی به نمایش این نیرو نیست.

است، ولی می‌توان سوی نیروی F را به سمت بالا نیز فرض کرد. به هر حال، چون F_f با حرکت مخالفت می‌کند سوی آن باید به سمت بالا باشد. اگر سوی پایین را به عنوان



(ب) جسم به‌طرف پایین حرکت می‌کند. (الف) جسم به‌طرف بالا حرکت می‌کند.

شکل ۱۱.۷

سوی مثبت انتخاب کنیم، دانشجو می‌تواند تحقیق کند که این بار معادلهٔ حرکت به صورت زیر است:

$$F + mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) = ma$$

یا

$$F = m[a - g(\sin\alpha - f\cos\alpha)].$$

اگر حرکت یکنواخت ($a = ۰$) باشد، با وارد کردن مقادیر عددی، به دست می‌آید $F = -۱٫۸۸\,\mathrm{N}$، در حالی که اگر جسم با شتاب $۰٫۱۰\,\mathrm{ms}^{-۲}$ به پایین بلغزد، خواهیم داشت $F = -۱٫۸۰\,\mathrm{N}$. علامت منفی نشان می‌دهد که سوی نیرو در هر دو حالت به سمت بالا است، نه آن سمتی که فرض کردیم، یعنی پایین.

به دانشجو توصیه می‌کنیم حرکت جسم را هنگامی که هیچگونه نیرویی به آن وارد نمی‌شود ($F = ۰$) تعیین و با توجه به نتیجهٔ حاصل، علامت منفی F را که قبلاً به دست آمد توجیه کند.

۱۰.۷ نیروهای مالش در شاره‌ها

هنگامی که یک جسم در شاره[1]ای، نظیر گاز یا آبگون، با سرعت نسبتاً کندی حرکت کند، می‌توان نیروی مالش را تقریباً متناسب با سرعت و در سوی مخالف حرکت در نظر گرفت. بنا بر این می‌نویسیم

$$\text{مالش شاره} = \mathbf{F}_f = -K\eta\mathbf{v}. \qquad (۱۸.۷)$$

ضریب K به شکل جسم بستگی دارد. به عنوان مثال، در مورد کره‌ای به شعاع R، یک محاسبهٔ دشوار به رابطهٔ زیر منجر می‌شود:

$$K = ۶\pi R. \qquad (۱۹.۷)$$

این رابطه به نام قانون استوکس[2] شناخته می‌شود. ضریب η به مالش داخلی شاره

1. fluid 2. Stokes' law

(یعنی نیروی مالش بین لایه‌های مختلف شاره که با سرعتهای گوناگون حرکت می‌کنند)، بستگی دارد. مالش داخلی را وشکسانی[1] (چسبندگی) و η را ضریب وشکسانی می‌نامند. در فصل ۲۴، تعریف کلی‌تری از ضریب وشکسانی خواهد آمد. ضریب وشکسانی در دستگاه یکاهای MKSC بر حسب $Nsm^{-۲}$ بیان می‌شود، که می‌توان آن را به طریق زیر به دست آورد. از قانون استوکس، معادلهٔ (۱۹.۷)، می‌بینیم که K برحسب m است (برای تمام اجسام و با هرشکلی که باشند همین واحد به‌کار می‌رود). پس بنا برمعادلهٔ (۱۸.۷)، η باید برحسب $N/m(ms^{-۱})$ بیان شود که درست همان است که در بالا ذکر شد. با یادآوری اینکه $N = mkgs^{-۲}$ است، می‌توان وشکسانی را برحسب $m^{-۱}kgs^{-۱}$ نیز بیان‌کرد، همچنین وشکسانی با $cm^{-۱}gs^{-۱}$ نیز بیان می‌شود که آن را پواز[2] می‌نامند و با علامت اختصاری P نشان می‌دهند. یک پواز برابر یک دهم یکای وشکسانی در دستگاه یکاهای MKSC است، زیرا

$$۱m^{-۱}kgs^{-۱} = (۱۰^۲cm)^{-۱}(۱۰^۳g)s^{-۱} = ۱۰cm^{-۱}gs^{-۱} = ۱۰P.$$

ضریب‌وشکسانی آبگونها با افزایش‌دما کاهش‌می‌یابد، درصورتی‌که‌درگازها ضریب‌وشکسانی با افزایش دما افزایش می‌یابد. در جدول ۲.۷ ضریب وشکسانی چند شاره ذکر شده است.

جدول ۲.۷. ضرایب وشکسانی، برحسب پواز*

آبگون	$\eta \times ۱۰^۲$	گاز	$\eta \times ۱۰^۴$
آب (۰°C)	۱٫۷۹۲	هوا (۰°C)	۱٫۷۱
آب	۱٫۰۰۵	هوا	۱٫۸۱
آب (۴۰°C)	۰٫۶۵۶	هوا (۴۰°C)	۱٫۹۰
گلیسیرین	۸٫۳۳	هیدروژن	۰٫۹۳
روغن کرچک	۹٫۸۶	آمونیاک	۰٫۹۷
الکل	۰٫۳۶۷	گازکربنیک	۱٫۴۶

وقتی که جسمی در داخل یک شارهٔ وشکسان تحت اثر نیروی $\mathbf{F}$ حرکت می‌کند، نیروی برآیند برابر است با $\mathbf{F} - K\eta\mathbf{v}$ و معادلهٔ حرکت به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - K\eta\mathbf{v}. \qquad (۲۰.۷)$$

اگر $\mathbf{F}$ ثابت فرض شود، شتاب $\mathbf{a}$ موجب افزایش مداوم $\mathbf{v}$ و زیاد شدن مالش شاره می‌گردد، به گونه‌ای که بالاخره سمت راست معادله برابر صفر می‌شود. در این صورت، شتاب نیز برابر صفر می‌شود و دیگر برای سرعت افزایشی وجود نخواهد داشت، زیرا مالش شاره

1. viscosity 2. poise

* بجز موارد ذکر شده، تمام اندازه‌ها در دمای ۲۰°C هستند.

با نیروی اعمال شده کاملاً خنثی می‌شود. جسم در سوی نیرو با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. این سرعت را سرعت حد یا سرعت نهایی[1] می‌نامند که برابر است با

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{F}/K\eta. \qquad (۲۱.۷)$$

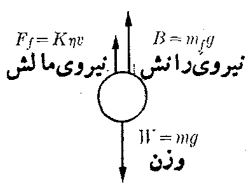
بنا بر این سرعت حد به η و K یعنی به وشکسانی شاره و شکل جسم متحرک بستگی دارد. در سقوط آزاد تحت تأثیر نیروی گرانی $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$، معادلهٔ (۲۱.۷) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\mathbf{v}_L = \frac{m\mathbf{g}}{K\eta}. \qquad (۲۲.۷)$$

در معادلهٔ (۲۲.۷) باید نیروی رانش[2] شاره را درنظر گرفت و آن را تصحیح کرد. بنا به اصل ارشمیدس نیروی رانش برابر است با وزن شارهٔ جابجا شده توسط جسم. اگر m_f جرم شارهٔ جابجا شده به وسیلهٔ جسم باشد، وزن آن برابر می‌شود با $m_f\mathbf{g}$ به‌گونه‌ای که نیروی رانش به سمت بالا و برابر است با $\mathbf{B} = -m_f\mathbf{g}$ و نیروی مؤثر به سمت پایین برابر می‌شود با $m\mathbf{g} - m_f\mathbf{g} = (m - m_f)\,\mathbf{g}$. از اینجا، به‌جای معادلهٔ (۲۲.۷) به دست می‌آید

$$\mathbf{v}_L = \frac{(m - m_f)\mathbf{g}}{K\eta}. \qquad (۲۳.۷)$$

سه نیروی وارد برجسم، در این حالت، درشکل ۱۲.۷ نشان داده شده‌اند. برای اجسام با ابعاد خیلی بزرگ و سرعتهای بالا، نیروی مالش متناسب با توانهای بالاتر سرعت می‌باشد و بحث بند پیش برای تشریح پدیده‌های فیزیکی کافی نیست.



شکل ۱۲.۷. نیروهای وارد برجسمی که در داخل یک شاره سقوط می‌کند.

مثال ۷.۷. سرعت حد یک قطره باران را پیدا کنید. قطر قطره را $۱۰^{-۳}\mathrm{m}$ وچگالی هوا نسبت به آب را مساوی $۱٫۳۰ \times ۱۰^{-۳}$ فرض کنید.

حل: به فرض اینکه قطره‌های باران‌کروی وشعاع آنها r باشد، با به‌کار بردن معادلهٔ (۱.۱)، جرم هرقطره برابر می‌شود با

$$m = \rho V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ \rho$$

که درآن ρ چگالی آب است. اگر دراین مسئله چگالی شاره را (که دراینجا هواست) با ρ_f نشان دهیم، داریم

1. limiting (terminal) velocity 2. buoyancy

$$m_f = \rho_f V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ \rho_f$$

و ازآنجا

$$m - m_f = \frac{۴}{۳}\pi r^۳(\rho - \rho_f).$$

چون قطره‌های باران کروی هستند ازمعادلهٔ (۱۹.۷) داریم $K = ۶\pi r$. با به‌کار بستن معادلهٔ (۲۳.۷)، برای سرعت حد به دست می‌آید

$$v_L = \frac{۲(\rho - \rho_f) r^۲ g}{۹\eta}.$$

از جایگذاری مقادیر عددی $\eta = ۱٫۸۱ \times ۱۰^{-۵}\,\mathrm{Nsm^{-۲}}$ و $\rho = ۱۰^۳\,\mathrm{kgm^{-۱}}$، به دست می‌آوریم $v_L = ۳۰\,\mathrm{ms^{-۱}}$ یا تقریباً $۱۰۷\,\mathrm{km\,hr^{-۱}}$. سرعت نهایی یک قطرهٔ درشت، با توجه به آنچه که در بند قبل ازاین مثال ذکر شد، نمی‌تواند خیلی متفاوت‌تر از این باشد.

مثال ۸.۷. سرعت ذره‌ای را که در داخل شارهٔ وشکسانی جابجا می‌شود به صورت تابعی از زمان تعیین کنید. فرض کنید معادلهٔ (۲۰.۷) برقرار است ونیرو ثابت و حرکت در خط مستقیم صورت می‌گیرد.

حل: چون حرکت مستقیم‌الخط است، با قراردادن $a = dv/dt$ در معادلهٔ (۲۰.۷) می‌توان نوشت

$$m\frac{dv}{dt} = F - K\eta v$$

و ازآنجا

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{K\eta}{m}\left(v - \frac{F}{K\eta}\right).$$

با جدا کردن متغیرها و انتگرال‌گیری به دست می‌آید

$$\int_{v_۰}^{v}\frac{dv}{v - F/K\eta} = -\frac{K\eta}{m}\int_۰^t dt$$

یا

$$\ln\left(v - \frac{F}{K\eta}\right) - \ln\left(v_۰ - \frac{F}{K\eta}\right) = -\frac{K\eta}{m}t.$$

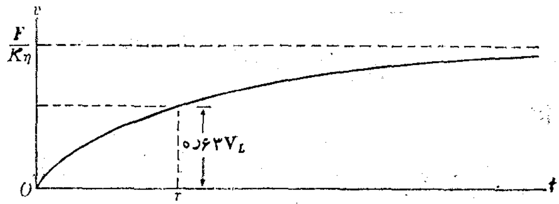
با مراجعه به معادلهٔ (پ.۱۸)* که درآن $\ln e^x = x$ است، به دست می‌آید

☆ رجوع کنید به پیوست ریاضی درپایان کتاب.

$$v = \frac{F}{K\eta} + \left(v_{\circ} - \frac{F}{K\eta}\right)^{-(K\eta/m)t}.$$

جملهٔ دوم خیلی سریع کاهش می‌یابد و خیلی زود قابل صرفنظر کردن می‌شود، در نتیجه سرعت ثابت مانده و برابر $F/K\eta$ می‌شود که با معادلهٔ (۲۱.۷) مطابقت دارد. به عبارت دیگر، سرعت حد مستقل ازسرعت اولیه است. اگر $v_{\circ} = \circ$ باشد، داریم

$$v = \frac{F}{K\eta}(1 - e^{-(K\eta/m)t}).$$



شکل ۱۳.۷. نمودار سرعت برحسب زمان برای جسمی که دریک شارهٔ وشکسان سقوط می‌کند.

در شکل ۱۳.۷ نمودار تغییر سرعت v برحسب t رسم شده است. زمان واهلش[1] با $\tau = m/K\eta$ تعریف می‌شود. این زمانی است که درانتهای آن v برابر ۶۳٪v_L می‌شود، چنانکه دانشجو خود می‌تواند مستقیماً آن را تحقیق کند. به دانشجو توصیه می‌کنیم که محاسبه را ادامه دهد و با به‌کار بردن نتیجهٔ به دست آمده برای v، مسافت پیموده شده را برحسب زمان وهمچنین مسافت پیموده شده مربوط به زمان τ را حساب کند.

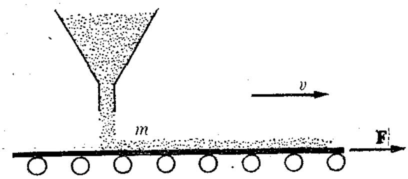
۱۱.۷ دستگاههای با جرم متغیر

بخش اعظم دستگاههای فیزیکی را می‌توان با جرم ثابت درنظر گرفت، با وجود این، در بعض موارد، جرم ثابت نیست. مثال خیلی ساده یک قطرهٔ باران است. هنگام سقوط قطره، احتمال دارد بخار آب روی آن بنشیند یا مقداری ازآب آن تبخیر شود، که درهر دوحالت جرم قطره تغییر می‌کند. فرض کنیم جرم قطره هنگامی که با سرعت $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند برابر m باشد و بخار آب که دارای سرعت $\mathbf{v}_{\circ}$ است، به میزان dm/dt روی آن چگالیده شود. آهنگ کل تغییر اندازه حرکت برابر است با مجموع $m\,d\mathbf{v}/dt$، که مربوط به شتاب قطره است، و $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\circ})(dm/dt)$ که ازافزایش اندازه حرکت بخار آب ناشی می‌شود. بنا براین، با استفاده ازمعادلهٔ (۱۴.۷)، معادلهٔ حرکت قطره عبارت می‌شود از

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\circ}).$$

1. relaxation time

برای حل این معادله، لازم است فرضهایی را روی چگونگی تغییر جرم با زمان بپذیریم.
تسمهٔ نقاله‌ای که دریک سرآن بار می‌گذارند و (یا) درسر دیگرآن را تخلیه می‌کنند، نمونهٔ دیگری ازجرم متغیراست. به‌عنوان مثال، تسمهٔ شکل ۱۴.۷ را درنظر می‌گیریم، که در آن باری به میزان $dm/dt\,\mathrm{kgs}^{-1}$ به‌طورمداوم روی تسمهٔ متحرک ریخته می‌شود. دستگاه



شکل ۱۴.۷

با سرعت ثابت $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند و برای جابجا کردن تسمه نیروی $\mathbf{F}$ بـه آن وارد می‌شود. اگر M جـرم تسمه و m جرم جسمی باشد کـه در لحظهٔ t روی تسمه قرار دارد، انـدازه‌حرکت کل دستگاه دراین لحظه برابر است بـا $P = (M + m)v$. بنابراین نیروی وارد برتسمه برابر می‌شود با

$$F = \frac{dP}{dt} = v\,\frac{dm}{dt}.$$

توجه داشته باشید که دراین حالت نیرو منحصراً به تغییر جرم مربوط می‌شود نه تغییر سرعت.
شاید موشک جالبترین مثال ازاین نوع باشد، زیرا مصرف سوخت باعث‌کاهش جرم موشک می‌شود. درمثال زیر به تجزیه و تحلیل دینامیک یک موشک می‌پردازیم.

مثال ۹.۷. در حرکت یک موشک بحث کنید.

حل: موشک پرتابه‌ای است که به جای آنکه مانـنـد گلولهٔ توپ ضربـهٔ اولیهٔ حاصل از انبساط گازهای داخلی خود رادریافت کند، به وسیلهٔ یک نیروی دایم ناشی از فرارگازهای حاصل از احتراق مواد سوختی خود موشک، به سمت جلو رانده می‌شود. در لحظهٔ پرتاب موشک دارای مقدار معینی مواد سوختی است که بتدریج مصرف می‌شود و در نتیجه جرم آن رو به کاهش می‌گذارد.
سرعت موشک نسبت به‌یک دستگاه لخت را $\mathbf{v}$ می‌نامیم. دراینجا زمین را با تقریب کافی می‌توان دستگاه لخت فرض کرد. فرض کنیم $\mathbf{v}'$ نیـز سرعت خـروج گازها نسبت به زمین باشد. دراین صورت سرعت خروج گازها نسبت به‌موشک برابر می‌شود با

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}' - \mathbf{v}.$$

این سرعت همیشه درسوی مخالف $\mathbf{v}$ و معمولا ثابت است. در هـر لحظه، جـرم مـوشک وسوخت‌آن را m فرض می‌کنیم. درمدت زمان خیلی کوتاه dt، جرم دستگاه موشک ومواد سوختی به مقدار کمی، یعنی به اندازهٔ dm تغییر می‌کند. dm منفی است زیـرا جرم کاهش

می‌یابد. درهمین فاصله زمانی سرعت موشک به اندازهٔ $d\mathbf{v}$ تغییر می‌کند. اندازه حرکت دستگاه در لحظهٔ t برابر $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ است. چون $dm -$ مقدار مثبت جرم گازهای خارج شده است، اندازه حرکت در لحظهٔ $t + dt$ برابر است با

$$\mathbf{p}' = \underbrace{(m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v})}_{\text{موشک}} + \underbrace{(-dm)\mathbf{v}'}_{\text{گاز}}$$
$$= m\mathbf{v} + m\,d\mathbf{v} - (\mathbf{v}' - \mathbf{v})dm$$

یا

$$\mathbf{p}' = m\mathbf{v} + m\,d\mathbf{v} - \mathbf{v}_e dm.$$

در رابطهٔ فوق از جملهٔ کوچک مرتبه دوم $dm\,d\mathbf{v}$ صرف نظر شده است. تغییر اندازه حرکت در مدت dt برابر می‌شود با

$$d\mathbf{p} = \mathbf{p}' - \mathbf{p} = m d\mathbf{v} - \mathbf{v}_e dm$$

و تغییر اندازه حرکت در واحد زمان برابر است با

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}_e \frac{dm}{dt}.$$

اگر $\mathbf{F}$ نیروی خارجی وارد برموشک باشد، به موجب معادلهٔ (۱۲.۷)، معادلهٔ حرکت آن چنین می‌شود:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{v}_e \frac{dm}{dt} = \mathbf{F}. \qquad (۲۴.۷)$$

غالباً جملهٔ دوم سمت چپ معادلهٔ (۲۴.۷) را نیروی پیشران[1] موشک می‌نامند، زیرا برابر است با «نیرویی» که از فرارگازها فراهم می‌شود. برای‌حل‌این معادله، باید فرضی‌روی $\mathbf{v}_e$ بشود. معمولا $\mathbf{v}_e$ را ثابت فرض می‌کنند. با چشم پوشی از مقاومت هوا و تغییر شتاب گرانی باارتفاع، می‌توان نوشت $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$، درنتیجه معادلهٔ (۲۴.۷) به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{v}_e}{m}\frac{dm}{dt} = \mathbf{g}. \qquad (۲۵.۷)$$

برای سهولت، حرکت را در راستای قایم در نظر می‌گیریم. دراین صورت $\mathbf{v}$ به سمت بالا و $\mathbf{v}_e$ و $\mathbf{g}$ به سمت پایین است و معادلهٔ (۲۵.۷) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{dv}{dt} - \frac{v_e}{m}\frac{dm}{dt} = -g.$$

با ضرب طرفین در dt و با انتگرال گیری ازآغاز حرکت $(t = ۰)$، که درآن سرعت $v_۰$ و جرم $m_۰$ است، تا لحظهٔ اختیاری t، داریم

1. thrust

$$\int_{v_\circ}^{v} dv + v_e \int_{m_\circ}^{m} \frac{dm}{m} = -g \int_{\circ}^{t} dt.$$

در نتیجه

$$v - v_\circ + v_e \ln \frac{m}{m_\circ} = -gt$$

یا

$$v = v_\circ + v_e \ln \frac{m_\circ}{m} - gt. \qquad (۲۶.۷)$$

اگر t زمان لازم برای مصرف تمام سوخت باشد، دراین صورت، درمعادلهٔ (۲۶.۷) m جرم نهایی و v بیشینهٔ سرعتی است که موشک به‌آن می‌رسد. معمولا $v_\circ = ۰$ و جملهٔ آخر (در بیشتر موارد) قابل اغماض است. به عنوان مثال، اگر جرم اولیهٔ موشکی $m_\circ = ۳۰۰۰$ ton و جرم نهایی آن پس از تمام شدن مواد سوختنی $m = ۲۷۸۰$ ton باشد و گاز با آهنگ ۱۲۹۰ kg درثانیه خارج شود، دراین‌صورت $t = ۱۵۵$ s به دست می‌آید. اگر سرعت خروج گاز را $۵۵۰۰۰\ \mathrm{ms^{-۱}}$ و $v_\circ = ۰$ فرض کنیم، طبقهٔ اول موشک حداکثر به سرعت زیر می‌رسد:

$$\begin{aligned} v &= ۵۵۰۰۰ \ln \frac{۳۰۰۰}{۲۷۸۰}\,\mathrm{ms^{-۱}} - (۹٫۸\,\mathrm{ms^{-۲}})\,(۱۵۵\,\mathrm{s}) \\ &= (۵۵۰۰۰ \ln ۱٫۰۸ - ۱۵۲۰)\mathrm{ms^{-۱}} = ۲۷۱۰\mathrm{ms^{-۱}} \end{aligned}$$

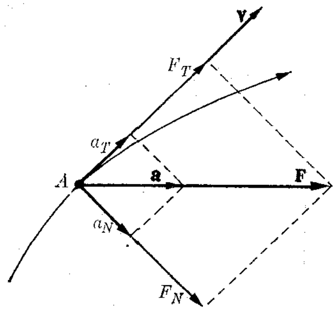
این سرعت تقریباً معادل $۹۷۵۰\ \mathrm{kmhr^{-۱}}$ است. این مشخصات مربوط به‌موشک سانتور[۱] است که دارای ۵ موتور است و هر موتور آن می‌تواند هنگام بلند شدن از زمین ۷٫۰ تن نیروی پیشران به موشک وارد کند.

۱۲.۷ حرکت منحنی الخط

در مثالهایی که تاکنون آوردیم در مورد حرکت مستقیم الخط بحث کردیم. حال حرکت منحنی الخط را در نظر می‌گیریم. اگر نیرو در راستای سرعت باشد، حرکت در خط مستقیم صورت می‌گیرد. برای به وجود آمدن حرکت منحنی الخط لازم است نیروی برآیند با راستای سرعت زاویه‌ای بسازد به گونه‌ای که شتاب، مؤلفه‌ای در راستای عمود برسرعت داشته باشد تا بدین طریق بتوان تغییرراستای حرکت را توجیه کرد. ازطرف دیگر، یادآور می‌شویم که (اگر جرم ثابت باشد) شتاب موازی نیرو است. رابطهٔ بین این بردارهای مختلف در شکل ۱۵.۷ نشان داده شده است.

از رابطهٔ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ و در معادلهٔ (۴۴.۵) نتیجه می‌گیریم که مؤلفهٔ نیرو در امتداد مماس بر مسیر، یا نیروی مماسی، برابر است با

1. Centaur



شکل ۱۵.۷. رابطهٔ بین مؤلفه‌های مماسی وقایم نیرو وشتاب دریک حرکت منحنی‌الخط

$$F_T = ma_T \quad \text{یا} \quad F_T = m\frac{dv}{dt} \tag{۲۷.۷}$$

و مؤلفهٔ نیرو درامتداد عمود برمسیر، یا نیروی عمودی یا مرکزگرا[1]، برابر است با

$$F_N = ma_N \quad \text{یا} \quad F_N = \frac{mv^2}{\rho} \tag{۲۸.۷}$$

کــه درآن ρ شعاع انحنای مسیر است. نیروی مرکزگرا همیشه به سمت مرکز انحنای مسیر است. نیروی مماسی موجب تغییر بزرگی سرعت و نیروی مرکزگرا موجب تغییر راستای آن می‌شود. اگر نیروی مماسی برابر صفر باشد، شتاب مماسی وجود ندارد، و حرکت دایره‌ای یکنواخت خواهد بود. اگر نیروی مرکزگرا برابر صفر باشد، شتاب عمودی وجود ندارد، و حرکت مستقیم‌الخط می‌باشد.

درحالت ویژهٔ حرکت دایره‌ای، ρ برابر شعاع دایره R و $v = \omega R$ است، به‌طوری که نیرو برابر می‌شود با

$$F_N = m\omega^2 R. \tag{۲۹.۷}$$

دریک حرکت دایره‌ای یکنواخت تنها شتاب a_N وجود دارد، که آن را نیز می‌توان بــا استفاده از معادلهٔ (۵۸.۵) به صورت برداری چنین نوشت: $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$. در نتیجه $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (m\mathbf{v})$، و چون $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ است، بنابراین داریم

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}. \tag{۳۰.۷}$$

این یک رابطهٔ ریاضی مفید بین نیرو، سرعت زاویه‌ای و اندازه حرکت یک ذره درحرکت دایره‌ای یکنواخت است.

گاهی اوقات راحت‌تر است ازمؤلفه‌های قایم $\mathbf{F}$ استفاده شود (شکل۱۶.۷). به‌عنوان مثال، درمورد حرکت درصفحه، معادلهٔ برداری $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ به دومعادلهٔ زیر تجزیه می‌شود:

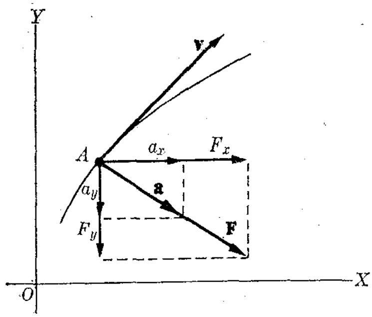
---

1. normal (centripetal) force

$$F_x = ma_x \quad و \quad F_y = ma_y$$

یا

$$F_x = m\frac{dv_x}{dt} \quad و \quad F_y = m\frac{dv_y}{dt} \qquad (۳۱.۷)$$



شکل ۱۶.۷. رابطهٔ بین مؤلفه‌های نیرو و شتاب درحرکت منحنی‌الخط، درمختصات قایم

با انتگرال‌گیری ازاین معادله‌ها، می‌توان سرعت و مکان ذره را درهرلحظه به‌دست آورد.

درحالت‌کلی، اگر جرم متغیر موردنظر باشد، باید رابطهٔ $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ را به‌کار برد. چون $\mathbf{p}$ موازی باسرعت است، مماس برمسیرمی‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت $\mathbf{p} = \mathbf{u}_T p$، و با استفاده ازمعادلهٔ (۴۲.۵)، داریم

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{u}_T\frac{dp}{dt} + p\frac{d\mathbf{u}_T}{dt} = \mathbf{u}_T\frac{dp}{dt} + \mathbf{u}_N\frac{vp}{\rho}.$$

بنابراین به‌جای معادله‌های (۲۷.۷) و (۲۸.۷)، داریم

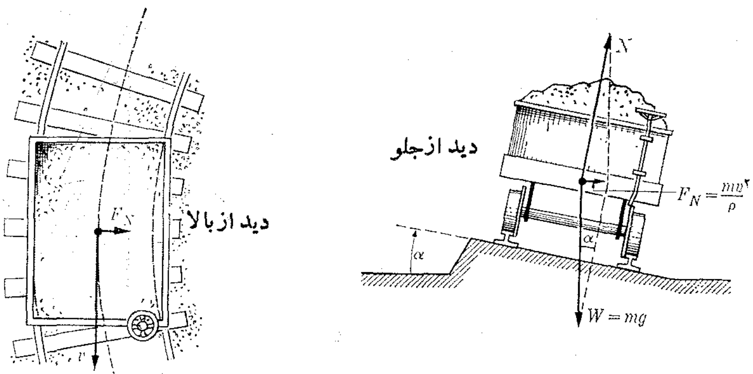
$$F_T = \frac{dp}{dt} \quad و \quad F_N = \frac{pv}{\rho}.$$

مثال ۱۰.۷. درپیچ راه‌آهن و جاده‌ها قسمت خارج را بلندترمی‌کنند تا برای خودروهایی که از پیچ می‌گذرند نیروی مرکزگرای لازم را ایجاد کنند. زاویهٔ برآمدگی یا شیب را برحسب سرعت خودرو درطول پیچ پیدا کنید.

حل: شکل ۱۷.۷ چگونگی ساختن پیچ راهها را نشان می‌دهد؛ دراندازهٔ زاویه‌ها مبالغه شده است. نیروهای وارد براتومبیل عبارتند از وزن $W = mg$ و نیروی عمودی واکنش جاده N. برآیند نیروها F_N باید برای ایجاد نیروی مرکزگرایی که از رابطهٔ (۲۸.۷) به‌دست می‌آید کافی باشد. بنابراین داریم $F_N = mv^2/\rho$ که درآن ρ شعاع پیچ است. دراین صورت، از روی شکل به‌دست می‌آید

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_N}{W} = \frac{v^2}{\rho g}.$$

بنا براین، نتیجهٔ حاصل به‌جرم خودرو بستگی ندارد. وقتی‌که α یک بار برای همیشه تعیین و تراورسها گذاشته شدند، این فرمول سرعت درستی را تعیین می‌کند کـه هرخودرو می‌تواند داشته باشد تا نیروهای جانبی به‌آن وارد نشود. بـرای سرعتهای کمتر ازاین یا کمی بیشتر، مسئله‌ای وجود ندارد، زیـرا جاده نیروی ترازمندی لازم را فراهم می‌آورد. ولی درسرعتها خیلی زیادتر، سرپیچها اتومبیل می‌کوشد ازجاده بیرون بجهد.



شکل ۱۷.۷. ترتیب ساختن پیچها برای به‌وجودآوردن نیروی مرکزگرا

مثال ۱۱.۷. جرم m را کـه توسط نخی به طول L ازنقطهٔ ثابتی آویزان است با سرعت زاویه‌ای ω دور محور قایم می‌چرخانیم. زاویهٔ نخ با قایم را پیدا کنید. این وسیله آونگ مخروطی[1] نام دارد.

حل: دستگاه درشکل ۱۸.۷ نشان داده شده است. جـرم A دور قایم OC جابجا می‌شود و دایره‌ای بـه شعاع $R = CA = OA\sin\alpha = L\sin\alpha$ رسم می‌کند. نیروهای وارد بـر A عبارتند از نیروی وزن $W = mg$ و کشش نخ F. برآیند این دونیرو، F_N، باید درست برابر نیروی مرکزگرا بـرای پیمودن دایـره باشد. بنا براین بـا استفاده از معادلهٔ (۲۹.۷) داریم

$$F_N = m\omega^2 R = m\omega^2 L\sin\alpha.$$

ازشکل پیداست که

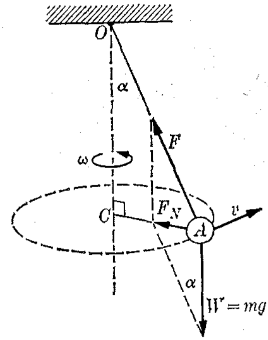
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_N}{W} = \frac{\omega^2 L\sin\alpha}{g}$$

یا چون $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ است، به‌دست می‌آید

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 L}.$$

1. conical pendulum

بنابراین هرچه سرعت بیشتر باشد زاویهٔ α بزرگتر می‌شود، چیزی که آزمایش نیز آن را تأیید می‌کند. به‌همین دلیل، مدتها آونگ مخروطی به‌عنوان تنظیم کنندهٔ سرعت درماشینهای بخار به‌کار می‌رفت، بدین ترتیب که هروقت سرعت از حد معینی که از پیش تعیین می‌شود تجاوز کند دریچهٔ ورود بخار را می‌بندد و هنگامی که پایین‌تر از این حد باشد دریچه را باز می‌کند.

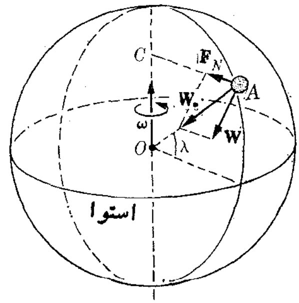


شکل ۱۸.۷. آونگ مخروطی

مثال ۱۲.۷. آثار چرخش زمین روی وزن یک جسم را تجزیه و تحلیل کنید.

حل: دربخش ۵.۶، ازنقطه نظر سینماتیکی، حرکت یک جسم را نسبت به یک چارچوب مرجع لخت که همراه زمین می‌چرخد بررسی کردیم. دراینجا همان مسئله را ازنظردینامیکی مورد بحث قرار می‌دهیم.

شکل ۱۹.۷ ذرهٔ A را در سطح زمین نشان می‌دهد. نیروی گرانشی ناشی از جاذبهٔ زمین را با $\mathbf{W}_\circ$ نشان می‌دهیم. اگر زمین دارای حرکت چرخشی نبود، شتاب هرجسم در نزدیکی سطح زمین برابر $\mathbf{g}_\circ = \mathbf{W}_\circ/m$ می‌بود. اکنون به سبب حرکت وضعی زمین،



شکل ۱۹.۷. اثرچرخش زمین روی وزن یک‌جسم

بخشی ازاین نیرو باید صرف به وجود آوردن نیروی مرکزگرای $\mathbf{F}_N$ شود که برای جابجا کردن A روی دایره‌ای به‌شعاع $CA = r\cos\lambda$، با سرعت زاویه‌ای ω لازم است. به‌گفتهٔ دیگر، با استفاده از معادلهٔ (۲۹.۷) داریم $F_N = m\omega^2 r\cos\lambda$. اختلاف $\mathbf{W}_\circ - \mathbf{F}_N$

نیروی خالص $\mathbf{W}$ را به‌دست می‌دهد که موجب جذب جسم به‌سمت پایین می‌شود. بنابراین شتاب گرانی مؤثر عبارت است از $\mathbf{g} = \mathbf{W}/m$. اگر A به‌وسیلهٔ نخی از نقطه‌ای آویزان شود، (مانند خط شاقول)، نخ راستای $\mathbf{W}$ را اختیار می‌کند. نیروی کششی نخ روی A نیز باید برابر $\mathbf{W}$ باشد. بنابراین، وقتی که فنری برای تعیین وزن یک جسم به کار می‌رود، نیروی $\mathbf{W}$ را اندازه می‌گیرد. فقط در قطبها و استواست که $\mathbf{W}_{\circ}$ و $\mathbf{W}$ در راستای هم قرار دارند و خط شاقول در راستای شعاعی است.

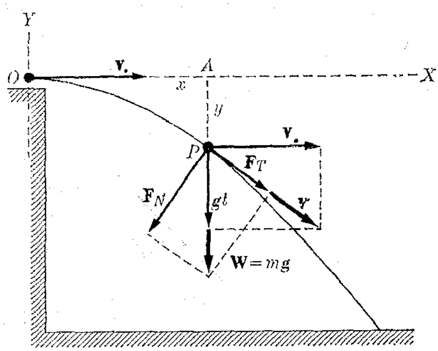
مثال ۱۳.۷. جسمی از بلندی یک ساختمان به‌طور افقی پرتاب می‌شود. نیروهای عمودی و مماسی وارد برجسم را حساب کنید.

حل: اگر جسم با سرعت اولیهٔ افقی $v_{\circ}$ پرتاب شود (شکل ۲۰.۷)، سرعت افقی در نقطهٔ P نیز برابر $v_{\circ}$ ولی سرعت قایم آن gt است، که درآن t زمانی است که طول کشیده تا جسم به‌اندازهٔ فاصلهٔ y پایین بیاید، یا زمانی است‌که برای‌پیمودن فاصلهٔ افقی $x = v_{\circ}t$ لازم دارد. بنابراین سرعت کل پرتابه برابر است با

$$v = \sqrt{v_{\circ}^{2} + g^{2}t^{2}}.$$

درنتیجه، بنا به‌معادلهٔ (۲۷.۷) نیروی مماسی برابر است با

$$F_T = m\frac{dv}{dt} = \frac{mg^{2}t}{\sqrt{v_{\circ}^{2}+g^{2}t^{2}}}.$$



شکل ۲۰.۷

برای پیدا کردن نیروی مرکزگرا می‌توان ازمعادلهٔ (۲۸.۷) استفاده کرد، ولی دراین‌صورت لازم است قبلا شعاع انحنای مسیر که دراینجا یک سهمی است معلوم باشد. دراین مورد از این محاسبه اجتناب می‌کنیم، زیرا می‌دانیم نیروی برآیند برابر است با

$$W = mg = \sqrt{F_T^{2} + F_N^{2}}.$$

بنابراین

$$F_N = \sqrt{W^2 - F_T^2} = \frac{mgv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}.$$

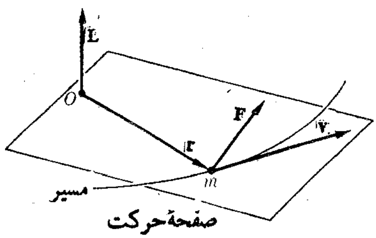
۱۳.۷ اندازه حرکت زاویه‌ای

اندازه حرکت زاویه‌ای[1] ذره‌ای به جرم m که با سرعت $\mathbf{v}$ (بنابراین با اندازه حرکت $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$) جابجا می‌شود نسبت به نقطهٔ O (شکل ۲۱.۷) با حاصلضرب برداری زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

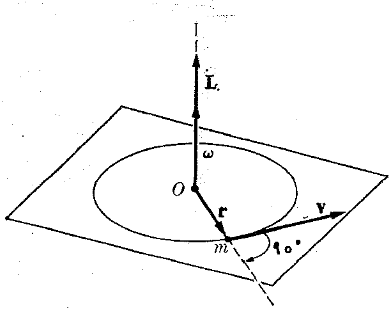
یا

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}. \qquad (۳۲.۷)$$



شکل ۲۱.۷. اندازه حرکت زاویه‌ای یک ذره

بنابراین اندازه حرکت زاویه‌ای برداری است عمود برسطح حاصل از $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$. به طور کلی همراه با حرکت ذره، بزرگی و راستای اندازه حرکت زاویه‌ای آن نیز تغییر می‌کند. ولی



شکل ۲۲.۷. رابطهٔ برداری بین سرعت زاویه‌ای و اندازه حرکت زاویه‌ای در یک حرکت دایره‌ای

اگر ذره درصفحه جابجا شود و نقطهٔ O در این صفحه باشد، راستای اندازه حرکت زاویه‌ای بدون تغییر، یعنی عمود برصفحه باقی می‌ماند، زیرا $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ هردو درصفحه می‌باشند. درحالت حرکت دایره‌ای (شکل ۲۲.۷)، اگر O مرکز دایره باشد، بردارهای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{r}$ برهم عمودندو

1. angular momentum

$v = \omega r$ است، درنتیجه

$$L = mrv = mr^{2}\omega. \tag{۳۳.۷}$$

راستا و سوی $\mathbf{L}$ و $\boldsymbol{\omega}$ یکی است، بنابراین معادلهٔ (۳۳.۷) را می‌توان به صورت برداری زیر نوشت:

$$\mathbf{L} = mr^{2}\boldsymbol{\omega}. \tag{۳۴.۷}$$

اگرحرکت درصفحه، دایره‌ای نبوده، ولی‌منحنی‌الخط باشد، می‌توان سرعت را به‌مؤلفه‌های شعاعی و عمود بر راستای شعاع (عرضی)، مطابق آنچه که در بخش ۱۱.۵ توضیح داده شد، تجزیه کرد. در نتیجه به دست می‌آید $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta$ (شکل ۲۳.۷). در نتیجه اندازه حرکت زاویه‌ای را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times (\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta) = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}_\theta$$

زیرا $\mathbf{r} \times \mathbf{v}_r = 0$ است (دوبردار موازی‌اند). بنابراین بزرگی $\mathbf{L}$ برابر می‌شود با $L = mrv_\theta$. بالاخره، چون بنا به‌معادلهٔ (۶۴.۵)، $v_\theta = r(d\theta/dt)$ است، می‌توان نوشت

$$L = mr^{2}\frac{d\theta}{dt}. \tag{۳۵.۷}$$

این رابطه هم‌ارز معادلهٔ (۳۳.۷) است که برای حرکت دایره‌ای به دست آوردیم، زیرا $\omega = d\theta/dt$ است، ولی درحالت کلی r ثابت نیست. با درنظرگرفتن معادلهٔ (۲۶.۳) در مورد حاصل‌ضرب برداری، اندازه حرکت‌زاویه‌ای یک‌ذره را می‌توان به‌صورت‌زیرنوشت:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

یا برحسب مؤلفه‌ها:

$$L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x. \tag{۳۶.۷}$$

باید توجه داشت که اگر حرکت درصفحه، مثلاً درصفحهٔ XY صورت بگیرد، داریم $z = 0$ و $p_z = 0$، به‌طوری که $L_x = L_y = 0$ و تنها مؤلفهٔ L_z وجود دارد. یعنی، همچنانکه قبلاً با استفاده از منطق دیگری نشان دادیم، اندازه حرکت زاویه‌ای برصفحه عمود است.

اکنون ازمعادلهٔ (۲۳.۷) نسبت به زمان مشتق می‌گیریم؛ به دست می‌آید

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \tag{۳۷.۷}$$

چون $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ و $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ همیشه موازی $\mathbf{v}$ است، داریم

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} = m\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$$

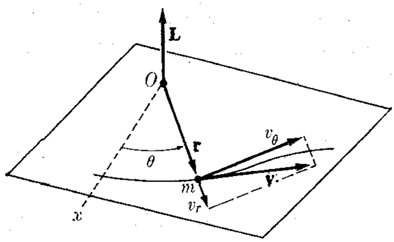
ازطرف دیگر، بنا به معادلهٔ (۱۲.۷)، $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ است. بنابراین معادلهٔ (۳۷.۷) به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

اگر به یاد داشته باشیم که بنا به تعریف (۵.۴) گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ نسبت به O برابر است با $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$، بالاخره به دست می‌آید

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}. \qquad (۳۸.۷)$$

باید توجه داشته باشیم این رابطه تنها زمانی درست است که $\boldsymbol{\tau}$ و $\mathbf{L}$ نسبت به یک نقطه اندازه‌گیری شوند.



شکل ۲۳.۷. رابطهٔ بین اندازه حرکت زاویه‌ای ومؤلفهٔ عرضی سرعت

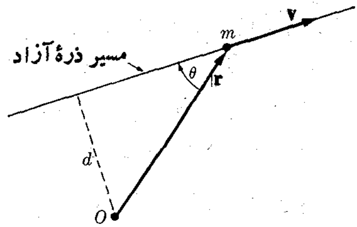
معادلهٔ (۳۸.۷) شباهت زیادی به معادلهٔ (۱۲.۷) دارد، که در آن اندازه حرکت زاویه‌ای $\mathbf{L}$ جانشین اندازه حرکت خطی $\mathbf{p}$ و گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ به جای $\mathbf{F}$ آمده است. این معادله یک رابطهٔ اساسی درمسایل مربوط به حرکت چرخشی است و بیان می‌کند که

مشتق اندازه حرکت زاویه‌ای ذره نسبت به زمان برابراست با گشتاور نیروی وارد برآن ذره.

بیان فوق حاکی ازآن است که تغییر $d\mathbf{L}$ دراندازه حرکت زاویه‌ای درفاصله زمانی کوتاه dt، موازی است با $\boldsymbol{\tau}$، گشتاور وارد برذره.

۱۴.۷ نیروهای مرکزی

اگر گشتاور وارد بر ذره برابر صفر باشد ($\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$). دراین صورت بنا به معادلهٔ (۳۸.۷) باید داشته باشیم $d\mathbf{L}/dt = 0$ یا $\mathbf{L} = \text{const}$ (بردار ثابت). بنابراین اگر گشتاور نیروهای وارد بر ذره برابر صفر باشد اندازه حرکت زاویه‌ای ذره ثابت است. واین شرط وقتی حاصل می‌شود که $\mathbf{F} = 0$، یعنی ذره آزاد باشد. ازشکل ۲۴.۷ داریم $L = mvr\sin\theta = mvd$ که درآن $d = r\sin\theta$ است. این کمیت ثابت است زیرا تمام سازه‌های وارد درآن ثابت هستند، همچنین مسیر ذرهٔ آزاد خط مستقیم است و سرعت آن تغییر نمی‌کند.



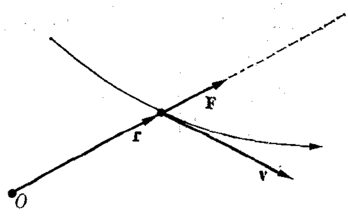
شکل ۲۴.۷. برای یک ذرهٔ آزاد اندازه حرکت زاویه‌ای ثابت است

اگر **F** و **r** موازی باشند، به عبارت دیگر، اگر راستای **F** از نقطهٔ O بگذرد. نیز شرط $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ حاصل است. نیرویی که راستای آن همیشه از نقطهٔ ثابتی بگذرد، نیروی مرکزی[1] نام دارد (شکل ۲۵.۷). بنابراین هنگامی که جسمی تحت تأثیر یک نیروی مرکزی حرکت می‌کند، اندازه حرکت زاویه‌ای آن ثابت باقی می‌ماند، عکس این مطلب نیز درست است. به بیان دیگر می‌توان گفت:

هنگامی که نیرو مرکزی باشد، اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به مرکز نیرو، یک ثابت حرکت است، و برعکس.

این نتیجهٔ بسیار اهمیت دارد زیرا بسیاری از نیروهای طبیعت مرکزی‌اند. به عنوان مثال، زمین براثر یک نیروی مرکزی که راستای آن همیشه به سمت مرکز خورشید است دور آن می‌گردد. بنابراین اندازه حرکت زاویه‌ای زمین نسبت به خورشید ثابت است. الکترون دراتم هیدروژن، اساساً براثر نیروی مرکزی ناشی از برهم‌کنش الکتروستاتیک با هسته حرکت می‌کند، و راستای این نیرو همیشه به سمت هسته است. بنابراین اندازه حرکت زاویه‌ای الکترون نسبت به هسته ثابت است.

دراتمهایی که دارای چندین الکترون هستند، نیروی وارد برهر الکترون دقیقاً مرکزی نیست، زیرا علاوه برهم‌کنش مرکزی با هسته، برهم‌کنشهایی نیز با سایر الکترونها وجود دارند. با وجود این، درحالت کلی، می‌توان نیروی میانگین مؤثر روی الکترون را مرکزی درنظر گرفت. دربعض هسته‌ها، با تقریب اول، می‌توان فرض کرد که عناصر تشکیل دهندهٔ آنها (پروتونها ونوترونها) تحت تأثیر نیروهای مرکزی میانگین حرکت می‌کنند.



شکل ۲۵.۷. دریک حرکت براثر نیروی مرکزی، اندازه حرکت زاویه‌ای ثابت است.

1. central force

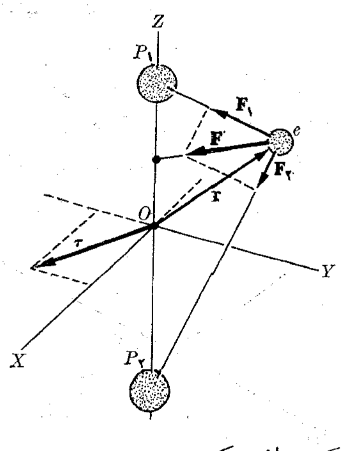
برعکس، در یک مولکول، نیروی وارد بر یک الکترون مرکزی نیست، زیرا این نیرو برآیند نیروهای جاذبهٔ حاصل از هسته‌های مختلف و نیروهای دافعهٔ ناشی از الکترونهای دیگر است. بنابراین اندازه حرکت زاویه‌ای الکترون ثابت نیست. در یک مولکول دواتمی وضع جالبی به وجود می‌آید (شکل ۲۶.۷). الکترون e تحت تأثیر نیروهای $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ با برآیند $\mathbf{F} = \mathbf{F}_۱ + \mathbf{F}_۲$ دور هسته‌های $P_۱$ و $P_۲$ می‌چرخد. نیروی برآیند $\mathbf{F}$ همیشه درصفحهٔ حاصل از $\mathbf{r} = \overrightarrow{Oe}$ وخط واصل بین دو هسته که محور Z می‌نامیم، قرار دارد. گشتاور برآیند روی الکترون نسبت به O، مرکز جرم مولکول، (اگر ازسایر برهم‌کنشهای الکترون چشم پوشی شود) عبارت است از

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_۱ + \mathbf{F}_۲) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

ازشکل ۲۶.۷ پیداست‌که این گشتاور برصفحهٔ حاصل ازبردار مکان $\mathbf{r}$ ومحور Z عمود است. بنابراین گشتاور درصفحهٔ XY قرار دارد، یعنی $\tau_z = ۰$. ازاینجا بنا به‌معادلهٔ (۳۸.۷) نتیجه می‌گیریم که $dL_z/dt = ۰$ و $L_z = \text{const}$. بنابراین، هرچندکه اندازه حرکت زاویه‌ای الکترون ثابت نیست، ولی مؤلفهٔ آن در راستای محور مولکول، یا محور Z، ثابت است. این نتیجه نه تنها درمورد مولکولهای دواتمی، بلکه تمام مولکولهای خطی، یا به صورت کلی‌تر، برای هرحرکتی تحت تأثیر نیرویی که همیشه یک محورثابت را قطع می‌کند، صادق است. چنین نیرویی نیروی محوری[1] نام دارد. بنابراین

> هنگامی که نیرو محوری باشد، مؤلفهٔ اندازه حرکت زاویه‌ای روی محور ثابت است.

این نتیجه درمطالعهٔ اتمها و مولکولها بسیار مفید است.



شکل ۲۶.۷. در حرکتی که بر اثر یک نیروی محوری صورت می‌گیرد، مؤلفهٔ اندازه‌ـ حرکت زاویه‌ای روی این محور، ثابت است.

1. axial force

حرکت ناشی از یک نیروی مـرکـزی همیشه در صفحه است، زیرا $\mathbf{L}$ ثابت است. بنابراین، با استفاده از معادلهٔ (۲۵.۷) داریم

$$r^{۲}\frac{d\theta}{dt} = \text{const.} \qquad (۳۹.۷)$$

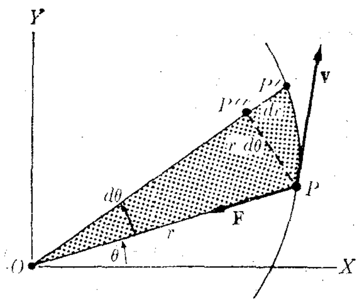
زمانی که ذره از نقطهٔ P به نقطهٔ P' جابجا می‌شود (شکل ۲۷.۷)، بردار شعاع $\mathbf{r}$، مساحت مثلث OPP' را، جاروب می‌کند. در نتیجه

$$dA = OPP' \text{ مساحت مثلث } = \frac{۱}{۲}r^{۲}d\theta$$

و مساحت جاروب شده در واحد زمان برابر است با

$$\frac{dA}{dt} = \frac{۱}{۲}r^{۲}\frac{d\theta}{dt}$$

با مقایسهٔ این نتیجه بـا معادلهٔ (۳۹.۷)، مشاهـده می‌شود کـه $dA/dt = \text{const}$، یعنی در هر حرکت بـراثر نیروی مرکـزی، بـردار شعاع ذره در مـدت زمانهای برابر، مساحتهای برابر را جاروب می‌کند. این نتیجه با توجه بـه ارتباط آن با کشف قوانین حرکت سیارات، دارای جنبهٔ تاریخی است، و بـه نام قانون دوم کپلر[1] شناخته می‌شود. در فصل ۱۳، هنگام بحث دربارهٔ حرکت سیارات یک بار دیگر آن را بتفصیل مورد بررسی قرار خواهیم داد.



شکل ۲۷.۷. براثر نیروهای مرکزی، بردار مکان درمدت زمانهای برابر، مساحتهای برابر را جاروب می‌کند.

مثال ۱۴.۷. درمورد پرتابهٔ مثال ۱۳.۷، اندازه حـرکت زاویـه‌ای و گشتاور را دور نقطهٔ O پیدا کنید، سپس درستی معادلهٔ (۳۸.۷) را تحقیق کنید.

حل: با انتخاب OX و OY مطابق آنچه که شکل ۲۰.۷ نشان می‌دهد، مختصات نقطهٔ P عبارت می‌شوند از $x = OA = v_{\circ}t$ و $y = AP = gt^{۲}/۲$ و مؤلفه‌های سرعت پرتابه در نقطهٔ P عبارتند از $v_x = v_{\circ}$ و $v_y = -gt$. با تـوجه بـه اینکه $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ است و با استفاده از رابطهٔ سوم معادله‌های (۳۶.۷)، می‌توان نوشت

1. Kepler's second law

$$L_z = xp_y - yp_x = m(xv_y - yv_x) = -\frac{۱}{۲} mgv_\circ t^۲.$$

مؤلفه‌های نیروی وارد بر پرتابه درنقطهٔ P عبارتند از $F_x = \circ$ و $F_y = -mg$. بنابراین با به کار بردن معادلهٔ (۸.۴) به دست می‌آید

$$\tau_z = xF_y - yF_x = -mgv_\circ t.$$

دانشجو خود می‌تواند تحقیق‌کند که دراین حالت، $dL_z/dt = \tau_z$، و درنتیجه معادلهٔ (۳۸.۷) برقرار است.

مثال ۱۵.۷. اندازه حرکت زاویه‌ای زمین دور خورشید و نیز الکترون دور هسته در اتم هیدروژن را برآورد کنید. جهت سهولت حل مسئله، در هر دو مورد، برای اینکه بتوان روابط مربوط به شکل (۲۲.۷) را به‌کار برد، مدار حرکت را دایره فرض کنید.

حل: جرم زمین $۵٫۹۸ \times ۱۰^{۲۴}$ kg و فاصلهٔ میانگین آن از خورشید برابر $۱٫۴۹ \times ۱۰^{۱۱}$ m است. از تعریف ثانیه، که در بخش ۳.۲ آمده است، دورهٔ حرکت انتقالی زمین دور خورشید برابر است با $۳٫۱۶ \times ۱۰^۷$ s. بنابراین طبق معادلهٔ (۵۱.۵) سرعت زاویه‌ای میانگین زمین دور خورشید برابر می‌شود با

$$\omega = \frac{۲\pi}{P} = \frac{۲\pi}{۳٫۱۶ \times ۱۰^۷ \mathrm{s}} = ۱٫۹۸ \times ۱۰^{-۷} \mathrm{s}^{-۱}$$

درنتیجه، بنابه معادلهٔ (۳۳.۷)، اندازه حرکت زاویه‌ای زمین نسبت به‌خورشید برابراست با

$$L = m\omega r^۲ = (۵٫۹۸ \times ۱۰^{۲۴}\,\mathrm{kg})(۱٫۹۸ \times ۱۰^{-۷}\,\mathrm{s}^{-۱}) \times (۱٫۴۹ \times ۱۰^{۱۱}\,\mathrm{m})^۲ = ۲٫۶۷ \times ۱۰^{۴۰}\,\mathrm{m^۲ kg\, s^{-۱}}$$

از طرف دیگر، الکترون در اتم هیدروژن دارای جرم $۹٫۱۱ \times ۱۰^{-۳۱}$ kg و فاصلهٔ میانگین آن از هسته برابر $۵٫۲۹ \times ۱۰^{-۱۱}$ m و سرعت زاویه‌ای‌آن $۴٫۱۳ \times ۱۰^{۱۶}\mathrm{s}^{-۱}$ است. دراینجا نیز معادلهٔ (۳۳.۷) را به‌کار می‌بریم. برای اندازه حرکت زاویه‌ای الکترون دورهسته به دست می‌آید

$$L = m\omega r^۲ = (۹٫۱۱ \times ۱۰^{-۳۱}\,\mathrm{kg})(۴٫۱۳ \times ۱۰^{۱۶}\,\mathrm{s}^{-۱}) \times (۵٫۲۹ \times ۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{m})^۲ = ۱٫۰۵ \times ۱۰^{-۳۴}\,\mathrm{m^۲ kg\, s^{-۱}}$$

این عدد یکی از ثابتهای بسیار مهم فیزیک را تشکیل می‌دهد، و آن را با نماد $\hbar$ نشان می‌دهند و «h-تیره» می‌خوانند. اندازه‌حرکت زاویه‌ای اتمها وذرات بنیادی معمولا با یکای $\hbar$ بیان می‌شود. کمیت $h = ۲\pi\hbar$ ثابت پلانک[1] خوانده می‌شود.

قطعاً دانشجو به بی‌تناسبی سترگی که در مقدارکمیتهای فیزیکی دردومورد بالا وجود دارد، توجه می‌کند و از خود می‌پرسد آیا یک قانون می‌تواند بر دو مورد حاکم باشد؟ درشرایط حاضر به این سؤال پاسخ مثبت می‌دهیم، چون در هر دو مورد نیروی مرکزی

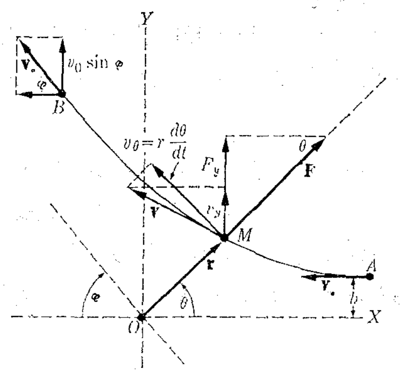
---

1. Planck's constant

وارد می‌شود، اندازه حرکت زاویه‌ای ثابت است. با وجود این در مورد الکترون، چون یک ذرهٔ اتمی مورد بررسی قرار می‌گیرد، لازم است درروشهای کار تجدید نظرهایی بشود؛ تکنیک جدید مکانیک کوانتومی[1] نام دارد، که فعلا درموردآن وارد گفتگو نمی‌شویم، ولی ازهم اکنون می‌توان‌با تأکید گفت‌که نتیجهٔ این‌مثال دراساس باآنچه که ازمکانیک کوانتومی به دست می‌آید تطبیق می‌کند.

مثال ۱۶.۷. پراکندگی[2] یک ذره بر اثر یک نیروی مرکزی دافعهٔ عکس مجذوری[3].

حل: انحراف یا پراکندگی یک ذره را تحت تأثیر یک نیروی مرکزی دافعه متناسب با عکس مجذور فاصله بین ذرهٔ متحرک ویک نقطهٔ ثابت یا مرکز نیرو، درنظر می‌گیریم. این این مسئله بویژه از این نظر جالب است که در فیزیک اتمی و هسته‌ای کار برد دارد. به عنوان مثال، زمانی‌که یک پروتون که به‌وسیلهٔ دستگاهی مانند سیکلوترون شتاب گرفته است ازنزدیکی هستهٔ مادهٔ هدف می‌گذرد، بر اثر نیرویی از همین نوع، که گفتیم مربوط به دافعهٔ الکتروستاتیک هسته است، منحرف یا پراکنده می‌شود.



شکل ۲۸.۷. پراکندگی یک ذره براثر نیروی مرکزی عکس مجذوری

فرض کنیم O مرکز نیرو و A ذره‌ای است که از فاصلهٔ خیلی دور با سرعت v_0 به سمت O پرتاب می‌شود (شکل ۲۸.۷). فاصلهٔ b، فاصلهٔ بین خط اثر v_0 و خطی موازی آن که از O می‌گذرد، فراسنج برخورد[4] نامیده می‌شود. اگر فرض شود که نیروی بین A و O مرکزی و دافعه است، ذره مسیر AMB را اختیار می‌کند. شکل منحنی به چگونگی تغییر نیرو با فاصله بستگی دارد. اگر نیرو با عکس‌مجذور فاصله متناسب باشد، یعنی اگر

$$F = \frac{k}{r^2} \qquad (۴۰.۷)$$

باشد، چنانکه در بخش ۵.۱۳ ثابت خواهد شد، مسیر یک هذلولی است. وقتی که ذره در

---

1. quantum mechanics 2. scattering 3. inverse - square force
4. impact parameter

نقطهٔ A قرار دارد اندازه حرکت زاویه‌ای آن برابر است با mv_0b. در هرمکان دیگری مانند M، مطابق معادلهٔ (۳۵.۷)، اندازه‌حرکت زاویه‌ای آن برابرمی‌شود با $mr^2(d\theta/dt)$. چون اندازه حرکت زاویه‌ای باید ثابت باقی بماند، زیرا نیروی مرکزی است، داریم

$$mr^2\frac{d\theta}{dt} = mv_0b. \qquad (۴۱.۷)$$

معادلهٔ حرکت در راستای Y از ترکیب معادلهٔ (۴۰.۷) و معادلهٔ دوم (۳۱.۷) به دست می‌آید:

$$m\frac{dv_y}{dt} = F_y = F\sin\theta = \frac{k\sin\theta}{r^2}.$$

چنانچه با استفاده از معادلهٔ (۴۱.۷) r^2 را حذف کنیم، می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{k}{mv_0b}\sin\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

برای پیدا کردن انحرف ذره، باید ازاین رابطه بین دو انتهای مسیر انتگرال گرفت. در نقطهٔ A مقدار v_y برابربرصفراست، زیرا حرکت اولیهٔ ذره موازی محور Xها و نیز $\theta = 0$ است. در نقطهٔ B داریم

$$\theta = \pi - \varphi \quad \text{و} \quad v_y = v_0\sin\varphi.$$

توجه داشته باشید که سرعت در نقطهٔ B از نو برابر v_0 است، زیرا به سبب تقارن، سرعتی که ذره هنگام نزدیک شدن به نقطهٔ O از دست داده، باید هنگام دور شدن ازنقطهٔ O مجدداً کسب کند. (اصل بقای انرژی که در فصل بعد مورد بحث قرار خواهد گرفت نیز این امر را تأیید می‌کند.) دراین صورت

$$\int_0^{v_0\sin\varphi} dv_y = \frac{k}{mv_0b}\int_0^{\pi-\varphi}\sin\theta\, d\theta$$

یا

$$v_0\sin\varphi = \frac{k}{mv_0b}(1 + \cos\varphi).$$

با توجه به‌اینکه $\operatorname{cotg}(\varphi/2) = (1 + \cos\varphi)/\sin\varphi$ است، بالاخره به دست می‌آید

$$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi = \frac{mv_0^2}{k}b. \qquad (۴۲.۷)$$

این رابطه زاویهٔ انحراف φ ذره را برحسب فراسنج برخورد b به دست می‌دهد.

در بخش ۱۴.۷، این معادله را در مورد انحراف ذرات باردار به وسیلهٔ هسته‌ها به‌کار خواهیم برد. توجه داشته باشیدکه نتیجهٔ (۴۲.۷) فقط برای یک نیروی عکس مجذوری صادق است. اگر رابطهٔ بین نیرو و فاصله به نحو دیگری باشد، زاویهٔ انحراف در معادلهٔ دیگری

صدق خواهد کرد. بنابراین آزمایشهای پراکندگی برای پیدا کردن قانون نیرو در بین ذرات بسیار مفیدند.

در آزمایشگاههای فیزیک هسته‌ای «پراکندگی» را با شتاب دادن به الکترونها، پروتونها یا دیگر ذره‌ها به‌وسیلهٔ سیکلوترون، شتابدهندهٔ وان‌دوگراف[1] یا وسایل دیگر، انجام می‌دهند و توزیع زاویه‌ای ذره‌های پراکنده شده را مشاهده می‌کنند.

۱۵۰۷ ترازمندی و سکون

این فصل را با مروری کوتاه به مفاهیم سکون و ترازمندی پایان می‌دهیم. ذره‌ای نسبت به یک ناظر لخت در حال سکون است که سرعتی که ناظر برای آن اندازه می‌گیرد برابر صفر باشد. ذره‌ای نسبت به ناظر لخت در حال ترازمندی است، اگر شتاب آن برابر صفر باشد ($a = \circ$). از معادلهٔ (۱۵۰۷) نتیجه می‌گیریم که در این حالت $\mathbf{F} = \circ$ است، به گفتهٔ دیگر، ذره‌ای در حال ترازمندی است که برآیند نیروهای وارد بر آن برابر صفر باشد. این تعریف را در فصل ۴ به‌کار بردیم.

یک ذره ممکن است نسبت به یک ناظر لخت درحال سکون باشد، ولی در حال ترازمندی نباشد، به عنوان مثال، وقتی که سنگی به طور قایم به سمت بالا پرتاب می‌شود، سنگ هنگام رسیدن به حداکثر ارتفاع خود لحظه‌ای در حال سکون می‌ماند، با وجود این درحال ترازمندی نیست، زیرا نیروی جاذبهٔ زمین بر آن اثرمی‌کند و چیزی این نیرو را خنثی نمی‌کند. بدین دلیل است که سنگ بلافاصله شروع به سقوط می‌کند.

همچنین احتمال دارد، ذره‌ای در حال ترازمندی باشد ولی نسبت به ناظر لخت در حال سکون نباشد. ذرهٔ آزاد مثالی از این گونه می‌باشد. چون هیچگونه نیرویی به‌آن اثر نمی‌کند، شتابی وجود ندارد وذره درحال ترازمندی است. باوجود این ذره نسبت به‌بسیاری از ناظرهای لخت می‌تواند درحال سکون نباشد. وضعی که بیشتر با آن برخورد می‌شود آن است که یک ذره همزمان درحال سکون و درحال ترازمندی باشد. به همین دلیل است که خیلیها بغلط این دو مفهوم را مترادف درنظر می‌گیرند. بدیهی است، یک ذرهٔ در حال ترازمندی، ممکن است در بعض چارچوبهای مرجع لخت همیشه در حال سکون باشد.

فهرست منابع

1. «Inertia,» D. Sciama, *Sci. Am.*, February 1957, page 99.
2. «Galileo and the Law of Inertia,» S. Drake, *Am. J. Phys.* 32, 601 (1964).
3. «Isaac Newton,» I. Cohen, *Sci. Am.*, December 1955, page 73.
4. «Resource Letter PhM-1 on the Philosophical Foundation of Classical Mechanics,» M. Hesse, *Am. J. Phys.* 32, 905 (1964).
5. «The Conservation Laws of Physies,» G. Feinberg and M. Goldharber, *Sci. Am.*, October 1963, page 36.

---

[1] Van de Graaff

6. «Friction,» F. Palmer, *Sci. Am.*, February 1951, page 54.
7. «Resource Letter F-1 on Friction,» E. Rabinowicz, *Am. J. Phys.* 31, 897 (1963).
8. «The Shape of Raindrops,» J. McDonald, *Sci. Am.*, February 1954, page 64.
9. «Billiard-Ball Collision Experiment,» J. Bayes and W. Scott, *Am. J. Phys.* 31, 197 (1963).
10. «Duration of Atomic Collisions,» O. Oldenberg, *Am. J. Phys.* 25, 94 (1957).
11. *Concepts of Mass in Classical and Modern Physics*, M. Jammer. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1961.
12. *Physical Mechanics*, Robert B. Lindsay. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1963; Sections 1-6 through 1-10, 3-10, 3-6, 3-7.
13. *Introduction to Engineering Mecnanics*, John V. Huddleston. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961, Chapter 19.
14. *Vector Mechanics*, D. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964, Chapters 6 and 12; Seetions 7-1 through 7-5.
15. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. L. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapters 9, 10, and 18.
16. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 1, Galileo; page 30, Newton.
17. *Foundations of Modern Physical Science*, Gerald Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1958, Chapters 16 and 17.
۱۸. سایمون، کیث، ر. مکانیک، ترجمهٔ اعظم نیرومند راد و غلامحسین همدانی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۶، بخشهای ۲ــ۴، ۴ــ۴ و ۴ــ۵.

مسئله‌ها

۱.۷ جسمی به جرم ۳٫۲kg با سرعت $\mathrm{6{,}0\,ms^{-1}}$ به سمت غرب حرکت می‌کند. جسم دیگری به جرم ۱٫۶kg با سرعت ۵٫۰ms به سمت شمال جابجا می‌شود. دوجسم وارد برهم‌کنش می‌شوند. درانتهای ثانیهٔ دوم جسم اول با سرعت ۳٫۰ms به سمت 30° شمال شرقی حرکت می‌کند. (الف) بزرگی و راستا وسوی سرعت جسم دوم را پیدا کنید. (ب) اندازه حرکت کل دوجسم را، درابتدا وبعد ازگذشتن دوثانیه حساب کنید. (ج) تغییر اندازه حرکت هرجسم را پیدا کنید. (د) تغییر سرعت دوجسم، و (ه) مقدار این تغییر سرعتها را پیدا کنید؛ معادلهٔ (۹.۷) را تحقیق کنید.

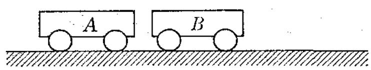
۲.۷ تنهٔ درختی به جرم ۴۵kg با سرعت $\mathrm{8\,km\,hr^{-1}}$ درسرازیری رودخانه‌ای شناور است. قویی به جرم ۱۰kg که با سرعت $\mathrm{8\,km\,hr^{-1}}$ درسوی مخالف جریان رودخانه پرواز می‌کند می‌کوشد روی تنهٔ درخت بنشیند. قو روی تمام طول تنه درخت می‌لغزد و با سرعت $\mathrm{2\,km\,hr^{-1}}$ از انتهای آن می‌افتد. سرعت نهایی تنهٔ درخت را حساب کنید. از مالش آب صرفنظر می‌شود. آیا لازم است سرعتها برحسب متر برثانیه تبدیل شوند؟

۳.۷. در واکنش شیمیایی $H + Cl \rightarrow HCl$ اتم هیدروژن با سرعت اولیهٔ $1.57 \times 10^{5}\,\mathrm{ms^{-1}}$ به سمت راست حرکت می‌کند، درحالی که اتم کلر در راستای عمود با سرعت $3.4 \times 10^{4}\,\mathrm{ms^{-1}}$ حرکت می‌کند. بزرگی و راستای سرعت مولکول HCl را (نسبت به حرکت اولیهٔ H) پیدا کنید. ازجرمهای اتمی داده شده درجدول پ.۱ استفاده کنید.

۴.۷. معادله‌ای بنویسیدکه بقای اندازه حرکت‌را در واکنش شیمیایی $A + BC \rightarrow AB + C$ بیان کند.

۵.۷. ذره‌ای به جرم $0.2\,\mathrm{kg}$ که با سرعت $0.4\,\mathrm{ms^{-1}}$ در راستای محور Xها حرکت می‌کند با ذرهٔ بیحرکتی به جرم $0.3\,\mathrm{kg}$ برخورد می‌کند. بعد از برخورد، ذرهٔ اول با سرعت $0.2\,\mathrm{ms^{-1}}$ در راستایی که با محور X زاویهٔ 40° می‌سازد حرکت می‌کند. تعیین کنید (الف) بزرگی و راستای سرعت ذرهٔ دوم را بعد ازبرخورد، و (ب) تغییر سرعت و اندازه حرکت هرذره را. (ج) رابطهٔ (۹.۷) را تحقیق کنید.

۶.۷. اندازه حرکت دریافت شده توسط جرمهای $1\,\mathrm{g}$، $1\,\mathrm{kg}$ و $10^{6}\,\mathrm{kg}$ را هنگامی که از ارتفاع $100\,\mathrm{m}$ می‌افتند پیدا کنید. چون اندازه حرکتی را کـه زمین کسب می‌کند برابر و درسوی مخالف است، سرعت (به سمت بالا) اخذ شده به وسیلهٔ زمین را تعیین کنید. جرم زمین درجدول ۱.۱۳ داده شده است. درهرمورد بزرگی نیرو را حساب کنید.



شکل ۲۹.۷

۷.۷. دوگاری A و B به‌سمت یکدیگر رانده می‌شوند (شکل ۲۹.۷). درآغاز B بیحرکت است، درحالی که A با سرعت $0.5\,\mathrm{ms^{-1}}$ به سمت راست حرکت می‌کند. بعد ازبرخورد، A با سرعت $0.1\,\mathrm{ms^{-1}}$ باز می‌گردد و B با سرعت $0.3\,\mathrm{ms^{-1}}$ به سمت راست جابجا می‌شود. درآزمایش دیگری، بار $1\,\mathrm{kg}$ را روی گاری A نهاده و آن را با سرعت $0.5\,\mathrm{ms^{-1}}$ به سمت B هل می‌دهند. بعد ازبرخورد، A بیحرکت باقی‌می‌ماند درصورتی که B با سرعت $0.5\,\mathrm{ms^{-1}}$ به سمت راست حرکت می‌کند. جرم هریک از گاریها را پیدا کنید.

۸.۷. دستگاه ماه ـ زمین را درنظر بگیرید (حرکت این دستگاه را به دور خورشید نادیده می‌گیریم). درمدت ۲۸ روز ماه در دایره‌ای به شعاع $4.0 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$ یکبار دور زمین می‌گردد. (الف) تغییر اندازه حرکت ماه در ۱۴ روز چقدر است؟ (ب) درهمین مدت تغییر اندازه حرکت زمین چقدر است؟ (ج) آیا در دستگاه ماه ـ زمین، زمین ساکن است؟ (د) جرم زمین ۸۰ برابر جرم ماه است. تغییر سرعت زمین در ۱۴ روز چه مقدار است؟

۹.۷. دوشیء A و B که در روی یک خط افقی بدون مالش حرکت می‌کنند، با یکدیگر برهم‌کنش می‌کنند. اندازه حرکت A برابر است با $p_A = p_0 - bt$، که درآن p_0 و b ثابت و t زمان است. اندازه حرکت B را به‌صورت تابعی از زمان پیدا کنید، اگر (الف) B درآغاز بیحرکت باشد، (ب) اندازه حرکت اولیهٔ B برابر $-p_0$ باشد.

۷.۱۰. خمپاره‌ای که به‌طور افقی باسرعت $8 kms^{-1}$ حرکت می‌کند درانفجار به سه تکهٔ برابر تقسیم می‌شود. تکهٔ اول باسرعت $16 kms^{-1}$ به حرکت افقی خود ادامه می‌دهد. تکهٔ دیگر با زاویهٔ $45°$ به سمت بالا پرتاب می‌شود وتکهٔ سوم با همین زاویه ولی به سمت پایین می‌افتد. سرعت تکه‌های دوم و سوم را پیدا کنید.

۷.۱۱. ماهواره‌ای با سرعت $8 kms^{-1}$ «به طور افقی» نسبت به زمین حرکت می‌کند. می‌خواهند یک‌بار $50 kg$ را با بیرون راندن آن به طور افقی، مستقیماً به سمت زمین رها کنند. سرعت ماهواره را پس ازبیرون انداختن بار حساب کنید. می‌دانیم که جرم ماهواره (به انضمام جرم بار) $450 kg$ است. سرعت بار نسبت به زمین بلافاصله پس از بیرون افتادن ازماهواره چقدر است؟

۷.۱۲. یک واگن خالی راه‌آهن به جرم $10^5 kg$ با سرعت $0.5 ms^{-1}$ ازسطح شیب‌داری جهت بارگیری به زیر یک دستگاه زغال پرکن سرازیر می‌شود. اگر هنگام عبور واگن از زیر دستگاه، $2 \times 10^5 kg$ زغال سنگ درآن بار شود، (الف) سرعت نهایی واگن چقدر می‌شود؟ (ب) اگر درانتها زغال سنگها ازطریق قیفهای زیر واگن ازآن بیرون ریخته شوند سرعت واگن چقدرمی‌شود؟ زغالها نسبت به واگن درخط راست پایین می‌ریزند. (ج) فرض کنیم که بتوان تمام زغال را یکباره ازعقب واگن بیرون ریخت، به‌گونه‌ای که بتوان زغال را نسبت به زمین بیحرکت درنظر گرفت، دراین حالت واگن چه سرعتی به خود می‌گیرد؟ (د) اگر زغال تحت زاویه‌ای نسبت به راستای حرکت واگن بیرون پرتاب شود، در چه شرایطی نتیجهٔ (ج) به دست می‌آید؟

۷.۱۳. بارکشی به‌جرم $1.5 kg$ که با سرعت $0.2 ms^{-1}$ درخط خود حرکت می‌کند در انتهای خط به مانع ثابتی برخورد می‌کند. تغییر اندازه حرکت بارکش ونیروی میانگین وارد برآن چقدر است، اگر در $0.1 s^{-1}$ بارکش (الف) ازحرکت باز بماند؛ (ب) با سرعت $0.1 ms^{-1}$ برگردد؟ بقای اندازه حرکت دربرخورد را بررسی کنید.

۷.۱۴. چه نیروی ثابتی لازم است تا در مدت $50 s$ اندازه حرکت جسمی را از $2300 kgms^{-1}$ تا $3000 kgms^{-1}$ افزایش دهد؟

۷.۱۵. اتومبیلی‌دارای $1500 kg$ جرم وسرعت اولیهٔ $60 kmhr^{-1}$ است. راننده با ایجاد یک شتاب ثابت در خلاف جهت حرکت، ترمز می‌کند و اتومبیل بعد از ۱٫۲ دقیقه متوقف می‌شود. نیروی وارد براتومبیل را تعیین کنید.

۷.۱۶. چه مدت زمانی نیروی ثابت $80 N$ باید روی جسمی به جرم $12.5 kg$ اثر کند تا آن‌را ازحرکت باز دارد؟ می‌دانیم سرعت اولیهٔ جسم $72 kmhr^{-1}$ است.

۷.۱۷. جسمی به جرم $10 g$ از ارتفاع $3 m$ روی یک تودهٔ شن می‌افتد. جسم قبل از متوقف شدن $3 cm$ درشن فرو می‌رود. چه نیرویی ازطرف شن به‌جسم وارد شده است؟

۷.۱۸. دو قاطر یک کرجی را توسط دو ریسمان که به جلوی کرجی وصل شده‌اند در کانالی به جلو می‌کشند. زاویهٔ بین دو ریسمان $40°$ و کشش آنها بترتیب $2500 N$ و

2000N است. (الف) به‌فرض اینکه جرم کرجی 1700kg باشد و آب هیچگونه مقاومتی درمقابل حرکت نشان ندهد، شتاب آن چقدر است؟ (ب) چنانچه حرکت کرجی یکنواخت باشد، مقاومت آب چقدر است؟

۱۹.۷ شخصی برکف کامیونی که با سرعت 35kmhr^{-1} حرکت می‌کند سرپا ایستاده است. اگر درمدت 2s سرعت کامیون به (الف) 45kmhr^{-1}، (ب) 9kmhr^{-1} برسد، این شخص باید درچه جهت و تحت چه زاویه‌ای خم شود تا نیفتد؟

۲۰.۷ آسانسوری به‌جرم 250kg، سه نفر به‌جرمهای ۶۰، ۸۰ و ۱۰۰ کیلوگرم را با خود حمل می‌کند. نیرویی که ازطرف موتور برآن وارد می‌شود برابر با 5000N است. آسانسور با چه شتابی بالا می‌رود؟ اگر آسانسور درآغاز ساکن باشد درمدت 5s تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

۲۱.۷ فرض کنیم شخص ۱۰۰ کیلوگرمی مسئلهٔ پیش، روی ترازویی قرار گرفته است. هنگامی که آسانسور شتاب می‌گیرد «وزن» این شخص چقدر است؟

۲۲.۷ یک آسانسور خالی به جرم 5000kg که ازحالت سکون شروع به حرکت کرده است با شتاب ثابتی در راستای قایم پایین می‌رود و در ۱۰ ثانیهٔ اول 30m جابجا می‌شود. کشش کابل نگهدارندهٔ آسانسور را حساب کنید.

۲۳.۷ پسری به جرم 60kg روی ترازویی ایستاده است. اگر این پسر ناگهان با شتاب 245cms^{-2} خود را به سمت بالا بکشد. ترازو چه عددی را نشان می‌دهد؟ با به‌کاربردن ماشینی که شتابهای یک جسم را با اندازه‌گیری نیروهای وارد برآن اندازه‌گیری می‌کند، دراثر مربوط به این مسئله بحث کنید (چنین دستگاهی شتاب‌سنج[1] نامیده می‌شود که وسیلهٔ بسیار مفیدی درصنعت و آزمایشگاههای پژوهشی است.)

۲۴.۷ جرم 200g با سرعت ثابت $\mathbf{v} = \mathbf{u}_x\, 50\text{cms}^{-1}$ حرکت می‌کند. هنگامی که جرم درنقطهٔ $\mathbf{r} = -\mathbf{u}_x\, 10\text{cm}$ قرار دارد، نیروی ثابت $\mathbf{F} = -\mathbf{u}_x\, 400\text{dyn}$ برآن وارد می‌شود. تعیین کنید (الف) زمانی را که طول می‌کشد تا جسم بایستد؛ (ب) مکان جرم را در لحظه‌ای که می‌ایستد.

۲۵.۷ شخصی به جرم 90kg درآسانسوری قرار دارد. نیروی وارد ازطرف کف آسانسور به این شخص را در حالتهای زیر تعیین کنید: (الف) آسانسور با سرعت یکنواختی بالا می‌رود؛ (ب) آسانسور با سرعت یکنواختی پایین می‌رود؛ (ج) آسانسور دارای شتاب 3ms^{-2} به سمت بالاست؛ (د) با همین شتاب به سمت پایین می‌رود؛ (ه) کابل پاره می‌شود و آسانسور آزادانه سقوط می‌کند.

۲۶.۷ جسمی به جرم 2kg روی یک سطح افقی بدون مالش با نیروی افقی $F = 55 + t^2$ حرکت می‌کند. F برحسب نیوتون و t برحسب ثانیه است. سرعت جسم را در $t = 5\text{s}$ حساب کنید. (درلحظهٔ $t = 0$ جسم بیحرکت است.)

---
1. accelerometer

۲۷.۷. جسمی به جرم m در راستای محور Xها مطابق قانون $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ حرکت می‌کند. A، ω و φ ثابت هستند. نیروی وارد برجسم را به صورت تابعی از مکان آن حساب کنید. سوی نیرو هنگامی که x (الف) مثبت، (ب) منفی باشد چیست؟

۲۸.۷. نیروی برآیند وارد بر جسمی به جرم m برابر است با $F = F_\circ - kt$، که در این رابطه $F_\circ$ و k ثابت و t زمان است. شتاب را پیدا کنید. با انتگرال‌گیری، سرعت و مکان جسم را به دست آورید.

۲۹.۷. روی ذره‌ای که درآغاز درحال سکون است، درفاصله زمانی $\circ \leqslant t \leqslant ۲T$، نیروی $F = F_\circ[۱ - (t-T)^۲/T^۲]$، اثر می‌کند. ثابت کنید که سرعت ذره درانتهای این فاصله زمانی برابر است با $۴F_\circ T/۳m$. توجه داشته باشید که سرعت منحصراً به حاصل ضرب $F_\circ(۲T)$ بستگی دارد واگر T خیلی کوچک باشد، با بزرگ کردن متناسب $F_\circ$، به همان سرعت می‌رسیم. نمودار F را برحسب t رسم کنید. آیا می‌توانید یک وضع فیزیکی را تصور کنید که این مسئله بتواند توصیف متناسبی برای آن باشد؟

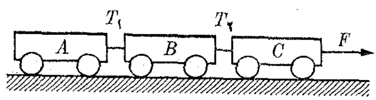
۳۰.۷. جسمی که درآغاز در $x_\circ$ بیحرکت است بر اثر نیروی $F = -K/x^۲$ در خط راست به حرکت درمی‌آید. ثابت کنید که سرعت جسم در نقطهٔ x برابر است با $v^۲ = ۲(K/m)(۱/x - ۱/x_\circ)$. این روش را می‌توان برای تعیین سرعت جسمی‌که از ارتفاع زیاد روی زمین می‌افتد به کار برد.

۳۱.۷. مثال ۳.۷ را درحالتی که اتومبیل ازسراشیبی پایین می‌رود حل کنید.

۳۲.۷. جسمی به‌جرم $۱\mathrm{kg}$ بدون مالش روی صفحهٔ شیب‌داری که با سطح افق زاویهٔ $۳\circ^\circ$ می‌سازد حرکت می‌کند. اگر یک نیروی $۸\mathrm{N}$ به‌موازات صفحه و (الف) به سمت بالا، (ب) به سمت پایین برآن اثر کند، جسم با چه شتابی جابجا می‌شود؟

۳۳.۷. کامیونی به جرم $۵\circ\circ\circ\mathrm{kg}$ به مدت $۲\circ\mathrm{s}$ با سرعت $۳\circ\mathrm{ms}^{-۱}$ به سمت شمال راه می‌پیماید، بعد به سمت جاده‌ای درامتداد $۷\circ^\circ$ شمال شرقی می‌پیچید. پیدا کنید (الف) تغییر اندازه حرکت آن را؛ (ب) بزرگی و راستای نیروی میانگین وارد برکامیون را.

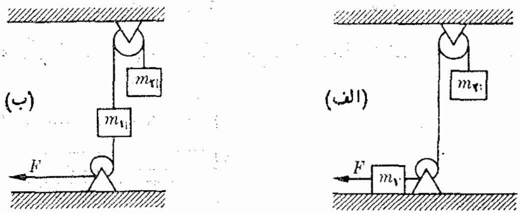
۳۴.۷. اجسام شکل ۳۰.۷ بترتیب دارای جرمهای $۱\circ\mathrm{kg}$، $۱۵\mathrm{kg}$ و $۲\circ\mathrm{kg}$ می‌باشند. نیروی F برابر $۵\circ\mathrm{N}$ روی C وارد می‌شود. شتاب دستگاه وکشش هریک از کابلها را پیدا کنید. درحالتی که این دستگاه به‌جای حرکت در راستای افقی در راستای قایم حرکت کند، مسئله را مورد بحث قرار دهید.



شکل ۳۰.۷

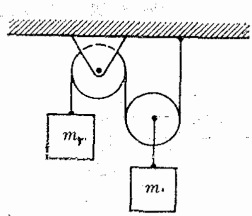
۳۵.۷. شتاب اجسام شکل ۳۱.۷ وکشش نخ آویز را حساب کنید. ابتدا مسئله را به طور جبری حل کنید. نتیجه را برای حالتی که $m_۱ = ۵\circ\mathrm{g}$، $m_۲ = ۸\circ\mathrm{g}$ و $F = ۱\circ^۵\mathrm{dyn}$

است به‌کار بندید.



شکل ۳۱.۷

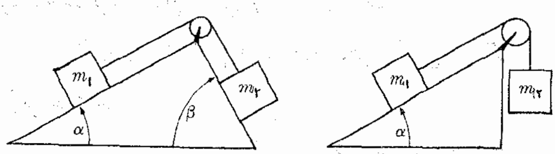
۳۶.۷ اجسام شکل ۳۲.۷، چنانکه شکل نشان می‌دهد، توسط نخی به هم وصل شده‌اند. به فرض اینکه قرقره‌ها بدون مالش باشند، شتاب اجسام وکشش نخ را حساب کنید. ابتدا مسئله را به طور جبری حل کنید، سپس نتیجه را درحالتی که $m_{\text{۱}} = \text{۸}\text{kg}$، $m_{\text{۲}} = \text{۲}\text{kg}$ باشد به کار بندید.



شکل ۳۲.۷

۳۷.۷ شتاب حرکت اجسام شکلهای ۳۳.۷ (الف) و (ب) و همچنین کشش نخها را تعیین کنید. فرض کنید اجسام بدون مالش می‌لغزند. ابتدا مسئله را درحالت کلی حل کنید، سپس اعداد زیر را قرار دهید و نتیجه را به‌دست آورید:

$$m_{\text{۱}} = \text{۲۰۰}\,\text{g},\ m_{\text{۲}} = \text{۱۸۰}\,\text{g},\ \alpha = \text{۳۰}^\circ,\ \beta = \text{۶۰}^\circ.$$



شکل ۳۳.۷

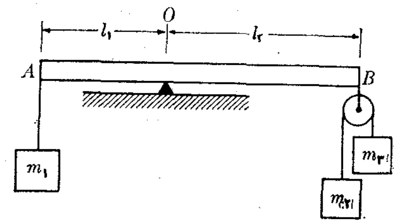
۳۸.۷ مسئلهٔ پیش را درحالتی که ضریب مالش روی سطح اول $f_{\text{۱}}$ و روی سطح دوم $f_{\text{۲}}$ باشد، از نو حل کنید. همهٔ حرکات ممکن را مورد بررسی قرار دهید.

۳۹.۷ (الف) ثابت‌کنید در شرایطی که رابطهٔ زیر برقرار باشد، میلهٔ AB درشکل ۳۴.۷

درحال ترازمندی است:

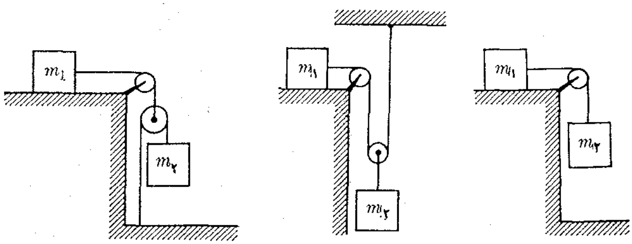
$$m_1(m_2+m_3)l_1 = 4m_2m_3l_2$$

(ب) نیرویی را که تکیه‌گاه روی میله وارد می‌کند پیدا کنید.



شکل ۳۴.۷

۴۰.۷. درشکل ۳۵.۷، شتاب جرمهای m_1 و m_2 و کشش نخها را حساب کنید. تمام‌قرقره‌ها بدون وزن و بدون مالش فرض می‌شوند و اجسام بدون مالش می‌لغزند. چه دستگاهی به‌جرم m_1 شتابی پیش ازشتاب سقوط آزاد می‌تواند بدهد؟ مسئله را ابتدا به‌طور جبری حل‌کنید، سپس حالتی را درنظر بگیرید که $m_1 = 4\text{kg}$ و $m_2 = 6\text{kg}$ باشد.



شکل ۳۵.۷

۴۱.۷. نشان دهید که شتاب اجسام شکل ۳۶.۷، به‌فرض

$$P = g/(m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3)$$

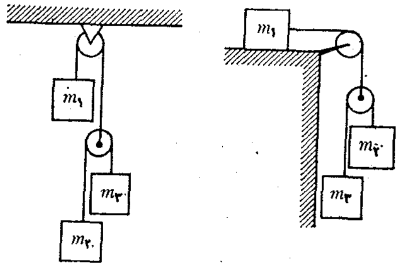
دارای بزرگیهای زیر هستند:

(الف)

$$a_1 = 4m_2m_3P$$
$$a_2 = (m_1m_3 - m_1m_2 - 4m_2m_3)P$$
$$a_3 = (m_1m_3 - m_1m_2 + 4m_2m_3)P$$

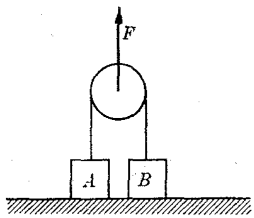
(ب)

$$a_1 = (4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3)P$$
$$a_2 = (3m_1m_3 - m_1m_2 - 4m_2m_3)P$$
$$a_3 = (m_1m_3 - 3m_1m_2 + 4m_2m_3)P.$$



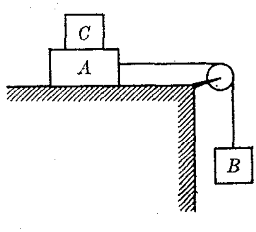
شکل ۳۶.۷

۴۲.۷. درشکل ۳۷.۷، A و B بترتیب دارای جرمهای ۳kg و ۱kg هستند. اگــر نیروی $F = 5t^2$ N در راستای قایم به قرقره وارد شود شتاب A و B را بــرحسب t پیدا کنید. هنگامی که B به‌قرقره رسید چه اتفاقی رخ می‌دهد؟



شکل ۳۷.۷

۴۳.۷. جرمهای A و B، درشکل۳۸.۷، بترتیب ۱۰kg و ۵kg می‌باشند. ضریب‌مالش A با میز برابراست با ۰٫۲۰. حداقل جرم C را که مانع حرکت A می‌شود پیدا کنید. شتاب دستگاه را هنگامی که جرم C را برمی‌دارند حساب کنید.



شکل ۳۸.۷

۴۴.۷. نیروی مالش مؤثر ازطرف هوا روی یک جرم ۰٫۴ kg را هنگامی کــه با شتاب ۹٫۰ $\mathrm{m\,s^{-2}}$ سقوط می‌کند حساب کنید.

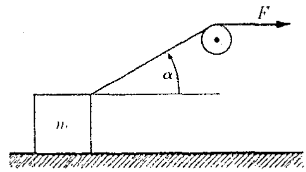
۴۵.۷. مثال ۶.۷ را درحالتی‌که هیچگونه نیرویی برجسم وارد نمی‌شود، از نو حل کنید. سرعت اولیهٔ جسم ۲ $\mathrm{m\,s^{-1}}$ و به‌سمت بالاست. جسم قبل از اینکه بایستد تا کجای صفحه

بالا می‌رود؟ حداقل ضریب مالش ایستایی برای این جسم چقدر باید باشد تا به‌محض اینکه ایستاد نتواند به‌سمت عقب برگردد؟

۴۶.۷. قطعه‌ای به‌جرم ۲ kg از صفحهٔ شیب‌داری که با افق زاویهٔ °۳۰ می‌سازد با سرعت $۱۲\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ بالا می‌رود. اگر ضریب مالش لغزشی ۰٫۱۶ باشد، این جسم قبل از اینکه بایستد تاکجا بالا می‌رود؟ سرعت جسم هنگامی‌که به‌پایین صفحهٔ شیب‌دار می‌رسد چقدر است؟

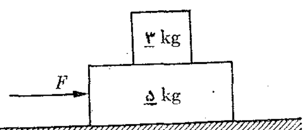
۴۷.۷. قطاری به‌جرم ۱۰۰ تن از یک سربالایی که درهر ۲۲۴ m یک متر ارتفاع می‌گیرد بالا می‌رود. نیروی کشش ۴۵۰۰۰ N و شتاب حرکت $۰٫۳\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ است، نیروی مالش را حساب کنید.

۴۸.۷. اگر f ضریب مالش با زمین باشد، شتاب جرم m در شکل ۳۹.۷ را پیدا کنید. همچنین نیروی وارد از طرف زمین روی جسم را تعیین کنید. مقادیر عددی $m =$ ۲٫۰ kg، $f =$ ۰٫۲ و $F =$ ۱٫۵ N را به‌کار ببرید.



شکل ۳۹.۷

۴۹.۷. قطعه‌ای به‌جرم ۳ kg روی قطعهٔ دیگری به‌جرم ۵ kg قرار گرفته است (شکل ۴۰.۷). فرض کنید بین قطعهٔ ۵ kg و سطحی که روی آن قرار گرفته است مالش وجود ندارد. ضرایب مالش ایستایی و جنبشی بین دوجسم بترتیب ۰٫۲ و ۰٫۱ می‌باشند. (الف) حداکثر نیرویی که می‌توان به هر قطعه وارد کرد تا دستگاه بلغزد و درعین‌حال دوقطعه باهم بمانند، چقدر است؟ (ب) هنگامی‌که نیروی حداکثر وارد شود شتاب چقدر است؟ (ج) شتاب قطعهٔ ۳ kg هنگامی که نیرویی بیش ازنیروی حداکثر بالا به قطعهٔ ۵ kg وارد شود چقدر است؟ و اگر این نیرو به‌قطعهٔ ۳ kg وارد شود شتاب آن چقدر می‌شود؟



شکل ۴۰.۷

۵۰.۷. سرعت حد کره‌ای به‌شعاع ۲ cm و چگالی $۱٫۵۰\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$ را که درگلیسرین (به‌چگالی $۱٫۲۶\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$) فرومی‌رود پیداکنید. همچنین، زمانی‌که شتاب کره $۱۰۰\ \mathrm{cm\,s^{-2}}$ است سرعت آن را تعیین کنید.

۵۱.۷. جسمی به جرم ۴۵ kg با سرعت اولیهٔ $۶۰\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ در راستای قایم پرتاب می‌شود. جسم با مقاومت $F = -۳v/۱۰۰$ از طرف هوا مواجه می‌شود، که F برحسب نیوتون و

v سرعت جسم برحسب $\mathrm{m\,s^{-1}}$ است. چقدر طول می‌کشد تا این جسم به حداکثر ارتفاع خود برسد؟ این ارتفاع بیشینه چقدراست؟

۵۲.۷. جسمی که درآغاز بیحرکت است از ارتفاع $108\ \mathrm{m}$ درمدت $5\ \mathrm{s}$ پایین می‌افتد. اگر مقاومت متناسب با سرعت باشد سرعت حد را پیدا کنید.

۵۳.۷. بااستفاده ازنتایج مثال ۷.۸، زمانی راکه طول می‌کشد تاقطرات باران درمثال ۷.۷ به ۵۰٪ و ۶۳٪ سرعت حد برسند پیدا کنید. همچنین مسافت پیموده شده در مدت τ را تعیین کنید.

۵۴.۷. نمودار سرعت جسمی را که دریک شارهٔ وشکسان سقوط می‌کند وسرعت اولیهٔ آن صفر نیست، به‌صورت تابعی از زمان رسم کنید. دوحالتی را که $v_\circ$ بزرگتر و کوچکتر از $F/k\eta$ است درنظر بگیرید. هنگامی که $v_\circ = F/K\eta$ باشد چه رخ می‌دهد؟

۵۵.۷. در اتم هیدروژن، الکترون روی یک مدار تقریباً دایره‌ای به شعاع $0{,}5 \times 10^{-10}\mathrm{m}$ و با سرعتی درحدود $2{,}2 \times 10^{6}\mathrm{m\,s^{-1}}$ به‌دور پروتون در گردش است. بزرگی نیروی بین الکترون و پرتون را برآورد کنید.

۵۶.۷. سنگی به‌جرم $0{,}4\ \mathrm{kg}$ به‌انتهای نخی به‌طول $0{,}8\ \mathrm{m}$ بسته شده است. اگر سنگ را با سرعت ۸۰ دور در دقیقه به‌دوران درآورند، بزرگی نیروی وارد ازطرف نخ به سنگ چقدر است؟ هرگاه درکشش بالاتراز $500\ \mathrm{N}$ نخ پاره شود، حداکثرسرعت زاویه‌ای ممکن سنگ چقدر است؟

۵۷.۷. پاره سنگی به‌جرم $1\ \mathrm{kg}$ به‌نخی به‌طول $0{,}6\ \mathrm{m}$ بسته شده‌است و ۶۰ دور در دقیقه روی یک دایرهٔ قایم می‌چرخد. کشش نخ را درحالتی که سنگ، (الف) در بالاترین نقطهٔ دایره است؛ (ب) در پایین‌ترین نقطهٔ دایره است؛ (ج) هنگامیکه نخ افقی است، حساب کنید. (د) سرعت خطیی را که سنگ باید در بالاترین نقطه داشته باشد تا کشش نخ برابر صفر شود پیدا کنید.

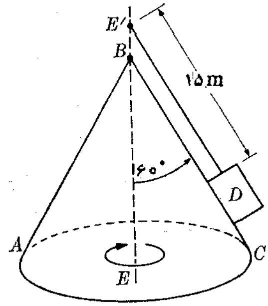
۵۸.۷. قطاری با سرعت $63\ \mathrm{km\,hr^{-1}}$ از پیچی می‌گذرد. شعاع انحنای پیچ $300\ \mathrm{m}$ است. (الف) زاویهٔ برآمدگی‌لازم را که باید به‌پیچ داده شود تا به‌قطار هیچگونه نیروی جانبی وارد نشود حساب کنید. (ب) چنانچه زنجیری بـه سقف یکی از واگنها وصل شده باشد زاویه‌ای را که این زنجیر با راستای قایم می‌سازد پیدا کنید.

۵۹.۷. بزرگراهی $24\ \mathrm{m}$ پهنا دارد. اختلاف سطح بین کناره‌های داخلی و خارجی جاده را در حالتی کـه یک اتومبیل بتوانـد با سرعت $75\ \mathrm{km\,hr^{-1}}$ (بدون تحمل هیچگونه نیروی جانبی) از پیچی به‌شعاع $600\ \mathrm{m}$ بگذرد حساب کنید.

۶۰.۷. در پیچ بزرگراهی به‌شعاع $300\ \mathrm{m}$ برآمدگی ایجاد نشده است. فرض می‌کنیم که ضریب مـالش بین لاستیک و اسفالت خشک برابر ۰٫۷۵، بین لاستیک و اسفالت خیس ۰٫۵۰ و بین لاستیک و یخ ۰٫۲۵ است. حداکثر سرعتی را کـه با ایمنی می‌توان از این پیچ گذشت در موارد زیرتعیین کنید: (الف) درهوای خشک؛ (ب) هنگام ریزش باران؛

(ج) هنگام یخبندان. چرا این مقادیر به‌جرم اتومبیل بستگی ندارند؟

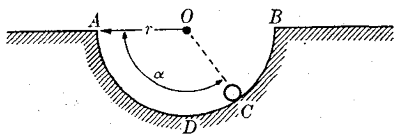
۶۱.۷. جسم D به‌جرم ۶ kg (شکل ۴۱.۷) روی سطح بدون مالش مخروط ABC قرار دارد و با سرعت زاویه‌ای ۱۰ دور در دقیقه دور محور EE' می‌چرخد. حساب کنید (الف) سرعت خطی جسم را؛ (ب) واکنش سطح روی جسم را؛ (ج) کشش نخ را؛ (د) سرعت زاویه‌ای لازم را برای اینکه واکنش سطح برابر صفر شود.



شکل ۴۱.۷

۶۲.۷. گوی کوچکی به‌جرم m، که ابتدا در نقطهٔ A بوده است، بدون مالش روی سطح دایره‌ای ADB می‌لغزد (شکل ۴۲.۷). هنگامی که گوی درنقطهٔ C است، ثابت کنید که سرعت زاویه‌ای و نیروی وارد ازطرف سطح برگوی بترتیب برابرند با

$$\omega = \sqrt{۲g\sin\alpha/r} \quad، F = mg(۱ + ۲\sin\alpha)$$

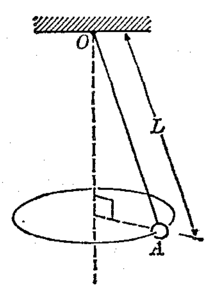


شکل ۴۲.۷

۶۳.۷. با مراجعه به‌آونگ مخروطی شکل ۴۳.۷، که روی دایرهٔ افقی با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد، کشش نخ و زاویهٔ آن را با راستای قایم درحالتی که

$$\omega = ۳۰\,\mathrm{rad\,s^{-۱}} \text{ و } L = ۱٫۱۶\,\mathrm{m} \quad، M = ۱۲\,\mathrm{kg}$$

باشد، حساب کنید.



شکل ۴۳.۷

۶۴.۷. ثابت کنید که دورۀ دو آونگ مخروطی با طولهای متفاوت، که از تراز یکسانی آویزان شده‌اند ولی به‌گونه‌ای حرکت می‌کنند که وزنه‌های آنها درارتفاع یکسانی ازسطح زمین قرار می‌گیرند، باهم برابرند.

۶۵.۷. ذره‌ای به‌چگالی ρ_1 در داخل آبگون درحال چرخشی به‌چگالی ρ_2 آویزان است. ثابت کنید که اگر ρ_1 بزرگتر از ρ_2 باشد ذره به سمت محیط دوران و اگر ρ_1 کوچکتر از ρ_2 باشد به‌سمت محور دوران متوجه می‌شود.

۶۶.۷. اگر برجسمی نیروی $\mathbf{F} = k\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ که درآن $\mathbf{u}$ یک برداریکای اختیاری است وارد شود، ثابت کنید حرکت آن دایره‌ای و با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega} = k\mathbf{u}$، یا در حالت کلی‌تر، مارپیچی موازی با $\mathbf{u}$ خواهد بود.

۶۷.۷. درلحظۀ $t = ۰$، جسمی به‌جرم $۳٫۰\,\mathrm{kg}$، با سرعت $\mathbf{v} = (\mathbf{u}_x + ۶\mathbf{u}_y)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ در نقطۀ $\mathbf{r} = ۴\mathbf{u}_x\,\mathrm{m}$ قرار دارد. اگر نیروی ثابت $\mathbf{F} = ۵\mathbf{u}_y\,\mathrm{N}$ روی جسم اثر کند، (الف) تغییر اندازه حرکت (خطی) جسم را در انتهای $۳\,\mathrm{s}$؛ (ب) تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای آن را درانتهای $۳\,\mathrm{s}$، پیدا کنید.

۶۸.۷. گویی به جرم $۲۰۰\,\mathrm{g}$ با سرعت $۳۰۰\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ به سمت شمال حرکت می‌کند. هنگامی که براین گوی نیرویی برابر با $۲۰۰۰\,\mathrm{dyn}$ در راستای مشرق وارد شود، معادلۀ مسیر را بنویسید، و درانتهای $۴۰\,\mathrm{s}$ (الف) بزرگی و راستای سرعت؛ (ب) فاصله ازنقطۀ آغاز حرکت؛ (ج) مسافت پیموده شده ازنقطۀ حرکت را حساب کنید.

۶۹.۷. بر ذره‌ای که با سرعت v_0 درطول محور Xها حرکت می‌کند، درناحیۀ $0 \leqslant x \leqslant L$ نیرویی‌موازی بامحور Yها وارد می‌شود. تغییر راستای حرکت را پیدا کنید. درچه فاصله‌ای از محور Xها ذره با دیواری که در $x = L$ قرارد دارد برخورد می‌کند؟

۷۰.۷. ذرۀ جرم‌داری براثر نیروی ثابتی به‌مؤلفه‌های $F_x = ۶\mathrm{N}$ و $F_y = -۷\mathrm{N}$ درصفحۀ XY حرکت می‌کند. درلحظۀ $t = ۰$، $x = ۰$، $y = ۰$، $\mathbf{v}_x = -۲\mathrm{ms^{-1}}$ و $v_y = ۰$ است. مکان و سرعت ذره را درلحظۀ $t = ۲\mathrm{s}$ پیدا کنید. جرم ذره را $۱۶\mathrm{kg}$ فرض کنید.

۷۱.۷. $\mathbf{r}$، بردار مکان ذره‌ای به‌جرم $۶\mathrm{kg}$ با رابطۀ زیر داده می‌شود:

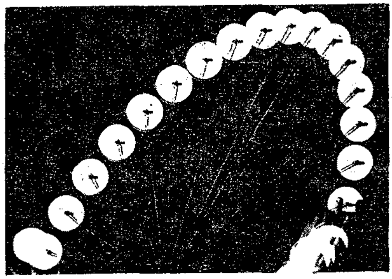
$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_x(۳t^۲ - ۶t) + \mathbf{u}_y(-۴t^۳) + \mathbf{u}_z(۳t + ۲)\,\mathrm{m}.$$

(الف) نیروی وارد برجسم؛ (ب) گشتاور نیرویی که برجسم اثر می‌کند نسبت به مبدأ؛ (ج) اندازه حرکت و اندازه حرکت زاویه‌ای جسم را نسبت به مبدأ پیدا کنید. (د) درستی $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ و $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ را تحقیق کنید.

۷۲.۷. درلحظۀ $t = ۰$، جسمی به‌جرم $۲\mathrm{kg}$ باسرعت $۱۰\mathbf{u}_y\,\mathrm{ms^{-1}}$ درنقطۀ $\mathbf{r} = ۵\mathbf{u}_x\,\mathrm{m}$ قرار دارد. هیچگونه نیرویی روی جسم اثر نمی‌کند. اندازه حرکت زاویه‌ای جسم را نسبت به مبدأ در زمانهای (الف) $t = ۰\mathrm{s}$، (ب) $t = ۱۲\mathrm{s}$ پیدا کنید.

۷۳.۷. به یک انتهای یک نخ لاستیکی دیسکی متصل شده و سر دیگر نخ درنقطه‌ای ثابت

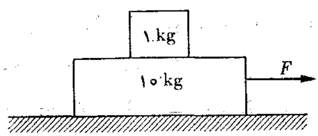
است. دیسک می‌تواند روی یک میز افقی بدون مالش حرکت کند. اگر نخ لاستیکی را کشیده و دیسک را تحت زاویه‌ای پرتاب کنید، مسیر نشان داده شده درشکل ۴۴.۷ را (که



شکل ۴۴.۷

با یک رشته درخشهای پیاپی به‌فاصلهٔ زمانی ۵ر۰s گرفته شده‌اند) می‌پیماید. با اندازه‌گیری مستقیم روی عکس، نشان دهید که این حرکت ازقانون مساحات[1] پیروی می‌کند. با توجه به توصیف فیزیکی مسئله، آیا نیروی وارد روی دیسک، مرکزی است؟

۷۴.۷. قطعه‌ای به جرم ۱kg روی قطعه‌ای به جرم ۱۰kg که خود مطابق شکل ۴۵.۷ روی یک سطح افقی قرار دارد گذاشته شده است. نیروی F با زمان t (برحسب ثانیه) مطابق قانون $F = ۰٫۲ t$ N تغییر می‌کند. اگر ضریب مالش ایستایی ۴ر۰ وضریب مالش لغزشی بین سایر سطوح ۱۵ر۰ باشد، حرکت هریک از قطعه‌ها را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید.



شکل ۴۵.۷

۷۵.۷. هنگامی که زمین در ۳۱ خرداد در اوج خود (مکانی با بیشترین فاصله از خورشید) می‌باشد فاصلهٔ آن $۱٫۵۲ \times ۱۰^{۱۱}$ m و سرعت مداری آن $۲٫۹۳ \times ۱۰^{۴}$ ms$^{-۱}$ است. سرعت مداری آن در شش ماه بعد که درحضیض (مکانی با کمترین فاصله از خورشید) قرار دارد، چقدر است؟ دراین‌موقع فاصلهٔ زمین ازخورشید $۱٫۴۷ \times ۱۰^{۱۱}$ m می‌باشد. آیا تغییرات سرعت روی طول روز شمسی اثر می‌گذارد؟ همچنین سرعت زاویه‌ای زمین دورخورشید را در دوحالت بالا پیدا کنید [راهنمایی: در هردو حالت اوج وحضیض، سرعت بر بردارمکان عمود است.]

۷۶.۷. موشکی به جرم $۱۰^{۳}$ kg به‌طور قایم درسکوی پرتاب خود قرار گرفته است. گاز با آهنگ ۲ kgs$^{-۱}$ از آن خارج می‌شود. حداقل سرعت خروج گاز را که به ازای آن موشک شروع به بالا رفتن می‌کند پیدا کنید. همچنین با فرض اینکه سرعت خروج گاز

---

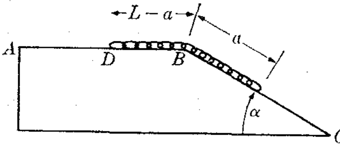
1. law of ereas

حداقل باشد، سرعت موشک را $10\,\text{s}$ بعدازآتش کردن آن پیدا کنید.

۷۷.۷. ازموشکی‌که درراستای قایم پرتاب می‌شود، باآهنگ $5\times10^{-2}m_0\ \text{kgs}^{-1}$ گاز خارج می گردد. m_0 جرم ابتدایی موشک است. سرعت خروج گاز نسبت به موشک برابر است با $5\times10^{3}\ \text{ms}^{-1}$. سرعت وارتفاع موشک را در انتهای $10\,\text{s}$ پیدا کنید.

۷۸.۷. یک زنجیر خم‌پذیر به طول L و بـه وزن W (شکل ۴۶.۷) در آغاز روی سطح بدون مالش ABC قرار دارد. انتهـای D به اندازهٔ $L-a$ از B فاصله دارد. ثابت کنید هنگامی که D به نقطهٔ B می‌رسد، سرعت زنجیر برابر می‌شود با

$$v=\sqrt{(g/L)/(L^2-a^2)\sin\alpha}.$$

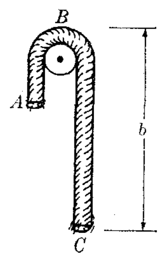


شکل ۴۶.۷

۷۹.۷. نخ یکنواختی به جرم M وطول L (شکل ۴۷.۷) مـی‌تواند بدون مالش روی میخ صافی بـه شعاع کـم بلغزد. هنگام آغـاز حرکت $BC=b$ است. ثابت کنید هنگامی کـه $BC=2L/3$ می‌شود، شتاب برابر $a=g/3$ و سرعت برابر

$$v=\sqrt{2g/L[(8L^2/3+(2bL-b^2)]}$$

است. نتیجه را برای حالتی که $L=12\,\text{m}$ و $b=7\,\text{m}$ باشد به‌کار بندید.



شکل ۴۷.۷

۸۰.۷. جرم M به انتهای زنجیر خیلی درازی که جرم واحد طول آن m است بسته شده و با سرعت اولیهٔ v_0 درراستای قایم به سمت بالا پرتاب می‌شود. ثابت کنید ارتفاع بیشینه‌ای که M می‌رسد برابر است با $h=(M/m)[\sqrt[3]{1+3mv_0^2/2Mg}-1]$ و هنگامی‌که M به سطح زمین می‌رسد سرعت آن برابر است با $v=\sqrt{2gh}$.

۸۱.۷. بخارآب به میزان m واحد جرم در واحد زمان روی یک‌قطرهٔ باران چگالیده می‌شود. درآغاز، قطره‌درحال‌سکون‌وجرم‌آن M است. ثابت‌کنیدکه‌درمدت‌زمان t فاصلهٔ‌زیر را می‌پیماید:

$$\frac{1}{2}g\left\{\frac{1}{2}t^2+\frac{M}{m}t-\frac{M^2}{m^2}\ln\left[1+\frac{m}{M}t\right]\right\}$$

مقاومت هوا را نادیده بگیرید.

۰۸۲۰۷ ذره‌ای بر اثر یک نیروی ثابت در داخل شاره‌ای که با نیرویی مقاوم و متناسب با سرعت با حرکت آن مخالفت می‌کند، جابجا می‌شود. نشان دهید اگر موقعی که ذره به سرعت حد خود رسیده است نیرو حذف شود، رابطهٔ سرعت در لحظهٔ t عبارت می‌شود از $v = v_L e^{-(k/m)t}$ و مسافت پیموده‌شده برابر خواهد بود با $x = (m/k)v_L[1 - e^{-(k/m)t}]$. تحقیق کنید که مسافت پیموده شده قبل از توقف برابر است با $(m/k)\, v_L$. ثابت کنید که سرعت ذره در انتهای زمان $t = m/k$ به $1/e$ مقدار اولیهٔ خود خواهد رسید.

۰۸۳۰۷ جسمی بر اثر یک نیروی ثابت در داخل شاره‌ای که با نیرویی متناسب با مجذور سرعت، یعنی $F_f = -kv^2$، با حرکت آن مخالف می‌کند، جابجا می‌شود. ثابت کنید که سرعت حد برابر است با $v_L = \sqrt{F/k}$. نشان دهید که رابطهٔ بین سرعت و مسافت پیموده شده عبارت‌است از $v^2 = (F/k) + [v_0^2 - (F/k)]e^{-2(k/m)x}$. به‌ازای $v_0 = 0$ نمودار v^2 را برحسب x رسم کنید. اگر به محض اینکه جسم به سرعت حد رسید نیرو حذف شود، ثابت کنید پس از اینکه جسم مسافتی برابر با m/k را پیمود سرعت آن به $1/e$ سرعت حد خواهد رسید.

۰۸۴۰۷ ثابت کنید اگر جسمی تحت اثر نیروی مقاومی متناسب با مجذور سرعت، حرکت کند، سرعت آن در لحظهٔ t برابر است با

$$v = v_L \frac{(v_0 + v_L)e^{-(kv_L/m)t} + (v_0 - v_L)e^{-(kv_L/m)t}}{(v_0 + v_L)e^{-(kv_L/m)t} - (v_0 - v_L)e^{-(kv_L/m)t}}.$$

۸
کار و انرژی

۱۰۸ مقدمه

دراین فصل به بحث دربارهٔ جنبه‌های گوناگون دینامیک یک ذره ادامه خواهیم داد. از این‌رو، تنها یک ذره را مورد مشاهده قرار می‌دهیم و برهم‌کنشهای این ذره را با بقیهٔ جهان در یک کلمه خلاصه می‌کنیم و آن را نیرو می‌خوانیم. هنگام حل معادلهٔ اساسی یک ذره (یعنی $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$)، اگر نیرو به صورت تابعی از زمان معلوم باشد می‌توان همیشه اولین انتگرال گیری را انجام داد، زیرا با انتگرال گیری از این معادله به دست می‌آید

$$\int_{p_\circ}^{p} d\mathbf{p} = \int_{t_\circ}^{t} \mathbf{F}dt$$

یا

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_\circ = \int_{t_\circ}^{t} \mathbf{F}dt = \mathbf{I}. \qquad (۱۰۸)$$

کمیت $\mathbf{I} = \int_{t_\circ}^{t} \mathbf{F}dt$ که در سمت راست معادلهٔ (۱۰۸) ظاهرشده است تکان[1] نامیده می‌شود. بنابراین معادلهٔ (۱۰۸) بیان کند که

تغییر اندازه حرکت ذره برابر است با تکان.

چون تکان اساساً حاصل‌ضرب یک نیرو در یک زمان است، یک نیروی خیلی بزرگ که در زمان خیلی کوتاه اثرمی‌کند می‌تواندتغییر اندازه حرکتی برابر تغییر اندازه حرکت یک نیروی خیلی ضعیف در زمان خیلی طولانی به وجود آورد. به عنوان مثال، وقتی بازیکنی توپی را شوت می‌کند، نیروی بزرگی در زمان خیلی کوتاه بر توپ وارد می‌کند، در نتیجه دراندازه حرکت توپ تغییر قابل ملاحظه‌ای به‌وجود می‌آید. برای ایجاد یک تغییر اندازه‌ـحرکت معادل، نیروی گرانی باید مدت زمان طولانی روی توپ اثرکند.

اگر به جای $\mathbf{p}$ کمیت معادل آن $m\mathbf{v}$ را قرار دهیم، ممکن است با انتگرال‌گیری مجدد مکان ذره را به صورت تابعی از زمان به دست‌آورد؛ داریم

$$m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_\circ = \mathbf{I} \quad \text{یا} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_\circ + \frac{\mathbf{I}}{m}.$$

با توجه به اینکه $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ است، می‌توان نوشت

$$\int_{r_\circ}^{r} d\mathbf{r} = \int_{t_\circ}^{t}\left(\mathbf{v}_\circ + \frac{1}{m}\mathbf{I}\right)dt \quad \text{یا} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_\circ + \mathbf{v}_\circ t + \frac{1}{m}\int_{t_\circ}^{t} \mathbf{I}\,dt.$$

ازاین رابطه $\mathbf{r}$ برحسب زمان به دست می‌آید، بدین طریق مسئلهٔ دینامیکی به طور صوری حل می‌شود. در واقع، ما در مثال ۵۰۷ مسئله‌ای از این‌گونه را درمورد یک حرکت مستقیم‌ـالخط حل کردیم.

با وجود این، در فیزیک به مسایل مهمی برخورد می‌شود که نیروی مؤثر روی ذره برحسب زمان معلوم نیست، بلکه به صورت تابعی از مکان، یعنی $\mathbf{r}$ یا x، y و z داده می‌شود؛

1. impulse

به گفتهٔ دیگر، $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ یا $\mathbf{F}(x, y, z)$ در دست است. در نتیجه، انتگرال ظاهر شده درمعادلهٔ (۱۰۸) را نمی‌توان به دست آورد مگر اینکه x، y و z بـه صورت توابعی از زمان معلوم باشند، یعنی نمی‌توان مسئله را حل کرد مگر اینکه کوشش کنیم معادلـه (۱۰۸) را حل کنیم! برای خروج ازاین دور باطل باید از فنون دیگر ریاضی کمک گـرفت واین امر ما را بـه تعریف دوکمیت جدید کار و انرژی راهنمایی می‌کند. این روشهای توانا به‌ما امکان می‌دهند حتی درمواردی که نیرو معلوم نیست ولی می‌توانیم فرضیه‌های قابل قبولی دربارهٔ ویژگیهای آن به عمل آوریم، مسئله را حل کنیم.

مثال ۱۰۸. توپی به جرم $۰٫۱\ \mathrm{kg}$ از ارتفـاع $۲\ \mathrm{m}$ می‌افتد و پس از برخورد با زمین به اندازهٔ $۱٫۸\ \mathrm{m}$ بلند می‌شود. تکانی کـه توپ هنگام سقوط از طرف نیروی گرانی دریافت می‌کند چقدر است؟ تکانی که هنگام برخورد با زمین دریافت می‌کند چقدر است؟

حل: ابتدا با استفاده از معادلهٔ (۱۲۰۵) سـرعت تـوپ را هنگـام برخورد با زمین پیدا می‌کنیم. داریم $v_۱ = \sqrt{۲gh_۱}$ که درآن $h_۱ = ۲\ \mathrm{m}$ است. بنابراین $v_۱ = ۶٫۲۶\ \mathrm{ms}^{-۱}$ می‌شود. چون سوی سرعت به‌سمت پایین است باید بنویسیم $\mathbf{v}_۱ = -(۶٫۶۲\ \mathbf{u}_y)\mathrm{ms}^{-۱}$. اندازه حرکت اولیه برابر صفر است، در نتیجه تغییر اندازه حرکت کل هنگام سقوط برابر می‌شود با $m\mathbf{v}_۱ - ۰ = -۰٫۶۲۶\,\mathbf{u}_y$. این تکان ناشی از نیروی‌گرانی است. می‌توان این تکـان را مستقیماً از تعـریف $\mathbf{I} = \int_{t_۰}^{t}\mathbf{F}dt$ به دست آورد. در این حالت $t_۰ = ۰$ و $t = v_۱/g = ۰٫۶۳۹\ \mathrm{s}$ است. همچنین داریم $\mathbf{F} = -\mathbf{u}_y mg = -\mathbf{u}_y(۰٫۹۸)\mathrm{N}$. بدین طریق از محاسبهٔ مستقیم، تکان ناشی از نیروی گـرانی بار دیگر $-\mathbf{u}_y(۰٫۶۲۶)$ $\mathrm{kgms}^{-۱}$ به دست می‌آید.

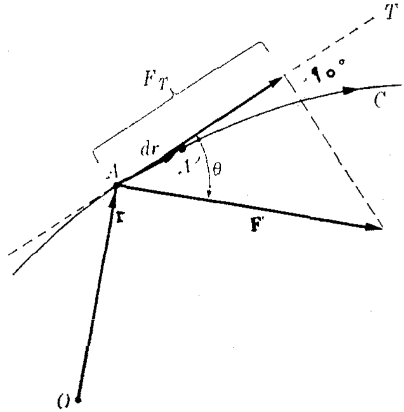
هنگام برخورد توپ با زمین، نیروی جدیدی در زمان خیلی کوتاه اثرمی‌کند. بزرگی این نیرو معلوم نیست ولی با محاسبهٔ اندازه حرکت توپ هنگام بلند شدن از زمین می‌توان تکان را حساب کرد. چون توپ تا ارتفاع $۱٫۸\ \mathrm{m}$ بلند می‌شود، سرعت برخاستن توپ از زمین $v_۲ = \sqrt{۲gh_۲} = ۵٫۹۴\ \mathrm{ms}^{-۱}$ یا به صورت برداری $\mathbf{v}_۲ = \mathbf{u}_y(۵٫۹۴)\ \mathrm{ms}^{-۱}$ است، زیرا به توپ بـه سمت بالا حرکت می‌کند. تغییر انـدازه حرکت با رابطهٔ زیر نشان داده می‌شود:

$$\mathbf{p}_۲ - \mathbf{p}_۱ = m\mathbf{v}_۲ - m\mathbf{v}_۱ = \mathbf{u}_y(۱٫۲۲۱)\ \mathrm{kgms}^{-۱}$$

این رابطه نیز تکان را نشان می‌دهد. با مقایسهٔ این مقدار بـا نتیجهٔ سقوط آزاد و با توجه به اینکه برخورد بازمین درمدت زمان خیلی کوتاهی صورت گرفته است، نتیجه می‌گیریم نیرویی که در حالت دوم اثر کرده است بسیار بزرگتر بوده است. اگـر بتوان این فاصله زمانی را اندازه گرفت، نیروی میانگین مؤثر بر توپ به دست می‌آید.

۲۰۸ کار

فرض کنیم ذرهٔ A براثر نیروی $\mathbf{F}$ در طول منحنی C حـرکت می‌کند (شکل ۱۰۸). در طول



شکل ۱.۸. کار برابر است با حاصل ضرب جابجایی در تصویر نیرو در راستای جابجایی.

زمان خیلی کوتاه dt ذره از نقطهٔ A به نقطهٔ A' می‌رود و جابجایی ذره برابر $\overrightarrow{AA'} = d\mathbf{r}$ است. کار[1] انجام یافته دراین جابجایی با حاصل ضرب اسکالر زیر تعریف می‌شود:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \qquad (۲.۸)$$

چنانچه بزرگی $d\mathbf{r}$ (یعنی مسافت پیموده شده) را با ds نشان دهیم می‌توانیم رابطهٔ (۲.۸) را به صورت زیر بنویسیم:

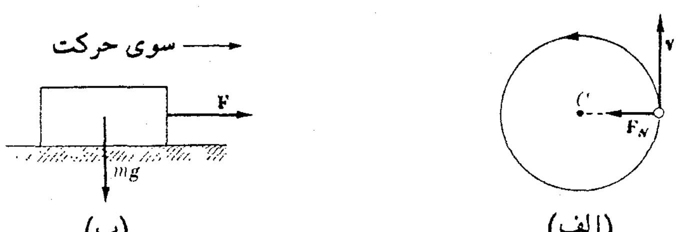
$$dW = F\, ds \cos\theta \qquad (۳.۸)$$

که درآن θ زاویهٔ بین نیروی $\mathbf{F}$ وجابجایی $d\mathbf{r}$ است. چون $F\cos\theta$ مؤلفهٔ مماسی نیرو روی مسیر می باشد، داریم

$$dW = F_T\, ds \qquad (۴.۸)$$

رابطهٔ فوق را می‌توان چنین بیان کرد:

کار برابر است با جابجایی ضرب در مؤلفهٔ نیرو در راستای جابجایی.



شکل ۲.۸. نیروهایی که کار انجام نمی‌دهند

1. work

توجه داشته باشید که اگر نیرویی بر جابجایی عمود باشد ($\theta = ۹۰^\circ$)، کاری که این نیرو انجام می‌دهد برابر صفر است. نیروی مرکزگرای $\mathbf{F}_N$ درحرکت دایره‌ای [شکل ۲.۸ (الف)] یا نیروی گرانی $m\mathbf{g}$ درحرکت یکی جسم درراستای افقی [شکل ۲.۸(ب)] چنین وضعی دارد.

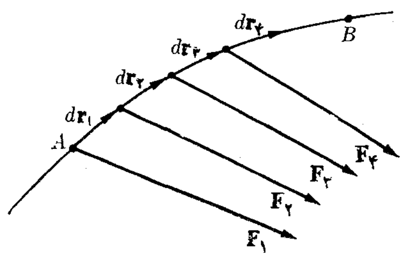
معادلهٔ (۲.۸) کار در یک جابجایی بینهایت کوچک را به دست می‌دهد. کار کل انجام یافته روی ذره درجابجایی آن ازنقطهٔ A تا نقطهٔ B (شکل ۳.۸) برابر است با مجموع تمام‌کارهای جزئی انجام یافته درطول جابجاییهای بینهایت کوچک پیاپی؛ یعنی

$$W = \mathbf{F}_۱ \cdot d\mathbf{r}_۱ + \mathbf{F}_۲ \cdot d\mathbf{r}_۲ + \mathbf{F}_۳ \cdot d\mathbf{r}_۳ + \cdots$$

یا

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B F_T\, ds. \qquad *(۵.۸)$$

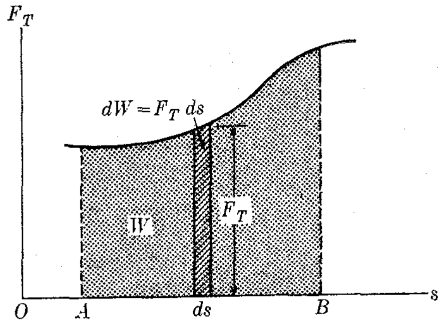
پیش ازآنکه به حل انتگرالی که در رابطهٔ (۵.۸) ظاهر می‌شود بپردازیم، باید $\mathbf{F}$ را به صورت تابعی از x، y و z داشته باشیم. همچنین، به‌طورکلی، باید معادلهٔ مسیری‌را که ذره در طول‌آن حرکت می‌کند نیز بدانیم. یک امکان دیگر، شناختن $\mathbf{F}$، x، y و z به صورت توابعی از زمان یا یک متغیر دیگر است.



شکل ۳.۸. کارکل برابر است با مجموع تعداد زیادی ازکارهای جزئی.

گاهی راحت‌تر است F_T به صورت نمودار نشان داده شود. شکل ۴.۸، F_T را بر حسب مسافت ds نمایش می‌دهد. کار $dW = F_T\, ds$ که در جابجایی جزئی ds انجام می‌گیرد، متناظر با مساحت مستطیل کوچک است. بدین طریق، می‌توان کار کل را که روی ذرهٔ شکل ۳.۸ انجام شده تا از نقطهٔ A به نقطهٔ B برود، ابتدا با تجزیهٔ مساحت هاشور خوردهٔ در شکل ۴.۸ به مستطیلهای باریک و سپس با جمع کردن مساحت این مستطیلها به دست آورد. به گفتهٔ دیگر، کار انجام یافته برابراست با مساحت کل سطح هاشور خورده در شکل ۴.۸.

☆ برای هربردار $\mathbf{V}$ که تابعی از مکان است، انتگرالی به شکل $\int_A^B \mathbf{V}\cdot d\mathbf{r}$ درطول مسیری‌که که A را به B می‌پیوندد، انتگرال خطی (linear integral) $\mathbf{V}$ نامیده می‌شود. این انتگرال در موارد متعدد دراین‌کتاب ظاهر خواهد شد.



شکل ۴.۸. کار کل انجام یافته در جابجایی از B تا A
برابر است با مساحت زیر منحنی.

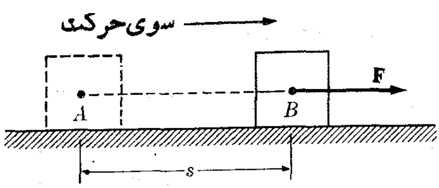
یک حالت ویژهٔ جالب آن است که سو و راستای نیرو ثابت باشد و جسم در خط مستقیمی در راستای نیرو جابجا شود (شکل ۵.۸). در این صورت $F_T = F$ است و معادلهٔ (۵.۸) به صورت زیر درمی‌آید:

$$W = \int_A^B F\, ds = F \int_A^B ds = Fs \qquad (۶.۸)$$

یا: کار $=$ مسافت $\times$ نیرو؛ رابطه‌ای که درکتابهای مقدماتی فیزیک پیدا می‌شود.

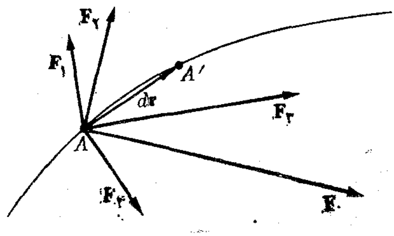
اگر F_x، F_y و F_z مؤلفه‌های قایم $\mathbf{F}$، و dx، dy و dz مؤلفه‌های $d\mathbf{r}$ (شکل ۶.۸) باشند، با به کار بستن معادلهٔ (۲۰.۳) به دست می‌آید

$$W = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \qquad (۷.۸)$$

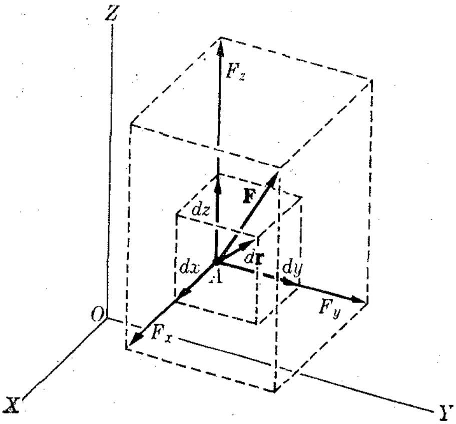


شکل ۵.۸. کار نیرویی با راستا و سوی ثابت

هنگامی که چندین نیرو مانند $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{F}_2$، $\mathbf{F}_3$، . . .، روی ذره‌ای اثر می‌کنند، کار انجام یافته به وسیلهٔ هر نیرو در جریان جابجایی $\overrightarrow{AA'} = d\mathbf{r}$ (شکل ۷.۸) برابر است با $dW_1 = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}$، $dW_2 = \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}$، $dW_3 = \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{r}$ وغیره . . . توجه داشته باشید که $d\mathbf{r}$ برای تمام نیروها یکسان است زیرا همهٔ آنها روی یک ذره اثر می‌کنند. کار کل انجام یافتهٔ dW روی ذره از جمع کارهای جزئی dW_1، dW_2، dW_3 و . . . که به وسیلهٔ



شکل ۶.۸. کار انجام یافته بـه وسیلهٔ یـک نیرو برابر است با مجموع کـارهای انجام یافته به وسیلهٔ مؤلفه‌های قایم آن نیـرو.



شکل ۷.۸. هنگامی کـه چند نیرو بر یـک ذره وارد می‌شوند، کار برآیند نیروها برابر است با مجموع کارهای هریک از نیروهای مؤلفه.

هریک از نیروها انجام یافته است به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} dW &= dW_1 + dW_2 + dW_3 + \cdots \\ &= \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{r} + \cdots \\ &= (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots) \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \qquad (۸.۸)$$

که درآن $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots$ برآیند نیروهاست. آخرین نتیجهٔ معادلهٔ (۸.۸) همان کار انجام یافته روی ذره به وسیلهٔ نیروی برآیند است. بدین طریق ثابت می‌شود کـه کاربرآیند چند نیروی وارد بریک ذره برابراست با جمع کارهای هریک ازنیروهای مؤلفه.

۳.۸ توان

در بعضی کارهای عملی، بویژه کارهای مربوط به ماشینها و مهندسی، دانستن آهنگ انجام کار از اهمیت زیاد برخوردار است. توان لحظه‌ای[1]، یا آهنگ انجام کـار با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$P = \frac{dW}{dt}. \qquad (۹.۸)$$

به گفتهٔ دیگر، توان عبارت‌است ازکار انجام یافته در واحد زمان درفاصله زمانی خیلی‌کوتاه dt. با استفاده ازمعادلات (۲.۸) و (۱۷.۵) می‌توان نوشت

$$P = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \qquad (۱۰.۸)$$

1. instantaneous power

بدین طریق توان به صورت حاصل ضرب اسکالر نیرو در سرعت تعریف می‌شود. توان میانگین درفاصله زمانی t از تقسیم کار کل [به دست آمده ازمعادلهٔ (۵.۸)] بر زمان t به دست می‌آید؛ $P_{\text{ave}} = W/t$.

از نقطه نظر مهندسی، توان از اهمیت بیشتری برخوردار است، زیرا هنگامی که مهندسی طرح ساختمان یک ماشین را فراهم می‌کند، درآن سرعت انجام کار ماشین بیشتر اهمیت دارد تا مقدار کل کاری که ماشین توانایی انجام آن را دارد.

۴.۸ یکاهای کار وتوان

ازمعادله‌های (۲.۸) یا (۶.۸)، می‌بینیم که کار را باید برحسب حاصل ضرب یک یکای نیرو دریک یکای فاصله بیان کرد. در دستگاه MKSC کار را برحسب نیوتون ـ متر، به نام ژول[1] با علامت اختصاری J بیان می‌کنند. پس یک ژول مقدار کاری است که نیروی یک نیوتونی به هنگام جابجا کردن ذره‌ای در راستای نیرو به اندازهٔ یک متر انجام می‌دهد. با توجه به‌اینکه $N = mkgs^{-۲}$ است، داریم $J = Nm = m^{۲}kgs^{-۲}$. نام ژول به‌افتخار جیمز پرسکات ژول[2] [۱۸۱۶–۱۸۶۹ (۱۱۹۵–۱۲۴۸ هـ. ش.)] دانشمند نامی انگلیسی، به‌خاطر تحقیقات ارزندهٔ وی روی مفاهیم انرژی وگرما، انتخاب شده است.

در دستگاه یکاهای cgs یکای کار، دین سانتیمتر است که ارگ[3] نامیده می‌شود. بنابراین $erg = dyn\ cm$. چون $۱m = ۱۰^{۲}cm,\ ۱N = ۱۰^{۵}dyn$ می‌باشد، داریم $۱J = (۱۰^{۵}dyn)(۱۰^{۲}cm) = ۱۰^{۷}erg$.

بنا به تعریف (۹.۸)، توان باید برحسب یک یکای کار تقسیم بریکای زمان بیان شود. در دستگاه یکاهای MKSC توان برحسب ژول برثانیه، به نام وات[4]، با علامت W بیان می‌شود. یک وات توان ماشینی است که درهرثانیه یک ژول کار انجام می‌دهد. چون $J = m^{۲}kgs^{-۲}$ است، بنابراین داریم $W = Js^{-۱} = m^{۲}kgs^{-۳}$. کلمهٔ وات از نام جیمز وات[5] [۱۷۳۶–۱۸۱۹ (۱۱۱۵–۱۱۹۸ هـ.ش.)] مهندس انگلیسی، به‌مناسبت ابتکاراتی که وی در رفع نقایص ماشین بخار به‌کار برده، گرفته شده است. معمولا اضعاف وات به نام کیلووات (kW) و مگاوات (MW) با اندازه‌های $۱kW = ۱۰^{۳}W$ و $۱MW = ۱۰^{۶}W$ را به کار می‌برند. یکای دیگر توان که بیشتر به وسیلهٔ مهندسین به‌کار می‌رود اسب بخار[1] با علامت اختصاری hp است که برابر W ۷۴۶ می‌باشد.*

کیلووات ساعت یک یکای دیگر کار است، وآن معادل کاری است که یک ماشین با توان یک کیلووات درمدت یک ساعت انجام می‌دهد. بنابراین داریم

$$\text{کیلووات ساعت} = kWhr = (۱۰^{۳}W)(۳٫۶ \times ۱۰^{۳}s) = ۳٫۶ \times ۱۰^{۶}J.$$

---

1. joule 2. James prescott Joule 3. erg
4. watt 5. James Watt

☆ انگلیسی‌ها به جای این یکا، یکای دیگری به نام هورس‌پاور (horsepower) به کار می‌برند که برابر است با ۵۵۰ فوت درپوند برثانیه.

مثال ۲.۸. اتومبیلی بـه جرم $۱۲۰۰\mathrm{kg}$ با سرعت ۳۶ کیلومتر در ساعت در طول یک سربالایی به شیب ۵° بالا می‌رود. کار انجام یافته به وسیلهٔ موتور درمدت ۵ دقیقه را حساب کنید. توان اعمال شده ازطرف موتور چقدر است؟ ازهمهٔ اثرات مالشی صرف‌نظر کنید.

حل: حرکت اتومبیل در سربالایی ازنیروهای F و $W\sin\alpha$ ناشی می‌شود که بترتیب از طـرف موتور و وزن اتومبیل اعمال می‌گردنـد (شکل ۸.۸). بنابراین بـا استفاده از $W = mg$، می‌توان نوشت

$$F - mg\sin\alpha = ma.$$

چون حرکت یکنواخت است، $a = ۰$ و $F = mg\sin\alpha = ۱٫۰۲۳ \times ۱۰^۳\mathrm{N}$ می‌شود. سرعت اتـومبیل $v = ۳۶\mathrm{kmhr}^{-۱} = (۳۶ \times ۱۰^۳\mathrm{m})(۳۶۰۰\mathrm{s})^{-۱} = ۱۰\mathrm{ms}^{-۱}$ است ومسافتی که در $۵\mathrm{min} = ۳۰۰\mathrm{s}$ طی می‌کند برابر می‌شود با

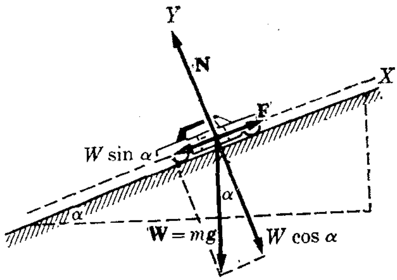
$$s = (۱۰\mathrm{ms}^{-۱})(۳۰۰\mathrm{s}) = ۳ \times ۱۰^۳\mathrm{m}.$$

با استفاده ازمعادلهٔ (۶.۸)، کار انجام یافته برابر است با

$$W = Fs = (۱٫۰۲۳ \times ۱۰^۳\mathrm{N})(۳ \times ۱۰^۳\mathrm{m}) = ۳٫۰۶۹ \times ۱۰^۶\mathrm{J}.$$

توان میانگین را می‌توان به دوشیوهٔ مختلف حساب کرد. با روش اول، می‌گوییم

$$P = \frac{W}{t} = \frac{۳٫۰۶۹ \times ۱۰^۶\mathrm{J}}{۳ \times ۱۰^۲\mathrm{s}} = ۱٫۰۲۳ \times ۱۰^۴\mathrm{W}.$$



شکل ۸.۸

به روش دیگر، می‌توان گفت

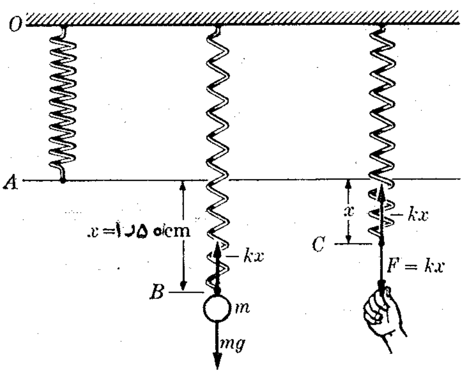
$$P = Fv = (۱٫۰۲۳ \times ۱۰^۳\mathrm{N})(۱۰\mathrm{ms}^{-۱}) = ۱٫۰۲۳ \times ۱۰^۴\mathrm{W}.$$

مثال ۳.۸. کار لازم برای اینکه طـول فنر شکل ۹.۸ بدون شتاب به اندازهٔ $۲\mathrm{cm}$ کشیده شود چقدر است؟ می‌دانیم اگر یک جرم ۴ کیلوگرمی به فنر آویزان کنیم $۱٫۵\mathrm{cm}$ به‌طول آن افزوده می‌شود.

حل: وقتی کـه هیچ وزنه‌ای به فنر آویزان نباشد، طول فنر برابر فـاصلهٔ نقطهٔ O تا یک تراز افقی مانند A است. با آزمایش اثبات شده است که برای کشیدن بدون شتاب فنر به‌-

اندازهٔ طول کوچک x، نیرویی‌متناسب با این طول لازم است؛ یا $F = kx$. دراین‌صورت فنر نیز نیرویی برابر و درخلاف جهت این نیرو اعمال می‌کند. ترازوی فنری یا دینامومتر[1]، که معمولا برای اندازه‌گیری نیرو به‌کار می‌رود، براین اساس ساخته شده است. برای تعیین ثابت تناسب k ازاین نکته استفاده می‌کنیم که فنر درمقابل نیروی وزن جرم m به اندازهٔ $x = ۱٫۵۰\text{cm} = ۱٫۵ \times ۱۰^{-۲}\text{m}$ کشیده می‌شود. در این مورد F برابر وزن $mg = ۳۹٫۲\text{N}$ است. درنتیجه با نوشتن $mg = kx$، به دست می‌آید

$$k = \frac{۳۹٫۲\text{N}}{۱٫۵۰ \times ۱۰^{-۲}\text{m}} = ۲٫۶۱ \times ۱۰^{۳}\text{Nm}^{-۱}$$



شکل ۹.۸. کار انجام یافته هنگام افزایش فنر

برای کشیدن بدون شتاب فنر به اندازهٔ x، نیروی $F = kx$ را به‌آن اعمال می‌کنیم. برای این کار می‌توان نخی را که به فنر بسته شده است بآهستگی کشید. بتدریج که x زیاد می‌شود نیرو نیز لزوماً به طور منظم افزایش می‌یابد. برای محاسبهٔ کار انجام یافته، باید ازمعادلهٔ (۵.۸) استفاده کنیم؛ به دست می‌آید

$$W = \int_{۰}^{x} F dx = \int_{۰}^{x} kx\, dx = \frac{۱}{۲} kx^{۲}.$$

رابطهٔ فوق کار انجام یافته درجابجایی x را نشان می‌دهد. با وارد کردن مقادیر عددی مربوط به k و x، کار لازم برای کشیدن فنر به اندازهٔ ۲cm، به‌دست می‌آید که برابر می‌شود با

$$W = ۵٫۲۲ \times ۱۰^{-۱}\text{J}.$$

مثال ۴.۸. روی ذره‌ای به جرم ۲kg نیروی $F = ۶t$ N اثر می‌کند. اگر ذره قبل ازوارد شدن نیرو ساکن باشد، کار انجام یافته درطول دوثانیهٔ اول را پیدا کنید.

1. spring balance (dynamometer)

حل: درمثال پیش پیدا کردن کار انجام یافته آسانتر بود، زیرا نیرو به صورت تابعی ازمکان ($F = kx$) داده شده بود. دراین مثال، برعکس، نیرو تنها برحسب زمان معلوم است ($F = ۶t$). بنابراین نمی‌توان کار را مستقیماً از رابطهٔ $W = \int F dx$ حساب کرد. پس ابتدا باید با استفاده از رابطهٔ $F = ma$ جابجایی را برحسب زمان پیدا کنیم. بنابراین $a = F/m = ۳t \,\mathrm{ms^{-۲}}$. با به کار بردن معادلهٔ (۶.۵) به ازای $v_{\circ} = \circ$ (زیرا ذره در آغاز بدون حرکت است)، می‌توان نوشت

$$v = \int_{\circ}^{t} (۳t)dt = ۱٫۵t^{۲}\mathrm{ms^{-۱}}$$

اکنون اگر معادلهٔ (۳.۵) را با $x_{\circ} = \circ$ به کار بریم ومبدأ مختصات را نقطهٔ آغاز حرکت اختیار کنیم، به دست می‌آید

$$x = \int_{\circ}^{t} (۱٫۵t^{۲})\, dt = \circ٫۵t^{۳}\,\mathrm{m}.$$

حال، با داشتن x به صورت تابعی از t، می‌توان به دو روش زیر عمل کرد:

(الف) باحل رابطهٔ فوق برحسب t به‌دست می‌آید $t = (x/\circ٫۵)^{۱/۳} = ۱٫۲۶\circ x^{۱/۳}$. دراین صورت نیرو برابر می‌شود با $F = ۶t = ۷٫۵۶\circ x^{۱/۳}\,\mathrm{N}$. با استفاده از معادلهٔ (۵.۸)، داریم

$$W = \int_{\circ}^{x} (۷٫۵۶\circ x^{۱/۳})dx = ۵٫۷۶\circ\, x^{۴/۳}$$

وقتی $t = ۲\,\mathrm{s}$ باشد، خواهیم داشت $x = \circ٫۵ \times (۲)^{۳} = ۴\,\mathrm{m}$، در نتیجه $W = ۳۶٫\circ\,\mathrm{J}$ می‌شود.

(ب) اکنون مسئله را به روش دیگری حل می‌کنیم: از رابطهٔ $x = \circ٫۵t^{۳}$ داریم $dx = ۱٫۵\, t^{۲}dt$. سپس با استفاده از رابطهٔ نیرو برحسب زمان، می‌توان نوشت

$$W = \int_{\circ}^{t} (۶t)(۱٫۵\, t^{۲})dt = ۲٫۲۵t^{۴}\,\mathrm{J}.$$

به ازای $t = ۲\,\mathrm{s}$ به دست می‌آید $W = ۳۶٫\circ\,\mathrm{J}$، که با نتیجهٔ قبل تطبیق می‌کند.

معمولا موقعی که نیرو به صورت تابعی از زمان معلوم باشد باید ازروش دوم استفاده کرد، زیرا حتی پس از حل معادلهٔ حرکت، اغلب یافتن رابطهٔ نیرو برحسب مکان ذره مشکل است.

۵.۸ انرژی جنبشی

بنا به معادلهٔ (۲۷.۷)، مقدار نیروی مماسی برابر است با $F_T = mdv/dt$. بنابراین

$$F_T\, ds = m\frac{dv}{dt}\, ds = mdv\,\frac{ds}{dt} = mv\, dv$$

زیرا به موجب معادلهٔ (۲۳.۵)، $v = ds/dt$ است. بنابراین انتگرالی که درمعادلهٔ (۵.۸) درمحاسبهٔ کار کل ظاهر می‌شود، برابر است با

$$W = \int_A^B F_T\, ds = \int_A^B mv\,dv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \qquad (۱۱.۸)$$

که در آن v_B سرعت ذره در نقطهٔ B و v_A سرعت آن در نقطهٔ A است. نتیجهٔ (۱۱.۸) نشان می‌دهد که شکل تابعی نیروی F ومسیری که ذره می‌پیماید هرچه باشد، مقدارکار W انجام یافته به‌وسیلهٔ نیروهمواره برابر است با اختلاف کمیت $mv^2/2$ درانتها وابتدای مسیر. این کمیت مهم انرژی جنبشی[1] نامیده می‌شود و آن را با علامت E_k نشان می‌دهند. بنابراین

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{یا} \quad E_k = \frac{p^2}{2m} \qquad (۱۲.۸)$$

زیرا $p = mv$ است. به این ترتیب معادلهٔ (۱۱.۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$W = E_{k,B} - E_{k,A} \qquad (۱۳.۸)$$

رابطهٔ فوق را می‌توان چنین بیان کرد:

کار انجام گرفته روی یک ذره برابر است با تغییر انرژی جنبشی آن ذره،

ماهیت نیرو هرچه باشد، این نتیجه اعتبار خود را حفظ می‌کند.

معادلهٔ (۱۳.۸) بوضوح نشان می‌دهد که انرژی جنبشی با یکای کار اندازه گیری می‌شود؛ یعنی در دستگاه یکاهای MKSC یکای انرژی ژول و در دستگاه یکاهای cgs، ارگ می‌باشد. درستی بیان فوق را می‌توان از روی معادلهٔ (۱۲.۸) نیز تحقیق کرد، که در آن E_k در دستگاه یکاهای MKSC را باید برحسب $\mathrm{m^2kgs^{-2}}$ نوشت که رابطهٔ ابعادی[2] ژول برحسب یکاهای اصلی است.

دراینجا از یکاهای دیگری برای انرژی به نام الکترون ـ ولت[3] با علامت اختصاری eV، که در بخش ۹.۱۴ (جلد دوم کتاب) به طور دقیق تعریف خواهد شد، نام می‌بریم که اغلب به عنوان یکای انرژی در بیان فرایندهای شیمیایی و هسته‌ای به کار می‌رود. رابطهٔ هم‌ارزی الکترون ولت با ژول چنین‌است: $1\,\mathrm{eV} = 1{,}60210 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$. یکی ازاضعاف مفید الکترون ـ ولت، MeV است که برابر $10^6\,\mathrm{eV}$ یا $1{,}60210 \times 10^{-13}\,\mathrm{J}$ می‌باشد.

نتیجهٔ (۱۳.۸) که تغییر انرژی جنبشی E_k یک ذره را با W، کار انجام یافته به‌وسیلهٔ نیرو مربوط می‌کند، شباهت زیادی با معادلهٔ (۱.۸) دارد که تغییر $\mathbf{p}$، اندازه حرکت یک ذره را با $\mathbf{I}$، تکان نیرو پیوند می‌دهد. اختلاف این دورابطه درآن است که تکان که انتگرال روی زمان است هنگامی می‌تواند مفید باشد که نیرو را به صورت تابعی از زمان در دست داشته باشیم، ولی، کار یک انتگرال روی مکان است و وقتی که نیرو به صورت تابعی از مکان معلوم باشد بآسانی قابل محاسبه است. ما معمولا نیرو را برحسب مکان می‌شناسیم، و به همین جهت است که مفاهیم نیرو وانرژی نقشی چنین مهم در فیزیک دارند.

---

1. kinetic energy 2. dimensional exression 3. electron - volt

لازم است یادآوری کنیم که مفاهیم کار و انرژی، آن طور که در فیزیک به کار برده می‌شوند دارای معنای کاملا دقیق هستند که باید آنها را خوب فهمیده و نباید با استنباطی که در زندگی عادی از آنها وجود دارد اشتباه کرد.

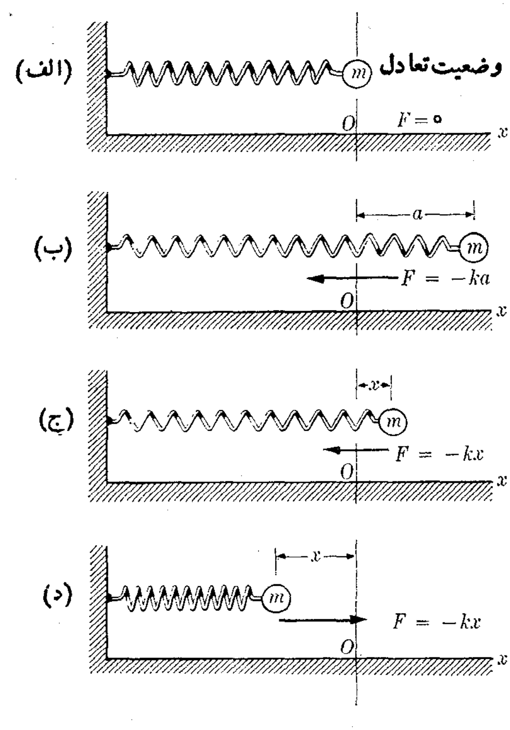
مثال ۵.۸. با استفاده از داده‌های مثال ۴.۸، انرژی جنبشی را که ذره در زمان t کسب می‌کند مستقیماً حساب کنید.

حل: از حل مثال ۴.۸ به یادداریم که سرعت در لحظهٔ t برابراست با $v = ۱٫۵t^۲\text{ms}^{-۱}$. بنا براین انرژی جنبشی ذره برابر می‌شود با

$$E_k = \frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{۱}{۲}(۲\text{kg})(۱٫۵t^۲\,\text{ms}^{-۱})^۲ = ۲٫۲۵t^۴\,\text{J}.$$

انرژی جنبشی اولیهٔ ذره در لحظهٔ $t = ۰$، برابر صفر است. درنتیجه انرژی جنبشی که ذره در فاصله زمانی t کسب می‌کند برابر است با $E_k - E_{k,۰} = ۲٫۲۵t^۴\text{J}$، که مطابق نتیجهٔ دوم مثال ۴.۸، درست برابر W، کار انجام یافته روی ذره است.

مثال ۶.۸. فنر مثال ۳.۸ را مطابق شکل ۱۰.۸ در وضع افقی قرار می‌دهیم. جرم m را به اندازهٔ a به سمت راست کشیده رها می‌کنیم. انرژی جنبشی ذره را هنگامی که در فاصلهٔ x از وضع تعادل خود قرار دارد حساب کنید.



شکل ۱۰.۸

حل: بنا به توضیحی که درمثال ۳.۸ داده شد، هنگامی که جرم m درفاصلهٔ x ازوضع تعادل خود قراردارد از طرف فنر نیروی $F = -kx$ روی آن اثر می‌کند (علامت منفی نشان می‌دهد که نیروی حاصل ازفنر، هنگامی که x به سمت راست باشد، به سمت چپ است.) دروضع تعادل، $x = ۰$ و در نتیجه $F = ۰$ است. در وضع (ب) هنگامی که جرم در حال رها شدن است $x = a$ و $F = -ka$ و سرعت برابر صفر است ($v_۰ = ۰$)، یعنی انرژی جنبشی اولیه برابر صفر است. سرعت در وضع میانی x را برابر v فرض می‌کنیم. با به کار بردن معادلهٔ (۱۱.۸) به دست می‌آید

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ = \int_a^x F\,dx = \int_a^x (-kx)dx$$
$$= \frac{۱}{۲}k(a^۲ - x^۲)$$

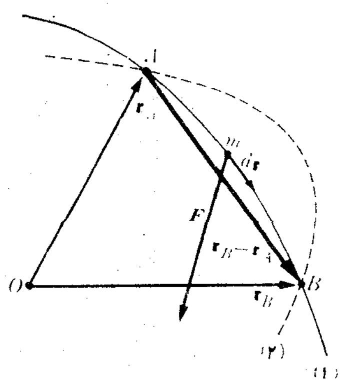
یا

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(a^۲ - x^۲)}.$$

این رابطه سرعت ذره را برحسب مکان آن به دست می‌دهد. توجه کنید که v به مجذور x بستگی دارد. معنای فیزیکی چنین رابطه‌ای چیست؟ با چه سرعتی ذره به وضع $x = ۰$ می‌رسد؟ آیا لازم است علامت $\pm$ جلورادیکال مربوط به سرعت v قرار دهیم؟ حدی برای مقادیر ممکن x وجود دارد؟ آیا دانشجو می‌تواند حرکتی را که بدین طریق به وجود می‌آید با روش ترسیمی نشان دهد؟

۶.۸ کار نیرویی با بزرگی و راستای ثابت

ذرهٔ m را که تحت تأثیر نیروی F با راستا و بزرگی ثابت قرار دارد در نظر بگیرید (شکل ۱۱.۸). ممکن است روی ذره نیروهای ثابت و یا غیر ثابت دیگری نیز اثر کنند، که



شکل ۱۱.۸. کار انجام یافته به وسیلهٔ نیرویی با بزرگی و راستای ثابت

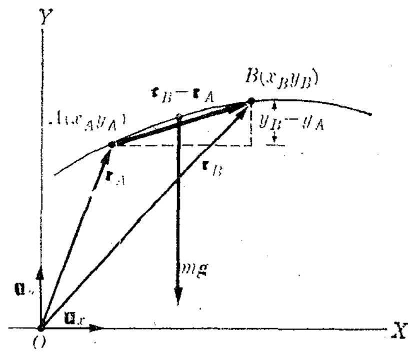
فعلا آنها را به کنار می‌نهیم. هنگامی که ذره روی مسیر (۱) از نقطهٔ A به نقطهٔ B تغییرمکان می‌دهد، کار نیروی $\mathbf{F}$ برابر است با

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \int_A^B d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A). \qquad (۱۴.۸)$$

نتیجهٔ مهمی از معادلهٔ (۱۴.۸) به دست می‌آید این است کـه کار انجام یافته در این حالت، مستقل از مسیری است کـه نقطهٔ A را به نقطهٔ B می‌پیوندد. به عنوان مثال، اگر ذره به جای حرکت روی مسیر (۱)، مسیر (۲) را که آن هم نقطهٔ A را به‌نقطهٔ B متصل می‌کند بپیمایـد، کار تغییر نمی‌کند، زیـرا تفاضل برداری $\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ تغییر نمی‌کند. توجه داشته باشید معادلهٔ (۱۴.۸) را به‌شکل زیر نیز می‌توان نوشت:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_B - \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_A \qquad (۱۵.۸)$$

بنا بـر این رابطه، کار بـرابـر است با اختلاف بین مقادیرکمیت $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$ که در دو انتهای مسیر اندازه‌گیری می‌شود.



شکل ۱۲.۸. کار انجام گرفته به‌وسیلهٔ نیروی گرانی

یک کاربرد بسیار مهم معادلهٔ (۱۴.۸) درمورد کار انجام یافته به‌وسیلهٔ نیروی گرانی است (شکل ۱۲.۸). دراین مورد

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -\mathbf{u}_y mg \quad \text{و} \quad \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = \mathbf{u}_x(x_B - x_A) + \mathbf{u}_y(y_B - y_A)$$

است. بنا براین بـا قراردادن این مقادیر در معادلهٔ (۱۴.۸) و با به کاربردن معادلهٔ (۱۹.۳) برای ضرب اسکالر، داریم

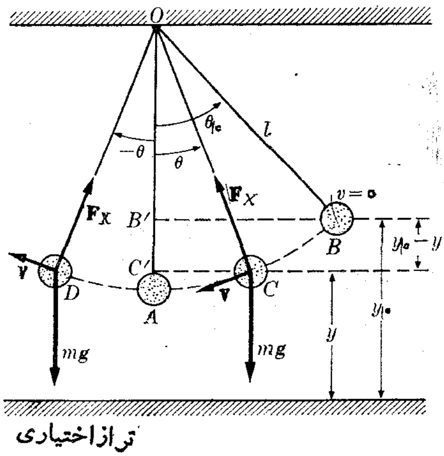
$$W = -mg(y_B - y_A) = mgy_A - mgy_B. \qquad (۱۶.۸)$$

بدیهی است در معادلهٔ (۱۶.۸) هیچ اشاره‌ای به مسیر نمی‌شود، و کار فقط بـه $y_B - y_A$، اختلاف ارتفاع دوانتها، بستگی دارد.

مثال ۷.۸. یک جرم ۲ کیلوگرمی را کـه از نخی به‌طول یک متر آویزان است از وضع

قایم به‌اندازهٔ °۳۰ منحرف و سپس رها می‌کنیم. وقتی‌که نخ درطرفین خط قایم زاویهٔ °۱۰ بـا آن می‌سازد سرعت جسم را پیدا کنید.

حل: معمولا یک جرم آویزان از نخ را آونگ[1] می‌نامند. وقتی‌که جرم بسته به‌نخ به‌اندازهٔ °۳۰ منحرف و رها می‌شود (شکل ۱۳.۸)، سرعت اولیهٔ آن برابر صفر است. جسم بر اثر نیروی وزن $m\mathbf{g}$ و کشش نخ $\mathbf{F}_N$، بـا رسم کمانی از دایره به‌نقطهٔ A می‌رسد، سپس از A گذشته به‌سمت چپ حرکت می‌کند تا اینکه به‌نقطهٔ متقارن با نقطه‌ای‌که رها شده است برسد. از این به بعد، حرکت رفت و برگشت ادامه پیدا می‌کند و نوسانهای شناخته شده‌ای به نام حرکت آونگی به وجود می‌آید. (درفصل ۱۲ حرکت نوسانی به طور مفصل مورد بررسی قرار خواهد گرفت.)



شکل ۱۳.۸. رابطه‌های انرژی درحرکت یک آونگ

برای پیدا کردن v از روی اصل انرژی جنبشی، یعنی معادلهٔ (۱۱.۸)، ابتدا باید کار نیروهای وارد بر ذره را به‌دست آورد. نیروی مرکزگرای $\mathbf{F}_N$ کاری انجام نمی‌دهد، زیـرا این نیرو در هر نقطه بر راستای سرعت عمود است. کار نیروی گرانی را می‌توان به کمک معادلهٔ (۱۶.۸) حساب کرد که عبارت می‌شود از $W = mgy_0 - mgy = mg(y_0 - y)$. اکنون اگـر ارتفـاع را از یک صفحهٔ افقی اختیاری حساب کنیم بـه دست مـی‌آوریم $y_0 - y = B'C' = OC' - OB'$. ولی چون $OB' = l\cos\theta_0$ و $OC' = l\cos\theta$ است، بنابراین داریم

$$y_0 - y = l(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

و

$$W = mg(y_0 - y) = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

1. pendulum

انرژی جنبشی درنقطهٔ C برابــر $E_k = mv^{۲}/۲$ و در نقطهٔ B برابر صفر است. بنابراین با استفاده ازمعادلهٔ (۱۳.۸) به‌دست می‌آید

$$\frac{۱}{۲}mv^{۲} = mgl(\cos\theta - \cos\theta_{\circ})$$

یا

$$v = \sqrt{۲gl(\cos\theta - \cos\theta_{\circ})}.$$

توجه کنید که نتیجهٔ به دست آمده به‌جرم آونگ بستگی ندارد. با وارد کردن مقادیر عددی خواهیم داشت

$$v = \sqrt{۲(۹٫۸\,\mathrm{m\,s^{-۲}})(۱\mathrm{m})(\cos ۱۰^{\circ} - \cos ۳۰^{\circ})} = ۱٫۵۲۶\,\mathrm{m\,s^{-۱}}.$$

بــرای نقطهٔ D، وضع متقارن بــا C کــه زاویهٔ ۱۰° — با خط قایم می‌سازد، همین نتیجه به‌دست می‌آید، زیرا $\cos(-\theta) = \cos\theta$ است.

۷.۸ انرژی پتانسیل

مسئله‌ای که دربخش پیش مطالعه کردیم، نمونه‌ای است ازیک گروه بزرگ ومهم از نیروها کــه نیروهای پایستار[1] خوانده می‌شوند. دلیل این اسم گذاری دربخشهای بعدی این فصل توضیح داده خواهد شد.

نیرویــی پــایستار است که چگونگی بستگی آن به بردار مکان $\mathbf{r}$ یا مختصات x، y و z ذره طــوری بــاشد کــه همیشه بتوان کار W را بــه عنوان اختلاف مقادیــر یک کمیت $E_p(x, y, z)$ در نقاط ابتدا و انتها بیان کرد. کمیت $E_p(x, y, z)$ انرژی پتانسیل[2] نــام دارد و تابعی از مختصات نقطه است. اگر $\mathbf{F}$ نیرویی پایستار باشد داریم

$$W = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = E_{p,A} - E_{p,B} \qquad (۱۷.۸)$$

توجه کنید کــه می‌نویسیم $E_{p,A} - E_{p,B}$ و نه $E_{p,B} - E_{p,A}$؛ یعنی اینکه کار انجام یافته برابر است با E_p درنقطهٔ مبدأ منهای E_p درنقطهٔ مقصد؛ به‌عبارت دیگر

انرژی پتانسیل تابعی است ازمختصات‌که اختلاف بین مقداراین تابع درمبدأ ومقصد برابر است با کاری که روی ذره انجام می‌شود تا از نقطهٔ مبدأ به نقطهٔ مقصد برسد.

به‌گفتهٔ دقیقتر، انرژی پتانسیل E_p باید به مختصات ذرهٔ موردنظر و همچنین مختصات کلیهٔ ذره‌های دیگری کــه با این ذره برهم کنش می‌کنند، بستگی داشته باشد. با وجود این، همچنانکه در فصل ۷ هنگام بررسی دینامیک یک‌ذره گفته شد، بقیهٔ جهان اساساً ثابت‌فرض می‌شود و درنتیجه تنها مختصات ذرهٔ موردنظر درتابع E_p ظاهرمی‌شوند.

---

1. conservative forses   2. potential energy

دانشجو، با مقایسهٔ معادلهٔ (۱۷.۸) با معادلهٔ (۱۲.۸)، که برای انرژی‌جنبشی به‌دست آمده است، باید توجه داشته باشد که معادلهٔ (۱۲.۸) به طورکلی در مورد هرنیرویی مانند $\mathbf{F}$ صادق است، یعنی رابطهٔ $E_k = (mv^2/2)$ همواره اعتبار دارد، در صورتی که تابع $E_p(x, y, z)$ به ماهیت نیروی $\mathbf{F}$ بستگی دارد و شرطی که معادلهٔ (۱۷.۸) برقرار می‌کند نمی‌تواند درمورد هرنیرویی صادق باشد. تنها نیروهایی که در چنین شرطی صدق می‌کنند نیروهای پایستار خوانده می‌شوند. به‌عنوان‌مثال، ازمقایسهٔ معادلهٔ (۱۷.۸) بامعادلهٔ (۱۶.۸) ملاحظه می‌شود که نیروی گرانی، پایستار است و انرژی پتانسیل مربوط به گرانی برابر است با

$$E_p = mgy. \qquad (۱۸.۸)$$

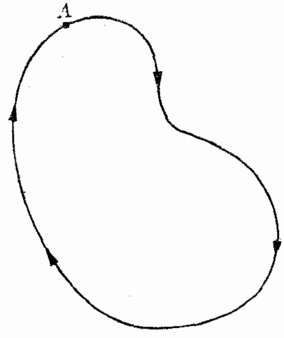
همچنین ازمعادلهٔ (۱۵.۸) فهمیده می‌شودکه انرژی پتانسیل یک نیروی ثابت، برابراست با

$$E_p = -\mathbf{F}\cdot\mathbf{r} \qquad (۱۹.۸)$$

انرژی پتانسیل همیشه باتقریب یک ثابت اختیاری تعریف می‌شود، زیرا اگر به‌جای معادلهٔ (۱۸.۸) بنویسیم $mgy + C$، معادلهٔ (۱۶.۸) تغییرنمی‌کند، چون ثابت C درهردو جمله ظاهر و درنتیجه حذف می‌شود. به‌سبب این مقدارثابت اختیاری، می‌توان صفر یا تراز مرجع انرژی پتانسیل را درجایی‌که بیشترمناسب باشد انتخاب کرد. به‌عنوان مثال، درمسایل مربوط به سقوط اجسام، سطح زمین مناسبترین تراز مرجع است، ازاین‌رو انرژی پتانسیل مربوط به گرانش را در سطح زمین برابر صفر اختیار می‌کنند. برای ماه حقیقی یا یک قمر مصنوعی، صفر انرژی پتانسیل معمولا دربینهایت تعریف می‌شود.

کار انجام یافته به‌وسیلهٔ نیروهای پایستار به‌مسیر پیموده شده بستگی ندارد.

این بیان از معادلهٔ تعریفی (۱۷.۸) نیز پیداست، زیرا مسیری که A و B را به هم می‌پیوندد هرچه باشد، اختلاف $E_{p,A} - E_{p,B}$ تغییر نمی‌کند، برای اینکه این تفاضل تنها



شکل ۱۴.۸. کار انجام یافته به وسیلهٔ یک نیروی پایستار درطول یک مسیر بسته برابر صفر است.

به‌مختصات نقطه‌های A و B بستگی دارد. درحالت خاص، اگرمسیربسته باشد (شکل۱۴.۸)، به‌گونه‌ای‌که نقطهٔ‌انتهایی برنقطهٔ ابتدایی منطبق باشد (یعنی A و B روی یک‌نقطه قرارداشته

باشند) $E_{p,A} - E_{p,B}$ وکار برابرصفر است ($W = 0$). این بدان معنی است که درقسمتی ازمسیر، کار مثبت و در بخش دیگر کار برابر با قسمت اول ولی با علامت منفی است تا کار کل برابر صفر شود. اگـر مسیر پیموده شده بسته بـاشد علامت انتگرال رابطهٔ (۱۷۰۸) را به‌صورت$\oint$ می‌نویسند. دایرهٔوسط علامت انتگرال بسته‌بودن مسیر رانشان می‌دهد. بنابراین برای یک نیروی پایستار داریم

$$W_O = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \qquad *(۲۰۰۸)$$

بعکس، می‌توان ثابت کرد کـه شرط بیان شده بـه وسیلهٔ معادلهٔ (۲۰۰۸) را می‌توان به‌عنوان تعریف نیروی پایستار پذیرفت. به عبارت دیگر، اگر نیرویی مانند $\mathbf{F}$ در یک مسیر بستهٔ اختیاری در معادلهٔ (۲۰۰۸) صدق کند، در این صورت می‌توان ثابت کـرد که معادلهٔ (۱۷۰۸) درست است.

برای برقرار بودن معادلهٔ (۱۷۰۸) لازم است

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - dE_p \qquad (۲۱۰۸)$$

باشد، زیرا دراین صورت داریم

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_B^A dE_p$$
$$= - (E_{p,B} - E_{p,A}) = E_{p,A} - E_{p,B}$$

که با معادلهٔ (۱۷۰۸) مطابقت دارد. توجه داشته باشید برای اینکه به جای $E_{p,B} - E_{p,A}$ مقدار $E_{p,A} - E_{p,B}$ به دست آید، علامت منفی در رابطهٔ (۲۱۰۸) لازم است.

چون $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F ds \cos\theta$ است‌که درآن θ زاویهٔ‌بین نیرووجابجایی است، به‌جای معادلهٔ (۲۱۰۸) می‌توان نوشت

$$F \cos\theta = - \frac{dE_p}{ds}. \qquad (۲۲۰۸)$$

همچنانکه دربـارهٔ شکل ۱۰۸ توضیح داده شد، $F \cos\theta$ تصویر نیرو روی راستای جابجایی ds است؛ بنابراین اگـر $E_p(x, y, z)$ معلوم باشد، می‌توان بـا محاسبهٔ کمیت $-dE_p/ds$ ، یعنی‌مشتق مکانی E_p روی یک راستا با علامت مخالف، مؤلفهٔ $\mathbf{F}$ را روی آن راستا به‌دست آوردکه آن‌را مشتق راستایی[1] E_p می‌نامند. هرگاه یک بردار به‌گونه‌ای باشد که تصویرآن روی یک‌راستای اختیاری برابرمشتق راستایی یک تابع نسبت به‌همان راستا باشد، آن بردار را گرادیان[2] این تابع می‌نامند. بنابراین، گوییم $\mathbf{F}$ برابراست با گرادیان

☆ بـرای هربرداری مانند $\mathbf{V}$ کـه تابع مختصات نقطه باشد، انتگرالی به شکل $\oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$ روی یک مسیربسته، گردش (circulation) بـردار $\mathbf{V}$ نامیده می‌شود. دراین‌کتاب با عبارت فوق برخورد فراوان خواهیم داشت.

1. directional derivative 2. gradient

E_p با علامت مخالف، ومعادلهٔ (۲۲۰۸) را به صورت کلی زیر می‌نویسیم

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} E_p$$

که در آن «grad» به معنای گرادیان است. اگر مؤلفه‌های قایم $\mathbf{F}$ روی محورهای X و Y و Z مورد توجه باشند، در معادلهٔ (۲۲۰۸)، $F\cos\theta$ بترتیب برابر می‌شود با F_x، F_y و F_z، وجابجایی ds عبارت می‌شود از d_x، d_y و d_z، به‌طوری که داریم

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \qquad (۲۳۰۸)$$

یا

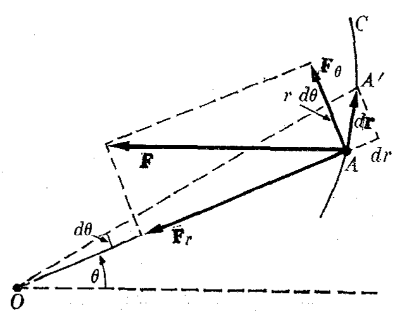
$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} E_p = -\left(\mathbf{u}_x \frac{\partial E_p}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial E_p}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial E_p}{\partial z}\right). \qquad (۲۴۰۸)$$

توجه داشته باشید که درنوشتن معادله‌های (۲۳۰۸) یا (۲۴۰۸) برای اولین‌بار در این‌کتاب نماد مربوط به مشتقهای جزیی به کار می‌رود. استفاده از این علامت الزامی است، زیرا پتانسیل $E_p(x, y, z)$ در حالت کلی، تابعی از سه متغیر x، y و z است. ولی وقتی ذره‌ای روی محور Xها به اندازهٔ dx جابجا می‌شود، مختصات y و z ذره تغییر نمی‌کند. درحالت کلی به جای نوشتن dE_p/dx باید علامت $\partial E_p/\partial x$ را که ریاضی‌دانها برای این‌گونه موارد پذیرفته‌اند به کار برد.

اگر حرکت روی یک صفحه صورت بگیرد وبخواهیم مختصات r و θ را به کار بریم (شکل ۱۵۰۸) جابجایی روی بردار شعاع $\mathbf{r}$ برابر dr وجابجایی عمود برآن مساوی $rd\theta$ است، بنابراین مؤلفه‌های شعاعی وعرضی نیرو برابر می‌شود با

$$F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r}, \quad F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}. \qquad (۲۵۰۸)$$

توجه کنید که باز هم ازنماد مشتق جزیی استفاده کردیم.



شکل ۱۵۰۸

یکی ازموارد بسیار مهم حالتی است که درآن انرژی پتانسیل E_p به فاصلهٔ r بستگی دارد ولی مستقل از زاویهٔ θ است؛ به عبارت دیگر، به جای $E_p(r, \theta)$ داریم $E_p(r)$. در

این حالت $F_\theta = 0$ است و از معادله‌های (۲۵.۸) به دست می‌آید $\partial E_p/\partial\theta = 0$. در این صورت نیرو مؤلفهٔ عرضی ندارد، وتنها دارای یک مؤلفهٔ شعاعی است، بدین معنی که نیرو مرکزی است وخط اثر نیرو همیشه ازمرکز می‌گذرد. متقابلا، اگر نیرو مرکزی باشد، تنها مؤلفهٔ شعاعی وجود دارد و $F_\theta = 0$ است که موجب می‌شود $\partial E_p/\partial\theta = 0$ شود، درنتیجه E_p مستقل از زاویهٔ θ است، بنابراین یک نیروی مرکزی تنها به فاصلهٔ ذره از مرکز بستگی دارد. این نتیجهٔ مهم را می‌توان دربیان زیر خلاصه کرد:

انرژی پتانسیل مربوط به یک نیروی مرکزی فقط به فاصلهٔ ذره از مرکز بستگی دارد و برعکس.

اگر نیروها مرکزی نباشند، نسبت به نقطهٔ O گشتاور نیرویی وجود خواهد داشت که از رابطهٔ $\tau = F_\theta r$ به دست می‌آید، زیرا نیروی شعاعی درگشتاور نیرو دخالت ندارد. با استفاده از رابطهٔ دوم معادله‌های (۲۵.۸)، گشتاور نیرو نسبت به O برابر می‌شود با

$$\tau = -\frac{\partial E_p}{\partial\theta}. \qquad (۲۶.۸)$$

این یک رابطهٔ کلی است که گشتاور نیرو را در راستای عمود برصفحه‌ای که زاویهٔ θ در آن اندازه‌گیری می‌شود به دست می‌دهد. چون گشتاور نیرو موجب تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای می‌شود [به معادلهٔ (۳۸.۷) مراجعه کنید]، نتیجه می‌گیریم

وقتی انرژی پتانسیل به‌زاویه بستگی دارد، گشتاور نیرویی بردستگاه وارد می‌شود واین گشتاور تغییری دراندازه‌حرکت زاویه‌ای در راستای عمود برصفحهٔ زاویه به‌وجود می‌آورد.

اشاره به مفهوم گرادیان. درفیزیک، اغلب به روابطی همانند معادلهٔ (۲۴.۸) برخورد می‌کنیم؛ بنابراین لازم است تصویر روشنی ازمعنای گرادیان داشته باشیم. تابعی مانند $V(x, y, z)$ را که به سه مختصهٔ یک نقطه بستگی دارد درنظر می‌گیریم. سطحهای

$$V(x, y, z) = C_1 \quad \text{و} \quad V(x, y, z) = C_2$$

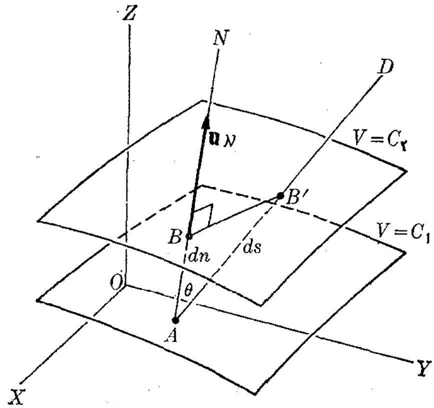
را رسم می‌کنیم (شکل ۱۶.۸). درجابجایی ازنقطه‌ای مانند A واقع روی صفحهٔ C_1 به نقطه‌ای مانند B روی C_2، تابع V به اندازهٔ $C_2 - C_1$ تغییر می‌کند. اگر اختلاف C_1 و C_2 بینهایت کوچک باشد، می‌توان نوشت $dV = C_2 - C_1$. تغییر V نسبت به واحد طول یا «مشتق راستایی» V برابر است با

$$dV/ds = (C_2 - C_1)/ds.$$

حالتی را مورد بررسی قرار دهیم که درآن A و B هر دو روی N، عمود مشترک دوسطح قرار دارند. مشتق راستایی درامتداد AN برابر است با dV/dn. از طرف دیگر، از شکل ۱۶.۸ پیداست که $dn = ds\cos\theta$ می‌باشد، بنابراین داریم

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dn}\frac{dn}{ds} = \frac{dV}{dn}\cos\theta.$$

این رابطه مشتق راستایی در امتداد عمود را بـا مشتق راستایی دریک راستای غیرمشخص دیگر به هم مربوط می‌کند. چون $\cos\theta$ به ازای $\theta = 0$ بیشینه است، نتیجه می‌گیریم که



شکل ۱۶.۸. گرادیان $V(x, y, z)$ یک تابع برداری است که درهر نقطه برسطح $V = \text{const}$ عمود می‌باشد.

dV/dn بیشینهٔ مشتق راستایی V را به دست می‌دهـد. با وارد کردن برداریکای $\mathbf{u}_N$، عمود برسطح درنقطهٔ A، گرادیان چنین تعریف می‌شود:

$$\operatorname{grad} V = \mathbf{u}_N \frac{dV}{dn}$$

درنتیجه گرادیان برداری است عمود برسطح $V(x, y, z) = \text{const}$ وبرابر است با بیشینهٔ مشتق راستایی $V(x, y, z)$. پس می‌توان نوشت

$$dV/dn = |\operatorname{grad} V| \cos\theta.$$

این رابطه نشان می‌دهد که مشتق مکانی در راستای AD یا مشتق راستایی $V(x, y, z)$ برابر است با تصویر گرادیان V روی این راستا. این رابطه‌ای است که برای رسیدن از معادلـهٔ (۲۲.۸) به معادله‌های (۲۳.۸) و (۲۴.۸) مورد استفاده قرار گرفت. برای خلاصه کردن نمادگذاری، عملگر دیفرانسیل[1] ∇ را که «دل»[2] خوانده می‌شود معرفی می‌کنیم که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\nabla = \mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

با توجه به این عملگر، می‌توان گرادیان را چنین نوشت:

$$\operatorname{grad} V = \nabla V.$$

---

1. differential oprator 2. del

مثال ۸.۸. انرژی پتانسیل وابسته به نیروهای مرکزی (الف) $F = kr$ و (ب) $F=k/r^2$ را حساب کنید. درهر دوحالت اگر k منفی باشد نیرو جاذبه و درصورت مثبت بودن آن، نیرو دافعه است.

حل: با به کار بردن معادلهٔ (۲۵.۸) درحالت (الف) داریم

$$F = -\partial E_p/\partial r = kr \quad \text{یا} \quad dE_p = -krdr.$$

باانتگرال‌گیری از آن به دست می‌آید

$$E_p = \int -krdr = -\frac{1}{2}kr^2 + C.$$

ثابت C از اختصاص دادن یک مقدار E_p به یک نقطهٔ مشخص تعیین می‌شود. طبق عادت، به ازای $k = 0$ مقدار E_p را برابر صفر می‌گیرند ($E_p = 0$)، در نتیجه $C = 0$ و $E_p = -kr^2/2$ می‌شود. چون $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ است، می‌توان نوشت $E_p = -k(x^2 + y^2 + z^2)/2$. با استفاده ازمعادلهٔ (۲۳.۸) مؤلفه‌های نیرو به‌دست می‌آیند:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = kx,\ F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = ky,\ F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = kz$$

واین نتیجه‌ای استکه انتظار آن را داشتیم، زیرا صورت برداری نیروی مرکزی $F = kr$ چنین نوشته می‌شود: $\mathbf{F} = k\mathbf{r} = k(\mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y + \mathbf{u}_z z)$.

در حالت (ب) داریم $F = -\partial E_p/\partial r = k/r^2$ یا $dE_p = -k(dr/r^2)$.
با انتگرال گیری از آن به‌دست می‌آید

$$E_p = \int -k\frac{dr}{r^2} = \frac{k}{r} + C.$$

برای نیروهای متناسب با $1/r$ معمولا در $r = \infty$ انرژی پتانسیل را برابر صفر قرار می‌دهند، در نتیجه $C = 0$ و $E_p = k/r$ می‌شود. در این حالت مؤلفه های قایم نیرو کدامند؟

۸.۸ بقای انرژی یک ذره

وقتی که نیروی وارد بریک ذره پایستار باشد، می‌توانیم معادلهٔ (۱۷.۸) را با معادلهٔ کلی (۱۳.۸) ترکیب کنیم. به‌دست می‌آید

$$E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B}$$

یا

$$(E_k + E_p)_B = (E_k + E_p)_A. \qquad (۲۷.۸)$$

کمیت $(E_p + E_k)$ را انرژی کل ذره می‌نامند و آن را با E نشان می‌دهند. به گفتهٔ دیگر، انرژی کل یک ذره برابر است با مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل آن، یا

$$E = E_k + E_p = \frac{۱}{۲} mv^۲ + E_p(x, y, z). \qquad (۲۸.۸)$$

معادلهٔ (۲۷.۸) نشان می‌دهد که

اگر نیروها پایستار باشند انرژی کل ذره همیشه ثابت باقی می‌ماند،

چون حالتهای نمایش داده شده با A و B اختیاری هستند. بنابراین برای هروضعی از ذره می‌توان نوشت

$$E_p + E_k = \text{const} \qquad (۲۹.۸)$$

به عبارت دیگر، انرژی ذره پایسته می‌ماند. بدین دلیل است که می‌گوییم زمانی که انرژی پتانسیل وجود دارد نیروها پایستارند. به‌عنوان مثال، درمورد جسمی‌که سقوط می‌کند، دیدیم [معادلهٔ (۱۸.۸)] که $E_p = mgy$ است و ازبقای انرژی به‌دست می‌آید

$$E = (mv^۲/۲) + mgy = \text{const}. \qquad (۳۰.۸)$$

اگر در آغاز ذره در ارتفاع $y_۰$ و دارای سرعت صفر باشد، انرژی کل برابر $mgy_۰$ است و داریم $(mv^۲/۲) + mgy = mgy_۰$ یا $v^۲ = ۲g(y_۰ - y) = ۲gh$ که درآن $h = y_۰ - y$ ارتفاعی است که جسم سقوط کرده است. این‌نتیجه، فرمول معروف سرعت کسب شده درسقوط از ارتفاع h است. ولی باید توجه داشت که معادلهٔ (۳۰.۸) تنها به حرکت در راستای قایم منحصر نمی‌شود و درمورد حرکت یک پرتابه که تحت زاویه‌ای با راستای قایم جابجا می‌شود نیز معتبر است.

یادآوری می‌کنیم که به‌ازای یک انرژی کل مشخص، بزرگی سرعت (درهر راستای حرکت) دریک نقطهٔ مشخص، ازمعادلهٔ (۲۹.۸) به دست می‌آید. همچنانکه معادلهٔ (۳۰.۸) نشان می‌دهد، این امر بویژه درحرکت براثر نیروی گرانی کاملا روشن است.

مثال ۹.۸. حداقل ارتفاعی را پیدا کنید که باید یک ساچمه رها شود تا بتواند تمام محیط یک حلقه را مطابق آنچه که شکل ۱۷.۸ نشان می‌دهد بپیماید. فرض کنید حرکت ساچمه بدون غلتش است و نیروی مالش وجود ندارد.

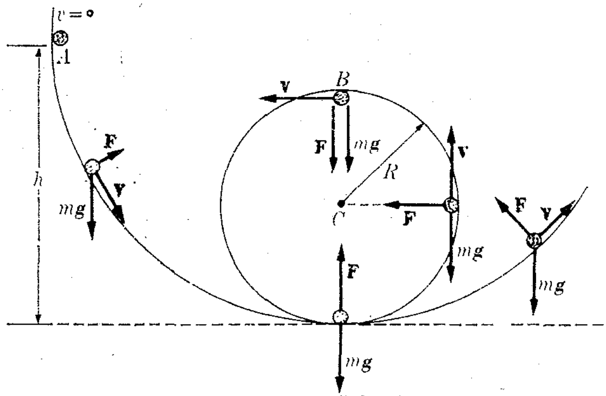
حل: فرض کنیم، مطابق شکل ۱۷.۸، ساچمه از نقطهٔ A به‌ارتفاع h نسبت به پایین دایره رها می‌شود. سرعت ساچمه درسرازیری رو به‌افزایش و درسربالایی رو به‌کاهش می‌گذارد. در هرنقطه از مسیر، نیروهای وارد بر ساچمه عبارتند از وزن آن $m\mathbf{g}$ و $\mathbf{F}$ نیروی ایجاد شده از طرف لغزشگاه. (نیروی $\mathbf{F}$ به سمت مرکز حلقه است زیرا لغزشگاه ساچمه را «هل» می‌دهد ولی «نمی‌کشد.») در بالاترین نقطه $m\mathbf{g}$ و $\mathbf{F}$ هردو به سمت مرکز O هستند و بنا به معادلهٔ (۲۸.۷) باید داشته باشیم

$$F + mg = \frac{mv^۲}{R}$$

که در آن R شعاع حلقه (لغزشگاه) است. چون F نمی‌تواند منفی باشد، حداقل سرعت ساچمه در نقطهٔ B برای پیمودن دایره، با $\mathbf{F} = ۰$ یا $mg = mv^۲/R$ متناظر می‌شود، بنابراین داریم

$$v^۲ = gR.$$

اگر سرعت کوچکتر از $\sqrt{gR}$ باشد، اثر نیروی وزن به سمت پایین بزرگتر از نیروی مرکزگرای لازم می‌شود و ساچمه پیش از رسیدن به نقطهٔ B از محیط حلقه کنده می‌شود و قبل از افتادن روی دایره یک سهمی رسم می‌کند.



شکل ۱۷.۸

برای به‌دست‌آوردن ارتفاع h، اشاره می‌کنیم که انرژی کل در نقطهٔ A برابر است با $E_A = (E_p + E_k)_A = mgh$، زیرا سرعت برابر صفر $(v = ۰)$ است. در نقطهٔ B که $y = ۲R$ و $v^۲ = gR$ است داریم

$$E_B = (E_k + E_p)_B = \frac{۱}{۲}m(gR) + mg(۲R) = \frac{۵}{۲}mgR.$$

از برابر قراردادن E_A و E_B به‌دست می‌آید $h = ۵R/۲$؛ این مقدارحداقل ارتفاعی است که باید ساچمه را ازآنجا رها کرد تا بتواند محیط حلقه را بپیماید. این نتیجه تا زمانی ارزش دارد که از نیروهای مالش صرف نظر شود. اگر ساچمه غلتش هم داشته باشد باید از روشهایی که در فصل ۱۰ معرفی می‌شوند استفاده کرد.

۹.۸ حرکت مستقیم الخط براثر نیروهای پایستار

معمولا در یک حرکت مستقیم الخط، انرژی پتانسیل تنها به یکی ازمختصات مثلا x بستگی دارد، و معادله (۳۸.۸) مربوط به بقای انرژی به صورت زیر درمی‌آید:

$$E = \frac{۱}{۲}mv^۲ + E_p(x) \qquad (۳۱.۸)$$

که در آن E، انرژی کل، ثابت است. این رابطه مفید بودن عملی مفهوم انرژی را نشان می‌دهد. درحرکت مستقیم‌الخط $v = dx/dt$ است ومعادلهٔ (۳۱.۸) به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$E = \frac{۱}{۲}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^۲ + E_p(x). \qquad (۳۲.۸)$$

باحل این رابطه برحسب dx/dt به دست می‌آید

$$\frac{dx}{dt} = \left\{\frac{۲}{m}[E - E_p(x)]\right\}^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۳۳.۸)$$

در شرایط فعلی می‌توانیم معادلهٔ بالا را به صورتی بنویسیم که در آن متغیرهای x و t ازهم جدا باشند، یعنی متغیر x تنها در یک طرف و t تنها درطرف دیگر معادله ظاهر شود. برای این کار می‌نویسیم

$$\frac{dx}{\left\{\frac{۲}{m}[E - E_p(x)]\right\}^{\frac{۱}{۲}}} = dt.$$

با انتگرال گیری (و با قراردادن $t_\circ = \circ$، جهت سهولت) به‌دست می‌آید

$$\int_{x_\circ}^{x} \frac{dx}{\left\{\frac{۲}{m}[E - E_p(x)]\right\}^{\frac{۱}{۲}}} = \int_\circ^t dt = t. \qquad (۳۴.۸)$$

این معادله امکان می‌دهد رابطه‌ای بین x و t به دست آوریم و بدین طریق مسئلهٔ حرکت مستقیم‌الخط ذره را حل کنیم. بنابراین، هر زمان که بتوان تابع انرژی پتانسیل را پیدا کرد [درصورتی که نیرو به‌صورت تابعی از x معلوم باشد کار نسبتاً آسانی است، زیرا برای به دست آوردن $E_p(x)$ کافی است معادلهٔ (۲۳.۸) را به کار ببریم]، اصل بقای انرژی که با معادلهٔ (۳۴.۸) بیان شده مستقیماً حل مسئلهٔ حرکت مستقیم‌الخط را به دست می‌دهد.

مثال ۱۰.۸. با استفاده از معادلهٔ (۳۴.۸) مسئلهٔ حرکت مستقیم الخط براثر یک نیروی ثابت را حل کنید.

حل: دراین حالت F ثابت است. اگر محور X را در راستای نیرو بگیریم، ازمعادلهٔ اول روابط (۲۳.۸) داریم $F = -dE_p/dx$ یا $dE_p = -F\,dx$. با انتگرال گیری به دست می‌آید $E_p = Fx + C$، و با قراردادن $E_p = \circ$ برای $x = \circ$، به‌دست می‌آید $C = \circ$. بنابراین

$$E_p = -Fx$$

رابطهٔ انرژی پتانسیل مربوط به یک نیروی ثابت است. اگرداشته باشیم $\mathbf{F} = \mathbf{u}_x F$، یعنی نیروی $\mathbf{F}$ در راستای محور Xها باشد، این رابطه با معادلهٔ (۱۹.۸) مطابقت می‌کند. برای

سهولت $x_{\circ}$ را برابر صفر قرار می‌دهیم و با استفاده از معادلهٔ (۳۴۰۸) داریم

$$\frac{۱}{(۲/m)^{۱/۲}}\int_{\circ}^{x}\frac{dx}{(E+F\,x)^{۱/۲}}=t$$

یا

$$\frac{۲}{F}(E+F\,x)^{۱/۲}-\frac{۲}{F}E^{۱/۲}=\left(\frac{۲}{m}\right)^{۱/۲}t.$$

اگر این رابطه را نسبت به x حل کنیم به دست می‌آید

$$x=\frac{۱}{۲}\left(\frac{F}{m}\right)t+\left(\frac{۲E}{m}\right)^{۱/۲}t.$$

چون $F/m=a$ و انرژی کل برابر با $E=mv^{۲}/۲+F\,x$ است، معلوم می‌شود که در $t=\circ$ موقعی که $x=\circ$ باشد، انرژی تماماً جنبشی و مقدار آن برابر $mv_{\circ}^{۲}/۲$ است. بنابراین $۲E/m=v_{\circ}^{۲}$ است و بالاخره برای x به دست می‌آید $x=at^{۲}/۲+v_{\circ}t$، که این رابطه همان معادلهٔ (۱۱۰۵) است که قبلا بــه دست آوردیم، هرگـاه در آن $x_{\circ}=\circ$ و $t_{\circ}=\circ$ باشد. بدیهی است این مسئله به قدری آسان است که می‌توان با روشهای به کــار رفته در فصل ۵ آن را حل کرد. دراینجا تنها جهت آشنایی با تکنیک حل معادلـهٔ حرکت با استفاده از اصل بقای انرژی این مسئله را آوردیم.

۱۰۰۸ حرکت براثر نیروهای مرکزی پایستار

درمورد یک نیروی مرکزی، موقعی که E_p تنها به r بستگی دارد، معادلهٔ (۲۸۰۸) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$E=\frac{۱}{۲}mv^{۲}+E_p(r). \qquad (۳۵۰۸)$$

ازاین رابطه می‌توان سرعت را برای هرفاصله‌ای به دست آورد. در بیشتر موارد، قدرمطلق $E_p(r)$ با افزایش r کاهش می‌یابد. درنتیجه، در فاصله‌های خیلی دور از مرکز $E_p(r)$ قابل اغماض می‌شود و سرعت ثابت ومستقل از راستای حرکت خواهد شد. همین اصل را درمثال ۱۶۰۷، وقتی کــه در شکل ۲۸۰۷ گفتیم سرعت نهایی ذره کــه از B دور می‌شود، برابر با سرعت اولیه در نقطهٔ A است، به کار بردیم.

توجه داشته باشید که وقتی حرکت براثرنیروهای مرکزی رامورد مطالعه قرارمی‌دهیم، دو قضیهٔ بقا وجود دارد. یکی مربوط بـه بقای انـدازه حرکت زاویه‌ای است که در بخش ۱۳۰۷ مورد بحث قرار گرفت و دیگری بقای انرژی که با معادلهٔ (۳۵۰۸) بیان شد. هنگام به کار بردن مختصات قطبی r و θ، با توجـه بـه اینکه مؤلفه‌های سرعت در این مختصات عبارتند از $v_r=dr/dt$ و $v_\theta=rd\theta/dt$، بنا به معادلهٔ (۶۳۰۵) می‌توان نوشت

$$v^{۲}=v_r^{۲}+v_\theta^{۲}=\left(\frac{dr}{dt}\right)^{۲}+r^{۲}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^{۲}.$$

ولی، بنا به اصل بقای اندازه حرکت زاویه‌ای، با استفاده از معادلهٔ (۳۵.۷)، $L = mr^{2}d\theta/dt$، داریم

$$r^{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^{2} = \frac{L^{2}}{(mr)^{2}}$$

که درآن L اندازه حرکت زاویه‌ای ثابت است، بنابراین

$$v^{2} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^{2} + \frac{L^{2}}{(mr)^{2}}.$$

با وارد کردن این نتیجه در معادلهٔ (۳۵.۸) به دست می‌آید

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^{2} + \frac{L^{2}}{2mr^{2}} + E_{p}(r). \qquad (۳۶.۸)$$

این رابطه شباهت خیلی نزدیکی به معادلهٔ (۳۲.۸) دارد که برای حرکت مستقیم‌الخط با سرعت dr/dt به‌دست آوردیم، اگر فرض‌کنیم، تا آنجا که به‌حرکت شعاعی مربوط می‌شود ذره تحت یک انرژی پتانسیل «مؤثر»

$$E_{p,\,\mathrm{eff}}(r) = \frac{L^{2}}{2mr^{2}} + E_{p}(r) \qquad (۳۷.۸)$$

جابجا می‌شود. جملهٔ اول $E_{p,\,c}(r) = L^{2}/2mr^{2}$، راانرژی پتانسیل گریز از مرکز[1] می‌نامند، زیرا «نیروی» وابسته به‌آن، با به کار بردن معادلهٔ (۲۵.۸) برابر است با

$$F_{c} = -\frac{\partial E_{p,\,c}}{\partial r} = \frac{L^{2}}{2mr^{2}}$$

که به دلیل مثبت بودن در خلاف سوی مبدأ یعنی یک نیروی گریز از مرکز است. بدیهی است هیچ نیروی گریز ازمرکزی بر ذره وارد نمی‌شود، مگر نیروی دافعه‌ای که از پتانسیل واقعی $E_{p}(r)$ ناشی شود، بنابراین «نیروی» گریز ازمرکز F_{c} تنها یک مفهوم ریاضی مفید است. از لحاظ فیزیکی، این مفهوم، تمایل ذره را به جابجایی در خط مستقیم و اجتناب از حرکت روی منحنی، بنا به قانون لختی، بیان می‌کند. با وارد کردن معادلهٔ (۳۷.۷) در معادلهٔ (۳۶.۸) به دست می‌آید

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^{2} + E_{p,\,\mathrm{eff}}(r).$$

با حل این معادله نسبت به dr/dt به دست می‌آید

$$\frac{dr}{dt} = \left\{\frac{2}{m}[E - E_{p,\,\mathrm{eff}}(r)]\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (۳۸.۸)$$

1. centrifugal potential energy

شکل ظاهری این رابطه مانند معادلهٔ (۳۳.۸) است که برای حرکت مستقیم الخط به دست آوردیم. باجداکردن متغیرهای r و t ازیکدیگروانتگرال‌گیری (وبا قراردادن $t_\circ = \circ$) داریم

$$\int_{r\circ}^{r} \frac{dr}{\left\{\frac{۲}{m}[E - E_{p,\ \mathrm{eff}}(r)]\right\}^{\frac{۱}{۲}}} = \int_{\circ}^{t} dt = t. \qquad (۳۹.۸)$$

این رابطه فاصلهٔ r را بر حسب زمان t [یعنی $r(t)$ را] به دست می‌دهد، بنابراین حل مسئلهٔ دینامیک مربوط به حرکت شعاعی را میسر می‌سازد.

اگر معادلهٔ اندازه حرکت زاویه‌ای $L = mr^۲\, d\theta/dt$ را برحسب $d\theta/dt$ حل کنیم به دست می‌آید

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^۲}. \qquad (۴۰.۸)$$

سپس اگر $r(t)$ به دست آمده از معادلهٔ (۳۹.۸) را در معادلهٔ (۴۰.۸) قرار دهیم، $L/mr^۲$ به صورت تابعی از زمان به دست می‌آید و با انتگرال‌گیری ازآن داریم

$$\int_{\theta\circ}^{\theta} d\theta = \int_{\circ}^{t} \frac{L}{mr^۲} dt \quad \text{یا} \quad \theta = \theta_\circ + \int_{\circ}^{t} \frac{L}{mr^۲} dt. \qquad (۴۱.۸)$$

رابطهٔ بالا θ را به صورت تابعی از زمان، یعنی $\theta(t)$ را به دست می‌دهد. بدین طریق با به دست آوردن حرکت زاویه‌ای همچون حرکت شعاعی به‌صورت توابعی از زمان، می‌توان مسئله را کاملا حل کرد.

با وجود این، گاهی، معادلهٔ مسیر بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرد. از تقسیم معادلهٔ بر (۳۸.۸) معادلهٔ (۴۰.۲) می‌توان نوشت

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\left\{\frac{۲}{m}[E - E_{p,\ \mathrm{eff}}(r)]\right\}^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{L}{mr^۲}}. \qquad (۴۲.۸)$$

پس از جدا کردن متغیرهای r و θ و انتگرال گیری به دست می‌آید

$$\int_{r\circ}^{r} \frac{dr}{\left(\frac{m}{L}\right) r^۲ \left\{\left(\frac{۲}{m}\right)[E - E_{p,\ \mathrm{eff}}(r)]\right\}^{\frac{۱}{۲}}} = \int_{\theta\circ}^{\theta} d\theta = \theta - \theta_\circ \qquad (۴۳.۸)$$

این معادله که r و θ را به‌هم مربوط می‌کند معادلهٔ مسیر را درمختصات قطبی به‌دست می‌دهد. برعکس اگر معادلهٔ مسیر معلوم باشد می‌توان $dr/d\theta$ را حساب کرد، دراین صورت رابطهٔ (۴۲.۸) امکان می‌دهد انرژی پتانسیل و در نتیجه نیرو را حساب کنیم.

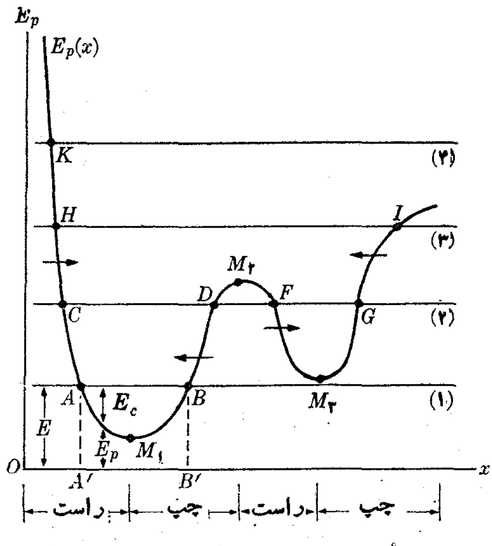
این بخش نشان داد که چگونه ازاصل بقای اندازه حرکت زاویه‌ای وانرژی می‌توان مسئلهٔ حرکت یک ذره براثر یک نیروی مرکزی را حل کرد. بنابراین خواننده باید تابحال

متوجه شده باشد که این اصول پیامد کنجکاویهای ریاضی نیستند، بلکه ابزارهایی واقعی و مؤثر برای حل مسائل دینامیک می‌باشند. باید توجه داشت که اصل بقای انرژی بتنهایی برای حل مسئلهٔ حرکتی که بر اثر یک نیروی مرکزی صورت می‌گیرد کافی نیست و باید از اصل بقای اندازه حرکت زاویه‌ای نیز استفاده کرد. درحرکت مستقیم الخط اصل بقای انرژی بتنهایی برای حل مسئله کافی است. در واقع انرژی یک کمیت اسکالر است و نمی‌تواند برای تعیین سوی حرکت کمک کند، درصورتی که در حرکت مستقیم الخط راستا و سوی حرکت از همان آغاز ثابت است.

درخاتمه، باید این نکته را کاملا روشن کنیم که اصل بقای انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای، به گونه‌ای که در این فصل به کار گرفته شدند، از ویژگیهای یک ذرهٔ منفرد در موقعیتهای خاص حرکت خود هستند، و هیچگونه رابطهٔ مستقیمی با بقای احتمالی انرژی کل جهان ندارند. راجع به این موضوع در فصل بعد به طور مفصل گفتگو خواهیم داشت.

۱۱۰۸ بحث دربارهٔ منحنیهای انرژی پتانسیل

نمودارهایی که $E_p(x)$ را برحسب x درحرکتهای مستقیم الخط یا یک بعدی، و $E_p(r)$ را برحسب r درمسایل مربوط به‌نیروهای مرکزی نشان‌می‌دهند، برای‌درک‌حرکت یک‌ذره، حتی بدون حل معادلهٔ حرکت، بسیارمفیدند. شکل ۱۸۰۸ یک منحنی ممکن برای انرژی پتانسیل دریک حرکت یک بعدی را نمایش می‌دهد. وقتی که اولین معادله از معادله‌های (۲۳۰۸) را به‌کار می‌بریم، به‌ازای هرمقدار x، نیروی وارد برذره برابراست با $F = -dE_p/dx$*.



شکل ۱۸۰۸. رابطهٔ بین حرکت در یک خط مستقیم و انرژی پتانسیل

* دراینجا احتیاج نیست از علامت مشتق جزئی استفاده شود، زیرا E_p تنها بـه یک متغیر x بستگی دارد.

dE_p/dx شیب منحنی $E_p(x)$ را نشان می‌دهد. شیب منحنی مثبت است هرگاه منحنی صعودی یا به سمت بالا باشد، و جایی که منحنی نزولی یا بـه سمت پایین باشد شیب منفی است. بنابراین نیروی F، (باعلامت مخالف شیب) منفی یا به سمت چپ است هرگاه انرژی پتانسیل نزولی باشد. در شکل ۱۸.۸ این وضع با پیکانهای افقی و به کمک نواحی مختلفی که در زیر شکل مشخص شده‌اند، نشان داده شده است.

درنقاطی مانند M_1، M_2 و M_3 که انرژی بیشینه یا کمینه‌است، $-dE_p/dx = 0$ یا $F = 0$ می‌باشد؛ به گفتهٔ دیگر، این نقاط، وضعهای ترازمندی‌اند. درنقاطی که $E_p(x)$ کمینه است ترازمندی پایدار است، زیـرا اگر ذره اندکی از وضع تعادل خود جابجا شود، نیرویی روی آن اثر می‌کند که می‌خواهد آن را به وضع ترازمندی برگرداند. جاهایی کـه $E_p(x)$ بیشینه است، ترازمندی ناپایدار است، زیرا کوچکترین جابجایی ذره از این وضع به‌هرسمت که باشد، باعث می‌شود نیرویی برذره وارد شود که ذره را بیش از پیش از وضع ترازمندی دور می‌کند.

اکنون ذره‌ای را با انرژی کل E در نظر می‌گیریـم، مانند آنچه خط شمارهٔ (۱) در شکل ۱۸.۸ نشان می‌دهد. برای هرمکان x، انرژی پتانسیل E_p از تصویـر آن نقطهٔ منحنی روی محور عرضها به دست می‌آیـد و انـرژی جنبشی $E_k = E - E_p$ از فاصلهٔ منحنی $E_p(x)$ تا خط E معلوم می‌شود. درشکل ۱۸.۸ خط E منحنی $E_p(x)$ را درنقاط A و B قطع می‌کنند. در سمت چپ نقطهٔ A و سمت راست نقطهٔ B انـرژی E کوچکتر از انـرژی پتانسیل $E_p(x)$ می‌باشد، بنابراین دراین ناحیه، انرژی جنبشی $E_k = E - E_p$ منفی است. ولی این امر غیرممکن است زیـرا $E_k = (mv^2/2)$ ضرورتاً مثبت است. بنابراین حرکت ذره در فاصلهٔ AB محدود است و ذره‌بین $x = A'$ و $x = B'$ نوسان می‌کند. سرعت ذره در ایـن نقاط صفر می‌شود و حـرکت آن معکوس می‌گـردد. این نقاط، نقطه‌های برگشت[1] نامیده می‌شوند.

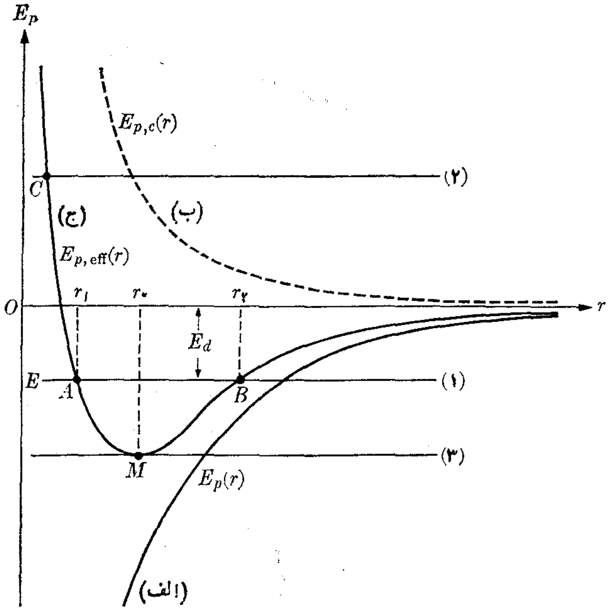
اگر ذره دارای انرژی بالاتری، مثلا مربوط به خط (۲) باشد، دو ناحیهٔ ممکن برای حرکت آن وجود دارد: یکی نوسان بین C و D و دیگری نوسان بین F و G. با وجـود این، اگر ذره در یکی ازاین ناحیه‌ها باشد، هرگز نمی‌تواند به‌ناحیهٔ دیگر برود، زیرا برای این کار باید از ناحیهٔ DF کـه در آنجا انرژی جنبشی منفی، در نتیجه قدغن، است بگذرد. گوییم دوناحیه که در آنجاها حرکت می‌تواند انجام گیرد با یک سد پتانسیل[2] از یکدیگر جدا شده‌اند. در تـراز انرژی (۳)، حرکت بین H و I نوسانی است. بالاخره در تـراز انـرژی (۴) حرکت دیگر نوسانی نیست و ذره‌بین K و بینهایت جابجا می‌شود. به عنوان مثال، اگرذره درآغاز به‌سمت چپ حرکت‌کند، بارسیدن به‌نقطهٔ K به‌عقب «پرتاب» می‌شود و به‌سمت راست حرکت می‌کند و دیگر هرگز برنمی‌گردد. اگرحرکت ذرات اتمی موردنظر باشد، که در مورد آنها بایـد از مکانیک کوانتومی استفاده کـرد، توضیحهای بالا به بعضی اصلاحات نیاز دارند.

اکنون حالت مهم نیروهای مرکزی را در نظر می‌گیریم؛ فـرض کنیم انـرژی پتانسیل

---

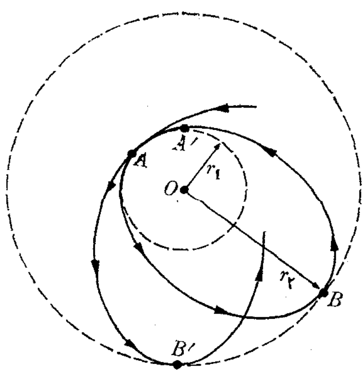
1. turning points 2. potential barrier

$E_p(r)$ مربوط به‌نیرویی باشد که درهرفاصله‌ای جاذبه است، به‌گفتهٔ دیگر، همچنانکه منحنی (الف) درشکل ۱۹.۸ نشان می‌دهد، $F = -\partial E_p/\partial r$ منفی و $E_p(r)$ یک تابع صعودی است. پتانسیل گریز از مرکز $E_{p,c} = L^2/2mr^2$ با خط نقطه چین مشخص شده است. این



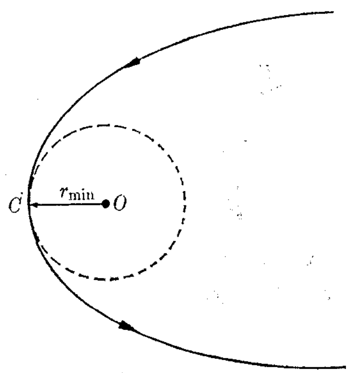
شکل ۱۹.۸. رابطه‌های انرژی درحرکت ناشی ازنیروهای مرکزی

پتانسیل برای فاصله‌های دور بسیار ناچیزاست ولی درفاصله‌های کوتاه خیلی سریع افزایش می‌یابد. دربیشتر حالات مورد توجه درفیزیک، پتانسیل گریز ازمرکز درفاصله‌های کم عمده است، درنتیجه یک انرژی پتانسیل مؤثر $E_{p,\text{eff}} = E_{p,c} + E_p(r)$ به‌صورتی‌که درمنحنی (ج) نشان داده شده است به‌دست می‌آید.



شکل ۲۰.۸. شکل کلی مسیرحرکت براثرنیروهای مرکزی

اگر E انرژی کل ذره با خط افقی (۱) نشان داده شود، شعاع مدار بین مقادیرکمینه و بیشینهٔ r_1 و r_2 نوسان می‌کند و مدار شکل نمایش داده درشکل ۲۰.۸ را به‌خود می‌گیرد. ولی اگر انرژی مربوط به مقداری مانند خط (۲) درشکل ۱۹.۸ باشد، مدار مقید[1] نیست و ذره از بینهایت تا نقطهٔ C در نزدیکترین فاصلهٔ $r_{\min}$ می‌آید و سپس چنانکه شکل ۲۱.۸ نشان می‌دهد دور می‌شود و هرگز برنمی‌گردد. اگر انرژی، چنانکه خط (۳) نشان می‌دهد، مربوط به M کمینهٔ $E_{p,\mathrm{eff}}$ باشد، تنها یک محل تقاطع وجود دارد و فاصله از مرکز ثابت باقی می‌ماند، مسیر ذره دایره‌ای به‌شعاع r_0 است. توجه داشته باشید به‌سبب اثر انرژی پتانسیل گریز از مرکز $E_{p,c}$، کمترین فاصلهٔ نزدیک شدن به مرکز همراه با افزایش اندازه حرکت زاویه‌ای افزایش می‌یابد.



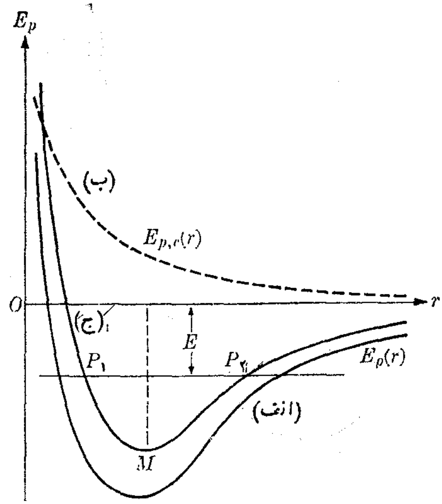
شکل ۲۱.۸. حداقل فاصلهٔ نزدیک شدن به‌مرکز

اگر ذره‌ای که دارای انرژیی برابر با تراز (۱) شکل ۱۹.۸ است، به‌طریقی بتواند انرژی جذب کند و در نتیجه به تراز انرژی (۲) «بجهد»، از مرکز نیرو دور خواهد شد؛ به‌گفتهٔ دیگر، ذره ازمرکز نیرو «می‌برد». حداقل انرژی لازم برای جدا شدن ذره از تراز انرژی (۱) درشکل ۱۹.۸ با E_d نشان داده شده است. ازطرف دیگر، اگر ذره‌ای که ابتدا در تراز انرژی (۲) است هنگام گذر از نزدیک مرکز نیرو انرژی خود را به طریقی از دست بدهد، ممکن است به‌تراز انرژی (۱) بیفتد، در این صورت روی مدار مقید باقی می‌ماند. می‌گوییم ذره به وسیلهٔ مرکز نیرو «گیرافتاده»[2] است به عنوان مثال، این وضع در تشکیل و تجزیه مولکولها پیش می‌آید.

درمورد یک مولکول دواتمی مانند H_2 یا CO، انرژی پتانسیل E_p در برهم کنش بین دو اتم به صورت (ج)، شکل ۱۹.۸ می‌باشد. یک چنین انرژی پتانسیلی که با منحنی (الف) درشکل ۲۲.۸ نشان داده شده است، مربوط به‌نیروی جاذبه درفاصلهٔ زیاد و نیروی دافعه در فاصلهٔ کم می‌باشد، و بدین طریق مانع از آن می‌شود که اتمها جوش بخورند و به‌صورت یک واحد درآیند، حتی اگرهیچگونه اثرگریز ازمرکزی وجود نداشته باشد. اثر

---
1. bound 2. captured

پتانسیل گریز از مرکز $E_{p,c}$، که با منحنی نقطه‌چین (ب) مشخص شده است، منحنی را تا شکل (ج) بالا می‌برد. بنابراین می‌توان اتمها را در مولکول به کمک یک انرژی E در حالت نوسان نسبی بین $P_۱$ و $P_۲$ نمایش داد. اگر مولکول به مقدار کافی انرژی جذب کند، در این صورت ممکن است به دو اتم تشکیل دهندهٔ خود تجزیه شود که از یکدیگر دور می‌شوند.



شکل ۲۲.۸. پتانسیل بین مولکولی

مثال ۱۱.۸. انرژی پتانسیل برهم کنش بین دو مولکول گاز را می‌توان با رابطهٔ تقریبی زیر نشان داد:

$$E_p(r) = -E_{p,۰}\left[۲\left(\frac{r_۰}{r}\right)^۶ - \left(\frac{r_۰}{r}\right)^{۱۲} \right]$$

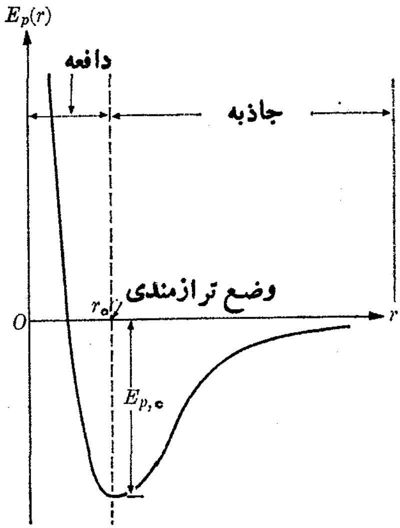
که در آن $E_{p,۰}$ و $r_۰$ ثابتهای مثبت و r فاصلهٔ بین مولکولهاست. این مدل انرژی پتانسیل مولکولی را فیزیکدان انگلیسی جی. لنارد-جونز معرفی کرده است. وضع ترازمندی و مقدار انرژی پتانسیل را در این وضع به دست آورید. شکل ۲۳.۸ نمودار $E_p(r)$ را نشان می‌دهد.

حل: در وضع ترازمندی، $F = -(\partial E_p/\partial r) = ۰$ است، بنابراین داریم

$$\frac{\partial E_p}{\partial r} = -E_{p,۰}\left[-۱۲\frac{r_۰^۶}{r^۷} + ۱۲\frac{r_۰^{۱۲}}{r^{۱۳}} \right] = ۰$$

یا $r = r_۰$. با قرار دادن $r = r_۰$ در $E_p(r)$، مقدار انرژی پتانسیل در نقطهٔ ترازمندی، $E_p = -E_{p,۰}$، به‌دست می‌آید. برای فاصله‌های کمتر از $r_۰$، نیروی بین مولکولی دافعه است [$E_p(r)$ یک تابع نزولی است] و برای فاصله‌های بیشتر از $r_۰$، نیرو جاذبه است [$E_p(r)$ یک تابع صعودی است].

جملهٔ فائق یا مؤثرتر $E_p(r)$ در فاصله‌های کم و زیاد کدام است؟ به دانشجو توصیه می‌کنیم نمودار نیرو را به صورت تابعی از r رسم کند و مشخص کند کـه در چه فاصله‌ای نیروی جاذبـه بیشینه است. همچنین توصیه می‌شود بـه کتابهایی کـه مقادیر $E_{p,\circ}$ و $r_\circ$ را داده‌اند مراجعه کند.



شکل ۲۳.۸. پتانسیل بین مولکولی لنارد ـ جونز[1]

۱۲.۸ نیروهای ناپایستار

بـا نخستین نگاه معلوم می‌شود بعضی از نیروهای طبیعت پایستار نیستند. یک نمونه از این نیروها مالش است. مالش لغزشی همیشه با جابجایی مخالفت می‌کند. کار این نیرو به‌مسیر پیموده شده بستگی دارد، حتی برای مسیرهای بسته کار برابرصفر نیست، به‌طوری‌که معادلهٔ (۲۰.۸) دیگر برقرارنیست. به‌طریق‌مشابه، مالش شاره باسرعت مخالفت می‌کند و به‌سرعت بستگی دارد نـه به مکان جسم متحرک. بنابراین به یک ذره ممکن است همزمـان نیروهای پایستار و نیروهای ناپایستار وارد شوند.

به عنوان مثال بـه ذره‌ای کـه در یک شاره سقوط می‌کند، نیروی پایستار گرانش و نیروی ناپایستار مـالش شاره وارد می‌شود. اگـر E_p انـرژی پتانسیل نیروهای پایستار و W' کـار انجام شده تـوسط نیروهای نا پـایستار باشد (معمولا این کار منفی است زیـرا نیروهای مالش باحرکت مخالفت می‌کنند)، W کارکل انجام یافته روی ذره برای‌جابجایی ازنقطهٔ A تا نقطهٔ B برابر است با

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} + W'.$$

---

1. Lennard-Jones

دراین صورت با استفاده ازمعادلهٔ (۱۳.۸) می‌توان نوشت

$$E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B} + W'$$

یا

$$(E_k + E_p)_B - (E_k + E_p)_A = W'. \qquad (۴۴.۸)$$

دراین حالت کمیت $E_k + E_p$ ثابت باقی نمی‌ماند و برحسب اینکه W' منفی یا مثبت باشد کاهش یا افزایش پیدا می‌کند. ازطرف دیگر، دراین حالت $E_k + E_p$ را نمی‌توان انرژی کل ذره نامید، و این مفهوم دراینجا کاربرد ندارد، زیرا شامل تمام نیروهای موجود نیست. مفهوم انرژی کل یک ذره تنها موقعی معنا دارد که تمام نیروهای پایستار باشند. با وجود این، زمانی که بخواهیم حالتی را که درآن فقط نیروهای پایستار وارد می‌شوند (یعنی $E_k + E_p$ انرژی کل است) با حالتی که در آن نیروهای اضافی ناپایستاری نیز وجود دارند مقایسه کنیم، معادلهٔ (۴۴.۸) می‌تواند بسیارمفید باشد. دراین‌صورت می‌گوییم معادلهٔ (۴۴.۸) انرژی کسب شده یا از دست رفتهٔ ناشی از نیروهای ناپایستار را به‌دست می‌دهد.

وجود نیروهای ناپایستار مانند نیروهای مالش، الزاماً نباید این فکر را به وجود آورد که برهم کنشهای ناپایستار بین ذرات بنیادی وجود دارند. باید یادآوری کنیم که نیروهای مالش به برهم کنش بین دو ذره مربوط نیستند، بلکه اساساً مفاهیم آماری می‌باشند (بحث بخش ۹.۷ را به‌خاطر بیاورید). به عنوان مثال، مالش لغزشی نتیجهٔ تعداد زیادی از برهم کنشهای منفرد بین مولکولهای دوجسم درحال‌تماس می‌باشد. هریک ازاین برهم‌کنشها را می‌توان به‌وسیلهٔ یک نیروی‌پایستار بیان‌کرد. با این‌حال اثر ماکروسکوپی‌آنها به‌این‌دلیل پایستار نیست که هرچند یک جسم پس از پایان یک مسیر بسته از نقطه نظر ماکروسکوپی به جای اولیهٔ خود برمی‌گردد، ولی یکایک مولکولها به جای اولیهٔ خود برنگشته‌اند. بنابراین حالت نهایی به طور میکروسکوپی با حالت ابتدایی یکسان نیست، حتی به معنی آماری نیز بین این دوحالت هم ارزی وجود ندارد.

بنابراین کار ناپایستار W' نمایشگر یک انتقال انرژی است که، چون به حرکت مولکولی مربوط می‌باشد، معمولا برگشت‌ناپذیر است. دلیل اینکه نمی‌توان آن را مجدداً به‌دست آورد، ناشی ازاین مشکل است که حتی از یک دیدگاه آماری نیز نمی‌توان تمام حرکات مولکولی را به حالت اول برگرداند. با وجود این دربعض حالات می‌توان حرکات مولکولی را از لحاظ آماری به شرایط اولیه برگرداند، یعنی اگرچه حالت نهایی به طور میکروسکوپی با حالت اولیه یکسان نیست، این دو، به طور آماری هم‌ارز باشند. به عنوان مثال، گازی که بکندی انبساط پیدا می‌کند و کاری انجام می‌دهد این وضع را دارد. اگر پس از انبساط گاز را بآهستگی متراکم کنیم تا به شرایط فیزیکی ابتدایی خود برگردد، حالت نهایی به‌طور آماری با حالت ابتدایی هم‌ارز است. کار انجام یافته درجریان تراکم برابر است با کار درمدت انبساط با علامت مخالف، درنتیجه کار کل برابر صفر است.

مثال ۱۲.۸. جسمی‌ازحالت سکون و ازارتفاع h_0 در داخل شارهٔ و شکسانی رها می‌شود.

آهنگ اتلاف انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل گرانشی جسم را حساب کنید

حل: وقتی کـه جسمی از ارتفاع y با سرعت v می‌افتد، مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی آن برابر است بـا $mv^۲/۲ + mgy$. آهنگ اتلاف انرژی (یـا انرژی مصرف شده در واحد زمان) ناشی از اثر نیروهای ناپایستار وشکسان برابر است با

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = \frac{d}{dt}\left(\frac{۱}{۲}mv^۲ + mgy\right).$$

در وهلهٔ اول به‌دانشجو توصیه می‌کنیم با به کاربردن نتایج مثال ۷.۷، y و $v^۲$ را به صورت توابعی از زمـان بنویسد. سپس با به دست آوردن مقادیر مشتقهای فوق، می‌تواند مسئله را حل کند.

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم چگونه می‌توان این مسئله را با روش دیگری حل کرد. بنا به معادلهٔ (۴۴.۸) اگـر نقطه‌های A و B خیلی نزدیک به‌هم باشند، می‌توانیم بنویسیم $d(E_k + E_p) = dW' = F'\,dx$ کـه در آن F' نیـروی ناپایستار است. در این مثال F' ناشی از مالش شاره است و به صورت $F = -K\eta v$ می‌باشد که با معادلهٔ (۱۸.۷) نشان داده شد. بنابراین

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = F'\frac{dx}{dt} = (-K\eta v)v = -K\eta v^۲.$$

برای v می‌توان نتیجهٔ مثال ۸.۷ را به‌کار برد:

$$v = \frac{F}{K\eta}[۱ - e^{-(K\eta/m)t}]^۲$$

که درآن $F = mg$ وزن ذره است (که برای شناوری مربوط به شاره تصحیح شده است). بنابراین

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = -\frac{m^۲g^۲}{K\eta}[۱ - e^{-(K\eta/m)t}]^۲.$$

علامت منفی مقابل آهنگ اتلاف انرژی نشان می‌دهـد کـه جسم انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل گرانشی خـود را از دست می‌دهـد. در واقـع این انـرژی «گم» نمی‌شود، بلکه به مولکولهای شاره انتقال پیدا می‌کند به‌گونه‌ای کـه در عمل به دست آوردن مجـدد آن امکان ندارد. بعد از گذشتن مدت زمان معینی، جملهٔ نمایی عملا برابر صفر می‌شود، بنابراین می‌توان نوشت

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = \frac{m^۲g^۲}{K\eta}.$$

این رابطه نشان می‌دهد کـه انرژی با آهنگ ثابتی هدر می‌رود. فیزیکدانان این وضع را شرایط دایم[1] یا پابرجا می‌خوانند.

---

1. steady state

جالب است این نتیجه را از زاویهٔ دیگری بررسی کنیم. در مثال ۸.۷ دیدیم که پس ازگذشت مدتی سرعت ثابت باقی می‌ماند و برابر $F/K\eta$ می‌شود که در آن $F = mg$ است. پس انرژی جنبشی E_k ثابت باقی می‌ماند و تنها انرژی پتانسیل $E_p = mgy$ تغییر می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p)_{ss} = \frac{dE_p}{dt} = \frac{d}{dt}(mgy) = mg\frac{dy}{dt}$$

شاخص ss به‌معنی‌آن است که این یک مسئلهٔ حالت دایم است. ولی dy/dt برابرسرعت حدی است که با معادلهٔ (۲۱.۷) داده شد و می‌توان نوشت

$$dy/dt = F/K\eta = -mg/K\eta.$$

علامت منفی بدین مناسبت وارد می‌شود که y به‌سمت بالا اندازه‌گیری می‌شود و سرعت حد به‌سمت پایین است. با قراردادن این مقدار درمعادلهٔ قبل به‌دست می‌آید

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p)_{ss} = mg\left(\frac{-mg}{K\eta}\right) = -\frac{m^2g^2}{K\eta}$$

و این همان نتیجه‌ای است که قبلا به‌دست آورده بودیم. بدین طریق مشاهده می‌کنیم که بعد ازمدت معینی، تمام انرژی پتانسیل گرانشی از دست رفتهٔ جسم، صرف آشفتگی‌مولکولی شاره می‌شود. عبارت فوق بیان دیگری از این نکته است که نیروی گرانی به سمت پایین با نیروی مخالف ناشی از وشکسانی شاره خنثی می‌شود.

۱۳.۸ قضیهٔ ویریال برای یک ذرهٔ واحد

این قضیه برای به دست آوردن بعضی نتایج عملی بسیار مفید است (هرچند به‌اندازهٔ اصل بقای اندازه حرکت زاویه‌ای در مورد یک نیروی مرکزی یا بقای انرژی در یک نیروی پایستار مهم نیست).

ذره‌ای به جرم m را که براثرنیروی $\mathbf{F}$ حرکت می‌کند درنظرمی‌گیریم. کمیت اسکالر $A = m\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}$ را تعریف می‌کنیم که در آن $\mathbf{r}$ بردار مکان ذره و $\mathbf{v}$ سرعت آن است. با مشتق‌گیری از A نسبت به‌زمان به‌دست می‌آید

$$\frac{dA}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{r} + m\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = m\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} + mv^2$$

زیرا $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ و $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ است. درجملهٔ اول سمت راست $m\mathbf{a}$ برابر $\mathbf{F}$ و جملهٔ دوم نیز دوبرابر انرژی جنبشی E_k است. درنتیجه

$$\frac{dA}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{r} + 2E_k.$$

اگر میانگین زمانی این معادله را پیدا کنیم داریم

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{\text{ave}} = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{r})_{\text{ave}} + ۲(E_k)_{\text{ave}}\cdot \qquad (۴۵.۸)$$

میانگین زمانی هرکمیتی مانند $f(t)$ که به زمان بستگی دارد، در طول فاصله زمانی τ، با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$f(t)_{\text{ave}} = \frac{۱}{\tau}\int_{۰}^{\tau} f(t)dt\cdot$$

با این تعریف، درحالت فوق داریم

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{\text{ave}} = \frac{۱}{\tau}\int_{۰}^{\tau}\frac{dA}{dt}\,dt = \frac{۱}{\tau}\int_{۰}^{\tau}dA = \frac{A-A_{۰}}{\tau}\cdot \qquad (۴۶.۸)$$

اگر زمان τ خیلی طولانی باشد و نیز A برحسب زمان تا بینهایت افزایش پیدا نکند، کمیت $(A-A_{۰})/\tau$ ممکن است به‌قدری کوچک شود (اگر τ به قدرکافی بزرگ باشد) که بتوان آن را برابر صفر گرفت. ذره‌ای که در ناحیهٔ محدودی حرکت می‌کند چنین وضعی دارد. به عنوان مثال، یک الکترون در اتم در ناحیهٔ محدودی از فضا حرکت می‌کند و مقادیر $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ که در تعریف A وارد می‌شوند همیشه بین مقادیر مشخصی محدود می‌مانند. همین سخن را در مورد حرکت زمین به دور خورشید نیز می‌توان گفت. بنابراین با قرار دادن $(dA/dt)_{\text{ave}} = ۰$ در معادلهٔ (۴۵.۸) به دست می‌آید

$$(E_k)_{\text{ave}} = -\frac{۱}{۲}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{r})_{\text{ave}} \qquad (۴۷.۸)$$

رابطهٔ (۴۷.۸) را قضیهٔ ویریال[1] برای یک ذره و کمیت $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{r})_{\text{ave}}/۲$ — را ویریال یک ذره می‌نامند.

وقتی که نیروها مرکزی و پایستار باشند، قضیهٔ ویریال شکل خاصی به خود می‌گیرد. اگر $E_p(r)$ انرژی پتانسیل ذره باشد، داریم

$$\mathbf{F} = -\mathbf{u}_r\frac{dE_p}{dr} \quad \text{و} \quad \mathbf{F}\cdot\mathbf{r} = -r\frac{dE_p}{dr}$$

زیرا $\mathbf{u}_r\cdot\mathbf{r} = r$ است. بنابراین معادلهٔ (۴۷.۸) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(E_k)_{\text{ave}} = \frac{۱}{۲}\left(r\frac{dE_p}{dr}\right)_{\text{ave}}\cdot \qquad (۴۸.۸)$$

فرض کنید انرژی پتانسیل به شکل $E_p = -k/r^n$ باشد. دراین صورت داریم

$$\frac{dE_p}{dr} = \frac{nk}{r^{n+۱}} = -\frac{nE_p}{r}$$

---

1. virial theorem

و معادلهٔ (۴۸.۸) به‌این شکل نوشته می‌شود:

$$(E_k)_{\text{ave}} = -\frac{1}{2} n(E_p)_{\text{ave}}. \qquad (۴۹.۸)$$

با این نتیجه، رابطه‌ای بین میانگین زمانی انرژی جنبشی و پتانسیل ذره به دست می‌آید.

۱۴.۸ نقدی بر مفهوم انرژی

دراین فصل دیدیم وقتی که نیرو به صورت تابعی از مکان معلوم باشد چگونه می‌توان از مفهوم انرژی درحل بعض مسایل دینامیک ذره به طورمؤثر استفاده کرد. واین یکی ازدلایل اصلی وارد کردن مفهوم انرژی در فیزیک است.

تجربهٔ مستقیم ما حاکی ازآن است که اجسام اطراف ما درحرکت‌اند. ما این حرکتها را به برهم‌کنشهای بین اجسام نسبت می‌دهیم وآنها را به یاری مفاهیم انرژی و نیرو تشریح می‌کنیم. این مفاهیم تنها یک هدف را تعقیب می‌کنند: فراهم آوردن روشهای مفید برای تجزیه و تحلیل و پیشگویی حرکتهایی که مشاهده می‌کنیم. مهمترین فایدهٔ مفهوم انرژی پتانسیل، همانند نیرو، آن است که به ما امکان می‌دهد به هر برهم‌کنش خاصی که درطبیعت مشاهده می‌شود انرژی پتانسیل معینی رانسبت دهیم. این نتیجه شگفت‌آور نیست، زیرا نیروی **F** مطابق رابطهٔ (۲۴.۸) با انرژی پتانسیل مربوط است: در واقع همین رابطهٔ بین انرژی پتانسیل و برهم‌کنش است که به ایدهٔ انرژی پتانسیل معنای فیزیکی می‌بخشد.

وقتی که انرژی پتانسیل به صورت تابعی از مکان معلوم باشد، می‌توان حرکت را به طور کیفی، آنچنانکه دربخش ۱۱.۸ گفته شد، و به طور کمی، آنچنانکه در بخشهای ۹.۸ و ۱۰.۸ شرح داده شد، بیان کرد. در فصلهای بعد این امر را مورد بحث قرارخواهیم داد که برهم‌کنش بین دوجسم را می‌توان همچون تبادل انرژی یا تبادل اندازه حرکت بین این دو در نظرگرفت وتوضیح داد. هرکدام ازاین بیانها نمایش تصویری مفید و مناسبی از یک برهم‌کنش به دست می‌دهد. دانشجو باید به یاد بسپارد که در بقیهٔ کتاب فرآیندهای مشاهده شده در طبیعت را کم و بیش در همه‌جا به یاری مفاهیم اندازه حرکت و انرژی تشریح و توصیف خواهیم کرد.

فهرست منابع

1. «Energy,» S. Schurr, *Sci, Am.*, September 1963, page 110.
2. «Newton's Law of Motion and the 17th Century Laws of Impact,» A. Arons and A. Bork, *Am. J. Phys*. 32, 313 (1964).
3. *Pysical Mechanics* (third edition), by R. Lindsay. Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1963, Chapter 4.
4. *Introduction to Engineering Mechanics*, by J. Huddleston Reading, Mass.: Addison - Wesley, 1961, Chapters 20 and 21.

5. *Vector Mechanics*, by D. Christie. New York: McGraw - Hill, 1964, Chapters 7 and 17; Sections 12.6 through 12.8.

6. *A Source Book of Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 59 (Young).

7. *Foundations of Modern Physical Science*, by G. Holton and D. H.D. Roller. Reading, Mass.: Addison - Wesley, 1958, Chapter 18.

8. «Resource Letter EEC-1 on the Evolution of Energy Concepts from Galileo to Helm holtz,» T. Brown; *Am. J. Phys.* 33, 759 (1965).

۹. سایمون،کیث، ر. مکانیک، ترجمهٔ اعظم نیرومند راد و غلامحسین همدانی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۶، بخشهای ۱.۲، ۵.۲، ۷.۳ و ۱۲.۳.

مسئله‌ها

۱.۸. نیروی F به مدت $20\,\mathrm{s}$ بر جسمی به جرم $500\,\mathrm{kg}$ وارد می‌شود. جسم که ابتدا بیحرکت است براثراین نیروبه سرعت نهایی $0.5\,\mathrm{ms}^{-1}$ می‌رسد. اگر نیرو درآغاز برابر صفر باشد و مدت $15\,\mathrm{s}$ به طور خطی افزایش یابد و سپس به طور خطی کم شده و پس از $5\,\mathrm{s}$ به صفر برسد، (الف) تکان وارد از طرف نیرو بر روی جسم را پیدا کنید، (ب) نیروی بیشینه‌ای راکه برجسم وارد می‌شود تعیین کنید و (ج) نمودار F را برحسب t رسم کنید و مساحت زیر منحنی را حساب کنید. آیا این مساحت با نتیجهٔ (الف) سازگار است؟ فرض کنید F تنها نیروی وارد برجسم است.

۲.۸. کار نیروی ثابت $12\,\mathrm{N}$ را هنگامی که نقطهٔ اثر آن $7\,\mathrm{m}$ جابجا می‌شود درحالتی که زاویهٔ بین راستای نیرو و جابجایی (الف) صفر درجه، (ب) $60°$، (ج) $90°$، (د) $145°$ و (ه) $170°$ باشد، حساب کنید.

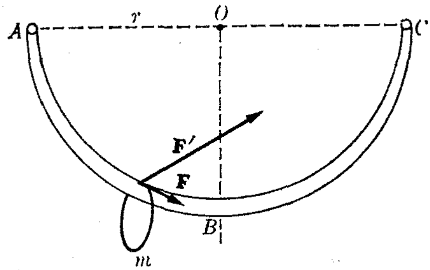
۳.۸. کارانجام شده توسط شخصی را که یک‌کیسهٔ $65\,\mathrm{kg}$ آرد را با نیروی ۲۵۰ نیوتون $10\,\mathrm{m}$ روی زمین می‌کشد و بعد درکامیونی که $75\,\mathrm{cm}$ از زمین ارتفاع دارد قرار می‌دهد، حساب کنید. اگر تمام این اعمال در ۲ دقیقه انجام گرفته باشد توان میانگین به کار رفته چقدر است؟

۴.۸. یک kgm کاری است‌که یک نیروی ۱ کیلوگرمی انجام می‌دهد، هنگامی که جسمی را در راستای خود به اندازهٔ یک متر جابجا می‌کند. تحقیق کنید که $1\,\mathrm{kgm} = 9.81\,\mathrm{J}$ و یک اسب بخار(hp) برابراست با $75\mathrm{kms}^{-1}$ است. هم ارزی آن را با W پیدا کنید.

۵.۸. جسمی به‌جرم $4\,\mathrm{kg}$ از صفحه‌ای که باافق زاویهٔ $20°$ می‌سازد بالا می‌رود. نیروهای زیر برجسم اثر می‌کنند: یک نیروی افقی برابر $80\,\mathrm{N}$، یک نیروی موازی صفحه برابر $100\,\mathrm{N}$ که به حرکت کمک می‌کند و نیروی مالش ثابت $10\,\mathrm{N}$ که با حرکت مخالفت می‌کند. جسم $20\,\mathrm{m}$ روی سطح می‌لغزد. کار کل دستگاه نیروهای وارد بر جسم و نیز کار هریک از نیروها را به طور جداگانه حساب کنید.

۶.۸. حلقهٔ m روی کمان فلزی ABC (شکل ۲۴.۸)، که کمانی از دایره‌ای

به شعاع $4\ \mathrm{m}$ است، بدون مالش می‌لغزد. دو نیروی $\mathbf{F}$ و $\mathbf{F}'$ بترتیب به‌بزرگیهای $40\ \mathrm{N}$ و $150\ \mathrm{N}$ روی جسم اثر می‌کنند. نیروی $\mathbf{F}$ همیشه مماس برکمان است. نیروی $\mathbf{F}'$ در راستای ثابتی که با سطح افق زاویهٔ $30°$ می‌سازد اثر می‌کند. هنگامی که جسم از A به B و از A به C جابجا می‌شود، کار کل دستگاه نیروها را حساب کنید.



شکل ۲۴.۸

۷.۸. جسمی به جرم $10\ \mathrm{kg}$ از ارتفاع $3\ \mathrm{m}$ روی توده‌ای از شن می‌افتد. اگر جسم پس از $3\ \mathrm{cm}$ فرو رفتن در شن متوقف شود، نیروی ثابتی کــه تودهٔ شن روی جسم وارد کرده چقدر است؟

۸.۸. جسمی به جرم $1000\ \mathrm{kg}$ از ارتفاع $10\ \mathrm{m}$ روی یک تیرآهنی قایم‌که یک سرآن در زمین فرو رفته است می‌افتد. تیر به اندازهٔ $1\ \mathrm{cm}$ در زمین فرو می‌رود. نیــروی مقاومت میانگینی را که از طرف زمین به تیرآهن وارد می‌شود حساب کنید. (فرض کنید تمام انرژی جنبشی جسم تبدیل به‌کار شده تا تیر در زمین فرو رود.)

۹.۸. شخصی با ســرعت $6\ \mathrm{kmhr^{-1}}$ از سطح شیب داری کــه زاویهٔ $10°$ با سطح افق می‌سازد بالا می‌رود. توان به‌کار گرفته شده را حساب کنید.

۱۰.۸. آسانسوری با ۱۰ نفــر مســافر، $80\ \mathrm{m}$ را در ۳ دقیقه بالا می‌رود. جرم هر مسافر $80\mathrm{kg}$ وجرم آسانسور $1000\mathrm{kg}$ است. توان موتور برحسب اسب بخار (hp) چقدر است؟

۱۱.۸. اتومبیلی به جرم $1600\mathrm{kg}$ با سرعت ثابت $45\mathrm{kmhr^{-1}}$ از یک سربالایی به‌شیب $3°$ بالا می‌رود. توان اعمال شده ازطرف موتور چقدر است؟ کار انجام یافته در $10\mathrm{s}$ چقدر است؟ ازنیروهای مالش صرف‌نظر کنید.

۱۲.۸. اتومبیلی به وزن $10000\mathrm{N}$ دریک جادهٔ افقی حرکت می‌کند. هنگامی کـه موتور حداکثر توان خود $50\mathrm{hp}$ را به کار می‌برد اتومبیل بـه سرعت بیشینهٔ $32\mathrm{ms^{-1}}$ می‌رسد. سرعت بیشینهٔ اتومبیل را هنگامی که ازیک تپه به شیب ٪۵ بالا می‌رود حساب کنید. مقاومت هوا را ثابت فرض کنید.

۱۳.۸. مسئلهٔ پیش را درحالتی که اتومبیل از تپه پایین می‌آید حل کنید.

۱۴.۸. یک نیروی ثابت $60\mathrm{dyn}$ به مــدت $12\mathrm{s}$ روی جسمی به جرم $10\mathrm{g}$ اثر می‌کند.

جسم دارای سرعت اولیهٔ $۶۰\mathrm{cms}^{-۱}$ در راستای نیرو است. (الف) کار انجام یافته توسط نیرو، (ب) انرژی جنبشی نهایی، (ح) توان مصرفی، (د) افزایش انرژی جنبشی، را حساب کنید.

۱۵.۸ مسئلهٔ پیش را درحالتی که نیرو بر سرعت اولیه عمود است حل کنید.

۱۶.۸ (الف) موتور اتومبیلی به جرم $۱۵۰۰\mathrm{kg}$ باید چه نیروی ثابتی اعمال کند تا در $۸\mathrm{s}$ سرعت اتومبیل را از $۴\mathrm{kmhr}^{-۱}$ به $۴۰\mathrm{kmhr}^{-۱}$ برساند؟ (ب) تغییر اندازه حرکت و انرژی جنبشی را تعیین کنید. (ج) تکان دریافت شده و کار انجام یافته بـه وسیلهٔ نیرو را معین کنید. (د) توان میانگین موتور را حساب کنید.

۱۷.۸ یک گوی فولادی کوچک به جرم $۱\mathrm{kg}$ کـه به انتهای سیمی به طول $۱\mathrm{m}$ متصل است روی دایرهٔ قایمی به مرکز انتهای سیم با سرعت زاویه‌ای ثابت $۱۲۰\mathrm{rads}^{-۱}$ می‌چرخد. انرژی جنبشی آن را حساب کنید. اگر به جای سرعت زاویه‌ای، انرژی کل گوی ثابت بماند، تغییر انرژی جنبشی وسرعت زاویه‌ای بین‌بالا وپایین دایره چقدر است؟ فرض کنید سرعت زاویه‌ای داده شده مربوط به بالای دایره است.

۱۸.۸ جسمی به‌جرم m با سرعت $\mathbf{V}$ نسبت به ناظر O وبا سرعت $\mathbf{V}'$ نسبت به O' حرکت می‌کند. سرعت نسبی O و O' برابر $\mathbf{v}$ است. رابطهٔ بین انرژی جنبشی E_k و E'_k جسم را که به وسیلهٔ O و O' اندازه‌گیری می‌شود پیدا کنید.

۱۹.۸ انـرژی جنبشی الکترونی $(m_e = ۹٫۱۰۹ \times ۱۰^{-۳۱}\mathrm{kg})$ را کـه بـا سرعت $۱۰^{۶}\mathrm{ms}^{-۱}$ حرکت می‌کند برحسب eV پیدا کنید. همین کار را درمورد پروتون (بـه جرم $۱٫۶۷۵ \times ۱۰^{-۲۷}\mathrm{kg}$) انجام دهید.

۲۰.۸ سرعت الکترونی را که با انرژی $۱٫۸ \times ۱۰^{۴}\mathrm{eV}$ در لولهٔ تلویزیون به صفحه برخورد می‌کند پیدا کنید.

۲۱.۸ پروتونی با انرژی $۳ \times ۱۰^{۵}\mathrm{eV}$ ازیک شتابدهندهٔ ذرات خارج می‌شود. سرعت پروتون را پیدا کنید.

۲۲.۸ اگر E_k انرژی جنبشی برحسب eV و v سرعت برحسب $\mathrm{ms}^{-۱}$ باشد، ثابت‌کنید که رابطهٔ بین این دو درمورد یک الکترون عبارت است از $E_k = ۲٫۸۴۳ \times ۱۰^{-۱۲}v^{۲}$ و درمورد یک پروتون عبارت است از $E_k = ۵٫۲۲۸ \times ۱۰^{-۹}v^{۲}$.

۲۳.۸ نیروی وارد برجسمی به جرم $۱۰\mathrm{kg}$ برابر است با $\mathbf{F} = \mathbf{u}_x(۱۰ + ۲t)$، که در آن t برحسب ثانیه و F برحسب نیوتون است. (الف) تغییر اندازه حرکت و سرعت جسم را درانتهای $۴\mathrm{s}$، همچنین تکان داده شده به جسم را پیدا کنید. (ب) این نیرو چه مـدتی باید روی جسم اثر کند تا به آن تکانی برابر با $۲۰۰\mathrm{Ns}$ بدهد؟ به سؤالهای بالا درحالاتی که جسم درآغاز بیحرکت است ویا دارای سرعت اولیهٔ $\mathbf{u}_y(۶)\mathrm{ms}^{-۱}$ — باشد پاسخ دهید.

۲۴.۸ جرم $۱۰\mathrm{kg}$ براثر نیروی $\mathbf{F} = [\mathbf{u}_x(۵t) + \mathbf{u}_y(۳t^{۲} - ۱)]\mathrm{N}$ حرکت می کند.

در لحظهٔ $t = ۰$ جسم درحال سکون و درمبدأ قرار دارد. (الف) اندازه حرکت و انرژی جنبشی جسم را درلحظهٔ $t = ۱۰\mathrm{s}$ پیدا کنید. (ب) تکان و کار انجام یافته به وسیلهٔ جسم را از لحظهٔ $t = ۰$ تا $t = ۱۰\mathrm{s}$ پیدا کنید. آنها را با نتایج (الف) مقایسه کنید.

۲۵.۸. جرم $۲۰\mathrm{kg}$ براثر نیروی $\mathbf{F} = \mathbf{u}_x(۱۰۰t)\mathrm{N}$ حرکت می‌کند. t برحسب ثانیه است. اگر به ازای $t = ۲$، داشته باشیم $\mathbf{v} = \mathbf{u}_x(۳)\mathrm{ms}^{-۱}$، (الف) تکان داده شده به جسم را درفاصله زمانی $۲\mathrm{s} < t < ۱۰\mathrm{s}$، و (ب) اندازه حرکت جسم را درلحظهٔ $t = ۱۰\mathrm{s}$ پیدا کنید. (ج) نشان دهید که درفاصله زمانی داده شده، تکان برابر است با تغییر اندازه حرکت جسم. (د) کار انجام شده روی جسم، و (ه) انرژی جنبشی آن را در لحظهٔ $t = ۱۰\mathrm{s}$ پیدا کنید. (و) نشان دهید که تغییر انرژی جنبشی با کار انجام شده برابر است.

۲۶.۸. مسئلهٔ پیش را هنگامی که در $t = ۲\mathrm{s}$، $\mathbf{v} = \mathbf{u}_y(۳)\mathrm{ms}^{-۱}$ باشد مجدداً حل کنید.

۲۷.۸. به ذره‌ای نیروی $\mathbf{F} = \mathbf{u}_x(y^۲ - x^۲) + \mathbf{u}_y(۳xy)$ اثر می‌کند. کار انجام شده به وسیلهٔ نیرو را هنگامی که ذره ازنقطهٔ $(۰ , ۰)$ تا نقطهٔ $(۲ , ۴)$ روی مسیرهای زیر جا بجا می‌شود پیدا کنید:

(الف) درطول محور Xها ازنقطهٔ $(۰ , ۰)$ به نقطهٔ $(۲ , ۰)$، بعد موازی محور Yها تا نقطهٔ $(۲ , ۴)$، (ب) درطول‌محور Yها ازنقطهٔ $(۰ , ۰)$ به نقطهٔ $(۰ , ۴)$ و بعد موازی محور Xها تا نقطهٔ $(۲ , ۴)$، (ج) در راستای خطی‌که از دو نقطه می‌گذرد، (د) روی سهمی $y = x^۲$. آیا این نیرو پایستار است؟

۲۸.۸. مسئلهٔ پیش را درحالتی که نیرو برابر $\mathbf{F} = [\mathbf{u}_x(۲xy) + \mathbf{u}_y(x^۲)]$ باشد از نو حل کنید.

۲۹.۸. فرض کنید $\mathbf{F} = [\mathbf{u}_x(۷) - \mathbf{u}_y(۶)]\mathrm{N}$ است. (الف) کار انجام یافته را هنگامی که ذره ازمبدأ تا نقطهٔ $\mathbf{r} = \mathbf{u}_x(-۳) + \mathbf{u}_y(۴) + \mathbf{u}_z(۱۶)\mathrm{m}$ جا بجا می‌شود پیداکنید. آیا لازم است مسیری را که ذره می‌پیماید مشخص کرد؟ (ب) اگر جا بجایی ازیک نقطه به نقطهٔ دیگر $۰٫۶\mathrm{s}$ طول بکشد، توان میانگین را حساب کنید و آن را برحسب وات و اسب بخار بیان کنید. (ج) اگر جرم ذره $۱\mathrm{kg}$ باشد، تغییر انرژی جنبشی را حساب کنید.

۳۰.۸. نیروی مسئلهٔ پیش پایستار است، زیرا ثابت است. اختلاف انرژی پتانسیل را بین دونقطه حساب کنید. انرژی پتانسیل را درنقطهٔ $\mathbf{r} = \mathbf{u}_x(۷) + \mathbf{u}_y(۱۶) + \mathbf{u}_z(-۴۲)\mathrm{m}$ تعیین کنید.

۳۱.۸. ذره‌ای براثر یک نیروی جاذبهٔ عکس مجذوری، $F = -k/r^۲$، حرکت می‌کند. ومسیر آن دایره‌ای به شعاع r است. نشان دهید که انرژی کل برابر $E = -k/۲r$، سرعت برابر $v = (k/mr)^{۱/۲}$ واندازه حرکت زاویه‌ای برابر $L = (mkr)^{۱/۲}$ است.

۳۲.۸. یک صفحهٔ شیب‌دار به طول $۱۳\mathrm{m}$ دارای قاعده‌ای به طول $۱۲\mathrm{m}$ است. جسمی به جرم $۰٫۸۰\mathrm{kg}$ با سرعت اولیهٔ $۱۰۰\mathrm{cms}^{-۱}$ از بالای صفحه به سمت پایین می لغزد.

سرعت و انرژی جنبشی آن هنگام رسیدن به پایین چقدر است؟

۳۳.۸. انرژی جنبشی و پتانسیل جسمی را که از حالت سکون از ارتفاع h رها می‌شود برحسب (الف) زمان، و (ب) ارتفاع، رسم کنید. تحقیق کنید که درهر دوحالت از مجموع دومنحنی یک مقدار ثابت به دست می‌آید.

۳۴.۸. جسمی به جرم ۲۰kg در راستای قایم با سرعت اولیهٔ $۵۰ms^{-۱}$ به سمت بالا پرتاب می‌شود. (الف) مقادیر اولیهٔ E_k، E_p و E را، (ب) E_k و E_p را در انتهای ۳s، (ج) E_k و E_p را در ارتفاع ۱۰۰m، (د) ارتفاع جسم را هنگامی که E_p به ۸۰٪ مقدار اولیهٔ خود می‌رسد، حساب کنید.

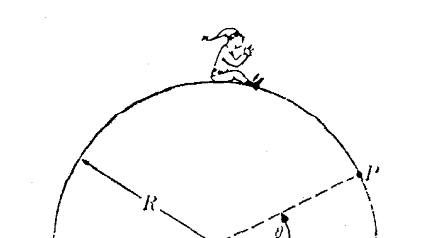
۳۵.۸. گلوله‌ای به جرم ۰٫۴kg از بالای تپه‌ای به ارتفاع ۱۲۰m با سرعت $۶ms^{-۱}$ به طور افقی پرتاب می‌شود. حساب کنید (الف) انرژی جنبشی اولیهٔ گلوله را، (ب) انرژی پتانسیل اولیهٔ آن را، (ج) انرژی جنبشی آن را هنگامی که به زمین برخورد می‌کند، و (د) سرعتی را که گلوله با آن سرعت به زمین می‌رسد.

۳۶.۸. هواپیمایی که به طور افقی با سرعت $۲۷۰kmhr^{-۱}$ پرواز می‌کند بمبی به جرم ۱۰kg را رها می‌کند. هواپیما در ارتفاع ۱۰۰m قرار دارد. حساب کنید (الف) انرژی جنبشی اولیهٔ بمب را، (ب) انرژی پتانسیل اولیهٔ آن را، (ج) انرژی کل آن را، (د) سرعت بمب را هنگامی که به زمین می‌رسد، و (ه) انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل بمب را ۱۰s پس از انداختن آن.

۳۷.۸. تنها با استفاده از اصل بقای انرژی، سرعت بمب را در مسئلهٔ پیش هنگامی که در ۵۰ متری زمین قرار دارد وارتفاع آن را هنگامی که انرژی جنبشی آن ۳۰٪ بیشتر ازانرژی جنبشی اولیهٔ آن است، حساب کنید.

۳۸.۸. مسئلهٔ ۳۴.۸ را هنگامی که جسم در راستایی که با افق زاویهٔ °۷۰ می‌سازد پرتاب می‌شود ازنو حل کنید.

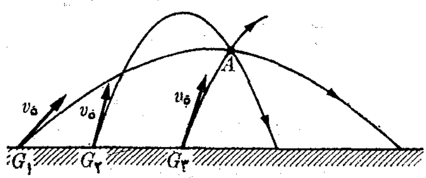
۳۹.۸. بچه‌ای به جرم m دربالای کوه یخی بـه شکل نیمکره نشسته است (شکل ۲۵.۸). اگر بچه از روی یخ سر بخورد (حرکت بدون مالش فرض می‌شود) درچه نقطه‌ای مانند P بچه کوه یخی را ترک می‌کند؟



شکل ۲۵.۸

۴۰.۸. سه تفنگ گلوله‌هایی با سرعت اولیهٔ یکسان شلیک می‌کنند (شکل ۲۶.۸)، به‌-

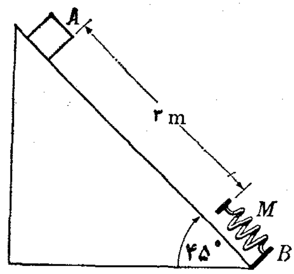
گونه‌ای که هرسه گلوله ازیک نقطهٔ A می‌گذرند (ولی لزوماً نه دریک زمان). شکل ۲۶.۸ را مجدداً رسم کنید وسرعتها را روی آن مشخص کنید. محاسبات را برپایهٔ ملاحظات انرژی قرار دهید و رابطهٔ بین بزرگی سرعت گلوله‌ها را درنقطهٔ A تعیین کنید. آیا از پاسخهایی که به دست می‌آیند، می‌توان نتیجه گرفت که تنها با استفاده از اصل بقای انرژی می‌توان راستای حرکتها را تعیین کرد؟ چرا؟



شکل ۲۶.۸

۴۱.۸. جسمی به جرم ۰٫۵kg از ارتفاع ۱m روی فنر کوچکی که در راستای قایم قرار دارد ویک سر آن به زمین وصل شده است می‌افتد. ثابت فنر $k = ۲۰۰۰ \mathrm{Nm}^{-1}$ است. حداکثر تغییر شکل فنر را پیدا کنید.

۴۲.۸. جسم A در شکل ۲۷.۸ دارای ۰٫۵kg جرم است. جسم ازحالت سکون به راه می‌افتد و روی صفحهٔ بدون مالشی که با افق زاویهٔ °۴۵ می‌سازد، ۳m می‌لغزد، تا به فنر M که سر دیگر آن در نقطهٔ B به صفحه متصل شده است، برخورد می‌کند. ثابت فنر $۴۰۰۰ \mathrm{Nm}^{-1}$ است. حداکثر تغییرشکل فنر را پیدا کنید.



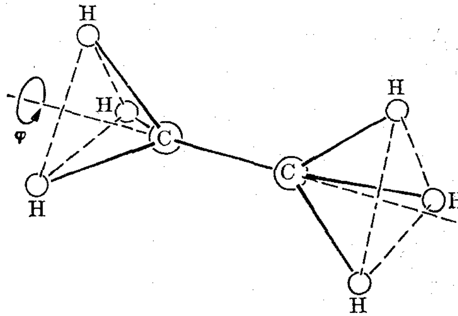
شکل ۲۷.۸

۴۳.۸. جسمی به جرم ۵kg ازفنری با ثابت‌کشسانی $۲ \times ۱۰^{۳} \mathrm{Nm}^{-1}$، آویزان است. اگر بگذارند فنر بکندی کشیده شود، جسم چه مقدار پایین می‌رود؟ جسم طوری رها می‌شود که بتواند آزادانه سقوط کند. (الف) شتاب اولیه، و (ب) شتاب وسرعت جسم را وقتی که ۰٫۰۱۰m، ۰٫۰۲۴۵m و ۰٫۰۳۰m سقوط کرده است پیدا کنید. دراین حالت جسم تا کجا می‌رود؟ درمواردی که ممکن است، از اصل بقای انرژی استفاده کنید.

۴۴.۸. درمولکول NH_3، اتم ازت در رأس یک چهاروجهی وسه H درقاعده قرار دارند (به شکل ۳.۲ مراجعه کنید). روشن است که اتم N دارای دو وضع ترازمندی پایدار می‌باشد. یک منحنی نمایشی ازانرژی پتانسیل اتم N را به‌صورت تابعی ازفاصلهٔ آن ازقاعدهٔ

چهاروجهی رسم کنید و درمورد حرکتهای ممکن آن برحسب انرژی کل بحث کنید.

۴۵.۸. درمولکول اتان ($C_۲H_۶$)، دو گروه $CH_۳$ چهاروجهی‌هایی هستند که C در رأس آنها قرار دارد (شکل ۲۸.۸). دوگروه می‌توانند دور خطی که دو اتم کربن را به هم مربوط می‌کند نسبت به یکدیگر بچرخند. تقارن ایجاب می‌کند که دو دسته وضع ترازمندی برای حرکت وجود داشته باشد، که وضعهای ترازمندی پایدار و وضعهای ترازمندی ناپایدار را تشکیل می‌دهند. این وضعها را تعیین کنید ونمودار انرژی پتانسیل را به صورت تابعی از زاویهٔ φ بین ۰ و ۲π رسم کنید. درمورد حرکتهای چرخشی ممکن به ازای مقادیر مختلف انرژی کل بحث کنید.



شکل ۲۸.۸

۴۶.۸. نموداری، مشابه با شکل ۱۹.۸، از $E_{p,\text{eff}}$ برای $E_p(r) = -۱/r$ و (الف) $E_{p,c} = ۱/۲r^۲$، (ب) $E_{p,c} = ۲/r^۲$ رسم کنید. انرژیها برحسب J و r برحسب m داده شده‌اند. در هر حالتی جای کمینهٔ $E_{p,\text{eff}}$ را تعیین کنید. انرژی لازم برای رفتن از کمینهٔ منحنی اول به کمینهٔ منحنی دوم را اندازه‌گیری کنید.

۴۷.۸. سورتمه‌ای به جرم ۲۰kg روی دامنهٔ تپه‌ای از ارتفاع ۲۰ متری لیز می‌خورد. سورتمه از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و با سرعت $۱۶\text{ms}^{-۱}$ به پایین سرازیری می‌رسد. اتلاف انرژی ناشی ازمالش را حساب کنید.

۴۸.۸. توپی به جرم ۰٫۵kg با سرعت اولیهٔ $۲۰\text{ms}^{-۱}$ در راستای قایم به سمت بالا پرتاب می‌شود و تا ارتفاع ۱۵m بالا می‌رود. اتلاف انرژی ناشی از مقاومت هوا را حساب کنید.

۴۹.۸. قطاری از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و در یک سرازیری به شیب ۱٪، مسافتی برابر ۳۰۰m را می‌پیماید. سپس با خیزی که کسب می‌کند روی یک سربالایی به شیب ۲٪، مسافتی برابر با ۶۰m را بالا می‌رود و می‌ایستد. نیروی مقاومت در مقابل حرکت قطار را حساب کنید (اگر α و β شیبهای سرازیری و سربالایی باشند، $\text{tg}\alpha = ۰٫۰۱$ و $\text{tg}\alpha = ۰٫۰۲$ است).

۵۰.۸. جسمی به جرم m با لغزش از روی یک صفحهٔ شیب‌دار به زاویهٔ α پایین می‌آید.

ضریب مالش برابر f است. آهنگ اتلاف را برای مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل گرانشی پیدا کنید.

۵۱.۸ با قرار دادن مقادیر مناسب برای v و y به صورت توابعی از t (که درمثال ۸.۷ به دست آمدند) در رابطهٔ $d/dt\,(E_k + E_p) = d/dt\,[mv^2/2 + mgy]$، مثال ۱۲.۸ را حل کنید. نشان دهید نتیجه‌ای که به دست می‌آید با آنچه که درمثال ۱۲.۸ بحث کردیم یکی است.

۵۲.۸ جسمی به جرم $8\,\text{kg}$ روی یک صفحهٔ افقی قرار دارد، به گونه‌ای که با یک انتهای یک فنر افقی با ثابت‌کشسانی $10^3\,\text{mN}^{-1}$ درتماس است. سر دیگر فنر، به دیوارهٔ قایمی متصل است. هنگامی که جسم به سمت دیواره فشار داده شود، فنر $15\,\text{cm}$ فشرده می‌شود. وقتی جسم رها می‌شود براثر کشسانی فنر به طور افقی پرتاب می‌شود. نیروی مالش بین جسم وصفحه ثابت و برابر $5\,\text{N}$ است. حساب کنید (الف) سرعت جسم را هنگامی که فنر طول اولیهٔ خود را باز می‌یابد، و (ب) مسافتی را که جسم قبل از ایستادن می‌پیماید، به‌ـ فرض اینکه از لحظه‌ای که فنر طول طبیعی خود را باز می‌یابد دیگر اثری روی جسم ندارد. درتغییرات انرژی جنبشی وانرژی پتانسیل دستگاه جسم ـ فنر در طول آزمایش بحث کنید.

۵۳.۸ برای به دست آوردن انرژی کل جسمی که تحت اثر نیروی جاذبهٔ عکس مجذوری $F = -\,k/r^2$ قرار دارد، قضیهٔ ویریال را به کار ببرید. این پاسخ را با نتایج مسئلهٔ ۳۱.۸ مقایسه کنید.

۵۴.۸ ذره‌ای بر اثر یک میدان نیرو که با یکی از توابع انرژی پتانسیل (الف) $E_p(x) = ax^n$، (ب) $E_p = by^n$، (ج) $E_p = cxy$، (د) $E_p = cxyz$ و (هـ) $E_p = k\,(x^2 + y^2 + z^2)$ بیان می‌شود، حرکت می‌کند. درهر مورد میدان نیرو را به صورت برداری نمایش دهید.

۵۵.۸ ذره‌ای تحت اثر یک نیروی مشتق از انرژی پتانسیل $E_p(x) = 3x^2 - x^3$ قرار دارد. (الف) نمودار $E_p(x)$ را رسم کنید. (ب) راستای نیرو را در هر ناحیهٔ مناسب از متغیر x تعیین کنید. (ج) در حرکتهای ممکن ذره به ازای مقادیر مختلف انرژی کل بحث کنید. وضعهای ترازمندی (پایدار وناپایدار) ذره را پیدا کنید.

۵۶.۸ برهم‌کنش بین دو هستک را، بادرجهٔ معینی از درستی، می‌توان با پتانسیل یوکاوا[1]، $E_p(r) = -V_0(r_0/r)e^{-r/r_0}$، که در آن V_0 حدود $50\,\text{MeV}$ و $r_0 = 1{,}5 \times 10^{-15}\,\text{m}$ است، نشان داد. نیروی بین دو هستک را به صورت تابعی ازفاصلهٔ آنها پیدا کنید. بزرگی نیرو را به ازای $r = r_0$ تعیین کنید. مقدار r را هنگامی که نیرو برابر ۱٪ نیرو در $r = r_0$ است برآورد کنید.

۵۷.۸ به جای برهم‌کنش یوکاوا، برهم‌کنشی به‌شکل $E_p(r) = -\,V_0(r_0/r)$ را درنظر بگیرید. در مورد اثر سازهٔ e^{-r/r_0} روی برد نیرو چه نتیجه می‌گیرید؟

---

1. Yukawa potential

۵۸.۸. نشان دهید که اگر نیرویی پایستار باشد، داریم $\partial F_x/\partial y = \partial F_y/\partial x$، $\partial F_z/\partial y = \partial F_y/\partial z$ و $\partial F_x/\partial z = \partial F_z/\partial x$. می‌توان ثابت کرد عکس این موضوع نیز درست است. و این آزمون مهمی است برای تعیین اینکه یک نیرو پایستار است یا نه. بر این پایه، تحقیق کنید که کدام یک از نیروهای زیر پایستار می‌باشند:

(الف) $\mathbf{u}_x\, x^n$؛ (ب) $\mathbf{u}_x\, y^n$؛

(ج) $\mathbf{u}_x(x^۲ - y^۲) + \mathbf{u}_y(۳xy)$؛ (د) $\mathbf{u}_x(۲xy) + \mathbf{u}_y(x^۲)$؛

(ه) $\mathbf{u}_x yz + \mathbf{u}_y zx + \mathbf{u}_z xy$؛ (و) $\mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y + \mathbf{u}_z z$.

۵۹.۸. ثابت کنید اگر نیروی وارد برجسمی برابر $\mathbf{F} = k\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ باشد، که در آن $\mathbf{u}$ یک برداریکای اختیاری است، انرژی جنبشی ثابت باقی می‌ماند. کار انجام یافته به وسیلهٔ نیرو چقدر است؟ ماهیت حرکتی را که نتیجه می‌شود تشریح کنید.

۹

دینامیک یک دستگاه ذرات

۱.۹ مقدمه

در دو فصل اخیر، نظریهٔ دینامیک یک ذره را مطالعه کردیم. در این نظریه، ما بقیهٔ جهان را نادیده گرفتیم و آن را با یک نیرو یا یک انرژی پتانسیل، که تنها به مختصات ذره بستگی دارد، نمایش دادیم. اکنون مسئلهٔ مهمتر و واقعی‌تر چند ذره را درنظر می‌گیریم. درواقع ما گفتگو در بارهٔ دینامیک یک دستگاه ذرات را از هنگام بیان اصل بقای اندازه حرکت در فصل ۷، شروع کرده‌ایم. درقسمت اول این فصل، سه نتیجهٔ اساسی مورد بحث قرارخواهند گرفت: حرکت مرکز جرم، اصل بقای اندازه حرکت زاویه‌ای و اصل بقای انرژی. درنیمهٔ دوم این فصل، دستگاههایی متشکل ازذرات بسیارزیاد مطالعه خواهند شدکه نیازبه‌ملاحظاتی باماهیت‌آماری دارند. درسراسر این فصل جرم ذرات ثابت فرض می‌شود.

I رابطه‌های اساسی

۲.۹ حرکت مرکز جرم یک دستگاه ذرات

دستگاهی‌متشکل از ذراتی به‌جرمهای m_1، m_2 . . . و سرعتهای $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$، . . . نسبت به‌یک چارچوب مرجع لخت را درنظر می‌گیریم. سرعت مرکز جرم با رابطهٔ زیرتعریف می‌شود:

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i\mathbf{v}_i}{M}. \qquad (۱.۹)$$

اگر جرم ذرات به‌سرعت بستگی نداشته باشد، $\mathbf{v}_{\text{CM}}$ سرعت نقطه‌ای است که در بخش ۸.۴ به‌عنوان مرکز جرم تعریف کردیم و با بردار مکان زیر مشخص می‌شود:

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i\mathbf{r}_i}{M}. \qquad (۲.۹)$$

این امر را می‌توان با مشتق‌گیری ازمعادلهٔ (۲.۹) نسبت به‌زمان نشان داد:

$$\frac{d\mathbf{r}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\sum_i m_i\mathbf{v}_i}{M} = \mathbf{v}_{\text{CM}}$$

با توجه به‌اینکه $\mathbf{p}_i = m_i\mathbf{v}_i$ است معادلهٔ (۱.۹) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\sum_i \mathbf{p}_i = \frac{\mathbf{P}}{M} \quad \text{یا} \quad \mathbf{P} = M\mathbf{v}_{\text{CM}} \qquad (۳.۹)$$

که درآن $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$ اندازه حرکت کل دستگاه است. این رابطه نشان می‌دهد که اندازه حرکت کل دستگاه، برابر است با اندازه حرکت نقطه‌ای با جرم تمام دستگاه کـه در مرکز جرم آن متمرکز شده است و با سرعت $\mathbf{v}_{\text{CM}}$ جابجا می‌شود. بدین دلیل گاهی $\mathbf{v}_{\text{CM}}$ سرعت دستگاه نیز نامیده می‌شود. همچنین هنگام گفتگو ازسرعت جسم متحرکی‌که از ذرات زیادی تشکیل شده است، مانند هواپیما، اتومبیل، زمین و مـاه، یا حتی مولکول یا هسته، در واقع

به‌سرعت مرکز جرم آن، $\mathbf{v}_{CM}$ اشاره می‌شود.

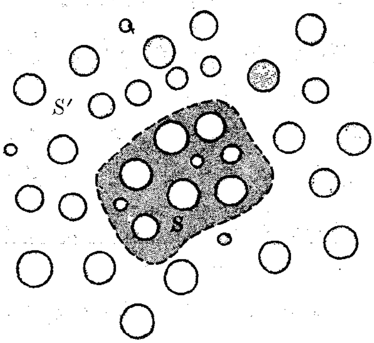
اگر دستگاه ذرات منزوی باشد، بنا به‌اصل بقای اندازه حرکت، می‌دانیم که $\mathbf{P}$ ثابت است، بنابراین

مرکز جرم یک دستگاه ذرات منزوی در هردستگاه لخت با سرعت ثابتی حرکت می‌کند (به‌فرض اینکه جرم ذرات مستقل از سرعت باشد).

بویژه، می‌توان یک چارچوب مرجع لخت به مرکز جرم یک دستگاه ذرات منزوی متصل کرد، و مرکز جرم نسبت به این چارچوب درحال سکون خواهد بود ($\mathbf{v}_{CM} = 0$). این چارچوب را چارچوب مرجع مرکزجرم یا چارچوب مرجع C [1] می‌نامیم. بنا به‌معادلهٔ (۳.۹) اندازه حرکت کل یک دستگاه ذرات نسبت به چارچوب مرجع C همیشه برابر صفر است:

$$\mathbf{P}_{CM} = \sum_i \mathbf{p}_i = 0 \quad \text{(درچارچوب مرجع CM)} \qquad (۴.۹)$$

به‌همین دلیل چارچوب C را گاهی چارچوب اندازه حرکت صفر[2] نیز می‌نامند. چارچوب C بسیار مهم است، زیرا خیلی از آزمایشهایی را که در آزمایشگاه یا چارچوب مرجع L صورت می‌گیرد می‌توان در چارچوب مرجع C بآسانی تجزیه و تحلیل کرد.



شکل ۱.۹. برهم‌کنش دستگاه S با اطراف خود، S'.

اکنون وضعی را درنظر می‌گیریم که دستگاه S منزوی نیست؛ به‌گفتهٔ دیگر، حالتی که ذرات تشکیل دهندهٔ S با سایرذرات موجود درعالم که به‌دستگاه S تعلق ندارند برهم‌کنش می‌کنند. فرض کنیم که دستگاه S از ذرات واقع در داخل خط نقطه چین شکل ۱.۹ تشکیل شده است و ذرات دستگاه S با تمام ذراتی‌که درخارج خط نقطه‌چین قرار دارند و دستگاه S' را تشکیل می‌دهند برهم کنش می‌کنند. همچنین می‌توان فرض کرد S و S' روی‌هم رفته یک دستگاه منزوی را تشکیل می‌دهند. به عنوان مثالهای مشخص، می‌توانیم S را کهکشان

1. the center-of-mass frame of reference (C-frame of reference)
2. zero-momentum frame

خودمان و S' را بقیهٔ جهان درنظر بگیریم. یا ممکن است S منظومهٔ شمسی و S' بقیهٔ جهان باشد. حتی می‌توان یک مولکول را دستگاه منزوی درنظر گرفت و اتمهای تشکیل دهندهٔ مولکول را در دو دستگاه S و S' گروه‌بندی کرد.

ذرات متعلق به S را با شاخص پایین i و ذرات متعلق به S' را با شاخص پایین j مشخص می‌کنیم. اصل بقای اندازه حرکت برای دستگاه منزوی کامل $S + S'$، عبارت‌است از

$$\mathbf{P} = \underbrace{\sum_i \mathbf{p}_i}_{S\ \text{دستگاه}} + \underbrace{\sum_j \mathbf{p}_j}_{S'\ \text{دستگاه}} = \text{const}$$

یا

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_S + \mathbf{P}_{S'} = \text{const}. \qquad (۵.۹)$$

پس هرگونه‌تغییر دراندازه حرکت S باید باتغییری برابر و با علامت مخالف در S' همراه باشد. به گفتهٔ دیگر،

$$\Delta \mathbf{P}_S = -\Delta \mathbf{P}_{S'}$$

یا

$$\sum_i \Delta \mathbf{p}_i = -\sum_j \Delta \mathbf{p}_j. \qquad (۶.۹)$$

بنابراین برهم‌کنش بین S و S' را می‌توان به عنوان تبادل اندازه حرکت توصیف کرد. به دانشجو توصیه می‌کنیم معادله‌های (۵.۹) و (۶.۹) را با معادله‌های (۵.۷) و (۸.۷) در مورد دو ذره با هم مقایسه و شباهتها را یادداشت کند.

با مشتق‌گیری ازمعادلهٔ (۵.۹) نسبت به‌زمان، داریم

$$\frac{d\mathbf{P}_S}{dt} = -\frac{d\mathbf{P}_{S'}}{dt}. \qquad (۷.۹)$$

آهنگ زمانی تغییراندازه حرکت دستگاه S را نیروی خارجی[1] وارد بر S می‌نامیم؛ یا

$$\frac{d\,\mathbf{P}_S}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad \text{یا} \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_i \mathbf{p}_i\right) = \mathbf{F}_{\text{ext}}. \qquad (۸.۹)$$

نام‌گذاری *نیروی‌خارجی* بدین‌دلیل است‌که تغییراندازه حرکت S نسبت‌به‌زمان، ازبرهم‌کنش آن با S' ناشی می‌شود. بنا به‌اصل بقای اندازه حرکت، نیروهای داخلی[2] موجود در S که به برهم کنشهای اجزاء خود آن مربوط می‌شوند، در اندازه حرکت کل تغییری به وجود نمی‌آورند. پس، اگر $\mathbf{F}'_{\text{ext}}$ نیروی خارجی وارد بردستگاه S' باشد، معادلهٔ (۷.۹) ایجاب می‌کند که $\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\mathbf{F}'_{\text{ext}}$ باشد. این رابطه قانون کنش و واکنش را برای S و S' تشکیل می‌دهد.

چون بنا به معادلهٔ (۳.۹)، سرعت مرکز جرم S برابر است با $\mathbf{v}_{\text{CM}} = \mathbf{P}_S/M$، از معادلهٔ (۸.۹) داریم

---

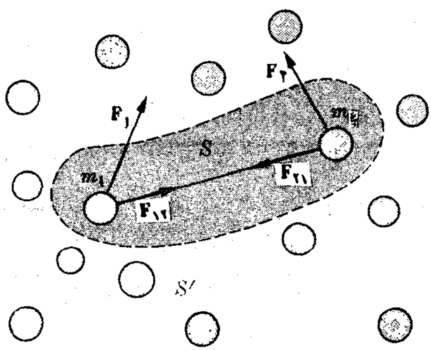
1. external force 2. internal forces

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = M\,\frac{d\mathbf{v}_{\text{CM}}}{dt}\,M\mathbf{a}_{\text{CM}}. \qquad (۹.۹)$$

با مقایسهٔ این نتیجه با معادلهٔ (۱۵.۷)، مشاهده می‌شود که

مرکز جرم یک دستگاه ذرات، همانند ذره‌ای حرکت می‌کند که جرم آن برابر جرم کل دستگاه است و به‌آن نیرویی برابر نیروی خارجی وارد بردستگاه ذرات وارد می‌شود.

نتایج بیان شده بـا معادله‌های (۶.۹)، (۷.۹)، (۸.۹) و (۹.۹) آشکارا نشان می‌دهند کـه برهم‌کنش بین دو دستگاه ذرات را می‌توان به‌طور صوری همانند آنچه که در مورد دو ذرهٔ منفرد درفصل ۷ به‌کار بردیم نشان داد. این دلیل نتیجتاً، درستی اصول‌دینامیک را که درفصل ۷ به‌صورت غیردقیقی‌درمواردی مانند برهم‌کنش بین زمین‌وماه، بین دومولکول یا درحرکت یک موشک یا یک خودرو (درمطالعهٔ اجسام نه ذرات) به‌کار بردیم تأیید می‌کند.



شکل ۲.۹. نیروهای خارجی وداخلی وارد بردستگاه S

بد نیست رابطهٔ بین $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ و نیروهای وارد برتک تک ذرات را به‌دست‌آوریم. برای سهولت دستگاه S را مرکب از دو ذره درنظر می‌گیریم (شکل ۲.۹). نیروی داخلی وارد بر ذرهٔ $m_۱$ ناشی از برهم‌کنش آن بـا ذرهٔ $m_۲$ را بـا $\mathbf{F}_{۱۲}$ و نیروی وارد بر ذرهٔ $m_۲$ ناشی از برهم‌کنش آن بـا ذرهٔ $m_۱$ را با $\mathbf{F}_{۲۱}$ نشان می‌دهیم. بنا به قانون کنش و واکنش باید

$$\mathbf{F}_{۱۲} = -\mathbf{F}_{۲۱} \qquad (۱۰.۹)$$

باشد. فـرض کنیم $\mathbf{F}_۱$ برآیند نیروهای خارجی وارد بر $m_۲$ باشد. بـرای به دست آوردن معادلهٔ حرکت هرذره تحت تأثیرتمام نیروهای وارد برآن، معادلهٔ (۱۲.۷) را به‌کار می‌بریم:

$$\frac{d\mathbf{p}_۱}{dt} = \mathbf{F}_۱ + \mathbf{F}_{۱۲}$$

$$\frac{d\mathbf{p}_۲}{dt} = \mathbf{F}_۲ + \mathbf{F}_{۲۱}$$

با جمع کردن این دو معادله و با توجه به اینکه مطابق معادلهٔ (۱۰.۹)، $\mathbf{F}_{12} - \mathbf{F}_{21} = 0$ است، به دست می‌آید

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \qquad (۱۱.۹)$$

بنابراین آهنگ تغییر اندازه حرکت کل دستگاه مرکب از m_1 و m_2 برابر است با مجموع نیروهای خارجی وارد بر m_1 و m_2. به‌طورکلی، برای دستگاهی متشکل ازتعداد دلخواهی ذره، داریم

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(\sum_i \mathbf{p}_i) = \sum_i \mathbf{F}_i \qquad (۱۲.۹)$$

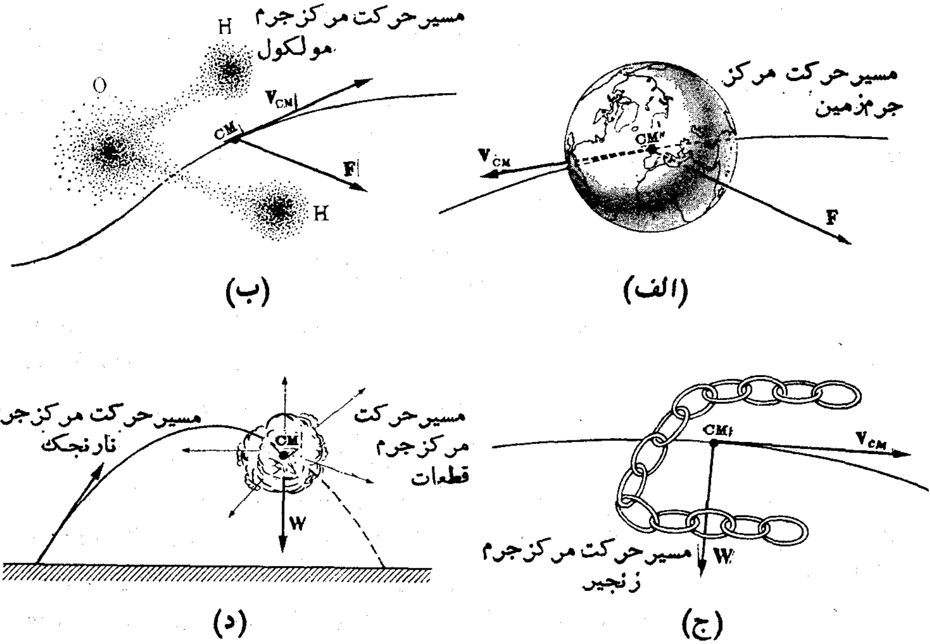
که در آن $\mathbf{F}_i$ نیروی خارجی وارد بر ذرهٔ m_i است. مقایسهٔ معادلهٔ (۱۲.۹) با معادلهٔ (۸.۹) نشان می‌دهد که

> نیروی خارجی وارد بر یک دستگاه ذرات برابر است با مجموع نیروهای خارجی وارد بر هر یک از ذرات تشکیل دهندهٔ دستگاه.

اکنون چند نمونه درنظرمی‌گیریم. شکل ۳.۹ (الف) زمین را درجریان حرکتش به دور خورشید نشان می‌دهد. مرکز جرم زمین مانند ذره‌ای حرکت می‌کند که جرم آن معادل جرم زمین است و تحت تأثیر نیرویی برابر با مجموع نیروهایی که از طرف خورشید (و سایر اجسام سماوی) روی تمام ذرات تشکیل دهندهٔ زمین وارد می‌شوند قرار دارد. شکل ۳.۹ (ب) یک مولکول آب را نشان می‌دهد. به عنوان مثال، فرض می‌کنیم که این مولکول، زیر تأثیر نیروهای الکتریکی خارجی است. مرکزجرم‌آن مانند ذره‌ای حرکت می‌کند که دارای تمام جرم مولکول باشد و زیر تأثیر نیرویی معادل با برآیند نیروهای وارد برتمام ذرات باردارتشکیل دهندهٔمولکول قرارداشته‌باشد. شکل ۳.۹ (ج) حرکت‌یک زنجیر را نشان می‌دهد که درهوا پرتاب شده است. حرکت مرکزجرم زنجیر همانند ذره‌ای خواهد بود که جرم آن برابر جرم زنجیر باشد و نیرویی معادل با وزن زنجیر برآن وارد شود، بنابراین مرکزجرم یک سهمی رسم می‌کند. بالاخره شکل ۳.۹ (د) نارنجکی را که درهوا منفجر می‌شود نشان می‌دهد. مرکز جرم قطعات نارنجک به حرکت روی مسیر سهمی شکل اولیه ادامه خواهد داد، زیرا مرکز جرم همانند ذره‌ای رفتار می‌کند که جرم آن برابر جرم نارنجک است ونیرویی برابربا وزن تمام قطعات نارنجک به‌آن وارد می‌شود. براثرانفجار نارنجک وزن قطعات تغییر نمی‌کند، زیرا درنزدیکی سطح زمین نیروی گرانی مستقل از مکان نقاط است. با وجود این، باید توجه داشت اگر میدان نیرو ثابت نباشد و به مکان نقاط بستگی داشته باشد، به قطعات نارنجک نیروهایی متفاوت با نیرویی که در ابتدا وارد می‌شد اثر می‌کنند. در این صورت مسیر مرکز جرم با مسیر قبل از انفجار یکی نخواهد بود، زیرا مجموع نیروهای خارجی تغییر می‌کند. به عنوان مثال، اگر یکی از سیاره‌های منظومهٔ شمسی (بر اثر یک انفجار کیهانی[1]) منفجر شود، مرکز جرم قطعات آن

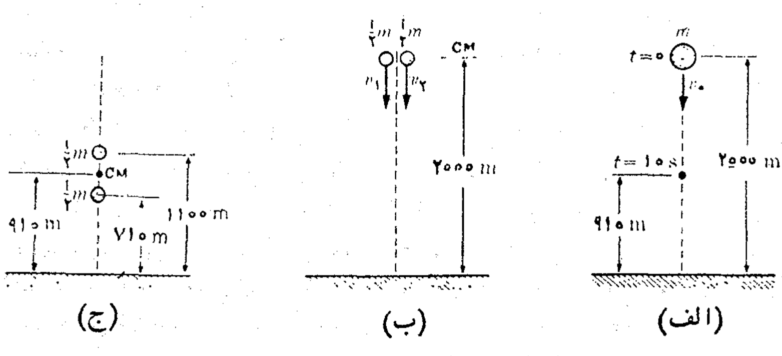
1. cosmic cataclysm

مسیر بیضی اولیه را نخواهند پیمود، زیرا نیروهای وارد به قطعات فرق خواهند کرد.



شکل ۳.۹. مرکز جرم یک دستگاه ذرات مسیر ناشی از کل نیروهای وارد بر دستگاه را طی می‌کند.

مثال ۱.۹. نارنجکی که درراستای قایم سقوط می‌کند، درارتفاع ۲۰۰۰m که دارای سرعت ۶۰ms^{-1} است، به دو قطعهٔ برابر تقسیم می‌شود. بلافاصله بعد از انفجار یکی از قطعات با سرعت ۸۰ms^{-1} به سقوط خود ادامه می‌دهد. مکان مرکز جرم دستگاه را ۱۰ ثانیه بعد از انفجار پیدا کنید.



شکل ۴.۹

حل: می‌توان یکی از دو روش زیر را به کار برد (به شکل ۴.۹ مراجعه کنید): چون می‌دانیم بعد از انفجار نیروهای خارجی تغییر نکرده‌اند، می‌توان فرض کرد که مرکز جرم بدون توجه به اینکه انفجار روی داده به حرکت خود ادامه می‌دهد. بنابراین، بعداز انفجار ارتفاع مرکزجرم با رابطهٔ $z = z_\circ + v_\circ t + gt^۲/۲$ داده می‌شود، که درآن $z_\circ = ۲۰۰۰\ \mathrm{m}$، $v_\circ = -۶۰\mathrm{ms^{-۱}}$ و $g = -۹٫۸\ \mathrm{ms^{-۲}}$ است. بنابراین به ازای $t = ۱۰\ \mathrm{s}$ به دست می‌آید $z = ۹۱۰\mathrm{m}$.

روش دیگر آن است که وضع مرکزجرم را مستقیماً از روی وضع قطعات، بعد از ۱۰ ثانیه حساب کنیم. چون اندازه حرکت در جریان انفجار ثابت می‌ماند، داریم

$$mv_\circ = m_۱ v_۱ + m_۲ v_۲$$

نظر به اینکه $m_۱ = m_۲ = m/۲$ است، در نتیجه $۲v_\circ = v_۱ + v_۲$. از طرف دیگر، $v_\circ = -۶۰\ \mathrm{ms^{-۱}}$ و $v_۱ = -۸۰\ \mathrm{ms^{-۱}}$ است، بنابراین $v_۲ = -۴۰\ \mathrm{ms^{-۱}}$ و قطعهٔ دوم نیز به سمت پایین می‌افتد. بعد از ده ثانیه مکان قطعهٔ اول عبارت است از $z_۱ = z_\circ + v_۱ t + gt^۲/۲ = ۷۱۰\ \mathrm{m}$ و مکان قطعهٔ دوم عبارت است از

$$z_۲ = z_\circ + v_۲ t + \frac{۱}{۲} gt^۲ = ۱۱۱۰\ \mathrm{m}.$$

با استفاده از معادلهٔ (۲.۹) مکان مرکز جرم از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$z_{\mathrm{CM}} = \frac{\left(\frac{۱}{۲} m_۱\right) z_۱ + \left(\frac{۱}{۲} m_۲\right) z_۲}{m} = \frac{۱}{۲}(z_۱ + z_۲) = ۹۱۰\ \mathrm{m}$$

که با نتیجهٔ به دست آمده از روش قبل تطبیق می‌کند.

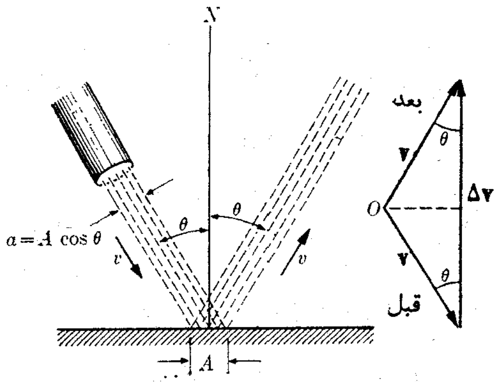
مثال ۲.۹. تلمبه‌ای با سطح مقطع a جریان گازی را با سرعتی خیلی بزرگتر از اغتشاش حرارتی مولکولهای گاز به سمت دیواره‌ای می‌پاشد. این دیواره مولکولها را بدون تغییر در بزرگی سرعت، منحرف می‌کند. نیروی اعمال شده بر دیواره را حساب کنید.

حل: وقتی که مولکولها به سمت دیواره پاشیده می‌شوند (شکل ۵.۹)، سوی سرعتشان به سمت پایین‌است و پس از برخورد به دیواره به سوی بالا برمی‌گردند، و در هردوحالت، با راستای قایم N، زاویهٔ θ می‌سازند. هر مولکول، به سبب برخورد با دیواره، تغییر سرعتی برابر $\Delta \mathbf{v}$ پیدا می‌کند که در راستای موازی N است، زیرا نیروی وارد از طرف دیواره دراین راستاست. بزرگی این تغییر برابر است با $|\Delta \mathbf{v}| = ۲v\cos\theta$. تغییر اندازه حرکت مولکول برابر $|\Delta \mathbf{p}| = m|\Delta \mathbf{v}| = ۲mv\cos\theta$ و در راستای N است. فرض کنیم تعداد مولکولهای موجود در واحد حجم n باشد. مولکولهایی که درواحد زمان به دیواره می‌رسند مولکولهایی هستند که درحجمی به طول v و سطح مقطع a قرار دارند؛ بنابراین تعداد آنها برابر است با $n(av)$. هر مولکول تغییر اندازه حرکتی برابر $۲mv\cos\theta$ می‌پذیرد. بنابراین تغییر اندازه حرکت جریان گاز در واحد زمان برابر است با

$$F = (nav)(2mv\cos\theta) = 2anmv^2\cos\theta.$$

فرض کنیم A سطحی از دیواره باشد که گاز به آن برخورد می‌کند. از شکل پیداست که $a = A\cos\theta$ و در نتیجه رابطهٔ قبلی به صورت زیر در می‌آید:

$$F = 2Anmv^2\cos^2\theta.$$



شکل ۵.۹. تغییر اندازه حرکت جریان گازی که به یک دیواره برخورد می‌کند

بنا به معادلهٔ (۷.۹)، این نیرویی است که ازطرف دیواره به‌جریان گاز وارد می‌شود، ومطابق معادلهٔ (۱۰.۹)، جریان گاز یک نیروی برابر وبا علامت مخالف روی سطح A به وجود می‌آورد. [نیروی باد روی بادبانهای یک کشتی بادبانی ازاین رابطه به‌دست می‌آید. همچنین نیرویی که در جریان طوفان از طرف باد بر یک دیوار وارد می‌شود، از همین رابطه حساب می‌شود. کار برد دیگر آن را در مثال ۱۶.۹ خواهیم دید.]

چون نیروی کل فقط روی یک ذرهٔ تنها اعمال نمی‌شود، بلکه روی یک سطح وارد می‌شود، می‌توانیم یک مفهوم مفید دیگر، به نام فشار، را وارد کنیم که دانشجو با آن آشنایی دارد، وآن عبارت است ازنیرویی‌که برواحد سطح دیواره وارد می‌شود. بنابراین

$$p = \frac{F}{A}. \tag{۱۳.۹}$$

درمورد خاص این مثال، گازفشاری برابربا $2nmv^2\cos^2\theta$ روی دیواره واردمی‌کند.

۳.۹ جرم کاهیده

اکنون دو ذره‌ای را درنظر می‌گیریم که منحصراً زیر تأثیر برهم‌کنشهای متقابل‌هم قرار دارند، به‌گفتهٔ دیگر، هیچ نیروی خارجی روی آنها اثر نمی‌کند (شکل ۶.۹). به‌عنوان‌مثال‌این دوذره می‌توانند یک الکترون و یک پروتون در یک اتم هیدروژن منزوی باشند. نیروهای متقابل

داخلی $\mathbf{F}_{12}$ و $\mathbf{F}_{21}$ در رابطهٔ (۱۰.۹) صدق می‌کنند. این نیروها در راستای خط $\mathbf{r}_{12}$ رسم شده‌اند. اکنون حرکت نسبی این دو ذره را مطالعه می‌کنیم. معادلهٔ حرکت این ذرات نسبت به یک ناظر لخت عبارت است از

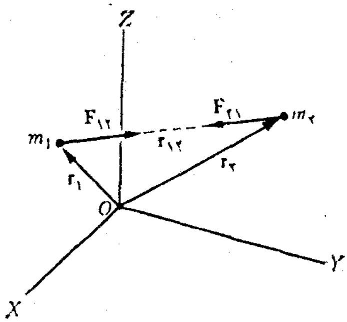
$$m_1\left(\frac{d\mathbf{v}_1}{dt}\right) = \mathbf{F}_{12} \quad \text{و} \quad m_2\left(\frac{d\mathbf{v}_2}{dt}\right) = \mathbf{F}_{21}$$

یا

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} \quad \text{و} \quad \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2}.$$

با تفریق این دو رابطه از یکدیگر به دست می‌آید

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2}.$$



شکل ۹.۶

با به کار بردن معادلهٔ (۱۰.۹) که درآن $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ است نتیجهٔ فوق را یک بار دیگر می‌نویسیم:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\mathbf{F}_{12} \tag{۱۴.۹}$$

چون $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{12}$ سرعت m_1 نسبت به m_2 است، بنابراین کمیت

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \frac{d\mathbf{v}_{12}}{dt} = \mathbf{a}_{12}$$

شتاب m_1 نسبت به m_2 است. کمیتی به نام جرم کاهیده[1] دستگاه دو ذره را با علامت μ و مطابق تعریف زیر معرفی می‌کنیم:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \quad \text{یا} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{۱۶.۹}$$

دراین صورت معادلهٔ (۱۴.۹) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

---
1. reduced mass

$$\mathbf{a}_{۱۲} = \frac{\mathbf{F}_{۱۲}}{\mu} \quad \text{یا} \quad \mathbf{F}_{۱۲} = \mu \mathbf{a}_{۱۲} \qquad (۱۶.۹)$$

این نتیجهٔ مهم بدین معنی است که

حرکت نسبی دو ذره‌ای که منحصراً زیر تأثیر برهم‌کنشهای متقابل یکدیگر قرار دارند، معادل است با حرکت ذره‌ای (نسبت به یک ناظرلخت) که جرم آن برابر جرم کاهیده است و تحت اثر نیرویی برابر با برهم‌کنش آنها قرار دارد.

به عنوان مثال، می‌توان حرکت ماه به دور زمین را با استفاده از جرم کاهیدهٔ دستگاه ماه ـ زمین و نیرویی برابر با نیروی جاذبهٔ زمین روی ماه، به یک مسئلهٔ تک جرمی تبدیل کرد. همچنین وقتی از حرکت یک الکترون به دور هسته گفتگو می‌شود، می‌توان دستگاه را به ذره‌ای باجرمی برابرجرم کاهیدهٔ دستگاه الکترون ـ هسته کاهش داد که زیر تأثیر نیروی بین‌الکترون وهسته حرکت می‌کند. بنا براین، درتوصیف حرکت دوذره که زیرتأثیر برهم‌کنش متقابل یکدیگر قرار دارند می‌توان حرکت دستگاه را به حرکت مرکز جرم، که سرعت آن ثابت است، و به حرکت نسبی دوذره، که از معادلهٔ (۱۶.۹) به دست می‌آید و به چارچوب مرجع متصل به مرکز جرم مربوط می‌شود، تجزیه کرد.

توجه داشته باشید که اگر جرم یکی از ذره‌ها، مثلا $m_۱$ خیلی کوچکتر از ذرهٔ دیگر باشد، جرم کاهیده را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\mu = \frac{m_۱}{۱ + m_۱/m_۲} \cong m_۱\left(۱ - \frac{m_۱}{m_۲}\right). \qquad (۱۷.۹)$$

این رابطه از تقسیم صورت و مخرج جملهٔ سمت راست رابطهٔ (۱۵.۹) بر $m_۲$، و با استفاده از تقریب $(۱ + x)^{-۱} \approx ۱ - x$، [بنا به معادلهٔ (پ۲۸.)] به‌دست می‌آید. ازاینجا نتیجه می‌شود که جرم کاهیده تقریباً برابربا جرم ذرهٔ سبکتر است. به عنوان مثال، درمطالعهٔ حرکت یک ماهواره به دور زمین، با تقریب خیلی خوب می‌توان به جای جرم کاهیدهٔ دستگاه ماهواره ـ زمین، جرم ماهواره را به کار برد. از طرف دیگر، اگر جرم دو ذره یکسان باشد ($m_۱ = m_۲$)، دراین صورت به دست می‌آید $\mu = m_۱/۲$. برهم‌کنش دو پروتون دارای چنین وضعی است. این امر در مورد دستگاهی مثل دوترون که از یک پروتون و یک نوترون تشکیل شده، نیز با تقریب خوبی صادق است.

مثال ۳.۹. جرم کاهیدهٔ دستگاههای زیر را حساب کنید: (الف) الکترون ـ پروتون در یک اتم هیدروژن، (ب) پروتون ـ نوترون در یک هستهٔ دوترون. در هر مورد، نتیجه را با جرم ذرهٔ سبکتر مقایسه کنید.

حل: (الف) برای دستگاه الکترون ـ پروتون که اتم هیدروژن را تشکیل می‌دهد، داریم $m_e = ۹/۱۰۹۱ \times ۱۰^{-۳۱}\,\text{kg}$ و $m_p = ۱/۶۷۲۵ \times ۱۰^{-۲۷}\,\text{kg}$. چون m_e خیلی کوچکتر از m_p است، با به‌کار بردن معادلهٔ (۱۷.۹) می‌توان نوشت

$$\mu_{ep} = m_e\left(۱ - \frac{m_e}{m_p}\right) = ۹/۱۰۳۱ \times ۱۰^{-۳۱}\,\text{kg}$$

بدین طریق μ در حدود ۰٫۰۶ درصد با m_e اختلاف دارد. با اینهمه، ایــن تفاوت ناچیز، اثرات محسوسی درنتایج فرآیندهای اتمی به‌وجود می‌آورد.

(ب) برای دستگاه پروتون - نوترون در دوترون، داریم

$$m_n = ۱٫۶۷۴۸ \times ۱۰^{-۲۷}\text{kg}$$

که تقریباً برابر m_p است. دراین صورت باید فرمول درست یعنی معادلهٔ (۱۵.۹)، را به‌کار ببریم، که به دست می‌آید

$$\mu_{np} = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} = ۰٫۸۳۶۸ \times ۱۰^{-۲۷}\text{kg}$$

که درحدود نصف جرم هر ذره است.

مثال ۴.۹. ناظری سرعتهای دو ذره به جرمهای $m_۱$ و $m_۲$ را اندازه‌گیری می‌کند و برای آنها بترتیب مقادیر $\mathbf{v}_۱$ و $\mathbf{v}_۲$ را بــه دست می‌آورد. سرعت مرکز جرم را نسبت به ناظر و سرعت هرذره را نسبت به مرکز جرم تعیین کنید.

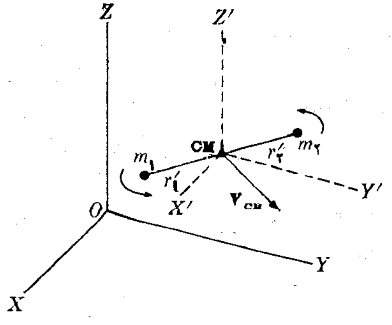
حل: ازمعادلهٔ (۱.۹)، با توجه به شکل ۷.۹، داریم

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{m_۱\mathbf{v}_۱ + m_۲\mathbf{v}_۲}{m_۱ + m_۲}.$$

سرعت هر ذره نسبت به مرکز جرم، با استفاده از تبدیل گالیله که با معادلهٔ (۹.۶) بیان شد، برابر است با

$$\mathbf{v}'_۱ = \mathbf{v}_۱ - \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{v}_۱ - \frac{m_۱\mathbf{v}_۱ + m_۲\mathbf{v}_۲}{m_۱ + m_۲} = \frac{m_۲(\mathbf{v}_۱ - \mathbf{v}_۲)}{m_۱ + m_۲} = \frac{m_۲\mathbf{v}_{۱۲}}{m_۱ + m_۲}$$

$$\mathbf{v}'_۲ = \mathbf{v}_۲ - \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{v}_۲ - \frac{m_۱\mathbf{v}_۱ + m_۲\mathbf{v}_۲}{m_۱ + m_۲} = \frac{m_۱(\mathbf{v}_۲ - \mathbf{v}_۱)}{m_۱ + m_۲} = -\frac{m_۱\mathbf{v}_{۱۲}}{m_۱ + m_۲}$$



شکل ۷.۹. حرکت نسبت به‌مرکز جرم

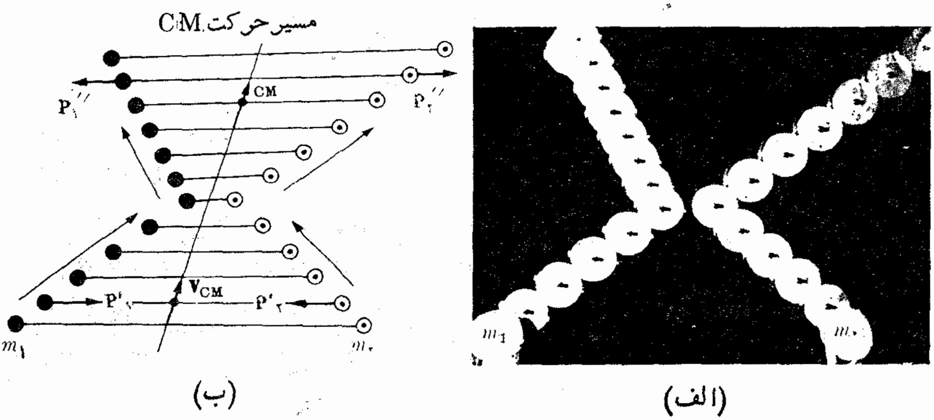
که در آن $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ سرعت نسبی دو ذره است. درنتیجه در چارچوب C به نظر می‌رسد ذرات دردوسوی مخالف حرکت می‌کنند. اندازه حرکت ذرهٔ ۱ نسبت به مرکز جرم عبارت است از

$$\mathbf{p}'_1 = m_1\mathbf{v}'_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{v}_{12} = \mu\mathbf{v}_{12}$$

بنابراین اندازه حرکت ذرهٔ ۱ در چارچوب مرکز جرم برابر است با حاصل ضرب جرم کاهیدهٔ دستگاه درسرعت نسبی. همچنین برای ذرهٔ ۲ داریم

$$\mathbf{p}'_2 = m_2\mathbf{v}'_2 = \mu\mathbf{v}_{21} = -\mu\mathbf{v}_{12}$$

بدین طریق ثابت می‌سود که درچارچوب مرجع مرکز جرم، دو ذره با اندازه حرکتهای مساوی ولی درسوی مخالف هم حرکت می‌کنند ومطابق معادلهٔ (۴.۹) اندازه حرکت کل برابر $\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = 0$ است. این نتیجه روی تصویر شکل ۸.۹ (الف) وتحلیل آن در شکل ۸.۹ (ب) نشان داده شده است.



شکل ۸.۹. برخورد بین دوجسم ($m_1 = 2\,\text{kg}$ و $m_2 = 1.5\,\text{kg}$). برهم‌کنش تنها هنگامی به وجود می‌آید که دو ذره خیلی به هم نزدیک باشند. (الف) عکس چند درخشی ازحرکت دوجسم. (ب) تحلیل عکس نشان می‌دهد که مرکزجرم درخط مستقیم با سرعت ثابتی نسبت به آزمایشگاه حرکت می‌کند.

رابطه‌هایی که دراین مثال به‌دست آوردیم درفیزیک هسته‌ای درآزمایشهای پراکندگی بسیار اهمیت دارند. دراین آزمایشها سرعت ذرات نسبت به یک چارچوب مرجع متصل به آزمایشگاه اندازه‌گیری می‌شود. ولی رابطه‌های نظری برای پراکندگی در چارچوب CM بسیار ساده‌تر می‌شوند. بنابراین باید روابط موجود بین دو رشته اندازگیری معلوم باشند. بدین منظور، ازفرمولهایی که دربالا به دست آوردیم استفاده می‌شود.

۴.۹ اندازه حرکت زاویه‌ای یک دستگاه ذرات

اکنون به مطالعهٔ اندازه حرکت زاویه‌ای یک دستگاه ذرات می‌پردازیم. درمعادلهٔ (۳۲.۷) اندازه حرکت زاویه‌ای یک ذره را نسبت به یک نقطهٔ معلوم با کمیت برداری زیر تعریف کردیم:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \qquad (۱۸.۹)$$

و درمعادلهٔ (۳۸.۷) رابطه‌ای بین $\mathbf{L}$ وگشتاور نیروی اعمال شده، $\boldsymbol{\tau}$، به دست آوردیم:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}. \qquad (۱۹.۹)$$

اکنون یک وضع مشابه را که درآن به جای یک ذره چندین ذره وجود دارد، مورد توجه قرار می‌دهیم. برای سهولت، ابتدا تنها دو ذره را درنظر می‌گیریم. رابطهٔ (۱۹.۹) درمورد دو ذرهٔ ۱ و ۲ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d\mathbf{L}_1}{dt} = \boldsymbol{\tau}_1 \quad و \quad \frac{d\mathbf{L}_2}{dt} = \boldsymbol{\tau}_2$$

با جمع دو رابطهٔ فوق به دست می‌آید

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \qquad (۲۰.۹)$$

فرض کنیم روی هر ذره، علاوه بر برهم‌کنش متقابل با ذرهٔ دیگر، یک نیروی خارجی نیز اثر می‌کند (شکل ۹.۹). دراین صورت نیروی وارد بر ذرهٔ ۱ برابر است با $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}$ و روی ذرهٔ ۲ برابر است با $\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}$، و

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12}$$

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}) = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21}$$

نظر به اینکه $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ است، گشتاورنیروی کل ذرات برابر است با

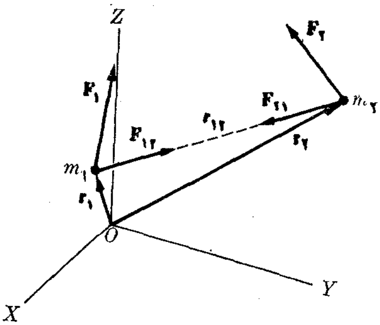
$$\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}_{21}$$

بردار $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{21}$ در راستای خطی است که دو ذره را به یکدیگر وصل می‌کند. اگر این فرض خاص را بپذیریم که نیروهای داخلی $\mathbf{F}_{12}$ و $\mathbf{F}_{21}$ در راستای $\mathbf{r}_{21}$، خط واصل بین دو ذره اثر می‌کنند، بردارهای $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ و $\mathbf{F}_{21}$ موازی می‌شوند، درنتیجه $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}_{21} = 0$ خواهد شد. بدین طریق آخرین جملهٔ معادلهٔ بالا ازبین می‌رود. به گفتهٔ دیگر، رابطهٔ (۲۰.۹) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \boldsymbol{\tau}_{1,\text{ext}} + \boldsymbol{\tau}_{2,\text{ext}}.$$

با تعمیم این نتیجه برای چند ذره، به دست می‌آید

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} \qquad (۲۱.۹)$$



شکل ۹.۹

دراین معادله $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i$ اندازه حرکت زاویه‌ای کل ذرات و $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ گشتاور نیروی کل است که فقط ازطرف نیروهای خارجی وارد می‌شود، تا زمانی که نیروهای داخلی در راستای خط‌واصل دو ذره قرار دارند. می‌توان معادلهٔ (۲۱.۹) را به‌صورت زیربیان داشت:

مشتق زمانی اندازه حرکت زاویه‌ای یک دستگاه ذرات نسبت بـه یک نقطهٔ دلخواه برابر است با گشتاور کل نیروهای خارجی وارد براین دستگاه، نسبت به همان نقطه.

حکم بالا را می‌توان قانون اساسی دینامیک درحرکتهای چرخشی دانست. درفصل ۱۰، این نتیجه را، درمورد حرکت یک جسم سخت به کار خواهیم برد.

اگر نیروهای خارجی وجود نداشته باشند، یا مجموع گشتاور آنها برابر صفر باشد، $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = ۰$، داریم

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \mathbf{L}_i\right) = ۰$$

با انتگرال‌گیری از رابطهٔ فوق به دست می‌آید

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \mathbf{L}_۱ + \mathbf{L}_۲ + \mathbf{L}_۳ + \cdots = \text{const.} \qquad (۲۲.۹)$$

رابطهٔ (۲۲.۹) چیزی جز قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای نیست، که می‌گوید:

بزرگی و راستای انـدازه حرکت زاویه‌ای کل یک دستگاه منزوی، یـا دستگاهی که گشتاور نیروهای خارجی وارد برآن صفر باشد، ثابت است.

به عنوان مثال، الکترونهـا در داخل اتم دارای چنین وضعی هستند، هرگاه تنهـا نیروهای داخلی مربوط بـه دافعهٔ الکتروستاتیک الکترونها وجاذبهٔ الکتروستاتیک هسته را در نظر

بگیریم، که این نیروهای داخلی درطول خطهای واصل هرجفت ازاین ذره‌ها اثر می‌کنند. همچنین اگر منظومهٔ شمسی را منزوی فرض کنیم، ونیروهای ناشی ازبقیهٔ کهکشان را ندیده بگیریم، اندازه حرکت زاویه‌ای کل تمام سیاره‌ها نسبت به مرکز جرم منظومهٔ شمسی ثابت باقی می‌ماند. این نتیجه با درجهٔ بالایی از درستی برقرار است. همچنین اینکه زمین با اندازه حرکت زاویه‌ای اساساً ثابتی به‌گردش دور مرکز جرم خود ادامه می‌دهد، بدین دلیل است که نیروهای خارجی ناشی از خورشید و سایر سیاره‌ها از مرکز زمین می‌گذرند و بنا براین نسبت به مرکز جرم برابر صفر (یا تقریباً برابر صفر) است.

با وجود فرض خاصی که برای به دست آوردن قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای پذیرفتیم (ازاین قرارکه نیروهای‌داخلی در راستای خط واصل بین هرجفت ذره اثرمی‌کنند)، به نظر می‌رسد این قانون دارای اعتبار عام است، و درمورد کلیهٔ پدیده‌هایی که تاکنون مشاهده شده‌اند، حتی هنگامی که به نظر می‌رسد فرض خاص ما برقرار نیست، به‌کار می‌رود.

قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای دلالت دارد براینکه اگر دریک دستگاه منزوی اندازه حرکت زاویه‌ای بخشی از دستگاه به سبب برهم‌کنشهای داخلی تغییر کند، اندازه حرکت زاویه‌ای بقیهٔ دستگاه باید به همان اندازه (ولی با علامت مخالف) تغییر کند تا اندازه حرکت زاویه‌ای کل ثابت باقی بماند.

به عنوان مثال، دریک عنصر رادیواکتیو، که هسته فروپاشیده می‌شود، ذره‌های گسیلیده، که غالباً یک الکترون ویک نوترینو می‌باشند، مقداری اندازه حرکت زاویه‌ای دارند. چون درفرایند فروپاشی تنها نیروهای‌داخلی مؤثرند، اندازه حرکت زاویه‌ای‌هسته بایدآنقدرتغییر کند تا اندازه حرکت زاویه‌ای خارج شده به وسیلهٔ ذرات گسیلیده را جبران کند. همچنین، اگر اتم، مولکول یا هسته‌ای یک پرتو الکترومغناطیسی گسیل کند، اندازه حرکت زاویه‌ای آن باید آنقدر تغییر کند تا درست اندازه حرکت زاویه‌ای خارج شده توسط تابش را جبران کند. بعضی مواقع، فرایندهایی که امکان وجود آنها در طبیعت هست، به سبب خصوصیتی که مشخصهٔ آن فرآیند است ومانع از برقرار ماندن اصل بقای اندازه حرکت زاویه‌ای می‌شود، نمی‌توانند رخ دهند.

مثال ۵.۹. اندازه حرکت‌زاویه‌ای دو ذره را نسبت به مرکزجرم آنها یا چارچوب مرجع C حساب کنید.

حل: فرض کنیم $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ بردار مکان ذرهٔ ۱ نسبت به ذرهٔ ۲ باشد. بنا به شکل ۶.۹، محل مرکز جرم دو ذره نسبت به چارچوب مرجع L عبارت است از

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

در نتیجه بردار مکان هر ذره نسبت به مرکز جرم یا چارچوب مرجع C از این قرار است:

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2\mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1\mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2}.$$

با به‌کار بردن نتایج حاصل از مثال ۴.۹ اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به مرکز جرم به دست می‌آید:

$$\mathbf{L}_{\mathrm{CM}} = \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{p}'_1 + \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{p}'_2 = \left(\frac{m_2\mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2}\right) \times (\mu\mathbf{v}_{12})$$

$$+ \left(-\frac{m_1\mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2}\right) \times (-\mu\mathbf{v}_{12}) = \mu\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{v}_{12}$$

$$= \mathbf{r}_{12} \times (\mu\mathbf{v}_{12}).$$

بدین طریق، اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه نسبت به مرکز جرم برابر است اندازه حرکت زاویه‌ای ذره‌ای به اندازه حرکت $\mu\mathbf{v}_{12}$ و بردار مکان $\mathbf{r}_{12}$. توجه داشته باشید که در رابطهٔ $\mathbf{L}_{\mathrm{CM}}$ تنها کمیتهایی ظاهر می‌شوند که مکان و حرکت نسبی دو ذره را مشخص می‌کنند.

این نتیجه، به‌عنوان مثال، درمحاسبهٔ اندازه حرکت زاویه‌ای یک اتم هیدروژن اهمیت بسیار دارد. دراینجا، باید فاصله و سرعت الکترون را نسبت به پروتون به کار بریم و نیز جرم کاهیدهٔ دستگاه الکترون ـ پروتون را جانشین جرم الکترون کنیم؛ یعنی $\mathbf{L}_{\mathrm{CM}} = \mu_{\mathrm{ep}}\mathbf{r}_{\mathrm{ep}} \times \mathbf{v}_{\mathrm{ep}}$، که درآن شاخصهای e و p بترتیب نمایشگر الکترون و پروتون هستند.

هنگامی که دستگاه چند ذره‌ای است، معمولا اندازه حرکت زاویه‌ای کل را نسبت به مرکز جرم بیان می‌کنند و در این صورت آن را اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی دستگاه می‌نامند. بنابراین اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی یک دستگاه ویژگی خود دستگاه و مستقل از آزمایشگر یا ناظر است. در مورد یک جسم سخت یا یک ذرهٔ بنیادی اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی را اسپین[1] نیز می‌نامند.

مثال ۹.۶. رابطه‌ای بین اندازه حرکت زاویه‌ای یک دستگاه ذرات نسبت به چارچوب مرجع CM یا C (اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی) و اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به چارچوب آزمایشگاه یا چارچوب L برقرار کنید.

حل: برای سهولت، دستگاهی متشکل از دو ذره را درنظر می‌گیریم. اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به چارچوب آزمایشگاه عبارت است از

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2$$

اگر $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ نمایش سرعت ذره‌ها نسبت به چارچوب L و $\mathbf{v}'_1$ و $\mathbf{v}'_2$ نمایش سرعتها نسبت به چارچوب C باشد، داریم

1. spin

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_{CM}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_{CM}.$$

در نتیجه

$$\mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{v}_1 = m_1(\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_{CM}) = \mathbf{p}'_1 + m_1\mathbf{v}_{CM}.$$

و به‌همین طریق داریم

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_2 + m_2\mathbf{v}_{CM}.$$

با یادآوری اینکه $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}_{CM}$ و $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2' + \mathbf{r}_{CM}$ است، بالاخره به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}_{CM}) \times (\mathbf{p}'_1 + m_1\mathbf{v}_{CM}) + (\mathbf{r}'_2 + \mathbf{r}_{CM}) \times (\mathbf{p}'_2 + m_2\mathbf{v}_{CM}) \\ &= \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{p}'_1 + \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{p}'_2 + \mathbf{r}_{CM} \times (\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2) + (m_1\mathbf{r}'_1 + m_2\mathbf{r}'_2) \times \mathbf{v}_{CM}\end{aligned}$$

بنا به‌مثال ۴.۹ یا معادلهٔ (۴.۹) داریم $\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = 0$ وبنا به‌تعریف $\mathbf{L}_{CM}$ (مثال ۵.۹) و $\mathbf{r}_{CM}$ [معادلهٔ (۲.۹)]، نتیجه می‌گیریم که اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به چارچوب آزمایشگاه برابر است با

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} + (m_1 + m_2)\mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{L}_{CM} + M\mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{v}_{CM}. \quad (۲۳.۹)$$

اولین جملهٔ سمت راست اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی را نسبت به چارچوب CM یا C وآخرین جملهٔ آن اندازه حرکت زاویه‌ای‌خارجی را نسبت به‌چارچوب $\mathbf{L}$، به‌دست می‌دهد، وقتی که تمام جرم دستگاه متمرکز درمرکز جرم فرض شود. به عنوان مثال، هنگامی که بازیکنی توپی را با چرخش پرتاب می‌کند، اندازه حرکت زاویه‌ای ناشی از چرخش با $\mathbf{L}_{CM}$ مشخص می‌شود در صورتی که اندازه حرکت زاویه‌ای ناشی از حرکت انتقالی توپ با $\mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{v}_{CM} \times m_{\text{توپ}}$ بیان می‌شود. همین حالت برای الکترون چرخانی که در اتم هیدروژن دورهسته گردش می‌کند، نیزوجود دارد. این امر یک‌بار دیگر نشان می‌دهد تا آنجا که به اندازه حرکت زاویه‌ای مربوط است می‌توان حرکت داخلی را از حرکت مرکز جرم جدا کرد. گرچه ما فقط برای دستگاهی متشکل از دو ذره استدلال کردیم، ولی نتیجهٔ حاصل درمورد دستگاهی متشکل از هرتعداد ذره نیز معتبر است.

مثال ۷.۹. برای یک دستگاه ذرات، رابطه‌ای بین گشتاور نیروهای خارجی نسبت به‌مرکز جرم و اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی آن برقرار کنید.

حل: اگر بازهم برای سهولت فرض کنیم دستگاه فقط از دو ذره به جرمهای m_1 و m_2 تشکیل شده است و نیروهای $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ به آنها اثر می‌کنند، گشتاور کل نیروهای خارجی نسبت به‌مبدأ مختصات درچارچوب L، برابر است با

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_{ext} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}_{CM}) \times \mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}'_2 + \mathbf{r}_{CM}) \times \mathbf{F}_2 \\ &= \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_{CM} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2).\end{aligned}$$

دوجملهٔ اول رابطهٔ فوق گشتاور نیروی خارجی نسبت به‌مرکز جرم است. که آن را با $\boldsymbol{\tau}_{CM}$ نشان می‌دهیم، درصورتی که جملهٔ آخرگشتاور نیروهای خارجی برآیند $\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$

است که گویی به‌مرکز جرم وارد می‌شود. بنا براین داریم

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \boldsymbol{\tau}_{\text{CM}} + \mathbf{r}_{\text{CM}} \times \mathbf{F}_{\text{ext}}. \qquad (۲۴.۹)$$

ولی بنا به نتیجهٔ مثال ۶.۹، داریم $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{CM}} + M\mathbf{r}_{\text{CM}} \times \mathbf{v}_{\text{CM}}$. با مشتق گرفتن ازاین رابطه نسبت به‌زمان، به‌دست می‌آید

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{CM}}}{dt} + M\mathbf{r}_{\text{CM}} \times \frac{d\mathbf{v}_{\text{CM}}}{dt} + M\frac{d\mathbf{r}_{\text{CM}}}{dt} \times \mathbf{v}_{\text{CM}}.$$

می‌دانیم که $d\mathbf{r}_{\text{CM}}/dt = \mathbf{v}_{\text{CM}}$ است، به‌گونه‌ای که جملهٔ آخر برابر صفر می‌شود. با به‌کار بردن معادلهٔ (۹.۹) (یعنی $\mathbf{F}_{\text{ext}} = M d\mathbf{v}_{\text{CM}}/dt$)، به دست می آوریم

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{CM}}}{dt} + \mathbf{r}_{\text{CM}} \times \mathbf{F}_{\text{ext}}.$$

با قراردادن رابطه‌های $d\mathbf{L}/dt$ و $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ که در بالا به‌دست‌آمد، درمعادلهٔ (۲۱.۹)، درمی‌یابیم

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{CM}}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{\text{CM}} \qquad (۲۵.۹)$$

این رابطه ظاهراً مشابه معادلهٔ (۲۱.۹) است، ولی یک اختلاف اساسی بین این دو رابطه وجود دارد. معادلهٔ (۲۱.۹) تنها زمانی اعتبار دارد که اندازه حرکت زاویه‌ای و گشتاور نیروها نسبت به یک نقطهٔ ثابت در یک دستگاه لخت، که معمولا مبدأ مختصات انتخاب می‌شود، محاسبه شده باشد. ولی از طرف دیگر، معادلهٔ (۲۵.۹) نسبت به مرکز جرم معتبر است، حتی اگر در یک چارچوب مرجع لخت درحال سکون نباشد. هرچند این معادله را برای دو ذره به‌دست آوردیم ولی درمورد یک دستگاه متشکل از هرچند ذره نیزاعتبار دارد و بویژه درمطالعهٔ حرکت جسم سخت بسیار مفید است.

۵.۹ انرژی جنبشی یک دستگاه ذرات

یک‌دستگاه متشکل از دو ذره به‌جرمهای m_1 و m_2 را که زیرتأثیرنیروهای‌خارجی $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ و نیروهای داخلی $\mathbf{F}_{12}$ و $\mathbf{F}_{21}$ قرار دارد درنظر می‌گیریم. در یک لحظهٔ خاص، این ذرات در مکانهایی که در شکل ۱۰.۹ نشان داده شده‌اند قرار دارند و با سرعتهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ روی مسیرهای C_1 و C_2 حرکت می‌کنند. معادلهٔ حرکت هرذره به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

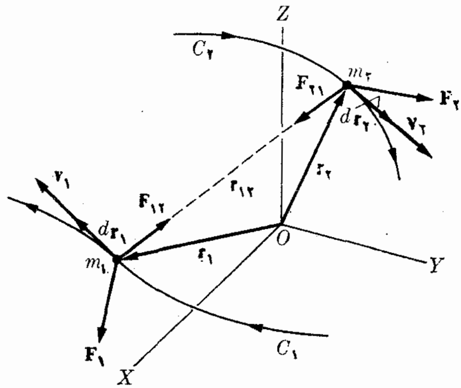
$$\begin{aligned} m_1\mathbf{a}_1 &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12} \\ m_2\mathbf{a}_2 &= \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21} \end{aligned} \qquad (۲۶.۹)$$

درفاصله زمانی خیلی کوتاه dt هرذره در راستای مماس برمسیر خود به‌اندازهٔ $d\mathbf{r}_1$ و $d\mathbf{r}_2$ جا بجامی‌شود. هرگاه حاصل‌ضرب اسکالررابطهٔ اول معادله‌های (۲۶.۹) را با $d\mathbf{r}_1$ و رابطهٔ دوم‌را با $d\mathbf{r}_2$ پیدا کنیم، خواهیم داشت

$$m_{۱}\mathbf{a}_{۱}\cdot d\mathbf{r}_{۱} = \mathbf{F}_{۱}\cdot d\mathbf{r}_{۱} + \mathbf{F}_{۱۲}\cdot d\mathbf{r}_{۱}$$

و

$$m_{۲}\mathbf{a}_{۲}\cdot d\mathbf{r}_{۲} = \mathbf{F}_{۲}\cdot d\mathbf{r}_{۲} + \mathbf{F}_{۲۱}\cdot d\mathbf{r}_{۲}$$



شکل ۱۰.۹

از جمع دو رابطهٔ فوق و با یادآوری اینکه $\mathbf{F}_{۱۲} = -\mathbf{F}_{۲۱}$ است، به‌دست می‌آید

$$m_{۱}\mathbf{a}_{۱}\cdot d\mathbf{r}_{۱} + m_{۲}\mathbf{a}_{۲}\cdot d\mathbf{r}_{۲} = \mathbf{F}_{۱}\cdot d\mathbf{r}_{۱} + \mathbf{F}_{۲}\cdot d\mathbf{r}_{۲} + \mathbf{F}_{۱۲}\cdot(d\mathbf{r}_{۱} - d\mathbf{r}_{۲}). \qquad (۲۷.۹)$$

چون $d\mathbf{r}_{۱}/dt = \mathbf{v}_{۱}$ و $\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}_{۱} = v_{۱}dv_{۱}$ است، داریم

$$\mathbf{a}_{۱}\cdot d\mathbf{r}_{۱} = \left(\frac{d\mathbf{v}_{۱}}{dt}\right)\cdot d\mathbf{r}_{۱} = d\mathbf{v}_{۱}\cdot\left(\frac{d\mathbf{r}_{۱}}{dr}\right) = v_{۱}dv_{۱}$$

همچنین، $\mathbf{a}_{۲}\cdot d\mathbf{r}_{۲} = v_{۲}dv_{۲}$ و نیز $d\mathbf{r}_{۱} - d\mathbf{r}_{۲} = d(\mathbf{r}_{۱} - \mathbf{r}_{۲}) = d\mathbf{r}_{۱۲}$. بنابراین معادلهٔ (۲۷.۹) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$m_{۱}v_{۱}dv_{۱} + m_{۲}v_{۲}dv_{۲} = \mathbf{F}_{۱}\cdot d\mathbf{r}_{۱} + \mathbf{F}_{۲}\cdot d\mathbf{r}_{۲} + \mathbf{F}_{۱۲}\cdot d\mathbf{r}_{۱۲}$$

با انتگرال‌گیری از رابطهٔ فوق بین زمان اولیهٔ $t_{۰}$، تا یک لحظهٔ اختیاری t، به‌دست می‌آید

$$m_{۱}\int_{v_{۱۰}}^{v_{۱}} v_{۱}\,dv_{۱} + m_{۲}\int_{v_{۲۰}}^{v_{۲}} v_{۲}\,dv_{۲} = \int_{A}^{B}(\mathbf{F}_{۱}\cdot d\mathbf{r}_{۱} + \mathbf{F}_{۲}\cdot d\mathbf{r}_{۲}) + \int_{A}^{B}\mathbf{F}_{۱۲}\cdot d\mathbf{r}_{۱۲} \qquad (۲۸.۹)$$

که درآن A و B نمادهایی برای نشان دادن وضع هر دو ذره درلحظه‌های $t_{۰}$ و t می‌باشند. چون $\int_{v_{۰}}^{v} v\,dv = v^{۲}/۲ - v_{۰}^{۲}/۲$ است، برای جمله‌های سمت چپ معادلهٔ (۲۸.۹) به‌دست می‌آید

$$\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2-\frac{1}{2}m_1v_{10}^2\right)+\left(\frac{1}{2}m_2v_2^2-\frac{1}{2}m_2v_{20}^2\right)=\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2\right)$$
$$-\left(\frac{1}{2}m_1v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2v_{20}^2\right)=E_k-E_{k,0}$$

که در آن

$$E_k=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad (۲۹.۹)$$

انرژی جنبشی کل دستگاه دو ذره درلحظهٔ t، و $E_{k,0}$ انرژی جنبشی کل در لحظهٔ t_0 نسبت به چارچوب مرجع ناظر است. جملهٔ اول راست معادلهٔ (۲۸.۹) برابر W_{ext}، کار انجام یافتهٔ کل به‌وسیلهٔ نیروهای خارجی درهمان فاصله زمانی است. به‌گفتهٔ دیگر

$$W_{ext}=\int_A^B(\mathbf{F}_1\cdot d\mathbf{r}_1+\mathbf{F}_2\cdot d\mathbf{r}_2).$$

بالاخره جملهٔ آخر معادلهٔ (۲۸.۹) برابر W_{int} کار انجام یافته به‌وسیلهٔ نیروهای داخلی در همان فاصله زمانی را به‌دست می‌دهد، یعنی

$$W_{int}=\int_A^B\mathbf{F}_{12}\cdot d\mathbf{r}_{12}$$

با قراردادن این نمادها درمعادلهٔ (۲۸.۹)، به‌دست می‌آید

$$E_k-E_{k,0}=W_{ext}+W_{int}. \qquad (۳۰.۹)$$

معادلهٔ (۳۰.۹) را می‌توان چنین بیان کرد:

تغییر انرژی جنبشی یک دستگاه ذرات برابر است با کار انجام یافته روی دستگاه به‌وسیلهٔ نیروهای داخلی و خارجی.

نتیجهٔ فوق تعمیم طبیعی نتیجه‌ای است که قبلا برای یک ذره، با فرمول (۱۳.۸)، به‌دست آوردیم و درمورد یک دستگاه متشکل از هرتعداد ذره معتبر است.

۶.۹ بقای انرژی یک دستگاه ذرات

اکنون فرض می‌کنیم که نیروهای داخلی پایستار هستند، در نتیجه تابعی مانند $E_{p,12}$ وابسته به مختصات m_1 و m_2 وجود دارد، به‌گونه‌ای که

$$W_{int}=\int_A^B\mathbf{F}_{12}\cdot d\mathbf{r}_{12}=E_{p,12,0}-E_{p,12} \qquad (۳۱.۹)$$

که در آن $E_{p,12}$ مقدار تابع درلحظهٔ t و $E_{p,12,0}$ مقدار آن در لحظهٔ t_0 است. $E_{p,12}$ را انرژی پتانسیل داخلی دستگاه می‌نامیم. اگر نیروهای داخلی در راستای خط $\mathbf{r}_{12}$ که دو

ذره را به‌یکدیگر وصل می‌کند اثر کنند، دراین صورت انرژی پتانسیل داخلی فقط به‌فاصلهٔ r بستگی دارد، به‌همان دلیلی که انرژی پتانسیل ناشی از یک نیروی مرکزی فقط به‌فاصلهٔ r بستگی دارد (بخش ۸.۱۰). دراین حالت انرژی پتانسیل داخلی مستقل ازچارچوب مرجع است، زیرا درآن تنها فاصلهٔ بین دو ذره دخالت‌دارد، حالتی‌که اغلب برهم کنشهایی‌را که درطبیعت یافت می‌شوند بخوبی نمایش‌می‌دهد. باواردکردن معادلهٔ (۳۱.۹) درمعادلهٔ (۳۰.۹) به‌دست‌می‌آید

$$E_k - E_{k,\circ} = W_{\text{ext}} + E_{p,۱۲,\circ} - E_{p,۱۲}$$

یا

$$(E_k + E_{p,۱۲}) - (E_k + E_{p,۱۲})_\circ = W_{\text{ext}} \qquad (۳۲.۹)$$

کمیت

$$U = E_k + E_{p,۱۲} = \frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲ + \frac{۱}{۲}m_۲v_۲^۲ + E_{p,۱۲} \qquad (۳۳.۹)$$

را ازاین به‌بعد انرژی خاص[1] دستگاه می‌نامیم. این انرژی برابر است با مجموع انرژیهای جنبشی ذره‌ها نسبت به‌یک ناظر لخت و انرژی پتانسیل داخلی آنها که، چنانکه قبلا نشان دادیم، (بنا به‌فرضها که کردیم) مستقل از چارچوب مرجع است.

اگر به‌جای دو ذره چندین ذره وجود داشته باشند، انرژی خاص برابر می‌شود با

$$U = E_k + E_{p,\text{int}} = \sum_{\substack{\text{تمام}\\\text{ذرات}}} \frac{۱}{۲}m_iv_i^۲ + \sum_{\substack{\text{تمام}\\\text{ذرات}}} E_{p,ij} \qquad (۳۴.۹)$$

که در آن

$$E_k = \sum_{\substack{\text{تمام}\\\text{ذرات}}} \frac{۱}{۲}m_iv_i^۲ = \frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲ + \frac{۱}{۲}m_۲v_۲^۲ + \frac{۱}{۲}m_۳v_۳^۲ + \cdots$$

و

$$E_{p,\text{int}} = \sum_{\substack{\text{تمام}\\\text{ذرات}}} E_{p,ij} = E_{p,۱۲} + E_{p,۱۳} \cdots + E_{p,۲۳} + \cdots$$

توجه داشته باشید که جمع اول که مربوط به‌انرژی جنبشی است، به‌ازای هر ذره یک جمله دارد. جمع دوم که مربوط به‌انرژی پتانسیل داخلی است، برای هرجفت ذره یک‌جمله دارد، زیرا تنها به برهم کنشهای دو ذره‌ای مربوط می‌شود. اگر هیچ نیروی داخلی وجود نداشته باشد، انرژی خاص تماماً جنبشی است.

با وارد کردن تعریف انرژی خاص، (۳۳.۹)، درمعادلهٔ (۳۲.۹)، داریم

$$U - U_\circ = W_{\text{ext}}. \qquad (۳۵.۹)$$

این رابطه چنین بیان می‌شود:

تغییر انرژی خاص یک دستگاه ذرات برابر است با کار انجام یافته روی دستگاه به‌وسیلهٔ نیروهای خارجی.

1. proper energy

این بیان مهم، قانون بقای انرژی نام دارد. تاکنون این قانون تنها به‌عنوان نتیجه‌ای از اصل بقای اندازه حرکت، و این فرض نیروهای داخلی پایستار هستند، ظاهر شده است. با وجود این، به‌نظر می‌رسد این قانون درمورد تمام فرایندهایی که درجهان مشاهده می‌شوند صادق باشد، بنابراین، فراتر از فرضهای خاصی که برای برقراری آن به کار بردیم، باید برای آن اعتبار عام قایل شویم. معادلهٔ (۸.۹) برهم‌کنش یک دستگاه را با جهان خارج به‌وسیلهٔ تغییر انرژی دستگاه بیان می‌کند.

اکنون یک دستگاه منزوی را در نظر می‌گیریم. در این دستگاه $W_{\text{ext}} = 0$ است، زیراهیچگونه نیروی خارجی وجود ندارد. دراین صورت داریم $U - U_{\circ} = 0$ یا $U = U_{\circ}$. به گفتهٔ دیگر،

انرژی خاص یک دستگاه ذرات منزوی ثابت باقی می‌ماند،

با این فرض که نیروهای داخلی پایستار باشند. بنابراین، اگر انرژی جنبشی یک دستگاه منزوی‌افزایش پیدا کند، انرژی پتانسیل داخلی‌آن باید به‌همان اندازه‌کاهش یابد تا مجموع آنها ثابت باقی بماند. به عنوان مثال، در یک مولکول منزوی هیدروژن، مجموع انرژی جنبشی نسبت به یک چارچوب مرجع لخت و انرژی پتانسیل دوپروتون و دوالکترون، همیشه ثابت می‌ماند.

اصل بقای اندازه حرکت، همچنین قوانین بقای انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای، قوانینی اساسی هستند که به نظر می‌رسد برکلیهٔ فرایندهایی که می‌توانند در طبیعت روی دهند، حاکم‌اند.

گاهی پیش می‌آید که نیروهای خارجی وارد بردستگاه نیز پایستار باشند، به‌گونه‌ای که W_{ext} را می‌توان به صورت $W_{\text{ext}} = E_{p,\text{ext},\circ} - E_{p,\text{ext}}$ نوشت که در آن $E_{p,\text{ext},\circ}$ و $E_{p,\text{ext}}$ مقادیر انرژی پتانسیل وابسته به نیروهای خارجی در حالتهای ابتدایی و انتهایی هستند. دراین صورت، معادلهٔ (۳۵.۹) به شکل زیر درمی‌آید:

$$U - U_{\circ} = E_{p,\text{ext},\circ} - E_{p,\text{ext}}$$

یا

$$U + E_{p,\text{ext}} = U_{\circ} + E_{p,\text{ext},\circ}$$

کمیت

$$E = U + E_{p,\text{ext}} = E_k + E_{p,\text{int}} + E_{p,\text{ext}} \qquad (۳۶.۹)$$

انرژی کل دستگاه نامیده می‌شود. درجریان حرکت دستگاه براثر نیروهای خارجی و داخلی پایستار، این انرژی ثابت باقی می‌ماند. این نتیجه مشابه معادلهٔ (۲۹.۸) است که برای یک ذرهٔ واحد به دست آوردیم.

به عنوان، مثال، انرژی خاص یک اتم هیدروژن، متشکل ازیک الکترون و یک پروتون، برابر باانرژی جنبشی الکترون وپروتون وانرژی پتانسیل داخلی ناشی ازبرهم‌کنش الکتریکی آنهاست. اگر اتم منزوی باشد، مجموع این دو انرژی ثابت است. ولی، اگر

اتم دریک میدان خارجی قرار گیرد، به انرژی کل آن باید انرژی پتانسیل ناشی از میدان خارجی را نیز اضافه کرد ومجموع این انرژیهاست که ثابت باقی می‌ماند.

یک مثال دیگر: دوجرم m_1 و m_2 را درنظر می‌گیریم که به فنری با ثابت k وصل شده‌اند. اگر دستگاه به هوا پرتاب شود، انرژی جنبشی برابر می‌شود با $m_1v_1^2/2 + m_2v_2^2/2$، انرژی پتانسیل داخلی از انبساط یا تراکم فنر ناشی می‌شود و برابر $kx^2/2$ است، که درآن x عبارت است از تغییر شکل فنر، و انرژی پتانسیل خارجی (ناشی از جاذبهٔ گرانشی زمین) برابر است با $m_1gy_1 + m_2gy_2$ که در آن y_1 و y_2 ارتفاع ذره‌ها از سطح زمین است. پس، انرژی خاص دستگاه برابر می‌شود با $U = m_1v_1^2/2 + m_2v_2^2/2 + kx^2/2$. اگر هیچ نیروی دیگری روی دستگاه اثر نکند، انرژی کل برابر می‌شود با

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}kx^2 + m_1gy_1 + m_2gy_2$$

واین انرژی باید درجریان حرکت ثابت باقی بماند.

چون انرژی جنبشی به سرعت بستگی دارد، مقدار انرژی جنبشی به چارچوب مرجعی که جهت مطالعهٔ حرکت دستگاه مورد استفاده قرارمی‌گیرد بستگی پیدا می‌کند. انرژی جنبشی مربوط به چارچوب CM را با $E_{k,\text{CM}}$ نشان می‌دهیم وآن را انرژی جنبشی داخلی می‌نامیم. انرژی پتانسیل داخلی که فقط به فاصلهٔ بین ذرات بستگی دارد، (چنانکه قبلا توضیح دادیم) درتمام چارچوبهای مرجع دارای مقدار یکسانی است. بنابراین مجموع انرژی جنبشی داخلی وانرژی پتانسیل داخلی یک دستگاه را به عنوان انرژی داخلی آن دستگاه تعریف می‌کنیم، یا

$$U_{\text{int}} = E_{k,\text{CM}} + E_{p,\text{int}}. \qquad (۳۷.۹)$$

درنتیجه، زمانی که با یک دستگاه ذرات سروکار داشته باشیم، معمولا از انرژی داخلی آن گفتگو می‌کنیم، حتی اگر شاخصهای CM یا int را ننویسیم.

دربعضی حالات ویژه، انرژی پتانسیل داخلی یک دستگاه، درمقابل انرژی جنبشی داخلی ناچیز است. این امر مثلا درمورد یک گاز در دماهای بالاصدق می‌کند. دراین‌حالت می‌توان انرژی داخلی را تماماً انرژی جنبشی درنظر گرفت، و اصل بقای انرژی به اصل بقای انرژی جنبشی تبدیل می‌شود.

مثال ۸.۹. رابطهٔ بین انرژی جنبشی یک دستگاه ذرات را که نسبت به چارچوب مرجع آزمایشگاه یا L حساب شده است با انرژی جنبشی داخلی نسبت به چارچوب مرجع CM یا C، به دست آورید.

حل: برای سهولت، دو ذره به جرمهای m_1 و m_2 را که دارای سرعتهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ در چارچوب L و سرعتهای $\mathbf{v}'_1$ و $\mathbf{v}'_2$ در چارچوب C هستند درنظر می‌گیریم. این دو دسته سرعت با رابطه‌های زیر به یکدیگر مربوط‌اند:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_{\text{CM}} \quad \text{و} \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_{\text{CM}}$$

که در آن $\mathbf{v}_{CM}$ سرعت چارچوب C نسبت بــه چارچوب L است. دراین صورت انــرژی جنبشی نسبت به دستگاه مختصات L برابر می‌شود با

$$E_k = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1(\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_{CM})^2 + \frac{1}{2}m_2(\mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_{CM})^2.$$

این تساوی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$E_k = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 + (m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2)\cdot\mathbf{v}_{CM}.$$

کمیت $m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}'_2$ برابر اندازه حرکت کل دستگاه نسبت بــه مرکز جرم است، و بنا به معادلهٔ (۴.۹) باید مساوی صفر باشد (به مثال ۴.۹ مراجعه کنید). انرژی جنبشی داخلی نسبت به چارچوب C بـرابـر است بـا $E_{k,CM} = m_1 v_1'^2/2 + m_2 v_2'^2/2$. بنابراین E_k، انرژی جنبشی دستگاه نسبت به چارچوب آزمایشگاه L را می‌توان چنین نوشت:

$$E_k = E_{k,CM} + (m_1 + m_2)v_{CM}^2/2 = E_{k,CM} + Mv_{CM}^2/2 \qquad (۳۸.۹)$$

جملهٔ اول، $E_{k,CM}$، انرژی جنبشی داخلی است. جملهٔ دوم سمت راست انرژی جنبشی ذره‌ای است به جرم $M = m_1 + m_2$ که همراه مرکز جرم حرکت می‌کند. این انرژی را انرژی جنبشی انتقالی[1] دستگاه می‌نامند. هرچند معادلهٔ (۳۸.۹) را برای دو ذره به دست آوردیم ولی درمورد دستگاهی متشکل از هرتعداد ذره نیز صادق است.

اینجا یک بار دیگر ملاحظه می‌شود که می‌توان حرکت دستگاه را به دو حرکت جدا کرد، که هرحرکت دارای یک انرژی جنبشی کاملا مشخصی است. یکی، حرکت انتقالی با سرعتی برابر با سرعت مرکز جرم، و دیگری حرکت داخلی نسبت به مرکز جرم.

اکنون یکبار دیگر به حالتی که بازیکنی توپی را با چرخش پرتاب می‌کند برگردیم. انرژی جنبشی کل توپ نسبت بــه زمین برابر است با مجموع انــرژی جنبشی داخلی آن نسبت به مرکز جرم، کــه مربوط است به انرژی جنبشی چرخشی، و انرژی جنبشی انتقالی آن نسبت به زمین، کــه مقدار آن برابر است با $m_{\text{توپ}} \times v_{CM}^2/2$. همین وضع در مورد یک مولکول نیز وجود دارد. معمولا، حرکت داخلی دستگاه است کــه مورد توجه می‌باشد وبدین مناسبت برای توصیف بیشتر فرایندها، چارچوب C ترجیح دارد.

چنانکه قبلا متذکر شدیم، انرژی پتانسیل داخلی $E_{p,12}$ تنها به فاصلهٔ بین m_1 و m_2 بستگی دارد و درچارچوبهای L و C یکسان است. بــا افزودن $E_{p,12}$ بــه طرفین معادلــهٔ (۳۸.۹) وبا استفاده ازمعادلهٔ (۳۳.۹)، می‌توان نوشت

$$U = U_{\text{int}} + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

که درآن $U_{\text{int}} = E_{k,CM} + E_{p,12}$ است. این معادلــه انرژی داخلی U_{int} و انرژی خاص U را به‌گونه‌ای که درچارچوب C و L اندازه‌گیری می‌شوند، به هم مربوط می‌کند. توجه داشته باشید کــه برای یک دستگاه منزوی $\mathbf{v}_{CM}$ ثابت است، بنابراین اگر U ثابت باشد، U_{int} نیز ثابت باقی می‌مانــد. به گفتهٔ دیگر، هنگامی که انرژی دریک چارچوب لخت L

1. translational kinetic energy

ثابت باشد، درچارچوب مرکز جرم C نیز ثابت باقی ماند و برعکس.

مثال ۹.۹. انرژی جنبشی داخلی دو ذره را برحسب جرم کاهیده وسرعت نسبی آنها بنویسید.

حل: انرژی جنبشی داخلی برابر است با $E_{k,CM} = m_1 v'^2_1/2 + m_2 v'^2_2/2$. با استفاده از نتایج مثال ۴.۹، یعنی

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{m_2 \mathbf{v}_{12}}{m_1 + m_2} \quad \text{و} \quad \mathbf{v}'_2 = -\frac{m_1 \mathbf{v}_{12}}{m_1 + m_2}$$

جدول ۱.۹

شمارهٔ معادله	رابطه
	رابطه‌های سینماتیک
(۳.۹)	$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{CM} \qquad (\mathbf{P}_{CM} = 0)$
(۲۳.۹)	$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} + M\mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{v}_{CM}$
(۲۴.۹)	$\boldsymbol{\tau}_{ext} = \boldsymbol{\tau}_{CM} + \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{F}_{ext}$
(۳۸.۹)	$E_k = E_{k,CM} + Mv^2_{CM}/2$
	رابطه‌های دینامیک
(۸.۹)	$d\mathbf{P}/dt = F_{ext}$
(۹.۹)	یا $M\mathbf{a}_{CM} = F_{ext}$
(۲۱.۹)	$d\mathbf{L}/dt = \boldsymbol{\tau}_{ext}$
(۲۵.۹)	یا $d\mathbf{L}_{CM}/dt = \boldsymbol{\tau}_{CM}$
(۳۰.۹)	$E_k - E_{k,0} = W_{ext} + W_{int}$
(۳۵.۹)	$U - U_0 = W_{ext}$
	تعریفهای انرژی
(۳۳.۹)	انرژی خاص: $U = E_k + E_{p,int}$
(۳۷.۹)	انرژی داخلی: $U_{int} = E_{k,CM} + E_{p,int}$
(۳۶.۹)	انرژی کل: $E = E_k + E_{p,int} + E_{p,ext}$

به دست می‌آید

$$E_{k,\mathrm{CM}} = \frac{۱}{۲} m_۱ \left(\frac{m_۲ v_{۱۲}}{m_۱ + m_۲}\right)^۲ + \frac{۱}{۲} m_۲ \left(\frac{m_۱ v_{۱۲}}{m_۱ + m_۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۲} \mu v_{۱۲}^۲$$

بنا براین، چنانکه قبلا نیز درمورد اندازه حرکت زاویه‌ای درمثال ۵.۹ به دست آوردیم، انرژی جنبشی داخلی یک دستگاه متشکل از دو ذره، معادل است با انرژی جنبشی ذره‌ای به جرم برابر با جرم کاهیده که با سرعت نسبی $\mathbf{v}_{۱۲}$ حرکت می‌کند. به عنوان مثال، انرژی داخلی یک اتم هیدروژن برابر است با $U_{\mathrm{int}} = \mu_{\mathrm{ep}} v_{\mathrm{ep}}^۲/۲ + E_p(r_{\mathrm{ep}})$، که در آن شاخصهای e و p به الکترون وپرتون اشاره دارند. نتایجی که دراین مثال ومثال پیش به‌دست آوردیم، به سبب موارد استعمال متعدد آنها در فیزیک هسته‌ای و اتمی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند.

مهمترین رابطه‌هایی که تا اینجا دراین فصل به دست آورده‌ایم، درجدول ۱.۹ فهرست شده‌اند. این رابطه‌ها به طور گسترده درکارهای عملی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۷.۹ برخورد

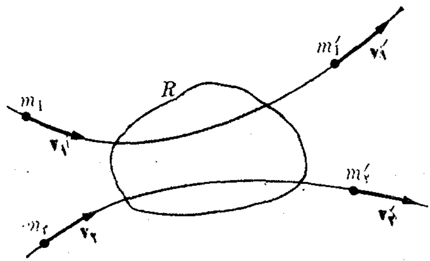
هنگامی که دو ذره به یکدیگر نزدیک می‌شوند، برهم کنش متقابل آنها حرکتشان را تغییر می‌دهد و بدین طریق یک تبادل انرژی و اندازه حرکت به وجود می‌آید. گوییم برخورد[1] رخ داده است (اگر به جای دو ذره دو دستگاه ذرات نیز وجود داشته باشد بازهم همین اصطلاح را به کار می‌بریم). این تعریف الزاماً بدین معنی نیست که دو ذره (یا دودستگاه) به طورفیزیکی، به معنای میکروسکوپیک، همانندآنچه برخورد ماکروسکوپیک بین دوگوی بیلیارد یا دواتومبیل اتفاق می‌افتد، درتماس بوده‌اند. بلکه، به طورکلی بدین معنی است که هنگام نزدیک شدن دو ذره به یکدیگر، مثلا درقسمت میانی شکل ۱۱.۹، برهم‌کنشی رخ داده است و در یک مدت نسبتاً کوتاه، تغییر قابل اندازه گیریی در حرکت آنها به وجود می‌آید. به عنوان مثال، اگر یک الکترون یا یک پروتون به اتمی نزدیک شود، نیروهای الکتریکی وارد عمل می‌شوند واختلال قابل ملاحظه‌ای درحرکت ذره‌ها پدید می‌آید. وقتی که مسیر یک ستارهٔ دنباله‌دار درمنظومهٔ شمسی انحنا برمی‌دارد، باز هم می‌توان از برخورد گفتگو کرد. بعضی مواقع، درحالتی که ذرات (یا دستگاهها) برخورد کننده درابتدا و انتها یکی باشند به جای برخورد اصطلاح پراکندگی[2] را به کار می‌برند.

با وجود این، در بعضی از برخوردها، ذرات نهایی الزاماً با ذرات ابتدایی یکی نیستند. به عنوان مثال، در برخورد بین اتم A و مولکول BC، نتیجهٔ نهایی امکان دارد مولکول AB واتم C باشد. درواقع، بسیاری واکنشهای شیمیایی بدین‌گونه صورت‌می‌گیرند.

درآزمایش برخوردی که درآزمایشگاه صورت می‌گیرد، معمولا حرکت ذرات قبل از برخورد به طور دقیق معلوم است، زیرا این حرکت به شیوهٔ تدارک آزمایش بستگی دارند.

---

1. collision   2. scattering



شکل ۱۱.۹. بقای اندازه حرکت و انرژی در یک برخورد

به عنوان مثال، یک ذره ممکن است الکترون و یا پروتونی باشد که در یک دستگاه شتاب دهندهٔ الکتروستاتیکی شتاب گرفته است و ذرهٔ دیگر اتمی باشد که در آزمایشگاه عملا در حال سکون است. در این صورت، ناظر نتیجهٔ نهایی، یعنی حرکت را دوراز ناحیهٔ برخورد مشاهده می‌کند. اگر نیروهای وارد عمل بین ذرات معلوم باشند، می‌توان حالت نهایی را حساب کرد به شرطی که حالت اولیه نیز معلوم باشد. بنابراین، تجزیه و تحلیل چنین آزمایشهایی اطلاعات ارزنده‌ای درمورد برهم‌کنش بین ذرات برخورد کننده فراهم می‌آورد. این امر یکی از دلایلی است که چرا آزمایشهای برخورد برای فیزیکدانها چنین جالب توجه می‌باشند.

چون در هنگام برخورد تنها نیروهای داخلی وارد عمل می‌شوند، اندازه حرکت و انرژی هردو ثابت باقی می‌مانند. فرض کنیم $\mathbf{p}_1$ و $\mathbf{p}_2$ اندازه حرکت ذره‌ها قبل ازبرخورد و $\mathbf{p}'_1$ و $\mathbf{p}'_2$ اندازه حرکت‌آنها بعداز برخورد باشد. بقای اندازه حرکت ایجاب می‌کندکه

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \qquad (۳۹.۹)$$

انرژی پتانسیل داخلی که قبل از برخورد برابر است با $E_{p,12}$، بعد از برخورد به سبب آرایش جدید داخلی، ممکن است تغییر کند، یعنی $E'_{p,12}$ شود، همچنین جرمها نیز الزاماً یکی نیستند. به‌عنوان‌مثال، دوترون هسته‌ای‌است مرکب ازیک نوترون ویک پروتون، وهنگام گذر از کنار یک هستهٔ دیگر، احتمال دارد نوترون به وسیلهٔ هستهٔ دوم گیر بیفتد، به طوری‌که پروتون جدا بماند. در این صورت ذره‌های نهایی عبارت می‌شوند از یک پروتون و یک هسته با یک نوترون اضافی.

بنابراین، مطابق معادلهٔ (۳۵.۹) اصل بقای انرژی چنین نوشته می‌شود:

$$E_k + E_{p,12} = E'_k + E'_{p,12}$$

که درآن، با توجه به معادلهٔ (۱۲.۸)، داریم

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}$$

$$E'_k = \frac{1}{2}m'_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m'_2v'^2_2 = \frac{p'^2_1}{2m'_1} + \frac{p'^2_2}{2m'_2}. \qquad (۴۰.۹)$$

کمیت Q را که با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود،

$$Q = E'_k - E_k = E_{p,۱۲} - E'_{p,۱۲} \qquad (۴۱.۹)$$

وارد می‌کنیم، بنابراین Q برابر است با اختلاف انرژی جنبشی ابتدایی با نهایی، یا تفاضل انرژی پتانسیل داخلی نهایی و ابتدایی. اگر Q برابر صفر باشد، تغییر انرژی جنبشی وجود ندارد و برخورد را کشسان[1] می‌نامند. درغیر این صورت، برخورد ناکشسان[2] است. اگر $Q < ۰$ باشد، انرژی جنبشی کاهش پیدا می‌کند، و به همان مقدار انرژی پتانسیل افزایش می‌یابد، و می‌گوییم برخورد ناکشسان از نوع اول (یا انرژی گیر[3]) است. اگر $Q > ۰$ باشد، انرژی جنبشی افزایش می‌یابد و به‌همان مقدار انرژی پتانسیل داخلی کاهش پیدا می‌کند، و می‌گوییم برخورد ناکشسان از نوع دوم (یا انرژی زا[4]) بوده است.

با وارد کردن معادلهٔ (۴۰.۹) در معادلهٔ (۴۱.۹) می توان نوشت

$$\frac{p'^{۲}_{۱}}{۲m'_{۱}} + \frac{p'^{۲}_{۲}}{۲m'_{۲}} = \frac{p^{۲}_{۱}}{۲m_{۱}} + \frac{p^{۲}_{۲}}{۲m_{۲}} + Q. \qquad (۴۲.۹)$$

برای حل کامل مسایل برخورد، معادله‌های (۳۹.۹) و (۴۲.۹) کافی هستند.

اگر برخورد را نسبت به مرکز جرم حساب کنیم، بنا به معادلهٔ (۴.۹) اندازه حرکت کل برابر صفر است، یعنی $\mathbf{p}_{۱} = -\mathbf{p}_{۲}$ و $\mathbf{p}'_{۱} = -\mathbf{p}'_{۲}$. پس می‌توان معادلهٔ (۴۲.۹) را ساده کرد:

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{m'_{۱}} + \frac{۱}{m'_{۲}}\right)p'^{۲}_{۱} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{m_{۱}} + \frac{۱}{m_{۲}}\right)p^{۲}_{۱} + Q$$

یا با استفاده از معادلهٔ (۱۵.۹) که جرم کاهیده را تعریف می‌کند، به دست می‌آید

$$\frac{p'^{۲}_{۱}}{۲\mu'} = \frac{p^{۲}_{۱}}{۲\mu} + Q \qquad \text{(در چارچوب مرجع CM)} \qquad (۴۳.۹)$$

توجه داشته باشید که دراین معادله نیزهمان Q را به کاربردیم، زیرا بنا به تعریف درمعادلهٔ (۴۱.۹)، Q به چارچوب مرجع بستگی ندارد. در یک برخورد همیشه بین دو ذره تبادل اندازه حرکت صورت می‌گیرد ولی الزاماً همیشه با تبادل انرژی جنبشی همراه نیست. به عنوان مثال، اگر برخورد کشسان باشد ($Q = ۰$) و ذره‌های نهایی همان ذره‌های ابتدایی باشند ($\mu = \mu'$)، از معادلهٔ (۴۳.۹) به دست می‌آید $p'_{۱} = p_{۱}$ و همچنین $p_{۲}' = p_{۲}$. بدین طریق در چارچوب CM، بزرگی اندازه حرکتها بعد از برخورد با اندازه حرکتهای قبل از برخورد برابرند و ذرات انرژی جنبشی خود را حفظ می‌کنند، به گونه‌ای که نسبت به چارچوب CM بین ذرات تبادل انرژی وجود ندارد. با این همه تبادل اندازه حرکت روی می‌دهد زیرا راستای حرکتها تغییر می‌کند.

مثال ۱۰.۹. در یک واکنش گیراندازی[5] مقدار Q را به دست آورید.

---

1. elstic 2. inelastic 3. endoergic
4. exoergic 5. capture reaction

حل: یکی از حالات بسیار جالب برخورد ناکشسان این است که دو ذره پس از برخورد توأمان به حرکت ادامه دهند. چنین فرایندی، در فیزیک هسته‌ای، واکنش گیراندازی نامیده می‌شود. به عنوان مثال، چنین حالتی هنگامی رخ می‌دهد که یک نوترون در برخورد با پروتون یک اتم هیدروژن گیر بیفتد و یک هستهٔ دوترون به وجود بیاید. برخورد دیگری ازاین نوع، برخورد بین دو جسم پلاستیک است. دراین حالت، دو ذره بعد از برخورد با سرعت مرکز جرم حرکت می‌کنند؛ یا، بنا به مثال ۴.۹،

$$\mathbf{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{m_۱\mathbf{v}_۱ + m_۲\mathbf{v}_۲}{m_۱ + m_۲}.$$

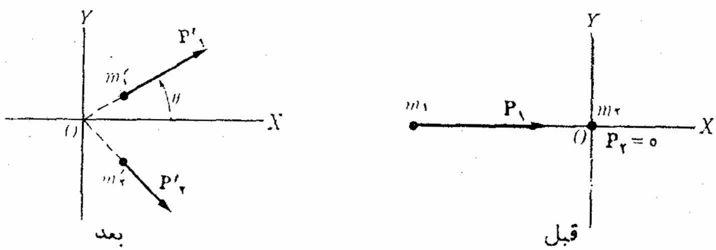
بنابراین Q واکنش برابر است با

$$Q = \frac{۱}{۲}(m_۱ + m_۲)v_{\mathrm{CM}}^۲ - \frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲ - \frac{۱}{۲}m_۲v_۲^۲$$

$$= -\frac{۱}{۲}\frac{m_۱m_۲}{m_۱ + m_۲}(\mathbf{v}_۱ - \mathbf{v}_۲)^۲ = -\frac{۱}{۲}\mu v_{۱۲}^۲$$

درنتیجه Q منحصراً به سرعت نسبی ذره‌ها قبل ازبرخورد بستگی دارد.آیا دانشجو می‌تواند براساس نتیجهٔ مثال ۹.۹ به مقدار به دست آمده برای Q معنایی نسبت دهد؟

مثال ۱۱.۹. Q را برحسب انرژی جنبشی ذرات قبل و بعد از برخورد بـه دست آورید. فرض می‌کنیم که در آغاز $m_۱$ دارای انـدازه حرکت $\mathbf{p}_۱$ و $m_۲$ سـاکن است $(\mathbf{p}_۲ = ۰)$ (به شکل ۱۲.۹ مراجعه کنید). بعد ازبرخورد جرم ذره‌ها برابر با $m'_۱$ و $m'_۲$ می‌شود.



(ب) (الف)

شکل ۱۲.۹. رابطهٔ بین اندازه حرکتها نسبت به چارچوب L، قبل و بعد از برخورد

حل: ازاصل بقای اندازه حرکت به‌دست می‌آید $\mathbf{p}'_۱ + \mathbf{p}'_۲ = \mathbf{p}_۱$ یا $\mathbf{p}'_۲ = \mathbf{p}_۱ - \mathbf{p}'_۱$. در نتیجه

$$p'^۲_۲ = (\mathbf{p}_۱ - \mathbf{p}'_۱)^۲ = p_۱^۲ + p'^۲_۱ - ۲p_۱p'_۱\cos\theta.$$

با استفاده از تعریف Q [معادلهٔ (۴۱.۹)]، داریم

$$Q = \frac{p'^{۲}_{۱}}{۲m'_{۱}} + \frac{p'^{۲}_{۲}}{۲m'_{۲}} - \frac{p^{۲}_{۱}}{۲m_{۱}}$$

$$= \frac{p'^{۲}_{۱}}{۲m'_{۱}} - \frac{p^{۲}_{۱}}{۲m_{۱}} + \frac{۱}{۱m'_{۲}}(p^{۲}_{۱} + p'^{۲}_{۱} - ۲p_{۱}p'_{۱}\cos\theta)$$

یا

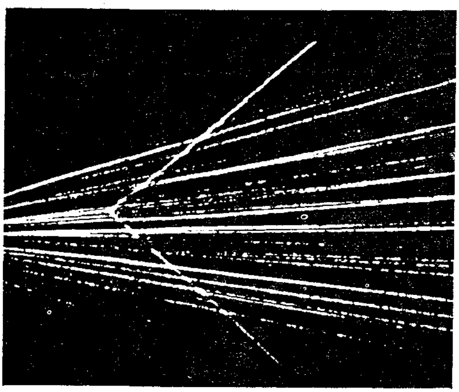
$$Q = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{m'_{۱}} + \frac{۱}{m'_{۲}}\right)p'^{۲}_{۱} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{m'_{۲}} - \frac{۱}{m_{۱}}\right)p^{۲}_{۱} - \frac{p_{۱}p'_{۱}}{m'_{۲}}\cos\theta.$$

یادآوری می‌کنیم‌که $E_k = p^{۲}/۲m$ است، پس می‌توان نتیجهٔ بالا را به‌صورت زیر نوشت:

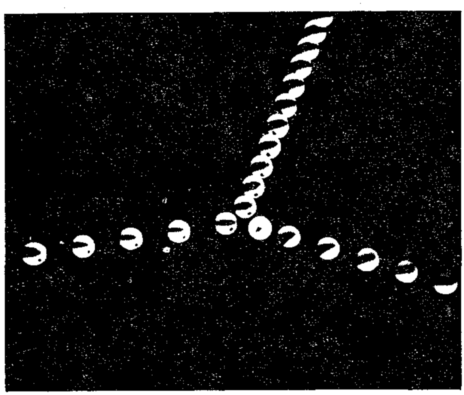
$$Q = E'_{k,۱}\left(۱ + \frac{m'_{۱}}{m'_{۲}}\right) - E_{k,۱}\left(۱ - \frac{m_{۱}}{m'_{۲}}\right) - \frac{۲\sqrt{m_{۱}m'_{۱}E_{k,۱}E'_{k,۱}}}{m'_{۲}}\cos\theta.$$

این رابطه که به نام معادلهٔ Q[1] شناخته شده است، در فیزیک هسته‌ای کاربرد بسیاری دارد.

اگر برخورد کشسان ($Q = ۰$) و تمام ذرات مشابه باشند ($m_{۱} = m_{۲} = m'_{۱} = m'_{۲}$)، از اصل بقای انرژی داریم $p'^{۲}_{۱} + p'^{۲}_{۲} = p^{۲}_{۱}$، درصورتی که ازاصل بقای اندازه حرکت $\mathbf{p}_{۱} = \mathbf{p}'_{۱} + \mathbf{p}'_{۲}$، داریم $p'^{۲}_{۱} + p'^{۲}_{۲} + ۲\mathbf{p}'_{۱}\cdot\mathbf{p}'_{۲} = p^{۲}_{۱}$. از ترکیب این نتایج به دست می‌آید $\mathbf{p}'_{۱}\cdot\mathbf{p}'_{۲} = ۰$ یا $\mathbf{p}'_{۱}$ بر $\mathbf{p}'_{۲}$ عمود است. بنابراین در چارچوب L، دو ذره بعد از برخورد با زاویهٔ ۹۰° نسبت به هم حرکت می‌کنند. شکل ۱۳.۹ (الف) این موضوع را دربرخورد دوگوی بیلیارد که‌یکی ازآنها درآغازساکن بوده است نشان می‌دهد. شکل ۱۳.۹ (ب) برخورد دوهستهٔ هلیوم را دریک اتاقک ابر[2] نشان می‌دهد. هستهٔ هلیوم



(ب)



(الف)

شکل ۱۳.۹. (الف) برخورد بین دو گوی بیلیارد مشابه. (ب) برخورد بین دو ذرهٔ α (هستهٔ هلیوم). در هردو مورد، یکی از ذره‌ها درآغاز نسبت به دستگاه چوب L ساکن است و بعد از برخورد اندازه حرکت آنها با هم زاویهٔ ۹۰° می‌سازند. [قسمت (الف) با اجازهٔ Educational Services, Inc.]

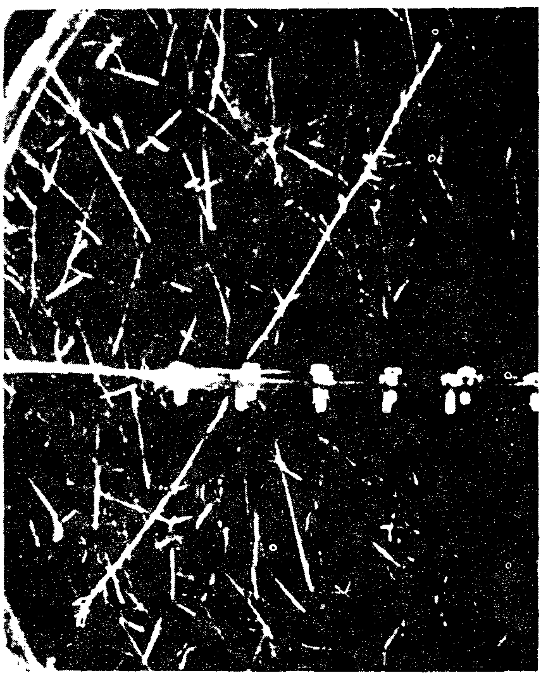
1. Q - equation 2. cloud chamber

ورودی یک ذرهٔ α از یک مادهٔ رادیو اکتیو و هستهٔ هلیوم هدف جزو گاز در داخل اتاقک می‌باشد. در هردو مورد فوق، دو ذره بعد ازبرخورد با زاویهٔ ۹۰° ازیکدیگر دورمی‌شوند.

مثال ۱۲.۹. نارنجکی که در چارچوب L ساکن است پس از انفجار به دو قطعه تقسیم می‌شود. انرژی قطعه‌ها را برحسب Q پیدا کنید.

حل: چون نارنجک درابتدا ساکن است، اندازه حرکت کل برابر صفر می‌باشد. بعد از انفجار، دو قطعه در یک راستا ولی دردو سوی مخالف با اندازه حرکتهای $\mathbf{p}_۱$ و $\mathbf{p}_۲$ ازهم جدا می‌شوند، به گونه‌ای که $\mathbf{p}_۱ + \mathbf{p}_۲ = ۰$، یا ازلحاظ مقدار عددی $p_۱ = - p_۲$ شود. دراین صورت بنا به معادلهٔ (۴۱.۹)، با $E'_k = p_۱^۲/۲m_۱ + p_۲^۲/۲m_۲$ و $E_k = ۰$، داریم

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{m_۱} + \frac{۱}{m_۲}\right) p_۱^۲ = Q \quad \text{یا} \quad p_۱ = p_۲ = (۲\mu Q)^{۱/۲}.$$



شکل ۱۴.۹. عکس از رد دوقطعهٔ حاصل ازشکافت یک هستهٔ اورانیوم دراتاقک ابر. [Boggild, Brostrom, and Lauritsen *Phys. Rev.* 59, 275 (1941)].
درآغاز هستهٔ اورانیوم در یک ورقهٔ افقی نازک فلزی درمرکز عکس قرار داشته است. دو قطعه در دو سوی مخالف حرکت می‌کنند. پس از تجزیه و تحلیل مسیرها، می‌توان انرژی هر قطعه را برآورد کرد، که به نوبهٔ خود (بااستفاده از رابطهٔ به دست آمده در مثال ۱۲.۹) امکان می‌دهد نسبت جرم آنها را بـه دست آوریم. اثر نوترونهای آزاد شده نادیده گرفته شده است.

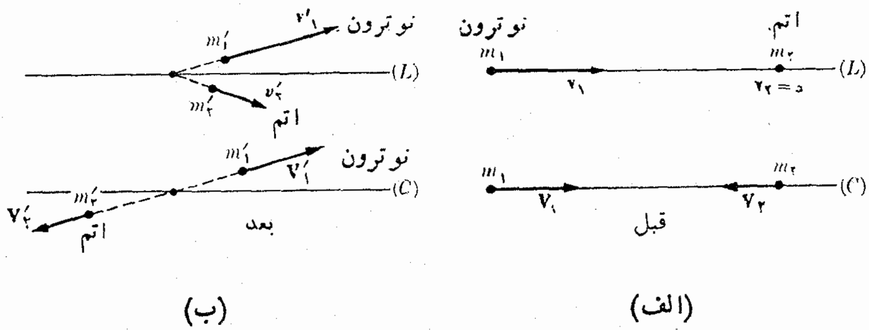
انرژی جنبشی قطعه‌ها عبارتند از

$$E_{k,1} = \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{m_2 Q}{m_1 + m_2}, \qquad E_{k,2} = \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{m_1 Q}{m_1 + m_2}$$

که متناسب با عکس جرمهایشان می‌باشد. این تجزیه و تحلیل را می‌توان در مورد پس زدن (لگد زدن) یک سلاح آتشین (به مثال ۱.۷ مراجعه کنید)، شکافت یک هسته به دو قطعه (نمایش داده شده در شکل ۱۴.۹)، یا تجزیهٔ یک مولکول دو اتمی نیز به کار برد.

اگر به‌جای دوقطعه سه‌قطعه وجود داشته‌باشد، چندین‌راه حل‌ممکن دراختیار خواهد بود، زیرا سه‌اندازه‌حرکت وارد‌عمل‌می‌شوند، ولی تنها دوشرط‌فیزیکی‌وجود دارد: اصل بقای انرژی واندازه حرکت. به‌عنوان مثال، اگر دریک واکنش ذره‌ای فقط دو ذره مشاهده شوند وبقای انرژی و اندازه حرکت نقض شود فیزیکدان وجود ذرهٔ سومی را که (یا به‌دلیل نداشتن بار الکتریکی، یا به‌دلایل دیگر) مشاهده نشده‌است، حدس می‌زند. البته برخی‌ملاحظات نظری نیز وجود دارند که به‌او امکان می‌دهند مواردی را که درآن سه ذره درفرایند وارد می‌شوند تشخیص دهد (به‌مسئلهٔ ۷۰.۹ مراجعه کنید). دراین‌صورت فیزیکدان به‌ذرهٔ سوم فرضی خود اندازه حرکت و انرژی مشخصی را نسبت می‌دهد تا اصل بقا دست نخورده باقی بماند. این شیوه تاکنون به‌نتایجی منجر شده است که هم با نظریه و هم باتجربه سازگار بوده‌اند.

مثال ۱۳.۹. مهارا[1] (کند شدن) نوترونهایی را که در درون ماده‌ای حرکت می‌کنند و با اتمهای آن برخورد کشسان دارند بررسی کنید. در جابجایی نوترون در داخل ماده اتمها را ساکن در نظر بگیرید (ماده را مهارگر می‌نامند). در رآکتورهای هسته‌ای، نوترونهای سریع حاصل از شکافت اورانیوم با گذشتن از داخل یک مهارگر کند می‌شوند.



شکل ۱۵.۹. مقایسه داده‌ها درچارچوبهای L و C در یک برخورد

حل: دراین‌مورد ذره‌ها قبل و بعد از برخورد یکی هستند، و $m_1 = m_1'$ و $m_2 = m_2'$. همچنین داریم $\mathbf{p}_2 = 0$ و $Q = 0$. محاسبه در چارچوب C آسانتر است (شکل ۱۵.۹). فرض کنیم $A = m_2/m_1$ نسبت جرم اتمهای مهارگر به‌جرم نوترون، $\mathbf{v}_1$ سرعت نوترونها

1. moderation

و $\mathbf{v}_\circ$ (برابر صفر) سرعت اتمها باشد. بنا به معادلهٔ (۱.۹) قبل از برخورد سرعت مرکز جرم برابر است با

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{m_\text{۱}\mathbf{v}_\text{۱}}{m_\text{۱}+m_\text{۲}} = \frac{\mathbf{v}_\text{۱}}{\text{۱}+A}.$$

سرعت هرذره قبل از برخورد، درچارچوب CM برابر است با

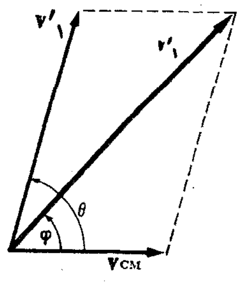
$$\mathbf{V}_\text{۱} = \mathbf{v}_\text{۱} - \mathbf{v}_{CM} = \frac{A\mathbf{v}_\text{۱}}{\text{۱}+A}, \quad \mathbf{V}_\text{۲} = \circ - \mathbf{v}_{CM} = -\frac{\mathbf{v}_\text{۱}}{\text{۱}-A}. \quad (\text{۴۴.۹})$$

نظر به اینکه برخوردکشسان است و درآن ذرات هویت خود را حفظ می‌کنند، بنا به توضیحاتی که به‌دنبال معادلهٔ (۴۲.۹) آمد، درچارچوب CM داریم $p_\text{۱} = p'_\text{۱}$ و درنتیجه $V_\text{۱} = V'_\text{۱}$. به گفتهٔ دیگر، بزرگی سرعت $m_\text{۱}$ در چارچوب CM قبل و بعد از برخورد یکی است. همچنین داریم $V_\text{۲} = V'_\text{۲}$. با وجود این در چارچوب مرکز جرم، راستا و سوی حرکت بعد از برخورد ممکن است فرق کند (به شکل ۱۵.۹ مراجعه کنید). پس، در چارچوب L سرعت نوترون پس از برخورد برابر است با

$$\mathbf{v}_\text{۱}' = \mathbf{V}_\text{۱}' + \mathbf{v}_{CM}$$

به‌گونه‌ای که، بنا به‌شکل ۱۶.۹، داریم

$$v'^\text{۲}_\text{۱} = V'^\text{۲}_\text{۱} + v^\text{۲}_{CM} + \text{۲}\mathbf{V}'_\text{۱}\cdot\mathbf{v}_{CM} = V'^\text{۲}_\text{۱} + v^\text{۲}_{CM} + \text{۲}V'_\text{۱}v_{CM}\cos\varphi.$$



شکل ۱۶.۹

با استفاده ازمعادلات (۴۴.۹) و با توجه به‌اینکه $V'_\text{۱} = V_\text{۱}$ است، به‌دست می‌آید

$$v'^\text{۲}_\text{۱} = v^\text{۲}_\text{۱}\frac{A^\text{۲} + \text{۲}A\cos\varphi + \text{۱}}{(A+\text{۱})^\text{۲}}.$$

در این صورت، بین انرژی جنبشی $m_\text{۱}$، قبل و بعد از برخورد، در چارچوب L، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{E'_{k,\text{۱}}}{E_{k,\text{۱}}} = \frac{v'^\text{۲}_\text{۱}}{v^\text{۲}_\text{۱}} = \frac{A^\text{۲} + \text{۲}A\cos\varphi + \text{۱}}{(A+\text{۱})^\text{۲}}$$

به‌ازای $\varphi = \circ$ (برخورد بدون‌تغییر راستا و سو)، $E'_{k,\text{۱}} = E_{k,\text{۱}}$ است و هیچ‌گونه اتلاف

انرژی جنبشی وجود ندارد. به ازای $\varphi = \pi$، یا برخورد رودررو، حداکثر اتلاف انرژی وجود دارد:

$$\frac{E'_k}{E_k} = \frac{A^۲ - ۲A + ۱}{(A+۱)^۲} = \left(\frac{A-۱}{A+۱}\right)^۲.$$

دراین حالت اتلاف نسبی انرژی برابر است با

$$\frac{E_k - E'_k}{E_k} = \frac{۴A}{(A+۱)^۲}.$$

هرچه A به‌یک نزدیکتر باشد اتلاف انرژی بیشتر است. این نتیجه هنگام انتخاب مهارگری که بتواند خیلی سریع نوترونها را کند کند بسیاراهمیت دارد، کاری‌که اغلب در راکتورهای هسته‌ای صورت می‌گیرد. اتمهایی که نسبت به نوترون دارای کمترین A هستند اتمهای هیدروژن می‌باشند ($A \cong ۱$)، و به‌همین دلیل انتظار می‌رود هیدروژن خالص بهترین‌مهارگر باشد. ولی هیدروژن خالص حتی در دماهای معمولی نیز به صورت گاز است و تعداد اتمهای آن در واحد حجم نسبتاً کم است. بنا براین به‌جای هیدروژن ازآب استفاده می‌کنند. برتری استفاده از آب تنها این نیست که به‌وفور در دسترس می‌باشد، بلکه در واحد حجم درحدود $۱۰^۳$ بار بیشتر ازهیدروژن خالص گازی‌شکل، اتم دارد. متأسفانه اتمهای‌هیدروژن تمایل دارند که نوترونها را گیر بیندازند و دوتریوم تشکیل دهند. ولی، چون اتمهای‌دوتریوم کشش‌کمتری برای گیراندازی نوترونها دارند، دربعضی‌راکتورهای هسته‌ای ازآب سنگین[1] استفاده می‌شود، که مولکولهای‌آن از دوتریوم (به‌جای هیدروژن) و اکسیژن تشکیل شده‌اند. (دراین‌مورد $A = ۲$ است.) یک مهارگر رایج دیگرکربن ($A = ۱۲$) است که به صورت گرافیت ازآن استفاده می‌شود.

II دستگاههای با تعداد زیادی ذره

۸.۹ دستگاههای چند ذره‌ای: دما

اگر بخواهند نتیجهٔ بیان شده با معادلهٔ (۳۵.۹)، یا هم‌ارز آن، قانون بقای انرژی را در مورد دستگاهی متشکل از تعداد کمی ذره، مانند منظومهٔ شمسی یا یک اتم با چند الکترون، به‌کار ببرند، کافی است مطابق معادلهٔ (۳۴.۹)، تک تک جمله‌هایی که انرژی داخلی را می‌سازند، حساب کنند. ولی هنگامی‌که تعداد ذرات خیلی زیاد باشد، مانند اتمی که دارای الکترونهای زیادی است، یا گازی که از میلیاردها مولکول تشکیل شده است، مسئله از لحاظ ریاضی بسیار پیچیده می‌شود. بنا براین باید به جای محاسبهٔ یکایک مقادیر دقیق عناصر تشکیل‌دهندهٔ دستگاه، با بعضی روشهای آماری مقدار میانگین‌کمیتهای دینامیکی را حساب کرد. ازاین گذشته، درچنین دستگاههای پیچیده‌ای، چگونگی رفتار هریک از اجزاء

1. heavy water

بتنهایی برای ما جالب توجه نیست (زیرا به‌طورکلی چنین امری قابل مشاهده نیست)، بلکه بیشتر رفتار دستگاه به‌عنوان یک کل برای ما مطرح است. تکنیک ریاضی مربوط به‌مطالعهٔ این دستگاهها مکانیک آماری[1] نام دارد. اگر ساختار داخلی دستگاه را نادیده بگیریم و تنها با به کاربردن مقادیر U و W که به طور تجربی اندازه‌گیری شده‌اند، ازمعادلهٔ (۳۵.۹) استفاده کنیم، یک شاخهٔ دیگر فیزیک، به نام ترمودینامیک را به کار برده‌ایم. دراین فصل، برای دستگاههای متشکل از ذرات زیاد، تنها به معادلهٔ (۳۵.۹) اکتفا می‌کنیم، بدون آنکه وارد بحث روشهای مکانیک آماری یا ترمودینامیک بشویم. همچنین، جز در مواردی که متذکر می‌شویم، کلیهٔ کمیتهای دینامیکی را نسبت به چارچوب مرکز جرم دستگاه موردنظر بیان خواهیم کرد.

ابتدا به‌تعریف T، دمای‌دستگاه، به‌عنوان یک‌کمیت مربوط به‌انرژی‌جنبشی میانگین ذرات در چارچوب مرجع CM می‌پردازیم. بنابراین دما مستقل از حرکت دستگاه نسبت به‌ناظر تعریف می‌شود. انرژی جنبشی میانگین یک ذره برابر است با

$$E_{k,\mathrm{ave}} = \frac{۱}{N}\left(\sum_i \frac{۱}{۲}\, m_i v_i^۲\right) \qquad (۴۵.۹)$$

که درآن N تعداد کل ذرات و v_i سرعت ذره در چارچوب مرجع CM است. اگرجرم تمام ذرات یکسان باشد، داریم

$$E_{k,\mathrm{ave}} = \frac{۱}{N}\sum_i \frac{۱}{۲} m v_i^۲ = \frac{۱}{۲} m\left(\frac{۱}{N}\sum_i v_i^۲\right) = \frac{۱}{۲}\, m(v^۲)_{\mathrm{ave}} = \frac{۱}{۲}\, m v_{\mathrm{rms}}^۲$$

که درآن v_{rms} «سرعت ریشهٔ میانگین مربعی ذرات» است و با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$v_{\mathrm{rms}}^۲ = (v^۲)_{\mathrm{ave}} = \frac{۱}{N}(v_۱^۲ + v_۲^۲ + v_۳^۲ + \cdots) = \frac{۱}{N}\left(\sum_i v_i^۲\right).$$

در اینجا نیازی به مشخص کردن رابطهٔ دقیق بین دما و انرژی جنبشی میانگین نیست. در شرایط فعلی کافی است فرض کنیم که با دانستن انرژی جنبشی میانگین ذرات در یک دستگاه، می‌توان دما را حساب کرد، و برعکس. بدین‌طریق می‌توان از دمای یک جامد یک گاز و حتی یک هستهٔ مرکب گفتگو کرد.

این امر که برای تعریف دما، حرکتها را نسبت به مرکز جرم ارزیابی می‌کنیم بسیار مهم است. یک گلولهٔ فلزی «گرم» ساکن درآزمایشگاه ویک گلولهٔ فلزی «سرد» را که نسبت به‌آزمایشگاه با سرعت زیادی حرکت می‌کند درنظر بگیرید. دمای گلولهٔ گرم بالا است، به‌این معنی که نسبت به‌مرکز جرمش، که دراین مورد درآزمایشگاه ساکن است، انرژی جنبشی بیشتری دارد. از طرف دیگر، گلولهٔ «سرد» دمایش پایینتر است، بنابراین نسبت به مرکز جرم خود انرژی جنبشی کمتری دارد، که در وضع حاضر با سرعت زیادی نسبت به ناظر درحرکت است. ممکن است انرژی جنبشی کل گلولهٔ «سرد» که با سرعت زیادی حرکت می‌کند نسبت به آزمایشگاه خیلی بیشتر از گلولهٔ «گرم» ساکن باشد، ولی بیشترین بخش این انرژی انتقالی است که در دما دخالت ندارد.

1. statistical mechanics

درمورد دستگاهی که در تمام نقاط آن دما یکسان است، یعنی انرژی جنبشی میانگین مولکولها درهر ناحیه‌ای از دستگاه یکی‌است، می‌گوییم در تعادل (ترازمندی) گرمایی[1] است. در یک دستگاه منزوی، کـه انرژی داخلی کل آن ثابت است، اگـر انرژی جنبشی داخلی تغییر کند دمای آن نیز ممکن است، به‌سبب تغییر انرژی پتانسیل داخلی، تغییر کند. به‌عنوان مثال، ممکن است در فضای بین ستارگان توده‌ای از گاز بر اثر نیروهای جاذبهٔ خیلی قوی متراکم شود، این‌امرموجب‌کاهش انرژی‌پتانسیل‌داخلی‌وهمزمان افزایش‌انرژی‌جنبشی‌می‌گردد، درنتیجه دمای آن باید افزایش یابد. ازطرف دیگر، اگردستگاه منبسط شود، انرژی پتانسیل داخلی‌آن افزایش می‌یابد (اگرنیروها جاذبه باشند)، واین امر موجب‌کاهش انرژی‌جنبشی و بالاخره کاهش دما می‌گردد. اگرانرژی‌پتانسیل داخلی یک دستگاه منزوی ثابت باقی بماند، (گـاز داخل یک ظرف بسته چنین وضعی دارد) انـرژی جنبشی میانگین دستگاه نیز ثابت باقی می‌ماند، یعنی دمای آن تغییر نمی‌کند. ولی اگر دستگاه منزوی نباشد، می‌تواند با بقیهٔ جهان تبادل انـرژی کند، این امـر مـوجب تغییر انـرژی جنبشی داخلی و در نتیجه تغییر دمای آن شود.

دما باید برحسب «ژول برذره» بیان شود. با وجود این معمول شده است کـه آن را برحسب درجه بیان کنند. مقیاسی که در فیزیک برای دما به‌کار می‌رود مقیاس مطلق است. یکای مقیاس مطلق درجهٔ کلوین[2] نام دارد و با علامت $^\circ K$ نشان داده می‌شود. دراین مقیاس، دمای ذوب یخ در فشار متعارفی جو برابر $^\circ K$ ۲۷۳٫۱۵ و دمای جوش آب در همین فشار برابر $^\circ K$ ۳۷۳٫۱۵ است. بنابراین اختلاف این دو دما برابر است بـا $^\circ K$ ۱۰۰. دمای سانتیگراد یا سلزیوس[3] با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\theta_C = T - ۲۷۳٫۱۵\ ^\circ K.$$

یک درجهٔ کلوین درحدود $۱٫۳۸ \times ۱۰^{-۲۳}$ J (یا $۸٫۶۱ \times ۱۰^{-۴}$ eV) بر ذره است.

۹.۹ دستگاههای چند ذره‌ای: کار

تبادل انرژی یک دستگاه با جهان خارج، در معادلهٔ (۳۵.۹) بـا کار خارجی W_{ext} نشان داده شده است:

$$U - U_\circ = W_{ext}.$$

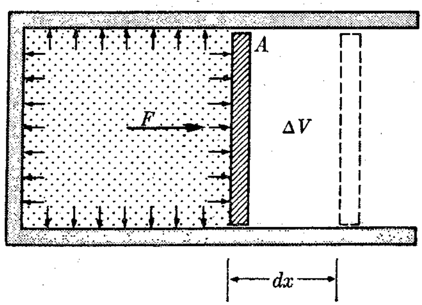
اگر روی دستگاه کار انجام بگیرد (W_{ext} مثبت)، انرژی داخلی آن افزایش می‌یابد، ولی اگر دستگاه کار انجام دهـد (W_{ext} منفی) انرژی داخلی کاهش می‌یابـد. این کار خارجی مجموع کارهای خارجی است کـه روی تک تک ذرات دستگاه انجام می‌گیرد، ولی بعضی اوقات می‌توان آن را بآسانی ازطریق آماری حساب کرد.

به‌عنوان‌مثال، گاز داخل استوانه‌ای را که یکی ازجدارهای‌آن یک پیستون متحرک

---
1. thermal equilibrium
2. degree Kelvin
3. centigrade or Celsius

است درنظر بگیرید(شکل ۱۷.۹). گاز می‌تواند از طریق برخورد و برهم‌کنش مولکولهایش با مولکولهای دیواره‌های استوانه، با محیط خارج انرژی و اندازه حرکت مبادله کند. تبادل اندازه حرکت با نیروی وارد ازطرف هریک از مولکولها درمحل برخورد با جدار ظرف نشان داده می‌شود. این نیروهای انفرادی در هرنقطه دائماً افت و خیز دارند، ولی چون تعداد زیادی برخورد روی یک سطح وسیع صورت می‌گیرد، می‌توان اثر کلی آنها را با یک نیروی میانگین F که بر تمام سطح وارد می‌شود نشان داد. اگر A مساحت و p فشار گاز، که به صورت نیروی میانگین وارد بر واحد سطح تعریف می‌شود (به مثال ۲.۹ مراجعه کنید) باشد، دراین صورت داریم

$$p = F/A \quad \text{یا} \quad F = pA. \tag{۴۶.۹}$$



شکل ۱۷.۹. کار انجام یافته در انبساط یک گاز

اگر یکی از جدارهای ظرف متحرک باشد، مانند شکل ۱۷.۹، نیروی وارد ازطرف گاز می‌تواند جدار را به‌اندازهٔ dx جابجا کند. بنابراین تبادل انرژی بین دستگاه با محیط خارج را می‌توان با کاری که نیرو درمدت این جابجایی انجام می‌دهد بیان کرد. چون این کاری است‌که توسط دستگاه انجام می‌شود نه‌اینکه روی دستگاه انجام می‌گیرد، باید آن را منفی درنظر گرفت. بنابراین

$$dW_{\text{ext}} = -Fdx = -pAdx = -pdV \tag{۴۷.۹}$$

که درآن $dV = Adx$ نمایش تغییر حجم گاز است. اگر حجم از $V_\circ$ به V تغییر کند، کاری که روی دستگاه انجام می‌شود برابر خواهد بود با

$$W_{\text{ext}} = -\int_{V_\circ}^{V} pdV. \tag{۴۸.۹}$$

برای محاسبهٔ این انتگرال، باید رابطهٔ بین p و V معلوم باشد. این رابطه برای گازها و سایر مواد بتفصیل مورد مطالعه قرار گرفته است.

اغلب اوقات، بویژه دربررسی ماشینهای گرمایی، بهتر است به جای کاری که دستگاه ازخارج می‌گیرد یعنی W_{ext}، کاری که دستگاه به‌خارج می‌دهد، W_{syst}، محاسبه شود. چون هر دوکار به یک جابجایی واحد ولی به‌نیروهای برابر درسوهای مخالف مربوط می‌شوند،

از لحاظ قدر مطلق با هم برابرند ولی علامت‌شان مختلف است. به گفتهٔ دیگر $W_{\text{syst}} = -W_{\text{ext}}$. به عنوان مثال، کار حاصل از انبساط یک گاز با استفاده از معادلهٔ (۴۸.۹) برابر است با

$$W_{\text{syst}} = \int_{V_0}^{V} p dV. \qquad (۴۹.۹)$$

اکنون یکاهای معمولی فشار را تعریف می‌کنیم. ابتدا یادآور می‌شویم که فشار را باید برحسب یک یکای نیرو تقسیم بریک یکای سطح بیان کرد. ازاین‌رو در دستگاه یکاهای MKSC فشار برحسب نیوتون بر متر مربع یا Nm^{-2} بیان می‌شود. یکای دیگری که به‌فراوانی به کار می‌رود دین برسانتی‌متر مربع یا dyn cm^{-2} است. یکای بسیار مفید دیگر که بیشتر برای فشار گازها به کار می‌رود اتمسفر با علامت اختصاری atm است که با توجه به هم‌ارزیهای زیر تعریف می‌شود:

$$1\,\text{atm} = 1{,}013 \times 10^5\,\text{Nm}^{-2} = 14{,}7\,\text{lbf in}^{-2}.$$

یک اتمسفر تقریباً معادل فشار متعارفی جو زمین است که بر هرجسم واقع درسطح دریا وارد می‌شود.

مثال ۱۴.۹. گازی درفشار $2 \times 10^5\,\text{Nm}^{-2}$ حجمی برابربا $0{,}30\,\text{m}^3$ را اشغال می‌کند. درفشار ثابت، حجم تا $0{,}45\,\text{m}^3$ افزایش می‌یابد. کار انجام یافته به وسیلهٔ گاز چقدر است؟

حل: ازمعادلهٔ (۴۹.۹) استفاده می‌کنیم؛ اگر فشار p ثابت بماند، داریم

$$W_{\text{syst}} = \int_{V_0}^{V} p dV = p \int_{V_0}^{V} dV = p(V - V_0). \qquad (۵۰.۹)$$

این نتیجه بسیار کلی است و در هر دستگاهی که در فشار ثابت حجم آن تغییر کند به کار می‌رود. با وارد کردن مقادیر عددی مورد نظر به دست می‌آید $W_{\text{syst}} = 3 \times 10^4\,\text{J}$.

مثال ۱۵.۹. گازی به گونه‌ای انبساط پیدا می‌کند که درآن حاصل ضرب pV برابر مقدار ثابت C باقی می‌ماند. این رابطه [به معادلهٔ (۶۲.۹) و مسئلهٔ ۶۷.۹ مراجعه کنید] که قانون بویل[1] نام دارد* ایجاب می‌کندکه دمای گاز ثابت باقی بماند. هنگامی که حجم از V_1 تا V_2 افزایش می‌یابد کار انجام یافته چقدر است؟

حل: با به کار بردن معادلهٔ (۴۹.۹) به دست می‌آید

$$W_{\text{syst}} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} C \frac{dV}{V} = C \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (۵۱.۹)$$

بنابراین کار انجام یافته به نسبت دوحجم، V_2/V_1، (به نام نسبت انبساط[2]) بستگی دارد.

---

1. Boyle's law

☆ این قانون درکتابهای فارسی به‌قانون بویل ـ ماریوت معروف است (م).

2. expansion ratio

درساختمان موتورهای احتراق داخلی (درون سوز) نسبت تراکم (یا انبساط)، یکی از سازه‌های تعیین کننده توان موتور است.

۹.۱۰ دستگاههای چند ذره‌ای : گرما

لازم است به خاطر بسپاریم معادلهٔ (۹.۴۸) بیان کنندهٔ یک میانگین ماکروسکوپیک است که برابر مجموع تمام تبادلهای انرژی انفرادی بین مولکولهای گاز ومولکولهای پیستون می‌باشد. ولی چگونه می‌توان تبادل انرژی مربوط به برهم‌کنشهای مولکولهای گاز وجدارهایی را که حرکت نمی‌کنند حساب کرد؟ دراین حالت نمی‌توان روشی را که برای به دست آوردن W برای پیستون به کار رفت مورد استفاده قرار داد، زیرا، هرچند می‌توان نیروی میانگینی را تعریف کرد که روی جدار اثر می‌کند ولی نمی‌توان یک جابجایی میانگین برای جدار درنظر گرفت. درهریک از برهم‌کنشهای بین مولکولهای گاز وجدار، یک نیروی ضعیف وارد عمل می‌شود و موجب جابجایی جزئی مولکولهای جدار می‌گردد. اگر می‌توانستیم تمامی این کارهای بینهایت‌کوچک را محاسبه وبا هم جمع کنیم قادر می‌شدیم کار خارجی مربوط را که به وسیلهٔ دستگاه انجام می‌گیرد، به دست آوریم. بدیهی است یک چنین روشی، به دلیل سازه‌های زیادی که باید درنظر گرفته شود، عملا غیرمقدور است. از این‌رو یک مفهوم جدید ماکروسکوپیک یا آماری به نام *گرما* تعریف می‌کنیم.

مقدارمیانگین کارخارجی یاانرژی مبادله شده بین یک دستگاه ومحیط اطرافش — که ناشی ازتبادلهای انرژی انفرادی است که ازبرخورد بین مولکولهای دستگاه ومولکولهای محیط خارج نتیجه می‌شود ونمی‌توان آن را به طور ماکروسکوپیک به صورت حاصل‌ضرب یک نیرو دریک جابجایی بیان کرد — *گرما* نامیده می‌شود وآن را با نماد Q نشان می‌دهند. بنابراین Q مجموع تعداد خیلی زیادی از کارهای جزئی انفرادی است که نمی‌توان آنها را به صورت حاصل‌ضرب یک نیروی میانگین دریک جابجایی میانگین بیان کرد.

هرگاه Q مربوط به یک کار خارجی خالص باشد که روی دستگاه انجام می‌شود آن را مثبت درنظر می‌گیرند واگر هم‌ارز با یک کار خارجی خالص باشد که به وسیلهٔ دستگاه انجام می‌شود، آن را منفی منظور می‌کنند. در حالت اول گویند گرما جذب دستگاه شده است و درحالت دوم گویند گرما توسط دستگاه تولید شده است.

چون گرما با کار متناظر است باید آن را برحسب ژول بیان کرد. با این حال، گاهی گرما با یکایی به‌نام کالری بیان می‌شود، که تعریف‌آن درسال ۱۹۴۸ (۱۳۲۷ ه.ش.) به‌این صورت مورد پذیرش قرار گرفت: ‌[۴٫۱۸۴۰ = ۱ کالری. نخستین بار کالری هنگامی که هنوز ماهیت گرما شناخته نشده بود به عنوان یکای گرما معرفی شد. درواقع، کالری یکای دیگری برای اندازه‌گیری کار وانرژی است ومنحصر به گرما نمی‌شود.

درهمین‌جا باید به دانشجو خاطرنشان کنیم که مبادا گرما را شکل جدید یا متفاوتی از انرژی درنظر بگیرد. گرما فقط نامی است که به شکل ویژه‌ای ازکار یا انتقال انرژی داده شده‌است، که درآن تعداد زیادی از ذرات شرکت دارند. قبل ازاینکه مفهوم برهم‌کنشها

و ساختار اتمی ماده به طور روشن فهمیده شود، فیزیکدانها انرژی را به دوگروه دسته‌بندی کرده بودند: انرژی مکانیکی، که به انرژی جنبشی وانرژی پتانسیل گرانشی مربوط می‌شد، وانرژی غیرمکانیکی که به گرما، انرژی شیمیایی، انرژی الکتریکی، تابش و غیره تقسیم می‌شده است. امروزه دیگر این تقسیم‌بندی درستی خود را از دست داده است. فیزیکدانها انرژیی بجز جنبشی و پتانسیل نمی‌شناسند. انرژی اخیر بسته به ماهیت برهم‌کنشهای فیزیکی مربوط، با روابط مختلف بیان می‌شود. ازطرف دیگر، گرما وتابش بیان دو سازوکار انتقال انرژی هستند. «انرژی شیمیایی» فقط یک اصطلاح ماکروسکوپیک است که جهت تشریح انرژی وابسته به برهم‌کنشهای الکتریکی در اتمها ومولکولها به کار می‌رود. این انرژی در فرایندهای شیمیایی یعنی تجدید آرایش اتمی مولکولها پدیدار می‌شود.

هنگامی که هیچگونه تبادل انرژی (به صورت گرما) بین دو دستگاه وجود نداشته باشد، می‌گوییم آن دو دستگاه در تعادل گرمایی هستند. این یک تعریف‌آماری است، زیرا مولکولها به طور انفرادی می‌توانند انرژی مبادله کنند، ولی به طور متوسط، مقدار انرژی مبادله شده دریک جهت با جهت دیگر یکسان است. برای اینکه بین دو دستگاه تعادل گرمایی به وجود آید، باید انرژی جنبشی مولکولی میانگین دو دستگاه که با یکدیگر برهم‌کنش می‌کنند یکسان باشد، به گونه‌ای که هیچ‌گونه تبادل انرژی جنبشی از طریق برخورد مولکولها ممکن نباشد. درنتیجه، به دنبال تعریف موقتی که در بخش ۸.۹ از دما داده شد، می‌توان گفت

دو دستگاه در تعادل گرمایی، باید دارای دمای یکسانی باشند.

همچنین می‌توان نتیجه گرفت که تبادل انرژی به صورت گرما ممکن نیست، مگر اینکه دمای دو دستگاه مختلف باشند.

۱۱.۹ فرمول بندی مجدد اصل بقای انرژی برای دستگاههای چند ذره‌ای

در دوبخش قبل دیدیم که اگر با دستگاههایی سروکار داشته باشیم که دارای تعداد زیادی ذره هستند، کار خارجی کل را باید به صورت مجموع دو کمیت $Q + W_{\text{ext}}$ بیان کنیم. در اینجا W_{ext} معرف کار خارجی قابل محاسبه به صورت حاصل‌ضرب یک نیروی میانگین در یک جابجایی است‌که در بخش ۹.۹ مطالعه شد، و Q، بنابر آنچه در بخش ۱۰.۹ دیدیم، نمایش کار خارجی است که باید به‌صورت گرما بیان شود. در این صورت، می‌توان معادلهٔ (۳۵.۹) برای اصل بقای انرژی را به این صورت نوشت:

$$U - U_{\circ} = Q + W_{\text{ext}}. \qquad (۵۲.۹)$$

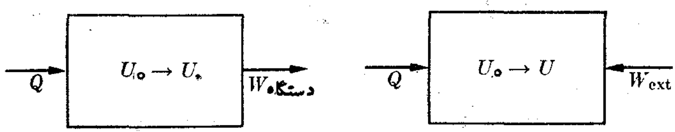
این رابطه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

تغییر انرژی‌داخلی یک دستگاه برابراست با مجموع گرمای جذب شده به وسیلهٔ دستگاه و کار خارجی که روی آن انجام شده است.

معادلهٔ (۵۲.۹) را بــه صورت تصویری درشکل ۱۸.۹ (الف) می‌توان دیــد: گرمای Q به وسیلهٔ دستگاه جذب و کار W_{ext} روی دستگاه انجام می‌شود. مجموع آنها $Q + W_{\text{ext}}$ به صورت انرژی داخلی $U - U_\circ$ در دستگاه ذخیره می‌شود. گاهی، بویژه در کاربردهای صنعتی، به جای نوشتن کار خارجی W_{ext} انجام شده روی دستگاه، کار خارجی W_{syst} انجام شده را می‌نویسند، که همان‌طور کــه قبلا شرح دادیم، برابر است با کــار انجام شده روی دستگاه با علامت منفی. با قراردادن $W_{\text{ext}} = -W_{\text{syst}}$، به‌جای معادلهٔ (۵۲.۹) داریم

$$U - U_\circ = Q - W_{\text{syst}} \qquad (۵۳.۹)$$

معادلهٔ (۵۳.۹) درشکل ۱۸.۹ (ب) نشان داده شده است: گرمای Q به وسیلهٔ دستگاه جذب می‌شود، کار W_{syst} به وسیلهٔ دستگاه انجام می‌شود و تفاضل $Q - W_{\text{syst}}$ به صورت انرژی داخلی $U - U_\circ$ دستگاه ذخیره می‌شود.



شکل ۱۸.۹ . رابطهٔ بین گرما، کار و انرژی داخلی

بیانهای مربوط بــه معادلات (۵۲.۹) و (۵۳.۹) قانون اول ترمودینامیک را تشکیل می‌دهند، که همان قانون بقای انرژی است که درمورد دستگاههای با تعداد زیاد ذره به کار می‌رود. جهت سهولت بیشتر، کار خارجی به‌دوجملهٔ آماری تقسیم می‌شود، که یکی را بازهم کار ودیگری را گرما می‌نامند. نظر بــه‌اینکه دراین فصل به‌قدر کافی دربارهٔ مفاهیم گرما و دمــا، به گونه‌ای کــه درفصلهای بعدی به کار خواهند رفت، گفتگو کردیم، فعلا بــررسی ترمودینامیک را بیش از این ادامه نمی‌دهیم.

۱۲.۹ قضیهٔ ویریال برای چند ذره

در این بخش می‌خواهیم قضیهٔ ویریــال را، کــه در بخش ۱۳.۸ در مورد یک ذرهٔ تنها بیان شد، برای یک دستگاه چندذره‌ای تعمیم دهیم. این شکل جدید قضیهٔ ویریال را می‌توان در مطالعهٔ خواص میانگین یا آماری دستگاههای متشکل از تعداد زیادی ذره و بالاخص گازها به کار گرفت.*

برای سهولت، ابتدا دستگاهی را در نظر می‌گیریم کــه از دو ذرهٔ m_1 و m_2 تشکیل شده است. کمیت اسکالری به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A = m_1\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = \sum_i m_i\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_i \qquad (۵۴.۹)$$

* برای مطالعهٔ کاربردهای مقدماتی قضیهٔ ویریال درمسایل شیمی، رجوع کنید به
B.H.Mahan, *University Chemistry*, Reading, Mass.: Addison - Wesley, 1965, p.412.

این رابطه فقط بسط کمیت A است که برای یک ذرهٔ واحد تعریف کردیم. با مشتق‌گیری از A نسبت به t، به دست می‌آوریم

$$\frac{dA}{dt}=m_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt}\cdot\mathbf{r}_1+m_1\mathbf{v}_1\cdot\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}+m_2\frac{d\mathbf{v}_2}{dt}\cdot\mathbf{r}_2+m_2\mathbf{v}_2\cdot\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}$$

یا چون

$$\mathbf{v}_1=\frac{d\mathbf{r}_1}{dt},\quad \mathbf{v}_2=\frac{d\mathbf{r}_2}{dt},\quad \mathbf{a}_1=\frac{d\mathbf{v}_1}{dt},\quad \mathbf{a}_2=\frac{d\mathbf{v}_2}{dt}$$

است، داریم

$$\frac{dA}{dt}=(m_1\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{r}_2)+(m_1v_1^2+m_2v_2^2).$$

جملهٔ آخر سمت راست، بنا به معادلهٔ (۲۹.۹) دو برابر E_k، انرژی جنبشی دستگاه است. پس می‌توان نوشت

$$\frac{dA}{dt}=2E_k+(m_1\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{r}_2).$$

با استفاده از معادلهٔ (۲۶.۹) و با توجه به اینکه $\mathbf{F}_{12}=-\mathbf{F}_{21}$ و $\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_{12}$ است، به دست می‌آید

$$m_1\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{r}_2=(\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_{12})\cdot\mathbf{r}_1+(\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_{21})\cdot\mathbf{r}_2$$
$$=\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{r}_1+\mathbf{F}_2\cdot\mathbf{r}_2+\mathbf{F}_{12}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{r}_1+\mathbf{F}_2\cdot\mathbf{r}_2+\mathbf{F}_{12}\cdot\mathbf{r}_{12}$$

بالاخره dt/dA به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{dA}{dt}=2E_k+(\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{r}_1+\mathbf{F}_2\cdot\mathbf{r}_2+\mathbf{F}_{12}\cdot\mathbf{r}_{12})=2E_k+B$$

که درآن، جهت ساده نویسی، عبارت داخل پرانتز را با B نشان داده‌ایم. از رابطهٔ فوق نسبت به زمان میانگین می‌گیریم؛ داریم

$$\left[\frac{dA}{dt}\right]_{\text{ave}}=2E_{k,\text{ ave}}+B_{\text{ave}}.$$

با یادآوری تعریف میانگین زمانی که دربخش ۱۳.۸ داده شد و نتیجه‌ای که با معادلهٔ (۴۶.۸) بیان شد، از نو به دست می‌آید

$$\left[\frac{dA}{dt}\right]_{\text{ave}}=\frac{A-A_0}{\tau}.$$

اگر زمان τ خیلی بزرگ باشد و A با زمان تا بینهایت بزرگ نشود، کمیت $(A-A_0)/\tau$ را می‌توان به قدری کوچک کرد که برابر صفر گردد. این وضع درمورد یک دستگاه مقید شده، مانند گازی که درظرفی قراردارد، رخ می‌دهد، زیرا دراین صورت $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ وهمچنین

$\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ در معادلهٔ (۵۴.۹) نمی‌توانند تا بینهایت افزایش پیدا کنند. درنتیجه با قرار دادن $[dA/dt]_{\text{ave}} = 0$ در معادلهٔ (۵۵.۹)، درمی‌یابیم

$$2E_{k,\,\text{ave}} = -B_{\text{ave}} = -(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12})_{\text{ave}}.$$

اگر به جای دو ذره چندین ذره وجود داشته باشند، می‌توان این معادلـه را تعمیم داد و به صورت زیر نوشت:

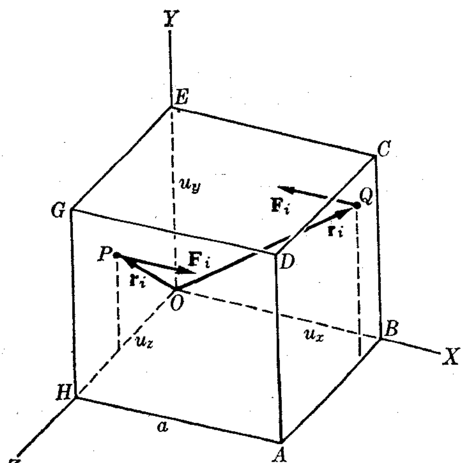
$$E_{k,\,\text{ave}} = -\frac{1}{2}\Big(\sum_{\substack{\text{تمام}\\\text{ذرات}}} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i + \sum_{\substack{\text{تمام}\\\text{جفت ذرات}}} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}\Big) \qquad (۵۶.۹)$$

که دراین رابطه، اولین جمع سمت راست به نیروهای خارجی وارد بر هریک از ذرات و جمع دوم مربوط به نیروهای داخلی بین هر جفت از ذرات است. معادلـهٔ (۵۶.۹) قضیهٔ ویریال برای یک دستگاه ذرات و کمیت سمت راست آن، ویریال دستگاه نامیده می‌شود.

۱۳.۹ معادلهٔ حالت یک گاز

یکی از کاربردهـای بسیار جالب قضیهٔ ویریال عبارت است به دست آوردن معادلهٔ حالت[1] یک گـاز. منظـور از معـادلـهٔ حـالت، رابطـه‌ای است بین کمیتهای مـاکـروسکوپیک مانند فشار، حجم و دما که حالت یک دستگـاه را مشخص می‌کنند. بـدیهی است کـه این کمیتهای ماکـروسکوپیک یا آماری مستقیماً از ساختار داخلی دستگـاه نتیجه می‌شوند و با طرح فرضهـای مناسب، بایـد بتوان یک ارتبـاط منطقی بین سـاختـار داخلی و رفتـار ماکرسکوپیک برقرار کرد.

فرض کنیم مولکولهای یک گاز زیر تأثیر برهم‌کنشهای متقابل داخلی‌خود و برهم‌کنش با جدار ظرف قرار دارند. برای سهولت بیشتر، ظرف گـاز را مطابق شکل ۱۹.۹ به‌صورت



شکل ۱۹.۹

1. equation of state

یک مکعب به ضلع a، فرض می‌کنیم. (اثبات کلی نیازی به‌چنین محدودیتی ندارد).

ارزیابی معادلهٔ (۵۶.۹) را با بررسی جمع اول که مربوط به‌نیروهای خارجی است شروع می‌کنیم. به یک مولکول نیروی خارجی اثر نمی‌کند مگر هنگامی که به جدار ظرف برخورد می‌کند و برمی‌گردد. می‌توان فرض کرد نیرویی که به این مولکول وارد می‌شود بر جدار ظرف عمود است، فرضی که تنها به طور آماری درست است. اگر مولکولی در نقطهٔ P به‌جدار $OEGH$ برخورد کند، که x تمام نقاط این جدار برابر صفر است، به‌آن نیروی $\mathbf{F}_i = \mathbf{u}_x F_i$ وارد می‌شود. در این صورت $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = F_i x_i = 0$ است وجدار $OEGH$ هیچگونه سهمی در ویریال ندارد، زیرا مبدأ را طوری انتخاب کرده‌ایم که $x_i = 0$ می‌شود. همین نتیجه برای جدارهای $OBCE$ و $OHAB$ نیز به دست می‌آید.

درمورد جدار $ABCD$، برذره‌ای‌که، به‌عنوان مثال، به‌نقطهٔ Q برخورد می‌کند، نیرویی موازی و در خلاف جهت OX؛ وارد می‌شود، به گفتهٔ دیگر $\mathbf{F}_i = -\mathbf{u}_x F_i$، و تمام مولکولهای برخورد کننده براین جداردارای $x_i = a$ می‌باشند. بنابراین $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = -F_i a$ می‌شود. جمع $\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i$ مربوط به جدار مورد نظر برابر است با

$$-\sum_i F_i a = -(\sum_i F_i) a = -Fa = -pa^3$$

که درآن بنا به معادلهٔ (۴۶.۹) $F = pa^2$ برابر نیروی کل وارد از طرف گاز بر جدار به مساحت $A = a^2$، و p فشار گاز است. برای جدارهای $CDGE$ و $ADGH$ نیز نتایج مشابهی به دست می‌آید، درنتیجه سهم کل شش جدار در ویریال برابر می‌شود با

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = -3pa^3 = -3pV$$

که درآن $V = a^3$ حجم اشغال شده به وسیلهٔ گاز است. دراین صورت معادلهٔ (۵۶.۹) را می‌توان چنین نوشت:

$$E_{k,\text{ave}} = \frac{3}{2} pV - \frac{1}{2} (\sum_{ij} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})_{\text{ave}}$$

یا

$$pV = \frac{2}{3} E_{k,\text{ave}} + \frac{1}{3} (\sum_{ij} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})_{\text{ave}}. \qquad (۵۷.۹)$$

انرژی جنبشی میانگین یک مولکول برابر $(mv^2_{\text{rms}})/2$، وانرژی میانگین تمام مولکولهای گاز برابر است با $E_{k,\text{ave}} = N(mv^2_{\text{rms}})/2$، که در آن N تعداد کل مولکولها است. با قراردادن مقدار $E_{k,\text{ave}}$ درمعادلهٔ (۵۷.۹) به دست می‌آید

$$pV = \frac{1}{3} Nm^2_{\text{rms}} + \frac{1}{3} (\sum_{\substack{\text{تمام}\\\text{ذرات}}} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})_{\text{ave}}. \qquad (۵۸.۹)$$

این رابطه فشار p وحجم V را با خواص مولکولی مانند m، v_{rms} و $\mathbf{F}_{ij}$ مربوط می‌کند. T دمای مطلق گاز را مستقیماً متناسب باانرژی جنبشی میانگین یک مولکول تعریف می‌کنیم، وآن را با رابطهٔ زیر نشان می‌دهیم:

$$\frac{3}{2} kT = \frac{1}{2} mv^2_{\text{rsm}} \quad \text{یا} \quad kT = \frac{1}{3} mv^2_{\text{rms}} \qquad (۵۹.۹)$$

که درآن k یک ثابت عمومی است که ثابت بولتزمن[1] نامیده می‌شود، و مقداری که به‌طور تجربی برای‌آن به دست آمده است (به یادداشت مربوط به اندازه‌گیری دما درصفحهٔ ۳۳۸ مراجعه کنید) برابر است با

$$k = ۱٫۳۸۰۴۵ \times ۱۰^{-۲۳}\,\mathrm{J\,°K^{-۱}}. \qquad (۶۰.۹)$$

پس معادلهٔ (۵۸.۹) به صورت زیر درمی‌آید:

$$pV = NkT + \frac{۱}{۳}\Big(\sum_{\substack{\text{تمام}\\\text{ذرات}}} \mathbf{F}_{ij}\cdot\mathbf{r}_{ij}\Big)_{\text{ave}}. \qquad (۶۱.۹)$$

اکنون به معادلهٔ حالت یک گاز رسیده‌ایم، ولی این معادله هنوز شکل نهایی را به‌خود نگرفته است، زیرا هنوز آخرین جمله را که به نیروهای بین مولکولی بستگی دارد ارزیابی نکرده‌ایم. برای ارزیابی این جمله، باید قبلا ماهیت نیروهای بین مولکولی را بشناسیم یا فرضهایی را دراین مورد بپذیریم.

فعلا گاز را «کامل» فرض می‌کنیم، یعنی گازی که تنها به عنوان یک مدل وجود دارد. دریک گازکامل[2] نیروهای بین مولکولی برابر صفر فرض می‌شوند. بنابراین جملهٔ آخر (۶۱.۹) ازبین می‌رود ومعادلهٔ حالت یک گاز کامل به صورت زیر درمی‌آید:

$$pV = NkT. \qquad (۶۲.۹)$$

بسیاری از گازها، به طور شگفت‌انگیزی با تقریب خوبی ازاین معادله پیروی می‌کنند، بدین طریق معلوم می‌شود نیروهای بین مولکولی درگازها قابل اغماض هستند، مگر اینکه مولکولها کاملا به هم فشرده باشند یا دما بسیار پایین باشد.

نکتهٔ جالب توجه درمعادلهٔ (۶۱.۹) آن است که این معادله اثر نیروهای مولکولی روی فشار گاز را بروشنی نشان می‌دهد. به عنوان مثال، مشاهده می‌شود که اگر نیروهای بین مولکولی جاذبه باشند همه حاصل ضربهای $\mathbf{F}_{ij}\cdot\mathbf{r}_{ij}$ منفی می‌شوند، به‌گونه‌ای که جملهٔ سمت راست معادلهٔ (۶۱.۹) کمتر ازمقداری می‌شود که برای یک گاز کامل به‌دست می‌آید و درنتیجه فشار کمتر خواهد بود. این نتیجه با درک فیزیکی ما کاملا سازگار است.

مثال ۱۶.۹. با محاسبهٔ مستقیم فشار وارد ازطرف یک گاز کامل روی جدار ظرف، معادلهٔ حالت گاز را به دست آورید.

حل: دانشجو به یاد دارد که فشاری که جریان گاز درمثال ۲.۹ روی جداری به‌مساحت A وارد می‌کرد برابر بود با

$$p = \frac{F}{A} = \frac{۲Anmv^۲\cos^۲\theta}{A} = ۲nmv^۲\cos^۲\theta$$

که درآن $v\cos\theta$ تصویر سرعت مولکولها روی راستای عمود برجدار است. این رابطه فشار مولکولهایی را به دست می‌دهد که در راستایی که با راستای قایم برجدار زاویهٔ θ

1. Boltzmann constant　　2. ideal gas

می‌سازد حرکت می‌کنند. پس دراین مورد، n تعداد کل مولکولهای موجود در واحد حجم نیست، بلکه تعداد مولکولهایی است که در راستای مذکور حرکت می‌کنند. بنابراین باید پیدا کنیم که چه کسری ازمولکولها در راستایی با زاویهٔ θ نسبت به راستای قایم جابجا می‌شوند و سهم آنها را درتمام راستاها با هم جمع کنیم (یا درواقع انتگرال بگیریم). البته ما مسئله را به صورت دیگری که بسیار ساده‌تر وشهودی‌تر است، ولی دراساس همان نتیجه را به‌دست می‌دهد، بررسی می‌کنیم.

با اطمینان می‌توان فرض کرد که به طور آماری، دریک لحظهٔ خاص، نیمی از مولکولها مؤلفهٔ سرعتشان به سمت جدار ونیم دیگر درسوی مخالف می‌باشد. بنابراین باید $n/۲$ را جانشین n کرد، زیرا فقط $n/۲$ مولکولها به جدار برخورد می‌کنند. به‌علاوه، اگر جدار، مستطیل $ABCD$ شکل ۱۹.۹ باشد، دراین صورت $v\cos\theta$ برابر v_x، یا مؤلفهٔ سرعت در راستای محور Xهاست، که عمود برجداری است که انتخاب کرده‌ایم. با واردکردن این تغییرات در رابطهٔ قبلی فشار p، به دست می‌آید

$$p = ۲(n/۲)mv_x^۲.$$

بزرگی سرعت برابر است با $v^۲ = v_x^۲ + v_y^۲ + v_z^۲$. در واقع باید مقدار میانگین سرعت $v_{x,\mathrm{rms}}^۲$ و درنتیجه $v^۲{}_{\mathrm{rms}} = v_{x,\mathrm{rms}}^۲ + v_{y,\mathrm{rms}}^۲ + v_{z,\mathrm{rms}}^۲$ را به‌کار برد. با وجود این اگر گاز همگن فرض شود، توزیع راستاهای سرعت مولکولها همسانگرد[1] خواهد بود. بنابراین $v_{x,\mathrm{rms}}^۲ = v_{y,\mathrm{rms}}^۲ = v_{z,\mathrm{rms}}^۲$ و درنتیجه $v_{x,\mathrm{rms}}^۲ = v^۲{}_{\mathrm{rms}}/۳$ می‌باشد. با وارد کردن این مقادیر در رابطهٔ p به دست می‌آید

$$p = ۲(n/۲)\,m(v^۲{}_{\mathrm{rms}}/۳) = \frac{۱}{۳}nmv^۲{}_{\mathrm{rms}} = \frac{۱}{۳}\frac{N}{V}mv^۲{}_{\mathrm{rms}}$$

زیرا $n = N/V$ است که N تعداد کل مولکولها و V حجم گاز است. بنابراین

$$pV = Nmv^۲{}_{\mathrm{rms}}/۳$$

این نتیجه با معادلهٔ (۵۸.۹) تطبیق می‌کند وفقط جملهٔ مربوط به نیروهای بین مولکولی در آن وجود ندارد، بنابراین رابطه مربوط به گاز کامل است. برتری روش ویریال در این است که بروشنی نشان می‌دهد که چگونه نیروهای بین مولکولی را باید به حساب آورد. آیا دانشجو می‌تواند راهی برای وارد کردن نیروهای بین مولکولی در استدلالی که برای مثال بالا آوردیم بیندیشد؟

یادداشت روی اندازه‌گیری دما. دربخش ۸.۹ دمای یک دستگاه ذرات را به انرژی جنبشی میانگین یک ذره در چارچوب CM وابسته کردیم. در معادلهٔ (۵۹.۹) یا $۳kT/۲ = mv^۲{}_{\mathrm{rms}}/۲$، رابطهٔ دمای یک گاز و انرژی جنبشی میانگین مولکولهای آن بیشتر تصریح گردید. باوجود این، اکنون باید دوجنبهٔ مهم را مورد بررسی قرار دهیم. نخست اینکه، در معادلهٔ تعریف کنندهٔ (۵۹.۹) دوکمیت جدید یعنی T (دمای مطلق) و k

---

1. isotrope

(ثابت بولتزمن) وارد شده‌اند. باید معلوم کرد چگونه می‌توان این دو کمیت را مستقل ازیکدیگر اندازه‌گیری کرد. دوم اینکه، دانشجو دریافتی شهودی از دما دارد که برتجارب حسی متکی است، آنچنانکه احساس سردی یا گرمی آن را منعکس می‌کند. او معمولا دما را با عددی می‌سنجد که از وسیله‌ای به نام دماسنج[1] به دست می‌آید. بنابراین لازم است تعریفی که از دما شده است با این مفهوم شهودی ارتباط داده شود.

گازی به جرم M را که دارای N مولکول است درنظر می‌گیریم. اگر نیروهای بین مولکولی را نادیده بگیریم، معادلهٔ حالت گاز با رابطهٔ (۶۲۰۹) یا $pV = NkT$ داده می‌شود. فرض کنید این گاز با یک دستگاه فیزیکی دیگر که می‌توان آن را در دمای ثابتی نگه داشت، درتعادل گرمایی باشد. این دستگاه می‌تواند آمیزه‌ای از آب و یخ در نقطهٔ انجماد خود، و درفشار یک اتمسفر باشد. فشار وحجم گاز را دراین دمای ثابت اندازه می‌گیریم که بترتیب مقادیر $p_\circ$ و $V_\circ$ به دست می‌آیند. سپس به این دمای ثابت مقدار مناسب (ولی‌دلخواه) $T_\circ$ را نسبت می‌دهیم که دمای‌گاز نیزمی باشد. بنابراین می توان نوشت $p_\circ V_\circ = NkT_\circ$. این رابطه خود بخود ثابت بولتزمن، $k = p_\circ V_\circ / NT_\circ$، را تثبیت می‌کند، و اگر جرم هرمولکول معلوم باشد می‌توان N را به دست آورد.

برای تعیین دمای گاز هنگامی که حجم آن V و فشار آن p است، به گونه‌ای که $pV = NkT$ باشد، با استفاده از مقادیر استاندارد، سازهٔ Nk را حذف می‌کنیم، و به دست می‌آوریم

$$T = T_\circ (pV / p_\circ V_\circ).$$

این رابطه T را برحسب دمای مرجع $T_\circ$ وسایر کمیتهای قابل سنجش به دست می‌دهد. بدین طریق، گاز مورد نظر به صورت یک دماسنج گازی درمی‌آید. به جای گاز می‌توان ازمواد دیگری مثلا یک آبگون یا یک میلهٔ فلزی که ابعاد (حجم یا طول) آن با دما تغییر می‌کند نیز به عنوان دماسنج استفاده کرد. چون معادلهٔ حالت این مواد پیچیده‌تر است، در عمل این دماسنجها را با یک دماسنج گازی زینه‌بندی می‌کنند. چون خاصیت انتخاب شده ممکن است تغییر خطی برحسب تغییر دما نداشته باشد، احتمال دارد برای دماهای میانی اندکی اختلاف مشاهده شود.

مقدار $T_\circ$ را می‌توان از دیدگاههای مختلف انتخاب کرد. به عنوان مثال، می‌توانیم فرایند دیگری را که فکر می‌کنیم در دمای ثابتی رخ می‌دهد، مانند فرایند جوشیدن آب در فشار یک اتمسفر، انتخاب کنیم. آنگاه می‌توانیم حکم کنیم که دمای این نقطهٔ مرجع دوم ۱۰۰ واحد یا درجه بالای $T_\circ$ است. اگر V_1 و p_1 بترتیب حجم وفشار گاز دراین دمای جدید باشند، داریم $p_1 V_1 = Nk(T_\circ + 100)$. مقدار Nk را از رابطهٔ $p_\circ V_\circ = NkT_\circ$ به دست می‌آوریم وآن را در رابطهٔ بالا قرار می‌دهیم؛ نتیجه می‌شود

$$T_\circ = 100 \frac{p_\circ V_\circ}{p_1 V_1 - p_\circ V_\circ}.$$

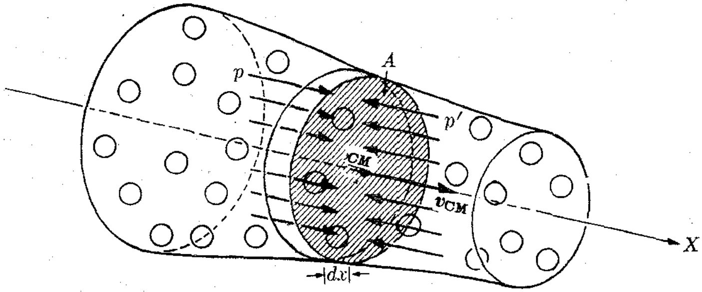
1. thermometer

ازاینجا یک مقدار عددی برای $T_\circ$ به دست می‌آید. عددی که به دنبال این نوع آزمایش (یا آزمایشهای دیگری با تکنیکهای دیگر) برای $T_\circ$ به دست می‌آید عبارت است از ۲۷۳٫۱۵ = $T_\circ$. هرواحد را یک درجهٔ کلوین می‌خوانند و با $^\circ$K نشان می‌دهند.

باید توجه داشت که تکنیک سنجش دما روی تقریب گاز کامل پایه‌گذاری شده‌است. اگر گازهای مختلف به کار ببریم نتایج متفاوتی به دست می‌آیند، زیرا اثر نیروهای بین مولکولی، به گونه‌ای که در معادلهٔ (۶۱.۹) ظاهر می‌شود، برای هرگازی متفاوت است. معمولا هیدروژن یا هلیوم را به‌کار می‌برند. کمال مطلوب آن است که بتوان مقیاس دمایی به‌دست آورد که مستقل ازماده‌ای باشد که به عنوان وسیلهٔ سنجش به کار می‌رود. این مطلبی است که درترمودینامیک مورد مطالعه قرار می‌گیرد و دراینجا ازآن گفتگو نمی‌کنیم.

۱۴.۹ حرکت شاره

اصول کلی را که دراین فصل دربارهٔ دستگاههای چند ذره‌ای مورد بحث قرار گرفتند، می‌توان براحتی درمطالعهٔ حرکت یک شاره به کار برد. برای سهولت، شاره‌ای (یک گاز یا یک آبگون) را در نظر می‌گیریم که در یک لولهٔ استوانه‌ای با مقطع متغیر A جریان دارد (شکل ۲۰.۹). لوله را می‌توان درهر راستایی قرار داد، بنابراین محور Xها را در راستای محور استوانه درنظر می‌گیریم. یک جزء حجم به ضخامت dx و حجم Adx را مورد بررسی قرار می‌دهیم. هرچند این حجم کوچک است ولی حاوی تعداد زیادی مولکول است. حرکت این جزء حجم از شاره را می‌توان با استفاده ازمعادلهٔ (۹.۹) مطالعه کرد که درآن به جای جرم M جملهٔ $\rho(Adx)$ را قرار می‌دهیم، که ρ چگالی شاره است. برای یک شارهٔ همگن می‌توان فرض کرد مرکز جرم برمرکز حجم جزء منطبق است. سرعت شاره درمرکز حجم v_{CM} خوانده می‌شود، که دراین مورد موازی محور Xهاست.



شکل ۲۰.۹

اکنون باید برآیند نیروهای خارجی وارد بر این حجم شاره را تعیین کنیم. فشار در سمت چپ و راست جزء حجم را بترتیب p و p' می‌گیریم. شارهٔ واقع درسمت چپ، نیروی pA را به‌سمت راست برجزء حجم وارد می‌کند ونیروی وارد ازشارهٔ واقع درسمت راست

برابر $p'A$ و به سمت چپ است. مؤلفهٔ نیروی برآیند خارجی روی محور Xها که برجزء حجم وارد می‌شود برابر است با

$$dF_x = -p'A + pA = -(p' - p)A.$$

$p' - p$ اختلاف فشار بین دو نقطه به فاصلهٔ dx است. بنابراین داریم $dp = p' - p$؛ در نتیجه

$$dF_x = -(dp)A = -\frac{dp}{dx}(A\,dx).$$

چون $A\,dx$ برابر حجم است، نتیجه می‌گیریم که نیروی وارد بر واحد حجم ناشی از فشار در راستای محور Xها برابر است با

$$f_p = -\frac{dp}{dx}. \qquad (۶۳.۹)$$

هرگاه این نتیجه را بامعادلهٔ (۲۳.۸) مقایسه کنیم، می بینیم که می‌توان فشار را همانند انرژی پتانسیل بر واحد حجم در نظرگرفت. این مقایسه ازنقطه نظر ابعادی نیز درست است، زیرا فشار برحسب $\text{Nm}^{-۲}$ بیان می‌شود که عیناً برابر است با $(\text{Nm})\text{m}^{-۳}$ یا $\text{Jm}^{-۳}$.

علاوه برفشارممکن است نیروهای خارجی دیگری (مانند گرانی یا میدان الکتریکی یا مغناطیسی) روی شارهٔ داخل جزء حجم وارد شوند. فرض کنیم f_e هر نیروی دیگر ازاین قبیل باشد که برواحد حجم وارد می‌شود (مانند وزن تقسیم برحجم)، دراین صورت برآیند نیروهای خارجی وارد بر شارهٔ واقع در داخل جزء حجم برابر می‌شود با

$$(f_p + f_e)\,A\,dx = \left(-\frac{dp}{dx} + f_e\right)A\,dx.$$

(نیروی بین مولکولها در داخل جزء حجم نیروهای داخلی هستند و نباید به‌حساب آورده شوند.) بنابراین، مطابق معادلهٔ (۹.۹)، معادلهٔ حرکت (باحذف شاخص CM برای سرعت) عبارت می‌شود از

$$(\rho A\,dx)\frac{dv}{dt} = \left(-\frac{dp}{dx} + f_e\right)A\,dx$$

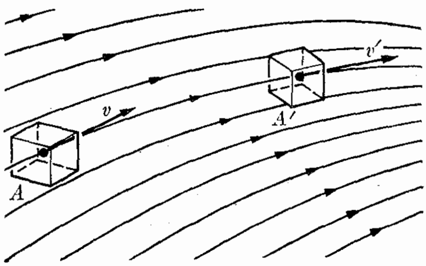
یا پس از حذف جملهٔ مشترک $A\,dx$ از دو طرف رابطه، داریم

$$\rho\frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dx} + f_e. \qquad (۶۴.۹)$$

اگر نیروی f_e پایستار باشد، داریم $f_e = -(dE_p/dx)$ که در آن E_p انرژی پتانسیل مربوط به واحد حجم است. پس معادلهٔ فوق به صورت زیر درمی‌آید:

$$\rho\frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dx} - \frac{dE_p}{dx} = -\frac{d}{dx}(p + E_p). \qquad (۶۵.۹)$$

قبل از هر توضیح دیگری، باید ماهیت حرکت شاره را روشن کنیم. حرکت شاره را ایستور[1] گویند هرگاه روند حرکت نسبت به زمان تغییر نکند. این جمله بدان معنی است که هرچند ممکن است سرعت یک جزء از شاره با تغییر مکان آن تغییر کند، ولی سرعت شاره در هر نقطه از فضا یکسان باقی می‌ماند. برای اینکه موضوع را روشن‌تر بیان کرده باشیم، جزئی از شاره را در طول مسیر آن دنبال می‌کنیم (شکل ۲۱.۹). سرعت شاره را در نقطهٔ A با v و در نقطهٔ A' با v' نشان می‌دهیم. اگر حرکت ایستور باشد، تمام جزءهای شاره هنگام رسیدن به نقطهٔ A دارای سرعت v و در نقطه A' دارای سرعت v' می‌شوند. در این صورت سرعت شاره به جای اینکه تابع زمان باشد تابع مکان خواهد بود، دریک حرکت غیرایستور سرعت در هر نقطه با زمان تغییر می‌کند. به عنوان مثال، اگر در یک لحظهٔ معین، سرعت شاره در نقطهٔ A برابر v باشد، در حالت کلی، سرعت آن در زمانهای بعد تغییر می‌کند. ما در بحث حاضر، تنها حرکت ایستور شاره را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



شکل ۲۱.۹. حرکت ایستور. خطهای رسم شده در شکل را خطهای جریان می‌نامند.

در یک حرکت ایستور، اگر dt زمانی باشد که در طول این زمان یک جزء شاره به اندازهٔ dx جابجا می‌شود، می‌توان نوشت

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{۱}{۲}v^{۲}\right).$$

با قرار دادن رابطهٔ فوق در معادلهٔ (۶۵.۹)، داریم

$$\rho\frac{d}{dx}\left(\frac{۱}{۲}v^{۲}\right)=-\frac{d}{dx}(p+E_p).$$

شاره را غیرقابل تراکم (به گفتهٔ دیگر با چگالی ثابت) در نظر می‌گیریم. بنابراین سمت چپ معادلهٔ بالا را می‌توان به صورت $d(\rho v^{۲}/۲)/dx$ نوشت. در این صورت معادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{۱}{۲}\rho v^{۲}+p+E_p\right)=۰$$

یا

1. stationary

$$\frac{۱}{۲}\rho v^{۲} + p + E_p = \text{const.} \qquad (۶۶.۹)$$

این نتیجه، که به نام قضیهٔ برنولی[1] معروف است، اصل بقای انرژی را در یک شاره بیان می‌کند. جملهٔ اول نمایش انرژی جنبشی بر واحد حجم است، جملهٔ دوم همانند یک انرژی پتانسیل بر واحد حجم تعبیر می‌شود که وابسته به فشار است و جملهٔ سوم انرژی پتانسیل بر واحد حجم ناشی از سایر نیروهای خارجی می‌باشد. بنابراین اگر تمام نیروهای وارد بر شاره پایستار باشند و حرکت یک حجم کوچک از شاره را دنبال کنیم، معلوم می‌شود که انرژی کل بر واحد حجم ثابت باقی می‌ماند.

در حالت ویژه‌ای که نیروی خارجی وارد بر شاره منحصراً نیروی گرانی باشد، $E_p = \rho gz$ است و معادلهٔ (۶۶.۹) به صورت زیر درمی‌آید:

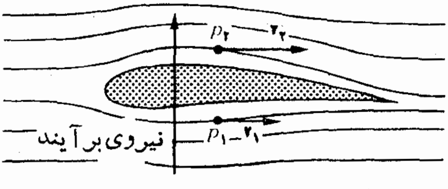
$$\frac{۱}{۲}\rho v^{۲} + p + \rho gz = \text{const.} \qquad (۶۷.۹)$$

دو حالت مهم زیر را در نظر می‌گیریم. اگر شاره فقط در یک تراز افقی حرکت کند، جملهٔ ρgz ثابت باقی می‌ماند و معادلهٔ (۶۷.۹) به صورت سادهٔ زیر درمی‌آید:

$$\frac{۱}{۲}\rho v^{۲} + p = \text{const.} \qquad (۶۸.۹)$$

بنابراین در یک لولهٔ افقی هر چه فشار کمتر باشد سرعت بیشتر است و برعکس. از این پدیده جهت بالابردن هواپیما استفاده می‌کنند (شکل ۲۲.۹). نیمرخ بال هواپیما به گونه‌ای طرح و ساخته می‌شود که سرعت هوا در بالای سطح بال بیشتر از سرعت هوا در زیر آن باشد. این امر موجب می‌شود در پایین بال فشار بیشتر از بالای آن باشد، در نتیجه از برآیند نیروها نیرویی در سوی پایین به بالا به وجود می‌آید. اگر سطح بال هواپیما برابر A باشد نیروی به طرف بالا برابر است با

$$F = A(p_۱ - p_۲) = \frac{۱}{۲}A\rho(v_۲^۲ - v_۱^۲)$$



شکل ۲۲.۹. نیروی بالابر[2] هوا روی بال هواپیما

1. Bernoulli's Theorem 2. lift

که درآن شاخصهای ۱ و ۲ مربوط بـه شرایط موجود در سطح پایین و بالای بال هواپیما هستند. چون داریم

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)$$

با تقریب بسیار خوبی می‌توان گفت کـه $(v_1 + v_2)/2$ بـرابـر v و معادل سرعت هواپیما نسبت به هواست. دراین صورت نیروی برآیند بالابر برابر است با

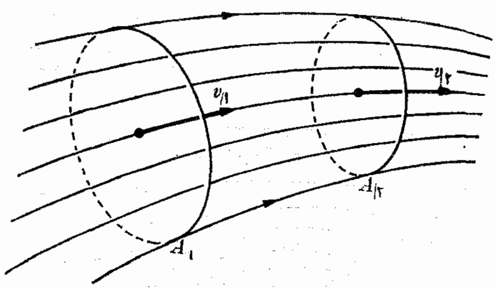
$$F = A\rho v(v_2 - v_1).$$

به عنوان مثال دوم، شاره‌ای را در نظر بگیرید که ساکن است یا با سرعت ثابتی در یک لوله حرکت می‌کند. دراین حالت، می‌توان جمله $\rho v^2/2$ را از معادلهٔ (۶۷.۹) حذف کرد، و درنتیجه آن را به صورت $p + \rho g z = \text{const}$ خلاصه کرد. اگر مقدار ثابت را با p_0 نشان دهیم، فشار دریک شارهٔ غیرقابل تراکم ترازمند برابر می‌شود با

$$p = p_0 - \rho g z. \tag{۶۹.۹}$$

بدیهی است p_0 مقدار فشار در ارتفاع $z = 0$ است.

می‌توان این مطالعه را برای حالتی که شاره تراکم‌پذیر است یاحالتی که درآن نیروها پایستار نیستند گسترش داد. (حالت اخیر هنگامی رخ می‌دهد که به عنوان مثال، شاره یک کار میلگردانی[1] انجام می‌دهـد و موجب حرکت ساز و کاری مانند توربین در یک دستگاه هیدرولیک می‌شود، یاهنگامی که شاره بامحیط خارج تبادل گرما می‌کند، مانندکارخانجات فرآورده‌های شیمیایی.) دراینجا این ملاحظات را که مربوط به درسهای تخصصی‌تری هستند مورد توجه قرار نمی‌دهیم.



شکل ۲۳.۹

آخرین اصلی کـه درمطالعهٔ حرکت یک شاره بسیار اهمیت دارد، معادلهٔ پیوستگی[2] است، که اصل بقای جرم شاره را بیان می‌کند. شاره‌ای را درنظر می‌گیریم که در داخل لولهٔ شکل ۲۳.۹ در شرایط دائمی حرکت می‌کند به گونه‌ای که در هیچ نقطه‌ای نه اتلاف جرم

1. shaft work 2. equation of continuity

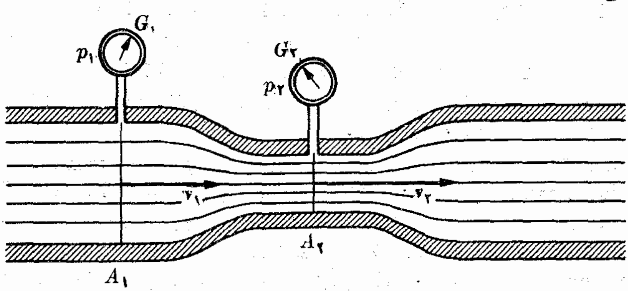
وجود دارد و نه افزایش آن. A_1 و A_2 دو مقطع لوله می‌باشند. حجم شاره‌ای که در واحد زمان ازسطح A_1 می‌گذرد متناظر با استوانه‌ای است به‌قاعدهٔ A_1 و طول v_1 و حجم A_1v_1. بنابراین جرم شاره‌ای که در واحد زمان از A_1 می‌گذرد برابرمی‌شود با $\rho_1 A_1 v_1$. همچنین $\rho_2 A_2 v_2$ جرم شاره‌ای است که در واحد زمان ازسطح A_2 می‌گذرد. تحت شرایطی که گفته شد، اصل بقای جرم ایجاب می‌کند این دو جرم برابر باشند، یا

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \tag{۷۰.۹}$$

این رابطه را معادلهٔ پیوستگی می‌نامند. اگـر شاره تراکم‌ناپذیر باشد، چگالی ثابت باقی می‌ماند و معادلهٔ (۷۰.۹) به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{۷۱.۹}$$

این معادله نشان می‌دهد که سرعت شاره متناسب است باعکس سطح مقطع لوله؛ واین نتیجه با درک فیزیکی ما سازگار است.



شکل ۲۴.۹

مثال ۱۷.۹. پیمانهٔ ونتوری[1]، شکل ۲۴.۹، روشی است بـرای تعیین سرعت جریان یک شاره در یک لولـه. دو فشارسنج G_1 و G_2 فشار را در لوله و در نقطه‌ای کـه لوله تنگتر می‌شود نشان می‌دهند. سرعت v_1 را برحسب اختلاف فشار $p_1 - p_2$ حساب کنید.

حل: برای به‌دست‌آوردن رابطهٔ سرعت، اگر v_1 و v_2 نمایش سرعتها در دو مقطع، بترتیب به مساحتهای A_1 و A_2، باشند، ازمعادلهٔ پیوستگی (۷۱.۹) به دست می‌آید $A_1v_1 = A_2v_2$ یا $v_2 = (A_1/A_2)v_1$. از طرف دیگر، اگـر لوله افقی باشد، از قضیهٔ برنولی به صورت معادلهٔ (۶۸.۹)، داریم

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

با قرار دادن v_2 که قبلا پیدا کردیم و محاسبهٔ v_1، بالاخره به‌دست می‌آید

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[(A_1/A_2)^2 - 1]}}.$$

1. Venturi meter

مقدار شاره‌ای که در واحد زمان از هرمقطع لوله می‌گذرد برابر است با

$$V = A_1 v_1 = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}} = K\sqrt{p_1 - p_2}$$

دراین رابطه K ثابتی است که به‌ویژگیهای لوله و ماهیت شاره بستگی دارد.

فهرست منابع

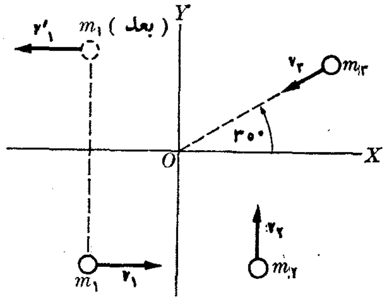
1. «A Sketch for a History of the Kinetic Theory of Gases,» E. Mendoza, *Physics Today*, March 1961, page 36.
2. «Development of the Kinetic Theory of Gases, V: The Equation of State», S. Brush, *Am. J. Phys.* 29, 593 (1961).
3. *Physical Mechanics* (third edition), by R.B. Lindsay. Princeton, N.J.: Van Nostrand, 1963, Chapter 6, Sections 11-1 through 11-5.
4. *Interoduction to Engineering Mechanics,* by J. Huddleston. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1960, Sections 13-1, 19-3, 19-5, 21-1.
5. *Vector Mechanics*, by D. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964, Sections 6-6, 7-3, 7-14, 22-1 through 22-6.
6. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, by R. Feynman, R. Leighton, & M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapter 39.
7. *Source Book in Physics,* by W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 73, Pascal; page 196, Mayer; page 212, Helmholtz; page 274, Bernoulli; page 255, Joule; page 257, Maxwell.
8. *Foundations of Modern Physical Science*, by G. Holton & D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Chapter 25.
9. *Thermodynamics, the Kinetic Theory of Gases, and Statistical Mechanics*, (second edition), by Francis W. Sears. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1953, Chapter 1.
10. سایمون، کیث ر. مکانیک، ترجمهٔ اعظم نیرومند راد و غلامحسین همدانی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۶، فصل ۴، بخشهای ۵ـ۱۱، ۸ـ۶ تا ۸ـ۹.

مسئله‌ها

۱.۹. دستگاهی از سه ذره بــه جرمهای $3\,\text{kg}$، $2\,\text{kg}$ و $5\,\text{kg}$ تشکیل شده است. سرعت ذرهٔ اول برابر $\mathbf{u}_y(6)\,\text{ms}^{-1}$ است. ذرهٔ دوم در راستایی که با محور Xها زاویهٔ 30°ــ می‌سازد، باسرعت $8\,\text{m s}^{-1}$ حرکت می‌کند. اگر مرکزجرم دستگاه نسبت به‌ناظر بیحرکت به نظر برسد سرعت ذرهٔ سوم چیست؟

۲.۹. در یک لحظهٔ مشخص، سه ذرهٔ مطابق شکل ۲۵.۹ حـرکت می‌کنند. آنها تحت تأثیر برهم‌کنشهای متقابل خود می‌باشند وهیچ نیروی خارجی برآنها اثرنمی‌کند. بعد از مدتی‌که مجدداً آنها را مشاهده می‌کنند، معلوم می‌شود m_1 مطابق‌آنچه در شکل دیده می‌شود حرکت

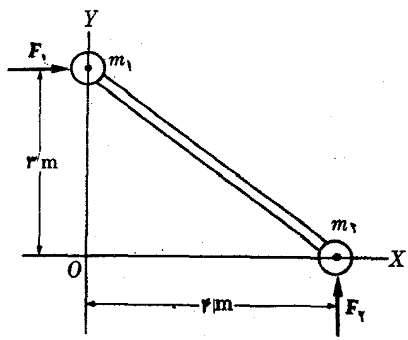
می‌کند، در صورتی که m_2 ساکن است. با قراردادن $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$، $m_2 = 0.5\,\mathrm{kg}$، $m_3 = 1\,\mathrm{kg}$، $v_1 = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، $v_2 = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، $v_3 = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ و $v'_1 = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$،



شکل ۲۵.۹

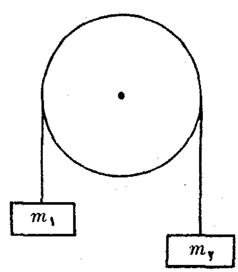
سرعت m_3 را پیدا کنید. سرعت CM دستگاه را در دولحظهٔ داده شده درمسئله حساب‌کنید.
در یک زمان معلوم مکان ذره‌ها عبارتند از

$m_1(-0.8\,\mathrm{m}$ و $-1.1\,\mathrm{m})$ و $m_2(0.8\,\mathrm{m}$ و $-1.1\,\mathrm{m})$ و $m_3(1.4\,\mathrm{m}$ و $0.8\,\mathrm{m})$.
خطی را که مسیر CM دستگاه را نشان می‌دهد رسم کنید.



شکل ۲۶.۹

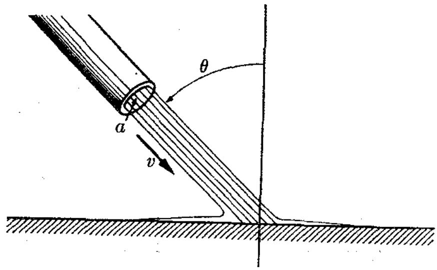
۳۰.۹ جرمهای $m_1 = 10\,\mathrm{kg}$ و $m_2 = 6\,\mathrm{kg}$ توسط میلهٔ سختی به جرم ناچیز به هم وصل شده‌اند (شکل ۲۶.۹). این جرمها که در آغاز درحال سکون می‌باشند، مطابق شکل



شکل ۲۷.۹

بترتیب تحت تأثیر نیروهای $\mathbf{F}_1 = \mathbf{u}_x(8)\,\mathrm{N}$ و $\mathbf{F}_2 = \mathbf{u}_y(6)\,\mathrm{N}$ قرار می‌گیرند. (الف) مختصات مرکز جرم آنها را به‌صورت تابعی از زمان پیدا کنید. (ب) اندازه حرکت کل را به‌صورت تابعی از زمان بنویسید.

۴.۹ دو جرم شکل ۲۷.۹ در آغاز بیحرکت هستند. به فرض اینکه $m_1 > m_2$ باشد، شتاب و سرعت مرکز جرم آنها را درلحظهٔ t پیدا کنید.



شکل ۲۸.۹

۵.۹ آبگونی در راستایی با زاویهٔ θ روی صفحه‌ای می‌ریزد (شکل ۲۸.۹). آبگون پس از برخورد با صفحه روی سطح آن پخش می‌شود. فشاری را که آبگون روی صفحه وارد می‌کند پیدا کنید. چگالی آبگون برابر ρ و سرعت آن v است.

۶.۹ (الف) با استفاده از داده‌های جدول ۱.۱۳، مکان مرکزجرم و جرم‌کاهیدهٔ دستگاههای زمین ـ ماه، خورشید ـ زمین را پیدا کنید. (ب) همچنین اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی هردستگاه را پیدا کنید. (ج) همین عمل را در مورد مولکولهای CO و HCl نیز انجام دهید. طول پیوند در مولکول CO برابر $1{,}13 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$ و درمولکول HCl برابر $1{,}27 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$ است.

۷.۹ دو ذره به جرمهای $2\,\mathrm{kg}$ و $3\,\mathrm{kg}$ بترتیب با سرعتهای $8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ در راستای محور X ها و $8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ در راستایی که با محور X ها زاویهٔ 120° می‌سازد نسبت به ناظری حرکت می‌کنند. (الف) هرسرعت را به صورت برداری بنویسید. (ب) سرعت CM آنها را پیدا کنید. (ج) سرعت هر ذره را نسبت به سرعت CM بنویسید. (د) اندازه حرکت هر ذره را در چارچوب CM پیدا کنید. (ه) سرعت نسبی ذره‌ها را حساب کنید. (و) جرم کاهیدهٔ دستگاه را به‌دست آورید. (ز) رابطهٔ داده شده درمثال ۴.۹ را تحقیق کنید.

۸.۹ انرژی جنبشی کل ذره‌های مسئلهٔ ۷.۹ را، نسبت به آزمایشگاه و نسبت به مرکز جرمشان تعیین کنید. برای محاسبهٔ دوم دو روش مختلف به کار ببرید. درستی رابطه‌های داده شده درمثال ۸.۹ را تحقیق کنید.

۹.۹ فرض کنید که ذره‌های داده شده در مسئلهٔ ۷.۹ بترتیب در نقطه‌های $(0, 1, 1)$ و $(-1, 0, 2)$ قرار دارند. (الف) مکان CM آنها را پیدا کنید. (ب) اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه را نسبت به CM آنها تعیین کنید. (ج) اندازه حرکت زاویه‌ای را نسبت به مبدأ حساب کنید. برای محاسبهٔ (ب) و (ج) از دو روش مختلف استفاده کنید.

۱۰.۹. یک هستهٔ اورانیوم ^{236}U در حال سکون، به دوقطعه به جرمهای ۱۴۰ amu و ۹۰ amu تقسیم می‌شود. Q واکنش برابر ۱۹۰ MeV است. انرژی و سرعت هرقطعه را پیدا کنید.

۱۱.۹. یک هستهٔ اورانیوم ^{238}U درحال سکون، با گسیل یک ذرهٔ آلفا $(m = ۴\text{amu})$ وباقی گذاردن یک هستهٔ ^{234}Th $(M \approx ۲۳۴\,\text{amu})$ فروپاشیده می‌شود. انرژی‌کل قابل دسترس ۴٫۱۸ MeV است. (الف) انرژی جنبشی ذرهٔ آلفا و هستهٔ باقی مانده را پیدا کنید، (ب) اندازه حرکت آنها را حساب کنید، و (ج) سرعت آنها را به‌دست آورید.

۱۲.۹. در یک هسته که درآغاز بیحرکت است، واپاشی رادیواکتیوی انجام می‌گیرد و از آن یک الکترون با اندازه حرکت $۹٫۲۲ \times ۱۰^{-۲۱}\,\text{kg m s}^{-۱}$، و یک نوترینو با اندازه حرکت $۵٫۳۳ \times ۱۰^{-۲۱}\,\text{kg m s}^{-۱}$ عمود بر راستای حرکت الکترون گسیل می‌شود. (الف) هستهٔ باقی مانده در چه راستایی پس می‌زند؟ (ب) اندازه حرکت آن چقدر است؟ (ج) می‌دانیم که جرم هستهٔ باقی مانده برابر $۳٫۹۰ \times ۱۰^{-۲۵}\,\text{kg}$ است. سرعت و انرژی جنبشی آن چقدر است؟

۱۳.۹. نارنجکی به جرم m براثر انفجار چند قطعه می‌شود. انفجار دارای Q مثبت است. (الف) اگر نارنجک دو تکه شود ثابت کنید که در چارچوب مرجع C آنها در دوسوی مخالف جابجا می‌شوند. (ب) اگر نارنجک سه قطعه شود ثابت کنید که نسبت به‌چارچوب C اندازه حرکت و سرعت آنها در یک صفحه قرار دارند. (ج) اگر نارنجک به بیش از سه قطعه تقسیم شود، آیا شرط ویژه‌ای برای اندازه حرکت این قطعات نسبت به مرکز جرم وجود دارد؟ (د) اگر نارنجک به دوقطعهٔ برابر تقسیم شود، ثابت کنید که اندازه حرکت و سرعت آنها در چارچوب مرجع C بترتیب برابرند با $(mQ/۲)^{۱/۲}$ و $(۲Q/m)^{۱/۲}$. (ه) اگر نارنجک به سه قطعهٔ برابر تقسیم شود و در چارچوب C به طور متقارن گسیل گردند، ثابت کنید که اندازه حرکت و سرعت آنها دراین چارچوب بترتیب برابرند با $(۲mQ)^{۱/۲}/۳$ و $(۲Q/m)^{۱/۲}$. (و) قسمت (ه) را به فرض اینکه دو قطعه با سرعت یکسان نسبت به چارچوب C ولی در دو راستای عمود برهم گسیل شوند، از نو حل کنید. (ز) اگر درلحظهٔ انفجار، نارنجک درچارچوب L با سرعت $(۲Q/m)^{۱/۲}/۴$ و در راستای یکی از قطعات حاصل حرکت می‌کرد، نتایج (د) و (ه) به نظر ناظری در چارچوب L چگونه ظاهر می‌شد؟

۱۴.۹. پرتابه‌ای تحت زاویهٔ ۶۰° با افق و با سرعت اولیهٔ $۴۰۰\,\text{m s}^{-۱}$ شلیک می‌شود. در نقطهٔ اوج گذرگاه خود، پرتابه منفجر و به دوقطعه به جرمهای یکسان تقسیم می‌شود و یکی از قطعات در راستای قایم سقوط می‌کند. (الف) قطعهٔ دوم در چه فاصله‌ای از نقطهٔ پرتاب به‌زمین برخورد می‌کند؟ (زمین را تخت فرض کنید.) (ب) انرژیی که بر اثر انفجار آزاد می‌شود چقدر است؟

۱۵.۹. نارنجکی به‌جرم M که با سرعت v_0 درحال افتادن است، در ارتفاع h منفجر و به دوقطعهٔ برابر تقسیم می‌شود که این قطعات در چارچوب C ابتدا به صورت افقی حرکت

می‌کنند. Q انفجار برابر است با Mv_0^2. محل افتادن قطعه‌های نارنجک را نسبت به‌نقطه‌ای از زمین که درلحظهٔ انفجار درست زیر نارنجک واقع می‌شود پیدا کنید.

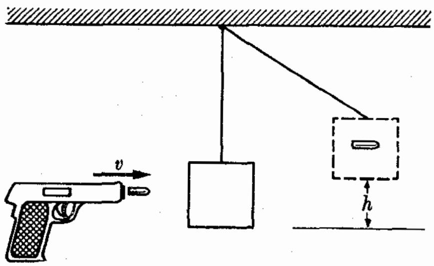
۱۶.۹ مسئلهٔ ۱۵.۹ را در مورد نارنجکی که در لحظهٔ انفجار در راستای افقی حرکت می‌کند حل کنید.

۱۷.۹ گویی به جرم ۴ kg و سرعت ۱٫۲ m s^{-1} با گوی دیگری به جرم ۵ kg که در راستای حرکت گوی اول با سرعت ۰٫۶ m s^{-1} حرکت می‌کند برخورد رو در رو می‌کند. (الف) سرعت گویها را بعد از برخورد پیدا کنید (برخورد را کشسان فرض کنید). (ب) تغییر اندازه حرکت هریک از گویها را به‌دست آورید.

۱۸.۹ مسئلهٔ پیش را به‌فرض اینکه گوی دوم درسوی مخالف گوی اول حرکت کند از نو حل کنید.

۱۹.۹ دو مسئلهٔ پیش را به فرض اینکه دوگوی بعد از برخورد به هم بچسبند و باهم به‌حرکت ادامه می‌دهند از نو حل کنید.

۲۰.۹ ذره‌ای به‌جرم ۰٫۲ kg و با سرعت ۰٫۴۰ m s^{-1} به‌ذرهٔ ساکنی به‌جرم ۰٫۳ kg برخورد می‌کند. بعد از برخورد ذرهٔ نخست با سرعت ۰٫۲۰ m s^{-1} در راستایی که با راستای اولیهٔ آن زاویهٔ °۴۰ می‌سازد حرکت می‌کند. سرعت ذرهٔ دوم و Q فرایند را پیدا کنید.



شکل ۲۹.۹

۲۱.۹ دستگاه شکل ۲۹.۹ آونگ پرتابی[1] نامیده می‌شود که آن را برای تعیین سرعت یک گلوله به کار می‌برند. برای این کار ارتفاع h را که آونگ پس از برخورد و نفوذ گلوله بالا می‌رود اندازه‌گیری می‌کنند. ثابت کنید که سرعت گلوله برابر است با

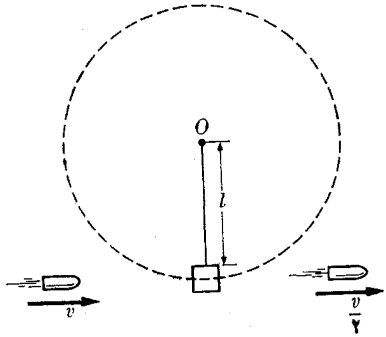
$$\sqrt{2gh}(m_1 + m_2)/m_1$$

که درآن m_1 جرم گلوله و m_2 جرم قطعهٔ آویزان به‌عنوان آونگ است.

۲۲.۹ گلوله‌ای به‌جرم m و سرعت v ازگوی‌آونگی به‌جرم M عبور می‌کند و با سرعت $v/2$ از آن خارج می‌شود (شکل ۳۰.۹). گوی آونگ از نخی به طول l آویزان است.

1. ballistic pendulum

حداقل سرعت v چقدر باید باشد تا آونگ یک دور کامل بگردد؟



شکل ۳۰.۹

۲۳.۹. ذره‌ای به جرم $5\ kg$ که با سرعت $2\ m\ s^{-1}$ حرکت می‌کند به ذرهٔ ساکنی به‌جرم $8\ kg$ برخورد می‌کند. اگر برخورد کشسان باشد، سرعت هرذره را در حالتهای زیر پیدا کنید: (الف) برخورد کاملا رودررو است، (ب) ذرهٔ نخست $50°$ از راستای اولیهٔ خود منحرف می‌شود. تمام راستاها را نسبت به‌راستای ذرهٔ برخورد کننده درنظر بگیرید.

۲۴.۹. ذره‌ای به جرم m که با سرعت v حرکت می‌کند به طور کشسان و رودررو با ذرهٔ دیگری به جرم M (بزرگتر از m) برخورد می‌کند که دارای (الف) اندازه حرکت برابر ولی درسوی مخالف ذرهٔ اول است؛ (ب) انرژی جنبشی برابر با ذرهٔ اول است ولی درسوی مخالف حرکت می‌کند. در هرحالت سرعت ذرهٔ نخست را بعد از برخورد حساب کنید. (ج) اگر M ساکن و خیلی بزرگتر از m باشد، ثابت کنید تغییر انرژی جنبشی m عبارت است از

$$\Delta E_k/E_k \approx -4(m/M).$$

۲۵.۹. آزمایش نشان می‌دهد که دریک برخورد رو در رو بین دو کرهٔ جامد، مانند دوگوی بیلیارد، سرعتهای بعد از برخورد با رابطهٔ $v'_1 - v'_2 = -e(v_1 - v_2)$ به سرعتهای قبل از برخورد مربوطاند. دراینجا e بین صفر و یک تغییر می‌کند و ضریب بازگشت[1] نامیده می‌شود. این نتیجه توسط نیوتون کشف شد و تنها به طور تقریبی معتبر است. بعلاوه، اندازه حرکت دربرخورد ثابت باقی می‌ماند. ثابت کنید (الف) سرعتهای بعد از برخورد از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$v'_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2 e) + v_2(1 + e)m_2}{m_1 + m_2}$$

و

$$v'_2 = \frac{v_1(1 + e)m_1 + v_2(m_2 - m_1 e)}{m_1 + m_2}.$$

1. coefficient of restitution

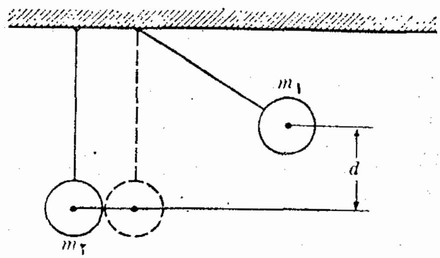
(ب) Q برخورد برابر است با

$$-\frac{۱}{۲}(۱-e^{۲})\frac{m_۱ m_۲}{m_۱+m_۲}(v_۱-v_۲)^{۲}.$$

(ج) دریک برخورد کشسان مقدار e چقدر است؟

۲۶.۹. دریک برخورد پلاستیک[1] دوجسم بعدازبرخورد به‌صورت جسم واحدی درمی‌آیند. (الف) مقدارضریب بازگشت e چقدر است؟ (ب) Q واکنش را مستقیماً، همچنین با استفاده از نتیجه‌های مسئلهٔ پیش همراه با مقدار مناسب برای e، حساب کنید.

۲۷.۹. جرم گویهای $m_۱$ و $m_۲$ در شکل ۳۱.۹ بترتیب ۰٫۱kg و ۰٫۲kg می باشد. هنگامی که $d=۰٫۲\text{m}$ است جرم $m_۱$ رها می‌شود. ارتفاعی را که دوگوی بالا می‌روند، در حالتی که برخورد (الف) کشسان، (ب) ناکشسان با ضریب بازگشت برابر ۰٫۹، و (ج) پلاستیک ($e=۰$) باشد، حساب کنید. مسئله را درحالتی که جرم $m_۲$ تا ارتفاع d بالا برده می‌شود و رها می‌گردد وجرم $m_۱$ ساکن است، حل کنید.



شکل ۳۱.۹

۲۸.۹. درنتایج فیزیکی یک برخورد که درآن مقدار e (الف) منفی، (ب) بزرگتر ازیک است بحث کنید. آیا می‌توان نتیجه گرفت‌که این مقادیر درمورد برخورد بین دو کرهٔ جامد قابل قبول هستند؟

۲۹.۹. به فرض اینکه جسم دوم درمسئلهٔ ۲۵.۹ ساکن وجرم آن نسبت به جرم جسم اول خیلی بزرگ باشد، سرعت هریک ازآنها را بعد ازبرخورد وهمچنین Q برخورد را پیدا کنید. ازاین نتیجه برای محاسبهٔ ارتفاعی که یک جسم پس ازرهاشدن ازارتفاع h، از زمین بلند می‌شود استفاده کنید. شخصاً این آزمایش را با یک تیله انجام دهید و e مربوط به‌آن را برآورد کنید.

۳۰.۹. نشان دهید که زمانی که لازم است تا گلولهٔ مسئلهٔ ۲۹.۹ ازبلند شدن باز بماند برابر است با

$$t=\sqrt{۲h/g}\,(۱+e)/(۱-e).$$

۳۱.۹. ثابت کنید که اگرگلولهٔ مسئلهٔ ۲۹.۹ درراستایی که با قایم زاویهٔ α می‌سازد به‌زمین

---
1. plastic collision

برخورد کند، با سرعت $v' = v\sqrt{e^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$ وبا زاویهٔ β اززمین بلند می‌شود، که این زاویه از رابطهٔ $\mathrm{tg}\beta = (1/e)\mathrm{tg}\,\alpha$ به دست می‌آید. ازاین نتایج برای مطالعهٔ حرکت گلوله‌ای که با سرعت اولیهٔ افقی v_0 از روی یک میز می‌افتد استفاده کنید. به فرض اینکه گلوله چندین بار به زمین برخورد کند وبلند شود شکل مسیر آن را رسم کنید.

۳۲.۹ به‌طور مستقیم ثابت کنید که اگر دریک برخورد کشسان اندازه حرکتها و انرژیها ثابت باقی بمانند، داریم

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$$

که $\mathbf{u}$ برداریکا در راستایی است که درآن راستا اندازه حرکت یکی از ذرات تغییرکرده‌است. این نتیجه به معنی آن است که در برخورد، مؤلفهٔ سرعت نسبی در راستای تبادل اندازه حرکت تغییر علامت می‌دهد. این نتیجه را درمورد یک برخورد رو در رو به کار ببرید و آن را با نتیجهٔ مسئلهٔ ۲۵.۹ برای $e = 1$ مقایسه کنید. [راهنمایی: دوقانون بقا را طوری بنویسید که درهر معادله تمام جملات مربوط به هر ذره دریک سمت قرار بگیرند.]

۳۳.۹ یک نوترون با انرژی $1\mathrm{MeV}$، در داخل (الف) دوتریوم، (ب) کربن، حرکت می‌کند. برآورد کنید درهریک ازاین مواد نوترون چند برخورد رو در رو باید داشته‌باشد تا انرژیش به مقدار گرمایی درحدود $0{,}025\mathrm{eV}$ کاهش یابد. احتمال نسبی گیراندازی نوترون توسط این مواد ۱:۱۰ است. در کدام یک ازاین مواد احتمال بیشتری وجود دارد که نوترون قبل از کند شدن گیر بیفتد؟

۳۴.۹ نشان دهید که در برخورد ذره‌ای به جرم m_1 که با سرعت v_1 در چارچوب L حرکت می‌کند، با ذره‌ای به جرم m_2 که درهمین چارچوب ساکن است، زاویه‌هایی که راستاهای ذرهٔ اول بعد از برخورد با راستای سرعت اولیه تشکیل می‌دهند از رابطهٔ $\mathrm{tg}\,\theta = \sin\varphi/(\cos\varphi + 1/A)$ به دست می‌آیند. در این رابطه $A = m_2/m_1$ و زاویه‌های θ و φ بترتیب به چارچوبهای L و C مربوط می‌شوند.

۳۵.۹ تحقیق کنید که اگر درمسئلهٔ پیش $m_1 = m_2$ باشد، $\theta = \varphi/2$ خواهد بود. دراین صورت حداکثر مقدار θ چقدر است؟

۳۶.۹ با برگشت به مسئلهٔ ۳۴.۹، ثابت کنید که مقدار بیشینهٔ θ برای یک مقدار اختیاری A از رابطهٔ $\mathrm{tg}\,\theta = A/\sqrt{1 - A^2}$ به دست می‌آید. حالتی را که A بزرگتر ازیک، و نیز حالتی را که A کوچکتر ازیک باشد مطالعه کنید.

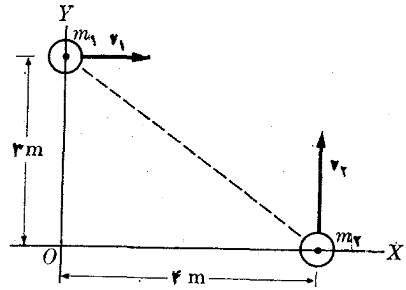
۳۷.۹ با تجزیه وتحلیل انحراف ذره‌های آلفایی که درهیدروژن حرکت می‌کنند، فیزیکدانان به طور تجربی دریافته‌اند که انحراف بیشینهٔ ذرهٔ آلفا درچارچوب L درحدود 16° است. با استفاده ازنتایج مسئلهٔ ۳۶.۹، جرم ذرهٔ آلفارا نسبت به‌جرم هیدروژن برآوردکنید. پاسخ به دست آمده را با مقدار واقعی که با روشهای دیگری به دست آمده است مقایسه کنید.

۳۸.۹. اگر انرژی جنبشی داخلی یک دستگاه دو ذره‌ای برابر $E_{k,\mathrm{CM}}$ باشد، ثابت کنید بزرگی سرعت ذره‌ها نسبت به مرکز جرم عبارتند از

$$v_۱ = [۲m_۲E_{k,\mathrm{CM}}/m_۱(m_۱ + m_۲)]^{۱/۲}$$

و

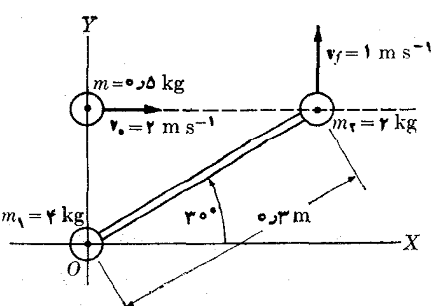
$$v_۲ = [۲m_۱E_{k,\mathrm{CM}}/m_۲(m_۱ + m_۲)]^{۱/۲}.$$



شکل ۳۲.۹

۳۹.۹. درمورد دوذرهٔ شکل ۳۲.۹ داریم $m_۱ = ۴\mathrm{kg}$، $m_۲ = ۶\mathrm{kg}$، $\mathbf{v}_۱ = \mathbf{u}_x(۲)\,\mathrm{ms}^{-۱}$ و $\mathbf{v}_۲ = \mathbf{u}_y(۳)\,\mathrm{ms}^{-۱}$. (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای کل دستگاه را نسبت به O و نسبت به CM تعیین کنید و رابطهٔ بین آن دو را تحقیق کنید. (ب) انرژی جنبشی کل را نسبت به O و CM تعیین کنید، و رابطهٔ بین آنها را بررسی کنید.

۴۰.۹. فرض کنید که دو ذرهٔ مسئلهٔ پیش توسط فنری کشسانی با ثابت $۲ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{Nm}^{-۱}$ به هم مربوط شده‌اند و فنر درآغاز درحالت طبیعی خود می‌باشد. (الف) فنر چه تأثیری بر حرکت مرکز جرم دستگاه می‌گذارد؟ (ب) انرژی داخلی کل دستگاه چقدر است؟ آیا ثابت باقی می‌ماند؟ (ج) بعد ازمدتی، فنر ۴cm فشرده می‌شود. انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل داخلی ذرات را پیدا کنید. (د) بزرگی سرعتها را نسبت به مرکز جرم حساب کنید. (آیا می‌توان راستای آنها را نیز تعیین کرد؟) همچنین (ه) بزرگی سرعت نسبی آنها و (و) اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه را نسبت به O و CM پیدا کنید.



شکل ۳۳.۹

۴۱.۹. دوجرم همانند شکل ۳۳.۹ با میلهٔ سبکی به هم مربوط شده‌اند و روی یک سطح افقی کاملا صیقلی بیحرکت می باشند. ذرهٔ سومی به جرم ۰٫۵kg با سرعت $\mathbf{v}_0$ به دستگاه نزدیک می‌شود و به جرم ۲kg برخورد می‌کند. اگر جرم ۰٫۵kg بعد از برخورد مطابق شکل با سرعت $\mathbf{v}_f$ به طرف بالا حرکت کند، حرکت مرکز جرم دو ذره چگونه خواهد بود؟

۴۲.۹. انرژی پتانسیل ناشی از برهم‌کنش بین یک پروتون ویک اتم دوتریوم برابر است با $E_{p,\text{int}} = ۲٫۳ \times ۱۰^{-۲۸}/r\ \text{J}$، کـه درآن r فاصلهٔ بین دو ذره برحسب متر است. در لحظهٔ معینی پروتونی با انرژی ۰٫۵MeV درفاصلهٔ $۲ \times ۱۰^{-۱۲}\text{m}$ ازیک اتم دوتریوم بیحرکت قـرار دارد. هر دو ذره نسبت به دستگاه مختصات L در نظر گـرفته شده‌انـد. (الف) انـرژی جنبشی وهمچنین انـرژی پتانسیل داخلی دستگاه را درچارچوبهای L و C پیدا کنید ($m_\text{p} = ۱٫۰۰۷۶\ \text{amu}$ و $m_\text{d} = ۲٫۰۱۴۷\ \text{amu}$). (ب) پس از مدت زمان معینی پروتون درفاصلهٔ $۱۰^{-۱۳}\text{m}$ از اتم دوتریوم قـرار دارد. انرژی جنبشی دستگاه و همچنین انرژی داخلی را در چارچوبهـای L و C پیدا کنید. (ج) در هر دوحالت بزرگی سرعت CM را تعیین کنید.

۴۳.۹. کمیتهای مربوط به زمین وماه وخورشید را بترتیب با شاخصهای پایین E،M و S نشان دهید، ومعادلهٔ (۳۴.۹) را به طور کامل برای دستگاههـای متشکل از (الف) زمین و ماه، (ب) زمین، ماه وخورشید بنویسید.

۴۴.۹. گازی را درتمام طول مدتی که حجم آن از $۵ \times ۱۰^{-۳}\text{m}^۳$ تا $۹ \times ۱۰^{-۳}\text{m}^۳$ افزایش می‌یابد درفشار ثابت ۲۰atm ثابت نگه می‌دارند. چه مقـدار انرژی به صورت گرما باید به آن داده شود تا (الف) انـرژی داخلی ثابت باقی بماند؟ (ب) انرژی داخلی آن به اندازهٔ کارخارجی انجام شده افزایش یابد؟ نتیجه‌ها را برحسب کالری و ژول بنویسید.

۴۵.۹. گازی به گونه‌ای منبسط می‌شود که درهر لحظه رابطهٔ بین حجم وفشار آن به صورت $pV^\gamma = C$ می‌باشد. γ یک ثابت مناسب برای گاز است. ثابت کنید که کار انجام شده برای اینکه حجم گاز از $V_۱$ به $V_۲$ برسد برابر است با

$$W = (p_۱V_۱ - p_۲V_۲) / (\gamma - ۱).$$

۴۶.۹. یادآوری می‌کنیم (مسئلهٔ ۸.۲) یک مول ازهر ماده عبارت است ازمقداری (برحسب گرم) برابـر با جرم مولکولی (یا اتمی) برحسب amu. تعداد مولکولها دریک مول از هرماده‌ای، برابرند و این تعداد عدد آووگادرو نامیده می‌شود وبرابر است با

$$N_A = ۶٫۰۲۲۵ \times ۱۰^{۲۳}\ \text{mol}^{-۱}.$$

ثابت کنید که اگر N نمایش تعداد مولها باشد، معادلهٔ (۶۲.۹) را می‌توان به این صورت نوشت:

$$pV = NRT.$$

دراین رابطه $R = kN_A$ ثابت گاز نامیده می‌شود. همچنین ثابت کنید که

$$R = ۸٫۳۱۴۳\ \text{J}^\circ\text{K}^{-۱}\ \text{mol}^{-۱}.$$

۴۷.۹ ثابت کنید کـه نتیجهٔ مسئلهٔ ۴۶.۹ را می‌توان بـه صورت $p = \rho(RT/M)$ نیز نوشت. دراینجا ρ چگالی گاز و M جرم مولکولی آن (برحسب kg) است.

۴۸.۹ حجم یک مول ازهرگازی را درشرایط متعارفـی دمـا و فشار (STP) پیدا کنید. همچنین ثابت کنید که دراین شرایط، تعداد مولکولهـای یک گاز دریک سانتی‌متر مکعب برابر است با $۲٫۶۸۷ \times ۱۰^{۱۹}$. این عدد را عدد لوشمیت[1] می‌نامند.

۴۹.۹ انـرژی جنبشی میانگین یک مولکول از گازی در دمـای ۲۵°C چقدر است؟ این انرژی را برحسب ژول و eV بنویسید. سرعت rms هریک از گازهای (الف) هیدروژن، (ب) اکسیژن، (ج) ازت، چقـدر است؟ توجه داشته باشید کـه مولکولهـای این گازها دواتمی‌اند. همین عمل را درمورد هلیوم (تک اتمی) و گاز کربنیک انجام دهید.

۵۰.۹ انرژی داخلی یک مول گـاز در دمای صفر درجهٔ سلزیـوس (۲۷۳°K) پیدا کنید. آیا این انرژی به ماهیت گاز بستگی دارد؟ چرا؟

۵۱.۹ تغییر انرژی داخلی یک مول گازکامل را هنگامی که دمای‌آن از ۰°C به ۱۰۰°C می‌رسد پیدا کنید. آیا لازم است چگونگی تغییر حجم و فشار گاز را نیز مشخص کنیم؟

۵۲.۹ فرایندی که در مسئلهٔ پیش بدان اشاره شد درحجم ثابت انجام می‌گیرد. (الف) کار انجام یـافته به وسیلهٔ گاز چقدر است؟ (ب) گرمای جذب شده چقدر است؟

۵۳.۹ مسئلهٔ قبل را هنگامی که فرایند ذکر شده درمسئلهٔ ۵۱.۹ درفشار ثابت صورت گرفته باشد از نو حل کنید.

۵۴.۹ ثابت C را که در معادلهٔ (۵۱.۹)، مربوط به کار انبساط یک گاز در دمای ثابت، ظاهر می‌شود مشخص کنید. (الف) کار انجام گرفته توسط یک مول گاز کامل را هنگامی که حجم آن در دمای ثابت ۰°C دو برابر می‌شود حساب کنید. (ب) تغییر انرژی داخلی و گرمای جذب شده را حساب کنید.

۵۵.۹ ثابت کنید اگـر انرژی پتانسیل بر هم کنش بین دو ذره برابر $E_p = -Cr_{۱۲}^{-n}$ باشد، داریم

$$\mathbf{r}_{۱۲} \cdot \mathbf{F}_{۱۲} = nE_p.$$

[راهنمایی: ذرهٔ ۱ را به‌عنوان مبدأ مختصات انتخاب‌کنید ومطالب بخش ۱۳.۷ را به‌کار ببرید.]

۵۶.۹ از نتایج مسئلهٔ پیش استفاده کنید و قضیهٔ ویریال، معـادلهٔ (۵۶.۹)، را بـه صورت زیر بنویسید:

$$E_{k,\ \mathrm{ave}} = -\frac{۱}{۲}[\textstyle\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i + nE_p]_{\mathrm{ave}}.$$

در این رابطه E_p مربوط به انرژی پتانسیل داخلی کل دستگاه است. توجه داشته باشید که اگـر دستگاه منزوی باشد (یعنی هیچ نیروی خارجی روی آن اثـر نکند) خواهیم داشت

1. Loschmidt number

$E_{k,\text{ave}} = -E_{p,\text{ave}}/۲$. نتیجهٔ اخیر را با معادلهٔ (۴۹.۸) مقایسه کنید.

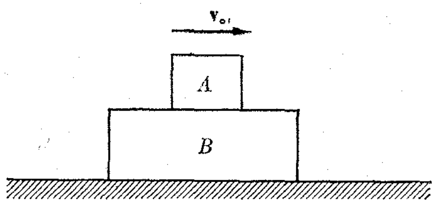
۵۷.۹. فرض کنید کـه نیروهای گـرانشی جاذبـه هستند و از قانون عکس مجذور پیروی می‌کنند (به‌فصل ۱۳ مراجعه‌کنید)، به‌گونه‌ای که انرژی پتانسیل کل منفی و ۱ $= n$ است. با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۵۶.۹ ثابت کنید که (الف) انرژی کـل یک دستگاه منزوی منفی است؛ (ب) اگـر دستگـاه اتلاف انرژی داشته باشد (معمولا براثر تابش)، انرژی پتانسیل باید کاهش یابد؛ (ج) در نتیجه، انرژی جنبشی دستگاه افزایش می‌یابـد و موجب بالا رفتن دمای آن می‌شود. (این نتیجه‌ها دراخترفیزیک از اهمیت زیادی برخوردارند.)

۵۸.۹. امکان استفاده از قضیهٔ ویریال را درمورد دستگاهی که درآن نیروهای داخلی دافعه هستند مورد مطالعه قرار دهید. فرض کنید که انرژی پتانسیل بین دو ذره برابراست با

$$E_p = +Cr_{۱۲}^{-n}$$

۵۹.۹. جسمی به جرم $۱۰\ \text{kg}$ با سرعت $۳\ \text{ms}^{-۱}$ روی یک سطح افقی لیز می‌خورد، تا آنجایی که نیروهای مالش آن را از حرکت باز می‌دارند. مقدار انرژی را که بـه حرکت داخلی مولکولی جسم و سطح منتقل شده‌است، برحسب ژول وکالری بیان کنید.آیا می‌توان گفت که این انرژی به صورت گرما انتقال یافته است؟

۶۰.۹. در شکل ۳۴.۹ قطعات A و B دارای جرمهای $m_۱$ و $m_۲$ هستند. بین A و B یک نیروی مالش به بزرگی F وجود دارد، ولی B روی یک سطح افقی بدون مالش لیزمی‌خورد. درآغاز A با سرعت $v_\circ$ حرکت می‌کند در حالی که B ساکن است. اگر هیچ نیروی دیگری روی دستگاه اثر نکند، حرکت A کندتر می‌شود و B سرعت می‌گیرد تا جایی که دوجسم با سرعت یکسان v حرکت کنند. (الف) قبل از اینکه این امر اتفاق بیفتد A وB نسبت به سطح افقی چه مسافتی را می‌پیمایند؟ تغییر انرژی جنبشی دستگاه برحسب مسافت پیموده شـده به وسیلهٔ A نسبت به B، چقدر است؟ (ج) اندازه حرکت کل چه وضعی پیدا می‌کند؟



شکل ۳۴.۹

۶۱.۹. سطح مقطع یک لولهٔ افقی در یک ناحیه $۱۵\ \text{cm}^۲$ و در ناحیهٔ دیگری $۵\ \text{cm}^۲$ است. سرعت آب در ناحیهٔ اول $۵\ \text{ms}^{-۱}$ و فشار در ناحیهٔ دوم برابر $۲ \times ۱۰^۵ \text{Nm}^{-۲}$ است. (الف) سرعت جریان آب را در ناحیهٔ دوم و فشار را در ناحیهٔ اول را پیـدا کنـید. (ب) مقدارآبی که در ۵ دقیقه از یک سطح مقطع می‌گذرد چقـدر است؟ (ج) انرژی کل را برای هر کیلوگرم آب حساب کنید.

۶۲.۹. مسئلهٔ پیش را در حالتی کـه لوله کج باشد و مقطع دوم $۲\ \text{m}$ بالاتر از مقطع اول

قرارداد از نو حل کنید.

۶۳.۹. تحقیق کنید که معادلهٔ حرکت یک شاره به صورت برداری به شکل زیر است:

$$\frac{\rho d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \mathbf{f}_e.$$

۶۴.۹. اگرسوراخی درظرفی وجود داشته باشد وسطح آبگون ظرف ۲ m بالاترازسوراخ باشد، ثابت کنید که سرعت خروج آبگون از سوراخ برابر است با $v = \sqrt{۲gh}$. ظرفی به‌شکل استوانه به قطر ۱۰٫۰ m وبلندی ۲۰٫۰ m را درنظر بگیرید. سوراخی به‌مساحت $\text{۱ cm}^۲$ درقاعدهٔ استوانه وجود دارد. آب به‌میزان $۱٫۴ \times ۱۰^{-۴}\text{m}^۳\text{s}^{-۱}$ به‌داخل ظرف جریان دارد. (الف) تعیین کنید آب تا چه ارتفاعی در ظرف بالا می‌رود. (ب) بعد ازاینکه آب به این ارتفاع رسید، ورود آب به داخل ظرف متوقف می‌شود. زمانی را کـه طول می‌کشد تا ظرف خالی شود پیدا کنید.

۶۵.۹. با به کار بردن معادلهٔ حرکت به دست آمده در مسئلهٔ ۶۳.۹، ثابت کنید که در یک شارهٔ تراکم پذیر، قضیهٔ برنولی به صورت

$$W = \left(\frac{۱}{۲}v_۲^۲ + gz_۲\right) - \left(\frac{۱}{۲}v_۱^۲ + gz_۱\right) + \int_۱^۲ \frac{dp}{\rho}$$

درمی‌آید. W کاری است‌که نیروهای دیگر، علاوه بر نیروی گرانش، روی واحد جرم شاره انجام می‌دهند. [راهنمایی: $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ نیروی خارجی وارد بر واحد حجم را به‌نیروی $-\rho g\mathbf{u}_z$، مربوط به وزن، و نیروی دیگری که می‌تواند روی شاره اثر کند، تجزیه کنید، سپس معادلهٔ حرکت برآیند را به ρ تقسیم کنید و به‌طور اسکالر در $\mathbf{v}dt = d\mathbf{r}$ ضرب کنید. توجه داشته باشید که $(\operatorname{grad} p) \cdot d\mathbf{r} = dp$ است.]

۶۶.۹. استوانه‌ای به بلندی h و سطح قاعدهٔ A به طور قایم در داخل شاره‌ای به چگالی ρ_f شناور است. بنا به معادلهٔ (۶۹.۹) فشارشاره با رابطهٔ $p = p_\circ - \rho_f gz$ بیان می‌شود. ثابت کنید که نیروی کل مؤثر روی استوانه در راستای پایین بـه بالا ناشی از فشار شاره، برابر است با $V\rho_f g$، که در اینجا V حجم استوانه است. این نتیجه را در مورد جسمی که دارای شـکل مشخصی نیست تعمیم دهید. هر جسم را می‌توان بـه استوانه‌های جزئی قایم تقسیم کرد. (این نتیجه اصل ارشمیدوس[1] را تشکیل می‌دهد و نیرو بـه نام نیروی شناوری خوانده می‌شود).

۶۷.۹. بنا به معادلهٔ (۶۲۰۹)، ثابت کنید که اگر دمای گـاز کاملی ثابت باقی بماند داریم $PV = \text{const}$ یا $P_۱V_۱ = P_۲V_۲$. این نتیجه بـه نام قانون بویل معروف است. همچنین ثابت کنید کـه اگـر فشـار ثابت باقی بمانـد بـه دست می‌آیـد $V/T = \text{const}$ یا $V_۱/T_۱ = V_۲/T_۲$. این نتیجه به‌نام قانون شارل[2] شناخته شده است. بالاخره نشان دهید

1. Archimedes' principle 2. Charles' law

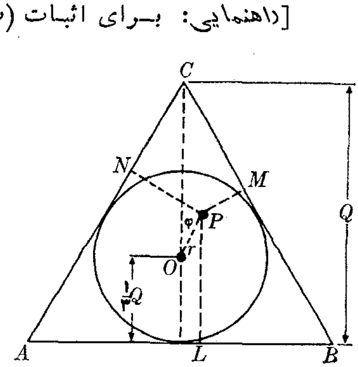
که اگر حجم ثابت باقی بماند، داریم $p/T = \text{const}$ یا $p_۱/T_۱ = p_۲/T_۲$. این نتیجه قانون گی لوساک[1] نامیده شده است. این قانونها مدتها بیش از اینکه مجموعاً در معادلهٔ (۶۲.۹) ترکیب شوند به طور تجربی به دست آمده بودند.

۶۸.۹. دستگاهی را با N ذرهٔ مشابه، هر یک بـه جـرم m، در نظر می‌گیریم (یک گـاز دارای چنین حالتی است). نشان دهید که انرژی جنبشی میانگین یک ذره نسبت به ناظری که مشاهده می‌کند مرکز جرم دستگاه با سرعت v_{CM} حرکت می‌کند، برابر است با انـرژی جنبشی میانگین ذره نسبت به چارچوب مرجع C به علاوهٔ $mv^۲_{\text{CM}}/۲$. [راهنمایی: ازرابطهٔ داده شده در معادلهٔ (۳۸.۹) استفاده کنید.]

۶۹.۹. فشار یک گاز با رابطهٔ $p = \rho(RT/M)$ به چگـالی آن مربوط می‌شود، که در آن M جرم مولکولی درمقیاس اتمی‌است (به مسئلهٔ ۴۷.۹ مراجعه کنید). (الف) با به کار بردن نتیجهٔ بخش ۱۳.۹، نشان‌دهید که اگر گـازی در حال تعـادل باشد، فشارآن نسبت به ارتفـاع مطـابق رابطهٔ $p = p_۰ e^{-(Mg/RT)z}$ تغییر می‌کند. ایـن رابطه را گـاهی معادلهٔ توزیع جو[2] می‌نامند، و ازآن می‌توان برای برآورد تغییرات فشارجو با ارتفاع استفاده کرد. (ب) ثابت کنید که برای ارتفاعات کم، این رابطه به مقدارداده شده در پایان بخش ۱۴.۹ برای یک شارهٔ غیر قابل تراکم تبدیل می‌شود.

۷۰.۹. بمبی هنگام انفجار بـه سه قطعهٔ برابر هـر یک به جرم m تقسیم می‌شود. در این انفجارانرژی Q آزاد می‌شود. دراین حالت، قانونهای بقای اندازه حرکت وانرژی، اندازه حرکت و انرژی هر یک از قطعه‌ها را به طور منحصر به فرد مشخص نمی‌کنند. با ارجاع فرایند به چارچوب مرجع C، ثابت کنید کـه (الف) انرژی جنبشی قطعات را می‌توان با فاصله‌های نقطه‌ای مانند P ازاضلاع یک مثلث متساوی الاضلاع به ارتفاع Q نمایش داد؛ (ب) بقای اندازه حرکت ایجاب می‌کند که نقطهٔ P در داخل دایرهٔ محاطی مثلث (به شعاع $Q/۳$) قرار گیرد. این طـرز نمایش نمودار دالیتز[3] نامیده می‌شود (شکل ۳۵.۹)، و به‌طور گسترده درتوصیف واپاشی یک ذرهٔ بنیادی به سه قطعه به‌کار می‌رود.

[راهنمایی: بـرای اثبات (ب) توجه داشته باشید کـه در چارچوب C انـدازه



شکل ۳۵.۹

1. Gay - Lussac's law 2. barometric equation 3. Dalitz diagram

حرکت کل برابر صفر است و در نتیجه $p_۱ + p_۲ \geqslant p_۳$ می‌باشد. همچنین می‌توان سه انرژی را به صورت

$$E_{k,\,۱} = PN = \frac{۱}{۳}Q + r\cos\left(\varphi - \frac{۲\pi}{۳}\right)$$

$$E_{k,\,۲} = PM = \frac{۱}{۳}Q + r\cos\left(\varphi + \frac{۲\pi}{۳}\right)$$

$$E_{k,\,۳} = PL = \frac{۱}{۳}Q + r\cos\varphi$$

نوشت.]

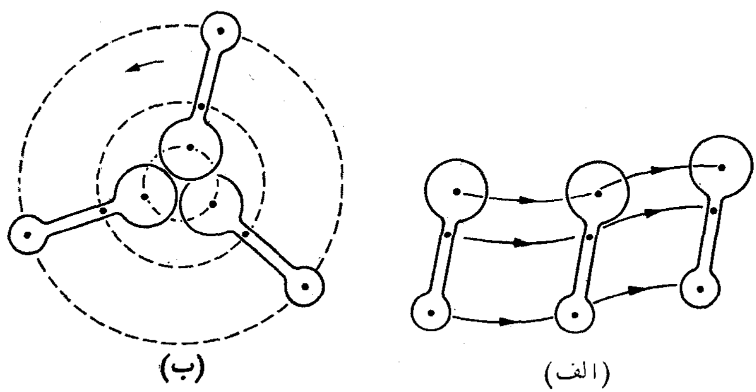
۱۰

دینامیک جسم سخت

۱.۱۰ مقدمه

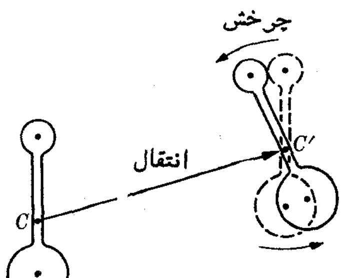
یک مورد خاص و مهم دستگاههای متشکل از ذرات زیاد، جسم سخت است، یعنی جسمی که هنگام وارد شدن نیرو یا یک گشتاور نیرو، فاصلهٔ بین ذرات تشکیل دهندهٔ آن تغییر نمی‌کند. بنابراین جسم سخت هنگام حرکت شکل خود را حفظ می‌کند.

می‌توان در یک جسم سخت دو نوع حرکت تشخیص داد: حرکت انتقالی، و آن وقتی است که همهٔ ذرات مسیرهای موازی می‌پیمایند بگونه‌ای که خطهایی که دو نقطهٔ دلخواه از جسم را به هم متصل می‌کنند همشه موازی وضع اولیه باقی می‌مانند (شکل ۱.۱۰ الف). دیگری حرکت چرخشی است دور یک محور، و آن هنگامی است که ذرات جسم دور یک خط که محور چرخش خوانده می‌شود، دایره‌هایی رسم می‌کنند (شکل ۱.۱۰ ب). محور می‌تواند ثابت باشد، یا در جریان حرکت راستایش نسبت به جسم تغییر کند.



شکل ۱.۱۰. حرکت یک جسم سخت: (الف) حرکت انتقالی، (ب) حرکت چرخشی.

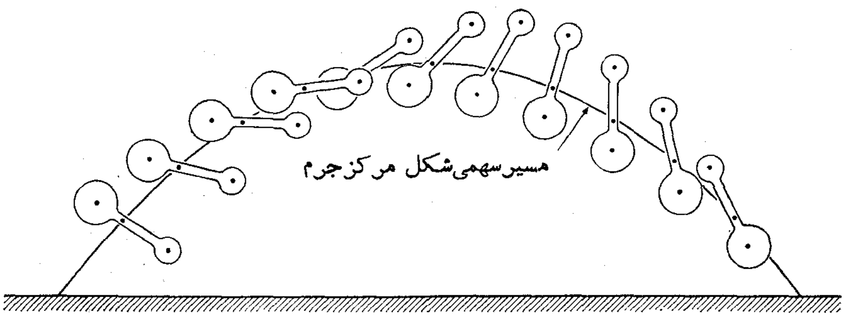
در حالت کلی، حرکت یک جسم سخت را می‌توان ترکیبی از یک انتقال و یک چرخش در نظر گرفت. یعنی اینکه، همیشه امکان دارد چارچوب مرجعی پیدا کرد که دارای حرکت انتقالی بدون چرخش باشد، و در آن حرکت جسم منحصراً چرخشی به نظر



شکل ۲.۱۰. حرکت کلی یک جسم سخت

برسد. به عنوان مثال، درشکل ۲.۱۰، حرکت جسم سختی را که از وضع ۱ به‌وضع ۲ می‌رسد، می‌توان یک انتقال و یک چرخش در نظر گرفت که اولی با جابجایی CC' نمایش داده می‌شود که مرکز جرم را در دو حالت به هم وصل می‌کند، و دومی چرخش دور محوری که از مرکز جرم C' می‌گذرد.

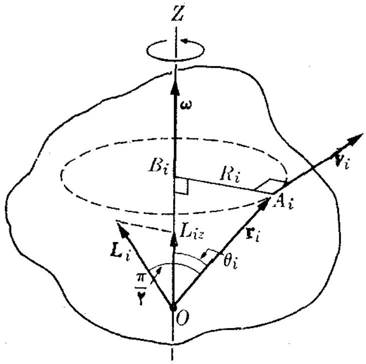
بنا به معادلهٔ (۹.۹)، $M\, d\mathbf{v}_{\text{CM}}/dt = \mathbf{F}_{\text{ext}}$، حرکت مرکز جرم معادل با حرکت یک ذرهٔ تنها است که جرم آن برابر جرم تمام جسم سخت است و بر آن نیرویی مساوی با برآیند نیروهای خارجی وارد بر جسم اثر می‌کند. این حرکت را می‌توان مطابق همان روشهایی که در فصل ۷ در مورد دینامیک یک ذره شرح داده شد، تجزیه و تحلیل کرد، بنا براین به تکنیک ویژه‌ای نیاز ندارد. در این فصل می‌خواهیم حرکت چرخشی یک جسم سخت را دور محوری که از نقطهٔ ثابتی در یک دستگاه لخت، یا از مرکز جرم جسم می‌گذرد مورد مطالعه قرار دهیم. درحالت اول، برای بررسی حرکت ازمعادلهٔ (۱۹.۹)، $d\mathbf{L}/dt = \boldsymbol{\tau}$، استفاده می‌کنیم (که در آن $\mathbf{L}$ و $\boldsymbol{\tau}$ هر دو نسبت به نقطهٔ ثابت محاسبه می‌شوند)، در صورتی‌که در حالت دوم باید از معادلهٔ (۲۵.۹)، $d\mathbf{L}_{\text{CM}}/dt = \boldsymbol{\tau}_{\text{CM}}$ استفاده کرد (شکل ۳.۱۰).



شکل ۳.۱۰. حرکت یک جسم سخت بر اثر نیروی گرانی. مرکز جرم یک مسیر سهمی را طی می‌کند که مربوط به حرکت ذره‌ای است به جرم M که تحت تأثیر نیروی Mg قرار دارد، در حالی‌که جسم حول CM می‌چرخد. چون نیروی وزن به مرکز جرم اثر می‌کند، گشتاور آن نسبت به این نقطه برابر صفر است و اندازه حرکت زاویه‌ای جسم نسبت به CM در مدت حرکت ثابت می‌ماند.

۲.۱۰ اندازه حرکت زاویه‌ای یک جسم سخت

جسم سختی را که با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ دور محوری مانند Z می‌چرخد در نظر می‌گیریم (شکل ۴.۱۰). هر نقطه از جسم دایره‌ای رسم می‌کند که مرکز آن روی محور Z قرار دارد. به عنوان مثال، نقطهٔ A_i دایره‌ای به شعاع $R_i = A_i B_i$ را با سرعت $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ می‌پیماید که در آن $\mathbf{r}_i$ بردار مکان نقطهٔ A_i نسبت به مبدأ O است. (مبدأ را باید یک نقطهٔ ثابت در



شکل ۴.۱۰. اندازه حرکت زاویه‌ای یک جسم سخت چرخان

چارچوب لخت یا مرکز جرم جسم انتخاب کرد). بنا به معادلهٔ (۴۸.۵)، بـزرگـی سرعت برابر است با

$$v_i = \omega r_i \sin\theta_i = \omega R_i.$$

توجه‌داشته باشید که نوشتیم ω، و نه ω_i، زیرا سرعت زاویه‌ای برای کلیهٔ نقاط جسم سخت یکسان است. اندازه حرکت زاویه‌ای ذرهٔ A_i نسبت به مبدأ O برابر است با

$$\mathbf{L}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$$

و راستای آن عمود است بـر سطح حاصل از بردارهای $\mathbf{r}_i$ و $\mathbf{v}_i$، و در صفحه‌ای که از $\mathbf{r}_i$ و محور Z می‌گذرد قرار دارد؛ بنا بر ایـن با محور چرخش Z زاویهٔ $\pi/۲ - \theta_i$ می‌سازد. بزرگی بردار $\mathbf{L}_i$ برابر است با $m_i r_i v_i$ و تصویر آن روی خطی موازی با محور Z برابر می‌شود با

$$\begin{aligned} L_{iz} &= (m_i v_i r_i)\cos(\pi/۲ - \theta_i) \\ &= m_i (r_i \sin\theta_i)(\omega R_i) = m_i R_i^۲ \omega. \end{aligned}$$

این نتیجه هم ارز معادلهٔ (۳۳.۷) است که برای ذره‌ای که روی یک دایره حرکت می‌کند به دست آوردیم. تصویر اندازه حرکت زاویـه‌ای کل جسم در حرکت چـرخشی آن روی محور Z برابر است با

$$\begin{aligned} L_z &= L_{۱z} + L_{۲z} + L_{۳z} + \cdots = \textstyle\sum_i L_{iz} \\ &= (m_۱ R_۱^۲ + m_۲ R_۲^۲ + m_۳ R_۳^۲ + \cdots)\omega = (\textstyle\sum_i m_i R_i^۲)\omega. \qquad (۱.۱۰) \end{aligned}$$

کمیت

$$I = m_۱ R_۱^۲ + m_۲ R_۲^۲ + m_۳ R_۳^۲ + \cdots = \textstyle\sum_i m_i R_i^۲ \qquad (۲.۱۹)$$

گشتاور لختی[1] جسم سخت نسبت به محور چـرخش Z نامیده می‌شود و مقدار آن از جمع

1. moment of inertia

حاصل‌ضربهای جرم هر ذره در مجذور فاصله‌اش از محور به دست می‌آید. گشتاور لختی کمیت بسیار مهمی است که در بیشتر روابط مربوط به‌حرکت چرخشی یک جسم لخت ظاهر می‌شود. بنا بر این معادلهٔ (۱۰۱۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

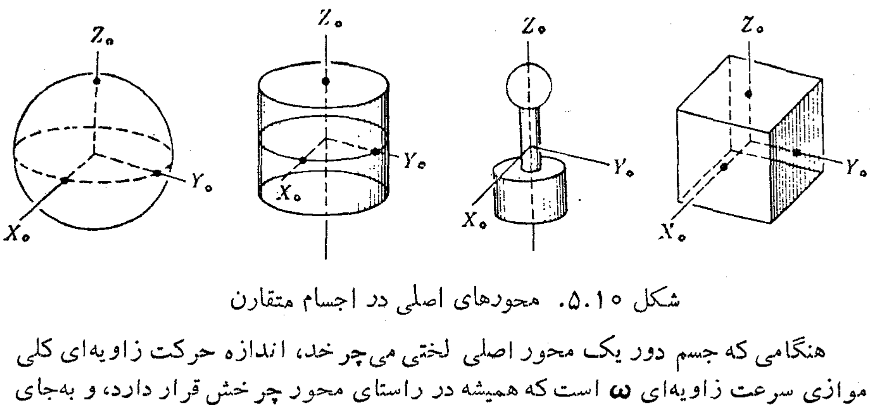
$$L_z = I\omega. \qquad (۳.۱۰)$$

اندازه حرکت زاویه‌ای کل یک جسم سخت برابر است با

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 + \dots = \sum_i \mathbf{L}_i$$

و در حالت کلی این بردار موازی با محور چرخش نیست، زیرا قبلاً گفتیم که تک تک اندازه حرکتهای زاویه‌ای $\mathbf{L}_i$ که در جمع بالا وارد می‌شوند موازی محور نیستند.

در اینجا ممکن است برای دانشجو این سؤال مطرح شود که آیا برای هر جسم سخت محور چرخشی وجود دارد که اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به آن موازی این محور باشد؟ پاسخ این سؤال مثبت است. می‌توان ثابت کرد که برای هر جسمی، هر شکلی که داشته باشد، سه راستای عمود بر هم وجود دارند که اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به‌آنها موازی محور چرخش است. این راستاها محورهای اصلی لختی[1] خوانده می‌شوند. گشتاورهای لختی مربوط به‌این محورها، گشتاورهای لختی اصلی[2] نام دارند و با I_1، I_2 و I_3 نشان داده می‌شوند. ما دراینجا محورهای اصلی‌را با $X_\circ Y_\circ Z_\circ$ نشان می‌دهیم؛ این محورها یک چارچوب مرجع متصل به جسم را تشکیل می‌دهند، بنا براین در حالت کلی نسبت به ناظر در چرخش هستند. هنگامی که جسم دارای نوعی تقارن باشد، محورهای اصلی با بعضی از محورهای تقارن منطبق می‌شوند. به‌عنوان مثال، در یک کره هر محوری که از مرکز آن بگذرد یک محور اصلی است. در یک استوانه، و در حالت کلی برای تمام اجسامی که تقارن استوانه‌ای دارند، محور تقارن و نیز کلیه محورهای عمود برمحور تقارن، محورهای اصلی را تشکیل می‌دهند. برای یک مکعب مستطیل، سه محور اصلی بر رویه‌ها عمودند و از مرکز جسم می‌گذرند. این محورها در شکل ۵.۱۰ نشان داده شده‌اند.



شکل ۵.۱۰. محورهای اصلی در اجسام متقارن

هنگامی که جسم دور یک محور اصلی لختی می‌چرخد، اندازه حرکت زاویه‌ای کلی $\mathbf{L}$ موازی سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ است که همیشه در راستای محور چرخش قرار دارد، و به‌جای معادلهٔ اسکالر (۳.۱۰) که برای تصویرهای $\mathbf{L}$ روی محور Z معتبر است، می‌توان رابطهٔ

1. principal axes of inertia 2. principal moments of inertia

برداری زیر را نوشت:

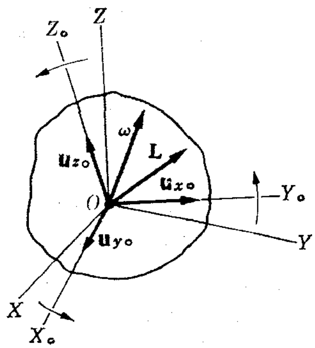
$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \qquad (۴.۱۰)$$

که در آن I گشتاور لختی اصلی مربوطه است. بر این نکته تأکید می‌کنیم که این رابطهٔ برداری تنها برای چرخش دور محور اصلی لختی اعتبار دارد.

در حالت کلیتر، در چرخش یک جسم سخت دور یک محور اختیاری، می‌توان اندازه حرکت زاویه‌ای $\mathbf{L}$ را نسبت به محورهای اصلی لختی متحرک $X_\circ Y_\circ Z_\circ$ (شکل ۶.۱۰) به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{L} = \mathbf{u}_{x_\circ} I_1 \omega_{x_\circ} + \mathbf{u}_{y_\circ} I_2 \omega_{y_\circ} + \mathbf{u}_{z_\circ} I_3 \omega_{z_\circ} \qquad (۵.۱۰)$$

دراین رابطه $\mathbf{u}_{x_\circ}$، $\mathbf{u}_{y_\circ}$ و $\mathbf{u}_{z_\circ}$ بردارهای یکا در راستاهای $X_\circ$، $Y_\circ$ و $Z_\circ$، و $\omega_{x_\circ}$، $\omega_{y_\circ}$ و $\omega_{z_\circ}$ تصاویر $\boldsymbol{\omega}$ روی همین محورها هستند. دراین حالت، چنانکه قبلاً گفتیم، $\mathbf{L}$ و $\boldsymbol{\omega}$ در راستاهای مختلفی قرار دارند. برتری استفاده از این رابطه برای $\mathbf{L}$ دراین است که I_1، I_2 و I_3 کمیتهای



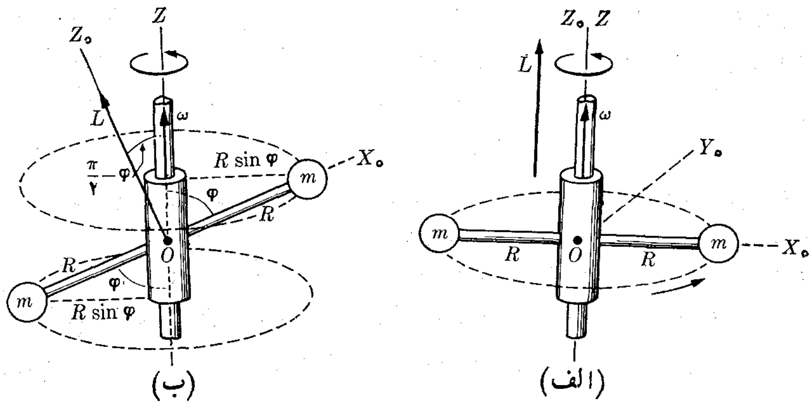
شکل ۶.۱۰. محورهای متصل به جسم ومحورهای ثابت درآزمایشگاه

ثابتی هستند که می‌توان برای هر جسم سختی مقادیرآنها را به‌دست آورد. با وجود این، چون محورهای $\mathbf{u}_{x_\circ}$، $\mathbf{u}_{y_\circ}$ و $\mathbf{u}_{z_\circ}$ همراه جسم می‌چرخند، راستای آنها لزوماً ثابت نیست. دانشجو می‌تواند بررسی کند که وقتی چرخش جسم به دور یک محور اصلی باشد (دو تا از تصویرهای $\boldsymbol{\omega}$ برابر صفر باشند)، معادلهٔ (۵.۱۰) به معادلهٔ (۴.۱۰) تبدیل می‌شود.

مثال ۱.۱۰. اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاهی را که در شکل ۷.۱۰ نشان داده شده است، حساب کنید. این دستگاه از دو کرهٔ یکسان به جرم m تشکیل شده است که بر بازوهای سوار بر پایه‌ای متصل‌اند و پایه می‌تواند حول محور Z ها بچرخد. از جرم بازوها صرف نظر می‌شود.

حل: شکل ۷.۱۰ (الف) حالتی را نشان می‌دهد که در آن بازوها بر محور چرخش عمودند. هر کره دایره‌ای به شعاع R را با سرعت $v = R\omega$ می‌پیماید. در این حالت، اندازه حرکت زاویه‌ای هرکره نسبت به نقطهٔ O برابر $mR^2\omega$ است و در راستای محور Zها

قرار دارد (به شکل ۲۲۰۷ مراجعه کنید). بنا بر این اندازه حرکت زاویه‌ای‌کل دستگاه برابر $L = ۲mR^۲\omega$ و در راستای محور Z هاست، که آن را می‌توان به صورت برداری $\mathbf{L} = ۲mR^۲\boldsymbol{\omega}$ نوشت، یعنی دستگاه دور یک محور اصلی می‌چرخد. در واقع، محورهای



شکل ۷.۱۰

اصلی آنهایی هستند که درشکل نشان داده شده‌اند و $Z_\circ$ بر Z منطبق است. (به دلیل متقارن بودن دستگاه هرمحورعمود بر $X_\circ$ یک محور اصلی است.) توجه داشته باشید که $I = ۲mR^۲$ گشتاور لختی اصلی دور محور $Z_\circ$ است و رابطهٔ $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ در این حالت برقرار است.

شکل ۷.۱۰ (ب) حالتی را نشان می‌دهد که دو بازو با محور چرخش Z زاویهٔ φ می‌سازند، به گونه‌ای که $\boldsymbol{\omega}$ با محور اصلی موازی نیست. شعاع دایره‌ای که هر کره رسم می‌کند برابر است با $R\sin\varphi$، در نتیجه بزرگی سرعت هرکدام برابر $(R\sin\varphi)\omega$ است. در این صورت اندازه حرکت زاویه‌ای هر کره نسبت به O برابر است با $mR(R\omega\sin\varphi)$ و بر خط واصل دو کره عمود است و در صفحهٔ Z و $X_\circ$ قرار دارد. اندازه حرکت زاویه‌ای کل برابر است با مجموع آنها، یعنی $(۲mR^۲\sin\varphi)\omega$ و با محور چرخش زاویهٔ $\pi/۲ - \varphi$ می‌سازد. بدین طریق، در این حالت دستگاه دور محور اصلی نمی‌چرخد، همچنانکه از شکل هندسی دستگاه می‌توان مشاهده کرد. دقت کنید که بردار $\mathbf{L}$ با همان سرعت دستگاه دور محور Z ها می‌چرخد (یا چنانکه گاهی گفته‌می‌شود حرکت تقدیمی[1] دارد).

تصویر $\mathbf{L}$ روی راستای محور چرخش برابر است با

$$L_z = L\cos(\pi/۲ - \varphi) = (۲mR\sin^۲\varphi)\omega.$$

این رابطه با معادلهٔ (۳.۱۰) تطبیق می‌کند زیرا $I = ۲m(R\sin\varphi)^۲$ گشتاور لختی دستگاه نسبت به محور Zها ست.

1. precession

۳.۱۰ محاسبهٔ گشتاور لختی

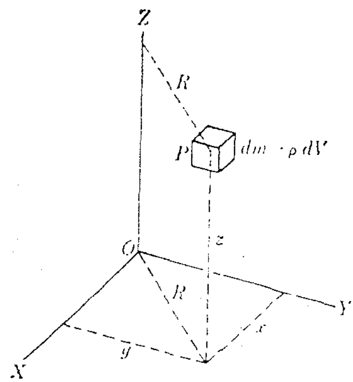
اکنون در مورد روشهای محاسبهٔ گشتاور لختی گفتگو می‌کنیم، زیرا در جریان مطالعهٔ این فصل بارها به این کمیت بر خورد خواهیم کرد. ابتدا خاطرنشان می‌کنیم که یک جسم سخت از تعداد بسیار زیادی ذره تشکیل شده است، بــه گونه‌ای که در معادلهٔ (۲.۱۰) به جای جمع باید از انتگرال استفاده کرد: $I = \sum_i m_i R_i^2 = \int R^2 \, dm$؛ یا اگر ρ چگالی جسم باشد، بنا به معادلهٔ (۲.۲)، $dm = \rho dV$ است و داریم

$$I = \int \rho R^2 \, dV. \qquad (۶.۱۰)$$

اگر جسم همگن باشد، چگالی آن ثابت است، و به جای معادلهٔ (۶.۱۰) می‌تــوان نـوشت $I = \rho \int R^2 \, dV$. در این صورت انتگرال به یک سازهٔ هندسی تبدیل می‌شود، یعنی برای تمام اجسامی که دارای شکل و اندازهٔ یکسان باشند یکسان است. بنا به شکل ۸.۱۰ داریم $R^2 = x^2 + y^2$، در نتیجه گشتاور لختی نسبت به محور Z ها برابر است با

$$I_z = \int \rho \left(x^2 + y^2\right) dV. \qquad (۷.۱۰)$$

(توصیه می‌کنیم که دانشجو رابطه‌های مربوط به I_x و I_y را بنویسد).



شکل ۸.۱۰

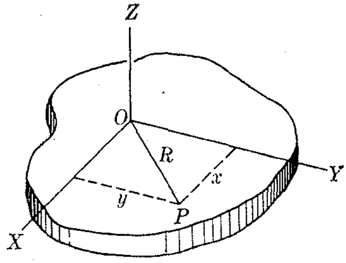
اگر جسم، چنانکه شکل ۹.۱۰ نشان می‌دهد، به صورت یک ورقهٔ نازک باشد، گشتاور لختی را نسبت به محورهای X و Y می‌توان به این صورت نوشت:

$$I_x = \int \rho y^2 dV \quad و \quad I_y = \int \rho x^2 \, dV$$

زیرا مختصهٔ Z اساساً برابر صفر است. مقایسهٔ این روابط با معادلهٔ (۷.۱۰) نشان می‌دهد که در این حالت

$$I_z = I_x + I_y.$$

این نتیجه تنها در مورد ورقه‌های نازک اعتبار دارد.

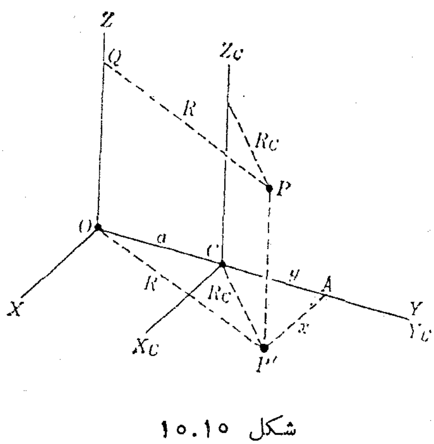


شکل ۹.۱۰

گشتاور لختی نسبت به محورهای موازی با فرمول ساده‌ای به هم مربوط می‌شوند. فرض‌کنیم Z یک محور اختیاری و Z_C محورموازی با Z باشد که از مرکزجرم جسم می‌گذرد (شکل ۱۰.۱۰). اگر a فاصلهٔ دو محورباشد، رابطهٔ زیر، که به قضیهٔ اشتاینر[5] معروف‌است،* بر قرار است:

$$I = I_C + Ma^{۲} \qquad (۸\cdot۱۰)$$

در اینجا I و I_C بترتیب گشتاور لختی جسم نسبت به محورهای Z و Z_C، و M جرم جسم است. برای اثبات این رابطه، محورهای X_C، Y_C و Z_C را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که مبدأ آنها در نقطهٔ C، مرکز جرم، و محور Y_C در صفحهٔ Z و Z_C قرار گیرد. محورهای XYZ را طوری انتخاب می‌کنیم که Y بر Y_C منطبق باشد. P یک نقطهٔ اختیاری از جسم M است. در این صورت، با توجه به اینکه، بنا به شکل ۱۰.۱۰، $P'A$ عمود بر Y_C و $P'A = x$، $CA = y$ و $OC = a$ است، داریم



شکل ۱۰.۱۰

5. Steiner's theorem

* این قضیه درکتابهای مأخذ فرانسوی به‌نام «قضیهٔ هویگنز» شناخته شده است. (م)

$$R_C^2 = x^2 + y^2$$
$$R^2 = x^2 + (y+a)^2$$
$$= x^2 + y^2 + 2ya + a^2$$
$$= R_C^2 + 2ya + a^2.$$

گشتاور لختی نسبت به محور Zها برابر است با

$$I = \sum mR^2 = \sum m(R_C^2 + 2ya + a^2)$$
$$= \sum mR_C^2 + 2a(\sum my) + a^2 \sum m.$$

جملهٔ اول گشتاور لختی I_C نسبت به محور Z_C و درجملهٔ آخر، $\sum m = M$ جرم کل جسم است. در نتیجه

$$I = I_C + 2a\sum my + Ma^2. \qquad (۹.۱۰)$$

برای محاسبهٔ جملهٔ میانی، یادآوری می‌کنیم که بنا به معادلهٔ (۲۱.۴)، مکان مرکز جرم چنین نوشته می‌شود $y_{\text{CM}} = \sum my / \sum m$. ولی در اینجا $y_{\text{CM}} = 0$ است، زیرا مرکز جرم بر مبدأ چارچوب $X_C Y_C Z_C$ منطبق است. بنا بر این داریم $\sum my = 0$ و معادلهٔ (۹.۱۰) به صورت معادلهٔ (۸.۱۰) در می‌آید، و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

گشتاور لختی را باید به صورت حاصل ضرب یکایی از جرم و مجذور یکایی از فاصله بیان‌کرد. بدین‌ترتیب دردستگاه یکاهای MKSC گشتاور لختی برحسب یکای m^2kg بیان می‌شود.

شعاع ژیراسیون[1] یک جسم با نماد K، کمیتی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I = MK^2 \quad \text{یا} \quad K = \sqrt{I/M} \qquad (۱۰.۱۰)$$

که در آن I گشتاور لختی و M جرم جسم است. K نمایش فاصله‌ای ازمحور است که اگر تمام جرم جسم در آنجا متمرکز شود گشتاور لختی تغییر نمی‌کند. K کمیت بسیار مفیدی است، زیرا آن را می‌توان برای اجسام همگن، تنها از روی شکل هندسی شان تعیین کرد. بنا براین برای K جدولی درست شده است که در محاسبهٔ گشتاور لختی بسیار کمک می‌کند. جدول ۱.۱۰ مجذور شعاع ژیراسیون را برای چند شکل به دست می‌دهد.

مثال ۲.۱۰. گشتاور لختی یک میلهٔ نازک همگن را نسبت به محوری که بر میله عمود است و (الف) از انتهای میله، (ب) از مرکز جرم میله می‌گذرد، حساب کنید.

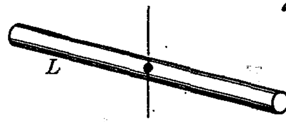
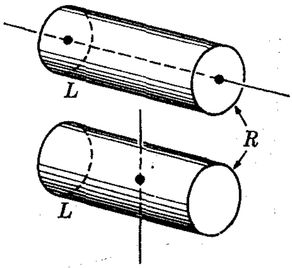
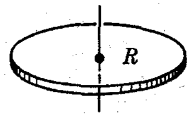
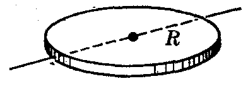
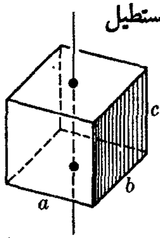
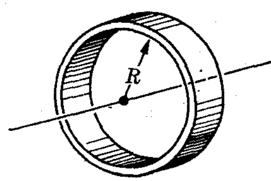
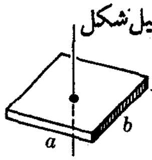
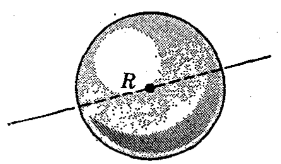
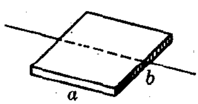
حل: (الف) فرض کنیم L طول میلهٔ AB و S سطح مقطع آن باشد، که خیلی کوچک فرض می‌شود (شکل ۱۱.۱۰). میله را به قطعات کوچک به طول dx تقسیم می‌کنیم. حجم هر قطعه برابر Sdx و فاصلهٔ هر جزء از محور y برابر $R = x$ می‌شود. با استفاده از معادلهٔ (۶.۱۰) و با توجه به اینکه چگالی ثابت است، می‌توان نوشت:

$$I_A = \int_0^L \rho x^2 (Sdx) = \rho S \int_0^L x^2\, dx = \rho S L^3/3$$

---

1. radius of gyration

جدول ۱۰.۱. شعاع ژیراسیون چند جسم با شکلهای هندسی ساده

محور	$K^۲$	محور	$K^۲$
میله 	$\frac{L^۲}{۱۲}$	استوانه 	$\frac{R^۲}{۲}$
دیسک 	$\frac{R^۲}{۲}$		$\frac{R^۲}{۴} + \frac{L^۲}{۱۲}$
	$\frac{R^۲}{۴}$	مکعب مستطیل 	$\frac{a^۲+b^۲}{۱۲}$
حلقه 	$R^۲$	ورقهٔ مستطیل شکل 	$\frac{a^۲+b^۲}{۱۲}$
کره 	$\frac{۲R^۲}{۵}$		$\frac{b^۲}{۱۲}$

چون SL برابر حجم میله و ρSL مساوی جرم آن می‌باشد، در نتیجه داریم

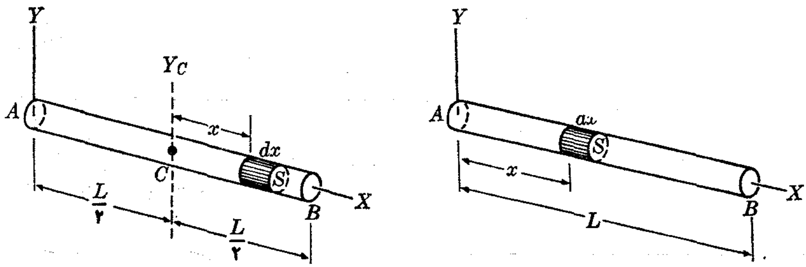
$$I_A = \frac{۱}{۳} M L^{۲}.$$

بـا مقایسهٔ این رابطه با معادلهٔ (۱۰.۱۰) شعاع ژیـراسیون برابر $K^۲ = L^۲/۳$ به دست می‌آید.

(ب) برای محاسبهٔ گشتاور لختی نسبت به محور Y_C که از C می‌گذرد، می‌تـوان با سه شیوهٔ متفاوت عمل کرد: یک شیوهٔ بسیار ساده این است که فرض کنیم میله بـه دو قسمت تقسیم شده است که هـر قسمت دارای جـرم $M/۲$ و طـول $L/۲$ می‌باشد و انتهای آنها

در نقطهٔ C با هم در تماس‌اند. در این صورت با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) برای میله به دست می‌آید

$$I_C = ۲\left(\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{۱}{۲}M\right)\left(\frac{۱}{۲}L\right)^۲ = \frac{۱}{۱۲}ML^۲.$$



شکل ۱۰.۱۱

روش دیگر این است که مثل قسمت (الف) عمل کنیم ولی انتگرال را بین $L/۲-$ و $L/۲+$ محاسبه کنیم، زیرا این بار مبدأ در مرکز میله قرار دارد. حل از این روش را به عهدهٔ دانشجو واگذار می‌کنیم. سومین روش به کار بردن قضیهٔ اشتاینر یا معادلهٔ (۸.۱۰) است. در این حالت نوشته می‌شود $I_A = I_C + M(L/۲)^۲$ زیرا $a = L/۲$ است. بنابراین داریم

$$I_C = I_A - \frac{۱}{۴}ML^۲ = \frac{۱}{۱۲}ML^۲.$$

مثال ۳.۱۰. گشتاور لختی یک دیسک همگن را نسبت به (الف) محوری عمود بر دیسک که از مرکز آن می‌گذرد، (ب) محوری‌که بریکی از قطرهای دیسک منطبق است، حساب کنید.

حل: (الف) تقارن شکل جسم ایجاب می‌کندکه جزء حجم را حلقه‌ای به‌شعاع r و پهنای dr انتخاب کنیم (شکل ۱۲.۱۰). بدین طریق، اگر h کلفتی دیسک باشد، حجم برابر است با $dV = (۲\pi r)(dr)\,h = ۲\pi\, hr\, dr$. همهٔ نقاط حلقه در فاصلهٔ r از محور Z قرار دارند. در نتیجه، با به‌کار بردن معادلهٔ (۶.۱۰) به‌دست می‌آید

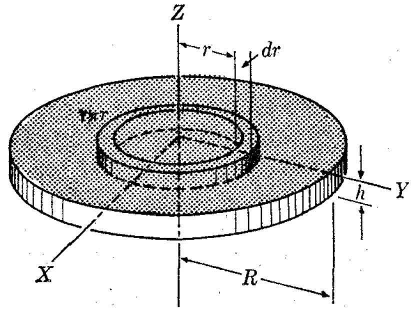
$$I = \int_۰^R \rho r^۲\,(۲\pi\, hr dr)$$

$$= ۲\pi\,\rho h \int_۰^R r^۳\, dr = \frac{۱}{۲}\pi\rho\, hR^۴.$$

چون $\pi R^۲ h$ برابر حجم دیسک و $M = \rho(\pi R^۲ h)$ جرم کل دیسک می‌باشد، بنابر این

$$I = \frac{۱}{۲}MR^۲$$

و شعاع ژیراسیون برابر است با $K^۲ = R^۲/۲$.



شکل ۱۲.۱۰

(ب) برای به دست آوردن گشتاور لختی نسبت به محورهای X و Y می‌توان از انتگرال گیری مستقیم استفاده کرد (به عنوان جزء حجم می‌توان نوارهای موازی یا عمود بر محورهای مربوط را به کار برد) ولی تقارن مسئله امکان می‌دهد از شیوهٔ ساده‌تری استفاده شود. در این حالت، واضح است که $I_x = I_y$ و در نتیجه، بنا به فرمول ورقهٔ نازک، داریم $I_z = I_x + I_y = 2I_x$، و

$$I_x = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{4} MR^2.$$

۴.۱۰ معادلهٔ حرکت چرخشی یک جسم سخت

معادلهٔ (۲۱.۹) رابطه‌ای است بین اندازه حرکت زاویه‌ای کل دستگاه ذرات و گشتاور کل نیروهای وارد به ذرات، هرگاه این گشتاور و اندازه حرکت زاویه‌ای هر دو نسبت به نقطه‌ای محاسبه شوند که در یک دستگاه لخت ساکن است. به گفتهٔ دیگر،

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}. \qquad (۱۱.۱۰)$$

در این رابطه، $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i$ اندازه حرکت زاویه‌ای کل و $\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i$ گشتاور کل نیروهای خارجی است. بدیهی است این معادله برای یک جسم سخت، که مورد ویژه‌ای از دستگاه ذرات است نیز برقرار است. بنا بر این معادلهٔ (۱۱.۱۰) معادلهٔ اساسی برای بحث در حرکت چرخشی یک جسم را تشکیل می‌دهد. ابتدا این معادله را در مورد یک جسم سخت به کار می‌بریم که دور یک محور اصلی که یک نقطهٔ آن در یک دستگاه لخت ثابت است می‌چرخد. در این صورت، بنا به معادلهٔ (۴.۱۰) داریم $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$. گشتاور نیروهای خارجی $\boldsymbol{\tau}$ باید گشتاور نسبت به نقطهٔ ثابت محور اصلی باشد. بنابراین معادلهٔ (۱۱.۱۰) به صورت زیر در می‌آید:

$$d(I\boldsymbol{\omega})/dt = \boldsymbol{\tau} \qquad (۱۲.۱۰)$$

اگر محورها نسبت به جسم ثابت بمانند، گشتاور لختی ثابت می‌ماند، و خواهیم داشت

$$I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \quad \text{یا} \quad I\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\tau} \qquad (۱۳.۱۰)$$

که در آن $\alpha = d\omega/dt$ شتاب زاویه‌ای جسم است. مقایسهٔ معادله‌های (۱۲.۱۰) و (۱۳.۱۰) با معادله های (۱۴.۷) و (۱۵.۷) شباهت زیادی را بین چرخش یک جسم دور یک محور اصلی و حرکت یک ذره نشان می‌دهد. به جای جرم m گشتاور لختی I، به‌جای سرعت $\mathbf{v}$ سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$، به‌جای شتاب $\mathbf{a}$ شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$، و بالاخره به جای نیروی $\mathbf{F}$ گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ آمده است.

به عنوان مثال، اگر $\tau = 0$ باشد، معادلهٔ (۱۲.۱۰) نشان می‌دهد که $I\omega = \text{const}$ است؛ اگر I گشتاور لختی ثابت باشد $\boldsymbol{\omega}$ نیز ثابت می‌ماند، به گفتهٔ دیگر، اگر بر جسمی که دور یک محور اصلی می‌چرخد هیچگونه گشتاور نیروی خارجی اثر نکند سرعت زاویه‌ای آن ثابت خواهد بود.

بیان فوق‌را می‌توان قانون لختی درحرکت چرخشی درنظر گرفت. [هنگامی که گشتاور لختی متغیر باشد، وضعی که ممکن است برای یک جسم غیر سخت پیش بیاید، شرط $I\omega = \text{const}$ موجب می‌شود که اگر I افزایش (یا کاهش) پیداکند ω کاهش (یاافزایش) پیدا کند. این نتیجه کاربردهای متعددی دارد.]

در مورد جسمی که چرخش آن دور محور اصلی نیست، باز هم از معادلهٔ (۳.۱۰) داریم $dL_z/dt = \tau_z$، یا اگر سو و راستای محور نسبت به جسم ثابت باشد به‌گونه‌ای که I ثابت بماند، در این صورت به دست می‌آید

$$I\frac{d\omega}{dt} = \tau_z \qquad (۱۴.۱۰)$$

اختلاف این رابطه با معادلهٔ (۱۳.۱۰) در این است که τ_z تصویر گشتاور نیروهای خارجی روی محور چرخش است، نه گشتاور کل. در این حالت به غیر از مؤلفهٔ τ_z، ممکن است گشتاورهای دیگر نیز لازم باشند تا جسم را در یک وضع ثابت به محور چرخش نگه دارند (به مثال ۷.۱۰ مراجعه کنید).

وقتی که محور چرخش نقطهٔ ثابتی در یک دستگاه لخت ندارد، نمی‌توان معادلهٔ (۱۱.۱۰) را به‌کار برد، و باید اندازه حرکت زاویه‌ای و گشتاور نیرو را نسبت به مرکز جرم جسم حساب کرد. بنابر این، لازم می‌آید از معادلهٔ (۲۵.۹)، یا

$$\frac{d\mathbf{L}_{CM}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{CM} \qquad (۱۵.۱۰)$$

استفاده کنیم. اگر چرخش دور یک محور اصلی صورت بگیرد، این معادله به‌صورت زیر در می‌آید:

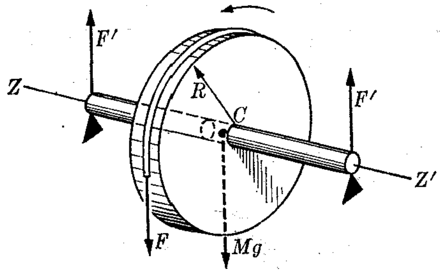
$$I_C\frac{d\omega}{dt} = \tau_{CM}$$

اگر $\tau_{CM} = 0$ باشد، یعنی حالتی‌که نیروی وارد بر جسم تنها وزن آن باشد، نتیجه می‌شود که $\boldsymbol{\omega}$ ثابت است (به شکل ۳.۱۰ مراجعه کنید).

مثال ۴.۱۰. دیسکی به‌شعاع $0.5\ \text{m}$ وجرم $20\ \text{kg}$ می‌تواند آزادانه دوریک محورافقی

که ازمرکز آن می‌گذرد بچرخد. به‌وسیلهٔ نخی که دور دیسک پیچیده است نیرویی برابر با ۹٫۸N به‌آن‌وارد می‌شود. شتاب‌زاویه‌ای وسرعت‌زاویه‌ای دیسک را بعداز ۲ ثانیه پیداکنید.

حل: از شکل ۱۳.۱۰ پیداست که تنها نیروهای خارجی وارد بر دیسک عبارتند از وزن آن Mg، نیروی کشش F به سمت پایین و F' نیروی تکیه‌گاههای محور چرخ. ZZ'



شکل ۱۳.۱۰

یک محوراصلی است. با محاسبهٔ گشتاور نیروها نسبت به‌مرکز جرم C، درمی‌یابیم که گشتاور نیروی وزن برابر صفر است. گشتاور کل نیروهای F' نیز برابر صفر است. بنابراین $\tau = FR$. با به‌کاربردن معادلهٔ (۱۴.۱۰) با $I = MR^۲/۲$، داریم $FR = (MR^۲/۲)\alpha$، یا $F = MR\alpha/۲$. از اینجا شتاب زاویه‌ای برابر می‌شود با

$$\alpha = \frac{۲F}{MR} = \frac{۲ \times (۹٫۸\,\mathrm{N})}{(۲۰\,kg)(۰٫۵\,\mathrm{m})} = ۱٫۹۶\ \mathrm{rads}^{-۲}$$

بنا به معادلهٔ (۵۴.۵)، دو ثانیه بعد از حرکت دیسک، سرعت زاویه‌ای آن برابر می‌شود با

$$\omega = \alpha t = (۱٫۹۶\ \mathrm{rads}^{-۲})\,(۲\mathrm{s}) = ۳٫۹۲\ \mathrm{rads}^{-۱}$$

چون مرکزجرم C ثابت است، شتاب آن برابر صفر می‌شود و باید داشته باشیم

$$۲F' - Mg - F = ۰ \quad \text{یا} \quad F' = ۱۰۲٫۹\ \mathrm{N}.$$

مثال ۵.۱۰. شتاب زاویه‌ای دستگاه نمایش داده شده در شکل ۱۴.۱۰ را، اگر جرم جسم آویزان ۱ kg باشد، پیداکنید. مشخصات دیسک همانهایی‌هستند که درمثال ۴.۱۰ داده‌شدند و محور ZZ' ثابت و یک محور اصلی است.

حل: چون جرم جسم ۱ kg است، وزن آن $mg = ۹٫۸\mathrm{N}$ می‌شود، یعنی بانیروی F در شکل ۱۳.۱۰ برابر است. بنابراین ممکن است کسی این حالت را مشابه حالت پیش در نظر بگیرد وانتظار داشته باشد که نتایج نیز یکی باشند. ولی چنین نیست! جرم m در حال افتادن نیروی کششی F را به‌سوی پایین روی دیسک وارد می‌کند و بنا به قانون کنش و واکنش، دیسک نیز یک نیروی کششی برابر با F ولی در سوی مخالف آن بر جرم m وارد می‌کند. چون جرم m با حرکت شتابدار پایین می‌آید، نیروی مؤثر کل روی آن نمی‌تواند

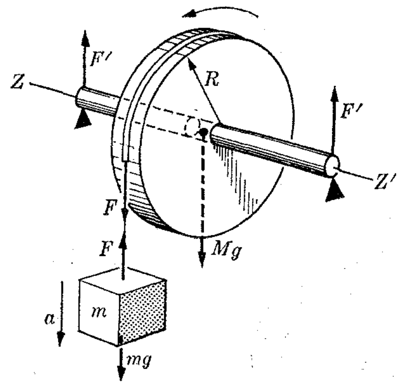
صفر باشد. بنابراین F برابر mg نیست، بلکه کوچکتر از آن است. در نتیجه به دیسک نیز گشتاور کوچکتری وارد می‌شود.

معادلهٔ حرکت جرم m عبارت است از

$$mg - F = ma = mR\alpha$$

که در آن از رابطهٔ $a = R\alpha$ استفاده شده است. معادلهٔ حرکت دیسک عبارت است از $I\alpha = FR$ یا $F = MR\alpha/۲$ (زیرا $I = MR^{۲}/۲$). با حذف F بین این دورابطه شتاب زاویه‌ای به دست می‌آید:

$$\alpha = \frac{mg}{(m + M/۲)\,R} = ۱٫۸\,\mathrm{rad\,s^{-۲}}.$$



شکل ۱۴.۱۰

این مقدار کوچکتر از نتیجهٔ مثال پیش است. شتاب m به سمت پایین و برابر است با

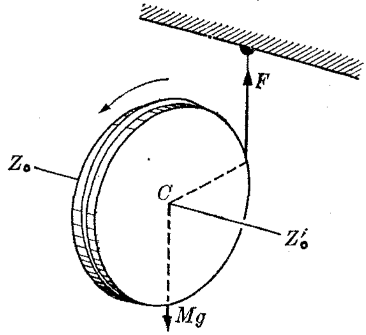
$$a = R\alpha = \frac{Mg}{m + M/۲} = ۰٫۹۰\,\mathrm{m\,s^{-۲}}.$$

a از $g = ۹٫۸۰\ \mathrm{m\,s^{-۲}}$، یعنی شتاب سقوط آزاد کوچکتر است. F' نیروی وارد ازطرف تکیه گاه را می‌توان مانند مثال پیش به دست آورد.

مثال ۶.۱۰. شتاب زاویه‌ای دیسک شکل ۱۵.۱۰ و شتاب به سمت پایین مرکز جرم آن را حساب کنید. مشخصات دیسک همانهایی هستند که در مثال ۴.۱۰ آمده‌اند.

حل: محور چرخش محور اصلی $Z_{\circ}Z'_{\circ}$ است. اختلاف این مثال با مثالهای قبلی در این است که در اینجا مرکز جرم ثابت نیست و حرکت دیسک به حرکت یک یو-یو شباهت دارد، و این بار باید معادلهٔ (۱۵.۱۰) را به کار برد. چرخش دیسک دور $Z_{\circ}Z'_{\circ}$ با معادلهٔ $I\alpha = RF$ نشان داده می‌شود، زیرا گشتاور نیروی وزن Mg نسبت به C برابر صفر است. در این صورت، با قرار دادن $I = MR^{۲}/۲$ (و بعد از ساده کردن نسبت به R)

می‌توان نوشت $F = MR\alpha/۲$.



شکل ۱۵.۱۰

شتاب حرکت سقوطی مرکز جرم برابر $a = R\alpha$ است، واگر توجه داشته باشیم که برآیند نیروهای خارجی برابر $Mg - F$ است، با استفاده ازمعادلهٔ (۹.۹)، داریم

$$Mg - F = Ma = MR\alpha.$$

با حذف F بین این معادله و معادلهٔ پیش، جرم M نیز حذف می‌شود و از معادلهٔ جدید به‌دست می‌آید $\alpha = ۲g/۳R = ۱۳٫۱۶ \text{ rads}^{-۲}$. شتاب به‌سمت پایین مرکز جرم جسم برابر است با $a = R\alpha = ۲g/۳ = ۶٫۵۳ \text{ ms}^{-۲}$، کـه ایـن شتاب کوچکتر از شتاب سقوط آزاد و نیز مستقل از ابعاد و جرم دیسک می‌باشد.

مثال ۷.۱۰. گشتاور نیروی لازم جهت به‌چرخش در آوردن دستگاه شکل ۷.۱۰ (ب) را با سرعت زاویـه‌ای ثابت حساب کنید.

حل: در این حالت، سرعت زاویه‌ای ω دور محور ثابت Z تغییر نمی‌کند یعنی $d\omega/dt = ۰$ است. از این فرض بلافاصله دو نتیجه به دست می‌آید: اول اینکه می‌دانیم که بزرگی اندازه حرکت زاویـه‌ای کـل $L = (۲mR^۲\sin\varphi)\,\omega$ و همچنین $L_z = (۲mR^۲\sin^۲\varphi)\,\omega$، تصویراندازه حرکت زاویه‌ای روی محور Z، ثابت باقی می‌مانند. دوم اینکه گشتاور نیرو نسبت به محـور Z ها یعنی $\tau_z = I\,d\omega/dt$، برابر صفر است. در نگاه نخست، ممکن است به‌نظر برسد که برای درحرکت نگه داشتن دستگاه نیازی به گشتاور نیرو وجود ندارد. ولی چنین نیست؛ اندازه حرکت زاویه‌ای $\mathbf{L}$ همراه دستگاه دورمحور Z ها می‌چرخد (همچنانکه در پایان مثال ۱.۱۰ گفتیم آن را حرکت تقدیمی می‌نامند) و گشتاور نیرویی بـرای ایجاد این تغییر راستای $\mathbf{L}$ لازم است. این وضع درست شبیه به‌چیزی است که در حرکت دایره‌ای یکنواخت به دست آوردیم: بزرگی سرعت ثابت است ولی برای تغییر راستای آن نیرویی لازم است.

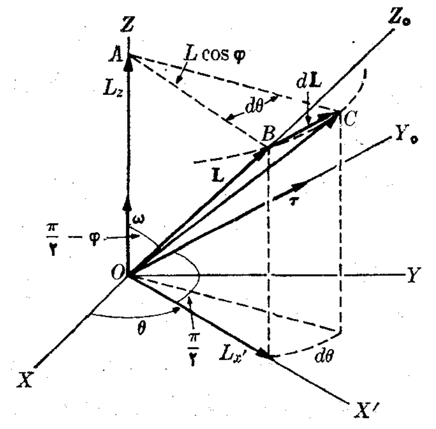
گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ باید در صفحهٔ XY باشد زیرا $\tau_z = ۰$ است و نیز باید بر صفحهٔ Z_0Z،

حاصل از راستای $\mathbf{L}$ (یا محور $Z_\circ$) و محور Z، عمود باشد (شکلهای ۱۶.۱۰ و ۱۷.۱۰)، وبالاخره در راستای محور $Y_\circ$ باشد. این نکته را می‌توان باشیوهٔ زیر به‌دست آورد. معادلهٔ (۱۱.۱۰)، $d\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau} dt$، نشان می‌هد که $d\mathbf{L}$ و $\boldsymbol{\tau}$ بردارهای موازی هستند (چنانکه درمورد یک ذرهٔ تنها $\mathbf{F}$ و $d\mathbf{v}$ با هم موازی بودند). ولـی چون بزرگی $\mathbf{L}$ ثابت است، بنابرایـن $d\mathbf{L}$ و همچنین $\boldsymbol{\tau}$ بر آن عمودند. چـون $\mathbf{L}$ با محور Z زاویهٔ ثـابـت $\pi/۲ - \varphi$ می‌سازد، انتهای آن روی دایره‌ای به شعاع

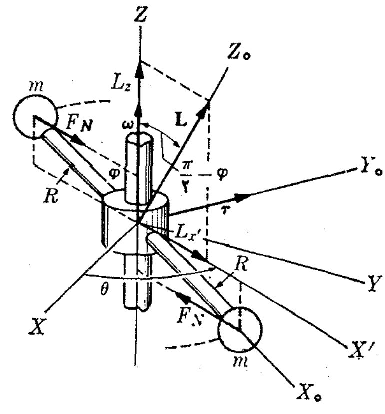
$$AB = L\sin(\pi/۲ - \varphi) = L\cos\varphi$$

حرکت می‌کند و $d\mathbf{L}$ بر این دایره مماس است. این امر به نوبهٔ خود ایجاب می‌کند که $d\mathbf{L}$ برصفحهٔ $Z_\circ Z$ عمود (یابا $Y_\circ$موازی) باشد. باتوجه به‌موازی بودن $d\mathbf{L}$ و $\boldsymbol{\tau}$، بنابراین $\boldsymbol{\tau}$ نیزچنین وضعی خواهدداشت. برای به‌دست آوردن بزرگی $d\mathbf{L}$، ازشکل ۱۷.۱۰ درمی‌یابیم‌که

$$|d\mathbf{L}| = AB d\theta = (L\cos\varphi)\,\omega dt$$



شکل ۱۷.۱۰. حـرکت تقدیمی اندازه حـرکت زاویـه‌ای جسمی کـه در شکل ۱۶.۱۰ نشان داده شده است.



شکل ۱۶.۱۰. چرخش یک جسم سخت دور یک محور اختیاری

زیرا $\omega = d\theta/dt$ است. بـا برابـر قرار دادن $|d\mathbf{L}|$ با $|\tau dt|$ و وارد کـردن مقدار L به دست می‌آید

$$\tau = (۲mR^۲ \sin\varphi\cos\varphi)\,\omega^۲.$$

بسیار آموزنده است که ببینیم از لحاظ فیزیکی چه نیازی به این گشتاور نیرو وجود دارد. از شکل ۱۶.۱۰ پیداست که کره‌هایی به جرم m دارای حرکت دایره‌ای یکنواخت هستند و هـر کـدام بـرای پیمودن دایره‌ای بـه شعاع $R\sin\varphi$ یک نیروی مـرکـزگـرا بـرابـر $F_N = m\omega^۲ R\sin\varphi$ لازم دارند. این دو نیرو تشکیل یک جفت[1] می‌دهند که بازوی اهرم آن $۲R\cos\varphi$ است. در این صورت گشتاور جفت برابر است با

1. couple

$$\tau = (mR\omega^{2} \sin\varphi)(2R\cos\varphi)$$

که با نتیجهٔ پیش مطابقت دارد. بنابراین گشتاور نیرو دارای نقش نگه‌داری کره‌ها در وضع ثابت نسبت به محور چرخش می‌باشد.

به عهدهٔ دانشجو می‌گذاریم تا تحقیق کند که در مورد شکل ۷.۱۰ (الف) که در آن چرخش دور یک محور اصلی و با سرعت زاویه‌ای ثابت صورت می‌گیرد، نیازی به این گشتاورنیرو نیست. بدین دلیل و جهت پیشگیری از ظاهرشدن گشتاورهای عرضی مانند مثال فوق، قسمتهای گردان یک سازوکار باید روی یکی از محورهای اصلی سوار شوند.

یک روش دیگر برای حل این مسئله آن است که تصاویر $\mathbf{L}$ را روی محورهای ثابت XYZ پیدا کنیم و تصاویر $\boldsymbol{\tau}$ را با استفادهٔ مستقیم از معادلهٔ (۱۱.۱۰) به دست آوریم. انجام این کار را به عنوان تمرین به‌عهدهٔ دانشجو واگذار می‌کنیم (مسئلهٔ ۵۰.۱۰).

مثال ۸.۱۰. حرکت کلی یک جسم سخت را در غیاب هرگونه گشتاور نیروی خارجی تجزیه و تحلیل کنید.

حل: در این مثال می‌خواهیم حرکت عمومی یک جسم سخت را هنگامی که هیچگونه گشتاور نیروی خارجی به‌آن وارد نمی‌شود، یا به گفتهٔ دیگر، وقتی که $\boldsymbol{\tau} = 0$ است مطالعه کنیم. دراین صورت ازمعادلهٔ (۱۱.۱۰) به‌دست می‌آید $dL/dt = 0$ یا $\mathbf{L} = \text{const}$. بنابراین بزرگی و راستای اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به‌چارچوب لخت XYZ که ناظر به‌کار می‌برد ثابت باقی می‌ماند.

نظر به اینکه گشتاور نیروها و اندازه حرکتهای زاویه‌ای همیشه نسبت به یک نقطه حساب می‌شوند، باید پیدا کنیم که گشتاور نیرو نسبت به کدام نقطه برابر صفر است. دو امکان وجود دارد: اولی مربوط به‌حالتی است که نقطه دریک چارچوب مرجع لخت ثابت است؛ در این صورت اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به این نقطهٔ ثابت حساب می‌شود. دومی موقعی به‌وجود می‌آید که گشتاور نیرو نسبت به‌مرکز جرم برابر صفر باشد. این مورد حالت توپی است یک فوتبالیست به آن ضربه‌ای وارد کرده باشد. موقعی که توپ در هواست تنها نیروی خارجی وارد برتوپ وزن آن می‌باشد که به مرکز جرمش اثر می‌کند، بنابراین هیچگونه گشتاوری نسبت به مرکز جرم وجود ندارد. دراین حالت، اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به مرکز جرم ثابت باقی می‌ماند. حرکت مرکز جرم مورد نظر ما نیست، زیرا این حرکت ناشی از برآیند نیروهای خارجی است و مطابق رابطهٔ (۹.۹) انجام می‌گیرد. چیزی که موردنظر ماست چرخش دور مرکز جرم است.

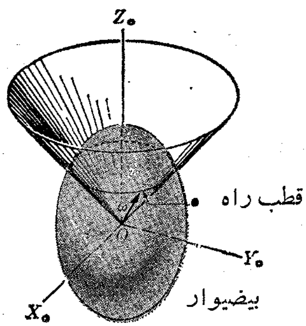
دراین مثال $\mathbf{L}$ نمایش اندازه حرکت زاویه‌ای دور نقطهٔ ثابت یا دور مرکزجرم است، و در هر دو مورد نیز گفتگو خواهیم داشت. ابتدا فرض می‌کنیم که جسم دور یک محور اصلی می‌چرخد. دراین صورت معادلهٔ (۴.۱۰) صادق و $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ است؛ چنانکه $\boldsymbol{\omega}$ ثابت باشد $\mathbf{L}$ نیز ثابت است. این امر بدین معنی است که جسم با سرعت زاویه‌ای ثابتی دور یک محور که هم نسبت به‌جسم و هم نسبت به‌ناظر ثابت است می‌چرخد.

اکنون فرض می‌کنیم که چرخش جسم دور یک محور اصلی نیست. دراین صورت

معادلهٔ (۵.۱۰) به کار می‌رود و ثابت بودن $\mathbf{L}$ دلیل ثابت بودن $\boldsymbol{\omega}$ نیست. بنابراین سرعت زاویه‌ای جسم تغییر می‌کند ومحور چرخش نسبت به‌ناظر ثابت نخواهد بود وناظر $\boldsymbol{\omega}$ را در حال حرکت تقدیمی دور $\mathbf{L}$ می‌بینید. محورچرخش نیز نسبت به‌جسم ثابت نیست. از معادلهٔ (۵.۱۰) که $\mathbf{L}$ را به محورهای اصلی $X_\circ Y_\circ Z_\circ$ مربوط می‌کند، به‌دست می‌آید

$$L^۲ = I_۱^۲\,\omega_{x_\circ}^۲ + I_۲^۲\omega_{y_\circ}^۲ + I_۳^۲\omega_{z_\circ}^۲ = \text{const}$$

هنگامی که $\mathbf{L}$ ثابت باشد. این رابطه شرطی را کـه باید محورهای اصلی $X_\circ Y_\circ Z_\circ$ داشته باشند بیان می‌کند. چـون ضـرایب $I_۱^۲$، $I_۲^۲$ و $I_۳^۲$ مثبت و ثابت هستند، به شرطی کـه $\omega_{x_\circ}$، $\omega_{y_\circ}$ و $\omega_{z_\circ}$ مختصات یک نقطه درنظر گرفته شوند، رابطهٔ فوق معادلهٔ یک بیضیوار[1] است. بنابراین انتهای بردار $\boldsymbol{\omega}$ باید روی این بیضیوار باشد (شکل ۱۸.۱۰). در مـدت حرکت، بزرگی بردار $\boldsymbol{\omega}$ و راستای آن نسبت به‌جسم تغییر می‌کند وبنابراین انتهای این بردارمسیری روی بیضیوار رسم می‌کند که به‌آن قطب راه* نام داده‌اند.



شکل ۱۸.۱۰. ترسیم حرکت یک جسم سخت. مسیری که انتهای بردار سرعت زاویه‌ای نسبت به محور متصل به جسم رسم می‌کند قطب راه نام دارد.

حرکتی که دربالا بیان کردیم در مـوارد بسیار زیادی دیده می‌شود. به عنوان مثال، نیروهای وارد ازطرف خورشید، ماه وسیاره‌ها روی زمین عملا به مرکز جرم آن اثر می‌کنند، بنابراین گشتاور نیرو نسبت بـه مـرکز جرم آن اساساً برابر صفر است (در واقع، گشتاور کوچکی وجـود دارد؛ بـه مثال ۱۰.۱۰ مراجعه کنید). زمین دقیقاً به شکل کره نیست، بلکه مختصری به گلابی شباهت دارد،** بنابراین دوریک محور اصلی نمی‌چرخد. درنتیجه، محور حرکت چرخشی آن نسبت به خودش ثابت نیست.

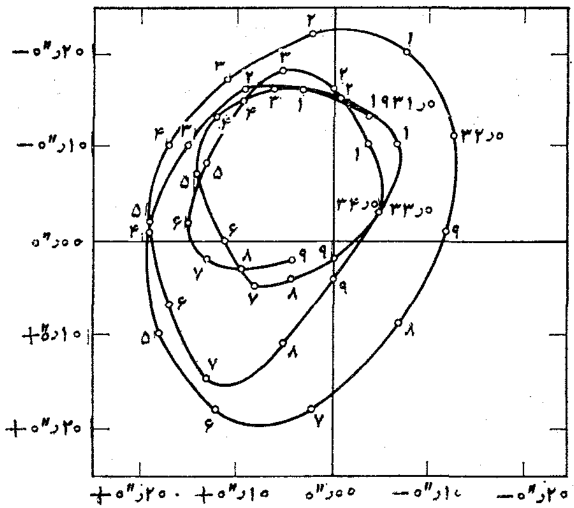
قطب راه محورچرخش زمین درشکل ۱۹.۱۰ نشان داده شده است. این شکل مسیری

1. ellipsoid

☆ Polhode. گرفته شده از یونانی: polos به‌معنی قطب و hodos به‌معنی مسیر.

☆☆ باید توجه داشت که این شباهت بسیار ناچیزاست: شعاع زمین درقطب‌جنوب درحدود ۱۵ متر ازشعاع درقطب شمال کمتر است. (م) ر.ک.
McGraw - Hill Encyclopedia of Science and Technology, Volume 6.

را که انتهای شمالی محور چرخش زمین از سال ۱۳۱۰ تا ۱۳۱۴ ه. ش. پیموده است نمایش می‌دهد. به سبب دخالت سایر سازه‌ها، شکل منحنی کمی نامنظم است، ولی قطر منحنی هرگز از ۱۵m تجاوز نمی‌کند و دورهٔ گردش محور در حدود ۴۲۷ روز است.



شکل ۱۹.۱۰. قطب راه محور چرخش زمین از سال ۱۳۱۰ تا ۱۳۱۴

تلوتلو خوردن یک توپ رگبی، پس ازآنکه بازیکنی ضربه‌ای به آن وارد می‌کند مثال دیگری ازتغییر راستای محور چرخش جسمی است که هیچگونه گشتاوری به آن وارد نمی‌شود، زیرا دربیشتر موارد، اندازه حرکت زاویه‌ای توپ در راستای یکی از محورهای اصلی آن نیست.

۵.۱۰ انرژی جنبشی چرخش

دربخش ۵.۹ انرژی جنبشی یک دستگاه ذرات را با رابطهٔ زیر تعریف کردیم:

$$E_k = \sum_i m_i v_i^2 / 2$$

در بخش ۲.۱۰ دیدیم دریک جسم سخت که با سرعت زاویه‌ای ω به‌دور محوری می‌چرخد، سرعت هرذرهٔ آن برابر است با $v_i = \omega R_i$، که درآن R_i فاصلهٔ ذره ازمحور چرخش است. پس داریم

$$E_k = \sum_i m_i v_i^2 / 2 = \sum_i m_i R_i^2 \omega^2 / 2 = (\sum_i m_i R_i^2) \omega^2 / 2$$

با یادآوری تعریف گشتاور لختی، رابطهٔ (۲.۱۰)، می‌توان نوشت

$$E_k = I\omega^2 / 2 \qquad (۱۶.۱۰)$$

رابطهٔ (۱۶.۱۰) برای هرمحوری، حتی اگر محور اصلی نباشد، درست است، زیرا چنانکه

از بحث بخش ۲.۱۰ می توان نتیجه گرفت، بزرگی سرعت همیشه برابر است با $v_i = \omega R_i$. وقتی که چرخش دور یک محور اصلی صورت می‌گیرد، می‌توان معادلهٔ (۴.۱۰) را به کار برد و نوشت

$$E_k = \frac{L^۲}{۲I}. \qquad (۱۷.۱۰)$$

می‌توان با به کاربردن مؤلفه‌های $\boldsymbol{\omega}$ روی محورهای اصلی $X_\circ Y_\circ Z_\circ$ رابطهٔ کلی‌تر دیگری برای انرژی‌جنبشی پیدا کرد. نتیجه‌ای‌که از اثبات‌آن صرف‌نظر می‌کنیم، چنین است:

$$E_k = \frac{۱}{۲}(I_۱\omega_{x\circ}^۲ + I_۲\omega_{y\circ}^۲ + I_۳\omega_{z\circ}^۲).$$

با به کار بردن مؤلفه‌های $\mathbf{L}$ روی $X_\circ Y_\circ Z_\circ$، بنا به معادلهٔ (۵.۱۰)، می‌توان نوشت

$$E_k = \frac{۱}{۲}\left(\frac{L_{x\circ}^۲}{I_۱} + \frac{L_{y\circ}^۲}{I_۲} + \frac{L_{z\circ}^۲}{I_۳}\right).$$

برای چرخش دور یک محور اصلی رابطهٔ بالا به معادلهٔ (۱۷.۱۰) تبدیل می‌شود. ازموارد جالب توجه، مخصوصاً در بحث چرخشهای مولکولی، موردی است که درآن جسم تقارن محوری، مثلا نسبت به محور $Z_\circ$ داشته باشد، به گونه‌ای که $I_۱ = I_۲$ باشد. در این صورت داریم

$$E_k = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{I_۱}(L_{x\circ}^۲ + L_{y\circ}^۲) + \frac{۱}{I_۱}L_{z\circ}^۲\right]$$

که آن را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$E_k = \frac{L^۲}{۲I_۱} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{I_۳} - \frac{۱}{I_۱}\right)L_{z\circ}^۲$$

اکنون یک حالت کلی را در نظر می‌گیریم که در آن جسم دور محوری که از مرکز جرم آن می‌گذرد می‌چرخد و درهمان زمان نسبت به ناظر حرکت انتقالی دارد. چنانکه در مثال ۸.۹ ثابت کردیم، انرژی جنبشی جسم دریک چارچوب مرجع لخت برابراست با

$$E_k = \frac{۱}{۲}Mv_{\mathrm{CM}}^۲ + E_{k,\mathrm{CM}}$$

که درآن M جرم کل، $\mathbf{v}_{\mathrm{CM}}$ سرعت مرکز جرم و $E_{k,\mathrm{CM}}$ انرژی جنبشی داخلی نسبت به‌مرکز جرم است. در مورد یک جسم سخت، $Mv_{\mathrm{CM}}^۲/۲$ درست برابر انرژی‌جنبشی انتقالی است، بنابراین $E_{k,\mathrm{CM}}$ باید انرژی جنبشی نسبت به مرکز جرم جسم باشد که به وسیلهٔ معادلهٔ (۱۶.۱۰) محاسبه می‌شود. این نکته درست است، زیرا در یک جسم سخت مرکز جرم نسبت به جسم ثابت است، و تنها حرکتی که جسم نسبت به مرکز می‌تواند داشته باشد حرکت چرخشی است. بنابراین می‌توان نوشت

$$E_k = \frac{۱}{۲}Mv_{\mathrm{CM}}^۲ + \frac{۱}{۲}I_C\omega^۲. \qquad (۱۸.۱۰)$$

دراین رابطه I_C گشتاور لختی نسبت به محور چرخشی است که ازمرکز جرم می‌گذرد.

نظر به اینکه دریک جسم سخت، فاصلهٔ بین ذرات درطـول حرکت تغییر نمی‌کند، می‌توان فرض‌کردکه $E_{p,\mathrm{int}}$، انرژی پتانسیل داخلی جسم، ثابت باقی‌می‌ماند. درنتیجه هنگام بحث دربارهٔ تبادل انرژی جسم بامحیط خارج، نباید آن را به‌حساب آورد. ازاین‌رو، اصل بقای انرژی که برای یک دستگاه ذرات به‌صورت معادلهٔ (۳۵.۹) نوشته شد، درمورد یک جسم سخت به شکل زیر خلاصه می‌شود:

$$E_k - E_{k,\circ} = W_{\mathrm{ext}}. \qquad (۱۹.۱۰)$$

دراین رابطه W_{ext} کار نیروهای خارجی است. اگر نیروهای خارجی پایستار باشند، داریم

$$W_{\mathrm{ext}} = (E_{p,\circ} - E_p)_{\mathrm{ext}} \qquad (۲۰.۱۰)$$

کـه درآن $E_{p,\mathrm{ext}}$ انرژی پتانسیل وابسته به نیروهای خارجی است ومعادلهٔ (۱۹.۱۰) بـه معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود (ازشاخص «ext» برای انرژی پتانسیل صرف‌نظر شده است):

$$E_k + E_p = (E_k + E_p)_\circ \qquad (۲۱.۱۰)$$

این نتیجه مشابه با نتیجه‌ای است که به صورت معادلهٔ (۲۹.۸) برای یک ذره به دست‌آمد وحالت خاصی ازمعادلهٔ (۳۶.۹)، برای حالتی است که انرژی پتانسیل داخلی تغییر نمی‌کند. (قبلا گفتیم، این تغییرناپـذیری در مـورد یک جسم سخت وجود دارد.) بـدین مناسبت $E = E_k + E_p$ را انرژی کل جسم سخت می‌خوانند. هنگامی کـه معادلهٔ (۱۸.۱۰) را برای E_k به کار می‌بریم، معادلهٔ (۲۱.۱۰) مربوط به انرژی کل چنین می‌شود:

$$E = \frac{1}{2} M v_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 + E_p = \mathrm{const}.$$

به‌عنوان مثال، هنگام افتادن جسم براثر نیروی وزن داریم $E_p = Mgy$ که درآن y ارتفاع مرکز جرم جسم نسبت به یک صفحهٔ مرجع افقی است، وانرژی کل برابرمی‌شود با

$$E = \frac{1}{2} M v_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 + Mgy = \mathrm{const}. \qquad (۲۲.۱۰)$$

اگر بعضی ازنیروها پایستار نباشند (برمبنای گفتگویی که دربخش ۱۲.۸ داشتیم) به جای معادلهٔ (۲۰.۱۰) باید نوشت

$$W_{\mathrm{ext}} = E_{p,\circ} - E_p + W'$$

که درآن W' کارنیروی ناپایستار خارجی است. معادلهٔ (۲۱.۱۰) به‌این صورت درمی‌آید:

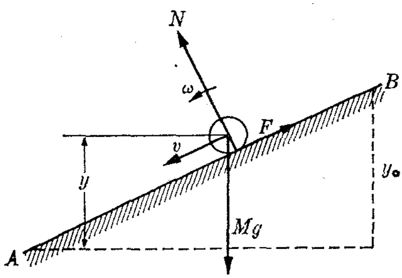
$$(E_k + E_p) - (E_k + E_p)_\circ = W'. \qquad (۲۳.۱۰)$$

به عنوان مثال، این معادله را باید هنگامی به کار برد که نیروهای مالش همزمان با نیروی گرانی برجسم اثر می‌کنند.

مثال ۹.۱۰. یک کره، یک استوانه ویک حلقه با شعاعهای برابر، هرسه ازارتفاع یکسان $y_\circ$، روی یک صفحهٔ شیب‌دار می‌غلتند. سرعت هرکـدام را هنگام رسیدن بـه پایین صفحه

به دست آورید.

حل: شکل ۲۰.۱۰ نیروهـای وارد برجسم درحال غلتش را نشان می‌دهـد. این نیروها عبارتند از Mg، نیروی وزن، N، واکنش صفحه و F، نیروی مالش در نقطهٔ تماس جسم با صفحه. می‌توانیم همـان روشی را که برای حل مثال ۵.۱۰ به کار بـردیم اینجا نیز مورد استفاده قرار دهیم (به دانشجو توصیه می‌کنیم همین کار را انجام دهـد)، ولی ما در اینجا اصل بقای انرژی را، آنچنانکه درمعادلهٔ (۲۲.۱۰) نوشته شده است به کار می‌بریم.



شکل ۲۰.۱۰. غلتش یک جسم روی‌صفحهٔ شیب‌دار

درنقطهٔ شروع حرکت B، هنگامی که جسم درارتفاع y_0 درحال سکون است، انرژی کل آن برابر $E = Mgy_0$ می‌باشد. برای هروضع بینابینی درمسیر حرکت، مرکز جرم با سرعت انتقال v جابجا می‌شود وجسم با سرعت زاویـه‌ای ω دور مرکز جرم می‌چرخد. در اینجا دوسرعت با رابطهٔ $v = R\omega$ به هم مربوطند. دراین صورت انرژی کل برابر است با

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 + Mgy = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{I_C}{R^2}\right)v^2 + Mgy.$$

اگر گشتاور لختی را به صورت $I_C = MK^2$ بنویسیم که درآن K مطابق تعریف (۱۰.۱۰) شعاع ژیراسیون است، رابطهٔ انرژی کل به صورت زیر درمی‌آید:

$$E = \frac{1}{2}M\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)v^2 + Mgy.$$

با برابر قرار دادن این انـرژی با انرژی اولیهٔ $E = Mgy_0$ و با حل رابطه بـرحسب v به‌دست می‌آوریم

$$v^2 = \frac{2g(y_0 - y)}{1 + (K/R)^2}.$$

اگر به جای جسمی که می‌غلتد، جسمی داشتیم که به‌سمت پایین صفحه می‌لغزید، نمی‌بایست انرژی چرخشی را وارد می‌کردیم، و نتیجه به صورت $v^2 = 2g(y_0 - y)$ درمـی‌آمـد، یعنی همان نتیجه‌ای کـه در مورد سقوط یک ذرهٔ منفرد به دست مـی‌آیـد. بنابراین نتیجه

می‌گیریم که حرکت چرخشی موجب کند شدن حرکت انتقالی می‌گردد. این نتیجه را می‌توان بدین طریق توجیه کرد که در یک حرکت چرخشی انرژی پتانسیل اولیه، هم باید به مصرف انرژی انتقالی وهم انرژی جنبشی چرخشی برسد. ولی هنگامی که جسم روی صفحه می‌لغزد، تمام انرژی پتانسیل اولیه به انرژی جنبشی انتقالی تبدیل می‌شود.

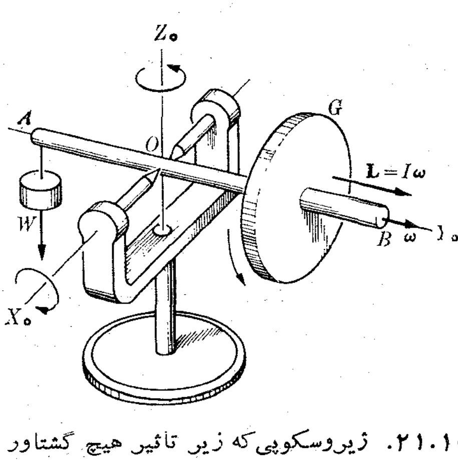
با مراجعه به جدول ۱.۱۰، مشاهده می‌شود که K^2/R^2 برای یک کره برابر ۲/۵، برای استوانه برابر ۱/۲ وبالاخره برای یک حلقه برابر ۱ است. بنابراین v^2 برای کره، استوانــه و حلقــه بترتیب برابر می‌شود بــا $10g(y-y_0)/7$، $4g(y-y_0)/3$ و $g(y-y_0)$. بـه گفتهٔ دیگر، کره سریعتر از همه حرکت می‌کند، پس ازآن استوانــه قرار می‌گیرد وبالاخـره حرکت حلقه کندتر از همه است. آیـا دانشجو می‌توانست تنها از روی شکل هندسی اجسام این نتیجه را حدس بزند؟

یک نتیجهٔ جالب کـه از رابطهٔ v^2 به دست می‌آید این است کــه سرعت جسمی که روی سطح شیب‌داری به سمت پایین حرکت می‌کند، نه به جرم بستگی دارد، نه به ابعاد آن، بلکه تنها به شکل هندسی آن بستگی دارد.

۶.۱۰ حرکت ژیروسکوپی

چنانکه در بخش ۴.۱۰ اشاره کردیم، معادلهٔ $d\mathbf{L}/dt = \boldsymbol{\tau}$ نشان می‌دهد کــه اگر گشتاور نیروی خارجی $\boldsymbol{\tau}$ وجود نداشته باشد، $\mathbf{L}$ اندازه حرکت زاویه‌ای جسم ثابت باقی می‌ماند. اگر جسم دور یک محور اصلی بچرخــد، چنانکه قبلا نیز گفتیم، به چرخش خود دور این محور با سرعت زاویه‌ای ثابتی ادامهٔ خواهد داد و داریم $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$.

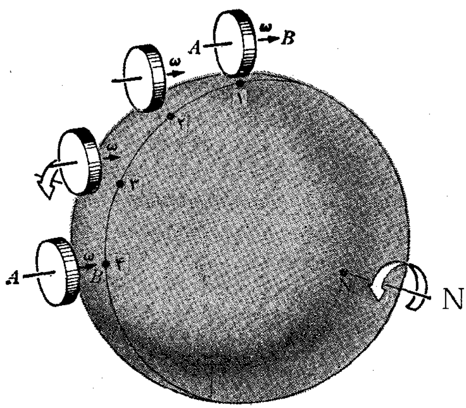
بهترین وسیلهٔ نمایش این پدیده ژیروسکوپ[1] است (شکل ۲۱.۱۰) وآن وسیله‌ای است که امکان می‌دهد چرخی را به گونه‌ای سوار کنند که راستای محورچرخش آن بتواندآزادانه



شکل ۲۱.۱۰. ژیروسکوپی‌که زیر تاثیر هیچ گشتاور نیرویی نیست

1. gyroscope

تغییر کند. چرخ G روی میلهٔ افقی ABسوار شده است وطوری با وزنهٔ W ترازمند گردیده که گشتاور کل نیروهـــا نسبت به نقطهٔ O برابر صفر باشد: میلهٔ AB می‌تواند آزادانه دور محور $X_{\circ}$ و همچنین $Z_{\circ}$ حـرکت کند و چرخ G خیلی ســریع دور $Y_{\circ}$ می‌چرخد؛ این سه محور محورهای اصلی ژیروسکوپ می‌باشند. در نتیجه، هنگامی که محور $Y_{\circ}$ در فضا ثابت باشد، اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه، موازی‌آن باقی می‌ماند. اگر ژیروسکوپ را جابجا کنیم، مشاهــده می‌کنیم که AB همواره در یک راستا قرار می‌گیرد. اگر محور ژیروسکوپ را طوری قرار دهیم کـه AB به صورت افقی ودر راستای مشرق ـ مغرب باشد (وضع ۱ در شکل ۲۲.۱۰ که درآن N نمایش قطب شمال زمین و پیکان سوی سرعت زاویه‌ای چرخ را نشان می‌دهد)، مشاهده می‌کنیم که AB بتدریج منحرف می‌شود، به‌طوری‌که بعد از ۶ ساعت در وضع قایم قرار می‌گیرد (وضع ۴ در شکل ۲۲.۱۰). این چرخش ظاهری AB درواقع ناشی از چرخش زمین است، و در حالی کـه آزمایشگاه ما بعد از شش ساعت از وضع ۱ به وضع ۴ می‌رسد، امتداد AB در فضا ثابت می‌ماند.



شکل ۲۲.۱۰. درغیاب هر گشتاور نیرو، محور چرخش ژیروسکوپ درفضا ثابت باقی می‌ماند و در نتیجه نسبت به زمین می‌چرخد.

اگرگشتاور وارد بر ژیروسکوپ صفر نباشد، اندازه حرکت زاویـه‌ای در مدت زمان dt تغییری برابر با

$$d\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau} dt \qquad (۲۴.۱۰)$$

پیدا می‌کند. به گفتهٔ دیگر، تغییر انــدازه حرکت زاویه‌ای همیشه در راستــای گشتاور نیرو می‌باشد (همان گونه کـه تغییر اندازه حرکت یک ذره در راستــای نیرو صورت می‌گیرد)؛ قبلا در مثــال ۷.۱۰ با این وضع مــواجــه شده بودیم. درواقع، گفتگوی حاضر به مثال ۷.۱۰ بسیار شبیه است، ولی یک اختلاف اساسی بین این دووجود دارد: در اینجا اندازه حرکت زاویه‌ای عمدتاً از چرخش ژیروسکوپ به دور محور خود، $Y_{\circ}$، ناشی می‌شود، در صورتی که در دستگاه شکل ۱۶.۱۰ اندازه حرکت زاویه‌ای از چرخش دور محور Zها

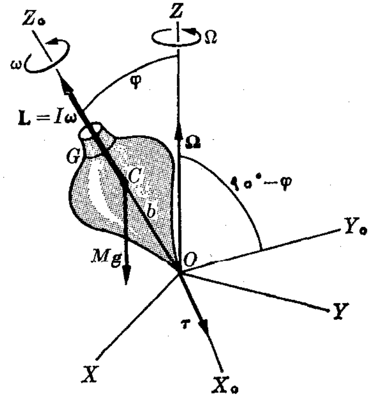
بدون چرخش به دور $Y_\circ$ به وجود می‌آمد.

اگر گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ بر اندازه حرکت زاویـه‌ای $\mathbf{L}$ عمود باشد، تغییر $d\mathbf{L}$ نیز بر $\mathbf{L}$ عمود است. دراین صورت راستا و سوی اندازه حرکت زاویه‌ای تغییر می‌کند ولی نه بزرگی آن، یعنی راستای محورچرخش عوض می‌شود ولی بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای ثابت‌می‌ماند. چنانکه در مثـال ۷.۱۰ گفتیم، این وضع شـبیه یک حـرکت دایـره‌ای براثر یک نیروی مرکزگراست که درآن، راستای نیرو بر راستای سرعت عمود است و راستای سـرعت تغییر می‌کند ولی بزرگی آن بدون تغییر می‌ماند. چنانکه قبلا درمثال ۷.۱۰ متذکر شدیم، حرکت محور چـرخش دور یک محور ثابت بر اثـر یک گشتاور نیروی خارجی حرکت تقدیمی نامیده می‌شود.

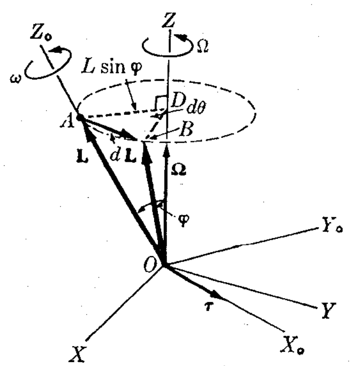
این وضع در یک فرفرهٔ معمولی دیده می‌شود. این اسباب بازی نوعی ژیروسکوپ است (شکل ۲۳.۱۰). توجه داشته باشید کـه در فـرفـره، محور اصلی $X_\circ$ در صفحهٔ XY انتخاب شده است، بنـابراین $Y_\circ$ در صفحهٔ حـاصل از Z و $Z_\circ$ قرار دارد. به دلیل تقارن استوانه‌ای فرفره، محورهای اصلی $X_\circ$، $Y_\circ$ و $Z_\circ$ با سرعت زاویه‌ای ω نمی‌چرخند. مبدأ هر دوگروه محورها در نقطهٔ O، که دریک چارچوب مرجع لخت ثابت است انتخاب شده است. در این صورت $\mathbf{L}$ و $\boldsymbol{\tau}$ هـر دو باید نسبت بـه O حساب شوند. هنگامی که فرفره با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ دور $OZ_\circ$ محور تقارن خود می‌چرخـد، $\mathbf{L}$، اندازه حرکت زاویه‌ای آن نیز با محور $OZ_\circ$ موازی است. گشتاور نیروی خارجی $\boldsymbol{\tau}$ از وزن $M\mathbf{g}$ کـه بر مرکز جرم اثر می‌کند ناشی می‌شود و برابر است با $(\overrightarrow{OC}) \times (M\mathbf{g})$. بنابراین گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ بر صفحهٔ $Z_\circ OZ$ عمود است، در نتیجه بر $\mathbf{L}$ نیز عمود می‌باشد، و بزرگی آن برابر است با

$$\tau = Mgb\sin\varphi \qquad (۲۵.۱۰)$$

که در آن φ زاویهٔ بین محور تقارن $Z_\circ$ و محور قـایم Z و $b = OC$ مکان مرکز جرم را به دست می‌دهد.



شکل ۲۳.۱۰. ژیـروسکوپ زیر تأثیر یک گشتاور نیروی خارجی



شکل ۲۴.۱۰. حرکت تقدیمی محـور ژیروسکوپ

چنانکه شکل ۲۴.۱۰ نشان می‌دهد، در طول مدت کوتاه dt بردار $\mathbf{L}$ از وضع OA به وضع OB در می‌آید و تغییر آن برابر $\overrightarrow{AB} = d\mathbf{L}$ و موازی $\boldsymbol{\tau}$ است. انتهای بردار $\mathbf{L}$ دور Z دایره‌ای به شعاع $AD = OA\sin\varphi = L\sin\varphi$ رسم می‌کند، و در طول زمان dt شعاع AD به اندازهٔ زاویهٔ $d\theta$ جابجا می‌شود تا به وضع BD می‌رسد. Ω، سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی، یعنی سرعتی که $OZ_\circ$ محور جسم دور محور ثابت OZ در آزمایشگاه می‌چرخد، با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{۲۶.۱۰}$$

و با برداری موازی OZ نشان داده می‌شود. بزرگی $d\mathbf{L}$ برابر است با

$$|d\mathbf{L}| = ADd\theta = (L\sin\varphi)(\Omega dt).$$

از طرف دیگر، از معادلهٔ (۲۴.۱۰)، می‌دانیم که $|d\mathbf{L}| = \tau dt$ است. با برابر قرار دادن دو نتیجه می‌توان نوشت

$$\Omega L\sin\varphi = \tau \tag{۲۷.۱۰}$$

یا با به کار بردن معادلهٔ (۲۵.۱۰) برای گشتاور نیرو، به دست می‌آید

$$\Omega = \frac{\tau}{L\sin\varphi} = \frac{Mgb}{I\omega}. \tag{۲۸.۱۰}$$

با توجه به‌راستای نسبی بردارهای Ω، $\mathbf{L}$ و $\boldsymbol{\tau}$ درشکل ۲۴.۱۰، معادلهٔ (۲۷.۱۰) رامی‌توان به صورت برداری زیر نوشت:

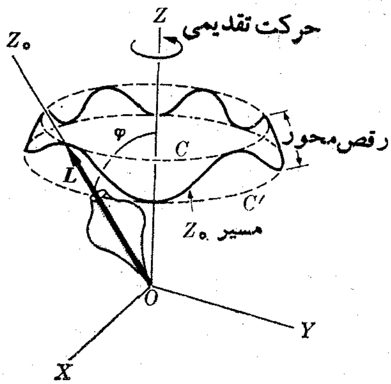
$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\tau} \tag{۲۹.۱۰}$$

که رابطهٔ بسیار مفیدی است. [این رابطه را می‌توان با رابطهٔ مشابه خود، $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} = \mathbf{F}$ در حرکت دایره‌ای یکنواخت مقایسه کرد که با معادلهٔ (۳۰.۷) نشان داده شد، زیرا هردو، رابطهٔ ریاضی یکسانی را بین بردارهای مورد مطالعه نشان می‌دهند.]

نتایج (۲۷.۱۰) یا (۲۸.۱۰) تقریبی هستند. آنها را تنها هنگامی می‌توان به کار برد که ω خیلی بزرگتر از Ω باشد، چون اگر جسم یک حرکت تقدیمی دور OZ داشته باشد، دارای یک اندازه حرکت زاویه‌ای دور این محور نیز می‌باشد و در نتیجه اندازه حرکت زاویه‌ای کل آن، چنانکه فرض کردیم، دیگر برابر $I\omega$ نیست، زیرا سرعت زاویه‌ای برآیند برابر $\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}$ است. با وجود این، اگر حرکت تقدیمی خیلی کند باشد (یعنی Ω نسبت به ω خیلی کوچک باشد)، می‌توان از اندازه حرکت زاویه‌ای دور OZ صرف نظرکرد، چنانکه ما درمحاسبات خود به طورضمنی آن را انجام دادیم. دراین صورت نتایجی که به دست آوردیم کاربرد پیدا می‌کند.

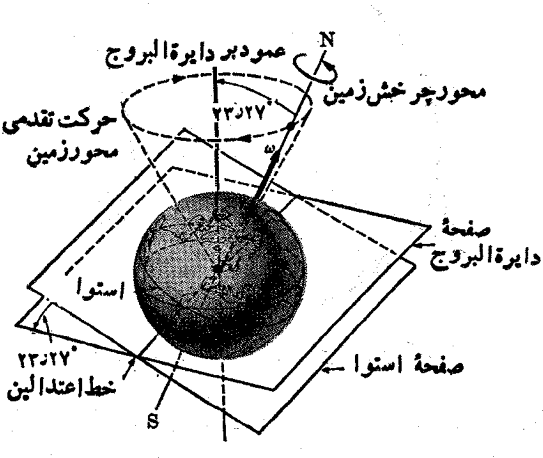
یک بررسی دقیقتر نشان می‌دهد که در حالت کلی، زاویهٔ φ ثابت باقی نمی‌ماند، بلکه بین دو مقدار معین نوسان می‌کند. به گونه‌ای که انتهای $\mathbf{L}$ درهمان زمان که دور محور

Z حرکت تقدیمی دارد، بین دودایرهٔ C و C' (شکل ۲۵.۱۰) نوسان می‌کند و مسیرمشخص شده را می پیماید. این حرکت نوسانی Z_0 حرکت رقص محوری[1] نامیده می‌شود. حرکت رقص محوری نیز مانند حرکت تقدیمی، در اندازه حرکت زاویه‌ای کل سهیم است، ولی عموماً سهم آن حتی کمتر از حرکت تقدیمی می باشد.



شکل ۲۵.۱۰. حرکت رقص محوری وتقدیمی محور ژیروسکوپ

پدیده‌های ژیروسکوپی کاربستهای گسترده‌ای دارند. تمایل ژیروسکوپ در نگه‌داری محور خود در یک راستای ثابت در فضا، اصلی است که در حفظ تعادل کشتیها و هدایت هواپیماهای بدون خلبان مورد استفاده قرار می‌گیرد. یک مثال جالب دیگر از حرکت ژیروسکوپی حرکت تقدیمی اعتدالین[2] است، که در بخش ۳.۲ مورد بحث قرار گرفت. صفحهٔ مسیر حرکت انتقالی زمین یا دایرةالبروج[3] با صفحهٔ استوا زاویه‌ای برابر $23°27'$



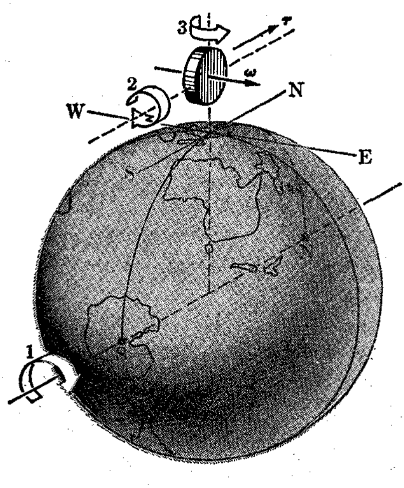
شکل ۲۶.۱۰. حرکت تقدیمی محور چرخش زمین

---

1. nutation
2. precession of equinoxes
3. ecliptic

می‌سازد. فصل مشترک این دو صفحه را خط اعتدالین می‌نامند. زمین یک ژیروسکوپ غول‌آسا است که محور چرخش آن اساساً خطی است که از قطبهای شمال و جنوب می‌گذرد. این محور چنانکه شکل ۲۶.۱۰ نشان می‌دهد، دارای یک حرکت تقدیمی دور خط عمود برصفحهٔ دایرةالبروج در راستای شرق-غرب، با دورهٔ ۲۷۷۲۵ سال، یا با سرعت زاویه‌ای حدود ″۵۰٫۲۷ کمان درسال، یا $۷٫۱۹ \times ۱۰^{-۱۱}$ rad s$^{-۱}$ می‌باشد. حرکت تقدیمی محور زمین موجب می‌شود راستای خط اعتدالین نیز به‌همین اندازه تغییر کند. این پدیده درحدود سال ۱۳۵ قبل ازمیلاد به‌وسیلهٔ ابرخس[1] کشف شده است.

حرکت تقدیمی نقطه‌های اعتدالین ازگشتاور نیروی وارد ازطرف خورشید و ماه روی زمین ناشی می‌شود. زمین به‌شکل کره نیست بلکه تقریباً به‌شکل بیضیوار است که قطر بزرگ آن درصفحهٔ استوا قرار دارد (در واقع زمین به شکل گلابی است*). محاسبات خیلی دقیق نشان داده‌اند، به سبب شکل هندسی و میل محور آن نسبت به صفحهٔ دایرةالبروج، نیروهای وارد از طرف خورشید و ماه روی زمین دارای یک گشتاور برآیند نسبت به مرکز آن می‌باشند. راستای این گشتاور نیرو برمحور زمین عمود است. بنابراین محور زمین براثراین گشتاور باید حرکت تقدیمی داشته باشد. درفصل ۱۵ خواهیم دید که هنگام حرکت یک ذرهٔ باردار مانند الکترون یا پروتون در یک میدان مغناطیسی نیز اثر مشابهی مشاهده می‌شود (هرچند دلیل فیزیکی این دو پدیده یکی نیست). محور زمین دارای یک حرکت رقص محوری با دامنهٔ ″۹٫۲ و دورهٔ نوسان ۱۹ سال نیز می‌باشد.



شکل ۲۷.۱۰. قطب‌نمای ژیروسکوپی

یک مثال دیگر از کاربرد حرکت ژیروسکوپی، که آن نیز به حرکت چرخشی زمین وابسته است، قطب‌نمای ژیروسکوپی[2] می‌باشد. فرض‌کنید ژیروسکوپی مطابق‌شکل ۲۷.۱۰

1. Hipparchus 2. gyroscopic compass

* ر.ک.ص ۳۸۱

در وضع G قـرار دارد. پیکان ۱ سوی حرکت چرخشی زمین را نشان می‌دهد. ژیروسکوپ به‌گونه‌ای قرار گرفته است که محور آن درصفحهٔ افقی باقی بماند. این‌کار را می‌توان مثلا با شناورکردن ژیروسکوپ روی یک‌آبگون انجام داد. فرض کنیم ابتدا محور ژیروسکوپ در راستای شرق ـ غرب باشد. وقتی کـه زمین می‌چرخد صفحهٔ افقی و راستای شرق ـ غرب نیز همراه با زمین می‌چرخد. در نتیجه اگـر محور ژیروسکوپ بخواهد در راستای شرق ـ غرب باقی بماند، باید مطابق آنچه که پیکان ۲ نشان می‌دهد بچرخد، بنابراین باید گشتاور نیرویی در راستای جنوب ـ شمال به‌آن اثر کند. درنتیجه محور ژیروسکوپ، زیر تأثیر این گشتاور نیرو، مطابق‌آنچه که پیکان ۳ نشان می‌دهد، دور خط قایم آن قدر می‌چرخد تا اینکه شمال را نشان دهـد. برتری قطب‌نمای ژیروسکوپی دراین است که همیشه شمال حقیقی را نشان می‌دهد، زیرا هیچگونه اثر مغناطیسی محلی روی آن مؤثر نیست.

جدول ۲.۱۰. مقایسهٔ بین دینامیک حرکت انتقالی وحرکت چرخشی

حرکت انتقالی	حرکت چرخشی
اندازه‌حرکت خطی $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$	اندازه‌حرکت زاویه‌ای $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}^*$
نیرو $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$	گشتاور نیرو $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$
جسمی با جرم ثابت $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$	جسمی با گشتاور لختی ثابت $\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}^*$
نیروی عمود براندازه حرکت $\mathbf{F} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}$	گشتاورنیروی عمودبراندازه‌حرکت زاویه‌ای $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}$
انرژی جنبشی $E_k = mv^۲/۲$	انرژی جنبشی $E_k = I\omega^۲/۲$
توان $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$	توان $P = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega}$

☆ فرمولهایی که با ستاره مشخص شده‌اند، تنها درمورد چرخش دور محورهای اصلی معتبرند.

مثال ۱۰.۱۰. گشتاوری را کـه باید برزمین اثـر کند تا حرکت تقدیمی مشاهده شده در نقطه‌های اعتدالین را به‌وجود آورد حساب کنید.

حل: از معادلهٔ (۳۷.۱۰) داریم $\tau = \Omega L \sin\varphi$ که درآن

$$\varphi = ۲۳^\circ ۲۷' \text{ و } \Omega = ۷٫۱۹ \times ۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{rad\,s^{-۱}}$$

است. Ω سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی زمین است. ابتدا بایـد اندازه حرکت زاویه‌ای زمین را حساب کنیم. نظر به‌اینکه محور چرخش زمین اختلاف ناچیزی بامحور اصلی‌دارد، می‌توان معادلهٔ $L = I\omega$ را به‌کار برد. مقدار ω برابر است با $۷٫۲۹ \times ۱۰^{-۵}\mathrm{rad\,s^{-۱}}$

که درمثال ۱۱.۵ داده شده بود. بنا به جدول ۱.۱۰، بهفرض اینکه زمین به شکل کرهٔ کامل باشد گشتاور لختی زمین برابر است با

$$I = \frac{۲}{۵}MR^{۲} = \frac{۲}{۵}(۵٫۹۸ \times ۱۰^{۲۴}\,\mathrm{kg})(۶٫۳۸ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m})^{۲}$$
$$= ۹٫۷۲ \times ۱۰^{۳۷}\,\mathrm{m}^{۲}\,\mathrm{kg}.$$

بنا براین بهدست میآید $\tau = ۲٫۷۶ \times ۱۰^{۲۷}\,\mathrm{N\,m}$.

فهرست منابع

1. «Moments of Inertia of Solid Rectangular Parallelepipeds, Cubes, & Twin Cubes, & Two Other Regular Polyhedra,» J. Satterly; *Am. J. Phys.* 25, 70 (1957).
2. «Moments of Inertia of Plane Triangles,» J. Satterly, *Am. J. Phys.* 26,452 (1958).
3. «Elementary Analysis of the Gyroscope,» E. Barker, *Am. J. Phys.* 28,808 (1960).
4. «Resource Letter *CM*-1 on the Teaching of Angular Momentum & Rigid Body Motion,» John I. Shonle, *Am. J. Phys.* 33, 879 (1965).
5. *Physical Mechanics* (third edition), by R.B. Lindsay. Princeton, N.J.: Van Nostrand, 1963, Chapter 7.
6. *Introduction to Engineering Mechanics*, by J. Huddleston. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961, Sections 10-1, 10-2, 10-3, Chapters 12 & 13.
7. *Vector Mechanics*, by D. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964, Chapters 13, 15, & 16.
8. *A Source Book of Physics*, by W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963; page 65, Poinsot.
9. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, by R. Feynman, R. Leighton, & M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapters 18,19, & 20.

۱۰. سایمون، کیث، ر. مکانیک، ترجمهٔ اعظم نیرومندراد و غلامحسین همدانی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۶، فصلهای ۵ و ۱۱.

مسئلهها

۱.۱۰. یک میلهٔ نازک به طول ۱m دارای جرم ناچیزی است. این میله ۵ جسم را که جرم هرکدام برابر ۱٫۰۰kg است و در فاصلههای ۰cm، ۲۵cm، ۵۰cm، ۷۵cm و ۱۰۰cm ازیک سر آن قرار گرفتهاند تحمل میکند. گشتاور لختی تمام دستگاه را نسبت به محوری عمود برمیله که (الف) از یک انتها، (ب) ازجرم دوم، (ج) از مرکز جرم میگذرد، حساب کنید. در هرحالت شعاع ژیراسیون را محاسبه و درستی قضیهٔ اشتاینر را تحقیق کنید.

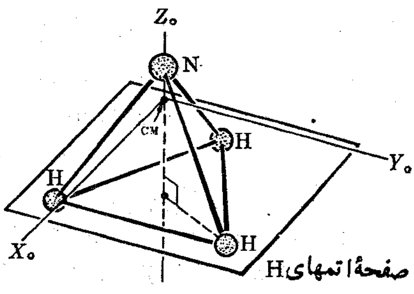
۲.۱۰. مسئلهٔ پیش را در حالتی که جرم میله ۰ر۲۰kg باشد از نو حل کنید.

۳.۱۰. سه جرم ۲kg هرکدام دریک رأس مثلث متساوی‌الاضلاعی بـه ضلع ۱۰cm قرار دارند. گشتاور لختی دستگاه وشعاع ژیراسیون آن را نسبت به محوری عمود برسطح مثلث کـه (الف) از یک رأس مثلث، (ب) از وسط یک ضلع، و (ج) از مرکز جرم می‌گـذرد حساب کنید.

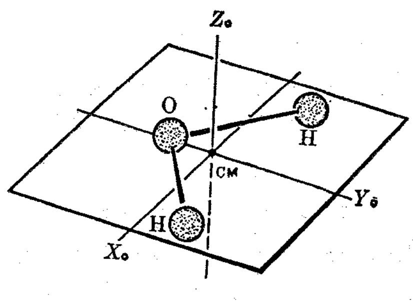
۴.۱۰. ثابت کنید کـه گشتاور لختی دستگاهی متشکل از دو جرم m_1 و m_2 به فـاصلهٔ r، نسبت به محوری کـه ازمرکز جرم می‌گذرد و برخط واصل آنها عمود باشد، برابر است با μr^2، کـه μ جـرم کاهیدهٔ دستگـاه است. ایـن رابطه را در مـورد مـولـکـول CO ($r = ۱ر۱۳ \times ۱۰^{-۱۰}\text{m}$)، ومولکول HCl ($r = ۱ر۲۷ \times ۱۰^{-۱۰}\text{m}$)، به کار ببرید.

۵.۱۰. گشتاور لختی مولکول CO_2 را نسبت به محوری که ازمرکز جرم می‌گذرد و برمحور مولکول عمود است پیدا کنید. CO_2 یک مولکول خطی است و اتم C درمرکز قرار دارد. فاصلهٔ C—O برابر است با $۱ر۱۳ \times ۱۰^{-۱۰}\text{m}$.

۶.۱۰. درمـولکـول H_2O، فاصلهٔ H—O برابر $۰ر۹۱ \times ۱۰^{-۱۰}\text{m}$ و زاویهٔ بین دو پیوند H—O، ۱۰۵° است. گشتاور لختی مولکول را نسبت به‌سه محور اصلی که درشکل ۲۸.۱۰ نشان داده شده‌اند و ازمرکز جرم می‌گذرند پیدا کنید. هنگامی که مولکول دور یک محور اختیاری بچرخد انرژی جنبشی واندازه حرکت زاویه‌ای آن را نسبت به محورهای اصلی بنویسید.



شکل ۲۹.۱۰



شکل ۲۸.۱۰

۷.۱۰. مولکول NH_3 (شکل ۲۹.۱۰) هرمی است که N در رأس و سه H در قاعدهٔ آن قراردارد. طول پیوندهای N—H برابر $۱ر۰۱ \times ۱۰^{-۱۰}\text{m}$ وزاویهٔ بین‌این پیوندها ۱۰۸° است. سه گشتاور لختی اصلی را نسبت به محورهایی کـه ازمرکز جرم می‌گذرند پیداکنید. (سه محور عبارتند از Z_0 کـه برقاعـده عمود است، X_0 کـه در صفحهٔ حاصل از یکی از پیوندهای N—H ومحور Z_0 قرار دارد، و Y_0 که موازی خط واصل دواتم دیگر H است).

۸.۱۰. دو بچه، هرکـدام به جرم ۲۵kg، در دوسر الواری به طول ۲ر۶m وجرم ۱۰kg نشسته‌اند. این الوار دور محور قایمی کـه ازمرکز جرم آن می‌گـذرد با سرعت ۵ دور در

دقیقه می‌چرخد. اگر هر بچه بدون تماس با زمین $60cm$ به مرکز جرم نزدیک شود سرعت زاویه‌ای چقدر می‌شود؟ تغییر انرژی جنبشی چرخشی تمام دستگاه چقدر است؟

۹.۱۰ با داده‌های مسئلهٔ پیش، فرض کنید هنگامی که بچه‌ها در وضع ابتدایی خود قرار دارند یک نیروی افقی $120N$ به فاصلهٔ یک متر ازمحور در راستای عمود برالوار برآن وارد می‌شود. شتاب زاویه‌ای دستگاه را پیدا کنید.

۱۰.۱۰ گشتاور لختی چرخی $50grm^2$ است. دریک لحظهٔ معلوم سرعت زاویه‌ای آن $10rads^{-1}$ است وبعد ازاینکه $100rad$ چرخید، سرعت زاویه‌ای آن $100rads^{-1}$ می‌شود. گشتاور نیروی وارد برچرخ و افزایش انرژی جنبشی را حساب کنید.

۱۱.۱۰ به چرخ درحال چرخشی یک گشتاور نیروی $10Nm$ ناشی ازمالش روی محور، اثرمی‌کند. شعاع چرخ $0.6m$ وجرم‌آن $100kg$ است وباسرعت $175rads^{-1}$ می‌چرخد. چقدر طول می‌کشد تا چرخ ازحرکت باز ایستد؟ قبل از ایستادن چند دور می‌چرخد؟

۱۲.۱۰ استوانه‌ای به جرم $20kg$ و شعاع $0.25m$ با سرعت ۱۲۰۰ دور در دقیقه دور محوری که ازمرکز جرم آن می‌گذرد می‌چرخد. چه نیروی مماسی ثابت لازم است تا پس از ۱۸۰۰ دور استوانه را ازچرخش باز دارد؟

۱۳.۱۰ دیسکی به جرم $50kg$ و شعاع $1.80m$ می‌تواند دور محور خودش بچرخد. به لبهٔ دیسک یک نیروی ثابت $19.6N$ اثر می‌کند. حساب کنید (الف) شتاب زاویه‌ای آن را؛ (ب) زاویه‌ای را که طی می‌کند؛ (ج) اندازه حرکت زاویه‌ای آن را، و (د) انرژی جنبشی آن را بعد از $5s$.

۱۴.۱۰ سرعت اتومبیلی درمدت $8s$ از $5kmhr^{-1}$ به $50kmhr^{-1}$ افزایش می‌یابد. شعاع چرخهای آن $45cm$ است. شتاب زاویه‌ای چرخها چقدر است؟ جرم هرچرخ $30kg$ و شعاع ژیراسیون آن $0.3m$ است. اندازه حرکت زاویه‌ای اولیه و نهایی هرچرخ چقدر است؟

۱۵.۱۰ جرم چرخ طیار یک ماشین بخار $200\,kg$ و شعاع ژیراسیون آن $2\,m$ است. هنگامی‌که چرخ با سرعت ۱۲۰ دور در دقیقه می‌چرخد، رسیدن بخار قطع می‌شود. به‌فرض اینکه چرخ پس از ۵ دقیقه متوقف شود، گشتاور نیروی ناشی از مالش روی محور چرخ چقدر است؟ دراین مدت چقدر کار به‌وسیلهٔ گشتاور انجام می‌گیرد؟

۱۶.۱۰ یک چرخ دستی به جرم $2000g$ دارای چهار چرخ است که هرچرخ $6cm$ شعاع و $150g$ جرم دارد. شتاب چرخ دستی را هنگامی که یک نیروی $0.6N$ برآن وارد می‌شود حساب کنید.

۱۷.۱۰ جرم قطعات چرخان یک ماشین $15kg$ و شعاع ژیراسیون آنها $15cm$ است. اندازه حرکت زاویه‌ای وانرژی جنبشی آنها را هنگامی که با سرعت ۱۸۰۰ دور در دقیقه می‌چرخند حساب کنید. گشتاور نیرو و توان لازم برای اینکه درطول $5s$ به این سرعت زاویه‌ای برسند چقدر است؟

۱۸.۱۰ شعاع سکه‌ای $1cm$ وجرم آن $5g$ است. این سکه با سرعت ۶ دور در دقیقه

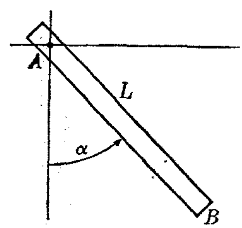
روی یک سطح شیب‌دار به پایین می‌غلتد. (الف) انرژی جنبشی چرخشی، (ب) انرژی جنبشی انتقالی، (ج) انرژی جنبشی کل آن را پیداکنید. برای رسیدن به‌این انرژی جنبشی، چه ارتفاعی باید پایین بیاید؟

۱۹.۱۰. مثال ۹.۸ را، به فرض اینکه گوی دارای شعاع r باشد و به جای لغزیدن روی مسیر خود بغلتد از نو حل کنید.

۲۰.۱۰. جرم اتومبیل مسئلهٔ ۱۴.۱۰، ۱۶۰۰kg است وسرعت‌آن در ۸s به همان اندازه‌ای که داده شده افزایش می‌یابد. (الف) انرژی جنبشی ابتدایی ونهایی هرچرخ را، (ب) انرژی جنبشی کل ابتدایی و نهایی هرچرخ را، و (ج) انرژی جنبشی کل نهایی اتومبیل را حساب کنید.

۲۱.۱۰. کامیونی به جرم ۱۰ تن با سرعت $۶٫۶\,\mathrm{ms^{-1}}$ حرکت می‌کند. شعاع هرچرخ ۰٫۴۵cm و جرم‌آن ۱۰۰kg وشعاع ژیراسیون آن ۳۰cm است. انرژی جنبشی کل کامیون را حساب کنید.

۲۲.۱۰. یک حلقهٔ آهنی به شعاعهای خارجی و داخلی ۰٫۶۰m و ۰٫۵۰m، دارای ۱۸kg جرم است. این‌حلقه ازسطح شیب‌داری با غلتیدن پایین می‌آید ودرپایین سرعت آن به $۳٫۶\,\mathrm{ms^{-1}}$ می‌رسد. انرژی کل و ارتفاعی را که از آنجا شروع به حرکت کرده است حساب کنید.



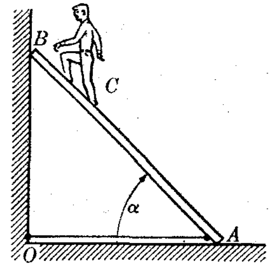
شکل ۳۰.۱۰

۲۳.۱۰. میلهٔ شکل ۳۰.۱۰ دارای طول L وجرم m است ومی‌تواند دریک صفحهٔ قایم به دور انتهای خود، A، آزادانه بچرخد. درآغاز آن را در راستای افقی نگه می‌دارند و سپس رها می‌کنند. درلحظه‌ای که با راستای قایم زاویهٔ α می‌سازد، (الف) شتاب زاویه‌ای میله، (ب) سرعت زاویه‌ای، و (ج) نیروهایی را که در تکیه‌گاه برمیله وارد می‌شوند حساب کنید.

۲۴.۱۰. یک میلهٔ یکنواخت، به طول ۱٫۰m وجرم ۲٫۵kg در راستای قایم آویزان است و می‌تواند دور انتهای بالایی خود بچرخد. انتهای دیگر میله به مدت ۰٫۰۲s با یک نیروی افقی ۱۰۰N برخورد می‌کند. (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای را که به وسیلهٔ میله دریافت می‌شود پیدا کنید. (ب) آیا میله می‌تواند به‌وضع قایم درسمت بالا برسد؟

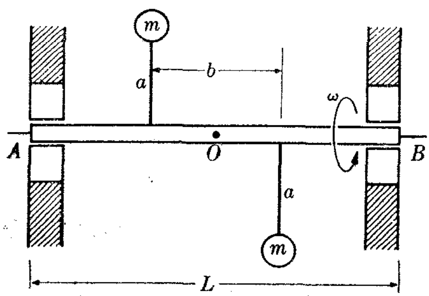
۲۵.۱۰. نردبام AB به طول ۳m وجرم ۲۰kg به دیوار بدون مالشی تکیه دارد (شکل

۳۱.۱۰). روی زمین نیز مالش وجود ندارد. برای جلوگیری از لیزخوردن نردبام بند OA به آن متصل شده است. مردی به جرم $60\,kg$ در ۲/۳ طول نردبام درقسمت بالا قرار دارد و بند ناگهان پاره می‌شود. حساب کنید (الف) شتاب اولیهٔ مرکز جرم دستگاه نردبام به‌اضافهٔ مرد را، و (ب) شتاب زاویه‌ای اولیهٔ مرکز جرم را. [راهنمایی: توجه داشته باشید که سرعت زاویه‌ای اولیهٔ نردبام برابر صفر است.]

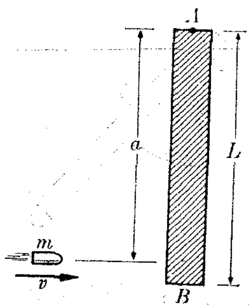


شکل ۳۱.۱۰

۲۶.۱۰. میلهٔ افقی AB درشکل ۳۲.۱۰، که در دوانتهای خود توسط یاتاقانهای بدون مالش نگهداری می‌شود، می‌تواند آزادانه دور محور افقی خود بچرخد. مطابق شکل، دو جرم برابر توسط میله‌های سختی با جرم ناچیز، به طور متقارن نسبت به مرکز میله به آن متصل‌اند. پیدا کنید (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه را نسبت به مرکز جرم هنگامی که با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد، و (ب) نیروهایی را که روی یاتاقانها اثر می‌کنند.



شکل ۳۲.۱۰

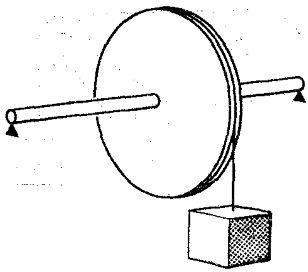


شکل ۳۳.۱۰

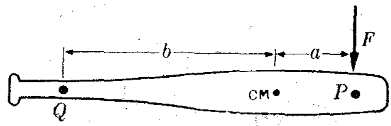
۲۷.۱۰. میله‌ای به طول L و جرم M (شکل ۳۳.۱۰) می‌تواند آزادانه دور نقطهٔ A بچرخد. گلوله‌ای به جرم m وسرعت v درنقطه‌ای به فاصلهٔ a از A به میله می‌خورد و در آن فرو می‌رود. (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه را نسبت به A بلافاصله قبل و بعد از برخورد تعیین کنید. (ب) اندازه حرکت دستگاه را بلافاصله قبل و بعد از برخورد تعیین کنید. پاسخ خودرا دقیقاً توضیح دهید. (ج) درچه شرایطی اندازه حرکت ثابت باقی می‌ماند؟ (د) Q برخورد چقدر است؟

۲۸.۱۰. میله‌ای به‌طول L وجرم m روی یک سطح افقی بدون مالش قرار دارد (شکل ۳۴.۱۰). درمدت‌زمان‌خیلی‌کوتاه Δt این‌میله تحت تأثیر نیروی F قرارمی‌گیرد وتکان I را پیدامی‌کند. نیرو

درنقطه‌ای مـانند P به فاصلهٔ a از مرکز جرم وارد می‌شود. (الف) سرعت مرکـز جـرم، و (ب) سرعت زاویه‌ای حول مرکز جرم را پیدا کنید. (ج) با نشان دادن $b = K^2/a$، کـه در آن K شعاع ژیراسیون دور مرکزجرم است، نقطهٔ Q را پیدا کنید که در آغاز درچارچوب L بیحرکت باقی می‌ماند. نقطهٔ Q مرکز ضربه[1] نـامیده می‌شود. (به عنوان مثال یک بازیکن بیس‌بال بـرای پیشگیری از احساس یک ضربهٔ خشک در لحظهٔ زدن گوی، بـایـد چوگان را در مرکز ضربـه‌اش بگیرد.) همچنین ثابت کنید که اگر نیرو درنقطهٔ Q وارد شود مرکز ضربه درنقطهٔ P خواهد بود.



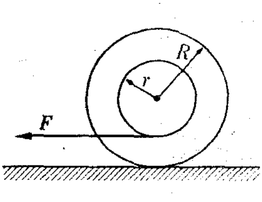
شکل ۳۵.۱۰



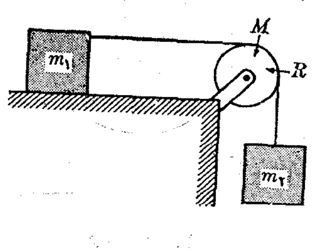
شکل ۳۴.۱۰

۲۹.۱۰. چرخ شکل ۳۵.۱۰، کـه دارای شعاع $0/5\text{m}$ و جـرم 25kg است می‌توانـد دور محور افقی خود بچرخد. به انتهای آزاد نخی کـه دور چرخ پیچیده است یک جرم 10kg آویزان است. (الف) شتاب زاویه‌ای چرخ، (ب) شتاب خطی جسم، و (ج) کشش نخ را حساب کنید.

۳۰.۱۰. شتاب دستگاه شکل ۳۶.۱۰ را حساب کنید، شعاع چرخ R وجرم آن M است وبه دلیل مالش نخ می‌چرخد. دراین حالت $m_1 = 50\text{kg}$، $m_2 = 200\text{kg}$، $M = 15\text{kg}$ و $R = 10\text{cm}$ است.



شکل ۳۷.۱۰



شکل ۳۶.۱۰

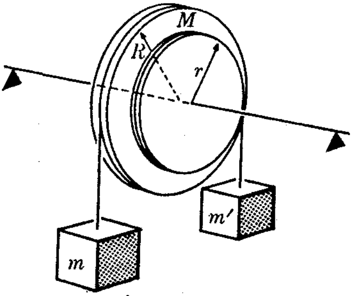
۳۱.۱۰. نخی به دور استوانـهٔ کوچک شکل ۳۷.۱۰ پیچیده شده است. اگر نخ را بـا

---

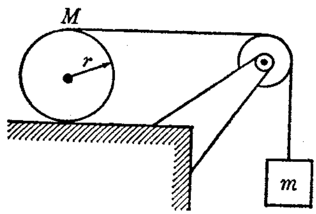
1. center of percussion

نیروی $\mathbf{F}$ بکشیم، شتاب استوانه را حساب‌کنید. سوی‌حرکت را تعیین‌کنید. داریم $r = ۳\text{cm}$، $R = ۵\text{cm}$، $F = ۱\text{N}$ و $m = ۱\text{kg}$.

۳۲.۱۰. درد ستگاه نمایش داده شده درشکل ۳۸.۱۰، $M = ۱٫۰\text{ kg}$، $m = ۰٫۲\text{kg}$، $r = ۰٫۲\text{m}$ است. شتاب خطی m، شتاب زاویه‌ای استوانهٔ M و کشش نخ را حساب کنید. از اثر قرقرهٔ کوچک صرف نظر کنید.



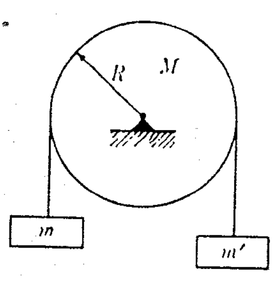
شکل ۳۹.۱۰



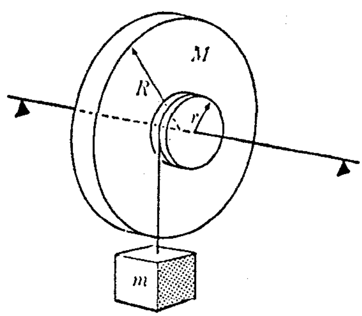
شکل ۳۸.۱۰

۳۳.۱۰. در دستگاه شکل ۳۹.۱۰، سرعت زاویه‌ای دیسک وسرعت خطی m و m' را تعیین کنید. کشش هریک از نخها را حساب کنید. فرض کنید $m = ۶۰۰\text{g}$، $m' = ۵۰۰\text{g}$، $M = ۸۰۰\text{g}$، $R = ۸\text{cm}$ و $r = ۶\text{cm}$ است.

۳۴.۱۰. در دستگاه شکل ۴۰.۱۰، شتاب m و کشش نخ را حساب کنید. گشتاور لختی دیسک کوچک به شعاع r را ناچیز بگیرید. دراین حالت $r = ۴\text{cm}$، $R = ۱۲\text{cm}$، $M = ۴\text{kg}$ و $m = ۲\text{kg}$ است.



شکل ۴۱.۱۰

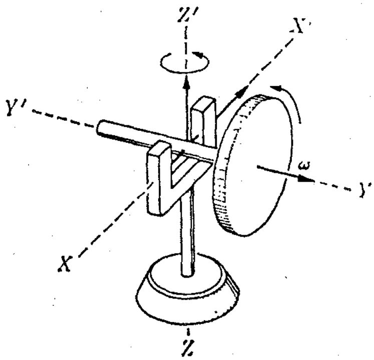


شکل ۴۰.۱۰

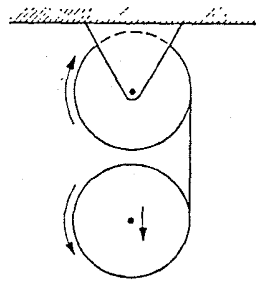
۳۵.۱۰. در شکل ۴۱.۱۰، $M = ۶\text{kg}$، $m = ۴\text{kg}$، $m' = ۳\text{kg}$ و $R = ۰٫۴۰ m$ است. (الف) انرژی جنبشی کل دستگاه را پس از ۵s، (ب) کشش نخ را حساب کنید.

۳۶.۱۰. دو دیسک شکل ۴۲.۱۰ دارای جرم برابر m و شعاع یکسان R می‌باشند. دیسک

بالایی می‌تواند آزادانه دور یک محور افقی که از مرکزش می‌گذرد بچرخد. نخی دور دو دیسک پیچیده شده است. دیسک پایین را رها می‌کنند تا بیفتد. (الف) شتاب مرکز جرم دیسک پایینی، (ب) کشش نخ، و (ج) شتاب زاویه‌ای هردیسک را دور مرکز جرمش پیدا کنید.



شکل ۴۳.۱۰



شکل ۴۲.۱۰

۳۷.۱۰. جرم ژیروسکوپ شکل ۴۳.۱۰ برابر ۱۰kg ر۰ است. دیسک در ۱۰ سانتیمتری محور ZZ' قرار دارد و شعاع آن ۵ cm است و با سرعت زاویه $100\ \text{rad s}^{-1}$ دور محور YY' می‌چرخد. سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی چقدر است؟

۳۸.۱۰. یک ژیروسکوپ نمایشی، تشکیل شده است از یک حلقهٔ فلزی به‌شعاع ۳۵ m ر۰ و جرم ۵ kg که‌توسط شعاعهای خود به‌محوری اتصال دارد که ازهرطرف ۲۰ cm امتداد پیدامی‌کند. درحالی‌که حلقه باسرعت ۳۰۰ دور در دقیقه می‌چرخد، نمایشگرمحور را در وضع افقی نگه می‌دارد. بزرگی و سوی نیرویی که هریک از دستهای نمایشگر روی محور وارد می‌کند در حالتهای زیر پیدا کنید: (الف) محور به موازات خودش جابجا می‌شود؛ (ب) محور درصفحهٔ افقی باسرعت ۲ دور در دقیقه حول مرکزجرمش می‌چرخد؛ (ج) محور درصفحهٔ قایم دور مرکزش با همان سرعت می‌چرخد. همچنین حساب کنید سرعت زاویه‌ای حلقه چقدر باید باشد تا هنگامی که ژیروسکوپ را تنها با یک دست می‌گیرند محور آن افقی باقی بماند.

۳۹.۱۰. ثابت کنید که دریک جسم سخت $(dE_k/dt) = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\tau}$ است. این معادله نشان می‌دهد که $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega}$ توان چرخشی است. [راهنمایی: توجه داشته باشید که برای یک جسم درحال چرخش $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ است. نخست با به‌کار بردن معادلهٔ (۱۰.۸)، معادله را برای یک ذرهٔ تنها به دست آورید و سپس نتایج را با هم جمع کنید تا معادله برای تمام ذرات جسم سخت به‌دست آید.]

۴۰.۱۰. هنگامی که هیچ گشتاور نیرویی روی یک جسم در حال حرکت اثر نکند، نه تنها

اندازه‌حرکت‌زاویه‌ای، بلکه انرژی جنبشی آن نیز تغییر نمی‌کند. معادلهٔ قطب‌راه (مثال ۸.۱۰) را با پیدا کردن تقاطع بیضیوارهای مربوط به L^2 و E_k حساب کنید. نتیجهٔ به دست آمده را تجزیه و تحلیل کنید.

۴۱.۱۰ ثابت کنید که گشتاور لختی یک جسم سخت دور محوری که با محورهای اصلی زاویه‌های α، β و γ می‌سازد برابر است با

$$I = I_1 \cos^2\alpha + I_2 \cos^2\beta + I_3 \cos^2\gamma.$$

۴۲.۱۰ قطعهٔ سختی به‌ابعاد $0.20\,\mathrm{m}$، $0.30\,\mathrm{m}$ و $0.40\,\mathrm{m}$ و جرم $4\,\mathrm{kg}$ دورمحوری که از بزرگترین قطر آن می‌گذرد با سرعت ۱۲۰ دور در دقیقه می‌چرخد. (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای آن‌را نسبت به محورهای اصلی پیدا کنید. (ب) زاویهٔ بین اندازه حرکت زاویه‌ای و محور چرخش را تعیین کنید. (ج) انرژی جنبشی چرخشی را به دست آورید. [راهنمایی: برای به‌دست آوردن گشتاور لختی نتیجهٔ مسئلهٔ ۴۱.۱۰ را به‌کار ببرید.]

۴۳.۱۰ درمورد جسم مسئلهٔ پیش، فرض‌می‌کنیم سرعت‌زاویه‌ای‌ثابت است. (الف) گشتاور نیروی وارد به جسم نسبت به محورهای اصلی، و (ب) زاویهٔ بین گشتاور نیرو و محور چرخش را تعیین کنید.

۴۴.۱۰ ذره‌ای به جرم m با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ دور محوری حرکت می‌کند، به گونه‌ای که بنا به معادلهٔ (۴۸.۵) سرعت آن برابر است با $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. ثابت کنید که مولفه‌های اندازه حرکت زاویه‌ای آن عبارتند از

$$L_x = m[\omega_x(y^2 + z^2) - \omega_y xy - \omega_z xz],$$
$$L_y = m[-\omega_x xy + \omega_y(z^2 + x^2) - \omega_z yz],$$
$$L_z = m[-\omega_x zx - \omega_y yz + \omega_z(x^2 + y^2)].$$

۴۵.۱۰ نتیجهٔ مسئلهٔ پیش را درمورد یک جسم سخت تعمیم دهید تا به‌دست آید

$$L_x = I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z$$
$$L_y = I_{xy}\omega_x - I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z$$
$$L_z = I_{zx}\omega_x - I_{yz}\omega_y - I_z\omega_z.$$

در رابطه های بالا بنا به‌معادلهٔ (۷.۱۰)،

$$I_x = \sum m(y^2 + z^2),$$
$$I_y = \sum m(z^2 + x^2),$$
$$I_z = \sum m(x^2 + y^2)$$

گشتاورهای لختی نسبت به سه محور مختصات، و

$$I_{xy} = \sum mxy,$$
$$I_{yz} = \sum myz,$$
$$I_{zx} = \sum mzx$$

حاصل ضربهای لختی[1] نامیده می‌شوند. با مقایسهٔ این نتیجه با معادلهٔ (۵.۱۰) دانشجو مشاهده خواهد کرد که محورهای اصلی محورهایی هستند که حاصل ضربهای لختی برای آنها برابر صفرند. همچنین توجه کنید که رفتار چرخشی یک جسم سخت با ۶ کمیت مشخص می‌شود که عبارتند از: سه گشتاور لختی و سه حاصل ضرب لختی.

۴۶.۱۰ سه گشتاور لختی و سه حاصل ضرب لختی جسم نشان داده شده درشکل ۱۶.۱۰ را نسبت‌به (الف)محورهای $X_\circ$، $Y_\circ$ و $Z_\circ$، (ب)محورهای X، Y و Z، و (ج)محورهای X'، $Y_\circ$ و Z تعیین کنید. آیا این کمیتها همیشه ثابت هستند؟

۴۷.۱۰ حاصل ضربهای لختی مولکولهای H_2O و NH_3 را نسبت به محورهایی که در مسئله‌های ۶.۱۰ و ۷.۱۰ نشان داده شده‌اند حساب کنید و تحقیق کنید که این محورها محورهای اصلی می باشند.

۴۸.۱۰ درستی رابطهٔ برداری زیر را تحقیق کنید:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}).$$

ازاین رابطه استفاده کنید و ثابت کنید که درمورد جسم مسئلهٔ ۴۴.۱۰ داریم

$$v^2 = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2.$$

سپس انرژی جنبشی آن‌را به‌صورت زیر بنویسید:

$$E_k = \frac{1}{2} m[\omega_x^2(y^2 + z^2) + \omega_y^2(z^2 + x^2) + \omega_z^2(x^2 + y^2) - 2\omega_x\omega_y xy - 2\omega_y\omega_z yz - 2\omega_z\omega_x zx].$$

۴۹.۱۰ با بسط نتیجهٔ مسئلهٔ پیش، انرژی جنبشی یک جسم سخت در حال چرخش را به‌صورت زیر بنویسید:

$$E_k = \frac{1}{2}[I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 - 2I_{xy}\omega_x\omega_y - 2I_{yz}\omega_y\omega_z - 2I_{zx}\omega_z\omega_x].$$

مشاهده می‌شود، هنگامی که حاصل ضربهای لختی برابر صفر باشند رابطهٔ بالا به مقادیری که دربخش ۵.۱۰ برای محورهای اصلی بیان شدند، تبدیل می‌شود.

۵۰.۱۰ برای حل مثال ۷.۱۰ نخست مؤلفه‌های $\mathbf{L}$ به‌موازات محورهای ثابت XYZ را پیداکنید و سپس با به‌کاربردن مستقیم معادلهٔ (۱۱.۱۰) مؤلفه‌های $\boldsymbol{\tau}$ را حساب‌کنید. همچنین حالت چرخشی شتابدار ($d\omega/dt \neq 0$) را نیز بررسی کنید.

---

1. products of inertia

۱۱

دینامیک انرژیهای بالا

۱۰۱۱ مقدمه

در فصلهای پیش بـه شرح و توضیح نظریـهٔ دینامیکی پرداختیم کـه حرکت اجسام مشهود در اطراف مـا را توصیف می‌کرد و مکانیک کلاسیک یا نیوتونی نـام داشت. این نظریه برچندین فرض متکی بـود. به عنوان مثال، دیدیم که اندازه حرکت را می‌توان به صورت $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ نشان داد که در آن جرم m ضریب مشخصهٔ ذره یا دستگاه است. m را به طور منطقی یک ضریب ناوردای هرذره یا دستگاه در نظر گرفتیم. تا زمانی که گسترهٔ سرعتهای مورد بررسی خیلی بزرگ نباشد، فرض ناوردایی جرم معتبر و با تجربه سازگار است. ولی ممکن است درآزمایشهای مربوط به‌سرعتهای خیلی‌بزرگ این‌فرض درست نباشد. در واقع، در مطالعهٔ حـرکت ذرات بسیار پرانرژی، مانند الکترونهای لایه‌های داخلی اتمها یا ذرات موجود درپرتوهای کیهانی یا ذرات حاصل ازشتابدهنده‌های انرژی بالا، تفاوتهایی مشاهده می‌شود. هدف این فصل ارائـه و تشریح یک نظریهٔ کلی حرکت است که هم بـرای ذرات کم‌انرژی و هم بـرای ذرات پرانرژی صادق باشد. اساس توضیح این نظریه برروی تبدیل لورنتس که در بخش ۶.۶ در بارهٔ آن گفتگو شد، و نیز اصل نسبیت[1] متکی است. به همین دلیل نظریهٔ جدید مکانیک نسبیتی[2] نامیده می‌شود.

۲۰۱۱ اصل کلاسیک نسبیت

درفصل ۶ دربارهٔ ماهیت‌نسبی حرکت‌گفتگوکردیم و رابطه‌های سرعت و شتاب اندازه‌گیری شده به‌وسیلهٔ دو ناظر درحالتهای مختلف حرکت نسبی را به دست آوردیم. بویژه در بخش ۳.۶ تبدیل گالیله را بـرای دو ناظر کـه نسبت به هم حـرکت انتقالی یکنواخت دارنـد پیدا کردیم.

درفصل ۷ تاکید شد که قوانین حرکت باید به‌یک ناظر لخت مربوط یا نسبت به او در نظر گرفته شونـد. اکنون فرض می‌کنیم دو ناظر لخت کـه با سرعت ثابتی نسبت به هم حرکت می‌کنند، می‌خواهند مشاهدات خـود از یک پدیدهٔ واحد را با تبدیل گالیله به هم مربوط کنند. این‌بار مسئله را باید با دید انتقادی‌تری نگریست، و بررسی‌کرد که آیا قوانین دینامیکی که برای یک ناظر لخت معتبر هستند برای هرناظر لخت دیگری نیز برقرارند یا نـه. کافی است این موضوع تنها در مـورد اصل بقای اندازه حرکت و تعریف نیرو مـورد بررسی قـرار گیرد، زیرا سایر قوانین دینامیک از این دو نتیجه می‌شوند. این فرضیه کـه تمام قوانین دینامیک باید برای تمام ناظرهای لخت که با سرعت ثابتی نسبت به یکدیگر حرکت می‌کنند یکسان باشد، اصل کلاسیک نسبیت[3] راتشکیل می‌دهد.

دو ذره باجرمهای m_1 و m_2 را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ سرعتهایی هستند کـه بـه وسیلهٔ ناظر لخت O برای آنها اندازه‌گیری می‌شود. اگـر هیچ‌گونه نیروی

---

1. principle of relativity
2. relativistic mechanics
3. classical principle of relativity

خارجی بر این ذره‌ها وارد نشود، اصل بقای اندازه حرکت لازم می‌دارد که

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = \text{const}\cdot \qquad (۱۰۱۱)$$

برای ناظر لخت دیگری مانند O' که نسبت به‌ناظر O با سرعت ثابت $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند، بنا به‌معادلهٔ (۹۰۶) که از تبدیل گالیله به‌دست آمد، سرعتهای m_1 و m_2 عبارتند از

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v} \quad \text{و} \quad \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}$$

با قراردادن این سرعتها درمعادلهٔ (۱۰۱۱) داریم

$$m_1(\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}) + m_2(\mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}) = \text{const}$$

یا

$$m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2 = \text{const} - (m_1 + m_2)\mathbf{v} = \text{const}\cdot \qquad (۲۰۱۱)$$

توجه داشته باشید که نتیجهٔ جدید ثابت نیست مگر اینکه $\mathbf{v}$ ثابت باشد؛ یعنی ناظر O' نیز یک ناظر لخت باشد. معادلهٔ (۲۰۱۱) کاملا مشابه معادلهٔ (۱۰۱۱) است، در نتیجه دو ناظر اصل بقای اندازه حرکت یکسانی را تحقیق می‌کنند.

اکنون رابطهٔ بین نیروهای اندازه‌گیری شده به وسیلهٔ دوناظر لخت O و O' را که با سرعت نسبی ثابت $\mathbf{v}$ حرکت می‌کنند بررسی می‌کنیم. فرض کنید ناظرهای O و O' هردو در تمام طول مدت حرکت برای یک ذره جرم یکسانی را اندازه می‌گیرند. این فرض دست‌کم تا موقعی‌که سرعت‌نسبی $\mathbf{v}$ نسبت به‌سرعت نور خیلی کوچک باشد با تجربه تأیید شده است. اگر $\mathbf{V}$ و $\mathbf{V}'$ بترتیب مقدار سرعتهای ذره نسبت به دوناظر باشند، بنابه معادلهٔ (۹۰۶) با رابطهٔ $\mathbf{V} = \mathbf{V}' + \mathbf{v}$ به هم مربوط می‌شوند. چون $\mathbf{v}$ ثابت است، یعنی $d\mathbf{v}/dt = 0$ است، داریم

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}'}{dt} \quad \text{یا} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}' \qquad (۳۰۱۱)$$

یعنی دوناظر برای ذره شتاب یکسانی را اندازه می‌گیرند [به‌معادلهٔ (۱۳۰۶) مراجعه کنید]. بنا به‌تعریف نیرو که در معادلهٔ (۱۲۰۷) بیان شد، نیروی اندازه‌گیری شده به وسیلهٔ هرناظر عبارت است از

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\frac{d\mathbf{V}}{dt} = m\mathbf{a} \quad \text{و} \quad \mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt} = m\frac{d\mathbf{V}'}{dt} = m\mathbf{a}'.$$

با توجه به‌اینکه $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ است نتیجه می‌گیریم که

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'. \qquad (۴۰۱۱)$$

در نتیجه اگر دو ناظر لخت برای مقایسهٔ اندازه‌گیریهای خود تبدیل گالیله را به کار ببرند، هر دو نیروی مؤثر یکسانی را برروی ذره اندازه می‌گیرند.

به‌دانشجو توصیه می‌کنیم که تحقیق کند اگر انرژی نسبت به‌ناظر لخت O ثابت بماند،

یعنی اگر داشته باشیم

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + E_{p,12} = \text{const}$$

آنگاه انرژی برای ناظر لخت O' نیز ثابت می‌ماند:

$$E' = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 + E'_{p,12} = \text{const}$$

کـه در این رابطه اگـر انـرژی پتانسیل فقط بـه فاصلهٔ بین دو ذره بستگی داشته بـاشد، $E_{p,12} = E'_{p,12}$ است. (بـرای مطالعهٔ رابطهٔ بین E و E' به مسئلهٔ ۱۰۱۱ مراجعه کنید.) بنابراین، تا آنجا کـه به قوانین دینامیک مربوط می‌شود، توصیف حرکت بـرای هردو ناظر لخت یکسان است.

مثال ۱۰۱۱ در شکل معادلـهٔ حرکتی کـه به وسیلهٔ یک ناظر غیرلخت به‌کار بـرده شود، بحث کنید.

حل: اگر ناظری مانند O' لخت نباشد، بدین‌معنی است‌که $\mathbf{v}$ سرعت این ناظر نسبت به‌یک ناظـر لخت O تابعی است از زمـان. بنابراین $d\mathbf{v}/dt \neq 0$ است. در این صورت، چون $\mathbf{V} = \mathbf{V}' + \mathbf{v}$ است، به‌دست می‌آید

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}'}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \text{یا} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}' + \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

نیروی اندازه‌گیری شده به‌وسیلهٔ ناظر O برابراست با $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. بنابراین اگر هردوناظر تعریف یکسانی بـرای نیرو به کار ببرنـد، در این صورت نـاظر غیرلخت O' می‌نـویسد $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$. درنتیجه از رابطهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{a}'$ به‌دست می‌آید

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} - m\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{۵۰۱۱}$$

بدین طریق، ناظر لخت و ناظر غیر لخت برای یک نیرو و مقادیر متفاوتی اندازه می‌گیرند. به گفتهٔ دیگر، بـرای ناظر دوم، علاوه برنیروی $\mathbf{F}$ کـه ناظر لخت O اندازه‌گیری می‌کند (نیرویی کـه شامل تمام برهم کنشهای مؤثر برروی ذره می‌باشد)، نیروی دیگری نیز مانند $\mathbf{F}''$ وجود دارد که برذره وارد می‌شود:

$$\mathbf{F}'' = -m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{۶۰۱۱}$$

به‌گونه‌ای که نیروی برآیند وارد برذره برابر است با $\mathbf{F} + \mathbf{F}''$. این نیروی مجازی نیروی لختی نامیده می‌شود.

هنگام‌توصیف حرکت یک ذره نسبت به‌زمین (که یک چارچوب مرجع لخت‌نیست) گاهی این نـوع منطق را به کار می‌بریم. در این صورت، $d\mathbf{v}/dt$ همان شتاب مرکزگرای

$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega}$ است [به‌معادلهٔ (۲۵.۶) مراجعه‌کنید]. بنا براین نیروی لختی برابرمی‌شود با $\mathbf{F}'' = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$، که متناظر با یک نیروی گریزاز مرکز است که علاوه‌بر وزن ذره بر آن وارد می‌شود.

۳.۱۱ اصل خاص نسبیت

درسال ۱۹۰۵ (۱۲۸۴ ه.ش.) آلبرت اینشتین فیزیکدان آلمانی، با بیان اصل خاص نسبیت[1] گام بلند دیگری برداشت. بیان این اصل ازاین قرار است:

> تمام قوانین طبیعت (نه‌فقط قوانین دینامیک) باید برای تمام ناظرهای لخت‌که نسبت به هم با سرعت ثابتی حرکت می‌کنند یکسان باشند.

این اصل خاص یا جدید نسبیت معنای عظیمی دربر دارد، زیرا با پذیرش این اصل باید کلیهٔ قوانین فیزیک را به گونه‌ای بیان کرد که درگذر از چارچوب یک ناظر لخت به چارچوب لخت دیگر تغییر نکنند، واقعیتی که با استفاده ازتبدیل گالیله در مورد قوانین دینامیک تحقیق کردیم. از اینجا قیدی دربیان ریاضی این قوانین به وجود می‌آید. ازجملهٔ قوانینی که باید برای تمام ناظرهای لخت ناوردا بمانند، قوانینی هستند که پدیده‌های الکترومغناطیسی را توصیف می‌کنند؛ این قوانین در فصلهای آینده بتفصیل مورد گفتگو قرار می‌گیرند.

ولی از هم اکنون می‌توان گفت که دربیان این قوانین نسبت به یک ناظر لخت، سرعتی مانند c وارد می‌شود که همان سرعت نور است. در نتیجه، اصل خاص نسبیت به گونه‌ای که اینشتین فرمول‌بندی کرده است، ایجاب می‌کند سرعت نور برای تمام ناظرهای لخت یکسان باشد.

بخشی از انگیزهٔ اینشتین دربیان فرضیهٔ خود، نتیجهٔ یک رشته آزمایشهای تاریخی بود که ازحدود سال ۱۸۸۰ (۱۱۵۹ ه.ش.) به وسیلهٔ مایکلسون ومورلی برای اندازه‌گیری سرعت نور در راستاهای مختلف، آغاز شده بودند. آنها درصدد بودند که ببینند حرکت زمین چه تغییری درسرعت نور به وجود می‌آورد. ما آزمایش مایکلسون ومورلی را درفصل ۶ (بویژه درمثال ۷.۶) مورد مطالعه قرار دادیم. چنانکه در آنجا توضیح داده شد، نتیجهٔ آزمایشها همیشه منفی بود ونشان می‌داد که سرعت نور به حرکت ناظر بستگی ندارد.

ولی، بنا به معادلهٔ (۹.۶)، برای دوناظر متحرک نسبت به هم که مشاهدات خود را برمبنای تبدیل گالیله به یکدیگر مربوط می‌کنند، سرعت یک شیء هرگز یکسان نیست. از طرف دیگر، چنانکه درفصل ۶ توضیح داده شد، سرعت نور برای تمام ناظرهای لخت که مشاهداتشان با تبدیل لورنتس به یکدیگر مربوط می‌شوند یکسان است. بنابراین بدیهی به نظر می‌رسد برای تحقق اصل جدید باید به جای تبدیل گالیله ازتبدیل لورنتس استفاده کرد. با توجه به مراتب فوق، اصل خاص نسبیت را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

---

1. special principle of relativity

ناظرهای لخت برای مربوط ساختن مشاهدات خود بایدازتبدیل لورنتس استفاده کنند وتمام کمیتهای فیزیکی بایدطوری ازیک دستگاه لخت به‌دستگاه لخت دیگر تبدیل شوند که بیان قوانین فیزیکی برای تمام ناظرهای لخت یکسان باشد.

بقیهٔ این فصل بـه این بحث اختصاص یافته است که این فرمول‌بندی جـدید اصل نسبیت، چگونه درکمیتهای دینامیکی که پیش ازاین تعریف‌شده‌اند تأثیر می‌گذارد. ازنقطه‌نظر عملی، نظریه‌ای که درصدد توضیح آن هستیم تنهـا درسرعتهای قابل مقایسه با سرعت نور اهمیت دارد، بنابراین درمواردی به کار می‌رود کـه ذرات دارای انرژی بسیار بالا باشند. بـرای ذرات با سرعتهـای کم، تبدیل گالیله بـرای مربوط ساختن کمیتهای فیزیکی در دو چارچوب لخت از تقـریب خوبی برخوردار است و مـکانیک نیوتونی برای تشریح این پدیده‌ها بسیار مناسب می‌باشد. به این نظریـه نسبیت خاص می‌گویند، زیرا تنهـا در مورد ناظرهای لخت به‌کار می‌رود. برای ناظرهای غیر لخت، نظریهٔ نسبیت عام را به کارمی‌برند، که درپایان فصل ۱۳ باختصار درمورد آن گفتگو می‌شود.

حتی اگـر، در عمل بتوان در بیشتر مـوارد نظریـهٔ نسبیت خاص را نادیده گرفت، باوجود این ازنقطه نظر درک مفاهیم، این نظریه دگرگونی عمیقی در دریافتهای نظری و نیز تجزیه وتحلیلهای ما ازپدیده‌های فیزیکی ایجاد کرده است.

۴.۱۱ اندازه حرکت

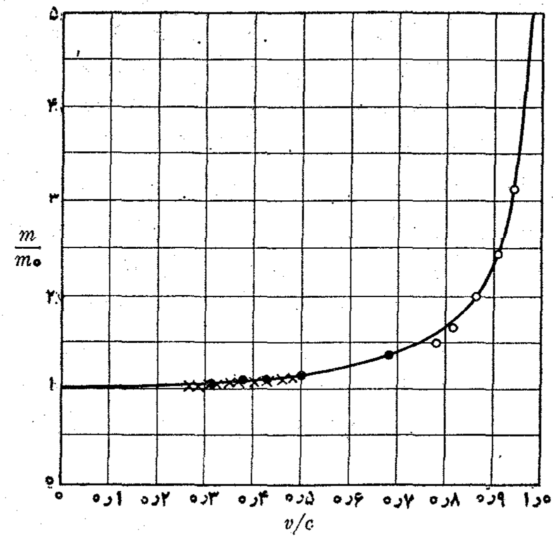
درفصل ۷، انـدازه حرکت یک ذره را با رابطهٔ $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ تعریف کـردیم، وجرم ذره را مستقل ازسرعت آن درنظر گرفتیم. ولی بعد از آزمایشهای زیاد با ذرات با انرژیهای بالا، مانند الکترونها وپروتونهای سریعی که توسط شتابدهنده‌های مدرن بـه وجـود می‌آیند، یا ذراتی که در پرتوهای کیهانی یافته می‌شوند، بطلان این فـرض ثابت شده است. یادآوری می‌کنیم کـه نیروی وارد بریک ذره با رابطهٔ $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ تعریف می‌شود، و بـا اعمال نیروهـای معلوم روی ذرات سریع می‌توان رابطهٔ مربوط به $\mathbf{p}$ را به طور تجربی به دست آورد. [بـه عنوان مثال، می‌توان حرکت الکترونها (یا سایر ذرات باردار) با انرژیهـای مختلف را درمیدانهای الکتریکی یـا مغناطیسی معلوم مشاهده کرد.] ازاین آزمایشهـا نتیجه می‌شود جرم ذره‌ای که با سرعت $\mathbf{v}$ نسبت به ناظر حرکت می‌کند از رابطهٔ زیـر به دست می‌آید:

$$m = \frac{m_\circ}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = km_\circ \qquad (۷.۱۱)$$

دراینجا k همان است کـه در رابطهٔ (۳۲.۶) تعریف شد و $m_\circ$ ثابتی است کـه مشخصهٔ هر ذره است و جرم سکون ذره نـامیده می‌شود، زیرا $m_\circ$ عبارت است از مقـدار m به ازای $v = \circ$، یعنی هنگامی‌که ذره نسبت به ناظر ساکن باشد. وجود سازهٔ $\sqrt{1 - v^2/c^2}$، کـه

قبلا درفصل ۶ هنگام مطالعهٔ تبدیل لورنتس با آن برخورد داشتیم، شگفت‌آور نیست، زیرا اصل جدید نسبیت که برتبدیل لورنتس متکی است، استعمال آن را ایجاب می‌کند.

شکل ۱.۱۱ تغییر جرم با سرعت را مطابق رابطهٔ (۷.۱۱) نشان می‌دهد. این شکل اساساً همان شکل ۱۵.۶ است، زیرا هر دوشکل k را برحسب v/c به دست می‌دهند.



شکل ۱.۱۱. تأیید تجربی تغییر جرم با سرعت. منحنی با خط پر براساس معادلهٔ (۷.۱۱) رسم شده‌است. داده‌های تجربی کوفمان[1] [۱۹۰۱ (۱۲۸۰ هـ.ش.)] با دایره‌های توخالی، و بوچرر[2] [۱۹۰۹ (۱۲۸۸ هـ.ش.)] با دایره‌های سیاه، و گی[3] و لاوانش[4] [۱۹۱۵ (۱۲۹۴ هـ.ش.)] با ضربدر نشان داده شده‌اند.

چنانکه ملاحظه می‌کنید تنها درسرعتهای خیلی بالاست که جرم ذره افزایش قابل ملاحظه‌ای پیدا می‌کند. به عنوان مثال، حتی برای سرعت $v = ۰٫۵c$، $m/m_0 = ۱/۱۵$ است یعنی افزایش جرم تنها ۱۵ درصد می‌باشد.

بنابراین باید اندازه حرکت یک ذره را که با سرعت $\mathbf{v}$ نسبت به ناظری حرکت می‌کند با رابطهٔ زیر بیان کرد:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = km_0\mathbf{v}. \qquad (۸.۱۱)$$

درسرعتهای کم ($v \ll c$)، می‌توان k را مساوی یک گرفت و دراین صورت رابطهٔ (۸.۱۱) با رابطه‌ای درفصلهای پیش به دست آوردیم یکسان می‌شود.

هنوز باید تحقیق شود که آیا رابطهٔ جدید اندازه حرکت پاسخگوی دربایستهای اصل

1. W. Kaufmann 2. A. Bucherer 3. C. Guye 4. C. Lavanchy

نسبیت هست یا نه. به گفتهٔ دیگر، باید تحقیق کنیم اگر حرکت ذره را ازیک دستگاه لخت به دستگاه لخت دیگری ارجاع دهیم که ذره نسبت به آن با سرعت $\mathbf{v}'$ حرکت می‌کند، آیا اندازه حرکت $\mathbf{p}'$ با قراردادن $\mathbf{v}'$ به جای $\mathbf{v}$ درمعادلهٔ (۸.۱۱) به دست می‌آید، و آیا دو رابطهٔ اندازه حرکت با تبدیل لورنتسی که دوناظر را به‌هم مربوط می‌کند مطابقت دارند یا نه. همچنین باید تحقیق کرد که آیا این تعریف جدید اندازه حرکت، با اصل ناوردایی بقای اندازه حرکت برای تمام ناظرهای لخت موافق است یا نه. به این سؤال دربخشهای ۷.۱۱ و ۹.۱۱ پاسخ داده خواهد شد.

مثال ۲.۱۱. افزایش نسبی سرعت و افزایش نسبی اندازه حرکت را با هم مقایسه کنید.

حل: افزایش نسبی اندازه حرکت با dp/p و افزایش نسبی سرعت با dv/v تعریف می‌شود. اندازه حرکت وسرعت با معادلهٔ (۸.۱۱) به هم مربوط می‌شوند که صورت اسکالر آن چنین است:

$$p = \frac{m_\circ v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

بنا به تعریف افزایش نسبی سرعت، ابتدا باید ازطرفین رابطهٔ فوق لگاریتم بگیریم. درنتیجه به دست می‌آید

$$\ln p = \ln m_\circ + \ln v - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

با دیفرانسیل‌گیری از رابطهٔ فوق به دست می‌آید

$$\frac{dp}{p} = \frac{dv}{v} + \frac{(v/c^2)dv}{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{1 - v^2/c^2}\frac{dv}{v} = k^2\frac{dv}{v}.$$

بدین طریق مشاهده می‌شود که برای سرعتهای کم، موقعی که v^2/c^2 قابل اغماض باشد، داریم $dp/p = dv/v$. یعنی افزایش نسبی اندازه حرکت با افزایش نسبی سرعت برابر است واین با تجربه‌های روزمرهٔ ما سازگار است. ولی درسرعتهای بزرگ که با c قابل مقایسه هستند، افزایش نسبی سرعت dv/v، درسازهٔ بزرگی ضرب می‌شود، بدین طریق برای افزایش خیلی کم سرعت، امکان دارد افزایش نسبی مهمی برای اندازه حرکت به دست آید. به‌عنوان‌مثال، درسرعت $v = ۰٫۷c$ داریم $dp/p \approx ۲(dv/v)$ وبرای $v = ۰٫۹۹c$ داریم $dp/p \approx ۵۰\,(dv/v)$.

۵.۱۱ نیرو

درفصل ۷، نیرو را با معادلهٔ (۱۲.۷) تعریف کردیم، که از اصل بقای اندازه حرکت نتیجه می‌شد. این تعریف را می‌توان درمکانیک نسبیتی نیزمحفوظ نگه داشت. بدین طریق نیرو به صورت جدید زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_\circ \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \qquad (۹.۱۱)$$

درمورد یک حرکت مستقیم‌الخط می‌توان بزرگیها را درنظر گرفت و نوشت

$$F=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_\circ v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=\frac{m_\circ(dv/dt)}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}=\frac{m}{1-v^2/c^2}\frac{dv}{dt}. \qquad (۱۰.۱۱)$$

درمعادلهٔ (۱۰.۱۱)، m مقداری است که از معادلهٔ (۷.۱۱) به دست می‌آید. چون dv/dt برابر شتاب است، نتیجه می‌گیریم که برای یک ذره درانرژی بالا که درخط مستقیم حرکت می‌کند معادلهٔ $F = ma$ دیگر اعتبار ندارد. ازطرف دیگر، دریک حرکت دایره‌ای یکنواخت، بزرگی سرعت ثابت است ولی راستای آن ثابت نیست، ومعادلهٔ (۹.۱۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\mathbf{F}=\frac{m_\circ}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

دراین حالت $d\mathbf{v}/dt$ شتاب قایم یا مرکزگرایی است که بزرگی آن برابر است با v^2/R، که درآن، مطابق معادلهٔ (۴۴.۵)، R شعاع دایره است. بنابراین بزرگی نیروی مرکزگرا یا قایم برابر می‌شود با

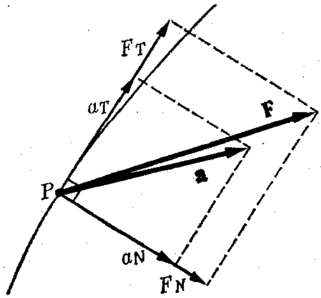
$$F_N=\frac{m_\circ}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}\frac{v^2}{R}=m\frac{v^2}{R}=\frac{pv}{R}. \qquad (۱۱.۱۱)$$

می‌بینیم به شرطی که برای جرم رابطهٔ نسبیتی آن، یعنی معادلهٔ (۷.۱۱) را به کار ببریم، رابطهٔ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ درحرکت دایره‌ای یکنواخت صادق‌است. درحالت کلی حرکت منحنی‌الخط، با توجه به‌اینکه dv/dt شتاب مماسی و v^2/R شتاب‌قایم است، ازمعادله‌های (۱۰.۱۱) و (۱۱.۱۱) نتیجه می‌گیریم که مؤلفه‌های نیرو در راستای مماس وقایم برمسیر، با استفاده از معادلهٔ (۷.۱۱) عبارتند از

$$F_T=\frac{m_\circ}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}a_T=\frac{m}{1-v^2/c^2}a_T=k^2ma_T$$
$$F_N=\frac{m_\circ}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}a_N=ma_N. \qquad (۱۲.۱۱)$$

یک نتیجهٔ مستقیم رابطه‌های (۱۲.۱۱) این است که نیرو با شتاب موازی نیست (شکل ۲.۱۱)، زیرا ضریبهایی که در a_T و a_N ضرب می‌شوند متفاوتند. بدین‌طریق برای ذره‌ای که در انرژیهای بالاست، یک رابطهٔ برداری از نوع $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ را نمی‌توان به کار برد، مگراینکه حرکت ذره دایره‌ای یکنواخت باشد. با وجوداین، رابطهٔ اساسی‌تر $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ هنوز اعتبار خود را حفظ می‌کند. زیرا این همان تعریف ما از نیرو است. یک نکتهٔ مهم دیگر این است که مؤلفهٔ مماسی نیرو، F_T، به طور نسبی بزرگتر ازمؤلفهٔ قایم آن، F_N،

است. این اختلاف ناشی از آن است که نیروی قایم فقط راستای سرعت را تغییر می‌دهد بدون آنکه بزرگی و درنتیجه جرم آن را تغییر دهد، ولی نیروی مماسی باید نه تنها بزرگی سرعت را تغییر دهد، بلکه درنتیجهٔ این تغییر سرعت، جرم ذره را نیز افزایش دهد.



شکل ۱۱.۲. در سرعتهای بزرگ، نیرو با شتاب موازی نیست.

مثال ۱۱.۳. حرکت مستقیم‌الخط براثر یک نیروی ثابت، در دینامیک نسبیتی.

حل: این حرکت، در مکانیک غیر نسبیتی، حرکتی است با شتاب ثابت. بنابراین اگر از نقطه‌ای که ذره شروع به حرکت می‌کند زمان و جابجایی را اندازه بگیریم، می‌توانیم از معادله‌های (۵.۱۰) و (۵.۱۱) برای پیدا کردن روابط $v = at$ و $x = at^2/2$ استفاده کنیم که در اینجا $a = F/m_0$ برابر شتاب ثابت می‌باشد. در مکانیک نسبیتی، از معادلهٔ (۱۱.۹) به صورت اسکالر آن استفاده می‌کنیم، زیرا حرکت مستقیم الخط است و تغییری در راستا به وجود نمی‌آید. بنابراین

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}\right).$$

با انتگرال‌گیری ازاین رابطه، وبا توجه به‌اینکه F ثابت است (وبه ازای $t = 0$، $v = 0$ است) داریم

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} = Ft.$$

این رابطه را نسبت به v حل می‌کنیم:

$$v = c\,\frac{(F/m_0 c)t}{\sqrt{1 + (F/m_0 c)^2 t^2}}.$$

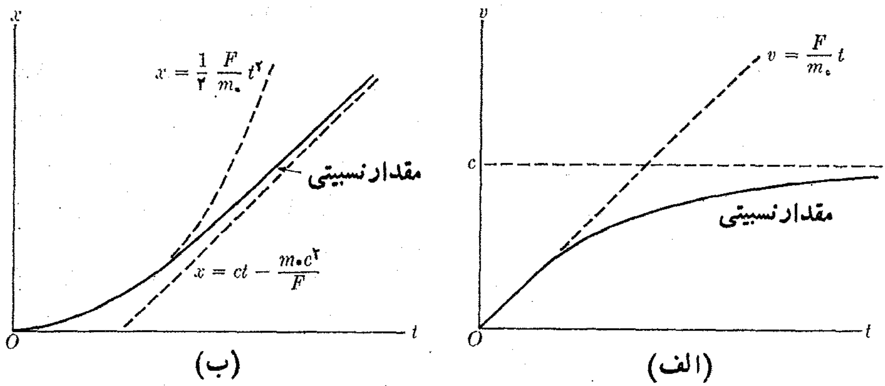
برای زمانهای خیلی کوتاه t (یعنی هنگامی که اندازه‌گیری درآغازحرکت صورت می‌گیرد) جملهٔ دوم در مخرج کسر قابل اغماض است و $v \approx (F/m_0)t$ می‌شود، که رابطه‌ای است غیرنسبیتی، زیرا در این حالت $a = F/m_0$ است. برای tهای بزرگ (یعنی هنگامی که

اندازه‌گیری زمانی انجام می‌شود که پیش از آن ذره مدت شتاب می‌گرفته است) در مخرج، در مقابل جملهٔ دوم می‌توان از یک صرف نظر کرد، و $v \approx c$ می‌شود. بدین طریق به جای اینکه سرعت تا بینهایت افزایش پیدا کند، به سمت یک مقدارمعین، یعنی c که همان سرعت نور است میل می‌کند. این تغییر سرعت با زمان در شکل ۳.۱۱ (الف) با خط پرنشان داده شده است. ولی اندازه حرکت با $p = Ft$ نشان داده می‌شود و تا بینهایت افزایش پیدا می‌کند. برای یافتن جابجایی ذره، یادآور می‌شویم که $v = dx/dt$ است. بنابراین داریم

$$\frac{dx}{dt} = c\,\frac{(F/m_{\circ}c)t}{\sqrt{1+(F/m_{\circ}c)^2t^2}}.$$

با انتگرال گیری از این رابطه (و با قراردادن $x = \circ$ به‌ازای $t = \circ$) داریم

$$x = \frac{m_{\circ}c^2}{F}\left[\sqrt{1+\left(\frac{F}{m_{\circ}c}\right)^2 t^2} - 1\right].$$



شکل ۳.۱۱. حرکت مستقیم الخط نسبیتی براثر یک نیروی ثابت

با استفاده از بسط دو جمله‌ای (پ.۲۸) و به ازای $n = 1/2$، برای مقادیر کوچک t، رابطهٔ فوق به‌صورت $x = (F/m_{\circ})t^2/2$ درمی‌آید که این مقدار غیرنسبیتی برای جابجایی است. برای tهـای بزرگ، داریم $x \approx ct - (m_{\circ}c^2/F)$ که مربوط به یک حرکت یکنواخت با سرعت c است. بدین طریق مسافت پیموده شده کوچکتر از مسافتی می‌شود که اگر رابطه‌های غیر نسبیتی برای تمام سرعتها صادق می‌بودند پیموده می‌شد. این نکته را در شکل ۳.۱۱ (ب) با خط پرنشان داده‌ایم. این مسئله در برخی از حوزه‌ها، به عنوان مثال حرکت یک ذرهٔ باردار در یک شتابدهندهٔ خطی، مسئلهٔ جالبی است.

۶.۱۱ انرژی

برای محاسبهٔ انرژی جنبشی یک ذره با توجه به تعریف جدید اندازه حرکت، از همان

شیوه‌ای که در بخش ۵.۸ هنگام مطالعهٔ مکانیک نیوتونی به‌کاررفت استفاده می‌کنیم. بنا براین با یادآوری اینکه $v = ds/dt$ است، به دست می‌آید

$$E_k = \int_\circ^v F_T\, ds = \int_\circ^v \frac{d}{dt}(mv)ds = \int_\circ^v vd(mv).$$

با محاسبهٔ این انتگرال با استفاده از روش جزء بجزء [به معادلهٔ (پ.۴۱) مراجعه کنید] و با به کار بردن رابطهٔ نسبیتی (۷.۱۱) برای جرم، داریم

$$E_k = mv^۲ - \int_\circ^v mvdv = \frac{m_\circ v^۲}{\sqrt{۱ - v^۲/c^۲}} - \int_\circ^v \frac{m_\circ vdv}{\sqrt{۱ - v^۲/c^۲}}.$$

$$= \frac{m_\circ v^۲}{\sqrt{۱ - v^۲/c^۲}} + m_\circ c^۲\sqrt{۱ - v^۲/c^۲} - m_\circ c^۲.$$

و بالاخره از ترکیب دو جملهٔ اول سمت راست، انرژی جنبشی ذره‌ای که با سرعت v نسبت به ناظری حرکت می‌کند به دست می‌آید

$$E_k = \frac{m_\circ c^۲}{\sqrt{۱ - v^۲/c^۲}} - m_\circ c^۲ = (m - m_\circ)c^۲. \qquad (۱۳.۱۱)$$

در اینجا برای نوشتن آخرین قسمت، از معادلهٔ (۷.۱۱) استفاده شده است. نتیجهٔ (۱۳.۱۱) بسیار روشن است و نشان می‌دهد که افزایش انرژی جنبشی را می‌توان بـه عنوان افزایش جرم در نظر گرفت، کـه خود افزایش جرم بنا بـه معادلهٔ (۷.۱۱) نتیجهٔ وابستگی جرم به سرعت است. می‌توان این تفسیر را تعمیم داد و به‌هر تغییر ΔE درانرژی دستگاه یک تغییر جرم Δm نسبت داد. این دو تغییر با رابطهٔ زیر به هم مربوط می‌شوند

$$\Delta E = (\Delta m)c^۲ \qquad (۱۴.۱۱)$$

این رابطه تعمیم معادلهٔ (۱۳.۱۱) است. بـه عنوان مثال، بقای انرژی یک دستگاه منزوی لازم می‌دارد که $(E_k + E_p)_۲ = (E_k + E_p)_۱ = \text{const}$، یا

$$E_{k,۲} - E_{k,۱} = E_{p,۱} - E_{p,۲}$$

باشد. اما بنا به‌معادلهٔ (۱۳.۱۱)، $E_{k,۲} - E_{k,۱} = (m_۲ - m_۱)c^۲$ است، درنتیجه

$$(m_۲ - m_۱)c^۲ = E_{p,۱} - E_{p,۲} \qquad (۱۵.۱۱)$$

معادلهٔ (۱۵.۱۱) بدین‌معنی است که هرگونه تغییر درانرژی پتانسیل داخلی دستگاه را که از یک تغییر آرایش داخلی ناشی می‌شود، می‌توان با یک تغییر جرم دستگاه بیان کرد که این خود نتیجهٔ تغییر انرژی جنبشی داخلی دستگاه است. این‌کار به‌شرطی درست است که انرژی کل پایسته بماند. به‌سبب وجود سازهٔ $c^۲$، تغییر جرم بجز برای تغییرهای خیلی زیاد انرژی، قابـل ملاحظه نیست. بدین دلیل، تغییر جرم ناشی از تبدیل انرژیها، جـز در برهم‌کنشهای هسته‌ای یـا فیزیک انرژیهای بالا قابل تـوجه نیست و در واکنشهای شیمیایی عملا قابـل اغماض است.

کمیت $m_\circ c^۲$ را که در معادلهٔ (۱۳.۱۱) ظاهر می‌شود انرژی سکون ذره می‌نامند، و کمیت

$$E = E_k + m_\circ c^۲ = \frac{m_\circ c^۲}{\sqrt{۱-v^۲/c^۲}} = mc^۲ \qquad (۱۶.۱۱)$$

انرژی کل ذره نامیده می‌شود. انرژی‌کل ذره، به‌گونه‌ای که دراینجا تعریف شد، شامل انرژی جنبشی و انرژی سکون است و انرژی پتانسیل را در برنمی‌گیرد.

ازترکیب معادله‌های (۸.۱۱) و (۱۶.۱۱) به‌دست می‌آید $v = c^۲p/E$. این رابطه سرعت را برحسب اندازه حرکت و انرژی به دست می‌دهد. چون $\mathbf{v}$ و $\mathbf{p}$ همراستا هستند، این رابطه به‌صورت برداری نیز صادق است و می‌توان نوشت

$$\mathbf{v} = \frac{c^۲\mathbf{p}}{E}. \qquad (۱۷.۱۱)$$

معادلهٔ (۱۶.۱۱) معادل است با

$$E = c\sqrt{m_\circ^۲c^۲ + p^۲} \qquad (۱۸.۱۱)$$

زیرا اگر دراین‌رابطه به‌جای p مقدارآن را ازرابطهٔ (۱۸.۱۱) قراردهیم معادلهٔ (۱۶.۱۱) به دست می‌آید.

در نخستین نگاه، معادلهٔ (۱۳.۱۱) که رابطهٔ انرژی جنبشی نسبیتی را به دست می‌دهد با معادلهٔ (۱۲.۸)، رابطهٔ انرژی جنبشی درمکانیک نیوتونی (یعنی $E_k = mv^۲/۲$)، کاملا متفاوت به نظر می‌رسد، ولی چنین نیست. هنگامی که v نسبت به c کوچک باشد، می‌توان مخرج معادلهٔ (۷.۱۱) را با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای (پ.۲۲) بسط داد:

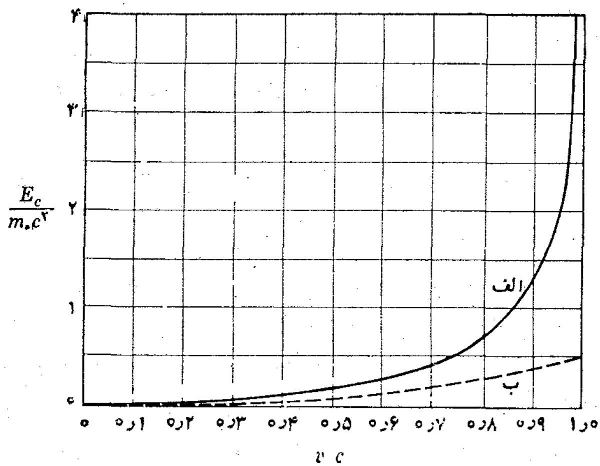
$$m = m_\circ\left(۱ - \frac{v^۲}{c^۲}\right)^{-۱/۲} = m_\circ\left(۱ + \frac{۱}{۲}\frac{v^۲}{c^۲} + \frac{۳}{۸}\frac{v^۴}{c^۴} + \cdots\right)$$

که با قراردادن آن درمعادلهٔ (۱۳.۱۱) به‌دست می‌آید

$$E_k = \frac{۱}{۲}m_\circ v^۲ + \frac{۳}{۸}m_\circ\frac{v^۴}{c^۲} + \cdots \qquad (۱۹.۱۱)$$

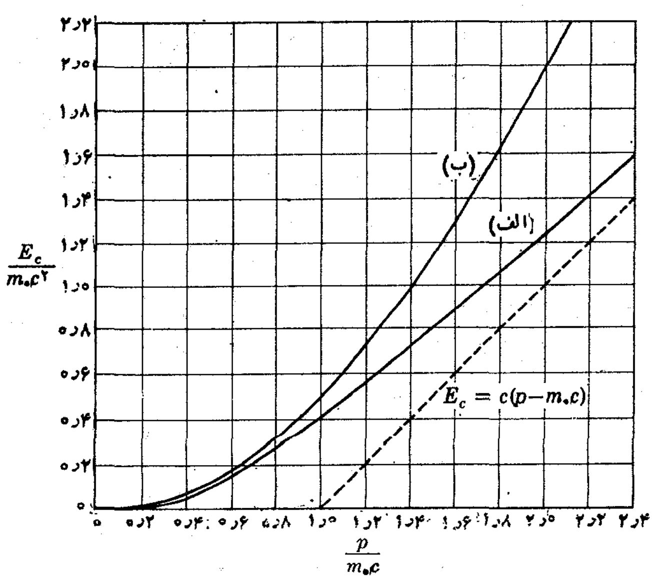
جملهٔ اول همان انرژی جنبشی معادلهٔ (۱۲.۸) است که با آن آشنا هستیم. جملهٔ دوم و جمله‌های بعد، اگر $c \gg v$ باشد قابل چشم‌پوشی هستند. بدین طریق یک‌بار دیگر تأیید می‌شود که مکانیک نیوتونی تقریبی از مکانیک نسبیتی است که برای سرعتها یا انرژیهای کم صادق است و برای جرم، مقدارجرم سکون را به‌کار می‌برد. ازطرف دیگر، درسرعتهای خیلی بالا، می‌توان در صورت کسر معادلهٔ (۸.۱۱) به جای v، برابر آن c را قرار داد و اندازه حرکت را به شکل $p = mc$ نوشت. در این صورت انرژی جنبشی داده شده با معادلهٔ (۱۳.۱۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$E_k = pc - m_\circ c^۲ = c(p - m_\circ c). \qquad (۲۰.۱۱)$$



شکل ۴.۱۱. تغییر انرژی جنبشی با سرعت؛ (الف) نسبیتی، (ب) نیوتونی

در شکل ۴.۱۱، تغییرات انرژی جنبشی E_k که با معادلهٔ (۱۳.۱۱) داده شده است بامنحنی الف، وانرژی جنبشی نیوتونی $E_k = m_\circ v^2/2$ با منحنی ب نشان داده شده است. این شکل بوضوح نشان می‌دهد که در سرعتهای برابر، انرژی جنبشی نسبیتی بزرگتر از انرژی جنبشی نیوتونی است.



شکل ۵.۱۱. تغییر انرژی‌جنبشی با اندازه حرکت؛ (الف) نسبیتی، (ب) نیوتونی

در شکل ۵.۱۱ انرژی جنبشی برحسب اندازه حرکت رسم شده است. مشاهده می‌شود کـه برای اندازه حرکتهای برابر، انرژی نسبیتی (منحنی الف) کوچکتر از انرژی نیوتونی (منحنی ب) است. منحنی نسبیتی مجانب‌وار به سمت مقدار داده شده در معادلهٔ (۲۰.۱۱) میل می‌کند.

بایـد توجه داشت کـه نسبتهای $m/m_\circ$ و $E_k/m_\circ c^۲$ برای تمام ذراتی کـه دارای سرعت یکسان باشند یکی است. به این ترتیب، چون جرم پروتون در حدود ۱۸۵۰ برابر جرم الکترون است، اثرهای نسبیتی روی پروتونها تنها درانرژیهای ۱۸۵۰ باربزرگتر قابل ملاحظه خواهند بـود. بدین دلیل، حرکت پروتونها و نوترونها را درهسته‌های اتمی اغلب می‌توان بدون ملاحظات نسبیتی مورد مطالعه قرار داد، در صورتی که حرکت الکترونها را دربیشتر موارد باید درچارچوب نسبیت مطالعه کرد.

از مـوارد بسیار جالب، مـورد ذره‌ای است کـه جـرم سکون آن برابر صفر باشد ($m_\circ = ۰$). دراین صورت معادلهٔ (۱۸.۱۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$E = cp \quad \text{یا} \quad p = E/c. \qquad (۲۱.۱۱)$$

از این رابطه، با توجه به معادلهٔ (۱۷.۱۱) نتیجه می‌شود کـه سرعت ذره برابر c است. بنابراین ذره‌ای کـه جرم سکون آن برابر صفر باشد، فقط می‌تواند با سرعت نور حرکت کند و در یک چارچوب لخت هرگز درحال سکون نیست. فوتون دارای چنین وضعی است وچنانکه در فصلهای بعد خواهیم دید، به‌نظر می‌رسد این وضع در مورد نوترینو نیز صادق باشد. حتی برای ذره‌ای که $m_\circ$ جرم سکون آن برابر صفر نباشد، درصورت داشتن سرعتی قابل مقایسه با سرعت نور، به‌گونه‌ای که p اندازه حرکت ذره درمقابل $m_\circ c$ خیلی بزرگ باشد، بازهم معادلهٔ (۲۱.۱۱) اعتبار دارد. در واقع اگـر در معادلهٔ (۱۸.۱۱) از $m_\circ c$ در مقابل p صرف نظر کنیم، معادلهٔ (۲۱.۱۱) به‌دست می‌آید.

مثال ۴.۱۱. افزایش‌نسبی سرعت و اندازه حرکت را با افزایش نسبی انرژی مقایسه‌کنید.

حل: ازحل معادلهٔ (۱۸.۱۱) برحسب v، به‌دست می‌آید

$$v = c\left(۱ - \frac{m_\circ^۲ c^۴}{E^۲}\right)^{۱/۲}.$$

هنگامی که سرعت یک ذره به‌اندازهٔ dv و انرژی آن به اندازهٔ dE افزایش پیدا می‌کند، افزایش نسبی سرعت بـا dv/v و افزایش نسبی انـرژی با dE/E بیان می‌شود. این امر لازم می‌دارد که مانند مثال ۲.۱۱، قبل از دیفرانسیل‌گیری، ازرابطهٔ فوق‌لگاریتم‌بگیریم، یعنی

$$\ln v = \ln c + \frac{۱}{۲}\ln\left(۱ - \frac{m_\circ^۲ c^۴}{E^۲}\right).$$

با دیفرانسیل‌گیری، به‌دست می‌آید

$$\frac{dv}{v} = \frac{m_\circ^۲ c^۴}{E^۲ - m_\circ^۲ c^۴}\frac{dE}{E}.$$

اگر انرژی ذره نسبت به‌جرم سکون آن خیلی بزرگ باشد، به‌گونه‌ای که $E \gg m_\circ c^۲$ باشد، می‌توان درمخرج از $m_\circ^۲ c^۴$ صرف‌نظر کرد، درنتیجه خواهیم داشت

$$\frac{dv}{v} = \frac{m_\circ^۲ c^۴}{E^۲}\frac{dE}{E}.$$

ضریب افزایش‌نسبی انرژی همیشه کوچکتر از واحد است، زیرا درانرژیهای بالا، E خیلی بزرگتر از $m_\circ c^۲$ است. بنابراین درانرژیهای بالا، dv/v خیلی‌کوچکتر از dE/E می‌شود. به گفتهٔ دیگر، در انرژیهای بالا، امکان دارد انرژی ذره را افزایش داد بدون اینکه سرعت آن افزایش قابل ملاحظه‌ای داشته باشد. این ویژگی در ساختمان شتابدهنده‌های انرژیهای بالا، خواه خطی خواه دایره‌ای، بسیار مهم است.

به دانشجو توصیه می‌شود همین محاسبه را با استفاده از مکانیک نیوتونی انجام دهد و نتایج را با هم مقایسه کند.

ازطرف دیگر، تا آنجا که به اندازه حرکت p مربوط می‌شود، با به کاربردن معادلهٔ (۱۸.۱۱) داریم

$$\ln E = \ln c + \ln(m_\circ^۲ c^۲ + p^۲)/۲$$

و با دیفرانسیل‌گیری به‌دست می‌آید

$$\frac{dE}{E} = \frac{p^۲}{m_\circ^۲ c^۲ + p^۲}\frac{dp}{p}.$$

در انرژیهای بالا، هنگامی که p خیلی بزرگتر از $m_\circ c$ است، به‌دست می‌آید

$$dE/E \approx dp/p$$

و اندازه حرکت به نسبت مساوی با انرژی افزایش پیدا می‌کند.

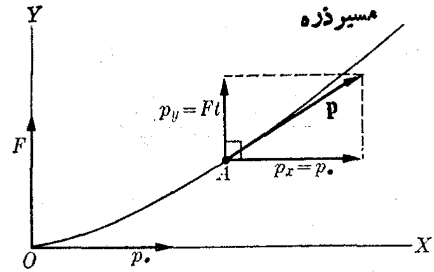
مثال ۵.۱۱ بررسی حرکت منحنی‌الخط براثر یک نیروی ثابت در دینامیک نسبیتی.

حل: درمکانیک غیرنسبیتی، این حرکت متناظر با یک مسیرسهمی است، مانند حرکت یک پرتابه (به‌بخش ۷.۵ مراجعه کنید). برای حل این مسئله درمکانیک نسبیتی، آسانتر است که از رابطه‌های انرژی و اندازه حرکت استفاده شود. فرض کنیم درلحظهٔ $t = \circ$ ذره درنقطهٔ O باشد (شکل ۶.۱۱)، و وقتی نیروی $\mathbf{F}$ به‌طور عمودی (در راستای محور Y ها) برذره وارد شود، ذره با اندازه حرکت $p_\circ$ در راستای محور X ها حرکت می‌کند. مؤلفه‌های معادلهٔ حرکت $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ روی محوری OX و OY عبارت می‌شوند از

$$\frac{dp_x}{dt} = \circ \quad \text{و} \quad \frac{dp_y}{dt} = F.$$

با انتگرال‌گیری از هریک از رابطه‌های فوق به‌دست می‌آید

$$p_x = p_\circ(\text{const}) \quad \text{و} \quad p_y = Ft.$$



شکل ۶.۱۱ حرکت منحنی‌الخط نسبیتی براثر یک نیروی ثابت

بنابراین اندازه حرکت کل در لحظهٔ t، هنگامی که ذره به‌نقطهٔ A می‌رسد، برابر است با

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{p_\circ^2 + F^2t^2}$$

و انرژی، با استفاده ازمعادلهٔ (۱۸.۱۱)، برابر است با

$$E = c\sqrt{m_\circ^2c^2 + p_\circ^2 + F^2t^2} = \sqrt{E_\circ^2 + c^2F^2t^2}.$$

دراینجا $E_\circ = c\sqrt{m_\circ^2c^2 + p_\circ^2}$ انرژی کل در لحظهٔ $t = \circ$ است. بنابراین مؤلفه‌های سرعت، با استفاده از معادلهٔ برداری $\mathbf{v} = c^2\mathbf{p}/E$ عبارت می‌شوند از

$$v_x = \frac{c^2p_x}{E} = \frac{c^2p_\circ}{\sqrt{E_\circ^2 + c^2F^2t^2}}, \quad v_y = \frac{c^2p_y}{E} = \frac{c^2Ft}{\sqrt{E_\circ^2 + c^2F^2t^2}}.$$

در نتیجه بآسانی بزرگی سرعت به دست می‌آید. با انتگرال‌گیری از این روابط، مختصات x و y ذره را می‌توان به صورت توابعی از زمان به دست آورد و از آنجا معادلهٔ مسیر را نتیجه گرفت. انجام این مرحلهٔ آخر را به عهدهٔ دانشجو می‌گذاریم و از او می‌خواهیم که این مسیر را با مسیرسهمی غیرنسبیتی مقایسه کند (به مسئلهٔ ۱۱.۱۱ مراجعه کنید).

۷.۱۱ تبدیل انرژی و اندازه حرکت

بنا به اصل نسبیت، معادلهٔ (۱۸.۱۱) کـه انرژی را به اندازه حرکت مربوط می‌کند باید برای‌تمام ناظرهای لخت یکی باشد. بنابراین خیلی‌مهم است مقادیری را که دوناظر متحرک نسبت به‌هم برای این‌کمیتها به‌دست می‌آورند مقایسه‌کنیم. برای ناظر O، معادلهٔ (۱۸.۱۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_\circ^2c^2. \qquad (۲۲.۱۱)$$

یادآور می‌شویم که $\mathbf{p}$ یک کمیت برداری است و مؤلفه‌های آن عبارتند از p_x، p_y و p_z. درنتیجه $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$، و معادلهٔ (۲۲.۱۱) به‌شکل زیر درمی‌آید:

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2. \qquad (23.11)$$

برای اینکه این رابطه با فرض اصل نسبیت سازگار باشد، باید برای همهٔ ناظرهای لخت ناوردا باقی بماند، یعنی در یک چارچوب مرجع دیگر (ناظر O') که نسبت به چارچوب اول که معادلهٔ (۲۳.۱۱) را برای آن نوشتیم با سرعت v حرکت می‌کند، باید داشته باشیم

$$p_{x'}'^2 + p_{y'}'^2 + p_{z'}'^2 - \frac{E'^2}{c^2} = -m_0^2 c^2. \qquad (24.11)$$

در هردو رابطه m_0 یکی‌است، زیرا مربوط به‌جرم سکون‌است و تغییر نمی‌کند. به‌گفتهٔ دیگر باید داشته باشیم

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = p_{x'}'^2 + p_{y'}'^2 + p_{z'}'^2 - \frac{E'^2}{c^2}. \qquad (25.11)$$

اگر همخوانیهای

$$p_x \to x, \quad p_y \to y, \quad p_z \to z \quad و \quad ct \to E/c$$

را در نظر بگیریم، ساختار معادله‌های (۲۳.۱۱)، (۲۴.۱۱) و (۲۵.۱۱) مشابه معادله‌های (۳۰.۶) و (۳۱.۶) می‌شود.

بنابراین معادلهٔ (۲۳.۱۱) مستلزم یک تبدیل برای عناصر خود می‌باشد نظیر تبدیل لورنتس که برای x، y، z و t به‌کار می‌رود. ازاینجا نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} p'_{x'} &= \frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ p'_{y'} &= p_y \\ p'_{z'} &= p_z \\ E' &= \frac{E - vp_x}{\sqrt{1 - v^2/c_2}}. \end{aligned} \qquad (26.11)$$

این نتیجه، همراه با رابطهٔ مربوط به انرژی، نشان می‌دهد که چگونه تعریف ما از اندازه حرکت درمعادلهٔ (۱۸.۱۱) با شرط اول اصل خاص نسبیت تطبیق می‌کند؛ یعنی اندازه حرکت دارای تبدیل خاصی تحت اثر تبدیل لورنتس می‌باشد.

توجه داشته باشید که دوگروه کمیت وابسته به دست آوردیم، (x، y، z و t) و (p_x، p_y، p_z و E/c)، که بین خود مطابق قواعد تبدیل لورنتس تبدیل پیدا می‌کنند. بدون تردید انتظار داریم سایرکمیتهای فیزیکی نیز تبدیل مشابهی داشته باشند. یکی ازمشخصه‌های مشترک همهٔ این کمیتها آن است که هرکدام دارای چهار «مؤلفه» هستند، یعنی با چهار عدد بیان می‌شوند. به‌همین دلیل، آنها را چهار- بردار[1] می‌نامند. تصور می‌رود آنها را بتوان

---

1. four - vectors

دریک فضای نمایشی چهاربعدی نشان داد. یک روش جهت تطبیق قوانین فیزیک با شرایط ناوردایی اصل نسبیت عبارت است از نوشتن آنها به صورت روابط بین کمیتهای اسکالر، چهار-بردارها وسایر کمیتهایی که به‌آنها مربوط می‌شوند (تانسورها). ما بیش ازاین وارد عمق این مطلب نمی‌شویم، زیرا این امر ما را به بحث دامنه‌دارتری درنظریهٔ نسبیت می‌کشاند که ازحدود موضوع این کتاب فراتر می‌رود.

مثال ۶.۱۱. رابطه‌های عکس بین انرژی واندازه حرکت مربوط به معادله‌های (۲۶.۱۱) را پیدا کنید. به عبارت دیگر مقادیر اندازه‌گیری شده به وسیلهٔ ناظر O را برحسب مقادیر اندازه‌گیری شده به وسیلهٔ O' پیدا کنید.

حل: برای حل این مسئله کافی است دانشجو به مثال ۴.۶، که درست عین همین مسئله، ولی برای مختصات x، y، z و t می‌باشد مراجعه کند. بدین طریق، می‌توان صرفاً با تعویض علامت v وجابجا کردن کمیتهای پریم‌دار وبدون پریم درمعادلهٔ (۲۶.۱۱) به نتیجهٔ موردنظر رسید. بنابراین به دست می‌آید

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{p'_{x'} + vE'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ p_y &= p'_{y'} \\ p_z &= p'_{z'} \\ E &= \frac{E' + vp'_{x'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \qquad (۲۷.۱۱)$$

مثال ۷.۱۱. نتایج حاصل ازمثال پیش را درمورد ذره‌ای که نسبت به O' درحال سکون است به کار ببرید.

حل: در این حالت $p'_{x'} = p'_{y'} = p'_{z'} = 0$ و $E' = m_0 c^2$ است. بنابراین از معادله‌های تبدیل به دست می‌آید

$$p_x = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_y = p_z = 0, \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

سه معادلهٔ اول اندازه حرکت و معادلهٔ آخر انرژی را به گونه‌ای که O اندازه‌گیری می‌کند به دست می‌دهند. مقایسهٔ معادله‌های اندازه حرکت با معادلهٔ (۸.۱۱) ومعادلهٔ انرژی با معادلهٔ (۱۶.۱۱) نشان می‌دهد که این معادله‌ها مربوط به اندازه حرکت وانرژی ذره‌ای هستند که در راستای محور Xها با سرعت v حرکت می‌کند. وضع ذره نیز درست همین است، زیرا ذره که نسبت به O' ساکن است باید به نظر برسد که نسبت به O با سرعت v حرکت می‌کند. این مثال با وضوح کامل نشان می‌دهد که روابط (۲۶.۱۱) و روابط عکس آنها (۲۷.۱۱)، که ازطریقی کم وبیش شهودی با به کار گرفتن اصل ناوردایی نسبیتی به دست آمدند، با رابطه‌های انرژی واندازه حرکت، که با استفاده از نقطه‌نظر

متفاوتی به دست آوردیم، هماهنگی دارند. این مثال همچنین سازگاری منطق ما را نشان می‌دهد.

مثال ۸۰۱۱. درتبدیل انرژی و اندازه حرکت ذره‌ای که جرم سکون آن برابر صفر است بحث کنید. برای آسانی، حرکت ذره را در راستای حرکت نسبی دوناظر فرض کنید.

حل: چون $m_\circ = \circ$ است، می‌توان پذیرفت که بنا به معادلهٔ (۲۱۰۱۱)، رابطهٔ $E = cp$ برای ناظر O معتبر است. پس با به کاربردن معادله‌های (۲۶۰۱۱) و با قراردادن $p_x = p$ و $p'_x = p'$ (زیرا حرکت در راستای محور Xها صورت می‌گیرد) و با استفاده از $E = cp$، برای ناظر O' داریم

$$p' = \frac{p - v(cp)/c^۲}{\sqrt{۱ - v^۲/c^۲}} = p\,\frac{۱ - v/c}{\sqrt{۱ - v^۲/c^۲}}.$$

با استفاده از این نتیجه، برای انرژی به دست می‌آوریم

$$E' = \frac{cp - vp}{\sqrt{۱ - v^۲/c^۲}} = cp\,\frac{۱ - v/c}{\sqrt{۱ - v^۲/c^۲}} = cp'.$$

بنابراین، رابطهٔ $E' = cp'$ برای O' نیز صادق است. این مثال مانند مثال پیش، باید اعتقاد دانشجو را به انسجام درونی نظریهٔ بیان شده افزایش دهد. به دانشجو توصیه می‌کنیم این مثال را درحالتی که ذره در راستای دلخواه دیگری حرکت می‌کند حل کند.

۸۰۱۱ تبدیل نیرو

نیروی وارد بریک ذره به گونه‌ای که ناظرهای O و O' اندازه‌گیری می‌کنند، چنانکه اصل نسبیت ایجاب می‌کند، بترتیب عبارتند از

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \text{و} \quad \mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} \qquad (۲۸۰۱۱)$$

زیرا دوناظر باید معادلـه‌حرکت‌های یکسانی را به کار ببرند. رابطهٔ بین $\mathbf{F}$ و $\mathbf{F}'$ معمولا پیچیده است، زیرا دراینجا نمی‌توان از استدلال آسانی که درمورد انرژی واندازه حرکت به کار بردیم استفاده کرد. بنابراین رابطه را برای یک حالت خاص یعنی موقعی که ذره به طور لحظه‌ای در دستگاه O' ساکن است پیدا می‌کنیم. دراین صورت $\mathbf{F}'$ را نیروی خاص[1] می‌نامند.

با استفاده ازمعادلهٔ (۲۶۰۱۱) داریم

$$F'_{x'} = \frac{dp'_{x'}}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{p_x - vE/c^۲}{\sqrt{۱ - v^۲/c^۲}}\right)$$

1. proper force

$$= \frac{dt}{dt'} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(\frac{dp_x}{dt} - \frac{v}{c^2} \frac{dE}{dt} \right). \qquad (۲۹.۱۱)$$

ازطرف دیگر، ازعکس تبدیل لورنتس (به آخرین معادلهٔ مثال ۴.۶ مراجعه کنید) داریم

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

چون $dx/dt = 0$ است، زیرا ذره نسبت به O' درحال سکون می‌باشد، به دست می‌آید

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (۳۰.۱۱)$$

به علاوه، بنا به تعریف نیرو، $dp_x/dt = F_x$ است. ازتعریفهای انرژی E وانرژی جنبشی $E_k = E - m_\circ c^2$ وهمچنین با توجه به اینکه کار $F_x dx$ باید برابر dE_k باشد، داریم

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_k}{dt} = \frac{F_x dx}{dt} = F_x v \qquad (۳۱.۱۱)$$

زیرا دراین حالت $dx/dt = v$ است. بالاخره با قراردادن تمام این مقادیر در معادلهٔ (۲۹.۱۱)، به دست می‌آید

$$F'_{x'} = F_x. \qquad (۳۲.۱۱)$$

برای مؤلفهٔ موازی بامحور Yها، چون $F_y = dp_y/dt$ است به‌دست می‌آوریم

$$F'_{y'} = \frac{dp'_{y'}}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{dp_y}{dt} = \frac{F_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = kF_y. \qquad (۳۳.۱۱)$$

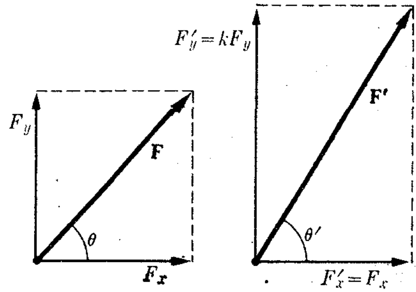
به همین ترتیب، برای مؤلفهٔ Z، با $F_z = dp_z/dt$، داریم

$$F'_{z'} = \frac{dp'_{z'}}{dt'} = \frac{F_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = kF_z \qquad (۳۴.۱۱)$$

که درآنها k در معادلهٔ (۳۲.۶) تعریف شده است. معادله‌های (۳۲.۱۱)، (۳۳.۱۱) و (۳۴.۱۱) نیروی $\mathbf{F}$ را که ناظری دریک چارچوب مرجع لخت دلخواه اندازه می‌گیرد به $\mathbf{F}'$، نیروی اندازه‌گیری شده دریک چارچوب مرجع لخت دیگر که ذره درآن به طور لحظه‌ای درحال سکون است، مربوط می‌کنند.

نظر به‌اینکه قانون تبدیل نیرو با قانون تبدیل برای چهار- بردارهای اندازه حرکت و انرژی یکی نیست، نیرو درگروه کمیتهای متفاوت با این دوکمیت قرار می‌گیرد، زیرا جزو کمیتهای چهار- برداری نیست. بنا براین درنظریهٔ نسبیت، مفهوم نیرو کم‌استفاده‌تر از اندازه- حرکت و انرژی است، درنتیجه برای نیرو تعریف کم و بیش متفاوتی پیشنهاد شده است. در اینجا از این تعریف بحثی به میان نخواهیم آورد، جز اینکه بگوییم برای نیرو نیز تبدیلی همانند تبدیل چهار- برداریها منظورمی‌شود. باوجود این، حتی اگر تبدیل نیرو با تبدیل

اندازه حرکت وانرژی فـرق داشته باشد، تضمین می‌کند که معادلـهٔ حرکت $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ برای‌تمام ناظرهای لخت ناوردا خواهد ماند، که این، شرط اصلی ما را تشکیل می‌داد. رابطهٔ بین نیروهای $\mathbf{F}$ و $\mathbf{F}'$ درشکل ۷.۱۱ نشان داده شده است.



شکل ۷.۱۱. تبدیل لورنتس مؤلفه‌های نیرو

۹.۱۱ دستگاه ذرات

دستگاه ذراتی را درنظرمی‌گیریم که هرذرهٔ آن دارای اندازه حرکت $\mathbf{p}_i$ وانرژی E_i می‌باشد. با صرف نظرکردن از برهم‌کنش بین ذرات، می‌توان اندازه حرکت کل دستگاه را به‌صورت $\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i$ و انرژی کل را به صورت

$$E = \sum_i E_i = \sum_i m_i c^۲ = Mc^۲.$$

نوشت. بدین طریق، با استفاده از معادلهٔ (۱۷.۱۱)، می‌توان سرعتی را به دستگاه وابسته کرد که با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{v}_C = \frac{c^۲\mathbf{p}}{E} = \frac{\mathbf{p}}{M}. \qquad (۳۵.۱۱)$$

با یادآوری بخش ۲.۹ می‌توان گفت $\mathbf{v}_C$ سرعت مرکزجرم دستگاه است و دستگاه را جسمی به جرم M که با سـرعت $\mathbf{v}_C$ حرکت می‌کند در نظر گرفت. با وجود این باید یادآوز شد که (بنا به دلایل مذکور دربخش ۲.۹) هرگاه جرم به سرعت بستگی داشته باشد، نمی‌توان برای دستگاه، مرکز جرم تعریف کرد. بنابراین سرعت تعریف شده با رابطهٔ (۳۵.۱۱) را سرعت دستگاه می‌نامیم.

فرض کنیم دوناظرلخت مختلف هرکدام دستگاه ذرات را موردآزمایش قرارمی‌دهند. نسبت بـه ناظر O، انـدازه حرکت و انرژی کـل بترتیب عبارتنـد از با $\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i$ و $E = \sum_i E_i$. نسبت به ناظر O' این کمیتها عبارتند از $\mathbf{p}' = \sum_i \mathbf{p}'_i$ و $E' = \sum_i E'_i$. اگـر سرعت O' نسبت به O برابر v باشـد، در راستای محور Xها، هـر $\mathbf{p}_i$ و E_i مطابق معادله‌های (۲۶.۱۱) بـه $\mathbf{p}'_i$ و E'_i تبدیل می‌شود. مجموع آنها نیز به همان گونه تبدیل می‌شوند و می‌توان نوشت

$$p'_{x'} = \frac{p_x - vE/c^۲}{\sqrt{۱ - v^۲/c^۲}}$$

$$p'_{y'} = p_y \qquad (۳۶.۱۱)$$

$$p'_{z'} = p_z$$

$$E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{۱ - v^۲/c^۲}}.$$

اکنون اگر اندازه حرکت و انرژی نسبت به ناظر O پایسته باشند، یعنی اگر $\mathbf{p}$ و E ثابت باشند، معادله‌های تبدیل فوق ایجاب می‌کنند که $\mathbf{p}'$ و E' نیز ثابت باشند، یعنی هردو قانون بقا برای ناظر O' نیز برقرارند. در نتیجه، دومین شرط لازم نظریهٔ ما، آنچنانکه در پایان بخش ۴.۱۱ گفته شد، تأیید می‌شود. همچنین باید توجه داشت به سبب ساختار معادله‌های تبدیل، دو قانون باید همزمان برقرار باشند؛ به گفتهٔ دیگر، هیچیک از آنها نمی‌تواند مستقل از دیگری باشد. این وضع با حالت غیر نسبیتی متفاوت است.

اکنون حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که در آن سرعت نسبی دو ناظر با اندازه حرکت کل $\mathbf{p}$ موازی است. در این صورت داریم $p_x = p$، $p_y = p_z = ۰$، و اولین معادله از معادله‌های (۳۶.۱۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$p' = \frac{p - vE/c^۲}{\sqrt{۱ - v^۲/c^۲}}.$$

درقیاس با چهارچوبهای مرجع L و C که در فصل ۹ تعریف کردیم،

در مکانیک نسبیتی، چارچوب C را چارچوب مرجعی تعریف می‌کنیم که در آن اندازه حرکت کل دستگاه برابر صفر باشد.

در نتیجه، اگر ناظر O' به چارچوب مرجع C متصل باشد، اندازه حرکت p' برابر صفر است. اگر در رابطهٔ قبل قرار دهیم $p' = ۰$، سرعت O' نسبت به O (که چارچوب مرجع L را به کار می‌برد) برابر می‌شود با $v = c^۲p/E$. مقایسهٔ این رابطه با معادلهٔ (۳۵.۱۱) نشان می‌دهد که چارچوب C با سرعت دستگاه یعنی $\mathbf{v}_C$ نسبت به چارچوب L حرکت می‌کند. این همان نتیجه‌ای است که در فصل ۹ در وضع غیر نسبیتی به دست آوردیم.

در ابتدای این قسمت متذکرشدیم که برهم‌کنشهای بین ذرات را به حساب نخواهیم آورد، زیرا درنظر گرفتن برهم‌کنشهای بین ذرات که به مکان نسبی ذرات بستگی دارد دشواریهایی جدی درنظریهٔ نسبیت به‌وجود می‌آورد. به‌عنوان مثال، درفصل ۶ دیدیم‌که مفهوم همزمانی دو ذره در مکان، که برای تعریف یک برهم‌کنش ضروری است، یک مفهوم ناوردا نیست. بعلاوه، سرعت انتقال برهم‌کنش را نیز باید به حساب‌آورد. بدین دلیل برای مطالعهٔ برهم‌کنشها به‌گونه‌ای که با نظریهٔ نسبیت سازگار باشد، تکنیکهای ویژه‌ای لازم‌اند.

مثال ۹.۱۱ چارچوب C را برای دوذرهٔ یکسان که دریک سوحرکت می‌کنند مطالعه کنید.

حل: ویژگیهای چارچوب C را می‌توان بآسانی در مورد دو ذره مورد بحث قرار داد. دستگاهی از دو ذرهٔ مشابه را که به نظر ناظر O در طول محور Xهای چارچوب L (که ناظر O به‌کار می‌برد) با سرعتهای v_1 و v_2 حرکت می‌کنند، در نظر می‌گیریم. جرم آنها با محاسبه از معادلهٔ (۷.۱۱) و با توجه اینکه m_0، جرم سکون هر دو یکی است، بترتیب برابر است با m_1 و m_2. اندازه حرکت کل در چارچوب L عبارت است از

$$p = p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \qquad (۳۷.۱۱)$$

نسبت به چارچوب C اندازه حرکت کل دستگاه برابر صفر است؛ یعنی

$$p' = p'_1 + p'_2 = 0$$

این امر لازم می‌دارد که بزرگی اندازه حرکت دو ذره در چارچوب C یکی باشد، ولی دو ذره در دو سوی مختلف حرکت کنند. بنابراین معادلهٔ (۸.۱۱) ایجاب می‌کند که بزرگی سرعتهای ذرات درچارچوب C یکسان باشد. درنتیجه به نظر می‌رسد ذرات با سرعتهای v' و $-v'$ حرکت می‌کنند. اگر سرعت چارچوب C نسبت به چارچوب L را با v_C نشان دهیم و از معادلهٔ (۳۸.۶) برای تبدیل سرعتها استفاده کنیم و درآن v_C را به جای v قراردهیم، خواهیم داشت

$$v_1 = \frac{v' + v_C}{1 + v'v_C/c^2}, \quad v_2 = \frac{-v' + v_C}{1 - v'v_C/c^2}$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$v_1 = v_C + \frac{v'(1 - v_C^2/c^2)}{1 + v'v_C/c^2}, \quad v_2 = v_C - \frac{v'(1 - v_C^2/c^2)}{1 - v'v_C/c^2}.$$

بنابراین، می‌توان با قراردادن این مقادیردرمعادله‌های (۳۷.۱۱) اندازه حرکت کل دستگاه را در چارچوب L به دست آورد:

$$p = (m_1 + m_2)v_C + v'\left(1 - \frac{v_C^2}{c^2}\right)\left(\frac{m_1}{1 + v'v_C/c^2} - \frac{m_2}{1 - v'v_C/c^2}\right). \qquad (۳۸.۱۱)$$

اگر مقادیر به دست‌آمده از معادلهٔ (۷.۱۱) برای m_1 و m_2 را، در جملهٔ آخر قرار دهیم به دست می‌آید

$$m_0 v'\left(1 - \frac{v_C^2}{c^2}\right) \times\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}\,(1 + v'v_C/c^2)} - \frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}\,(1 - v'v_C/c^2)}\right).$$

با استفاده از همسانیهای مسئلهٔ ۳۷.۶، می‌توان جمله‌های داخل پرانتز را ساده کرد. مشاهده می‌شود که هر دو جمله برابرند با $1/\sqrt{(1 - v_C^2/c^2)(1 - v'^2/c^2)}$ و درنتیجه اختلاف آنها برابر صفر است. بدین طریق آخرین جملهٔ معادلهٔ (۳۸.۱۱) حذف می‌شود و رابطهٔ p

به صورت زیر درمی‌آید:

$$p = (m_۱ + m_۲)v_C \quad \text{یا} \quad v_C = p/M.$$

این رابطه دقیقاً همان معادلهٔ (۳۵.۱۱) است که با حالت ویژهٔ دو ذره‌ای که در یک سو حرکت می‌کنند تطبیق می‌کند. بنابراین ثابت می‌شود چارچوب C (که نسبت به آن اندازه حرکت کل دستگاه برابر صفر است)، چه در نظریهٔ نسبیت و چه در نظریهٔ کلاسیک، مطابق معادلهٔ (۳۵.۱۱)، با سرعت v_C نسبت به چارچوب L حرکت می‌کند.

۱۰.۱۱ برخورد در انرژیهای بالا

اصل بقای اندازه حرکت و انرژی باید در مورد هر برخوردی، صرف نظر از اینکه انرژی ذرات چقدر است، برقرار باشد. در بخش ۷.۹ این موضوع را در مورد انرژیهای کم (یا غیرنسبیتی) مطالعه کردیم. ولی درمورد انرژیهای بالا باید مفاهیم و روشهایی را که در این فصل توضیح داده شدند به‌کار برد. به‌عنوان مثال، دو ذره به‌جرمهای سکون $m_۱$ و $m_۲$ را که قبل از برخورد با اندازه حرکتهای $\mathbf{p}_۱$ و $\mathbf{p}_۲$ نسبت به‌یک چارچوب مرجع لخت حرکت می‌کنند در نظر بگیرید. برهم‌کنش آنها جز در مدت زمان کوتاهی کـه دوذره خیلی به هم نزدیک هستند (مربوط به ناحیهٔ میانی شکل ۱۱.۹) قابل ملاحظه نیست. یادآوری می‌کنیم (بخش ۷.۹) که اگر برهم‌کنش در زمان نسبتاً کوتاه و درفاصلهٔ نسبتاً کمی، تغییرات قابل اندازه‌گیری بـه وجود آورد می‌گوییم برخورد رخ داده است. فرض کنیم بعد از برخورد، یعنی هنگامی که برهم‌کنش مجدداً قابل اغماض می‌باشد، ذره‌ها دارای جرمهای $m_۳$ و $m_۴$ باشند و نسبت بـه چارچوب مرجع لخت اولیه با اندازه حرکتهای $\mathbf{p}_۳$ و $\mathbf{p}_۴$ حرکت کنند. اصل بقای اندازه حرکت و انرژی با رابطه‌های زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{p}_۱ + \mathbf{p}_۲ = \mathbf{p}_۳ + \mathbf{p}_۴ \quad \text{و} \quad E_۱ + E_۲ = E_۳ + E_۴ \qquad (۳۹.۱۱)$$

یا با استفاده از معادلهٔ (۱۸.۱۱)، داریم

$$c\sqrt{m_۱^۲c^۲ + p_۱^۲} + c\sqrt{m_۲^۲c^۲ + p_۲^۲} = c\sqrt{m_۳^۲c^۲ + p_۳^۲} + c\sqrt{m_۴^۲c^۲ + p_۴^۲}. \qquad (۴۰.۱۱)$$

برخوردی را که با معادله‌های (۳۹.۱۱) و (۴۰.۱۱) بیان شده می‌توان به صورت ساده با رابطهٔ ۴ + ۳ ← ۲ + ۱ نشان داد. معمولاً بـه سبب وجود رادیکال در معادلهٔ (۴۰.۱۱) استفادهٔ عملی از معادلـه‌های (۳۹.۱۱) و (۴۰.۱۱) از لحاظ جبری بسیار مشکل و پیچیده است. بدین دلیل، باچند مثل ساده ولی مهم، سعی می‌کنیم کاربرد این فرمولها را روشن کنیم.

مثال ۱۰.۱۱. یک برخورد نسبیتی را که درآن جرم سکون ذرهٔ ۱ (که ذرهٔ فرودی[1] نامیده می‌شود) برابر صفر و مشابـه ذرهٔ ۳ است و ذرهٔ ۲ در چارچوب آزمایشگاه ساکن و مشابه ذرهٔ ۴ است، مورد بحث قرار دهید.

1. incident

حل: طرحی از این فرایند در شکل ۸.۱۱ نشان داده شده است. با استفاده از معادله‌های (۱۸.۱۱) و (۲۱.۱۱) مقادیر انرژی و اندازه حرکت را نسبت به ناظر O به دست می‌آوریم:

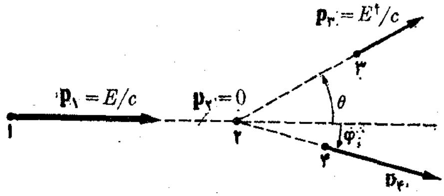
$$p_1 = E/c,\quad p_2 = 0,\qquad p_3 = E^\dagger/c,\quad p_4$$
$$E_1 = E,\quad E_2 = m_0c^2,\quad E_3 = E^\dagger,\qquad E_4 = c\sqrt{m^2c^2 + p_4^2}.$$

در اینجا اصل بقای اندازه حرکت از این قرار است:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 \qquad (۴۱.۱۱)$$

و از اصل بقای انرژی داریم

$$E + m_0c^2 = E^\dagger + c\sqrt{m_0^2c^2 + p_4^2}. \qquad (۴۲.۱۱)$$



شکل ۸.۱۱. برخورد در انرژیهای بالا

فرض کنید بخواهیم $E^\dagger$، انرژی ذرهٔ فرودی را بعد از برخورد پیدا کنیم. در این صورت باید $\mathbf{p}_4$ را از معادله‌های بالا حذف کنیم. از حل معادلهٔ (۴۱.۱۱) نسبت به $\mathbf{p}_4$ به دست می‌آید $\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$. طرفین این رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$p_4^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_3$$

با استفاده از مقادیر مربوط به اندازه حرکتها به دست می‌آید

$$p_4^2 = \frac{E^2}{c^2} + \frac{E^{\dagger 2}}{c^2} - \frac{2EE^\dagger}{c^2}\cos\theta.$$

سپس p_4^2 را از معادلهٔ (۴۲.۱۱) پیدا می‌کنیم:

$$p_4^2 = \frac{1}{c^2}(E + m_0c^2 - E^\dagger)^2 - m_0^2c^2$$
$$= \frac{E^2}{c^2} + \frac{E^{\dagger 2}}{c^2} + \frac{2(E - E^\dagger)m_0c^2}{c^2} - \frac{2EE^\dagger}{c^2}.$$

با برابر قرار دادن دو مقدار p_4^2 به دست می‌آید

$$\frac{2(E - E^\dagger)m_0c^2}{c^2} - \frac{2EE^\dagger}{c^2} = -\frac{2EE^\dagger}{c^2}\cos\theta$$

یا

$$E - E^{\dagger} = \frac{EE^{\dagger}}{m_{\circ}c^{۲}}(۱ - \cos\theta).$$

از تقسیم طرفین رابطهٔ فوق بر $EE^{\dagger}$ به دست می‌آید

$$\frac{۱}{E^{\dagger}} - \frac{۱}{E} = \frac{۱}{m_{\circ}c^{۲}}(۱ - \cos\theta). \qquad (۴۳.۱۱)$$

این رابطه $E^{\dagger}$ را برحسب E و θ، زاویهٔ پراکندگی ذرهٔ ۳، به دست می‌دهد. توجه داشته باشید که همیشه $E^{\dagger} < E$ است. یعنی ذرهٔ فرودی انرژی از دست می‌دهد، زیرا ذرهٔ دیگر که ابتدا در حالت سکون بوده بعد از برخورد به حرکت درمی‌آید.

نتیجهٔ (۴۳.۱۱) در بحثهای مربوط به پراکندگی نور (یا فوتونها) به وسیلهٔ الکترونهای آزاد — که اثر کامپتون[1] نامیده می‌شود — بسیار اهمیت دارد و در فصل ۱۹ بتفصیل مورد گفتگو قرارمی‌گیرد. توجه داشته باشید که به ازای هیچ زاویهٔ پراکندگی رابطهٔ $E^{\dagger} = ۰$ درمعادلهٔ (۴۳.۱۱) صدق نمی‌کند. در نتیجه، غیرممکن است یک ذرهٔ فرودی به وسیلهٔ یک ذرهٔ آزاد دیگر کاملا جذب شود.

مثال ۱۱.۱۱. در بیشتر آزمایشهای مربوط به انرژیهای بالا، برخورد بین یک ذرهٔ فرودی با سرعت خیلی زیاد و یک ذرهٔ ساکن نسبت به دستگاه آزمایشگاه به وجود می‌آید. می‌خواهیم انرژی آستانه[2]، یعنی حداقل انرژی جنبشی ذره را در چارچوب آزمایشگاه که برای انجام یک واکنش خاص لازم است، به دست آوریم. انرژی آستانهٔ لازم دربرخورد پروتون ـ پروتون جهت ایجاد زوج پروتون ـ پاد پروتون[3] را پیدا کنید.

حل: فعلا کافی است بدانیم که یک پاد پروتون ذره‌ای است که جرم آن برابر با جرم پروتون و بار الکتریکی آن از لحاظ قدرمطلق با بار الکتریکی پروتون برابر ولی علامت آن مخالف است. پروتون را با p^+ و پادپروتون را با علامت p^- نشان می‌دهیم. بخشی از انرژی جنبشی پروتون سریع که با یک پروتون ساکن در آزمایشگاه برخورد می‌کند صرف به وجودآوردن یک زوج پروتون ـ پادپروتون یا زوج p^+، p^- می‌شود. این فرایند را می‌توان به‌صورت زیر نشان‌داد:

$$p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + p^+ + p^+ + p^-$$

دو پروتون سمت چپ و دو پروتون اول سمت راست نمایش پروتون فرودی و پروتون هدف می‌باشند. دوعنصرآخری مربوط به‌نتیجهٔ برخورد هستند: زوج پروتون ـ پاد پروتون. (توجه داشته باشید، هرچند شمارهٔ ذره‌ها تغییرکرده است ولی بارکل ثابت می‌ماند. چنانکه بعداً خواهدآمد، این نیز مثالی ازیک اصل بقای دیگریعنی بقای بار الکتریکی است.) در ابتدا یکی از پروتونها در چارچوب L درحال سکون است (اندازه حرکتش برابر صفر است) و دیگری با اندازه حرکت $\mathbf{p}$ به‌طرف آن حرکت می‌کند.

قبل از برخورد اندازه حرکت کل نسبت به ناظر O در چارچوب L برابر $\mathbf{p}$ و

---

1. Compton effect 2. threshold energy 3. antiproton

انرژی کل برابر $E = c\sqrt{m_\circ^۲c^۲ + p^۲} + m_\circ c^۲$ است. بعد از برخورد بازهم اندازه حرکت کل $\mathbf{p}$ و انرژی کل E است. حداقل انرژی لازم برای ذرهٔ فرودی برابر انرژیی است‌که لازم است تا فرآورده‌های نهایی نسبت به‌چارچوب C که با سرعت دستگاه نسبت به‌چارچوب L حرکت می‌کند درحال سکون باشند. (به بخش ۹.۱۱ مراجعه کنید). بنا به اصل بقای اندازه حرکت، فرآورده‌ها هرگز نمی‌توانند نسبت به‌چارچوب L ساکن باشند. ولی دراین حالت انرژی کل نسبت به‌چارچوب C برابر $E' = ۴m_\circ c^۲$ و اندازه حرکت کل $\mathbf{p}' = \circ$ است. این امر بدین‌معنی است که چهار ذرهٔ حاصل درچارچوب L با سرعت یکسانی‌حرکت می‌کنند و برای تأمین اصل‌بقای اندازه حرکت، باید اندازه حرکت هریک ازآنها $\mathbf{p}/۴$ باشد. بنابراین انرژی کل آنها نسبت به O برابر است با

$$۴c\sqrt{m_\circ^۲c^۲ + (p/۴)^۲} \quad \text{یا} \quad c\sqrt{۱۶m_\circ^۲c^۲ + p^۲}$$

با برابر قراردادن انرژیها قبل و بعد از برخورد، می‌توان نوشت

$$c\sqrt{m_\circ^۲c^۲ + p^۲} + m_\circ c^۲ = c\sqrt{۱۶m_\circ^۲c^۲ + p^۲}.$$

این یک معادلهٔ جبری از p است که پاسخ آن عبارت است از $p = ۴\sqrt{۳}m_\circ c$. این‌مقدار حداقل‌اندازه حرکتی‌است که پروتون فرودی باید نسبت به O داشته باشد تا واکنش بتواند اتفاق بیافتد. (سرعت پروتون چقدر است؟) بنابراین انرژی‌کل پروتون فرودی نسبت به O برابر با $c\sqrt{m_\circ^۲c^۲ + p^۲} = ۷m_\circ c^۲$ و انرژی جنبشی آن $۶m_\circ c^۲$ است. بدین طریق، برای اینکه واکنش موردنظر درآزمایشگاه بتواند رخ دهد، به پروتون فرودی باید آنقدر شتاب داد که انرژی جنبشی آن در چارچوب L برابر $۶m_\circ c^۲$ شود. مقدار جرم سکون پروتون برابر است با $m_\circ = ۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\,\mathrm{kg}$، بنابراین انرژی $۶m_\circ c^۲$ معادل $۹٫۰ \times ۱۰^{-۱۰}\,\mathrm{J}$ یا $۵٫۶ \times ۱۰^۹\,\mathrm{eV}$ می‌شود.

یکی از اساسیترین کاربردهای شتابدهنده‌های انرژیهای بالا به وجود آوردن ذرات سریع است که درچارچوب L انرژی‌آنها بالاترازانرژی جنبشی‌آستانه باشد تا دانشمندان بتوانند در آزمایشگاه و تحت شرایط کنترل شده، بعضی از فرایندهایی را که در پرتوهای کیهانی مشاهده می‌کنند به‌وجود آورند.

مثال ۱۲.۱۱. انرژی آستانهٔ مربوط به‌واکنش $۴ + ۳ \rightarrow ۲ + ۱$ را که درآن چهارذره مختلف می‌باشند پیدا کنید.

حل: چون ذرات دارای جرمهای متفاوت می‌باشند، نمی‌توان اصل تقارن را که در مثال پیش به‌طور ضمنی ازآن استفاده کردیم به‌کار برد. فرض کنیم که ذرهٔ ۲ درآزمایشگاه ساکن باشد، به‌گونه‌ای که $p_۲ = \circ$ است. در این صورت انرژی هرذره درچارچوب L قبل از برخورد عبارت است از

$$E_۱ = c\sqrt{m_۱^۲c^۲ + p_۱^۲} \quad \text{و} \quad E_۲ = m_۲c^۲. \tag{۴۴.۱۱}$$

انرژی و اندازه حرکت کل دستگاه درآزمایشگاه عبارتند از

$$E = E_1 + m_2c^2, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 \qquad (۴۵.۱۱)$$

کمیتهای E و $\mathbf{p}$ باید مطابق‌معادله‌های (۲۶.۱۱) از یک چارچوب مرجع لخت به‌چارچوب دیگر تبدیل پیدا کنند. این امر ایجاب می‌کند که عبارت $p^2 - E^2/c^2$ ناوردا باقی بماند. بنا براین

$$p^2 - E^2/c^2 = p'^2 - E'^2/c^2.$$

اگر آنها را نسبت به چارچوب C تبدیل کنیم، باید داشته باشیم $\mathbf{p}' = 0$، زیرا اندازه‌حرکت کل دراین چارچوب برابر صفراست. دراین‌صورت $p^2 - E^2/c^2 = -E'^2/c^2$، درنتیجه بنا به‌معادلهٔ (۴۵.۱۱) انرژی کل E' درچارچوب C برابر است با

$$E' = \sqrt{E^2 - c^2p^2} = \sqrt{(E_1 + m_2c^2)^2 - c^2p_1^2}.$$

با قراردادن مقدار E_1 ازمعادلهٔ (۴۴.۱۱) داریم

$$E' = c\sqrt{(m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2m_2E_1}. \qquad (۴۶.۱۱)$$

با یادآوری اینکه بنا به معادلهٔ (۱۶.۱۱)، $E_1 = E_{k,1} + m_1c^2$، که درآن $E_{k,1}$ انرژی جنبشی ذرهٔ ۱ درآزمایشگاه است، داریم

$$\begin{aligned} E' &= c\sqrt{(m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2(E_{k,1} + m_1c^2)m_2} \\ &= c\sqrt{(m_1 + m_2)^2c^2 + 2E_{k,1}m_2} \end{aligned} \qquad (۴۷.۱۱)$$

حداقل انرژی لازم بـرای آنکه پس از واکنش ذره‌های m_3 و m_4 به وجـود آیند انرژیی است کـه بـه ازای آن، ذره‌های حاصل در دستگاه مختصات C ساکن باشند. در دستگاه L به دلیل اصل بقای اندازه حرکت غیرممکن است دو ذره در یک زمان در حال سکون باشند. در این حالت $E'_3 = m_3c^2$ و $E'_4 = m_4c^2$ و انـرژی بعد از بـرخورد برابر است با $E' = (m_3 + m_4)c^2$. با برابر قراردادن این رابطه با معادلهٔ (۴۷.۱۱)، که انرژی کل را درچارچوب C قبل از برخورد به‌دست می‌دهد، داریم

$$c\sqrt{(m_1 + m_2)^2c^2 + 2E_{k,1}m} = (m_3 + m_4)c^2$$

یا، با حل آن نسبت به $E_{k,1}$،

$$\begin{aligned} E_{k,1} &= \frac{c^2}{2\,m_2}[(m_3 + m_4)^2 - (m_1 + m_2)^2] \\ &= \frac{c^2}{2\,m_2}[(m_3 + m_4) - (m_1 + m_2)][m_3 + m_4) + (m_1 + m_2)]. \end{aligned}$$

مقدار Q برای این واکنش [به معادلهٔ (۴۱.۹) درمورد برخوردهای نیوتونی مراجعه کنید] با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$Q = [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)]c^2 \qquad (۴۸.۱۱)$$

و برابر اختلاف بین انرژی سکون ابتدایی و نهایی است. در این صورت رابطهٔ $E_{k,1}$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$E_{k,1} = -\frac{Q}{2m_2}(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \qquad (۴۹.۱۱)$$

کــه انرژی آستانه را برای ذرهٔ ۱ (ذرهٔ فرودی) در چارچوب L به دست می‌دهد. اگر Q مثبت باشد، $E_{k,1}$ منفی‌است و انرژی جنبشی ذرهٔ فرودی هرچه‌باشد واکنش‌صورت می‌گیرد. این امر از اینجا ناشی می‌شود که انرژی سکون ذره‌های اولیه بزرگتر از انرژی لازم برای ایجاد ذره‌های نهایی درحال‌سکون می‌باشد. ولی اگر Q منفی باشد، $E_{k,1}$ مثبت است، در این صورت ذرهٔ فرودی باید دارای حداقل معینی انرژی جنبشی باشد، زیــرا انرژی سکون ذرات ابتدایی برای ایجاد ذرات نهایی کافی نیست.

فهرست منابع

1. «On the Origins of the Special Theory of Relativity», G. Holton. *Am. J. Phys.* 28, 627 (1960).
2. «Henri Poincare and the Principle of Relativity», C. Scribner. *Am. J. Phys.* 32, 672 (1964).
3. «Speed and Kinetic Energy of Relativistic Electrons», W. Bertozzi. *Am. J. Phys.* 32, 551 (1964).
4. «Massless Particles», R. Good. *Am. J. Phys.* 28, 679 (1960).
5. *An Introduction to the Special Theory of Relativity*, R. Katz. Princeton, N. J.: Momentum Books, D. Van Nostrand Co., 1964.
6. *The Special Theory of Relativity*, D. Bohm. New York: W. A. Benjamin, 1964.
7. *Introductory Mechanics*, E. Taylor. New York. John Wiley & Sons, 1960, Chapters 11, 12, and 13.
8. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison - Wesley 1963, Chapters 15, 16, and 17.

مسئله‌ها

۱.۱۱. فرض کنید E و E' مقادیــر انرژی کل دستگاهی متشکل از دو ذره باشند کــه با یکدیگر برهم‌کنش می‌کنند، وتوسط دوناظــر لخت O و O' کــه با سرعت نسبی $\mathbf{v}$ حرکت می‌کنند، اندازه‌گیری شده‌اند. ثابت کنید که

$$E = E' + (m_1 + m_2)\left(\mathbf{v}'_{\text{CM}} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}v^2\right).$$

این رابطه را با نتیجه‌های داده شده درفصل ۹ مقایسه کنید. فرض کنید انرژیها آن‌قدر کم هستند که بتوان از دینامیک نیوتونی استفاده کرد.

۲.۱۱. معادله‌های غیر نسبیتی حرکت یک ذره را به‌گونه‌ای که توسط یک ناظر لخت O وناظر دیگر O' که با سرعت زاویه‌ای ثابتی نسبت به اولی در حال چرخش است مشخص می‌شوند با یکدیگر مقایسه کنید. در نیروهای لختی که O' مشاهده می‌کند بحث کنید. [راهنمایی: بخش ۴.۶ را مرور کنید.]

۳.۱۱. به ازای چه سرعتی اندازه حرکت یک ذره برابر با $m_\circ c$ می‌شود؟ دراین حالت، انرژی کل وانرژی جنبشی چقدر است؟

۴.۱۱. الکترونی روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع $۲ \times ۱۰^{-۲}\mathrm{m}$ حرکت می‌کند، به‌گونه‌ای که سرعت آن برابر است با $(۰٫۰۱t + ۰٫۵)c$. هنگامی که $t = ۱۰\mathrm{s}$ است زاویهٔ بین نیرو وشتاب را پیدا کنید.

۵.۱۱. ذره‌ای به جرم سکون $m_\circ$ و سرعت $۰٫۸c$ تحت تأثیر نیرویی (الف) موازی سرعت، (ب) عمود برسرعت قرار می‌گیرد. نسبت نیرو به شتاب را درهرحالت حساب کنید. درحالت دوم، شعاع انحنا را نیز پیدا کنید وآن را با مقادیر غیرنسبیتی مقایسه کنید.

۶.۱۱. جرم سکون یک الکترون برابر $۹٫۱۰۹ \times ۱۰^{-۳۱}\mathrm{kg}$ و جرم سکون پروتون $۱٫۶۷۵ \times ۱۰^{-۲۷}\mathrm{kg}$ است. انرژی سکون آنها را برحسب ژول و الکترون ولت (eV) حساب کنید.

۷.۱۱. اندازه حرکت وسرعت یک پروتون را هنگام خروج از شتابدهندهٔ بروک هیون پیدا کنید. می‌دانیم این شتابدهنده به پروتون $۳ \times ۱۰^{۱۰}\mathrm{eV}$ انرژی جنبشی می‌دهد.

۸.۱۱. شعاع مسیر حرکت پروتون در شتابدهندهٔ بروک هیون $۱۱۴\,\mathrm{m}$ است. نیروی مرکزگرای لازم برای نگهداری پروتون روی مدار را هنگامی که به انرژی جنبشی نهایی خود می‌رسد پیدا کنید.

۹.۱۱. سرعت الکترونی $۰٫۸c$ است. سرعت پروتونی را که دارای (الف) اندازه حرکتی برابر با این الکترون، (ب) انرژی جنبشی برابر با این الکترون باشد، پیدا کنید.

۱۰.۱۱. مقدار جملهٔ تصحیحی $۳m_\circ v^۴/۸c^۲$ را نسبت به جملهٔ اول معادلهٔ (۱۹.۱۱) برای (الف) الکترون اتم هیدروژن که دارای سرعت $۲٫۲ \times ۱۰^۶\mathrm{ms}^{-۱}$ است، (ب) پروتونی که با انرژی جنبشی $۳۰\mathrm{MeV}$ از یک سیکلوترون خارج می‌شود، (ج) پروتونهایی که با انرژی جنبشی $۳ \times ۱۰^{۱۰}\mathrm{eV}$ از شتابدهندهٔ بروک هیون خارج می‌شوند، به دست آورید.

۱۱.۱۱. مثال ۵.۱۱ را با به دست‌آوردن مختصات ذره به صورت تابعی از زمان ومقایسهٔ آنها با مقادیر غیرنسبیتی تکمیل کنید. همچنین ثابت کنید که معادلهٔ مسیرعبارت است از

$$y = \frac{E_\circ}{F}\cosh\frac{Fx}{p_\circ c}.$$

۱۲.۱۱. یک شتابدهنده پروتونهایی با سرعت $۰٫۹c$ به میزان ۳×۱۰^{۱۸} ذره درثانیه،

در دسته‌هایی که $10^{-5}s$ عمر می‌کنند تولید می‌کند. انرژی لازم برای شتاب دادن به تمام ذرات موجود دریک دسته را پیدا کنید. اگر درهرثانیه ۱۰۰ دسته به‌وجود آید، توان لازم برای شتاب دادن به ذرات را به دست آورید.

۱۳.۱۱. انرژی لازم برای تغییر سرعت یک الکترون ویک پروتون را، برحسب eV، در حالات زیر حساب کنید: (الف) از سکون به $0.500c$، (ب) از $0.500c$ به $0.900c$، (ج) از $0.900c$ به $0.950c$، (د) از $0.950c$ به $0.990c$. به چه نتیجهٔ کلی می‌توان رسید؟

۱۴.۱۱. انرژی جنبشی ذره‌ای را با خطای ۱٪ روی انرژی کل داخلی، می‌توان به‌صورت pc نوشت. کمینهٔ سرعت آن چقدر است؟ انرژی جنبشی یک الکترون ویک پروتون که با چنین سرعتی حرکت می‌کنند برحسب eV چقدر است؟

۱۵.۱۱. بیشینهٔ سرعت یک ذره چقدر باید باشد تا بتوان انرژی جنبشی آن را، بدون اینکه خطا از ۱٪ تجاوز کند، به صورت $m_0v^2/2$ نوشت؟ انرژی جنبشی یک الکترون ویک پروتون که با چنین سرعتی حرکت کنند برحسب eV چقدر است؟

۱۶.۱۱. نشان دهید $v/c = [1 - (m_0c^2/E)^2]^{1/2}$. از این رابطه سرعت ذره‌ای را پیدا کنید که برای‌آن E برابر است با (الف) انرژی سکون‌آن، (ب) دوبرابر انرژی سکون آن، (ج) ده‌برابر انرژی سکون‌آن، و (د) هزاربرابر انرژی سکون‌آن. انرژیهای مربوط را برای یک الکترون ویک پروتون برحسب eV حساب کنید. منحنی نمایش v/c را برحسب E/m_0c^2 رسم کنید.

۱۷.۱۱. ثابت کنید که اندازه حرکت ذره را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$p = (E_k^2 + 2m_0c^2E_k)^{1/2}/c.$$

منحنی نمایش p/m_0c را برحسب E_k/m_0c^2 رسم کنید.

۱۸.۱۱. الکترونهایی تا انرژی جنبشی 10^9 eV شتاب داده شده‌اند. پیداکنید (الف) نسبت جرم آنها را به جرم سکون، (ب) نسبت سرعت آنها را به سرعت نور، (ج) نسبت انرژی کل آنها را به انرژی جرم سکونشان. این مسئله را درمورد پروتونهایی با همین انرژی حل کنید.

۱۹.۱۱. نظر به اینکه نسبت انرژی برسرعت دارای بعد اندازه حرکت می‌باشد، یکای MeV/c به عنوان یکای مناسبی دراندازه‌گیریهای اندازه حرکت ذره‌های بنیادی به کار می‌رود. مقدار این یکا را برحسب mkgs^{-1} بنویسید. اندازه حرکت الکترونی را که دارای انرژی کل 5MeV می‌باشد برحسب این یکا پیدا کنید. همین کار را درمورد پروتونی که انرژی کل آن 2×10^3MeV است انجام دهید.

۲۰.۱۱. انرژی کل وسرعت الکترونی را که دارای اندازه حرکت 0.60MeV/c است معین کنید. همین کار را درمورد یک پروتون نیز انجام دهید.

۲۱۰۱۱. الکترونی بـا سرعت c۶ر۰ نسبت به ناظر O حرکت می‌کند. در راستای این سرعت نسبی نیرویی برابر با N^{-19}۱۰ $\times$ ۱۰۹ر۹، که درچارچوب مرجع متصل به الکترون اندازه‌گیری شده است، به آن وارد می‌شود. شتاب الکترون را نسبت به هر دو چارچوب مرجع پیدا کنید.

۲۲۰۱۱. مسئلهٔ ۲۱۰۱۱ را درحالتی که نیرو در راستای عمود برسرعت نسبی وارد می‌شود حل کنید.

۲۳۰۱۱. مسئله‌های ۲۱۰۱۱ و ۲۲۰۱۱ را درحالتی که نیرو نسبت به ناظر O اندازه‌گیری شده باشد حل کنید.

۲۴۰۱۱. انـدازه حرکت، انـرژی کل و انرژی جنبشی یک پروتون را کـه با سرعت $v =$ c۹۹ر۰ نسبت به آزمایشگاه حرکت می‌کند درحالتهای زیر حساب کنید: (الف) در چارچوب L، (ب) درچارچوبی‌که توسط پروتون تعریف می‌شود؛ (ج) درچارچوب C که توسط پروتون ویک اتم هلیوم ساکن درآزمایشگاه تعریف می‌شود.

۲۵۰۱۱. بین یک پروتون با انرژی جنبشی 10^{10}eV و یک پـروتون ساکن برخوردی صورت می‌گیرد. (الف) سرعت دستگـاه، (ب) انـدازه حـرکت کـل و انـرژی کل را در چارچوب L و (ج) انرژی جنبشی دو ذره را درچارچوب C پیدا کنید.

۲۶۰۱۱. الکترونی با انرژی کل E_e با یک پروتون ساکن به صورت رودررو بـرخورد می‌کند. اگـر انـرژی الکترون درمقایسه با انـرژی سکون آن خیلی زیـاد باشد، الکترون را بایـد به طور نسبیتی مورد مطالعه قرار داد، بعلاوه، اگر انرژی الکترون نسبت به‌انرژی سکون پروتون کوچک بـاشد، پروتون را می‌توان بـه طور غیرنسبیتی مطالعه کرد. در این صورت ثابت کنید کـه (الف) پروتون با سرعتی تقریباً برابر با c $(2E_e/m_\circ c^2)$ پس زده می‌شود، (ب) انرژیی که از الکترون به پروتون انتقال می‌یابد برابر است با $2E_e^2/m_\circ c^2$. حالتی را مورد نظر قرار دهید که انرژی الکترون بـرابـر ۱۰۰MeV است. [راهنمایی: برای الکترون $E = cp$ است، درصورتی کـه برای پروتون $E_k = p^2/2m$ می‌بـاشد. همچنین توجه کنید که اگر پروتون بـه سمت جلو حرکت کند الکترون به عقب برمی‌گردد، به گونه‌ای که سوی اندازه حرکت آن وارونه می‌شود.]

۲۷۰۱۱. یک روش برای به دست آوردن انرژی لازم برای یک واکنش هسته‌ای فرستادن یک ذره در مقـابل ذرهٔ دیگر است. هنگامی کـه ذره‌ها مشابه وانرژی آنها یکسان باشد، چارچوب C و چارچوب آزمایشگاه برهم منطبق می‌شونـد. این روش درمرکز پژوهشهای هسته‌ای اروپا (CERN) به‌کار گرفته می‌شود. درآنجا پروتونهایی را که تا انرژی ۲۸GeV شتاب داده شده‌انـد در دو «حلقهٔ انبارنـده» در دوسوی مخالف به گردش درمی‌آورند؛ در یک لحظهٔ مناسب بین دوباریکهٔ پـروتون برخورد به وجود می‌آیـد. (الف) انـرژی کل حاصل برای انجام یک واکنش چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی یک پروتون درچارچوب مرجعی که پروتون دیگـر درآن ساکن چقدر است؟ انرژیی است کـه باید به یک پروتون داده شود تـا هنگام برخورد با یک هدف ساکن درآزمـایشگاه همان واکنش را به وجود

آورد. آیا در ایدهٔ «حلقه‌های انبارنده» امتیازی مشاهده می‌کنید؟

۲۸.۱۱. قانون نسبیتی (۲۶.۱۱) را برای تبدیل اندازه حرکت وانرژی به دست آورید. برای این کار روابط $E'=m_0c^2/\sqrt{1-V'^2/c^2}$، $\mathbf{p}'=m\mathbf{V}'/\sqrt{1-V'^2/c^2}$ را بنویسید و با استفاده از معادلهٔ (۳۶.۶)، سرعت $\mathbf{V}'$ را برحسب سرعت $\mathbf{V}$ (که توسط O اندازه‌گیری می‌شود) و $\mathbf{v}$ (سرعت نسبی آنها) بیان کنید. [راهنمایی: از رابطه‌های به‌دست آمده درمسئلهٔ ۳۸.۶ استفاده کنید.]

۲۹.۱۱. ثابت کنید که اگر ذره نسبت به O' ساکن نباشد قانون کلی تبدیل نیرو عبارت است از

$$F'_x = F_x - \left(\frac{vV_y/c^2}{1-vV_x/c^2}\right)F_y - \left(\frac{vV_z/c^2}{1-vV_x/c^2}\right)F_z$$

$$F'_y = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-vV_x/c^2}F_y$$

$$F'_z = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-vV_x/c^2}F_z.$$

$\mathbf{V}$ سرعت ذره نسبت به O است. تحقیق کنید که اگر ذره نسبت به O ساکن باشد، این رابطه‌ها به روابط (۳۲.۱۱)، (۳۳.۱۱) و (۳۴.۱۱) تبدیل می‌شوند.

۳۰.۱۱. نشان دهید که تبدیل انرژی و اندازه حرکت را می‌توان به صورت برداری زیر نوشت:

$$E' = k(E - \mathbf{p}\cdot\mathbf{v})$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2} + k\left[\frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2} - \frac{\mathbf{v}E}{c^2}\right].$$

۳۱.۱۱. ذره‌ای که جرم سکون آن m_1 است و با سرعت $\mathbf{v}_1$ درچارچوب L حرکت می‌کند، با ذره‌ای به جرم سکون m_2 که درچارچوب L ساکن است برخورد می‌کند. (الف) ثابت کنید که سرعت چارچوب C دستگاه دو ذره برابر است با

$$\mathbf{v}_C = \frac{\mathbf{v}_1}{1 + A\sqrt{1-v_1^2/c^2}}$$

که درآن $A = m_2/m_1$ است. (ب) ثابت کنید که درچارچوب C سرعت m_1 برابر است با

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{\mathbf{v}_1 A\sqrt{1-v_1^2/c^2}}{1 - v_C^2/c^2 + A\sqrt{1-v_C^2/c^2}}$$

وسرعت m_2 مساوی $\mathbf{v}_C$ — است. (ج) مقدار کمیتهای پیش را هنگامی که v_1 درمقابل c

کوچک باشد حساب کنید و نتایج را با نتایج مثال ۱۳.۹ مقایسه کنید.

۳۲.۱۱. با به کاربردن قوانین تبدیل لورنتس برای انرژی و اندازه حرکت، ثابت کنیدکه اگر سرعت دستگاه نسبت به ناظر O برابر $\mathbf{v}_C = c^۲\mathbf{p}/E$، و نسبت به ناظر دیگر O' که با سرعت $\mathbf{v}$ نسبت به ناظر O در راستای محور Xها حرکت می‌کند برابر $\mathbf{v}'_C = c^۲\mathbf{p}'/E'$ باشد، دراین صورت سرعتهای $\mathbf{v}_C$، $\mathbf{v}'_C$ و $\mathbf{v}$ با معادله‌های تبدیل (۳۶.۶) به یکدیگر مربوط می‌شوند. همچنین ثابت کنید اگر $\mathbf{v}'_C = ۰$ (یا $\mathbf{p} = ۰$) باشد، داریم $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}$. این موضوع یکی ازفرضهای اساسی ما، دربخش ۹.۱۱ هنگام تعریف سرعت دستگاه بود. این امر نشان می‌دهد که نظریه‌ای که توضیح داده‌ایم با تبدیل لورنتس مطابقت دارد.

۳۳.۱۱. ذره‌ای به جرم سکون $m_۱$ و اندازه حرکت $p_۱$ به‌طور ناکشسان با ذره‌ای به جرم $m_۲$ که در آزمایشگاه ساکن است برخورد می‌کند. دو ذره بدون آنکه جرم سکونشان تغییر کند به یکدیگر می‌چسبند. (الف) سرعت ذرهٔ حاصل را نسبت به چارچوب L پیدا کنید. (ب) Q برخورد را به دست آورید.

۳۴.۱۱. درمسئلهٔ ۳۳.۱۱ در حالتی که جرم سکون ذرهٔ حاصل $m_۳$ باشد که با ترکیب جرمهای سکون دو ذره، $m_۱ + m_۲$ فرق کند، بحث کنید.

۳۵.۱۱. ذره‌ای به جرم سکون $m_۱$ واندازه حرکت $p_۱$ به طور ناکشسان با ذره‌ای به‌جرم سکون $m_۲$ که درآزمایشگاه ساکن است برخورد می‌کند. حاصل این برخورد ذره‌ای به جرم سکون $m_۳$ و ذرهٔ دیگری به جرم سکون صفر می باشد. انرژی ذرهٔ اخیر را (الف) درچارچوب C، و (ب) درچارچوب L پیدا کنید.

۳۶.۱۱. زاویهٔ پس‌زنی ذرهٔ به جرم $m_\circ$ را درمثال ۱۰.۱۱، φ فرض کنید. ثابت کنید که انرژی جنبشی ذره بعد از برخورد برابر است با

$$E_k = \frac{۲E(E/E_\circ c^۲)\cos^۲\varphi}{۱ + ۲(E/m_\circ c^۲) + (E/m_\circ c^۲)^۲\sin^۲\varphi}.$$

۳۷.۱۱. ذره‌ای به جرم سکون $m_۱$ و اندازه حرکت $p_۱$ با ذره‌ای به جرم $m_۲$ که در چارچوب L ساکن است برخورد می‌کند و به اندازهٔ زاویهٔ θ منحرف می‌شود. ثابت کنید که اندازه حرکت وانرژی $m_۱$ بعد ازبرخورد عبارتند از

$$p_۳ = p_۱ \frac{(m_۱^۲c^۲ + m_۲E_۱)\cos\theta + (E_۱ + m_۲c^۲)\sqrt{m_۲^۲ - m_۱^۲\sin^۲\theta}}{(E_۱/c + m_۲c)^۲ - p_۱^۲\cos^۲\theta}$$

$$E_۳ = \frac{(E_۱ + m_۲c^۲)(m_۱^۲c^۲ + m_۲E_۱) + c^۲p_۱^۲\cos\theta\sqrt{m_۲^۲ - m_۱^۲\sin^۲\theta}}{(E_۱/c + m_۲c)^۲ - p_۱^۲\cos^۲\theta}.$$

۳۸.۱۱. با مراجعه به مسئلهٔ ۳۷.۱۱، ثابت کنید که اگر ذرهٔ $m_۲$ با زاویهٔ φ نسبت به راستای حرکت ذرهٔ فرودی پس زده شود، دراین صورت اندازه حرکت وانرژی آن برابر می‌شود با

$$p_4 = p_1 \frac{2m_2(E_1 + m_2c^2)\cos\varphi}{(E_1/c + m_2c)^2 - p_1^2\cos^2\varphi}$$

$$E_4 = m_2c^2\left[1 + \frac{2p_1^2\cos^2\varphi}{(E_1/c + m_2c)^2 - p_1^2\cos^2\varphi}\right].$$

۳۹.۱۱. بازهم با مراجعه به مسئله‌های ۳۷.۱۱ و ۳۸.۱۱، فرض کنید جرم سکون دو ذره یکسان باشد. ذرهٔ فرودی بعد از برخورد، در چارچوب C با زاویهٔ φ نسبت به راستای ابتدایی خود، وذرهٔ دیگر درسوی مخالف آن حرکت می‌کند. نشان دهید زاویه‌های θ و θ' که این ذره‌ها درحرکت خود با چارچوب L می‌سازند، ازرابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$$

$$\operatorname{tg}\theta' = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi.$$

ازآن نتیجه بگیرید که $\theta + \theta' \leqslant \pi/2$ است، و هر چه v به c نزدیکتر باشد، زاویهٔ $\theta + \theta'$ بین دو ذره در چارچوب L کوچکتر است. آن را با نتایج داده شده در مثال ۱۱.۹ برای یک برخورد غیرنسبیتی مقایسه کنید.

[راهنمایی: توجه داشته باشید که قبل از برخورد دو ذره در چارچوب C با سرعتهای v و $-v$ حرکت می‌کنند و بعد از برخورد در سوی مخالف و با همان سرعت به حرکت خود ادامه می‌دهند].

۴۰.۱۱. بامراجعه به مسئلهٔ ۳۷.۱۱، تحقیق کنید که اگرجرم سکون ذرهٔ ۱ برابرصفر باشد، مقادیر p_3 و E_3 به مقادیر مثال ۱۰.۱۱ تبدیل می‌شوند.

۴۱.۱۱. ثابت کنید که معادلهٔ حرکت موشکی‌که با سرعت نسبیتی حرکت می‌کند وهیچگونه نیروی خارجی به‌آن وارد نمی‌شود عبارت است از $m(dv/dm) + v_e'(1 - v^2/c^2) = 0$. در این رابطه m جرم سکون لحظه‌ای موشک، v سرعت آن نسبت به ناظر و v_e' سرعت خروج گاز نسبت به موشک است. همچنین، با انتگرال گیری ثابت کنید که سرعت نهایی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$v = \frac{c[1 - (m/m_0)^{2v_e'/c}]}{1 + (m/m_0)^{2v_e'/c}}.$$

[راهنمایی: معادله‌های بقای اندازه حرکت و انرژی را نسبت به ناظر بنویسید. توجه داشته باشید که جرم سکون گازهای خروجی با تغییر جرم سکون موشک برابر نیست.]

۴۲.۱۱. ذره‌ای باجرم سکون m_0، به دوذره به جرمهای سکون m_1 و m_2 تقسیم (واپاشیده) می‌شود. نشان دهید که در چارچوب C انرژی ذره‌های به دست آمده برابر است با

$$E_1' = (m_0^2 + m_1^2 - m_2^2)c^2/2m_0$$

و

$$E_2' = (m_0^2 + m_2^2 - m_1^2)c^2/2m_0$$

اندازه حرکت آنها را نیز به دست آورید.

۴۳.۱۱. مسئلهٔ ۴۲.۱۱ را درحالتی که ذره‌ها درچارچوب L قرار دارند و اندازه حرکت ذرهٔ m_0 دراین دستگاه برابر p است حل کنید. همچنین ثابت کنید که اگر p_1 و p_2 اندازه حرکت ذره‌های حاصل و θ زاویهٔ بین این دو باشد، داریم

$$m_0^2c^4 = (m_1 + m_2)^2c^4 + 2E_1E_2 - 2m_1m_2c^4 - 2p_1p_2c^2\cos\theta.$$

۴۴.۱۱. دربرخورد بین دو ذرهٔ m_1 و m_2، ذرهٔ m_1 با اندازه حرکت p_1 حرکت می‌کند و m_2 درچارچوب L ساکن است. بعداز برخورد، علاوه برذره‌های m_1 و m_2 ذره‌های دیگر m_3، m_4، . . . نیز ظاهرمی‌شوند. ثابت‌کنید که برای این فرایند انرژی‌آستانه درچارچوب L برابر است با

$$E_{k,1} = (\Delta m)c^2[1 + m_1/m_2 + \Delta m/2m_2].$$

در اینجا $\Delta m = m_3 + m_4 + \ldots$ است. این معادله را در مورد فرایند ایجاد یک جفت پروتون ـ پاد پروتون، چنانکه در مثال ۱۱.۱۱ بحث کردیم، به کار ببرید.

۴۵.۱۱. ذره‌ای به جرم سکون m_1، با انرژی کل خیلی بزرگ E و با سرعتی تقریباً برابر c با ذرهٔ ساکنی به جرم سکون m_2 برخورد می‌کند. ثابت کنید که سرعت دستگاه برابر است با $c(1 - m_2c^2/E_1)$ و انرژی قابل حصول در چارچوب C برابر است با $(2E_1m_2c^2)^{1/2}$.

۴۶.۱۱. واکنشی را در نظر بگیرید که درآن ذره‌ای به جرم سکون صفر و انرژی E_1 با ذره‌ای به جرم سکون m_2 که درآزمایشگاه ساکن است برخورد می‌کند. حاصل این واکنش دو ذره به جرمهای سکون m_2 و m_3 می‌باشد. ثابت که انرژی‌آستانه E_1 برای این واکنش برابر است با

$$E_1 = m_3(1 + m_3/2m_2)c^2.$$

۴۷.۱۱. مقدار Q وانرژی جنبشی‌آستانهٔ ذرهٔ فرودی (ذرهٔ π^-) را در چارچوب L، برای واکنشهای (الف) $\pi^- + p^+ \rightarrow n + \pi^\circ$، (ب) $\pi^- + p^+ \rightarrow \Sigma^- + K^+$ تعیین کنید. جرم سکون این ذره‌ها عبارت است از

ذره	جرم سکون، برحسب kg
π^-	$۰٫۲۴۸۹ \times ۱۰^{-۲۷}$
π°	$۰٫۲۴۰۷ \times ۱۰^{-۲۷}$
p^+	$۱٫۶۷۵۲ \times ۱۰^{-۲۷}$
n	$۱٫۶۷۴۸ \times ۱۰^{-۲۷}$
Σ^-	$۱٫۹۷۰۲ \times ۱۰^{-۲۷}$
K^+	$۰٫۸۸۰۵ \times ۱۰^{-۲۷}$

[راهنمایی: از نتایج مثال ۱۲.۱۱ استفاده کنید.]

۴۸۰۱۱. یک ذرهٔ بنیادی به جرم سکون $m_\circ$، با تقسیم شدن به چند ذرهٔ بنیادی دیگر فرو-پاشیده می‌شود. واکنش دارای Q مخالف صفر است. (الف) ثابت کنید که اگر ذره به دو قطعهٔ برابر تقسیم شود این قطعه‌ها در چارچوب C باید در دو سوی مخالف با اندازه حرکت $(۲m_\circ Q - Q^۲/c^۲)^{۱/۲}/۲$ حرکت کنند. (ب) اگر ذره به سه قطعهٔ برابر تقسیم شود و این قطعات به طور متقارن در چارچوب C گسیل شوند، اندازه حرکت هر قطعه برابر است با

$$\frac{۱}{۳}(۲m_\circ Q - Q^۲/c^۲)^{۱/۲}.$$

(ج) تحقیق کنید هنگامی که Q خیلی کوچکتر از $m_\circ c^۲$ است، نتایج (الف) و (ب) بترتیب به‌رابطه‌های غیرنسبیتی‌که درسؤالهای (د) و (ه) درمسئلهٔ ۱۳.۹ آمده‌بودند، تبدیل‌می‌شوند. (د) نتیجهٔ قسمت (ب) را در مورد ذره‌ای به نام مزون تو[1] $(m_\circ = ۸٫۸ \times ۱۰^{-۲۸}\ \mathrm{kg})$، که به سه قطعه به نام مزون پی[2] $(m_\circ = ۲٫۵ \times ۱۰^{-۲۸}\,\mathrm{kg})$ فرو پاشیده می‌شود به کار ببرید. مقدار Q واکنش را به دست‌آورید و بزرگی سرعت قطعه‌ها را درچارچوب C تعیین کنید. اگر رابطه‌های غیرنسبیتی مسئلهٔ ۱۳.۹ را به کار ببریم درصد خطای محاسبه چقدر خواهد بود؟

---

1. tau-meson   2. pi-meson

۱۲
حرکت نوسانی

۱۰۱۲ مقدمه

یکی ازمهمترین حرکتهایی‌که درطبیعت به‌آن برخورد می‌کنیم حرکت نوسانی (یا ارتعاشی) است. یک ذره هنگامی نوسان می‌کند کـه به طور تناوبی اطراف یک وضع تعادل جابجا شود. حرکت یک آونگ نوسانی‌است. هرگاه یک وزنهٔ آویزان ازفنری‌را رهاکنند شروع به نوسان می‌کند. اتمها در یک جسم جامد در حـال ارتعاش هستند. همچنین در مولکولها، اتمها نسبت به هم در حرکت ارتعاشی می باشند. در یک آنتن گیرنده یا فرستنده الکترونها بتندی درحال نوسان هستند. دربحث پدیده‌های موجی نیز، که در قسمت سوم این دوره به‌آن خواهیم پرداخت، آشنایی با حرکت ارتعاشی ضروری است.

مهمترین حرکت نوسانی حرکت هماهنگ ساده[1] است، زیـرا نـه تنها ساده‌ترین بیان ریاضی را دارد، بلکـه نمایش نسبتاً درستی از بسیاری از پدیده‌های نوسانی است کـه در طبیعت دیده می‌شوند. گفتگوی ما دراین فصل به این نوع حرکت اختصاص دارد.

۲۰۱۲ سینماتیک حرکت هماهنگ ساده

مطابق تعریف، ذره‌ای که در طول محور X ها حرکت می‌کند دارای حرکت هماهنگ ساده است هرگاه x، جابجایی آن نسبت به مبدأ مختصات، به صورت تابعی از زمـان بـا رابطهٔ زیر داده شود:

$$x = A\sin(\omega t + \alpha) \qquad (۱۰۱۲)$$

کمیت $(\omega t + \alpha)$ فاز[2] نام دارد، بنابراین α فاز اولیه، یعنی فاز مربوط به $t = ۰$ است. هرچند حرکت هماهنگ ساده را به‌صورت یک تابع سینوسی تعریف کردیم، می‌توان آن را با یک تابع کسینوسی نیز بیان کرد، در این صورت تنها تفاوت آن عبارت می‌شود از یک اختلاف فاز اولیهٔ $\pi/۲$. زیـرا تابع سینوس (یا کسینوس) بین ۱+ و ۱- و جابجایی ذره بین $x = +A$ و $x = -A$ تغییرمی‌کند. A، بیشینهٔ جابجایی ازمبدأ، به‌عنوان دامنهٔ[3] حرکت هماهنگ ساده تعریف می‌شود. هربار که افزایش زاویه به ۲π برسد تابع سینوسی تکرار می‌شود، درنتیجه پس ازفاصله زمانی $۲\pi/\omega$ جابجایی ذره نیز تکرار می‌شود. ازاین رو حرکت هماهنگ ساده حرکتی است دوره‌ای، و دورهٔ آن برابر است بـا $P = ۲\pi/\omega$. تعداد نوسانهای کامل انجام یافته در واحـد زمـان را بسامد می‌نامند و با ν نشان می‌دهند؛ بنابراین $\nu = ۱/P$ است. کمیت ω، بسامد زاویه‌ای ذرهٔ نـوسانگر نـامیده می‌شود و بـا رابطه‌ای مشابه معادلهٔ (۵۱۰۵) درحرکت دایره‌ای، به بسامد مربوط می‌شود، یعنی

$$\omega = \frac{۲\pi}{P} = ۲\pi\nu. \qquad (۲۰۱۲)$$

سرعت ذره که با استفاده ازمعادلهٔ (۲۰۵) تعیین می‌شود، برابر است با

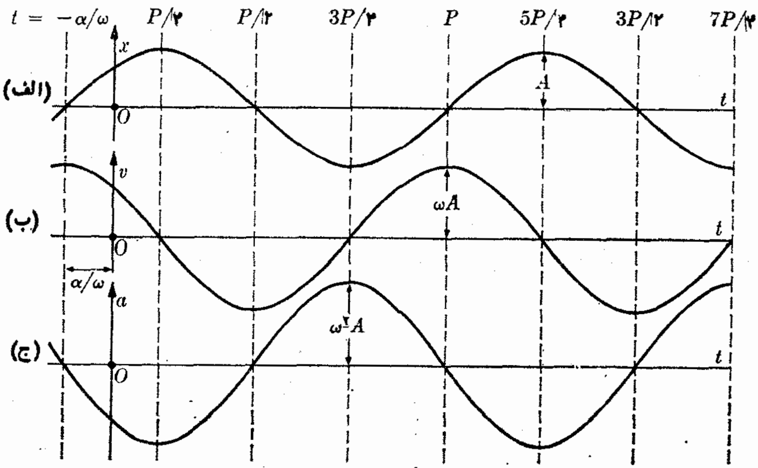
1. simple harmonic motion 2. phase 3. amplitude

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \alpha). \qquad (۳.۱۲)$$

همچنین، شتاب با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x. \qquad (۴.۱۲)$$

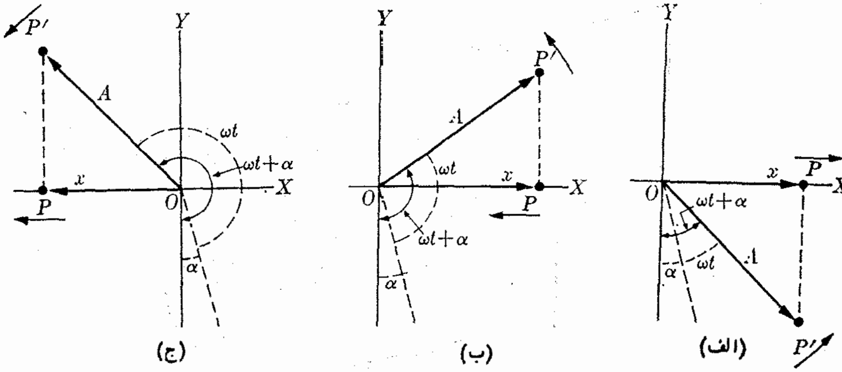
این رابطه نشان می‌دهد که در یک حرکت هماهنگ ساده همیشه شتاب متناسب است با جابجایی با علامت مخالف. در شکل ۱.۱۲، x، v و a به صورت توابعی از زمان نمایش داده شده‌اند.



شکل ۱.۱۲. نمودار (الف) جابجایی، (ب) سرعت، (ج) شتاب برحسب زمان، در حرکت هماهنگ ساده

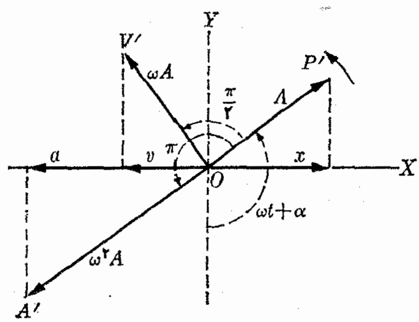
جابجایی ذره‌ای را که دارای حرکت هماهنگ ساده است می‌توان تصویر برداری مانند $\overrightarrow{OP'}$، که $OP' = A$، در راستای محور X ها درنظر گرفت که درسوی پادساعتگرد با سرعت زاویه‌ای ω دور نقطهٔ O می‌چرخد و در هرلحظه با سوی منفی محور Y ها زاویهٔ $\omega t + \alpha$ می‌سازد، که این زاویه نیز در سوی پادساعتگرد اندازه‌گیری می‌شود. در شکل ۲.۱۲ بردار $\overrightarrow{OP'}$ را درچند وضع مختلف نشان داده‌ایم. می‌توان بررسی‌کرد که درهر لحظه مؤلفهٔ بردار $\overrightarrow{OP'}$ روی محور X ها از رابطهٔ $x = OP = OP' \sin(\omega t + \alpha)$ به‌دست می‌آید که با معادلهٔ (۱.۱۲) تطبیق می‌کند.

سرعت و شتاب ذره را نیز می‌توان با بردارهای چرخان $\overrightarrow{OV'}$ و $\overrightarrow{OA'}$ نشان داد که طول آنها بترتیب برابر ωA و $\omega^2 A$ است و تصویر این بردارها روی محور X ها بترتیب



شکل ۲.۱۲. بردار چرخان برای نمایش جابجایی در حرکت هماهنگ ساده

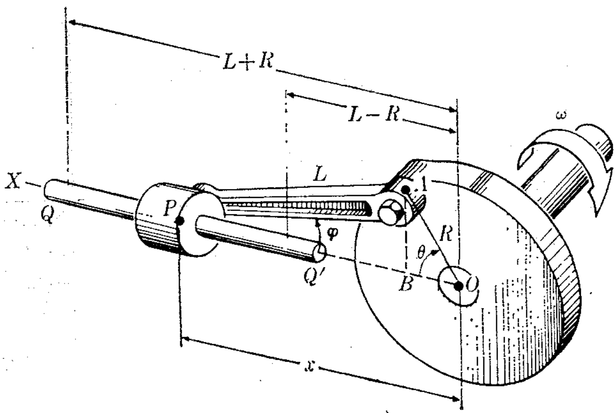
سرعت وشتاب ذره‌ای را که حرکت هماهنگ ساده دارد نشان می‌دهند. راستا و سوی نسبی این دو بردار در شکل ۳.۱۲ نشان داده شده است. توجه کنید که بردار $\overrightarrow{OV'}$ به اندازهٔ $\pi/۲$ و $\overrightarrow{OA'}$ به اندازهٔ π نسبت به بردار چرخان $\overrightarrow{OP'}$ تقدم دارند.



شکل ۳.۱۲. بردارهای چرخان برای جابجایی، سرعت و شتاب در حرکت هماهنگ ساده

مثال ۱.۱۲. درسازوکار نشان داده شده درشکل ۴.۱۲، آیا حرکت P هماهنگ ساده‌است؟ دراین سازوکار QQ' میله‌ای است که استوانهٔ P می‌تواند روی آن بلغزد. P به وسیلهٔ میلهٔ L به‌چرخی به شعاع R مربوط می‌شود که با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد (این سازوکار دربسیاری ازماشینهای بخار یافت می‌شود و حرکت رفت و برگشتی یک پیستون را به‌حرکت چرخشی یک چرخ تبدیل می‌کند.)

حل: ازشکل پیداست که P بین نقطه‌ای به‌فاصلهٔ $L+R$ و نقطه‌ای به‌فاصلهٔ $L-R$ از نقطهٔ O نوسان می‌کند. برای اینکه تعیین شود حرکت P هماهنگ ساده است باید جستجو کرد که آیا جابجایی P در معادلهٔ (۱.۱۲) صدق می‌کند یا نه. با توجه به وضع هندسی



شکل ۴.۱۲. حرکت P نوسانی است ولی هماهنگ ساده نیست.

شکل می‌توان نوشت

$$x = R\cos\theta + L\cos\varphi$$

و

$$L\sin\varphi = R\sin\theta$$

به گونه‌ای که

$$\sin\varphi = (R/L)\sin\theta$$

و

$$\cos\varphi = (1 - \sin^2\varphi)^{1/2} = \frac{1}{L}(L^2 - R^2\sin^2\theta)^{1/2}.$$

بنابراین

$$x = R\cos\theta + (L^2 - R^2\sin^2\theta)^{1/2}$$

و درنتیجه، چون $\theta = \omega t$ است، به‌دست می‌آید

$$x = R\cos\omega t + (L^2 - R^2\sin^2\omega t)^{1/2}.$$

این رابطه جابجایی P را برحسب زمان به دست می‌دهد. هرگاه این رابطه را با معادلهٔ (۱۰۱۲) مقایسه کنیم، می‌بینیم جملهٔ اول، $R\cos\omega t$، مربوط به یک حرکت هماهنگ ساده با $\alpha = \pi/2$ است ولی جملهٔ دوم چنین نیست. از این رو هرچند حرکت P یک حرکت نوسانی است، ولی هماهنگ ساده نیست.

یک مهندس مکانیک که سازوکاری نظیر شکل ۴.۱۲ را طرح می‌کند، باید محاسبه کند که چگونه یک نیروی خاص بر P وارد شود تا جابجایی x مطابق رابطهٔ فوق باشد و حرکت چرخ دایره‌ای یکنواخت شود. هرگاه P به پیستون یک ماشین بخار متصل شده باشد، می‌توان این کار را با تنظیم مقدار بخار ورودی انجام داد.

مثال ۲.۱۲ بر ذره‌ای به جرم m نیروی نوسانی $\mathbf{F} = \mathbf{F}_\circ \sin \omega t$ وارد می‌شود. حرکت ذره را مطالعه کنید.

حل: معادلهٔ حرکت ذره عبارت‌است از $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_\circ \sin \omega t$، یا چون $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ است،

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}_\circ}{m} \sin \omega t.$$

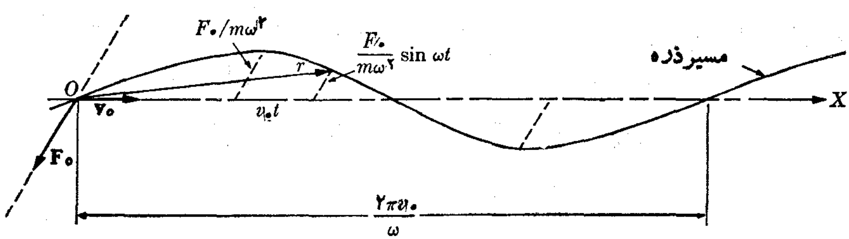
با انتگرال‌گیری ازاین رابطه به‌دست می‌آید

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{F}_\circ}{m\omega} \cos \omega t + \mathbf{v}_\circ$$

که درآن $\mathbf{v}_\circ$ یک ثابت انتگرال است، نه سرعت اولیه که از قراردادن $t = \circ$ به دست می‌آید. همچنانکه می‌توان ثابت کرد، سرعت اولیه برابر است با $\mathbf{v}_\circ - \mathbf{F}_\circ/m\omega$. اگر به یاد داشته باشیم که $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ است و بار دیگر از رابطهٔ فوق انتگرال بگیریم، به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{r} = -\frac{\mathbf{F}_\circ}{m\omega^2} \sin \omega t + \mathbf{v}_\circ t + \mathbf{r}_\circ$$

این رابطه مکان ذره را به صورت تابعی از زمان به‌دست می‌دهد. دراینجا $\mathbf{r}_\circ$ مکان اولیهٔ ذره است. اگر $\mathbf{r}_\circ = \circ$ فرض‌شود، مسیر ذره با شکل ۵.۱۲ نشان داده می‌شود. چنانکه مشاهده می‌شود، ذره به‌سمت راست پیش می‌رود، ولی در راستای $\mathbf{F}_\circ$ دراطراف محورنوسان‌می‌کند. این شکل را نباید با شکل ۱.۱۲ الف که دریک حرکت هماهنگ ساده، جابجایی ذره را به‌صورت تابعی از زمان به‌دست می‌دهد اشتباه‌کرد. وضع فیزیکی که دراین مثال نشان داده شده است هنگامی رخ می‌دهد که مثلا، الکترون (یا هر ذرهٔ باردار دیگر) در یک میدان الکتریکی نوسانی حرکت کند.



شکل ۵.۱۲. حرکت درصفحه براثر یک نیروی هماهنگ

از دانشجو می‌خواهیم حالت خاصی را در نظر بگیرد که در آن $\mathbf{F}_\circ$ و $\mathbf{v}_\circ$ موازی هستند و دراین صورت نمودار جابجایی را برحسب زمان رسم کند.

۳.۱۲ نیرو و انرژی درحرکت هماهنگ ساده

از معادلهٔ (۴.۱۲) می‌توان نیرویی را کـه باید برذره‌ای به جرم m وارد شود تا آن را به حرکت هماهنگ ساده وادارد حساب کرد. با استفاده ازمعادلهٔ حرکت $F = ma$ و با قرار دادن مقدار شتاب درآن ازمعادلهٔ (۴.۱۲)، به‌دست می‌آید

$$F = -m\omega^2 x = -kx \qquad (5.12)$$

که درآن قرار داده‌ایم

$$k = m\omega^2 \quad \text{یا} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (6.12)$$

رابطهٔ (۵.۱۲) نشان می‌دهد که، درحرکت هماهنگ ساده، نیرو متناسب با جابجایی و درسوی مخالف آن است. بنابراین نیرو همیشه بـه سوی مبدأ O است. نقطهٔ O وضع ترازمندی است، یعنی دراین‌نقطه $F = 0$ می‌باشد، زیرا $x = 0$ است. همچنین می‌توان گفت نیروی F جاذبه و نقطهٔ O مرکزجذب است. نیروی داده شده با معادلهٔ (۵.۱۲) ازنوع نیروهایی است کـه هنگام تغییر شکل دادن یک جسم کشسان مـانند فنر ظاهر می‌شونـد. در فصل ۸ مثالهای متعددی ازاین‌گونه نیروها آمده است. ثابت $k = m\omega^2$ را گاهی ثابت کشسانی می‌نامند، و آن نیروی لازم برای جابجایی ذره به اندازهٔ واحد مسافت می‌باشد. از ترکیب معادله‌های (۲.۱۲) و (۶.۱۲) می‌توان رابطه‌های زیر را نوشت:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (7.12)$$

که دوره و بسامد را دریک حرکت هماهنگ ساده برحسب جرم ذره و ثابت کشسانی نیروی وارد شده بیان می‌کنند. انرژی جنبشی ذره برابراست با

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha) \qquad (8.12)$$

یا چون $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ است، بـا استفاده از معادلهٔ (۱.۱۲) بـرای جابجایی، می‌توان انرژی جنبشی را به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2[1 - \sin^2(\omega t + \alpha)]$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2). \qquad (9.12)$$

توجـه کنید، کـه انـرژی جنبشی در مرکـز ($x = 0$) بیشینه و در دو انتهای مسیر نـوسان ($x = \pm A$) برابر صفر است.

برای به دست آوردن انرژی پتانسیل، به معادلهٔ (۲۴.۸) یعنی $F = -dE_p/dx$ باز می‌گردیم. با به‌کار بردن معادلهٔ (۵.۱۲) برای نیرو، می‌توان نوشت

$$dE_p/dx = kx$$

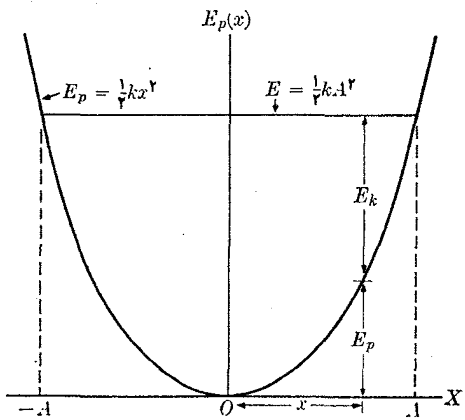
با انتگرال‌گیری (و انتخاب انرژی پتانسیل صفر برای مبدأ یا مکان ترازمندی)، به‌دست می‌آید

$$\int_0^{E_p} dE_p = \int_0^x kx\,dx \quad \text{یا} \quad E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2. \qquad (۱۰.۱۲)$$

بدین‌طریق انرژی پتانسیل درمبدأ ($x = 0$) کمینه (صفر) است وبا نزدیک شدن به دوانتهای مسیر ($x = \pm A$) افزایش می‌یابد. با جمع معادله‌های (۹.۱۲) و (۱۰.۱۲)، انرژی‌کل یک نوسانگر هماهنگ ساده به‌دست می‌آید:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2 \qquad (۱۱.۱۲)$$

که کمیت ثابتی است. این امر را باید از معادلهٔ (۲۹.۸) پیش‌بینی می‌کردیم، زیرا نیرو پایستار است. بنابراین می‌توانیم بگوییم که در طول یک نوسان، تبادل دائم انرژی جنبشی و پتانسیل وجود دارد. هنگامی که ذره ازمکان ترازمندی دور می‌شود انرژی پتانسیل باصرف انرژی جنبشی افزایش می‌یابد؛ زمانی‌که ذره به‌مکان ترازمندی نزدیک می‌شود حالت عکس پیش می‌آید.



شکل ۶.۱۲. رابطه‌های انرژی در حرکت هماهنگ ساده

شکل ۶.۱۲ نشان می‌دهد که نمودار انرژی پتانسیل $E_p = kx^2/2$ به‌صورت یک سهمی‌است. برای یک انرژی معلوم E، که با خط افقی نشان داده شده است، حدود نوسان، چنانکه در بخش ۱۱.۸ توضیح داده شد، از نقاط تلاقی این خط افقی با منحنی انرژی پتانسیل تعیین می‌شوند. چون سهمی E_p متقارن است، بنابراین انتهای نوسانها درفاصله‌های برابر $\pm A$ ازنقطهٔ O قرار گرفته‌اند. برای هرنقطهٔ x، انرژی جنبشی E_k از فاصلهٔ بین منحنی $E_p(x)$ و خط E به‌دست می‌آید.

۴.۱۲ دینامیک حرکت هماهنگ ساده

دربخش ۲.۱۲ با نوشتن‌معادلهٔ (۱.۱۲)، حرکت هماهنگ ساده را با ویژگیهای سینماتیکی آن تعریف کردیم. نوع نیرویی که لازم است تا چنین حرکتی را ایجاد کند در مرحلهٔ بعدی مورد بررسی قرار گرفت [که با معادلهٔ (۵.۱۲) داده شد]. با این حال، خیلی جالب است که مسئله را ازجهت عکس مطالعه کنیم: می‌خواهیم ثابت کنیم که از هرنیروی جاذبهٔ متناسب با جابجایی (یعنی $F = -kx$) حرکت هماهنگ ساده حاصل می‌شود.

یک روش آن است که از معادلهٔ حرکت $F = ma$ یا $F = -kx$ شروع کنیم و با توجه به‌اینکه دریک حرکت مستقیم‌الخط $a = d^2x/dt^2$ است، معادلهٔ زیر را بنویسیم:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{یا} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

با قراردادن $\omega^2 = k/m$، می‌توان نوشت

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (۱۲.۱۲)$$

این رابطه یک معادلهٔ دیفرانسیل است که پاسخهای‌آن تابعهایی سینوسی یا کسینوسی از ωt می‌باشند. با قراردادن $A\sin(\omega t + \alpha)$ به جای x، می‌توان مستقیماً بررسی کرد که این بیان برای x، که مربوط به یک حرکت هماهنگ ساده است، درمعادلهٔ (۱۲.۱۲) صدق می‌کند. همچنین می‌گوییم $x = A\sin(\omega t + \alpha)$ پاسخ عمومی معادلهٔ (۱۲.۱۲) است زیرا دارای دو ثابت اختیاری، دامنهٔ A و فاز اولیهٔ α می‌باشد*. در نتیجه، ثابت می‌شود که یک نیروی متناسب با جابجایی، یک حرکت هماهنگ ساده به وجود می‌آورد.

دراینجا خاطر نشان می‌سازیم کـه معادلهٔ دیفرانسیل (۱۲.۱۲)، در موارد گوناگون زیادی در فیزیک ظاهر می‌شود. هر موقع کـه باآن برخورد کنیم، حاکی از آن است کـه پدیدهٔ مربوطه نوسانی ومطابق با قانون $A\sin(\omega t + \alpha)$ می‌باشد، چه این معادله بیانگر جابجایی خطی یا زاویه‌ای یک ذره باشد، چه جریان دریک مدار الکتریکی، یا چگالش یونی در پلاسما، دمای یک جسم یا موارد متعدد دیگری در فیزیک.

مثال ۳.۱۱. پاسخ معادلهٔ (۱۲.۱۲) برای یک حرکت هماهنگ ساده را برحسب جابجایی اولیهٔ x_0 و سرعت اولیهٔ v_0 مورد مطالعه قرار دهید.

حل: گفتیم که پاسخ عمومی معادلهٔ (۱۲.۱۲) عبارت است از

$$x = A\sin(\omega t + \alpha).$$

---

* پاسخ عمومی معادلهٔ (۱۲.۱۲) را می‌توان به صورت $x = a\sin\omega t + b\cos\omega t$ نیز نوشت، که درآن a و b دو ثابت اختیاری هستند. اگر a را برابر $A\cos\alpha$ و b را برابـر $A\sin\alpha$ بگیریم، این پاسخ همارز پاسخ $x = A\sin(\omega t + \alpha)$ است.

بنابراین سرعت برابر می‌شود با

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \alpha).$$

در نتیجه با قراردادن $t = ۰$، داریم

$$x_۰ = A\sin\alpha, \quad v_۰ = \omega A\cos\alpha.$$

ازاین رابطه‌ها به دست می‌آید

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega x_۰}{v_۰} \quad \text{و} \quad A = \left(x_۰^۲ + \frac{v_۰^۲}{\omega^۲}\right)^{۱/۲}.$$

به‌عنوان مثال، اگر ذره‌ای در آغاز دروضع ترازمندی $x_۰ = ۰$ باشد و بر اثر یک نیروی رانشی سرعتی برابر $v_۰$ پیدا کند، داریم $\alpha = ۰$ و $A = v_۰/\omega$. در این صورت جابجایی با رابطهٔ $x = (v_۰/\omega)\sin\omega t$ داده می‌شود. بنا به معادلهٔ (۱۱۰۱۲) انرژی کل ذره برابر می‌شود با

$$E = \frac{۱}{۲}k\left(\frac{v_۰}{\omega}\right)^۲ = \frac{۱}{۲}mv_۰^۲$$

که برابر انرژی جنبشی اولیهٔ ذره است.

از طرف دیگر، اگر ذره درفاصلهٔ $x_۰$ از وضع ترازمندی قرار گیرد وسپس رها شود، $v_۰ = ۰$ خواهد بود. در این صورت، $\operatorname{tg}\alpha = \infty$ یا $\alpha = \pi/۲$ و $A = x_۰$ است. بنابراین جابجایی با رابطهٔ $x = x_۰\cos\omega t$ بیان می‌شود. با استفاده از معادلهٔ (۱۱۰۱۲)، انرژی کل ذره برابر می‌شود $E = kx_۰^۲/۲$ که مساوی انرژی پتانسیل اولیهٔ ذره می‌باشد.

مثال ۴۰۱۲. با استفاده از اصل بقای انرژی، یک رابطهٔ کلی برای دورهٔ حرکت نوسانی پیدا کنید.

حل: با برگشت به بحث بخش ۹۰۸ درمورد حرکت مستقیم الخط براثر نیروهای پایستار، پیداست که باید از معادلهٔ (۳۴۰۸)، یعنی

$$\int_{x_۰}^{x} \frac{dx}{[(۲/m)(E - E_p(x))]^{۱/۲}} = t$$

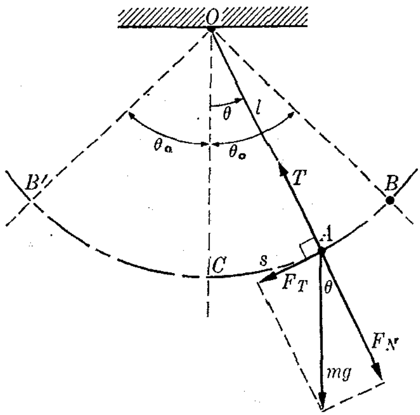
استفاده کنیم، که درآن $E_p(x)$ انرژی پتانسیل حرکت و E انرژی کل است. بنا به توضیحات بخش ۱۱۰۸، ذره بین مکانهای داده شده با مقادیر $x_۱$ و $x_۲$، که ازحل معادلهٔ $E = E_p(x)$ به دست می‌آیند (به شکل ۱۸۰۸ مراجعه کنید)، نوسان می‌کند. اگر در معادلهٔ فوق $x_۰$ را برابر $x_۱$ و x را برابر $x_۲$ قرار دهیم، زمان t مربوط به نصف نوسان و در نتیجه برابر نصف دوره می‌شود: $t = P/۲$. بنابراین معادلهٔ قبلی بـه معادلهٔ زیـر منجر می‌شود:

$$P = ۲\int_{x_۱}^{x_۲} \frac{dx}{\sqrt{(۲/m)(E - E_p)}}. \qquad (۱۳۰۱۲)$$

رابطهٔ (۱۳.۱۲) یک رابطهٔ کلی است که دورهٔ هر حرکت نوسانی را، چه هماهنگ ساده چه غیرآن، به دست می‌دهد. توجه کنید حتی اگر معادلهٔ حرکت حل نشده باشد تا x به صورت تابعی از t به دست آید، با دانستن انرژی پتانسیل $E(x)$ می‌توان دوره را حساب کرد. به دانشجو توصیه می‌کنیم با استفاده از $E_p(x) = kx^2/2$ (که مربوط به یک حرکت هماهنگ ساده است) ثابت کنند به ازای $x_1 = -A$ و $x_2 = +A$ داریم $P = \pi A\sqrt{2m/E}$، وبدین طریق معلوم می‌شودکه این نتیجه بامعادلهٔ (۱۱.۱۲) یکی است.

۵.۱۲ آونگ ساده

حرکت یک آونگ مثالی از حرکت هماهنگ ساده است. بنا به تعریف، یک آونگ ساده ذره‌ای است به جرم m که توسط نخی به‌جرم ناچیز وطول l از نقطهٔ O آویزان است (شکل ۷.۱۲). اگرذره راتا نقطهٔ B ببرند، به‌گونه‌ای‌که نخ با راستای قایم OC زاویهٔ θ_0 بسازد، و سپس آن را رها کنند، آونگ بین دو نقطهٔ متقارن B و B' نوسان می‌کند.



شکل ۷.۱۲. حرکت نوسانی یک آونگ

برای تعیین ماهیت نوسانها، باید معادلهٔ حرکت ذره را نوشت. ذره روی کمانی از دایره به‌شعاع $l = OA$ حرکت می‌کند. نیروهای وارد بر ذره عبارتند از وزن آن، $m\mathbf{g}$، و کشش نخ، $\mathbf{T}$. بنا به شکل، مؤلفهٔ مماسی نیروی برآیند برابر است با

$$F_T = -mg\sin\theta$$

که در آن علامت منفی نشان می‌دهد که سوی نیرو در سوی مخالف جابجایی $s = CA$ است. معادلهٔ حرکت مماسی ذره عبارت است از $F_T = ma_T$، و چون ذره روی دایره‌ای به شعاع l حرکت می‌کند، برای نمایش شتاب مماسی می‌توان معادلهٔ (۵۶.۵) را به کاربرد (که درآن به‌جای شعاع R باید l را قرارداد)، یعنی $a_T = l\,d^2\theta/dt^2$، به این ترتیب معادلهٔ

حرکت در راستای مماس بر دایره چنین می‌شود:

$$ml\frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}} = -mg\sin\theta \quad \text{یا} \quad \frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}} + \frac{g}{l}\sin\theta = ۰ \qquad (۱۴.۱۲)$$

این معادله از نوع معادلهٔ (۱۲.۱۲) نیست، زیرا جملهٔ $\sin\theta$ در آن وجود دارد. با این همه اگر زاویهٔ θ کوچک باشد، چیزی که برای دامنه‌های کوچک نوسان درست است، می‌توان با استفاده از معادلهٔ (پ.۳۰)، نوشت $\sin\theta \approx \theta$، و آن را در معادلهٔ (۱۴.۱۲) قرار داد و معادلهٔ حرکت آونگ را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}} + \frac{g}{l}\theta = ۰$$

این رابطه یک معادلهٔ دیفرانسیل مشابه با معادلهٔ (۱۲.۱۲) است که در آن θ به جای x قرار گرفته و این بار حرکت زاویه‌ای است نه خطی. بدین طریق، می‌توان نتیجه گرفت که با تقریب به‌کار رفته، حرکت آونگ، هماهنگ ساده است ودر آن $\omega^{۲} = g/l$ می‌باشد. زاویهٔ θ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\theta = \theta_{۰}\sin(\omega t + \alpha).$$

دراین صورت، با استفاده از معادلهٔ (۲.۱۲) یا $P = ۲\pi/\omega$، رابطهٔ دورهٔ نوسان چنین نوشته می‌شود:

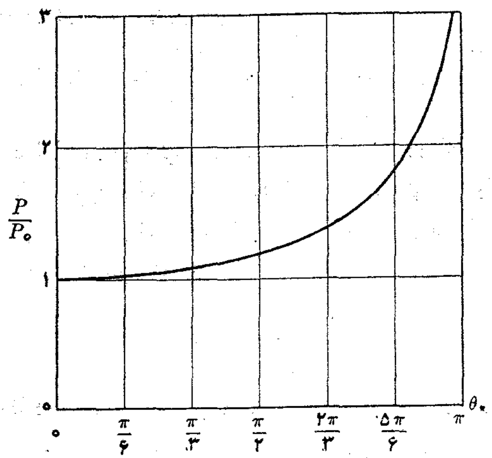
$$P = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (۱۵.۱۲)$$

توجه داشته باشید که دورهٔ آونگ مستقل از جرم آن است. برای دامنه‌های بزرگتر تقریب $\sin\theta \approx \theta$ معتبر نیست. درآن صورت دوره به دامنهٔ $\theta_{۰}$ بستگی دارد. اگر بخواهیم فرمول کلی دوره را به دست آوریم، ابتدا انرژی پتانسیل را بر حسب زاویه می‌نویسیم (مثال ۷.۸)، و آن را در رابطهٔ P که با معادلهٔ (۱۳.۱۲) داده شد قرار می‌دهیم. دراینجا از جزئیات‌محاسبه صرف نظر می‌کنیم ولی خاطر نشان می‌کنیم که نتیجه را می‌توان به صورت رشتهٔ زیر نوشت:

$$P = ۲\pi\sqrt{l/g}\left(۱ + \frac{۱}{۴}\sin^{۲}\frac{۱}{۲}\theta_{۰} + \frac{۹}{۶۴}\sin^{۴}\frac{۱}{۲}\theta_{۰} + \cdots\right).$$

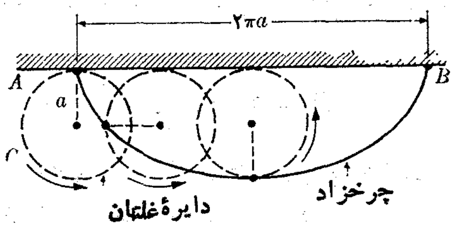
تغییرات P با دامنهٔ $\theta_{۰}$، که برحسب $P_{۰} = ۲\pi\sqrt{l/g}$ (مربوط به‌دامنه‌های خیلی‌کوچک) بیان می‌شود، در شکل ۸.۱۲ نشان داده شده است. توجه کنید که دوره اختلاف قابل ملاحظه‌ای با $P_{۰}$ ندارد مگر برای دامنه‌های خیلی بزرگ. برای دامنه‌های‌کوچک، کافی است اولین جملهٔ تصحیحی اختیار شود و سپس حتی می‌توان به‌جای $\sin(\theta_{۰}/۲)$ مقدار $\theta_{۰}/۲$ را قرار داد، که به رابطهٔ زیر منتهی می‌شود:

$$P = P_{۰}\left(۱ + \frac{۱}{۱۶}\theta_{۰}^{۲}\right) = ۲\pi\sqrt{l/g}\left(۱ + \frac{۱}{۱۶}\theta_{۰}^{۲}\right) \qquad (۱۶.۱۲)$$



شکل ۸.۱۲. تغییرات دورهٔ یک آونگ با دامنه

که درآن θ_0 باید برحسب رادیان باشد. این تقریب برای اغلب کاربردهای عملی‌کافی است. در واقع، جملهٔ تصحیحی $\theta_0^2/16$ برای دامنه‌های کمتر از $23°$ حتی به ۱٪ نیز نمی‌رسد.



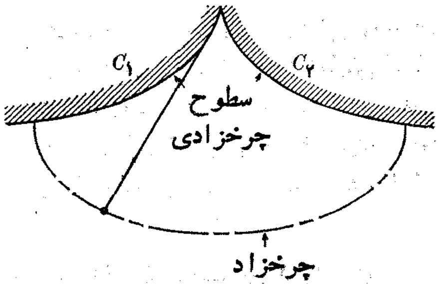
شکل ۹.۱۲. تعریف یک چرخزاد

با وجود این یک حالت خاص وجود دارد که در آن دورهٔ آونگ مستقل از دامنه می‌باشد، و آن آونگ چرخزادی[1] است. چنانکه شکل ۹.۱۲ نشان می‌دهد چرخزاد منحنیی است که یک نقطه از کنار دیسکی که روی یک صفحه می‌غلتد رسم می‌کند. اگر در یک صفحهٔ قایم مسیری به شکل چرخزاد بسازیم و بگذاریم جرم m در طول آن بر اثر نیروی گرانی نوسان کند، دامنهٔ حرکت به نقطه‌ای که ذره رها می‌شود بستگی دارد، ولی دورهٔ آن همیشه برابر است با $P = 4\pi\sqrt{a/g}$ که در آن a شعاع دایره‌ای است که چرخزاد را ایجاد کرده است.

شکل ۱۰.۱۲ یک‌راه عملی برای ساختن‌آونگ چرخزادی‌را نشان می‌دهد. C_1 و C_2 دو صفحهٔ چرخزادی می‌باشند. در این صورت با یک استدلال هندسی می‌توان ثابت کرد هنگامی که آونگ بین دواین صفحه آویزان شود انتهای‌آن نیز یک چرخزاد رسم می‌کند،

1. cycloidal pendulum

درنتیجه دورهٔ نوسان مستقل از دامنه است.*



شکل ۱۰.۱۲. آونگ چرخزادی

مثال ۵.۱۲. کشش نخ یک آونگ را برحسب زاویه‌ای که این نخ با راستای قایم می‌سازد حساب کنید.

حل: برای محاسبهٔ کشش T، ابتدا نیروی مرکزگرای وارد بر ذره را پیدا می‌کنیم:

$$F_C = T - F_N = T - mg\cos\theta$$

زیرا بنا به شکل ۷.۱۲، F_N برابر است با $mg\cos\theta$. سپس مطابق رابطهٔ (۲۸.۷) آن‌را با mv^2/l، حاصل‌ضرب‌جرم درشتاب مرکزگرا (l شعاع است) برابر قرار می‌دهیم. درنتیجه به دست می‌آید

$$T - mg\cos\theta = mv^2/l.$$

سرعت، با استفاده ازنتیجهٔ مثال ۷.۸، برابر است با

$$v^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

بنابراین

$$T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0).$$

این رابطه برای تمام دامنه‌ها صادق است، زیرا هیچگونه تقریبی روی زاویهٔ θ انجام نگرفته است.

۶.۱۲ آونگ مرکب

آونگ مرکب (یا فیزیکی) جسم صلبی است که می‌تواند براثر نیروی گرانی آزادانه دور

---

* برای تفصیل بیشتر دربارهٔ چرخزاد، رجوع کنید به: توماس، جرج، ب. حساب دیفرانسیل وانتگرال وهندسهٔ تحلیلی، ترجمهٔ علی‌اکبر جعفریان و ابوالقاسم میامئی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۹، بخش ۲.۱۲.

یک محور افقی نوسان کند. فرض کنیم ZZ' محور افقی و C مرکز جرم جسم باشد (شکل ۱۱.۱۲). وقتی که خط OC با راستای قایم زاویهٔ θ بسازد، مؤلفهٔ گشتاور نیروی وارد بر روی جسم در راستای Z برابر است با $\tau_z = -mgb\sin\theta$ که درآن $OC = b$ فاصلهٔ بین محور Zها ومرکز جرم می‌باشد. اگر I نمایش گشتاور لختی جسم دور محور Zها و $\alpha = d^2\theta/dt^2$ شتاب زاویه‌ای باشد، ازمعادلهٔ (۱۴.۱۰) یا $I\alpha = \tau_z$ به دست می‌آید $I(d^2\theta/dt^2) = -mgb\sin\theta$. به فرض اینکه دامنه کوچک باشد، بازهم می‌توان تقریب $\sin\theta \approx \theta$ را به کار برد، به گونه‌ای که معادلهٔ حرکت به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$d^2\theta/dt^2 = -mgb\,\theta/I$$

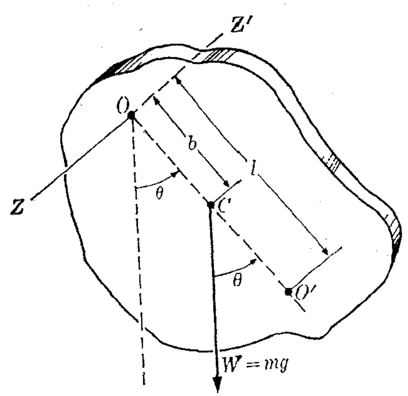
یا

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{gb}{K^2}\theta = 0$$

دراینجا $I = mK^2$ را به کار برده‌ایم که درآن K شعاع ژیراسیون است که با رابطهٔ (۱۰.۱۰) تعریف شد. مقایسهٔ این رابطه با معادلهٔ (۱۲.۱۲) نشان می‌دهد که حرکت نوسانی زاویه‌ای یک حرکت هماهنگ ساده، با $\omega^2 = gb/K^2$، است. دورهٔ نوسان برابر است با

$$P = 2\pi\sqrt{K^2/gb}. \qquad (۱۷.۱۲)$$

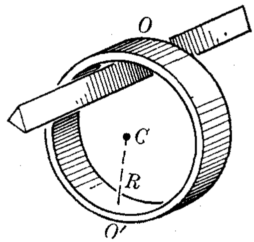
کمیت $l = K^2/b$ طول آونگ سادهٔ هم‌ارز (همزمان) نامیده می‌شود، زیرا دورهٔ



شکل ۱۱.۱۲. آونگ مرکب

یک آونگ ساده به طول K^2/b با دورهٔ این آونگ مرکب برابر خواهد بود. دقت کنید تا وقتی شعاع ژیراسیون K وجای مرکز جرم آونگ که با b مشخص می‌شود ثابت باقی بماند، دورهٔ آونگ مستقل ازجرم وشکل هندسی آن می‌باشد.

مثال ۶.۱۲. حلقه‌ای به شعاع $0.10\,\mathrm{m}$، مطابق شکل ۱۲.۱۲ از تیغه‌ای آویـزان است. دورهٔ نوسان آن را حساب کنید.



شکل ۱۲.۱۲

حل: فرض‌کنیم R شعاع حلقه باشد. گشتاور لختی آن نسبت به‌محوری‌که‌ازمرکزحلقه‌می‌گذرد برابراست با $I_C = mR^2$ (به‌جدول ۱.۱۰ مراجعه کنید). دراین صورت اگرقضیهٔ اشتاینر، یعنی معادلهٔ (۸.۱۰) را با $a = R$ به کار ببریم، گشتاور لختی نسبت به محوری که از نقطهٔ آویز O می‌گذرد برابر می‌شود با

$$I = I_C + mR^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2.$$

از اینجا شعاع ژیراسیون برابر $K^2 = 2R^2$ به دست می‌آید. دراین مورد $b = R$ است. درنتیجه با استفاده ازمعادلهٔ (۱۷.۱۲) به دست می‌آید

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{2R^2}{gR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

این رابطه نشان می‌دهد که طول آونگ سادهٔ هم‌ارز برابر است با $2R = OO'$، که مساوی قطر حلقه است. با وارد کردن مقادیر عددی $R = 0.10\,\mathrm{m}$ و $g = 9.8\,\mathrm{ms^{-2}}$، به دست می‌آید $P = 0.88\,\mathrm{s}$.

مثال ۷.۱۲. کره‌ای به شعاع R به وسیلهٔ نخی ازنقطهٔ ثابتی آویزان است، به طوری کـه فاصلهٔ نقطهٔ آویز تا مرکز کره برابر l می‌باشد. دورهٔ آونگ را به دست آورید.

حل: اگر شعاع R درمقـابل l کوچک نباشد، نمی‌توان آونگ را ساده درنظر گرفت، و باید رابطه‌هایی را که دراین بخش مطالعه شدند به کار ببریم. ازجدول ۱.۱۰ پیداست که گشتاور لختی یک کره نسبت به محوری که ازمرکز آن می‌گذرد برابر است با $2mR^2/5$. بدین طریق، هنگامی کـه قضیهٔ اشتاینر را با $a = l$، به کار ببریم گشتاور لختی نسبت به‌ـ نقطهٔ آویز برابر می‌شود با

$$I = \frac{2}{5}mR^2 + ml^2 = m\left(l^2 + \frac{2}{5}R^2\right).$$

از اینجا شعاع ژیراسیون برابر $K^2 = l^2 + 2R^2/5 = l^2(1 + 2R^2/5l^2)$ به دست می‌آید. بدین طریق، با به کاربردن معادلهٔ (۱۷.۱۲) وبا توجه به اینکه دراین مورد $b = l$

است، داریم

$$P = ۲\pi\sqrt{\frac{l(۱ + ۰٫۴R^۲/l^۲)}{g}} = ۲\pi\sqrt{l/g}\left(۱ + ۰٫۴\frac{R^۲}{l^۲}\right)^{۱/۲}.$$

چون معمولاً R درمقابل l کوچک است، می‌توان به‌جای $(۱ + ۰٫۴R^۲/l^۲)^{۱/۲}$، با استفاده از تقریب دوجمله‌ای (پ.۲۸)، $۱ + ۰٫۲R^۲/l^۲$ را قرار داد. بنابراین داریم

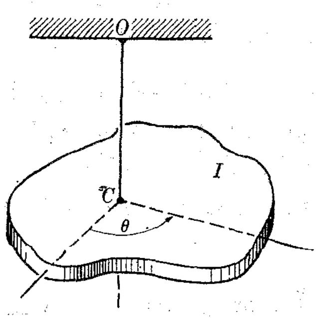
$$P = ۲\pi\sqrt{l/g}\left(۱ + ۰٫۲\frac{R^۲}{l^۲}\right).$$

جملهٔ اول، دوره را درصورتی که از ابعاد کره صرف‌نظر کنیم به دست می‌دهد. به عنوان مثال، اگر $l = ۱\,\mathrm{m}$ و $R = ۰٫۰۱\,\mathrm{m}$ باشد، داریم $R^۲/l^۲ = ۱۰^{-۴}$ و جملهٔ تصحیحی برابر می‌شود با ۱٫۰۰۰۰۲. بدین طریق ابعاد معین آونگ، دورهٔ آونگ را ۰٫۰۰۲٪ افزایش می‌دهد که در بیشتر موارد قابل اغماض است.

مثال ۸.۱۲. آونگ پیچشی[1] را مطالعه کنید.

حل: آونگ پیچشی مثال دیگری از حرکت هماهنگ ساده است. این آونگ از جسمی تشکیل شده که از یک سیم یا رشته آویزان است (شکل ۱۳.۱۲)، به‌گونه‌ای‌که خط OC از مرکز جرم جسم می‌گذرد. اگر جسم به اندازهٔ زاویهٔ θ از وضع ترازمندی خود بچرخد، سیم می‌پیچد و یک گشتاور نیروی τ دور OC برجسم اثر می‌دهد. این گشتاور با چرخش جسم مخالفت می‌کند و بزرگی آن با θ متناسب است، $\tau = -\kappa\theta$، که‌درآن κ ضریب پیچشی سیم است. اگر گشتاور لختی جسم دورمحور OC را I بنامیم، با به‌کاربردن معادلهٔ (۱۴.۱۰) به ازای $\alpha = d^۲\theta/dt^۲$، معادلهٔ حرکت عبارت می‌شود از

$$I\frac{d^۲\theta}{dt^۲} = -\kappa\theta \quad \text{یا} \quad \frac{d^۲\theta}{dt^۲} + \frac{\kappa}{I}\theta = ۰$$



شکل ۱۳.۱۲. آونگ پیچشی. مرکز جرم درنقطهٔ C است.

1. torsion pendulum

معادلهٔ دیفرانسیل (۱۲.۱۲) یک‌بار دیگر به‌دست می‌آید. بنابراین حرکت جسم، هماهنگ ساده است با $\kappa/I = \omega^{۲}$؛ و دورهٔ نوسان برابر است با

$$P = ۲\pi\sqrt{I/\kappa} \qquad (۱۸.۱۲)$$

این نتیجه بسیار مهم‌است، زیرا با آویزان کردن هرجسمی به‌یک سیم با ضریب پیچشی معلوم و اندازه‌گیری P، دورهٔ نوسان، می‌توان گشتاور لختی جسم را به‌طور تجربی به دست آورد.

۷.۱۲ برهم‌نهش دوحرکت هماهنگ ساده: همراستا وهم بسامد

اکنون برهم‌نهش[1] یا تداخل[2] دو حرکت هماهنگ ساده را که موجب جابجایی ذره در طول یک خط مشترک می‌شوند در نظر می‌گیریم. ابتدا حالتی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در آن دوحرکت هم‌بسامد هستند (شکل ۱۴.۱۲). جابجایی ذره به وسیلهٔ هریک ازحرکتهای هماهنگ ساده با روابط زیر بیان می‌شود:

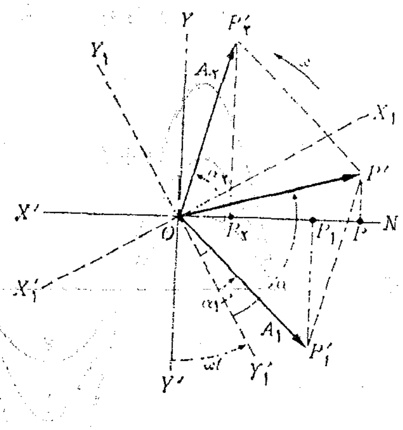
$$x_۱ = OP_۱ + A_۱ \sin(\omega t + \alpha_۱)$$

و

$$x_۲ = OP_۲ = A_۲ \sin(\omega t + \alpha_۲).$$

جابجایی برآیند ذره با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$x = OP = x_۱ + x_۲ = A_۱ \sin(\omega t + \alpha_۱) + A_۲ \sin(\omega t + \alpha_۲).$$



شکل ۱۴.۱۲. ترکیب دوحرکت هماهنگ‌ساده با بسامدهای یکسان

1. superposition 2. interference

اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم که x نیز مربوط به یک حرکت هماهنگ ساده با همان بسامد است. با پیدا کردن $\overrightarrow{OP'}$ جمع برداری دوبردار چرخان $\overrightarrow{OP_1'}$ و $\overrightarrow{OP_2'}$، ملاحظه می‌شود که تصویر $\overrightarrow{OP'}$ روی محور Xها درست برابر مجموع تصویرهای $\overrightarrow{OP_1'}$ و $\overrightarrow{OP_2'}$ روی این محور (یعنی $x_1 + x_2$)، بنابراین برابر x است. همچنین چون زاویهٔ بین $\overrightarrow{OP_1'}$ و $\overrightarrow{OP_2'}$ دارای مقدار ثابت $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ است، بردار $\overrightarrow{OP'}$ دارای بزرگی ثابت A است و دور نقطهٔ O با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. بنابراین بردار چرخان $\overrightarrow{OP'}$ یک حرکت هماهنگ ساده با بسامد زاویه‌ای ω را ایجاد می‌کند، و برای $x = OP$ می‌توان نوشت

$$x = A\sin(\omega t + \alpha). \qquad (۱۹.۱۲)$$

دامنهٔ A را با به‌کاربردن معادلهٔ (۳.۳) که برآیند دوبردار را به‌دست می‌دهد، حساب می‌کنیم:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}. \qquad (۲۰.۱۲)$$

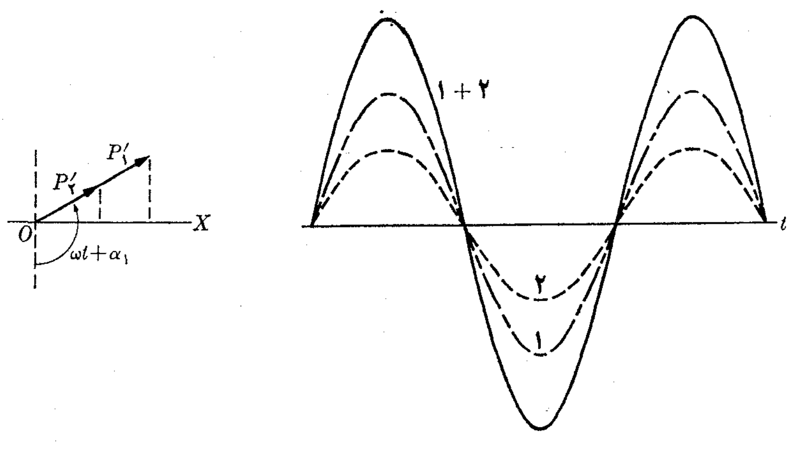
فاز اولیهٔ α را می‌توان با تصویر سه بردار روی محورهای OX_1 و OY_1 که با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخند وچارچوب مرجعی را تشکیل می‌دهند که $\overrightarrow{OP_1'}$، $\overrightarrow{OP_2'}$ و $\overrightarrow{OP'}$ نسبت به آن ساکن‌اند به دست آورد. دراین صورت بنا به قانون جمع بردارها داریم

$$A\cos\alpha = A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2$$

و

$$A\sin\alpha = A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2$$

از تقسیم این دو رابطه بریکدیگر به دست می‌آید



شکل ۱۵.۱۲. ترکیب دوحرکت هماهنگ سادهٔ همفاز

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}. \qquad (۲۱.۱۲)$$

اکنون چند مورد ویژه ومهم را درنظر می‌گیریم. اگر $\alpha_1 = \alpha_2$ باشد، داریم $\delta = 0$ و می‌گوییم دوحرکت همفاز[1] هستند. بردارهای چرخان آنها موازی اند، و از معادله‌های (۲۰.۱۲) و (۲۱.۱۲) به دست می‌آید

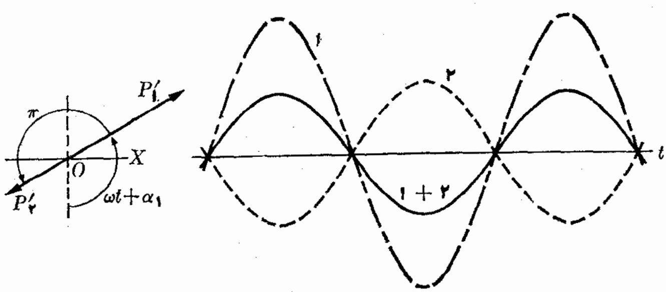
$$A = A_1 + A_2 \quad \text{و} \quad \alpha = \alpha_1 \qquad (۲۲.۱۲)$$

درنتیجه، دوحرکت هماهنگ ساده تداخل واثر هم را تقویت می‌کنند، زیرا دامنه‌ها با هم جمع می‌شوند (شکل ۱۵.۱۲).

اگر $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$ باشد، دراین صورت $\delta = \pi$ است ومی‌گوییم دو حرکت هماهنگ ساده در تقابل[2] هستند. بردارهای چرخان در دوسوی مخالف هم قرار دارند و اگر $A_1 > A_2$ باشد، ازمعادله‌های (۲۰.۱۲) و (۲۱.۱۲) به دست می‌آید

$$A = A_1 - A_2 \quad \text{و} \quad \alpha = \alpha_1 \qquad (۲۳.۱۲)$$

دوحرکت تداخل واثر یکدیگر را تضعیف می‌کنند، زیرا دامنه‌ها ازهم کم می‌شوند (شکل ۱۶.۱۲). بویژه اگر $A_1 = A_2$ باشد، دوحرکت هماهنگ ساده اثر یکدیگر را کاملا خنثی



شکل ۱۶.۱۲. ترکیب دوحرکت هماهنگ سادهٔ متقابل

می‌کنند. (اگر $A_1 < A_2$ باشد چه اتفاق می‌افتد؟) اگر $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$ باشد، داریم $\delta = \pi/2$، وگفته می‌شود دوحرکت هماهنگ ساده درتربیع[3] هستند. دراین صورت بااستفاده از معادلهٔ (۲۰.۱۲) به دست می‌آوریم

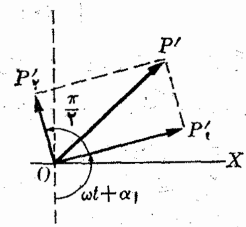
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \qquad (۲۴.۱۲)$$

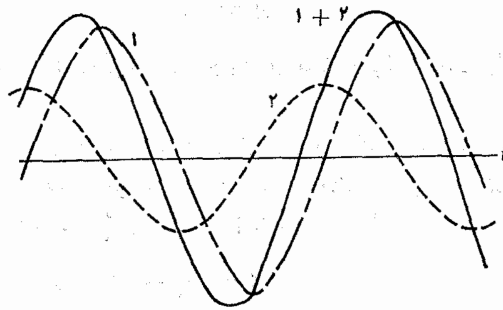
با استفاده از معادلهٔ (۲۱.۱۲) دانشجو می‌تواند تحقیق کند که α از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

1. in phase 2. in opposition 3. in quadrature

$$\alpha = \alpha_1 + \mathrm{Arctg}\frac{A_2}{A_1}. \qquad (۲۵.۱۲)$$

دراین حالت، دو بردار چرخان بریکدیگر عمودند. شکل ۱۷.۱۲ حالتی را نشان می‌دهد که درآن $A_1 = \sqrt{3}A_2$ است به گونه‌ای که $\alpha = \alpha_1 + \pi/6$ و $A = 2A_2$ می‌شود. به دانشجو توصیه می‌کنیم حالتی را که در آن $\alpha_2 = \alpha_1 + 3\pi/2$ است بررسی کند.





شکل ۱۷.۱۲. ترکیب دوحرکت هماهنگ ساده درتربیع

مثال ۹.۱۲. به ذره‌ای همزمان دوحرکت هماهنگ سادهٔ هم بسامد وهمراستا به معادله‌های $x_1 = 10\sin(2t + \pi/4)$ و $x_2 = 6\sin(2t + 2\pi/3)$ اثر می‌کند. حرکت برآیند را پیدا کنید.

حل: اختلاف فاز برابر است با $\delta = \alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi/3 - \pi/4 = 5\pi/12$. در نتیجه، چون دامنه‌ها عبارتند از $A_1 = 10$ و $A_2 = 6$، دامنهٔ برآیند برابر می‌شود با

$$A = \sqrt{10^2 + 6^2 + 2 \times 10 \times 6 \times \cos(5\pi/12)} = 12{,}92$$

فاز اولیه با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{10\sin(\pi/4) + 6\sin(2\pi/3)}{10\cos(\pi/4) + 6\cos(2\pi/3)} = 6{,}527$$

در نتیجه، $\alpha = 81{,}3^\circ = 1{,}42\ \mathrm{rad}$. بنابراین حرکت برآیند با معادلهٔ زیر بیان می‌شود:

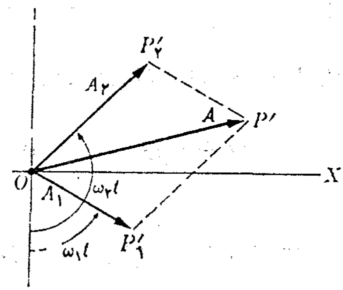
$$x = 12{,}92\sin(2t + 1{,}42).$$

۸.۱۲ برهم‌نهش دوحرکت‌هماهنگ‌ساده: همراستاو با بسامدهای مختلف

حالتی که درآن دوحرکت هماهنگ ساده تداخل‌کننده دارای راستای یکسان ولی بسامدهای مختلف باشند نیز مهم است. برای سهولت، حالتی را درنظر می‌گیریم که درآن $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ باشد. دراین صورت معادله‌های حرکت چنین نوشته می‌شوند: $x_1 = A_1 \sin\omega_1 t$ و

$x_2 = A_2 \sin \omega_2 t$. دراینجا زاویهٔ بین دوبردار چرخان $\overrightarrow{OP_1}'$ و $\overrightarrow{OP_2}'$ (شکل ۱۸.۱۲) برابر است با $\omega_1 t - \omega_2 t = (\omega_1 - \omega_2)t$ که مقدار آن ثابت نیست. بنابراین طول بردار برآیند $\overrightarrow{OP'}$ ثابت نیست و با سرعت زاویه‌ای ثابتی نمی‌چرخد. درنتیجه، حرکت برآیند $x = x_1 + x_2$، هماهنگ ساده نیست. با وجود این، چنانکه از شکل ۱۸.۱۲ پیداست، «دامنهٔ» حرکت برابر است با

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t} \qquad (۲۶.۱۲)$$



شکل ۱۸.۱۲ . برهم‌نهش دو حرکت هماهنگ ساده با بسامد مختلف

و این دامنه بین دو مقدار $A = A_1 + A_2$ [هنگامی که $(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi$ است] و $A = |A_1 - A_2|$ [هنگامی‌که $(\omega_1 - \omega_2)t = (2n + 1)\pi$ است]، «نوسان»می‌کند. در این صورت می‌گوییم دامنه مدوله شده[1] است. بسامد نوسانهای دامنه با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$\nu = (\omega_1 - \omega_2)/2\pi = \nu_1 - \nu_2 \qquad (۲۷.۱۲)$$

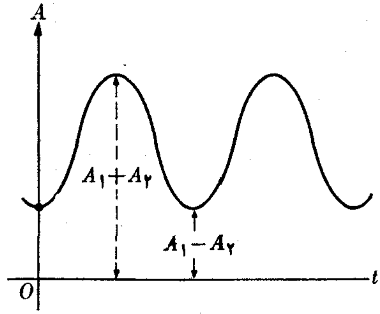
یعنی این بسامد برابر است با اختلاف بسامدهای دوحرکت تداخل کننده.

شکل ۱۹.۱۲ تغییرات A را با t نشان می‌دهد. به عنوان مثال، حالت شرح داده شده هنگامی به وجود می‌آید که دو دیاپازون با بسامدهای مختلف ولی نزدیک به هم، دریک زمان ودر نزدیکی یکدیگر به ارتعاش درآیند. همچنانکه شکل ۱۹.۱۲ نشان می‌دهد، در شدت صوت افت وخیزهایی مشاهده می‌شود که ناشی از تغییرات دامنه است و زنش[2] نامیده می‌شوند.

یک وضع بسیارجالب هنگامی است که $A_1 = A_2$ باشد، یعنی دو دامنه برابر باشند. دراین صورت با استفاده ازمعادلهٔ (پ.۷) به دست می‌آید

$$x = x_1 + x_2 = A_1(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t)$$
$$= 2A_1 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t. \qquad (۲۸.۱۲)$$

---
1. modulated 2. beat

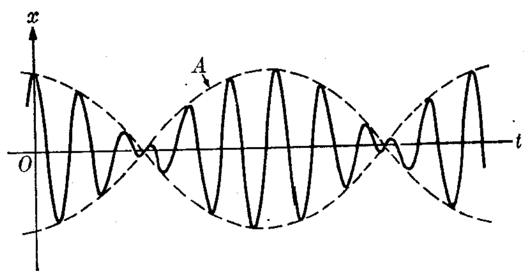


شکل ۱۹.۱۲. افت‌وخیز دامنه یا زنش

این رابطه نشان می‌دهد کـه حرکت نوسانی است وبسامد زاویـه‌ای آن $(\omega_1 + \omega_2)/2$ می‌باشد و دامنهٔ حرکت برابر است با

$$A = 2A_1 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t. \qquad (۲۹.۱۲)$$

این نتیجه را می‌توان مستقیماً بـا قرار دادن $A_1 = A_2$، ازمعادلهٔ (۲۶.۱۲) به‌دست آورد. منحنی x برحسب t درشکل ۲۰.۱۲ رسم شده‌است. دراین‌شکل، منحنی خط‌چین، مدولاسیون دامنه را نشان می‌دهد.



شکل ۲۰.۱۲. زنش هنگامی که دو دامنه یکسانند

۹.۱۲ برهم‌نهش دوحرکت هماهنگ ساده: در راستاهای عمود برهم

اکنون حالتی را درنظر می‌گیریم که درآن ذره‌ای دریک صفحه به گونـه‌ای حرکت می‌کند کـه مختصات x و y آن بـه صورت هماهنگ ساده نوسان می‌کنند. ابتدا حـالتی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که بسامد دوحرکت برابر است. اگر مبدأ زمان را به گونه‌ای انتخاب کنیم که فاز اولیهٔ حرکت در راستای محور Xها برابر صفر باشد، برای x داریم

$$x = A \sin \omega t. \qquad (۳۰.۱۲)$$

حرکت در راستای محور Yها با معادلهٔ زیر بیان می‌شود:

$$y = B\sin(\omega t + \delta). \qquad (۳۱.۱۲)$$

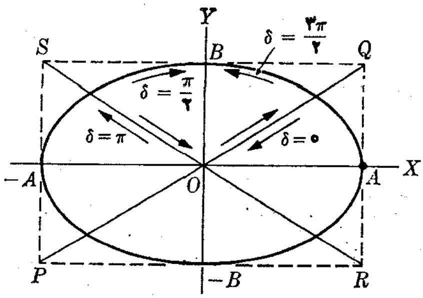
دراینجا δ اختلاف فاز بین نوسانهای xها و yها است. دامنه‌های A و B نیز مختلف فرض شده‌اند. روشن است که مسیر ذره با خطهای $x = \pm A$ و $y = \pm B$ محدود می‌شود.

اکنون چند حالت ویژه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اگر دوحرکت همفاز باشند $\delta = 0$ و $y = B\sin\omega t$ است. دراین صورت ازترکیب این رابطه با معادلهٔ (۳۰.۱۲) به دست می‌آید

$$y = \left(\frac{B}{A}\right)x.$$

این رابطه معادلـهٔ خط راست PQ در شکل ۲۱.۱۲ می‌باشد و حرکت حـاصل هماهنگ ساده و دامنهٔ آن $\sqrt{A^2 + B^2}$ است، زیرا جابجایی درطول PQ برابر است با

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A^2 + B^2}\sin\omega t. \qquad (۳۲.۱۲)$$



شکل ۲۱.۱۲. ترکیب دوحرکت هماهنگ ساده با بسامدهای برابر ولی در راستاهای عمودبرهم. مسیربه‌اختلاف فاز بستگی دارد.

اگر دو حرکت درتقابل باشند، $\delta = \pi$ و $y = -B\sin\omega t$ خواهد بود. دراین‌صورت با ترکیب آن با معادلهٔ (۳۰.۱۲) به‌دست می‌آید

$$y = -(B/A)x.$$

این‌رابطه معادلهٔ خط راست RS است. حرکت بازهم هماهنگ‌ساده، با دامنهٔ $\sqrt{A^2 + B^2}$ است. درنتیجه، هنگامی‌که δ برابرصفریا π است، می‌گوییم تداخل دوحرکت هماهنگ سادهٔ هم‌بسامد عمود برهم، موجب قطبش خطی[1] می‌شود.

هنگامی کـه $\delta = \pi/2$ باشد، گفته می‌شود حرکت در طـول محورهای X و Y در تربیع است، و داریم

$$y = B\sin(\omega t + \pi/2) = B\cos\omega t.$$

1. rectilinear polarization

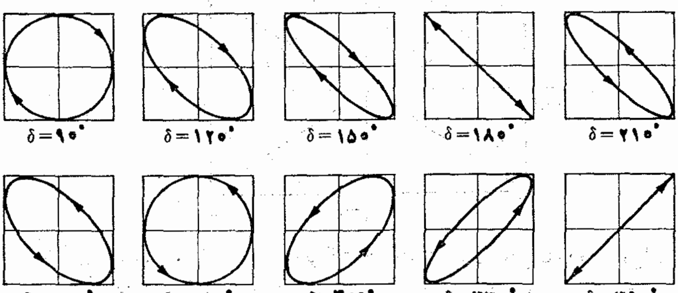
از ترکیب این رابطه با معادلهٔ (۳۰.۱۲) به‌دست می‌آید

$$\frac{x^۲}{A^۲} + \frac{y^۲}{B^۲} = ۱$$

این رابطه معادلهٔ یک بیضی است که درشکل ۲۱.۱۲ نشان داده شده است. بیضی درسوی ساعتگرد پیموده می‌شود. این امر را می‌توان با پیدا کردن سرعت در نقطهٔ $A+$ = x، جایی که سرعت موازی محور Y هاست تحقیق کرد. در این نقطه، بنا به معادلهٔ (۳۰.۱۲)، باید داشته باشیم ۱ = $\sin \omega t$. مؤلفهٔ سرعت روی محور Yها برابر است با

$$v_y = dy/dt = -\omega B \sin \omega t = -\omega B.$$

چون این سرعت منفی است ذره از نقطهٔ A به سمت پایین می‌گذرد، که با سوی ساعتگرد تطبیق می‌کند. اگر δ برابر $۳\pi/۲$ یا $-\pi/۲$ باشد، بازهم همین بیضی به دست می‌آید، ولی دراین‌صورت حرکت درسوی پاد ساعتگرد می‌باشد (آیا دانشجو قادراست این‌موضوع را تحقیق کند؟). بدین‌طریق می‌توان گفت هنگامی‌که اختلاف فاز δ برابر $\pm \pi/۲$ است، تداخل دو حرکت هماهنگ سادهٔ هم بسامد موجب قطبش بیضوی[1] می‌شود و محورهای بیضی با راستای حرکتها موازیند.



شکل ۲۲.۱۲. مسیرهای مربوط به‌چند اختلاف فازخاص

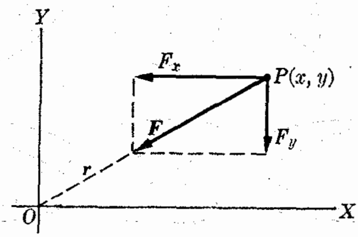
هنگامی که $A = B$ باشد، بیضی به دایره تبدیل می‌شود و یک قطبش دایره‌ای به‌دست می‌آید. به ازای یک مقدار اختیاری دیگر برای اختلاف فاز δ، مسیر باز هم بیضی است، ولی محورهای این بیضی نسبت به محورهای مختصات مقداری چرخیده‌اند. شکل ۲۲.۱۲ مسیرهای مربوط به‌چند اختلاف فاز خاص را نشان می‌دهد.

بنا به‌بخش ۳.۱۲، حرکتهایی که با معادله‌های (۳۰.۱۲) و (۳۱.۱۲) بیان شده‌اند، در راستای محورهای X و Y به‌نیروهایی برابر با $F_x = -kx$ و $F_y = -ky$ نیاز دارند. بنابراین نیروی برآیند وارد برذره عبارت است از

$$\mathbf{F} = \mathbf{u}_x F_x + \mathbf{u}_y F_y = -k(\mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y) = -k\mathbf{r} \qquad (۳۳.۱۲)$$

1. elliptical polarization

که درآن $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$ (شکل ۲۳.۱۲) بردارمکان ذره است. در نتیجه، حرکتی که از نقطه‌نظر سینماتیک دراین‌فصل توصیف‌کردیم به‌وسیلهٔ یک‌نیروی مرکزی جاذبه ومتناسب با جابجایی ایجاد می‌شود.

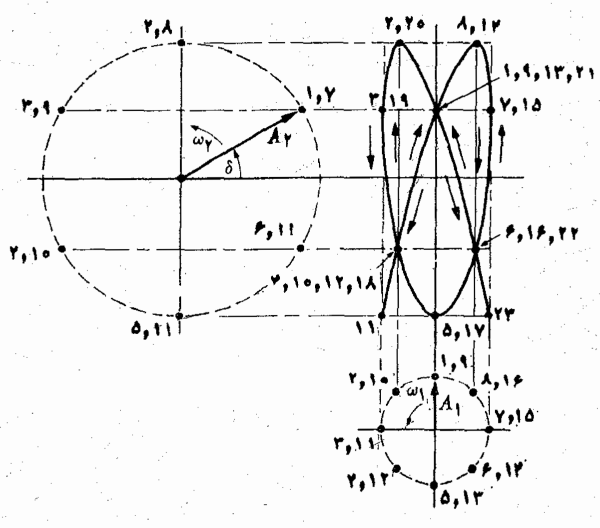


شکل ۲۳.۱۲. نیروی جاذبهٔ متناسب با جابجایی

نیروی داده شده با معادلهٔ (۳۳.۱۲) همیشه یک حرکت در صفحه به‌وجود می‌آورد، حتی اگر ذره بتواند در فضا حرکت کند، زیــرا نیرو مرکزی است و مسیر حاصل از چنین نیرویی در اغلب موارد بیضی می‌باشد. انرژی پتانسیل مربوط به نیروی معادلـهٔ (۳۳.۱۲) برابر است با (به‌مثال ۸.۸ مراجعه کنید)

$$E_p = \frac{۱}{۲} k(x^۲ + y^۲) = \frac{۱}{۲} kr^۲. \qquad (۳۴.۱۲)$$

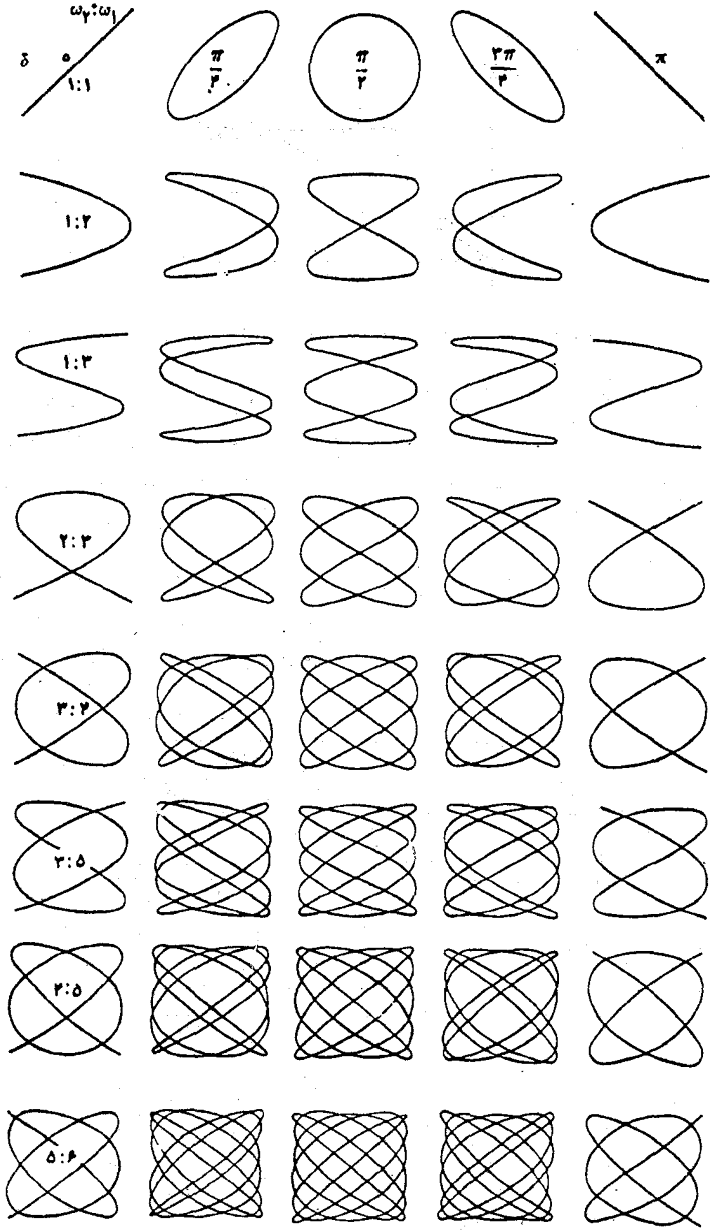
تداخل دوحرکت‌نوسانی عمود برهم ولی با بسامدهای مختلف، وضعیت جالب دیگری



شکل ۲۴.۱۲. شکل لیساژو به‌ازای $\omega_۲/\omega_۱ = ۴/۳$ و اختلاف فاز $\delta = \pi/۶$

را تشکیل می‌دهد. داریم

$$x = A_1 \sin \omega_1 t \quad \text{و} \quad y = A_2 \sin(\omega_2 t + \delta). \qquad (۳۵.۱۲)$$

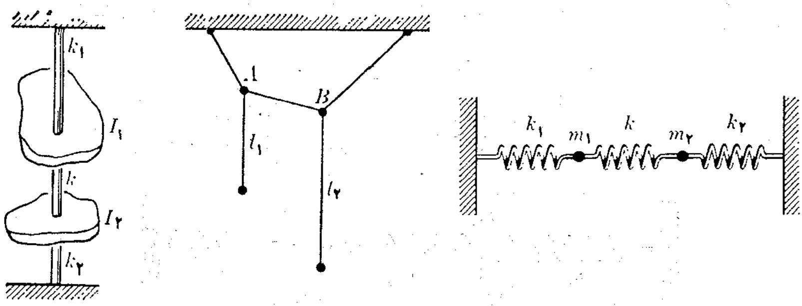


شکل ۲۵.۱۲. شکلهای لیساژو. این‌شکلها به‌نسبت ω_2/ω_1 و اختلاف فاز بستگی دارند.

شکل ۲۴.۱۲ حالتی را نشان می‌دهد که در آن $\omega_1 = 3\omega_2/4$ و $\delta = \pi/6$ است. مسیر برآیند با خط پر رسم شده است. چنین مسیری به‌نسبت ω_2/ω_1 و اختلاف‌فاز δ بستگی دارد. این مسیرها شکلهای لیساژو[1] نامیده می‌شود و برای چند مقدار مختلف اختلاف فاز و نسبتهای گوناگون ω_2/ω_1، درشکل ۲۵.۱۲ رسم شده‌اند.

۱۰.۱۲ نوسانگرهای جفت شده

یکی از مواردی که بسیاری اوقات با آن برخورد می‌شود دونوسانگر جفت شده[2] است. در شکل ۲۶.۱۲ سه وضع ممکن نشان داده شده‌اند. در (الف) دوجرم m_1 و m_2 که به دو فنر k_1 و k_2 متصل‌اند با فنر k به‌یکدیگرجفت شده‌اند، به‌گونه‌ای که حرکتهای m_1 و m_2 دیگر مستقل نیستند. در (ب) دو آونگ توسط نخ AB به هم جفت شده‌اند. در (ج) اجسام I_1 و I_2 متصل به‌میله‌های k_1 و k_2، با میلهٔ k به‌یکدیگر جفت شده‌اند و یک آونگ پیچشی جفت شده را تشکیل داده‌اند. در بخش ۱۱.۱۷ (جلد دوم کتاب) هنگام مطالعهٔ مدارهای الکتریکی جفت شده با وضع مشابهی برخورد خواهیم داشت. اثر خالص جفت شدن دو نوسانگر را می‌توان به‌صورت تبادل انرژی بین آن دو توصیف کرد.



شکل ۲۶.۱۲. چند نوسانگر جفت شده

جهت بحث مسئله از دیدگاه دینامیکی، باید معادلهٔ حرکت هرنوسانگر را نوشت. حالت ویژه‌ای را که درآن دوجرم m_1 و m_2 به‌فنرهایی اتصال دارند، درنظربگیرید (شکل ۲۷.۱۲). جابجایی m_1 و m_2 را از وضع ترازمندیشان، از چپ به راست مثبت می‌گیریم و با x_1 و x_2 نشان می‌دهیم. در این صورت فنر k_1 نیرویی برابر $-k_1x_1$ روی m_1 و به همین طریق، فنر k_2 نیرویی برابر $-k_2x_2$ روی m_2 وارد می‌کند. به فنر k جابجایی $x_2 - x_1$ تحمیل‌می‌شود و درنتیجه، موقعی‌که این فنر سعی می‌کند تا طول اولیهٔ را خود به دست‌آورد نیروی وارد بر m_1 برابر $k(x_2 - x_1)$ وبر m_2 برابر $-k(x_2 - x_1)$ است. بنابراین، معادلهٔ حرکت هر ذره [با استفاده از معادلهٔ (۱۵.۷)، یعنی $m(d^2x/dt^2) = F$]

1. Lissajous figures
2. coupled oscillator

عبارت است از

$$m_۱ \frac{d^۲x_۱}{dt^۲} = -k_۱x_۱ + k(x_۲ - x_۱)$$

و

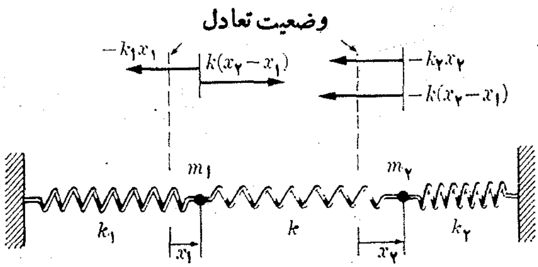
$$m_۲ \frac{d^۲x_۲}{dt^۲} = -k_۲x_۲ - k(x_۲ - x_۱).$$

با ترکیب جمله‌های مشابه، می‌توان نوشت

$$\frac{d^۲x_۱}{dt^۲} + \frac{k_۱ + k}{m_۱}x_۱ = \frac{k}{m_۱}x_۲$$

$$\frac{d^۲x_۲}{dt^۲} + \frac{k_۲ + k}{m_۲}x_۲ = \frac{k}{m_۲}x_۱ \qquad (۳۶.۱۲)$$

جمله‌های سمت چپ این معادله‌ها شباهت زیادی به‌معادلهٔ (۱۲.۱۲) دارند، به‌استثنای اینکه ثابت‌کشسانی برای ذره‌ها با $k_۱ + k$ و $k_۲ + k$ عوض شده است؛ و بنا به‌معادلهٔ (۷.۱۲)، این امر هم‌ارز است با تغییری دربسامد نوسانگرها نسبت به‌بسامدهای خاصشان هنگامی که جفت شده نیستند. یک اختلاف دیگر نیز بین‌معادله‌های (۳۶.۱۲) و (۱۲.۱۲) وجود دارد،



شکل ۲۷.۱۲. نوسانگرهای جفت شده

و آن اینکه درسمت راست به‌جای صفر، جمله‌ای است که به‌نوسانگر دیگر مربوط می‌شود. این جمله را می‌توان جملهٔ جفت شدگی[1] نامید. به جای کوشش جهت‌یافتن پاسخ عمومی معادلهٔ (۳۶.۱۲)، نتایج اساسی آن را بـرای حالت ویژه‌ای کـه دو نوسانگر مشابه باشند یعنی $m_۱ = m_۲$ و $k_۱ = k_۲$ باشد، ذکر می‌کنیم. این‌حالت، هرچند خیلی ساده است ولی کلیهٔ خصوصیات حالت‌عمومی در بردارد. پس، معادله‌های (۳۶.۱۲) به‌شکل زیردرمی‌آیند:

$$\frac{d^۲x_۱}{dt^۲} + \frac{k_۱ + k}{m_۱}x_۱ = \frac{k}{m_۱}x_۲, \quad \frac{d^۲x_۲}{dt^۲} + \frac{k_۱ + k}{m_۱}x_۲ = \frac{k}{m_۱}x_۱ \qquad (۳۷.۱۲)$$

می‌توان ثابت کرد که حرکت عمومی دونوسانگر جفت شده را که با معادله‌های (۳۷.۱۲)

1. coupling term

نمایش داده می‌شوند، می‌توان ترکیب دو مد بهنجار[1] نوسان در نظر گرفت. در یکی ازاین مدها، دونوسانگر همفاز و دامنه‌های آنها برابرند. یعنی داریم

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \quad \text{و} \quad x_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \qquad (۳۸.۱۲)$$

که درآنها

$$\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1} \qquad (۳۹.۱۲)$$

به‌گفتهٔ دیگر، بسامد نوسانگرهای جفت شده برابر است با بسامد نوسان هرجرم، هرگاه این جرمها جفت شده نبودند. این موضوع بآسانی قابل درک است، زیرا همفاز بودن دو نوسانگر و داشتن دامنه‌های یکسان موجب می‌شود به‌فنر مرکزی کششی وارد نشود، درنتیجه این‌فنر نیز نیرویی روی هیچکدام ازجرمها وارد نمی‌کند، و جابجایی این دوجرم به‌گونه‌ای صورت می‌گیرد که گویی جفت شده نیستند.

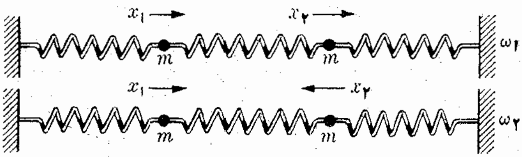
در دومین مد بهنجار، دو نوسانگر با دامنهٔ یکسان در سوی مخالف هم حرکت می‌کنند؛ یعنی

$$x_1 = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \quad \text{و} \quad x_2 = -A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \qquad (۴۰.۱۲)$$

که درآن

$$\omega_2 = \sqrt{(k_1 + 2k)/m_1} \qquad (۴۱.۱۲)$$

درنتیجه بسامد جفت شدگی از بسامد بدون جفت شدگی بزرگتر است. این امر نیز بآسانی قابل درک است، زیرا اکنون فنرمرکزی منبسط و منقبض می‌شود و بدین‌طریق ثابت‌کشسانی برای هر نوسانگرافزایش‌پیدا می‌کند. این دو مد بهنجار درشکل ۲۸.۱۲ نشان داده شده‌اند. مدهای بهنجار (۳۸.۱۲) و (۴۰.۱۲) مربوط به‌وضعی هستند که درآن جرمها با اختلاف فاز ثابتی حرکت می‌کنند، که در مد (۳۸.۱۲) برابر صفر و در مد (۴۰.۱۲) برابر π است. دوجرم همزمان از وضع ترازمندی می‌گذرند و همزمان به بیشینهٔ جابجایی می‌رسند.



شکل ۲۸.۱۲. ارتعاشهای بهنجار دو نوسانگر جفت شدهٔ یکسان

پاسخ عمومی معادله‌های (۳۷.۱۲) شامل یک ترکیب خطی از دو مد بهنجار نوسان است. یعنی داریم

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \qquad (۴۲.۱۲)$$

و

1. normal mode

$$x_۲ = A_۱ \sin(\omega_۱ t + \alpha_۱) - A_۲ \sin(\omega_۲ t + \alpha_۲). \qquad (۴۳.۱۲)$$

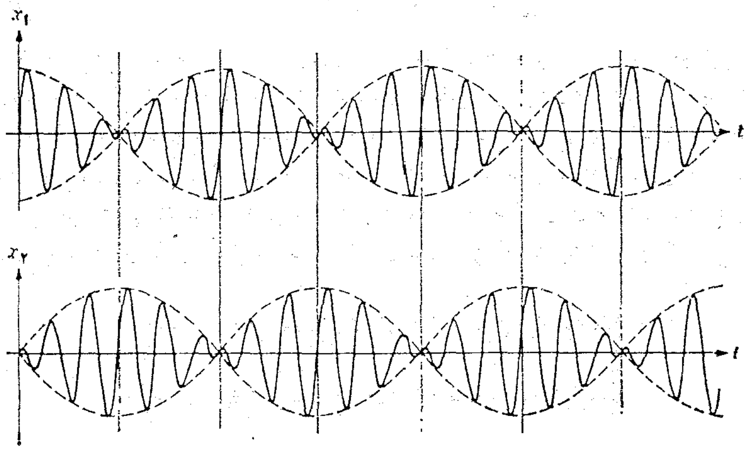
این امر را که این دو معادله پاسخ عمومی معادله‌های (۳۷.۱۲) می‌باشند از اینجا می‌توان دریافت کــه دارای چهار ثـابت اختیاری $A_۱$، $\alpha_۱$، $A_۲$ و $\alpha_۲$ هستند، وضعی کــه مـربوط به‌مجموعه‌ای از دو معادلهٔ دیفرانسیل جفت شدهٔ مرتبه دوم است. این‌معادله‌ها نشان می‌دهند کــه $x_۱$ و $x_۲$ برآیندهای تداخل دو حرکت هماهنگ سادهٔ همراستا، ولی بـا بسامد و فـاز مختلف هستند، وضعی که قبلا در بخش ۸.۱۲ مورد گفتگو قرار گرفت. بنابراین، آنچه که درآنجا توضیح داده شد دراین مورد نیز به‌کار می‌رود.

برای اینکه درک فیزیکی بهتری ازاین مسئله به‌دست‌آوریم، حالت ویژه‌ای راکه درآن دامنه‌هـا برابر، $A_۱ = A_۲$، و فازهای اولیه مساوی صفر باشند $(\alpha_۱ = \alpha_۲ = ۰)$ در نظر می‌گیریم. بنابراین با استفاده ازمعادلهٔ (پ . ۷) داریم

$$\begin{aligned} x_۱ &= A_۱ \sin\omega_۱ t + A_۱ \sin\omega_۲ t = A_۱(\sin\omega_۱ t + \sin\omega_۲ t) \\ &= \{۲A_۱ \cos[(\omega_۱ - \omega_۲)t/۲]\} \sin[(\omega_۱ + \omega_۲)t/۲] \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} x_۲ &= A_۱ \sin\omega_۱ t - A_۱ \sin\omega_۲ t = A_۱(\sin\omega_۱ t - \sin\omega_۲ t) \\ &= \{۲A_۱ \sin[(\omega_۱ - \omega_۲)t/۲]\} \cos[(\omega_۱ + \omega_۲)t/۲]. \end{aligned}$$



شکل ۲۹.۱۲. نوسانگرهای جفت شدهٔ یکسان با دامنه‌های برابر

با مقایسهٔ این رابطه‌ها با معادلهٔ (۲۹.۱۲)، مشاهده می‌شود که دامنهٔ مدولاسیون $x_۱$ بـرابـر $۲A\cos[(\omega_۱ - \omega_۲)t/۲]$ است، در صورتی کـه دامنهٔ مـدولاسیون $x_۲$ برابر $۲A\sin[(\omega_۱ - \omega_۲)t/۲] = ۲A\cos[(\omega_۱ - \omega_۲)t/۲ - \pi/۲]$ است. می بینیم که دو دامنهٔ مدولاسیون دارای اختلاف فاز $\pi/۲$، یعنی ربع دورهٔ مدولاسیون هستند. شکل ۲۹.۱۲ تغییرات $x_۱$ و $x_۲$ را برحسب t نمایش می‌دهد. به سبب اختلاف فاز بین دودامنهٔ مدولاسیون،

تبادل انرژی بین دو نوسانگر وجود دارد. در مدت ربع دورهٔ مدولاسیون، دامنهٔ مدولاسیون یکی از نوسانگرها کاهش می‌یابد و دامنهٔ دیگری افزایش پیدا می‌کند و موجب انتقال انرژی ازنوسانگر اولی به نوسانگردومی می‌شود. درمدت ربع دورهٔ بعدی، وضع وارونه می‌شود و تبادل انرژی در سوی مخالف صورت می‌گیرد. این فرآیند دائماً تکرار می‌شود. با استفاده از آونگ جفت شدهٔ شکل ۲۶.۱۲ (ب)، می‌توان بسادگی این پدیده را به طور تجربی مشاهده کرد.

توجه به انرژی کل دستگاه نیز جالب است. انرژی جنبشی کل برابر است با $E_k = m_۱v_۱^۲/۲ + m_۲v_۲^۲/۲$. برای به دست آوردن انرژی پتانسیل، معادلهٔ (۱۰.۱۲) را برای هرفنر به‌کار می‌بریم که به $E_p = k_۱x_۱^۲/۲ + k_۲x_۲^۲/۲ + k(x_۱ - x_۲)/۲$ منجر می‌شود، زیرا $x_۱$، $x_۲$ و $x_۱ - x_۲$ تغییر طول فنرها هستند، یا

$$E_p = \frac{۱}{۲}(k_۱ + k)x_۱^۲ + \frac{۱}{۲}(k_۲ + k)x_۲^۲ - kx_۱x_۲$$

پس انرژی کل برابر است با

$$E = E_k + E_p = \left[\frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲ + \frac{۱}{۲}(k_۱ + k)x_۱^۲\right] + \left[\frac{۱}{۲}m_۲v_۲^۲ + \frac{۱}{۲}(k_۲ + k)x_۲^۲\right] - kx_۱x_۲ \qquad (۴۴.۱۲)$$

کروشهٔ اول تنها به $x_۱$ بستگی دارد و می‌توان آن را انرژی $m_۱$ نامید؛ کروشهٔ دوم مربوط به‌انرژی $m_۲$ است. ولی جملهٔ آخرشامل $x_۱$ و $x_۲$ است وآن را انرژی جفت شدگی یا انرژی برهم‌کنش می‌نامند. این جمله است که تبادل انرژی بین دونوسانگر را توصیف می‌کند. در غیاب این جمله، انرژی هر نوسانگر ثابت است. هنگامی که جفت شدگی وجود دارد، انرژی کل است که ثابت می‌ماند. این یک نتیجهٔ کلی است، و چنانکه در فصل ۹ دیدیم، هرگاه که برهم‌کنشی بین دو دستگاه صورت بگیرد که موجب تبادل انرژی شود، انرژی کل دستگاه به صورت زیر نوشته می‌شود:

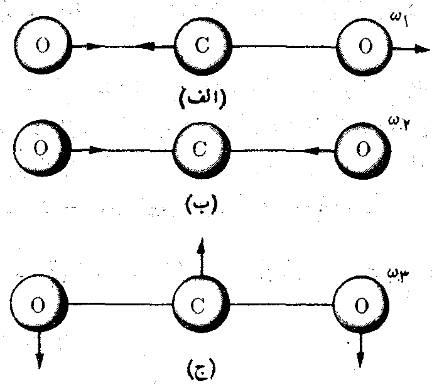
$$E = (E_k + E_p)_۱ + (E_k + E_p)_۲ + (E_p)_{۱۲} \qquad (۴۵.۱۲)$$

دراین رابطه جملهٔ آخر معرف برهم کنش است.

چنانکه در بالا متذکر شدیم، نوسانگرهای جفت شده در بسیاری ازوضعیتهای فیزیکی یافت می‌شوند. یکی از موارد بسیار مهم، ارتعاش اتمها در یک مولکول است. مولکول یک ساختار سخت نیست؛ اتمها حول وضع ترازمندی خود در نوسانند. ولی ارتعاش هر اتم روی برهم کنش آن با اتمهای دیگر تأثیر می‌گذارد و در نتیجه یک دستگاه نوسانگرهای جفت شده تشکیل می‌شود.

به عنوان مثال، یک مولکول خطی سه اتمی مانند $CO_۲$ را درنظر می‌گیریم. همچنانکه شکل ۳۰.۱۲ نشان می‌دهد، آرایش این مولکول عبارت است از $O{=}C{=}O$، که شبیه نوسانگرهای شکل ۲۷.۱۲ می‌باشد. حرکت نسبی سه اتم را می‌توان برحسب نوسانهای

بهنجار توصیف کرد. درشکل ۱۲.۳۰ (الف)، اتمهای اکسیژن به طورهمفاز نوسان می‌کنند و اتم کربن درسوی عکس حرکت می‌کند تا جای مرکز جرم محفوظ بماند. این مد متناظر با نوسان ω_1 درشکل ۱۲.۲۸ است. درشکل ۱۲.۳۰ (ب)، دواتم اکسیژن، نسبت به‌اتم کربن که درمرکز جرم ثابت باقی می‌ماند در دوسوی مخالف حرکت می‌کنند. این مد به‌نوسان ω_2

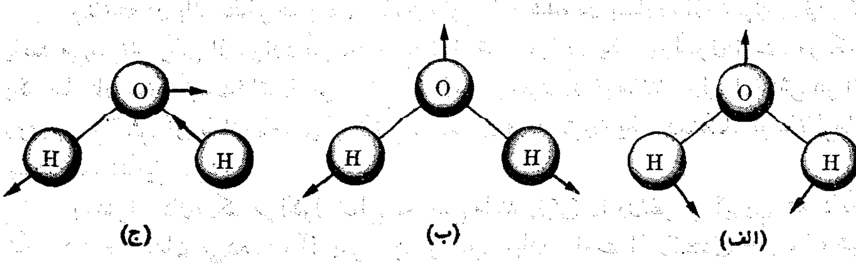


شکل ۱۲.۳۰. نوسانهای بهنجار مولکول CO_2

درشکل ۱۲.۲۸ مربوط می‌شود. وضع شکل۱۲.۳۰ (ج) قبلا مورد بررسی قرارنگرفته است و به حرکتی با بسامد زاویه‌ای ω درجهت عمود برخط واصل اتمها مربوط می‌شود و موجب خمیدگی مولکول می‌شود. برای مولکول CO_2، مقدار این سه بسامد زاویه‌ای برابرند با

$$\omega_1 = ۴٫۴۴۳ \times ۱۰^{۱۴} s^{-1}, \quad \omega_2 = ۲٫۵۲۹ \times ۱۰^{۱۴} s^{-1},$$
$$\omega_3 = ۱٫۲۶۱ \times ۱۰^{۱۴} s^{-1}$$

اگر مولکول خطی نباشد یا بیش از سه اتم داشته باشد، تجزیه و تحلیل نوسانهای بهنجارآن پیچیده‌تر می‌شود، ولی در اساس یکسان است. به‌عنوان مثال، برای مولکول‌آب H_2O، که درآن اتم اکسیژن در رأس یک زاویهٔ ۱۰۵° وهریک از اتمهای هیدروژن روی یک ضلع قرار دارند، ارتعاشهای بهنجار در شکل ۱۲.۳۱ نشان داده شده‌اند. بسامد زاویه‌ای این نوسانها عبارتند از $۳٫۰۱۷ \times ۱۰^{۱۴} s^{-1}$، $۶٫۹۰۸ \times ۱۰^{۱۴} s^{-1}$ و $۷٫۱۰۴ \times ۱۰^{۱۴} s^{-1}$.

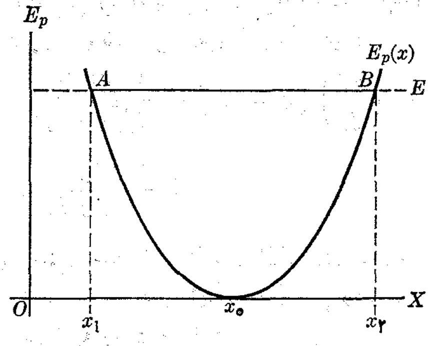


شکل ۱۲.۳۱. نوسانهای بهنجار مولکول H_2O

۱۱.۱۲ نوسانهای ناهماهنگ

وقتی کـه x از مبـدأ O انـدازه گیری شود حـرکت هماهنگ سـاده از نیرویی برابر با $F = -kx$ که مربوط به یک انرژی پتانسیل $E_p = kx^2/2$ است بـه وجود می‌آید. هنگامی که جای ترازمندی به جای مبدأ، مانند شکل ۳۲.۱۲ در x_0 باشد، باید نوشت

$$E_p = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2.$$

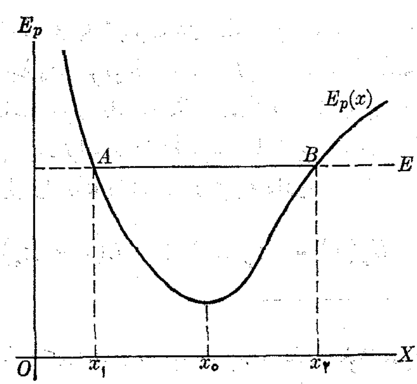


شکل ۳۲.۱۲. نوسانگر هماهنگ که جای ترازمندی آن در x_0 است

منحنی نمایش E_p یک سهمی است کـه رأس آن در نقطهٔ x_0 است. اگر E انرژی کل، E_p را در نقطه‌های A و B قطع کند، ذره بین نقاط x_1 و x_2 کـه نسبت به x_0 تقارن دارند، نوسان می‌کند. با توجه به اینکه

$$\frac{dE_p}{dx} = k(x - x_0) \quad \text{و} \quad \frac{d^2 E_p}{dx^2} = k$$

است، برای بسامد زاویه‌ای می‌توان نوشت



شکل ۳۳.۱۲. نوسانگر ناهماهنگ که جای ترازمندی آن در x_0 است

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{(d^2E_p/dx^2)/m}. \qquad (۴۶.۱۲)$$

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که منحنی نمایش انرژی پتانسیل سهمی نیست، ولی کمینهٔ کاملا معینی دارد (شکل ۳۳.۱۲). این وضع در بسیاری موارد در دستگاههای فیزیکی پیش می‌آید و موجب یک حرکت نوسانی ناهماهنگ[1] می‌شود. اگر انرژی‌کل برابر E باشد، ذره بین دو نقطهٔ x_1 و x_2 که معمولا نسبت‌به‌نقطهٔ ترازمندی x_0 متقارن نیستند نوسان‌می‌کند. دراین صورت بسامد نوسانها به‌انرژی بستگی دارد. برای برآورد بسامد، به شیوهٔ زیرعمل می‌کنیم:

با داشتن تابعی مانند $f(x)$، قضیهٔ تایلور* [به معادلهٔ (پ۳۱.) مراجعه کنید] امکان می‌دهد این تابع را به صورت یک سری توان[2] بسط دهیم:

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 (x - x_0)^2$$
$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)_0 (x - x_0)^3 + \dots$$

دراینجا شاخص صفربدین معنی است که مشتقها به ازای $x = x_0$ محاسبه می‌شوند. با استفاده ازاین قضیه درمورد $E_p(x)$، و با توجه به اینکه به‌ازای $x = x_0$ داریم $(dE_p/dx)_0 = 0$ [زیرا E_p در x_0 کمینه است] به دست می‌آید

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_0 (x - x_0)^2$$
$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{d^3E_p}{dx^3}\right)_0 (x - x_0)^3 + \dots$$
$$= E_p(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}k'(x - x_0)^3 + \dots \qquad (۴۷.۱۲)$$

دراین رابطه بـه جـای $(d^2E_p/dx^2)_0$ و $(d^3E_p/dx^3)_0$ و غیره، بترتیب k، k' و ... را قرار داده‌ایم.

جملهٔ اول ثابت است و به تغییری در صفر انرژی پتانسیل مربوط می‌شود. جملهٔ دوم چیزی جز یک جملهٔ درجهٔ دوم مربوط به یک نوسانگر هماهنگ با $k = (d^2E_p/dx^2)_0$ نیست. جمله‌های بعدی پاسخگوی ناهماهنگی هستند وآنها را جمله‌های ناهماهنگی می‌نامند.

اگر انرژی خیلی زیاد نباشد، دامنهٔ نوسانها کوچک می‌شوند وبا تقریب قابل قبولی می‌توان تنها دو جملهٔ اول را نگه داشت؛ درنتیجه داریم

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2.$$

---

1. anharmonic

☆ Taylor's theorem ر.ک. توماس، جورج، ب. حساب دیفرانسیل وانتگرال وهندسهٔ تحلیلی، ترجمهٔ علی اکبر جعفریان وابوالقاسم میامئی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۹، بخش ۴.۱۸.

2. power series

بدین طریق حرکت عملاً هماهنگ ساده و دارای بسامد ارتعاشی با مقدار تقریبی زیر می‌باشد:

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{(d^2E_p/dx^2)_\circ/m}. \qquad (۴۸.۱۲)$$

این تقریب در بسیاری از موارد قابل قبول است. ولی در انرژیهای بالا، این مقدار ω با اندازهٔ واقعی بسامد خیلی اختلاف دارد و دیگر حرکت هماهنگ ساده، تقریب مناسبی نیست. دراین صورت باید اثر جمله‌های ناهماهنگی را نیز به حساب آورد.

نیرویی که بر ذرهٔ مربوط به انرژی پتانسیل داده شده با معادلهٔ (۴۷.۱۲) وارد می‌شود برابر است با

$$F = -\frac{dE_p}{dx} = -k(x-x_\circ) - \frac{1}{2}k'(x-x_\circ)^2 - \cdots \qquad (۴۹.۱۲)$$

اولین جمله، نیروی هماهنگ ساده است و بقیه، جمله‌های ناهماهنگی را تشکیل می‌دهند.

مثال ۱۰.۱۲. بسامد نوسانهای مربوط به‌پتانسیل بین مولکولی داده شده در مثال ۱۱.۸ را حساب کنید.

حل: پتانسیل بین مولکولی برابر است با

$$E_p = -E_{p,\circ}\left[2\left(\frac{r_\circ}{r}\right)^6 - \left(\frac{r_\circ}{r}\right)^{12}\right]$$

که درآن $r_\circ$ فاصلهٔ بین مولکولها در وضع ترازمندی است. بنابراین داریم

$$\frac{d^2E_p}{dr^2} = -E_{p,\circ}\left(84\frac{r_\circ^6}{r^8} - 156\frac{r_\circ^{12}}{r^{14}}\right).$$

با قرار دادن $r = r_\circ$، به دست می‌آید

$$\left(\frac{d^2E_p}{dr^2}\right)_{r_\circ} = 72\frac{E_{p,\circ}}{r_\circ^2}.$$

در نتیجه، با به‌کاربردن معادلهٔ (۴۸.۱۲)، بسامد نوسانها را تقریباً $\omega = \sqrt{72E_{p,\circ}/mr_\circ^2}$ به دست می‌آوریم.

در این فرمول m جرم کاهیده است، زیرا در اینجا از حرکت نسبی دو ذره گفتگو می‌شود. اگر $r_\circ$ را مستقلاً حساب کنیم و ω را به طور تجربی به دست آوریم، می‌توانیم $E_{p,\circ}$، قدرت برهم‌کنش مولکولی را تعیین کنیم. برای حل این مسئله فرض کردیم که نوسانگر خطی است، ازاین رو پتانسیل گریز از مرکز (بخش ۱۰.۸) در بحث وارد نشد.

۱۲.۱۲ نوسانهای میرا[1]

در بخشهای قبل، بحث حرکت هماهنگ ساده نشان داد که دامنهٔ نوسان ثابت است. ولی

1. damped oscillations

تجربه نشان می‌دهد در یک جسم مرتعش مانند یک فنر یا یک آونگ، دامنهٔ حرکت نوسان بتدریج کاهش می‌یابد و بالاخره حرکت متوقف می‌شود. به گفتهٔ دیگر، حرکت میراست.

در توضیح دینامیکی میرایی، می‌توان فرض کرد که علاوه بر نیروی کشسان $F = -kx$ نیروی دیگری نیز در سوی مخالف سرعت اثر می‌کند. در بخش ۱۰.۷، نیرویی از این گونه را که از وشکسانی محیطی‌که حرکت در آن صورت‌می‌گیرد ناشی می‌شد، بررسی کردیم. درپی همان منطق، این نیرو را به صورت $F' = -\lambda v$ می‌نویسیم، که در آن λ یک ثابت و v سرعت متحرک است. علامت منفی روشن می‌کندکه F' درسوی مخالف v وارد می‌شود. توجه داشته باشید که در واقع نیروهای میرایی دیگری نیز — متناسب با توانهای بالاتر v، یا با رابطه‌های فیزیکی دیگر — می‌توانند وجود داشته باشند. نیروی برآیند وارد برذره مساوی $F + F'$ است و معادلهٔ حرکت عبارت می‌شود از

$$ma = -kx - \lambda v \qquad (۵۰.۱۲)$$

یا، با یادآوری اینکه $v = dx/dt$ و $a = d^2x/dt^2$ است، داریم

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (۵۱.۱۲)$$

این معادله معمولا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (۵۲.۱۲)$$

که درآن $2\gamma = \lambda/m$ و $\omega_0^2 = k/m$ بسامد زاویه‌ای طبیعی بدون میرایی است. این رابطه یک معادلهٔ دیفرانسیل است که با معادلهٔ (۱۲.۱۲) برای حرکت هماهنگ ساده تفاوت دارد، به دلیل اینکه شامل یک جملهٔ اضافی $2\gamma\, dx/dt$ است. با استفاده از از روشهای حل معادلات دیفرانسیل که دردروس ریاضی تدریس می‌شود می‌توان پاسخ این معادله را به دست آورد*. به جای کوشش در حل این معادله با روشهای کلاسیک، پاسخ آن را تنها برای یک میرایی ضعیف، موقعی که $\gamma < \omega_0$ است می‌نویسیم. در این صورت پاسخ آن عبارت است از

$$x = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \alpha). \qquad (۵۳.۱۲)$$

در اینجا A و α ثابتهای اختیاری هستند که با توجه به شرایط اولیه تعیین می‌شوند (چنانکه در مثال ۳.۱۲ در مورد یک حرکت هماهنگ ساده توضیح داده شد)، و

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{k/m - \lambda^2/4m^2}. \qquad (۵۴.۱۲)$$

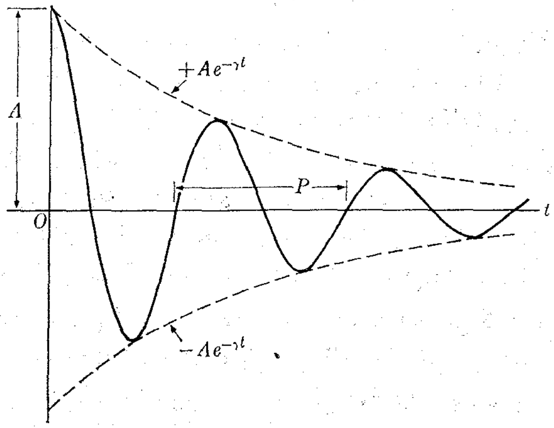
دانشجو با قرار دادن مستقیم معادلهٔ (۵۳.۱۲) در معادلهٔ (۵۲.۱۲) می‌تواند تحقیق کند که معادلهٔ اول پاسخ معادلهٔ دوم است. نظر به اینکه این پاسخ شامل دو مقدار ثابت است، پاسخ عمومی برای معادلهٔ دیفرانسیل می‌باشد. معادلهٔ (۵۴.۱۲) نشان می‌دهد که اثر

---

* به‌عنوان مثال، رجوع کنید به حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی، بخش ۲۰.۱۲.

میرایی کاستن از بسامد نوسانهاست.

بنابراین دامنهٔ نوسانها دیگر ثابت نیست واندازهٔ آن برابر است با $Ae^{-\gamma t}$. به دلیل نمای منفی، با افزایش t دامنه کاهش می‌یابد و یک حرکت میرا بـه وجود می‌آورد. شکل ۳۴.۱۲ چگونگی تغییرات x را برحسب t نشان می‌دهد.



شکل ۳۴.۱۲. نوسانهای میرا

اگـر میـرایی بزرگ باشد، γ می‌توانـد از ω_0 و ω بزرگتر شود، در نتیجه معادلهٔ (۵۴.۱۲) موهومی می‌شود. دراین صورت، نوسان وجود ندارد. ذره‌ای که جابجا و سپس رها شده است، بتدریج بـه وضع ترازمندی نزدیک می‌شود بدون اینکه از آن بگذرد، یا حداکثر با یک بار گذر ازآن به وضع ترازمندی برمی‌گردد. انرژیی که ذره در حرکت از دست می‌دهد جذب محیط اطراف آن می‌شود.

مثال ۱۱.۱۲. آونگی از کرهٔ آلومینومی به شعاع $0.005\ \mathrm{m}$ از نخی به طول یک متر آویزان است. مقاومت هوا چگونه دامنه و دورهٔ حرکت را تغییر می‌دهد؟

حل: در بخش ۱۰.۷ دیدیم که نیروی وشکسان وارد بر کره‌ای به شعاع R که با سرعت v در شاره‌ای حرکت می‌کند بـرابـر است با $F = -6\pi\eta Rv$. بنابراین می‌توان معادلهٔ حرکت مماسی آونگ را با افزودن این نیروی وشکسانی به نیروی

$$F_T = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$$

کـه در بخش ۵.۱۲ بـرای دامنـه‌هـای کـوچک بـه دسـت آوردیـم پیـدا کـرد. ($v = ds/dt = l d\theta/dt$ است که درآن l طول آونگ می‌باشد.) بنابراین

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta - 6\pi\eta Rl\frac{d\theta}{dt}$$

یا

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{6\pi\eta R}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

که یک معادلهٔ دیفرانسیل مشابه بامعادلهٔ (۵۲.۱۲) است. با قراردادن $m = (4\pi R^3/3)\rho$ که درآن $\rho = 2{,}65 \times 10^3\,\mathrm{kgm^{-3}}$، چگالی آلومینیم است، نتیجه می‌گیریم که

$$\gamma = \frac{6\pi\eta R}{2(4\pi R^3/3)\rho} = \frac{9\eta}{4R^2\rho}.$$

برای هوای $20°\mathrm{C}$، وشکسانی برابر است با $1{,}78 \times 10^{-5}\,\mathrm{kgm^{-1}s^{-1}}$ بنابراین $\gamma = 6{,}43 \times 10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$ می‌شود. بدین طریق، دامنه مطابق قانون $Ae^{-0{,}000643t}$ کاهش می یابد. زمان لازم برای‌اینکه دامنه به اندازهٔ ۱۰٪ خود کاهش یابد ازبرابر قرار دادن عبارت نمایی با ۹ر۰ یا $-6{,}43 \times 10^{-4}t = \ln 0{,}9$ به‌دست می‌آید. دراین صورت $t = 1{,}64 \times 10^3\,\mathrm{s}$، یعنی در حدود ۲۷ دقیقه است.

برای اینکه بدانیم چگونه وشکسانی هوا بسامد (یا دورهٔ) نوسانها را تغییرمی‌دهد، با توجه اینکه $\omega_0^2 = g/l$ است، معادلهٔ (۱۲.۵۴) را به کار می بریم. بنابراین $\omega = \sqrt{g/l - \gamma^2}$. ولی $g/l = 9{,}8\,\mathrm{s^{-2}}$ است، در صورتی که در اینجا γ^2 از مرتبهٔ $4 \times 10^{-7}\,\mathrm{s^{-2}}$ است ودر نتیجه در مقابل g/l قابل اغماض می‌باشد. نتیجه می‌گیریم که وشکسانی هوا هر چند دامنه را تغییر می‌دهد ولی عملا روی بسامد یا دورهٔ آونگ مورد بحث دراین مثال، اثر نمی‌گذارد.

۱۳.۱۲ نوسانهای واداشته

یک مسئلهٔ با اهمیت عملی دیگر، مسئلهٔ ارتعاشهای واداشتهٔ[1] یک نوسانگر است؛ یعنی ارتعاشهای حاصل از اعمال یک نیروی خارجی نوسانی روی ذره‌ای که برآن یک نیروی کشسان وارد می‌شود. به عنوان مثال، این وضع هنگامی پیش می آید که دیاپازونی را روی جعبهٔ بازآوان[2] (تشدید) قراردهیم و جدارهای جعبه (وهوای داخل آن) را وادار کنیم تا به ارتعاش درآیند، یا هنگامی که موجهای الکترو مغناطیسی دریافتی یک آنتن، روی مدار الکتریکی دستگاه رادیو یا تلویزیون اثر می‌کنند و نوسانهای واداشته تولید می‌کنند.

فرض می‌کنیم $F = F_0 \cos \omega_f t$ نیروی نوسانی اعمال شده و ω_f بسامد زاویه‌ای آن باشد. اگر فرض کنیم که ذره تحت تأثیر نیروی کشسان $-kx$ و نیروی میرایی $-\lambda v$ نیز قرار دارد، معادلهٔ حرکت آن عبارت خواهد شد از

$$ma = -kx - \lambda v + F_0 \cos \omega_f t$$

که اگر درآن v را برابر dx/dt و a را برابر d^2x/dt^2 قرار دهیم، به دست می‌آید

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega_f t \qquad (۵۵.۱۲)$$

که با قرار دادن $2\gamma = \lambda/m$ و $\omega_0^2 = k/m$، رابطهٔ فوق به صورت زیر درمی‌آید:

---
1. forced vibrations
2. resonating box

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos\omega_f t. \qquad (56.12)$$

این رابطه یک معادلهٔ دیفرانسیل شبیه به معادلهٔ (۵۲.۱۲) است، تنها با این تفاوت که جملهٔ سمت راست آن صفر نیست. می‌توان آن را با روشهای کلاسیک حل کرد. ولی در اینجا نیز از شم فیزیکی راهنمایی می‌گیریم. در این مورد منطقی به نظر می‌رسد که ذره، نه با بسامد زاویه‌ای نامیرای ω_0، و نه بسامد زاویه‌ای میرای $\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$، بلکه ناچار با ω_f، بسامد زاویه‌ای نیروی اعمال شده نوسان کند. ازاین رو بـه عنوان یک پاسخ ممکن برای معادلهٔ (۵۶.۱۲)، رابطه‌ای به صورت زیر را امتحان می‌کنیم:

$$x=A\sin(\omega_f t-\alpha). \qquad (57.12)$$

دراینجا، جهت سهولت، برای فاز اولیهٔ α علامت منفی منظور شده است. با قراردادن مستقیم می‌توان دیدکه این‌رابطه درمعادلهٔ (۵۶.۱۳) صدق‌می‌کند، مشروط براینکه دامنهٔ A بارابطهٔ*

$$A=\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega_f^2}} \qquad (58.12)$$

وفاز اولیهٔ جابجایی با رابطهٔ

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\omega_f^2-\omega_0^2}{2\gamma\omega_f} \qquad (59.12)$$

بیان شوند.

توجه داشته باشید که دراینجا نه دامنهٔ A و نه فاز اولیهٔ α کمیتهـای دلخواه نیستند، بلکه دارای مقادیر معینی هستند که به ω_f، بسامد نیروی وارد شده بستگی دارنـد، از لحاظ ریاضی این سخن بدان معناست کـه یک پاسخ «خصوصی» معادلـهٔ دیفرانسیل را به دست آورده‌ایم.** معادلهٔ (۵۷.۱۲) نشان می‌دهد کـه نوسانهای واداشته میرا نیستند، ولی دارای دامنه‌ای ثابت و بسامـدی برابر با بسامد نیروی اعمال شده می‌بـاشند. یعنی نیروی وارده بر نیروی میرایی فایق می‌آید وانرژی لازم برای محفوظ نگه داشتن نوسانها را فراهم می‌کند.

درشکل ۳۵.۱۲، به‌ازای یک مقدارمشخص γ، دامنهٔ A برحسب‌بسامد ω_f رسم شده است. هنگامی که درمعادلهٔ (۵۸.۱۲) مخرج کسر کمینه است، دامنه به بیشینهٔ قابل توجهی

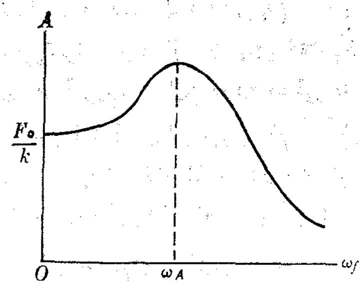
---

* برای اثبات، ابتدا $\sin(\omega_f t-\alpha)$ را بسط و نتیجه را درمعادلـهٔ (۵۶.۱۲) قرار دهید. سپس ضرایب $\sin\omega_f t$ و $\cos\omega_f t$ را بترتیب در دوطرف معادله برابر هم بگیریـد. از دو معادله‌ای کـه بدیـن طریق به دست می‌آیند، مستقیماً معادلـه‌های (۵۸.۱۲) و (۵۹.۱۲) نتیجه می‌شوند.

** درنظریهٔ معادلات دیفرانسیل ثابت می‌کنند که پاسخ عمومی معادلهٔ (۵۶.۱۲) ازافزودن معادلهٔ (۵۳.۱۲) یعنی پاسخ معادلـهٔ (۵۲.۱۲) به‌معادلهٔ (۵۷.۱۲) به‌دست می‌آید. با وجود این چون معادلهٔ (۵۳.۱۲) به یک حرکت نوسانی میرا مربوط است خیلی زودکوچک‌می‌شود ومی‌توان آن‌رانادیده گرفت. به‌همین دلیل معمولا آن را جملهٔ گذرا (transient) مـی‌نامند.

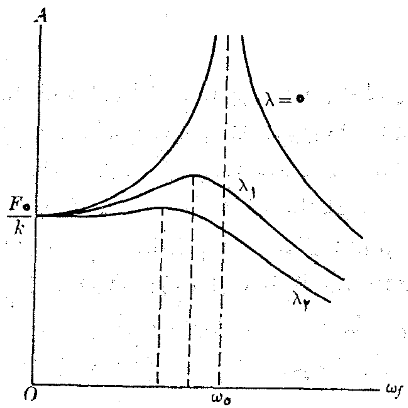
می‌رسد. این حالت به ازای بسامد ω_A، که با رابطهٔ زیر داده می‌شود، به وجود می‌آید:

$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{k/m - \lambda^2/2m^2}. \qquad (۶۰.۱۲)$$



شکل ۳۵.۱۲. تغییرات دامنه با بسامد نیروی وارده

هنگامی که ω_f بسامد نیروی وارده با ω_A برابر باشد، گویند بازآوایی دامنه[1] وجود دارد. هرچه میرایی کوچکتر باشد، بازآوایی قابل ملاحظه‌تر می‌شود. هنگامی که λ برابر صفر است دامنهٔ بازآوایی بینهایت می‌باشد. دامنهٔ بینهایت به ازای $\omega_A = \omega_0 = \sqrt{k/m}$ به وجود می‌آید. شکل ۳۶.۱۲ تغییرات دامنهٔ A را برحسب بسامد ω_f برای مقادیر مختلف λ نشان می‌دهد.



شکل ۳۶.۱۲. تغییرات دامنهٔ نوسانهای واداشته برحسب میرایی
(درشکل، λ_2 بزرگتر از λ_1 است.)

سرعت نوسانهای واداشته برابر است با

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega_f A \cos(\omega_f t - \alpha). \qquad (۶۱.۱۲)$$

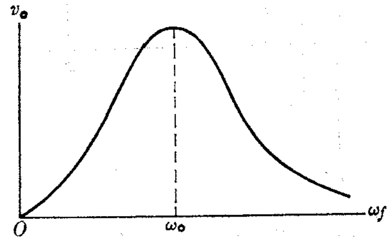
1. amplitude resonance

از مقایسهٔ معادلهٔ (۶۱.۱۲) با رابطهٔ $F = F_\circ \cos \omega_f t$ برای نیروی وارد شده، مشاهده می‌شود که α اختلاف فاز سرعت را نسبت به نیرو نشان می‌دهد. $v_\circ$، دامنهٔ سرعت برابر است با

$$v_\circ = \omega_f A = \frac{\omega_f F_\circ / m}{\sqrt{(\omega_f^۲ - \omega_\circ^۲)^۲ + ۴\gamma^۲\omega_f^۲}}$$

که آن را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$v_\circ = \frac{F_\circ}{\sqrt{(m\omega_f - k/\omega_f)^۲ + \lambda^۲}}. \qquad (۶۲.۱۲)$$



شکل ۳۷.۱۲. تغییرات دامنهٔ سرعت نوسانهای واداشته با بسامد نیروی وارده

چنانکه شکل ۳۷.۱۲ نشان می‌دهد، مقدار $v_\circ$ با ω_f تغییر می‌کند، وموقعی که جملهٔ داخل پرانتز درمخرج برابر صفر شود، یعنی $m\omega_f - k/\omega_f = \circ$، یا

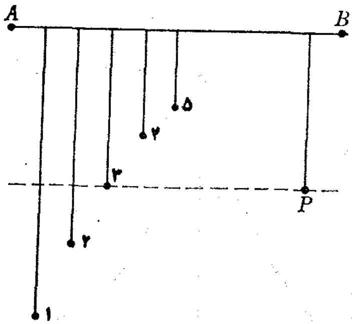
$$\omega_f = \sqrt{k/m} = \omega_\circ \qquad (۶۳.۱۲)$$

باشد، $v_\circ$ به حداکثر مقدار خود می‌رسد. دراین بسامد، سرعت وهمچنین انرژی جنبشی نوسانگر بیشینه هستند، وگفته می‌شود بازآوایی انرژی وجود دارد. توجه داشته باشید که از قراردادن معادلهٔ (۶۳.۱۲) درمعادلهٔ (۵۹.۱۲)، به دست می‌آید $\alpha = \circ$. بنا براین بازآوایی انرژی موقعی به‌وجود می‌آیدکه بسامد نیروی وارد شده برابربسامد طبیعی نوسانگر بدون میرایی باشد، که دراین‌صورت سرعت بانیروی واردشده همفازاست. اینها مناسبترین شرایط برای انتقال انرژی به نوسانگرند، زیرا میزان کاری که نیروی وارده روی نوسانگر انجام می‌دهد برابر Fv است و این کمیت هنگامی که v و F همفاز باشند همیشه مثبت است. درنتیجه

هنگام بازآوایی انرژی، انتقال انرژی از نیروی اعمال شده به نوسانگر واداشته بیشینه است.

هنگامی که میرایی ضعیف است، بسامدهای مربوط به بازآوایی دامنه و بازآوایی انرژی اختلاف چندانی با یکدیگر ندارند.

بازآوایی را می توان با آزمایش بسیار ساده‌ای نشان داد. اگر، مطابق شکل ۳۸.۱۲، از یک نخ چندین آونگ آویزان کنیم وآونگ P را به نوسان درآوریم، به سبب جفت‌شدگی، سایر آونگها نیز شروع به نوسان می‌کنند. ولی ازمیان ۵ آونگ، آونگی که با بزرگترین دامنه به نوسان درمی‌آید آونگ شمارهٔ ۳ است که دارای طول یکسان با P، در نتیجه دارای بسامد طبیعی برابر با آن است، زیرا دراین حالت میرایی ناچیز است وبین بازآوایی دامنه وبازآوایی انرژی تمایزی وجود ندارد.



شکل ۳۸.۱۲. بازآوایی دامنه درحرکت آونگ

بازآوایی تقریباً درتمام شاخه‌های فیزیک وجود دارد. هرزمان که دستگاهی زیر تأثیر یک عامل خارجی که به‌طور متناوب با زمان تغییر می‌کند قرار گیرد بازآوایی رخ می‌دهد. به عنوان مثال، اگر گازی درناحیه‌ای قرار گیرد که درآنجا یک میدان الکتریکی متناوب وجود دارد (مانند یک موج الکترومغناطیسی)، نوسانهای واداشته دراتمهای تشکیل دهندهٔ مولکولهای گاز القا می‌شوند. چنانکه درپایان بخش ۱۰.۱۲ شرح دادیم، چون مولکولها دارای بسامدهای طبیعی کاملا معینی می باشند، موقعی که بسامد میدان الکتریکی اعمال شده بریکی ازبسامدهای طبیعی مولکولها منطبق باشد، جذب انرژی بیشینه خواهد بود. با استفاده ازاین اصل، می‌توان بیناب ارتعاشی مولکولها را به دست آورد. همچنین، در یک اتم می‌توان الکترونها را نوسانگرهایی درنظر گرفت که بسامدهای طبیعی خاصی دارند. هرگاه بسامد میدان الکتریکی نوسانی بریکی ازبسامدهای طبیعی اتم منطبق باشد انرژیی‌که اتم از میدان جذب می‌کند بیشینه خواهد بود. بعضی ازبلورها مثل کلرور سدیم، از ذره‌های باردار با بار الکتریکی مثبت ومنفی (به نام یون[1]) تشکیل شده‌اند. اگر بلور دریک میدان الکتریکی متناوب خارجی قرار گیرد، یونهای مثبت نسبت به یونهای منفی به ارتعاش در می‌آیند. جذب انرژی به وسیلهٔ بلور وقتی بیشینه است که بسامد میدان الکتریکی بربسامد طبیعی ارتعاشات نسبی یونها منطبق باشد؛ درمورد کلرورسدیم این بسامد تقریباً برابر 5×10^{12} Hz است.

شاید آشناترین مثال برای بازآوایی، تنظیم یک رادیو روی یک ایستگاه فرستنده

1. ion

باشد. فرستنده‌ها درتمام اوقات نوسانهای واداشته درمدارهای گیرنده به وجود می‌آورند. درهر تنظیمی، تطبیق روی یکی ازبسامدهای طبیعی مدار الکتریکی دستگاه گیرنده صورت می‌گیرد. وقتی که این بسامد با بسامد ایستگاه فرستنده تطبیق می‌کند، جذب انرژی بیشینه است، و تنها آن ایستگاه شنیده می‌شود. اگر بسامدهای دو ایستگاه خیلی به‌هم نزدیک باشند، گاهی آنها را همزمان می‌شنویم که باعث ایجاد اثر تداخلی می‌شود.

می‌توان مفهوم بازآوایی را به خیلی ازپدیده‌های دیگر که در آنها شرایط مناسبی برای انتقال انرژی ازیک دستگاه به دستگاه دیگر وجود دارد تعمیم داد، حتی اگر نتوان پدیده را مانند نوسانهای واداشته تشریح کرد. از این لحاظ می‌توان حتی در واکنشهای هسته‌ای و در واکنشهایی‌که بین ذرات بنیادی صورت می‌گیرند از بازآوایی گفتگو کرد. در این معنای گسترده، مفهوم بازآوایی انرژی نقش عمده‌ای درتوضیح بسیاری از پدیده‌ها ایفا می‌کند.

۱۴.۱۲ پاگیری یک نوسانگر

یک نوسانگر با سه کمیت جرم m، ثابت کشسانی k وثابت میرایی λ مشخص می‌شود. در فرمولهای بخش ۱۳.۱۲ این‌کمیتها همیشه به‌صورت ترکیبهای ویژه‌ای با ω_f، بسامد نیروی وارده ظاهر می‌شوند.

کمیت ظاهر شده درمخرج فرمول (۶۲.۱۲) را پاگیری[1] نوسانگر می‌نامند وآن را با Z نشان می‌دهند. بنابراین

$$Z=\sqrt{(m\omega_f-k/\omega_f)^2+\lambda^2}. \qquad (۶۴.۱۲)$$

همچنین پاگیری انگاری[2] X و مقاومت[3] R با رابطه‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$X=m\omega_f-k/\omega_f \quad \text{و} \quad R=\lambda. \qquad (۶۵.۱۲)$$

درنتیجه

$$Z=\sqrt{X^2+R^2}. \qquad (۶۶.۱۲)$$

با قرار دادن این رابطه‌ها درمعادلۀ (۵۹.۱۲) به دست می‌آید

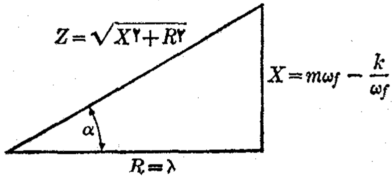
$$\operatorname{tg}\alpha=X/R. \qquad (۶۷.۱۲)$$

رابطه‌های بین Z، X و R را درشکل ۳۹.۱۲ نشان داده‌ایم، که به خاطر سپردن فرمولهای بالا را آسان می‌کند.

معادلۀ (۶۲.۱۲) نشان می‌دهد که $v_0=F_0/Z$ است وسرعت درهر لحظه با رابطۀ

$$v=\frac{F_0}{Z}\cos(\omega_f t-\alpha) \qquad (۶۸.۱۲)$$

1. impedance 2. reactance 3. resistance



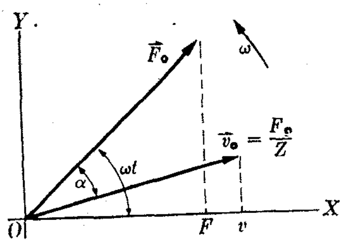
شکل ۳۹.۱۲. رابطهٔ بین پاگیری، مقاومت وپاگیری انگاری درنوسانهای واداشته

داده می‌شود. این رابطه نشان می‌دهد که نیرو و سرعت را می‌توان با بردارهـای چرخان، همانند شکل ۴۰.۱۲، نمایش داد. توجه داشته باشید کـه اگر α مثبت باشد، بردار چرخان $\vec{v}_\circ$ نسبت به بردار چرخان $\vec{F}_\circ$ تأخیر دارد، واگر α منفی باشد، بردار چرخان $\vec{v}_\circ$ نسبت به‌بردار چرخان $\vec{F}_\circ$ تقدم دارد. اگر $\alpha = \circ$ باشد، بازآوایی انرژی وجود دارد و $\vec{v}_\circ$ و $\vec{F}_\circ$ همسو می‌باشند. توان انتقال یافته به نوسانگر برابر است با

$$P = Fv = \frac{F_\circ^۲}{Z}\cos\omega_f t\cos(\omega_f t-\alpha).$$

با بسط دومین کسینوس وبا ضرب آن در کسینوس اول به دست می‌آید

$$P = \frac{F_\circ^۲}{Z}(\cos^۲\omega_f t\cos\alpha - \cos\omega_f t\sin\omega_f t\sin\alpha). \qquad (۶۹.۱۲)$$



شکل ۴۰.۱۲. رابطهٔ بین بردارهای چرخان سرعت و نیرو درنوسانهای واداشته

برای ما بیشتر توان میانگین P_{ave}، اهمیت دارد، زیرا این توان است که درمحاسبهٔ انرژیی که دریک زمان معین، به وسیلهٔ نوسانگر جذب می‌شود دخالت دارد. بنا به معادلـه‌هـای (پ.۱۳۰) و (پ.۱۴۰) داریم

$$\cos^۲\omega_f t = \frac{۱}{۲}(۱+\cos ۲\omega_f t) \quad \text{و} \quad \cos\omega_f t\sin\omega_f t = \frac{۱}{۲}\sin ۲\omega_f t.$$

همچنین

$$(\cos ۲\omega_f t)_{\text{ave}} = (\sin ۲\omega_f t)_{\text{ave}} = \circ$$

زیرا منحنیهای سینوس وکسینوس، به مقدار مساوی، درنیمی ازمدت مثبت و درنیم دیگر منفی می‌باشند. بنابراین

$$(\cos^{۲}\omega_f t)_{\text{ave}} = \frac{۱}{۲} \quad و \quad (\cos\omega_f t \sin\omega_f t)_{\text{ave}} = ۰$$

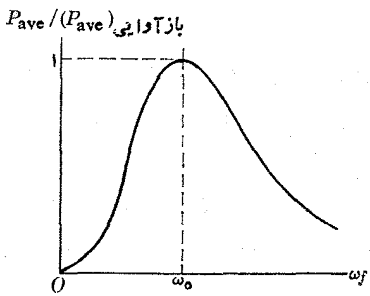
وبالاخره نتیجه می‌شود

$$P_{\text{ave}} = \frac{F_\circ^{۲}}{۲Z}\cos\alpha = \frac{۱}{۲}F_\circ v_\circ \cos\alpha = \frac{F_\circ^{۲}R}{۲Z^{۲}} = \frac{۱}{۲}Rv_\circ^{۲} \qquad (۷۰.۱۲)$$

این رابطه تأیید می‌کند کـه انتقال انرژی هنگامی بیشینه است که $v_\circ$ بیشینه باشد، زیرا R ثابت است. هنگام بازآوایی انرژی، $\alpha = ۰$ و $Z = R$ است، درنتیجه

$$(P_{\text{ave}})_{\text{بازآوایی}} = \frac{F_\circ^{۲}}{۲R}. \qquad (۷۱.۱۲)$$

شکل ۴۱.۱۲ نسبت $P_{\text{ave}}/(P_{\text{ave}})_{\text{بازآوایی}}$ را نشان می‌دهد.



شکل ۴۱.۱۲. رابطهٔ بین P_{ave} و $(P_{\text{ave}})_{\text{بازآوایی}}$

نظریهٔ مربوط به نوسانگرهای میرا و واداشته که درسه بخش اخیر فرمولبندی کردیم، گرچـه ظاهراً به یک ذرهٔ نوسانگر مربوط می‌شود، ولی برای هروضعیت فیزیکی کـه با معادله‌هایی مانند (۵۲.۱۲) یا (۵۶.۱۲) توصیف شود به کار می‌رود. بویژه، چنانکه در فصل ۱۷ (جلد دوم) خواهیم دید، مدارهای الکتریکی دقیقاً این وضع را دارند.

۱۵.۱۲ تحلیل فوریهٔ حرکت دوره‌ای

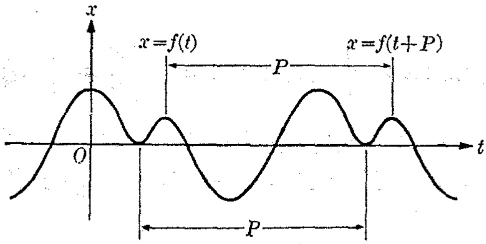
در ابتدای این فصل، گفتیم کـه حرکت هماهنگ ساده حالت خاصی از حرکت تناوبی یـا نوسانی است. ولی یک حرکت دوره‌ای، بـا دورهٔ P، درحالت کلی با رابطهٔ زیـر نشان داده می‌شود:

$$x = f(t) \qquad (۷۲.۱۲)$$

که‌در آن‌چنانکه‌شکل ۴۲.۱۲ نشان‌می‌دهد، $f(x)$ یک تابع دوره‌ای است و این خاصیت‌را داردکه

$$f(t) = f(t + P).$$

بنابراین منحنی $f(x)$ در فاصله‌های زمانی برابر P تکرار می‌شود. این حرکت نوسانی کلی را می‌توان به‌صورت ترکیبی ازحرکتهای هماهنگ ساده بیان کرد.



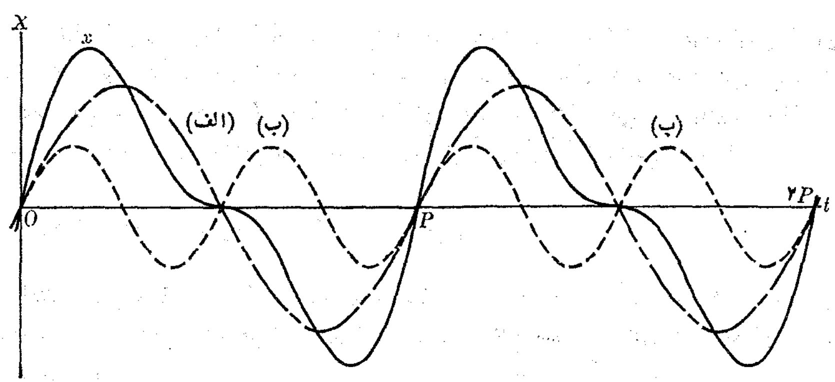
شکل ۴۲.۱۲. یک تابع دوره‌ای از زمان

ابتدا، به‌عنوان مثال، حرکتی را درنظر می‌گیریم که درآن جابجایی مطابق رابطهٔ زیر صورت می‌گیرد:

$$x = A\sin\omega t + B\sin ۲\omega t. \qquad (۷۳.۱۲)$$

این رابطه، نمایش ترکیب دوحرکت هماهنگ ساده با بسامدهای ω و ۲ω یا دوره‌های P و $P/۲$ می‌باشد. بدیهی است x نیز دوره‌ای است و دورهٔ آن نیز برابر P می‌باشد. این‌مطلب را می‌توان درنمودار شکل ۴۳.۱۲ مشاهده کرد. دراین نمودار منحنی (الف) مربوط به $\sin\omega t$ و منحنی (ب) مربوط به $\sin ۲\omega t$ است. هرچند x دوره‌ای است ولی هماهنگ ساده نیست.

اگر به معادلهٔ (۷۳.۱۲) جمله‌هایی به‌صورت $\sin ۳\omega t$، $\sin ۴\omega t$، . . .، $\sin n\omega t$



شکل ۴۳.۱۲. برهم‌نهش دوحرکت هماهنگ ساده با بسامدهای ω و ۲ω

با بسامدهای زاویه‌ای $\text{۳}\omega$، $\text{۴}\omega$، . . .، $n\omega$، . . . ودوره های $P/\text{۳}$، $P/\text{۴}$، . . . P/n، . . .، یا توابعی از کسینوس و با همین بسامدها اضافه کنیم، بازهم جابجایی x دوره‌ای ودورهٔ آن P خواهد بود، و شکل دقیق آن به تعداد تابعهای سینوسی و کسینوسی کـه اضافه کرده‌ایم و نیز به‌دامنهٔ نسبی آنها بستگی دارد.

بدین‌طریق مشاهده می‌شود که از افزودن حرکتهای هماهنگ ساده که بسامدهای آنها مضاربی از یک بسامد اصلی هستند و دامنهٔ آنها به‌طور مناسبی انتخاب شده است، می‌توان تقریباً هرتابع دوره‌ای را به‌دست آورد. عکس این مطلب که قضیهٔ فوریه[1] نامیده می‌شود نیز درست است، و در درس ریاضی آن را اثبات می‌کنند. قضیهٔ فوریه ادعا می‌کند که یک‌تابع دوره‌ای $f(t)$ با دورهٔ $P = \text{۲}\pi/\omega$ را می‌توان به‌صورت جمع توابع زیر نوشت:

$$x = f(t) = a_\circ + a_\text{۱} \cos \omega t + a_\text{۲} \cos \text{۲}\omega t + \cdots + \alpha_n \cos n\omega t$$
$$+ \cdots + b_\text{۱} \sin \omega t + b_\text{۲} \sin \text{۲}\omega t + \cdots + b_n \sin n\omega t + \cdots \quad (\text{۷۴-۱۳})$$

که به‌نام رشتهٔ فوریه معروف است. ω را بسامد اصلی و بسامدهای $\text{۲}\omega$، $\text{۳}\omega$، . . . $n\omega$، . . . را هماهنگهای آن می‌نامند.

یادداشت دربارهٔ ضرایب فوریه: ضرایب a_n و b_n از رابطه‌های

$$a_\circ = \frac{\text{۱}}{P}\int_\circ^P f(t)dt, \quad a_n = \frac{\text{۲}}{P}\int_\circ^P f(t)\cos n\omega t\, dt$$
$$b_n = \frac{\text{۲}}{P}\int_\circ^P f(t)\sin n\omega t\, dt \quad (\text{۷۵-۱۲})$$

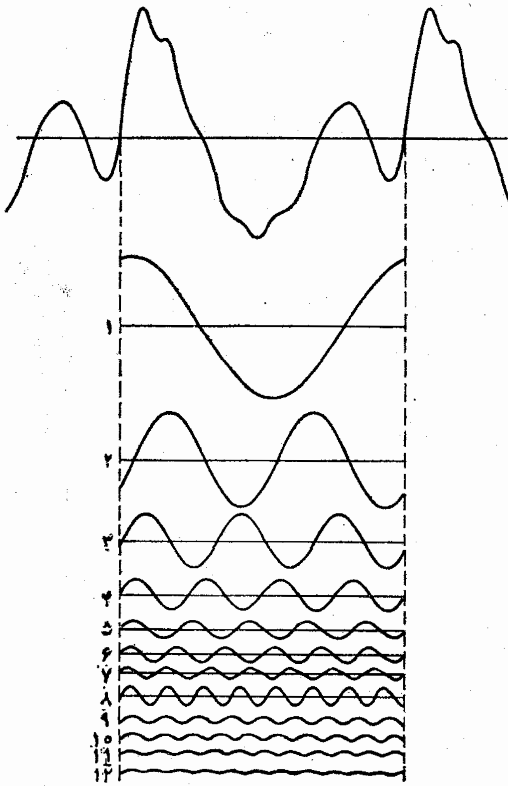
به‌دست می‌آیند. این روابط درکتابهای ریاضی اثبات می‌شوند، ولی دانشجو قادراست خود بآسانی آنها را حساب کند. به‌عنوان مثال، برای به‌دست‌آوردن a_n، دوطرف معادلهٔ (۷۴-۱۲) را در $\cos n\omega t$ ضرب می‌کنیم و ازآن انتگرال می‌گیریم. انتگرال تمام جمله‌ها به‌استثنای a_n برابر صفر است. بـرای محاسبهٔ b_n، $\sin n\omega t$ را به کار می‌بریم. (رجوع کنید به توماس، جـرج، ب. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی، تـرجمهٔ علی‌اکبر جعفریـان و ابوالقاسم میامئی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۹، بخش ۸-۱۸.)

قضیهٔ فوریه دلیل دیگری است براهمیت ویژهٔ حرکتهای هماهنگ ساده. با استفاده از ایـن قضیه، هر نوع حرکت دوره‌ای را می‌تـوان برهم‌نهش چند حرکت هماهنگ ساده در نظر گرفت. در شکل ۴۴-۱۲ حرکت دوره‌ای مربوط به منحنی رسم شده دربالای شکل، به مؤلفه‌های فوریه تجزیه شده است. دراین شکل ۱۲ هماهنگ اول مشاهده می‌شوند. همچنین قضیهٔ فوریـه کمک می‌کند کیفیت متفاوت صوتهایی را کـه بـه وسیلهٔ دستگاههای مختلف موسیقی‌ایجاد می‌شوند توضیح دهیم. یک نت معین (یا نوای[2] موسیقی) که با پیانو، گیتار، قره‌نی. . . نواخته شود درگوش ما به‌گونه‌های متفاوتی شنیده می‌شوند، هرچند بسامد اصلی

---

1. Fourier's theorem 2. tone

همهٔ آنها یکسان است. این اختلاف از وجـود هماهنگها بـا دامنه‌های نسبی متفاوت ناشی می‌شود. به‌گفتهٔ دیگر، تحلیل فوریهٔ صوت برای هردستگاه فرق می‌کند.



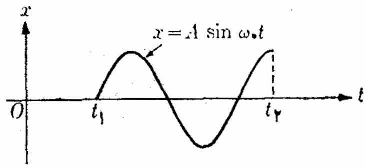
شکل ۴۴.۱۲. تحلیل فوریهٔ یک تابع دوره‌ای

روش فوریه نه‌تنها برای تجزیهٔ منحنیهای دوره‌ای مفید است، بلکه درتجزیهٔ منحنیهای غیردوره‌ای نیز از آن استفاده می‌شود. در حالتی که تابع دوره‌ای نیست، منحنی از $-\infty$ تا $+\infty$ گسترده است، و می‌توان‌فرض‌کرد که این‌فاصله یک دوره را می‌پوشاند. اختلاف اساسی بین این حالت و حالتی کـه قبلا مطالعه شد دراین است کـه به جای تجزیهٔ منحنی برحسب بیناب بامدهای ناپیوستهٔ ω، ۲ω، ۳ω، . . . و $n\omega$، باید آن‌را به‌صورت یک بیناب پیوستهٔ بسامدها تجزیه کرد. دامنهٔ مربوط به هر بسامد با تابعی از ω که به نام تبدیل فوریهٔ[1] منحنی تجزیه شده معروف است به دست می‌آیـد. اکنون بدون اینکه وارد جزئیات ریاضی شویم مثالی را ذکر می‌کنیم.

فرض کنیم یک منحنی درفاصله زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ با معادلهٔ $x = A\sin\omega_\circ t$ داده شده است و چنانکه شکل ۴۵.۱۲ نشان می‌دهـد، در هرنقطهٔ دیگری برابر صفر است. از لحاظ فیزیکی، این‌امر مربوط به‌حالتی است که جسمی دفعتاً درلحظهٔ $t = t_۱$ شروع به‌نوسان کند

1. Fourier transform

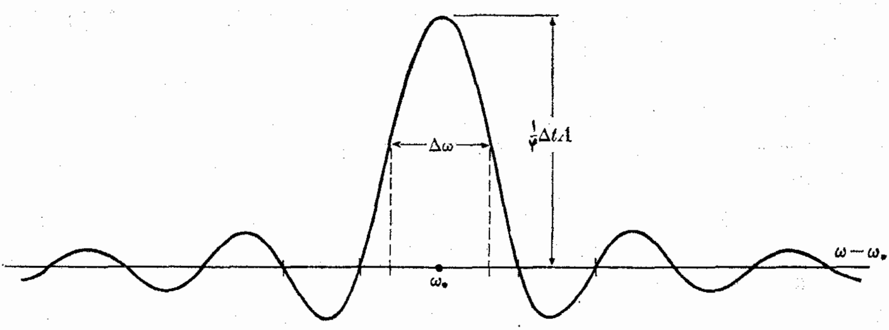
و ناگهان درلحظهٔ $t = t_{۲}$ بایستد. این پدیده گاهی تپه[1] نیز نامیده می‌شود.



شکل ۴۵.۱۲. تپهٔ نوسانی محدود

اگر منحنی از $-\infty$ تا $+\infty$ ادامه می‌داشت، کاری به‌تحلیل فوریه نداشتیم، زیرا منحنی یک تابع هماهنگ با بسامد $\omega_{\circ}$ می‌شد. ولی بـرای حذف منحنی به ازای $t < t_{۱}$ یا $t > t_{۲}$، باید بسامدهای دیگری به‌منحنی افزود تا رشتهٔ فوریه دراین دوناحیه برابر صفر شود. بدین طریق هر تپهٔ محدود از چندین بسامد تشکیل شده است، حتی اگر چشمهٔ مرتعش دارای یک بسامد کاملا معین باشد. می‌توان ثابت کرد که نیمرخ (پروفیل) دامنه به‌صورت تابعی از ω (یا تبدیل فوریهٔ دامنه) مربوط به تپه با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$F(\omega) = \frac{۱}{۴} A \Delta t \left[\frac{\sin[(\omega - \omega_{\circ})\Delta t/۲]}{(\omega - \omega_{\circ})\Delta t/۲} \right]$$



شکل ۴۶.۱۲. تحلیل (یا تبدیل) فوریهٔ تپهٔ شکل ۴۵.۱۲

که درآن $\Delta t = t_{۲} - t_{۱}$ است. نیمرخ دامنه درشکل ۴۶.۱۲ نشان داده شده است. به‌ازای $\omega = \omega_{\circ}$، داریـم $F(\omega_{\circ}) = A\Delta t/۴$. چون صورت کسر در رابطهٔ فوق هـرگـز بزرگتر از یک نمی‌شود، هنگامی کـه قدرمطلق اختلاف $(\omega - \omega_{\circ})$ افـزایش پیدا می‌کند، مقدار $F(\omega)$ به‌گونهٔ نوسانی کاهش می‌یابد. گسترهٔ مقادیر ω که برای آنها $F(\omega)$ از ۵۰٪ مقدار آن به‌ازای $\omega = \omega_{\circ}$ بزرگتر باشد تقریباً به‌شرایط زیر مربوط می‌شود:

$$\left| \frac{۱}{۲} (\omega - \omega_{\circ}) \Delta t \right| < \frac{\pi}{۲} \quad \text{یا} \quad -\frac{\pi}{\Delta t} < \omega - \omega_{\circ} < \frac{\pi}{\Delta t}.$$

بدین‌طریق اگر $\Delta\omega$ را برابر $۲\pi/\Delta t$ قرار دهیم، نتیجه می‌گیریم کـه تنها بسامدهایی کـه

---

1. pulse

دامنه‌هایشان قابل ملاحظه می‌باشند، بسامدهایی هستند که در گسترهٔ $\Delta\omega$ درپیرامون $\omega_{\circ}$ قرار دارند و با رابطهٔ زیر داده می‌شوند:

$$\Delta\omega\,\Delta t \sim ۲\pi.$$

این رابطه نشان می‌دهد کـه هرچه فاصله زمانی کوتاهتر باشد، گسترهٔ بسامدهای لازم برای نمایش درست تپه بزرگتر است.

فهرست منابع

1. «Restless Harmonic Oscillator», M. Hane; *Am. J. Phys.* 30, 84 (1962).
2. «An Unusual Method of Solving the Harmonic Oscillator Problem», R. Weinstock; *Am. J. Phys.* 29, 830 (1961).
3. «Precision Measurement of Period vs. Amplitude for a Pendulum», M. Smith; *Am. J. Phys.* 32, 632 (1964).
4. «Exact Normal Modes of Oscillation of a Linear Chain of Identical Particles», J. Louch; *Am. J. Phys.* 30, 585 (1962).
5. *Waves and Oscillations,* R. Waldron. Princeton, N. J.: Van Nostrand, Momentum Books, 1964.
6. *Physical Mechanics* (third edition), by R. Lindsay. Princeton, N.J.: Van Nostrand, 1963, Chapter 9.
7. *Introduction to Engineering Mechanics*, by J. Huddleston. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961, Chapter 14.
8. *Vector Mechanics,* by D. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964, Chapters 8, 19, and 20.
9. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, by R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chaters 21 through 25, 49, and 50.
10. *Source Book in Physics,* W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 1, Galileo; page 93, Hooke; page 95, Young.
11. سایمون، کیث، ر. مکانیک، ترجمهٔ اعظم نیرومندراد وغلامحسین همدانی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۴، بخشهای ۲ـ۷ تا ۲ـ۱۱، ۳ـ۱۰ و ۴ـ۱۰.

مسئله‌ها

۱۰۱۲. به لبهٔ چرخی به شعاع $۳۰\,\text{cm}$ دستگیره‌ای متصل است. چرخ با سرعت ۵ر۰ دور در ثانیه دور محور افقی خود می‌چرخد. بـه فرض اینکه پرتوهای آفتاب در راستای قایم بر زمین بتابند، سایهٔ دستگیره یک حرکت هماهنگ ساده رسم می‌کند. (الف) دورهٔ حرکت سایه، (ب) بسامد، و (ج) دامنهٔ آن را پیـداکنید. معادلـه‌ای بنویسید کـه جابجایی را به صورت تابعی از زمان به دست دهد. فاز اولیه را صفر بگیرید.

۲۰۱۲. ذره‌ای بایک حرکت هماهنگ ساده به‌دامنهٔ $۰۱۰\,\text{m}$ ر۰ و دورهٔ $۲\,\text{s}$ جابجا می‌شود.

جدولی رسم کنیدکه بعد، سرعت وشتاب را در زمانهای ۰، $P/۸$، $۳P/۸$، $P/۲$، $۵P/۸$، $۳P/۴$، $۷P/۸$ و P مشخص کند. منحنیهای نمایش بعد، سرعت و شتاب را به صورت توابعی از زمان رسم کنید.

۳.۱۲. یک نوسانگر هماهنگ ساده با معادلهٔ $x = ۴\sin(۰٫۱t + ۰٫۵)$ نشان داده می‌شود که درآن تمام کمیتها در دستگاه یکاهای MKS هستند. (الف) دامنه، دوره، بسامد و فاز اولیهٔ حرکت، (ب) سرعت‌وشتاب، (ج)شرایط اولیه، (د) مکان، سرعت‌وشتاب را به‌ازای $t = ۵$ s پیدا کنید. منحنی نمایش مکان، سرعت وشتاب را به‌صورت توابعی از زمان رسم کنید.

۴.۱۲. ذره‌ای واقع در انتهای یکی از شاخه‌های یک دیاپازون با سرعتی برابر با $۲\text{ms}^{-۱}$ از وضع تعادل خود می‌گذرد. دامنهٔ آن $۱۰^{-۳}\text{ m}$ است. دوره و بسامد دیاپازون چقدر است؟ معادلهٔ حرکت دیاپازون را به صورت تابعی از زمان بنویسید.

۵.۱۲. ذره‌ای به‌جرم ۱g با یک حرکت هماهنگ به دامنهٔ ۲mm درحال ارتعاش است. شتاب آن در انتهای مسیر برابر است با $۸٫۰ \times ۱۰^{۳}\text{ms}^{-۲}$. بسامد حرکت و سرعت ذره را هنگامی که از وضع تعادل و هنگامی که از نقطه‌ای به فاصلهٔ ۱٫۲ mm ازآن می‌گذرد حساب کنید. معادلهٔ نیروی وارد بر ذره را به صورت تابعی ازمکان آن ونیز به‌صورت تابعی از زمان بنویسید.

۶.۱۲. ذره‌ای با بسامد ۱۰۰ Hz و دامنهٔ ۳ mm ارتعاش می‌کند. سرعت و شتاب آن را در وسط و در دو انتهای مسیر حساب کنید. معادله‌ای بنویسید که بعد را به صورت تابعی از زمان به دست دهد. فاز اولیه را صفر بگیرید.

۷.۱۲. ذره‌ای که دارای یک حرکت هماهنگ ساده بـه دامنهٔ ۱٫۵ m است در هر ثانیه ۱۰۰ بار ارتعاش می‌کند. بسامد زاویه‌ای آن چقدر است؟ (الف) سرعت، (ب) شتاب آن را حساب کنید. (ج) هنگامی که جابجایی ۰٫۷۵ m است فاز را به دست آورید.

۸.۱۲. حرکت سوزن یک چرخ خیاطی عملا هماهنگ ساده است. اگردامنهٔ آن ۰٫۳ cm و بسامد آن ۶۰۰ نوسان در دقیقه باشـد، بعد، سرعت و شتاب سوزن ۱/۳۰ ثانیه پس از عبور ازوسط مسیر (الف) بـه سمت بالا یا در سوی مثبت، (ب) به سمت پایین یا در سوی منفی، چقدر است؟

۹.۱۲. یک حرکت هماهنگ ساده دارای ۸ cm دامنه ودوره‌ای برابر ۴ s است. سرعت و شتاب ذره را ۰٫۵ s بعد از عبور از انتهای مسیر حساب کنید.

۱۰.۱۲. در مسئلهٔ ۲.۱۲، به فرض اینکه جرم ذره ۰٫۵ kg باشد، انرژی جنبشی، پتانسیل وکل را برای همان مقادیر t حساب کنید. مشاهده خواهیدکرد که انرژی‌کل ثابت باقی‌می‌ماند. منحنیهای نمایش انرژی جنبشی و پتانسیل را (الف) برحسب زمان، (ب) برحسب مکان ذره رسم کنید. چه نتیجه‌ای ازآن می‌گیرید؟

۱۱.۱۲. ذره‌ای به‌جرم ۰٫۵۰ kg به صورت هماهنگ ساده حرکت می‌کند. دورهٔ حرکت آن ۰٫۱ s و دامنهٔ آن ۱۰ cm است. شتاب، نیرو، انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی آن را هنگامی که ۵ cm از وضع تعادل فاصله دارد حساب کنید.

۱۲.۱۲. ذره‌ای به جرم m بر اثر نیروی $F = -kx$ در راستای محور Xها حرکت می‌کند. هنگامی که $t = ۲s$ است ذره از مبدأ می‌گذرد وهنگامی که $t = ۴s$ باشد سرعت آن $۴\,ms^{-۱}$ می‌شود. معادلهٔ بعد را پیدا کنید ونشان دهید که اگردورهٔ نوسان $۱۶\,s$ باشد، دامنهٔ حرکت برابر می‌شود با $۳۲\sqrt{۲}/\pi$.

۱۳.۱۲. یک تختهٔ افقی با حرکت هماهنگ ساده با دامنهٔ $۱٫۵\,m$ درراستای افقی جابجا می‌شود. اگر صفحه ۱۶ باردردقیقه نوسان‌کند، حداقل مقدارضریب مالشی را که مانع لغزش یک جسم واقع روی تخته در هنگام حرکت تخته می‌شود حساب کنید.

۱۴.۱۲. با سوار شدن مردی به جرم $۶۰\,kg$ دریک اتومبیل، مرکزجرم اتومبیل $۰٫۳cm$ پایین می‌رود. ثابت کشسانی فنرهای اتومبیل چقدر است؟ اگر جرم اتومبیل $۵۰۰\,kg$ باشد، دورهٔ ارتعاشات اتومبیل را هنگامی که خالی است، و هنگامی که راننده سوار شده است، حساب کنید.

۱۵.۱۲. چگالی یک قطعه‌چوب به‌ابعاد a، b و c، نسبت به‌آب برابر ρ است. آن‌راطوری روی آب قرار می‌دهیم که ضلع a در راستای قایم باشد. سپس آن را به داخل آب فرو می‌بریم و رها می‌کنیم. دورهٔ نوسانهای حاصل را پیدا کنید.

۱۶.۱۲. یک ذره به گونه‌ای حرکت می‌کند که مختصات آن برحسب زمان عبارتند از $x = v_{۰}t$، $y = y_{۰}\sin\omega t$. (الف) x و y را برحسب زمان رسم کنید. (ب) مسیر ذره را رسم کنید. (ج) نیروی لازم جهت ایجاد این حرکت چقدراست؟ (د) بزرگی سرعت وشتاب آن را به صورت توابعی از زمان به دست آورید.

۱۷.۱۲. دریک حرکت هماهنگ ساده، مقدار $(x)_{ave}$ و $(x^{۲})_{ave}$ را به‌دست‌آورید. میانگین نسبت به زمان گرفته می‌شود.

۱۸.۱۲. مقدار میانگین انرژی پتانسیل و جنبشی یک حرکت هماهنگ ساده را نسبت به (الف) زمان، (ب) مکان پیدا کنید.

۱۹.۱۲. دورهٔ یک آونگ $۳\,s$ است. اگر طول آونگ ۶۰ درصد (الف) زیاد، (ب) کم شود، دورهٔ آونگ چقدر می‌شود؟

۲۰.۱۲. هنگامی که $g = ۹٫۸۰\,ms^{-۲}$ است دورهٔ آونگ یک ساعت‌دیواری $۲\,s$ است. اگرطول آونگ $۱\,mm$ افزایش یابد، ساعت بعد از پایان ۲۴ ساعت چقدرعقب می‌ماند؟

۲۱.۱۲. اگر ساعت مسئلهٔ پیش را بدون تغییر طول آونگ آن، به محلی که در آنجا $g = ۹٫۷۵\,ms^{-۲}$ است ببرند، در ۲۴ ساعت چقدر به عقب می‌ماند؟ طول آونگ چقدر باید باشد تا ساعت در محل جدید زمان درست را نشان دهد؟

۲۲.۱۲. درصد تغییر طول یک آونگ چقدر باید باشد تا اگر از محلی که در آنجا $g = ۹٫۸۰\,ms^{-۲}$ است به محلی با $g = ۹٫۸۱\,ms^{-۲}$ برده شود دورهٔ آونگ تغییر نکند؟

۲۳.۱۲. دامنهٔ یک آونگ ساده چقدر باید باشد تا از معادلهٔ (۱۵.۱۲) دورهٔ آونگ

با دقت بیش از ۲٪ به دست آید؟

۲۴.۱۲. یک آونگ ساده بـه طول $2\,\mathrm{m}$ در محلی با $g = 9{,}80\,\mathrm{ms^{-2}}$ قرار دارد. آونگ با دامنهٔ 2° نوسان می‌کند. (الف) جابجایی زاویه‌ای، (ب) سرعت زاویه‌ای، (ج) شتاب زاویه‌ای، (د) سرعت خطی، (ه) شتاب مرکـز گرا، و (و) کشش نخ را، بـه صورت توابعی از زمان بنویسید. جرم وزنهٔ آونگ $1\,\mathrm{kg}$ است.

۲۵.۱۲. آونگی به‌طول $1{,}00\,\mathrm{m}$ راکه جرم وزنهٔ آن $0{,}60\,\mathrm{kg}$ است در طول یک‌کمان تا $4\mathrm{cm}$ بالای وضع ترازمندی خود بالا می‌بریم وسپس رها می‌کنیم. نیروی مماس بر مسیر، شتاب مماسی، سرعت و جابجایی زاویه‌ای آونگ را درهنگام نوسان به صورت توابعی از ارتفاع آونگ بیان‌کنید. مقادیرعددی کمیتهای بالا راهنگامی‌که آونگ به‌بیشینهٔ دامنه می‌رسد وهنگامی که درپایینترین نقطهٔ مسیرخود قراردارد پیدا کنید. دامنهٔ زاویه‌ای‌آن را حساب کنید.

۲۶.۱۲. آونگ مسئلهٔ پیش را آنقدر بالا می‌بریم تا با راستای قایم زاویهٔ 30° بسازد و سپس رها می‌کنیم. آیا می‌توان حرکت آن را هماهنگ ساده در نظر گرفت؟ (الف) شتاب، (ب) سرعت، و (ج) کشش نخ را هنگامی کـه جابجایی زاویه‌ای آونگ 15° است و نیز هنگامی از نقطهٔ ترازمندی می‌گذرد حساب کنید.

۲۷.۱۲. مرتبهٔ بزرگی نسبی دو جملهٔ تصحیحی اول رشتهٔ مربوط به دورهٔ یک‌آونگ ساده را، اگر دامنهٔ آن (الف) 10°، (ب) 30° باشد، برآورد کنید.

۲۸.۱۲. با مراجعه به‌آونگ مثال ۷.۱۲، بیشینهٔ مقدار R/l را برای اینکه جملهٔ تصحیحی در رابطهٔ دورهٔ آونگ از ۱٪ تجاوز نکند، پیدا کنید.

۲۹.۱۲. میله‌ای به طول $1\,\mathrm{m}$ از یک انتهای خود به گونه‌ای‌آویزان شده که یک‌آونگ مرکب را تشکیل می‌دهد. دوره و طول آونگ سادهٔ هم‌ارز آن را پیـدا کنید. اگر میله از محوری آویزان شود که فاصلهٔ آن از یک انتها برابر طول‌آونگ سادهٔ هم‌ارز باشد کـه قبلا به‌دست آوردیم، دورهٔ آن را پیدا کنید.

۳۰.۱۲. دیسکی به‌شعاع R را می‌توان ازیک محور افقی به فاصلهٔ h ازمرکز آن‌آویزان کرد. (الف) طول آونگ سادهٔ هم‌ارز آن‌را به دست‌آورید. (ب) جای محوری راکه برای آن دورهٔ آونگ کمینه است پیدا کنید. (ج) منحنی نمایش‌دوره را برحسب h رسم کنید.

۳۱.۱۲. میله‌ای به طول L دور یک محور افقی کـه از یک انتهـای آن می‌گذرد نوسان می‌کند. جسمی کـه هم وزن میله‌ای است در فاصلهٔ h از محور می‌تواند بـه میله وصل شود. (الف) دورهٔ دستگاه را به صورت تابعی L و h پیدا کنید. (ب) آیا مقداری برای h وجود داردکه به ازای آن دورهٔ دستگاه برابر دورهٔ آونگ قبل از اتصال جسم به آن باشد؟

۳۲.۱۲. جسم جامدی به شکل مکعب به ضلع a می‌تواند دوریک محور افقی که بر یکی از یالهایش منطبق است نوسان کند. دورهٔ آن را پیدا کنید.

۳۳.۱۲. یک آونگ پیچشی که از یک قطعه چوب به ضلعهای $3\,\mathrm{cm}$، $12\mathrm{cm}$ و $8\mathrm{cm}$ و به جرم $0{,}3\,\mathrm{kg}$ تشکیل شـده است، توسط نخی که از مرکز آن می‌گذرد بـه گونـه‌ای

آویزان شده است که کوتاهترین ضلع آن در راستای قایم قرار می‌گیرد. دورهٔ نوسانهای پیچشی ۲٫۴s است. κ ثابت پیچشی نخ چقدر است؟

۳۴.۱۲. با مراجعه به شکل ۱۱.۱۲، ثابت کنید که اگر K_C شعاع ژیراسیون نسبت به یک محور موازی باشد که ازمرکز جرم یک آونگ مرکب می‌گذرد، طول آونگ سادهٔ هم‌ارز برابراست با $l = (K_C^2/b) + b$. [راهنمایی: برای ارتباط دادن شعاع ژیراسیون به‌مرکز جرم ازقضیهٔ اشتاینر استفاده کنید.]

۳۵.۱۲. با به کار بردن نتیجهٔ مسئلهٔ پیش، ثابت کنید که طول آونگ سادهٔ هم‌ارز یک آونگ مرکب (بخش ۶.۱۲) برابر است با فاصلهٔ مرکز ضربه (مسئلهٔ ۲۸.۱۰) تا نقطهٔ آویز، اگر ضربه به نقطهٔ C وارد شود.

۳۶.۱۲. اگر یک آونگ مرکب به جای نقطهٔ O دور نقطهٔ O' نوسان کند (شکل ۱۱.۱۲) ثابت کنید که دورهٔ آن وهمچنین طول آونگ ساده هم‌ارز آن تغییر نمی‌کند.

۳۷.۱۲. معادلهٔ حرکت برآیند حاصل از برهم‌نهش دوحرکت هماهنگ سادهٔ موازی، به‌معادله‌های $x_1 = 6\sin 2t$ و $x_2 = 8\sin(2t+\alpha)$ را هنگامی‌که α برابر ۰، $\pi/2$ و π باشد پیدا کنید. درهرمورد، منحنی نمایش هرحرکت وحرکت برآیند را رسم کنید.

۳۸.۱۲. معادلهٔ حرکت برآیند حاصل ازبرهم‌نهش دوحرکت هماهنگ سادهٔ موازی، به معادله‌های

$$x_1 = 2\sin(\omega t + \pi/3)$$

و

$$x_2 = 3\sin(\omega t + \pi/2)$$

را پیدا کنید. منحنی نمایش هرحرکت وحرکت برآیند را رسم کنید. بردار چرخان مربوط به هرکدام را رسم کنید.

۳۹.۱۲. معادلهٔ مسیر حرکت برآیند حاصل ازبرهم‌نهش دوحرکت هماهنگ سادهٔ عمود برهم به معادله‌های $x = 4\sin\omega t$ و $y = 3\sin(\omega t + \alpha)$ راهنگامی که α برابر ۰، $\pi/2$ و π باشد، پیداکنید. درهر مورد نمودار مسیرذره را رسم وسوی حرکت را مشخص کنید.

۴۰.۱۲. با حذف سازهٔ زمان بین معادله‌های (۳۰.۱۲) و (۳۱.۱۲)، ثابت کنید که معادلهٔ عمومی مسیر عبارت است از

$$x^2/A^2 + y^2/B^2 - 2xy\cos\delta/AB = \sin^2\delta.$$

نشان دهید که رابطهٔ بالا، معادلهٔ یک بیضی است که محور های آن با محورهای XY زاویه می‌سازند. [راهنمایی: هرمعادله‌ای ازنوع $ax^2 + bxy + cy^2 = k$ معادلهٔ یک بیضی است اگر $b^2 - 4ac < 0$ باشد.]

۴۱.۱۲. ثابت کنید که در بیضی مسئلهٔ ۴۰.۱۲ برحسب اینکه $\pi > \delta > 0$ یا $2\pi > \delta > \pi$ باشد، مسیردرسوی ساعتگرد یا پاد ساعتگرد پیموده می‌شود.

۴۲.۱۲. معادلهٔ مسیر حرکت ذره‌ای را که به آن دوحرکت هماهنگ سادهٔ عمود برهم اعمال می‌شود پیدا کنید. می‌دانیم که $\omega_1/\omega_2 = 1/2$ و α برابر ۰، $\pi/3$ و $\pi/2$ است. درهرمورد نمودار مسیر حرکت را رسم وجهت حرکت را مشخص کنید.

۴۳.۱۲. باجانشین‌کردن‌مستقیم درمعادلهٔ(۳۷.۱۲) نشان‌دهیدکه‌رابطه‌های(۱۲، ۳۸)، به‌شرطی که $\omega = \sqrt{k_1/m_1}$ باشد، نوسانهای بهنجار هستند. اگر $\omega = \sqrt{(2k_1 + k)/m_1}$ باشد، همین عملیات را درمورد نوسانهای بهنجار (۴۰.۱۲) انجام دهید.

۴۴.۱۲. در برهم‌کنش بین اتمهای یک مولکول دواتمی، انرژی پتانسیل را می‌توان با تقریب خوبی با پتانسیل مورس[1]، $E(r) = D[1 - e^{-a(r-r_0)}]^2$، نشان داد. دراین رابطه D، a و r_0 ثابتهای مشخصهٔ مولکول هستند. (الف) نمودار پتانسیل را رسم کنید و مکان ترازمندی را پیدا کنید. (ب) این تابع را به صورت رشته‌ای از توانهای $(r - r_0)$ بسط دهید ونسبت جملهٔ اول ناهماهنگی را برجملهٔ هماهنگی پیدا کنید. (ج) بسامد ارتعاش نسبی دو اتم با انرژی کم را برحسب D و a پیدا کنید. [راهنمایی: برای بسط تابع نمایی از معادلهٔ (پ.۲۳) استفاده کنید.]

۴۵.۱۲. برای یک نوسانگر میرا، مقادیر A و α را برحسب x_0 و v_0 پیدا کنید وآنها را درحالتی که $v_0 = 0$ باشد به کار ببرید.

۴۶.۱۲. با جانشین کردن مستقیم، تحقیق کنید هنگامی که $\gamma > \omega_0$ باشد، پاسخ معادلهٔ (۵۲.۱۲) برای یک نوسانگر میرا عبارت است از $x = Ae^{-(\gamma+\beta)t} + Be^{-(\gamma-\beta)t}$، که دراینجا $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ است. اگر به ازای $t = 0$ داشته باشیم $x = x_0$ و $v = 0$، مقادیر A و B را پیدا کنید. منحنی نمایش x را برحسب t رسم کنید.

۴۷.۱۲. هنگامی که $\omega_0 = \gamma$ باشد پاسخ معادلهٔ (۵۴.۱۲) به چه صورتی در می‌آید؟ با جانشین کردن مستقیم تحقیق کنید که دراین حالت پاسخ عمومی معادلهٔ (۵۲.۱۲) عبارت است از $x = (A + Bt)e^{-\gamma t}$. دراین صورت گفته می‌شود که نوسانگر در میرایی بحرانی[2] است. اگر به ازای $t = 0$ داشته باشیم $x = x_0$ و $v = 0$، A و B را پیدا کنید. نمودار x را برحسب t رسم کنید. چه فرقی بین این مسئله و مسئلهٔ پیش مشاهده می‌کنید؟

۴۸.۱۲. ثابت کنید که دریک حرکت نوسانی میرا سرعت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$v = A'e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \alpha + \delta).$$

دراین رابطه $A' = A\omega_0$ و $\operatorname{tg}\delta = -\omega/\gamma$ است.

۴۹.۱۲. دورهٔ یک آونگ ساده ۲s و دامنهٔ آن 2° می‌باشد. بعد از ۱۰ نوسان کامل، دامنهٔ آن به $1{,}5^\circ$ کاهش می‌یابد. ثابت میرایی γ را پیدا کنید.

۵۰.۱۲. مقادیر حدی دامنه وفاز یک نوسانگر واداشتهٔ میرا را هنگامی که (الف) ω_f خیلی کوچکتر از ω_0 است، (ب) ω_f خیلی بزرگتر از ω_0 است، پیدا کنید. در هرمورد،

---
1. Morse potential 2. critically damped

عاملی را که نقش مهمتری دارد تعیین کنید.

۵۱.۱۲ ثابت کنید که برای نوسانهای واداشتهٔ یک نوسانگر میرا، توان میانگین نیروی وارد شده با توان میانگین تلف شده توسط نیروی ناشی ازمیرایی برابر است.

۵۲.۱۲ با مراجعه به‌آونگ مسئلهٔ ۴۹.۱۲، توان لازم برای ثابت نگه داشتن دامنهٔ نوسانها را حساب کنید. جرم آونگ $1\,\mathrm{kg}$ است.

۵۳.۱۲ در مورد یک نوسانگر میرا، کمیت $\tau = 1/2\gamma$ زمان واهلش[1] نامیده می‌شود. (الف) تحقیق کنیدکه τ برحسب یکای زمان بیان می‌شود. (ب) تغییردامنهٔ یک نوسانگر بعداز زمان τ چقدر است؟ (ج) زمان لازم را برای اینکه دامنه به نصف مقدار اولیهٔ خود برسد، به صورت تابعی از τ پیدا کنید. (د) مقدار دامنه درانتهای زمانی مساوی با دو، سه، . . . برابر مقدار به دست آمده درسؤال (ج) چقدر است؟

۵۴.۱۲ فرض کنید که برای یک نوسانگر میرا، γ درمقابل ω_0 خیلی کوچک باشد، به گونه‌ای که دامنه در مدت یک نوسان اساساً ثابت بماند. (الف) تحقیق کنید که انرژی این نوسانگر میرا را می‌توان به‌صورت $E = m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t}/2$ نوشت. (ب) میانگین اتلاف توان با رابطهٔ $P = -dE/dt$ تعریف می‌شود. ثابت کنید که $P = 2\gamma E = E/\tau$. (ج) ثابت کنید که این اتلاف توان با کار نیروی میرایی در واحد زمان برابر است.

۵۵.۱۲ دریک نوسانگر واداشته، هنگامی که پاگیری انگاری با مقاومت برابر است، $X = \pm R$ یا $\omega_0^2 - \omega_f^2 = \pm 2\gamma\omega_f$، ثابت کنید که $P_{\text{ave}} = (P_{\text{ave}})_{\text{بازآوایی}}/2$. اختلاف $(\Delta\omega)_{1/2}$ بین دو مقدار ω_f در این حالت، پهنای نوار[2] نوسانگر و نسبت $Q = \omega/(\Delta\omega)_{1/2}$ مقدار Q نوسانگر نامیده می‌شود. ثابت کنید که درمیراییهای ضعیف $(\Delta\omega)_{1/2} = 2\gamma$ و درنتیجه $Q = \omega_0/2\gamma$ است. [راهنمایی: ازمعادله‌های (۷۰.۱۲) و (۷۱.۱۲) با مقادیر مناسب برای R و Z استفاده کنید.]

۵۶.۱۲ (الف) مقدار میانگین انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانهای واداشتهٔ یک نوسانگر میرا را پیدا کنید. (ب) نسبت مجموع این دوانرژی را برکار انجام شده توسط نیروی وارد درطول یک دوره حساب کنید. این سازه برای نشان دادن عملکرد نوسانگر بسیار مفید است. ثابت کنید که درمیراییهای ضعیف، این سازه برابر است با $Q/2\pi$. (مسئلهٔ ۵۵.۱۲ را ببینید.)

۵۷.۱۲ معادلهٔ حرکت یک نوسانگر هماهنگ سادهٔ نامیرا را که نیروی $F = F_0 \cos\omega_f t$ برآن وارد می‌شود، بنویسید. تحقیق کنید که پاسخ آن عبارت است از

$$x = [F_0/m(\omega_0^2 - \omega_f^2)]\cos\omega_f t.$$

دراین حالت بازآوایی را مطالعه کنید.

۵۸.۱۲ ثابت کشسانی فنرهای شکل ۴۷.۱۲ بترتیب برابرند با k_1 و k_2. ثابت کشسانی

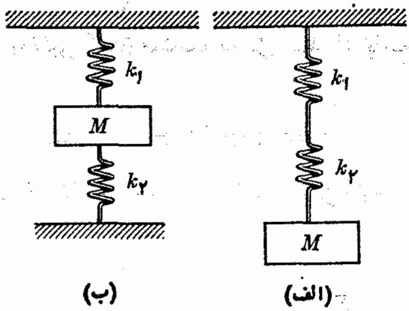
---

1. relaxation time 2. bandwidth

دستگاه دوفنر، k، را درحالتهای (الف) و (ب) پیدا کنید.

۵۹.۱۲ ذره‌ای بدون مالش بین دوصفحهٔ شیب‌دار (شکل ۴۸.۱۲) حرکت رفت و برگشت انجام می‌دهد. (الف) اگر ارتفاع اولیهٔ ذره h باشد، دورهٔ حرکت را پیدا کنید. (ب) آیا حرکت نوسانی است؟ (ج) آیا حرکت هماهنگ ساده است؟

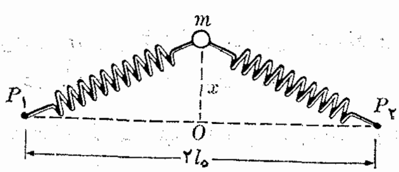
شکل ۴۸.۱۲



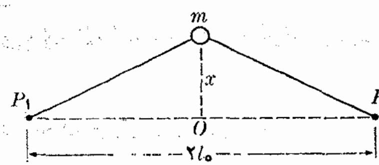
شکل ۴۷.۱۲

۶۰.۱۲ ذره‌ای به جرم m که روی یک میز افقی بدون مالش قرار دارد (شکل ۴۹.۱۲)، توسط دو نخ کشیده با طولهای برابر l_0 که انتهای دیگر نخها در نقطه‌های P_1 و P_2 ثابت شده‌اند نگه‌داری می‌شود. کشش نخهـا برابر T است. اگر ذره را به اندازهٔ x_0 که نسبت به طول نخهـا کوچک است، کشیده وسپس رهـا کنند، حرکتی که از این کار نتیجه می‌شود چیست؟ بسامد نوسان را پیدا کنید ومعادلهٔ حرکت را بنویسید. فرض کنید کـه طول و کشش نخها تغییر نمی‌کنند.

۶۱.۱۲ درشکل ۵۰.۱۲ ذره درشرایطی مشابه با مسئلهٔ پیش قرار گرفته است، ولی با دو فنر که ثابت کشسانی هرکـدام k وطول طبیعی آنهـا l_0 است نگه‌داری می‌شود. اطلاعات خواسته شده درمسئلهٔ پیش را به دست آورید. توجه کنید کـه در اینجا افزایش طول فنرها را باید به حساب آورد.



شکل ۵۰.۱۲



شکل ۴۹.۱۲

۶۲.۱۲ مسئلهٔ پیش را، به فرض اینکه جابجایی ذره درطول P_1P_2، مطابق شکل ۵۱.۱۲ صورت گیرد، ازنو حل کنید.

۶۳.۱۲ ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیرویی مطابق شکل ۵۲.۱۲ قـرار دارد، که موج

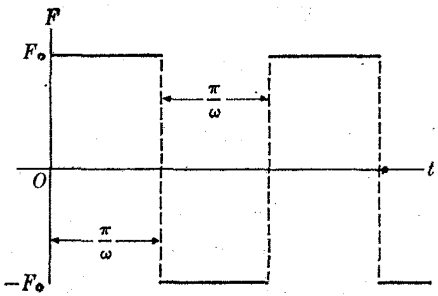
مربعی نامیده می‌شود، یعنی بزرگی نیرو ثابت است ولی سوی آن درفاصله‌های زمانی منظم π/ω معکوس می‌شود. این نیرو را توسط رشتهٔ فوریه به صورت زیر می‌توان نشان داد:

$$F = F_{\circ}(۴/\pi)\left(\sin\omega t + \frac{۱}{۳}\sin\omega t + \frac{۱}{۵}\sin ۵\omega t + \cdots\right).$$

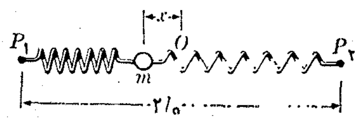
(الف) معادلهٔ حرکت ذره را بنویسید. (ب) با جانشین کردن مستقیم، تحقیق کنید که پاسخ آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x = a + bt + A\sin\omega t + B\sin ۳\omega t + C\sin ۵\omega t + \cdots$$

که درآن a و b ثابتهای اختیاری‌اند. ضرایب A، B، C، . . . را به گونه‌ای تعیین کنید که درمعادلهٔ حرکت صدق کنند.



شکل ۵۲.۱۲



شکل ۵۱.۱۲

۶۴.۱۲. به یک نوسانگر هماهنگ با بسامد طبیعی $\omega_\circ$ نیرویی برابر با نیروی مسئلهٔ پیش اثر می‌کند. (الف) معادلهٔ حرکت را بنویسید. (ب) با جانشین کردن مستقیم، تحقیق کنید که پاسخ آن را می‌توان به صورت

$$x = a\sin(\omega_\circ + \alpha) + A\sin\omega t + B\sin ۳\omega t + C\sin ۵\omega t + \cdots$$

نوشت. a و α ثابتهای اختیاری‌اند. مقدار ضرایب A، B، C، . . . را به گونه‌ای تعیین کنید که درمعادلهٔ حرکت صدق کنند.

۶۵.۱۲. ثابت کنید که انرژی پتانسیل یک آونگ را می‌توان به صورت

$$E_p = ۲mgl\sin^۲\frac{\theta}{۲}$$

نوشت. سپس با به کار بردن معادلهٔ (۱۳.۱۲) نشان دهید که

$$P = \sqrt{l/g}\int_{\circ}^{\theta_\circ} d\theta \Big/ \sqrt{\sin^۲\tfrac{۱}{۲}\theta_\circ - \sin^۲\tfrac{۱}{۲}\theta}\,.$$

این انتگرال را نمی‌توان برحسب توابع مقدماتی[1] نوشت. درانتگرال به گونه‌ای تغییر متغیر می‌دهیم که $\sin\theta/۲ = \sin\psi \sin\theta_{\circ}/۲$ باشد. ψ متغیر جدیدی است که وقتی θ از ۰ به $\theta_{\circ}$ می‌رسد از ۰ تا $\pi/۲$ تغییر می‌کند. سپس رادیکال را، بااستفاده ازمعادلهٔ (پ.۲۲)، به صورت رشته بسط دهید، بالاخره ازنتیجه انتگرال بگیرید تا رابطهٔ P به صورت بسط رشته که دربخش ۵.۱۲ بیان شده، به دست آید.

۶۶.۱۲. دریک حرکت هماهنگ ساده، $E_p = kx^۲/۲$ است. (الف) برای به دست‌آوردن دورهٔ حرکت هماهنگ ساده، معادلهٔ (۱۳.۱۲) را به کار ببرید و تحقیق کنید که نتیجه با معادلهٔ (۷.۱۲) سازگار است. (ب) نشان دهید که از معادلهٔ (۳۴.۸)، به ازای $x_{\circ} = ۰$ به دست می‌آید

$$\arcsin(x/A) = \omega t + \alpha$$

که درآن $A^۲ = ۲E/k$ است. تحقیق کنید که این رابطه با معادلهٔ (۱.۱۲) مطابقت دارد.

۶۷.۱۲. ذره‌ای را درنظر بگیرید که براثر یک پتانسیل ناهماهنگ

$$E_p(x) = \frac{۱}{۲}kx^۲ - \frac{۱}{۳}ax^۳$$

نوسان می‌کند. در این رابطه a مثبت وخیلی کوچکتر از k است. (الف) منحنی نمایش $E_p(x)$ را رسم کنید. آیا این منحنی نسبت به مقدار $x = ۰$ متقارن است؟ بنا به پاسخ پیش، هنگامی که انرژی افزایش می‌یابد مرکز نوسان به چه سمتی جابجا می‌شود؟ آیا انتظار دارید که x_{ave} برابر صفر باشد؟ (ب) نیرو را به‌صورت تابعی از x حساب ونمودار آن را رسم کنید. اثر جملهٔ ناهماهنگی روی نیرو چیست؟

۶۸.۱۲. با مراجعه به مسئلهٔ پیش، (الف) معادلهٔ حرکت را بنویسید. (ب) به عنوان پاسخ معادلهٔ حرکت، $x = A\cos\omega t + B\cos ۲\omega t + x_۱$ را آزمایش کنید. دراین رابطه دو جملهٔ آخر ازناهماهنگ بودن حرکت ناشی‌شده‌اند. (ج) آیا این پاسخ می‌تواند دقیق‌باشد؟ (د) با صرف‌نظر کردن از جمله‌هایی که دارای حاصل‌ضربهای A و B یا توانهای بالاتر از یک B هستند، ثابت کنید که $\omega = \omega_{\circ}$، $x_۱ = \alpha A^۲/۲\omega_{\circ}^۲$ و $B = -\alpha A^۲/۶\omega_{\circ}^۲$ است. می‌دانیم که $\omega_{\circ}^۲ = k/m$ و $\alpha = a/m$ هستند. [راهنمایی: از رابطهٔ مثلثاتی

$$\cos^۲\omega t = \frac{۱}{۲}(۱ + \cos ۲\omega t)$$

استفاده کنید.]

۶۹.۱۲. مسئلهٔ ۶۷.۱۲ را به فرض اینکه انرژی پتانسیل برابر

$$E_P(x) = \frac{۱}{۲}kx^۲ - \frac{۱}{۴}ax^۴$$

---

1. elementary functions

باشد از نو حل کنید. دراینجا نیز a خیلی کوچکتر از k است.

۷۰.۱۲. با مراجعه به مسئلهٔ پیش، (الف) معادلهٔ حرکت را بنویسید. (ب) به عنوان پاسخ $x = A\sin\omega t + B\sin ۳\omega t$ را آزمایش کنید. جملهٔ آخر ازناهماهنگی ناشی می‌شود. (ج) آیا این پاسخ می‌تواند دقیق باشد؟ (د) با صرف نظر کردن ازکلیهٔ جمله‌هایی که شامل حاصل ضربهای A و B وتوانهای بالاتر ازیک B هستند، نشان دهید که

$$B = \alpha A^{۳}/۴(۹\omega^{۲} - \omega_{\circ}^{۲}) \quad و \quad \omega^{۲} = \omega_{\circ}^{۲} - ۳\alpha A^{۲}/۴$$

است. دراینجا α و $\omega_{\circ}$ همان تعریفهای مسئلهٔ پیش را دارند. [راهنمایی: از رابطهٔ مثلثاتی $\sin^{۳}\omega t = ۳(\sin\omega t)/۴ - (\sin ۳\omega t)/۴$ استفاده کنید.]

۷۱.۱۲. با مراجعه به مسئله‌های ۶۸.۱۲ و ۷۰.۱۲، مقادیر x_{ave} و $(x^{۲})_{\text{ave}}$ را حساب کنید. میانگین نسبت به زمان گرفته می‌شود. آنها را با نتایج مربوط به حرکت هماهنگ ساده مقایسه کنید. (به مسئلهٔ ۱۷.۱۲ مراجعه کنید.)

۷۲.۱۲. نتایج مسئلهٔ ۷۰.۱۲ را برای یک آونگ ساده به کار ببرید. برای این کار در رابطهٔ F_T در ابتدای بخش ۵.۱۲، به جای $\sin\theta$ دو جملهٔ اول بسط آن را از معادلهٔ (پ.۲۵) قرار دهید. به دست می‌آورید

$$\theta = \theta_{\circ}\sin\omega t + (\theta_{\circ}^{۳}/۱۹۲)\sin ۳\omega t \quad و \quad \omega \approx \omega_{\circ}(۱ - \theta_{\circ}^{۲}/۱۶).$$

از روی مقدار ω نتیجه‌ای را که درپایان بخش ۵.۱۲ برای دورهٔ P به دست آمد، مستقیماً حساب کنید.

قسمت دوم
برهم کنشها و میدانها

الف . گرانش

اکنون کـه قوانین حاکم برحرکتها را فهمیدیم، مرحلهٔ بعدی عبارت است از بررسی برهم‌کنشهایی که به وجود آورندهٔ این حرکتها هستند. چندین نوع برهم‌کنش وجود دارد. یکی ازآنها برهم‌کنش گرانشی است که درحرکت سیاره‌ها و حرکت مادهٔ کپه‌ای پدیدار می‌شود. هرچند گرانش بین برهم‌کنشهای شناخته شده از همه ضعیفتر است، ولـی اولین برهم‌کنشی است که به‌طور دقیق مورد مطالعه قرار گرفته است و این به‌دلیل توجهی است کـه بشر از گذشته‌های دور به‌نجوم داشته است و نیز به‌سبب اینکه گرانش پاسخگوی پدیده‌های زیادی است کـه مستقیماً برزندگی ما اثر می‌گذارند. برهم‌کنش دیگر، برهم‌کنش الکترومغناطیسی است که بهتر از همه شناخته شده است و شاید ازدیدگاه زندگی روزمره مهمترین برهم‌کنش باشد. بیشترین پدیده‌هایی کـه اطراف خود مشاهده می‌کنیم، از جمله فرآیندهای شیمیایی و زیست‌شناسی، نتیجهٔ برهم‌کنشهای الکترومغناطیسی بین اتمها و مولکولها هستند. سومین نوع برهم‌کنش، برهم‌کنش قوی یا هسته‌ای[1] است که عامل به هم پیوستگی پروتونها و نوترونها (که هستک خوانده می‌شوند) در داخل هستهٔ اتم و سایر پدیده‌های مربوط به آنهاست. با وجود پژوهشهای بسیاری دراین مورد صورت گرفته هنوز اطلاعات ما ازاین برهم‌کنش بسیار ناقص است. نوع چهارم، برهم‌کنش ضعیف[2] است که پاسخگوی بعضی فرآیندها بین ذرات بنیادی، مـانند واپاشی بتایی است. شناخت مـا از این برهم کنش نیز بسیار محدود است. شدت نسبی این برهم‌کنشها ازاین قرارند: اگر شدت برهم‌کنش قوی را برابر واحد اختیار کنیم، شدت بـرای برهم‌کنش الکترومغناطیسی تقریباً 10^{-2}، برای برهم‌کنش ضعیف تقریباً 10^{-5} و برای برهم‌کنش گرانشی تقریباً 10^{-38} خواهد بود. یکی از مسایلی کـه هنوز در فیزیک حل نشده باقی مانده این است کـه چرا فقط چهار برهم‌کنش وجـود دارد و چـرا شدتهای آنها این اندازه باهم اختلاف دارند.

جالب است بدانیم حـدود ۲۰۰ سال پیش ایزاک نیوتـون راجع به بـرهـم‌کنش گفته است:

«آیا ذرات ریزاجسام دارای نوعی‌توان یا نیرو نیستند، که ازطریق آنها . . . روی یکدیگر اثرمی‌کنند تا بخش بزرگی از پدیده‌های طبیعت را به‌وجود آورند؟ زیرا می‌دانیم که اجسام توسط جاذبه‌های گرانشی، مغناطیسی، الکتریکی بریکدیگر اثر می‌کنند؛ . . . بعید نیست‌که غیر ازاینها قدرتهای جاذبه‌ای دیگری هم وجود داشته باشد. . . اینکه چگونه این نیروهای جاذبه عمل می‌کنند، در اینجا مـورد بررسی قـرار نمی‌دهم. . . اثـر جاذبه‌های گرانشی، مغناطیسی و الکتریکی به‌فاصله‌های قابل ملاحظه‌ای می‌رسند، . . . و احتمال دارد جاذبه‌های دیگری نیز باشند که اثر آنها به فاصله‌های خیلی کوچک و غیرقابل مشاهده برسند؛ . . .»[3]

بـرای توصیف این برهم‌کنشها، مفهوم میدان را وارد می‌کنیم. منظور از میدان یک خاصیت فیزیکی است کـه در ناحیه‌ای ازفضا گسترده است و با تابعی از زمان و مکان بیان می‌شود. بـرای هر برهم‌کنش فرض می‌کنیم یک ذره در اطراف خـود میدان مربوط به آن برهم‌کنش را به‌وجود می‌آورد. این میدان به نوبهٔ خود روی ذرهٔ دیگر می‌کند تا برهم‌کنش

---

1. strong (nuclear) interaction
2. weak interaction
3. *Opticks*, Book III, Query 31

موردنظر را به‌وجودآورد. ذرهٔ دوم نیزمیدان ویژهٔ خود را به وجود می‌آورد که روی ذرهٔ اول اثر می‌کند، بدین‌طریق برهم‌کنش متقابل حاصل می‌شود.

حتی اگر بتوان برهم‌کنشها را به‌وسیلهٔ میدان توصیف کرد، تمام میدانها الزاماً به برهم‌کنش مربوط نیستند، و این حقیقتی است که به طور ضمنی درتعریف میدان نهفته است. به‌عنوان مثال، یک هواشناس می‌تواند فشار یا دمای جو را برحسب طول و عرض جغرافیایی و ارتفاع نسبت به سطح زمین بیان کند. بدین‌ترتیب دو میدان اسکالر خواهیم داشت: میدان فشار و میدان دما. درحرکت شاره‌ها، در هر نقطه سرعت شاره یک میدان برداری تشکیل می‌دهد. بنابراین مفهوم میدان کاربردهای بسیار فراوان و گسترده‌ای درفیزیک دارد.

در فصل ۱۳ به‌مطالعهٔ برهم‌کنش و میدان گرانشی می‌پردازیم. در فصلهای ۱۴ تا ۱۷ (در جلد دوم) برهم‌کنشهای الکترومغناطیسی را بررسی خواهیم کرد. سایر برهم‌کنشها در جلد سوم مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

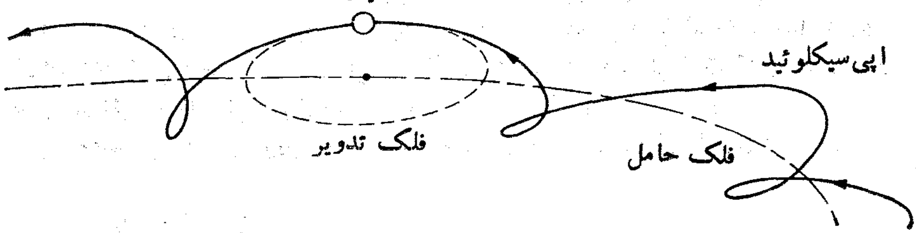
۱۳
برهم‌کنش گرانشی

۱۳.۱ مقدمه

یکی از مسایل اساسی دینامیک که از سپیده دم تمدن، بشر را به‌خود جلب می‌کرده حرکت اجرام سماوی، یا آنچنانکه امروزه می‌گوییم، حرکت سیاره‌ها بوده است. تکامل شناخت ما از حرکت سیاره‌ها شاید یکی از جالبترین پیشرفتهای تاریخ علم باشد.

یونانیها که دوست داشتند انسان را مرکز عالم بدانند، فرض می‌کردند زمین نیز در مرکز هندسی کائنات قرار دارد و سایر اجسام سماوی به دور زمین می‌گردند. اجرامی که در آن زمان می‌شناختند، برحسب میانگین فاصلهٔ آنها از زمین، بدین ترتیب بودند: ماه، عطارد (تیر)[1]، زهره (ناهید)[2]، خورشید، مریخ (بهرام)[3]، مشتری (برجیس)[4] و زحل (کیوان)[5].

اولین فرضیهٔ مربوط به حرکت سیاره‌ها این بود که سیاره‌های فوق دایره‌های هم‌مرکزی‌را می‌پیمایند که زمین مرکز مشترک همهٔ آنهاست. ولی این فرضیه باحرکتهای مشاهده شدهٔ این اجرام نسبت به‌زمین مطابقت نداشت، و بررسی هندسی حرکت سیاره‌ها را بیش از پیش پیچیده کرد. در قرن‌دوم بعد از میلاد، بطلمیوس[6] منجم اهل اسکندریه، نظریهٔ فلک تدویر (اپی‌سیکل)[7] را برای تشریح حرکت سیاره‌ها پایه گذاری کرد. در ساده‌ترین حالت، فرض می‌شد سیاره با حرکت یکنواخت، دایره‌ای به نام فلک تدویر را می‌پیماید، و مرکز این دایره نیز، به‌نوبهٔ خود، دایرهٔ بزرگتری به مرکز زمین به نام فلک حامل (دفرنت)[8] را طی می‌کند. در نتیجه مسیر سیاره یک اپی سیکلوئید[9] می‌شود (شکل ۱.۱۳). در بعضی حالتها ترتیبهای بسیار پیچیده‌تری برای تشریح حرکت سیاره‌ها لازم بود. به‌زبان امروزی، یونانیها حرکت سیاره‌ها را نسبت به یک چهارچوب مرجع متصل به‌زمین توضیح می‌دادند.



شکل ۱.۱۳. مدل اپی‌سیکلوئید برای حرکت سیاره‌ها نسبت به‌زمین

این توضیح تا قرن شانزدهم درست تلقی می‌شد و پذیرش کلی یافته بود، تا اینکه در این زمان نیکولاس کپرنیک[10] [۱۵۴۳-۱۴۷۳ (۹۲۲-۸۵۲ هـ.ش.)] کشیش لهستانی که در جستجوی یک پاسخ ساده برای حرکت سیاره‌ها بود پیشنهاد کرد حرکت کلیهٔ سیاره‌ها وحتی زمین، نسبت به‌خورشید، که مرکز فرض می‌شد، بیان شود. این فکرجدیدی نبود، زیرا

---

1. Mercury 2. Venus 3. Mars 4. Jupiter 5. Saturn
6. Ptolemy 7. epicycle 8. deferent 9. epicyloid
10. Nicolaus Copernicus

برای اولین بار در قرن سوم پیش از میلاد آریستارخوس[1] اختر شناس یونانی این نظر را پیشنهاد کرده بود. به نظر کپرنیک سیاره‌ها به ترتیب فاصلهٔ مدارهایشان از خورشید عبارت بودند از عطارد، زهره، زمین، مریخ، مشتری، زحل، و ماه که به‌دور زمین می‌چرخد. در حقیقت، کپرنیک چارچوب مرجع دیگری را پیشنهاد کرد که به‌خورشید متصل بود و دراین چارچوب توصیف حرکت سیاره‌ها بسیار ساده‌تر می‌شد.

خورشید که بزرگترین جسم دستگاه منظومهٔ ما است عملاً در مرکز جرم دستگاه قرار دارد و خیلی کندتر از دیگر سیاره‌ها حرکت می‌کند. این امر انتخاب خورشید را به عنوان مرکز مرجع توجیه می‌کند، زیرا عملاً یک چارچوب لخت است. پیشنهاد کپرنیک، به کپلر[2] [۱۶۳۰-۱۵۷۱ (۱۰۰۹-۹۵۰ ه.ش.)] یاری کرد که با بررسی و تجزیه و تحلیل اندازه گیریهای بسیار دقیق و ذیقیمت تیکو براهه[3] [۱۶۰۱-۱۵۴۶ (۹۸۰-۹۲۵ ه.ش.)]، قوانین حرکت سیاره‌ها را کشف کند. این قوانین که به نام قوانین کپلر شناخته شده‌اند، توضیح سینماتیکی حرکت سیاره‌ها هستند و بدین صورت بیان می‌شوند:

۱. سیاره‌ها مدارهای بیضی‌شکلی را می‌پیمایند که خورشید دریک کانون آنها قرار دارد.

۲. بردار مکان هر سیاره، نسبت به خورشید، در زمانهای برابر مساحتهای برابر از بیضی خود را جاروب می‌کند. (این قانون، قانون مساحات نیز نامیده می‌شود).

۳. مجذور دورهٔ گردش هر سیاره متناسب است با مکعب فاصلهٔ میانگین آن سیاره از خورشید. (این قانون را می‌توان بامعادلهٔ $P^2 = kr^3_{\text{ave}}$ نیز بیان کرد که در آن k ثابت تناسب است).

مرحلهٔ بعدی تاریخ نجوم، بحث دینامیک حرکت سیاره‌ها و کوشش برای تعیین برهم‌کنشی بود که باعث یک چنین حرکتی می‌شود. در اینجا بود که ایزاک نیوتون [۱۷۲۷-۱۶۴۲ (۱۱۰۶-۱۰۲۱ ه. ش.)] با بیان قانون گرانش عمومی سهم ارزندهٔ خود را ادا کرد. او این قانون را (که در همین فصل مورد بحث قرار می‌گیرد) در سال ۱۶۶۶ (۱۰۴۵ ه. ش.) فرمولبندی کرد ولی تا سال ۱۶۸۷ (۱۰۶۶ ه. ش.) که آن را به صورت فصلی در اثر جاودانه‌اش اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی[4] آورد، منتشر نکرد.

مهمترین داده‌های مربوط به منظومهٔ شمسی در جدول ۱.۱۳ گردآوری شده‌اند.

۲.۱۳ قانون گرانش

دومین وشاید مهمترین سهم نیوتون در پیشرفت مکانیک، بعد از بیان قوانین حرکت (فصل ۷)، کشف قانون برهم‌کنش گرانشی بود؛ یعنی برهم‌کنش بین دو جسم، دو سیاره یا دو ذرهٔ کوچک، که حرکتی را به وجود می‌آورد و می‌توان آن را به کمک قوانین کپلر توصیف کرد.

قبل ازهمه، مطابق بخش ۱۴.۷، قانون مساحات (یا قانون دوم کپلر) نشان می‌دهد که نیروی مربوط به برهم‌کنش گرانشی، مرکزی است، یعنی نیرو در راستای خط واصل دو جسم

---

1. Aristarchus 2. Johannes Kepler 3. Tycho Brahe

4. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*

جدول ۱.۱۳. داده‌های اساسی در بارهٔ منظومهٔ شمسی*

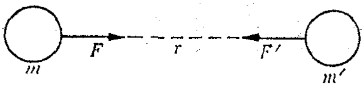
جسم	شعاع میانگین m	جرم kg	دورهٔ چرخش s	شعاع میانگین مدار m	دورهٔ حرکت انتقالی s	خروج از مرکز مدار
خورشید	$۶ر۹۶ \times ۱۰^{۸}$	$۱ر۹۸ \times ۱۰^{۳۰}$	$۲ر۳ \times ۱۰^{۶}$	—	—	—
عطارد	$۲ر۳۴ \times ۱۰^{۶}$	$۳ر۲۸ \times ۱۰^{۲۳}$	$۵ر۰۳ \times ۱۰^{۶}$	$۵ر۷۹ \times ۱۰^{۱۰}$	$۷ر۶۰ \times ۱۰^{۶}$	۰ر۲۰۶
زهره	$۶ر۲۶ \times ۱۰^{۶}$	$۴ر۸۳ \times ۱۰^{۲۴}$	(؟)	$۱ر۰۸ \times ۱۰^{۱۱}$	$۱ر۹۴ \times ۱۰^{۷}$	۰ر۰۰۷
زمین	$۶ر۳۷ \times ۱۰^{۶}$	$۵ر۹۸ \times ۱۰^{۲۴}$	$۸ر۶۲ \times ۱۰^{۴}$	$۱ر۴۹ \times ۱۰^{۱۱}$	$۳ر۱۶ \times ۱۰^{۷}$	۰ر۰۱۷
مریخ	$۳ر۳۲ \times ۱۰^{۶}$	$۶ر۴۰ \times ۱۰^{۲۳}$	$۸ر۸۶ \times ۱۰^{۴}$	$۲ر۲۸ \times ۱۰^{۱۱}$	$۵ر۹۴ \times ۱۰^{۷}$	۰ر۰۹۳
مشتری	$۶ر۹۸ \times ۱۰^{۷}$	$۱ر۹۰ \times ۱۰^{۲۷}$	$۳ر۵۴ \times ۱۰^{۴}$	$۷ر۷۸ \times ۱۰^{۱۱}$	$۳ر۷۴ \times ۱۰^{۸}$	۰ر۰۴۹
زحل	$۵ر۸۲ \times ۱۰^{۷}$	$۵ر۶۸ \times ۱۰^{۲۶}$	$۳ر۶۱ \times ۱۰^{۴}$	$۱ر۴۳ \times ۱۰^{۱۲}$	$۹ر۳۰ \times ۱۰^{۸}$	۰ر۰۵۱
اورانوس	$۲ر۳۷ \times ۱۰^{۷}$	$۸ر۶۷ \times ۱۰^{۲۵}$	$۳ر۵۸ \times ۱۰^{۴}$	$۲ر۸۷ \times ۱۰^{۱۲}$	$۲ر۶۶ \times ۱۰^{۹}$	۰ر۰۴۶
نپتون	$۲ر۲۴ \times ۱۰^{۷}$	$۱ر۰۵ \times ۱۰^{۲۶}$	$۵ر۶۹ \times ۱۰^{۴}$	$۴ر۵۰ \times ۱۰^{۱۲}$	$۵ر۲۰ \times ۱۰^{۹}$	۰ر۰۰۴
پلوتون	$(۳ر۰۰ \times ۱۰^{۶})$	$(۵ر۳۷ \times ۱۰^{۲۴})$	(؟)	$۵ر۹۱ \times ۱۰^{۱۲}$	$۷ر۸۲ \times ۱۰^{۹}$	۰ر۲۵۰
ماه	$۱ر۷۴ \times ۱۰^{۶}$	$۷ر۳۴ \times ۱۰^{۲۲}$	$۲ر۳۶ \times ۱۰^{۶}$	$۳ر۸۴ \times ۱۰^{۸}$	$۲ر۳۶ \times ۱۰^{۶}$	۰ر۰۵۵

☆ مقادیر داخل پرانتز اعداد مطمئنی نیستند. داده‌های مدار ماه نسبت به زمین حساب شده‌اند.

برهم‌کنش کننده (شکل ۲.۱۳)، در این مورد در راستای خط واصل خورشید و سیاره، اثر می‌کند. حال اگر فرض شود برهم‌کنش گرانشی یک ویژگی عمومی همهٔ مواد است، F، نیروی وابسته به این برهم کنش باید با «مقدار» ماده در هر جسم، یعنی با جرم آنها، m و m'، متناسب باشد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$F = mm'f(r).$$

تعیین بستگی نیروی F با فاصلهٔ r، یا $f(r)$، مسئلهٔ دشواری است. برای تعیین این بستگی به‌طور تجربی می‌توانیم نیروی بین دو جرم m و m' را در فاصله‌های مختلف اندازه گیری کنیم و از روی مشاهدات خود رابطهٔ بین r و F را نتیجه بگیریم، این اندازه‌گیری صورت گرفته است، ولی انجام آن به‌وسایل آزمایش بسیار دقیقی نیاز دارد. زیرا برهم کنش گرانشی بسیار ضعیف و نیروی گرانش بسیار کوچک است، مگر اینکه جرمها



شکل ۲.۱۳. برهم کنش گرانشی بین دو جرم

(مانند جرم دو سیاره) بسیار بزرگ، یا فاصلهٔ r خیلی کوچک باشد. ولی در حالت اخیر، چنانکه بعداً خواهم دید، برهم‌کنشهای قویتر ازگرانش وارد عمل می‌شوند وائر گرانشی را کاملا تحت الشعاع قرار می‌دهند. نتایج آزمایشهای انجام یافته اجازه می‌دهند نتیجه بگیریم که برهم‌کنش گرانشی به صورت جاذبه است و متناسب با عکس مجذور فاصلهٔ دو جسم تغییر می‌کند؛ یعنی $f(r) \propto 1/r^2$. بنابراین برای نیروی گرانش رابطهٔ زیر را می‌توان نوشت:

$$F = \gamma \frac{mm'}{r^2}. \qquad (۱.۱۳)$$

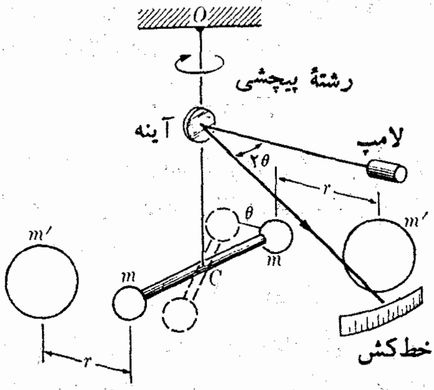
ثابت تناسب γ به یکاهای به‌کار برده شده برای سایر کمیتها بستگی دارد. از اینجاست که γ را باید از طریق تجربی، با اندازه گیری F، نیروی بین دو جرم معلوم m و m' که در فاصلهٔ معلوم r از یکدیگر قرار دارند، به دست آورد (شکل ۳.۱۳). مقدار γ در دستگاه یکاهای MKSC برابر است با

$$\gamma = ۶٫۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\ \mathrm{Nm^۲kg^{-۲}}\ (\text{یا}\ \mathrm{m^۳kg^{-۱}s^{-۲}}).$$

دراین صورت قانون گرانش عمومی نیوتون را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

برهم کنش گرانشی بین دو جسم را می‌توان با یک نیروی مرکزی جاذبه‌ای، متناسب با جرمهای این دو جسم و با عکس مجذور فاصلهٔ آنها، بیان کرد.

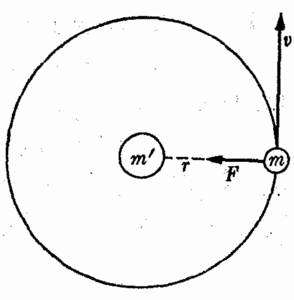
هنگام گفتگو ازمعادلهٔ (۱.۱۳)، یاد آور شدیم که برهم کنش گرانشی بین دو جرم را می‌توان از طریق آزمایش به دست آورد، ولی این گفته الزاماً بدین معنی نیست که برهم‌کنش گرانشی عامل‌حرکت سیاره‌ها مطابق قانون کپلر است. درواقع، نیوتون به‌این شیوه



شکل ۳.۱۳. ترازوی پیچشی کاوندیش[1]. هنگامی‌که جرم m' درنزدیکی جرم m قرارگیرد، جاذبهٔ گرانشی این دوجرم گشتاور نیرویی برمیلهٔ افقی وارد می‌کند، که موجب می‌شود سیم OC بپیچد. هنگامی‌که گشتاور نیروی گرانشی و گشتاور نیروی پیچشی با هم برابر شوند تعادل برقرار می‌شود. گشتاور پیچشی با زاویهٔ θ متناسب است، که این زاویه را از روی انحراف نور بازتابیده از آینه‌ای که روی سیم نصب شده‌است اندازه می‌گیرند. با تغییر فاصله‌های r و تعویض جرمهای m و m' می‌توان قانون (۱.۱۳) را تحقیق کرد.

عمل نکرد، بلکه برعکس، با استفاده از قوانین کپلر، به معادلهٔ (۱.۱۳)، که نیروی لازم بین دو سیاره را به دست می‌دهد رسید، سپس نتیجه را در مورد هر دو جرم دیگری تعمیم داد. اکنون روش نیوتون را به‌صورت ساده شده‌ای مورد بحث قرارمی‌دهیم و تحلیل کلی‌تر دراین مورد را به بخش ۵.۱۳ واگذار می‌کنیم.

قانون اول کپلر می‌گوید که مدار حرکت هر سیاره یک بیضی است. دایره حالت خاصی از بیضی است که در آن دو کانون در نقطه‌ای به نام مرکز روی هم منطبق شده‌اند. در این حالت، مطابق قانون دوم، نیروی F به سوی مرکز دایره است. در نتیجه، با استفاده



شکل ۴.۱۳. حرکت ذرهٔ m بر اثر برهم‌کنش گرانشی آن با ذرهٔ m'

1. Cavendish torsion balance

از معادلهٔ (۲۸.۷) برای نیروی مرکزگرا و با توجه به‌حرکت دایره‌ای m در یک چارچوب مرجع متصل به m'، (شکل ۴.۱۳)، می‌توان نوشت

$$F = \frac{mv^۲}{r} \cdot$$

به گفتهٔ دقیقتر، باید به‌جای m مطابق معادلهٔ (۱۵.۹) جرم کاهیدهٔ دستگاه متشکل از m و m' را به کار ببریم، ولی ساده کردن رابطه، نتایج مورد نظر ما را تغییر نمی‌دهد. با توجه به اینکه $v = ۲\pi r/P$ است، داریم

$$F = ۴\pi^۲ mr/P^۲.$$

در این صورت، قانون سوم کپلر، در حالت خاص مدار دایره‌ای، وقتی که فاصلهٔ میانگین بین m و m' برابر شعاع دایره است به شکل $P^۲ = kr^۳$ در می‌آید. بنابراین

$$F = \frac{۴\pi^۲ m}{kr^۲}.$$

این رابطه نشان می‌دهد که برای تحقق قوانین کپلر، برهم‌کنش گرانشی باید مرکزی و متناسب با عکس مجذور فاصله باشد.

نیوتون برای اطمینان از درستی فرض خود، شتاب مرکز گرای ماه را با شتاب گرانی $g = ۹٫۸\ \mathrm{ms^{-۲}}$ مقایسه‌کرد. شتاب مرکزگرای ماه برابراست با $a_c = v^۲/r = ۴\pi^۲ r/P^۲$ به ازای $r = ۳٫۸۴ \times ۱۰^۸\ \mathrm{m}$ و $P = ۲٫۳۶ \times ۱۰^۶\ \mathrm{s}$.

بنابراین $a_c = ۲٫۷۲ \times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{ms^{-۲}}$ است. در نتیجه

$$g/a_c = ۳۶۰۲ \approx (۶۰)^۲.$$

چون شعاع زمین برابر $R = ۶٫۳۷ \times ۱۰^۶\ \mathrm{m}$ است، داریم

$$\left(\frac{R}{r}\right)^۲ = \left(\frac{۳۸۴}{۶٫۳۷}\right)^۲ \approx (۶۰)^۲.$$

بنابراین $g/a_c = (r/R)^۲$ است، و درحدود دقت‌محاسبهٔ ساده ما، دوشتاب‌متناسب‌اند باعکس مجذور فاصلهٔ هر یک از نقاط تا مرکز زمین.

مثال ۱.۱۳. رابطهٔ بین شتاب گرانی و جرم زمین را پیدا کنید. با استفاده از پاسخی که به دست می‌آید جرم زمین را برآورد کنید.

حل: ذره‌ای به جرم m را در سطح زمین در نظر بگیرید. فاصلهٔ این ذره از مرکز زمین برابر است با R، شعاع زمین. اگر جرم زمین را M فرض کنیم، بنا به معادلهٔ (۱.۱۳) نیروی وارد بر ذرهٔ m برابر است با

$$F = \gamma \frac{mM}{R^۲}.$$

این نیروهمان چیزی‌است‌که درمعادلهٔ (۱۶.۷)، به‌عنوان وزن جسم تعریف‌شد، ازاین‌رو باید

برابر mg باشد که در آن g شتاب گرانی است. بنابراین

$$mg = \gamma \frac{mM}{R^{۲}}.$$

با حذف m از طرفین معادله به دست می‌آید

$$g = \gamma M/R^{۲}.$$

این رابطه شتاب گرانی را بر حسب جرم و شعاع زمین به دست می‌دهد. توجه کنید که در این رابطه جرم خود جسم ظاهر نمی‌شود. بدین طریق (اگر مقاومت هوا نادیده گرفته شود)، تمام اجسام باید با شتاب یکسان سقوط کنند، که این با مشاهدات ما سازگار است.

با حل رابطهٔ فوق نسبت به M، جرم زمین به دست می‌آید:

$$M = gR^{۲}/\gamma.$$

با قرار دادن مقادیر عددی مناسب، $g = ۹٫۸۰\ \mathrm{ms^{-۲}}$، $R = ۶٫۳۷ \times ۱۰^{۶}\ \mathrm{m}$ و $\gamma = ۶٫۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\ \mathrm{m^{۳}kg^{-۱}s^{-۲}}$، به دست می‌آید

$$M = ۵٫۹۸ \times ۱۰^{۲۴}\ \mathrm{kg}.$$

دانشجو توجه دارد که در حل این مسئله فاصلهٔ جرم m تا مرکز زمین را به کار بردیم، به گفتهٔ دیگر، به طور ضمنی پذیرفتیم که نیروی وارد بر m همان نیرویی است که اگر تمام جرم زمین در مرکز آن متمرکز می‌بود، روی m اثر می‌کرد؛ فرضی که در بخش ۷.۱۳ درستی آن را ثابت خواهیم کرد.

مثال ۲.۱۳. جرم سیاره‌ای را که دارای یک قمر می‌باشد حساب کنید.

حل: فرض کنیم قمری به جرم m، با دورهٔ P، یک مدار دایره‌ای به شعاع r را دور سیاره‌ای به جرم M می‌پیماید. نیروی جاذبه بین سیاره و قمر برابر است با

$$F = \gamma \frac{mM}{r^{۲}}.$$

این نیرو باید m برابر شتاب مرکزگرای $v^{۲}/r = ۴\pi^{۲} r/P^{۲}$ باشد. بنابراین

$$\frac{۴\pi^{۲}mr}{P^{۲}} = \gamma \frac{mM}{r^{۲}}.$$

با حذف سازهٔ مشترک m از طرفین، می‌توان M را حساب کرد:

$$M = ۴\pi^{۲} r^{۳}/\gamma P^{۲}.$$

به دانشجو توصیه می‌کنیم با استفاده از رابطهٔ فوق و با به‌کار بردن داده‌های عددی مربوط به ماه ($r = ۳٫۸۴ \times ۱۰^{۸}\ \mathrm{m}$ و $P = ۲٫۳۶ \times ۱۰^{۶}\ \mathrm{s}$)، جرم زمین را از نو به دست آورد. تطبیق عدد به دست آمده با نتیجهٔ مثال ۱.۱۳ دلیلی است برسازگاری نظریه.

با بهره گیری از داده‌های مربوط به سیارات مختلف می‌توان این فرمول را برای به‌دست آوردن جرم خورشید نیز مورد استفاده قرار داد.

۳.۱۳ جرم لختی و جرم گرانشی

درفصل ۷، جرم را در رابطه باقوانین حرکت تعریف‌کردیم، و به‌همین سبب آن را جرم‌لختی نامیدیم. همچنین فرض کردیم که قوانین حرکت دارای اعتبار عام هستند، بنا براین برای هر ماده‌ای چه‌الکترون، چه پروتون، چه نوترون، یامجموعهٔ این ذرات، یکسانند. ازطرف دیگر، در اینجا از برهم کنش ویژه‌ای به نام گرانش گفتگو کردیم. برای مشخص کردن شدت این برهم کنش باید به هر بخش از ماده یک بار گرانشی یا جرم گرانشی m_g نسبت داد. در این صورت معادلهٔ (۱.۱۳) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$F = \gamma \frac{m_g m'_g}{r^2}.$$

ولی اگر بپذیریم که گرانش یک خاصیت عمومی برای هر نوع ذره است، می‌توان جرم گرانشی را متناسب با جرم لختی در نظر گرفت، بنابراین نسبت آنها،

$$K = \frac{m_g \text{، جرم گرانشی}}{m \text{، جرم لختی}}$$

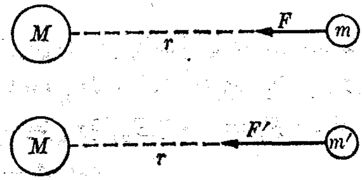
باید برای تمام اجسام یکی باشد. با انتخاب یکاهای مناسب برای m_g، می‌توان این نسبت را برابرواحد قرارداد و درنتیجه برای نمایش جرم‌لختی وجرم گرانشی یک عدد به‌کار برد. ما در گزینش مقدار برای ثابت γ این کار را به‌طور ضمنی انجام دادیم. ثابت ماندن K که با ثابت ماندن γ هم ارز است، با آزمایش برای هر گونه جسمی و با دقتهای زیاد مورد تحقیق قرار گرفته است و می‌توان آن را فرضیهٔ محکمی دانست. این واقعیت اثبات شده که در نزدیکی سطح زمین کلیهٔ اجسام با شتاب یکسان سقوط می‌کنند، نشان می‌دهد که جرمهای لختی و گرانشی با هم برابرند، زیرا با این فرض، چنانکه در مثال ۱.۱۳ بحث شد، شتاب گرانی برابرست با $g = \gamma M/R^2$، و g به جرم جسمی که می‌افتد بستگی ندارد. به همین جهت از این به بعد برای نشان دادن جرم، خواه جرم گرانشی و خواه جرم لختی، تنها کلمهٔ «جرم» را به کار خواهیم برد، زیرا این دو را نمی‌توان از یکدیگر متمایز ساخت.

اکنون می‌توان ازمعادلهٔ (۱.۱۳) یکای‌جرم را تعریف کرد، وآن جرمی است که اگر در فاصلهٔ واحد از جرم برابر خود قرار گیرد آن را با نیرویی برابر با γ جذب می‌کند. با اختیاریک مقدار مناسب‌برای γ می‌توان هریکایی برای‌جرم را تعریف کرد. باوجود این، گزینش دلخواه برای γ ممکن است ساختار معادله‌های مکانیک را تغییر دهد. یک دشواری دیگر درتعریف یکای جرم این است‌که قبلاً باید یکایی برای‌نیرو تعریف شده‌باشد. ازاین‌رو به این شیوه عمل نمی‌کنیم. به جای آن، چنانکه قبلاً نیز اشاره کردیم، از روش عکس پیروی می‌کنیم، یعنی پس از انتخاب یکای جرم و نیرو، مقدار γ را از راه آزمایش به دست می‌آوریم.

یکی از راههای اندازه‌گیری یا مقایسهٔ جرم دوجسم، استفاده ازیک جسم سوم به‌عنوان

مرجع است. فرض کنید جرمهای m و m' به فاصلهٔ یکسان r از جرم مرجع M قرار دارند (شکل ۵.۱۳). بنا به معادلهٔ (۱.۱۳) نیروهای وارد بر m و m' عبارتند از

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2} \quad \text{و} \quad F' = \gamma \frac{Mm'}{r^2}.$$

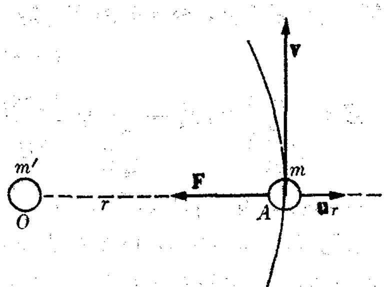


شکل ۵.۱۳. روش مقایسهٔ دوجرم m و m' ازطریق برهم‌کنش گرانشی آنها با جرم سوم M.

نسبت این دو نیرو برابر است با $F/F' = m/m'$. در نتیجه، اگر روشی برای مقایسهٔ دو نیرو، بدون نیاز به اندازه‌گیری آنها وجود داشته باشد، رابطهٔ بالا راهی برای اندازه‌گیری و مقایسهٔ جرمها به‌دست می‌دهد. اصل ترازو امکان می‌دهد با اختیار زمین به‌عنوان جرم مرجع M، این روش را به‌کار ببرند. ترازو هنگامی به‌حالت موازنه می‌رسد که دو نیرو، و درنتیجه دوجرم برابر باشند. بدین‌ترتیب روشی که دربخش ۳.۲ برای اندازه‌گیری جرم به‌وسیلهٔ ترازو ارائه کردیم توجیه می‌شود.

۴.۱۳ انرژی پتانسیل گرانشی

چون برهم‌کنش گرانشی بیان شده بامعادلهٔ (۱.۱۳)، مرکزی است و تنها به‌فاصله بستگی دارد، این برهم‌کنش به یک نیروی پایستار مربوط می‌شود. بنابراین می‌توان به آن یک انرژی پتانسیل گرانشی وابسته کرد. اگر مبدأ مختصات را در m' انتخاب کنیم و فقط نیروی وارد



شکل ۶.۱۳. جاذبهٔ گرانشی m' روی m برداری است در سوی مخالف بردار یکای $\mathbf{u}_r$ که از m' دور می‌شود.

بر m را در نظر بگیریم (شکل ۶.۱۳)، ملاحظه می‌شود که $\mathbf{F}$ یک نیروی جاذبه و در سوی مخالف بردار $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA} = r\mathbf{u}_r$ است، که در آن $\mathbf{u}_r$ بردار یکا در راستای $\overrightarrow{OA}$ است. بنابراین به جای معالهٔ (۱.۱۳)، باید معادلهٔ صحیحتر برداری زیر را بنویسیم:

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{mm'}{r^{2}} \mathbf{u}_r \,. \tag{۲.۱۳}$$

این نیرو برابر است با گرادیان انرژی پتانسیل با علامت مخالف. درحالت فوق چون نیرو مرکزی است و در راستای شعاعی اثر می‌کند، انرژی پتانسیل تنها به r بستگی دارد و کافی است از معادلهٔ (۲۵.۸)، یعنی $F_r = -\partial E_p/\partial r$ استفاده کنیم. در این صورت، $F_r = -\gamma\, mm'/r^{2}$ است و داریم

$$\frac{\partial E_p}{\partial r} = \gamma \frac{mm'}{r^{2}}\,.$$

با انتگرال گیری از این رابطه و با برابر صفر قرار دادن انرژی پتانسیل برای فاصلهٔ خیلی دور $(r = \infty)$، به دست می‌آید

$$\int_{0}^{E_p} dE_p = \gamma mm' \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^{2}}\,.$$

این رابطه انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه متشکل از m و m' را به دست می‌دهد:

$$E_p = -\gamma \frac{mm'}{r}\,. \tag{۳.۱۳}$$

پس انرژی کل دستگاه دو ذره که تحت تأثیر برهم کنش گرانشی خود هستند برابر می‌شود با

$$E = \frac{1}{2} mv^{2} + \frac{1}{2} m' v'^{2} - \gamma \frac{mm'}{r}\,. \tag{۴.۱۳}$$

برای دستگاهی متشکل از بیش از دو ذره که زیر تأثیر برهم‌کنش گرانشی یکدیگر قرار دارند، انرژی کل برابر است با

$$E = \sum_{\substack{\text{تمام}\\\text{ذرات}}} \frac{1}{2} m_i v_i^{2} - \sum_{\substack{\text{تمام}\\\text{جفتها}}} \gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}}\,.$$

در مورد دو ذره، با بررسی حرکت آنها نسبت به چارچوب مرجع متصل به مرکز جرم دستگاه، می‌توان نتیجهٔ مثال ۹.۹ را برای بیان انرژی جنبشی دو ذره به صورت $E_k = \mu v_{12}^{2}/2$ به کار برد که در آن μ جرم کاهیده و v_{12} سرعت نسبی آنهاست. بنابراین انرژی کل در این چارچوب برابر است با

$$E = \frac{1}{2} \mu v_{12}^{2} - \gamma \frac{mm'}{r_{12}}\,.$$

در حالت ویژه‌ای که جرم ذره m' در مقابل جرم m خیلی زیاد باشد $(m' \gg m)$، [با بازگشت به تعریف جرم کاهیده، معادلهٔ (۱۵.۹)] داریم $\mu \approx m$. در این حالت m' عملاً بر مرکزجرم دستگاه منطبق است و می‌توان به‌جای سرعت نسبی $v_{۱۲}$، سرعت m نسبت به مرکز جرم، یعنی v را قرار داد. در نتیجه داریم

$$E = \frac{۱}{۲} m v^{۲} - \gamma \frac{m m'}{r}. \qquad (۵.۱۳)$$

اگر ذره روی یک مسیر دایره‌ای حرکت کند، نیروی وارد بر جرم با معادلهٔ (۲۸.۷)، یعنی $F_N = m v^{۲}/r$ داده می‌شود، و اگر نیروی گرانشی را ازمعادلهٔ (۱.۱۳) جانشین F_N کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{m v^{۲}}{r} = \gamma \frac{m m'}{r^{۲}}.$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۲} m v^{۲} = \frac{۱}{۲} \gamma \frac{m m'}{r}$$

و معادلهٔ (۵.۱۳) به رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود:

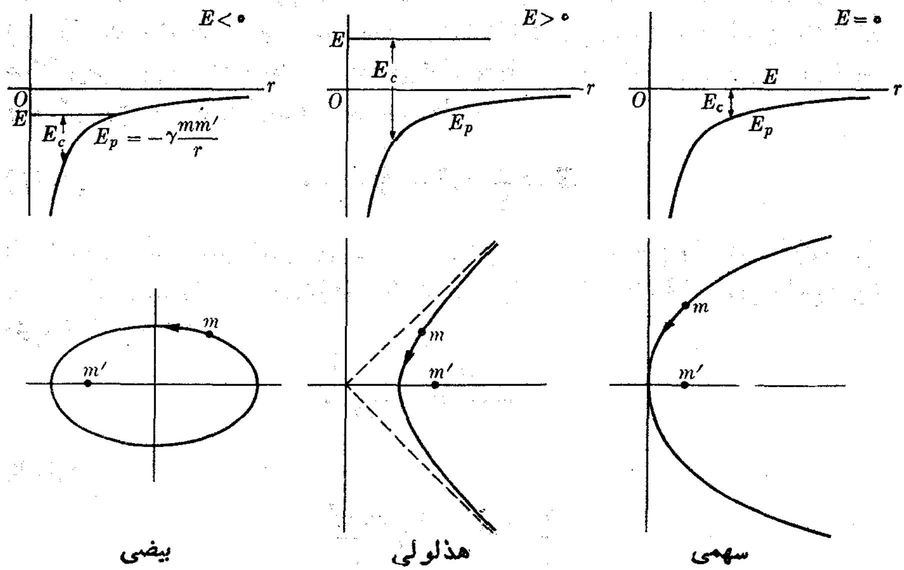
$$E = -\gamma \frac{m m'}{۲r}. \qquad (۶.۱۳)$$

این رابطه نشان می‌دهد که انرژی کل منفی است. این نتیجه کلیتر از آن است که اثبات ما ممکن است به‌تصور درآورد. هنگامی که انرژی پتانسیل را برای فاصلهٔ بینهایت برابر صفر بگیریم، تمام مدارهای بیضوی (یا مقید) دارای انرژی‌کل منفی می‌شوند $(E < ۰)$. وجود مسیر مقید بدین معنی است که در هیچ نقطه‌ای از مدار انرژی جنبشی کافی برای انتقال ذره به بینهایت وجود ندارد. به گفتهٔ دیگر انرژی جنبشی ذره آن اندازه نیست که با تبدیل شدن به انرژی پتانسیل، بر جاذبهٔ گرانشی غلبه کند. این امر قابل پیش بینی است، زیرا در فاصلهٔ بینهایت جملهٔ دوم درمعادلهٔ (۵.۱۳) برابرصفراست و بایدداشته باشیم $E = m v^{۲}/۲$ و طبق این معادله امکان ندارد E منفی شود.

بر عکس اگر انرژی مثبت باشد $(E > ۰)$، ذره می‌تواند تا بینهایت برود و هنوز مقداری از انرژی جنبشی خود را حفظ کند. اگر درمعادلهٔ (۵.۱۳)، r را برابر ∞ قرار دهیم و سرعت در بینهایت را v_∞ بنامیم، انرژی جنبشی در بینهایت برابر می‌شود با

$$\frac{۱}{۲} m v_\infty^{۲} = E \quad \text{یا} \quad v_\infty = \sqrt{۲E/m}. \qquad (۷.۱۳)$$

این نتیجه رامی‌توان بدین‌گونه تفسیرکرد. فرض‌کنیم که ذرهٔ m درآغازدرفاصلهٔ خیلی دوری از ذرهٔ m' قرار دارد و با سرعت v_∞ که سرعت نزدیک شدن [به میدان] خوانده می‌شود، به سمت آن پرتاب می‌شود، به گونه‌ای که انرژی کل از معادلهٔ (۷.۱۳) به‌دست



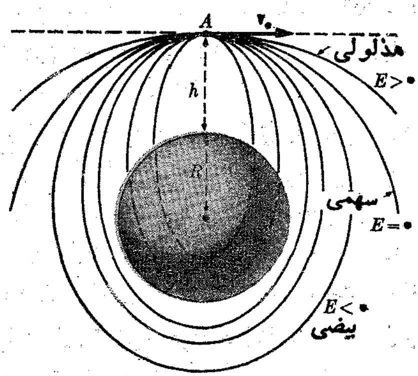
شکل ۷.۱۳. رابطهٔ بین انرژی کل ومسیر، برای حرکت براثر نیروی عکس مجذوری

می آید. در مدتی که ذرهٔ m به ذرهٔ m' نزدیک می‌شود، انرژی پتانسیل آن کاهش می یابد (یعنی بیشتر منفی می‌شود) و انرژی جنبشی آن افزایش پیدا می‌کند و در نقطهٔ کمترین فاصلهٔ نزدیک شدن، که به اندازه حرکت زاویه‌ای ذره بستگی دارد به حداکثر می‌رسد. (به بخش ۱۱.۸ و شکل ۱۸.۸ مراجعه کنید). سپس ذره شروع به دور شدن می‌کند، انرژی جنبشی خود را از دست می‌دهد و بالاخره در فاصلهٔ بینهایت دور سرعت v_∞ خود را باز می یابد. مسیر ذره یک منحنی باز است ومی‌توان ثابت کرد که یک هذلولی است (بخش ۵.۱۳).

حالت ویژه‌ای که در آن انرژی کل برابر صفر باشد ($E = 0$) بسیار جالب است، زیرا در این صورت، بنا به معادلهٔ (۷.۱۳)، ذره در بینهایت در حال سکون است ($v_\infty = 0$). در اینجا نیز منحنی مدار، باز است ولی به جای هذلولی یک سهمی به وجود می آید. ازلحاظ فیزیکی، این وضع مربوط به حالتی است که ذرهٔ m در فاصله‌ای از m' رها می‌شود و سرعت اولیهٔ آن به گونه‌ای است که انرژی جنبشی ذره با انرژی پتانسیل آن برابر است.

شکل ۷.۱۳، سه حالت ممکن را نشان می‌دهد، و در هر حالت انرژی کل، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل و نوع مدار مشخص شده اند.

این نتایج جهت قرار دادن یک ماهوارهٔ مصنوعی روی مدار بسیار اهمیت دارند. فرض کنید ماهواره‌ای از زمین پرتاب شود. هنگام رسیدن به ارتفاع بیشینهٔ h ناشی از پرتاب، درنقطهٔ A یک‌نیروی پیشرانهٔ نهایی به‌آن واردمی‌شود وسرعت افقی v_0 را به‌وجود می آورد (شکل ۸.۱۳). به این ترتیب انرژی کل ماهواره در نقطهٔ A برابر است با



شکل ۸.۱۳. مسیرهای ذره‌ای که در ارتفاع h بالای سطح زمین به طور افقی با سرعت v_0 پرتاب می‌شود.

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \gamma \frac{mM}{R+h}.$$

بسته به اینکه E منفی، صفر یامثبت باشد، مدار بیضی، سهمی یا هذلولی خواهد بود. در تمام حالات، مرکز زمین یکی از کانونهای مدار است. اگر انرژی خیلی کم باشد، مدار بیضی با زمین برخورد خواهد داشت، وماهواره به زمین می‌خورد. درغیر این‌صورت بسته به مقدار v_0، در یک مسیر بسته حرکت می‌کند یا از جاذبهٔ زمین می‌گریزد.

همین منطق را می‌توان در مورد قمرهای طبیعی مانند ماه نیز به کار برد. بدیهی است برای ماهواره‌های بین سیارات، مداری با انرژی‌مثبت لازم است. درتمام موارد، یک سازوکار راهنما برای تصحیح مسیر بعد از پرتاب، ضروری است.

مثال ۳.۱۳. سرعت فرارحداقل سرعتی است‌که باید یک جسم با آن از زمین پرتاب شود تا به‌بینهایت برود. سرعت فرار یک جسم اززمین را برآورد کنید.

حل: برای اینکه ذره تا بینهایت برود، انرژی‌کل باید برابرصفر یامثبت باشد، وبدیهی است که حداقل سرعت مربوط است به انرژی کل‌صفر. بنابراین، اگر جرم وشعاع زمین را بترتیب M و R، و سرعت فرار پرتابه را v_e بنامیم، از معادلهٔ (۵.۱۳) به ازای $E = 0$ داریم

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - \gamma \frac{mM}{R} = 0$$

که رابطهٔ بین v_e و R را در سکوی پرتاب به دست می‌دهد. بدین طریق سرعت فرار از زمین برابر می‌شود با

$$v_e = \sqrt{2\gamma M/R} = 1{,}13 \times 10^4 \,\mathrm{ms^{-1}}. \qquad (8.13)$$

این سرعت برابر است با $40700 \,\mathrm{km\,hr^{-1}}$. توجه کنید که سرعت فرار به‌جرم جسم

بستگی ندارد. با وجود این، پیشرانهٔ لازم بـرای شتاب دادن بـه جسم تا اینکه سرعت آن به سرعت فرار برسد به جرم جسم بستگی دارد. بدین جهت برای پرتابه‌هـا و ماهواره‌های خیلی سنگین موتورهای بسیار قوی لازم اند.

ذره‌ای که ازسطح زمین با سرعت v_e، مطابق رابطهٔ (۸۰۱۳)، پرتاب شود سرعت آن دربینهایت برابر صفـر می‌شود. اگر سرعت آن بـزرگتر از v_e باشد، دربینهایت ذره هنوز مقداری سرعت خواهد داشت. اگر سرعت پرتاب از v_e کوچکتر باشد، جسم روی زمین باز می‌گردد، مگر اینکه به‌وسیلهٔ طبقه‌های متوالی موشک حامل، روی مدار مقیدی قرار بگیرد، وچنانکه دربارهٔ شکل ۸۰۱۳ توضیح دادیم، راستای سرعت آن تغییر کند.

مفهوم سرعت فرار برای توضیح فرار گازها به‌خارج از جو زمین نیز سودمند است. اگر فرض کنیم که گازهای تشکیل دهندهٔ جو درحالت تعادل گرمـایی هستند، سرعت ریشهٔ میانگین مربعی مولکولهای آن با معادلهٔ (۵۹۰۹) داده می‌شود:

$$v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{۳kT/m}\cdot \qquad (۹۰۱۳)$$

سرعت ریشهٔ میانگین مربعی گازهای موجود در جو زمین در دمای میانگین آن عبارتند از $۱۹۰۸\mathrm{ms}^{-۱}$ بـرای هیدروژن؛ $۱۳۵۰\mathrm{ms}^{-۱}$ بـرای هلیوم؛ $۵۱۰\mathrm{ms}^{-۱}$ بـرای ازت؛ $۴۷۷\mathrm{ms}^{-۱}$ بـرای اکسیژن؛ و $۴۰۷\mathrm{ms}^{-۱}$ بـرای گاز کربنیک. درتمام موارد v_{rms} خیلی کوچکتر از v_e است. بدین طریق نتیجه می‌گیریم که هیچ مولکول گازی نمی‌تواند برجاذبهٔ گرانشی فائق آیدو از زمین فرار کند. ولی چنین نتیجه‌ای درست نخواهد بود.

سرعت ریشهٔ میانگین مـربعی، v_{rms}، یک سرعت میانگین است، یعنی تعداد زیادی از ازمولکولها با سرعتهای بزرگتر یا کوچکتر از v_{rms} حرکت می‌کنند. با اینکه v_{rms} کوچکتر از v_e است،شماری ازمولکولها با سرعت v_e یا بزرگتر ازآن‌حرکت‌می‌کنند، واین مولکولها می‌توانند از جو زمین فرار کنند، بویژه اگر درلایه‌های بالای جو قـرار داشته باشند. بنا به مقادیر عددی داده شده دربالا، مشاهده می‌شود که این اثر درمورد گازهای سبک مهمتر است تا برای گازهای سنگین، واین یکی از دلایلی است که چرا مقدار هیدروژن وهلیوم در جو زمین نسبتاً کم است، بـرآورد شده است کـه تنها به دلیل این اثـر گـرانشی در هر ثانیه $۱٫۳ \times ۱۰^{۲۲}$ اتم یا $۶۰۰\mathrm{kg}$ هیدروژن درسال از جو زمین فـرار می‌کند. با اینهمه، این عدد مقدار هیدروژن کل خارج شده از جو نیست، وافت خالص هیدروژن، به‌دلیل فرایندهای دیگری، با این مقدار تفاوت دارد.

برای سیارهٔ عطارد سرعت فرار خیلی کوچکتر ازسرعت فـرار از زمین است، و این سیاره به احتمال زیاد، تا کنون اتمسفر خود را از دست داده است. در مـورد ماه نیز چنین است. در زهره سرعت فرار تقریباً معادل زمین است. سرعت فرار برای مریخ تقریباً ۱/۶ زمین است، بنابراین بخشی از جو خود را نگه داشته ولی قسمت اعظم‌آن را از دست داده است، در واقع فشار جو درسطح مریخ خیلی کمتر ازسطح زمین است. برای سایـر سیاره‌ها سرعت فرار بزرگتر از زمین است، درنتیجه این سیاره‌ها بخش عظیمی از جو اولیهٔ خود را حفظ کرده‌انـد. با وجود این، بنا به دلایل دیگری، ترکیب گازهای اتمسفر این سیاره‌ها با

جو زمین تفاوت دارد.

مثال ۴.۱۳. سرعت جسمی را که ازفاصلهٔ r ازمرکز زمین رها می‌شود هنگام برخورد با زمین حساب کنید.

حل: سرعت اولیهٔ جسم برابر صفر است. بنا براین مطابق معادلهٔ (۵.۱۳) انرژی کل آن برابر است با

$$E = -\gamma \frac{mM}{r}$$

که درآن m جرم جسم و M جرم زمین است. وقتی که جسم با سطح زمین برخورد می‌کند سرعت آن v وفاصلهٔ آن ازمرکز زمین برابر R می‌شود. درنتیجه

$$E = \frac{۱}{۲} mv^۲ - \gamma \frac{mM}{R}.$$

چون انرژی باید ثابت بماند، دومقدار E را برابر قرار می‌دهیم (از مالش هوا صرف‌نظر می‌شود). داریم

$$\frac{۱}{۲} mv^۲ - \gamma \frac{mM}{R} = -\gamma \frac{mM}{r}.$$

با حل‌آن برای $v^۲$، به دست می‌آید

$$v^۲ = ۲\gamma M \left(\frac{۱}{R} - \frac{۱}{r}\right)$$

یا با مراجعه به مثال ۱.۱۳ که $g = \gamma M / R^۲$ است، به دست می‌آید

$$v^۲ = ۲R^۲ g\left(\frac{۱}{R} - \frac{۱}{r}\right). \qquad (۱۰.۱۳)$$

ازاین رابطه می‌توان برای پیدا کردن حداکثر ارتفاع جسمی که ازسطح زمین با سرعت v به‌طور قایم پرتاب می‌شود نیز استفاده کرد.

اگر جسم ازفاصلهٔ خیلی زیادی رها شود، به گونه‌ای که $۱/r$ درمقابل $۱/R$ قابل اغماض باشد، داریم

$$v_\infty = \sqrt{۲Rg} = \sqrt{۲\gamma \frac{M}{R}} = ۱٫۱۳ \times ۱۰^۴ \mathrm{ms}^{-۱}.$$

این عدد درست برابر با عددی است که در معادلهٔ (۸.۱۳) برای سرعت فرار به دست آوردیم. این امر شگفت‌آور نیست، زیرا این مسئله درست برعکس مثال ۳.۱۳ است. به عنوان مثال، نتیجهٔ فوق می‌تواند برآوردی ازسرعت برخورد یک سنگ آسمانی به زمین به دست دهد.

۵.۱۳ حرکت کلی بر اثر برهم‌کنش گرانشی

تا اینجا قوانین کپلر را تنها برای مدارهای بیضوی بیان کردیم. دربخش ۳.۱۳ ازروی این قوانین ثابت کردیم که، دستکم برای مـدارهای دایره‌ای، حرکت مداری هنگامی به وجود می‌آید که نیرو جاذبه و متناسب با عکس مجذور فاصله باشد. همچنین در بخش ۴.۱۳، هنگام مطالعهٔ انرژی، اشاره کردیم که این قوانین علاوه بر بیضی، برای مدارهای هذلولی یا سهمی، نیز صادق‌اند. اکنون به اثبات آن می‌پردازیم.

درفصل ۸، رابطـه‌ای [معادلـهٔ (۴۲.۸)] بین مختصات قطبی یک ذره بـا کمیتهای دینامیکی حرکت آن برقرار کردیم. اگر ازمعادلهٔ (۳۷.۸) برای انرژی پتانسیل مؤثر استفاده کنیم، می‌توانیم آن رابطه را به صورت زیر بنویسیم:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^{۲}=\frac{m^{۲}r^{۴}}{L^{۲}}\left\{\frac{۲[E-E_p(r)]}{m}-\frac{L^{۲}}{m^{۲}r^{۲}}\right\} \qquad (۱۱.۱۳)$$

که درآن L اندازه حرکت زاویه‌ای ذره است. ازطرف دیگر، معادلهٔ یک مقطع مخروطی درمختصات قطبی، با قرار دادن مبدأ مختصات در کانون (به یادداشت آخر این بخش مراجعه کنید)، عبارت است از

$$\frac{\varepsilon d}{r}=۱+\varepsilon\cos\theta \qquad (۱۲.۱۳)$$

که درآن ε خروج ازمرکز و r فاصلهٔ کانون ازخط هادی است. با مشتق‌گیری از رابطهٔ فوق نسبت به θ داریم

$$-\frac{\varepsilon d}{r^{۲}}\frac{dr}{d\theta}=-\varepsilon\sin\theta$$

و درنتیجه

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^{۲}=\frac{r^{۴}\sin^{۲}\theta}{d^{۲}}.$$

با قرار دادن این رابطه درمعادلهٔ (۱۱.۱۳) وساده کردن طرفین بر $r^{۴}$، می‌توان نوشت

$$\sin^{۲}\theta=\frac{d^{۲}m^{۲}}{L^{۲}}\left\{\frac{۲[E-E_p(r)]}{m}-\frac{L^{۲}}{m^{۲}r^{۲}}\right\}.$$

از طرف دیگر، بنا به معادلهٔ (۱۲.۱۳)، $\cos\theta=d/r-۱/\varepsilon$ است. بنابراین

$$\sin^{۲}\theta=۱-\cos^{۲}\theta=۱-\left(\frac{d}{r}-\frac{۱}{\varepsilon}\right)^{۲}=۱-\frac{d^{۲}}{r^{۲}}+\frac{۲d}{\varepsilon r}-\frac{۱}{\varepsilon^{۲}}$$

که با قرار دادن آن درمعادلهٔ پیش، به دست می‌آید

$$1-\frac{d^2}{r^2}+\frac{2d}{\varepsilon r}-\frac{1}{\varepsilon^2}=\frac{2d^2mE}{L^2}-\frac{2d^2mE_p(r)}{L^2}-\frac{d^2}{r^2}.$$

با حذف d^2/r^2 از طرفین و برابر قرار دادن جمله‌های ثابت و جمله‌هایی که به r بستگی دارند، به دست می‌آید

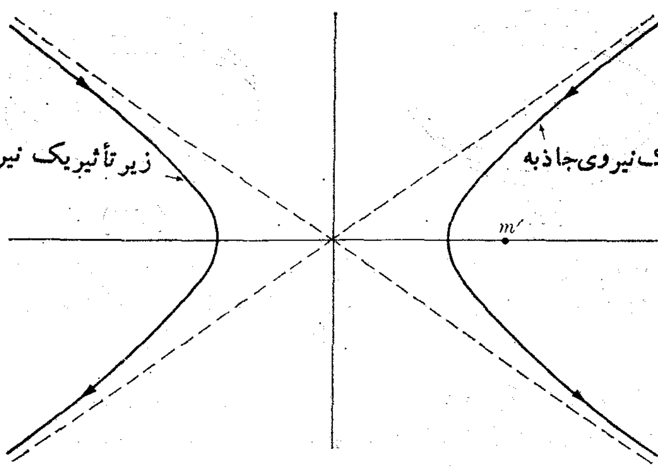
$$\frac{2d^2mE}{L^2}=1-\frac{1}{\varepsilon^2} \quad \text{یا} \quad E=\frac{L^2}{2d^2m}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \qquad (۱۳.۱۳)$$

و

$$-\frac{2d^2mE_p(r)}{L^2}=\frac{2d}{\varepsilon r} \quad \text{یا} \quad E_p(r)=-\frac{L^2}{md\varepsilon r}. \qquad (۱۴.۱۳)$$

معادلهٔ (۱۴.۱۳) نشان می‌دهد برای اینکه ذره یک مقطع مخروطی را که مرکز نیرو در یک کانون آن باشد بپیماید، باید انرژی پتانسیل $E_p(r)$ متناسب با $1/r$ تغییر کند و در نتیجه نیرو که برابر $F_r=-\partial E_p/\partial r$ است باید متناسب با $1/r^2$ تغییر کند. این موضوع قانون اول کپلر را عمومیت می‌دهد تا علاوه برمدارهای بیضی، مدارهای هذلولی و سهمی را نیز در بربگیرد.

برحسب اینکه خروج از مرکز ε کوچکتر، برابر یا بزرگتر از یک باشد، مدار، بیضی، سهمی یا هذلولی خواهد بود. بنا به معادلهٔ (۱۳.۱۳)، انرژی کل E نیز برحسب موارد فوق منفی، صفر یا مثبت می‌گردد. این امر توضیح ما را در بخش ۴.۱۳ تأیید می‌کند.



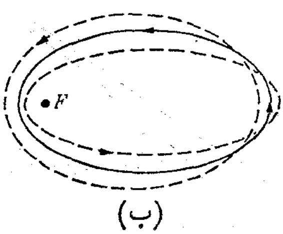
شکل ۹.۱۳. مسیرهای هذلولی براثر نیروهای جاذبه و دافعهٔ عکس مجذوری

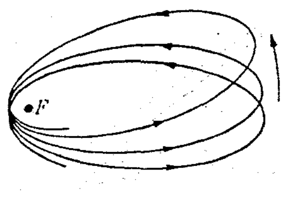
باید توجه داشت که یک هذلولی دارای دوشاخه است و براثر یک نیروی جاذبهٔ عکس مجذوری، تنها شاخه‌ای پیموده می‌شود که در برگیرندهٔ مرکز جاذبه است (شاخهٔ راست در شکل ۹.۱۳). اگر نیرو دافعه، یعنی $F=+C/r^2$ باشد، مدار مطابق با شاخهٔ

سمت چپ شکل ۹.۱۳ خواهد بود. در این حالت، یعنی برای یک نیروی دافعه، انرژی پتانسیل برابر $E_p = +C/r$ و مثبت است. درنتیجه، انرژی کل $E = mv^2/2 + C/r$ همیشه مثبت است و مسیر مقید وجود ندارد. حرکت براثر یک نیروی دافعهٔ عکس‌مجذوری را قبلا درمثال ۱۶.۷، هنگام گفتگو دربارهٔ پراکندگی بررسی کردیم.

اگر فرض‌کنیم درحرکت یک سیاره دور خورشید، سایر سیاره‌ها یا اجرام سماوی تأثیر نمی‌گذارند، ملاحظات بالا برای تجزیه و تحلیل کامل حرکت سیاره‌ها کافی است. به گفتهٔ دیگر، مدار زمین (یا هرسیارهٔ دیگر) دور خورشید یک بیضی کامل است هرگاه نیروی وارد برزمین تنها ازخورشید ناشی شود. با این همه، وجود سیاره‌های دیگر درمسیر هرسیاره اختلالی به‌وجود می‌آورد. این اختلالات را می‌توان با استفاده از تکنیک ویژه‌ای به‌نام مکانیک سماوی[1]، به‌طور خیلی دقیق محاسبه و به‌صورت دواثر اساسی زیرخلاصه کرد.

اثر اول اینکه، مسیر بیضی یک سیاره بسته نیست، و محور بزرگ بیضی بکندی دور کانونی‌که به‌وسیلهٔ خورشید اشغال شده‌است می‌چرخد. این‌اثر را پیشروی‌حضیض[2] می‌نامند. [شکل ۱۰.۱۳ (الف)]. اثر دیگر تغییر دوره‌ای خروج از مرکز بیضی در اطراف مقدار میانگین خود می‌باشد که شکل ۱۰.۱۳ (ب) آن را نشان می‌دهد. این تغییرات بسیار کند صورت می‌گیرند. در مورد زمین، دورهٔ آنها درحدود 10^5 سال (حدود $21'$ کمانی در قرن برای حرکت حضیض) است. با وجود این، اثرات آنها قابل ملاحظه‌اند، بویژه موجب‌تغییر تدریجی شرایط آب و هوای زمین می‌شوند. این تغییرات به‌وسیلهٔ دانشمندان فیزیک زمین درمطالعهٔ لایه‌های مختلف پوستهٔ زمین شناخته شده‌اند.





شکل ۱۰.۱۳ . اثرهای اختلالی‌روی حرکت سیاره‌ها. (الف) چرخش محوربیضی؛ (ب) تغییر دوره‌ای خروج از مرکز بیضی. اثرها خیلی بزرگتر از آنچه هستند نشان داده شده‌اند.

دربحث حرکت درمیدان گرانشی، فرض کردیم که مکانیک نیوتونی فصلهای ۷ و ۸ را می‌توان به‌کار برد. ولی یک تجزیه و تحلیل بسیاردقیق نیازمند نظریهٔ نسبیت عام اینشتین است (به‌بخش ۸.۱۳ مراجعه‌کنید). یکی ازمهمترین اثرهای *نسبیتی*، حرکت‌چرخشی اضافی محور بزرگ مدار سیاره است. این اثرنسبیتی برای عطارد که نزدیکترین سیاره به‌خورشید است و یکی از کشیده‌ترین مدارها را دارد، ازسایر سیارات بیشتر است. آهنگ پیشروی حضیض که برای سیارهٔ عطارد مشاهده شده است، درحدود $42''$ کمانی دریک قرن، ازآنچه

---
1. celestial mechanics 2. advance of the perihelion

کـه براساس مکانیک نیوتونی، با منظور کردن اختلالات ناشی از سایر سیاره‌هـا، محاسبه می‌شود، بیشتر است. نظریهٔ نسبیت عـام اینشتین دقیقاً همین آهنگ پیشروی حضیض اضافی را پیشگویی می‌کند. برای سایر سیاره‌ها این اثر نسبیتی بسیار ناچیز است و تاکنون مشاهده نشده است.

یادداشت در بارهٔ مقاطع مخروطی: یک خانوادهٔ مهم ازمنحنیهای تخت (مسطح)، مقاطع مخروطی هستند. مقطع مخروطی عبارت است از منحنی حاصل از حـرکت یک نقطه کـه نسبت فاصلهٔ آن ازنقطه‌ای به‌نام کانون برفاصلهٔ آن ازخطی به‌نام هادی ثابت باشد. سه‌نوع مقطع‌مخروطی وجود دارد. برحسب اینکه این‌مقدار ثابت (که خروج از مرکز نامیده می‌شود) کوچکتر، برابر یا بزرگترازیک باشد، مقطع‌مخروطی را بیضی، سهمی یا هذلولی‌می‌نامند. چنانچه خروج از مرکز را بـا ε، کانون را بـا F و خط هـادی را بـا HQD نشان دهیم (شکل ۱۱.۱۳)، می‌توان نوشت

$$\varepsilon = \frac{PF}{PQ}.$$

اگر PF را برابر r و FD را برابر d فرض کنیم، داریم

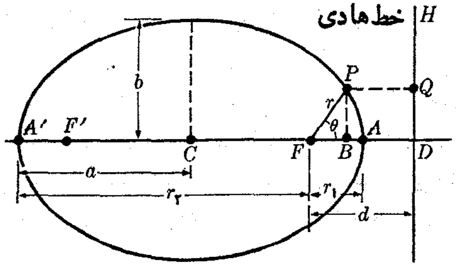
$$PQ = FD - FB = d - r\cos\theta.$$

بنابراین $\varepsilon = r/(d - r\cos\theta)$ است. یا، با حل آن نسبت به r به‌دست می‌آید

$$\frac{\varepsilon d}{r} = ۱ + \varepsilon\cos\theta.$$

این صورت از رابطه همان صورتی است که دراین کتاب برای نمایش مقاطع مخروطی به کاررفته است [معادلهٔ (۱۲.۱۳)]. [دربعضی کتابها، معادلهٔ مقاطع مخروطی را با استفاده از زاویـهٔ $\pi - \theta$ به دست می‌آورند، در نتیجه معادلـه به صورت $\varepsilon d/r = ۱ - \varepsilon\cos\theta$ درمی‌آید.] درموردیک بیضی، که یک منحنی بسته است، نقطهٔ A مربوط به $\theta = ۰$ ونقطهٔ A' مربوط به $\theta = \pi$ است. با نوشتن معادله در دستگاه مختصات قطبی، داریم

$$r_۱ = \frac{\varepsilon d}{۱+\varepsilon} \quad \text{و} \quad r_۲ = \frac{\varepsilon d}{۱-\varepsilon}$$



شکل ۱۱.۱۳. مشخصات هندسی یک بیضی

و چون $r_1 + r_2 = 2a$ است، نصف قطر بزرگ با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon^2}.$$

b، نصف قطر کوچک، برابر است با $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ و مساحت بیضی برابر است با

$$S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

دایره حالت خاصی از بیضی است که در آن $\varepsilon = 0$ است. (برای تفصیل بیشتر دربارهٔ مقاطع مخروطی، و بخصوص بیضی، رجوع کنید به: توماس، ج. ب. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی، بخشهای ۱۰ــ۷ تا ۱۰ــ۱۱.)

مثال ۵.۱۳. در یک حرکت بیضوی، رابطهٔ انرژی کل و اندازه حرکت زاویه‌ای را با نصف قطر بزرگ a و خروج ازمرکز ε پیدا کنید.

حل: بنا به یادداشت پیش درمورد مقاطع مخروطی، نصف قطر بزرگ یک بیضی برحسب خروج ازمرکز ε و فاصلهٔ d، برابر است با

$$a = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon^2}.$$

درنتیجه، بنا به‌معادلهٔ (۱۳.۱۳) داریم

$$E = \frac{L^2}{2d^2m}\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2} = -\frac{L^2}{2\varepsilon dma}.$$

ولی از معادلهٔ (۱۴.۱۳) با $E_p = -\gamma mm'/r$، به دست می‌آید

$$-\gamma\frac{mm'}{r} = -\frac{L^2}{m\varepsilon dr} \quad \text{یا} \quad \frac{L^2}{m\varepsilon d} = \gamma mm'.$$

بدین‌طریق، با قراردادن مقادیر مربوط درمعادلهٔ E، به‌دست می‌آید

$$E = -\gamma\frac{mm'}{2a}.$$

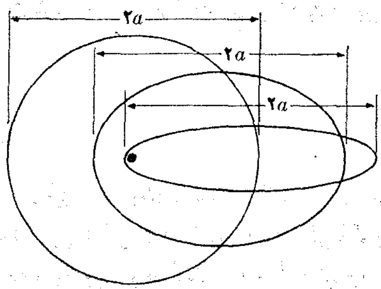
ازمقایسهٔ این رابطه با معادلهٔ (۶.۱۳) که برای مدارهای دایره‌ای به دست آوردیم، مشاهده می‌شود که دو رابطه اساساً یکسان هستند، زیرا در یک مسیر دایره‌ای $a = r$ است. این نتیجه همچنین ثابت می‌کند که انرژی کل منفی است و تنها به a، نیم قطر بزرگ بستگی دارد. همچنین تمام مدارهای بیضوی که نصف قطر بزرگ آنها برابرند، مانند آنچه که شکل ۱۲.۱۳ نشان می‌دهد، دارای انرژی کل یکسان هستند، هر چند خروج از مرکز آنها مختلف باشد. با استفاده از رابطهٔ $\varepsilon d = a(1 - \varepsilon^2)$ می‌توان یک رابطهٔ مفید دیگر نیز نوشت:

$$L^2 = \gamma m^2 m' \varepsilon d = \gamma m^2 m' a(1 - \varepsilon^2).$$

با استفاده از معادله‌ای که قبلا برای انرژی E داده شد، a، نصف قطر بزرگ را حذف می‌کنیم و برای خروج از مرکز مدار به‌دست می‌آوریم

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2E}{m}\left(\frac{L}{\gamma mm'}\right)^2.$$

بدین طریق مشاهده می‌شود که خروج از مرکز به انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای بستگی دارد. مدارهایی که در شکل ۱۲.۱۳ نشان داده شده‌اند همگی دارای انرژی یکسان ولی اندازه حرکت زاویه‌ای و خروج ازمرکز متفاوت هستند. به‌گفتهٔ دیگر، در یک میدان عکس مجذوری، به یک انرژی کل معین، اندازه حرکتهای زاویه‌ای مختلف بسیاری می‌تواند مربوط شود. این موضوع در بحث ساختار اتمی از اهمیت زیادی برخوردار است، زیرا دریک اتم ممکن‌است چندین الکترون با انرژیهای یکسان ولی با اندازه حرکتهای زاویه‌ای مختلف وجود داشته باشند.



شکل ۱۲.۱۳. مدارهای بیضوی به‌ازای مقادیر مختلف اندازه‌حرکت زاویه‌ای ولی با انرژیهای یکسان. تمام مدارها دارای یک کانون و قطر بزرگ یکسان هستند ولی خروج از مرکز آنها مختلف است.

می‌توان نتایج فوق را بدین‌طریق خلاصه کرد. «اندازهٔ» مدار (که با نصف قطر بزرگ بیان می‌شود) با انرژی تعیین می‌گردد، و برای یک انرژی مشخص، «شکل» مدار (که خروج از مرکز آن را بیان می‌کند) با اندازه حرکت زاویه‌ای تعیین می‌شود.

مثال ۶.۱۳. تحقیق کنید که قانون سوم کپلر برای مدارهای بیضوی صادق است.

حل: یادآوری می‌کنیم که دربخش ۲.۱۳، برای تحقیق درمورد نیروی عکس مجذوری در یک مدار دایره‌ای، قانون سوم کپلر را به‌کار بردیم. اکنون تحقیق می‌کنیم که این قانون در در مدار بیضوی نیز برقرار است. اثبات آن یک محاسبهٔ جبری مستقیم برمبنای ویژگیهای بیضی است.

بنا به‌معادلهٔ (۳۵.۷)، که ثابت بودن اندازه حرکت زاویه‌ای را بیان می‌کند، داریم

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m} \quad \text{یا} \quad r^2 d\theta = \frac{L}{m}\,dt.$$

در طول یک دورهٔ P، بردار شعاع تمام مساحت بیضی را جاروب می‌کند و θ از ۰ تا 2π تغییر می‌کند. بدین‌طریق، می‌توان مساحت بیضی را به‌دست آورد:

$$\text{مساحت} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{L}{2m}\int_0^P dt = \frac{LP}{2m}.$$

ولی چون مساحت بیضی برابراست با $\pi a^2(1-\varepsilon^2)^{1/2}$ (به یادداشت پایان بخش ۵.۱۳ مراجعه کنید)، درنتیجه داریم

$$\pi^2 a^4(1-\varepsilon^2) = L^2P^2/4m^2.$$

بنا به مثال ۵.۱۳، داریم $L^2 = \gamma m^2 m' a(1-\varepsilon^2)$. درنتیجه،

$$\pi^2 a^3 = \frac{1}{4}\gamma m' P^2 \quad \text{یا} \quad P^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma m'}a^3.$$

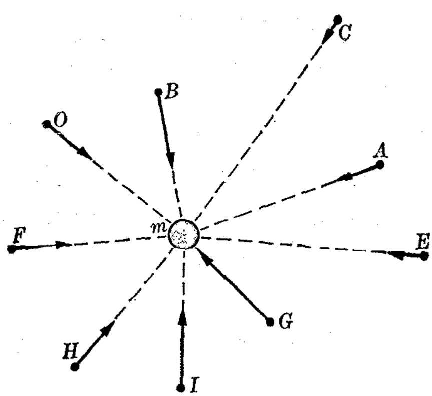
رابطهٔ اخیر همان قانون سوم کپلر است، زیرا مقدار میانگین r بوضوح با نصف قطر بزرگ متناسب است.

۶.۱۳ میدان گرانشی

اکنون یک مفهوم خیلی مهم در فیزیک، یعنی، میدان گرانشی را معرفی می‌کنیم. فرض کنید جرمی مانند m وجود دارد و جرم دیگر m' را درجاهای گوناگون اطراف m قرارمی‌دهیم (شکل ۱۳.۱۳). در هروضع، به‌سبب برهم‌کنش m و m' نیرویی بر m' اثر می‌کند که با رابطهٔ (۲.۱۳) بیان می‌شود، یعنی

$$\mathbf{F} = -\gamma\frac{mm'}{r^2}\mathbf{u}_r.$$

روشن است کـه برای هروضع m'، یک نیروی برابر ولی درسوی مخالف روی m اثـر



شکل ۱۳.۱۳. میدان گرانشی حاصل از یک جرم نقطه‌ای در نقاط مختلف

می‌کند، ولی ما درحال حاضر فقط وضع m' را مورد توجه قرار می‌دهیم.

می توان براحتی گفت که جرم m درفضای اطراف خود یکٔ حالت فیزیکی به‌وجود می‌آورد که آن را میدان گرانشی می‌نامیم. وجود این میدان از نیرویی شناخته می‌شود که جرم m روی هرجرم دیگری مانند m' که به‌این منطقه آورده شود وارد می‌کند. اینکه آیا درفضای‌آزاد اطراف m، بدون‌آنکه جرم‌آزمون m' را برای اثبات وجود میدان به‌کار ببریم، چیزی وجود دارد یا نه، امری است حدسی، و تا اندازه‌ای سؤال نامربوطی است، زیرا ما تنها هنگامی متوجه میدان گرانشی می‌شویم که جرم دیگری درمیان باشد.

شدت میدان گرانشی $\mathbf{G}$ حاصل از جرم m در نقطهٔ P، با نیروی وارد برجرم واحد درنقطهٔ P تعریف می‌شود. دراین صورت،

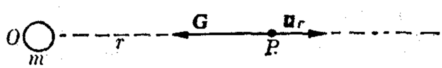
$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{F}}{m'} = -\gamma \frac{m}{r^2} \mathbf{u}_r. \qquad (۱۵.۱۳)$$

بنابراین سوی میدان گرانشی $\mathbf{G}$ مخالف برداریکای $\mathbf{u}_r$ است. سوی $\mathbf{u}_r$ از جرم به‌وجودآورندهٔ میدان به سمت نقطه‌ای است که درآنجا میدان محاسبه می‌شود. به‌گفتهٔ دیگر، میدان گرانشی همیشه به‌سمت جرمی است که آن را به‌وجود می‌آورد.

رابطهٔ (۱۵.۱۳) میدان گرانشی را در فاصلهٔ r از جرم m واقع در نقطهٔ O به دست می‌دهد. پس می‌توان به هرنقطه از فضای اطراف m (شکل ۱۴.۱۳)، برداری مانند $\mathbf{G}$ با معادلهٔ (۱۵.۱۳) وابسته ساخت، به‌گونه‌ای که نیروی گرانشی وارد بر یک جرم مستقر در این ناحیه ازضرب جرم مذکور در بردار $\mathbf{G}$ مربوط به‌آن نقطه به‌دست می‌آید؛ یعنی

$$\mathbf{F} = (\text{جرم ذره}) \times \mathbf{G}.$$

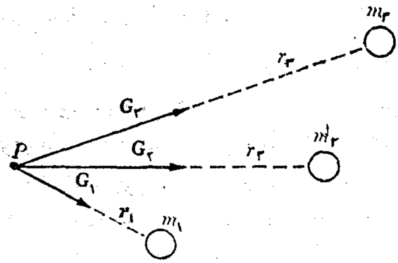
تعریف میدان گرانشی نشان می‌دهد که شدت میدان گرانشی را برحسب $\mathrm{N\,kg^{-1}}$ یا $\mathrm{m\,s^{-2}}$ اندازه می‌گیرند و بعد آن همان بعد شتاب است. با مقایسهٔ معادلهٔ (۱۵.۱۳) با معادلهٔ (۱۶.۷)، درمی‌یابیم که شتاب گرانی را می‌توان شدت میدان گرانشی درسطح زمین درنظر گرفت.



شکل ۱۴.۱۳. میدان گرانشی حاصل ازجرم نقطه‌ای m در نقطهٔ P در سوی مخالف برداریکای $\mathbf{u}_r$ است.

اکنون فرض کنید جرمهای m_1، m_2، m_3، ... (شکل ۱۵.۱۳) وجود داشته باشند که هریک میدان گرانشی مخصوص خود را به‌وجود می‌آورد. نیروی کل وارد برجرم m واقع درنقطهٔ P برابر است با

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= m\mathbf{G}_1 + m\mathbf{G}_2 + m\mathbf{G}_3 + \cdots \\ &= m(\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_3 + \cdots) = m\mathbf{G} \qquad (۱۶.۱۳)\end{aligned}$$

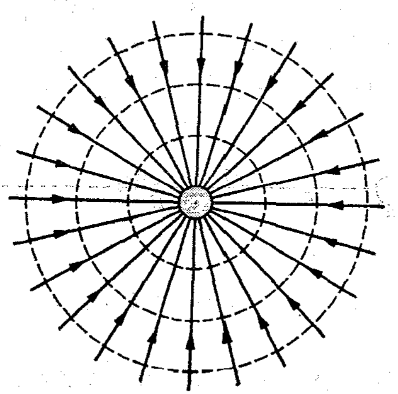


شکل ۱۵.۱۳. برآیند میدان گرانشی چند جرم

که درآن G_1، G_2، G_3، . . . میدانهای گرانشی حاصل از هرجرم درنقطهٔ P هستند و مطابق معادلهٔ (۱۵.۱۳) محاسبه می‌شوند. در این صورت میدان برآیند در نقطهٔ P برابر جمع برداری زیر است:

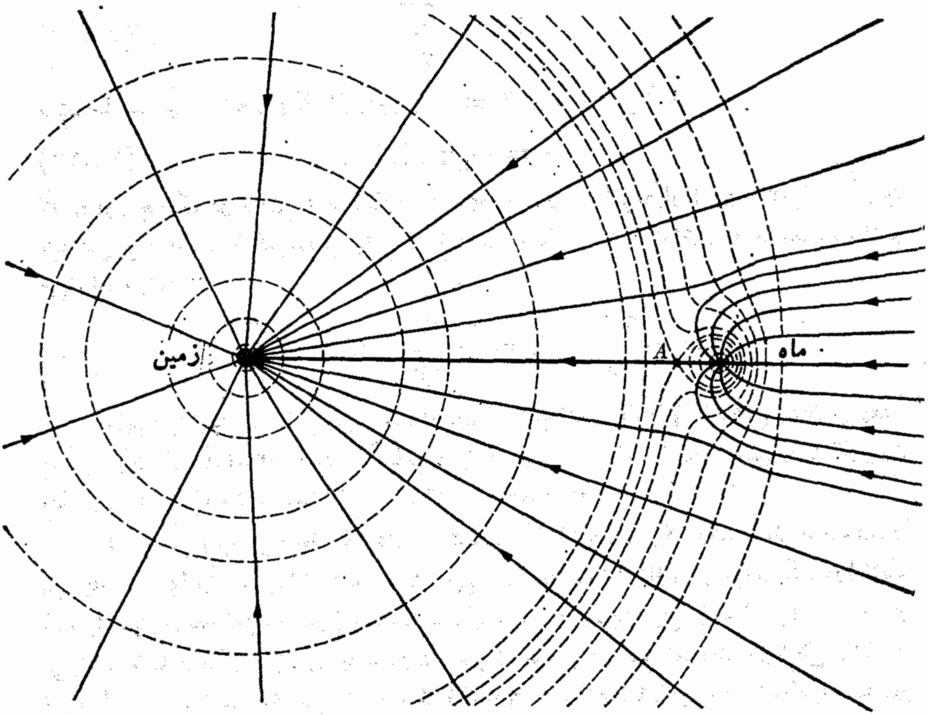
$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_3 + \cdots = -\gamma \sum_i \frac{m_i}{r_i^2}\mathbf{u}_{ri}. \qquad (۱۷.۱۳)$$

میدان گرانشی را می‌توان با خطهای نیرو نشان داد. یک خط نیرو به گونه‌ای رسم می‌شود کـه در هرنقطه راستای میدان برخط نیرویی که از این نقطه می‌گذرد مماس باشد. چگالی خطهای نیرو متناسب با شدت میدان است. شکل ۱۶.۱۳ میدان اطراف یک جـرم منفرد را نشان می‌دهد. تمام خطهای نیروشعاعی هستند و درنقاط نزدیکتر به‌جرم شدت میدان بیشتر است؛ شکل ۱۷.۱۳ میدان اطراف دوجرم نابرابر، یعنی زمین و ماه، را نشان می‌دهد. دراینجا خطهای نیرو شعاعی نیستند ودر نزدیکی نقطهٔ A شدت میدان خیلی ضعیف است (در نقطهٔ A برابر صفر است).



شکل ۱۶.۱۳. خطهای نیرو وسطحهای هم‌پتانسیل میدان گرانشی حاصل از یک جرم نقطه‌ای

یک مفهوم مهم دیگر، پتانسیل گرانشی است، که به‌عنوان انرژی پتانسیل یک‌جرم واحد واقع در میدان گرانشی تعریف می‌شود. بنابراین، اگر در نقطه‌ای از میدان گرانشی، جرمی



شکل ۱۷.۱۳. خطهای نیرو و سطحهای هم‌پتانسیل میدان گرانشی برایند حاصل از زمین و ماه. در نقطهٔ A میدان برآیند برابر صفر است.

مانند m' دارای انرژی پتانسیل E_p باشد، پتانسیل گرانشی در این نقطه برابر است با $V = E_p/m'$. درنتیجه، پتانسیل گرانشی برحسب $\mathrm{J\,kg^{-1}}$ یا $\mathrm{m^2 s^{-2}}$ بیان می‌شود.

از تقسیم معادلهٔ (۳.۱۳) بر m'، مشاهده می‌شود که پتانسیل گرانشی در نقطه‌ای به‌فاصلهٔ r ازجرم m برابر است با

$$V = -\gamma \frac{m}{r}. \qquad (۱۸.۱۳)$$

اگر به جای یک ذره، مانند شکل ۵.۱۳، چندین ذره وجود داشته باشد، پتانسیل گرانشی درنقطهٔ P برابر جمع عددی $V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$ است، یا

$$V = -\gamma\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \dots\right) = -\gamma \sum_i \frac{m_i}{r_i}. \qquad (۱۹.۱۳)$$

با مقایسهٔ معادلهٔ (۱۸.۱۳) با معادلهٔ (۱۵.۱۳) ملاحظه می‌شود که بزرگی میدان گرانشی برابر است با

$$G = -\frac{\partial V}{\partial r} \qquad (۲۰.۱۳)$$

و در حالت کلی، بنا به رابطهٔ $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} E_p$، به دست می‌آید

$$\mathbf{G} = -\operatorname{grad} V \qquad (۲۱.۱۳)$$

که درآن، چنانکه در بخش ۷.۸ اشاره شد، grad علامت گرادیان است. بنابراین میدان گرانشی برابر است با گرادیان پتانسیل گرانشی با علامت مخالف. در مختصات قایم می‌توان نوشت

$$G_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad G_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad G_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

مفهوم پتانسیل گرانشی بسیارمفید است، زیرا چنانکه معادلهٔ (۱۹.۱۳) نشان می‌دهد، پتانسیل یک کمیت اسکالر است و بآسانی می‌توان آن را حساب کرد، وسپس با به کاربردن معادلهٔ (۲۱.۱۳)، شدت میدان گرانشی $\mathbf{G}$ را به دست آورد.

از به هم پیوستن نقاطی که دارای پتانسیل یکسان هستند یک رشته سطوح به دست می‌آید که آنها را سطحهای هم‌پتانسیل[1] می‌نامند. به عنوان مثال، در مورد یک ذرهٔ تنها، که پتانسیل ازمعادلهٔ (۱۸.۱۳) به‌دست می‌آید، سطوح هم‌پتانسیل کره‌های $r = \text{const}$ می‌باشند که درشکل ۱۶.۱۳ به صورت خطوط نقطه چین رسم شده‌اند. در شکل ۱۷.۱۳ نیز سطوح هم‌پتانسیل به صورت خطوط نقطه چین رسم شده‌اند. توجه داشته باشید که در همهٔ موارد خطهای نیرو برسطوح هم پتانسیل عمودند، و در حالت کلی می‌توان آن را بدین طریق اثبات کرد. دونقطهٔ خیلی نزدیک به هم را روی یک سطح هم پتانسیل انتخاب می‌کنیم. وقتی که ذره‌ای را از یکی از این نقطه‌ها به نقطهٔ دیگر انتقال می‌دهیم، کار انجام یافته به وسیلهٔ میدان گرانشی روی ذره برابر صفر است، زیرا کار انجام یافته برابر است با تغییر انرژی پتانسیل، و دراین مورد انرژی پتانسیل تغییر نمی‌کند، زیرا پتانسیل گرانشی دو نقطه یکسان است. صفر بودن این‌کار دلیل براین است که نیرو بر جابجایی عمود است. بنابراین راستای میدان گرانشی برسطحهای هم‌پتانسیل عموداست؛ یعنی اگرخطهای نیرو معلوم باشند بآسانی می‌توان سطحهای هم پتانسیل را رسم کرد و برعکس*.

مثال ۷.۱۳. در میدان گرانشی حاصل از دو جرم برابر که به فاصلهٔ $2a$ از یکدیگر قرار دارند بحث کنید.

حل: محورهای مختصات را مطابق شکل ۱۸.۱۳ قرار می‌دهیم. با استفاده از معادلهٔ (۱۹.۱۳) برای دوجرم یکسان، پتانسیل گرانشی درنقطهٔ $P(x, y)$ چنین نوشته می‌شود:

---

1. equipotential surfaces

☆ نظر دانشجو را به یادداشت بعد از بخش ۷.۸ که مربوط به‌گرادیان بود جلب می‌کنیم. در آنجا ثابت شد که بردار $\operatorname{grad} E_p$ بر سطحهای $E_p = \text{const}$ عمود است، که با بیان فوق هم‌ارز است، زیرا $\mathbf{G} = -\operatorname{grad} V$ می‌باشد.

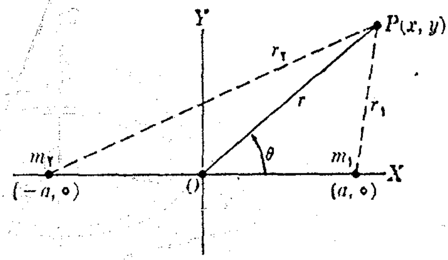
$$V = -\gamma m\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

از طرف دیگر، شکل ۱۸.۱۳ نشان می‌دهد که

$$r_1 = [(x-a)^2 + y^2]^{1/2}$$
$$r_2 = [(x+a)^2 + y^2]^{1/2}$$

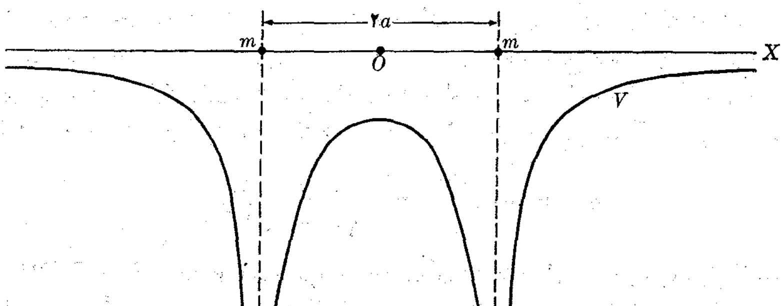
است. در نتیجه داریم

$$V = -\gamma m\left\{\frac{1}{[(x-a)^2 + y^2]^{1/2}} + \frac{1}{[(x+a)^2 + y^2]^{1/2}}\right\}.$$



شکل ۱۸.۱۳

هنگامی که روی محور Xها از $-\infty$ تا $+\infty$ حرکت کنیم، تغییر پتانسیل گرانشی حاصل از دوجرم برابر، مطابق شکل ۱۹.۱۳ خواهد بود. به دانشجو توصیه می‌کنیم منحنی مشابهی برای پتانسیل حاصل از چهار جرم برابر و هم‌فاصله که روی یک خط مستقیم قرار دارند رسم کند.



شکل ۱۹.۱۳. تغییرات پتانسیل گرانشی حاصل از دو جرم برابر در طول خط واصل آنها

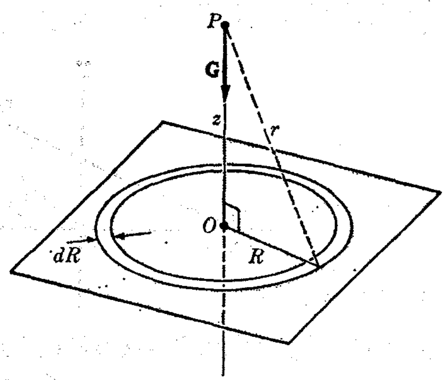
برای به دست آوردن میدان گرانشی، از معادلهٔ (۲۱.۱۳) در دستگاه مختصات قایم استفاده می‌کنیم؛ به دست می‌آید

$$G_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\gamma m\left\{\frac{x-a}{[(x-a)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{x+a}{[(x+a)^2 + y^2]^{3/2}}\right\}$$

$$G_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\gamma m\left\{\frac{y}{[(x-a)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{y}{[(x+\alpha)^2 + y^2]^{3/2}}\right\}.$$

میدان دارای تقارن دورانی حول محور Xهاست. به دانشجو توصیه می‌کنیم میدان را درطول محورهای Y و Z مطالعه و خطهای نیرو را رسم کند؛ این خطهای نیرو باید نسبت به O متقارن باشند. همچنین توصیه می‌کنیم دانشجو مسئله را با استفاده از مختصات قطبی r و θ برای نقطهٔ P مجدداً حل کند و G_r و G_θ را بیابد.

مثال ۸.۱۳. میدان گرانشی حاصل از یک لایهٔ نازک ماده را که به صورت یک صفحهٔ بینهایت بزرگ درآمده است پیدا کنید.



شکل ۲۰.۱۳. میدان گرانشی یک صفحه

حل: صفحه را به یک رشته حلقه‌های هم‌مرکز، به مرکز O که تصویر نقطهٔ P روی صفحه است تقسیم می‌کنیم (شکل ۲۰.۱۳). هرحلقه دارای شعاع R و پهنای dR است. بنابراین مساحت آن برابر است با $(2\pi R)dR$. اگر σ جرم واحد سطح صفحه باشد، جرم هر حلقه برابر می‌شود با $dm = \sigma(2\pi R)dR$. تمام نقطه‌های هر حلقه به فاصلهٔ یکسان r از نقطهٔ P قرار دارند. بنابراین پتانسیلی که هر حلقه در نقطهٔ P به وجود می‌آورد برابر است با

$$dV = -\gamma\frac{dm}{r} = -\frac{2\pi\gamma\sigma R\,dR}{(z^2 + R^2)^{1/2}}$$

زیرا $r = (z^2 + R^2)^{1/2}$ است. برای به‌دست‌آوردن پتانسیل کل باید پتانسیل کلیهٔ حلقه‌ها را باهم جمع کرد، یعنی باید ازرابطهٔ بالا بین $R = 0$ تا $R = \infty$ انتگرال گرفت. نتیجه عبارت است از

$$V = -2\pi\gamma\sigma\int_0^\infty \frac{R\,dR}{(z^2 + R^2)^{1/2}} = -2\pi\gamma\sigma(\infty - z).$$

بدین طریق برای حد بالای انتگرال مقدار بینهایت ولی ثابتی به دست می‌آید. چون برای ما تنها اختلاف پتانسیل بین نقطهٔ P و صفحه اهمیت دارد و آن را نیز می‌توان به طور تجربی اندازه گیری کرد، باید از مقدار پتانسیل بالا، پتانسیل مربوط به $z = 0$، یعنی $-2\pi\gamma\sigma(\infty)$ را کم کنیم. بالاخره به دست می‌آید

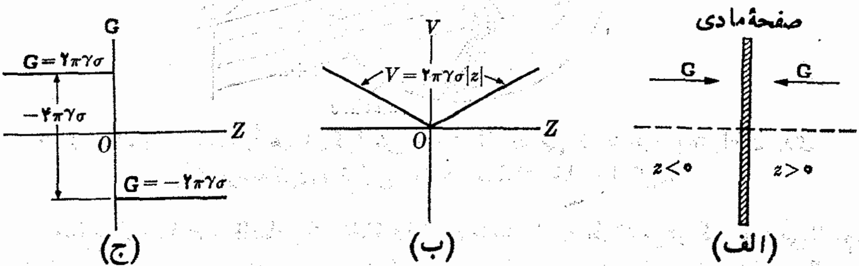
$$V = ۲\pi\gamma\sigma z.$$

درواقع، آنچه ما انجام دادیم عملی است به نام بازبهنجارش[1] که در آن مقدار پتانسیل صفحه را برابر صفر گرفتیم و درنتیجه ناچارشدیم مقدار بینهایت را از پتانسیل کل کم کنیم. این مثال نمونهٔ خوبی است ازموارد مشابه درمسائل دیگرفیزیک، که درآنها نتیجه بینهایت یا واگراست، ولی چون تنها تفاضل بین دو بینهایت مورد توجه می‌باشد، این اختلاف را می‌توان به صورت یک رابطهٔ معین یا همگرا بیان کرد.

میدان درنقطهٔ P را می‌توان ازفرمول (۲۰.۱۳) به‌دست‌آورد (زیرا z مختصهٔ P است):

$$G = -\frac{\partial V}{\partial z} = -۲\pi\gamma\sigma.$$

علامت منفی نشان می‌دهد که G به سمت صفحه است. توجه کنید که عمل بازبهنجارش اثری روی میدان ندارد، زیرا مشتق یک مقدار ثابت هرقدر هم که بزرگ باشد، همیشه برابر صفر است. بدین طریق معلوم می‌شود که میدان گرانشی ثابت است، یعنی به فاصلهٔ نقطهٔ P تاصفحه بستگی ندارد. دراین صورت می‌گوییم میدان یکنواخت است. در واقع، رابطه‌هایی که برای V و G به دست‌آوردیم تنها برای zهای مثبت ($z > ۰$) معتبرند. ولی تقارن مسئله نشان می‌دهد که میدان برای $z < ۰$ باید تصویر نتایج $z > ۰$ در یک آینه باشد. بدین طریق برای $z < ۰$ باید بنویسیم $V = -۲\pi\gamma\sigma z$ و $G = +۲\pi\gamma\sigma$. این نتایج با محاسبات ما کاملا تطبیق می‌کنند، زیرا رابطه‌ای که برای محاسبهٔ V به‌کار می‌بریم به $z^۲$ بستگی دارد. بنابراین پاسخ آن را باید به‌صورت $V = ۲\pi\gamma\sigma\,|z|$ بنویسیم، که برای $z \lessgtr ۰$ معتبر است.



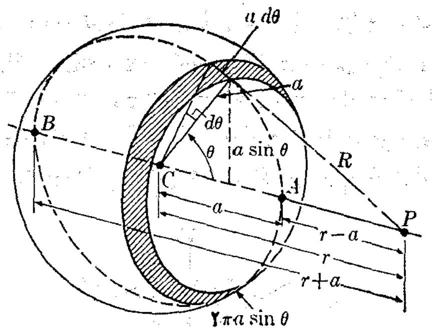
شکل ۲۱.۱۳. تغییرات G و V برای ماده‌ای به شکل صفحه

در شکل ۲۱.۱۳ پتانسیل ومیدان دردوطرف صفحهٔ مادی نشان داده شده‌اند. ملاحظه می‌شود که در جابجایی از چپ به راست ازداخل صفحه، مقدارپتانسیل تغییر نمی‌کند (ولی شیب آن به طور ناپیوسته تغییر می‌کند) و میدان دفعتاً به اندازهٔ $-۴\pi\gamma\sigma$ تغییر می‌کند. می‌توان ثابت کرد که این نتیجه در مورد هر توزیع سطحی ماده معتبر است و به شکل آن بستگی ندارد.

1. renormalization

۷۰۱۳ میدان گرانشی ناشی از یک جسم کروی

تمام فرمولهایی که تاکنون دراین فصل بــه دست آوردیم به طور دقیق فقط برای جرمهای نقطه‌ای معتبرند. هنگامی کــه این فرمولها را در مورد حرکت سیاره‌ها به دور خورشید به کار می بردیم پذیرفتیم که ابعاد آنها در مقابل فاصلهٔ عظیم‌شان قابل اغماض می باشند. حتی اگر این فرض درست باشد، احتمال دارد اندازه‌های معین آنها یک سازهٔ هندسی در رابطهٔ (۱۰۱۳) وارد کنند. همچنین، هنگامی که در مثال ۱۰۱۳ شتاب گرانی g را با جرم و شعاع زمین ربط می‌دادیم باز هم از معادلهٔ (۱۰۱۳) استفاده کردیم، هرچند که استدلال بالا مبنی بر اینکه اندازه نسبتاً کوچک است دراین مورد نمی‌تواند به کار رود. خود نیوتون نیز در مورد این مسئلهٔ هندسی با دشواریهایی روبرو بود و انتشار قانون گرانش خود را درحدود ۴۰ سال به‌تأخیر انداخت تا اینکه توضیح درستی برای آن پیدا کرد. دراین بخش می‌خواهیم میدان گرانشی حاصل ازیک جسم کروی را حساب کنیم. ابتدا از محاسبهٔ میدان برای یک پوستهٔ کروی، یعنی جرمی کـه بـه طور یکنواخت روی یک کرهٔ توخالی توزیع شده است شروع می‌کنیم.



شکل ۲۲.۱۳. محاسبهٔ میدان گرانشی حاصل از جرمی که به طور یکنواخت روی یک پوستهٔ کروی توزیع شده در نقطه‌ای خارج ازکره.

شعاع کره را a و فاصلهٔ یک نقطهٔ دلخواه مانند P را از C مرکز کـره، r می نامیم. می‌خواهیم شدت میدان گرانشی را درنقطهٔ P محاسبه کنیم. ابتدا حالتی را درنظر می‌گیریم که P درخارج کره قراردارد (شکل ۲۲۰۱۳). می توان کره را به نوارهای دایره‌ای باریکی که مرکزهمه آنها روی خط راست AB قرار داشته باشد تقسیم کرد. شعاع هر نوار برابر $a\sin\theta$ و عرض آن $ad\theta$ است. در نتیجه مساحت هر نوار برابر می‌شود با

$$\text{مساحت} = \text{طول} \times \text{عرض} = (2\pi a\sin\theta)(ad\theta) = 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta.$$

اگر m جرم کل توزیع شده روی سطح کره باشد، جرم واحد سطح برابر $m/4\pi a^2$ است و جرم یک نوار دایره‌ای برابر می‌شود با

$$\frac{m}{4\pi a^2}(2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta) = \frac{1}{2} m \sin\theta\, d\theta.$$

تمام نقطه‌های یک نوار به فاصلهٔ R از نقطهٔ P قرار دارند. بنابراین پتانسیل حاصل از هر نوار در نقطهٔ P، بنا به معادلهٔ (۱۹.۱۳) برابر است با

$$dV = -\frac{\gamma[(m/۲)\sin\theta\, d\theta]}{R} = -\frac{\gamma m}{۲R}\sin\theta\, d\theta.$$

بنا به شکل ۲۲.۱۳، با استفاده از قانون کسینوسها [معادلهٔ (پ.۱۶)]، مشاهده می‌شود که

$$R^۲ = a^۲ + r^۲ - ۲ar\cos\theta.$$

چون a و r ثابت هستند، با دیفرانسیل گیری از رابطهٔ فوق به دست می‌آید

$$۲RdR = ۲ar\sin\theta\, d\theta \quad \text{یا} \quad \sin\theta\, d\theta = (R/ar)\, dR$$

که اگر آن را در رابطهٔ مربوط به dV قرار دهیم، به دست می‌آید

$$dV = -\frac{\gamma m}{۲ar}dR. \qquad (۲۲.۱۳)$$

برای به دست آوردن پتانسیل گرانشی کل، باید روی تمام سطح کره انتگرال بگیریم. هنگامی که نقطهٔ P درخارج کره واقع‌است، حدود R عبارتند از $r - a$ و $r + a$. درنتیجه،

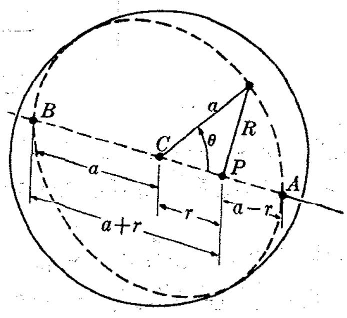
$$V = -\frac{\gamma m}{۲ar}\int_{r-a}^{r+a} dR = -\frac{\gamma m}{۲ar}(۲a) = -\frac{\gamma m}{r} \quad r > a \qquad (۲۳.۱۳)$$

برابر پتانسیل گرانشی در یک نقطه خارج از پوستهٔ کروی همگن است.

اگر نقطهٔ P در داخل کره قرار داشته باشد (شکل ۲۳.۱۳)، حدود R عبارتند از $a - r$ و $a + r$. در نتیجه،

$$V = -\frac{\gamma m}{۲ar}\int_{a-r}^{a+r} dR = -\frac{\gamma m}{۲ar}(۲r) = -\frac{\gamma m}{a} \quad r < a \qquad (۲۴.۱۳)$$

یعنی پتانسیل گرانشی درداخل کره ثابت است و به مکان نقطه بستگی ندارد.



شکل ۲۳.۱۳. محاسبهٔ میدان گرانشی در یک نقطه داخل جرمی که به طور یکنواخت روی یک پوستهٔ کروی توزیع شده است.

با به‌کار بردن معادلهٔ (۲۱۰۱۳) به دست می‌آوریم که میدان گرانشی در نقاط خارج از یک پوستهٔ همگن کروی برابر است با

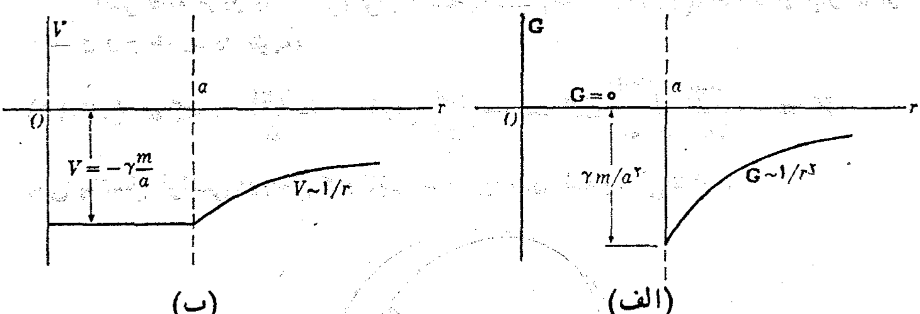
$$\mathbf{G} = -\frac{\gamma m}{r^2}\mathbf{u}_r \quad r > a \qquad (۲۵۰۱۳)$$

و در نقاط داخل پوستهٔ کروی برابر است با

$$\mathbf{G} = 0 \quad r > a \qquad (۲۶۰۱۳)$$

از مقایسهٔ معادله‌های (۲۳۰۱۳) و(۲۵۰۱۳) با معادله‌های (۱۸۰۱۳) و (۱۵۰۱۳) این نتیجه به دست می‌آید که میدان و پتانسیل گرانشی در هر نقطه‌ای خارج از جرمی که روی یک پوستهٔ کروی به طور یکنواخت توزیع شده است، با میدان و پتانسیل گرانشی حاصل از ذره‌ای به همین جرم که در مرکز کره واقع است، برابرند، در تمام نقاط داخل این پوستهٔ کروی میدان گرانشی برابر صفر و پتانسیل ثابت است.

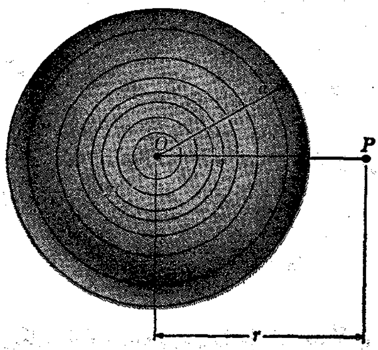
شکل ۲۴۰۱۳ تغییرات $\mathbf{G}$ و V را برحسب فاصله تا مرکز کره نشان می‌دهد. دیده می‌شود که درحرکت ازمرکز به‌بینهایت، مقدار پتانسیل در داخل‌کره ثابت‌است و درخارج از پوستهٔ کروی با رابطهٔ $V = -\gamma m/r$ تغییر می‌کند (ضریب زاویه به طور ناپیوسته تغییر می‌کند). ولی میدان ناگهان به اندازهٔ $-\gamma m/a^2$ تغییر می‌کند. با توجه به اینکه اگر σ چگالی سطحی پوستهٔ مادی باشد، داریم $m = 4\pi a^2\sigma$، می‌بینیم که تغییر ناگهانی میدان برابر است با $-4\pi\gamma\sigma$، بنابراین همان نتایجی که در مثال ۸۰۱۳ برای یک صفحه به دست آوردیم در اینجا برای یک پوستهٔ کروی به دست می‌آید.



شکل ۲۴۰۱۳. تغییرات G و V برحسب فاصله تا مرکزکره، برای جرمی که به طور یکنواخت روی یک پوستهٔ کروی توزیع شده است.

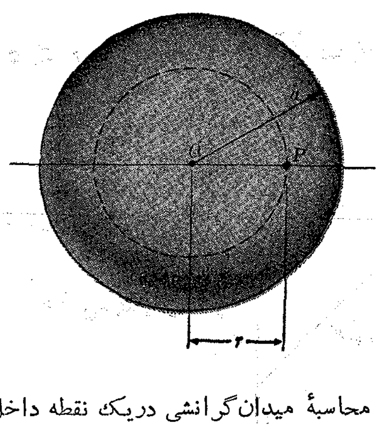
اکنون فرض کنید که جرم به طور یکنواخت در تمام حجم کره توزیع شده باشد، یعنی کره توپر است. دراین صورت می‌توان فرض کرد ساختمان کره شبیه پیاز است، یعنی از یک رشته لایه یا پوسته‌های نازک درست شده است. هر لایه میدانی به وجود می‌آورد که از معادلهٔ (۲۵۰۱۳) یا معادلهٔ (۲۶۰۱۳) به دست می‌آید. برای نقطه‌ای در خارج کره

(شکل ۲۵.۱۳)، چون فاصلهٔ نقطهٔ P تا مرکز، یعنی r، برای تمام لایه‌ها یکسان است، جرمها با هم جمع می‌شوند ومجدداً معادلهٔ (۲۵.۱۳) به دست می‌آید. بنا براین، میدان و پتانسیل گرانشی یک کرهٔ توپر با توزیع جرم همگن، در نقاط خارج از کره، همانند میدان و پتانسیل ذره‌ای است با همان جرم که در مرکز کره واقع باشد.*



شکل ۲۵.۱۳. محاسبهٔ میدان گرانشی در نقطه‌ای خارج از یک کرهٔ توپر

برای به دست آوردن میدان در یک نقطه داخل کـرهٔ همگن، نقطه‌ای مانند P را به فاصلهٔ r از مرکز کـره در نظر می‌گیریم $(r < a)$ و کره‌ای به شعاع r رسم می‌کنیم (شکل ۲۶.۱۳). مشاهده می‌کنیم که بنا بـه معادلهٔ (۲۶.۱۳) پوسته‌های با شعاع بزرگتر از r در میدان نقطهٔ P سهمی ندارند، زیرا P در داخل آنها قرار دارد. تمام پوسته‌هایی که شعاع آنها از r کوچکتر است درنقطهٔ P میدانی مشابه بامعادلهٔ (۲۵.۱۳) به‌وجود می‌آورند. جرم داخل‌کرهٔ نقطه چین را m' فرض می‌کنیم. بنا به معادلهٔ (۲۵.۱۳) میدان درنقطهٔ P برابر است با



شکل ۲۶.۱۳. محاسبهٔ میدان گرانشی دریک نقطه داخل یک کرهٔ توپر

* هرگاه جرم به جای توزیع همگن، با تقارن کروی توزیع شده باشد یعنی چگالی آن فقط تابع فاصله ازمرکز کره باشد بازهم این نتیجه برقراراست. ولی هرگاه توزیع جرم تابع راستا باشد، برقرار نیست.

$$\mathbf{G} = -\gamma \frac{m'}{r^۲}\mathbf{u}_r. \qquad (۲۷.۱۳)$$

حجم کرهٔ کامل برابر $۴\pi a^۳/۳$ است، وچون کره همگن است، جرم واحد حجم کره برابر می‌شود با $m/(۴\pi a^۳/۳)$. دراین صورت m' جرم موجود در کرهٔ به شعاع r برابر است با

$$m' = \frac{m}{۴\pi a^۳/۳} \times \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = m\frac{r^۳}{a^۳}.$$

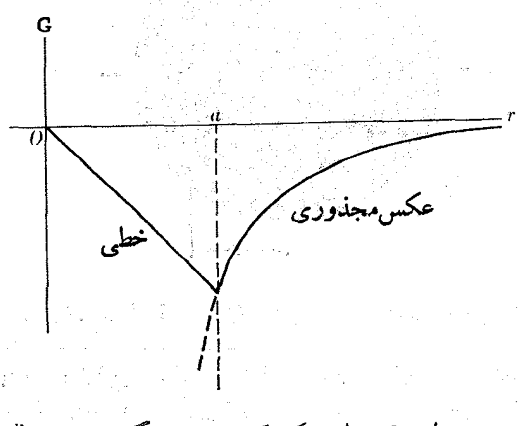
با قراردادن این مقدار به جای m' درمعادلهٔ (۲۷.۱۳)، میدان برای یک نقطه در داخل کرهٔ یکنواخت به دست می‌آید:

$$\mathbf{G} = -\gamma \frac{mr}{a^۳}\mathbf{u}_r. \qquad (۲۸.۱۳)$$

بنا براین میدان گرانشی دریک نقطهٔ مشخص در داخل‌کرهٔ همگن، با r، فاصلهٔ نقطه تامرکز کره متناسب است. دلیل اینکه میدان در داخل کره با دورشدن نقطه ازمرکز افزایش می‌یابد این است که کاهش مربوط به قانون عکس مجذور، با افزایش جرم که با مکعب فاصله متناسب است جبران می‌شود. شکل ۲۷.۱۳ تغییرات G را برحسب r دریک کرهٔ توپر همگن نشان می‌دهد. به عنوان مثال، این شکل، به شرط همگن بودن توزیع جرم در زمین، تغییرات وزن یک جسم را درجا بجایی ازمرکز زمین تا به یک نقطهٔ خیلی دور از زمین نشان می‌دهد.

به عهدهٔ دانشجو واگذار می‌شود تا تحقیق کندکه دراینجا نیز پتانسیل گرانشی دریک نقطه خارج از کرهٔ همگن، ازمعادلهٔ (۲۳.۱۳) به دست می‌آید، ولی برای نقطه‌ای در داخل کره، پتانسیل گرانشی برابر است با

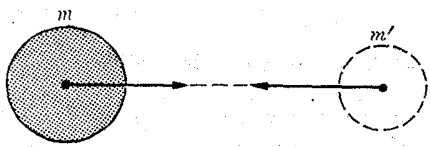
$$V = \frac{\gamma m}{۲a^۳}(r^۲ - ۳a^۲) \quad r < a$$



شکل ۲۷.۱۳. تغییرات G برای یک کرهٔ توپر همگن برحسب فاصله تا مرکز

توجه کنید که درمسئله‌ای که در این بخش بررسی کردیم، میدان گرانشی در یک نقطه تنها به‌فاصلهٔ نقطه تا مرکز بستگی دارد، نه به راستای خط واصل نقطه به مرکز کره. با توجه به تقارن کره نیز این نتیجه را می‌شد انتظار داشت. اگر به جای کرهٔ همگن، جسمی با شکل یا تقارنی متفاوت، یا کره‌ای با توزیع جرم ناهمگن (که جرم آن بدون تقارن کروی توزیع شده است) را درنظر می‌گرفتیم، زاویه نیز درفرمولها ظاهر می‌شد. ولی درمسایل با تقارن کروی، این ویژگیها تنها به فاصلهٔ نقطه تا مرکز بستگی دارند. استفاده از شرایط تقارن حل بسیاری از مسایل فیزیک را آسانتر می‌کند.

اکنون ما توانایی آن را داریم بررسی کنیم معادلهٔ (۱۰۱۳)، که نیروی جاذبهٔ گرانشی بین دوجرم نقطه‌ای را به دست می‌دهد، درمورد جسم کروی همگن نیز برقرار است. فرض کنید جرم نقطه‌ای m' در فاصلهٔ r ازمرکز جرم کروی m قرار دارد (شکل ۲۸۰۱۳). میدان درنقطهٔ m' برابر $G=\gamma m/r^2$ ونیروی وارد برجرم m' برابر است با $m'G=\gamma mm'/r^2$. بنا به‌قانون کنش و واکنش، m' باید نیرویی برابر ولی درسوی مخالف روی m وارد کند. این نیرو را می‌توان چنین تعبیر کرد که ناشی ازمیدانی است که جرم m' درناحیهٔ اشغال شده به وسیلهٔ m به وجود می‌آورد.



شکل ۲۸.۱۳. برهم‌کنش گرانشی بین دوکرهٔ همگن تنها به فاصلهٔ بین مرکزهای آنها بستگی دارد.

اکنون اگر به جای جرم نقطه‌ای m' کرهٔ همگنی با همان جرم قرار دهیم، با توجه به قضیه‌ای که ثابت کردیم میدان در اطراف m تغییر نمی‌کند، بنا براین نیروی وارد بر m نیز همان است وتغییر نمی‌کند. بار دیگر به قانون کنش و واکنش استناد می‌کنیم ونتیجه می‌گیریم که نیروی وارد بر m' نیز همان است وتغییر نمی‌کند. بنا براین دوجرم کروی همگن یکدیگر را مطابق قانون (۱۰۱۳) جذب می‌کنند، که در آن r فاصلهٔ بین مرکزهای دو کره است. اگر جرمها همگن یا کروی نباشند، چند سازهٔ هندسی، ازجمله زاویه‌ای که وضع نسبی دوجرم را معین می‌کند، در رابطه‌های مربوط به برهم‌کنش گرانشی آنها ظاهر می‌شوند.

مثال ۹۰۱۳. درتغییرات شتاب گرانی که براثر یک جابجایی کوچک ازسطح زمین به‌سمت داخل یا خارج آن ناشی می‌شود، بحث کنید.

حل: ارتفاع جسم ازسطح زمین را با h نشان می‌دهیم. فاصلهٔ آن تا مرکز زمین برابر می‌شود با $r=R+h$. بنا به معادلهٔ (۲۵۰۱۳)، شدت میدان گرانشی برابر است با

$$G=\frac{\gamma M}{(R+h)^2}$$

که درآن M جرم زمین است. با توجه به اینکه h درمقابل R خیلی کوچک است و با استفاده از فرمول تقریب دوجمله‌ای (پ۰۲۸) و نتیجهٔ مثال ۱۰۱۳، داریم

$$G = \frac{\gamma M}{R^۲(۱ + h/R)^۲} = g\left(۱ + \frac{h}{R}\right)^{-۲} \approx g\left(۱ - \frac{۲h}{R}\right).$$

با وارد کردن مقادیر عددی g و R به دست می‌آید

$$G = ۹٫۸۱ - ۳٫۰۶ \times ۱۰^{-۶} h \text{ ms}^{-۲}.$$

این رابطه تغییر شتاب گرانی و وزن یک جسم را در ارتفاع اندک h بالای سطح زمین نشان می‌دهد.

اگر برعکس، جسم به اندازهٔ h در داخل زمین فرو رود، داریم $r = R - h$. چنانچه درمعادلهٔ (۲۸.۱۳) M را جانشین m و R را جانشین a کنیم، به دست می‌آید

$$G = \frac{\gamma M(R-h)}{R^۳} = \frac{\gamma M}{R^۲}\left(۱ - \frac{h}{R}\right) = g\left(۱ - \frac{h}{R}\right)$$

یا با قرار دادن مقادیر مناسب، داریم

$$G = ۹٫۸۱ - ۱٫۵۳ \times ۱۰^{-۶} h \text{ ms}^{-۲}.$$

بدین طریق، درهر دومورد، شتاب گرانی کاهش می‌یابد، ولی برای نقاط بالای سطح زمین این کاهش سریعتر صورت می‌گیرد. (به شکل ۲۷.۱۳ مراجعه کنید.)

۸.۱۳ اصل هم‌ارزی

اینکه جرم لختی وجرم گرانشی برای تمام اجسام یکی است، به نتیجهٔ مهم زیر منتهی می‌شود:

دریک میدان گرانشی، تمام اجسام واقع دریک مکان، شتاب یکسانی پیدا می‌کنند.

یک مثال برای این واقعیت، کشف گالیله است که می‌گوید که تمام اجسام با شتاب یکسان روی زمین سقوط می‌کنند. چنانکه قبلا اشاره شد، این کشف به نوبهٔ خود دلیل غیرمستقیمی بریکسانی جرم لختی وجرم گرانشی است.

برای اثبات این حکم، اشاره می‌کنیم درجایی که میدان گرانشی $\mathbf{G}$ است، نیروی وارد برجرم m برابر می‌شود با $\mathbf{F} = m\mathbf{G}$ وشتاب آن برابر است با

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{G}$$

که به m، جرم جسمی که میدان گرانشی برآن اثر می‌کند بستگی ندارد. توجه کنید که شتاب جسم برابر است با شدت میدان، واین امر با نتیجه‌گیری قبلی ما که میدان گرانشی برحسب $\text{ms}^{-۲}$ اندازه‌گیری می‌شود تطبیق می‌کند.

اگر آزمایشگاهی درمیدان گرانشی قرار گرفته باشد، آزمایشگر مشاهده می‌کند تمام اجسامی که مورد آزمایش او هستند و نیروهای دیگری برآنها اثـر نمی‌کند، همگی تحت تأثیر شتاب یکسانی قرار می‌گیرند. آزمایشگر با مشاهده این شتاب مشترک، می‌تواند نتیجه بگیرد که آزمایشگاه او دریک میدان گرانشی قرار دارد.

با این‌همه، این نتیجه تنها توجیه ممکن برای مشاهدهٔ یک شتاب مشترک نیست. در بخش ۲.۶، هنگام گفتگو درمورد حرکت نسبی، اشاره کردیم اگـر $\mathbf{a}_{\circ}$ شتاب یک ناظر متحرک نسبت به‌یک ناظر لخت و $\mathbf{a}$ شتاب یک جسم نسبت به ناظر لخت باشد، شتاب اندازه‌گیری شده به وسیلهٔ ناظر متحرک با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\circ}$$

اگـر جسم آزاد باشد، $\mathbf{a}$ شتاب انـدازه‌گیری شده بـه وسیلهٔ ناظر لخت، بـرابـر صفر است. درنتیجه، شتاب انــدازه‌گیری شده به وسیلهٔ ناظــر شتابــدار برابر است با $\mathbf{a}' = -\mathbf{a}_{\circ}$. بدین‌طریق، به نظر ناظر شتابدار تمام اجسام آزاد دارای شتاب مشترک $-\mathbf{a}_{\circ}$ می‌باشند. این وضع چیزی است کــه در میدان گرانشی بـا شدت $\mathbf{G} = -\mathbf{a}_{\circ}$ دیـدیم. پس نتیجه می‌گیریم که

> یک ناظر هیچ وسیله‌ای ندارد تا تشخیص دهد آیا آزمایشگاه او دریک میدان‌گرانشی یکنواخت قرار دارد یا دریک چارچوب مرجع شتابدار.

این حکم بــه عنوان اصل هم‌ارزی شناخته شده است، زیرا تا آنجا که بــه توصیف حرکت مربوط می‌شود، بین یک میدان گرانشی ویک چارچوب مرجع شتابدار یک‌هم‌ارزی نشان می‌دهد. بدین طریق دیده می‌شود کـه گرانش و لختی دو ویژگی مختلف ماده نیستند، بلکه دوجنبهٔ متفاوت یک مشخصهٔ اساسی‌تر وعمومی‌تر هر ماده‌ای می‌باشند.

به عنوان مثال، فـرض کنید ناظری آزمایشگاه خود را در واگنی که با سرعت ثابت روی یک ریل مستقیم و افقی حرکت می‌کند قرار داده وپنجره‌های واگن را نیز بسته است به گونه‌ای که آزمایشگر راهی به جهان خارج نـدارد. او آزمایشهـایی با گویهای بیلیارد انجام می‌دهد وآنها را ازبالا رها می‌کنند. دراین صورت می‌تواند نتیجه بگیرد که واگن او با یک میدان گرانشی در راستای قایم به سوی پایین احاطه شده است، که این تفسیری است طبیعی. ولی به‌همان اندازه می‌تواند فرض‌کند که واگن او باشتاب قایمی برابر با شتاب‌گویها ولی درسوی مخالف، بالا می‌رود و گویها آزاد هستند وتحت تأثیر میدان‌گرانشی قرار ندارند.

اکنون فرض کنید ناظر گویها را روی میز بیلیاردی که در واگن قرار دارد می‌گذارد. هنگامی که ناظر شاهد حرکت گویها با شتاب یکسان به سمت عقب واگن بـاشد، می‌تواند نتیجه بگیرد یـا یک میدان گرانشی جدید به سمت عقب واگن برآزمایشگاه اثر می‌کند، یا اینکه آزمایشگاه با شتاب افقی به سمت جلو درحرکت است. فرض دومی خیلی معمول است، زیرا افـزایش سرعت قطار بستگی به تصمیم رانندهٔ آن دارد. بـا وجود این، ممکن است قطار ازیک سربالایی بالا برود، کــه این، هم‌ارز است با یک میدان گرانشی موازی کف

واگن و برای حرکت گویهای بیلیارد همان نتیجه را می‌دهد.

به سبب اصل هم‌ارزی،

> قوانین طبیعت باید به‌گونه‌ای نوشته شوند که تمیز بین یک میدان گرانشی یکنواخت ویک چارچوب مرجع شتابدار غیرممکن باشد.

این حکم پایهٔ اصل عام نسبیت را تشکیل می‌دهد که درسال ۱۹۱۵ (۱۲۹۴ هـ. ش.) به وسیلهٔ اینشتین بیان شد. این اصل ایجاب می‌کند کـه قوانین فیزیک به صورتی نوشته شوند کـه مستقل ازحالت حرکت چارچوب مرجع باشند. چنانکه مشاهده می‌کنیم، ایدهٔ اساسی اصل عام نسبیت بسیار ساده است، با وجود این، فرمول‌بندی ریاضی آن نسبتاً پیچیده است و ما دراینجا دراین مورد گفتگو نخواهیم کرد.

اکنون مـورد یک نـاظـر شتابـدار را در میدان گرانشی $\mathbf{G}$ بـررسی می‌کنیم. شتاب اجسامی کـه تنها تحت تأثیر میدان گرانشی اندازه‌گیری شده به وسیلهٔ این ناظر می‌باشند با رابطهٔ $\mathbf{a}' = \mathbf{G} - \mathbf{a}_\circ$ داده می‌شود. به عنوان یک مثال مشخص، موشکی را که از زمین به سمت بالا پرتاب می‌شود در نظـر می‌گیریم. دراین صورت $\mathbf{G} = \mathbf{g}$ است. فـرض کنیم $\mathbf{a}_\circ = -n\mathbf{g}$ شتاب موشک نسبت به زمین و n مقدار $\mathbf{a}_\circ$ نسبت به $\mathbf{g}$ است. (علامت منفی نشان می‌دهد که موشک بـه سمت بالا حرکت می‌کند.) بنابراین شتاب یک جسم آزاد در داخل موشک، نسبت به موشک، برابر می‌شود بـا $\mathbf{a}' = (n + ۱)\mathbf{g}$. به عنوان مثال، در موشکی که با شتاب چهار برابر شتاب گرانی به سمت بالا حرکت می‌کند ($n = ۴$)، وزن تمام اجسام داخل موشک ۵ برابر وزن معمولی آنهـاست. این افزایش ظاهـری وزن، بخصوص درمرحلهٔ پرتاب یک موشک با شتاب بزرگ، بسیار مهم است.

اکنون بـه عنوان مثال دیگر، ماهـواره‌ای را در مـدارش درنظر بگیرید. در اینجا $\mathbf{a}_\circ = \mathbf{G}$ است، زیرا ماهواره درزیر تأثیر گرانش زمین قرار دارد. دراین حالت $\mathbf{a}' = \circ$ است وتمام اجسام داخل ماهواره بی‌وزن بـه نظر می‌رسند، زیرا شتاب آنهـا نسبت به ماهواره بـرابـر صفر است. البته این تنها یک بی‌وزنی نسبی است، زیـرا ماهواره ومحتویات آن درمیدان گرانشی یکسان حرکت می‌کنند و دارای شتاب یکسانی هستند. اجسام داخل ماهواره نسبت به خود آن، اجسام آزاد به نظر می‌رسند، مگر اینکه نیروهای دیگری برآنها اثرکنند؛ ولی نسبت به یک ناظر زمینی، دارای شتاب هستند و زیر تأثیر میدان گرانشی قراردارند.

یک آدم در داخل آسانسوری که (براثر پاره شدن کابل آن) با شتاب گرانی سقوط می‌کند همین بی‌وزنی را نسبت به آسانسور تجربه خواهد کرد. درچنین حالتی (همانند یک ماهواره)، $\mathbf{a}_\circ = \mathbf{g}$ و $\mathbf{a}' = \circ$ است. تأکید می‌کنیم که بی‌وزنی بدین معنی نیست که دیگر اثر نیروهای گـرانشی قطع شده است، بلکه به معنای آن است کـه برتمام اجسام و از جمله جسمی کـه به عنوان چارچوب مرجع به کار می‌رود، میدان واحد ویکسانی اثر می‌کند کـه شتاب مشترکی را به وجود می‌آورد، و درنتیجه اجسام دارای شتاب نسبی نیستند، مگر اینکه نیروهای دیگری برآنها وارد شود. به گفتهٔ دیگر، اگـر ناظری با شتاب $\mathbf{a}_\circ = \mathbf{G}$ نسبت به یک چارچوب لخت حرکت کند، میدان گرانشی $\mathbf{G}$ را می‌توان «ازبین برد».

۹.۱۳ گرانش ونیروهای بین مولکولی

دربخشهای قبلی این فصل، دیدیم که چگونه نیروهـای گرانشی حرکت سیاره‌ها و اجسام نزدیک سطح زمین را بخوبی توصیف می‌کنند. اکنون خیلی جالب است بفهمیم آیا عامل پیوند مولکولها دریک‌تکه ازماده یا اتمها دریک مولکول ازهمین نوع برهم‌کنش است یا نه.

ابتدا یک مولکول ساده مانند مولکول هیدروژن را که از دو اتم هیدروژن به فاصلهٔ $r = ۰٫۷۴۵ \times ۱۰^{-۱۰}\mathrm{m}$ تشکیل شده است درنظـر می‌گیریم. جـرم هراتم هیدروژن برابر است با $m = ۱٫۶۷۳ \times ۱۰^{-۲۷}\mathrm{kg}$. بنابـراین برهم‌کنش گرانشی دو اتم متناظر است با یک انرژی پتانسیل

$$E_p = -\gamma \frac{mm'}{r} = ۲٫۲۲ \times ۱۰^{-۵۴}\mathrm{J} = ۱٫۳۹ \times ۱۰^{-۳۵}\mathrm{eV}.$$

ولی مقدار تجربی انرژی تجزیهٔ یک مولکول هیدروژن برابر با

$$۷٫۱۸ \times ۱۰^{-۹}\mathrm{J}(= ۴٫۴۸\mathrm{eV})$$

که $۱۰^{۳۵}$ مـرتبه بزرگتر از انرژی گرانشی است. از اینجا نتیجه می‌گیریم کـه برهم‌کنش گرانشی نمی‌تواند عامل تشکیل مولکول هیدروژن باشد. نتایج مشابهی نیزبرای مولکولهای پیچیده‌تر به دست می‌آیند.

در مـورد یک آبگون، انـرژی لازم برای بخارکردن یک مـول آب ($۱۸\mathrm{g}$ یـا $۶٫۲۳ \times ۱۰^{۲۳}$ مولکول) برابر $۴٫۰۶ \times ۱۰^{۳}\mathrm{J}$ است، که متناظر با یک انرژی جدایی درحدود $۶ \times ۱۰^{-۲۱}\mathrm{J}$ به ازای هر مولکول است. فاصلهٔ متوسط مولکولهای آب درحدود $۳ \times ۱۰^{-۱۰}\mathrm{m}$ وجرم یک مولکول آن برابر $۳ \times ۱۰^{-۲۶}\mathrm{kg}$ است کـه متناظر است با یک انرژی پتانسیل گرانشی حدود $۲ \times ۱۰^{-۵۲}\mathrm{J}$، که بازهم خیلی کوچکتر ازآن است‌که وجود آب مایع را توجیه کند.

بنابراین نتیجه می‌گیریم نیروهایی که موجب تشکیل مولکولها از اتمها یا مادهٔ کپه‌ای ازمولکولها می‌شوند، نمی‌توانند نیروهای گرانشی باشند. درچهار فصل بعدی کـه در جلد دوم خواهند آمد، نیروهای دیگری کـه به نظر می‌رسد موجب این اجتماع می‌شوند، یعنی برهم‌کنشهای الکترومغناطیسی، را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

باوجود این، چون برهم‌کنش‌گرانشی یک اثرجرم می‌باشد، درمورد اجسام خیلی‌سنگین واز نظر الکتریکی خنثی، مانند سیاره‌ها، بسیارمهم است. به همین دلیل، هرچند که نیروهای گرانشی ضعیف‌ترین نیروهای شناخته شده درطبیعت می‌باشند، ولی بزرگترین نیرویی است که درسطح زمین احساس می‌کنیم. نیروهای گرانشی پاسخگوی تعداد زیادی ازپدیده‌های عادی است که در زندگی روزمرهٔ ما اثر می‌گذارند. به عنوان مثال، کشند (جزر و مـد) به طور کامل ناشی از برهم‌کنش گرانشی ماه وخورشید با زمین است.

فهرست منابع

1. «The Homocentric Spheres of Eudoxus,» H. Swenson; *Am. J. Phys.* 31, 456 (1963).
2. «The Celestial Palace of Tycho Brahe,» J. Christianson; *Sci. Am.*, February 1961, page 118.
3. «Johannes Kepler's Universe: Its Physics and Metaphysics,» G. Holton; *Am. J. Phys.* 24, 340 (1956).
4. «Newton and the Cause of Gravity,» M. Evans; *Am. J. Phys.* 26, 619 (1958).
5. «The Eotvos Experiment,» R. Dicke; *Sci. Am.* December 1961, page 84.
6. «Gravitational and Inertial Mass,» G. B. Bronson; *Am. J. Phys.* 28, 475 (1960)
7. «Guidelines to Antigravity,» R. Forward; *Am. J. Phys.* 31, 166 (1963).
8. *Introduction to Engineering Mechanics*, by J. Huddleston. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961, Section 6.8.
9. *Vector Mechanics*, by D. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964, Chapter 17.
10. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, by R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapter 7.
11. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963; page 92, Newton; page 105, Cavendish.

۱۲. سایمون، کیث، ر. مکانیک، ترجمهٔ اعظم نیرومندراد وغلامحسین همدانی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۶، فصل ۶.

۱۳. گاموف، ژرژ، نیروی ثقل، ترجمهٔ رضا اقصی، تهران، شرکت سهامی کتابهای جیبی، ۱۳۴۷.

مسئله‌ها

۱.۱۳. نیروی جاذبهٔ گرانشی بین زمین و (الف) ماه، (ب) خورشید را حساب کنید. نسبت بین این دو نیرو را پیدا کنید.

۲.۱۳. جاذبهٔ گرانشی بین دو پروتون را دریک مولکول هیدروژن حساب کنید. فاصلهٔ آنها برابر است با $۰٫۷۴ \times ۱۰^{-۱۰}\,\mathrm{m}$.

۳.۱۳. نیروی جاذبهٔ گرانشی بین پروتون و الکترون را دریک اتم هیدروژن حساب کنید. فرض کنید الکترون یک مدار دایره‌ای به شعاع $۰٫۵۳ \times ۱۰^{-۱۰}\,\mathrm{m}$ دور پروتون می‌پیماید.

۴.۱۳. فاصلهٔ میانگین بین دو اتم هلیوم را در یک مول در شرایط متعارفی دما و فشار برآورد کنید. با استفاده ازاین فاصله، جاذبهٔ گرانشی بین دواتم هلیوم مجاور را برآورد کنید. جرم اتم هلیوم را می‌توان ۴٫۰ amu درنظر گرفت.

۵.۱۳. فاصلهٔ میانگین بین دو مولکول آب را درحالت مایع برآورد کنید. با استفاده از این فاصله جاذبهٔ گرانشی بین دو مولکول مجاور آب را حساب کنید. یک مولکول آب از دو اتم هیدروژن و یک اتم اکسیژن تشکیل شده است.

۶.۱۳ دو گوی آهنی، هرکدام به جرم $10\,kg$، درتماس با هم قراردارند. جاذبهٔ گرانشی بین آنها را حساب کنید. آن را با جاذبهٔ گرانشی زمین روی هریک از گویها مقایسه کنید. اگر بخواهیم دوگوی را ازهم جدا کنیم آیا جاذبهٔ بین آنها را «احساس» می‌کنیم؟ [راهنمایی: ممکن است چگالی آهن را لازم داشته باشید. مقدار آن در جدول ۲.۲ آمده است.]

۷.۱۳ جاذبهٔ گرانشی ایجاد شده روی یک جسم بـه جرم m را که در سطح زمین واقع است باجاذبهٔ گرانشی تولید شده روی همین جرم توسط (الف) ماه، (ب) خورشید، مقایسه کنید. در مورد امکان مشاهدهٔ تغییر وزن یک جسم براثر حرکت چرخشی زمین چه نتیجه‌ای می گیرید؟

۸.۱۳ کره‌ای به جرم $5.0\,kg$ در یک کفهٔ ترازویی با طول بازوهای برابر قرار دارد و ترازو در حالت ترازمندی است. یک جرم کروی بزرگتر (با جرم $5.8 \times 10^3\,kg$) را می‌غلتانند تا درست در زیر این جرم قرار گیرد. دراین وضع، فاصلهٔ بین مـراکـز کره‌ها $0.50\,m$ است. برای برقراری مجـدد ترازمندی چه جرمی باید در کفهٔ دیگر ترازو قرار داده شود؟ g را برابر $9.80\,ms^{-2}$ بگیرید. درقرن گذشته، جی. فون جولی[1] برای تعیین مقدار γ، از این روش استفاده کرد.

۹.۱۳ شخصی $687\,N$ وزن دارد. به فرض دو برابر شدن شعاع زمین، وزن این شخص چقدر می‌شود اگـر (الف) جرم زمین تغییر نکند؛ (ب) اگر چگالی میانگین زمین ثابت بماند؟

۱۰.۱۳ شتاب گرانی را درسطح خورشید حساب کنید. شعاع خورشید ۱۱۰ برابر شعاع زمین و جرم‌آن ۳۳۰۰۰۰ برابر جرم زمین است. همین محاسبه را درمورد زهره، مشتری و ماه انجام دهید.

۱۱.۱۳ شخصی $1080\,N$ وزن دارد. حساب کنید این شخص درسطح خورشید و درسطح ماه چقدر وزن خواهد داشت؟ جرم او در این دو محل چقدر می‌شود؟

۱۲.۱۳ شخصی در تراز دریا $785\,N$ وزن دارد. جـرم و وزن این شخص را در ارتفاع $8000\,m$ بالای سطح دریا پیدا کنید.

۱۳.۱۳ با استفاده از داده‌های جدول ۱.۱۳ درمورد شعاع و دورهٔ حرکت مداری سیاره‌ها، جرم خورشید را پیدا کنید. تنها سه سیاره (زهره، زمین و مشتری) را به‌کار ببرید.

۱۴.۱۳ دریک آزمایش کاوندیش (شکل ۳.۱۳)، هریک از دوکرهٔ کوچک $10.0\,gr$ جرم، و میلهٔ (با جرم قابل اغماض) $0.50\,m$ طول دارد. دورهٔ نوسانهای پیچشی دستگاه $770\,s$ است. هریک از دوکرهٔ بزرگ $10.0\,kg$ جرم دارد وفاصلهٔ مرکز کره‌های بزرگ وکوچک $0.10\,m$ است. انحراف زاویه‌ای میله را پیدا کنید.

۱۵.۱۳ تا چه ارتفاعی باید بالا رفت تا شتاب گرانی بـه اندازهٔ ۱٪ تغییر کند؟ برای به دست آوردن همین تغییر تا چه عمقی باید در ژرفای زمین فرو رفت؟

۱۶.۱۳ ارتفاع و سرعت یک ماهواره (روی یک مدار دایره‌ای در صفحهٔ استوا) چقدر

1. G.von Jolly

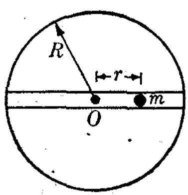
باید باشد تا همیشه بالای یک نقطه از سطح زمین باقی بماند؟

۱۷.۱۳. ماهواره‌ای در ارتفاع ۳۰۰ km از زمین دریک مدار دایره‌ای در گردش است. (الف) سرعت، (ب) دورهٔ گردش‌آن دور زمین، و (ج) شتاب مرکزگرای‌آن را حساب کنید.

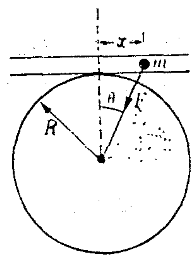
۱۸.۱۳. نتیجهٔ قسمت (ج) مسئلهٔ فوق را با مقدار g در این ارتفاع، که مستقیماً از روش مثال ۹.۱۳ محاسبه شده باشد، مقایسه کنید.

۱۹.۱۳. دورهٔ ماهواره‌ای که در مداری با شعاع ۱/۴ شعاع مدار ماه دور زمین بگردد چقدر می‌شود؟ دورهٔ گردش ماه در حدود ۲۸ روز است. نسبت سرعت ماهواره به سرعت ماه چقدر است؟

۲۰.۱۳. ذره‌ای به جرم m در داخل یک لولهٔ افقی (شکل ۲۹.۱۳) براثر جاذبهٔ گرانشی زمین می‌تواند بدون مالش حرکت کند. به فرض اینکه x در مقایسه با R خیلی کوچک باشد، ثابت کنید که ذره دارای یک حرکت هماهنگ ساده با دورهٔ $P = 2\pi\sqrt{R/g}$ است. مقدار P را پیدا کنید. این بزرگترین دورهٔ یک آونگ در سطح زمین است. می‌توانید آن را ثابت کنید؟

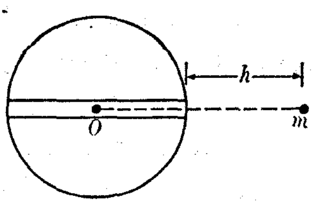


شکل ۳۰.۱۳

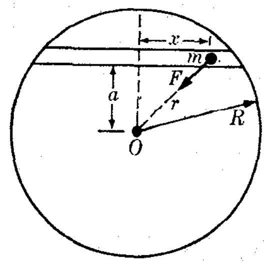


شکل ۲۹.۱۳

۲۱.۱۳. فرض کنید چاهی درطول یک قطر زمین کنده شده باشد. (شکل ۳۰.۱۳). (الف) اگر چگالی زمین یکنواخت فرض شود، ثابت کنید که نیروی وارد برجرم m درفاصلهٔ r از مرکز زمین برابر است با $F = -mgr/R$. (ب) نشان دهید که حرکت جرم m هماهنگ ساده و دورهٔ آن درحدود ۹۰ دقیقه است. (ج) معادلات مکان، سرعت وشتاب را به صورت توابعی از زمان، با مقادیر عددی ثابتها، بنویسید.



شکل ۳۲.۱۳



شکل ۳۱.۱۳

۲۲.۱۳ ثابت کنید که حرکت بدون مالش در یک تونل که در طول وتری از زمین کنده شده است، (شکل ۳۱.۱۳) هماهنگ ساده است. دورهٔ حرکت را حساب کنید.

۲۳.۱۳ جرم m از ارتفاع زیاد h در بالای تونلی که مطابق شکل ۳۲.۱۳ در داخل زمین کنده شده، رها می‌شود. (الف) m با چه سرعتی از مرکز زمین می‌گذرد؟ (ب) آیا حرکت هماهنگ ساده است؟ (ج) آیا حرکت دوره‌ای است؟ دلیلهای مربوط به پاسخ خود را ذکر کنید.

۲۴.۱۳ با استفاده از داده‌های مربوط به حرکت خورشید در کهکشان راه شیری (شکل ۱.۷)، و به فرض اینکه کهکشان به صورت یک تودهٔ کروی از ستارگان باشد، جرم کل کهکشان را برآورد کنید. با فرض اینکه، به‌طور میانگین، جرم همهٔ ستارگان برابر جرم خورشید ($۱٫۹۸ \times ۱۰^{۳۰}$ kg) است، تعداد و فاصلهٔ میانگین آنها را برآورد کنید.

۲۵.۱۳ معادله‌ای بنویسید که به طور جبری انرژی کل دستگاه (الف) زمین ـ ماه، (ب) خورشید ـ زمین ـ ماه، را بیان کند.

۲۶.۱۳ انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و انرژی کل زمین را در حرکت آن دور خورشید برآورد کنید (تنها انرژی پتانسیل گرانشی نسبت به خورشید را در نظر بگیرید).

۲۷.۱۳ با استفاده از قضیهٔ ویریال (بخش ۱۳.۸)، رابطهٔ انرژی کل یک مدار دایره‌ای تحت تأثیر نیروی گرانشی [معادلهٔ (۶.۱۳)] را پیدا کنید.

۲۸.۱۳ یکی از موشکهای پایونیر توانست تا حدود ارتفاع ۱۲۵۰۰۰ km برسد. با صرف نظر کردن از اثر ماه، سرعتی را که این موشک در برگشت، هنگام ورود به جوزمین داشته است پیدا کنید. فرض کنید موشک در راستای قایم شلیک شده بود و جو تا ارتفاع ۱۳۰ km بالای سطح زمین ادامه دارد.

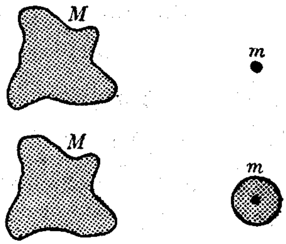
۲۹.۱۳ اگر h ارتفاع جسمی در بالای زمین باشد، $r = R + h$ می‌شود. با استفاده از بسط دوجمله‌ای (پ.۲۱)، تحقیق کنید که اگر h درمقایسه با R خیلی کوچک باشد، معادلهٔ (۱۰.۱۳) به صورت $v^{۲} = ۲gh$ درمی‌آید.

۳۰.۱۳ سرعت فرار را برای عطارد، زهره، مریخ ومشتری حساب کنید. [راهنمایی: برای ساده کردن محاسبه، ابتدا سازهٔ $\sqrt{۲\gamma}$ را حساب کنید. سپس برای هر سیاره کافی است آن را در $\sqrt{M/R}$ ضرب کنید.]

۳۱.۱۳ (الف) سرعت فرار از منظومهٔ شمسی را برای ذره‌ای که فاصلهٔ آن از خورشید برابر فاصلهٔ آن از زمین است حساب کنید. (ب) این نتیجه را به دست‌آوردن حداقل سرعت فرار ذره‌ای که از زمین پرتاب می‌شود به‌کار ببرید. سرعت زمین را به‌حساب‌آورید، ولی از میدان گرانشی آن صرف نظر کنید.

۳۲.۱۳ ذره‌ای روی سطح زمین در حالت سکون قرار دارد. (الف) با به حساب آوردن جاذبهٔ گرانشی زمین و خورشید، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل ذره را نسبت به خورشید پیدا کنید. (ب) سرعت فرار ازمنظومهٔ شمسی را پیدا کنید. آن را بامسئلهٔ ۳۱.۱۳ مقایسه‌کنید.

۳۳.۱۳. با بـه کار بردن نتیجه‌هـای بخش ۷.۱۳، نشان دهید کـه برهم‌کنش گرانشی بین جرمی به شکل دلخواه M (شکل ۳۳.۱۳) و یک جرم نقطه‌ای m، و بین M و یک جسم کروی همگن و دارای همان جرم m، با هم یکسان‌اند، بـه شرطی که مرکز جسم کروی در مکان ذرهٔ نقطه‌ای قرارگیرد.



شکل ۳۳.۱۳

۳۴.۱۳. انرژی پتانسیل بین زحل و حلقه‌هایش را حساب کنید. فرض کنید جـرم حلقه‌ها ۳ر۵ $\times$ ۱۰^{۱۸} kg است و در فاصلهٔ میانگین ۱ر۱ $\times$ ۱۰^{۸} km از مرکز زحل متمرکزند.

۳۵.۱۳. انرژی پتانسیل گرانشی داخلی ۸ جسم را، که جرم هریک m و هر کدام دریک رأس مکعبی به ضلع a قرار دارنـد، حساب کنید. حالتی را در نظر بگیرید که هر جرم از مرتبهٔ بزرگی جـرم خورشید و طول هـر ضلع مکعب یک پارسک باشد. (به مسئلهٔ ۱۶.۲ مراجعه کنید.)

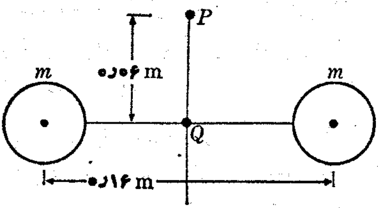
۳۶.۱۳. ثابت کنید کـه انرژی لازم برای ساختن یک جسم کروی به شعاع R با افزودن پیاپی لایه‌های ماده بـه صورت یک پیـاز، تا رسیدن بـه شعاع نهایی (با حفظ یکنواختی چگالی) برابر است با $E_p = -۳\gamma M^۲/۵R$.

۳۷.۱۳. مقدار انرژی پتانسیل گرانشی کهکشان ما را برآورد کنید. فـرض کنید که تمام اجرام تشکیل دهندهٔ کهکشان تقریباً دارای جـرم یکسان با خورشید و فاصلهٔ آنها از هم از مرتبهٔ ۱۰^{۲۱} m است. [راهنمایی: کهکشان را کروی فرض کنید و از نتیجهٔ مسئلهٔ ۳۶.۱۳ استفاده کنید.]

۳۸.۱۳. با به‌کار بردن قضیهٔ ویریال و نتایج مسئلهٔ پیش، مقدار انرژی جنبشی کهکشان را (به استثنای انرژی داخلی ستاره‌ها) برآورد کنید.

۳۹.۱۳. یک سنگ آسمانی درآغازدر فاصلهٔ ۶ برابر شعاع زمین از مرکز زمین درحالت سکون قرار دارد. سرعت آن را هنگام رسیدن به سطح زمین حساب کنید.

۴۰.۱۳. دو جـرم بـرابـر ۴۰ر۶ kg در فاصلهٔ ۱۶ر۰ m از یکدیگر قرار دارند (شکل ۳۴.۱۳). جرم سومی از نقطهٔ P به فاصلهٔ برابر از دو جرم و بـه فاصلهٔ ۰۶ر۰ m از خط واصل آن دو رها می‌شود. سرعت جرم سوم را هنگام گذر از نقطهٔ Q تعیین کنید. اگر جرم آن ۰۱ر۰ kg باشد، شتاب آن را در نقطهٔ P و در نقطهٔ Q حساب کنید.



شکل ۳۴.۱۳

۴۱.۱۳. موشکی در راستای قایم از سطح زمین بـه سمت ماه پرتاب می‌شود. سوخت آن درمدت نسبتاً کوتاهی بعد ازپرتاب مصرف می‌شود. (الف) درچه نقطه‌ای ازمسیر، شتاب آن برابر صفر است؟ (ب) حـداقل سرعت اولیهٔ موشک چقدر باید باشد تا به این نقطه برسد و براثر جاذبهٔ ماه روی آن سقوط کند؟ (ج) دراین صورت، موشک با چه سرعتی به سطح ماه می‌رسد؟

۴۲.۱۳. نشان دهید که زمان لازم برای اینکه جسمی ازفاصلهٔ r از مرکز زمین، روی زمین بیفتد برابر است با

$$t = (r^{۳/۲}/R\sqrt{۲g})[-\sqrt{(R/r)(۱ - R/r)} + \sin^{-۱}\sqrt{R/r}].$$

تحقیق کنید که اگر r در مقایسه با R خیلی بزرگ باشد، $t = (\sqrt{R/۲g})/۲$ مـی‌شـود. [راهنمایی: ازمعادلهٔ (۱۰.۱۳) استفاده کنید؛ v را مساوی dr/dt قراردهید، معادله را برای dt حل کنید و سپس انتگرال بگیرید.]

۴۳.۱۳. ماهواره‌ای به جرم $۵۰۰۰\ \mathrm{kg}$ در یک مسیر دایره‌ای به شعاع $۸۰۰۰\ \mathrm{km}$ دور زمین می‌چرخد. اندازه حرکت زاویه‌ای و انرژیهای جنبشی، پتانسیل و کل آن را پیدا کنید.

۴۴.۱۳. ماهواره‌ای بـه جرم $۵۰۰۰\ \mathrm{kg}$ در ارتفاع $۸۰۰۰\ \mathrm{km}$ بالای سطح زمین یک مدار دایره‌ای را می‌پیماید. بعد ازچند روز، به علت مالش جو، ارتفاع مدار به $۶۵۰\ \mathrm{km}$ می‌رسد. تغییرات (الف) سرعت، (ب) سرعت زاویـه‌ای، (ج) انرژی جنبشی، (د) انرژی پتانسیل، و (ه) انرژی‌کل را حساب کنید. مسیر را درهرلحظه دایره‌ای فرض‌کنید، زیرا کاهش ارتفاع بسیار کند است.

۴۵.۱۳. با مراجعه به مسئلهٔ پیش فرض کنید که مقاومت هوا را می‌توان با نیروی میانگین $۱۷٫۵\ \mathrm{N}$ نشان داد. (الف) گشتاور ناشی ازاین نیرو را حساب کنید و به‌کمک این‌نتیجه، زمان لازم برای سقوط فاصلهٔ ذکر شده در بالا را برآورد کنید. (ب) آهنگ اتلاف انرژی را پیداکنید. ازاینجا نیز زمان محاسبه شده درسؤال (الف) را برآوردکنید. (ج) با استفاده از میانگین دورهٔ حـرکت، تعداد کل دورهایی را کـه ماهواره در این مـدت پیموده است پیدا کنید.

۴۶.۱۳. با درنظرگرفتن جرم‌کاهیده، درنتایج بخش۵.۱۳ تصحیحات لازم را به‌عمل‌آورید.

۴۷.۱۳. دریک ستارهٔ دوتایی، جرم یک‌ستاره $۳ \times ۱۰^{۳۳}\ \mathrm{kg}$ وجرم دیگری $۴ \times ۱۰^{۳۳}\mathrm{kg}$

است. اگر بدانیم که فاصلهٔ این دو ستاره 10^{17}m است، سرعت زاویه‌ای آنها را حول مرکز جرمشان پیدا کنید. همچنین اندازه حرکت زاویه‌ای و انرژی داخلی کل آنها را به دست آورید.

۴۸.۱۳. با استفاده از یک کاغذ رسم قطبی، معادلهٔ (۱۲.۱۳) را به ازای $d = 1$ و (الف) $\varepsilon = 0{,}5$، (ب) $\varepsilon = 1$ و (ج) $\varepsilon = 2$ رسم کنید. نظر به اینکه منحنی متقارن است، تنها باید r را برای θ بین $0°$ و $180°$ محاسبه و منحنی را زیر محور Xها تکرار کرد. مهمترین خصوصیات هرمنحنی را مشخص کنید. [راهنمایی: مقادیر θ را $20°$ به $20°$ به کار ببرید.]

۴۹.۱۳. نشان دهید که نسبت بین سرعت یک جسم دلخواه در حضیض[1] (کمترین فاصله از مرکز نیرو) و اوج[2] (بزرگترین فاصله از مرکز) برابر است با $(1 + \varepsilon)/(1 - \varepsilon)$. [راهنمایی: توجه داشته باشید که در هر دو نقطه سرعت بر شعاع عمود است.]

۵۰.۱۳. یک ستارهٔ دنباله دار روی یک بیضی با خروج از مرکز ۰٫۸ حرکت می‌کند. نسبت بین (الف) فاصله تا خورشید، (ب) سرعتهای خطی، (ج) سرعتهای زاویه‌ای این ستاره را در حضیض و در اوج پیدا کنید.

۵۱.۱۳. خروج از مرکز ε و نصف قطر بزرگ a مربوط به مدار بعضی سیاره‌ها درجدول زیر آمده‌اند. (یادآوری می‌کنیم که $1\text{AU} = 1{,}495 \times 10^{11}$ m.)

	عطارد	زمین	مریخ
ε	۰٫۲۰۶	۰٫۰۱۷	۰٫۰۹۳
a(AU)	۰٫۳۸۷	۱٫۰۰۰	۱٫۵۲۴

(الف) کوتاهترین فاصلهٔ نزدیک شدن به خورشید، (ب) بیشترین فاصله از خورشید، (ج) انرژی کل حرکت انتقالی، (د) اندازه حرکت زاویه‌ای، (ه) دورهٔ حرکت گردشی، (و) سرعت در اوج و در حضیض را برای هریک از این سیاره‌ها حساب کنید.

۵۲.۱۳. ماهواره‌ای در فاصله‌ای برابر با شعاع زمین در یک مدار بیضی قرار داده شده است. سرعت افقی اولیه‌ای که به‌آن داده شده ۱٫۲ برابر سرعتی است که برای به‌حرکت درآوردن آن در یک مدار دایره‌ای در این فاصله لازم است. پیدا کنید (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای ماهواره را، (ب) انرژی‌کل آن را، (ج) خروج ازمرکزمدار ماهواره را، (د) حداکثر و حداقل فاصلهٔ آن را از سطح زمین، (ه) نصف قطر بزرگ مدار آن را، و (و) دورهٔ حرکت گردشی آن را. (جرم ماهواره را $m = 50$ kg بگیرید.)

۵۳.۱۳. مسئلهٔ ۵۲.۱۳ را، به فرض اینکه سرعت افقی اولیهٔ ماهواره ۰٫۹ سرعت

---

1. perigee 2. apogee

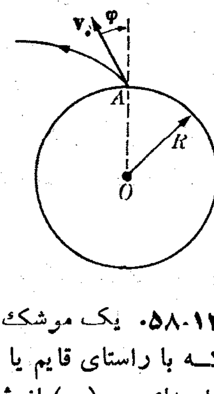
لازم برای ایجاد یک مدار دایره‌ای باشد، از نو حل کنید.

۵۴.۱۳. هنگام پرواز جمینی ۵[1] [۲۱ تا ۲۹ اوت ۱۹۶۵ (۳۰ مرداد تا ۷ شهریور ۱۳۴۴ ه. ش.)]، ارتفاع اوج و حضیض نسبت به‌سطح زمین بترتیب عبارت بودند از ۳۵۲km و ۱۰۷km. خروج ازمرکز مدار، سرعت بیشینه و سرعت کمینهٔ این سفینهٔ فضایی و تغییرات میدان گرانشی بین اوج و حضیض را حساب کنید.

۵۵.۱۳. یک ماهوارهٔ مصنوعی روی مداری حرکت می‌کند که فاصلهٔ اوج وحضیض آن از زمین بترتیب ۴۰۰۰ km و ۶۴۰ km است. (الف) نصف قطر بزرگ، (ب) خروج از مرکز، (ج) معادلهٔ مدار، (د) سرعت ماهواره در اوج و در حضیض، (ه) دورهٔ گردش، (و) انرژی کل آن را اگر جرم ۱۰۰ kg باشد، حساب کنید. (ز) با استفاده از یک کاغذ رسم قطبی مسیر ماهواره را رسم کنید.

۵۶.۱۳. ماهوارهٔ امریکایی کاشف ۳[2] دارای یک مدار بیضوی با حضیضی در ۱۷۵ کیلومتری بالای سطح زمین و سرعت آن در حضیض ۸٫۲۳ $\mathrm{km\,s^{-1}}$ بود. (الف) خروج از مرکز مدار، (ب) نصف قطر بزرگ آن، (ج) دورهٔ گردش ماهواره، و (د) سرعت و ارتفاع آن را در اوج حساب کنید.

۵۷.۱۳. در رصدی مشاهده می‌شود که یک ستارهٔ دنباله‌دار به‌جرم m درفاصلهٔ $10^{11}\,\mathrm{m}$ از خورشید با سرعتی برابر $5{,}16 \times 10^{4}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ که با بردار شعاع ازخورشید زاویهٔ 45° می‌سازد به سمت خورشید در حرکت است. برای این ستارهٔ دنباله‌دار، (الف) انرژی‌کل و اندازه حرکت زاویه‌ای، (ب) معادلهٔ مدار، (ج) کمترین فاصلهٔ نزدیک شدن به خورشید را حساب کنید. توجه کنید که کدام یک از نتایج به جرم ستارهٔ دنباله‌دار بستگی دارند، و کدام یک به جرم بستگی ندارند. با به کاربردن یک کاغذ رسم قطبی، مسیر ستاره را رسم کنید.



شکل ۳۵.۱۳

۵۸.۱۳. یک موشک پرتابی به جرم m (شکل ۳۵.۱۳) از نقطهٔ A با سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}_0$ که با راستای قایم یا شعاعی، زاویهٔ φ می‌سازد شلیک می‌شود. (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای، و (ب) انرژی‌کل آن را پیدا کنید. (ج) ثابت کنید که خروج ازمرکز مدارآن با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

---

1. Gemini V 2. Explorer III

$$\varepsilon^2 = 1 + (R^2 v_0^2 \sin^2 \varphi / \gamma^2 M^2)(v_0^2 - 2\gamma M/R).$$

[راهنمایی: برای یافتن پاسخ (ج) ازآخرین نتیجهٔ مثال ۵.۱۳ استفاده کنید.]

۵۹.۱۳. با مراجعه به‌مسئلهٔ پیش، ثابت کنید که معادلهٔ مسیر موشک عبارت است از

$$r = R^2 v_0^2 \sin^2 \varphi_0 / \gamma M(1 + \varepsilon \cos\theta).$$

[راهنمایی: ازمثال ۵.۱۳ به‌خاطر بیاورید که $L^2 = \gamma m^2 m' \varepsilon d$ است.]

۶۰.۱۳. با مراجعه به مسئله‌های ۵۸.۱۳ و ۵۹.۱۳، فرض کنید کـه $v_0 = \sqrt{\gamma M/R}$ و $\varphi = 30^\circ$ است. (الف) خروج ازمرکز مدار موشک را پیدا کنید. (ب) معادلهٔ مدار آن را بنویسید. (ج) ثابت کنید که موشک در نقطه‌ای روی زمین می‌افتد کـه فاصلهٔ آن تا A در سطح زمین بـرابـر $\pi R/3$ است. بـا استفاده از یک کاغذ رسم قطبی، مسیر موشک را رسم کنید.

[راهنمایی: بعد ازمحاسبهٔ ε، مقادیر θ را که به‌ازای‌آنها $R = r$ می‌شود تعیین‌کنید. یکی از این مقادیر مربوط به محل پرتاب و دیگری مربوط به نقطهٔ بـرگشت است. اختلاف این دو زاویه، جابجایی زاویه‌ای بین دو نقطه را به دست می‌دهد.]

۶۱.۱۳. با مراجعه به مسئلهٔ ۶۰.۱۳ ثـابت کنید کـه ارتفاع بیشینهٔ موشک از سطح زمین حـدود R ۰٫۹۲ است. (توصیه می‌کنیم دانشجو نتایج مسئله‌های ۶۰.۱۳ و ۶۱.۱۳ را بـا نتیجه‌هایی که با به‌کاربردن روشهای بخش ۷.۵ به‌دست آمده‌اند، مقایسه کند.)

۶۲.۱۳. با مراجعه بـه مسئلهٔ ۵۸.۱۳، نشان دهید کـه هرگاه سرعت پرتاب موشک برابر سرعت فرار باشد، مسیرآن یک سهمی می‌شود و به‌موجب مسئلهٔ ۵۹.۱۳، بستگی به‌راستای داده شده به‌موشک ندارد، و مسیر باز است و موشک هرگز به‌زمین برنمی‌گردد.

۶۳.۱۳. یک موشک پرتابی باسرعتی برابرسرعت فرار پرتاب شده است، به‌گونه‌ای که مسیرآن یک سهمی‌است. معادلهٔ مسیر را هنگامی که $\varphi = 45^\circ$ و $\varphi = 90^\circ$ باشد، پیدا کنید. با به‌کاربردن یک کاغذ رسم قطبی، برای هرحالت شکل مسیر را رسم کنید.

۶۴.۱۳. سرعت یک ستارهٔ دنبالـه‌دار خیلی دور از خورشید، $\sqrt{2gR}$ و پارامتر بـرخورد آن $\sqrt{2}R$ است (به مثال ۱۶.۷ مراجعه کنید)، که R شعاع خورشید است. ستارهٔ دنباله‌دار تا چه فاصله‌ای به‌خورشید نزدیک می‌شود؟

۶۵.۱۳. ذره‌ای براثـر یک نیروی جاذبه به بزرگی k/r^2 حرکت می‌کند. سرعت آن در یکی از نقاط انتهایی برابر $\sqrt{k/2mr_1}$ است که r_1 فاصلهٔ ذره از مرکز نیرو است. فاصلهٔ r_2 مربوط به‌وضع انتهایی دیگر، نصف قطر بزرگ و خروج ازمرکز آن را حساب کنید.

۶۶.۱۳. ذره‌ای بر اثر یک نیروی دافعهٔ مرکزی، به صورت $F = k/r^2$، حرکت می‌کند. این ذره ازنقطه‌ای خیلی دور ازمرکز نیرو وبا سرعت v_0 وفراسنج برخورد b (به‌مثال ۱۶.۷ مراجعه کنید) پرتاب شده است. تعیین کنید (الف) معادلـهٔ مسیر را، (ب) کمترین فاصلهٔ

نزدیک شدن آن را به مرکز نیرو، (ج) زاویه‌ای را که راستای اولیهٔ آن با راستای دورشدن می‌سازد. پاسخها را با نتایج به دست آمده درمثال ۱۶.۷ مقایسه کنید.
[راهنمایی: توجه داشته باشید که با قراردادن $\gamma mm'$ — به جای k، می توان معادله‌های این فصل را به‌کار برد.]

۶۷.۱۳. شدت میدان گرانشی و پتانسیل ناشی از زمین را درسطح آن حساب کنید.

۶۸.۱۳. مقدار میدان گرانشی زمین و شتاب مرکزگرا را برای جسمی واقع در فاصلهٔ (الف) $۳R/۲$، (ب) $R/۲$ ازمرکز زمین برآورد کنید. زمین را همگن فرض کنید.

۶۹.۱۳. بزرگی میدان گرانشی و پتانسیل حاصل ازخورشید را درطول مدار زمین حساب کنید. این مقادیر را با میدان گرانشی و پتانسیل حاصل از ماه روی زمین مقایسه کنید.

۷۰.۱۳. دو جسم به جرمهای m و $۳m$ به‌فاصلهٔ a از یکدیگر قرار دارند. نقاطی را پیدا که در آن نقاط، (الف) میدان گرانشی برایند برابر صفر است؛ (ب) دو جرم میدانهای برابر و در یک سو ایجاد می‌کنند؛ (ج) دوجرم پتانسیل گرانشی یکسان ایجاد می‌کنند.

۷۱.۱۳. دوجسم به‌جرمهای m و $۳m$ را در فاصلهٔ $۱۳a$ از یکدیگر قرار دارند. میدان گرانشی برآیند و پتانسیل را درنقطهٔ P واقع در فاصلهٔ $۵a$ ازجرم اول پیدا کنید. می‌دانیم خطهایی که P را به دوجرم وصل می‌کنند برهم عمودند.

۷۲.۱۳. دوجسم به جرمهای m و $۲m$ در دو رأس یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a قرار دارند. میدان گرانشی و پتانسیل را (الف) در نقطهٔ وسط این دو، (ب) در رأس سوم مثلث پیدا کنید.

۷۳.۱۳. سه جرم یکسان در رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار داده شده‌اند. طرحی از سطوح هم‌پتانسیل (درواقع محلهای تقاطع آنها با صفحهٔ مثلث) و خطهای نیروی میدان گرانشی رسم کنید. آیا نقطه‌ای وجود دارد که درآنجا میدان گرانشی برابر صفر باشد؟

۷۴.۱۳. میدان گرانشی و پتانسیل حاصل از یک حلقه به‌جرم m و شعاع R را روی نقاط محوری که برحلقه عمود است و از مرکز آن می‌گذرد، پیدا کنید.

۷۵.۱۳. با مراجعه به مسئلهٔ پیش، ذره‌ای ازنقطه‌ای به فاصلهٔ h از مرکز حلقه رها می‌شود. (الف) سرعت ذره هنگام گذر از مرکز چقدر می‌شود؟ (ب) در سمت دیگر تا چه فاصله‌ای خواهد رفت؟ (ج) آیا حرکت حاصل دوره‌ای است؟ در چه شرایطی حرکت ذره عملا هماهنگ ساده خواهد بود؟ بسامد مربوط به‌حالت اخیر را تعیین کنید.

۷۶.۱۳. دو ورقهٔ مادی نازک یکسان به‌فاصلهٔ a از یکدیگر قرار دارند. میدان گرانشی را که دربین آنها و در هرطرف به‌وجود می‌آید حساب کنید.

۷۷.۱۳. نشان دهید که میدان گرانشی و پتانسیل حاصل از یک سیم نازک که جرم واحد طول آن برابر λ است بترتیب عبارتند از

$$\mathbf{G} = -(۲\gamma\lambda/R)\mathbf{u}_R$$

و

$$V = ۲\gamma\lambda \ln R$$

که R فاصلهٔ نقطه از سیم است. [راهنمایی: ابتدا، با توجه به تقارن، راستای میدان و متغیرهایی که آن را مشخص می‌کنند پیدا کنید. سپس سیم را به قطعات کوچک، هریک به طول dx، تقسیم کنید ومؤلفهٔ میدان هریک ازآنها را در راستای نهایی حساب کنید. هنگامی که با انتگرال‌گیری میدان گرانشی را به دست آوردید، می‌توانید با استفاده از معادلهٔ (۲۱.۱۳)، پتانسیل گرانشی را پیدا کنید.]

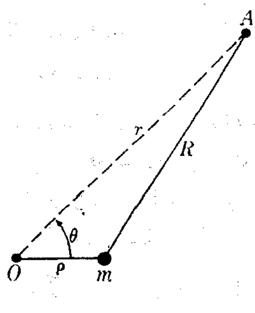
۷۸.۱۳. سرعت و انرژی کل ذره‌ای را که دور سیم مسئلهٔ ۷۷.۱۳ یک مدار دایره‌ای می‌پیماید و زیرتأثیر میدان گرانشی آن قرار دارد، تعیین کنید.

۷۹.۱۳. مثال ۸.۱۳ را برای حالتی که درآن یک ورقهٔ مادی به ضخامت D جانشین لایهٔ نازک شده باشد مجدداً مورد بررسی قرار دهید.

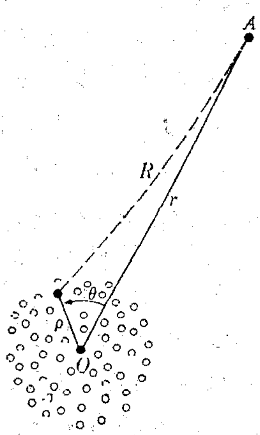
۸۰.۱۳. فرض کنید جرم m درفاصلهٔ ρ از یک نقطهٔ مشخص O که به عنوان مرجع به‌کار می‌رود قرار دارد (شکل ۳۶.۱۳). نشان دهید که پتانسیل گرانشی در نقطهٔ A، به فاصلهٔ R ازجرم m (R بزرگتراز ρ است) را می‌توان برحسب فاصلهٔ $OA = r$ و زاویهٔ θ به‌صورت رشتهٔ زیر نوشت:

$$V = -(\gamma m/r)[۱ + \rho\cos\theta/r + \rho^۲(۳\cos^۲\theta - ۱)/۲r^۲ + \cdots].$$

[راهنمایی: باتوجه به‌قانون کسینوسها R را برحسب ρ، r و θ بنویسید و $۱/R$ را به‌یاری بسط دوجمله‌ای به‌دست آورید.]



شکل ۳۶.۱۳



شکل ۳۷.۱۳

۸۱.۱۳. مجموعهٔ جرمهای $m_۱$، $m_۲$، $m_۳$، . . . (شکل ۳۷.۱۳) را در نظر بگیرید. نشان دهید که پتانسیل گرانشی را درنقطهٔ A، درفاصله‌ای که درمقایسه با ابعاد مجموعه بسیار زیاد

است، می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$V = -\gamma[M/r + P/r^{۲} + Q/r^{۳} + \cdots].$$

در این رابطه $M = \sum_i m_i$ جرم کل، $P = \sum_i \rho_i \cos\theta_i$ گشتاور دو قطبی[1] توزیع جرم نسبت به OA، و $Q = \sum_i [\rho_i^{۲}(۳\cos^{۲}\theta_i - ۱)]/۲$ گشتاور چهار قطبی[2] توزیع جرم، وغیره، نام دارند. [راهنمایی: از نتیجه‌های مسئلهٔ ۱۳.‏۸۰ برای هرجرم استفاده کنید و باهم جمع کنید.] اصطلاحات «دو قطبی» و «چهار قطبی» در فصل ۱۴ (جلد دوم) توضیح داده خواهند شد.

1. dipole moment 2. quadrupole moment

پیوست:

رابطه‌های ریاضی و جدولها

واژه‌نامه

فهرست راهنما

پیوست
رابطه‌های ریاضی

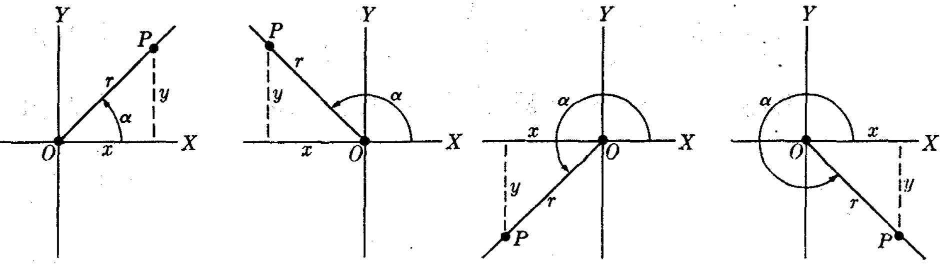
این پیوست، که برخی از فرمولهای ریاضی را که بیشتر دراین کتاب به کار رفته‌اند در بر-می‌گیرد، به عنوان مرجعی که بتواند سریعاً در دسترس دانشجویان قرار گیرد فراهم شده است. در موارد نادری نیز برخی یادداشتهای ریاضی را در داخل متن کتاب گنجانیده‌ایم. بحث و اثبات اغلب این فرمولها درهرکتاب آنالیز ریاضی یافت می‌شود. از آن جمله اند کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی، نوشتهٔ جرج، ب. توماس (چاپ وانتشار دانشگاه صنعتی شریف) و
Quick Calculus: A Short Manual of self Instruction, by. D.Kelpner and N. Ramsey (John Wiley and Sons, New York, 1963)
که می‌توان مقدمهٔ کوتاهی از مفاهیم پایه‌ای حساب دیفرانسیل و انتگرال را، به صورت برنامه ریزی شده، درآن یافت. دانشجو نیازمند به مراجعه به شماری از جدولهاست که به صورت کتابند. از میان آنها کتابهای زیر را می‌توان نام برد:
C.R.C. Standard Mathematical Tables (Chemical Rubber Company, Cleveland, Ohio, 1963); *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, by H. B. Dwight (Macmillan Company, New York, 1961).
به دانشجو توصیه می‌کنیم که کتاب *Handbook of Chmistry and Physics*
را که همه ساله ازطرف Chemical Rubber Company, Cleveland, Ohio
منتشر می‌شود در دم دست باشد. این کتاب مقادیر معتنابهی از داده‌های ریاضی، شیمی و فیزیک را نیز دربردارد.

۱. رابطه‌های مثلثاتی

براساس نمادهای شکل پ.۱ می‌توان رابطه‌های زیر را تعریف کرد:

$$\sin\alpha = y/r, \qquad \cos\alpha = x/r, \qquad \operatorname{tg}\alpha = y/x \qquad \text{(پ.۱)}$$

$$\csc\alpha = r/y, \qquad \sec\alpha = r/x, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = x/y \qquad \text{(پ.۲)}$$



شکل پ.۱

$$\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha \tag{پ.۳}$$

$$\sin^{۲}\alpha + \cos^{۲}\alpha = ۱, \quad \sec^{۲}\alpha - ۱ = \operatorname{tg}^{۲}\alpha \tag{پ.۴}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \tag{پ.۵}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \tag{پ.۶}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = ۲\sin\frac{۱}{۲}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{۱}{۲}(\alpha \mp \beta) \tag{پ.۷}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = ۲\cos\frac{۱}{۲}(\alpha + \beta)\cos\frac{۱}{۲}(\alpha - \beta) \tag{پ.۸}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -۲\sin\frac{۱}{۲}(\alpha + \beta)\sin\frac{۱}{۲}(\alpha - \beta) \tag{پ.۹}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{۱}{۲}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \tag{پ.۱۰}$$

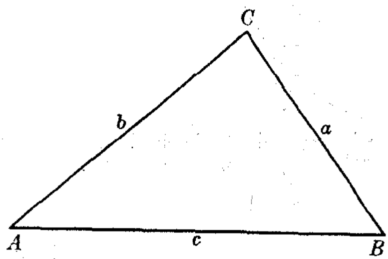
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{۱}{۲}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \tag{پ.۱۱}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{۱}{۲}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \tag{پ.۱۲}$$

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos ۲\alpha = \cos^{۲}\alpha - \sin^{۲}\alpha \tag{پ.۱۳}$$

$$\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲} = \frac{۱}{۲}(۱ - \cos\alpha), \quad \cos^{۲}\frac{\alpha}{۲} = \frac{۱}{۲}(۱ + \cos\alpha). \tag{پ.۱۴}$$

در هر مثلثی براساس نمادهای شکل پ.۲، داریم



شکل پ.۲

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$: قانون سینوسها (پ.۱۵)

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\cos A.$$: قانون کسینوسها (پ.۱۶)

۲. لگاریتم

(الف) تعریف e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^{n} = ۲٫۷۱۸۲۸۱۸\cdots$$ (پ.۱۷)

تابعهای نمایی $y = e^{x}$ و $y = e^{-x}$ درشکل پ.۳ رسم شده‌اند.

(ب) لگاریتم طبیعی، لگاریتم درپایهٔ e (به شکل پ.۴ مراجعه کنید):

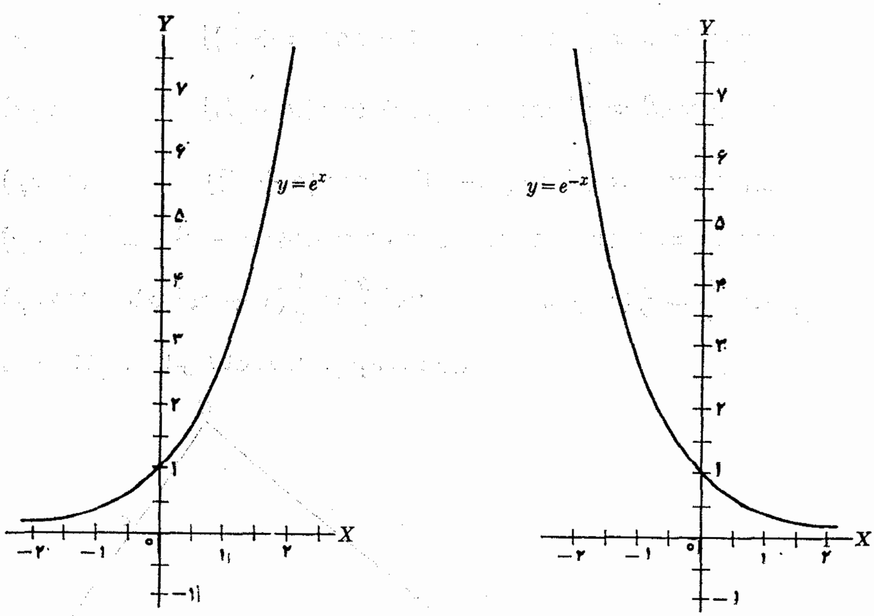
$$y = \ln x \qquad \text{اگر}\quad x = e^{y}$$ (پ.۱۸)

لگاریتم اعشاری یا لگاریتم درپایهٔ ده:

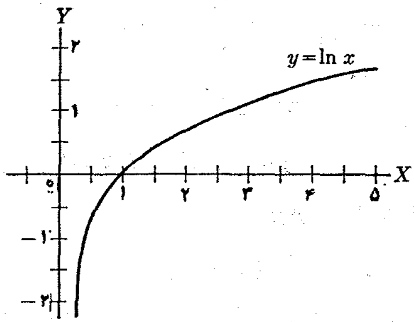
$$y = \log x \qquad \text{اگر}\quad x = ۱۰^{y}$$ (پ.۱۹)

لگاریتم طبیعی واعشاری با رابطهٔ زیر به هم مربوطند:

$$\ln x = ۲٫۳۰۳\log x, \quad \log x = ۰٫۴۳۴\ln x.$$ (پ.۲۰)



شکل پ.۳



شکل پ.۴

۳. بسط توان

(الف) بسط دوجمله‌ای:

$$(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!}a^{n-p}b^p + \cdots \quad \text{(پ.۲۱)}$$

اگر n یک عدد صحیح ومثبت باشد، بسط، دارای $(n-1)$ جمله است. در تمام موارد دیگر شمار جمله‌های بسط بینهایت است. حالتی که در آن $a=1$ و b یک کمیت x باشد بوفور درمتن کتاب آمده‌است. بنابراین بسط $(1+x)^n$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad \text{(پ.۲۲)}$$

(ب) چند بسط سری مفید دیگر:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \quad \text{(پ.۲۳)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \quad \text{(پ.۲۴)}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots \quad \text{(پ.۲۵)}$$

$$\cos x = ۱ - \frac{۱}{۲!}x^۲ + \frac{۱}{۴!}x^۴ - \dots \qquad (\text{پ.۲۶})$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{۱}{۳}x^۳ + \frac{۲}{۱۵}x^۵ + \dots \qquad (\text{پ.۲۷})$$

برای $x \ll ۱$، تقریبهای زیر می‌توانند قابل قبول باشند:

$$(۱ + x)^n \approx ۱ + nx \qquad (\text{پ.۲۸})$$

$$e^x \approx ۱ + x, \qquad \ln(۱ + x) \approx x \qquad (\text{پ.۲۹})$$

$$\sin x \approx x, \qquad \cos x \approx ۱, \qquad \operatorname{tg} x \approx x. \qquad (\text{پ.۳۰})$$

درنظر داشته باشید که در رابطه‌های (پ.۲۵)، (پ.۲۶)، (پ.۲۷) و (پ.۳۰)، x باید برحسب رادیان باشد.

(ج) بسط به صورت سری تایلور:

$$f(x) = f(x_۰) + (x - x_۰)\left(\frac{df}{dx}\right)_۰ + \frac{۱}{۲!}(x - x_۰)^۲\left(\frac{d^۲f}{dx^۲}\right)_۰$$

$$+ \dots + \frac{۱}{n!}(x - x_۰)^n\left(\frac{d^nf}{dx^n}\right)_۰ + \dots \qquad (\text{پ.۳۱})$$

اگر $(x - x_۰) \ll ۱$ باشد تقریب زیر را می‌توان به کار برد:

$$f(x) \approx f(x_۰) + (x - x_۰)\left(\frac{df}{dx}\right)_۰. \qquad (\text{پ.۳۲})$$

۴. اعداد مختلط

با توجه به تعریف $i^۲ = -۱$ یا $i = \sqrt{-۱}$، داریم

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (\text{پ.۳۳})$$

$$\cos\theta = \frac{۱}{۲}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \qquad (\text{پ.۳۴})$$

$$\sin\theta = \frac{۱}{۲i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \qquad (\text{پ.۳۵})$$

۵. توابع هذلولوی

برای تجسم رابطه‌های زیر به شکل پ.۵ مراجعه کنید:

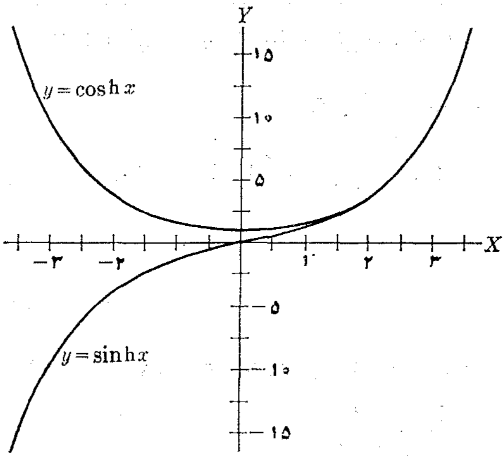
$$\cosh\theta = \frac{۱}{۲}(e^{\theta} + e^{-\theta}) \qquad (\text{پ.۳۶})$$

$$\sinh\theta = \frac{۱}{۲}(e^{\theta} - e^{-\theta}) \qquad (پ.۳۷)$$

$$\cosh^{۲}\theta - \sinh^{۲}\theta = ۱ \qquad (پ.۳۸)$$

$$\sinh\theta = -i\sin(i\theta), \quad \cosh\theta = \cos(i\theta) \qquad (پ.۳۹)$$

$$\sin\theta = -i\sinh(i\theta), \quad \cos\theta = \cosh(i\theta) \qquad (پ.۴۰)$$



شکل پ.۵

۶. تابع اصلی، مشتق وانتگرال آن

$f(u)$	df/dx	$\int f(u)\,du$
u^n	$nu^{n-۱}\,du/dx$	$u^{n+۱}/(n+۱)+C \quad (n\neq -۱)$
$u^{-۱}$	$-(۱/u^{۲})\,du/dx$	$\ln u + C$
$\ln u$	$(۱/u)\,du/dx$	$u\ln u - u + C$
e^u	$e^u\,du/dx$	$e^u + C$
$\sin u$	$\cos u\,du/dx$	$-\cos u + C$
$\cos u$	$-\sin u\,du/dx$	$\sin u + C$
$\mathrm{tg}\,u$	$\sec^{-۲} u\,du/dx$	$-\ln\cos u + C$
$\mathrm{cotg}\,u$	$-\csc^{۲} u\,du/dx$	$\ln\sin u + C$

$f(u)$	df/dx	$\int f(u)du$
$\arcsin u$	$(du/dx)/\sqrt{۱-u^۲}$	$u\sin^{-۱}u+\sqrt{۱-u^۲}+C$
$\sinh u$	$\cosh u\, du/dx$	$\cosh u+C$
$\cosh u$	$\sinh u\, du/dx$	$\sinh u+C$

یک قاعدهٔ سودمند برای انتگرال‌گیری، به‌نام انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، عبارت است از

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (\text{پ}۴۱)$$

این روش، برای به دست آوردن مقدار انتگرال سمت چپ به‌کمک انتگرال سمت راست، بوفور به کار می‌رود.

۷. مقدار میانگین یک تابع

مقدار متوسط یا میانگین تابعی مانند $y=f(x)$ در بازهٔ (a, b) مطابق رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$y_{\text{ave}} = \frac{۱}{b-a}\int_a^b y\,dx. \qquad (\text{پ}۴۲)$$

همچنین مقدار میانگین $y^۲$ چنین تعریف می‌شود:

$$(y^۲)_{\text{ave}} = \frac{۱}{b-a}\int_a^b y^۲dx. \qquad (\text{پ}۴۳)$$

کمیت $\sqrt{(y^۲)_{\text{ave}}}$ مقدار ریشهٔ میانگین مربعی $y=f(x)$ در بازهٔ (a, b) نام دارد و معمولاً با y_{ave} اختلاف دارد و آن را با y_{rms} نشان می‌دهند.

۸. روابط اساسی نسبیت

در رابطه‌های زیر، v سرعت چارچوب S' نسبت به چارچوب S و محورهای X و X' موازی با v درنظر گرفته شده‌اند. مقدار k برابر است با $۱/\sqrt{۱-v^۲/c^۲}$.

(الف) تبدیل لورنتس برای مکان و زمان:

$$\begin{aligned} x' &= k(x-vt) & x &= k(x'+vt') \\ y' &= y & y &= y' \\ z' &= z & z &= z' \\ t' &= k(t-vx/c^۲) & t &= k(t'+vx'/c^۲) \end{aligned} \qquad (\text{پ}۴۰)$$

(ب) تبدیل لورنتس برای اندازه حرکت وانرژی:

(پ.۴۵)
$$
\begin{aligned}
p'_x &= k(p_x - vE/c^{۲}) & \qquad p_x &= k(p'_x + vE'/c^{۲})\\
p'_y &= p_y & p_y &= p'_y\\
p'_z &= p_z & p_z &= p'_z\\
E' &= k(E - vp_x) & E &= k(E' + vp'_x)
\end{aligned}
$$

(ج) تبدیل لورنتس برای نیرو (ذره به‌طور لحظه‌ای نسبت به چارچوب S' ساکن فرض می‌شود):

(پ.۴۶)
$$F'_x = F_x, \quad F'_y = kF_y, \quad F'_z = kF_z$$

(د) تعریف اندازه حرکت:

$$\mathbf{p} = m_{\circ}\mathbf{v}/\sqrt{۱ - v^{۲}/c^{۲}} = km_{\circ}\mathbf{v}$$

(ه) رابطهٔ بین انرژی واندازه حرکت:

$$E = c\sqrt{m_{\circ}^{۲}c^{۲} + p^{۲}}.$$

جدول لگاریتم

N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۰	.....	۰۰۰۰	۳۰۱۰	۴۷۷۱	۶۰۲۱	۶۹۹۰	۷۷۸۲	۸۴۵۱	۹۰۳۱	۹۵۴۲
۱	۰۰۰۰	۰۴۱۴	۰۷۹۲	۱۱۳۹	۱۴۶۱	۱۷۶۱	۲۰۴۱	۲۳۰۴	۲۵۵۳	۲۷۸۸
۲	۳۰۱۰	۳۲۲۲	۳۴۲۴	۳۶۱۷	۳۸۰۲	۳۹۷۹	۴۱۵۰	۴۳۱۴	۴۴۷۲	۴۶۲۴
۳	۴۷۷۱	۴۹۱۴	۵۰۵۱	۵۱۸۵	۵۳۱۵	۵۴۴۱	۵۵۶۳	۵۶۸۲	۵۷۹۸	۵۹۱۱
۴	۶۰۲۱	۶۱۲۸	۶۲۳۲	۶۳۳۵	۶۴۳۵	۶۵۳۲	۶۶۲۸	۶۷۲۱	۶۸۲۲	۶۹۰۲
۵	۶۹۹۰	۷۰۷۶	۷۱۶۰	۷۲۴۳	۷۳۲۴	۷۴۰۴	۷۴۸۲	۷۵۵۹	۷۶۳۴	۷۷۰۹
۶	۷۷۸۲	۷۸۵۲	۷۹۲۴	۷۹۹۳	۸۰۶۲	۸۱۲۹	۸۱۹۵	۸۲۶۱	۸۳۲۵	۸۳۸۸
۷	۸۴۵۱	۸۵۱۳	۸۵۷۳	۸۶۳۳	۸۶۹۲	۸۷۵۱	۸۸۰۸	۸۸۶۵	۸۹۲۱	۸۹۷۶
۸	۹۰۳۱	۹۰۸۵	۹۱۳۸	۹۱۹۱	۹۲۴۳	۹۲۹۴	۹۳۴۵	۹۳۹۵	۹۴۴۵	۹۴۹۴
۹	۹۵۴۲	۹۵۹۰	۹۶۳۸	۹۶۸۵	۹۷۳۱	۹۷۷۷	۹۸۲۳	۸۸۶۸	۹۹۱۲	۹۹۵۶
۱۰	۰۰۰۰	۰۰۴۳	۰۰۸۶	۰۱۲۸	۰۱۷۰	۰۲۱۲	۰۲۵۳	۰۲۹۴	۰۳۳۴	۰۳۷۴
۱۱	۰۴۱۴	۰۴۵۳	۰۴۹۲	۰۵۳۱	۰۵۶۹	۰۶۰۷	۰۶۴۵	۰۶۸۲	۰۷۱۹	۰۷۵۵
۱۲	۰۷۹۲	۰۸۲۸	۰۸۶۴	۰۸۹۹	۰۹۳۴	۰۹۶۹	۱۰۰۴	۱۰۳۸	۱۰۷۲	۱۱۰۶
۱۳	۱۱۳۹	۱۱۷۳	۱۲۰۶	۱۲۳۹	۱۲۷۱	۱۳۰۳	۱۳۳۵	۱۳۶۷	۱۳۹۹	۱۴۳۰
۱۴	۱۴۶۱	۱۴۹۲	۱۵۲۳	۱۵۵۳	۱۵۸۴	۱۶۱۴	۱۶۴۴	۱۶۷۳	۱۷۰۳	۱۷۳۲
۱۵	۱۷۶۱	۱۷۹۰	۱۸۱۸	۱۸۴۷	۱۸۷۴	۱۹۰۳	۱۹۳۱	۱۹۵۹	۱۹۸۷	۲۰۱۴
۱۶	۲۰۴۱	۲۰۶۸	۲۰۹۵	۲۱۲۲	۲۱۴۸	۲۱۷۵	۲۲۰۱	۲۲۲۷	۲۲۵۳	۲۲۷۹
۱۷	۲۳۰۴	۲۳۳۰	۲۳۵۵	۲۳۸۰	۲۴۰۵	۲۴۳۰	۲۴۵۵	۲۴۸۰	۲۵۰۴	۲۵۲۹
۱۸	۲۵۵۳	۲۵۷۷	۲۶۰۱	۲۶۲۵	۲۶۴۸	۲۶۷۲	۲۶۹۵	۲۷۱۸	۲۷۴۲	۲۷۶۵
۱۹	۲۷۸۸	۲۸۱۰	۲۸۳۳	۲۸۵۶	۲۸۷۸	۲۹۰۰	۲۹۲۳	۲۹۴۵	۲۹۶۷	۲۹۸۹
۲۰	۳۰۱۰	۳۰۳۲	۳۰۵۴	۳۰۷۵	۳۰۹۶	۳۱۱۸	۳۱۳۹	۳۱۶۰	۳۱۸۱	۳۲۰۱
۲۱	۳۲۲۲	۳۲۴۳	۳۲۶۳	۳۲۸۴	۳۳۰۴	۳۳۲۴	۳۳۴۵	۳۳۶۵	۳۳۸۵	۳۴۰۴
۲۲	۳۴۲۴	۳۴۴۴	۳۴۶۴	۳۴۸۳	۳۵۰۲	۳۵۲۲	۳۵۴۱	۳۵۶۰	۳۵۷۹	۳۵۹۸
۲۳	۳۶۱۷	۳۶۳۶	۳۶۵۵	۳۶۷۴	۳۶۹۲	۳۷۱۱	۳۷۲۹	۳۷۴۷	۳۷۶۶	۳۷۸۴
۲۴	۳۸۰۲	۳۸۲۰	۳۸۳۸	۳۸۵۶	۳۸۷۴	۳۸۹۲	۳۹۰۹	۳۹۲۷	۳۹۴۵	۳۹۶۲
۲۵	۳۹۷۹	۳۹۹۷	۴۰۱۴	۴۰۳۱	۴۰۴۸	۴۰۶۵	۴۰۸۲	۴۰۹۹	۴۱۱۶	۴۱۳۳
۲۶	۴۱۵۰	۴۱۶۶	۴۱۸۳	۴۲۰۰	۴۲۱۶	۴۲۳۲	۴۲۴۹	۴۲۶۵	۴۲۸۱	۴۲۹۸
۲۷	۴۳۱۴	۴۳۳۰	۴۳۴۶	۴۳۶۲	۴۳۷۸	۴۳۹۳	۴۴۰۹	۴۴۲۵	۴۴۴۰	۴۴۵۶
۲۸	۴۴۷۲	۴۴۸۷	۴۵۰۲	۴۵۱۸	۴۵۳۳	۵۵۴۸	۴۵۶۴	۴۵۷۹	۴۵۹۴	۴۶۰۹
۲۹	۴۶۲۴	۴۶۳۹	۴۶۵۴	۴۶۶۹	۴۶۸۳	۴۶۹۸	۴۷۱۳	۴۷۲۸	۴۷۴۲	۴۷۵۷
۳۰	۴۷۷۱	۴۷۸۶	۴۸۰۰	۴۸۱۴	۴۸۲۹	۴۸۴۳	۴۸۵۷	۴۸۷۱	۴۸۸۶	۴۹۰۰
۳۱	۴۹۱۴	۴۹۲۸	۴۹۴۲	۴۹۵۵	۴۹۶۹	۴۹۸۳	۴۹۹۷	۵۰۱۱	۵۰۲۴	۵۰۳۸
۳۲	۵۰۵۱	۵۰۶۵	۵۰۷۹	۵۰۹۲	۵۱۰۵	۵۱۱۹	۵۱۳۲	۵۱۴۵	۵۱۵۹	۵۱۷۲
۳۳	۵۱۸۵	۵۱۹۸	۵۲۱۱	۵۲۲۴	۵۲۳۷	۵۲۵۰	۵۲۶۳	۵۲۷۶	۵۲۸۹	۵۳۰۲
۳۴	۵۳۱۵	۵۳۲۸	۵۳۴۰	۵۳۵۳	۵۳۶۶	۵۳۷۸	۵۳۹۱	۵۴۰۳	۵۴۱۶	۵۴۲۸
۳۵	۵۴۴۱	۵۴۵۳	۵۴۶۵	۵۴۷۸	۵۴۹۰	۵۵۰۲	۵۵۱۴	۵۵۲۷	۵۵۳۹	۵۵۵۱
۳۶	۵۵۶۳	۵۵۷۵	۵۵۸۷	۵۵۹۹	۵۶۱۱	۵۶۲۳	۵۶۳۵	۵۶۴۷	۵۶۵۸	۵۶۷۰
۳۷	۵۶۸۲	۵۶۹۴	۵۷۰۵	۵۷۱۷	۵۷۲۹	۵۷۴۰	۵۷۵۲	۵۷۶۳	۵۷۷۵	۵۷۸۶
۳۸	۵۷۹۸	۵۸۰۹	۵۸۲۱	۵۸۳۲	۵۸۴۳	۵۸۵۵	۵۸۶۶	۵۸۷۷	۵۸۸۸	۵۸۹۹
۳۹	۵۹۱۱	۵۹۲۲	۵۹۳۳	۵۹۴۴	۵۹۵۵	۵۹۶۶	۵۹۷۷	۵۹۸۸	۵۹۹۹	۶۰۱۰
۴۰	۶۰۲۱	۶۰۳۱	۶۰۴۲	۶۰۵۳	۶۰۶۴	۶۰۷۵	۶۰۸۵	۶۰۹۶	۶۱۰۷	۶۱۱۷
۴۱	۶۱۲۸	۶۱۳۸	۶۱۴۰	۶۱۶۰	۶۱۷۰	۶۱۸۰	۶۱۹۱	۶۲۰۱	۶۲۱۲	۶۲۲۲
۴۲	۶۲۳۲	۶۲۴۳	۶۲۵۳	۶۲۶۳	۶۲۷۴	۶۲۸۴	۶۲۹۴	۶۳۰۴	۶۳۱۴	۶۳۲۵
۴۳	۶۳۳۵	۶۳۴۵	۶۳۵۵	۶۳۶۵	۶۳۷۵	۶۳۸۵	۶۳۹۵	۶۴۰۵	۶۴۱۵	۶۴۲۵
۴۴	۶۴۳۵	۶۴۴۴	۶۴۵۴	۶۴۶۴	۶۴۷۴	۶۴۸۴	۶۴۹۳	۶۵۰۳	۶۵۱۳	۶۵۲۲
۴۵	۶۵۳۲	۶۵۴۲	۶۵۵۱	۶۵۶۱	۶۵۷۱	۶۵۸۰	۶۵۹۰	۶۵۹۹	۶۶۰۹	۶۶۱۸
۴۶	۶۶۲۸	۶۶۳۷	۶۶۴۶	۶۶۵۶	۶۶۶۵	۶۶۷۵	۶۶۸۴	۶۶۹۳	۶۷۰۲	۶۷۱۲
۴۷	۶۷۲۱	۶۷۳۰	۶۷۳۹	۶۷۴۹	۶۷۵۸	۶۷۶۷	۶۷۷۶	۶۷۸۵	۶۷۹۴	۶۸۰۳
۴۸	۶۸۱۲	۶۸۲۱	۶۸۳۰	۶۸۳۹	۶۸۴۸	۶۸۵۷	۶۸۶۶	۶۸۷۵	۶۸۸۴	۶۸۹۳
۴۹	۶۹۰۲	۶۹۱۱	۶۹۲۰	۶۹۲۸	۶۹۳۷	۶۹۴۶	۶۹۵۵	۶۹۶۴	۶۹۷۲	۶۹۸۱
۵۰	۶۹۹۰	۶۹۹۸	۷۰۰۷	۷۰۱۶	۷۰۲۴	۷۰۳۳	۷۰۴۲	۷۰۵۰	۷۰۵۹	۷۰۶۷
N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

جدول لگاریتم

N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۵۰	۶۹۹۰	۶۹۹۸	۷۰۰۷	۷۰۱۶	۷۰۲۴	۷۰۳۳	۷۰۴۲	۷۰۵۰	۷۰۵۹	۷۰۶۷
۵۱	۷۰۷۶	۷۰۸۴	۷۰۹۳	۷۱۰۱	۷۱۱۰	۷۱۱۸	۷۱۲۶	۷۱۳۵	۷۱۴۳	۷۱۵۲
۵۲	۷۱۶۰	۷۱۶۸	۷۱۷۷	۷۱۸۵	۷۱۹۳	۷۲۰۲	۷۲۱۰	۷۲۱۸	۷۲۲۶	۷۲۳۵
۵۳	۷۲۴۳	۷۲۵۱	۷۲۵۹	۷۲۶۷	۷۲۷۵	۷۲۸۴	۷۲۹۲	۷۳۰۰	۷۳۰۸	۷۳۱۶
۵۴	۷۳۲۴	۷۳۳۲	۷۳۴۰	۷۳۴۸	۷۳۵۶	۷۳۶۴	۷۳۷۲	۷۳۸۰	۷۳۸۸	۷۳۹۶
۵۵	۷۴۰۴	۷۴۱۲	۷۴۱۹	۷۴۲۷	۷۴۳۵	۷۴۴۳	۷۴۵۱	۷۴۵۹	۷۴۶۶	۷۴۷۴
۵۶	۷۴۸۲	۷۴۹۰	۷۴۹۷	۷۵۰۵	۷۵۱۳	۷۵۲۰	۷۵۲۸	۷۵۳۶	۷۵۴۳	۷۵۵۱
۵۷	۷۵۵۹	۷۵۶۶	۷۵۷۴	۷۵۸۲	۷۵۸۹	۷۵۹۷	۷۶۰۴	۷۶۱۲	۷۶۱۹	۷۶۲۷
۵۸	۷۶۳۴	۷۶۴۲	۷۶۴۹	۷۶۵۷	۷۶۶۴	۷۶۷۲	۷۶۷۹	۷۶۸۶	۷۶۹۴	۷۷۰۱
۵۹	۷۷۰۹	۷۷۱۶	۷۷۲۳	۷۷۳۱	۷۷۳۸	۷۷۴۵	۷۷۵۲	۷۷۶۰	۷۷۶۷	۷۷۷۴
۶۰	۷۷۸۲	۷۷۸۹	۷۷۹۶	۷۸۰۳	۷۸۱۰	۷۸۱۸	۷۸۲۵	۷۸۳۲	۷۸۳۹	۷۸۴۶
۶۱	۷۸۵۳	۷۸۶۰	۷۸۶۸	۷۸۷۵	۷۸۸۲	۷۸۸۹	۷۸۹۶	۷۹۰۳	۷۹۱۰	۷۹۱۷
۶۲	۷۹۲۴	۷۹۳۱	۷۹۳۸	۸۹۴۵	۷۹۵۲	۷۹۵۹	۷۹۶۶	۷۹۷۳	۷۹۸۰	۷۹۸۷
۶۳	۷۹۹۳	۸۰۰۰	۸۰۰۷	۸۰۱۴	۸۰۲۱	۸۰۲۸	۸۰۳۵	۸۰۴۱	۸۰۴۸	۸۰۵۵
۶۴	۸۰۶۲	۸۰۶۹	۸۰۷۵	۸۰۸۲	۸۰۸۹	۸۰۹۶	۸۱۰۲	۸۱۰۹	۸۱۱۶	۸۱۲۲
۶۵	۸۱۲۹	۸۱۳۶	۸۱۴۲	۸۱۴۹	۸۱۵۶	۸۱۶۲	۸۱۶۹	۸۱۷۶	۸۱۸۲	۸۱۸۹
۶۶	۸۱۹۵	۸۲۰۲	۸۲۰۹	۸۲۱۵	۸۲۲۲	۸۲۲۸	۸۲۳۵	۸۲۴۱	۸۲۴۸	۸۲۵۴
۶۷	۸۲۶۱	۸۲۶۷	۸۲۷۴	۸۲۸۰	۸۲۸۷	۸۲۹۳	۸۲۹۹	۸۳۰۶	۸۳۱۲	۸۳۱۹
۶۸	۸۳۲۵	۸۳۳۱	۸۳۳۸	۸۳۴۴	۸۳۵۱	۸۳۵۷	۸۳۶۳	۸۳۷۰	۸۳۷۶	۸۳۸۲
۶۹	۸۳۸۸	۸۳۹۵	۸۴۰۱	۸۴۰۷	۸۴۱۴	۸۴۲۰	۸۴۲۶	۸۴۳۲	۸۴۳۹	۸۴۴۵
۷۰	۸۴۵۱	۸۴۵۷	۸۴۶۳	۸۴۷۰	۸۴۷۶	۸۴۸۲	۸۴۸۸	۸۴۹۴	۸۵۰۰	۸۵۰۶
۷۱	۸۵۱۳	۸۵۱۹	۸۵۲۵	۸۵۳۱	۸۵۳۷	۸۵۴۳	۸۵۴۹	۸۵۵۵	۸۵۶۱	۸۵۶۷
۷۲	۸۵۷۳	۸۵۷۹	۸۵۸۵	۸۵۹۱	۸۵۹۷	۸۶۰۳	۸۶۰۹	۸۶۱۵	۸۶۲۱	۸۶۲۷
۷۳	۸۶۳۳	۸۶۳۹	۸۶۴۵	۸۶۵۱	۸۶۵۷	۸۶۶۳	۸۶۶۹	۸۶۷۵	۸۶۸۱	۸۶۸۶
۷۴	۸۶۹۲	۸۶۹۸	۸۷۰۴	۸۷۱۰	۸۷۱۶	۸۷۲۲	۸۷۲۷	۸۷۳۳	۸۷۳۹	۸۷۴۵
۷۵	۸۷۵۱	۸۷۵۶	۸۷۶۲	۸۷۶۸	۸۷۷۴	۸۷۷۹	۸۷۸۵	۸۷۹۱	۸۷۹۷	۸۸۰۲
۷۶	۸۸۰۸	۸۸۱۴	۸۸۲۰	۸۸۲۵	۸۸۳۱	۸۸۳۷	۸۸۴۲	۸۸۴۸	۸۸۵۴	۸۸۵۹
۷۷	۸۸۶۵	۸۸۷۱	۸۸۷۶	۸۸۸۲	۸۸۸۷	۸۸۹۳	۸۸۹۹	۸۹۰۴	۸۹۱۰	۸۹۱۵
۷۸	۸۹۲۱	۸۹۲۷	۸۹۳۲	۸۹۳۸	۸۹۴۳	۸۹۴۹	۸۹۵۴	۸۹۶۰	۸۹۶۵	۸۹۷۱
۷۹	۸۹۷۶	۸۹۸۲	۸۹۸۷	۸۹۹۳	۸۹۹۸	۹۰۰۴	۹۰۰۹	۹۰۱۵	۹۰۲۰	۹۰۲۵
۸۰	۹۰۳۱	۹۰۳۶	۹۰۴۲	۹۰۴۷	۹۰۵۳	۹۰۵۸	۹۰۶۳	۹۰۶۹	۹۰۷۴	۹۰۷۹
۸۱	۹۰۸۵	۹۰۹۰	۹۰۹۶	۹۱۰۱	۹۱۰۶	۹۱۱۲	۹۱۱۷	۹۱۲۲	۹۱۲۸	۹۱۳۳
۸۲	۹۱۳۸	۹۱۴۳	۹۱۴۹	۹۱۵۴	۹۱۵۹	۹۱۶۵	۹۱۷۰	۹۱۷۵	۹۱۸۰	۹۱۸۶
۸۳	۹۱۹۱	۹۱۹۶	۹۲۰۱	۹۲۰۶	۹۲۱۲	۹۲۱۷	۹۲۲۲	۹۲۲۷	۹۲۳۲	۹۲۳۸
۸۴	۹۲۴۳	۹۲۴۸	۹۲۵۳	۹۲۵۸	۹۲۶۳	۹۲۶۹	۹۲۷۴	۹۲۷۹	۹۲۸۴	۹۲۸۹
۸۵	۹۲۹۴	۹۲۹۹	۹۳۰۴	۹۳۰۹	۹۳۱۵	۹۳۲۰	۹۳۲۵	۹۳۳۰	۹۳۳۵	۹۳۴۰
۸۶	۹۳۴۵	۹۳۵۰	۹۳۵۵	۹۳۶۰	۹۳۶۵	۹۳۷۰	۹۳۷۵	۹۳۸۰	۹۳۸۵	۹۳۹۰
۸۷	۹۳۹۵	۹۴۰۰	۹۴۰۵	۹۴۱۰	۹۴۱۵	۹۴۲۰	۹۴۲۵	۹۴۳۰	۹۴۳۵	۹۴۴۰
۸۸	۹۴۴۵	۹۴۵۰	۹۴۵۵	۹۴۶۰	۹۴۶۵	۹۴۶۹	۹۴۷۴	۹۴۷۹	۹۴۸۴	۹۴۸۹
۸۹	۹۴۹۴	۹۴۹۹	۹۵۰۴	۹۵۰۹	۹۵۱۳	۹۵۱۸	۹۵۲۳	۹۵۲۸	۹۵۳۳	۹۵۳۸
۹۰	۹۵۴۲	۹۵۴۷	۹۵۵۲	۹۵۵۷	۹۵۶۲	۹۵۶۶	۹۵۷۱	۹۵۷۶	۹۵۸۱	۹۵۸۶
۹۱	۹۵۹۰	۹۵۹۵	۹۶۰۰	۹۶۰۵	۹۶۰۹	۹۶۱۴	۹۶۱۹	۹۶۲۴	۹۶۲۸	۹۶۳۳
۹۲	۹۶۳۸	۹۶۴۳	۹۶۴۷	۹۶۵۲	۹۶۵۷	۹۶۶۱	۹۶۶۶	۹۶۷۱	۹۶۷۵	۹۶۸۰
۹۳	۹۶۸۵	۸۶۸۹	۹۶۹۴	۹۶۹۹	۹۷۰۳	۹۷۰۸	۹۷۱۳	۹۷۱۷	۹۷۲۲	۹۷۲۷
۹۴	۹۷۳۱	۹۷۳۶	۹۷۴۱	۹۷۴۵	۹۷۵۰	۹۷۵۴	۹۷۵۹	۹۷۶۳	۹۷۶۸	۹۷۷۳
۹۵	۹۷۷۷	۹۷۸۲	۹۷۸۶	۹۷۹۱	۹۷۹۵	۹۸۰۰	۹۸۰۵	۹۸۰۹	۹۸۱۴	۹۸۱۸
۹۶	۹۸۲۳	۹۸۲۷	۹۸۳۲	۹۸۳۶	۹۸۴۱	۹۸۴۵	۹۸۵۰	۹۸۵۴	۹۸۵۹	۹۸۶۳
۹۷	۹۸۶۸	۹۸۷۲	۹۸۷۷	۹۸۸۱	۹۸۸۶	۹۸۹۰	۹۸۹۴	۹۸۹۹	۹۹۰۳	۹۹۰۸
۹۸	۹۹۱۲	۹۹۱۷	۹۹۲۱	۹۹۲۶	۹۹۳۰	۹۹۳۴	۹۹۳۹	۹۹۴۳	۹۹۴۸	۹۹۵۲
۹۹	۹۹۵۶	۹۹۶۱	۹۹۶۵	۹۹۶۹	۹۹۷۴	۹۹۷۸	۹۹۸۳	۹۹۸۷	۹۹۹۱	۹۹۹۶
۱۰۰	۰۰۰۰	۰۰۰۴	۰۰۰۹	۰۰۱۳	۰۰۱۷	۰۰۲۲	۰۰۲۶	۰۰۳۰	۰۰۳۵	۰۰۳۹
N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

جدول توابع مثلثاتی

زاویه				
درجه	رادیان	sin	cos	tg
۰°	۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۰٫۰۰۰
۱°	۰٫۰۱۷	۰٫۰۱۷	۱٫۰۰۰	۰٫۰۱۷
۲°	۰٫۰۳۵	۰٫۰۳۵	۰٫۹۹۹	۰٫۰۳۵
۳°	۰٫۰۵۲	۰٫۰۵۲	۰٫۹۹۹	۰٫۰۵۲
۴°	۰٫۰۷۰	۰٫۰۷۰	۰٫۹۹۸	۰٫۰۷۰
۵°	۰٫۰۸۷	۰٫۰۸۷	۰٫۹۹۶	۰٫۰۸۷
۶°	۰٫۱۰۵	۰٫۱۰۵	۰٫۹۹۵	۰٫۱۰۵
۷°	۱٫۱۲۲	۰٫۱۲۲	۰٫۹۹۳	۰٫۱۲۳
۸°	۰٫۱۴۰	۰٫۱۳۹	۰٫۹۹۰	۰٫۱۴۱
۹°	۰٫۱۵۷	۰٫۱۵۶	۰٫۹۸۸	۰٫۱۵۸
۱۰°	۰٫۱۷۵	۰٫۱۷۴	۰٫۹۸۵	۰٫۱۷۶
۱۱°	۰٫۱۹۲	۰٫۱۹۱	۰٫۹۸۲	۰٫۱۹۴
۱۲°	۰٫۲۰۹	۰٫۲۰۸	۰٫۹۷۸	۰٫۲۱۳
۱۳°	۰٫۲۲۷	۰٫۲۲۵	۰٫۹۷۴	۰٫۲۳۱
۱۴°	۰٫۲۴۴	۰٫۲۴۲	۰٫۹۷۰	۰٫۲۴۹
۱۵°	۰٫۲۶۲	۰٫۲۵۹	۰٫۹۶۶	۰٫۲۶۸
۱۶°	۰٫۲۷۹	۰٫۲۷۶	۰٫۹۶۱	۰٫۲۸۷
۱۷°	۰٫۲۹۷	۰٫۲۹۲	۰٫۹۵۶	۰٫۳۰۶
۱۸°	۰٫۳۱۴	۰٫۳۰۹	۰٫۹۵۱	۰٫۳۲۵
۱۹°	۰٫۳۳۲	۰٫۳۲۶	۰٫۹۴۶	۰٫۳۴۴
۲۰°	۰٫۳۴۹	۰٫۳۴۲	۰٫۹۴۰	۰٫۳۶۴
۲۱°	۰٫۳۶۷	۰٫۳۵۸	۰٫۹۳۴	۰٫۳۸۴
۲۲°	۰٫۳۸۴	۰٫۳۷۵	۰٫۹۲۷	۰٫۴۰۴
۲۳°	۰٫۴۰۱	۰٫۳۹۱	۰٫۹۲۱	۰٫۴۲۴
۲۴°	۰٫۴۱۹	۰٫۴۰۷	۰٫۹۱۴	۰٫۴۴۵
۲۵°	۰٫۴۳۶	۰٫۴۲۳	۰٫۹۰۶	۰٫۴۶۶
۲۶°	۰٫۴۵۴	۰٫۴۳۸	۰٫۸۹۹	۰٫۴۸۸
۲۷°	۰٫۴۷۱	۰٫۴۵۴	۰٫۸۹۱	۰٫۵۱۰
۲۸°	۰٫۴۸۹	۰٫۴۶۹	۰٫۸۸۳	۰٫۵۳۲
۲۹°	۰٫۵۰۶	۰٫۴۸۵	۰٫۸۷۵	۰٫۵۵۴
۳۰°	۰٫۵۲۴	۰٫۵۰۰	۰٫۸۶۶	۰٫۵۷۷
۳۱°	۰٫۵۴۱	۰٫۵۱۵	۰٫۸۵۷	۰٫۶۰۱
۳۲°	۰٫۵۵۹	۰٫۵۳۰	۰٫۸۴۸	۰٫۶۲۵
۳۳°	۰٫۵۷۶	۰٫۵۴۵	۰٫۸۳۹	۰٫۶۴۹
۳۴°	۰٫۵۹۳	۰٫۵۵۹	۰٫۸۲۹	۰٫۶۷۵
۳۵°	۰٫۶۱۱	۰٫۵۷۴	۰٫۸۱۹	۰٫۷۰۰
۳۶°	۰٫۶۲۸	۰٫۵۸۸	۰٫۸۰۹	۰٫۷۲۷
۳۷°	۰٫۶۴۶	۰٫۶۰۲	۰٫۷۹۹	۰٫۷۵۴
۳۸°	۰٫۶۶۳	۰٫۶۱۶	۰٫۷۸۸	۰٫۷۸۱
۳۹°	۰٫۶۸۱	۰٫۶۲۹	۰٫۷۷۷	۰٫۸۱۰
۴۰°	۰٫۶۹۸	۰٫۶۴۳	۰٫۷۶۶	۰٫۸۳۹
۴۱°	۰٫۷۱۶	۰٫۶۵۶	۰٫۷۵۵	۰٫۸۶۹
۴۲°	۰٫۷۳۳	۰٫۶۶۹	۰٫۷۴۳	۰٫۹۰۰
۴۳°	۰٫۷۵۰	۰٫۶۸۲	۰٫۷۳۱	۰٫۹۳۳
۴۴°	۰٫۷۶۸	۰٫۶۹۵	۰٫۷۱۹	۰٫۹۶۶
۴۵°	۰٫۷۸۵	۰٫۷۰۷	۰٫۷۰۷	۱٫۰۰۰

زاویه				
درجه	رادیان	sin	cos	tg
۴۶°	۰٫۸۰۳	۰٫۷۱۹	۰٫۶۹۵	۱٫۰۳۶
۴۷°	۰٫۸۲۰	۰٫۷۳۱	۰٫۶۸۲	۱٫۰۷۲
۴۸°	۰٫۸۳۸	۰٫۷۴۳	۰٫۶۶۹	۱٫۱۱۱
۴۹°	۰٫۸۵۵	۰٫۷۵۵	۰٫۶۵۶	۱٫۱۵۰
۵۰°	۰٫۸۷۳	۰٫۷۶۶	۰٫۶۴۳	۱٫۱۹۲
۵۱°	۰٫۸۹۰	۰٫۷۷۷	۰٫۶۲۹	۱٫۲۳۵
۵۲°	۰٫۹۰۸	۰٫۷۸۸	۰٫۶۱۶	۱٫۲۸۰
۵۳°	۰٫۹۲۵	۰٫۷۹۹	۰٫۶۰۲	۱٫۳۲۷
۵۴°	۰٫۹۴۲	۰٫۸۰۹	۰٫۵۸۸	۱٫۳۷۶
۵۵°	۰٫۹۶۰	۰٫۸۱۹	۰٫۵۷۴	۱٫۴۲۸
۵۶°	۰٫۹۷۷	۰٫۸۲۹	۰٫۵۵۹	۱٫۴۸۳
۵۷°	۰٫۹۹۵	۰٫۸۳۹	۰٫۵۴۵	۱٫۵۴۰
۵۸°	۱٫۰۱۲	۰٫۸۴۸	۰٫۵۳۰	۱٫۶۰۰
۵۹°	۱٫۰۳۰	۰٫۸۵۷	۰٫۵۱۵	۱٫۶۶۴
۶۰°	۱٫۰۴۷	۰٫۸۶۶	۰٫۵۰۰	۱٫۷۳۲
۶۱°	۱٫۰۶۵	۰٫۸۷۵	۰٫۴۸۵	۱٫۸۰۴
۶۲°	۱٫۰۸۲	۰٫۸۸۳	۰٫۴۶۹	۱٫۸۸۱
۶۳°	۱٫۱۰۰	۰٫۸۹۱	۰٫۴۵۴	۱٫۹۶۳
۶۴°	۱٫۱۱۷	۰٫۸۹۹	۰٫۴۳۸	۲٫۰۵۰
۶۵°	۱٫۱۳۴	۰٫۹۰۶	۰٫۴۲۳	۲٫۱۴۵
۶۶°	۱٫۱۵۲	۰٫۹۱۴	۰٫۴۰۷	۲٫۲۴۶
۶۷°	۱٫۱۶۹	۰٫۹۲۱	۰٫۳۹۱	۲٫۳۵۶
۶۸°	۱٫۱۸۷	۰٫۹۲۷	۰٫۳۷۵	۲٫۴۷۵
۶۹°	۱٫۲۰۴	۰٫۹۳۴	۰٫۳۵۸	۲٫۶۰۵
۷۰°	۱٫۲۲۲	۰٫۹۴۰	۰٫۳۴۲	۲٫۷۴۸
۷۱°	۱٫۲۳۹	۰٫۹۴۶	۰٫۳۲۶	۲٫۹۰۴
۷۲°	۱٫۲۵۷	۰٫۹۵۱	۰٫۳۰۹	۳٫۰۷۸
۷۳°	۱٫۲۷۴	۰٫۹۵۶	۰٫۲۹۲	۳٫۲۷۱
۷۴°	۱٫۲۹۲	۰٫۹۶۱	۰٫۲۷۶	۳٫۴۸۷
۷۵°	۱٫۳۰۹	۰٫۹۶۶	۰٫۲۵۹	۳٫۷۳۲
۷۶°	۱٫۳۲۶	۰٫۹۷۰	۰٫۲۴۲	۴٫۰۱۱
۷۷°	۱٫۳۴۴	۰٫۹۷۴	۰٫۲۲۵	۴٫۳۳۲
۷۸°	۱٫۳۶۱	۰٫۹۷۸	۰٫۲۰۸	۴٫۷۰۵
۷۹°	۱٫۳۷۹	۰٫۹۸۲	۰٫۱۹۱	۵٫۱۴۵
۸۰°	۱٫۳۹۶	۰٫۹۸۵	۰٫۱۷۴	۵٫۶۷۱
۸۱°	۱٫۴۱۴	۰٫۹۸۸	۰٫۱۵۶	۶٫۳۱۴
۸۲°	۱٫۴۳۱	۰٫۹۹۰	۰٫۱۳۹	۷٫۱۱۵
۸۳°	۱٫۴۴۹	۰٫۹۹۳	۰٫۱۲۲	۸٫۱۴۴
۸۴°	۱٫۴۶۶	۰٫۹۹۵	۰٫۱۰۵	۹٫۵۱۴
۸۵°	۱٫۴۸۴	۰٫۹۹۶	۰٫۰۸۷	۱۱٫۴۳
۸۶°	۱٫۵۰۱	۰٫۹۹۸	۰٫۰۷۰	۱۴٫۳۰
۸۷°	۱٫۵۱۸	۰٫۹۹۹	۰٫۰۵۲	۱۹٫۰۸
۸۸°	۱٫۵۳۶	۰٫۹۹۹	۰٫۰۳۵	۲۸٫۶۴
۸۹°	۱٫۵۵۳	۱٫۰۰۰	۰٫۰۱۷	۵۷٫۲۹
۹۰°	۱٫۵۷۱	۱٫۰۰۰	۰٫۰۰۰	

جدول توابع نمایی

x	e^{x}	e^{-x}
۰ر۰۰	۱ر۰۰۰۰	۱ر۰۰۰۰
۰ر۰۵	۱ر۰۵۱۳	۰ر۹۵۱۲
۰ر۱۰	۱ر۱۰۵۲	۰ر۹۰۴۸
۰ر۱۵	۱ر۱۶۱۸	۰ر۸۶۰۷
۰ر۲۰	۱ر۲۲۱۴	۰ر۸۱۸۷
۰ر۲۵	۱ر۲۸۴۰	۰ر۷۷۸۸
۰ر۳۰	۱ر۳۴۹۹	۰ر۷۴۰۸
۰ر۳۵	۱ر۴۱۹۱	۰ر۷۰۴۷
۰ر۴۰	۱ر۴۹۱۸	۰ر۶۷۰۳
۰ر۴۵	۱ر۵۶۸۳	۰ر۶۳۷۶
۰ر۵۰	۱ر۶۴۸۷	۰ر۶۰۶۵
۰ر۵۵	۱ر۷۳۳۳	۰ر۵۷۶۹
۰ر۶۰	۱ر۸۲۲۱	۰ر۵۴۸۸
۰ر۶۵	۱ر۹۱۵۵	۰ر۵۲۲۰
۰ر۷۰	۲ر۰۱۳۸	۰ر۴۹۶۶
۰ر۷۵	۲ر۱۱۷۰	۰ر۴۷۲۴
۰ر۸۰	۲ر۲۲۵۵	۰ر۴۴۹۳
۰ر۸۵	۲ر۳۳۹۶	۰ر۴۲۷۴
۰ر۹۰	۲ر۴۵۹۶	۰ر۴۰۶۶
۰ر۹۵	۲ر۵۸۵۷	۰ر۳۸۶۷
۱ر۰	۲ر۷۱۸۳	۰ر۳۶۷۹
۱ر۱	۳ر۰۰۴۲	۰ر۳۳۲۹
۱ر۲	۳ر۳۲۰۱	۰ر۳۰۱۲
۱ر۳	۳ر۶۶۹۳	۰ر۲۷۲۵
۱ر۴	۴ر۰۵۵۲	۰ر۲۴۶۶
۱ر۵	۴ر۴۸۱۷	۰ر۲۲۳۱
۱ر۶	۴ر۹۵۳۰	۰ر۲۰۱۹
۱ر۷	۵ر۴۷۳۹	۰ر۱۸۲۷
۱ر۸	۶ر۰۴۹۶	۰ر۱۶۵۳
۱ر۹	۶ر۶۸۵۹	۰ر۱۴۹۶
۲ر۰	۷ر۳۸۹۱	۰ر۱۳۵۳
۲ر۱	۸ر۱۶۶۲	۰ر۱۲۲۵
۲ر۲	۹ر۰۲۵۰	۰ر۱۱۰۸
۲ر۳	۹ر۹۷۴۲	۰ر۱۰۰۳
۲ر۴	۱۱ر۰۲۳	۰ر۰۹۰۷
۲ر۵	۱۲ر۱۸۲	۰ر۰۸۲۱
۲ر۶	۱۳ر۴۶۴	۰ر۰۷۴۳
۲ر۷	۱۴ر۸۸۰	۰ر۰۶۷۲
۲ر۸	۱۶ر۴۴۵	۰ر۰۶۰۸
۲ر۹	۱۸ر۱۷۴	۰ر۰۵۵۰
۳ر۰	۲۰ر۰۸۶	۰ر۰۴۹۸
۳ر۱	۲۲ر۱۹۸	۰ر۰۴۵۰
۳ر۲	۲۴ر۵۳۳	۰ر۰۴۰۸
۳ر۳	۲۷ر۱۱۳	۰ر۰۳۶۹
۳ر۴	۲۹ر۹۶۴	۰ر۰۳۳۴
۳ر۵	۳۳ر۱۱۵	۰ر۰۳۰۲
۳ر۶	۳۶ر۵۹۸	۰ر۰۲۷۳
۳ر۷	۴۰ر۴۴۷	۰ر۰۲۴۷
۳ر۸	۴۴ر۷۰۱	۰ر۰۲۲۴
۳ر۹	۴۹ر۴۰۲	۰ر۰۲۰۲
۴ر۰	۵۴ر۵۹۸	۰ر۰۱۸۳
۴ر۱	۶۰ر۳۴۰	۰ر۰۱۶۶
۴ر۲	۶۶ر۶۸۶	۰ر۰۱۵۰
۴ر۳	۷۳ر۷۰۰	۰ر۰۱۳۶
۴ر۴	۸۱ر۴۵۱	۰ر۰۱۲۳
۴ر۵	۹۰ر۰۱۷	۰ر۰۱۱۱
۴ر۶	۹۹ر۴۸۴	۰ر۰۱۰۱
۴ر۷	۱۰۹ر۹۵	۰ر۰۰۹۱
۴ر۸	۱۲۱ر۵۱	۰ر۰۰۸۲
۴ر۹	۱۳۴ر۲۹	۰ر۰۰۷۴
۵	۱۴۸ر۴۱	۰ر۰۰۶۷
۶	۴۰۳ر۴۳	۰ر۰۰۲۵
۷	۱۰۹۶ر۶	۰ر۰۰۰۹
۸	۲۹۸۱ر۰	۰ر۰۰۰۳
۹	۸۱۰۳ر۱	۰ر۰۰۰۱
۱۰	۲۲۰۲۶	۰ر۰۰۰۰۵

واژه نامه

انگلیسی به فارسی

absolute temperature	دمای مطلق
acceleration	شتاب
adhesion	دوسش
advance of the perihelion	پیشروی حضیض
alpha - particle	ذرهٔ آلفا
ampere	آمپر
amplitude	دامنه
Andromeda	امرأة المسلسله
Angstrom	آنگستروم
angular acceleration	شتاب زاویه‌ای
angular frequency	بسامد زاویه‌ای
angular momentum	اندازه حرکت زاویه‌ای
angular velocity	سرعت زاویه‌ای
anharmonic oscillatory motion	حرکت نوسانی ناهماهنگ
anharmonic terms	جملات ناهماهنگی
antiproton	پاد پروتون
aphelion	اوج
apogee	اوج
Archimedes' principle	اصل ارشمیدوس
Aristarchus	اریستارخوس
Aristotle	ارسطو
astronomical unit	یکای نجومی
atmosphere	آتمسفر
atomic clock	ساعت اتمی

atomic mass unit	یکای اتمی جرم
Atwood's machine	ماشین آتوود
average	میانگین
Avogadro's number	عدد آووگادرو
axial force	نیروی محوری
axis	محور
ballistic missile	موشک پرتابی
ballistic pendulum	آونگ پرتابی
bandwidth	پهنای نوار
barometric equation	معادلهٔ توزیع جو
barrier	سد
beat	زنش
Bernoulli's theorem	قضیهٔ برنولی
Boltzmann constant	ثابت بولتزمن
bond length	طول پیوند
bound orbit	مدار مقید
Boyle's law	قانون بویل
Brahe, Tycho	تیکو براهه
buoyancy	شناوری
calorie	کالری
capture reaction	واکنش گیراندازی
Cavendish torsion balance	ترازوی پیچشی کاوندیش
Celsius temperature	دمای سلزیوس
center of gravity	گرانیگاه
center of mass	مرکز جرم
center of percussion	مرکز ضربه
center of symmetry	مرکز تقارن
centigrade	سانتیگراد
central force	نیروی مرکزی
centrifugal acceleration	شتاب گریز از مرکز
centrifugal potential	پتانسیل گریز از مرکز
centripetal acceleration	شتاب مرکزگرا
centripetlal force	نیروی مرکزگرا

C - frame of reference	چارچوب مرجع C
cgs system	دستگاه cgs
charge	بار الکتریکی
Charles' law	قانون شارل
chemical energy	انرژی شیمیایی
circular motion	حرکت دایره‌ای
circulation	گردش
coefficient of friction	ضریب مالش
cohesion	همدوسش
collision	برخورد
component	مؤلفه
compound pendulum	آونگ مرکب
conic section	مقطع مخروطی
conservation	بقا (پایستگی)
conservative force	نیروی پایستار
contravariant components	مؤلفه‌های پادوردا
Copernicus, Nicolaus	نیکلاس کپرنیک
Coriolis acceleration	شتاب کوریولی
Coulomb	کولن
couple	جفت
coupling energy	انرژی جفت شدگی
coupling term	جملهٔ جفت شدگی
coupled oscillators	نوسانگرهای جفت شده
covariant components	مؤلفه‌های هموردا
critical damping	میرایی بحرانی
curvilinear motion	حرکت منحنی الخط
cycloid	چرخزاد (سیکلوئید)
cycloidal pendulum	آونگ چرخزادی
Dalitz diagram	نمودار دالیتز
damped oscillatory motion	حرکت نوسانی میرا
deferent	فلک حامل (دفرنت)
degree Kelvin	درجهٔ کلوین
del	دل
density	چگالی

derivative	مشتق
determinant	دترمینان
deuteron	دوترون
deviation	انحراف
differential equation	معادلهٔ دیفرانسیل
dipole moment	گشتاور دوقطبی
directional derivative	مشتق راستایی
directrix	خط هادی
displacement	جابجایی
dynamics	دینامیک
dynamometer	دینامومتر (نیروسنج)
dyne	دین
eccentricity	خروج از مرکز
ecliptic	دایرة البروج
Einstein, Albert	البرت اینشتین
elastic collision	برخورد کشسان
elastic constant	ثابت کشسانی
electron volt	الکترون ولت
ellipse	بیضی
elliptical orbits	مدارهای بیضوی
endoergic	انرژی گیر
energy	انرژی
epicycle	فلک تدویر (اپی سیکل)
epicycloid	اپی سیکلوئید
equation of continuity	معادلهٔ پیوستگی
equilibrium	ترازمندی
equipotential surfaces	سطحهای هم‌پتانسیل
equivalence	هم‌ارزی
erg	ارگ
escape velocity	سرعت فرار
ether	اتر
event	رویداد
exoergic	انرژی زا
expansion ratio	نسبت انبساط

experimental error	خطای تجربی
external force	نیروی خارجی
field	میدان
fission	شکافت
fluid	شاره
focus	کانون
force	نیرو
forced oscillatory motion	حرکت نوسانی واداشته
Foucault	فوکو
foucault pendulum	آونگ فوکو
four - vectors	چهار - بردار
Fourier	فوریه
Fourier series	رشتهٔ فوریه
Fourier theorem	قضیهٔ فوریه
Fourier transform	تبدیل فوریه
frame of reference	چارچوب مرجع
free particle	ذرهٔ آزاد
frequency	بسامد
friction	مالش
galaxy	کهکشان
Galilean transformation	تبدیل گالیله
gas constant	ثابت گاز
gas thermometer	دماسنج گازی
Gaussian distribution	توزیع گاؤسی
Gay-Lussac's law	قانون گی ـ لوساک
general principle of relativity	اصل عام نسبیت
gradient	گرادیان
gravitational field	میدان گرانشی
gravitational field strength	شدت میدان گرانشی
gravitational mass	جرم گرانشی
gravitational potential	پتانسیل گرانشی
gravity	گرانی
gyroscope	ژیروسکوپ

gyroscopic compass	قطبنمای ژیروسکوپی
harmonics	هماهنگها
heat	گرما
heavy water	آب سنگین
Hertz	هرتز
Hipparchus	ابرخس
histogram	نمودار ستونی
hydrogen atom	اتم هیدروژن
ideal gas	گاز کامل
impact parameter	فراسنج برخورد
impedance	پاگیری
impulse	تکان
inelastic collision	برخورد ناکشسان
inertia	لختی
inertial force	نیروی لختی
inertial frame of reference	چارچوب مرجع لخت
inertial mass	جرم لخت
inertial observer	ناظر لخت
instantaneous acceleration	شتاب لحظه‌ای
instantaneous power	توان لحظه‌ای
instantaneous velocity	سرعت لحظه‌ای
integral	انتگرال
interaction	برهم‌کنش
interaction energy	انرژی برهم‌کنش
interference	تداخل
interferometer	تداخل سنج
internal energy	انرژی داخلی
internal force	نیروی داخلی
International System (of units)	دستگاه (یکاهای) بین‌المللی
invariant	ناوردا
inverse - square force	نیروی عکس مجذوری
isotope	ایزوتوپ

Joule	ژول
Kelvin	کلوین
Kepler's laws	قوانین کپلر
kilogram	کیلوگرم
kilowatt-hour	کیلووات ساعت
kinetic coefficient of friction	ضریب جنبشی مالش
kinetic energy	انرژی جنبشی
laboratory frame of reference	چارچوب مرجع آزمایشگاه
law of areas	قانون مساحات
low of inertia	قانون لختی
law of motion	قانون حرکت
law of universal gravitation	قانون گرانش عمومی
length contraction	انقباض طول
Lennard - Jones potential	پتانسیل لنارد- جونز
lever arm	بازوی اهرم
L-frame of reference	چارچوب مرجع L
light year	سال نوری
line integral	انتگرال خطی
line of equinoxes	خط اعتدالین
linear momentum	اندازه حرکت خطی
lines of force	خطهای نیرو
Lissajous figures	شکلهای لیساژو
Lorentz transformation	تبدیل لورنتس
Lorentz - Fitzgerald hypothesis	فرضیهٔ لورنتس- فیتزجرالد
Loschmidt number	عدد لوشمیت
macroscopic	ماکروسکوپیک
mass	جرم
matter	ماده
mean solar day	روز شمسی میانگین
mechanical energy	انرژی مکانیکی
mechanics	مکانیک
meter	متر

metric system	دستگاه متری
Michelson - Morley experiment	آزمایش مایکلسون ـ مورلی
Milky way	راه شیری
moderation	مهار
moderator	مهارگر
modulation	مدولاسیون
mole	مول
molecule	مولکول
moment of inertia	گشتاور لختی
momentum	اندازه حرکت
Morse potential	پتانسیل مورس
Newton's laws of motion	قوانین حرکت نیوتون
nonconservative force	نیروی ناپایستار
noninertial observer	ناظر غیرلخت
nonmechanical energy	انرژی غیرمکانیکی
normal acceleration	شتاب قایم
normal distribution	توزیع بهنجار
normal force	نیروی قایم
normal mode	مد بهنجار
nucleus	هسته
nutation	رقص محور
observation	مشاهده
observer	ناظر
operational definition	تعریف عملیاتی
orbit	مدار
oscillation	نوسان
oscillator	نوسانگر
oscillatory motion	حرکت نوسانی
parallax	اختلاف‌نظر
parallel forces	نیروهای موازی
parsec	پارسک
particle	ذره

pendulum	آونگ
perigee	حضیض
perihelion	حضیض
period	دوره
phase	فاز
physical pendulum	آونگ فیزیکی
Planck's constant	ثابت پلانک
plasma	پلاسما
plastic collision	برخورد پلاستیک
poise	پواز
polarization	قطبش
polhode	قطب راه
position vector	بردار مکان
potential	پتانسیل
potential barrier	سد پتانسیل
potential energy	انرژی پتانسیل
power	توان
precession	حرکت تقدیمی
precision	دقت
pressure	فشار
principal axes of inertia	محورهای اصلی لختی
principal moments of inertia	گشتاورهای لختی اصلی
principle of equivalence	اصل هم‌ارزی
principle of relativity	اصل نسبیت
products of inertia	حاصل ضربهای لختی
proper energy	انرژی خاص
proper force	نیروی خاص
proton - antiproton pair	زوج پروتون - پادپروتون
Ptolemy	بطلمیوس
pulse	تپه
Q - equation	معادلهٔ Q
quadrupole moment	گشتاور چهارقطبی
radial velocity	سرعت شعاعی

radian	رادیان
radius of curvature	شعاع انحنا
radius of gyration	شعاع ژیراسیون
reactance	پاگیری انگاری
reciprocal vectors	بردارهای متقابل
rectilinear motion	حرکت مستقیم‌الخط
reduced mass	جرم کاهیده
reference	مرجع
relative translational motion	حرکت انتقالی نسبی
relative velocity	سرعت نسبی
relativistic mechanics	مکانیک نسبیتی
relativity	نسبیت
relaxation time	زمان واهلش
renormalization	باز بهنجارش
repulsive inverse-square force	نیروی دافعهٔ عکس مجذوری
resistance	مقاومت
resonance	بازآوایی (تشدید)
rest	سکون
rest energy	انرژی سکون
rest mass	جرم سکون
restitution	بازگشت
right-handed screw	پیچ راستگرد
rigid body	جسم سخت
rms deviation	انحراف rms
root-mean-square velocity	سرعت ریشه میانگین مربعی
rotating vector	بردار چرخان
rotation	چرخش
rotational power	توان چرخشی

scalar	اسکالر
scalar product	ضرب اسکالر
scattering	پراکندگی
second	ثانیه
semimajor axis	نیم قطر بزرگ
semiminor axis	نیم قطر کوچک

sidereal day	روز نجومی
significant figures	ارقام بامعنی
simple harmonic motion (SHM)	حرکت هماهنگ ساده
simple pendulum	آونگ ساده
sliding friction	مالش لغزشی
solar system	منظومهٔ شمسی
special principle of relativity	اصل خاص نسبیت
speed	تندی، سرعت
spin	اسپین
stable equilibrium	ترازمندی پایدار
static coefficient of friction	ضریب ایستایی مالش
stationary motion	حرکت ایستور
statistical mechanics	مکانیک آماری
steady state	حالت دائم (پابرجا)
Steiner's theorem	قضیهٔ اشتاینر
stradian	استرادیان
Stokes' law	قانون استوکس
streamlines	خطهای جریان
superposition	برهم‌نهش
system velocity	سرعت دستگاه
tangential acceleration	شتاب مماسی
tangential force	نیروی مماسی
Taylor's theorem	قضیهٔ تایلور
tensor	تانسور
temperature	دما
theoretical physics	فیزیک نظری
thermal equilibrium	تعادل گرمایی
thermodynamics	ترمودینامیک
thremometer	دماسنج
threshold energy	انرژی آستانه
thrust	پیشرانه
time	زمان
time dilation	اتساع زمان
time interval	فاصله زمانی

top	فرفره
torque	گشتاور نیرو
torsion pendulum	آونگ پیچشی
total energy	انرژی کل
transformation	تبدیل
transient term	جملهٔ گذرا
translation	انتقال
translational motion	حرکت انتقالی
transverse velocity	سرعت عرضی
turning point	نقطهٔ برگشت
uniform circular motion	حرکت دایره‌ای یکنواخت
uniform motion	حرکت یکنواخت
unit	یکا
unstable equilibrium	ترازمندی ناپایدار
vector	بردار
vector product	ضرب برداری
velocity	سرعت
Venturi meter	پیمانهٔ ونتوری
virial theorem	قضیهٔ ویریال
viscosity	وشکسانی
Watt	وات
weight	وزن
work	کار
Yukawa potential	پتانسیل یوکاوا
zero momentum frame	چارچوب اندازه‌حرکت صفر
zero rest mass	جرم سکون صفر

فهرست راهنما

جدول پ.۳. یکاها و نمادها

کمیت	نماد	نام یکا	برحسب یکاهای اصلی MKSC	MKSA
طول	l, s	متر	m	
جرم	m	کیلوگرم	kg	
زمان	t	ثانیه	s	
سرعت	v		$m s^{-1}$	
شتاب	a		$m s^{-2}$	
سرعت زاویه‌ای	ω		s^{-1}	
بسامد زاویه‌ای	ω		s^{-1}	
بسامد	ν	هرتز (Hz)	s^{-1}	
اندازه حرکت	p		$m\, kg\, s^{-1}$	
نیرو	F	نیوتون (N)	$m\, kg\, s^{-2}$	
اندازه حرکت زاویه‌ای	L		$m^2 kg\, s^{-1}$	
گشتاور نیرو	τ		$m^2 kg\, s^{-2}$	
کار	W	ژول (J)	$m^2 kg\, s^{-2}$	
توان	P	وات (W)	$m^2 kg\, s^{-3}$	
انرژی	E_k, E_p, U, E	ژول (J)	$m^2 kg\, s^{-2}$	
دما	T	درجهٔ کلوین (°K)	$m^2 kg\, s^{-2}$/ذره	
ضریب پخش	D		$m^2 s^{-1}$	
ضریب رسانایی گرمایی	K		$m^2 kg\, s^{-3}\, {}^{\circ}K^{-1}$	
ضریب وشکسانی	η		$m^{-1} kg\, s^{-1}$	
مدول یانگ	Y		$m^{-1} kg\, s^{-2}$	
مدول کپه‌ای	κ		$m^{-1} kg\, s^{-2}$	
مدول چینشی	G		$m^{-1} kg\, s^{-2}$	
گشتاور لختی	I		$m^2 kg$	
میدان گرانشی	G		$m\, s^{-2}$	
پتانسیل گرانشی	V_G		$m^2 s^{-2}$	
بار الکتریکی	q, Q	کولن	C	$A\, s$
شدت جریان الکتریکی	I	آمپر	$s^{-1} C$	A
مقاومت الکتریکی	R	اهم (Ω)	$m^2 kg\, s^{-1} C^{-2}$	$m^2 kg\, s^{-3} A^{-2}$
میدان الکتریکی	E		$m\, kg\, s^{-2} C^{-1}$	$m\, kg\, s^{-3} A^{-1}$
پتانسیل الکتریکی	V	ولت (V)	$m^2 kg\, s^{-2} C^{-1}$	$m^2 kg\, s^{-3} A^{-1}$
چگالی جریان	j		$m^{-2} s^{-1} C$	$m^{-2} A$
القا	L	هنری (H)	$m^2 kg\, C^{-2}$	$m^2 kg\, s^{-2} A^{-2}$
ضریب دی الکتریک	ε_0		$m^{-3} kg^{-1} s^2 C^2$	$m^{-3} kg^{-1} s\, A^2$
قطبش	$\mathcal{P}$		$m^{-2} C$	$m^{-2} s\, A$
جابجایی دی الکتریکی	$\mathcal{D}$		$m^{-2} C$	$m^{-2} s\, A$
میدان مغناطیسی	B	تسلا (T)	$kg\, s^{-1} C^{-1}$	$kg\, s^{-2} A^{-1}$
تراوایی ویژهٔ مغناطیسی	μ_0		$m\, kg\, C^{-2}$	$m\, kg\, s^{-2} A^{-2}$
مغناطیسی کردن	$\mathcal{M}$		$m^{-1} s^{-1} C$	$m^{-1} A$
میدان مغناطیس کننده	$\mathcal{H}$		$m^{-1} s^{-1} C$	$m^{-1} A$
شار مغناطیسی	Φ_B	وبر (Wb)	$m^2 kg\, s^{-1} C^{-1}$	$m^2 kg\, s^{-2} A^{-1}$
گشتاور دو قطبی الکتریکی	p		$m\, C$	$m\, s\, A$
گشتاور چهار قطبی الکتریکی	Q		$m^2 C$	$m^2 s\, A$
گشتاور دو قطبی مغناطیسی	M		$m^2 s^{-1} C$	$m^2 A$
گشتاور چهار قطبی مغناطیسی	Q		$m^3 s^{-1} C$	$m^3 A$
ظرفیت	C	فاراد (F)	$m^{-2} kg^{-1} s^2 C^2$	$m^{-2} kg^{-1} s^4 A^2$

جدول پ.۴. ضرایب تبدیل

زمان

$۱\,\mathrm{s} = ۱٫۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}\,\mathrm{min} = ۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۴}\,\mathrm{hr}$
$= ۳٫۱۶۹ \times ۱۰^{-۸}\,\mathrm{yr}$

$۱\,\mathrm{min} = ۶۰\,\mathrm{s} = ۱٫۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}\,\mathrm{hr}$
$= ۱٫۹۰۱ \times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{yr}$

$۱\,\mathrm{hr} = ۳۶۰۰\,\mathrm{s} = ۶۰\,\mathrm{min} = ۱٫۱۴۱ \times ۱۰^{-۴}\,\mathrm{yr}$
$= ۳٫۱۵۶ \times ۱۰^{۷}\,\mathrm{s} = ۵٫۲۵۹ \times ۱۰^{۵}\,\mathrm{min}$
$= ۸٫۷۶۶ \times ۱۰^{۳}\,\mathrm{hr}$

طول

$۱\,\mathrm{m} = ۱۰^{۲}\,\mathrm{cm} = ۳۹٫۳۷\,\mathrm{in}$
$= ۶٫۲۱۴ \times ۱۰^{-۴}\,\mathrm{mi}$

$۱\,\mathrm{mi} = ۵۲۸۰\,\mathrm{ft} = ۱٫۶۰۹\,\mathrm{km}$

$۱\,\mathrm{in} = ۲٫۵۴۰\,\mathrm{cm}$

$۱\,\mathrm{\AA}$ (آنگستروم) $= ۱۰^{-۸}\,\mathrm{cm}$
$= ۱۰^{-۱۰}\,\mathrm{m} = ۱۰^{-۴}\,\mu$ (میکرون)

$۱\,\mu$ (میکرون) $= ۱۰^{-۶}\,\mathrm{m}$

$۱\,\mathrm{AU}$ (واحدنجومی) $= ۱٫۴۹۶ \times ۱۰^{۱۱}\,\mathrm{m}$

۱ سال نوری $= ۹٫۴۶ \times ۱۰^{۱۵}\,\mathrm{m}$

۱ پارسک $= ۳٫۰۸۴ \times ۱۰^{۱۶}\,\mathrm{m}$

زاویه

$۱\,\mathrm{rad}$ (رادیان) $= ۵۷٫۳^{\circ}$

$۱^{\circ} = ۱٫۷۴ \times ۱۰^{-۲}\,\mathrm{rad}$

$۱' = ۲٫۹۱ \times ۱۰^{-۴}\,\mathrm{rad}$

$۱'' = ۴٫۸۵ \times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{rad}$

مساحت

$۱\,\mathrm{m}^{۲} = ۱۰^{۴}\,\mathrm{cm}^{۲} = ۱٫۵۵ \times ۱۰^{-۵}\,\mathrm{in}^{۲} = ۱۰٫۷۶\,\mathrm{ft}^{۲}$

$۱\,\mathrm{in}^{۲} = ۶٫۴۵۲\,\mathrm{cm}^{۲}$

$۱\,\mathrm{ft}^{۲} = ۱۴۴\,\mathrm{in}^{۲} = ۹٫۲۹ \times ۱۰^{-۲}\,\mathrm{m}^{۲}$

حجم

$۱\,\mathrm{m}^{۳} = ۱۰^{۶}\,\mathrm{cm}^{۳} = ۱۰^{۳}\,\mathrm{liter}$
$= ۳۵٫۳\,\mathrm{ft}^{۳} = ۶٫۱ \times ۱۰^{۴}\,\mathrm{in}^{۳}$

$۱\,\mathrm{ft}^{۳} = ۲٫۸۳ \times ۱۰^{-۲}\,\mathrm{m}^{۳} = ۲۸٫۳۲\,\mathrm{liter}$

$۱\,\mathrm{in}^{۳} = ۱۶٫۳۹\,\mathrm{cm}^{۳}$

سرعت

$۱\,\mathrm{m\,s}^{-۱} = ۱۰^{۲}\,\mathrm{cm\,s}^{-۱} = ۳٫۲۸۱\,\mathrm{ft\,s}^{-۱}$

$۱\,\mathrm{ft\,s}^{-۱} = ۳۰٫۴۸\,\mathrm{cm\,s}^{-۱}$

$۱\,\mathrm{mi\,min}^{-۱} = ۶۰\,\mathrm{mi\,hr}^{-۱} = ۸۸\,\mathrm{ft\,s}^{-۱}$

شتاب

$۱\,\mathrm{m\,s}^{-۲} = ۱۰^{۲}\,\mathrm{cm\,s}^{-۲} = ۳٫۲۸۱\,\mathrm{ft\,s}^{-۲}$

$۱\,\mathrm{ft\,s}^{-۲} = ۳۰٫۴۸\,\mathrm{cm\,s}^{-۲}$

جرم

$۱\,\mathrm{kg} = ۱۰^{۳}\,\mathrm{g} = ۲٫۲۰۵\,\mathrm{lb}$

$۱\,\mathrm{lb} = ۴۵۳٫۶\,\mathrm{g} = ۰٫۴۵۳۶\,\mathrm{kg}$

$۱\,\mathrm{amu} = ۱٫۶۶۰۴ \times ۱۰^{-۲۷}\,\mathrm{kg}$

نیرو

$۱\,\mathrm{N} = ۱۰^{۵}\,\mathrm{dyn} = ۰٫۲۲۴۸\,\mathrm{lbf} = ۰٫۱۰۲\,\mathrm{kgf}$

$۱\,\mathrm{dyn} = ۱۰^{-۵}\,\mathrm{N} = ۲٫۲۴۸ \times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{lbf}$

$۱\,\mathrm{lbf} = ۴٫۴۴۸\,\mathrm{N} = ۴٫۴۴۸ \times ۱۰^{۵}\,\mathrm{dyn}$

$۱\,\mathrm{kgf} = ۹٫۸۱\,\mathrm{N}$

فشار

$۱\,\mathrm{N\,m}^{-۲} = ۹٫۲۶۵ \times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{atm}$
$= ۱٫۴۵۰ \times ۱۰^{-۴}\,\mathrm{lbf\,in}^{-۲} = ۱۰\,\mathrm{dyn\,cm}^{-۲}$

$۱\,\mathrm{atm} = ۱۴٫۷\,\mathrm{lbf\,in}^{-۲} = ۱٫۰۱۳ \times ۱۰^{۵}\,\mathrm{N\,m}^{-۲}$

$۱\,\mathrm{bar} = ۱۰^{۶}\,\mathrm{dyn\,cm}^{-۲}$

انرژی

$۱\,\mathrm{J} = ۱۰^{۷}\,\mathrm{erg} = ۰٫۲۳۹\,\mathrm{cal}$
$= ۶٫۲۴۲ \times ۱۰^{۱۸}\,\mathrm{eV}$

$۱\,\mathrm{eV} = ۱۰^{-۶}\,\mathrm{MeV} = ۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{erg}$
$= ۲٫۸۰۷ \times ۱۰^{۱۰}\,\mathrm{amu}$

$۱\,\mathrm{amu} = ۱٫۴۹۲ \times ۱۰^{-۱۰}\,\mathrm{J}$
$= ۳٫۵۶۴ \times ۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{cal} = ۹۳۱٫۰\,\mathrm{MeV}$

دما

$^{\circ}\mathrm{K} = ۲۷۳٫۱ + {}^{\circ}\mathrm{C}$

$^{\circ}\mathrm{C} = ۵(^{\circ}\mathrm{F} - ۳۲)/۹$

$^{\circ}\mathrm{F} = ۹(^{\circ}\mathrm{C} + ۳۲)/۵$

توان

$۱\,\mathrm{W} = ۱٫۳۴۱ \times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{hp}$

$۱\,\mathrm{hp} = ۷۴۵٫۷\,\mathrm{W}$

بار الکتریکی*

$۱\,\mathrm{C} = ۳ \times ۱۰^{۹}\,\mathrm{stC}$

$۱\,\mathrm{stC} = ۱/۳ \times ۱۰^{-۹}\,\mathrm{C}$

جریان*

$۱\,\mathrm{A} = ۳ \times ۱۰^{۹}\,\mathrm{stA}$

$۱\,\mathrm{stA} = ۱/۳ \times ۱۰^{-۹}\,\mathrm{A}$

$۱\,\mu\mathrm{A} = ۱۰^{-۶}\,\mathrm{A},\quad ۱\,\mathrm{mA} = ۱۰^{-۳}\,\mathrm{A}$

میدان الکتریکی*

$۱\,\mathrm{NC}^{-۱} = ۱\,\mathrm{Vm}^{-۱} = ۱۰^{-۲}\,\mathrm{Vcm}^{-۱}$
$= ۱/۳ \times ۱۰^{-۴}\,\mathrm{st\,Vcm}^{-۱}$

پتانسیل الکتریکی*

$۱\,\mathrm{V} = ۱/۳ \times ۱۰^{-۲}\,\mathrm{stV}$

$۱\,\mathrm{stV} = ۳ \times ۱۰^{۲}\,\mathrm{V}$

مقاومت

$۱\,\Omega = ۱۰^{۶}\,\mu\Omega$

$۱\,\mathrm{M}\Omega = ۱۰^{۶}\,\Omega$

ظرفیت*

$۱\,\mathrm{F} = ۹ \times ۱۰^{۱۱}\,\mathrm{stF}$

$۱\,\mathrm{stF} = ۱/۹ \times ۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{F}$

$۱\,\mu\mathrm{F} = ۱۰^{-۶}\,\mathrm{F},\quad ۱\,\mathrm{pF} = ۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{F}$

میدان مغناطیسی*

$۱\,\mathrm{T} = ۱۰^{۴}\,\mathrm{gauss},\quad ۱\,\mathrm{gauss} = ۱۰^{-۴}\,\mathrm{T}$

شار مغناطیسی

$۱\,\mathrm{Wb} = ۱۰^{۸}$ ماکسول

۱ ماکسول $= ۱۰^{-۸}\,\mathrm{Wb}$

میدان مغناطیس‌کننده

$۱\,\mathrm{Am}^{-۱} = ۴\pi \times ۱۰^{-۳}$ اورستد

۱ اورستد $= ۱/۴\pi \times ۱۰^{۳}\,\mathrm{Am}^{-۱}$

---

* در تمام موارد، عدد ۳ عملاً به جای ۲٫۹۹۸ و عدد ۹ به جای ۸٫۹۸۷ به‌کار رفته است.