



فيزيڪ عمومي

جلد دوم

ميدانها و امواج

مارچلو الونسو
ادوارد جي. فين



فيزيك عمومى

جلد دوم

ميدانها و امواج

مارچلو آلونسو

ادوارد جى. فين

فهرست مطالب

هفت
یازده
پانزده

پیشگفتار
تذکرات آموزشی
چند تذکر به دانشجویان

فصل ۱۴ برهم کنشهای الکتریکی

مقدمه ۶ □ بار الکتریکی ۸ □ قانون کولن ۹ □ میدان الکتریکی ۱۲ □
کوانتش بار الکتریکی ۲۰ □ ساختار الکتریکی ماده ۲۳ □ ساختار اتم ۲۶ □
پتانسیل الکتریکی ۳۴ □ رابطه‌های انرژی در میدان الکتریکی ۴۸ □
چند قطبیهای الکتریکی ۵۸ □

فصل ۱۵ برهم کنشهای مغناطیسی

مقدمه ۸۰ □ اثر نیروی مغناطیسی روی بار در حال حرکت ۸۱ □ حرکت بار
الکتریکی در میدان مغناطیسی ۸۵ □ مثالهایی از حرکت ذره‌های باردار در
میدان مغناطیسی ۹۴ □ اثر نیروی مغناطیسی روی جریان الکتریکی ۱۰۳ □ اثر
گشتاور نیروی مغناطیسی روی جریان الکتریکی ۱۰۵ □ میدان مغناطیسی حاصل از
جریان بسته ۱۱۳ □ میدان مغناطیسی جریان مستقیم الخط ۱۱۵ □ نیروی بین
جریانها ۱۱۸ □ میدان مغناطیسی جریان دایره‌ای ۱۲۱ □ میدان مغناطیسی بار
در حال حرکت (نانسیته) ۱۲۹ □ الکترومغناطیس و اصل نسبیت ۱۳۱ □ میدان
الکترومغناطیسی بار در حال حرکت ۱۳۶ □ برهم کنش الکترومغناطیسی بین دو
بار در حال حرکت ۱۴۲ □

فصل ۱۶ میدانهای الکترومغناطیسی ایستا

مقدمه ۱۷۰ □ شار میدان برداری ۱۷۰ □ قانون گاوس برای میدان الکتریکی

۱۷۲ □ شکل دیفرانسیلی قانون گاؤس ۱۸۱ □ قطبش ماده ۱۸۷ □ جابجایی الکتریکی ۱۹۱ □ محاسبه پدیرفتاری الکتریکی ۱۹۴ □ ظرفیت الکتریکی، خازنها ۲۰۲ □ انرژی میدان الکتریکی ۲۰۶ □ رسانندگی الکتریکی، قانون اهم ۲۱۰ □ نیروی محرکه الکتریکی ۲۱۷ □ قانون آمپر برای میدان مغناطیسی ۲۲۳ □ شکل دیفرانسیلی قانون آمپر ۲۲۹ □ شار مغناطیسی ۲۳۲ □ مغناطش ماده ۲۳۲ □ میدان مغناطان ۲۳۴ □ محاسبه پدیرفتاری مغناطیسی ۲۳۸ □ خلاصه قوانین مربوط به میدانهای ایستا ۲۴۳

فصل ۱۷ میدان الکترومغناطیسی وابسته به زمان

مقدمه ۲۶۴ □ قانون فاراد-هنری ۲۶۴ □ بتاترون ۲۶۸ □ القای الکترو-مغناطیسی ناشی از حرکت نسبی رسانا و میدان مغناطیسی ۲۷۰ □ القای الکترو-مغناطیسی و اصل نسبیت ۲۷۴ □ پتانسیل الکتریکی و القای الکترومغناطیسی ۲۷۶ □ شکل دیفرانسیلی قانون فاراد-هنری ۲۷۶ □ خودالقا ۲۷۸ □ انرژی میدان مغناطیسی ۲۸۴ □ نوسانهای الکتریکی ۲۸۸ □ مدارهای جفت شده ۲۹۶ □ اصل بقای بار الکتریکی ۳۰۰ □ قانون آمپر-ماکسول ۳۰۱ □ شکل دیفرانسیلی قانون آمپر-ماکسول ۳۰۵ □ معادلات ماکسول ۳۰۷

قسمت سوم امواج

فصل ۱۸ حرکت موجی

مقدمه ۳۳۲ □ توصیف ریاضی انتشار ۳۳۳ □ آنالیز فوریة حرکت موجی ۳۳۸ □ معادله دیفرانسیل حرکت موجی ۳۴۰ □ موج کشسان در میله جامد ۳۴۳ □ موج فشار در ستون گاز ۳۴۸ □ موج عرضی در ریزمان ۳۵۲ □ موج سطحی در آبگون ۳۵۷ □ در حرکت موجی چه چیزی منتشر می شود؟ ۳۶۲ □ موجهای دوبعدی و سه بعدی ۳۶۶ □ موج کروی در شاره ۳۷۲ □ سرعت گروه ۳۷۵ □ اثر دوپلر ۳۷۷ □ صوت، آکوستیک ۳۸۱

فصل ۱۹ امواج الکترومغناطیسی

مقدمه ۳۹۴ □ امواج الکترومغناطیسی تخت ۳۹۴ □ انرژی و اندازه حرکت موج الکترومغناطیسی ۴۰۰ □ تابش دوقطبی الکتریکی نوسانی ۴۰۴ □ تابش دوقطبی مغناطیسی نوسانی ۴۱۱ □ چندقطبیهای نوسانی مرتبههای بالاتر ۴۱۵ □ تابش بار الکتریکی شتابدار ۴۱۵ □ درآشامی تابش الکترومغناطیسی ۴۲۵ □ پراکندگی امواج الکترومغناطیسی توسط الکترونهای مقید ۴۲۷ □ پراکندگی امواج الکترومغناطیسی توسط الکترون آزاد، اثر کامپتون ۴۲۹ □ فوتونها ۴۳۳ □ بازهم در باره فوتونها: اثر فوتوالکتريك ۴۳۸ □ انتشار موجهای الکترومغناطیسی

در محیط مادی، پاشندگی ۴۴۱ □ اثر دوپلر درباره موجهای الکترومغناطیسی
۴۴۶ □ بیناب تابش الکترومغناطیسی ۴۵۱

فصل ۲۰ بازتاب، شکست، قطبش

مقدمه ۴۶۸ □ اصل هویگنس ۴۶۸ □ قضیه مالوس ۴۷۱ □ بازتاب و شکست
موجهای تخت ۴۷۳ □ بازتاب و شکست موجهای کروی ۴۷۸ □ بازتاب
درباره قوانین بازتاب و شکست ۴۸۰ □ بازتاب و شکست موجهای الکترو-
مغناطیسی ۴۸۵ □ انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیط ناهمسانگرد ۴۹۰
□ دوامی ۴۹۷ □ شکست دوگانه ۴۹۸ □ فعالیت اپتیکی ۵۰۴ □ بازتاب
و شکست در سطوح فلزی ۵۰۹ □ انتشار در محیط ناهمگن ۵۱۰

فصل ۲۱ هندسه موج

مقدمه ۵۲۲ □ بازتاب روی سطح کروی ۵۲۳ □ شکست در سطح کروی ۵۳۱
□ عدسیها ۵۳۶ □ اسبابهای اپتیکی ۵۴۳ □ منشور ۵۴۸ □ پاشندگی ۵۴۹
□ ابیراهی رنگی ۵۵۳ □ اصل فرما ۵۵۸

فصل ۲۲ تداخل

مقدمه ۵۷۶ □ تداخل موجهای دو چشمه همزمان ۵۷۶ □ تداخل موجهای چند-
چشمه همزمان ۵۸۳ □ موج ایستاده یک بعدی ۵۹۰ □ موج ایستاده و معادله
موج ۵۹۴ □ موج الکترومغناطیسی ایستاده ۶۰۱ □ موج ایستاده دو بعدی ۶۰۵
□ موج ایستاده سه بعدی: کاواکهای باز آوا ۶۱۰ □ موجبرها ۶۱۳

فصل ۲۳ پراش

مقدمه ۶۳۴ □ پراش فرانهورف توسط شکاف مستطیل ۶۳۵ □ پراش فرانهورف
توسط روزنه دایره‌ای ۶۴۲ □ پراش فرانهورف توسط دو شکاف مساوی و
موازی ۶۴۴ □ توریه‌های پراش ۶۴۷ □ پراش فرنل ۶۵۳ □ پراکندگی
۶۶۰ □ پراکندگی پرتوهای X توسط بلورها ۶۶۲

فصل ۲۴ پدیده‌های ترابری

مقدمه ۶۸۰ □ پخش مولکولی، قانون فیک ۶۸۰ □ رسانش گرمایی، قانون
فوریه ۶۸۹ □ ترابری همراه با تولید و درآشامی ۶۹۷ □ وشکسانی ۷۰۱
□ مسافت آزاد میانگین، بسامد برخورد و مقطع برخورد ۷۰۶ □ نظریه مولکولی
پدیده‌های ترابری ۷۱۱ □ نتیجه ۷۱۵

- رابطه‌ها و جدول‌های ریاضی ۷۲۶ □ جدول تناوبی عناصر ۷۳۸ □ جدول یکاها و
نمادها ۷۴۵ □ جدول ضرایب تبدیل ۷۴۱ □ پاسخ مسئله‌های فرد ۷۴۳ □
واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۷۵۹ □ واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۷۶۵ □ اسامی
دانشمندان ۷۷۲ □ جدول‌های داخل متن ۷۷۷ □ فهرست راهنما ۷۷۹

پیشگفتار

فیزیک علمی بنیادی است و نفوذ عمیقی در علوم دیگر دارد. بنا بر این، تنها دانشجویان فیزیک و مهندسی نیستند که باید نظرات اساسی آن را کاملاً درک کنند، بلکه هر کسی که بخواهد پیشه علمی داشته باشد (از جمله دانشجویانی که در زیست‌شناسی، شیمی و ریاضی تخصص می‌گیرند) باید همین مفاهیم را فراگیرد.

نخستین هدف از درس فیزیک عمومی (و شاید تنها دلیلی که آن را در برنامه گذارده‌اند) دادن یک دید واحد از فیزیک به دانشجو است. این کار باید بدون داخل شدن خیلی زیاد به جزئیات، ولی با تجزیه و تحلیل اصول اساسی و پیامدها و حدود این اصول انجام شود. دانشجو وقت دارد کاربردهای ویژه آنها را بعداً در دروس اختصاصی فراگیرد. از این رو، این کتاب شما را با آنچه به باور ما، هسته نظرات بنیادی فیزیک معاصر را تشکیل می‌دهد آشنا می‌کند. درگزینش موضوعهای مورد مطالعه و روش عرضه آنها سفارشهای کمیسیون آموزش فیزیک مدارس عالی بدقت در مد نظر بوده‌اند.

تا زمانهای اخیر، فیزیک را به صورت انباشته‌ای از چند علم، کمابیش مربوط به هم، ولی بدون هیچ دیدگاه واحد واقعی، می‌آموختند. اما تقسیم‌بندی سنتی آن به «علم مکانیک، گرما، صوت، اپتیک، الکترومغناطیس، و فیزیک نوین دیگر» توجیه‌پذیر نیست. ما این رهیافت سنتی را رها کرده‌ایم. در عوض، با تأکید بر قوانین بقا (پایستگی)، مفاهیم میدان و موج، و دید اتمی از ماده، نحوه ارائه منطقی و یگانه‌ای را تعقیب می‌کنیم. در سرتاسر این کتاب، از نظریه نسبیت خاص به عنوان یکی از اصول راهنمایی که باید هر نظریه فیزیکی با آن سازگار باشد، استفاده شده است.

مطالب مسرد مطالعه به پنج قسمت (۱) مکانیک، (۲) برهم‌کنشها و میدانها، (۳) امواج، (۴) فیزیک کوانتومی، و (۵) فیزیک آماری تقسیم شده‌اند. برای بنیاد نهادن اصول اساسی لازم جهت توصیف حرکاتی که در دوره برمان مشاهده می‌شوند از مکانیک شروع

می‌کنیم. سپس، چون همه پدیده‌های طبیعت نتیجهٔ برهم‌کنشها هستند و این برهم‌کنشها برحسب میدانها تجزیه و تحلیل می‌شوند، در قسمت دوم انواع برهم‌کنشهایی را که بهتر می‌شناسیم: برهم‌کنشهای گرانشی و الکترومغناطیسی، مسورد بررسی قرار گرفته‌اند؛ این برهم‌کنشها مسئول بیشترین پدیده‌های ما کر و سکو پیکمی هستند که مشاهده می‌کنیم. الکترومغناطیس را با جزئیات نسبتاً بیشتری مطرح می‌کنیم، و با فرمولبندی معادلات ماکسول آن را به فرجام می‌رسانیم. در قسمت سوم پدیده‌های موجی به‌عنوان برآمدی از مفهوم میدان مطرح می‌شود. بیشتر موضوعاتی را که معمولاً تحت عنوانهای آکوستیک و اپتیک آورده می‌شوند، در این قسمت گنجانده‌ایم. با وجود این، بر امواج الکترومغناطیسی به‌عنوان بسط طبیعی معادلات ماکسول تأکید شده است. در قسمت چهارم ساختار ماده، یعنی، اتمها، مولکولها، هسته‌ها، و ذرات بنیادی را تحلیل می‌کنیم - پیش از آن، تحلیلی از زمینه‌های لازم مکانیک کوانتومی آمده است. سرانجام، در قسمت پنجم، دربارهٔ ویژگیهای مادهٔ کیه‌ای سخن می‌گوییم. نخست با اصول مکانیک آماری آشنا می‌شویم، و آنها را در موارد ساده، ولی اساسی، به‌کار می‌بندیم. ترمودینامیک را از دیدگاه مکانیک آماری مطرح می‌کنیم، و آن را با فصلی دربارهٔ ویژگیهای گرمایی ماده پایان می‌بخشیم و نشان می‌دهیم که چگونه اصول مکانیک آماری و ترمودینامیک را باید به‌کار برد.

مطالب این کتاب، نه‌تنها در شیوهٔ ارائه، بلکه در محتوا نیز، تازه‌اند. زیرا در آن برخی مباحث اساسی گنجانده شده است که در اغلب کتابهای درسی فیزیک عمومی یافت نمی‌شوند و مطالبی را از قلم انداخته‌ایم که به‌طور سنتی در چنین کتابهایی می‌آیند. ریاضیات مورد استفاده را می‌توان در هر کتاب درسی مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال پیدا کرد. فرض بر این است که دانشجو با حداقلی از مقدمات حساب دیفرانسیل و انتگرال آشناست و همزمان با این درس، در آن موضوع گرفته است. اغلب کاربردهای اصول اساسی، همچنین سؤالیهای در سطح کمی بالاتر، به‌صورت مثالهای حل شده آمده‌اند. این مثالها را می‌شود، بسته به میل مدرس، همراه درس تدریس کرد، یا به‌عنوان کار انفرادی به‌عهدهٔ دانشجویان گذاشت. بدین طریق انعطاف بیشتری در تنظیم کم و کیف درس به‌وجود آمده است. در حال حاضر، گرایش نیرومندی وجود دارد تا در برنامه‌های همهٔ علوم مطالب جدیدی که مسئلهٔ روزند گنجانده شوند. امیدواریم که این کتاب با بالا بردن سطح درک مفاهیم فیزیکی دانشجو و توانایی بخشیدن به‌وی در استفاده از رابطه‌های ریاضی مربوط، چنین گرایشی را ارضا کند. این امر امکان خواهد داد سطح و محتوای بسیاری از درسهایی را که اکنون در برنامهٔ دورهٔ لیسانس منظور شده‌اند بالا ببرند. درسهای سنتی مکانیک، الکترومغناطیس، و فیزیک نوین در دورهٔ لیسانس، بیش از بقیه از این ارتقا سطح بهره‌مند خواهند شد. بدین طریق، دانشجو در پایان آموزش لیسانس، نسبت به دانشجویان پیشین از سطح دانش بالاتری برخوردار خواهد شد و این برای دانشجویانی که تحصیلات خود را در همین مرحله پایان می‌دهند، امتیاز بزرگی است. همچنین از این به‌بعد جا برای گنجاندن درسهای جدیدتر و پیشرفته‌تر در برنامهٔ دورهٔ فوق‌لیسانس (کارشناسی ارشد) باز خواهد شد. همین گرایش در کتابهای درسی بنیادی جدید دو سال اول لیسانس (کارشناسی) سایر

رشته‌های علوم نیز مشاهده می‌شود.

این دوره برای تدریس درسه نیمسال تدوین شده است. به منظور وحدت بخشی کامل بدائنه مطالب در سه نیمسال، این دوره را می‌شود در دانشکده‌هایی که به دنبال فیزیک عمومی در دو نیمسال، در نیمسال سوم فیزیک نوین دارند به کار گرفت. جهت سهولت کار، مطالب این دوره به سه جلد تقسیم شده‌اند و هر جلد تقریباً برای یک نیمسال منظور شده است. در جلد ۱، مکانیک و برهم کنش گرانشی مطالعه می‌شود. جلد ۲ به برهم کنشهای الکترو-مغناطیسی و امواج مربوط می‌شود، و اساساً موضوعات الکترومغناطیس و اپتیک را دربر می‌گیرد. فیزیک کوانتومی و آماری، از جمله ترمودینامیک، در جلد ۳ مورد بررسی قرار گرفته‌اند. هر چند سه جلد کتاب ارتباط تنگاتنگی باهم دارند و مجموعه یگانه‌ای درست می‌کنند، ولی هر جلد آن را می‌توان کتاب مستقلی منظور و تدریس کرد. بویژه جلد ۱ و ۲ باهم، هم‌ارز درس فیزیک عمومی دو نیمسال است که شامل فیزیک کوانتومی نمی‌شود. امیدواریم این دوره پاسخگوی آن گروه از معلمین فیزیکی باشد که به طور دائم و خستگی ناپذیر می‌کوشند سطح آموزش فیزیک را ارتقا بخشند. همچنین امیدواریم علاقه بسیاری از دانشجویانی را که شایستگی فراگیری فیزیک کاملتر و متحولتر از درسهای سنتی را دارند برانگیزد.

در اینجا، از همه کسانی که با یاری و دلگرمی دادن به ما انجام کامل این کار را میسر ساخته‌اند سپاسگزاریم. از همکاران ارجمند خود، بویژه پروفسور د. لازاروس^۱ و س. روبروتسون^۲ که زحمت خواندن متن اصلی را به خود داده‌اند، تشکر می‌کنیم، استادانی که انتقادات سازنده و نظراتشان به ما کمک کرد تا از جنبه‌های زیادی متن را تصحیح کنیم و بهبود بخشیم. از کارمندان شرکت ادیسون-وسلی^۳ نیز به خاطر تواناییها و زحمات بی‌دریغشان قدردانی می‌کنیم. آخرین، و بیشترین سپاسگزاریهای خود را نثار همسرانمان می‌کنیم که با بردباری و حوصله فراوان با ما همگامی کرده‌اند.

مارچلو آلونسو

ادوارد ج. فین

واشنگتن

خرداد ۱۳۴۵ / ژوئن ۱۹۶۶

1. D. Lazarus

2. S. Robertson

3. Addison-Wesley

تذکرات آموزشی

برای کمک به مدرس جهت تنظیم برنامه درسی خود، با اشاراتی به مفاهیم عمده هر فصل، خلاصه‌ای از رئوس مطالب این جلد را معرفی می‌کنیم. چنانکه در پیشگفتار اشاره شد، برای اینکه دانشجو هرچه زودتر با معدودی از نظرات اساسی که فیزیک بسرپایه آنها استوار است (مثلاً، قوانین بقا، و این واقعیت که پدیده‌های فیزیکی را می‌توان به‌رهم‌کنشهایی بین ذرات بنیادی تحویل کرد) آشنا شود، در این دوره درسی، فیزیک به‌صورت یکپارچه عرضه شده است. دانشجو باید بداند که برای فیزیکدان یا مهندس شدن باید درک روشنی از این نظرات داشته باشد و توانایی خود را در دخیل و تصرف آنها افزایش دهد.

مطالب پایه کالبد متن را تشکیل می‌دهند. در هر فصل مثالهای حل شده زیادی گنجانده شده است؛ برخی از این مثالها آسان و کاربرست عددی نظریه بحث شده هستند، در حالی که برخی دیگر، یا تعمیمهای نظریه یا نتایج ریاضی آن‌اند. به دانشجو توصیه می‌کنیم که در دور نخست مطالعه هر فصل مثالها را بکلی نادیده بگیرد، سپس در دور بعد، به‌مثالهایی بپردازد که مدرس برمی‌گزیند و توصیه می‌کند. بدین طریق نظرات بنیادی را، جدا از کاربردها یا تعمیمهای آنها، می‌آموزد.

در پایان هر فصل بخشی به مسئله اختصاص دارد. برخی از این مسئله‌ها بغایت ساده و برخی دیگر مشکلتر از مسایل متوسط فیزیک عمومی هستند. ترتیب مسئله‌ها به‌گونه‌ای است که، صرف‌نظر از چند مسئله مشکل در پایان، با ترتیب بخشهای آن فصل می‌خوانند. زیادی و گوناگونی مسئله‌ها به مدرس امکان می‌دهد که، با توجه به تواناییهای ویژه دانشجویان در انتخاب و حل مسئله‌ها از آزادی عمل بیشتری برخوردار باشد.

پیشنهاد می‌کنیم که مدرس منابع مذکور در پایان هر فصل را گردآوری، و دانشجویان را تشویق کند که آنها را بخوانند تا بدین طریق به‌مراجعه به‌منابع عادت کنند و درباره هر موضوع تنها به یک تعبیر بسنده نکنند و اطلاعات تاریخی بیشتری درباره فیزیک به‌دست آورند.

این جلد جهت تدریس در نیمسال دوم منظور شده است. ما بر اساس تجربیات شخصی خود، تعداد ساعات لازم برای آموزش بدون اشکال مسواد پیش بینی شده را، به عنوان راهنمایی پیشنهاد می کنیم. در جدول زمانبندی (۴۳ ساعت تدریس) برای پرسش و آزمون وقتی منظور نشده است. اینک به اظهار نظر کوتاهی درباره هر فصل می پردازیم:

قسمت دوم. برهم کنشها و میدانها

در این قسمت به مطالعه برهم کنشهای الکترومغناطیسی می پردازیم، بحث در این موضوع فصلهای ۱۴ تا ۱۷ را در بر می گیرد (برهم کنش گرانشی در فصل ۱۳ کتاب ۱ بررسی شده است). این چهار فصل مقدمه ای است بر الکترومغناطیس، بجز موجها و تابش الکترومغناطیسی که در قسمت سوم آورده ایم. برخی مفاهیم کوانتومی، مانند کوانتس انرژی و اندازه حرکت زاویه ای، در لایه های فصلهای ۱۴ و ۱۵ به چشم می خورد. این مطالب در جلد ۳ بتفصیل بیشتری خواهد آمد.

فصل ۱۴. برهم کنش الکترویکی (۳ ساعت)

این فصل بیشتر متوجه دینامیک ذراتی است که وارد برهم کنش کولنی می شوند و بررسی ماهیت الکترویکی ماده را نیز در بر دارد. می شود از تدریس بخش ۱۲-۱۴ (که در آن چند قطبیه های مرتبه بالاتر مطالعه می شوند) چشم پوشید.

فصل ۱۵. برهم کنش مغناطیسی (۴ ساعت)

در قسمت اول این فصل، با مفهوم دینامیکی میدان مغناطیسی آشنا می شویم، بعد از آن از حرکت ذره باردار در میدان مغناطیسی بحث می شود. سپس میدانهای مغناطیسی حاصل از جریانهای مختلف بررسی می شوند. سرانجام، این فصل را، با بحثی در باره تبدیل لورنتس میدان الکترومغناطیسی و مروری در اصل بقای اندازه حرکت به پایان می بریم. از مدرس می خواهیم که روی این قسمت بیشتر تأکید کند.

فصل ۱۶. میدان الکترومغناطیسی ایستا (۵ ساعت)

در این فصل با چند مفهوم عمده آشنا می شویم، ولی مدرس باید همواره دو هدف اصلی را در مد نظر داشته باشد. نخست اینکه بحث را با تحول نظریه کلی میدان الکترومغناطیسی (قضیه های هنری و آمپر) شروع کند، و دیگر اینکه خواص الکترومغناطیسی ماده کپه ای را با ساختار اتمی آن ارتباط بدهد. مطالبی مانند خازنها و مدارهای جریان مستقیم در متن کتاب در درجه دوم اهمیت قرار گرفته اند، ولی در مسئله های پایان فصل بیشتر به آنها پرداخته شده است.

فصل ۱۷. میدان الکترومغناطیسی وابسته به زمان (۴ ساعت)

موضوع اصلی این فصل فرمولبندی معادلات ماکسول است. مدارهای جریان متناوب

از لحاظ نظری خیلی باختصار بحث شده است، ولی برای اینکه دانشجویان در کار کردن با این مدارها ورزیده شود، بغیر از مثالهای حل شده در لابه‌لای متن، مسئله‌های زیادی در پایان فصل آورده‌ایم. لازم است به دانشجویان فهمانده شود که معادلات ماکسول توصیف دقیقی از میدان الکترومغناطیسی به دست می‌دهند و نمایشی از رابطه تنگاتنگ موجود بین قسمت‌های الکتریکی E و مغناطیسی B این میدان‌اند.

قسمت سوم. امواج

در قسمت اول دانشجویان با توصیف «ذره‌ای» پدیده‌های طبیعت آشنا شد. اکنون، در قسمت سوم، توصیف تکمیلی «موجی» پدیده‌های طبیعت را ارائه می‌دهیم، که آن نیز بر پایه مفهوم میدان کسه در قسمت دوم مطالعه شد، متکی است. مطالبی که معمولاً تحت عناوین آکوستیک و اپتیک از آنها نام می‌برند خیلی کلی در این قسمت بررسی شده‌اند.

فصل ۱۸. حرکت موجی (۵ ساعت)

در این فصل حرکت موجی به‌طور کلی بررسی می‌شود و از روی معادله‌های میدان توصیف کننده هروضع فیزیکی خاص، ویژگی‌های هر حالت تعیین می‌شود، به گونه‌ای که دیگر به نمایش مکانیکی تغییرات مولکول نیازی نباشد. در اینجا دو اندیشه اساسی مطرح است: نخست شناختن معادله موج و دیگر فهماندن اینکه موج، حامل انرژی و اندازه حرکت است.

فصل ۱۹. امواج الکترومغناطیسی (۵ ساعت)

در این فصل امواج الکترومغناطیسی را به گونه‌ای که از معادلات ماکسول بر می‌آید معرفی می‌کنیم. از این رو برای دانشجویان لازم است که بخش‌های ۲۰-۱۹ و ۳۰-۱۹ را کاملاً بفهمد. سازوکار تابش و درآشامی نیز در این فصل بررسی شده است. بعلاوه، مفهوم بسیار مهم فوتون به عنوان پیامد طبیعی این واقیعت که امواج الکترومغناطیسی حامل انرژی و اندازه حرکت‌اند و نیز اینکه این خواص فیزیکی با رابطه $E = cp$ به هم ارتباط دارند در همینجا آمده است. گذارهای تابش بین ویژه حالتها باختصار بررسی شده‌اند.

فصل ۲۰. بازتاب، شکست، قطبش (۴ ساعت)

در کتابهای مقدماتی هنگام بحث از بازتاب و شکست، معمولاً از اصل هویگنس یاری می‌گیرند، در حالی که در واقع امر قضیه مالوس را به کار می‌برند. این فصل از این نظر تازگی دارد که مستقیماً با این دریافت آغاز می‌شود. می‌توانید از بخش‌های ۸۰-۲۵ تا ۱۳۰-۲ صرف نظر کنید، این کار در ارتباط مطالب گسیختگی به وجود نمی‌آورد.

فصل ۲۱. هندسه موج (۳ ساعت)

از این فصل، که در واقع فصلی از اپتیک هندسی است، می‌توان تمامی صرف نظر کرد.

درعین حال مدرس باید بر این واقعیت تأکید کند که مطالب این فصل نه تنها در مورد امواج نوری بلکه در مورد امواج به‌طور کلی نیز صادق است. قرارداد علامتها در این فصل از کتاب اپتیک بورن و ولف از انتشارات پرگامون ۱۹۶۵ اقتباس شده است.

فصل ۲۲. تداخل (۳ ساعت)

در این فصل از روش بردارهای چرخان به‌طور اصولی استفاده شده است. به‌دانشجویان توصیه کنید که بخشهای ۷.۱۲، ۸.۱۲ و ۹.۱۲ از کتاب اول را یکبار دیگر بخوانند. مفهوم موجبر، که در این فصل مطرح شده، حایز آنچنان اهمیتی است که نمی‌توان از تدریس آن چشم پوشید.

فصل ۲۳. پراش (۳ ساعت)

این فصل به مقدار زیادی به فصل قبل متکی است، و مدرس باید آنها را با هم بررسی کند. در این فصل، مانند فصل پیش، کوشیده‌ایم اثباتهای ریاضی را از بقیه مطالب جدا کنیم، به گونه‌ای که مدرس اگر مایل باشد از آنها صرف نظر کند.

فصل ۲۴. پدیده‌های ترابری (۳ ساعت)

اهمیت پدیده‌های ترابری بر همگان معلوم است، زیرا این پدیده‌ها در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و صنعت کاربرد وسیعی دارند. این فصل مقدمه‌ای کوتاه ولی هماهنگ از مطالعه این پدیده‌هاست و به دانشجویان ایده‌ای از گونه‌های دیگر انتشار میدان القا می‌کند. در صورت تنگی وقت مدرس می‌تواند مطالعه این فصل را به‌عهده خود دانشجویان واگذار کند و از پرداختن به مثالها و مسئله‌های آن چشم پوشد.

همراه با اتمام این درس نیمسال دوم نیز به پایان می‌رسد. اینک دانشجویان را مناسبی از فیزیک کلاسیک دارد و ضمناً با مفاهیم عمده‌ای مانند فوتون، کوانتش انرژی و اندازه حرکت (تکانه) زاویه‌ای آشناست. از این رو نیمسال سوم را می‌توان به فیزیک کوانتومی و آماری اختصاص داد که مفاهیم فیزیک را در سطحی بسیار خرد (یا میکروسکوپی) یا بسیار کلان (یا ماکروسکوپی) دقیقتر بیان می‌کند.

پیوست ریاضی پایان کتاب فرمولهای ریاضی به‌کار رفته در متن و برخی اطلاعات مفید دیگر را دربر دارد و به‌عنوان مرجعی فراهم آمده است که بتواند سریعاً در دسترس دانشجو قرار گیرد. برخی فرمولهای تبدیل لورنتس را نیز، که اثبات آنها در جلد ۱ آمده است، جهت تسهیل در کاربرد به آنها افزوده‌ایم.

چند تذکر به دانشجویان

این کتاب، درباره مبانی فیزیک، برای دانشجویانی نوشته شده است که هدفشان تحصیل علوم و یا یکی از رشته‌های مهندسی است. مفاهیم و نظراتی که در اینجا مطرح می‌کنیم، به احتمال خیلی زیاد، بخشی از فعالیت شغلی و شیوه تفکر شما خواهد شد. درک و فهم هر چه بهتر این مطالب، ادامه تحصیل شما را در دوره‌های لیسانس (کارشناسی) و فوق لیسانس (کارشناسی ارشد) آسانتر می‌کند.

درس فیزیکی را که اکنون شروع می‌کنیم بالطبع از درس فیزیک دوره دبیرستان پیشرفته‌تر است. باید خود را برای دست و پنجه نرم کردن با شمار زیادی از مسایل دشوار آماده کنید. گاهی ممکن است درک و فهم قوانین و فنون فیزیکی فسرآیندی کند و توانفرسا باشد. پیش از ورود به قلمروهایی از فیزیک که برای شما جذاب‌اند، باید در چیزهای دیگری مهارت کسب کنید که جاذبه کمتری دارند، ولی بسیار اساسی‌اند و بدون آنها نخواهید توانست بر راحتی فیزیک را بفهمید و به کار گیرید.

در برنامه‌ریزی این درس، دو هدف عمده را در نظر داشته‌ایم. نخست، شما را با شماری از قوانین بنیادی و اصولی که هسته فیزیک را تشکیل می‌دهند کاملاً آشنا کنیم. دوم، توانایی شما را در کار کردن با این نظرات و به کار بستن آنها در وضعیتهای مشخص و عینی افزایش دهیم؛ به گفته دیگر، همچون فیزیکدان بیندیشید و عمل کنید. می‌توان با خواندن و بازخوانی بخشهای اصلی کتاب به هدف اول دست یافت. جهت رسیدن به هدف دوم، مثالهای حل شده زیادی در لابه‌لای متن اصلی و همچنین مسایلی برای حل در خارج از کلاس در پایان هر فصل آمده است. ما قویاً سفارش می‌کنیم که نخست متن اصلی را بخوانید، و هنگامی که آن مطالب را فهمیدید، آنگاه به مطالعه مثالهای حل شده و مسئله‌هایی پردازید که از طرف استادان تعیین می‌شوند. مثالها، یا کار برد نظریه را در یک مورد مشخص نشان می‌دهند، یا با طرح کردن جنبه‌های جدید مسئله مورد گفتگو نظریه را بیشتر بسط و گسترش می‌دهند. گاهی نیز این مثالها فراهم آورنده توجیه و اثبات درستی نظریه‌اند.

میزان دشواری مسایل پایان هر فصل متفاوت است؛ از مسئله‌های خیلی ساده شروع و به مسئله‌های پیچیده‌تر ختم می‌شوند. به‌طور کلی، بهتر است مسئله‌ها را ابتدا با نمادها یا علائم جبری حل کنید، و در پایان مقادیر عددی را در رابطه‌ها قرار دهید. اگر بسا صرف زمان معقولی نتوانستید مسئله‌ای را حل کنید، حل آن را موقتاً کنار بگذارید و هر کوشش دیگری را به وقت دیگری موکول کنید. برای چند مسئله‌ای که خود راه‌حلی نمی‌یابید، بهتر است از دیگران یاری بگیرید. يك منبع خود-یاری برای آموزش (روش حل مسایل، کتاب زیر است:

How to Solve It (second edition), by C. Polya (Garden City, N. Y. Doubleday, 1957)

فیزیک علم کمی است که برای بیان ایده‌های خود نیاز به ریاضیات دارد. تمام ریاضیات به کار گرفته شده در این کتاب را می‌توانید در هر کتاب آنالیز معمولی پیدا کنید. هر وقت که اثبات ریاضی مطلبی را متوجه نشدید به‌چنین کتابی مراجعه کنید. ولی در روبرو شدن با يك مشکل ریاضی هرگز هراس به‌دل راه ندهید؛ در رفع مشکل خود با استادان مشورت کنید یا از دانشجویان سالهای بالاتر کمک بگیرید. برای يك فیزیکدان یا مهندس، ریاضیات يك ابزار است و در فراگیری نظرات فیزیکی در درجه دوم اهمیت قرار می‌گیرد. جهت کاستن بار شما، برخی از مفیدترین رابطه‌های ریاضی فهرست‌وار در پیوست پایان کتاب ذکر شده‌اند.

تمام محاسبه‌های فیزیکی را باید با بهره‌گیری از مجموعه یکدست و منسجمی از یکاها انجام داد. در این کتاب از دستگاه یکاهای $mksC$ استفاده شده است. $mksC$ يك دستگاه قانونی و رسمی علمی است. در کلیه محاسبات خود، سازگاری و همگنی بین یکاها را بسدقت کنترل کنید. همچنین، بهتر است از همان آغاز از ماشین حساب استفاده کنید. ارزانترین ماشین حساب کافی است تا ساعتها در وقت محاسبه صرفه‌جویی شود. در پایان هر فصل فهرست گزیده‌ای از منابع آمده است. تا آنجا که ممکن است به آنها مراجعه کنید. برخی از این کتابها به شما کمک می‌کنند تا ایده فیزیکی را به‌عنوان يك علم متحول درک کنید، در حالی که برخی دیگر مطالب مطرح شده در متن کتاب را تعمیق و تکمیل خواهند کرد.

قسمت دوم

برهم کنشها و میدانها

اکنون که قوانین حاکم بر حرکتها را فهمیدیم، مرحله بعدی عبارت است از بررسی برهم کنشهایی که به وجود آورنده این حرکتها هستند. چندین نوع برهم کنش وجود دارد. یکی از آنها برهم کنش گرانشی است که در حرکت سیاره‌ها و حرکت ماده کیهانی پدیدار می‌شود. هر چند گرانش بین برهم کنشهای شناخته شده از همه ضعیفتر است، ولی اولین برهم کنشی است که به طور دقیق مورد مطالعه قرار گرفته و این به دلیل توجهی است که بشر از گذشته‌های دور بدنجوم داشته است و نیز به سبب اینکه گرانش پاسخگوی پدیده‌های زیادی است که مستقیماً بر زندگی ما اثر می‌گذارند. برهم کنش دیگر، برهم کنش الکترومغناطیسی است که بهتر از همه شناخته شده است و شاید از دیدگاه زندگی روزمره مهمترین برهم کنش باشد. بیشترین پدیده‌هایی که اطراف خود مشاهده می‌کنیم، از جمله فرایندهای شیمیایی و زیست‌شناسی، نتیجه برهم کنشهای الکترومغناطیسی بین اتمها و مولکولها هستند. سومین نوع برهم کنش، برهم کنش قوی یا هسته‌ای است که عامل به هم پیوستگی پروتونها و نوترونها (که هسته خوانده می‌شوند) در داخل هسته اتم و سایر پدیده‌های مربوط به آنهاست. با وجود اینکه پژوهشهای بسیاری در این مورد صورت گرفته هنوز اطلاعات ما از این برهم کنش بسیار ناقص است. نوع چهارم، برهم کنش ضعیف است که پاسخگوی بعضی فرایندها بین ذرات بنیادی، مانند واپاشی بتا است. شناخت ما از این برهم کنش نیز بسیار محدود است. شدت نسبی این برهم کنشها از این قرارند: اگر شدت برهم کنش قوی را برابر واحد اختیار کنیم، شدت برای برهم کنش الکترومغناطیسی تقریباً 10^{-2} ، برای برهم کنش ضعیف تقریباً 10^{-5} و برای برهم کنشی گرانشی تقریباً 10^{-38} خواهد بود. یکی از مسائلی که هنوز در فیزیک حل نشده باقی مانده این است که چرا فقط چهار برهم کنش وجود دارد و چرا شدتهای آنها این اندازه باهم اختلاف دارند. جالب است بدانیم حدود ۲۵۰ سال پیش ایزاک نیوتون راجع به برهم کنش گفته است:

«آیا ذرات ریز اجسام دارای نوعی توان یا نیرو نیستند، که از طریق آنها... روی یکدیگر اثر می‌کنند تا بخش بزرگی از پدیده‌های طبیعت را به وجود آورند؟ زیرا می‌دانیم که اجسام توسط جاذبه‌های گرانشی، مغناطیسی، الکتریکی بر یکدیگر اثر می‌کنند... بعید

نیست که غیر از اینها قدرتهای جاذبه‌ای دیگری هم وجود داشته باشند... اینکه چگونه این نیروهای جاذبه عمل می‌کنند، در اینجا مورد بررسی قرار نمی‌دهم... اثر جاذبه‌های گرانشی، مغناطیسی و الکتریکی به فاصله‌های قابل ملاحظه‌ای می‌رسند... احتمال دارد جاذبه‌های دیگری نیز باشند که اثر آنها به فاصله‌های خیلی کم و غیر قابل مشاهده برسد؛...»^۱

برای توصیف این برهم‌کنشها، مفهوم میدان را وارد می‌کنیم. منظور از میدان يك خاصیت فیزیکی است که در ناحیه‌ای از فضا گسترده است و با تابعی از زمان و مکان بیان می‌شود. برای هر برهم‌کنش فرض می‌کنیم که يك ذره در اطراف خود میدان مربوط به آن برهم‌کنش را به وجود می‌آورد. این میدان به نوبه خود روی ذره دیگر اثر می‌کند تا برهم‌کنش مورد نظر را به وجود آورد. ذره دوم نیز میدان ویژه خود را به وجود می‌آورد که روی ذره اول اثر می‌کند، بدین طریق برهم‌کنش متقابل حاصل می‌شود.

حتی اگر بتوان برهم‌کنشها را به وسیله میدان توصیف کرد، تمام میدانها الزاماً به برهم‌کنش مربوط نیستند، و این حقیقتی است که به طور ضمنی در تعریف میدان نهفته است. به عنوان مثال، يك هواشناس می‌تواند فشار یا دمای جو را بر حسب طول و عرض جغرافیایی و ارتفاع نسبت به سطح زمین بیان کند. بدین ترتیب دو میدان اسکالر خواهیم داشت: میدان فشار و میدان دما. در حرکت شاره‌ها، در هر نقطه سرعت شاره يك میدان برداری تشکیل می‌دهد. بنابراین مفهوم میدان کاربردهای بسیار فراوان و گسترده‌ای در فیزیک دارد.

برهم‌کنش گرانشی و میدان گرانش را در جلد ۱ (فصل ۱۳) مطالعه کردیم. در فصلهای ۱۴ تا ۱۷ این جلد برهم‌کنشهای الکترومغناطیسی را بررسی می‌کنیم. با برهم‌کنشهای دیگر در جلد ۳ آشنا خواهیم شد.

برهم کنشهای الکتریکی

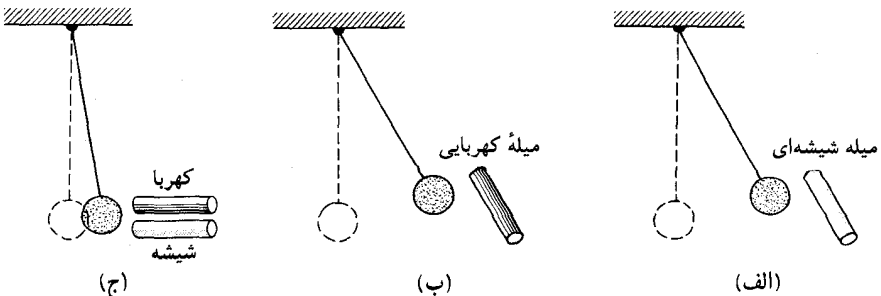
مقدمه	۱۰۱۴
بار الکتریکی	۲۰۱۴
قانون کولن	۳۰۱۴
میدان الکتریکی	۴۰۱۴
کوانتش بار الکتریکی	۵۰۱۴
ساختار الکتریکی ماده	۶۰۱۴
ساختار اتم	۷۰۱۴
پتانسیل الکتریکی	۸۰۱۴
رابطه‌های انرژی در میدان الکتریکی	۹۰۱۴
جریان الکتریکی	۱۰۰۱۴
دوقطبی الکتریکی	۱۱۰۱۴
چندقطبیه‌های الکتریکی	۱۲۰۱۴

۱۰۱۴ مقدمه

آزمایش ساده‌ای را در نظر می‌گیریم. در یک روز خیلی خشک، پس از شانه کردن سر، شانه را به خرده ریزه‌های کاغذ نزدیک می‌کنیم. می‌بینیم که شانه خرده‌های کاغذ را خیلی سریع به سمت خود می‌کشد. آزمایش یک میله شیشه‌ای به ابریشم یا یک میله کهر با به یک تکه پوست پدیده مشابهی مشاهده می‌شود. از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که این مواد بر اثر مالش خاصیت جدیدی کسب کرده‌اند که آن را الکتریسیته (از کلمه یونانی الکترون به معنای کهر با) می‌نامیم و از این خاصیت الکتریکی برهم کنشی به وجود می‌آید که از برهم کنش گرانشی بسیار قویتر است. با وجود این چندین اختلاف اساسی بین برهم کنشهای الکتریکی و گرانشی وجود دارد.

نخست اینکه تنها یک نوع برهم کنش گرانشی وجود دارد که نتیجه آن جاذبه عمومی بین دو جرم است. ولی دو نوع برهم کنش الکتریکی وجود دارد. یک میله شیشه‌ای الکتریسیته‌دار را به یک گلوله چوب‌پنبه‌ای که از نخ آویزان است نزدیک می‌کنیم. مشاهده می‌شود که میله گلوله را به سمت خود می‌کشد. اگر همین آزمایش را با میله کهر بایی الکتریسیته‌دار انجام دهیم، همان پدیده جذب گلوله مجدداً مشاهده می‌شود. حال اگر دو میله را همزمان به گلوله نزدیک کنیم، به جای اینکه گلوله بیشتر جذب شود مشاهده خواهیم کرد که گلوله کمتر به سمت میله‌ها کشیده می‌شود یا حتی اصلاً جذب نمی‌شود (شکل ۱۰۱۴). این آزمایشهای ساده نشان می‌دهند که هر چند میله‌های شیشه‌ای و کهر بایی هر دو گلوله چوب‌پنبه‌ای را به سمت خود می‌کشند ولی این عمل را با فرایندهای فیزیکی مخالف هم انجام می‌دهند. هنگامی که دو میله همزمان حضور دارند اثر همدیگر را خنثی می‌کنند و یک اثر خیلی ضعیف یا حتی صفر به وجود می‌آید. می‌توان نتیجه گرفت که دو گونه حالت الکتریکی وجود دارد: حالت الکتریکی شیشه‌ای و حالت الکتریکی کهر بایی. می‌توانیم اولی را مثبت و دومی را منفی بنامیم.

اکنون فرض کنید که دو گلوله چوب‌پنبه‌ای با یک میله شیشه‌ای الکتریسیته‌دار تماس پیدا کرده‌اند. می‌توان چنین پنداشت که دو گلوله نیز دارای الکتریسیته مثبت‌اند

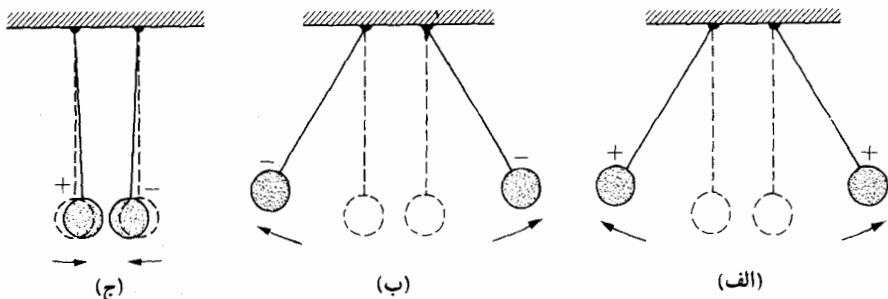


شکل ۱۰۱۴ آزمایش با میله‌های شیشه‌ای و کهر بایی الکتریسیته‌دار.

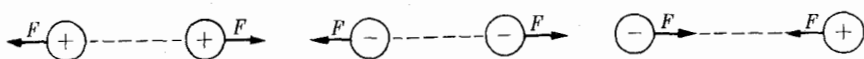
اگر دو گلوله را به یکدیگر نزدیک کنیم درمی یابیم که از هم دور می شوند (شکل ۲۰۱۴ الف). هر گاه دو گلوله را با میلهٔ کهربایی الکتریسیته دار تماس دهیم، یعنی کاری کنیم که آنها دارای الکتریسیته منفی بشوند، همان نتیجه پیش رخ خواهد داد (شکل ۲۰۱۴ ب). ولی اگر یکی از گلوله‌ها را با میلهٔ شیشه‌ای و گلولهٔ دیگر را با کهربای الکتریسیته دار تماس دهیم به گونه‌ای که یکی از گلوله‌ها دارای الکتریسیته مثبت و گلولهٔ دیگر دارای الکتریسیته منفی شود، مشاهده می شود که دو گلوله یکدیگر را جذب می کنند (شکل ۲۰۱۴ ج). بنا بر این، در مقابل برهم کنش گرانشی که همیشه جاذبه است، برهم کنش الکتریکی می تواند جاذبه یا دافعه باشد.

دو جسم با حالت‌های الکتریکی یکسان (مثبت یا منفی) یکدیگر را دفع می کنند، ولی اگر حالت‌های الکتریکی دو جسم مختلف باشند (یکی مثبت و دیگری منفی) یکدیگر را جذب می کنند.

این بیان در شکل ۳۰۱۴ نشان داده شده است. اگر برهم کنش الکتریکی فقط جاذبه‌ای یا دافعه‌ای بود، احتمالاً هر گز نمی توانستیم وجود گرانش را درک کنیم، زیرا برهم کنش الکتریکی خیلی قویتر است. ولی به نظر می رسد که بیشتر اجسام از مقادیر مساوی الکتریسیته‌های مثبت و منفی تشکیل شده اند، به گونه‌ای که برهم کنش الکتریکی خالص بین هر دو جسم ماکروسکوپیکی خیلی ضعیف یا برابر صفر است. بدین طریق، هر چند برهم کنش گرانشی خیلی ضعیف است ولی به سبب جمع پذیری اثر جرماها، به صورت برهم کنش ماکروسکوپیکی بر تر ظاهر می شود.



شکل ۲۰۱۴ برهم کنش‌های الکتریکی بین بارهای الکتریکی همنام و ناهمنام.



شکل ۳۰۱۴ نیروهای بین بارهای الکتریکی همنام و ناهمنام.

۲.۱۴ بار الکتریکی

همان طور که شدت برهم کنش گرانشی را با وابسته کردن جرم گرانشی برای هر جسم مشخص کردیم، حالت الکتریکی هر جسمی را نیز با تعریف جرم الکتریکی، که معمولاً بار الکتریکی یا خیلی ساده تر، بار نامیده می شود مشخص می کنیم. بار الکتریکی را با q نمایش می دهند. بدین طریق هر قطعه ای از ماده، یا هر ذره، با دو خاصیت اساسی مستقل از هم، یعنی جرم و بار آن مشخص می شود.

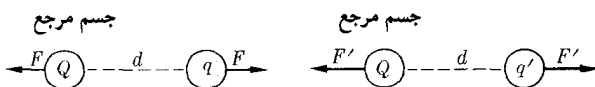
چون دو نوع الکتریسیته دار شدن وجود دارد دو نوع بار الکتریکی هم وجود دارد: بار الکتریکی مثبت و بار الکتریکی منفی. جسمی که خاصیت الکتریکی مثبت از خود نشان می دهد دارای بار الکتریکی مثبت و جسم نشان دهنده خاصیت الکتریکی منفی دارای بار الکتریکی منفی است. بار خالص هر جسمی جمع جبری بارهای مثبت و منفی آن است. جسمی که مقدار بارهای مثبت و منفی آن برابر (یعنی بار خالص آن صفر) باشد از نظر الکتریکی خنثی است. از طرف دیگر، ذره ای که بار الکتریکی خالص آن مخالف صفر باشد معمولاً یون نامیده می شود. چون ماده کپه ای معمولاً نیروهای الکتریکی چشمگیری از خود نشان نمی دهد، می توان تصور کرد که به مقدار مساوی از بارهای الکتریکی مثبت و منفی تشکیل شده است.

برای اینکه بار الکتریکی یک جسم به صورت عملیاتی تعریف شود به نحو زیر عمل می کنیم. جسمی با بار دلخواه Q را برمی گزینیم (شکل ۴.۱۴) و بار الکتریکی q را در فاصله d از آن قرار می دهیم. در این وضع نیروی F را که بر بار q اعمال می شود حساب می کنیم. سپس بار الکتریکی q' را در همان فاصله d از Q قرار می دهیم و نیروی F' را حساب می کنیم. مقدار بارهای q و q' متناسب با نیروهای F و F' تعریف می شوند، یعنی

$$q/q' = F/F' \quad (۱.۱۴)$$

اگر بار الکتریکی q' را برابر واحد اختیار کنیم وسیله ای برای تعیین مقدار q به دست می آید. این روش مقایسه بارهای الکتریکی بیشتر شبیه روشی است که در بخش ۳.۱۳ برای مقایسه جرمهای دو جسم به کار بردیم. چنین تعریفی از بار الکتریکی ایجاب می کند که در صورتی که تمام سازه های هندسی برابر باشند، نیروی برهم کنش الکتریکی با بار ذره ها متناسب باشد.

ثابت شده است که، در تمام فرایندهای مشاهده شده در طبیعت، بار خالص یک دستگاه منزوی ثابت باقی می ماند. به گفته دیگر



شکل ۴.۱۴ مقایسه بارهای q و q' با نشان دادن برهم کنش الکتریکی آنها با بار سوم Q .

بار کل یا خالص يك دستگاه منزوی علی‌رغم هرفرایندی که در داخل آن رخ دهد تغییر نمی‌کند.

تاکنون هیچ استثنایی بر این قاعده که اصل بقای بار الکتریکی نامیده می‌شود پیدا نشده است. در فرصتهای بعد، هنگام برخورد با مسائلی که در آنها ذرات بنیادی نقش دارند، در این مورد گفتگو خواهیم کرد. دانشجو به یاد دارد که در مثال ۱۱-۱۱، جایی که درباره واکنش $p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + p^+ + p^+ + p^-$ بحث می‌کردیم، اصل فوق را به کار بردیم. درست است که بار کل برابر است با بار دو پروتون، و درست است سه پروتون با بار الکتریکی سه پروتون و یک پادپروتون با بار الکتریکی پروتون منفی دخالت دارند. بدین طریق بار خالص برابر است با دو برابر بار پروتون.

۳-۱۴ قانون کولن

برهم‌کنش الکتریکی بین دو ذره باردار را که در چارچوب مرجع ناظر لخت در حال سکون اند یا حداکثر با سرعت خیلی کم حرکت می‌کنند در نظر بگیرید. نتایج چنین برهم‌کنشی الکتروستاتیک یا الکتروستاتیک ساکن را تشکیل می‌دهد. برهم‌کنش الکتروستاتیکی بین دو ذره باردار با قانون کولن بیان می‌شود. شارل کولن (۱۱۱۵-۱۱۸۵/۱۷۳۶-۱۸۰۶) نام مهندس فرانسوی است که برای اولین بار چنین بیان داشته است

برهم‌کنش الکتروستاتیکی بین دو ذره باردار متناسب است با بارهای الکتریکی این ذرها و عکس مجذور فاصله آن دو، و راستای آن در امتداد خطی است که دو ذره را به هم وصل می‌کند.

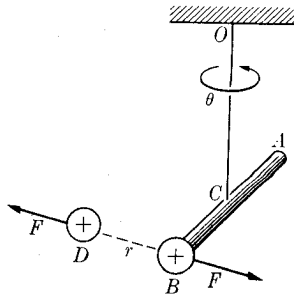
جملات فوق را می‌توان با رابطه ریاضی زیر نشان داد

$$F = K_e \frac{qq'}{r^2} \quad (2.14)$$

در این رابطه r فاصله بین دو بار الکتریکی q و q' و نیروی وارد بر هر کدام از بارها و K_e ثابتی است که به یکاهای انتخاب شده بستگی دارد. این قانون شباهت زیادی به قانون برهم‌کنش گرانشی دارد. بدین طریق که صرفاً با قراردادن $K_e qq'$ به جای $\gamma mm'$ ، می‌توان اغلب نتایج به دست آمده در فصل ۱۳ را در اینجا نیز به کار برد.

می‌توان با اندازه‌گیری نیروی بین دو بار الکتریکی در فاصله‌های مختلف، قانون عکس مجذوری (۲-۱۴) را به طور تجربی تحقیق کرد. در شکل ۵-۱۴ يك وسیله تجربی ممکن، مشابه با ترازوی پیچشی کاوندیش، شکل ۳-۱۳، نشان داده شده است. نیروی مؤثر بین بار واقع در نقطه B و بار مستقر در نقطه D از اندازه‌گیری زاویه θ ، که سیم پیچشی OC می‌چرخد تا تعادل برقرار شود، به دست می‌آید.

ثابت K_e در معادله (۲-۱۴) مشابه ثابت γ در معادله (۱-۱۳) است. قبلاً در فصل ۱۳،



شکل ۵.۱۴ ترازوی پیچشی کاوندیش جهت تحقیق قانون برهم کنش الکتریکی بین دو بار.

یکاهای جرم، فاصله و نیرو تعریف شدند و مقدار γ به طور تجربی به دست آمد. ولی در وضع حاضر، با وجود اینکه یکای نیرو و فاصله قبلاً تعریف شده‌اند، یکای بار الکتریکی هنوز تعریف نشده است (تعریفی که در بخش ۳.۲ بیان شد تنها یک تعریف مقدماتی بود). اگر یکای بار الکتریکی را مشخص کنیم، آنگاه ناچار باید K_e را به طور تجربی تعیین کنیم. ولی، می‌توان در جهت عکس نیز عمل کرد، و با اختصاص مقدار مناسب برای K_e یکای بار الکتریکی را تعیین کرد. ما روش دوم را می‌پسندیم و در دستگاه یسکاهای mksA به K_e مقدار عددی $8.987 \times 10^9 = 10^9 \times 8.987$ را نسبت می‌دهیم، که در آن (همانند گذشته) c سرعت سیر نور در خلأ* است. برای مقاصد عملی، معمولاً K_e را برابر 9×10^9 می‌گیرند. بدین طریق، اگر فاصله بر حسب متر و نیرو بر حسب نیوتون اندازه‌گیری شود، معادله (۲.۱۴) به صورت زیر درمی‌آید

$$F = 9 \times 10^9 \frac{qq'}{r^2} \quad (3.14)$$

به محض اینکه در انتخاب مقدار K_e تصمیم گرفتیم، یکای بار الکتریکی معین می‌شود. این یکا را کولن می‌نامند و آن را با نماد C نشان می‌دهند. از اینجا می‌توان تعریف زیر را نتیجه گرفت، کولن بادی است که هرگاه در خلأ در فاصله یک متری از بار نظیر خود قرار گیرد، آن با نیرویی برابر با 8.9874×10^9 نیوتون از خود می‌داند. فرمول (۳.۱۴) تنها در مورد ذرات بار داری که در خلأ قرار دارند صادق است، یعنی برای دو ذره بار دار در غیاب هر بار الکتریکی و ماده دیگر (به بخش ۶.۱۶ مراجعه کنید)، یادآوری می‌کنیم که مطابق معادله (۲.۱۴)، K_e بر حسب $N m^2 C^{-2}$ یا $m^3 kg s^{-2} C^{-2}$ بیان می‌شود.

به دلایل عملی و سهولت محاسبات، راحت‌تر است که K_e با رابطه زیر بیان شود

* انتخاب این مقدار خاص برای K_e در بخش ۹.۱۵ توضیح داده خواهد شد.

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (۴.۱۴)$$

در اینجا ثابت جدید ϵ_0 گزدهی خلا نام دارد. با توجه به مقدار پذیرفته شده برای K_e ، مقدار ϵ_0 برابر می‌شود با

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8.854 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2 \text{ یا } \text{m}^{-2} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^2 \text{ C}^2 \quad (۵.۱۴)$$

ازین رو، معمولاً معادله (۳.۱۴) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (۶.۱۴)$$

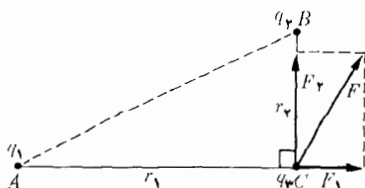
هنگام استفاده از معادله (۶.۱۴) باید q و q' را همراه با علامتهایشان در نظر گرفت. F منفی مربوط به نیروی جاذبه و علامت مثبت آن مربوط به نیروی دافعه است.

مثال ۶.۱۴ با توجه به آرایش بارها در شکل ۶.۱۴، که در آن $q_1 = 1.5 \times 10^{-3} \text{ C}$ ، $q_2 = -0.5 \times 10^{-3} \text{ C}$ ، $q_3 = 0.2 \times 10^{-3} \text{ C}$ ، و $AC = 1.2 \text{ m}$ و $BC = 0.5 \text{ m}$ است، نیروی بر اینند وارد بر بار q_3 را به دست آورید.

حل: F_1 نیروی بین q_1 و q_3 دافعه، در حالی که F_2 نیروی بین q_2 و q_3 جاذبه است. مقادیر آنها بنا به معادله (۶.۱۴) به ترتیب برابرند با

$$F_1 = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = 1.875 \times 10^3 \text{ N}$$

$$F_2 = \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = -3.6 \times 10^3 \text{ N}$$



شکل ۶.۱۴ نیروی بر اینند وارد بر بار q_3 از طرف q_1 و q_2 .

بنابراین نیروی برآیند برابر می‌شود با

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 406 \times 10^3 \text{ N}$$

۴.۱۴ میدان الکتریکی

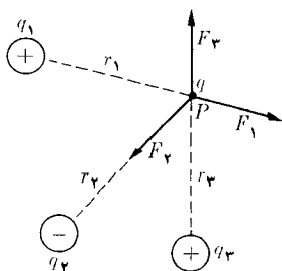
هر ناحیه‌ای که در آنجا به بار الکتریکی نیرویی اثر کند میدان الکتریکی نامیده می‌شود. این نیرو از حضور بارهای الکتریکی دیگر در این ناحیه ناشی می‌شود. به عنوان مثال، به بار الکتریکی q واقع در ناحیه‌ای که در آنجا بارهای الکتریکی q_1, q_2, q_3, \dots قرار دارند (شکل ۷.۱۴)، نیروی $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots$ وارد می‌شود، و می‌گوییم بار q در میدان الکتریکی حاصل از بارهای q_1, q_2, q_3, \dots قرار گرفته است (بدیهی است بار الکتریکی q نیز نیروهایی روی q_1, q_2, q_3, \dots وارد می‌کند، ولی فعلاً با این نیروها کاری نداریم). چون نیرویی که هر کدام از بارهای q_1, q_2, q_3, \dots روی بار q وارد می‌کنند با خود q متناسب است، پس نیروی برآیند \mathbf{F} نیز با q متناسب است. بنا بر این نیروی وارد بر هر ذره باردار واقع در میدان الکتریکی، بسا بار خود آن ذره متناسب است.

شدت میدان الکتریکی در هر نقطه برابر است با نیروی وارد بر بار واحد واقع در همان نقطه، و آن را با نماد \mathbf{E} نشان می‌دهند. بنا بر این داریم

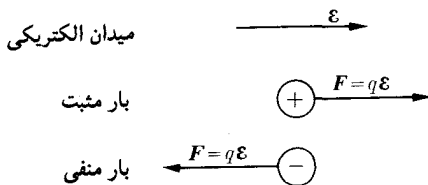
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad \text{یا} \quad \mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (7.14)$$

شدت میدان الکتریکی \mathbf{E} بر حسب نیوتون بر کولن یا NC^{-1} بیان می‌شود، که بر حسب یکه‌های اصلی عبارت است از $\text{m kg s}^{-2} \text{C}^{-1}$.

توجه داشته باشید که، بنا به تعریف (۷.۱۴)، اگر q مثبت باشد، \mathbf{F} نیروی وارد بر بار، با میدان \mathbf{E} همسو است، ولی اگر q منفی باشد، \mathbf{F} در سوی مخالف \mathbf{E} خواهد بود (شکل ۸.۱۴). بنا بر این، هر گاه در ناحیه‌ای که در آنجا بارها یا یونهای مثبت و منفی وجود



شکل ۷.۱۴ میدان الکتریکی حاصل از چندین بار الکتریکی در نقطه P .



شکل ۸.۱۴ سو و راستای نیروی حاصل از میدان الکتریکی روی بار مثبت یا منفی.

دارند میدان الکتریکی اعمال شود، میدان می‌کوشد بارهای مثبت و منفی را در سوهای مخالف هم حرکت دهد، بدین طریق بارهای مثبت و منفی از یکدیگر جدا می‌شوند؛ و پدیده‌ای که قطبش نامیده می‌شود به وجود می‌آید.

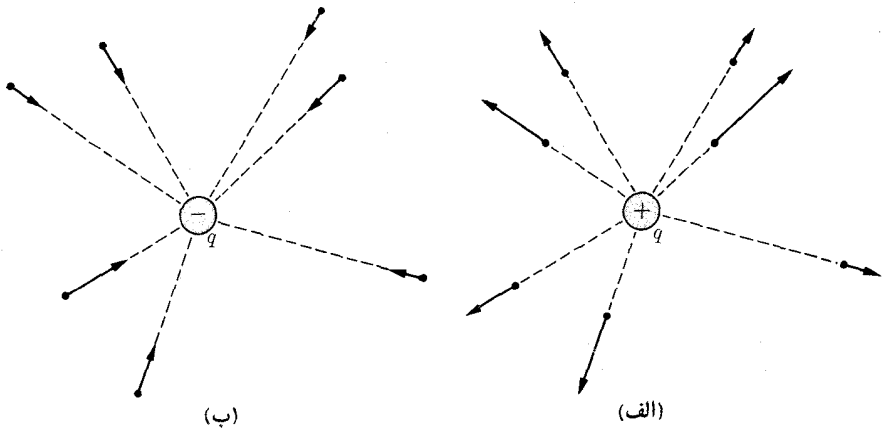
معادله (۶.۱۴) را به صورت $F = q'(q/\epsilon_0 r^2)$ می‌نویسیم. این رابطه نیروی وارد از طرف بار الکتریکی q روی بار q' را که در فاصله r از q قرار دارد به دست می‌دهد. همچنین با به کار بردن معادله (۷.۱۴) می‌توان گفت که میدان الکتریکی E در جایی که بار q قرار دارد به گونه‌ای است که $F = q'E$ است. بنابراین با مقایسه دو رابطه به دست آمده برای F ، می‌توان نتیجه گرفت که میدان الکتریکی در فاصله r از بار q برابر است با $E = q/\epsilon_0 r^2$ یا به صورت برداری زیر است

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r \quad (۸.۱۴)$$

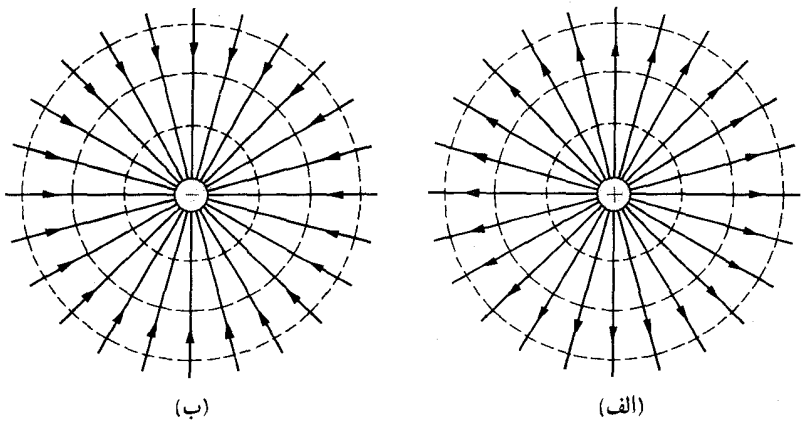
که در آن \mathbf{u}_r بردار یکا در راستای شعاعی است که از q دور می‌شود، زیرا \mathbf{F} در این راستاست. رابطه (۸.۱۴) هم در مورد بارهای مثبت و هم بارهای منفی صادق است. سوی \mathbf{E} نسبت به سوی \mathbf{u}_r با علامت q مشخص می‌شود. بنابراین \mathbf{E} از بار مثبت خارج می‌شود و بدسوی بار منفی می‌رود. در فرمول مربوط به میدان گرانشی، معادله (۱۳.۱۵)، علامت منفی در خود فرمول نوشته شده بود زیرا برهم کنش گرانشی همیشه جاذبه است. شکل ۸.۱۴ الف میدان الکتریکی را در نزدیکی بار الکتریکی مثبت و شکل ۸.۱۴ ب میدان را در مجاورت بار منفی نشان می‌دهد.

درست همانند میدان گرانشی، میدان الکتریکی را نیز می‌توان به وسیله خطهای نیرو که در هر نقطه بر راستای میدان الکتریکی در همان نقطه مماس‌اند نشان داد. خطهای نیرو در شکل ۸.۱۴ الف میدان الکتریکی بار مثبت و شکل ۸.۱۴ ب میدان الکتریکی بار منفی را نشان می‌دهند. در اینجا خطهای نیرو خطهای مستقیمی‌اند که از بار الکتریکی می‌گذرند.

هنگامی که، مانند شکل ۷.۱۴، چندین بار الکتریکی وجود دارد میدان الکتریکی برآیند جمع برداری میدانهای الکتریکی حاصل از هر بار است، یعنی



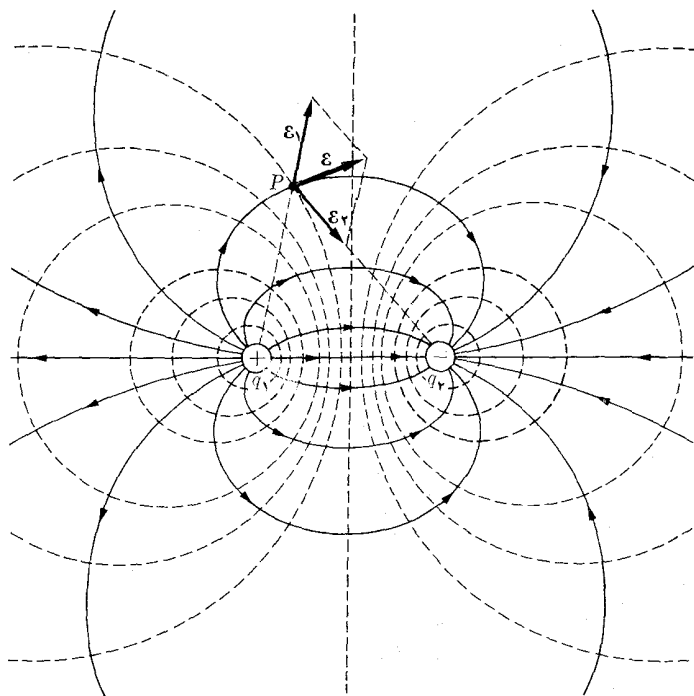
شکل ۹.۱۴ میدان الکتریکی حاصل از بار مثبت و بار منفی.



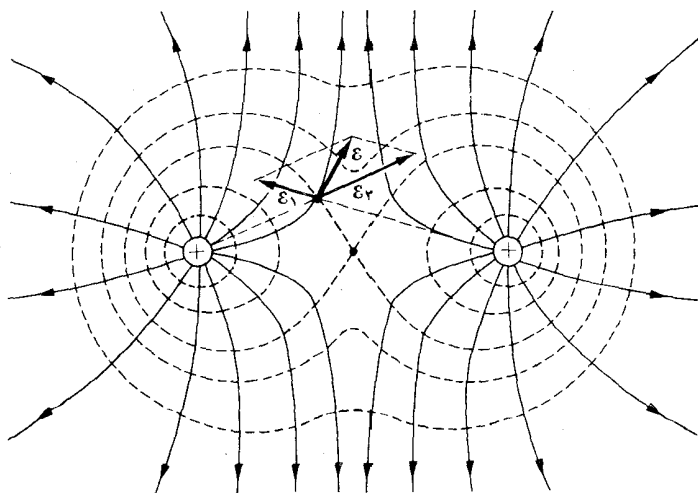
شکل ۱۰.۱۴ خطهای نیرو و سطحهای هم‌پتانسیل میدان الکتریکی حاصل از بار مثبت و بار منفی.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots = \sum_i \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{ri}$$

شکل ۱۱.۱۴ نشان می‌دهد که چگونه میدان الکتریکی برآیند حاصل از دو بار الکتریکی هم اندازه ولی با علامتهای مختلف، مانند الکترون و پروتون در اتم هیدروژن، در نقطه‌ای



شکل ۱۱-۱۴ خطهای نیرو و سطحهای هم‌پتانسیل میدان الکتریکی حاصل از دو بار الکتریکی برابر و ناهمنام.



شکل ۱۲-۱۴ خطهای نیرو و سطحهای هم‌پتانسیل میدان الکتریکی حاصل از دو بار الکتریکی مشابه.

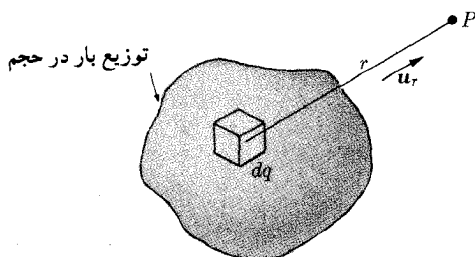
مانند P به دست می آید. شکل ۱۲.۱۴ خطهای نیرو را برای دوبار الکتریکی مثبت مشابه، مانند دو پروتون در مولکول هیدروژن نشان می دهد. در هر دو حالت خطهای نیروی میدان الکتریکی برایند حاصل از دوبار نیز رسم شده اند.

اگر توزیع پیوسته ای از بار الکتریکی داشته باشیم (شکل ۱۳.۱۴)، آن را به بارهای جزئی dq تقسیم می کنیم و به جای علامت جمع در رابطه میدان از انتگرال استفاده می کنیم، در نتیجه رابطه به شکل زیر درمی آید

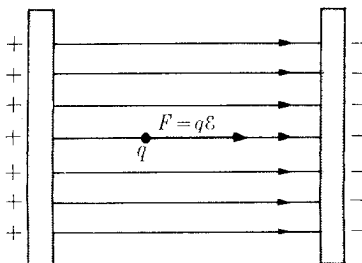
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \mathbf{u}_r$$

انتگرال باید تمام فضای اشغال شده به وسیله بارها را دربر گیرد.

میدان الکتریکی یکنواخت در تمام نقاط شدت و راستای یکسانی دارد. روشن است که میدان یکنواخت را باید با خطهای نیروی موازی نشان داد (شکل ۱۴.۱۴). بهترین روش ایجاد میدان الکتریکی یکنواخت باردار کردن دو ورقه فلزی موازی با بارهای مساوی و ناهم نام است. تقارن نشان می دهد که میدان یکنواخت است. این ادعا را بعداً (بخش ۳.۱۶) به طور ریاضی بررسی خواهیم کرد (مثال ۸.۱۳، مسئله ای از این گونه در مورد برهم کنش گرانشی بود).



شکل ۱۳.۱۴ محاسبه میدان الکتریکی توزیع پیوسته بار.



شکل ۱۴.۱۴ میدان الکتریکی یکنواخت.

مثال ۲۰۱۴ در شکل ۶.۱۴ میدان الکتریکی حاصل از بارهای q_1 و q_2 را در نقطه C تعیین کنید. اندازه بارها مطابق مثال ۱۰۱۴ است.

حل: دوامکان برای حل مسئله وجود دارد. چون در مثال ۱۰۱۴، F نیروی وارد بر بار q_3 واقع در نقطه C را به دست آوردیم، از معادله (۷.۱۴) داریم

$$E = \frac{F}{q_3} = 203 \times 10^7 \text{ NC}^{-1}$$

روش دیگر آن است که ابتدا با استفاده از معادله (۸.۱۴) میدان حاصل در نقطه C را (شکل ۱۵.۱۴)، برای هر کدام از بارها حساب کنیم. در آن صورت داریم

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = 937 \times 10^6 \text{ NC}^{-1}$$

$$E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = 180 \times 10^6 \text{ NC}^{-1}$$

بنابراین میدان برآیند برابر است با

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 203 \times 10^7 \text{ NC}^{-1}$$

بدیهی است که دو نتیجه با هم برابرند.

مثال ۳۰۱۴ حرکت بار را در میدان الکتریکی یکنواخت بررسی کنید.

حل: معادله حرکت بار در میدان الکتریکی با رابطه زیر داده می‌شود

$$ma = qE \quad \text{یا} \quad a = \frac{q}{m}E$$

بنابراین شتاب هر جسمی در میدان الکتریکی به نسبت q/m بستگی دارد. چون این نسبت



شکل ۱۵.۱۴ میدان الکتریکی برآیند حاصل از بارهای q_1 و q_2 در نقطه C .

معمولاً برای ذرات باردار یا یونهای مختلف متفاوت است، شتاب ذرات مختلف در میدان الکتریکی نیز متفاوت است. بنابراین بین شتاب جسم باردار در میدان الکتریکی و شتاب در میدان گرانشی کسه برای تمام اجسام یکسان است، اختلاف بارزی وجود دارد. اگر میدان E یکنواخت باشد، شتاب a ثابت و مسیر بار الکتریکی، چنانکه در بخش ۷.۵ نشان دادیم، به صورت سهمی است.

يك حالت جالب عبور بار الکتریکی از میدانی است که ناحیه محدودی را اشغال می کند (شکل ۱۶.۱۴). برای سهولت، فرض می کنیم که v_0 ، سرعت آغازی ذره هنگام وارد شدن به میدان، بر راستای میدان الکتریکی عمود است. محور X در راستای موازی سرعت آغازی ذره و محور Y موازی میدان الکتریکی قرار داده شده اند. AB مسیر پیچوده شده به وسیله ذره، هنگام حرکت در داخل میدان، سهمی است. پس از خروج از میدان، ذره بار دیگر در خط مستقیم حرکت خواهد کرد ولی سرعت و راستای آن فرق کرده است. از این رو می گوئیم میدان در مسیر ذره انحرافی به وجود آورده است که با زاویه α اندازه گیری می شود.

با استفاده از نتایج بخش ۷.۵، درمی یابیم که مختصات ذره در مدتی کسه با شتاب $a = (q/m)E$ در داخل میدان حرکت می کند، با رابطه های زیر داده می شوند

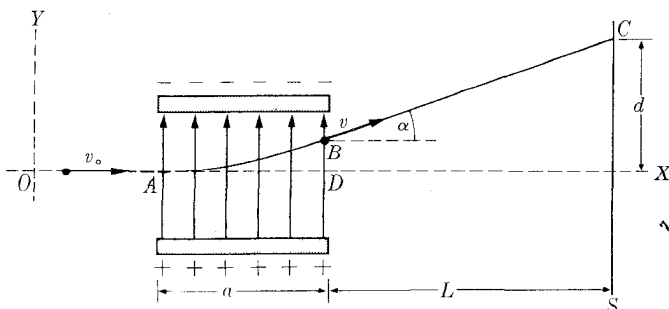
$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2} (q/m) E t^2$$

با حذف زمان t بین این دو رابطه، معادله مسیر به دست می آید

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{m} \right) \left(\frac{E}{v_0^2} \right) x^2$$

این رابطه تأکیدی است بر سهمی بودن مسیر ذره. زاویه انحراف α را با محاسبه شیب dy/dx در نقطه ای از مسیر به طول $x = a$ به دست می آوریم. نتیجه می گیریم

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=a} = \frac{q E a}{m v_0^2}$$



شکل ۱۶.۱۴ انحراف ذره با بار مثبت در میدان الکتریکی یکنواخت.

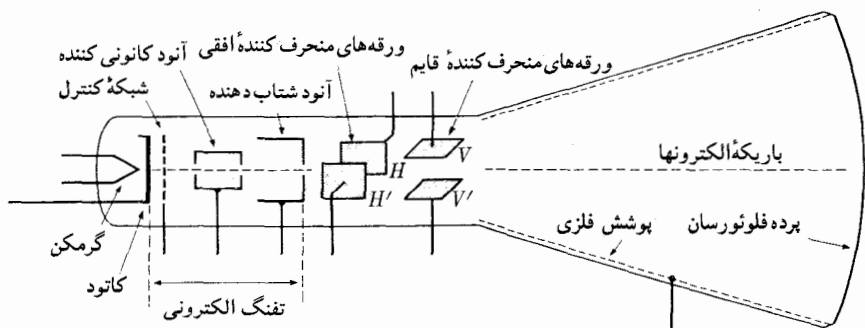
اگر پرده S را در فاصله L قرار دهیم، ذره‌ای با q/m معلوم و سرعت آغازی v_0 در نقطه C به این پرده می‌رسد. با توجه به اینکه $\tan \alpha$ تقریباً برابر d/L است، زیرا اگر L بزرگ باشد جا به جایی قائم BD در مقابل d کوچک است، داریم

$$\frac{qEa}{mv_0^2} = \frac{d}{L} \quad (9.14)$$

اگر نسبت q/m معلوم باشد، با اندازه گیری d ، L ، a و E می‌توان سرعت آغازی v_0 (با انرژی جنبشی) ذره را به دست آورد، یا برعکس، با داشتن v_0 می‌توان q/m را حساب کرد. بنابراین اگر ذرات زیادی کسه همگی دارای نسبت q/m یکسان اند از میدان الکتریکی بگذرند، انحراف آنها تابعی از سرعت یا انرژی آنها خواهد بود.

وسیله‌ای مانند آنچه در شکل ۱۶.۱۴ نشان داده شده است، را می‌توان به عنوان آنالیزور انرژی، برای جدا کردن ذراتی که دارای بار الکتریکی یکسان اند ولی با انرژیهای متفاوتی حرکت می‌کنند به کار برد. به عنوان مثال، پرتو بتا از الکترونهايي تشکیل شده است که بعضی مواد پرتوزا از خود گسیل می‌دارند، اگر گسیل کننده β را در نقطه O قرار دهیم و تمام الکترونها با انرژی یکسان گسیل شوند، همه آنها در يك نقطه از پرده متراکم می‌شوند. ولی اگر الکترونها با انرژیهای متفاوت گسیل شوند در ناحیه‌ای از پرده پخش می‌شوند. آزمایش، وضع دوم را نشان می‌دهد، و این نتیجه از لحاظ ساختار هسته بسیار مهم است.

با استفاده از دو جفت ورقه موازی باردار، می‌توان دو میدان الکتریکی عمود بر هم، یکی افقی در راستای HH' و دیگری قائم در راستای VV' به وجود آورد (شکل ۱۷.۱۴).



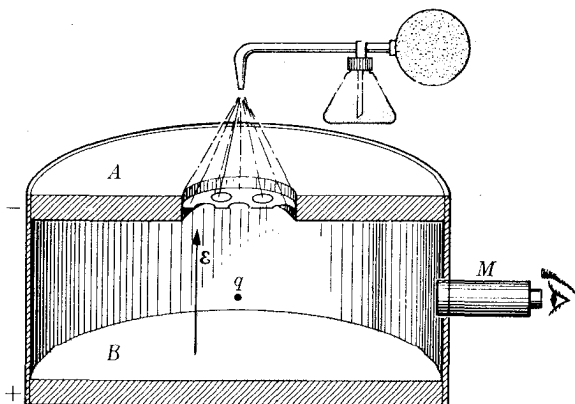
شکل ۱۷.۱۴ حرکت بار الکتریکی بر اثر دو میدان الکتریکی عمود بر هم. الکترونها از کاتود گسیل و به وسیله يك میدان الکتریکی قوی سرعت داده می‌شوند. در آنود شتاب دهنده روزنه‌ای هست که امکان می‌دهد الکترونها از تفنگ الکترونی رها شوند و به میان ورقه‌های موازی منحرف کننده برسند، پوشش فلزی داخل لوله، با سپردن در مقابل نیروهای خارجی و با هدایت و دور کردن باریکه الکترونها پس از برخوردشان با پرده فلوروسان، قسمت راست لوله را از تأثیر میدانهای الکتریکی محفوظ نگه می‌دارد.

با تنظیم شدت نسبی این میدانها می توان باریکه الکترونها را به دلخواه منحرف و آن را به نقطه معینی از پرده هدایت کرد. اگر میدانها متغیر باشند، نقطه تراکم الکترونها روی پرده يك منحنی رسم می کند. این پدیده را عملاً در لامپ تصویر تلویزیون و اسپلوسکوپ به کار می برند. بویژه اگر شدت میدانهای الکتریکی مطابق قانون سینوسی تغییر کند، نقش رسم شده به صورت اشکال لیسازو (بخش ۹.۱۲) درمی آید.

۵.۱۴ کوانتس بار الکتریکی

موضوعی که قبل از ادامه بحث باید روشن کنیم این است که بار الکتریکی به هر اندازه دلخواهی ظاهر نمی شود بلکه همیشه مضرب درستی از يك واحد بنیادی، یا کوانتوم است. میان همه آزمایشهایی که برای توضیح این مسئله طرح شده، از همه کلاسیکتر آزمایش روبرت-آ. میلیکان (۱۲۴۸-۱۳۴۲/۱۸۶۹-۱۹۵۳)، فیزیکدان امریکایی است، که در ابتدای قرن حاضر در طی چندین سال آنچه را که اکنون به نام آزمایش قطره روغن شناخته می شود به ثمر رساند. او بین دو ورقه موازی و افقی A و B (شکل ۱۸.۱۴) میدان الکتریکی قایم E را برقرار کرد که می توانست آن را قطع و وصل کند. در مرکز ورقه بالایی، برای عبور قطره های روغن چندین روزنه ایجاد کرده بود. قطرات روغن توسط يك پودرافشان از طریق روزنه ها به داخل ناحیه بین دو ورقه پاشیده می شد. بیشتر این قطرات به سبب مالش با لوله ظرف پودرافشان باردار می شدند.

ابتدا آزمایش را از دیدگاه نظری تحلیل می کنیم. جرم قطره را m و شعاع آن را r فرض می کنیم. برای هر قطره، پس از قطع میدان الکتریکی E ، معادله حرکت مانند معادله سقوط آزاد است، و آن را می توان با استفاده از معادله (۲۰.۷)، که در آن مقدار



شکل ۱۸.۱۴ آزمایش قطره روغن میلیکان. حرکت قطره روغن با بار الکتریکی q به وسیله میکروسکوپ M مشاهده می شود.

K از معادله (۱۹.۷) قرارداد شده است، به صورت زیر نوشت

$$ma = mg - \epsilon\pi\eta rv$$

v_1 سرعت نهایی قطره، هنگامی که $a = 0$ است، از رابطه زیر به دست می آید

$$v_1 = \frac{mg}{\epsilon\pi\eta r} = \frac{2\rho r^2 g}{9\eta} \quad (10.14)$$

که در آن ρ چگالی روغن است و با رابطه $m = (\frac{4}{3}\pi r^3)\rho$ به جرم مربوط می شود (برای دقت بیشتر باید نیروی رانش هوا را در نظر گرفت، و به جای ρ ، $\rho - \rho_0$ را قرار داد که ρ_0 چگالی هواست.)

اگر فرض کنیم قطره روغن دارای بار الکتریکی مثبت q باشد، هنگام برقراری میدان الکتریکی معادله حرکت آن به صورت زیر درمی آید

$$ma = qE - mg - \epsilon\pi\eta rv$$

و v_2 سرعت نهایی قطره، هنگامی که $a = 0$ است، برابر می شود با

$$v_2 = \frac{qE - mg}{\epsilon\pi\eta r}$$

معادله را برای q حل می کنیم و به جای mg از معادله (۱۰.۱۴) قرار می دهیم، به دست می آید

$$q = \frac{\epsilon\pi\eta r(v_1 + v_2)}{E} \quad (11.14)$$

شعاع قطره را می توان با اندازه گیری v_1 و حل معادله (۱۰.۱۴) برای r حساب کرد. با اندازه گیری v_2 و با به کار بردن معادله (۱۱.۱۴) بار q به دست می آید. اگر بار منفی باشد، با برقراری میدانی به سمت پایین می توان حرکتی به سمت بالا ایجاد کرد.

در عمل شیوه دیگری به کار می برند. با قطع و وصلهای مکرر میدان، بارها و بارها حرکت صعودی و نزولی قطرات مورد مشاهده قرار می گیرد. سرعت v_1 ثابت باقی می ماند ولی سرعت v_2 گاهی تغییر می کند، این موضوع نشان می دهد که بار الکتریکی قطره تغییر کرده است. تغییر بار الکتریکی از یونش اتفاقی هوای مجاور بر اثر پرتوهای کیهانی ناشی می شود. قطره هنگام حرکت خود در هوا ممکن است چند تا از این یونها را بر ببرد. همچنین می توان با قرارداد چشمه پرتوهای X یا پرتوهای γ در نزدیک ورقه ها، که یونش هوا را تشدید می کنند، موجبات تغییر بار الکتریکی را فراهم ساخت.

بنا به معادله (۱۱.۱۴) تغییرات Δv_2 و Δq بار الکتریکی و سرعت با رابطه زیر به یکدیگر مربوط می شوند

$$\Delta q = \frac{\epsilon\pi\eta r}{E} \Delta v_2 \quad (12.14)$$

بسته به ماهیت تغییرات بار، Δq گاهی مثبت و زمانی منفی است. با تکرار آزمایش قطره روغن به دفعات زیاد و با قطره‌های متفاوت روغن، فیزیکدانان دریافته‌اند که تغییرات Δq همیشه مضرب درستی از یک بار الکتریکی بنیادی e ، یعنی $\Delta q = ne$ است که مقدار آن برابر است با

$$e = ۱.۶۰۲۱ \times ۱۰^{-۱۹} \text{C} \quad (۱۳.۱۴)$$

کمیت e را بار بنیادی می‌نامند. تمام بارهایی که در طبیعت مشاهده می‌شوند، برابر، یا مضرب درستی از این بار بنیادی‌اند، تاکنون هیچ استثنایی بر این قاعده دیده نشده است. از این رو به نظر می‌رسد کوانتومی بودن بار الکتریکی قانون اساسی طبیعت است. تاکنون کسی برای این حقیقت بر مبنای مفاهیم اساسی‌تر تبیینی پیدا نکرده است.

دومین خصلت مهم بار الکتریکی این است که بار بنیادی همیشه با جرم معینی همراه است، و چیزی را باعث می‌شود که می‌توان ذره بنیادی یا اساسی نامید. [در فصل بعد (بخش ۴.۱۵) چند روش برای اندازه‌گیری نسبت q/m توضیح داده خواهد شد، به گونه‌ای که اگر q معلوم باشد بتوان m را به دست آورد. با این روش چندین ذره بنیادی شناسایی شده‌اند.] فعلاً می‌توان گفت که اساساً سه عنصر یا ذره بنیادی وجود دارد که در ساختار تمام اتمها دخالت دارند: این سه ذره عبارت‌اند از الکترون، پروتون و نوترون. مشخصات این سه ذره در جدول زیر آمده‌اند

ذره	جرم	بار
الکترون	$m_e = ۹.۱۰۹ \times ۱۰^{-۳۱} \text{ kg}$	$-e$
پروتون	$m_p = ۱.۶۷۲۵ \times ۱۰^{-۲۷} \text{ kg}$	$+e$
نوترون	$m_n = ۱.۶۷۴۸ \times ۱۰^{-۲۷} \text{ kg}$	۰

توجه کنید که نوترون دارای هیچگونه بار الکتریکی نیست؛ ولی با وجود این نوترون دارای بعضی خواص الکتریکی است که در فصل ۱۵ بحث خواهد شد. اینکه جرم پروتون ۱۸۴۰ بار از جرم الکترون بیشتر است تأثیر عمیقی در بسیاری از پدیده‌های فیزیکی دارد.

در اینجا خوب است به تعریف قبلی کولن که در بخش ۳.۲ داده شد برگردیم و بررسی کنیم که چند پروتون یا الکترون لازم است تا بار الکتریکی مثبت یا منفی یک کولنی به دست آید. این تعداد برابر است با

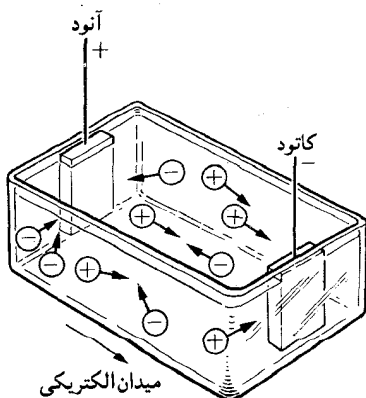
$$\frac{1}{196021 \times 10^{-19}} = 62418 \times 10^{-18}$$

و این درست همان رقمی است که در آنجا بیان شد.

۶.۱۴ ساختار الکتریکی ماده

قبلاً این واقعیت بسیار آشنا را خاطر نشان کردیم که بعضی مواد را می توان با مالیدن به پارچه یا پوست، الکتریسیته دار کرد. همچنین سایر تجربه های آزمایشگاهی نشان می دهند که عناصر اصلی تشکیل دهنده تمام اتمها ذره های باردارند. به عنوان مثال رشته سیم فلزی گرم، الکترون گسیل می کند، درست مانند تبخیر مولکولها هنگام گرم کردن يك آبگون. این پدیده را گسیل گرهایونی می نامند.

پدیده جالب دیگر الکترولیز (برقکافت) است. فرض کنیم میدان الکتریکی E در داخل نمک مذاب (مانند KHF_2) یا محلولی شامل اسید (مانند HCl)، باز (مانند $NaOH$) یا نمک (مانند $NaCl$) برقرار شده باشد. این میدان را می توان با وارد کردن دو میله یا دو ورقه باردار با بارهای ناهمنام، به نام الکتروود، در داخل يك محلول به وجود آورد (شکل ۱۹.۱۴). در این صورت مشاهده می شود که بارها به حرکت درمی آیند، یعنی بعضی از انواع اتمهای باردار به سوی الکتروود مثبت یا آفود حرکت می کنند، و بقیه به سوی الکتروود منفی یا کاتود به حرکت در می آیند. این پدیده حاکی از آن است که مولکولهای ماده محلول به دو نوع ذره باردار یا یون تجزیه (یا تفکیک) می شوند. بعضی یونها بار الکتریکی مثبت دارند که در سوی میدان الکتریکی حرکت می کنند و بقیه بار الکتریکی منفی دارند و در سوی مخالف میدان حرکت می کنند. به عنوان مثال، در مورد $NaCl$ ،



شکل ۱۹.۱۴ الکترولیز (برقکافت).
یونها بر اثر میدان الکتریکی حاصل از
الکترودهای باردار حرکت می کنند.

اتمهای Na به سمت کاتود حرکت می کنند، بنا براین یونها مثبت اند و کاتیون نام دارند، در صورتی که اتمهای Cl به سمت آنود حرکت می کنند، و یونهای منفی اند و آنیون خوانده می شوند. تجزیه مولکولها را می توان به صورت زیر نوشت



چون مولکولهای طبیعی NaCl هیچگونه بار الکتریکی آشکاری از خود نشان نمی دهند، می توان پذیرفت که آنها از تعداد مساوی بارهای مثبت و منفی ساخته شده اند. هنگامی که مولکول NaCl تجزیه می شود، بارها به طور یکسان تقسیم نمی شوند. بخشی از مولکول دارای الکتریسیته منفی اضافی و بخش دیگر دارای الکتریسیته مثبت اضافی است. بنابراین هر یک از دو بخش يك یون است. گفتیم که هر بار الکتریکی مضربی از بار بنیادی e است، فرض کنیم که یونهای مثبت حامل بار الکتریکی $+ve$ و یونهای منفی حامل بار الکتریکی $-ve$ باشند. در اینجا v عدد درستی است که بعداً تعیین خواهد شد. وقتی که یونها به الکترودها می رسند، با تبادل بار الکتریکی خود با بارهای موجود در الکترودها، خنثی می شوند. معمولاً يك رشته واکنشهای شیمیایی صورت می گیرد که ما در اینجا به آنها نمی پردازیم، ولی از این واکنشها جهت تشخیص ماهیت یونهایی که به سوی هر الکترودها می روند استفاده می کنند.

بعد از زمان معینی مانند t ، تعداد N اتم از هر نوع به هر الکترودها می رسند، بنا براین قدر مطلق بار کل Q که به هر الکترودها انتقال یافته برابر است با $Q = Nve$. اگر جرم هر مولکول برابر m باشد، M ، جرم کل رسوب روی دو الکترودها برابر است با $M = Nm$. از تقسیم رابطه اول بر رابطه دوم به دست می آید

$$\frac{Q}{M} = \frac{ve}{m} \quad (14.14)$$

اگر N_A عدد آووگادرو (تعداد مولکولهای موجود در يك مول از هر ماده) باشد، جرم يك مول از ماده برابر می شود با $M_A = N_A m$. بنا براین معادله (14.14) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{Q}{M} = \frac{ve}{m} = \frac{N_A ve}{N_A m} = \frac{Fv}{M_A} \quad (15.14)$$

کمیت

$$F = N_A e \quad (16.14)$$

يك ثابت عمومی است که ثابت فلااده نام دارد و نشان دهنده بار يك مول از یونهایی است که در آنها $v = 1$ است. مقداری که برای F از طریق آزمایش به دست آمده برابر است با

$$F = 96487 \times 10^4 \text{ C mole}^{-1} \quad (17.14)$$

از روی مقدار F و نیز مقداری که قبلاً برای e پیدا کردیم، می توان عدد آووگادرو را به دست آورد

$$N_A = 6.0225 \times 10^{23} \text{ mole}^{-1} \quad (18.14)$$

این عدد با سایر محاسباتی که برای این ثابت به عمل آمده است سازگار است. معادله (۱۵.۱۴) به وسیله آزمایش تأیید و معلوم شده است که v با ظرفیت شیمیایی یون مربوط برابر است. اینکه v برابر ظرفیت شیمیایی است، حاکی از آن است که دو اتم، هنگام پیوند با یکدیگر برای تشکیل مولکول، بارالکتربیکی ve باهم مبادله می کنند، یکی از آنها به یون مثبت و دیگری به یون منفی تبدیل می شود. برهم کنش الکتربیکی بین دو یون آنها را باهم نگه می دارد. همچنین منطقی است بپذیریم که در این برهم کنش الکترونها مبادله می شوند، زیرا آنها از پروتونها بسیار سبکترند و به آسانی حرکت می کنند. باید این نمایش پیوند شیمیایی را، که پیوند یونی نام دارد، به عنوان تصویری مقدماتی بدانیم که ناگزیر از تجدیدنظر و بازبینی است.

در بخش ۹.۱۳ گفتیم که نیروهای گرانشی آنقدر قوی نیستند که بتوانند جاذبه لازم برای پیوند دو اتم برای تشکیل مولکول یا پیوند دو مولکول برای ساختن جزئی از ماده را داشته باشند، و برای کسب این توانایی باید در سازه ای برابر 10^{25} ضرب شوند. اکنون مرتبه بزرگی نیروهای الکتربیکی و گرانشی را باهم مقایسه می کنیم. در فاصله های برابر، شدت برهم کنش الکتربیکی با ثابت برهم کنش (جفت شدگی) $q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$ و از آن گرانشی با $\gamma m_1 m_2$ تعیین می شود. بنا بر این داریم

$$\frac{\text{برهم کنش الکتربیکی}}{\text{برهم کنش گرانشی}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \gamma m_1 m_2}$$

برای به دست آوردن مرتبه بزرگی این نسبت، فرض می کنیم که $q_1 = q_2 = e$ و $m_1 = m_2 = m_p$ است، یعنی دو پروتون یا دو یون هیدروژن را در نظر می گیریم. در این صورت داریم

$$\frac{\text{برهم کنش الکتربیکی}}{\text{برهم کنش گرانشی}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \gamma m_p^2} = 1.75 \times 10^{36}$$

این عدد تقریباً برابر سازه ای است که عدم کفایت نیروهای گرانشی را در به وجود آوردن برهم کنش مورد نظر نشان می دهد. در برهم کنش بین الکترون و پروتون ($m_e = m_p$) و $m_e = m_p$) نسبت بالا از این هم بزرگتر است: 2.276×10^{37} . نتیجه می گیریم که

مرتبه بزرگی برهم کنش الکتربیکی در حدی است که می تواند موجب پیوند اتمها جهت تشکیل مولکولها، یا پیوند الکترون و پروتون جهت ساختن اتم شود.

اکنون نتیجه روشن است: فرایندهای شیمیایی (و به طور کلی رفتار ماده کبای)

از برهم کنشهای الکتریکی بین اتمها و مولکولها ناشی می‌شود. بدین طریق، برای تشریح فرایندهای شیمیایی، و به‌طور کلی برای توضیح تمام پدیده‌هایی که معمولاً در اطراف خود، خواه در مادهٔ جاندار و خواه در مادهٔ بیجان، مشاهده می‌کنیم اطلاع درستی از ساختار اتمها و مولکولها لازم است. هدف علم فیزیک، چنانکه در فصل ۱ گفتیم، آن است که به‌ما امکان دهد ساختار اجزای اصلی تشکیل دهندهٔ ماده را بشناسیم و رفتار مادهٔ کپه‌ای را بر اساس برهم کنشهای این اجزا تشریح کنیم. برای انجام این کار، ابتدا باید به‌شناسایی برهم کنشهای الکتریکی پردازیم. بدین مناسبت بیشتر فصلهای بعدی به پدیده‌های الکتریکی اختصاص داده شده است.

معمولاً با حضور اجسام باردار، می‌شود از نیروهای گرانشی چشم پوشید. نیروهای گرانشی فقط هنگامی اهمیت پیدا می‌کنند که مطالعهٔ جرمهای عظیم بدون بار الکتریکی یا بار خیلی کم نسبت به جرم مطرح باشد. حرکت سیاره‌ها یا حرکت اجسام در نزدیکی زمین از این مواردند.

۷.۱۴ ساختار اتم

از آنچه در بخش پیش گفتیم دانشجو درمی‌یابد که درک و فهم ساختار اتم یکی از مسایل اساسی فیزیک است. بنابراین اکنون سعی می‌کنیم با بیان چند نظر مقدماتی مدلل رضایت بخشی برای اتم پیدا کنیم. می‌دانیم که اتم در حال طبیعی از نظر الکتریکی خنثی است، زیرا مادهٔ کپه‌ای نیروهای الکتریکی آشکاری از خود نشان نمی‌دهد. بنا بر این اتمها باید به مقدار مساوی الکتریسیتهٔ مثبت و منفی داشته باشند، یا به گفتهٔ دیگر، تعداد الکترونها و پروتونهای آنها مساوی باشد. تعداد الکترونها یا پروتونها را در یک اتم عدد اتمی می‌نامند و آن را با Z نشان می‌دهند. بنا بر این هر اتم شامل $+Ze$ بار الکتریکی مثبت مربوط به پروتونها و به همین اندازه بار الکتریکی منفی مربوط به الکترونهاست.

برای اتم دو مدل ممکن به نظر می‌رسد. در یک مدل می‌توان فرض کرد که پروتونها به سبب جرم زیادشان نسبت به الکترونها، در اطراف مرکز اتم جمع شده‌اند و نوعی هسته را تشکیل می‌دهند و الکترونها، همانند سیاره‌ها در منظومهٔ شمسی، در این هسته می‌چرخند. در مدل دیگر، پروتونها می‌توانند در تمام حجم اتم پخش شوند، و الکترونها بین آنها حرکت کنند و در نتیجه نوعی آمیزهٔ گازی از بارهای منفی و مثبت تشکیل دهند که پلازما نامیده می‌شود. مدل اول به سبب آشنایی و عادت ما به منظومهٔ شمسی، بیشتر نظر را جلب می‌کند. با این حال، علاوه بر سایر دشواریهایی که با قبول این مدل با آنها مواجه خواهیم شد، باید توضیح دهیم که با وجود نیروی دافعهٔ الکتریکی شدید بین پروتونها، چگونه آنها می‌توانند در هسته در کنار هم باقی بمانند. برای رفع این دشواری لازم است غیر از برهم کنش الکتریکی برهم کنش دیگری نیز وجود داشته باشد.

برای روشن کردن چگونگی توزیع الکترونها و پروتونها در داخل اتم، باید داخل اتم را به‌طور تجربی بکاویم، و این کار با فرستادن دستهٔ ذرات باردار سریع مانند یونها

هیدروژن (یعنی پروتونها) یا یونهای هلیوم (به نام ذرات آلفا) به طرف اتم و مشاهده برهم کنشهای حاصل صورت می گیرد. این آزمایش، آزمایش پراکندگی است که چارچوب ریاضی آن قبلاً در فصل ۷ نشان داده شد. چنانکه قبلاً متذکر شدیم، تقارن ایجاب می کند که اتمها را مانند کره هایی به شعاع حدود 10^{-10} m در نظر بگیریم. چون برهم کنشهای الکتریکی از قانون $1/r^2$ پیروی می کنند، بنابراین نتایجی را که در بخش ۷.۱۳ در مورد میدان گرانشی به دست آوردیم در مورد میدان الکتریکی نیز برقرارند؛ فقط کافی است جای $\gamma mm'$ را با $qq'/4\pi\epsilon_0$ یا جای γm را با $q/4\pi\epsilon_0$ عوض کنیم. در نتیجه، یک کره باردار به شعاع a که بار الکتریکی Q به طور یکنواخت در تمام حجم آن توزیع شده باشد، در هر نقطه خارج از کره ($r > a$) یک میدان الکتریکی مطابق رابطه زیر به وجود می آورد

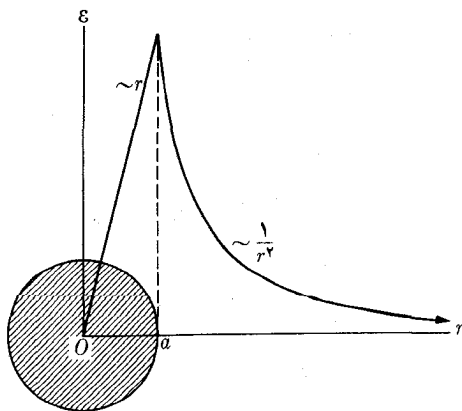
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r > a \quad (19.14)$$

و در هر نقطه در داخل کره ($r < a$) میدان الکتریکی با رابطه

$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3}, \quad r < a \quad (20.14)$$

ایجاد می کند. این میدان را در شکل ۲۰.۱۴ نشان داده ایم.

در مدل پلاسمایی، شعاع اتم همان a است ولی بار مؤثر Q خیلی کوچک است زیرا بارهای مثبت پروتونها و بارهای منفی الکترونها به طور یکنواخت مخلوط شده اند. انحراف ذرات باردار با بار الکتریکی q که به اتم نزدیک می شوند ولی از داخل اتم نمی گذرند به کمک معادله (۲۲.۷) به ازای $k = Qq/4\pi\epsilon_0$ محاسبه می شود. در نتیجه



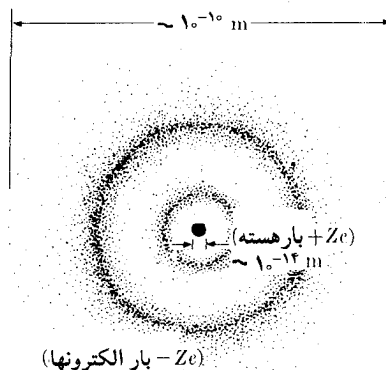
شکل ۲۰.۱۴ میدان الکتریکی یک کره باردار به شعاع a .

به دست می آید

$$\cotg \frac{1}{2} \varphi = \frac{4\pi\epsilon_0 m v^2}{Qq} b \quad (21.14)$$

b ، پارامتر برخورد، باید بزرگتر از شعاع اتم، $a \simeq 10^{-10} \text{ m}$ باشد. با فرض اینکه انرژی ذرات از مرتبه $1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$ یا یک MeV باشد (این انرژی در حدود انرژیهای است که در آزمایشگاه برای این گونه آزمایشها می توان تهیه کرد) و Q و q از مرتبه e باشند، برای $\cotg \varphi / 2$ کمتر از $30''$ کمتری به دست می آید. پس عملاً انحرافی به وجود نمی آید. برای مقادیر کوچکتر b ، اگر ذره فرودی آنقدر انرژی داشته باشد که بتواند به داخل هسته نفوذ کند، بلافاصله تحت تأثیر یک میدان کاهشی قرار می گیرد و معادله (21.14) را دیگر نمی توان به کار برد. ولی در این صورت انحراف به جای اینکه بزرگتر باشد، به سبب کاهش میدان مجدداً کوچکتر می شود. به گفته دیگر، مدل پلاسمایی نمی تواند انحرافهای بسیار بزرگ ذرات بمباران کننده را توضیح دهد. ولی از طریق آزمایش ثابت شده است که تعداد زیادی از ذرات با زاویه خیلی بزرگ و حتی در بعضی موارد با 180° انحراف پیدا می کنند. بدین طریق فاجادیم مدل پلاسمایی را بر اساس این آزمایش ساده ولی قاطع حذف کنیم.

اکنون مدل هسته ای را در نظر می گیریم؛ در این مدل همه پروتونها در ناحیه بسیار کوچکی در مرکز اتم جمع شده اند (شکل 21.14)، در این صورت معادله (21.14) برای مقادیر b خیلی کوچکتر از شعاع اتم برقرار است و امکان انحرافهای بزرگ وجود دارد. بدین طریق درمی یابیم که الکترونها با حرکت سریع خود حایل یا پرده ای در مقابل اثر بار مثبت هسته روی هر ذره باردار واقع در خارج از شعاع اتمی به وجود می آورند و بار الکترونیکی مؤثر را کاهش می دهند. نتیجه کلی عبارت است از اینکه، به ازای مقادیر b بالاتر از 10^{-10} m از مرکز، اتم هسته ای و اتم پلاسمایی اساساً یکسان خواهند بود. ولی در مدل هسته ای، برای مقادیر کمتر b ، انحرافهای خیلی بزرگ می تواند به وجود



شکل 21.14 توزیع الکترونها در اتم.

آید و این مدل را کاملاً از مدل پلاسمایی متمایز می‌سازد. به عنوان مثال، به ازای $b \approx 10^{-14} \text{ m}$ و $Q \approx 10e$ و با استفاده از همان مقدار انرژی که قبلاً به کار بردیم، به دست می‌آید $\cotg \varphi / 2 \approx 1$ یا $\varphi \approx 90^\circ$.

در مدل هسته‌ای، $Q = Ze$ ، و با قراردادن $q = ve$ برای ذرهٔ بمباران کننده (برای پروتونها $v = 1$ و برای ذرات آلفا $v = 2$ است) از معادلهٔ (۲۱.۱۴) به دست می‌آید

$$b = \frac{vZe^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2} \cotg \frac{1}{2} \varphi$$

در انجام آزمایش چندین ذره را به سوی يك برگهٔ خیلی نازك می‌فرستند و انحرافها را مشاهده می‌کنند. چون نمی‌توانیم b را کنترل کنیم، زیرا نمی‌توانیم يك اتم خاص را مستقیماً هدف گیری کنیم، برای تعبیر نتایج تجربی باید تحلیل آماری به عمل بیاوریم.

فرض کنید که يك برگهٔ فلزی نازك به ضخامت t به کار برده ایم که دارای n اتم ماده پراکنده کننده در واحد حجم است. اگر N ذره به واحد سطح برگه برخورد کنند، بعضی از این ذرات از نزدیکی يك اتم برگه می‌گذرند (پارامتر برخورد كوچك است) بنا براین انحراف بزرگی پیدا می‌کنند. برخی از ذرات از فاصلهٔ نسبتاً بزرگی از اتمهای برگه می‌گذرند (پارامتر برخورد بزرگ است) و انحراف کمتری دارند. نتیجهٔ تحلیل آماری (به مثال ۴.۱۴ مراجعه کنید) نشان می‌دهد که dN ، تعداد ذرات منحرف شده در داخل زاویهٔ فضایی $d\Omega$ (متناظر با زاویهٔ انحراف نسبت به راستای تابش واقع بین φ و $\varphi + d\varphi$) از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود

$$\frac{dN}{d\Omega} = - \frac{N n v^2 Z^2 e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 m^2 v_0^4} \text{csc}^4 \frac{1}{2} \varphi \quad (22.14)$$

علامت منفي جلوی رابطه از آنجا ناشی می‌شود که dN نمایش تعداد ذراتی است که به دلیل پراکندگی از باریکهٔ فرودی حذف می‌شوند و حذف این ذرات مقدار N را کاهش می‌دهد.

از معادلهٔ (۲۲.۱۴) چنین پیشگویی می‌شود که ذراتی که در واحد زاویهٔ فضایی پراکنده می‌شوند باید به‌طور آماری مطابق قانون $\text{csc}^4 \varphi / 2$ توزیع شوند. تحقیق این پیشگویی مستلزم آن است که به‌طور غیرمستقیم ثابت کنیم که تمام بارهای مثبت در نزدیکی مرکز اتم توده شده‌اند. این امر برای اولین بار در جریان آزمایشهایی که طی سالهای (۱۲۹۰-۱۲۹۲/۱۲۹۱-۱۹۱۳) توسط گایگر و مارسدن زیر نظر فیزیکدان انگلیسی ارنست رادرفورد (۱۲۵۰-۱۳۱۶/۱۸۷۱-۱۹۳۷) انجام می‌گرفتند به اثبات رسید. این آزمایشها پایهٔ مدل هسته‌ای اتم بودند که از آن پس به‌عنوان مدل درست پذیرفته شد. برای هر مقدار پارامتر برخورد b ، فاصله‌ای به نام کمترین فاصلهٔ نزدیک شدن وجود دارد که در آن ذرهٔ فرودی کمترین فاصله را از مرکز اتم دارد. به ازای $b = 0$ این فاصله از همه کمتر است. محاسبهٔ این فاصله در شرایط مختلف آزمایش به کمک روشهای دینامیکی

(به مثال ۵.۱۴ مراجعه کنید) نشان می‌دهد که برای انرژیهای از مرتبه 10^{-13} (یا ۱ MeV) این فاصله از مرتبه 10^{-14} m است، این فاصله حد بالایی شعاع هسته را به دست می‌دهد، بنا بر این نتیجه می‌گیریم که پروتونها در ناحیه‌ای متمرکزند که ابعاد آن از مرتبه 10^{-14} m است. اگر در نظر بگیریم که شعاع اتم از مرتبه 10^{-10} m است درمی‌یابیم که بیشترین قسمت حجم اتم به وسیله الکترونهای در حال حرکت اشغال شده است و در حقیقت تهی است. برای پارامتر برخورد های خیلی کوچک و انرژیهای بالا، هنگامی که ذره فرودی خیلی به هسته نزدیک می‌شود، مشاهده می‌شود که دیگر ذره از قانون $\frac{1}{2} \text{ CSC}^2 \varphi$ پیروی نمی‌کند. این موضوع معرف وجود برهم کنشهای دیگری است که نیروهای هسته‌ای را تشکیل می‌دهند. از تحلیل انحرافهای نتایج آزمایش نسبت به پراکندگی کوئنی خالص که با معادله (۲۲.۱۴) داده می‌شود، اطلاعات با ارزشی در مورد نیروهای هسته‌ای به دست می‌آید.

ساده‌ترین و سبکترین اتم، اتم هیدروژن است. جرم آن برابر است با جرم پروتون به اضافه جرم الکترون. از اینجا نتیجه می‌گیریم که اتم هیدروژن از یک الکترون که دور یک پروتون می‌چرخد تشکیل شده است. پس $Z = 1$ هسته اتم هیدروژن فقط یک پروتون دارد (می‌توان این نکته را به عنوان تعریف پروتون نیز قبول کرد). چون الکترون تحت تأثیر نیرویی متناسب با $1/r^2$ قرار دارد، به دلایلی مشابه با آنچه در فصل ۱۳ در مورد حرکت سیاره‌ها ارائه شد، می‌توان انتظار داشت که مسیر الکترون بیضی باشد که پروتون در یکی از کانونها واقع است. با وجود این، قبل از شروع به بحث درباره مدار الکترونها، باید با تکنیکهای خاصی آشنا باشیم، زیرا بعضی مشخصه‌های ویژه وجود دارند که مدار الکترونها را از مدار سیاره‌ها متمایز می‌سازند. این تکنیکها به مکانیک کوانتومی مربوط می‌شوند. در اینجا می‌توان از قبل، دو نتیجه خیلی مهم از مکانیک کوانتومی را ذکر کرد:

(۱) انرژی حرکت الکترون کوانتیده است. این گفته بدین معنی است که انرژی الکترونها می‌تواند فقط دارای مقادیر $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n, \dots$ باشد، حالتها مربوط به این انرژیها ویژه حالتها. نامیده می‌شوند. حالتی که دارای کمترین انرژی ممکن است حالت پایه نام دارد. تعیین انرژی ویژه حالت یکی از وظایف مکانیک کوانتومی است. چون انرژی (به معنای کلاسیک آن) «بزرگی» مدار را تعیین می‌کند، بنا بر این تنها بعضی از نواحی فضا در دسترس حرکت الکترونها قرار می‌گیرند. این نواحی در شکل ۲۱.۱۴ به صورت ناحیه‌های سایه‌دار نشان داده شده‌اند.

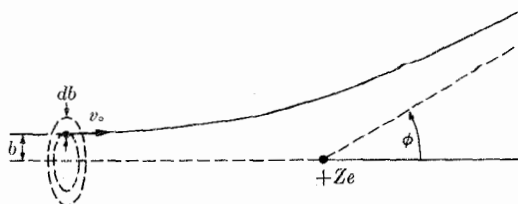
(۲) اندازه حرکت (تکانه) ذرات الکترون هم از نظر بزرگی و هم از نظر دانساکوانتیده است. این گفته بدین معنی است که اندازه حرکت (تکانه) زاویه‌ای الکترون فقط می‌تواند دارای مقادیر منفصلی باشد، و از آنجا که اندازه حرکت زاویه‌ای یک کمیت برداری است، تنها می‌تواند در راستاهای معینی قرار گیرد. خاصیت اخیر را گاهی کوانتشن فضایی می‌نامند، اگر بخواهیم از اصطلاحات کلاسیک استفاده کنیم، خاصیت دوم را می‌توان این‌طور تعبیر کرد که مدارهای الکترون تنها می‌توانند «شکل‌های» خاصی به خود بگیرند.

جرم اتمهای سنگینتر از هیدروژن، از جرم Z پروتونی که در اتم وجود دارد بیشتر است. این اختلاف را می توان به وجود نوترونها در هسته نسبت داد. تعداد کل ذره های موجود در هسته را عدد جرمی می نامند و آن را با A نشان می دهند. بنابراین اتم دارای Z الکترون، Z پروتون و $A - Z$ نوترون است. ظاهراً نوترونها برای استحکام هسته لازم اند. اگر پروتونها تنها زیر تأثیر برهم کنشهای الکتریکی خود باشند، یکدیگر را دفع می کنند زیرا همگی دارای بار مثبت اند، اینکه آنها در هسته در کنار هم باقی می مانند نشان می دهد که علاوه بر برهم کنش الکتریکی، برهم کنش بسیار قوی دیگری وجود دارد که به نیروهای هسته ای مربوط می شود، و دافعه الکتریکی را خنثی می کند. نوترونها، بدون افزودن به دافعه الکتریکی، در نیروهای هسته ای شرکت دارند و بدین طریق باعث پایداری هسته می شوند. در اینجا باید اذعان کرد که هنوز دانش ما از نیروهای هسته ای به اندازه شناخت ما از نیروهای الکتریکی کامل نیست.

چون رفتار شیمیایی اتم يك اثر الکتریکی است، با عدد اتمی Z تعیین می شود. بدین طریق هر عنصر شیمیایی از اتمهایی با عدد اتمی یکسان Z تشکیل شده است. با وجود این، به ازای يك Z مشخص ممکن است چندین عدد جرمی A وجود داشته باشد. به گفته دیگر، به تعداد معینی پروتون در هسته ممکن است تعداد نوترونهای متفاوتی مربوط شود. اتمهایی که دارای عدد اتمی یکسان ولی عدد جرمی متفاوت باشند ایزوتوپ نام دارند. ایزوتوپها مربوط به يك عنصر شیمیایی اند. ایزوتوپهای مختلف يك عنصر شیمیایی را با نماد عنصر (که عدد اتمی را نیز مشخص می کند) که در بالا و سمت چپ آن عدد جرمی نوشته شده است نشان می دهند. به عنوان مثال، هیدروژن ($Z = 1$) سه ایزوتوپ دارد: ^1H ، ^2H یا دوتریوم و ^3H یا تریتوم. همچنین دوتا از ایزوتوپهای خیلی مهم کربن ($Z = 6$) عبارت اند از ^{12}C و ^{14}C . ایزوتوپ ^{12}C برای تعریف یکای جرم اتمی به کار می رود.

مثال ۴۰۱۴ معادله (۲۲۰۱۴) را برای پراکندگی کولنی به دست آورید.

حل: فرض کنید تعداد اتمها در واحد حجم ماده پراکنده کننده n باشد. در این صورت تعداد اتمها در برگی به ضخامت l و مساحت واحد برابر می شود با ntl . چنانکه شکل ۲۲۰۱۴ نشان می دهد، تعداد اتمها در حلقه ای به شعاع b و پهنای db (و در نتیجه مساحت



شکل ۲۲۰۱۴ انحراف یون مثبت بر اثر دافعه کولنی هسته.

$(2\pi b db)$ برابر می شود با $(2\pi b db)(nt)$. اگر N اتم به واحد سطح ورقه برخورد کنند، تعداد اتمهایی که پارامتر برخورد آنها بین b و $b+db$ است برابر می شود با $dN = N(nt)(2\pi b db)$. ولی با مشتق گیری از پارامتر برخورد، که قبلاً داده شده است، به دست می آید

$$db = -\frac{1}{2} \frac{vZe^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2} \csc^2 \frac{1}{2} \varphi d\varphi$$

بنابراین

$$dN = -\frac{\pi N n v^2 Z^2 e^4 t}{(4\pi\epsilon_0)^2 m^2 v^4} \csc^2 \frac{1}{2} \varphi \cot g \frac{1}{2} \varphi \csc^2 \frac{1}{2} \varphi d\varphi \quad (23.14)$$

برای اتمهای سبک، به جای m باید جرم کاهیده دستگاه ذره واتم را قرار داد. اگر دو مخروط به زاویه رأس φ و $\varphi+d\varphi$ رسم کنیم که اتم در رأس آن قرار داشته باشد (شکل ۲۳.۱۴)، تمام ذراتی که با معادله (۲۳.۱۴) بیان می شوند در زاویه فضایی بین دو سطح مخروطی منحرف می شوند. این زاویه فضایی از تقسیم سطح کروی هاشور خورده بر مجذور شعاع آن اندازه گیری می شود. مساحت هاشور خورده برابر است با $(2\pi r \sin \varphi)(r d\varphi) = 2\pi r^2 \sin \varphi d\varphi$ (۷.۲) زاویه فضایی برابر می شود با

$$d\Omega = 2\pi \sin \varphi d\varphi = 4\pi \sin \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi d\varphi$$

که در آن از رابطه $\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$ استفاده کرده ایم. توزیع زاویه ای از تعداد ذرات پراکنده در واحد زاویه فضایی به دست می آید؛ پس

$$\frac{dN}{d\Omega} = -\frac{N n v^2 Z^2 e^4 t}{2(4\pi\epsilon_0)^2 m^2 v^4} \csc^4 \frac{1}{2} \varphi$$

که همان معادله (۲۲.۱۴) است.

گاهی نتایج آزمایشهای پراکندگی به کمک مفهوم سطح مقطع قابل فهمتر است. سطح مقطع دیفرانسیلی برای یک فرایند با رابطه زیر تعریف می شود

$$\sigma(\varphi) = \frac{1}{Ntn} \left| \frac{dN}{d\Omega} \right| \quad (24.14)$$

دو خط قائم موازی نشان می دهند که باید از قدر مطلق $dN/d\Omega$ استفاده کرد. کمیت $\sigma(\varphi)$ نمایش احتمال انحراف ذره فرودی با زاویه بین φ و $\varphi+d\varphi$ است و آن را با یکای مساحت (m^2) بیان می کنند، زیرا n چگالی (m^{-3}) و t فاصله (m) است (توجه داشته باشید یکای N حذف می شود). با ترکیب معادله (۲۲.۱۴) و معادله (۲۴.۱۴) سطح مقطع

دیفرانسیلی برای پراکندگی کولنی به دست می آید

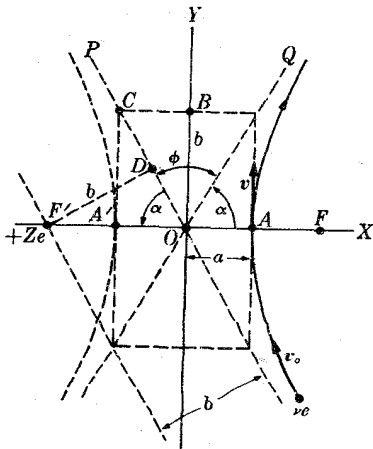
$$\sigma(\varphi) = \frac{v^2 Z^2 e^4}{4(\pi \epsilon_0)^2 m^2 v_0^2} \csc^4 \frac{1}{2} \varphi \quad (25.14)$$

مثال ۵.۱۴ ذره ای با بار الکتریکی ve و سرعت v_0 به سمت اتمی با عدد اتمی Z فرستاده می شود، کمترین فاصله نزدیک شدن ذره به اتم را حساب کنید.

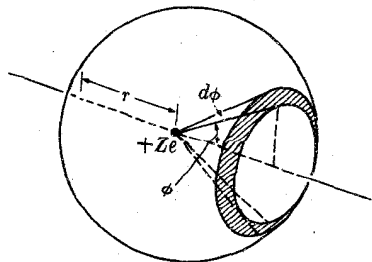
حل: شکل ۲۴.۱۴ مسئله را از لحاظ هندسی نشان می دهد. بنا به بحثی که در بخش ۵.۱۳ داشتیم، ذره یکی از شاخه های هذلولی را که هسته Ze در دورترین کانون آن، یعنی F' قرار دارد می بیند. کمترین فاصله نزدیک شدن ذره به هسته $R = F'A$ است. پارامتر برخورد را $b = F'D$ فرض می کنیم. ابتدا ثابت می کنیم که b برابر است با OB از محور قسایم هذلولی. $\varphi = POQ$ زاویه بین دو خط مجانب، زاویه ای است که در آن ذره بر اثر نیروی دافعه کولنی هسته انحراف پیدا می کند. فاصله $a = OA = OA'$ محور افقی است، و از روی خواص هذلولی رابطه $OF' = OC$ به دست می آید. بنابراین مثلث های OCA' و $OF'D$ برابرند، در نتیجه $OCA' = OB = F'D = CA'$. از شکل پیداست که $OA = a = b \cot \alpha$ و $OF' = b \csc \alpha$. بنابراین

$$R = F'A = b(\csc \alpha + \cot \alpha)$$

ولی $2\alpha + \varphi = \pi$ است. بنابراین $\alpha = \pi/2 - \varphi/2$ و در نتیجه



شکل ۲۴.۱۴



شکل ۲۳.۱۴

$$R = b \left(\sec \frac{1}{2} \varphi + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \right)$$

$$= \frac{b \left(1 + \operatorname{csc} \frac{1}{2} \varphi \right)}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} \varphi}$$

با استفاده از نتیجه (۲۱.۱۴) به ازای $Q = Ze$ و $q = ve$ ، به دست می آید

$$R = \frac{vZe^2}{4\pi\epsilon_0 (mv^2)} \left(1 + \operatorname{csc} \frac{1}{2} \varphi \right)$$

این رابطه کمترین فاصله نزدیک شدن ذره به هسته را بر حسب انرژی آغازی ذره، $mv^2/2$ و زاویه پراکندگی φ به دست می دهد. در برخورد رو در رو ذره به عقب برمی گردد به گونه ای که زاویه پراکندگی برابر π می شود. بنابراین داریم $\operatorname{csc} \varphi/2 = 1$ و

$$R = \frac{vZe^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{2} mv^2 \right)}$$

به عنوان مثال، با وارد کردن مقادیر عددی $v=1$ و $Z=6$ (مربوط به کربن) و $E = mv^2/2 = 1.96 \times 10^{-13} \text{ J}$ یا 1 MeV نتیجه می شود که $R \approx 10^{-14} \text{ m}$. این درست همان مرتبه بزرگی است که قبلاً برای ابعاد هسته ذکر کردیم.

۸.۱۴ پتانسیل الکتریکی

یک ذره باردار واقع در میدان الکتریکی دارای انرژی پتانسیلی است که از برهم کنش ذره با میدان به وجود می آید. بنا به تعریف، پتانسیل الکتریکی در یک نقطه برابر است با انرژی پتانسیل بار واحد واقع در آن نقطه. هرگاه پتانسیل الکتریکی را با V و انرژی پتانسیل بار q را با E_p نشان دهیم، داریم

$$V = \frac{E_p}{q} \quad \text{یا} \quad E_p = qV \quad (26.14)$$

پتانسیل الکتریکی را بر حسب ژول بر کولن یا J C^{-1} اندازه می گیرند که ولت، با علامت اختصاری V ، نام دارد. کلمه ولت از نام دانشمند ایتالیایی الساندرو ولتا (۱۱۲۴-۱۷۴۵/۱۸۲۷) گرفته شده است. ولت بر حسب یکاهای اصلی عبارت است از $V = \text{m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ C}^{-1}$.

توجه کنید که تعریف میدان و پتانسیل الکتریکی مشابه تعریف میدان و پتانسیل گرانشی است. این دو کمیت با رابطه ای همانند (۲۱.۱۳) به یکدیگر مربوط اند. یعنی

مؤلفه‌های قائم میدان الکتریکی \mathbf{E} با رابطه‌های زیر داده می‌شوند

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (27.14)$$

به صورت کلی‌تر، مؤلفه میدان در راستایی مربوط به جابجایی ds برابر است با

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s} \quad (28.14)$$

همچنانکه قبلاً در فصل‌های ۸ و ۱۳ نشان دادیم، این رابطه‌ها را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد

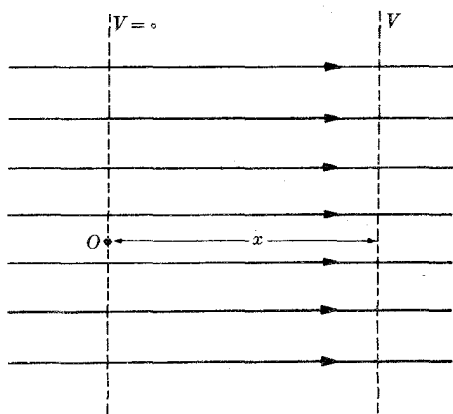
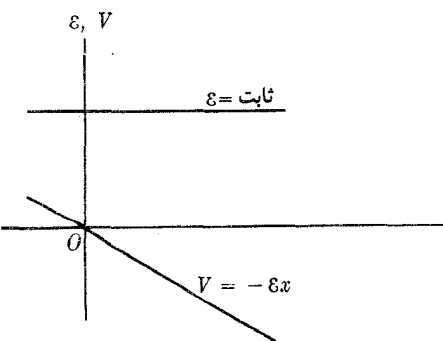
$$\mathbf{E} = -\text{grad } V \quad (29.14)$$

معادله‌های (۲۷.۱۴) یا معادله (۲۸.۱۴) برای پیدا کردن پتانسیل V از روی میدان معلوم \mathbf{E} ، یا برعکس، به کار می‌روند.

حالتی ساده، یعنی میدان الکتریکی یکنواخت را در نظر می‌گیریم (شکل ۲۵.۱۴). از اولین رابطه (۲۷.۱۴)، برای میدان الکتریکی یکنواخت موازی با محور X داریم $E = -dV/dx$. نظر به اینکه E ثابت است و به فرض $V=0$ در نقطه $x=0$ از انتگرال‌گیری به دست می‌آید

$$\int_0^V dV = -\int_0^x E dx = -E \int_0^x dx \quad \text{یا} \quad V = -Ex \quad (30.14)$$

معادله (۳۰.۱۴) رابطه بسیار مفیدی است، در شکل ۲۶.۱۴ نمودار آن رسم شده است. به سبب علامت منفی در معادله (۲۹.۱۴) یا (۳۰.۱۴)، سوی میدان الکتریکی به سمتی



شکل ۲۵.۱۴ میدان الکتریکی یکنواخت. شکل ۲۶.۱۴ تغییرات E و V در میدان الکتریکی یکنواخت.

است که پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد. اگر دو نقطه x_1 و x_2 را در نظر بگیریم، از معادله (۳۰.۱۴) به دست می‌آید $V_1 = -Ex_1$ و $V_2 = -Ex_2$. از کاستن V_1 از V_2 به دست می‌آید $V_2 - V_1 = -E(x_2 - x_1)$ ، یا با قراردادن $d = x_2 - x_1$ داریم

$$E = -\frac{V_2 - V_1}{d} = \frac{V_1 - V_2}{d} \quad (۳۱.۱۴)$$

هرچند این رابطه تنها در میدانهای الکتریکی یکنواخت اعتبار دارد، ولی اگر $V_1 - V_2$ اختلاف پتانسیل بین دو نقطه به فاصله d ، معلوم باشد می‌توان آن را برای برآورد میدان بین آن دو نقطه به کار برد. اگر اختلاف پتانسیل $V_1 - V_2$ مثبت باشد، میدان از x_1 به سوی x_2 و اگر اختلاف پتانسیل منفی باشد میدان از x_2 به سوی x_1 است. معادله (۳۱.۱۴) [یا همچنین معادله‌های (۲۷.۱۴) یا (۲۸.۱۴)] نشان می‌دهد که میدان الکتریکی را نیز می‌توان بر حسب ولت بر متر بیان کرد. ولت بر متر هم‌ارز نیوتون بر کولن (NC^{-1}) است که قبلاً تعریف کرده‌ایم. این مطلب را می‌توان به صورت زیر نشان داد

$$\frac{\text{نیوتون}}{\text{کولن}} = \frac{\text{نیوتون-متر}}{\text{کولن-متر}} = \frac{\text{ژول}}{\text{کولن-متر}} = \frac{\text{ولت}}{\text{متر}}$$

معمولاً، یکای ولت بر متر ($V m^{-1}$) را بر NC^{-1} ترجیح می‌دهند.

برای به دست آوردن پتانسیل الکتریکی ناشی از یک بار نقطه‌ای در معادله (۲۸.۱۴) r را جانشین s می‌کنند، زیرا میدان حاصل شعاعی است؛ یعنی $E = -\delta V / \delta r$. با برگشت به معادله (۲۸.۱۴) می‌توان نوشت

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = -\frac{\delta V}{\delta r}$$

از انتگرال‌گیری، و با فرض اینکه به ازای $r = \infty$ ، مانند گرانش، $V = 0$ است نتیجه می‌شود

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (۳۲.۱۴)$$

این رابطه را می‌توانستیم با قرار دادن $q / 4\pi\epsilon_0$ به جای γm در معادله (۱۸.۱۳) به دست آوریم، علامت پتانسیل بسته به علامت باری که آن را به وجود می‌آورد مثبت یا منفی است.

اگر چند بار الکتریکی q_1, q_2, q_3, \dots را داشته باشیم، پتانسیل الکتریکی در هر نقطه مانند P (شکل ۷.۱۴) جمع جبری پتانسیل هر یک از بارهاست، یعنی

$$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 r_3} + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (۳۳.۱۴)$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که برای یک توزیع بار، محاسبه پتانسیل الکتریکی و سپس

به دست آوردن میدان از روی پتانسیل، معمولاً آسانتر از عکس آن است. برای محاسبه پتانسیل الکتریکی يك توزیع پیوسته از بارها، بار الکتریکی را به بارهای جزئی dq تقسیم و در معادله (۳۳.۱۴) علامت جمع را به انتگرال تبدیل می‌کنیم (به شکل ۱۳.۱۴ مراجعه کنید)؛ در این صورت رابطه

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (33.14)$$

انتگرال تمام منطقه اشغال شده به وسیله بارها را در برمی‌گیرد.

سطحهایی که در تمام نقاط آنها پتانسیل یکسان باشد، یعنی $V = \text{const}$ ، **سطحهای هم‌پتانسیل** نامیده می‌شوند. در هر نقطه از يك سطح هم پتانسیل راستای میدان الکتریکی بر سطح عمود است، یعنی خطهای نیرو بر سطوح هم‌پتانسیل عمودند (دلیل آن در بخش ۶.۱۳ توضیح داده شد). در میدان یکنواخت، از معادله (۳۰.۱۴) پیداست که به ازای V ثابت لازم است که x ثابت باشد، و در نتیجه چنانکه خط‌چین‌ها در شکل ۲۵.۱۴ نشان می‌دهند، سطحهای هم‌پتانسیل صفحه‌های موازی‌اند. در مورد يك بار الکتریکی نقطه‌ای، معادله (۳۲.۱۴) نشان می‌دهد که سطحهای هم‌پتانسیل کره‌هایی به شعاع ثابت ($r = \text{const}$) اند، که در شکل ۱۰.۱۴ (الف) و (ب) به صورت نقطه‌چین رسم شده‌اند. برای چندین بار الکتریکی، سطحهای هم‌پتانسیل، بنا به معادله (۳۳.۱۴) از رابطه $\sum_i (q_i/r_i) = \text{const}$ به دست می‌آید. برای دو بار الکتریکی سطحهای هم‌پتانسیل با خطوط منقطع در شکلهای ۱۱.۱۴ و ۱۲.۱۴ نشان داده شده‌اند.

مثال ۶.۱۴ انرژی پتانسیل الکتریکی بار q_3 در مثال ۱.۱۴ را حساب کنید.

حل: به شکل ۶.۱۴ باز می‌گردیم و معادله (۳۲.۱۴) را به کار می‌بریم. پتانسیل الکتریکی حاصل از بارهای الکتریکی q_1 واقع در نقطه A و q_2 واقع در نقطه B ، در نقطه C بترتیب برابرند با

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} = 11225 \times 10^6 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = -9 \times 10^6 \text{ V}$$

بنابراین پتانسیل الکتریکی کل در نقطه C برابر است با

$$V = V_1 + V_2 = 2225 \times 10^6 \text{ V}$$

پس، انرژی پتانسیل الکتریکی q_3 برابر است با

$$E_p = q_3 V = (0.2 \times 10^{-2} \text{ C}) (2225 \times 10^6 \text{ V}) = 445 \times 10^2 \text{ J}$$

اگر این مثال را با مثال ۲۰۱۴ مقایسه کنیم، تفاوت بین کار کردن با میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی روشن می‌شود.

مثال ۲۰۱۴ میدان و پتانسیل الکتریکی حاصل از یک رشته سیم مستقیم و بسیار بلند را که دارای بار الکتریکی λ در واحد طول است حساب کنید.

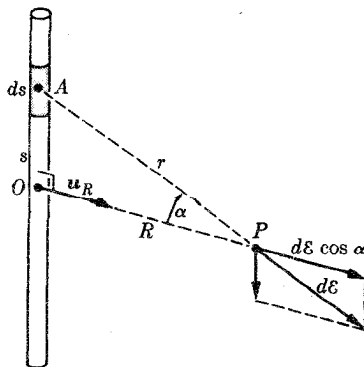
حل: سیم را به قطعات جزئی به طول ds تقسیم می‌کنیم (شکل ۲۷۰۱۴). بنابراین هر جزء دارای بار الکتریکی $dq = \lambda ds$ است. بزرگی میدان الکتریکی ناشی از عنصر ds در نقطه P برابر است با

$$dE = \frac{\lambda ds}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

و این میدان در راستای خط AP است. ولی به سبب تقارن، به ازای هر عنصر ds به فاصله s در بالای O عنصر دیگری در همان فاصله در زیر O وجود دارد. بنابراین هرگاه میدانهای الکتریکی حاصل از تمام عناصر را باهم جمع کنیم، مؤلفه آنها روی راستای موازی سیم برابری برابر صفر دارد. از این رو باید تنها تصویر روی راستای موازی OP را که با $dE \cos \alpha$ داده می‌شود در نظر گرفت. میدان الکتریکی برابری در راستای OP است. بنابراین داریم

$$E = \int dE \cos \alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{ds}{r^2} \cos \alpha$$

از شکل پیداست که $s = R \tan \alpha$ و $r = R \sec \alpha$ و $ds = R \sec^2 \alpha d\alpha$. با قرار دادن این مقادیر و با انتگرال گیری بین $\alpha = 0$ و $\alpha = \pi/2$ و ضرب نتیجه در ۲ (زیرا هر نصف سیم در بوجود آوردن میدان به طور یکسان سهم دارد)، به دست می‌آید



شکل ۲۷۰۱۴ میدان الکتریکی رشته سیم باردار.

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\pi/2} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

میدان الکتریکی متناسب با عکس R ، تغییر می‌کند. صورت برداری این میدان عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \mathbf{u}_R$$

برای به‌دست آوردن پتانسیل الکتریکی، رابطه $E = -\partial V / \partial R$ را به‌کار می‌بریم، خواهیم داشت

$$\frac{dV}{dR} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه به‌دست می‌آید

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R + C$$

معمولاً در اینگونه موارد به نقطه‌ای که برای آن $R = 1$ است پتانسیل صفر نسبت می‌دهند، بدین طریق $C = 0$ می‌شود. بنابراین پتانسیل الکتریکی برابر می‌شود با

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R$$

به‌دانشجو پیشنهاد می‌کنیم مسئله را در جهت عکس حل کند، یعنی ابتدا پتانسیل را به‌دست آورد و از روی آن میدان را پیدا کند.

۹.۱۴ رابطه‌های انرژی در میدان الکتریکی

انرژی کل یک ذره باردار یا یک یون به جرم m و بار q که در میدان الکتریکی حرکت می‌کند برابر است با

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + qV \quad (۳۵.۱۴)$$

هنگامی که یون از مکان P_1 (یا جایی که پتانسیل الکتریکی آن V_1 است) به مکان P_2 (که در آنجا پتانسیل آن V_2 است) جا‌جا می‌شود، از ترکیب معادله (۳۵.۱۴) با اصل بقای انرژی به‌دست می‌آید

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + qV_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + qV_2 \quad (۳۶.۱۴)$$

با یادآوری اینکه، بنا به معادله (۱۱.۸) کار انجام شده روی ذره باردار در جابجایی از P_1 به P_2 برابر است با

$$W = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2$$

داریم

$$W = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = q(V_1 - V_2) \quad (۳۷.۱۴)$$

از روی این معادله می توان ولت را به طور دقیق تعریف کرد: ولت اختلاف پتانسیلی است که هرگاه بار الکتریکی یک کولنی در داخل آن جابجا شود، به اندازه یک ژول انرژی کسب کند.

معادله (۳۷.۱۴) نشان می دهد هنگامی که ذره ای با بار الکتریکی مثبت ($q > 0$) از پتانسیل بالاتر به پتانسیل پایین تر ($V_1 > V_2$) حرکت می کند، انرژی جنبشی کسب می کند، در صورتی که ذره با بار الکتریکی منفی ($q < 0$)، برای کسب انرژی باید از پتانسیل پایین به سمت پتانسیل بالا ($V_1 < V_2$) حرکت کند.

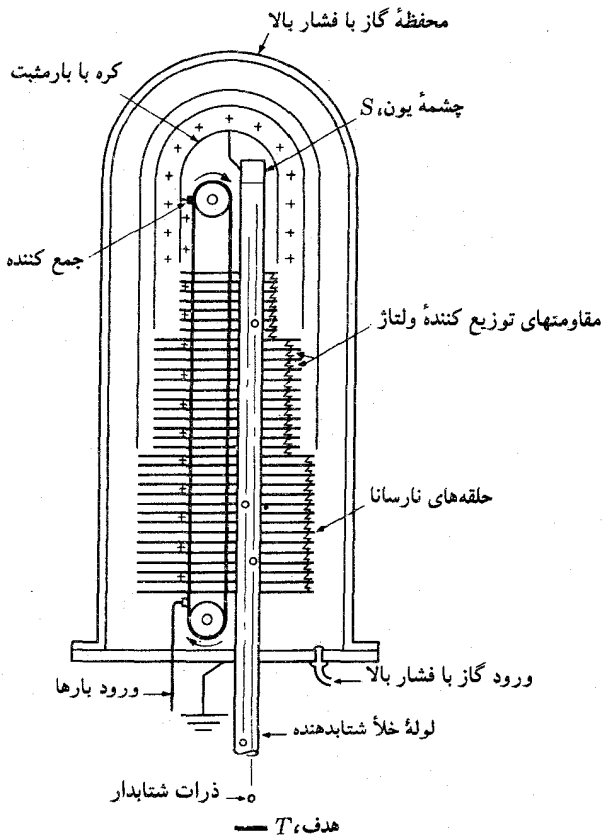
اگر پتانسیل الکتریکی نقطه P_2 را برابر صفر بگیریم ($V_2 = 0$) و آزمایش را به گونه ای ترتیب دهیم که سرعت یونها در نقطه P_1 برابر صفر ($v_1 = 0$) شود، معادله (۱۶.۱۴) به صورت زیر درمی آید (شاخصها را حذف کرده ایم)

$$\frac{1}{2} mv^2 = qV \quad (۳۸.۱۴)$$

این رابطه انرژی جنبشی کسب شده به وسیله ذره باردار را هنگام عبور از اختلاف پتانسیل الکتریکی V نشان می دهد. و این همان اصلی است که در دستگاههایی مثل شتابدهنده های الکتروستاتیک به کار گرفته می شود.

یک شتابدهنده از این نوع (شکل ۲۸.۱۴) از یک لوله خلأ تشکیل یافته است که بین دو سر آن اختلاف پتانسیل V برقرار است. در یک سر لوله، چشمه یون S قرار دارد که ذرات باردار را به داخل لوله تزریق می کند. ذرات با انرژی که طبق معادله (۳۸.۱۴) کسب می کنند به انتهای دیگر لوله می رسند. این یونها سریع به هدف T برخورد می کنند. انتخاب جنس ماده T به اهمیت آزمایش مورد نظر بستگی دارد. این برخورد موجب نوعی واکنش هسته ای می شود. انرژی یونها به هدف منتقل می شود. هدف را باید همیشه سرد نگه داشت، زیرا در غیر این صورت ذوب یا تبخیر می شود.

چندین نوع شتابدهنده الکتروستاتیک وجود دارد (کوکرافت-والتون، و غیره) اختلاف این شتابدهنده ها در چگونگی تولید اختلاف پتانسیل V است. به هر حال، کار شتابدهنده های الکتروستاتیک محدود به انرژی است که به وسیله اختلاف پتانسیل بیشینه به وجود می آید، زیرا این اختلاف پتانسیل باید تا حدی باشد که موجب اتصال الکتریکی



شکل ۲۸.۱۴ مقطع ساده شده‌ای از شتابدهنده الکتروستاتیک وان دوگراف است. یک موتور، تسمه‌ای از جنس ماده عایق را روی زوقر قره با سرعت زیاد به حرکت درمی‌آورد. بارهای الکتریکی یک چشمه ولتاژ در قسمت پایین روی تسمه می‌نشینند و به سمت بالا حمل می‌شوند. یک جمع‌کننده بارها را روی کره فلزی مستقر در بالا انتقال می‌دهد و بدین طریق پتانسیل بسیار بالایی روی کره به وجود می‌آید. یونهای مثبت در این انتها ایجاد می‌شوند و به سبب اختلاف پتانسیل بین کره باردار و زمین به سمت پایین شتاب می‌گیرند.

ماده مورد استعمال نشود، از این رو نمی‌تواند از چند میلیون ولت تجاوز کند. با توجه به این که بار ذرات بنیادی و هسته‌ها برابر یا مضرب درستی از بار الکتریکی بنیادی e است، معادله (۳۷۰.۱۴) یا (۳۸.۱۴) نشان می‌دهد که می‌توان یکای جدیدی برای انرژی، به نام الکترون ولت تعریف کرد. الکترون ولت با علامت اختصاری eV را برای اولین بار در بخش ۵.۸ به کار بردیم. الکترون ولت مقدار انرژی است که ذره‌ای با بار الکتریکی e هنگام عبور از اختلاف پتانسیل یک ولت کسب می‌کند. با استفاده از مقدار e

که با رابطه (۱۳.۱۴) داده شده است، داریم

$$eV = (1.6 \times 10^{-19} C)(1 V) = 1.6 \times 10^{-19} J$$

این مقدار با مقدار داده شده در بخش ۵.۸ برابر است. ذره‌ای با بار الکتریکی ve هنگام گذشتن از اختلاف پتانسیل ΔV به اندازه $v\Delta V eV$ انرژی کسب می‌کند. اضعاف الکترون ولت عبارت‌اند از کیلوالکترون ولت (keV) و مگاالکترون ولت (MeV). بسیار جالب و سودمند است که جرم سکون ذره‌های بنیادی را با این یکا بیان کنیم، نتیجه عبارت است از

$$E_e = m_e c^2 = 8.186 \times 10^{-14} J = 0.511 \text{ MeV}$$

$$E_p = m_p c^2 = 1.503 \times 10^{-10} J = 938.27 \text{ MeV}$$

$$E_n = m_n c^2 = 1.505 \times 10^{-10} J = 939.57 \text{ MeV}$$

مثال ۸.۱۴ با فرض اینکه حرکت الکترون در اتم را بتوان با قوانین مکانیک نیوتونی توصیف کرد، دربارهٔ مسیرهای ممکن یک الکترون حول هسته‌ای با بار الکتریکی Ze بحث کنید. حالت $Z=1$ مربوط است به اتم هیدروژن، $Z=2$ مربوط است به اتم هلیوم یک‌بار یونیده He^+ (یعنی اتم هلیومی که یک الکترون از دست داده است)، $Z=3$ مربوط است به اتم لیتیم دو بار یونیده Li^{++} (یعنی اتم لیتیومی که دو الکترون خود را از دست داده است) و به همین ترتیب.

حل: برهم کنش الکتریکی عکس مجذوری که در حرکت الکترون به دور هسته نقش دارد، از لحاظ دینامیکی با برهم کنش گرانشی، حرکت سیاره‌ها به دور خورشید، یکسان است. بنابراین نتایج به دست آمده در فصل ۱۳ را می‌توان در اینجا مستقیماً به کار برد، مشروط بر اینکه در روابط مربوط جای $\gamma mm'$ را با $Ze^2 / 4\pi\epsilon_0$ عوض کنیم. به عنوان مثال، مدارهای الکترونها بیضی (یا دایره)هایی خواهند بود که هسته یکی از کانونها را اشغال می‌کند. با وجود این، برای روشنتر شدن مطلب بعضی مراحل محاسبه را تکرار می‌کنیم. دوبار q_1 و q_2 ، به فاصله r از یکدیگر را که با سرعتهای v_1 و v_2 حرکت می‌کنند در نظر می‌گیریم. انرژی پتانسیل الکتریکی آنها برابر است با $E_p = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 r$ و انرژی کل آنها

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

ضمناً، در مورد چند ذره باردار، مانند اتم یا مولکول، انرژی کل برابر است با

$$E = \sum_{\substack{\text{تمام} \\ \text{ذرات}}} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{\substack{\text{تمام} \\ \text{ذرات}}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

انرژی دو ذره را در دستگاه ذرات مرکز جرم، چنانکه در مثال ۹.۹ توضیح داده شد، می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (39.14)$$

در این رابطه μ جرم کاهیده دستگاه دو ذره [معادله (۹.۱۷)] و v سرعت نسبی آنهاست. در مورد الکترونی که دور هسته حرکت می‌کند، $q_1 = -e$ و $q_2 = Ze$ است. به‌علاوه، چون جرم هسته خیلی بیشتر از جرم الکترون است، به جای جرم کاهیده دستگاه الکترون-هسته، می‌توان جرم الکترون m_e را قرار داد. تنها در مورد سبکترین هسته‌ها مانند هیدروژن و هلیوم است که اثر جرم کاهیده را می‌توان آشکار ساخت. در این صورت، با تقریب مذکور، برای انرژی کل اتم به‌دست می‌آید

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

اگر فرض کنیم که مسیر دایره‌ای است، بنا به معادله (۲۸.۷)، معادله حرکت الکترون برابر می‌شود با $F_N = m_e v^2 / r$ ، یا

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

بالاخره داریم $m_e v^2 / 4\pi\epsilon_0 r = Ze^2$. با قرار دادن این مقدار در رابطه انرژی کل به‌دست می‌آید

$$E = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 (2r)} = -9 \times 10^9 \frac{Ze^2}{2r} \quad (40.14)$$

در اینجا، ثابت الکتروستاتیک بر حسب یکاهای mks A منظور شده است. در این دستگاه E ، r و e به ترتیب بر حسب J ، m و C اند. در این رابطه اگر جای $Ze^2 / 4\pi\epsilon_0 r$ را با $\gamma mm'$ عوض کنیم معادله (۴۰.۱۴) به‌دست می‌آید که در مورد گرانش به‌کار می‌رود.

رابطه (۴۰.۱۴) که برای انرژی دستگاه الکترون-هسته به‌دست آمد بعدها با توجه به اثرهای نسبیتی و مغناطیسی مسورد تجدیدنظر قرار خواهد گرفت (مثالهای ۱۰.۱۴ و ۱۰.۱۵). برای اتم هیدروژن ($Z=1$)، انرژی لازم برای جدا کردن الکترون از پروتون یا به گفته دیگر، انرژی یونش اتم هیدروژن را نشان می‌دهد. مقداری که برای این انرژی از راه تجربی به‌دست آمده برابر است با $[2.177 \times 10^{-18} J]$ یا $13.6 eV$ ؛ از اینجا شعاع مدار الکترون برابر $10^{-10} m = 0.53 \times 10^{-10} m$ به‌دست می‌آید. اینکه شعاع مدار الکترون در حدود برآورد قبلی ابعاد اتم به‌دست آمده است، تأیید محکمی بر مدل هسته‌ای اتم است.

در بخش ۷.۱۴ گفتیم که انرژی حرکت الکترونها در اتم کوانتیده است. در مورد

اتمهایی که تنها يك الکترون دارند، انرژیهای ممکن در ویژه حالتها در مکانیک کوانتومی با رابطه زیر داده می شوند

$$E_n = -\frac{m_e e^4 Z^2}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}$$

که در آن n اعداد درست مانند ۱، ۲، ۳، ... و $h = 2\pi\hbar = 6.6256 \times 10^{-34} \text{ J s}$ ثابت پلانک است که در مثال ۱۵.۷ در ارتباط با اندازه حرکت زاویه ای الکترون در اتم هیدروژن آن را معرفی کردیم. با دخالت دادن مقادیر عددی به دست می آید

$$E_n = -\frac{2.177 \times 10^{-18} Z^2}{n^2} \text{ J} = -\frac{13.6057 \text{ eV}}{n^2}$$

حالت پایه مربوط به $n=1$ است، زیرا این مقدار کمترین انرژی ممکن اتم است. مقایسه رابطه فوق، E_n ، با معادله (۴۰.۱۴) امکان می دهد که ابعاد مدارهای الکترونی مجاز متناظر را برآورد کنیم. نتیجه می گیریم

$$r = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{\pi Z e^2 m_e} = \frac{n^2 a_0}{Z}$$

که در آن

$$a_0 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi e^2 m_e} = 5.29177 \times 10^{-11} \text{ m}$$

a_0 را شعاع بور می نامند و مربوط به شعاع اتم هیدروژن در حالت پایه است. قبلا اشاره کردیم که حرکت الکترونها مربوط به مدارهای کاملا معین، مانند مدار سیاره ها، نیست. بدین طریق مقدار r را نباید يك مقدار واقعی در نظر گرفت، بلکه باید آن را به عنوان نشان دهنده مرتبه بزرگی ناحیه ای تلقی کرد که احتمال دارد الکترون در آنجا وجود داشته باشد.

مثال ۹.۱۴ با به کار بردن اصل بقای انرژی، کمترین فاصله نزدیک شدن يك ذره باردار را که به سمت يك هسته اتمی پرتاب شده است تا با آن برخورد رو در رو داشته باشد، حساب کنید.

حل: اگر بار هسته برابر Ze و بار پرتابه ve باشد، که متناظر با بارهای q_1 و q_2 در معادله (۳۹.۱۴) اند انرژی کل دستگاه پرتابه-هسته برابر می شود با

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

μ جرم کاهشدهنده دستگاه است. اگر جرم هسته خیلی سنگینتر از جرم پرتابه باشد، یا اگر هسته

در داخل بلور قرار داشته باشد، می‌توان به جای μ جرم پرتابه را قرار داد. در نتیجه خواهیم داشت

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{vZe^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

ولی اگر، به‌عنوان مثال، پروتونها را به سمت پروتونها پرتاب کنیم ($v = Z = 1$) باید جرم کاهیده $\mu = m_p/2$ را به کار ببریم (به‌مثال ۳۰۹ مراجعه کنید). هنگامی که ذره خیلی دور از هسته است، تمام انرژی آن جنبشی و برابر $\frac{1}{2}mv^2$ است. فرض کنیم در نقطه A ، کمترین فاصله تا هسته، جایی که $r = R$ است (شکل ۲۴.۱۴) سرعت پرتابه برابر v باشد و بنا به اصل بقای انرژی باید داشته باشیم

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{vZe^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

در نقطه A ، کمترین فاصله نزدیک شدن، سرعت کاملاً عرضی است، بنا براین اندازه حرکت زاویه‌ای برابر می‌شود با $L = mRv$. می‌توان از این رابطه برای حذف سرعت v استفاده کرد. زیرا L یک ثابت حرکت است. بنا براین به دست می‌آید

$$\frac{L^2}{2mR^2} + \frac{vZe^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

این رابطه یک معادله درجه دوم از $1/R$ است که محاسبه R را برحسب انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای ذره میسر می‌سازد. در برخورد رو در رو $L = 0$ و

$$R = \frac{vZe^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{2}mv_0^2\right)}$$

است. این رابطه با نتیجه‌ای که قبلاً در مثال ۵.۱۴ به دست آوردیم تطبیق می‌کند. توجه کنید، که در برخورد رو در رو، در نقطه‌ای که ذره پرتابی تا هسته کمترین فاصله را دارد ($v = 0$) تمام انرژی جنبشی به انرژی پتانسیل تبدیل می‌شود.

مثال ۱۰.۱۴ مرتبه بزرگی تصحیح مربوط به اثرهای نسبیته را در انرژی الکترونی که به دور هسته اتم می‌چرخد برآورد کنید.

حل: در فصل ۱۳ نیز مانند این فصل، در بحث درباره حرکت‌های حاصل از برهم‌کنشهای عکس مجذوری، نظیر مثال ۸.۱۴، اثرهای نسبیته را نادیده گرفتیم و مکانیک نیوتونی را به کار بردیم. این روش در حرکت تمام سیاره‌ها تقریباً درست است، ولی در بسیاری

موارد برای الکترونها در آنها صحیح نیست. الکترونها داخلی آنها با چنان سرعت زیادی حرکت می کنند که تصحیح نسبیته به طور تجربی قابل اندازه گیری است، اکنون می خواهیم مرتبه بزرگی اثر نسبیته را برآورد کنیم.

بنا به معادله (۱۸.۱۱) انرژی کل الکترون سریع در داخل اتم (بدون به حساب آوردن انرژی سکون) برابر است با

$$E = c\sqrt{m_e^2 c^2 + p^2} + (-eV) - m_e c^2$$

با فرض اینکه اندازه حرکت p خیلی کوچکتر از $m_e c$ باشد، می توان رادیکال را تاجمله دوم بسط داد. در نتیجه

$$E = \frac{1}{2m_e} p^2 - \frac{1}{8m_e^3 c^2} p^4 + \dots + (-eV)$$

$$= \left[\frac{1}{2m_e} p^2 + (-eV) \right] - \frac{1}{8m_e^3 c^2} p^4 + \dots$$

دوجمله داخل گروه تقریب غیر نسبیته انرژی را به دست می دهند که برای مدارهای دایره ای مطابق معادله (۴۰.۱۴) است. بنابراین، جمله آخر تصحیح نسبیته مرتبه اول روی انرژی کل الکترون است که آن را با ΔE_r نشان می دهیم. در این صورت داریم

$$\Delta E_r = -\frac{1}{8m_e^3 c^2} p^4 = -\frac{1}{2m_e c^2} \left(\frac{p^2}{2m_e} \right) \left(\frac{p^2}{2m_e} \right)$$

جمله های داخل پرانتزها مربوط به انرژی جنبشی غیر نسبیته الکترون است. بنا بر این (با تقریب قابل قبول) برای پرانتز اول، با استفاده از مثال ۸.۱۴ می توان نوشت

$$\frac{p^2}{2m_e} = E - E_p = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0(2r)} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0(2r)} = -E$$

برای پرانتز دومی می توان نوشت $p^2/2m_e = m_e v^2/2$. بنا بر این

$$\Delta E_r = -\frac{1}{2m_e c^2} (-E) \left(\frac{1}{2} m_e v^2 \right) = \frac{1}{4} \frac{v^2}{c^2} E$$

بدین سان، تصحیح نسبیته در حدود $(v/c)^2$ برابر انرژی الکترون است. به عنوان مثال، در اتم هیدروژن v/c از مرتبه 10^{-2} است، بنابراین $\Delta E_r \sim 10^{-5} E$ یا تقریباً 0.00005 درصد E است و این مقدار در آزمایشگاه با فنون تجربی امروزی به آسانی قابل آشکار سازی است.

۱۰.۱۴ جریان الکترونیکی

مثال شتابدهنده الکتروستاتیک که جریانی از ذرات را در طول لوله ای با سرعت عبور

می‌دهد و در بخش ۹.۱۴ مطالعه شد، موجب می‌شود در اینجا یک مفهوم مهم دیگر، یعنی جریان الکتریکی را تعریف کنیم. حرکت ذره‌های باردار یا یونها را جریان الکتریکی می‌نامند. این تعریف در مورد یونها هرشتا بدهنده، یونها را مربوط به محلول الکترولیتها، گازهای یونیده یا پلاسما، یا الکترونهای یک رسانای فلزی صادق است. برای اینکه جریان الکتریکی تولید شود، باید میدان الکتریکی برقرار کرد تا بارها را در راستای کاملاً معینی به حرکت درآورد.

شدت جریان الکتریکی مقدار باری است که در واحد زمان از مقطع محل عبور جریان، مانند لوله یک شتا بدهنده یا سیم فلزی، می‌گذرد. بدین طریق، اگر در مدت زمان t ، تعداد N ذره باردار، هر ذره با بار q ، از مقطع محیط رسانا بگذرند، بار الکتریکی کلی که می‌گذرد برابر $Q = Nq$ و شدت جریان الکتریکی برابر است با

$$I = \frac{Nq}{t} = \frac{Q}{t} \quad (۴۱.۱۴)$$

در واقع، از معادله (۴۱.۱۴) میانگین شدت جریان در زمان t به دست می‌آید، مقدار لحظه‌ای جریان برابر است با

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (۴۲.۱۴)$$

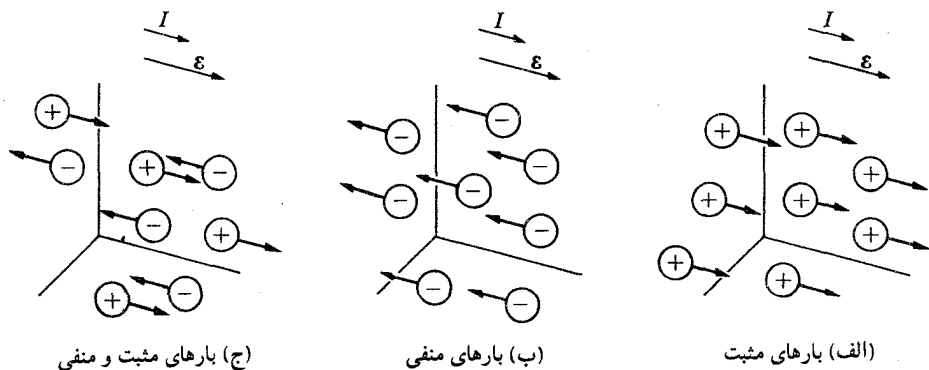
شدت جریان را بر حسب کولن بر ثانیه یا CS^{-1} بیان می‌کنند. این یکا به افتخار فیزیکدان فرانسوی آندره آمپر (۱۱۵۴-۱۲۱۵/۱۷۷۵-۱۸۳۶)، آمپر نامیده می‌شود و آن را با علامت اختصاری A نشان می‌دهند.

به‌طور قراردادی سوی جریان الکتریکی را سوی حرکت بارهای الکتریکی مثبت می‌گیرند. سوی جریان با سوی میدان الکتریکی اعمال شده یا افت پتانسیلی که حرکت ذرات باردار را موجب می‌شود یکی است (شکل ۲۹.۱۴ الف). بنابراین، اگر جریانی از عبور بارهای الکتریکی منفی، مانند الکترونها، به وجود آید جهت جریان در خلاف جهت حرکت واقعی الکترونهاست (شکل ۲۹.۱۴ ب).

حفظ و نگهداری جریان الکتریکی به انرژی نیاز دارد، زیرا یونها متحرک در میدان الکتریکی شتاب می‌گیرند. فرض کنیم در طول زمان t ، N یون، هر یون با بار الکتریکی q ، از اختلاف پتانسیل V می‌گذرد. هر یون به اندازه qV انرژی می‌گیرد. انرژی کل کسب شده به وسیله یونها برابر می‌شود با $NgV = QV$. در این صورت انرژی در واحد زمان یا توان لازم برای نگهداری این جریان برابر است با

$$P = \frac{QV}{t} = VI \quad (۴۳.۱۴)$$

به‌عنوان مثال، توان لازم برای به‌کار انداختن شتا بدهنده نام برده شده در بخش پیش از این رابطه محاسبه می‌شود. این رابطه همچنین آهنگ انتقال انرژی به هدف شتا بدهنده



شکل ۲۹.۱۴ حرکت یونهای منفی و مثبت برای میدان الکتریکی E یک جریان الکتریکی I تولید می کند.

و در نتیجه آهنگ تخلیه انرژی از هدف به کم کم خنک کننده را به دست می دهد. بنا بر این معادله (۴۳.۱۴) اعتبار عام دارد و توان لازم برای نگهداری شدت جریان I بین اختلاف پتانسیل V را که بین هر دو نقطه از یک محیط رسانا با سرعت ثابت تعیین می کند. از معادله (۴۳.۱۴) پیدا است که

$$\text{وات} = \frac{\text{ژول}}{\text{ثانیه}} = \frac{\text{کولن}}{\text{ثانیه}} \times \frac{\text{ژول}}{\text{کولن}} = \text{آمپر} \times \text{ولت}$$

بنا بر این یکاها سازگار و صحیح اند.

۱۱.۱۴ دوقطبی الکتریکی

یکی از جالبترین آرایش بارها، دوقطبی الکتریکی است. دوقطبی الکتریکی از دو بار الکتریکی برابر و ناهم نام $+q$ و $-q$ که با فاصله خیلی کم a از یکدیگر جدا می شوند تشکیل شده است (شکل ۳۰.۱۴).

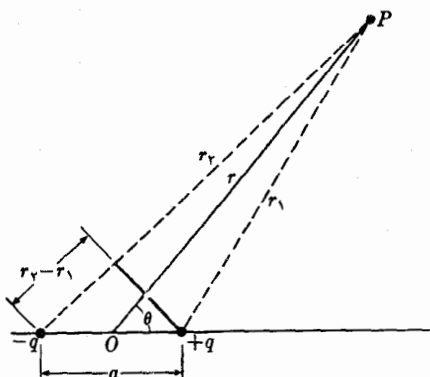
p^* گشتاور الکتریکی دوقطبی با رابطه زیر تعریف می شود

$$p = qa \quad (۴۴.۱۴)$$

در این رابطه a جابجایی از بار منفی تا بار مثبت است. پتانسیل الکتریکی ناشی از دوقطبی در نقطه ای مانند P ، از معادله (۳۳.۱۴) به دست می آید و عبارت است از

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}$$

* توجه کنید، بنا به قرارداد نماد اندازه حرکت و گشتاور دوقطبی یکی است.



شکل ۳۰.۱۴

اگر فاصله a نسبت به r خیلی کوچک باشد، می توان نوشت

$$r_2 - r_1 = a \cos \theta \quad \text{و} \quad r_1 r_2 = r^2$$

در نتیجه به دست می آید

$$V = \frac{qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{یا} \quad V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (۴۵.۱۴)$$

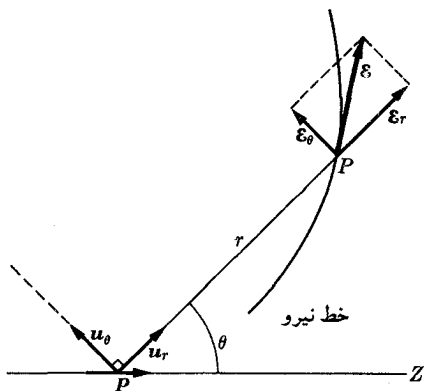
می توان معادله (۴۵.۱۴) را در مختصات قایم نوشت و با به کار بردن معادله (۲۹.۱۴) شدت میدان الکتریکی را به دست آورد (به مثال ۷.۱۳ مراجعه کنید). این محاسبه را به عنوان تمرین به عهده دانشجو می گذاریم. به جای آن مؤلفه های \mathbf{E} را با استفاده از معادله (۲۸.۱۴) در مختصات قطبی حساب می کنیم. برای به دست آوردن مؤلفه شعاعی میدان E_r ، می دانیم که $ds = dr$ است. در این صورت داریم

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (۴۶.۱۴)$$

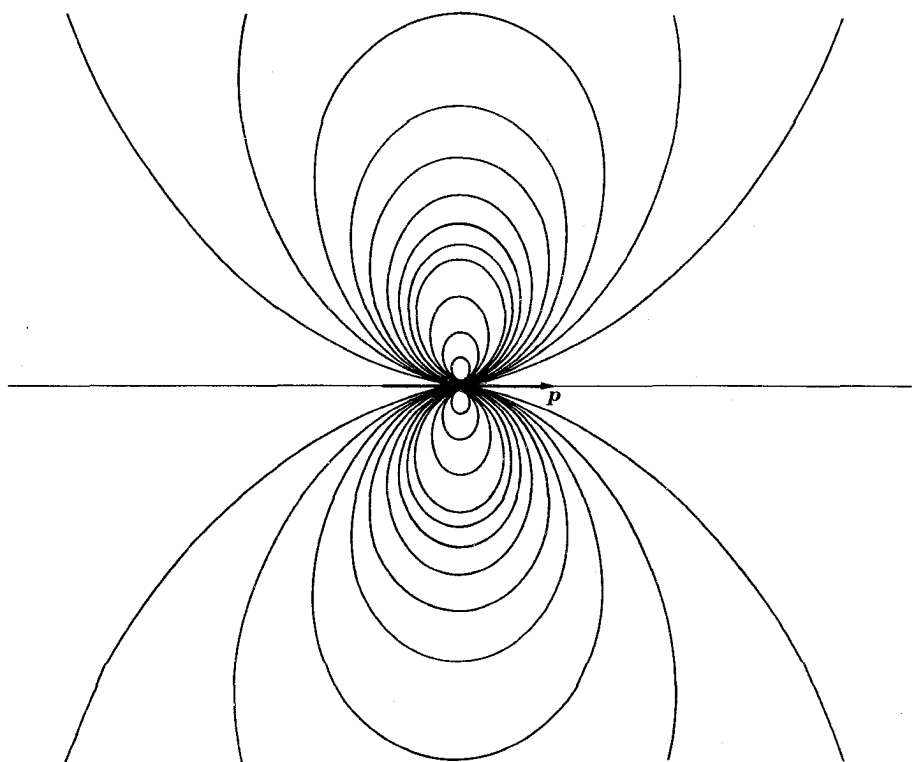
برای مؤلفه عرضی میدان E_θ ، رابطه $ds = r d\theta$ را به کار می بریم، نتیجه می شود

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (۴۷.۱۴)$$

این دو مؤلفه را در شکل ۳۱.۱۴ نشان داده ایم. شکل ۳۲.۱۴ خطهای نیرو را نشان می دهد. هر چند در دوقطبی الکتریکی، بارها برابر و ناهم نام اند و در نتیجه بار برابری بر صفر است، ولی فاصله کمی که دو بار را از یکدیگر جدا می کند برای تولید میدان الکتریکی غیر صفر کافی است.



شکل ۳۱.۱۴



شکل ۳۲.۱۴ خطهای نیروی میدان الکتریکی دو قطبی الکتریکی.

درحالت کلی، اگر چندین بار الکتریکی q_1, q_2, q_3, \dots در نقطه‌های P_1, P_2, P_3, \dots قرار داشته باشند، گشتاور دوقطبی الکتریکی توزیع بارها برابر است با

$$\mathbf{p} = q_1 \mathbf{r}_1 + q_2 \mathbf{r}_2 + q_3 \mathbf{r}_3 + \dots = \sum_i q_i \mathbf{r}_i$$

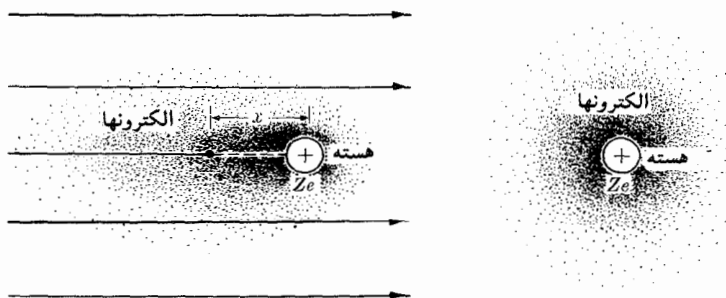
[این تعریف مطابق با معادله (۴۴.۱۴) است زیرا چون فقط دوبار الکتریکی برابر و ناهمنام وجود دارند، $\mathbf{p} = q\mathbf{r}_1 - q\mathbf{r}_2 = q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ است]. هرگاه محور Z را در راستای p در نظر بگیریم، رابطه فوق برای گشتاور دوقطبی الکتریکی چندین بار الکتریکی، به صورت زیر درمی آید

$$p = \sum_i q_i z_i = \sum_i q_i r_i \cos \theta_i \quad (۴۸.۱۴)$$

در اینجا r_i فاصله هر بار از مبدأ، θ_i زاویه‌ای است که r_i با محور Z می‌سازد و $z_i = r_i \cos \theta_i$ است.

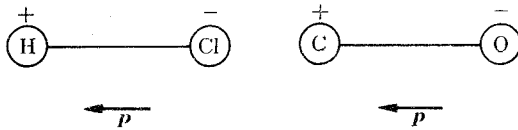
در اتمها، مرکز جرم الکترونها برهسته منطبق است، در نتیجه گشتاور دوقطبی الکتریکی میانگین اتم برابر صفر است (شکل ۳۳.۱۴ الف). ولی اگر اتم در میدان الکتریکی خارجی قرار گیرد، حرکت الکترونی به هم می‌خورد و مرکز جرم الکترونها به اندازه x از هسته فاصله می‌گیرد (شکل ۳۳.۱۴ ب). در این صورت اتم قطبیده می‌شود و به یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور p تبدیل می‌شود. این گشتاور با \mathbf{E} ، یعنی میدانی که به اتم وارد می‌شود، متناسب است.

از طرف دیگر مولکولها می‌توانند دارای گشتاور الکتریکی دائمی باشند. این چنین مولکولهایی را قطبی می‌نامند. به عنوان مثال، در مولکول HCl (شکل ۳۴.۱۴) الکترون اتم هیدروژن برای حرکت به دور اتم Cl وقت بیشتری صرف می‌کند تا به دور اتم H . بنابراین مرکز بارهای منفی بر مرکز بارهای مثبت منطبق نیست و مولکول دارای گشتاور دوقطبی است که جهت آن از اتم Cl به سوی اتم H است. از این رو می‌توان نوشت H^+Cl^- . گشتاور دوقطبی الکتریکی مولکول HCl برابر است با $p = 3.743 \times 10^{-30} \text{ C m}$.



ب) با میدان خارجی

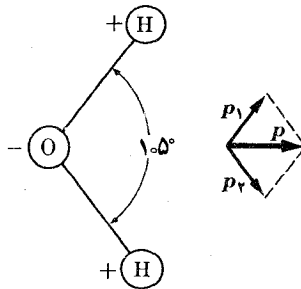
الف) بدون میدان خارجی



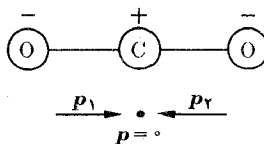
شکل ۳۴.۱۴ مولکولهای دواتی قطبی.

در مولکول CO عدم تقارن توزیع بارها خیلی جزئی است و گشتاور دوقطبی الکتریکی نسبتاً کوچک، در حدود $p = 0.4 \times 10^{-30} \text{ C m}$ است. اتم کربن در انتهای مثبت و اتم اکسیژن در انتهای منفی مولکول قرار دارد.

در مولکولی مانند H_2O ، که در آن زاویه بین دو پیوند $\text{H}-\text{O}$ کمی بیش از 90° است (شکل ۳۵.۱۴)، الکترونها می‌کشند در نزدیکی اتم اکسیژن قرار بگیرند، در نتیجه اتم اکسیژن نسبت به اتمهای هیدروژن کمی منفی است. بنابراین هر پیوند $\text{H}-\text{O}$ در به وجود آوردن گشتاور دوقطبی سهمی به عهده دارد که بر ایند گشتاورها، به سبب تقارن، در امتداد محور مولکول است و مقدار آن برابر است با $6.2 \times 10^{-30} \text{ C m}$. برعکس، در مولکول CO_2 ، تمام اتمها در یک خط راست قرار دارند (شکل ۳۶.۱۴) و به سبب تقارن، گشتاور دوقطبی الکتریکی بر ایند برابر صفر است. بدین طریق گشتاورهای دوقطبی الکتریکی می‌توانند اطلاعات مفیدی از ساختار مولکول فراهم کنند. در جدول ۱.۱۴ مقدار p برای چند مولکول قطبی داده شده است.



شکل ۳۵.۱۴ دوقطبی الکتریکی مولکول H_2O .



شکل ۳۶.۱۴ مولکول CO_2 گشتاور دوقطبی الکتریکی ندارد.

هرگاه دوقطبی الکتریکی در میدان الکتریکی قرار گیرد، نیرویی روی هر يك از بارهای الکتریکی دوقطبی اثر می کند (شکل ۱۴-۳۷). نیروی برابری است با

$$F = qE - qE' = q(E - E')$$

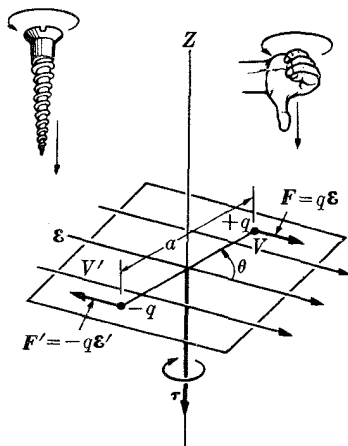
مورد خاصی را در نظر می گیریم که میدان الکتریکی در راستای محور X و دوقطبی الکتریکی در سوی موازی آن قرار گرفته است. اگر تنها بزرگیها را در نظر بگیریم، داریم $E - E' = (dE/dx)a$ و در نتیجه $F = p(dE/dx)$. این نتیجه نشان می دهد که هرگاه يك دوقطبی الکتریکی در راستای موازی میدان قرار گیرد می کوشد در راستای افزایش میدان حرکت کند. در صورتی که دوقطبی الکتریکی در سوی مخالف میدان قرار گیرد نتیجه عکس به دست می آید. دانشجو توجه دارد که اگر میدان الکتریکی یکنواخت باشد، برابری نیروهای وارد بر دوقطبی الکتریکی برابر صفر است. انرژی پتانسیل دوقطبی الکتریکی برابر است با

$$E_p = qV - qV' = q(V - V') = -qa \left(-\frac{V - V'}{a} \right)$$

جدول ۱۰۱۴ گشتاور دوقطبی الکتریکی چند مولکول قطبی*

p (بر حسب C m)	مولکول
3.34×10^{-30}	HCl
2.60×10^{-30}	HBr
1.26×10^{-30}	HI
0.40×10^{-30}	CO
6.2×10^{-30}	H ₂ O
5.3×10^{-30}	SH ₂
5.3×10^{-30}	SO ₂
5.0×10^{-30}	NH ₃
3.66×10^{-30}	C ₂ H ₅ OH

* مولکولهایی که گشتاور دوقطبی الکتریکی شان صفر است عبارتند از CH₄، H₂، CO₂ (متان)، C₂H₆ (اتان) و CCl₄ (کربن تتراکلرید).



شکل ۳۷.۱۴ دو قطبی الکتریکی در میدان الکتریکی خارجی.

و با استفاده از معادله (۳۱.۱۴) درمی‌یابیم که هر گاه θ زاویه بین دو قطبی و میدان الکتریکی باشد، جمله آخر درست برابر با $E_a = E \cos \theta$ ، یعنی مؤلفه میدان E روی راستای موازی \mathbf{a} است. بنا بر این $E_p = -qaE_a$ ، یا

$$E_p = -pE \cos \theta = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (۴۹.۱۴)$$

به‌ازای $\theta = 0$ انرژی پتانسیل کمینه است، و این امر نشان می‌دهد که، دو قطبی هنگامی در حال ترازمنندی است که موازی با میدان قرار گیرد. اگر از اختلاف جزئی بین \mathbf{E}' و \mathbf{E} چشم‌پوشیم، نیروهای وارد بر بارهای تشکیل‌دهنده دو قطبی یعنی $+q\mathbf{E}$ و $-q\mathbf{E}'$ ، ناگزیر یک جفت تشکیل می‌دهند. گشتاور نیروی این جفت بنا به معادله (۱۳.۴) برابر است با

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{a} \times (q\mathbf{E}) = (qa) \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (۵۰.۱۴)$$

با توجه به این رابطه و همچنین شکل ۳۷.۱۴، مشاهده می‌شود که گشتاور نیروی میدان الکتریکی می‌کوشد دو قطبی را در راستای موازی میدان قرار دهد. بزرگی گشتاور نیرو برابر $\tau = pE \sin \theta$ و راستای آن مطابق شکل ۳۷.۱۴ است. اگر معادله (۲۶.۸)، $\tau_z = -\partial E_p / \partial \theta$ را به‌کار ببریم، از معادله (۴۹.۱۴) به‌دست می‌آید $\tau_z = -pE \sin \theta$ که اختلاف علامت بین τ و τ_z ناشی از این است که τ بزرگی گشتاور نیرو است در صورتی که τ_z تصویر این گشتاور روی راستای Z است. که در آن Z در راستای عمود بر صفحه‌ای است که زاویه θ را در آن اندازه می‌گیرند و سوی آن در سوی پیشروی پیچ راستگردی است که در سوی افزایش θ می‌چرخد. علامت منفی در τ_z مبین این است که گشتاور نیرو سعی

دارد از اندازه زاویه θ بکاهد.

خواص دوقطبی واقع در میدان الکتریکی کاربردهای بسیار مهمی دارد. به عنوان مثال، چنانکه در توضیح شکل ۱۹.۱۴ هنگام بررسی الکترولیز اشاره کردیم، میدان الکتریکی هر یون در داخل محلول، مولکولهای حلال اطراف خود را قطبی می کند و این مولکولها مطابق آنچه شکل ۳۸.۱۴ نشان می دهد قرار می گیرند. مولکولهایی که بدین طریق جهت می گیرند کمابیش به یون متصل می شوند و جرم مؤثر آن را افزایش و بار مؤثر آن را کاهش می دهند. از این طریق یون تا اندازه ای در پرده استتار مولکولها باقی می ماند. اثر نهایی این پدیده کاهش تحرك یونها در میدان خارجی است. همچنین هرگاه گاز یا آبگونی که مولکولهای دوقطبیهای دائمی آن در میدان الکتریکی قرار گیرد، مولکولها بر اثر گشتاورهای ناشی از میدان الکتریکی، می کوشند در خط موازی دوقطبیهای خود قرار گیرند. در این صورت می گویند جسم قطبی شده است (به بخش ۵.۱۶ مراجعه کنید).

مثال ۱۱.۱۴ میدان الکتریکی دوقطبی الکتریکی را به صورت برداری بنویسید.

حل: از شکل ۳۱.۱۴ داریم

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}_r E_r + \mathbf{u}_\theta E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\mathbf{u}_r 2p \cos \theta + \mathbf{u}_\theta p \sin \theta)$$

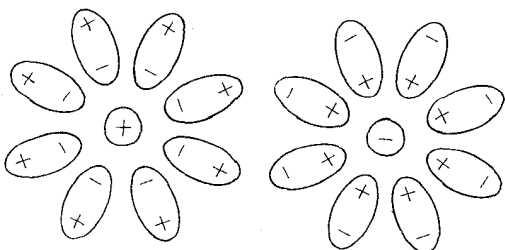
ولی از همین شکل پیداست که

$$p = p(\mathbf{u}_r \cos \theta - \mathbf{u}_\theta \sin \theta)$$

از این رابطه برای حذف جمله $p \sin \theta$ در رابطه \mathbf{E} استفاده می کنیم، به دست می آید

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\mathbf{u}_r p \cos \theta - p)$$

چون $p \cos \theta = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p}$ است بنا بر این داریم



شکل ۳۸.۱۴ اثر قطبش یون در محلول.

$$E = \frac{3\mathbf{u}_r(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

که صورت برداری میدان الکتریکی دوقطبی است.

مثال ۱۲-۱۴ انرژی برهم کنش بین دو دوقطبی را حساب کنید. نتیجه را جهت برآورد برهم کنش بین دو مولکول آب به کار ببرید. همچنین دوائرهای سمتگیری نسبی مولکولها بحث کنید.

حل: در مثال ۱۱-۱۴ میدان حاصل از دوقطبی را در نقطه‌ای به فاصله r پیدا کردیم. اگر گشتاور دوقطبی اول را با \mathbf{p}_1 نشان دهیم، داریم

$$E_1 = \frac{3\mathbf{u}_r(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p}_1) - \mathbf{p}_1}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

اگر گشتاور دوقطبی دوم را با \mathbf{p}_2 نشان دهیم، با استفاده از معادله (۴۹-۱۴) انرژی برهم کنش بین دو دوقطبی برابر می‌شود با

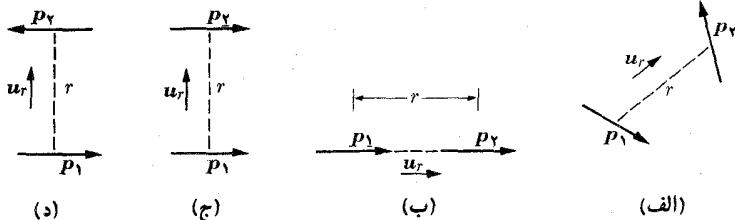
$$E_{p_1, p_2} = -\mathbf{p}_2 \cdot E_1 = -\frac{3(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p}_1)(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p}_2) - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (۵۱-۱۴)$$

از این رابطه چند نتیجه مهم به دست می‌آید. ابتدا اینکه انرژی برهم کنش، E_{p_1, p_2} ، بین دو دوقطبی متقارن است، زیرا با تعویض جای \mathbf{p}_1 با \mathbf{p}_2 تغییری در رابطه (۵۱-۱۴) به وجود نمی‌آید. البته این نتیجه قابل پیش بینی بود. ثانیاً برهم کنش بین دو دوقطبی مرکزی نیست زیرا به زوایایی که بردار مکان \mathbf{r} یا بردار یکی \mathbf{u}_r با \mathbf{p}_1 و \mathbf{p}_2 می‌سازند، بستگی دارد. بنا بر این در حرکت بر اثر برهم کنش دوقطبی-دوقطبی، اندازه حرکت (تکانه) زاویه‌ای مداری دوقطبیها پایسته نیست. نتیجه دیگر این است که نیروی بین دو دوقطبی در راستای خطی که آن دو را بهم وصل می‌کند نیست (مگر در بعضی وضعهای خاص). بالاخره نتیجه دیگر اینکه چرن انرژی پتانسیل بین دو دوقطبی با r^{-3} تغییر می‌کند، نیروی بین آنها که گرادیان انرژی پتانسیل است متناسب با r^{-4} تغییر می‌کند، بنا بر این برهم کنش بین دو دوقطبی با افزایش فاصله خیلی سریعتر از برهم کنش بین دو بار الکتریکی کاهش می‌یابد.

شکل ۳۹-۱۴ وضع هندسی معادله (۵۱-۱۴) را نشان می‌دهد. در این شکل (الف) مربوط به حالت کلی است. در (ب) دو دوقطبی در راستای خط واصل خود قرار دارند. در نتیجه

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = p_1 p_2, \quad \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p}_1 = p_1 \quad \text{و} \quad \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p}_2 = p_2$$

به گونه‌ای که داریم



شکل ۳۹.۱۴ برهم کنش بین دو دوقطبی الکتریکی.

$$E_{p_1, p_2} = - \frac{2 p_1 p_2}{4 \pi \epsilon_0 r^3}$$

به سبب علامت منفی، دو دوقطبی همدیگر را جذب می کنند. در (ج) مجدداً $p_1 \cdot p_2 = p_1 p_2$ ولی $u_r \cdot p_1 = 0$ و $u_r \cdot p_2 = 0$ است، به گونه ای که داریم

$$E_{p_1, p_2} = + \frac{p_1 p_2}{4 \pi \epsilon_0 r^3}$$

علامت مثبت در جلو رابطه نشان می دهد که دوقطیها یکدیگر را دفع می کنند. بالاخره در (د) داریم $p_1 \cdot p_2 = - p_1 p_2$ ، و به دست می آید

$$E_{p_1, p_2} = - \frac{p_1 p_2}{4 \pi \epsilon_0 r^3}$$

یعنی دو دوقطبی یکدیگر را جذب می کنند. این نتایج با تصویر فیزیکی مسئله کاملاً تطبیق می کنند.

برهم کنش بین دو دوقطبی از اهمیت ویژه ای برخوردار است، زیرا نیروهای بین مولکولی بیشتر از این نوع برهم کنش ناشی می شوند. دو مولکول آب را در وضع نسبی شکل ۳۹.۱۴ ب، در نظر می گیریم که در فاصله طبیعی شان در حالت آبگون، یعنی در حدود $3.1 \times 10^{-10} \text{ m}$ از یکدیگر قرار دارند. گشتاور دوقطبی الکتریکی آنها برابر است با $6.1 \times 10^{-30} \text{ C m}$. با این مقادیر، انرژی پتانسیل برهم کنش آنها چنین محاسبه می شود

$$E_{p_1, p_2} = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times (6.1 \times 10^{-30})^2}{(3.1 \times 10^{-10})^3} = 2.22 \times 10^{-20} \text{ J}$$

این مقدار، ۱۰ مرتبه از انرژی برهم کنش مذکور در بخش ۹.۱۳، که از روی گرمای تبخیر برآورد کرده بودیم، بیشتر است. دانشجو باید در نظر داشته باشد نتیجه ای که اینجا به دست آوردیم مربوط به انرژی لحظه ای بین دو مولکول آب در وضع نسبی شکل ۳۹.۱۴ ب است. ولی چون مولکولهای آب پیوسته در حرکت اند، وضع نسبی آنها

دائماً تغییر می‌کند. بنابراین، برای به دست آوردن $E_{p, 12}$ باید میانگین معادله (۵۱.۱۴) را روی تمام وضعهای نسبی ممکن به دست آورد. چنین محاسبه‌ای سازگاری بهتری را نتیجه خواهد داد.

به دانشجو توصیه می‌کنیم که نتیجه بالا را که مربوط به برهم کنش الکتریکی $E_{p, 12}$ بین دو مولکول آب بود با برهم کنش گرانشی مولکولهای آب در همین وضع نسبی مقایسه کند.

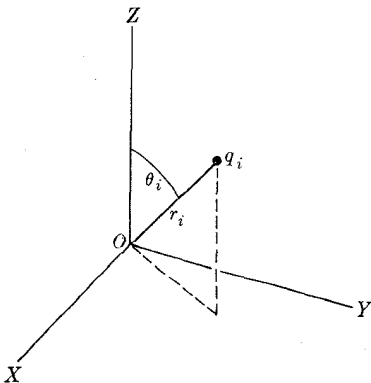
۱۲.۱۴ چندقطبهای الکتریکی

تعریف گشتاورهای الکتریکی از مرتبه بالاتر، یا چندقطبی، امکانپذیر است. به عنوان مثال، توزیع بار شکل ۴۰.۱۴، يك چهارقطبی الکتریکی تشکیل می‌دهد. توجه داشته باشید که بار کل برابر صفر است، و معادله (۴۸.۱۴) نشان می‌دهد که گشتاور دوقطبی الکتریکی نیز برابر صفر است. در اینجا تعریف کلی گشتاور چهارقطبی الکتریکی کار آسانی نیست. با وجود این، می‌توان گفت گشتاور چهارقطبی الکتریکی يك توزیع بار نسبت به يك محور تقارن، مانند Z ، با رابطه زیر تعریف می‌شود

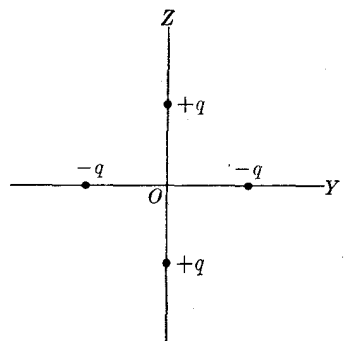
$$Q = \frac{1}{4} \sum_i q_i r_i^2 (3 \cos^2 \theta_i - 1) \quad (52.14)$$

که در آن r_i فاصله بار الکتریکی i ام از مرکز و θ_i زاویه‌ای است که بار مذکور با محور می‌سازد (شکل ۴۱.۱۴). با توجه به اینکه $z_i = r_i \cos \theta_i$ است، معادله (۵۲.۱۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$Q = \frac{1}{4} \sum_i q_i (3z_i^2 - r_i^2) \quad (53.14)$$



شکل ۴۱.۱۴



شکل ۴۰.۱۴ چهارقطبی الکتریکی

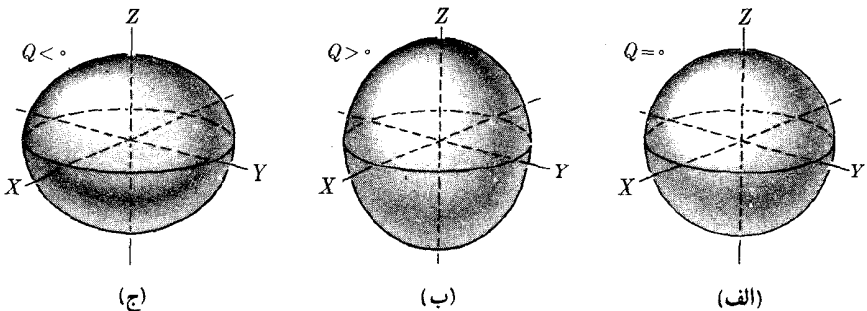
گشتاور چهارقطبی الکتریکی، برای توزیع کروی برابر صفر، برای توزیع کشیده یا دوکی شکل مثبت، و برای توزیع پهن یا پخت منفی است (شکل ۴۲.۱۴). بنابراین، گشتاور چهارقطبی الکتریکی نشانی از میزان انحراف توزیع بارها از تقارن کروی است. به عنوان مثال، در بخش ۷.۱۴ هسته‌ها آنها را کروی فرض کردیم. ولی اندازه‌گیره‌های دقیقتر نشان می‌دهند که بعضی هسته‌ها گشتاور چهارقطبی الکتریکی نسبتاً بزرگی دارند. این امر چنین تعبیر شده است که چنین هسته‌هایی تغییرشکل زیادی یافته‌اند، و از این رو میدان الکتریکی که این هسته‌ها تولید می‌کنند با میدان الکتریکی بار نقطه‌ای اختلاف دارد. این امر به نوبه خود در انرژی حرکتی الکترونها اثر می‌گذارد.

یادآوری می‌کنیم که پتانسیل بار نقطه‌ای متناسب با عکس فاصله یا r^{-1} و میدان آن متناسب با عکس مجذور فاصله یا r^{-2} کاهش می‌یابد. همچنین دیدیم (بخش ۱۱.۱۴) که در دو قطبی پتانسیل متناسب با عکس مجذور فاصله (r^{-2}) و میدان متناسب با r^{-3} تغییر می‌کند. با روش مشابهی می‌توان ثابت کرد که برای چهارقطبی الکتریکی، پتانسیل متناسب با r^{-3} و میدان متناسب با r^{-4} تغییر می‌کند. نتایج مشابهی نیز برای چند قطبیه‌های بالاتر به دست می‌آیند بنابراین نتیجه می‌گیریم که هر چه تعداد قطبهای چندقطبی بیشتر باشد، گستره اثر آن کمتر است.

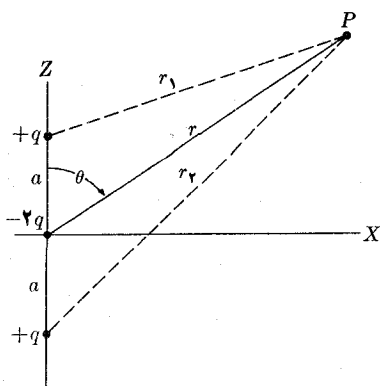
مثال ۱۳.۱۴ پتانسیل آرایش بارهای الکتریکی شکل ۴۳.۱۴ را که چهارقطبی الکتریکی خطی نام دارد حساب کنید.

حل: بار کل دستگاه برابر صفر است. گشتاور دو قطبی الکتریکی نیز برابر صفر است، زیرا بنا به معادله (۴۸.۱۴) داریم $0 = q(-a) + q(0) - 2q(0) + q(+a) = p$. با وجود این میدان الکتریکی مساوی صفر نیست. پتانسیل در نقطه p برابر است با

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{2q}{r} + \frac{q}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{2}{r} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (54.14)$$



شکل ۴۲.۱۴ چهارقطبی الکتریکی توزیع بیضیوار بار.



شکل ۴۳.۱۴

از شکل پیدا است که

$$r_1 = (r^2 - 2ar \cos \theta + a^2)^{1/2}$$

با فرض اینکه a در مقابل r خیلی کوچک است، می توان نوشت

$$r_1 = r \left(1 - \frac{2a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right)^{1/2}$$

و

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-1/2} \quad (۵۵.۱۴)$$

اکنون با استفاده از بسط دو جمله‌ای، معادله (۲۲.پ) تا جمله سوم، با $n = -1/2$ ، به دست می آوریم

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$$

که در این مثال $x = -2a \cos \theta / r + a^2 / r^2$ است. در این صورت داریم

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{2a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(-\frac{2a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right)^2 + \dots \right]$$

با بسط گروه و حذف جمله‌هایی که در مخرج آنها توان r از سه بالاتر است، به دست می آید

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{a \cos \theta}{r^2} + \frac{a^2}{2r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (۵۶.۱۴)$$

به همین ترتیب، $r_2 = (r^2 + 2ar \cos \theta + a^2)^{1/2}$ است، در نتیجه می توان نوشت

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{a \cos \theta}{r^2} + \frac{a^2}{2r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (57.14)$$

با قراردادن نتایج (56.14) و (57.14) در معادله (54.14) و پس از ساده کردن، برای پتانسیل به دست می آوریم

$$V = \frac{qa^2(3 \cos^2 \theta - 1)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

برای به دست آوردن گشتاور چهارقطبی الکتریکی این توزیع بار، معادله (52.14) را به کار می بریم

$$Q = \frac{1}{4} \{q(3a^2 - a^2) - 2q(0) + q[3(-a)^2 - a^2]\} = 2qa^2$$

بنابراین

$$V = \frac{Q(3 \cos^2 \theta - 1)}{2(4\pi\epsilon_0) r^3} \quad (58.14)$$

این رابطه پتانسیل الکتریکی چهارقطبی الکتریکی خطی را به دست می دهد. مانند آنچه برای دوقطبی الکتریکی انجام دادیم، می توانیم با استفاده از معادله (48.14) میدان الکتریکی آرایش فوق را نیز به دست آوریم.

فهرست منابع

1. «Resource Letter ECAN-1 on the Electronic Charge and Avogadro's Number,» D. L. Anderson, *Am. J. Phys.* 34, 2 (1966),
2. «Nonuniform Electric Fields,» H. Pohl; *Sci. Am.*, December 1960, page 106.
3. «Robert Andrews Millikan,» E. Watson; *The Physics Teacher* 2, 7 (1964).
4. «Rutherford and His α -Particles,» T. Osgood and H. Hirst; *Am. J. Phys.* 32, 681 (1964).
5. «The Birth of the Nuclear Atom,» E. Da C. Andrade; *Sci. Am.*, November 1965, page 93.
6. «Discovery of the Electron.» G. Thomson; *Physics Today*, August 1956, page 19.
7. «Electron Theory: Description and Analogy,» J. Oppenheimer;

- Physics Today*, July 1957, page 12.
8. «Classical Description of Charged Particles,» F. Rohrlich; *Physics Today*, March 1962, page 19.
 9. «The Linear Accelerator,» W. Panofsky; *Sci. Am.*, October 1954, Page 40.
 10. «The Two-Mile Electron Accelerator,» E. Ginxton and W. Kirk; *Sci. Am.*, November 1961. page 49.
 11. *The Development of the Concept of Electric Charge*, D. Roller and D. H. D. Foller. Cambridge, Mass.: Harvard University Press' 1945.
 12. *The Discovery of the Electron*, D. Anderson. Princeton. N. J.: Momentum Books, D. Van Nostrand, 1964,
 13. *Great Experiments in Physics*, Morris Shamos, editor. New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1959; Chapter 5, C. Coulomb; Chapter 10, M. Faraday; Chapter 14, J. J. Thomson; Chapter 18, R. A. Millikan.
 14. *The Feynman Lectures on Physics*, volume II, R. Feynman, R. Leighton. and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapters 4, 6, 7, and, 8.
 15. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963; page 97. Coulomb; page 387, Gilbert; page 408, Coulomb; page 420, Galvani; page 465; Ohm; page 583, Thomson.
 16. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison - Wesley, 1958, Chapters 26, 27, 28, and 34.
۱۷. ریتس، جسی. آر. [و] اف. جسی. میلفورد، اصول تئوری الکترومغناطیسی، ترجمه جلال صمیمی [و] ناصرعلیزاده قمصری، ج ۱، ۲، مشهد، مؤسسه چاپ و انتشارات دانشگاه مشهد، ۱۳۵۹، ج ۲. (ویرایش دوم انگلیسی این کتاب در مرکز نشر دانشگاهی در دست ترجمه است.)

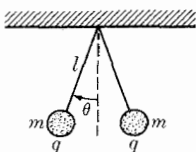
مسئله‌ها

- ۱۰۱۴ نیروی دافعه بین دو پروتون را در مولکول هیدروژن حساب کنید. فاصله بین دو پروتون $m \times 10^{-10} \times 7.4$ ره است. این نیرو را با جاذبه گرانشی بین آنها مقایسه کنید.
- ۲۰۱۴ نیروی جاذبه الکتریکی بین پروتون و الکترون را در داخل اتم هیدروژن حساب

کنید. فرض کنید الکترون مدار دایره‌ای به شعاع $m \cdot 10^{-10} \times 5300$ طی می‌کند. این نیرو را با نیروی جاذبه گرانشی بین آنها مقایسه کنید.

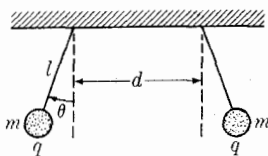
۳۰۱۴ نیروی دافعه الکتروستاتیک دو الکترون را با نیروی جاذبه گرانشی بین آنها از فاصله‌های یکسان مقایسه کنید. همین مقایسه را در مورد دو پروتون نیز انجام دهید.

۴۰۱۴ دو گوی چوب پنبه‌ای مشابه دارای جرم یکسان m و بار الکتریکی برابر q اند (شکل ۴۴.۱۴). این گویها را به نخهایی به طول l وصل و از يك نقطه آویزان می‌کنیم. در حالت تعادل، θ زاویه بین نخها و راستای قائم را پیدا کنید.



شکل ۴۴.۱۴

۵۰۱۴ مسئله قبل را در حالتی که نخها از دو نقطه به فاصله d از یکدیگر آویخته باشند (شکل ۴۵.۱۴) حل کنید. با استفاده از این وسیله، چگونه می‌توان با تعیین زاویه θ به ازای اندازه‌های مختلف d قانون عکس مجذور را تحقیق کرد؟



شکل ۴۵.۱۴

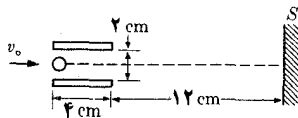
۶۰۱۴ بار الکتریکی ذره‌ای به جرم $2g$ چقدر باشد تا در آزمایشگاهی که در آن میدان الکتروستاتیک 500 NC^{-1} در راستای قائم و به سوی پایین است در حال ترازمندی بماند؟

۷۰۱۴ در يك اسیلوسکوپ پرتو کاتودی، میدان الکتریکی بین دو صفحه منحنی کننده الکترونها 300000 NC^{-1} است. (الف) در این ناحیه چه نیرویی روی يك الکترون اثر می‌کند؟ (ب) شتاب الکترونی که چنین میدانی بر آن وارد می‌شود چقدر است؟ این شتاب را با شتاب گرانی مقایسه کنید.

۸۰۱۴ بار الکتریکی $C \cdot 10^{-8} \times 25$ در میدان الکتریکی قائم و به سوی بالا به شدت $5 \times 10^4 \text{ NC}^{-1}$ قرار دارد. کار نیروی الکتریکی روی این بار هنگامی که (الف) 45 cm به سمت راست، (ب) 80 cm به سمت پایین، (ج) 260 cm در راستایی با زاویه 45° بالای سطح افقی جابجا می‌شود، چقدر است.

۹.۱۴ میدان الکتریکی یکنواختی بین دو صفحه موازی حامل بارهای برابر ولی با علامت مخالف، برقرار است. فاصله بین دو صفحه ۲ cm است. يك الكترون، که در آغاز بیحرکت است، از صفحه‌ای که دارای بار الکتریکی منفی است می‌شود و بعد از 1.5×10^{-8} s به صفحه مقابل برخورد می‌کند. (الف) میدان الکتریکی بین دو صفحه را حساب کنید. (ب) سرعت الكترون هنگام برخورد با صفحه دوم چقدر است؟

۱۰.۱۴ در شکل ۴۶.۱۴ الکترونی با سرعت آغازی $2 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ در راستای محوری که از وسط صفحه‌های لوله پرتو کاتودی می‌گذرد پرتاب می‌شود. میدان الکتریکی بین دو صفحه، یکنواخت به‌سوی بالا و با شدت 200000 N C^{-1} است. هنگامی که الكترون به انتهای صفحه‌ها می‌رسد چقدر از راستای محور به سمت پایین منحرف شده است؟ (ب) هنگام خروج الكترون از میان صفحه‌ها مسیر آن چه زاویه‌ای با راستای محور می‌سازد؟ (ج) الكترون در چه فاصله‌ای از محور به صفحه فلزورسان برخورد می‌کند؟



شکل ۴۶.۱۴

۱۱.۱۴ الکترونی به داخل يك میدان الکتریکی که در راستای قائم و به‌سوی پایین و دارای شدت 5000 N C^{-1} است پرتاب می‌شود. سرعت آغازی الكترون 10^6 m s^{-1} در راستای 30° بالای سطح افقی است. (الف) زمانی را که طول می‌کشد تا الكترون به حداکثر ارتفاع خود برسد حساب کنید. (ب) ارتفاع بیشینه‌ای که الكترون در راستای قائم بالای ارتفاع اولیه خود می‌رسد چقدر است؟ (ج) هنگامی که الكترون به ارتفاع اولیه خود بر می‌گردد چه مسافتی را به‌طور افقی پیموده است؟ (د) مسیر حرکت الكترون را رسم کنید.

۱۲.۱۴ يك قطره روغن به جرم $3 \times 10^{-14} \text{ kg}$ و شعاع $2 \times 10^{-6} \text{ m}$ دارای 10 الکترون اضافی است. سرعت نهایی قطره هنگامی که (الف) وارد ناحیه‌ای می‌شود که فاقد میدان الکتریکی است (ب) داخل میدان الکتریکی در راستای قائم به‌سوی پایین و به شدت $3 \times 10^5 \text{ N C}^{-1}$ می‌شود، چقدر است؟ و شکسانی هوا برابر است با $1.8 \times 10^{-5} \text{ N s m}^{-2}$ نیروی شناوری را نادیده بگیرید.

۱۳.۱۴ در دستگاه میلیکان سقوط يك قطره روغن باردار به اندازه 1 mm در غیاب میدان الکتریکی 27.4 s طول می‌کشد. همین قطره را می‌توان در يك میدان الکتریکی به شدت $2.37 \times 10^4 \text{ N C}^{-1}$ ساکن نگه داشت. تعداد الکترونهاي اضافی این قطره چقدر است؟ و شکسانی هوا برابر است با $1.8 \times 10^{-5} \text{ N s m}^{-2}$ چگالی روغن 800 kg m^{-3}

و چگالی هوا 1.3 kg m^{-3} است.

۱۴.۱۴ يك قطرهٔ روغن باردار در غیاب میدان الکتریکی فاصلهٔ 4 mm را در مدت 160 s با سرعت یکنواخت سقوط می‌کند. چگالی روغن 800 kg m^{-3} و از آن هوا 1.3 kg m^{-3} و ضریب وشکسانی هوا برابر $10^{-5} \times 180 \text{ N s m}^{-2}$ است. (الف) شعاع و جرم قطره را حساب کنید. (ب) اگر روغن دارای يك واحد بار الکتریکی اضافی باشد و در میدان الکتریکی 10^5 NC^{-1} قرار گیرد چه نسبتی بین نیروی الکتریکی وارد بر قطره و وزن آن وجود دارد؟

۱۵.۱۴ هنگامی که قطرهٔ روغن مسئلهٔ ۱۴.۱۴ در میدان الکتریکی ثابت 10^5 NC^{-1} قرار گرفت، در چند مورد زمان صرف شده برای جابجایی 4 mm به سمت بالا یادداشت شده و این نتایج به دست آمده‌اند: 40.65 ، 25.46 ، 18.53 ، 1200 ، و 7885 s . (الف) سرعت سقوط آن را تحت تأثیر نیروی گرانی، (ب) سرعت صعود آن را در هر مورد، (ج) مجموع سرعت‌های قسمت (الف) و هر مورد قسمت (ب) را حساب کنید. (د) نشان دهید که حاصل جمع‌های قسمت (ج) مضرب‌های درستی از عدد معینی هستند و این نتیجه را تعبیر کنید. (ه) از این داده‌ها مقدار بار الکترون را حساب کنید.

۱۶.۱۴ دوبار نقطه‌ای $5 \mu\text{C}$ و $10 \mu\text{C}$ — به فاصلهٔ 1 mm از یکدیگر قرار دارند. (الف) بزرگی، راستا و سوی میدان را در نقطه‌ای به فاصلهٔ 6 m عمده از بار اول و 8 m از بار دوم پیدا کنید. (ب) در کجا میدان الکتریکی ناشی از این دو بار برابر صفر است.

۱۷.۱۴ در دستگاهی که به منظور اندازه‌گیری بار الکترون، e ، با روش میلیکان ساخته شده است، برای ساکن نگه داشتن قطرهٔ روغن، میدانی به شدت 10^4 NC^{-1} لازم است. اگر فاصلهٔ صفحات از یکدیگر 1.5 cm باشد، چه اختلاف پتانسیلی باید بین آنها برقرار کرد؟

۱۸.۱۴ سه بار مثبت $2 \times 10^{-7} \text{ C}$ ، $1 \times 10^{-7} \text{ C}$ و $3 \times 10^{-7} \text{ C}$ بترتیب به فاصلهٔ 10 m از یکدیگر روی يك خط مستقیم قرار دارند. (الف) نیروی برابند وارد بر هر بار، ناشی از دو بار دیگر را حساب کنید. (ب) انرژی پتانسیل هر بار، ناشی از حضور دو بار دیگر را به دست آورید. (ج) انرژی پتانسیل داخلی دستگاه چقدر است؟ نتیجهٔ به دست آمده از قسمت (ج) را با مجموع مقادیر به دست آمده در قسمت (ب) مقایسه کنید و نتیجه را توضیح دهید.

۱۹.۱۴ مسئلهٔ پیش را در حالتی که علامت بار دوم منفی باشد مجدداً حل کنید.

۲۰.۱۴ دو قطعهٔ حاصل از شکافت اتم اورانیوم در يك مورد خاص، عبارت‌اند از 95Y و 141I بترتیب با جرم‌های 95 amu و 141 amu . شعاع آنها را می‌توان به کمک رابطهٔ $R = 1.2 \times 10^{-15} A^{1/3} \text{ m}$ حساب کرد، که در آن A عدد جرمی است. با فرض اینکه در آغاز این دو قطعه ساکن و بر یکدیگر مماس باشند، (الف) نیرو و انرژی پتانسیل اولیه، (ب) سرعت‌های نسبی نهایی آنها (ج) سرعت نهایی هر يك از قطعات را نسبت

به مرکز جرمشان به دست آورید.

۲۱.۱۴ هنگامی که هسته اورانیوم با گسیل یک ذره آلفا (یعنی هسته هلیوم با عدد اتمی $Z=2$) فرومی پاشد، هسته تورنیوم ($Z=90$) تولید می شود. به فرض اینکه ذره آلفا در آغاز در فاصله $m \cdot 10^{-15} \times 85$ از مرکز هسته اورانیوم ساکن باشد، (الف) شتاب و انرژی آغازی ذره را به دست آورید. (ب) انرژی و سرعت ذره را هنگامی که در فاصله دوری از هسته قرار دارد حساب کنید.

۲۲.۱۴ چهار پروتون هر کدام در یک رأس مربعی به ضلع $m \cdot 10^{-9} \times 2$ قرار دارند. پروتون دیگری روی محوری که بر مربع عمود است و از مرکز آن می گذرد، در فاصله $m \cdot 10^{-9} \times 2$ از آن قرار دارد. (الف) حداقل سرعت آغازی که این پروتون باید داشته باشد تا به مرکز مربع برسد چقدر است؟ (ب) شتاب آغازی و نهایی آن را حساب کنید. (ج) منحنی نمایش تغییرات انرژی پتانسیل پروتون را به صورت تابعی از فاصله آن از مرکز مربع رسم کنید. حرکت پروتون را بر حسب اینکه انرژی اولیه آن کمتر یا بیشتر از انرژی به دست آمده در قسمت (الف) باشد تشریح کنید.

۲۳.۱۴ پتانسیل در فاصله ای از یک بار نقطه ای $600V$ و میدان آن $NC^{-1} \times 200$ است. (الف) فاصله تا بار چقدر است؟ (ب) مقدار بار چقدر است؟

۲۴.۱۴ حداکثر بار الکتریکی که یکی از سرهای کروی مولد وان دوگراف می تواند داشته باشد حدود $C \cdot 10^{-3}$ است. فرض کنید به همین اندازه بار الکتریکی مثبت به طور یکنواخت روی سطح کره ای در فضای تهی توزیع شده است. (الف) میدان و پتانسیل الکتریکی را در نقطه ای خارج از کره و به فاصله $m \cdot 5$ از مرکز آن حساب کنید. (ب) اگر الکترونی را در این نقطه رها کنند بزرگی و راستای شتاب آغازی آن چقدر می شود؟ (ج) هنگامی که الکترون به کره می رسد سرعت آن چقدر خواهد شد؟

۲۵.۱۴ کره ای کوچک به جرم $2g$ در وسط نخ بین دو صفحه موازی و قائم که $5cm$ از یکدیگر فاصله دارند آویزان است. بار الکتریکی روی کره $C \cdot 10^{-9} \times 6$ است. اگر زاویه نخ با راستای قائم 10° باشد اختلاف پتانسیل بین دو صفحه چقدر است؟

۲۶.۱۴ دوبار نقطه ای $C \cdot 10^{-2} \times 2$ و $C \cdot 10^{-7} \times 3$ به فاصله $m \cdot 10$ از یکدیگر قرار دارند. میدان الکتریکی و پتانسیل حاصل را (الف) در وسط محوری که این دو بار را بهم وصل می کند، (ب) در نقطه ای به فاصله $m \cdot 4$ از بار اولی، روی همین محور بین دو بار، (ج) در نقطه ای به فاصله $m \cdot 4$ از بار اولی، روی همان محور ولی در خارج، (د) در نقطه ای به فاصله یکسان $m \cdot 10$ از هر بار، حساب کنید. (ه) در کجا میدان الکتریکی برابر صفر است؟

۲۷.۱۴ مسئله قبل را برای حالتی که بار دوم منفی است، مجدداً حل کنید.

۲۸۰۱۴ بار دیگر به مسئله ۲۶۰۱۴ باز می‌گردیم. کار لازم برای جابجا کردن بار $C \times 10^{-7} \times 4$ از نقطه تعیین شده در (ج) به نقطه تعیین شده در (د) را حساب کنید. آیا لازم است مسیر پیموده شده را مشخص کنیم؟

۲۹۰۱۴ دوبار نقطه‌ای مثبت، به مقدار یکسان q روی محور Y بترتیب در نقاط $y = +a$ و $y = -a$ ثابت شده‌اند. (الف) روی یک نمودار جای بارها را نشان بدهید. (ب) پتانسیل در مبدأ مختصات چقدر است؟ (ج) ثابت کنید که در هر نقطه روی محور X ، پتانسیل برابر است با

$$V = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + x^2}}$$

(د) نمودار پتانسیل روی محور X را برحسب x در گستره $+5a$ تا $-5a$ رسم کنید. (ه) به ازای چه مقداری از x ، پتانسیل برابر است با نصف پتانسیل در مبدأ؟ (و) با استفاده از قسمت (ج) میدان الکتریکی را روی محور X حساب کنید.

۳۰۰۱۴ فرض کنید در مسئله ۲۹۰۱۴، ذره‌ای با بار مثبت q' و جرم m را روی راستای محور X اندکی از مبدأ دور و سپس رها می‌کنند. (الف) سرعت آن در بینهایت چقدر می‌شود؟ (ب) نمودار سرعت ذره را به صورت تابعی از x رسم کنید. (ج) اگر همین ذره را از فاصله خیلی دور در سمت راست در طول محور X به سمت چپ پرتاب کنند به طوری که سرعت آغازی آن برابر با نصف سرعت به دست آمده در قسمت (الف) باشد، در چه فاصله‌ای از مبدأ سرعت آن برابر صفر می‌شود؟ (د) اگر ذره‌ای با بار الکتریکی منفی از حال سکون و از فاصله خیلی دور از سمت چپ مبدأ روی محور X رها شود، هنگامی که از مبدأ می‌گذرد سرعت آن چقدر می‌شود؟

۳۱۰۱۴ با مراجعه مجدد به توزیع بار مسئله ۲۹۰۱۴، نموداری از پتانسیل در طول محور Y رسم کنید. این نمودار را با نمودار قسمت (د) مسئله ۲۹۰۱۴ مقایسه کنید. آیا پتانسیل در مبدأ کمینه است؟

۳۲۰۱۴ بار دیگر توزیع بار مسئله ۲۹۰۱۴ را در نظر می‌گیریم؛ (الف) فرض کنید ذره‌ای با بار مثبت q' که درست در مبدأ قرار دارد از حالت سکون رها می‌شود. چه پیش می‌آید؟ (ب) اگر بار الکتریکی قسمت (الف) اندکی روی محور Y جابجا شود چه اتفاق می‌افتد؟ (ج) اگر این بار الکتریکی اندکی روی محور X جابجا شود چه رخ می‌دهد؟

۳۳۰۱۴ در دستگاه مختصات قایمی، بار $C \times 10^{-9} \times 25$ در مبدأ مختصات و بار $C \times 10^{-9} \times -25$ در نقطه $x = 6\text{m}$ ، $y = 0$ قرار دارد. میدان الکتریکی در (الف) نقطه $x = 3\text{m}$ ، $y = 0$ ؛ (ب) نقطه $x = 3\text{m}$ ، $y = 4\text{m}$ ، چقدر است؟

۳۴.۱۴ سه بار الکتریکی برابر 1 C هر يك در يك رأس مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع 10 cm قرار دارند. (الف) نیرو و انرژی پتانسیل برای بند هر بار الکتریکی را که از برهم کنش آن با بارهای دیگر نتیجه می شود حساب کنید. (ب) میدان الکتریکی و پتانسیل برای بند در مرکز مثلث چقدر است؟ (ج) انرژی پتانسیل داخلی دستگاه را به دست آورید.

۳۵.۱۴ با مراجعه به مسئله پیش، خطهای میدان الکتریکی ناشی از سه بار و همچنین سطحهای هم پتانسیل را رسم کنید.

۳۶.۱۴ نشان دهید که مؤلفه های میدان ناشی از بار q در نقطه ای به فاصله r در دستگاه مختصات قایم عبارت اند از

$$E_z = qz / 4\pi\epsilon_0 r^3 \text{ و } E_y = qy / 4\pi\epsilon_0 r^3, E_x = qx / 4\pi\epsilon_0 r^3$$

۳۷.۱۴ در اتم هیدروژن در حالت کمترین انرژی (که آن را حالت پایه نیز می نامند) الکترون مسیری را به دور هسته می پیماید که می توان آن را با دایره ای به شعاع 10^{-10} m نشان داد. (الف) انرژی پتانسیل، (ب) انرژی جنبشی، (ج) انرژی کل، و (د) بسامد حرکت را حساب کنید. (به عنوان مقایسه، بسامد تابش گسیل شده توسط اتم هیدروژن از مرتبه 10^{15} Hz است).

۳۸.۱۴ با استفاده از قضیه ویریال برای يك ذره، انرژی يك الکترون (با بار الکتریکی $-e$) را که در فاصله r از هسته ای به بار $+Ze$ می گردد معین کنید. نتیجه را در مورد اتم هیدروژن ($r \approx 10^{-10}\text{ m}$) به کار بندید و آن را با نتیجه به دست آمده در قسمت (ج) مسئله ۳۷.۱۴ مقایسه کنید.

۳۹.۱۴ رابطه ای بنویسید که کل انرژی پتانسیل داخلی را برای (الف) اتم هلیوم، (ب) مولکول هیدروژن، به دست می دهد.

۴۰.۱۴ اگر هسته کربن (با بار الکتریکی $+6e$) با اختلاف پتانسیل 10^7 V شتاب داده شود، دارای چه انرژی جنبشی (بر حسب ژول) و چه سرعتی (بر حسب ms^{-1}) می شود؟

۴۱.۱۴ يك رابطه عددی به دست آورید که سرعت (بر حسب ms^{-1}) الکترون و پروتون را بر حسب اختلاف پتانسیلی (بر حسب ولت) که این ذرات از داخل آن گذشته اند بیان کند. فرض کنید ذرات در آغاز ساکن بوده اند.

۴۲.۱۴ (الف) پیشینه اختلاف پتانسیلی که می توان الکترون را در آن شتاب داد به گونه ای که افزایش جرم ذره از ۱٪ جرم سکون آن تجاوز نکند چقدر است؟ (ب) سرعت چنین الکترونی بر حسب سرعت نور چقدر است؟ (ج) همین محاسبه را در مورد پروتون نیز انجام دهید.

۴۳.۱۴ با در نظر گرفتن تصحیح نسبیتی، اختلاف پتانسیل لازم را (الف) برای اینکه

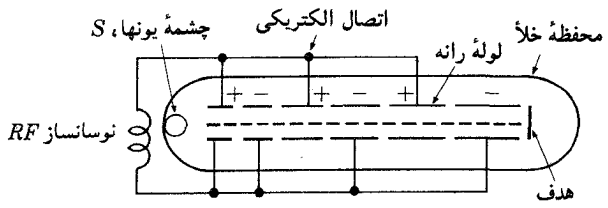
سرعت الکترونی از حالت سکون به $0.4c$ برسد، (ب) برای افزایش این سرعت از $0.4c$ تا $0.8c$ ، و (ج) برای رساندن این سرعت از $0.8c$ به $0.95c$ ، حساب کنید. همین محاسبه را در مورد پروتون نیز تکرار کنید.

۴۴.۱۴ یک شتاب‌دهنده با انرژی بالا، در اختلاف پتانسیل $10^9 \times 6.5$ به الکترونها شتاب می‌دهد. (الف) هنگام خروج الکترون از شتاب‌دهنده، نسبت جرم الکترون، m ، به جرم سکون آن، m_0 ، چقدر است؟ (ب) چه نسبتی بین سرعت الکترون خروجی و سرعت نور وجود دارد؟ (ج) اگر فقط اصول مکانیک کلاسیک را به کار ببریم سرعت الکترون چقدر می‌شود؟

۴۵.۱۴ الکترونی با سرعت آغازی 10 ms^{-1} با اختلاف پتانسیل 12000 V شتاب داده می‌شود. سرعت نهایی الکترون چقدر می‌شود؟

۴۶.۱۴ در یک لوله پرتو x ، الکترون، از حالت سکون بین کاتود و آنود با اختلاف پتانسیل 180000 V شتاب داده می‌شود. هنگام رسیدن الکترون به آنود (الف) انرژی جنبشی آن بر حسب eV (ب) جرم آن و (ج) سرعت آن چقدر است؟

۴۷.۱۴ در یک شتاب‌دهنده خطی، مطابق شکل ۴۷.۱۴، قطعات پیاپی لوله‌ها، یک در میان به یکدیگر اتصال دارند و اختلاف پتانسیل متناوبی به این دو مجموعه اعمال می‌شود. (الف) ثابت کنید برای اینکه یونی هنگام گذر از یک لوله به لوله دیگر با پتانسیل متناوب، همفاز باشد (انرژیها غیرنسبیتی‌اند) طول لوله‌های پشت سرهم باید برابر $L_1 \sqrt{n}$ باشد. L_1 طول لوله اولی است (ب) اگر ولتاژ شتاب‌دهنده V_0 و بسامد آن ν باشد، اندازه L_1 را به دست آورید. (ج) انرژی یون را هنگام خروج از لوله n ام حساب کنید. (د) بعد از اینکه انرژی یون به انرژی نسبیتی رسید طول لوله‌های پیاپی چقدر باید باشد؟



شکل ۴۷.۱۴

۴۸.۱۴ فرض کنید که اختلاف پتانسیل بین کره انتهایی یک مولد وان دوگراف و نقطه‌ای که در آنجا بارها پاشیده و توسط تسمه به سمت بالا حمل می‌شوند $10^6 \times 2$ است. اگر تسمه با آهنگ $10^{-3} \text{ Cs}^{-1} \times 2$ بار منفی را به کره بیورد و به همین میزان بار مثبت از آن خارج کند، برای ادامه کار تسمه چه توانی در مقابل نیروهای الکتریکی لازم است؟

۴۹.۱۴ در داخل هسته اتم، میانگین فاصله پروتونها از مرتبه 10^{-15} m است. مرتبه

بزرگی انرژی پتانسیل دوپروتون را درهسته بر حسب J و MeV برآورد کنید.

۵۰.۱۴ اگر فرض کنیم که درهسته‌ای به شعاع R پروتونها به‌طور یکنواخت توزیع شده‌اند، انرژی پتانسیل داخلی را می‌توان از رابطه $R \frac{4}{3} \pi e^2 Z(Z-1) / 4 \pi \epsilon_0$ (به مسئله ۸۰.۱۴ و مثال ۲۳.۱۶ مراجعه کنید). شعاع هسته نیز از رابطه $R = 1.2 \times 10^{-15} A^{1/3} m$ به دست می‌آید. رابطه‌هایی بنویسید که انرژی پتانسیل را به‌صورت تابعی از A و Z ، بر حسب یکه‌های J و MeV به دست می‌دهد.

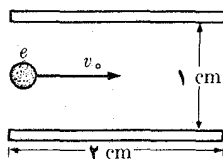
۵۱.۱۴ با به‌کار بردن نتایج مسئله ۵۰.۱۴، انرژی پتانسیل کل و انرژی هر پروتون را در هسته‌های ^{16}O ($Z=8$)، ^{40}Ca ($Z=20$)، ^{91}Zr ($Z=40$)، ^{144}Nd ($Z=60$)، ^{200}Hg ($Z=80$) و ^{238}U ($Z=92$) حساب کنید. انرژی برهم کنش الکتریکی بین پروتونها چه اثری روی استحکام هسته دارد؟ با استفاده از داده‌های بالا، نمودار تغییرات انرژی پتانسیل را بر حسب عدد جرمی رسم کنید.

۵۲.۱۴ پروتونی که در شتابدهنده وان دوگراف تولید شده است، به‌سوی یک ورقه طلا فرستاده می‌شود. کمترین فاصله نزدیک شدن را (الف) برای برخورد رودر رو، (ب) برای برخوردی با پارامتر برخورد بین $10^{-15} m$ و $10^{-14} m$ ، حساب کنید. انحراف پروتون در هر مورد چقدر است؟

۵۳.۱۴ یک ذره آلفا با انرژی جنبشی $4 MeV$ مستقیماً به‌سوی هسته جیوه گسیل می‌شود. عدد اتمی جیوه ۸۰ است، بنابراین هسته آن به اندازه ۸۰ برابر بار الکترون، بار الکتریکی مثبت دارد. (الف) کمترین فاصله نزدیک شدن ذره آلفا به هسته را پیدا کنید. (ب) نتیجه را با هسته‌ای به شعاع تقریبی $10^{-14} m$ مقایسه کنید.

۵۴.۱۴ پروتونهایی که با ولتاژ $10^5 V$ 8×10^5 شتاب داده شده‌اند روی یک ورقه طلا ($Z=79$) می‌افتند. سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی کولنی را برای زاویه φ برابر 20° ، 40° ، و 180° پیدا کنید. نمودار قطبی $\sigma(\varphi)$ را رسم کنید. [توجه کنید: معادله (۲۵.۱۴) به ازای $\varphi=0$ برابر بینهایت می‌شود. این امر از اینجا ناشی می‌شود که هسته پراکنده‌کننده را نقطه‌ای فرض کردیم. هنگامی که برای هسته ابعاد معینی در نظر گرفته شود، نقطه‌ای بودن از بین می‌رود.]

۵۵.۱۴ اختلاف پتانسیل بین دو صفحه شکل ۴۸.۱۴ برابر $100 V$ است. طول هر صفحه $2 cm$ و فاصله آنها از یکدیگر $1 cm$ است. الکترونی با سرعت آغازی $10^7 ms^{-1}$ در راستای عمود بر میدان پرتاب می‌شود. (الف) انحراف و سرعت عرضی الکترون را هنگام خروج از بین دو صفحه پیدا کنید. (ب) اگر پرده‌ای به فاصله $50 m$ از انتهای راست صفحه‌ها قرار داده شود، مکان برخورد الکترون بر پرده در چه نقطه‌ای خواهد بود؟



شکل ۴۸-۱۴

۵۶-۱۴ اختلاف پتانسیلی برابر با $V 1600$ بین دو صفحه موازی که 4 cm از یکدیگر فاصله دارند برقرار می‌شود. الکترونی از صفحه منفی و همزمان با آن پروتونی از صفحه مثبت آزاد می‌شوند. (الف) درجه فاصله‌ای از صفحه مثبت این دو ذره از کنار هم می‌گذرند؟ (ب) چگونه می‌توان سرعت این ذرات را هنگامی که هر یک از آنها به صفحه مقابل برخورد می‌کند مقایسه کرد؟ (ج) انرژی آنها را هنگام برخورد به صفحه مقابل چگونه می‌توان با هم مقایسه کرد؟

۵۷-۱۴ عناصر اصلی تشکیل دهنده یک تریود خلأ عبارت‌اند از یک سطح تخت (کاتود) که الکترونی‌هایی را با سرعت آغازی ناچیز گسیل می‌کند. موازی با کاتود و در فاصله 3 mm از آن، شبکه‌ای از سیم نازک وجود دارد که پتانسیل آن $V 18$ بالاتر از ولتاژ کاتود است. بافت شبکه آنقدر باز هست که مانع عبور آزاد الکترونها نشود. سطح تخت دیگری (آنود) به فاصله 12 mm پشت شبکه قرار دارد و پتانسیل آن $V 15$ از پتانسیل کاتود بیشتر است. می‌توان فرض کرد که میدان الکتریکی بین کاتود و شبکه، و بین شبکه و آنود یکنواخت است. (الف) نمودار پتانسیل را بر حسب فاصله در طول خطی که کاتود را به آنود وصل می‌کند رسم کنید. (ب) الکترونها با چه سرعتی از شبکه می‌گذرند؟ (ج) الکترونها با چه سرعتی به آنود برخورد می‌کنند؟ (د) بزرگی و سوی میدان را بین کاتود و شبکه از یک طرف و شبکه و آنود از طرف دیگر پیدا کنید. (ه) بزرگی و سوی شتاب الکترون را در هر ناحیه حساب کنید.

۵۸-۱۴ یک شتاب‌دهنده خطی با اختلاف پتانسیل $kV 800$ یک باریکه پروتونی با شدت جریان 1 mA تولید می‌کند. (الف) تعداد پروتونی‌هایی را که در هر ثانیه به هدف برخورد می‌کنند حساب کنید. (ب) توان لازم برای شتاب دادن به پروتونها چقدر است؟ (ج) سرعت پروتونها را هنگام برخورد با هدف پیدا کنید. (د) اگر پروتونها 80% انرژی خود را هنگام برخورد به هدف از دست بدهند، آهنگ انتقال انرژی را، بر حسب cal s^{-1} ، که به صورت گرما باید از هدف خارج کرد حساب کنید.

۵۹-۱۴ الکترونی، بعد از اینکه با اختلاف پتانسیل $V 565$ شتاب داده شده، در راستایی که با راستای میدان زاویه 60° می‌سازد، وارد یک میدان الکتریکی یکنواخت به شدت 3500 NC^{-1} می‌شود. بعد از $5 \times 10^{-8}\text{ s}$ (الف) مؤلفه‌های سرعت روی راستای میدان و عمود بر آن چقدر است؟ (ب) بزرگی و راستای سرعت را به دست آورید (ج) اگر نقطه ورود الکترون به عنوان مبدأ اختیار شود، مختصات مکان الکترون را پیدا کنید (د) انرژی کل

الکترون چقدر است؟

۶۰.۱۴ دو صفحه فلزی بزرگ به فاصله 4 cm از یکدیگر به طور قائم نصب شده اند و بین آنها اختلاف پتانسیل 200 V برقرار است. (الف) با چه سرعتی یک الکترون باید به طور افقی از صفحه مثبت گسیل شود تا با سرعت 10^7 m s^{-1} به صفحه منفی برسد؟ (ب) با چه سرعتی باید یک الکترون تحت زاویه 37° بالای سطح افق از صفحه مثبت گسیل شود تا مولفه افقی سرعت آن هنگام رسیدن به صفحه منفی برابر 10^7 m s^{-1} باشد؟ (ج) هنگامی که الکترون به صفحه منفی می رسد مولفه قائم سرعت آن چقدر است؟ (د) در هر مورد، زمانی که طول می کشد تا الکترون از یک صفحه به صفحه دیگر برسد چقدر است؟ (ه) اگر الکترون به طور افقی با سرعت 10^6 m s^{-1} از صفحه مثبت پرتاب شود با چه سرعتی به صفحه منفی می رسد؟

۶۱.۱۴ الکترونی بین دو صفحه افقی که فاصله آنها 2 cm و اختلاف پتانسیل آنها 2000 V است قرار دارد. نیروی الکتریکی وارد بر الکترون را با نیروی گرانی مقایسه کنید. همین محاسبه را برای پروتون نیز انجام دهید. آیا این امر نادیده گرفتن نیروی جاذبه گرانشی را در این فصل توجیه می کند؟

۶۲.۱۴ نتیجه مثال ۸۰.۱۳ را در مورد یک صفحه باردار با چگالی سطحی یکنواخت σ تطبیق دهید و بدین طریق ثابت کنید که میدان و پتانسیل الکتریکی بترتیب برابرند با $E = \sigma/2\epsilon_0$ و $V = -\sigma z/2\epsilon_0$.

۶۳.۱۴ بار الکتریکی $-q$ به جرم m در فاصله z از یک صفحه باردار با بار مثبت و با چگالی یکنواخت σ قرار دارد. بار را از حالت سکون رها می کنند. شتاب و سرعت آن را هنگام رسیدن به صفحه حساب کنید. چه مدت طول می کشد تا به صفحه برسد؟

۶۴.۱۴ فرض کنید که بار الکتریکی مسئله ۶۳.۱۴ دارای سرعت آغازی v موازی با صفحه است. (الف) مسیر حرکت، (ب) زمان لازم برای رسیدن به صفحه، و (ج) مسافتی را که بار به موازات صفحه پیموده است، تعیین کنید.

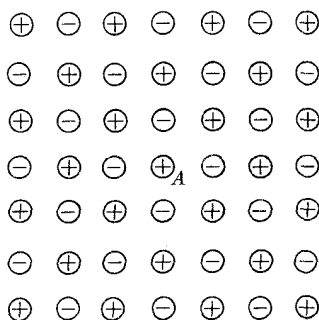
۶۵.۱۴ با مراجعه به مسئله ۶۳.۱۴، فرض کنید که بار در آغاز در نقطه $z = 0$ است و با سرعت v که با سطح زاویه α می سازد پرتاب می شود. تعیین کنید (الف) مسیر حرکت را (ب) بیشینه فاصله آن را از صفحه (ج) مسافتی را که قبل از افتادن روی صفحه به موازات آن می پیماید.

۶۶.۱۴ تعداد بینهایت بار الکتریکی مثبت و منفی $+q$ یک در میان در طول یک خط راست قرار گرفته اند که فاصله همه آنها از یکدیگر r است (شکل ۴۹.۱۴). ثابت کنید که

$$\begin{array}{cccccccc} & & & |z-r| & & & & \\ & & & \oplus & & \ominus & & \oplus \\ & \oplus & \ominus & \oplus & \ominus & \oplus & \ominus & \oplus \\ & & & q & & & & \end{array}$$

انرژی پتانسیل هر بار برابر است با $\ln 2 \cdot (-q^2 / 2\pi\epsilon_0 r)$. [داهنمایی: از فرمول (پ. ۲۴) استفاده کنید].

۶۷.۱۴ آرایش منظمی از بارهای یک درمیان مثبت و منفی، در صفحه، از قرار دادن آنها در مراکز مربعی به ضلع a به دست آمده است (شکل ۵۰.۱۴). انرژی پتانسیل باری مانند A را پیدا کنید. [داهنمایی: با در نظر گرفتن بارهایی که در فاصله‌های یکسان از A قرار دارند آنها را گروه بندی کنید].



شکل ۵۰.۱۴

۶۸.۱۴ حلقه‌ای به شعاع a دارای بار الکتریکی q است. میدان و پتانسیل الکتریکی را در نقاط مختلف روی محور حلقه حساب کنید.

۶۹.۱۴ پتانسیل و میدان الکتریکی را در نقطه‌ای روی محور دیسکی به شعاع R که حامل باری به چگالی سطحی یکنواخت σ است پیدا کنید. [داهنمایی: دیسک را به حلقه‌ها تقسیم کنید و سهم تمام حلقه‌ها را جمع کنید].

۷۰.۱۴ با مراجعه به مسئله ۶۹.۱۴، پتانسیل و میدان الکتریکی یک توزیع بار الکتریکی در صفحه را حساب کنید. چگالی بار صفحه با چگالی دیسک یکی است. [داهنمایی: R را خیلی بزرگ در نظر بگیرید و فقط جمله اول بسط را نگه دارید].

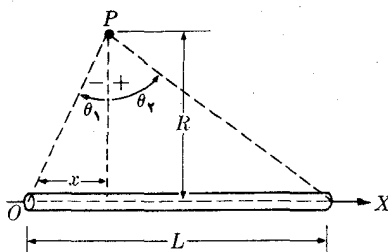
۷۱.۱۴ در سیمی به طول L بار الکتریکی به طور خطی با چگالی λ توزیع شده است (شکل ۵۱.۱۴). (الف) ثابت کنید که میدان الکتریکی در نقطه‌ای واقع در فاصله R از سیم با رابطه زیر داده می‌شود

$$E_{\perp} = \left(\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \right) (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

و

$$E_{\parallel} = - \left(\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \right) (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

E_{\perp} و E_{\parallel} بترتیب مؤلفه‌های E در راستای عمود و موازی باسیم، و θ_1 و θ_2 زاویه‌هایی هستند که خط عمود برسیم با خطهایی که نقطه را به دو انتها وصل می‌کنند می‌سازد. (ب) میدان را هنگامی که نقطه به فاصله یکسان از دو انتها قرار دارد به دست آورید. علامت زاویه‌های θ_1 و θ_2 همان علامتهای نشان داده شده در شکل اند.



شکل ۵۱.۱۴

۷۲.۱۴ سیمی را که دارای بار الکتریکی با چگالی خطی λ است به صورت مربعی به ضلع L در آورده‌اند. میدان و پتانسیل را در نقطه‌ای واقع بر محوری عمود بر مربع که از مرکز آن می‌گذرد به دست آورید.

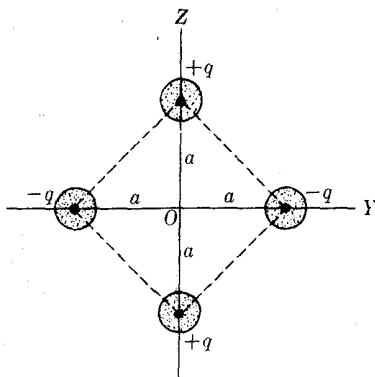
۷۳.۱۴ رابطه‌ای برای میدان و پتانسیل الکتریکی یک صفحه حامل بار الکتریکی با چگالی سطحی یکنواخت σ پیدا کنید. فرض کنید صفحه از یک سری خط به طول بینهایت و عرض dx تشکیل شده است.

۷۴.۱۴ چه جرمی از Cu (دو ظرفیتی) در مدت یک ساعت بر اثر جریان $2A$ روی یک الکتروود رسوب می‌کند؟ چند اتم در این مدت رسوب کرده است؟

۷۵.۱۴ متوسط نیروی جاذبه الکتریکی بین دو مولکول آب را در حالت گازی در شرایط متعارفی دما و فشار (STP) که از گشتاور دوقطبی الکتریکی آنها ناشی می‌شود، برآورد کنید. چندین سمتگیری نسبی برای دوقطبیهای الکتریکی در نظر بگیرید. این نیرو را با برهم کنش گرانشی آنها مقایسه کنید.

۷۶.۱۴ با تعریف گشتاور دوقطبی و چهارقطبی الکتریکی برای امتدادهای مورد نظر در مسئله ۸۱.۱۳، نتایج آن مسئله را در مورد توزیع بارهای الکتریکی به دست آورید.

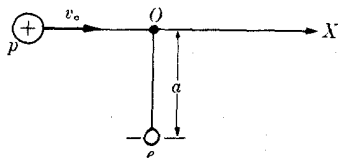
۷۷.۱۴ گشتاورهای دوقطبی و چهارقطبی الکتریکی مربوط به توزیع بارهای نشان داده شده در شکل ۵۲.۱۴ را نسبت به محور Z به دست آورید. پتانسیل و میدان را روی محور Z در نقطه‌ای به فاصله z (که در مقایسه با a بزرگ است) پیدا کنید. محاسبه را در مورد محور Y نیز تکرار کنید.



شکل ۵۲-۱۴

۷۸-۱۴ مسئله ۷۷-۱۴ را، با فرض اینکه تمام بارها مثبت‌اند، از نو حل کنید.

۷۹-۱۴ يك پروتون خیلی سريع با سرعت v_0 از فاصله a از يك الكترون که در آغاز در حالت سکون است می‌گذرد (شکل ۵۳-۱۴). اگر فرض کنیم که حرکت پروتون به سبب جرم زیادی که دارد دچار تغییر نشود (الف) نمودار مؤلفه عمود بر v_0 نیرو را که پروتون بر الكترون وارد می‌کند به صورت تابعی از x رسم کنید. (ب) نشان دهید که اندازه حرکت انتقال یافته به الكترون برابر $(2/v_0 a)(e^2/4\pi\epsilon_0)$ و در راستای عمود بر v_0 است. (ج) انحراف پروتون را به صورت تابعی از سرعت آن برآورد کنید. این مثال يك پایه تقریبی برای تحلیل حرکت ذرات باردار در گذر از مساده فراهم می‌کند. [داهنمایی: با فرض اینکه الكترون در جریان گذر پروتون تقریباً ثابت بماند، اندازه حرکت انتقال یافته به الكترون برابر است با $\Delta p = \int \mathbf{F} dt$ ، و تنها باید مؤلفه عمود بر v_0 را حساب کرد. به سبب تقارن نیرو، به جای انتگرال گیری از $-\infty$ تا $+\infty$ می‌توان از $+\infty$ انتگرال گرفت و نتیجه را در دو ضرب کرد.]



شکل ۵۳-۱۴

۸۰-۱۴ ثابت کنید که انرژی پتانسیل الکتریکی داخلی يك دستگاه ذرات باردار را می‌توان به یکی از دو صورت زیر نوشت

$$E_p = \sum_{\substack{\text{تمام} \\ \text{زوجها}}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (\text{الف})$$

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\text{تمام} \\ \text{بارها}}} q_i V_i \quad (\text{ب})$$

که در آن V_i پتانسیل تولید شده در q_i توسط تمامی بارهای دیگر است. (ج) با استفاده از نتیجه (ب) نشان دهید که انرژی الکتریکی یک توزیع پیوسته بار به چگالی ρ برابر است با $E_p = 1/2 \int \rho V d\tau$. (د) با استفاده از این رابطه نشان دهید که انرژی یک رسانای کروی که بار Q به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده باشد برابر است با $(3/5) Q^2 / 4\pi\epsilon_0 R$. (ه) آخرین نتیجه را در مورد هسته‌ای با عدد اتمی Z به کار ببرید.

۸۱.۱۴ اگر dx ، dy و dz مربوط به دو نقطه خیلی نزدیک به هم روی خط نیرو باشند ثابت کنید که معادلات دیفرانسیل خطهای نیرو عبارتند از $dx/E_x = dy/E_y = dz/E_z$. از این معادلات استفاده کنید و معادلات خطهای نیروی دوقطبی را به دست آورید. [دانهامی: توجه کنید که چون در مورد دوقطبی الکتریکی خطهای نیرو منحنیهای تخت اند، نیازی به مؤلفه E_z نیست. برای یک دوقطبی الکتریکی، E_x و E_y را در دستگاه مختصات قایم بررسی کنید.]

۸۲.۱۴ ثابت کنید که در دستگاه مختصات قطبی، معادله خطهای نیرو عبارت است از $dr/E_r = r d\theta/E_\theta$. از این نتیجه استفاده کنید و معادله خطهای نیروی دوقطبی الکتریکی را در مختصات قطبی به دست آورید. درستی رابطه به دست آمده را با یاری گرفتن از نتیجه مسئله ۸۱.۱۴ تحقیق کنید.

۸۳.۱۴ ایستاکولن (stC) یکای بار الکتریکی است، و طبق تعریف مقدار باری است که اگر در خلأ در فاصله ۱ cm از بار نظیر خود قرار گیرد نیروی بین آنها یک دین باشد. (الف) ثابت کنید که یک ایستاکولن برابر است با $c/10$ کولن (c سرعت سیر نور در خلأ است) یا تقریباً $10^{-9} \times 1/3$. (ب) مقدار بار الکتریکی بنیادی، e ، را بر حسب ایستاکولن بنویسید. (ج) هنگامی که بار بر حسب کولن، فاصله بر حسب سانتی متر و نیرو بر حسب دین بیان شوند، مقدار ثابتهای K_e و ϵ_0 را حساب کنید. (د) برای اندازه گیری میدان الکتریکی، رابطه بین دین بر ایستاکولن و NC^{-1} را به دست آورید.

۸۴.۱۴ در یک ایستاکولن چه تعداد بار الکتریکی بنیادی وجود دارد؟

۸۵.۱۴ اب کولن یکای بار الکتریکی است که برابر 10 C تعریف شده است. هنگامی که بار الکتریکی بر حسب اب کولن، فاصله بر حسب سانتی متر، نیرو بر حسب دین باشند، مقدار ثابتهای K_e و ϵ_0 را حساب کنید. رابطه بین ایستاکولن و اب کولن چگونه است؟

۸۶.۱۴ ایستاولت (stV) اختلاف پتانسیل بین هر دو نقطه‌ای است که با جابجاشدن يك بار الكتریکی به مقدار يك ایستاکولن بین آنها کاری برابر با يك ارگت انجام شود. (الف) ثابت کنید که يك ایستاولت برابر است با $c/10^6$ یا تقریباً 300 V . (ب) رابطه بین stV cm^{-1} و Vm^{-1} را، که یکای میدان الکتریکی است، پیدا کنید. آن را با نتیجه قسمت (د) مسئله ۸۳.۱۴ مقایسه کنید.

۸۷.۱۴ رابطه پتانسیل الکتریکی ناشی از بار q را در فاصله r ، هنگامی که پتانسیل بر حسب stV، فاصله بر حسب cm و بار الکتریکی بر حسب stC اندازه گیری شوند، بنویسید. همین کار را برای میدان الکتریکی که بر حسب stV cm^{-1} اندازه گیری شود تکرار کنید.

۸۸.۱۴ معمولاً انرژی ویژه حالت‌های اتم‌های يك الکترونی را به صورت $E_n = -RZ^2hc/n^2$ نشان می‌دهند. در این رابطه R ثابت ریذبرگ نام دارد. با استفاده از رابطه E_n که در مثال ۸.۱۴ آمده است، ثابت کنید که R برابر است با

$$1.0974 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

۸۹.۱۴ انرژی‌های چهار ویژه حالت H و He^+ را حساب کنید. در هر مورد، انرژی لازم برای بردن دستگاه از حالت پایه به اولین حالت برانگیخته را پیدا کنید. انرژی‌ها را با خط‌های افقی به فاصله‌های مناسب، روی يك مقیاس نمایش دهید. توجه کنید که بعضی از انرژی‌ها برهم منطبق‌اند. آیا می‌توانید از اینجا يك قاعده کلی به دست آورید؟

۹۰.۱۴ با استفاده از نتیجه مسئله ۳۷.۱۴، سرعت الکترون را در اتم هیدروژن در حالت پایه برآورد کنید. درستی محاسبات آخر مثال ۱۰.۱۴ را تحقیق کنید.

برهم کنشهای مغناطیسی

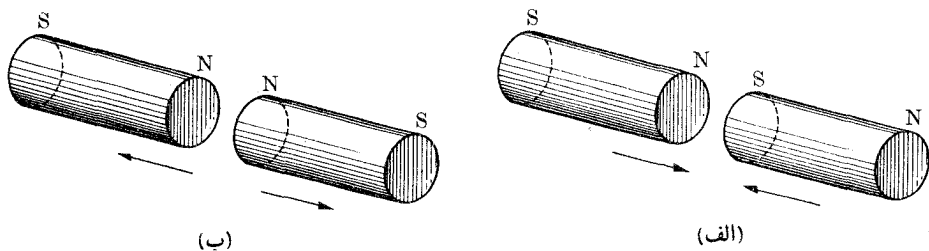
مقدمه	۱۰۱۵
اثر نیروی مغناطیسی روی بار در حال حرکت	۲۰۱۵
حرکت بار الکتریکی در میدان مغناطیسی	۳۰۱۵
مثالهایی از حرکت ذره‌های باردار در میدان مغناطیسی	۴۰۱۵
اثر نیروی مغناطیسی روی جریان الکتریکی	۵۰۱۵
اثر گشتاور نیروی مغناطیسی روی جریان الکتریکی	۶۰۱۵
میدان مغناطیسی حاصل از جریان بسته	۷۰۱۵
میدان مغناطیسی جریان مستقیم الخط	۸۰۱۵
نیروی بین جریانها	۹۰۱۵
میدان مغناطیسی جریان دایره‌ای	۱۰۰۱۵
میدان مغناطیسی بار در حال حرکت (غیرنسبیتی)	۱۱۰۱۵
الکترومغناطیس و اصل نسبیت	۱۲۰۱۵
میدان الکترومغناطیسی بار در حال حرکت	۱۳۰۱۵
برهم کنش الکترومغناطیسی بین دو بار در حال حرکت	۱۴۰۱۵

۱۰۱۵ مقدمه

برهم کنش دیگری که در طبیعت مشاهده می‌شود برهم کنش مغناطیسی است. قرن‌ها قبل از میلاد مسیح بشر متوجه شده بود که بعضی مواد کانی آهن، مانند سنگ آهن با این خاصیت را دارند که تکه‌های کوچک آهن را به سمت خود می‌کشند. این خاصیت در حالت طبیعی در آهن، کبالت، منگنز و در بسیاری از ترکیبات این فلزها وجود دارد. این خاصیت ظاهراً اختصاصی، هیچ ربطی با گرانش ندارد، زیرا نه تنها تمام مواد دارای این خاصیت نیستند، بلکه به نظر می‌رسد که این خاصیت بیشتر در بعضی نقاط ماده کانی متمرکز شده باشد. این خاصیت به برهم کنش الکتریکی نیز ربطی ندارد، زیرا نه گویهای چوب پنبه‌ای و نه تکه‌های کاغذ به وسیله این مواد جذب نمی‌شوند. بدین سبب نامی جدید، یعنی مغناطیس* به این خاصیت فیزیکی داده شده است. ناحیه‌هایی از جسم که به نظر می‌رسد این خاصیت در آنجاها متمرکز شده است قطبهای مغناطیسی نام گرفته‌اند. جسم مغناطیسی را آهنربا می‌نامند.

خود زمین یک آهنربای عظیم است. به عنوان مثال، اگر در نقطه‌ای از سطح زمین یک تیغه آهنربا را به گونه‌ای بیاویزیم که بتواند آزادانه دور محور قائمی بچرخد، همیشه طوری می‌ایستد که یکی از قطبهای آن به سمت قطب شمال جغرافیایی زمین باشد. این نتیجه نشان می‌دهد که زمین نیروی اضافی به میله مغناطیسی وارد می‌کند. در صورتی که چنین نیرویی به تیغه غیر آهنربا وارد نمی‌شود.

این آزمایش همچنین نشان می‌دهد که دو نوع قطب مغناطیسی وجود دارد، که می‌توان آنها را با علامتهای + و - یا با حرفهای N و S نشان داد. قطبی که به سمت شمال جغرافیایی قرار می‌گیرد قطب شمال (N) و قطب دیگر را قطب جنوب (S) می‌نامند. اگر دو میله آهنربا را مطابق شکل ۱۰۱۵ در کنار هم قرار دهیم، این میله‌ها بر حسب اینکه



شکل ۱۰۱۵ برهم کنش بین دو آهنربای میله‌ای (الف) قطبهای ناهمنام یکدیگر را جذب می‌کنند. (ب) قطبهای همنام یکدیگر را دفع می‌کنند.

* نام مغناطیس از کلمه Magnesi، نام یکی از شهرهای قدیم آسیای صغیر گرفته شده است، که به روایتی، این پدیده برای اولین بار در آنجا مشاهده شده است.

قطبهای همنام با قطبهای ناهمنام در مقابل هم قرار گرفته باشند یکدیگر را دفع یا جذب می کنند. از این آزمایش نتیجه می گیریم که:

برهم کنش بین قطبهای مغناطیسی همنام دافعه و برهم کنش بین قطبهای ناهمنام جاذبه است.

اکنون می توانیم با تعریف جرم (یا بار) مغناطیسی شدت يك قطب مغناطیسی را اندازه بگیریم و تغییرات برهم کنش مغناطیسی را نسبت به فاصله بین قطبها مطالعه کنیم. این امر کاملاً عملی است و در واقع این همان روشی است که فیزیکدانان قبل از اینکه ماهیت مغناطیس را کاملاً بشناسند پذیرفته بودند. با وجود این، در کوشش برای انجام این اندازه گیریها يك مشکل اساسی پیش می آید و آن این است که اگرچه ما توانسته ایم بارهای الکتریکی مثبت و منفی را از یکدیگر جدا کنیم و مقدار مشخصی بار الکتریکی به ذره های اساسی سازنده آنها نسبت بدهیم، ولی توانایی آن را نداشته ایم که يك قطب مغناطیسی منزوی به دست آوریم، یا يك ذره مغناطیسی پیدا کنیم که دارای تنها يك نوع مغناطیس N یا S باشد. در مواد مغناطیسی، قطبهای برابر ولی از نوع مختلف همیشه به صورت جفت دیده می شوند. از طرف دیگر، مفهوم قطب یا جرم مغناطیسی برای توصیف پدیده های مغناطیسی غیر مفید تشخیص داده شده است. برهم کنشهای الکتریکی و مغناطیسی ارتباط نزدیکی با یکدیگر دارند و در واقع دو صورت مختلف از يك خاصیت ماده، یعنی بار الکتریکی آن هستند؛ مغناطیس جلوه ای از بارهای الکتریکی در حال حرکت است. برهم کنشهای الکتریکی و مغناطیسی را باید تحت نام کلی تر، برهم کنشهای الکترومغناطیسی در نظر گرفت و مورد بررسی قرار داد.

۲۰۱۵ اثر نیروی مغناطیسی روی بار در حال حرکت

با مشاهده برهم کنش بین اجسام مغناطیس شده، بنا به مشابهنی که بین این برهم کنشها و برهم کنشهای الکتریکی و گرانشی وجود دارد، می توان گفت که يك جسم مغناطیس شده در فضای اطراف خود، میدان مغناطیسی تولید می کند. هنگامی که بار الکتریکی ساکن در میدان مغناطیسی قرار گیرد، هیچگونه نیرو یا برهم کنش ویژه ای روی بار مشاهده نمی شود. ولی هرگاه بار الکتریکی در ناحیه ای که در آنجا میدان مغناطیسی حکمفرماست حرکت کند، علاوه بر نیروهای الکتریکی و گرانشی نیروی جدیدی روی بار اثر می کند.

با اندازه گیری، نیروهای وارد بر بارهای مختلف که با سرعتهای متفاوت در يك نقطه معین از میدان مغناطیسی حرکت می کنند، می توان رابطه ای بین نیرو، بار الکتریکی و سرعت به دست آورد. از اندازه گیریهای مختلف نتیجه می گیریم که:

نیرویی که میدان مغناطیسی روی بار الکتریکی متحرک وارد می کند متناسب است با بار الکتریکی و سرعت آن، و داستای این نیرو بر داستای سرعت بار عمود است.

می‌توان گامی جلوتر رفت و با توجه به خواص ضرب برداری دو بردار، \mathbf{F} نیروی وارد بر بار الکتریکی q را که با سرعت \mathbf{v} در میدان مغناطیسی حرکت می‌کند به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (۱۰۱۵)$$

که با شرایط تجربی پیش گفته تطبیق می‌کند. \mathbf{B} برداری است که در هر نقطه با توجه به مقدار بردارهای \mathbf{v} و \mathbf{F} و بار الکتریکی q تعیین می‌شود. این کوشش با توفیق کامل قرین بوده است. زیرا بردار \mathbf{B} ممکن است در یک میدان مغناطیسی از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر کند، ولی آزمایش نشان می‌دهد که در یک نقطه معین برای هر بار الکتریکی با هرگونه سرعتی همیشه یکسان است. بنا بر این \mathbf{B} خاصیتی را بیان می‌کند که مشخصه میدان مغناطیسی است و می‌توان آن را شدت میدان مغناطیسی نام نهاد. نام دیگری که برای آن به کار رفته القای مغناطیسی است. ما در این کتاب، تنها نام اول را به کار خواهیم برد.

هرگاه ذره باردار در ناحیه‌ای حرکت کند که در آنجا هم میدان الکتریکی و هم میدان مغناطیسی وجود دارد، تحت تأثیر برآیند نیروی الکتریکی $q\mathbf{E}$ و نیروی مغناطیسی $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ قرار می‌گیرد، بنا بر این داریم

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (۲۰۱۵)$$

این نیرو را نیروی لودنتس می‌نامند.

چنانکه در بالا اشاره شد، بنا به خواص ضرب برداری، نیرویی که از معادله (۱۰۱۵) به دست می‌آید بر سرعت \mathbf{v} و میدان \mathbf{B} عمود است. این معادله همچنین نشان می‌دهد که هرگاه \mathbf{v} موازی \mathbf{B} باشد نیروی \mathbf{F} برابر صفر می‌شود. در واقع مشاهده می‌شود که در هر میدان مغناطیسی راستای خاصی وجود دارد که در آن راستا به ذره باردار در حال حرکت نیرویی وارد نمی‌شود. این راستا، راستای میدان مغناطیسی در آن نقطه است. شکل ۲۰۱۵ رابطه بیسن سه بردار \mathbf{v} ، \mathbf{B} و \mathbf{F} را برای بار الکتریکی مثبت و نیز برای بار الکتریکی منفی نشان می‌دهد. قاعده تعیین راستا و سوی نیرو، یعنی قاعده دست راست را بر روی شکل نمایش داده‌ایم.

اگر α زاویه بین بردارهای \mathbf{v} و \mathbf{B} باشد، بزرگی بردار \mathbf{F} برابر است با

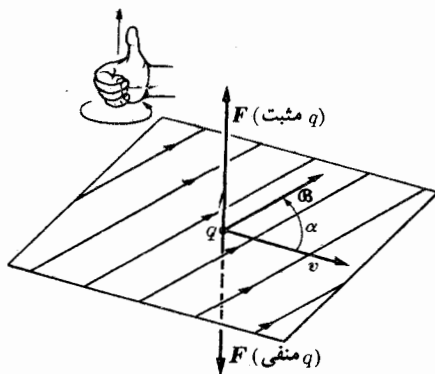
$$F = qvB \sin \alpha \quad (۳۰۱۵)$$

به ازای $\alpha = \pi/2$ ، یعنی هنگامی که \mathbf{v} بر \mathbf{B} عمود است، نیرو بیشینه و بزرگی آن برابر است با

$$F = qvB \quad (۴۰۱۵)$$

چنانکه قبلاً اشاره کردیم، به ازای $\alpha = 0$ ، یعنی هنگامی که \mathbf{v} و \mathbf{B} موازی‌اند، نیرو کمینه و برابر صفر است.

از معادله (۱۰۱۵) می‌توان یکای میدان مغناطیسی را به صورت $\text{N C}^{-1} \text{m}^{-1} \text{s}$ یا $\text{kg s}^{-1} \text{C}^{-1}$ تعریف کرد. این یکا را به افتخار مهندس یوگسلاوی الاصل امریکایی،



شکل ۲۰۱۵ رابطه برداری بین نیرو، میدان مغناطیسی و سرعت بار متحرک. نیرو بر صفحه v و B عمود است.

نیکولاس تسلا (۱۲۳۵-۱۳۲۲/۱۸۵۶-۱۹۴۳) تسلا با علامت اختصاری T نام داده‌اند. بدین طریق $T = \text{kg s}^{-1} \text{C}^{-1}$. یک تسلا شدت میدانی است که بر بار الکتریکی یک کولنی که با سرعت یک متر بر ثانیه در راستای عمود بر میدان حرکت می‌کند نیرویی برابر یک نیوتون وارد کند.

چون نیروی مغناطیسی $F = qv \times B$ بر راستای سرعت عمود است، کار آن برابر صفر است. بنابراین، هیچگونه تغییری در انرژی جنبشی ذره که با رابطه (۱۱.۸) تعریف می‌شود به وجود نمی‌آورد. هر چند با توجه به تعریفی که در فصل ۸ داده شد، نیروی مغناطیسی پایدار نیست، با وجود این هر گاه ذره‌ای در میدانی مرکب از میدانهای الکتریکی و مغناطیسی حرکت کند انرژی کل آن ثابت باقی می‌ماند (منظور از انرژی کل، مجموع انرژی جنبشی ذره و پتانسیل ناشی از برهم‌کنشهای مختلف آن است).

مثال ۱۰۱۵ پروتونی از پرتوهای کیهانی با سرعتی برابر 10^7 m s^{-1} در راستای عمود بر میدان مغناطیسی زمین وارد این میدان می‌شود. نیروی وارد بر پروتون را برآورد کنید.

حل: شدت میدان مغناطیسی زمین در نزدیکی سطح زمین در استوا حدود $B = 1.3 \times 10^{-7} \text{ T}$ و بار الکتریکی پروتون $q = +e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ است. در نتیجه بنا به معادله (۴.۱۵) نیروی وارد بر پروتون برابر می‌شود با

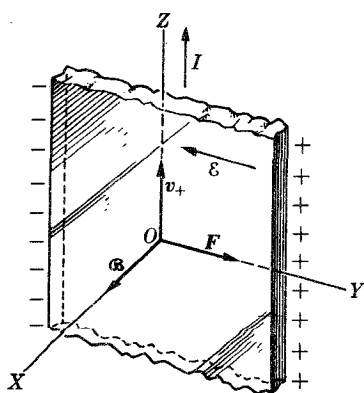
$$F = qv \times B = 1.6 \times 10^{-19} \times 10^7 \times 1.3 \times 10^{-7} = 2.08 \times 10^{-19} \text{ N}$$

که در حدود ۱۰ میلیون برابر نیروی گرانشی $m_p g \approx 1.67 \times 10^{-26} \text{ N}$ است. با توجه

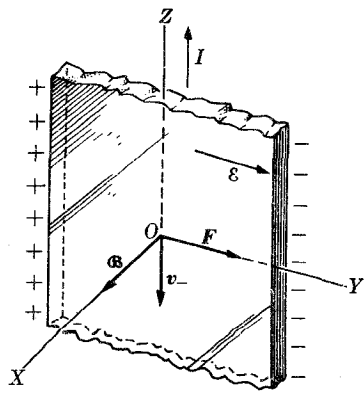
به اینکه جرم پروتون $m = m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ است، شتاب ناشی از این نیرو برابر است با $a = F/m_p = 1.24 \times 10^8 \text{ m s}^{-2}$. بنابراین شتاب پروتون در مقایسه با شتاب گرانی بسیار عظیم است.

مثال ۲۰۱۵ بحثی دربارهٔ اثرهال. در سال ۱۸۷۹/۱۲۵۸ فیزیکدان امریکایی ادوین هربرت هال (۱۲۳۴-۱۳۰۸/۱۸۵۵-۱۹۲۹) کشف کرد که هرگاه یک صفحه فلزی را که جریان I در راستای طول آن برقرار است به گونه‌ای در میدان مغناطیسی قرار دهند که راستای میدان بر سطح صفحه عمود باشد، بین دو نقطهٔ روبه‌روی هم از لبه‌های صفحه اختلاف پتانسیلی به وجود می‌آید. این پدیده به نام اثرهال شناخته می‌شود.

حل: اثرهال نمونه‌ای از کار بست معادلهٔ (۱۰۱۵) است. ابتدا فرض می‌کنیم که حاملهای بار جریان الکتریکی در صفحهٔ فلزی الکترونها ($q = -e$) هستند. در شکل ۳۰۱۵ الف که در آن محور Z به موازات جریان I رسم شده است، مشاهده می‌شود که عملاً حرکت در سوی Z های منفی و با سرعت v_- صورت می‌گیرد. هنگامی که میدان مغناطیسی \mathbf{B} در راستای عمود بر صفحه، یعنی در راستای محور X اعمال می‌شود، به الکترونها نیروی $\mathbf{F} = (-e)\mathbf{v}_- \times \mathbf{B}$ وارد می‌شود. حاصل ضرب برداری $\mathbf{v}_- \times \mathbf{B}$ در سوی $-Y$ است ولی نتیجهٔ ضرب آن در $-e$ بردار \mathbf{F} را در سوی $+Y$ قرار می‌دهد. بنا بر این الکترونها به کنارهٔ راست صفحه رانده می‌شوند. در نتیجه آن ناحیه بار منفی پیدا می‌کند. کنارهٔ چپ با از دست دادن الکترونها طبعی خود، بار الکتریکی مثبت پیدا می‌کند. در نتیجه میدان الکتریکی \mathbf{E} در راستای سوی $+Y$ تولید می‌شود. هنگامی که بین نیروی $(-e)\mathbf{E}$



(ب) حاملهای بار مثبت ($q = +e$)



(الف) حاملهای بار منفی ($q = -e$)

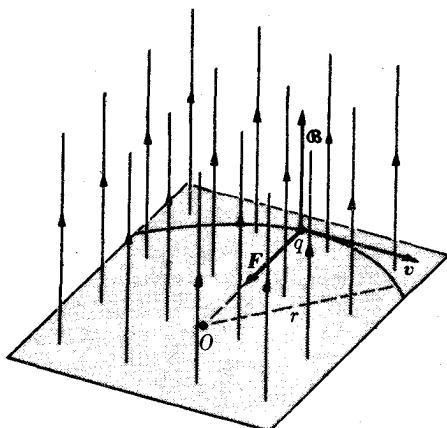
ناشی از اثر میدان الکتریکی \mathbf{E} روی الکترونها که آنها را به سمت چپ می راند، با نیروی میدان مغناطیسی \mathbf{B} که الکترونها را به سمت راست می راند موازنه برقرار شد، ترازمندی به وجود می آید. و این به نوبه خود موجب اختلاف پتانسیل عرضی بین دو لبه متقابل ورقه می شود. پتانسیل کناره چپ بیشتر از کناره راست و مقدار این اختلاف پتانسیل با میدان مغناطیسی متناسب است. این اثر بهنجاریا «منفی» هال است که در بیشتر فلزات مانند طلا، نقره، پلاتین، مس، و غیره ظاهر می شود. ولی در بعضی فلزات مانند کبالت، روی، آهن و سایر مواد مانند نیمه رسانا، اثر مخالف یا «مثبت» هال تولید می شود.

برای توضیح اثر مثبت هال، فرض کنید که حاملهای بار به جای الکترونهای با بار منفی، ذراتی با بار الکتریکی مثبت $q = +e$ باشند. در این صورت آنها باید در سوی جریان الکتریکی حرکت کنند، یعنی سرعت آنها \mathbf{V}_+ مانند شکل ۳۰۱۵ ب در سوی $+Z$ باشد. بنا بر این نیروی مغناطیسی وارد بر بارهای متحرک برابر $\mathbf{F} = (+e)\mathbf{V}_+ \times \mathbf{B}$ و در راستای $+Y$ است. ولی چون بارها مثبت اند، در این حالت کناره راست صفحه بار الکتریکی مثبت پیدا می کند و در نتیجه کناره چپ آن دارای بار الکتریکی منفی می شود، بدین طریق یک میدان الکتریکی افقی در راستای $-Y$ تولید می شود. بنا بر این اختلاف پتانسیل حاصل، عکس اختلاف پتانسیل حاصل از حاملهای منفی خواهد بود و از اینجا اثر مثبت هال نتیجه می شود.

هنگامی که دو نوع اثر هال کشف شد فیزیکدانان بسیار متعجب شدند، زیرا در آن زمان باور عمومی بر آن بود که حاملهای بار الکتریکی در رسانای جامد تنها الکترونهای با بار الکتریکی منفی اند. با وجود این، دریافته بودند که در بعضی مواد می توان گفت که حاملهای بار در جسم جامد ذراتی با بار الکتریکی مثبت اند. در این مواد، جاهایی وجود دارند که قاعدتاً باید الکترون در آنجاها باشد، ولی به سبب نقایصی در ساختار جسم، این الکترون وجود ندارد. به عبارت دیگر، می گویند که یک حفره الکترون وجود دارد. اگر، به هر دلیل، الکترون مجاور حرکت کند تا حفره ای را پر کند، روشن است در جای اولیه الکترون حفره ای به وجود خواهد آمد. بدین طریق بر اثر میدان الکتریکی، حفره ها در جهت مخالف جهت حرکت الکترونها جابجا می شوند. بنا بر این می توان گفت که حفره ها دقیقاً مانند ذراتی با بار الکتریکی مثبت عمل می کنند. بدین طریق اثر هال روش بسیار مفیدی برای تعیین حاملهای بار در یک رسانای الکتریکی فراهم می سازد.

۳۰۱۵ حرکت بار الکتریکی در میدان مغناطیسی

ابتدا حرکت ذره باردار را در میدان مغناطیسی یکنواخت، یعنی میدانی باشد و راستای یکسان در تمام نقاطش، در نظر می گیریم. برای سهولت، ابتدا حالت ذره ای را بررسی می کنیم که در راستای عمود بر میدان حرکت می کند (شکل ۴۰۱۵). در این صورت نیرو از معادله (۴۰۱۵) به دست می آید. چون این نیرو بر راستای سرعت عمود است، بنا بر این بدون اینکه بزرگی سرعت تغییر کند، راستای آن تغییر می کند. بدینسان حرکت دایره ای



شکل ۴.۱۵ یک بار الکتریکی که در راستای عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت حرکت می کند مسیر دایره ای می پیماید.

یکنواخت است. پس شتاب ذره مرکز گراست، و بنا به معادله حرکت (۲۸.۷) داریم $F = mv^2/r$. هر گاه به جای F از معادله (۴.۱۵) قرار دهیم به دست می آید

$$\frac{mv^2}{r} = qvB$$

یا

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (۵.۱۵)$$

از این رابطه شعاع دایره ای که ذره می پیماید به دست می آید. به عنوان مثال، با استفاده از داده های مثال ۱.۱۵ مشاهده می شود که اگر میدان یکنواخت باشد پروتونها دایره ای به شعاع 1.5×10^5 m را می پیمایند. با نوشتن $v = r\omega$ که در آن ω سرعت زاویه ای است به دست می آید

$$\omega = \frac{q}{m} B \quad (۶.۱۵)$$

بنابراین سرعت زاویه ای مستقل از سرعت خطی است و تنها به نسبت q/m و میدان B بستگی دارد. معادله (۶.۱۵) بزرگی ω را به دست می دهد، نه راستای آن را. با معادله (۵.۸.۵) نشان دادیم که در حرکت دایره ای یکنواخت می توان شتاب را به صورت برداری $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ نوشت. بدین طریق معادله حرکت $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ به صورت زیر درمی آید

$$m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

یا با تعویض جای \mathbf{v} با \mathbf{B} در سمت راست و تقسیم طرفین معادله بر m می توان نوشت

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\frac{q}{m} \mathbf{B} \times \mathbf{v}$$

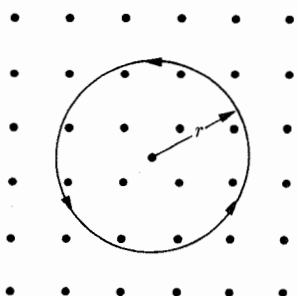
که نشان می دهد

$$\boldsymbol{\omega} = -\left(\frac{q}{m}\right) \mathbf{B} \quad (7.15)$$

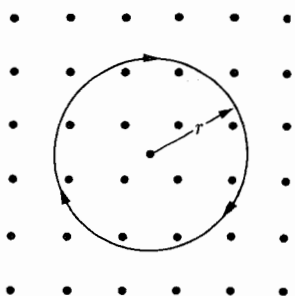
از این رابطه هم بزرگی و هم راستای $\boldsymbol{\omega}$ به دست می آید. * علامت منفی نشان می دهد که برای بار مثبت، $\boldsymbol{\omega}$ در سوی مخالف \mathbf{B} و برای بار منفی در سوی موافق \mathbf{B} است. به دلیلی که در بخش ۴.۱۵ ج هنگام مطالعه سیکلوترون خواهد آمد، $\boldsymbol{\omega}$ را بسامد سیکلوترونی می نامیم. معمولاً میدان عمود بر صفحه کاغذ را هرگاه سوی میدان به سمت خواننده باشد با نقطه

(.) و در صورتی که در سوی مخالف (به سمت داخل صفحه) باشد با ضربدر (X) نشان می دهند. شکل ۵.۱۵ مسیر بار مثبت (الف) و بار منفی (ب) را که عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت و عمود بر صفحه کاغذ حرکت می کند، نشان می دهد. در شکل ۵.۱۵ الف $\boldsymbol{\omega}$ به سوی داخل صفحه و در ب به سوی خواننده است.

بنا بر این اگر سوی حرکت معلوم باشد، انحنای مسیر یون در میدان مغناطیسی وسیله ای است برای تعیین علامت بار الکتریکی آن. شکل ۶.۱۵ مسیر حرکت چند ذره



(ب) q منفی، \mathbf{B} و $\boldsymbol{\omega}$ هر دو به سوی بالا



(الف) q مثبت، \mathbf{B} به سوی بالا و $\boldsymbol{\omega}$ در سوی مخالف

شکل ۵.۱۵ مسیر دایره ای بار مثبت و منفی در میدان مغناطیسی یکنواخت.

* به طور دقیقتر، باید می نوشتیم $\boldsymbol{\omega} = -\left(\frac{q}{m}\right) \mathbf{B} + \lambda \mathbf{v}$ که در آن λ یک ثابت اختیاری است؛ ولی معادله (۶.۱۵) نشان می دهد که λ را باید برابر صفر گرفت.

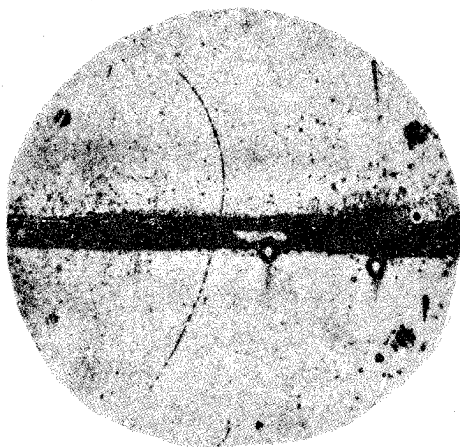


شکل ۶۰۱۵ عکس برداری در اتاقک ابری از مسیر ذرات باردار در میدان مغناطیسی یکنواختی که به سمت داخل صفحه است. آیا دانشجو می تواند بارهای مثبت و منفی را شناسایی کند.

باردار را در میدان مغناطیسی، که در اتاقک ابری* به صورت قابل مشاهده درآمده اند نشان می دهد. میدان مغناطیسی به کاررفته چندین مرتبه بزرگتر از میدان مغناطیسی زمین است، به گونه ای که شعاع مسیر از مرتبه ابعاد اتاقک ابری است. توجه کنید که مسیرها در دوسوی مخالف هم خم شده اند. این امر نشان می دهد که بعضی از ذرات مثبت و بعضی دیگر منفی اند. همچنین مشاهده می شود که بعضی ذرات مسیر مارپیچی را طی می کنند که شعاع آن بتدریج

* اتاقک ابری محفظه ای است پر از آمیزه ای از گاز و بخار که در آن مسیر ذره باردار با چگالش بخار روی یونهای گاز قابل رؤیت می شود. یونها از برهم کنش ذره باردار با مولکولهای گاز به وجود می آیند. شرایط مناسب چگالش از سرد کردن آمیزه با انبساط سریع (بی دررو) به دست می آید، آمیزه هوا و بخار آب را می شود به کار برد.

کاهش می‌یابد. این موضوع نشان می‌دهد که حرکت ذرات بر اثر برخورد با مولکولهای گاز کند می‌شود، و بنا به معادله (۵.۱۵)، کند شدن حرکت با کاهش شعاع مسیر همراه است. همچنین معادله (۵.۱۵) حاکی از این است که انحنای مسیر ذره باردار در اتاقک ابری واقع در میدان مغناطیسی، به انرژی ذرات بستگی دارد. هر چه انرژی (یا اندازه حرکت $p = mv$) بیشتر باشد شعاع مسیر بزرگ و انحنای آن کمتر است. استفاده از این اصل در سال ۱۹۳۲/۱۳۱۱ راهنمای کشف پوزیترون در پرتوهای کیهانی شد. پوزیترون یک ذره بنیادی است با جرمی برابر با جرم الکترون m_e ، ولی با بار مثبت $+e$. کشف پوزیترون کار فیزیکدان امریکایی، کارل دیوید اندرسون (۱۹۰۵/۱۲۸۴) است. * اندرسون بود که عکس شکل ۷.۱۵ را از اتاقک ابری برداشت. نوار افقی که در شکل دیده می‌شود یک تیغه سربی به ضخامت ۰.۰۱ cm عره است که در اتاقک ابری قرار داده شده بود و ذرات از آن می‌گذشتند. انحنای مسیر در قسمت پایین کمتر از انحنای آن در قسمت بالاست، این امر نشان می‌دهد که سرعت و انرژی ذره در بالا از پایین کمتر است. بنا بر این سوی حرکت ذره



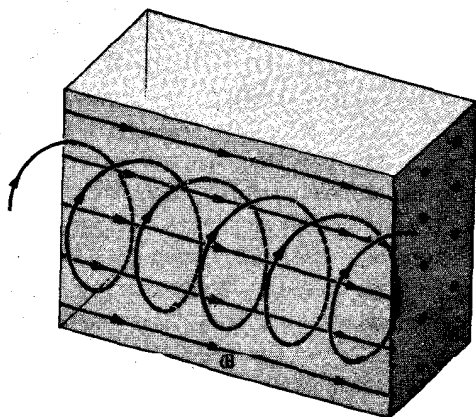
شکل ۷.۱۵ عکس برداری (توسط اندرسون) از رد پوزیترون (الکترون مثبت) در اتاقک ابری واقع در یک میدان مغناطیسی که جهت آن به سوی داخل صفحه است. این عکس اولین گواه تجربی (۱۹۳۲/۱۳۱۱) مبنی بر وجود پوزیترون است که قبلاً دیراک وجود آن را به طور نظری پیشگویی کرده بود.

* چند سال قبل از کشف اندرسون، فیزیکدان انگلیسی پل آدرین موریس دیراک (Paul A. M. Dirac) (۱۹۱۲/۱۳۶۳-۱۹۸۴) وجود چنین ذره‌ای را پیشگویی کرده بود.

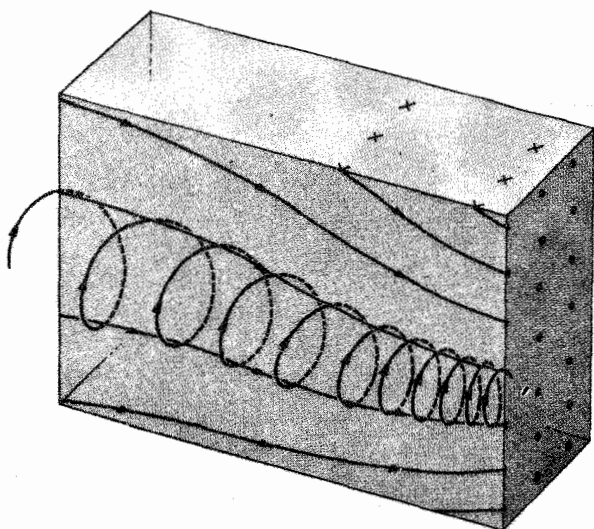
از پایین به بالاست که در هنگام عبور از تیغه بخشی از انرژی خود را از دست می دهد. انحنای مسیر ذره و سوی حرکت آن نسبت به میدان مغناطیسی نشان می دهد که ذره بار مثبت دارد. مسیر شباهت زیادی به مسیر الکترون دارد، ولی الکترون مثبت. می توان از معادله (۵.۱۵) به دست آورد که $p = mv = qBr$. بدین طریق، با اندازه گیری r از روی عکس و با فرض $q = +e$ می توان p را حساب کرد. از چنین محاسبه ای معلوم شده است که مرتبه بزرگی p مربوط به يك ذره با جرم برابر با جرم الکترون است. با تحلیل دقیقتری می توان سرعت ذره را به دست آورد و از آنجا جرم آن را حساب کرد که با جرم الکترون کاملاً تطبیق می کند.

اگر راستای اولیه حرکت ذره باردار بر میدان مغناطیسی عمود نباشد، می توان سرعت را به دو مؤلفه عمود و موازی با راستای میدان تجزیه کرد. مؤلفه موازی بدون تغییر باقی می ماند، در صورتی که راستای مؤلفه عمود بر میدان دائماً تغییر می کند ولی بزرگی آن تغییر نمی کند. بنابراین حرکت ذره بر این دو حرکت خواهد بود؛ یکی حرکت یکنواخت موازی میدان و دیگری حرکت دایره ای دور میدان که سرعت زاویه ای آن از معادله (۶.۱۵) به دست می آید. بنابراین، همچنان که شکل ۸.۱۵ در مورد یون مثبت نشان می دهد، مسیر به صورت مارپیچ است.

نتیجه دیگری که از معادله (۵.۱۵) به دست می آید این است که هر چه میدان مغناطیسی قویتر باشد، شعاع مسیر ذره باردار کوچکتر می شود. بنابراین اگر میدان مغناطیسی یکنواخت نباشد، مسیر دایره ای نخواهد بود. شکل ۹.۱۵ میدان مغناطیسی را در سوی چپ به راست نشان می دهد که شدت آن در همین سوا افزایش می یابد. بدین طریق، ذره باردار که از طرف چپ به داخل میدان رانده شود، مارپیچی را طی می کند که پیوسته از شعاع آن کاسته می شود.



شکل ۸.۱۵ مسیر مارپیچی يك یون مثبت که در میدان مغناطیسی یکنواخت به طور مایل حرکت می کند.

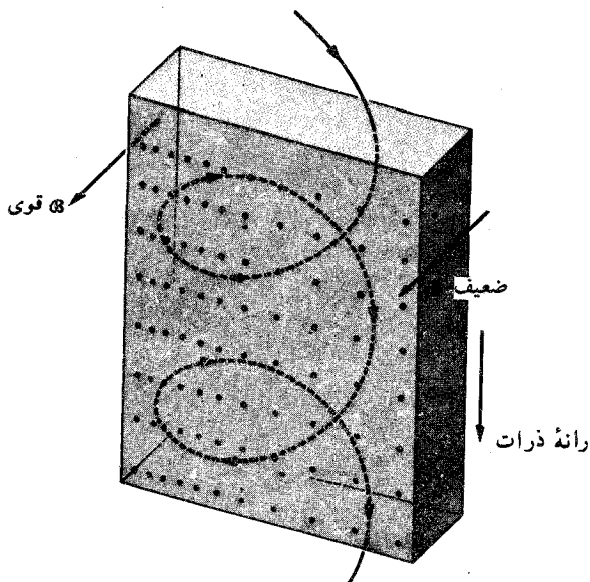


شکل ۹.۱۵ مسیر حرکت یون مثبت در میدان مغناطیسی غیر یکنواخت.

تحلیل دقیقتری که از بیان آن در اینجا صرف نظر می‌کنیم، نشان می‌دهد که مؤلفه سرعت در راستای موازی با میدان ثابت نمی‌ماند. بلکه بتدریج که ذره در جهت افزایش شدت میدان پیش می‌رود از مقدار آن کاسته می‌شود (در نتیجه گام مارپیچ کاهش می‌یابد). اگر میدان به قدر کافی گسترده باشد سرانجام این مؤلفه به صفر می‌رسد و ذره مجبور می‌شود به عقب برگردد یا به صورت پادموازی میدان مغناطیسی حرکت کند. به همین جهت یک میدان مغناطیسی که شدت آن افزایش می‌یابد، مانند یک بازتاب‌دهنده ذرات باردار، یا آنچنانکه معمولاً می‌گویند یک آینه مغناطیسی عمل می‌کند. این اثر به‌طور گسترده برای محصور کردن گازهای یونیده یا پلاسما مورد استفاده قرار می‌گیرد.

یک وضع دیگر در شکل ۱۰.۱۵ نشان داده شده است که در آن یک میدان مغناطیسی عمود بر صفحه کاغذ وجود دارد که شدت آن از راست به چپ در افزایش است. این شکل مسیری که یون مثبت را که عمود بر راستای میدان پرتاب شده است نیز نشان می‌دهد. در سمت چپ که میدان قویتر است انحنای مسیر نیز بیشتر است و در سمت راست به سبب ضعیفتر بودن میدان، انحنای کمتر است. در این حالت مسیر بسته نیست و ذره از داخل میدان در راستای عمود بر راستای تغییر میدان سوق داده می‌شود.

مثال جالب دیگر از حرکت یونها در داخل میدان مغناطیسی عبارت است از ذراتی که از فضای بین سیارات به سمت زمین می‌آیند. این ذرات بخشی از پرتوهای کیهانی را

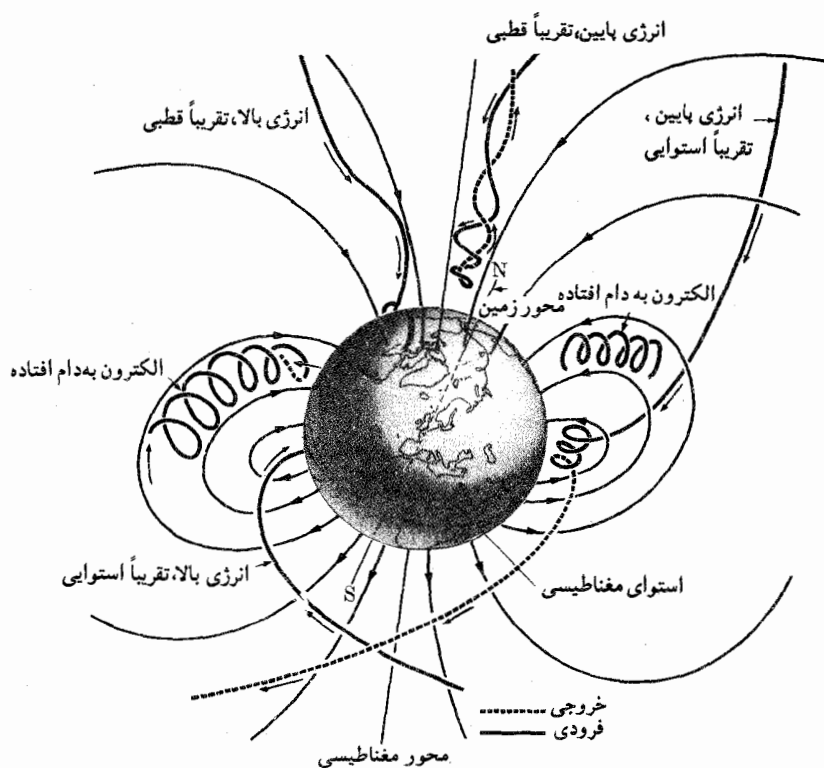


شکل ۱۰.۱۵ حرکت در صفحه یک یون پرتاب شده در داخل میدان مغناطیسی غیر یکساخت.

تشکیل می‌دهند. شکل ۱۱.۱۵ خطهای نیسروی میدان مغناطیسی زمین را نشان می‌دهد.* ذراتی که در راستای محور مغناطیسی زمین فرود می‌آیند هیچگونه انحرافی در مسیر آنها پیدا نمی‌شود و حتی اگر انرژی آنها نیز بسیار کم باشد به سطح زمین می‌رسند. ذراتی که در راستایی مایل نسبت به محور مغناطیسی زمین فرود می‌آیند مسیرشان مارپیچی است و آنها که با سرعت کمی حرکت می‌کنند ممکن است به قدری انحراف پیدا کنند که هرگز به سطح زمین نرسند. ذراتی که به استوای مغناطیسی زمین می‌رسند بزرگترین انحراف را متحمل می‌شوند زیرا در صفحه‌ای که بر راستای میدان مغناطیسی زمین عمود است حرکت می‌کنند. بنابراین تنها ذرات با انرژی بالاتر می‌توانند در استوای مغناطیسی به سطح زمین برسند. به گفته دیگر، حداقل انرژی که یک ذره باردار کیهانی باید داشته باشد تا به سطح زمین برسد از محور مغناطیسی زمین به سمت استوای مغناطیسی زمین در افزایش است.

یک پدیده دیگر ناشی از میدان مغناطیسی زمین عدم تقارن شرقی- غربی در تابشهای کیهانی است. به طور قطع معلوم نیست که بیشتر ذرات باردار کیهانی مثبت‌اند یا منفی. ولی این را می‌دانیم که ذرات با بار الکتریکی ناهمنام در میدان مغناطیسی زمین در دوسوی مخالف

* در واقع، در میدان مغناطیسی اطراف زمین بی‌هنجاریهایی محلی متعدد در سمت مخالف خورشید یک اعوجاج کلی دیده می‌شود، که در شکل ۱۱.۱۵ نشان داده ایم.



شکل ۱۱-۱۵ حرکت ذرات کیهانی باردار در میدان مغناطیسی زمین.

منحرف می‌شوند. اگر تعداد ذرات مثبت در پرتوهای کیهانی، که به زمین می‌رسند، با تعداد ذرات منفی یکی نباشد، باید در یک نقطه معلوم از سطح زمین شدت پرتوهایی که مثلاً از شرق سرسو (سمت الرأس) می‌آیند باشد پرتوهایی که از مغرب سرسو (سمت الرأس) می‌آیند متفاوت باشد. آزمایشها تعداد ذرات باردار مثبت را خیلی بیشتر نشان می‌دهند.

کمرندهای تابشی وان آلن مثال دیگر از پرتوهای کیهانی با میدان مغناطیسی زمین است. این کمرندها از ذرات باردار سریع، اغلب الکترونها و پروتونها، تشکیل شده‌اند که در میدان مغناطیسی زمین به دام می‌افتند. کمر بند داخلی از ۸۰۰ km تا ۴۰۰۰ km بالای سطح زمین گسترده است، و کمر بند خارجی تا ۶۰۰۰۰ km را می‌پوشاند.* این

* دلایل روشنی وجود دارد که نشان می‌دهند کمر بند داخلی از الکترونها و پروتونهای حاصل از واپاشی نوترونهایی که بر اثر برهم‌کنشهای پرتوهای کیهانی در جو زمین به وجود آمده‌اند، تشکیل شده است. کمر بند خارجی را عمدتاً ذرات باردار تشکیل می‌دهند که از خورشید پرتاب شده‌اند. افزایش تعداد این ذرات با افزایش فعالیت خورشید همراه است خروج آنها از کمر بند موجب ظهورشفقهای قطبی و مانع گسیل امواج رادیویی می‌شود.

کمر بندها در سال ۱۳۳۷/۱۹۵۸ به یاری دستگاههای علمی ماهواره امریکایی کاشف کشف شدند و به وسیله پایونیر ۳ مورد پژوهش قرار گرفتند. برای آشنایی بیشتر با طرز به دام افتادن ذرات باردار در کمر بندهای وان آلن، فرض کنید بر اثر برخورد یک اتم ویک پروتوکیهانی در چند کیلومتری بالای سطح زمین یک الکترون آزاد تولید می شود. مؤلفه سرعت در راستای عمود بر میدان مغناطیسی زمین سبب می شود که الکترون در یک مسیر منحنی حرکت کند. ولی شدت میدان در نزدیکی سطح زمین بیشتر است. در نتیجه حرکتی مشابه با شکل ۱۵.۱۵ ایجاد می شود، و الکترون به سبب بار منفی خود به سمت مشرق سوق داده می شود (بار مثبت به سمت مغرب سوق داده خواهد شد). یک پدیده دیگر ناشی از مؤلفه سرعت الکترون در راستای موازی با میدان مغناطیسی زمین است که در امتداد خطهای نیروی مغناطیسی یک حرکت مارپیچی به سمت یکی از قطبها تولید می کند (مشابه حرکت نشان داده شده در شکل ۸.۱۵). به سبب افزایش شدت میدان مغناطیسی به سمت شمال یا به سمت جنوب، حرکت چرخشی بیش از پیش تنگتر می شود، در صورتی که همزمان مؤلفه موازی سرعت کاهش می یابد، همچنان که در مورد اثر آینه مغناطیسی در شکل ۹.۱۵ توضیح دادیم. هر الکترون به یک عرض جغرافیایی شمال یا جنوب می رسد که در آنجا سرعت موازی صفر می شود، و این عرض به سرعت اولیه تزریق شده به الکترون بستگی دارد. سپس الکترون برمی گردد و به سمت قطب مخالف می رود. بنابراین حرکت بر این عبارت است از یک انتقال به سمت مشرق در طول و یک نوسان شمالی-جنوبی در عرض جغرافیایی. این حرکت، شاید چندین هفته، به طور مداوم تکرار می شود تا اینکه الکترون بایک برخورد به خارج از کمر بند وان آلن پرتاب شود و از دام رهایی یابد. پروتونهای به دام افتاده نیز وضعی مشابه با الکترون دارند.

۴.۱۵ مثالهایی از حرکت ذره های باردار در میدان مغناطیسی

در این بخش به توضیح چند مثال عینی و ملموس می پردازیم که در آنها یون در میدان مغناطیسی حرکت می کند.

الف) بیناب سنج جرم شکل ۱۲.۱۵ را در نظر می گیریم. I چشمه یون (بسرای الکترونها می تواند یک رشته سیم گرم باشد) و S_1 و S_2 دو شکاف کوچک اند که بین آنها اختلاف پتانسیل V برقرار است و یونها با عبور از این شکافها شتاب می گیرند. سرعت خروج الکترون به کمک معادله (۳۸.۱۴) محاسبه می شود

$$v^2 = 2 \left(\frac{q}{m} \right) V \quad (۸.۱۵)$$

در ناحیه زیر شکافها یک میدان مغناطیسی یکنواخت عمود بر صفحه و به سوی بالا وجود دارد. بنابراین یونها مسیری دایره ای را می بینمایند و سوی انحراف آنها بستگی به علامت بار q دارد. هر یونی پس از پیمودن یک نیمدایره به صفحه عکاسی P برخورد می کند و در

آنجا اثری از خود برجای می‌گذارد. r ، شعاع مسیر از معادله (۵.۱۵) به دست می‌آید، که از آن رابطه سرعت را می‌توان به دست آورد

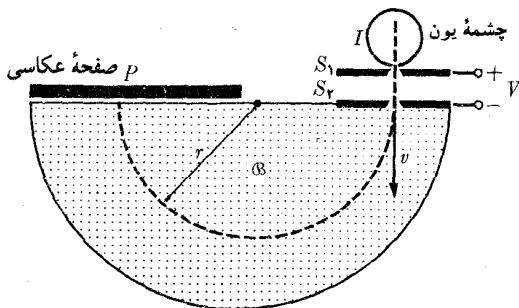
$$v = \frac{q}{m} Br \quad (9.15)$$

از ترکیب معادله‌های (۸.۱۵) و (۹.۱۵)، با حذف v ، داریم

$$\frac{q}{m} = \frac{2V}{B^2 r^2} \quad (10.15)$$

این رابطه نسبت q/m را بر حسب سه کمیت V ، B و r به دست می‌دهد که به آسانی قابل اندازه‌گیری اند. این روش را می‌توان در مورد الکترونها، پروتونها و هر ذره باردار دیگری مانند اتم یا مولکول نیز به کار برد. با اندازه‌گیری مستقل q ، می‌شود جرم ذره را به دست آورد. از این روشها قبلاً در بخش ۵.۱۴ نام برده‌ایم.

دستگاه شکل ۱۲.۱۵ يك بيناب سنج جرم است، چونکه يونهای با بار يكسان q ولی با جرمهای مختلف m را از يكديگر جدا می‌کند. مطابق معادله (۱۰.۱۵)، شعاع مسیر هر یون با یون دیگر مختلف است و این اختلاف به مقدار q/m یون بستگی دارد. این بیناب سنج ویژه، بیناب سنج دهمپستر نام دارد. انواع دیگر بیناب سنج (همگی بر يك پایه) ساخته شده‌اند. در سال ۱۹۲۵/۱۲۹۹، پژوهشگران با استفاده از این روش متوجه شدند که جرم اتمهای يك عنصر شیمیایی الزاماً يكسان نیست. چنانکه در بخش ۷.۱۴ اشاره کردیم، گونه‌های مختلف يك عنصر شیمیایی را، گونه‌هایی که در جرم با هم فرق دارند، ایزوتوپ می‌نامند.



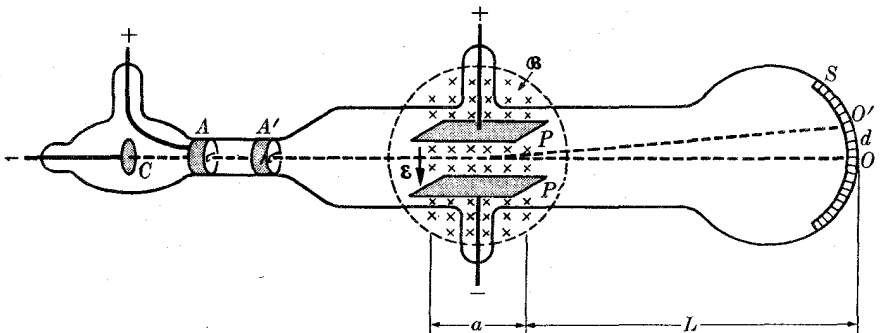
شکل ۱۲.۱۵ بیناب سنج جرم دهمپستر. I چشمه یون است. شکافهای S_1 و S_2 برای موازی کردن یونها به کار می‌روند. اختلاف پتانسیل شتابدهنده‌ای است که بین S_1 و S_2 برقرار می‌شود. P صفحه عکاسی برای ثبت یونهای درودی است.

همچنین از وسیله تجربی شکل ۱۲.۱۵ نیز می توان برای به دست آوردن نسبت q/m برای ذره ای که با سرعت های مختلف حرکت می کند استفاده کرد. معلوم شده است که مقدار q/m به v ، سرعت ذره، بستگی دارد. این بستگی به گونه ای است که گویی q ثابت باقی می ماند و m مطابق معادله (۷.۱۱)، یعنی $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ، با سرعت تغییر می کند. بنا بر این نتیجه می گیریم که

بار الکتریکی ناورد است، زیرا برای تمام ناظرهایی که نسبت به هم حرکت یکنواخت دارند یکسان است.

(ب) آزمایش تامسون. در نیمه دوم قرن نوزدهم آزمایشهای زیادی روی تخلیه الکتریکی صورت گرفت. این آزمایشها عبارت بودند از ایجاد تخلیه الکتریکی در گاز در فشار کم با قراردادن دو الکترود در آن و برقراری اختلاف پتانسیل خیلی قوی بین آنها. بسته به فشار گاز در داخل لوله، پدیده های نوری مختلفی مشاهده شدند. هنگامی که فشار گاز داخل لوله را در کمتر از یک هزارم اتمسفر نگه می داشتند، هیچ اثر قابل رؤیتی در داخل لوله مشاهده نمی شد، مگر یک لکه نورانی روی دیواره لوله در نقطه O درست مقابل کاتود C (شکل ۱۳.۱۵). بدین طریق این فرضیه ساخته شد که تابشی از کاتود گسیل می شود که در خط مستقیم به سوی نقطه O حرکت می کند. به همین جهت، این تابش را پرتوهای کاتودی نامیدند.

هنگامی که آزمایشگران دو صفحه موازی $P'P$ را که بین آنها اختلاف پتانسیلی برقرار بود به داخل لوله اضافه کردند، میدان الکتریکی E از P به سمت P' تولید شد. نتیجه برقراری این میدان الکتریکی جابجایی لکه نورانی از نقطه O به نقطه O' بود، یعنی در راستای مربوط به یک بار الکتریکی منفی. این نتیجه نشان می داد که پرتوهای کاتودی، جریانی از ذرات با بار منفی است. اگر q بار هر ذره و v سرعت آن باشد، انحراف



شکل ۱۳.۱۵ آزمایش تامسون برای اندازه گیری q/m . پرتوهای کاتودی (الکترونها) از کاتود C گسیل و به وسیله A و A' موازی می شوند و پس از عبور از ناحیه ای که در آنجا میدان های الکتریکی و مغناطیسی برقرارند به پرده S می رسند.

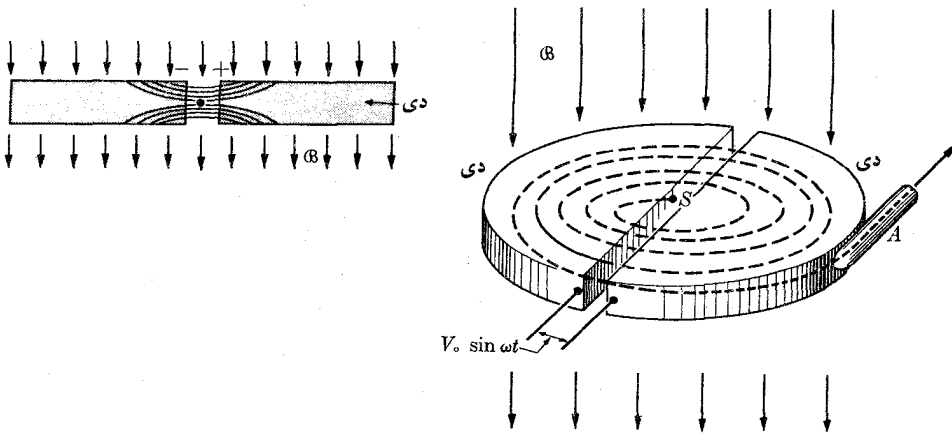
$d = \infty$ را می‌توان از معادله (۹.۱۴)، یعنی $d/L = qEa/mv^2$ ، حساب کرد. نیروی الکتریکی وارد بر ذره برابر qE و به‌سوی بالاست. اکنون فرض کنید در همان ناحیه‌ای که میدان الکتریکی E وجود دارد، میدان مغناطیسی B به سمت داخل صفحه نیز برقرار شود. بنا به معادله (۴.۱۵)، نیروی مغناطیسی برابر است با qvB و سوی آن از بالا به پایین است، زیرا بار الکتریکی q منفی است. با تنظیم درست B ، می‌توان نیروی مغناطیسی را با نیروی الکتریکی برابر کرد در نتیجه بر ایندنیروها برابر صفر می‌شود و لکه نورانی از نقطه O' به نقطه O بازمی‌گردد، یعنی در پرتوهای کاتودی هیچ انحرافی وجود ندارد. در این شرایط $qE = qvB$ یا $v = E/B$ است. از اینجا راهی برای اندازه‌گیری سرعت ذره باردار به دست می‌آید. با قرار دادن این مقدار v در معادله (۹.۱۴) نسبت q/m برای ذره‌های تشکیل دهنده پرتوهای کاتودی به دست می‌آید

$$\frac{q}{m} = \frac{Ed}{BLZ}$$

این آزمایش یکی از اولین آزمایشهای مطمئن برای اندازه‌گیری q/m است و دلیل غیر مستقیم است بر اینکه پرتوهای کاتودی از ذراتی با بار منفی، به نام الکترون، تشکیل شده‌اند. در سال ۱۸۹۷/۱۲۷۶ این آزمایش و همچنین آزمایشهای مشابه دیگری به وسیله فیزیکدان انگلیسی تامسون (۱۲۳۵-۱۳۱۹/۱۸۵۶-۱۹۴۰)، که وقت و انرژی فراوانی در کشف ماهیت پرتوهای کاتودی صرف کرده بود، انتشار یافت. امروزه می‌دانیم که الکترونهای آزاد موجود در فلز کاتود، بر اثر میدان الکتریکی قوی بین A و C از کاتود کنده یا تبخیر می‌شوند و در داخل لوله به وسیله همین میدان شتاب می‌گیرند.

ج) سیکلوترون. دایره‌ای بودن مسیر ذره باردار در میدان مغناطیسی امکان می‌دهد که شتاب‌دهنده‌های ذرات با طرز کار چرخه‌ای طرح‌ریزی شوند. یکی از دشواریهای شتاب‌دهنده‌های الکتروستاتیک (که در بخش ۹.۱۴ توضیح داده شد) این است که شتاب ذره به اختلاف پتانسیل V بستگی دارد. چون میدان الکتریکی در داخل شتاب‌دهنده برابر است با $E = V/d$ ، اگر V خیلی بزرگ باشد، برای اجتناب از تولید میدان الکتریکی خیلی قوی که موجب اتصال الکتریکی مواد سازنده لوله شتاب‌دهنده می‌شود، باید d طول لوله شتاب‌دهنده خیلی بزرگ باشد. ولی ساختن یک لوله شتاب‌دهنده خیلی طویل مشکلات فنی بسیاری به‌همراه دارد. برعکس در شتاب‌دهنده چرخه‌ای، می‌توان با گذراندن پایی الکترون از اختلاف پتانسیل نسبتاً ضعیف به تدریج بر شتابش افزود. اولین دستگاهی که بر این اساس شروع به کار کرد سیکلوترون نام گرفت، که به وسیله فیزیکدان امریکایی لارنس طرح‌ریزی شد. اولین سیکلوترون قابل استفاده در سال ۱۹۳۲/۱۳۱۱ به کار افتاد. بعد از آن سیکلوترونهای زیادی ساخته شده است که هر یک نسبت به قبلی پراورتر و دارای طرح کاملتری است.

سیکلوترون (شکل ۱۴.۱۵) اساساً عبارت است از یک کاواک استوانه‌ای که بدو



شکل ۱۴.۱۵ عناصر اصلی یک سیکلوترون. مسیر یون با منحنی نقطه‌چین رسم شده است.

نیمه D_1 و D_2 (که هر کدام به سبب شکلی که دارد «دی» نامیده می‌شود) تقسیم شده است و در میدان مغناطیسی موازی با محور استوانه قرار دارد. دو کاواک از نظر الکتریکی نسبت به هم عایق شده‌اند. چشمه یون S در وسط فضای بین دو دی قرار دارد. بین دو دی اختلاف پتانسیل متناوبی از مرتبه 10^4 برقرار است. اگر یونها مثبت باشند، به سمت دی منفی شتاب می‌گیرند. به محض اینکه یون به داخل دی نفوذ کرد، هیچگونه نیروی الکتریکی به آن وارد نمی‌شود زیرا در داخل رسانا میدان الکتریکی برابر صفر است. با وجود این، میدان مغناطیسی یونها را وادار به حرکت در مسیر دایره‌ای می‌کند که شعاع آن از معادله (۵.۱۵) $r = mv/qB$ ، به دست می‌آید. سرعت زاویه‌ای یون برابر است با بسامد سیکلوترونی ذره‌ها که از معادله (۶.۱۵) $\omega = qB/m$ ، حساب می‌شود. اختلاف پتانسیل بین دی‌ها با بسامد ω نوسان می‌کند. بدین طریق اختلاف پتانسیل بین دی‌ها با حرکت دایره‌ای یونها در بازآوایی است.

بعد از اینکه ذره نیمدایره‌ای را پیمود، قطبیت دی‌ها عوض می‌شود و هنگامی که یون از فضای بین دو دی می‌گذرد شتاب کوچک و جدیدی دریافت می‌کند. در نتیجه شعاع نیمدایره بعدی بیشتر از اولی است، ولی با همان سرعت زاویه‌ای طی می‌شود. این فرایند خود به خود چندین بار تکرار می‌شود تا شعاع دایره به حداکثر مقدار خود، یعنی R می‌رسد، که عملاً برابر شعاع دی‌هاست. میدان مغناطیسی در کنار دی‌ها با سرعت پایین می‌آید و ذره به طور مماس از روزه پیش‌بینی شده‌ای فرار می‌کند. v_{max} ، سرعت بیشینه با معادله (۵.۱۵) به شعاع R مربوط می‌شود، یعنی

$$R = \frac{mv_{max}}{qB} \quad \text{یا} \quad v_{max} = \left(\frac{q}{m}\right) BR$$

بنابراین انرژی جنبشی ذره‌ای که از A خارج می‌شود برابر است با

$$E_k = \frac{1}{4} m v_{\max}^2 = \frac{1}{4} q \left(\frac{q}{m} \right) B^2 R^2 \quad (11.15)$$

که به مشخصات ذره، شدت میدان مغناطیسی و شعاع سیکلوترون بستگی دارد ولی مستقل از پتانسیل شتابنده است. اگر اختلاف پتانسیل کم باشد، ذره برای کسب انرژی نهایی باید دورهای زیادی بپرخد، اما اگر اختلاف پتانسیل زیاد باشد، دورهای کمتری کافی خواهد بود.

شدت میدان مغناطیسی را سازه‌های فنی مانند دسترسی به موادی که دارای خواص مورد لزوم اند محدود می‌کند. ولی با ساختن آهنرباهایی با شعاع به حد کافی بزرگ، اساساً می‌توان به ذره آنقدر شتاب داد تا به انرژی مورد نظر برسد. با وجود این، هرچه شعاع آهنربا بزرگتر شود، وزن آن سنگینتر می‌شود و به بهای گرانتر درمی‌آید. علاوه بر این یک سازه فیزیکی نیز انرژی سیکلوترون را محدود می‌کند. با افزایش انرژی ذره، سرعت آن نیز افزایش می‌یابد، بدین طریق جرم ذره مطابق معادله (۷.۱۱)، $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ، تغییر می‌کند. در انرژی‌های خیلی بالا، تغییر جرم به قدری است که بسامد سیکلوترونی یون را به طور قابل ملاحظه‌ای تغییر می‌دهد. از این رو، اگر بسامد پتانسیل الکتریکی تغییر نکند، مدار ذره دیگر با پتانسیل نوسانی همفاز نیست و شتاب بیشتری تولید نخواهد شد. بنا بر این در سیکلوترون، به سبب اثر نسبیته جرم، انرژی دارای حد معینی است.

مثال ۳.۱۵ قطر قطبهای سیکلوترون دانشگاه میشیگان ۸۳ in یا ۲۱ m و شعاع خروج ذره آن ۳۶ in یا ۹۲ m است، بیشینه میدان مغناطیسی $B = ۱۵۵$ T و بسامد نوسانی بیشینه‌ای که پتانسیل شتابنده می‌تواند به آن برسد ۱۵×۱۰^6 Hz است. انرژی داده شده به پروتونها و ذرات آلفا و همچنین بسامد سیکلوترونی آنها را حساب کنید. با توجه به تغییر نسبیته جرم، درصد اختلاف بسامد سیکلوترونی در مرکز و در لبه چقدر است؟

حل: با قراردادن مقادیر عددی بار و جرم مربوط به پروتونها و ذرات آلفا در معادله (۱۱.۱۵)، انرژی هر دو نوع ذره با رابطه زیر داده می‌شود

$$E_k = ۱۷۴۶ \times ۱۰^{-۱۱} \text{ J} = ۹۱ \text{ MeV}$$

بسامد سیکلوترونی برای ذره آلفا برابر است با $\omega_\alpha = ۷۲۲ \times ۱۰^9 \text{ s}^{-۱}$ یا $\nu_\alpha = \omega_\alpha / 2\pi = ۱۱۵ \times ۱۰^6 \text{ Hz}$ که در داخل گستره بسامد بیشینه طرح شده است. برای پروتونها بسامدی معادل با دو برابر بسامد ذره آلفا یعنی $۲۳ \times ۱۰^6 \text{ Hz}$ به دست می‌آید. این بسامدی است که باید بسامد پتانسیل اعمال شده به دی‌ها به آن برسد. ولی بسامد بیشینه طرح شده برای سیکلوترون $۱۵ \times ۱۰^6 \text{ Hz}$ است. بنابراین، این دستگاه نمی‌تواند تا مقدار نظری انرژی ۹۱ MeV به پروتون شتاب بدهد. اگر فرض کنیم که سیکلوترون با بسامد نوسانی بیشینه کار می‌کند خواهیم داشت $\omega_p = ۹۷۴۲ \times ۱۰^9 \text{ s}^{-۱}$.

میدان مغناطیسی مربوط به باز آوایی سیکلوترون برابر است با 0.984 T ، و در این صورت انرژی جنبشی محدود شده با بسامد برای پروتون عبارت می شود از

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 = 0.63 \times 10^{-11} \text{ J} = 39 \text{ MeV}$$

در انرژی $E = m_0c^2 + E_k$ ، جرم ذره برابر است با

$$m = \frac{E}{c^2} = m_0 + \frac{E_k}{c^2}$$

بنا بر این E_k/c^2 تغییر جرم را به دست می دهد. بنا به معادله (۶.۱۵)، بسامد سیکلوترونی با عکس جرم متناسب است. بنا بر این اگر ω و ω_0 بسامدهای مربوط به جرمهای m و m_0 يك ذره باشند، می توان نوشت

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{m_0}{m}$$

یا

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{m - m_0}{m} = -\frac{\frac{E_k}{c^2}}{m_0 + \frac{E_k}{c^2}} = -\frac{E_k}{m_0c^2 + E_k}$$

جمله سمت چپ تغییر نسبی بسامد سیکلوترونی و جمله سمت راست درصد تغییر جرم را بیان می کند. برای انرژیهای نسبتاً پایین، درمخرج می توان از جمله E_k در مقابل m_0c^2 صرف نظر کرد و با نوشتن $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ ، به دست می آید

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{E_k}{m_0c^2}$$

بدین طریق، تا هنگامی که انرژی جنبشی ذره در مقابل انرژی سکون آن کوچک است، تغییر بسامد خیلی کم است. در این مثال، برای ذره آلفا $2.4\% = \Delta\omega/\omega = -0.024$ و برای پروتون $4.2\% = \Delta\omega/\omega = -0.042$ به دست می آید.

نتایج به دست آمده در این مثال، همچنین نشان می دهند که، چون جرم سکون الکترونها در حدود $1/1840$ جرم پروتونهاست (بخش ۵.۱۴)، انرژی جنبشی که تا آنجا می توان به الکترونها شتاب داد (بدون تغییر قابل ملاحظه بسامد سیکلوترونی آنها)، در حدود $1/1840$ انرژی مربوط به پروتونهاست. به همین دلیل از سیکلوترون برای شتاب دادن به الکترونها استفاده نمی شود.

اثر نسبیتی جرم را می توان به دو طریق تصحیح کرد، یکی آنکه يك میدان مغناطیسی به کار برده شود که برای هر شعاع مسیر ذره، با وجود تغییر جرم، ω ثابت باقی بماند؛

دیگر آنکه بسامد اعمال شده روی دی‌ها تغییر یابد و در تمام مدتی که ذرات مارپیچ‌ها را می‌پیمایند میدان مغناطیسی ثابت نگه داشته شود، به گونه‌ای که در هر لحظه بین حرکت ذرات و پتانسیل به‌کار رفته باز آوایی وجود داشته باشد. وسیلهٔ اول را سنکروترون و دومین اسباب را سنکروسیکلو ترون می‌نامند. سنکروترون می‌تواند به‌طور پیوسته به‌کار خود ادامه دهد، در صورتی که کار سنکروسیکلو ترون ضربه‌ای است زیرا بسامد آن را مرتباً باید تنظیم کرد. گاهی، در دستگاههایی مانند سنکروترون، پروتون هم بسامد و هم میدان مغناطیسی تغییر می‌کنند، تا شعاع مدار ثابت باقی بماند.

مثال ۴.۱۵ حرکت ذرهٔ باردار را در میدانهای مغناطیسی و الکتریکی عمود برهم بررسی کنید.

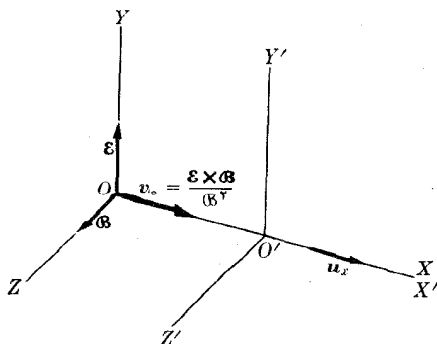
حل: در مثالهای قبلی این فصل، حرکت ذره‌های باردار را تنها در میدان مغناطیسی در نظر می‌گرفتیم. اکنون حالتی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در آن میدان الکتریکی نیز وجود دارد به گونه‌ای که باید معادلهٔ (۲.۱۵) را به‌کار برد. با وجود این، تنها یک حالت خاص را در نظر می‌گیریم، یعنی موقعی که میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی بر یکدیگر عمودند (شکل ۱۵.۱۵). معادلهٔ حرکت ذره عبارت است از

$$m \frac{dv}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

اکنون تبدیل گالیله‌ای از چارچوب XYZ به چارچوب دیگر $X'Y'Z'$ انجام می‌دهیم، که $X'Y'Z'$ نسبت به XYZ با سرعت نسبی

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \mathbf{u}_x \frac{E}{B}$$

حرکت می‌کند. اگر \mathbf{v}' سرعت ذره نسبت به چارچوب $X'Y'Z'$ باشد، در این صورت



شکل ۱۵.۱۵

می توان نوشت

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 \quad \text{و} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt}$$

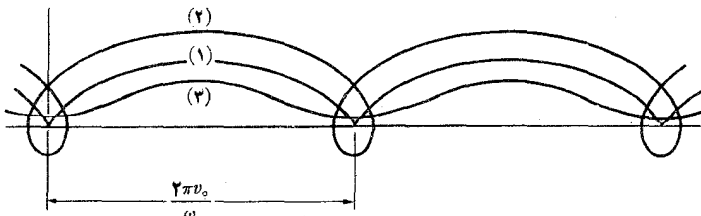
بنابراین معادلهٔ اولی را می توان به صورت

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v}' \times \mathbf{B} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B})$$

نوشت، ولی $\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} = (\mathbf{u}_x E / B) \times \mathbf{u}_z B = -\mathbf{u}_y E = -\mathbf{E}$ است. بنابراین جملهٔ اول و آخر سمت راست رابطهٔ فوق حذف می شوند. در نتیجه، در چارچوب $X'Y'Z'$ معادلهٔ حرکت چنین نوشته می شود

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = q \mathbf{v}' \times \mathbf{B}$$

توجه کنید که حرکت نسبت به چارچوب $X'Y'Z'$ همان حرکتی است که در غیاب میدان الکتریکی صورت می گرفت. اگر ذره ابتدا در صفحهٔ XY حرکت کنند، حرکت آن در چارچوب $X'Y'Z'$ دایره‌ای است به شعاع $r = mv' / qB$ که آن را با سرعت زاویه‌ای $\omega = -qB/m$ طی می کند. نسبت به چارچوب XYZ ، این دایره در طول محور X با سرعت \mathbf{v}_0 پیش می رود، از اینجا یکی از مسیرهایی که در شکل ۱۶.۱۵ نشان داده شده‌اند به دست می آید. شکل در فاصلهٔ $v_0 P = 2\pi v_0 / \omega$ تکرار می شود. اگر $2\pi v_0 / \omega = 2\pi r$ یا $r = v_0 / \omega$ باشد مسیر یک چرخزاد بهنجار است که با (۱) مشخص شده است. ولی اگر $2\pi v_0 / \omega \geq 2\pi r$ یا $r \geq v_0 / \omega$ باشد مسیرهای (۲) و (۳) به دست می آیند که به ترتیب با چرخزادهای کوتساه و کشیده متناظرند. اگر ذرهٔ باردار دارای مؤلفهٔ سرعتی موازی با محور Z باشد، مسیرهای رسم شده در شکل ۱۶.۱۵ با سرعت ثابتی از صفحهٔ XY دور می شوند.



شکل ۱۶.۱۵ مسیرهای چرخزادی ذره نسبت به ناظر O . (۱) $r = v_0 / \omega$ ، (۲) $r > v_0 / \omega$ ، (۳) $r < v_0 / \omega$.

نکته جالبی را این مثال روشن می کند، اینکه ناظری که چارچوب XYZ را به کار می برد، میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی را باهم مشاهده می کند، در حالی که ناظری که چارچوب $X'Y'Z'$ ، متحرک نسبت به دستگاه XYZ را به کار می برد، حرکت ذره را تنها در میدان مغناطیسی مشاهده می کند. این امر نشان می دهد که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی به حرکت نسبی ناظر بستگی دارند، و این مسئله بسیار مهمی است که در بخش ۱۲.۱۵ بتفصیل بررسی خواهد شد.

۵.۱۵ اثر نیروی مغناطیسی روی جریان الکتریکی

چنانکه در بخش ۱۰.۱۴ توضیح داده شد، جریان الکتریکی عبارت است از عبور بارهای الکتریکی درخلاء یا از داخل محیط رسانا. شدت جریان الکتریکی را مقدار باری تعریف کردیم که در واحد زمان از مقطع رسانا می گذرد. اکنون مقطعی از یک رسانا را در نظر می گیریم کهسه ذرات با بار الکتریکی q ، با سرعت v از آن می گذرند. اگر n ذره در واحد حجم وجود داشته باشد، تعداد بارهای الکتریکی که در واحد زمان از واحد سطح می گذرند برابر است با nv و مقدار بار الکتریکی را که در واحد زمان از واحد سطح می گذرد چگالی بار می نامند و آن را با بردار \mathbf{j} نشان می دهند.

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v} \quad (12.15)$$

اگر S ، مساحت مقطع رسانا، عمود بر راستای \mathbf{j} باشد، شدت جریان نرده ای است

$$I = jS = nqvS \quad (13.15)$$

اکنون فرض کنید که رسانا در میدان مغناطیسی قرار دارد. نیروی وارد بر هر بار الکتریکی از معادله (۱۰.۱۵) به دست می آید و چون n ذره در واحد حجم وجود دارد f ، نیروی وارد بر واحد حجم برابر است با

$$\mathbf{f} = nq\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (14.15)$$

نیروی کل وارد بر حجم جزئی dV از رسانا برابر می شود با

$$d\mathbf{F} = \mathbf{f}dV = \mathbf{j} \times \mathbf{B}dV$$

و نیروی کل روی یک حجم معین، از انتگرال این رابطه روی تمام حجم به دست می آید یعنی

$$\mathbf{F} = \int_{\text{حجم}} \mathbf{j} \times \mathbf{B}dV \quad (15.15)$$

اکنون موردی را در نظر می گیریم کهسه جریان از داخل یک سیم یا یک رشته می گذرد. جزء حجم dV برابر است با $S dl$ (شکل ۱۷.۱۵) بنابراین از معادله (۱۵.۱۵) به دست می آید

$$\mathbf{F} = \int_{\text{رشته}} \mathbf{j} \times \mathbf{B} S dl$$

ولی $\mathbf{j} = j\mathbf{u}_T$ است که در آن \mathbf{u}_T بردار یکای مماس بر رشته است. بنا بر این داریم

$$\mathbf{F} = \int (j\mathbf{u}_T) \times \mathbf{B} S dl = \int (jS)\mathbf{u}_T \times \mathbf{B} dl \quad (۱۶.۱۵)$$

ولی $jS = I$ است، و به دلیل اصل بقای بار الکتریکی، شدت جریان در تمام نقاط سیم یکسان است. بنا بر این، معادله (۱۶.۱۵) برای نیروی وارد بر یک رسانا که جریانی از آن می‌گذرد، به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{F} = I \int \mathbf{u}_T \times \mathbf{B} dl \quad (۱۷.۱۵)$$

به عنوان مثال، رسانای مستقیم الخطی را در نظر می‌گیریم که در میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B} قرار دارد (شکل ۱۸.۱۵). در این شرایط \mathbf{u}_T و \mathbf{B} هر دو ثابت اند و می‌توان نوشت

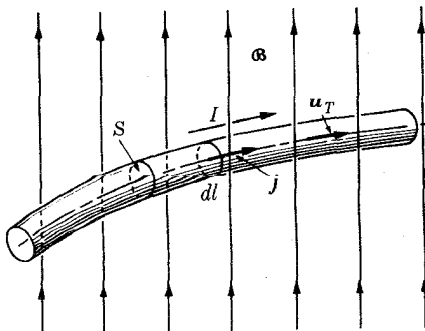
$$\mathbf{F} = I \mathbf{u}_T \times \mathbf{B} \int dl$$

یا اگر $L = \int dl$ طول رسانای خطی باشد

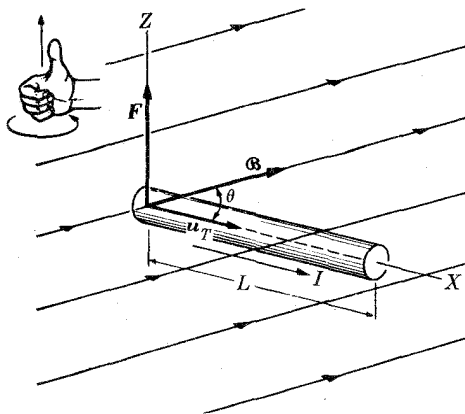
$$\mathbf{F} = IL \mathbf{u}_T \times \mathbf{B}$$

بنابراین به رسانا نیرویی در راستای عمود بر خود رسانا و عمود بر میدان مغناطیسی وارد می‌شود. موتورها بر این اساس کار می‌کنند. اگر θ زاویه بین رسانا و میدان مغناطیسی باشد، برای بزرگی نیروی \mathbf{F} می‌توان نوشت

$$F = ILB \sin \theta \quad (۱۸.۱۵)$$



شکل ۱۷.۱۵



شکل ۱۸.۱۵ رابطه برداری بین نیروی مغناطیسی وارد بر رسانای حامل جریان، میدان مغناطیسی و جریان، نیرو بر صفحه B و u_n عمود است.

اگر رسانا موازی میدان باشد ($\theta = 0$)، این نیرو برابر صفر می شود و اگر رسانا عمود بر میدان باشد ($\theta = \pi/2$) نیرو بیشینه است. سوی نیرو از قاعده دست راست کسب در شکل ۱۸.۱۵ آمده است به دست می آید.

۶.۱۵ اثر گشتاور نیروی مغناطیسی روی جریان الکتریکی

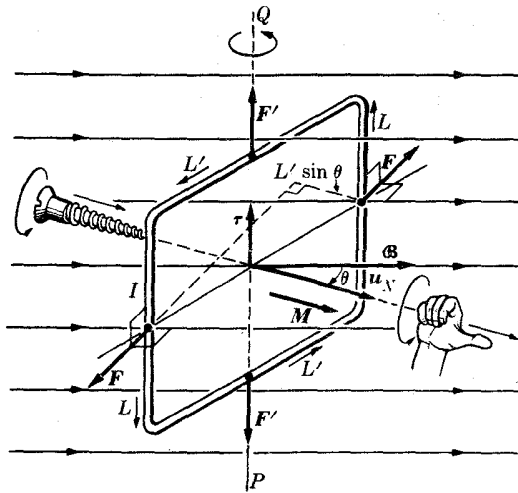
برای محاسبه گشتاور ناشی از نیرویی که میدان مغناطیسی روی مدار الکتریکی وارد می کند می توان معادله (۱۸.۱۵) را به کار برد. برای سهولت، ابتدا مدار مستطیل شکلی را در نظر می گیریم که جریان I از آن می گذرد. این مدار طوری قرار گرفته است که u_n ، خط عمود بر صفحه آن (در سوی پیشروی یک پیچ راستگرد که در سوی جریان می پیچد) با میدان B زاویه θ می سازد و دو ضلع مدار بر میدان عمودند (شکل ۱۹.۱۵). بزرگی نیروهای F' که بر ضلعهای L' وارد می شوند برابرند ولی سوی آنها مخالف یکدیگر است. این دو نیرو می خواهند مدار را تغییر شکل دهند ولی هیچگونه گشتاور نیرویی تولید نمی کنند. نیروهای F وارد بر ضلعهای L که بزرگی شان برابر $F = IBL$ است جفتی با بازوی اهرم $L' \sin \theta$ تشکیل می دهند. بنابراین روی مدار گشتاور نیرویی به بزرگی

$$\tau = (IBL)(L' \sin \theta)$$

اعمال می کنند. ولی $LL' = S$ برابر سطح مدار است. در نتیجه داریم

$$\tau = (IS)B \sin \theta$$

راستای این گشتاور نیرو عمود بر صفحه جفت و در امتداد خط PQ است. اگر برداری با رابطه



شکل ۱۹.۱۵ گشتاور نیروی مغناطیسی وارد بر یک مدار الکتریکی مستطیل شکل که در یک میدان مغناطیسی قرار دارد. وقتی که صفحه مدار بر میدان مغناطیسی عمود باشد گشتاور نیرو برابر صفر می‌شود.

$$M = ISu_N \quad (19.15)$$

عمود بر صفحه مدار تعریف کنیم، می‌توانیم گشتاور τ را بدصورت

$$\tau = MB \sin \theta \quad (20.15)$$

یا به صورت برداری

$$\tau = \mathbf{M} \times \mathbf{B} \quad (21.15)$$

بنویسیم. از نظر ریاضی معادله (۲۱.۱۵) شبیه به معادله (۵۰.۱۴) است که گشتاور نیروی وارد بر یک دو قطبی الکتریکی ناشی از میدان الکتریکی خارجی را به دست می‌دهد. بنابراین، کمیت \mathbf{M} را کد با معادله (۱۹.۱۵) تعریف کردیم و هم ارز \mathbf{p} در معادله (۴۹.۱۴) است، گشتاور دو قطبی مغناطیسی مدار می‌نامند. توجه کنید که بنا به معادله (۱۹.۱۵) سوی \mathbf{M} بر سوی پیشروی یک پیچ راستگرد که در سوی جریان می‌پیچد منطبق است. این همان سویی است که شکل ۱۹.۱۵ با قاعده دست راست نشان می‌دهد.

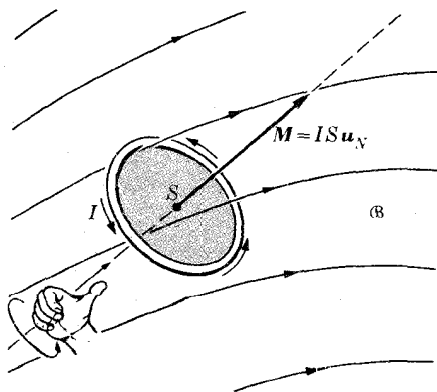
برای به دست آوردن انرژی مدار در میدان مغناطیسی، عکس منطقی را که در بخش ۱۱.۱۴ برای مربوط ساختن معادله‌های (۴۹.۱۴) و (۵۰.۱۴) به یکدیگر به کار بردیم، به کار می‌بریم و نتیجه می‌گیریم که انرژی پتانسیل جریان واقع در میدان مغناطیسی \mathbf{B} برابر است با

$$E_p = -MB \cos \theta = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B} \quad (۲۲.۱۵)$$

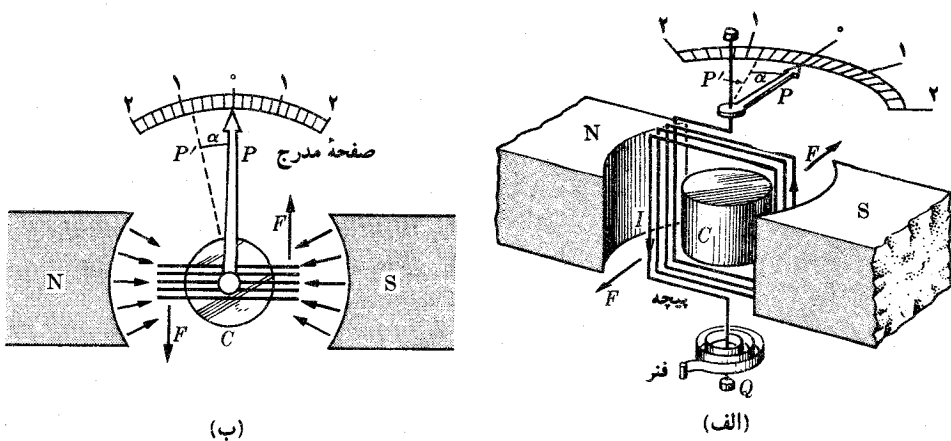
اگرچه معادله‌های (۲۱.۱۵) و (۲۲.۱۵) را برای يك مدار مستطیل شکل عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت به دست آوردیم، ولی بررسی پیچیده‌تر ریاضی نشان می‌دهد که این معادله‌ها درحالت کلی نیز معتبرند. به‌عنوان مثال، فرض کنید يك مدار کوچک، با شکل دلخواه، به مساحت S داشته باشیم (شکل ۲۰.۱۵). گشتاور دو قطبی مغناطیسی \mathbf{M} مدار با هم از معادله (۱۹.۱۵) به دست می‌آید و گشتاور نیرو و انرژی پتانسیل هنگامی که مدار در میدان مغناطیسی قرار دارد، با معادله‌های (۲۱.۱۵) و (۲۲.۱۵) داده می‌شوند. با توجه به معادله (۲۲.۱۵)، یکی گشتاور دو قطبی مغناطیسی را معمولاً با ژول بر تسلا یا J T^{-1} بیان می‌کنند. این یکا برحسب یکاهای اصلی چنین نوشته می‌شود $\text{m}^2 \text{s}^{-1} \text{C}$ که با تعریف معادله (۱۹.۱۵) سازگار است.

مثال ۵.۱۵ يك وسیله اندازه‌گیری جریان، از نوع گالوانومتر را مورد بحث قرار دهید. طرح ساده‌ای از این وسیله در شکل ۲۱.۱۵ نشان داده شده است. جریان مورد اندازه‌گیری از پیچ‌های که بین قطب‌های يك آهنربا آویزان است می‌گذرد. در بعضی موارد، پیچه، دور يك استوانه آهنی مانند C پیچیده شده است، میدان مغناطیسی گشتاور نیرویی روی پیچه وارد می‌کند و آن را به اندازه زاویه معینی می‌چرخاند. بین این زاویه و جریانی که از پیچه می‌گذرد چه رابطه‌ای برقرار است؟

حل: فرض کنیم S مساحت پیچه باشد. گشتاور نیروی حاصل از میدان مغناطیسی، که از معادله (۲۱.۱۵) حساب می‌شود، می‌کوشد بسا پیچانیدن فنر Q ، پیچه را در راستای عمود بر میدان مغناطیسی قرار دهد. پیچه با چرخشی به اندازه زاویه α ، هنگامی که بین



شکل ۲۰.۱۵ رابطه بین گشتاور دو قطبی مغناطیسی جریان الکتریکی و سوی جریان.



شکل ۲۱.۱۵ (الف) عناصر اصلی گالوانومتر با پیچۀ متحرك. (ب) نمای بالای گالوانومتر.

گشتاور نیروی مغناطیسی و گشتاور نیروی کشسانی $k\alpha$ ، حاصل از پیچش فنر، توازن برقرار شد به وضع ترازمندی می‌رسد. k ثابت کشسانی فنر است، زاویه α را عقربه‌ای که بدپیچ متصل شده است، نشان می‌دهد. چنان‌که شکل ۲۱.۱۵ ب نشان می‌دهد، قطبهای آهنربا به‌شکلی ساخته می‌شوند که میدان مغناطیسی بین قطبها و هسته آهنی C ، شعاعی باشد. در این حالت B همیشه در صفحه‌سدار قرار دارد و در معادله (۲۰.۱۵)، $\theta = \pi/2$ یا $\sin \theta = 1$ است. در این صورت گشتاور نیرو با $\tau = ISB$ داده می‌شود، زیرا $M = IS$ است. در ترازمندی، هنگامی که گشتاور نیروی ناشی از میدان مغناطیسی با گشتاور مربوط به پیچش فنر در توازن است $ISB = k\alpha$ و در نتیجه $I = k\alpha/SB$ است. اگر k ، S و B معلوم باشند، از این رابطه I برحسب α به‌دست می‌آید. معمولاً خط‌کش را به گونه‌ای زینه‌بندی می‌کنند که بتوان مستقیماً I را برحسب یکای مناسبی خواند.

مثال ۶.۱۵ گشتاور مغناطیسی مربوط به حرکت مداری یک ذره باردار، مثلاً الکترون، را که دور هسته اتمی می‌چرخد بررسی کنید.

حل: فرض کنیم بار q مدار بسته‌ای را می‌پیماید. برای سهولت مدار را دایره‌ای فرض کنید. اگر $v = \omega/2\pi$ بسامد حرکت ذره باشد، جریان در هر نقطه از مسیر آن برابر است با $I = qv$ ، زیرا v تعداد دورهایی است که بار q در یک ثانیه از نقطه معینی می‌گذرد. بنا بر این qv بار کلیدی است که در واحد زمان از این نقطه عبور می‌کند. برحسب اینکه q مثبت یا منفی باشد، جریانی یا با سرعت همسو است یا در سوی مخالف آن می‌گذرد. پس، با استفاده از معادله (۱۹.۱۵)، گشتاور مغناطیسی بار الکترونیکی در حرکت مداری

نخود برابر است با

$$M = (qv)(\pi r^2) = \left(\frac{q\omega}{2\pi}\right)(\pi r^2) = \frac{1}{2} q\omega r^2 \quad (23.15)$$

همچنانکه شکل ۲۲.۱۵ نشان می‌دهد، سوی M ، بنا به قاعده‌ای که در پیش گفته شد، به علامت q بستگی دارد. از طرف دیگر، اگر m جرم ذره باشد، بنا به معادله (۳۳.۷) اندازه حرکت زاویه‌ای مداری آن، L ، برابر می‌شود با

$$L = mvr = m\omega r^2 \quad (24.15)$$

از مقایسه معادله‌های (۲۳.۱۵) و (۲۴.۱۵) بدست می‌آید که

$$M = \frac{q}{2m} L \quad (25.15)$$

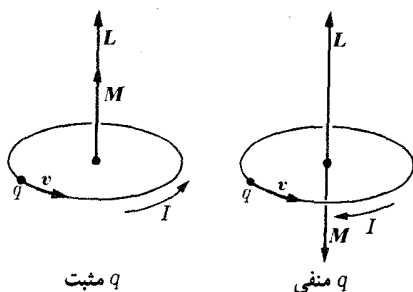
یا به صورت برداری آن

$$\mathbf{M} = \frac{q}{2m} \mathbf{L} \quad (26.15)$$

در نتیجه، بر حسب اینکه بار q مثبت یا منفی باشد، \mathbf{M} و \mathbf{L} همسویا در سوی مخالف هم‌اند. در مورد الکترون $q = -e$ و $m = m_e$ است و داریم

$$\mathbf{M}_e = \frac{-e}{2m_e} \mathbf{L} \quad (27.15)$$

برای پروتون $q = +e$ و $m = m_p$ است، در نتیجه بدست می‌آید



شکل ۲۲.۱۵ رابطه برداری بین گشتاور دو قطبی مغناطیسی و اندازه حرکت زاویه‌ای یک بار الکتریکی در حرکت روی مدار خود.

$$M_p = \frac{+e}{2m_p} L \quad (28.15)$$

اگر پذیریم که بار الکتريکی دور یکی از قطره‌های خودش می‌چرخد، مانند زمین که دور محور شمال-جنوب خود می‌چرخد، آنگاه بار الکتريکی علاوه بر اندازه حرکت زاویه‌ای مداری L ، اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی S به نام اسپین نیز خواهد داشت. باید به اسپین S يك گشتاور مغناطیسی وابسته باشد، زیرا هر جزء حجم بار الکتريکی چرخان، همانند بار q در شکل ۲۲.۱۵ عمل می‌کند. با وجود این، رابطه بین گشتاور مغناطیسی و اسپین، مشابه معادله (۲۶.۱۵) نیست. زیرا ضریبی که باید در اندازه حرکت زاویه‌ای اسپین S ضرب کرد تا گشتاور مغناطیسی مربوط به آن به دست آید، به ساختار داخلی ذره بستگی دارد. بهتر است که گشتاور مغناطیسی ناشی از اسپین را به صورت زیر بنویسیم

$$M_s = \gamma \frac{e}{2m} S \quad (29.15)$$

ضریب γ که نسبت ژیرومغناطیسی نامیده می‌شود به ساختار ذره و علامت بار آن بستگی دارد. از ترکیب معادله‌های (۲۶.۱۵) و (۲۹.۱۵)، گشتاور مغناطیسی کل حرکت مداری و حرکت چرخشی ذره‌ای با بار $+e$ به دست می‌آید

$$M = \frac{e}{2m} (\pm L + \gamma S) \quad (30.15)$$

علامت \pm (—) در مقابل L مربوط به بار الکتريکی مثبت (منفی) است. هر چند بار خالص نوترون صفر است و در نتیجه بنا به معادله (۲۶.۱۵)، گشتاور مغناطیسی مداری ندارد، ولی يك گشتاور مغناطیسی اسپینی دارد که در سوی مخالف اسپین S است. مقادیر γ برای الکترون، پروتون و نوترون در جدول زیر داده شده‌اند.

γ	ذره
-۲۰۰۰۲۴	الکترون
۵۵۸۵۱	پروتون
-۳۸۲۵۶	نوترون

گشتاور مغناطیسی کل نوترون نه از معادله (۳۰.۱۵)، بلکه از معادله (۲۹.۱۵) به دست می‌آید. مقدار غیر صفر M_s نشانه ساختار داخلی پیچیده نوترون است. همچنین اینکه γ برای پروتون با γ برای الکترون فرق دارد، نشان می‌دهد که ساختار داخلی الکترون و پروتون یکسان نیست.

مثال ۷۰۱۵ درباره گشتاور نیرو و انرژی ذره باردار که در میدان مغناطیسی حرکت می کند بحث کنید.

حل: فرض کنید ذره مثال پیش در میدان مغناطیسی یکنواخت قرار گرفته است (شکل ۲۳.۱۵) از معادله های (۲۱.۱۵) و (۲۶.۱۵) به دست می آید که گشتاور نیروی وارد بر ذره برابر است با

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{q}{\gamma m} \mathbf{L} \times \mathbf{B} = -\frac{q}{\gamma m} \mathbf{B} \times \mathbf{L} \quad (31.15)$$

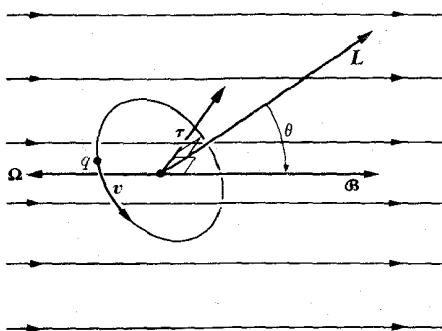
$\boldsymbol{\tau}$ در راستای عمود بر \mathbf{L} و \mathbf{B} قرار دارد. بنا به معادله (۳۸.۷)، $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ ، این گشتاور نیرو می کوشد \mathbf{L} اندازه حرکت زاویه ای ذره را تغییر دهد. اگر فرض کنیم

$$\boldsymbol{\Omega} = -(q/\gamma m)\mathbf{B}$$

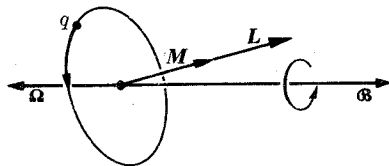
یعنی نصف بسامد سیکلوترونی داده شده با معادله (۷۰.۱۵) است، رابطه (۳۱.۱۵) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} \quad (32.15)$$

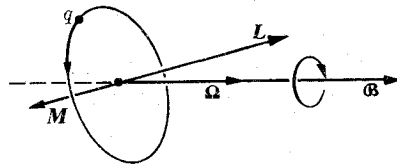
این معادله مشابه معادله (۲۹.۱۵) برای حرکت ژيروسکوپ است. بنابراین در اینجا نیز یک حرکت تقدیمی شبیه به حرکتی که در آنجا توضیح داده شد، رخ می نماید. در فصل ۱۰، حرکت تقدیمی از گشتاور نیروی حاصل از برهم کنش گرانشی ناشی می شد، ولی در اینجا از گشتاور نیروی ناشی از برهم کنش مغناطیسی به وجود می آید. حرکت تقدیمی \mathbf{L} دور \mathbf{B} موجب چرخش مدار ذره می شود. در شکل ۲۴.۱۵ راستا وسوی $\boldsymbol{\Omega}$ وسوی حرکت تقدیمی برای یک بار مثبت یا منفی نشان داده شده اند.



شکل ۲۳.۱۵ گشتاور نیروی مغناطیسی دارد بر یک ذره بار دار، بر \mathbf{L} اندازه حرکت زاویه ای ذره و \mathbf{B} میدان مغناطیسی عمود است.



(الف) q مثبت



(ب) q منفی

شکل ۲۴.۱۵ حرکت تقدیمی اندازه حرکت زاویه‌ای یک ذره باردار دورمیدان مغناطیسی.

رابطه (۳۲.۱۵) تنها برای ذره بدون اسپین معتبر است. اگر ذره اسپین داشته باشد تحلیل کمی پیچیده تر می شود. از این رو، در اینجا وارد بحث آن نمی شویم. با ترکیب معادله‌های (۲۲.۱۵) و (۲۶.۱۵) می توان انرژی یک ذره باردار را در حرکت مداری آن به دست آورد

$$E_p = -\frac{q}{2m} \mathbf{L} \cdot \mathbf{B} = \Omega \cdot \mathbf{L} \quad (33.15)$$

اگر ذره اسپین داشته باشد، برای گشتاور مغناطیسی از معادله (۳۰.۱۵) استفاده می کنیم و رابطه بالا به صورت زیر درمی آید

$$E_p = -\frac{e}{2m} (\pm \mathbf{L} + \gamma \mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} \quad (34.15)$$

این نتایج برای درک رفتار اتم یا مولکول در میدان مغناطیسی خارجی بسیار سودمندند، و این موضوع خواه از دیدگاه نظری و خواه از دیدگاه عملی حایز اهمیت بسیار است. به عنوان مثال، هنگامی که اتمی در میدان مغناطیسی خارجی قرار می گیرد. حرکت الکترونها آشفته می شود و انرژی مطابق معادله (۳۴.۱۵) تغییر می کند. هرگاه این مقدار نظری E_p را با نتایج تجربی مقایسه کنیم، معلوم می شود که مؤلفه Z اندازه حرکت زاویه‌ای مداری و اسپینی کوانتیده اند؛ یعنی L_z و S_z تنها مقادیر خاصی را، که به صورت زیر بیان می شوند، می پذیرد.

$$L_z = m_l \hbar \quad , \quad S_z = m_s \hbar$$

در این رابطهها $\hbar = h/2\pi = 1.055 \times 10^{-34} \text{ Js}$ است. در بخش ۹.۱۴ هنگام بحث در باره حرکت مداری الکترون این ثابت را معرفی کردیم، و \hbar ثابت پلانک است. مقادیر ممکن m_l عبارتند از $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ در صورتی که m_l تنها می تواند مقادیر $\pm 1/2$ یا $-1/2$ را به خود بگیرد. عدد m_l را عدد کوانتومی مغناطیسی الکترون، در حالی که m_s را عدد کوانتومی اسپین می نامند. برای پروتونها و نوترونها نیز نتیجه مشابهی به دست می آید. به همین دلیل است که می گوئیم الکترون، پروتون و نوترون دارای اسپین $1/2$ هستند.

از طرف دیگر، اندازه حرکت زاویه ای مداری L نیز کوانتیده است و می تواند صرفاً مقادیری را که با رابطه زیر داده می شوند بپذیرد

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

در اینجا $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ يك عدد درست مثبت است که عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه ای نامیده می شود. چون L_z نمی تواند بیشتر از L شود، نتیجه می گیریم که مقدار m_l نمی تواند بالاتر از l باشد، یعنی

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(l-1), \pm l$$

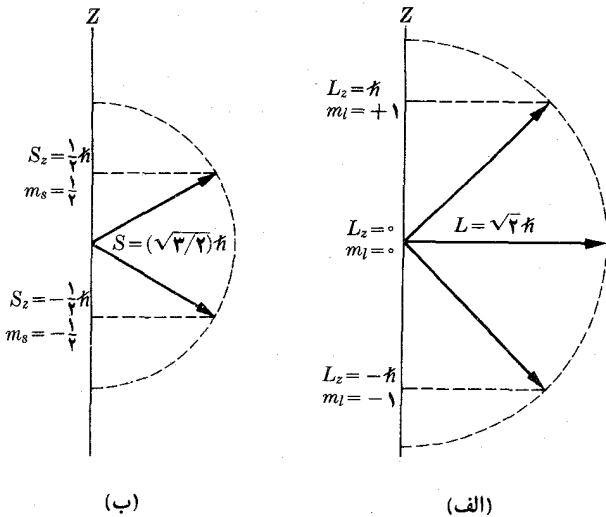
بنابراین به ازای $l = 0$ تنها $m_l = 0$ ممکن است. به ازای $l = 1$ می توانیم داشته باشیم $0, \pm 1$ و $m_l = 0$ والی آخر. از طرف دیگر، چون عدد کوانتومی اسپینی تنها يك مقدار دارد برای اندازه حرکت زاویه ای اسپین نیز تنها يك مقدار وجود دارد:

$$S = \sqrt{1/2(1/2+1)}\hbar = \sqrt{3/2}\hbar$$

اینکه به ازای يك مقدار مشخص L ممکن است چندین L_z وجود داشته باشد، نشان می دهد که L می تواند تنها بعضی راستاها را، در فضا به خود بگیرد (شکل ۲۵.۱۵ الف). در بخش ۷.۱۴ این امر را کوانتش فضا نامیدیم. در مورد اسپین، چون m_s تنها دارای دو مقدار ممکن ($\pm 1/2$) است، نتیجه می گیریم که S در فضا نسبت به Z می تواند تنها دو راستا به خود بگیرد، که معمولاً بالا (\uparrow) و پایین (\downarrow) خوانده می شوند. راستاهای مجاز اسپین در شکل ۲۵.۱۵ ب نشان داده شده اند.

۷.۱۵ میدان مغناطیسی جریان بسته

تا اینجا گفتیم که میدان مغناطیسی را از نیرویی که روی بار الکتریکی متحرک ایجاد می کند می شناسیم، و چند ماده را نام بردیم که در حالت طبیعی میدان مغناطیسی تولید می کنند. اکنون چگونگی تولید میدان مغناطیسی را با تفصیل بیشتری بررسی می کنیم. در سال ۱۸۲۰/۱۱۹۹ فیزیکدان دانمارکی هانس کرسیتین اورستد (۱۱۵۶-۱۲۳۷/۱۲۳۷-۱۸۵۱) اولین



شکل ۲۵.۱۵ راستاهای ممکن (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای مربوط به $L = (\sqrt{2})\hbar$, $l = 1$ و (ب) اسپین $s = 1/2$, $S = (\sqrt{3/2})\hbar$.

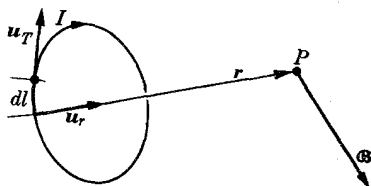
کسی بود که، با توجه به انحراف عقربه مغناطیسی در مجاورت رسانایی که از آن جریانی عبور می‌کرد، دریافت که جریان الکتریکی در فضای اطراف خود میدان مغناطیسی تولید می‌کند.

بعد از آزمایشهای زیادی که طی سالهای متعددی به وسیله فیزیکدانان مختلف و با به کار بردن مدارهایی به شکلهای گوناگون انجام گرفت یک رابطه کلی برای محاسبه میدان مغناطیسی حاصل از هدا بسته به هر شکل اختیاری به دست آمد. این رابطه که قانون آمپر - لاپلاس نام گرفته است به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\mathbf{B} = K_m I \oint \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} dl \quad (35.15)$$

معنای نمادهای به کار رفته در این رابطه در شکل ۲۶.۱۵ نشان داده شده است و انتگرال روی تمام مدار بسته انجام می‌شود (به همین جهت نماد \oint را به کار گرفته ایم). K_m ثابتی است که به یکاهای انتخاب شده بستگی دارد. در دستگاه یکاهای mksA مقدار آن برابر $K_m = 10^{-7} \text{T m/A}$ یا m kg C^{-2} تعیین شده است (به یادداشت پایان بخش ۹.۱۵ مراجعه کنید). باید توجه داشت که هر گاه r و I بر حسب متر باشند انتگرال (۳۵.۱۵) بر حسب m^{-1} بیان می‌شود. بنابراین داریم

$$\mathbf{B} = 10^{-7} I \oint \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} dl \quad (36.15)$$



شکل ۲۶.۱۵ میدان مغناطیسی حاصل از جریان الکتریکی در نقطه‌ای مانند P .

معمولاً می‌نویسند $K_m = \mu_0 / 4\pi$ ، که در آن μ_0 ثابت جدیدی است که تبادلی مغناطیسی خلاً نامیده می‌شود. بنابراین معادله (۳۵.۱۵) برای قانون آمپر-لاپلاس به صورت

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} dl \quad (۳۷.۱۵)$$

در می‌آید، و در دستگاه یکاهای mksA داریم

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7} \text{m kg C}^{-2} \\ &= 1.2566 \times 10^{-6} \text{m kg C}^{-2} \end{aligned} \quad (۳۸.۱۵)$$

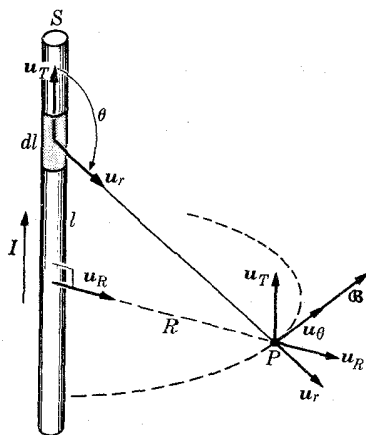
چون جریان الکتریکی صرفاً همان جابجایی بارها در یک سو است، به نتیجه مهم زیر می‌رسیم که

میدان مغناطیسی، و در نتیجه برهم‌کنش مغناطیسی، از حرکت بارهای الکتریکی به وجود می‌آید.

برای نشان دادن کاربرد معادله (۳۷.۱۵) محاسبه را برای میدانهای مغناطیسی حاصل از چند مدار که شکل هندسی ساده‌ای دارند انجام می‌دهیم.

۸.۱۵ میدان مغناطیسی جریان مستقیم الخط

جریانی بسیار طویل، مستقیم الخط و بساریک، مانند شکل ۲۷.۱۵ را در نظر می‌گیریم. برای هر نقطه‌ای مانند P و هر جزء dl از جریان، بردار $\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r$ بر صفحه حاصل از P و جریان عمود و در نتیجه در راستای بردار یکای \mathbf{u}_θ است. در نتیجه میدان مغناطیسی حاصل از جزء جریان dl در نقطه P مماس بردایره‌ای به شعاع R است که از نقطه P می‌گذرد. این دایره در صفحه‌ای عمود بر خط جریان قرار دارد و مرکز آن در محل جریان است. بنابراین هنگامی که می‌خواهیم انتگرال معادله (۳۷.۱۵) را بنویسیم، سهم تمام جمله‌ها در سوی \mathbf{u}_θ است و میدان مغناطیسی بر اینند \mathbf{B} نیز بردایره مماس می‌شود. در این صورت تنها لازم است بزرگی \mathbf{B} را پیدا کنیم. بزرگی بردار $\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r$ برابر $\sin \theta$ است



شکل ۲۷.۱۵ میدان مغناطیسی حاصل از جریان مستقیم الخط در نقطه‌ای مانند P.

از شکل پیداست که $r = R \csc \theta$ و $l = -R \cot \theta$ ، بنابراین $dl = R \csc^2 \theta d\theta$ است. با قراردادن این مقادیر در معادله (۳۹.۱۵) به دست می‌آید

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \theta}{r^2} dl \quad (39.15)$$

که در آن $l = -\infty$ متناظر با $\theta = 0$ و $l = +\infty$ متناظر با $\theta = \pi$ است. پس داریم

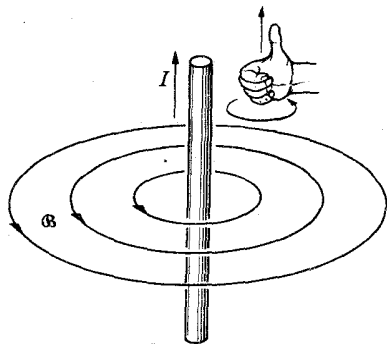
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{R^2 \csc^2 \theta} (R \csc^2 \theta d\theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi \sin \theta d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \quad (40.15)$$

یا به صورت برداری

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \mathbf{u}_\theta \quad (41.15)$$

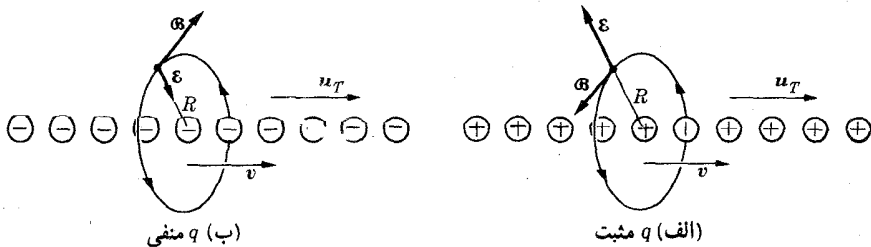
میدان مغناطیسی با عکس فاصله R متناسب است و چنانکه شکل ۲۸.۱۵ نشان می‌دهد خطهای نیرو دایره‌های هم‌مرکز، به مرکز خط جریان و بر آن عمودند. قاعده دست راست که برای پیدا کردن راستا و سوی میدان مغناطیسی نسبت به جریان به کار می‌رود در



شکل ۲۸.۱۵ خطهای نیروی مغناطیسی در اطراف جریان مستقیم الخط.

همین شکل نشان داده شده است. نتیجه (۴۱.۱۵) فرمول بیو و ساواد نامیده می شود. درحالی که جریان الکتریکی از داخل یک سیم مستقیم می گذرد، میدان مغناطیسی \mathbf{B} مشاهده می شود، ولی هیچگونه میدان الکتریکی \mathbf{E} دیده نمی شود. دلیل این امر آن است که به غیر از الکترونهاى متحرك که میدان مغناطیسی را تولید می کنند، در فلز یونهاى مثبت ثابتى نیز وجود دارند که در ایجاد میدان مغناطیسی دخالت ندارند، زیرا نسبت به ناظر در حال سکون اند، ولی يك میدان الکتریکی برابر با میدان الکتریکی الکترونها ولى درسوی مخالف آن تولید می کنند. در نتیجه میدان الکتریکی برابند برابر صفر می شود. ولی، برای یونهایى که در امتداد محور يك شتابدهنده خطی حرکت می کنند، هم میدان الکتریکی وجود دارد وهم میدان مغناطیسی. میدان الکتریکی متناظر با مقداری است که در مثال ۷.۱۴ برای میدان الکتریکی رشته باردار به دست آوردیم. یا $\mathbf{E} = \lambda \mathbf{u}_T / 2\pi\epsilon_0 R$ (شکل ۲۹.۱۵). بدین طریق با مقایسه این مقدار با معادله (۴۱.۱۵) مشاهده می شود که دو میدان با رابطه زیر به هم مربوط می شوند

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 I}{\lambda} \mathbf{u}_T \times \mathbf{E} \quad (42.15)$$



شکل ۲۹.۱۵ رابطه بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی حاصل از جریان یونهاى مثبت (منفی) در خط مستقیم.

۹.۱۵ نیروی بین جریانهها

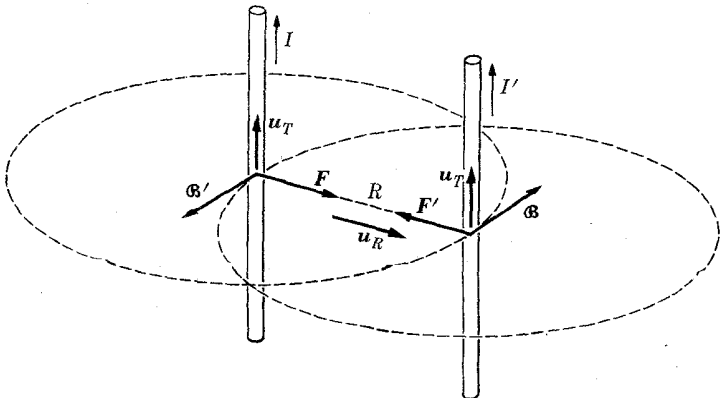
اکنون ترکیب معادله (۴۱.۱۵) با معادله (۱۶.۱۵) را برای به دست آوردن برهم کنش بین دو جریان الکتریکی به کار می‌بریم. برای سهولت، ابتدا دو جریان موازی I و I' را در نظر می‌گیریم (شکل ۳۰.۱۵). جریانهها همسوند و فاصله R آنها را از یکدیگر جدا می‌کند. \mathbf{B} ، میدان مغناطیسی ناشی از I ، در هر نقطه از I' با معادله (۴۱.۱۵) داده می‌شود و راستای مشخص شده در شکل را دارد. \mathbf{F}' نیروی وارد بر I' ، بنا به معادله (۱۷.۱۵) برابر می‌شود با

$$\mathbf{F}' = I' \int \mathbf{u}'_T \times \mathbf{B} dl'$$

ولی $\mathbf{u}'_T \times \mathbf{B} = -\mathbf{u}_R B$ است که بردار \mathbf{u}_R بردار I از I' به سمت I' است. بنابراین با استفاده از معادله (۴۱.۱۵) برای \mathbf{B} ، داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{F}' &= I' \int \left(-\mathbf{u}_R \frac{\mu_0 I}{\gamma \pi R} \right) dl' = -\mathbf{u}_R \left(\frac{\mu_0 II'}{\gamma \pi R} \right) \int dl' \\ &= -\mathbf{u}_R \frac{\mu_0 II'}{\gamma \pi R} L' \end{aligned} \quad (۴۳.۱۵)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که جریان I جریان I' را جذب می‌کند. با محاسبه مشابه مشاهده می‌شود که نیروی وارد از طرف I' بر I همین اندازه را دارد ولی با علامت مثبت، به گونه‌ای که با \mathbf{u}_R همسو و بازهم معرف نیروی جاذبه است. بنابراین دو جریان موازی و همسو یکدیگر را با نیروی یکسان جذب می‌کنند که نتیجه برهم کنش مغناطیسی آنهاست.



شکل ۳۰.۱۵ برهم کنش مغناطیسی بین دو جریان مستقیم الخط.

برداشتن جوست که تحقیق کند دوجریان موازی ناهمسو یکدیگر را دفع می‌کنند. این نتیجه را می‌توان به هر شکلی از جریان تعمیم داد. دانشجو می‌تواند تحقیق کند که جریانهای شکل ۳۱.۱۵ الف یکدیگر را جذب، ولی جریانهای شکل ۳۱.۱۵ ب یکدیگر را دفع می‌کنند. برهم‌کنش بین جریانهای الکتریکی اهمیت عملی زیادی در موتورهای الکتریکی و سایر کاربردهای فنی دارد.

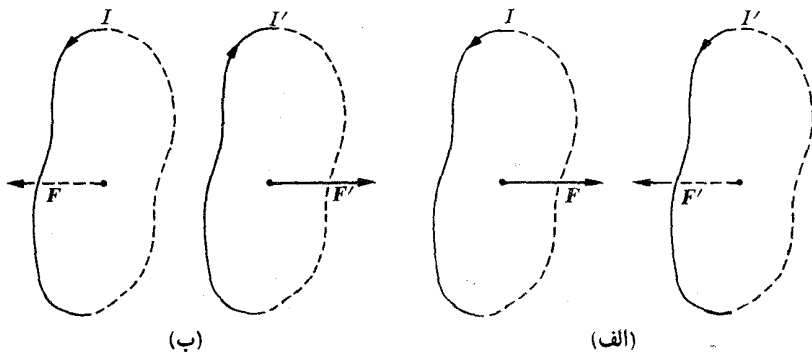
یادداشت دربارهٔ یکاها. در بخش ۳.۲، هنگام بحث در مورد یکاهای اصلی گفتیم که دستگاه یکاهای بین‌المللی دستگاه $mksA$ است نه دستگاه $mksC$ هرچند در عمل هیچگونه اختلافی بین این دو وجود ندارد. برای وارد کردن چهارمین یکای اصلی در کنار طول، جرم و زمان، می‌توان از دو قانون شروع کرد. این دو قانون عبارت‌اند از قانون کولن در مورد برهم‌کنش الکتروستاتیکی بین دو بار الکتریکی، با معادله (۲۰.۱۴)

$$F = K_e \frac{qq'}{r^2}$$

و قانون برهم‌کنش بین دو جریان مستقیم‌الخط، با معادله (۲۳.۱۵)، که در آن به‌جای $\mu_0 / 4\pi$ ، ثابت مغناطیسی K_m را قرار داده‌ایم

$$F' = K_m \frac{2II' L}{R}$$

هرچند دو ثابت K_e و K_m برای نیروهای الکتریکی و مغناطیسی وجود دارند، ولی درجهٔ آزادی یکی بیش نیست؛ زیرا فقط یک کمیت جدید فیزیکی، یعنی بار الکتریکی وجود دارد، جریان و بار الکتریکی نیز با رابطهٔ زمان/بار = جریان، به هم مربوط می‌شوند. از این رو، می‌توان یک مقدار اختیاری به یکی از این ثابتها اختصاص داد. یازدهمین کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها، درگردهمایی سال ۱۹۶۰/۱۳۳۹، تصمیم گرفت که



شکل ۳۱.۱۵ جذب و دفع بین دوجریان الکتریکی.

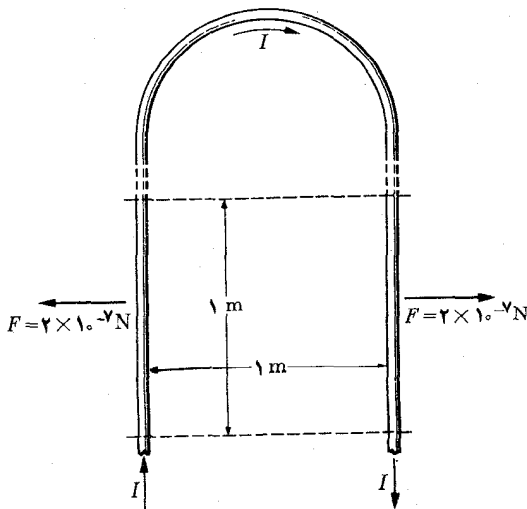
K_m را برابر 10^{-7} بگیرد و آمپر را بدعنوان چهارمین یکای اصلی انتخاب کرد. در این صورت آمپر عبارت از جریانی است که هر گاه از دوسیم رسانای موازی به فاصله یک متر بگذرد، به هر متر از طول هر رسانا نیرویی برابر با $2 \times 10^{-7} N$ وارد شود (شکل ۳۲.۱۵). به مجرد اینکه آمپر تعریف شد، کولن از آن نتیجه می شود. کولن مقسدار بار الکتریکی است که در هر ثانیه از مقطع رسانایی که حامل یک جریان یک آمپری است می گذرد.

یک وسیله تجربی برای اندازه گیری نیرویی که دو رسانای موازی نسبت به هم اعمال می کنند در شکل ۳۳.۱۵ نشان داده شده است؛ این وسیله یک ترازوی جریان را تشکیل می دهد. جریان یکسانی از دو رسانا عبور می کند به طوری که $F = 2 \times 10^{-7} I^2 L' / R$ است. ابتدا درغیاب هر گونه جریانی، ترازو را تراز مند می کنند. هنگامی که جریان در مدار برقرار می شود، برای ترازمندی مجدد لازم است وزنه هایی در کفه چپ قرار گیرند؛ با دانستن مقادیر F ، L' و R می توان مقدار I را پیدا کرد. در عمل از دو پیچۀ گسرد موازی استفاده می شود. در این صورت رابطه نیروی بین دو پیچۀ فرق می کند.

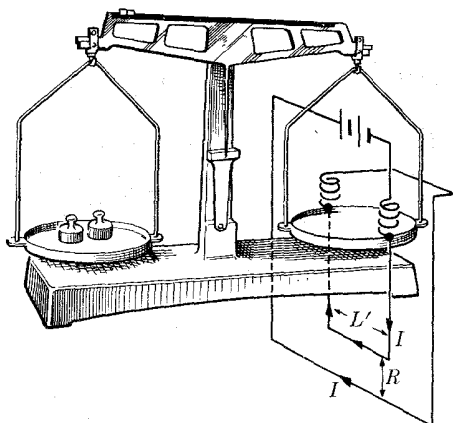
چون بر حسب ثابتهای کمکی ϵ_0 و μ_0 داریم $K_e = 1 / 4\pi\epsilon_0$ و $K_m = \mu_0 / 4\pi$ نتیجه می شود که رابطه بین این دو ثابت عبارت است از

$$\frac{K_e}{K_m} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$$

که در آن $c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ است. این ثابت برابر است با سرعت نور (یا هر علامت



شکل ۳۲.۱۵ دستگاه تعریف تجربی آمپر.



شکل ۳۳.۱۵ ترازوی جریان. برای اندازه‌گیری جریان با استفاده از نیروی مغناطیسی بین دو رسانای موازی.

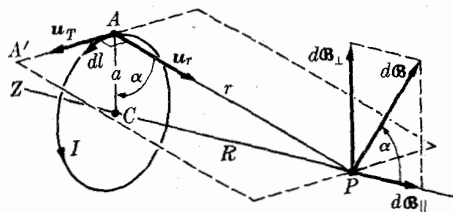
الکترومغناطیسی دیگر) درحالت. این موضوع را در فصل ۱۹ ثابت خواهیم کرد. مقدار ثابت c با دقت بسیار زیادی به‌طور تجربی اندازه‌گیری شده است. برحسب این ثابت داریم $c^2 = 10^{-7} K_e = K_m c^2$ که برابر است با مقدار داده شده در بخش ۳۰.۱۴. این امر انتخاب قبلی K_e را، که آن موقع اختیاری به‌نظر می‌رسید، توضیح می‌دهد. یکی از دلایلی که یازدهمین کنفرانس اوزان و مقیاسها استعمال آمپر را به‌عنوان چهارمین کمیت اصلی توصیه کرد این است که تهیهٔ سنجهٔ جریان و اندازه‌گیری نیروی بین دو جریان از ساختن سنجهٔ بار و اندازه‌گیری نیروی بین دو بار آسانتر است. با وجود این، از دیدگاه فیزیکی، مفهوم بار الکتریکی بنیادتر از جریان است. همچنین، خواه از دیدگاه نظری و خواه از نظر عملی، دستگاه یکاهای $mksA$ و $mksC$ هم‌ارزند.

۱۵.۱۵ میدان مغناطیسی جریان دایره‌ای

اکنون جریان دایره‌ای به‌شعاع a را در نظر می‌گیریم (شکل ۳۴.۱۵). محاسبهٔ میدان مغناطیسی در یک نقطهٔ دلخواه مسئلهٔ ریاضی بسیار پیچیده‌ای است. ولی برای نقطه‌های روی محور حلقه، محاسبه نسبتاً آسان است. قبل از همه در تعبیر ریاضی معادلهٔ (۳۷.۱۵) می‌توان گفت که میدان مغناطیسی \mathbf{B} حاصل از جریان در نقطه‌ای مانند P ، برابری تعداد زیادی از $d\mathbf{B}$ های جزئی ناشی از هر یک از پاره خطها یا جزء طولهای dl است که مدار را تشکیل می‌دهند. رابطهٔ هر میدان جزئی عبارت است از

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} dl$$

با وجود این، این معادله را باید تنها در رابطه با معادلهٔ (۳۷.۱۵) در نظر گرفت و نه



شکل ۳۴.۱۵ محاسبه میدان مغناطیسی در امتداد محور جریان دایره‌ای.

بد عنوان يك فرمول مستقل.

در مورد جریان دایره‌ای، حاصل ضرب برداری $\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\tau$ در شکل ۳۴.۱۵ بر صفحه PAA' عمود است و بزرگی آن برابر يك است، زیرا دو بردار يکا برهم عمودند. بدین طریق بزرگی $d\mathbf{B}$ حاصل از جزء dl در نقطه P برابر است با

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2}$$

که بر صفحه PAA' عمود و در نتیجه نسبت به محور Z مایل است. اگر $d\mathbf{B}$ را به دو مؤلفه $d\mathbf{B}_\perp$ موازی با محور و مؤلفه $d\mathbf{B}_\parallel$ عمود بر محور تجزیه کنیم، مشاهده می‌شود که هنگام انتگرال گیری در طول تمام دایره، به‌ازای هر $d\mathbf{B}_\perp$ ، در انتهای دیگر قطر، مقابیل dl يك جزء دیگر با علامت مخالف وجود دارد. در نتیجه بسایند $d\mathbf{B}_\perp$ ها برابر صفر می‌شود. بنابراین میدان \mathbf{B} برابر جمع تمام $d\mathbf{B}_\parallel$ ها و موازی محور خواهد بود. از طرف دیگر چون $\cos \alpha = a/r$ است، داریم

$$d\mathbf{B}_\parallel = (d\mathbf{B}) \cos \alpha = \frac{a}{r} d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3} dl$$

هنگامی که روی دایره انتگرال می‌گیریم r ثابت باقی می‌ماند. چون $\oint dl = 2\pi a$ است، می‌توان برای بزرگی میدان مغناطیسی برآیند نوشت

$$B = \oint d\mathbf{B}_\parallel = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3} \oint dl = \frac{\mu_0 I a^2}{3r^3}$$

با توجه به اینکه $r = (a^2 + R^2)^{1/2}$ است، میدان مغناطیسی نقاط روی محور جریان دایره‌ای را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + R^2)^{3/2}} \quad (۳۴.۱۵)$$

با استفاده از تعریف (۱۹.۱۵)، گشتاور دو قطبی مغناطیسی برابر است با $M = I(\pi a^2)$

بنابراین

$$B = \frac{\mu_0 M}{2\pi(a^2 + R^2)^{3/2}} \quad (45.15)$$

میدان مغناطیسی جریان دایره‌ای را در شکل ۳۵.۱۵ نشان داده‌ایم.

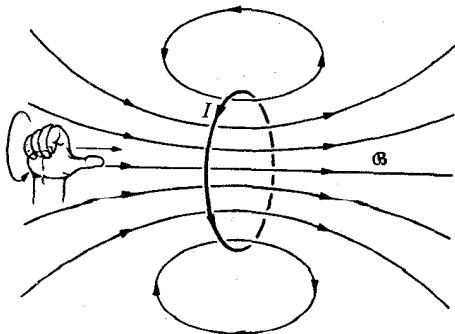
يك مورد جالب موقعی است كه مدار خیلی كوچك باشد، به گونه‌ای كه بتوان از شعاع a در مقابل R صرف نظر كرد. در این صورت معادله (۴۵.۱۵) به شكل خلاصه زیر درمی آید

$$B = \frac{\mu_0 M}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 (IM)}{4\pi R^2} \quad (46.15)$$

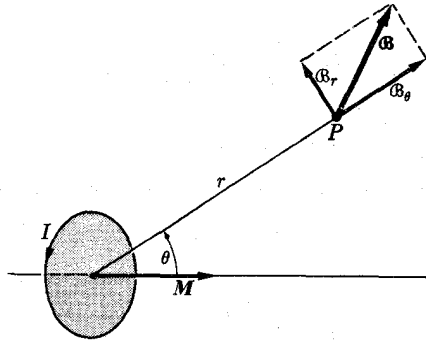
اگر معادله (۴۶.۱۵) را با معادله (۴۶.۱۴) به ازای $\theta = 0$ یعنی $E_r = (1/4\pi\epsilon_0)(2p/r^3)$ مقایسه کنیم، مشاهده می‌شود كه میدان مغناطیسی در امتداد محور يك حلقه جریان با ابعاد كم، با میدان الكتریکی دوقطبی الكتریکی در امتداد محورش يكسان است، به شرطی كه $(\mu_0/4\pi)M$ و $p/4\pi\epsilon_0$ را متناظر بایكدیگر بدانیم. بدین دلیل چنین مداری را دوقطبی مغناطیسی می‌نامند. بنابراین می‌توان معادله‌های (۴۶.۱۴) و (۴۷.۱۴) برای دوقطبی الكتریکی را در مورد دوقطبی مغناطیسی نیز به كار برد. در این صورت می‌توان میدان مغناطیسی را در خارج از محور حساب كرد (شكل ۳۶.۱۵)

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M \cos \theta}{r^3}, \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \sin \theta}{r^3} \quad (47.15)$$

در فصل ۱۴ دیدیم كه خطهای نیروی میدان الكتریکی از بارهای مثبت به سمت بارهای منفی، و در بعضی موارد احتمالاً، از بار مثبت به سمت بینهایت یا از بینهایت به بار منفی می‌روند. ولی از شكلهای ۲۷.۱۵ و ۳۵.۱۵ پیداست كه خطهای نیروی میدان



شكل ۳۵.۱۵ خطهای نیروی مغناطیسی جریان دایره‌ای.

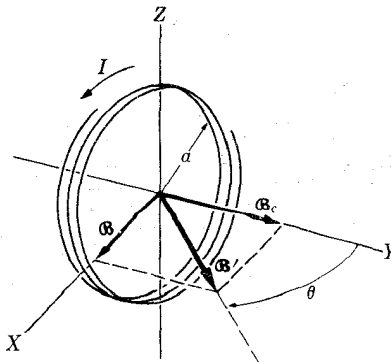


شکل ۳۶-۱۵ میدان مغناطیسی ناشی از جریان دوقطبی مغناطیسی در نقطه P .

مغناطیسی منحنیهای بسته‌ای اند که جریان حلقه‌وار آنها را در بر می‌گیرد. این بدان دلیل است که منشأ میدان مغناطیسی قطبهای مغناطیسی نیستند. میدان مغناطیسی از این قبیل، که دارای چشمه نقطه‌ای نباشد، میدان سیملوله‌ای نام دارد.

مثال ۸۰-۱۵ درباره گالوانومتر تانژانسی بحث کنید.

حل: گالوانومتر تانژانسی از یک پیچۀ دایره‌ای (شکل ۳۷-۱۵) با N حلقه که جریان I از آن می‌گذرد تشکیل شده است. آن را در میدان مغناطیسی \mathbf{B} به گونه‌ای قرار می‌دهیم که یکی از قطرهای پیچ به موازی \mathbf{B} باشد. جریان الکتریکی I در مرکز پیچ به یک میدان مغناطیسی تولید می‌کند که از معادله (۴۴-۱۵) به ازای $R=0$ به دست می‌آید، یعنی چون N حلقه وجود دارد، میدان مغناطیسی کل حاصل در مرکز برابر است $\mu_0 I / 2a$.



شکل ۳۷-۱۵ گالوانومتر تانژانسی.

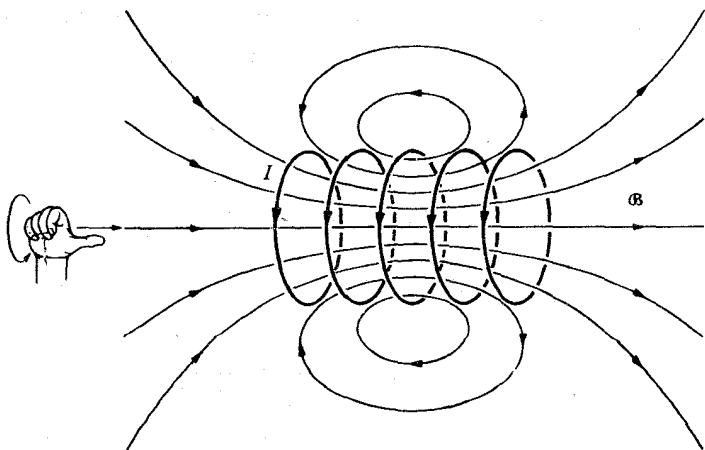
با $B_c = \mu_0 IN / 2a$. میدان مغناطیسی بسرايند B' در مرکز پیچه با محور آن زاویه θ می‌سازد که با رابطه زیر داده می‌شود

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{B}{B_c} = \frac{\gamma a B}{\mu_0 IN}$$

در این صورت اگر يك عقربه مغناطیسی را در مرکز پیچه قرار دهیم، عقربه می‌چرخد تا در وضع تعادل که با محور زاویه θ می‌سازد قرار گیرد. این امر امکان می‌دهد با دانستن جریان I میدان B را اندازه‌گیری کنیم، یا برعکس با دانستن B جریان I را اندازه بگیریم. معمولاً B میدان مغناطیسی زمین است. در اندازه‌گیریهای دقیقتر با توجه به طول عقربه باید فرمول را تصحیح کرد، زیرا میدان وارد بر عقربه دقیقاً میدان مغناطیسی در مرکز پیچه نیست. نام گالوانومتر تانژانتی از تابع مثلثاتی که در بالا ظاهر شد گرفته شده است.

مثال ۹.۱۵ درباره میدان مغناطیسی جریان سیملوله‌ای بحث کنید.

حل: جریان سیملوله‌ای، یا به‌طور ساده‌تر سیملوله، جریانی است مرکب از چندین حلقه دایره‌ای هم محور با شعاع یکسان، که جریان یکسانی از آنها می‌گذرد (شکل ۳۸.۱۵). میدان مغناطیسی سیملوله‌ای از جمع میدانهای مغناطیسی حاصل از هر يك از جریانهای دایره‌ای به دست می‌آید. میدان را با خطهای نیروی مغناطیسی روی شکل نشان داده‌ایم، و در آن آشفتگی میدان در فضای بین حلقه‌ها را از بین برده‌ایم. میدان مغناطیسی حاصل از سیملوله را تنها برای نقاط روی محور آن حساب می‌کنیم.



شکل ۳۸.۱۵ خطهای نیروی مغناطیسی ناشی از جریان سیملوله‌ای.

در شکل ۳۹.۱۵ مقطع طولی سیم‌لوله را نشان داده‌ایم. اگر L طول سیم‌لوله و N تعداد حلقه‌های آن باشد، تعداد حلقه‌ها در واحد طول برابر N/L و تعداد حلقه‌ها در مقطعی به طول dR برابر $(N/L)dR$ است. با استفاده از معادله (۴۴.۱۵) می‌توان میدان مغناطیسی حاصل از هر حلقه را در نقطه‌ای مانند P واقع روی محور حساب کرد. میدان ناشی از حلقه‌های مقطع dR را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد

$$dB = \left[\frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + R^2)^{3/2}} \right] \frac{N}{L} dR = \frac{\mu_0 IN}{2L} \frac{a^2 dR}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \quad (48.15)$$

از شکل پیدا است که $a^2 + R^2 = a^2 \csc^2 \beta$ و $dR = -a \csc^2 \beta d\beta$ ، $R = a \cot \beta$ با قرار دادن این مقادیر در معادله (۴۸.۱۵) داریم

$$dB = \frac{\mu_0 IN}{2L} (-\sin \beta d\beta)$$

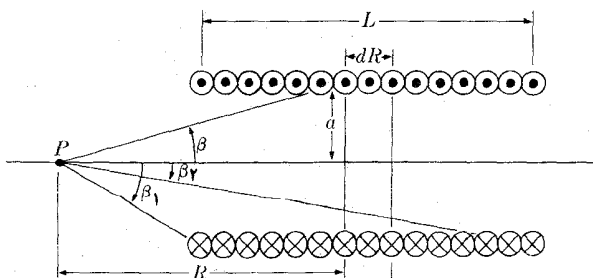
برای به دست آوردن میدان بر اینند، باید از یک انتها تا انتهای دیگر سیم‌لوله انتگرال بگیریم. به گفته دیگر، میدان بر اینند مطابق رابطه زیر حساب می‌شود

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2L} \int_{\beta_1}^{\beta_2} -\sin \beta d\beta = \frac{\mu_0 IN}{2L} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \quad (49.15)$$

اگر سیم‌لوله خیلی دراز باشد، در نقطه‌ای در مرکز آن داریم $\beta_1 \approx \pi$ و $\beta_2 \approx 0$ ، در نتیجه

$$B = \frac{\mu_0 IN}{L} \quad (50.15)$$

برای نقطه‌ای واقع در یکی از دو سر سیم‌لوله، $\beta_1 = \pi/2$ و $\beta_2 \approx 0$ یا $\beta_1 \approx \pi$ و $\beta_2 = \pi/2$ است. در هر دو حالت داریم



شکل ۳۹.۱۵ محاسبه میدان مغناطیسی در نقطه P واقع روی محور یک جریانی سیم‌لوله‌ای.

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2L} \quad (51.15)$$

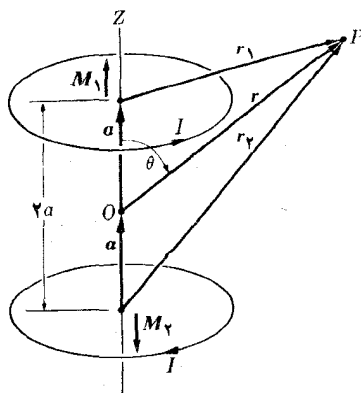
که برابر است با نصف مقدار میدان در مرکز. يك سیملوله دراز برای ایجاد میدان مغناطیسی تقریباً یکنواخت در نواحی محدود در اطراف مرکز آن به کار می‌رود.

مثال ۱۰.۱۵ میدان مغناطیسی حاصل از يك دستگاه جریان چهارقطبی مغناطیسی را که در شکل ۴۰.۱۵ نشان داده شده است مورد بحث قرار بدهید.

حل: دستگاه جریان شکل ۴۰.۱۵ از دو مدار کوچک مشابه تشکیل شده است که از آنها جریانهای یکسان I در دو سوی مخالف می‌گذرند. فاصله $2a$ دو مدار را از یکدیگر جدا می‌کند. بنا بر این هر مدار يك دوقطبی مغناطیسی تشکیل می‌دهد، ولی چون جریانها در دو سوی مخالف می‌گذرند، دو گشتاور دوقطبی مغناطیسی در دو سوی مخالف اند و گشتاور دوقطبی مغناطیسی برآیند برابر صفر است. با وجود این، بدسبب فاصله مدارها از هم، میدان مغناطیسی برآیند برابر صفر نخواهد بود و دستگاه يك چهارقطبی مغناطیسی تشکیل می‌دهد. باید دانست که، از نظر ریاضی، این وضع شباهت زیادی به مثال ۱۳.۱۴ دارد.

به دلیل مانستگی بین معادله (۴۷.۱۵) مربوط به دوقطبی مغناطیسی و معادله‌های (۴۶.۱۴) و (۴۷.۱۴) مربوط به دوقطبی الکتریکی، می‌توان با قراردادن $\mu_0 M / 4\pi$ به جای $p / 4\pi\epsilon_0$ در معادله (۴۵.۱۴)، يك پتانسیل «مغناطیسی» V_m برای میدان مغناطیسی حاصل از دوقطبی مغناطیسی تعریف کرد در نتیجه به دست می‌آید

$$V_m = \frac{\mu_0 M \cos \theta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$



شکل ۴۰.۱۵ چهارقطبی مغناطیسی.

از این رو پتانسیل «مغناطیسی» برایتند در نقطه P ، با توجه به اینکه $\mathbf{M}_1 = -\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}$ است، برابر می‌شود با

$$V_m = \frac{\mu_0 \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{r}_1}{4\pi r_1^3} + \frac{\mu_0 \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{r}_2}{4\pi r_2^3} = \frac{\mu_0 \mathbf{M}}{4\pi} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right)$$

در شکل ۴۰.۱۵ با قرارداد $\mathbf{a} = \mathbf{u}_r a$ ، که در آن \mathbf{u}_r برداریکای راستای Z است، مشاهده می‌شود که

$$\mathbf{r}_1 = -\mathbf{a} + \mathbf{r} \quad \text{و} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{a} + \mathbf{r}$$

همچنین داریم

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta$$

$$r_2^2 = r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta$$

بنابراین با استفاده از بسط دو جمله‌ای تا جمله مرتبه اول از a/r ، داریم

$$\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{2a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-3/2} = \frac{1}{r^3} \left(1 + \frac{3a \cos \theta}{r} + \dots \right)$$

همچنین داریم

$$\frac{1}{r_2^3} = \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{3a \cos \theta}{r} + \dots \right)$$

در این شرایط

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} &= \frac{-\mathbf{a} + \mathbf{r}}{r^3} \left(1 + \frac{3a \cos \theta}{r} + \dots \right) - \frac{\mathbf{a} + \mathbf{r}}{r^3} \left(1 - \frac{3a \cos \theta}{r} + \dots \right) \\ &= \frac{-2\mathbf{a}}{r^3} + \frac{6\mathbf{r}a \cos \theta}{r^4} + \dots \end{aligned}$$

با قرارداد این مقدار در رابطه V_m به دست می‌آید

$$V_m = \frac{2\mu_0}{4\pi r^3} \left(-\mathbf{M} \cdot \mathbf{a} + \frac{3\mathbf{M} \cdot \mathbf{r} a \cos \theta}{r} \right)$$

ولی $\mathbf{M} \cdot \mathbf{r} = Mr \cos \theta$ و $\mathbf{M} \cdot \mathbf{a} = Ma$ در نتیجه

$$V_m = \frac{\mu_0 M (2a)(3r \cos^2 \theta - 1)}{4\pi r^3}$$

بستگی شعاعی و زاویه‌ای رابطه فوق شبیه به معادله (۵۸.۱۴) است، و این امر را تأیید می‌کند که با یک چهارقطبی مغناطیسی سروکار داریم. گشتاور چهارقطبی مغناطیسی برابر است با $M(2a)$. مؤلفه‌های شعاعی و عرضی میدان مغناطیسی چهار قطبی مغناطیسی عبارتند از

$$B_r = -\frac{\partial V_m}{\partial r} = \frac{3\mu_0 M(2a)(3\cos^2\theta - 1)}{4\pi r^4}$$

$$B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V_m}{\partial \theta} = \frac{6\mu_0 M(2a)\sin\theta \cos\theta}{4\pi r^4}$$

توجه دانشجو را به این نکته جلب می‌کنیم که پتانسیل «مغناطیسی» که در اینجا معرفی کردیم تنها جهت ساده کردن محاسبه ریاضی میدان است و ارتباط آن با انرژی پتانسیل مانند ارتباط پتانسیل الکتریکی با انرژی پتانسیل نیست.

۱۱.۱۵ میدان مغناطیسی بار در حال حرکت (غیر نسبیتی)

اینکه جریان الکتریکی (یعنی جریان بارهای متحرک) تولید میدان مغناطیسی می‌کند، حاکی از آن است که یک بار الکتریکی در حال حرکت نیز باید میدان مغناطیسی تولید کند. اکنون سعی می‌کنیم از نتایج شناخته شده برای میدان مغناطیسی جریان، این میدان را نیز تعیین کنیم. میدان مغناطیسی حاصل از جریان، آنچنانکه از معادله (۳۷.۱۵) به دست می‌آید، عبارت است از

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{(I dl \mathbf{u}_T) \times \mathbf{u}_r}{r^2}$$

ولی با استفاده از معادله‌های (۱۲.۱۵) و (۱۳.۱۵) و اینکه $dV = S dl$ است داریم

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v} \quad \text{و} \quad \mathbf{j} = j\mathbf{u}_T$$

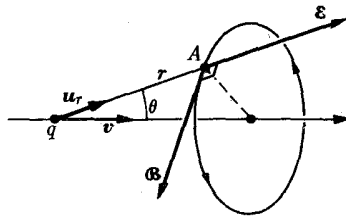
$$I dl \mathbf{u}_T = (jS) dl \mathbf{u}_T = \mathbf{j} dV = nq\mathbf{v} dV$$

بنابراین

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{u}_r}{r^2} n dV \quad (52.15)$$

چون $n dV$ تعداد ذره‌ها در حجم dV است، می‌توان نتیجه بالا را چنین تعبیر کرد که هر ذره باردار در نقطه A میدان مغناطیسی تولید می‌کند (شکل ۴۱.۱۵)، در نتیجه

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{u}_r}{r^2} \quad (53.15)$$



شکل ۴۱-۱۵ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بار متحرك.

بزرگی B برابر است با

$$B = \frac{\mu_0 q v \sin \theta}{4\pi r^2}$$

راستای B بر r و v عمود است. بنابراین، چنانکه شکل نشان می‌دهد، خطهای نیروی مغناطیسی دایره‌اند. توجه داشته باشید که بزرگی B در راستای حرکت صفر و در صفحه‌ای که از بار الکتریکی می‌گذرد و بر راستای حرکت عمود است، بیشینه است. E ، میدان الکتریکی بار q در نقطه A ، اگر بپذیریم که حرکت بار تأثیری در آن ندارد، برابر است با

$$E = \frac{q u_r}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

بنابراین می‌توان معادله (۵۳-۱۵) را به صورت زیر نوشت

$$B = \mu_0 \epsilon_0 v \times E = 1/c^2 (v \times E) \quad (54-15)$$

که رابطه نزدیکی بین میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی حاصل از بار در حال حرکت برقرار می‌کند. در معادله بالا c برابر است با

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.9979 \times 10^8 \text{ ms}^{-1} \quad (55-15)$$

که در آن c ، چنانکه قبلاً اشاره کرده‌ایم و بعداً ثابت خواهیم کرد، برابر سرعت نور یا هر علامت الکترومغناطیسی دیگر در خلا است. مقدار گرد شده سرعت نور برابر است با

$$c = 3.0 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

بنابراین، برخلاف بار در حال سکون که تنها میدان الکتریکی تولید می‌کند، بار در حال حرکت، هم میدان الکتریکی و هم میدان مغناطیسی به وجود می‌آورد، که طبق معادله (۵۴-۱۵) به یکدیگر مربوط می‌شوند. بنابراین میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی دو جنبه

از یک خاصیت اساسی ماده‌اند و مناسبتر این است که برای توصیف یک وضع فیزیکی که در آن بارهای در حال حرکت حضور دارند از عبارات میدان الکترومغناطیسی استفاده شود.

باید یادآوری کرده که گذر از معادله (۵۲.۱۵) به معادله (۵۳.۱۵) تنها یک تبدیل ریاضی نیست. به عنوان مثال اگر رابطه‌ای را که انتگرال آن روی یک منحنی بسته برابر صفر است به معادله (۵۳.۱۵) اضافه کنیم، مقدار معادله (۵۲.۱۵) بدون تغییر باقی می‌ماند. در واقع، معادله (۵۳.۱۵) کاملاً صحیح نیست. تجربه نشان می‌دهد نتایجی که از این رابطه به دست می‌آیند فقط تا هنگامی قابل قبول اند که سرعت ذره در مقابل c کوچک باشد. در بخش ۱۳.۱۵ رابطه درستی برای \mathbf{B} به دست خواهیم آورد که در تمام سرعتها معتبر باشد. از طرف دیگر، معادله (۵۲.۱۵) برای تمام سرعتها اعتبار خود را حفظ می‌کند.

مثال ۱۱.۱۵ تحقیق کنید که نتیجه (۴۲.۱۵) مربوط به میدان مغناطیسی جریان مستقیم الخط با معادله (۵۴.۱۵) سازگار است.

حل: میدان مغناطیسی حاصل از جریان مستقیم الخط بر ایند \mathbf{u}_T در یک میدانهایی است که هر یک از بارهای در حال حرکت تولید می‌کنند. بنا به معادله (۱۳.۱۵)، اگر S سطح مقطع قایم رسانا باشد، $I = nqvS$ است، که در آن v سرعت بارهاست. ولی nq بار الکتریکی موجود در واحد حجم است. بنا بر این بار الکتریکی یک رسانا، به طول واحد و سطح مقطع S ، برابر است با $nqS = \lambda$ ، یا $I = \lambda v$. با قرار دادن این نتیجه در معادله (۴۲.۱۵) و با توجه به اینکه $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_T$ است داریم

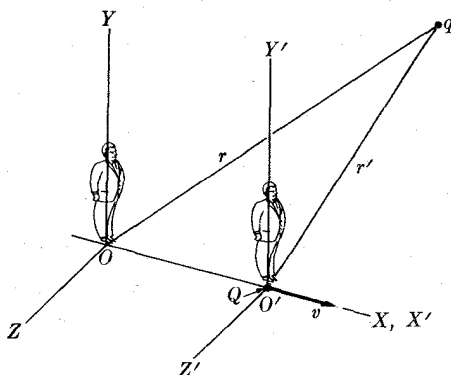
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 (\lambda v)}{\lambda} \mathbf{u}_T \times \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 v \times \mathbf{E}$$

که همان معادله (۵۴.۱۵) است.

۱۲.۱۵ الکترومغناطیس و اصل نسبیت

در فصل ۱۱، به عنوان قاعده کلی گفتیم که تمام قوانین طبیعت باید برای تمام ناظرهای لخت یکسان باشند. اکنون باید کوشش کنیم رابطه بین میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی را، که دو ناظر در حرکت یکنواخت نسبت به هم اندازه می‌گیرند، طوری تعیین کنیم که اصل نسبیت معتبر بماند.

فرض کنید دو ناظر O و O' داریم که یکی نسبت به دیگری با سرعت v حرکت انتقالی یکنواخت دارد (شکل ۱۲.۱۵)، و دوبار q و Q نسبت به ناظر O' در حال سکون اند، پس نسبت به O حرکت دارند. چنانکه در بخش ۴.۱۵ اشاره کردیم، مقدار بارهای q و Q برای دو ناظر یکی است. برای ناظر O' ، بین q و Q تنها برهم کنش الکتریکی وجود دارد و نیروی اندازه‌گیری شده روی بار q برابر است با $\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'$ ،



شکل ۴۲.۱۵ مقایسه اندازه گیریهای الکترو-مغناطیسی به وسیلهٔ دوناظر، که نسبت به هم حرکت دارند.

\mathbf{E}' میدان الکتریکی است که بار q در نقطهٔ Q تولید می‌کند و ناظر O' آن را اندازه می‌گیرد.

از طرف دیگر، چون ناظر O بار q را در حرکت می‌بیند، مشاهده می‌کند که بار q میدان الکتریکی \mathbf{E} و میدان مغناطیسی \mathbf{B} را تولید می‌کند، و چون بار q را نیز با سرعت v در حال حرکت می‌بیند، نیروی وارد از طرف Q بر q که ناظر O اندازه‌گیری می‌کند برابر است با $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

با انتخاب محور مشترك X و X' موازی با سرعت نسبی دوناظر، داریم $\mathbf{v} = \mathbf{u}_x v$ و $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -u_y v B_z + u_z v B_y$ در نتیجه مؤلفه‌های \mathbf{F} نسبت به چارچوب XYZ عبارت اند از

$$F_x = qE_x, \quad F_y = q(E_y - vB_z), \quad F_z = q(E_z + vB_y) \quad (۵۶.۱۵)$$

مؤلفه‌های \mathbf{F}' نسبت به چارچوب $X'Y'Z'$ عبارت اند از

$$F'_x = qE'_x, \quad F'_y = qE'_y, \quad F'_z = qE'_z \quad (۵۷.۱۵)$$

چون q نسبت به ناظر O' در حال سکون است رابطهٔ بین مؤلفه‌های \mathbf{F} و \mathbf{F}' با معادله‌های (۳۲.۱۱)، (۳۳.۱۱) و (۳۴.۱۱) داده می‌شود، یعنی

$$F'_x = F_x, \quad F'_y = \frac{F_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad F'_z = \frac{F_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

با قراردادن مؤلفه‌های داده شده در معادله‌های (۵۶.۱۵) و (۵۷.۱۵) و حذف ضریب مشترك q ، به دست می‌آید

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \frac{E_y - v B_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E'_z = \frac{E_z + v B_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (58.15)$$

این روابط، میدان الکتریکی را که ناظر O' اندازه می گیرد با میدانهای الکتریکی و مغناطیسی که ناظر O اندازه می گیرد مطابق با نظریه خاص نسبیت به هم مربوط می کنند. تبدیل عکس معادله (58.15) از تعویض جای میدانها و تغییر علامت v به دست می آید، زیرا چارچوب XYZ با سرعت $-v$ نسبت به چارچوب $X'Y'Z'$ حرکت می کند. بدین طریق، اگر ناظر O' میدان الکتریکی \mathbf{E}' و میدان مغناطیسی \mathbf{B}' را اندازه بگیرد، میدان الکتریکی که ناظر O اندازه گیری می کند، از رابطه های زیر به دست می آید

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + v B'_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z - v B'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (59.15)$$

اگر بار Q ، به جای اینکه نسبت به ناظر O' ساکن باشد، نسبت به این ناظر نیز حرکت کند، در این صورت O' علاوه بر میدان الکتریکی \mathbf{E}' ، متوجه وجود میدان مغناطیسی \mathbf{B}' نیز می شود. که از محاسبه مشابه ولی دشوارتر به دست می آید*

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \frac{B_y + v E_z/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad B'_z = \frac{B_z - v E_y/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (60.15)$$

بار دیگر، چنانکه برای معادله های (58.15) انجام دادیم، می توانیم تبدیل عکس معادله (60.15) را با تعویض جای میدانها و تبدیل v به $-v$ به دست آوریم. در نتیجه، خواهیم داشت

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \frac{B'_y - v E'_z/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad B_z = \frac{B'_z + v E'_y/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (61.15)$$

معادله های (58.15) و (60.15)، یا عکس آنها، معادله های (59.15) و (61.15)، تبدیل لورنتس برای میدان الکترومغناطیسی را تشکیل می دهند. این معادله ها یکبار دیگر ثابت می کنند که میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی دو چیز جدا از هم نیستند، بلکه وجود فیزیکی واحدی به نام میدان الکترومغناطیسی را تشکیل می دهند. تفکیک میدان الکترومغناطیسی به میدانهای مؤلفه الکتریکی و مغناطیسی امر مطلق نیست، بلکه به حرکت بارها نسبت به ناظر بستگی دارد. از این رو، یکبار دیگر تکرار می کنیم که نباید از برهم کنشهای الکتریکی یا مغناطیسی به عنوان فرایندهایی مجزا از هم گفتگو کرد، بلکه آنها را باید دوجنبه از برهم کنش الکترومغناطیسی در نظر گرفت.

* به عنوان مثال، اگر دانشجو مایل است رابطه های دوم و سوم معادلات (60.15) را به دست آورد، پیشنهاد می کنیم که E'_y و E'_z را از معادله (58.15) در معادله های تبدیل عکس (59.15) قرار دهد و سپس آنها را نسبت به B'_y و B'_z حل کند.

مثال ۱۲۰۱۵ با استفاده از تبدیل لورنتس برای میدان الکترومغناطیسی جهت ارتباط دادن میدانهای که دوناظر اندازه می‌گیرند وضعی را که در مثال ۴۰۱۵ بحث شد، بررسی کنید.

حل: یادآوری می‌کنیم که در مثال ۴۰۱۵ میدان الکتریکی در راستای محور Y و میدان مغناطیسی در راستای محور Z بود. با تبدیل سینماتیکی چارچوب $X'Y'Z'$ ، که در راستای محور X با سرعت $v = E/B$ حرکت می‌کند، حرکت را به حرکت ذره‌ای که تنها تحت تأثیر میدان مغناطیسی جابجا می‌شود تبدیل می‌کنیم. اکنون با وارد کردن نظریه نسبیت در این مثال گامی دیگر به جلو می‌گذاریم. در چارچوب XYZ برای میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی بترتیب داریم

$$E_x = 0, \quad E_y = E, \quad E_z = 0$$

و

$$B_x = B, \quad B_y = B_z = 0$$

در این صورت با به‌کار بردن معادله‌های (۵۸۰۱۵) و (۶۰۰۱۵) برای میدانهای مشاهده شده در چارچوب $X'Y'Z'$ به دست می‌آوریم

$$E'_x = 0, \quad E'_y = \frac{E - vB}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E'_z = 0$$

$$B'_x = 0, \quad B'_y = 0, \quad B'_z = \frac{B - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

با قرار دادن $v = E/B$ نتیجه می‌گیریم که $E'_y = 0$ و در نتیجه $E'_z = 0$ است، در صورتی که

$$B = B'_z = \sqrt{1 - v^2/c^2} B$$

بنابراین، نظریه نسبیت پیشگویی می‌کند که ناظر O' ، که نسبت به O با سرعت $v = E/B$ حرکت می‌کند، هیچگونه میدان الکتریکی اندازه‌گیری نمی‌کند و میدان مغناطیسی که اندازه می‌گیرد از میدان مغناطیسی اندازه‌گیری شده توسط O کوچکتر است؛ ضمناً میدانها هم‌جهت‌اند.

مثال ۱۳۰۱۵ با استفاده از تبدیل نسبیتی برای میدان مغناطیسی، میدان مغناطیسی جریان مستقیم‌الخط را حساب کنید.

حل: یک ردیف از بینهایت بار الکتریکی هم‌فاصله را که در راستای محور X با سرعت v نسبت به ناظر O حرکت می‌کنند و در نتیجه جریان مستقیم‌الخطی را تشکیل می‌دهند

(شکل ۴۳.۱۵) در نظر می‌گیریم. اگر λ بار الکتریکی در واحد طول باشد، شدت جریانی که ناظر O اندازه می‌گیرد برابر است با $I = \lambda v$. اکنون ناظر O' را که در راستای محور X با سرعت v حرکت می‌کند در نظر می‌گیریم. بارهای الکتریکی نسبت به O' ساکن به نظر می‌رسند و O' تنها میدان الکتریکی اندازه‌گیری می‌کند. ولی ناظر O هم میدان الکتریکی و هم میدان مغناطیسی اندازه‌گیری می‌کند.

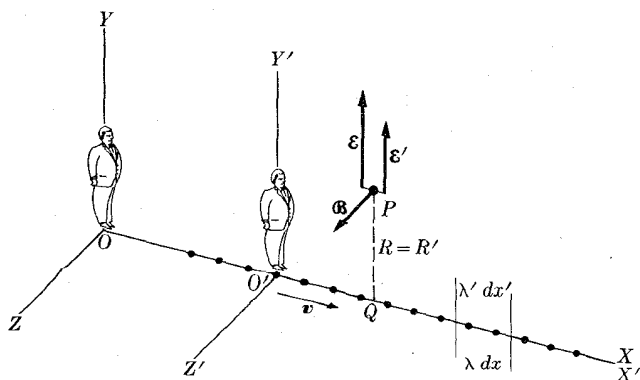
بار الکتریکی در پاره خط dx (آنطور که O اندازه‌گیری می‌کند) برابر است با $dq = \lambda dx$. ناظر O' نیز همین بار را اندازه می‌گیرد، ولی به سبب انقباض لورنتس، به نظر می‌رسد که طول پاره خط برابر dx' باشد، به گونه‌ای که $dx = \sqrt{1 - v^2/c^2} dx'$. بنا بر این O' بار الکتریکی در واحد طول متفاوت λ' را اندازه‌گیری می‌کند که با رابطه زیر داده می‌شود

$$\lambda' = \frac{dq}{dx'} = \lambda \frac{dx}{dx'} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \lambda$$

میدان الکتریکی که ناظر O اندازه می‌گیرد عرضی است و در نقطه معلومی مانند P از نتیجه مثال ۷.۱۴ به دست می‌آید؛ یعنی $E' = \lambda' / 2\pi\epsilon_0 R'$. با قراردادن محور Y در راستای موازی خط PQ و با توجه به اینکه $R = R'$ است (به دلیل عرضی بودن فاصله R) می‌توان نوشت

$$E'_x = 0, \quad E'_y = \lambda' / 2\pi\epsilon_0 R', \quad E'_z = 0$$

در این صورت بنا به کاربردن معادله (۵۹.۱۵) و به‌ازای $\mathbf{B}' = 0$ مؤلفه‌های میدان الکتریکی نسبت به O عبارت اند از



شکل ۴۳.۱۵ میدان الکترومغناطیسی حاصل از جریان بارها در طول محور X آن‌طور که دو ناظر در حال حرکت نسبت به هم اندازه‌گیری می‌کنند.

$$E_x = E_z = 0, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 R \sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

همچنین از معادله (۶۱.۱۵) مؤلفه‌های میدان مغناطیسی نسبت به O به دست می‌آیند

$$B_x = B_y = 0, \quad B_z = \frac{v E'_y/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\lambda' v/c^2}{2\pi\epsilon_0 R \sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

در اینجا از رابطه $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ استفاده شده است. به این ترتیب، ندهتها میدان الکتریکی صحیح برای توزیع مستقیم‌الخط بارها در چارچوب XYZ به دست می‌آید، بلکه با به‌کار بردن معادله (۳۷.۱۵)، به‌عنوان نقطه آغاز، رابطه صحیح میدان مغناطیسی حاصل از جریان مستقیم‌الخط، که قبلاً پیدا کرده بودیم، [معادله (۴۱.۱۵)] نیز به دست می‌آید. بنابراین با اطمینان می‌توان گفت که قانون آمپر-لاپلاس یا معادله (۳۷.۱۵) با دریاستهای نظریه نسبیت سازگار است و در نتیجه میدان مغناطیسی مربوط به جریان الکتریکی بسته را به‌طور صحیح به دست می‌دهد.

۱۳.۱۵ میدان الکترومغناطیسی بار در حال حرکت

در فصل ۱۴ دیدیم که بار ساکن، یک میدان الکتریکی با معادله $\mathbf{E} = (q/4\pi\epsilon_0 r^2)\mathbf{u}_r$ تولید می‌کند. در بخش ۱۱.۱۵ نیز گفتیم بار الکتریکی در حال حرکت، علاوه بر میدان الکتریکی، یک میدان مغناطیسی با رابطه $\mathbf{B} = (\mu_0/4\pi)q\mathbf{v} \times \mathbf{u}_r/r^2$ ایجاد می‌کند. ولی بنا به آنچه در بخش پیش گذشت، میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} باید مطابق معادله‌های (۵۸.۱۵) و (۶۰.۱۵) بهم مربوط شوند. بنابراین برای به دست آوردن رابطه‌های صحیح \mathbf{E} و \mathbf{B} برای بار متحرک باید از همان ابتدا محاسبه را با نظریه نسبیت شروع کنیم.

بار الکتریکی q را در نظر بگیریم که نسبت به چارچوب $X'Y'Z'$ ساکن ولی این چارچوب با سرعت v در راستای محور مشترک X نسبت به چارچوب XYZ حرکت می‌کند. ناظر O' هیچگونه میدان مغناطیسی اندازه‌گیری نمی‌کند، ولی چنانکه قبلاً اشاره شد، تنها میدان الکتریکی اندازه می‌گیرد. بنابراین $\mathbf{B}' = 0$ یا $B'_x = B'_y = B'_z = 0$ است. در این صورت از معادله‌های تبدیل (۵۹.۱۵) برای میدان الکتریکی به دست می‌آید

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (۶۲.۱۵)$$

معادله‌های (۶۲.۱۵) نشان می‌دهند هنگامی که ناظر O ، که بار الکتریکی را در حال حرکت و O' ، که بار الکتریکی را در حال سکون می‌بیند، میدانهای الکتریکی را که برای بار الکتریکی اندازه‌گیری کرده‌اند باهم مقایسه کنند، برای مؤلفه موازی راستای حرکت مقدار یکسانی به دست می‌آورند. ولی برای مؤلفه عمود بر راستای حرکت، ناظر O مقدار بزرگتری به دست می‌آورد. همچنین از معادله‌های تبدیل میدان مغناطیسی داده

شده با معادله‌های (۶۱.۱۵)، اگر از معادله‌های (۶۲.۱۵) برای بیان مؤلفه‌های میدان الکتریکی نسبت به O استفاده کنیم، نتیجه می‌شود

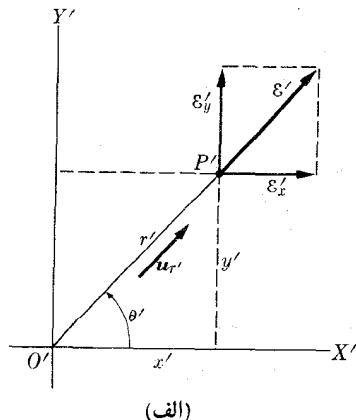
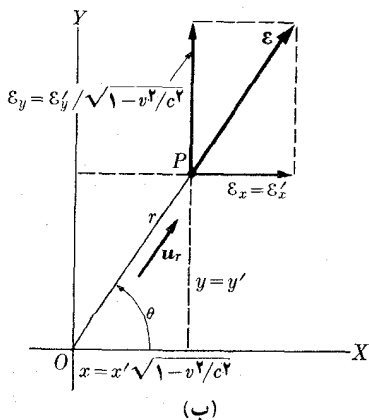
$$B_x = 0, \quad B_y = -\frac{v E_z}{c^2}, \quad B_z = \frac{v E_y}{c^2} \quad (۶۳.۱۵)$$

که با معادله $\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E} / c^2$ هم‌ارز است. این رابطه همانند معادله (۵۴.۱۵) است که، چنانکه قبلاً اشاره کردیم، رابطه بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بار الکتریکی متحرک با سرعت ثابت v را تشکیل می‌دهد و رابطه‌ای است که در تمام سرعتها صادق است.

در شکل ۴۴.۱۵ مشاهدات O و O' باهم مقایسه شده‌اند. اگر بار در نقطه O' باشد، ناظر O' در نقطه P' (در صفحه $X'Y'$) یک میدان الکتریکی با رابطه زیر اندازه‌گیری می‌کند

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \mathbf{u}'_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \mathbf{r}'$$

ناظر O همان نقطه را در صفحه XY می‌بیند، ولی به دلیل انقباض لورنتس، به نظر او X طول نقطه با ضرب شدن در سازه $\sqrt{1-v^2/c^2}$ کاهش یافته است، در صورتی که Y بدون تغییر باقی می‌ماند. یعنی $x = x' \sqrt{1-v^2/c^2}$ و $y = y'$. بنابراین زاویه θ که OP با OX می‌سازد با زاویه θ' که $O'P'$ یا $O'X'$ می‌سازد باهم مساوی نیستند (شکل ۴۴.۱۵). با استفاده از معادله (۶۲.۱۵) مشاهده می‌شود که مؤلفه میدان \mathbf{E} که ناظر O در



شکل ۴۴.۱۵ تبدیل نسبیتی مؤلفه‌های میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی q واقع در نقطه O' و ساکن نسبت به ناظر O .

نقطه P اندازه گیری می کند، روی محور X برابر مؤلفه میدانی است که ناظر O' اندازه می گیرد، و لسی مؤلفه آن روی محور Y بزرگتر به نظر می رسد، یعنی در سازه $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ضرب می شود. نتیجه اینکه زاویه ای که میدان \mathbf{E} با محور X می سازد همان زاویه θ است که \mathbf{r} با محور X می سازد. در این صورت، نسبت به ناظر O میدان الکتریکی نیز در راستای شعاعی است. با وجود این، میدان نسبت به ناظر O دارای تقارن کروی نیست. محاسبه ساده و مستقیم نشان می دهد (بدمثال ۱۴.۱۵ مراجعه کنید) که

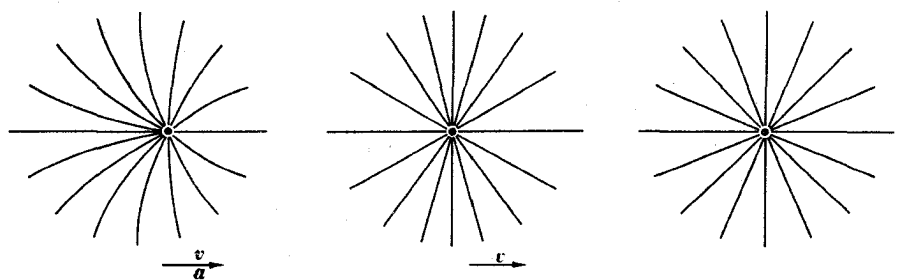
$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1 - v^2/c^2}{[(1 - v^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} \mathbf{u}_r \quad (۶۴.۱۵)$$

سازه ای که $\sin \theta$ را در بر دارد، میدان الکتریکی را تابع راستای بردار مکان \mathbf{r} می کند. بدین طریق، برای فاصله های مساوی از بار الکتریکی، میدان الکتریکی در صفحه استوا ($\theta = \pi/2$) عمود بر راستای حرکت، قویتر از میدان الکتریکی در راستای حرکت ($\theta = 0$) است. این امر با میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی در حال سکون که دارای تقارن کروی است مابینت دارد. این وضع در شکل ۴۵.۱۴ الف. و ب نشان داده شده است. فاصله بین خطوط نمایانگر شدت و ضعف میدان الکتریکی است.

با به کار بردن معادله $\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2$ ، که اعتبار کلی آن را ثابت کردیم، و با استفاده از معادله (۶۴.۱۵) برای \mathbf{E} ، میدان مغناطیسی بار در حال حرکت را به صورت زیر به دست می آوریم

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \frac{1 - v^2/c^2}{[1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} \mathbf{v} \times \mathbf{u}_r \quad (۶۵.۱۵)$$

اگر v در مقایسه با c خیلی کوچک باشد، این رابطه به معادله غیر نسبیتی (۵۳.۱۵) تحویل



(ج) بار دارای شتاب است.

(ب) بار با سرعت زیاد در حال حرکت است.

(الف) بار در حال سکون یا دارای حرکتی بسیار بطنی است.

می‌شود. باید به‌خاطر سپرد که معادله‌های (۶۴.۱۵) و (۶۵.۱۵) تنها برای بار در حال حرکت یکنواخت اعتبار دارند. اگر بار الکتریکی دارای شتاب باشد، میدان مغناطیسی صورت دیگری مشابه شکل ۴۵.۱۵ ج به خود می‌گیرد و روابط ریاضی آن پیچیده‌تر می‌شود.

اینکه معادله (۶۵.۱۵) با معادله (۵۳.۱۵) که از روی قانون آمپر-لاپلاس (۳۷.۱۵) به‌دست آورده بودیم فرق دارد، ممکن است در دانشجو این تصور را به‌وجود آورد که معادله (۳۷.۱۵) نیز یک تقریب غیرنسبیتی از یک قانون کلی‌تر است. ولی چنین تصویری درست نیست و، چنانکه در بخش ۱۱.۱۵ گفتیم، معادله (۳۷.۱۵) اعتبار عام دارد. دشواری از اینجا پیش می‌آید که استدلالی که برای گذر از معادله (۳۷.۱۵) به معادله (۵۳.۱۵) با استفاده از معادله (۵۲.۱۵) به‌کار بردیم کاملاً دقیق نیست. این ضعف از اینجا ناشی می‌شود که بار منفرد در حال حرکت، جریان بسته تشکیل نمی‌دهد، در صورتی که معادله (۳۷.۱۵) فقط در مورد جریان‌های بسته به‌کار می‌رود. به‌عنوان مثال، اگر رابطه (۶۵.۱۵) را در معادله (۵۲.۱۵) که در مورد جریان بارهای الکتریکی مستقیم الخط اعتبار دارد به‌کار ببریم، برای میدان یک جریان مستقیم الخط، معادله (۴۱.۱۵) به‌دست می‌آید. این محاسبه، که در اینجا از آن صرف‌نظر می‌کنیم، انسجام منطقی نظریه را نشان می‌دهد.

مثال ۱۴.۱۵ معادله (۶۴.۱۵) را برای میدان الکتریکی بار الکتریکی در حال حرکت یکنواخت، به‌دست آورید.

حل: با توجه به اینکه در شکل ۴۴.۱۵ الف میدان \mathbf{E}' با راستای $O'X'$ زاویه θ' می‌سازد و $\cos \theta' = x'/r'$ و $\sin \theta' = y'/r'$ است، برای مؤلفه‌های \mathbf{E}' به‌دست می‌آید

$$E'_x = E' \cos \theta' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{r'^3}, \quad E'_y = E' \sin \theta' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'}{r'^3} \quad (۶۶.۱۵)$$

با استفاده از معادله (۶۲.۱۵) و اینکه به‌موجب تبدیل لورنتس، $x = x' \sqrt{1 - v^2/c^2}$ و $y = y'$ است، می‌توان مؤلفه‌های \mathbf{E} را که ناظر O مشاهده می‌کند به‌صورت زیر نوشت

$$E_x = E'_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{\sqrt{1 - v^2/c^2} r'^3}$$

$$E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{\sqrt{1 - v^2/c^2} r'^3}$$

نتایج بالا با نمادگذاری برداری چنین نوشته می‌شوند

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} r'^3} \quad (۶۷.۱۵)$$

این رابطه نشان می‌دهد که \mathbf{E} در چارچوب XYZ در راستای شعاعی است. به علاوه داریم

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 = \frac{x^2}{1 - v^2/c^2} + y^2 = \frac{r^2 - (v^2/c^2)y^2}{1 - v^2/c^2}$$

و $y'^2 = r'^2 \sin^2 \theta$ بنا بر این

$$r' = \frac{r[1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]^{1/2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

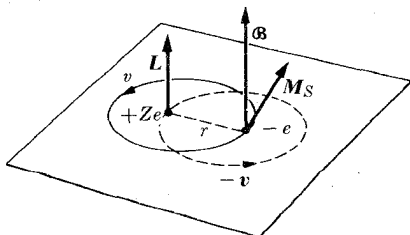
بالاخره با استفاده از این رابطه برای حذف r' از معادله (۶۷.۱۵) به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{(1 - v^2/c^2)\mathbf{r}}{[1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1 - v^2/c^2}{[1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} \mathbf{u}_r$$

و این درست همان نتیجه‌ای است که قبلاً به دست آوردیم.

مثال ۱۵.۱۵ دربارهٔ برهم کنش مغناطیسی ممکن بین الکترون در حرکت مداری و هستهٔ اتم، بحث کنید.

حل: الکترونی با بار الکتریکی e — را که با سرعت v دور هسته‌ای با بار Ze می‌چرخد در نظر می‌گیریم (شکل ۴۶.۱۵). مسیر الکترون نسبت به پروتون با خط پر رسم شده است که جهت سهولت آن را دایره فرض می‌کنیم. ولی اگر حرکت به چارچوب مرجع متصل به الکترون برده شود، الکترون ساکن خواهد بود و به نظر می‌رسد که پروتون با سرعت v — مسیر نقطه چین را که آن هم دایره است، می‌پیماید. از شتاب الکترون صرف نظر می‌شود (دانشجو باید بتواند آن را محاسبه و نسبت به منطقی بودن این فرض قضاوت کند). این چارچوب جدید را می‌توان چارچوب لخت در نظر گرفت. بنا بر این، نسبت به الکترون، هسته دو میدان به وجود می‌آورد: میدان الکتریکی \mathbf{E} ، که به طور غیر نسبی،



شکل ۴۶.۱۵ برهم کنش اسپین - مدار الکترون در حرکت مداری دور هسته‌ای با بار مثبت.

با رابطه $\mathbf{E} = (Ze / 4\pi\epsilon_0 r^2) \mathbf{u}_r$ بیان می‌شود و میدان مغناطیسی \mathbf{B} که با معادله (۵۴.۱۵) به \mathbf{E} مربوط می‌شود، به شرطی که $-\mathbf{v}$ را به جای \mathbf{v} قرار دهیم یعنی

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} (-\mathbf{v}) \times \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{v} \\ &= \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} \mathbf{u}_r \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

ولی اندازه حرکت زاویه‌ای الکترون نسبت به هسته برابر است با

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = m\mathbf{r} \mathbf{u}_r \times \mathbf{v}$$

پس، با حذف $\mathbf{u}_r \times \mathbf{v}$ و با استفاده از روابط \mathbf{B} و \mathbf{L} ، به دست می‌آید

$$\mathbf{B} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 c^2 m r^3} \mathbf{L}$$

بنابراین، چنانکه در شکل نیز دیده می‌شود، میدان مغناطیسی حاصل از حرکت نسبی هسته، موازی و متناسب با اندازه حرکت زاویه‌ای الکترون است.

چون \mathbf{B} میدان مغناطیسی در چارچوبی است که الکترون نسبت به آن در حال سکون است، هیچگونه برهم‌کنشی با حرکت مداری الکترون به وجود نمی‌آورد. ولی الکترون گشتاور مغناطیسی \mathbf{M}_S را دارد که از اسپین خودش ناشی می‌شود. بنا براین با سه‌کار بردن معادله‌های (۲۲.۱۵) و (۲۹.۱۵)، برهم‌کنش مغناطیسی الکترون با میدان مغناطیسی هسته عبارت می‌شود از

$$E_p = -\mathbf{M}_S \cdot \mathbf{B} = -\left(\gamma \frac{e}{2m} \mathbf{S}\right) \cdot \left(\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 c^2 m r^3} \mathbf{L}\right) = \frac{\gamma Ze^2}{8\pi\epsilon_0 c^2 m^2 r^3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$$

مهمترین جنبه نتیجه فوق در این است که برهم‌کنش مغناطیسی به سمت‌گیری نسبی اسپین \mathbf{S} و اندازه حرکت زاویه‌ای مداری الکترون \mathbf{L} بستگی دارد. به همین دلیل آن را برهم‌کنش اسپین - مدار می‌نامند و با علامت $E_{p,SL}$ نشان می‌دهند. محاسبه نسبتی دقیق‌تر نشان می‌دهد که مقدار $E_{p,SL}$ نصف مقداری است که در اینجا به دست آوردیم.

اکنون مرتبه بزرگی آن را برآورد می‌کنیم. یادآور می‌شویم که بنا به جدول مثال ۶.۱۵، برای الکترون γ تقریباً برابر ۲- است. همچنین بنا به معادله (۴۰.۱۴)، انرژی الکترون روی مدار دایره‌ای، دقیقاً، برابر است با $E = -Ze^2 / 4\pi\epsilon_0 (2r)$. بنا براین پس از تصحیح $E_{p,SL}$ با سازه $1/2$ که در بالا متذکر شدیم، می‌توان نوشت

$$E_{p,SL} \approx \frac{E}{c^2 m^2 r^2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$$

ولی بزرگی \mathbf{L} برابر mrv است و انتظار داریم مرتبه بزرگی \mathbf{S} نیز در همین حدود باشد.

بنا بر این $S.L$ تقریباً برابر $(mrv)^2$ است. با قراردادن این مقدار در رابطه فوق به دست می آید

$$E_{p,SL} \approx \frac{v^2}{c^2} |E|$$

بامقایسه این مقدار با نتیجه مثال ۱۰.۱۴ نتیجه می گیریم که مرتبه بزرگی برهم کنش اسپین مداریک الکترون در حرکت مداری برابر مرتبه بزرگی تصحیح نسبیتی در انرژی است. با وجود این، برهم کنش اسپین-مدار به سبب سازه $S.L$ که بدستگیری نسبی S و L بستگی دارد، این ویژگی را داراست که اثر راستایی خاصی نشان می دهد.

تحلیل دقیق تر ازهای انرژی الکترون در اتم نشان می دهد که S می تواند نسبت به L تنها دو نوع سمتگیری داشته باشد. بنا به توضیحی که در پایان مثال ۷.۱۵ داده شد، این سمتگیریه عبارت اند از موازی یا پادموازی با L . بنا بر این برهم کنش اسپین-مدار، هر تراز از انرژی را به جفتها (یا دوتایی ها) بی تقسیم می کند که انرژی آنها بسیار به هم نزدیک اند.

۱۴.۱۵ برهم کنش الکترومغناطیسی بین دو بار در حال حرکت

باید توجه داشت که در بحث برهم کنشهای مغناطیسی، از روشی که در فصلهای ۱۳ و ۱۴ در مورد برهم کنشهای گرانشی و الکتریکی دنبال می کردیم دور افتاده ایم. در آن فصلها، بحث را از برهم کنش بین دوزره شروع و در پی آن مفهوم میدان را معرفی کردیم. در این فصل، برعکس با صحبت از نیروی وارد بر بار در حال حرکت، (۱۰.۱۵)، ابتدا مفهوم میدان مغناطیسی را به صورت عملیاتی معرفی کردیم، سپس میدانهای مغناطیسی حاصل از جریانهای بسته را حساب کردیم. این محاسبات به وسیله معادله (۳۷.۱۵) انجام گرفت. از اینجا [و بسا استفاده از معادله (۱۰.۱۵)] می توان نیروی حاصل از یک جریان الکتریکی را روی جریان دیگر یا روی بار متحرک به دست آورد. ولی تاکنون هیچگونه رابطه ای در مورد برهم کنش بین دو بار در حال حرکت بیان نکرده ایم. یکی از دلایل این تغییر روش این است که برهم کنشهای گرانشی و الکتریکی که در فصلهای ۱۳ و ۱۴ مورد بحث قرار گرفتند، منحصرأ به فاصله بین دو ذره برهم کنش کننده بستگی دارند، به گفته دیگر، نیروها ایستا هستند. ذره ساکن می تواند برهم کنش را احساس کند، و در نتیجه وضع فیزیکی را می توان در شرایط ایستا یا مستقل از زمان مورد بررسی قرارداد. ولی، برهم کنش مغناطیسی به حرکت ذرات برهم کنش کننده بستگی دارد، به گفته دیگر، این برهم کنش يك نیروی وابسته به سرعت است. در يك نقطه معلوم، میدان مغناطیسی ذره متحرك نسبت به ناظر، به سرعت ذره و همچنین به فاصله بین ناظر و ذره بستگی دارد. ولی فاصله تغییر می کند زیرا ذره جسا بجا می شود، بنا بر این میدان مغناطیسی (همچنین میدان الکتریکی) در يك نقطه، بسا زمان تغییر می کند، یعنی برای ناظر، میدان مغناطیسی ذره در حال حرکت وابسته به زمان است.

بنا بر این عنصر جدیدی در تصویر فیزیکی وارد می شود و آن سرعت انتشار برهم کنش است. يك راه ممکن این است که بپذیریم بارها از راه دور برهم کنش می کنند. یعنی اگر

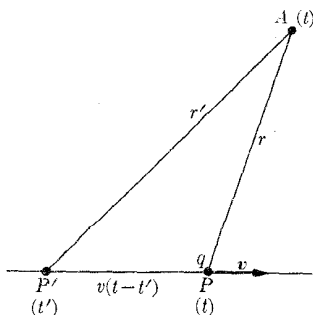
بار الکتریکی q (شکل ۴۷.۱۵) با سرعت v حرکت کند، میدان الکترومغناطیسی ناشی از بار q در نقطه A در لحظه t نتیجه وضع فیزیکی است که در همان لحظه t در نقطه P وجود دارد. به گفته دیگر، می توان فرض کرد که برهم کنش به طور آنی یا با سرعت بینهایت انتشار می یابد.

ولی فرض قابل قبول دیگر این است که برهم کنش مغناطیسی نتیجه تبادل بعضی «علامت» بین ذرات برهم کنش کننده است. این «علامتها» با سرعت محدود c منتشر می شوند. بنا بر این برای رسیدن به نقطه ای خاص از فضا به زمان معینی نیاز دارند. اگر بار در حال سکون باشد سرعت محدود انتشار «علامت» بی اهمیت خواهد بود، زیرا شرایط فیزیکی نسبت به زمان تغییر نمی کنند. ولی برای بار در حال حرکت، وضع فرق می کند و میدان مشاهده شده در نقطه A در لحظه t با مکان همزمان ذره در نقطه P متناظر نیست، بلکه با یک مکان قبلی یا پس افتاده مانند P' در لحظه t' متناظر است، به گونه ای که $t - t' = \frac{PP'}{c}$ برای علامت است تا با سرعت c از نقطه P' به نقطه A برود. بدیهی است که

$$PP' = v(t - t')$$

است.

بنا به آنچه در فصل ۱۹ مورد بحث قرار خواهد گرفت و نیز چنانکه در فرصتهای مکرر اشاره کرده ایم، برهم کنشهای مغناطیسی با سرعت محدود c انتشار می یابند، که با رابطه (۵۵.۱۵) داده می شود. بدین طریق کنش از فاصله دور حذف می شود و لازم است تحلیل میدان مغناطیسی حاصل از بار در حال حرکت با فرضیه دوم انجام پذیرد. چون مقدار c فوق العاده بزرگ است، اثر پس افتادگی ناچیز است، مگر اینکه ذرات با سرعتهای خیلی زیاد حرکت کنند. بدین سبب در بحث حرکت بارها در فصل ۱۴ این پس افتادگی را به حساب نیاوردیم. فرض کردیم بارها خیلی به کندی حرکت می کنند. در این صورت PP' در مقایسه با PA بسیار کوچک است. در برهم کنشهای گرانشی بین دو جرم متحرک نسبت به هم نیز همین اثرهای پس افتادگی باید وجود داشته باشند. ولی سرعت انتشار علامت



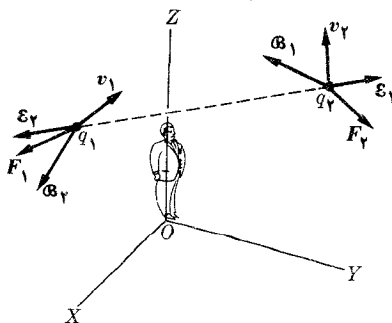
شکل ۴۷.۱۵ اثر پس افتادگی ناشی از سرعت محدود انتشار میدان الکترومغناطیسی

گرانشی هنوز تعیین نشده است.

در رابطه (۳۵.۱۵) نیز اثرهای پس افتادگی منظور نشده است، زیرا مدار الکتریکی بسته، میدان مغناطیسی پایا یا مستقل از زمان تولید می کند. دلیل این امر آن است که جریان الکتریکی ثابت جریانی از ذره های باردار است و اگر این بارها در فاصله های مساوی از یکدیگر قرار گرفته باشند و با سرعت یکسانی حرکت کنند، وضع فیزیکی مشاهده شده مستقل از زمان خواهد بود. از طرف دیگر، می توان تحقیق کرد که در رابطه های نسبیتهای (۵۸.۱۵) و (۶۰.۱۵) برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بار در حال حرکت، اثر پس افتادگی منظور شده است.

اکنون دوبار الکتریکی q_1 و q_2 را که با سرعتهای v_1 و v_2 نسبت به ناظر لخت O حرکت می کنند (شکل ۴۸.۱۵) در نظر می گیریم. نیروی وارد از طرف q_1 بر q_2 به گونه ای که ناظر O اندازه می گیرد، برابر است با $\mathbf{F}_2 = q_2(\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1)$ در این رابطه \mathbf{E}_1 و \mathbf{B}_1 میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ناشی از q_1 اند که ناظر O ، در مکان اشغال شده به وسیله بار q_2 اندازه می گیرد. از طرف دیگر، نیروی وارد از طرف بار q_2 بر q_1 ، آن طور که O اندازه می گیرد، برابر است با $\mathbf{F}_1 = q_1(\mathbf{E}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_2)$. اکنون قسمتهای مغناطیسی \mathbf{F}_2 و \mathbf{F}_1 را با هم مقایسه می کنیم. جمله $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1$ بر صفحه \mathbf{v}_2 و \mathbf{B}_1 عمود است، در صورتی که $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_2$ بر صفحه \mathbf{v}_1 و \mathbf{B}_2 عمود است. بنا بر این در حالت کلی این دو جمله بزرگی و راستای متفاوتی دارند. بنا به معادله (۶۴.۱۵) قسمتهای الکتریکی \mathbf{F}_2 و \mathbf{F}_1 نیز دارای بزرگیهای مختلف اند و اگر بارها شتاب داشته باشند، راستای آنها نیز متفاوت خواهد بود. بنا بر این نتیجه می گیریم که

نیروهای بین دوبار در حال حرکت نه دارای بزرگیهای برابرند، نه در سوی مخالف هم.



شکل ۴۸.۱۵ برهم کنش الکتر و مغناطیسی بین دوبار الکتریکی در حال حرکت.

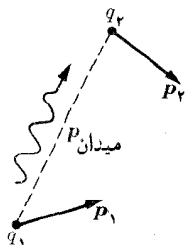
به گفتهٔ دیگر، به نظر می‌رسد در حضور برهم کنشهای مغناطیسی، قانون کنش و واکنش برقرار نیست. این امر به نوبهٔ خود به این معنی است که اصلهای بقای اندازه حرکت، اندازه حرکت زاویه‌ای و انرژی در مورد دستگاه دو ذرهٔ باردار در حال حرکت اعتبار خود را از دست می‌دهند. دلیل برقرار نبودن ظاهری این قوانین مهم از این قرار است؛ در فصل ۷، هنگامی که اصل بقای اندازه حرکت را به صورت $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{const}$ می‌نوشتیم، فرض کردیم که \mathbf{p}_1 و \mathbf{p}_2 به وسیلهٔ ناظر O به طور همزمان، یعنی در یک زمان نسبت به ناظر O ، اندازه‌گیری می‌شوند. ولی در حضور برهم کنشی که با سرعت محدودی انتشار می‌یابد، اثر پس‌افتادگی ایجاب می‌کند که آهنگ تغییر اندازه حرکت یک ذره در یک زمان معلوم مربوط به تغییر اندازه حرکت ذرهٔ دیگر در همان زمان نباشد، بلکه به زمانی در گذشته مربوط باشد، و برعکس. در نتیجه هرگاه \mathbf{p}_1 و \mathbf{p}_2 همزمان اندازه‌گیری نشده باشند نباید انتظار داشت که $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ ثابت باشد.

دانشجو از بخش ۴.۷ به یاد دارد که می‌توان نتیجهٔ یک برهم کنش را به صورت تبادل اندازه حرکت بین دو ذره توصیف کرد. برای برقراری مجدد اصل بقای اندازه حرکت باید اندازه حرکتی را که بین دو ذره مبادله شده است منظور کنیم، اندازه حرکتی که در یک لحظهٔ داده شده با سرعت محدودی بین دو ذره جابجا می‌شود. یعنی باید اندازه حرکت «پرواز» را منظور کنیم. می‌گوییم میدان الکترومغناطیسی این اندازه حرکت را با خود حمل می‌کند و آن را با میدان \mathbf{p} مشخص می‌کنیم (شکل ۴۹.۱۵). در این صورت اصل بقای اندازه حرکت به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_{\text{میدان}} = \text{const} \quad (۴۹.۱۵)$$

همچنین، برای برقراری مجدد اصل بقای اندازه حرکت زاویه‌ای و اصل بقای انرژی، باید اندازه حرکت زاویه‌ای و انرژی مشخصی را به میدان الکترومغناطیسی نسبت دهیم. چگونگی به دست آوردن اندازه حرکت، اندازه حرکت زاویه‌ای و انرژی وابسته به میدان الکترومغناطیسی را به فصل ۱۹ موکول می‌کنیم.

دانشجو به یاد دارد که در بخش ۷.۷ هنگام نقد مفهوم نیرو، اشاره کردیم که معادلهٔ (۵.۷) را باید تنها به عنوان تعریف مقدماتی در نظر گرفت که با توجه به ساز و کارهای برهم کنش باید مورد بررسی مجدد قرار گیرد. اینک آن تجدیدنظر در معادلهٔ (۴۹.۱۵)



شکل ۴۹.۱۵

دخالت داده شده است. بدین دلیل تعریف نیرو در درجهٔ دوم اهمیت قرار می‌گیرد و باید فنون ویژه‌ای جهت تحلیل حرکت دو ذره در حال برهم‌کنش ارائه شود.

مثال ۱۶.۱۵ برهم‌کنش مغناطیسی بین دو بار را با برهم‌کنش الکتریکی بین آنها مقایسه کنید.

حل: چون تنها مرتبهٔ بزرگی مورد نظر ماست، نوشتن فرمولها را ساده‌تر می‌کنیم. در این صورت اگر دو بار الکتریکی q و q' را داشته باشیم می‌توان گفت نیروی الکتریکی حاصل از بار q' روی بار q برابر است با qE ، و میدان مغناطیسی حاصل از q' در q ، اگر معادلهٔ (۵۴.۱۵) را به کار ببریم، از مرتبهٔ بزرگی $v'E/c^2$ است. مرتبهٔ بزرگی نیروی مغناطیسی روی بار q ، با به کار بردن معادلهٔ (۱۰.۱۵)، برابری $qv(v'E/c^2) = qE(vv'/c^2)$ است. بنا بر این

$$\frac{\text{نیروی مغناطیسی}}{\text{نیروی الکتریکی}} \approx \frac{vv'}{c^2}$$

بدین طریق، اگر سرعت بارهای الکتریکی نسبت به سرعت c کوچک باشد، نیروی مغناطیسی در مقابل نیروی الکتریکی ناچیز است و در بیشتر موارد می‌توان آن را نادیده گرفت. بنا بر این می‌توان گفت که مغناطیس، به لحاظی، نتیجهٔ سرعت محدود انتشار برهم‌کنش‌های الکترومغناطیسی است. به‌عنوان مثال، اگر سرعت حرکت بارها از مرتبهٔ 10^6ms^{-1} باشد، که مربوط به سرعت مداری الکترون‌ها در اتم است، داریم

$$\frac{\text{نیروی مغناطیسی}}{\text{نیروی الکتریکی}} \approx 10^{-4}$$

علی‌رغم مقدار خیلی کم نیروی مغناطیسی در مقابل نیروی الکتریکی، نیروی مغناطیسی به دلیل زیر در موتورها و بسیاری از وسایل فنی دیگر به کار می‌رود. مواد به‌طور طبیعی از نظر الکتریکی خنثی‌اند و نیروی الکتریکی برابند بین دو جسم برابر صفر است. به‌عنوان مثال، وقتی که دو سیم در کنار یکدیگر قرار گیرند، نیروی الکتریکی بین آنها برابر صفر است. اگر دو سیم را با هم حرکت دهیم بارهای مثبت و منفی در یک راستا جابجا می‌شوند، به گونه‌ای که جریان خالص و همچنین میدان مغناطیسی خالص برابر صفر است. در نتیجه بین دو سیم نیرویی وجود ندارد. ولی اگر اختلاف پتانسیلی بین سیمها برقرار شود (که موجب می‌شود بارهای الکتریکی منفی نسبت به بارهای مثبت حرکت کنند) در هر سیم جریانی به وجود می‌آید، و یک میدان مغناطیسی از آن نتیجه می‌شود. چون تعداد الکترونهای آزاد در یک رسانا خیلی زیاد است، اثر اجتماع آنها، حتی اگر سرعت آنها کوچک باشد، میدان مغناطیسی بزرگی تولید می‌کند؛ در نتیجه نیروی مغناطیسی قابل ملاحظه‌ای بین سیمها ایجاد می‌شود.

هر چند نیروی مغناطیسی در مقایسه با نیروی الکتریکی کوچک است، ولی در مقابل

برهم کنش گرانشی بسیار بزرگ است. اگر به بحث بخش ۶.۱۴ برگردیم، می توان گفت که

$$\frac{\text{برهم کنش مغناطیسی}}{\text{برهم کنش گرانشی}} = 10^{36} \frac{v^2}{c^2}$$

برای سرعت هایی که با سرعت الکترونها در مدارهای اتمی قابل مقایسه اند این نسبت در حدود ۱۰۳۲ است.

فهرست منابع

1. «Radiation Belts Around the Earth,» J. Van Allen; *Sci. Am.*, March 1959, page 39
2. «Radiation Belts,» B. O'Brien. *Sci Am.*, May 1963, page 84
3. «The Mass Spectrometer,» A. Nier; *Sci. Am.*, March 1953, page 68
4. «200 Man-Years of Life: The Story of E. O. Lawrence,» D. Wilkes: *The Physics Teacher* 3. 247 (1965)
5. «Particle Accelerators,» R. Wilson; *Sci. Am.*, March 1958 page 64
6. «Early History of the Cyclotron,» M. S. Livingston and A. E. McMillan: *Physics Today*, October 1959, page 18
7. «Strong Magnetic Fields,» H. Furth, *et al*; *Sci. Am.*, February 1958, page 28
8. «The Magnetism of the Sun,» H. Babcock; *Sci. Am.*, February 1960 page 52
9. «Magnetic Monopoles,» R. Ford; *Sci. Am.*, December 1963 page 122
10. «Resource Letter FC-1 on the Evolution of the Electromagnetic Field Concept.» W. Scott: *Am. J. Phys.* 31, 819 (1963)
11. *The Discovery of the Electron*, D. Anderson. Princeton, N. J., Van Nostrand, Momentum Books, 1964
12. *Great Experiments in Physics*, Morris Shamos (editor). New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1959; Chapter 5, Coulomb, Chapter 9, Oersted
13. *The Feynman Lectures on Physics*, volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapter 34. Volume II, Chapters 1. 13, 26, 27, and 29

14. *Source Book in Physics*, W. F. Magie, Cambridge, Mass.. Harvard University Press, 1963; page 387 Gilbert, page 408, Coulomb; page 436, Oersted; page 541, Hall
15. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1958, Sections 28.4 through 28.7

۱۶. ریتمس، جی. آر. [و] اف. جی. میلفورد، اصول تئودی الکترومغناطیس، ترجمه جلال صمیمی [و] ناصر عزیززاده قمصری، ج ۱، ۲، مشهد، مؤسسه چاپ و انتشارات دانشگاه مشهد، ۱۳۵۹، چ ۲. (ویرایش دوم انگلیسی این کتاب در مرکز نشر دانشگاهی در دست ترجمه است.)

مسئله‌ها

۱۰۱۵ الکترونیهای با سرعت 10^6 m s^{-1} وارد ناحیه‌ای می‌شوند که در آنجا میدان مغناطیسی وجود دارد. اگر هر الکترون مسیری به شعاع 0.10 m پیمایند شدت میدان مغناطیسی را پیدا کنید. سرعت زاویه‌ای الکترونها را نیز حساب کنید.

۲۰۱۵ پروتونهایی که در آغاز ساکن اند در اختلاف پتانسیل 10^6 V شتاب می‌گیرند. سپس این پروتونها به ناحیه‌ای پرتاب می‌شوند که در آن میدان مغناطیسی یکنواخت 2 T وجود دارد. مسیر پرتاب بر میدان عمود است. شعاع مسیر و سرعت زاویه‌ای پروتونها چقدر است؟

۳۰۱۵ پروتونی در یک میدان مغناطیسی با زاویه 30° نسبت به راستای میدان حرکت می‌کند. سرعت پروتون 10^7 m s^{-1} و شدت میدان مغناطیسی 1.5 T است. (الف) شعاع مسیر مارپیچی را، (ب) مقدار پیشروی در یک دور یا گام مارپیچ را، (ج) بسامد چرخش در میدان را حساب کنید.

۴۰۱۵ دوترونی (ایزوتوپ هیدروژن که جرم اتمی آن خیلی نزدیک به 2 amu است) در میدان مغناطیسی 1.5 T یک مسیر دایره‌ای به شعاع 1.4 cm می‌پیماید. (الف) سرعت دوترون را حساب کنید. (ب) زمان لازم برای انجام یک نیم دور را تعیین کنید. (ج) با چه اختلاف پتانسیلی باید به دوترون شتاب داد تا سرعت آن به سرعت حساب شده در قسمت (الف) برسد؟

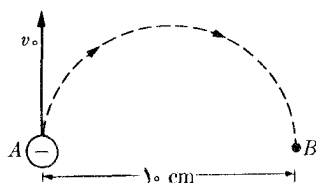
۵۰۱۵ پروتونی با انرژی جنبشی (الف) 3.0 MeV ، (ب) 3.0 GeV ، به طور عرضی در میدان مغناطیسی 1.5 T حرکت می‌کند. در هر حالت شعاع مسیر و دوره گردش آن را تعیین کنید. توجه داشته باشید که مسئله را در قسمت (الف) می‌توان به طور کلاسیک مورد مطالعه قرار داد، ولی در قسمت (ب) باید آن را به طور نسبیتی بررسی کرد.

۶۰۱۵ چه میدانی لازم است تا پروتونی با انرژی 3.0 GeV را وادار کند که مسیری به

شعاع 100m را بی‌مایند؟ سرعت زاویه‌ای آن را نیز حساب کنید. توجه داشته باشید که محاسبه باید به‌طور نسبیستی انجام شود.

${}^7\text{Li}$ یکبار یونیده برابر $10^{-26} \times 1.16$ است. این یون را در اختلاف پتانسیل 500V شتاب می‌دهند و سپس به‌طور عمودی وارد میدان مغناطیسی 4T می‌کنند. شعاع مسیر در میدان مغناطیسی چقدر است؟

80.15 در شکل 50.15 الکترونی در نقطه A دارای سرعتی برابر با 10^7ms^{-1} است. حساب کنید (الف) شدت و سوی میدان مغناطیسی که الکترون را وادار می‌کند تا مسیر نیم‌دایره A تا B را بی‌ماید. (ب) زمانی را که الکترون برای رفتن از A تا B صرف می‌کند.

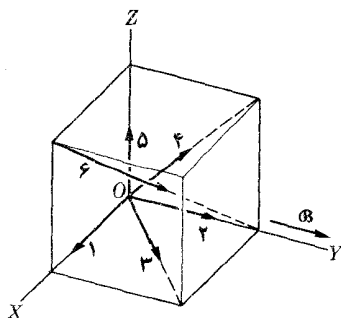


شکل ۵۰.۱۵

9.15 یکی از روش‌های جداسازی ایزوتوپ‌های ${}^{238}\text{U}$ و ${}^{235}\text{U}$ بر پایه اختلاف شعاع مسیر آنها در میدان مغناطیسی، استوار است. فرض کنید تنها اتم‌های یکبار یونیده U از چشمه خارج می‌شوند و در راستای عمود بر یک میدان مغناطیسی یکنواخت حرکت می‌کنند. در صورتی که شعاع انحنای باریکه‌های یونهای ${}^{238}\text{U}$ در میدان مغناطیسی 1.5T ، برابر 5m باشد، حداکثر فاصله باریکه‌های یونهای اورانیوم را پیدا کنید اگر (الف) انرژی‌ها یکسان باشند، (ب) سرعتها یکسان باشند. شاخص عددی در بالا و سمت چپ نماد شیمیایی عدد جرمی را نشان می‌دهد که می‌توانید در اینجا آن را جرم اتمی بر حسب amu فرض کنید.

10.15 یک نوار نازک مسی به پهنای 1.5cm و ضخامت 1.25mm در یک میدان مغناطیسی به شدت 1.75T و عمود بر میدان قرار دارد. جریانی به شدت 100A در طول نوار می‌گذرد (الف) میدان الکتریکی عرضی ناشی از اثر هال را پیدا کنید. (ب) سرعت الکترونها چقدر است؟ نیروی عرضی وارد بر الکترونها را به دست آورید. فرض کنید هر اتم مس یک الکترون به اشتراک می‌گذارد.

11.15 مطابق شکل 51.15 ، میدان مغناطیسی یکنواخت B در راستای محور OY برقرار است. بزرگی و سوی نیروی وارد بر بار q را که با سرعت لحظه‌ای v در هریک از راستاهای نشان داده شده در شکل (یا لها و قطرهای مکعب) حرکت می‌کند به دست آورید.



شکل ۵۱-۱۵

۱۲-۱۵ ذره‌ای به جرم m و بار الکتریکی q با سرعت v در راستای عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی حرکت می‌کند. مؤلفه‌های سرعت و مختصات ذره را نسبت به مرکز مسیر به صورت توابعی از زمان بنویسید. مسئله را برای ذره‌ای که سرعتش با راستای میدان زاویه α می‌سازد از نو حل کنید.

۱۳-۱۵ ذره‌ای حامل $2 \times 10^{-9} \text{C}$ بار است. هنگامی که این ذره با سرعت v_1 به بزرگی $3 \times 10^4 \text{ms}^{-1}$ در صفحه YZ با زاویه 45° بالای محور Y حرکت می‌کند، میدان مغناطیسی یکنواختی نیروی F_1 را در راستای محور X بر آن وارد می‌کند. هنگامی که ذره روی محور X با سرعت v_2 به بزرگی $2 \times 10^4 \text{ms}^{-1}$ حرکت می‌کند، نیروی F_2 به بزرگی $2 \times 10^{-5} \text{N}$ در راستای محور Y بر آن وارد می‌شود. بزرگی و سوی میدان مغناطیسی چقدر است؟ (به شکل ۵۱-۱۵ رجوع کنید.)

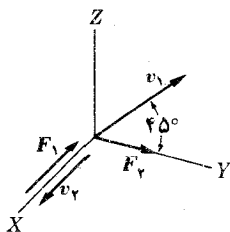
۱۴-۱۵ ذرات باردار را به ناحیه‌ای که در آنجا یک میدان مغناطیسی و یک میدان الکتریکی عمود برهم وجود دارد پرتاب می‌کنند. سرعت ذرات فردی بر صفحه دو میدان عمود است. شدت میدان مغناطیسی برابر است با 1T و میدان الکتریکی، میدانی است که بین دو صفحه موازی حامل بارهای برابر و لسی با علامت مخالف و به فاصله 2cm از یکدیگر تولید می‌شود. هنگامی که اختلاف پتانسیل بین دو صفحه 300V باشد ذرات منحرف نمی‌شوند، سرعت آنها چقدر است؟

۱۵-۱۵ (الف) باریکه‌ای از الکترون‌ها تحت تأثیر همزمان یک میدان الکتریکی به شدت $3.4 \times 10^5 \text{Vm}^{-1}$ و یک میدان مغناطیسی به شدت $2 \times 10^{-2} \text{T}$ قرار دارد. این دو میدان بر یکدیگر و بر باریکه عمودند. چنانچه الکترون‌ها از مسیر خود منحرف نشوند، سرعت آنها چقدر است؟ (ب) با نموداری سمگتگرهای v ، E و B را نشان دهید. (ج) اگر میدان الکتریکی حذف شود شعاع مسیر حرکت الکترون‌ها چقدر می‌شود؟

۱۶-۱۵ ذره‌ای به جرم $5 \times 10^{-4} \text{kg}$ حامل $2.5 \times 10^{-8} \text{C}$ بار الکتریکی است. به

ذره سرعت آغازینی برابر با $6 \times 10^4 \text{ms}^{-1}$ داده می‌شود. شدت وسوی میدان مغناطیسی کمینه‌ای که با خنثی کردن اثر نیروی گرانشی زمین، حرکت ذره را در مسیر افقی نگه خواهد داشت چقدر است؟

۱۷-۱۵ در یک بیناب‌نگار جرم، مانند شکل ۱۲-۱۵، اختلاف پتانسیل 1000V ، یون یک بار یونیده ^{24}Mg را وادار به پیمودن مدار به شعاع R می‌کند. (الف) اگر یونهای ^{25}Mg نیز با همین اختلاف پتانسیل شتاب داده شوند شعاع مسیر آنها چقدر می‌شود؟ (ب) چه اختلاف پتانسیلی یونهای ^{25}Mg را وادار به پیمودن مسیری به همان شعاع R می‌کند؟ (به جای جرم اتمی بر حسب amu ، از شاخصهایی که در سمت چپ نماد شیمیایی در بالا نوشته شده است استفاده کنید.)

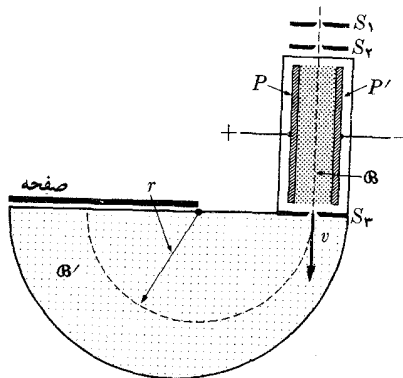


شکل ۱۲-۱۵

۱۸-۱۵ یک بیناب‌نگار جرم دارای پتانسیل شتاب‌دهنده 5KeV و میدان مغناطیسی 10^{-2}T است. فاصله بین دو ایزوتوپ Zn ، یعنی ^{68}Zn و ^{70}Zn را پیدا کنید. منظور از فاصله، فاصله بین دو لکه‌ای است که یونهای یکبار یونیده ^{68}Zn و ^{70}Zn پس از شتاب گرفتن و پیمودن نیم‌دایره روی صفحه عکاسی به جا می‌گذارند. به شکل ۱۲-۱۵ مراجعه کنید. [داهنمایی: دوشعاع را پیدا نکنید، بلکه معادله‌ای بنویسید که مستقیماً فاصله را به دست می‌دهد.] (ب) سرعت یونها را حساب کنید. ببینید آیا لازم است تصحیح نسبیتی صورت گیرد؟

۱۹-۱۵ در بیناب‌نگار جرم دمپستر، که در شکل ۱۲-۱۵ نمایش داده شده است، برای جدا کردن یونهای با جرمهای متفاوت ولی با انرژیهای یکسان، از میدان مغناطیسی استفاده می‌شود. وسیله دیگر، بیناب‌نگار جرم بن‌بریج (شکل ۱۲-۱۵) است که یونهای با سرعت یکسان را از یکدیگر جدا می‌کند. یونها پس از عبور از داخل شکافها، از یک سرعتگزین که از میدان الکتریکی حاصل از صفحه‌های باردار P و P' و میدان مغناطیسی B عمود بر میدان الکتریکی تشکیل شده است می‌گذرند. ذراتی که بدون انحراف عبور می‌کنند به ناحیه‌ای وارد می‌شوند که در آنجا میدان مغناطیسی دیگر (B') وجود دارد و بر اثر این

میدان مسیر دایره‌ای پیدا می‌کنند. ورود یونها روی صفحه عکاسی ثبت می‌شود. ثابت کنید که $q/m = E/2rBB'$ است.

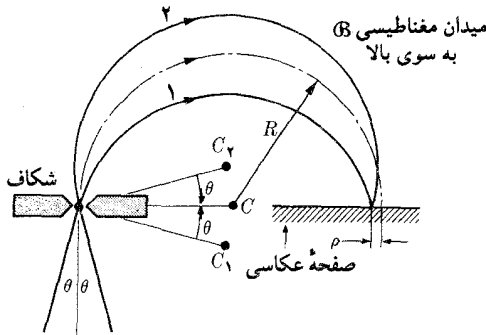


شکل ۵۳.۱۵

۲۰.۱۵ میدان الکتریکی بین صفحه‌های سرعت‌گزین در بیناب‌نگار جسم بن بریج برابر با $1.05 \times 10^5 \text{ Vm}^{-1}$ و دو میدان مغناطیسی یکسان و برابرند با 0.05 T . جریانی از یونهای یکبار یونیده نئون مسیری دایره‌ای به شعاع 7.28 cm در میدان مغناطیسی مسی پیمایند. جرم ایزوتوپ نئون را تعیین کنید.

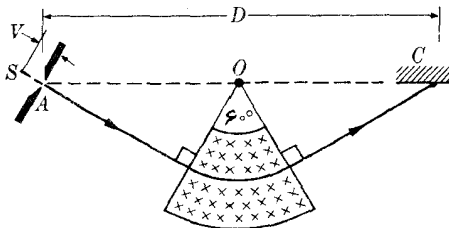
۲۱.۱۵ فرض کنید میدان الکتریکی بین صفحات P و P' در شکل ۵۳.۱۵ برابر با $1.04 \times 10^4 \text{ Vm}^{-1}$ و دو میدان مغناطیسی یکسان و برابرند با 0.05 T . اگر چشمه دارای سه ایزوتوپ منیزیم ^{24}Mg ، ^{25}Mg ، و ^{26}Mg و یونها تک بار باشند، فاصله بین خطوطی راکه این سه یون روی صفحه عکاسی به وجود می‌آورند پیدا کنید. به جای جرم اتمی بر حسب amu از عدد جرمی ایزوتوپها که در سمت چپ و بالای نماد شیمیایی نوشته شده است استفاده کنید.

۲۲.۱۵ در یک بیناب‌نگار جرم، مانند شکل ۵۴.۱۵، خیلی دشوار است که بپذیریم تمام ذرات در راستای عمود بر سطح شکاف می‌رسند. اگر شعاع مسیر ذره R باشد، نشان دهید ذراتی که تحت زاویه کوچک θ نسبت به عمود بر سطح، به شکاف می‌رسند، روی صفحه عکاسی در فاصله ρ تقریباً با $R\theta^2$ برابر است) از ذراتی که به طور عمودی به شکاف می‌رسند قرار می‌گیرند. مقدار θ چقدر باید باشد تا ρ کوچکتر از $0.02R$ باشد (وضعیتی که در این مسئله بیان شد، کانونی شدن مغناطیسی خوانده می‌شود).



شکل ۵۴.۱۵

۲۳.۱۵ در بیناب‌نگار جرم شکل ۵۵.۱۵ یونهای بی که توسط اختلاف پتانسیل بین S و A شتاب گرفته‌اند، وارد میدان مغناطیسی می‌شوند که یک قطاع 60° را می‌پوشاند و به سوی صفحه عکاسی منحرف می‌شوند. ثابت کنید که $q/m = 32V/B^2D^2$ است. در مورد تغییر مکان C بر اثر یک انحراف جزئی در راستای فرودی بحث کنید.



شکل ۵۵.۱۵

۲۴.۱۵ در سیکلوترونی پروتون‌ها درست قبل از رها شدن دایره‌ای به شعاع 0.40 m را می‌بینایند. بسامد پتانسیل متناوب اعمال شده بین دی‌ها برابر 10^7 Hz است. با نادیده گرفتن اثرهای نسبیتی (الف) میدان مغناطیسی، (ب) سرعت پروتون‌ها، (ج) انرژی پروتون‌ها را بر حسب MeV و حساب کنید. هر گاه بیشینه پتانسیل بین دی‌ها 20000 V باشد، حداقل دورهای کاملی که پروتون‌ها می‌زنند چقدر است؟

۲۵.۱۵ مسئله پیش را در مورد دوترون و ذره آلفا (هسته هلیوم) بترتیب به جرمهای برابر 4003 amu و 2014 amu حل کنید.

۲۶۰۱۵ میدان مغناطیسی يك سيكلوترون که جهت شتاب دادن به پروتونها به کار می رود برابر $1.5T$ است. (الف) پتانسیل بین دیها در يك ثانیه چندبار باید تغییر علامت بدهد؟ (ب) شعاع بیشینه سيكلوترون برابر $3.5m$ است. بیشینه سرعت پروتون چقدر است؟ (ج) با چه اختلاف پتانسیلی يك پروتون بایست شتاب داده شود تا به حداکثر سرعت سيكلوترونی برسد؟

۲۷۰۱۵ در يك سيكلوترون، دوترونها درست قبل از ترك دیها دایره ای به شعاع 32 cm طی می کنند. بسامد و لثاژ متناوب بین دیها برابر 10^7 Hz است. (الف) میدان مغناطیسی، (ب) انرژی و سرعت دوترونها را هنگام خروج پیدا کنید. جرم دوترون برابر است با 2.014 amu .

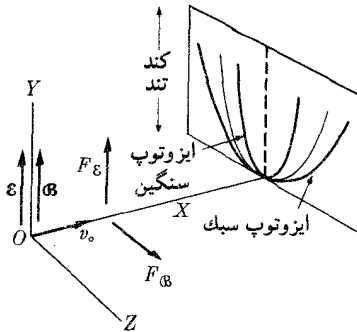
۲۸۰۱۵ يك لامپ پرتوهای کاتودی در میدان مغناطیسی بکنواخت B قرار دارد. محور لامپ موازی خطهای نیرو است. اگر سرعت الکترونهايي که از تفنگ الکترونی خارج می شوند، v باشد و هنگام گذر از مبدأ O با محور زاویه θ بسازند، به گونه ای که مسیر آنها به صورت مارپیچ باشد، ثابت کنید که (الف) در لحظه $t = 2\pi m/Bq$ با محور برخورد می کنند. (ب) طول نقطه برخورد برابر است با $2\pi mv \cos \theta / Bq$ ، (ج) برای زاویه های کوچک θ ، طول نقطه برخورد مستقل از زاویه θ است. (د) دستگاهی که در این مسئله شرح دادیم عدسی مغناطیسی نام دارد. چرا؟ (ه) اختلاف مسیر الکترونهايي که با زاویه θ بالای محور از مبدأ می گذرند با الکترونهايي که با زاویه θ از پایین محور می گذرند چگونه است؟

۲۹۰۱۵ پروتونهايي با انرژی 3 MeV با زاویه معینی به داخل يك میدان مغناطیسی بکنواخت برابر 1 T پرتاب می شوند. این پروتونها در چه فاصله ای محور را قطع می کنند؟

۳۰۰۱۵ ذره ای با بار الکتریکی q و سرعت v (در طول محور X) وارد ناحیه ای می شود که در آنجا میدان مغناطیسی (در راستای محور Y) برقرار است. اگر سرعت v به قدری بزرگ باشد که انحراف راستای آن ناچیز باشد و بتوان نیروی مغناطیسی را ثابت و موازی محور Z در نظر گرفت، ثابت کنید که معادله مسیر ذره عبارت است از $z = (qB/2v \cdot m)x^2$.

۳۱۰۱۵ ذره ای با بار الکتریکی q و سرعت v (در راستای محور X) وارد ناحیه ای می شود که در آنجا میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی، هر دو در امتداد محور Y ، وجود دارد (شکل ۱۵-۵۶). اگر سرعت v به قدری بزرگ باشد که بتوان از تغییر راستا صرف نظر کرد و نیروی مغناطیسی را ثابت و در راستای محور Z در نظر گرفت، (الف) ثابت کنید که مختصات ذره در لحظه t عبارت اند از $x = vt$ ، $y = (qE/m)t^2/2$ و $z = (qv \cdot B/m)t^2/2$. (ب) با حذف کردن t و v بین این معادله ها رابطه $z^2/y = (B^2/E)(q/m)^2 x^2/2$ را به دست آورید. این نتیجه در یکی از اولین بیناب نگارهای جرم به کار می رود. زیرا اگر پرده ای را عمود بر محور X قرار دهیم، تمام ذراتی که نسبت q/m یکسان دارند، با هر سرعت آغازینی پرتاب شده باشند، روی يك سهمی

می‌افتند. بنابراین برای هر ایزوتوپ موجود در باریکه ذرات ورودی يك سهمی وجود خواهد داشت.

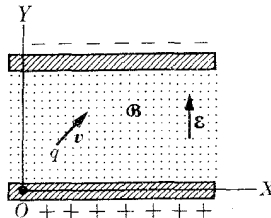


شکل ۵۶-۱۵

۳۲-۱۵ يك ذره با بار الکتریکی q و جرم m بین دو صفحه باردار موازی که به اندازه h از یکدیگر فاصله دارند حرکت می‌کند. میدان مغناطیسی یکنواختی، موازی با صفحات و به سوی بالا برقرار می‌کنیم. ذره در آغاز روی صفحه پایینی در حال سکون است، (شکل ۵۷-۱۵). (الف) معادلات حرکت را بنویسید. (ب) ثابت کنید که در فاصله y از صفحه پایینی، $v_y = (q/m)By$ است. (ج) نشان دهید که بزرگی سرعت عبارت است از $v = \sqrt{2(q/m)Ey}$. (د) با توجه به دو نتیجه بالا ثابت کنید که

$$v_y = (q/m)^{1/2} [2Ey - (q/m)B^2 y^2]^{1/2}$$

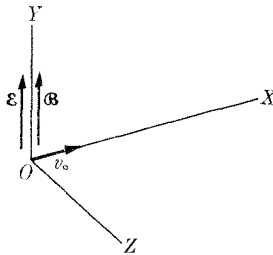
و نیز اگر $E = [(q/m)B^2 h] / 2$ باشد ذره نمی‌تواند به صفحه بالایی برسد.



شکل ۵۷-۱۵

۳۳-۱۵ در ناحیه‌ای که يك میدان الکتریکی و يك میدان مغناطیسی همراستا و همسو برقرارند، ذره‌ای با بار الکتریکی q و جرم m و با سرعت v_0 در راستای عمود بر راستای مشترك میدانها پرتاب می‌شود. (الف) معادلات حرکت را در دستگاه مختصات قایم بنویسید. (ب) با قراردادن مستقیم در معادله‌های حرکت، نشان دهید که در لحظه t مؤلفه‌های سرعت

عبارت‌اند از $v_x = v_0 \cos(qB/m)t$ و $v_y = (qE/m)t$ ، $v_z = \sin(qB/m)t$ (ج) مختصات ذره را در لحظه t به دست آورید. (د) نمودار مسیر حرکت را رسم کنید. (ه) اگر سرعت آغازی ذره به موازات میدانها باشد، حرکت ذره به چه صورتی خواهد بود؟ [داهنمایی: در پاسنهای داده شده، محور X در راستای v_0 و محور Y در راستای مشترک میدانهاست (شکل ۵۸.۱۵)].



شکل ۵۸.۱۵

۳۴.۱۵ در ناحیه‌ای از فضا يك میدان الکتریکی و يك میدان مغناطیسی یکنواخت عمود برهم وجود دارد. ذره‌ای با سرعت v_0 در راستای موازی میدان مغناطیسی پرتاب می‌شود. (الف) معادلات حرکت را در مختصات قایم بنویسید. (ب) با قراردادن مستقیم، ثابت کنید که مؤلفه‌های سرعت در لحظه t عبارت‌اند از $v_x = v_0 \cos(qB/m)t$ ، $v_y = (E/B) \sin(qB/m)t$ و $v_z = -(E/B)[1 - \cos(qB/m)t]$. (ج) از معادله‌های بالا مختصات ذره را در لحظه t به دست آورید. (د) نمودار مسیر حرکت ذره را رسم کنید. [داهنمایی: میدان مغناطیسی در راستای محور X و میدان الکتریکی در راستای محور Y است.]

۳۵.۱۵ مسئله ۳۴.۱۵ را برای ذره‌ای که سرعت آغازی آن موازی با میدان الکتریکی است حل کنید. تحقیق کنید که مؤلفه‌های سرعت عبارت‌اند از

$$v_x = 0$$

$$v_y = v_0 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \left(\frac{E}{B}\right) \sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

$$v_z = -\left(\frac{E}{B}\right) \left[1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right] - v_0 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

۳۶.۱۵ مسئله ۳۴.۱۵ را برای ذره‌ای که سرعت آغازی آن بر هر دو میدان عمود است حل کنید. تحقیق کنید که مؤلفه‌های سرعت عبارت‌اند از

$$v_x = 0$$

$$v_y = \left(\frac{E}{B} + v_o\right) \sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

$$v_x = -\left(\frac{E}{B}\right) + \left(\frac{E}{B} + v_o\right) \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

ثابت کنید برای اینکه ذره بتواند بدون انحراف از میدان بگذرد باید $v_o = -E/B$ باشد. نتیجه به دست آمده را با مطالب بیان شده در بخش ۴۰.۱۵ مقایسه کنید.

۳۷.۱۵ با بازگشت به مسئله ۳۴.۱۵ تحقیق کنید هنگامی که سرعت آغازی در راستای اختیاری باشد، مؤلفه‌های سرعت در لحظه t عبارت اند از

$$v_x = v_{ox}$$

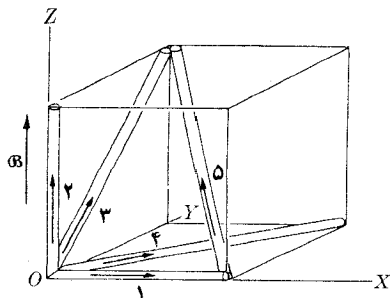
$$v_y = \left(\frac{E}{B} + v_{oy}\right) \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + v_{oy} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

$$v_x = -\frac{E}{B} + \left(\frac{E}{B} + v_{ox}\right) \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - v_{oy} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

از اینجا (با انتگرال گیری) مختصات ذره را نتیجه بگیرید و در مورد مسیر آن بحث کنید. آن را با نتایج مسئله‌های ۳۵.۱۵ و ۳۶.۱۵ مقایسه کنید.

۳۸.۱۵ با بازگشت به مسئله ۳۳.۱۵، (الف) ثابت کنید که اگر $1 \ll (qB/m)t$ باشد، مختصات ذره را می‌توان به صورت $x = v_o t$ ، $y = (qE/2m)t^2$ و $z = (v_o qB/2m)t^2$ بیان کرد، که با مسئله ۳۱.۱۵ توافق دارد.

۳۹.۱۵ چگالی جریان (به فرض یکنواخت بودن آن) لازم را در یک سیم آلومینیومی افقی پیدا کنید که بتواند سیم را در میدان مغناطیسی زمین در استوا «شناور» نگه دارد. چگالی آلومینیوم $27 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ است. فرض کنید میدان زمین در حدود $5 \times 10^{-5} \text{ T}$



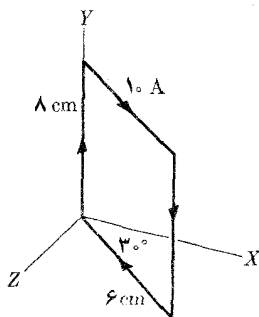
شکل ۵۹.۱۵

است و سیم در راستای شرق - غرب قرار دارد.

۴۰۰۱۵ نیروی وارد بر هر یک از تکه سیمهای نشان داده شده در شکل ۵۹.۱۵ را پیدا کنید. میدان B موازی OZ و برابر T در ۱۵ و شدت جریان $I = ۲A$ است. طول هر یال مکعب m ۱۰۰ است.

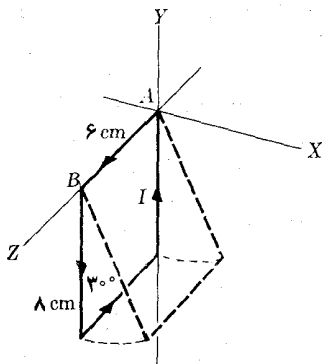
۴۱.۱۵ سطح یک حلقه سیم به شکل مستطیل $۵cm \times ۸cm$ و موازی یک میدان مغناطیسی به شدت T ۱۵ است. (الف) اگر جریانی به شدت A ۱۰ از حلقه بگذرد، چه گشتاور نیرویی روی آن اثر می کند؟ (ب) گشتاور مغناطیسی حلقه چقدر است؟ (ج) حداکثر گشتاور نیرویی که می توان با همین طول سیم و با عبور همین جریان در این میدان مغناطیسی به دست آورد چقدر است؟

۴۲.۱۵ حلقه مستطیلی شکل ۶۰.۱۵ به گونه ای سوار شده است که محور X محور گردش آن را تشکیل می دهد و شدت جریان A ۱۰ در سوی پیکان از آن می گذرد. (الف) اگر حلقه در میدان مغناطیسی یکنواخت T ۲۰ موازی محور X قرار گیرد، نیروی وارد بر هر ضلع آن را بر حسب N و گشتاور نیروی لازم برای نگهداری حلقه در وضع نشان داده شده را بر حسب Nm حساب کنید. (ب) اگر میدان مغناطیسی موازی محور Z باشد قسمت (الف) را پاسخ دهید. (ج) اگر حلقه روی محوری که موازی محور Y است ولی از مرکز آن می گذرد سوار شود چه گشتاور نیرویی لازم است؟



شکل ۶۰.۱۵

۴۳.۱۵ هر سانتی متر از سیم، حلقه شکل ۶۰.۱۵، g ۱۰۰ جرم دارد و حلقه طوری سوار شده است که می تواند بدون مالش به دور ضلع AB بچرخد. از این سیم شدت جریان A ۱۰ در سوی نشان داده شده می گذرد. (الف) اگر یک میدان مغناطیسی موازی با محور Y چرخشی به حلقه بدهد که با صفحه YZ زاویه 30° بسازد، شدت و سوی میدان را حساب کنید. (ب) در مورد حالتی که میدان مغناطیسی موازی محور X است بحث کنید.

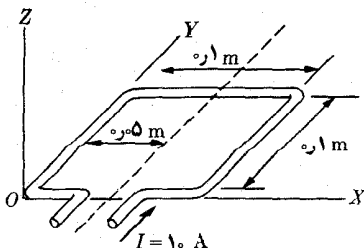


شکل ۶۱-۱۵

۶۱-۱۵ پیچیده‌ای به ابعاد $۱۲\text{cm} \times ۵\text{cm}$ دارای ۶۰۰ حلقه است. هنگامی که پیچیده در داخل میدان مغناطیسی ۰.۱T قرار دارد و جریان $۱۰^{-۵}\text{A}$ از آن می‌گذرد بیشینه گشتاور نیروی وارد بر آن چقدر است؟

۶۵-۱۵ پیچیده‌ی یک گالوانومتر با پیچیده متحرک دارای ۵۰ حلقه و ۶cm^2 مساحت است. در ناحیه‌ای که پیچیده می‌چرخد یک میدان مغناطیسی شعاعی به شدت ۰.۱T وجود دارد. ثابت پیچشی سیم آویز $k = ۱۰^{-۶}\text{N m/deg}$ است. زاویه انحراف پیچیده را برای جریانی به شدت ۱mA پیدا کنید.

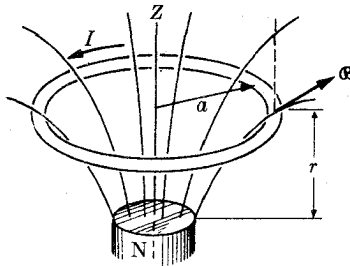
۶۶-۱۵ سیمی به شکل مربع به ضلع ۰.۱m ، مطابق شکل ۶۲-۱۵، در صفحه XY قرار دارد. جریانی به شدت ۱۰A در سوی نشان داده شده از آن می‌گذرد. اگر یک میدان مغناطیسی به شدت $B = ۰.۱x\text{T}$ موازی با محور Z برقرار شود (x بر حسب متر است)، (الف) نیروی برآیند وارد بر حلقه (ب) گشتاور نیروی برآیند را نسبت به نقطه O حساب کنید.



شکل ۶۲-۱۵

۴۷۰۱۵ مسئلهٔ پیش را درحالتی که میدان مغناطیسی در راستای محور X باشد از نو حل کنید.

۴۸۰۱۵ يك حلقهٔ دایره‌ای به شعاع a که شدت جریان I از آن می‌گذرد به گونه‌ای قرار گرفته است که محور Z از مرکز آن می‌گذرد و بر سطح آن عمود است. يك میدان مغناطیسی با تقارن محوری دور محور Z که با محور Z در نقاط روی حلقه زاویهٔ θ می‌سازد تولید می‌کنند (شکل ۶۳.۱۵). (الف) برای هر يك از دوسوی ممکن جریان، بزرگی و سوی نیرو را حساب کنید. (ب) به فرض اینکه حلقه به قدری کوچک باشد که نتوان آن را دو قطبی مغناطیسی در نظر گرفت و میدان مغناطیسی از قانون عکس مجذوری ($B = k/r^2$) پیروی کند، ثابت کنید که نیروی وارد بر مدار برابر است با $F = \pm M (dB/dr)$. در این رابطه M گشتاور دو قطبی مغناطیسی و در راستای محور Z است. این نتیجه کلی است و نشان می‌دهد که اگر دو قطبی درسوی میدان قرار گیرد درسوی افزایش میدان حرکت می‌کند و هنگامی که درسوی مخالف میدان قرار گیرد درسوی کاهش میدان حرکت می‌کند. (این نتیجه را با نتیجهٔ به دست آمده در مورد دو قطبی الکترویکی در بخش ۱۱.۱۴ مقایسه کنید.)



شکل ۶۳.۱۵

۴۹۰۱۵ (الف) سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی الکترون را هنگامی که در يك میدان مغناطیسی به شدت $5T$ دور خودش می‌چرخد حساب کنید. (ب) همین کمیت را برای پروتون در همان میدان مغناطیسی حساب کنید. فرض کنید پروتون با همان اندازه حرکت زاویه‌ای الکترون به دور خود می‌چرخد. (دانه‌نمایی: در اینجا برای γ از مقادیر داده شده در صفحه ۱۳۲ استفاده کنید.)

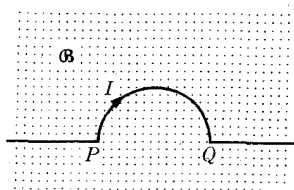
۵۰۰۱۵ گشتاور دو قطبی مغناطیسی الکترون اتم هیدروژن را که در مدار دایره‌ای به شعاع $10^{-10} \text{ m} \times 5.3 \times 10^8$ به دور پروتون می‌گردد حساب کنید. اگر الکترون در يك میدان مغناطیسی به شدت $5T$ که با اندازه حرکت زاویه‌ای مداری آن زاویهٔ 30° می‌سازد قرار گیرد، سرعت زاویه‌ای آن چقدر می‌شود؟

۵۱۰۱۵ دیسکی به شعاع R که بار الکتریکی q به طور یکنواخت در سطح آن توزیع شده است دور محورش می‌چرخد. نسبت ژیرومغناطیسی، γ ، آن را حساب کنید.

۵۲۰۱۵ مسئله ۵۱۰۱۵ را در مورد یک کره باردار با توزیع حجمی یکنواخت از نو حل کنید. [داهنجایی: کره را به دیسکهایی عمود بر محور چرخش تقسیم کنید] از پاسخ این مسئله چه نتیجه‌ای در مورد ساختار الکترون می‌توان گرفت؟

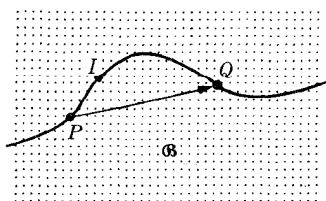
۵۳۰۱۵ گاؤس یکی از یكاهای اندازه‌گیری میدان مغناطیسی است که تا این اواخر به کار می‌رفت. رابطه بین گاؤس و تسلا عبارت است از: گاؤس $10^4 T = 1$. ثابت کنید که هر گاه نیرو را بر حسب دین، بار الکتریکی را بر حسب استاکولن (stC)، میدان مغناطیسی را بر حسب گاؤس و سرعت را بر حسب $cm\ s^{-1}$ اندازه‌گیری کنند، نیروی مغناطیسی از رابطه $F = (1/3) 10^{-10} qv \times B$ به دست می‌آید.

۵۴۰۱۵ نیروی وارد بر بخش دایره‌ای رسانای شکل ۶۴۰۱۵ را هنگامی که جریان I از آن می‌گذرد و سوی میدان به سمت بالاست پیدا کنید. ثابت کنید که اگر رسانای بین P و Q به صورت خط راست هم بود، بزرگی این نیرو تغییر نمی‌کرد.



شکل ۶۴۰۱۵

۵۵۰۱۵ ثابت کنید که نیروی وارد بر بخش PQ از سیم رسانای نشان داده شده در شکل ۶۵۰۱۵، که جریان I از آن می‌گذرد و در میدان مغناطیسی یکنواخت B قرار دارد، برابر است با $I(PQ) \times B$ و بنابراین مستقل از شکل رساناست. این نتیجه را در مورد مسئله پیش نیز به کار ببرید. نتیجه بگیرید که نیروی وارد بر یک جریان بسته که در میدان مغناطیسی یکنواخت قرار گرفته باشد برابر صفر است.



شکل ۶۵۰۱۵

۵۶۰۱۵ پیچهای به شکل مربع به ضلع 6 cm را که جریان ثابت 1 A از آن می گذرد و در میدان مغناطیسی یکنواختی به شدت $T^{-4} 10^4$ قرار گرفته است در نظر بگیرید. (الف) اگر در آغاز سطح پیچه موازی میدان مغناطیسی باشد، آیا گشتاور نیرویی به آن وارد می شود؟ (ب) جواب قسمت (الف) را برای پیچه ای که در آغاز بر میدان مغناطیسی عمود است پیدا کنید. (ج) گشتاور نیرو را بر حسب زاویه ای که عمود بر پیچه با راستای میدان مغناطیسی می سازد بنویسید. منحنی نمایش گشتاور نیرو را هنگامی که زاویه از 0 تا 2π تغییر می کند رسم کنید. (د) اگر پیچه در نقطه ای که گشتاور نیرویی بر آن وارد نمی شود سرعت زاویه ای داشته باشد، چه پیش می آید؟

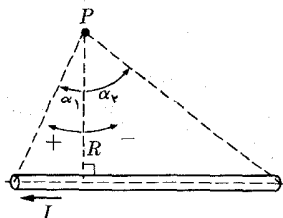
۵۷۰۱۵ اگر وضع همان باشد که در قسمت (د) مسئله پیش گفته شد، ولی سوی جریان آن عوض شود چه اتفاقی می افتد؟ چگونه می توان سوی جریان را آنچنانکه در قسمت اول این مسئله بیان شد عوض کرد؟ این تعویض چه استفاده ای می تواند داشته باشد؟

۵۸۰۱۵ شدت میدان مغناطیسی حاصل از یک سیم بینهایت بلند را که جریانی 1 A از آن می گذرد در فاصله های $m \times 10^{-10} 53 \times 0$ و 1 m حساب کنید. میدان الکتریکی را نیز در همین نقاط به دست آورید.

۵۹۰۱۵ از سیم بلندی جریان 1.5 A می گذرد. الکترونی با سرعت $5 \times 10^{-4} \text{ ms}^{-1}$ در راستای موازی با سیم و به فاصله 1 m از آن و همسو با جریان حرکت می کند. میدان مغناطیسی ناشی از جریان چه نیرویی روی الکترون در حال حرکت وارد می کند؟

۶۰۰۱۵ با به کار بردن معادله (۶۵.۱۵) ثابت کنید که میدان مغناطیسی جریان مستقیم الخط با معادله (۴۱.۱۵) داده می شود.

۶۱۰۱۵ ثابت کنید که میدان مغناطیسی حاصل از جریان مستقیم الخط I به طول محدود، برابر است با $(\mu_0 I / 2\pi R) (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$ ، که در آن R فاصله نقطه از سیم، α_1 و α_2 زاویه هایی اند که خطهای واصل نقطه به دو سر سیم با راستای عمود بر خط جریان می سازند (شکل ۶۶.۱۵). با استفاده از این نتیجه، میدان مغناطیسی را در مرکز مدار به شکل مربع به ضلع L به دست آورید. (به علامت زاویه ها توجه داشته باشید)

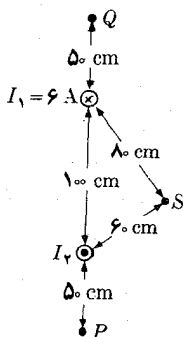


شکل ۶۶.۱۵

۶۲.۱۵ از يك سیم مستقیم که در طول محور Y قرار دارد جریان A ۱۰ می‌گذرد. میدان مغناطیسی $10^{-6}T$ در راستای موازی محور X وجود دارد. میدان مغناطیسی بر ایند در نقاط (الف) $(z = 2m, x = 0)$ ، (ب) $(z = 0, x = 2m)$ و (ج) $(z = -0.5m, x = 0)$ چقدر است؟

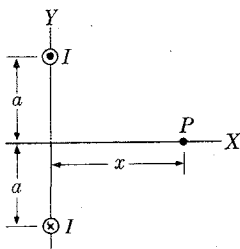
۶۳.۱۵ دو سیم راست و بلند و موازی به فاصله $2a$ از یکدیگر قرار دارند. اگر جریانهای برابر ولی در دو سوی مخالف از سیمها بگذرند، میدان مغناطیسی در صفحه سیمها در نقطه‌ای (الف) واقع در وسط دو سیم، (ب) به فاصله a از یکی و $3a$ از دیگری چقدر است؟ (ج) چنانچه جریانهایی که از دو سیم می‌گذرند برابر و همسو باشند به سمتهای (الف) و (ب) مجدداً پاسخ دهید.

۶۴.۱۵ دو سیم راست و بلند، همچنانکه شکل ۶۷.۱۵ نشان می‌دهد، به فاصله $100cm$ از یکدیگر قرار دارند از سیم بالایی شدت جریان I_1 برابر $6A$ به سمت داخل صفحه شکل می‌گذرد. (الف) شدت و سوی جریان I_2 چقدر باید باشد تا میدان مغناطیسی بر ایند در نقطه P برابر صفر باشد؟ (ب) در این صورت میدان در نقطه Q و (ج) در نقطه S چقدر است؟



شکل ۶۷.۱۵

۶۵.۱۵ شکل ۶۸.۱۵ برشی از دو سیم راست و بلند عمود بر صفحه XY است، که جریان یکسان I در دوسوی مخالف از آنها می‌گذرد. (الف) میدانهای مغناطیسی ناشی از هر سیم و بر ایند آنها را در نقطه P به صورت برداری نشان دهید. (ب) رابطه بزرگی B را در هر نقطه‌ای روی محور X بر حسب طول x بنویسید. (ج) نمودار بزرگی B را بر حسب x رسم کنید. (د) به ازای چه مقداری از x ، B بیشینه است؟ همین کار را برای نقاط محور Y نیز انجام دهید.



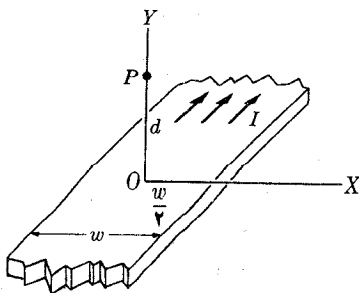
شکل ۶۸.۱۵

۶۶.۱۵ مسئله ۶۵.۱۵ را برای حالتی که دو جریان همسو هستند از نو حل کنید.

۶۷.۱۵ از يك پیچۀ تخت به قطر ۴m ره جریان ۲۵A می گذرد. اگر میدان مغناطیسی در مرکز آن برابر $10^{-4} T \times 10^{27}$ باشد، تعداد حلقه‌های پیچۀ چقدر است؟

۶۸.۱۵ سیمولهای به طول ۳m ره از دو لایه سیم پیچیده شده تشکیل شده است. لایه داخلی دارای ۳۰۰ حلقه ولایه خارجی دارای ۲۵۰ حلقه است. جریان ۳A از دو لایه به طور همسو می گذرد. شدت میدان مغناطیسی در نقطه‌ای واقع در نزدیکی مرکز سیمولها چقدر است؟

۶۹.۱۵ يك نوار رسانای بلند دارای چگالی جریانی یکنواخت j در واحد پهنا است. بنا براین $I = jw$ است، که در آن w عرض نوار است (شکل ۶۹.۱۵) (الف) میدان مغناطیسی را در نقطه P روی عمود منصف نوار و در فاصله d از آن حساب کنید. [دانهمایی: رابطه میدان مربوط به يك نوار بلند و راست به عرض d با میدان مغناطیسی يك سیم راست و بلند یکی است.] (ب) اگر $d \ll w$ باشد، یعنی نوار به يك صفحه بینهایت بزرگ تبدیل شود میدان چقدر می شود؟

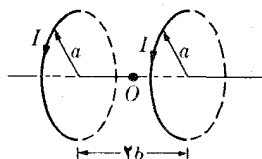


شکل ۶۹.۱۵

۷۰۰۱۵ از دو حلقهٔ رسانای دایره‌ای به شعاع یکسان a که مطابق شکل ۷۰۰۱۵ به فاصلهٔ $2b$ از یکدیگر قرار دارند جریان یکسان I می‌گذرد. (الف) ثابت کنید که میدان مغناطیسی در نقطه‌ای روی محور با رابطهٔ زیر داده می‌شود

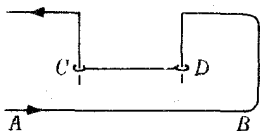
$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{(2b^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)^2} x^2 + \frac{15}{8} \frac{(8b^4 - 12a^2 b^2 + a^4)}{(a^2 + b^2)^4} x^4 + \dots \right]$$

که در آن مبدأ x ها نقطه‌ای از محور است که از دو حلقه به یک اندازه فاصله دارد. (ب) تحقیق کنید که به‌ازای $a = 2b$ ، میدان در مرکز تا حدود توان سوم مستقل از x است. (این وسیله، پیچچه‌های هلمهولتز نامیده می‌شود و در آزمایشگاه‌ها برای تولید میدانهای مغناطیسی یکنواخت در منطقهٔ کوچکی از فضا به‌کار می‌رود). (ج) به‌فرض اینکه شرط (ب) تحقق یافته باشد مقدار x را برحسب a ، که به‌ازای این مقدار x میدان مغناطیسی حدود ۱٪ با میدان مغناطیسی در مرکز اختلاف دارد، به‌دست آورید.



شکل ۷۰۰۱۵

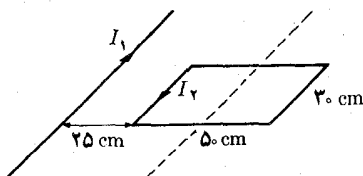
۷۱۰۱۵ سیم بلند افقی AB ، که در شکل ۷۱۰۱۵ نشان داده شده است، روی سطح میزی تکیده‌دارد. CD سیم دیگری است به‌طول یک متر که در صفحهٔ قائم بر سیم اول و موازی با آن قرار دارد و می‌تواند از بالا و پایین روی دو راهنمای فلزی قائم C و D آزادانه بلغزد. دو سیم توسط اتصال‌های لغزنده به‌طور سری به‌هم متصل‌اند و جریان A ۵۰ از آنها می‌گذرد. جرم سیم CD برابر است با $1.0 \times 10^{-2} \text{ kg m}^{-1}$. اگر نیروی وارد بر CD را ناشی از جریانی فرض کنیم که از AB می‌گذرد در چه ارتفاعی CD در حال تعادل است.



شکل ۷۱۰۱۵

۷۲۰۱۵ یک سیم بلند و راست و یک قاب مستطیل شکل روی میزی قرار دارند (شکل

۷۲.۱۵). طول ضلعی از قاب که موازی سیم است برابر 30 cm و ضلع عمود بر سیم برابر 50 cm است. جریانی که از آنها می‌گذرد $I_1 = 10\text{ A}$ و $I_2 = 20\text{ A}$ است. (الف) نیروی وارد بر قاب چقدر است؟ (ب) اگر سیم راست را مانند یک محور در نظر بگیریم گشتاور نیروی وارد بر قاب چقدر است؟ اگر خط چین را به عنوان محور اختیار کنیم گشتاور نیرو چقدر خواهد بود؟ (ج) بعد از اینکه قاب به اندازه 45° دور خط چین چرخید گشتاور نیرو را پیدا کنید.



شکل ۷۲.۱۵

۷۳.۱۵ دو سیم موازی خیلی بلند توسط نخهایی به طول 4 cm از محور مشترکی آویزان شده‌اند. چگالی خطی جرم سیمها یکسان و برابر $5 \times 10^{-2}\text{ kg m}^{-1}$ است و شدت جریان مساوی ولی در دوسوی مخالف از آنها می‌گذرد. اگر نخهای آویزان زاویه 6° با راستای قائم بسازند شدت جریانی که از سیمها می‌گذرد چقدر است؟

۷۴.۱۵ در شکل ۶۸.۱۵ سیم دراز سومی موازی با دو سیم اول از نقطه P می‌گذرد و جریان در هر سیم $I = 20\text{ A}$ است. اگر $a = 0.30\text{ m}$ و $x = 0.04\text{ m}$ باشد، و جریانی که از سیم سوم می‌گذرد در سوی (الف) جلوی صفحه شکل، (ب) پشت صفحه شکل باشد، بزرگی و سوی نیروی وارد بر واحد طول سیم سوم را پیدا کنید.

۷۵.۱۵ ناظر O' نسبت به ناظر O با سرعت v موازی با محور مشترکشان X حرکت می‌کند. دو بار الکتریکی q_1 و q_2 نسبت به ناظر O' روی محور X ساکن‌اند و بنا به اندازه گیری ناظر O' در فاصله r' از یکدیگر قرار گرفته‌اند. نیروی وارد بر هر یک از بارها را به گونه‌ای که ناظرهای O و O' مشاهده می‌کنند پیدا کنید. با فرض اینکه بارها روی محور Y' قرار داشته باشند، مسئله را از نو حل کنید.

۷۶.۱۵ بر اساس معادله (۶۴.۱۵) که میدان الکتریکی بار نقطه‌ای را به دست می‌دهد، نسبت بین میدان الکتریکی در صفحه‌ای که از بار الکتریکی می‌گذرد و بر راستای حرکت عمود است و میدان در راستای حرکت را برای نقاطی که از بار الکتریکی در فاصله‌های یکسان قرار دارند، پیدا کنید. مقادیر v/c را برابر 0.5 ، 0.1 ، 0.05 و 0.01 در نظر بگیرید.

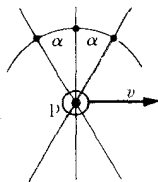
۷۷.۱۵ نسبت بین مقادیر نسبیته و غیرنسبیته میدان الکتریکی حاصل از بار در حال حرکت را در یک نقطه از صفحه‌ای که از بار می‌گذرد و بر راستای حرکت عمود است

ارزیابی کنید. مقدار v/c را برابر ۰،۵، ۰،۵۱، ۰،۵۵ و ۰،۹ در نظر بگیرید.

۷۸.۱۵ نسبت بین مقادیر نسبیتهی و غیر نسبیتهی میدان مغناطیسی حاصل از بار در حال حرکت را در يك نقطه از صفحه‌ای که از بار الکتریکی می‌گذرد و بر راستای حرکت عمود است ارزیابی کنید. مقدار v/c را برابر ۰،۵، ۰،۵۱ و ۰،۹ در نظر بگیرید.

۷۹.۱۵ دو الکترونی را که در دو مسیر مستقیم و موازی به فاصله 1 mm از هم حرکت می‌کنند در نظر بگیرید: (الف) اگر آنها پهلو به پهلو با سرعت یکسان 10^6 ms^{-1} جابجا شوند، نیروهای الکتریکی و مغناطیسی بین آنها را به گونه‌ای که ناظر وابسته به آزمایشگاه مشاهده می‌کند به دست آورید (فرض کنید 10^6 ms^{-1} را می‌توان سرعتی غیر نسبیتهی در نظر گرفت). (ب) ناظری که همراه الکترون حرکت می‌کند چه نیرویی را اندازه می‌گیرد؟ (ج) همین مسئله را در حالتی که سرعت برابر $2.3 \times 10^8\text{ ms}^{-1}$ یعنی نسبیتهی باشد حل کنید.

۸۰.۱۵ پروتونی با انرژی 30 GeV از فاصله 10^{-7} متری يك یون می‌گذرد. پروتون را باید به‌طور نسبیتهی بررسی کرد. (الف) زاویه α را به گونه‌ای پیدا کنید که به ازای آن میدان الکتریکی در محل یون 50% میدانی باشد که پروتون در نزدیکترین فاصله از یون دارد. (ب) طول مدتی که یون متحمل تکان می‌شود و تغییر اندازه حرکت آن را، با فرض اینکه این تغییر اساساً حاصل از میدان مربوط به داخل زاویه α باشد، که در قسمت (الف) به دست آمد، بر آورد کنید. بد جای پروتون، الکترون را با همین انرژی در نظر بگیرید و مسئله را حل کنید. (به شکل ۷۳.۱۵ مراجعه کنید.)



شکل ۷۳.۱۵

۸۱.۱۵ با استفاده از رابطه نسبیتهی (۶۵.۱۵) برای میدان مغناطیسی بار الکتریکی در حال حرکت، رابطه میدان مغناطیسی جریان مستقیم الخط را به دست آورید.

۸۲.۱۵ با بدکار بردن قانون کلی تبدیل نسبیتهی نیرو (مسئله ۲۹.۱۱) تبدیلهای نسبیتهی میدان الکترومغناطیسی را که با معادلات (۵۸.۱۵) و (۶۰.۱۵) داده می‌شوند، به دست آورید.

۸۳.۱۵ با استفاده از معادله‌های (۵۸.۱۵) و (۶۰.۱۵) ثابت کنید که کمیت‌های $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}$ و $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ نسبت به تبدیل لورنتس ناورد هستند.

۸۴.۱۵ ذره‌ای به جرم m و بار الکتریکی q در ناحیه‌ای که میدان الکتریکی \mathbf{E} و میدان مغناطیسی \mathbf{B} برقرار است حرکت می‌کند. اگر حرکت ذره در چارچوب مرجعی که با بسامد لارمور ذره، $\omega_L = -q\mathbf{B}/2m$ (به معادله ۷.۱۵ مراجعه کنید) می‌چرخد، مورد مشاهده قرار گیرد، ثابت کنید که معادله حرکت آن به صورت $m\mathbf{a}' = q[\mathbf{E} + (m/q)\boldsymbol{\omega}_L \times (\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{r})]$ درمی‌آید. مقدار $\boldsymbol{\omega}_L$ را برای الکترون برآورد کنید و تحقیق کنید که جمله آخر قابل اغماض است. با این تقریب، معادله حرکت ذره در چارچوب چرخان عبارت می‌شود از $m\mathbf{a}' = q\mathbf{E}$. مقایسه این نتیجه با نتیجه‌ای که در مثال ۴.۱۵ به دست آوردیم نشان می‌دهد که چگونه می‌توان میدان مغناطیسی را حذف کرد. [دانه‌نمایی: برای بیان سرعت و شتاب ذره در چارچوب چرخان، از فرمولهای بخش ۴.۶ استفاده کنید.]

میدانهای الکترومغناطیسی ایستا

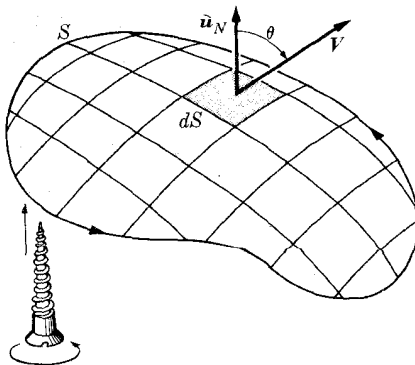
مقدمه	۱۰۱۶
شار میدان برداری	۲۰۱۶
قانون گاوس برای میدان الکتریکی	۳۰۱۶
شکل دیفرانسیلی قانون گاوس	۴۰۱۶
قطبش ماده	۵۰۱۶
جابجایی الکتریکی	۶۰۱۶
محاسبه پذیرفتاری الکتریکی	۷۰۱۶
ظرفیت الکتریکی، خازنها	۸۰۱۶
انرژی میدان الکتریکی	۹۰۱۶
رسانندگی الکتریکی، قانون اهم	۱۰۰۱۶
نیروی محرکه الکتریکی	۱۱۰۱۶
قانون آمپر برای میدان مغناطیسی	۱۲۰۱۶
شکل دیفرانسیلی قانون آمپر	۱۳۰۱۶
شار مغناطیسی	۱۴۰۱۶
مغناطش ماده	۱۵۰۱۶
میدان مغناطان	۱۶۰۱۶
محاسبه پذیرفتاری مغناطیسی	۱۷۰۱۶
خلاصه قوانین مربوط به میدانهای ایستا	۱۸۰۱۶

۱۰۱۶ مقدمه

در دو فصل پیش، در مورد برهم کنشهای الکترومغناطیسی بحث کردیم و حرکت ذره‌های باردار را با عنوان نتیجه‌ای از این برهم کنشها در نظر گرفتیم. در جریان تحلیل برهم کنشهای الکترومغناطیسی، مفهوم میدان الکترومغناطیسی را معرفی کردیم. در این فصل و فصل بعد مشخصات خود میدان الکترومغناطیسی را، با عنوان یک موجود مستقل، به‌طور مفصل بررسی خواهیم کرد. در این فصل میدانهای ایستا یا مستقل از زمان را مطالعه می‌کنیم که در آن ابتدا میدان الکتریکی و سپس میدان مغناطیسی بررسی می‌شود. میدان الکترومغناطیسی وابسته به زمان موضوع فصل ۱۷ خواهد بود.

۲۰۱۶ شار میدان برداری

این فصل را با بحث در مورد شاد میدان برداری شروع می‌کنیم. شار مفهومی است که در بسیاری از مسایل فیزیک مورد استعمال دارد و در این فصل و فصلهای بعد در موارد متعدد ظاهر می‌شود. سطح S را در ناحیه‌ای که در آن میدان برداری \mathbf{V} وجود دارد در نظر بگیرید (شکل ۱۰۱۶). این سطح را به سطوح خیلی کوچک (یا بینهایت کوچک) یا مساحتیهای dS_1, dS_2, \dots, dS_n تقسیم می‌کنیم. به هر یک از این سطوحها می‌توان یک برداریکی $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ در نقطه‌ای عمود کرد. این بردارها، مطابق قرارداد بخش ۱۰.۳، در سوی پیشروی پیچ راستگردی است که در جهت اختیاری نشان داده شده روی لبه سطح، می‌چرخد. اگر سطح بسته باشد، سوی بردارهای \mathbf{u}_n به سمت بیرون سطح خواهد بود. فرض کنید $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ زاویه بین بردارهای یکای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ و بردارهای میدان $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_n$ در هر نقطه از سطح باشد. در این صورت، بنا به تعریف، Φ ، شاد میدان برداری \mathbf{V} از داخل سطح S ، برابر است با



شکل ۱۰۱۶ شار میدان برداری از یک سطح.

$$\begin{aligned}\Phi &= V_x dS_x \cos \theta_x + V_y dS_y \cos \theta_y + V_z dS_z \cos \theta_z + \dots \\ &= \mathbf{V}_x \cdot \mathbf{u}_x dS_x + \mathbf{V}_y \cdot \mathbf{u}_y dS_y + \mathbf{V}_z \cdot \mathbf{u}_z dS_z + \dots\end{aligned}$$

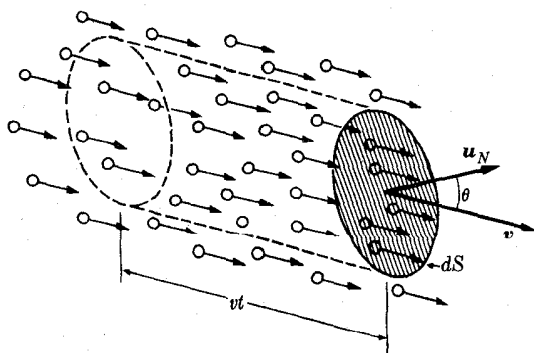
یا

$$\Phi = \int_S V \cos \theta dS = \int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{u}_N dS \quad (1.16)$$

چنانکه شاخص S نشان می‌دهد، انتگرال روی تمام سطح S گرفته می‌شود. بسدین دلیل، هر رابطه‌ای نظیر معادله (۱.۱۶) را انتگرال روی سطح می‌نامند. به سبب وجود سازه $\cos \theta$ در معادله (۱.۱۶)، بر حسب اینکه زاویه θ کوچکتر یا بزرگتر از $\pi/2$ باشد، شار از داخل جزء سطح dS می‌تواند مثبت یا منفی باشد. اگر میدان \mathbf{v} بر جزء سطح dS معامس یا با آن موازی باشد زاویه θ برابر $\pi/2$ و $\cos \theta = 0$ می‌شود، در نتیجه شار از داخل سطح dS برابر صفر است. شار کل Φ نیز می‌تواند مثبت، منفی یا برابر صفر باشد هنگامی که شار مثبت است «خروجی» و اگر منفی باشد «ورودی» است. اگر سطح بسته باشد، مانند کره یا بیضیواره، روی علامت انتگرال یک دایره کوچک رسم می‌کنند، یعنی معادله (۱.۱۶) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\Phi = \oint_S V \cos \theta dS = \oint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{u}_N dS \quad (2.16)$$

انتخاب نام شار برای انتگرال (۲.۱۶) به سبب کاربرد آن در مطالعه شارش شارهاست. فرض کنید جریانی از ذرات داریم که همگی با سرعت \mathbf{v} به سمت راست حرکت می‌کنند. ذراتی که در طول زمان t از سطح dS می‌گذرند (شکل ۲.۱۶) در داخل استوانه‌ای



شکل ۲.۱۶ شار ذرات از داخل یک سطح.

به قاعده dS ، که مولد آن موازی \mathbf{v} و طول آن vt است قرار دارند. حجم ایسن استوانه برابر است با $vt dS \cos \theta$. اگر تعداد ذرات در واحد حجم n باشد، تعداد کل ذراتی که در طول زمان t از سطح dS می گذرند برابر می شود با $nv t dS \cos \theta$. شادذات یا تعداد ذراتی که در واحد زمان می گذرند برابر است با $nv \cdot \mathbf{u}_N dS = nv dS \cos \theta$. در این صورت، شار کل ذرات از داخل سطح S برابر می شود با

$$\Phi = \int_S n\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_N dS$$

این رابطه مشابه معادله (۱۰۱۶) است که در آن میدان برداری \mathbf{V} برابر $n\mathbf{v}$ است. با وجود این باید توجه داشت که «شار» به گونه ای که در معادله (۱۰۱۶) به کار می رود، در حالت کلی بدین معنی نیست که چیزی از داخل سطح می گذرد.

مثال ۱۰۱۶ جریان الکتریکی از داخل یک سطح را به صورت شارچگالی جریان نشان دهید.

حل: دیدیم که عبارت $n\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_N dS$ تعداد ذراتی را که در واحد زمان از سطح dS می گذرند بیان می کند. اگر فرض کنیم که هر ذره دارای بار الکتریکی q باشد، باری که در واحد زمان از سطح dS می گذرد برابر است با

$$qn\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_N dS = \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS$$

که در آن بنا به تعریف معادله (۱۲۰۱۵)، $\mathbf{j} = nq\mathbf{v}$ چگالی جریان است. بنا بر این بار کلی که در واحد زمان از داخل سطح S می گذرد (یعنی جریان الکتریکی از داخل سطح) برابر می شود با

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS$$

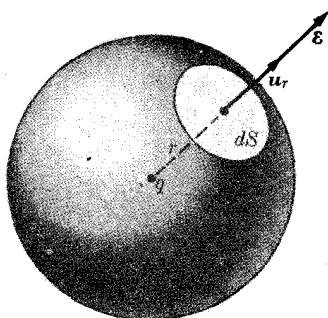
به گفته دیگر، جریان الکتریکی از داخل یک سطح برابر است با شار چگالی جریان الکتریکی از داخل این سطح. اگر چگالی جریان یکنواخت و سطح تخت باشد، معادله فوق به صورت زیر درمی آید

$$I = \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N S = jS \cos \theta$$

I. میدان الکتریکی

۳.۱۶ قانون گاوس برای میدان الکتریکی

اکنون بار نقطه ای q را در نظر می گیریم (شکل ۳.۱۶) و شار میدان الکتریکی، \mathbf{E} ، آن



شکل ۳.۱۶ شار الکتریکی بار نقطه‌ای از داخل یک کره.

را از داخل یک سطح کروی حساب می‌کنیم. بار در مرکز کره قرار دارد و شعاع کره برابر r است. میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای q در هر نقطه از سطح کره برابر است با

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r$$

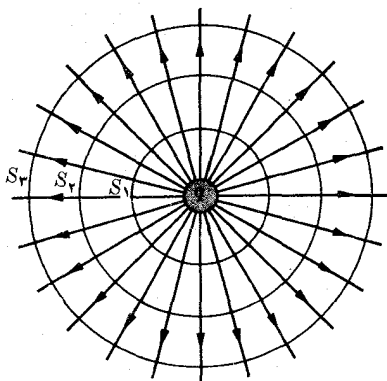
بردار یکای عمود بر کره بر بردار یکای \mathbf{u}_r در راستای شعاعی منطبق است. بنابراین θ زاویه بین میدان الکتریکی \mathbf{E} و بردار یکای عمودی \mathbf{u}_r برابر صفر و $\cos \theta = 1$ است. با توجه به اینکه میدان الکتریکی در تمام نقاط سطح کره یکسان و سطح کره برابر $4\pi r^2$ است، بنا به معادله (۲.۱۶)، شار الکتریکی Φ_E برابر می‌شود با

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \oint_S dS = ES = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

پس شار الکتریکی از داخل کره متناسب با بار الکتریکی و مستقل از شعاع کره است. در نتیجه، اگر چندین سطح کروی هم مرکز مانند S_1, S_2, S_3, \dots در اطراف بار q رسم کنیم (شکل ۴.۱۶)، شار الکتریکی که از داخل این کره‌ها می‌گذرد یکسان و برابر است با q/ϵ_0 . این نتیجه از متناسب بودن میدان الکتریکی با $1/r^2$ ناشی می‌شود و در مورد میدان گرانشی یک جرم که با معادله (۱۵.۱۳) بیان شد نیز درست است. شار میدان گرانشی از قراردادن γm به جای $q/4\pi\epsilon_0$ به دست می‌آید که m جرم واقع در داخل سطح است. از جانشانی مذکور داریم

$$\Phi_G = 4\pi\gamma m$$

اکنون بار الکتریکی q را در داخل یک سطح بسته دلخواه، مانند S در نظر می‌گیریم (شکل ۵.۱۶). شار کل میدان الکتریکی حاصل از بار q از داخل سطح S با رابطه زیر داده می‌شود



شکل ۴.۱۶ شار الکتریکی از داخل کره‌های هم‌مرکز که بار الکتریکی را احاطه کرده‌اند، یکسان است.

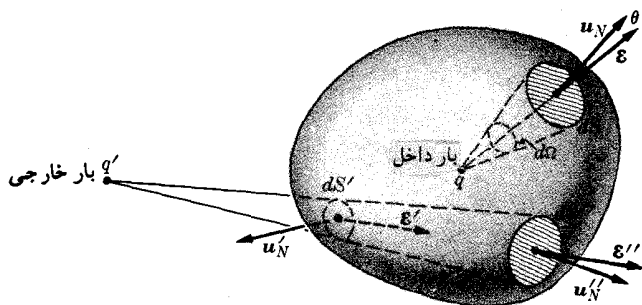
$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oint_S E \cos \theta \, dS = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta \, dS \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{dS \cos \theta}{r^2}\end{aligned}$$

ولی می‌دانیم که $dS \cos \theta / r^2$ برابر $d\Omega$ ، زاویه فضایی است که تحت آن از نقطه‌ای که بار q قرار گرفته است سطح جزئی dS دیده می‌شود [بسه معادله (۸.۳) مراجعه کنید]. چون زاویه فضایی کل اطراف یک نقطه برابر 4π است، داریم

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (4\pi) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

این نتیجه با نتیجه قبلی مربوط به یک سطح کروی که بار الکتریکی q در مرکز آن قرار داشت یکی است، و به این ترتیب می‌بینیم که در مورد هر سطح بسته، بدون ارتباط به محل بار الکتریکی در داخل سطح، معتبر است. اگر باری مانند q' در خارج سطح بسته قرار داشته باشد، شار الکتریکی برابر صفر می‌شود، زیرا شار ورودی با شار خروجی برابر و در نتیجه شار کل برابر صفر است. به عنوان مثال، مقدار شار الکتریکی q' از داخل سطح dS' در شکل ۵.۱۶ با شار الکتریکی q' از داخل سطح dS'' برابر ولی علامت آنها باهم مخالف است در نتیجه یکدیگر را خنثی می‌کنند.

اگر چند بار الکتریکی q_1, q_2, q_3, \dots در داخل سطحی مانند S قرار داشته باشند



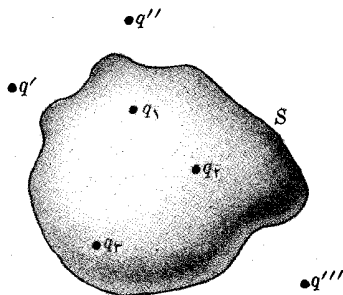
شکل ۵.۱۶ شار الکتریکی از داخل سطح بسته‌ای که بار الکتریکی را احاطه کرده است، به شکل سطح بستگی ندارد.

(شکل ۵.۱۶)، شار الکتریکی کل برابر می‌شود با مجموع شار هر یک از بارها. پس می‌توان قانون گاوس را به صورت زیر بیان کرد

شار الکتریکی از داخل یک سطح بسته که بارهای الکتریکی q_1, q_2, q_3, \dots در داخل آن قرار دادند برابر است با

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (3.16)$$

که در آن $q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$ جمع جبری بارهای داخل سطح بسته است.



شکل ۶.۱۶ شار الکتریکی از داخل هر سطح بسته متناسب است با جمع جبری بارهای واقع در داخل سطح.

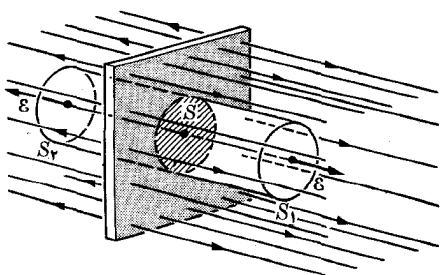
اگر در داخل سطح بسته باری وجود نداشته باشد یا جمع جبری بارها برابر صفر باشد، شار الکتریکی کل از داخل سطح صفر است. بارهای الکتریکی واقع در خارج سطح بسته مانند q' ، q'' ، q''' ، ... در شار الکتریکی سهمی ندارند.

چنانکه مثالهای زیر نشان می‌دهند، قانون گاوس مخصوصاً در محاسبه میدان الکتریکی ناشی از توزیع بارهایی که دارای گونه‌ای تقارن هندسی اند بسیار مفید است.

مثال ۲۰۱۶ با استفاده از قانون گاوس، میدان الکتریکی ناشی از (الف) باری که به‌طور یکنواخت روی صفحه توزیع شده است، (ب) دو صفحه موازی با بار برابر ولی با علامت مخالف، را مطالعه کنید.

حل: (الف) صفحه شکل ۷۰۱۶ را که دارای بار الکتریکی σ در واحد سطح است در نظر می‌گیریم. تقارن مسئله نشان می‌دهد که خطهای نیرو بر صفحه عمودند، و اگر علامت بارها مثبت باشد سوی آنها مطابق شکل خواهد بود. اگر استوانه نشان داده شده در شکل ۷۰۱۶ را به عنوان سطح بسته انتخاب کنیم، می‌توانیم شار را به سه قسمت تقسیم کنیم. (۱) شار از داخل S_1 که برابر است با $+ES$ ، که S مساحت قاعده استوانه است. (۲) شار از داخل S_2 که آن نیز برابر است با $+ES$ ، زیرا با توجه به تقارن، میدان در فاصله‌های مساوی در دو طرف صفحه باید از لحاظ بزرگی برابر ولی از لحاظ سو مخالف هم باشد. (۳) شار از داخل سطح جانبی استوانه که برابر صفر است، زیرا میدان الکتریکی و سطح با هم موازی اند. بنابراین شار کل برابر است با $\Phi_E = 2ES$. بار الکتریکی داخل سطح بسته عبارت است از بار پخش شده روی سطح هاشور خورده، و برابر است با $q = \sigma S$. بنابراین با استفاده از قانون گاوس، معادله (۳۰۱۶)، داریم

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$



شکل ۷۰۱۶ میدان الکتریکی صفحه‌ای با توزیع بار یکنواخت.

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

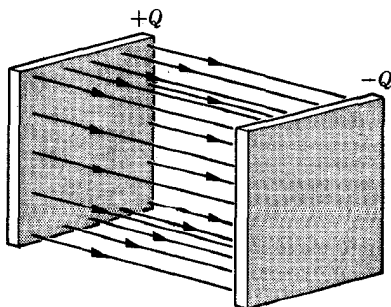
این نتیجه نشان می‌دهد که میدان الکتریکی به فاصله از صفحه بستگی ندارد. و بنابراین یکنواخت است. در این صورت، بنا به معادله $E = -dV/dx$ ، و با این فرض که پتانسیل صفحه برابر صفر است، داریم

$$V = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}x$$

این نتایج با آنچه در مثال ۸.۱۳ برای میدان گرانشی به دست آوردیم مشابه است، فقط کافی است به جای $(4\pi\epsilon_0)^{-1}$ ثابت γ قرار گیرد (بسه مسئله ۶۲۰.۱۴ نیز مراجعه کنید). دانشجو می‌تواند با مقایسه دوشیوه به کار رفته برای حل يك مسئله، به سهولتی که استفاده از تقارن فراهم می‌کند پی ببرد.

(ب) شکل ۸.۱۶ دو صفحه موازی با بارهای برابر ولی ناهمنام را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که در خارج از ناحیه بین دو صفحه موازی با بارهای ناهمنام، میدانها از نظر بزرگی برابر ولی در سوی مخالف هم قرار دارند، بنابراین میدان برابری صفر است. ولی در ناحیه بین دو صفحه سوی میدانها یکسان است، در نتیجه میدان برابری دو برابر میدان هر يك از صفحه‌هاست، یعنی $E = \sigma/\epsilon_0$. بنابراین در ناحیه بین دو صفحه موازی باردار، با بارهای برابر و ناهمنام، يك میدان یکنواخت به وجود می‌آید.

مثال ۳۰.۱۶ یا استفاده از قانون گاوس، میدان الکتریکی ناشی از يك توزیع کروی بار را



شکل ۸.۱۶ میدان الکتریکی بین دو صفحه موازی با بارهای یکسان ولی ناهمنام.

مطالعه کنید.

حل: این مسئله را در بخش ۷.۱۳، با شیوه دیگری در مورد میدان گرانشی یک جسم کروی بررسی کردیم. کوره‌ای به شعاع a و بار الکتریکی Q را در نظر می‌گیریم (شکل ۹.۱۶). تقارن مسئله ایجاب می‌کند که میدان در هر نقطه در راستای شعاعی بوده و منحصرأب به r ، فاصله نقطه تا مرکز کوره بستگی داشته باشد. بنابراین با رسم کوره‌ای به شعاع r و هم مرکز با کوره بزرگتر، بی‌می‌بریم که شار الکتریکی از داخل این کوره برابر است با

$$\Phi_E = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E(4\pi r^2)$$

ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن $r > a$ است. بار داخل سطح S همان بار الکتریکی کل کوره، یعنی Q است. در این صورت با استفاده از قانون گاوس، معادله (۳.۱۶)، بدست می‌آید

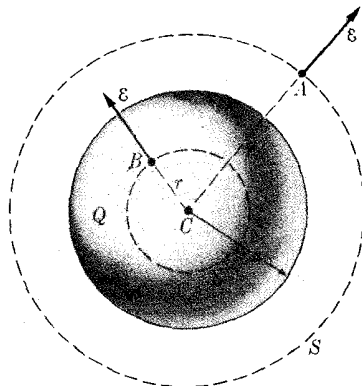
$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

یا

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

این نتیجه همان نتیجه‌ای است که برای بار الکتریکی نقطه‌ای بدست آوردیم. بنابراین میدان الکتریکی در هر نقطه در خارج کوره با دایره برابر است با میدانی که از تمرکز تمامی بارها در مرکز کوره بدست می‌آید.

اکنون حالتی را بررسی می‌کنیم که در آن $r < a$ باشد. دو حالت وجود دارد.



شکل ۹.۱۶

حالت اول اینکه کلیه بارها در سطح کره توزیع شده باشند. در این حالت بار کل در داخل سطح S' برابر صفر است و از قانون گاوس به دست می آید $E(4\pi r^2) = 0$ یا $E = 0$. بنابراین میدان الکتریکی در داخل کره‌ای که بارها تنها در سطح آن توزیع شده باشند برابر صفر است. حالت دوم اگر بارها به طور یکنواخت در تمام حجم کره توزیع شده باشند و Q' بار الکتریکی داخل سطح S' باشد، داریم

$$Q' = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \right) = \frac{Qr^3}{a^3}$$

در این صورت از قانون گاوس می توان نوشت

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q'}{\epsilon_0} = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 a^3}$$

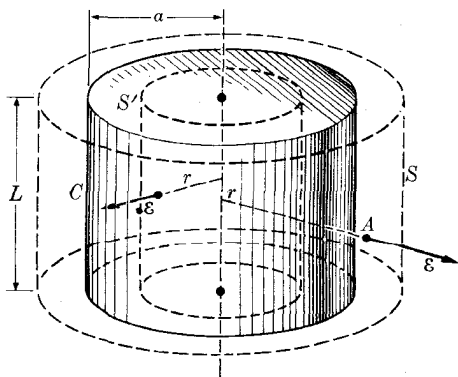
یا

$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

این رابطه نشان می دهد که میدان الکتریکی در هر نقطه در داخل یک کره باردار با توزیع یکنواخت، مستقیماً با فاصله آن نقطه تا مرکز کره متناسب است. اگر در این رابطه‌ها به جای $Q/4\pi\epsilon_0$ مقدار γm را قرار دهیم، نتایج بخش ۷.۱۳ برای میدان گرانشی به دست می آیند.

مثال ۴.۱۶ با به کار بردن قانون گاوس، میدان الکتریکی حاصل از توزیع یکنواخت بار در استوانه‌ای به طول بینهایت را بررسی کنید.

حل: استوانه C به شعاع قاعده a و طول L را در نظر می گیریم (شکل ۱۰.۱۶). اگر λ



شکل ۱۰.۱۶

بار الکتریکی در واحد طول استوانه باشد، بار کل این قطعه از استوانه برابر می شود با $q = \lambda L$. تقارن مسئله نشان می دهد که میدان الکتریکی در هر نقطه منحصرأ به فاصله آن نقطه تا محور استوانه بستگی دارد و راستای آن شعاعی است. به عنوان سطح بسته، یک سطح استوانه‌ای به شعاع قاعده r و هم محور با توزیع بارها را اختیار می کنیم. شار الکتریکی از داخل این سطح به سه قسمت تقسیم می شود؛ دو قسمت مربوط به شار از داخل هر قاعده و سومی مربوط به شار از سطح جانبی. شار از داخل قاعده‌ها برابر صفر است زیرا میدان الکتریکی بر سطح هر قاعده مماس است. بنابراین شار تنها از سطح جانبی استوانه می گذرد و مقدار آن برابر است با $E(2\pi rL)$ ، یعنی

$$\Phi_E = 2\pi rLE$$

در حالتی که $r > a$ باشد، بار کل در داخل سطح استوانه S' مساوی $q = \lambda L$ است. با استفاده از قانون گاوس، معادله (۳.۱۶)، داریم $2\pi rLE = \lambda L/\epsilon_0$ ، یا

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

این نتیجه با نتیجه‌ای که در مثال ۷.۱۴ برای میدان الکتریکی رشته سیم بار دار به دست آوردیم تطبیق می کند. بنابراین، میدان الکتریکی در هر نقطه خارج یک توزیع استوانه‌ای بار به طول بینهایت، برابر میدانی است که از تمرکز تمام بارهای استوانه در طول محور آن به دست می آید.

در اینجا نیز برای $r < a$ دو حالت وجود دارد. اگر تمام بارها در سطح استوانه پخش شده باشند، در این حالت باری در داخل سطح S' وجود ندارد و بنا به قانون گاوس داریم

$$2\pi rLE = 0 \quad \text{یا} \quad E = 0$$

از این رو گوییم، میدان الکتریکی در هر نقطه در داخل استوانه‌ای که بار تنها در سطح آن توزیع شده باشد برابر صفر است. ولی اگر بار الکتریکی به طور یکنواخت در تمام حجم استوانه C توزیع شده باشد بار موجود در داخل سطح S' برابر است با $q' = \lambda Lr^2/a^2$ و از قانون گاوس به دست می آید

$$2\pi rL = q'/\epsilon_0$$

یا

$$E = \lambda r / 2\pi\epsilon_0 a^2$$

بنابراین، میدان الکتریکی در هر نقطه در داخل استوانه‌ای با توزیع یکنواخت و طول بینهایت، متناسب است با فاصله آن نقطه از محور استوانه.

۴.۱۶ شکل دیفرانسیلی قانون گاوس

نشان دادیم که قانون گاوس را می توان در مورد هر سطحی به کار برد. آن را در مورد سطح احاطه کننده یک حجم بینهایت کوچک که اضلاع آن، مطابق شکل ۱۱.۱۶ موازی محورهای XYZ اند به کار می بریم. طول اضلاع این جزء حجم عبارت اند از dx ، dy و dz . مساحت رویه $ABCD$ برابر $dy dz$ و شار الکتریکی از داخل این سطح برابر است با

$$E dS \cos \theta = (E \cos \theta) dy dz = E_x dy dz$$

زیرا $E_x = E \cos \theta$ است. شار از داخل رویه $A'B'C'D'$ مشابه با شار از داخل $ABCD$ است، چون میدان به سوی داخل حجم است، علامت آن منفی است، یعنی شار برابر است با $-E'_x dy dz$. شار کل از داخل این دو سطح برابر است با مجموع

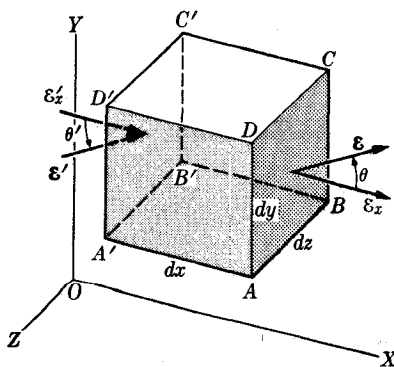
$$E_x dy dz + (-E'_x dy dz) = (E_x - E'_x) dy dz$$

چون فاصله بین دو سطح، $AA' = dx$ ، خیلی کوچک است کمیت $E_x - E'_x$ نیز کوچک می شود و می توان نوشت

$$E_x - E'_x = dE_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx$$

از اینجا شار کل در راستای محور X به صورت زیر درمی آید

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dv$$



شکل ۱۱.۱۶ جزء حجم برای به دست آوردن شکل دیفرانسیلی قانون گاوس.

کمیت $dv = dx dy dz$ ، حجم جعبه کوچک است. چون نتایج مشابهی برای شار الکتریکی از چهار رویه دیگر جزء حجم به دست می آید، شارکل از داخل این جزء حجم برابر می شود با

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \frac{\partial E_x}{\partial x} dv + \frac{\partial E_y}{\partial y} dv + \frac{\partial E_z}{\partial z} dv \\ &= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dv\end{aligned}$$

اگر dq بار الکتریکی موجود در جزء حجم dv باشد، از قانون گاوس داریم

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dv = dq / \epsilon_0.$$

با قرار دادن $dq = \rho dv$ ، که در آن ρ چگالی بار الکتریکی است، در رابطه بالا وحذف سازه مشترک dv از دو طرف تساوی، به دست می آید

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.16)$$

رابطه (۴.۱۶) شکل دیفرانسیلی قانون گاوس را بیان می کند. عبارت سمت چپ معادله (۴.۱۶) را دایگرایبی \mathbf{E} می نامند و باعلامت اختصاری $\text{div } \mathbf{E}$ نشان می دهند، به گونه ای که قانون گاوس به صورت خلاصه زیر درمی آید

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.16)$$

معنای فیزیکی قانون گاوس به شکل دیفرانسیلی آن این است که این رابطه میدان الکتریکی \mathbf{E} در یک نقطه از فضا را با توزیع بار الکتریکی که با ρ مشخص می شود، در همان نقطه از فضا مربوط می کند؛ یعنی رابطه موضعی بین این دو کمیت فیزیکی به وجود می آورد. بدین طریق می توان گفت که بار الکتریکی چشمه یا همنشاء میدان الکتریکی است و مقدار و چگونگی توزیع بارها میدان الکتریکی را در هر نقطه از فضا تعیین می کند.

مثال ۵.۱۶ قانون گاوس را بر حسب پتانسیل الکتریکی بنویسید و در آن بحث کنید.

حل: اگر به خاطر داشته باشیم که مؤلفه های میدان بر حسب پتانسیل الکتریکی با رابطه $E_x = -\partial V / \partial x$ و رابطه های مشابهی برای E_y و E_z نوشته می شود [به معادله (۲۷.۱۴)]

مرآعه کنید]، می توان نوشت

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial V}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

ورابطه های مشابه برای E_y و E_z . اگر این مقادیر را در معادله (۴.۱۶) قرار دهیم رابطه دیگری برای قانون گاوس به دست می آید

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (۶.۱۶)$$

این رابطه را معادله پواسون می نامند. در صورتی که توزیع بارهای الکتریکی مستقل از زمان باشد، با استفاده از معادله (۶.۱۶) و با دانستن چگونگی توزیع بار می توان پتانسیل الکتریکی را به دست آورد و برعکس. در فضای آزاد که دارای بار الکتریکی نیست، $\rho = 0$ است، معادله (۵.۱۶) به صورت $\text{div } \mathbf{E} = 0$ و معادله (۶.۱۶) به صورت زیر درمی آید

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (۷.۱۶)$$

این رابطه را معادله لاپلاس می نامند. این رابطه یکی از معادله های بسیار مهم ریاضی - فیزیک است و به غیر از نظریه الکترومغناطیس در بسیاری مسائل فیزیک از جمله حرکت شاره ها و مبحث کشسانی وارد می شود.

عبارت سمت چپ معادله های (۶.۱۶) و (۷.۱۶) لاپلاسی V نامیده می شود.

مثال ۶.۱۶ تحقیق کنید که پتانسیل بار نقطه ای در هر نقطه از فضا بجز مبدأ کسره بار در آنجا قرارداد، در معادله لاپلاس، معادله (۷.۱۶)، صدق می کند.

حل: بنا به معادله (۳۲.۱۴)، پتانسیل بار الکتریکی نقطه ای برابر است با

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{r}$$

ولی $r^2 = (x^2 + y^2 + z^2)$ ، به گونه ای که با مشتق گیری از آن نسبت به x به دست می آید

$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x \quad \text{یا} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$$

و

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$$

در نتیجه

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0$$

با ضرب کردن نتیجه فوق در $q/4\pi\epsilon_0$ معادله (۷.۱۶) به دست می‌آید. روش ریاضی فوق برای $r=0$ معتبر نیست، زیرا در این نقطه تابع $1/r$ به سمت بینهایت میل می‌کند. بنابراین مبدأ را باید از محاسبه مستثنی کرد. بعلاوه، معادله (۷.۱۶) را نمی‌توان در مورد نقاطی که بار الکتریکی اشغال کرده است به کار برد.

مثال ۷.۱۶ با استفاده از معادله لاپلاس، پتانسیل و میدان الکتریکی را در ناحیه تهی واقع در بین دو صفحه باردار موازی با پتانسیلهای V_1 و V_2 پیدا کنید.

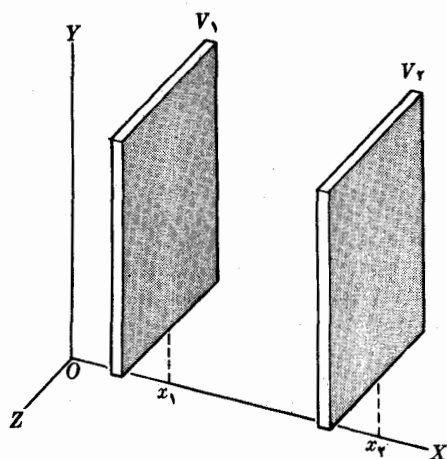
حل: تقارن مسئله ایجاب می‌کند که میدان تنها به مختص x بستگی داشته باشد (شکل ۷.۲۰۱۶). بنابراین، چون در فضای بین دو صفحه باری وجود ندارد، باید معادله لاپلاس، یعنی معادله (۷.۱۶) را به کار برد. در این حالت معادله لاپلاس به صورت $d^2V/dx^2 = 0$ درمی‌آید. توجه داشته باشید که نماد مشتق جزئی را به کار نبردیم زیرا تنها متغیر مستقل x وجود دارد. با انتگرال گیری داریم $dV/dx = \text{const.}$ چون $E = -dV/dx$ است، نتیجه می‌گیریم که میدان الکتریکی بین دو صفحه ثابت است. با انتگرال گیری مجدد از معادله $E = -dV/dx$ ، با توجه به اینکه E ثابت است، معادله زیر به دست می‌آید

$$\int_{V_1}^V dV = - \int_{x_1}^x E dx = -E \int_{x_1}^x dx$$

بنابراین

$$V - V_1 = -E(x - x_1) \quad \text{یا} \quad V = V_1 - E(x - x_1)$$

این رابطه نشان می‌دهد که تغییر پتانسیل الکتریکی نسبت به فاصله x خطی است. برای $x = x_2$ داریم $V = V_2$ ، در نتیجه به دست می‌آید



شکل ۱۲.۱۶

$$E = -\frac{V_2 - V_1}{x_2 - x_1} = -\frac{V_2 - V_1}{d}$$

که در آن $d = x_2 - x_1$ است. این نتایج با بحث بخش ۸.۱۴، که به معادله (۳۱.۱۴) منجر شد، سازگار است.

مثال ۸.۱۶ مثال ۷.۱۶ را به فرض اینکه فضای بین دو صفحه با توزیع یکنواخت بار پر شده است حل کنید. چنین وضعی، به عنوان مثال، با وضع بین دو صفحه یک لامپ الکترونی تطبیق می کند.

حل: در اینجا باید معادله (۶.۱۶)، یا معادله پواسون، را به کار ببریم. به دلیل تقارن مسئله، پتانسیل منحصرأ به مختص x بستگی دارد و می توان نوشت $d^2V/dx^2 = -\rho/\epsilon_0$ که در آن ρ ثابت است. با انتگرال گیری به دست می آید

$$\int_{x_1}^x \frac{d^2V}{dx^2} dx = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{x_1}^x \rho dx = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \int_{x_1}^x dx$$

بنا بر این

$$\frac{dV}{dx} - \left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=x_1} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}(x - x_1)$$

یا

$$\frac{dV}{dx} = -E_1 - \frac{\rho}{\epsilon_0}(x - x_1) \quad (۸.۱۶)$$

کسه در آن $E_1 = -(dV/dx)_{x=x_1}$ میدان الکتریکی در نقطه $x = x_1$ است. چون $E = -dV/dx$ است، میدان در داخل دو صفحه برابر می شود با

$$E = E_1 + \frac{\rho}{\epsilon_0}(x - x_1)$$

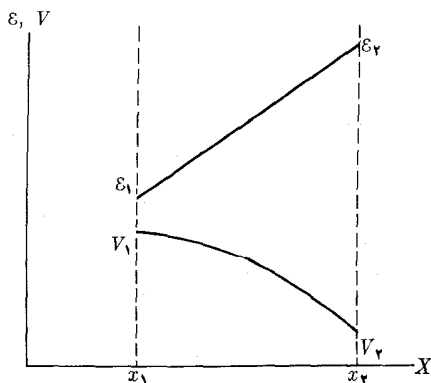
این رابطه، همچنانکه در شکل ۱۳.۱۶ دیده می شود، نشان می دهد که تغییر میدان با x خطی است. با انتگرال گیری از معادله (۸.۱۶) پتانسیل الکتریکی به صورت تابعی از x به دست می آید

$$\int_{V_1}^V dV = - \int_{x_1}^x E_1 dx - \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_{x_1}^x (x - x_1) dx$$

یا

$$V = V_1 - E_1(x - x_1) - \frac{\rho}{2\epsilon_0}(x - x_1)^2 \quad (۹.۱۶)$$

چنانکه شکل ۱۳.۱۶ نیز نشان می دهد، پتانسیل V به صورت تابع درجه دوم از x است. کمیت E_1 را می توان با قراردادن $x = x_1$ حساب کرد



شکل ۱۳.۱۶

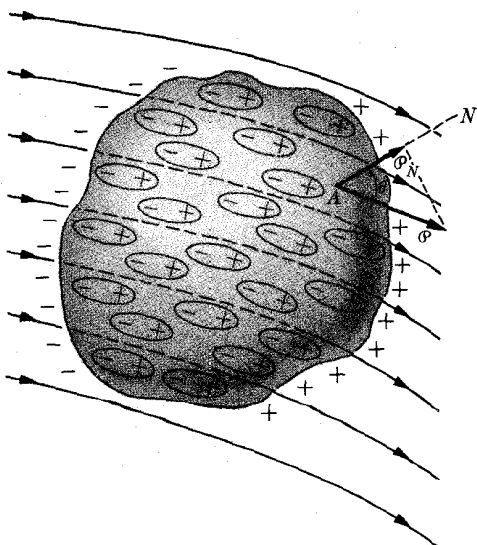
$$V_2 = V_1 - E_1(x_2 - x_1) - \left(\frac{\rho}{\epsilon_0}\right)(x_2 - x_1)^2$$

که E_1 از این رابطه به دست می آید.

۵.۱۶ قطبش ماده

در این بخش اثر میدان الکتریکی را روی يك تکه از ماده مورد بحث قرار می دهیم. یسار آوری می کنیم که آنها به سبب تقارن کروی خود گشتاور دو قطبی دایمی ندارند، ولسی هنگامی که در میدان الکتریکی قرار می گیرند، قطبیده می شوند و يك گشتاور دو قطبی القایی در راستای میدان پیدا می کنند. این امر نتیجه اختلال در حرکت الکترونها بر اثر میدان اعمال شده است (به بخش ۱۱.۱۴ مراجعه کنید).

از طرف دیگر، بسیاری از مولکولها گشتاور دو قطبی الکتریکی دایمی دارند. وقتی مولکولی که دارای گشتاور دو قطبی الکتریکی دایمی است تحت تأثیر میدان الکتریکی قرار می گیرد، به سبب گشتاور نیروی وارد بر آن [که از معادله (۵۰.۱۴) به دست می آید] می کوشد در راستای میدان قرار بگیرد. در نتیجه هر يك از این دو اثر، تکه ماده واقع در میدان الکتریکی قطبیده می شود، یعنی مولکولها یا اتمهای آن، خواه به سبب واپیچش حرکت الکترونها، خواه به دلیل سمتگیری دو قطبیهای دایمی شان، به صورت دو قطبیهای الکتریکی در راستای میدان در می آیند (شکل ۱۴.۱۶). محیطی را که بتواند بر اثر میدان الکتریکی



شکل ۱۴.۱۶ قطبش ماده در میدان الکتریکی.

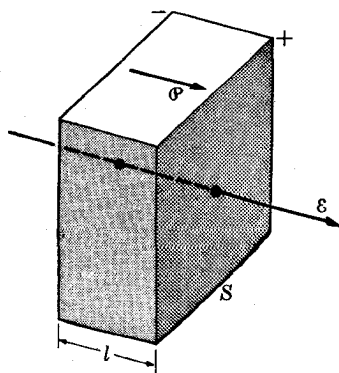
قطبیده شود دی الکتريک می نامند. قطبش موجب می شود يك طرف تکه ماده دارای بار الکتريکی منفی و طرف دیگر آن دارای بار الکتريکی مثبت بشود. در این صورت ماده به صورت دو قطبی الکتريکی بزرگی درمی آید و چنانکه در بخش ۱۱.۱۴ مورد بحث قرار گرفت، می کوشد در جهت افزایش میدان حرکت کند. این امر، پدیده جذب خرده کاغذ یا گوی چوب پنبه ای به وسیله میله شیشه ای یا شانه الکتريسیته دار شده را که در بخش ۱۰.۱۴ بدان اشاره شد، توجیه می کند.

بنا به تعریف، \mathcal{P} قطبش ماده برابر است با گشتاور دو قطبی الکتريکی واحد حجم محیط. بنا بر این اگر p گشتاور دو قطبی القایی در هراتم یا مولکول و n تعداد آنها یا مولکولها در واحد حجم باشد، قطبش برابر می شود با $\mathcal{P} = n p$. معمولاً \mathcal{P} با \mathbf{E} میدان الکتريکی اعمال شده متناسب است. چون \mathcal{P} بر حسب $\text{Cm}^{-2} = (\text{Cm})m^{-3}$ یا بار بر واحد سطح اندازه گیری می شود و بنا به معادله (۸.۱۴)، $\epsilon_0 E$ نیز بر حسب Cm^{-2} اندازه گیری می شود، معمولاً می نویسند

$$\mathcal{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (10.16)$$

کمیت χ_e را پذیرفتاری الکتريکی ماده می نامند. χ_e عددی بدون بعد و برای بیشتر مواد مثبت است.

اکنون بره ای از يك ماده به ضخامت l و سطح S را که عمود بر میدان یکنواخت \mathbf{E} قرار گرفته است در نظر می گیریم (شکل ۱۵.۱۶). چون قطبش \mathcal{P} موازی \mathbf{E} است بنا بر این بر S عمود است. حجم بره برابر است با lS ، در نتیجه گشتاور دو قطبی الکتريکی کل برابر می شود با $\mathcal{P}(lS) = (\mathcal{P}S)l$ ولی l درست برابر فاصله بین بارهای مثبت و منفی است که در دو سطح ماده ظاهر می شوند. چون بنا به تعریف گشتاور دو قطبی الکتريکی برابر است با بار الکتريکی ضربدر فاصله، نتیجه می گیریم که بار الکتريکی ظاهر شده روی هر سطح برابر است با $\mathcal{P}S$ و در نتیجه $\sigma_{\mathcal{P}}$ مقدار بار الکتريکی در واحد سطح روی هر يك از رویه های



شکل ۱۵.۱۶ بره ای از ماده قطبیده.

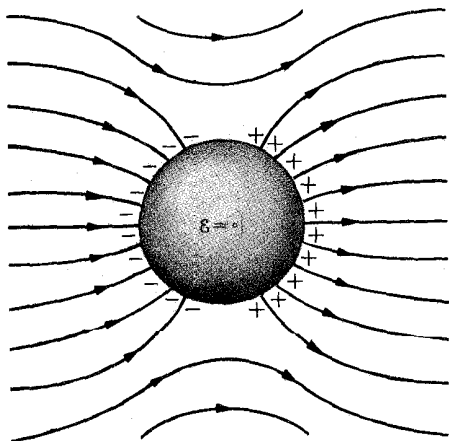
بره قطبیده برابر می شود با \mathcal{P} ، بنابراین $\sigma_p = \mathcal{P}$ است. گر چه این نتیجه را برای بره ای با نظم هندسی ویژه به دست آوردیم ولی در حالت کلی نیز معتبر است و گوییم

بار الکتریکی در واحد سطح يك تکه ماده قطبیده برابر است با مؤلفه قطبش \mathcal{P} در راستای عمود بر سطح جسم.

بنابراین، در شکل ۱۶.۱۶ مقدار بار در واحد سطح در نقطه A برابر است با

$$\mathcal{P}_N = \mathcal{P} \cos \theta$$

بعضی مواد، مانند بیشتر فلزات، ذرات بارداری دارند که می توانند کمابیش آزادانه در داخل ماده حرکت کنند. چنین موادی را رسانا (یا هادی) می نامند. رساناها نیز با حضور میدان الکتریکی قطبیده می شوند، ولی نحوه قطبش این مواد اساساً با دی الکتریکها تفاوت دارد. اگر بارهای الکتریکی متحرک در داخل رسانا به طور کامل از آن خارج نشوند، این بارها در سطح جسم جمع می شوند، تا آنجا که میدان الکتریکی ناشی از این بارها میدان الکتریکی خارجی اعمال شده بر رسانا را در داخل کاملاً خنثی کند و بساین طریق يك حالت ترازمندی به وجود آید (شکل ۱۶.۱۶). بنا بر این نتیجه می گیریم که در داخل رسانای در حال ترازمندی الکتریکی، میدان الکتریکی برابر صفر است. به همین دلیل میدان الکتریکی باید بر سطح رسانا عمود باشد، زیرا اگر میدان مؤلفه موازی با سطح داشته باشد بارها در سطح رسانا حرکت می کنند. بعلاوه، چون در داخل رسانا میدان الکتریکی برابر صفر است، تمام نقاط يك رسانای در حال ترازمندی باید دارای پتانسیل یکسانی باشند. همچنین اگر میدان الکتریکی در داخل رسانا برابر صفر باشد $\text{div } \mathbf{E} = 0$ است و در نتیجه از قانون گاوس به شکل دیفرانسیلی آن، یعنی



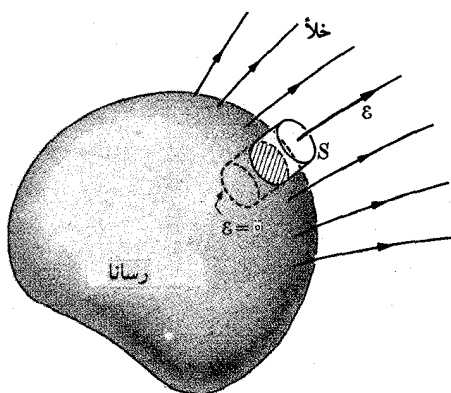
شکل ۱۶.۱۶ میدان الکتریکی در داخل رسانا برابر صفر است.

معادله (۵.۱۶) به دست می آید $\rho = 0$ ، یعنی چگالی بار الکتریکی در داخل رسانا برابر صفر است. یعنی اینکه در رسانای ترازمند کلیه بارها روی سطح قرار می گیرند. البته معنی واقعی این سخن آن است که بار الکتریکی در واقع در مقطعی از سطح به ضخامت چند لایه اتمی توزیع می شود نه سطح به معنای هندسی آن.

مثال ۹.۱۶ رابطه بین میدان الکتریکی در سطح يك رسانا را با بار الکتریکی سطح آن پیدا کنید.

حل: رسانایی به شکل اختیاری مانند شکل ۱۷.۱۶ در نظر می گیریم. برای پیدا کردن میدان الکتریکی در نقطه ای بلافاصله در خارج رسانا، يك سطح استوانه ای به ارتفاع کم را طوری رسم می کنیم که یکی از قاعده های آن درست در خارج سطح رسانا و قاعده دیگر کمی در داخل رسانا قرار داشته باشد، به طوری که تمام بار سطحی در داخل استوانه قرار گیرد و بتوان میدان الکتریکی را برابر صفر گرفت. شار الکتریکی از داخل این سطح از سه جمله تشکیل می شود. شار الکتریکی از سطح جانبی استوانه برابر صفر است زیرا میدان برای این سطح معکوس است. شار الکتریکی از قاعده داخلی نیز برابر صفر است زیرا میدان برابر صفر است. بنابراین تنها شاری که از سطح استوانه می گذرد شار مربوط به قاعده بیرونی است. اگر مساحت این قاعده را S بگیریم، شار کل برابر می شود با $\Phi_E = ES$. از طرف دیگر اگر σ چگالی سطحی بار رسانا باشد، مقدار بار داخل استوانه برابر می شود با $q = \sigma S$. در این صورت با به کار بردن قانون گاوس داریم

$$ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad \text{یا} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (11.16)$$



شکل ۱۷.۱۶ میدان الکتریکی در سطح رسانا بر سطح آن عمود است.

از این رابطه میدان الکتریکی در يك نقطه خیلی نزدیک به سطح رسانا در خارج آن به دست می آید، میدان در داخل رسانا برابر صفر است. در نتیجه، در گذر از سطح رسانا، میدان الکتریکی به گونه ای که در شکل ۱۸.۱۶ نشان داده شده است تغییر می کند.

مثال ۱۵.۱۶ نیروی وارد بر بارهای الکتریکی موجود در واحد سطح يك رسانا را به دست آورید.

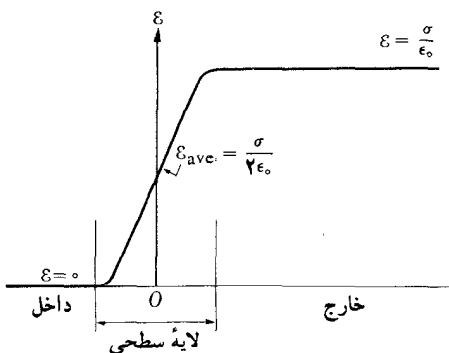
حل: به بارهای واقع در سطح هر رسانا از طرف سایر بارها نیروی دافعه وارد می شود. نیروی وارد بر واحد سطح یا فشار الکتریکی را می توان با ضرب میدان الکتریکی میانگین در بار واحد سطح حساب کرد. بنا به شکل ۱۸.۱۶ میدان الکتریکی میانگین برابر است با $E_{ave} = \sigma / 2\epsilon_0$. در نتیجه فشار الکتریکی برابر می شود با

$$F_s = \sigma E_{ave} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

این کمیت همیشه مثبت است، زیرا با σ^2 متناسب است، و بنا بر این متناظر با نیرویی است که همواره می کوشد بارها را از سطح رسانا جدا کند.

۶.۱۶ جابجایی الکتریکی

در بخش قبل دیدیم که يك دی الکتریک قطبیده دارای مقداری بار الکتریکی روی سطح خود است (و در صورتی که قطبش یکنواخت نباشد مقداری نیز در حجم خود دارد). ولی این بارها «منجمد»ند؛ بدین معنی که به آنها یا مولکولهای معینی بسته شده اند و آزاد نیستند که در داخل دی الکتریک حرکت کنند. در مواد دیگر، مانند فلزات یا گازهای یونیده،

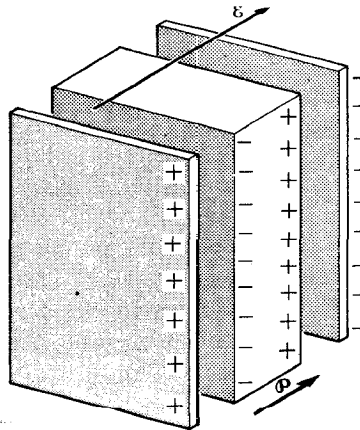


شکل ۱۸.۱۶ تغییرات میدان الکتریکی در گذر از سطح يك رسانا.

بعضی بارها می‌توانند جابجا شوند، بدین جهت آنها را بارهای آزاد می‌نامیم. در موارد بسیار، مانند این بخش، لازم است اختلاف بارز بین بارهای آزاد و قطبش را روشن کنیم. از نو فرض کنیم که بره‌ای از يك ماده‌ی الکتریک بین دو صفحه‌ی رسانای موازی باردار با بارهای آزاد برابر و ناهمنام قرار دارد (شکل ۱۹.۱۶). چگالی سطحی بار الکتریکی روی صفحه‌ی سمت چپ $\sigma_{\text{آزاد}} +$ و روی صفحه‌ی سمت راست $\sigma_{\text{آزاد}} -$ است. این بارها يك میدان الکتریکی تولید می‌کنند که بره را قطبی می‌کند، بنابراین روی سطح بره بارهای قطبش ظاهر می‌شوند. علامت بارهای قطبش در هر طرف، مخالف علامت بارهای صفحه‌ها است. بنابراین بارهای قطبش روی سطح دی‌الکتریک قسمتی از بارهای صفحه‌ی مقابل خود را خنثی می‌کنند. اگر ρ بزرگی قطبش در بره باشد، چگالی سطحی بار روی رویه‌ی چپ بره $\rho -$ و روی رویه‌ی راست $\rho +$ خواهد بود. چگالی سطحی بار مؤثر یا خالص در سمت چپ برابر $\rho - \sigma_{\text{آزاد}}$ و در سمت راست همین مقدار ولی با علامت مخالف است. از این بارهای سطحی، میدان الکتریکی یکنواختی به‌وجود می‌آید که بنا به معادله (۱۱.۱۶) با رابطه $E = \sigma / \epsilon_0$ داده می‌شود. در نتیجه با به‌کار بردن مقدار مؤثر σ به‌دست می‌آید

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_{\text{آزاد}} - \rho) \quad \text{یا} \quad \sigma_{\text{آزاد}} = \epsilon_0 E + \rho$$

این رابطه بار آزاد روی سطح رسانا را با حضور دی‌الکتریک بر حسب میدان الکتریکی در دی‌الکتریک و قطبش دی‌الکتریک به‌دست می‌دهد. اگر توجه کنیم که در حالتی که مورد



شکل ۱۹.۱۶ دی‌الکتریک واقع بین دو صفحه با بارهای ناهمنام. بارهای روی صفحات بارهای آزاد و بارهای روی دی‌الکتریک بارهای قطبش‌اند.

بررسی ماست \mathbf{E} و \mathbf{D} بردارهای همراستا هستند، نتیجهٔ بالا ایجاب می‌کند که میدان برداری جدیدی، به نام جابجایی الکتریکی، با رابطهٔ زیر تعریف کنیم

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (12.16)$$

بدیهی است که \mathbf{D} بر حسب Cm^{-2} بیان می‌شود زیرا دو جملهٔ سمت راست معادلهٔ (۱۲.۱۶) دارای همین یکاها هستند. در حالت خاصی که در نظر گرفته‌ایم، به دست می‌آید $\mathbf{D} = \sigma_{\text{آزاد}}$ ، یعنی بارهای آزاد در واحد سطح رسانا برابرند با جابجایی الکتریکی در رسانا. این نتیجه بسیار کلی است و می‌توان آن را در مورد هر رسانا و به هر شکل ممکن دیگر به کار برد. از این رو مؤلفهٔ D در امتداد عمود بر سطح رسانایی که در دی‌الکتریک قرار گرفته است، چگالی سطحی بار دوی (سانا) را به دست می‌دهد، یعنی

$$\sigma_{\text{آزاد}} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_N$$

در صورتی که مؤلفهٔ عمودی $\epsilon_0 \mathbf{E}$ ، با در نظر گرفتن عمل خنثی سازی ناشی از بارهای سطح دی‌الکتریک، بار مؤثر یا خالص را به دست می‌دهد. به گفتهٔ دیگر $\sigma = \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N$ است. در این صورت بار کل روی رسانا برابر است با

$$q_{\text{آزاد}} = \oint_S \sigma_{\text{آزاد}} dS = \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_N dS = \Phi_D \quad (13.16)$$

با تحلیلی دقیقتر که از ذکر آن در اینجا صرف نظر می‌کنیم، ثابت می‌کنند که شار بردار \mathbf{D} از هر سطح بسته برابر است با کل بار «آزاد» خالص در داخل سطح، به استثنای بارهای ناشی از قطبش محیط. در نتیجه معادلهٔ (۱۳.۱۶) به طور کلی در مورد هر سطح بسته‌ای معتبر است.

در مواردی که معادلهٔ (۱۵.۱۶) برقرار باشد، می‌توان نوشت

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (14.16)$$

در این رابطه ضریب

$$\epsilon = \frac{D}{E} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \quad (15.16)$$

را گذردهی محیط می‌نامند و بر حسب یکاهای ϵ_0 ، یعنی $\text{C}^2 \text{s}^2 \text{kg}^{-1} \text{m}^{-3}$ بیان می‌کنند. گذردهی نسبی با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e \quad (16.16)$$

که عددی مطلق و مستقل از دستگاه یکاها است. گذردهی نسبی را ثابت دی‌الکتریک نیز می‌نامند. این کمیت در بیشتر مواد بزرگتر از یک است.

هر گاه رابطه $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ در محیطی صادق باشد، معادله (۱۳.۱۶) را می‌توان به صورت $q_{\text{آزاد}} = \oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS$ نوشت. اگر محیط همگن و در نتیجه ϵ ثابت باشد، به دست می‌آید

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS = \frac{q_{\text{آزاد}}}{\epsilon} \quad (۱۷.۱۶)$$

از مقایسه معادله (۱۷.۱۶) با معادله (۳.۱۶) مشاهده می‌شود که اگر تنها بارهای آزاد را در نظر بگیریم، اثر دی‌الکتریک بر میدان الکتریکی \mathbf{E} ، نشان دادن ϵ به جای ϵ_0 است. در نتیجه میدان و پتانسیل الکتریکی بار نقطه‌ای واقع در یک دی‌الکتریک برابر است با

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{u}_r \quad \text{و} \quad V = \frac{q}{4\pi\epsilon r} \quad (۱۸.۱۶)$$

در این صورت بزرگی نیروی برهم‌کنش بین دو بار نقطه‌ای جای داده شده در یک دی‌الکتریک برابر است با

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2} \quad (۱۹.۱۶)$$

چون معمولاً ϵ بزرگتر از ϵ_0 است، حضور دی‌الکتریک، به دلیل استتار ناشی از قطبش مولکول‌های دی‌الکتریک، به‌طور مؤثر از شدت برهم‌کنش می‌کاهد.

۷.۱۶ محاسبه پذیرفتاری الکتریکی

روشن است که پذیرفتاری الکتریکی χ_e که پاسخ محیط را به میدان الکتریکی خارجی بیان می‌کند، به‌خواص اتمها و مولکول‌های محیط بستگی دارد. در این بخش، به‌اختصار توضیح می‌دهیم که چگونه این کمیت، که سرشت ماکروسکوپی دارد، به‌خواص اتمی محیط وابسته است.

قبلاً توضیح دادیم که اگر اتمی در میدان الکتریکی قرار گیرد به‌سبب جابجایی نسبی بارهای مثبت و منفی آن قطبیده می‌شود. اگر \mathbf{p} گشتاور دوقطبی الکتریکی القایی در اتم به‌وسیله میدان خارجی \mathbf{E} باشد، می‌توان فرض کرد که \mathbf{p} با \mathbf{E} متناسب است، نتیجه‌ای که تجربه نیز آن را تأیید می‌کند، و بنابراین

$$\mathbf{p} = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (۲۰.۱۶)$$

α ثابتی است مشخص هر اتم که آن را قطبش پذیر می‌نامند و برحسب m^3 بیان می‌کنند. ثابت ϵ_0 را جهت سهولت صریحاً در معادله وارد کرده‌ایم. اگر n تعداد اتمها یا مولکول‌های موجود در واحد حجم باشد، قطبش محیط برابر می‌شود با $\mathbf{P} = n\mathbf{p} = n\alpha \epsilon_0 \mathbf{E}$. مقایسه این رابطه با معادله (۱۵.۱۶) که پذیرفتاری الکتریکی ماده را تعریف

می کند * نشان می دهد که

$$\chi_e = n\alpha$$

به این ترتیب محاسبه پذیرفتاری الکتریکی به محاسبه قطبش پذیری اتمها یا مولکولهای جسم منجر می شود. بدین مناسبت باید اثر میدان خارجی را روی حرکت الکترونها تعیین کرد، و این به نوبه خود مستلزم داشتن اطلاعاتی دقیق درباره حرکت الکترونها در اتم است. حرکت الکترونها از قوانین مکانیک کوانتومی پیروی می کند و محاسبه اثر اختلالی میدان خارجی از سطح این کتاب فراتر می رود. بنابراین در اینجا با جدا کردن اثر مربوط به مواد غیرقطبی از مواد قطبی، تنها به ذکر نتایج اصلی اکتفا می کنیم.

الف) اثر واپیچش وقتی مولکولهای جسم دارای گشتاور دو قطبی الکتریکی دایمی نیستند، قطبش منحصرراً از اثر واپیچش مدار الکترونها به وسیله میدان الکتریکی ناشی می شود. این اثر را می توان همچون جابجایی مرکز توزیع بارهای الکترونی نسبت به هسته توصیف کرد. بدین طریق دو قطبی الکتریکی القایی به وجود می آید که در اتمها و بیشتر مولکولها با میدان الکتریکی اعمال شده موازی است.

هر اتم (یا مولکول) دارای مجموعه ای مشخص از بسامدهای $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ است که با بسامدهای تابش الکترومغناطیسی که آن ماده می تواند گسیل کند یا درآشامد متناظرند. این بسامدها بیناب الکترومغناطیسی جسم را تشکیل می دهند. قطبش پذیری اتمی در میدان الکتریکی ثابت، که قطبش پذیری ایستا نام دارد، با رابطه زیر داده می شود

$$\alpha = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2} \quad (21.16)$$

که در آن ω_i مربوط به هر یک از بسامدهای بیناب الکترومغناطیسی جسم است، و عمل جمع روی تمام بسامدها انجام می شود. کمیتهایی را که با f_i نشان داده ایم نیروهای نوسانگر جسم می نامند. نیروهای نوسانگر همگی مثبت و از یک کرچکترند. این نیروها سهم نسبی هر یک از بسامدهای بیناب را در قطبش پذیری اتم نشان می دهند و در رابطه $\sum_i f_i = 1$ صدق می کنند. سایر کمیتهای معادله (21.16) معنای عادی خود را دارند.

شاید برای دانشجو تعجب آور باشد که ببیند بسامدی مانند ω_i به اثر حاصل از یک میدان ایستا وابسته است. با این همه می توان وجود آن را، همچنانکه مثال 11.16 نشان می دهد، با استفاده از یک مدل پدیده شناختی ساده توجیه کرد.

* به طور دقیقتر، معادله (20.16) را برای اتم یا مولکولی نوشتیم که منزوی نیست و در یک محیط مادی جای دارد، میدان الکتریکی که در سمت راست معادله ظاهر می شود باید میدان الکتریکی برآیند در محیط، منهای میدان الکتریکی القا شده در خود اتم باشد. با وارد کردن این تصحیح، رابطه بین χ_e و α به صورت $\chi_e = n\alpha / (-n\alpha/3)$ درمی آید. با وجود این در بیشتر مواد (عمدتاً گازها) رابطه $\chi_e = n\alpha$ از تقریب خوبی برخوردار است.

با استفاده از رابطه $\chi_e = n\alpha$ به دست می آید که پذیرفتاری الکتریکی ایستا برابر است با

$$\chi_e = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2} = 3.19 \times 10^3 n \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2} \quad (22.16)$$

این رابطه χ_e ، ویژگی ما کروسکوپیک ماده، را به ویژگیهای اتمی آن n ، ω_i و f_i مربوط می کند. اکنون بینیم نتایج ما تا چقدر با آزمایش سازگار است. اگر تابش اتم در ناحیه مرئی باشد، بسامدهای ω_i از مرتبه 5×10^{15} Hz است، به گونه ای که جمع معادله (22.16) از مرتبه 10^{-32} می شود. از طرف دیگر، n برای بیشتر جامدات و آبگونها از مرتبه 10^{28} اتم در متر مکعب و برای گازها در شرایط متعارفی در حدود 10^{25} اتم در متر مکعب است. در نتیجه معادله (22.16) نشان می دهد که χ_e ، پذیرفتاری الکتریکی ایستای مواد غیر قطبی که در ناحیه مرئی تابش می کنند برای جامدات از مرتبه 10^0 (یا یک) و برای گازها از مرتبه 10^{-3} است. چون برآوردهای ما بسیار تقریبی اند نباید در انتظار تطبیق دقیق با نتایج تجربی باشیم. با این حال مقایسه آنها با مقادیر تجربی پذیرفتاری الکتریکی ایستای بعضی مواد، که در جدول ۱۰۱۶ آمده اند، توافقی در حدود دقت را نشان می دهد.

بحث پیش تنها در مورد میدانهای ایستا معتبر است. اگر میدان به زمان بستگی داشته باشد، باید نتیجه دیگری برای قطبش پذیری اتمی، که در این صورت آن را قطبش پذیری دینامیک می نامند، انتظار داشت، زیرا واپیچش حرکت الکترونها بر اثر میدان وابسته به زمان قطعاً با آنچه از میدان ایستا به وجود می آید متفاوت است. فرض کنید میدان الکتریکی با بسامد معین ω نوسان می کند. این میدان نوسان کننده با حرکت طبیعی الکترونها ترکیب و موجب می شود یک اختلال نوسانی مشابه با نوسانهای واداشته، که در بخش ۱۳.۱۲ بحث کردیم به وجود آید. اگر میرایی را در نظر نگیریم، نتیجه محاسبه، کسه به کمک روشهای مکانیک کوانتسومی انجام می شود پذیرفتاری الکتریکی دینامیک را به صورت زیر به دست می دهد

$$\chi_e = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \quad (23.16)$$

در این رابطه، تمام کمیتها همان معانی را دارند که قبلاً بیان شد. توجیه پدیده شناختی ساده این نتیجه در مثال ۱۱.۱۶ داده شده است. یادآوری می کنیم که اگر $\omega = 0$ باشد نتیجه دینامیک (23.16) به حالت ایستای معادله (22.16) تحویل می شود.

ثابت دی الکتریک یا گذردهی نسبی محیط، با استفاده از معادله (23.16)، در حالت دینامیک برابر است با

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = 1 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \quad (24.16)$$

اگر نمودار ϵ_r را بر حسب ω رسم کنیم، می بینیم که به ازای هر یک از بسامدهای مشخص

جدول ۱۰۱۶ پذیرفتاری الکتریکی در دمای اتاق

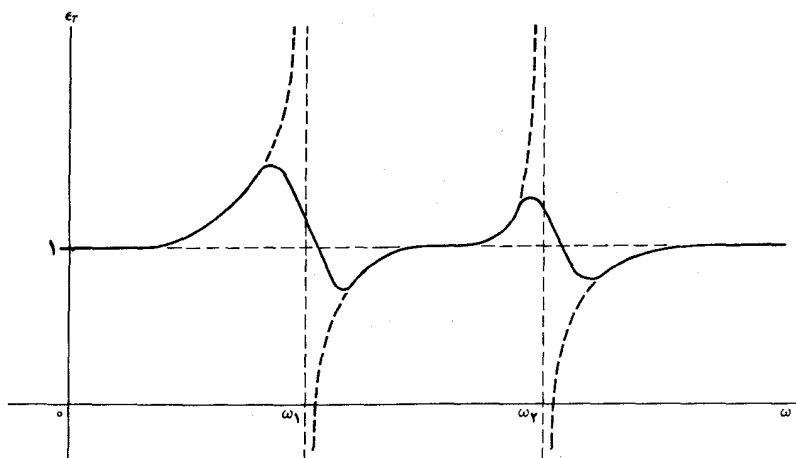
X_e	ماده	X_e	ماده
	گازها*		جامدات
5.0×10^{-4}	هیدروژن	۵	میکا
0.6×10^{-4}	هلیوم	۶	سفال
5.5×10^{-4}	ازت	۸	شیشه
5.0×10^{-4}	اکسیژن	۴۷	باکلیت
5.2×10^{-4}	آرگون		آبگونها
9.2×10^{-4}	گاز کربنیک	۱۰۱	روغن
7.0×10^{-3}	بخار آب	۱۰۲	تربانین
5.4×10^{-4}	هوا	۱۰۸۴	بنزین
5.5×10^{-2}	هوا (درفشار ۱۰۰ atm)	۲۴	الکل ایتلیک
		۷۸	آب

* در فشار يك اتمسفر و دمای 20°C .

ω گذردهی نسبی ϵ_r بینهایت می‌شود. و این برخلاف آن چیزی است که تجربه نشان می‌دهد. این نتیجه غیر فیزیکی از آنجا ناشی می‌شود که ما در جریان محاسبه پذیرفتاری دینامیک جمله میرایی را نادیده گرفتیم. این میرایی از نوع میرایی ناشی از جابجایی الکترونها در شار و شکسان نیست، بلکه منشأ کاملاً متفاوتی دارد. این میرایی به اتلاف انرژی الکترونها به صورت تابش بر اثر نوسانهای واداشته‌شان مربوط می‌شود. (این موضوع را در بخش ۴۰۱۹ توضیح خواهیم داد.)

تغییرات مشاهده شده ϵ_r بر حسب ω در شکل ۲۰۰۱۶ نشان داده شده است. شکل منحنی به ازای بسامدهای مشخص $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ هر ماده تکرار می‌شود. این تغییرات تأثیر عمیقی بر رفتار ایتلیکی و الکتریکی ماده دارد.

(ب) مولکولهای دارنده گشتاور دو قطبی دایمی. قطبش پذیریهایی که با معادله‌های (۲۲۰۱۶) و (۲۳۰۱۶) به دست آمدند «القایی» اند؛ زیرا از واپیچش حرکت الکترونها توسط میدان خارجی نتیجه می‌شوند. ولی هنگامی که دو قطبی الکتریکی دایمی وجود دارد اثر دیگری وارد عمل می‌شود. يك گاز قطبی را در نظر می‌گیریم که مولکولهای آن دارای

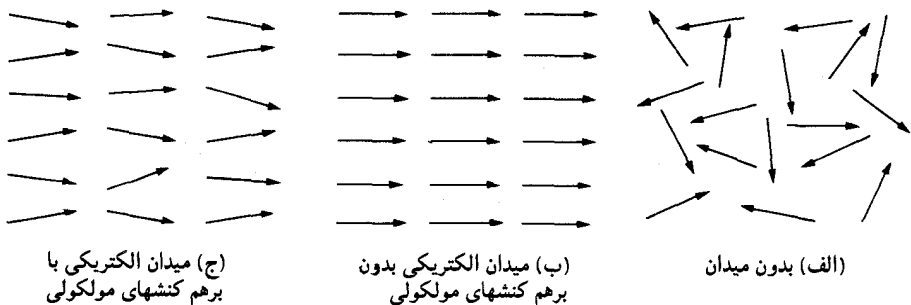


شکل ۲۰.۱۶ تغییرات گذردهی نسبی برحسب بسامد میدان الکتریکی.

گشتاور دو قطبی دائمی p_0 اند. در غیاب هر میدان الکتریکی خارجی، توزیع این گشتاورهای دو قطبی کاتوره‌ای است و هیچگونه گشتاور دو قطبی ماکروسکوپیکی یا جمعی مشاهده نمی‌شود (شکل ۲۰.۱۶). در این هنگام اگر میدان الکتریکی ایستا اعمال شود این میدان می‌کوشد تمام دو قطبیهای الکتریکی را در راستای خود قرار دهد. اگر هیچ برهم-کنش مولکولای وجود نداشته باشد هم راستایی کامل است (شکل ۲۰.۱۶ ب). ولی بسرخوردهای مولکولای می‌کوشند مجدداً دو قطبیهای الکتریکی را به بسی نظمی سابق برگردانند. بی نظمی کامل نخواهد بود، زیرا میدان اعمال شده سمتگیری در خط میدان را در مقابل سمتگیری مخالف تقویت می‌کند (شکل ۲۰.۱۶ ج). از اینجا نتیجه می‌گیریم که مقدار میانگین مؤلفه موازی با میدان الکتریکی گشتاور دو قطبی الکتریکی یسک مولکول با رابطه زیر داده می‌شود

$$p_{ave} = \frac{p_0^2}{3kT} E \quad (25.16)$$

در این رابطه k ثابت بولتزمن است که در معادله (۶۰.۹) تعریف شده و T دمای مطلق گاز است. توجه کنید که با افزایش دما p_{ave} کاهش می‌یابد. وابستگی به دما از اینجا ناشی می‌شود که با افزایش دما آشفتگی مولکولها نیز زیاد می‌شود. هرچه مولکولها سریعتر حرکت کنند بیشتر می‌توانند اثر هم‌خط سازی میدان خارجی را محدودتر کنند. این امر موجب می‌شود تا از مقدار میانگین گشتاور دو قطبی در راستای میدان کاسته شود. مقایسه معادله (۲۵.۱۶) با معادله (۲۰.۱۶)، امکان می‌دهد قطبش پذیری میانگین یا مؤثر مولکول را به صورت $\alpha = p_0^2 / 3\epsilon_0 kT$ به دست آوریم، و اگر n مولکول در



شکل ۲۱.۱۶ سمتگیری دو قطبهای الکتریکی در میدان الکتریکی.

واحد حجم وجود داشته باشد، پذیرفتاری مؤثر $\chi_e = n\alpha$ به صورت زیر درمی آید

$$\chi_e = \frac{np^2}{3\epsilon_0 kT} \quad (26.16)$$

این رابطه به نام فرمول لانژون معروف است. گشتاور دو قطبی الکتریکی مولکول از مرتبه بار الکتریکی یک الکترون ($1.6 \times 10^{-19} \text{C}$) ضربدر ابعاد مولکول (10^{-10}m) یا حدود 10^{-30}Cm است (به جدول ۱۰.۱۴ مراجعه کنید). با قراردادن مقادیر سایر ثابتها در معادله (۲۶.۱۶) مشاهده می شود که در دمای اتاق ($T = 298 \text{K}$)، پذیرفتاری الکتریکی جسمی که از مولکولهای قطبی تشکیل شده است برای جامدات حدود 10^5 (یا یک) و برای گازها حدود 10^{-3} است، که با نتایج به دست آمده برای بیشتر گازهای قطبی سازگار است.

از فرمول (۲۶.۱۶) مشاهده می شود که پذیرفتاری الکتریکی ناشی از سمتگیری مولکولهای دارنده گشتاور دو قطبی دایمی متناسب است با عکس دمای مطلق آنها، در صورتی که پذیرفتاری الکتریکی القایی ناشی از واپنجش حرکت الکترونها در اتمها یا مولکولها، بنا به معادله (۲۲.۱۶)، اساساً مستقل از دماست، بجز تغییر n با دما که از انبساط گرمایی ناشی می شود. این امر امکان می دهد که دو اثر به طور تجربی از یکدیگر جدا شوند. با اندازه گیری χ_e در دماهای مختلف، باید تابعی از دما به صورت زیر به دست آید

$$\chi_e = A + \frac{B}{T}$$

اگر میدان الکتریکی به زمان بستگی داشته باشد، نتیجه پیچیده تری به دست می آید. گروهی خاص از مواد به نام فرودالکترویدها در غیاب میدان الکتریکی خارجی قطبش دایمی از خود نشان می دهند. این امر میلی طبیعی دو قطبهای دایمی مولکولهای آنها را برای ردیف شدن نشان می دهد. این ردیف شدن احتمالاً نتیجه برهم کنشهای متقابل مولکولهای

است که میدانهای الکتریکی موضعی قوی تولید و ردیف‌سازی را تسهیل می‌کنند. از میان این مواد می‌توان از BaTiO_3 ، KNbO_3 و LiTaO_3 نام برد. یکی از معروفترین و قدیمترین فروالکتریکها نمک روشل یا $\text{NaK}(\text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6) \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ است.

مثال ۱۱۰۱۶ در مورد قطبش اتم بر اثر میدان الکتریکی خارجی بحث کنید.

حل: در این مثال سعی می‌کنیم با به کار بردن یک مدل خیلی ساده شده و پدیده شناختی، اثر ناشی از میدان الکتریکی خارجی را روی حرکت الکترونها در اتم بررسی کنیم. فرض کنید هنگامی که مرکز حرکت الکترونها به اندازه x نسبت به هسته جا بجا شود، نیروی میانگین $-kx$ بر الکترون اثر کند و بکوشد آن را به وضع طبیعی خود برگرداند. ترازمندی ایجاب می‌کند که این نیرو، $-eE$ یا نیروی ناشی از میدان خارجی را خنثی کند. در نتیجه داریم $-kx - eE = 0$ و یا $x = -eE/k$. علامت منفی نشان می‌دهد که مدار الکترون در سوی مخالف میدان الکتریکی اعمال شده جا بجا می‌شود. گشتاور دوقطبی الکتریکی القایی در اتم بر اثر اختلال در حرکت الکترونها برابر است با $p = -ex = (e^2/k)E$ ، بنابراین دارای سوی موافق با میدان الکتریکی است. با وابسته کردن بسامد ω به ثابت k ، مطابق معادله (۶۰۱۲)، یعنی $k = m_e \omega^2$ ، می‌توان رابطه فوق را به صورت کمی متفاوت تر درآورد؛ در این صورت رابطه برداری \mathbf{p} به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{p} = \frac{e^2}{m_e \omega^2} \mathbf{E}$$

از مقایسه این رابطه با تعریفی که از معادله (۲۰۱۶) برمی‌آید، برای قطبش پذیری اتمی این مدل ساده شده، نتیجه می‌شود

$$\alpha = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2}$$

با استفاده از رابطه $\chi_e = n\alpha$ ، برای قطبش پذیری الکتریکی ایستا به دست می‌آید

$$\chi_e = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2} = (3 \times 10^3 \times 10^3) \frac{n}{\omega^2} \quad (27.16)$$

اگر بخواهیم این مدل معنای فیزیکی پیدا کند، باید بسامد ω با یکی از خواص اتمی منطبق باشد. اگر میدان E حذف شود، با استفاده از مطالب فصل ۱۲، می‌توان گفت که نیروی بازگرداننده $-kx$ نوسانی به بسامد ω روی حرکت طبیعی الکترونها اضافه می‌کند. بعداً، در فصل ۱۹، ثابت خواهیم کرد که یک بار الکتریکی نوسان‌کننده انرژی تابش می‌کند. بنابراین ω باید با بسامد تابش گسیلیده از اتم یکی باشد. در این صورت، اگر بیناب ماده تنها شامل بسامد ω باشد، مدل اختیار شده اساساً با معادله (۲۱۰۱۶) مطابقت دارد. اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که میدان تابع زمان است و میدان اعمال شده با

زمان مطابق رابطه $E = E_0 \cos \omega t$ تغيير می کند. آنگاه قيسول اين فرض که اختلال نوسانی با حرکت طبيعي الکترون ترکیب می شود، منطقی است و معادله حرکت به صورت زیر است

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - eE_0 \cos \omega t \quad (28.16)$$

در این رابطه آخرين جمله سمت راست نیروی مربوط به میدان نوسانی است. با قراردادن $k = m_e \omega_0^2$ ، معادله فوق را می شود چنین نوشت

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -\frac{eE_0}{m_e} \cos \omega t \quad (29.16)$$

این معادله شبیه به معادله (۵۶.۱۲)، برای نوسانهای واداشته نوسانگر میراست، ولی اختلاف اصلی در این است که در معادله (۲۹.۱۶) جمله میرایی وجود ندارد. اگر پاسخی به صورت $x = A \cos \omega t$ را بپذیریم با قرار دادن آن در معادله (۲۹.۱۶) برای A به دست می آید

$$A = -\frac{eE_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

چون $E = E_0 \cos \omega t$ ، در نتیجه

$$x = -\frac{e}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} E_0 \cos \omega t = -\frac{e}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} E$$

دوقطبی الکتريکی القایی برابر است با

$$p = -ex = \frac{e^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} E$$

در نتیجه قطبش پذیری دینامیک اتم عبارت می شود از

$$\alpha = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (30.16)$$

برای پیدا کردن پذیرفتاری دینامیک، مجدداً معادله $\chi_e = n\alpha$ را به کار می بریم، به دست می آید

$$\chi_{\text{دینامیک}} = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (31.16)$$

اگر در بیناب الکترومغناطیسی جسم تنها بسامد ω وجود داشته باشد، معادله فوق اساساً با معادله (۲۳.۱۶) یکی است. يك بار دیگر باید یادآوری کنیم که مدل پدیده شناختی

تقریبی ما نمی‌تواند نتایج دقیق به‌دست دهد. یکی از دلایل آن این است که، مانند مورد ایستا، تنها یک بسامد طبیعی یعنی ω برای جسم در نظر گرفتیم. دلیل دیگر اینکه ما این واقعیت را ندیده گرفتیم که حرکت الکترونها از قوانین مکانیک کوانتومی پیروی می‌کند و نه از قوانین مکانیک نیوتونی.

۸.۱۶ ظرفیت الکتریکی، خازنها

ثابت کردیم (بخش ۸.۱۴) که پتانسیل الکتریکی در سطح کره‌ای به شعاع R و بار الکتریکی Q برابر است با $V = Q / 4\pi\epsilon_0 R$. اگر کره را دی‌الکتریکی احاطه کند با تعویض جای ϵ_0 با ϵ داریم

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}$$

پس نسبت Q/V برای کره برابر است با $4\pi\epsilon R$ ، که کمیتی است ثابت و مستقل از بار Q . این امر قابل فهم است، زیرا اگر پتانسیل با بار تولیدکننده خود متناسب باشد، نسبت این دو باید ثابت بماند. بیان اخیر در مورد تمام رساناهای باردار به‌هر شکلی که باشند صادق است. بنا بر این ظرفیت الکتریکی رسانای منزوی به‌صورت نسبت بار الکتریکی بر پتانسیل آن تعریف می‌شود

$$C = \frac{Q}{V} \quad (۳۲.۱۶)$$

ظرفیت رسانای کروی، همچنانکه در بالا اشاره کردیم، برابر است با

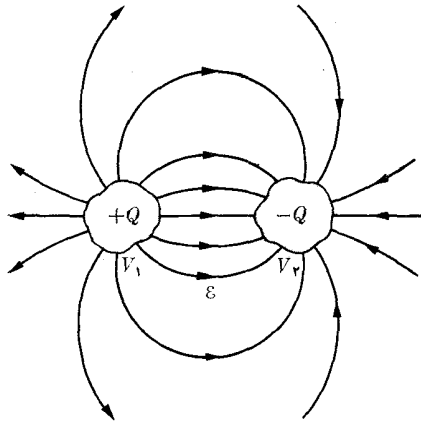
$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon R$$

اگر کره، به‌جای دی‌الکتریک درخلاء قرار گیرد، ظرفیت آن برابر می‌شود با $C = 4\pi\epsilon_0 R$. بدین طریق با احاطه شدن کره، یا به‌طور کلی هر رسانای دیگر، به‌وسیله دی‌الکتریک، ظرفیت الکتریکی آن در سازه ϵ/ϵ_0 ضرب می‌شود و افزایش می‌یابد. این امر از اثر استتاری بارهای مخالف ناشی می‌شود که در سطح دی‌الکتریک مجاور رسانا القا می‌شوند. این بارها از بار مؤثر رسانا می‌کاهند و به‌همان نسبت پتانسیل رسانا را کاهش می‌دهند.

ظرفیت یک رسانا بر حسب CV^{-1} بیان می‌شود. این یکا را به‌افتخار ما یکل فاراده، فاراد (با علامت اختصاری F) می‌نامند. فاراد ظرفیت یک رسانای منزوی است که هر گاه به آن یک کولن بار الکتریکی بدهیم پتانسیلش برابر یک ولت می‌شود. فاراد بر حسب یکاهای اصلی برابر است با

$$F = CV^{-1} = m^{-2} kg^{-1} s^2 C^2$$

مفهوم ظرفیت الکتریکی را می‌توان به یک دستگاه رسانا نیز تعمیم داد. دو رسانا با بار الکتریکی $+Q$ و $-Q$ را در نظر می‌گیریم (شکل ۲۲.۱۶). اگر V_+ و V_- پرتیب

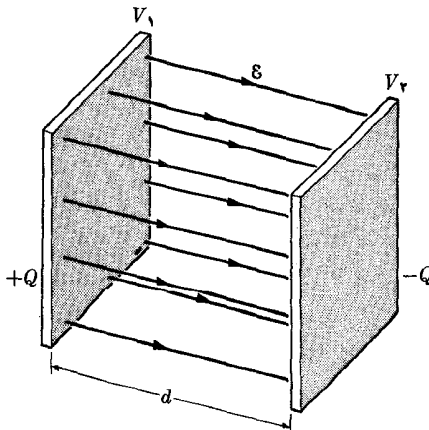


شکل ۲۲.۱۶ دستگاه دو رسانا با بارهای برابر ولی ناهمنام.

پتانسیل آنها و $V = V_1 - V_2$ اختلاف پتانسیل بین آنها باشد، ظرفیت این دستگاه با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{V} \quad (۳۳.۱۶)$$

این وسیله، خازن نام دارد. در مدارهای الکتریکی، از خازن به‌طور گسترده استفاده می‌کنند. یک خازن معمولی از دو صفحه رسانای موازی، به فاصله d تشکیل می‌شود که فضای بین آنها را با دی‌الکتریک پر کرده‌اند (شکل ۲۳.۱۶). میدان الکتریکی در فضای



شکل ۲۳.۱۶ خازن با صفحات موازی.

بین دو صفحه یکنواخت، و بنا به معادله (۳۱.۱۴)، برابر است با $E = V_1 - V_2/d$. اگر چگالی سطحی بار الکتریکی باشد، شدت میدان الکتریکی در فضای بین دو صفحه، مطابق مثال ۲.۱۶، مساوی $E = \sigma/\epsilon$ است. در این رابطه به دلیل وجود دی الکتریک، ϵ جانشین ϵ_0 شده است. در نتیجه داریم

$$V_1 - V_2 = Ed = \frac{\sigma d}{S\epsilon}$$

از طرف دیگر، اگر S مساحت صفحات فلزی باشد باید داشته باشیم $Q = \sigma S$. با قرار دادن این مقدار در معادله (۳۳.۱۶)، برای ظرفیت دستگاه به دست می آید

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \quad (34.16)$$

این رابطه راه عملی برای اندازه گیری گذردهی یا ثابت دی الکتریک يك جسم راهموار می سازد. ابتدا ظرفیت خازن را بدون آنکه هیچ ماده ای بیسن صفحات آن باشد اندازه می گیرند؛ به دست می آید

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

سپس بین صفحه ها را با ماده مورد مطالعه پر می کنند و از نو ظرفیت را اندازه می گیرند، که مقدار آن از رابطه (۳۴.۱۶) به دست می آید. در این صورت داریم

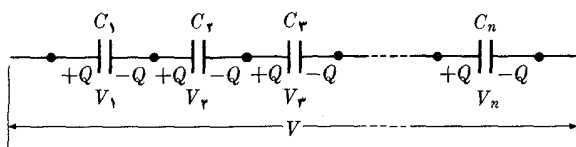
$$\frac{C}{C_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r$$

بدین طریق نسبت دو ظرفیت، گذردهی یا ثابت دی الکتریک نسبی ماده بین دو صفحه خازن را به دست می دهد.

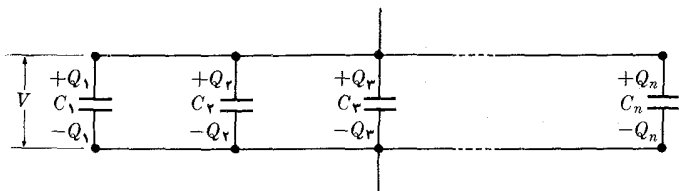
مثال ۱۲.۱۶ درباره به هم بستن خازن ها بحث کنید.

حل: خازن ها را می توان به دو طریق به هم مربوط ساخت: به صورت متوالی و به صورت موازی. در به هم بستن متوالی (شکل ۲۴.۱۶ الف) صفحه منفی يك خازن به صفحه مثبت خازن بعدی بسته می شود و به همین ترتیب. در نتیجه صفحات تمام خازن ها بارهای مساوی مثبت یا منفی پیدا می کنند. اختلاف پتانسیل بین دو صفحه خازن ها را $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ می نامیم، اگر $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ به ترتیب ظرفیت هر يك از این خازن ها باشند داریم

$$V_1 = \frac{Q}{C_1}, V_2 = \frac{Q}{C_2}, \dots, V_n = \frac{Q}{C_n}$$



(الف)



(ب)

شکل ۲۴.۱۶ به هم بستن متوالی و موازی خازنها.

در نتیجه اختلاف پتانسیل کل برابر است با

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) Q$$

دستگاه را می توان معادل يك خازن تنها در نظر گرفت که ظرفیت آن در رابطه $V = Q/C$ صدق می کند. بنابراین داریم

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (۳۵.۱۶)$$

این رابطه ظرفیت معادل چند خازن را که به طور متوالی به هم بسته شده باشند به دست می دهد.

در به هم بستن خازنها به طور موازی تمام صفحات مثبت را به يك نقطه و تمام صفحات منفی را به نقطه دیگر وصل می کنند، به گونه ای که اختلاف پتانسیل بین صفحه های تمام خازنها یکسان و برابر V است. در نتیجه، اگر Q_1, Q_2, \dots, Q_n بار الکتریکی این خازنها باشند داریم $Q_n = C_n V, \dots, Q_2 = C_2 V, Q_1 = C_1 V$ بار کل دستگاه برابر می شود با

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) V$$

بنابراین دستگاه خازنها را می توان معادل يك خازن در نظر گرفت که ظرفیت آن در رابطه

$Q = CV$ صدق می کند. در نتیجه

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (۳۶.۱۶)$$

این رابطه ظرفیت معادل چند خازن را که به طور موازی بسته شده باشند به دست می دهد.

۹.۱۶ انرژی میدان الکتریکی

باردار کردن رسانا مستلزم صرف مقداری انرژی است، زیرا برای آوردن بار اضافی روی رسانا، باید کاری برای غلبه بر نیروی دافعه بارهای موجود قبلی انجام گیرد. این کار موجب افزایش انرژی رسانا می شود. به عنوان مثال رسانایی با ظرفیت C و بار الکتریکی q را در نظر می گیریم، پتانسیل این رسانا برابر $V = q/C$ است. اگر بار dq را از بینهایت بیاوریم و روی رسانا قرار دهیم، بنا به معادله (۳۷.۱۴)، کار انجام یافته برابر است با $dW = Vdq$. این کار مساوی dE_E ، افزایش انرژی رساناست. بنا بر این با استفاده از مقدار V ، داریم

$$dE_E = q \frac{dq}{C}$$

وقتی مقدار بار الکتریکی رسانا از صفر به Q می رسد افزایش کل انرژی آن (کار انجام یافته در طول این فرایند) مساوی است با

$$E_E = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C} \quad (۳۷.۱۶)$$

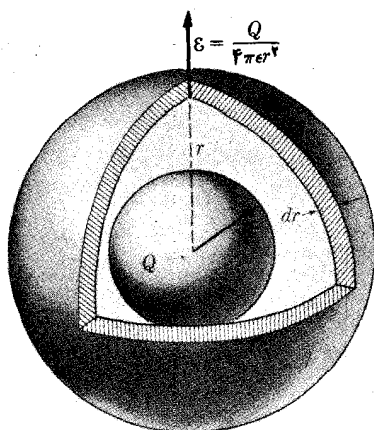
در مورد رسانای کروی $C = 4\pi\epsilon R$ است، و انرژی برابر می شود با

$$E_E = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon R} \right) \quad (۳۸.۱۶)$$

این رابطه را می توان به صورت خیلی جالبی با میدان الکتریکی حاصل از کره پیوند داد. میدان الکتریکی ناشی از یک رسانای کروی در نقطه ای به فاصله r از آن، که r بزرگتر از شعاع کره است، برابر است با

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

انتگرال E^2 را روی تمام حجم خارج از کره حساب می کنیم. برای به دست آوردن جزء حجم انتگرال، فضای خارج را به پوسته های کروی به شعاع r و ضخامت dr تقسیم می کنیم (شکل ۲۵.۱۶). مساحت هر پوسته برابر است با $4\pi r^2$ و در نتیجه حجم آن برابر می شود با



شکل ۲۵.۱۶

$$dv = \text{مساحت} \times \text{ضخامت} = 4\pi r^2 dr$$

بنابراین داریم

$$\int_R^\infty E^2 dv = \int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \right)^2 (4\pi r^2 dr) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon^2} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon^2 R}$$

از مقایسه این رابطه با معادله (۳۸.۱۶) می‌توان انرژی رسانای کروی باردار را به صورت زیر نوشت

$$E_E = \frac{1}{2} \epsilon \int_R^\infty E^2 dv$$

محاسبه ریاضی کلی‌تر نشان می‌دهد که این نتیجه اعتبار عام دارد و انرژی لازم برای جمع‌آوری یک دستگاه از بارها را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$E_E = \frac{1}{2} \epsilon \int_{\text{تمام فضا}} E^2 dv \quad (39.16)$$

این رابطه تعبیر فیزیکی مهمی دارد. گوییم انرژی که برای گردآوردن بارها صرف شده در فضای خارج ذخیره شده است، به گونه‌ای که سهم جزء حجم dv از این انرژی برابر $(1/2)\epsilon E^2 dv$ است. بنابراین انرژی در واحد حجم، یا E_E ، چگالی انرژی «ذخیره شده» در میدان الکتریکی، برابر می‌شود با

$$E_E = \frac{1}{4} \epsilon E^2 \quad (۴۰.۱۶)$$

این تعبیر از توزیع انرژی دستگاه ذرات بار، یعنی توزیع انرژی در تمام فضایی که میدان الکتریکی حضور دارد، برای بحث پیرامون بسیاری از فرایندها مفید است.

مثال ۱۳.۱۶ انرژی لازم برای به وجود آوردن یک توزیع بار یکنواخت کروی در تمام حجم یک کره را حساب کنید

حل: شعاع کره را R و باری را ρ در نظر بگیرید. به طور یکنواخت در تمام حجم کره توزیع شده است Q می نامیم (شکل ۲۶.۱۶). حجم کره را به پوسته های کروی خیلی نازک که شعاع آنها از صفر تا R افزایش می یابد تقسیم می کنیم. می توان توزیع کروی بار الکتریکی را همانند ساخت یک پیاز، با افزایش پیاپی پوسته های کروی تا وصول به شکل نهایی آن، در نظر گرفت. در این صورت برای محاسبه انرژی بار کروی، باید تمام انرژیهای مصرف شده برای افزودن یکایک این پوسته ها را باهم جمع کرد.

چگالی بار در کره برابر است با

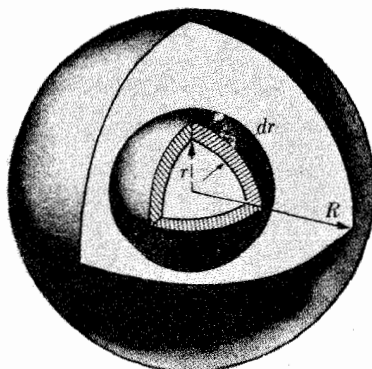
$$\rho = \frac{Q}{\left(\frac{4}{3}\right)\pi R^3}$$

q بار الکتریکی کره ای به شعاع r برابر می شود با

$$q = \rho \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{Q r^3}{R^3} \quad (۴۱.۱۶)$$

و پتانسیل الکتریکی در سطح این کره برابر است با

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q r^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$



شکل ۲۶.۱۶

برای افزایش شعاع کره به اندازه dr ، باید یک پوستهٔ کروی با بار dq به آن افزوده شود. بار dq با دیفرانسیل گیری از معادله (۳۱.۱۶) به دست می آید

$$dq = \frac{3Qr^2}{R^3} = dr$$

انرژی لازم برای افزودن این بار به کره برابر است با

$$dE_E = V dq = \frac{3Q^2 r^4}{4\pi\epsilon_0 R^6} dr$$

در این صورت انرژی کل لازم برای رساندن بار الکتریکی کره به مقدار نهایی آن، برابر است با

$$E_E = \int_0^Q V dq = \int_0^R \frac{3Q^2 r^4}{4\pi\epsilon_0 R^6} dr = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^6} \int_0^R r^4 dr$$

پس از انتگرال گیری به دست می آید

$$E_E = \frac{3}{5} \left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right) \quad (42.16)$$

این نتیجه با معادله (۳۸.۱۶) تفاوت دارد. دلیل این تفاوت آن است که در به دست آوردن معادله (۳۸.۱۶) فرض کردیم که بار الکتریکی روی کره ای به شعاع ثابت افزوده می شود، در صورتی که برای معادله (۴۲.۱۶) بارها در تمام حجم کره توزیع شده بودند و به صورت پوسته های پیاپی به هم افزوده می شدند تا شکل نهایی به دست آید. برعهدهٔ دانشجو می گذاریم تا تحقیق کند که در این مورد نیز معادله (۳۹.۱۶) برقرار است به شرطی که انرژی وابسته به میدان داخل کره را نیز به حساب آوریم.

یکی از کاربردهای بسیار جالب معادله (۴۲.۱۶) برآورد انرژی الکتریکی یا کولنی هسته ای با بار $Q = Ze$ است. در این حالت داریم

$$E_E = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (43.16)$$

ولی در هسته ای که از پروتونها و نوترونها تشکیل شده است توزیع حجمی بار الکتریکی یکساخت نیست؛ بارها تنها روی پروتونها متمرکزند. تحلیل دقیقتر برای انرژی هسته نتیجه ای مختصر متفاوت با معادله (۴۳.۱۶) به دست می دهد، که در آن $Z(Z-1)$ جانشین Z^2 شده است.

حل: شناخت ما از شکل هندسی الکترون خیلی کم است. آنچه در مورد الکترونها با اطمینان می توان گفت این است که الکترون ذره ای است باردار با بار الکتریکی e - . اکنون می خواهیم بزرگی ناحیه ای از فضا را که بار در آنجا متمرکز است، برآورد کنیم. برای سهولت محاسبه، الکترون را کوره ای به شعاع R در نظر می گیریم. با استفاده از روشهای فوق و قبول چند فرض در مورد چگونگی توزیع بار در حجم الکترون می توان انرژی الکتریکی آن را حساب کرد. به عنوان مثال، با فرض اینکه الکترون شبیه یک کره جامد به شعاع R و بار الکتریکی e - باشد، انرژی آن برابر می شود با

$$E_E = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

می توان این انرژی را با انرژی جرم سکون الکترون، یعنی $m_e c^2$ برابر گرفت، در نتیجه به دست می آید

$$m_e c^2 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{یا} \quad R = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{e^2}{m_e c^2} \quad (44.16)$$

این رابطه شعاع الکترون را با توجه به مدلی که به آن دادیم به دست می دهد. اگر فرض کنیم بار به جای توزیع در حجم الکترون، در سطح آن توزیع شده باشد، برای به دست آوردن انرژی باید از معادله (37.16) استفاده کرد. در این صورت رابطه ای که برای شعاع الکترون به دست می آید شبیه به معادله (44.16) خواهد بود، تنها سازه $3/5$ به $1/2$ تبدیل می شود. چون احتمال دارد الکترون به هیچکدام از این مدلها شباهت نداشته باشد، مطابق قرارداد برای شعاع الکترون مقدار زیر را پذیرفته اند

$$r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.8178 \times 10^{-15} \text{ m} \quad (45.16)$$

تکرار می کنیم که این شعاع را نباید به معنای دقیق هندسی در نظر گرفت بلکه آن را باید برآوردی از بزرگی ناحیه ای تصور کرد که الکترون در آنجا «متمرکز شده» است.

۱۰.۱۶ رسانندگی الکتریکی، قانون اهم

در سه بخش اخیر، جنبه هایی از رفتار ماده در مقابل تأثیر میدان الکتریکی مورد بحث قرار گرفت. این رفتار را با پذیرفتاری الکتریکی جسم مشخص کردیم. یک خاصیت مهم دیگر وابسته به حضور میدان الکتریکی خارجی نیز وجود دارد و آن عبارت است از رسانندگی که در این بخش آن را در رابطه با رسانایی فلزات بررسی می کنیم.

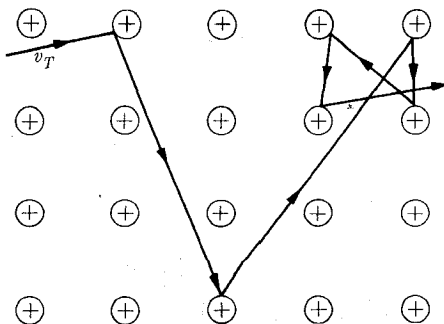
هنگامی که میدان الکتریکی به دی الکتریکی اثر می کند، دی الکتریک قطبیده می شود. ولی اگر میدان به ناحیه ای که در آنجا بارهای آزاد وجود دارند اعمال شود بارها را به حرکت درمی آورد و به جای قطبش محیط، جریان الکتریکی به وجود می آید. بارها به وسیله میدان شتاب می گیرند، بنابراین انرژی کسب می کنند. (این وضع در بخش ۹.۱۴ بررسی شد.)

وقتی در جسمی بارهای آزاد وجود دارند، مانند الکترونها در فلز، یونهای مثبت سازنده شبکه بلوری فلز با برهم کنش با الکترونها، مزاحم حرکت آنها می شوند. به عنوان مثال، مطابق شکل ۲۷.۱۶، فلزی را در نظر می گیریم که یونهای مثبت آن به طور منظم در سه بعد قرار گرفته اند. الکترونهاى آزاد در يك میدان الکتریکی که دارای همان تناوب شبکه است حرکت می کنند و در جریان حرکت به دفعات به وسیله این میدان پراکنده می شوند. برای توصیف این نوع حرکت الکترونها باید از روشهای مکانیک کوانتومی استفاده کرد. نظر به اینکه الکترونها در تمام جهات حرکت می کنند، جابجایی خالص بار، یعنی جریان الکتریکی وجود ندارد. ولی اگر میدان خارجی بر جسم اثر کند، يك حرکت رانشی به حرکت طبیعی ولی کاتوره ای الکترونها افزوده می شود و يك جریان الکتریکی به وجود می آید. قبول این فرض که شدت جریان با شدت میدان الکتریکی خارجی رابطه دارد و ارتباط آنها نتیجه مستقیم ساختار داخلی فلز است، طبیعی به نظر می رسد.

برای به دست آوردن نشانه ای از این ارتباط، ابتدا به نتایج تجربی برمی گردیم. یکی از قوانین فیزیک، و شاید یکی از آشنا ترین آنها برای دانشجو، قانون اهم است که بیان می کند برای يك رسانای فلزی در دمای ثابت، نسبت V اختلاف پتانسیل بین دو نقطه بر جریان الکتریکی I ، ثابت است. این ثابت را مقاومت الکتریکی بین آن دو نقطه رسانا می نامند و با R نشان می دهند. پس قانون اهم را می توان به صورت زیر نشان داد

$$\frac{V}{I} = R \quad \text{یا} \quad V = IR \quad (۲۶.۱۶)$$

این قانون که به وسیله گئورگت اهم (۱۱۶۶-۱۲۳۳/۱۷۸۷-۱۸۵۴) فیزیکدان آلمانی فرمول بندی شده است، در گستره وسیعی از مقادیر V و I و دمای رسانا، در مورد بسیاری از رساناها به نحو شگفت انگیزی صادق است. با این همه، تعدادی از مواد، بویژه نیمه رساناها از قانون اهم پیروی نمی کنند.



شکل ۲۷.۱۶ حرکت الکترون در داخل شبکه بلوری يك فلز. در این شکل v_d مربوط به سرعت گرهای حرکت الکترونهاست.

از معادله (۴۶.۱۶) پیدا است که R بر حسب ولت بر آمپر یا $\text{m}^2\text{kg}^{-1}\text{C}^{-2}$ بیان می شود. این یکا را اهم می نامند و با علامت اختصاری Ω نشان می دهند. در این صورت اهم مقاومت الکتریکی دوسر رسانایی است که وقتی اختلاف پتانسیل دوسر آن یک ولت باشد، جریانی برابر یک آمپر از آن عبور کند.

اکنون یک رسانای استوانه ای شکل به طول l و سطح مقطع S را در نظر می گیریم (شکل ۲۸.۱۶). جریان را می توان به صورت $I = jS$ نوشت که در آن j چگالی جریان است. میدان الکتریکی در طول رسانا برابر است با $E = V/l$ [به معادله (۳۵.۱۴) مراجعه کنید]. بنابراین معادله (۴۶.۱۶) را می توان به صورت $E l = R j S$ یا

$$j = \left(\frac{l}{RS}\right) E = \sigma E \quad (۴۷.۱۶)$$

نوشت. در این رابطه $\sigma = l/RS$ ثابت جدیدی به نام رسانندگی الکتریکی جسم است. رسانندگی الکتریکی بر حسب $\text{m}^{-1}\Omega^{-1}$ یا $\text{m}^{-1}\text{kg}^{-1}\text{s}^2\text{C}^2$ بیان می شود. رابطه بین R و σ را اغلب به صورت زیر می نویسند

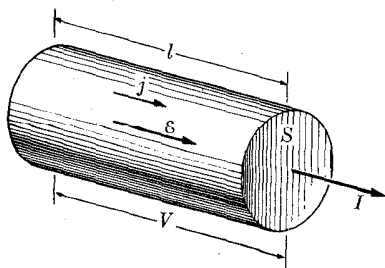
$$R = \frac{l}{\sigma S} \quad (۴۸.۱۶)$$

در جدول ۲۰.۱۶ رسانندگی الکتریکی چند ماده داده شده است.

معادله (۴۷.۱۶) رابطه ای است بین بزرگی بردارهای \mathbf{j} و \mathbf{E} . با فرض اینکه راستای آنها یکی باشد، وضعی که در بیشتر اجسام وجود دارد، می توان به جای معادله (۴۷.۱۶) رابطه برداری زیر را نوشت

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (۴۹.۱۶)$$

که صرفاً نگارشی دیگر از قانون اهم است. اگر معادله (۱۲.۱۵) را به خاطر داشته باشیم و در آن $e -$ را جانشین q کنیم به دست می آوریم $\mathbf{j} = -en\mathbf{v}_E$ که در آن n تعداد



شکل ۲۸.۱۶

جدول ۲۰۱۶ رسانندگی الکتریکی در دمای اتاق

$\sigma, \Omega^{-1}m^{-1}$	ماده	$\sigma, \Omega^{-1}m^{-1}$	ماده
	نیمه رساناها		فلزات
2.78×10^4	کربن	5.81×10^7	مس
2.72×10^{-2}	ژرمانیوم	6.14×10^7	نقره
1.96×10^{-5}	سیلیسیوم	3.954×10^7	آلومینیوم
	نارساناها	1.953×10^7	آهن
10^{-10} تا 10^{-14}	شیشه	1.982×10^7	تنگستن
$< 10^{-13}$	لوسیت		آلیاژها
10^{-11} تا 10^{-15}	میکا	2.727×10^6	منگنز
1.933×10^{-18}	کوارتز	2.704×10^6	کنستانتن
$< 10^{-13}$	تفلون	1.90×10^6	نیکل گرم
3.37×10^{-17}	پارافین		

الکترونها در واحد حجم و v_E سرعت رانۀ الکترونها در اثر میدان الکتریکی خارجی E است. بنا بر این داریم

$$v_E = -\frac{\sigma}{en} E \quad (50.16)$$

این معادله نشان می‌دهد که الکترونهاى رسانشى فلز بر اثر میدان الکتریکی خارجی به يك سرعت رانۀ ثابت می‌رسند. این نتیجه با نتیجه‌ای که در بحث حرکت یونها در داخل لوله تخلیه يك شتابدهنده در خلا (بخش ۹.۱۴) به دست آوردیم تفاوت دارد. در آنجا شتاب را برابر $a = -(e/m)E$ به دست آوردیم؛ سرعت حاصل از این شتاب برابر $v = -(e/m)Et$ است که به طور پیوسته با زمان افزایش پیدا می‌کند.

ولی این اولین باری نیست که با چنین وضعی مواجه می‌شویم. در سقوط آزاد در خلا نیز سرعت جسم، $v = gt$ ، به طور پیوسته با زمان افزایش پیدا می‌کند. ولی اگر جسم در شاره و شکسان سقوط کند، همچنانکه در بخش ۱۰.۷ بررسی شد، حرکت آن پس از مدتی یکنواخت می‌شود. در قیاس می‌توان اثر شبکه بلوری را با يك نیروی «و شکسان» مشابه

دانست؛ این نیرو هنگامی که حرکت طبیعی الکترونهاى رسانشى در اثر میدان الکتريکى خارجى آشفته مى شود، بر آنها اثر مى کند. ماهيت دقيق اين نيروى «وشکسان» به ديناميك حرکت الکترونها در داخل شبکه بلورى بستگى دارد، در اين مورد، در مثال ۱۵.۱۶، بنفصيل گفتگو خواهيم کرد.

برای حفظ جريان در رسانا بايد انرژی مصرف کرد. همچنين برای شتاب دادن به يونها در شتابدهنده يا لوله الکتروني (بخش ۹.۱۴) انرژی مصرف مى شود، ولي در اينجا اختلافی وجود دارد. در شتابدهنده، تمام انرژی صرف افزايش سرعت يونها مى شود. ولي در رسانا، به سبب برهم کش الکترونها و يونهای مثبت شبکه بلورى، انرژی الکترونها به شبکه انتقال مى يابد و موجب افزايش انرژی ارتعاشی آن مى شود. اين امر به بالا رفتن دمای جسم منجر مى شود که آن را اثر گرمایی جريان يا اثر ژول مى نامند.

می توان آنتگ انتقال انرژی به شبکه را باسانی بر آورد کرد. کار انجام شده روی الکترون در واحد زمان برابر است با $F \cdot v_E = -eE \cdot v_E$ [به معادله (۱۵.۸) مراجعه کنید] و کار انجام شده در واحد زمان و در واحد حجم (يا توان بر واحد حجم) برابر است با $p = n(-eE \cdot v_E)$. با استفاده از معادله های (۴۷.۱۶) و (۵۰.۱۶)، v_E را حذف می کنیم به دست می آید

$$p = \sigma E^2 = jE \quad (۵۱.۱۶)$$

يك بارديگر رسانای استوانه ای شکل ۲۸.۱۶ با حجم SI را در نظر می گیریم. توان لازم برای نگهداری جريان در اين رسانا برابر است با

$$P = (SI)p = (SI)(jE) = (jS)(EI)$$

ولي $jS = I$ و $EI = V$ است. بنابراین توان لازم برای نگهداری جريان در رسانا برابر مى شود با

$$P = VI \quad (۵۲.۱۶)$$

این معادله همان معادله (۴۳.۱۴) است که با روش کلی تر و مستقل از ماهیت فرایند رسانش به دست آوردیم. برای رساناهایی که از قانون اهم پیروی می کنند، $V = RI$ است، و معادله (۵۲.۱۶) را می توان به صورت زیر نوشت

$$P = RI^2 \quad (۵۳.۱۶)$$

بسیاری از مواد از قانون اهم پیروی نمی کنند و برای این مواد معادله (۵۳.۱۶) اعتبار ندارد، ولی معادله (۵۲.۱۶) اعتبار خود را حفظ می کند. رسانای دارای مقاومت را، که مقاومت هم نام دارد، با شکل ۲۹.۱۶ نشان می دهند.



شکل ۲۹.۱۶ نمایش نمادی مقاومت الکتریکی.

مثال ۱۵.۱۶ در باره حرکت الکترونهاى رسانشى يك فلز بحث كنيد.

حل: قبلا اشاره كرديم كه اثر برهم كنش بين شبكه بلورى و الکترونهاى رسانشى فلز را می توان از نظر پدیده شناختی با يك نیروی «وشكسان» نمایش داد. بافرض اینکه این نیرو همان نیرویی است كه برای حرکت در شاره (بخش ۱۰.۷) در نظر گرفتیم، یعنی $-k\mathbf{v}$ ، معادله حرکت الکترون در داخل فلز را می توان به صورت زیر نوشت

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - k\mathbf{v} \quad (54.16)$$

حد سرعت رانه، كه از قرارداد $d\mathbf{v}/dt = 0$ به دست می آید، برابر است با $\mathbf{v}_E = -e\mathbf{E}/k$. اگر این نتیجه را با معادله (۵۰.۱۶) مقایسه کنیم رسانندگی الکتریکی برابر می شود با $\sigma = ne^2/k$.

می توان با وارد کردن کمیتی به نام زمان واهلش این نتیجه را به گونه دیگری بیان کرد. فرض کنید بعد از اینکه الکترون به سرعت رانه حدى رسید یکباره میدان الکتریکی \mathbf{E} قطع شود. در این صورت معادله حرکت الکترون عبارت می شود از

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -k\mathbf{v}$$

جواب این معادله $\mathbf{v} = \mathbf{v}_E e^{-(k/m)t}$ است. دانشجو می تواند با قرارداد مستقیم این جواب در معادله یا با مراجعه به مسئله ۸۲.۷ درستی آن را تحقیق کند. بنا بر این زمانی كه لازم است تا سرعت رانه به يك e ام مقدار اولیه خود کاهش یابد برابر $\tau = m/k$ است. τ زمان واهلش حرکت الکترون است و مشابه زمانی است كه در مثال ۸.۷ برای حرکت يك جسم در داخل يك شاره وشكسان معرفی كرديم. در این صورت برای رسانندگی الکتریکی رابطه زیر به دست می آید

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e} \quad (55.16)$$

اگر σ معلوم باشد می توان τ را حساب کرد، و برعکس، زیرا n ، e و m_e کمیت های معلومی هستند. با فرض اینکه هر اتم يك الکترون رسانشى داشته باشد، می توان برای اغلب فلزات n را حدود 10^{28} الکترون در متر مکعب بر آورد کرد. با استفاده از مقادیر e و m_e ، و به ازای σ در حدود $10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$ ، زمان واهلش از مرتبه 10^{-14} s به دست می آید.

لازم به یادآوری است که تنها کاری که ما انجام دادیم طرح يك مدل پدیده‌شناختی برای به دست آوردن نتایج مورد نظر از قانون اهم بود؛ ولی این امر ما را واداشت تا کمیتی جدید به نام τ را وارد کنیم. برای «تیین» قانون اهم و رسانندگی الکتریکی در فلزات، باید τ را به دینامیک حرکت الکترون مربوط کرد. ولی همچنانکه قبلا اشاره کردیم، چون این حرکت مطابق قوانین مکانیک کوانتومی صورت می‌گیرد، هرگونه توضیح دیگری در این مورد را به بعد موکول می‌کنیم. (به فصل ۴ از جلد سوم این کتاب مراجعه کنید.)

با وجود این با بررسی مرتبه بزرگی کمیت‌هایی که در این مدل وارد می‌شوند می‌توان درستی آن را برآورد کرد. منطقی است قبول کنیم که زمان و اهلس از مرتبه زمان بین دو برخورد متوالی يك الکترون با یونهای شبکه بلوری است. ولی اگر l فاصله میانگین بین دویون و v میانگین سرعت الکترونها باشد، زمان برخورد را می‌توان به اندازه نسبت l/v برآورد کرد. برای بیشتر جامدات، l از مرتبه 10^{-9}m است. برای به دست آوردن v ، فرض کنید می‌توانیم رابطه (۵۹.۹) را که برای مولکولهای گازها پذیرفتیم به کار ببریم. در این صورت، در دمای اتاق، v در حدود 10^5ms^{-1} به دست می‌آید. از اینجا نتیجه می‌شود که τ حدود 10^{-14}s است. این نتیجه با برآوردهای قبلی که بر اساس معادله (۵۵.۱۶) و مقادیر تجربی σ به عمل آوردیم سازگار است.

مثال ۱۶.۱۶ در مورد به هم بستن مقاومتها بحث کنید.

حل: مقاومتها را می‌توان به دو صورت، مشابه با آنچه در مثال ۱۲.۱۶ در مورد خازنها ذکر کردیم، به هم بست؛ به صورت متوالی و به صورت موازی. در به هم بستن متوالی، (شکل ۳۰.۱۶ الف)، مقاومتها به گونه‌ای به هم دیگر بسته می‌شوند که جریان یکسان I از تمام آنها می‌گذرد. بنا به قانون اهم، افت پتانسیل در هر يك از مقاومتها برابر است با $V_1 = R_1 I$ ، $V_2 = R_2 I$ ، ...، $V_n = R_n I$. در نتیجه اختلاف پتانسیل کل برابر می‌شود با

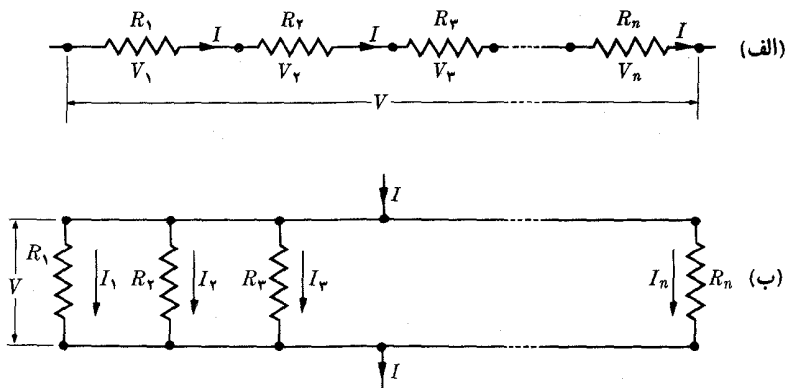
$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = (R_1 + R_2 + \dots + R_n)I$$

در عمل، به جای مجموعه این مقاومتها می‌توان تک مقاومت R را، مطابق رابطه $V = RI$ قرارداد. بنا بر این داریم

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (۵۶.۱۶)$$

معادله (۵۶.۱۶) مقاومت معادل چند مقاومت را که به صورت متوالی به هم بسته شده‌اند به دست می‌دهد.

در به هم بستن موازی، (شکل ۳۰.۱۶ ب)، مقاومتها به گونه‌ای به هم بسته می‌شوند که اختلاف پتانسیل V بین دوسر تمام مقاومتها یکی باشد. بنا به قانون اهم، جریانی که از



شکل ۳۰.۱۶ به هم بستن مقاومتها به صورت متوالی و موازی.

هر یک از مقاومتها می گذرد برابر است با $I_1 = V/R_1, I_2 = V/R_2, \dots, I_n = V/R_n$ و جریان کل I که از مجموعه مقاومتها می گذرد برابر است با

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) V$$

در عمل، مجموعه مقاومتها را می توان معادل یک مقاومت R در نظر گرفت که در رابطه $I = V/R$ صدق می کند. در نتیجه

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (57.16)$$

از این رابطه مقاومت معادل چند مقاومت که به طور موازی به هم بسته شده اند به دست می آید.

۱۱.۱۶ نیروی محرکه الکتریکی

فرض کنید که ذره ای بر اثر نیروی \mathbf{F} ، در مسیر L ، از نقطه A به نقطه B جابجا می شود. در فصل ۸ توضیح دادیم که در این مورد کار انجام شده به وسیله این نیرو برابر است با $W = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ ، که در آن شاخص L بدین معنی است که انتگرال باید در طول مسیر L گرفته شود و $d\mathbf{l}$ جزئی خطی از این مسیر است. همچنین ثابت کردیم که هرگاه نیرو پایستار باشد (یعنی انرژی پتانسیل مطابق رابطه $\mathbf{F} = -\text{grad } E_p$ با نیرو مرتبط باشد)، کار انجام شده به مسیر پیوسته شده بستگی ندارد، و داریم $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = E_{p,A} - E_{p,B}$. نتیجه مهم دیگر، که آن هم در فصل ۸ ذکر شد، این است که اگر مسیر بسته باشد، کار

نیروی پایستار برابر صفر است زیرا نقطه B بر نقطه A منطبق می‌شود، و در نتیجه $E_{p,A} = E_{p,B}$ است.

این نتایج را می‌توان در هر میدان برداری دیگری نیز، مانند میدان الکتریکی و مغناطیسی به کار بست. اگر میدان برداری را با \mathbf{V} نشان دهیم، انتگرال خطی میدان برداری \mathbf{V} از نقطه A تا نقطه B در طول مسیر L ، با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$V_{\text{خطی}} = \int_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} \quad (58.16)$$

معمولاً انتگرال خطی به مسیر بستگی دارد. اگر مسیری که روی آن انتگرال گرفته می‌شود خط بسته باشد انتگرال خطی را گردش میدان برداری می‌نامند. مسیر بسته را با دایره کوچکی روی علامت انتگرال نشان می‌دهند:

$$V = \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} \quad (59.16)$$

یک مورد مهم موردی است که بتوان میدان برداری \mathbf{V} را به صورت گرادیان یک تابع نشان داد. این همان وضعی است که در مورد نیروهای پایستار با آن برخورد کردیم، در نتیجه می‌توانیم بگوییم

اگر یک میدان برداری را بتوان به صورت گرادیان یک تابع نشان داد، انتگرال خطی میدان بین دو نقطه، به مسیری که این دو نقطه را بهم وصل می‌کند بستگی ندارد و گردش میدان روی هر مسیر بسته برابر صفر است.

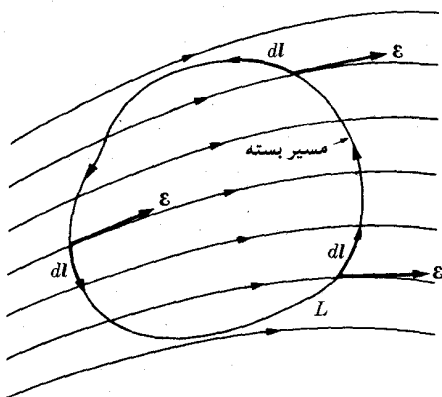
بتدریج که در این کتاب پیش می‌رویم، دانشجو درمی‌یابد که مفهوم انتگرال خطی و گردش میدان برداری در فسرمولبندی قوانین الکترومغناطیس بسیار مفیدند. اکنون این دو تعریف جدید را در مورد میدان الکتریکی به کار می‌بندیم.

چون میدان الکتریکی برابراست با نیروی وارد بر واحد بار، انتگرال خطی میدان الکتریکی، $\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ ، برابر می‌شود با کار انجام شده هنگام جا بجایی بار الکتریکی واحد روی مسیر L . اگر این مسیر بسته باشد (شکل ۳۱.۱۶) انتگرال خطی به گردش بردار میدان الکتریکی تبدیل می‌شود. در این صورت آن را نیروی محرکه الکتریکی وارد بر مسیر بسته می‌نامند. اگر نیروی محرکه الکتریکی را با V_E نشان دهیم، داریم

$$\text{emf} = V_E = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (60.16)$$

در نتیجه، نیروی محرکه الکتریکی وارد بر مسیر بسته برابر است با کار انجام شده برای جا بجایی بار الکتریکی واحد در طول این مسیر. (کلمه «نیرو» در اینجا گمراه کننده است زیرا منظور ما «انرژی» است، با این همه این عبارت مصطلح شده است.) طبیعی است که نیروی محرکه الکتریکی بر حسب ولت بیان شود.

اکنون یک مورد خاص، یعنی میدان الکتریکی ایستا را در نظر می‌گیریم. با توجه



شکل ۳۱.۱۶

به اینکه میدان الکتریکی ایستا با رابطه $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ به پتانسیل مربوط می‌شود می‌توان نوشت

$$\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_A - V_B \quad (۶۱.۱۶)$$

A و B دو نقطه‌ای هستند که خط L آنها را بهم وصل می‌کند. بنابراین انتگرال خطی میدان الکتریکی ایستا بین دو نقطه برابر است با اختلاف پتانسیل بین آن دو نقطه. اگر مسیر بسته باشد، نقطه‌های A و B برهم منطبق می‌شوند و از معادله (۶۱.۱۶) به دست می‌آید

$$V_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (۶۲.۱۶)$$

این معادله را می‌توان به شرح زیر بیان کرد

نیروی محرکه الکتریکی، یا گردش میدان الکتریکی ایستا در طول هر مسیر بسته‌ای برابر صفر است.

این سخن به معنی آن است که کار انجام شده به وسیله میدان ایستا برای جابجایی بار الکتریکی روی یک مسیر بسته برابر صفر است.

اگر میدان الکتریکی به یک رسانا اثر کند، می‌توان معادله (۶۱.۱۶) را با قانون اهم ترکیب کرد و معادله (۴۶.۱۶) را به صورت زیر نوشت

$$\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = RI \quad (۶۳.۱۶)$$

در اینجا L مسیری در طول رسانا و R مقاومت الکتریکی بین دو نقطه از رساناست که

مسیر L آنها را به هم مربوط می‌کند.

همچنانکه قبلاً متذکر شدیم، حفظ و نگهداری جریان بین دو نقطه از يك رسانا مستلزم فراهم کردن انرژی برای دستگاه به وسیله يك چشمه اختلاف پتانسیل است. اکنون این سؤال مطرح می‌شود که آیا می‌توان جریانی را در يك رسانای بسته یا مدار الکتریکی محفوظ نگه داشت یا نه. معادله (۶۳.۱۶)، که اساساً بقای انرژی در رسانا را بیان می‌کند، هنگامی که در مورد رسانای بسته به کار رود به صورت زیر نوشته می‌شود

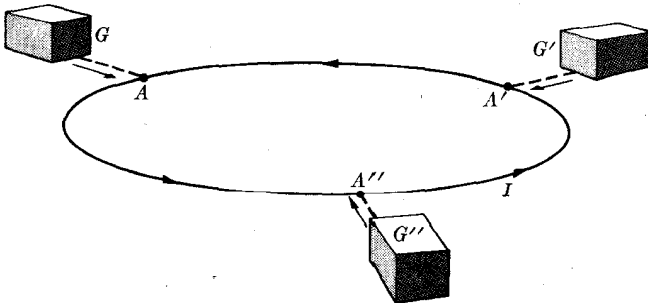
$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = RI \quad (۶۴.۱۶)$$

سمت چپ معادله نیروی محرکه الکتریکی وارد بر مدار و R مقاومت کل مدار بسته است. اگر رسانا در میدان الکتریکی ایستا قرار گیرد، در این صورت بنا به معادله (۶۲.۱۶)، نیروی محرکه الکتریکی برابر صفر است ($V_E = 0$) و از معادله (۶۴.۱۶) به دست می‌آید $I = 0$. به گفته دیگر

میدان الکتریکی ایستا نمی‌تواند در مدار بسته جریان الکتریکی برقرار کند.

دلیل این امر آن است که میدان ایستا پایستار است و کل انرژی که به بار الکتریکی داده می‌شود تا مسیر بسته‌ای را پیماید برابر صفر است. با این حال، يك بار الکتریکی که در داخل رسانا حرکت می‌کند انرژی دریافتی از میدان الکتریکی را به شبکه بلوری انتقال می‌دهد، و این فرایند بازگشت ناپذیر است، یعنی شبکه انرژی را که گرفته است به الکترون‌ها پس نمی‌دهد. بنابراین اگر به الکترون‌ها انرژی داده نشود نمی‌توانند به طور مداوم در طول مدار بسته حرکت کنند.

در نتیجه برای برقراری جریان در مدار بسته، لازم است مدار از نقاطی مانند A ، A' ، A'' ، ... انرژی تغذیه کند (شکل ۳۲.۱۶). منابع انرژی G ، G' ، G'' ، ... را مولدهای انرژی می‌نامیم. مولدها را می‌توان چشمه‌های نیروی محرکه الکتریکی نیز نامید. بنابر این \mathbf{E} ، میدان الکتریکی ظاهر شده در معادله (۶۴.۱۶) میدان ایستا نیست و



شکل ۳۲.۱۶ در مدار بسته جریان به وسیله مولدهای الکتریکی برقرار می‌شود.

در نقاط A, A', A'', \dots ، با میدانهای حاصل از مولدهای G, G', G'', \dots ، متناظر است. راههای زیادی برای تولید نیروی محرکه الکتریکی وجود دارد. روش معمول استفاده از واکنشهای شیمیایی است (مانند پیل خشک یا باتری) که در آنها انرژی حاصل از واکنشهای شیمیایی به الکترونها انتقال می‌یابد. روش مهم دیگر استفاده از پدیده القای الکترومغناطیسی است که در فصل بعد مورد بحث قرار می‌گیرد.

شکل ۳۳.۱۶ یک چشمه الکتریکی را به‌طور نمادی نشان می‌دهد. سوی جریان در مدار خارج از چشمه نیروی محرکه الکتریکی از خط بلند یا قطب مثبت به خط کوتاه یا قطب منفی است.

هنگامی که قانون اهم [معادله (۴۶.۱۶)] را در مورد مدار ساده‌ای مانند شکل ۳۳.۱۶ به‌کار می‌بندیم، باید توجه داشته باشیم که مقاومت R برابر مجموع R_i ، مقاومت داخلی چشمه الکتریکی و R_e ، مقاومت رسانای خارجی متصل به مولد (یا باتری) است. بنابراین $R = R_i + R_e$ ، و قانون اهم به‌صورت زیر درمی‌آید

$$V_E = (R_e + R_i)I \quad (۴۵.۱۶)$$

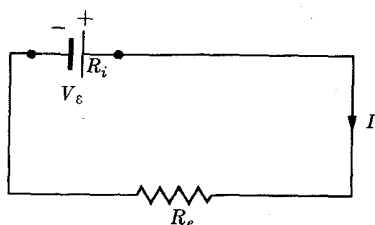
این رابطه را می‌توان به‌صورت

$$V_E - R_i I = R_e I$$

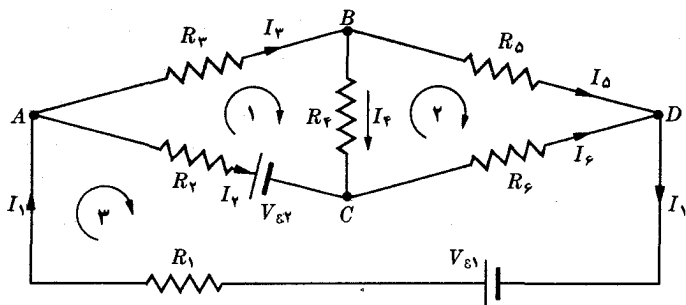
نیز نوشت، هر طرف این معادله اختلاف پتانسیل بین دو سر مولد (یا باتری) را به‌دست می‌دهد، چنانکه مشاهده می‌شود این اختلاف پتانسیل کمتر از نیروی محرکه الکتریکی است.

مثال ۱۷.۱۶ درباره روشهای محاسبه جریان در یک شبکه الکتریکی بحث کنید.

حل: شبکه الکتریکی ترکیبی از رساناها و نیروهای محرکه الکتریکی است، مانند آنچه در شکل ۳۴.۱۶ نشان داده‌ایم. در اینجا فقط موردی را بررسی می‌کنیم که در آن نیروهای محرکه الکتریکی ثابت و شبکه به‌حالت پایا رسیده باشد، به‌گونه‌ای که جریانها نیز ثابت باشند. معمولاً مسئله عبارت است از به‌دست آوردن جریانها برحسب نیروهای محرکه الکتریکی و مقاومتها. قواعد حل چنین مسائلی به قوانین کیرشهف معروف اند که صرفاً بقای



شکل ۳۳.۱۶ نمایش نمادی یک مدار با نیروی محرکه الکتریکی.



شکل ۳۴.۱۶ يك شبکه الكتریکی.

بار انرژی الکتریکی را بیان می کنند: قوانین کیرشهف را می توان چنین بیان کرد

- ۱ مجموع تمام جریانها در هر گره (نقطه انشعاب) يك شبکه برابر صفر است.
- ۲ مجموع تمام افت پتانسیلها در امتداد هر حلقه (مدار بسته) يك شبکه برابر صفر است.

در نوشتن قانون اول، باید تمام جریانهایی را که از گرهها خارج می شوند مثبت و تمام جریانهایی را که به این نقطه وارد می شوند منفی در نظر گرفت. قانون اول بیان اصل بقای بار الکتریکی است، زیرا چون بارها در گره انبارده نمی شوند، همان تعداد باری که در لحظه معینی وارد گره شوند باید در همان زمان از آن خارج شوند.

در کاربرد قانون دوم، باید قواعد زیر را مورد توجه قرارداد. افت پتانسیل در يك مقاومت، بسته به اینکه در سوی جریان حرکت کنیم یا در سوی مخالف آن، مثبت یا منفی است. هنگام گذر از يك نیروی محرکه الکتریکی، بسته به اینکه در سویی حرکت کنیم که نیروی محرکه عمل می کند (سوی افزایش پتانسیل) یا در سوی عکس (در سوی کاهش پتانسیل)، افت پتانسیل را منفی یا مثبت می گیریم. قانون دوم بقای انرژی را بیان می کند، زیرا تغییر انرژی خالص بار الکتریکی پس از پیمودن يك مسیر بسته باید برابر صفر باشد. این شرط قبلاً در معادله (۶۵.۱۶)، در مورد يك مدار ساده که می توان آن را به صورت $RI - V_E = 0$ نوشت و در آن $R = R_i + R_e$ است، اعمال شده است.

اکنون مورد استعمال قوانین کیرشهف را با به کار بردن آنها در مورد شبکه شکل ۳۴.۱۶ نشان می دهیم. بنا به قانون اول در گرههای A، B و C داریم

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad \text{در گره } A$$

$$-I_3 + I_4 + I_5 = 0 \quad \text{در گره } B$$

$$-I_2 - I_4 + I_6 = 0 \quad \text{در گره } C$$

با به کار بردن قانون دوم در حلقه‌هایی که با اعداد ۱، ۲ و ۳ مشخص شده‌اند به دست می‌آید

$$-R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4 - V_{E2} = 0 \quad \text{در حلقه ۱}$$

$$R_5 I_5 - R_6 I_6 - R_4 I_4 = 0 \quad \text{در حلقه ۲}$$

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_6 I_6 - V_{E1} + V_{E2} = 0 \quad \text{در حلقه ۳}$$

این شش معادله برای تعیین شش جریان در شبکه کافی‌اند.

یک قاعده عملی برای به دست آوردن جریانها در یک شبکه با n گره آن است که قانون اول کیرشهف را فقط برای $(n-1)$ گره به کار ببریم، زیرا هرگاه قانون برای $n-1$ گره صادق باشد در مورد گره مانده نیز صادق می‌کند. (دانشجو می‌تواند این گفته را در مورد شبکه شکل ۳۴.۱۶ تحقیق کند.) قانون دوم را باید در مورد تمام حلقه‌هایی که لازم‌اند تا رسانا دست کم یکبار جزو یکی از حلقه‌ها منظور شود، به کار برد.

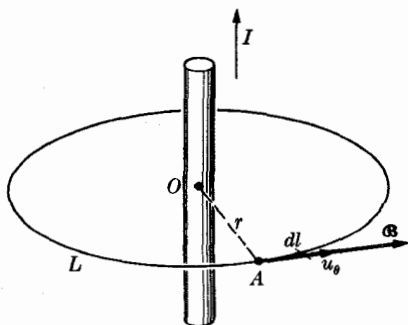
II. میدان مغناطیسی

۱۲.۱۶ قانون آمپر برای میدان مغناطیسی

اکنون بعضی ویژگیهای میدان مغناطیسی ایستا یا مستقل از زمان را مورد بحث قرار می‌دهیم. ابتدا جریان مستقیم الخط I به طول بینهایت را در نظر می‌گیریم (شکل ۳۵.۱۶). میدان مغناطیسی \mathbf{B} در نقطه A بر OA عمود است و از معادله (۴۱.۱۵)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta$$

به دست می‌آید. گردش \mathbf{B} را روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع r حساب می‌کنیم. میدان مغناطیسی بر مسیر مماس است به گونه‌ای که $d\mathbf{l} = B dl$ و بزرگی آن ثابت است. بنا بر این گردش میدان مغناطیسی (با علامت Δ_B) برابر است با



شکل ۳۵.۱۶ میدان مغناطیسی جریان مستقیم الخط.

$$\begin{aligned}\Lambda_B &= \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L B dl = B \oint_L dl = BL \\ &= \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) (2\pi r)\end{aligned}$$

زیرا $L = 2\pi r$ است. در نتیجه داریم

$$\Lambda_B = \mu_0 I \quad (۶۶.۱۶)$$

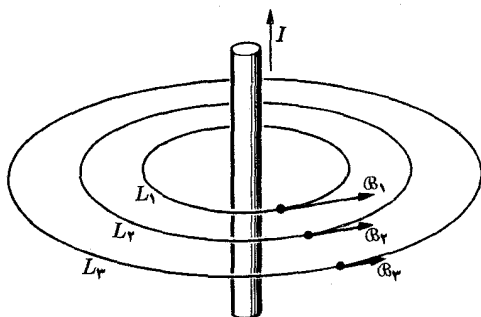
بنا بر این گردش میدان مغناطیسی متناسب با جریان I و مستقل از شعاع مسیر است. پس، اگر چندین دایره مانند L_1 ، L_2 ، L_3 ، ... اطراف جریان I رسم کنیم (شکل ۳۶.۱۶) بنا به معادله (۶۶.۱۶) گردش میدان مغناطیسی در طول تمام آنها یکسان و برابر است با $\mu_0 I$. اکنون مدار بسته غیر مشخص L را حول جریان I در نظر می‌گیریم (شکل ۳۷.۱۶). گردش میدان مغناطیسی در طول L برابر است با

$$\Lambda_B = \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L \frac{\mathbf{u}_\theta \cdot d\mathbf{l}}{r}$$

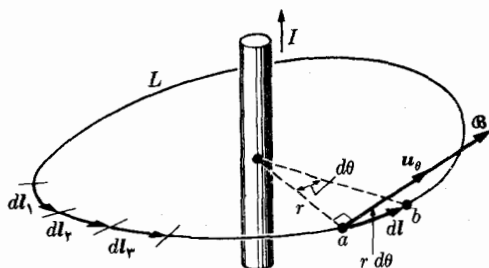
ولی $\mathbf{u}_\theta \cdot d\mathbf{l}$ مؤلفه $d\mathbf{l}$ روی راستای بردار یکای \mathbf{u}_θ و بنا بر این برابر است با $r d\theta$. در نتیجه داریم

$$\Lambda_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (2\pi) = \mu_0 I$$

زیرا زاویه مسطحه اطراف نقطه برابر است با 2π . بنا بر این نتیجه قبلی [معادله (۶۶.۱۶)] مجدداً به دست می‌آید که در مورد هر مسیر بسته در اطراف جریان مستقیم الخط معتبر است و به محل قرار گرفتن خط جریان نسبت به مسیر بستگی ندارد.



شکل ۳۶.۱۶ گردش میدان مغناطیسی در طول تمام مسیرهای بسته دایره‌ای هم‌مرکز در اطراف جریان مستقیم الخط، یکسان و برابر است با $\mu_0 I$.



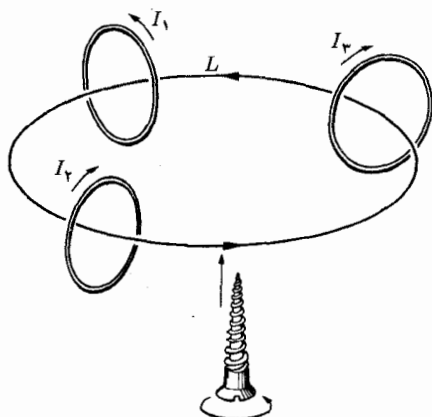
شکل ۳۷-۱۶

تحلیل دقیقتر، که در اینجا از آوردن آن صرف نظر می شود، نشان می دهد که معادله (۶۶-۱۶) نه تنها در مورد جریانهای مستقیم الخط بلکه در مورد هر شکلی از جریان صادق است. اگر چندین جریان I_1, I_2, I_3, \dots که منحنی بسته L آنها را دربرگیرد (شکل ۳۸-۱۶) داشته باشیم، هر جریان سهمی در گردش میدان مغناطیسی در امتداد L دارد. بنابراین قانون آمپر را می توان به صورت زیر بیان کرد.

گردش میدان مغناطیسی در امتداد یک منحنی بسته که جریانهای I_1, I_2, I_3, \dots را در برمی گیرد برابر است با

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (۶۷-۱۶)$$

در این رابطه $I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots$ جمع جبری تمام جریانهایی است که مسیر L آنها را به هم مربوط می کند.



شکل ۳۸-۱۶ گردش میدان مغناطیسی در امتداد هر مسیر بسته متناسب است با جریان خالصی که از داخل این مسیر می گذرد.

هنگام به کار بردن معادله (۶۷.۱۶)، اگر جریانی در راستای پیشروی پیچ راستگرد باشد که در سوی انتخابی روی L می چرخد آن را مثبت، و اگر در سوی مخالف باشد آن را منفی در نظر می گیریم. بنا بر این در شکل ۳۸.۱۶ جریانهای $I_۳$ و $I_۴$ مثبت و جریانی $I_۲$ منفی منظور می شوند.

اگر با توجه به مثال ۱.۱۶ به خاطر داشته باشیم که جریانی الکتریکی را می توان به صورت شار چگالی جریانی (یعنی $I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS$) بیان کرد، قانون آمپر را می توان به صورت زیر نوشت

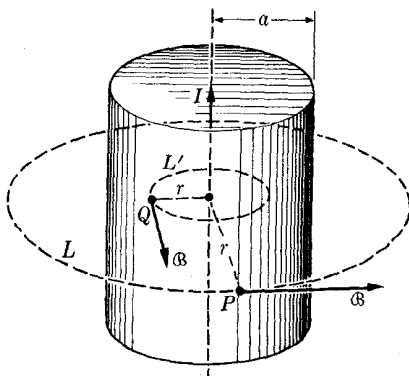
$$\Lambda_B = \int_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS \quad (۶۸.۱۶)$$

که در آن S سطح محدود به L است.

اینکه گردش میدان مغناطیسی \mathbf{B} معمولاً برابر صفر نیست نشان می دهد که میدان مغناطیسی به آن معنایی که میدان الکتریکی دارای پتانسیل الکتریکی است پتانسیل مغناطیسی ندارد. قانون آمپر بویژه در محاسبه میدان مغناطیسی حاصل از توزیع جریانی که دارای نوعی تقارن هندسی باشد بسیار مفید است. مثال زیر این موضوع را نشان می دهد.

مثال ۱۸.۱۶ با استفاده از قانون آمپر، درباره میدان مغناطیسی حاصل از جریانی که از استوانه ای به طول بینهایت می گذرد بحث کنید.

حل: فرض کنید که جریانی I از طول استوانه ای به شعاع a می گذرد (شکل ۳۹.۱۶). تقارن مسئله بروشنی نشان می دهد که خطهای نیروی مغناطیسی دایره هایی هستند که مراکز آنها روی محور استوانه قرار دارند و میدان مغناطیسی \mathbf{B} در هر نقطه فقط به فاصله آن نقطه تا محور بستگی دارد. در نتیجه اگر مسیر L را دایره ای به شعاع r و هم مرکز با جریانی انتخاب کنیم، گردش میدان مغناطیسی برابر می شود با



شکل ۳۹.۱۶

$$\Lambda_B = \oint_L B dl = B \oint_L dl = BL = 2\pi r B$$

اگر شعاع r بزرگتر از a باشد، تمام جریان I از داخل دایره می‌گذرد. در نتیجه، بنا به معادله (۶۷.۱۶) داریم

$$2\pi r B = \mu_0 I \quad \text{یا} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (69.16)$$

این درست همان نتیجه‌ای است که در فصل ۱۵ برای جریان در یک رشته فلزی پیدا کردیم. بنا بر این در هر نقطه‌ای خارج از جریان استوانه‌ای، میدان مغناطیسی درست برابر میدانی است که اگر تمام جریان دوی محود استوانه متمرکز بود به دست می‌آمد.

ولی اگر r کوچکتر از a باشد، دو امکان وجود دارد؛ اگر جریان تنها از سطح استوانه بگذرد (مثلاً موقعی که جریان از یک لوله فلزی به شکل استوانه می‌گذرد) جریانی که از داخل L' می‌گذرد برابر صفر است، و از قانون آمپر به دست می‌آید $2\pi r B = 0$ یا $B = 0$. بنا بر این میدان مغناطیسی در نقاط داخلی استوانه‌ای که جریانی از سطح آن می‌گذرد برابر صفر است ولی اگر جریان به طور یکنواخت در مقطع استوانه توزیع شده باشد، جریانی که از داخل L' می‌گذرد برابر است با

$$I' = \frac{I}{\pi a^2} (\pi r^2) = \frac{I r^2}{a^2}$$

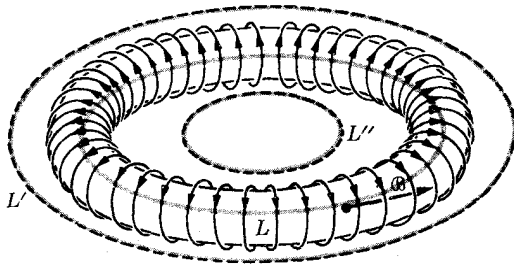
در نتیجه، با به کار بردن قانون آمپر به دست می‌آید $2\pi r B = \mu_0 I' = \mu_0 I r^2 / a^2$ ، یا

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \quad (70.16)$$

از این رو، میدان مغناطیسی در نقطه‌ای در داخل استوانه که جریانی با توزیع یکنواخت از تمام مقطع آن می‌گذرد با فاصله آن نقطه تا محور استوانه متناسب است.

مثال ۱۹.۱۶ با به کار بردن قانون آمپر، دربارهٔ میدان مغناطیسی حاصل از پیچۀ چنبره‌ای بحث کنید.

حل: پیچۀ چنبره‌ای عبارت است از سیمی که به طور منظم روی یک چنبره یا شکلی شبیه حلقه لاستیک اتومبیل پیچیده شده است، مانند شکل ۴۰.۱۶. فرض کنید که N تعداد حلقه‌های سیم با فاصله‌های یکسان از یکدیگر و I شدت جریانی است که از آنها می‌گذرد. تقارن مسئله ایجاب می‌کند که خطهای نیروی میدان مغناطیسی دایره‌های هم‌مرکز با چنبره باشند. ابتدا دایره‌ای مانند L در داخل چنبره را به عنوان مسیر انتگرال‌گیری انتخاب می‌کنیم. در این صورت گردش میدان مغناطیسی برابر می‌شود با $\Lambda_B = BL$. مسیر L تمام حلقه‌های پیچۀ را دربر می‌گیرد و در نتیجه جریان کلی که از داخل آن می‌گذرد برابر است با NI .



شکل ۴۰.۱۶ پیچۀ چنبره‌ای.

بنابراین با به‌کار بردن قانون آمپر داریم

$$BL = \mu_0 NI$$

یا

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L}$$

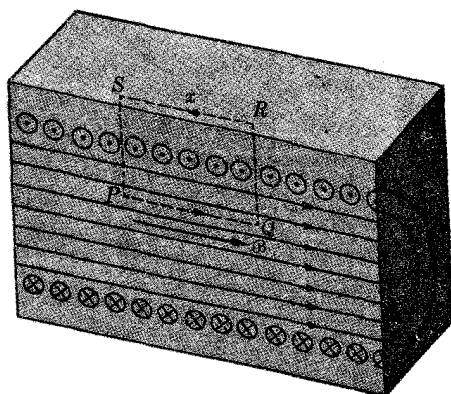
اگر شعاع مقطع چنبره در مقایسه با شعاع آن کوچک باشد، می‌توان قبول کرد که L عملاً برای تمام مسیره‌های داخلی یکسان است. با توجه به اینکه $n = N/L$ تعداد دورها در واحد طول است، نتیجه می‌گیریم که میدان مغناطیسی در داخل چنبره یکنواخت و دارای مقدار ثابت زیر است

$$B = \mu_0 nI \quad (۷۱.۱۶)$$

برای هر مسیری خارج از چنبره مانند L' و L'' جریان کلی که آن را دربرگیرد برابر صفر است. بنابراین به‌دست می‌آید $B = 0$. به گفته دیگر، میدان مغناطیسی پیچۀ چنبره‌ای کاملاً در داخل آن محبوس است. این وضع تنها در مورد پیچۀ چنبره‌ای صادق است که در آنها حلقه‌ها تنگ هم پیچیده شده باشند.

مثال ۴۰.۱۶ با استفاده از قانون آمپر درباره میدان مغناطیسی در مرکز یک سیملوله بینهایت بلند بحث کنید.

حل: سیملوله شکل ۴۱.۱۶ را که دارای n حلقه در واحد طول است و از هر حلقه آن جریان I می‌گذرد در نظر می‌گیریم. اگر حلقه‌ها خیلی نزدیک به هم و سیملوله خیلی بلند باشد، همچنانکه خطهای میدان در شکل نشان می‌دهند، میدان مغناطیسی را می‌توان یکنواخت و کاملاً محبوس در داخل سیملوله در نظر گرفت. مستطیل $PQRS$ را به‌عنوان مسیر انتگرال برمی‌گزینیم، سهم اضلاع QR و SP در گردش میدان مغناطیسی برابر صفر است، زیرا میدان بر آنها عمود است. همچنین سهم ضلع RS نیز برابر صفر است زیرا میدان در آنجا وجود ندارد. در نتیجه، تنها PQ در تسولید میدان مغناطیسی شرکت دارد و سهم آن در گردش میدان برابر Bx است، یعنی $\Lambda_B = Bx$. کل جریانی که از داخل مسیر انتگرال



شکل ۴۱۰۱۶ سیملوله

می‌گذرد برابر است با nXI ، زیرا nX تعداد حلقه‌هاست. در نتیجه از قانون آمپر به دست می‌آید $B_x = \mu_0 nXI$ ، یا

$$B = \mu_0 nI$$

این رابطه با نتیجه قبلی ما در مثال ۹.۱۵ در مورد میدان مغناطیسی در مرکز سیملوله بلند تطبیق می‌کند.

دانشجو از روی این مثالها به سودمندی قانون آمپر برای محاسبه میدان مغناطیسی متقارن، پی می‌برد.

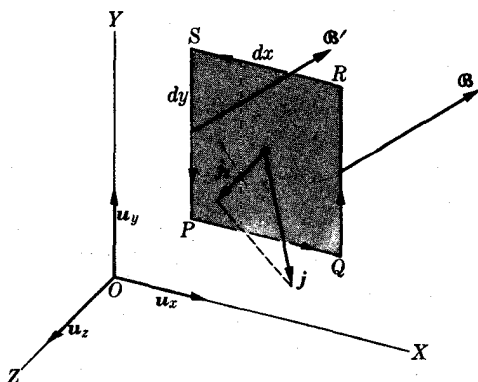
۱۳.۱۶ شکل دیفرانسیلی قانون آمپر

چون می‌دانیم قانون آمپر را می‌توان برای هر مسیری، به هر شکل که باشد، به کار برد، آنرا در مورد مسیر بینهایت کوچک مستطیل شکل $PQRS$ ، واقع در صفحه XY و به اضلاع dx و dy و مساحت $dx dy$ به کار می‌بریم (شکل ۴۲.۱۶). سوی گردش دور $PQRS$ با پیکان نشان داده شده است. گردش Λ_B از چهار قسمت تشکیل می‌شود که هر کدام مربوط به يك ضلع است، یعنی

$$\Lambda_B = \oint_{PQRS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{PQ} + \int_{QR} + \int_{RS} + \int_{SP} \quad (۷۲.۱۶)$$

روی ضلع QR ، که در راستای موازی $+Y$ است $d\mathbf{l} = \mathbf{u}_y dy$

$$\int_{QR} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_y dy = B_y dy$$



شکل ۴۲.۱۶ مسیر جزئی برای یافتن شکل دیفرانسیلی قانون آمپر.

همچنین روی ضلع SP که در راستای $-Y$ قرار دارد، $d\mathbf{l} = -\mathbf{u}_y dy$ و در نتیجه

$$\int_{SP} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\mathbf{B}' \cdot \mathbf{u}_y dy = -B'_y dy$$

به گونه‌ای که

$$\int_{QR} + \int_{SP} = (B_y - B'_y) dy$$

چون $PQ = dx$ است داریم $B_y - B'_y = dB_y = (\partial B_y / \partial x) dx$ بنا بر این

$$\int_{QR} + \int_{SP} = \frac{\partial B_y}{\partial x} dx dy$$

با استدلال مشابهی، برای دو انتگرال دیگر معادله (۷۲.۱۶)، به دست می‌آید

$$\int_{PQ} + \int_{RS} = -\frac{\partial B_x}{\partial y} dx dy$$

و سرانجام با جمع دو معادله فوق نتیجه می‌شود

$$\Lambda_B = \oint_{PQRS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dx dy \quad (73.16)$$

اگر dI جریانی باشد که از $PQRS$ می‌گذرد می‌توان آن را با چگالی جریان \mathbf{j} مربوط ساخت و نوشت

$$dI = j_z dS = j_z dx dy \quad (74.16)$$

می نویسیم j_z زیرا این تنها مؤلفهٔ چگالی جریان \mathbf{j} است که در جریان dI از داخل $PQRS$ دخالت دارد. مؤلفه‌های j_x و j_y به حرکت‌های موازی سطح مربوط می‌شوند نه از داخل آن. با وارد کردن معادلات (۷۳.۱۶) و (۷۴.۱۶) در قانون آمپر می‌توان نوشت

$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) dx dy = \mu_0 dI = \mu_0 j_z dx dy$$

با حذف سازهٔ مشترک $dx dy$ از دو طرف معادله، قانون آمپر به شکل دیفرانسیلی آن به دست می‌آید

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 j_z \quad (۷۵.۱۶)$$

اکنون می‌توان سطح $PQRS$ را در صفحه‌های YZ و ZX قرار داد و رابطه‌های زیر را نتیجه گرفت

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 j_x \quad (۷۶.۱۶)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 j_y \quad (۷۷.۱۶)$$

سه معادلهٔ (۷۵.۱۶)، (۷۶.۱۶) و (۷۷.۱۶) را می‌توان بساهم ترکیب کرد و به صورت يك معادلهٔ برداری واحد نوشت. توجه کنید که جمله‌های سمت راست مؤلفه‌های بردار \mathbf{j} اند که در μ_0 ضرب شده‌اند. همچنین جمله‌های سمت چپ را می‌توان مؤلفه‌های برداری در نظر گرفت که از ترکیب مشتق‌های جزئی \mathbf{B} به صورتی که نشان داده شده است، و تاور \mathbf{B} خوانده می‌شود، به دست می‌آید. تاور \mathbf{B} را با $\text{curl } \mathbf{B}$ نشان می‌دهند. در این صورت سه معادلهٔ فوق به معادلهٔ واحد زیر تبدیل می‌شوند

$$\text{curl } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (۷۸.۱۶)$$

این رابطه شکل دیفرانسیلی قانون آمپر است. با دانستن توزیع جریان می‌توان با استفاده از معادلهٔ (۷۸.۱۶) میدان مغناطیسی را به دست آورد، و برعکس. در ناحیه‌ای که جریان الکتریکی وجود نداشته باشد $\text{curl } \mathbf{B} = 0$ است.

قانون آمپر به شکل دیفرانسیلی، يك رابطهٔ موضعی بین میدان مغناطیسی \mathbf{B} در يك نقطه و چگالی جریان \mathbf{j} در همان نقطه از فضا برقرار می‌کند، درست به همان گونه‌ای که قانون گاوس، میدان الکتریکی در يك نقطه از فضا را به بار الکتریکی همان نقطه مربوط می‌ساخت. از این رو می‌توان گفت که جریان‌های الکتریکی چشمه‌های میدان مغناطیسی اند.

معادلهٔ هم‌ارز معادلهٔ (۷۸.۱۶) برای میدان‌های الکتریکی ایستا عبارت است از

$$\text{curl } \mathbf{E} = 0 \quad (۷۹.۱۶)$$

زیرا ثابت کردیم [معادله (۶۲۰۱۶)] که گردش چنین میدانی برابر صفر است، یعنی

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

۱۴۰۱۶ شار مغناطیسی

شار مغناطیسی از داخل هر سطح، بسته یا غیر بسته، واقع در میدان مغناطیسی \mathbf{B} برابر است با

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_N dS \quad (۸۰۰۱۶)$$

مفهوم شار مغناطیسی از داخل يك سطح، چنانکه در فصل ۱۷ خواهیم دید، از اهمیت زیادی برخوردار است، بویژه اگر سطح بسته نباشد. بنا بر این بهتر است یکایی برای شار مغناطیسی تعریف شود. بدیهی است چون شار مغناطیسی حاصل ضرب میدان مغناطیسی در مساحت است، آن را بر حسب Tm^2 بیان می کنند. این یکا را به افتخار ویلهلم ای. وبر (۱۸۳۱-۱۹۰۷) / (۱۸۵۴-۱۸۹۱) فیزیکدان آلمانی، و بر (با علامت اختصاری Wb) می نامند. چون $T = \text{kg s}^{-1} \text{C}^{-1}$ است بنا بر این $\text{Wb} = \text{Tm}^2 = \text{m}^2 \text{kg s}^{-1} \text{C}^{-1}$. در خیلی از کتابها میدان مغناطیسی را به جای T (تسلا) با Wb m^{-2} (وبر بر متر مربع) بیان می کنند. چون جرم یا قطب مغناطیسی وجود ندارد (یا دست کم تاکنون مشاهده نشده است) خطهای نیروی میدان مغناطیسی \mathbf{B} ، همچنانکه مثالهای مطالعه شده در فصل ۱۵ نشان می دهند، منحنیهای بسته اند. نتیجه می گیریم که

شار مغناطیسی از داخل يك سطح بسته همیشه برابر صفر است.

یعنی شار ورودی بريك سطح بسته برابر است با شار خروجی. در این صورت داریم

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_N dS = 0 \quad (۸۱۰۱۶)$$

درستی این نتیجه را از لحاظ ریاضی نیز می توان از رابطه کلی \mathbf{B} ، معادله (۳۵۰۱۵)، تحقیق کرد. در اینجا از اثبات آن صرف نظر می کنیم. این نتیجه قانون گاوس برای میدان مغناطیسی را تشکیل می دهد. شبیه به معادله (۴۰۱۶) که برای میدان الکتریکی داشتیم، شکل دیفرانسیلی آن عبارت است از

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \text{یا} \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (۸۲۰۱۶)$$

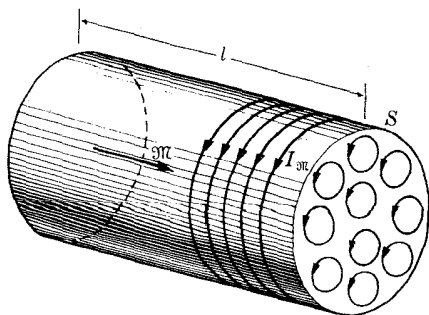
۱۵۰۱۶ مغناطش ماده

در بخش ۱۵۰۱۵ نشان دادیم که جریان کم، مانند جریان ناشی از حرکت الکترونها در اتم،

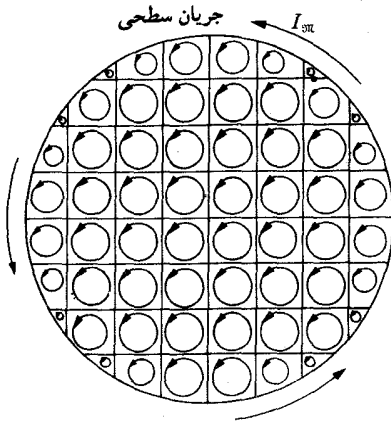
دوقطبی مغناطیسی تشکیل می‌دهد. اتمها بسته به تقارن یا سمتگیری نسبی مدارهای الکترونی‌شان ممکن است یک دوقطبی مغناطیسی خالص از خود نشان دهند یا ندهند. از آنجا که اکثر مولکولها دارای تقارن کروی نیستند، به دلیل سمتگیری اختصاصی مدارهای الکترونی، می‌توانند یک دوقطبی مغناطیسی دائمی تشکیل بدهند. به‌عنوان مثال، مولکولهای دواتمی تقارن محوری دارند و می‌توانند یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی موازی با محور مولکول داشته باشند. با این همه، ماده کپهای، بجز مواد فرومغناطیسی، به سبب سمتگیری کاتوره‌ای مولکولها، گشتاور مغناطیسی خالصی از خود نشان نمی‌دهد. در قطبش الکتریکی مواد نیز با چنین وضعی برخورد داشتیم. ولی حضور میدان مغناطیسی خارجی حرکت الکترونها را وامی‌پيچاند و درجسم قطبش مغناطیسی خالص یا مغناطش ماده به وجود می‌آورد. آنچه اساساً رخ می‌دهد، همچنانکه در بخش ۶.۱۵ توضیح دادیم، این است که میدان مغناطیسی روی هر الکترون یک حرکت چرخشی یا تقدیمی حول میدان مغناطیسی محل به وجود می‌آورد. هر الکترون به اندازه یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی که از معادله (۲۷.۱۵) به دست می‌آید، در گشتاور کلی سهیم است.

جهت سهولت، ماده‌ای به شکل استوانه را در نظر می‌گیریم که به موازات محور استوانه به طور یکنواخت مغناطیسی شده است (شکل ۴۳.۱۶). این بدان معنی است که دوقطبیهای مغناطیسی مولکولها در سوی موازی محور استوانه، و در نتیجه جریان الکترونی مولکولی در راستای عمود بر محور استوانه است. در شکل ۴۳.۱۶ (در تصویر نیمرخ با جزئیات دقیقتر در شکل ۴۴.۱۶ دیده می‌شود) جریانهای داخلی به سبب جهت‌های متقابل جریانهای مجاور، یکدیگر را خنثی می‌کنند، به طوری که هیچگونه جریان خالصی در داخل ماده مشاهده نمی‌شود. ولی، مغناطیسی شدن، جریانی برابری I_m را در سطح جسم به وجود می‌آورد و ماده مانند یک سیملوله عمل می‌کند.

طبق تعریف، گشتاور مغناطیسی محیط برواحد حجم را که با m نشان می‌دهند بردار مغناطش جسم می‌نامند. اگر m گشتاور دوقطبی مغناطیسی مربوط به یک اتم یا مولکول و n تعداد اتمها یا مولکولها در واحد حجم باشد، مغناطش برابر می‌شود با $m = nm$.



شکل ۴۳.۱۶ جریان سطحی مغناطش روی استوانه مغناطیده.



شکل ۴۴.۱۶ جریان جزئی در داخل استوانه مغناطیده.

چون گشتاور مغناطیسی یک جریان جزئی بر حسب $A m^2$ بیان می‌شود، مغناطش \mathcal{M} بر حسب $A m^{-1} = A m^2 / m^3$ یا $C m^{-1} s^{-1}$ بیان می‌شود، که هم‌ارز است با یکای جریان برواحد طول.

رابطه بسیار مهمی بین جریان سطحی روی یک جسم مغناطیسی شده و مغناطش \mathcal{M} وجود دارد. شکل ۴۳.۱۶ نشان می‌دهد که I_m در راستای عمود بر \mathcal{M} می‌گذرد. خود استوانه مانند دوقطبی مغناطیسی بزرگی عمل می‌کند که از ترکیب تک تک تمام دوقطبیهای \mathcal{M} به دست آمده است. اگر S سطح قاعده استوانه و l طول آن باشد، حجم استوانه برابر می‌شود با Sl . در نتیجه گشتاور دوقطبی کل آن برابر می‌شود با $\mathcal{M}(Sl) = (\mathcal{M}l)S$. ولی S درست مساحت مدارهای تشکیل شده از جریان سطحی است. چون گشتاور دوقطبی مغناطیسی برابر است با جریان ضربدر مساحت، نتیجه می‌گیریم که جریان کل مغناطش که در سطح استوانه ظاهر می‌شود مساوی $\mathcal{M}l$ است. بنا بر این I_m ، جریان برواحد طول در سطح استوانه مغناطیده برابر $\mathcal{M}l$ یا $I_m = \mathcal{M}l$ است. اگر چه این نتیجه را برای یک شکل هندسی خاص به دست آوردیم، ولی کاملاً کلی است. در نتیجه می‌توان گفت

جریان برواحد طول در سطح یک قطعه جسم مغناطیده برابر است با مؤلفه بردار مغناطش \mathcal{M} بر راستای موازی صفحهٔ مماس بر سطح جسم، دسوی آن بر \mathcal{M} عمود است.

۱۶.۱۶ میدان مغناطان

در بخش پیش دیدیم که ماده مغناطیده جریانهایی در سطح خود دارد (و در صورتی که

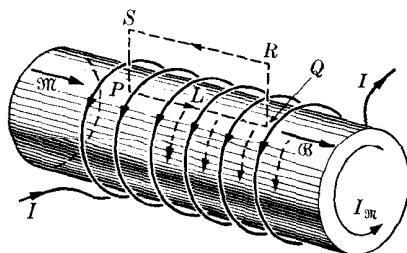
مغناطش یکنواخت نباشد درحجم نیز جریانهایی وجود دارد). با وجود این، این جریانهای مغناطش «منجمد» ند، بدین معنی که ازالکترونهایی ناشی می شوند که به آنها یا مولکولهای خاصی مقیدند و آزاد نیستند در داخل جسم حرکت کنند. ازطرف دیگر، درمواد دیگری مانند فلزها، بارهایی وجود دارند که می توانند در داخل جسم حرکت کنند. جریانهای ناشی ازاین بارهای آزاد را جریان آزاد می نامیم. در بیشتر موارد لازم می آید جریانهای آزاد و جریانهای مغناطش از یکدیگر متمایز شوند. ما دراین بخش می کوشیم این تمایز را روشن کنیم.

باردیگر قطعه ای استوانه ای شکل از یک جسم را که در داخل یک سیملوله دراز قرار دارد در نظر می گیریم (شکل ۴۵.۱۶). از سیملوله جریان I می گذرد. این جریان میدان مغناطیسی تولید می کند که استوانه را مغناطیسی می کند و باعث می شود که یک جریان مغناطش سطحی همسو با I روی سطح استوانه ظاهر شود. مقدار جریان سطحی مغناطش بر واحد طول برابر \mathcal{M} است. اگر سیم دارای n حلقه در واحد طول باشد، دستگاه سیملوله بعلاوه استوانه مغناطیسه هم ارز سیملوله واحدی است که جریان $nI + \mathcal{M}$ از واحد طول آن می گذرد. این جریان سیملوله ای مؤثر میدان مغناطیسی برابند \mathbf{B} را در راستای موازی محور استوانه به وجود می آورد. بزرگی این میدان با قرار دادن $(nI + \mathcal{M})$ ، جریان کل در واحد طول، به جای nI در معادله (۷۱.۱۶) به دست می آید؛ یعنی $B = \mu_0(nI + \mathcal{M})$ ، یا

$$\frac{1}{\mu_0} B - \mathcal{M} = nI$$

این رابطه جریان رسانشی یا آزاد در واحد طول در سطح استوانه، nI ، را بر حسب \mathbf{B} میدان مغناطیسی در محیط و \mathcal{M} مغناطش محیط به دست می دهد. با توجه به اینکه بردارهای \mathbf{B} و \mathcal{M} همراستا هستند، نتیجه فوق ایجاب می کند که میدان برداری جدیدی، به نام میدان مغناطان با رابطه

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathcal{M} \quad (۸۳.۱۶)$$



شکل ۴۵.۱۶

تعریف شود. \mathbf{H} با یکای $A m^{-1}$ یا $m^{-1}s^{-1}C$ یعنی با همان یکای کمیت‌های ظاهر شده در سمت راست رابطه (۸۳.۱۶) بیان می‌شود.

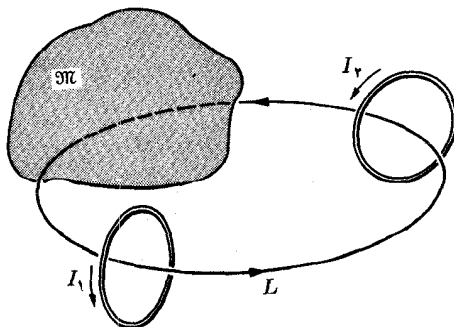
درحالت خاص (مثال بالا) داریم $H = nI$. این رابطه، H را با جریان رسانشی یا جریانهای آزاد در واحد طول سیملوله مربوط می‌کند. اگر طولی مانند $PQ = L$ را در امتداد سطح در نظر بگیریم، داریم

$$HL = LnI = I_{\text{آزاد}} \quad (۸۴.۱۶)$$

در اینجا $I_{\text{آزاد}} = LnI$ جریان کل سیملوله متناظر با طول L است. اگر گردش \mathbf{H} را روی مستطیل $PQRS$ حساب کنیم به دست می‌آید $\Lambda_H = HL$. زیرا در خارج از سیملوله H برابر صفر است (هم B و هم H برابر صفرند) و ضلعهای QR و SP نیز در گردش بردار سهمی ندارند چون بر میدان مغناطیسی عمودند. بنابراین معادله (۸۴.۱۶) را می‌توان به صورت $\Lambda_H = I_{\text{آزاد}}$ نوشت که در آن $I_{\text{آزاد}}$ جریان آزاد کلی است که از داخل مستطیل $PQRS$ می‌گذرد. اعتبار این نتیجه بیش از آن است که این اثبات ساده بتواند آن را بیان کند. در واقع، می‌توان تحقیق کرد که گردش میدان مغناطیس در طول یک منحنی بسته برابر است با جریان آزاد کلی که از داخل منحنی می‌گذرد، یعنی

$$\Lambda_H = \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{آزاد}} \quad (۸۵.۱۶)$$

که در آن $I_{\text{آزاد}}$ ، جریان کل ناشی از بارهای آزاد در محیط یا در مدار الکتریکی است که از داخل منحنی L می‌گذرند، به استثنای جریانهای ناشی از مغناطیس ماده. به عنوان مثال، اگر منحنی L از مدارهای I_1 و I_2 و از یک جسم با مغناطیس \mathfrak{M} بگذرد (شکل ۴۶.۱۶)، برای نوشتن معادله (۸۵.۱۶) تنها باید جریانهای I_1 و I_2 را وارد کرد، در صورتی که در قانون آمپر، معادله (۶۷.۱۶) برای میدان مغناطیسی \mathbf{B} ، باید تمام جریانها، یعنی جریانهای I_1 و I_2 ناشی از بارهایی که به طور آزاد حرکت می‌کنند، و همچنین جریانهای ناشی از مغناطیس \mathfrak{M} جسم را که از الکترونها می‌آیند، قرار داد.



شکل ۴۶.۱۶

معادله (۸۳.۱۶) را به صورت زیر می نویسیم

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathfrak{M}) \quad (۸۶.۱۶)$$

چون از دیدگاه فیزیک، \mathfrak{M} بردار مغناطش جسم به میدان مغناطیسی برایند \mathbf{B} وابسته است، می توان رابطه ای بین \mathbf{B} و \mathfrak{M} ، مانند رابطه ای که بین \mathbf{P} و \mathbf{E} در الکتریسته وجود دارد [معادله (۱۰.۱۶)] برقرار ساخت. ولی، بنا به دلایل تاریخی معمول شده است که به گونه دیگری عمل شود، یعنی رابطه ای بین \mathfrak{M} و \mathbf{H} برقرار می کنند

$$\mathfrak{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (۸۷.۱۶)$$

کمیت χ_m را پذیرفتاری مغناطیسی ماده می نامند. این کمیت یک عدد مطلق است و به یکه های \mathbf{H} و \mathfrak{M} بستگی ندارد. با قراردادن معادله (۸۷.۱۶) در معادله (۸۶.۱۶) می توان نوشت

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (۸۸.۱۶)$$

که در آن کمیت

$$\mu = \frac{B}{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad (۸۹.۱۶)$$

گذردهی مغناطیسی محیط نام دارد و با همان یکای μ_0 ، یعنی $\text{m kg}^{-2} \text{C}$ بیان می شود. μ_r تراوایی نسبی مطابق رابطه زیر تعریف می شود

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m \quad (۹۰.۱۶)$$

μ_r عدد مطلق است و به دستگاه یکه های انتخابی بستگی ندارد.

وقتی رابطه $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ برقرار باشد، به جای معادله (۸۵.۱۶) می توان نوشت

$$\oint_L \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{آزاد}}$$

اگر محیط همگن باشد، به گونه ای که بتوان μ را ثابت فرض کرد، گردش میدان مغناطیسی به صورت زیر در می آید

$$\Lambda_B = \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I_{\text{آزاد}} \quad (۹۱.۱۶)$$

این رابطه مشابه قانون آمپر یا معادله (۶۷.۱۶) است، با این تفاوت که جریان آزاد به جای جریان کل، و μ به جای μ_0 قرار گرفته اند. پس می توان نتیجه گرفت که اثر جسم مغناطیده روی میدان مغناطیسی \mathbf{B} نشان دادن μ به جای μ_0 است. به عنوان مثال، میدان مغناطیسی یک جریان مستقیم الخط که در محیط مغناطیده قرار دارد، به جای مقدار داده شده با معادله (۴.۱۵)، برابر است با

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad (۹۲.۱۶)$$

۱۷.۱۶ محاسبه پذیرفتاری مغناطیسی

نظر به اینکه پذیرفتاری مغناطیسی χ_m ، همانند پذیرفتاری الکتریکی χ_e بیانگر پاسخ محیط به میدان مغناطیسی خارجی است، بنابراین به خواص آنها و مولکولهای محیط بستگی دارد. در پدیده مغناطش مواد به وسیله میدان مغناطیسی خارجی دو اثر دخالت دارند. یکی واپیچش حرکت الکترونها در اثر میدان مغناطیسی و دیگری اثر سمتهگیری که از گشتاور مغناطیسی دائمی اتم یا مولکول ناشی می شود. هر دو اثر در مقدار χ_m دخالت دارند و آنها را به طور جداگانه بررسی می کنیم.

الف) اثر واپیچش. می دانیم که میدان مغناطیسی نیرویی بر بار در حال حرکت وارد می کند. بنابراین اگر میدان مغناطیسی خارجی بر جسمی اثر کند، به الکترونها در حال حرکت اتمها یا مولکولها یک نیروی اضافی ناشی از میدان مغناطیسی خارجی وارد می شود و حرکت آنها را مختل می کند. برای ارزیابی دقیق این اختلال باید از روشهای مکانیک کوانتومی استفاده کنیم. از این رو، با ارائه تصویر ساده شده ای در مثال ۲۱.۱۶ تنها به بیان نتایج اساسی اکتفا می کنیم.

اثر میدان مغناطیسی روی حرکت الکترونها هم ارز افزودن یک جریان القایی در اتم است. این جریان در سویی است که گشتاور دو قطبی مغناطیسی مربوط به آن در سوی مخالف گشتاور دو قطبی مغناطیسی میدان مغناطیسی است. چون این اثر مستقل از سمتهگیری اتم و برای تمام اتمها یکسان است، نتیجه می گیریم که ساده مغناطشی مانند \mathcal{M} در سوی مخالف میدان مغناطیسی کسب می کند. این نتیجه خلاف نتیجه ای است که در مورد میدان الکتریکی به دست آوردیم. این رفتار که دیامغناطیس نام دارد در تمام مواد مشترک است، گرچه در بیشتر مواد توسط اثر پارامغناطیسی که در زیر شرح خواهیم داد پوشیده می ماند. مغناطیدگی برابند با رابطه زیر داده می شود

$$\mathcal{M} = -\frac{ne^2\mu_0}{6m_e} \left(\sum_i r_i^2 \right)_{\text{ave}} \mathbf{H} \quad (۹۳.۱۶)$$

در این رابطه \mathbf{H} میدان مغناطیسی در ماده، n تعداد اتمها در واحد حجم و r_i فاصله الکترون i ام از هسته اتم است. عمل جمع روی تمام الکترونها اتم انجام می شود و میانگین را باید مطابق دستورالعملهای مکانیک کوانتومی حساب کرد. سایر کمیتها معانی عادی خود را دارند. علامت منفی به سبب مخالف بودن سوی \mathcal{M} نسبت به \mathbf{H} است.

در این صورت بنا به معادله (۸۷.۱۶)، پذیرفتاری مغناطیسی برابر است با

$$\chi_m = -\frac{ne^2\mu_0}{6m_e} \left(\sum_i r_i^2 \right)_{\text{ave}} \quad (۹۴.۱۶)$$

و چون χ_m منفی است، گذردهی نسبی $\mu_r = 1 + \chi_m$ از يك كوچكتر است. اگر مقادير ثابتها را وارد كنيم و پذيريم كه در جسم جامد n برابر 10^{28} اتم در متر مكعب است و r را در حدود 10^{-10} m (كه مرتبه بزرگي مدار الكتروني است) برآورد كنيم، آنگاه χ_m برای جامدات حدود 10^{-5} به دست می آید، كه این عدد با مقادیری كه در جدول ۳.۱۶ آمده‌اند توافق دارد. معادله (۹۴.۱۶) هم‌ارز مغناطیسی پذیرفتاری الكتريكی ایستایی است كه از معادله (۲۲.۱۶) به دست می آید.

(ب) اثر سهمگیری. اکنون به اثر سمتگیری می پردازیم. چنانكه در مثال ۶.۱۵ گفته شد، اتم یا مولكول ممكن است دارای گشتاور دو قطبی مغناطیسی دائمی باشد كه وابسته به اندازه حركت زاویه‌ای الكترونهاي آن است. در این صورت، حضور میدان مغناطیسی خارجی موجب به وجود آمدن گشتاور نیرویی می شود كه می كوشد تمام دو قطبهای مغناطیسی را در راستای میدان قرار دهد. این امر يك مغناطش اضافی به نام پارامغناطیس به وجود می آورد. در نتیجه مغناطیدگی كه به وسیله يك ماده پارامغناطیسی كسب می شود در راستای میدان مغناطیسی قرار دارد. این اثر خیلی قویتر از اثر دیامغناطیس است و در مورد مواد پارامغناطیسی اثرهای دیامغناطیس معمولاً به طور كامل به وسیله اثرهای پارامغناطیسی پوشیده می مانند.

پذیرفتاری پارامغناطیسی گازها به طور تقریبی از رابطه‌ای شبیه به معادله (۲۶.۱۶) برای پذیرفتاری الكتريكی ناشی از مولكولهای قطبی به دست می آید

$$\chi_m = \frac{nm^2\mu_0}{3KT} \quad (95.16)$$

جدول ۳.۱۶ پذیرفتاری مغناطیسی در دمای اتاق

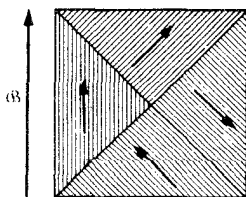
χ_m	مواد پارامغناطیسی	χ_m	مواد دیامغناطیسی
2.1×10^{-6}	اكسیژن (1 atm)	-2.1×10^{-9}	هیدروژن (1 atm)
1.2×10^{-5}	منیزیم	-5.0×10^{-9}	ازت (1 atm)
2.3×10^{-5}	آلومینیوم	-2.4×10^{-6}	سدیم
6.8×10^{-5}	تنگستن	-1.0×10^{-5}	مس
7.1×10^{-5}	تیتانیوم	-1.7×10^{-5}	بیسموت
3.0×10^{-4}	پلاتین	-2.2×10^{-5}	الماس
2.8×10^{-3}	گادولینیوم كلرید ($GdCl_3$)	-3.2×10^{-5}	جیوه

در این رابطه m_0 گشتاور مغناطیسی دائمی اتم یا مولکول، T دمای مطلق ماده و k ثابت بولتزمن است. مانند مورد الکتریکی، χ_m با افزایش دما کاهش می یابد. این وابستگی به دما ناشی از حرکتهای مولکولی است که با دما افزایش می یابند و می کوشند اثر ردیف شدن در نتیجه میدان مغناطیسی را خنثی کنند. بنابه مسئله ۵۰.۱۵ می دانیم که گشتاور مغناطیسی اتم از مرتبه 10^{-23}J T^{-1} است. در این صورت اگر مقدار سایر ثابتها را وارد کنیم، از معادله (۹۵.۱۶) پذیرفتاری پارامغناطیسی در دمای اتاق (۲۹۸K) برای جامدات از مرتبه 10^{-4} و برای گازها در شرایط متعارفی دما و فشار (STP) از مرتبه 10^{-7} به دست می آید. این نتیجه با مقادیر داده شده در جدول ۳۰.۱۶ برای مواد پارامغناطیسی به طور رضایت بخشی سازگار است.

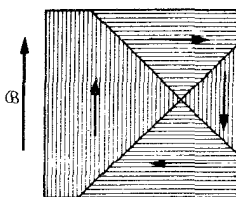
از اینجا این نتیجه مهم به دست می آید که هم برای مواد پارامغناطیسی و هم برای مواد دیامغناطیسی χ_m در مقایسه با واحد خیلی کوچک است و در بسیاری از موارد می توان $\mu_r = 1 + \chi_m$ را برابر یک گرفت.

(ج) اثرهای دیگر. دسته سومی از مواد نیز وجود دارد که فرومغناطیسی خوانده می شوند. صفت مشخص مواد فرومغناطیسی آن است که مغناطش دائمی از خود نشان می دهند، و این حاکی از آن است که گشتاورهای مغناطیسی اتمها یا مولکولهای آنها به طور طبیعی مایل اند بر اثر برهم کنشهای متقابل یکدیگر در یک خط مرتب شوند. سنگ آهن را و سایر آهنرباهای طبیعی که در ابتدای فصل ۱۵ ذکر شدند نمونه هایی از مواد فرومغناطیسی اند. بنابراین فرومغناطیس، در مجموعه (فتاد خود شبیه فروالکتریسته است، گرچه منشأ متفاوت دارند. فرومغناطیس به برهم کنش بین اسپینهای S_1 و S_2 دو الکترون که اساساً به صورت $S_1 \cdot S_2$ است مربوط می شود. J را انتگرال تبادل می نامند و به فاصله بین الکترونها بستگی دارد.

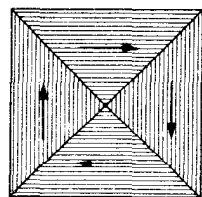
اگر J مثبت باشد، ترازمندی هنگامی به وجود می آید که S_1 و S_2 موازی باشند، که این امر به سمتگیری موازی اسپینهای الکترونی در ناحیه های میکروسکوپی به نام حوزه ها (دومنها) منجر می شود (شکل های ۴۷.۱۶ الف و ۴۸.۱۶ الف). ابعاد حوزه ها



(ج)

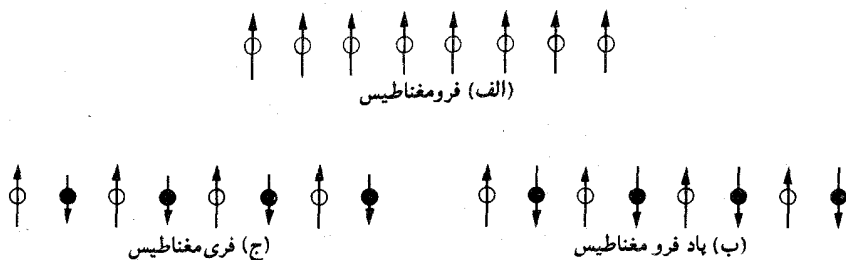


(ب)



(الف)

شکل ۴۷.۱۶ حوزه های مغناطیسی. (الف) ماده نسامغناطیده، (ب) مغناطش بر اثر رشد حوزه ها (دومنها). (ج) مغناطش بر اثر سمتگیری حوزه ها.



شکل ۴۸.۱۶ سمتگیری گشتاورهای دو قطبی مغناطیسی در مواد مختلف.

از مرتبه 10^{-12} تا $10^{-8} m^3$ است و 10^{17} تا 10^{21} اتم را در بر می گیرد. راستای مغناطش یک حوزه به ساختار بلوری ماده بستگی دارد. به عنوان مثال، در آهن که دارای ساختار بلوری مکعبی است، راستاهای مغناطش سهل الوصول در امتداد سه محور مکعب اند. در یک قطعه از ماده، خورد حوزه‌ها می توانند در راستاهای مختلف باشند، به گونه‌ای که اثر کلی یا ماکروسکوپی آنها برابر صفر یا ناچیز باشد. وجود میدان مغناطیسی خارجی، دو اثر به حوزه‌ها تحمیل می کند. یکی اینکه حوزه‌هایی که نسبت به میدان مغناطیسی در وضع مناسبی قرار دارند رشد می کنند و بدین طریق از حوزه‌هایی که سمتگیریشان مناسب نیست کاسته می شود (شکل ۴۷.۱۶ ب)؛ دیگر اینکه با افزایش شدت میدان مغناطیسی خارجی مغناطش حوزه‌ها می کوشند در راستای میدان مرتب شوند (شکل ۴۷.۱۶ ج)، و بدین طریق قطعه جسم آهن را می شود. فرومغناطیس خاصیتی است که به‌دما بستگی دارد. برای هر ماده فرومغناطیسی دمایی به نام دمای کودی وجود دارد که بالاتر از این دما ماده به پارامغناطیسی تبدیل می شود. این پدیده هنگامی رخ می دهد که حرکت ناشی از گرما به قدری بزرگ می شود که می تواند نیروهای ردیف سازی حوزه‌ها را خنثی کند. موادی که در دمای اتاق فرومغناطیسی اند عبارتند از آهن، نیکل، کبالت و گادولینیوم. دمای کودی این مواد به ترتیب عبارتند از $15^\circ C$ و $1075^\circ C$ ، $365^\circ C$ ، $770^\circ C$.

با وجود این، برای بعضی مواد T می تواند منفی باشد. در این صورت ترازمندی هنگامی به دست می آید که اسپین الکترونها پادموازی باشند که بدین طریق به مغناطش خالص برابر صفر منجر می شود (شکل ۴۸.۱۶ ب). در این حالت جسم را پاد فرومغناطیسی می نامند از میان پاد فرومغناطیسیها می توان از FeO ، MnO ، CoO و NiO نام برد.

گونه دیگر مغناطش فری مغناطیس نام دارد. فری مغناطیس مشابه پاد فرومغناطیس است ولی گشتاورهای اتمی یا یونی در یک راستا با گشتاورهای راستای مخالف تفاوت دارند، و این امر به پیدایش مغناطش خالص منجر می شود (شکل ۴۸.۱۶ ج). این مواد را فریت می نامند. فریتها را معمولاً می توان با فرمول شیمیایی $MOFe_2O_4$ نشان داد، که در آن M نماد عنصر شیمیایی Mn ، Co ، Ni ، Cu ، Mg ، Zn ، Cd و غیره است. اگر Fe به جای M قرار گیرد، ترکیب Fe_3O_4 یا مانیتمیت به دست می آید.

مثال ۴۹.۱۶ گشتاور مغناطیسی اتمی را که به وسیلهٔ یک میدان مغناطیسی خارجی القا می‌شود حساب کنید.

حل: اشاره کردیم که میدان مغناطیسی خارجی در داخل اتم یک گشتاور مغناطیسی در سوی مخالف میدان بوجود می‌آورد. این موضوع را می‌توان به کمک مدل بسیار ساده‌ای توجیه کرد. الکترونی با بار الکتریکی $-e$ را در نظر می‌گیریم که دور هستهٔ N می‌چرخد. جهت سهولت مدار الکترون را دایره‌ای به شعاع ρ واقع در صفحهٔ XY فرض می‌کنیم. اگر ω سرعت زاویه‌ای الکترون و \mathbf{F} نیروی وارد از طرف هسته روی الکترون باشد، معادلهٔ حرکت الکترون عبارت می‌شود از

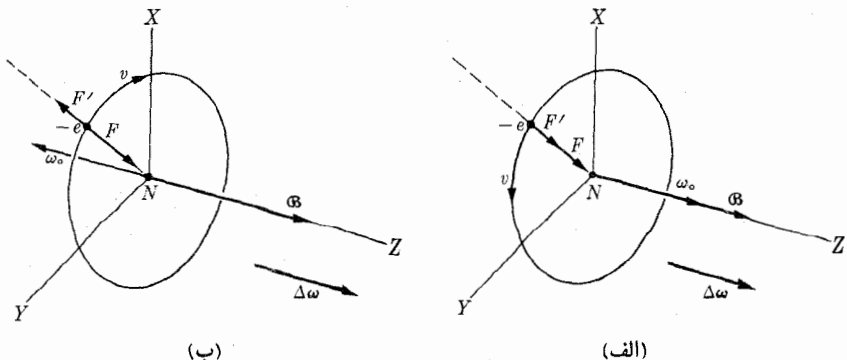
$$m_e \omega^2 \rho = F$$

اکنون اگر میدان مغناطیسی \mathbf{B} در راستای محور Z (یعنی عمود بر صفحهٔ مدار) به الکترون اثر کند، نیروی اضافی $\mathbf{F}' = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ بر الکترون وارد می‌شود. چنانکه شکل ۴۹.۱۶ نشان می‌دهد، این نیرو بر حسب سمتگیری نسبی ω و \mathbf{B} همسوی با \mathbf{F} یا مخالف آن است. چون نیروی شعاعی وارد بر الکترون تغییر می‌کند، بسامد زاویه‌ای (به فرض اینکه شعاع ثابت بماند) نیز تغییر می‌کند و به ω تبدیل می‌شود. اکنون با استفاده از معادلهٔ $v = \omega\rho$ ، و اینکه بزرگی \mathbf{F}' برابر $e v B$ است، معادلهٔ حرکت الکترون به صورت زیر در می‌آید

$$m_e \omega^2 \rho = F \pm e \omega \rho B$$

علامت $+$ مربوط به حالت (الف) شکل ۴۹.۱۶ و علامت $-$ مربوط به حالت (ب) است. با کم کردن دو معادلهٔ حرکت از یکدیگر و حذف F ، بدست می‌آید

$$m_e(\omega^2 - \omega_0^2)\rho = \pm e \omega B \quad \text{یا} \quad m_e(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) = \pm e \omega B$$



شکل ۴۹.۱۶ نمایش دیامغناطیسی.

ولی تغییر بسامد $\omega - \omega_0 = \Delta\omega$ خیلی کوچک است و می توان بدون خطای قابل ملاحظه ای به جای $\omega_0 + \omega$ ، 2ω قرار داد. در این صورت داریم

$$2m_e\Delta\omega = \pm eB \quad \text{یا} \quad \Delta\omega = \pm \frac{e}{2m_e} B$$

بنابراین تغییر بسامد برابر است با بسامد لارمور Ω_L که در مثال ۷.۱۵ تعریف کردیم. علامت $+$ که در مورد (الف) وجود دارد به معنی افزایشی در ω_0 است و در این صورت $\Delta\omega$ به طرف راست است. علامت منفی که در مورد (ب) وجود دارد نمایش کاهش ω_0 است و در اینجا نیز $\Delta\omega$ به طرف راست است. بنابراین در هر دو مورد می توان رابطه برداری زیر را نوشت

$$\Delta\omega = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B}$$

تغییر بسامد حرکت الکترونها جریان خالص $e(\Delta\omega/2\pi)$ را به وجود می آورد. در نتیجه، با استفاده از تعریف (۱۹.۱۵)، گشتاور مغناطیسی زیر به دست می آید

$$\mathbf{m} = -e \left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} \right) (\pi\rho^2) = -\frac{e^2\rho^2}{4m_e} \mathbf{B}$$

بنابراین گشتاور مغناطیسی اتم در سوی مخالف میدان مغناطیسی \mathbf{B} است و کل جسم مغناطیسی در سوی مخالف با میدان مغناطیسی اعمال شده کسب می کند. چون محاسبه را فوق العاده ساده کردیم، برای به دست آوردن نتیجه کلی تر، باید توزیع کاتوره ای مدارهای الکترونی در فضا را منظور و مساهت میدان مغناطیسی موضعی \mathbf{B} را که روی الکترون اثر می کند با تفصیل بیشتری تحلیل کنیم. به هر صورت، معادله ای که به دست آوردیم در اساس بانی نتیجه مذکور در معادله (۹۳.۱۶) تطبیق می کند.

۱۸.۱۶ خلاصه قوانین مربوط به میدانهای ایستا

در این فصل میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ایستا را به عنوان دو موجود جداگانه که هیچگونه رابطه ای بین آنها وجود ندارد مورد بحث قرار دادیم، بجز اینکه گفتیم چشمه میدان الکتریکی بار الکتریکی و چشمه میدان مغناطیسی جریان الکتریکی است. بدین طریق به دو مجموعه معادله جداگانه رسیدیم که در جدول ۴.۱۶ هم به صورت انتگرالی و هم به صورت دیفرانسیلی نوشته شده اند. این معادله ها امکان می دهند که چنانچه بارها و جریانها معلوم باشند میدان الکتریکی \mathbf{E} و میدان مغناطیسی \mathbf{B} را حساب کنیم و برعکس. از این رو به نظر می رسد که میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی ایستا را می توان دو میدان مستقل از هم در نظر گرفت. ولی چنین نیست، زیرا در فصل ۱۵ قواعدی را به دست آوردیم که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را که دوناظر در حرکت یکدیگر نسبت به هم، با استفاده از تبدیل لورنتس اندازه می گیرند به یکدیگر مربوط می کنند، و دیدیم که \mathbf{E} و \mathbf{B} ارتباط نزدیکی

جدول ۴.۱۶ معادله‌های میدان الکترومغناطیسی ایستا

شکل دیفرانسیلی	شکل انتگرالی	قانون
$\text{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS = \frac{q}{\epsilon_0}$	قانون گاوس برای میدان الکتریکی [معادله‌های (۳.۱۶) و (۵.۱۶)]
$\text{div}\mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_N dS = 0$	قانون گاوس برای میدان مغناطیسی [معادله‌های (۸۱.۱۶) و (۸۲.۱۶)]
$\text{curl}\mathbf{E} = 0$	$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	گردش میدان الکتریکی [معادله‌های (۶۲.۱۶) و (۷۹.۱۶)]
$\text{curl}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$	$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$	گردش میدان مغناطیسی (قانون آمپر) [معادله‌های (۶۷.۱۶) و (۶۸.۱۶)]

باهم دارند. بنابراین انتظار داریم که، معادله‌های قبلی در حالت‌های وابسته به زمان به تغییراتی نیاز داشته باشند. در فصل بعد چگونگی انجام این تغییرات را خواهیم دید و در آنجا مجموعه جدیدی از معادلات را به دست خواهیم آورد که مبتنی بر شواهد تجربی و تعمیم فرمولهای پیش‌اند.

فهرست منابع

1. «Nonuniform Electric Fields,» H. Pohl, *Sci. Am.*, December 1960 page 106.
2. «Equipment for the Determination of Magnetic Susceptibilities,» J. A. McMillan, *Am J. Phys.* 27, 352 (1959)
3. «Resource Letter FC-1 on the Evolution of the Electromagnetic Field Concept,» W. Scott, *Am. J. Phys.* 31, 819 (1963)
4. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume II, R. Feynman, R. Leighton and M. L. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963: Chapters through 2, 3, 10-14, and 34 through 37
5. *Source Book in physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University press, 1963, page 431 (Volta); page 446 (Ampère);

۶. ریتس، جی. آر. [و] اف. جی. میلفورد، اصول تئوری الکترومغناطیس، ترجمه جلال صمیمی [و] ناصر علیزاده قمصری، ج ۱، ۲، مشهد، مؤسسه چاپ و انتشارات دانشگاه مشهد، ۱۳۵۹، ج ۲. (ویرایش دوم انگلیسی این کتاب در مرکز نشر دانشگاهی در دست ترجمه است.)

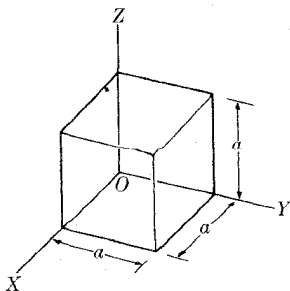
مسئله‌ها

۱۰۱۶ کره‌ای به شعاع R_1 دارای یک قسمت مرکزی خالی به شعاع R_2 است. بار الکتریکی q به طور یکنواخت در تمام حجم آن توزیع شده است. (الف) میدان و پتانسیل الکتریکی را در خارج کره، در داخل کره و در قسمت خالی مرکزی پیدا کنید. (ب) نمودارهای میدان و پتانسیل الکتریکی را به صورت توابعی از فاصله تا مرکز رسم کنید.

۲۰۱۶ در مرکز کره‌ای رسانا به شعاع R_1 کاواکی به شعاع R_2 وجود دارد. در مرکز کاواک بار الکتریکی q قرار دارد. (الف) مقدار بار الکتریکی در سطوح داخلی و خارجی رسانا را پیدا کنید. (ب) میدان و پتانسیل الکتریکی را در خارج کره، در داخل کره و در کاواک حساب کنید. (ج) نمودارهای میدان و پتانسیل را به صورت توابعی از فاصله تا مرکز نشان دهید. [دانه‌مایی: یادآوری می‌شود که میدان در داخل رسانا برابر صفر است.]

۳۰۱۶ می‌توان فرض کرد که در اتم هیدروژن الکترون با چگالی $\rho = Ce^{-2r/a_0}$ در تمام فضا پخش شده است که در آن $a_0 = 0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$ است. (الف) ثابت C را طوری پیدا کنید که بار کل برابر $-e$ باشد. (ب) بار کل موجود در داخل کره‌ای به شعاع a_0 را که متناظر با شعاع الکترون است پیدا کنید. (ج) میدان الکتریکی را به صورت تابعی از r پیدا کنید. (د) در چه فاصله‌ای میدان الکتریکی به اندازه ۱٪ با $e/4\pi\epsilon_0 r^2$ - اختلاف پیدا می‌کند؟ [دانه‌مایی: در قسمت (الف) فضای داخل کره را به پوسته‌های کروی به حجم $4\pi r^2 dr$ تقسیم کنید.]

۴۰۱۶ سطح بسته‌ای به شکل مکعب، به ضلع a ، مطابق شکل ۵۰۱۶ را در نظر بگیرید. این



شکل ۵۰۱۶

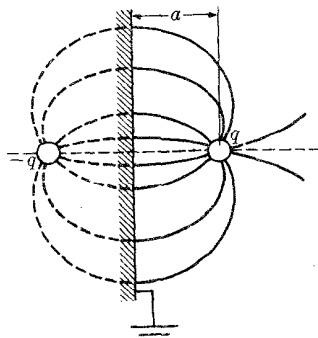
مکعب در ناحیه‌ای قرار گرفته است که در آنجا یک میدان الکتریکی موازی با محور X وجود دارد. شار الکتریکی که از سطح می‌گذرد و نیز بار کل در داخل سطح را، اگر میدان الکتریکی (الف) یکنواخت، (ب) به صورت $E = Cx$ تغییر کند، پیدا کنید.

۵.۱۶ شار الکتریکی و بار کل داخل مکعبی به ضلع a (شکل ۵۰.۱۶) را در ناحیه‌ای که در آنجا میدان الکتریکی به صورت (الف) $E = u_x c x^2$ ، (ب) $E = c(u_x y + u_y x)$ است، پیدا کنید. در هر مورد چگالی بار را نیز به دست آورید.

۶.۱۶ دو کره رسانا به شعاعهای ۱۰cm و ۱۵cm به ترتیب دارای بارهای $۱۰^{-۷}\text{C}$ و $۲ \times ۱۰^{-۷}\text{C}$ اند. ابتدا این دو کره را به یکدیگر تماس می‌دهیم سپس از هم جدا می‌کنیم. بار روی هر کره را حساب کنید.

۷.۱۶ یک کره فلزی به شعاع ۱m دارای بار خالصی به مقدار $۱۰^{-۹}\text{C}$ است. این کره را توسط یک سیم رسانا به کره بدون باری به شعاع ۳۰cm (که در فاصله خیلی دوری از کره اول قرار گرفته است) مربوط می‌کنیم به گونه‌ای که پتانسیل آنها یکسان شود. (الف) بعد از اتصال، در حالت تعادل بار هر یک از کره‌ها چقدر می‌شود؟ (ب) قبل از اتصال انرژی کره باردار چقدر است؟ (ج) بعد از اینکه کره‌ها به هم مربوط شدند انرژی دستگاه چقدر است؟ در صورت وجود افت انرژی توضیح دهید که این انرژی کجا رفته است؟ (د) نشان دهید هنگامی که دو کره به هم مربوط می‌شوند توزیع بار روی کره‌های به شعاع R_1 و R_2 به گونه‌ای است که $\sigma_1/\sigma_2 = R_1/R_2$ باشد. σ چگالی سطحی بار است. (ه) نشان دهید که میدان روی سطح هر کره به گونه‌ای است که $R_2/R_1 = E_{\text{سطحی } 2}/E_{\text{سطحی } 1}$. در حل این مسئله تأثیر سیم رابط را نادیده بگیرید.

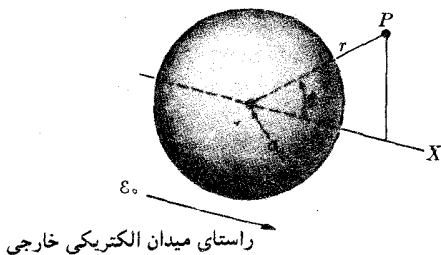
۸.۱۶ بار q در فاصله a از یک صفحه رسانای بینهایت بزرگ با پتانسیل صفر قرار دارد. می‌توان ثابت کرد که میدان الکتریکی در جلوی صفحه درست برابر با میدانی است که اگر صفحه را برداریم و بار الکتریکی $-q$ در فاصله a قرار دهیم ایجاد می‌شود (شکل ۵۱.۱۶). بار دوم را تصویر بار اولی می‌نامند. (الف) برای این کار نشان دهید که پتانسیل



شکل ۵۱.۱۶

در محل صفحه برابر صفر و میدان بر صفحه عمود است. (ب) با استفاده از این مطلب، نشان دهید که چگالی بار روی صفحه برابر است با qa/r^3 . (ج) تحقیق کنید که بار کل صفحه برابر است با $-q$.

۹۰۱۶ يك کرهٔ رسانا به شعاع a ، مطابق شکل ۵۲۰۱۶، در میدان یکنواختی قرار دارد. چون پتانسیل کره باید ثابت باشد پتانسیل آن را صفر فرض می‌کنیم. میدان الکتریکی روی بارهای آزاد کره اثر می‌کند و این بارها به سمت سطح خارجی کره جابجا می‌شوند تا میدان الکتریکی در داخل کره برابر صفر شود. کره قطبیده می‌شود و در میدان اطراف آن اختلافی به وجود می‌آید. با وجود این در فاصله‌های دور اساساً یکنواخت می‌ماند. می‌توان ثابت کرد که پتانسیل الکتریکی، جواب معادلهٔ لاپلاس که با شرایط این مسئله وفق می‌دهد، به صورت $V = E_0 r \cos\theta (1 - a^3/r^3)$ است. (الف) تحقیق کنید که پتانسیل کره برابر صفر است. (ب) نشان دهید که در فاصله‌های خیلی دور پتانسیل V با پتانسیل يك میدان یکنواخت توافق دارد. (ج) توجه کنید که پتانسیل V مجموع دو پتانسیل است؛ پتانسیل مربوط به يك میدان یکنواخت و پتانسیل مربوط به يك دو قطبی الکتریکی، گشتاور دو قطبی الکتریکی کسره را حساب کنید. (د) مؤلفه‌های شعاعی و عرضی میدان الکتریکی را حساب کنید. (ه) تحقیق کنید که میدان الکتریکی در سطح رسانا بر آن عمود است. (و) خطهای نیروی میدان بر ایند را رسم کنید. (ز) چگالی سطحی بار را پیدا کنید. در تغییرات چگالی روی سطح کره بحث کنید. (ح) تحقیق کنید که بار کل کره برابر صفر است. (ط) ثابت کنید که میدانی که بارهای سطحی در مرکز کره به وجود می‌آورند برابر است با E_0 . این نتیجه برای تمام نقاط داخل کره صحیح است. آیا انتظار این نتیجه را داشتید؟



شکل ۵۲۰۱۶

۱۰۰۱۶ از معادله‌های (۱۶۰۱۶) و (۱۷۰۱۶) می‌توان نتیجه گرفت که، در سطح جدایی دو دی‌الکتريك، مؤلفهٔ مماسی میدان الکتریکی و مؤلفهٔ قائم جا بجایی الکتریکی پیوسته‌اند، یعنی مقدار آنها در طرفین سطح یکسان است (حکم دوم صادق نیست مگر اینکه سطح بدون بار الکتریکی باشد). در این صورت ثابت کنید زوایایی که خطهای میدان با عمود بر سطح می‌سازند، از رابطهٔ $\text{tg}\theta_1/\text{tg}\theta_2 = \epsilon_1/\epsilon_2$ پیروی می‌کنند.

۱۱۰۱۶ گذردهی الکتریکی الماس برابر است با $10^{-10} \text{C}^2 \text{m}^{-2} \text{N}^{-1}$. (الف)

ثابت دی الکتریک نسبی الماس چقدر است؟ (ب) پذیرفتاری الکتریکی الماس چقدر است؟

۱۲.۱۶ ایستافاراد یکای ظرفیت الکتریکی است و آن ظرفیت رسانایی است که هرگاه دارای باری به اندازه یک ایستاکولن باشد پتانسیل آن یک ایستاولت شود. ثابت کینید که یک ایستافاراد برابر است با $9 \times 10^{11} F$. [یکاهای سوئدمنند دیگری که به کار می‌برند عبارت‌اند از میکروفاراد (μF) برابر $10^{-6} F$ و پیکوفاراد (pF) برابر $10^{-12} F$].

۱۳.۱۶ نشان دهید که انرژی الکتریکی یک رسانای بساردار منزوی برابر است با $C V^2/2$. همچنین ثابت کنید که این رابطه در مورد خازن با صفحات تخت و به‌طور کلی در مورد هر خازنی صادق است.

۱۴.۱۶ خازنی با عایق هوا که از دو صفحه موازی نزدیک به هم تشکیل شده است $1000 pF$ ظرفیت دارد. بار هر صفحه $1 C$ است. (الف) اختلاف پتانسیل بین صفحه‌ها چقدر است؟ (ب) به فرض ثابت ماندن بار، اگر فاصله بین دو صفحه را دو برابر کنیم اختلاف پتانسیل چقدر می‌شود؟ (ج) برای دو برابر کردن فاصله چه مقدار کار لازم است؟

۱۵.۱۶ می‌توان با قراردادن یک برگ کاغذ به ضخامت $0.004 cm$ بین دو ورقه نازک از قلع یک خازن درست کرد. ثابت دی الکتریک نسبی کاغذ 2.8 است و برای میدانهای الکتریکی به شدت $5 \times 10^7 V m^{-1}$ (یسا بیشتر) رسانا می‌شود؛ یعنی قدرت دی الکتریک کاغذ $50 M V m^{-1}$ است. (الف) مساحت صفحات قلع و کاغذ چقدر باید باشد تا خازنی به ظرفیت $3 \mu F$ به دست آید؟ (ب) بیشینه پتانسیلی که می‌توان به این خازن اعمال کرد تا میدان الکتریکی از نصف قدرت دی الکتریک تجاوز نکند چقدر است؟

۱۶.۱۶ می‌خواهیم با استفاده از کائوچو به عنوان دی الکتریک خازن تخت بسازیم. ثابت دی الکتریک کائوچوی مورد مصرف ۳ و قدرت دی الکتریک آن $20 M V m^{-1}$ است. خازن باید دارای ظرفیت $15 \mu F$ باشد و بتواند اختلاف پتانسیل بیشینه $6000 V$ را تحمل کند. حداقل مساحت صفحات خازن چقدر باید باشد؟

۱۷.۱۶ با چرخاندن پیچ یک خازن متغیر از 0° تا 180° ، ظرفیت آن از $50 pF$ تا $950 pF$ تغییر می‌کند. هنگامی که پیچ روی 180° است خازن را به باتری $400 V$ وصل می‌کنند. بعد از اینکه خازن پر شد، آن را از باتری جدا می‌کنند و پیچ را روی درجه صفر قرار می‌دهند. (الف) بار الکتریکی خازن چقدر است؟ (ب) هنگامی که پیچ روی درجه صفر است اختلاف پتانسیل بین دو صفحه خازن چقدر می‌شود؟ (ج) در این وضع انرژی خازن چقدر است؟ با ندیده گرفتن مالش، کار لازم برای چرخاندن پیچ را حساب کنید.

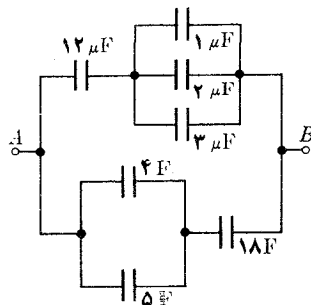
۱۸.۱۶ خازنی به ظرفیت $20 \mu F$ را با اختلاف پتانسیل $1000 V$ پر می‌کنند. سپس صفحات خازن را به صفحات یک خازن خالی به ظرفیت $5 \mu F$ وصل می‌کنند. (الف) بار ابتدایی دستگاه، (ب) اختلاف پتانسیل نهایی بین صفحات هر یک از خازن‌ها، (ج) انرژی نهایی دستگاه، (د) کاهش انرژی را هنگامی که خازن‌ها به هم وصل‌اند حساب کنید.

۱۹۰۱۶ (الف) ثابت کنید که ظرفیت یک خازن کروی که شعاع صفحات آن a و b باشد برابر است با $\epsilon_r ab / (a - b)$. (ب) نشان دهید که ظرفیت واحد طول در خازن استوانه‌ای که شعاع صفحات آن a و b باشد برابر است با $\epsilon_r / 2 \ln(b/a)$.

۲۰۰۱۶ خازنی از ۲۵ ورقه فلزی نازک، هر کدام به مساحت 600 cm^2 ، که کاغذهای پارافینی (به گذردهی نسبی ۲٫۶) آنها را از یکدیگر جدا می‌کنند، تشکیل شده است. ظرفیت دستگاه خازن‌ها را به دست آورید.

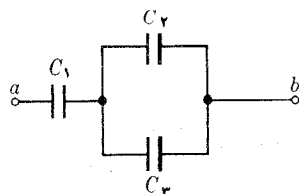
۲۱۰۱۶ سه خازن به ظرفیتهای $1.5 \mu\text{F}$ ، $2 \mu\text{F}$ ، و $3 \mu\text{F}$ ، (۱) به صورت متوالی (۲) به صورت موازی، به هم بسته شده‌اند و اختلاف پتانسیل 20 V بر آنها اعمال می‌شود. در هر حالتی (الف) ظرفیت دستگاه، (ب) بار و اختلاف پتانسیل هر خازن، (ج) انرژی دستگاه را تعیین کنید.

۲۲۰۱۶ ظرفیت مجموعه خازنهای نمایش داده شده در شکل ۵۳۰۱۶ را به دست آورید. اگر اختلاف پتانسیل اعمال شده 120 V باشد، بار الکتریکی و اختلاف پتانسیل هر خازن و همچنین انرژی دستگاه را پیدا کنید.



شکل ۵۳۰۱۶

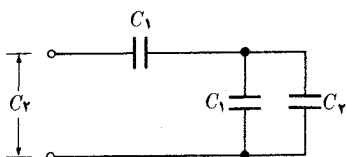
۲۳۰۱۶ در مجموعه خازنهای شکل ۵۴۰۱۶ ظرفیتهای عبارت‌اند از $C_1 = 3 \mu\text{F}$ ، $C_2 = 2 \mu\text{F}$ و $C_3 = 2 \mu\text{F}$ و اختلاف پتانسیل بین دو نقطه a و b برابر است با 300 V . (الف) بار و اختلاف پتانسیل هر خازن؛ (ب) انرژی دستگاه را پیدا کنید. برای محاسبه



شکل ۵۴۰۱۶

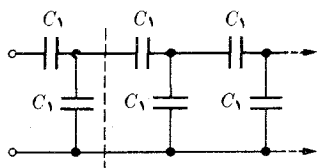
قسمت (ب) دو روش مختلف به کار برید.

۲۴.۱۶ با توجه به مجموعه خازنهای شکل ۵۵.۱۶ نشان دهید برای اینکه ظرفیت دستگاه برابر C_7 شود باید بین C_1 و C_7 رابطه $C_7 = 0.618C_1$ برقرار باشد.



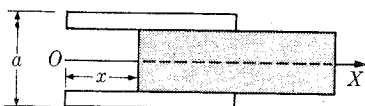
شکل ۵۵.۱۶

۲۵.۱۶ با به کار بردن نتیجه مسئله پیش، نشان دهید که ظرفیت مجموعه خازنهای شکل ۵۶.۱۶ برابر است با $0.618C_1$. [داده‌نمایی: توجه کنید که اگر دستگاه خازنها را در امتداد خط چین ببریم بخش واقع در سمت راست با زهم برابر است با دستگاه اولیه، زیرا از بینهایت خازن تشکیل شده است.]



شکل ۵۶.۱۶

۲۶.۱۶ مطابق شکل ۵۷.۱۶، بخشی از یک بره دی الکتریک بین صفحات یک خازن تخت قرار گرفته است (الف) ظرفیت، (ب) انرژی دستگاه، و (ج) نیروی وارد بر بره دی الکتریک را به صورت تابعی از x حساب کنید. پتانسیل اعمال شده بر خازن را ثابت فرض کنید. [داده‌نمایی: دستگاه را می‌توان به صورت دو خازن در نظر گرفت که به طور موازی بهم بسته شده‌اند.]

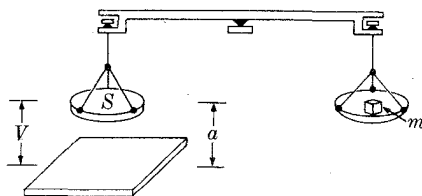


شکل ۵۷.۱۶

۲۷.۱۶ بار صفحات یک خازن تخت در خلا $+Q$ و $-Q$ و فاصله آنها از یکدیگر برابر x است. صفحات را از پتانسیل قطع و آنها را به اندازه فاصله جزئی dx از یکدیگر دور می‌کنیم. (الف) dC ، تغییر ظرفیت خازن چقدر است؟ (ب) dE_E ، تغییر انرژی آن

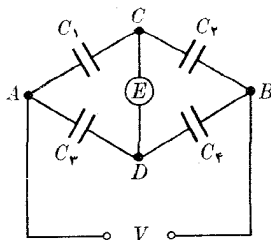
چقدر است؟ (ج) با مساوی قرار دادن کار Fdx با تغییر انرژی dE_E ، نیروی جاذبه بین صفحه‌ها را به دست آورید. (د) توضیح دهید که چرا F با QE برابر نیست. E شدت میدان الکتریکی بین صفحات است. مسئله را برای حالتی که اختلاف پتانسیل V ثابت نگه داشته شود از نو حل کنید.

۲۸۰۱۶ الکترومتری، که در شکل ۵۸۰۱۶ نشان داده شده است، برای اندازه‌گیری اختلاف پتانسیل به کار می‌رود. این الکترومتر از ترازویی تشکیل شده است که کفه چپ آن به صورت قرصی به مساحت S و در فاصله a از یک صفحه افقی قرار دارد، بدین طریق خازن تختی تشکیل می‌شود. هنگامی که بین کفه و صفحه اختلاف پتانسیلی برقرار می‌شود، نیرویی به سمت پایین روی کفه اثر می‌کند. برای برقراری تعادل مجدد، جرم m را در کفه دیگر قرار می‌دهند. نشان دهید که $V = a\sqrt{2mg/\epsilon_0 S}$ است. [توجه کنید: در دستگاه واقعی، برای اینکه میدان در تمام سطح کفه یکنواخت باشد، کفه را حلقه‌ای احاطه می‌کند].



شکل ۵۸۰۱۶

۲۹۰۱۶ چهار خازن مطابق شکل ۵۹۰۱۶ بهم بسته شده‌اند. بین A و B اختلاف پتانسیل V برقرار می‌شود و برای تعیین اختلاف پتانسیل بین C و D الکترومتری بین آنها وصل می‌شود. نشان دهید که اگر $C_1/C_2 = C_3/C_4$ باشد الکترومتر پتانسیل صفر را نشان می‌دهد. این آرایه که پل نام دارد برای اندازه‌گیری ظرفیت خازن بر حسب ظرفیت یک خازن سنج (استاندارد) و نسبت بین دو ظرفیت، به کار می‌رود.



شکل ۵۹۰۱۶

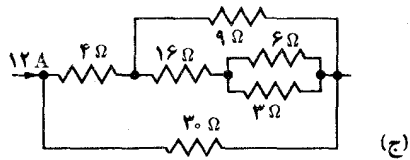
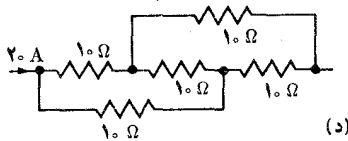
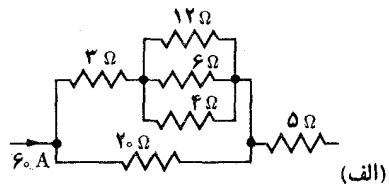
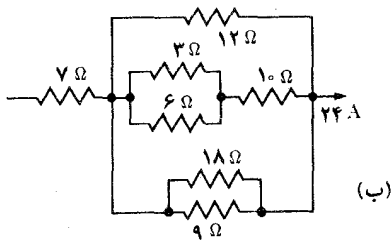
۳۰۰۱۶ در یک محیط یونیده (مانند گاز یا الکترولیت) هم یونهای مثبت و هم یونهای منفی وجود دارند. اگر هر یون باری برابر $\pm ve$ داشته باشد، نشان دهید که چگالی

جریان برابر است با $\mathbf{j} = ve(n_+ \mathbf{v}_+ - n_- \mathbf{v}_-)$ در این رابطه n_+ و n_- تعداد هر نوع از یونها در واحد حجم است.

۳۱.۱۶ بر آورد شده است که در یک متر مکعب مس در حدود $۱۰^{۲۹}$ الکترون آزاد وجود دارد. با استفاده از مقدار رسانندگی الکتریکی مس که در جدول ۲۰.۱۶ داده شده است، زمان واهلش یک الکترون را در مس بر آورد کنید.

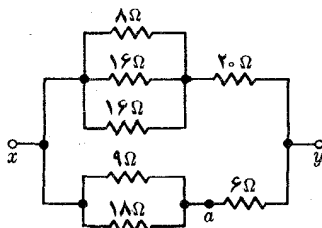
۳۲.۱۶ جریان در یک رسانا با رابطه $I = ۴ + ۲t^۲$ داده می شود، که در آن I بر حسب آمپر و t بر حسب ثانیه است. مقدار میانگین و مقدار ریشه میانگین مربعی جریان را بین زمانهای $t = ۰$ و $t = ۱۰$ s پیدا کنید.

۳۳.۱۶ مقاومت کل هر یک از مدارهای نشان داده شده در شکل ۶۰.۱۶ را تعیین کنید. همچنین جریانی را که از هر مقاومت می گذرد و اختلاف پتانسیل بین دوسر هر یک از آنها را به دست آورید.



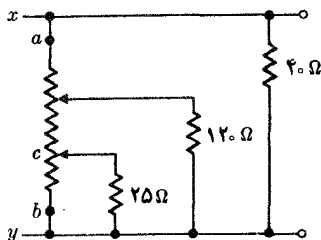
شکل ۶۰.۱۶

۳۴.۱۶ (الف) مقاومت معادل بین x و y را در مدار شکل ۶۱.۱۶ پیدا کنید. (ب) اگر جریان در مقاومت ۸ اهمی برابر ۵ A باشد اختلاف پتانسیل بین x و a چقدر است؟



شکل ۶۱.۱۶

۳۵.۱۶ (الف) در شکل ۶۲.۱۶، مقاومت بلند بین a و b برابر ۳۰۰ اهم است و در نقاطی به فاصله $۱/۳$ طول آن انشعاباتی گرفته شده اند. مقاومت بین x و y چقدر است؟
 (ب) اختلاف پتانسیل بین x و y برابر ۳۲۰ V است. اختلاف پتانسیل بین c و b چقدر می شود؟



شکل ۶۲.۱۶

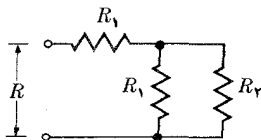
۳۶.۱۶ در شکل ۶۳.۱۶، هر یک از سه مقاومت ۲ اهم است و بدون اینکه بیش از حد گرم شود ۱۸ وات مصرف می کند. حداکثر توانی که مدار مصرف می کند چقدر است؟



شکل ۶۳.۱۶

۳۷.۱۶ سه مقاومت برابر به طور متوالی بسته شده اند. وقتی که در دوسر این مجموعه اختلاف پتانسیل مشخصی برقرار شود، توان کل تلف شده برابر است با ۱۰ وات. اگر این مقاومتها به طور موازی بین دوسر همان اختلاف پتانسیل بسته شوند چه توانی مصرف خواهد شد؟

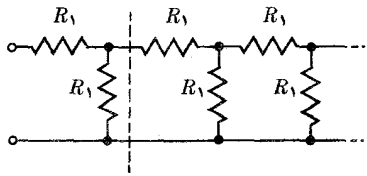
۳۸.۱۶ با توجه به مجموعه مقاومت‌های نشان داده شده در شکل ۶۴.۱۶، ثابت کنید برای اینکه مقاومت مجموعه برابر R_2 شود باید بین R_1 و R_2 رابطه $R_1 = ۱۰۶۱۸ R_2$ برقرار باشد.



شکل ۶۴.۱۶

۳۹.۱۶ با استفاده از نتیجه مسئله پیش، نشان دهید که مقاومت مجموعه نشان داده شده در شکل ۶۵.۱۶ برابر است با $R_1 = ۱۰۶۱۸ R_2$. [داهنمایی: توجه کنید که اگر مجموعه را در امتداد خط چین قطع کنیم، بخش واقع در سمت راست با زهم با دستگاه قبلی برابر است

زیرا از تعداد بینهایت زیادی مقاومت تشکیل شده است.

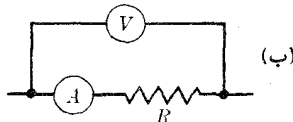
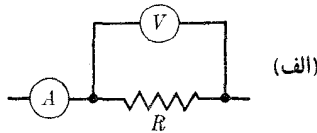


شکل ۶۵.۱۶

۴۵.۱۶ جریان بیشینه مجاز در پیچۀ يك وسیله الکتریکی $2.5A$ و مقاومت آن 20 اهم است. برای قراردادن آن (الف) درمداری که از آن $1.5A$ می گذرد، (ب) بین دو نقطه که بین آنها اختلاف پتانسیل $110V$ برقرار است، چه باید کرد؟

۴۱.۱۶ چه تغییری در مقاومت يك سیم پیدا می شود هر گاه (الف) طول آن، (ب) مقطع آن، (ج) شعاع آن را دو برابر بکنند؟

۴۲.۱۶ در مورد خطای موجود در اندازه گیری يك مقاومت به وسیله ولت سنج و آمپرسنج، همچنانکه شکل ۶۶.۱۶ نشان می دهد، بحث کنید. اثر مقاومت های R_1 و R_2 دستگاهها را نادیده بگیرید. اگر R (الف) بزرگ، (ب) کوچک باشد کدام روش دقیقتر است؟ توجه داشته باشید که معمولاً R_2 خیلی بزرگ و R_1 خیلی کوچک است.



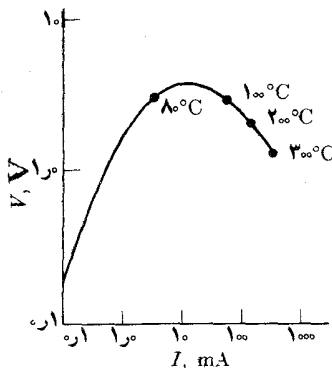
شکل ۶۶.۱۶

۴۳.۱۶ از سیمی که از ماده معینی ساخته شده است به ازای اختلاف پتانسیلهای V که به دوسر آن وصل شده اند، مطابق جدول ۵.۱۶، شدت جریانهای I به دست آمده اند. (الف) نمودار V را بر حسب I رسم کنید. آیا این ماده از قانون اهم پیروی می کند؟ (ب) از روی نمودار مقدار مقاومت سیم را هنگامی که جریان $1.5A$ از آن می گذرد بر آورد کنید. این مقاومت هنگامی که تغییرات کوچک باشند به صورت $\Delta V / \Delta I$ تعریف می شود و از رسم مماس بر منحنی در نقطه خواسته شده به دست می آید. (ج) نتیجه را با مقاومت میانگین بین

جدول ۵.۱۶

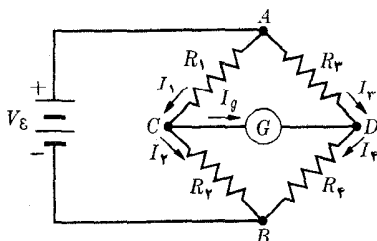
I (آمپر)	V (ولت)
۵۵	۴۷۵
۱۰۰	۵۸۱
۲۰۰	۷۰۵
۴۰۰	۸۵۶

۴۴.۱۶ نمودار شکل ۶۷.۱۶ رابطه جریان-ولتاژ را (در مختصات لگاریتمی) برای یک نیمه رسانا در دماهای مختلف نشان می‌دهد. (الف) مقاومت نیمه رسانا را در دماهای نوشته شده در کنار منحنی حدس بزنید و منحنی آن را در مختصات نیم لگاریتمی برحسب دما رسم کنید. (ب) با فرض اینکه تغییر مقاومت تنها از تغییر تعداد حاملهای بار در واحد حجم ناشی می‌شود، نسبت تعداد آنها را در $300^{\circ}C$ و نیز در $100^{\circ}C$ برآورد کنید.



شکل ۶۷.۱۶

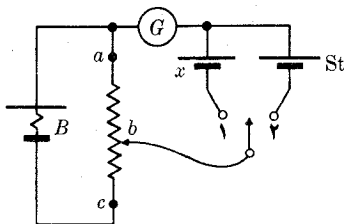
۴۵.۱۶ مدار شکل ۶۸.۱۶ را پل وتستون می‌نامند و برای اندازه‌گیری مقاومت به کار



شکل ۶۸.۱۶

می‌رود. نشان دهید هنگامی که جریان از داخل گالوانومتر G برابر صفر باشد (در نتیجه پتانسیل نقطه‌های D و C یکسان باشد) رابطه $R_1/R_2 = R_3/R_4$ برقرار است. بنابراین اگر R_2 و نسبت R_3/R_4 معلوم باشند، مقاومت R_1 به دست می‌آید.

۴۶.۱۶ شکل ۶۹.۱۶ نمایش یک پتانسیومتر (پتانسیل سنج) است که برای اندازه‌گیری نیروی محرکه الکتریکی V_x عنصر x به کار می‌رود. یک باتری B یک پیل سنج با نیروی محرکه الکتریکی V_{St} است. هنگامی که کلید در وضع ۱ یا ۲ قرار می‌گیرد، نقطه اتصال b را آنقدر جابجا می‌کنند تا گالوانومتر G صفر را نشان بدهد. اگر I_1 و I_2 فاصله‌های مربوط به b از a باشند، نشان دهید که داریم $V_x = V_{St}(I_1/I_2)$.



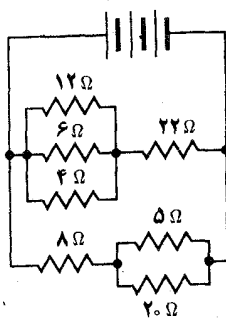
شکل ۶۹.۱۶

۴۷.۱۶ باز هم پتانسیومتر شکل ۶۹.۱۶ را به کار می‌بریم. نیروی محرکه الکتریکی B در حدود $3V$ و مقاومت داخلی آن مجهول است، St یک پیل سنج با نیروی محرکه الکتریکی $1.01837V$ است. کلید در وضع ۲ قرار دارد، یعنی پیل سنج در مدار گالوانومتر است. هنگامی که فاصله نقطه اتصال b از a مساوی 36 cm برابر طول ac باشد، گالوانومتر صفر را نشان می‌دهد. (الف) اختلاف پتانسیل بین دو سر مقاومت ac چقدر است؟ (ب) کلید را در وضع ۱ قرار می‌دهند. برای اینکه گالوانومتر مجدداً صفر را نشان بدهد، باید b در فاصله 47 cm برابر طول ac از a باشد. نیروی محرکه الکتریکی عنصر x چقدر است.

۴۸.۱۶ هنگامی که جریان $3A$ از قطب منفی به قطب مثبت یک باتری می‌گذرد اختلاف پتانسیل بین دو سر آن $85V$ است. اگر جریان $2A$ در سوی مخالف بگذرد اختلاف پتانسیل برابر $11V$ می‌شود (الف) مقاومت داخلی باتری چقدر است؟ (ب) نیروی محرکه الکتریکی آن چقدر است؟

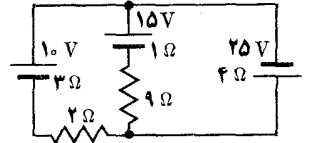
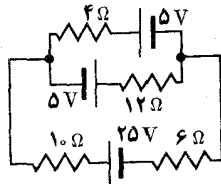
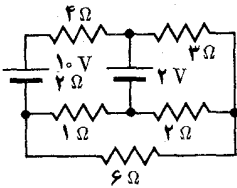
۴۹.۱۶ در مدار شکل ۷۵.۱۶، (الف) جریان را در باتری، (ب) اختلاف پتانسیل دوسر آن، و (ج) جریان را در هر یک از شاخه‌ها پیدا کنید.

۳۷، $\frac{1}{2} \Omega$ par pile



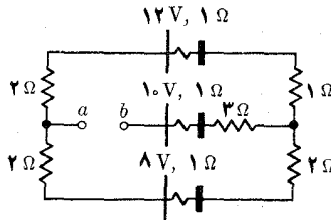
شکل ۷۰.۱۶

۵۰.۱۶ در شبکه‌های شکل ۷۱.۱۶ جریان را در هر يك از شاخه‌ها پیدا کنید.



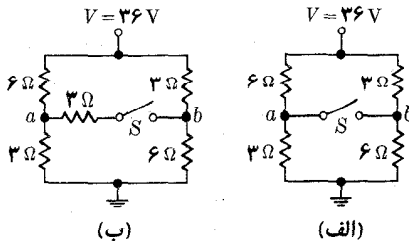
شکل ۷۱.۱۶

۵۱.۱۶ (الف) در مدار شکل ۷۲.۱۶ اختلاف پتانسیل بین نقطه‌های a و b را معین کنید. (ب) اگر a را به b وصل کنیم، جریان را در پیل ۱۲ ولتی حساب کنید.



شکل ۷۲.۱۶

۵۲.۱۶ (الف) در شکل ۷۳.۱۶ الف هنگامی که کلید S باز باشد، اختلاف پتانسیل



شکل ۷۳.۱۶

V_{ab} چقدر است؟ (ب) هنگامی که کلید S بسته است چه جریانی از آن می گذرد؟ (ج) در شکل ۷۳.۱۶ ب، هنگامی که کلید S باز است اختلاف پتانسیل V_{ab} چقدر است؟ (د) هنگامی که S بسته است چه جریانی از آن می گذرد؟ مقاومت معادل در مدار شکل ۷۳.۱۶ ب هنگامی که (ه) کلید S باز است، (و) کلید S بسته است، چقدر است؟

۵۳.۱۶ يك رسانای استوانه‌ای توخالی به طول L دارای شعاعهای داخلی و خارجی R_1 و R_2 است. دو سر رسانا را به اختلاف پتانسیلی وصل می کنند به گونه‌ای که جریان I موازی با محور استوانه از آن می گذرد. اگر σ رسانندگی جسم باشد نشان دهید که مقاومت آن برابر است با $L/\pi\sigma(R_2^2 - R_1^2)$.

۵۴.۱۶ يك رسانای استوانه‌ای توخالی به طول L دارای شعاعهای داخلی و خارجی R_1 و R_2 است. اختلاف پتانسیلی بین سطح خارجی و داخلی رسانا برقرار می شود به گونه‌ای که جریان I به‌طور شعاعی از داخل به سمت خارج از آن می گذرد. اگر σ رسانندگی جسم باشد نشان دهید که مقاومت رسانا برابر است با $(R_2/R_1)/2\pi\sigma L$.

۵۵.۱۶ عقربه گالوانومتری با عبور جریان 1 mA تا آخرین زینه (۵۰ زینه‌ای) منحرف می شود. مقاومت گالوانومتر 50Ω است، چکار باید کرد تا گالوانومتر (الف) به آمپرسنجی تبدیل شود که هر زینه آن متناظر با 2 A باشد؛ (ب) به ولت سنجی تبدیل شود که هر زینه آن متناظر با 5 V باشد؟

۵۶.۱۶ ایستگاه آمپریکای جریان مربوط به عبور يك stC در هر ثانیه است. بدیهی است $1\text{ A} = 3 \times 10^9\text{ stA}$. اگر میدان مغناطیسی برحسب گاوس (به مسئله ۵۳.۱۶ مراجعه کنید)، جریان برحسب stA ، فاصله برحسب cm و چگالی جریان برحسب $stA\text{ cm}^{-2}$ بیان شود، نشان دهید که معادله (۶۷.۱۶) به صورت $(1/3) \times 10^{-10} I = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ و معادله (۷۸.۱۶) به صورت $\text{curl } \mathbf{B} = (1/3) \times 10^{-10} \mathbf{j}$ درمی آید.

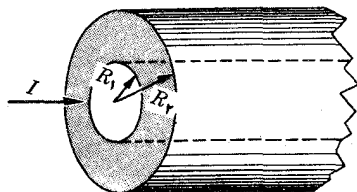
۵۷.۱۶ میدان مغناطان را می توان با یکایی به نام اورستد بیان کرد. اورستد میدان مغناطان حاصل از يك جریان مستقیم الخط به شدت $3 \times 10^9\text{ stA}$ در نقطه‌ای به فاصله 2 cm از جریان است. (الف) نشان دهید که 1 A m^{-1} برابر است با $4\pi \times 10^{-3}$ اورستد. (ب) نشان دهید که میدان مغناطان حاصل از جریانی مستقیم الخط با رابطه $H = (2I/3) \times 10^{10}$ داده می شود که در آن H برحسب اورستد، I برحسب stA و r برحسب cm اندازه گیری می شود. (ج) نشان دهید که با این یکاها، معادله (۸۵.۱۶) به صورت $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (4\pi I/3) \times 10^{10}$ درمی آید.

۵۸.۱۶ از رسانای استوانه‌ای توخالی به شعاعهای R_1 و R_2 در شکل ۷۳.۱۶، جریان I که به طور یکنواخت در مقطع آن توزیع شده است می گذرد. با استفاده از قانون آمپر، نشان دهید که میدان مغناطیسی برای $r > R_2$ برابر $B = \mu_0 I / 2\pi r$ ، و برای

برای $R_1 < r < R_2$

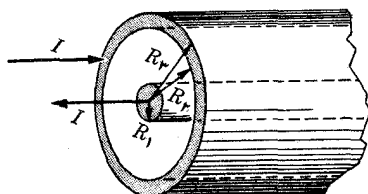
$$\frac{\mu_0 I (r^2 - R_1^2)}{2\pi (R_2^2 - R_1^2) r}$$

و برای $r < R_1$ برابر صفر است.



شکل ۷۴.۱۶

۵۹.۱۶ يك كابل هم‌محور تشكيل شده است از يك رسانای استوانه‌ای توپر به شعاع R_1 ، که توسط يك لایه رسانای استوانه‌ای هم‌محور، به شعاع داخلی R_2 و شعاع خارجی R_3 احاطه شده است (شکل ۷۵.۱۶). در عمل جریان I توسط سیم داخلی فرستاده می‌شود و از طریق لایه خارجی برمی‌گردد. با به کار بردن قانون آمپر، میدان مغناطیسی را در هر نقطه از داخل و خارج رسانا تعیین کنید. نمودار B را به صورت تابعی از r رسم کنید. چگالی جریان یکنواخت فرض می‌شود.



شکل ۷۵.۱۶

۶۰.۱۶ جدول ۶.۱۶ نتایج تجربی اندازه‌گیری پذیرفتاری مغناطیسی زاج آهن-آمونیم

جدول ۶.۱۶

χ_m	$t, ^\circ\text{C}$
7574×10^{-4}	-258
1173×10^{-4}	-173
5865×10^{-4}	-73
3777×10^{-4}	27

را به دست می‌دهد. نموداری از $1/\chi_m$ بر حسب دمای مطلق رسم کنید و مشخص کنید که آیا قانون کوری در آن صدق می‌کند. اگر پاسخ مثبت باشد، ثابت کوری چقدر است؟

۶۱.۱۶ با به کار بردن عامل $\nabla = \mathbf{u}_x(\partial/\partial x) + \mathbf{u}_y(\partial/\partial y) + \mathbf{u}_z(\partial/\partial z)$ که در بخش ۷.۸ تعریف کردیم، نشان دهید که اتحادهای زیر درست اند

$$\text{curl } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{و} \quad \text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

۶۲.۱۶ با استفاده از عامل ∇ معادلات دیفرانسیل میدان الکترومغناطیسی را که در جدول ۴.۱۶ داده شده است از نو بنویسید.

۶۳.۱۶ با استفاده از مسئله ۶۱.۱۶، ثابت کنید که $\text{curl grad } V = \nabla \times (\nabla V) = 0$ و $\text{div curl } \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ ، از این اتحادها دو نتیجه مهم به دست می‌آید. اول

اینکه چون در میدان الکتریکی ایستا $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ است، $\text{curl } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = 0$ می‌شود. این نتیجه در معادله (۷۹.۱۶) آمده است. دوم اینکه چون برای میدان مغناطیسی

$\text{div } \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ است یک میدان برداری مانند \mathbf{Q} وجود دارد به گونه‌ای که $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{Q}$ است. این میدان برداری پتانسیل برداری میدان الکترومغناطیسی نام دارد.

۶۴.۱۶ ثابت کنید که پتانسیل برداری میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B} برابر است با $\mathbf{Q} = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2$. [داهنمایی: فرض کنید که \mathbf{B} در راستای محور Z است، مؤلفه‌های قائم

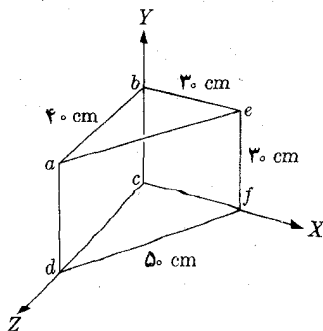
\mathbf{Q} را حساب کنید. و بعد $\nabla \times \mathbf{Q}$ را به دست آورید.]

۶۵.۱۶ نشان دهید که در جایی که یک جریان الکتریکی یکنواخت با چگالی ثابت می‌گذرد، میدان مغناطیسی برابر است با $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{r}/2$. [داهنمایی: تحقیق کنید که رابطه

$$\text{curl } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

۶۶.۱۶ عملگر $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ را بنویسید. سپس نشان دهید که معادله لاپلاس (۷.۱۶) و معادله پواسون (۶.۱۶) را می‌توان بترتیب به صورت $\nabla^2 V = 0$ و $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ نوشت.

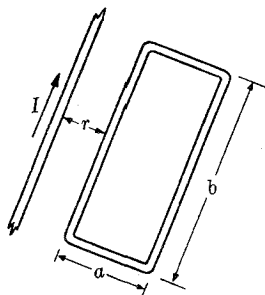
۶۷.۱۶ میدان مغناطیسی \mathbf{B} در ناحیه‌ای از فضا برابر T و در سوی مثبت محور X در شکل ۷۶.۱۶ است. (الف) شار مغناطیسی از داخل سطح $abcd$ چقدر است؟ (ب) شار



شکل ۷۶.۱۶

مغناطیسی از داخل سطح $befc$ چقدر است؟ (ج) شار مغناطیسی از داخل سطح $aefd$ چقدر است؟

۶۸۰۱۶ هنگامی که جریان I از سیم مستقیم شکل ۷۷۰۱۶ می‌گذرد شار مغناطیسی را از داخل مدار مستطیل شکل به دست آورید.



شکل ۷۷۰۱۶

۶۹۰۱۶ با قراردادن مقدار H که از معادله (۸۳۰۱۶) به دست می‌آید در معادله (۷۸۰۱۶)، نشان دهید که $\text{curl } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j}_{\text{آزاد}} + \text{curl } \mathbf{\pi})$ است. این نتیجه را چنین تعبیر کنید که اثر مغناطش یک محیط هم‌ارز است با افزودن یک چگالی جریان مغناطیسی $\mathbf{j}_{\text{مغناطیسی}} = \text{curl } \mathbf{\pi}$ ، بر روی چگالی جریان آزاد.

میدان الکترومغناطیسی وابسته به زمان

مقدمه	۱۰۱۷
قانون فاراده - هنری	۲۰۱۷
بتاترون	۳۰۱۷
القای الکترومغناطیسی ناشی از حرکت نسبی رسانا و میدان مغناطیسی	۴۰۱۷
القای الکترومغناطیسی و اصل نسبیت	۵۰۱۷
پتانسیل الکتریکی و القای الکترومغناطیسی	۶۰۱۷
شکل دیفرانسیلی قانون فاراده-هنری	۷۰۱۷
خودالقا	۸۰۱۷
انرژی میدان مغناطیسی	۹۰۱۷
نوسانهای الکتریکی	۱۰۰۱۷
مدارهای جفت شده	۱۱۰۱۷
اصل بقای بار الکتریکی	۱۲۰۱۷
قانون آمپر-ماکسول	۱۳۰۱۷
شکل دیفرانسیلی قانون آمپر-ماکسول	۱۴۰۱۷
معادلات ماکسول	۱۵۰۱۷

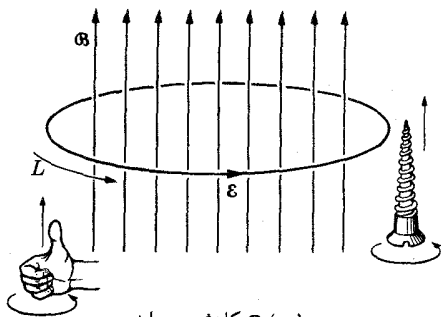
۱۰۱۷ مقدمه

در فصل پیش، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را مستقل از زمان، یا به گفته دیگر، ایستا فرض کردیم. در این فصل از میدانهای وابسته به زمان بحث می‌کنیم، یعنی میدانهایی که با زمان تغییر می‌کنند. انتظار داریم که روابط جدیدی در این مورد وجود داشته باشند. در بخش ۱۲.۱۵ رابطه نزدیک بین قسمت الکتریکی و قسمت مغناطیسی میدان الکترومغناطیسی را دیدیم، بویژه آنچه مربوط به خواص تبدیل میدان الکترومغناطیسی در اصل نسبیست می‌شود. در این فصل درمی‌یابیم که حضور میدان مغناطیسی متغیر وجود میدان الکتریکی را ایجاب می‌کند و برعکس، حضور میدان الکتریکی متغیر مستلزم حضور میدان مغناطیسی است، و اینکه این هر دو یکی از درباستهای اصل نسبیست‌اند. قوانینی که این دو وضع را توصیف می‌کنند قانون فاراداده - هنری و قانون ماکسول-آمپر نامیده می‌شوند.

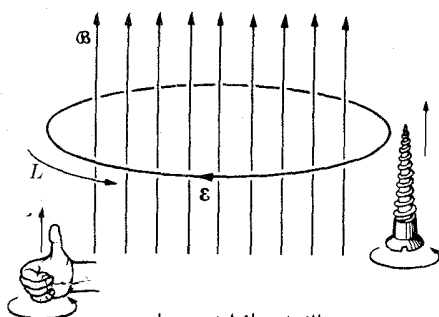
۲۰۱۷ قانون فاراداده - هنری

یکی از پدیده‌های متعدد الکترومغناطیسی که دانشجو با آنها آشنایی دارد القای الکترومغناطیسی است. این پدیده در حدود سال ۱۸۳۰/۱۲۰۹ تقریباً به طور همزمان به وسیله مایکل فاراداده و ژوزف هنری کشف شد. القای الکترومغناطیسی پایه اساسی کار مولدهای الکتریکی، ترانسفورماتورها و بسیاری از وسایل دیگر است. فرض کنید یک رسانای الکتریکی که مدار بسته‌ای را تشکیل می‌دهد در ناحیه‌ای از فضا قرار دارد که در آنجا میدان مغناطیسی برقرار است. اگر Φ_B ، شار مغناطیسی که از مدار بسته می‌گذرد، با زمان تغییر کند، در رسانا جریانی (در طول مدت تغییر شار) مشاهده می‌شود. وجود جریان الکتریکی حضور یا القای یک نیروی محرکه الکتریکی را در مدار نشان می‌دهد. اندازه‌گیری نشان می‌دهد که این نیروی محرکه القایی به آهنگ تغییر شار مغناطیسی یا $d\Phi_B/dt$ بستگی دارد. به عنوان مثال، اگر آهنربایی را در نزدیکی یک مدار بسته قرار دهیم، هنگامی که آهنربا (یا مدار) به گونه‌ای جابجا شود که شار مغناطیسی از داخل مدار تغییر کند نیروی محرکه الکتریکی در مدار ظاهر می‌شود. بزرگی این نیروی القایی به تندی یا کندی جابجایی آهنربا بستگی دارد. هرچه آهنگ تغییر شار مغناطیسی بزرگتر باشد، نیروی محرکه الکتریکی القایی قویتر است. راستای تأثیر نیروی محرکه الکتریکی بر حسب اینکه میدان مغناطیسی افزایشی یا کاهششی باشد تغییر می‌کند.

برای اطمینان خاطر بیشتر، به شکل ۱۰۱۷ مراجعه می‌کنیم. سوی منحنی L بنا به قاعده بخش ۱۰.۳، یعنی درسوی چرخش یک پیچ راستگرد که درسوی میدان \mathbf{B} پیشروی می‌کند، رسم شده است. اگر شار مغناطیسی افزایش یا بد (یعنی $d\Phi_B/dt$ مثبت باشد) نیروی محرکه الکتریکی القایی V_E درسوی منفی اثر می‌کند. برعکس، هنگامی که شار مغناطیسی کاهش می‌یابد (یعنی $d\Phi_B/dt$ منفی باشد) نیروی محرکه القایی V_E درسوی مثبت اثر می‌کند. بنا بر این علامت نیروی محرکه القایی V_E همیشه مخالف علامت $d\Phi_E/dt$ است. اندازه گیریه‌های دقیقتر نشان می‌دهند که مقدار نیروی محرکه القایی بر حسب ولت، برابر



(ب) کاهش می یابد B



(الف) افزایش می یابد B

شکل ۱۰۱۷ میدان الکتریکی حاصل از میدان مغناطیسی وابسته به زمان، (الف) $d\Phi_B/dt$ مثبت، V_E مثبت، (ب) $d\Phi_B/dt$ منفی، V_E مثبت.

است با مشتق شار مغناطیسی نسبت به زمان، برحسب وبر بر ثانیه. بنا بر این می توان نوشت

$$V_E = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (10.17)$$

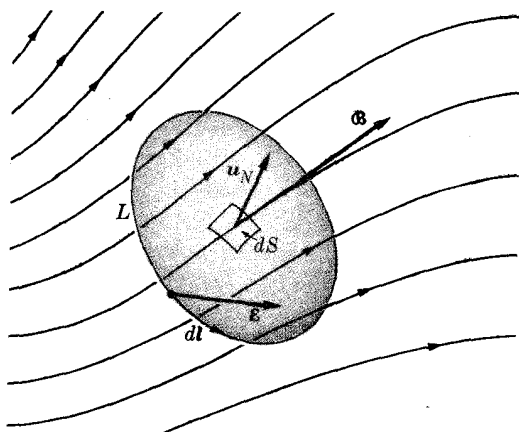
این رابطه بیان قانون فاراده-هنری در مورد القای الکترومغناطیسی است. قانون فاراده-هنری را می توان به شرح زیر بیان کرد

در میدان مغناطیسی متغیر، به هر مدار بسته یک نیروی محرکه الکتریکی القا می شود که برابر است با مشتق شار مغناطیسی عبوری از مدار نسبت به زمان با علامت مخالف.

اکنون همگنی معادله (۱۰۱۷) را از نظر یکاها بررسی می کنیم. می دانیم که V_E برحسب V یا $m^2 kgs^{-2} C^{-1}$ بیان می شود. بنا به بخش ۴.۱۶، می دانیم که Φ_B با یکا Wb یا $m^2 kgs^{-1} C^{-1}$ اندازه گیری می شود. در نتیجه $d\Phi_B/dt$ باید برحسب Wbs^{-1} یا $m^2 kgs^{-2} C^{-1}$ بیان شود. بنا بر این دو طرف معادله (۱۰۱۷) یکاهای یکسانی دارند. با توجه به شکل ۲.۱۷، اگر سطح محدود به L را به سطحهای جزئی بینهایت کوچک تقسیم و سوی هر سطح را مطابق قاعده بخش ۱۰.۳ انتخاب کنیم، بنا به بخش ۱۴.۱۶، شار مغناطیسی از داخل L برابر است با

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_N dS$$

همچنین بنا به معادله (۶.۱۶)، به سبب نیروی محرکه الکتریکی V_E ، یک میدان الکتریکی \mathbf{E} به وجود می آید، به گونه ای که $V_E = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. بنا بر این معادله (۱۰۱۷) را می توان به صورت زیر نوشت



شکل ۲۰۱۷

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_N dS \quad (2.17)$$

اکنون فراموش می‌کنیم که مسیر L بر یک رسانای الکتریکی مثلاً بر حلقه سیم بسته‌ای منطبق است و در عوض آن را ناحیه‌ای از فضا در نظر می‌گیریم که در آنجا یک میدان مغناطیسی متغیر نسبت به زمان وجود دارد. بنابراین معادله (۲.۱۷) با این بیان هم‌ارز است که

میدان مغناطیسی وابسته به زمان یک میدان الکتریکی به وجود می‌آورد، به‌گونه‌ای که گردش این میدان الکتریکی در امتداد هر مسیر بسته‌ای برابر است با مشتق شار مغناطیسی از داخل سطح محدود به این مسیر نسبت به زمان، با علامت مخالف.

این عبارت شیوه بیان دیگری از قانون فاراده‌نری در مورد القای الکترومغناطیسی است و بینش عمیقتری از مفهوم فیزیکی پدیده القای الکترومغناطیسی به دست می‌دهد؛ بدین معنی که وقتی میدان مغناطیسی با زمان تغییر کند میدان الکتریکی باید به وجود آید و دو میدان با معادله (۲.۱۷) به یکدیگر مربوط می‌شوند. میدان الکتریکی را می‌توان با اندازه‌گیری نیروی وارد بر بار ساکن در ناحیه‌ای که میدان مغناطیسی تغییر می‌کند به دست آورد. بدین ترتیب، تعبیر ما از معادله (۲.۱۷) از طریق تجربی تأیید می‌شود.

مثال ۱۰۱۷ یک مدار تخت مرکب از N حلقه که مساحت هر حلقه آن S است، عمود بر راستای یک میدان مغناطیسی متناوب یکنواخت متغیر با زمان قرار گرفته است. معادله میدان عبارت است از $B = B_0 \sin \omega t$. نیروی محرکه القایی در مدار را حساب کنید.

حل: شار مربوط به هر حلقه از مدار برابر است با $\Phi_B = SB = SB_0 \sin \omega t$ و شار کل از داخل N حلقه برابر می‌شود با

$$\Phi_B = NSB_0 \sin \omega t$$

در نتیجه، با استفاده از معادله (۳.۱۷) نیروی محرکه الکتریکی القایی عبارت می‌شود از

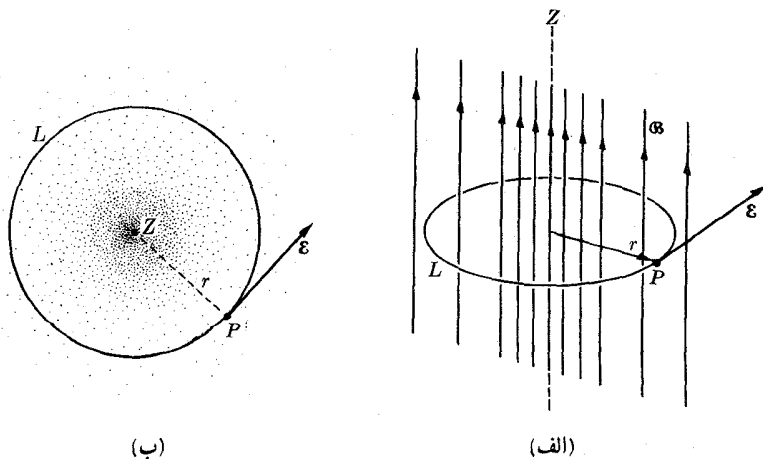
$$V_E = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -NSB_0 \omega \cos \omega t \quad (3.17)$$

این رابطه نشان می‌دهد که نیروی محرکه الکتریکی القایی، نوسانی یا متناوب است و بسامد آن با بسامد میدان مغناطیسی یکی است.

مثال ۳.۱۷ در ناحیه‌ای از فضا یک میدان مغناطیسی موازی با محور Z وجود دارد. این میدان دارای تقارن محوری است، یعنی بزرگی آن در هر نقطه تنها به r ، فاصله آن نقطه تا محور بستگی دارد. بزرگی آن با زمان نیز تغییر می‌کند. میدان الکتریکی را در هر نقطه از فضا حساب کنید.

حل: فرض کنید میدان مغناطیسی با افزایش فاصله از محور Z کاهش می‌یابد. شکل ۳.۱۷ الف دید از پهلو و شکل ۳.۱۷ ب مقطعی از این میدان را نشان می‌دهد.

تقارن مسئله ایجاب می‌کند که میدان الکتریکی \mathbf{E} در هر نقطه تنها به فاصله r بستگی داشته و بر میدان مغناطیسی \mathbf{B} و شعاع r عمود باشد. به گفته دیگر، خطهای نیروی میدان الکتریکی \mathbf{E} دایره‌هایی به مرکز Z تشکیل می‌دهند. با انتخاب یکی از دایره‌ها به عنوان



شکل ۳.۱۷ میدان الکتریکی حاصل از میدان مغناطیسی وابسته به زمان با تقارن استوانه‌ای، (الف) دید از پهلو، (ب) دید از بالا.

منحنی بسته انتگرال در معادله (۲.۱۷)، داریم

$$V_E = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E(2\pi r)$$

در نتیجه، با استفاده از معادله (۱.۱۷)، به دست می آید

$$E(2\pi r) = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (۴.۱۷)$$

B_{ave} ، میدان مغناطیسی میانگین در ناحیه دربرگیرنده مساحت S با رابطه $B_{ave} = \Phi_B/S$ یا $\Phi_B = B_{ave}S$ تعریف می شود. در این مورد $S = \pi r^2$ است، به گونه ای که $\Phi_B = B_{ave}(\pi r^2)$. معادله (۴.۱۷) میدان الکتریکی را در فاصله r از محور به صورت زیر به دست می دهد

$$E = -\frac{1}{2}r\left(\frac{dB_{ave}}{dt}\right) \quad (۵.۱۷)$$

اگر میدان مغناطیسی یکنواخت باشد، $B_{ave} = B$ است.

۳.۱۷ بتاترون

در سال ۱۹۴۱/۱۳۲۵، دی-کرسست فیزیکدان آمریکایی، با استفاده از نتایج مثال ۲.۱۷، ساختمان یک شتابدهنده الکترون به نام بتاترون را طرح ریزی کرد. اساس فکری این شتابدهنده بسیار ساده است. اگر الکترون (یا هر نوع ذره باردار دیگری) در ناحیه ای که میدان مغناطیسی متغیر با تقارن محوری وجود دارد پرتاب شود، این الکترون بر اثر میدان الکتریکی \mathbf{E} بیان شده با معادله (۲.۱۷) یا معادله (۵.۱۷) شتاب می گیرد. با سرعت گرفتن الکترون مسیر آن بر اثر میدان مغناطیسی \mathbf{B} انحنا پیدا می کند. اگر میدانهای مغناطیسی و الکتریکی به طور صحیحی میزان شوند، مسیر الکترون به صورت دایره درمی آید. الکترون در هر دور مقداری انرژی کسب می کند. بنابراین بعد از انجام چندین دور، تا انرژی معلومی شتاب می گیرد. هر چه تعداد دورها بیشتر باشد این انرژی نیز بیشتر است.

برای بررسی دقیقتر این مسئله، الکترون را در نقطه P در نظر می گیریم (شکل ۳.۱۷). اگر همه چیز چنان تنظیم شده باشد که الکترون دایره ای به شعاع r را بپیماید، میدان الکتریکی یک حرکت مماسی تولید می کند، که از رابطه $dP/dt = F_T$ محاسبه می شود (به بخش ۱۲.۷ مراجعه کنید). نیروی مماسی F_T برابر است با $-eE$ ، بنابراین

$$\frac{dp}{dt} = -eE = \frac{1}{2}er\left(\frac{dB_{ave}}{dt}\right) \quad (۶.۱۷)$$

برای به وجود آوردن حرکت دایره ای، میدان مغناطیسی باید شتاب مرکز گرای لازم را تولید کند. بنا به معادله (۱.۱۵) بزرگی نیروی مرکز گرا برابر است با $F_N = evB$. یا

استفاده از $Pv/r = F_N$ (به بخش ۱۲.۷ مراجعه کنید)، به دست می آید

$$\frac{Pv}{r} = evB \quad \text{یا} \quad p = erB \quad (۷.۱۷)$$

از مشتق معادله (۷.۱۷) نسبت به زمان، با توجه به اینکه r ثابت است، زیرا مسیر دایره‌ای است، داریم

$$\frac{dp}{dt} = er \frac{dB}{dt}$$

از مقایسه این رابطه با معادله (۶.۱۷) نتیجه می‌گیریم که شرط لازم برای اینکه الکترون تحت تأثیر مشترک میدانهای الکتریکی و مغناطیسی يك مسیر دایره‌ای به شعاع r رسم کند، این است که میدان مغناطیسی در فاصله r برابر باشد با

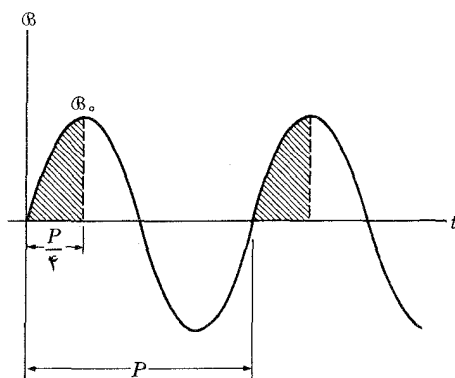
$$B = \frac{1}{\gamma} B_{ave} \quad (۸.۱۷)$$

در اینجا B_{ave} مقدار میانگین B در ناحیه بین L و Z است. این امر در بایستهایی را در چگونگی تغییر B بر حسب فاصله شعاعی r از محور، به وجود می‌آورد. تغییر درست B با r از روی این واقعیت تعیین می‌شود که نوعی پایداری برای حرکت مداری لازم است. یعنی با معلوم بودن شعاع مدار مورد نظر، نیروهای وارد بر الکترون باید به گونه‌ای باشند که اگر حرکت الکترون اندکی آشفته شود (یعنی به يك طرف یا طرف دیگر مدار کشیده شود)، نیروهای الکتریکی و مغناطیسی وارد بر الکترون آن را روی مدار صحیح برگردانند.

معمولاً، میدان مغناطیسی B نوسانی و بسامد زاویه‌ای آن ω است. ولی بنا به معادله‌های (۶.۱۷) و (۷.۱۷)، الکترون تنها در مدت افزایش میدان مغناطیسی شتاب می‌گیرد. از طرف دیگر، چون در عمل الکترونها با اندازه حرکت بسیار کوچکی پرتاب می‌شوند، باید موقعی پرتاب شوند که میدان مغناطیسی برابر صفر است. این امر بدین معنی است که تنها يك چهارم دوره تغییر میدان مغناطیسی برای شتاب دادن به الکترون قابل استفاده است. در شکل ۴.۱۷ فاصله زمانی که الکترون شتاب می‌گیرد با مساحت‌های هاشورزده نشان داده شده‌اند.

اگر الکترونها در مقایسه با انرژی حالت سکون $m_e c^2$ آنها تا انرژیهای خیلی بالا شتاب داده نشوند، بنا به معادله (۷.۱۷)، بیشینه اندازه حرکتی کسب می‌کنند که برابر است با $p_{max} = erB_0$ و در نتیجه بیشینه انرژی جنبشی الکترونهاى شتاب گرفته مساوی است با

$$E_{k, max} = \frac{1}{\gamma m_e} p_{max}^2 = \frac{e^2 r^2 B_0^2}{\gamma m_e}$$



شکل ۴.۱۷ فاصله زمانی سرعت گرفتن در بتاترون.

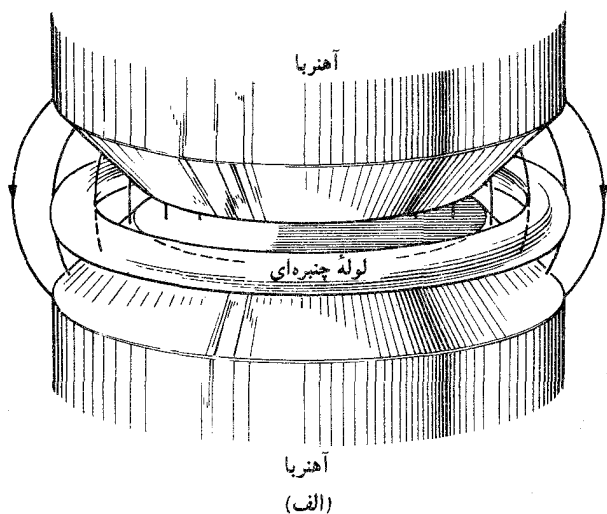
ولی اگر انرژی آن زیاد، و قابل مقایسه با یا بالاتر از $m_e c^2$ باشد، باید از معادله‌های (۱۸.۱۱) و (۲۰.۱۱) استفاده کرد، در نتیجه داریم

$$E_{k, \max} = c \sqrt{m_e^2 c^2 + e^2 r^2 B_0^2} - m_e c^2$$

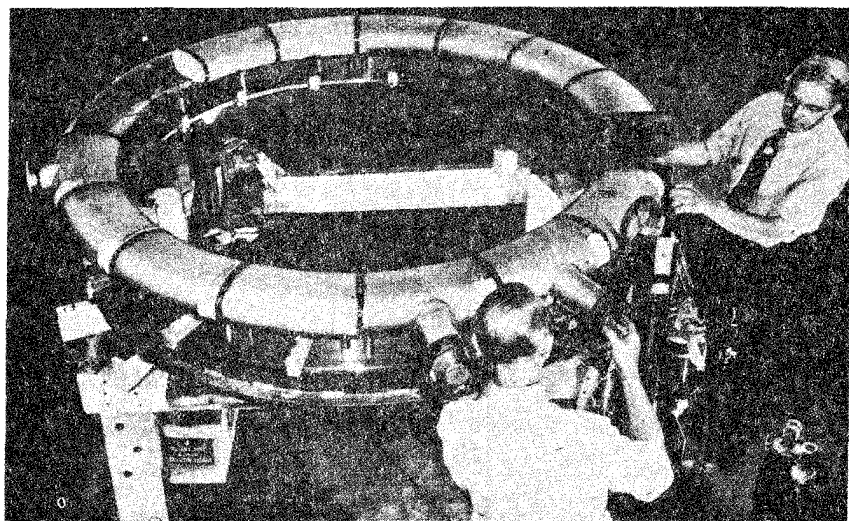
بتاترونهای فعلی از يك لوله چنبره‌ای (شکل ۵.۱۷) تشکیل شده‌اند که در میدان مغناطیسی حاصل از يك آهنربا قرار دارد. قطبهای آهنربا به گونه‌ای طرح ریزی یا ساخته شده‌اند که تغییر درست میدان مغناطیسی B با r بنا به معادله (۸.۱۷) میسر و شرایط پایداری را به وجود می‌آورند. الکترونها در ابتدای دوره شتاب دادن پرتاب می‌شوند و در پایان هر دوره اندکی منحرف می‌شوند، به گونه‌ای که به هدف مورد نظر برخورد کنند. انرژی جنبشی الکترونها به صورت تابش الکترومغناطیسی (فصل ۱۹) یا به صورت انرژی داخلی هدف که باعث گرم شدن آن می‌شود، و یا هم این و هم آن از بین می‌رود. بتاترونهایی با انرژی تا ۳۵۰ MeV ساخته شده است. از این بتاترونها برای مطالعه بعضی واکنشهای هسته‌ای و به عنوان چشمه‌های تابش برای معالجه سرطان استفاده می‌شود.

۴.۱۷ القای الکترومغناطیسی ناشی از حرکت نسبی رسانا و میدان مغناطیسی

قانون القای الکترومغناطیسی، آن‌طور که در معادله (۲.۱۷) بیان شد، حاکی از آن است که هر وقت در نقطه‌ای میدان مغناطیسی بر حسب زمان تغییر کند در آن نقطه میدان الکتریکی ظاهر می‌شود. ولی معادله (۱.۱۷) نشان می‌دهد که هرگاه شار مغناطیسی از داخل مداری نسبت به زمان تغییر کند يك نیروی محرکه الکتریکی در مدار به وجود می‌آید. دانستن اینکه آیا تغییر شار حاصل از حرکت یا تغییر شکل مسیر L ، بدون اینکه B الزاماً با زمان تغییر کند، همین نتیجه را به دست می‌دهد یا نه مهم است. دو مورد ساده زیر را بررسی می‌کنیم.



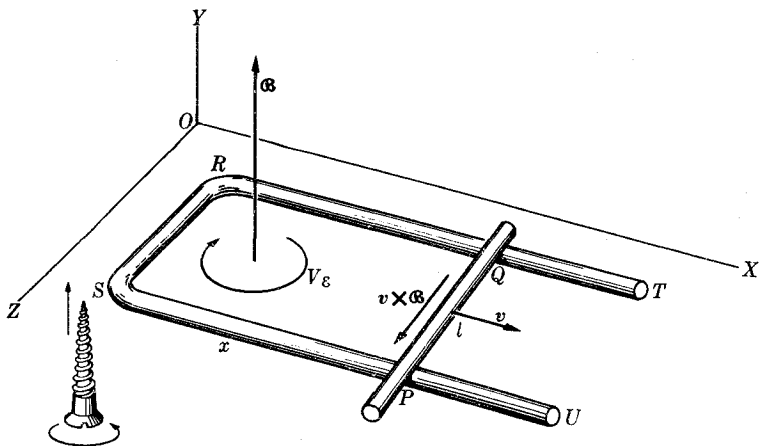
آهنربا
(الف)



(ب)

شکل ۵۰۱۷ (الف) دیدی از لوله شتاب‌دهنده و قطبهای يك بتاترون. (ب) نصب لوله شتاب‌دهنده در بتاترون.

آرایش شکل ۶۰۱۷ در آن رسانای PQ می‌تواند با سرعت v به موازات خود و بدون قطع ارتباط با رساناهای RT و SU حرکت کند، در نظری گیرییم. دستگاه $PQRS$ يك مدار بسته تشکیل می‌دهد. همچنین فرض کنید که يك میدان مغناطیسی یکنواخت عمود



شکل ۶.۱۷ نیروی محرکه الکتریکی القایی در یک رسانا که در داخل میدان مغناطیسی حرکت می کند.

بر صفحه $PQRS$ مانند \mathbf{B} نیز وجود دارد.

بنا به معادله (۱.۱۵)، به هر بار الکتریکی q در رسانای PQ نیروی $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ در راستای PQ وارد می شود. ولی همین نیرو را می توان ناشی از میدان الکتریکی «هم ارز» \mathbf{E}_{eq} ، با رابطه زیر، در نظر گرفت

$$q\mathbf{E}_{eq} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

یا

$$\mathbf{E}_{eq} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

چون \mathbf{v} و \mathbf{B} بر یکدیگر عمودند، رابطه برداری بالا را می توان به صورت نردهای زیر نوشت

$$E_{eq} = vB \quad (۹.۱۷)$$

اگر $PQ = l$ باشد، اختلاف پتانسیلی برابر با $V = E_{eq}l = Bvl$ بین دو نقطه Q و P وجود دارد. چون پاره خطهای QR ، RS و SP ساکن اند، هیچ نیرویی بر آنها وارد نمی شود. بنا بر این گردش \mathbf{E}_{eq} یا نیروی محرکه الکتریکی در امتداد مدار $PQRS$ درست برابر $V_E = V$ و در راستای $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ است

$$V_E = Bvl$$

از طرف دیگر، اگر طول SP را با x نشان دهیم، مساحت $PQRS$ برابر می شود با lx و شار مغناطیسی از داخل $PQRS$ برابر می شود با

$$\Phi_B = \int_{PQRS} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_N dS = Blx$$

در این صورت تغییر شار در واحد زمان برابر است با

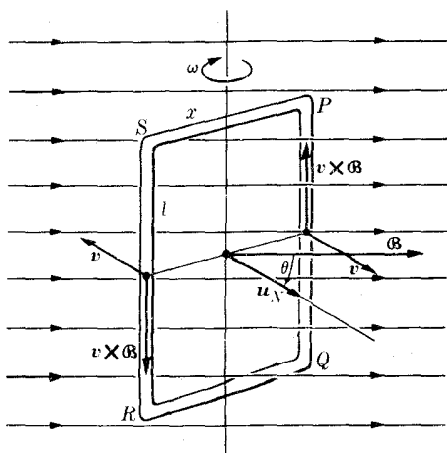
$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}(Blx) = Bl \frac{dx}{dt}$$

ولی $\frac{dx}{dt} = v$ است. در نتیجه داریم

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = Blv = V_E$$

به گفته دیگر، معادله (۱۰۱۷) به دست می آید. علامت منفی منظور نشده است زیرا تنها رابطه بین بزرگی کمیتها را در نظر گرفته ایم. با وجود این، رابطه (۱۰۱۷) از لحاظ علامت نیز برقرار است، زیرا شار Φ_B افزایش می یابد و علامت V_E با علامت $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ یکی است، به گونه ای که باشکل (۱۰۱۷) تطبیق می کند.

به عنوان مثال دوم، یک مدار مستطیل شکل را در نظر می گیریم که در میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B} با بسامد زاویه ای ω می چرخد (شکل ۷۰۱۷). هنگامی که \mathbf{u}_N سردار یکی عمود بر مدار با راستای میدان \mathbf{B} زاویه $\theta = \omega t$ می سازد، تمام نقاط PQ با سرعت \mathbf{v} حرکت می کنند، به گونه ای که میدان الکتریکی «هم ارز» $\mathbf{E}_{eq} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ در راستای Q به P و بزرگی آن برابر $E_{eq} = vB \sin \theta$ است. همین طور برای نقاط روی RS ، بزرگی $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ همان $vB \sin \theta$ و راستای آن از S به سمت R است. برای پاره خطهای RQ



شکل ۷۰۱۷ نیروی محرکه الکتریکی القایی در پیچ چرخان در داخل میدان مغناطیسی.

PS مشاهده می‌شود که $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ بر آنها عمود است و هیچگونه اختلاف پتانسیلی بین S و P و بین R و Q وجود ندارد. بنابراین اگر $PQ = RS = l$ باشد، گردش بردار میدان الکتریکی هم‌ارز \mathbf{E}_{eq} در طول $PQRS$ ، یا نیروی محرکه الکتریکی اعمال شده، برابر است با

$$V_E = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{eq}(PQ + SR) = 2lvB \sin\theta$$

همچنانکه قبلاً اشاره کردیم، اضلاع PS و RQ در به وجود آوردن V_E سهمی ندارند، زیرا در طول این پاره‌خطها \mathbf{E}_{eq} بر $d\mathbf{l}$ عمود است. اگر $SP = x$ باشد، شعاع دایره‌ای که هر بار الکتریکی واقع در رساناهای PQ و SR می‌پیماید برابر $(1/2)x$ است و در نتیجه $v = \omega(1/2)x = (1/2)\omega x$ می‌شود. در این صورت، چون $S = lx$ مساحت مدار و $\theta = \omega t$ است، برای نیروی محرکه الکتریکی که در نتیجه چرخش میدان مغناطیسی در مدار القا می‌شود، می‌توان نوشت

$$V_E = 2l \left(\frac{1}{2} \omega x \right) B \sin\omega t = \omega B(lx) \sin\omega t = \omega BS \sin\omega t$$

از طرف دیگر، شار مغناطیسی از داخل مدار برابر است با

$$\Phi_B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_y S = BS \cos\theta = BS \cos\omega t$$

در این صورت

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = \omega BS \sin\omega t = V_E$$

بنابراین مجدداً ثابت می‌شود که نیروی محرکه الکتریکی القایی ناشی از حرکت رسانا را می‌توان با به‌کار بردن معادله (۱۰۱۷) یا معادله (۲۰۱۷) به‌جای معادله‌های (۱۰۱۵) و (۶۰۱۶) حساب کرد.

هر چند بحث ما مربوط به مدارهای خاصی بود، ولی مجاسبه مفصلتر ریاضی نشان می‌دهد که در مورد هر مداری،

چنانچه تغییر شار مغناطیسی از تغییر میدان مغناطیسی \mathbf{B} ، یا از حرکت یا تغییر شکل مداری که نیروی محرکه الکتریکی القایی در آن حساب می‌شود، و یا از هر دو، نتیجه شود، می‌توان قانون القای الکترومغناطیسی $V_E = -d\Phi_B/dt$ را به‌کار برد.

بیشتر اوقات نیروی محرکه الکتریکی القایی در حالت دوم را نیروی محرکه حرکتی می‌نامند

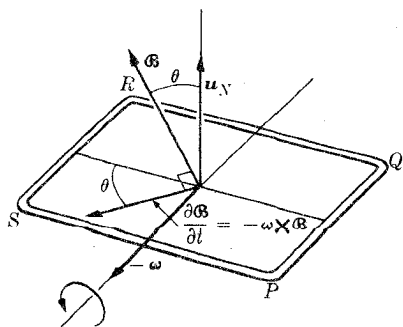
۵.۱۷ القای الکترومغناطیسی و اصل نسبیت

چنانکه در بخش پیش اشاره کردیم، با اینکه قانون القای الکترومغناطیسی تحت فرمولهای (۱۰۱۷) و (۲۰۱۷)، برای هر تغییر شاری، صرف نظر از منشأ تغییر شار، صادق است

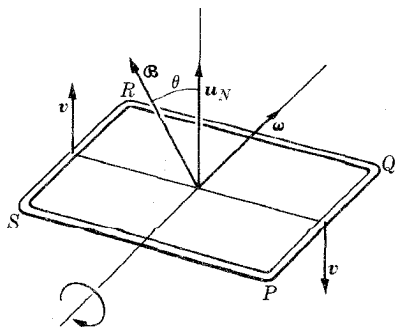
ولی اختلاف عمیقی بین وضعهای فیزیکی مربوط به این دو امکان وجود دارد. اگر برای ناظری محقق شود که تغییر شار از داخل يك مدار که نسبت به چارچوب مرجع او ساکن است از تغییر میدان مغناطیسی \mathbf{B} ناشی می شود، در همان لحظه به حضور میدان الکتریکی \mathbf{E} پی می برد که با رابطه (۲۰۱۷) به \mathbf{B} مربوط می شود، و با اندازه گیری نیروی وارد بر باری که در چارچوب مرجع او ساکن است، مقدار این میدان را اندازه می گیرد. ولی اگر ناظر متوجه شود که تغییر شار مغناطیسی از حرکت رسانا نسبت به چارچوب مرجع او ناشی می شود، او میدان الکتریکی مشاهده نمی کند. ولی نیروی محرکه الکتریکی را که اندازه گیری می کند، بنا به معادله (۱۰۱۵) به نیروی $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ وارد از طرف میدان مغناطیسی روی بارهای رسانای متحرک نسبت می دهد.

چطور ممکن است دو وضع متفاوت و ظاهراً بدون ارتباط توصیف واحدی داشته باشند؟ این امر تصادفی نیست، بلکه نتیجه مستقیم اصل نسبیت است. در اینجا وارد تحلیل ریاضی دقیق آن نمی شویم، ولی وضع را از دیدگاه شهودی بررسی می کنیم. مدار چرخان شکل ۷۰۱۷ را در نظر می گیریم. در چارچوب مرجعی که در آن میدان مغناطیسی \mathbf{B} ثابت (شکل ۸۰۱۷ الف) و مدار دارای حرکت چرخشی است، هیچگونه میدان الکتریکی مشاهده نمی شود و نیروی وارد بر الکترونها از معادله (۱۰۱۵) نتیجه می شود. ولی ناظر متصل به چارچوبی که همراه مدار می چرخد، رسانا را ساکن می بیند و مشاهده می کند که راستای میدان مغناطیسی \mathbf{B} در فضا می چرخد (شکل ۸۰۱۷ ب). در این صورت، ناظر نیروهای وارد بر الکترونهای مدار را به میدان الکتریکی \mathbf{E} مربوط می کند؛ که \mathbf{E} به نوبه خود، بنا به قانون القای الکترومغناطیسی، معادله (۲۰۱۷)، به تغییر میدان مغناطیسی \mathbf{B} وابسته است. تحلیل ریاضی این مورد نسبتاً دشوار است زیرا باید از چارچوب مرجع چرخان استفاده کرد و از این رو در اینجا وارد این بحث نمی شویم.

بدین طریق نتیجه می گیریم که تأیید تجربی قانون القای الکترومغناطیسی برای میدانهای مغناطیسی متغیر، تأکید مجددی بر اعتبار عام اصل نسبیت است.



(ب)



(الف)

۶.۱۷ پتانسیل الکتریکی و القای الکترومغناطیسی

در فصلهای ۱۴ و ۱۶ اشاره کردیم که به هر میدان الکتریکی ایستای \mathbf{E} یک پتانسیل الکتریکی V مربوط می شود، به گونه ای که مؤلفه های \mathbf{E} در راستای محوره های X ، Y و Z برابرند با مشتقهای V نسبت به x ، y و z با علامت مخالف، یعنی $E_x = -\partial V / \partial x$ ، و غیره؛ یا به طور ساده تر، میدان الکتریکی برابر است با منهای گرادیان پتانسیل الکتریکی. یکی از نتایج این امر آن است که گردش بردار میدان الکتریکی ایستا در امتداد هر منحنی بسته برابر صفر است، به زبان ریاضی این خاصیت با معادله (۶.۱۶) یا

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

بیان می شود. ولی دیدیم که در میدان الکترومغناطیسی وابسته به زمان معادله بالا اعتبار خود را از دست می دهد و به جای آن باید از معادله (۲.۱۷) استفاده کرد

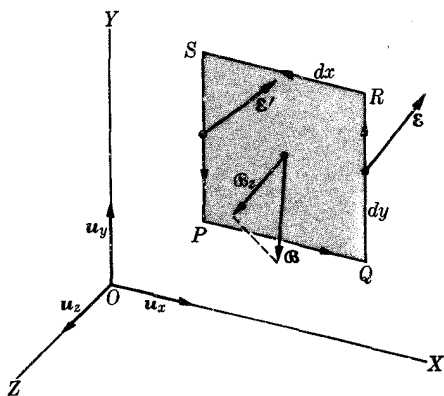
$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_N dS$$

بنابرین نتیجه می گیریم که در میدان الکترومغناطیسی وابسته به زمان، گردش میدان الکتریکی دیگر برابر صفر نیست و میدان الکتریکی را نمی توان با منهای گرادیان پتانسیل نشان داد. این سخن بدین معنی نیست که در این مورد پتانسیل کاملاً غیر قابل استفاده است، بلکه تنها بدین معنی است که باید آن را به شکل دیگری به کار گرفت. در واقع، دو پتانسیل لازم است یکی پتانسیل پرده ای که شاید پتانسیلی است که در حالت ایستا به کار می رود، و دیگری پتانسیل برداری. در این کتاب امکان استفاده از پتانسیل برداری وجود ندارد، و ما فقط به این دلیل در اینجا از آن نام بردیم که بدان شوju یاد آوری کنیم هنگام گذر از میدانهای ایستا به میدانهای وابسته به زمان بدین امر توجه کند و بداند که کدامیک از مفاهیم مربوط به میدانهای ایستا را می تواند باز هم به کار بندد.

۷.۱۷ شکل دیفرانسیلی قانون فاراده - هنری

قانون القای الکترومغناطیسی را به گونه ای که معادله (۲.۱۷) بیان می کند می توان در مورد هر منحنی و به هر شکلی که باشد به کار برد. اکنون این قانون را در مورد مدار مستطیل شکل بینهایت کوچک $PQRS$ واقع در صفحه XY به ضلعهای dx و dy به کار می بریم (شکل ۹.۱۷). ابتدا باید گردش میدان الکتریکی \mathbf{E} را به دست آوریم. روشی که به کار می بریم کاملاً مشابه روشی است که در بخش ۱۳.۱۶، هنگام مطالعه شکل دیفرانسیلی قانون آمپر به کار بردیم. برای تفصیل بیشتر، دانشجویی تواند به بخش یاد شده مراجعه کند. در این صورت برای سطح بینهایت کوچک $PQRS$ در صفحه XY می توان نوشت

$$\oint_{PQRS} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{PO} + \int_{QR} + \int_{RS} + \int_{SP} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$



شکل ۹.۱۷ مدار جزئی برای به دست آوردن شکل دیفرانسیلی قانون فاراده - هنری.

ولی داریم

$$\int_{QR} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_y dy \quad \text{و} \quad \int_{SP} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -E'_y dy$$

به گونه‌ای که بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \int_{QR} + \int_{SP} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= (E_y - E'_y) dy = dE_y dy \\ &= \frac{\partial E_y}{\partial x} dx dy \end{aligned}$$

این نتیجه به دلیل $dE_y = (\partial E_y / \partial x) dx$ درست است زیرا dE_y مربوط به اختلاف E_y در دو نقطه به فاصله dz از یکدیگر ولی با y و z یکسان است. به همین ترتیب می‌توان نوشت

$$\int_{PQ} + \int_{RS} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial E_x}{\partial y} dx dy$$

از جمع دو نتیجه بالا بدست می‌آید

$$\oint_{PQRS} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dx dy \quad (۱۰.۱۷)$$

اکنون باید شار مغناطیسی از داخل سطح را حساب کنیم. با توجه به اینکه $PQRS$ در صفحه XY قرار دارد، برداری عمود بر آن، \mathbf{u}_N ، برابر \mathbf{u}_z می‌شود و $\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_N = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_z = B_z$

است. در نتیجه شار مغناطیسی برابر می‌شود با

$$\int_{PQRS} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_N ds = B_z dx dy \quad (11.17)$$

زیرا $dx dy$ برابر مساحت مستطیل است. با قراردادن معادله‌های (۱۰-۱۷) و (۱۱-۱۷) در معادله (۲-۱۷) و حذف $dx dy$ از طرفین، بدست می‌آید

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (12.17)$$

با قراردادن مستطیل در صفحه YZ و ZX ، دو رابطه دیگر بدست می‌آید

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (13.17)$$

و

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (14.17)$$

مجموعه معادله‌های (۱۲-۱۷)، (۱۳-۱۷) و (۱۴-۱۷) شکل دیفرانسیلی قانون فاراد-هنری را به دست می‌دهند. می‌توان همانند آنچه که در بخش ۱۳-۱۶ برای قانون آمپر انجام دادیم، آنها را به صورت معادله برداری واحد زیر نوشت

$$\text{curl } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (15.17)$$

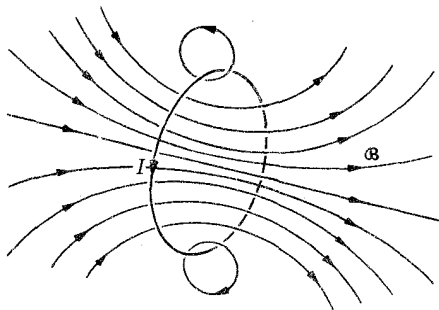
معادله (۱۵-۱۷) یا مجموعه معادله‌های هم‌ارز آن، (۱۲-۱۷)، (۱۳-۱۷) و (۱۴-۱۷)، بیان رابطه‌ای است که باید بین آهنگ تغییر زمانی میدان مغناطیسی در یک نقطه و میدان الکتریکی موجود در همان نقطه برقرار باشد. این معادله‌ها بطور روشن رابطه متقابل و نزدیک بین مؤلفه‌های الکتریکی و مغناطیسی میدان الکترومغناطیسی را نشان می‌دهند.

۸-۱۷ خود القا

مداری را که از آن جریان I می‌گذرد در نظر می‌گیریم (شکل ۱۵-۱۷). بنا به قانون آمپر، جریان میدان مغناطیسی تولید می‌کند که در هر نقطه با I متناسب است. می‌توانیم شار مغناطیسی از داخل این مدار را که ناشی از میدان مغناطیسی خود مدار است محاسبه کنیم و آن را خود شار بنامیم. پس این شار که آن را با Φ_I نشان می‌دهیم با جریان I متناسب است و می‌توان نوشت

$$\Phi_I = LI \quad (16.17)$$

ضریب L به شکل هندسی رسانا بستگی دارد و خود القایی مدار نام دارد. خود القایی بر حسب



شکل ۱۰.۱۷ خودشار مغناطیسی در یک مدار.

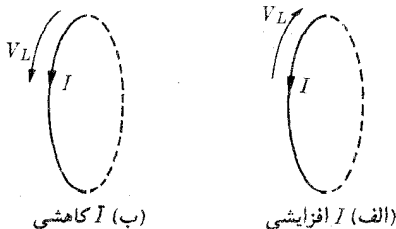
WbA^{-1} بیان می‌شود که، بدافتخار ژوزف هنری با علامت اختصاری H ، نامگذاری شده است، بدگفتهٔ دیگر

$$H = WbA^{-1} = m^2kgC^{-1}$$

اگر جریان I بر حسب زمان تغییر کند، شار مغناطیسی Φ_I از داخل مدار نیز تغییر می‌کند، و بنابینه قانون القای الکترومغناطیسی یک نیروی محرکهٔ الکتریکی در مدار القا می‌شود. این حالت خاص القای الکترومغناطیسی را خودالقای می‌نامند. از ترکیب معادله‌های (۱۰.۱۷) و (۱۶.۱۷) برای نیروی محرکهٔ الکتریکی خودالقا داریم

$$V_L = -\frac{d\Phi_I}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \quad (17.17)$$

علامت منفی نشان می‌دهد که V_L با تغییر جریان مخالفت می‌کند. بدین طریق، اگر شدت جریان افزایش یابد dI/dt مثبت است و V_L با جریان مخالفت می‌کند (شکل ۱۱.۱۷ الف). اگر از شدت جریان کاسته شود، dI/dt منفی است و V_L در جهت جریان عمل می‌کند (شکل ۱۱.۱۷ ب). بنا بر این V_L همواره در سویی عمل می‌کند که با تغییر جریان مخالف باشد. هنگام نوشتن معادلهٔ (۱۷.۱۷) فرض کردیم که مدار تغییرشکل نمی‌دهد و در محاسبهٔ مشتق



شکل ۱۱.۱۷ سوی نیروی محرکهٔ الکتریکی خودالقا در مدار.

نسبت به زمان، L را ثابت در نظر گرفتیم. اگر شکل مدار تغییر کند، دیگر L ثابت نیست و به جای معادله (۱۷.۱۷) باید نوشت

$$V_L = -\frac{d}{dt}(LI) \quad (18.17)$$

در رسم مدارها، برای نشان دادن یک رسانا با القای قابل ملاحظه، نماد شکل ۱۲.۱۷ را به کار می‌برند. باید توجه داشت که خود القایی یک مدار خاص یک نقطه مشخص نیست بلکه ویژگی مجموعه مدار است.

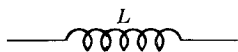
مثال ۳۰.۱۷ دربارهٔ برقراری جریان در یک مدار بحث کنید.

حل: هنگامی که بر اثر بستن کلید (شکل ۱۳.۱۷) نیروی محرکه الکتریکی V_E را به مدار اعمال می‌کنیم، شدت جریان فوراً به مقدار V_E/R که از قانون اهم به دست می‌آید نمی‌رسد بلکه بتدریج افزایش می‌یابد و بآرامی به این مقدار نزدیک می‌شود. این فرایند از نیروی محرکه الکتریکی خود القایی V_L که با تغییر جریان مخالفت می‌کند ناشی می‌شود و تا هنگامی که جریان از صفر به مقدار نهایی ثابت خود برسد ادامه دارد. بنابراین نیروی محرکه الکتریکی کل وارد بر مدار برابر است با

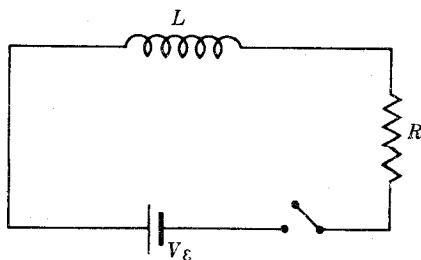
$$V_E + V_L = V_E - L \left(\frac{dI}{dt} \right)$$

از این رو، قانون اهم چنین نوشته می‌شود

$$RI = V_E + V_L \quad \text{یا} \quad RI = V_E - L \left(\frac{dI}{dt} \right) \quad (19.17)$$



شکل ۱۲.۱۷ نمایش خود القای.



شکل ۱۳.۱۷ مدار الکتریکی شامل مقاومت و خود القای.

این رابطه را می توان به صورت $R(I - V_E/R) = L(dI/dt)$ نوشت. با جداسازی متغیرهای I و t ، داریم

$$\frac{dI}{I - V_E/R} = -\frac{R}{L} dt$$

با توجه به اینکه در $t = 0$ جریان نیز برابر صفر است ($I = 0$)، با انتگرال گیری به دست می آید

$$\int_0^I \frac{dI}{I - V_E/R} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt$$

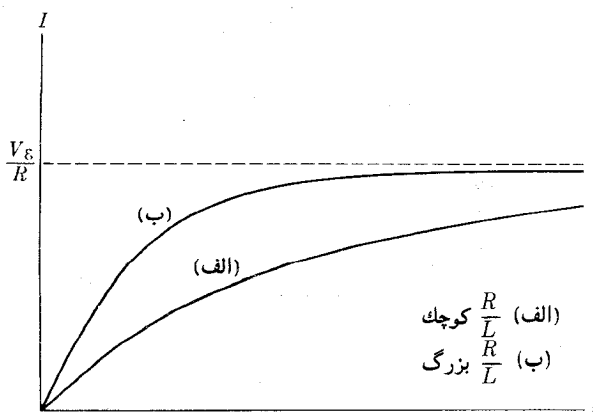
یا

$$\ln\left(I - \frac{V_E}{R}\right) - \ln\left(-\frac{V_E}{R}\right) = -\left(\frac{R}{L}\right)t$$

اگر به خاطر داشته باشیم که $\ln e^x = x$ ، در این صورت داریم

$$I = \frac{V_E}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$

جمله دوم داخل پرانتز با زمان کاهش می یابد، و جریان مجانب وار به مقدار V_E/R که از قانون اهم به دست می آید نزدیک می شود (شکل ۱۴.۱۷). اگر R/L بزرگ باشد، جریان خیلی سریع به این مقدار می رسد. اگر R/L کوچک باشد، زمان نسبتاً زیادی طول می کشد تا جریان پایدار شود. دانشجو با برقرار کردن تناظرهای $V_E \leftrightarrow F$ ، $L \leftrightarrow m$ و $R \leftrightarrow K\eta$ ، متوجه تشابه ریاضی موجود بین رابطه I و رابطه سرعت جسمی که در شاره و شکسان سقوط می کند (مثال ۸.۷) خواهد شد.



شکل ۱۴.۱۷ برقراری جریان در مدار.

مثال ۴۰۱۷ در میرایی جریان مدار شکل ۱۵.۱۷، با جا بجا کردن کلید از وضع ۱ به وضع ۲، بحث کنید.

حل: اگر کلید مدت زیادی در وضع ۱ بماند، می توان پذیرفت که شدت جریان به مقدار حد یا ایستای خود، یعنی V_E/R ، رسیده است. با قرار دادن کلید در وضع ۲ نیروی محرکه الکتریکی اعمال شده از مدار خارج می شود بدون این که مدار باز شود. تنها نیروی محرکه الکتریکی باقی مانده $V_L = -L dI/dt$ است، و از قانون اهم به دست می آید

$$RI = -L \frac{dI}{dt} \quad \text{یا} \quad \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$$

هر گاه مبدأ زمان ($t=0$) را لحظه ای اختیار کنیم که V_E از مدار خارج می شود، جریان آغازی برابر است با V_E/R با انتگرال گیری از رابطه فوق داریم

$$\int_{V_E/R}^I \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt$$

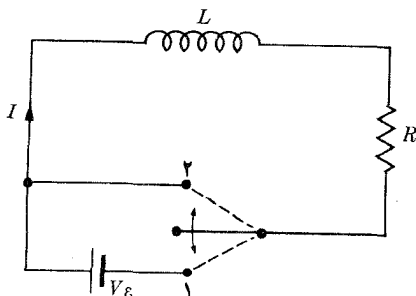
یا

$$\ln I - \ln \left(\frac{V_E}{R} \right) = -\left(\frac{R}{L} \right) t$$

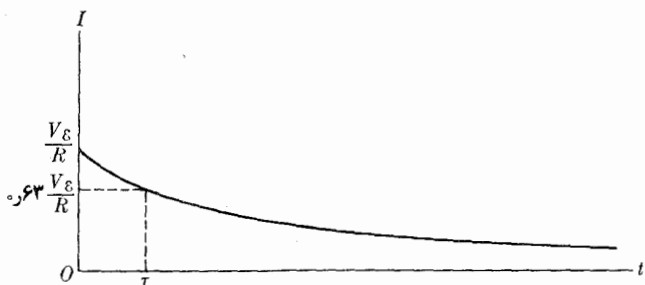
با حذف لگاریتم به دست می آید

$$I = \left(\frac{V_E}{R} \right) e^{-Rt/L}$$

همچنانکه شکل ۱۶.۱۷ نشان می دهد جریان به طور نمایی کاهش می یابد. هر چه مقاومت R بزرگتر یا القای L کوچکتر باشد، افت جریان سریعتر صورت می گیرد. زمان لازم برای



شکل ۱۵.۱۷ وسیله خارج کردن نیروی محرکه الکتریکی از مدار بدون تغییر مقاومت.

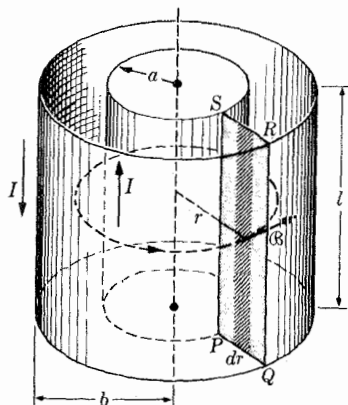


شکل ۱۶.۱۷ میرایی (فروافت) جریان در مدار پس از حذف نیروی محرکه الکتریکی.

اینکه جریان به مقدار $1/e$ یا حدود ۶۳٪ مقدار اولیه خود برسد، برابر است با $\tau = L/R$ این زمان را زمان واهلش می نامند.

مثال ۵.۱۷ مداری از دو ورقه فلزی استوانه‌ای شکل هم محور به شعاعهای a و b تشکیل شده است. از هر یک از دو استوانه جریان یکسان I ولی در دوسوی مخالف می گذرد. خود القایی را در واحد طول مدار حساب کنید (شکل ۱۷.۱۷). فضای بین دو استوانه از ماده‌ای به تراوایی الکتریکی μ پر شده است.

حل: در مثال ۱۸.۱۶، میدان مغناطیسی حاصل از چنین جریانهایی را حساب کردیم و مقدار آن را در ناحیه داخل استوانه‌ها برابر $B = \mu I / 2\pi r$ و در نقاط دیگر برابر صفر به دست آوردیم. در اینجا، بنا به نتایج بخش ۱۶.۱۶، به جای μ_0 ، μ قرار داده ایم. μ تراوایی ماده‌ای است که فضای بین دو استوانه را پر کرده است.



شکل ۱۷.۱۷

برای به دست آوردن خودالقایی، باید شار مغناطیسی را از داخل هر مقطعی از رسانا مانند $PQRS$ ، که دارای طول l است، حساب کنیم. اگر این مقطع را به نوارهایی به پهنای dr تقسیم کنیم، مساحت هر نوار برابر می شود با $l dr$. میدان مغناطیسی B بر $PQRS$ عمود است. در نتیجه داریم

$$\Phi_I = \int_{PQRS} B dS = \int_a^b \left(\frac{\mu I}{2\pi r} \right) (l dr) = \frac{\mu I l}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

بنابراین خودالقایی بخشی از مدار به طول l برابر است با

$$L = \frac{\Phi I}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (20.17)$$

و خودالقایی واحد طول برابر می شود با $(\mu/2\pi) \ln b/a$.

۹.۱۷ انرژی میدان مغناطیسی

در بخش ۱۰.۱۶ دیدیم که برای نگهداری جریان در مدار باید انرژی صرف کرد. انرژی لازم در واحد زمان (به گفته دیگر، توان) برابر است با $V_E I$. حال معادله (۱۹.۱۷) را می توان به صورت زیر نوشت

$$V_E = RI + L \frac{dI}{dt}$$

باضرب دوطرف این معادله در I داریم

$$V_E I = RI^2 + LI \frac{dI}{dt} \quad (21.17)$$

بنا به معادله (۵۳.۱۶)، RI^2 انرژی مصرف شده برای حرکت دادن الکترونها در داخل شبکه بلورین رساناست و به یونهای تشکیل دهنده شبکه انتقال می یابد. در این صورت جمله آخر معادله (۲۱.۱۷) را می توان انرژی لازم در واحد زمان برای برقراری جریان یا برای تولید میدان مغناطیسی وابسته به آن تعبیر کرد. بنابراین آهنگ افزایش انرژی مغناطیسی برابر است با

$$\frac{dE_B}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$$

پس انرژی لازم برای رساندن جریان از ۰ به I برابر می شود با

$$E_B = \int_0^I dE_B = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2 \quad (22.17)$$

به‌عنوان مثال، برای مسداز مثال ۵۰۱۷، بنا به معادله (۲۰۰۱۷)، انرژی مغناطیسی مقطعی به طول l برابر است با

$$E_B = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \right) I^2 = \frac{\mu l I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (23.17)$$

انرژی مغناطیسی E_B را می‌توان با استفاده از رابطه زیر نیز حساب کرد

$$E_B = \frac{1}{2\mu} \int B^2 dv \quad (24.17)$$

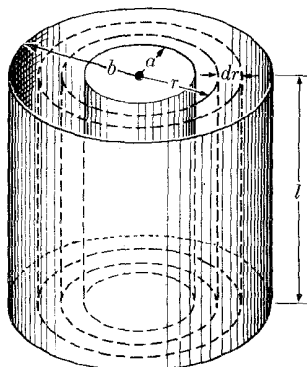
که در آن dv جزء حجم است و انتگرال روی تمام حجمی که در آن میدان مغناطیسی وجود دارد گرفته می‌شود. به‌عنوان مثال، در مورد شکل ۱۷۰۱۷، که مجدداً در شکل ۱۸۰۱۷ رسم شده است، میدان مغناطیسی با $B = \mu I / 2\pi r$ داده می‌شود. اگر یک پوسته استوانه‌ای به شعاع r و ضخامت dr را به‌عنوان جزء حجم انتخاب کنیم، حجم آن برابر می‌شود با $dv = (2\pi r) l dr$. با قرار دادن این مقدار در معادله (۲۴۰۱۷) و با توجه به اینکه میدان مغناطیسی تنها از $r = a$ تا $r = b$ گسترده است به‌دست می‌آید

$$E_B = \frac{1}{2\mu} \int_a^b \left(\frac{\mu I}{2\pi r} \right)^2 (2\pi l r dr) = \frac{\mu l I^2}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu l I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

که عیناً همان معادله (۲۳۰۱۷) است.

می‌توان رابطه (۲۴۰۱۷) را چنین تعبیر کرد: انرژی مصرف شده جهت برقراری جریان، در فضای اطراف ذخیره شده است، بنا براین به‌حجم dv انرژی برابر $(B^2 / 2\mu) dv$ مربوط می‌شود، و انرژی ذخیره شده در واحد حجم میدان مغناطیسی برابر است با

$$E_B = \frac{1}{2\mu} B^2 \quad (25.17)$$



شکل ۱۸۰۱۷

گرچه ما معادله (۲۵.۱۷)، چگالی انرژی مغناطیسی، را تنها در مورد یک مدار با تقارن خیلی خاص توجیه کردیم، ولی تحلیل مفصلتر، که در اینجا وارد آن نمی‌شویم، نشان می‌دهد که این نتیجه کاملاً کلی است. هنگامی که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی همزمان وجود دارند، باید چگالی انرژی الکتریکی را نیز که از معادله (۴۰.۱۶) به دست می‌آید در نظر گرفت. در این صورت انرژی کل در واحد حجم در میدان الکترومغناطیسی برابر می‌شود با

$$E = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 \quad (26.17)$$

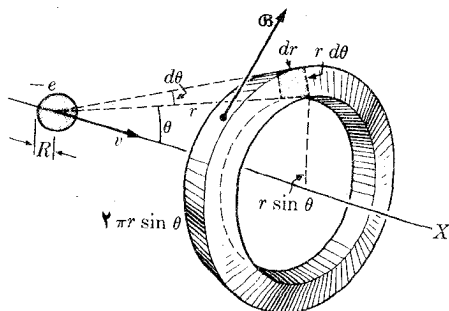
مثال ۶.۱۷ انرژی میدان مغناطیسی الکترونی را که به کندی حرکت می‌کند محاسبه و نتیجه را تحلیل کنید.

حل: بنا به بخش ۱۱.۱۵، می‌دانیم که از حرکت کند بار الکتریکی میدان مغناطیسی تولید می‌شود. خطهای نیروی میدان مغناطیسی دایره‌هایی هستند عمود بر راستای حرکت و بزرگی آنها از معادله (۵۳.۱۵) به دست می‌آید

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{v \sin \theta}{r^2}$$

در مورد الکترون $q = -e$ است. فرض کنید که از مدل خام الکترون که در مثال ۱۴.۱۶ معرفی کردیم و در آن «شعاع» الکترون بود استفاده می‌کنیم. انرژی میدان مغناطیسی در خارج از بار از معادله (۲۴.۱۷) به دست می‌آید؛ انتگرال، تمام فضای خارج از بار را شامل می‌شود، حلقه‌ای را که در شکل ۱۹.۱۷ نشان داده شده است به عنوان جزء حجم اختیار می‌کنیم. محیط این حلقه برابر $2\pi r \sin \theta$ و اضلاع مقطع عرضی آن برابر dr و $r d\theta$ و مساحت آن برابر $r dr d\theta$ است. در نتیجه حجم آن برابر می‌شود با

$$dv = \text{سطح مقطع} \times \text{محیط} = 2\pi r^2 \sin \theta dr d\theta$$



شکل ۱۹.۱۷

بنابراین از معادله (۲۴.۱۷) به دست می آید

$$E_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_R \int_0^\pi \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin \theta}{r^2} \right)^2 2\pi r^2 \sin \theta dr d\theta$$

$$= \frac{\mu_0}{16\pi} q^2 v^2 \int_R \frac{dr}{r^2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2q^2}{3R} \right) v^2$$

از این نتیجه انرژی مغناطیسی کل به دست نمی آید زیرا باید سهم میدان مغناطیسی داخل ذره باردار را به آن اضافه کرد. در این صورت لازم است چگونگی توزیع بار در داخل ذره معلوم باشد. ولی به هر حال، نتیجه فوق بر آوردی از مرتبه بزرگی انرژی به دست می دهد. جالبترین خصوصیت E_B بستگی آن به v^2 است و از این نظر به انرژی جنبشی ذره ای به جرم

$$m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2q^2}{3R}$$

شبهت دارد. در مورد الکترون $q = -e$ و $m = m_e$ است، به گونه ای که

$$m_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2e^2}{3R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{3Rc^2}$$

در اینجا برای حذف μ_0 از معادله (۵۵.۱۵) استفاده شده است. با حل این معادله برای R به دست می آید

$$R = \frac{2}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right) = \frac{2}{3} r_e$$

در این رابطه r_e شعاع الکترون، بنا به تعریف معادله (۴۵.۱۶) است. اینکه محاسبه تقریبی ما برای شعاع الکترون همان مرتبه بزرگی را نتیجه می دهد که از مثال ۱۴.۱۶ به دست آمد (در آنجا شعاع الکترون $R = 3/5 r_e$ بود) سازگاری منطقی نظریه را نشان می دهد؛ زیرا تنها می توان مرتبه بزرگی را بر آورد کرد. اگر این نتیجه را با نتیجه مثال ۱۴.۱۶ ترکیب کنیم، به نظر می رسد که انرژی سکون ذره باردار وابسته به انرژی میدان الکتریکی آن است، در حالی که انرژی جنبشی آن به انرژی میدان مغناطیسی آن مربوط می شود. ولی منطقی است که فکر کنیم میدانهای وابسته به سایر انواع برهم کنشهای موجود در طبیعت در انرژی سکون و انرژی جنبشی ذره دخالت دارند. با وجود این، اطلاعات ناقص ما از این برهم کنشها در شرایط فعلی اجازه اظهار نظر قطعی را نمی دهد. در واقع، مسئله ای که هم در اینجا وهم در مثال ۱۴.۱۶ مطرح کردیم چیزی است که تعیین خود انرژی الکترون نامیده می شود. منظور ما از طرح و بحث این مسئله جلب توجه دانشجویان است. اگر بخواهیم به بررسی دقیق این مسئله پردازیم، باید تکنیکهایی از مکانیک کوانتومی را به کار بگیریم که از سطح این کتاب فراتر می روند.

۱۰.۱۷ نوسانهای الکتریکی

در موارد مختلف دیدیم که جریان الکتریکی در داخل یک مدار با سه پارامتر مشخص می‌شود: ظرفیت C ، مقاومت R و خودالقای L . اکنون چگونگی ترکیب این کمیتها را برای تعیین جریان حاصل از یک نیروی محرکه الکتریکی معلوم تحلیل می‌کنیم. اگر فرض کنیم که جریان I در شکل (۲۰.۱۷ الف) در جهت نشان داده شده حرکت می‌کند، بارهای $+q$ و $-q$ روی صفحات خازن C ظاهر می‌شوند، به گونه‌ای که

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (27.17)$$

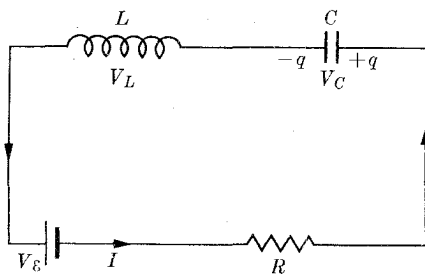
این بارها نیروی محرکه الکتریکی $V_C = -q/C$ را به وجود می‌آورند. علامت منفی بدین دلیل ظاهر می‌شود که نیروی محرکه الکتریکی به سبب تمایل خازن به تخلیه در مدار، با جریان I مخالفت می‌کند. بنا به معادله (۱۷.۱۷) در القای L نیز نیروی محرکه‌ای برابر با $V_L = -L(dI/dt)$ وجود دارد. به علاوه ممکن است غیر از اینها در مدار نیروی محرکه دیگری نیز وجود داشته باشد، که در شکل ۲۰.۱۷ ب با V_E نشان داده‌ایم.

الف) نوسانهای آزاد ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن تنها دو نیروی محرکه الکتریکی V_C و V_L وجود دارند. در این حالت جریان یا از پر شدن خازن، یا از تغییر شار مغناطیسی در داخل القا، یا از وارد کردن و سپس خارج کردن یک نیروی محرکه خارجی در مدار (مانند شکل ۱۵.۱۷) برقرار می‌شود. بنابراین از قانون اهم، یا معادله (۴.۱۶) به دست می‌آید

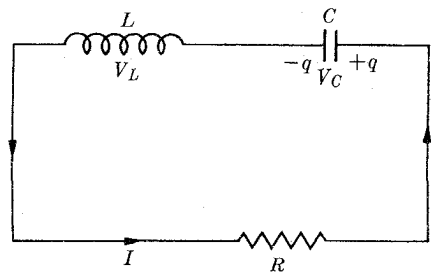
$$RI = V_L + V_C \quad \text{یا} \quad RI = -L \frac{dI}{dt} - \frac{q}{C} \quad (28.17)$$

از طرفین معادله نسبت به t مشتق می‌گیریم، به دست می‌آید

$$R \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2 I}{dt^2} - \frac{1}{C} \frac{dq}{dt}$$



(ب)



(الف)

با استفاده از معادله (۲۷.۱۷) و انتقال تمام جمله‌ها به سمت چپ در معادله بالا داریم

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0 \quad (29.17)$$

این رابطه يك معادله دیفرانسیل است که جواب آن I را بر حسب t به دست می‌دهد. پارامترهای L ، R ، و C شاخصهای مدارند.

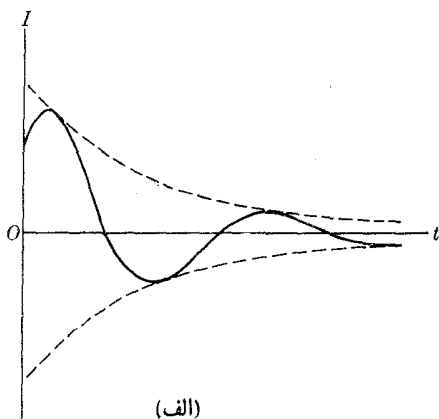
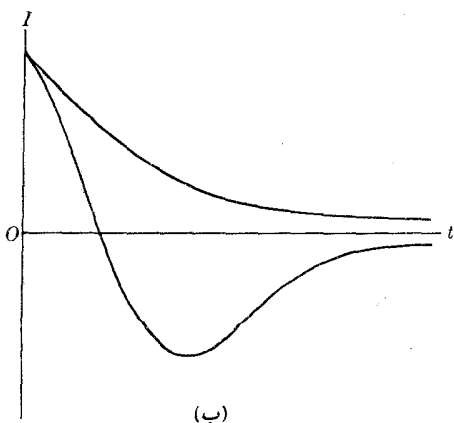
حال اگر تناظرهای $m \leftrightarrow L$ ، $\lambda \leftrightarrow R$ ، $k \leftrightarrow 1/C$ را برقرار کنیم، شکل ظاهری معادله (۲۹.۱۷) با معادله (۵۱.۱۲) که به نوسانهای میرای ذره مربوط است، یکسان می‌شود. در نتیجه تمام روابطی را که در آنجا به دست آورده بودیم می‌توان در اینجا نیز به کار برد. کمیت‌های γ و ω که با معادله (۵۱.۱۲) و برای $R^2 < 4L/C$ تعریف شدند، در اینجا به صورت زیر در می‌آیند

$$\gamma = \frac{R}{2L}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (30.17)$$

و جریان بر حسب زمان نیز که معادله‌ای مشابه با معادله (۵۳.۱۲) داشت، در اینجا به صورت زیر است

$$I = I_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha) \quad (31.17)$$

دانشجو می‌تواند، با جانشانی مستقیم در معادله (۲۹.۱۷)، درستی آن را تحقیق کند. نمودار جریان بر حسب زمان در شکل ۲۱.۱۷ الف رسم شده است. مشاهده می‌شود که يك جریان نوسانی یا يك نوسان که دامنه آن با زمان کاهش می‌یابد برقرار می‌شود. اگر مقاومت R



شکل ۲۱.۱۷ تغییر جریان تخلیه خازن بر حسب زمان؛ (الف) هنگامی که $R^2 < 4L/C$ است، (ب) هنگامی که $R^2 > 4L/C$ است.

نسبت به القای L خیلی کوچک باشد، می توان از γ و آخرین جمله رابطه ω صرف نظر کرد؛ در نتیجه به دست می آید $I = I_0 \sin(\omega t + \alpha)$ ، یعنی نوسانهای الکتریکی نامیرا هستند، و بسامدشان برابر است با

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (۲۲.۱۷)$$

ω را بسامد سرشتی مدار LC می نامند که هم ارز بسامد $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ در يك نوسانگر نامیرا است. توجه کنید که میرایی در يك مدار الکتریکی از اتلاف انرژی در مقاومت R ناشی می شود.

اگر مقاومت به قدر کافی بزرگ باشد، به گونه ای که $R^2/4L^2 > 1/LC$ یا $R^2 > 4L/C$ ، بسامد ω موهومی می شود. در این حالت چنانکه شکل ۲۱.۱۷ ب نشان می دهد، جریان بدون نوسان، به طور منظم کاهش می یابد. نوسانهایی که مورد بحث قرار گرفتند، چون در غیاب هر گونه نیروی محرکه الکتریکی خارجی به وجود می آیند، نوسانهای آزاد مدار نام دارند.

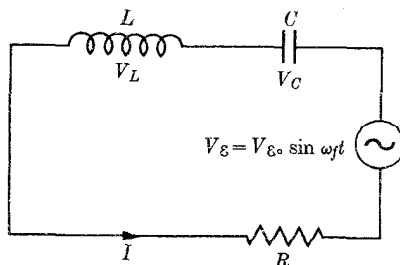
(ب) نوسانهای واداشته. نوسانهای الکتریکی واداشته هنگامی تولید می شوند که به مدار شکل ۲۰.۱۷ يك نیروی محرکه الکتریکی متناوب، به صورت $V_E = V_{E_0} \sin \omega t$ افزوده شود. شکل ۲۲.۱۷ نمایش يك مدار با نوسانهای واداشته است. در نتیجه معادله (۲۸.۱۷) به صورت زیر درمی آید

$$RI = V_L + V_C + V_{E_0} \sin \omega t$$

با تکرار روشی که برای به دست آوردن معادله (۲۹.۱۷) به کار بردیم، از رابطه بالا نسبت به زمان دیفرانسیل می گیریم و جملات آن را به صورت زیر مرتب می کنیم

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \omega_f V_{E_0} \cos \omega t \quad (۳۳.۱۷)$$

این معادله خیلی شبیه به معادله (۵۶.۱۲)، مربوط به نوسانهای واداشته يك ذره، است.



شکل ۲۲.۱۷

اختلاف مهم این دو معادله عبارت است از اینکه بسامد ω_f به صورت سازه‌ای در سمت راست معادله (۳۳.۱۷) ظاهر شده است. دلیل این امر آن است که، بنا به معادله $I = dq/dt$ ، جریان در یک مدار الکتریکی متناظر است با سرعت $v = dx/dt$ برای ذره در حال حرکت. اکنون می‌توان فرمولهای بخش ۱۳.۱۲ را، با توجه به تناظرهای مناسب بین کمیتها که در جدول ۱۰۱۷ نشان داده شده‌اند، به کار گرفت. در این صورت جریان با رابطه زیر داده می‌شود

$$I = I_0 \sin(\omega_f t + \alpha) \quad (34.17)$$

اگر از معادله (۶۲.۱۶) که V_0 دامنه سرعت را به دست می‌دهد، و با توجه به تناظر درست بین کمیتها استفاده کنیم، دامنه جریان را به دست می‌آوریم

$$I_0 = \frac{V_{E_0}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_f L - \frac{1}{\omega_f C}\right)^2}} \quad (35.17)$$

با استفاده از رابطه‌هایی که در بخش ۱۴.۱۲ به دست آوردیم می‌توان باگیری مدار الکتریکی به صورت زیر نوشت

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega_f L - \frac{1}{\omega_f C}\right)^2} \quad (36.17)$$

باگیری انگاری مدار برابر است با

جدول ۱۰۱۷ تناظر بین یک نوسانگر میرا و یک مدار الکتریکی

مدار الکتریکی	نوسانگر
L ، القا	جرم، m
R ، مقاومت	میرایی، λ
عکس ظرفیت، $\frac{1}{C}$	ثابت کشسانی، k
بار الکتریکی، q	جابجایی، x
جریان، $I = \frac{dq}{dt}$	سرعت، $v = \frac{dx}{dt}$
نیروی محرکه الکتریکی اعمال شده، V_{E_0}	نیروی اعمال شده، F_0

$$X = \omega_f L - \frac{1}{\omega_f C} \quad (۳۷.۱۷)$$

به گونه‌ای که

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (۳۸.۱۷)$$

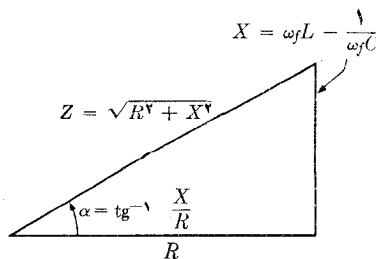
و اختلاف فاز α بین جریان و نیروی محرکه الکتریکی اعمال شده از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{X}{R} = \frac{\omega_f L - \frac{1}{\omega_f C}}{R} \quad (۳۹.۱۷)$$

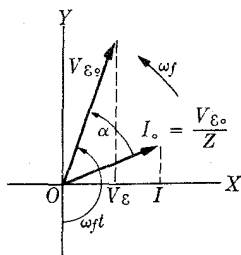
کمیت‌های Z ، X ، R و α مطابق شکل ۲۳.۱۷، که ترسیم دوباره شکل ۲۹.۱۲ است، به هم مربوط می‌شوند. توجه کنید که هم پاگیری وهم پاگیری انگاری برحسب اهم بیان می‌شوند. به عنوان مثال؛ ωL برحسب یکاهای اصلی به صورت $\text{Hs}^{-1} = \text{m}^2 \text{kg s}^{-1} \text{C}^{-2}$ نوشته می‌شود که همان عبارتی است که در بخش ۱۵.۱۶ برای اهم به دست آوردیم. دانشجو می‌تواند همین امر را در مورد $1/\omega C$ نیز تحقیق کند. اگر R و X برحسب اهم بیان شوند، در این صورت با توجه به تعریف (۳۸.۱۷)، Z نیز باید برحسب اهم بیان شود.

نیروی محرکه الکتریکی V_E و جریان I را، همچنانکه شکل ۲۴.۱۷ نشان می‌دهد، می‌توان به صورت بردارهای چرخان نمایش داد. مؤلفه‌های این بردارها روی محور X مقادیر لحظه‌ای V_E و I را به دست می‌دهند. برحسب اینکه α مثبت یا منفی باشد، به گفته دیگر، برحسب اینکه $\omega_f L$ بزرگتر یا کوچکتر از $1/\omega_f C$ باشد، جریان I نسبت به نیروی محرکه الکتریکی تأخیر یا تقدم دارد. شکل ۲۵.۱۷ نمودار V_E و I را برحسب زمان نشان می‌دهد. توان میانگین لازم جهت نگهداری جریان، با قراردادن کمیت‌های متناظر در معادله (۷۵.۱۲) به دست می‌آید

$$P_{\text{ave}} = \frac{1}{T} V_E I_0 \cos \alpha = \frac{1}{T} R I^2 \quad (۴۵.۱۷)$$



شکل ۲۳.۱۷ رابطه بین مقاومت، پاگیری و پاگیری انگاری.

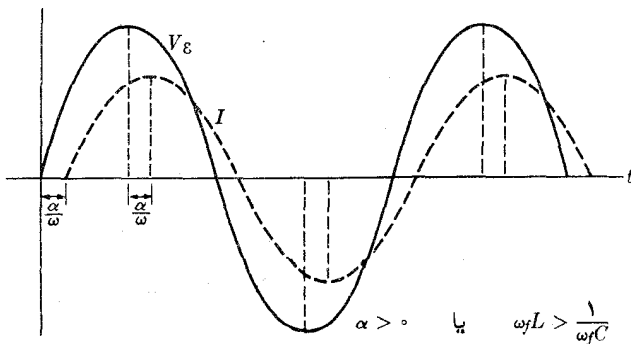


$$\alpha > 0 \quad \text{یا} \quad \omega_f L > \frac{1}{\omega_f C}$$

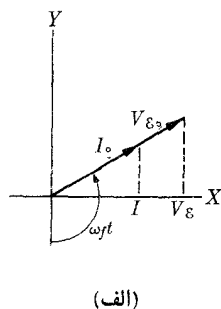
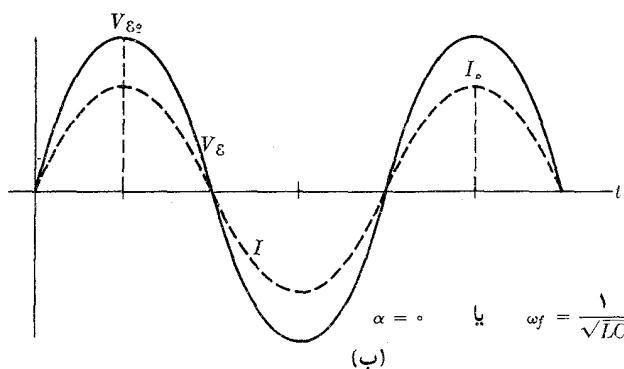
شکل ۲۴.۱۷ بردارهای چرخان جریان و نیروی محرکه الکتریکی در مدار ac.

چنانکه در بخش ۱۳.۱۲ مورد بحث قرار گرفت، بازآوایی در این حالت هم ارز بازآوایی انرژی است. بازآوایی انرژی هنگامی رخ می‌دهد که P_{ave} بیشینه باشد، یعنی هنگامی که $\alpha = 0$ یا $\omega_f L = 1/\omega_f C$ است. در این صورت $\omega_f = \sqrt{1/LC}$ می‌شود، که متناظر با مقدار ω_0 در معادله (۳۲.۱۷) است. هنگام بازآوایی، جریان دارای دامنه بیشینه و بسا نیروی محرکه الکتریکی همفاز است، که به یک توان میانگین بیشینه منجر می‌شود. بردارهای چرخان I و V_E همفاز یا برهم منطبق‌اند و جریان و نیروی محرکه الکتریکی مطابق شکل ۲۶.۱۷ تغییر می‌کنند.

همانند نوسانهای واداشته زره، جواب عمومی معادله (۳۳.۱۷) عبارت است از مجموع معادله (۳۴.۱۷) و یک جریان گذرا به معادله (۳۱.۱۷). با وجود این، به سبب میرایی، جمله متناظر با معادله (۳۱.۱۷) خیلی سریع قابل اغماض می‌شود و کافی است تنها



شکل ۲۵.۱۷ تغییرات جریان و نیروی محرکه الکتریکی بر حسب زمان در مدار ac.



شکل ۲۶.۱۷ رابطه بین نیروی محرکه الکتریکی و جریان هنگامی که اختلاف فاز بین آنها برابر صفر است (بازآوایی).

معادله (۳۴.۱۷) را به حساب آوریم. ولی هر گاه تغییر و تبدیلی در مدار رخ دهد، مثلاً تغییری در L ، C یا R داده شود جمله گذرا برای مدت کوتاهی که مدار خود را با شرایط جدید تطبیق می دهد ظاهر می شود.

مثال ۷.۱۷ مداری شامل مقاومت 40Ω ، خود القای $1H$ و خازن $10^{-5}F$ است. یک نیروی محرکه الکتریکی با بسامد $60Hz$ مدار را تغذیه می کند. پاگیری انکاری، پاگیری، تغییر فاز جریان و بسامد بازآوایی مدار را پیدا کنید.

حل: بسامد زاویه ای برابر $\omega_f = 2\pi\nu$ است. چون $\nu = 60Hz$ است، $\omega_f = 376.8S^{-1}$ می شود. بنا بر این با استفاده از معادله (۳۷.۱۷) به دست می آید

$$X = \omega_f L - \frac{1}{\omega_f C} = -227.57 \Omega$$

در این صورت پاگیری برابر است با

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = 231.2 \Omega$$

بنا به معادله (۳۹.۱۷)، تغییر فاز برابر می شود با

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{X}{R} = -56.80 \quad \text{یا} \quad \alpha = -80^{\circ} 21'$$

پس جریان نسبت به نیروی محرکه الکتریکی تقدم فاز دارد. برای بسامد بازآوایی، از معادله (۳۲.۱۷) به دست می آید

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 10^3 \text{ s}^{-1} \quad \text{یا} \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 159 \text{ Hz}$$

مثال ۸.۱۷ با استفاده از روش بردارهای چرخان دربارهٔ مدارى با جریان متناوب بحث کنید.

حل: نتایجى را که در بخش ۱۰.۱۷ به دست آوردیم می توان باروش بردارهای چرخان با آسانی به دست آورد. معادلهٔ مدار را می توان به صورت زیر نوشت

$$V_{E_0} \sin \omega_f t = RI - V_L - V_C = RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C}$$

همان گونه که می گوئیم RI اختلاف پتانسیل بین دوسر مقاومت R است، می توان گفت که $L(dI/dt)$ و q/C بترتیب اختلاف پتانسیل (یا افت پتانسیل) بین دوسر القا و خازن اند. اگر فرض کنیم که $I = I_0 \sin(\omega_f t - \alpha)$ باشد، بردار چرخان جریان نسبت به بردار چرخان نیروی محرکه الکتریکی به اندازهٔ زاویهٔ α تأخیر فاز دارد (شکل ۲۷.۱۷). ولی می توان بردار چرخان نیروی محرکه الکتریکی را مجموع بردارهای چرخان مربوط به سه جملهٔ سمت راست معادلهٔ بالا در نظر گرفت. توجه داشته باشید که

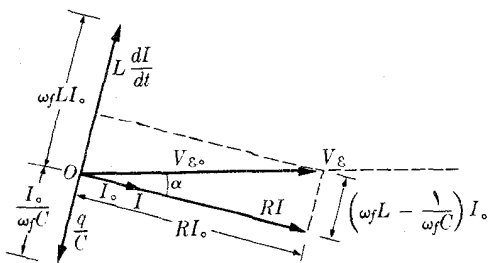
$$\frac{dI}{dt} = \omega_f I_0 \cos(\omega_f t - \alpha) \quad \text{و} \quad q = \int I dt = -\left(\frac{1}{\omega_f}\right) I_0 \cos(\omega_f t - \alpha)$$

بنابراین برای افت پتانسیل در مقاومت می توان نوشت

$$RI = RI_0 \sin(\omega_f t - \alpha), \quad (\text{همفاز با } I)$$

افت پتانسیل در القا

$$L \left(\frac{dI}{dt}\right) = \omega_f L I_0 \sin\left(\omega_f t - \alpha + \frac{1}{4}\pi\right), \quad \left(I \text{ تقدم فاز نسبت به } \frac{\pi}{4}\right)$$



شکل ۲۷.۱۷ نمودار بردارهای چرخان مربوط به مدار شکل ۲۲.۱۷.

افت پتانسیل درخازن

$$\frac{q}{C} = \left(\frac{1}{\omega_f C}\right) I_0 \sin\left(\omega_f t - \alpha - \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{\pi}{2} \text{ تأخیر فاز نسبت به } I\right)$$

بردارهای چرخان در شکل ۲۷.۱۷ نشان داده شده‌اند. بردار چرخان V_E به عنوان خط مرجع منظور شده است. دامنه‌ها عبارت‌اند از RI_0 ، $\omega_f LI_0$ و $I_0/\omega_f C$. براین دامنه‌ها باید برابر V_{E_0} باشد، زیرا مجموع سه افت پتانسیل برابر است با نیروی محرکه الکتریکی اعمال شده. بنابراین

$$V_{E_0}^2 = R^2 I_0^2 + \left(\omega_f L - \frac{1}{\omega_f C}\right)^2 I_0^2$$

یا

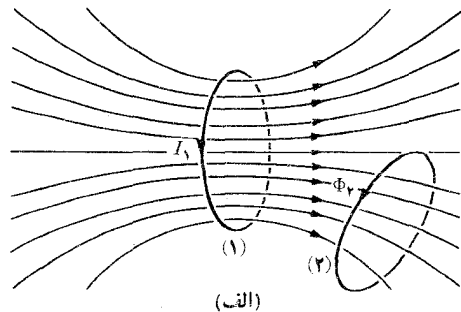
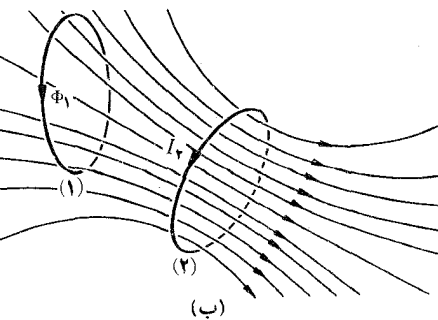
$$V_{E_0} = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\omega_f L - \frac{1}{\omega_f C}\right)^2}$$

اگر از این رابطه I_0 را حساب کنیم معادله (۳۵.۱۷) به دست می‌آید. از روی شکل، می‌توان زاویه فاز α را حساب کرد که مقدار آن با معادله (۳۹.۱۷) تطبیق می‌کند. از روش بردارهای چرخان در تحلیل مهندسی مدارهای جریانهای متناوب به طور وسیع استفاده می‌شود.

۱۱.۱۷ مدارهای جفت شده

در شکل ۲۸.۱۷ دو مدار (۱) و (۲) را در نظر می‌گیریم. اگر جریان I_1 از مدار (۱) بگذرد، یک میدان مغناطیسی متناسب با I_1 در فضای اطراف مدار (۱) بوجود می‌آید و از داخل مدار (۲) شار مغناطیسی Φ_2 که آن نیز متناسب با I_1 است می‌گذرد. در این صورت می‌توان نوشت

$$\Phi_2 = MI_1 \quad (۴۱.۱۷)$$



شکل ۲۸.۱۷ القای متقابل.

M ضریب تناسب است. هر گاه جریان واحدی از مدار (۱) بگذرد M نمایش شار مغناطیسی است که از داخل مدار (۲) می گذرد. همچنین اگر جریان I_2 از مدار (۲) بگذرد یک میدان مغناطیسی در فضای اطراف به وجود می آید، و این میدان به نوبه خود شار مغناطیسی Φ_1 را که متناسب با I_2 است از داخل مدار (۱) عبور می دهد. بنا بر این می توان نوشت

$$\Phi_1 = MI_2 \quad (۴۲.۱۷)$$

توجه کنید که در معادله (۴۲.۱۷) نیز از همان ضریب معادله (۴۱.۱۷) استفاده کرده ایم. این امر بدین معنی است که می پذیریم شار مغناطیسی از داخل مدار (۱) ناشی از عبور جریان واحد از مدار (۲) با شار مغناطیسی ناشی از عبور جریان واحد از مدار (۱) برابر است. این ضریب مشترک را القای متقابل دو مدار می نامند، و می توان ثابت کرد که چنانکه گفتیم در هر دو مورد یکسان است. به عبارت دیگر، القای متقابل تقارن دارد. ضریب M به شکل مدارها و وضع استقرار نسبی آنها بستگی دارد. M را بر حسب هنری اندازه می گیرند زیرا یکای آن عبارت است از WbA^{-1} .

اگر جریان I_1 متغیر باشد، شار Φ_2 که از مدار (۲) می گذرد تغییر می کند و نیروی محرکه الکتریکی V_{M2} در این مدار القا می شود. این نیروی محرکه را رابطه زیر داده می شود

$$V_{M2} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

با نوشتن این فرمول به طور ضمنی می پذیریم که مدارها سخت و در فضا ثابت اند، به گونه ای که M تغییر نمی کند. همچنین اگر جریان I_2 متغیر باشد، نیروی محرکه الکتریکی V_{M1} با رابطه زیر در مدار (۱) القا می شود

$$V_{M1} = -M \frac{dI_2}{dt} \quad (۴۳.۱۷)$$

بدین مناسبت است که M را «القای متقابل» می نامند زیرا اثر یا تأثیر متقابل بین دو مدار را توضیح می دهد. بعلاوه، اگر مدارها نسبت به یکدیگر حرکت کنند، به گونه ای که موجب تغییر M شود، باز هم نیروهای محرکه الکتریکی در مدارها القا می شوند.

با به کار بردن قانون اهم، می توان معادله ای که جریان در مدار (۱) را با پارامترهای دستگاه ارتباط می دهد به دست آورد. تنها کاری که باید انجام داد افزودن نیروی محرکه الکتریکی V_{M1} ، داده شده با معادله (۴۳.۱۷) به معادله (۲۸.۱۷) است، یعنی

$$RI_1 = V_{L1} + V_{C1} + V_{M1}$$

در این رابطه $V_{L1} = -L_1 dI_1/dt$ و $V_{C1} = -q_1/C_1$ است. با توجه به اینکه $I_1 = dq_1/dt$ است، اگر از رابطه بالا نسبت به زمان مشتق بگیریم، به جای معادله (۲۹.۱۷) به دست می آید

$$L_1 \frac{d^2 I_1}{dt^2} + R_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C_1} I_1 = -M \frac{d^2 I_2}{dt^2} \quad (۴۴.۱۷)$$

با همین شیوه، برای مدار (۲) نیز داریم

$$L_{\gamma} \frac{d^2 I_{\gamma}}{dt^2} + R_{\gamma} \frac{dI_{\gamma}}{dt} + \frac{1}{C_{\gamma}} I_{\gamma} = -M \frac{d^2 I_1}{dt^2} \quad (45.17)$$

معادله‌های (۴۴.۱۷) و (۴۵.۱۷) يك دستگاه معادلات دیفرانسیلی همزمان، مشابه با معادله (۳۶.۱۲)، برای دو نوسانگر جفت شده، تشکیل می‌دهند. در اینجا ثابت جفت شدگی، M است. ماجوابهای عمومی را بررسی نمی‌کنیم، ولی با توجه به بحثی که درباره نوسانگرهای مکانیکی جفت شده در بخش ۱۰.۱۲ داشتیم نتیجه می‌گیریم که، تبادل انرژی بین مدارها به وجود می‌آید. کاربردهای رایج و عملی این فرایند عبارت‌اند از ترانسفورماتورها و مولد القایی. کاربرد دیگر القای متقابل، به معنای وسیع آن، فرستادن يك علامت از يك نقطه به نقطه دیگر، با ایجاد جریان متغیر در مداری به نام فرستنده است. این مدار به نوبه خود روی مدار دیگری که با او جفت شده است و گیرنده خوانده می‌شود اثر می‌کند. تلگراف، رادیو، تلویزیون، رادار و غیره، همگی بر این پایه عمل می‌کنند. ولی مطالعه این وسایل روش دیگری لازم می‌دارد که در فصل ۱۹ به آن اشاره خواهیم کرد.

مهمترین و اساسیترین جنبه القای متقابل آن است که انرژی می‌تواند از طریق میدان مغناطیسی بین دو مدار مبادله شود. می‌توان گفت که میدان مغناطیسی که جریان مدارها تولید می‌کنند مانند حامل انرژی عمل می‌کند و از طریق فضا، انرژی را از مداری به مدار دیگر منتقل می‌کند.

ولی القای متقابل بین دو مدار، يك پدیده ماکروسکوپیست که از برهم کنشهای جزئی حاصل از حرکت نسبی بارهای سازنده جریان در مدارها نتیجه می‌شود. از این رو می‌توانیم از پدیده القای متقابل نتیجه بگیریم که برهم کنشهای الکترومغناطیسی بین دو ذره باردار را می‌توان به عنوان تبادل انرژی از طریق میدانهای الکترومغناطیسی متقابل آنها توصیف کرد.

هنگامی که دو ذره باردار در معرض برهم کنش الکترومغناطیسی باشند، اصل بقای انرژی را باید طوری بیان کرد که شامل انرژی میدان نیز بشود [یادآوری می‌شود برای منظور کردن اندازه حرکت میدان ناچار شدیم در اصل بقای اندازه حرکت نیز دستکاری کنیم و معادله (۶۸.۱۵) را به دست آوردیم]. از این رو، انرژی کل دستگاهی از دو ذره باردار در حال برهم کنش را باید به صورت زیر نوشت

$$E = E_1 + E_2 + E_{\text{میدان}} \quad (46.17)$$

در این معادله E_1 و E_2 انرژی هر ذره، یعنی مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل ناشی از تمام نیروهای وارد بر آنها، و میدان $E_{\text{میدان}}$ انرژی مربوط به میدان الکترومغناطیسی آنهاست. می‌توان ثابت کرد که در شرایط ایستا (یا شرایطی که بکنندی با زمان تغییر می‌کنند)، میدان $E_{\text{میدان}}$ درست به انرژی پتانسیل ناشی از برهم کنش کولنی دوبار

$$E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

مربوط می‌شود. اگر به‌ذره‌ها نیروی دیگری اثر نکند، مجموع سه جمله معادله (۴۶.۱۷) در جریان حرکت دو ذره ثابت باقی می‌ماند.

مثال ۹.۱۷ پیچده‌ای با N حلقه در قسمت مرکزی یک سیملوله چنبره‌ای پیچیده شده است. سیملوله دارای n دور در واحد طول و سطح مقطع S است (شکل ۲۹.۱۸). القای متقابل این دستگاه را حساب کنید.

حل: مسئله را می‌توان از دوراه حل کرد، یکی پیدا کردن شار مغناطیسی از داخل سیملوله هنگامی که جریانی از پیچه می‌گذرد، دیگری برعکس، پیدا کردن شار مغناطیسی از داخل پیچه، هنگامی که جریانی از داخل سیملوله می‌گذرد. ما روش دوم را که راحت‌تر است انتخاب می‌کنیم. بنا به‌مثال ۱۹.۱۶ در مورد سیملوله چنبره‌ای، یادآوری می‌کنیم که میدان مغناطیسی در داخل حجم محصور است و مقدار آن از معادله (۷۱.۱۶) به‌دست می‌آید: $B = \mu_0 n I$. شار مغناطیسی از هر مقطع سیملوله مساوی است با

$$\Phi_B = BS = \mu_0 n S I$$

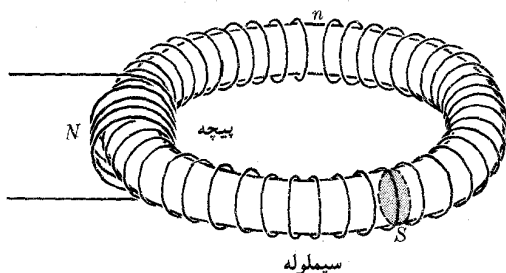
در این رابطه S مساحت مقطع سیملوله است. این شار برابر شاری است که از هر حلقه پیچه می‌گذرد، حتی اگر سطح مقطع آن بزرگتر باشد. بنابراین شار مغناطیسی از داخل پیچه برابر می‌شود با

$$\Phi_{\text{پیچه}} = N \Phi_B = \mu_0 n N S I$$

از مقایسه این رابطه با معادله (۴۱.۱۷)، برای القای متقابل دستگاه به‌دست می‌آید

$$M = \mu_0 n N S$$

از این وسیله هنگامی که در آزمایشگاه به یک القای متقابل سنجه نیاز هست بسیار استفاده می‌شود.



شکل ۲۹.۱۷

۱۲.۱۷ اصل بقای بار الکتریکی

در بخش ۲.۱۴ بحث کردیم که بار الکتریکی پایسته است. به گفته دیگر، در تمام فرایندهایی که در جهان رخ می دهند، باید مقدار خالص بار ثابت بماند. این بیان را می توان به صورت کمی بیان کرد. سطح بسته S را در نظر می گیریم (شکل ۳۰.۱۷) و بار خالصی را که در یک لحظه معلوم در داخل آن وجود دارد با q نشان می دهیم. چون این مسئله يك مسئله دینامیکی است، بارهای آزاد (مانند الکترونها در فلزات یا یونها در پلاسما) در داخل محیط حرکت می کنند و از S می گذرند. در يك لحظه معین، احتمال دارد بارهایی که از S خارج می شوند بیش از بارهایی باشند که به آن وارد می شوند. این امر موجب کاهش بار خالص q در داخل سطح S می شود. در لحظه دیگر، وضع ممکن است به کلی عوض شود و بارهای ورودی بیش از بارهای خروجی باشند، که این موجب افزایش بار خالص q می شود. بدیهی است هرگاه مقدار شار بارهای ورودی و خروجی برابر باشند، بار خالص q ثابت می ماند. اصل بقای بار ایجاب می کند که

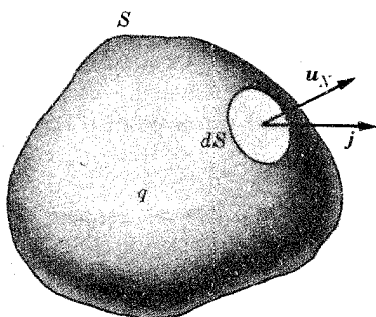
$$\begin{aligned} (\text{شار بار ورودی}) - (\text{شار بار خروجی}) &= \text{افت بار} \\ &= (\text{شار بار خالص خروجی}) \end{aligned} \quad (۴۷.۱۷)$$

در مثال ۱.۱۶ پیدا کردیم که شار بار خالص در واحد زمان از داخل سطح S برابر است با

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS$$

که در آن \mathbf{j} بردار چگالی جریان است. در موردی که ما بر گزیده ایم سطح S بسته است، به گونه ای که

$$I = \oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS \quad (۴۸.۱۷)$$



شکل ۳۰.۱۷ جریان در سطح بسته ای که بار q را احاطه کرده است.

بار خالصی که در واحد زمان از سطح S به سمت بیرون می‌گذرد، یعنی اختلاف بین شار بار خروجی و ورودی را در واحد زمان به دست می‌دهد. از طرف دیگر، افت بار در واحد زمان در داخل S برابر است با $-dq/dt$. بنابراین، از نظر ریاضی، معادله (۴۷.۱۷) چنین نوشته می‌شود $-dq/dt = I$ ، یا

$$-\frac{dq}{dt} = \oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS \quad (49.17)$$

این رابطه اصل بقای بار الکتریکی را، با فرض اینکه نه باری آفریده می‌شود و نه باری نابود می‌شود، بیان می‌کند. ولی بنا به قانون گاوس در مورد میدانهای الکتریکی، معادله (۳.۱۶)، بار کل داخل یک سطح بسته بر حسب میدان الکتریکی روی سطح، با رابطه زیر بیان می‌شود

$$q = \epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS$$

به گونه‌ای که

$$\frac{dq}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS$$

با قراردادن این نتیجه در معادله (۴۹.۱۷) به دست می‌آید

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS = 0 \quad (50.17)$$

این رابطه اصل بقای بار را به صورتی بیان می‌کند که قانون گاوس را نیز شامل بشود. هنگامی که میدانها ایستا باشند، انتگرال $\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS$ تابع زمان نیست، بنا بر این مشتق آن نسبت به زمان برابر صفر است، در نتیجه در مورد میدانهای ایستا داریم

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS = 0 \quad (51.17)$$

این رابطه نشان می‌دهد که برای میدانهای ایستا در هیچ نقطه‌ای از فضا، نه تراکم بار وجود دارد نه افت بار، و جریان خالص از داخل هر سطح بسته‌ای برابر صفر است (بیان فوق اساس قانون اول کیرشهف در تحلیل شبکه‌های الکتریکی است، که در مثال ۱۷.۱۶ آن را معرفی کردیم).

۱۳.۱۷ قانون آمپر - ماکسول

قانون فاراده-هنری، به صورتی که در معادله‌های (۲.۱۷) و (۱۵.۱۷) بیان شد، رابطه‌ای بین میدان مغناطیسی در یک ناحیه از فضا و میدان الکتریکی در همان ناحیه از فضا را به دست می‌دهد. رابطه نزدیکی که بین میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی در یک ناحیه وجود دارد حاکی از آن است که رابطه همانندی بین مشتق میدان مغناطیسی نسبت به زمان

و مشتق میدان الکتریکی نسبت به زمان در همان ناحیه وجود داشته باشد. در واقع، معادله (۲۰۱۷)، یعنی

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_N dS$$

گرددش میدان الکتریکی را به مشتق شار میدان مغناطیسی نسبت به زمان مربوط می‌کند. می‌توان انتظار داشت که رابطه مشابهی بین گردش میدان مغناطیسی و مشتق شار میدان الکتریکی نسبت به زمان وجود داشته باشد. تا اینجا بی‌بردییم که گردش میدان مغناطیسی با قانون آمپر، به صورت معادله (۶۸۰۱۶) بیان می‌شود

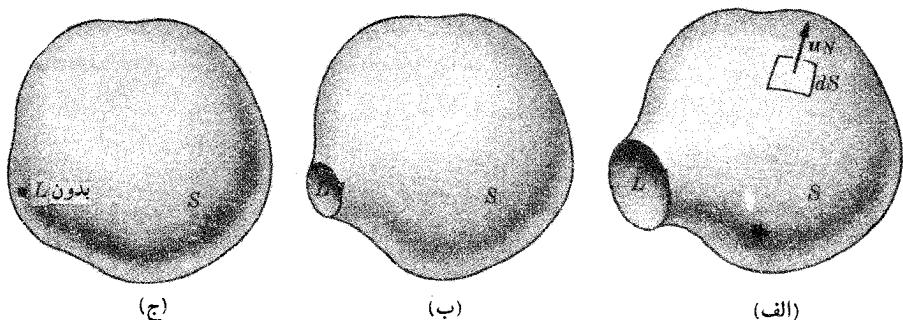
$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS \quad (۵۲۰۱۷)$$

ولی در این رابطه اثری از مشتق شار میدان الکتریکی نسبت به زمان دیده نمی‌شود. این امر تعجب آور نیست، زیرا آن را در شرایط ایستا به دست آوردیم. بنا بر این چنین به نظر می‌رسد که برای استفاده از قانون آمپر در میدانهای وابسته به زمان باید در آن تجدید نظر شود.

قانون آمپر به صورت معادله (۵۲۰۱۷)، در مورد سطح S که به منحنی L محدود شده است، به کار می‌رود. تا هنگامی که سطح S به منحنی L محدود است می‌تواند هر شکلی داشته باشد، به گفته دیگر شکل سطح اختیاری است. اگر منحنی L کوچکتر شود، مقدار $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ کاهش می‌یابد (شکل ۳۱۰۱۷). هنگامی که L به یک نقطه، و S به یک سطح بسته تبدیل شود، این انتگرال برابر صفر می‌شود. در این صورت قانون آمپر یا معادله (۵۲۰۱۷) به صورت زیر درمی‌آید

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS = 0$$

رابطه بالا با معادله (۵۱۰۱۷) یعنی اصل بقای بار الکتریکی در مورد میدانهای ایستا سازگار



شکل ۳۱۰۱۷ سطحی که به منحنی L محدود است. هنگامی که خط L به یک نقطه تبدیل می‌شود، سطح به صورت بسته درمی‌آید.

است، با وجود این می‌دانیم که هرگاه میدان ایستا نباشد، بلکه تابع زمان باشد، معادله (۵۱.۱۷) دیگر درست نیست. به جای آن، معادله (۵۰.۱۷) که در آن قانون گاوس نیز منظور شده است، درست است. این امر، حدس ما را که گفتیم در میدانهای وابسته به زمان باید قانون آمپر را اصلاح کرد تأیید می‌کند. این تغییر بدیهی به نظر می‌رسد. باید مطابق معادله (۵۰.۱۷)، در معادله (۵۲.۱۷) به جای $\int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS$ ، عبارت

$$\int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS$$

را قرار دهیم، در نتیجه به دست می‌آید

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS \quad (۵۳.۱۷)$$

نظر به اینکه $\int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS$ برابر جریانی I از داخل سطح S است، می‌توان معادله (۵۳.۱۷) را به صورت زیر نوشت

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS \quad (۵۴.۱۷)$$

باید این معادله را با معادله (۶۷.۱۶) که قانون آمپر را بیان می‌کند مقایسه کرد. در میدانهای ایستا معادله (۵۴.۱۷) به قانون آمپر تبدیل می‌شود زیرا در این میدانها جمله آخر سمت راست برابر صفر است. همچنین اگر منحنی L به یک نقطه تبدیل شود و S یک سطح بسته تشکیل دهد، معادله (۵۴.۱۷) به معادله (۵۰.۱۷) تبدیل می‌شود. در نتیجه، مشاهده می‌شود که معادله (۵۴.۱۷) پاسخگویی کلیه شرایط فیزیکی است که قبلاً پیدا کردیم.

تاکنون ما تنها می‌کوشیدیم که قانون آمپر، از لحاظ ریاضی، با قانون بقای بارچور دربیاید. اکنون باید با آزمایش تحقیق کنیم که معادله (۵۳.۱۷) درست است و می‌تواند وضع واقعی موجود در طبیعت را توصیف کند. از پیش می‌توانیم به این پرسش پاسخ مثبت بدهیم. بهترین دلیل آن وجود امواج الکترومغناطیسی است که موضوع بحث فصل ۱۹ را تشکیل می‌دهد.

اولین کسی که پیشنهاد کرد قانون آمپر، به گونه‌ای که توضیح داده شد، اصلاح شود فیزیکدان انگلیسی جیمز کلارک ماکسول (۱۲۱۰-۱۸۳۱/۱۲۵۸-۱۸۷۹) در اواخر قرن گذشته بود. به همین جهت معادله (۵۳.۱۷) را قانون آمپر-ماکسول می‌نامند. اصلاحی که ماکسول در این قانون به عمل آورد بیشتر از لحاظ سازگاری ریاضی بود تا تجربی. در واقع، آزمایشهایی که اندیشه‌های ماکسول را تأیید کردند چندین سال بعد به تحقق پیوستند.

قانون آمپر [معادله (۵۲.۱۷)] یک جریان پایا را به میدان مغناطیسی حاصل از آن مربوط می‌کند. قانون آمپر-ماکسول [معادله (۵۳.۱۷)] گسامی فراتر می‌گذارد و نشان می‌دهد که میدان الکتریکی تابع زمان نیز در ایجاد میدان مغناطیسی دخیل است. به عنوان مثال: درغیاب جریان الکتریکی، داریم

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS \quad (55.17)$$

که رابطه بین میدان الکتریکی تابع زمان و میدان مغناطیسی وابسته به آن را روشنتر نشان می‌دهد. به گفته دیگر

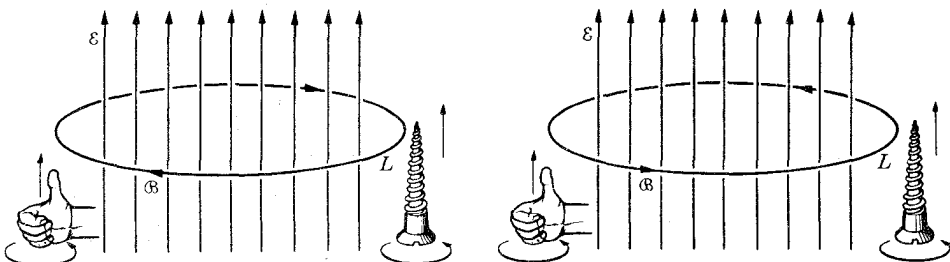
هر جا میدان الکتریکی تابع زمان وجود داشته باشد میدان مغناطیسی نیز وجود دارد.

اگر گردش میدان مغناطیسی را نیروی محرکه مغناطیسی وارد بر منحنی بسته L بنامیم و آن را با Λ_B ، و شار الکتریکی از داخل سطح S محدود به منحنی L را با Φ_E نشان دهیم، می‌توانیم معادله (55.17) را به صورت زیر بنویسیم

$$\Lambda_B = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

دانشجو می‌تواند این معادله را با معادله (1.17) که قانون القای مغناطیسی را بیان می‌کند مقایسه کند. سمتگیری نسبی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، در مورد يك میدان الکتریکی یکنواخت تابع زمان را در شکل 32.17 نشان داده‌ایم. اگر میدان الکتریکی افزایش (کاهش) پیدا کند سمتگیری خطهای نیروی مغناطیسی درسوی (یا درسوی مخالف) چرخش يك پیچ راستگرد است که در راستای میدان الکتریکی پیشروی می‌کند. به دانشجو توصیه می‌کنیم که این نتیجه را با شکل (1.17) مقایسه کند.

قانون آمپر-ماکسول، معادله (54.17)، از چند لحاظ با قانون فاراده‌هنری، معادله (2.17)، اختلاف دارد. اول اینکه معادله (54.17) دارای يك جمله مربوط به جریان الکتریکی است، در صورتی که در معادله (2.17) هیچ جمله‌ای مربوط به جریان مغناطیسی دیده نمی‌شود. این امر تنها از اینجا ناشی می‌شود که ظاهراً قطبهای آزاد مغناطیسی در طبیعت وجود ندارد. دوم اینکه مشتق شار الکتریکی نسبت به زمان در معادله (53.17) با علامت مثبت ظاهر می‌شود. در صورتی که علامت مشتق شار مغناطیسی نسبت به زمان در



(ب) کاهش $d\phi_E/dt$ منفی

(الف) افزایش $d\phi_E/dt$ مثبت

معادله (۲۰۱۷) منفی است. دانشجو می تواند تحقیق کند که سازه $\epsilon_0 \mu_0$ با یکاها سازگار است.

گرچه در اصلاح قانون آمپر از اصل بقای بار به عنوان راهنما یاری گرفتیم، می توانستیم همین کار را با استفاده از اصل نسبیت نیز انجام دهیم و ثابت کنیم که هرگاه میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، در دو چارچوب مرجع لخت، همانند معادله های (۵۸.۱۵) و (۶۰.۱۵) بهم مربوط شوند و قانون فاراده - هنری صحیح باشد، آنگاه معادله (۵۳.۱۷) نیز باید صحیح باشد. این روش با اینکه کمی دشوار است، ولی به یک معنی، اساسی تر است.

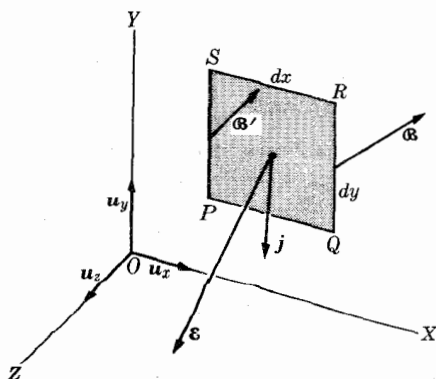
۱۴.۱۷ شکل دیفرانسیلی قانون آمپر - ماکسول

چون معادله (۵۳.۱۷) مربوط به قانون آمپر - ماکسول، خیلی به معادله (۲۰۱۷) که قانون فاراده - هنری را بیان می کند شبیه است، می توان از همان شیوه به کار رفته در بخش ۷.۱۷ برای به دست آوردن شکل دیفرانسیلی قانون آمپر - ماکسول استفاده کرد. در این حالت شکل ۳۳.۱۷ جانشین شکل ۹.۱۷ شده است. بدون اینکه وارد جزئیات شویم، ولی در قیاس با معادله (۱۰.۱۷)، گردش بردار میدان مغناطیسی را در امتداد منحنی مستطیل شکل $PQRS$ به اضلاع dx و dy به صورت زیر به دست می آوریم

$$\oint_{PQRS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dx dy \quad (۵۶.۱۷)$$

ما هنگام به دست آوردن شکل دیفرانسیلی قانون آمپر، شار جریان الکتریکی از داخل سطح محدود به $PQRS$ را در معادله (۷۴.۱۶) به صورت زیر پیدا کردیم

$$\int_{PQRS} \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_N dS = J_z dx dy \quad (۵۷.۱۷)$$



شکل ۳۳.۱۷ مدار جزئی برای به دست آوردن شکل دیفرانسیلی قانون آمپر - ماکسول.

سرانجام، شار میدان الکتریکی از داخل سطح محدود به $PQRS$ ، در قیاس با معادله (۵۷.۱۷)، برابر است با

$$\int_{PQRS} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS = E_z dx dy$$

و در نتیجه

$$\frac{d}{dt} \int_{PQRS} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS = \frac{\partial E_z}{\partial t} dx dy \quad (58.17)$$

با قراردادن معادله‌های (۵۶.۱۷)، (۵۷.۱۷) و (۵۸.۱۷) در معادله (۵۳.۱۷) و با حذف سازه مشترک $dx dy$ از دو طرف معادله، به دست می‌آید

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 j_z + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (59.17)$$

با قراردادن مستطیل $PQRS$ در صفحه‌های XZ و YZ دو معادله دیگر به دست می‌آیند

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 j_x + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (60.17)$$

و

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 j_y + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (61.17)$$

مجموعه معادله‌های (۵۹.۱۷)، (۶۰.۱۷) و (۶۱.۱۷) شکل دیفرانسیلی قانون آمپر-ماکسول را به دست می‌دهند. چنانکه در مورد قانون آمپر و قانون فاراده - هنری انجام دادیم، می‌توانیم این سه معادله را نیز به صورت یک معادله برداری بنویسیم

$$\text{curl } \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (62.17)$$

این معادله رابطه بین جریان الکتریکی را در نقطه‌ای از فضا با میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در همان نقطه از فضا بیان می‌کند. در فضای تهی، جایی که جریان الکتریکی وجود ندارد، $\mathbf{j} = 0$ است و معادله (۶۲.۱۷) به صورت زیر درمی‌آید

$$\text{curl } \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (63.17)$$

این رابطه هم از معادله (۵۵.۱۷) به شکل دیفرانسیلی است و همچنین مشا به معادله (۱۵.۱۷)، قانون فاراده - هنری است و بر روشنی رابطه بین میدان مغناطیسی و مشتق میدان الکتریکی نسبت به زمان را در همان نقطه نشان می‌دهد.

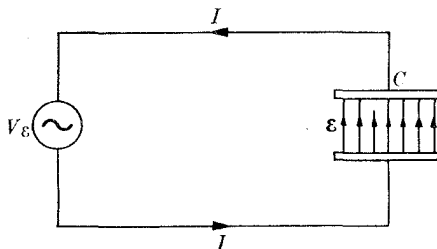
از معادله (۶۲.۱۷) پیداست که اثر میدان الکتریکی وابسته به زمان افزودن جمله $\epsilon_0 \partial E / \partial t$ به چگالی جریان است، ماکسول این جمله را به عنوان یک جریان اضافی تعبیر کرد و آن را جریان جابجایی نامگذاری کرد. استدلال ماکسول در این مورد چنین است: در مداری که شامل خازن C است (شکل ۳۴.۱۷)، جریان I به وسیله خازن قطع می شود. برای «بسته شدن» مدار، باید جریانی از یک صفحه خازن به صفحه دیگر وجود داشته باشد و این جریان درست برابر $(\epsilon_0 \partial E / \partial t)S$ است که در آن E میدان الکتریکی در داخل خازن و S مساحت صفحه آن است. ولی جمله «جریان جابجایی» ایجاد ابهام می کند و «تصویر» ماکسول غیر ضروری است، زیرا چنین جریانی بین صفحات خازن وجود ندارد و معادله (۶۳.۱۷) تنها رابطه بین \mathbf{E} ، \mathbf{B} و \mathbf{j} در یک نقطه معین از فضا را بیان می کند.

۱۵.۱۷ معادلات ماکسول

در اینجا به باز گویی مجموعه بحثهای میدان الکترومغناطیسی می پردازیم. دیدیم که برهم کنش الکترومغناطیسی یکی از مهمترین برهم کنشهای بین ذرات بنیادی تشکیل دهنده ماده است. این برهم کنش به یک ویژگی سرشتی هر ذره، به نام بار الکتریکی مربوط است. ما برای توصیف برهم کنش الکترومغناطیسی، مفهوم میدان الکترومغناطیسی را وارد کردیم که با دو بردار میدان الکتریکی \mathbf{E} و میدان مغناطیسی \mathbf{B} مشخص می شود، به گونه ای که نیروی وارد بر بار الکتریکی با رابطه زیر داده می شود

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (۶۴.۱۷)$$

میدانهای الکتریکی و مغناطیسی \mathbf{E} و \mathbf{B} نیز به نوبه خود به وسیله مکان بارها و حرکت آنها (یا جریانهها) تعیین می شوند. تجزیه میدان الکترومغناطیسی بدو مؤلفه های الکتریکی و مغناطیسی، به حرکت نسبی ناظر و بارهای به وجود آورنده میدان بستگی دارد. همچنین میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} با قوانین آمپر - ماکسول و فاراده - هنری مستقیماً به یکدیگر مربوط می شوند. تمام این رابطه ها با چهار قانون بیان می شوند که در این فصل و فصلهای گذشته مورد گفتگو قرار گرفتند و شکلهای انتگرالی و دیفرانسیلی آنها در جدول ۲.۱۷ گردآوری شده اند.



شکل ۳۴.۱۷ جریان جابجایی الکتریکی ماکسول در خازن.

جدول ۲.۱۷. مواد ماکسول برای میدان الکترومغناطیسی

شکل دیفرانسیلی	شکل انتگرالی	قانون
$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n dS = \frac{q}{\epsilon_0}$	۱. قانون گاوس برای میدان الکتروستاتیکی [مادله‌های (۳.۱۶) و (۵.۱۶)]
$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n dS = 0$	۲. قانون گاوس برای میدان مغناطیسی [مادله‌های (۸.۱۶) و (۸۲.۱۶)]
$\operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \oint_s \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n dS$	۳. قانون فاراد - هنری [مادله‌های (۲.۱۷) و (۱۵.۱۷)]
$\operatorname{curl} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n dS$	۴. قانون آمپر - ماکسول [مادله‌های (۵۳.۱۷) و (۴۲.۱۷)]

نظریه میدان الکترومغناطیسی در این چهار قانون خلاصه می‌شود. این چهار قانون به نام معادلات ماکسول معروف اند، زیرا ماکسول، علاوه بر تنظیم قانون چهارم، متوجه شد که مجموعه آنها همراه با معادله (۶۴۰۱۷)، چارچوب نظریه برهم کنشهای الکترومغناطیسی را تشکیل می‌دهند. بار الکتریکی q و جریان I را چشمه‌های میدان الکترومغناطیسی می‌نامند زیرا، اگر q و I معلوم باشند، معادلات ماکسول امکان محاسبه \mathbf{E} و \mathbf{B} را فراهم می‌سازند. باید توجه داشت که قوانین گاوس برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، معادله‌های (۳۰۱۶) و (۸۱۰۱۶)، در فصل ۱۶ برای میدانهای ایستا به دست آمدند. ولی اکنون ما آنها را در نظریه‌ای که با میدانهای وابسته به زمان سروکار دارد وارد می‌کنیم. دانشجو ممکن است از خود سؤال کند که آیا لازم نیست در این قوانین نیز به همان گونه که در قانون آمپر تغییر داده شد تا برای میدانهای وابسته به زمان قابل استفاده باشد، تجدیدنظر به عمل آید؟ پاسخ این سؤال منفی است. معلوم شده است که مجموعه قوانین بالا با آزمایش سازگارند و نتایج حاصل از آنها تاکنون با نتایج تجربی مطابقت داشته‌اند. بنابراین دو قانون گاوس در مورد میدانهای الکتریکی و مغناطیسی وابسته به زمان بدون تغییر باقی می‌مانند.

معادلات ماکسول همچنین دارای انسجام منطقی هستند و یک مجموعه سازگار را تشکیل می‌دهند. از یک طرف، معادله‌های (۳۰۱۶) و (۵۴۰۱۷) که شامل یک انتگرال روی سطح میدان الکتریکی اند با هم سازگارند، زیرا همین امر شرط اصلی تجدیدنظر ما در قانون آمپر بود. همچنین معادله‌های (۸۱۰۱۶) و (۲۰۱۷) نیز که شامل یک انتگرال روی سطح میدان مغناطیسی اند با هم سازگارند. به عنوان مثال، اگر معادله (۲۰۱۷) را در مورد سطح شکل ۳۱۰۱۷ به کار ببریم، و نیز منحنی L آنقدر کوچک شود که سطح به صورت بسته در آید، گردش بردار \mathbf{E} برابر صفر می‌شود. در نتیجه داریم

$$\frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_N dS = 0 \quad \text{یا} \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_N dS = \text{const}$$

که اگر ثابت انتگرال را برابر صفر بگیریم معادله (۸۱۰۱۶) به دست می‌آید. در فضای آزاد یاتهی، که نه بار الکتریکی وجود دارد ($\rho = 0$) و نه جریان الکتریکی ($\mathbf{j} = 0$)، معادلات ماکسول اندکی ساده‌تر می‌شوند و شکل دیفرانسیلی آنها چنین نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{curl} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{curl} \mathbf{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (۶۵۰۱۷)$$

که دارای نوعی تقارن اند. به دانشجو توصیه می‌کنیم تمام این معادله‌ها را به‌طور کامل در مختصات قایم، بنویسد.

همچنین از دانشجو می‌خواهیم که معادلات ماکسول را خواه به شکل انتگرالی، خواه به شکل دیفرانسیلی آن، با معادلات مربوط به میدان ایستا که در جدول ۴۰۱۶ آورده‌ایم

مقایسه کند و اختلافهای اساسی بین آنها را پیدا کند. بخصوص باید توجه کند که قوانین فاراده-هنری و آمپر-ماکسول ارتباطی بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی برقراری کنند که معادله‌های مربوط به میدانهای ایستا فاقد آن‌اند.

بر حسب مسئله‌ای که باید حل شود، شکل انتگرالی یا شکل دیفرانسیلی معادلات ماکسول مورد استفاده قرار می‌گیرد. به عنوان مثال، در فصل ۱۹، چگونگی استفاده از این معادلات را در توضیح امواج الکترومغناطیسی نشان خواهیم داد. در وهله اول چنین به نظر می‌رسد که به خاطر سپردن تمام این معادلات خیلی دشوار باشد. ولی این طور نیست، زیرا اولاً آنها دارای نوعی تقارن‌اند که (شناختن آن) به یادگیری آنها کمک می‌کند و استعمال مداوم باعث می‌شود به تدریج با آنها خو بگیریم. ثانیاً، درک محتوای فیزیکی این معادلات خیلی بیش از حفظ کردن جزئیات آنها اهمیت دارد.

معادلات ماکسول با اصل نسبیّت سازگارند، به این معنی که تحت تبدیل لورنتس ناورد می‌مانند. یعنی هنگامی که مختصات x, y, z ، و t طبق تبدیل لورنتس [معادله (۳۳.۶)]، و میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} مطابق معادله‌های (۵۹.۱۵) و (۶۱.۱۵) تبدیل می‌شوند، شکل معادلات ماکسول تغییر نمی‌کنند. اثبات ریاضی این مطلب به دروس پیشرفته‌تر مربوط می‌شود و به همین جهت ما در اینجا به آن نمی‌پردازیم، گرچه این کار اساساً مشکل نیست.

ترکیب برهم کنشهای الکترومغناطیسی که با معادلات ماکسول بیان می‌شوند، یکی از بزرگترین دستاوردهای فیزیک است و از این لحاظ این برهم کنشها جای ویژه‌ای را اشغال می‌کنند. این برهم کنشها بیش از هر برهم کنش دیگری شناخته شده‌اند و تنها برهم کنشهایی هستند که می‌توان آنها را به صورت فرمولهای ریاضی فشرده و سازگاری بیان کرد. این از خشوش شانس بشر بوده است زیرا بخش بزرگی از تمسدن جدید، بر اساس شناخت برهم کنشهای الکترومغناطیسی امکان‌پذیر شده است، و این برهم کنشها مسئول اغلب فرایندهایی (چه طبیعی و چه ساخته دست انسان) هستند که در زندگی روزمره ما مؤثرند. با وجود این باید بدانیم معادلات ماکسول، به گونه‌ای که نشان داده شده‌اند دارای

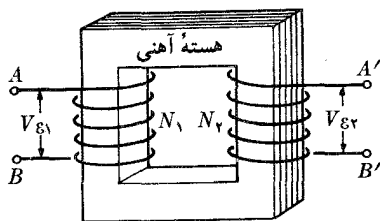
محدودیتهایی هستند. این معادلات در مورد برهم کنشهای الکترومغناطیسی بین مجموعه‌های بزرگی از بارها، مانند آنتنهای فرستنده، مدارهای الکتریکی یا حتی باریکه‌اترها یا مولکولهای یونیده کاملاً درست‌اند. ولی معلوم شده است که برهم کنشهای الکترومغناطیسی بین ذرات بنیادی (بویژه در انرژیهای بالا) باید به شیوه‌ای متفاوت و مطابق با قوانین مکانیک کوانتومی مورد بررسی قرار گیرند؛ روشی که الکترو دینامیک کوانتومی نامیده می‌شود. این موضوع در این کتاب مورد بحث قرار نمی‌گیرد. ولی حتی با وجود محدودیتی که برای معادلات ماکسول ذکر کردیم، نتایج ناشی از این معادلات به صورتی که در این فصل آمده‌اند، برای توصیف برهم کنشهای الکترومغناطیسی بین ذرات بنیادی از تقریب بسیار عالی برخوردارند. این روش الکترو دینامیک کلاسیک نامیده می‌شود. در این کتاب، در بحث امواج الکترومغناطیسی و ساختار ماده، همین روش تقریبی به کار رفته است.

1. «From Faraday to the Dynamo», H. Sharlin, *Sci. Am.*, May 1961 page 107
2. «Joseph Henry», C. Andrews, *The Physics Teacher* 3, 13 (1965)
3. «Michael Faraday», L. Williams, *The Physics Teacher* 3, 64 (1965)
4. «Displacement Currents and Magnetic Fields», A. French and J. Tessman, *Am. J. Phys.* 31, 201 (1963)
5. «Forces and Fields in Special Relativity», W. Ganley, *Am. J. Phys.* 31, 510 (1963)
6. «Interpretation of the Displacement Current», W. Rosser *Am. J. Phys.* 31, 807 (1963)
7. «Maxwell, Displacement Current, and Symmetry», A. Bork, *Am. J. Phys.* 31, 854 (1963)
8. *Great Experiments in Physics*, Morris Shamos, editor. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1959, Chapter 10 (Faraday); Chapter 11 (Lenz); Appendix 1 (Maxwell)
9. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume II, R. Feynman, R. Leighton and M. Sands. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1963, Chapters 16, 17, 18, 22, and 28
10. *Source Book in Physics*, W. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963: page 472 (Faraday); page 511 (Lenz); page 513 (Henry); page 528 (Maxwell); page 583 (Rowland)
11. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Sections 28. 8, 28.9. and 28.10
۱۲. ریتس، جی. آر. [و] اف. جی. میلفورد، اصول تئوری الکترومغناطیسی، ترجمه جلال صمیمی [و] ناصرعلیزاده قمصری، ج ۱، ۲، مشهد، مؤسسه چاپ و انتشارات دانشگاه مشهد، ۱۳۵۹، ج ۲. (ویرایش دوم انگلیسی این کتاب در مرکز نشر دانشگاهی در دست ترجمه است.)

(ب) میدان به صفر برسد، (ج) سوی میدان معکوس شود، (د) پیچه 90° بچرخد، (ه) پیچه 180° بچرخد، نیروی محرکه الکتریکی القایی در پیچه را پیدا کنید. در هر مورد نموداری رسم کنید که راستای نیروی محرکه را نشان بدهد.

۲۰۱۷ با مراجعه به مسئله ۸۰۱۶، اگر جریان با رابطه $I = I_0 \sin \omega t$ تغییر کند، نیروی محرکه الکتریکی القا شده در مدار را تعیین کنید.

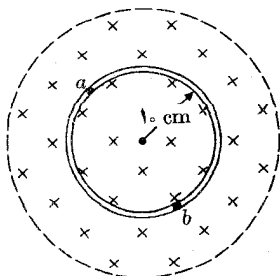
۳۰۱۷ اگر V_{E1} نیروی محرکه نوسانی اعمال شده به دو سر AB باشد، نشان دهید که نیروی محرکه دو سر $A'B'$ ناشی از القای متقابل بین دو پیچه برابر است با $V_{E2} = V_{E1} (N_2/N_1)$ (به شکل ۳۵۰۱۷ مراجعه کنید). این امر اساس ساختمان ترانسفورماتورها را تشکیل می‌دهد. این فرمول برای تمام مواردی که در آنها شار مغناطیسی داخل دو پیچه یکسان و مقاومت آنها ناچیز باشد صادق است.



شکل ۳۵۰۱۷

۴۰۱۷ اگر میدان مغناطیسی بر حسب گاوس و مساحت بر حسب cm^2 بیان شود، شار مغناطیسی بر حسب ماکسول اندازه گیری می‌شود. (الف) ماکسول را تعریف کنید. (ب) نشان دهید که یک وبر برابر است با 10^8 ماکسول. (ج) در معادله (۱۰۱۷) سازه عددی مناسبی پیدا کنید تا V_E بر حسب ولت و Φ_B بر حسب ماکسول بیان شوند.

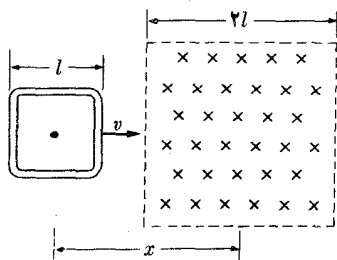
۵۰۱۷ در تمام نقاط داخل دایره‌ای که در شکل ۳۶۰۱۷ با خط چین رسم شده است میدان مغناطیسی برابر است با 5T . این میدان به سوی داخل صفحه است و با آهن‌گ 1T s^{-1} کاهش می‌یابد. (الف) خط‌های نیروی میدان الکتریکی القایی در داخل دایره خط چین



شکل ۳۶۰۱۷

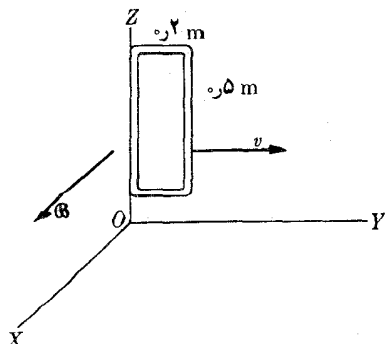
به چه شکلی اند؟ (ب) بزرگی و راستای میدان در هر نقطه از حلقهٔ رسانای دایره‌ای و نیروی محرکه القایی در این حلقه چقدر است؟ (ج) اگر مقاومت حلقه برابر ۲ اهم باشد شدت جریان در آن چقدر است؟ (د) اختلاف پتانسیل بین دو نقطه از حلقه چقدر است؟ (ه) چه سازگاری بین پاسخ قسمت‌های (ج) و (د) وجود دارد؟ (و) اگر حلقه در يك نقطه قطع شود و دو سر آن کمی از هم فاصله داشته باشند، چه اختلاف پتانسیلی بین این دو سر به وجود می‌آید؟

۶۰۱۷ يك قاب مربع شکل با سرعت ثابت v در داخل يك میدان مغناطیسی که در ناحیه مربع شکلی به ضلع دو برابر ضلع حلقه محدود است، حرکت می‌کند (به شکل ۳۷۰۱۷ مراجعه کنید). نمودار نیروی محرکه الکتریکی القایی در قاب را بر حسب x ، و بین $x = -2l$ تا $x = +2l$ رسم کنید. نیروی محرکه الکتریکی را در سوی ساعتگرد مثبت و در سوی پادساعتگرد منفی بگیرید.



شکل ۳۷۰۱۷

۷۰۱۷ يك قاب به شکل مستطیل در داخل ناحیه‌ای که در آنجا میدان مغناطیسی با رابطه‌های $B_y = B_z = 0$ و $B_x = (6 - y) T$ محرکه الکتریکی القا شده در قاب را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید، اگر (الف) $v = 2 \text{ m s}^{-1}$ باشد، (ب) قاب از حالت سکون شروع به حرکت کند و شتاب آن

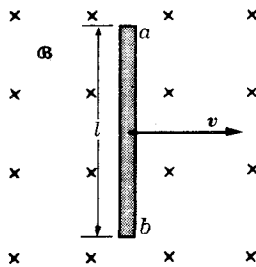


شکل ۳۸۰۱۷

2 m s^{-2} باشد. هنگامی که حلقه در وضع نمایش داده شده در شکل است، t را برابر صفر بگیرید. (ج) جابجایی را به جای OY ، موازی با محور OZ در نظر بگیرید و مسئله را مجدداً حل کنید. (د) اگر $R = 2\Omega$ باشد جریان را در هر مورد پیدا کنید.

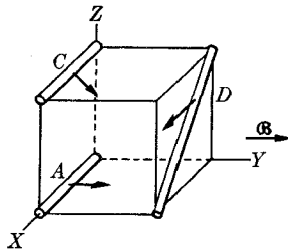
۸۰۱۷ فرض کنید که قاب مسئله ۷۰۱۷ بتواند حول محور OZ بچرخد. (الف) اگر دوره چرخش 2π باشد، نیروی محرکه الکتریکی میانگین در اولین 90° چرخش چقدر است؟ (ب) نیروی محرکه الکتریکی و جریان لحظه‌ای را به صورت توابعی از زمان حساب کنید.

۹۰۱۷ در شکل ۳۹۰۱۷، $l = 1.5 \text{ m}$ ، $B = 0.5 \text{ T}$ و $v = 4 \text{ m s}^{-1}$ است. اختلاف پتانسیل بین دو سر سانا چقدر است؟ پتانسیل کدام سر بیشتر است؟



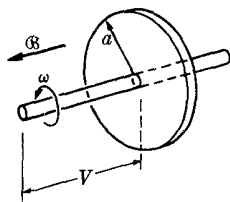
شکل ۳۹۰۱۷

۱۰۰۱۷ مکعب شکل ۴۰۰۱۷، که طول هر ضلع آن یک متر است، در یک میدان مغناطیسی یکنواخت به شدت 2 T و همسو با محور Y قرار دارد. سیمهای A ، C و D در استاهای نشان داده شده با سرعت 5 m s^{-1} حرکت می‌کنند. اختلاف پتانسیل بین دو سر هر یک از سیمها چقدر است؟



شکل ۴۰۰۱۷

۱۱۰۱۷ یک قرص فلزی به شعاع a با سرعت زاویه‌ای ω در صفحه‌ای که در آنجا میدان مغناطیسی یکنواخت و موازی با محور قرص وجود دارد می‌چرخد (شکل ۴۱۰۱۷). نشان دهید که اختلاف پتانسیل بین مرکز و محیط قرص برابر است با $(1/2)\omega a^2 B$.

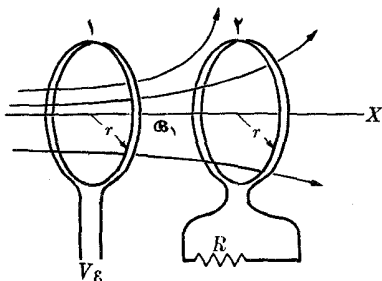


شکل ۴۱.۱۷

۴۱.۱۷ طول سیم‌لوله‌ای 0.30 m و سطح مقطع آن $10^{-3} \times 1.2\text{ m}^2$ است. روی قسمت مرکزی آن یک پیچ با ۳۰۰ حلقه پیچیده شده است. (الف) القای متقابل آنها را تعیین کنید. (ب) اگر در مدت 2 s سوی جریان اولیه سیم‌لوله که برابر 2 A است، عوض شود، نیروی محرکه الکتریکی القایی در پیچ چقدر است؟

۱۳.۱۷ دو پیچ A و B بترتیب ۲۰۰ و ۸۰۰ حلقه دارند. جریان 2 A در پیچ A در هر حلقه پیچ B یک شار مغناطیسی برابر $1.8 \times 10^{-4}\text{ Wb}$ تولید می‌کند. (الف) ضریب القای متقابل را حساب کنید. (ب) اگر جریان 4 A در پیچ B وجود داشته باشد شار مغناطیسی از داخل پیچ A را حساب کنید. (ج) هرگاه جریان پیچ A در مدت 0.3 s از 3 A به 1 A برسد، نیروی محرکه الکتریکی القایی در پیچ B چقدر است؟

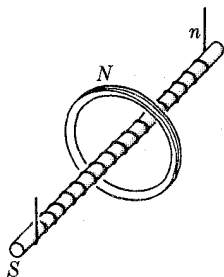
۱۴.۱۷ دو پیچ هم‌محور مطابق شکل ۴۲.۱۷ قرار گرفته‌اند. پیچ ۱ به یک منبع خارجی با نیروی محرکه الکتریکی V_E وصل شده است. وضع هندسی دستگاه به گونه‌ای است که یک پنجم شار مغناطیسی تولید شده توسط پیچ ۱ از داخل پیچ ۲ می‌گذرد و برعکس. مقاومت پیچ‌ها R_1 و R_2 است و پیچ ۱ مطابق شکل به مقاومت خارجی R اتصال دارد. تعداد حلقه‌های پیچ‌ها N_1 و N_2 است. شار کل تولید شده توسط پیچ ۱ با رابطه $I_1(L_1/N_1) = \Phi_B$ داده می‌شود که در آن L_1 خود القای پیچ ۱ است. (الف) هرگاه I_1 در مدت t ثانیه به‌طور یکنواخت از صفر به I_0 برسد، نیروی محرکه القا شده در پیچ ۲ را



شکل ۴۲.۱۷

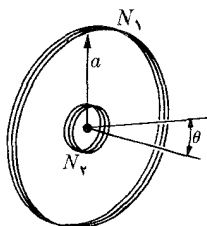
پیدا کنید. (ب) اگر $I_1 = I_0 \sin \omega t$ باشد نیروی محرکه الکتریکی القا شده در پیچۀ ۲ چقدر است؟ (ج) بدسبب القا در پیچۀ ۲ چه مقدار انرژی از پیچۀ ۱ لازم است؟

۱۵۰۱۷ پیچۀ ای متشکل از N حلقه، دور یک سیملوله خیلی دراز به سطح مقطع S که دارای n حلقه در واحد طول است پیچیده شده است (شکل ۴۳۰۱۷). نشان دهید که القای متقابل دستگاه برابر است با $\mu_0 n N S$.



شکل ۴۳۰۱۷

۱۶۰۱۷ مطابق شکل ۴۴۰۱۷ در مرکز یک پیچۀ دایره‌ای به شعاع a که از N_1 حلقه تشکیل شده است، پیچۀ بسیار کوچکی با سطح مقطع S و تعداد N_2 حلقه قرار دارد. نشان دهید که القای متقابل آنها برابر است با $(1/2)\mu_0 N_1 N_2 S \cos \theta / a$ که θ زاویه بین خطوط عمود بردو پیچه است.



شکل ۴۴۰۱۷

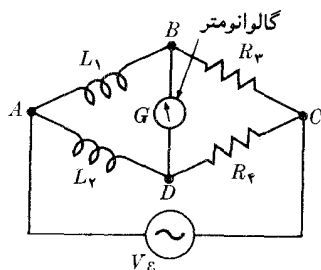
۱۷۰۱۷ شار مغناطیسی از داخل مداری به مقاومت R برابر Φ_B است. شار مغناطیسی بعد از مدتی به اندازه $\Delta \Phi_B$ تغییر می کند، نشان دهید که مقدار باری که از داخل هر مقطع مدار می گذرد برابر است با $Q = \Delta \Phi_B / R$ ، و این مقدار به تند یا کند بودن تغییر شار بستگی ندارد.

۱۸۰۱۷ پیچۀ ای با ۱۰۰۰ حلقه و مقاومت ۱۰۰ اهم روی سیملوله بسیار درازی که دارای 10^4 حلقه در هر متر و سطح مقطع $2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ است پیچیده شده است. جریان در سیملوله 10 A است. در مدت خیلی کوتاهی جریان در سیملوله (الف) دو برابر می شود، (ب) به صفر می رسد، (ج) جهتش معکوس می شود. در هر مورد مقدار باری را که از پیچه می گذرد پیدا کنید.

۱۹۰۱۷ خود القای يك سیملوله چنبره‌ای را که دارای N حلقه است پیدا کنید. فرض کنید که شعاع هر حلقه در مقابل شعاع چنبره خیلی کوچک است.

۲۰۰۱۷ شار مغناطیسی از داخل مداری که جریان $2A$ از آن می‌گذرد برابر $8Wb$ است. خود القای آن را پیدا کنید. هرگاه در مدت $2S$ ، جریان (الف) دو برابر شود، (ب) به صفر برسد، (ج) جهتش معکوس بشود، نیروی محرکه الکتریکی القا شده در مدار را پیدا کنید

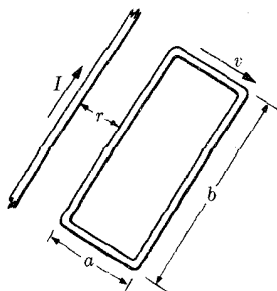
۲۱۰۱۷ پل شکل ۴۵۰۱۷ را می‌توان برای مقایسه دو القای L_1 و L_2 به کار برد. پل را به گونه‌ای تنظیم می‌کنند که تاهنگامی که نیروی محرکه متناوب V_E به آن اعمال می‌شود جریان بین B و D همواره برابر صفر باشد. نشان دهید که $L_1/L_2 = R_3/R_4$ است.



شکل ۴۵۰۱۷

۲۲۰۱۷ در مسئله ۲۱۰۱۷ از مقاومت القاها صرف نظر شده بود. اگر مقاومت آنها R_1 و R_2 باشد به طریق زیر عمل می‌شود: پل را به گونه‌ای تنظیم می‌کنند که اگر نیروی محرکه ثابتی بر آن اعمال شود هیچگونه جریانی بین B و D نگذرد. سپس جریان را بدون تغییر مقاومت مانند مسئله ۲۱۰۱۷ تنظیم می‌کنند. ثابت کنید همان رابطه مسئله قبل برقرار است.

۲۳۰۱۷ در شکل ۴۶۰۱۷، مدار مستطیل شکل با سرعت v از جریان مستقیم الخط دور می‌شود. نیروی محرکه القایی را پیدا کنید. دورش برای محاسبه به کار ببرید. [داده‌نمایی: به مسئله ۶۸۰۱۶ مراجعه کنید و توجه داشته باشید که $v = dr/dt$ است.]

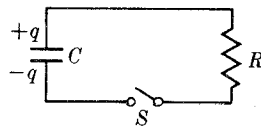


شکل ۴۶۰۱۷

۲۴.۱۷ با مراجعه به وضعی که در بخشهای ۲۰.۱۷ و ۴.۱۷ بحث شد، میدان الکتریکی را نسبت به چارچوب مرجع متصل به رسانای در حال حرکت محاسبه و اختلاف پتانسیل دوسر آن را تعیین کنید.

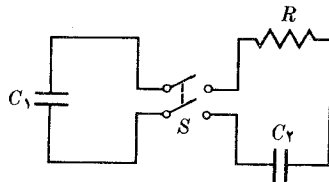
۲۵.۱۷ بحث مربوط به بخش ۱۰.۱۲ را جهت تحلیل دو مدار الکتریکی جفت شده به کار ببرد.

۲۶.۱۷ خازن C با بار اولیه q_0 به مقاومت R بسته شده است (شکل ۴۷.۱۷). اگر کلید S بسته شود خازن از طریق مقاومت R تخلیه می شود. ثابت کنید که (الف) جریان در مدار برابر است با $I = -dq/dt$ ، (ب) معادله مدار عبارت است از $q/C = RI$ ، (ج) بار خازن در لحظه t برابر است با $q = q_0 e^{-t/RC}$ ، (د) انرژی که بدلت اثر ژول در مقاومت تلف می شود برابر است با انرژی اولیه خازن. [دانهمایی: برای قسمت (ج) قسمتهای (الف) و (ب) را با هم ترکیب کنید. برای قسمت (د) انتگرال $\int_0^{\infty} RI^2 dt$ را حساب کنید.]



شکل ۴۷.۱۷

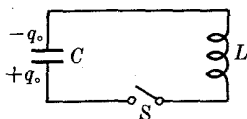
۲۷.۱۷ خازن C_1 دارای بار الکتریکی اولیه q_0 است. هنگامی که کلید S بسته است (شکل ۴۸.۱۷)، خازن به طور متوالی به مقاومت R و خازن خالی C_2 بسته می شود. (الف) ثابت کنید که معادله مدار عبارت است از $q/C_1 + (q_0 - q)/C_2 = RI$ ، (ب) q و I را به صورت توابعی از زمان پیدا کنید.



شکل ۴۸.۱۷

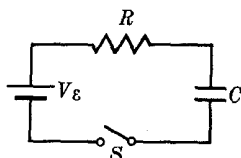
۲۸.۱۷ خازن C با بار الکتریکی اولیه q_0 به خود القای L که مقاومت آن ناچیز است، متصل است (شکل ۴۹.۱۷). اگر کلید S بسته شود، خازن از طریق القا تخلیه می شود. ثابت کنید که (الف) جریان در مدار برابر است با $I = -dq/dt$ ، (ب) معادله مدار عبارت است از $q/C = -L dI/dt = 0$ ، (ج) بار خازن در لحظه t برابر است با $q = q_0 \cos \omega t$ ، در آن $\omega = 1/\sqrt{LC}$ است و بنا بر این نوسانات الکتریکی در مدار برقرار می شود. از این

وسیله برای به دست آوردن بسامدهای بالا استفاده می کنند.



شکل ۴۹.۱۷

۴۹.۱۷ يك باتری با نیروی محرکه الکتریکی V_E و مقاومت داخلی ناچیز به طور متوالی به مقاومت R و خازن خالی C بسته شده است (شکل ۵۰.۱۷). نشان دهید بعد از بستن کلید S ، (الف) جریان در مدار عبارت است از $I = +dq/dt$ که در آن q باری است که در خازن ذخیره می شود، (ب) معادله مدار عبارت است از $V_E - q/C = RI$ ، (ج) بار به صورت تابعی از زمان برابر است با $q = V_E C (1 - e^{-t/RC})$ ، (د) جریان به صورت تابعی از زمان برابر است با $I = (V_E/R)e^{-t/RC}$. نمودار q و I را بر حسب زمان رسم کنید.



شکل ۵۰.۱۷

۳۰.۱۷ مداری را که از يك مقاومت تشکیل شده است به نیروی محرکه الکتریکی متناوب $I = (V_0/R) \sin \omega t$ وصل می کنیم. ثابت کنید که جریان با رابطه $V_E = V_0 \sin \omega t$ داده می شود. بردارهای چرخان نیروی محرکه الکتریکی و جریان را رسم کنید و ثابت کنید که همفازند. پاگیری مدار چقدر است؟

۳۱.۱۷ خازن C به يك نیروی محرکه الکتریکی متناوب با دامنه V_E و بسامد زاویه ای ω وصل شده است. (الف) جریان را پیدا کنید. (ب) بردارهای چرخان متناظر با نیروی محرکه الکتریکی و جریان را رسم کنید. (ج) نمودار جریان را بر حسب ω و C رسم کنید.

۳۲.۱۷ خازنی به ظرفیت $1 \mu F$ به يك چشمه ac وصل و دامنه و لثاژ آن در $50V$ ثابت نگه داشته شده است ولی بسامد آن می تواند تغییر کند، اگر بسامد زاویه ای (الف) $1000s^{-1}$ ، (ب) $10000s^{-1}$ ، (ج) $100000s^{-1}$ باشد، دامنه جریان را پیدا کنید. (ج) نمودار جریان را بر حسب بسامد در دستگاه مختصات تمام لگاریتمی ($\log - \log$) رسم کنید.

۳۳.۱۷ يك چشمه ac دارای دامنه $50V$ و بسامد زاویه ای $10000s^{-1}$ است. دامنه جریان را هنگامی که خازنی به ظرفیت (الف) $500 \mu F$ ، (ب) $100 \mu F$ ، (ج) $1000 \mu F$ ، به دوسر آن وصل شود پیدا کنید. (د) در دستگاه مختصات تمام لگاریتمی نمودار دامنه جریان

را بر حسب ظرفیت رسم کنید.

۳۴۰۱۷ مدارى از يك نیروی محرکه الکتريکی متناوب به دامنه V_E و بسامد زاویه‌ای ω و خود القای L تشکیل شده است. (الف) جریان را پیدا کنید. (ب) بردارهای چرخان متناظر با نیروی محرکه اعمال شده، افت پتانسیل بین دوسر خود القا و جریان را رسم کنید. (ج) نمودار جریان را بر حسب ω و L رسم کنید.

۳۵۰۱۷ يك القاگر با خود القای 10H و مقاومت ناچیز به دوسر چشمه مسئله ۳۲۰۱۷ وصل شده است. دامنه جریان را اگر بسامد زاویه‌ای (الف) 100s^{-1} ، (ب) 1000s^{-1} ، (ج) 10000s^{-1} باشد، پیدا کنید. (د) در دستگاه مختصات تمام لگاریتمی نمودار دامنه جریان را بر حسب بسامد رسم کنید.

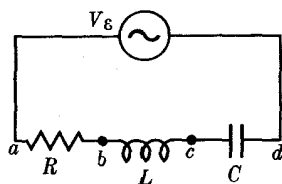
۳۶۰۱۷ اگر خود القای يك القاگر بدون مقاومت که به دو چشمه مسئله ۳۳۰۱۷ متصل است، برابر (الف) 50H ، (ب) 10H ، (ج) 100H باشد دامنه جریان را پیدا کنید. (د) در دستگاه مختصات تمام لگاریتمی، نمودار دامنه جریان را بر حسب خود القا رسم کنید.

۳۷۰۱۷ مدارى که از يك مقاومت و يك القا تشکیل شده است به طور متوالی به نیروی محرکه الکتريکی متناوب $V_E = V_E \sin \omega t$ وصل می شود. ثابت کنید که پاگیری مدار برابر است با $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ و جریان به اندازه $\text{tg}^{-1}(\omega L/R)$ نسبت به نیروی محرکه تأخیر فاز دارد. [دانهمایی: بردار چرخان مربوط به جریان را رسم کنید. سپس، با استفاده از نتایج مسئله ۳۴۰۱۷، بردارهای چرخان مربوط به اختلاف پتانسیل یا نیروی محرکه بین دوسر مقاومت و القا را رسم کنید. بزرگی آنها را پیدا کنید و برای به دست آوردن پاگیری آنها را با V_E مقایسه کنید. زاویه بین بردار چرخان برآیند مربوط به نیروی محرکه الکتريکی و بردار چرخان جریان، اختلاف فاز را به دست می دهد.]

۳۸۰۱۷ مسئله پیش را در مورد مدارى که شامل (الف) يك مقاومت و يك خازن، (ب) يك القا و يك خازن است مجدداً حل کنید.

۳۹۰۱۷ پیچدهای با 20 حلقه و مساحت 0.04m^2 در يك میدان مغناطیسی به شدت 2T در هر ثانیه 10 دور می چرخد. مقاومت پیچده 2 اهم و خود القای آن 10^{-3}H است. (الف) رابطه نیروی محرکه الکتريکی القایی را پیدا کنید. (ب) رابطه جریان را به دست آورید.

۴۰۰۱۷ در مدار شکل ۵۱۰۱۷، $V_E = V_E \sin \omega t$ يك نیروی محرکه الکتريکی متناوب است. دامنه و فاز اختلاف پتانسیلهای V_{ac} ، V_{cd} ، V_{bc} ، V_{ab} و V_{bd} را نسبت به نیروی محرکه الکتريکی پیدا کنید. [دانهمایی: بردار چرخانهای متناظر را، مطابق آنچه در شکل ۲۷۰۱۷ نشان داده شده است، رسم کنید.]



شکل ۵۱.۱۷

۴۱.۱۷ يك نيروي محرکه الكتریکی متناوب با مقدار بیشینه 100V و بسامد زاویه‌ای $120\pi\text{S}^{-1}$ به‌طور متوالی به يك مقاومت 1 اهمی، يك خودالقای $3 \times 10^{-3}\text{H}$ و يك خازن $2 \times 10^{-3}\text{F}$ بسته شده است. (الف) دامنه و فاز جریان، (ب) اختلاف پتانسیل بین دوسر مقاومت، القا و خازن را پیدا کنید. (ج) نموداری رسم کنید که بردارهای چرخان متناظر با نیروی محرکه جریان، و سه اختلاف پتانسیل را نشان دهد. (د) تحقیق کنید که برابری سه اختلاف پتانسیل برابر است با بردار نیروی محرکه الكتریکی.

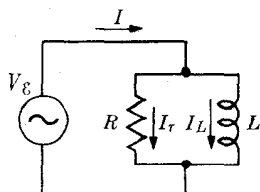
۴۲.۱۷ اگر E_{rms} و I_{rms} مقدار ریشه میانگین مربعی جریان و نیروی محرکه الكتریکی يك دور باشند، ثابت کنید که

$$P_{\text{ave}} = I_{\text{rms}} E_{\text{rms}} \cos \alpha \quad \text{و} \quad I_{\text{rms}} = I_0 / \sqrt{2}, \quad E_{\text{rms}} = E_0 / \sqrt{2}$$

در رابطه آخری α زاویه فاز بین جریان و نیروی محرکه الكتریکی است.

۴۳.۱۷ مداری شامل يك نيروي محرکه الكتریکی متناوب با مقدار بیشینه 100V ، مقاومت 2Ω ، خودالقای 10^{-3}H و خازن 10^{-3}F است که به‌طور متوالی به هم بسته شده‌اند. مقدار بیشینه جریان را به‌ازای بسامدهای زاویه‌ای زیر مربوط به نیروی محرکه الكتریکی پیدا کنید: (الف) 0 ، (ب) 10S^{-1} ، (ج) 10^2S^{-1} ، (د) در باز آوایی، (ه) 10^4S^{-1} ، (و) 10^5S^{-1} . نمودار جریان را بر حسب لگاریتم بسامد رسم کنید.

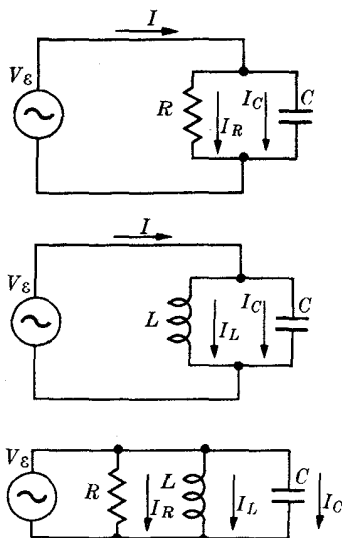
۴۴.۱۷ مطابق شکل ۵۲.۱۷، مداری شامل يك مقاومت و يك القاست که به‌طور موازی به هم بسته شده‌اند. ثابت کنید که پاگیری برابری مدار با رابطه $1/Z = \sqrt{1/R^2 + 1/\omega^2 L^2}$ و فاز با $\text{tg}^{-1}(R/\omega L)$ داده می‌شود. [دانه‌جایی: بردار چرخان نیروی محرکه اعمال شده را رسم کنید. بعد، با استفاده از نتایج مسئله‌های ۳۴.۱۷ و ۳۷.۱۷، بردارهای چرخان متناظر



شکل ۵۲.۱۷

با جریان در مقاومت و القا را رسم کنید. بر ایند آنها جریان کل را به دست می‌دهد که از آنجا می‌توان پاگیری و اختلاف فاز را به دست آورد.]

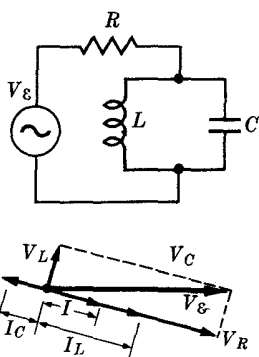
۴۵۰۱۷ مسئله پیش را در مورد سه مدار نشان داده شده در شکل ۵۳۰۱۷ مجدداً حل کنید.



شکل ۵۳۰۱۷

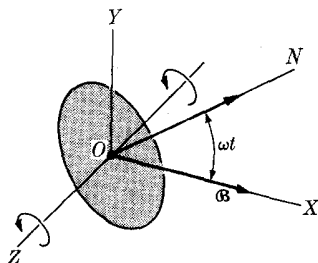
۴۶۰۱۷ پیچهای با مقاومت 1Ω و خود القای $10^{-3}H$ با پیچۀ دیگری به مقاومت 1Ω و خود القای $3 \times 10^{-3}H$ به طور موازی بسته شده است. یک نیروی محرکه الکتریکی متناوب به دامنه $10V$ و بسامد زاویه‌ای $120\pi S^{-1}$ به دستگاه وصل شده است. (الف) جریانی را که از هر پیچ می‌گذرد؛ (ب) جریان کل را حساب کنید، (ج) نموداری رسم کنید که بردارهای چرخان نیروی محرکه الکتریکی، جریان در هر پیچ، و جریان کل را نشان دهد، (د) تحقیق کنید که بردار چرخان جریان کل برابر است با براین بردارهای چرخان هر یک از جریانه‌ها.

۴۷۰۱۷ مداری از یک القا و یک خازن موازی تشکیل شده است که به طور متوالی به مقاومت R بسته شده‌اند (شکل ۵۴۰۱۷). (الف) بردارهای چرخان V_E ، I_L ، I_C ، RI ، (ب) ثابت کنید که پاگیری مسدود برابر است با V_C و V_L را رسم کنید. (ج) هنگامی که $\omega = 1/\sqrt{LC}$ باشد مقدار پاگیری چقدر است؟ (در این حالت معمولاً ω را پاد بازاوی می‌نامند). (د) نمودار جریان را بر حسب بسامد به طور تقریبی رسم کنید. [داهنجایی: توجه کنید که بردارهای چرخان جریان در L و C باید با بردار چرخان جریان در R جمع شوند، ولی بردارهای چرخان متناظر با اختلاف پتانسیل باید برابر باشند. جهت کمک بیشتر به دانشجو، نمودار برداری نیز رسم شده است.]



شکل ۵۴-۱۷

۴۸-۱۷ يك پیچۀ دایره‌ای به شعاع a ، مقاومت R و خودالقای L با سرعت زاویه‌ای ثابت دور یکی از قطرهايش که عمود بر يك میدان مغناطیسی یکنواخت است می‌چرخد (شکل ۵۵-۱۷). پیدا کنید (الف) نیروی محرکه القایی و جریان را در پیچۀ، (ب) مقدار میانگین مؤلفه‌های x و y میدان مغناطیسی حاصل از پیچۀ را در نقطه O ، (ج) زاویه‌ای که يك عقربه مغناطیسی واقع در نقطه O با محور X می‌سازد.



شکل ۵۵-۱۷

۴۹-۱۷ نشان دهید که اگر $B = C/r$ باشد معادله (۸-۱۷) معتبر است. [داهنمایی: B_{ave} را برای مقدار اختیاری r حساب کنید، این مقدار را در معادله (۸-۱۷) قرار دهید و مشتق آن را نسبت به r حساب کنید].

۵۰-۱۷ بار q به جرم m تحت تأثیر نیروی مرکز گرای F روی يك مدار دایره‌ای به شعاع ρ حرکت می‌کند. در يك فاصله زمانی معین يك میدان مغناطیسی یکنواخت در راستای عمود بر صفحه مدار برقرار می‌شود، با به کار بردن قانون القای الکترومغناطیسی، نشان دهید که تغییر بزرگی سرعت یون برابر $\Delta v = -qpB/2m$ و تغییر متناظر در گشتاور مغناطیسی برابر است با $\Delta m = -(q^2 \rho^2 / 2m)B$. این تغییرات را با مثال ۲۱-۱۶ مقایسه کنید.

[داهنمایی: برای به دست آوردن شتاب مماسی هنگام تغییر میدان، از معادله (۶.۱۷) که در جریان گفتگو از بتاترون پیدا کردیم استفاده کنید.]

۵۱.۱۷ با توجه به وضعی که در بخش ۵.۱۷ توضیح داده شد (الف) ثابت کنید در چارچوب مرجعی که مدار در آن در حال سکون است و میدان مغناطیسی با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد، داریم $\partial \mathbf{B} / \partial t = -\omega \times \mathbf{B}$. (ب) معادله (۱۵.۱۷) را به‌ازای مقدار $\partial \mathbf{B} / \partial t$ بنویسید و با استفاده از نتیجه مسئله ۴.۱۶، نشان دهید که میدان الکتریکی مشاهده شده در این چارچوب مرجع عبارت است از $\mathbf{E} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E}_0$. (ج) ثابت کنید که نیروی محرکه الکتریکی تولید شده توسط این میدان با میدانی که ناظر متصل به میدان مغناطیسی اندازه‌گیری می‌کند یکسان است. [داهنمایی: توجه کنید که $\mathbf{r} \times \mathbf{I} / 2$ مساحت مثلث حاصل از دو بردار است و $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ است.]

۵۲.۱۷ در ناحیه‌ای که در آن میدان مغناطیسی \mathbf{B} وجود دارد، بزرگی میدان با آهنگ ثابت $\partial \mathbf{B} / \partial t = b$ افزایش می‌یابد. b برداری ثابت و موازی \mathbf{B} است. (الف) ثابت کنید که بنا به معادله (۱۵.۱۷) میدان الکتریکی در هر نقطه برابر است با $\mathbf{E} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{r}) / 2$. (ب) با موازی قرار دادن محور Z با میدان مغناطیسی، مؤلفه‌های \mathbf{E} را حساب کنید. (ج) خطهای نیروی میدان مغناطیسی و الکتریکی را رسم کنید.

۵۳.۱۷ باری در مرکز یک کره که با سرعت زیاد حرکت می‌کند قرار دارد. شار الکتریکی این بار را از داخل کره محاسبه کنید. [داهنمایی: از قانون گاوس، معادله (۶.۱۵)، استفاده کنید.]

۵۴.۱۷ با به کار بردن عملگر ∇ ، معادله‌های ماکسول را به شکل دیفرانسیلی بنویسید (جدول ۲.۱۷).

۵۵.۱۷ ثابت کنید که معادله پیوستگی (۵.۱۷) به شکل دیفرانسیلی چنین نوشته می‌شود: $\partial \rho / \partial t = -\text{div } \mathbf{j}$

۵۶.۱۷ ثابت کنید برای اینکه معادله پیوستگی، به صورتی که در مسئله ۵۵.۱۷ آمده است، تحت تبدیل لورنتس برای تمام ناظرهای لخت ناوردا بماند، باید چگالی جریان و چگالی بار مطابق قوانین زیر تبدیل شوند

$$j'_x = \frac{j_x - \rho v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad j'_y = j_y$$

$$j'_z = j_z \quad \rho' = \frac{\rho - j_x v / c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

حد غیرنسبیتی این رابطه‌ها را بنویسید و در قابل قبول بودن آنها بحث کنید. [داهنمایی:

یادآوری می‌کنیم که $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ عبارت است از چگالی جریان برای بارهایی که با سرعت \mathbf{v} حرکت می‌کنند.

۵۷.۱۷ با جانشانی مستقیم تحقیق کنید که معادله (۳۴.۱۸) یکی از جوابهای معادله (۳۳.۱۷) است، اگر I_0 و α بترتیب با معادله‌های (۳۵.۱۷) و (۳۹.۱۷) بیان شوند. [دائمی: ابتدا $\sin(\omega_f t - \alpha)$ را بسط دهید، سپس به جای $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ مقادیر مربوط به آنها را که از معادله (۳۹.۱۷) به دست می‌آیند، قرار دهید.]

قسمت سوم

امواج

۱۸	حرکت موجی
۱۹	امواج الکترومغناطیسی
۲۰	بازتاب، شکست، قطبش
۲۱	نور هندسی
۲۲	تداخل
۲۳	پراش
۲۴	پدیده‌های ترابری

از میان همه مفاهیمی که در فیزیک به کار می‌روند، دو مفهوم وجود دارد که درک شهودی آنها برای هر کسی، در هر سطحی از معلومات، ممکن است. این مفهوما عبارت‌اند از ذره و موج. برای یک فرد عامی، ذره قطعه کوچکی از ماده است؛ «کوجک» نسبت به چیزهایی که در اطراف ذره پیدا می‌شوند، معمولاً با مقیاس بشری قضاوت می‌شود. همچنین فرد عامی، با توجه به آنچه در سطح آب، روی ریسمان یا فنر مرتعش مشاهده می‌کند، یک تصویر عینی از موج دارد.

ولی همچنانکه دانشجو بدون شك از مطالعه فصلهای پیش متوجه شده است، فیزیکدان مفهوم ذره را به معنایی بسیار مجردتر و اساسی‌تر به کار می‌برد. این امر به او امکان می‌دهد تا اوضاع فیزیکی بسیار متنوعی را به صورتی مناسب بررسی کند. مفهوم موج نیز تحول مشابهی پیدا کرده است. فیزیکدانان مفهوم موج را گسترش داده‌اند و آن را در مورد پدیده‌های متنوع زیادی که هیچ شباهتی به تصویر عینی موج روی آب ندارند ولی از توصیف ریاضی یکسانی پیروی می‌کنند به کار می‌بندند. قسمت ۳ این کتاب به مطالعه کلی پدیده‌های موجی به معنای وسیع کلمه تخصیص داده شده است.

گوشزد: دانشجو در هر مورد، باید توجه خود را روی درک فیزیکی مطالب وقالب ریاضی که برای آنها به کار می‌رود متمرکز کند، و از کشش غیرقابل اجتنابی که او را وامی‌دارد تا همه امواج را به صورت آنچه بر سطح یک آبگون می‌بیند تصویر کند بپرهیزد. ما چند نوع موج، بویژه امواج کشسان و الکترومغناطیسی را بررسی خواهیم کرد. در این مورد تکیه ما بیشتر بر امواج الکترومغناطیسی خواهد بود. مهمترین خصوصیات امواج عبارت‌اند از سرعت انتشار آنها و تغییراتی که هنگام عوض شدن خواص فیزیکی محیط (بازتاب، شکست، قطبش)، یا قرار گرفتن موانع گوناگون در سر راه آنها (پراش، پخش) یا هنگامی که چندین موج در ناحیه‌ای از فضا با هم ترکیب می‌شوند (تداخل) در آنها رخ می‌دهند. بنابراین، این خصوصیات موضوعاتی هستند که در فصلهای آینده بررسی خواهیم کرد. ولی هدف اصلی این فصلها توانایی بخشیدن به دانشجو جهت دستیابی به درکی درست و اصولی از توصیف موجی پدیده‌های فیزیکی مانند انتشار یک وضع فیزیکی است که با یک میدان وابسته به زمان بیان می‌شود. به همین دلیل در فصل ۲۴ از گروه خاصی از فرایندها تحت عنوان کلی پدیده‌های توابری گفتگو می‌شود. نحوه توصیف ریاضی این فرایندها تا اندازه‌ای با توصیف امواج کشسان و الکترومغناطیسی فرق دارد. زیرا، اگرچه این پدیده‌ها نیز به انتشار

بعضی شرایط فیزیکی مربوط اند، ولی تصویر فیزیکی آنها با تصویر پدیده‌های موجی دیگر متفاوت است. با مقایسه دقیق پدیده‌های ترابری با پدیده‌های موجی که در فصل‌های دیگر تشریح شدند می‌توان بینش روشنی از توصیف موجی پدیده‌های فیزیکی به دست آورد.

حرکت موجی

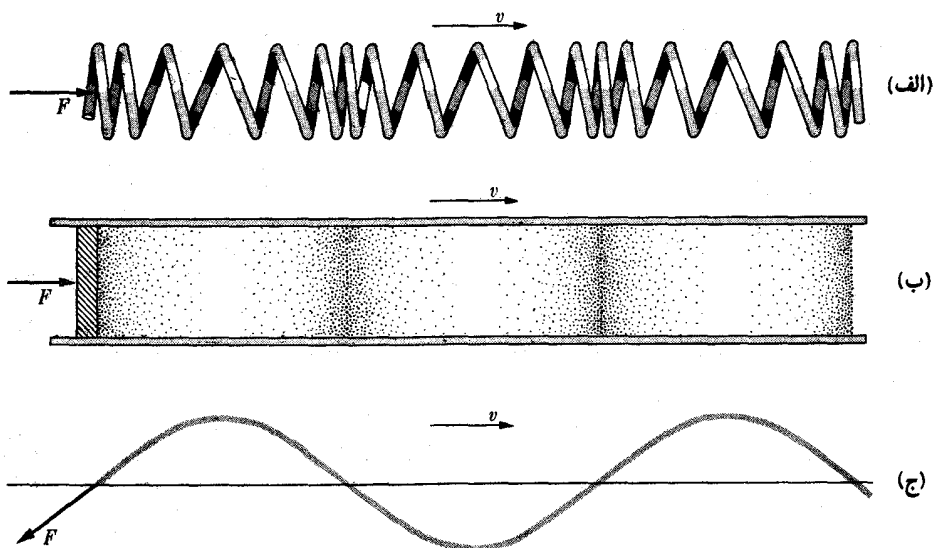
مقدمه	۱۰۱۸
توصیف ریاضی انتشار	۲۰۱۸
آنالیز فوریه حرکت موجی	۳۰۱۸
معادله دیفرانسیل حرکت موجی	۴۰۱۸
موج کشان در میله جامد	۵۰۱۸
موج فشار در ستون گاز	۶۰۱۸
موج عرضی در ریسمان	۷۰۱۸
موج سطحی در آبگون	۸۰۱۸
در حرکت موجی چه چیزی منتشر می شود؟	۹۰۱۸
موجهای دو و سه بعدی	۱۰۰۱۸
موج گروهی در شاره	۱۱۰۱۸
سرعت گروه	۱۲۰۱۸
اثر دوپلر	۱۳۰۱۸
صوت، آکوستیک	۱۴۰۱۸

صدایی حاصل از زنگ یا رادیو در دوردست شنیده می‌شود. این صدا از طریق هوا به اطراف انتقال می‌یابد. اگر در کنار دریا ایستاده باشیم و یک قایق موتوری با فاصله‌ای از ساحل بگذرد احتمال دارد شیارهایی که در پشت قایق به وجود می‌آید نظر ما را جلب کند. هنگامی که لامپ را روشن می‌کنیم روشنایی اتاق را فرامی‌گیرد. در بخش ۱۱-۱۲، دیدیم که در نتیجه رابطه‌های فیزیکی بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، می‌توان یک سیگنال الکتریکی را از یک نقطه به نقطه دیگر فرستاد. هر چند سازوکارهای فیزیکی هر یک از فرایندهایی که در بالا گفته شد ممکن است با دیگری فرق داشته باشد، ولی تمام آنها در یک خصوصیت مشترک‌اند. آنها وضع فیزیکی‌اند که در نقطه‌ای از فضا تولید، در فضا منتشر و بعداً در نقطه دیگری احساس می‌شوند. این گونه فرایندها همگی نمونه‌هایی از حرکت موجی‌اند.

جهت بیان کلیتر موضوع، فرض کنید که یک خاصیت فیزیکی بامیدانی توصیف می‌شود. این میدان ممکن است میدان الکترومغناطیسی، تغییر شکل فنر، فشار گاز، کرنش جسم جامد، جابجایی عرضی ریسمان، یا حتی میدان گرانشی باشد. فرض کنید که شرایط در نقطه‌ای وابسته به زمان یا دینامیکی باشد، به گونه‌ای که در این نقطه اختلالی در حالت فیزیکی رخ دهد. خواص فیزیکی دستگاه، که با معادله‌های وابسته به زمان میدان (مانند معادله‌های ماکسول برای میدان الکترومغناطیسی) بیان می‌شوند، انتشار این اختلال را در فضا نتیجه می‌دهند. این امر شرایط ایستای نقطه‌های دیگر را تغییر می‌دهد. بنابراین برای آن میدان خاص مورد نظر، موج وابسته‌ای قابل می‌شویم.

به عنوان مثال سطح آزاد آبگونی را در نظر می‌گیریم. در این مورد، میدان عبارت است از جابجایی هر نقطه از سطح نسبت به وضع ترازمندی خود. در شرایط ترازمندی یا ایستا سطح آزاد آبگون تخت و افقی است. ولی اگر با انداختن قطعه سنگی، شرایط روی سطح را در نقطه‌ای تغییر دهیم، می‌دانیم که این اختلال در تمام جهات روی سطح آبگون انتشار می‌یابد. برای تعیین سازوکار انتشار و سرعت آن، باید تحلیل کنیم که چگونه جابجایی یک نقطه از سطح آبگون روی بقیه سطح اثر می‌گذارد. از این تحلیل معادله‌های دینامیکی فرایند به دست می‌آیند. در این صورت از این معادله‌ها می‌توان اطلاعات کمی لازم را درباره تغییرات اختلال نسبت به زمان و مکان به دست آورد.

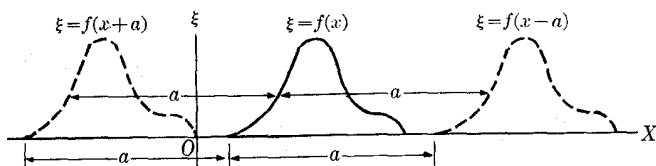
در این فصل، ابتدا به شرح مشخصات کلی حرکت موجی می‌پردازیم و سپس چند نوع خاص از امواج را بررسی می‌کنیم. بیشتر مثالها به امواج کشسان در مواد مربوط می‌شوند. امواج کاملاً آشنای شکل ۱۰-۱۸ اساساً امواج کشسان‌اند. در این موارد، ساختار مولکولی ماده را نادیده می‌گیریم و آن را محیطی پیوسته فرض می‌کنیم. این فرض تنها هنگامی که افت و خیز فضایی موج (که با طول موج تعیین می‌شود) در مقایسه با فاصله بین مولکولها بزرگ باشد، معتبر است.



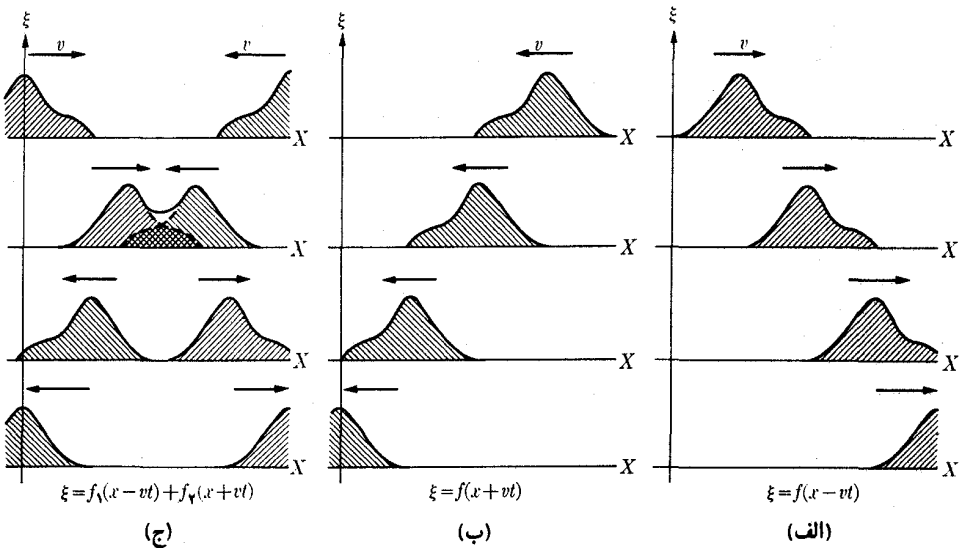
شکل ۱۰۱۸ امواج کشسان (الف) در فتر، (ب) در گاز و (ج) در ریسمان.

۲۰۱۸ توصیف ریاضی انتشار

تابع $\xi = f(x)$ را، که نمودار آن در شکل ۲۰۱۸ با منحنی خط پر رسم شده است، در نظر می‌گیریم. حال اگر به جای x مقدار $x - a$ را قرار دهیم، تابع $\xi = f(x - a)$ به دست می‌آید. در این حالت شکل منحنی عوض نمی‌شود؛ پس از افزودن a به x نیز همان مقادیر برای ξ به دست می‌آیند. به گفته دیگر، اگر a مثبت فرض شود، درمی‌یابیم که منحنی، بدون کمترین تغییر شکل، به اندازه a به سمت راست جابجا شده است. همچنین $\xi = f(x + a)$ متناظر با جابجایی بدون تغییر شکل منحنی به اندازه a به سمت چپ است. اکنون اگر $a = vt$ باشد، که در آن t نمایش زمان است، یک منحنی «سیار» به دست می‌آید، یعنی $\xi = f(x - vt)$ نمایش یک منحنی است که با سرعت v ، به نام سرعت فاژ، به سمت راست حرکت می‌کند (شکل ۳۰۱۸ الف). همچنین $\xi = f(x + vt)$ نمایش همان منحنی است که با سرعت v به سمت چپ حرکت می‌کند (شکل ۳۰۱۸ ب).



شکل ۲۰۱۸ انتقال بدون پیچش تابع $\xi(x)$.



شکل ۳۰۱۸ انتشار بدون پیچش موج (الف) به سمت راست، و (ب) به سمت چپ. (ج) امواجی که در جهات مختلف انتشار می‌یابند اگر در جایی باهم تداخل کنند اثر هایشان باهم جمع می‌شوند.

بنابراین نتیجه می‌گیریم که یک رابطه ریاضی به صورت

$$\xi(x, t) = f(x \pm vt) \quad (۱۰۱۸)$$

برای توصیف یک وضع فیزیکی که بدون تغییر شکل در سوی مثبت یا منفی روی محور X «حرکت می‌کند» یا «انتشار می‌یابد» کافی است؛ این رابطه را رابطه حرکت موجی می‌نامند. کمیت $\xi(x, t)$ می‌تواند نشانه‌دهنده تعداد زیادی از کمیت‌های فیزیکی، مانند تغییر شکل در جامد، فشار در گاز، میدان الکتریکی، یا مغناطیسی و غیره باشد.

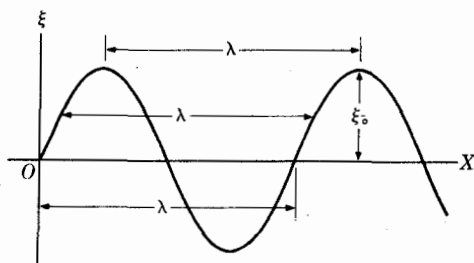
یک مورد ویژه و جالب این است که $\xi(x, t)$ یک تابع سینوسی یا هماهنگ

مثل تابع

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - vt) \quad (۲۰۱۸)$$

باشد. کمیت k دارای معنای خاصی است. اگر جای x را با $x + 2\pi/k$ عوض کنیم مقدار $\xi(x, t)$ عوض نمی‌شود، یعنی

$$\begin{aligned} \xi\left(x + \frac{2\pi}{k} - vt\right) &= \xi_0 \sin k\left(x + \frac{2\pi}{k} - vt\right) \\ &= \xi_0 \sin[k(x - vt) + 2\pi] = \xi(x - vt) \end{aligned}$$



شکل ۴.۱۸ موج سینوسی.

بنا بر این

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (۴.۱۸)$$

نمایش «دوره فضایی» منحنی در شکل ۴.۱۸ است، یعنی بعد از هر λ منحنی عیناً تکرار می‌شود. کمیت λ را طول موج می‌نامند. در این صورت کمیت $k = 2\pi/\lambda$ معرف تعداد طول موجها در فاصله 2π است که عدد موج نامیده می‌شود. این نام را گاهی برای کمیت $1/\lambda$ یا $k/2\pi$ نیز به کار می‌برند که برابر است با تعداد طول موجها در واحد طول. در نتیجه تابع

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - vt) = \xi_0 \sin \frac{2\pi}{k}(x - vt) \quad (۴.۱۸)$$

یک موج سینوسی یا هماهنگ به طول موج λ را نشان می‌دهد که با سرعت v روی محور X به سمت راست منتشر می‌شود. معادله (۴.۱۸) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t) \quad (۵.۱۸)$$

در این رابطه

$$\omega = kv = \frac{2\pi v}{\lambda} \quad (۶.۱۸)$$

بسامه زاویه‌ای موج نام دارد. چون بنا به معادله (۲.۱۲)، $\omega = 2\pi\nu$ است که ν بسامد تغییر وضع فیزیکی در هر نقطه‌ای مانند x است، رابطه مهم زیر بین طول موج، بسامد و سرعت انتشار برقرار است

$$\lambda\nu = v \quad (۷.۱۸)$$

بدیهی است که هر گاه P دوره نوسان در هر نقطه باشد که بنا به معادله (۲.۱۲) از رابطه

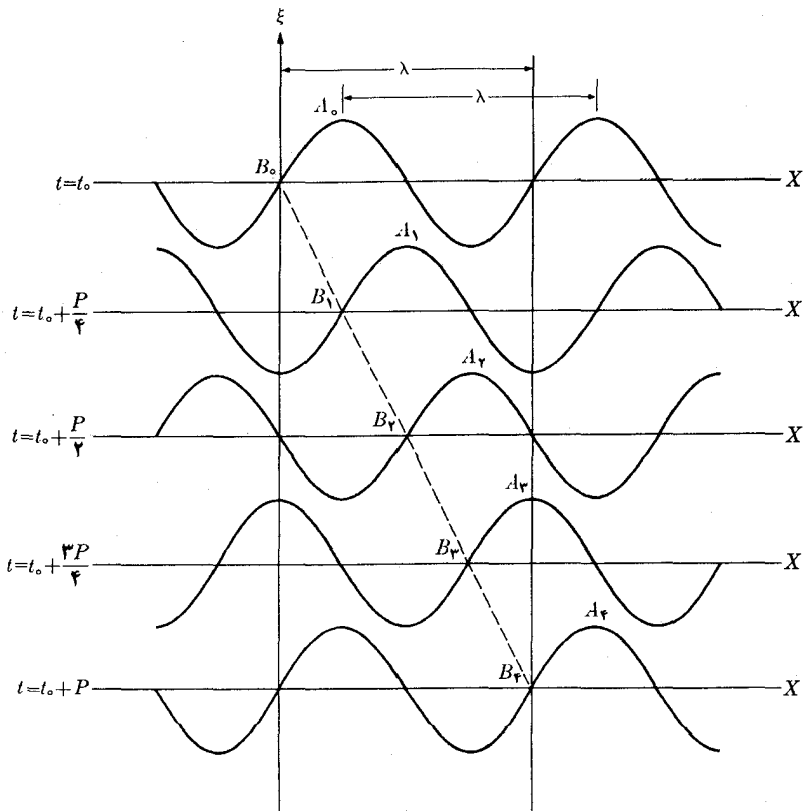
$$P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$$

به دست می آید، معادله (۴.۱۸) را به صورت زیر نیز می توان نوشت

$$\xi = \xi_0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{P} \right) \quad (۸.۱۸)$$

به همین ترتیب، رابطه

$$\xi = \xi_0 \sin k(x+vt) = \xi_0 \sin(kx + \omega t) = \xi_0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{P} \right) \quad (۹.۱۸)$$



شکل ۵.۱۸ موج هماهنگی که به سمت راست منتشر می شود. این موج در طول زمان P به اندازه λ پیشروی می کند.

نمایش يك موج سینوسی یا هماهنگ است که درسوی X - حرکت می کند. بسیار آموزنده است که توزیع فضایی $\xi(x, t)$ را در فاصله زمانیهای مختلف و متوالی مورد توجه قرار دهیم. شکل (۵.۱۸) تابع $\xi(x, t)$ را در زمانهای $t_0 + P/4$ ، $t_0 + P/2$ ، $t_0 + 3P/4$ و $t_0 + P$ نشان می دهد. پیداست که با اینکه وضع فیزیکی به سمت راست انتشار می یابد، ولی پس از يك دوره مجدداً در فضا تکرار می شود. دلیل این امر آن است که بنا به معادله (۷.۱۸)، داریم

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \nu P$$

این رابطه نشان می دهد که طول موج را می توان برابر مسافتی تعریف کرد که موج در زمانی برابر يك دوره به پیش می رود. بنا بر این در هر حرکت موجی دو تناوب وجود دارد، یکی در زمان، که با دوره P مشخص می شود و دیگری در فضا که با طول موج λ نشان داده می شود. این دو کمیت با رابطه $\lambda = \nu P$ به همدیگر مربوط اند. دانشجو می تواند با آسانی تحقیق کند که رابطه کلی (۱.۱۸) برای يك موج رونده، را می توان به صورت زیر نیز نوشت

$$\xi(x, t) = F\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$$

در این رابطه، مانند پیش، علامت مثبت با انتشار درسوی X - و علامت منفی با انتشار درسوی X + متناظر است. بدین طریق برای يك موج هماهنگ به جای معادله های (۵.۱۸) و (۹.۱۸) می توان نوشت

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin \omega \left(t \pm \frac{x}{v}\right) = \xi_0 \sin(\omega t \pm kx) \quad (۱۰.۱۸)$$

مثال ۱۰.۱۸ دیاپازونی با بسامد 440 Hz در ارتعاش است. اگر سرعت صوت در هوا 340 m s^{-1} باشد، طول موج صوت را پیدا کنید.

حل: بنا به معادله (۷.۱۸) داریم

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{440 \text{ Hz}} = 0.772 \text{ m}$$

مثال ۲۰.۱۸ نور در خلا با سرعت $3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ منتشر می شود. طول موج متناظر با بسامد $5 \times 10^{14} \text{ Hz}$ را، که بسامد نور در ناحیه سرخ بیناب مرئی است، پیدا کنید.

حل: با به کار بردن معادله (۷.۱۸) به دست می آید

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{5 \times 10^{14} \text{ Hz}} = 6 \times 10^{-7} \text{ m}$$

قطعاً دانشجو با مقایسه نتایج حاصل از این دو مثال متوجه می شود که چه تفاوت عظیمی بین مرتبه بزرگی کمیتهای مربوط به امواج صوتی و نوری وجود دارد.

۳.۱۸ آنالیز فوریه حرکت موجی

در بخش ۱۵.۱۲ دیدیم که بنا به قضیه فوریه، هر حرکت دوره ای را می توان به صورت برهم نهشی از حرکتهای هماهنگ ساده با بسامدهای ω ، 2ω ، \dots ، $n\omega$ ، \dots یا با دوره های P ، $P/2$ ، \dots ، P/n ، \dots در نظر گرفت. همین نتیجه در مورد یک حرکت موجی دوره ای نیز به کار می رود.

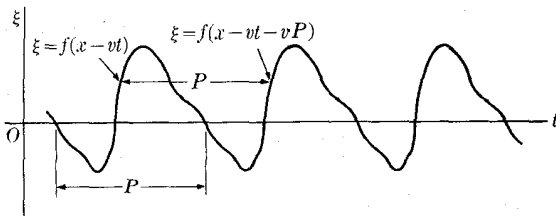
فرض کنیم که $\xi = f(x - vt)$ یک حرکت مرجی دوره ای است، یعنی حرکتی است که در نقطه ای معین در لحظه های P ، $2P$ ، \dots ، nP ، \dots تکرار می شود (شکل ۶.۱۸). به گفته دیگر

$$\xi = f(x - vt) = f[x - v(t \pm P)] = f(x - vt \mp vP)$$

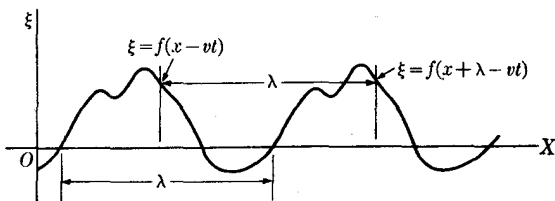
این رابطه بدین معنی است که اگر در یک لحظه معین، x به اندازه vP ، $2vP$ ، \dots ، nvP ، \dots افزایش یا کاهش پیدا کند ξ عیناً تکرار می شود، در نتیجه اگر به جای تغییر t کمیت x را به اندازه $\lambda = vP$ تغییر دهیم موج در فضا تکرار می شود (شکل ۷.۱۸). از این رو حرکت دوره ای در زمان، حرکت دوره ای در فضا نیز است، قبلاً ثابت کردیم که این امر در حرکت موجی سینوسی (یا هماهنگ) صادق است.

اکنون فرض می کنیم که $\xi = f(x)$ یک تابع دوره ای در فضا با دوره ای برابر λ است، به گفته دیگر $f(x) = f(x + \lambda)$ است. در این صورت با به کار بردن قضیه فوریه، به صورتی که در بخش ۵.۱۲ تشریح شد، می توان نوشت

$$\xi = f(x) = a_0 + a_1 \cos kx + a_2 \cos 2kx + \dots + a_n \cos nkx + \dots + b_1 \sin kx + b_2 \sin 2kx + \dots + b_n \sin nkx + \dots$$



شکل ۶.۱۸ موج دوره ای ناهماهنگ در نقطه معلوم.



شکل ۷.۱۸ موج دوره‌ای ناهمبندگی در لحظه معلوم.

در این رابطه $k = 2\pi/\lambda$ همان نقشی را دارد که ω در معادله (۷۴.۱۲) داشت. ضرایب a_n و b_n را می‌توان با قرار دادن x به جای t در معادله‌های (۷۴.۱۲) از این معادلات به دست آورد. پس حرکت موجی $\xi = f(x - vt)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \xi = f(x - vt) = & a_0 + a_1 \cos k(x - vt) + a_2 \cos 2k(x - vt) \\ & + \dots + a_n \cos nk(x - vt) + \dots \\ & + b_1 \sin k(x - vt) + b_2 \sin 2k(x - vt) \\ & + \dots + b_n \sin nk(x - vt) + \dots \end{aligned}$$

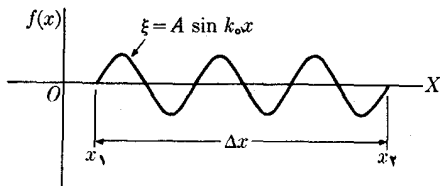
چون $\omega = kv$ است، داریم

$$\begin{aligned} \xi = f(x - vt) = & a_0 + a_1 \cos(kx - \omega t) + a_2 \cos 2(kx - \omega t) \\ & + \dots + a_n \cos n(kx - \omega t) + \dots \\ & + b_1 \sin(kx - \omega t) + b_2 \sin 2(kx - \omega t) \\ & + \dots + b_n \sin n(kx - \omega t) + \dots \end{aligned}$$

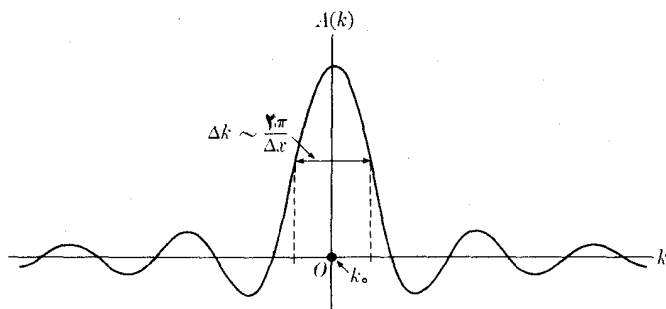
از اینجا معلوم می‌شود که هر حرکت موجی دوره‌ای را می‌توان به صورت برهم‌نهشی از حرکت‌های مسوچی هماهنگ با بسامدهای ω ، 2ω ، 3ω ، \dots ، $n\omega$ ، \dots و طول‌موجهای λ ، $\lambda/2$ ، $\lambda/3$ ، \dots ، λ/n ، \dots بیان کرد. به همین دلیل آشنایی با حرکت موجی هماهنگ برای درک حرکت موجی به صورت کلی ضروری است.

مثال ۳.۱۸ موجی در لحظه $t = 0$ با تابع $f(x)$ ، مطابق شکل ۸.۱۸، بیان می‌شود که در فاصله $\Delta x = x_2 - x_1$ عبارت است از $\xi = A \sin k_0 x$ و در خارج از این فاصله برابر صفر است. این گونه امواج را تپ یا بسته موج می‌نامند. آنالیز فوریة این موج را پیدا کنید.

حل: این مسئله کاملاً شبیه به مسئله مربوط به منحنی شکل ۴۵.۱۲ است که در بخش ۱۵.۱۲



شکل ۸.۱۸ تب هماهنگ.



شکل ۹.۱۸ تبدیل فوریه تب شکل ۸.۱۸.

در مورد آن گفتگو کردیم. تنها باید x را به جای t و k_0 را به جای ω قرار دهیم. این امر بدین معنی است که برای به دست آوردن موجی از نوع آنچه در شکل ۸.۱۸ نشان داده شده است، باید تعداد زیادی موج با عدد موج از $-\infty$ تا $+\infty$ را با هم ترکیب کرد. به هر کدام از این موجها دامنه‌ای برابر $A(k)$ مشابه باشکلی ۴۶.۱۲ که در شکل ۹.۱۸ نشان داده شده وابسته است. دامنه $A(k)$ جز برای مقادیری از k واقع در فاصله Δk در اطراف k_0 قابل توجه نیست، که در قیاس با معادله (۷۶.۱۲)، داریم

$$\Delta k \sim 2\pi / \Delta x \quad \text{یا} \quad \Delta x \Delta k \sim 2\pi$$

این رابطه نشان می‌دهد که، هر چه ناحیه‌ای از فضا که بسته موج در آنجا جایگزیده است کوچکتر باشد، گستره طول موجهای لازم برای نشان دادن بسته موج بزرگتر خواهد بود.

۴.۱۸ معادله دیفرانسیل حرکت موجی

اکنون به عنوان گام بعدی، کوشش می‌کنیم تعیین کنیم که چه موقع یک میدان معلوم وابسته به زمان به صورت موج، بدون واپیچش منتشر می‌شود. چون میدانهای مربوط به هر فرایند فیزیکی از قوانین دینامیکی پیروی می‌کنند که سرشتی آن فرایندند و می‌توان آنها را به صورت معادلات دیفرانسیل نوشت. چنانکه در مورد میدان الکترومغناطیسی ملاحظه شد، امکان یافتن معادله دیفرانسیلی را بررسی می‌کنیم که بتوان در همه حرکتهای موجی به کار برد. در این صورت هر موقع به یک میدان خاص برخورد کنیم که، به دلیل ویژگیهای فیزیکی

خود در چنین معادله‌ای صدق کند اطمینان می‌یابیم که این میدان در فرض با سرعتی معین و بدون واپیچش منتشر می‌شود. * برعکس، اگر به‌طور تجربی مشاهده کنیم میدانی با سرعت معین و بدون واپیچش در فرض منتشر می‌شود می‌توانیم این میدان را با معادله‌هایی که با معادله موج سازگارند توصیف کنیم.

معادله‌ای که در موارد متعدد با آن مواجه می‌شویم و یک حرکت موجی را توصیف می‌کند که با سرعت معین v و بدون واپیچش در امتداد $+X$ یا $-X$ منتشر می‌شود، عبارت است از

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (11.18)$$

رابطه (۱۱.۱۸) را معادله دیفرانسیل حرکت موجی می‌نامند. جواب عمومی این معادله به‌صورت معادله (۱۰.۱۸)، یعنی

$$\xi(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad (12.18)$$

است از این‌رو جواب عمومی معادله (۱۱.۱۸) را می‌توان به‌صورت برهم‌نهی از دو حرکت موجی که در دوسوی مخالف حرکت می‌کنند بیان کرد. بدیهی است برای موجی که تنها در یک‌سو منتشر می‌شود، تنها یکی از توابع معادله (۱۲.۱۸) لازم است. بنابراین هنگامی که (به‌عنوان مثال) موج تابشی در امتداد $+X$ و موج بازتاب در امتداد $-X$ باشد لازم است معادله (۱۲.۱۸) به‌صورت کلی آن به‌کار برده شود.

برای اینکه ثابت شود رابطه‌ای به‌صورت (۱۲.۱۸) جواب معادله موج (۱۱.۱۸) است، ابتدا باید چند نتیجه ریاضی را یادآوری کنیم. اگر در تابعی مانند $u, y = f(u)$ به‌نوبه خود تابعی از x ، یعنی $u(x)$ باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy du}{du dx}$$

این رابطه را قاعده زنجیری مشتقها می‌نامند. * به‌عنوان مثال، در مورد تابع $y = \sin(3x^2)$ داریم $y = \sin u$ ، $u = 3x^2$ ، $dy/du = \cos u$ و $du/dx = 6x$ ، در نتیجه به‌دست می‌آید

$$\frac{dy}{dx} = (\cos u)(6x) = 6x \cos 3x^2$$

* قبلاً نیز در فصل ۱۲ از همین روش دریافتیم که حرکت نوسانی از معادله‌ای از نوع $d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$ پیروی می‌کند و سپس همین معادله را برای شناسایی چندنوع حرکت هماهنگ ساده، بعد از فهمیدن قوانین فیزیکی حرکت آنها، به‌کار بردیم.

** ریک توماس، جرج، ب، حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، ترجمه علی اکبر جعفریان و ابوالقاسم میامی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۹، بخش ۷.۱۵.

اکنون می توان قاعده زنجیری مشتقها را در مورد تابع $\xi = f(x \pm vt)$ به کار برد. در اینجا می توان نوشت $u = x \pm vt$ ، یعنی $\xi = f(u)$ ، چون دو متغیر x و t وجود دارد، باید از مشتقات جزئی استفاده کنیم، $\partial u / \partial t = \pm v$ و $\partial u / \partial x = 1$ ، در این صورت داریم

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d\xi}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\xi}{du}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{d\xi}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = \pm v \frac{d\xi}{du}$$

از رابطه های بالا برای بار دوم مشتق می گیریم، به دست می آید

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d^2 \xi}{du^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = \pm v \frac{d^2 \xi}{du^2} (\pm v) = v^2 \frac{d^2 \xi}{du^2}$$

با ترکیب دو نتیجه فوق و حذف $d^2 \xi / du^2$ ، معادله (۱۱.۱۸) به دست می آید و ثابت می شود که معادله $\xi = f(x \pm vt)$ ، مستقل از شکل تابع f ، جواب معادله مسوج است. نظر بدانکه معادله موج خطی است، جواب عمومی از نوعی است که با معادله (۱۲.۱۸) نشان داده شده است.

به عنوان یک مثال مشخص، می توان تحقیق کرد که یک موج سینوسی به صورت $\xi = \xi_0 \sin k(x - vt)$ در معادله موج (۱۱.۱۸) صدق می کند یا نه. از این تابع نسبت به زمان t و مکان x مشتق جزئی می گیریم

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = k \xi_0 \cos k(x - vt), \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k^2 \xi_0 \sin k(x - vt)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -kv \xi_0 \cos k(x - vt), \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -k^2 v^2 \xi_0 \sin k(x - vt)$$

در نتیجه به دست می آید $\partial^2 \xi / \partial t^2 = v^2 \partial^2 \xi / \partial x^2$ که با معادله (۱۱.۱۸) سازگار است. به منظور درک هرچه بهتر ایده های اساسی حرکت موجی، در این فصل چند نوع موج را که دانشجویان کمابیش با آنها آشنایی دارد مورد بحث قرار می دهیم. باید توجه داشت، برای موجهایی که در بخشهای آینده بررسی می شوند، معادله (۱۱.۱۸) از قوانین دینامیکی حاکم بر فرآیند مورد گفتگو، همراه با تقریبهایی مانند شرط دامنه کم یا طول موج بلند و غیره، به دست می آید. بنابراین نظریه مربوط به معادله (۱۱.۱۸) را تنها در محدوده این تقریبهها می توان به کار برد.

۵.۱۸ موج کشان در میله جامد

اگر به تریبی، مثلاً، با کوبیدن چکش بر سر یک میله جامد، آشفتنگی به وجود آوریم، این آشفتنگی در طول میله انتشار می یابد و بالاخره در سر دیگر ظاهر می شود. می گوئیم یک موج کشان در طول میله منتشر شده است. هدف ما در این بخش آن است که موج کشان را بتفصیل بررسی کنیم و بینیم چگونه سرعت انتشار آن به خواص فیزیکی میله بستگی دارد. میله ای با سطح مقطع یکنواخت A را در نظر می گیریم. به این میله تنش، که با F نشان داده شده است، در امتداد محور وارد می شود. نیروی F لزوماً در تمام مقطعیها یکسان نیست و ممکن است در امتداد محور میله تغییر کند. در هر مقطع (چنانکه شکل ۱۵.۱۸ نشان می دهد) دو نیروی برابر و ناهمسو وجود دارد: یکی کشش قسمت چپ میله، ناشی از قسمت راست، و دیگری کشش قسمت راست ناشی از قسمت چپ. نیروی وارد بر واحد سطح را که در راستای عمود بر مقطع میله اثر می کند تنش عمودی می نامند و با S نشان می دهند. پس

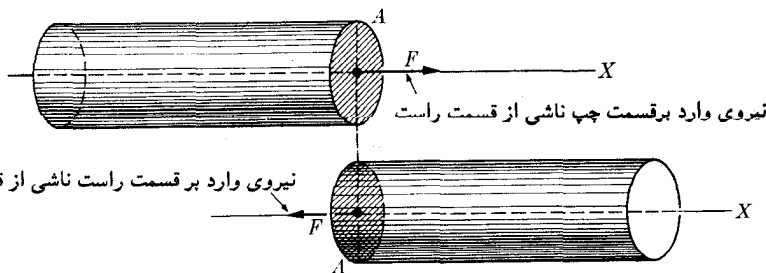
$$S = \frac{F}{A} \quad (13.18)$$

تنش را بر حسب $N m^{-2}$ بیان می کنند.

تحت تأثیر چنین نیروهایی، هر مقطعی از میله به موازات محور آن به اندازه ξ جابجا می شود. اگر در تمام طول میله جابجایی یکسان باشد، هیچگونه تغییر شکلی به وجود نمی آید بلکه تمام میله در امتداد محور خود جابجایی صلب پیدا می کند. ولی حالتی که تغییر شکل وجود داشته باشد مورد توجه ماست، یعنی حالتی که مقدار ξ در امتداد میله تغییر می کند. به گفته دیگر، ξ تابعی است از x . دو مقطع A و A' را که در حالت عادی به اندازه dx از یکدیگر فاصله دارند در نظر می گیریم (شکل ۱۱.۱۸). با وارد شدن نیروها مقطع A به اندازه ξ و مقطع A' به اندازه ξ' جابجا می شود. در این صورت فاصله بین A و A' در حالت تغییر شکل یافته برابر است با

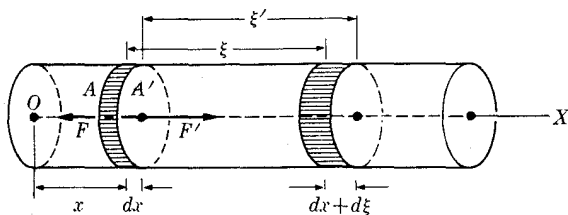
$$dx + (\xi' - \xi) = dx + d\xi$$

در رابطه فوق $d\xi = \xi' - \xi$ است. بنا بر این تغییر شکل میله در این ناحیه برابر است با $d\xi$. تغییر شکل در امتداد محور در واحد طول میله را با ϵ نشان می دهند و آن را کرنش



نیروی وارد بر قسمت راست ناشی از قسمت چپ

شکل ۱۵.۱۸ نیروهای وارد بر مقطع میله تحت تنش با هم برابر و در سوی مخالف یکدیگرند.



شکل ۱۱.۱۸ موج طولی در میله.

عمودی می نامند. چون تغییر شکل $d\xi$ مربوط به طول dx است، کرنش در میله برابر می شود با

$$\epsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (۱۴.۱۸)$$

توجه کنید که اگر تغییر شکل وجود نداشته باشد، ξ ثابت و $\epsilon = 0$ است. یعنی هیچگونه کرنش عمودی وجود ندارد. چون کرنش نسبت دو طول است بنابراین عددی مطلق یا کمیته بدون بعد است.

بین تنش عمودی δ و کرنش عمودی ϵ میله، رابطه ای به نام قانون هوک برقرار است که می گوید

در داخل محدوده کشسانی ماده، تنش عمودی با کرنش عمودی متناسب است.

یا

$$\delta = Y\epsilon \quad (۱۵.۱۸)$$

ثابت تناسب Y را مدول کشسانی یا یانگ می نامند و آن را بر حسب Nm^{-2} بیان می کنند، زیرا ضریب ϵ بدون بعد است. تا وقتی تغییر شکلها در ماده کوچک باشند، قانون هوک با تقریب خوبی رفتار کشسانی آن را بیان می کند. برای تنشها و تغییر شکلهای بزرگ، معادله (۱۵.۱۸) دیگر برقرار نیست و توصیف وضع فیزیکی پیچیده تر می شود.

جدول ۱۰.۱۸ ثابتهای کشسانی چند ماده را نشان می دهد. این ثابتها عبارت اند از مدول یانگ Y ، مدول کپه ای (تراکم پذیری) k که با معادله (۲۲.۱۸) تعریف می شود و مدول سختی یا مدول برشی G که با معادله (۳۱.۱۸) تعریف می شود.

از قرار دادن معادله های (۱۳.۱۸) و (۱۴.۱۸) در معادله (۱۵.۱۸) و حل آن

بر حسب F ، به دست می آید

$$F = YA \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (۱۶.۱۸)$$

در مورد میله یا سیم ترازمنندی که یک سر آن در نقطه O ثابت است (شکل ۱۲.۱۸) و به سر دیگر آن در نقطه A نیروی F وارد می شود، نیرو باید در تمام مقاطع یکسان و برابر F باشد. در این صورت برای به دست آوردن تغییر شکل در هر مقطعی می توان با ثابت

جدول ۱۰۱۸ ثابتهای کشسانی (بر حسب 10^{11}Nm^{-2})

ماده	Y	k	G
آلومینیوم	۰٫۷۰	۰٫۶۱	۰٫۲۴
مس	۱٫۲۵	۱٫۳۱	۰٫۴۶
آهن	۲٫۰۶	۱٫۱۳	۰٫۸۲
سرب	۰٫۱۶	۰٫۳۳	۰٫۰۵۴
نیکل	۲٫۱	۱٫۶۴	۰٫۷۲
فولاد	۲٫۰	۱٫۱۳	۰٫۸۰

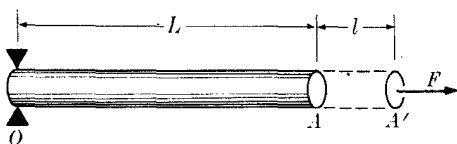
فرض کردن F از معادله (۱۶۰۱۸) انتگرال گرفت

$$\int_0^{\xi} d\xi = \frac{F}{YA} \int_0^x dx \quad \text{یا} \quad \xi = \frac{F}{YA} x$$

مخصوصاً تغییر شکل l در انتهای آزاد A ، از قراردادن $x=L$ در رابطه فوق به دست می آید، یعنی داریم $l = FL/YA$. این رابطه پایه ای برای اندازه گیری تجربی مدول یا ننگ فراهم می کند.

اگر میله ترازمند نباشد، نیرو در تمام طول میله یکسان نیست. در نتیجه، مقطعی از میله به ضخامت dx ، تحت تأثیر یک نیروی برآیند قرار می گیرد. به عنوان مثال، در شکل ۱۱۰۱۸، رویه A' مقطع به ضخامت dx ، بر اثر کشش قسمت راست میله، تحت تأثیر نیروی F' که به سمت راست است قرار می گیرد، در حالی که رویه A بر اثر کشش قسمت چپ تحت تأثیر نیروی F که به سمت چپ است قرار می گیرد. نیروی برآیندی که به سمت راست این مقطع وارد می شود برابر است با $(\partial F / \partial x) dx$. اگر ρ چگالی ماده میله باشد، جرم مقطع برابر می شود با $dm = \rho dV = \rho A dx$ ، که در آن $A dx$ برابر حجم مقطع است. شتاب این جرم برابر است با $\partial^2 \xi / \partial t^2$. بنابراین با استفاده از رابطه دینامیک

$$\text{شتاب} \times \text{جرم} = \text{نیرو}$$



شکل ۱۲۰۱۸

معادله حرکت مقطع را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = (\rho A dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

یا

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (۱۷.۱۸)$$

در این مسئله دو میدان وجود دارد، یکی ξ ، جابجایی هر مقطع از میله که تابعی از زمان و مکان است، و دیگری F ، نیروی وارد بر هر مقطع. F نیز تابعی است از زمان و مکان. این دو میدان با معادله‌های (۱۶.۱۸) و (۱۷.۱۸) به همدیگر مربوط‌اند و می‌توان آنها را معادله‌های دیفرانسیل میدان کشمانی میله تغییرشکل یافته نامید، که شرایط فیزیکی مسئله را توصیف می‌کند. این معادله‌ها هم ارزهای ریاضی معادلات ماکسول در میدان الکترومغناطیسی‌اند. اکنون معادله‌های (۱۶.۱۸) و (۱۷.۱۸) را باهم ترکیب می‌کنیم. ابتدا از معادله (۱۶.۱۸) نسبت به x مشتق می‌گیریم، داریم

$$\frac{\partial F}{\partial x} = YA \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

که با قرار دادن این نتیجه در معادله (۱۷.۱۸) و از ساده کردن آن نسبت به ضریب A به دست می‌آید

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (۱۸.۱۸)$$

این معادله مشابه معادله (۱۱.۱۸) است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که میدان تغییرشکل ξ در امتداد میله با سرعت زیر منتشر می‌شود

$$v = \sqrt{Y/\rho} \quad (۱۹.۱۸)$$

این نتیجه به طور تجربی، با اندازه‌گیری جداگانه سه کمیت، تأیید شده است. معادله (۱۹.۱۸) از لحاظ ابعادی نیز صحیح است. زیرا Y بر حسب Nm^{-2} و ρ بر حسب kgm^{-3} بیان می‌شود. بنابراین خارج قسمت آنها عبارت است از $\text{m}^2 \text{s}^{-2} = (\text{Nm}^{-2})(\text{kgm}^{-3})^{-1}$ که برابر است با مجذور بعد سرعت. با توجه به معادله (۱۶.۱۸) دانشجو می‌تواند تحقیق کند که میدان نیروی F در معادله مشابهی صدق می‌کند

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (۲۰.۱۸)$$

این امر نشان می‌دهد که میدان نیرو با همان سرعت میدان جابجایی در امتداد میله منتشر می‌شود.

باید خاطر نشان کرد که موجهایی که با معادله‌های (۱۸.۱۷) و (۲۰.۱۸) بیان شدند با خواص فیزیکی تغییر شکل ξ و نیروی F متناظرند، که در سوی انتشار موج، یعنی در امتداد محور X قرار دارند این گونه حرکت موجی را طولی می‌نامند.

باید توجه داشت که معادله‌های موج (۱۸.۱۸) و (۲۰.۱۸) از معادله‌های میدان (۱۶.۱۸) و (۱۷.۱۸) به دست می‌آیند و لسی عکس این امر درست نیست؛ زیرا سایر معادله‌های میدان نیز می‌توانند یک معادله موج را در برداشته باشند. بنابراین معادله‌های اساسی میدان در این مورد معادله‌های (۱۶.۱۸) و (۱۷.۱۸) اند، و معادله‌های موج (۱۸.۱۸) و (۲۰.۱۸) صرفاً پیامد این معادله‌های میدان هستند.

مثال ۴.۱۸ سرعت انتشار موج طولی کشان را در یک میله فولادی برآورد کنید.

حل: با به کار بردن مقادیر داده شده در جدول ۱۰.۱۸ و قرار دادن چگالی فولاد برابر $\gamma = 7.8 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ، از معادله (۱۹.۱۸) به دست می‌آید

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.0 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}}{7.8 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}}} = 5.06 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

مقدار به دست آمده از آزمایش در دمای 0°C برابر است با $5.10 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$. می‌توان این مقدار را با سرعت صوت در هوا که برابر 340 m s^{-1} است مقایسه کرد.

مثال ۵.۱۸ درباره موج طولی در فنر بحث کنید.

حل: اگر در فنری کشیده آشفنگی ایجاد شود و ξ جابجایی حاصل از آن در مقطعی از فنر باشد، نیروی وارد به مقطع برابر است با $F = K(\partial\xi/\partial x)$. در این رابطه K مدول کشسانی فنر است. این معادله هم‌ارز معادله (۱۶.۱۸) برای میله است. ضریب K را نباید با ثابت کشسانی k که در معادله (۱۵.۱۲) وارد شده است اشتباه کرد. برای به دست آوردن رابطه بین K و k ، توجه داشته باشید که اگر فنری به طول L بکندی کشیده شود تا جاییکه طول آن به اندازه l افزایش یابد، نیروی F باید در هر نقطه از فنر در حال تعادل یکسان باشد. در این صورت $\partial\xi/\partial x = l/L$ و $F = (K/L)l$ است. l کمیته است که در معادله (۵.۱۲) با x نشان داده‌ایم؛ $F = kx$ ؛ در نتیجه $k = K/L$ یا $K = kL$ می‌شود. اکنون مقطعی از فنر به ضخامت dx و جرم $m dx$ را در نظر می‌گیریم، m جرم واحد طول فنر است. با شیوه‌ای که برای به دست آوردن معادله (۱۷.۱۸) به کار بردیم می‌توان نوشت

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} = K \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{K}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

که همان شکل معادله موج (۱۱.۱۸) با دارد. بنابراین سرعت انتشار موج طولی در فنر برابر می‌شود با

$$v = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{kL}{m}}$$

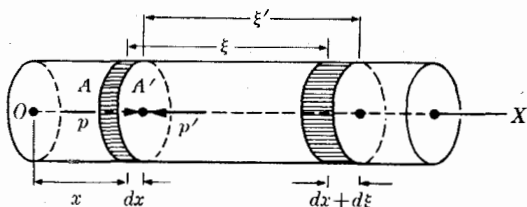
۶.۱۸ موج فشار در ستون گاز

اکنون به بررسی موجهای کشسان حاصل از تغییرات فشار در گاز می‌پردازیم. صوت مهم‌ترین نمونه از این گونه موجهاست. برای سهولت، تنها موجهایی را در نظر می‌گیریم که در گاز در داخل يك لوله یا يك استوانه منتشر می‌شوند.

بین موجهای کشسان در گاز، و موجهای کشسان در يك میله جامد اختلافی اساسی وجود دارد. گازها بسیار تراکمپذیرند و اگر تغییری در فشار گاز به وجود آید، تغییر همانندی در چگالی آن ظاهر می‌شود.

فشار و چگالی يك گاز در حال تعادل را با p_0 و ρ_0 نشان می‌دهیم. در شرایط تعادل، p_0 و ρ_0 در تمام حجم گاز یکسان، یعنی مستقل از x اند. اگر تغییری در فشار گاز پیدا شود، يك جزء حجم، مانند $A dx$ در شکل ۱۳.۱۸ به حرکت درمی‌آید، زیرا p' و p فشارهای وارد بر دو طرف این جزء، متفاوت‌اند و نیروی بر ایندی به وجود می‌آورند. در نتیجه مقطع A به اندازه ξ و مقطع A' به اندازه ξ' جابجا می‌شوند، به گونه‌ای که ضخامت جزء حجم بعد از تغییر شکل برابر $dx + d\xi = dx + (\xi' - \xi)$ می‌شود. تا اینجا همه چیز کاملاً شبیه میله جامد است. ولی با تغییر حجم، به سبب تراکمپذیری زیادتر گاز، چگالی آن تغییر می‌کند. جرم جزء حجم قبل از ایجاد آشفتگی برابر است با $\rho_0 A dx$. اگر ρ چگالی گاز آشفته باشد، جرم جزء حجم پس از آشفتگی برابر می‌شود با $\rho A(dx + d\xi)$. بقای ماده ایجاب می‌کند که این دو جرم باهم برابر باشند، یعنی داریم

$$\rho A(dx + d\xi) = \rho_0 A dx$$



شکل ۱۳.۱۸ موج تراکمی در ستون گاز.

$$\rho \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \rho_0$$

با حل این رابطه بر حسب ρ بدست می آید

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \partial \xi / \partial x}$$

چون معمولاً $\partial \xi / \partial x$ کوچک است، می توان به جای $1 + \partial \xi / \partial x$ ، با استفاده از بسط دو جمله ای (پ. ۲۸۰)، $1 - \partial \xi / \partial x$ را قرار داد، در نتیجه بدست می آید

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \quad \text{یا} \quad \rho - \rho_0 = -\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (21.18)$$

فشار p توسط معادله حالت گاز به چگالی آن مربوط می شود و می توان آن را به صورت $p = f(\rho)$ نوشت. با استفاده از بسط تیلر (پ. ۳۱۰) برای این تابع، می توان نوشت

$$p = p_0 + (\rho - \rho_0) \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 + \frac{1}{2} (\rho - \rho_0)^2 \left(\frac{d^2 p}{d\rho^2} \right)_0 + \dots$$

برای تغییرات نسبتاً کوچک چگالی، تنها دو جمله اول را برمی گیریم و می نویسیم [بد رابطه (پ. ۳۲) مراجعه کنید]

$$p = p_0 + (\rho - \rho_0) \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0$$

کمیت

$$k = \rho_0 \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \quad (22.18)$$

مدول تراکم پذیری نامیده می شود و آن را بر حسب Nm^{-2} ، یعنی یکای فشار، بیان می کنند. در این صورت می توان نوشت

$$p = p_0 + k \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) \quad (23.18)$$

این رابطه نظیر قانون هوک در مورد آنگونه است. با استفاده از معادله (۲۱.۱۸)، برای حذف $\rho - \rho_0$ ، معادله (۲۳.۱۸) به صورت زیر درمی آید

$$p = p_0 - k \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (24.18)$$

این رابطه فشار هر نقطه از گاز را بد تغییر شکل در همان نقطه مربوط می کند. [این رابطه

هم‌ارز معادله (۱۶۰۱۸) مربوط به میله جامد است.

اکنون به معادله حرکت جزء حجم نیاز داریم. جرم این جزء برابر $\rho_0 A dx$ و شتاب آن مساوی $\partial^2 \xi / \partial t^2$ است، گاز موجود در سمت چپ جزء حجم آن را با نیروی pA به راست می‌راند، و گاز موجود در سمت راست با نیروی $p'A$ به سمت چپ فشار می‌آورد. نیروی برابند در جهت X برابر است با $(p - p')A = -Adp$ ، زیرا $dp = p' - p$ است. در نتیجه معادله حرکت عبارت می‌شود از

$$-Adp = (\rho_0 A dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (25.018)$$

در این مسئله نیز دو میدان وجود دارد، یکی میدان جابجایی ξ و دیگری میدان فشار p . رابطه‌های (۲۴۰۱۸) و (۲۵۰۱۸) این دو میدان را به هم مربوط می‌کنند. این رابطه‌ها را می‌توان به‌شیوه زیر با هم ترکیب کرد. با توجه به اینکه p_0 در داخل گاز به‌مکان بستگی ندارد، از رابطه (۲۴۰۱۸) نسبت به x مشتق می‌گیریم. در این صورت به‌دست می‌آید

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -k \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

مقایسه این رابطه با معادله (۲۵۰۱۸) نشان می‌دهد که

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{k}{\rho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (26.018)$$

بدین طریق، یک بار دیگر معادله‌ای مشابه با معادله (۱۱۰۱۸) به‌دست آوردیم و از آن نتیجه می‌گیریم که جابجایی ناشی از یک تغییر فشار در داخل گاز با سرعت

$$v = \sqrt{\frac{k}{\rho_0}} \quad (27.018)$$

منتشر می‌شود. به‌دانشجو توصیه می‌کنیم که سازگاری این معادله را از لحاظ یکاها تحقیق کند. فشار نیز از معادله‌ای مشابه با معادله (۲۶۰۱۸) پیروی می‌کند. دانشجو می‌تواند با ترکیب معادله (۲۴۰۱۸) با معادله (۲۵۰۱۸) و به‌دست آوردن معادله

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{k}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

آن را تحقیق کند. بدین دلیل است که موجهای کشسان در گاز را موج فشار می‌نامیم. مثلاً صوت یک موج فشار در هواست. انفجار، که افزایش ناگهانی فشار در یک مکان است، یک موج فشار به‌وجود می‌آورد. ولی در این مورد، افت و خیزهای چگالی ممکن است آنقدر بزرگ باشند که تقریبی که در بیان نظریه بالا به‌کار بردیم دیگر معتبر نباشد و معادله بسیار پیچیده‌ای به‌دست آید.

همچنین دانشجو [با ترکیب معادله (۲۱.۱۸) و معادله (۲۶.۱۸)] می تواند تحقیق کند که چگالی گاز از معادله مشابهی پیروی می کند، یعنی

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{k}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

بنابراین، در مورد گاز، می توان از موج جابجایی، موج فشار و موج چگالی گفتگو کرد. موج جابجایی تصویر عینی را که از امواج روی سطح يك آبگون داریم (یعنی حرکت ماده کپه ای) تداعی می کند ولی موجهای فشار و چگالی نیز، هر چند با یکچنین تصویر فیزیکی متناظر نیستند اما يك وضع فیزیکی را که در داخل گاز منتشر می شود توصیف می کنند.

حرکت موج در داخل گاز معمولاً يك فرایند بی درد است. این اصطلاح بدین معنی است که هیچگونه تبادل انرژی به صورت گرما توسط جزء حجم گاز انجام نمی گیرد. در تحول بی درد، $p = C\rho^\gamma$ است که در آن γ سرشتی هر گاز است. برای بیشتر گازهای دو اتمی، مقدار γ بسیار نزدیک به ۱٫۴ است. بنا بر این داریم

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma C\rho^{\gamma-1} \quad \text{و} \quad K = \rho_0 \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 = \gamma C\rho_0^\gamma = \gamma\rho_0$$

بنابراین با قراردادن این مقدار به جای k در معادله (۲۷.۱۸) (و حذف شاخص ۰) نتیجه می گیریم که سرعت صوت در داخل گاز با رابطه زیر داده می شود

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (28.18)$$

در اینجا نیز موج وابسته به میدان ξ ، موج طولی است زیرا جابجایی موازی با راستای انتشار است. اما فشار p بردار نیست و به هیچ راستایی بستگی ندارد، راستایی که به آن نسبت داده می شود، راستای نیروی حاصل از اختلاف فشار است که بر سطح عمود است. بنابراین حرکت موجی وابسته به میدان فشار يك موج نودهای است، موج وابسته به چگالی ρ نیز نرده ای است.

مثال ۶.۱۸ رابطه ای بین سرعت موج فشار در گاز و دمای گاز به دست آورید.

حل: چنانکه در مسئله ۴۶.۹ ثابت کردیم، رابطه بین فشار و حجم گاز عبارت است از $pV = nRT$ ، ولی چون $\rho = m/V$ است، داریم $RT/M = p/\rho = nRT/m$ در این رابطه $M = m/n$ جرم يك مول از گاز بر حسب کیلوگرم است. بنا بر این نسبت p/ρ با جذر دما متناسب است، و می توان نوشت

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \alpha \sqrt{T}$$

$\alpha = \sqrt{\gamma R/M}$ است. از آزمایشهایی که در دمای $T = 273 + 15 \text{ K}$ (یا 0° C) انجام گرفته، برای سرعت صوت در هوا مقدار $331 + 0.6 T \text{ m s}^{-1}$ به دست آمده است. بنا بر این ضریب α برابر $200 + 0.55 T$ و سرعت صوت در هوا در دماهای مختلف (دما بر حسب K اندازه گیری می شود) برابر است با $v = 200 + 0.55 \sqrt{T} \text{ m s}^{-1}$ ، و این نتیجه ای است که در گستره وسیعی از دماها با آزمایش سازگار است.

مثال ۷.۱۸. رابطه بین دامنه موجهای جابجایی و فشار را در ستونی از گاز پیدا کنید.

حل: موج جابجایی را همسانگنگ فرض می کنیم، یعنی $\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$. قرارداد این رابطه در معادله (۲۴.۱۸) به دست می آید

$$p - p_0 = -k \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\kappa k \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

بنابراین موج فشار با دامنه ای برابر $P_0 = \kappa k \xi_0$ حول یک مقدار میانگین نوسان می کند. با استفاده از معادله (۲۷.۱۸) برای حذف k ، می توان نوشت

$$P_0 = v^2 \rho_0 k \xi_0$$

با استفاده از معادله (۶.۱۸)، $k = \omega/v$ ، می توان رابطه دیگری به دست آورد؛ در این صورت داریم

$$P_0 = v \rho_0 \omega \xi_0 = 2\pi \nu \rho_0 v \xi_0$$

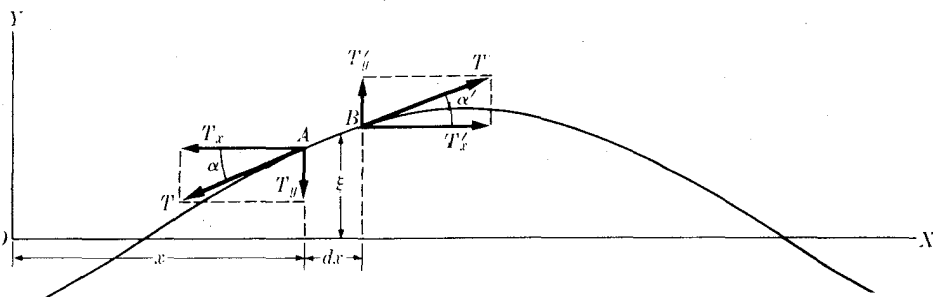
این روابط در محاسبات آکوستیکی بسیار سودمندند. به عنوان مثال، در بسامد 400 Hz ، ضعیفترین صوت قابل شنیدن با دامنه فشاری در حدود $8 \times 10^{-5} \text{ N m}^{-2}$ متناظر است. دامنه جابجایی متناظر با این صوت، با فرض اینکه چگالی هوا 1.29 kg m^{-3} و سرعت صوت 345 m s^{-1} است، برابر می شود با

$$\xi_0 = \frac{P_0}{2\pi \nu \rho_0 v} = 7.15 \times 10^{-11} \text{ m}$$

این دامنه از مرتبه بزرگی ابعاد مولکولی است.

۷.۱۸ موج عرضی در ریسمان

مسئله ای که اکنون بررسی می کنیم حالت ریسمانی است که زیر کشش T قرار دارد. در شرایط تعادل، ریسمان مستقیم است. حال، همچنانکه در شکل ۱۴.۱۸ نشان داده ایم، فرض کنید که ریسمان را اندکی در راستای عمود بر طول آن بکشیم. AB مقطعی از ریسمان به طول جزئی dx ، را که از وضع تعادل خود بدان اندازه ξ جابجا شده است، در نظر می گیریم.



شکل ۱۴-۱۸ نیروهای وارد به مقطعی از یک ریسمان که به طور عرضی از وضع تعادل خود جا بجا شده است.

به هر انتهای آن نیروی مماسی T اثر می کند، نیروی وارد به نقطه B از کشش قسمت راست ریسمان و نیروی وارد به نقطه A از کشش قسمت چپ آن به وجود می آید. به سبب انحنای ریسمان این دو نیرو کاملاً متقابل نیستند، مؤلفه های قائم این نیروها برابرند با $T'_y = T \sin \alpha'$ و $T_y = -T \sin \alpha$ و نیروی قائم بر این دو مؤثر بر مقطع AB از ریسمان برابر می شود با

$$F_y = T(\sin \alpha' - \sin \alpha)$$

اگر انحنای ریسمان خیلی بزرگ نباشد، زاویه های α' و α کوچک اند و می توان به جای آنها تانژانت شان را قرار داد. در این صورت نیروی قائم برابر می شود با

$$F_y = T(\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha) = T d(\operatorname{tg} \alpha) = T \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{tg} \alpha) dx$$

علامت مشتق جزئی بدین سبب به کار رفته است که $\operatorname{tg} \alpha$ هم به مکان x و هم به زمان t بستگی دارد. ولی عبارت $\operatorname{tg} \alpha$ است از شیب منحنی ریسمان و برابر است با $\partial \xi / \partial x$. بنا بر این داریم

$$F_y = T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

این نیرو باید برابر جرم مقطع AB ضرب در شتاب قائم آن، $\partial^2 \xi / \partial t^2$ باشد؛ اگر m چگالی خطی ریسمان، یعنی جرم واحد طول آن باشد و بر حسب kg m^{-1} بیان شود، جرم مقطع AB برابر می شود با $m dx$ ، و برای معادله حرکت این مقطع از ریسمان (با استفاده از رابطه شتاب \times جرم = نیرو) می توان نوشت

$$(m dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \quad \text{یا} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (29.18)$$

در اینجا نیز معادله (۱۱-۱۸) به دست می آید. این امر ثابت می کند که آشفستگی عرضی در

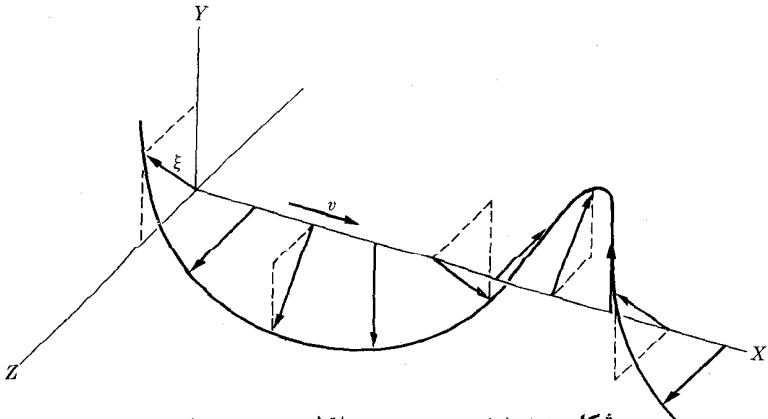
ریسمان با سرعتی برابر با

$$v = \sqrt{\frac{T}{m}} \quad (۳۰.۱۸)$$

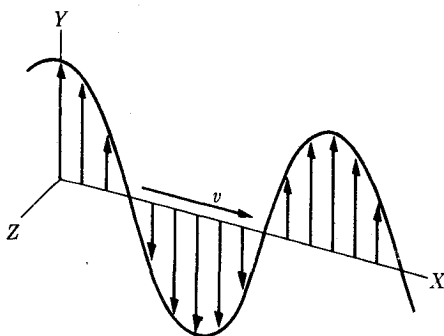
در امتداد ریسمان منتشر می‌شود، به شرطی که دامنه کوچک باشد. به‌دانشجو توصیه می‌کنیم که همگنی این معادله را تحقیق کند.

این مثال با مثال سابق دو اختلاف عمده دارد: یکی اینکه در اینجا تنها یک میدان وجود دارد، میدان جابجایی ξ ، و معادله موج (۲۹.۱۸) نتیجه مستقیم معادله حرکت است. دوم، و مهمتر، اینکه حرکت موج عرضی است. این امر بدین معنی است که خاصیت فیزیکی، جابجایی ξ ، بر راستای انتشار موج که در راستای محور X است عمود است. ولی راستاهای جابجایی زیادی وجود دارند که بر محور X عمودند. اگر دو راستای عمود برهم Y و Z را به‌عنوان مرجع انتخاب کنیم می‌توانیم جابجایی عرضی را، که باید مانند موارد قبلی آن را یک بردار در نظر بگیریم، بر حسب مؤلفه‌های روی محورهای Y و Z بیان کنیم. بتدریج که آشفتگی انتشار می‌یابد، راستای ξ ممکن است از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر کند، و ریسمان پیچ و تاب بخورد (شکل ۱۵.۱۸). اما اگر تمام جابجاییها در یک راستا، به‌عنوان مثال در راستای محور Y ، باشند، ریسمان در صفحه XY باقی می‌ماند و می‌گوییم که حرکت موجی قطبیده خطی است (شکل ۱۶.۱۸). بدیهی است که هر موج عرضی را همیشه می‌توان به‌صورت ترکیبی از دو موج قطبیده خطی در دو راستای عمود برهم در نظر گرفت. اگر طول ξ ثابت باشد و تنها راستای آن تغییر کند به‌گونه‌ای که ریسمان روی سطح استوانه‌ای قرار بگیرد (شکل ۱۷.۱۸)، موج قطبیده دایره‌ای است. در این حالت هر پاره‌ای از ریسمان روی دایره‌ای حول محور X حرکت می‌کند. قطبش امواج عرضی موضوع بسیار مهمی است و ما در فصل ۲۰ بتفصیل درباره آن گفتگو خواهیم کرد.

توجه کنید که در نوشتن معادله (۲۹.۱۸) تنها حرکت عرضی ریسمان به حساب آمده



شکل ۱۵.۱۸ موج عرضی ناقطبیده در ریسمان.



شکل ۱۶۰۱۸ موج عرضی قطبیده خطی در ریسمان.

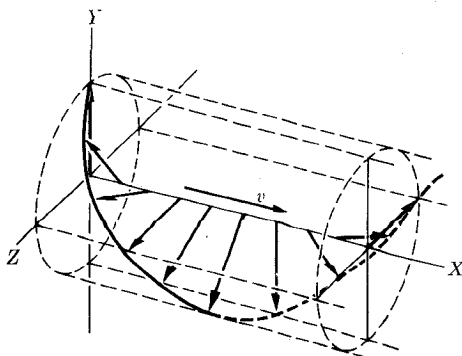
است. با وجود این به آسانی می‌توان تحقیق کرد که از هیچ حرکتی در امتداد ریسمان چشم‌پوشی نشده است. نیروی برآیند موازی با محور X برابر است با

$$F_x = T \cos \alpha' - T \cos \alpha = T (\cos \alpha' - \cos \alpha)$$

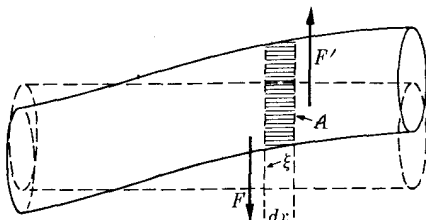
ولی اگر زاویه خیلی کوچک باشد کسینوس خیلی نزدیک به یک است. بنابراین در اولین تقریب $\cos \alpha' = \cos \alpha$ و $F_x = 0$ می‌شود، یعنی هیچ برآیند نیرویی در راستای موازی محور X وجود ندارد.

مثال ۸۰۱۸ درباره موج عرضی کشسان در میله بحث کنید.

حل: در بخش ۵۰۱۸ موج کشسان طولی در میله جامد را مطالعه کردیم. اکنون به تحلیل موج کشسان عرضی می‌پردازیم. میله‌ای را در نظر می‌گیریم که حالت تغییر شکل نیافته آن با خطوط نقطه‌چین در شکل ۱۸۰۱۸ نشان داده شده است. اگر میله را با وارد آوردن ضربه عرضی به ارتعاش در آوریم، در یک لحظه معین میله به صورت خطوط منحنی درمی‌آید



شکل ۱۷۰۱۸ موج عرضی قطبیده دایره‌ای در ریسمان.



شکل ۱۸.۱۸ موج عرضی یا برشی درمیله سخت.

ومی توان فرض کرد که هر مقطعی از میله به بالا و پایین حرکت می کند، بدون اینکه جا بجایی افقی داشته باشد. جا بجایی عرضی، مقطعی مانند dx در لحظه ای معین را ξ می نامیم. این جا بجایی باید تابعی از مکان نیز باشد، زیرا در غیر این صورت به جا بجایی میله به موازات خود مربوط می شد. کمیت $\gamma = \partial \xi / \partial x$ را که نشان دهنده تغییرات جا بجایی عرضی واحد طول در امتداد میله است کرنش برشی می نامند.

یکی از نتایج تغییر شکل میله این است که به هر مقطعی به ضخامت dx دو نیروی متقابل F و F' وارد می شود که بر سطوح طرفین این مقطع مماس اند (با وضع نشان داده شده در شکل ۱۸.۱۸ مقایسه کنید) و هر یک به وسیله قسمتی از میله که در دو طرف آن مقطع قرار دارند تولید می شوند. نیروی مماسی وارد بر واحد سطح یعنی $S = F/A$ را تنش برشی می نامند. مانند معادله (۱۵.۱۸) که تنش عمودی را به کرنش عمودی مربوط می کرد، بین تنش برشی و کرنش برشی نیز رابطه ای مشابه با قانون هوک وجود دارد، یعنی $S = G\gamma$ که در آن G ضریب سرشتی ماده است و آن را مدول برشی می نامند. در نتیجه داریم

$$F = AG \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (۳۱.۱۸)$$

نیروی مؤثر بر این مقطع برابر است با

$$F' - F = dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) dx$$

از طرف دیگر، اگر ρ چگالی ماده مورد نظر باشد، جرم این مقطع برابر می شود با $\rho A dx$ و معادله حرکت آن در راستای عرضی برابر است با

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = (\rho A dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (۳۲.۱۸)$$

ولی با مشتق گرفتن از معادله (۳۱.۱۸) نسبت به x به دست می آید

$$\frac{\partial F}{\partial x} = AG \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

با قراردادن $\partial F / \partial x$ در معادله (۳۲.۱۸) و پس از حذف A از دو طرف آن نتیجه می شود

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (۳۳.۱۸)$$

يك بار ديگر، معادلهٔ ديفرانسيل حرکت موج (۱۱.۱۸) به دست می آيد، اين امر نشان می دهد که تغيير شکل عرضی در امتداد ميله با سرعت

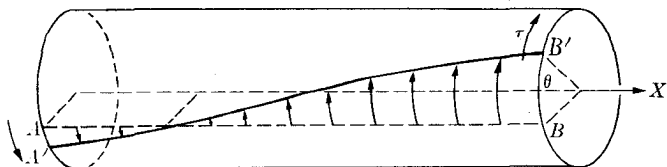
$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (۳۴.۱۸)$$

منتشر می شود.

برای اينکه واژهٔ درستی را به کار برده باشيم، موج را بايد موج برشی بناميم. موج پيچشی نمونهٔ ديگری از موج برشی است. فرض می کنيم يك سر ميله ای در جایی ثابت است و به سر آزاد آن گشتاور نیروی متغیری وارد می شود، اين گشتاور نیرو موجب پيچيدن ميله می شود (شکل ۱۹.۱۸). اگر گشتاور نیرو تابع زمان باشد، زاويهٔ پيچش، که برای سهولت آن را پيچش می ناميم، با زمان تغيير می کند و موجب می شود که موج پيچشی در امتداد ميله منتشر شود. بررسی رياضي مسئله نشان می دهد که، سرعت انتشار موج پيچشی در ميله نیز، مستقل از شکل مقطع لوله، با معادلهٔ (۳۴.۱۸) تعيين می شود. تعجبی ندارد که موجهای عرضی و پيچشی در يك ميله با سرعت يکسان منتشر می شوند، زیرا هر دو فرايند اساساً از يك پديدهٔ داخلی در مادهٔ تشکيل دهندهٔ ميله ناشی می شوند. يکی ديگر از ويژگیهای جالب موجهای پيچشی اين است که با هيچگونه جابجایی موازی يا عمود بر محور ميله متناظر نيستند، بلکه به چرخش بدون تغيير شکل به دور آن محور بستگی دارند. اکنون که دانشجو به ياری مثالهای بالا با انواع پديدههای موج کشسان، هر کدام با ديناميك داخلی متفاوت آشنا شد، لازم است يادآوری کنيم که از نظر رياضي، با تقریبي که در نظر گرفتيم، همهٔ اين پديدهها با يك معادله، يعنی معادلهٔ (۱۱.۱۸) توصيف می شوند.

۸.۱۸ موج سطحی در آبگون

به عنوان آخرين مثال حرکت موجی در يك راستا، موجهای سطحی در آبگون را در نظر می گيريم. اين موجها که از آشنا ترين موجها هستند، همانها يند که در سطح اقيانوسها، درياها، درياچهها ... و حتی با انداختن سنگی در سطح استخر مشاهده می شوند. با وجود اين نمايش رياضي موجهای سطحی بسيار پيچيده تر از مثالهای پيش است. در اينجا زياد وارد



شکل ۱۹.۱۸ موج پيچشی در ميله.

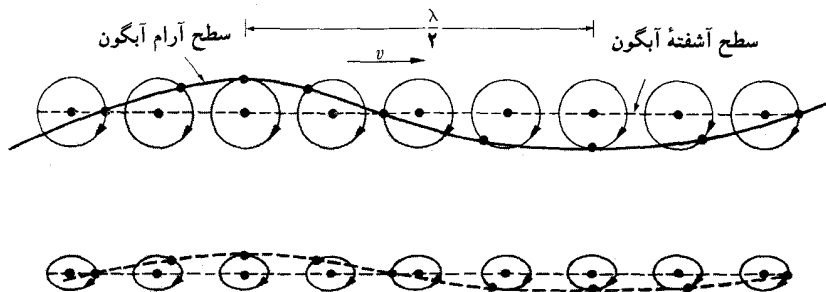
عمق مطلب نمی‌شویم، در این بخش بیشتر به بحث توصیفی مسئله می‌پردازیم و در مثال ۱۵۰۱۸، به‌طور مختصر به بحث ریاضی آن خواهیم پرداخت.

سطح آبگون ترازمند تخت و افقی است. هسر آشفتگی در سطح آن موجب جابجایی تمام مولکولهای می‌شود که بلافاصله در زیر سطح آبگون قرار دارند (شکل ۲۵۰۱۸). هر جزء حجم از آبگون يك مسیر بسته را می‌پیماید. دامنه جابجاییهای قائم و افقی يك جزء حجم آبگون معمولاً با عمق آن تغییر می‌کند. بدیهی است که مولکولهای کف آب هیچگونه جابجایی قائم پیدا نمی‌کنند زیرا نمی‌توانند از کف جدا شوند. در سطح آبگون، بغیر از فشار جو نیروهای دیگری نیز وارد می‌شوند. یکی از این نیروها از کشش سطحی آبگون ناشی می‌شود، که همانند مورد ریسمان، نیروی قائمی روی هر جزء سطح وارد می‌کند. نیروی دیگر وزن آبگون واقع در بالای سطح غیر آشفته است. معادله حاصل برای جابجایی سطح دقیقاً از نوع معادله (۱۱۰۱۸) نیست، بلکه اندکی پیچیده‌تر از آن است. باوجود این موجهای هماهنگ با طول موج λ در آن صدق می‌کنند و سرعت انتشار موج سطحی از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\rho\lambda}} \quad (35.18)$$

در این رابطه ρ چگالی آبگون، T کشش سطحی و g شتاب گرانی است. این رابطه تنها در مواردی صادق است که ژرفای آبگون خیلی بیشتر از طول موج λ باشد. در غیر این صورت معادله دیگری به‌دست می‌آید (مثال ۹۰۱۸ را ببینید).

یکی از ویژگیهای مهم معادله (۳۵۰۱۸) در این است که سرعت انتشار به طول موج بستگی دارد. با این وضع تاکنون برخورد نداشته‌ایم. چون بسامد با رابطه $v = v/\lambda$ به طول موج و سرعت انتشار ارتباط دارد، نتیجه می‌گیریم که سرعت انتشار به بسامد بستگی دارد. به‌عنوان مثال، فرض می‌کنیم که λ آنقدر بزرگ است که بتوان در معادله (۳۵۰۱۸) از جمله دوم چشم‌پوشی کرد. در این صورت داریم



شکل ۲۵۰۱۸ جابجایی مولکولها بر اثر موج سطحی در آبگون.

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (۳۶.۱۸)$$

در این حالت موج را موج دژنی یا گرانی می نامند، در این تقریب، سرعت انتشار به جنس آبگون بستگی ندارد. زیرا چنانکه مشاهده می شود هیچ يك از خواص آبگون (مانند چگالی و کشش سطحی) در معادله (۳۶.۱۸) دخالت ندارد. می بینیم که در این حالت سرعت انتشار به جذر طول موج بستگی دارد و هر چه طول موج بیشتر باشد سرعت انتشار بیشتر است. به این دلیل است که باد قوی پایا موجهایی با طول بلندتر از تندبادها یا بورانها به وجود می آورد.

اگر طول موج خیلی کوچک باشد، در معادله (۳۵.۱۷) جمله چیره جمله دوم است، در این صورت برای سرعت انتشار رابطه زیر به دست می آید

$$v = \sqrt{\frac{2\pi T}{\rho\lambda}} \quad (۳۷.۱۸)$$

این موجها را موجهای مویینه می نامند. این موجها در نسیمهای بسیار ملایم یا هنگامی که ظرفی آب، با بسامدهای بالا و دامنه کم به ارتعاش در آید، مشاهده می شوند. در این حالت، هر چه طول موج بلندتر باشد، کندتر منتشر می شود.

هنگامی که سرعت انتشار حرکت موجی به طول موج یا بسامد بستگی دارد، می گوئیم پاشندگی وجود دارد. اگر يك حرکت موجی حاصل از ترکیب چند موج هماهنگ با بسامدهای مختلف به يك محیط پاشنده وارد شود، موج وامی پیچد، زیرا هر يك از موجهای تشکیل دهنده آن با سرعتی متفاوت منتشر می شود. پاشندگی یکی از پدیدههای بسیار مهم است که در چندین نوع انتشار موج ظاهر می شود. بویژه، چنانکه در فصل آینده خواهد آمد، این پدیده در انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیطهای مادی آشکار می شود.

مثال ۹.۱۸ رابطه کلی سرعت انتشار موج در سطح آبگون عبارت است از

$$v = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\rho\lambda}\right) \operatorname{tgh} \frac{2\pi h}{\lambda}} \quad (۳۸.۱۸)$$

در این رابطه h عمق آبگون را نشان می دهد. هنگامی که h نسبت به λ خیلی بزرگ یا خیلی کوچک باشد، مقادیر حدی این رابطه را پیدا کنید.

حل: اگر ژرفای h در مقابل طول موج λ خیلی بزرگ باشد، یعنی مقدار $2\pi h/\lambda$ خیلی بزرگتر از واحد باشد، مقادیر تانژانت هیپر بولیک خیلی نزدیک به يك می شود. در این صورت، آخرین سازه معادله (۳۸.۱۸) را می توان بدون خطای قابل ملاحظه ای برابر يك قرار داد. با چنین تقریبی معادله (۳۸.۱۸) به معادله (۳۵.۱۸) تبدیل می شود.

از طرف دیگر، اگر h نسبت به طول موج λ خیلی کوچک باشد، مقدار $\frac{2\pi h}{\lambda}$ در مقابل واحد خیلی کوچک می شود. در این صورت با استفاده از تقریب $x \sim \text{tg } hx$ ، که در مورد x های خیلی کوچک مجاز است، می توان به جای سازه آخری در معادله (۳۸.۱۸)، یعنی $\frac{2\pi h}{\lambda} \text{tg } h$ ، مقدار تقریبی آن یعنی $\frac{2\pi h}{\lambda}$ را قرار داد. در اینجا از $\frac{2\pi \rho g}{\rho \lambda}$ نیز صرف نظر می کنیم زیرا طول موج را نسبتاً بزرگ فرض کرده ایم. بنا بر این داریم

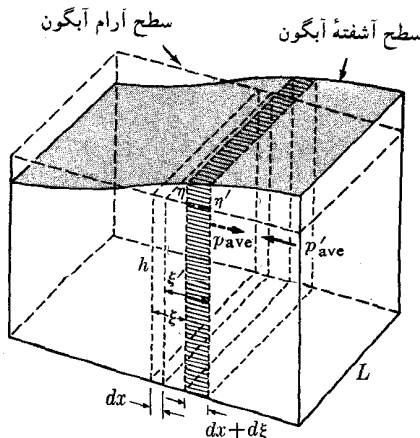
$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \cdot \frac{2\pi h}{\lambda}} = \sqrt{gh} \quad (39.18)$$

در چنین شرایطی، سرعت انتشار به طول موج بستگی ندارد.

مثال ۱۰.۱۸ معادله موج سطحی را در آبگون، هنگامی که طول موج نسبت به عمق بسیار بزرگ و دامنه موج نسبت به عمق بسیار کوچک باشد، مستقیماً به دست آورید.

حل: آبگونی را در کانالی به ژرفای h و پهنای L در نظر می گیریم. اگر سطح آبگون با امواجی به دامنه کوتاه و طول موج بلند (نسبت به ژرفای h) آشفته شود، یک مقطع قائم مشخص از آبگون به ضخامت dx ، در راستای قائم و افقی مقداری جا بجا می شود. بر اثر این جا بجایی، ضخامت مقطع از dx به $dx + d\xi$ (شکل ۲۱.۱۸) و ارتفاع آن از h به $h + \eta$ تغییر می کند. اگر آبگون را تراکم ناپذیر فرض کنیم، حجم مقطع باید ثابت باقی بماند، بنا بر این داریم

$$\begin{aligned} Lh dx &= L(h + \eta)(dx + d\xi) \\ &= L(h dx + \eta dx + h d\xi + \eta d\xi) \end{aligned}$$



شکل ۲۱.۱۸

چون η را در مقابل h و $d\xi$ را در مقابل dx خیلی کوچک در نظر گرفته ایم، پس می توانیم از جمله آخر، $\eta d\xi$ ، صرف نظر کنیم و بعد از حذف جمله های هم ارز به دست می آید

$$\eta dx + h d\xi = 0 \quad \text{یا} \quad \eta = -h \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (40.18)$$

این رابطه جابجایی قائم سطح را به جابجایی افقی آن در مورد يك آبگون تراکم ناپذیر مربوط می کند.

چون سطح آشفته آبگون افقی نیست، فشار میانگین بر هر رویه مقطع آبگون، همچنانکه شکل نشان می دهد، متفاوت است. اگر $A = hL$ مقطع عرضی کانال باشد، نیروی برآیند وارد بر سمت راست مقطع برابر است با

$$p_{ave}A - p'_{ave}A = -(p'_{ave} - p_{ave})A = -Adp_{ave}$$

در این صورت معادله حرکت افقی مقطع عبارت است از

$$(\rho A dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -Adp_{ave} \quad \text{یا} \quad \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p_{ave}}{\partial x}$$

ولی با استفاده از معادله (۶۹.۹)، یعنی $p = \rho gz$ ، اختلاف فشار برابر می شود با

$$dp_{ave} = \rho g(\eta' - \eta) = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} dx$$

به گونه ای که داریم $\partial p_{ave} / \partial x = \rho g \partial \eta / \partial x$ ، و معادله قبلی به صورت زیر درمی آید

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

با مشتق گرفتن از معادله (۴۰.۱۸) به دست می آید

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -h \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

سرانجام. از حذف $\partial \eta / \partial x$ بین این دو معادله نتیجه می شود

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

این رابطه همان معادله موج (۱۱.۱۸) است و ناظر به موجهایی است که با سرعت $v = \sqrt{gh}$ منتشر می شوند، و با نتیجه ای که در شرایط یکسان از معادله (۳۹.۱۸) به دست می آید سازگار است. با توجه به معادله (۴۰.۱۸)، جابجایی قائم سطح نیز در معادله

مشابهی صدق می‌کند، یعنی داریم

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

۹.۱۸ در حرکت موجی چه چیزی منتشر می‌شود؟

خیلی مهم است بروشنی بدانیم چه چیزی در حرکت موجی به صورت موج منتشر می‌شود. پاسخ کلی این است که یک وضع فیزیکی درجایی به وجود می‌آید، سپس به اقتضای ماهیت پدیده، این وضع می‌تواند به ناحیه‌های دیگر انتقال پیدا کند. نظر به اینکه این توضیح چندان واضح نیست، سعی می‌کنیم آن را به نحو روشنتری بیان کنیم.

موجهای مختلفی را، که در بخشهای پیش درباره آنها بحث کردیم، در نظر می‌گیریم. همه این موجها متناظر با بعضی انواع حرکت‌های اتمها یا مولکولهای محیطی اند که موج در آن منتشر می‌شود. ولی اتمها به‌طور متوسط در محل تعادل خود باقی می‌مانند (شکل ۲۲.۱۸). از این رو، آنچه منتشر می‌شود ماده نیست. بلکه حالت حرکت ماده است. به گفته دیگر، وضع دینامیکی است که از ناحیه‌ای به ناحیه دیگر منتقل می‌شود. ولی قاعده بر این است که وضع دینامیکی را بر حسب اندازه حرکت و انرژی توصیف کنیم. بنابراین می‌توان گفت که

در حرکت موجی، انرژی و اندازه حرکت است که منتقل یا منتشر می‌شود.

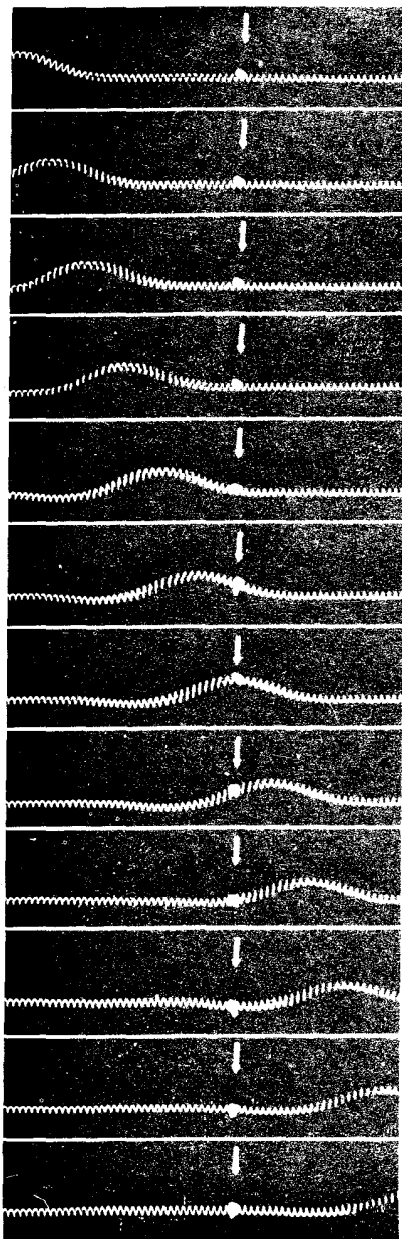
به عنوان مثال، مورد موج کشسان طولی را که در میله منتشر می‌شود بررسی می‌کنیم. هر مقطعی که با سرعت $\partial \xi / \partial t$ (شکل ۱۱.۱۸) جابجا شود، قسمت سمت راست مقطع سمت چپ میله را با نیروی F و قسمت سمت چپ میله سمت راست آن را با نیروی $-F$ به طرف خود می‌کشد. توان یا کار در واحد زمان، که قسمت راست میله بدقسمت چپ آن در این مقطع انتقال می‌دهد، برابر است با

$$\frac{\partial W}{\partial t} = (-F) \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

بنابراین، هنگامی که آشفتگی از مقطعی به مقطع دیگر می‌رود، این توان باید انتقال پیدا کند. اگر انتشار موج از سمت چپ به سمت راست باشد، باید به انتهای سمت چپ میله انرژی داده شود. اگر انرژی در مدت زمان خیلی کوتاهی وارد شود، یک آشفتگی با طول محدود. یا یک تپ گذرا، به وجود می‌آید. اگر یک قطار موج پیوسته بخواهیم، باید به انتهای چپ میله مدام انرژی بدهیم.

جهت بررسی دقیقتر مسئله، یک موج کشسان سینوسی، مانند $\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$ ، را در نظر می‌گیریم. پس از مشتق گیریهای مناسب بدست می‌آید

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$



شکل ۲۲۰۱۸ انتشار يك تب در طول فتر.
 بتدریج كه تب از چپ به راست می رود، مقاطع
 فتر بالا و پایین می روند.

$$F = YA \frac{\partial \xi}{\partial x} = YAk\xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

آنگاه، با استفاده از رابطه‌های $\omega = kv$ و $v = \sqrt{Y/\rho}$ ، داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= YAwk\xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \\ &= (\rho v^2) A \left(\frac{\omega^2}{v} \right) \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \\ &= vA [\rho \omega^2 \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t)] \end{aligned}$$

وجود سازه $\cos^2(kx - \omega t)$ ، علی‌رغم افتابخیزهایش، مؤید این است که $\partial W / \partial t$ همیشه مثبت است. چون $\partial W / \partial t$ به $kx - \omega t$ بستگی دارد، در معادله موج نیز صدق می‌کند و با موج انرژی متناظر است. توان میانگین برابر است با

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{\text{ave}} = vA \{ \rho \omega^2 \xi_0^2 [\cos^2(kx - \omega t)]_{\text{ave}} \}$$

ولی $[\cos^2(kx - \omega t)]_{\text{ave}} = 1/2$ ، یعنی

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{\text{ave}} = vA \left(\frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 \right) \quad (۴۱.۱۸)$$

ولی اگر به خاطر بیاوریم که طبق معادله (۱۱.۱۲)، انرژی کل یک نوسانگر به صورت $\frac{1}{2} m \omega^2 A^2$ است و نیز توجه داشته باشیم که اکنون دامنه A را با ξ_0 نشان داده‌ایم، و نیز به جای جرم m چگالی ρ آمده است، درمی‌یابیم که

$$E = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 \quad (۴۲.۱۸)$$

نمایش انرژی واحد حجم، یا چگالی انرژی در میله است که از نوسانهای حاصل از حرکت موجی ناشی می‌شود. با قرار دادن معادله (۴۲.۱۸) در معادله (۴۱.۱۸)، می‌توان نوشت

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{\text{ave}} = vAE \quad (۴۳.۱۸)$$

چون v سرعت انتشار است، vA شارش انرژی در واحد زمان از واحد سطح است. از ضرب این کمیت در A ، شارش انرژی که در واحد زمان از مقطع میله عبور می‌کند به دست می‌آید. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که معادله (۴۳.۱۸) شارش انرژی میانگین در امتداد میله را در اثر حرکت موجی نشان می‌دهد.

شارش انرژی میانگینی که در واحد زمان از واحد سطح عبور می‌کند، بر حسب

$W m^{-2}$ برابر است با

$$I = \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial t} = vE \quad (۴۴.۱۸)$$

این کمیت را شدت موج می‌نامند. دانشجو می‌تواند تحقیق کند که برای موج فشار در گاز و موج عرضی در ریسمان نتایج مشابهی به دست می‌آیند. در خاتمه می‌توانیم دوباره بگوییم که در تمامی حرکت‌های موجی، انرژی و اندازه حرکت با موج از یک نقطه به نقطه دیگر منتقل می‌شوند.

مثال ۱۱۰۱۸ شدت موج را در ستونی از گاز که در بخش ۶۰۱۸ بررسی شده است بر حسب دامنه موج فشار بنویسید.

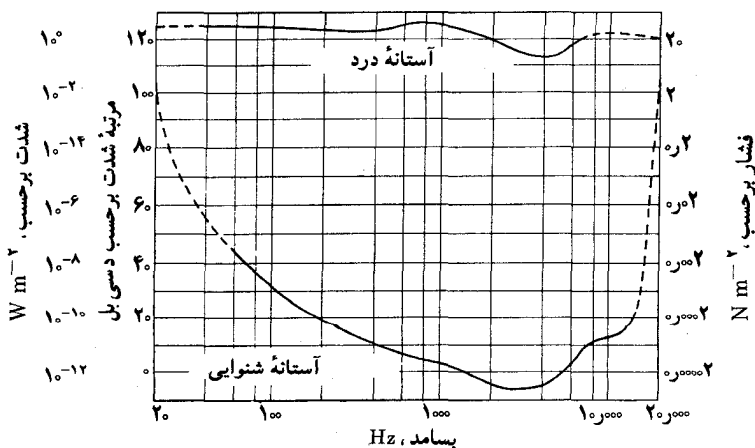
حل: از حل مثال ۷۰۱۸ در یافتیم که دامنه موجهای فشار و جابجایی با رابطه $P_0 = 2\pi v \rho_0 v \xi_0$ بهم مربوط می‌شوند. در نتیجه چگالی انرژی موج برابر است با

$$E = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 \xi_0^2 = 2\pi^2 \rho_0 v^2 \xi_0^2 = \frac{P_0^2}{2v^2 \rho_0}$$

و بنا به معادله (۴۴.۱۸)، شدت موج برابر است با

$$I = \frac{P_0^2}{2v\rho_0}$$

حساسیت گوش بشر به گونه‌ای است که به ازای هر بسامد یک شدت کمینه یا آستانه شنوایی



شکل ۲۳۰۱۸ گستره شنوایی میانگین گوش بشر.

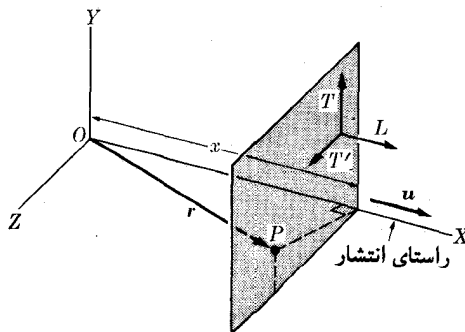
وجود دارد، که صوتهای با شدت پایین تر از آن قابل شنیدن نیستند، و یک شدت بیشینه یا آستانه احساس درد نیز هست که صوتهای با شدت بالاتر از آن تولید ناراحتی یا درد می کنند. این دو آستانه را برای بسامدهای مختلف در شکل ۲۳.۱۸ نشان داده ایم. این شکل شدت و دامنه فشار را نیز نشان می دهد. توجه داشته باشید که شدت را با واحدی به نام دسی بل نیز بیان می کنند. هرچه شدت صوت (یا هر حرکت موجی دیگر) را با B نشان می دهند و بر حسب دسی بل، با علامت اختصاری db ، بیان می کنند. بنا به تعریف، B برابر است با

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

که در آن I_0 شدت مرجع است. در مورد صوت در هوا، مرتبه مرجع را بدطور قراردادی برابر با $10^{-12} \text{ W m}^{-2}$ اختیار کرده اند. به عنوان مثال، دامنه فشار برای ضعیفترین صوتی که در بسامد 400 Hz قابل شنیدن و در مثال 70.18 آمده است، متناظر با صوتی است به شدت $77.2 \times 10^{-2} \text{ W m}^{-2}$ و مرتبه شدت 77.57 db .

۱۰.۱۸ موجهای دو و سه بعدی

هر چند $\xi = f(x - vt)$ نمایش حرکت موجی است که در امتداد محور X منتشر می شود، ولی الزاماً تعبیر آن این نیست که موجها روی محور X متمرکز شده اند. اگر آشننگی فیزیکی، که با ξ توصیف می شود، تمام فضا را در برگیرد، می توانیم بگوییم که در لحظه معلوم t ، در هر نقطه بد طول x تابع ξ مقدار یکسانی دارد. ولی معادله $x = \text{const}$ نمایش صفحه ای است عمود بر محور X (شکل ۲۴.۱۸). بنا بر این $\xi = f(x - vt)$ در فضای



شکل ۲۴.۱۸ موج تخت در امتداد محور X منتشر می شود.

سه بعدی يك موج تخت را توصیف می کند که موازی با محور X منتشر می شود. اگر ξ جابجایی (یا میدان برداری) باشد، موج را در صورتی طولی می گویند که ξ موازی راستای انتشار یا محور X باشد، چنانکه پیکان L نشان می دهد، و در صورتی عرضی می گویند که ξ عمود بر راستای انتشار (یعنی موازی صفحه YZ) باشد. در حالت اخیر ξ را می توان به صورت ترکیبی از دو جابجایی در راستاهای عمود بر هم، مانند پیکانهای T و T' ، نیز نشان داد.

باید توجه داشت آنچه يك موج تخت را مشخص می کند راستای انتشار آن است که با \mathbf{u} برداری عمود بر صفحه موج نشان داده می شود. سمتگیری محورهای مختصات کمابیش اختیاری است. بنابراین بهتر است مسوج تخت $\xi = f(x - vt)$ را به صورتی مستقل از راستای محورهای مختصات نشان دهیم. در شکل ۲۴.۱۸، برداری \mathbf{u} موازی محور X است. اگر \mathbf{r} بردار مکان يك نقطه اختیاری مانند P از جبهه موج باشد، داریم $x = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$. بنابراین می توان نوشت

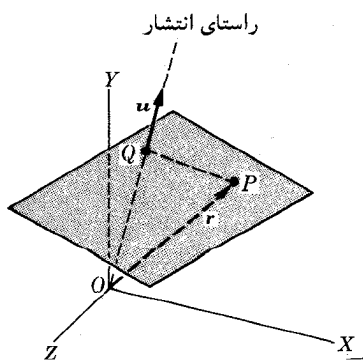
$$\xi = f(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - vt) \quad (۲۵.۱۸)$$

اگر راستای \mathbf{u} اختیاری باشد (شکل ۲۵.۱۸)، کمیت $\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$ باز هم فاصله ای است که از مبدأ O در راستای انتشار اندازه گرفته می شود. بنابراین رابطه (۲۵.۱۸) نمایش موج تختی است که در امتداد \mathbf{u} منتشر می شود. در مورد موج تخت هماهنگ یا سینوسی که در راستای \mathbf{u} منتشر می شود می توان نوشت

$$\xi = \xi_0 \sin k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - vt)$$

بهتر است که برداری را به صورت $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$ تعریف کنیم. طول این بردار برابر است با $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$ و راستای آن در راستای انتشار قرار دارد. این بردار را معمولاً بردار موج می نامند. چون $\omega = kv$ است، موج هماهنگ تخت به صورت

$$\xi = \xi_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \xi_0 \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \quad (۲۶.۱۸)$$



شکل ۲۵.۱۸ موج تختی که در راستای اختیاری منتشر می شود.

نوشته می شود. k_x ، k_y و k_z مؤلفه های k اند و در رابطه زیر صدق می کنند

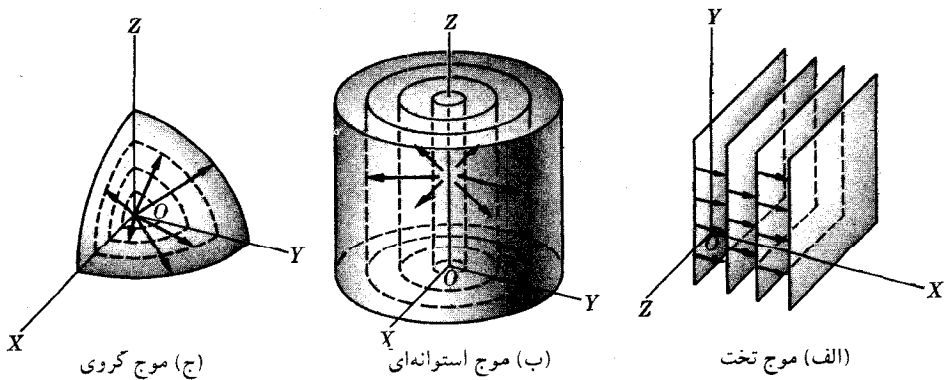
$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad (۴۷.۱۸)$$

اگر انتشار در فضای سه بعدی صورت بگیرد، معادله موج باید تغییر داده شود. در این صورت معادله به صورت زیر درمی آید

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \quad (۴۸.۱۸)$$

نتیجه ای که تنها از شرایط تقارن می شد انتظار آن را داشت. همچنین با جانشانی مستقیم می توان تحقیق کرد که رابطه (۴۶.۱۸) برای موج هماهنگ تخت در معادله کلی موج (۴۸.۱۸) صدق می کند. انجام این تحقیق را به عهده دانشجو واگذار می کنیم. [دانه مای: باید از معادله (۴۷.۱۸) استفاده کرد.]

موجهای تخت، معادله (۴۵.۸) یا معادله (۴۶.۱۸)، هر چند دارای سه مؤلفه x ، y ، z اند، ولی در واقع مسایلی در یک بعدند. زیرا انتشار تنها در امتداد یک راستای معین رخ می دهد و وضع فیزیکی در تمام صفحه های عمود بر راستای انتشار یکسان است (شکل ۲۶.۱۸ الف). ولی در طبیعت انواع دیگری از موج یافت می شوند که در چند راستای انتشار می یابند. دو مورد بسیار مهم از این نوع، موجهای استوانه ای و کروی اند. می توان ثابت کرد که این موجهای کلیتر نیز جوابهای معادله موج سه بعدی (۴۸.۱۸) اند. در مورد موجهای استوانه ای، جبهه های موج سطوحی موازی با یک خط معین، مثلاً محور Z اند، بنابراین بر صفحه XY عمودند (شکل ۲۶.۱۸ ب). آشفتگی در تمام راستاها عمود بر محور Z منتشر می شود. چنین موجی، به عنوان مثال، از یک رشته چشمه، که همگاز نوسان می کنند و یکنواخت در امتداد محور Z توزیع شده اند، به دست می آید.



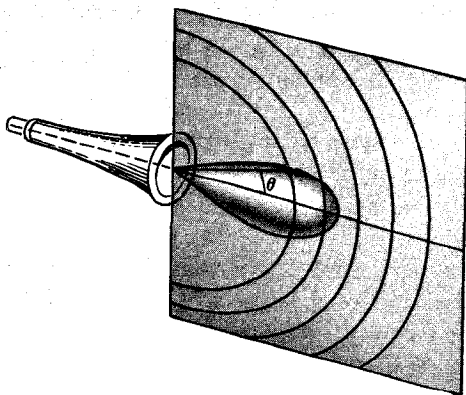
شکل ۲۶.۱۸

اگر آشفتنگی در نقطهٔ مشخصی ایجاد و با سرعت یکسانی در تمام جهات منتشر شود (یعنی محیط همسانگرد باشد)*، موجهای کروی به وجود می‌آورد. جبهه‌های موج کره‌های هم‌مرکزند؛ مرکز کره در نقطه‌ای قرار دارد که آشفتنگی در آن ایجاد شده است (شکل ۲۶۰۱۸ ج). به عنوان مثال، چنین موجهایی از تغییر ناگهانی فشار در نقطه‌ای از گازی به وجود می‌آیند.

گاهی سرعت انتشار در تمام راستاها یکسان نیست، در این صورت محیط را ناهمسانگرد می‌نامند. به عنوان مثال، گازی که در آن گرادیان دما وجود دارد، جامدی که زیر فشار باشد یا یک بلور بزرگ ممکن است در راستاهای مختلف خواص کشسانی متفاوتی داشته باشند، این ناهماهنگی‌ها موجب می‌شود هر راستایی برای خود یک سرعت انتشار داشته باشد. در چنین محیطهایی، موجها کروی نیستند.

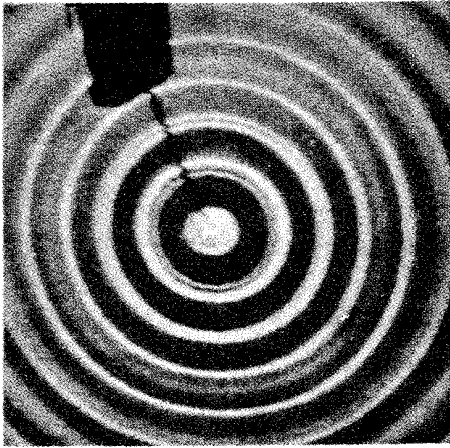
حتی اگر موج کروی باشد نیز ممکن است دامنه و یا شدت آن در تمام راستاها یکسان نباشد، زیرا چشمهٔ آشفتنگی ممکن است در راستاهای مختلف اثرهای مختلف از خود به وجود آورد. به عنوان مثال، هنگام دیدن در شیپور، در انتهای باز آن موج فشار به وجود می‌آید. با وجود این، به سبب شکل خاص انتهای شیپور، شنونده صوت را در تمام راستاها با شدت یکسان نمی‌شنود، هر چند موج با سرعت یکسان در تمام جهات منتشر می‌شود (شکل ۲۷۰۱۸).

در بعضی موارد، موج روی سطحی، به عنوان مثال یک غشا یا سطح آزاد آبگون، منتشر می‌شود. اگر در نقطه‌ای از سطح آشفتنگی ایجاد شود، این آشفتنگی با سرعت یکسان روی سطح در تمام راستاها منتشر می‌شود و در نتیجه یک سری موج دایره‌ای به وجود می‌آید

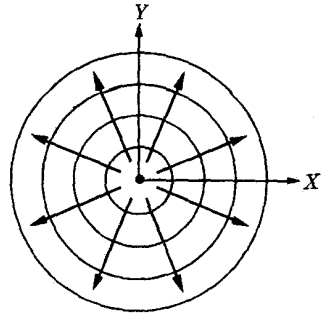


شکل ۲۷۰۱۸ توزیع زاویه‌ای شدت صوت حاصل از شیپور.

* isotropic از دو کلمهٔ isos به معنای همانند و tropos به معنای جهت تشکیل شده است.



(ب)



(الف)

شکل ۲۸-۱۸ موجهای دایره‌ای روی سطح آبگون.

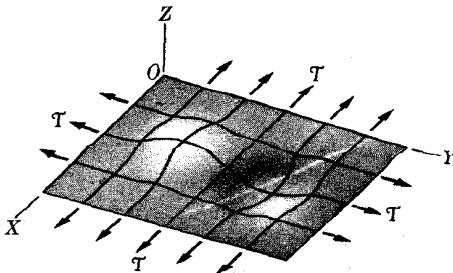
(شکل ۲۸-۱۸). چنین موجهایی دو بعدی‌اند و برای توصیف آنها تنها دو مؤلفه فضایی کافی است. معادله چنین موجی معادله (۲۸-۱۸) نیست بلکه به صورت زیر است

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \quad (۲۹-۱۸)$$

زیرا برای توصیف فرایند، مؤلفه z لازم نیست.

مثال ۱۲-۱۸ موجهای کشسان روی سطح یک غشای نازک و کشیده را بررسی کنید.

حل. غشای نازک و کشیده‌ای را در نظر می‌گیریم. برای سهولت می‌توان آن را به شکل مستطیل فرض کرد، هرچند چنین قیدی ضروری نیست (شکل ۲۹-۱۸). این غشا روی قابی



شکل ۲۹-۱۸ موج سطحی روی غشای کشیده.

نصب شده است که نیروی T بر واحد طول آن وارد می‌کند. این نیرو بر حسب $N m^{-1}$ بیان می‌شود. اگر غشا در نقطه‌ای تغییر شکل پیدا کند و در راستای عمود جا بجا شود، این تغییر شکل در سطح غشا منتشر می‌شود و بدین طریق یک موج سطحی دو بعدی به وجود می‌آید. برای بدست آوردن معادله این حرکت موجی، یک جزء سطح از غشا، به شکل مستطیل به اضلاع dx و dy را در نظر می‌گیریم (شکل ۳۰-۱۸). در یک لحظه معین، این غشا یک جا بجایی عمودی به طرف بالا به اندازه ξ پیدا می‌کند. به دلیل انحنای سطح، جا بجایی ξ تابعی است از x و y و نیروهایی که به اضلاع این قطعه وارد می‌شوند کاملاً در جهت مخالف هم نیستند. برای بدست آوردن نیروی برآیند قائم روی جزء سطح، از همان استدلالی که در بخش ۷-۱۸، به هنگام مطالعه موج عرضی در ریسمان به کار بردیم، استفاده می‌کنیم. به یاری همین استدلال و با در نظر گرفتن اضلاع موازی بامحور Y ، می‌توان گفت که به این اضلاع نیروهای $T dy$ وارد می‌شوند و نیروی برآیند قائم با رابطه زیر تعیین می‌شود

$$(T dy) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx dy$$

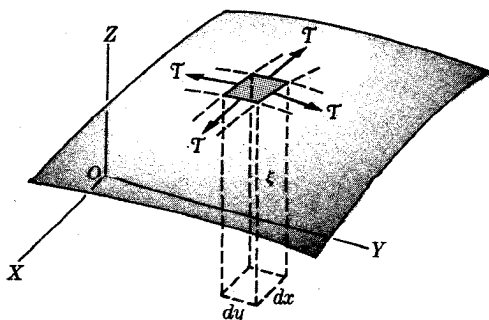
همچنین، به اضلاع موازی بامحور X نیروهای $T dx$ با برآیند قائم

$$(T dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} dy = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} dx dy$$

وارد می‌شوند. در نتیجه، نیروی قائم کل مجموع این دو نیرو است، یعنی

$$F_z = T \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) dx dy$$

اگر σ جرم واحد سطح غشا (یا چگالی سطحی بر حسب $kg m^{-2}$) باشد جرم جزء سطح برابر می‌شود با $\sigma dx dy$ و چون شتاب قائم آن برابر $\partial^2 \xi / \partial t^2$ است، معادله حرکت این قطعه از غشا را می‌توان به صورت زیر نوشت



شکل ۳۰-۱۸ نیروهای وارد بر یک جزء سطح از غشای کشیده.

$$(\sigma dx dy) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) dx dy$$

و یا

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)$$

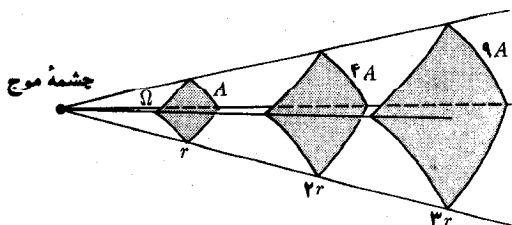
چون این معادله مشابه معادله (۴۹.۱۸) است، نتیجه می‌گیریم که آشفتنگی مانند موج بسا سرعت $v = \sqrt{T/\sigma}$ در سطح غشا انتشار پیدا می‌کند. دانشجو باید تحقیق کند که این رابطه v از لحاظ ابعادی درست است.

۱۱.۱۸ موج کروی در شاره

به‌عنوان نمونه‌ای از موجهای کروی، موج فشار در داخل یک شاره همگن و همسانگرد را در نظر می‌گیریم. اگر r فاصله از مبدأ و p_0 فشار شاره در حالت طبیعی باشد، ابتدا چنین به نظر می‌رسد که می‌توان موج فشار را به صورت $p - p_0 = f(r - vt)$ نوشت. زیرا اکنون r همان نقشی را دارد که x در موج تخت داشت. ولی طرح موضوع به این شکل درست نیست و باید مسئله را با دقت بیشتری بررسی کرد.

می‌بینیم که هر چه موج کروی پیش می‌رود، سطح موج بزرگتر و بزرگتر می‌شود (متناسب با r^2 افزایش می‌یابد). به‌عنوان مثال موجی را در نظر می‌گیریم که با زاویه فضایی Ω منتشر می‌شود (شکل ۳۱.۱۸). سطح موج در فاصله r از چشمه موج دارای مساحت A است، مساحت سطح موج در فاصله‌های r ، $2r$ ، $3r$ ، ...، nr از چشمه به ترتیب برابر می‌شود با A ، $4A$ ، $9A$ ، ... و $n^2 A$. این امر بدین معنی است که با فاصله گرفتن از چشمه، بتدریج از دامنه موج فشار کاسته می‌شود، زیرا روی سطح بزرگتری عمل می‌کند. این نتیجه را آزمایش تأیید می‌کند و یک تحلیل مفصل نظری، که از آوردن آن در اینجا صرف نظر می‌کنیم، آن را پیشگویی می‌کند. مثلاً اگر شاره همسانگرد و دامنه موج در تمام راستاها یکسان باشد، می‌توان ثابت کرد که موج فشار با رابطه زیر داده می‌شود

$$p - p_0 = \frac{1}{r} f(r - vt) \quad (50.18)$$



شکل ۳۱.۱۸

در این رابطه سازه هندسی $1/r$ ظاهر شده است که در موج تخت وجود نداشت. این سازه نشان می‌دهد که فشار با دور شدن از چشمه موج کاهش می‌یابد. اگر دامنه (یا شدت) موج در راستاهای مختلف یکسان نباشد، رابطه‌ای پیچیده‌تر از این به دست می‌آید. معادله (۵۰.۱۸) نمایش یک موج کروی خروجی (متباعد) است. همچنین ممکن است یک موج کروی دودی (متقارب) نیز وجود داشته باشد، معادله چنین موجی به صورت زیر خواهد بود

$$p - p_0 = \frac{1}{r} f(r + vt)$$

سرعت انتشار با همان معادله‌ای که برای سرعت انتشار موجهای تخت به دست آوردیم، یعنی معادله (۲۷.۱۸)، بیان می‌شود

$$v = \sqrt{\frac{k}{\rho_0}} \quad (51.18)$$

یک مورد جالب توجه، موج فشار کروی هماهنگ است که به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$p = p_0 + \frac{\rho_0}{r} \sin(kr - \omega t) \quad (52.18)$$

دامنه موج فشار برابر ρ_0/r است که با دور شدن از چشمه موج از مقدار آن کاسته می‌شود. معادله جابجایی این موج فشار پیچیده‌تر است. ولی در فاصله‌های خیلی دور از چشمه، معادله زیر جابجایی را با تقریب بسیار خوبی نشان می‌دهد

$$\xi = \frac{\xi_0}{r} \cos(kr - \omega t) \quad (53.18)$$

در اینجا داریم $\xi_0 = \rho_0/v$ ، که مشابه دامنه موج تخت است (مثال ۷.۱۸). توجه داشته باشید که دامنه موج جابجایی نیز با دور شدن از چشمه به نسبت $1/r$ ، یعنی عکس فاصله از چشمه، کاهش می‌یابد.

گام بعدی مطالعه موج کروی است. اکنون با توجه به اینکه ρ_0/r جانشین ξ_0 برای دامنه شده است، از معادله (۵۳.۱۸) استفاده می‌کنیم. بنا به معادله (۴۲.۱۸)، انرژی واحد حجم در فاصله‌های خیلی دور برابر است با

$$E = \frac{1}{2} \frac{\rho_0 \omega^2 \xi_0^2}{r^2} = \frac{\rho_0}{2v^2 \rho_0 r^2}$$

که به نسبت $(1/r^2)$ کاهش می‌یابد. با استفاده از معادله (۴۳.۱۸)، انرژی که در واحد زمان از یک سطح کروی به شعاع r و مساحت $A = 4\pi r^2$ می‌گذرد، برابر می‌شود با

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{\text{ave}} = v(4\pi r^2) \left(\frac{1}{2} \frac{\rho_0 \omega^2 \xi_0^2}{r^2}\right) = 2\pi v \rho_0 \omega^2 \xi_0^2 = \frac{2\pi \Phi_0^2}{\rho_0 v} \quad (54.18)$$

توجه داشته باشید که سازهٔ r^2 از رابطهٔ بالا حذف شده است و در نتیجه مقدار این رابطه به شعاع بستگی ندارد. این نتیجه را می‌توانستیم پیش‌بینی کنیم. زیرا اصل بقای انرژی ایجاب می‌کند که، به‌طور میانگین، مقدار انرژی که در واحد زمان از یک سطح کروی به‌هر شعاعی، می‌گذرد یکسان باشد. وجود سازهٔ $1/r$ در معادله‌های (52.18) و (53.18) مبین چنین امری است.

بنابا معادلهٔ (44.18)، شدت موج کروی، یا انرژی میانگینی که از واحد سطح در واحد زمان می‌گذرد برابر است با

$$I = vE = \frac{\Phi_0}{2v\rho_0 r^2} = \frac{I_0}{r^2} \quad (55.18)$$

که در آن

$$I_0 = \frac{\Phi_0^2}{2\rho_0 v} \quad (56.18)$$

این نتیجه همانند نتیجه‌ای است که از مثال 11.18 به‌دست آمد. از اینجا می‌شود گفت که در موج کروی، شدت موج متناسب باعکس مجذور فاصله از چشمه‌کاهش می‌یابد.

این نتیجه هم در آکوستیک و هم در اپتیک بسیار به‌کار می‌رود و با اصل بقای انرژی نیز سازگار است؛ از آنجا که مساحت کره متناسب با r^2 است، تنها در صورتی انرژی که از هر سطح کروی می‌گذرد می‌تواند ثابت بماند که انرژی که از واحد سطح عبور می‌کند متناسب با $1/r^2$ باشد.

موجهای کروی، که در بالا بررسی شدند، تنها در مورد شارهای کامل که نمی‌توانند تنش برشی را تحمل کنند، به‌کار می‌روند. اما در جسم جامد کشسان دو نوع موج می‌تواند وجود داشته باشد؛ موجهای بی‌قاد و موجهای سیملوله‌ای. در مورد موجهای تخت این امواج اساساً ناظر بر موجهای طولی و عرضی اند که در بخشهای 5.18 و 7.18 مطالعه کردیم. سرعتهای انتشار آنها بترتیب عبارت‌اند از

$$v_l = \sqrt{\frac{k + \frac{4}{3}G}{\rho}} \quad \text{و} \quad v_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

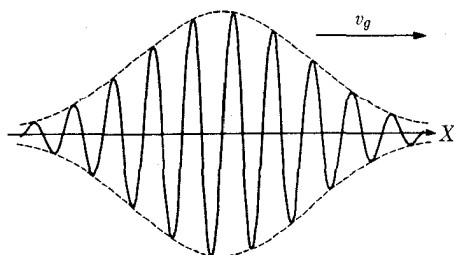
توجه داشته باشید که هرگاه $G = 0$ باشد تنها موجهای طولی وجود دارند و سرعت آنها برابر می‌شود با نتیجهٔ (51.18). از طرف دیگر، هیچ محیط پایداری نمی‌تواند دارای $v_t = 0$ باشد و تنها موجهای عرضی را در خود ظاهر سازد. زیرا در این صورت

$k = -4/3G$ می‌شود که عددی منفی است. چنین مقداری برای k به این معناست که با افزایش فشار، حجم نیز باید افزایش پیدا کند، چیزی که هم با آزمایش وهم باشهودحسی در تضاد است.

۱۲.۱۸ سرعت گروه

سرعت $v = \omega/k$ را که از معادله (۶.۱۸)، برای موجی به بسامد ω و طول موج $\lambda = 2\pi/k$ بدست می‌آید، سرعت فاز می‌نامند. با وجود این در تحلیل حرکت موجی، سرعتی که مشاهده می‌شود الزاماً سرعت فاز نیست. اگر يك موج پیوسته (یا چنانکه اغلب گفته می‌شود يك قطار موج به طول بینهایت) داشته باشیم، موج می‌تواند طول موج و بسامد منحصر به فرد داشته باشد. ولی موجی با این ماهیت برای انتقال سیگنال مناسب نیست، زیرا سیگنال نشان‌دهنده چیزی است که در لحظه معینی شروع می‌شود و چندی بعد در لحظه معینی پایان می‌یابد، یعنی موج باید شکلی شبیه شکل ۳۲.۱۸ داشته باشد. موجی با چنین شکلی را تپ می‌نامند. بنا بر این اگر سرعتی را که با آن سیگنال منتقل می‌شود اندازه بگیریم، در واقع سرعت انتشار این تپ را در نظر داریم.

ابتدا ممکن است بگوییم که این سرعت درست همان سرعت فاز $v = \omega/k$ است، زیرا همواره در بخشهای گذشته می‌گفتیم که موج با این سرعت منتشر می‌شود. اما در اینجا سازه مهمی وارد عمل می‌شود. موج یا تپ رسم‌شده در شکل ۳۲.۱۸ سینوسی نیست زیرا دامنه آن در امتداد محور X ثابت نیست و بنا بر این در اینجا آنالیز فوریه موج لازم است. اگر چنین کاری انجام شود، معلوم می‌شود که در واقع چندین طول موج و بسامد در موج وجود دارند. بدیهی است که هر گاه سرعت انتشار مستقل از بسامد باشد (یعنی اگر پاشندگی وجود نداشته باشد)، در این صورت تمام مؤلفه‌های فوریه با سرعت فاز یکسان جا بجا می‌شوند و بدرستی می‌توانیم بگوییم که سرعت فاز با سرعت تپ یکی است. برعکس، در محیط پاشنده، هر مؤلفه فوریه دارای سرعت ویژه خود است و بنا بر این مسئله باید دقیقتر بررسی شود. جهت سهولت کار، حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن حرکت موجی را بتوان به دو موج با بسامد تقریباً برابر، ω و ω' ، تجزیه کرد، به گونه‌ای که $\omega - \omega'$ خیلی کوچک باشد. همچنین فرض می‌کنیم دامنه آنها یکسان باشد. در این صورت، با استفاده از معادله (۷.۷)



شکل ۳۲.۱۸ تپ موج.

داریم

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 \sin(kx - \omega t) + \xi_0 \sin(k'x - \omega't) \\ &= \xi_0 [\sin(kx - \omega t) + \sin(k'x - \omega't)] \\ &= 2\xi_0 \cos \frac{1}{2} [(k' - k)x - (\omega' - \omega)t] \sin \frac{1}{2} [(k' + k)x - (\omega' + \omega)t] \end{aligned}$$

نظر به اینکه ω با ω' و همچنین k با k' تقریباً برابر است، می‌توان به جای $(k' + k)/2$ و $(\omega' + \omega)/2$ بترتیب k و ω را قرارداد و نوشت

$$\xi = 2\xi_0 \cos \frac{1}{2} [(k' - k)x - (\omega' - \omega)t] \sin(kx - \omega t) \quad (57.18)$$

معادله (57.18) نمایش حرکت موجی است که دامنه آن مدوله شده باشد. مدولاسیون با سازه زیر داده می‌شود

$$2\xi_0 \cos \frac{1}{2} [(k' - k)x - (\omega' - \omega)t]$$

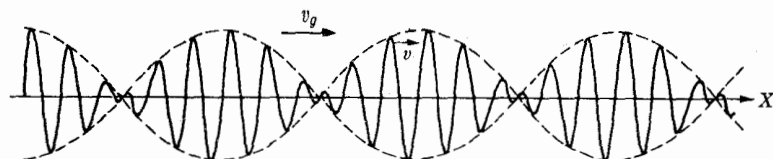
این موضوع را در شکل 33.18 نشان داده‌ایم. دامنه مدوله کننده خود نظیر یک حرکت موجی است که با سرعت

$$v_g = \frac{\omega' - \omega}{k' - k} = \frac{d\omega}{dk} \quad (58.18)$$

منتشر می‌شود، این سرعت را سرعت گروه می‌نامند. موج دامنه، که در شکل 33.18 با منحنی خط چین نشان داده‌ایم، با چنین سرعتی منتشر می‌شود. اگر به خاطر بیابیم که $\omega = kv$ است، معادله (58.18) به صورت زیر درمی‌آید

$$v_g = v + k \frac{dv}{dk} \quad (59.18)$$

اگر سرعت فاز بدطول موج بستگی نداشته باشد، داریم $dv/dk = 0$ و $v_g = v$. بنابراین در محیط ناپاشنده، چنانکه قبلاً حدس می‌زدیم، اختلافی بین سرعت فاز و سرعت گروه وجود ندارد. ولی در محیط پاشنده، سرعت گروه ممکن است بزرگتر یا کوچکتر از سرعت



شکل 33.18 سرعت فاز و سرعت گروه.

فاز باشد، پس می شود نتیجه گرفت که بیشینه تب شکل ۳۲.۱۷ با سرعت گروه v_g منتشر می شود. بنابراین در محیط پاشنده، سرعت سیگنال همان سرعت گروه است. با وجود اینکه معادله (۵۹.۱۸) را تنها برای دو بسامد به دست آوردیم، مع ذالك، این معادله در مورد تپی که شامل بسامدهای بین $\omega - \Delta\omega$ تا $\omega + \Delta\omega$ می شود نیز صادق است. در عین حال باید گفت که این مسئله، در واقع، خیلی پیچیده تر از آن است که بیان فوق نشان می دهد، ولی تفصیل بیش از این نیز از حوصله این کتاب خارج است.

برای روشن شدن مطلب، مورد موج سطحی در آبگون را با تقریب طول موجهای بلند در نظر می گیریم. در این حالت، سرعت فاز را معادله (۳۶.۱۸) تعیین می کند. چون $k = 2\pi/\lambda$ است، بنا بر این $v = \sqrt{g\lambda/2\pi} = \sqrt{g/k}$ از مشتق سرعت نسبت به k به دست می آید

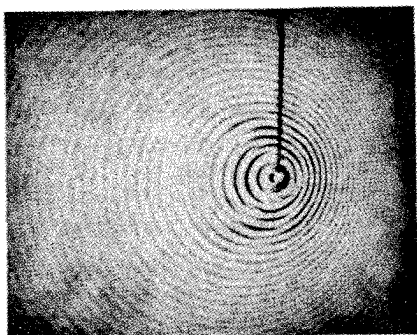
$$\frac{dv}{dk} = -\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{g}{k}} = -\frac{v}{2k}$$

و از معادله (۵۹.۱۸) داریم $v_g = v/2$ ، یعنی سرعت گروه درست نصف سرعت فاز است. یعنی هر گاه يك آشفتگی با طول موج بلند در آب ایجاد شود، آشفتگی اولیه، به گونه ای و امی پیچد که مؤلفه های با طول موج بلندتر با سرعتی بالاتر از سرعت گروه، که برابر با سرعت بیشینه آشفتگی است حرکت می کنند و از آشفتگی «می گریزند».

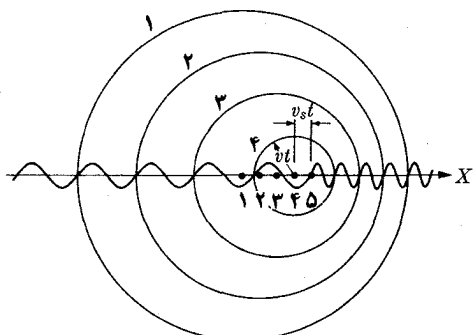
۱۳.۱۸ اثر دوپلر

اگر چشمه موج و ناظر نسبت به محیط مادی که موج در آن منتشر می شود در حرکت نسبی باشند، بسامد مشاهده شده موجها با بسامد چشمه اختلاف پیدا می کند و این پدیده را اثر دوپلر می نامند. این نام از سی. جی. دوپلر فیزیکدان اتریشی آلمانی الاصل (۱۱۱۱-۱۲۳۲) / (۱۸۵۳-۱۸۵۳) گرفته شده است، که برای اولین بار این پدیده را در موجهای صوتی مشاهده کرد.

فرض کنیم يك چشمه موج، به عنوان مثال يك جسم مرتعش، در محیطی آرام مانند هوا یا آب، با سرعت v_s به سمت راست حرکت می کند (شکل ۳۴.۱۸). اگر آن را در چند جا مانند ۱، ۲، ۳، ۴، . . . نظاره کنیم، مشاهده می کنیم که پس از گذشت زمان t ، از لحظه ای که چشمه در وضع ۱ قرار داشت، موجهایی که از چند جا گسیل شده اند کره های ۱، ۲، ۳ را اشغال می کنند. این کره ها هم مرکز نیستند، در سمتی که جا بجایی صورت می گیرد فاصله موجها کمتر و در سمت مخالف فاصله آنها بیشتر است. این اختلاف، از دید ناظر بیحرکتی که در يك طرف چشمه قرار دارد برترتیب با طول موج مؤثر کوتاهتر یا بلندتر و یا با بسامد مؤثر زیادتر یا کمتر متناظرند. اما اگر ناظر با سرعت v_o در حرکت باشد، موجها با آهنگ متفاوتی به او می رسند. به عنوان مثال، اگر ناظر از سمت راست به چشمه نزدیک شود، طول موجی کوتاهتر یا بسامدی زیادتر از این هم مشاهده می کند. زیرا او به سمت مسوجها حرکت می کند. عکس این حالت وقتی رخ می دهد که ناظر از



(ب)



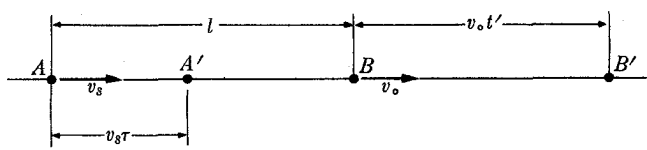
(الف)

شکل ۳۴۰۱۸ (الف) اثر دوپلر ناشی از چشمه متحرك. عكس (ب) اثر دوپلر را در سطح آبگون نشان می دهد.

چشمه دور می شود، یعنی در جهت حرکت موجها حرکت می کند. برای به دست آوردن رابطه بین γ بسامد موجهایی که چشمه تولید می کند و γ' بسامدی که ناظر ثبت می کند، بدین طریق استدلال می کنیم: برای سهولت، فرض می کنیم که ناظر و چشمه در امتداد یک خط حرکت می کنند. فرض کنیم در لحظه $t = 0$ ، هنگامی که فاصله بین چشمه و ناظر برابر $AB = l$ است (شکل ۳۵۰۱۸)، چشمه موجی گسیل می کند که مدتی بعد، در لحظه t ، به ناظر می رسد. در این مدت، ناظر به اندازه $v_0 t$ حرکت کرده است و $l + v_0 t$ کل مسافتی است که موج در مدت زمان t پیموده است. اگر سرعت انتشار موج را v بگیریم، این فاصله همچنین برابر است با vt . بنابراین داریم

$$t = \frac{l}{(v - v_0)} \quad \text{یا} \quad vt = l + v_0 t$$

در لحظه $t = \tau$ ، چشمه در نقطه A' است و موجی که در این لحظه گسیل می شود در لحظه t' به ناظر می رسد. t' نیز از مبدأ زمان قبلی اندازه گیری می شود. فاصله کل پیموده شده توسط موج بین لحظه ای که از نقطه A' گسیل می شود تا لحظه ای که ناظر آن را دریافت می دارد برابر است با $l + v_0 t' + v_0 \tau$. مدت واقعی حرکت موج برابر $(t' - \tau)$ و فاصله پیموده شده برابر $v(t' - \tau)$ است. بنابراین داریم



شکل ۳۵۰۱۸

$$v(t' - \tau) = l - v_s \tau + v_o t' \quad \text{یا} \quad t' = \frac{l + (v - v_s)\tau}{v - v_o}$$

ناظر بین دو موج گسیل شده از نقاط A و A' فاصله زمانی زیر را اندازه می گیرد

$$\tau' = t' - t = \frac{v - v_s}{v - v_o} \tau$$

حال اگر v بسامد چشمه باشد، تعداد موجهایی که در مدت τ از آن گسیل می شوند مساوی $v\tau$ است. چون ناظر موجها را در زمان τ' دریافت می دارد، بسامدی که او مشاهده می کند برابر می شود با $v' = v\tau / \tau'$ یا

$$v' = v \frac{v - v_o}{v - v_s} \quad (۶۰.۱۸)$$

این معادله رابطه بین v بسامد چشمه و v' بسامدی را که ناظر اندازه می گیرد، هنگامی که هردو در امتداد راستای انتشار حرکت می کنند، به دست می دهد.

اگر v_o و v_s هردو در مقابل v خیلی کوچک باشند، رابطه (۶۰.۱۸) را می توان ساده کرد. ابتدا می نویسیم

$$v' = \frac{1 - v_o/v}{1 - v_s/v} v = \left(1 - \frac{v_o}{v}\right) \left(1 - \frac{v_s}{v}\right)^{-1} v$$

ولی با استفاده از بسط دو جمله ای، معادله (ب. ۲۸)، می توان نوشت

$$\left(1 - \frac{v_s}{v}\right)^{-1} \approx \left(1 + \frac{v_s}{v}\right)$$

و

$$v' = \left(1 - \frac{v_o}{v}\right) \left(1 + \frac{v_s}{v}\right) v = \left(1 - \frac{v_o}{v} + \frac{v_s}{v} - \frac{v_o v_s}{v^2}\right) v$$

در ضرب دو پرانتز باید به تقریب به کار رفته توجه کنیم و تنها جمله های مرتبه اول را نگهداریم. بنابراین با چشم پوشی از جمله مرتبه دوم $v_o v_s / v^2$ ، بسامد اندازه گیری شده توسط ناظر را به صورت زیر می نویسیم

$$v' = \left(1 - \frac{v_o - v_s}{v}\right) v = \left(1 - \frac{v_{os}}{v}\right) v \quad (۶۱.۱۸)$$

که در آن $v_{os} = v_o - v_s$ سرعت ناظر نسبت به چشمه است. نظر به اینکه $\omega = 2\pi v$ ، بسامد زاویه ای که ناظر می تواند یادداشت کند، به صورت زیر است

$$\omega' = \left(1 - \frac{v_{os}}{v}\right) \omega \quad (۶۲.۱۸)$$

اگر v_{0s} مثبت باشد ناظر از چشمه دور می‌شود و بسامدی که اندازه می‌گیرد کوچکتر است. اما اگر v_{0s} منفی باشد، ناظر و چشمه به یکدیگر نزدیک می‌شوند و بسامدی که ناظر اندازه می‌گیرد بیشتر است.

اگر v_{0s} در امتداد راستای انتشار نباشد و زاویه‌ای با آن بسازد، باید به جای معادله (۶۲.۱۸)، معادله زیر را قرار داد

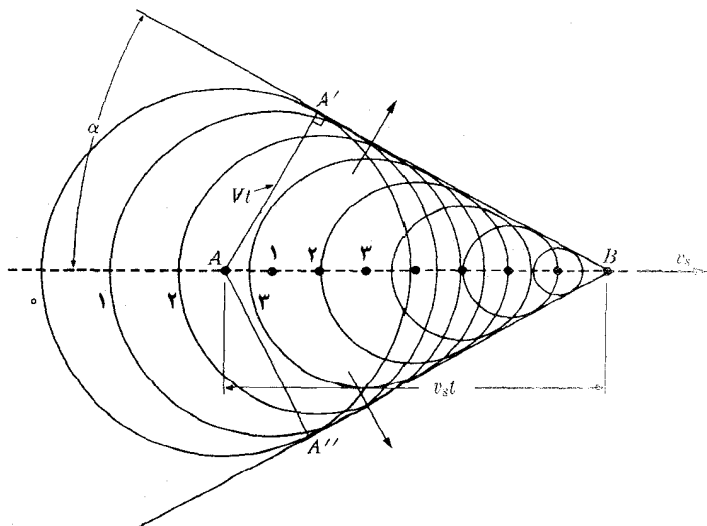
$$\omega' = \left(1 - \frac{v_{0s} \cos \theta}{v}\right) \omega \quad (۶۳.۱۸)$$

به دانشجو توصیه می‌کنیم که درستی این رابطه را تحقیق کند. توجه کنید که $v_{0s} \cos \theta$ مؤلفه سرعت نسبی ناظر و چشمه در امتداد راستای انتشار است.

یک حالت ویژه هنگامی رخ می‌دهد که ناظر بیحرکت است و چشمه با سرعتی بیش از v حرکت می‌کند. در این صورت، در لحظه‌ای معین، چشمه از جبهه موج پیش می‌افتد. به عنوان مثال، اگر در مدت زمان t چشمه از نقطه A به نقطه B برود (شکل ۳۶.۱۸)، موجی که از نقطه A گسیل شده است تنها از نقطه A به نقطه A' می‌رسد. سطح مماس بر تمام موجهای متوالی مخروطی است که محور آن مسیر چشمه است و زاویه رأس آن α از رابطه زیر تعیین می‌شود

$$\sin \alpha = \frac{v'}{v_s} \quad (۶۴.۱۸)$$

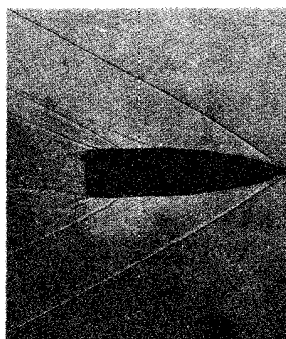
در این صورت برآیند حرکت موجی یک موج مخروطی است و همانطور که پیکانهای شکل



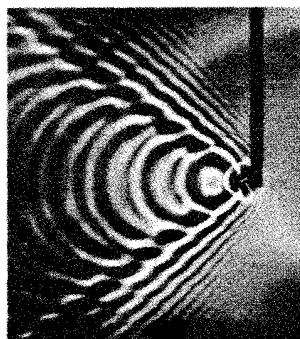
شکل ۳۶.۱۸ موج شوک یا موج ماخ.



(ج)



(ب)



(الف)

شکل ۳۷.۱۸ نمونه‌های مختلف موج ماخ (موج شوک) حاصل از: (الف) تماس يك تيغه مرتعش متحرك با سطح آب، (ب) يك گلوله درهوا و (ج) يك قايق سريع السير.

۳۶.۱۸ نشان می‌دهند انتشار می‌یابد. این موج را گاهی موج شوک یا موج ماخ می‌نامند. این همان صدای شدید و ناگهانی است که از عبور هواپیمایی با سرعت فراصوت از نزدیکی ما شنیده می‌شود. همچنین این موجها را می‌توان در شیار آب ناشی از حرکت يك قايق موتوری که سریعتر از سرعت موج سطحی در آب حرکت می‌کند مشاهده کرد (شکل ۳۷.۱۸).

۱۴.۱۸ صوت، آکوستیک

به استثنای موجهای روی سطح آبگون، تمام موجهایی که در این فصل بررسی کردیم از نوع موجهای کشسان‌اند. در این موجها آشفتگی خواه ناشی از کرنش، خواه از فشار و یا از جابجایی کپه‌ای که تعداد زیادی از آنها را در بر می‌گیرد باشد، با سرعتی که به خواص کشسانی محیط بستگی دارد، منتشر می‌شود.

این موجهای کشسان را صوت نیز می‌نامند. در زبان روزمره ما مفهوم صوت با احساس شنیدن پیوند دارد. هر وقت يك موج کشسان پس از عبور از داخل گاز، آبگون یا جامدی به گوش ما برسد، پرده گوشمان را به ارتعاش درمی‌آورد. این ارتعاشها يك پاسخ عصبی برمی‌انگیزند که فرایندی به نام شنوایی را تشکیل می‌دهد. ولی دستگاه اعصاب ما تنها برای بسامدهایی که بین ۱۶ Hz و ۲۰ ۰۰۰ Hz باشند احساس شنوایی تولید می‌کند (این گستره بسامدها برای حیوانات دیگر متفاوت است). خارج از این حدود صوت قابل شنیدن نیست، ولی موجهای کشسان را باز هم صوت می‌نامند. فیزیک موجهای کشسان با بسامدهای بالاتر از ۲۰ ۰۰۰ Hz را فیزیک ماورای صوت یا فراصوت می‌نامند.

علمی را که روشهای تولید، دریافت و انتشار صوت را بررسی می‌کند آکوستیک می‌نامند. در واقع، آکوستیک رشته‌های متعددی را در بر می‌گیرد و مستقیماً به چندین شاخه از مهندسی صنعتی وابسته است. در میان رشته‌های آکوستیک می‌توان از طراحی ابزارهای

آکوستیکی، که شامل الکترو آکوستیک است نام برد که موضوع آن روشهای الکتریکی تولید و ضبط صوت (میکروفون، بلندگو، تقویت کننده وغیره) است. آکوستیک ساختمانی طرح و ساختمان سالنها و بناها و چگونگی رفتار صوت در حجم بسته را بررسی می کند. در آکوستیک موسیقی روابط بین صوت و موزیک مستقیماً بررسی می شود.

چنانکه قبلاً گفتیم، صوت موجب جابجایی اتمها و مولکولهای محیطی می شود که در آن منتشر می شود. ولی این جابجایی يك حرکت جمعی منظم است که در آن جابجایی تمام اتمهای يك حجم کوچک عمدتاً یکسان است. سپس این حرکت منظم بسا اغتشاش مولکولی کاتوره ای یا نامنظم آبگونها و گازها برهم نهاده می شوند. نتیجتاً بتدریج که صوت پیش می رود از شدت آن کاسته می شود، یا بگفته دیگر، ضعیف می شود زیرا بخشی از انرژی موج بر اثر برخورد بسا مولکولهای محیط تلف می شود. این امر سبب افزایش انرژی داخلی مولکولی، که عمدتاً به صورت حرکت چرخشی مولکول است و یا سبب افزایش انرژی جنبشی انتقالی می شود. در آبگونها، و شکسانی، که اساساً از اثرهای حرکت مولکولی است، در ضعیف شدن صوت نقش مهمی بازی می کند.

در گستره بسیار وسیعی از بسامدها، که تا 10^8 Hz ادامه پیدا می کند، سرعت انتشار صوت عملاً به بسامد بستگی ندارد. مقدار این سرعت برای مواد مختلف در جدول ۲۰۱۸ گردآوری شده است. با وجود این، به سبب وابستگی سرعت به چگالی، سرعت انتشار تا حدودی نسبت به تغییرات دما و فشار حساس است. بسیاری از پدیده های موجی که در فصلهای بعد توضیح خواهیم داد. در مورد موجهای آکوستیک نیز مصداق پیدا می کنند. با وجود این در اینجا بررسی تفصیلی آکوستیک مورد نظر ما نیست. در عوض بیشتر به امواج الکترومغناطیسی خواهیم پرداخت.

جدول ۲۰۱۸ سرعت صوت بر حسب ms^{-1}

گازها « 0°C »	آبگونها « 25°C »	جامدات « 20°C »
۳۳۱۴٫۵ هوا	۱۴۹۳٫۲ آب شیرین	۶۰۰۰ گرانیت
۱۲۶۹٫۵ هیدروژن	۱۵۳۲٫۸ (۳۶٪ نمکی)	۵۱۳۰ آهن
۳۱۷٫۲ اکسیژن	۱۳۱۵ نفت	۳۷۵۰ مس
۳۳۹٫۳ ازت	۱۴۵۰ جیوه	۵۱۰۰ آلومینیوم
۴۰۴٫۸ (۱۰۰ $^\circ\text{C}$) بخار آب		۱۲۳۰ سرب
		۱۸۴۰ لوسیت

1. «Helmholtz», A. C. Crombie, *Sci. Am.*, March 1959, page 94
2. «Kilomegacycle Ultrasonics», K. Dransfeld, *Sci. Am.*, June 1963, page 48
3. «Sonic Boom», R. Emrich, *The Physics Teacher* 3, 18 (1965)
4. «A Method for Measuring the Sound Wavelength in Gases», S. Lestz, *Am. J. Phys.* 31, 96 (1963)
5. *Waves and Oscillations*, R. A. Waldron. Princeton, N. J.: Momentum Books, Van Nostrand, 1963
6. *Light Principles and Experiments*, G. Monk. New York: Dover, 1963, Appendix 2
7. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. L. Sands. Reading, Mass.: Addison - Wesley, 1963, Chapters 47 through 51
8. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963. page 122 (Helmholtz); page 174 (Fourier)

مسئله‌ها

۱۰۱۸ چه اختلافی بین واژه‌های (الف) همگن و ناهمگن، (ب) همسانگرد و ناهمسانگرد وجود دارد؟ (ج) آیا يك محیط می‌تواند همگن و ناهمسانگرد و یا ناهمگن و همسانگرد باشد؟

۲۰۱۸ شخصی با جلو و عقب بردن يك قایق در دریاچه آرامی موج سطحی ایجاد می‌کند. او مشاهده می‌کند که قایق ۱۲ نوسان در ۲۵ ثانیه انجام می‌دهد و هر نوسان يك قله موج به وجود می‌آورد. ۶ ثانیه طول می‌کشد تا قله موج به ساحل که در ۱۲ متری قرار دارد برسد. طول موج سطحی را حساب کنید.

۳۰۱۸ معادله موجی عبارت است از $\xi = 10 \sin 2\pi(2x - 100t)$ ، که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) دامنه، (ب) طول موج، (ج) بسامد و (د) سرعت انتشار موج را پیدا کنید. نمودار موج را رسم کنید، دامنه و طول موج آن را نشان دهید.

۴۰۱۸ موج $\xi = 2 \sin 2\pi(0.1x - 5t)$ را که در آن t برحسب ثانیه و x برحسب متر است در نظر می‌گیریم. (الف) طول موج، (ب) بسامد، (ج) دوره، (د) سرعت انتشار، (ه) دامنه و (و) راستای انتشار آن را تعیین کنید. معادله موج همسانی را بنویسید که در راستای مخالف منتشر می‌شود.

۵۰۱۸ موج $\xi = 2 \sin 2\pi(0.5x - 10t)$ را داریم که در آن t بر حسب ثانیه و x بر حسب متر است. نمودار ξ را درازای چندین طول موج بین زمانهای $t=0$ و $t=0.16$ رسم کنید. این کار را در مورد $\xi = 2 \sin 2\pi(0.5x + 10t)$ نیز تکرار کنید و دو نتیجه را با هم مقایسه کنید.

۶۰۱۸ موج هماهنگ $\xi = A \sin 2\pi(x/\lambda - t/P)$ ξ به سمت راست منتشر می‌شود. ۱۳ نقطه همفاصله به فاصله یک طول موج انتخاب کنید و نمودار آشفته‌گی را در زمانهای ۰ و $P/4$ و $P/2$ و $3P/4$ و P پس از رسیدن موج به اولین نقطه رسم کنید.

۷۰۱۸ با فرض اینکه موج مسئله پیش یک موج عرضی کشسان است، سرعت هر نقطه را روی هر یک از نمودارها نشان دهید. سرعت $\partial\xi/\partial t$ و شتاب $\partial^2\xi/\partial t^2$ را در لحظه $t=0$ رسم کنید.

۸۰۱۸ ثابت کنید که یک موج عرضی کشسان که در امتداد محور X منتشر می‌شود و با جابجایی ξ به مؤلفه‌های $\xi_x = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$ و $\xi_y = \xi_0 \cos(kx - \omega t)$ متناظر است قطبیده دایره‌ای است. سوی چرخش ξ را از دید ناظری که روی محور X قرار دارد تعیین کنید. رابطه ξ_x و ξ_y را برای موجی که در سوی مخالف قطبیده است بنویسید.

۹۰۱۸ معادله موج در ریسمانی به صورت $\xi = 0.3 \sin(3x - 2t)$ است که در آن x و t بر حسب متر و t بر حسب ثانیه‌اند. به این سوالات پاسخ دهید (الف) در لحظه $t=0$ در نقاطی که x آنها برابر ۰، ۱، ۰۵ و 2π است جابجایی چقدر است؟ (ب) در نقطه $x=0.1\pi$ در لحظات t مساوی ۰ و 0.1π و 0.2π است جابجایی چقدر است؟ (ج) معادله سرعت نوسان ذرات ریسمان به چه صورت است؟ بیشینه سرعت نوسان چقدر است؟ (د) سرعت انتشار موج چقدر است؟

۱۰۰۱۸ آونگی تشکیل شده است از یک سیم فولادی به طول 200m که به انتهای آن یک وزنه 20 کیلوگرمی آویزان است. اگر آونگ را از وضعی که با راستای قائم زاویه 60° می‌سازد رها کنیم و وزنه از وضع اولیه به پایین‌ترین وضع خود برسد، اختلاف طول سیم در این دو مکان را تعیین کنید.

۱۱۰۱۸ با جفت کردن نوسانگری به انتهای یک میله فولادی، میله را وادار به انتقال امواج طولی می‌کنند. قطر میله 4mm است، دامنه ارتعاشات برابر 1mm و بسامد آن 10 نوسان در ثانیه است. (الف) معادله امواج در امتداد میله، (ب) انرژی در واحد حجم میله، (ج) شارش انرژی میانگین در واحد زمان از هر مقطع میله و (د) توان لازم جهت تداوم بخشیدن به کار نوسانگر را، تعیین کنید.

۱۲۰۱۸ امواج طولی در امتداد یک میله (بخش ۵۰۱۸) را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که تغییر شکل در هر نقطه عبارت است از

$$\xi = \xi_0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{P} \right)$$

(الف) با استفاده از معادله (۱۶-۱۸) رابطه نیروی وارد بر هر متر مقطع از میله را بنویسید.
 (ب) ثابت کنید که امواج ξ و F به اندازه $1/4$ طول موج اختلاف فاز دارند. (ج) به ازای مقادیر مختلف طول موج نمودارهای ξ و F را در یک لحظه معین، بر حسب x ، رسم کنید.

۱۳-۱۸ فنری با طول طبیعی 1 m و به جرم 2 kg بر اثر وارد آمدن نیروی 10 N به اندازه 4 cm بر طولش افزوده می‌شود. سرعت انتشار امواج طولی را در امتداد فنر پیدا کنید.

۱۴-۱۸ یک فنر فولادی در حال طبیعی دارای 4 m طول و 200 g جرم است. اگر فنر به طور قایم قرار گیرد و جرم 100 g گرمی به آن آویزان شود به اندازه 50 cm بسط طولش افزوده می‌شود. سرعت امواج طولی در فنر را پیدا کنید.

۱۵-۱۸ سرعت موجهای برشی را در فولاد حساب کنید و آن را با سرعت موجهای طولی مثال ۴-۱۸ مقایسه کنید.

۱۶-۱۸ ثابت کنید که موج انرژی را که در بخش ۹-۱۸ مطالعه کردیم می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{\partial W}{\partial t} = v \left\{ \rho \omega^2 \xi_0^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(kx - \omega t) \right] \right\}$$

و از آنجا مقدار میانگین آن را به دست آورید. نشان دهید که بسامد موج انرژی دو برابر طول موج آن نصف طول موج، موج جا بجایی است. در یک زمان معین نمودار $\partial W / \partial t$ را بر حسب x رسم کنید.

۱۷-۱۸ تغییر سرعت انتشار موج عرضی در طول یک ریسمان در شرایط زیر چگونه است؟ (الف) اگر کشش ریسمان دو برابر شود، (ب) اگر کشش به نصف تقلیل یابد. چگونه باید کشش را تغییر داد تا سرعت انتشار (ج) دو برابر شود، (د) به نصف تقلیل یابد؟

۱۸-۱۸ به یک سیم فولادی به قطر 2 mm نیروی کششی 200 N وارد می‌شود. سرعت انتشار موجهای عرضی را در امتداد سیم تعیین کنید.

۱۹-۱۸ یک انتهای ریسمانی به طول 2 m و جرم 4 g ثابت است و به انتهای دیگر آن وزنه‌ای به جرم 2 kg آویزان است و ریسمان به طور افقی نگهداشته شده است. سرعت موج عرضی در ریسمان را پیدا کنید.

۲۰-۱۸ یک سربک ریسمان افقی به شاخه یک دیافازون الکتریکی که بسامد ارتعاش آن 240 Hz است متصل است، سر دیگر آن از روی قرقره‌ای گذشته و جرم 3 kg به آن آویزان است. جرم واحد طول ریسمان برابر 0.20 kg m^{-1} است. (الف) سرعت امواج عرضی در

ریسمان چقدر است؟ (ب) طول موج آنها چقدر است؟

۲۱.۱۸ يك سر يك لوله لاستيكي به پايه ثابتی متصل است. سر ديگر لوله در فاصله 5m از انتهای ثابت از روی يك قرقه می گذرد و 2kg بار به آن آویزان است. جرم لوله لاستيکی بين انتهای ثابت و قرقه 6kg است. (الف) سرعت انتشار امواج عرضی را در امتداد لوله پیدا کنید. (ب) با فرض اینکه يك موج هماهنگ با دامنه 1cm و طول موج 3m در طول لوله انتشار می یابد، سرعت عرضی بیشینه هر نقطه از لوله را حساب کنید. (ج) معادله موج را بنویسید. (د) میا نگین آهنگ شارش انرژی را در مقطعی از لوله تعیین کنید.

۲۲.۱۸ جایی يك چشمه مرتعش در انتهای يك ریسمان کشیده توسط معادله $y = 0.1 \sin 6t$ تعیین می شود. در این رابطه t بر حسب متر و y بر حسب ثانیه است. کشش ریسمان 4N و جرم واحد طول ریسمان 10kg m^{-1} است. (الف) سرعت موج در ریسمان چقدر است؟ (ب) بسامد موج چقدر است؟ (ج) طول موج آن چقدر است؟ (د) معادله جایی در نقاطی به فاصله 1m و 2m از چشمه چگونه است؟ (ه) نموداری برای t بر حسب t به ازای $x = 3\text{m}$ رسم کنید. (و) دامنه حرکت چقدر است؟ (ز) نموداری برای t بر حسب t به ازای $x = \pi/12\text{s}$ رسم کنید.

۲۳.۱۸ يك سیم فولادی به طول 2m و شعاع 5mm از سقف آویزان است. (الف) اگر جسمی به جرم 100kg به انتهای آزاد سیم وصل شود، افزایش طول سیم را تعیین کنید. (ب) همچنین جایی و کشش به سمت پایین در وسط سیم را پیدا کنید. (ج) سرعت امواج طولی و عرضی را هنگامی که جرم هنوز به سیم وصل است حساب کنید.

۲۴.۱۸ ریسمانی به طول L و جرم M آزادانه از سقف آویزان است. (الف) ثابت کنید که سرعت امواج عرضی بر حسب مکان در امتداد ریسمان برابر است با $v = \sqrt{gx}$. در این رابطه x فاصله از انتهای پایین ریسمان است. (ب) نشان دهید که يك تب عرضی ریسمان را در مدت $2\sqrt{L/g}$ می پیماید. توجه دارید که هر دو رابطه مستقل از جرم ریسمان اند.

۲۵.۱۸ در بخش ۹.۱۸ شارش انرژی وابسته به موج طولی را در میله به دست آوردیم. این محاسبه را برای امواج عرضی در ریسمان از نو انجام دهید و ثابت کنید که توان میانگین برابر است با $(\frac{1}{4}) \rho \omega^2 \xi^2 v$. توجه داشته باشید که اکنون جمله داخل پرانتز مربوط به انرژی واحد طول است. [دانهایی: کاری را که نیروی عمود بر ریسمان، یعنی $F \sin \alpha \approx F (\partial \xi / \partial x)$ (در شکل ۱۴.۱۸)، انجام می دهد حساب کنید، از آن نسبت به زمان مشتق بگیرید.]

۲۶.۱۸ سرعت انتشار صوت در هیدروژن، ازت و اکسیژن را در 0°C حساب کنید. این سرعتها را با نتایج تجربی مقایسه کنید. فرض کنید که برای هر سه گاز داریم $\gamma = 1.4$

۲۷.۱۸ تغییر سرعت انتشار صوت در هوا را به ازای يك درجه تغییر در دما از 27°C حساب کنید.

۲۸۰۱۸ با توجه به مقدار ضریب $\alpha = \sqrt{\gamma R/M}$ ، که در مثال ۶.۱۸ برای هوا داده شده است، جرم مولکولی مؤثر هوا را حساب کنید و آن را با نتایجی که از راههای دیگر به دست می‌آید مقایسه کنید. فرض کنید که برای هوا داریم $\gamma = ۱.۴۰$.

۲۹۰۱۸ با مراجعه به موج فشار در ستونی از گاز (بخش ۶.۱۸) فرض می‌کنیم که فشار به صورت $p - p_0 = \mathcal{P}_0 \sin 2\pi(x/\lambda - t/P)$ تغییر می‌کند. (الف) با استفاده از معادله‌های (۲۱.۱۸) و (۲۴.۱۸)، معادله موجهای چگالی و جابجایی را در گاز پیدا کنید. (ب) ثابت کنید که موجهای فشار و چگالی همفازند ولی با موج جابجایی به اندازه $1/4$ طول موج اختلاف فاز دارند. (ج) در يك لحظه معین، نمودار این سه موج را بر حسب x در فاصله‌ای برابر با چندین طول موج رسم کنید.

۳۰۰۱۸ در فشار متعارف و دمای 20°C بسامد يك موج صوتی تخت و هماهنگ 500Hz و دامنه جابجایی آن 10^{-8}m است. (الف) رابطه‌ای که موج جابجایی را توصیف می‌کند بنویسید. (ب) شکل موج جابجایی را در فاصله‌ای برابر با چند طول موج در لحظه $t = 0$ رسم کنید. (ج) رابطه مشخص کننده موج فشار را بنویسید. (د) شکل موج فشار را در فاصله‌ای برابر با چند طول موج در لحظه $t = 0$ رسم کنید و آن را با نمودار (ب) مقایسه کنید. (ه) مرتبه شدت این موج را بر حسب db بیان کنید.

۳۱۰۱۸ دامنه فشار ضعیفترین صوتی که می‌توان شنید حدود $2 \times 10^{-5}\text{Nm}^{-2}$ و قویترین صوتی که بدون احساس درد قابل شنیدن است حدود 28Nm^{-2} است. اگر بسامد صوت 500Hz باشد، در هر دو حالت شدت صوت را بر حسب Wm^{-2} و بر حسب db و همچنین دامنه آن را حساب کنید. سرعت صوت در هوا برابر 345ms^{-1} و چگالی هوا برابر 1.29kg m^{-3} فرض می‌شود.

۳۲۰۱۸ اختلاف مرتبه شدت دو موج صوتی عبارت‌اند از (الف) ۱۰db، (ب) ۲۰db، نسبت شدت و نیز نسبت دامنه فشار آنها را پیدا کنید.

۳۳۰۱۸ (الف) اگر دامنه فشار دو برابر شود شدت يك موج صوتی چگونه تغییر می‌کند. (ب) چقدر باید دامنه فشار تغییر کند تا شدت ده برابر شود؟

۳۴۰۱۸ اختلاف مرتبه شدت دو چشمه را بر حسب db در موارد زیر بنویسید: (الف) شدت یکی دو برابر شدت دیگری است، (ب) دامنه فشار یکی دو برابر دامنه فشار دیگری است.

۳۵۰۱۸ شدت دو چشمه صوتی یکی در هوا و دیگری در آب یکسان است. (الف) نسبت دامنه فشار موج در آب بردامنه فشار موج در هوا چقدر است؟ (ب) اگر دامنه فشار آنها یکسان باشد نسبت شدتهای آنها چقدر می‌شود؟

۳۶۰۱۸ اهمیت نسبی دو جمله موجود در فرمول سرعت موج سطحی در آب عمیق [معادله (۳۵.۱۸)] را به‌ازای طول موجهای زیر بساهم مقایسه کنید: (الف) ۱mm، (ب) ۱cm،

(ج) 1m . برای چه طول موجی دو جمله یاد شده با هم برابر می شوند؟ کشش سطحی آب در حدود $10^{-2} \times 7 \text{ Nm}^{-1}$ است.

37.18 کانالی را که سطح مقطع آن مستطیل و عمق آن 4m است در نظر می گیریم. سرعت انتشار امواجی به طول موجهای: (الف) 1cm ، (ب) 1m ، (ج) 10m و (د) 100m را حساب کنید. در هر مورد فرمولی را که به بهترین نحو با مرتبه بزرگی کمیتها متناظر است به کار ببرید. کشش سطحی آب در کانال $10^{-2} \times 7 \text{ Nm}^{-1}$ است.

38.18 دو موج هماهنگ با بسامد و دامنه برابر با سرعت یکسان در دوسوی مخالف انتشار می یابند. (الف) حرکت موجی بر ایند را معین کنید. (ب) با فرض اینکه موج بر ایند با موج عرضی در ریسمان متناظر است، نمودار جابجایی نقاط ریسمان را در زمانهای مختلف رسم کنید.

39.18 دو موج با بسامد و دامنه برابر با سرعت یکسان ولی با اختلاف فاز $\pi/4$ در امتداد ریسمانی از یک سر حرکت می کنند. دو موج را با هم جمع کنید و ثابت کنید که بر ایند آنها یک موج پیشرو با همان سرعت و با همان بسامد است.

40.18 دو موج با دامنه و سرعت برابر ولی با بسامدهای متفاوت 1000Hz و 1010Hz با سرعت 10ms^{-1} در یک راستا حرکت می کنند. معادله جداگانهای برای هر موج و نیز برای مجموع آنها بنویسید. نمودار موج بر ایند را رسم کنید.

41.18 مسئله پیش را در حالتی که دامنه یکی از موجها دو برابر دامنه موج دیگر باشد از نوحل کنید.

42.18 دو موج قطبیده در دو صفحه عمود بر هم با سرعت یکسان روی محور OX حرکت می کنند. در صورتی که: (الف) $A_1 = 2A_2$ و فازها یکسان باشند، (ب) $A_1 = 2A_2$ و اختلاف فاز برابر $\pi/2$ باشد و (ج) $A_1 = A_2$ و اختلاف فاز $\pi/2$ باشد، حرکت موجی بر ایند را پیدا کنید.

43.18 هنگام بررسی موج طولی در میله بخش (۵.۱۸)، از کرنش جانبی که با کرنش طولی همراه است چشم پوشی کردیم. اگر این اثر را نیز در نظر بگیریم می توان نشان داد که سرعت فاز امواج هماهنگ طولی با طول موج λ ، که در امتداد یک میله استوانه ای به شعاع R منتشر می شوند، برابر است با $v_p = \sqrt{Y/\rho} (1 - \pi^2 \sigma^2 R^2 / \lambda^2)$. در این رابطه σ نسبت پواسون نامیده می شود (رک مسئله ۵۴.۱۸)، سرعت گروه امواج را در امتداد میله بر حسب v_p پیدا کنید. مقدار حادی سرعت گروه را هنگامی که R خیلی کوچکتر از λ باشد تعیین کنید. در تغییر v_p و v_g بر حسب R/λ بحث کنید.

44.18 سرعت فاز موج خمشی هماهنگ در میله جامد برابر است با $v_p = v / \sqrt{1 + \lambda^2 / 4\pi^2 K^2}$. در این رابطه $v = \sqrt{Y/\rho}$ سرعت فاز امواج طولی، λ طول

موج و K شعاع چرخش مقطع میله حول محوری عمود بر محور طولی میله است که از مرکز آن می‌گذرد. (الف) سرعت گروه امواج خمشی را پیدا کنید و آن را بر حسب سرعت فاز بیان کنید. (ب) حالت خاص يك میله با مقطع دایره‌ای را بررسی کنید. (ج) سرعت گروه را هنگامی که λ خیلی بزرگتر از $2\pi K$ باشد پیدا کنید. [توضیح: موج خمشی موجی است که در میله باردار انتشار می‌یابد، یعنی میله‌ای که بر آن نیروهای عرضی، که به‌طور یکنواخت در طول میله توزیع شده‌اند (مثلاً وزن خود میله)، وارد می‌شوند].

۴۵.۱۸ چشمه‌ای که حرکت آن را می‌توان به صورت زیر نوشت، موجی را برمی‌انگیزد

$$y = \frac{\lambda}{\pi^2} A \left[\sin \omega t - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega t - \dots \right]$$

(الف) با جمع کردن سه جمله اول، شکل تقریبی موج را به طور نموداری رسم کنید. (ب) این سری بی‌پایان به چه موجی منجر می‌شود؟ منحنی این موج را منحنی «دندان‌اره‌ای» می‌نامند. (ج) معادله حرکت چنین موجی را که به سمت راست با سرعت v مستقل از بسامد منتشر می‌شود به دست آورید. [دانهمایی: توجه کنید که داریم

$$1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

۴۶.۱۸ مسئله ۴۵.۱۸ را برای چشمه‌ای که معادله حرکت آن به صورت

$$y = \frac{\lambda}{\pi} A \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

است از نو حل کنید. [دانهمایی: توجه داشته باشید که داریم $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}$]

۴۷.۱۸ ارتفاع صدای سوت يك لکوموتیو برابر 500 Hz است. لکوموتیو با سرعت 72 km hr^{-1} (الف) به ایستگاه نزدیک می‌شود، (ب) از ایستگاه دور می‌شود، بسامد صوتی را که يك شخص مستقر در ایستگاه راه آهن در این دو حالت می‌شنود حساب کنید.

۴۸.۱۸ يك چشمه صوتی که بسامد آن 10^3 Hz است با سرعت 30 ms^{-1} نسبت به هوا حرکت می‌کند. با فرض اینکه سرعت صوت در هوای ساکن 340 ms^{-1} است، طول موج و بسامد مؤثر دریافت شده توسط ناظری را که نسبت به هوا ساکن است و چشمه را (الف) در حال دور شدن، (ب) در حال نزدیک شدن به خود مشاهده می‌کند تعیین کنید.

۴۹.۱۸ مسئله ۴۸.۱۸ را در حالتی که چشمه نسبت به هوا ساکن است ولی ناظر با سرعت 30 ms^{-1} حرکت می‌کند از نو حل کنید. آیا می‌توان نتیجه گرفت که خواه ناظر در حرکت باشد خواه چشمه، نتیجه بدست آمده تغییر نمی‌کند؟

۵۰.۱۸ معادله (۶۰.۱۸) برای اثر دوپلر را با این فرض به دست آوردیم که محیطی که موج در آن منتشر می شود ساکن است. ثابت کنید که اگر محیط با سرعت v_m در امتداد خطی که چشمه را به ناظر وصل می کند حرکت کند، معادله به صورت زیر درمی آید

$$v' = v(v - v_o + v_m) / (v - v_s + v_m)$$

۵۱.۱۸ کرنش حجمی یک جسم با رابطه $\epsilon_V = dV/V$ تعیین می شود. در این رابطه dV تغییر حجم حاصل از تأثیر نیروی وارد بر جسمی به حجم V است. (الف) اگر ρ چگالی جسم باشد ثابت کنید که داریم $\epsilon_V = dp/\rho$. [دانهمایی: توجه کنید که $\rho v = m = \text{const}$]. (ب) همچنین نشان دهید که مدول کپدایی را که با رابطه (۲۲.۱۸) تعریف می شود می توان به صورت $k = -V(dp/dV)$ نیز بیان کرد. در این رابطه dV تغییر حجم حاصل از تغییر فشار به اندازه dp است.

۵۲.۱۸ با استفاده از مدول کپدای آهن و سرب (جدول ۱.۱۸) درصد تغییر چگالی و حجم هر یک از این مواد را به ازای ۱ atm تغییر در فشار حساب کنید.

۵۳.۱۸ کرنش خطی با رابطه $\epsilon_L = dL/L$ تعریف می شود. در این رابطه L فاصله بین دو نقطه از جسم در حالت تغییر شکل نیافته و dL تغییر فاصله این دو نقطه بر اثر تغییر شکل است. مکعبی به ضلع L را در نظر بگیرید و ثابت کنید که $\epsilon_V = 3\epsilon_L$ است.

۵۴.۱۸ اگر سیمی در راستای طول خود کشیده شود، قطر آن، D ، کاهش می یابد. این امر موجب کرنش جانبی می شود که با رابطه $\epsilon_D = dD/D$ تعریف می شود. نسبت پواسون با رابطه $\sigma = dD/dL$ تعریف می شود. اگر روی هر یک از سطوح یک مکعب مستطیل تنش قائم S وارد شود، ثابت کنید که کرنش خطی خالص هر یال برابر است با $\epsilon_L = S(1 - 2\nu)/Y$. [دانهمایی: تنش قائم روی هر زوج از سطوح مکعب مستطیل، موجب واتنش جانبی در جهت مخالف روی زوج دیگر می شود].

۵۵.۱۸ با استفاده از نتایج مسئله های ۵۳.۱۸ و ۵۴.۱۸، ثابت کنید که $Y = 3k(1 - 2\nu)$. این رابطه را بر حسب σ حل کنید و با استفاده از جدول ۱.۱۸، نسبت پواسون را برای چند عنصر حساب کنید.

۵۶.۱۸ با استدلالی مشابه با آنچه در مسئله ۵۵.۱۸ به کار بردیم می توان ثابت کرد که $Y = 2G(1 + \nu)$ با حذف σ از این رابطه و رابطه مسئله ۵۵.۱۸، ثابت کنید که $Y = 3kG/(k + G/3)$. با استفاده از مقادیر داده شده در جدول ۱.۱۸، حدود اعتبار این رابطه نظری را برای Y در مورد چند عنصر جدول تحقیق کنید.

۵۷.۱۸ برای عنصری داریم $G = 1.24 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$ و $Y = 3.25 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$ مقدار مدول کپدای و نسبت پواسون را برای این عنصر حساب کنید. همین محاسبه را در مورد کوارتز با $G = 2.88 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$ و $Y = 5.18 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$ انجام

دهید و در نتایج فیزیکی این مفاهیم بحث کنید.

۵۸.۱۸ برای فزنی که در مثال ۵۰.۱۸ آوردیم، می‌توان ثابت کرد که ثابت K از رابطه $\pi GR^4 / 2a^2$ به‌دست می‌آید. در این رابطه R شعاع سیم و a شعاع فز است. اندازه K را برای یک فز فولادی به‌شعاع 1 cm که از سیم فولادی به‌شعاع 1 mm ساخته شده‌است پیدا کنید. اگر طول فز در حالت عادی 50 cm باشد، افزایش طول آن را هنگامی که نیروی به‌اندازه 50 N بر آن وارد شود، حساب کنید.

۵۹.۱۸ فرض کنید که میدان ξ مطابق معادله $\partial^2 \xi / \partial t^2 = a \partial^4 \xi / \partial x^4$ منتشر می‌شود. a یک ثابت معین است. (الف) آیا این معادله جوابی به‌صورت

$$\xi = \xi_0 \sin k(x \pm vt)$$

می‌پذیرد؟ در صورتی که پاسخ مثبت باشد اندازه v چقدر است؟ (ب) آیا رابطه $f(x \pm vt) = \xi$ را به‌عنوان جواب می‌پذیرد؟ (ج) آیا از نتایج بالا می‌توان نتیجه گرفت که این میدان بدون واپیچش منتشر می‌شود؟

۶۰.۱۸ میله‌ای با مقطع دایره‌ای به‌شعاع R بر اثر گشتاور نیروهایی که در حول محورش وارد می‌شوند می‌پیچد. اگر زاویه پیچش در نقطه‌ای بد طول x باشد، ثابت کنید که گشتاور نیرو برابر است با

$$\tau = \frac{1}{2} AGR^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

$A = \pi R^2$ سطح مقطع میله است.

۶۱.۱۸ با استفاده از نتیجه مسئله پیش، ثابت کنید که سرعت امواج پیچشی در امتداد میله برابر است با $\sqrt{G/\rho}$. [دانه‌مایی: مقطعی به ضخامت dx در نظر بگیرید. توجه داشته باشید که گشتاور نیروی خالص وارد بر آن برابر $(\partial \tau / \partial x) dx$ است.]

۶۲.۱۸ می‌توان ثابت کرد که یک موج کروی همسانگرد در معادله

$$\frac{\partial^2 (r\xi)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 (r\xi)}{\partial r^2}$$

صادق می‌کند. نشان دهید که جواب این معادله برابر است با $\xi = (1/r)f(r \pm vt)$. این عبارت را با آنچه در بخش ۱۱.۱۸ درباره موج فشار در شماره گفتیم مقایسه کنید.

۶۳.۱۸ نشان دهید که هر گاه دامنه بزرگ باشد، معادله موج عرضی در ریمان به‌صورت

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]$$

درمی آید. توجه کنید که این معادله خطی نیست و اگر $(\partial \xi / \partial x)^2$ قابل اغماض باشد، به معادله (۲۹.۱۸) تبدیل می شود. [دانهمایی: توجه کنید که داریم

$$[\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^3 \alpha + \dots$$

امواج الکترو مغناطیسی

- ۱۰۱۹ مقدمه
- ۲۰۱۹ امواج الکترومغناطیسی تخت
- ۳۰۱۹ انرژی و اندازه حرکت موج الکترومغناطیسی
- ۴۰۱۹ تابش دوقطبی الکتریکی نوسانی
- ۵۰۱۹ تابش دوقطبی مغناطیسی نوسانی
- ۶۰۱۹ تابش چند قطبیهای نوسانی مرتبه بالاتر
- ۷۰۱۹ تابش بار الکتریکی شتابدار
- ۸۰۱۹ درآشامی تابش الکترومغناطیسی
- ۹۰۱۹ پراکندگی امواج الکترومغناطیسی توسط الکترونهاى مقید
- ۱۰۰۱۹ پراکندگی امواج الکترومغناطیسی توسط الکترون آزاد، اثر کامپتون
- ۱۱۰۱۹ فوتونها
- ۱۲۰۱۹ بازهم درباره فوتونها: اثر فوتوالکتريک
- ۱۳۰۱۹ انتشار موجهای الکترومغناطیسی در محیط مادی، پاشندگی
- ۱۴۰۱۹ اثر دوپلر درباره امواج الکترومغناطیسی
- ۱۵۰۱۹ بساب تابش الکترومغناطیسی

در بخش ۱۱.۱۵ گفتیم که میدان الکترومغناطیسی در خلا* با سرعتی برابر با

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

منتشر می‌شود، که با سرعت نور در خلا* متناظر است. در بخش ۱۱.۱۷، در جریان مطالعه پدیده القای الکترومغناطیسی، امکان انتقال يك علامت از نقطه‌ای به نقطه دیگر را توسط میدان الکترومغناطیسی وابسته به زمان خاطر نشان کردیم. در اواخر قرن نوزدهم، هاینریش هرتز «۱۲۳۶-۱۸۵۷/۱۲۷۳-۱۸۹۴» فیزیکدان آلمانی، با شیوه غیر قابل انکاری، ثابت کرد که میدان الکترومغناطیسی در خلا* با سرعت نور* منتشر می‌شود. خواص این امواج که توسط هرتز کشف شدند با دقت زیاد توسط آزمایش بررسی شده است. اطلاعات وسیعی که از خواص امواج الکترومغناطیسی بویژه از تولید، انتشار و درآشامی (جذب) این امواج به دست آمد، دری به دنیای شگفت‌انگیز ارتباطات و مخابرات کنونی باز کرد. قبل از اینکه هرتز آزمایشهای خود را روی امواج الکترومغناطیسی شروع کند، ماکسول وجود این امواج را در نتیجه تحلیل دقیق معادله‌های میدان الکترومغناطیسی (که در بخش ۱۵.۱۷ خلاصه شدند) پیشگویی کرده بود. پیشرفت دانش ما نسبت به امواج الکترومغناطیسی نمونه دیگری از ارتباط تنگاتنگ میان نظریه و آزمایش در تکامل ایده‌های فیزیکی ماست. در این فصل به بررسی معادله‌های ماکسول (که میدان الکترومغناطیسی وابسته به زمان را تشریح می‌کنند) می‌پردازیم تا ببینیم چگونه می‌توان انتشار این میدان را به صورت امواج تعبیر کرد. برای این کار بایستی تحقیق کنیم که میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی در يك معادله موج به صورت (۱۱.۱۸) صدق می‌کنند. ابتدا امواج الکترومغناطیسی تخت را بررسی می‌کنیم، سپس چند سازوکار برای گسیل، درآشامی و پراکندگی تابش الکترو-مغناطیسی مطالعه می‌شوند و در خاتمه به‌طور خلاصه قسمتهای مختلف بیناب الکترومغناطیسی را از نظر می‌گذرانیم.

۲.۱۹ امواج الکترومغناطیسی تخت

اکنون سعی می‌کنیم روشن کنیم که معادلات ماکسول برای میدان الکترومغناطیسی، دو میدان عمود برهم الکتریکی \mathbf{E} و مغناطیسی \mathbf{B} را به‌عنوان يك جواب خصوصی می‌پذیرند. محور Y را موازی میدان \mathbf{E} و محور Z را موازی میدان \mathbf{B} رسم می‌کنیم. در این حالت خاص داریم

$$E_x = 0, \quad E_y = E, \quad E_z = 0$$

$$B_x = 0, \quad B_y = 0, \quad B_z = B$$

* آزمایشهای هرتز را در بخش ۷.۲۲ آورده‌ایم.

همچنین فرض می‌کنیم که این میدان در خلأ، یعنی جایی که هیچگونه بار آزاد و جریان الکتریکی وجود ندارد، برقرار است. این امر ایجاب می‌کند در معادلات ما کسول داشته باشیم $\rho = 0$ و $\mathbf{J} = 0$.

در چنین شرایطی معادله‌های (۶۵.۱۷) بدصورت زیر درمی‌آیند
الف) قانون گاوس برای میدان الکتریکی

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 0 \quad (1.19)$$

ب) قانون گاوس برای میدان مغناطیسی

$$\frac{\partial B}{\partial z} = 0 \quad (2.19)$$

ج) رابطه فاراده - هنری

$$\frac{\partial E}{\partial z} = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (4.19)$$

د) رابطه ماکسول - آمپر

$$\frac{\partial B}{\partial y} = 0 \quad (5.19)$$

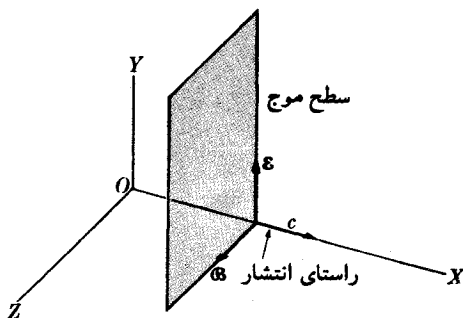
$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (6.19)$$

معادله‌های (۱.۱۹)، (۲.۱۹)، (۳.۱۹) و (۵.۱۹) نشان می‌دهند که نه میدان الکتریکی E و نه میدان مغناطیسی B هیچکدام به y و z بستگی ندارند. بنابراین میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} تنها به x و t بستگی دارند و در هر لحظه در تمام نقاط صفحه‌های عمود بر محور X دارای مقدار یکسان‌اند (شکل ۱.۱۹). در این صورت برای به دست آوردن بستگی \mathbf{E} و \mathbf{B} به x و t تنها معادله‌های (۴.۱۹) و (۶.۱۹) باقی می‌مانند. از مشتق معادله (۴.۱۹) نسبت به x به دست می‌آید

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t}$$

همچنین از مشتق معادله (۶.۱۹) نسبت به t داریم

$$-\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$



شکل ۱۰-۱۹ سمتگیری میدانهای الکتریکی و مغناطیسی نسبت به راستای انتشار در موج الکترومغناطیسی تخت.

از ترکیب این دو معادله نتیجه می شود

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \quad (7.19)$$

این معادله مشابه معادله (۱۱-۱۸) است و نشان می دهد که میدان الکتریکی در امتداد محور X با سرعت

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (8.19)$$

منتشر می شود و می توان آن را با رابطه

$$E = E(x - ct) \quad (9.19)$$

بیان کرد. به همین ترتیب می توان رابطه

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \quad (10.19)$$

را به دست آورد. بنابراین میدان B نیز در امتداد محور X و با سرعت c منتشر می شود و می توان آن را با رابطه

$$B = B(x - ct) \quad (11.19)$$

نشان داد. اکنون حالت خاص موجهای هماهنگ با بسامد $\omega/2\pi$ و طول موج $\lambda = 2\pi/k$ را بررسی می کنیم. در این حالت داریم

$$E = E_0 \sin k(x - ct) = E_0 \sin(kx - \omega t) \quad \text{و} \quad (۱۲.۱۹)$$

$$B = B_0 \sin k(x - ct) = B_0 \sin(kx - \omega t)$$

در نوشتن معادله‌های بالا از رابطه $\omega = kc$ که با معادله (۶.۱۸) متناظر است استفاده کردیم. دامنه‌های E_0 و B_0 مستقل نیستند زیرا باید در معادله‌های (۴.۱۹) و (۶.۱۹) صدق کنند. ولی از مشتق معادله‌های (۱۲.۱۹) بترتیب نسبت به x و t داریم

$$\frac{\partial E}{\partial x} = kE_0 \cos k(x - ct)$$

و

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -kcB_0 \cos k(x - ct)$$

با قرار دادن این روابط در معادله (۴.۱۹) به دست می‌آید

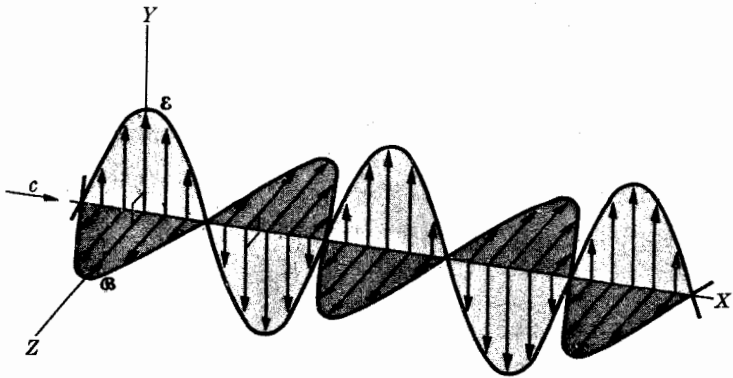
$$E_0 = cB_0 \quad \text{و} \quad B_0 = \frac{1}{c}E_0 \quad (۱۳.۱۹)$$

بر دانشجوست که تحقیق کند که با به کار بردن معادله (۶.۱۹) به جای معادله (۴.۱۹) باز هم همین نتیجه به دست می‌آید. معادله (۱۳.۱۹) که رابطه‌ای بین دامنه‌هاست نشان می‌دهد که، از معادله (۱۲.۱۹)، برای مقادیر لحظه‌ای نیز داریم

$$E = cB \quad \text{و} \quad B = \frac{1}{c}E \quad (۱۴.۱۹)$$

به کمک معادله‌های (۴.۱۹) و (۶.۱۹) می‌توان تحقیق کرد که همین معادله‌ها برای میدانهای تعریف شده در حالت کلیتر به صورت معادله‌های (۹.۱۹) و (۱۱.۱۹) نیز صادق است. معادله (۱۴.۱۹) نشان می‌دهد که میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} همفازند، یعنی همزمان به مقادیر صفر و بیشینه می‌رسند. شکل ۲.۱۹ میدان الکترومغناطیسی حاصل از معادله (۱۲.۱۹) را نشان می‌دهد. میدان الکتریکی در صفحه XY و میدان مغناطیسی در صفحه XZ نوسان می‌کنند. این وضع با یک موج قطبیده خطی یا تخت، متناظر است. صفحه قطبش به عنوان صفحه‌ای که در آن میدان الکتریکی نوسان می‌کند، در این حالت صفحه XY ، تعریف شده است. بنابراین یک موج الکترومغناطیسی واقعاً عبارت است از دو موج جفت شده، یک موج الکتریکی و یک موج مغناطیسی.

معادله‌های (۱۲.۱۹) تنها جواب موج تخت معادله‌های (۷.۱۹) و (۱۰.۱۹) نیستند. به عنوان مثال، میدان الکتریکی می‌تواند در امتداد محور Z باشد، که در این حالت میدان مغناطیسی در امتداد محور Y قرار می‌گیرد. در این صورت داریم



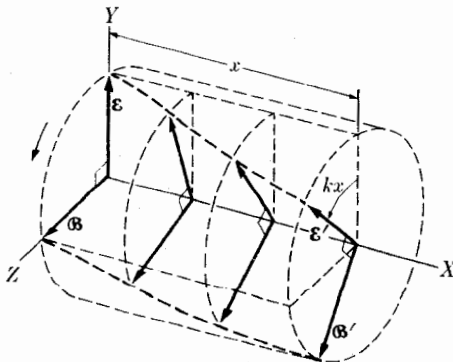
شکل ۲۰۱۹ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در موج الکترومغناطیسی تخت.

$$E_z = E_0 \sin(kx - \omega t),$$

$$B_y = -B_0 \sin(kx - \omega t)$$

برای این موج همچنین برای موج معادله (۱۲۰۱۹) می‌توان به جای سینوس، کسینوس به کار برد و نیز یک فاز ثابت اختیاری به آن اضافه کرد.

جواب دیگر موج تختی است که در آن میدانهای الکتریکی و مغناطیسی حول راستای انتشار می‌چرخند ولی دامنه ثابت باقی می‌ماند. چنین موجی را موج با قطبش دایره‌ای می‌نامند (شکل ۳۰۱۹). این جواب جدید از ترکیب دو جواب قطبیده خطی که قبلاً بحث شد، در حالتی که دامنه هر کدام از میدانها ثابت و دارای اختلاف فاز مناسب‌اند به دست



شکل ۳۰۱۹ موج الکترومغناطیسی قطبیده دایره‌ای. میدانهای E و B دور راستای انتشار می‌چرخند.

می آید. (امکان چنین ترکیبی از خطی بودن معادله‌های ماکسول نسبت به میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} فراهم می آید.) قطبش دایره‌ای، بسته به سوی میدانها، ممکن است راستگرد یا چپگرد باشد. در این صورت مؤلفه‌های میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در امتداد دو محور عمود برهم با رابطه‌های زیر داده می‌شوند

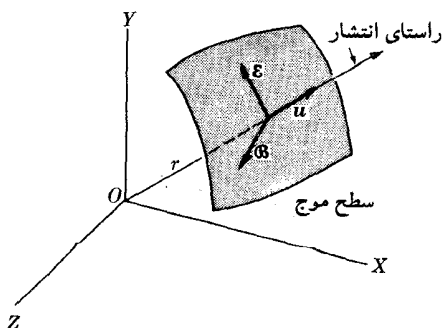
$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t), \quad E_z = \pm E_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$B_y = \mp B_0 \cos(kx - \omega t), \quad B_z = B_0 \sin(kx - \omega t)$$

این رابطه‌ها اختلاف فاز $\pm \pi/2$ بین مؤلفه‌های هر میدان با میدان دیگر را نشان می‌دهند؛ بنا به نتایج بخش ۹.۱۲، در هر لحظه میدان مغناطیسی \mathbf{B} بر میدان الکتریکی \mathbf{E} عمود است [به دانشجو توصیه می‌کنیم که این رابطه‌های میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی را در معادله‌های (۶۵.۱۷) قرار دهد و تحقیق کند که در معادلات ماکسول صدق می‌کنند]. اگر دامنه مؤلفه‌های قائم هریک از میدانها متفاوت باشند، قطبش بیضیوار ایجاد می‌شود. علاوه بر این، احتمال دارد موجهای تخت دیگری در جواب معادلات ماکسول به دست آیند که به هیچ یک از حالات خاص قطبش مربوط نباشند. با این‌همه در اینجا از آنها بحث نمی‌کنیم، زیرا برای بیشتر مقاصد عملی، آشنایی کامل با موجهای قطبیده خطی و دایره‌ای کافی است. چون انتخاب محورهای XYZ به خاطر ساده کردن مطلب است، می‌توان نتیجه گرفت که جوابهای موج تخت معادلات ماکسول کاملاً کلی‌اند و همچنین:

موجهای الکترومغناطیسی تخت عرضی و میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} بردکدیگر د بر راستای انتشار عمودند.

تجربه این پیشگویی نظری معادلات ماکسول را کاملاً تأیید می‌کند و چندین پدیده از



شکل ۴.۱۹ موج الکترومغناطیسی کروی در فاصله دور از چشمه.

آن نتیجه شده است که در فصلهای بعد بررسی خواهند شد. علاوه بر موج تخت، موجهای الکترومغناطیسی کروی و استوانه‌ای را نیز می‌توان به عنوان جوابهای معادلات ماکسول در نظر گرفت. در فاصله‌های دور از چشمه، بخش محدودی از موج کروی و استوانه‌ای را می‌توان عملاً تخت در نظر گرفت و در این حالت نیز، همچنانکه شکل ۴.۱۹ نشان می‌دهد، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بریکدیگر و بر راستای انتشار (که در این حالت شعاعی است) عمودند.

۳.۱۹ انرژی و اندازه حرکت موج الکترومغناطیسی

اگر از معادله (۴۰.۱۶) استفاده کنیم، چگالی انرژی وابسته به میدان الکتریکی موج الکترومغناطیسی برابر می‌شود با

$$E_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

همچنین با استفاده از معادله‌های (۱۴.۱۹)، $B = E/c$ ، و (۸.۱۹)، $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ ، چگالی انرژی مغناطیسی که با معادله (۲۵.۱۷) داده می‌شود برابر است با

$$E_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0 c^2} E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

بنابراین $E_E = E_B$. یعنی چگالی انرژی الکتریکی موج الکترومغناطیسی با چگالی انرژی مغناطیسی آن برابر است. چگالی کل انرژی برابر می‌شود با

$$E = E_E + E_B = \epsilon_0 E^2 \quad (۱۵.۱۹)$$

مشابه با معادله (۴۴.۱۸)، شدت موج الکترومغناطیسی (یعنی انرژی که در واحد زمان از واحد سطح می‌گذرد) برابر است با

$$I = Ec = c\epsilon_0 E^2 \quad (۱۶.۱۹)$$

شدت میانگین موج الکترومغناطیسی مساوی است با $I_{ave} = c\epsilon_0 (E^2)_{ave}$. در حالت موج الکترومغناطیسی داریم

$$(E^2)_{ave} = E_0^2 [\sin^2 k(x - ct)]_{ave} = \frac{1}{2} E_0^2$$

به طوری که شدت میانگین برابر می‌شود با

$$I_{ave} = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2 \quad (۱۷.۱۹)$$

اکنون حاصلضرب برداری $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ را برای موج الکترومغناطیسی تخت حساب می‌کنیم.

راستای $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ را برای يك موج الكترومغناطیسی تخت تعیین می کنیم. راستای $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ برجهت موج عمود است، بنا براین بر راستای انتشار موج منطبق است (شکل ۵.۱۹). بزرگی آن نیز برابر است با

$$|\mathbf{E} \times \mathbf{B}| = EB = \frac{1}{c} E^2$$

بزرگی بردار $c\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ برابر است با E^2 . در این صورت بزرگی بردار $c^2\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ بردار پوینتینگ، برابر بزرگی I است. در نتیجه شار این بردار از سطح S ، که با رابطه زیر داده می شود

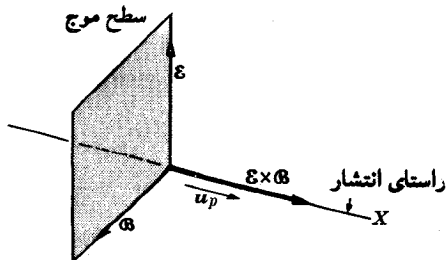
$$\int_S c^2 \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_N dS = \frac{dE}{dt} \quad (18.19)$$

نمایش انرژی است که در واحد زمان از سطح S می گذرد؛ به همین دلیل آن را با dE/dt نشان می دهند.

در فصل ۱۱ به این حقیقت پی بردیم که انرژی و اندازه حرکت عمیقاً بهم وابسته اند و يك چار-برداری (در بایست نظریه نسبیت) تشکیل می دهند. بنا براین انتظار داریم که موج الكترومغناطیسی علاوه بر حمل انرژی خود حامل مقداری اندازه حرکت نیز باشد. چون تابش الكترومغناطیسی با سرعت c منتشر می شود، می توانیم از معادله (۱۷.۱۱)، $p = vE/c^2$ ، که رابطه بین انرژی و اندازه حرکت را به دست می دهد استفاده کنیم. برای به دست آوردن اندازه حرکت p واحد حجم وابسته به يك موج الكترومغناطیسی، در رابطه (۱۷.۱۱) باید به جای v مقدار برابر آن (c) را قرار دهیم. در چنین شرایطی داریم

$$p = \frac{E}{c} = \frac{\epsilon_0 E^2}{c} = \epsilon_0 |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| \quad (19.19)$$

دانشجو بایستی تحقیق کند که بعد $\epsilon_0 |\mathbf{E} \times \mathbf{B}|$ عبارت است از $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$ که با بعد اندازه حرکت بر واحد حجم متناظر است. چون اندازه حرکت باید در راستای انتشار



شکل ۵.۱۹. تعریف راستای شارش انرژی در موج الكترومغناطیسی.

باشد، بنابراین معادلهٔ بالا را می‌توان به‌صورت برداری زیر نوشت

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c} \mathbf{u} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

که در آن \mathbf{u} بردار یکای راستای انتشار است. اگرچه معادلهٔ (۱۹.۱۹) را برای واحد حجم به‌دست آوردیم، ولی نتیجهٔ حاصل نشان می‌دهد که، برای یک مقدار دلخواه انرژی E در یک موج تخت، یک اندازه حرکت متناظر با $p = E/c$ در راستای انتشار وجود دارد. اگر یک موج الکترومغناطیسی دارای اندازه حرکت باشد، این موج دارای اندازه حرکت زاویه‌ای نیز هست. اندازه حرکت زاویه‌ای برای واحد حجم برابر است با

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \epsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

این رابطه را، در قیاس با اندازه حرکت زاویه‌ای یک ذرهٔ چرخان، می‌توان اندازه حرکت زاویه‌ای «مداری» نامید. علاوه بر این، تابش الکترومغناطیسی همانند اسپین ذرات بنیادی، (به‌مثال ۶.۱۵ مراجعه شود) دارای اندازه حرکت زاویه‌ای ذاتی، یا اسپین، نیز هست. در مورد امواج تخت قطبیدهٔ دایره‌ای می‌توان نشان داد که اسپین، بسته به اینکه قطبش ساعتگرد یا پادساعتگرد باشد، دارای مؤلفه‌ای برابر با $\mp E/\omega$ و در امتداد راستای انتشار است. برای یک موج قطبیدهٔ خطی، مقدار میانگین مؤلفهٔ اسپین در راستای انتشار برابر صفر است.

در نتیجه، هنگامی که ذرهٔ باردار تابش الکترومغناطیسی درمی‌آشامد یا گسیل می‌کند، نه تنها انرژی و اندازه حرکت آن تغییر می‌کند، بلکه اندازه حرکت زاویه‌ای آن نیز تغییر می‌کند. این نتیجه، چه به‌طور مستقیم و چه به‌طور غیرمستقیم، از طریق تجربه تأیید شده است. پس به‌طور خلاصه می‌توان نتیجه گرفت که

موج الکترومغناطیسی انرژی، اندازه حرکت و اندازه حرکت زاویه‌ای حمل می‌کند.

این نتیجه شگفت‌آور نیست. برهم‌کنش الکترومغناطیسی بین دو ذرهٔ باردار موجب تبادل انرژی و اندازه حرکت بین بارها می‌شود. این امر به‌وسیلهٔ میدان الکترومغناطیسی، که حامل انرژی و اندازه حرکت است صورت می‌گیرد. قبلاً در بخش ۱۴.۱۵ دربارهٔ اندازه حرکت وابسته به میدان الکترومغناطیسی بحث کردیم. رابطهٔ $p = E/c$ بین انرژی و اندازه حرکت از اهمیت خاصی برخوردار است. در فرصتهای دیگر بازم در این مورد گفتگو می‌کنیم و شواهد تجربی روشنی در تأیید این بیان ارائه خواهیم کرد.

مثال ۱۰.۱۹ دربارهٔ فشار تابشی بحث کنید.

حل: چون امواج الکترومغناطیسی حامل اندازه حرکت اند، بازتاب یا درآشامی آنها در سطح هر جسمی موجب تولید فشار می‌شود. این فشار در اساس با فشار گاز

به دیواره‌های ظرف خود که در مثالهای ۲.۹ و ۱۶.۹ توضیح داده شد یکی است. نخست چند حالت ساده را در نظر می‌گیریم. فرض کنید که یک موج الکترومغناطیسی تخت عمود بر یک سطح کاملاً درآشام می‌تابد (شکل ۶.۱۹). اندازه حرکت تابشی بر واحد حجم برابر است با p و مقدار اندازه حرکت تابشی در واحد زمان بر سطح A از ضرب p در cA به دست می‌آید و برابر است با $p c A$. اگر تابش کاملاً توسط سطح درآشامیده شود، $p c A$ اندازه حرکت درآشامیده شده در واحد زمان توسط سطح A ، یعنی نیروی وارد روی A است. از تقسیم آن بر A فشار ناشی از تابش به دست می‌آید

$$P_{\text{تابش}} = cp = E = \epsilon_0 E^2$$

از این رو در تابش عمودی، فشار تابش روی یک سطح کاملاً درآشام بسا چگالی انرژی موج برابر است.

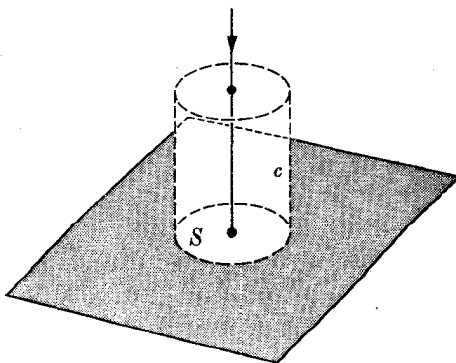
از طرف دیگر، اگر سطح بازتابنده کامل باشد، بعد از بازتاب، اندازه حرکت موج بازتاب با موج تابشی یکی ولی در سوی مخالف آن است. بنابراین تغییر اندازه حرکت در واحد زمان برابر است با $2p$ ، در نتیجه فشار تابش برابر می‌شود با

$$P_{\text{تابش}} = 2cp = 2E = 2\epsilon_0 E^2$$

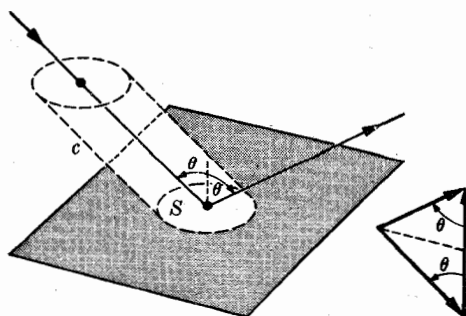
این نتایج را می‌توانیم تعمیم بدهیم و در مورد تابش مایل نیز به کار ببریم (شکل ۷.۱۹). در این حالت تغییر اندازه حرکت تابش روی یک سطح بازتابنده برابر $2p \cos \theta$ است و فشار تابشی متناظر برابر است با

$$P_{\text{تابش}} = 2cp \cos \theta = 2E \cos \theta$$

بر دانشجوست که تحقیق کند که اگر جای c را با v (سرعت مولکولها) و p را با nmv عوض کنیم این نتیجه با نتیجه مثال ۱۶.۱۹ یکی می‌شود. اگر تابش در تمام راستاها منتشر شود، برای به دست آوردن نتیجه نهایی، باید چنانکه در مثال ۱۶.۹ عمل کردیم،



شکل ۶.۱۹ فشار تابشی در تابش عمودی.



شکل ۷۰۱۹ فشار تابشی در تابش مایل. نمودار اندازه حرکتها در سمت راست نشان داده شده است.

تابش در راستاهای مختلف را باهم جمع کنیم (درحقیقت انتگرال بگیریم)

$$P_{\text{تابش}} = \frac{2}{3}cp = \frac{2}{3}E$$

اگر سطح درآشام کامل باشد، تغییر اندازه حرکت عمود بر سطح (به دلیل فکسدان موج بازتاب حامل اندازه حرکت) به نصف اندازه حالت قبل تقلیل پیدا می کند و به صورت زیر در می آید

$$P_{\text{تابش}} = \frac{1}{3}E$$

فشار تابشی، که با تجربه تایید و موجب چندین پدیده مهم شده است، به طور غیرمستقیم معادله (۱۹.۱۹) را تأیید می کند. به عنوان مثال، انحنای دنباله ستاره دنباله دار را می توان با فشار تابشی ناشی از تابش الکترومغناطیسی خورشید توضیح داد. جهت ارزیابی فشار تابشی در سطح زمین، باید انرژی تابشی را برابر $1.4 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}$ در نظر بگیریم که با چگالی انرژی (با تقسیم آن بر c) برابر با $4.7 \times 10^{-6} \text{ J m}^{-3}$ متناظر است. با فرض اینکه زمین یک درآشام کامل است و اینکه تابش از تمام جهات می آید، فشار تابشی برابر می شود با $E/3 = 1.6 \times 10^{-6} \text{ N m}^{-2} = P_{\text{تابش}}$. خوب است دانشجو این مقدار را با فشار جو که در حدود 10^5 N m^{-2} است مقایسه کند.

۴.۱۹ تابش دو قطبی الکتریکی نوسانی

تاکنون درباره امواج الکترومغناطیسی گفتگو کردیم ولی هرگز از چگونگی تولید آنها بحثی به میان نیاوردیم؛ به عبارت دیگر، درباره چشمه های امواج الکترومغناطیسی توضیحی نداده ایم. به عنوان مثال، اگر بخواهیم موجهای کشسان (مثلا صوت) را مطالعه

کنیم، می‌گوییم که چشمه این موجها جسمی مرتعش، مانند پوست روی طبل یا سیم ویولن است. در مورد امواج الکترومغناطیسی، چشمه موج آشکارا همان چشمه‌های میدان الکترو-مغناطیسی، یعنی بارهای متحرک‌اند. با داشتن تعدادی بار متحرک، از معادلات ماکسول (علی‌الاصول)، میدان الکترومغناطیسی حاصل از این بارها و در نتیجه ماهیت امواج الکترومغناطیسی حاصل به دست می‌آید. به جای بررسی جواب عمومی معادلات ماکسول برای بارهای با حرکت اختیاری (که از لحاظ نظری بسیار مهم، ولی برای بحث در این کتاب بسیار پیچیده است) توجه خود را روی دو حالت مهم، یکی حالت بارهای متحرک تشکیل دهنده دوقطبی الکتریکی نوسانی و دیگری حالت بارهای متحرک تشکیل دهنده دوقطبی مغناطیسی نوسانی، متمرکز می‌کنیم.

حالت دوقطبی الکتریکی نوسانی هنگامی ایجاد می‌شود که حرکت بارها را بتوان به طور جمعی به وسیله یک دوقطبی الکتریکی، که گشتاور آن طبق قانون $\Pi = \Pi_0 \sin \omega t$ بر حسب زمان تغییر می‌کند، توضیح داد. این حالت می‌تواند، به عنوان مثال، در مورد الکترونی که حرکت طبیعی آن در اتم مختل شده است، یا در مورد یک جریان نوسانی در آنتن خطی یک ایستگاه رادیویی صادق باشد. اگر گشتاور دوقطبی الکتریکی ثابت باشد، چنانکه در بخش ۱۱-۱۴ توضیح داده شد، تنها میدان الکتریکی تولید می‌شود. ولی اگر گشتاور دوقطبی الکتریکی نوسانی باشد، میدان الکتریکی نیز نوسان می‌کند و بنابراین تابع زمان است. این گفته به این معنی است که، همان‌طور که در قانون ماکسول - آمپر بیان شد، علاوه بر میدان الکتریکی میدان مغناطیسی نیز تولید می‌شود. نتیجه فوق را می‌توان چنین بیان کرد: در واقع دوقطبی الکتریکی نوسانی هم از جریان خطی نوسانی است و جریان الکتریکی همواره در اطراف خود میدان مغناطیسی تولید می‌کند.

جواب معادلات ماکسول در مورد دوقطبی الکتریکی نوسانی به عنوان یک مسئله ریاضی بسیار پیچیده‌تر از آن است که در اینجا مطرح شود ولی برای تعیین ویژگیهای اصلی آن می‌توان از شواهد فیزیکی استفاده کرد. در نقاط خیلی نزدیک به دوقطبی الکتریکی، اثر پس افتادگی ناشی از سرعت محدود انتشار امواج الکترومغناطیسی قابل اغماض است، زیرا فاصله r خیلی کوچک است (به توضیحات بخش ۱۴-۱۵ مراجعه شود). بنا بر این میدان به وجود آمده با میدان حاصل از یک دوقطبی الکتریکی ایستا، آن‌طور که در بخش ۱۱-۱۴ محاسبه شد، مشابه است. یعنی اگر فرض کنیم که محور Z بدموازات دوقطبی قرار دارد مؤلفه‌های میدان الکتریکی را می‌توانیم به صورت زیر

$$E_r = \frac{2 \Pi_0 \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3} = \frac{2 \Pi_0 \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \sin \omega t$$

$$E_\theta = \frac{\Pi_0 \sin \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3} = \frac{\Pi_0 \sin \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \sin \omega t \quad (20.19)$$

* در اینجا برای اینکه گشتاور با اندازه حرکت و فشار اشتباه نشود، نماد Π را برای آن در نظر گرفته ایم.

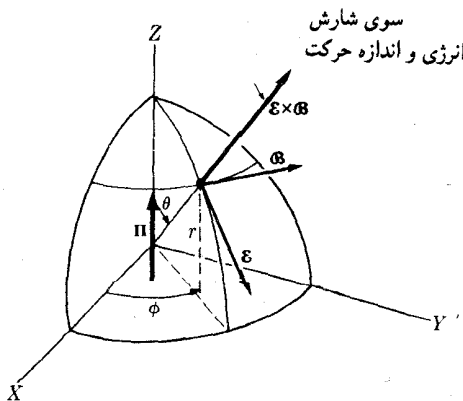
بنویسیم و از میدان مغناطیسی صرف نظر کنیم. ولی در فاصله‌های دور، سرعت محدود انتشار موجها موجب تغییر میدان می‌شود. حل معادله موج برای امواج کروی بادامنه یکسان در تمام جهات، که در بخش ۱۱.۱۸ آمد، نشان می‌دهد که در این حالت (اگرچه تقارن کروی وجود ندارد ولی تقارن محوری در اطراف محور نوسان دوقطبی وجود دارد) میدان الکترومغناطیسی ممکن است، به جای $1/r^2$ در فاصله‌های نزدیک، با $1/r$ به‌طور مجانب به فاصله بستگی داشته باشد (این نتیجه را جواب حقیقی معادلات ماکسول تأیید می‌کند). افزون بر این، در فاصله‌های دور، جایی که بتوان قسمت کوچکی از جمله موج را تحت نظر گرفت، میدان الکتریکی باید عمود بر راستای انتشار، که در امتداد بردار شعاعی \mathbf{r} است، باشد. بنا بر این $E_r = 0$. در این صورت میدان الکتریکی با رابطه زیر داده می‌شود

$$E = \frac{\Pi_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin(kr - \omega t) \quad (21.19)$$

و سوی آن همان است که در شکل ۸.۱۹ نشان داده‌ایم. از طرف دیگر، میدان مغناطیسی مربوط به جریان در امتداد محور Z ، باید با خطوط نیرویی که به شکل دایره و موازی با محورهای XY اند نشان داده شود. با استفاده از معادله (۱۴.۱۹) داریم

$$B = \frac{1}{c} E = \frac{\Pi_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 cr} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin(kr - \omega t) \quad (22.19)$$

راستای میدان در شکل ۸.۱۹ نشان داده شده است. بنا بر این \mathbf{E} و \mathbf{B} برهم عمودند. توجه داشته باشید که برای $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ ، یعنی برای نقاط واقع بر محور Z ، هم \mathbf{E} و هم \mathbf{B} صفرند. این گفته بدین معنی است که دامنه موج الکترومغناطیسی دوقطبی الکتریکی نوسانی، در راستای نوسان برابر صفر است. از طرف دیگر، مقدار $\sin \theta$ برای $\theta = \pi/2$ ، یعنی



شکل ۸.۱۹ میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی حاصل از دوقطبی الکتریکی نوسانی.

برای نقاط صفحه XY ، بیشینه است. بنا بر این شدت موج الکترومغناطیسی دوقطبی الکتریکی نوسانی در صفحه استوا بیشینه است. در تمام موارد، موج با میدان الکتریکی نوسانی در يك صفحه نصف النهار، قطبیده خیلی است. شکل ۹.۱۹ خطهای نیروی الکتریکی را در صفحه نصف النهار نشان می‌دهد. هر حلقه متناظر با يك نوسان کامل است. خطهای نیروی مغناطیسی دایره‌هایی اند موازی با صفحه XY که مرکز آنها روی محور Z است.

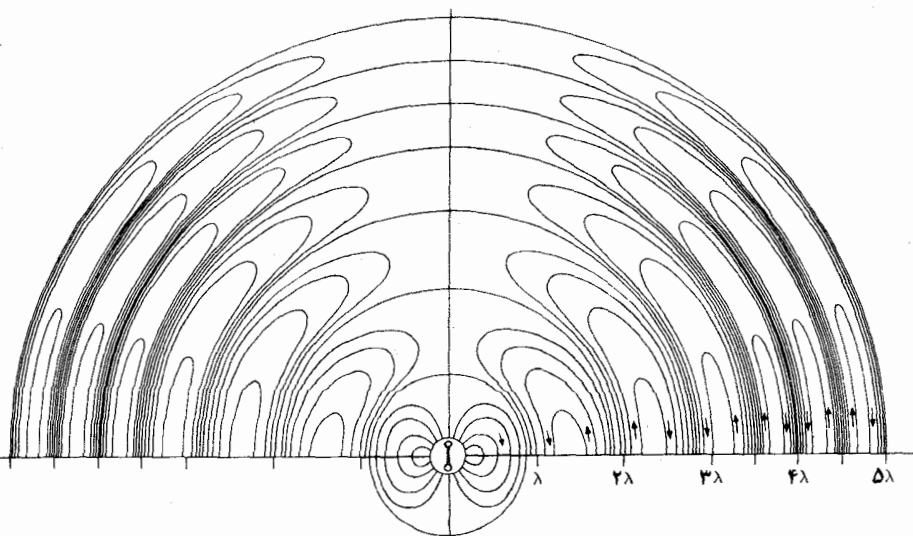
چون بردار $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ در راستای \mathbf{r} است، می‌شود فهمید که شارش انرژی و اندازه حرکت در راستای شعاعی است؛ بنا بر این برای اینکه دوقطبی در نوسان باقی بماند باید انرژی مصرف شود. اگر معادله‌های (۱۵.۱۹) و (۲۱.۱۹) را به کار ببریم درمی‌یابیم که چگالی انرژی در موج، در فاصله‌های خیلی دور از دوقطبی نوسانی، برابر است با

$$E = \epsilon_0 E^2 = \frac{\Pi_0 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 r^2} \frac{\omega^4}{c^4} \sin^2 (kr - \omega t)$$

چون $[\sin^2 (kr - \omega t)]_{ave} = 1/2$ است، چگالی متوسط انرژی برابر می‌شود با

$$E_{ave} = \frac{\Pi_0 \omega^4}{32\pi^2 c^4 \epsilon_0 r^2} \sin^2 \theta \quad (23.19)$$

شدت تابش از دوقطبی الکتریکی نوسانی (یعنی انرژی که در واحد زمان از واحد سطح در راستای انتشار عبور می‌کند) بنا به معادله (۱۶.۱۹)، برابر است با

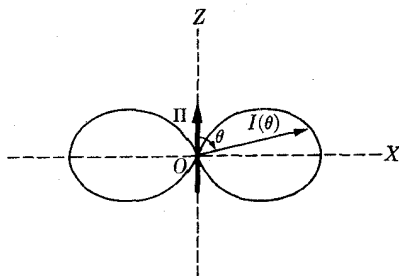


شکل ۹.۱۹ خطهای نیروی میدان الکتریکی حاصل از دوقطبی الکتریکی نوسانی.

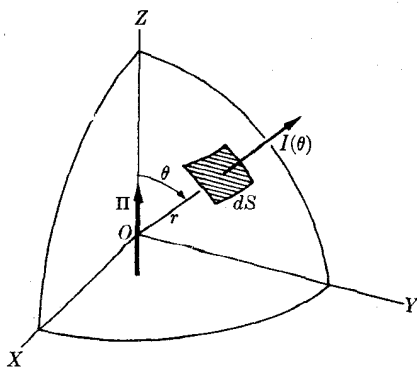
$$I(\theta) = C E_{ave} = \frac{\Pi_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3 \epsilon_0 r^2} \sin^2 \theta \quad (24.19)$$

این شدت دارای دو ویژگی جالب توجه است. اول اینکه، بنا به بحث موجهای کسروی در بخش ۱۱.۱۸، چنانکه انتظار می‌رفت شدت تابع $1/r^2$ است. علاوه بر این چون با $\sin^2 \theta$ متناسب است، تابع زاویه نیز هست. در نتیجه شدت در صفحه استوا بیشینه و در امتداد محور دو قطبی الکتریکی نوسانی برابر صفر است. این گفته بدین معنی است که دو قطبی الکتریکی نوسانی در راستای محور خود تابش نمی‌کند. بستگی زاویه‌ای $I(\theta)$ در شکل ۱۰.۱۹ نشان داده شده است.

برای محاسبه انرژی کل تابیده در واحد زمان توسط یک دو قطبی، باید چنین عمل کرد؛ بسا توجه به اینکه انرژی در راستای شعاعی شارش پیدا می‌کند (شکل ۸.۱۹ را ببینید) می‌توان یک کره با شعاع بسیار بزرگ را در اطراف دو قطبی رسم کرد (شکل ۱۱.۱۹).



شکل ۱۰.۱۹ بستگی زاویه‌ای شدت تابش الکترومغناطیسی حاصل از دو قطبی الکتریکی نوسانی.



شکل ۱۱.۱۹ محاسبه انرژی کل تابیده در واحد زمان از دو قطبی الکتریکی نوسانی.

انرژی که در واحد زمان از داخل سطح کوچک dS می گذرد برابر است با

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\text{م.ر.}} I(\theta) dS \quad (25.19)$$

حل این انتگرال يك مسئله صددرد ریاضی است که در اینجا از آن صرف نظر می کنیم. اما نتیجه آن برابر است با

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\Pi_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \quad (26.19)$$

چون گشتاور الکتریکی دوقطبی را می توان به صورت qz نوشت، که در آن q بار نوسان کننده و $z = z_0 \sin \omega t$ است، می توان qz_0 را جانشین Π_0 کرد؛ z_0 دامنه نوسانهاست. در بیشتر موارد، بارهای نوسان کننده پروتون یا الکترون اند که در داخل هسته یا اتم نوسان می کنند، بنابراین q برابر همان بار بنیادی e است. در این صورت معادله (26.19) به صورت زیر نوشته می شود

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2 z_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \quad (27.19)$$

در مورد الکترون در اتم، اندازه z_0 برابر مرتبه بزرگی اندازه اتمی یا در حدود 10^{-10}m است. با وارد کردن مقادیر سایر ثابتها، مشاهده می شود که تابش دوقطبی الکتریکی اتمی برابر است با

$$\frac{dE}{dt} \sim 10^{-24} \omega^4 W$$

در ناحیه اپتیکی، ω از مرتبه 10^{14}Hz ، یعنی $10^{-18} W$ یا $dE/dt \sim 10 \text{eVs}^{-1}$ است. این مقدار از دیدگاه ماکروسکوپی بسیار ناچیز، ولی در سطح اتمی قابل ملاحظه است. تابش از دوقطبی الکتریکی یکی از طرق بسیار مؤثر تولید امواج الکترومغناطیسی است و مهمترین سازوکاری است که به وسیله آن اتمها، مولکولها و هستهها تابش الکترو-مغناطیسی گسیل می کنند (پس در می آشامند). ولی برای بحث پیرامون تابش دوقطبی الکتریکی به وسیله اتمها، مولکولها و هستهها، باید از روشهای مکانیک کوانتومی بهره گرفت. بنابراین نتایج بیان شده در اینجا و در بخشهای بعد، تنها می توانند تخمین غیردقیقی از مرتبه های بزرگی وارد در عملیات را به دست بدهند. یکی از نتایج تجربی بسیار مهمی که از بررسی های مکانیک کوانتومی به دست می آید این است که اتم به طور پیوسته تابش نمی کند بلکه تابش آن به صورت گسسته است. يك نتیجه تجربی دیگر که باید منظور شود این است که تابش گسیل شده توسط اتمها (مولکولها یا هستهها) از مجموعه ای با سامدهای مشخص $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ تشکیل شده است، که مشخصه هر اتم، مولکول و یا هسته است.

این مجموعه را، همان طور که در بخش ۷.۱۶ متذکر شدیم، بیناب گسیلی جسم می نامند. همان طور که ضمن توضیح شکل ۹.۱۹ گفته شد، تابش دوقطبی الکتریکی قطبیده و میدان الکتریکی حاصل همواره در صفحه نصف النهار است. ولی به نظر نمی رسد که چشم ما نسبت به راستای قطبش امواج الکترومغناطیسی حساس باشد و این خاصیت بسیار مهم را نمی توان تنها با چشم غیر مسلح تشخیص داد. اما، جالب اینجاست که به نظر می رسد بعضی حشرات نسبت به راستای قطبش حساس اند. علاوه بر این، در اغلب مواد سمتگیری دوقطبیهای اتمی تابش کننده کاتوره ای است، و در تابش کل از جسم هیچگونه قطبش خالصی مشاهده نمی شود.

مثال ۲۰.۱۹ با به کار بردن معادله (۲۷.۱۹) توان انتقال یافته به وسیله آنتن يك دستگاہ رادیویی را محاسبه کنید.

حل: يك آنتن، در شکل بسیار ساده آن، از يك سیم به طول z_0 تشکیل شده است، که در آن يك جریان نوسانی وجود دارد. این جریان با رابطه $I = dq/dt$ به بار الکتریکی مربوط و بنابراین دامنه آن با رابطه $I_0 = q\omega$ بیان می شود. در نتیجه داریم

$$\Pi_0 = qz_0 = \frac{I_0 z_0}{\omega}$$

از قرارداد این رابطه در معادله (۲۶.۱۹) به دست می آید

$$\frac{dE}{dt} = \frac{I_0^2 \omega^2 z_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \quad (28.19)$$

از این رابطه توان لازم برای اینکه يك ایستگاه رادیویی با بسامد ω کار کند به دست می آید. از اعمال قانون اهم برای جریانهای متناوب (بخش ۱۰.۱۷) می دانیم که توان متوسط لازم برای نگهداری يك جریان برابر است با $(1/2)RI_0^2$ [معادله (۴۰.۱۷)]. بنابراین معادله (۲۸.۱۹) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2 z_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \right) I_0^2 \quad (29.19)$$

و در مقایسه با رابطه توان، داریم

$$R = \frac{\omega^2 z_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{z_0}{\lambda} \right)^2 \quad (30.19)$$

که آن را مقاومت تابشی آنتن می نامند و بر حسب اهم بیان می کنند. این امر را می توان با نوشتن ابعاد آن بر حسب یکاهای اصلی تحقیق کرد. البته مقاومت آنتن برابر مجموع مقاومتهای

تابشی و مقاومت رسانشی است. با قرار دادن مقادیر عددی در معادله (۳۰.۱۹) نتیجه می شود که $R = 787(z_0/\lambda)^2$ بر حسب اهم است. توجه داشته باشید که دو معادله (۲۹.۱۹) و (۳۰.۱۹) برای يك آنتن خطی با استفاده از تقریب دوقطبی الکتريکی به دست آمدند، از این رو این معادلات تازمانی اعتبار دارند که طول z_0 در مقایسه با طول موج تابش خیلی کوچک باشد.

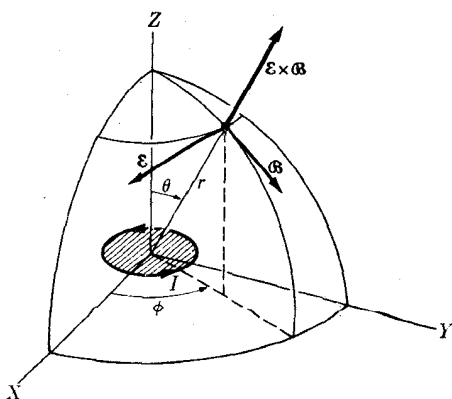
به عنوان مثال، آنتنی به طول 30m را که امواج الکترومغناطیسی با بسامد $5 \times 10^5 \text{Hz}$ تابش می کند در نظر می گیریم. مقدار ریشه میانگین مربعی جریان برابر است با 20A . با قرار دادن $\omega = 2\pi\nu = 3.14 \times 10^6 \text{s}^{-1}$ و $z_0 = 30\text{m}$ در معادله (۳۰.۱۹) برای مقاومت تابشی به دست می آید $R = 1997\Omega$. چون $I_{\text{rms}} = I_0/\sqrt{2}$ (به مسئله ۴۲.۱۷ مراجعه کنید)، یا $I_{\text{rms}} = 1/\sqrt{2} I_0$ است، در این صورت توان تابشی برابر می شود با

$$\frac{dE}{dt} = RI_{\text{rms}}^2 \sim 400\text{W}$$

توجه کنید که در این حالت $\lambda = c/\nu = 600\text{m}$ و در نتیجه $z_0/\lambda \ll 1$ ، بنا بر این تقریب به کار رفته درست است.

۵.۱۹ تابش دوقطبی مغناطیسی نوسانی

چشمه مهم دیگر امواج الکترومغناطیسی دوقطبی مغناطیسی نوسانی است. مبحث دوقطبی مغناطیسی خیلی شبیه به مبحث دوقطبی الکتريکی است، بجز اینکه جای میدان مغناطیسی با میدان الکتريکی عوض شده است.



شکل ۱۲.۱۹ میدانهای الکتريکی و مغناطیسی حاصل از دوقطبی مغناطیسی نوسانی.

در بخش ۶.۱۵ دوقطبی مغناطیسی را همچون یک حلقهٔ کوچک جریان، با گشتاور مغناطیسی $\mathfrak{M} = IA$ تعریف کردیم. در این رابطه I شدت جریان و A سطح حلقه است. فرض می‌کنیم که حلقه در صفحه XY و مرکز آن در مبدأ مختصات قرار دارد (شکل ۱۲.۱۹). اگر جریان بر طبق رابطه $I = I_0 \sin \omega t$ نوسان کند، گشتاور مغناطیسی برابر می‌شود با $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \sin \omega t$ ، که در آن $\mathfrak{M}_0 = I_0 A$ است. دوقطبی مغناطیسی ایستا، تنها میدان مغناطیسی ثابت تولید می‌کند ولی هر گاه دوقطبی نوسانی بسازد، میدان مغناطیسی ناشی از آن نیز در هر نقطه از فضا، نوسانی یا تابع زمان است. این گفته بدین معنی است که، بر طبق رابطهٔ فاراده - ماکسول، یک میدان الکتریکی نیز حضور دارد.

به سبب مشکلات ریاضی، در اینجا نیز مانند دوقطبی الکتریکی نوسانی، از به دست آوردن در رابطه‌های دقیق میدانهای الکتریکی و مغناطیسی صرف نظر می‌کنیم. در نقاط نزدیک به دوقطبی مغناطیسی اثر پس افتادگی ناشی از سرعت محدود انتشار امواج الکترومغناطیسی ناچیز است، زیرا فاصله r کوچک است، پس این میدان مشابه با میدان حاصل از دوقطبی مغناطیسی ایستاست که در بخش ۶.۱۵ توضیح داده شد، یعنی

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathfrak{M} \cos \theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathfrak{M}_0 \cos \theta}{r^3} \sin \omega t \quad (31.19)$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathfrak{M} \sin \theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathfrak{M}_0 \sin \theta}{r^3} \sin \omega t$$

و میدان الکتریکی قابل چشم‌پوشی است. ولی در فاصله‌های خیلی دور، سرعت محدود انتشار، تغییر قابل ملاحظه‌ای در میدان تولید می‌کند. مانند دوقطبی الکتریکی، می‌توان جوابی که به جای $1/r^3$ به طور مجانب تابع $1/r$ است، مانند معادلات (۳۱.۱۹)، با میدانهای الکتریکی و مغناطیسی واقع در صفحه عمود بر راستای انتشار امواج پیش بینی کرد. همچنین می‌توان پیش بینی کرد که اثر میدانهای الکتریکی و مغناطیسی برخلاف اثر آنها در دوقطبی الکتریکی خواهد بود. یعنی میدان مغناطیسی در صفحه نصف النهار و میدان الکتریکی در راستای عرضی است، به گونه‌ای که خطهای نیروی الکتریکی دوار می‌گردند و با محور Z اند. روابط این میدانها با چنین تقریبی برابرند با

$$E = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{\mathfrak{M}_0 \sin \theta}{r} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin(kr - \omega t) \quad (32.19)$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathfrak{M}_0 \sin \theta}{r} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin(kr - \omega t)$$

توجه داشته باشید که رابطه $B = E/c$ هنوز هم اعتبار دارد. سمتگیری نسبی میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} در مورد دوقطبی مغناطیسی نوسانی در شکل ۱۲.۱۹ نشان داده شده است. توجه کنید که

بردار $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ در راستای شعاعی است. این موج قطبیده خطی است و میدان مغناطیسی در صفحه نصف النهار نوسان می‌کند. یا به گفته دیگر، صفحه قطبش 90° نسبت به امواج دوقطبی الکتریکی چرخیده است. این خود وسیله‌ای برای تشخیص تابش دوقطبی الکتریکی از دوقطبی مغناطیسی است.

با استدلالی مشابه آنچه قبلاً برای به‌دست آوردن معادله (۲۳.۱۹) به‌کار بردیم، چگالی متوسط انرژی تابش گسیل شده از دوقطبی مغناطیسی نوسانی برابر است با

$$E_{\text{ave}}(\theta) = \frac{\pi \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \theta \quad (23.19)$$

شدت تابش دوقطبی مغناطیسی، $I(\theta) = cE_{\text{ave}}(\theta)$ ، همانند دوقطبی الکتریکی نوسانی بازهم در امتداد محور دوقطبی (محور Z) برابر صفر و در صفحه استوانه پیشینه است. انرژی متوسط تابش در واحد زمان توسط دوقطبی مغناطیسی نوسانی برابر است با

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\pi \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \quad (24.19)$$

این نتیجه با همان روشی که برای دوقطبی الکتریکی به‌کار رفت به‌دست می‌آید. در مورد الکترون در اتم، بنا به معادله (۲۷.۱۵) می‌دانیم که $\pi \omega_0 = -(e/2m_e)L$ است که در آن L اندازه حرکت زاویه‌ای مدار الکترون است؛ در نتیجه

$$\frac{dE}{dt} = \frac{(e/2m_e)^2 L^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \quad (25.19)$$

اندازه $e/2m_e$ برابر $1.759 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$ و اندازه حرکت زاویه‌ای L از مرتبه $10^{-34} \text{ J s}^{-1}$ (به‌مثال ۷۰.۱۵ مراجعه شود) است و بنابراین

$$\frac{dE}{dt} \approx 10^{-8} \omega^4 \text{ W}$$

بنابراین، از مقایسه این نتیجه با آنچه برای دوقطبی الکتریکی به دست آمد، نسبت شدتهای تابش دوقطبی مغناطیسی به تابش دوقطبی الکتریکی، برای اتمها (و همچنین مولکولها) از مرتبه 10^{-6} است. این موضوع نشان می‌دهد که به‌ازای بسامدهای یکسان، تابش دوقطبی مغناطیسی اتمها در مقابله تابش دوقطبی الکتریکی قابل چشم‌پوشی است و نباید آن را به حساب آورد مگر هنگامی که، به‌در دلیل، دوقطبی الکتریکی حضور نداشته باشد. چون توضیح این امر نیازمند مکانیک کوانتومی است، بنابراین در اینجا آن را بررسی نمی‌کنیم. فعلاً چون $L = mrv$ و اندازه‌های r و z از یک مرتبه مقدارند، نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{دوقطبی مغناطیسی}} \approx \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{دوقطبی الکتریکی}}$$

بنا بر این این دو مقدار فقط برای الکترونهاى خیلی تندرو قابل مقایسه اند. ولی، در هسته ها تابش دوقطبی مغناطیسی نسبتاً قویتر از آنها و مولکولهاست.

مثال ۳۰۱۹ تابش دوقطبی مغناطیسی را بررسی کنید.

حل: از به کار بردن فرمول (۳۴.۱۹) در مورد آنتن فرستنده و با قرار دادن $\mathcal{M}_0 = I_0 A$ برای توان متوسط لازم برای تغذیه آنتن به دست می آید

$$\frac{dE}{dt} = \frac{I_0^2 A^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \quad (36.19)$$

از مقایسه این رابطه با معادله (۲۸.۱۹) مربوط به آنتن دو قطبی الکتریکی نتیجه زیر به دست می آید

$$\frac{\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{دوقطبی مغناطیسی}}}{\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{دوقطبی الکتریکی}}} = \left(\frac{A\omega}{z_0 c}\right)^2$$

ولی $\omega/c = k = 2\pi/\lambda$ و A در حدود z_0^2 است. بنا بر این داریم

$$\frac{\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{دوقطبی مغناطیسی}}}{\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{دوقطبی الکتریکی}}} \approx \left(\frac{2\pi z_0}{\lambda}\right)^2 \quad (37.19)$$

چون z_0 در حالت عادی در آنتنهای انتشار امواج رادیویی خیلی پایین تر از λ است، یک بار دیگر نتیجه می گیریم که مد مغناطیسی تابش دوقطبی از مد الکتریکی خیلی ضعیفتر است. کار بست معادله (۳۷.۱۹) در مورد یک اتم بسیار آموزنده است. در این حالت z_0 از مرتبه 10^{-10} m و در ناحیه ایتیکی، λ در حدود 10^{-7} m است. از اینجا برای نسبت موجود در معادله (۳۷.۱۹) مقداری از مرتبه 10^{-6} به دست می آید که با بر آورد قبلی ما سازگار است. از طرف دیگر، z_0 برای هسته ها از مرتبه 10^{-14} m و λ از مرتبه 10^{-12} m است؛ بنا بر این نسبت (۳۷.۱۹) در حدود 10^{-4} و تابش دوقطبی مغناطیسی در آنها نسبتاً مهمتر از مورد آنهاست.

مثال ۴۰۱۹ مقاومت تابشی آنتنی به شکل حلقه را حساب کنید. آن را در مورد آنتن دایره ای به طول 30 m که جریان مؤثر 20 A از آن می گذرد و بسا بسامد $5 \times 10^5 \text{ Hz}$ نوسان می کند به کار ببرید.

حل: از معادله (۳۶.۱۹) داریم

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{A^2 \omega^4}{\epsilon \pi \epsilon_0 c^3} \right) I_0^2$$

بنا بر این مقاومت تابشی برابر می‌شود با

$$R = \frac{A^2 \omega^4}{\epsilon \pi \epsilon_0 c^3} = \frac{\lambda \pi^2}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{A}{\lambda^2} \right)^2 = 311170 \left(\frac{A}{\lambda^2} \right)^2 \Omega$$

در مورد این مثال، شعاع برابر $(30/2\pi) \text{ m}$ و مساحت برابر $900/4\pi = 716 \text{ m}^2$ است. سایر مقادیر قبلاً در مثال ۲۰۱۹ داده شده‌اند. بنا بر این برای مقاومت تابشی $R = 000012 \Omega$ به دست می‌آید. توان تابشی متوسط برابر است با

$$\frac{dE}{dt} = RI_{\text{rms}}^2 = 0024 \text{ W}$$

که می‌توان آن را با نتیجه مثال ۲۰۱۹ مقایسه کرد.

۶.۱۹ تابش چند قطبیه‌های نوسانی مرتبه بالاتر

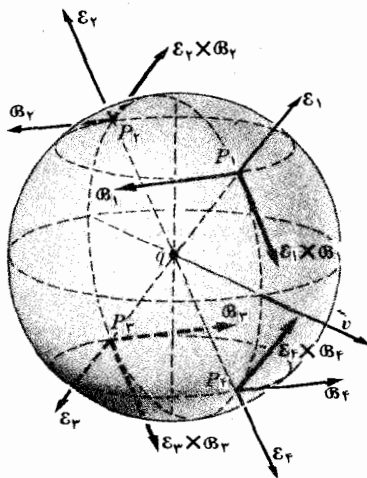
در دو بخش قبل تابش منتشر شده توسط دو قطبیه‌های الکتریکی و مغناطیسی را بررسی کردیم. ولی در فصل‌های ۱۴ و ۱۵ دیدیم که در نتیجه آرایش‌های متفاوت بارها و جریان‌ها چند قطبیه‌های مرتبه بالاتر، خواه الکتریکی و خواه مغناطیسی، نیز وجود دارند. اگر این چند قطبیه‌ها نوسان کنند، موج‌های الکترومغناطیسی تولید می‌کنند که در توزیع زاویه‌ای و حالت قطبش با موج‌های دو قطبیه‌ها فرق می‌کنند. به‌طور کلی، هرچه مرتبه قطبیه بالاتر می‌رود به‌ازای ابعاد یکسان و بسامدهای برابر، شدت آنها نسبت به شدت یک دو قطبیه ضعیفتر می‌شود. به‌عنوان مثال، اگر ρ مرتبه بزرگی ابعاد سیستم و λ طول موج آن باشد، نسبت تابش یک چهار قطبیه الکتریکی به یک دو قطبیه الکتریکی از مرتبه $(\rho_0/\lambda)^2$ است. برای اتم‌ها، ρ از مرتبه 10^{-10} m و برای نور مرئی، λ از مرتبه 10^{-7} m است، بنابراین $(\rho_0/\lambda)^2$ تقریباً برابر 10^{-6} می‌شود برای هسته‌ها، ρ از مرتبه 10^{-14} m و λ از مرتبه 10^{-12} m است. در این صورت برای $(\rho_0/\lambda)^2$ در حدود 10^{-4} به دست می‌آید و در اینجا تابش چهار قطبیه الکتریکی نسبتاً قابل توجه است. توجه داشته باشید که در هر دو حالت تابش چهار قطبیه الکتریکی از همان مرتبه تابش دو قطبیه مغناطیسی است. این نتایج نشان می‌دهند که تابش دو قطبیه الکتریکی در سیستم‌های اتمی نقش مهمتری را به‌عهده دارند. با وجود این، در بعضی هسته‌ها، تابش چهار قطبیه و حتی هشت قطبیه الکتریکی را باید به حساب آورد. تابش چند قطبیه‌های مرتبه بالاتر بینهایت ضعیف است و جز در شرایط خیلی خاص مشاهده نمی‌شوند.

۷.۱۹ تابش بار شناهدار

در بخش‌های ۴.۱۹ و ۵.۱۹ دو سازوکار خاص تابش الکترومغناطیسی بین تابش‌های دو قطبیه

الکتریکی و دوقطبی مغناطیسی را بررسی کردیم. اما درک کلیتری از سازوکار تابش الکترومغناطیسی ضروری است. نخست يك بار با حرکت یکنواخت یعنی ذره بارداري که با سرعت ثابت حرکت می کند را در نظر می گیریم. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی چنین بساری در بخش ۱۳.۱۵ مورد بررسی قرار گرفتند. میدان الکتریکی شعاعی و میدان مغناطیسی عرضی است و خطهای نیزوی آن دایره‌هایی هستند که مرکزشان روی خط مسیر است. شکل ۱۳.۱۹ میدان الکتریکی \mathbf{E} و میدان مغناطیسی \mathbf{B} را در چهار نقطه متقارن P_1, P_2, P_3, P_4 نشان می‌دهد. در هر نقطه بردار $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ نیز نشان داده شده است. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که اگر سهم بردار $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ را به هر نقطه از فضا اضافه کنیم، مؤلفه‌های عمود بر راستای حرکت همدیگر را خنثی می‌کنند، درحالی که مؤلفه‌های موازی با این راستا همسوهستند و با یکدیگر جمع می‌شوند. این امر بدین معنی است که يك شارخالص انرژی در راستای جابجایی بار الکتریکی وجود دارد. این موضوع از لحاظ فیزیکی نیز قابل درک است، زیرا بار الکتریکی همراه خود میدان (و در نتیجه همزمان انرژی و اندازه حرکت میدان) را انتقال می‌دهد. در نقاط ثابت شده در دستگاه مختصات آزمایشگاه، میدان در نقاط واقع در پشت بار الکتریکی کاهش می‌یابد در صورتی که در نقاط واقع در سمت راست بار به همان اندازه افزوده می‌شود. این امر مستلزم انتقال انرژی از چپ به راست است (یعنی در راستای حرکت بار) آنطور که در شکل دیده می‌شود) که شار انرژی بالا را نتیجه می‌دهد.

برای اینکه بدانیم انرژی تابیده می‌شود یا نه، باید شار بردار $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ را از داخل سطح بسته محیط بر بار محاسبه کنیم. با استفاده از معادله (۱۸.۱۹) برای سطح بسته، داریم



شکل ۱۳.۱۹ میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی يك بار در حرکت یکنواخت.

$$\frac{dE}{dt} = c^2 \epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_N dS$$

سطح بسته را کره‌ای به شعاع r و به مرکز بار الکتریکی انتخاب می‌کنیم. از شکل ۱۳-۱۹ پیداست که بردار $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ در هر نقطه بر سطح کره مماس است، بنا بر این بر \mathbf{u}_N برداری عمود بر سطح، عمود است. در نتیجه داریم

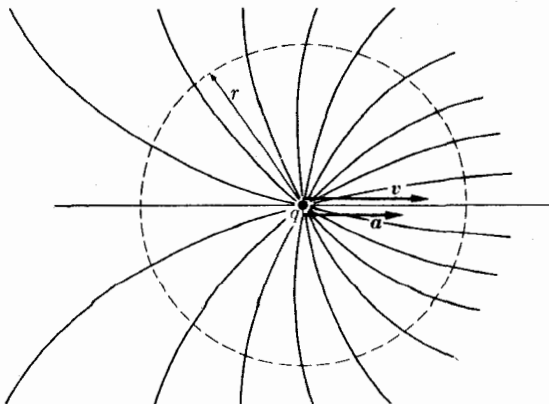
$$(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_N = 0$$

و شار خالص انرژی از داخل سطح کره‌ای برابر صفر است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که

بار الکتریکی در حرکت مستقیم‌الخط یکنواخت انرژی الکترومغناطیسی تابش نمی‌کند.

این موضوع کاملاً قابل درک است. زیرا در دستگاه مختصات لخت وابسته به بار، میدان ایستاست و انرژی ثابت باقی می‌ماند؛ در نتیجه در دستگاه مختصات وابسته به آزمایشگاه نیز انرژی باید ثابت باقی بماند. در این حالت فقط یک شارش پایای انرژی در امتداد راستای حرکت بار وجود دارد.

در مورد بار الکتریکی شتابدار وضع کاملاً به گونه‌ی دیگر است. میدان الکتریکی بار شتابدار دیگر شعاعی نیست و تقارن چپ - به - راست نیز ندارد. چون رابطه میدان در این حالت خیلی پیچیده است، وارد بحث آن نمی‌شویم؛ ولی خط‌های نیروی آن نقشی مشابه با شکل ۱۴-۱۹ دارند. هنگامی که ذره حرکت می‌کند، میدان در سمت چپ کاهش می‌یابد و میدان در سمت راست افزایش پیدا می‌کند، ولی به سبب شتاب بار، افزایش میدان (که با سرعت جدید و بزرگتری متناظر است) از کاهش میدان کسه قبلاً وجود داشت (و با سرعت کمتر قبلی متناظر بود) خیالی بیشتر است. بنابراین برای برقراری میدان باید



شکل ۱۴-۱۹ خطوط نیروی ذره شتابدار.

مقداری انرژی خالص اضافی به تمام نقاط فضا منتقل شود. در نتیجه می توان گفت

بار الکتریکی شتابدار انرژی الکترومغناطیسی تابش می کند.

این امر بدین معنی است که هنگام بررسی حرکت ذره باردار تحت اثر نیرو، باید تابش انرژی را نیز منظور کنیم. تابش انرژی بررسی معادله حرکت ذره را مشکلتر می کند، بدین دلیل و نیز به خاطر اینکه در بیشتر موارد عملی (مواردی که در آنها شتاب کوچک و سرعت خیلی پایینتر از c است) این سازه خیلی کوچک است، قبلا آن را منظور نکرده ایم.

با بکار بردن مقادیر مناسب برای \mathbf{E} و \mathbf{B} ، می توان ثابت کرد که اگر بار شتابدار برای لحظه ای در حال سکون باشد یا نسبت به ناظر بکنندی حرکت کند (به گونه ای که بتوان از تمام اثرهای پس افتادگی ناشی از سرعت محدود انتشار موج چشم پوشید)، انرژی تابشی در واحد زمان از داخل سطحی به شعاع r که بار الکتریکی را احاطه کرده بر ابر است با

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 a^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \quad (38.19)$$

که در آن a شتاب بار الکتریکی است. این نتیجه که بنام فرمول لادمود معروف است، در اساس با معادله (۲۶.۱۹) یکی است، زیرا برای بار نوسان کننده در امتداد محور Z ، $a = -\omega^2 z$ است. بنا بر این داریم

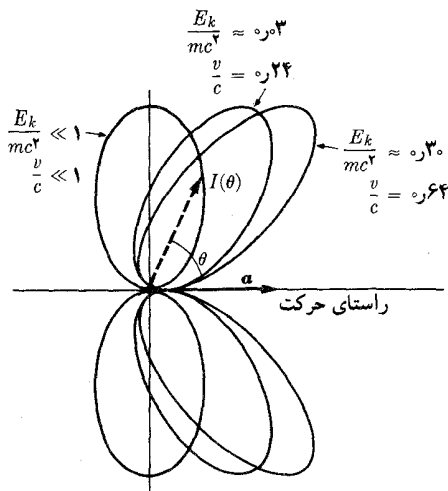
$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 z^2 \omega^4}{4\pi\epsilon_0 c^3}$$

و برای به دست آوردن انرژی تابشی میانگین به $\langle z^2 \rangle_{ave}$ نیاز داریم، که در اینجا برابر است با $z_0^2/2$. با این جانشانی معادله (۲۶.۱۹) به دست می آید.

يك نتیجه مهم این است که برای حفظ حرکت شتابدار بار، باید انرژی تابشی آن جبران شود، یعنی مقداری انرژی به آن داده شود. این گفته بدین معنی است که هر گاه بدین یون در شتابدهنده خطی (به عنوان مثال شتابدهنده وان دوگراف) شتاب داده شود، بخشی از انرژی داده شده به آن به صورت انرژی تابشی الکترومغناطیسی تلف می شود. اما این اتلاف انرژی، بجز برای انرژیهای نسبی، قابل چشم پوشی است.

نتیجه جالب دیگر این است که اگر تمام جرم منشأ الکتریکی داشته باشد، همان طور که در مثال ۶.۱۷ بیان کردیم، آنگاه لختی را می توان چنین تعبیر کرد: بار در حال حرکت شتابدار برای تولید میدان الکترومغناطیسی نیازمند دریافت مقداری انرژی است. هر گاه چشمه انرژی در دسترس نباشد، بتدریج از سرعت ذره کاسته می شود تا اینکه در يك دستگاه لخت به حالت سکون در می آید. ولی این موضوع هنوز در مرحله فرضیه است و مجال گفتگو در آن باقی است.

هر گاه شتاب موازی سرعت باشد، توزیع زاویه ای انرژی تابشی از قانون $\sin^2\theta$ پیروی می کند؛ شکل ۱۰.۱۹ این موضوع را برای يك دو قطبی الکتریکی، تا هنگامی



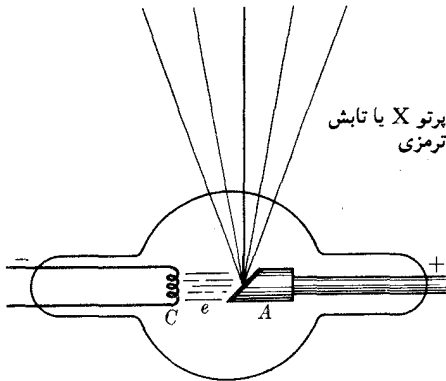
شکل ۱۵-۱۹ توزیع زاویه‌ای انرژی تابشی ذره شتابدار برای مقادیر مختلف v/c .

که سرعت ذره در مقایسه با c خیلی کوچک باشد، نشان می‌دهد. یعنی با استفاده از فرمول (۲۴-۱۹) همراه با تغییرات لازم (این تغییرات عبارت‌اند از جانشین کردن $q^2 z^2$ با Π^2 و $\omega^2 z$ با شتاب a ، و با توجه به اینکه ما مقادیر لحظه‌ای را به کار برده‌ایم نه مقادیر میانگین را، حذف سازه $(1/2)$ درمی‌یابیم که شدت تابش را، در راستایی که با راستای سرعت زاویه θ می‌سازد، می‌توان به صورت زیر نوشت

$$I(\theta) = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0 r^2} \sin^2 \theta \quad (39-19)$$

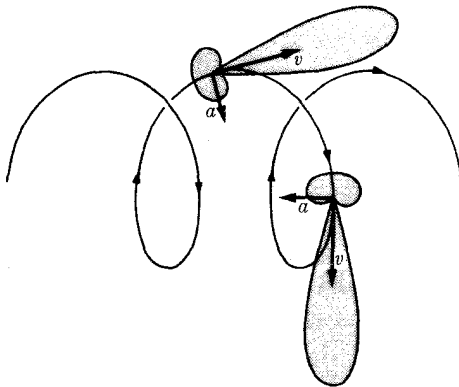
چنانکه شکل ۱۵-۱۹ نشان می‌دهد، توزیع زاویه‌ای $I(\theta)$ نسبت به صفحه‌ای که از بار می‌گذرد و بر راستای حرکت ذره عمود است تقارن دارد. بسا وجود این، در ناحیه انرژی‌های بالا، بیشینه شدت انرژی تابشی یک ذره شتابدار روی یک سطح مخروطی قرار دارد. سم‌نگیری این سطح مخروطی، همان‌طور که شکل ۱۵-۱۹ نشان می‌دهد، در جهت راستای حرکت ذره است. با افزایش سرعت ذره زاویه رأس مخروط کاهش می‌یابد.

اگر سرعت ذره کند شود، بازهم رابطه (۳۸-۱۹) اعتبار خود را حفظ می‌کند و انرژی تابشی برابر فزونی انرژی است که میدان الکترومغناطیسی در هر لحظه در نتیجه کاهش سرعت ذره داراست. به عنوان مثال، این مورد هنگامی رخ می‌دهد که باری تندرو، مانند الکترون یا پروتون، با هدف برخورد کند. بخش قابل توجهی از انرژی کل این بار به صورت تابشی به نام تابش ترمزی از بین می‌رود (شکل ۱۶-۱۹). این فرایند سازوکار



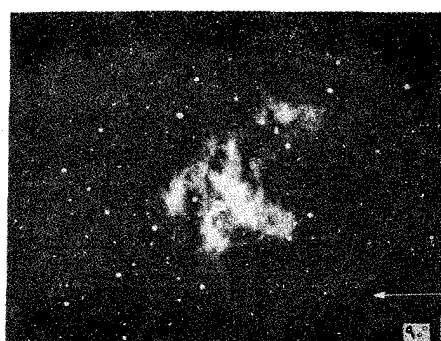
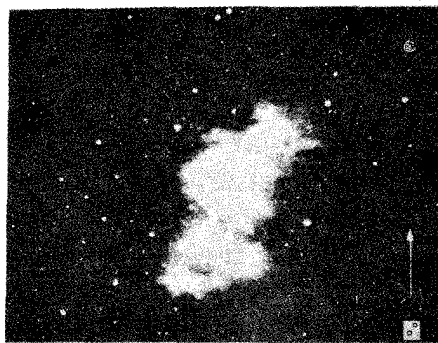
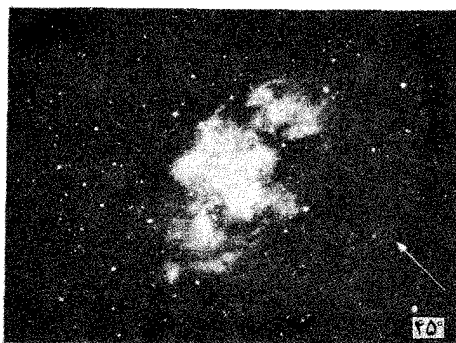
شکل ۱۶.۱۹ تابش گسیلی بار کند شده هنگام برخورد با هدف A در لوله X . هدف باید جسمی با نقطه ذوب بالا باشد و دائماً سرد شود.

اصلی تولید تابش در لامپهای پرتو X است که در فیزیک، پزشکی و صنعت به کار می‌روند. اگرچه شکل ۱۶.۱۹ حالتی را نشان می‌دهد که در آن شتاب با سرعت همراستاست و السی بحث ما برای هرگونه حرکت شتابداری صادق است. به عنوان مثال، ذره باردار متحرک در مسیر دایره‌ای شتاب مرکزگرا دارد، از این رو تابش می‌کند. بنابراین هنگامی که به یونی در شتابدهنده چرخه‌ای، مانند سیکلوترون، بتاترون یا سنکروترون شتاب داده می‌شود، بخشی از انرژی که می‌گیرد، به صورت تابش الکترومغناطیسی از بین می‌رود.



شکل ۱۷.۱۹ تابش سنکروترونی ذره‌ای که در داخل میدان مغناطیسی جا بجا می‌شود. توزیع زاویه‌ای شدت در دو وضع نشان داده شده است. راستای سرعتها و شتابها نیز نمایش داده شده‌اند.

این امر در شتابدهنده‌های چرخه‌ای از شتابدهنده‌های خطی نسبتاً مهمتر است. ما قبلاً در بحث سیکلوترون و بتاترون این اثر را منظور نکردیم زیرا این کار، تا آنجا که انرژی خیلی بزرگ نباشد و شتاب کوچک باقی بماند قابل قبول است. ولی هنگامی که ذرات انرژیهای بالاتری می‌گیرند (مانند انرژی که در سنکروترونها به دست می‌آورند) شتاب بزرگتری پیدا می‌کنند، و در نتیجه اتلاف انرژی ناشی از تابش، به نام تابش سنکروترونی، خیلی اهمیت پیدا می‌کند. این پدیده در ساختمان شتابدهنده‌های چرخه‌ای انرژیهای خیلی بالا محدودیتهای جدی به وجود می‌آورد. هنگامی که ذره‌ای در مارپیچهای يك میدان مغناطیسی، آنطور که در بخش ۳۰۱۵ مشاهده کردیم، به دام می‌افتد نیز تابش سنکروترونی گسیل می‌کند. چون تابش الکترومغناطیسی مرجحاً در راستای عمود بر راستای شتاب گسیل می‌شود (به شکل ۱۵۰۱۹ مراجعه شود) و چون شتاب در راستای محور مارپیچ و عمود بر سرعت است، نتیجه می‌گیریم که تابش سنکروترونی اساساً در راستای حرکت و در داخل يك مخروط گسیل می‌شود. محور مخروط، چنانکه شکل ۱۷۰۱۹ نشان می‌دهد، بر مسیر الکترون



شکل ۱۸۰۱۹ تابش سنکروترون سحابی خرنجنگ. عکسها توسط وسیله‌ای که تنها تابش در راستای بردار الکتریکی (روی شکل مشخص است) را از خود عبور می‌دهد گرفته شده است. تفاوت عکسها نمایانگر قطبی بودن تابش است.

مماس است. تابشهای ذرات باردار گرفتار در میدان مغناطیسی زمین، لکه‌های خورشیدی یا بعضی اجرام دور (مانند بعضی از سحابیها) اساساً از این گونه‌اند. شکل ۱۸.۱۹ چهار عکس از سحابی خرجنگ (سرطان) را نشان می‌دهد. تابش دریافتی را (که از بسامدهای رادیویی تا فرابنفش فرین را دربر می‌گیرد)، تابش سنکروترونی الکترونیایی با انرژی تا 10^{12} eV فرض می‌کنند که در یک میدان مغناطیسی از مرتبه 10^{-8} T روی مسیرهای دایره‌ای یا مارپیچی حرکت می‌کند. همچنانکه از روی تفاوت عکسها دیده می‌شود، این تابش نشان‌دهنده یک قطبش بسیار شدید است. در عکس برداری، از صافی قطبی‌کننده‌ای استفاده شده است که تنها به تابشهایی که دارای راستای معین‌اند امکان عبور می‌دهد. پیکانها سوی میدان الکتریکی را نشان می‌دهند.

اکنون نکته جالب دیگری را که به ساختار اتمی مربوط می‌شود بررسی می‌کنیم. در بخش ۷.۱۴ گفتیم که، در نتیجه آزمایشهای رادفورد روی پسران کندی ذرات آلفا، اتم را به صورت یک هسته مرکزی با بار مثبت، که الکترونها با بار منفی در مدارهای بسته‌ای به دور آن می‌گردند، فرض می‌کنیم. ولی این امر ایجاب می‌کند که حرکت الکترونها شتابدار باشد. اگر مطالب این بخش را در مورد یک اتم به کار ببریم، آنگاه باید تمام اتمها به طور پیوسته انرژی تابش کنند. در نتیجه این افت انرژی، مدارهای الکترونها منقبض می‌شوند و انقباض متناظری نیز در اندازه تمام اجسام وجود خواهد داشت. بدیهی است که اگر تمام مواد یکسان بودند توانایی آشکارسازی چنین انقباضی را نداشتیم. زیرا این پدیده روی تمام اجسام، چه آنها که اندازه گیری می‌شدند و چه وسیله اندازه گیری، به طور یکسانی تأثیر می‌گذاشت. ولی چون اتمهای عناصر گوناگون متفاوت‌اند، بنابراین با آهنگهای متفاوت منقبض می‌شوند و همین امر اثر قابل ملاحظه‌ای تولید می‌کند. با وجود این، نه این انقباض ماده مشاهده شده است و نه تابش پیوسته وابسته به آن. بنابراین باید نتیجه گرفت که بر حرکت الکترونها اصول دیگری حاکم است که تاکنون مورد توجه قرار نگرفته‌اند. این اصول قوانین مکانیک کوانتومی‌اند که تا حدودی بعضی از نتایج این بحث را تعدیل می‌کنند.

مثال ۵.۱۹ رابطه‌ای برای انرژی تابشی بار شتابدار در واحد زمان بدست آورید که برای هر سرعتی از بار و هر راستایی از شتاب آن صادق باشد.

حل: فرمول لارمور، معادله (۳۸.۱۹)، فقط هنگامی دقیقاً درست است که ذره موقتاً نسبت به ناظر در حال سکون باشد. برای محاسبه مقدار انرژی تابشی ذره، از دید ناظری که آن را با سرعت v مشاهده می‌کند، باید تبدیلات لورنتس را برای تمام کمیتهایی که در این رابطه وجود دارند انجام دهیم. فرض کنید که بار نسبت به ناظر O' ، که از چارچوب مرجع $X'Y'Z'$ استفاده می‌کند موقتاً در حال سکون باشد. معادله (۳۸.۱۹) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{dE'}{dt'} = \frac{q^2 a'^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

برای ناظر O که نسبت به آن ذره با سرعت v حرکت می‌کند و از چارچوب مرجع XYZ استفاده می‌کند، باید dE/dt را به جای dE'/dt' قرار داد. ولی dt و dt' که هر دو فاصله زمانی متناظر با یک نقطه در چارچوب مرجع $X'Y'Z'$ اند با رابطه (۳۴.۶) یعنی $dt = dt'/\sqrt{1-v^2/c^2}$ به هم مربوط می‌شوند. همچنین dE و dE' (که عبارت‌اند از تغییرات انرژی یک ذره که اندازه حرکت آن نسبت به چارچوب مرجع $X'Y'Z'$ صفر است)، طبق معادله (۲۷.۱۱)، یعنی رابطه $dE = dE'/\sqrt{1-v^2/c^2}$ به هم مربوط می‌شوند. (نحوه استدلال دیگر عبارت است از اینکه E/c مانند ct تبدیل می‌پذیرد، زیرا هر دو چهارمین مؤلفه یک چهار برداری‌اند.) بنابراین $dE/dt = dE'/dt'$ است و برای هر دو ناظر طرف چپ فرمول بدون تغییر باقی می‌ماند. برای تبدیل سمت راست فرمول لارمور، از معادله (۳۹.۶) برای شتاب ذره که توسط هر دو ناظر اندازه‌گیری می‌شود، استفاده می‌کنیم. در نتیجه داریم

$$a'^2 = \frac{a^2 - (\mathbf{v} \times \mathbf{a})^2 / c^2}{(1 - v^2/c^2)^3}$$

بنابراین

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{a^2 - (\mathbf{v} \times \mathbf{a})^2 / c^2}{(1 - v^2/c^2)^3} \quad (۴۰.۱۹)$$

این نتیجه به نام فرمول لاینارد معروف است. این فرمول برای اولین بار در سال ۱۲۷۷/۱۸۹۸، قبل از تکامل نظریه نسبیت به دست آمده است. می‌توان ثابت کرد که در فرمول لاینارد اثرهای پس‌افتادگی ناشی از سرعت محدود انتشار تابش الکترومغناطیسی منظور شده است.

اگر تابش موازی سرعت باشد، $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = 0$ و معادله (۴۰.۱۹) به صورت زیر تحویل می‌شود

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\parallel} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 (1 - v^2/c^2)^3} \quad (۴۱.۱۹)$$

از این رابطه برای برآورد افتهای تابشی در شتابدهنده‌های خطی باید استفاده شود. از طرف دیگر، اگر شتاب بر سرعت عمود باشد، همچنان که در مسیر دایره‌ای چنین است، $(\mathbf{v} \times \mathbf{a})^2 = v^2 a^2$ و معادله (۴۰.۱۹) به صورت زیر تحویل می‌شود

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\perp} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 (1 - v^2/c^2)^3} \quad (۴۲.۱۹)$$

از این رابطه باید برای محاسبه تابش سنکروترونی استفاده شود. در سرعت‌های خیلی پایین

$v \ll c$ ، در نتیجه $(dE/dt)_{\parallel}$ و $(dE'/dt)_{\perp}$ با معادله (۳۸.۱۹) یکسان می‌شوند.

مثال ۶.۱۹ به پروتونی در شتاب‌دهنده وان دوگراف با اختلاف پتانسیل $5 \times 10^5 \text{ V}$ شتاب داده می‌شود. طول لوله شتاب‌دهنده برابر 2 m است. انرژی تابشی را تعیین کنید و آن را با انرژی که پروتون به دست می‌آورد مقایسه کنید.

حل: اگر t زمان لازم برای پیمودن طول لوله شتاب‌دهنده توسط پروتون و سرعت نهایی آن v باشد، با فرض ناسبیتی بودن حرکت، رابطه $v = at$ ، در این حالت یک فرض معتبر است. بنابراین معادله (۳۸.۱۹) را می‌توان به کار برد. با توجه به اینکه شتاب a ثابت است مشاهده می‌شود که انرژی کل تلف‌شده پروتون بر اثر تابش در مدت زمان t [بسا قرارداد $v = at$ و $q = 1$ در معادله (۳۸.۱۹)] برابر است با

$$E_{\text{تابشی}} = \left(\frac{dE}{dt} \right) t = \frac{e^2 v^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 t}$$

ولی اگر s طول لوله شتاب‌دهنده باشد داریم

$$s = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} (at) t = \frac{1}{2} vt$$

از این رو نتیجه می‌شود که $t = 2s/v$ و

$$E_{\text{تابشی}} = \frac{e^2 v^2}{12\pi\epsilon_0 c^3 s}$$

از طرف دیگر، انرژی جنبشی که پروتون با جابجاشدن در داخل اختلاف پتانسیل V کسب می‌کند، برابر است با $E_k = (1/2) m_e v^2 = eV$. بنابراین داریم

$$\frac{E_{\text{تابشی}}}{E_k} = \frac{e^2 v}{6\pi\epsilon_0 c^3 m_e s} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m_e s} \left(\frac{2eV}{m_e} \right)^{1/2}$$

چون $v = (2eV/m_e)^{1/2}$ است، با وارد کردن مقادیر عددی به دست می‌آید $E_{\text{تابشی}}/E_k = 8.4 \times 10^{-20}$. از این رو اتلاف تابشی در این شتاب‌دهنده قابل چشم‌پوشی است.

مثال ۷.۱۹ پروتونی در یک سیکلوترون به شعاع 0.92 m شتاب می‌گیرد. بسامد پتانسیل وارد به‌دینا برابر $1.5 \times 10^7 \text{ Hz}$ و مقسدار بیشینه اختلاف پتانسیل 20000 V است (به‌مثال ۳.۱۵ مراجعه کنید). اتلاف انرژی توسط تابش را با انرژی جنبشی به دست آمده در جریان یک چرخش کامل مقایسه کنید.

حل: انرژی جنبشی بیشینه‌ای که پروتون در هر چرخش کسب می‌کند برابر است با $E_k = 2eV_{\max}$ ؛ زیرا دوبار از بین «دیها» می‌گذرد. شتاب پروتون برابر است با $a = \omega^2 r = 4\pi^2 \nu^2 r$ و از اثرهای نسبیته می‌توان چشم‌پوشی کرد. معادله (۳۸.۱۹) با توجه به $q = e$ چنین نوشته می‌شود

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2 (4\pi^2 \nu^2 r)^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{4\pi^2 e^2 \nu^4 r^2}{3\epsilon_0 c^3}$$

و انرژی تابشی در جریان یک چرخش (در فاصله زمانی $1/\nu$) برابر است با

$$E_{\text{تابشی}} = \left(\frac{dE}{dt}\right) \frac{1}{\nu} = \frac{4\pi^2 e^2 \nu^3 r^2}{3\epsilon_0 c^3}$$

با قراردادن مقادیر عددی به دست می‌آید $E_{\text{تابشی}}/E_k = 4.0 \times 10^{-15}$ در اینجا تابشی $E_{\text{تابشی}}$ با زهم از E_k خیلی کوچکتر است. ولی نسبت به شتاب‌دهنده خطیبی که در مثال بالا مطالعه کردیم خیلی بیشتر است. هرچه انرژی ذره افزایش پیدا کند، افت انرژی توسط تابش بیشتر می‌شود.

۸.۱۹ درآشامی تابش الکترومغناطیسی

در باره مهم‌ترین سازوکارهای تابشی که موج الکترومغناطیسی تولید می‌کنند بحث کردیم. اکنون بایستی فرایند معکوس را تحلیل کنیم و بینیم هنگامی که موج الکترومغناطیسی با اتم یا دستگاه بارها برهم‌کنش می‌کند، به گونه‌ای که انرژی موج توسط آن دستگاه درآشامیده شود چه اتفاقی می‌افتد. درآشامی انرژی موج الکترومغناطیسی مسئله‌اشکل است و احتیاج به محاسبات ریاضی پیشرفته و بهره‌گیری از مکانیک کوانتومی دارد، ولی درک مفاهیم بنیادی آن آسان است. اگر موج الکترومغناطیسی با اتم برخورد کند، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی موج هردو با الکترونها اتم برهم‌کنش می‌کنند. ولی با تقریب مرتبه اول می‌توان از اثر میدان مغناطیسی چشم‌پوشید. زیرا مرتبه بزرگی این میدان در حدود $eE = (v/c)E$ است که در آن v سرعت الکترون است. در این رابطه از رابطه $B = E/c$ که در مورد موج الکترومغناطیسی تخت صادق است استفاده شده است. بنا بر این نتیجه می‌گیریم که برهم‌کنش مغناطیسی با موج الکترومغناطیسی v/c برابر برهم‌کنش الکتریکی eE است و بجز در مورد الکترونها تندر می‌توان از آن صرف نظر کرد.

در ناحیه‌ای از فضا که در مقایسه با طول موج (به عنوان مثال اتم) کوچک است میدان الکتریکی موج الکترومغناطیسی را می‌توان به صورت $E = E_0 \sin \omega t$ نوشت؛ زیرا آن قسمت از رابطه که به x بستگی دارد در داخل ناحیه کوچکی که الکترون در آن حرکت می‌کند ثابت است. بر طبق نمادگذاری بخش ۱۳.۱۲ بسامد میدان را با ω نشان می‌دهیم. نیروی الکتریکی وارد بر الکترون برابر است با $-eE$ و الکترون بر اثر این نیرو نوسانهای واداشته انجام می‌دهد. بنا به نتایج بررسیهای بخش ۱۳.۱۲ می‌توان نتیجه گرفت که آهنگی

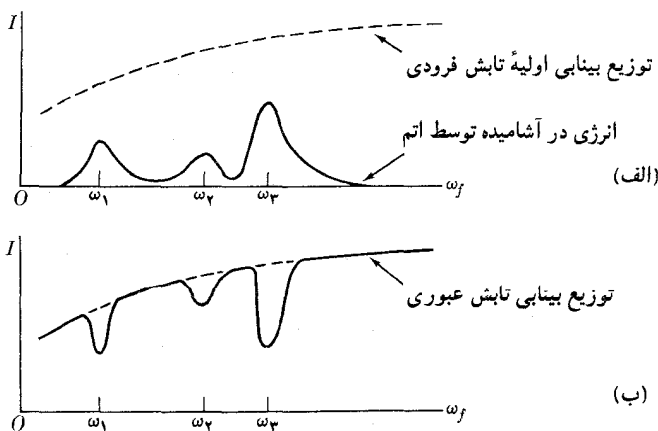
که الکترون با آن انرژی درمی آشامد (یعنی توان میانگینی که از میدان الکتریکی مسوج به نوسانگر انتقال می یابد) در باز آوایی انرژی بیشینه است. این امر هنگامی رخ می دهد که ω بسامد موج با بسامد طبیعی الکترون برابر باشد. بررسی خیلی دقیق مکانیک کوانتومی (که در اینجا از آوردن آن صرف نظر می کنیم) نشان می دهد که این بسامد برابر است با یکی از بسامدهای ω_1 ، ω_2 ، ω_3 بیناب گسیل اتمی (یا مولکولی) که الکترون به آن وابسته است. یا به گفته دیگر

اتم یا مولکول مرجحاً هنگامی تابش الکترومغناطیسی را درمی آشامد که بسامد موج الکترومغناطیسی بر یکی از بسامدهای بیناب گسیلی آن منطبق باشد.

یعنی بینابهای گسیلی و در آشامی یک ماده از بسامدهای یکسان ترکیب شده اند. شکل ۱۹.۱۹ الف توزیع شدت موج تابشی و انرژی در آشامیده توسط ماده را بر حسب بسامد نشان می دهد. شکل ۱۹.۱۹ ب نمایش توزیع شدت تابش عبور کرده است. به همخوانی بین دو منحنی توجه کنید، بدین معنی که در بسامدهای متناظر با حداکثر در آشامی توسط اتم شدت تابش عبوری حداقل است.

نتیجه در آشامی انرژی توسط اتم (یا مولکول) چیست؟ اثر در آشامی انرژی تنظیم حرکت الکترونی به منظور تطبیق با انرژی بالاتر و جدید اتم (یا مولکول) است. در این صورت گفته می شود که اتم (یا مولکول) در حالت برانگیخته است. اتم (یا مولکول) برانگیخته به نوبه خود می تواند با تابش دو قطبی الکتریکی، زیادی انرژی را که در آشامیده است مجدداً گسیل کند.

در طبیعت تبادل دائمی انرژی بین اتمها، مولکولها و تابشهای الکترومغناطیسی وجود دارد. خورشید چشمه اصلی تابشهای الکترومغناطیسی است که بدزمین می رسند. برهم کنش



شکل ۱۹.۱۹ شدت تابشهای عبوری و در آشامیده هنگام عبور از داخل یک ماده.

تابش الکترومغناطیسی ناشی از خورشید با اشیای روی زمین، اغلب پدیده‌هایی را که همه‌روزه در اطراف خود مشاهده می‌کنیم و حتی مسئله حیات را توجیه می‌کند.

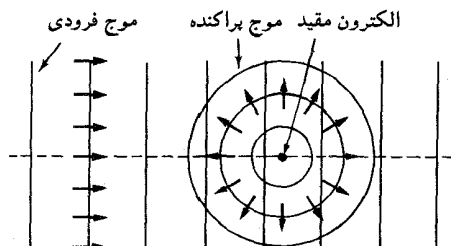
۹.۱۹ پراکنندگی امواج الکترومغناطیسی توسط الکترونهای مقید

هنگامی که موج الکترومغناطیسی از داخل اتم (یا مولکول) عبور می‌کند، چنانکه در بخش پیش توضیح دادیم، حرکت الکترونهای مقید را مختل می‌کند و احتمال دارد که اتم (یا مولکول) را به حالت برانگیخته برساند. ولی چون الکترونها همانند دو قطبیهای الکتریکی نوسانهای واداشته انجام می‌دهند، اتم برانگیخته می‌تواند با فرایند معکوس، بدون درنگ تابش الکترومغناطیسی هم بسامد با موج تابش گسیل کند. انرژی که اتم گسیل می‌کند همان انرژی است که الکترونهای مقید اتم از موج تابش می‌گیرند. این فرایند را پراکنندگی و تابش گسیل شده را موج پراکنده می‌نامند (شکل ۲۰.۱۹).

پراکنندگی موجب کاهش شدت موج اولیه یا تابش می‌شود. زیرا انرژی در آشامیده شده از این موج مجدداً در تمام جهات گسیل می‌شود و انرژی تابش اولیه را بطور مؤثر کاهش می‌دهد.

آزمایش نشان داده است که شدت امواج پراکنده به بسامد موج اولیه و زاویه پراکنندگی بستگی دارد. برای محاسبه این بستگی، ابتدا لازم است وسعت آشفستگی در حرکت الکترونها توسط میدان الکتریکی موج اولیه را تعیین کنیم. تنها به کمک مکانیک کوانتومی می‌توان این تحلیل را انجام داد.

یک خصوصیت مهم این پدیده این است که هنگامی که بسامد تابش فرودی با یکی از بسامدهای $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ بیناب گسیلی اتم (یا مولکول) برابر باشد، شدت امواج پراکنده خیلی بیشتر می‌شود و این اثر به نام فلوتورسانس با آزادایی* معروف است.



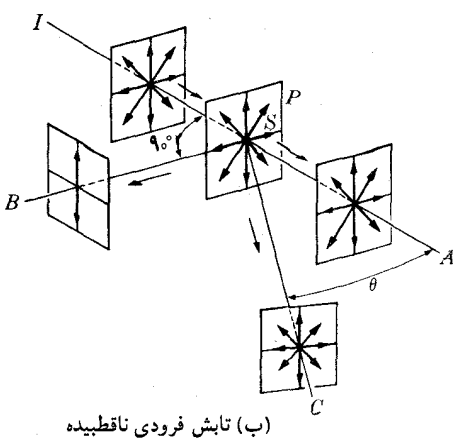
شکل ۲۰.۱۹ پراکنندگی تابش توسط الکترون مقید.

* در ناحیه مرئی بیناب الکترومغناطیسی لیانی حاصل در یک ماده بر اثر درآشامی تابش و گسیل بعدی آن را، اگر درنگ زمانی بین درآشامی و گسیل کمتر از 10^{-8} s باشد، فلوتورسانس می‌گویند. اگر این درنگ زمانی طولانیتر باشد، پدیده را فسفرسانس می‌نامند. تابشهای فلوتورسانس و فسفرسانس بسامدشان لزوماً یکسان نیست.

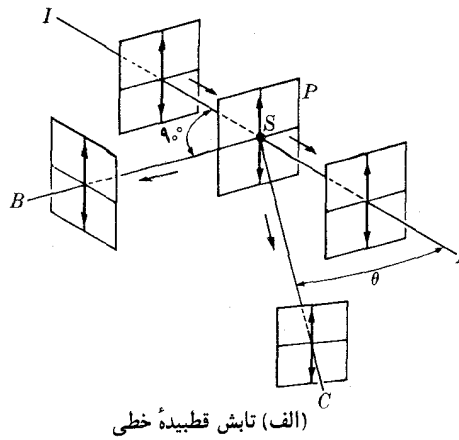
این رفتار فیزیکی خلاف انتظار نیست، زیرا بدیهی به نظر می رسد که برای آن بسامدهایی که در آنها انرژی در آشامی در اتم بیشتر است، شدت تابش پراکنده نیز باید بیشتر باشد. این بسامدها همان بسامدهای بیناب گسیلی اتم اند (چنانکه در بخش ۸۰۱۹ توضیح دادیم). با وجود این، ممکن است در بسامدهای متفاوت با بسامدهای بیناب گسیلی نیز پراکندگی قابل ملاحظه‌ای وجود داشته باشد.

ویژگی جالب دیگر این است که برای گازهایی که مولکولهای آنها در ناحیه فرابنفش، بیناب گسیلی دارند (به بخش ۱۵۰۱۹ مراجعه شود) پراکندگی امواج الکترومغناطیسی در ناحیه نور مرئی با افزایش بسامد افزایش پیدا کند. فهم این موضوع آسان است زیرا هر چه بسامد در ناحیه نور مرئی بیشتر باشد، بیشتر به بسامد بازآوایی فرابنفش ذره نزدیک می شود و دامنه نوسانهای واداشته نیز بیشتر افزایش پیدا می کنند. نتیجه این امر پراکندگی بیشتر است. به عنوان مثال روشنایی آسمان و رنگ آبی آن را به پراکندگی نور خورشید توسط مولکولهای هوا نسبت می دهند. بویژه رنگ آبی نتیجه پراکندگی شدید در بسامدهای خیلی بالا (یعنی طول موج خیلی کوتاه) است. با همین فرایند می توان رنگ سرخ روشن آسمان را به هنگام طلوع و غروب آفتاب توضیح داد؛ زیرا هنگام طلوع و غروب، پرتوهای خورشید برای رسیدن بدزمین از داخل لایه‌های ضخیم هوا عبور می کنند و این امر، به دلیل پراکندگی، موجب تضعیف شدید بسامدهای بلند (یا طول موج کوتاه) می شود.

ذرات ریز (مانند دود یا گرد) یا قطرات کوچک آب (مانند ابرهای) معلق در هوا نیز می توانند باعث پراکندگی شوند. مایعات محتوی ذرات معلق، مانند محلولهای کلئیدی باعث پراکندگی شدید می شوند؛ اثر پراکندگی این مایعات را اثر تیندال می گویند. هنگامی که تابش اولیه قطبیده خطی است، نوسانهای اتمی در راستای ثابت میدان الکتریکی موج قرار دارند و تابش پراکنده دارای قطبش مشخص تابش دو قطبی الکتریکی است (شکل ۲۱۰۱۹ الف). ولی حتی اگر تابش فرودی هم قطبیده نباشد، همواره تابش پراکنده به طور جزئی قطبیده است. به عنوان مثال، فرض کنید موج ناقطبیده K بر اتمی می تابد (شکل ۲۱۰۱۹ ب). نوسانهای دو قطبی الکتریکی القایی در اتم با میدان الکتریکی موج موازی است، بنابراین نوسانها در صفحه‌ای (مانند P) عمود بر راستای انتشار موج فرودی IA صورت می گیرد. قطبش تابش پراکنده در هر راستایی بد راستای نوسانهای دو قطبی بستگی دارد. بنا بر این هنگامی که موج فرودی قطبیده نباشد راستایش ثابت نیست. ولی برای هر راستایی مانند SB عمود بر IS ، تابش پراکنده قطبیده خطی و موازی با صفحه P و عمود بر IS است، زیرا برای چنین راستایی دو قطبیهها همیشه در این صفحه نوسان می کنند. برای سایر راستاها، درجه قطبش تابش پراکنده به زاویه‌ای که راستای پراکندگی با IA می سازد بستگی دارد. برای تابش فرودی ناقطبیده تابش پراکنده در راستای IA بتعامی ناقطبیده است.



(ب) تابش فرودی ناقطبیته



(الف) تابش قطبیده خطی

شکل ۲۱-۱۹ قطبش تابش پراکنده.

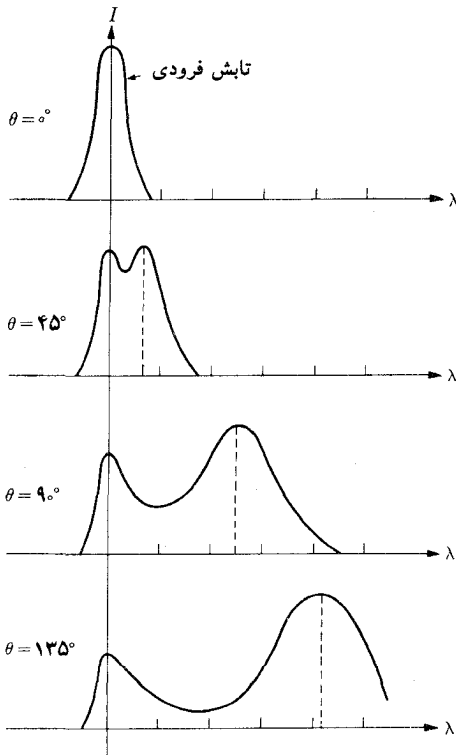
۱۰-۱۹ پراکندگی تابش الکترومغناطیسی توسط الکترون آزاد، اثر کامپتون

پراکندگی تابش الکترومغناطیسی توسط الکترون آزاد ویژگی‌های خاصی از خود نشان می‌دهد که لازم است جدا از پراکندگی توسط الکترونهاى مقید یا مولکولهاىی که در بخش پیش مورد مطالعه قرار گرفتند درباره آن بحث شود. چنانکه دیدیم، پراکندگی يك فرایند دوگانه است که در آن الکترون انرژی موج الکترومغناطیسی را درمی‌آشامد و آن را به صورت تابش پراکنده از نو تابش می‌کند. لازم به یاد آوری است که موج حامل انرژی و اندازه حرکت است؛ چنانچه به اندازه E از انرژی موج برداشته شود، باید به اندازه $p = E/c$ نیز از اندازه حرکت آن برداشته شود.

ولی الکترون آزاد نمی‌تواند همزمان به اندازه E انرژی جذب کند و اندازه حرکتی برابر با $p = E/c$ به دست آورد. زیرا رابطه بین انرژی جنبشی و اندازه حرکت برای الکترون در انرژیهای بالا برابر $E_k = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} - m_0 c^2$ و در انرژیهای پایین برابر $E_k p = p^2 / 2m_0$ است. هیچکدام از این دو رابطه با رابطه $p = E/c$ سازگار نیست مگر اینکه مطابق اصل بقای انرژی $E = E_k$ باشد. از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که الکترون آزاد نمی‌تواند بدون نقض اصل بقای اندازه حرکت، انرژی الکترومغناطیسی درآشامد. در این صورت ممکن است دانشجو تعجب کند که چرا قبلاً در جریان گفتگو از درآشامی و پراکندگی امواج الکترومغناطیسی توسط الکترونهاى مقید، در بخش پیش مطلقاً ذکری از اندازه حرکت به میان نیاوردیم. دلیل آن این است که اصل بقای اندازه حرکت و اصل بقای انرژی در هر دو حالت اعمال می‌شوند؛ ولی در مورد الکترون مقید، انرژی و اندازه حرکت درآشامیده، به تساوی بین الکترون و یون تشکیل دهنده بقیه اتم تقسیم می‌شوند و

همیشه این امکان وجود دارد که انرژی و اندازه حرکت به نسبت درست تقسیم شوند. ولی یون، به خاطر داشتن جرم خیلی بیشتر، تنها بخش کوچکی از انرژی در دسترس را (همراه با مقداری اندازه حرکت) حمل می کند و معمولاً از آن صرف نظر می کنیم (به مثال ۱۲.۱۹ مراجعه شود). برعکس، در مورد الکترون آزاد ذره دیگری وجود ندارد تا الکترون انرژی و اندازه حرکت را با آن تقسیم کند، بنابراین نباید هیچگونه درآشامی و پراکندگی امکان داشته باشد.

با همه اینها، آزمایش چیز دیگری می گوید. اگر تابش الکترومغناطیسی عبوری از ناحیه دارای الکترون آزاد را تحلیل کنیم، علاوه بر تابش فرودی، تابش دیگری با بسامد متفاوت مشاهده می شود. این تابش جدید را تابش پراکنده شده توسط الکترونها تعبیر می کنند. بسامد این تابش کمتر از بسامد تابش فرودی است؛ در نتیجه طول موج تابش پراکنده بزرگتر از طول موج تابش فرودی است (شکل ۲۲.۱۹). همچنین طول موج تابش پراکنده در راستاهای مختلف پراکندگی یکسان نیست. این پدیده جالب را اثر کامپتون می نامند. این نام به یادبود ا. اچ. کامپتون فیزیکدان آمریکایی که برای اولین بار در



شکل ۲۲.۱۹ توزیع شدت تابش پراکنده توسط الکترون آزاد با زاویه های پراکندگی مختلف.

۱۹۲۵/۱۲۹۹، این پدیده را مشاهده کرد، انتخاب شده است.

اگر λ طول موج تابش فرودی و λ' طول موج تابش پراکنده باشد، کامپتون دریافت که λ' منحصرأ با راستای پراکندگی مشخص می‌شود. یعنی اگر θ زاویه بین راستای موجهای فرودی و راستای مشاهده شده برای امواج پراکنده باشد (شکل ۲۳.۱۹)، طول موج تابش پراکنده λ' فقط به وسیله زاویه θ تعیین می‌شود. رابطه‌ای که از تجربه به دست آمده به صورت زیر است

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C (1 - \cos \theta) \quad (۲۳.۱۹)$$

که در آن λ_C ثابت است و مقدار آن، برای الکترون آزاد که فعلاً مورد نظر ماست، هرگاه λ و λ' بر حسب متر باشند، برابر است با

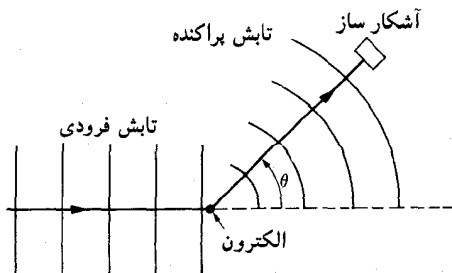
$$\lambda_C = ۲۴۲۶ \times 10^{-12} \text{ m}$$

λ_C را طول موج کامپتون الکترون می‌نامند. اگر به خاطر داشته باشیم که $\lambda = c/v$ و در آن v بسامد موج برابر $\omega/2\pi$ است، می‌توان معادله (۲۳.۱۹) را به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{v'} - \frac{1}{v} = \frac{\lambda_C}{c} (1 - \cos \theta) \quad (۲۴.۱۹)$$

در این صورت پراکندگی موج الکترومغناطیسی توسط الکترون را می‌توان ما فاند «برخورد» بین این موج و الکترون مجسم کرد، زیرا این پراکندگی شامل تبادل انرژی و اندازه حرکت است. چون موج با سرعت c منتشر می‌شود و نیز رابطه بین انرژی و اندازه حرکت آن $E = cp$ ، مشابه رابطه‌ای است که در مورد ذره به جرم سکون صفر وجود دارد، بنابراین پراکندگی را باید شبیه برخوردی در نظر گرفت که در آن یکی از ذرات دارای جرم سکون صفر است و با سرعت c حرکت می‌کند. چنین برخوردی در مثال ۱۰.۱۱ مطالعه شد و نتیجه آن معادله (۲۳.۱۱) است که در زیر می‌نویسیم

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) \quad (۲۵.۱۹)$$



شکل ۲۳.۱۹ رسم هندسی پراکندگی کامپتون.

E' و E انرژی ذره باجرم سکون صفر، قبل و بعد از برخورد و m_e جرم سکون ذره دیگر (در این حالت الکترون) است. تشابه بین معادله‌های (۴۴.۱۹) و (۴۵.۱۹) قابل توجه و فراتر از یک تشابه جبری ساده است. هر دو معادله در فرایند برخورد، به معنای وسیع کلمه، به کار می‌روند و چنانکه قبلاً گفته شد، رابطه انرژی-اندازه حرکت موج الکترومغناطیسی، $E = cp$ ، از نوع رابطه یک ذره باجرم سکون صفر است که در مورد آن معادله (۴۵.۱۹) به کار می‌رود. با نوشتن رابطه‌ای مانند

$$E = h\nu \quad (۴۶.۱۹)$$

انرژی E و بسامد ν را به هم مربوط می‌کنیم. در این رابطه h یک ثابت عمومی است که تناسب بین بسامد موج الکترومغناطیسی را با انرژی که در فرایند «برخورد» به آن وابسته است بیان می‌کند. در این صورت معادله (۴۵.۱۹) به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{1}{h\nu'} - \frac{1}{h\nu} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

یا

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) \quad (۴۷.۱۹)$$

که مشابه با معادله (۴۴.۱۹) است. برای به دست آوردن هم‌ارز معادله (۴۳.۱۹) کافی است که معادله (۴۷.۱۹) را در c ضرب کنیم و رابطه $\lambda = c/\nu$ را به کار ببریم. در نتیجه داریم

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (۴۸.۱۹)$$

بنابراین λ_c طول موج کامپتون مربوط به الکترون با رابطه زیر به جرم پراکنندگی الکترون مربوط می‌شود

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} \quad (۴۹.۱۹)$$

از روی مقادیر معلوم λ_c ، m_e ، و c ، می‌توان مقدار ثابت جدید h را به دست آورد

$$h = ۶.۶۲۵۶ \times ۱۰^{-۲۴} \text{ J s} \quad \text{یا} \quad \text{m}^2 \text{kg s}^{-1}$$

h ثابت پلانک نام دارد و دارای نقش بسیار بزرگی در فیزیک است (به مثال ۱۵.۷ و بخش ۶.۱۵ مراجعه شود). از لحاظ تاریخی، این ثابت برای اولین بار به منظور دیگری در قوانین فیزیک ظاهر شد؛ زیرا در پایان قرن نوزدهم، ماکس پلانک (۱۲۳۷-۱۸۵۸/۱۳۲۶-۱۹۴۷) فیزیکدان آلمانی، به عنوان نتیجه‌ای از کوشش خود برای بیان شدت تابش الکترومغناطیسی در تعادل با ماده، به نام تابش جسم سیاه به آن دست یافت. سرعت نور، c ، جرم الکترون، m_e ، بار بنیادی e ، و ثابت پلانک، h ، چهار ثابت اصلی فیزیک را تشکیل می‌دهند.

پروتون، که جرم آن با جرم الکترون متفاوت است، دارای طول موج کامپتون محاسبه شده (با به کار بردن مقدار بالا برای h) زیر است

$$\lambda_{c,p} = \frac{h}{m_p c} = 1.3214 \times 10^{-15} \text{ m}$$

این نتیجه با آزمایش تأیید شده است و به نوبه خود گواه درستی فرضیه ما، یعنی گواه اعتبار معادله (۴۱.۱۹) است. با وجود این چون طول موج کامپتون پروتون 10^{-3} برابر طول موج کامپتون الکترون است، اثر کامپتون در پروتون چندان قابل اعتنا نیست.

بنابراین نتیجه می گیریم که می توان پراکندگی تابش الکترومغناطیسی توسط الکترون آزاد را با یکی دانستن این فرایند و برخورد الکترون با ذره ای به جرم سکون صفر «توضیح» داد.

۱۱.۱۹ فوتونها

«تیمین» ما از اثر کامپتون به دلیل وسعت احتمالی کاربرد نتایج آن نیازمند تحلیل دقیقتری است. ابتدا فرضیه هایمان را به اختصار تکرار می کنیم.

(الف) پراکندگی تابش الکترومغناطیسی توسط الکترون آزاد را می توان مانند برخورد الکترون با یک ذره به جرم سکون صفر در نظر گرفت.

(ب) تابش الکترومغناطیسی مانند یک ذره با جرم سکون صفر عمل می کند، کسه از این به بعد، جهت اختصار، آن را فوتون می نامیم.

(ج) انرژی و اندازه حرکت ذره با جرم سکون صفر (یا فوتون) با رابطه های

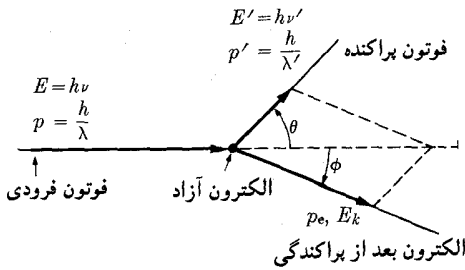
$$E = h\nu \quad \text{و} \quad p = \frac{h}{\lambda} \quad (50.19)$$

با بسامد و طول موج تابش الکترومغناطیسی مربوط می شوند. رابطه دومی بدین طریق به دست می آید

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} \quad \text{و} \quad \nu = \frac{1}{\lambda}$$

اثر کامپتون را می توان همچون برخورد شکل ۲۴.۱۹ مجسم کرد؛ در این برخورد فوتونی با بسامد ν با یک الکترون در حال سکون برخورد می کند و بدین طریق مقداری انرژی و اندازه حرکت به آن انتقال می دهد. بر اثر این برهم کنش انرژی فوتون پراکنده کاهش می یابد و بسامد آن، ν' ، کمتر می شود. در اینجا با بررسی دیگری می توان نشان داد که آیا اندازه حرکت الکترون، بعد از پراکندگی، با اختلاف اندازه حرکت فوتون فرودی و فوتون پراکنده برابر است یا نه. آزمایش بسیار سختی است ولی چنین آزمایشی انجام شده و نتیجه آن بسیار عالی بوده است.

معنی فیزیکی مفهوم فوتون و روابط تعریفی (۵۰.۱۹) چیست؟ لازم نیست نتیجه



شکل ۲۴.۱۹ رابطه بین انرژی و اندازه حرکت در پراکنده‌گی کامپتون.

بگیریم که تابش الکترومغناطیسی جریان فوتونهاست، هر چند که یکی از توضیحات تصویری ممکن همین است. می‌توان انرژی $E = h\nu$ و اندازه حرکت $p = h/\lambda$ را به عنوان انرژی و اندازه حرکت در آشامیده شده توسط الکترون از موج الکترومغناطیسی فرودی تعبیر کرد. در این صورت فوتونی با انرژی $E' = h\nu'$ و اندازه حرکت $p' = h/\lambda'$ معرف انرژی و اندازه حرکت بازگسیلی الکترون به تابش پراکنده است. بنا به دینامیک انرژیهای بالا و اصل بقای انرژی و اندازه حرکت، الکترون مقداری انرژی جنبشی برابر $E_k = E - E'$ و اندازه حرکتی برابر $p_e = p - p'$ به دست می‌آورد، که با رابطه $E_k = c\sqrt{m_e^2 c^2 + p_e^2} - m_e c^2$ بهم مربوط می‌شوند. بنا بر این نتیجه می‌گیریم که فوتون «کوانتوم» انرژی و اندازه حرکتی است که یک ذره باردار، در یک فرایند تنها درمی‌آشامد یا گسیل می‌کند و با بسامد تابش، کاملاً مشخص می‌شود. مفهوم فوتون تنها در برهم کنشهای بین تابش الکترومغناطیسی و ذره‌های باردار به کار می‌رود. بنا بر این فوتون نه تنها در برهم کنش تابش الکترومغناطیسی با الکترون آزاد بلکه در کلیه فرایندهای برهم کنش تابش الکترومغناطیسی با ماده وارد عمل می‌شود. در نتیجه می‌توان اصل زیر را بیان کرد

هنگامی که یک موج الکترومغناطیسی با الکترون (یا هر ذره باردار دیگر) برهم کنش می‌کند، مقادیر انرژی و اندازه حرکتی که در این فرایند مبادله می‌شوند با انرژی و اندازه حرکت فوتون متناظرند.

اصل فوق، که یکی از قوانین بنیادی فیزیک است، به نظر می‌رسد که سرشت تمامی فرایندهای تابشی است که در آنها ذره‌های باردار و میدانهای الکترومغناطیسی نقشی دارند. این اصل از هیچکدام از قوانینی که قبلاً بیان کردیم یا مورد بحث قرار گرفتند به دست نمی‌آید، اصلی است کاملاً جدید که باید به قوانین عمومی همچون قوانین اصل بقای انرژی یا اندازه حرکت اضافه شود. کشف این اصل، در ربع اول قرن حاضر، حادثه‌ای مهم در تکامل علم فیزیک بود. نتایج آن شاخه جدیدی به نام مکانیک کوانتومی در فیزیک به وجود آورده است.

این اصل مهم پایه‌ی اساسی درک گسیل و درآشامی تابش الکترومغناطیسی توسط اتمها،

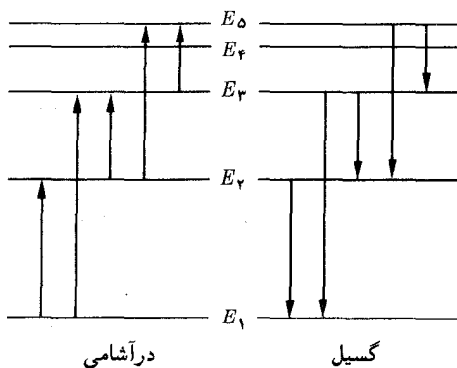
مولکولها وهسته‌هاست. در بحثهای گذشته به کرات گفته شد که اتم (یا مولکول) فقط تابشهای الکترومغناطیسی با بسامدهای معین را می‌تواند در آشامد یا گسیل کند. همچنین در بخش ۷.۱۴ گفتیم که انرژی اتمها و مولکولها کوانتیده است و تنها مقادیر معینی را به خود می‌گیرند. مفهوم فوتون این دو واقعیت مهم را به یکدیگر مربوط می‌کند. فرض کنید که اتمی در ویژه حالت انرژی E یک تابش الکترومغناطیسی به بسامد ν درمی‌آشامد و به ویژه حالت جدید با انرژی بالاتر E' می‌رسد. انرژی اتم به اندازه $E' - E$ تغییر می‌کند. از طرف دیگر، انرژی فوتون در آشامیده برابر است با $h\nu$. اصل بقای انرژی ایجاب می‌کند که این دو اندازه برابر باشند. در نتیجه داریم

$$E' - E = h\nu$$

این رابطه به نام فرمول بود معروف است. زیرا برای اولین بار، در سال ۱۹۱۳/۱۲۹۲ نیلز بور (۱۲۶۴-۱۳۴۱/۱۸۸۵-۱۹۶۲)، فیزیکدان دانمارکی آن را پیشنهاد کرد. رابطه بالا را می‌توان در مورد اتمی که با گسیل یک فوتون از ویژه حالت انرژی E' به ویژه حالت پایتتر E می‌رود نیز به کار برد.

چون انرژی ویژه حالت کوانتیده است و تنها مقادیر معین E_1, E_2, E_3, \dots را به خود می‌گیرد، فرمول بود بسامد تابش گسیل شده یا در آشامیده را محدود می‌کند. همین امر دلیل وجودی بیناب گسسته بسامدهاست. از لحاظ تاریخی، بور مفهوم ویژه حالتها را برای تبیین وجود بیناب گسسته بسامدها عنوان کرد. شکل ۲۵.۱۹ نمودار طرحواره فهرست بعضی از تغییرات ممکن در انرژی یک دستگاه را نشان می‌دهد. تغییرات انرژی با گذارهای بین ویژه حالتها یا ترازهای انرژی دستگاه متناظر است.

به عنوان مثال، انرژی ویژه حالتهای اتمهایی که یک الکترون (H, He^+, Li^{++}) و



شکل ۲۵.۱۹ گذارهای بین ویژه حالتهای اتم، مولکول یا هسته. فاصله نسبی بین ترازهای انرژی و گذارهای ممکن به ماهیت دستگاه بستگی دارد.

غیره) دارند با رابطه $E = -RZ^2hc/n^2$ داده می‌شود. در این رابطه R ثابت ریذبرگ (به مسئله ۸۸.۱۴ مراجعه شود) است. بنابراین بسامد تابش در آشامیده یا گسیلی در گذار بین دو حالت با عددهای کوانتومی n و n' ($n' > n$) برابر است با

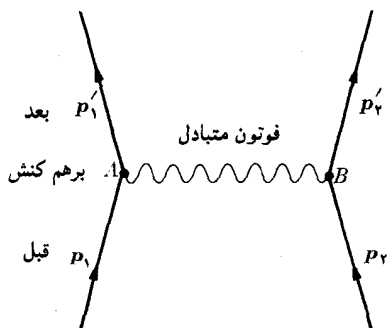
$$\nu = \frac{E' - E}{h} = RZ^2c \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$$

یا، با قراردادن مقادیر عددی به دست می‌آید

$$\nu = 3.28 \times 10^{15} Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \text{ Hz}$$

این فرمول بخوبی با بسامدهای در آشامی و گسیلی بیناب این نوع اتمها جور درمی‌آید. این فرمول را، به افتخار جان بالمر (۱۲۵۴-۱۲۷۷/۱۸۲۵-۱۸۹۸) ریاضی و فیزیکدان سوئیس، که آن را برای فهرست کردن خطوط بیناب مرئی هیدروژن اختراع کرد، فرمول بالمر نامگذاری کرده‌اند.

مفهوم فوتون نمایش تصویری ساده‌ای را برای برهم‌کنش الکترومغناطیسی بین دو ذره باردار به دست می‌دهد. شکل ۲۶.۱۹ چنین برهم‌کنشی را بین دو ذره نشان می‌دهد. این برهم‌کنش با تبادل انرژی و اندازه حرکت متناظر است. اندازه حرکت‌های اولیه \mathbf{p}_1 و \mathbf{p}_2 بعد از برهم‌کنش به \mathbf{p}'_1 و \mathbf{p}'_2 تبدیل می‌شوند. اگرچه برهم‌کنش در یک زمان خاصی جایگزیده نیست، با وجود این برای سهولت آنرا در یک زمان معلوم در نقاط A و B نشان داده‌ایم. ذره ۱ از طریق میدان الکترومغناطیسی خود با ذره ۲ وارد برهم‌کنش می‌شود، در نتیجه ذره ۲ مقداری انرژی و اندازه حرکت، هم‌ارز با یک فوتون از میدان دریافت می‌کند، این امر موجب تغییر حرکت آن می‌شود. در این صورت ذره ۱ باید حرکت خود



شکل ۲۶.۱۹ برهم‌کنش الکترومغناطیسی بر حسب تبادل فوتونها. فوتونها انرژی و اندازه حرکت یک ذره را به ذره دیگر انتقال می‌دهند.

را به گونه‌ای تنظیم کند که با تراز مر بوط به میدان اولیه منهای يك فوتون متناظر باشد. بدیهی است فرایند معکوس نیز ممکن است. در این صورت ذره ۱ يك فوتون از میدان ذره ۲ درمی آشامد. بنا بر این می توان گفت آنچه در این برهم کنش رخ می دهد تبادل فوتون بین ذره ۱ و ۲ است. یا با بیان دیگر

برهم کنشهای الکترومغناطیسی را می توان به عنوان نتیجه تبادل فوتونها بین ذره های باردار وارد در برهم کنش نمایش داد.

(نمودارهایی از نوع شکل ۲۶.۱۹ به نام نمودارهای فاینمن برای تحلیل فرایندهای پیچیده ای که در آنها چندین برهم کنش مختلف رخ می دهد بسیار مفیدند).

در هر لحظه اندازه حرکت کل دستگاهی متشکل از دو ذره باردار برابر است با میدان $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}$. در این رابطه میدان \mathbf{p} اندازه حرکت وابسته به میدان الکترومغناطیسی ذره های باردار است. این همان تصویری است که ما، در بخش ۱۴.۱۵ هنگام گفتگو از اصل بقای اندازه حرکت، از يك برهم کنش، چنانچه با سرعت محدود انتشار می یافت، به دست آوردیم. اکنون يك پایه نظری و تجربی خیلی محکم برای نمایش مفهومی میدان دارای انرژی و اندازه حرکت در اختیار داریم.

در پایان بخش ۳.۱۹ اشاره کردیم که تابش الکترومغناطیسی، علاوه بر انرژی و اندازه حرکت، حامل اندازه حرکت زاویه ای ذاتی یا اسپین نیز هست و برای موجهای قطبیده دایره ای اسپین در امتداد راستای انتشار برابر است با $\pm E/\omega$. با توجه به رابطه $\omega = 2\pi\nu$ ، انرژی فوتون برابر می شود با $E = h\omega/2\pi = \hbar\omega$. در این رابطه $\hbar = h/2\pi$ است (به مثالهای ۱۵.۷ و ۷.۱۵ مراجعه شود). از این رو فوتونهای قطبیده دایره ای دارای اسپینی برابر $\pm \hbar$ در امتداد راستای انتشارند. از طرف دیگر، مقدار متوسط اسپین فوتونهای قطبیده خطی برابر صفر است.

مثال ۸.۱۹ انرژی فوتونی را که طول موج آن بر حسب متر معلوم است بر حسب الکترون-ولت بنویسید. از نتیجه حاصل برای محاسبه طول موج پرتوهای X بر حسب ولتاژ شتاب دهنده دو سر لامپ پرتو X استفاده کنید.

حل: از ترکیب رابطه های $E = h\nu$ و $\lambda\nu = c$ به دست می آید $E = hc/\lambda$. از طرف دیگر، داریم

$$hc = (6.626 \times 10^{-34} \text{ J s})(2.9979 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}) \\ = 1.986 \times 10^{-25} \text{ J m}$$

با توجه به اینکه $1 \text{ eV} = 1.6021 \times 10^{-19} \text{ J}$ ، می توان نوشت $hc = 1.2397 \times 10^{-6} \text{ eV m}$. بنا بر این به دست می آید $E = 1.2397 \times 10^{-6} / \lambda$. در این رابطه E بر حسب الکترون-ولت و λ بر حسب متر است.

چنانچه در رابطه باشکلی ۱۶۰۱۹ توضیح دادیم، پرتوهای x از برخورد الکترونیهای تندروی ماده‌ای که آنتی‌کاتود لامپ پرتوهای x را تشکیل می‌دهد تولید می‌شوند. انرژی یک الکترون ممکن است در اثر برخوردی پیاپی، با به وجود آوردن چندین فوتون، تابش شود یا اینکه تمامی در یک برخورد تنها به صورت تابش درآید. بدیهی است که فوتونهای پراثرژی که از لامپ پرتوهای x خارج می‌شوند فوتونهایی هستند که با فرایند آخری (یعنی تابش تمام انرژی در برخورد) گسیل می‌شوند و با کم‌تأثیرترین طول‌موجها متناظرند. یا به گفته دیگر، اگر V ولتاژ شتاب‌دهنده باشد، طول موجهای پرتوهای x حاصل مساوی یا بلندتر از طول موج آستانه‌ای اند که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\lambda_0 = \frac{1.2397 \times 10^{-6}}{V} \approx \frac{1.24 \times 10^{-6}}{V}$$

زیرا در این حالت انرژی فوتون E برابر است با انرژی الکترون، که آن نیز به نوبه خود برابر است با V بر حسب الکترون‌ولت. به عنوان مثال، در یک لامپ تلویزیونی، الکترونها با اختلاف پتانسیلی در حدود $18000V$ شتاب داده می‌شوند. هنگامی که این الکترونها به صفحه لامپ رسیدند ناگهان متوقف می‌شوند و پرتوهای x گسیل می‌دارند. دلیل گسیل این پرتوهای x همان است که قبلا در مورد لامپ پرتو x گفته شد. ولی شدت کاملا پایین است. در این صورت کمیته طول موج پرتوهای x حاصل از توقف الکترونها روی صفحه تلویزیون برابر است با $\lambda = 6.9 \times 10^{-11} \text{m}$

۱۲.۱۹ بازهم درباره فوتونها: اثر فوتوالکتريك

با پژوهشهای پیشرفته ثابت کرده‌اند که مفهوم فوتون نه تنها درباره فرایند پراکندگی توسط الکترون آزاد، بلکه درباره کلیه فرایندهایی که در آنها امواج الکترومغناطیسی با ماده برهم‌کنش می‌کنند، به کار می‌رود. مثال دیگری که روشنگر استفاده از مفهوم فوتون است اثر فوتوالکتريك است. در سال $1887/1266$ ، هاینریش هرتز مشاهده کرد که با افزودن الکترونهايي که بین آنها تخلیه الکتریکی صورت می‌گیرد با نور فرا بنفش، می‌توان شدت تخلیه را افزایش داد. این امر موجب می‌شود که تعداد بیشتری ذره باردار یا الکترون در دسترس قرار گیرد. یک سال بعد، ویلهلم هاولانش ($1238-1301/1859-1922$)، با افزودن سطح فلزاتی چون Zn ، Rb ، K ، Na و غیره گسیل الکترونها را مشاهده کرد. این الکترونها را، به دلیل شیوه تولید آنها فوتوالکترون نامیدند. بدیهی است با افزایش شدت تابشهای فرودی روی سطح فلز، گسیل الکترونها نیز بیشتر می‌شود، زیرا انرژی بیشتری برای آزاد کردن الکترونها در دسترس قرار می‌گیرد. ولی یک بستگی با سرشت بسامدی نیز مشاهده می‌شود. بدین معنا که برای هر ماده‌ای یک بسامد کمیته تابش الکترو-مغناطیسی مانند ν_0 وجود دارد، که برای تابشهای با بسامد پایتتر از آن هیچگونه فوتو-الکترونی تولید نمی‌شود، حتی اگر شدت تابش خیلی بیشتر باشد.

پیش از این توضیح دادیم که یک فلز الکترونیایی دارد که کمابیش آزادانه در سرتاسر شبکه بلوری جایجا می‌شوند. در دماهای عادی این الکترونها اتم را ترک نمی‌کنند، زیرا جدا شدن الکترون، خنثایی الکتریکی فلز را بهم می‌زند. فلزی که پس از جدا شدن الکترون بار الکتریکی مثبت پیدا کرده است، از نو الکترون را جذب می‌کند. چون انرژی الکترون آنقدر نیست که بر این نیروی جاذبه فایق آید مجدداً روی فلز می‌افتد. یکی از راههای افزایش انرژی الکترونها گرم کردن فلز است. در این صورت الکترونها «تبخیر شده» را الکترونها گرهایی می‌نامند. گسیل الکترونها در لامپهای الکترونی از این نوع است. راه دیگر آزاد کردن الکترونها یک فلز در آشامی انرژی از تابش الکترومغناطیسی است. برخلاف فرایند در آشامی که در بخش ۱۸۰۱۹ توضیح دادیم، و به در آشامی الکترون مقید اتم یا مولکول مربوط می‌شد، اثر فوتوالکتریک فرایندی است که در آن الکترونها رسانشی فلزات یا سایر مواد از میدان الکترومغناطیسی انرژی درمی‌آشامند و از جسم فرار می‌کنند. انرژی لازم برای فرار یک الکترون از یک فلز معین را با ϕ نشان می‌دهیم. در این صورت اگر الکترون به اندازه E انرژی در بیاشامد، اختلاف $E - \phi$ به صورت انرژی جنبشی الکترون ظاهر می‌شود و می‌توان با تقریب قوانین انرژیهای پایین نسا - نسبییتی چنین نوشت

$$\frac{1}{2}mv^2 = E - \phi \quad (51.19)$$

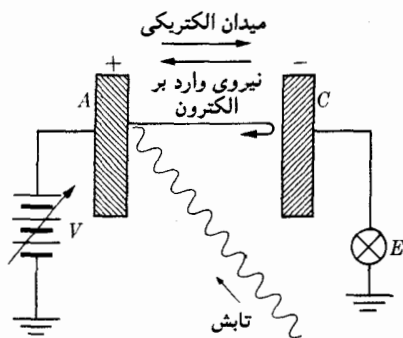
بدیهی است که اگر E از ϕ کمتر باشد هیچگونه گسیل الکترونی صورت نمی‌گیرد. اگر E انرژی در آشامیده الکترون از تابش الکترومغناطیسی و v بسامد این تابش باشد، بنا به معادله (۵۰.۱۹) داریم: $E = h\nu$. از این رو به جای معادله (۵۱.۱۹) می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - \phi \quad (52.19)$$

در سال ۱۹۰۵/۱۲۸۴ آلبرت اینشتین، برای اولین بار، قبل از کشف اثر کامپتون، این رابطه را پیشنهاد کرده بود. تمام الکترونها برای خروج از فلز به انرژی یکسان نیاز ندارند. بنا بر این کمینه مقدار ϕ را تابع کار فلز می‌نامند. در این صورت بیشینه انرژی جنبشی الکترونها عبارت است از

$$\frac{1}{2}mv_{Max}^2 = h\nu - \phi. \quad (53.19)$$

انرژی جنبشی بیشینه $mv_{Max}^2/2$ را می‌توان با روش نشان داده شده در شکل ۲۷.۱۹ اندازه گرفت. برای کند کردن حرکت فوتوالکترونها اختلاف پتانسیل V را بین A و C اعمال می‌کنند. در اختلاف پتانسیل خاصی مانند V_0 ، جریانی که الکترومتر E نشان می‌دهد ناگهان صفر می‌شود؛ که نشان می‌دهد هیچ الکترونی، حتی تندترین الکترونها به صفحه C نمی‌رسد.

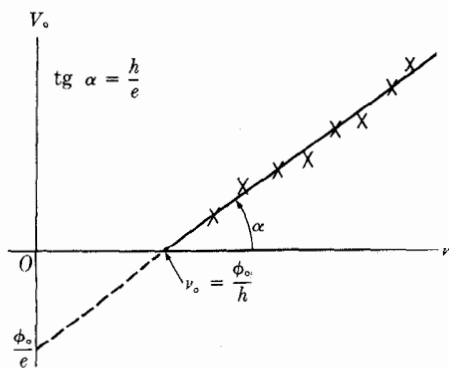


شکل ۲۷۰۱۹ آرایش تجربی برای مشاهده اثر فوتوالکترونیک.

در این صورت، بنا به معادله (۳۸۰۱۴) داریم $eV_0 = mv_{\text{Max}}^2$ و معادله (۵۳۰۱۹) به صورت زیر درمی آید

$$eV_0 = h\nu - \phi_0 \quad (۵۴۰۱۹)$$

با تغییر دادن بسامد ν ، می توان یک رشته مقادیر برای پتانسیل ایست V_0 به دست آورد. اگر معادله (۵۴۰۱۹) درست باشد، منحنی حاصل از رسم V_0 بر حسب ν ، باید خط مستقیم باشد. چنانکه شکل ۲۸۰۱۹ نشان می دهد، این امر کاملاً تحقق پیدا می کند. شیب خط برابر است با $\text{tg } \alpha = h/e$. می توان با اندازه گیری α ، با بهره گیری از مقدار معلوم e ، ثابت پلانک h را از نو حساب کرد و به نتیجه ای که از اثر کامپتون به دست می آید رسید. این سازگاری را می توان توجیهی دیگر برای مفهوم فوتون در نظر گرفت. از معادله (۵۳۰۱۹) پیدا است که برای بسامدی برابر با $\nu_0 = \phi_0/h$ ، انرژی جنبشی



شکل ۲۸۰۱۹ رابطه بین پتانسیل ایست و بسامد در اثر فوتوالکترونیک.

الکترونها برابر صفر می شود. بنابراین، ν کمینه بسامدی است که در آن گسیل فوتو الکترونیک صورت می گیرد و آن را «بسامد آستانه» می نامند. برای بسامدهای پایینتر از ν هیچگونه گسیل الکترونی رخ نمی دهد. اثر فوتو الکترونیک به دلیل کاربرد آن در وسایلی چون سلولهای فوتو الکترونیک، در سازوکارهای با کنترل خودکار کاربرد وسیع دارد.

الکترونها، در اثر تابش الکترومغناطیسی با بسامد کافی (یا فوتونهای با انرژی کافی) می توانند از اتمها (یا مولکولها) به بیرون بجهند؛ این امر اثر فوتو الکترونیک اتمی نامیده می شود که علت درآشامی بخش بزرگی از پرتوهای x و پرتوهای γ به وسیله هر ماده است. اثر فوتو الکترونیک اتمی منجر به یونش متناظر در ماده (از جمله هوا) ای می شود که پرتوهای x و γ از داخل آن می گذرند و یکی از سازوکارهایی است که توسط آن تابش بر ماده اثر می کند. فرایند مشابه دیگر اثر فوتو هسته ای است؛ در این فرایند یک ذره، معمولاً پروتون، بعد از درآشامی تابش الکترومغناطیسی از هسته به بیرون می جهد. برای اینکه این فوتونها در گستره انرژی بالای پرتوهای γ قرار بگیرند باید انرژی شان خیلی بیشتر از انرژی فوتونهای موجود در اثر فوتو الکترونیک اتمی باشد و بسامد متناظرشان خیلی بالاتر. توجه کنید که، ضمن گفتگو از اثر فوتو الکترونیک، نامی از اصل بقای اندازه حرکت به میان نیامدیم. دلیل آن باز هم این است که الکترونی که تابش الکترومغناطیسی را درمی آشامد به شبکه بلورین جامد، یا به اتم یا مولکول مقید است. در نتیجه، اندازه حرکت فوتون در آشامیده شده بین الکترون و شبکه بلورین، اتم یا مولکول، تقسیم می شود. ولی، به خاطر جرم نسبتاً زیاد شبکه، اتم یا مولکول، از انرژی جنبشی آنها صرف نظر می شود و می توان (بدون خطای قابل ملاحظه ای) پذیرفت که تمام انرژی فوتون به الکترون منتقل می شود. همین استدلال را می توان درباره پرتونهای اثر فوتو هسته ای به کار برد.

۱۳-۱۹ انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیط مادی، باشندگی

تاکنون انتشار موج را تنها در خلأ در نظر گرفتیم. تجربه نشان می دهد که سرعت انتشار موج الکترومغناطیسی در داخل محیط مادی با سرعت انتشار آن در خلأ با هم فرق دارند، برای پی بردن به دلیل این اختلاف بایستی یادآوری کرد که اساس گفتگوی ما در بخش ۲-۱۹ بر پایه عدم حضور بار و جریانی الکتریکی استوار بود. ولسی هنگامی که موج الکترومغناطیسی در محیط مادی منتشر می شود، حتی اگر در این محیط بارهای آزاد و جریان وجود نداشته باشند، در نتیجه قطبش و مغناطش ماده (که در فصل ۱۶ بیان شد) مقداری بار و جریان الکتریکی در ماده القا می شود. اگر این ماده همگن و همسانگرد باشد، می توان ثابت کرد که اثر کلی قطبش و مغناطش ماده در اثر موج الکترومغناطیسی عبارت است از تعویض ثابتهای ϵ_0 و μ_0 در معادله های ماکسول با ϵ ، گذردهی الکتریکی و μ ، تراوایی مغناطیسی جسم. بقیه محاسبات نظیر محاسباتی است که در بخش ۲-۱۹ انجام گرفت، به استثنای سرعت که اکنون به صورت زیر است

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (55.19)$$

نسبت c سرعت امواج الکترومغناطیسی در خلأ به v سرعت همین امواج در محیط مادی را ضریب شکست مطلق می نامند و آن را با n نشان می دهند. تعریف ضریب شکست برای تشریح خواص یک ماده در ارتباط با امواج الکترومغناطیسی بسیار مفید است. بنابراین داریم

$$n = \frac{c}{v} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}$$

ولی $\epsilon/\epsilon_0 = \epsilon_r$ و $\mu/\mu_0 = \mu_r$ بترتیب گذردهی و تراوایی نسبی محیط اند. از این رو

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r\mu_r} \quad (56.19)$$

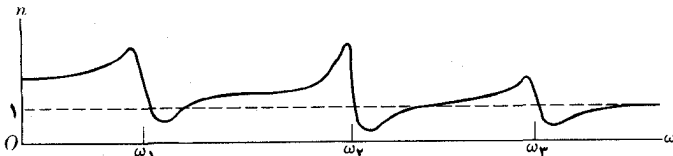
معمولاً برای بیشتر موادی که امواج الکترومغناطیسی از خود عبور می دهند (به جدول ۳۰۱۶ مراجعه کنید) اختلاف μ_r با واحد خیلی کم است، بنابراین با تقریب رضایت بخشی می توان نوشت

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \quad (57.19)$$

این رابطه روش تجربی ساده‌ای برای تعیین گذردهی نسبی یک جسم به دست می دهد، به شرط اینکه ضریب شکست با روش جداگانه‌ای (چنین کاری بسیار آسان است) به دست آمده باشد. سازگاری بین مقادیر ϵ_r که با روش فوق به دست می آیند و مقادیری که از سایر روشها محاسبه می شوند اساس رضایت بخشی برای نظریه به دست می دهد. در بخش ۷۰۱۶، ϵ_r را با استفاده از معادله (۲۴۰۱۶) محاسبه کردیم. در این صورت، برای اینکه با ضریب شکست اشتباه نشود می توان N را برای نشان دادن تعداد الکترونها در واحد حجم به کار برد و یا

$$n^2 = \epsilon_r = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left(\sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \right) \quad (58.19)$$

بنابراین ضریب شکست به بسامد موج و در نتیجه به طول موج بستگی دارد. با شیوه‌ای مشابه شکل ۲۵۰۱۶ برای ϵ_r ، این بستگی در شکل ۲۹۰۱۹ نشان داده شده است. در این شکل ω_1 ، ω_2 ، ω_3 ، ... بسامدهای مشخص بیناب گسیلی جسم اند. از اینجا نتیجه می شود که $v = c/n$ سرعت فاز موج الکترومغناطیسی در محیط مادی به بسامد تابش بستگی دارد.



شکل ۲۹۰۱۹ تغییر ضریب شکست با بسامد و طول موج.

بنابراین امواج الکترومغناطیسی با انتشار در ماده دچار پدیده پاشیدگی می‌شوند. یعنی یک تب با بسامدهای متعدد تغییر شکل پیدا می‌کند، زیرا هر بسامدی با سرعتی متفاوت با سرعت بسامد دیگر سیر می‌کند.

سرعت گروه، بنا به معادله (۵۹.۱۸) از رابطه زیر حساب می‌شود

$$v_g = v + k \frac{dv}{dk}$$

ولی می‌دانیم که

$$\frac{dv}{dk} = \frac{dv}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dk} = v_g \frac{dv}{d\omega}$$

زیرا $v_g = d\omega/dk$. با استفاده از رابطه $v = c/n$ داریم

$$\frac{dv}{d\omega} = -\frac{c}{n^2} \frac{dn}{d\omega}$$

در نتیجه بدست می‌آید

$$v_g = v - \frac{v_g c k}{n^2} \frac{dn}{d\omega}$$

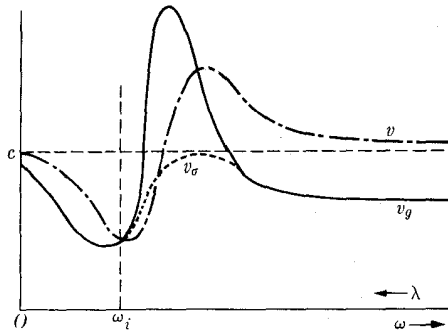
با حل معادله بر حسب v_g داریم

$$v_g = \frac{v}{1 + (ck/n^2)(dn/d\omega)} = \frac{c}{n + \omega(dn/d\omega)} \quad (59.19)$$

که در آن رابطه آخر با استفاده از رابطه $k = \omega/v = \omega n/c$ به دست می‌آید. اگر $dn/d\omega$ مثبت باشد، سرعت گروه کمتر از سرعت فاز می‌شود. چنین وضعی پاشیدگی بهنجار نام دارد. ولی اگر $dn/d\omega$ منفی باشد، در این حالت سرعت گروه از سرعت فاز بیشتر است و از آن پاشیدگی بی‌هنجار نتیجه می‌شود. در این صورت ممکن است سرعت گروه از c بزرگتر باشد و بتوان یک تب الکترومغناطیسی را با سرعتی بیش از c انتقال داد. این امر ظاهراً با نتایج به دست آمده از تبدیل لورنتس و اصل نسبیّت متناقض است.

تحلیل دقیق انتقال یک علامت الکترومغناطیسی (از نظر ریاضی تجلیل بسیار پیچیده است) که توسط بریلوئن و زومرفلد و دیگران انجام گرفت نشان می‌دهد که غیرممکن است یک علامت با سرعتی بیش از c انتقال داده شود. شکل ۳۵.۱۹ تغییر سرعت فاز v ، سرعت گروه v_g و v_ω سرعت علامت را در حوالی بسامد سرشتی ω نشان می‌دهد. علامت، بجز در حوالی بسامد سرشتی عملاً بر سرعت گروه منطبق است و هرگز حتی در ناحیه پاشیدگی بی‌هنجار نیز از c بیشتر نیست.

هنگامی که n بیشتر از یک است، و بنا بر این v از c خیلی کوچکتر است، احتمال دارد که یک ذره باردار مانند q ، با گسیل امواج الکترومغناطیسی، با سرعت v_ω بالاتر از v



شکل ۳۰.۱۹ سرعت فاز، گروه و علامت تب الکترومغناطیسی در محیط پاشنده.

سرعت فاز امواج مغناطیسی در محیط حرکت کند. این وضع با وضع توضیح داده شده در شکل ۳۶.۱۸ برای موجهای ماخ در یک شاره متناظر است. در این صورت امواج الکترو-مغناطیسی در امتداد یک سطح مخروطی که با راستای انتشار زاویه α می سازد منتشر می شوند. بنا بر معادله (۶۴.۱۸) داریم

$$\sin \alpha = \frac{v_g}{v}$$

این امواج را تابش چرذکوف می نامند. چون راستای مؤثر انتشار جبهه موج به سرعت ذره باردار وابسته است، می توان از آن برای اندازه گیری سرعت استفاده کرد. وسایلی که بدین منظور ساخته شده اند آشکارسازهای چرذکوف نام دارند. چون این وسایل اطلاعات مستقیمی از سرعت ذرات بدست می دهند، به طور گسترده در آزمایش روی ذرات بنیادی به کار می روند.

گفتیم که سرعت فاز امواج الکترومغناطیسی در محیط مادی با سرعت انتشار آنها در خلأ متفاوت است. به نظر می رسد که این تفاوت از اینجا ناشی می شود که گذردهی و تراوایی محیط مادی با خلأ یکی نیست. این اختلاف (گذردهی و تراوایی)، به نوبه خود، نتیجه قطبش الکتریکی و مغناطیسی ماده به وسیله موج الکترومغناطیسی تابشی است. از این رو هنگامی که موج الکترومغناطیسی روی یک تکه ماده فرود می آید، ذرات باردار متشکل از آنها و مولکولها را وادار به حرکت نوسانی می کند و بنا بر این این ذرات موجهای ثانوی یا «پراکنده» (به بخش ۹.۱۹ مراجعه شود) گسیل می کنند. این امواج پراکنده با موج اصلی ترکیب می شوند و موج برآیند را به وجود می آورند. معمولاً امواج ثانوی با موج اصلی در یک فاز نیستند، زیرا یک نوسانگر واداشته همیشه با نیروی وادارنده همفاز نیست (به بخش ۱۳.۱۲ مراجعه کنید). بررسی دقیق، که در اینجا از ذکر آن چشم می پوشیم، نشان می دهد که این اختلاف فاز طوری روی موج برآیند اثر می گذارد که به نظر می رسد این موج دارای سرعت فازی متفاوت با سرعت فاز یک موج در خلأ است (به مسئله ۵۵.۱۹ مراجعه شود).

این نتیجه کاملاً درست است، زیرا از دیدگاه اتمی، تمام بارها چه آزاد و چه مقید هم از زنده و امواج الکترومغناطیسی که گسیل می‌کنند باید با سرعت c منتشر شوند. این موج بر ایند که از برهم‌نهی امواج انفرادی با فازهای مختلف به دست می‌آید، به دلیل همین اختلاف فازها، سرعت انتشارش نیز متفاوت به نظر می‌رسد.

مثال ۹.۱۹ سرعت گروه را برای یک تابش الکترومغناطیسی با بسامد خیلی بسالا، مانند پرتوهای x ، حساب کنید.

حل: اگر ω خیلی بیشتر از ω_i بسامد سرشتی در معادله (۵۸.۱۹) باشد می‌توان از ω_i ‌ها چشم پوشید و معادله (۵۸.۱۹) را به صورت زیر نوشت

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2} \sum_i f_i = 1 - \frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2}$$

زیرا چنانکه در بخش ۷.۱۶ گفتیم $\sum_i f_i = 1$ است. با استفاده از تقریب $(1-x)^{1/2} = 1 - x/2 + \dots$ بنا به معادله (پ.۲۸) به ازای $x \ll 1$ ، برای رابطه ضرب شکست به دست می‌آید

$$n = 1 - \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega^2}$$

که کوچکتر از ۱ است و از اینجا نتیجه می‌شود که $v > c$ ولی $dn/d\omega = Ne^2/\epsilon_0 m_e \omega^3$ است و با قراردادن آن در معادله (۵۹.۱۹) داریم

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{1 - \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega^2} + \omega \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e \omega^3}} \\ &= \frac{c}{1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega^2}} \end{aligned}$$

بنابراین، اگر چه سرعت فاز v از c بزرگتر است، زیرا n کوچکتر از یک است، ولی سرعت گروه از c کوچکتر است. توجه کنید که سرعت فاز را با استفاده از تقریب $(1-x)^{-1} = 1+x$ ، بنا به معادله (پ.۲۸) که به ازای $x \ll 1$ برقرار است، می‌توان به صورت زیر نوشت

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{1 - \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega^2}} \approx c \left(1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega^2} \right)$$

در این صورت داریم $v_g v = c^2$. این رابطه هر چند عمومیت ندارد، ولی با تقریب بسیار خوبی، در گستره وسیعی از بسامدها صادق است.

۱۴.۱۹ اثر دوپلر در امواج الکترومغناطیسی

در بخش ۱۸.۱۳ در بارهٔ اثر دوپلر در موجهای کشسان و سایر موجهای مکانیکی که از مادهٔ در حال حرکت شکل می‌گیرند گفتگو داشتیم. برای امواج الکترومغناطیسی باید اثر دوپلر را به‌طور جداگانه مورد بحث قرار داد. نخست از این لحاظ که امواج الکترومغناطیسی مادهٔ در حرکت نیستند و در نتیجه سرعت چشمه نسبت به محیط وجود ندارد. دیگر اینکه سرعت انتشار امواج الکترومغناطیسی برابر با c است و به حرکت نسبی ناظرها بستگی ندارد. اثر دوپلر در مورد امواج الکترومغناطیسی ناگزیر باید با توجه به اصل نسبییت حل شود.

برای یک ناظر در چارچوب لخت، یک موج الکترومغناطیسی تخت و هماهنگ را می‌توان با تابعی به صورت $\sin(kx - \omega t)$ ضربدر سازهٔ دامنه، نشان داد. برای ناظر دیگری در چارچوب لخت دیگر باید مؤلفه‌های x و t ، با استفاده از تبدیل لورنتس (۳۳.۶) با x' و t' عوض شوند. در نتیجه این ناظر برای توصیف موج خود تابع $\sin(k'x' - \omega't')$ را به کار می‌برد. k' و ω' لزوماً با آنهایی که ناظر اولی به کار می‌برد یکسان نیستند. از طرف دیگر به موجب اصل نسبییت هنگام گذر از یک دستگاه لخت به دستگاه لخت دیگر $(kx - \omega t)$ باید ناوردا بماند. در این صورت داریم

$$kx - \omega t = k'x' - \omega't'$$

با استفاده از رابطه‌های اول و چهارم تبدیل عکس لورنتس، معادله‌های (۳۴.۶)، به دست می‌آید

$$k \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \omega \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = k'x' - \omega't'$$

یا

$$\frac{k - \frac{\omega v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x' - \frac{\omega - kv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t' = k'x' - \omega't'$$

در نتیجه داریم

$$k' = \frac{k - \frac{\omega v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \omega' = \frac{\omega - kv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (۶۰.۱۹)$$

با یادآوری اینکه $\omega = ck$ است، می‌توان هر یک از معادله‌های بالا را به صورت زیر نوشت

$$\omega' = \omega \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (۶۱.۱۹)$$

برای سرعت‌های کم، یعنی برای $v \ll c$ ، می‌توان به‌جای مخرج عدد یک گذاشت و نوشت

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

که همانند معادله (۶۲.۱۸) برای ناظر متحرک نسبت به چشمه در راستای انتشار است (توجه کنید که در اینجا در معادله (۶۲.۱۸) به‌جای v_0 و v بترتیب v و c قرار داده‌ایم).

معادله (۶۱.۱۹) بسامدهای ω و ω' اندازه‌گیری‌شده توسط ناظرهای O و O' را، هنگامی که O' با سرعت v در راستای محور X نسبت به O جا‌بجا می‌شود، به‌هم مربوط می‌کند. اگر حرکت نسبی دو ناظر در امتداد راستای انتشار نباشد، محاسبه مفصل‌تری (به‌مثال ۱۰.۱۹ مراجعه کنید) نشان می‌دهد که

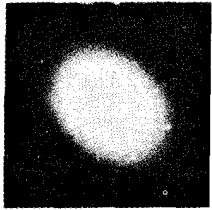
$$\omega' = \omega \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (۶۲.۱۹)$$

در این رابطه θ زاویه بین راستای انتشار و راستای حرکت نسبی است. با فرض اینکه O نسبت به چشمه امواج الکترومغناطیسی در حال سکون است، می‌بینیم که هرگاه چشمه O و ناظر O' از هم دور شوند، O' بسامد را کمتر و طول موج مربوط را بلندتر مشاهده می‌کند. این پدیده در بیناب ستاره‌ها مشاهده می‌شود و انتقال به سرخ نام دارد. زیرا بیناب مرئی ستاره‌های دورشونده به‌سوی طول موج حد (یا بالای) سرخ جا‌بجا می‌شود. این‌سازه امکان برآورد سرعت دورشدن ستاره‌ها را فراهم می‌کند.

شکل ۳۱.۱۹ انتقال به‌سوی سرخ خط‌های بیناب H و K کلسیم را در چندین سحابی نشان می‌دهد. بینک افقی سوی جا‌بجایی را نشان می‌دهد. توجه کنید که هرچه جا‌بجایی بزرگتر و بنا بر این سرعت نسبی بیشتر باشد، فاصله از سحابی نیز بیشتر است. این موضوع نظریه انبساط جهان را تأیید می‌کند. اخیراً مشاهده شده است که بعضی سحابی‌ها با سرعت نصف سرعت نور دور می‌شوند؛ این موضوع این فکر را قوت بخشیده است که اثر دوپلر نمی‌تواند به‌تنهایی مسئول انتقال به‌سوی سرخ باشد. لازم به یادآوری است که نوری که از اندرومدا (زن در زنجیر) می‌آید (شکل ۶.۱) یک جا‌بجایی به‌سوی طول موج‌های کوتاه، یعنی انتقال به‌سوی آبی را نشان می‌دهد. این موضوع ظاهراً نشان می‌دهد که حرکت کنونی منظومه شمسی در داخل کهکشان در حال چرخش، به‌سوی این سحابی است.

شکل ۳۲.۱۹ جا‌بجایی بیناب ستاره‌نگهبان شمال را نشان می‌دهد که تقریباً در حدود ۳۴ سال نوری از خورشید فاصله دارد. دو بیناب به‌فاصله زمانی شش‌ماه ثبت شده‌اند. می‌بینیم که یکی از انتقالها به سوی سرخ و دیگری به سوی آبی است. این جا‌بجایی از

سحابی خوشه‌ای

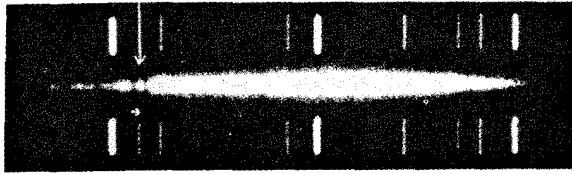


سنبله

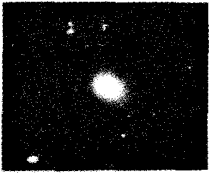
فاصله برحسب
سال نوری

۷۵۰۰۰۰۰

انتقال به سوی سرخ

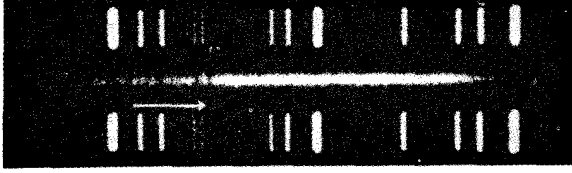


۱۲۰۰ Kms⁻¹

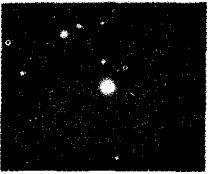


خس بزرگ (دب اکبر)

۱۰۰۰۰۰۰۰

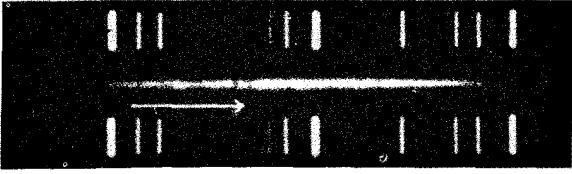


۱۵۰۰۰ Kms⁻¹

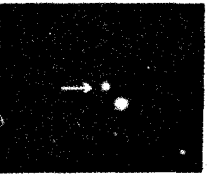


تاج شمالی

۱۳۰۰۰۰۰۰۰

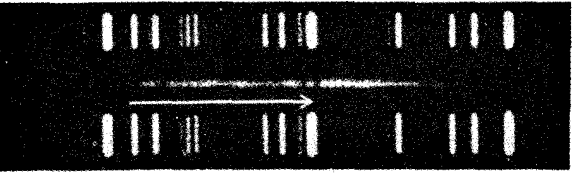


۲۱۵۰۰ Kms⁻¹

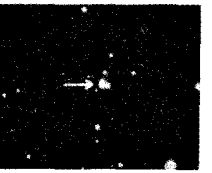


گاوجران

۲۳۰۰۰۰۰۰۰

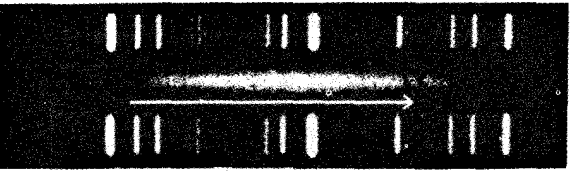


۳۹۰۰۰ Kms⁻¹



شجاع

۲۵۰۰۰۰۰۰۰



۶۰۰۰ Kms⁻¹

شکل ۳۱۰۱۹ ائس دوپلر در سحابیهای خارج از کهکشان ما. انتقال به سوی سرخ خطهای بیناب H و K کلسیم (علامت پیکانها) با افزایش فاصله از سحابی زیاد می شود، این امر دور شدن با سرعت زیاد را نشان می دهد.

(الف)

(ب)

شکل ۳۲.۱۹ بیناب (بین طول موجهای 4200 \AA و 4300 \AA) ستاره با سرعت ثابت نکهبان شمال که در فاصله شش ماه ثبت شده است، (الف) دهم تیر سال ۱۳۱۸/اول ژوئیه سال ۱۹۳۹ سرعت اندازه گیری نسبت به زمین $+18 \text{ km s}^{-1}$ (ب) ژانویه ۱۳۱۹/۱۹۴۰ سرعت -32 km s^{-1} . اختلاف سرعت 50 km s^{-1} فقط ناشی از تغییر سرعت مداری زمین است. با مقایسه با دوبیناب مرجع، انتقال خطوط بینابی کاملاً مشهود است.

و ارونی راستای حرکت زمین نسبت به نکهبان شمال (سماک رامح) ناشی می شود. رابطه (۶۱.۱۹) را با استفاده از اصل نسبیت برای فاز $x - \omega t$ موج به دست آوردیم. ولی از طرف دیگر، مقداری انرژی و اندازه حرکت به این تابش نسبت دادیم و این انرژی و اندازه حرکت را برابر انرژی و اندازه حرکت فوتون گرفتیم. بنابراین باید تحقیق شود که آیا استدلال به کار رفته منطقی است یا نه. این موضوع را می توان با به کار گیری تبدیل لورنتس برای انرژی و اندازه حرکت فوتون و مطابقت آن با معادله (۶۰.۱۹) بررسی کرد (به مثال ۸.۱۱ مراجعه شود). از معادله (۵۰.۱۹) برای یک فوتون به دست می آید

$$E = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda} \quad (63.19)$$

از به کار بستن معادله (۲۷.۱۱) برای تبدیل انرژی و اندازه حرکت از یک دستگاه لخت به دستگاه دیگر داریم

$$p' = \frac{p - \frac{vE}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{و} \quad E' = \frac{E - vp}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (64.19)$$

در این صورت با به کار بردن رابطه های $E' = h\nu'$ و $p' = h/\lambda' = h\nu'/c$ و همین طور رابطه های E و p و حذف سازه مشترک h از تمام جمله ها به دست می آید

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (65.19)$$

از ضرب دوطرف این رابطه در 2π و با استفاده از رابطه $\omega = 2\pi\nu$ ، معادله (۶۱.۱۹) از

نسو به دست می آید. این نتیجه را می توانستیم مستقیماً از مثال (۸.۱۱)، با قراردادن $p = hv/c = h\omega/2\pi c$ در رابطه اول (با نوشتن رابطه مشابهی برای p') و با حذف سازه مشترک $h/2\pi c$ ، به دست آوریم. بنابراین می توان نتیجه گرفت که مفهوم فوتون به نوعی از نظریه نسبیت سرچشمه می گیرد. یعنی اگر بپذیریم که رابطه های $E = cp$ و $\omega = ck$ همزمان اعتبار دارند، مقایسه ساده معادله های (۶۰.۱۹) و (۶۴.۱۹) فیزیکدانان را وامی دارد تا درصدد یافتن ارتباطی به گونه « $v \rightarrow \omega$ یا $E \rightarrow k$ یا λ » باشند. اگر فیزیکدانی در این خط پژوهش افتاد، مفهوم فوتون به عنوان یک در بایست نظری خود را نشان می دهد: با وجود این، کار عمده اینشتین و کامپتون بر پایه شواهد تجربی مستقیم، کشف رابطه های (۵۰.۱۹) را در مورد تابش الکترومغناطیسی به جلو انداخت.

مثال ۱۰.۱۹ معادله (۶۲.۱۹) مربوط به اثر دوپلر را اثبات کنید.

حل: اگر راستای انتشار یک موج الکترومغناطیسی تخت با راستای حرکت نسبی دوناظر O و O' زاویه θ بسازد لازم است به جای معادله دوم (۶۴.۱۹) معادله زیر را به کار بریم

$$E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

که در آن $p_x = p \cos \theta$ است. بنابراین با توجه به اینکه برای یک فوتون $E = cp$ است، می توان نوشت

$$E' = \frac{E - vp \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (۶۶.۱۹)$$

بالاخره با به کار بردن $E = hv = h\omega/2\pi$ و حذف سازه های مشترک به دست می آید

$$\omega' = \omega \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

بدین طریق معادله (۶۲.۱۹) اثبات می شود.

مثال ۱۱.۱۹ درباره رابطه ای که بین راستاهای انتشار یک موج الکترومغناطیسی تخت، که به وسیله دوناظر در حرکت نسبی به دست می آید بحث کنید. این اثر را ابیراهی می نامند.

حل: فرض کنید که چشمه‌ای نسبت به ناظر O در حال سکون است و همین ناظر یک موج الکترومغناطیسی را که راستای انتشار آن با راستای محور X زاویه θ می‌سازد نگاه می‌کند. محور X بر راستای حرکت نسبی دو ناظر منطبق است. در این صورت بنا به معادله (۲۷.۱۱) داریم

$$p'_x = \frac{p_x - vE}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ولی $p_x = p \cos \theta$ است و همین‌طور برای ناظر O' داریم $p'_x = p' \cos \theta'$. بنا بر این با قراردادن $E = cp$ به دست می‌آید

$$p' \cos \theta' = p \frac{\cos \theta - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

اگر رابطه $p = h/\lambda = h\nu/2\pi c$ و همین‌طور رابطه مربوط به p' را در نظر بگیریم، پس از حذف سازه‌های مشترک به دست می‌آید

$$\omega' \cos \theta' = \omega \frac{\cos \theta - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

از ترکیب این رابطه با معادله (۶۲.۱۹) برای حذف بسامد داریم

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$$

این همان رابطه‌ای است که راستاهای انتشار یک موج الکترومغناطیسی را که توسط دو ناظر تعیین می‌شوند به یکدیگر مربوط می‌کند.

۱۵.۱۹ بیناب تابش الکترومغناطیسی

امواج الکترومغناطیسی گستره وسیعی از بسامدها یا طول موجها را می‌پوشاند و آنها را می‌توان بر حسب چشمه اصلی‌شان رده‌بندی کرد. این رده‌بندی دارای مرزهای دقیقی نیست،

زیرا چشمه‌های مختلف ممکن است موجهایی تولید کنند که در گستره‌ی بسامدها روی هم بیفتند. رده‌بندی متداول بیناب الکترومغناطیسی به قرار زیر است

(۱) **امواج رادیویی:** طول موج آنها از چند کیلومتر تا 3×10^3 m را می‌پوشاند. گستره‌ی بسامد این موجها از چند هرتز تا 10^9 Hz تغییر می‌کند. انرژی فوتونها تقریباً از ۰ شروع می‌شود و به 10^{-5} eV می‌رسد. این امواج، که در دستگاههای بخش رادیویی و تلویزیونی به کار می‌روند، توسط وسایل الکترونیکی و به طور عمده توسط مدارهای نوسانی تولید می‌شوند.

(۲) **میکروموجها:** طول موج میکروموجها از 3×10^3 m تا 10^{-2} m را دربر می‌گیرد. گستره‌ی بسامد این موجها از 10^9 Hz تا 3×10^{11} Hz را می‌پوشاند. انرژی فوتونها از 10^{-5} eV به 10^{-3} eV می‌رسد. آنها را در رادار و سایر دستگاههای مخابراتی و همچنین در بررسیهای خیلی دقیق ساختار اتمها و مولکولها به کار می‌برند. این امواج نیز توسط دستگاههای الکترونیکی تولید می‌شوند. ناحیه‌ی میکروموجی را با UHF، مخفف جمله‌ی «بسامدهای خیلی بلند نسبت به بسامدهای رادیویی»، نشان می‌دهند.

(۳) **بیناب فرسرخ:** این موجها از طول موجهای 10^{-3} m تا 7.8×10^{-7} m (یا 7800 \AA) را می‌پوشانند. گستره‌ی بسامد آنها از 3×10^{11} Hz تا 4×10^{14} Hz را دربر می‌گیرد. انرژی فوتونها از 10^{-3} eV به 1.6 eV می‌رسد. این ناحیه به سه زیر ناحیه تقسیم می‌شود که عبارتند از فرسرخ دور به طول موج از 10^{-3} m تا 3×10^{-5} m؛ فرسرخ میانی به طول موج از 3×10^{-5} m و 3×10^{-6} m و فرسرخ نزدیک تا طول موج 7.8×10^{-7} m. مولکولها و اجسام داغ مولد این امواج اند و کاربردهای متعدد صنعتی، پزشکی، اخترشناسی و غیره دارند.

(۴) **بیناب مرئی یا نور:** این بیناب نوار باریکی از طول موجها را تشکیل می‌دهد که شبکیه‌ی چشم نسبت به آنها حساس است. نور مرئی از طول موج 7.8×10^{-7} m تا 3.8×10^{-7} m و از بسامد 4×10^{14} Hz تا 8×10^{14} Hz گسترده است. انرژی فوتونها از 1.6 eV به 3.2 eV می‌رسد. نور به وسیله‌ی اتمها و مولکولها در نتیجه‌ی تنظیم داخلی حرکت مؤلفه‌های آنها، بویژه الکترونها تولید می‌شود. اهمیت نور در زندگی بشر آنچنان است که محتاج به یادآوری نیست.

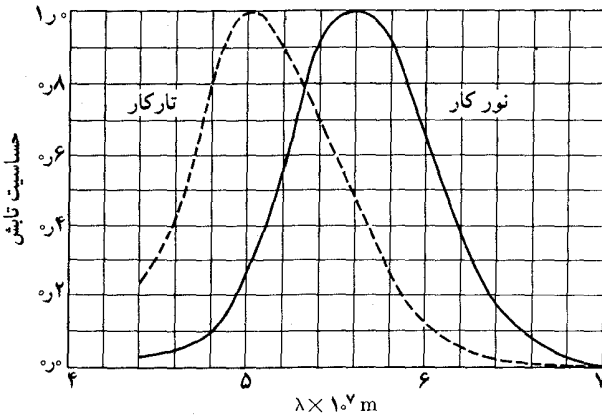
نور به قدری اهمیت دارد که شاخه‌ی ویژه‌ای از فیزیک کاربردی، به نام اپتیک، به آن اختصاص داده شده است. در اپتیک از پدیده‌های نورانی و اپتیکی گفتگو می‌شود. این مبحث ساخت وسایل اپتیکی را نیز دربر می‌گیرد. به علت شباهت رفتاری نواحی فرسرخ و فرابنفش بیناب، در حال حاضر مبحث اپتیک، علاوه بر بیناب مرئی، این دو را نیز شامل می‌شود. رنگها، یعنی تأثیرات متفاوت نور روی چشم به بسامد یا طول موج تابش

الکترومغناطیسی بستگی دارند و برای آدم متوسط با گستره‌های زیر متناظرند.

رنگ	طول موج λ بر حسب «m»	بسامد ν بر حسب «Hz»
بنفش	400×10^{-7} تا 390	7.5×10^{14} تا 7.7×10^{14}
آبی	450 تا 490	6.1×10^{14} تا 6.1×10^{14}
سبز	500 تا 570	5.3×10^{14} تا 5.3×10^{14}
زرد	580 تا 590	5.1×10^{14} تا 5.1×10^{14}
نارنجی	600 تا 620	4.8×10^{14} تا 4.8×10^{14}
سرخ	700 تا 620	4.3×10^{14} تا 4.3×10^{14}

حساسیت چشم نیز به طول موج نور بستگی دارد و این حساسیت برای طول موجهای نزدیک به $m \times 10^{-7} \times 56$ بیشینه است. به دلیل رابطه موجود بین رنگ و بسامد یا طول موج، یک موج الکترومغناطیسی با طول موج یا بسامد کاملاً معین را هوج تکفام می‌نامند. دید در اثر انتقال علایم به مغز توسط دو نوع سلول صورت می‌گیرد. این سلولها درغشایی به نام شبکیه، که در ته چشم واقع است، قرار دارند. این دو سلول عبارتند از سلولهای مخروطی و سلولهای استوانه‌ای. سلولهای مخروطی نسبت به نور شدید، مانند نور روز روشن فعال‌اند و نسبت به رنگها حساس. سلولهای استوانه‌ای برعکس، قادرند در نور ضعیف، مانند نور اتاق تاریک عمل کنند و در مقابل رنگها حساسیت ندارند. بینایی ناشی از سلولهای مخروطی را نورکلا و بینایی ناشی از سلولهای استوانه‌ای را تادکلا می‌نامند. حساسیت چشم برای این دو نوع دید در شکل ۳۳.۱۹ داده شده است.

۵) پرتوهای فرابنفش: طول موج این پرتوها از $m \times 10^{-7} \times 38$ تا حدود $m \times 10^{-10} \times 6$ و بسامد آنها از $Hz \times 10^{14} \times 8$ تا حدود $Hz \times 10^{17} \times 3$ است. انرژی فوتونهای مربوط به آنها از $eV \times 3$ تا $eV \times 10^3 \times 2$ است. این موجها از تخلیه الکتریکی آنها و مولکولها تولید می‌شوند. انرژی آنها از مرتبه بزرگی انرژیهای است که در اغلب واکنشهای شیمیایی وجود دارند و همین خاصیت اثرهای شیمیایی آنها را توجیه می‌کند. خورشید یک چشمه بسیار غنی تابش فرابنفش است. دلیل اساسی قهوه‌ای شدن پوست بدن در مقابل آفتاب همین پرتوهای فرابنفش است. همچنین تابش فرابنفش نور خورشید با آنها، در بالای جو برهم کنش می‌کند و باعث تولید یونهای زیادی می‌شود. این امر روشن می‌کند که چرا جو بالا، در ارتفاعات بالاتر از 80 km ، شدیداً یونیده است و به همین دلیل است که این ناحیه از فضا را یونکره (یونسفر) می‌نامند. هنگامی که بعضی از موجودات



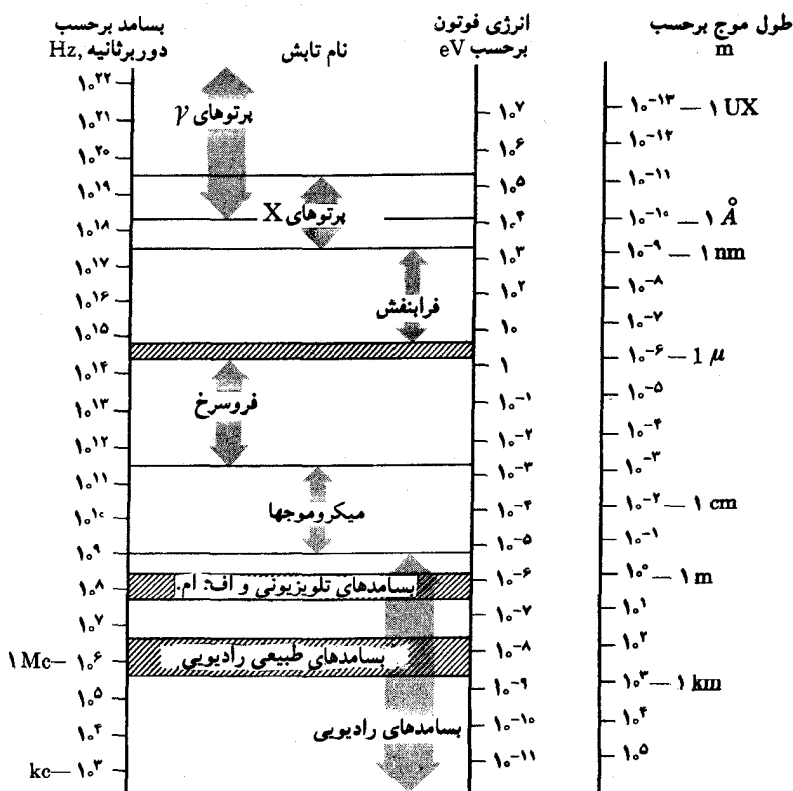
شکل ۳۳-۱۹ حساسیت چشم درمقابل دیدهای نورکار و تارکار.

ذره بینی تابش فرا بنفش درمی آشامند، احتمال دارد بر اثر واکنشهای شیمیایی حاصل از یونش و تجزیه مولکولها از بین بروند. به همین دلیل در پزشکی برای سترون کردن و گندزدایی از تابشهای فرا بنفش استفاده می شود.

۶) **پرتوهای X:** این قسمت از بیناب الکترومغناطیسی طول موجهای از $10^{-9} m$ تا $6 \times 10^{-12} m$ و بسامدهایی از $3 \times 10^{17} Hz$ و $5 \times 10^{19} Hz$ را دربر می گیرد. انرژی فوتونهای مربوط به این پرتوها از $1.2 \times 10^3 eV$ شروع و به $2.4 \times 10^5 eV$ ختم می شود. این قسمت از بیناب الکترومغناطیسی، در سال $1895/1274$ ، توسط رونتگن، فیزیکدان آلمانی، در جریان مطالعه پرتوهای کاتودیک کشف شد. پرتوهای X را الکترونهای لایه های داخلی اتم که قیدشان محکمتر است تولید می کنند. چشمه دیگر پرتوهای X تابش ترمزی است که در بخش ۷-۱۹ شرح آن گذشت. در واقع، چشمه اخیر رایجترین شیوه تولید پرتوهای X در لامپهای تجارتي است. يك باریکه الکترونی که توسط اختلاف پتانسیلی در حدود چندین هزار ولت شتاب گرفته است، روی يك هدف فلزی به نام آنتی کاتود فرود می آید (شکل ۱۶-۱۹). در واقع این همان روشی بود که رونتگن در آزمایش اولیه خود برای تولید پرتوهای X به کار برد. پرتوهای X، به خاطر انرژی خیلی زیاد فوتونهای آنها، اثرهای عمیقی بر اتمها و مولکولهای تشکیل دهنده موادی که از داخل آنها انتشار می یابند، می گذارند و بدین طریق این مولکولها را یونیده می کنند یا از هم می پاشند. پرتوهای X را برای تشخیص در پزشکی نیز به کار می برند؛ زیرا در آشامی بسیار شدید این پرتوها توسط استخوانها در مقایسه با در آشامی آنها توسط بافتها امکان عکس برداری دقیقی را فراهم می کند. همچنین در اثر واکنشهای شیمیایی باعث ضایعات جدی در بافتها و اندامهای زنده بدن می شوند. به همین دلیل است که از پرتوهای X برای

معالجه سرطان استفاده می کنند. زیرا به نظر می رسد که پرتوهای X بافتهای بیمار را بیشتر از بافتهای سالم از بین می برند. بایستی تأکید شود که هر مقداری از پرتوهای X برخی از بافتهای سالم بدن را نیز از بین می برد. تابش بیشتر از دوز پرتوهای X مرگ یا بیماری شدید به دنبال دارد.

(۷) **پرتوهای گاما:** این امواج الکترومغناطیسی منشأ هسته ای دارند. این پرتوها حد بالایی بیناب پرتوهای X را می پوشانند. طول موج آنها از 10^{-10} m تا خیلی پایینتر از 10^{-14} m، و بسامد آنها از 3×10^{18} Hz تا خیلی بیشتر از 3×10^{22} Hz را در بر می گیرد. انرژی فوتونهای مربوط به پرتوهای گاما از 10^4 eV تا حدود 10^7 eV است. این انرژیها از همان مرتبه بزرگی انرژیهای عمل می کنند. بنا بر این در آشامی پرتوهای γ ممکن است تغییراتی در هسته تولید کند. این پرتوها توسط بسیاری از مواد پرتوزا تولید می شوند و در رآکتورهای هسته ای به مقدار زیاد وجود



شکل ۳۴.۱۹ بیناب الکترومغناطیسی.

دارند. اغلب مواد، این پرتوها را باسانی در نمی‌آشامند، ولی در آشامی آنها توسط موجودات زنده موجب بروز اثرهای ناگوار می‌شود. کار با این پرتوها پوشش حفاظتی سنگینی لازم دارد.

در تابش کیهانی، امواج الکترومغناطیسی با طول موجهای بازهم کوتاهتر، یا بسامدهای بالاتر، یافت می‌شود؛ فوتونهای این موجها بسیار پرانرژی‌اند. تابشهای اخیر در پژوهشهای اخترشناسی بسیار سودمند بوده‌اند.

با نگاهی به پهنه بسیار گسترده بیناب تابشهای الکترومغناطیسی باسانی درمی‌یابیم که چرا قسمتهای مختلف این بیناب، هنگام انتشار از داخل ماده، رفتار متفاوتی از خود نشان می‌دهند. به عنوان مثال، موجهایی که انرژی فوتونهای آنها با انرژی سرشتی الکترون‌ها در اتم یا آنها در مولکول قابل مقایسه است بیشتر با آنها یا مولکولها برهم‌کنش می‌کنند. تابشهای فرسرخ، نور مرئی و فرابنفش چنین وضعی دارند. معمولاً تابشهای با طول موج بلند (حامل فوتونهای کم انرژی) با ماده‌ای که توانایی در آشامی آن کمتر است به‌طور ضعیف برهم‌کنش می‌کنند. امواج رادیویی چنین وضعی دارند. موجهای پرانرژی یا با انرژی خیلی بالا، یعنی با طول موج بسیار کوتاه، مانند پرتوهای x یا پرتوهای γ نیز معمولاً کمتر در ماده در آشامیده می‌شوند. ولی اثرهای آنها عمیق‌تر است، زیرا نه تنها باعث یونش آنها و مولکولها می‌شوند بلکه در بیشتر موارد شکافت هسته‌ای نیز به‌وجود می‌آورند.

شکل ۳۴.۱۹ بخشهای مختلف بیناب الکترومغناطیسی را بر حسب انرژی، بسامد و طول موج نشان می‌دهد.

فهرست منابع

1. «The Longest Electromagnetic Waves,» J. Heitzler, *Sci. Am.*, March 1962, page 128.
2. «Influence of the Environment on the Wave Transmission of Energy: Resonance and Relaxation,» R. Lindsay, *Am. J. Phys.* 28, 67 (1960).
3. «The Scattering of X-rays as Particles,» A. Compton, *Am. J. Phys.* 29, 817 (1961).
4. «Measurement of the Velocity of Light Through μ_0 , ϵ_0 ,» W. Stephens, *Am. J. Phys.* 31, 105 (1963).
5. «Resource Letter QSL-1 on Quantum and Statistical Aspects of Light,» P. Carruthers, *Am. J. Phys.* 31, 321 (1963).
6. «The Compton Effect: Historical Background,» A. Bartlett, *Am. J. Phys.* 32, 120 (1964).

7. «Some Thoughts on Radiation Pressure,» P. Tea, Jr., *Am. J. Phys.* 33, 190 (1965).
8. «Einstein's Proposal of the Photon Concept,» A. Arons and M. Peppard, *Am. J. Phys.* 33, 367 (1965).
9. *Optics*, B. Rossi. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957, Chapters 7 and 9.
10. *Great Experiments in Physics*, Morris Shamos, editor, New York: Holt, Rinehart and Winston, 1959, Chapter 13 (Hertz); Chapter 17 (Einstein); Appendix 5 (Compton).
11. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapters 28 and 34; Volume II, Chapters 20, 21, 27, and 28.
12. *Source Book in Physics*, W. F. Magie, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 549 (Hertz): page 578 (Hallwachs).
13. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Chapters 29 and 32.

۱۴. ریتس، جسی. آر. [و] اف. جسی. میلفورد، اصول تئوری الکترومغناطیسی، ترجمه جلال صمیمی [و] ناصرعلیزاده قمصری، ج ۱، ۲۰۱، مشهد، مؤسسه چاپ و انتشارات دانشگاه مشهد، ۱۳۵۹، ج ۲. (ویرایش دوم انگلیسی این کتاب در مرکز نشر دانشگاهی در دست ترجمه است.)

مسئله‌ها

۱۰۱۹ میدان الکتریکی یک موج الکترومغناطیسی تخت درحالا، در دستگاه یکه‌های $E_x = 0$ و $E_y = 0.5 \cos [2\pi \times 10^8(t - x/c)]$ ، $E_z = 0$ نشان داده می‌شود. (الف) طول موج، حالت قطبش و راستای انتشار را معین کنید. (ب) میدان مغناطیسی موج را حساب کنید. (ج) شدت میانگین یا شار انرژی از واحد سطح را حساب کنید.

۲۰۱۹ مسئله ۱۰۱۹ را برای حالتی که میدان الکتریکی با $E_x = 0$

$$E_z = 0.5 \sin [4\pi \times 10^8(t - x/c)] \text{ و } E_y = 0.5 \cos [4\pi \times 10^8(t - x/c)]$$

نشان داده شود از نو حل کنید.

۳۰۱۹ معادله میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} را به گونه‌ای بنویسید که توصیف کننده امواج الکترومغناطیسی زیر باشد؛ این امواج در امتداد محور X منتشر می‌شوند؛ (الف) یک موج قطبیده خطی که

زاویه صفحه ارتعاش آن با صفحه XY ، ۴۵° است؛ (ب) يك موج قطبیده خطی كه زاویه صفحه ارتعاش آن با صفحه XY ، ۱۲۰° است؛ (ج) يك موج قطبیده دایره‌ای راستگرد؛ و (د) يك موج قطبیده بیضیوار كه قطر بزرگ آن موازی محور Y و دوبرابر قطر كوچك آن است.

۴.۱۹ موج $E_z = E_0 \cos 2\pi(t/P - x/\lambda + 1/\lambda)$ و $E_y = E_0 \cos 2\pi(t/P - x/\lambda)$ را در نظر بگیرید. بزرگی بردار الکتریکی و زاویه‌ای را كه با محور Y در زمانهای $t=0$ در مکانهای $x=0$ ، $x=\lambda/4$ ، $x=\lambda/2$ ، $x=3\lambda/4$ و $x=\lambda$ می‌سازد حساب کنید. میدان مغناطیسی حاصل را برای هر مورد بنویسید.

۵.۱۹ حالت قطبش موجهای زیر را شرح دهید

$$E_y = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (\text{الف})$$

$$E_z = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

$$E_y = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (\text{ب})$$

$$E_z = -A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

$$E_y = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (\text{ج})$$

$$E_z = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) - \frac{3\pi}{4} \right]$$

$$E_y = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (\text{د})$$

$$E_z = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \frac{\pi}{4} \right]$$

میدان مغناطیسی را برای هر حالت بنویسید و چگونگی تغییر آن را با پیشروی موج نشان دهید.

۶.۱۹ يك موج تخت سینوسی قطبیده خطی مربوط به نوری با طول موج $۱۰^{-7} \text{ m} \times ۵۰۰ = \lambda$ درخلاء منتشر می‌شود. شدت میانگین آن برابر ۱ W m^{-2} است. راستای انتشار آن در صفحه XY قرار دارد و با محور X زاویه ۴۵° می‌سازد. میدان الکتریکی به موازات محور Z نوسان می‌کند. معادله‌های توصیف کننده میدانهای الکتریکی و مغناطیسی این موج را بنویسید.

۷۰۱۹ يك موج الكترومغناطیسی تخت، سینوسی و قطبیده خطی به طول موج $10^{-7} \text{m} \times 500$ در خلا در راستای محور X منتشر می‌شود. شدت میانگین پرواحد سطح موج برابر 1W m^{-2} و صفحه ارتعاش میدان الکتریکی موازی محور Y است. رابطه‌های توصیف کننده میدانهای الکتریکی و مغناطیسی این موج را بنویسید.

۸۰۱۹ دامنه میدان الکتریکی يك موج الكترومغناطیسی تخت برابر 10^{-2}V m^{-1} است؛ (الف) دامنه میدان مغناطیسی آن را، (ب) انرژی مربوط به واحد حجم موج را پیدا کنید. (ج) اگر این موج هنگامی که روی جسمی فرود می‌آید کاملاً درآشامیده شود، فشارتابشی را تعیین کنید. (د) اگر جسم بازتابنده کامل باشد به سؤال حالت (ج) از نو پاسخ دهید.

۹۰۱۹ تابش الكترومغناطیسی خورشید با آهنگ $10^3 \text{W m}^{-2} \times 10^4$ به زمین می‌رسد. در صورتی که بتوان این تابش را امواج تخت در نظر گرفت، دامنه میدانهای الکتریکی و مغناطیسی این امواج را حساب کنید.

۱۰۰۱۹ توان میانگین يك ایستگاه رادیویی برابر 10^5W است. فرض کنید که این توان به طور یکنواخت در نیمکره‌ای به مرکز ایستگاه تأییده می‌شود. بزرگی بردار پوئین تینگ و دامنه میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را در نقطه‌ای بدفاصله 10km از چشمه پیدا کنید. فرض کنید که موج در این فاصله تخت است.

۱۱۰۱۹ يك فرستنده رادار، انرژی خود را در مخروطی به زاویه رأس 10^{-2} استرادیان می‌فرستد. درفاصله 10^3m از آنتن، دامنه میدان الکتریکی برابر 10^5V m^{-1} است. دامنه میدان مغناطیسی و توان فرستنده را پیدا کنید.

۱۲۰۱۹ فرض کنید که يك لامپ 100 واتي با بازده 80% تمام انرژی خود را به گونه همسانگرد تابش می‌کند. دامنه میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را درفاصله 2m از لامپ حساب کنید.

۱۳۰۱۹ دامنه بیشینه میدان الکتریکی امواج رادیویی که يك گیرنده می‌گیرد برابر 10^{-1}V m^{-1} است. با فرض اینکه بتوان موج را تخت در نظر گرفت؛ (الف) دامنه میدان مغناطیسی (ب) شدت میانگین موج و (ج) چگالی میانگین انرژی را حساب کنید. (د) با فرض اینکه گیرنده درفاصله 1km از ایستگاه فرستنده قرار دارد و تابش انرژی همسانگرد است، توان ایستگاه را حساب کنید.

۱۴۰۱۹ دو موج الكترومغناطیسی هماهنگ، با بسامدهای یکسان ν و دامنه E_0 بترتیب در راستاهای X و Y ، در خلا منتشر می‌شوند. میدانهای الکتریکی هر دو موج موازی با محور Z است. برای موج برآیند از سرهم نهی آنها، (الف) مؤلفه‌های میدان الکتریکی \mathbf{E} ، (ب) مؤلفه‌های میدان مغناطیسی \mathbf{B} ، (ج) چگالی انرژی E ، (د) مؤلفه‌های بردار پوئین تینگ و چگالی انرژی را حساب کنید. (ه) صفحاتی را تعیین کنید که در آنها مقدار میانگین E^2

بیشینه یا کمینه است. (و) صفحه‌هایی را تعیین کنید که در آنها بردار \mathbf{B} نوسانهای دایره‌ای انجام می‌دهد

۱۵.۱۹ ثابت کنید که اگر

$$\mathbf{V} = V_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

باشد شرط $\text{div } \mathbf{V} = 0$ ایجاب می‌کند که $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0 = 0$ یا \mathbf{k} عمود بر \mathbf{V}_0 باشد. این امر نشان می‌دهد که بنا به معادله (۶۵.۱۷) در خلا \mathbf{E} و \mathbf{B} هر دو بر \mathbf{k} عمودند و نتایج بخش ۲.۱۹ کاملاً عمومیت دارند.

۱۶.۱۹ ثابت کنید که اگر

$$\mathbf{V} = V_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

باشد در این صورت $\mathbf{V} = \mathbf{k} \times \mathbf{V}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ و معادله (۶۵.۱۷) ایجاب می‌کند که $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}$ و $\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \omega \mathbf{E}$. ثابت کنید که دو نتیجه باهم سازگارند. با استفاده از این نتایج و نتایج مسئله پیش، دربارهٔ سمنگیری نسبی بردارهای \mathbf{k} ، \mathbf{E} و \mathbf{B} بحث کنید. این سمنگیری را با نتایج بخش ۲.۱۹ مقایسه کنید.

۱۷.۱۹ با استفاده از نتایج مسئله پیش ثابت کنید که میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} يك موج الکترو-مغناطیسی تخت باید همفاز باشند.

۱۸.۱۹ ثابت کنید که بردار پوئین تینگ را می‌توان به صورت $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ نوشت. این رابطه را می‌توان برای يك موج الکترومغناطیسی که در خلا یا در يك محیط مادی منتشر می‌شود به کار برد.

۱۹.۱۹ ثابت کنید که مقدار میانگین بردار پوئین تینگ يك موج سینوسی تخت برابر است با $E_0^2 / 2\mu_0$ یا $(1/2) c \epsilon_0 E_0^2$. این نتیجه را با معادله (۱۷.۱۹) مقایسه کنید.

۲۰.۱۹ اگر يك دستگاه از بارهای نوسانی به گونهٔ همسانگرد انرژی الکترومغناطیسی تابش کند، ثابت کنید که مقدار میانگین بردار پوئین تینگ در فاصلهٔ r برابر است با $(dE/dt)_{\text{ave}} / 4\pi r^2$.

۲۱.۱۹ يك دستگاه از بارهای نوسانی حول يك نقطه با آهنگ 10^4 W انرژی تابش می‌کند. با فرض اینکه تابش همسانگرد است، در نقطه‌ای به فاصلهٔ 1 m (الف) مقدار میانگین بردار پوئین تینگ، (ب) دامنهٔ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی و (ج) چگالیهای انرژی و اندازه حرکت را، پیدا کنید. [دانه‌مایی: توجه کنید که در فاصلهٔ خیلی دور از چشمه يك قسمت کوچک از جبههٔ موج را می‌توان تخت در نظر گرفت].

۲۲.۱۹ شار انرژی از واحد سطح را برای صفحه‌ای که بر سرعت بار در حال حرکت عمود است و از بار می‌گذرد محاسبه کنید. فرض کنید که شعاع بار برابر R است و رابطهٔ

نانسیبیتی را برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی به کار ببرد. حاصل را نقد کنید. [دانهمایی: برای محاسبه شار از حلقه‌هایی به شعاع r ، به ضخامت dr و به مرکز بار الکتریکی استفاده کنید.]

۲۳.۱۹ یک چشمه گازی نوری با طول موج $5 \times 10^{-7} \text{m}$ گسیل می کند. فرض کنید که هر مولکول مانند یک نوسانگر با بار e و دامنه 10^{-10}m رفتار می کند. (الف) توان تابشی میانگین هر مولکول را حساب کنید. (ب) اگر توان تابشی کل انرژی برابر 1W باشد چندتا مولکول همزمان تابش می کنند؟

۲۴.۱۹ مقدار میانگین $(dE/dt)_{\text{ave}}$ را از معادله (۲۶.۱۹) برای یک پروتون درهسته برآورد کنید. z_0 و ω را برای پرتوهای γ با انرژی پایین بترتیب در حدود 10^{-15}m و $5 \times 10^9 \text{Hz}$ اختیار کنید.

۲۵.۱۹ از معادله (۳۹.۱۹) شدت تابش یک بار شتاب گرفته بر حسب راستای تابش به دست می آید. با انتگرال گیری از این رابطه در تمام جهات معادله (۳۸.۱۹) را به دست آورید.

۲۶.۱۹ رابطه توان تابشی ذره بار داری را که با سرعت v عمود بر میدان مغناطیسی **B** حرکت می کند به دست آورید.

۲۷.۱۹ (الف) انرژی جنبشی الکترون در اتم هیدروژن روی مداری به شعاع 10^{-11}m برابر 53eV است. با فرض اینکه نظریه مثال ۷.۱۹ قابل اجراست انرژی تابشی را در هر ثانیه و برای هر دور چرخش حساب کنید. (ب) همین محاسبه را برای الکترونی با انرژی 50keV روی مداری به شعاع 1m تکرار کنید. (ج) همین محاسبه را برای پروتونی با انرژی 50keV روی مداری به شعاع 1m تکرار کنید.

۲۸.۱۹ ثابت کنید که توان تابشی ذره ای که در یک شتاب دهنده خطی حرکت می کند برابر است با

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{تابشی}} = \left(\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 m_0^2 c^3}\right) \left(\frac{dE_k}{dx}\right)^2$$

E_k انرژی جنبشی ذره است.

۲۹.۱۹ ثابت کنید که توان تابشی در یک شتاب دهنده دایره ای برابر است با

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{تابشی}} = \left(\frac{q^2 c}{6\pi\epsilon_0 r^2}\right) \left(\frac{v}{c}\right)^4 \left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)^4$$

۳۰.۱۹ ثابت کنید که برای گازها جمله دوم معادله (۵۸.۱۹) کوچک است و می توان نوشت

$$n \approx 1 + \frac{Ne^2}{2m_0\epsilon} \left(\sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2}\right)$$

برای تنها یک بسامد بازآوا رابطه به صورت زیر درمی آید

$$n \approx 1 + \frac{Ne^2}{2m_e \epsilon_0 (\omega_i^2 - \omega^2)}$$

۳۱.۱۹ ضریب شکست گاز هیدروژن در شرایط دما و فشار متعارفی برابر است با $n = 1 + 1.400 \times 10^{-4}$ در $\lambda = 5.46 \times 10^{-7} \text{ m}$ و $n = 1 + 1.547 \times 10^{-4}$ در $\lambda = 2.54 \times 10^{-7} \text{ m}$. اگر فرض کنیم که تنها یک بسامد بازآوا وجود دارد، این بسامد و تعداد نوسانگرهای الکترومغناطیسی را در واحد حجم پیدا کنید. این تعداد را با تعداد مولکولها در واحد حجم مقایسه کنید (به مسئله ۴.۲ مراجعه شود). [داهنمایی: از نتیجه مسئله ۳۰.۱۹ استفاده کنید.]

۳۲.۱۹ با مراجعه به مسئله پیش، ضریب شکست هیدروژن را برای $\lambda = 4 \times 10^{-7} \text{ m}$ فشار ۱۰ atm و دمای ۳۰۰ K حساب کنید.

۳۳.۱۹ گازی با ثابت بازگرداننده $k = 3 \times 10^2 \text{ kg s}^{-2}$ را که مولکولهای آن مانند دوقطبی نوسانی رفتار می کنند در نظر می گیریم. ذره های نوسان کننده الکترونها هستند. بسامد سرشتی آنها را حساب کنید. گاز را در حالت شرایط متعارفی فشار و دما در نظر بگیرید و ضریب شکست آن را به صورت تابعی از بسامد بنویسید. مقدار ضریب شکست را برای $\lambda = 5 \times 10^{-7} \text{ m}$ و $\lambda = 10^{-2} \text{ m}$ حساب کنید.

۳۴.۱۹ تحقیق کنید که در ناحیه پرتوهای x، در مثال ۹.۱۹، مقدار $Ne^2/m_e \omega^2$ کوچکتر از یک است.

۳۵.۱۹ بسامد و طول موج فوتونهایی را که دستگاههای زیر درآشامیده اند تعیین کنید (الف) هسته درآشامنده 10^3 eV انرژی، (ب) هسته درآشامنده 1 eV انرژی و (ج) مولکول درآشامنده 10^{-2} eV انرژی.

۳۶.۱۹ اتمهای سدیم یک تابش الکترومغناطیسی با طول موج $5.89 \times 10^{-7} \text{ m}$ ، متناظر با ناحیه زرد بیناب مرئی را درمی آشامند یا گسیل می کنند. انرژی فوتونهای درآشامیده یا گسیلیده را تعیین کنید.

۳۷.۱۹ انرژی فوتونی را به دست آورید که دارای اندازه حرکتی برابر اندازه حرکت (الف) پروتونی با انرژی 40 MeV (ب) الکترونی با انرژی 40 MeV است. ناحیه بینایی را که این فوتونها به آن تعلق دارد تعیین کنید. [داهنمایی: توجه کنید که پروتون را می توان در مکتبک نسانسبیتی بررسی کرد در صورتی که الکترون باید در مکتبک نسبیتی بررسی شود.]

۳۸.۱۹ کمینه انرژی لازم برای جدا کردن اتمهای کربن و اکسیژن مولکول منواکسید کربن

۱۱ eV است. کمینه بسامد و بیشینه طول موج تابش الکترومغناطیسی لازم برای این کار چقدر است.

۳۹.۱۹ يك اتم هیدروژن در حال سکون فوتونی با انرژی 10^4 eV را درمی‌آشامد. در نتیجه الکترونی در راستای تابش فرودی از اتم جدا می‌شود. با چشمپوشی از انرژی لازم برای جدا کردن الکترون از اتم (حدود 13.6 eV) اندازه حرکت و انرژی الکترون و پروتون را پیدا کنید.

۴۰.۱۹ انرژی بستگی يك الکترون در سرب برابر $9 \times 10^4 \text{ eV}$ است. هنگامی که سرب در معرض يك تابش الکترومغناطیسی معین قرار می‌گیرد و فوتوالکترون‌ها پس از ورود به میدان مغناطیسی 10^{-2} T ، دایره‌ای به شعاع 25 m رسم می‌کنند، حساب کنید: (الف) اندازه حرکت و انرژی الکترون‌ها را، (ب) انرژی فوتون‌های درآشامیده شده را. (ج) آیا می‌توان از اثر پس‌زنی یون سرب چشم‌پوشید؟

۴۱.۱۹ هنگام افروختن يك سطح فلزی معین توسط نوری با طول موج‌های مختلف، پتانسیل‌های ایست فوتوالکترون‌ها به صورت زیر حساب شده‌اند

V (بر حسب V)	$\lambda (\times 10^{-7} \text{ m})$	V (بر حسب V)	$\lambda (\times 10^{-7} \text{ m})$
۰.۶۲	۴.۹۲	۱.۴۸	۳.۶۶
۰.۳۶	۵.۴۶	۱.۱۵	۴.۰۵
۰.۲۴	۵.۷۹	۰.۹۳	۴.۳۶

نمودار پتانسیل ایست (روی محور طول‌ها) را بر حسب بسامد نور (روی محور عرض‌ها) رسم کنید. از روی نمودار: (الف) بسامد آستانه، (ب) تابع کار فوتوالکتریکی فلز و (ج) نسبت h/e را تعیین کنید.

۴۲.۱۹ تابع کار فوتوالکتریکی پتاسیم برابر 2.0 eV است. فرض کنید که نوری به طول موج $3.6 \times 10^{-7} \text{ m}$ بر روی پتاسیم می‌تابد؛ (الف) پتانسیل ایست فوتوالکترون‌ها، (ب) انرژی جنبشی و سرعت تندروترین الکترون‌های پرتابی را بدست آورید.

۴۳.۱۹ يك باریکه نور یکنواخت و تکفام به طول موج $4.0 \times 10^{-7} \text{ m}$ روی ماده‌ای با تابع کار 2.0 eV می‌تابد. اگر شدت این باریکه $3.0 \times 10^{-9} \text{ W m}^{-2}$ باشد؛ (الف) تعداد الکترون‌های گسیل شده در هر ثانیه از يك متر مربع و (ب) انرژی درآشامیده شده در هر ثانیه از يك متر مربع ماده را تعیین کنید.

۴۴.۱۹ يك تابش الکترومغناطیسی به طول موج 10^{-5} m در راستای قائم روی قطعه فلزی به جرم 10^{-1} kg می‌تابد و يك الکترون در راستای مخالف تابش فرودی به بیرون پرتاب

می‌شود. با استفاده از قوانین بقای اندازه حرکت و انرژی، انرژی الکترون و انرژی پس‌زنی قطعه فلز را تعیین کنید. تابع کار را برابر صفر می‌گیریم. آیا این نتیجه عمل نادیده گرفتن اصل بقای اندازه حرکت را در محاسبهٔ افسر فوتوالکتریک توجیه می‌کند؟

۴۵.۱۹ فوتونی با انرژی 10^4 eV با الکترون آزاد و در حال سکونی برخورد می‌کند و با زاویهٔ 60° پراکنده می‌شود: (الف) تغییرات انرژی، بسامد و طول موج فوتون را، (ب) انرژی جنبشی، اندازه حرکت و سوی پس‌زنی الکترون را پیدا کنید.

۴۶.۱۹ تابشی به طول موج 10^{-10} m (یا 1 \AA) در داخل یک قطعه کربن پراکندگی کامپتون انجام می‌دهد. تابش پراکنده در راستای عمود بر تابش فرودی مشاهده می‌شود. (الف) طول موج تابش پراکنده و (ب) انرژی جنبشی و راستای حرکت الکترونیهای پس‌زده را پیدا کنید.

۴۷.۱۹ با مراجعه به مسئلهٔ قبل اگر الکترونیهای پس‌زده بسا راستای تابش فرودی زاویهٔ 60° بسازند (الف) طول موج و جهت تابش پراکنده و (ب) انرژی جنبشی الکترون را به دست آورید.

۴۸.۱۹ ثابت کنید که انرژی جنبشی الکترون پس‌زده در پدیدهٔ کامپتون با رابطهٔ

$$E_k = \frac{h\nu\alpha(1 - \cos\theta)}{1 + \alpha(1 - \cos\alpha)}$$

که در آن $\alpha = hv/m_e c^2$ است، داده می‌شود. اگر $h\nu \gg (1/2)m_e c^2$ باشد، نشان دهید که انرژی بیشینهٔ الکترون پس‌زده برابر است با

$$\frac{(h\nu)^2}{h\nu + \frac{1}{2}m_e c^2} \approx h\nu - \frac{1}{2}m_e c^2$$

۴۹.۱۹ اگر در پراکندگی کامپتونی، الکترون پراکنده در راستایی جا بجا شود که بسا راستای فوتون تابشی زاویهٔ ϕ بسازد، نشان دهید که انرژی جنبشی الکترون برابر است با

$$E_k = \frac{h\nu(2\alpha \cos^2\phi)}{(1 + \alpha)^2 - \alpha^2 \cos^2\phi}$$

که در آن $\alpha = hv/m_e c^2$ است.

۵۰.۱۹ نشان دهید که در پراکندگی کامپتون رابطهٔ بین زاویه‌های تعریف‌کنندهٔ راستای فوتون پراکنده و الکترون پس‌زده برابر است با

$$\cot\phi = (1 + \alpha) \tan\frac{1}{2}\theta$$

۵۱.۱۹ با استفاده از نتیجه مثال ۸.۱۱، معادله (۶۲.۱۹) را برای اثر دوپلر به دست آورید.

۵۲.۱۹ فرض کنید که ماده‌ای موازی محور X با سرعت v حرکت می‌کند و $V' = c/n'$ سرعت نور در همین ماده است که ناظر O' ، ساکن نسبت به ماده، اندازه می‌گیرد. نشان دهید که سرعت یک موج منتشرشونده در امتداد محور X در داخل ماده برابر است با $V \approx c/n' + v(1 - 1/n'^2)$. این سرعت را ناظر O که با سرعت v نسبت به ماده حرکت می‌کند اندازه می‌گیرد. [داهنجایی: از تبدیل لورنتس سرعتها استفاده کنید].

۵۳.۱۹ نشان دهید هنگامی که نور در داخل محیطی که با سرعت v به موازات محور X حرکت می‌کند منتشر شود، اثر دوپلر، چنانچه $v \ll c$ باشد، با رابطه زیر داده می‌شود

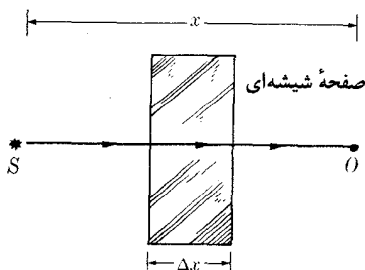
$$v' = v \left(1 - \frac{mv}{c} \right)$$

۵۴.۱۹ با استفاده از نتیجه مسئله ۵۳.۱۹ ثابت کنید که $n' = n - (mv/c) dn/dv$ است، که در آن n' در بسامد v' و n در بسامد v محاسبه می‌شوند. چون n' باید (بنا به مسئله ۵۲.۱۹) در بسامد v' محاسبه شود، نشان دهید که نتیجه مسئله ۵۲.۱۹ را می‌توان به صورت

$$V \approx \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right)$$

نوشت. [داهنجایی: توجه کنید که $\lambda v = c/n$ و در جمله آخر به جای n' می‌توان n قرار داد.]

۵۵.۱۹ فرض کنید که یک تیغه شیشه‌ای با ضریب شکست n و ضخامت Δx ، همان‌طور که شکل ۳۵.۱۹ نشان می‌دهد، بین چشمه تکفام S و ناظر O قرار گرفته است. (الف) اگر از اثر درآشامی تیغه شیشه‌ای چشم پوشیم، نشان دهید که تیغه شیشه‌ای بدون تغییر دامنه موج E_0 ، اختلاف فازی برابر $E_0 \omega(n-1)\Delta x/c$ روی موجی که ناظر O دریافت



شکل ۳۵.۱۹

می‌کند می‌افزاید. (ب) اگر اختلاف فاز کوچک باشد، خواه در اثر خیلی کوچک بودن Δx و خواه به علت نزدیک بودن n به ۱، نشان دهید که موج دریافتی در نقطه O را می‌توان مانند موجی در نظر گرفت که از برهم‌نهی موج اصلی با دامنه E_0 ، درغیاب تیغه شیشه‌ای، و یک موج با دامنه $E_0 \omega(n-1) \Delta x / c$ با اختلاف فاز $-\pi/2$ به دست می‌آید. (این مسئله اثر محیط مادی را روی موج الکترومغناطیسی نشان می‌دهد.)

بازتاب، شکست، قطبش

مقدمه	۱۰۲۰
اصل هویگنس	۲۰۲۰
قضیه مالوس	۳۰۲۰
بازتاب و شکست موجهای تخت	۴۰۲۰
بازتاب و شکست موجهای کروی	۵۰۲۰
بازهم درباره قوانین بازتاب و شکست	۶۰۲۰
بازتاب و شکست موجهای الکترومغناطیسی	۷۰۲۰
انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیط ناهمسانگرد	۸۰۲۰
دوفامی	۹۰۲۰
شکست دوگانه	۱۰۰۲۰
فعالیت اپتیکی	۱۱۰۲۰
بازتاب و شکست در سطوح فلزی	۱۲۰۲۰
انتشار در محیط ناهمگن	۱۳۰۲۰

۱۰۲۰ مقدمه

سرعت انتشار کلیه موجهایی که در فصلهای ۱۸ و ۱۹ بررسی کردیم به خواص فیزیکی محیطی بستگی دارد که این موجها در آن منتشر می‌شوند. به عنوان مثال، سرعت موجهای کشسان به مدول کشسانی و چگالی محیط بستگی دارد. سرعت امواج الکترومغناطیسی به گذردهی و تراوایی ماده‌ای که این امواج در آن منتشر می‌شوند وابسته است. این بستگی بین سرعت انتشار موج و خواص محیط به پدیده‌های بازتاب و شکست منجر می‌شود. این پدیده‌ها هنگامی ظاهر می‌شوند که موج به سطح جداکننده دو محیطی که سرعت انتشار موج در آنها مختلف است برخورد کند. موج بازتاب موج جدیدی است که در همان محیطی که موج اولیه انتشار می‌یافت در سوی مخالف منتشر می‌شود. موج شکست موجی است که در محیط دوم انتشار پیدا می‌کند. انرژی موج تابشی بین موج بازتاب و موج شکست تقسیم می‌شود. در اکثر موارد، مانند مورد آینه‌ها موج بازتاب سهم بیشتری از انرژی را به خود اختصاص می‌دهد. در سایر موارد موج شکست بیشترین مقدار انرژی را با خود حمل می‌کند. هنگامی که موج عرضی قطبیده است، معمولاً قطبش هم روی بازتاب و هم روی شکست اثر می‌گذارد. بنا بر این در این فصل در مورد قطبش نیز گفتگو خواهیم داشت.

۲۰۲۰ اصل هویگنس

انتشار هر موجی با معادله‌های میدانی که با آن موج متناظرند توضیح داده می‌شود. این موضوع بتفصیل در فصلهای ۱۸ و ۱۹ بررسی شد. بنا بر این اگر چشمه موجی معلوم باشد، علی‌الاصول می‌توان انتشار آن را از ناحیه‌ای به ناحیه دیگر دنبال کرد، به شرط اینکه تغییر در خواص محیط را در محاسبات خود منظور کنیم. با وجود این، در نقطه خاصی از فضا، می‌توان دامنه یک موج را بدون مراجعه به چشمه موج حساب کرد. حدود سال ۱۶۸۰/۱۰۵۹، کریستیان هویگنس (۱۰۵۸-۱۰۷۴/۱۶۲۹-۱۶۹۵) فیزیکدان آلمانی سازوکار ساده‌ای برای رسم مسیر انتشار موج پیشنهاد کرد. ساختمان این روش به گونه‌ای است که در یک محیط می‌توان آن را هم در مورد موجهای کشسان و هم در مورد موجهای مکانیکی به کار برد.

یادآوری می‌شود سطح یا جبهه موج سطحی است از تمام نقاط محیط که حرکتهای موجی همزمان به آن می‌رسند. بنا بر این فاز آشفتهگی در تمام نقاط یک سطح موج، یکسان است. به عنوان مثال برای یک موج تخت، آشفتهگی را با رابطه $f(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - vt)$ نشان می‌دهند و یک سطح موج مکان هندسی نقاطی است که در یک لحظه معلوم فاز $\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - vt$ روی آن سطح مقدار یکسانی دارد. بنا بر این سطح موج را با معادله زیر نشان می‌دهند

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - vt = \text{const}$$

که در لحظه t متناظر با صفحه‌ای است عمود بر راستای بردار یکای \mathbf{u} (به مثال ۱۱.۳

مراجعه کنید). همچنین برای موجهای کروی، سطح موج با رابطه $r - vt$ داده می‌شود، که در یک لحظه معلوم با کره متناظر است.

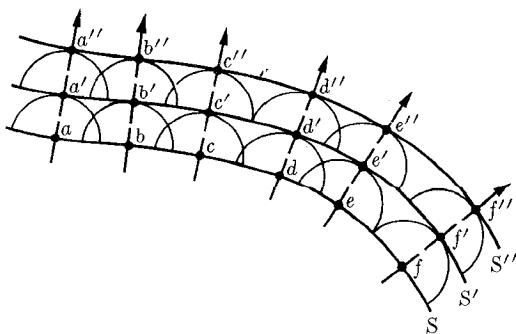
هویگنس یک روش ترسیمی برای نمایش گذر از یک سطح موج به سطح موج دیگر داده است. سطح موج S را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۰۲۰). هنگامی که حرکت موجی به این سطح می‌رسد، هر ذره مانند a, b, c, \dots روی سطح S یک چشمه ثانوی موج تشکیل می‌دهد و امواج ثانوی گسیل می‌کند (به صورت نیمدایره‌های کوچک نشان داده‌ایم) که به لایه بعدی ذرات در محیط می‌رسند. این ذرات به حرکت درمی‌آیند و سطح موج بعدی S' را تشکیل می‌دهند. سطح S'' بر تمام امواج ثانوی مماس است. این فرایند ادامه پیدا می‌کند و در نتیجه آن موج از داخل محیط عبور می‌کند. این نمایش تصویری انتشار موج در مورد یک موج کشسان حاصل از ارتعاشات مکانیکی آنها و مولکولهای یک جسم کاملاً منطقی به نظر می‌رسد.

ولی، این نمایش در مواردی، مانند انتشار موج الکترومغناطیسی در خلأ، یعنی جایی که ذره ارتعاشی وجود ندارد، معنای فیزیکی ندارد. بنابراین، با اینکه ترسیم هویگنس در مورد موجهای مکانیکی در محیط مادی کاملاً قابل قبول بود، ولی به محض اینکه موجهای دیگری، با ماهیت متفاوت، در طبیعت شناخته شدند، نیاز به تجدیدنظر پیدا کرد. این تجدیدنظر در پایان قرن اخیر به وسیله کیرشهف انجام شد. کیرشهف بجای ترسیم حسی هویگنس یک فرمول کاملاً ریاضی قرار داد. به سبب پیچیدگی خیلی زیاد محاسباتی از آوردن آن در اینجا صرف نظر می‌کنیم، اما، چنانکه در بخش بعد خواهد آمد، نتایج نهایی این فرمولها نسبتاً ساده‌اند.

حرکت موجی به وسیله معادله عمومی (۴۸.۱۸)، نشان داده می‌شود

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \quad (10.20)$$

کسه در آن ξ ممکن است در مورد موج کشسان جابجایی آنها در جسم و در موج الکترومغناطیسی، میدان الکتریکی یا مغناطیسی باشد و به همین ترتیب. شناخت انتشار موج

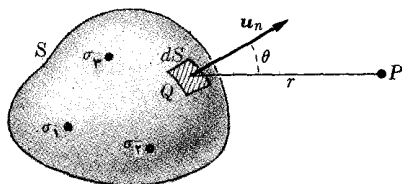


شکل ۱۰۲۰ ترسیم هویگنس موج پیشرونده.

در يك محیط داده اساساً یافتن جوابی مانند $\xi(\mathbf{r}, t)$ برای معادلهٔ دیفرانسیل بالاست. حل معادلهٔ (۱.۲۰) به برآورده شدن شرایط فیزیکی مسئله توسط ξ بستگی دارد؛ شرایط فیزیکی مسئله عبارتند از محل و ماهیت چشمه، سطوح فیزیکی ناپیوسته و غیره. این شرایط را ریاضیدانان شرایط مرزی می‌نامند. نظریهٔ معادلات دیفرانسیل حاکی از این است که، اگر مقادیر تابع $\xi(\mathbf{r}, t)$ روی سطحی بسته مانند S (شکل ۲.۲۰) معلوم باشد، تحت شرایط مشخص می‌توان جوابی برای معادلات دیفرانسیل نوع (۱.۲۰) پیدا کرد. به عبارت دقیقتر، فرض کنید که می‌خواهیم حرکت موجی را در نقطهٔ P بررسی کنیم. اگر چشمه‌های $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ ، معلوم باشند، می‌توان سهم هر کدام را در نقطهٔ P پیدا کرد و سپس برای به دست آوردن حرکت موجی بر ایند آنها را با هم جمع کرد. اکنون فرض کنید که به جای چشمه‌ها، مقدار ξ در هر نقطه از يك سطح اختیاری ولی بسته معلوم باشد. در این حالت نیز، حتی اگر سهم چشمه‌ها هم مجهول باشد، می‌توان موج را در نقطهٔ P به دست آورد. بیان فوق، به زبان ریاضی، چنین توجیه می‌شود: فرض کنید که $f(Q, t)$ تابع موج در لحظهٔ t در نقطهٔ Q روی سطح بستهٔ S است. همچنین فرض کنید که r فاصلهٔ سطح جزئی dS ، حول نقطهٔ Q ، از نقطهٔ P باشد. آشفتگی در نقطهٔ P در زمان t را می‌توان به صورت انتگرال زیر نشان داد*

$$\xi_P(t) = \oint_S g(\theta) \frac{f(r-vt)}{r} dS \quad (2.20)$$

که در آن انتگرال روی تمام سطح S است. این انتگرال تغییر فیزیکی نسبتاً ساده‌ای دارد. سازهٔ $(1/r)f(r-vt)$ نمایش يك موج کروی است که توسط سطح جزئی dS در لحظهٔ $t - r/v$ گسیل می‌شود و در لحظهٔ t به نقطهٔ P می‌رسد، بنابراین r/v فاصلهٔ زمانی انتشار موج از dS تا نقطهٔ P است. سازهٔ $g(\theta)$ يك سازهٔ راستایی است، بدین معنی که موجهایی که dS گسیل می‌دارد دامنه‌شان در تمام راستاها یکسان نیست. اگر dS بر راستای انتشار عمود باشد $g(\theta)$ به صورت زیر درمی‌آید



شکل ۲.۲۰ اگر موج روی سطح بستهٔ S معلوم باشد می‌توان آن را در نقطهٔ P حساب کرد.

* رابطهٔ اصلی کمی مفصلتر است؛ ولی معادلهٔ (۲.۲۰) در اینجا پاسخگوی نیازهای ماست و با تقریب رضایت‌بخشی در مورد مسائلی که در این کتاب مطرح شده‌اند به کار می‌رود.

$$g(\theta) = \frac{1}{4}(1 + \cos \theta)$$

بنابراین دامنهٔ بیشینه ($g = 1$) با $\theta = 0$ ، یا با انتشار بد سمت جلو متناظر است. دامنهٔ کمینه ($g = 0$) با زاویهٔ $\theta = \pi$ ، یا با انتشار بد سمت عقب متناظر است. بنا بر این نتیجه می‌گیریم که در لحظهٔ t می‌توان آشفتگی را در نقطه‌ای مانند P به دست آورد، به شرط اینکه هر سطح جزئی dS از سطح بستهٔ S مانند یک چشمهٔ موج ثانوی عمل کند. بیان فوق اساساً همان اصل هویگنس است که با چشم اندازی دیگر و بدون اشاره به مدل مکانیکی اظهار شده است. در جریان بررسیهای آینده، هنگام بحث در انتشار امواج، بسویژه هنگام مطالعهٔ پراکندگی و پراش فرصت خواهیم یافت تا اصل هویگنس را به طریقی که کیرشلف فرمولبندی کرد به کار ببریم.

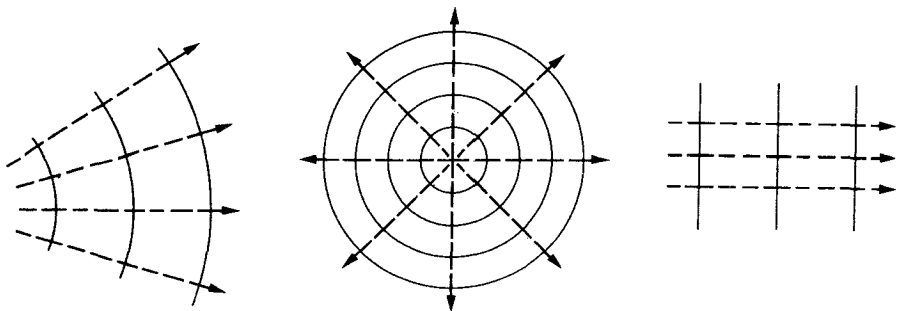
۳.۲۰ قضیهٔ مالوس

قضیهٔ مالوس روش دیگری برای ترسیم مسیر انتشار موج از داخل محیط به دست می‌دهد. با مراجعه به شکل ۱۰۲۰ می‌بینیم که می‌توان یک سری خطهای عمود بر سطح موجهای پیاپی رسم کرد (خط چینها در راستای پیکانها). این خطها را پرتو می‌نامند و بسا خطوط انتشار موج متناظرند. پیدا است که رابطهٔ بین پرتوها و سطوح با رابطهٔ بین خطهای نیرو و سطحهای هم پتانسیل مشابه است. نقاطی مانند a, a', a'' یا b, b', b'' روی سطوح موج مختلف در شکل ۱۰۲۰ را که به وسیلهٔ یک پرتو به هم وصل می‌شوند نقاط متناظر می‌نامند. بدیهی است زمان لازم برای رفتن موج از سطح S به سطح S' باید در امتداد تمام پرتوها یکسان باشد. بنا بر این می‌توان گفت

فاصلهٔ زمانی بین نقاط متناظر از دو سطح موج برای هر جهت نقطهٔ متناظر یکی است.

از این گفته نتیجه می‌گیریم که فاصله‌های aa'', bb'', cc'' و غیره باید به سرعت حرکت موج در هر نقطه بستگی داشته باشند. در یک محیط همگن و همسانگرد که سرعت تمام نقاط در تمام راستاها یکی است، فاصلهٔ بین دو سطح موج باید برای تمام نقاط متناظر برابر باشد. در اینجا به یک امر مهم دیگر پی می‌بریم، و آن این است که در یک محیط همگن و همسانگرد، پرتوها باید خطهای مستقیم باشند، زیرا به سبب تقارن، هیچگونه دلیلی برای انحراف پرتو از یک سو به سوی دیگر وجود ندارد. این اثر را قبلاً در مورد موجهای تخت و کروی دیدیم و قسمتهای الف و ب و ج شکل ۳۰۱۹ آن را نشان می‌دهند. بنا بر این در حالت کلی سطوح موج باید دارای مجموعه‌ای از عمودهای مشترک باشند و نیز چنانکه قسمت ج شکل ۳۰۲۰ نشان می‌دهد، فاصلهٔ جداکنندهٔ سطوح در امتداد این عمودها یکسان است.

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن موج از چند محیط همگن و همسانگرد



(ج) موجهای به شکل اختیاری

(ب) موجهای کروی

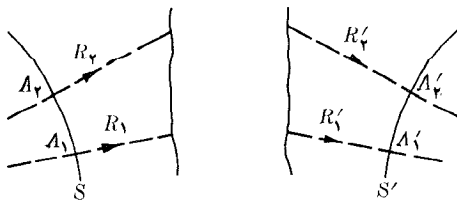
(الف) موجهای تخت

شکل ۳۰۲۰

پیاپی می گذرد. در گذر از هر سطح جدا کننده دو محیط مجاور احتمال دارد که راستای انتشار عوض شود. (یعنی راستای پرتوها عوض شود)، ولی در هر محیط معین، پرتوها همواره به صورت خطوط مستقیم عمود بر سطوح موج منتشر می شوند. فرض کنیم که S يك سطح موج در محیط اول است (شکل ۳۰۲۰). در این صورت می توان دو پرتو R_1 و R_2 را عمود بر سطح موج S رسم کرد. سطوح موج پیاپی بعدی در این محیط نیز باید بر R_1 و R_2 عمود باشند. اگر بعد از اینکه موج از تمام محیطهای مختلف گذشت، سطح موج دیگری مانند S' را در نظر بگیریم، متوجه می شویم که پرتوهای R_1 و R_2 به پرتوهای R'_1 و R'_2 که بر S' عمودند تبدیل شده اند. یا به گفته دیگر

در تمام طول فرایند انتشار، دایرة عمود برهمی بین پرتوها و سطوح موج حفظ می شود.

افزون بر این، طبق این قضیه، زمانی که موج برای انتشار از نقطه A_1 تا نقطه A'_1 (که نقاط متناظرند) صرف می کند باید با زمانی که موج از نقطه A_2 به نقطه A'_2 (که آنها نیز متناظرند) می رود، برابر باشد.



شکل ۳۰۲۰ پرتوهای متناظر در امواج فرودی و خروجی.

۴.۲۰ بازتاب و شکست موجهای تخت

موج تختی را که در محیط (۱) در راستای بردار یکای \mathbf{u}_i منتشر می‌شود در نظر می‌گیریم (شکل ۵.۲۰). آزمایش نشان می‌دهد که هنگام رسیدن این موج به سطح AB که محیط (۱) را از محیط (۲) جدا می‌کند، یک موج وارد محیط (۲) می‌شود و موج دیگری به محیط (۱) باز می‌گردد. این امواج را به ترتیب موجهای بازتاب و موجهای تابش می‌نامند. هنگامی که پرتو تابش را مایل است، موج شکست در راستای بردار یکای \mathbf{u}_r که با بردار یکای \mathbf{u}_i فرق دارد، منتشر می‌شود؛ در صورتی که موج بازتاب در این حالت در راستای بردار یکای \mathbf{u}'_r که با بردار یکای \mathbf{u}_i نسبت به سطح قرینه است، منتشر می‌شود. شکل ۶.۲۰ راستای متناظر با هر یک از این پرتوها را نشان می‌دهد. زاویه‌های θ_i ، θ_r و θ'_r را به ترتیب زاویه‌های تابش، شکست و بازتاب می‌نامند. راستاهای سه بردار یکای \mathbf{u}_i ، \mathbf{u}_r و \mathbf{u}'_r با قوانین زیر، که از طریق آزمایش ثابت شده‌اند، به یکدیگر مربوط می‌شوند

(۱) پرتوهای تابش، شکست و بازتاب در صفحه‌ای عمود بر سطح جدایی دو محیط قرار دارند. در نتیجه این سطح شامل عمود N نیز هست.

(۲) زاویه تابش و زاویه بازتاب باهم برابرند، یعنی

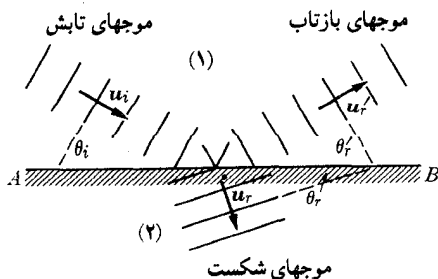
$$\theta_i = \theta'_r \quad (۳.۲۰)$$

(۳) نسبت سینوس زاویه تابش به سینوس زاویه شکست مقداری است ثابت. این بیان قانون اسنل نام دارد و چنین نوشته می‌شود

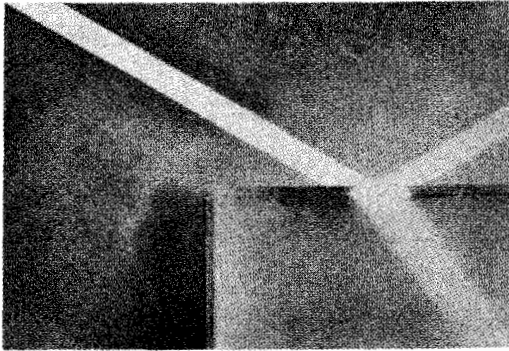
$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = n_{۲۱} \quad (۴.۲۰)$$

ثابت $n_{۲۱}$ را ضریب شکست محیط (۲) نسبت به محیط (۱) می‌نامند. مقدار عددی آن به ماهیت موج و خواص دو محیط بستگی دارد.

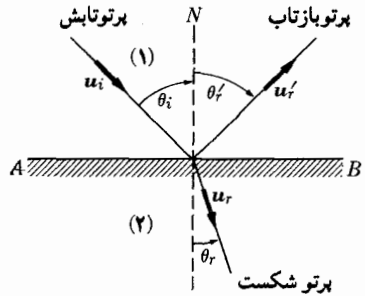
این قوانین در حالتی که سطح موج و سطح جدایی دو محیط، هیچکدام تخت نباشند باز هم معتبر است، زیرا در هر نقطه یک جزء از هر سطح را می‌توان تخت در نظر گرفت و پرتوها در این نقطه مطابق معادله‌های (۳.۲۰) و (۴.۲۰) رفتار می‌کنند.



شکل ۵.۲۰ موجهای تخت تابش، بازتاب و شکست.



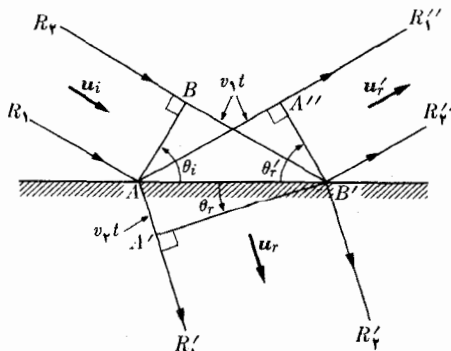
(ب)



(الف)

شکل ۶۰۲۰ (الف) پرتوهای تابش، بازتاب و شکست. (ب) بازتاب و شکست نور در شیشه.

هر سه قانون را می توان، بدون زحمت زیاد، با آزمایش تحقیق کرد. همچنین این قوانین، با استفاده از مفاهیم اساسی انتشار موج و بخصوص استفاده از قضیه مالوس از راه نظری نیز قابل اثبات اند. به عنوان مثال، قانون اول را می توان تنها بر اساس شرایط تقارن اثبات کرد. زیرا پرتو تابش و خط عمود N صفحه ای را تشکیل می دهند و از پیش دلیلی وجود ندارد که پرتوهای بازتاب و شکست خارج از این صفحه قرار گیرند. برای اثبات قانون دوم و سوم، دو پرتو تابشی R_1 و R_2 را در نظری می گیریم (شکل ۷۰۲۰)، این دو پرتو موازی اند، زیرا موجهای تابش تخت اند. پرتو R_1 در نقطه A و پرتو R_2 در نقطه B' به سطح جدایی دو محیط برخورد می کنند. چون وضع هندسی در نقطه A و B' یکسان است نتیجه می گیریم که پرتوهای شکست R_1' و R_2' و همچنین پرتوهای بازتاب R_1'' و R_2'' نیز موازی اند، چون پرتوهای R_1 و R_2 به دلخواه انتخاب شده اند، موجهای بازتاب و شکست نیز تخت اند زیرا آنها، بنا به قضیه مالوس، باید بر مجموعه متناظری از پرتوهای موازی عمود باشند.



شکل ۷۰۲۰

اکنون به بررسی سطوح موج می پردازیم. AB را به عنوان موج تابش، $A'B'$ را موج شکست و $A''B''$ را موج بازتاب در نظر می گیریم. طبق قضیه مالوس، پرتوهای بین نقاط متناظر در سطوح موج باید در زمانهای یکسان پیموده شوند. فرض کنید t زمانی است که طول می کشد تا موج تابش در امتداد پرتو R_1 با سرعت v_1 از نقطه B به نقطه B' برود. در همین مدت موج شکست با سرعت v_2 از نقطه A تا نقطه A' را در امتداد پرتو R_1' می پیماید و موج بازتاب در امتداد R_1'' با سرعت v_1 از نقطه A تا A'' پیشروی می کند. بنا بر این داریم

$$BB' = v_1 t, AA' = v_2 t, AA'' = v_1 t$$

وازشکل به دست می آید

$$\sin \theta_i = \frac{BB'}{AB'} = \frac{v_1 t}{AB'}$$

$$\sin \theta_r = \frac{AA''}{AB'} = \frac{v_1 t}{AB'}$$

$$\sin \theta_t = \frac{AA'}{AB'} = \frac{v_2 t}{AB'}$$

از مقایسه رابطه اول با رابطه سوم داریم $\sin \theta_i = \sin \theta_r$ یا $\theta_i = \theta_r$. بدین طریق قانون بازتاب یا معادله (۳.۲۰) به دست می آید. از تقسیم رابطه اول بر رابطه دوم داریم

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{v_1}{v_2}$$

این رابطه نیز قانون اسنل یا معادله (۴.۲۰) را بیان می کند، زیرا v_1/v_2 نسبت بین دو سرعت انتشار، ثابت است. از مقایسه رابطه فوق با معادله (۴.۲۰) نتیجه می شود که ضریب شکست نسبی دو محیط برابر است با نسبت سرعت انتشار موج در این دو محیط و یا

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} \quad (۵.۲۰)$$

محیط ویژه ای را به عنوان مرجع یا استاندارد انتخاب می کنیم و سرعت انتشار موج در این محیط را با c نشان می دهیم. ضریب شکست مطلق هر محیط دیگری با رابطه زیر تعریف می شود

$$n = \frac{c}{v} \quad (۶.۲۰)$$

برای موجهای الکترومغناطیسی این محیط مرجع خلا* است، بنابراین داریم $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ولی در مورد دو محیط مختلف داریم

* مفهوم ضریب شکست مطلق برای موجهای الکترومغناطیسی در بخش ۱۳.۱۹ آمده است.

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{c}{v_2} \times \frac{v_1}{c} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21} \quad (۷.۲۰)$$

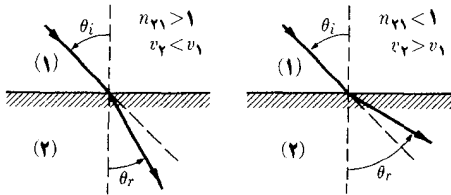
بنابراین ضریب شکست نسبی دو محیط برابر است با نسبت ضریب شکست مطلق آنها. با استفاده از رابطه (۷.۲۰)، قانون اسنل یا معادله (۴.۲۰) را می‌توان به صورت متقارن‌تر زیر نوشت

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r \quad (۸.۲۰)$$

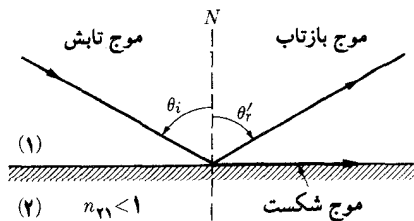
توجه کنید، همچنانکه شکل ۸.۲۰ نیز نشان می‌دهد، بر حسب اینکه $v_2 \leq v_1$ ، یعنی $n_{21} \leq 1$ و $n_2 \leq n_1$ باشد به دست می‌آید $\theta_i \leq \theta_r$ درحالت دوم، یعنی $n_{21} < 1$ ممکن است وضع خاصی به وجود آید، هنگامی که

$$\sin \theta_i = n_{21} \quad (۹.۲۰)$$

باشد، از معادله (۴.۲۰) به دست می‌آید $\sin \theta_r = 1$ یا $\theta_r = \pi/2$ که نشان می‌دهد پرتو شکست موازی سطح جدایی دو محیط است. زاویه θ_i را که از معادله (۹.۲۰) به دست می‌آید زاویه بحرانی می‌نامند و با λ نشان می‌دهند. وضع هندسی این حالت را در شکل ۹.۲۰ آورده‌ایم. اگر $n_{21} < 1$ باشد، حالت $\theta_i > \lambda$ یا $\sin \theta_i > n_{21}$ به دست می‌آید، در



شکل ۸.۲۰ پرتوهای شکست برای $n_{21} > 1$ و $n_{21} < 1$.



شکل ۹.۲۰ بازتاب کلی هنگامی رخ می‌دهد که $n_{21} < 1$ و θ_i از زاویه بحرانی λ بیشتر باشد.

این صورت $\sin \theta_r > 1$ می شود که ناممکن است. بنابراین در این حالت، پرتو شکست وجود ندارد و می گویند بازتاب کلی رخ داده است. به عنوان مثال، چنین وضعی هنگام عبور نور از شیشه به داخل هوا پیش می آید. به گفته دقیقتر، همچنانکه شکل ۹.۲۰ نشان می دهد، در محیط دوم موجی وجود دارد که موازی با سطح جدایی دو محیط منتشر می شود ولی دامنه آن خیلی سریع با عمق کاهش می یابد و موج به لایه های خیلی نازک در امتداد سطح جدایی دو محیط محدود می شود.

مثال ۱۰.۲۰ هر گاه موجی از یک تیغه متوازی السطوح بگذرد، تحقیق کنید که راستای پرتو خروجی با راستای پرتو تابش موازی است. طول جابجایی پرتوها را حساب کنید.

حل: تیغه ای به ضخامت a و پرتو AB با زاویه تابش θ_i را در نظر می گیریم. در اینجا با پرتو بازتاب کار نداریم. زاویه شکست متناظر با پرتو شکست BC است (شکل ۱۰.۲۰) با توجه به رابطه (۸.۲۰) داریم

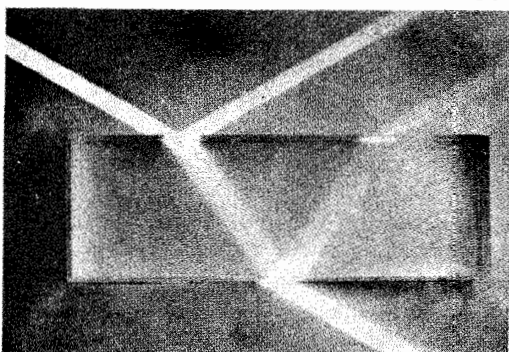
$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r$$

در نقطه C شکست از محیط (۲) به محیط (۱) صورت می گیرد به گونه ای که از معادله (۸.۲۰) داریم

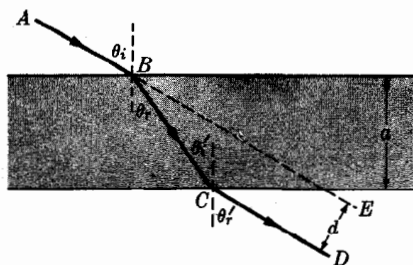
$$n_2 \sin \theta'_i = n_1 \sin \theta'_r$$

ترسیم هندسی شکل ۱۰.۲۰ نشان می دهد که $\theta'_i = \theta_r$ است. بنابراین از ضرب این دو رابطه در یکدیگر به دست می آید $\sin \theta_i = \sin \theta'_r$ یا $\theta_i = \theta'_r$. در نتیجه ثابت می شود که پرتو خروجی CD با پرتو تابش AB موازی است. نتیجه ای که از وضع هندسی مسئله نیز انتظار آن می رفت. از دانشجو می خواهیم تا تحقیق کند که جابجایی جانبی پرتوها برابر است با

$$d = a \frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\cos \theta_r}$$



(ب)



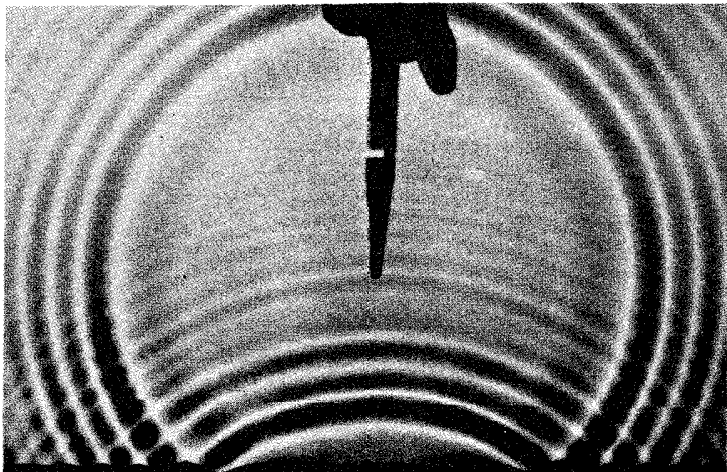
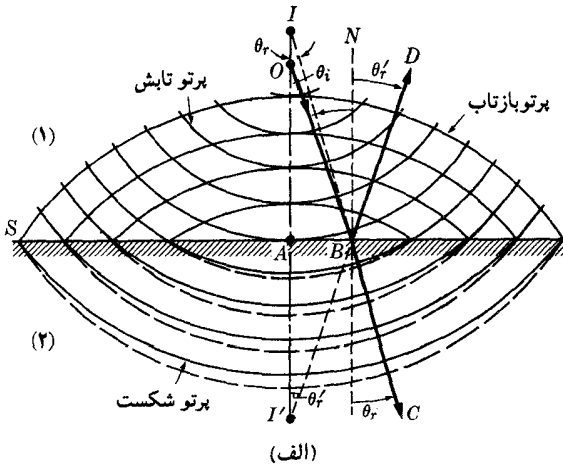
(الف)

شکل ۱۰.۲۰ انتشار موج از داخل تیغه متوازی السطوح. عکس (ب) جابجایی یک باریکه نور را نشان می دهد.

اگر به جای يك تیغه چندین تیغه متوازی السطوح از جنسهای مختلف را روی هم قرار دهیم، می توان باسانی ثابت کرد که بازهم پرتوهای تابش و خروجی موازی هم باقی می مانند.

۵.۲۰ بازتاب و شکست موجهای کروی

بازتاب و شکست موجهای کروی روی سطح تخت دومین مسئله مهم را تشکیل می دهد. فرض کنید موجهای کروی که چشمه نقطه ای O تولید می کند بر سطح تخت S می تابند. در این صورت، همچنانکه از شکل ۱۱.۲۰ پیداست، دو مجموعه جدید موجهای بازتاب و شکست



(ب)

شکل ۱۱.۲۰ موجهای کروی تابش، بازتاب و شکست. عکس (ب) سطح موج موجهای تابش و بازتاب را در یک مایع نشان می دهد.

یا انتقالی تولید می‌شود، برای ترسیم جبهه موجهای بازتاب و شکست لازم است چندین پرتو بازتاب و شکست را رسم کنیم. سطح موجهای شکست و بازتاب متناظر بر این پرتوها عمودند. با فرض $n_1 > 1$ ، در نقطه B در شکل ۱۱.۲۰ یک سری از این پرتوها رسم شده‌اند. بنا به قوانین (۲) و (۳) مربوط به بازتاب و شکست داریم

$$\theta_i = \theta_r \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = n_1$$

امتداد پرتو بازتاب BD در محیط (۲) امتداد عمود AO را در نقطه I' قطع می‌کند. چون مثلثهای OAB و $I'AB$ قائم‌الزاویه‌اند و زاویه‌های \hat{O} و \hat{I}' برابرند، بنا بر این داریم $AO = AI'$. چون نقطه B اختیاری است، می‌توان نتیجه گرفت که تمام پرتوهای بازتاب از نقطه I' قرینه O نسبت به سطح تخت، می‌گذرند. این نقطه را تصویر بازتاب O می‌نامند. در نتیجه، هنگامی که موجهای کروی با سطح تخت برخورد می‌کنند، موجهای بازتاب کروی و قرینه موجهای تابش‌اند. این تقارن قابل پیش‌بینی است، زیرا امواج بازتاب با همان سرعت موجهای تابش به سمت عقب منتشر می‌شوند، به‌گونه‌ای که نسبت به سطح بازتاب متقارن باقی می‌مانند.

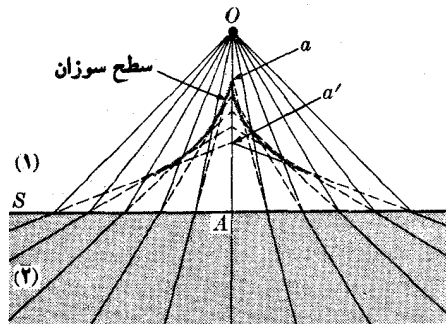
ولی در مورد پرتو شکست BC ، مشاهده می‌شود که امتداد آن در محیط (۱) عمود OA را در نقطه I طوری قطع می‌کند که $\text{tg } \theta_r = AB/AI$ و همچنین $\text{tg } \theta_i = AB/AO$ باشد. بنا بر این داریم

$$\frac{\text{tg } \theta_i}{\text{tg } \theta_r} = \frac{AI}{AO} \quad \text{یا} \quad (۱۰.۲۰)$$

$$AI = AO \frac{\text{tg } \theta_i}{\text{tg } \theta_r}$$

ولی بنا به قانون اسنل $\sin \theta_i / \sin \theta_r$ باید ثابت و برابر n_1 باشد. اما در این حالت $\text{tg } \theta_i / \text{tg } \theta_r$ نمی‌تواند ثابت باشد. بنا بر این پرتوهای شکست همگی از یک نقطه نمی‌گذرند. از اینجا نتیجه می‌گیریم که: هرگاه موجهای کروی با سطح تخت برخورد کنند موجهای شکست کروی نخواهند بود.

نظر به اینکه موجهای شکست یکدیگر را در یک نقطه قطع نمی‌کنند، بنا بر این پرتوهای شکست همانند پرتوهای بازتاب تصویر نقطه‌ای از چشمه O تشکیل نمی‌دهند. امتداد پرتوهای شکست، مطابق شکل ۱۲.۲۰، در امتداد عمود OA و همچنین روی یک سطح مخروطی، به نام سطح سوزان در چندین نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. این موضوع را می‌توان بسادگی در مورد شکست امواج نورانی مشاهده کرد. نقطه a ، محل تلاقی پرتوهای با انحراف کمتر را باسانی می‌توان پیدا کرد، زیرا در این صورت، زاویه‌های θ_r و θ_i در شکل ۱۱.۲۰،



شکل ۱۲.۲۰ شکست پرتوهای تابشی یک چشمه نقطه‌ای، امتداد پرتوهای شکست به سمت عقب یکدیگر را در یک نقطه قطع نمی‌کنند..

خیلی کوچک اند و می‌توان در معادله (۱۱.۲۰) به جای تانژانت سینوسهاشان را قرار داد، در نتیجه به دست می‌آید

$$AI \approx AO \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = n_{21} AO \quad (11.20)$$

۶.۲۰ بازهم درباره قوانین بازتاب و شکست

قوانین بازتاب و شکست را با استفاده از استدلال کمابیش هندسی بر اساس قضیه مسالوس به دست آوردیم. ولی این قوانین را می‌توان مفصلتر نیز بررسی کرد. فرض کنیم که یک موج تابش با معادله‌ای از نوع (۴۶.۱۸)، یعنی

$$\xi_i = \xi_{0i} \sin(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (12.20)$$

توصیف می‌شود. موجهای شکست و بازتاب بترتیب عبارت‌اند از

$$\xi_r = \xi_{0r} \sin(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (13.20)$$

و

$$\xi'_r = \xi'_{0r} \sin(\mathbf{k}'_r \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (14.20)$$

توجه کنید که در معادله موجهای بازتاب و شکست نیز از همان ω ی معادله موج تابش استفاده کرده‌ایم، زیرا به تجربه در یافته‌ایم که بسامد ارتعاش باشکست و بازتاب تغییر نمی‌کند. خاصیت فیزیکی منتسب به ξ (جابجایی، فشار، میدان الکتریکی و یا میدان مغناطیسی) طوری است که مقدار آن در سطح جدایی دو محیط، بدون توجه به اینکه در کدام یک از محیطها محاسبه می‌شود، یکی است. (در مورد امواج الکترومغناطیسی، نوع رابطه بین مؤلفه‌های میدان الکتریکی و مغناطیسی ممکن است اندکی متفاوت باشد. ولی با وجود این

بازهم يك رابطه خطی میدانهای دوطرف سطح جدایی را بهمم مربوط می کند). در محیط (۱) موجهای تابش و بازتاب وجود دارند و آشفتگی برابند به صورت $\xi_i + \xi_r = \xi_t$ است. در صورتی که در محیط (۲) تنها موج شکست به صورت ξ_t وجود دارد. در این صورت در سطح جدایی دو محیط داریم

$$\xi_i + \xi_r = \xi_t \quad (15.20)$$

برای اینکه این رابطه در هر لحظه و در هر نقطه از سطح جدایی دو محیط صادق باشد باید فازها در معادله‌های (۱۲.۲۰)، (۱۳.۲۰) و (۱۴.۲۰) یکسان باشند. بنابراین برای نقاط \mathbf{r} روی سطح جدایی داریم

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t \quad (16.20)$$

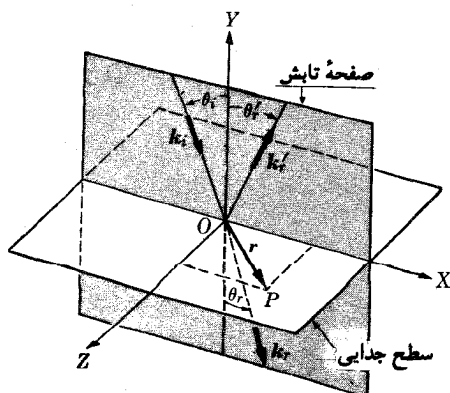
پس از حذف جمله مشترك ωt ، معادله (۱۶.۲۰) به صورت خلاصه زیر درمی آید

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} \quad (17.20)$$

همچنانکه شکل ۱۳.۲۰ نشان می دهد، می توان محورهای مختصات XYZ را به گونه ای انتخاب کرد که سطح جدایی بر صفحه XZ منطبق و راستای پرتو تابش در صفحه XY باشد. در چنین شرایطی، چون \mathbf{r} باید در صفحه XZ باشد، داریم $\mathbf{r} = \mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_z z$ و همچنین $\mathbf{k}_i = \mathbf{u}_x k_{ix} + \mathbf{u}_y k_{iy}$. چون هنوز نمی دانیم که \mathbf{k}_r و \mathbf{k}_t نیز در همین صفحه هستند یا نه، باید بنویسیم $\mathbf{k}_r = \mathbf{u}_x k_{rx} + \mathbf{u}_y k_{ry} + \mathbf{u}_z k_{rz}$ و $\mathbf{k}_t = \mathbf{u}_x k_{tx} + \mathbf{u}_y k_{ty} + \mathbf{u}_z k_{tz}$. با قراردادن این مقادیر در معادله (۱۷.۲۰) و با استفاده از معادله (۳.۲۰) مربوط به حاصلضرب نرده ای دوبردار، داریم

$$k_{ix} x = k_{rx} x + k_{rz} z = k_{tx} x + k_{tz} z$$

ولی این رابطه باید در هر نقطه ای از صفحه XZ صادق باشد، در نتیجه به دست می آید



شکل ۱۳.۲۰

$$k_{ix} = k_{rx} = k'_{rx} \quad \text{و} \quad k_{iz} = k'_{iz} = 0 \quad (۱۸.۲۰)$$

گروه دوم معادلات نشان می‌دهند که بردارهای \mathbf{k}_r و \mathbf{k}'_r در امتداد محور Z مؤلفه ندارند، بنا بر این در صفحه XY هستند و پرتوهای تابش، بازتاب و شکست در یک صفحه قرار می‌گیرند. این همان قانون (۱) است که قبلاً بیان کردیم.

همچنین از شکل ۱۴.۲۰ پیسداست که $k_{ix} = k_i \sin \theta_i$ ، $k_{rx} = k_r \sin \theta_r$ و $k'_{rx} = k'_r \sin \theta'_r$. بنا به معادله (۶.۱۸) می‌دانیم که $k_i = \omega/v_1$ و $k_r = \omega/v_2$ با قرار دادن این مقادیر در اولین گروه از معادلات (۱۸.۲۰) و پس از ساده کردن نسبت به ω به دست می‌آید

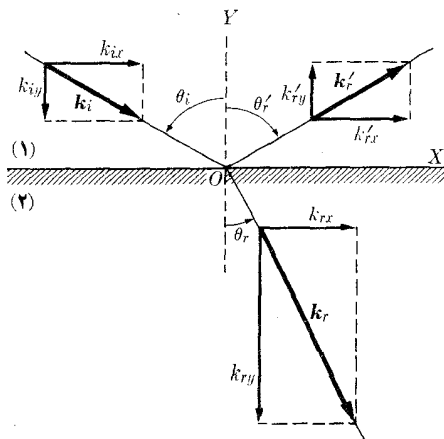
$$\frac{1}{v_1} \sin \theta_i = \frac{1}{v_2} \sin \theta_r = \frac{1}{v_1} \sin \theta'_r$$

از این معادلات بدست می‌آید $\sin \theta_i = \sin \theta'_r$ یا $\theta_i = \theta'_r$ ؛ که از آن نتیجه می‌شود که $\sin \theta_i / \sin \theta_r = v_1 / v_2 = n_{21}$. بدین سان قوانین (۲) و (۳) بازتاب و شکست از طریق تحلیلی بدست می‌آیند.

اگر معادله (۱۶.۲۰) تحقق پیدا کند، معادله (۱۵.۲۰) به صورت زیر درمی‌آید

$$\xi_{oi} + \xi'_{or} = \xi_{or} \quad (۱۹.۲۰)$$

این رابطه دامنه‌های سه موج را بهم مربوط می‌کند. اما تنها با معادله (۱۵.۲۰) یا هم‌ارز آن معادله (۱۹.۲۰)، نمی‌توان دامنه امواج شکست و بازتاب را تعیین کرد. با وجود این،



شکل ۱۴.۲۰ بردارهای انتشار موجهای تابش و بازتاب و شکست.

ماهیت فیزیکی مسئله معمولاً شرط مرزی دیگری را ایجاب می‌کند، مانند پیوستگی تنشها در دو طرف سطح جدایی دو محیط، در مورد امواج کشسان، یا پیوستگی بعضی مؤلفه‌های میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در مورد امواج الکترومغناطیسی. بنا بر این یک رابطه دیگر (یا شرط مرزی دیگری) که شامل دامنه‌های ξ_i ، ξ_r و ξ'_r است وجود دارد. با استفاده از این دو شرط مرزی می‌توان دامنه‌های ξ_i و ξ_r را بر حسب ξ'_r به دست آورد. مثال زیر شیوه عمل را بوضوح نشان می‌دهد.

مثال ۲.۲۰ بازتاب و عبور موجهای عرضی را در محل اتصال دو ریسمان از جنسهای مختلف بررسی کنید. به ریسمانها نیروی کششی T وارد می‌شود.

حل: فرض کنیم که دو ریسمان (۱) و (۲) در نقطه‌ای بهم متصل اند. نقطه اتصال را به عنوان مبدأ مختصات انتخاب می‌کنیم (شکل ۱۵.۲۰). در این مثال، برای راحتی محاسبه، موج را به صورت معادله (۱۰.۱۸) اختیار می‌کنیم. یک موج تابش به صورت زیر از سمت چپ می‌آید

$$\xi_i = \xi_{oi} \sin(\omega t - k_1 x)$$

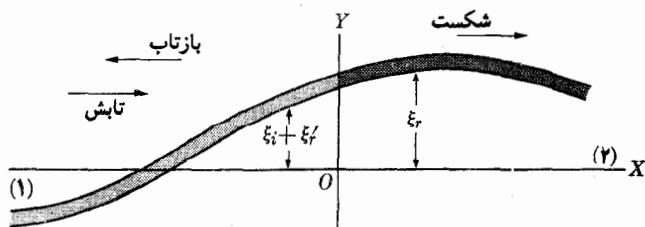
در محل گره (ناپیوستگی) دو ریسمان، یک موج شکست یا عبوری تولید می‌شود که در امتداد ریسمان ۲ منتشر می‌شود

$$\xi_r = \xi_{or} \sin(\omega t - k_2 x)$$

و یک موج بازتاب تولید می‌شود که در امتداد ریسمان (۱) به عقب برمی‌گردد

$$\xi'_r = \xi'_{or} \sin(\omega t + k_1 x)$$

توجه کنید که هم برای موج تابش و هم برای موج بازتاب k_1 را به کار بردیم، زیرا هر دو موج در یک محیط، یعنی محیط (۱) منتشر می‌شوند. در هر نقطه از ریسمان (۱) جا بجایی قایم برابر است با $\xi_i = \xi_r + \xi'_r$. روی ریسمان (۲) جا بجایی قایم برابر است با $\xi_r = \xi_r$. نقطه O محل تلاقی دو ریسمان متناظر با $x = 0$ است. در این نقطه، بنا به معادله (۱۵.۲۰)، باید داشته باشیم $\xi_i = \xi_r + \xi'_r$ ، که به صورت زیر نوشته می‌شود



شکل ۱۵.۲۰ موجهای عرضی در دو ریسمان متصل به هم و با چگالیهای خطی مختلف.

$$\xi_{oi} \sin \omega t + \xi'_{or} \sin \omega t = \xi_{or} \sin \omega t$$

یا

$$\xi_{oi} + \xi'_{or} = \xi_{or} \quad (20.20)$$

این رابطه، همانند معادله (۱۹.۲۰) دامنه‌ها را بهم مربوط می‌کند. مطابق بحث گذشته در بخش ۷.۱۸، نیروی قائم در هر نقطه از ریسمان (۱) برابر است با

$$T_y = T \sin \alpha \approx T \operatorname{tg} \alpha = T \frac{\partial \xi}{\partial x} = T \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \xi'_r}{\partial x} \right)$$

چون α کوچک است می‌توان $\operatorname{tg} \alpha$ را به جای $\sin \alpha$ قرارداد. در چنین شرایطی داریم

$$T_y = Tk_1 [-\xi_{oi} \cos(\omega t - k_1 x) + \xi'_{or} \cos(\omega t + k_1 x)]$$

همین‌طور نیروی قائم در هر نقطه از ریسمان (۲) برابر می‌شود با

$$T_y = T \frac{\partial \xi_r}{\partial x} = -Tk_2 \xi_{or} \cos(\omega t - k_2 x)$$

ولی نیروی قائم در نقطه اتصال دو ریسمان باید یک مقدار داشته باشد، خواه آنرا از T_y مربوط به ریسمان (۱) محاسبه کرده باشیم و خواه از ریسمان (۲). با قرار دادن $x=0$ در دو رابطه مربوط به T_y و سپس برابر قراردادن آنها و بالاخره حذف سازه مشترک $\cos \omega t$ به دست می‌آید

$$k_1 (\xi_{oi} - \xi'_{or}) = k_2 \xi_{or} \quad (21.20)$$

این شرط دیگری است که باید بدوسیله سه دامنه برآورده شود و آزمایش فیزیکی موج ناشی می‌شود. از حل دستگاه معادلات (۲۰.۲۰) و (۲۱.۲۰) داریم

$$\xi_{or} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \xi_{oi}, \quad \xi'_{or} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \xi_{oi} \quad (22.20)$$

این رابطه‌ها دامنه‌های موجهای بازتاب و شکست را مشخص می‌کنند. با توجه به اینکه $k = \omega/v$ است، این رابطه‌ها را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\xi_{or} = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} \xi_{oi}, \quad \xi'_{or} = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} \xi_{oi} \quad (23.20)$$

یا، چون در حالت امواج عرضی در یک ریسمان، بنا به معادله (۳۰.۱۸)، $v = \sqrt{T/m}$ و در آن m جرم واحد طول ریسمان است، می‌توان دو رابطه بالا را چنین نیز نوشت

$$\xi_{or} = \frac{2\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}} \xi_{oi}, \quad \xi'_{or} = \frac{\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}} \xi_{oi} \quad (24.20)$$

نسبتهای ξ_{or}/ξ_{oi} و ξ'_{or}/ξ_{oi} را بترتیب ضریب شکست (یا انتقال) و ضریب بازتاب می نامند و با T و R نشان می دهند. بنابراین

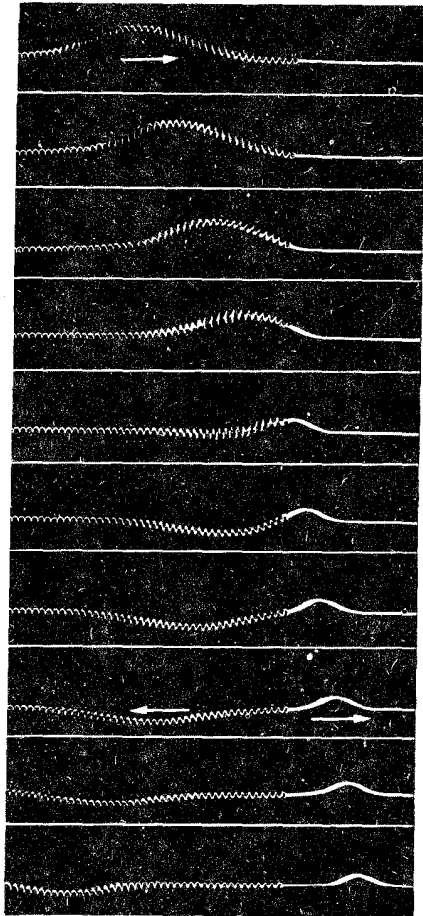
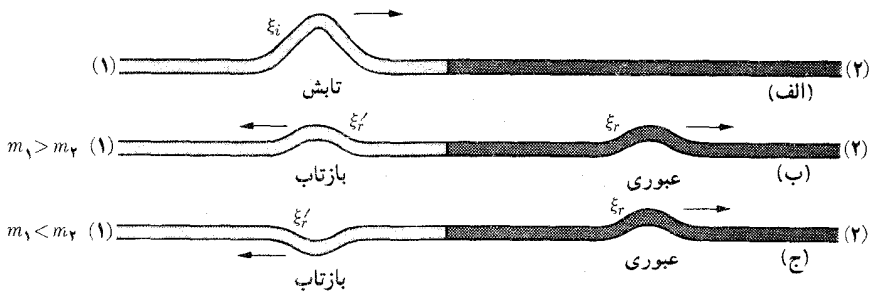
$$T = \frac{2\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}, \quad R = \frac{\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}$$

مشاهده می شود که T همیشه مثبت است، بنابراین ξ_{or} همیشه هم علامت با ξ_{oi} است و موج عبوری همیشه با موج تابشی همفاز است. ولی R بر حسب اینکه $m_1 \geq m_2$ باشد مثبت یا منفی است به گونه ای که موج بازتاب همفاز یا درفاز مقابل با موج تابشی است. در حالت دوم باید اختلاف فاز π به موج بازتاب افزوده شود. شکل (۱۶.۲۵) این دو وضع را نشان می دهد. دانشجو می تواند با استفاده از آهنگک شارش انرژی در طول ریسمانهای (۱) و (۲) شارش انرژی در دو سر محل اتصال را کنترل کند. انرژی عبوری با T^2 و انرژی بازتاب با R^2 متناسب است.

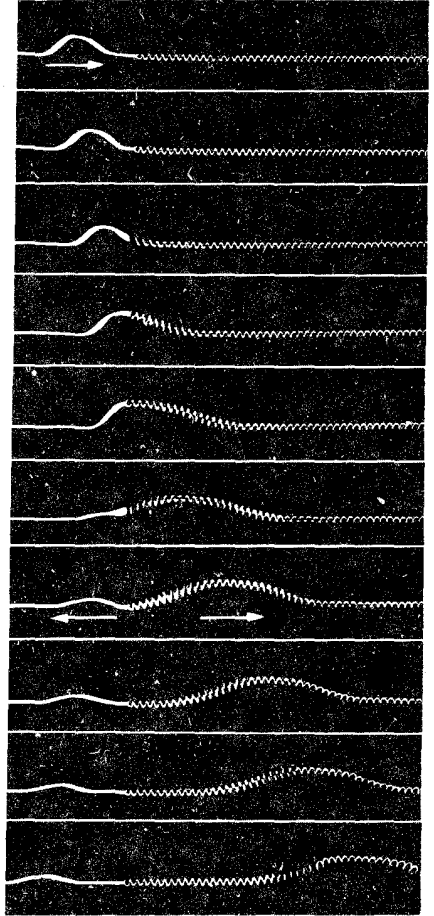
۷.۲۵ بازتاب و شکست موجهای الکترومغناطیسی

حالت موجهای الکترومغناطیسی دقت ویژه ای لازم دارد زیرا در این حالت دو میدان، یعنی مؤلفه های میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی موج وجود دارند. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی هر دو بر راستای انتشار موج عمودند و می توانند هر راستایی را حول راستای انتشار اختیار کنند. از این رو هنگام مطالعه شکست و بازتاب موجهای الکترومغناطیسی راحت تر است فرض کنیم که هر میدان دارای مؤلفه های موازی با صفحه تابش (با علامت π) و مؤلفه دیگری عمود بر صفحه تابش (با علامت σ) است. به دلیل متعامد بودن \mathbf{E} و \mathbf{B} ، یک مؤلفه E_π وابسته به B_σ و یک مؤلفه E_σ وابسته به B_π وجود دارد. چون، همان طور که در فصل ۱۹ اشاره کردیم، قطبش یک موج الکترومغناطیسی به طور قراردادی به وسیله راستای میدان الکتریکی تعیین می شود، مؤلفه های \mathbf{E} و \mathbf{B} را در شکل ۱۷.۲۵ برای قطبش در صفحه تابش و در شکل ۱۸.۲۵ برای قطبش عمود بر صفحه تابش به کار برده ایم. پیکانها در هر حالت راستاهای مثبت مؤلفه های \mathbf{E} را نشان می دهند. حالت کلی از ترکیب دو قطبش به دست می آید زیرا، همان طور که قبلاً اشاره کردیم، میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} می توانند به مؤلفه های π و σ تجزیه شوند.

معادلات ماکسول روابطی بین مؤلفه های موازی و عمودی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در دو طرف سطح جدایی دو محیط برقرار می کنند. این معادلات به ما امکان می دهند بین مؤلفه های میدان الکتریکی موجهای تابش، بازتاب و شکست روابطی برقرار کنیم. به کمک این روابط می توان ضرایب بازتاب و شکست یا انتقال را به دست آورد. هنگامی که $\mu_1 = \mu_2 \approx \mu_0$ باشد (شرطی که در بیشتر موارد برقرار است) نتایج زیر به دست می آیند



(د)



(ه)

شکل ۱۶.۲۵ موجهای تابش، بازتاب و شکست در امتداد دو ریسمان با چگالیهای خطی مختلف و متصل به هم. در حالت (ب) و (د) ریسمان حامل موج تابش سنگینتر است. در حالت (ج) و (ه) ریسمان سمت چپ سبکتر است.

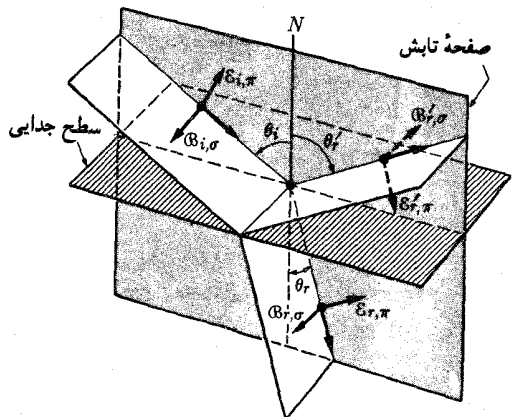
$$R_{\pi} = \frac{E'_{r, \pi}}{E_{i, \pi}} = \frac{n_1 \cos \theta_r - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_r + n_2 \cos \theta_i}$$

$$R_{\sigma} = \frac{E'_{r, \sigma}}{E_{i, \sigma}} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_r}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_r}$$

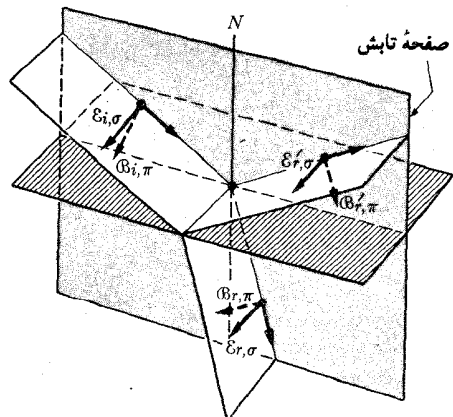
(۲۵-۲۰)

$$T_{\pi} = \frac{E_{r, \pi}}{E_{i, \pi}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_r + n_2 \cos \theta_i}$$

$$T_{\sigma} = \frac{E_{r, \sigma}}{E_{i, \sigma}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_r}$$



شکل ۱۷-۲۰ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در موجهای تابش، بازتاب و شکست در قطبش موازی با صفحه تابش.



شکل ۱۸-۲۰ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در موجهای تابش، بازتاب و شکست در قطبش عمود بر صفحه تابش.

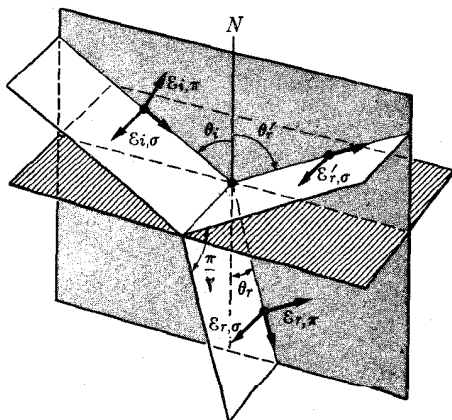
یک حالت بسیار مهم متناظر با وضع $R_{\pi} = 0$ است. در این حالت موج بازتاب، مؤلفه الکتریکی از نوع $E'_{r,\pi}$ را ندارد، و تنها دارای مؤلفه $E'_{i,\sigma}$ است. از این رو موج بازتاب کلاً در صفحه‌ای عمود بر صفحه تابش قطبیده می‌شود. بنا به معادلات (۲۵.۲۰) این وضع هنگامی پیش می‌آید که $n_1 \cos \theta_i = n_2 \cos \theta_r$ باشد، چون قانون اسنل یا معادله (۸.۲۰)، ایجاب می‌کند که $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r$ باشد، بنابراین نتیجه می‌شود که $\sin 2\theta_i = \sin 2\theta_r$ یا $\sin \theta_i \cos \theta_i = \sin \theta_r \cos \theta_r$. از حل این معادله به دست می‌آید $2\theta_i = \pi - 2\theta_r$ یا $\theta_i + \theta_r = \pi/2$ و این می‌رساند که پرتوهای بازتاب و شکست برهم عمودند. از این رو گوئیم

هنگامی که پرتوهای بازتاب و شکست برهم عمودند. پرتو بازتاب بتمامی قطبیده و میدان الکتریکی آن بر صفحه تابش عمود است.

این وضع را در شکل ۱۹.۲۰ نشان داده‌ایم، و برای سهولت، در آن مؤلفه‌های متناظر میدان مغناطیسی را حذف و تنها مؤلفه‌های میدان الکتریکی را رسم کرده‌ایم. چون در شکل ۱۹.۲۰ $\sin \theta_r = \cos \theta_i$ است، از قانون اسنل، زاویه تابش با رابطه زیر تعیین می‌شود

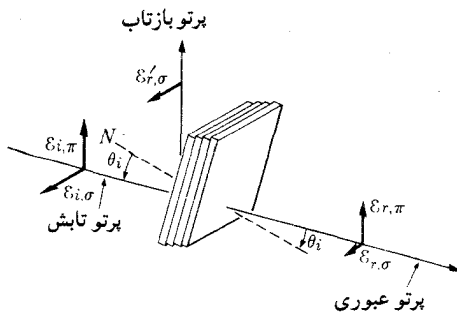
$$tg \theta_i = n_{21} \quad (26.20)$$

زاویه θ_i که از معادله (۲۶.۲۰) بدست می‌آید، زاویه قطبش نام دارد. نتیجه بیان شده با معادله (۲۶.۲۰) را قانون بروستر می‌نامند. می‌توان ثابت کرد که ناممکن است هم $R_0 = 0$ و هم قانون اسنل صادق باشد.



شکل ۱۹.۲۰ قطبش موج الکترومغناطیسی توسط بازتاب.

* توجه کنید که به استناد قانون اسنل پاسخ $2\theta_i = 2\theta_r$ قابل قبول نیست.



شکل ۲۰.۲۵ قطبش موج الکترومغناطیسی با شکستهای پیاپی.

بنا بر این مؤلفه عمودی میدان الکتریکی در موج بازتاب را نمی توان برابر صفر گرفت، مگر اینکه قبلاً در موج تابش برابر صفر بوده باشد.

همچنین می توان با توجه به معادلات (۲۵.۲۰) خاطر نشان کرد که ضرایب شکست T_{\parallel} و T_{\perp} هرگز صفر نمی شوند و بنابراین موج شکست هرگز کاملاً قطبیده نیست. با وجود این، اگر موج الکترومغناطیسی از داخل چند تیغه نازک و موازی (شکل ۲۰.۲۰) تحت زاویه تابشی برابر با زاویه قطبش عبور کند، موج عبوری دارای یک مؤلفه خیلی کوچک $E_{r,\sigma}$ خواهد بود، زیرا این مؤلفه می کوشد در هر بازتاب حاصل از عبور از یک تیغه به تیغه دیگر با موج بازتاب برود. بنا بر این موج عبوری تقریباً قطبیده کامل است و میدان الکتریکی در صفحه تابش نوسان می کند.

علاوه بر این، ملاحظه می شود که ضرایب انتقال T همیشه مثبت اند، بنا بر این موج عبوری همواره با موج تابش همفاز است. برعکس، ضرایب بازتاب R می توانند مثبت یا منفی باشند و موج بازتاب ممکن است با موج تابش همفاز یا در فاز مقابل باشد.

مثال ۳.۲۵ ضرایب بازتاب و انتقال موجهای الکترومغناطیسی در ناحیه نور مرئی را تحت زاویه تابش 30° برای شیشه کرون حساب کنید.

حل: از جدول ۱۰.۲۰ برای شیشه وهوا بترتیب داریم $n = 1.52$ و $n_0 = 1$ و یا $\sin \theta_i = 1.52 \sin \theta_r$. با قراردادن $\theta_i = 30^\circ$ به دست می آید: $\theta_r = 19^\circ 12'$. با استفاده از معادلات (۲۵.۲۰) داریم

$$R_{\parallel} = 0.165, R_{\perp} = -0.248 \text{ و } T_{\parallel} = 0.442, T_{\perp} = 0.752$$

توجه کنید که مؤلفه عمودی موج بازتاب به اندازه π اختلاف فاز پیدا کرده است. زاویه پروستر مربوط به شیشه کرون برابر است با $\theta_i = 56^\circ 41'$ ، یعنی $\tan \theta_i = 1.52$.

جدول ۱۰۲۰ ضریب شکست مطلق چند ماده برای موجهای الکترومغناطیسی*

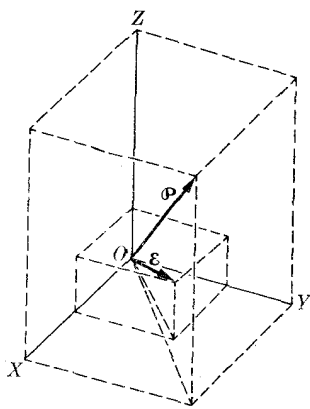
n	ماده	n	ماده
۱٫۵۲	شیشه کرون	۱٫۳۳	آب (۲۵°C)
۱٫۶۵	شیشه فلینت	۱٫۳۶	الکل (۲۰°C)
۴٫۲۲	سدیم (آبگون)	۱٫۶۳	سولفور کربن
۲٫۴۱۷	الماس	۱٫۳۱	یخ
۱٫۰۰۰۲۹	هوا	۱٫۵۱	کوارتز

* مقادیر میانگین برای ناحیه مرئی بیاب

۸۰۲۰ انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیط ناهمسانگرد

هنگامی که موج عرضی در داخل محیط ناهمسانگرد منتشر می‌شود، سرعت انتشار ممکن است هم به راستای قطبش و هم به راستای انتشار موج بستگی داشته باشد. این امر بویژه در مورد امواج الکترومغناطیسی (تنها موجهایی که در این فصل بررسی خواهیم کرد) صحت دارد. قطبش پذیری اغلب مولکولها در تمام راستاها یکسان نیست. چون سمگتیری مولکولها در گازها و مایعات کاتوره‌ای است، این بستگی راستایی قطبش پذیری به اثر خاصی منجر نمی‌شود و محیط به طور ماکروسکوپیکی همچون یک ماده همسانگرد رفتار می‌کند. ولی در جامد بلورین، مولکولها کمابیش سمگتیریشان مرتب و این سمگتیری «منجمد» است، یعنی آنها این آزادی را ندارند که در داخل شبکه بلورین اطراف وضع تعادلشان بگردند. از این رو، خواص بلور معمولاً به راستایی که در امتداد آن اندازه گیری صورت می‌گیرد بستگی دارد. از دیدگاه اپتیک، جامدهای بلورین بسته به ساختار و آرایش مولکولهایشان، می‌توانند مانند محیطهای همسانگرد یا ناهمسانگرد عمل کنند.

اینکه قطبش پذیری محیط در تمام راستاها یکسان نیست به این معنی است که معمولاً قطبش \mathcal{P} با میدان الکتریکی در یک راستا نیست (شکل ۲۱۰۲۰). در نتیجه بردار جابجایی $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathcal{P}$ با میدان الکتریکی \mathbf{E} موازی نیست. از دیدگاه ریاضی این وضع خیلی شبیه به وضعی است که در فصل ۱۰ هنگام بحث درباره رابطه بین اندازه حرکت زاویه‌ای \mathbf{L} و سرعت زاویه‌ای ω در جسم جامد چرخان بررسی کردیم. یادآوری می‌کنیم که در جسم جامد چرخان، \mathbf{L} و ω موازی‌اند، مگر اینکه جسم جامد حول یکی از محورهای اصلی خود بچرخد. همین‌طور معلوم می‌شود که لااقل سه راستای عمود برهم (که آنها نیز محورهای اصلی نامیده می‌شوند) وجود دارند که در امتداد آنها \mathbf{D} و \mathbf{E} با هم موازی‌اند؛ این سه راستا سرشتی هرجسم‌اند. با قراردادن دستگاه مختصات XYZ به موازات این سه محور اصلی و بسا نشان دادن گسدرهی جسم در راستای هر یک از محورها



شکل ۲۱.۲۰ سمتگیری \mathbf{E} و \mathbf{P} در ماده ناهمسانگرد

با $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ ، سه مؤلفه \mathbf{D} برای يك سمتگیری معین از \mathbf{E} ، با تعمیم معادله (۱۴.۱۶) به این محور، به دست می آید

$$D_x = \epsilon_1 E_x, \quad D_y = \epsilon_2 E_y, \quad D_z = \epsilon_3 E_z$$

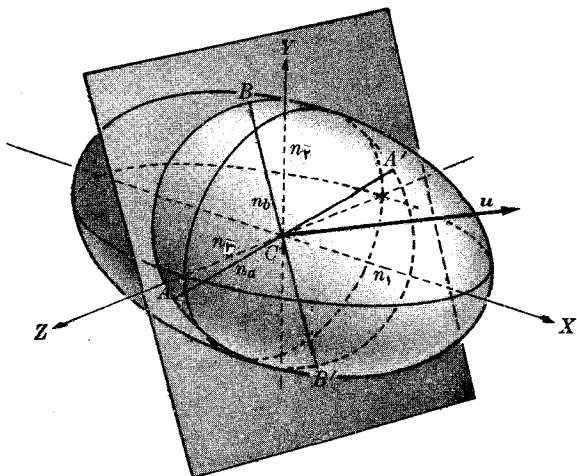
در اینجا می توان از سه ضریب شکست اصلی n_1, n_2, n_3 گفتگو کرد، که مطابق معادله (۵۷.۱۹)، با گذردهی مربوط وابسته اند

هم آزمایش وهم نظریه (بر پایه معادلات ماکسول و گفتگوی بالا) نشان می دهند که:

در محیط ناهمسانگرد، برای هر راستای انتشار موج الکترومغناطیسی تخت، دو حالت قطبش عمود برهم، وجود دارد که با سرعتهای متفاوت منتشر می شوند.

از این رو، هنگامی که موج الکترومغناطیسی در داخل ماده ناهمسانگرد منتشر می شود، بدون توجه به حالت اولیه قطبش، به دو موج قطبیده عمود برهم، که با سرعتهای فاز متفاوت منتشر می شوند تقسیم می شود. این وضع پدیده شکست دوگانه را به وجود می آورد که در بخش ۱۵.۲۵ بررسی خواهد شد.

اکنون می توان از چگونگی تعیین سرعت فاز و حالت قطبش يك موج، به شرط آنکه راستای انتشار آن معلوم باشد، بحث کرد. برای این کار می توان از روش هندسی استفاده کرد که مدتها قبل از ایجاد نظریه امواج الکترومغناطیسی، توسط اگوستین فرنل (۱۱۶۷-۱۲۰۶/۱۷۸۸-۱۸۲۷)، فیزیکدان فرانسوی، پیشنهاد شده است. بیضوی با محورهای n_1, n_2, n_3 به نام بیضوی فرنل رسم می کنیم (شکل ۲۲.۲۰). در این صورت اگر \mathbf{u} بردار یکی انتشار موج معلوم باشد، صفحه ای عمود بر \mathbf{u} که از C مرکز بیضوی می گذرد رسم می کنیم. محل تقاطع بیضوی و صفحه، بیضی است. راستای محورهای AA' و BB' این بیضی صفحه های قطبش موج را برای این راستای انتشار تعیین می کنند.



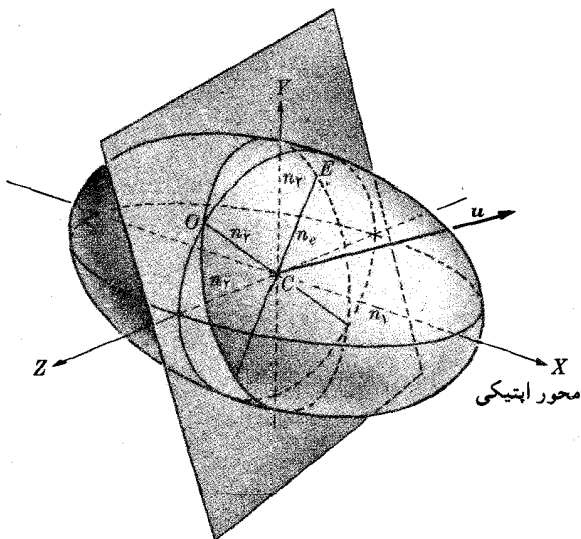
شکل ۲۲.۲۰ بیضوی فرنل. بیضی $ABA'B'$ مقطع بیضوی با صفحه‌ای است که از C می‌گذرد و بر \mathbf{u} عمود است.

طولهای CA و CB از دو محور بیضی n_1 و n_2 ضرایب شکست n_e و n_o را برای هر قطبش، و در نتیجه سرعت فاز متناظر را به دست می‌دهند.

در محیطهای همسانگرد سه ضریب شکست اصلی باهم برابرند $(n_1 = n_2 = n_3)$ ؛ بیضوی فرنل، کره و ضریب شکست در تمام راستاها یکسان است. در این صورت هیچ راستای ویژه‌ای برای قطبش وجود ندارد، زیرا تمام مقاطع دایره‌اند. بلورهای مکعبی و همچنین بیشتر محیطهای غیر بلوری بدین نحو رفتار می‌کنند.

حالت ویژه دیگری وجود دارد که در آن دو ضریب شکست اصلی برابرند. به‌عنوان مثال $n_2 = n_3$ است. راستای متناظر با ضریب شکست اصلی n_1 را محور اپتیکی می‌نامند؛ این محور، محور تقارن بلور است. به همین دلیل چنین موادی را بلورهای تک محوری می‌نامند. دستگاههای بلوری سه ضلعی، شش ضلعی و چهارضلعی در این رده قرار دارند. اگر $n_1 < n_2$ باشد بلور را مثبت و اگر $n_1 > n_2$ باشد بلور را منفی می‌گویند. بیضوی فرنل مربوط به یک بلور تک محوری بیضوی است که حول محور اپتیکی دوران می‌کند (شکل ۲۳.۲۰). از خواص هندسی بیضوی دوار معلوم می‌شود که محل تقاطع آن با صفحه عمود بر راستای انتشار \mathbf{u} و ماربر C ، بیضی است. یکی از محورهای این بیضی (CO) همیشه برابر با n_2 است؛ این محور هم بر راستای انتشار هم بر محور اپتیکی عمود است، در حالی که محور دیگر بیضی (CE) دارای طول متغیر n_e بین n_1 و n_2 است و در صفحه حاصل از راستای انتشار و محور اپتیکی قرار دارد. در این حالت می‌توان دو موج تعریف کرد: موج عادی و موج غیرعادی.

موج عادی در صفحه حاصل از CO و \mathbf{u} قطبیده خطی است، بنابراین بر صفحه حاصل از راستای انتشار و محور اپتیکی عمود است. موج عادی در تمام جهات با سرعت

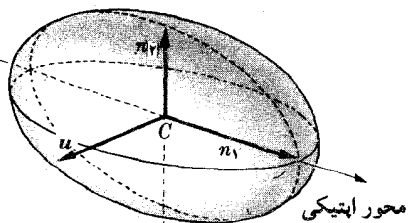


شکل ۲۳.۲۰ راستاهای قطبش پرتوهای عادی و غیرعادی برای یک راستای انتشار معین در یک بلور تک محوری.

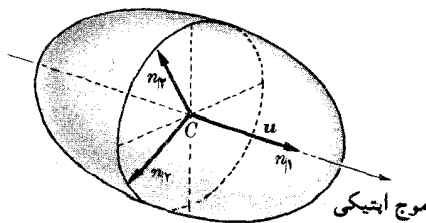
یکسان $v_o = v_e = c/n_e$ منتشر می‌شود. بنابراین مانند یک موج در محیطی همسانگرد رفتار می‌کند و به همین دلیل آن را موج عادی می‌نامند.

موج غیرعادی در صفحه حاصل از CE و u ، یا در صفحه حاصل از راستای انتشار و محور اپتیکی (که همان اولی است) قطبیده خطی است. ولی سرعت آن به راستای انتشار بستگی دارد و بین v_o و v_e (که متناظر با ضریب شکستی بین n_o و n_e اند) تغییر می‌کند.

اگر موجها در امتداد محور اپتیکی منتشر شوند، مقطع بیضی به دایره‌ای با شعاع n_o تبدیل می‌شود و دو موج با سرعت یکسان v_o منتشر می‌شوند. این بیان را می‌توان تعریف دیگری برای محور اپتیکی در نظر گرفت (شکل ۲۴.۲۰ الف). محور اپتیکی



(ب)



(الف)

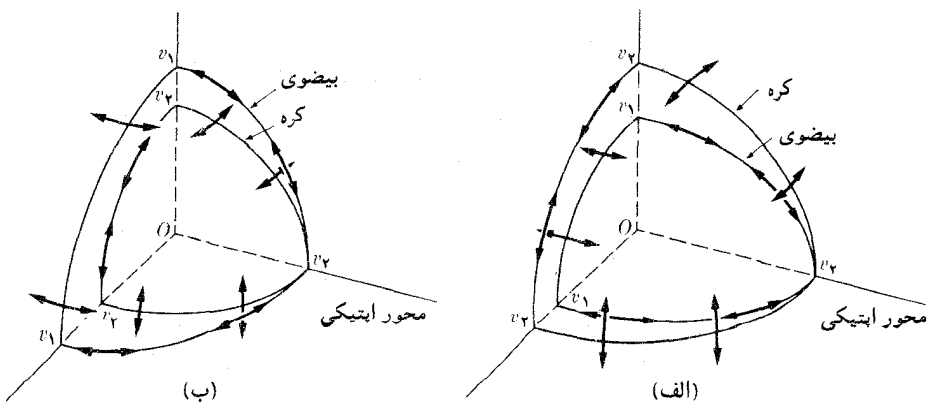
شکل ۲۴.۲۰ راستاهای قطبش پرتوهای عادی و غیرعادی در بلور تک محوری برای انتشار: (الف) موازی با و (ب) عمود بر، محور اپتیکی.

راستایی است که در آن تنها يك سرعت انتشار وجود دارد. هنگامی که موجها عمود بر محور اپتیکی منتشر می شوند، n_1 و n_2 نصف قطرهای بیضی مقطع و موج غیرعادی دارای سرعت v_1 است (شکل ۲۴-۲۵ ب).

يك ترسیم هندسی دیگر را می توان با رسم بردارهایی به طول v_1 و v_2 (بردارهای سرعت امواج عادی و غیرعادی) روی هر راستای انتشار به دست آورد. بدین طریق يك سطح دوگانه بدنام سطح سرعت فرنل به دست می آید (شکل ۲۵-۲۵). یکی از سطحها کره ای است به شعاع $v_2 = v_1$ که با سرعت موج عادی متناظر است. سطح دیگر يك بیضوی دوار با محورهای v_1 و v_2 است که با موج غیرعادی متناظر است. هر دو سطح در محل تقاطعشان بر محور اپتیکی مماس اند. حالت قطبش در مورد چندین راستای انتشار را در شکل ۲۵-۲۵ نشان داده ایم.

در حالت کلی با سه ضریب شکست مختلف، می توان ثابت کرد که دو راستا وجود دارد که برای آنها سرعتهای انتشار دو موج قطبیده برابرند. این راستاها، که آنها را نیز محوره های اپتیکی می نامند، بر صفحاتی که محل تقاطع آنها با بیضوی فرنل دایره است عمودند. موادی را که دارای این مشخصات اند دوجمادی می نامند. این مواد بدستگاههای بلوری مکعب مستطیلی، تک مسایلی و سه مسایلی تعلق دارند. سطح سرعت فرنل برای بلورهای دو محوری پیچیده تر است و ما در اینجا وارد بحث مشخصات هندسی آنها نمی شویم. در جدول ۲۰-۲۵ ضریب شکست چند نمونه از مواد تک محور و دو محور گردآوری شده است.

شمار زیادی از مواد که در حالت طبیعی همسانگردند در اثر تنشهای مکانیکی یا میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ایستای قوی عمود بر راستای انتشار ناهمسانگرد و دوشکستی می شوند. افسر الکترو-اپتیک کر یا افسر مگنتو-اپتیک کاتن-موتن مثالهایی از



شکل ۲۵-۲۵ سطح سرعت فرنل برای بلورهای تک محوری. (الف) بلور مثبت که در آن $n_2 < n_1$ (یا $v_2 > v_1$)، (ب) بلور منفی که در آن $n_2 > n_1$ (یا $v_2 < v_1$) است.

جدول ۲۰۲۰ ضرایب شکست اصلی چند بلور*

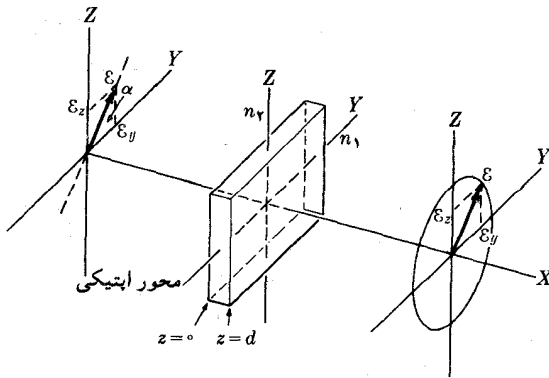
مواد	n_1	n_2	n_3
تک محوریها:			
آپاتیت	۱٫۰۶۴۱۷	۱٫۰۶۴۶۱	
کلسیت	۱٫۴۸۶۴	۱٫۶۵۸۳	
کوارتز	۱٫۵۵۳۳	۱٫۵۴۴۲	
زیرکون	۱٫۹۶۸۲	۱٫۹۲۳۹	
دو محوریها:			
آراگونیت	۱٫۵۳۰۱	۱٫۶۸۱۶	۱٫۶۸۵۹
ژپس	۱٫۵۲۰۶	۱٫۵۲۲۷	۱٫۵۲۹۷
میکا	۱٫۵۶۹۲	۱٫۶۰۴۹	۱٫۶۱۱۷
توپاز	۱٫۶۱۵۵	۱٫۶۱۸۱	۱٫۶۲۵۰

* برای خط بیناب زرد سدیم $\lambda = 5893 \times 10^{-7} \text{ m}$

این حالت اند. در کلیه موارد، ناهمسانگردی ماده از سمتگیری جزئی مولکولها بر اثر تنشها یا میدانها ناشی می شود.

مثال ۴۰۲۰ يك موج قطبیده خطی روی يك تیغه نازک از جنس ماده تک محوری مانند کوارتز، می تابد. رویدهای این تیغه را به موازات محور اپتیکی آن بریده اند. اختلاف فاز بین پرتوهای عادی و غیرعادی و حالت قطبش موج خروجی را پیدا کنید.

حل: شکل ۲۶۰۲۰ آرایش آزمایش را نشان می دهد. تیغه بلوری را به گونه ای قرار داده اند که محور اپتیکی آن افقی است. راستای محور اپتیک را با Y نشان می دهیم. راستای قائم Z با قطبش پرتو عادی (n_o) متناظر است. فرض کنید يك موج قطبیده خطی که با محور Y زاویه α می سازد روی تیغه می تابد. در این حالت برای میدان الکتریکی موج تابش می توان نوشت $E = E_o \sin(\omega t - kx)$. توجه کنید که در رابطه سینوس جای جملات عوض شده است. این عمل برای محاسبه مورد نظر ما ساده تر و نیز یکی از اشکال معادله (۱۰۰۱۸) است. مؤلفه های میدان الکتریکی موج تابش در امتداد محورهای X و Z عبارت اند از



شکل ۲۶.۲۰ تغییر قطبش موج الکترومغناطیسی پس از عبور از تیغه متوازی السطوح که از بلور تک محوری بریده شده است.

$$E_y = E_{o_y} \sin(\omega t - kx), \quad E_z = E_{o_z} \sin(\omega t - kx)$$

که در آن

$$E_{o_y} = E_o \cos \alpha \quad \text{و} \quad E_{o_z} = E_o \sin \alpha$$

هنگامی که موج قطبیده خطی در داخل بلور منتشر می شود، به دو موج تجزیه می شود که میدانهای الکتریکی آنها در امتداد محورهای Y و Z قرار دارند. این موجهای مؤلفه بترتیب با پرتوهای عادی و غیرعادی متناظرند. چون سرعت انتشار هر موج برابر $v_x = c/n_x$ و $v_y = c/n_y$ است، بردارهای انتشار متناظر با هر یک عبارت اند از:

$$k_x = \frac{\omega}{v_x} = \frac{\omega n_x}{c} = kn_x, \quad k_y = kn_y$$

در این رابطه $k = \omega/c$ است. بنا بر این بعد از اینکه موجها از ضخامت d گذشتند، میدانهای الکتریکی در هر یک از آنها بترتیب برابر است با

$$E_y = E_{o_y} \sin(\omega t - k_y d), \quad E_z = E_{o_z} \sin(\omega t - k_x d)$$

که به اختلاف فاز زیر بین دو موج منجر می شود

$$\delta = (k_x - k_y)d = k(n_x - n_y)d = \frac{2\pi(n_x - n_y)d}{\lambda}$$

دو موج، پس از عبور از تیغه ناهمسانگرد، باهم ترکیب می شوند و موج واحدی به وجود می آید. بنا به بحث بخش ۹.۱۲ نتیجه می گیریم که در اثر اختلاف فاز، قطبش موج عبوری عموماً بیضیوار است. اگر δ مضرب فردی از $\pi/2$ ، یعنی:

$$(n_1 - n_2)d = \frac{\lambda}{4} \times (\text{يك عدد صحيح فرد})$$

باشد، محورهای بیضی موازی Y و Z می‌شوند. چنانچه δ مضر بی از π یا به صورت زیر باشد موج عبوری قطبیده خطی است

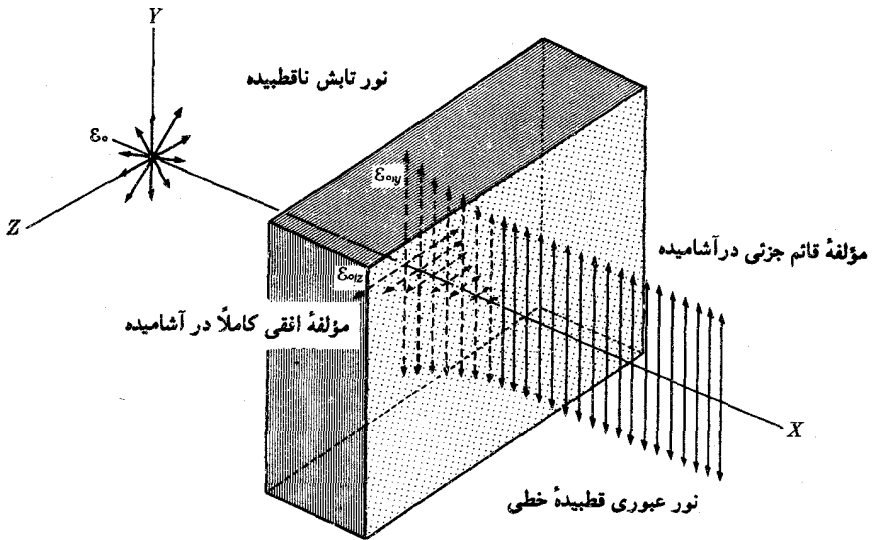
$$(n_1 - n_2)d = \frac{\lambda}{2} \times (\text{يك عدد صحيح})$$

اگر عدد صحیح زوج باشد، موج عبوری در همان صفحه موج تابش قطبیده خطی می‌شود و اگر عدد صحیح فرد باشد موج عبوری در صفحه متقارن نسبت به صفحه XZ قطبیده است. بدیهی است که اگر زاویه α برابر 45° باشد، دو صفحه برهم عمود می‌شوند. تیغه‌های متناظر با دو شرط بالا را تیغه چارک موج و تیغه نیم موج می‌نامند. این نوع تیغه‌ها به طور گسترده برای تجزیه نورهای قطبیده به کار می‌روند. می‌توان از خاصیت این تیغه‌ها به گونه عکس استفاده کرد. یعنی اگر نور قطبیده بیضیوار از يك تیغه چارک موج عبور کند قطبیده خطی می‌شود.

۹.۲۰ دوفامی

بعضی مواد ناهمسانگرد بدنسبتهای بسیار متفاوت موجهای عادی و غیرعادی را درمی‌آشامند. در چنین شرایطی، يك موج الکترومغناطیسی ضمن انتشار در داخل يك قطعه ماده به قدر کافی ضخیم، به تدریج در يك صفحه قطبیده می‌شود، زیرا هم موج عادی و هم موج غیرعادی تقریباً به طور کامل در آشامیده می‌شوند. این وضع را که در شکل ۲۷.۲۰ نشان داده ایم دوفامی می‌نامند. در این شکل E_0 دامنه میدان الکتریکی موج فرودی است. هنگامی که موج فرودی در داخل ماده نفوذ می‌کند به موجهای عادی و غیرعادی تجزیه می‌شود، که در راستای موازی با محورهای Y و Z قطبیده می‌شوند. دامنه‌های این موجها E_{0y} و E_{0z} اند. اگر E_{0z} از E_{0y} بیشتر در آشامیده شود، آنگاه پس از اینکه مسافت معینی را طی کردند، تنها E_{0y} باقی می‌ماند، که منجر به نور قطبیده خطی می‌شود.

چون دوفامی نتیجه اختلاف ضرایب در آشامی است به سامد موج الکترومغناطیسی بستگی دارد و این پدیده در يك ماده ممکن است برای يك بسامد شدیدتر از بسامدهای دیگر باشد. در ناحیه نور مرئی دو ماده دوفام خیلی مهم وجود دارد. یکی تور مالین (بوروسیلیکات آلومینیوم) است که بیشتر پرتوهای عادی را درمی‌آشامد و دیگری هراپاتیت (سولفات ایودو کینیس) است. هراپاتیت این عیب را دارد که بلورهای آن شکننده اند و حفظ و نگهداری آنها در اندازه‌های مناسب بسیار مشکل است. با وجود این، شرکت پلاروید از این ماده پلازید می‌سازد. پلاروید شامل تعداد زیادی بلور کوچک است که یکی به موازات دیگری قرار گرفته‌اند و بین دو ورقه شیشه‌ای یا سلولوئید ساندویچ شده‌اند. همین شرکت مواد دوفام دیگری نیز با استفاده از مواد متشکل از مولکولهای بلند

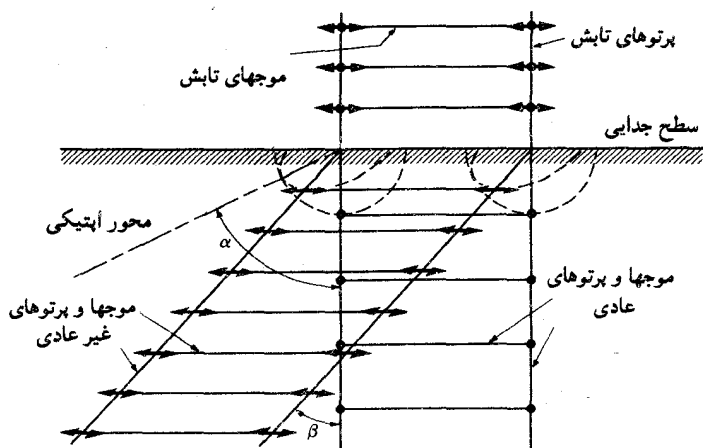


شکل ۲۷.۲۰ دو قامی.

وموازی، مانند الکل پلی وینیل، می سازد. ازچنین ترکیبی ماده‌ای به وجود می آید که خواص آن در درازا و پهنا اختلاف زیادی یاهم دارند، دو قامی یکی از وسایل بسیار ساده وکم خرج برای تولید و تحلیل نور قطبیده است.

۱۰.۲۰ شکست دو گانه

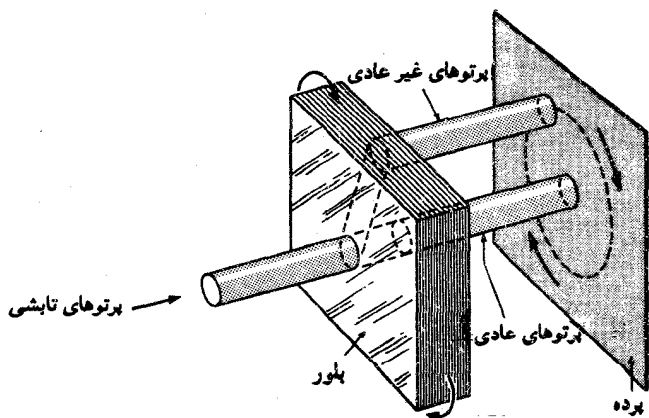
در این بخش رفتار يك موج الكتر ومغناطیسی را وقتی که از محیط ناهمسانگرد عبور می کند یا در آن محیط شکسته می شود، بررسی می کنیم و این بحث تنها به محیطهای تک محوری محدود خواهد بود. در مورد موج بازتاب چیزی نخواهیم گفت، زیرا این موج چیزی اساساً متفاوت با آنچه قبلاً در این فصل درباره آن گفتیم ندارد. از حالت ساده تابش عمودی يك موج تخت بر روی سطح جدایی تخت وعمود بر محور اپتیکی که در اینجا منطبق بر صفحه کتاب است شروع می کنیم. شرایط تقارن ایجاب می کند که دو سطح شکست عادی و غیر-عادی تخت باشند و نیز ضمن انتشار در محیط ناهمسانگرد موازی با سطح جدایی دو محیط باقی بمانند. برای تعیین راستای پرتوهای عادی و غیر عادی، در نقاط تلاقی، سطح سرعت فر نل را که قبلاً در شکل ۲۵.۲۰ نشان داده ایم رسم می کنیم. مماسهای مشترك بر دو گستره سطح سرعت فر نل جبهه های موج عادی و غیر عادی را به دست می دهند. نقاط برخورد راستای پرتوهای عادی و غیر عادی را معلوم می کنند. بنابراین موج عادی در راستای تابش منتشر می شود و به طور عمود بر صفحه کاغذ (آن طور که نقطه های شکل ۲۸.۲۰ نشان می دهند) قطبیده خطی است. اما موج غیر عادی با اینکه موازی سطح جدایی دو محیط باقی می ماند،



شکل ۲۸۰۲۵ پرتوهای عادی و غیر عادی یک موج تابش عمود بر سطح بلور تک محوری. قطبشهای خطی پرتوهای عادی و غیر عادی بر یکدیگر عمودند.

ولی جا بجایی جانی پیدا می کند، به گونه ای که شارش انرژی که در امتداد پرتو غیر عادی است با راستای انتشار زاویه β می سازد. موج غیر عادی در صفحه کاغذ (آن طور که خط تیره های شکل ۲۸۰۲۵ نشان می دهند) قطبیده می شود.

هنگامی که دو پرتو شکست تنها بزرگ پرتو تابش متناظر باشند، گویم شکست دوگانه وجود دارد و به همین دلیل است که مواد ناهمسانگرد را دوشکستی می نامند. هر گاه دو رویه ماده موازی باشند (شکل ۲۹۰۲۵) پرتوهای عادی و غیر عادی به طور موازی ولی جدا از هم



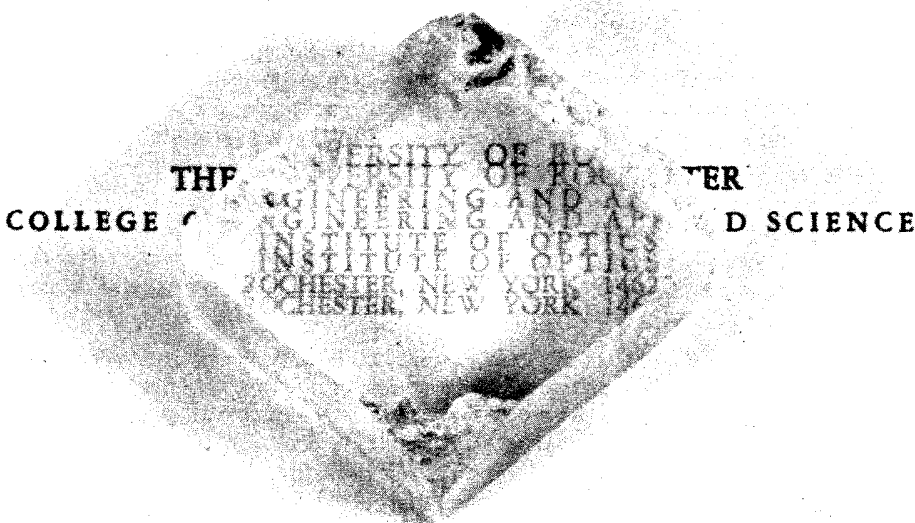
شکل ۲۹۰۲۵ یک باریکه باریک نور ناقطبیده را می توان توسط یک بلور دوشکستی به دو باریکه تقسیم کرد. اگر بلور بچرخد، پرتو غیر عادی دور پرتو عادی می چرخد. هر دو باریکه نور قطبیده خطی اند و زاویه یکی نسبت به دیگری 90° است.

خارج می‌شوند، چنانکه عکس بلور کلسیت در شکل ۳۰.۲۰ نشان می‌دهد، يك تصویر دوگانه به دست می‌آید.

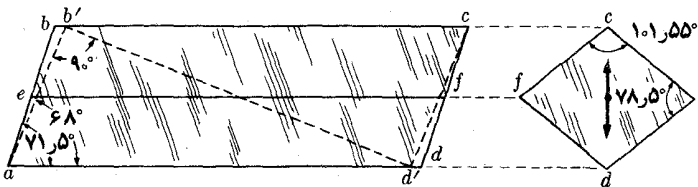
اگر تابش مایل باشد، وضع از نظر هندسی قدری پیچیده‌تر می‌شود ولی از لحاظ فیزیکی نتیجه اساساً تغییر نمی‌کند. برای هر موج تابش دو موج شکست متفاوت وجود دارد که در دو راستای مختلف منتشر می‌شوند و طوری قطبیده می‌شوند که زاویه یکی با دیگری برابر 90° باشد.

شکست دوگانه، يك وسیله پژوهشی بسیار مهم در مطالعه ساختار بلورهاست و دارای کاربردهای جالب دیگری نیز هست. یکی از کاربردهای عملی آن تولید بساریکهٔ نسوز قطبیدهٔ خطی توسط منشور نیکول است. برای ساختن منشور نیکول، يك بلور کلسیت را که طول آن ۴ برابر عرض آن است، مطابق خطهای نقطه چین ab' ، cd' در شکل ۳۱.۲۰ الف می‌برند. سپس بلور حاصل را در امتداد قطر آن (خط $b'd'$) قطع و دو نیمه را به وسیلهٔ صمغ کانادا بهم می‌چسبانند. ضریب شکست صمغ و کلسیت برای پرتوهای عادی و غیرعادی یکسان نیست. بدین دلیل و همچنین به دلیل وضع هندسی بلور، پرتوهای عادی در سطح جدایی بازتاب کلی می‌کنند و به سمت خارج منشور منحرف می‌شوند، در صورتی که پرتوهای غیرعادی بد نیمهٔ دوم بلور وارد می‌شوند و از انتهای آن خارج می‌شوند. بنابراین نور خارج شده قطبیدهٔ خطی است. منشورهای نیکول در تعدادی از وسائل اپتیکی مانند قطب‌سنجها نقش عمده‌ای دارند.

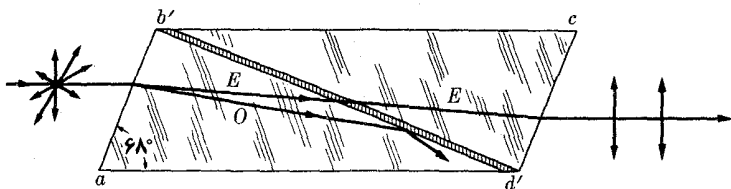
مثال ۵.۲۰ يك پرتو نورانی، روی بلور کلسیت می‌تابد. بلور را به گونه‌ای بریده‌اند که



شکل ۳۰.۲۰ عکس برداری از تصویر دوگانهٔ حاصل از بلور کلسیت.



(الف)



(ب)

شکل ۳۱۰۲۰ (الف) بلور کلسیت طبیعی که آن را اسپات دیسلند می نامند. (ب) منشور نیکول.

سطح آن موازی محور اپتیکی است. با فرض اینکه صفحه تابش بر محور اپتیکی عمود و زاویه تابش 50° است، زاویه‌ای که دو پرتو عادی و غیر عادی را از هم جدا می کند پیدا کنید.

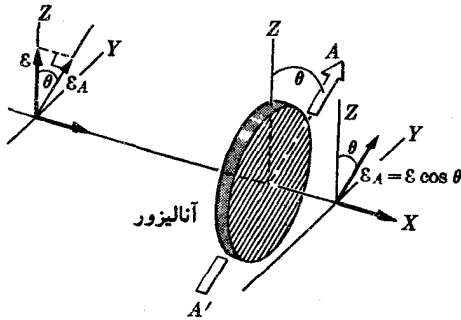
حل: بنا به شکل‌های 24.20 و 25.20 ، هنگامی که راستای انتشار موج بر محور اپتیکی عمود است پرتوهای عادی با سرعت v_1 و پرتوهای غیر عادی با سرعت v_2 بترتیب متناظر با ضریب شکستهای n_1 و n_2 منتشر می شوند. بنابراین، با به کار بردن قانون اسنل و ضریب شکستهای داده شده در جدول 2.20 داریم

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_o} = n_2 = 1.6583 \quad \text{و} \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_e} = n_1 = 1.4864$$

چون $\theta_i = 50^\circ$ است، به دست می آید $\theta_o = 27^\circ 20'$ و $\theta_e = 31^\circ 5'$. بنابراین زاویه جدایی بین دو پرتو برابر است با $\theta_e - \theta_o = 3^\circ 35'$

مثال ۶۰۲۰ موجهای الکترومغناطیسی قطبیده خطی را از داخل يك وسیله قطبی کننده، به نام آنالیزور نگاه می کنند. درباره افتاخیز شدت موج عبوری هنگامی که آنالیزور می چرخد، بحث کنید.

حل: شکل 32.20 را در نظر می گیریم. آنالیزور وسیله‌ای است که موجی را که میدان الکتریکی آن موازی راستای AA' است از خود عبور می دهد. اگر محور AA' با میدان الکتریکی يك موج تابش قطبیده خطی زاویه θ بسازد، این دستگاه تنها مؤلفه $E_A = E \cos \theta$ را از خود عبور می دهد. در نتیجه، چون شدت موج با مجذور میدان الکتریکی متناسب است، رابطه زیر به دست می آید



شکل ۳۲.۲۰ تغییر در شدت نور قطبیده خطی با تغییر در سمتگیری آنالیزور.

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

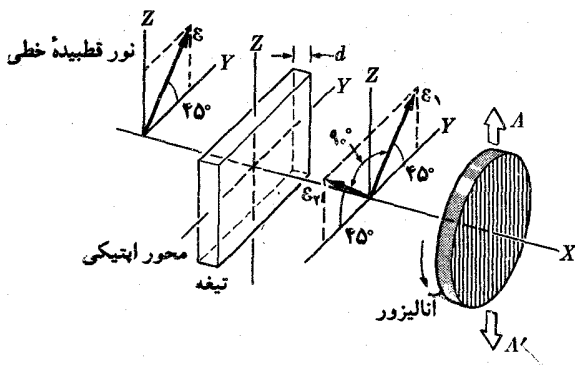
I_0 شدت موج تابش و I شدت موج عبوری است. این نتیجه به قانون مالوس معروف است. اگر $\theta = 0$ یا π باشد، شدت نور عبوری بیشینه و اگر $\theta = \pi/2$ یا $3\pi/2$ باشد، شدت آن برابر صفر است. بنابراین هنگامی که آنالیزور را بچرخانند شدت موج عبوری بین صفر و I_0 افتخیز می کند، بدین طریق می توان تعیین کرد که آیا یک موج، مثلاً موج نوری، قطبیده است یا نه. برای موجهای ناقطبیده یا قطبیده دایره ای، هیچگونه افت و خیزی در شدت مشاهده نمی شود. برای موجهای قطبیده بیضیوار، موج عبوری بین یک مقدار کمینه و یک مقدار بیشینه افتخیز می کند. این دو فرین (اندازه های حد) از موازی قرار گرفتن آنالیزور با قطر بزرگ یا با قطر کوچک بیضی به دست می آیند. در این صورت درجه قطبش موج تابش با رابطه زیر داده می شود

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

توجه کنید که برای موجهای قطبیده خطی $P = 1$ و برای موجهای ناقطبیده $P = 0$ است.

مثال ۷۰.۲۰ بحثی پیرامون قطبش دنگی: اگر نور سفید قطبیده خطی روی تیغهای، همانند تیغه مثال ۴۰.۲۰ بتابد و توسط یک دستگاه قطبی کننده دیگر تجزیه شود، نور رنگی به نظر می رسد و رنگ آن به سمتگیری آنالیزور بستگی دارد. مسئله عبارت است از مشاهده نورهای با طول موجهای مختلف و تعیین رنگ آنها برای هر سمتگیری آنالیزور.

حل: آرایش شکل ۳۳.۲۰ را در نظر می گیریم. برای سهولت، فرض می کنیم که نور تابش سفید و قطبیده خطی است و میدان الکتریکی آن با محور اپتیکی تیغه، زاویه 45° می سازد. بنا به نتایج مثال ۴۰.۲۰ نور عبوری در راستای E_1 یا E_2 به طور خطی قطبیده



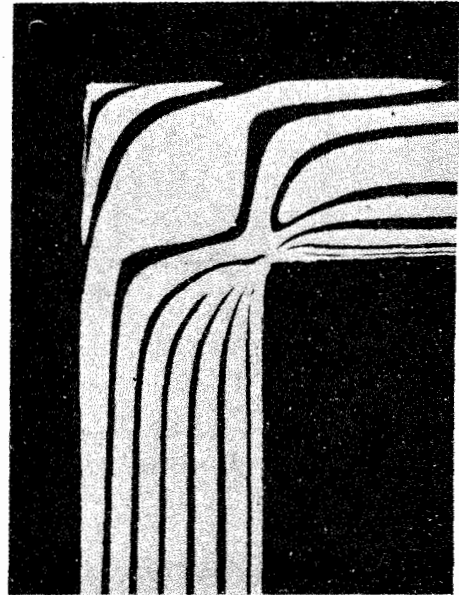
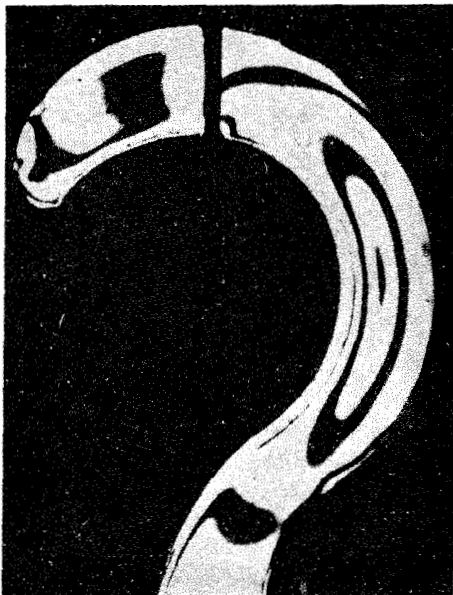
شکل ۳۳.۲۰ تیغه بلوری بین نور قطبیده خطی و آنالیزور قرار دارد. پدیده حاصل را قطبش رنگی می نامند.

می شود، بسته به اینکه طول موج کدام يك از حالت های زیر باشد

$$(n_1 - n_2)d = \begin{cases} \lambda/2 \text{ (قطبش } E_1 \text{)} \times \text{ عدد درست جفت} \\ \lambda/2 \text{ (قطبش } E_2 \text{)} \times \text{ عدد درست فرد} \end{cases}$$

برای تمام طول موج های دیگر نور عبوری قطبیده بیضیوار است. اکنون اگر نور عبوری را از طریق آنالیزور نگاه کنیم مشاهده می شود که این نور سفید نیست، بلکه رنگی است. با چرخاندن محور AA' آنالیزور رنگ آن عوض می شود. این امر بدین سبب صورت می گیرد که بنا به نتایج مثال ۶.۲۰، هنگامی که محور آنالیزور با راستای E_1 موازی است طول موج های متناظر با آن با شدت بیشینه می گذرند، در حالی که از آن E_2 متوقف می شوند. در شرایط عکس، یعنی هنگامی که محور آنالیزور موازی با E_2 است، رنگ مکمل رنگ قبلی ظاهر می شود. بنابراین با چرخاندن آنالیزور می توان رنگ های مختلف را بدست آورد. رنگ های مکمل با زاویه 90° از یکدیگر جدا می شوند.

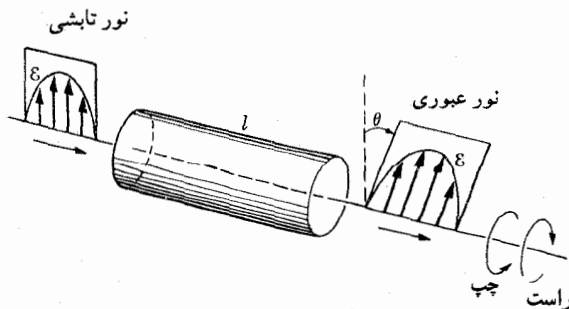
از این پدیده در تحلیل تنش های عناصر ساخت ماشینها و بناها استفاده می شود. بدین طریق شاخه ای از فیزیک کاربردی به نام فوتوالاستیسیته یا به عرصه وجود گذاشته است. همچنانکه در پایان بخش ۸.۲۰ گفتیم، هنگامی که يك ماده پلاستیکی تحت تنش باشد، در اثر ناهمسانگردی ناشی از کرنش، به يك ماده دوشکستی تبدیل می شود. بنابراین يك مدل پلاستیکی، تحت تنش های یکسان با تنش های ساختار حقیقی آن، از لحاظ اپتیکی همانند يك تیغه دو شکستی ناهمگن عمل می کند. ناهمگنی در اثر توزیع غیر یکنواخت کرنش در پلاستیک به وجود می آید. اگر تیغه شکل ۳۳.۲۰ با يك قطعه ماده تحت تنش عوض شود، نقشی (رنگی) شبیه به شکل ۳۴.۲۰ ظاهر می شود. از اینجا با استفاده از روش های ویژه ای می توان کرنشها را بر آورد کرد.



شکل ۳۴.۲۰ دو شکست ایجاد شده در ماده بر اثر تمش.

۱۱.۲۰ فعالیت اپتیکی

پدیدۀ دیگر وابسته به خاصیت عرضی بودن امواج الکترومغناطیسی، چرخیدن صفحه قطبش است، که فعالیت اپتیکی نام گرفته است. این خاصیت هنگام نگاه کردن به بیناب امواج الکترومغناطیسی در ناحیۀ نور مرئی یا نزدیک بدان مشاهده می شود. اگر یک باریکۀ نور قطبیده خطی از داخل ماده ای که فعالیت اپتیکی دارد بگذرد (شکل ۳۵.۲۰)، موج عبوری نیز قطبیده خطی است، ولی صفحه قطبش با صفحه قطبش موج تابش یکی نیست و با آن زاویۀ θ می سازد. مقدار θ با l طول ماده ای که باریکۀ نور از آن می گذرد و نیز به جنس

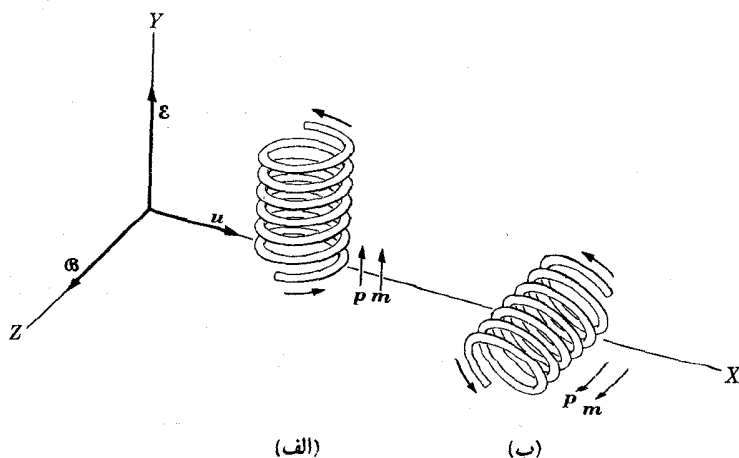


شکل ۳۵.۲۰ چرخش صفحه قطبش توسط ماده ای که فعالیت اپتیکی دارد.

این ماده بستگی دارد. از دیدگاه ناظری که نور عبوری را مشاهده می کند، برحسب اینکه چرخش صفحه قطبش را ساعتگرد یا پادساعتگرد ببیند، بترتیب مواد را داستگرد یا چپگرد می نامد.

بعضی مواد تنها درحالت جامد فعالیت ایتیکی از خود نشان می دهند. بیشتر بلورهای غیر آلی بسویژه کوآرتز و بعضی بلورهای آلی مانند بنزیل از این گونه اند. این مواد هنگام ذوب و حل شدن یا تبخیر خاصیت ایتیکی خود را از دست می دهند. این امر نشان می دهد که فعالیت ایتیکی این مواد بدآرایش و یسزه اتمها و مولکولها در بلور بستگی دارد، و این آرایش درحالت مایع و گازی که مولکولها نظم معینی ندارند از بین می رود. مواد دیگری مانند تربانتین، شکر، کامفر یا اسید تارتاریک در کلیه حالتها فیزیکی منجمه درحالت محلول فعالیت ایتیکی خود را حفظ می کنند. در مواد نوع اخیر، فعالیت ایتیکی به تک تک مولکولها وابسته است نه به آرایش نسبی آنها.

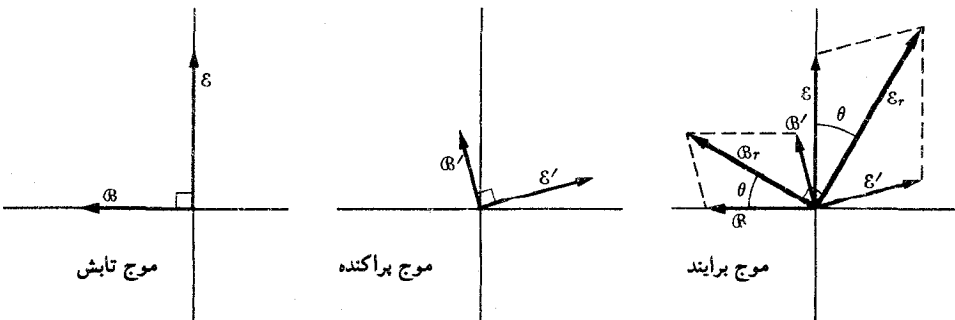
فعالیت ایتیکی نتیجه پیچش مدارهای الکترونی در مولکولها یا در بلورها در اثر میدان الکترومغناطیسی خارجی است. هنگام مطالعه قطبش ماده (بخش ۵۰۱۶)، فرض کردیم که در مواد همسانگرد الکترونها در امتداد خطی موازی با میدان الکتریکی نوسان می کنند. در مواد ناهمسانگرد، نوسان الکترونها زاویه ای با خط میدان می سازد (بخش ۸۰۲۵). با وجود این در بعضی مولکولها و بلورها، حرکت الکترونها روی مسیر پیچشی صورت می گیرد که برای سهولت می توان آن را مسیر مارپیچ فرض کرد (شکل ۳۶۰۲۵). فرض کنید که مولکول یا بلور به گونه ای قرار گرفته است که مسیره های مارپیچی الکترونها مانند شکل ۳۶۰۲۵ اند، یعنی محور مارپیچ برداستای انتشار عمود و با میدان الکتریکی یا میدان مغناطیسی موج تابش موازی است.



شکل ۳۶۰۲۵ گشتار دوقطبیهای الکتریکی و مغناطیسی القایی توسط موج الکترومغناطیسی در مولکول مارپیچی.

حالات اول، یعنی سمتگیری (الف) را در نظر می‌گیریم. میدان الکتریکی نوسانی موج، یک حرکت نوسانی از بالا به پایین در امتداد ماریچ در الکترونها تولید می‌کند، که به گشتاور دوقطبی الکتریکی نوسانی مؤثر p ، به موازات محور ماریچ منجر می‌شود. تا اینجا وضع با وضع قطبش عادی مشابه است. ولی به علت پیچش مسیر الکترونی، جریان الکترونها در هر حلقه ماریچ هم‌ارز با یک دوقطبی مغناطیسی است و مولکول یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی نوسانی مؤثر m به دست می‌آورد که این گشتاور نیز در امتداد محور ماریچ است. در سمتگیری (ب)، میدان مغناطیسی نوسانی موج، شار متغیری در داخل هر حلقه ماریچ تولید می‌کند که، بنا به قانون فاراده‌هنری یک جریان الکترونی نوسانی در امتداد ماریچ به وجود می‌آید. این جریان مجدداً یک گشتاور مغناطیسی نوسانی m در امتداد محور ماریچ تولید می‌کند. ولی حرکت رفت و برگشت الکترونها دو انتهای مولکول را به تناوب مثبت و منفی می‌کند که به یک گشتاور دوقطبی الکتریکی نوسانی مؤثر p در امتداد ماریچ منجر می‌شود. بنابراین در هر دو سمتگیری مولکول، هم گشتاور دوقطبی الکتریکی نوسانی p و هم گشتاور دوقطبی مغناطیسی نوسانی m موازی با محور مولکول تولید می‌شود. این دوقطبیها با همان روشی که در بخش ۹.۱۹ بررسی شد، امواج الکترومغناطیسی پراکنده تابش می‌کنند. در بخش ۹.۱۹ تنها پراکندگی دوقطبی الکتریکی را در نظر گرفتیم زیرا حرکت الکترونها مستقیم‌الخط فرض شده بودند.

تحلیل دقیق ریاضی در مورد امواج پراکنده، که در اینجا وارد بحث آن نمی‌شویم، نشان می‌دهد که در امتداد راستای انتشار موج تابش، میدانهای E' و B' موج پراکنده با میدانهای موج تابش هم‌فازند؛ ولی به دلیل سمتگیری نسبی مختلف میدانهای E و B در دوقطبی الکتریکی و مغناطیسی، در راستاهای دیگری نوسان می‌کنند (شکل‌های ۸.۱۹ و ۱۲.۱۹). ناظر واقع در امتداد راستای انتشار، موجهای تابش و پراکنده را مشاهده می‌کند، که به خاطر هم‌فاز بودن، تداخل می‌کنند. این امر به قطبش خطی منجر می‌شود (به بخش ۹.۱۲ مراجعه کنید) که با صفحه اولیه بردار الکتریکی زاویه θ می‌سازد (شکل ۳۷.۲۰). از این رو، نتیجه آن چرخیدن صفحه قطبش موج است. برای مولکولهایی که سمتگیری آنها



شکل ۳۷.۲۰ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی حاصل از برهم‌نهی موجهای تابش و پراکنده.

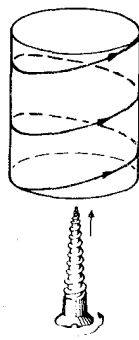
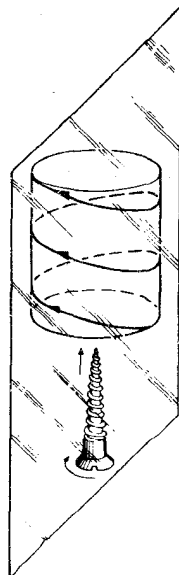
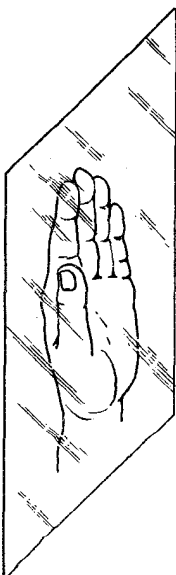
کاتوره‌ای است، می‌توان ثابت کرد که این اثر همواره در همین سو است، هر چند بزرگی آن به‌سمتگیری مولکولی بستگی دارد. از این رو، فعالیت اپتیکی در تمام حالت‌های فیزیکی و در حالت محلولی ادامه پیدا می‌کند. با وجود این در بعضی بلورها، این اثر به‌آرایش مولکولها بستگی دارد، اما مولکولهای منفرد تقارن مارپیچی ندارند و بنابراین، در صورت به هم خوردن آرایش مولکولها، این اثر نیز محو می‌شود.

دانشجو ممکن است به‌دو نوع مارپیچ، راستگرد و چپگرد (شکل ۳۸.۲۰)، پی‌برد. یکی از مارپیچها تصویر مارپیچ دیگر در آینه است، همان‌طور که دست چپ تصویر دست راست در آینه است. این گونه تقارن را دوه‌دو دپسی می‌نامند. بعضی مولکولها مانند مارپیچ راستگرد و بعضی مانند مارپیچ چپگرد عمل می‌کنند. در یک حالت چرخش صفحه قطبش در یک جهت و در حالت دیگر در جهت مخالف صورت می‌گیرد. این امر وجود مواد راستگرد و چپگرد را توجیه می‌کند.

بعضی مواد هم شامل خود مولکول و هم شامل تصویر آن در آینه‌اند، این ویژگی را سان‌مون‌گنجی می‌نامند. به‌عنوان مثال، چنانکه شکل ۳۹.۲۰ نشان می‌دهد، مولکولهای اسید لاکتیک ($\text{CH}_3 - \text{COOH} - \text{CO}_2\text{H}$) می‌توانند هم شامل مولکول و هم شامل تصویر همان مولکول در آینه باشند. نمونه‌ای از اسید لاکتیک که به مقدار یکسان از دو نوع

آینه

آینه



دست چپ

دست راست

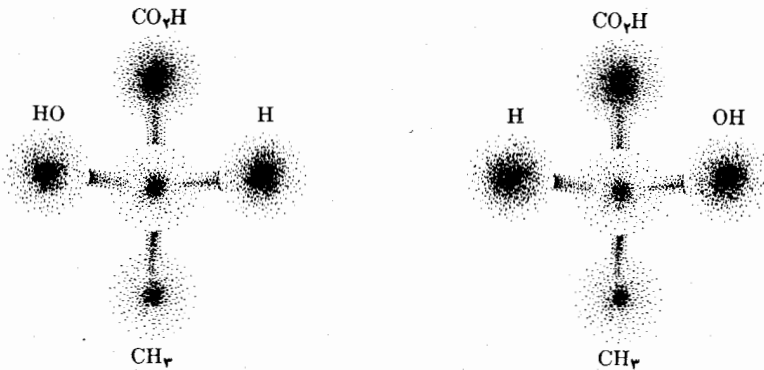
مارپیچ چپگرد

مارپیچ راستگرد

(ب)

(الف)

شکل ۳۸.۲۰ تقارن راست-چپ. (الف) تصویر مارپیچ (یا پیچ) راستگرد در آینه مارپیچ (یا پیچ) چپگرد است. (ب) تصویر دست راست در آینه دست چپ است.



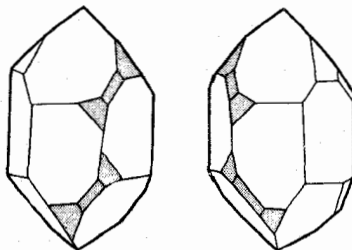
شکل ۳۹.۲۰ اشکال تصویر اسید لاکتیک در آینه.

مولکول را داراست، از لحاظ اپتیکی غیر فعال است، ولی اگر از یک نوع بیش از نوع دیگر داشته باشد، یک چرخش خالص به وجود می آید.

در مورد کوارتز تمام مولکولها یکسان اند ولی آرایش فضایی آنها در بلور یا به صورت تقارن راستگرد یا چپگرد است و همان طور که نمود خارجی دو نوع بلور در شکل ۴۰.۲۰ نشان می دهد، یکی از بلورها راستگرد و دیگری چپگرد است. با ذوب کردن بلور آرایش مولکولها از بین می رود و فعالیت اپتیکی محو می شود.

هنگامی که ماده ای که مولکولهای آن از لحاظ اپتیکی فعال اند، مانند اسید لاکتیک، لوولوز، دکستروز و غیره در آب حل می شود، چرخش صفحه قطبش به غلظت بستگی دارد. از این نتیجه به طور گسترده برای تعیین مقدار غلظت قند، به عنوان مثال، در شربت یا در ادرار استفاده می شود.

بعضی مواد اگر به وسیله ای تقارن مارپیچی پیدا کنند فعالیت اپتیکی از خود نشان می دهند. یکی از این وسایل اعمال میدان مغناطیسی ایستا و قوی در امتداد راستای انتشار است. این پدیده را اثر فارادی می نامند.



شکل ۴۰.۲۰ صورتهای تصویر آینه ای بلور کوارتز.

۱۲.۲۰ بازتاب و شکست روی سطوح فلزی

در فصل ۱۴ دیدیم که میدان الکتریکی ایستا در داخل رسانا برابر صفر است. در مورد میدان تابع زمان وضع کاملاً به گونه‌ای دیگر است. با وجود این، حتی برای میدان الکتریکی تابع زمان هم، موج الکترومغناطیسی هنگام انتشار در داخل رسانا (مانند فلز یا گاز یونیده) شدت ضعیف می‌شود. در اینجا وارد بحث تفصیلی این نظریه نمی‌شویم، ولی به یکی از آن تغییرات اساسی اشاره می‌کنیم که در معادلات حاکم بر انتشار موج الکترومغناطیسی در رسانا داده می‌شود.

اگر جریانهای القا می‌ناشی از میدان الکتریکی موج در داخل رسانا را منظور کنیم، معادله‌های (۱۰.۱۹) تا (۵.۱۹) تغییر نمی‌کنند ولی معادله (۶.۱۹) باید تغییر کند. از معادله (۴۹.۱۶) می‌دانیم که چگالی جریانی برابر است با $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. اگر این جریان را در معادله (۶.۱۹) قرار دهیم، با برزش (دستکاری) ساده‌ای، به جای معادله خیلی ساده (۷.۱۹)، معادله‌ای که در مورد میدان الکتریکی صادق است، نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (27.20)$$

جمله جدید $\mu \sigma \partial \mathbf{E} / \partial t$ ، که مشتق اول نسبت به زمان است، مشابه جمله میرایی $-\lambda dx/dt$ در حرکت نوسانی میراست که قبلاً در بخش ۱۲.۱۲ بررسی شد، بنابراین نشان می‌دهد که موج در جریان انتشار خود در داخل رسانا به تدریج مستهلك می‌شود. از این رو شدت موج با نفوذ در فلز سریعاً کاهش می‌یابد. جواب معادله (۲۷.۲۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha x} \sin(kx - \omega t) \quad (28.20)$$

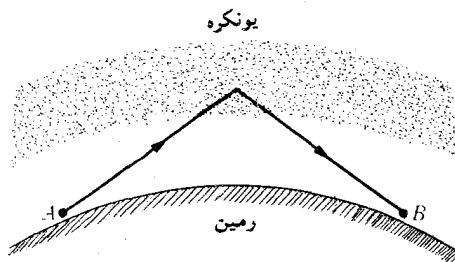
که در آن $v = \omega/k$ سرعت انتشار است و ضریب میرایی α بر حسب روابط جبری پیچیده‌ای بین μ ، ϵ و σ محاسبه می‌شود. اگر بسامد آن قدر کوچک باشد که بتوان از ω^2 چشم پوشید و نیز اگر فلز رسانای بسیار خوبی باشد، به گونه‌ای که $\sigma \gg \epsilon \omega$ شود، دانشجو می‌تواند مستقیماً با قراردادن معادله (۲۸.۲۰) در معادله (۲۷.۲۰) رابطه زیر را تحقیق کند

$$k = \alpha \approx \sqrt{\frac{1}{4} \mu \sigma \omega} \quad (29.20)$$

در این صورت سرعت انتشار برابر است با

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu \sigma}} \quad (30.20)$$

در هر حالتی، معادله نمایی (۲۸.۲۰) نشان می‌دهد که موج میراست و با پیشروی در محیط رسانا بتدریج مستهلك می‌شود.



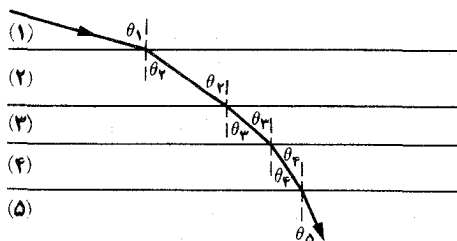
شکل ۴۱.۲۰ بازتاب امواج رادیویی توسط یونکره (یونسفر).

این وضع گویای دوخاصیت بسیار مهم از رساناهاست. خاصیت اول کدر بودن آنهاست، که از درآشامی بسیار شدید امواج ناشی می‌شود؛ به‌گونه‌ای که هیچ موجی از داخل رسانا عبور نمی‌کند مگر اینکه رسانا از لایه بسیار نازکی تشکیل شده باشد. بنابراین رساناها پوششهای بسیار خوبی برای حفاظت یک ناحیه از امواج الکترومغناطیسی هستند. (به عنوان مثال. می‌توان با نصب توری فلزی در اطراف یک ناحیه از نفوذ امواج جلوگیری کرد). خاصیت دوم بازتابندگی زیاد رساناهاست؛ این خاصیت ناشی از این است که فقط کسر کوچکی از انرژی موج تابش در رسانا نفوذ می‌کند، و قسمت عمده آن با موج بازتابیده برمی‌گردد. این بازتابندگی زیاد مخصوص فلزات است. یک لایه گاز یونیده نیز، با بازتاباندن امواج تابش، مانند یک رسانا عمل می‌کند. به عنوان مثال، از این اصل در ارتباطات رادیویی برای ارسال یک علامت رادیویی به هر نقطه در اطراف زمین استفاده می‌کنند. علامت رادیویی هنگام برخورد با لایه فوق‌العاده یونیده هوا، یعنی یونکره (یونسفر) بدسوی زمین بازتابیده می‌شود. یونکره در حدود ۱۰۰ کیلومتری بالای سطح زمین قرار گرفته است. بدین طریق امکان ارتباط بین نقاط A و B فراهم می‌شود. ارتباطی که در غیر این صورت با انتشار مستقیم موج نمی‌توان به آن دست یافت (شکل ۴۱.۲۰).

۱۳.۲۰ انتشار در محیط ناهمگن

پدیده‌های بازتاب و شکست که در بخشهای پیش تشریح شدند با وضعی متناظرند که در آن موج از محیط همگن به محیط همگن دیگر وارد می‌شود. ولی در بیشتر موارد خواص محیطی که موج در آن منتشر می‌شود از یک نقطه به نقطه دیگر فرق می‌کند. به عنوان مثال، در روزهای گرم لایه‌های پایین هوا خیلی گرمتر از لایه‌های بالای آن است، بنابراین موجهای صوتی و نیز موجهای نوری شکستهای پیوسته‌ای متحمل می‌شوند.

انتشار موج از داخل یک محیط لایه‌دار را در نظر می‌گیریم، یعنی محیطی که متشکل از چند لایه است و سرعت انتشار در این لایه‌ها یکسان نیست (شکل ۴۲.۲۰). اگر موج تابش با زاویه θ_1 روی لایه اول بتابد، شکستهای پیاپی در شرایط زیر صدق می‌کنند.



شکل ۴۲.۲۰ مسیر پرتو در محیط لایه‌دار.

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$n_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3$$

$$n_3 \sin \theta_3 = n_4 \sin \theta_4$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

یا

$$n \sin \theta = \text{const} \quad (۳۱.۲۰)$$

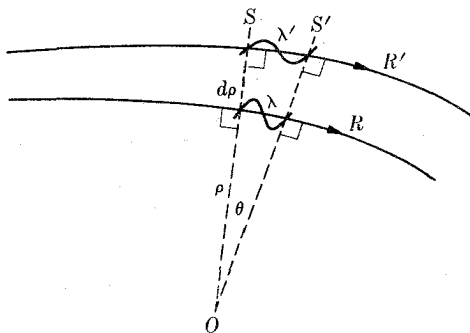
اکنون محیطی را در نظر می‌گیریم که در آن ضریب شکست تنها به یک مؤلفه، مثلاً به y بستگی دارد. این محیط را نیز می‌توان محیط لایه‌دار در نظر گرفت که در آن لایه‌ها پیاپی و بینهایت نازک‌اند. در این صورت معادله (۳۱.۲۰) اعتبار خود را حفظ می‌کند و می‌توان نوشت

$$n(y) \sin \theta = C \quad (۳۲.۲۰)$$

در این رابطه C مقدار ثابتی است. از این رابطه زاویه θ در هر نقطه از مسیر به دست می‌آید و می‌توان آن را برای رسم مسیر یک پرتو در داخل یک محیط ناهمگن به کار برد.

مثال ۸۰.۲۰ موجی در داخل یک محیط با ضریب شکست متغیر منتشر می‌شود، شعاع انحنای پرتوی از این موج را حساب کنید.

حل: دو سطح موج S و S' با فاصله زمانی یک دوره را در نظر می‌گیریم (شکل ۴۳.۲۰). در این صورت فاصله مکانی آنها در امتداد یک پرتو برابر یک طول موج است. دو پرتو خیلی نزدیک به هم R و R' را در نظر می‌گیریم. چون سرعت انتشار از یک نقطه به نقطه دیگر فرق می‌کند، طول موج نیز تغییر می‌کند $\lambda = v/\nu = c/\nu n$. فرض کنید که λ و λ' طول موجهای پرتوهای R و R' هستند. در این صورت از شکل ۴۳.۲۰ پیدا است که $\rho\theta = \lambda$ و $(\rho + d\rho)\theta = \lambda'$. بنابراین داریم $d\rho\theta + \rho d\theta = \lambda' - \lambda = d\lambda$ ولی $\theta = \lambda/\rho$ است، به گونه‌ای که می‌توان نوشت



شکل ۳۳.۲۰ انحنای پرتوها در محیط ناهمگن.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{d\rho} = \frac{d}{d\rho} (\ln \lambda)$$

$$= -\frac{d}{d\rho} (\ln n) \quad (33.20)$$

زیرا $\ln \lambda = \ln c - \ln \nu - \ln n$ است و ν و c نیز هر دو ثابت اند. معادله (۳۳.۲۰) نشان می‌دهد که مسیر منحنی است. کاوی منحنی به سمتی است که ضریب شکست افزایش می‌یابد.

فهرست منابع

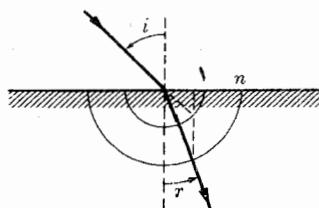
1. «Phase Change on Reflection from Isotropic Dielectrics», G. Friedmann and H. Sandhu, *Am. J. Phys.* 33, 135 (1965).
2. *Light: Principles and Experiments*, G. Monk. New York: Dover, 1963, Chapters 1, 13, and 15.
3. *Optics*, B. Rossi. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957, Chapters 1, 6, and 8.
4. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapters 26, 31, and 33; Volume II, Chapters 30 through 33.
5. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1963, page 265 (Descartes); page 280 (Bartholinus); page 283 (Huygens); page 315 (Malus); page 352 (Faraday).
6. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton and D. H. D.

Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Sections 30.1 and 30.7.

۷. ریتس، جی. آر. [و] اف. جی. میلفورد، اصول تئوری الکترومغناطیسی، ترجمه جلال-صمیمی [و] ناصر علیزاده قمصری، ج ۱، ۲، مشهد، مؤسسه چاپ و انتشارات دانشگاه مشهد، ۱۳۵۹، ج ۲. (ویرایش دوم انگلیسی این کتاب در مرکز نشر دانشگاهی در دست ترجمه است.)

مسئله‌ها

۱۰۲۰ قاعده زیر برای رسم پرتو شکست پیشنهاد شده است (شکل ۴۴.۲۰): به مرکز نقطه تابش دو دایره به شعاع ۱ و n (با یکی اختیاری) رسم می‌کنیم. پرتو تابش را امتداد می‌دهیم تا دایره به شعاع ۱ را قطع کند. از این نقطه خطی بر سطح جدایی دو محیط عمود می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم تا دایره به شعاع n را قطع کند. پرتو شکست از این نقطه می‌گذرد. (الف) درستی این قاعده را تحقیق کنید. (ب) آن را در حالی که $n = ۱.۵$ و زاویه تابش برابر ۶۰° باشد به کار ببرید. (ج) همین کار را برای $n = ۰.۸$ و زاویه تابش ۳۰° و زاویه تابش دیگری برابر با ۶۰° انجام دهید. با استفاده از قانون اسنل درستی نتایج به دست آمده را تحقیق کنید.



شکل ۴۴.۲۰

۲۰۲۰ يك سیم مسی به شعاع ۱ mm به سیم مسی دیگری به شعاع ۸ mm وصل شده است. T و R را در محل اتصال برای موجهایی که در امتداد دستگاه از سمت اول به سمت سیم دوم منتشر می‌شود پیدا کنید.

۳۰۲۰ دو سیم هم قطر از مس و فولاد جهت به دست آوردن يك سیم بلند به هم بسته شده‌اند. T و R را در محل اتصال برای موجهایی که در امتداد سیم منتشر می‌شوند پیدا کنید. شعاع مشترک را ۱ mm فرض کنید. اگر بسامد موج تابش ۱۰ Hz، دامنه آن ۲ cm و نیروی کشش ۵۰ N باشد، معادلات موجهای تابش، بازتاب و عبوری را بنویسید (چگالی مس برابر $۸۹۶۰ \times ۱۰^۳ \text{ kg} \cdot \text{m}^{-۳}$ و از آن فولاد برابر $۷۸۵۰ \times ۱۰^۳ \text{ kg} \cdot \text{m}^{-۳}$ است).

۴۰۲۰ برای وضع گفنگو شده در مثال ۲۰۲۰، ثابت کنید که مجموع شدتهای موج عبوری و موج بازتاب برابر است با شدت موج تابش. این نتیجه از لحاظ فیزیکی چه معنی می‌دهد؟

۵۰۲۰ يك نور قطبیده خطی با زاویه 45° روی يك تیغه شیشه‌ای می‌تابد. برحسب اینکه میدان الکتريکی موج تابش: (الف) در صفحه تابش، (ب) عمود بر صفحه تابش باشد ضرایب بازتاب و شکست را پیدا کنید.

۶۰۲۰ يك موج الکترومغناطیسی تخت روی يك سطح تخت جداکننده دو محیط به ضرایب شکست n_1 و n_2 می‌تابد. با استفاده از معادله (25.20) ثابت کنید که در این حالت ضرایب بازتاب و شکست بترتیب برابرند با $R = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ و $T = 2n_1/(n_1 + n_2)$. توجه کنید که در این حالت ناچار نیستیم مؤلفه‌های π و σ را از هم متمایز کنیم. میدانهای الکتريکی و مغناطیسی موجهای تابش، بازتاب و شکست را براساس حالتیهای $n_1 < n_2$ و $n_1 > n_2$ رسم کنید.

۷۰۲۰ نوری در راستای عمود بريك تیغه شیشه‌ای ($n = 1.5$) می‌تابد. ضرایب بازتاب و انتقال را پیدا کنید. (ب) محاسبه را برای نوری که از شیشه وارد هوا می‌شود تکرار کنید. (ج) در تمام این حالتها در مورد تغییر فاز بحث کنید. [دانه‌یابی: از نتیجه مسئله ۶۰۲۰ استفاده کنید.]

۸۰۲۰ با مراجعه به وضع توصیف شده در مسئله ۶۰۲۰ و با استفاده از معادله (16.19) شدت موجهای بازتاب و شکست را حساب کنید و ثابت کنید که مجموع آنها برابر است با شدت موج تابش. [دانه‌یابی: توجه کنید که اکنون در معادله (16.19) باید به جای c ، سرعت در محیط، یعنی $v = c/n$ و $E = \epsilon_0 E^2$ را قرار دهیم. همچنین یادآوری می‌کنیم که $n \approx \sqrt{\epsilon_r}$ است.]

۹۰۲۰ ضریب شکست شیشه برابر است با 1.5 . زاویه‌های تابش و شکست را برای حالتی که نور بازتاب توسط یکی از رویه‌های شیشه کاملاً قطبیده می‌شود حساب کنید.

۱۰۰۲۰ زاویه بحرانی نور برای يك جسم معین 45° است. زاویه قطبش چقدر است؟

۱۱۰۲۰ (الف) خورشید باید با چه زاویه‌ای بالای افق قرار بگیرد تا نور بازتاب از سطح يك دریاچه آرام کاملاً قطبیده شود؟ (ب) صفحه بردار E در نور بازتاب کدام است؟

۱۲۰۲۰ يك موج نوری قطبیده تخت از هوا با زاویه قطبش به محیطی با ضریب شکست n می‌تابد. بردار الکتريکی موج تابش در صفحه تابش قرار دارد و دامنه نوسان برابر E_0 است. (الف) شدت موج تابش، (ب) دامنه موج شکست و (ج) شدت موج شکست را حساب کنید. حالتیهای (الف) و (ج) را با هم مقایسه کنید و نتیجه را شرح دهید.

۱۳۰۲۰ نشان دهید که برای يك موج الکترومغناطیسی هر گاه $n_2 < 1$ باشد R_{\parallel} مثبت و هر گاه $n_2 > 1$ باشد R_{\parallel} منفی است. همچنین نشان دهید که هر گاه زاویه تابش کوچکتر (یا بزرگتر) از زاویه قطبش باشد، R_{\parallel} برای $n_2 < 1$ منفی (یا مثبت) و برای $n_2 > 1$ مثبت (یا منفی) است.

۱۴.۲۰ اگر يك موج تخت كه ميدان الكتريكي آن با صفحه تابش زاویه α_i می‌سازد قطبیده باشد، نشان دهید كه زاویه‌هایی كه ميدان الكتريكي موجهای بازتاب و شكست با همین صفحه می‌سازند بترتیب برابرند با

$$\operatorname{tg} \alpha_r = \frac{T_\sigma}{T_\pi} \operatorname{tg} \alpha_i$$

$$\operatorname{tg} \alpha'_r = \frac{R_\sigma}{R_\pi} \operatorname{tg} \alpha_i$$

۱۵.۲۰ يك موج نوری تخت و قطبیده خطی از هوا ($n=1$) بر سطح آب ($n=1.33$) می‌تابد، در حالت‌های زیر دامنه‌ها و فازهای موجهای شكست و بازتاب را نسبت به دامنه و فاز موج تابش پیدا کنید.

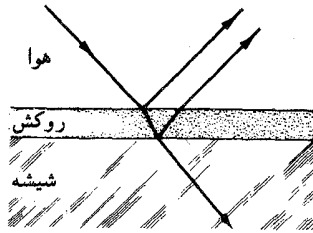
زاویه تابش	زاویه بین صفحه تابش و صفحه میدان الكتريكي
20°	0°
20°	90°
75°	0°
75°	90°

۱۶.۲۰ يك موج نوری تخت و قطبیده خطی از زیر آب ($n=1.33$) منتشر می‌شود و در سطح جدایی آب-هوا ($n=1$) شكسته می‌شود. دامنه‌ها و فازهای موجهای شكست و بازتاب را نسبت به دامنه و فاز موج تابش در حالت‌های زیر تعیین کنید

زاویه تابش	زاویه بین صفحه تابش و صفحه میدان الكتريكي
20°	0°
20°	90°
40°	0°
40°	90°

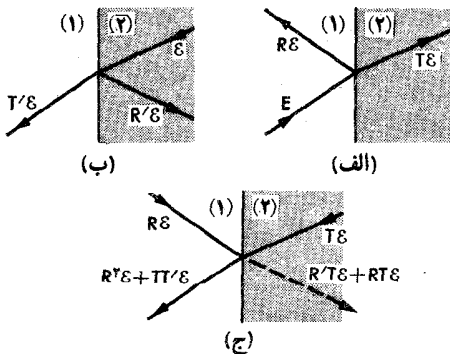
۱۷.۲۰ يك باریکه نور قطبیده دایره‌ای در هوا ($n=1$) تحت زاویه 45° روی سطح شیشه ($n=1.52$) می‌تابد. حالت قطبش باریکه نور شكست و بازتاب را بتفصیل تشریح کنید.

۱۸۰۲۵ لایه نازکی از پلاستیک (بدضریب شکست n_g) روی سطح يك تیغه شیشه‌ای (بدضریب شکست n_g) را پوشانده است (شکل ۴۵.۲۰). با نشان دادن ضریب شکست هوا با n_a ، در تابش عمودی، نشان دهید که چنانچه $n_g = \sqrt{n_a n_g}$ باشد، ضرایب بازتاب در سطح جدایی هوا-پلاستیک و پلاستیک-هوا باهم برابرند. هنگامی که زاویه تابش برابر 10° و 1352 است، نسبت ضرایب بازتاب را پیدا کنید.



شکل ۴۵.۲۰

۱۹۰۲۵ دو محیط شفاف (۱) و (۲) توسط يك سطح تخت از یکدیگر جدا شده‌اند (شکل ۴۶.۲۰). اگر R و T ضرایب بازتاب و شکست در محیط (۱) و R' و T' همین ضرایب هنگامی که پرتو تابش در محیط (۲) است باشند، نشان دهید که $R = -R'$ و $T = T'$ که علامت ضرایب بازتاب مخالف هم است و هرگاه برای یکی از ضرایب بازتاب فاز تغییر نکند، برای دیگری تغییر فازی برابر π وجود دارد. [دانهمایی: فرض کنید که پرتوهای RE و TE ، همچنانکه شکل (۴۶.۲۰ ج) نشان می‌دهد، راستایشان عوض شده است. توجه دارید که در این حالت پرتو نهایی در محیط (۱) باید E باشد در صورتی که در محیط (۲) هیچ پرتو نهایی نباید وجود داشته باشد.]



شکل ۴۶.۲۰

۲۰۰۲۰ يك پلازور و يك آنالیزور را به گونه‌ای قرار داده‌اند که بیشینه نور را انتقال

می‌دهند. اگر آنالیزور را به اندازه: (الف) 30° ، (ب) 45° ، (ج) 60° ، (د) 90° ، (ه) 120° ، (ز) 135° ، (ح) 150° و (ط) 180° بچرخانند شدت نور عبوری به چه کسری از مقدار بیشینه خود کاهش می‌یابد. برای گردش کامل آنالیزور بیشینه I/I را رسم کنید.

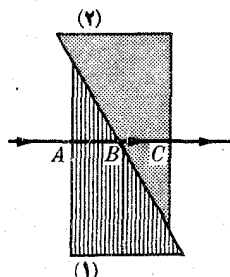
۲۱.۲۰ يك باریکه نور قطبیده خطی به طول موج $10^{-7} \times 5900 \text{ m}$ (در خلا^۱)، مطابق شکل ۲۶.۲۰، روی بلور کلسیت می‌تابد. طول موجهای عادی و غیرعادی را در بلور پیدا کنید. همچنین بسامد هر موج را تعیین کنید.

۲۲.۲۰ يك باریکه نور قطبیده تخت عمود بر يك تیغه کلسیت (که سطوح موازی آن به موازات محور اپتیکی آن بریده شده‌اند) می‌تابد و بردار الکتريکی آن با محور اپتیکی زاویه 60° می‌سازد. نسبت دامنه‌ها و شدتهای باریکه‌های پرتوهای عادی و غیر عادی را پیدا کنید.

۲۳.۲۰ برای طول موجی برابر با $10^{-7} \times 6 \text{ m}$ تیغه‌ای از کلسیت باید چه ضخامتی داشته باشد تا بین پرتوهای عادی و غیرعادی اختلاف فاز برابر (الف) $\lambda/4$ ، (ب) $\lambda/2$ و (ج) λ باشد.

۲۴.۲۰ حالت قطبش نور عبوری از يك تیغه چالک موج چگونه است؟ بردار الکتريکی نور تابش که قطبیده خطی است با محور اپتیکی زاویه 30° می‌سازد.

۲۵.۲۰ پارسنگ کن با یبینه (شکل ۴۷.۲۰) عبارت است از دو گوه از جنس کوارتز که می‌توان یکی را روی دیگری لغزاند. گوه‌ها را به گونه‌ای تراشیده‌اند که محورهای اپتیکی آنها برهم عمودند. بنا براین پرتو عادی در يك گوه پرتو غیرعادی در گوه دیگری است. نشان دهید که اختلاف فاز برای هر پرتو برابر $\delta = (2\pi/\lambda)(n_1 - n_2)(e - e')$ است. در این رابطه $e = AB$ و $e' = BC$ است. در نتیجه با لغزاندن يك گوه روی گوه دیگر می‌توان اختلاف فاز را به طور پیوسته تغییر داد.

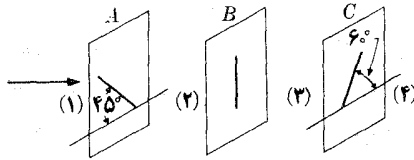


شکل ۴۷.۲۰

۲۶.۲۰ در پارسنگ کن با یبینه ضخامت یکی از گوه‌ها برابر 2 mm است. ضخامت

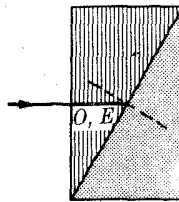
گوه دیگر را طوری پیدا کنید که اختلاف فاز در هر راستایی برابر $2\pi/3$ باشد. طول موج نور به کار رفته برابر $507 \times 10^{-7} \text{ m}$ است.

۲۷.۲۰ در شکل A ، C و ورقه‌های پلارویدی هستند که راستای انتقال موج در آنها نشان داده شده است. B يك ماده دوشكستی است که محور اپتیکی آن در راستای قسامی است. هر سه ورقه باهم موازی اند. نور ناقطبیده از طرف چپ می‌تابد، دربارهٔ حالت قطبش نور در نقطه‌های (۲)، (۳) و (۴) بحث کنید.



شکل ۴۸.۲۰

۲۸.۲۰ شکل ۴۹.۲۰ يك منشور دلاستون است که از چسباندن دو منشور از جنس کوارتز به دست آمده است. محور اپتیکی منشور سمت راست بر صفحهٔ شکل عمود است در صورتی که محور اپتیکی منشور سمت چپ با صفحهٔ شکل موازی است. نور تابش بر سطح عمود است و پرتوهای عادی و غیر عادی ایجاد می‌کند. این پرتوها در منشور سمت چپ در امتداد يك راستا ولی با سرعت‌های متفاوت منتشر می‌شوند. شکل ۴۹.۲۰ را دوباره رسم کنید و روی نمودار نشان دهید که چگونه پرتوهای عادی و غیر عادی هنگام گذر در منشور سمت راست و بعد در هوا انحراف پیدا می‌کنند.



شکل ۴۹.۲۰

۲۹.۲۰ موج توضیح داده شده در مسئلهٔ ۴.۱۹ در راستای عمود بر يك قطبی کننده می‌تابد. قطبی کننده را در صفحهٔ خود آن قدر چرخانده‌اند تا شدت نور عبوری بیشینه شود. (الف) محور انتقال قطبی کننده در چه راستایی قرار دارد؟ (ب) برای يك انتقال کمینه محور انتقال در چه راستایی باید قرار گیرد؟ (ج) نسبت شدت‌های عبوری را در حالت‌های (الف) و (ب) حساب کنید.

۳۰.۲۰ يك باریکه نور سفید قطبیدهٔ خطی عمود بر يك تیغهٔ کوارتز به ضخامت 0.865 mm

که به طور موازی با محور اپتیکی خود بریده شده است می‌تابد. میدان الکتزیکی با محور تیغه زاویه 45° می‌سازد. ضرایب شکست اصلی کوآرتز برای خط بیناب سدیم در جدول ۲۰۲۰ داده شده‌اند. از تغییر $n_1 - n_2$ بر حسب طول موج چشم می‌پوشیم. (الف) چه طول موجی بین $600 \times 10^{-7} \text{ m}$ و $700 \times 10^{-7} \text{ m}$ به طور قطبیده خطی از تیغه خارج می‌شود؟ (ب) چه طول موجی به طور قطبیده دایره‌ای خارج می‌شود؟ (ج) فرض کنید که باریکه نور خروجی از تیغه از داخل آنالیزوری می‌گذرد که محور انتقال آن بر صفحه ارتعاش نور تابش عمود است. چه طول موجهایی از این باریکه عبوری ازین رفته‌اند؟

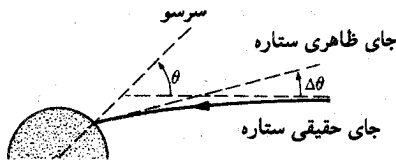
۳۱۰۲۰ يك باریکه نور، بعد از عبور از داخل منشور نیکول N_1 از يك سلول شامل محیط پراکننده می‌گذرد. از داخل منشور نیکول دیگر N_2 این سلول با زاویه قائمه دیده می‌شود. ابتدا منشورهای نیکول را به گونه‌ای قرار می‌دهند که میدانی که ناظر می‌بیند بیشینه باشد. (الف) منشور N_2 را 90° می‌چرخانیم، آیا خاموشی به وجود می‌آید؟ (ب) حال منشور N_1 را 90° می‌چرخانیم، میدانی که از طریق منشور N_2 دیده می‌شود روشن است یا تاریک؟ (ج) منشور N_2 را به وضع اولیه خود برمی‌گردانیم، آیا میدانی که از طریق N_2 دیده می‌شود روشن است یا تاریک؟

۳۲۰۲۰ آزمایش نشان می‌دهد که برای هر گرم شکر محلول در يك سانتی‌متر مکعب آب، چرخش صفحه قطبش يك موج الکترومغناطیسی قطبیده خطی 56.6° به ازای يك سانتی‌متر از مسیر است. لوله‌ای به طول 30 cm شامل 15 گرم شکر در داخل 100 سانتی‌متر مکعب آب است. زاویه چرخش نور قطبیده را پیدا کنید.

۳۳۰۲۰ اگر صفحه قطبش 39.7° بچرخد مقدار شکر محلول در آب لوله‌ای به طول 30 cm و به مقطع 2 cm^2 را پیدا کنید. [دانه‌نمایی: به مسئله پیش مراجعه کنید.]

۳۴۰۲۰ اگر دامنه يك موج الکترومغناطیسی با نفوذ در داخل مس به $1/e$ مقدار آن در سطح خارجی فلز برسد، مقدار نفوذ این موج را برآورد کنید، بسامد موج را (الف) در ناحیه میکروموجها $6 \times 10^9 \text{ Hz}$ ، (ب) در ناحیه مرئی $6 \times 10^{14} \text{ Hz}$ و (ج) در ناحیه پرتوهای x برابر $3 \times 10^{18} \text{ Hz}$ بگیرید، μ_0 را تقریباً برابر μ فرض کنید.

۳۵۰۲۰ ضریب شکست هوا برابر $n = 1 + 0.00024 \rho$ و چگالی آن (بر حسب kg m^{-3}) است. فرض کنید که θ زاویه سرسو (سمت الرأس) حقیقی و $\Delta\theta$ زاویه سرسو ظاهری يك ستاره برای ناظر زمینی است (شکل ۵۰۲۰). (الف) معادله‌ای بنویسید که $\Delta\theta$ را بر حسب زاویه سرسوی حقیقی θ ، چگالی ρ ، فشار جو p و دمای مطلق T به دست بدهد. (ب) $\Delta\theta$ را در کنار دریا برای ستاره‌ای با $\theta = 45^\circ$ حساب کنید. دما را برابر $T = 298 \text{ K}$ (یا 25° C) فرض کنید.



شکل ۵۰.۲۰

۳۶.۲۰ يك محیط لایه دار ناهمگن دارای ضریب شکست متغیر در راستای Y ، یعنی $n(y)$ است. نشان دهید که معادله مسیر يك پرتو، که در معادله (۳۲.۲۰) صدق می کند به صورت زیر است

$$x = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{n^2(y)/C^2 - 1}}$$

۳۷.۲۰ مسیر يك پرتو در يك محیط ناهمگن با $x = A \sin(Y/B)$ نشان داده شده است. در فضای بین صفحه های $x = A$ و $x = -A$ ضریب شکست n را حساب کنید. فرض کنید که n تنها تابع x است و مقدار آن در $x = 0$ برابر n_0 است.

۳۸.۲۰ ضریب شکست محیطی با $n = h + kx$ داده شده است. مسیر پرتوی را پیدا کنید که از مبدأ مختصات می گذرد و در آنجا با محور X زاویه ϕ_0 می سازد. مسیر این پرتو را برای $h = 1$ ، $k = 1$ و $\phi_0 = 45^\circ$ رسم کنید.

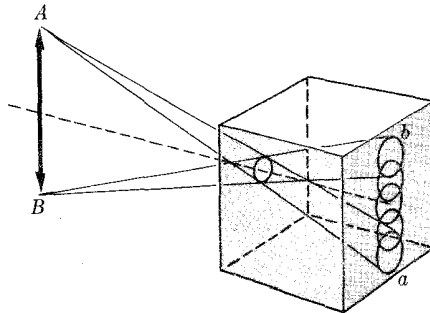
هندسه موج

- ۱۰۲۱ مقدمه
- ۲۰۲۱ بازتاب روی سطح کروی
- ۳۰۲۱ شکست در سطح کروی
- ۴۰۲۱ عدسیها
- ۵۰۲۱ اسبابهای اپتیکی
- ۶۰۲۱ منشور
- ۷۰۲۱ پاشندگی
- ۸۰۲۱ آبراهی رنگی
- ۹۰۲۱ اصل فرما

۱۰۲۱ مقدمه

در فصلهای پیش در مورد پدیده‌هایی بحث کردیم که هنگام عبور موج از محیطی به محیط دیگر رخ می‌دادند؛ سرعت انتشار موج در دو محیط متفاوت بود. در آنجا نه تنها وضعی را که برای جبهه موج پیش می‌آید تحلیل کردیم بلکه مفهوم پرتو را نیز معرفی کردیم که برای ترسیمهای هندسی بسیار سودمند است.

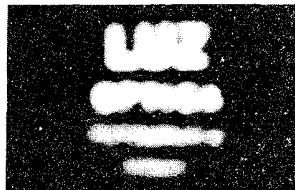
در این فصل با استفاده از مفهوم پرتو، به عنوان وسیله‌ای برای تشریح فرایندهایی که در سطحهای ناپیوسته رخ می‌دهند، می‌خواهیم پدیده‌های بازتاب و شکست را از دیدگاه هندسی به نحوی عمیقتر بررسی کنیم. همچنین در این فصل فرض می‌کنیم که این فرایندها



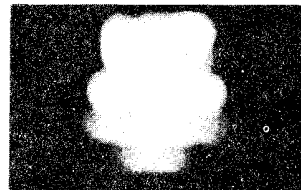
(الف)



III ۶ mm



II 1 mm



I 2 mm



VI 7 mm



V 15 mm



IV 35 mm

(ب)

شکل ۱۰۲۱ تشکیل تصویر در اتاق تاریک (جمعیه‌ای که دارای سوراخ کوچکی است). خطهای راست مسیر پرتوهاست. عکسها تغییر در کیفیت وضوح تصویرها را با کاهش قطر سوراخ نشان می‌دهند. توجه کنید که برای قطر سوراخ یک اندازه مطلوب وجود دارد که در این اندازه تصویر بسیار واضح است.

محدود به بازتاب و شکست اند و هیچگونه تغییر دیگری در سطحهای موج رخ نمی‌دهد. (پراش و پراکندگی در فصل ۲۳ بررسی خواهند شد) این شیوه بررسی موضوع رامی‌توان هندسه موج یا ترسیم پرتوها نامید. این گونه بررسی، بویژه در مورد امواج الکترومغناطیسی ناحیه نور مرئی و ناحیه‌های نزدیک به آن، شاخه خیلی مهمی از فیزیک کاربردی را تشکیل می‌دهد، که اپتیک هندسی نام دارد.

این بررسی هندسی تاجایی درست است که سطحها و ناپیوستگی‌هایی کسه موج در-جریان انتشار خود با آنها برخورد می‌کند نسبت به طول موج خیلی بزرگ باشند. تاهنگامی که این شرط پسا برجا باشد، این بررسی را می‌توان بغیر از امواج نوری، در مورد امواج صوتی (بویژه فراصوتی)، زلزله وغیره نیز به کار برد. با وجود این، بیشتر مثالهای ما درباره امواج نوری است، زیرا این دیدگاه برای امواج نوری آشنا تر و نیز خیلی مهمتر است. از این رو، این فصل را می‌توان فصلی در نظر گرفت که به اپتیک هندسی می‌پردازد.

یک مثال مشخص از کاربرد پرتوها تشکیل تصویر در اتاق تاریک است. اتاق تاریک جعبه‌ای است که دریکی از رویه‌های آن سوراخ ریزی وجود دارد. اگر جسم گسیل‌کننده موج، مانند AB ، در مقابل این اتاق قرار گیرد، پرتوهای Aa و Bb تصویری روی دیوار مقابل تشکیل می‌دهند. برای واضح بودن تصویر، سوراخ باید خیلی کوچک باشد، به گونه‌ای که تنها بخش کوچکی از جبهه موج بتواند از آن بگذرد و در نتیجه برای هر نقطه‌ای از شئی یک نقطه متناظر در تصویر وجود داشته باشد. اگر سوراخ گشاد باشد تصویری محو بدست می‌آید. زیرا بجای هر نقطه از شئی یک لکه در تصویر تشکیل می‌شود. با وجود این، سوراخ را نباید آن قدر کوچک کرد که قطر آن با طول موج قابل مقایسه باشد، زیرا در این صورت پدیده پراش رخ می‌دهد و تصویر دوباره محومی شود (در این مورد در فصل ۲۳ بحث خواهیم کرد).

۲۰۲۱ بازتاب روی سطح کروی

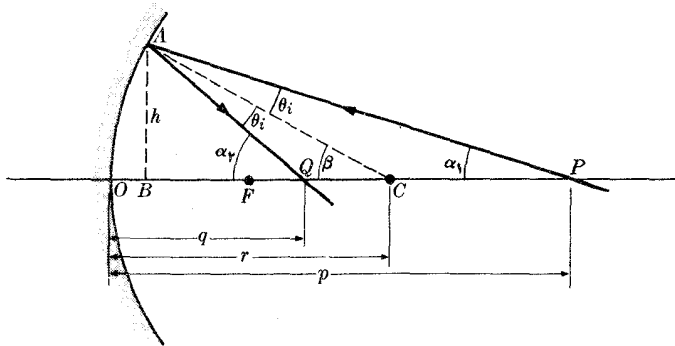
بررسی را با بازتاب امواج روی سطح کروی شروع می‌کنیم. نخست باید چند تعریف ارائه و چند علامت قراردادی وضع کنیم. مرکز انحنای C ، مرکز سطح کروی (شکل ۲۰۲۱) و رأس O قطب عرقچین کروی است. خطی را که از O و C می‌گذرد محور اصلی می‌نامند. اگر O را مبدأ مختصات انتخاب کنیم، تمام کمیت‌هایی که درست است O اندازه گیری می‌شوند مثبت و تمام کمیت‌هایی که درست چپ آن قرار دارند منفی هستند.

فرض کنید که نقطه P چشمه موج کروی است. از بازتاب پرتو PA پرتو AQ به وجود می‌آید؛ چون زاویه تابش و زاویه بازتاب برابرند، از شکل پیداست که

$$\beta = \theta_i + \alpha_1 \quad \text{و} \quad \alpha_2 = \beta + \theta_i$$

در نتیجه به دست می‌آید

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta \quad (۱۰۲۱)$$



شکل ۲۰۲۱ مسیر پرتو بازتاب روی سطح کروی.

با فرض اینکه α_1 ، α_2 و β خیلی کوچک (یعنی پرتوها تقریباً موازی محور) اند با تقریب بسیار خوبی می توان نوشت

$$\alpha_1 \approx \text{tg } \alpha_1 = \frac{AB}{BP} \approx \frac{h}{p}$$

$$\alpha_2 \approx \text{tg } \alpha_2 = \frac{AB}{BQ} \approx \frac{h}{q}$$

$$\beta \approx \text{tg } \beta = \frac{AB}{BC} \approx \frac{h}{r}$$

با قراردادن این رابطه‌ها در معادله (۱۰۲۱) و ساده کردن آن نسبت به h به دست می آید

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r} \quad (۲۰۲۱)$$

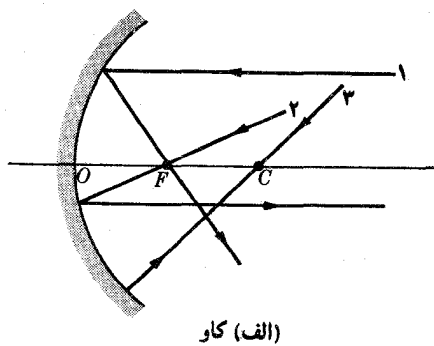
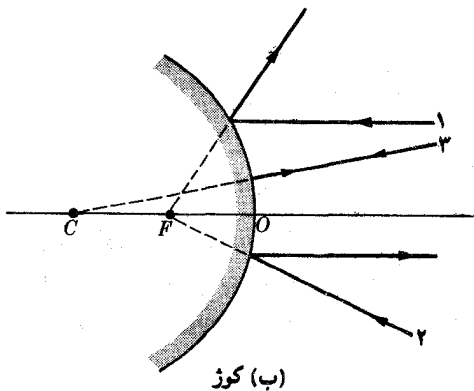
که فرمول دکارت برای بازتاب روی سطح کروی است. این رابطه، با توجه به تقریب به کار رفته در به دست آوردن آن، نشان می دهد که تمام پرتوهای تابشی که از نقطه p می گذرند پس از بازتاب روی سطح از نقطه Q عبور می کنند. در این صورت می توان گفت که Q تصویر p است.

در حالت خاصی که پرتو تابش موازی محور اصلی است، حالتی که هم ارز قراردادن شیء در فاصله خیلی دور از آینه است، داریم $p = \infty$. در این صورت معادله (۲۰۲۱) به صورت $1/q = 2/r$ در می آید و تصویر در نقطه F تشکیل می شود. فاصله F از آینه برابر است با $q = r/2$. نقطه F کانون آینه کروی نام دارد و فاصله آن از آینه را فاصله کانونی می نامند و آن را با f نشان می دهند؛ به گونه ای که $f = r/2$ است. در این صورت معادله (۲۰۲۱) را می توان به صورت زیر نوشت

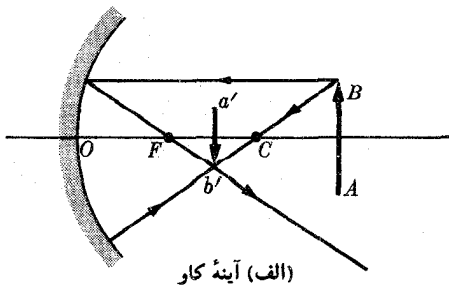
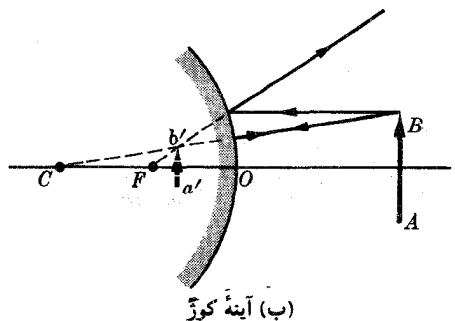
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (۳۰۲۱)$$

چون f را می توان با مشاهده نقطه تقارب پرتوهای موازی با محور اصلی از راه آزمایش به دست آورد، بنا براین لزومی ندارد جهت استفاده از معادله (۳.۲۱) شعاع r را بدانیم. توجه کنید که اگر $q = \infty$ باشد $p = f$ می شود، یعنی پرتوهای تابشی که از کانون می گذرند به موازات محور اصلی باز می تابند.

به پیروی از قرارداد علامتها، سطحهای کاو (مقعر) دارای شعاع مثبت و سطحهای کوژ (محدب) دارای شعاع منفی اند. بنا براین علامت فاصله های کانونی مناظر آنها نیز بترتیب مثبت و منفی است. شکل ۳.۲۱ پرتوهایی را که پرتوهای اصلی نامیده می شوند برای یک سطح کوژ و یک سطح کاو نشان می دهد. پرتو ۱ پرتو موازی، پرتو ۲ پرتو کانونی و پرتو ۳ پرتو مرکزی است. پرتو ۳ تابش عمودی ($\theta_i = 0$) است. در شکل ۴.۲۱ از این پرتوها برای نشان دادن طرز تشکیل تصویر در سطح کروی بازتاب کننده (صیقلی) استفاده شده است. AB شیء و $a'b'$ تصویر آن است. در شکل ۴.۲۱ الف تصویر حقیقی است (زیرا خود پرتوهای بازتاب یکدیگر را قطع می کنند) و در شکل ۴.۲۱ ب تصویر مجازی است (زیرا به نظر می رسد که پرتوها در پشت آینه یکدیگر را قطع می کنند). علامتهای قراردادی



شکل ۳.۲۱ پرتوهای اصلی در آینه کروی.



شکل ۴.۲۱ تشکیل تصویر در آینه های کروی.

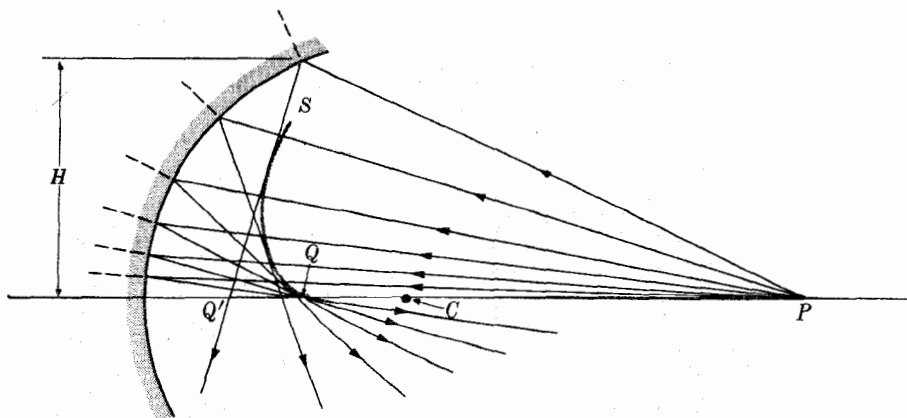
را که در این کتاب به کار رفته‌اند در جدول ۱۰۲۱ آورده‌ایم.

اگر دهانه آینه گشاد باشد، به گونه‌ای که پرتوهای با شیب زیاد نیز بتواند به آن برسند، معادله (۳.۲۱) دیگر از تقریب خوبی برخوردار نیست. در این صورت از یک شیء نقطه‌ای تصویر نقطه‌ای کاملاً معین به دست نمی‌آید، بلکه تعداد تصویرها بینهایت می‌شود؛ در نتیجه از یک جسم بزرگ تصویری محو ظاهر می‌شود. شکل ۵.۲۱ پرتوهایی که از P می‌آیند و نیز بازتاب آنها را در آینه نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که پرتوهای بازتاب همگی در یک نقطه یکدیگر را قطع نمی‌کنند، بلکه روی پاره خط QQ' در امتداد محور

جدول ۱۰۲۱ علامتهای قراردادی در آینه‌های کروی

نام	علامت	+	-
شعاع	r	کاو	کوز
کانون	f	همگرا	واگرا
شیء	p	حقیقی	مجازی
تصویر	q	حقیقی	مجازی

اصلی یکدیگر را قطع می‌کنند. این پدیده را ابیراهی کروی می‌نامند. نقطه Q که با پرتوهایی که با محور اصلی زاویه خیلی کوچکی می‌سازند متناظر است از معادله (۳.۲۲) تعیین می‌شود. Q' با پرتوهایی متناظر است که زاویه آنها با محور بیشینه است. همچنین پرتوهای



شکل ۵.۲۱ ابیراهی کروی در آینه کاو.

بازتاب نیز یکدیگر را روی يك سطح مخروطی قطع می کنند که در شکل با منحنی خط درشت QS نشان داده شده است و آن را سطح سوزان بازتاب می نامند.

ایراهی کروی را نمی توان از بین برد، ولی با طرح يك سطح ویژه می توان آنرا در بعضی جاها، که آن را غیرآستیگمات می نامند حذف کرد. برای يك شیء نقطه ای در مرکز آینه کروی، تصویر دقیقاً يك نقطه است (که آن نیز در مرکز قرار دارد) و ایراهی کروی دیده نمی شود. بنا براین مرکز آینه کروی جای غیرآستیگمات است. با تغییر شکل سطح می توان جاهای غیر آستیگمات را اصلاح کرد. به عنوان مثال، بنا به خواص سهمی، در آینه ای به شکل سهمی، برای پرتوهای موازی محور اصلی، ایراهی به وجود نمی آید. این پرتوها همگی باید از کانون سهمی بگذرند. به همین دلیل است که آینه های سهمی شکل نه تنها در دوربینها برای ناحیه مرئی بیناب پرتوهای الکترومغناطیسی، بلکه همچنین برای ناحیه بسامدهای رادیویی نیز، در رادیو تلسکوپها، به کار می روند (شکل ۶.۲۱).

رادیو تلسکوپ عبارت است از آینه سهمی شکلی که از توری فلزی ساخته شده است. يك آنتن دو قطبی گیرنده در کانون آینه قرار دارد. علایم دریافتی از آنتن، که با امواج الکترومغناطیسی منتشر شده در راستای موازی با محور آینه متناظرند، جهت تحلیل به آزمایشگاه فرستاده می شوند. به همین طریق يك آینه بیضیوار برای شیشی که در یکی از کانونهایش قرار دارد و تصویر آن درست در کانون دیگر تشکیل می شود غیر آستیگمات است. علاوه بر ایراهی کروی، نقصهای دیگری نیز در تصویرهای حاصل از بازتاب یا شکست در سطوح کروی مشاهده می شود. با وجود این در اینجا از این نقایص سخن به میان نمی آوریم زیرا این مطلب به شاخه های تخصصی تر اپتیک مربوط می شود.

مثال ۱۰۲۱ درباره تشکیل تصویر توسط آینه دهانه گشاد بحث کنید.

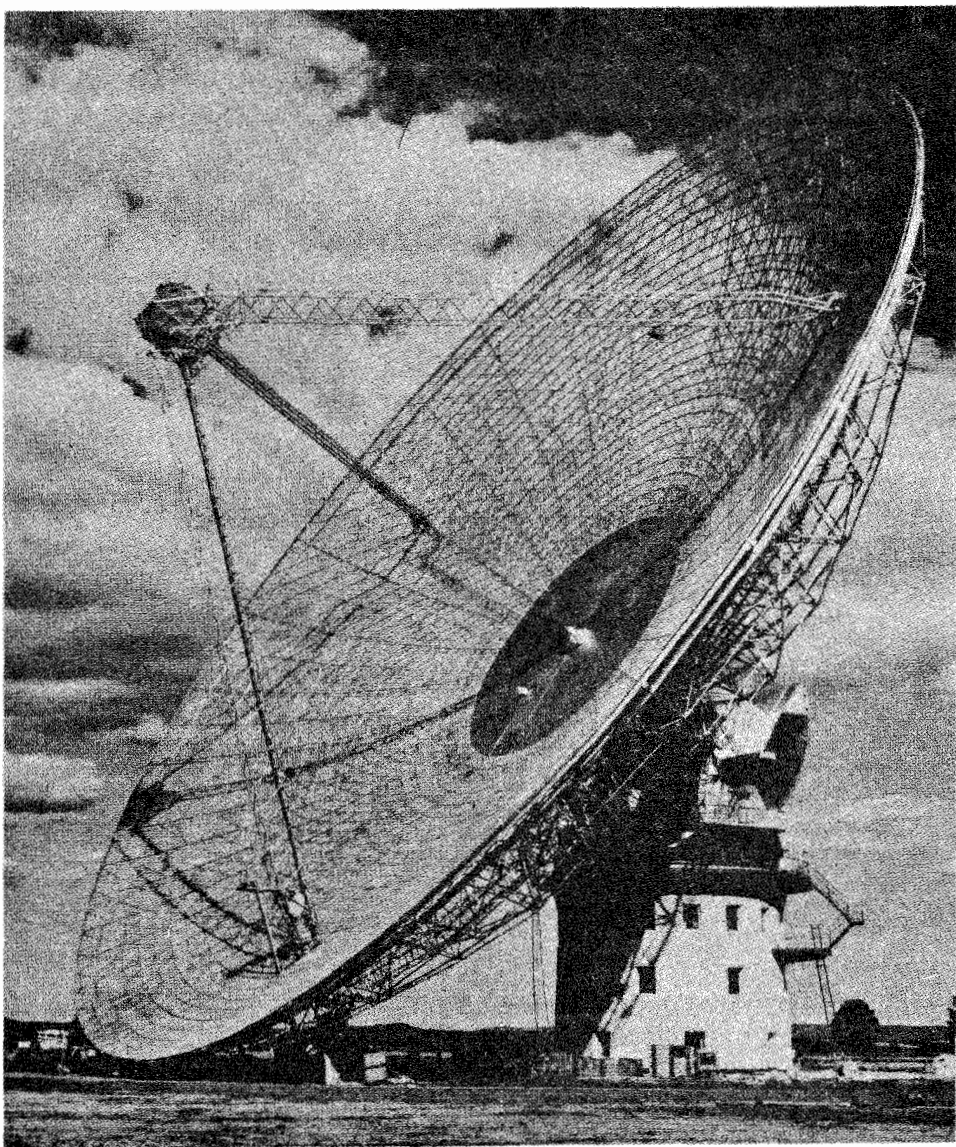
حل: اگر دهانه يك آینه کروی به قدری گشاد باشد که بتواند پرتوهای خیلی مایل را دریافت کند، تقریب به کار رفته در معادله (۲.۲۱) دیگر اعتبار خود را از دست می دهد؛ زیرا در این صورت قرار دادن α به جای $\text{tg } \alpha$ دیگر تقریب درستی نخواهد بود. از طرف دیگر، به دست آوردن رابطه ای دقیقتر از رابطه (۲.۲۱) نیز چندان دشوار نیست. اگر کانون سینوسها را در مثلثهای ACP و ACQ (شکل ۲.۲۱) به کار ببریم، به دست می آید

$$\frac{CP}{AP} = \frac{\sin \theta_i}{\sin(\pi - \beta)} \quad \text{و} \quad \frac{QC}{AQ} = \frac{\sin \theta_r}{\sin \beta}$$

چون $\sin \beta = \sin(\pi - \beta)$ است، بنابراین داریم

$$\frac{CP}{AP} = \frac{QC}{AQ} \quad \text{یا} \quad \frac{p-r}{AP} = \frac{r-q}{AQ}$$

که آن را می توان به صورت زیر نوشت



شکل ۶.۲۱ رادیو تلسکوپ بازتابی پارکیز نیوساؤت والز، استرالیا. قطر آینه 64m است. آینه را می توان دور محور قائمی چرخاند و همچنین زاویه سرسو (سمت الرأس) آن را تغییر داد، به گونه ای که بتواند بخش بزرگی از آسمان قابل رؤیت را زیر پوشش خود بگیرد. تلسکوپ دارای حداکثر دقت روی تابش هیدروژن به طول موج 21cm است، ولی در عین حال برای طول موجهای چند سانتی متری نیز حساس است. استقرار آن در 350 کیلومتری سیدنی به خاطر این است که تداخل الکتریکی کمینه باشد.

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right) \frac{p}{AP} = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) \frac{q}{AQ} \quad (۴.۲۱)$$

اگر α_1 و α_2 خیلی کوچک باشند، می توان از تقریب $p = AP$ و $q = AQ$ استفاده کرد و معادله (۴.۲۱) را از نو به دست آورد. در ادامه بحث، از مثلث ACP می توان نوشت

$$\begin{aligned} AP^2 &= r^2 + (p-r)^2 + 2r(p-r) \cos \beta \\ &= p^2 - 2r(p-r)(1 - \cos \beta) \\ &= p^2 - 2r(p-r) \sin^2 \frac{1}{2}\beta \\ &= p^2 \left[1 - 2\frac{r}{p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right) \sin^2 \frac{1}{2}\beta \right] \\ &\approx p^2 \left[1 - \frac{h^2}{p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right) \right] \end{aligned}$$

در سطر آخر از تقریب $\sin(\beta/2) \approx \beta/2 \approx h/2r$ بهره جسته ایم. در چنین شرایطی داریم

$$\frac{p}{AP} = \left[1 - \frac{h^2}{p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right) \right]^{-1/2} = 1 + \frac{h^2}{2p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right) \quad (۵.۲۱)$$

در این رابطه، با توجه به معادله (ب.۲۸)، تقریب $(1-x)^{-1/2} = 1 + x/2$ را به کار برده ایم. با همین شیوه، از مثلث AQC داریم

$$\frac{q}{AQ} = 1 + \frac{h^2}{2q} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right) \quad (۶.۲۱)$$

با قراردادن این مقادیر در معادله (۴.۲۱) به دست می آید

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right) \left[1 + \frac{h^2}{2p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right) \right] = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) \left[1 + \frac{h^2}{2q} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right) \right]$$

با انجام عملهای ضرب و گروه بندی جمله های مشابه داریم

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r} + \frac{h^2}{2} \left[\frac{1}{p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2 + \frac{1}{q} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)^2 \right]$$

چون جمله دوم سمت راست يك جمله تصحیحی است، می توان با استفاده از معادله (۲.۲۱) q را در این جمله حذف کرد، در نتیجه به دست می آید

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r} + \frac{h^2}{r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2 \quad (۷.۲۱)$$

فاصله h را شیب پرتوها تعیین می‌کند و با بزرگ شدن h ، کوچکتر می‌شود. در نتیجه، تمام پرتوهایی که از نقطه‌ای مساند P روی محور اصلی خارج می‌شوند (شکل ۵.۲۱) دیگر یکدیگر را در یک نقطه قطع نمی‌کنند، بلکه چنانکه قبلاً گفتیم، محل تقاطع آنها باره خط QQ' است. نقطه Q از معادله (۲.۲۱) یا با قرار دادن $h=0$ در معادله (۷.۲۱) به دست می‌آید. نقطه Q' از قرار دادن $h=H$ به دست می‌آید. شعاع دایره دهانه سطح کروی است.

مثال ۲.۲۱ رابطه‌ای برای بزرگنمایی حاصل از آینه کروی به دست آورید.

حل: M بزرگنمایی یک دستگاه اپتیکی برابر است با نسبت اندازه تصویر به اندازه شیء، یعنی، $M = ab/AB$. بر حسب اینکه تصویر نسبت به شیء مستقیم یا وارون باشد بزرگنمایی مثبت یا منفی است. از شکل ۷.۲۱ پیداست که

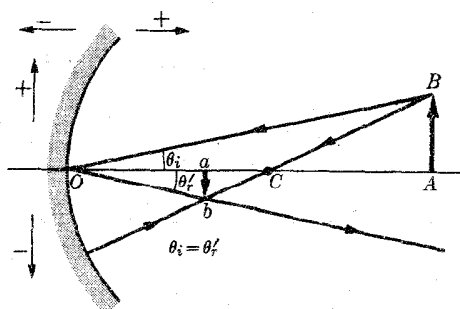
$$\operatorname{tg} \theta_i = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{p}$$

$$\operatorname{tg} \theta_r = -\frac{ab}{Oa} = -\frac{ab}{q}$$

علامت منفی دال بر منفی بودن ab است، زیرا تصویر وارون است. از این رو با در نظر گرفتن اینکه $\theta_i = \theta_r'$ است، داریم

$$M = -\frac{q}{p} \quad (۸.۲۱)$$

مثال ۳.۲۱ شعاع آینه کروی برابر 600 m است. شیئی به فاصله 1000 m در مقابل آینه قرار دارد. جای نزدیکترین و دورترین تصویر حاصل از این شیء توسط آینه را پیدا



شکل ۷.۲۱ محاسبه بزرگنمایی آینه کروی.

کنید. می‌دانیم که دهانه آینه ۲۰° است.

حل: در این حالت داریم $r = +۰۰۶۰۰\text{ m}$ و $p = +۱۰۰۰۰\text{ m}$. بنابراین از معادله (۲۰۲۱)، برای پرتوهای تقریباً در راستای محور، داریم

$$\frac{1}{۱۰۰۰۰} + \frac{1}{q} = \frac{2}{۰۰۶۰۰} \quad \text{یا} \quad q = +۰۰۴۲۹\text{ m}$$

پرتوهای با میل بیشینه تصویری تولید می‌کنند که جای آن از قرار دادن $h = r \sin \beta$ در معادله (۲۰۲۱) به دست می‌آید، بنابراین

$$h^2 = ۰۰۵۱۱ \quad \text{و} \quad h = ۰۰۶۰۰ \sin ۱۰^\circ = ۰۰۱۰۴\text{ m}$$

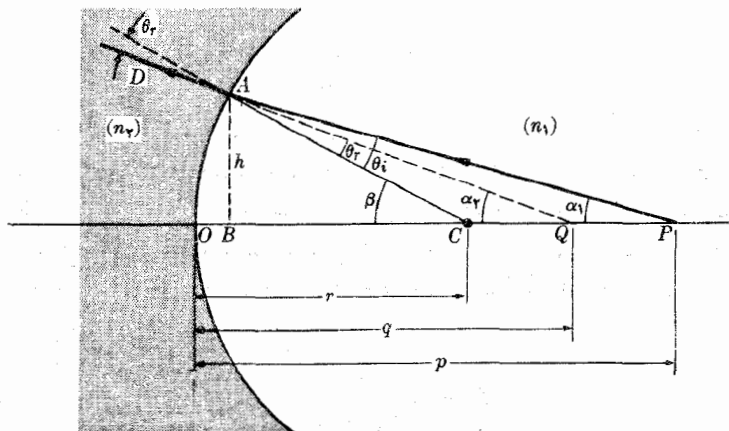
می‌شود. در چنین شرایطی داریم

$$\frac{1}{۱۰۰۰۰} + \frac{1}{q} = \frac{2}{۰۰۶۰۰} + \frac{۰۰۵۱۱}{۰۰۶۰۰} \left(\frac{1}{۰۰۶۰۰} - \frac{1}{۱۰۰۰۰} \right)^2$$

از اینجا $q = +۰۰۴۲۷\text{ m}$ به دست می‌آید. بنابراین تصویر روی محور اصلی خط کوچکی به طول نزدیک به $۲\text{ mm} = ۰۰۰۰۲\text{ m}$ را اشغال می‌کند.

۳.۲۱ شکست در سطح کروی

اکنون شکست را در سطح کروی جداکنندهٔ دو محیط، با ضرایب شکست مطلق n_1 و n_2 بررسی می‌کنیم (شکل ۸۰۲۱). اجزای هندسی اصلی همانهایی اند که در بخش پیش تعریف کردیم. پرتو تابشی مسانند PA ، در راستای AD می‌شکند و امتداد محور اصلی درست



شکل ۸۰۲۱ مسیر پرتو شکست در سطح کروی.

عقب را در نقطه Q قطع می کند. از شکل پیداست که $\beta = \theta_i + \alpha_1$ و $\beta = \theta_r + \alpha_2$. ولی بنا به قانون اسنل $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r$ است. مانند بخش پیش، فرض می کنیم که شیب پرتوها خیلی کم است. در این شرایط زاویه های θ_i ، θ_r ، α_1 ، α_2 ، β بسیار کوچک اند و می توان نوشت $\sin \theta_i \approx \theta_i$ و $\sin \theta_r \approx \theta_r$ ؛ بنا بر این قانون اسنل به صورت $n_1 \theta_i = n_2 \theta_r$ یا

$$n_1(\beta - \alpha_1) = n_2(\beta - \alpha_2) \quad (9.21)$$

درمی آید. ولی با توجه به شکل ۸.۲۱، مانند حالت بازتاب داریم

$$\alpha_1 \approx \frac{h}{p}, \quad \alpha_2 \approx \frac{h}{q}, \quad \beta \approx \frac{h}{r}$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله (۹.۲۱) و بعد از حذف سازه های مشترک و مرتب کردن مجدد جملات به دست می آید

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{r} \quad (10.21)$$

رابطه (۱۰.۲۱) فرمول دکارت برای شکست دسطح کروی است.

کانون شیئی F_o ، که اولین کانون يك سطح کروی شکستار نیز نامیده می شود، عبارت است از محل يك شیء نقطه ای روی محور اصلی، به گونه ای که پرتوها پس از عبور از آن به موازات محور اصلی شکسته می شوند و تصویر آن نقطه در بینهایت، یا $q = \infty$ ، تشکیل می شود. فاصله شیء تا سطح کروی را فاصله کانونی شیئی می نامند و با f_o نشان می دهند. از قرار دادن $p = f_o$ و $q = \infty$ در معادله (۱۰.۲۱) داریم $n_1/f_o = (n_1 - n_2)/r$ یا

$$f_o = \frac{n_1}{n_1 - n_2} r \quad (11.21)$$

همچنین اگر پرتوهای تابش موازی محور اصلی باشند، یعنی شیء در فاصله خیلی دوری از سطح کروی ($p = \infty$) باشد، پرتوهای شکست از نقطه ای مانند F_i ، روی محور اصلی می گذرند که کانون تصویر یا دومین کانون نامیده می شود. در این حالت فاصله تصویر از سطح کروی را فاصله کانونی تصویر می نامند و آن را با علامت f_i نشان می دهند. از قرار دادن $p = \infty$ و $q = f_i$ در معادله (۱۰.۲۱) به دست می آید $-n_2/f_i = (n_1 - n_2)/r$ و یا

$$f_i = -\frac{n_2}{n_1 - n_2} r \quad (12.21)$$

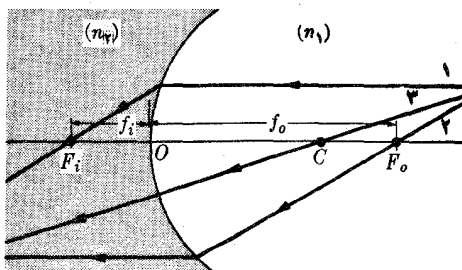
توجه کنید که $f_o + f_i = r$ است. از ترکیب معادله (۱۰.۲۱) با معادله (۱۱.۲۱) یا

معادله (۱۲.۲۱) می توان نوشت

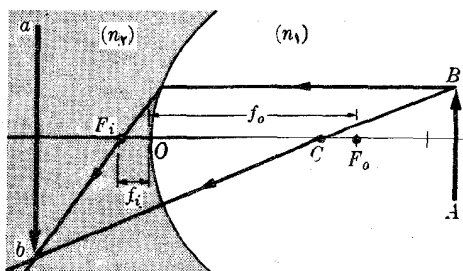
$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1}{f_o} \quad \left(\text{یا} \quad -\frac{n_2}{f_i} \right)$$

که رابطه بسیار مفیدی است. شکل ۹.۲۱ ترسیم پرتوهای اصلی را درحالتی که $r > 0$ و $n_1 > n_2$ است، نشان می دهد. رسم تصویر يك شیء در همین شرایط در شکل ۱۰.۲۱ نمایش داده شده است. دانشجو می تواند شکل های مشابهی برای حالت های دیگر، یعنی حالت های $r > 0$ یا $n_1 < n_2$ و $r < 0$ یا $n_1 \leq n_2$ رسم کند. هنگامی که f_o مثبت باشد دستگاه را همگرا، و درحالتی که f_o منفی است آن را واگرا می نامند. علامتهای قراردادی به کار رفته در این کتاب در جدول ۲.۲۱ گردآوری شده اند.

همچنین معادله (۱۰.۲۱) نشان می دهد که از يك شیء نقطه ای تنها يك تصویر نقطه ای به دست می آید. این امر فقط موقعی پذیرفتنی است که دهانه سطح کروی کوچک باقی بماند و تنها پرتوهای با شیب کم بتوانند از آن بگذرند، به گونه ای که تقریبات پیشگفته اعتبار خود را از دست ندهند. برای سطح های کروی شکستار و با دهانه گشاد وضع همان است که در شکل ۵.۲۱ برای آینه های کروی پیش آمد و همان ابیراهی کروی که قبلاً در مورد آینه های کروی درباره آن گفتگو داشتیم مجدداً به وجود می آید.



شکل ۹.۲۱ پرتوهای اصلی در سطح کروی.



شکل ۱۰.۲۱ تشکیل تصویر بر اثر شکست در سطح کروی.

جدول ۲۰۲۱ علامتهای قراردادی در سطح
کروی شکستار

-	+	
کوژ	کاو	شعاع r
واگرا	همگرا	کانون f_0
مجازی	حقیقی	شیء p
حقیقی	مجازی	تصویر q

مثال ۲۰۲۱ درباره تشکیل تصویر توسط سطح کروی شکستار دهانه گشاد بحث کنید.

حل: روش بررسی این حالت خیلی شبیه به روشی است که در مثال ۱۰۲۱ در مورد آینه به کار بردیم. از مثلثهای ACP و ACQ (شکل ۸۰۲۱) می توان رابطه های زیر را نوشت

$$\frac{CP}{AP} = \frac{\sin \theta_i}{\sin(\pi - \beta)}, \quad \frac{CQ}{AQ} = \frac{\sin \theta_r}{\sin(\pi - \beta)}$$

ازحل رابطه های بالا نسبت به $\sin \theta_r$ و $\sin \theta_i$ و با قرار دادن مقادیر آنها در قانون اسنل، نتیجه می شود

$$n_1 \frac{CP}{AP} = n_2 \frac{CQ}{AQ} \quad \text{یا} \quad n_1 \frac{p-r}{AP} = n_2 \frac{q-r}{AQ}$$

این رابطه ها را می توان بد صورت زیر نوشت

$$n_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \frac{p}{AP} = n_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) \frac{q}{AQ} \quad (۱۳۰۲۱)$$

که می شود با معادله (۲۰۲۱) مقایسه کرد. اگر α_1 و α_2 خیلی کوچک باشند، می توان تقریب $p = AP$ و $q = AQ$ را به کار برد، بدین طریق معادله (۱۰۰۲۱) مجدداً به دست می آید. جهت بررسی عمیق تر، معادله های (۵۰۲۱) و (۶۰۲۱) را با تقریب مرتبه بالاتر به کار می بریم. در این صورت داریم

$$n_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \left[1 + \frac{h^2}{2p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \right] = n_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) \left[1 + \frac{h^2}{2q} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) \right]$$

با انجام عملهای ضرب و گروه بندی جمله های مشابه به دست می آید

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{r} + \frac{h^2}{2} \left[\frac{n_1}{p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2 - \frac{n_2}{q} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right)^2 \right]$$

با استفاده از معادله (۱۰.۲۱) جهت حذف q در آخرین جمله تصحیحی، بالاخره به دست می‌آید

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{r} + \frac{h^2}{2} \frac{n_1 - n_2}{n_2^2} \left[\frac{n_1^2}{r} - \frac{n_1(n_1 + n_2)}{p} \right] \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2 \quad (۱۴.۲۱)$$

مانند آینهٔ کروی، مکان تصویر به مقدار h یا به شیب پرتو تابش بستگی دارد. در نتیجه تصویر یک نقطه، دیگر نقطه نیست، بلکه خطی است روی محور اصلی.

مثال ۵.۲۱ رابطهٔ بزرگنمایی حاصل از یک سطح کروی شکستار را به دست آورید.

حل: این مسئله همانند مثال ۲.۲۱ است. در شرایط شکل ۱۱.۲۱، که در آن AB شیء و ab تصویر (مجازی) آن است. داریم $M = ab/AB$ و همچنین

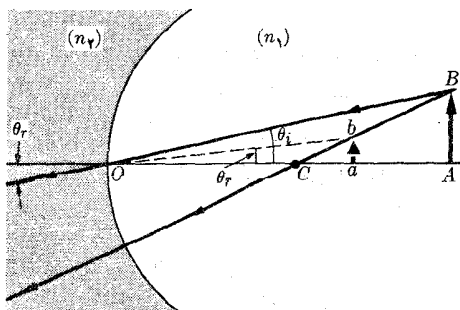
$$\operatorname{tg} \theta_i = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{p}, \quad \operatorname{tg} \theta_r = \frac{ab}{Oa} = \frac{ab}{q}$$

در نتیجه به دست می‌آید

$$M = \frac{q \operatorname{tg} \theta_r}{p \operatorname{tg} \theta_i} \approx \frac{q \sin \theta_r}{p \sin \theta_i}$$

که در آن آخرین تقریب صادق نیست مگر اینکه زاویه‌ها آنقدر کوچک باشند که بتوان سینوس و تانژانت را به‌جای هم قرار داد. در این صورت با استفاده از قانون اسنل، داریم $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r$

$$M = \frac{n_1 q}{n_2 p}$$



شکل ۱۱.۲۱ بزرگنمایی بر اثر شکست.

مثال ۶.۲۱ يك سطح كاو به شعاع $m ۵۰$ محيطی بسا ضريب شكست ۱.۲۵ را از محيطی ديگر به ضريب شكست ۱.۶۰ جدا می کند. شئ در محيط اول به فاصله $m ۸۰$ از سطح قرار دارد. فاصله کانونی، جای تصوير و بزرگنمایی را حساب کنید.

حل: در این حالت داریم $r = ۵۰ m$ ، $n_1 = ۱.۲۵$ و $n_2 = ۱.۶۰$. بنابراین، با به کار بردن معادله های (۱۱.۲۱) و (۱۲.۲۱) به دست می آید

$$f_o = \frac{n_1 r}{n_1 - n_2} = -۱۵۰ m, \quad f_i = -\frac{n_2 r}{n_1 - n_2} = +۲۰۰ m$$

بنابراین دستگاه واگراست. از معادله (۱۵.۲۱) داریم

$$\frac{۱.۲۵}{۵۰} - \frac{۱.۶۰}{q} = \frac{۱.۲۵ - ۱.۶۰}{۵۰} \quad \text{یا} \quad q = +۰.۶۹ m$$

علامت مثبت نشان می دهد که تصوير مجازی است. برای محاسبه بزرگنمایی از نتیجه مثال ۵.۲۱ استفاده می کنیم، به دست می آید

$$M = \frac{۱.۲۵ \times ۰.۶۹}{۱.۶۰ \times ۰.۸۰} = ۰.۶۵$$

چون M مثبت است، تصوير مستقیم، یعنی در راستای شئ است.

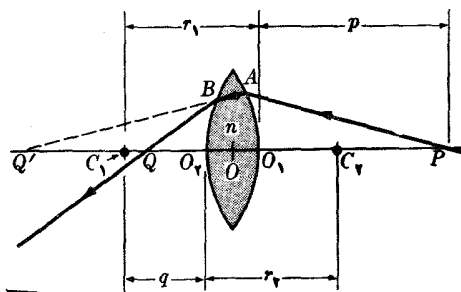
۴.۲۱ عدسیها

عدسی محیط شفاف است که به دو سطح منحنی (معمولاً کروی) محدود می شود، هر چند ممکن است یکی از این دو سطح تخت باشد. بنابراین موج تابش در گذر از عدسی دوشکست متحمل می شود. برای سهولت، فرض کنید که محیط دو طرف عدسی یکسان و ضريب شكست آن برابر يك (به عنوان مثال هوا) ولی ضريب شكست عدسی n است. همچنین تنها عدسیهای نازک را در نظر می گیریم، یعنی ضخامت عدسی در مقابل شعاع انحنایش خیلی کوچک است.

در این صورت محور اصلی خطی است که از اتصال دو مرکز C_1 و C_2 به دست می آید (شکل ۱۲.۲۱). فرض کنید که پرتو تابش PA از نقطه P می گذرد. این پرتو در سطح اول در امتداد پرتو AB می شکند. اگر پرتو AB را امتداد دهیم از نقطه Q' می گذرد. بنابراین Q' تصویری است که سطح اول از P تشکیل می دهد. q' فاصله Q' از O_1 از معادله (۱۵.۲۱)، یعنی

$$\frac{1}{p} - \frac{n}{q'} = \frac{1-n}{r_1} \quad (۱۵.۲۱)$$

به دست می آید. در نقطه B پرتو برای بار دوم می شکند و به صورت پرتو BQ در می آید.



شکل ۱۲.۲۱ مسیر پرتوها در داخل عدسی نازک.

در این صورت می توان گفت که Q تصویر نهایی P به وسیله دستگاه دو سطح تشکیل دهنده عدسی است. ولی اگر شکست را در نقطه B در نظر بگیریم، شیء Q' (مجازی) و Q تصویر آن است، که در فاصله q از عدسی تشکیل شده است. در این صورت، با استفاده مجدد از معادله (۱۵.۱۲) و با قرار دادن q' به جای p به دست می آید

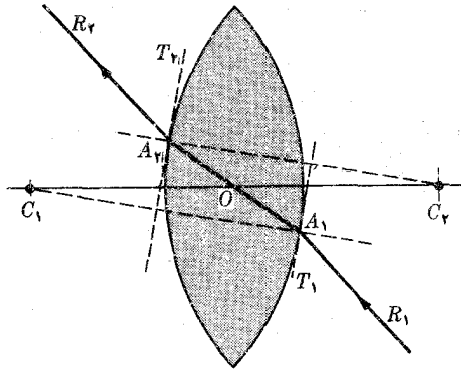
$$\frac{n}{q'} - \frac{1}{q} = \frac{n-1}{r_2} \quad (۱۶.۲۱)$$

توجه کنید که جای ضرایب شکست عوض شده است زیرا پرتو از عدسی وارد هوا می شود. به گفته دقیقتر، فاصله هایی که در معادله (۱۵.۲۱) و (۱۶.۲۱) ظاهر می شوند، باید بر حسب مورد از O_1 یا از O_2 اندازه گیری شوند، به گونه ای که در معادله (۱۶.۲۱) به جای q' باید نوشت $q' + t$ ، که در آن $t = O_1 O_2$ ضخامت عدسی است. چون عدسی خیلی نازک است، می توان از t چشم پوشید، این امر بدین معنی است که تمام فاصله ها از یک مبدأ مشترک مسانند O ، اندازه گیری می شوند. از ترکیب معادله های (۱۵.۲۱) و (۱۶.۲۱) برای حذف q' داریم

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = (n-1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (۱۷.۲۱)$$

این رابطه فرمول دکارت برای عدسیهای نازک است.

نقطه O ، در شکل ۱۲.۲۱، به گونه ای انتخاب می شود که بر مرکز اپتیکی عدسی منطبق شود. مرکز اپتیکی نقطه ای است که هر پرتوی که از آن بگذرد در راستای موازی با پرتو تابش خارج می شود. برای اینکه نشان دهیم که چنین نقطه ای وجود دارد، در شکل ۱۳.۲۱ دو شعاع موازی $C_2 A_1$ و $C_2 A_2$ را در نظر می گیریم. T_1 و T_2 صفحه های مماس بر آنها نیز موازی اند. برای پرتو $R_1 A_1$ ، که راستای آن به گونه ای است که در امتداد $A_1 A_2$ می شکند، پرتو خروجی $A_2 R_2$ موازی با $A_1 R_1$ است. مثلثهای $C_2 A_1 O$ و $C_2 A_2 O$ متشابه اند، جای نقطه O به گونه ای است که داریم



شکل ۱۳۰۲۱ مرکز اپتیکی عدسی.

$$\frac{C_1O}{OC_2} = \frac{C_1A_1}{A_2C_2} = -\frac{r_1}{r_2}$$

بنا بر این معلوم می شود جای این نقطه به پرتو خاصی بستگی ندارد. در نتیجه تمام پرتوهای تابشی که پرتوهای شکست آنها از نقطه O ، در داخل عدسی، می گذرند، بدون انحراف زاویه ای خارج می شوند.

مانند سطح شکستار ساده، کانون شیئی F_o (یا کانون اول) عدسی عبارت است از جای شیئی که پرتوهای آن پس از عبور از داخل عدسی در راستای موازی بامحور اپتیکی ($q = \infty$) خارج می شوند. فاصله عدسی تا F_o را فاصله کانونی شیئی می نامند و با f نشان می دهند. در این صورت با قراردادن $p = f$ و $q = \infty$ در معادله (۱۷۰۲۱) فاصله کانونی شیئی به صورت رابطه زیر در می آید

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (18.21)$$

که آن را گاهی معادله عدسی می نامند. از ترکیب معادله (۱۷۰۲۱) و (۱۸۰۲۱) به دست می آید

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (19.21)$$

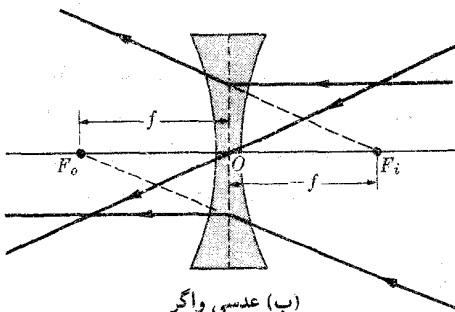
این معادله این برتری را دارد که اگر f را از راه آزمایش به دست آوریم، می توانیم از عدسی استفاده کنیم، بدون اینکه ضریب شکست یا شعاع انحنای آن را بدانیم.

برای پرتو تابش موازی با محور اصلی ($p = \infty$) پرتو خروجی از نقطه F_i می گذرد، که در آن $q = -f$ است و آن را کانون تصویر یا کانون دوم می نامند. بنابراین در یک عدسی نازک، دو کانون، به طور متقارن در دو طرف عدسی قرار دارند. اگر

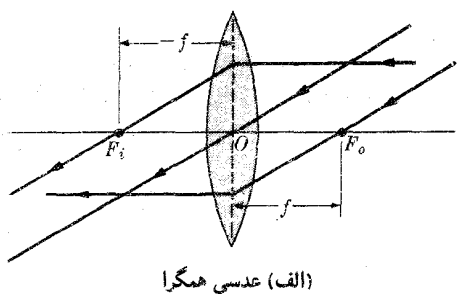
f مثبت باشد عدسی را همگرا و اگر منفی باشد عدسی را واگرا می نامند. علامتهای قراردادی همان است که در جدول ۲۰۲۱ برای سطح کروی آورده ایم.

برای رسم پرتوها، عدسی نازک را می توان به صورت صفحه ای عمود بر محور اپتیکی که از نقطه O می گذرد نشان داد. در شکل ۱۴۰۲۱ پرتوهای اصلی برای يك عدسی همگرا و نیز يك عدسی واگرا رسم شده اند. در شکل ۱۵۰۲۱ از این پرتوها برای رسم تصویر يك شیء در هر دو حالت استفاده شده است.

باز هم این نظریه تا جایی صحت دارد که شیب پرتوها کم باشد، به گونه ای که بتوان از ابیراهی کروی چشم پوشید. برای عدسیهای ضخیم (با قطر بزرگتر) تصویر يك نقطه، نقطه نیست، بلکه پاره خطی از محور اپتیکی است. بویژه پرتوهای تابش موازی با محور اپتیکی، بر حسب فاصله شان از این محور، همدیگر را در نقاط متفاوت قطع می کنند. در این صورت ابیراهی کروی با $f - f'$ ، اختلاف فاصله کانونی پرتوهای کناری و محوری اندازه گیری می شود (شکل ۱۶۰۲۱). پرتوهای شکست یکدیگر را روی يك سطح مخروطی

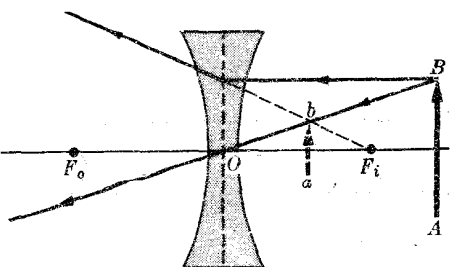


(ب) عدسی واگرا

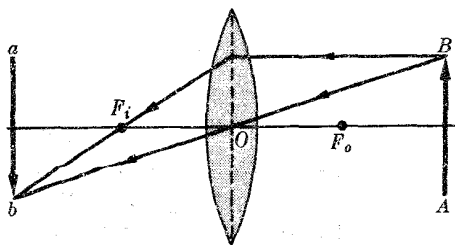


(الف) عدسی همگرا

شکل ۱۴۰۲۱ پرتوهای اصلی در عدسی.

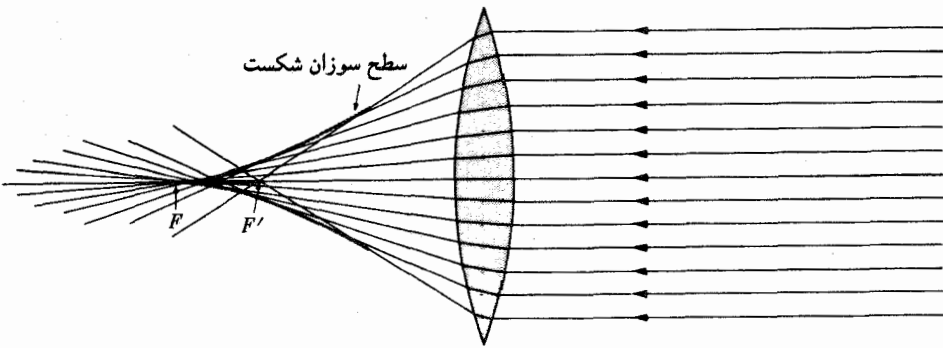


(ب) عدسی واگرا



(الف) عدسی همگرا

شکل ۱۵۰۲۱ رسم تصویر در عدسی.



شکل ۱۶.۲۱ ابیراهی کروی در عدسی.

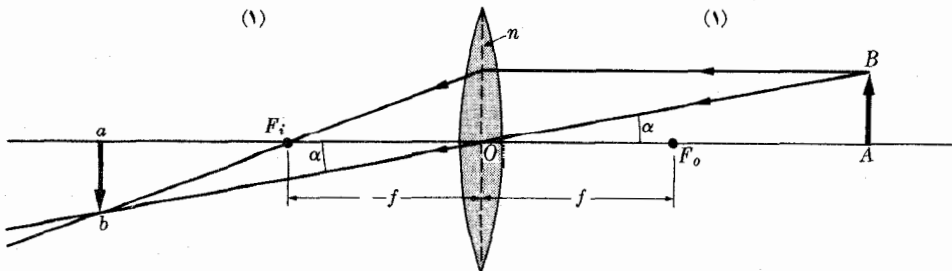
به نام سطح سوزان شکست قطع می کنند.

مثال ۷.۲۱ رابطه ای برای بزرگنمایی عدسی به دست آورید.

حل: مانند پیش، بزرگنمایی با رابطه $M = ab/AB$ تعریف می شود. ولی بنا به شکل ۱۷.۲۱، اگر O مرکز اپتیکی عدسی باشد، داریم $\text{tg } \alpha = AB/OA$ و $\text{tg } \alpha = ab/Oa$. هر دو رابطه از نظر جبری، یعنی از لحاظ بزرگی و علامت، درست اند. بنا بر این به دست می آید $ab/AB = Oa/OA$ یا

$$M = \frac{q}{p}$$

این رابطه را می توانستیم با به کار بستن نتیجه مثال ۵.۲۱ مربوط به يك سطح کروی شکستار به دست آوریم. زیرا بنا به شکل ۱۲.۲۱، بزرگنمایی حاصل از شکست روی سطح اول برابر است با $M_1 = q'/np$ ، در صورتی که بزرگنمایی حاصل از شکست روی سطح دوم برابر $M_2 = nq/q'$ است، در نتیجه بزرگنمایی کل برابر می شود با



شکل ۱۷.۲۱ بزرگنمایی عدسی.

$$M = M_1 M_2 = \frac{q'}{np} \times \frac{nq}{q'p} = \frac{q}{p}$$

مثال ۸۰۲۱ يك عدسی كروی دارای دو سطح كوژ به شعاعهای m ۰۸۵ و m ۱۲۰ و ضریب شکست $n = ۱.۵۰$ است. فاصله کانونی عدسی و جای تصویر نقطه‌ای را که در فاصله m ۲۰۰ از آن قرار دارد پیدا کنید.

حل: بنا به علامتهای قراردادی در جدول ۲۰۲۱، نظر به اینکه اگر از طرف شیء به عدسی نگاه کنیم سطح اول كوژ و سطح دوم کاو به نظر می‌رسد (رک شکل ۱۲۰۲۱)، باید نوشت $r_1 = 0, r_2 = +۱۲۰$ و $r_1 = 0, r_2 = -۰۸۵$ m داریم

$$\frac{1}{f} = (1.50 - 1) \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{-0.85} \right) \quad \text{یا} \quad f = +0.96 \text{ m}$$

مثبت بودن f نشان‌دهنده همگرا بودن عدسی است. برای به دست آوردن جای تصویر معادله (۱۹۰۲۱) را با $p = 200$ m و مقدار بالا برای f به کار می‌بریم، نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{200} - \frac{1}{q} = \frac{1}{0.96} \quad \text{یا} \quad q = -181 \text{ m}$$

علامت منفی برای q نشان می‌دهد که تصویر حقیقی است و بنا بر این درست چپ عدسی قرار دارد. بالاخره بزرگنمایی برابر است با

$$M = \frac{q}{p} = -0.905$$

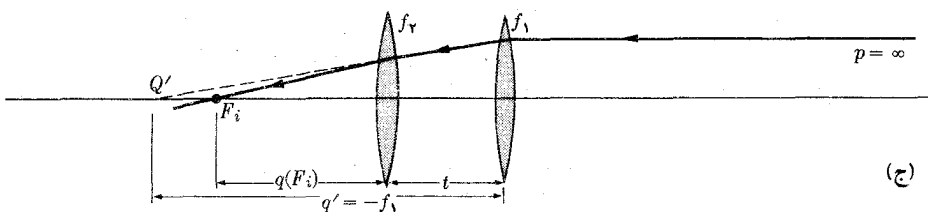
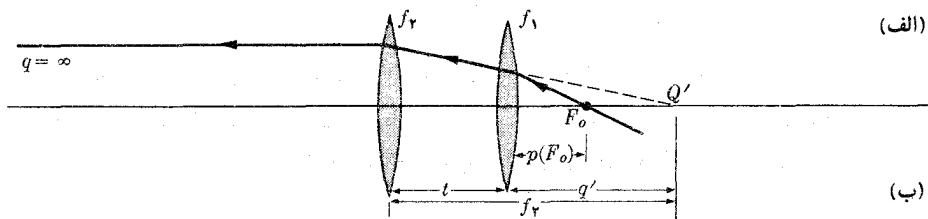
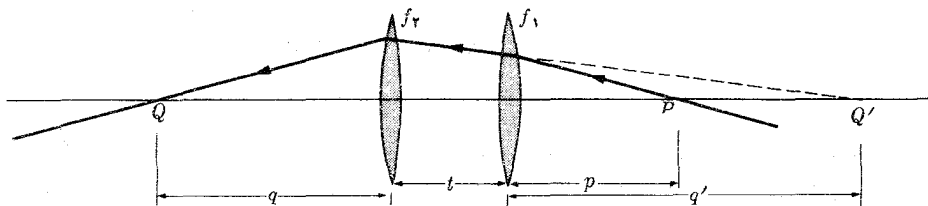
به سبب علامت منفی و نیز چون M کوچکتر از یک است، تصویر وارون و اندکی کوچکتر از شیء است.

مثال ۹۰۲۱ جای کانونها را در دستگاهی از دو عدسی نازک که فاصله بین آنها x است پیدا کنید.

حل: دستگاه عدسیهای نازک (شکل ۱۸۰۲۱ الف) مسیر پرتوی را که از نقطه P می‌گذرد نشان می‌دهد. Q' تصویری است که عدسی اول از P تشکیل می‌دهد. فاصله شیء از عدسی اول را p می‌نامیم. در این صورت وضع Q' با رابطه زیر تعیین می‌شود

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q'} = \frac{1}{f_1}$$

نقطه Q' نسبت به عدسی دوم مثل يك شیء و تصویر نهایی آن Q است. چون فاصله



شکل ۱۸.۲۱ دستگاه دوعدسی نازک.

عدسی دوم از Q' برابر $q' + t$ است، داریم

$$\frac{1}{q' + t} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2}$$

q فاصله عدسی دوم از تصویر نهایی است. دستگاه معادله‌های بالا امکان می‌دهد تا جای تصویر مربوط به هر وضعی از شیء را به دست آوریم.

کانون شیئی F_0 (شکل ۱۸.۲۱ ب) دستگاه عدسیها جای شیئی است که برای آن تصویر Q در بینهایت ($q = \infty$) تشکیل می‌شود. با نشان دادن فاصله F_0 از عدسی اول با $p(F_0)$ از رابطه دوم به دست می‌آید $q' = f_2 - t$ و اگر آن را در رابطه اول قرار دهیم، به دست می‌آید

$$p(F_0) = \frac{f_1(f_2 - t)}{f_1 + f_2 - t}$$

همچنین برای جای کانون تصویر F_i (شکل ۱۸.۲۱ ج) که با $q(F_i)$ نشان داده می‌شود، با قرار دادن $p = \infty$ داریم

$$q(F_i) = -\frac{f_2(f_1 - t)}{f_1 + f_2 - t}$$

يك وضع جالب هنگامی رخ می‌دهد که عدسیها برهم مماس باشند، به گونه‌ای که بتوان از t صرف نظر کرد. در این صورت برای معادلهٔ مربوط کنندهٔ q و q' داریم

$$\frac{1}{q'} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2}$$

که از ترکیب این رابطه با رابطهٔ اول به دست می‌آید

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

این رابطه نشان می‌دهد که يك مجموعه از عدسیهای نازك به هم چسبیده هم‌ارز يك عدسی تنهاست که فاصلهٔ کانونی آن، F ، برابر است با

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

همین نتیجه را می‌توان با قراردادن $t = 0$ در رابطهٔ $p(F_0)$ به دست آورد.

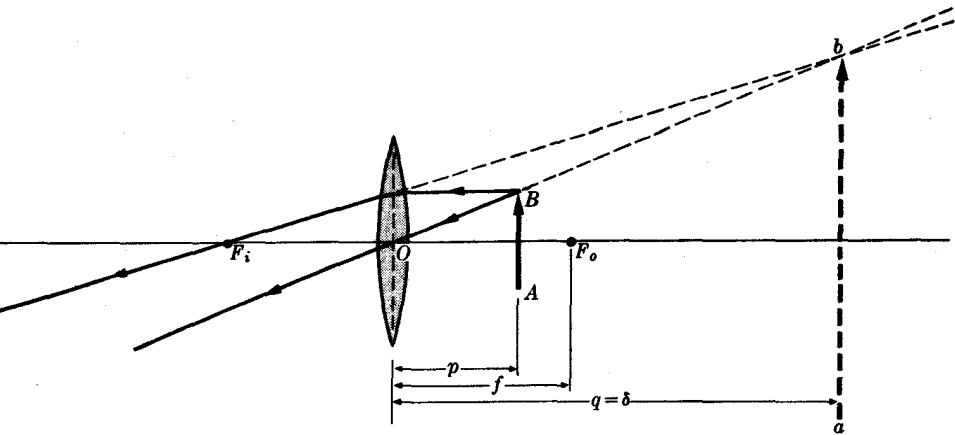
۵.۲۱ اسباهای اپتیکی

رسم مسیر پرتوها از داخل دستگاه عدسیها و آینه‌ها در طرح اسباهای اپتیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در اینجا از دو اسباب بسیار مهم، یعنی میکروسکوپ و تلسکوپ، باختصار گفتگو می‌کنیم.

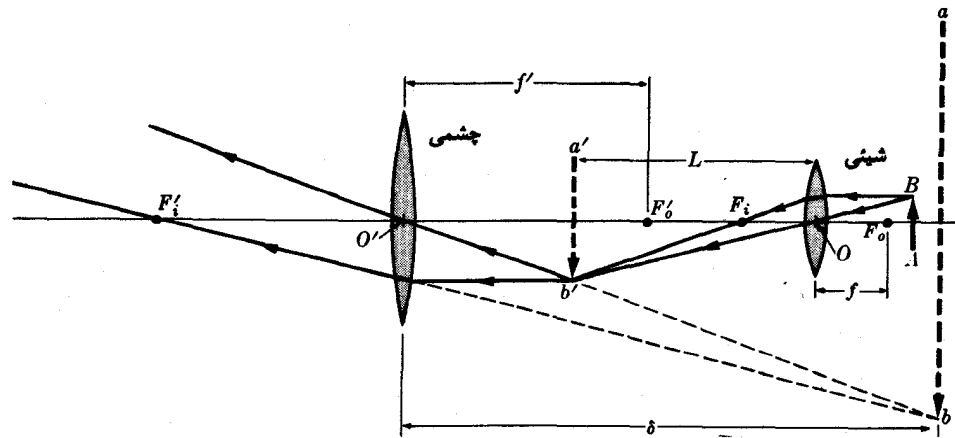
الف) میکروسکوپ. میکروسکوپ مجموعه‌ای از عدسیهاست که از شیء بسیار کوچک يك تصویر مجازی خیلی بزرگ تشکیل می‌دهد. ساده‌ترین میکروسکوپ يك عدسی همگراست که معمولاً ذره‌بین نامیده می‌شود. شیء AB (شکل ۱۹.۲۱) را بین عدسی و کانون F_0 قرار می‌دهند، به گونه‌ای که تصویر آن مجازی و فاصلهٔ تصویر q برابر δ حداقل رؤیت واضح باشد، که برای يك شخص سالم در حدود ۲۵ cm است. چون p بتقریب برابر f است، بویژه اگر f خیلی کوچک باشد، برای بزرگنمایی می‌توان نوشت

$$M = \frac{q}{p} \approx \frac{\delta}{f} \quad (20.21)$$

میکروسکوپ کاملتر از ذره‌بین است (شکل ۲۰.۲۱). این اسباب از دو عدسی همگرا به فاصله‌های کانونی کم به نامهای شیئی و چشمی تشکیل شده است. f فاصلهٔ کانونی عدسی شیئی از f فاصلهٔ کانونی عدسی چشمی خیلی کوچکتر است. f و f' هر دو خیلی کمتر از فاصلهٔ بین عدسی شیئی و عدسی چشمی اند. شیء AB را در فاصلهٔ کمی بیشتر از f در مقابل عدسی شیئی قرار می‌دهند. عدسی شیئی از آن اولین تصویر حقیقی $a'b'$ را تشکیل می‌دهد که مثل يك شیء در مقابل عدسی چشمی است. تصویر $a'b'$ باید در فاصله‌ای اندکی



شکل ۱۹-۲۱ رسم مسیر پرتوها در ذره بین.



شکل ۲۰-۲۱ رسم مسیر پرتوها در میکروسکوپ مرکب.

کمتر از f' در مقابل عدسی چشمی قرار گیرد. تصویر نهایی، ab ، مجازی، وارون و خیلی بزرگتر از شیء AB است. شیء AB طوری قرار می‌گیرد که فاصله ab از عدسی چشمی برابر با حداقل رؤیت واضح δ (۲۵ cm) باشد. این شرط با عملی به نام میزان کردن یا کانونی کردن میکروسکوپ انجام می‌شود که عبارت است از جابجایی مجموعه دستگاه میکروسکوپ نسبت به شیء. بزرگنمایی ناشی از عدسی شیشی برابر است با

$$M_o = \frac{a'b'}{AB} \approx \frac{L}{f}$$

و بزرگنمایی حاصل از عدسی چشمی برابر است با

$$M_E = \frac{ab}{a'b'} \approx \frac{\delta}{f'}$$

بنابراین بزرگنمایی کل برابر می‌شود با

$$M = M_O M_E = \frac{ab}{AB} = \frac{\delta L}{ff'} \quad (21.21)$$

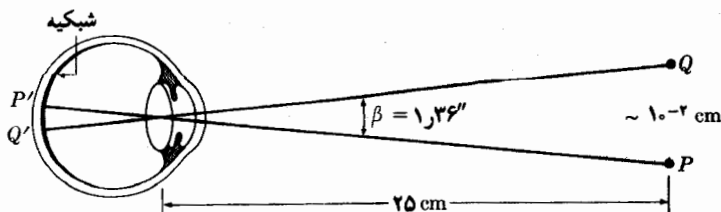
در میکروسکوپ واقعی، L عملاً با فاصله عدسی شیئی از عدسی چشمی برابر است. بزرگنمایی مفید یک میکروسکوپ را توان تفکیک آن محدود می‌کند. توان تفکیک عبارت است از حداقل فاصله بین دو نقطه از شیء که روی تصویر از یکدیگر قابل تمیزند. توان تفکیک میکروسکوپ نیز به نوبه خود توسط پراش در عدسی شیئی تعیین می‌شود. یک محاسبه دقیق، که در اینجا از آوردن آن صرف نظر می‌کنیم، نشان می‌دهد که توان تفکیک با رابطه زیر داده می‌شود

$$R = \frac{\lambda}{2n \sin \theta} \quad (22.21)$$

λ طول موج، n ضریب شکست محیطی است که شیء در آن جای دارد و θ زاویه‌ای است که پرتوکناری با محور اصلی میکروسکوپ می‌سازد. معمولاً $2n \sin \theta$ در حدود ۳ است به گونه‌ای که $R \approx \lambda/3$. از طرف دیگر، برای جسمی واقع در حدود ۲۵ cm، توان تفکیک چشم در حدود 10^{-2} cm است (شکل ۲۱-۲۱). بنابراین بیشینه بزرگنمایی مفید برابر می‌شود با

$$M = \frac{10^{-2} \text{ cm}}{\frac{1}{3}\lambda} \approx \frac{3 \times 10^{-2} \text{ cm}}{\lambda}$$

به عنوان مثال، برای نوری به طول موج $\lambda = 5 \times 10^{-7} \text{ m}$ که در حوالی مرکز بیناب مرئی است M در حدود ۶۰۰ است. برای تابشهای با طول موج کوتاهتر، بزرگنمایی می‌تواند اصلاح شود، ولی در این صورت در خارج بیناب مرئی قرار می‌گیرد.



شکل ۲۱-۲۱ توان تفکیک چشم.

ب) تلسکوپ. یکی دیگر از اسبابهای اپتیکی مهم تلسکوپ است. در تلسکوپ شکستی، که برای دیدن اشیا دور به کار می رود، شیئی يك عدسی همگراست که f فاصله کانونی آن خیلی زیاد (شکل ۲۲.۲۱) گاهی در حدود چندین متر است. چون شیء AB خیلی دور است، تصویری که عدسی شیئی از آن تشکیل می دهد، روی کانون F_0 می افتد. چون جای تصویر را می دانیم، بنابراین تنها پرتوهای مرکزی Aa' و Bb' را رسم کرده ایم. چشمی نیز يك عدسی همگراست، ولی F' فاصله کانونی آن خیلی کوچک است. این عدسی طوری قرار می گیرد که تصویر میانی $a'b'$ بین O' و F' و تصویر نهایی در کمینه فاصله رؤیت تشکیل می شود. کانونی کردن دور بین تنها با جابجایی عدسی چشمی انجام می شود زیرا با جابجایی عدسی شیئی تغییری حاصل نمی شود.

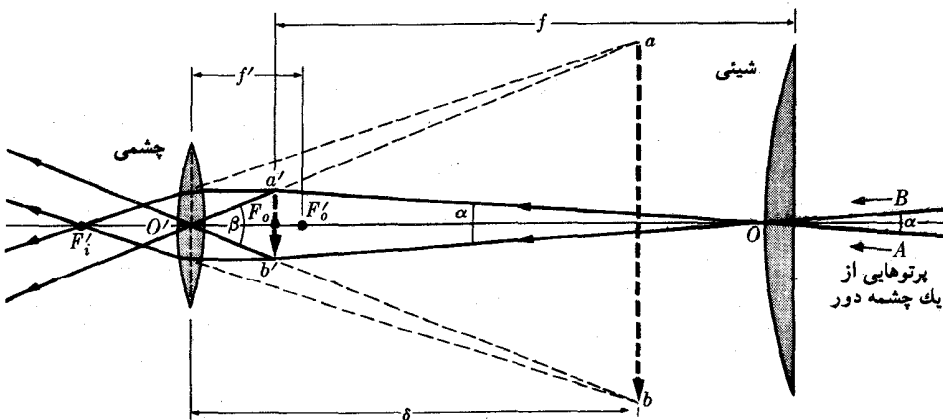
بزرگنمایی حاصل از این اسباب خطی نیست، زیرا تصویر همیشه کوچکتر از شیء است. به جای آن بزرگنمایی زاویه‌ای یا درشتنمایی تعریف می شود و آن عبارت است از نسبت زاویه β فراگیر تصویر و زاویه α فراگیر شیء، یعنی

$$M = \frac{\beta}{\alpha} \quad (23.21)$$

به دلیل نزدیک بودن تصویر، زاویه β از α خیلی بیشتر است و همین امر احساس درشتنمایی را به وجود می آورد. از شکل ۲۲.۲۱، با فرض اینکه α و β کوچک اند، می توان نوشت

$$\alpha \approx \text{tg } \alpha = \frac{a'b'}{f}, \quad \beta \approx \text{tg } \beta \approx \frac{a'b'}{f'}$$

زیرا فاصله $a'b'$ از O' در عمل برابر است با f' . با قرار دادن این مقدار در معادله



شکل ۲۲.۲۱ رسم مسیر پرتوها در تلسکوپ شکستی یا دوربین نجومی.

(۲۳.۲۱) به دست می آید

$$M = \frac{f}{f'} \quad (24.21)$$

بنابراین جهت دستیابی به درشتنمایی بزرگ باید فاصله کانونی عدسی شیئی خیلی بزرگ و از آن عدسی چشمی خیلی کوچک باشد. در عمل، طول اسباب با فاصله کانونی عدسی شیئی f تعیین می شود.

درشتنمایی دور بین نجومی را توان تفکیک عدسی شیئی و چشم ناظر محدود می کند. برای يك عدسی شیئی به قطر D ، توان تفکیک (یعنی کمینه زاویه فراگیر دو نقطه از شیء که در تصویر $a'b'$ به صورت متمایز و متفاوت از هم ظاهر می شوند) چنانکه در معادله (۱۲.۲۲) خواهد آمد، برابر است با

$$\alpha \approx 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (25.21)$$

از طرف دیگر، توان تفکیک چشم (شکل ۲۱.۲۱) بر حسب زاویه برابر است با

$$\beta = \frac{10^{-2} \text{ cm}}{25 \text{ cm}} = 4 \times 10^{-4} = 1.36'' \text{ رادیان}$$

بنابراین بیشینه درشتنمایی مفید يك تلسکوپ برابر می شود با

$$M = \frac{4 \times 10^{-4} D}{1.22 \lambda} \approx 3.3 \times 10^{-4} \frac{D}{\lambda} \quad (26.21)$$

درشتنمایی بزرگ بدین معنی است که یا α خیلی کوچک است، که موجب غیر دقیق بودن تصویر می شود یا مقدار β بزرگ است که جزئیات جدیدی در تصویر ab نشان نمی دهد. زیرا این جزئیات در تصویر میانی $a'b'$ وجود نداشته اند. به عنوان مثال، برای نوری به طول موج $\lambda = 5 \times 10^{-7} \text{ m}$ داریم $M \approx 660 D$ ، که در آن D بر حسب متر است. بنابراین با افزودن به قطر عدسی شیئی می توان درشتنمایی را زیاد کرد. به عنوان مثال، قطر عدسی شیئی دور بین برکس که بزرگترین تلسکوپ شکستی زمان حاضر است، در حدود يك متر است. بنابراین درشتنمایی تلسکوپ برابر ۶۶۰ و توان تفکیک آن 10^{-2} ثانیه کمانی است.

در يك تلسکوپ بازتابی شیئی يك آینه کاو به شکل سهمی است که در کانون آن تصویری بدون ابیراهی کروی تشکیل می شود. بزرگترین تلسکوپ بازتابی در حال حاضر تلسکوپ مون پالومار است. قطر این تلسکوپ در حدود ۵ m و درشتنمایی آن در حدود ۳۵۰۰ است.

اسباهای اپتیکی پیچیده تر از آن اند که با توضیحات ساده بالا بیان شوند، بویژه از این نظر که تصویر باید بدون ابیراهی کروی تشکیل شود. به همین دلیل چشمی ها شامل

چندین عدسی و شیئی‌ها در میکروسکوپ شامل دستگاه پیچیده‌ای از عدسیها هستند.

۶.۲۱ منشور

منشور محیطی است محدود به دو سطح تخت که باهم زاویه A می‌سازند (شکل ۲۳.۲۱). فرض کنید که این محیط دارای ضریب شکست n و در محیطی با ضریب شکست ۱، مثلاً هوا، قرار گرفته است. یک پرتو تابشی مانند PQ در عبور از منشور دوبار شکسته می‌شود و هنگام خروج به اندازه زاویه δ از راستای تابش منحرف می‌شود. از شکل پیداست که

$$\sin i = n \sin r \quad (27.21)$$

$$\sin i' = n \sin r' \quad (28.21)$$

$$r + r' = A \quad (29.21)$$

$$\delta = i + i' - A \quad (30.21)$$

دو رابطه اول همان قانون اسنل مربوط به شکست در نقطه‌های Q و R است. رابطه سوم مربوط به مثلث QTR و رابطه چهارم مربوط به مثلث QRU است. از سه رابطه اول برای رسم پرتوها و از رابطه چهارم برای محاسبه انحراف پرتوها استفاده می‌کنند. یک مسیر ویژه وجود دارد که برای آن انحراف کمینه است. این مسیر از قراردادن

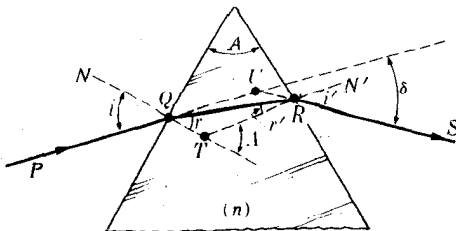
$d\delta/di = 0$ به دست می‌آید. از معادله (۳۰.۲۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{d\delta}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$$

و به ازای $d\delta/di = 0$ ، باید داشته باشیم

$$\frac{di'}{di} = -1 \quad (31.21)$$

بنا به معادله‌های (۲۸.۲۱) و (۲۹.۲۱) داریم



شکل ۲۳.۲۱ مسیر یک پرتو در گذر از منشور.

$$\cos i \, di = n \cos r \, dr, \quad \cos i' \, di' = n \cos r' \, dr', \quad dr = -dr'$$

بنا بر این به دست می آید

$$\frac{di'}{di} = -\frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r} \quad (۳۲.۲۱)$$

چون چهار زاویه i, r, i', r' از $\pi/2$ کوچکترند و شرایط تقارن (۲۷.۲۱) و (۲۸.۲۱) را برآورده می کنند، معادله های (۳۱.۲۱) و (۳۲.۲۱) تنها در صورتی که $r = r'$ و $i = i'$ باشد همزمان برآورده می شوند. در این صورت باید داشته باشیم

$$i = \frac{1}{\psi}(\delta_{\min} + A), \quad r = \frac{1}{\psi}A \quad (۳۳.۲۱)$$

δ_{\min} حداقل زاویه انحراف است. توجه کنید که در این حالت مسیر پرتو نسبت به دوسطح منشور متقارن است. با قرار دادن معادله (۳۳.۲۱) در معادله (۲۷.۲۱) به دست می آید

$$n = \frac{\sin \frac{1}{\psi}(\delta_{\min} + A)}{\sin \frac{1}{\psi}A} \quad (۳۴.۲۱)$$

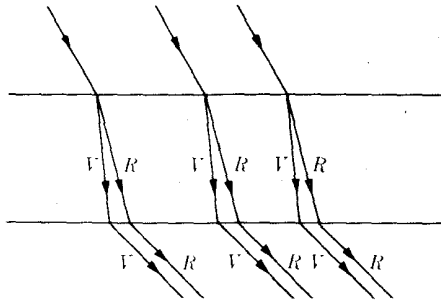
بعد از به دست آوردن δ_{\min} از راه آزمایش برای منشوری به زاویه رأس A ، فرمول (۳۴.۲۱) ساده ترین راه برای اندازه گیری ضریب شکست يك محیط است.

۷.۲۱ پاشندگی

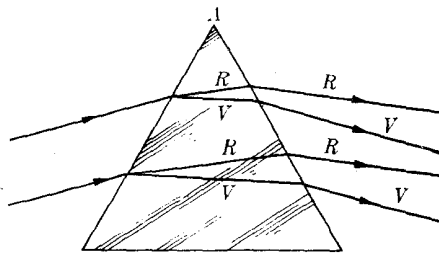
هنگامی که موجی در يك محیط پاشنده که ضریب شکست آن به بسامد (یا طول موج) بستگی دارد شکسته شود، زاویه شکست نیز به بسامد یا طول موج بستگی خواهد داشت. اگر موج تابش به جای سینوسی (یا تکفام)، ترکیبی از چندین بسامد یا طول موج باشد. طول موجهای مختلف با زاویه های متفاوت شکسته می شوند، این پدیده را پاشیدگی می نامند (پاشیدگی امواج الکترومغناطیسی در ماده در بخش ۱۳.۱۹ آمده است).

دانشجو به یاد دارد که رنگها به فواصل (بازه های) طول موجها وابسته اند. بنا بر این نور سفید هنگامی که از هوا وارد ماده دیگر مانند آب یا شیشه شود می شکند و به رنگهای مختلف تجزیه می شود. اگر قطعه شیشه ای به شکل تیغه متوازی السطوح باشد، پرتوهایی که از آن خارج می شوند بسامم موازی اند و رنگهای مختلف مجدداً باهم ترکیب می شوند (شکل ۲۴.۲۱)؛ در این حالت بجز درکناره های تصویر، پاشیدگی مشاهده نمی شود. با وجود این، این پدیده معمولاً قابل توجه نیست.

ولی اگر نور از منشور بگذرد (شکل ۲۵.۲۱)، پرتوهای خروجی رنگهای گوناگون موازی نیستند و پاشیدگی، بویژه درکنار منشور، بسیار قابل توجه است. به همین دلیل

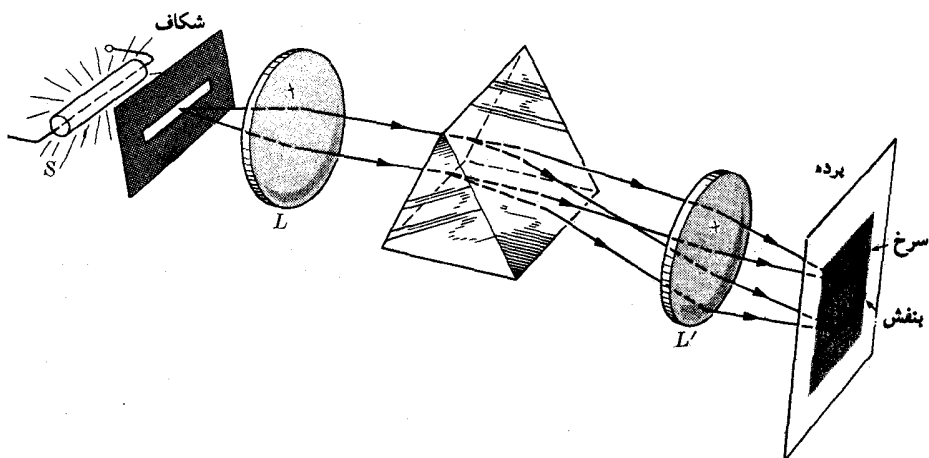


شکل ۲۴.۲۱ پاشیدگی بر اثر عبور موج از داخل تیغه متوازی السطوح.



شکل ۲۵.۲۱ پاشیدگی بر اثر عبور موج از داخل منشور.

در اسبابهایی به نام بیناب نما از منشور برای تجزیه نور به طور گسترده استفاده می شود. در شکل ۲۶.۲۱ نمونه ساده ای از بیناب نما نشان داده شده است. نور گسیلی از چشمه S پس از عبور از شکاف توسط عدسی L به پرتوهای موازی تبدیل می شود. بعد از اینکه نور موازی توسط منشور به پرتوهایی به رنگهای گوناگون تجزیه شد، رنگهای مختلف از عدسی دیگر L' می گذرند. چون تمام پرتوهای با رنگ (یا طول موج) یکسان موازی اند، روی پرده در یک نقطه متمرکز می شوند. ولی پرتوهای مربوط به رنگهای (یا طول موجهای) مختلف موازی نیستند. بنا بر این رنگهای مختلف در نقاط مختلف پرده متمرکز می شوند. رنگها یا طول موجهای گسیلی از چشمه S روی پرده پهن می شوند، بدین طریق شکلی به وجود می آید که آن را بیناب نور گسیلی از چشمه S می نامند. اگر انحراف δ خیلی سریع با طول موج تغییر کند، رنگهای ظاهر شده بر روی پرده در فاصله دور از هم قرار می گیرند. برای هر طول موج یک خط روی پرده ظاهر می شود که تصویر شکاف است. در منشور، پاشندگی با رابطه زیر تعریف می شود



شکل ۲۶.۲۱ اساس بیناب نمای منشوری.

$$D = \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{d\delta}{dn} \frac{dn}{d\lambda} \quad (۳۵.۲۱)$$

عامل $d\delta/dn$ پیش از همه به وضع هندسی سیستم بستگی دارد، در صورتی که عامل $dn/d\lambda$ به جنس ماده‌ای که منشور از آن ساخته شده است بستگی دارد، از مشتق معادله‌های (۲۷.۲۱) تا (۳۰.۲۱) نسبت به ضریب شکست n ، به دست می‌آید

$$0 = \sin r + n \cos r \frac{dr}{dn}$$

$$\cos i' \frac{di'}{dn} = \sin r' + n \cos r' \frac{dr'}{dn}$$

$$\frac{dr}{dn} + \frac{dr'}{dn} = 0$$

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{di'}{dn}$$

بالاخره، اگر این چهار نتیجه را باهم ترکیب و از معادله (۲۹.۲۱) استفاده کنیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{di'}{dn} = \frac{\sin A}{\cos i' \cos r}$$

اگر منشور برای کمینه انحراف میانگین تنظیم شده باشد داریم

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{\gamma \sin \frac{1}{2}A}{\cos \frac{1}{2}(\delta_{\min} + A)}$$

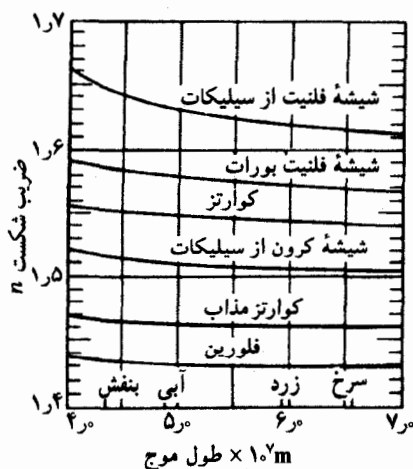
$dn/d\lambda$ دومین عامل رابطه (۳۵.۲۱) به ماهیت موجها و جنس محیط بستگی دارد. ضریب شکست، با تقریب رضایت بخشی، بر حسب طول موج برای امواج الکترومغناطیسی به طور اعم و برای نور به طور اخص به وسیله فرمول کوشری محاسبه می شود

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (36.21)$$

A و B ثابتهای سرشتی هر ماده اند (رک به مثال ۱۵.۱۲). تغییر n با λ برای مواد شفاف گوناگون در ناحیه نور مرئی در شکل ۲۷.۲۱ نشان داده شده است. از معادله (۳۶.۲۱) به دست می آید

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}$$

در این صورت باشندگی منشور برابر می شود با



شکل ۲۷.۲۱ تغییر ضریب شکست چند ماده با طول موج در ناحیه مرئی.

$$D = \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{\gamma \sin \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} (\delta_{\min} + A)} \left(-\frac{\gamma B}{\lambda^2} \right) \quad (37.21)$$

علامت منفی نشان می‌دهد که با افزایش طول موج انحراف کاهش می‌یابد، به گونه‌ای که سرخ کمتر از بنفش منحرف می‌شود.

مثال ۱۰.۲۱ درستی فرمول کوشی را تحقیق کنید.

حل: معادله (۵۸.۱۹) رابطه‌ای است که ضریب شکست را به بسامد موجهای الکترومغناطیسی و بسامدهای سرشتی ماده ارتباط می‌دهد. برای سهولت فرض می‌کنیم که تنها یک بسامد اتمی ω_0 وجود دارد و $\omega \ll \omega_0$ است. در نتیجه

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

از این رابطه، با استفاده از بسط دو جمله‌ای (ب.۲۸)، داریم

$$\begin{aligned} n &= \left(1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)} \right)^{1/2} = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)} \\ &= 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m \omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^{-1} \\ &= 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m \omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \end{aligned}$$

چون $\omega = 2\pi c/\lambda$ است، بنابراین به دست می‌آید

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

یا

$$A = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m \omega_0^2} \quad \text{و} \quad B = \frac{2\pi^2 c^2 Ne^2}{\epsilon_0 m \omega_0^4}$$

از دانشجو می‌خواهیم که مرتبه بزرگی A و B را حساب کند

۸.۲۱ ایبراهی رنگی

هنگامی که یک نور شامل چندین طول موج (به عنوان مثال نور سفید) از یک عدسی بگذرد پاشیده می‌شود و لبه‌های تصویر تشکیل شده توسط عدسی رنگی به نظر می‌رسند. این اثر

را ابراهای رنگی می نامند. فهم دلیل این اثر خیلی آسان است به شرطی که عدسی را هم ارز دومشور در نظر بگیریم که از قاعده‌ها (برای عدسیهای همگرا)، یا از رأسها (برای عدسیهای واگرا) به هم چسبیده باشند.

يك عدسی برای هر طول موج يك كانون دارد. این نتیجه از معادله (۱۸.۲۱) پیدا است زیرا f با ضریب شکست n تعیین می شود که خود آن نیز به طول موج بستگی دارد. برای مواد شفاف که ضریب شکست آنها با افزایش طول موج در ناحیه مرئی کاهش می یابد (رنگ به شکل ۲۷.۲۱)، فاصله کانونی بنفش خیلی کوتاهتر از سرخ است. در شکل ۲۸.۲۱ ابراهای رنگی يك عدسی همگرا و يك عدسی واگرای ساخته شده از چنین ماده‌ای نشان داده شده است.

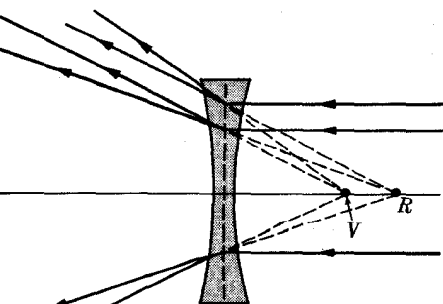
ابراهای رنگی عدسی توسط $f_C - f_F$ ، اختلاف بین فاصله‌های کانونی متناظر با طول موجهای $6563 \times 10^{-7} \text{ m}$ و $4862 \times 10^{-7} \text{ m}$ تعیین می شود. این طول موجها توسط هیدروژن گسیل می شوند و آنها را خطوط C و F فرانوفر می نامند. بنا بر این با به کار بردن معادله (۱۸.۲۱) داریم

$$\frac{1}{f_C} = (n_C - 1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad \text{و} \quad \frac{1}{f_F} = (n_F - 1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

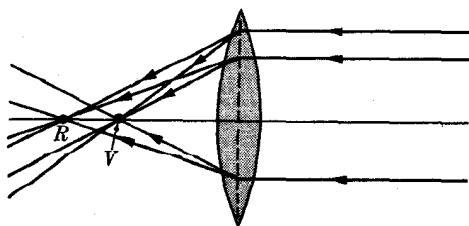
$$\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} = (n_F - n_C) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (28.21)$$

ولی خط D فرانوفر به طول موج $5890 \times 10^{-7} \text{ m}$ تقریباً با ضریب شکست میانگین n_D متناظر است و داریم

$$\frac{1}{f} = (n_D - 1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$



(ب) عدسی واگرا



(الف) عدسی همگرا

شکل ۲۸.۲۱ ابراهای رنگی عدسی.

با استفاده از این رابطه، می‌توان جمله وابسته به شعاع انحنای عدسی را از معادله (۳۸.۲۱) حذف کرد و نوشت

$$\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \frac{1}{f_D}$$

ولی سمت چپ رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{f_C - f_F}{f_C f_F} \approx \frac{f_C - f_F}{f_D^2}$$

زیرا بتقریب $f_C f_F \approx f_D^2$ است. بنابراین ایبراهی رنگی طولی عدسی به صورت زیر درمی‌آید

$$A = f_C - f_F = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} f_D \quad (۳۹.۲۱)$$

کمیت

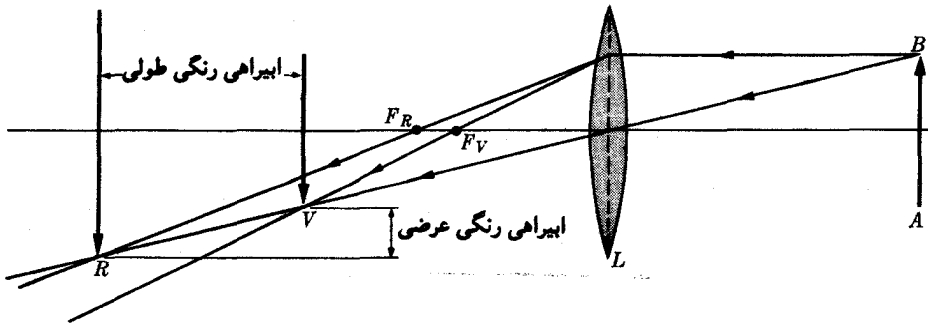
$$\omega = \frac{f_C - f_F}{f_D} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \quad (۴۰.۲۱)$$

را توان پاشندگی جسم می‌نامند. جدول ۳۰.۲۱ ضریب شکست چند ماده شفاف را برای خطهای C، D و F فرانهوفر به دست می‌دهد.

ایبراهی رنگی را کسه تاکنون در مورد عدسیها گفتگو می‌کردیم ایبراهی طولی می‌نامند، زیرا آن را در امتداد محور اصلی اندازه‌گیری می‌کنند. ایبراهی رنگی عرضی نیز وجود دارد. شیء AB در مقابل عدسی L را در نظر می‌گیریم (شکل ۲۹.۲۱). اگر

جدول ۳۰.۲۱ ضریب شکست و توان پاشندگی

توان پاشندگی	F	D	C	خط فرانهوفر
ω	۴۷۸۶۲	۵۷۸۹۰	۶۷۵۶۳	$10^7 \text{ m} \times (\text{طول موج})$
۰۷۰۱۹۳	۱۷۵۲۲	۱۷۵۱۷	۱۷۵۱۴	شیشه کرون
۰۷۰۲۷۱	۱۷۶۳۹	۱۷۶۲۷	۱۷۶۲۲	فلینت
۰۷۰۱۶۵	۱۷۳۶۷	۱۷۳۶۳	۱۷۳۶۱	الکل
۰۷۰۳۳۸	۱۷۵۱۲	۱۷۵۰۳	۱۷۴۹۷	بنزن
۱۷۰۱۸۰	۱۷۳۳۸	۱۷۳۳۴	۱۷۳۳۲	آب

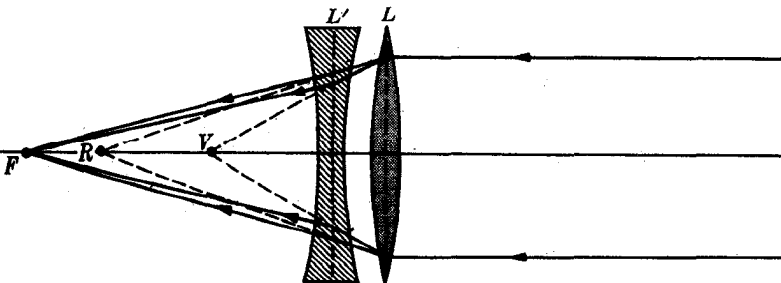


شکل ۲۹.۲۱ ایبراهیهای رنگی طولی و عرضی در عدسی.

نوری که از شیء می‌تابد تکفام نباشد هنگام عبور از عدسی پاشیده می‌شود و به جای یک تصویر یک سری تصاویر با اندازه‌های مختلف تشکیل می‌شود، زیرا برای هر رنگ یک پاتول موج یک تصویر تشکیل می‌شود. این شکل تنها تصویرهای فرین متناظر با سرخ و بنفش را نشان می‌دهد و در فاصله بین آنها نیز بسیار اغراق شده است. به دلیل این پاشیدگی جانبی، تصویرها رنگی به نظر می‌رسند. ایبراهی رنگی عرضی را می‌توان بر حسب اختلاف بزرگنمایی برای خطهای بیناب F و C بیان کرد.

مثال ۱۱.۲۱ مطالعه عدسیهای نافام (افام)

حل: ایبراهی رنگی را می‌توان با ترکیب چند عدسی از جنسهای مختلف کاهش داد یا حتی از بین برد. بدین طریق دستگاهی بدست می‌آید که آن را دستگاه افام می‌نامند. برای اینکه ببینیم این امر چگونه صورت می‌گیرد، فرض کنید که دستگاه عدسیهای شکل ۳۰.۲۱ در دسترس است. بدعنوان مثال، در این شکل عدسی L از شیشه کرون و عدسی L' از شیشه فلینت است. فاصله کانونی آنها را با f و f' و توان پاشندگیشان را بر ترتیب با ω و ω' نشان می‌دهیم. پاره خط VR ایبراهی رنگی عدسی L است. ولی اگر عدسی و اگر ای L' به طور مناسبی



شکل ۳۰.۲۱ دستگاه عدسیهای نافام (افام)

انتخاب شده باشد، کلیه طول موجهای مربوط می‌توانند در نقطه F متمرکز شوند. برای اینکه نشان دهیم چنین کاری ممکن است، یادآوری می‌کنیم که، بنا به مثال ۹.۲۱، برای هر طول موج داریم

$$\frac{1}{F_C} = \frac{1}{f_C} + \frac{1}{f'_C} \quad \text{و} \quad \frac{1}{F_F} = \frac{1}{f_F} + \frac{1}{f'_F}$$

F_C و F_F فاصله‌های کانونی متناظر با دستگاه عدسیه‌هاست. از کاستن این دو رابطه از یکدیگر و با در نظر گرفتن اینکه $F_C F_F \approx F_D^2$ و غیره، داریم

$$\frac{F_C - F_F}{F_D^2} = \frac{f_C - f_F}{f_D^2} + \frac{f'_C - f'_F}{f_D^2} = \frac{\omega}{f_D} + \frac{\omega'}{f'_D}$$

برای اینکه ایراهی رنگی طولی وجود نداشته باشد باید داشته باشیم $F_C - F_F = 0$. یا

$$\frac{\omega}{f_D} + \frac{\omega'}{f'_D} = 0 \quad (۴۱.۲۱)$$

چون ω و ω' مثبت‌اند، از رابطه (۴۱.۲۱) نتیجه می‌گیریم که علامت f_D و f'_D مخالف هم است. بنابراین اگر یک عدسی همگرا باشد، عدسی دیگر باید واگرا اختیار شود.

مثال ۱۲.۲۱ یک دستگاه دو عدسی افام چسبیده به هم، با فاصله کانونی ۳۵ سانتی‌متر طرح کنید که یک عدسی آن از شیشه کرون و عدسی دیگر از فلینت باشد.

حل: داده‌های جدول ۳.۲۱ نشان می‌دهند که توان باشندگی شیشه کرون برابر ۰.۱۹۱ و از آن شیشه فلینت برابر ۰.۲۷۱ است. بنابراین در بایست افامسی معادله (۴۰.۲۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{0.0193}{f_1} + \frac{0.0271}{f_2} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{f_2}{f_1} = -1.402$$

در بایست دومی که از حل مثال ۹.۲۱ با $F = +0.35 \text{ m}$ به دست می‌آید، چنین است

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{0.350}$$

از ترکیب دو معادله بالا به دست می‌آید

$$f_1 = +0.1007 \text{ m} \quad \text{و} \quad f_2 = -0.1412 \text{ m}$$

از این دو عدسی از جنس کرون همگرا و عدسی ساخته شده از جنس فلینت واگراست. با فرض اینکه دستگاه عدسی تخت-کوز (رویه تخت متناظر با عدسی فلینت) باشد، از معادله (۱۸.۲۱)

با قرارداد n_D مقدار برای ضریب شکست، شعاع مربوط به رویه مشترک دو عدسی برابر $0.089m$ و برای شعاع رویه دیگر عدسی برابر $0.126m$ به دست می آید.

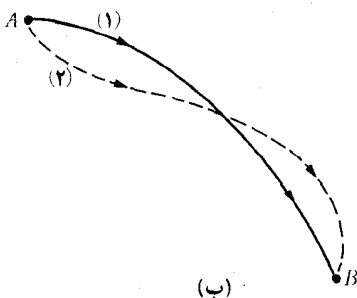
۹.۱۲ اصل فرما

در این فصل نیز مانند فصل پیش پایه بحث خود را روی بازتاب و شکست براساس قضیه مالوس یا شرایط مرزی در سطح جدایی دو محیط بنا کرده ایم. با وجود این در هندسه موجی اصل سومی نیز وجود دارد، که به طور مستقیم به دو اصل دیگر مرتبط نیست و مسیر یک پرتو را در یک محیط ناهمگن به دست می دهد. این اصل را پیردو فرما (۹۸۵-۱۰۴۴/۱۶۵۱-۱۶۶۵) ریاضیدان فرانسوی پیشنهاد کرده است. اصل فرما را می توان به صورت زیر بیان کرد

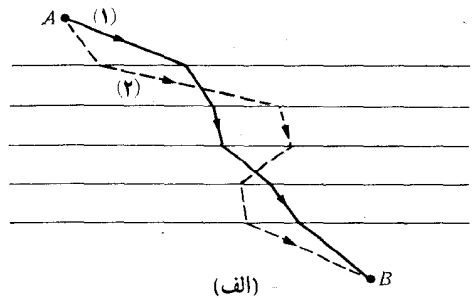
یک پرتو برای رفتن از یک نقطه به نقطه دیگر مسیری را برمیگزیند که در آن زمان انتشار کمینه باشد.

به عنوان مثال محیط چند لایه ای را، همانند آنچه در بخش ۱۳.۲۵ مطالعه کردیم، در نظر می گیریم. مسیر واقعی به کمک معادله (۳۲.۲۵) حساب می شود و با خط (۱) در شکل ۳۱.۲۱ الف نشان داده شده است. مسیر اختیاری دیگری با خط (۲) نشان داده شده است. این مسیر معنای فیزیکی ندارد زیرا قانون اسنل در سطح جدایی دو محیط در باره آن صدق نمی کند. اگر طول هر تکه راه و سرعت انتشار در هر محیط معلوم باشد، می توان زمانهای لازم برای اینکه پرتو مسیر فیزیکی (۱) و مسیر اختیاری (۲) را پیماید حساب کرد. اصل فرما ایجاب می کند که زمان لازم برای پیمودن مسیر فیزیکی واقعی کوچکتر از زمان لازم برای پیمودن هر مسیر اختیاری و غیر فیزیکی نزدیک به آن باشد؛ یعنی $t_1 < t_2$. اگر به جای یک محیط چند لایه یک محیط ناهمگن داشته باشیم (شکل ۳۱.۲۱ ب) که در آن (۱) مسیر فیزیکی واقعی پرتو و (۲) یک مسیر غیر فیزیکی اختیاری و نزدیک به آن باشد، در این صورت مطابق اصل فرما $t_1 < t_2$ می شود.

بدیهی است که زمان لازم برای رفتن یک پرتو از نقطه A به نقطه B در امتداد یک مسیر تابعی از این مسیر است؛ یعنی (مسیر) $t_{AB} = f$. این رابطه نوع جدیدی از وابستگی تابعی



(ب)



(الف)

شکل ۳۱.۲۱ مقایسه مسیر فیزیکی نور بین دو نقطه و یک مسیر غیر فیزیکی نزدیک به آن.

است، بدین معنی که متغیرهای تابع f مختصات يك نقطه نیستند، بلکه پارامترهای تعریف کننده مسیر بین A و B اند. در بایست کمینه بودن t_{AB} را می توان به ازای يك تغییر جزئی در مقادیر پارامترهای متناظر با مسیر فیزیکی، به صورت $dt_{AB} = 0$ نوشت. يك روش خاص ریاضی به نام حساب متغیرها امکان می دهد تا مقادیر پارامترهای مسیری را که در رابطه $dt_{AB} = 0$ صدق می کند به دست آوریم و از این طریق مسیر پرتو را تعیین کنیم.

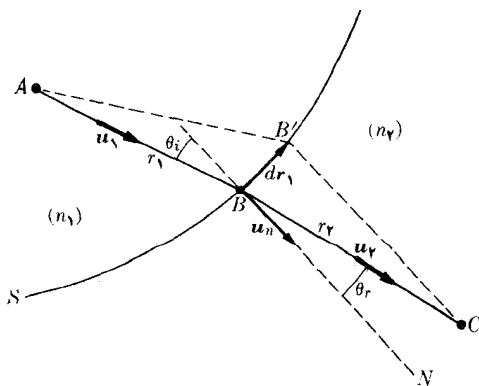
در مورد چگونگی به کار بردن اصل فرما برای رسم مسیر پرتوها در يك محیط ناهمگن پیش از این بحث نمی کنیم ولی می کوشیم تا سازگاری این اصل را با قانون اسنل تحقیق کنیم. شکل ۳۲.۲۱ را در نظر می گیریم. در این شکل سطح S دو محیط با ضریب شکست n_1 و n_2 را از هم جدا می کند. پرتوی که از A به C می رود مسیر ABC را می پیماید. با توجه به معادله (۵۶.۱۹) یا $v = c/n$ ، زمان لازم برای اینکه نور این مسیر را بپیماید برابر است با

$$t = \frac{r_1}{v_1} + \frac{r_2}{v_2} = \frac{1}{c} (n_1 r_1 + n_2 r_2)$$

اصل فرما ایجاب می کند که

$$dt = \frac{1}{c} (n_1 dr_1 + n_2 dr_2) = 0 \quad (۳۲.۲۱)$$

باشد. dt عبارت است از تغییر t برای مسیرهای نزدیک به مسیر فیزیکی (مانند $AB'C$) که تغییرات متناظر dr_1 و dr_2 را بهتر تیب در r_1 و r_2 تولید می کنند. ولی اگر به خاطر داشته باشیم که $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ است، داریم $r dr = \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ یا $dr = (\mathbf{r}/r) \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$ که در آن \mathbf{u} بردار یکای راستای \mathbf{r} است. بنابراین داریم $dr_1 = \mathbf{u}_1 \cdot d\mathbf{r}_1$ و $dr_2 = \mathbf{u}_2 \cdot d\mathbf{r}_2$ ولی $d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2 = 0$ است، بنا بر این به دست می آید $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \text{const}$



شکل ۳۲.۲۱

یا $d\mathbf{r}_2 = -d\mathbf{r}_1$ به گونه‌ای که می‌توان نوشت $d\mathbf{r}_2 = -\mathbf{u}_2 \cdot d\mathbf{r}_1$. در نتیجه، معادله (۴۲.۲۱) (پس از حذف عامل ثابت $1/c$) به صورت زیر درمی‌آید

$$(n_1 \mathbf{u}_1 - n_2 \mathbf{u}_2) \cdot d\mathbf{r}_1 = 0 \quad (۴۳.۲۱)$$

ولی بردار $d\mathbf{r}_1$ چنانکه شکل ۳۲.۲۱ نشان می‌دهد، در نقطه B بر صفحه S مماس است. این امر بدین معنی است که بنا به معادله (۴۳.۲۱) بردار $n_1 \mathbf{u}_1 - n_2 \mathbf{u}_2$ با عمود \mathbf{u}_N بر صفحه S در نقطه B موازی است. بدین ترتیب لازم می‌آید که پرتو تابش، پرتو شکست و عمود بر سطح، همگی در یک صفحه باشند. این همان قانون اولی است که در بخش ۴.۲۵ بیان شد. از بخش ۹.۳ به خاطر داریم که اگر دو بردار موازی باشند حاصل ضرب برداری آنها برابر صفر است، یعنی

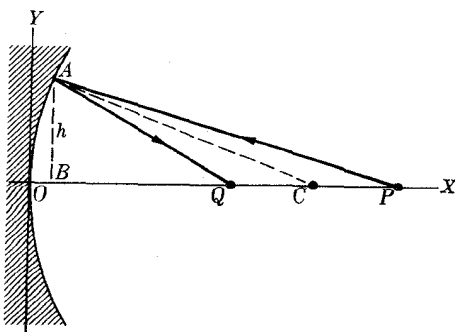
$$(n_1 \mathbf{u}_1 - n_2 \mathbf{u}_2) \times \mathbf{u}_N = 0 \quad \text{یا} \quad n_1 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_N = n_2 \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_N \quad (۴۴.۲۱)$$

چون در این رابطه تمام بردارها، بردارهای یکا هستند، معادله (۴۴.۲۱) ایجاب می‌کند (از لحاظ بزرگیها) که $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r$ باشد، که همان قانون اسنل یا معادله (۴.۲۵) است.

مثال ۱۳.۲۱ بازتاب روی سطح کروی را با استفاده از اصل فرما بررسی کنید.

حل: اگر چشمه نقطه‌ای P (شکل ۳۳.۲۱) در مقابل یک سطح بازتاب قرار گیرد و نیز بخواهیم که تصویر آن در نقطه Q تشکیل شود، شکل سطح باید به گونه‌ای باشد که بنا به اصل فرما زمان لازم برای اینکه کلیه پرتوها از P به نقطه Q بروند یکی باشد (توجه کنید که این شرط در قضیه مالوس نیز ضروری است). زمان لازم برای انتشار یک پرتو در امتداد محدود اصلی برابر است با

$$t = \frac{1}{c} (OP + OQ) \quad (۴۵.۲۱)$$



شکل ۳۳.۲۱

برای پرتو تابشی در نقطه A روی سطح داریم

$$t' = \frac{1}{c}(AP + AQ) \quad (۴۶.۲۱)$$

و باید حداقل با تقریب مرتبه اول $t = t'$ باشد. توجه کنید که این امر برای یک سطح تخت (به عنوان مثال OY) ناممکن است، زیرا برای A روی OY همیشه داریم $AP > OP$ و $AQ > OQ$ که به $t' > t$ منجر می شود. ولی با خم کردن سطح، AP و AQ را می توان طوری تنظیم کرد که $t = t'$ باشد. می خواهیم ببینیم که آیا این امر در مورد سطح کروی نیز صادق است. شرط $t = t'$ ایجاب می کند که

$$AP + AQ = OP + OQ \quad (۴۷.۲۱)$$

در مثلث ABP ، داریم

$$h^2 = AP^2 - BP^2 = (AP - BP)(AP + BP)$$

ولی اگر A خیلی نزدیک به O باشد، AP اندکی از OP بیشتر و BP اندکی از آن کمتر می شود. بنابراین با تقریب خوبی می توان نوشت $AP + BP \approx 2OP = 2p$. در نتیجه داریم

$$AP = BP + \frac{h^2}{2p}$$

همچنین

$$AQ = BQ + \frac{h^2}{2q}$$

با قرار دادن این رابطه ها در معادله (۴۷.۲۱) به دست می آید

$$\left(BP + \frac{h^2}{2p}\right) + \left(BQ + \frac{h^2}{2q}\right) = OP + OQ$$

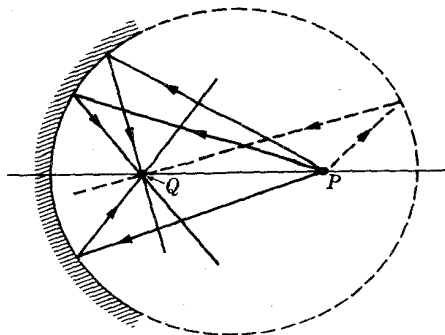
یا

$$\frac{h^2}{2p} + \frac{h^2}{2q} = (OP - BP) + (OQ - BQ) = 2OB \quad (۴۸.۲۱)$$

ولی با چشم پوشی از OB^2 در مقابل r^2 ، مجدداً از مثلث ABC به دست می آید $OB = h^2/2r$ ، که تاهنگامی که A نزدیک به O باشد قابل قبول است (تمام پرتوها مجاور محور اصلی اند). در این صورت با قرار دادن این رابطه در معادله (۴۸.۲۱) و حذف عامل مشترک $(1/2)h^2$ به دست می آید

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r}$$

این همان فرمول دکارت است که در بخش ۲.۲۱ آن را با شیوه دیگری به دست آوردیم.



شکل ۳۴.۲۱ آینه بیضیوار

گام بعدی عبارت است از بررسی اینکه آیا امکان دارد سطحی پیدا کرد که دقیقاً در معادله (۴۷.۲۱) حداقل برای زوج نقاط P و Q صدق کند. توجه کنید که در این حالت معادله (۴۷.۲۱) هم ارز است با $AP + AQ = \text{const}$. چنانکه شکل ۳۴.۲۱ نشان می‌دهد، این رابطه معادله یک بیضیواره دوار به‌دکانهای P و Q است. در چنین سطح بازتابی Q دقیقاً تصویر P است (یعنی برای این زوج نقاط ابیراهی کروی وجود ندارد). برای کلیه نقاط دیگر یک ابیراهی کروی وجود دارد که مقدار آن به‌فاصله این نقطه از دو نقطه انتخابی بستگی دارد.

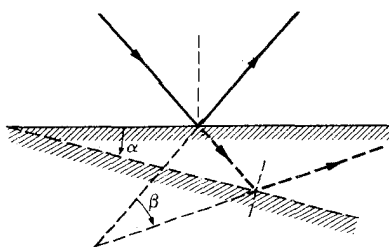
فهرست منابع

1. «Ground-Based Astronomy,» *Physics Today*, February 1965, page 19
2. «The 210-Foot Radio Telescope at Parkes,» E. Bowen, *The Physics Teacher* 4, 99(1966)
3. «Radio Astronomy,» G. Swenson, Jr., *The Physics Teacher* 2, 271 (1964)
4. «Present-Day Photographic Lenses and Their Characteristics,» G. Wallington, *The Physics Teacher* 2, 381(1964)
5. «A Lens Forms Too Many Images!» A. King and N. Winsor, *Am. J. Phys.*, 32, 895(1964)
6. «Experiments in Color Vision,» E. Land, *Sci. Am.*, May 1959, page 84
7. «Fermat's Principle and Geometrical Optics,» J. Shaw, *Am. J. Phys.* 33, 40(1965)

8. *Light: Principles and Experiments*, G. Monk. New York: Dover Press, 1963, Chapters 3, 7, and 8
9. *Optics*. B. Rossi. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957, Chapter 2
10. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapters 26 and 27
11. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963 page 278 (Fermat); page 298 (Newton); page 381 (Christiansen); Page 382 (Kundt)

مسئله‌ها

۱۰۲۱ ثابت کنید که اگر آینه تختی به اندازه زاویه α بچرخد، پرتو بازتاب به اندازه دو برابر آن، یعنی $\beta = 2\alpha$ می‌چرخد (شکل ۳۵-۲۱).



شکل ۳۵-۲۱

۲۰۲۱ اگر آینه تختی در امتداد عمود بر راستای موازی خود، به اندازه x جابجا شود، ثابت کنید که تصویر به اندازه $2x$ جابجا می‌شود.

۳۰۲۱ شعاع آینه‌کاوی برابر 1000 m است. هرگاه شیء به فاصله: (الف) 1400 m ، (ب) 1000 m ، (ج) 800 m ، (د) 500 m و (و) 300 m ، از آینه قرار گیرد، جای تصویر و بزرگنمایی را پیدا کنید. همچنین وضع یک شیء مجازی واقع در 600 m را بررسی کنید.

۴۰۲۱ شعاع آینه‌کوژی برابر 1000 m است. جای تصویر یک شیء و بزرگنمایی را در حالتی که فاصله شیء از آینه برابر 600 m است پیدا کنید. همچنین حالت یک شیء مجازی واقع در فاصله: (الف) 300 m و (ب) 800 m را بررسی کنید.

۵۰۲۱ فاصله کانونی و نوع یک آینه‌کروی را در صورتی که از یک شیء واقع در فاصله 1200 m تصویری: (الف) حقیقی به فاصله 800 m از آینه، (ب) مجازی به فاصله 3200 m

از آینه، (ج) مجازی به فاصله $m = 60$ cm از آینه، (د) حقیقی و دو برابر شیء، (ه) مجازی و دو برابر شیء، (و) حقیقی و برابر يك سوم شیء و (ز) مجازی و برابر $1/3$ شیء تشکیل دهد، تعیین کنید.

۶۰۲۱ شعاع يك آینه كروی كاو برابر $m = 160$ cm است. هر گاه تصویر يك شیء: (الف) حقیقی و سه برابر شیء، (ب) حقیقی و $1/3$ شیء و (ج) مجازی و $1/3$ شیء باشد، جای شیء را پیدا کنید. همین مسئله را برای يك آینه كوژ حل کنید.

۷۰۲۱ شعاع يك آینه كاو مخصوص ریش تراشی 15 cm است. اگر برای شخصی حداقل رؤیت برابر 25 cm باشد مناسبترین فاصله شخص از آینه را پیدا کنید. در این صورت بزرگنمایی چقدر است؟

۸۰۲۱ آینه‌ای يك تصویر حقیقی، وارون و سه بار بزرگتر از شیء را در فاصله 28 cm از شیء تشکیل می‌دهد. فاصله کانونی این آینه را پیدا کنید.

۹۰۲۱ هنگامی که شیء واقع در فاصله اولیه 60 cm از آینه کاوی را به اندازه 10 cm به آینه نزدیک کنند فاصله بین تصویر و شیء 25 برابر بزرگتر می‌شود. فاصله کانونی آینه را پیدا کنید.

۱۰۰۲۱ آبیراهی کردی يك آینه (کروی) را با اختلاف فاصله کانونی f برای يك پرتو نزدیک به محور آینه و f' فاصله کانونی برای پرتوی نزدیک به لبه آینه تعریف می‌کنند. اگر H شعاع قاعده آینه باشد، ثابت کنید که $f' - f \approx H^2/2r$ است.

۱۱۰۲۱ شعاع آینه کاوی برابر 10 cm است. قاعده آینه دارای شعاعی برابر 8 cm است. آبیراهی کروی آینه را پیدا و با فاصله کانونی آن مقایسه کنید.

۱۲۰۲۱ شیئی با سرعت ثابت v به سمت يك آینه كروی حرکت می‌کند. سرعت تصویر را بر حسب فاصله p پیدا کنید. نمودار سرعت تصویر را بر حسب p رسم کنید. همین مسئله را در مورد يك عدسی كروی از نو حل کنید.

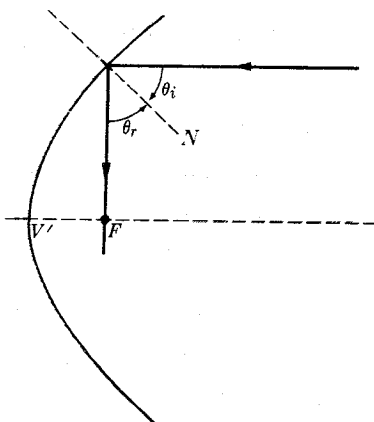
۱۳۰۲۱ اگر u_1 و u_2 بترتیب فاصله شیء و تصویر آن از مرکز يك آینه كروی باشند درستی رابطه $1/u_1 + 1/u_2 = -2/r$ را ثابت کنید. نشان دهید که در این حالت بزرگنمایی با رابطه $M = u_2/u_1$ داده می‌شود.

۱۴۰۲۱ اگر x_1 و x_2 فاصله‌های شیء و تصویر آن از کانون يك آینه كروی باشند، ثابت کنید که معادله (3.21) به صورت $x_1 x_2 = f^2$ درمی‌آید، که معادله نیوتون نامیده می‌شود. آیا از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که شیء و تصویر همواره در يك سمت کانون اند؟ [داهنمایی: توجه کنید که $x_1 = FP = OP - OF$ و همین‌طور است برای x_2 .]

۱۵۰۲۱ اگر $1/p + 1/q = 1/r$ باشد، ثابت کنید که معادله (۲۰۲۱) به زاویه β ، یعنی به رابطه $p/AP = q/AQ$ بستگی ندارد، مگر در حالت بدیهی که شیء در مرکز آینه باشد. نشان دهید که این امر در معادله (۲۰۲۱) نیز صادق است. آیا این شرط با معادله (۲۰۲۱) سازگار است؟ از آن چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱۶۰۲۱ با فرض اینکه f فاصله کانونی يك آینه کروی و M بزرگنمایی آن است، ثابت کنید که فاصله شیء و تصویر بترتیب برابرند با $p = f(M - 1)/M$ و $q = -f(M - 1)$.

۱۷۰۲۱ ثابت کنید که تمام پرتوهای موازی با محور يك آینه سهمی شکل (شکل ۳۶۰۲۱)، بدون توجه به فاصله آنها از محور، پس از بازتاب از کانون آینه می‌گذرند.



شکل ۳۶۰۲۱

۱۸۰۲۱ ماده شفاف به ضریب شکست ۱٫۵ دارای يك سطح کروی کاو به شعاع ۶۰ m است. فاصله کانونی این عدسی را حساب کنید. برای شیئی که در فاصله (الف) ۲۰۴۰ m (ب) ۱۶۰ m و (ج) ۶۰ m از عدسی قرار دارد جای تصویر و بزرگنمایی را پیدا کنید. همین مسئله را برای يك سطح کروی کوژ از نو حل کنید.

۱۹۰۲۱ يك حباب کوچک هوا در فاصله ۵۰ cm از مرکز يك کره شیشه‌ای به قطر ۲ cm قرار دارد. شخصی در امتداد خط واصل مراکز کره و حباب، از دو راستای مخالف به حباب نگاه می‌کند. محل تصویر و بزرگنمایی حباب را حساب کنید. ضریب شکست شیشه برابر $۱٫۵$ است.

۲۰۰۲۱ شعاع يك کره شفاف به ضریب شکست n (نسبت به هوا) برابر ۳ است. جسمی به فاصله ۴۳ از مرکز کره قرار دارد. جای تصویر نهایی را پیدا کنید. مسیر پرتو را در

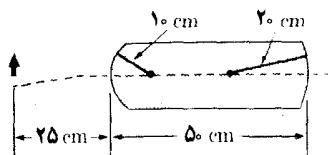
داخل کره رسم کنید.

۲۱.۲۱ يك سر میله‌ای شفاف به طول 40 cm را درمقطع قائم بریده و سر دیگر آن را به شکل نیمکره به شعاع 12 cm درآورده‌اند. جسمی روی محور میله و به فاصله 10 cm از سر نیمکره آن قرار دارد. (الف) تصویر نهایی در کجا تشکیل می‌شود؟ (ب) بزرگنمایی چقدر است؟ ضریب شکست را 1.5 بگیرید.

۲۲.۲۱ دو سر يك میله شیشه‌ای به قطر 10 cm و ضریب شکست 1.5 را پس از تراشیدن و صیقل دادن به شکل نیمکره‌های کوژ درآورده‌اند. شعاع انتهای سمت راست برابر 5 cm و از آن سمت چپ 10 cm است. طول میله، بین دو رأس، 60 cm است. پیکانی به طول 1 mm ، عمود بر محور میله و به فاصله 20 cm از رأس سمت راست آن، شیء مقابل سطح اول را تشکیل می‌دهد. (الف) چه چیزی شیء سطح دوم را تشکیل می‌دهد؟ (ب) فاصله این شیء از سطح دوم چقدر است؟ (ج) این شیء حقیقی است یا مجازی؟ (د) طول تصویر نهایی چقدر است؟

۲۳.۲۱ میله مسئله ۲۲.۲۱ را (بدون تغییر انحنای دوسر آن) آنقدر کوتاه می‌کنند که فاصله دو رأس آن برابر 10 cm شود. (الف) فاصله شیء از سطح دوم چقدر است؟ (ب) شیء حقیقی است یا مجازی؟ نسبت به شیء اول مستقیم است یا وارون؟ (ج) طول تصویر نهایی چقدر است؟

۲۴.۲۱ قاعده‌های يك میله استوانه‌ای شکل شیشه‌ای به ضریب شکست 1.5 ، دو سطح کروی کوژ با شعاع انحنای 10 cm و 20 cm اند (شکل ۳۷.۲۱). طول میله بین دو رأس 50 cm است. پیکانی به طول 1 mm ، در راستای عمود بر محور میله و به فاصله 25 cm از رأس سطح اول قرار دارد. (الف) جا و طول تصویر پیکان را که سطح اول تشکیل می‌دهد و (ب) جا و طول تصویری را که هر دو سطح تشکیل می‌دهند پیدا کنید. تصاویر حقیقی‌اند یا مجازی؟



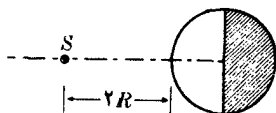
شکل ۳۷.۲۱

۲۵.۲۱ نقطه‌های کانونی دستگاهی را که در مسئله ۲۴.۲۱ شرح دادیم تعیین کنید. این مسئله را از راه ترسیم حل کنید.

۲۶.۲۱ دو سر يك میله شیشه‌ای به ضریب شکست 1.5 را، پس از تراشیدن و صیقل دادن، به صورت دو نیمکره به شعاع 5 cm درآورده‌اند. اگر شیئی به فاصله 20 cm از يك سر

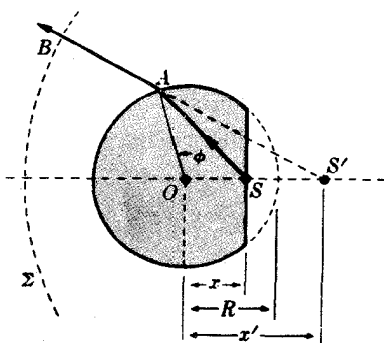
روی محور میله قرار گیرد تصویر نهایی آن به فاصله ۲۰ cm از سر دیگر میله تشکیل می‌شود. طول میله چقدر است؟

۲۷۰۲۱. نیمی از یک کره شیشه‌ای به ضریب شکست ۱.۵ و شعاع R ، مطابق شکل ۳۸۰۲۱، نقره‌اندود شده است. شیء کوچکی روی خطی که از مرکز کره و رأس نیمکره می‌گذرد، به فاصله $۲R$ از رأس نیمکره دیگر قرار گرفته است. جای تصویر نهایی را بعد از انجام تمام بازتابها و شکستها پیدا کنید.



شکل ۳۸۰۲۱

۲۸۰۲۱. یک کره شیشه‌ای به ضریب شکست n و شعاع R را که در نقطه S و به فاصله x از مرکز آن با صفحه‌ای عمود بر OS قطع شده است (شکل ۳۹۰۲۱) در نظر بگیرید. اگر $x = R/n$ باشد، ثابت کنید که تمام پرتوهای که از چشمه نقطه‌ای S به کره شیشه‌ای داخل و از آن خارج شوند، همانند پرتوهایی اند که از نقطه S' می‌آیند؛ S' روی محور OS و به فاصله $x' = nR$ از O قرار دارد. [دانهمایی: ثابت کنید که امتداد تمام پرتوهای شکست به سمت عقب، به ازای تمام مقادیر ϕ و مقادیر داده x و x' از S' می‌گذرند].



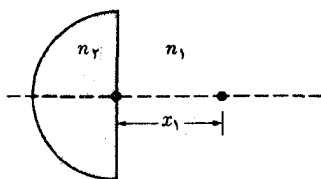
شکل ۳۹۰۲۱

۲۹۰۲۱. ثابت کنید که در شکست روی یک سطح کروی، اگر $1/p + 1/q = 1/r$ باشد، معادله (۱۳۰۲۱) به زاویه β بستگی ندارد و ضمناً درستی معادله (۱۵۰۲۱) را نیز می‌رساند. در این صورت ثابت کنید که وضع آستیگماتیک شیء برابر است با

وضع تصویر چگونه است؟ $p = (n_1 + n_2)r/n_1$

۳۰.۲۱ مطابق شکل ۴۰.۲۱، ماده‌ای به شکل نیمکره به شعاع R و ضریب شکست n_2 در محیطی به ضریب شکست n_1 قرار دارد. شیء روی محور و به فاصله x_1 از مرکز جای دارد. اگر فاصله تصویر از مرکز را x_2 بگیریم، ثابت کنید که

$$\frac{n_1^2}{x_1} - \frac{n_2^2}{x_2} = \frac{n_2(n_2 - n_1)}{R}$$



شکل ۴۰.۲۱

۳۱.۲۱ برای يك سطح كروي شكستار که دو محیط به ضرایب شکست n_1 و n_2 را از هم جدا می‌کند درستی رابطه $f_o f_i = f_o f_i$ را ثابت کنید. x_1 فاصله شیء از کانون اول و x_2 فاصله تصویر از کانون دوم است.

۳۲.۲۱ ثابت کنید که شکست در سطح کروی از رابطه زیر پیروی می‌کند

$$n_1 y_1 \sin \alpha_1 = n_2 y_2 \sin \alpha_2$$

α_1 و α_2 زاویه‌های نشان داده شده در شکل ۸.۲۱ و y_1 و y_2 بترتیب طول شیء و تصویر آن‌اند. در نتیجه برای پرتوی که از داخل چندین سطح شکستار، که مرکزهای آنها روی يك خط قرار دارند می‌گذرد، رابطه $ny \sin \alpha = \text{const}$ درست است. این رابطه را فرمول هلمهولتز می‌نامند. [داهنمایی: با مراجعه به شکل ۸.۲۱، از رابطه سینوسها در قانون اسنل و تشابه مثلثهای CAB و CaB در شکل ۱۱.۲۱ استفاده کنید.]

۳۳.۲۱ حالت‌های ممکن عدسیهای مختلفی را رسم کنید که از ترکیب دو سطح که قدر مطلق شعاع انحناهای آنها ۱۰ cm و ۲۰ cm است به دست می‌آیند. کدام عدسیها همگرا و کدام عدسیها واگرا هستند؟ اگر عدسیها از شیشه‌ای به ضریب شکست ۱٫۵ درست شده باشند فاصله کانونی هر عدسی را به دست آورید.

۳۴.۲۱ يك عدسی دو کوژ دارای ضریب شکست ۱٫۵ و شعاعهای ۲۰ cm و ۳۰ cm است. فاصله کانونی آن را پیدا کنید. جای تصویر و بزرگنمایی شیئی را که در فاصله‌های (الف) ۸۰ cm، (ب) ۴۸ cm، (ج) ۴۰ cm، (د) ۲۴ cm و (ه) ۲۰ cm از

عدسی قرار دارد به دست آورید. همچنین حالت يك شیء مجازی را بررسی کنید، که در فاصله $m 20$ در پشت عدسی قرار دارد.

۳۵.۲۱ يك عدسی دو کاو دارای ضریب شکست ۱.۵ و شعاعهای $m 20$ و $m 30$ است. (الف) فاصله کانونی آن را پیدا کنید. (ب) وضع تصویر و بزرگنمایی يك شیء واقع در $cm 20$ از عدسی را معین کنید. همچنین حالتی را در نظر بگیرید که در آن شیء مجازی در فاصله (ج) $m 40$ و (د) $m 20$ از عدسی قرار دارد.

۳۶.۲۱ يك دستگاه عدسی از دو عدسی همگرا به فاصله‌های کانونی $cm 30$ و $cm 60$ تشکیل شده است. درباره محل تقاطع يك پرتو با محور اصلی به صورت تابعی از فاصله بین دو عدسی بحث کنید. این پرتو در آغاز با محور اصلی موازی است. حالتی را در نظر بگیرید که در آن فاصله بین دو عدسی: (الف) $cm 20$ ، (ب) $cm 50$ ، (ج) $cm 90$ و (د) $cm 120$ باشد. همین مسئله را برای حالتی که عدسی اول واگرا است از نو حل کنید.

۳۷.۲۱ يك عدسی تصویر يك شیء را روی پرده‌ای که در فاصله $cm 12$ از آن قرار دارد تشکیل می‌دهد. هنگامی که عدسی را $cm 2$ از شیء دور می‌کنند، برای اینکه تنظیم بهم - نخورد، پرده باید $cm 2$ به شیء نزدیکتر شود. فاصله کانونی عدسی چقدر است؟

۳۸.۲۱ شیئی به فاصله $cm 18$ از يك پرده قرار دارد. (الف) در چه فاصله‌ای بین شیء و پرده باید يك عدسی به فاصله کانونی $cm 4$ قرار داده شود تا تصویر روی پرده بیفتد؟ (ب) در این حالت بزرگنمایی عدسی چقدر است؟

۳۹.۲۱ فاصله کانونی يك عدسی همگرا برابر $m 40$ است. اگر بزرگنمایی برابر (الف) 6 ، (ب) 1.5 ، (ج) -1 ، (د) 3 و (ه) 8 باشد، جای شیئی و نوع تصویر را تعیین کنید.

۴۰.۲۱ فاصله کانونی يك عدسی همگرا $m 60$ است. جای شیئی را پیدا کنید که تصویر آن (الف) حقیقی و سه بار بزرگ شود. (ب) حقیقی و 3 بار کوچک شود و (ج) مجازی و سه بار بزرگ شود.

۴۱.۲۱ فاصله کانونی و نوع عدسی را به دست آورید که از شیء واقع در $m 120$ خود، تصویری (الف) حقیقی و به فاصله $m 80$ از عدسی، (ب) مجازی و به فاصله $m 32$ از عدسی، (ج) مجازی و به فاصله $m 60$ از عدسی، (د) حقیقی و دو برابر شیء، (ه) مجازی و دو برابر شیء، (و) حقیقی و به اندازه $1/3$ برابر شیء و (ز) مجازی و به اندازه $1/3$ شیء تشکیل می‌دهد.

۴۲.۲۱ يك عدسی نازک به ضریب شکست n_2 را در محیط به ضرایب شکست n_1 و n_2 احاطه کرده‌اند. نشان دهید که رابطه‌ای که وضع شیء و تصویر را بهم مربوط می‌کند چنین است

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{(n_1 - n_2)}{r_1} + \frac{(n_2 - n_3)}{r_2}$$

۴۳.۲۱ يك ظرف پر از آب دارای روزه‌های است که يك عدسی دو کوژ به ضریب شکست ۱.۵ و شعاع ۳۰cm در آن نصب شده است. فاصله کانونی را، برای يك پرتو موازی با محور که از داخل و خارج ظرف به عدسی نزدیک می‌شود پیدا کنید. جای تصویر چشمه‌ای را که در داخل ظرف و به فاصله (الف) ۳۰cm و (ب) ۴۵cm از عدسی قرار دارد پیدا کنید. ضریب شکست آب برابر است با ۱.۳۳.

۴۴.۲۱ يك عدسی نازک شیشه‌ای دو کوژ به ضریب شکست ۱.۵، در هوا، دارای فاصله کانونی ۳۰cm است. عدسی را به سر يك ظرف پر از آب (با ضریب شکست ۱.۳۳) محکم می‌چسبانیم. در انتهای مقابل ظرف، آینه تختی به فاصله ۸۰cm از عدسی قرار دارد. جای تصویری را که دستگاه عدسی، آب، ظرف از شیء واقع بر محور عدسی و به فاصله ۹۰cm در سمت چپ عدسی تشکیل می‌دهد، پیدا کنید. تصویر حقیقی است یا مجازی؟ مستقیم است یا وارون؟

۴۵.۲۱ در يك عدسی کروی اگر x_1 فاصله کانون شیئی از شیء و x_2 فاصله کانون تصویر از تصویر باشد، ثابت کنید که $x_1 x_2 = -f^2$.

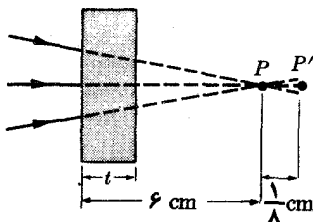
۴۶.۲۱ با استفاده از معادله (۱۴.۲۱) برای محاسبه شکست روی هر يك از رویه‌های يك عدسی کروی، نشان دهید که فاصله کانونی با رابطه زیر داده می‌شود

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) + \frac{h^2}{2} \frac{n-1}{n^2} \times \left[\left(\frac{1}{r_2} + \frac{n+1}{f} \right) \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{f} \right)^2 - \frac{1}{r_2^2} \right]$$

که در آن f از معادله (۱۸.۲۱) محاسبه می‌شود. از این نتیجه مقدار ابیراهی کروی عدسی را، که با اختلاف فاصله‌های کانونی يك پرتو نزدیک به محور و يك پرتو نزدیک به لبه عدسی تعریف می‌شود، بر آورد کنید.

۴۷.۲۱ ضریب شکست يك عدسی دو کوژ برابر ۱.۵ و شعاع هر دو سطح یکسان و برابر ۱۰cm است. شعاع عدسی نیز برابر ۸cm است. فاصله کانونی و ابیراهی کروی را پیدا کنید. مسئله را برای يك عدسی دو کاوا از نوحل کنید.

۴۸.۲۱ پرتوهایی که از يك عدسی همگرا می‌آیند، مطابق شکل ۴۱.۲۱، در نقطه تصویر P یکدیگر را قطع می‌کنند. شیشه‌ای به ضریب شکست ۱.۵ و ضخامت t در سر راه پرتوها (مطابق شکل) قرار می‌دهند تا تصویر در نقطه P' تشکیل شود. ضخامت t چقدر است؟



شکل ۴۱.۲۱

۴۹.۲۱ نمودار q را بر حسب p برای (الف) يك آینه كروی كه از معادله (۳.۲۱) پیروی می‌كند و (ب) يك عدسی كروی كه از معادله (۱۹.۲۱) پیروی می‌كند، رسم كنید. در هر مورد تحقیق كنید كه نتیجه يك هذلولی متساوی الساقین است. همچنین در هر مورد نمودار بزرگنمایی را بر حسب p رسم كنید.

۵۰.۲۱ ضریب شكست يك منشور ۱۵° و زاویه رأس آن ۶۰° است. (الف) انحراف يك پرتو تابش به زاویه ۴۰° را حساب كنید. (ب) كمینه انحراف و زاویه تابش متناظر با آن را پیدا كنید.

۵۱.۲۱ كمینه انحراف يك منشور ۳۰° و زاویه رأس آن ۵۰° است. ضریب شكست و زاویه تابش متناظر با كمینه انحراف را پیدا كنید.

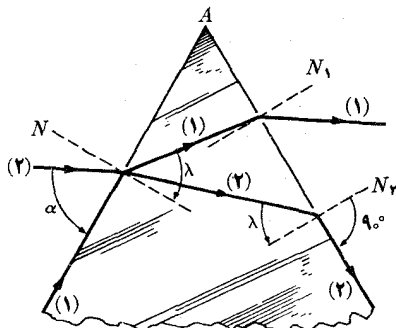
۵۲.۲۱ نشان دهید كه برای شكست در منشور داریم

$$\sin \frac{1}{2}(\delta + A) = n \sin \frac{1}{2}A \frac{\cos \frac{1}{2}(r - r')}{\cos \frac{1}{2}(i - i')}$$

همچنین نشان دهید كه هر گز $\cos(r - r')/2$ از $\cos(i - i')/2$ كوچكتر نمی‌شود. در این صورت نتیجه بگیريد كه شرط كمینه انحراف عبارت است از $i = i'$.

۵۳.۲۱ اگر زاویه رأس منشور خیلی كوچك باشد و نیز پرتوهای تابش تقریباً بر یکی از رویه‌های منشور عمود باشند، ثابت كنید كه انحراف برابر است با $\delta = (n - 1)A$.

۵۴.۲۱ اگر پرتوی به رویه دوم يك منشور با زاویه‌ای بزرگتر از زاویه بحرانی برسد، بازتاب كلي رخ می‌دهد و پرتو به جای خارج شدن از منشور به سوی عقب بازتاب می‌كند. این اصل را در بیشتر اسباب‌بهای اپتیکی به كار می‌برند. اگر $n > 1$ باشد ثابت كنید، شرط اینکه حداقل يك پرتو از منشور خارج شود این است كه $A \leq 2\lambda$ ، كه λ زاویه بحرانی است. آنگاه درباره گستره مقادیر i برای حالتی كه پرتو از طرف دیگر خارج می‌شود بحث كنید. این گستره در شكل ۴۲.۲۱ با زاویه α داده شده است. ثابت كنید كه اندازه زاویه α از رابطه $\cos \alpha = n \sin(A - \lambda)$ به دست می‌آید. در تغییر α بر حسب A بحث كنید.



شکل ۴۲.۲۱

۵۵.۲۱ بحث مسئله پیش را در مورد منشوری به زاویه رأس 45° و ضریب شکست ۱٫۵ به کار ببرید. مقدار α را حساب کنید. مسیر پرتوی را پیدا کنید که به طور عمود به یکی از رویه‌های منشور می‌تابد. همچنین این بحث را برای حالتی که زاویه رأس 35° است بررسی کنید.

۵۶.۲۱ با استفاده از داده‌های جدول ۳.۲۱، ضرایب A و B در فرمول کوشی را برای ضریب شکست شیشه کرون پیدا کنید.

۵۷.۲۱ با استفاده از نتیجه مسئله پیش، در منشوری از شیشه کرون به زاویه رأس 50° افتراق زاویه‌ای متناظر با خطهای C و F فرانهور را برای پرتوی به زاویه تابش 30° تعیین کنید.

۵۸.۲۱ دستگاهی از دو عدسی به هم چسبیده تشکیل شده است. یکی از عدسیها تخت-کاو از شیشه فلینت و دیگری دو کوژ از شیشه کرون است. شعاع رویه مشترک 20 cm و شعاع رویه دیگر عدسی کرون 12 cm است. فاصله کانونی دستگاه و ایراهای رنگی آن را پیدا کنید.

۵۹.۲۱ عدسی چشمی يك اسباب اپتیکی از دو عدسی همگرا با فاصله‌های کانونی یکسان 5 cm تشکیل شده است. فاصله دو عدسی 25 cm است. فاصله کانونی دستگاه را پیدا کنید. اندازه گیری از طرف عدسی نزدیکتر صورت می‌گیرد.

۶۰.۲۱ فاصله کانونی عدسی شیئی يك میکروسکوپ برابر 4 mm است. تصویری که این عدسی تشکیل می‌دهد در فاصله 180 mm از کانون تصویر قرار دارد. فاصله کانونی عدسی چشمی 3125 mm است. (الف) بزرگنمایی میکروسکوپ چقدر است؟ (ب) اگر فاصله دو نقطه در حدود 1 mm باشد این دو نقطه با چشم غیر مسلح قابل تشخیص اند. کمینه فاصله بین دو نقطه‌ای که به کمک این میکروسکوپ قابل تمیزند چقدر است؟

۶۱.۲۱ قطر ماه برابر $3.5 \times 10^3 \text{ km}$ و فاصله آن از زمین برابر $3.8 \times 10^5 \text{ km}$ است. دوربینی با فاصله کانونی شیئی 4 m و فاصله کانونی چشمی 10 cm ، قطر زاویه‌ای (قطر ظاهری) تصویر ماه را چقدر نشان می‌دهد؟

۶۲.۲۱ با مراجعه به شکل ۳۹.۲۱، ثابت کنید که زمان لازم برای اینکه پرتوی از S به هر نقطه از سطح موج Σ برود مستقل از ϕ و برابر $S'B/c$ است. $S'B$ شعاع Σ است.

مقدمه	۱۰۲۲
تداخل موجهای دو چشمه همزمان	۲۰۲۲
تداخل موجهای چند چشمه همزمان	۳۰۲۲
موج ایستاده یک بعدی	۴۰۲۲
موج ایستاده و معادله موج	۵۰۲۲
موج الکترومغناطیسی ایستاده	۶۰۲۲
موج ایستاده دوبعدی	۷۰۲۲
موج ایستاده سه بعدی. کاواکهای باز آوا	۸۰۲۲
موجبرها	۹۰۲۲

۱.۲۲ مقدمه

یکی از سرشتیهای بسیار مهم حرکت موجی پدیدهٔ تداخل است. این پدیده هنگامی رخ می‌دهد که دو یا چند حرکت نوسانی همزمان در یک مکان باشند. در فصل ۱۲ در مورد برهم نهی دو حرکت هماهنگ ساده بحث کردیم، همان نظریه را می‌توان مستقیماً در اینجا در مورد موجهای هماهنگ یا تکفام به کار برد.* یکی از جاهایی که تداخل روی می‌دهد ناحیه‌ای است که در آنجا موجهای تابش و بازتاب برهم منطبق می‌شوند. در واقع، یکی از روشهای بسیار معمول تولید تداخل نیز همین است. یک مثال مهم دیگر تداخل حرکت موجی است که در ناحیهٔ محدودی از فضا محبوس است. ریسمانی که دو سر آن ثابت شده باشد، یا آبگون در لوله و یا موج الکترومغناطیسی در کاواک فلزی مثالهایی از این گونه‌اند. بنا بر این تداخل، موجهای ساکن به وجود می‌آورد.

برای اینکه بتوان فرمولهای فصل ۱۲ را در اینجا به کار برد. باید برای موج هماهنگ که در راستای X حرکت می‌کند، به جای معادلهٔ (۵.۱۸)، بنویسیم

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t - kx) \quad (1.22)$$

و نیز برای موج هماهنگ که در راستای $-X$ حرکت می‌کند، به جای معادلهٔ (۹.۱۸)، می‌توان نوشت

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t + kx) \quad (2.22)$$

در اینجا تنها علامت تغییر کرده است و تا هنگامی که سازگاری علامتها محفوظ بمانند، همچنانکه در پایان بخش ۲.۱۸ در معادلهٔ (۱۰.۱۸) اشاره کردیم و نیز قبلاً در مثال ۲.۲۰ از آن استفاده کردیم، شیوهٔ درستی است.

چنانکه در فصلهای پیش گفته شد، نظریه‌ای که در اینجا به شرح آن می‌پردازیم در مورد هر حرکت موجی به کار می‌رود، ولی مثالها و کاربردهای ما معمولاً موجهای الکترومغناطیسی هستند.

۲.۲۲ تداخل موجهای دو چشمهٔ همزمان

دو چشمهٔ نقطه‌ای S_1 و S_2 (شکل ۱.۲۲) در حرکت نوسانی همفاز با بسامد زاویه‌ای ω یکسان و دامنه‌های ξ_1 و ξ_2 را در نظر می‌گیریم. موجهای کروی آنها بترتیب عبارت‌اند از

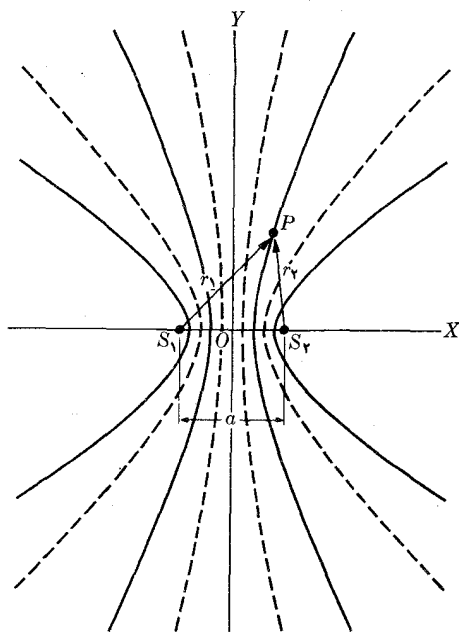
$$\xi_1 = \xi_{01} \sin(\omega t - kr_1) \quad (3.22)$$

و

* به دانشجوی توصیه می‌کنیم که قبل از مطالعهٔ این فصل، به فصل ۱۲ مراجعه کند و از بخش ۷.۱۲ تا ۹.۱۲ را دوباره بخواند.



(ب)



(الف)

شکل ۱۰.۲۲ (الف) خطهای گره و شکم حاصل از تداخل موجهای دوچشمه همزمان (ب) نقش واقعی تداخل موجهای سطح آب.

$$\xi_2 = \xi_0 \sin(\omega t - kr_2) \quad (4.22)$$

r_1 و r_2 فاصله‌های یک نقطه بترتیب از S_1 و S_2 اند. توجه کنید، با اینکه چشمه‌ها یکسان‌اند، اگر r_1 و r_2 متفاوت باشند در هر نقطه‌ای مانند P دامنه یکسان تولید نمی‌کنند. زیرا، چنانکه در بخش ۱۱-۱۸ دیدیم، دامنه موج کروی متناسب با $1/r$ کاهش می‌یابد. فرض کنید که ξ یک خاصیت فیزیکی نرده‌ای، مثلاً آشفتگی فشار باشد. اگر ξ با یک کمیت برداری متناظر باشد، ξ_1 و ξ_2 را همراستا می‌گیریم به گونه‌ای که بتوان ترکیب این دو موج را به روش برداری بررسی کرد. اگر معادله‌های (۳.۲۲) و (۴.۲۲) را با معادله (۱۰.۱۲) [یعنی، $\xi = A \sin(\omega t + \alpha)$] مقایسه کنیم، کمیت‌های kr_1 و kr_2 نقش فازهای اولیه را بازی می‌کنند. اختلاف فاز بین دو حرکت موجی در نقطه P (با یادآوری اینکه $k = 2\pi/\lambda$ است) برابر می‌شود با

$$\delta = kr_1 - kr_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) \quad (5.22)$$

اگر روش بردارهای چرخان بخش ۷.۱۲ را به کار ببریم، دو حرکت موجی

تداخل کننده را می توان با بردارهای چرخانی نمایش داد که طول آنها بترتیب برابر است با $\xi_{0,1}$ و $\xi_{0,2}$ و با محور X زاویه های $\alpha_1 = kr_1$ و $\alpha_2 = kr_2$ می سازند (شکل ۲.۲۲). دامنه ξ_0 و فاز α حرکت موجی برآیند با بردارهای چرخان آنها داده می شوند. بنابراین دامنه آشفتگی برآیند در نقطه P را می توان به صورت زیر نوشت

$$\xi_0 = \sqrt{\xi_{0,1}^2 + \xi_{0,2}^2 + 2\xi_{0,1}\xi_{0,2} \cos \delta} \quad (۶.۲۲)$$

از معادله (۶.۲۲) پیدا است، بر حسب اینکه

$$\cos \delta = +1 \text{ یا } -1 \text{ و } \delta = 2n\pi \text{ یا } (2n+1)\pi$$

باشد، n يك عدد درست مثبت یا منفی است و ξ بین $\xi_{0,1} + \xi_{0,2}$ و $\xi_{0,1} - \xi_{0,2}$ قرار دارد. در حالت اول دو حرکت موجی دارای بیشینه تقویت اند، یعنی تداخل آنها سازنده است و در حالت دوم دارای بیشینه تضعیف اند، یعنی تداخل آنها ویرانگر است. بنابراین داریم

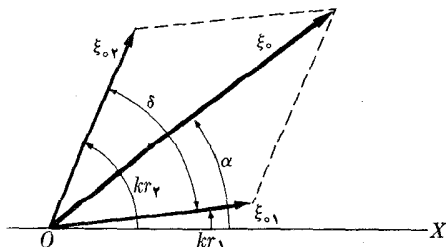
$$\delta = \begin{cases} 2n\pi & \text{تداخل سازنده} \\ (2n+1)\pi & \text{تداخل ویرانگر} \end{cases}$$

در این صورت با استفاده از معادله (۵.۲۲)، می توان نوشت

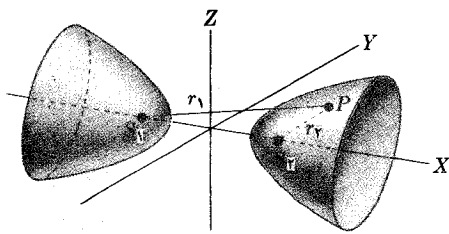
$$\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \begin{cases} 2n\pi & \text{تداخل سازنده} \\ (2n+1)\pi & \text{تداخل ویرانگر} \end{cases} \quad (۷.۲۲)$$

$$r_1 - r_2 = \begin{cases} n\lambda & \text{تداخل سازنده} \\ (2n+1)\frac{\lambda}{2} & \text{تداخل ویرانگر} \end{cases} \quad (۸.۲۲)$$

ولی $r_1 - r_2 = \text{const}$ تعریف يك هذلولی به کانونهای S_1 و S_2 است، یا در واقع چون بحث در فضای سه بعدی است این رابطه سطوح هذلولی دوار، مانند شکل ۳.۲۲، را تعریف می کند. بنابراین از معادله (۸.۲۲) نتیجه می گیریم که روی هذلولیهای به معادله های



شکل ۲.۲۲ دامنه برآیند دو موج در تداخل. محور X به عنوان مبدأ فاز برگزیده شده است.



شکل ۳.۲۲ سطوحی با اختلاف فاز ثابت برای موجهای کروی تولیدشده از دوچشمه نقطه ای S_1 و S_2 .

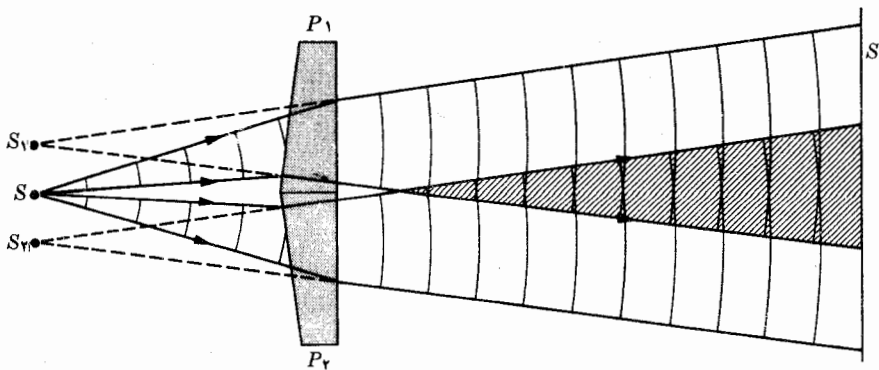
$\dots, \pm 3\lambda, \pm 2\lambda, \pm \lambda$ ، دو موج درحالی که یکدیگر را تقویت می کنند باهم تداخل می کنند. این سطوحها را سطحهای شکم یا پادگروه می نامند. روی هدلولیهایی به معادله های $\dots, \pm 3\lambda/2, \pm \lambda/2$ ، دو موج درحالی که همدیگر را تضعیف می کنند باهم تداخل می کنند. این سطوحها را سطحهای گره می نامند. بنابراین نقش کلی را توالی سطحهای شکم و گره تشکیل می دهد. محل تقاطع این سطوحها بسا صفحه ای که از محور X می گذرد هدلولیهایی شکل ۱۰.۲۲ است.

وضع توصیف شده به گونهای است که موج برآیند در هر نقطه از فضا دارای یک دامنه سرشتی با معادله (۶.۲۲) است. بنابراین داریم

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t - \alpha)$$

α همان زاویه نشان داده شده در شکل ۲.۲۲ است. بنابراین تداخل ظاهر موج پیشرو را ندارد بلکه دارای وضع ایستاده است که در آن دامنه حرکت در هر نقطه از فضا مقداری معین است. دلیل آن این است که دوچشمه با بسامد یکسان نوسان می کنند و اختلاف فازشان ثابت است و در این صورت آنها را همدوس می نامند. ولی اگر دوچشمه دارای بسامد یکسان نباشند یا اختلاف فاز آنها به طور نامنظم با زمان تغییر کند، نقش تداخلی ایستاده مشاهده نمی شود و چشمه ها را ناهمدوس می نامند. این وضع توسط چشمه های نوری شامل اتمهای یکسان، که نور هم بسامد گسیل می کنند، به وجود می آید. چون در هر چشمه تعداد بینهایت زیادی اتم وجود دارد و این اتمها همفاز نوسان نمی کنند، نقش تداخلی ناواضح دیده می شود.

برای رفع این مشکل و تولید دوباریکه نور همدوس چندین وسیله ساخته شده است. یکی از معمولترین آنها دومنشور فرنل است که در شکل ۴.۲۲ نشان داده ایم. این وسیله از دو منشور P_1 و P_2 تشکیل شده است. نور تابشی از چشمه S در هر کدام از منشورها شکسته و به دو باریکه همدوس تجزیه می شود و به نظر می رسد که از دوچشمه همدوس S_1 و S_2 تابیده اند. این چشمه ها تصویرهای چشمه S اند که به وسیله منشورها تشکیل می شوند. در این حالت همدوسی حتمی است، زیرا هر دو باریکه نور از یک چشمه واحد منتشر می شوند. باریکه نورها در ناحیه هاشور خورده تداخل می کنند. برای اختلاف فازهای

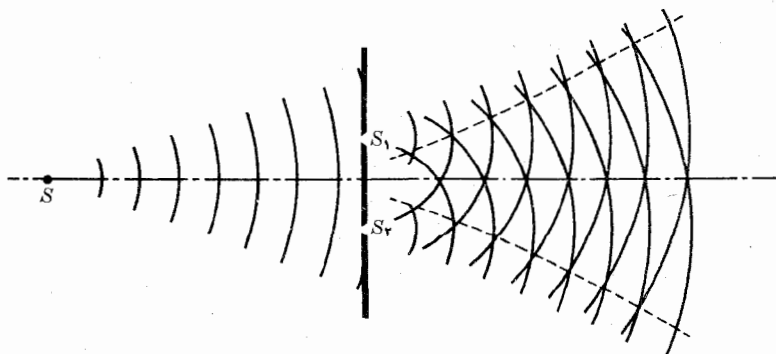


شکل ۴.۲۲ دومنشور فرنل.

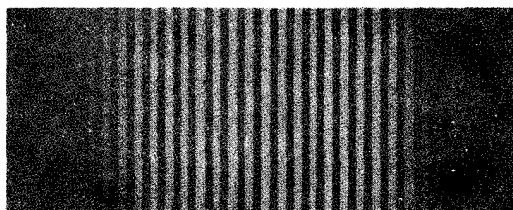
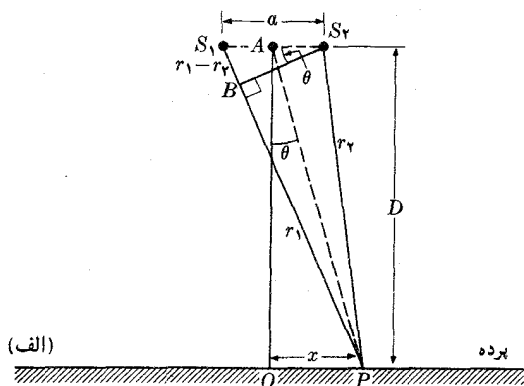
بزرگ، همدوسی ازین می رود زیرا گرچه باریکه نورهایی که تداخل می کنند از چشمه واحدند ولی در دو لحظه با فاصله زمانی زیاد تولید می شوند، به گونه ای که در مقیاس میکروسکوپی، چشمه در این دو لحظه یکی نیست و فازها ثابت نیستند.

یک وسیله از این هم ساده تر وسیله ای است که توماس یانگ (۱۱۵۲-۱۲۰۸) / (۱۷۷۳-۱۸۲۹) به کار برده است. یانگ در آزمایشهای اولیه خود، به گونه تعیین کننده ای، ماهیت موجی نور را ثابت کرد. وسیله یانگ (شکل ۵.۲۲) عبارت است از دو روزنه یا شکاف کوچک S_1 و S_2 که روی پرده ای در مقابل چشمه S قرار دارد. بنا به اصل هویگنس، شکافهای S_1 و S_2 همانند دو چشمه فرعی و همدوس عمل می کنند و امواج حاصل از این دو چشمه درست دیگر (راست) پرده باهم تداخل می کنند.

در مورد نور، چنانکه شکل ۶.۲۲ الف نشان می دهد، نقش تداخلی روی پرده ای بدموازیات دو چشمه S_1 و S_2 مشاهده می شود. چنانکه در شکل ۶.۲۲ ب مشاهده می شود، یک سری فریز یک در میان تاریک و روشن روی پرده دیده می شود. این فریزها از تقاطع



شکل ۵.۲۲ تداخل دو چشمه همدوس. آزمایش دو شکاف یانگ.



(ب)

شکل ۶.۲۲ (الف) نمودار طس حواره تعیین شدت موج
برایند روی پرده از تداخل دوچشمه همدوس، (ب) عکس
فریزهای تداخلی حاصل از دوشکاف روی پرده، که با یک
چشمه نقطه‌ای تکفام روشن شده‌اند. توجه کنید که در کنارها
به دلیل افت همدوسی فریزها محو شده‌اند.

پرده با هدلولیهای دوار سازنده سطحهای شکم و گره به وجود می‌آید. برای مشاهده نقش
تداخلی در سایر نواحی بیناب موجهای الکترومغناطیسی آشکارسازهای نوع دیگر به کار
می‌رود.

اگر a فاصله جدایی S_1 و S_2 از یکدیگر، از D (فاصله این شکافها از پرده) خیلی
کوچکتر باشد، می‌توان از اختلاف جزئی r_1 و r_2 چشم پوشید و دامنه‌های $\xi_{0,1}$ و $\xi_{0,2}$ را
عملاً برابر هم گرفت. در این صورت معادله (۶.۲۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\xi_0 = \xi_{0,1} \sqrt{2(1 + \cos \delta)} = 2\xi_{0,1} \cos \frac{1}{2} \delta$$

اگر زاویه θ به قدری کوچک باشد که بتوان نوشت $\sin \theta = \text{tg } \theta = x/D$ بنا به شکل
۶.۲۲ داریم $r_1 - r_2 = S_1 B = a \sin \theta = ax/D$ بنا بر این به دست می‌آید

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta = \frac{2\pi ax}{D\lambda} \quad (9.22)$$

در یک نقطه از پرده، شدت موج برآیند متناسب است با \cos^2 . در نتیجه داریم

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right) = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi ax}{D\lambda}\right) \quad (10.22)$$

I_0 شدت موج برآیند برای $\theta = 0$ است. توزیع شدت متناسب با \cos^2 را در شکل ۷.۲۲ نشان داده‌ایم. نقاط شدت بیشینه متناظرند با

$$\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = n\pi \quad \text{یا} \quad a \sin \theta = n\lambda$$

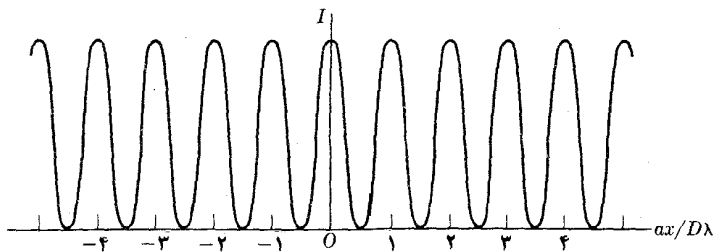
و همچنین متناظرند با

$$\frac{\pi ax}{D\lambda} = n\pi \quad \text{یا} \quad x = \frac{nD\lambda}{a} \quad (11.22)$$

n عدد درست مثبت یا منفی است. فاصله بین دو فریز پیاپی برابر است با $\Delta x = (D/a)\lambda$. بنابراین با اندازه‌گیری Δx ، D و a می‌توان طول موج λ را به دست آورد. در واقع روش بالا یکی از روشهای استاندارد برای اندازه‌گیری طول موج است.

مثال ۱۰.۲۲ در آزمایشی همانند با آزمایش یانگ، دو شکاف به اندازه 0.8 mm از یکدیگر فاصله دارند. این شکافها با نور تکفامی به طول موج $589 \times 10^{-7} \text{ m}$ روشن می‌شوند و نقش تداخلی روی پرده دیگری، که در فاصله 50 m از شکافها جای دارد، مشاهده می‌شود. فاصله بین دو فریز روشن و تاریک پیاپی را تعیین کنید.

حل: کمیتهای معادله ۱۱.۲۲ در این حالت عبارت‌اند از $\lambda = 589 \times 10^{-7} \text{ m}$ ، $D = 5 \times 10^{-1} \text{ m}$ و $a = 0.8 \text{ mm} = 8 \times 10^{-4} \text{ m}$. بنابراین جای فریزهای روشن با $x = n(D\lambda/a) = 377 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.377n \text{ mm}$ داده می‌شود. معمولاً فریزها را با ذره‌بین نگاه می‌کنند. فاصله بین فریزهای روشن برابر است با 0.377 mm . همین فاصله فریزهای تاریک را هم از یکدیگر جدا می‌کند.



شکل ۷.۲۲ توزیع شدت در نقش تداخلی حاصل از دو چشمه هم‌دوس.

مثال ۲۰۲۲ دربارهٔ نقش تداخلی دو چشمهٔ ناهمدوس و با بسامد یکسان بحث کنید.

حل: در این حالت ناهمدوسی از اختلاف فاز متغیر به وجود می‌آید. بنا بر این به جای معادله‌های (۳۰۲۲) و (۴۰۲۲) می‌توان نوشت

$$\xi_1 = \xi_{o1} \sin(\omega t - kr_1 - \phi) \quad \xi_2 = \xi_{o2} \sin(\omega t - kr_2)$$

ϕ اختلاف فاز اضافی است که به گونهٔ کاتوره‌ای با زمان تغییر می‌کند. در این صورت اختلاف فاز به صورت $\delta = 2\pi(r_1 - r_2)/\lambda + \phi$ در می‌آید و دامنهٔ برابند در نقطهٔ تداخل عبارت است از

$$\xi_o^2 = \xi_{o1}^2 + \xi_{o2}^2 + 2\xi_{o1}\xi_{o2} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) + \phi \right]$$

ولی در این حالت ξ_o نیز به سبب تغییر ϕ با زمان تغییر می‌کند. بنا بر این به جای ξ_o^2 بساید $(\xi_o^2)_{ave}$ را پیدا کنیم. ولی به دلیل تغییرات کاتوره‌ای ϕ داریم

$$\left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) + \phi \right] \right\}_{ave} = 0$$

در نتیجه به دست می‌آید

$$(\xi_o^2)_{ave} = \xi_{o1}^2 + \xi_{o2}^2$$

نظر به اینکه شدت با مجذور دامنه متناسب است می‌توان نوشت

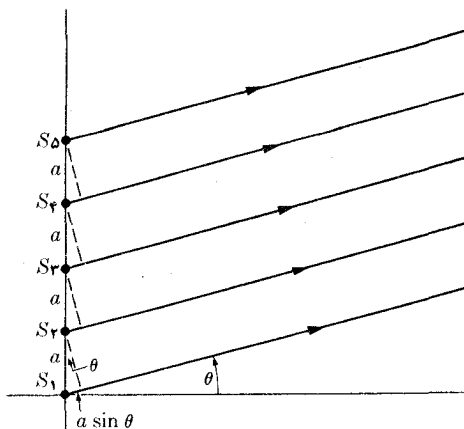
$$I_{ave} = I_1 + I_2$$

بنا بر این شدت میانگین برابند برابر است با مجموع تک تک شدت‌ها و هیچگونه افتاخیزی در شدت مشاهده نمی‌شود. شدت میانگین در تمام نقاط یکسان است. به عنوان مثال، به همین دلیل است که در دو لامپ الکتریکی فریزهای تداخلی مشاهده نمی‌شوند، زیرا توزیع اختلاف فاز بین اتمهای تابشی مربوط به آنها کاتوره‌ای است.

۳۰۲۲ تداخل موجهای چند چشمه همزمان

اکنون حالت چند چشمه همزمان و همسان راه، که مطابق شکل ۸۰۲۲ آرایشان خطی است، در نظر می‌گیریم. برای سهولت، فرض می‌کنیم که حرکت مسوجی برابند، نسبت به فاصلهٔ جدایی چشمه‌ها، در مسافت دوری مشاهده می‌شود، به گونه‌ای که پرتوهای تداخل کننده عملاً موازی اند. بین پرتوهای بی‌درپی اختلاف فاز ثابتی وجود دارد که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta \quad (12.22)$$

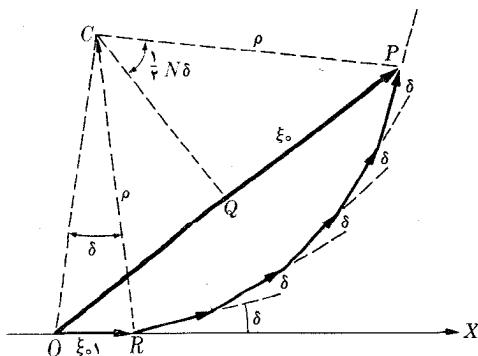


شکل ۸.۲۲ سری خطی چشمه‌های هم‌دوس و هم‌فاصله.

برای به‌دست آوردن دامنه برآیند در راستای مشاهده، که با زاویه ϕ مشخص شده است، باید برآیند بردارهای چرخان متناظر با هر چشمه را به‌دست آورد. اگر تمام چشمه‌ها یکسان باشند، بردارهای چرخان نیز دارای طول یکسان ξ_0 اند و مطابق شکل ۹.۲۲ هر بردار نسبت به بردارهای بعدی به اندازه زاویه δ انحراف پیدا می‌کند. با نشان دادن تعداد چشمه‌ها با N ، در این صورت یک ضلعی منتظم به‌دست می‌آید که مرکز آن C و شعاع آن ρ است و زاویه مرکزی OCP برابر $N\delta$ است. در مثلث COP داریم

$$\xi_0 = OP = \rho \sin \frac{1}{2} N\delta$$

همین‌طور، در مثلث COR که ناظر بر یک ضلع چندضلعی است، داریم



شکل ۹.۲۲ دامنه حاصل از تداخل موج‌های تولید شده توسط چشمه‌های خطی هم‌دوس و هم‌فاصله، در یک نقطه دلخواه

$$\xi_{01} = 2\rho \sin \frac{1}{2}\delta$$

از تقسیم این دو رابطه برهم برای حذف ρ به دست می آید

$$\xi_0 = \xi_{01} \frac{\sin \frac{1}{2} N\delta}{\sin \frac{1}{2} \delta} \quad (۱۳.۲۲)$$

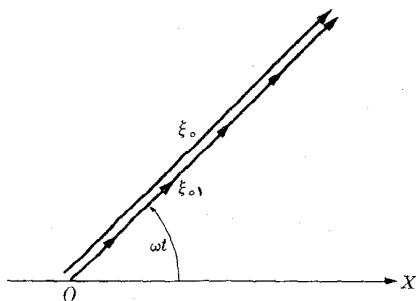
برای $N=2$ داریم $\xi_0 = 2\xi_{01} \cos \delta/2$ که با نتیجه قبلی، که برای دو چشمه یکسان در بخش ۲.۲۲ به دست آمد، یکی است. در این صورت شدت موجهای برابند، به دلیل متناسب بودن با ξ_0^2 ، برابر می شود با

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \frac{1}{2} N\delta}{\sin \frac{1}{2} \delta} \right)^2 = I_0 \left[\frac{\sin(N\pi a \sin \theta / \lambda)}{\sin(\pi a \sin \theta / \lambda)} \right]^2 \quad (۱۴.۲۲)$$

I_0 شدت هر چشمه، با ξ_{01}^2 متناسب است. رابطه (۱۴.۲۲) دارای بیشینه های کاملاً مشخصی، برابر با $N^2 I_0$ ، به ازای $\delta = 2\pi n$ یا

$$a \sin \theta = n\lambda \quad (۱۵.۲۲)$$

است. زیرا به ازای $\alpha = n\pi$ داریم $\sin N\alpha / \sin \alpha = \pm N$ که در حالت فوق $\alpha = \delta/2$ است. در این صورت مقدار $I = N^2 I_0$ به دست می آید. این نتیجه از شکل ۹.۲۲ قابل درک است، زیرا اگر $\delta = 2n\pi$ باشد، مطابق شکل ۱۰.۲۲، تمام عناصر برداری ξ_{01} موازی می شوند و مطابق معادله ۱۳.۲۲، دامنه برابند $\xi_0 = N\xi_{01}$ می شود. معادله (۱۵.۲۲)



شکل ۱۰.۲۲ دامنه برابند تداخل چشمه های خطی همفاصله در نقطه ای با اختلاف فاز صفر.

با معادله (۱۱.۲۲) که برای دو چشمه، با مشخصات یکسان، پیدا کردیم سازگار است. شدت به ازای $N\delta/2 = n'\pi$ یا

$$a \sin \theta = \frac{n'\lambda}{N} \quad (۱۶.۲۲)$$

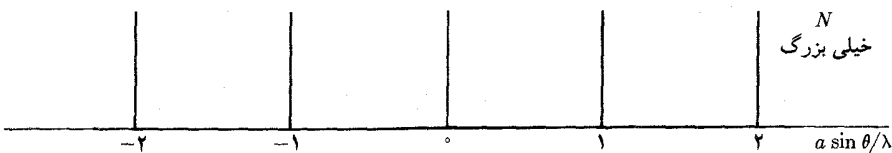
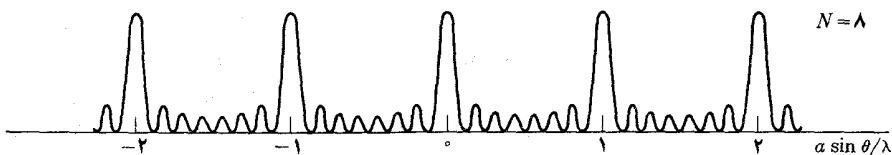
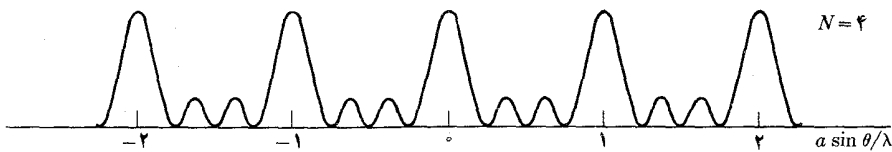
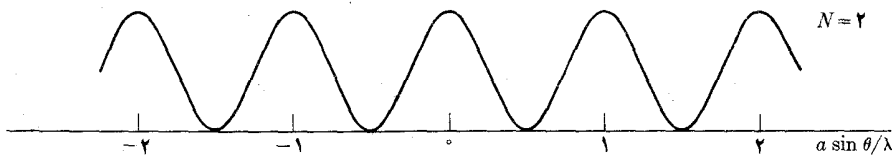
برابر صفر است. n' از ۱ تا $N-1$ و $N+1$ تا $N-1$ تا $2N-1$ ، ... و غیره را به خود می گیرد، و $n' = 0, N, 2N, \dots$ مستثنی هستند زیرا در این صورت معادله (۱۶.۲۲) به معادله (۱۵.۲۲) تبدیل می شود. بین دو کمینه همواره باید یک بیشینه وجود داشته باشد. بنا بر این می توان نتیجه گرفت که بین بیشینه های اصلی داده شده با معادله (۱۵.۲۲)، تعداد $N-2$ بیشینه اضافی نیز وجود دارد. ولی دامنه های آنها نسبتاً کوچک اند، بویژه اگر N بزرگ باشد. بیشینه های اصلی با راستاهایی متناظرند که برای آنها امواج گسیل شده توسط چشمه های مجاور همفازند.

نمودار I/I_0 بر حسب δ برای 8 و 4 و 2 برای N های خیلی بزرگ در شکل ۱۱.۲۲ نمایش داده شده است. از شکل پیداست، هنگامی که N افزایش پیدا می کند دستگاه شدیداً راستایی می شود، زیرا حرکت موجی برآیند تنها برای نوارهای بساریک مقادیر δ یا برای نوارهای باریک مقادیر زاویه θ ، قابل ملاحظه است.

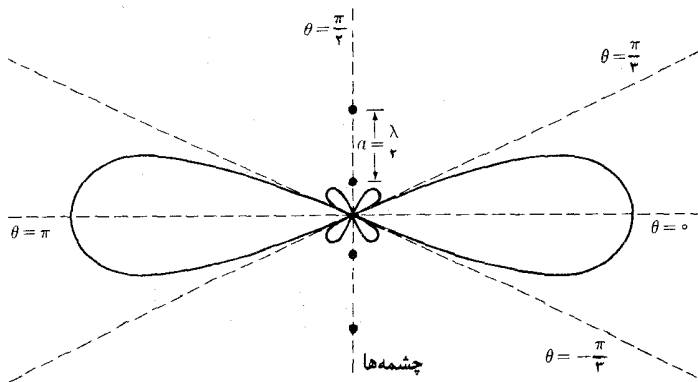
از این نتایج در ایستگاههای فرستنده یا گیرنده رادیویی، هنگامی که یک اثر راستایی مورد نظر است، به طور گسترده استفاده می شود. در این حالت چندین آنتن را به گونهای نصب می کنند که شدت تابش گسیلی (یا دریافتی) تنها برای راستاهایی که از معادله (۱۵.۲۲) به دست می آیند بیشینه است. به عنوان مثال، برای چهار آنتنی که در یک خط و به فاصله $a = \lambda/2$ از یکدیگر قرار دارند، از معادله (۱۵.۲۲) به دست می آید $\sin \theta = 2n$. برای بیشینه های اصلی که به ازای π و $0 = \theta$ به دست می آیند تنها $n = 0$ امکان پذیر است، برای راستاهای بادامنه صفر، یا صفحه های گره، از معادله (۱۶.۲۲) به دست می آید $\sin \theta = n'/2$ ، که برای مقادیر $2 \pm$ و $1 \pm$ یا $n' = 2 \pm$ و $1 \pm$ یا $\theta = \pm \pi/3$ و $\pm \pi/2$ صادق است. این وضع را در نمودار قطبی شکل ۱۲.۲۲، که شدت را بر حسب زاویه به دست می دهد نشان داده ایم. بنا بر این چنین آرایشی از آنتنها موجی در راستای عمود بر خط اتصال چشمه های سیگنال ارسال می کند یا دریافت می دارد، بنا بر این آن را آرایه عمودی می نامند. در رادیو تلسکوپها نیز از همین اثر راستایی استفاده می کنند. چندین آینه سهمی شکل را در امتداد خط مستقیم و به فاصله مساوی از هم طوری قرار می دهند که محورهای آنها موازی باشد. برای یک سمتگیری و فاصله معین محورها طول موج امواج رادیویی دریافتی از معادله (۱۵.۲۲) محاسبه می شود. (مسئله ۱۶.۲۲ را ببینید.)

مثال ۳.۲۲ تداخل حاصل از بازتاب یا عبور از داخل لایه های نازک را بررسی کنید.

حل: بحث بخش پیش را می توان در مورد نور بازتابی و عبوری از لایه های نازک به کار بست.



شکل ۱۱.۲۲ شدت نقش تداخلی برای ۲، ۴، ۸ و چشمه‌های زیاد. فاصله بین چشمه‌ها، a ، ثابت نگه داشته می‌شود.



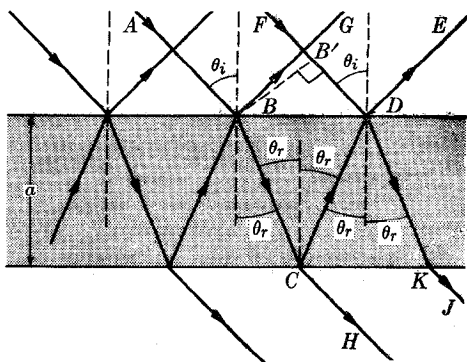
شکل ۱۲.۲۲ توزیع زاویه‌ای شدت در نقش تداخلی موجهای ارسالی از چهار چشمه هم‌دوس که در طول یک خط و به فاصله نصف طول موج از هم قرار گرفته‌اند.

لایه نازکی به ضخامت a (شکل ۱۳.۲۲) را در نظر می‌گیریم که موجهای تخت با زاویه تابش θ_i روی آن می‌تابند. قسمتی از پرتو AB در راستای BG بازتاب می‌کند و قسمتی در راستای BC می‌شکند. پرتو BC نیز به‌توبه خود قسمتی در راستای CD بازتاب می‌کند و قسمتی از راستای CH می‌گذرد. از پرتو CD نیز مجدداً قسمتی در نقطه D در راستای DK بازتاب می‌کند و روی پرتو شکست مربوطه به FD می‌افتد و قسمتی نیز از راستای DE می‌گذرد و روی پرتو بازتاب مربوطه به FD می‌افتد. همین‌طور در پرتو بازتاب BG نیز چندین پرتو سمت چپ سهیم‌اند. بنابراین پدیده‌های تداخل در امتداد پرتوهای بازتاب و شکست رخ می‌دهند. پس این وضع همانند وضعی است که در بخش ۳.۲۲، برای N خیلی بزرگ در نظر گرفتیم، ولی با یک اختلاف خیلی مهم: پرتوهایی که تداخل می‌کنند همه شدت یکسان ندارند، زیرا بازتابها یا شکستهای پیاپی از شدت می‌کاهند.

اگر از این تغییر شدت صرف نظر کنیم، بیشینه‌های تداخل توسط شکست یا بازتاب هنگامی رخ می‌دهند که اختلاف فاز بین دو پرتو پیاپی در معادله $\delta = 2\pi n$ صدق کند. برای محاسبه δ در تداخل توسط بازتاب، پرتوهای AB و FD را در نظر می‌گیریم. اگر جبهه موج BB' را رسم کنیم، اختلاف فاز در امتداد DE از اختلاف زمانهای لازم برای پیمودن مسیرهای BCD و $B'D$ ناشی می‌شود. ولی از شکل پیداست که $B'D = BD \sin \theta_i$ و $BD = 2a \operatorname{tg} \theta_r$ در نتیجه داریم

$$B'D = 2a \operatorname{tg} \theta_r \sin \theta_i = \frac{2an \sin^2 \theta_r}{\cos \theta_r}$$

زیرا بنسبه قانون اسنل $\sin \theta_i = n \sin \theta_r$ است. افزون بر این، داریم $BCD = 2BC = 2a / \cos \theta_r$ در این صورت به دست می‌آید $t_1 = BCD/v = 2an/c \cos \theta_r$ و $t_2 = B'D/c = 2an \sin^2 \theta_r / c \cos \theta_r$ چون $v = c/n$ است اختلاف زمان برابر می‌شود با



شکل ۱۳.۲۲ تداخل توسط بازتاب یا شکست در داخل لایه نازک.

$$t_2 - t_1 = \frac{2a \sin \theta_r}{c}$$

و اختلاف فاز برابر می شود با

$$\delta = \omega(t_2 - t_1) = \frac{2a \omega \sin \theta_r}{c} = \frac{2\pi a \sin \theta_r}{\lambda}$$

زیرا $\lambda = 2\pi c/\omega$ است. احتمال دارد این رابطه تمامی اختلاف فاز را دربر نداشته باشد، زیرا چنانکه در بخش ۷.۲۵ دیدیم، گاهی يك اختلاف فاز اضافی برابر π در بازتاب وجود دارد. به عنوان مثال، این امر در مورد موجهای الکترومغناطیسی هنگامی پیش می آید که نور قطبیده عمود بر صفحه تابش از محیطی که سرعتش بیشتر است وارد محیطی شود که سرعتش کمتر است. بنابراین در این حالت، اگر $n > 1$ باشد، انتقال فازی به اندازه π در پرتو بازتاب FD در نقطه D وجود دارد، ولی در پرتو بازتاب BC در نقطه C وجود ندارد. هنگامی که $n < 1$ باشد عکس این عمل پیش می آید. در این صورت چه برای حالت اول و چه در مورد حالت دوم باید نوشت

$$\delta = \frac{2\pi a \sin \theta_r}{\lambda} + \pi$$

و با قرار دادن $\delta = 2N\pi$ ، که در آن N عدد درست است، به دست می آید

$$2a \sin \theta_r = \frac{1}{2}(2N - 1)\lambda \quad (17.22)$$

(بازتاب بیشینه، تراکسیل کمینه)

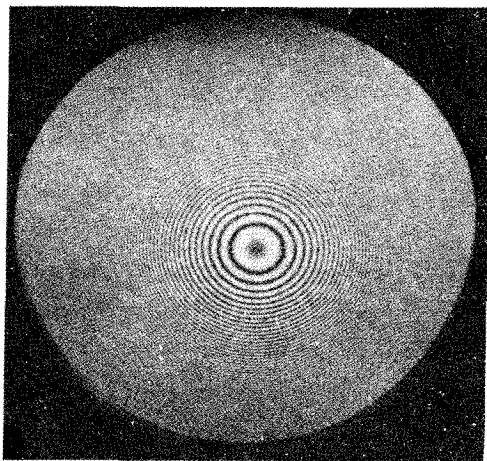
که شرط تداخل به وسیله تقویت در موجهای بازتاب است. دانشجو می تواند با محاسبات مشابهی تحقیق کند که شرط بیشینه برای موجهای تراکسیل در امتداد DK برابر است با

$$(2a \sin \theta_n = N\lambda)$$

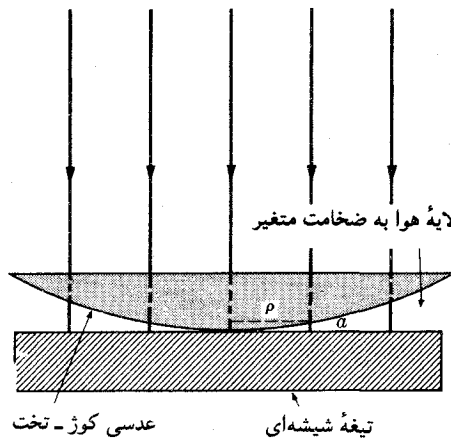
(تراکسیل بیشینه، بازتاب کمینه) (18.22)

در این حالت انتقال فاز π رخ نمی دهد، زیرا پرتو دوبار بازتاب داخلی می کند. همچنین از معادله (17.22) شرط تراکسیل کمینه و از معادله (18.22) شرط بازتاب بیشینه به دست می آید. در این صورت جالب توجه است که رنگی که در اثر بازتاب مشاهده می شود همان رنگی نیست که در اثر تراکسیل مشاهده می شود. در هر حالتی رنگها با طول موجهایی که در معادله های (17.22) و (18.22) صدق می کنند تعیین می شوند.

اگر نور تابش تکفام نباشد، از معادله های (17.22) و (18.22) به ازای هر λ مقادیر مختلفی برای θ_r و θ_n به دست می آید. همین امر توجیه کننده رنگهایی است که در لایه های نازک روغن روی سطوح آب مشاهده می کنیم. همچنین، اگر ضخامت لایه نازک متغیر باشد، شرایط (17.22) و (18.22) برای يك طول موج معین در هر نقطه ای صادق نیست. این امر، در مورد نور تکفام نوارهای تاریک و روشن پیاپی و در مورد نور سفید



(ب)



(الف)

شکل ۴.۲۲ حلقه‌های نیوتون حاصل از تداخل لایه هوا بین یک سطح تخت و یک سطح کوژ. (الف) طرح اصلی، (ب) عکس حلقه‌ها.

نوارهای رنگی پیاپی به وجود می‌آورد. چنانکه شکل ۴.۲۲ الف نشان می‌دهد، این نوارها را می‌توان با قراردادن یک عدسی تخت کوژ روی یک تیغه شیشه‌ای بدآسانی مشاهده کرد. فاصله بین عدسی و تیغه را لایه‌ای از هوا با ضخامت متفاوت پرمی‌کند. نقش تداخلی حاصل عبارت است از یک سری دایره‌های هم‌مرکز رنگین، که به حلقه‌های نیوتون معروف اند و شکل ۴.۲۲ ب تصویر آن را نشان می‌دهد.

مثال ۴.۲۲ ضریب شکست لایه‌ای برابر ۱٫۴۲ است. اگر هنگام روشن شدن با لامپ سدیم (طول موج $589 \times 10^{-7} \text{m}$) این لایه برای (الف) بازتاب و (ب) شکست تاریک به نظر برسد، کمینه ضخامت آن را پیدا کنید.

حل: از معادله‌های (۱۷.۲۲) و (۱۸.۲۲) پیدا است که کمینه مقدار a در بیشینه مقدار $\cos \theta_r$ ، یعنی $\theta_r = 0$ رخ می‌دهد و از این رو $\theta_i = 0$ است. این وضع هنگام تابش عمودی پیش می‌آید. در این حالت، (با $N = 1$)، شرایط برای حذف تراگیل (عبور) عبارت است از $a = \lambda / 4n$ و برای حذف بازتاب عبارت است از $a = \lambda / 2n$. بنابراین مقادیر متناظر عبارت انداز $a = 1.054 \times 10^{-7} \text{m}$ و $a = 2.008 \times 10^{-7} \text{m}$. چون فاصله‌های بین‌اتمی از مرتبه 10^{-9}m اند، کمینه ضخامت لایه در این مورد برابر تنها چند صد لایه اتمی است.

۴.۲۲ موج ایستاده یک بعدی

در مثال ۲.۲۰ موجهای عبوری و بازتاب را روی ریسمانی که در یک نقطه معین دارای ناپیوستگی بود، مانند تغییر در قطر یا درجنس، مطالعه کردیم. اکنون وضعی را بررسی می‌کنیم

که در آن يك سر ريسمان در نقطه‌ای ثابت شده است، مانند شکل ۱۵.۲۲ که در آن انتهای O نقطه ثابت است. يك موج تابش عرضی به معادله $\xi = \xi_0 \sin(\omega t + kx)$ که به طرف چپ حرکت می‌کند در نقطه O بازتاب می‌کند، و موج جدیدی تولید می‌کند که با معادله $\xi = \xi_0' \sin(\omega t - kx)$ به سمت راست منتشر می‌شود. جابجایی هر نقطه از ريسمان نتیجه تداخل یا برهم‌نهی این دو موج است و با

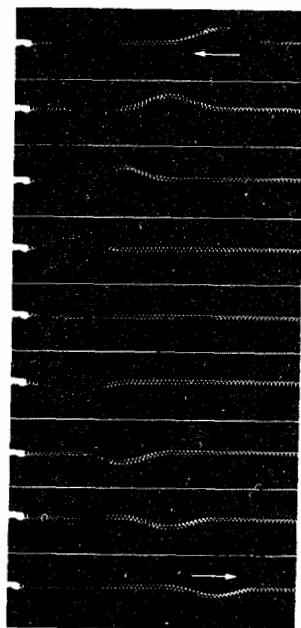
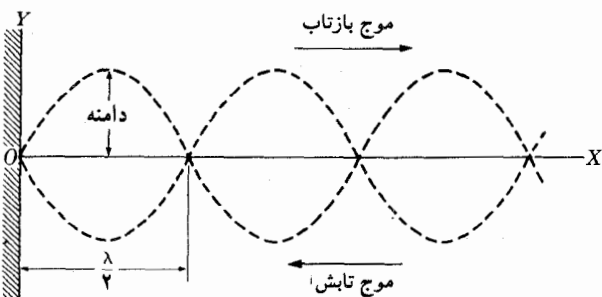
$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t + kx) + \xi_0' \sin(\omega t - kx) \quad (۱۹.۲۲)$$

در نقطه O داریم $x = 0$ ، بنا بر این

$$\xi_{(x=0)} = (\xi_0 + \xi_0') \sin \omega t$$

ولی نقطه O ثابت است، یعنی در هر لحظه $\xi_{(x=0)} = 0$ است. این امر ایجاب می‌کند که $\xi_0' = -\xi_0$ باشد. یا به گفته دیگر، موج هنگام بازتاب از انتهای ثابت به اندازه π اختلاف فاز پیدا می‌کند. با چنین اختلاف فازی قبلاً نیز چندین بار برخورد داشته‌ایم (مثالهای ۲.۲۰ و ۳.۲۰). در سری عکسهای شکل ۱۵.۲۲، که يك تب تابش و بازتاب را نشان می‌دهد، می‌توان این اختلاف فاز را دید. در این صورت معادله (۱۹.۲۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$\xi = \xi_0 [\sin(\omega t + kx) - \sin(\omega t - kx)]$$



شکل ۱۵.۲۲ تغییر فاز موج بازتاب روی ريسمانی که در نقطه‌ای ثابت شده است.

با استفاده از رابطه مثلثاتی (پ.۷)، یعنی

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

به دست می آید

$$\xi = 2\xi_0 \sin kx \cos \omega t \quad (20.22)$$

عبارتهای $\omega t \pm kx$ دیگر ظاهر نمی شوند و بنا بر این معادله (۲۰.۲۲) دیگر نمایش یک موج پیشرو نیست. این رابطه در حقیقت نمایش یک حرکت سینوسی است که دامنه آن از یک نقطه به نقطه دیگر مطابق رابطه زیر تغییر می کند

$$A = 2\xi_0 \sin kx \quad (21.22)$$

این دامنه را در شکل ۱۵.۲۲ با منحنی خط چین نمایش داده ایم. به ازای $kx = n\pi$ به ازای n عدد درست، دامنه برابر صفر است. این نتیجه را می توان به صورت زیر نوشت

$$x = \frac{1}{2}n\lambda \quad (22.22)$$

این نقطه ها را گره می نامند. دو گره پیاپی به فاصله $\lambda/2$ از یکدیگر قرار دارند. اگر رابطه (۳۰.۱۸) یا $v = \sqrt{T/m}$ را به خاطر داشته باشیم که سرعت انتشار یک موج در امتداد یک ریسمان را بر حسب m وزن واحد طول و T کشش ریسمان به دست می دهد، طول موج با رابطه زیر تعیین می شود

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{T}{m}} \quad (23.22)$$

و تا هنگامی که بسامد زاویه ای ω اختیاری باشد مقدار λ نیز اختیاری است. اکنون شرط دومی را در ریسمان به وجود می آوریم. فرض کنید که نقطه $x = L$ نیز ثابت باشد. این نقطه می تواند انتهای دیگر ریسمان باشد. این امر بدین معنی است که در نقطه $x = L$ یک گره تشکیل می شود، و باید در شرط $kL = n\pi$ صدق کند. در نتیجه بنا به معادله (۲۲.۲۲) داریم

$$L = \frac{1}{2}n\lambda \quad \text{یا} \quad \lambda = \frac{2L}{n} = 2L, \frac{2L}{2}, \frac{2L}{3}, \dots \quad (24.22)$$

شرط دوم خود بخود طول موج موجهایی را که می توانند در طول ریسمان منتشر شوند در مقادیر داده شده در معادله (۲۴.۲۲) محدود می کند و همزمان، بنا به معادله (۲۳.۲۲) بسامد نوسانها را نیز به مقادیر زیر محدود می کند.

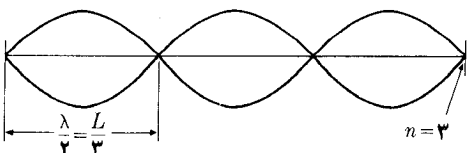
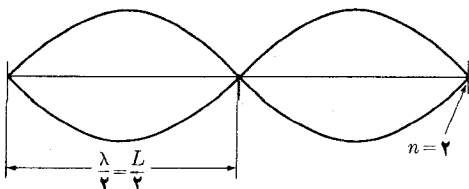
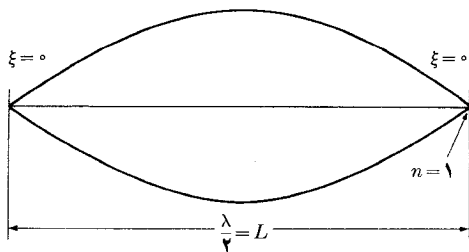
$$v_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{m}} = v_1, 2v_1, 3v_1, \dots \quad (۲۵.۲۲)$$

در نتیجه به دست می آید

$$v_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{m}}$$

که بسامد اصلی نام دارد. بسامدهای ممکن نوسانها (به نام هماهنگها) همگی مضربی از بسامد اصلی اند. می توان گفت که بسامدها و طول موجها کوانتیده اند و کوانتس نتیجه شرایط مرزی تحمیلی به دوسر ریمان است. این وضع در بیشتر مسائل فیزیک ظاهر می شود و در فرصتهای بعد خیلی با آن برخورد خواهیم داشت.

شکل ۱۶.۲۲ وضع دامنه ها را برای ۳ مد اول ارتعاشات ($n = 1, 2, 3$) نشان می دهد. گرهها، یا نقاط با دامنه صفر توسط معادله (۲۲.۲۲) تعیین می شوند. نقطه های بسا دامنه بیشینه شکمها هستند. فاصله بین دوشکم نیز $\lambda/2$ است. روشن است که فاصله بین يك گره و يك شکم $\lambda/4$ است. توجه داشته باشید هنگامی که در گرهها $\xi = 0$ است در شکمها $\partial \xi / \partial x = 0$ است. زیرا در شکمها دامنه بیشینه است.



شکل ۱۶.۲۲ موج عرضی ایستاده در ریمانی که دوسر آن ثابت است.

مثال ۵.۲۲ يك سیم فولادی به طول ۴۰cm و قطر ۱mm در دست است. می‌دانیم که بسامد ارتعاش اصلی آن $۴۴۰\text{s}^{-۱}$ ، متناظر با نت لا (یا A) در گام طبیعی به‌مبنای دو است، کشش وارد بر سیم را پیدا کنید (چگالی سیم را $\rho = ۷۷۸۶ \times ۱۰^۳ \text{kg m}^{-۳}$ فرض کنید).

حل: جرم واحد طول برابر است با $m = \pi r^2 \rho$. با قراردادن

$$r = ۵ \times ۱۰^{-۴} \text{m} \quad \text{و} \quad \rho = ۷۷۸۶ \times ۱۰^۳ \text{kg m}^{-۳}$$

در آن به دست می‌آید $m = ۶۱۵ \times ۱۰^{-۳} \text{kg m}^{-۱}$. باحل معادله (۲۵.۲۲) نسبت به T و قراردادن $n = ۱$ (چون منظور پیدا کردن صوت اصلی است) به دست می‌آید با $T = ۴L^2 m v^2$

$$L = ۴۰ \text{cm} = ۰.۴۰ \text{m}, \quad v = ۴۴۰ \text{s}^{-۱}$$

و با قراردادن مقدار m که در بالا حساب کردیم سرانجام به دست آید

$$T = ۷۶۲۰ \text{N} \quad \text{یا} \quad ۱۷۱۲ \text{ lbf}$$

اکنون دانشجو پی می‌برد که اسبابهای موسیقی تار با تنظیم کشش (یا طول) تارهای آنها میزان می‌شوند.

۵.۲۲ موج ایستاده و معادله موج

در فصل ۱۸ معادله موج را با توجه به انتشار آن مطالعه کردیم و به صورت زیر نوشتیم

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (۲۶.۲۲)$$

و ثابت کردیم که جواب عمومی به صورت زیر است

$$\xi = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad (۲۷.۲۲)$$

هنگامی که درباره موجی که در يك راستا منتشر می‌شود بحث می‌کنیم، رابطه $f_1(x - vt)$ یا $f_2(x + vt)$ را به کار می‌بریم، نه هر دوی آنها را. با وجود این دیدیم وقتی که موجی در نقطه‌ای بازتاب می‌کند، دو موج خواهیم داشت که در دو سوی مخالف منتشر می‌شوند. در این صورت ناگزیر باید معادله (۲۷.۲۲) را به کار برد. این همان کاری است که در معادله (۱۹.۲۲) در مورد ریسمانی که يك سر آن در نقطه‌ای ثابت شده بود انجام دادیم و برای موج بر ایند معادله (۲۰.۲۲) را به دست آوردیم. ویژگی عمده معادله (۲۰.۲۲)، یعنی $\xi = 2\xi_0 \sin kx \cos \omega t$ ، در این است که متغیرهای x و t از هم جدا شده‌اند. نتیجه آن وجود يك دامنه متغیر در امتداد ریسمان ولی ثابت در هر نقطه است که سرشتی موجهای ایستاده است. در این صورت برای موج هماهنگ ایستاده باید فرمول بندی کلیتری جستجو

کنیم. این شرط در رابطه‌ای به شکل

$$\xi = f(x) \sin \omega t \quad (28.22)$$

وجود دارد. $f(x)$ دامنه موج در نقطه x است. چون ξ باید جوابی برای معادله (۲۶.۲۲) باشد، جهت تعیین این شرطها روی دامنه $f(x)$ برای موجهای ایستاده، ξ را باید به صورت معادله (۲۸.۲۲) در معادله (۲۶.۲۲) قرار داد. از مشتق معادله (۲۸.۲۲) به دست می‌آید

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dx^2} \sin \omega t \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 f(x) \sin \omega t$$

از قراردادن این مقادیر در معادله (۲۶.۲۲) و حذف سازه مشترک $\sin \omega t$ داریم

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} f$$

یا چون $k = \omega/v$ است می‌توان نوشت

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0 \quad (29.22)$$

بنابراین برای اینکه معادله (۲۸.۲۲) بتواند جوابی برای معادله موج باشد باید دامنه $f(x)$ در این معادله دیفرانسیلی صدق کند. همچنانکه دانشجوی با جانشانی مستقیم می‌تواند تحقیق کند، جواب عمومی معادله (۲۹.۲۲) عبارت است از

$$f(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (30.22)$$

A و B ثابتهای اختیاری اند. در نتیجه معادله (۲۸.۲۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$\xi = (A \sin kx + B \cos kx) \sin \omega t \quad (31.22)$$

بدیهی است که می‌توانستیم $\cos \omega t$ را به جای $\sin \omega t$ قرار دهیم و همین نتیجه را به دست آوریم. این گفته بدین معنی است که مسئله فاز در این بحث وارد نمی‌شود.

ثابت‌های معادله (۳۱.۲۲) با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌شوند. این نکته را در مورد ریسمانی که دوسر آن ثابت است و در بخش پیش مطالعه کردیم نشان می‌دهیم. این شرایط عبارت‌اند از $\xi = 0$ به‌ازای $x = 0$ و $x = L$. با قراردادن $x = 0$ در معادله (۳۱.۲۲) داریم

$$\xi_{(x=0)} = B \sin \omega t = 0$$

بنابراین $B = 0$ می‌شود و معادله (۳۱.۲۲) به صورت خلاصه زیر در می‌آید

$$\xi = A \sin kx \sin \omega t \quad (32.22)$$

اکنون اگر در معادله (۳۲.۲۲) به جای $x = L$ قرار دهیم به دست می‌آید

$$\xi_{(x=L)} = A \sin kL \sin \omega t = 0$$

ولی دیگر نمی توان A را برابر صفر گرفت، زیرا در این صورت در هر نقطه ای $\xi = 0$ می شود، یعنی دیگر موجی وجود نخواهد داشت. بنابراین تنها $\sin kL = 0$ قابل قبول است. در این صورت الزاماً داریم

$$kL = n\pi \quad \text{یا} \quad \lambda = \frac{2L}{n} \quad (33.22)$$

که در آن، برای سازگاری با معادله (۲۴.۲۲)، n باید عدد درست باشد. بدیهی است، اگر به جای قبول شرط $\xi = 0$ در دوسر، شرط دیگری را که با وضع فیزیکی دیگری در دوسر متناظر است بپذیریم، مسانند ریسمانهای نشان داده شده در شکل ۱۷.۲۲، در نهایت جواب دیگری غیر از معادله های (۳۲.۲۲) و (۳۳.۲۲) به دست می آید.

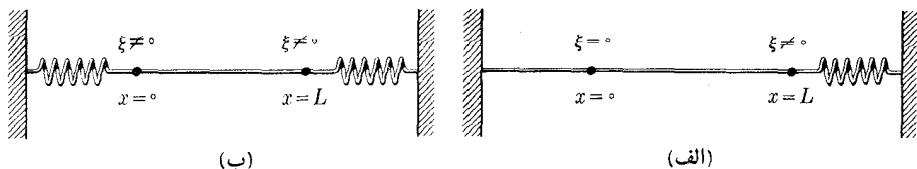
آموزنده است که دو حالت ساده دیگر، مربوط به موجهای ایستاده را در هوای داخل یک لوله مانند لوله ارگ، در نظر بگیریم. ابتدا لوله دو سر باز را بررسی می کنیم (شکل ۱۸.۲۲). هوا را از یک سر از طریق دهانه می دمند و به سبب بازتابی که در سر دیگر به وجود می آید، موجهای ایستاده تولید می شوند. اختلاف اساسی بین این حالت و حالت پیش در این است که در اینجا هر دو سر لوله آزادند و در نتیجه مقدار ξ در دو انتها بیشینه است. یا به گفته دیگر در هر انتها یک شکم وجود دارد. در این حالت شرایط مرزی متناظر با شکمها در دو انتها عبارت اند از بیشینه $\xi = 0$ یا $\partial \xi / \partial x = 0$ در نقاط $x = L$ و $x = 0$. بنابراین معادله (۳۱.۲۲) داریم

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = k(A \cos kx - B \sin kx) \sin \omega t \quad (34.22)$$

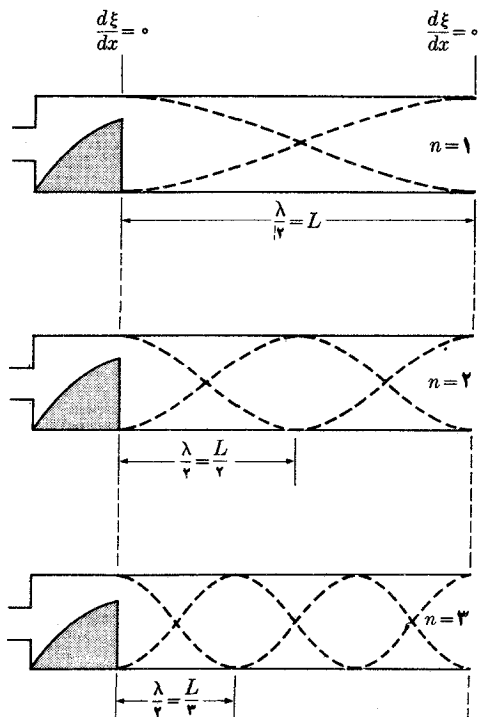
با قرار دادن $x = 0$ به دست می آید

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x=0} = kA \sin \omega t = 0$$

به گونه ای که $A = 0$ می شود. در این صورت معادله (۳۴.۲۲) به صورت زیر در می آید



شکل ۱۷.۲۲



شکل ۱۸.۲۲ موج فشار ایستاده در ستونی از هوا که دو سر آن باز است.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -kB \sin kx \sin \omega t$$

اکنون اگر به جای x مقدار برابر آن L را قرار دهیم، داریم

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x=L} = -kB \sin kL \sin \omega t = 0$$

ولی B را مانند مورد ریسمان نمی توان برابر صفر گرفت، زیرا در این صورت هیچگونه موجی وجود نخواهد داشت و تنها امکان موجود عبارت است از $kL = 0$ و از اینجا از نو به دست می آید

$$kL = n\pi \quad \text{یا} \quad \lambda = \frac{2L}{n} \quad (35.22)$$

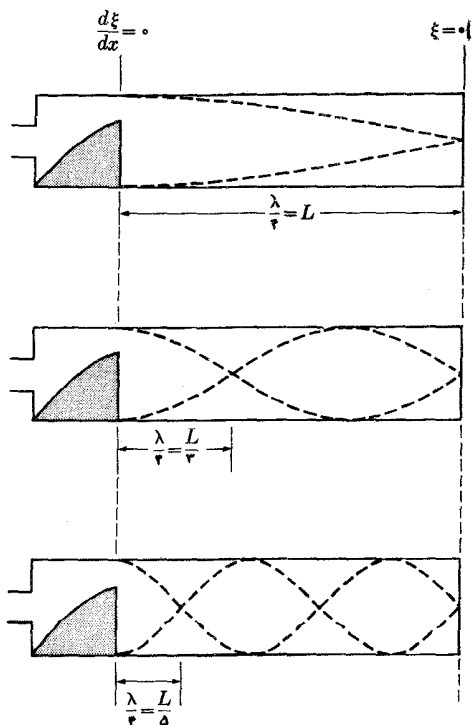
این رابطه درست همان رابطه (۳۳.۲۲) است. بسامدهای موجهای ایستاده برابرند با

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda} = n \left(\frac{v}{2L}\right) = \nu_1, 2\nu_1, 3\nu_1, \dots \quad (36.22)$$

به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ در نتیجه بسامدهای مجاز، تمامی هماهنگهای متناظر با تن اصلی به بسامد $v_n = v/2L$ را شامل می شوند. در این حالت، از معادله (۳۱.۲۲) پیداست که به ازای $A = 0$ ، $\xi = B \cos kx \sin \omega t$ است. خطهای نقطه چین در شکل ۱۸.۲۲ توزیع دامنه را برای حالت های $n = 1, 2, 3$ نشان می دهند. بنا بر این نتیجه می گیریم که نوسانهای ستون دوسر باز هوا، با نوسانهای ریسمانی که دوسر آن ثابت است هم ارزند، و فقط جای گرهها با شکمها عوض شده اند.

به عنوان مثال دوم، لولهای را که انتهای مقابل دهانه آن بسته باشد در نظر می گیریم (شکل ۱۹.۲۲). شرایط فیزیکی در انتهای بسته تغییر کرده است در صورتی که در انتهای مربوط به دهانه شرایط با مثال اول فرق نکرده است. بنابراین از نو در دهانه باید شکم وجود داشته باشد؛ یعنی در نقطه $x = 0$ باید $\partial \xi / \partial x = 0$ باشد. ولی در انتهای بسته ($x = L$) باید گره تشکیل شود، یعنی در نقطه $x = L$ باید $\xi = 0$ باشد. مانند پیش، شرط اول ایجاب می کند که $A = 0$ باشد، بنابراین معادله (۳۱.۲۲) به صورت زیر درمی آید

$$\xi = B \cos kx \sin \omega t$$



شکل ۱۹.۲۲ موج فشار ایستاده در ستونی از هوا که یک سر آن بسته است.

با به کار بردن شرایط مرزی در انتهای بسته، $x = L$ ، به دست می آید

$$\xi_{(x=L)} = B \cos kL \sin \omega t = 0$$

این امر ایجاب می کند که $kL = 0$ باشد، یعنی

$$kL = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad \text{یا} \quad \lambda = \frac{2L}{2n+1} \quad (37.22)$$

بسامد متناظر است با

$$v = \frac{v}{\lambda} = (2n+1) \frac{v}{4L} = v_1, 3v_1, 5v_1, \dots \quad (38.22)$$

در این صورت مدهای ارتعاش با مسدهای ارتعاش داده شده با معادله های (۳۵.۲۲) و (۳۶.۲۲) در مورد لوله دوسر باز تفاوت دارند. در شکل ۱۹.۲۲ به ازای $n = 0, 1, 2$ گرہها و شکمها را برای لوله ای کسه تنها يك سر آن بسته است، نشان داده ایم. بهترین خصوصیت لوله های يك سر بسته این است که تنها با بسامدهای هماهنگ فرد بسامد اصلی $v_1 = v/4L$ به ارتعاش درمی آیند. اگر طول دو لوله باز و بسته با هم برابر باشد، بسامد اصلی لوله بسته نصف بسامد اصلی لوله باز می شود.

جواب معادله موج نوع (۳۱.۲۲) با موج سینوسی ایستاده با بسامد زاویه ای ω متناظر است. با وجود این معمولاً آشفتگی اولیه با بسامد خاصی متناظر نیست. در این صورت، برای تعیین بسامدها و طول موجهای درگیر، باید روی آشفتگی اولیه آنالیز فوریه انجام داد. این آشفتگی در لحظه بعدی عبارت است از

$$\xi = \sum_{\infty} (A \sin kx + B \cos kx) \sin \omega t \quad (39.22)$$

در این رابطه $k = \omega/c$ و ضریبهای A و B با آنالیز فوریه تعیین می شوند. ولی معادله (۳۹.۲۲) نشاندهنده يك موج ایستاده به معنایی که قبلاً تعریف شد نیست (یعنی موجی که دامنه آن به مکان بستگی داشته باشد) زیرا به سبب وجود علامت جمع، متغیرهای زمان و مکان از یکدیگر کاملاً جدا نیستند.

مثال ۶.۲۲ فزری به جرم m ، طول L و ثابت کشسانی κ از نقطه ثابتی آویزان و سر دیگر آن نیز به جسمی به جرم M متصل است. جسم را از وضع ترازمندی در راستای قائم کشیده و سپس رها می کنیم. بسامد نوسانهای آن را تعیین کنید.

حل: این مسئله همانند مسئله ای است که در بخش ۳.۱۲ مطالعه کردیم، بنا بر این می توانیم بگوییم که بسامد زاویه ای برابر است با $\omega = \sqrt{\kappa/M}$ ، همان طور که در آن مسئله نیز همین کار را کردیم. (در اینجا برای اینکه ثابت کشسانی با عدد موج k اشتباه نشود آن را با k نشان داده ایم.) اما اکنون متوجه می شویم که این رابطه بسامد تنها در صورتی درست

است که جرم فنر در مقابل جرم جسم آویخته به آن قابل اغماض باشد. با توجه به شکل ۲۰.۲۲ ملاحظه می شود که هنگام آویختن جسم M به فنر، طول فنر افزایش پیدا می کند تا جایی که نیروی بالابری که بر M وارد می شود با وزن M برابر شود. حال اگر M شروع به نوسان کند، موجهایی در فنر تولید می شوند و سپس به طرف بالا و پایین به حرکت درمی آیند و در نتیجه این عمل موجهای ایستاده تولید می شوند. بسامد نوسان M را بسامد موجهای ایستاده تولید شده در فنر تعیین می کنند. جا به جایی هر مقطع از فنر را با ξ نشان می دهیم. شرط مرزی در انتهای ثابت، $x=0$ ، عبارت است از $\xi=0$. این امر ایجاب می کند که در معادله (۳۱.۲۲)، $B=0$ باشد، بنابراین جا بجایی هر مقطع از فنر با رابطه زیر داده می شود

$$\xi = A \sin kx \sin \omega t$$

در انتهای آزاد فنر، M بر اثر کشیده شدن فنر شتاب می گیرد، بنا به مثال ۵.۱۸ نیروی وارد بر M برابر است با $-K(\partial\xi/\partial x)_{x=L}$ ، که در آن $K=kL$ ، همان طور که در آن مثال تعریف شد، مبدول کشسانی فنر است. علامت منفی از آنجا پیدا می شود که ξ را به سمت پایین مثبت می گیرند و هرگاه $\partial\xi/\partial x$ مثبت باشد نیرو به سمت بالا (یعنی منفی) است. بنا بر این معادله حرکت M عبارت است از

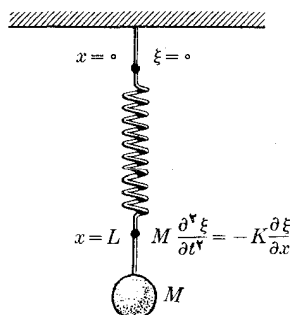
$$M \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right)_{x=L} = -K \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x=L}$$

از این معادله شرط مرزی در انتهای آزاد فنر به دست می آید. معادله بالا را می توان (با استفاده از رابطه ξ) به صورت زیر نوشت

$$-M\omega^2 \sin kL = -Kk \cos kL$$

اگر به جای k مقدار برابر آن ω/v را بگذاریم و به خاطر داشته باشیم که $m = m_0/L$ برابر جرم واحد طول فنر است و بنا بر نتیجه به دست آمده از مثال ۵.۱۸، $v = \sqrt{K/m}$ ، داریم

$$\frac{\omega L}{v} \operatorname{tg} \frac{\omega L}{v} = \frac{KL}{Mv^2} = \frac{mL}{M} = \frac{m_0}{M}$$



شکل ۲۰.۲۲

این رابطه معادله‌ای است از نوع $\theta \operatorname{tg} \theta = \text{const}$ ، که مقادیر ممکن بسامد زاویه‌ای ω را معین می‌کند. این معادله یک معادله غیر جبری است که با روشهای معمول جبری قابل حل نیست. با وجود این اگر فتر خیلی کوچک باشد، به گونه‌ای که v را بتوان خیلی بزرگ فرض کرد، می‌توان از تقریب $\operatorname{tg} \theta = \theta + \theta^3/3 + \dots$ استفاده کرد، که برای θ های خیلی کوچک معتبر است [معادله (پ. ۲۷۰) را ببینید]. بنابراین سمت چپ معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\omega L}{v} \left[\frac{\omega L}{v} + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega L}{v} \right)^3 + \dots \right] = \left(\frac{\omega L}{v} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega L}{v} \right)^2 + \dots \right]$$

با در نظر گرفتن اینکه $K = \kappa L$ و بنابراین $v = \sqrt{K/m} = L\sqrt{\kappa/m_0}$ داریم، $\omega L/v = \omega\sqrt{m_0/\kappa}$ به گونه‌ای که می‌توان نوشت

$$\frac{\omega^2 m_0}{\kappa} \left(1 + \frac{\omega^2 m_0}{3\kappa} + \dots \right) = \frac{m_0}{M}$$

یا

$$\omega^2 \left(1 + \frac{\omega^2 m_0}{3\kappa} + \dots \right) = \frac{\kappa}{M}$$

اگر m_0 خیلی کوچک باشد، با تقریب اول، می‌توان از جمله دوم داخل پرانتز صرف نظر کرد. در نتیجه به دست می‌آید $\omega^2 = \kappa/M$ یا $\omega = \sqrt{\kappa/M}$. این درست رابطه‌ای است که در بخش ۳۰۱۲ به کار بردیم. با تقریب مرتبه دوم، در داخل پرانتز همین مقدار را به جای ω قرار می‌دهیم و نتیجه زیر به دست می‌آید

$$\omega^2 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{m_0}{M} + \dots \right) = \frac{\kappa}{M} \quad \text{یا} \quad \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{M + \frac{1}{3}m_0}}$$

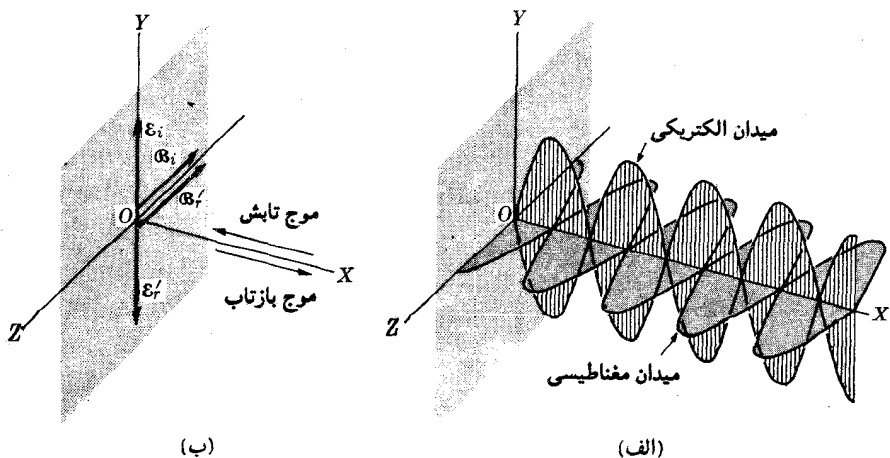
اثر فتر روی بسامد زاویه‌ای ω هم ارز است با افزایش جرم جسم آویخته به مقدار $1/3$ جرم فتر. از این رابطه، بسامد اصلی به دست می‌آید ولی علاوه بر این هماهنگی وجود دارند که دیگر مضرب درستی از بسامد اصلی نیستند (مسئله ۴۳.۲۲ را ببینید).

۶.۲۲ موج الکترومغناطیسی ایستاده

پدیده‌های تداخل و پراش آنچنان سرشت موجی دارند که فیزیکدانان همیشه حضور آنها را نشانه انکارناپذیر فرایندی در نظر می‌گیرند که می‌تواند مانند حرکت موجی تعبیر شود. بدین دلیل هنگامی که در قرن هفدهم یا ننگ، کریمالدی و دیگران در جریان پژوهشهای خود درباره نور متوجه پدیده‌های تداخل و پراش شدند، نظریه موجی نور بکل پذیرفته شد.

در آن زمان هنوز امواج الکترومغناطیسی را نمی‌شناختند و نور را موج کشسان در یک محیط بسیار رقیق و لطیف، به نام اتر، که کلیه مواد را فراگرفته بود، در نظر می‌گرفتند. تا پایان قرن نوزدهم که ماکسول وجود امواج الکترومغناطیسی را پیشگویی کرد و هرگز، به وسیله آزمایشهای تداخل که به موجهای ایستاده منجر شدند، وجود موجهای الکترومغناطیسی را در گستره بسامدهای رادیویی عملاً تحقیق کرد، وضع به همین منوال بود. بعداً سرعت امواج الکترومغناطیسی اندازه‌گیری شد و برابر سرعت نور به دست آمد. بازتاب، شکست و قطبش موجهای الکترومغناطیسی نیز مشابه همین پدیده‌ها در نور درآمدند. نتیجه بدیهی این بود که نور را همچون موجهای الکترومغناطیسی با بسامدهای معین بدانند. از آن به بعد اپتیک، از هر لحاظ و مقصودی، دیگر نمی‌توانست شاخه مستقلی از فیزیک باشد و به صورت فصلی از نظریه الکترومغناطیسی درآمد.

جهت آشنایی با ساخت امواج الکترومغناطیسی ایستاده، فرض کنید که موجهای تولید شده توسط یک دوقطبی الکتریکی نوسانی در راستای عمود بر یک سطح تخت از یک رسانای کامل می‌تابد (شکل ۲۱.۲۲). اگر محور X را به عنوان راستای انتشار و محورهای Y و Z را بترتیب موازی با میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در نظر بگیریم، یک موج قطبیده تخت به دست می‌آید که میدان الکتریکی آن در صفحه XY نوسان می‌کند. بنابراین میدان الکتریکی موازی سطح رساناست. ولی در سطح یک رسانای کامل، میدان الکتریکی باید عمود بر سانا باشد، یعنی میدان الکتریکی نمی‌تواند مؤلفه‌های مماسی داشته باشد (رک بخش ۵.۱۶). تنها راهی که این شرط را با سمگگیری میدان الکتریکی در موج تابش سازگار می‌کند این است که میدان الکتریکی E در سطح رسانا برابر صفر باشد. این بیان بدین معنی است که میدان الکتریکی موج بازتاب روی سطح رسانا باید برابر و دسوی مخالف موج تابش باشد. از این رو به ازای $E = 0$ ، $x = 0$ است. این شرط از



شکل ۲۱.۲۲ امواج الکترومغناطیسی ایستاده حاصل از بازتاب روی سطح رسانا.

دید ریاضی هم‌ارز با شرط بازتاب موجها در ریسمانی است که يك سر آن ثابت باشد و در بخش ۵.۲۲ مطالعه شد. چون معادله‌های ریاضی یکسان‌اند، می‌توان از معادله (۲۰.۲۲) برای به دست آوردن رابطه میدان الکتریکی برآیند استفاده کرد.

$$E = 2E_0 \sin kx \sin \omega t$$

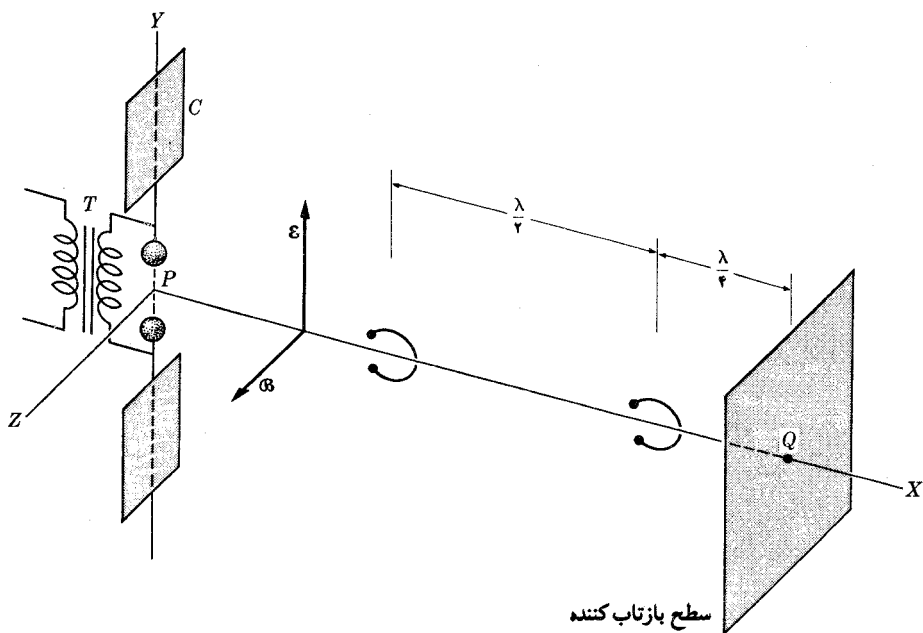
میدان مغناطیسی در صفحه XZ نوسان می‌کند. از معادله (۴.۱۹) برای میدان مغناطیسی رابطه زیر به دست می‌آید

$$B = 2B_0 \cos kx \cos \omega t$$

در این رابطه $B_0 = E_0 k / \omega = E_0 / c$ است. بنابراین اختلاف فازی برابر با $\lambda/2$ در تغییرات فضایی و $P/2$ در تغییرات زمانی دو میدان وجود دارد. توجه کنید که رابطه ریاضی B نشان می‌دهد که میدان مغناطیسی دارای يك بیشینه روی سطح است. این مطلب را از شرط مرزی روی سطح نیز می‌توان دریافت. با مراجعه به شکل ۲۱.۲۲ ب، چون موج تابش در راستای محور X - است، با توجه به سمتگیری نسبی دو میدان، مشاهده می‌شود که اگر میدان الکتریکی موج تابش در امتداد محور Y + باشد میدان مغناطیسی باید در امتداد محور Z - باشد. برای اینکه میدان الکتریکی برآیند در روی سطح برابر صفر باشد، میدان الکتریکی موج بازتاب باید در امتداد محور Y - باشد و چون موج بازتاب در امتداد محور X منتشر می‌شود، میدان مغناطیسی باید در امتداد محور Z - باشد. از این رو، با اینکه تداخل میدانهای الکتریکی در روی سطح ویرانگر است، ولی تداخل میدانهای مغناطیسی در آنجا سازنده است.

دامنه میدانهای الکتریکی و مغناطیسی موج برآیند در نقطه‌ای به فاصله x از سطح بترتیب برابر است با $2E_0 \sin kx$ و $2B_0 \cos kx$. منحنیهای هاشور خورده شکل ۲۱.۲۲ الف این دامنه‌ها را نشان می‌دهند. در نقطه‌هایی مانند $kx = n\pi$ یا $x = n\lambda/2$ ، میدان الکتریکی برابر صفر و میدان مغناطیسی بیشینه است. در نقطه‌هایی که $kx = (n + \lambda/2)\pi$ یا $x = (2n + 1)\lambda/4$ است دامنه میدان الکتریکی بیشینه ولی دامنه میدان مغناطیسی برابر صفر است.

آگاهی از اینکه چگونه هاینریش هرتز در سال ۱۸۸۸/۱۲۶۷، به کمک اسبابهای ابتدایی آن زمان، این پیشگوییهای نظری را اثبات کرد بسیار آموزنده است. نوسانگر هرتز را در سمت چپ شکل ۲۲.۲۲ نشان داده‌ایم. ترانسفورماتور T صفحه‌های فلزی C و C' را باردار می‌کند. این صفحه‌ها در شکاف P ، تخلیه می‌شوند و آن را به صورت دو قطبی نوسانی درمی‌آورند. در این شکل راستای میدانهای E و B نیز رسم شده است. هرتز برای مشاهده این موجها، از سیمی کوتاه که آن را به صورت حلقه درآورده بود استفاده کرد؛ فاصله دو سر سیم از یکدیگر کم بود. این وسیله را بازآواگر می‌نامند. قطر بازآواگر به کار رفته در این گونه آزمایشها باید نسبت به طول موجها خیلی کوچک باشد. اگر صفحه بازآواگر بر راستای میدان مغناطیسی موج عمود باشد، میدان مغناطیسی متغیر



شکل ۲۲-۲۲ آزمایش هرتز در مورد تداخل امواج الکترومغناطیسی.

نیروی محرکه الکتریکی در باز آواگر القا می کند و این امر موجب جرقه زدن دو سر سیم می شود. برعکس، اگر سطح حلقه موازی میدان مغناطیسی باشد، نه نیروی محرکه الکتریکی القا می شود و نه در شکاف جرقه مشاهده می شود.

برای تولید موجهای ایستاده، هر تیز سطح بازتاب کننده ای (از رسانای خوب) در نقطه Q قرار داد. در چنین شرایطی، اگر باز آواگر در گرهی از میدان مغناطیسی جای گرفته باشد، برای هیچ راستایی از میدان، نیروی محرکه الکتریکی القایی (یعنی جرقه) مشاهده نمی شود. ولی اگر باز آواگر را عمود بر راستای میدان مغناطیسی و در محلی که شکم تشکیل می شود قرار دهیم، جرقه خیلی شدید می شود. هر تیز با حرکت دادن باز آواگر در امتداد خط PQ ، جای گرهها و شکمها و راستای میدان مغناطیسی را پیدا کرد. نتایجی که هر تیز از این طریق به دست آورد با تحلیل نظری که در پیش آمد سازگار است. هر تیز با اندازه گیری فاصله بین دو گره پیاپی توانست λ طول موج را حساب کند و با در دست داشتن ν بسامد نوسانگر، با استفاده از رابطه $c = \lambda \nu$ ، سرعت موجهای الکترومغناطیسی را حساب کرد. بدین وسیله، هر تیز موفق شد اولین مقدار تجربی را برای سرعت انتشار موجهای الکترومغناطیسی به دست آورد.

۷.۲۲ موج ایستاده دوبعدی

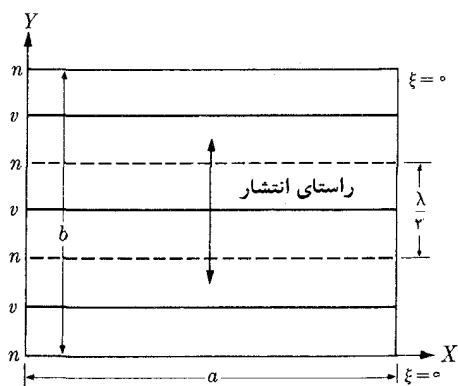
اکنون يك غشای مستطیل شکل را كه روی يك قاب كشيده شده است در نظر می گیریم؛ لبه‌های غشا روی قاب ثابت شده‌اند. اگر در سطح غشا آشفته‌گی ایجاد شود، موجهایی به وجود می آیند كه در تمام راستاها منتشر می شوند و در لبه‌ها بازتاب پیدا می کنند، بدین طریق تداخل ایجاد می شود. حالت خاصی را در نظر می گیریم كه در آن موجهای تخت تنها با يك بسامد روی غشا تولید می شوند. علاوه بر این فرض می كنیم كه این موجها، مطابق شكل ۲۳.۲۲، در راستای موازی با اضلاع قاب منتشر می شوند. به جای گرهها و شكمها خطهای ای گره و خطهای شكم به دست می آیند كه در شكل ۲۳.۲۲ با n و v نشان داده ایم. در شكل ۲۳.۲۲ الف غشا در طرف چپ ($x=0$) و در طرف راست ($x=a$) ثابت شده است، ولی در وضع دیگر آن آزادند. موجها در امتداد محور X به سمت چپ و راست منتشر می شوند و دستگاه خطهای گره و شكم موازی با محور Y را تولید می کنند. در نقطه‌های $x=0$ و $x=a$ باید خطهای گره داشته باشیم. بنابراین شرط به وجود آمدن موجهای ایستاده همانند معادله (۲۳.۲۲) است، یعنی

$$ka = n\pi \quad \text{یا} \quad \lambda = \frac{2a}{n} \quad (۴۰.۲۲)$$

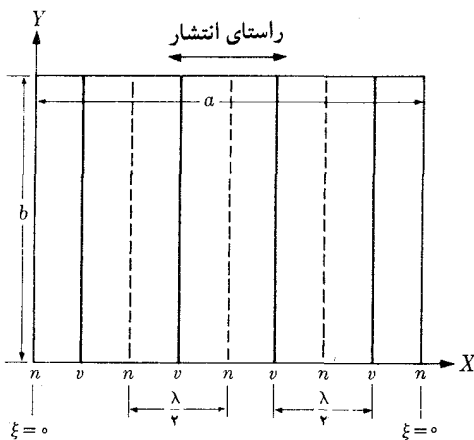
بسامدهای متناظر عبارت اند از

$$v = \frac{v}{\lambda} = n \left(\frac{v}{2a} \right) \quad (۴۱.۲۲)$$

كه در آن مطابق آنچه در مثال ۱۲.۱۸ آمد، v سرعت انتشار موجها در سطح غشا است، این



(ب)



(الف)

شكل ۲۳.۲۲ موجهای ایستاده روی غشا.

موجها با رابطه‌ای همانند معادله (۳۲.۲۲) توصیف می‌شوند

$$\xi = A \sin kx \sin \omega t \quad (42.22)$$

زیرا این دو وضع فیزیکی از نظر ریاضی یکسان‌اند. افزودن بعد دوم، شرایط مرزی، یعنی $\xi = 0$ به ازای $x = a$ و $x = 0$ را عوض نمی‌کند. تا هنگامی که غشا در امتداد پهلوهای موازی با راستای انتشار ثابت نیست، تقارن ایجاب می‌کند که مختص Y هیچگونه نقشی نداشته باشد.

در شکل ۲۳.۲۲ غشا در پایین ($y = 0$) و در بالا ($y = b$) ثابت شده است. برای موجهایی که به موازات محور Y منتشر می‌شوند، خطهای گره و شکم با محور X موازی‌اند. شرط وجود موجهای ایستاده، همانند معادله (۴۰.۲۲) است، با این تفاوت که تنها b به جای a نشسته است. بدین طریق به دست می‌آید

$$kb = n\pi \quad \text{یا} \quad \lambda = \frac{2b}{n} \quad (43.22)$$

و بسامدها برابرند با

$$v = \frac{v}{\lambda} = n \left(\frac{v}{2b} \right) \quad (44.22)$$

که با بسامدهای داده شده در معادله (۴۱.۲۲) برای موجهای موازی با محور X فرق دارد. معادله موج ایستاده برابر است با

$$\xi = A \sin ky \sin \omega t$$

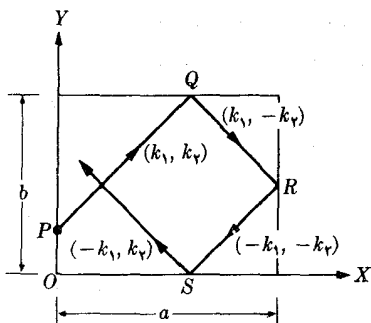
اکنون غشایی را که چهارضلع آن ثابت شده‌اند در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که موجهای تخت در امتداد راستای اختیاری روی غشا منتشر می‌شوند. پیش از هر چیز باید خاطر نشان کرد که یک موج تخت دو بعدی با قراردادن $z = 0$ در معادله (۴۶.۱۸)، به صورت زیر به دست می‌آید

$$\xi = \xi_0 \sin [\omega t - (k_x x + k_y y)]$$

در این رابطه، طبق قرارداد، سازه زمانی را اول نوشته‌ایم. کمیت‌های k_x و k_y مؤلفه‌های برداری مانند \mathbf{k} هستند که با راستای انتشار در صفحه XY موازی است و طول آن برابر است با $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$. بنابراین داریم

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (45.22)$$

برای پرتو اولیه PQ (شکل ۲۴.۲۲)، که بسا مؤلفه‌های k_x و k_y نشان داده‌ایم پرتو بازتاب QR وجود دارد که با $(-k_x, -k_y)$ مشخص می‌شود. این پرتو از نقطه R تا نقطه S با $(-k_x, -k_y)$ و از نقطه S به بعد با مؤلفه‌های $(k_x, -k_y)$ مشخص می‌شود. در جریان بازتابی پیاپی این پرتو، هیچگونه ترکیب جدیدی از k_x و k_y مشاهده نمی‌شود.



شکل ۲۴.۲۲ بازتابهای پیمایی موج روی غشایی به شکل مستطیل.

در این صورت می توان نتیجه گرفت که روی غشا دستگاهی از چهار موج وجود دارد که از بازتاب روی چهار ضلع ناشی می شود (این حالت با مسئله موجهای یک بعدی که در آن تنها دو موج ظاهر می شد اختلاف دارد). این چهار موج باید به گونه ای تداخل کنند که در نقطه های $x=0$ و $x=a$ ، همچنین $y=0$ و $y=b$ مقدار برآیند ξ صفر باشد. یک روش جبری مستقیم (چنانکه در مثال ۷.۲۲ خواهیم دید) نشان می دهد که مقادیر k_1 و k_2 در شرایط زیر صدق می کنند

$$k_1 a = n_1 \pi \quad \text{یا} \quad k_1 = \frac{n_1 \pi}{a} \quad (۴۶.۲۲)$$

$$k_2 b = n_2 \pi \quad \text{یا} \quad k_2 = \frac{n_2 \pi}{b}$$

n_1 و n_2 عددهای درست اند. در این صورت از معادله (۴۵.۲۲) داریم

$$k = \pi \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}} \quad (۴۷.۲۲)$$

و برای بسامدهای ممکن به دست می آید

$$\nu = \frac{v}{\lambda} \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}} \quad (۴۸.۲۲)$$

اکنون باید توجه داشت که بسامدهای ممکن دیگر مضرری از بسامد اصلی نیستند، بلکه از دنباله نامنظم تری پیروی می کنند. طول موجهای ممکن با رابطه زیر داده می شوند

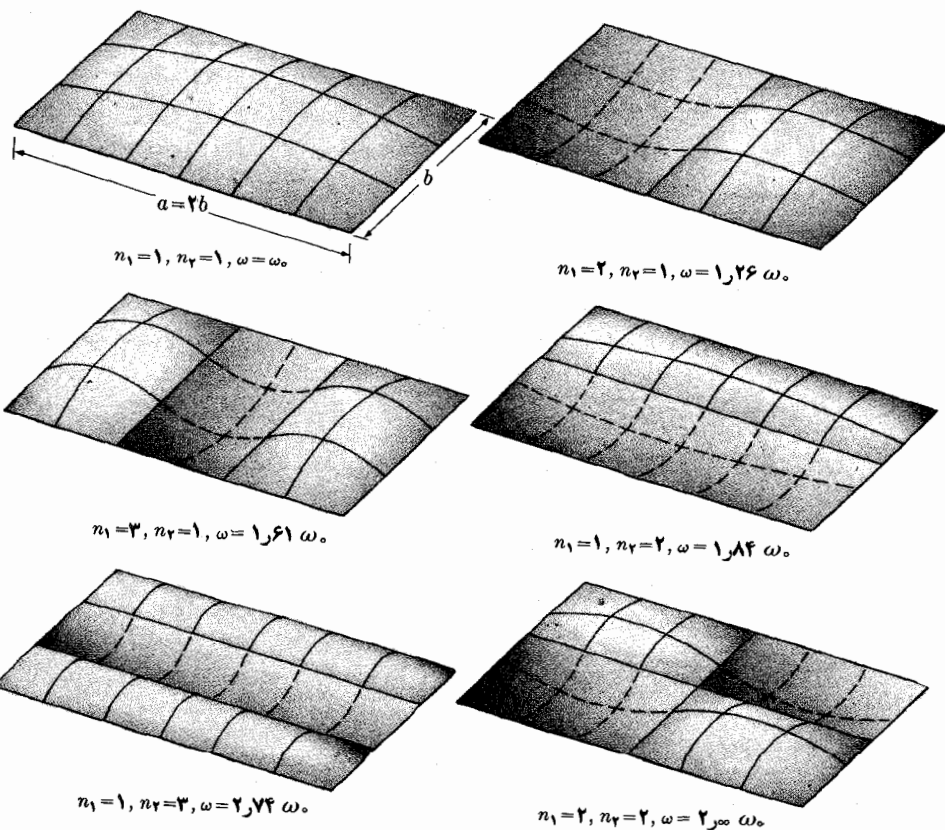
$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}} \quad (۴۹.۲۲)$$

نقش خطهای گره، که از به کار بردن معادله (۴۹.۲۲) به دست می آیند، با $k_1 x = n_1' \pi$ و $k_2 y = n_2' \pi$ داده می شوند و نقشهای مستطیلی شکل ۲۵.۲۲ را درست می کنند. n_1' و n_2' عددهای درست و بترتیب از n_1 و n_2 کوچکترند.

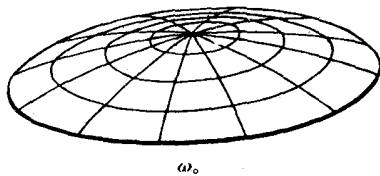
توجه مسئله غشا دایره ای از نظر ریاضی بسیار پیچیده است؛ اما بار دیگر نشان می دهد که تنها بسامدهای معینی ممکن اند. در این صورت تقارن ايجاب می کند که خطهای گره، همچنانکه شکل ۲۶.۲۲ برای چند مد ممکن نشان می دهد، دایره ها و شعاعها باشند.

مثال ۷.۲۲ شرطهای رابطه (۴۶.۲۲) را اثبات کنید

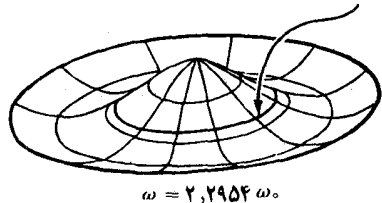
حل: قبلاً اشاره کردیم که روی غشا برهم نهی از چهار موج متناظر با چهار ترکیب ممکن $\pm k_1$ و $\pm k_2$ وجود دارد. این دستگاه چهار موج دارای براینده ω است که از



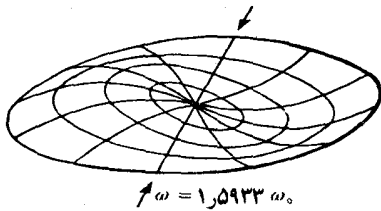
شکل ۲۵.۲۲ نمایش چند مد اولیه ارتعاش غشای مستطیل شکل با خطهای گره. بسامد هر موج بر حسب بسامد اصلی، $\omega_0 = \pi v/b$ ، داده شده است.



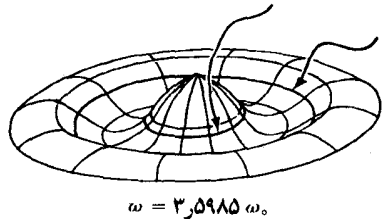
ω_0



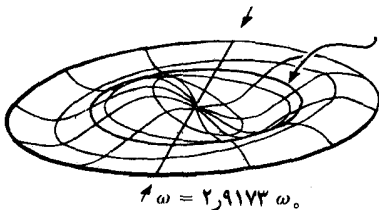
$\omega = ۲,۲۹۵۴ \omega_0$



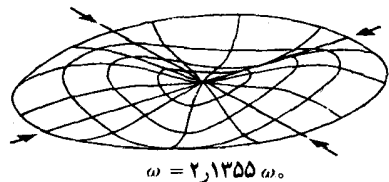
$\omega = ۱,۵۹۳۳ \omega_0$



$\omega = ۳,۵۹۸۵ \omega_0$



$\omega = ۲,۹۱۷۳ \omega_0$



$\omega = ۲,۱۳۵۵ \omega_0$

شکل ۲۶.۲۲ چند مد ممکن ارتعاش ازغشای دایره‌ای شکل. خط‌های گره را با پیکان نشان داده‌ایم. بسامد هر مد بر حسب بسامد اصلی، ω_0 ، است.

رابطه زیر به دست می‌آید

$$\xi = \xi_0 \sin[\omega t - (k_1 x + k_2 y)] + \xi'_0 \sin[\omega t - (k_1 x - k_2 y)] + \xi''_0 \sin[\omega t - (-k_1 x - k_2 y)] + \xi'''_0 \sin[\omega t - (-k_1 x + k_2 y)] \quad (۵۰.۲۲)$$

که هم‌ارز معادله (۱۹.۲۲) است که برای موج یک بعدی معتبر است. ولی در هر نقطه‌ای که $x = 0$ باشد، باید داشته باشیم $\xi = 0$. با قراردادن $x = 0$ در معادله (۵۰.۲۲) و گروه بندی جمله‌های هم‌ارز می‌توان نوشت

$$\xi = (\xi_0 + \xi'''_0) \sin(\omega t - k_2 y) + (\xi'_0 + \xi''_0) \sin(\omega t + k_2 y) = 0$$

آنگاه، لازم است

$$\xi_0 + \xi'''_0 = 0, \quad \xi'_0 + \xi''_0 = 0 \quad (۵۱.۲۲)$$

همچنین، در هر نقطه‌ای که $y = 0$ باشد، باید داشته باشیم $\xi = 0$ ، بنابراین از معادله (۵۰.۲۲) به دست می‌آید

$$\xi = (\xi_0 + \xi'_0) \sin(\omega t - k_1 x) + (\xi''_0 + \xi'''_0) \sin(\omega t + k_1 x) = 0$$

آنگاه، لازم است

$$\xi_0 + \xi'_0 = 0, \quad \xi''_0 + \xi'''_0 = 0 \quad (52.22)$$

از ترکیب معادله‌های (51.22) و (52.22) به دست می‌آید

$$\xi_0 = -\xi'_0 = \xi''_0 = -\xi'''_0$$

از این رابطه تغییر فاز درخور هریازتاب به دست می‌آید، که با نتیجه مشابهی که در مورد ریسمان به دست آمد در توافق است. در نتیجه معادله (50.22) به صورت زیر درمی‌آید

$$\xi = \xi_0 \{ \sin[\omega t - (k_1 x + k_2 y)] - \sin[\omega t - (k_1 x - k_2 y)] \\ + \sin[\omega t - (-k_1 x - k_2 y)] - \sin[\omega t - (-k_1 x + k_2 y)] \}$$

از تبدیل هر سطر فرمول بالا به صورت حاصل ضرب، با به کار بردن معادله (پ. 12)، داریم

$$\xi = 2\xi_0 [-\sin k_2 y \cos(\omega t - k_1 x) + \sin k_2 y \cos(\omega t + k_1 x)] \\ = 2\xi_0 \sin k_2 y [-\cos(\omega t - k_1 x) + \cos(\omega t + k_1 x)]$$

از تبدیل مجدد اختلاف دو کسینوس به حاصل ضرب به دست می‌آید

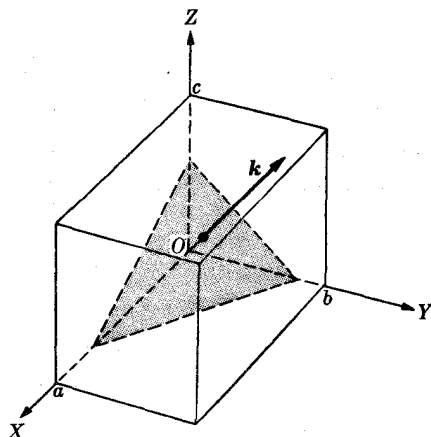
$$\xi = -4\xi_0 \sin k_1 x \sin k_2 y \sin \omega t \quad (53.22)$$

این معادله در دو بعد با معادله (20.22) هم‌ارز است. علامت منفی جلوی جملی فرمول معنای خاصی ندارد. اگر بخواهیم، می‌توانیم با قراردادن $x=0$ یا $y=0$ و با مشاهده اینکه $\xi=0$ می‌شود، شرط مرزی اولیه را بررسی کنیم.

اکنون باید شرطهای مرزی دوم، یعنی $\xi=0$ را برای $x=a$ یا $y=b$ تحقیق کنیم. این شرطها ایجاب می‌کنند که $\sin k_1 a = 0$ و $\sin k_2 b = 0$ ، بدین طریق به دست می‌آید $k_1 a = n_1 \pi$ و $k_2 b = n_2 \pi$ که همان شرطهای (46.22) اند.

۸.۲۲ موج ایستاده سه بعدی، کاواکهای باز آوا

مسئله موجهای ایستاده سه بعدی تعمیم ساده‌ای از حالت موجهای دوبعدی است. کاواکی به شکل مستطیل با اضلاع a و b و c و با دیواره‌های کاملاً بازتابنده را در نظر می‌گیریم به گونه‌ای که روی هر شش رویه آن ξ برابر صفر باشد (شکل 27.22). موج تخت در فضا با برداری مانند \mathbf{k} مشخص می‌شود. \mathbf{k} بر صفحه موج عمود است و مؤلفه‌های آن در امتداد سه محور عبارت‌اند از k_1 ، k_2 ، k_3 . اگر موج تختی در داخل کاواک تولید شود، این موج پیاپی روی تمام رویه‌ها بازتاب می‌کند و مجموعه‌ای از λ موج تشکیل می‌شود، که حاصل ترکیبهای ممکن و مختلف $\pm k_1$ ، $\pm k_2$ ، $\pm k_3$ است. اگر k_1 ، k_2 و k_3 مؤلفه‌های \mathbf{k} مقادیر مناسب داشته باشند، از تداخل، یا از برهم‌نهی این λ موج، موجهای ایستاده به وجود می‌آیند. در قیاس با معادله (46.22) این مقادیر عبارت‌اند از



شکل ۲۷.۲۲

$$k_x a = n_x \pi, \quad k_y b = n_y \pi \quad \text{و} \quad k_z c = n_z \pi$$

یا

$$(۵۴.۲۲)$$

$$k_x = \frac{n_x \pi}{a}, \quad k_y = \frac{n_y \pi}{b} \quad \text{و} \quad k_z = \frac{n_z \pi}{c}$$

بنابراین می‌توان $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ چون n_x, n_y, n_z عددهای درست اند. نوشت

$$k = \pi \sqrt{\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2}} \quad (۵۵.۲۲)$$

و بسامدهای ممکن موجهای ایستاده در داخل کاواک برابرند با

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2}} \quad (۵۶.۲۲)$$

بنابراین کاواکی همانند شکل ۲۷.۲۲ به باز آوایی درمی آید و برای بسامدهای داده شده با معادله (۵۶.۲۲) امکان برقراری موجهای ایستاده را فراهم می‌کند.

بررسی ریاضی کاواکهای کروی و استوانه‌ای بسیار پیچیده است، ولی این بررسی از نو نشان می‌دهد که تنها بعضی بسامدها مجازند.

نتایج به دست آمده برای کاواکها کاربردهای زیادی دارند. به عنوان مثال، کاواکهای باز آوا در آکوستیک برای تحلیل صوت به کار می‌روند. دیواره‌های کاواکهای باز آوایی موجهای الکترومغناطیسی را از رسانای بسیار خوب می‌سازند، به گونه‌ای که دیواره‌های آنها بتوانند بهترین بازتاب کننده باشند. این کاواکها می‌توانند موجهای ایستاده با بسامد معین

را با کمترین تضعیف ناشی از افت انرژی به وسیله بازتاب نگه دارند. این امر بدین معنی است که کاواکها به عنوان فضای ویژه‌ای جهت تابش انرژی الکترومغناطیسی سه‌کار می‌روند. نظریهٔ موجهای ایستادهٔ الکترومغناطیسی در کاواکها، به دلیل سرشت عرضی موجها، اندکی پیچیده‌تر از این توضیحات است. ولی نتایجی چون معادلهٔ (۵۶.۲۲) بدون تغییر باقی می‌مانند. چنین کاواک‌هایی برای تحلیل یا اندازه‌گیری بسامدها (به شیوهٔ مشابه با بازآواگرهای آکوستیکی)، به منظور کنترل بسامدها در مدارهای نوسانی و نیز برای اندازه‌گیری خواص ماده‌ای که کاواک را پر می‌کند، مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مثال ۸۰.۲۲ تعداد مدهای مختلف نوسانهای با بسامد برابر با، یا کوچکتر از، ν را در داخل کاواک مکعبی شکل به ضلع a تعیین کنید.

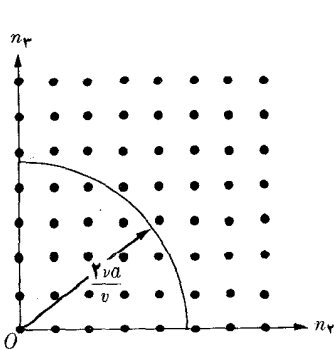
حل: اگر کاواک به شکل مکعب باشد، $a = b = c$ (شکل ۲۸.۲۲)، بسامدهای ممکن برابرند با

$$\nu = \frac{v}{2a} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

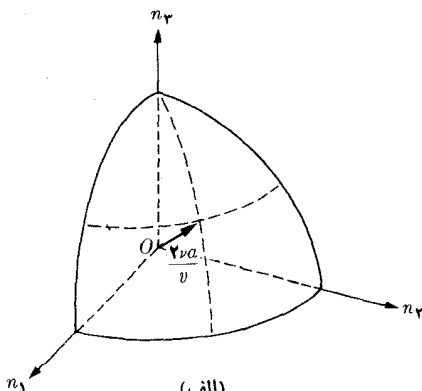
یا

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{4\nu^2 a^2}{v^2} \quad (57.22)$$

در دستگاه مختصاتی به محوره‌های n_x ، n_y و n_z (شکل ۲۸.۲۲)، معادلهٔ (۵۸.۲۲) نمایش کره‌ای است به شعاع $\frac{2\nu a}{v}$. بنا بر این مسئله عبارت است از پیدا کردن تمام ترکیبهای ممکن عددهای درست n_x ، n_y و n_z که در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند



(ب)



(الف)

شکل ۲۸-۲۲

$$n_L^2 + n_T^2 + n_R^2 \leq \frac{4\nu^2 a^2}{v^2}$$

اگر شعاع خیلی بزرگ باشد، این تعداد برابر است با يك هشتم کره نشان داده شده در شکل ۲۸.۲۲ الف. زیرا، چنانکه شکل ۲۸.۲۲ ب نشان می‌دهد، سه هر مجموعه از عددهای درست n_L ، n_T و n_R می‌توان یاخته‌ای به حجم واحد نسبت داد. در این صورت تعداد مدهای نوسان با بسامد برابر با، یا کوچکتر از، ۱ برابر می‌شود با

$$N_\nu = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2\nu a}{v} \right)^3 = \frac{4\pi a^3 \nu^3}{3v^3}$$

چون a^3 با حجم کاواک برابر است، بنابراین تعداد مدها در واحد حجم از تقسیم رابطه بالا بر a^3 به دست می‌آید

$$n_{\nu, L} = \frac{4\pi\nu^3}{3v^3} \quad (58.22)$$

شاخص پایین L از این نظر اضافه شده است که این نتیجه فقط برای موجهای طولی معتبر است. اگر موجها عرضی باشند برای هر مد دو حالت مختلف مستقل قطبش وجود دارد، به گونه‌ای که به جای معادله (۵۸.۲۲) باید نوشت

$$n_{\nu, T} = \frac{8\pi\nu^3}{3v^3} \quad (59.22)$$

گاهی راحت تر است تعداد مدها را در يك گستره بسامدی dv بدانیم، بنابراین آن را به صورت $dn_\nu = g(\nu)dn$ می‌نویسیم. از دیفرانسیل معادله (۵۸.۲۲) به دست می‌آید

$$dn_{\nu, L} = g_L(\nu)dv = \frac{4\pi\nu^2}{v^3} dv \quad (60.22)$$

در صورتی که برای موجهای عرضی از معادله (۵۹.۲۲) داریم

$$dn_{\nu, T} = g_T(\nu)dv = \frac{8\pi\nu^2}{v^3} dv \quad (61.22)$$

این نتیجهها در تعداد زیادی از محاسبهها بسیار سودمندند.

۹.۲۲ موجبرها

در کاواکهایی که در بالا مطالعه کردیم تنها تولید موجهای ایستاده میسر است. ولی در محفظههایی به نام موجبر که کاواکهای دراز و دوسر بازند امکان تولید موجهای سیار وجود دارد. موجها را از يك سر به کاواک می‌خورانند و از سر دیگر می‌گیرند. اکنون نوعی ساده از موجبر را که از دو صفحه موازی به فاصله a از هم تشکیل شده است بتفصیل مطالعه

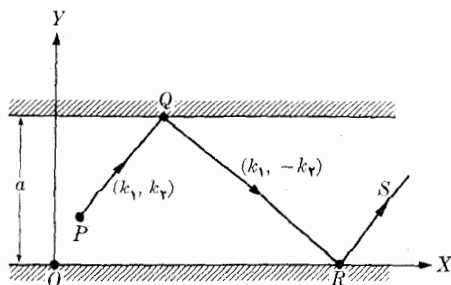
می کنیم (شکل ۲۹.۲۲). اگر موجی که نسبت به صفحه‌ها زاویه‌ای می‌سازد در داخل کاواک تولید شود، و با بردار k به مؤلفه‌های k_1 و k_2 ، بترتیب موازی و عمود بر صفحه‌های کاواک مشخص شود، این مسوج به‌انجام بازتاب‌های پیاپی بین دو دیواره مجبور می‌شود؛ یعنی بین آن دو حرکت رفت و برگشتی پیدامی‌کند. چون فضا در راستای موازی با صفحه‌ها محدود نیست (مانند آنچه در داخل کاواکها اتفاق افتاد) موج به سمت راست انتشار می‌یابد. محور X را موازی صفحه‌ها و محور Y را عمود بر آنها برمی‌گزینیم، به گونه‌ای که بردار k در صفحه XY قرار بگیرد. در شکل ۲۹.۲۲ مسیر یک پرتو خاص نشان داده شده است. پرتو در امتداد PQ با مؤلفه‌های (k_1, k_2) و از Q تا R با مؤلفه‌های $(k_1, -k_2)$ مشخص می‌شود. سپس از R به بعد با مؤلفه‌های (k_1, k_2) مشخص می‌شود و به همین ترتیب به بازتاب خود ادامه می‌دهد. از اینجا نتیجه می‌گیریم که بین دو دیواره بازتاب‌کننده دوسری موج بسیار متناظر با مؤلفه‌های (k_1, k_2) و $(k_1, -k_2)$ وجود دارند. (قبلاً در مورد موجهای ایستاده دوبعدی، مانند موجهای ایستاده روی غشا، دیدیم که به دلیل وجود موجهای اضافی ناشی از بازتاب‌های لبه‌های راست و چپ چهارموج وجود دارد). این دوموج تداخل می‌کنند و یک حرکت موجی بر ایندی مطابق رابطه زیر به وجود می‌آورند (چنانکه در مثال ۹.۲۲ خواهیم دید)

$$\xi = -2\xi_0 \sin k_2 y \cos(\omega t - k_1 x) \quad (۶۲.۲۲)$$

برای اینکه شرط مرزی $\xi = 0$ در $y = a$ صادق باشد، باید داشته باشیم

$$k_2 = \frac{n\pi}{a} \quad (۶۳.۲۲)$$

معادله (۶۲.۲۲) با نتیجه‌های قبلی مربوط به گونه‌های دیگر موجهای ایستاده خیلی فرق می‌کند زیرا مختص x حذف نشده و به صورت جمله $\cos(\omega t - k_1 x)$ در آمده است. این جمله متناظر با موجی است که در امتداد محور X منتشر می‌شود و دارای سرعت فازی به صورت زیر است



شکل ۲۹.۲۲ پرتو بین دو دیواره تخت بازتاب‌کننده منتشر می‌شود.

$$v_p = \frac{\omega}{k_1} = \left(\frac{k}{k_1}\right)v \quad (۶۴.۲۲)$$

چون $k_1 \leq k$ است (زیرا k_1 مؤلفه‌ای از بردار \mathbf{k} است) از معادله (۶۴.۲۲) پیداست که سرعت فاز موجی که در داخل کاواک منتشر می‌شود از $v = \omega/k$ سرعت فاز موجهای منتشر در فضای آزاد بیشتر است. بدین طریق برای موجهای الکترومغناطیسی سرعت فاز بیشتر از c می‌شود، ولی با استفاده از رابطه $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ و معادله (۶۳.۲۲) داریم

$$k^2 = k_1^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$$

یا

$$k_1 = \sqrt{k^2 - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}} \quad (۶۵.۲۲)$$

زیرا $k = \omega/v$ است. سرعت گروه وابسته به سرعت فاز داده‌شده با معادله (۶۴.۲۲)، با در نظر گرفتن معادله‌های (۵۸.۲۲) و (۶۵.۲۲) برابر می‌شود با

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_1} = \frac{k_1}{\omega} v^2 = \left(\frac{k_1}{k}\right)v \quad (۶۶.۲۲)$$

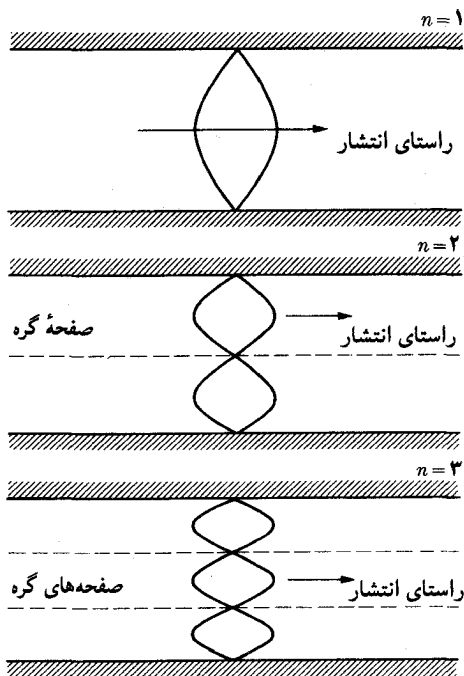
که کوچکتر از v است زیرا $k_1 \leq k$ است. از ضرب معادله (۶۴.۲۲) در معادله (۶۶.۲۲) به دست می‌آید $v_p v_g = v^2$ یا برای موجهای الکترومغناطیسی در خلا* ($v = c$) به دست می‌آید $v_p v_g = c^2$ ؛ نتیجه‌ای که قبلاً در مثال ۹.۱۹ در مورد دیگر به دست آمده است. مشاهده می‌شود که، حتی در فضای تهی، یک موجبر الکترومغناطیسی مانند یک محیط پاشنده به ضریب شکست کوچکتر از یک عمل می‌کند و از این رو سرعت فاز از c بزرگتر ولی سرعت گروه از c کوچکتر است.

معادله (۶۵.۲۲) نیز خاصیت عمده دیگر موجبرها را نشان می‌دهد. زیرا برای اینکه موج در امتداد موجبر منتشر شود k_1 باید عدد حقیقی و $\omega^2/v^2 \geq n^2 \pi^2/a^2$ باشد، یعنی؛

$$\omega \geq \frac{n\pi v}{a} \quad \text{یا} \quad v \geq \frac{nv}{2a} \quad (۶۷.۲۲)$$

یا به گفته دیگر، تنها موجهایی در امتداد موجبر منتشر می‌شوند که بسامد آنها در معادله (۶۷.۲۲) صدق کند. هرمد به وسیله مقدار n تعیین می‌شود و برای هرمد یک بسامد قطع با رابطه $n\pi v/a$ وجود دارد. در پایینتر از این بسامد انتشار غیرممکن می‌شود. بنابراین موجبرها نقش صافی‌ها را بازی می‌کنند.

با اینکه در داخل موجبر، موج در امتداد محور X منتشر می‌شود، ولی دامنه آن به اندازه سازه $\sin k_2 y$ در معادله (۶۲.۲۲) به طور عرضی در امتداد Y مدوله می‌شود. شکل ۳۰.۲۲ تغییرات عرضی دامنه را برای $n = 1, 2, 3$ نشان می‌دهد. در عمل مقطع موجبرها به شکل مستطیل یا دایره است. هر دو شکل از نظر سرعت فاز در امتداد محور و بسامد قطع نتایج



شکل ۳۰.۲۲ سه مد اول انتشار يك موج بين دو صفحه بازناب کننده موازی.

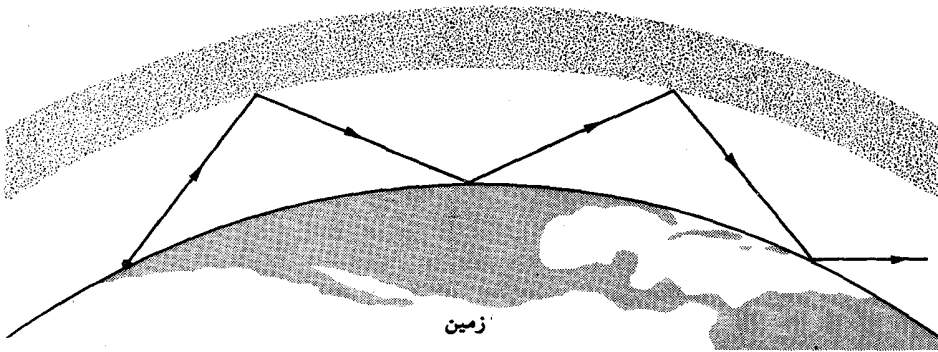
یکسانی به وجود می آورند.

هرچند بحث ما در مورد موجبرها در باره هر نوع موجی معتبر است، ولی این وضع در موجهای الکترومغناطیسی اندکی فرق می کند. به سبب سرشت عرضی موجهای الکترومغناطیسی، بسته به سمتگیری نسبی میدان الکتریکی E نسبت به دیواره های موجبر، برای هر k دو مد ممکن وجود دارد. از موجبرهای الکترومغناطیسی برای انتقال علامتها در نساجیه میکروموجها بسیار استفاده می شود.

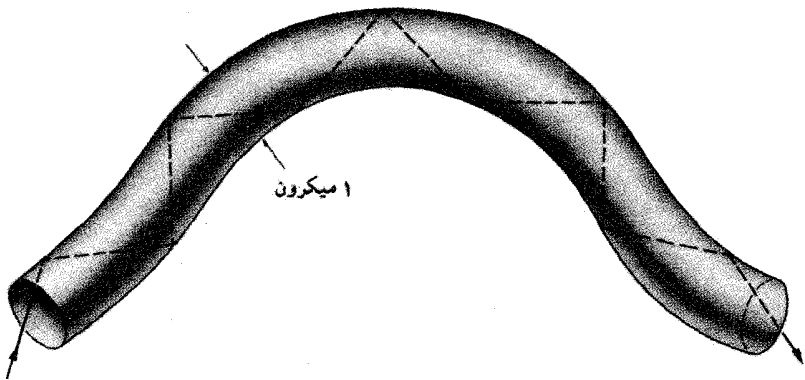
جالب توجه است یادآور شویم که، چنانکه شکل ۳۱.۲۲ نشان می دهد، ناحیه واقع بین سطح زمین و یونکره، که در حدود ۸۰۰km بالای زمین است، يك موجبر تشکیل می دهد و انتشار موجهای رادیویی در راستای انحنای زمین را میسر می سازد.

يك نمونه ساده از موجبرهای با صفحه های موازی در ناحیه اپتیکی دوآینه موازی است که در بعضی آرایشگاهها وجود دارد. نوع دیگر موجبر اپتیکی الیاف شفاف با قطر چند میکرون است که الیاف اپتیکی نام دارند. این الیاف از جنس شیشه و کوارتزند، مواد دیگری مانند نایلون دوره آزمون خود را می گذرانند، پرتوی که از يك سر داخل الیاف می شود پس از بازتابهای مکرر در امتداد محور الیاف از سر دیگر خارج می شود (شکل ۳۳.۲۲). هرگاه الیاف به صورت دسته آرایش یابند، می توان تصویری را از نقطه های

یونکره



شکل ۳۱.۲۲ زمین و یونکره برای موجهای رادیویی نقش موجبر بازی می کنند.



شکل ۳۲.۲۲ الیاف اپتیکی مانند موجبر نور عمل می کنند.

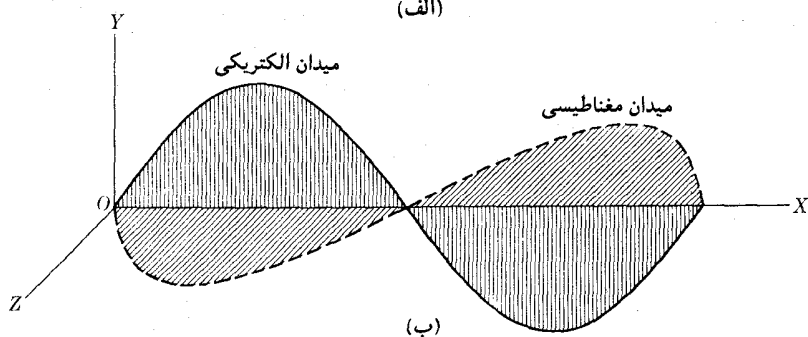
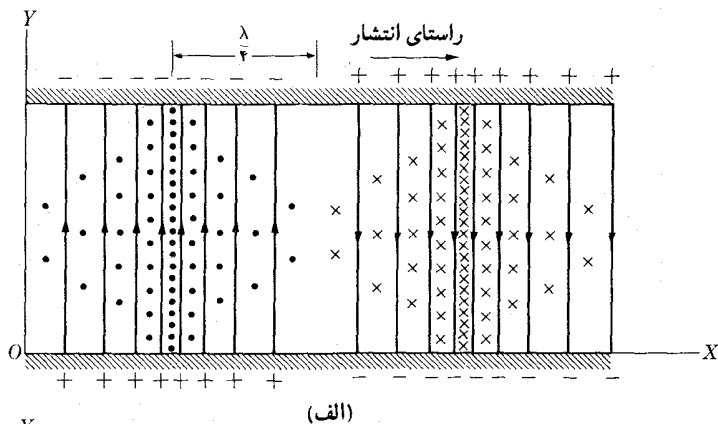
به نقطه دیگر انتقال داد. موجبرهای آکوستیکی نیز بسیار توسعه پیدا کرده اند. لوله های شوماژ یک ساختمان نقش موجبرها را بسازی می کنند زیرا می توانند نوفه های کوره شوماژ و یا صدا را از اتاقی به اتاق دیگر انتقال دهند. گوش داخلی اساساً یک موجبر آکوستیکی است.

مثال ۹.۲۲ معادله های (۶۲.۲۲) و (۶۳.۲۲) را به دست آورید.

حل: از دو موجی که در امتداد موجبر منتشر می شوند موج برابندی با رابطه

$$\xi = \xi_0 \sin[\omega t - (k_1 x + k_2 y)] + \xi'_0 \sin[\omega t - (k_1 x - k_2 y)] \quad (۶۸.۲۲)$$

به وجود می آید، که باید با معادله (۵۵.۲۲) مقایسه شود. برای تعیین ξ'_0 فرض می کنیم که



شکل ۳۳.۲۲ (الف) خطهای نیروی الکتریکی (خطهای قائم) و مغناطیسی (نقطه‌ها و ضربدرها) در صفحه XY برای یک موج الکترومغناطیسی که به موازات صفحه‌های بازتاب کننده موازی با صفحه XZ منتشر می‌شود. (ب) میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در موج نمایش داده شده در قسمت (الف).

در تمام نقاط سطح پایینی، یعنی برای $y = 0$ داشته باشیم $\xi = 0$. پس از قرار دادن $y = 0$ در رابطه (۶۸.۲۲) به دست می‌آید

$$\xi = (\xi_0 + \xi'_0) \sin(\omega t - k_1 x) = 0$$

به گونه‌ای که داریم $\xi_0 + \xi'_0 = 0$ یا $\xi'_0 = -\xi_0$. این نتیجه را می‌توانستیم از وضع مشابهی که قبلاً بررسی کرده بودیم پیش‌بینی کنیم. در این صورت معادله (۶۸.۲۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$\xi = \xi_0 \{ \sin[\omega t - (k_1 x + k_2 y)] - \sin[\omega t - (k_1 x - k_2 y)] \}$$

از تبدیل تفاضل دو سینوس به حاصلضرب می‌توان نوشت

$$\xi = -2\xi_0 \sin k_2 y \cos(\omega t - k_1 x) \quad (۶۹.۲۲)$$

با قرار دادن $y = 0$ مشاهده می‌شود که شرط مرزی روی سطح پایینی برآورده می‌شود. شرط

مرزی در سطح بالای $(y = a)$ نیز به صورت $\xi = 0$ است. این امر ایجاب می کند که $\sin k_y a = 0$ ، یعنی $k_y a = n\pi$ یا $k_y = n\pi/a$ باشد. ولی، برای مؤلفه X هیچگونه شرط مرزی وجود ندارد.

مثال ۱۰.۲۲ موجهای الکترومغناطیسی را در داخل يك موجبر با صفحه های موازی بررسی کنید.

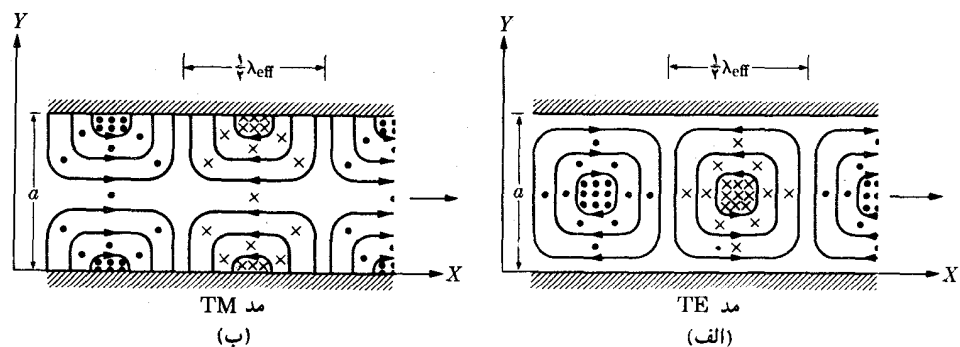
حل: چنانکه قبلاً توضیح دادیم، موجهای الکترومغناطیسی در داخل موجبرها دارای بعضی ویژگیها هستند که از سرشت عرضی موج و شرایط مرزی در سطح رسانا ناشی می شوند. شرایط مرزی عبارت اند از عمود بودن میدان الکتریکی و مماس بودن میدان مغناطیسی بر سطح رسانا. يك جواب ممکن معادلات ماکسول کسه این شرایط را برای يك موجبر تخت بر آورده می کند در معادله (۱۲.۱۹) آمده است، یعنی $E_y = E_0 \sin(\omega t - k_x x)$ ، $B_z = B_0 \sin(\omega t - k_x x)$ ، با فرض $B_0 = E_0/c$. خطهای نیروی الکتریکی در شکل ۳۳.۲۲ با خط و از آن میدان مغناطیسی با نقطه و ضربدر نشان داده شده اند. در این حالت موجبر سرعت فاز موج را که با سرعت فاز، $c = \omega/k$ ، متناظر با انتشار در فضای آزاد منتشر می شود تغییر نمی دهد، بلکه تنها برای محدود کردن جبهه موج بدکار می رود. ولی معادلات ماکسول جوابهای دیگری را نیز که شرایط مرزی را بر آورده می کنند می پذیرند. يك جواب ممکن عبارت است از

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = E_0 \sin k_y y \cos(\omega t - k_x x)$$

$$B_x = -\frac{k_y}{\omega} E_0 \cos k_y y \sin(\omega t - k_x x)$$

$$B_y = -\frac{k_x}{\omega} E_0 \sin k_y y \cos(\omega t - k_x x), \quad B_z = 0$$

این جواب را می توان با قراردادن مستقیم آن در معادله های ماکسول تحقیق کرد. این جواب را جواب TE (الکترویی عرضی) می نامند زیرا در آن میدان الکتریکی عرضی است اما میدان مغناطیسی مؤلفه ای در راستای مؤثر انتشار، یعنی محور X دارد. مع ذلک میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بر هم عمودند. برای اینکه شرایط مرزی روی دو صفحه رسانا صادق باشد باید به ازای $y = 0$ و $y = a$ داشته باشیم $E_z = 0$ و $B_y = 0$. شرط اول خود به خود بر آورده است، در صورتی که شرط دوم ایجاب می کند که $\sin k_y a = 0$ یا $k_y a = n\pi$ باشد، بنا بر این شرط داده شده با معادله ۳۳.۲۲ به دست می آید. شکل ۳۴.۲۲ الف خطهای نیروی مربوط به پایتترین مد، $n = 1$ ، را نشان می دهد. خطهای نیروی میدان الکتریکی خطهای راست موازی صفحه ها (عمود بر صفحه کتاب) هستند و با ضربدر یا نقطه نشان داده شده اند، در صورتی که خطهای نیروی میدان مغناطیسی منحنیهایی بسته اند. هر نقش پهنای نصف



شکل ۳۴.۲۲ موجبرها برای موجهای الکترومغناطیسی. (الف) مد TE، میدان الکتریکی بر صفحه شکل عمود است. (ب) مد TM، میدان مغناطیسی بر صفحه شکل عمود است.

طول موج مؤثر $2\pi/k_1$ را در برمی گیرد و نقشهای پیاپی بعدی به اندازه π با یکدیگر اختلاف فاز دارند. نقشها با سرعت فاز $v_p = \omega/k_1$ در امتداد موجبر سیر می کنند. جواب دیگر معادله های ماکسول عبارت است از

$$E_x = -\frac{k_y}{k_1} E_0 \sin k_y y \sin(\omega t - k_1 x)$$

$$E_y = E_0 \cos k_y y \cos(\omega t - k_1 x), \quad E_z = 0$$

$$B_x = B_y = 0, \quad B_z = \frac{\omega}{k_1 c^2} E_0 \cos k_y y \cos(\omega t - k_1 x)$$

درستی این جواب را نیز می توان با جانشانی مستقیم در معادله ها تحقیق کرد. جواب دوم را با علامت TM (مغناطیسی عرضی) نشان می دهند. دلیل این نام گذاری این است که میدان مغناطیسی آن عرضی است. اما میدان الکتریکی مؤلفه ای در راستای مؤثر انتشار دارد. دومیدان عمود بر یکدیگر باقی می مانند. برای اینکه شرایط مرزی روی صفحه های رسانا بر آورده شوند لازم است که به ازای $y=0$ و $y=a$ ، $E_x = 0$ شود. شرط اول خود به خود بر آورده است، برای تحقق شرط دوم لازم است که یکبار دیگر $\sin k_y a = 0$ یا $k_y a = n\pi$ باشد، یعنی بازم شرط داده شده با معادله (۳۳.۲۲) به دست می آید. بنا بر این دو مد، بسامد قطع یکسان دارند.

شکل ۳۴.۲۲ ب مجدداً خطهای نیروی متوسط به پایینترین مد، $n=1$ را نشان می دهد. اما در این حالت خطهای نیروی میدان مغناطیسی خطهای راست و موازی با دیوارها هستند (و بر صفحه شکل عمودند) و با نقطه و ضربدر نشان داده شده اند، در صورتی

که خطهای نیروی میدان الکتریکی با نقشهای رسم شده متناظرند. مانند حالت مد TE، هر نقش نصف طول موج مؤثر $2\pi/k_1$ را در برمی گیرد و نقشها در امتداد موجبر با سرعت فاز $v_p = \omega/k_1$ حرکت می کنند.

جواب عمومی معادلات ماکسول که شرایط مرزی ایسن مسئله را بر آورده می کند ترکیب خطی از مدهای TE و TM است.

فهرست منابع

1. «Discovery of Interference by Thomas Young.» R. Pohl, *Am. J. Phys.* 28, 530 (1960)
 2. «Microwave Optics.» C. Andrews. *The Physics Teacher* 2, 55 (1964)
 3. «Measuring Artificial Star Separation by Interference.» M. Pryor, *Am. J. Phys.* 27, 101 (1959)
 4. «The 210-Foot Radio Telescope at Parkes.» E. Bowen, *The Physics Teacher*, 4, 99 (1966)
 5. «Fiber Optics.» N. Kapany, *Sci Am.* November 1960, page 72
 6. *Light: Principles and Experiments*, G. Monk. New York; Dover Press 1963, Chapters 10 and 11
 7. *Optics*, B. Rossi, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957, Chapter 3
 8. *Great Experiments in Physics*, Morris Shamos, editor, New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1959, Chapter 7 (Young)
 9. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapter 29; Volume II, Chapters 23 and 24
 10. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 315 (Young)
 11. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Section 30.5
۱۲. ریس، جی. آر. [و] اف. جی. میلفورد، اصول تئوری الکترومغناطیس، ترجمه جلال صمیمی [و] ناصرعلیزاده قمصری، ج ۱، ۲، مشهد، مؤسسه چاپ و انتشارات دانشگاه مشهد، ۱۳۵۹، ج ۲. (ویرایش دوم انگلیسی این کتاب در مرکز نشر دانشگاهی در دست ترجمه است.)

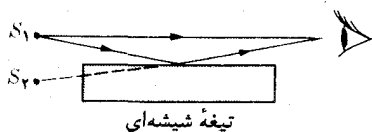
مسئله‌ها

۱۰۲۲ دوشکاف به فاصله 1 mm از هم با نور سرخی به طول موج $650 \times 10^{-7}\text{ m}$ روشن می‌شوند. فریزهای تداخلی را روی پردای به فاصله 1 m از شکافها مشاهده می‌کنند. (الف) فاصله بین دو فریز روشن و دو فریز تاریک را پیدا کنید. (ب) فاصله فریز مرکزی را از فریز تاریک سوم و فریز روشن پنجم تعیین کنید.

۲۰۲۲ توسط دو منشور فونل (شکل ۴۰۲۲) و بسا استفاده از نوری به طول موج $650 \times 10^{-7}\text{ m}$ فریزهای تداخلی روی پردای به فاصله 80 cm از دو منشور تولید می‌کنند. اگر فریز فاصله 2.4 mm از پرده را پوشانند فاصله بین دو تصویری را که به وسیله دو منشور تشکیل می‌شود پیدا کنید.

۳۰۲۲ اگر چشمه‌ای به فاصله d از دو منشور فونل به ضریب شکست n و زاویه رأس کوچک A قرار گیرد، ثابت کنید که فاصله بین دو تصویر برابر است با $a = 2(n-1)Ad$. در این رابطه A بر حسب رادیان است. فاصله فریزهای نور سبز به طول موج $5 \times 10^{-7}\text{ m}$ را که به وسیله چشمه‌ای تولید می‌شوند محاسبه کنید؛ چشمه به فاصله 5 cm از یک دو منشوری به ضریب شکست 1.5 و زاویه رأس 2° قرار گرفته است. پرده به فاصله 1 m از دو منشور قرار دارد.

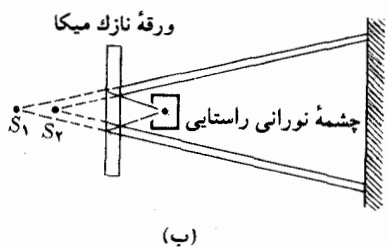
۴۰۲۲ شکل ۳۵۰۲۲ دستگاهی به نام آینه لوید را نشان می‌دهد که نقشهای تداخلی تولید می‌کند. چشمه‌های هم‌دوس عبارت‌اند از چشمه S_1 و تصویر آن S_2 که از بازتاب روی سطح بالایی تیغه شیشه‌ای به وجود می‌آید. بنابراین پرتوهایی که تداخل می‌کنند عبارت‌اند از پرتوهایی که مستقلاً از چشمه می‌آیند و پرتوهایی که روی شیشه بازتاب می‌کنند. اگر فریز متناظر با اختلاف مسیر صفر (الف) روشن، (ب) تاریک باشد از تغییر فاز ناشی از بازتاب چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ در تجربه واقعی نتیجه حالت ب به دست می‌آید. آیا می‌توانستیم این نتیجه را از بحث بخش ۷۰۲۵ پیش‌بینی کنیم؟



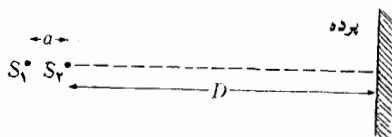
شکل ۳۵۰۲۲

۵۰۲۲ در یک آینه لوید، شکاف چشمه S_1 و تصویر مجازی آن S_2 در صفحه‌ای واقع در 20 cm پشت لبه چپ آینه قرار دارند (رک شکل ۳۵۰۲۲). طول آینه 30 cm است و پردای در لبه راست آن قرار دارد. اگر فاصله عمودی S_1 از آینه 2 mm و $\lambda = 72 \times 10^{-7}\text{ m}$ باشد، فاصله لبه راست آینه را از اولین بیشینه نور حساب کنید.

۶۰۲۲ اگر چشمه‌های S_1 و S_2 ، به فاصله a از یکدیگر، در امتداد خط عمود بر پرده قرار گرفتند باشند، نقش تداخلی روی پرده چگونه است (شکل ۳۶.۲۲ الف)؟ به طور تجربی، دو چشمه می‌توانند دو تصویر یک چشمه نورانی حاصل از بازتاب روی دو رویه یک ورقه نازک از میکا باشند (شکل ۳۶.۲۲ ب). این اسباب را تداخل منج پل می‌نامند.



(ب)

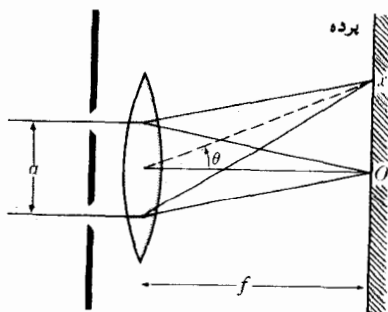


(الف)

شکل ۳۶.۲۲

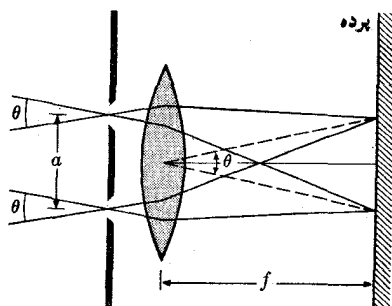
۷۰۲۲ دو چشمه صوتی همزمان شده موجهایی با شدت یکسان و به بسامد 680 Hz منتشر می‌کنند. فاصله دو چشمه از هم 75 m و سرعت صوت 340 ms^{-1} است. جاهای شدت کمینه را (الف) روی خط راستی که از چشمه‌ها می‌گذرد (ب) روی صفحه نیمساز دو چشمه و (ج) روی صفحه‌ای که شامل دو چشمه است، پیدا کنید. (د) آیا در یکی از این کمینه‌ها شدت برابر صفر می‌شود یا نه؟

۸۰۲۲ یک روش برای مشاهده نقش تداخلی تولید شده توسط دو شکاف عبارت است از روشن کردن آنها با پرتوهای موازی نور و قرار دادن یک عدسی همگرا در پشت صفحه شکافها و مشاهده نقش تداخلی روی پرده‌ای که در صفحه کانونی عدسی قرار دارد (شکل ۳۷.۲۲). ثابت کنید که جای فریزهای روشن نسبت به فریز مرکزی با رابطه $x = n(f\lambda/a)$ و جای فریزهای تاریک با رابطه $x = (2n+1)(f\lambda/2a)$ داده می‌شوند. n عدد درست، f فاصله کانونی عدسی و a فاصله بین دو شکاف است.



شکل ۳۷.۲۲

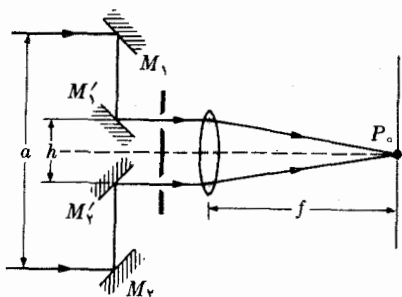
۹۰۲۲ دو باریکه نور تکفام با طول موج یکسان که باهم زاویه کوچک می سازند روی دو شکاف به فاصله a از یکدیگر می تابند؛ دو شکاف در جلو يك عدسی همگرا قرار دارند (شکل ۳۸.۲۲). به سبب جابجایی زاویه‌ای دو باریکه، دو مجموعه فریز مشاهده شده روی پرده‌ای که در صفحه کانونی عدسی قرار دارد برهم منطبق نیستند (رک مسئله پیش). ثابت کنید که اگر $\theta = \lambda/2a$ باشد فریزهای روشن يك باریکه روی فریزهای تاریك باریکه دیگر می افتند و نقش تداخلی محو می شود. در سال ۱۸۶۸/۱۲۴۷ فیزو این روش را برای اندازه گیری جدایی زاویه‌ای دو جسم دور با تغییر فاصله a به گونه‌ای که نقش تداخلی محو شود پیشنهاد کرد. به عنوان مثال، از این روش برای اندازه گیری جدایی زاویه‌ای ستاره‌ها به صورت زیر استفاده شده است؛ پرده‌ای را که روی آن دو شکاف ایجاد شده است جلوی عدسی شیئی يك تلسکوپ قرار می دهند و آن قدر فاصله بین شکافها را تغییر می دهند تا نقش پراش محو شود. کمینه جدایی زاویه‌ای قابل تشخیص توسط تلسکوپ شکستی رصدخانه مون ویلسون را پیدا کنید. قطر شیئی تلسکوپ ۲۵۴ m (۱۰۰ اینچ) است. طول موج را برابر 507×10^{-7} m بگیرید.



شکل ۳۸-۲۲

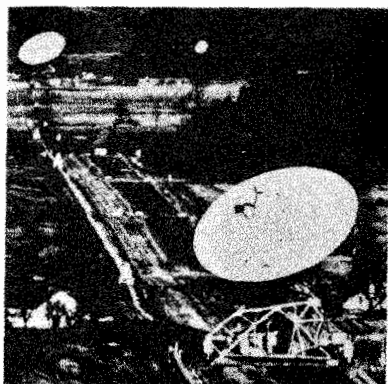
۱۰۲۲ برای افزایش توان تفکیک يك تلسکوپ، مایکلسون در سال ۱۹۲۱/۱۳۰۰ تداخل سنجی همانند دستگاه شکل ۳۹.۲۲ درست کرد. در این شکل M ها چهار آینه هستند که در جلوی عدسی شیئی تلسکوپ قرار گرفته اند. بنابراین آنچه در داخل تلسکوپ مشاهده می شود نقش تداخلی است که پرتوهای تابیده به آینه‌های M_1 و M_2 درست می کنند. این دستگاه در اساس همان دستگاه فیزو است که در مسئله ۹۰۲۲ شرح دادیم. اگر به يك چشمه گسترده و دایره‌ای نور از طریق این دستگاه نگاه کنیم، می توان ثابت کرد به شرطی نقش تداخلی محو می شود که قطر ظاهری چشمه با رابطه $\theta = 1.22 \lambda/a$ به فاصله آینه‌ها مربوط شود. مایکلسون با انتخاب $a = 30.73$ m و طول موج برابر 507×10^{-7} m مشاهده کرد که فریزهای متناظر با ستاره α واقع در صورت فلکی شکارچی محو شدند. ثابت کنید که قطر ظاهری این ستاره برابر $0.047''$ است. این روش اولین سنجش قطر

يك ستاره را فراهم كرد. قطر عدسی شیئی يك تلسكوپ چقدر باید باشد تا همین توان تفكیک را فراهم کند؟ اگر فاصله ستاره $10^{18} \times 1.80$ m باشد، قطر حقیقی ستاره را پیدا کنید. این امتداد را با قطر خورشید و قطر مدار حرکت انتقالی زمین به دور خورشید مقایسه کنید.

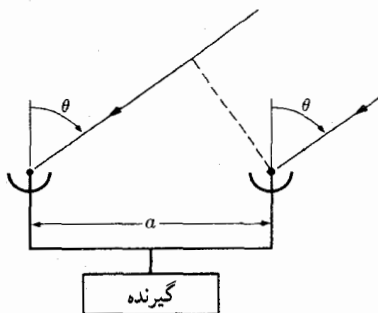


شکل ۳۹.۲۲

۱۱.۲۲ يك دستگاه تداخل سنج که در اخترشناسی به کار می رود عبارت است از دو رادیو-تلسكوپ که به فاصله معینی از هم قرار گرفته اند. آنتنهای این رادیوتلسکوپها را می توان در هر راستایی قرار داد به شرط اینکه همیشه موازی هم قرار بگیرند. سیگنالهای دریافتی را آینه‌ها به ایستگاه گیرنده انتقال می دهند و در آنجا با هم درمی آمیزند (شکل ۴۰.۲۲ الف). ثابت کنید که راستاهای تابشی که برای آنها سیگنال برابند بیشینه است با معادله (۱۱.۲۲) یا $\sin \theta = n\lambda/a$ داده می شوند. [دانهمایی: توجه کنید که این وضع درست عکس وضع دوچشمه‌ای است که در شکل ۳.۲۲ نشان داده شده است]. نموداری در مختصات قطبی برای



(ب)



(الف)

شکل ۴۰.۲۲ الف) دستگاه تداخل سنج رادیویی. ب) تداخل سنج رادیویی دو جزئی گرین بانک، در ویرجینیای غربی.

شدت سیگنال بر حسب زاویه θ رسم کنید. شکل ۴۰.۲۲ ب تداخل سنج دوجزئی گرین بانک در ویرجینیای غربی را نشان می‌دهد، کسه با طول موج ۱۱ cm کار می‌کند. فاصله بین دو رادیو تلسکوپ، a ، را می‌توان تا ۲۷۰۰ m میزان کرد. برای فاصله بیشینه دو تلسکوپ قطر ظاهری را برای شدت بیشینه مرکزی پیدا کنید.

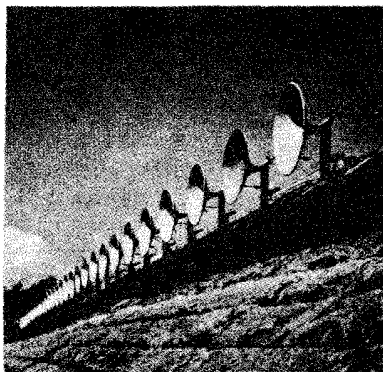
۱۲.۲۲ فرض کنید که به جای دو شکاف موازی آزمایش یانگ، سه شکاف موازی همفاصله a در دسترس است. در توزیع شدت نقش تداخلی مشاهده شده روی یک پرده واقع در فاصله دور بحث کنید.

۱۳.۲۲ برای آرایش چشمه‌های شکل ۱۲.۲۲، شدت بیشینه‌های فرعی را نسبت به شدت بیشینه اصلی پیدا کنید. [داهنمایی: می‌توان ثابت کرد که اولین بیشینه فرعی در $\theta \approx 148^\circ$ به وجود می‌آید].

۱۴.۲۲ فاصله بین چشمه‌های آرایه شکل ۱۲.۲۲ را طوری پیدا کنید که در آنها بیشینه‌های اصلی برابر با $\theta = \pm \pi/2$ باشد. جای بیشینه‌های فرعی را تعیین کنید. نمودار توزیع زاویه‌ای شدت را رسم کنید.

۱۵.۲۲ توزیع زاویه‌ای شدت را برای (الف) سه و (ب) پنج چشمه موج یکسان، در امتداد یک خط مستقیم و همفاصله به فاصله a مورد بحث قرار دهید. a را برابر $\lambda/2$ بگیرد.

۱۶.۲۲ اولین تداخل سنج رادیویی چندگانه که در سال ۱۹۵۱/۱۳۳۰ توسط پروفیسور دیلیو. ان. کسریستیانسن در استرالیا ساخته شد در شکل ۴۱.۲۲ نشان داده شده است. این دستگاه متشکل است از ۳۲ آنتن به فاصله ۷ m از همدیگر با بازتاب‌کننده‌های سهمی متناظر



شکل ۴۱.۲۲ تداخل سنج رادیویی دانسگاه سیدنی در استرالیا.

با هر کدام و برای طول موج 21 cm تنظیم شده است. سیگنالهای دریافتی توسط آنتنها را در ایستگاه با هم ترکیب و یک سیگنال برآیند مشاهده می‌کنند. از این رو دستگاه هم‌ارز 32 چشمه هم‌فاصله است. (الف) پهنای زاویه‌ای بیشینه مرکزی، (ب) جدایی زاویه‌ای بین بیشینه‌های اصلی پایی را پیدا کنید.

17.22 با در نظر گرفتن تداخل حرکتی موجی حاصل از N چشمه، به گونه‌ای که در بخش 3.22 مطالعه شد، ثابت کنید که فاز اولیه حرکت برآیند با $\delta_N = (N-1)\delta/2$ داده می‌شود. δ از معادله (12.22) به دست می‌آید. توجه کنید که δ زاویه‌ای است که بردار \vec{OP} با محور X در شکل 9.22 می‌سازد.

18.22 با استفاده از نتیجه اثبات شده در مسئله پیش وقانون جمع بردارها، رابطدهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید

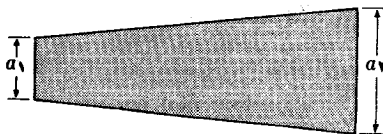
$$1 + \cos \delta + \cos 2\delta + \dots + \cos(N-1)\delta = \frac{\sin \frac{1}{2} N \delta}{\sin \frac{1}{2} \delta} \cos \frac{1}{2} (N-1)\delta$$

$$\sin \delta + \sin 2\delta + \dots + \sin(N-1)\delta = \frac{\sin \frac{1}{2} N \delta}{\sin \frac{1}{2} \delta} \sin \frac{1}{2} (N-1)\delta$$

[دانهمایی: توجه کنید که در شکل 9.22 ، مؤلفه‌های بردار برآیند در امتداد محورهای X و Y برابرند با مجموع مؤلفه‌های هر بردار.]

19.22 دو تیغه تخت شیشه‌ای به شکل مستطیل یکی روی دیگری گذاشته شده است. یک نوار کاغذی نازک بین آن دو در یکی از گوشه‌ها طوری قرار داده شده است که گوه نازکی از هوا تشکیل شود. تیغه‌ها را با باریکه نور زرد سدیم $\lambda = 589 \times 10^{-7} \text{ m}$ با تابش عمودی روشن می‌کنند. به ازای هر سانتیمتر از طول گوه ده فریز تداخلی تشکیل می‌شود. زاویه گوه را پیدا کنید.

20.22 یک قطعه فیلم مربعی سلوفان به ضریب شکست 1.5 دارای مقطع دوزنق‌ای است به گونه‌ای که ضخامت دوزنق رو به روی آن a_1 و a_2 است (شکل 42.22). اگر آن را



شکل ۴۲.۲۲

با نور تکفام به طول موج $m \times 10^{-7} \times 600$ با تابش عمودی روشن کنند، تعداد فریزهایی که بر اثر بازتاب روی فیلم ظاهر می‌شوند ۱۰ تا است. اختلاف $a_2 - a_1$ چقدر است؟

۲۱.۲۲ نوری به طول موج $m \times 10^{-7} \times 500$ در راستای عمود روی لایه نازکی به ضخامت $m \times 10^{-6}$ و به ضریب شکست ۱.۴ می‌تابد. قسمتی از نور به داخل لایه نفوذ می‌کند و از رویه دوم بازتاب می‌کند. چند موج در امتداد مسیر این نور در داخل لایه از نقطه تابش تا نقطه خروج وجود دارد؟ اختلاف فاز بین موجی که داخل لایه می‌شود و موجی که از آن خارج می‌شود چقدر است؟ همین مسئله را برای نوری که زاویه تابش آن 30° است حل کنید.

۲۲.۲۲ دو تیغه از جنس شیشه هر کدام به طول ۵ cm را از یک پهلو روی هم قرار می‌دهند و بین دو پهلو مقابل آنها یک برگ نازک کاغذی می‌گذارند به گونه‌ای که منشوری از هوا درست شود. هنگامی که این منشور با نوری به طول موج $m \times 10^{-7} \times 500$ و با زاویه تابش 90° روشن شود ۴۲ فریز تاریک مشاهده می‌شوند. ضخامت برگ کاغذ را پیدا کنید.

۲۳.۲۲ یک لایه نازک به ضخامت $m \times 10^{-6} \times 200$ و ضریب شکست ۱.۴ با نور تکفامی به طول موج $m \times 10^{-7} \times 600$ روشن می‌شود. حداقل زاویه تابشی را که برای آن یک تداخل بازتابی (الف) سازنده، (ب) ویرانگر بیشینه وجود دارد پیدا کنید. مسئله را از نو برای نور عبوری حل کنید.

۲۴.۲۲ اگر روی یک تیغه شیشه‌ای (ضریب شکست n_g) را با لایه نازکی به ضریب شکست $n_g = \sqrt{n_g}$ (مسئله ۱۸.۱۰ را ببینید) و به ضخامت یک چهارم طول موج نور داخل فیلم، پوشانند، ثابت کنید که برای تابش عمودی یک تداخل ویرانگر کامل بین نور بازتاب در هر دو سطح به وجود می‌آید. این یکی از روشهای مؤثری است که برای کاهش شدت بازتاب از طریق تیغه‌ها و عدسیها در وسایل اپتیکی به کار می‌رود. چنین لایه نازکی را پوشش پاد بازتاب می‌نامند.

۲۵.۲۲ اگر ضریب شکست لایه نازک مسئله پیش خیلی بالاتر از شیشه و ضخامت آن یک چهارم طول موج نور (در فیلم) باشد، ثابت کنید که شدت نور بازتاب برای این طول موج بخصوص افزایش می‌یابد.

۲۶.۲۲ اگر شعاع رویه کوژ یک عدسی کوژ-تخت که برای تولید حلقه‌های نیوتون به کار می‌رود باشد، ثابت کنید که شعاع حلقه‌های روشن بسا رابطه $m^2 = N\lambda R$ و شعاع حلقه‌های تاریک با رابطه $m^2 = (2N + 1)(\lambda R/2)$ داده می‌شوند. N عدد درست مثبت است. ضریب شکست هوا برابر یک فرض شده است.

۲۷.۲۲ بسا گذاشتن یک عدسی کوژ-تخت روی یک شیشه تخت، حلقه‌های نیوتون مشاهده

می‌شوند (شکل ۱۴.۲۲). شعاع انحنای عدسی m ۱۰ است. (الف) شعاع حلقه‌های تداخلی تاریک از مرتبه‌های مختلف، مشاهده شده توسط بازتاب تحت تابش تقریباً عمودی نوری به طول موج $m \times 10^{-7} \times 488$ را پیدا کنید. (ب) اگر قطر عدسی 4 cm باشد چند حلقه می‌توان دید؟

۲۸.۲۲ شعاع انحنای رویه کوژ یک عدسی تخت-کوژ برابر m ۱۲۰ است. عدسی را روی یک تیغه شیشه‌ای تخت می‌گذارند. رویه کوژ آن به سمت پایین است و از بالا با نور سرخ‌ی به طول موج $m \times 10^{-7} \times 685$ روشن می‌شود. قطر سومین حلقه روشن نقش تداخلی را پیدا کنید.

۲۹.۲۲ یک سیم مسی به شعاع 1 mm و طول 1 m تحت نیروی کششی N ۱۰۰۰۰ قرار دارد. پیدا کنید (الف) بسامد اصلی و دو هماهنگ اول آن را، (ب) طول موجهای متناظر را، (ج) نمودار حالت ارتعاشی سیم را در هر مورد رسم کنید. (د) برای هر بسامدی معادله توصیف کننده موجهای ایستاده را بنویسید.

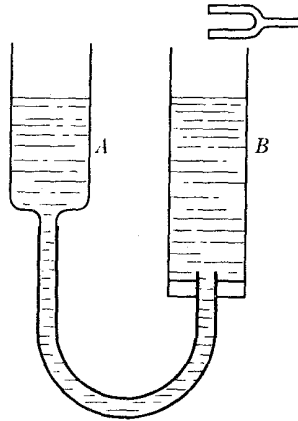
۳۰.۲۲ بسامد اصلی یک موج چگونه تغییر می‌کند؟ هر گاه (الف) کشش وارد بر آن را، (ب) جرم واحد طول آن را، (ج) شعاع آن را و (د) طول آن را دو برابر کنند. برای حالتی که کمیت‌های بالا به نصف تقلیل یافته باشند، مسئله را از نو حل کنید.

۳۱.۲۲ لوله‌ای به طول m ۶۰ در دو سرش باز است، (الف) دوسرش باز است، (ب) یک سرش باز و سر دیگرش بسته است؛ اگر دمای هوا $^{\circ}\text{C}$ ۲۷ باشد، بسامد اصلی و هماهنگ اول آن را پیدا کنید. نمودار توزیع دامنه متناظر با بسامد اصلی و هماهنگ اول را در طول لوله رسم کنید.

۳۲.۲۲ درصد تغییر بسامد اصلی ستونی از هوا را بر حسب تغییر درجه دما از $^{\circ}\text{C}$ ۲۷ برآورد کنید (مسئله ۶.۱۸ را ببینید).

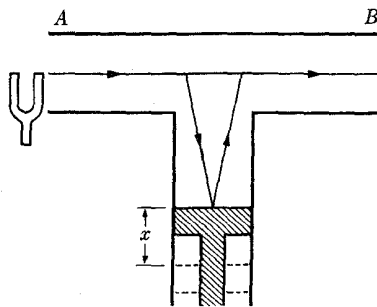
۳۳.۲۲ یک ریسمان مرتعش در بسامد Hz ۲۵۶ با دیافازونی در بازوایی است. اگر ۲۰٪ به کشش ریسمان افزوده شود بسامد زندهای تولید شده را تعیین کنید.

۳۴.۲۲ چنانکه شکل ۴۳.۲۲ نشان می‌دهد، دیافازونی به بسامد Hz ۲۵۶ در مقابل انتهای باز یک لوله گذاشته شده است. با بالا و پایین بردن مخزن A و در نتیجه تغییر سطح آب می‌توان طول ستون هوا را تغییر داد. طول سه ستون اول هوا را که با دیافازون در بازوایی اند پیدا کنید. شکل ساده‌ای رسم کنید که در هر حالت محل شکمها و گرهها را نشان بدهد. توزیع دامنه‌ها را در طول لوله نشان دهید. دما را برابر $^{\circ}\text{C}$ ۲۷ بگیرید.



شکل ۴۳.۲۲

۳۵.۲۲ چنانکه شکل ۴۴.۲۲ نشان می‌دهد، یک شاخهٔ لوله‌ای به شکل T توسط پیستون متحرکی بسته شده است. دیافراگمی در جای انتهایی باز A قرار دارد. ثابت کنید که فاصلهٔ بین دو وضع پیاپی پیستون که نسبت به آنها شدت صوت در B ، سرباز دیگر، بیشینه است برابر است با $x = \lambda/2$.



شکل ۴۴.۲۲

۳۶.۲۲ دو موج سطحی $A \sin k(x - vt)$ و $A \sin k(y - vt)$ در امتداد یک غشا منتشر می‌شوند. با نشان دادن اینکه این موجها هم‌ارز یک موج مدوله هستند که راستای انتشار آن با محور X زاویهٔ 45° می‌سازد و سرعت فزاد آن برابر $\sqrt{2}v$ است، حرکت موج برآیند را پیدا کنید. تحقیق کنید که طول موج به اندازهٔ سازهٔ $\sqrt{2}$ کاهش یافته است. ثابت کنید که دامنه در راستای خط $x - y = (2n + 1)\pi/k$ برابر صفر است.

۳۷.۲۲ اگر بسامد اصلی یک غشا مربع شکل و به ضلع a برابر $v_0 = v/2a$ باشد ثابت

کنید که بسامدهای پیاپی عبارت‌اند از

$$v = \sqrt{2}v_0, 2v_0, \sqrt{5}v_0, 2\sqrt{2}v_0, 3v_0, \sqrt{10}v_0, \sqrt{13}v_0, \dots$$

تعداد ترکیبهای مختلف n_x و n_y را که برای به‌دست آوردن مدهای اصلی و پیاپی ارتعاش لازم‌اند پیدا کنید. تعداد ترکیبهای مختلف n_x مد مرتعش را به‌دست می‌دهد.

۳۸۰۲۲ مسئله پیش را از نو برای يك كاواك مكعبی شكل به‌ضلع a حل کنید.

۳۹۰۲۲ موجبر عبارت است از يك لوله بلند به‌مقطع مستطیل و به‌اضلاع a و b . ثابت کنید که موج برآیند با رابطه زیر توصیف می‌شود

$$\xi = 4\xi_0 \sin k_y y \sin k_z z \cos(\omega t - k_x x)$$

و نیز نشان دهید تنها بسامدهایی که از امتداد موجبر می‌گذرند آنهایی‌اند که در رابطه $v \geq \sqrt{n_x^2/a^2 + n_y^2/b^2}$ صدق می‌کنند. n_x و n_y عددهای درست‌اند. صفحه‌های گره در موجبر را برای $n_x = 2$ و $n_y = 3$ پیدا کنید.

۴۰۰۲۲ برای يك تابش الكتر ومغناطیسی گیر افتاده در كاواك، تعداد مدهای ارتعاش عرضی در واحد حجم را در گستره بسامد بین $10^{15} \times 10$ Hz و $10^{15} \times 10^2$ Hz برآورد کنید.

۴۱۰۲۲ معادله يك موج دوبعدی با رابطه زیر داده شده است

$$\partial^2 \xi / \partial x^2 + \partial^2 \xi / \partial y^2 = (1/v^2) \partial^2 \xi / \partial t^2$$

جوابی پیدا کنید که با موجهای ایستاده $\xi = f(x, y) \sin \omega t$ متناظر باشد. ثابت کنید که $f(x, y)$ در معادله دیفرانسیلی زیر صدق می‌کند

$$\partial^2 \xi / \partial x^2 + \partial^2 \xi / \partial y^2 + k^2 f = 0$$

که در آن $k = \omega/v$ است، ثابتهای k_x و k_y را به‌گونه‌ای تعیین کنید که

$$f(x, y) = A \sin k_x x \sin k_y y$$

جوابی برای معادله پیش باشد. این نتایج را با نتیجه‌های بخش ۷۰۲۲ مقایسه کنید.

۴۲۰۲۲ گفتگوی مسئله پیش را به‌معادله يك موج سذبعدی تعمیم دهید. در این حالت جواب آزمون عبارت است از

$$f(x, y, z) = A \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z$$

۴۳۰۲۲ جوابهای معادله غیر جبری $x \operatorname{tg} x = C$ را از طریق رسم نمودار بررسی کنید. $y = C/x$ و $y = \operatorname{tg} x$ منحنیهای زیر عمل کنید؛ منحنیهای

را رسم و نقاط تقاطع آنها را تعیین کنید، یا منحنیهای $y = x$ و $y = C \cotg x$ را رسم و محل تقاطع آنها را تعیین کنید. در هر حالتی، بداستثنای نقطه تقاطع اول، تمام نقاط دیگر خیلی نزدیک به $x = n\pi$ اند، n عددی درست است. نتیجه را در مورد بحث مثال ۶.۲۲ به کار ببرید.

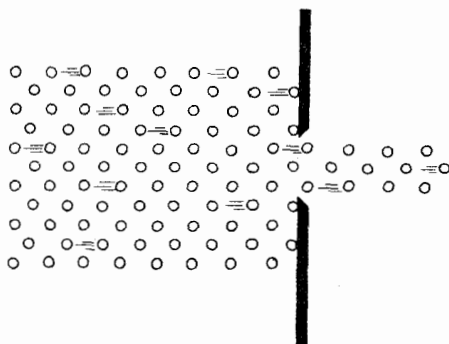
پراش

- ۱۰۲۳ مقدمه
- ۲۰۲۳ پراش فرانهورفر توسط شکاف مستطیل شکل
- ۳۰۲۳ پراش فرانهورفر توسط روزنه دایره‌ای
- ۴۰۲۳ پراش فرانهورفر توسط دوشکاف مساوی و موازی
- ۵۰۲۳ توریهای پراش
- ۶۰۲۳ پراش فرنل
- ۷۰۲۳ پراکندگی
- ۸۰۲۳ پراکندگی پرتوهای X توسط بلورها

یکی دیگر از پدیده‌های سرشتی حرکت‌های موجی را پراش می‌نامند. پراش هنگامی مشاهده می‌شود که موجی بر اثر مانعی به ابعاد قابل مقایسه با طول موج واپیچید. مانع ممکن است به صورت روزنه یا شکاف کوچکی روی پرده باشد، که تنها بخش کوچکی از جبهه موج تابش را از خود عبور می‌دهد. همچنین ممکن است مانع جسمی کوچک مانند سیم یا قرص باشد، که سد راه بخش کوچکی از جبهه موج بشود.

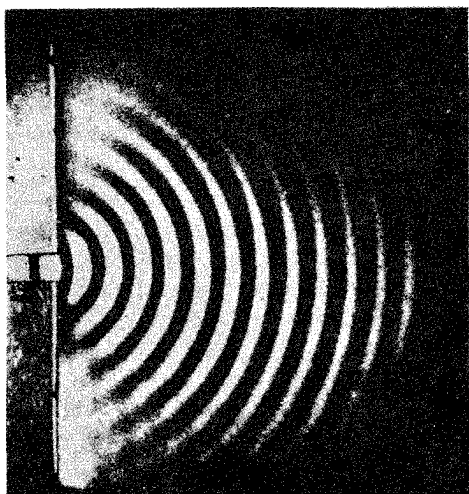
اگر جریانی از ذرات روی پرده‌ای که دارای روزنه‌ای کوچک است بتابد، تنها ذراتی که روی روزنه فرود می‌آیند می‌توانند عبور کنند و بدون آشفتگی به حرکت خود ادامه دهند (شکل ۱۰۲۳). بقیه ذرات یا متوقف می‌شوند یا بدعقب برمی‌گردند. برعکس، اگر شیئی در مقابل جریان ذرات قرار گیرد، مانع حرکت آن ذره‌هایی می‌شود که با آن برخورد می‌کنند، سایر ذره‌ها بدون آشفتگی به حرکت خود ادامه می‌دهند. با وجود این، از تجربیات روزانه، بویژه در حالت موجهای صوتی و موجهای سطح آب می‌دانیم که موجها به گونه‌ای دیگر رفتار می‌کنند یعنی، همان‌طور که شکل ۲۰۲۳ نشان می‌دهد، مانع را دور می‌زنند. بتدریج که ابعاد شکاف یا اندازه مانعها به طول موجها نزدیکتر می‌شوند این پدیده نیز بیش از پیش آشکارتر می‌شود. معمولاً پراش نور را با چشم غیر مسلح نمی‌توان مشاهده کرد، زیرا ابعاد بیشتر اجسامی که در مقابل نور قرار می‌گیرند از طول موج نور، که از مرتبه $10^{-7} \times 5$ است، خیلی بزرگترند*.

در این فصل پراش حاصل از بعضی روزنه‌ها یا شکافهایی را که شکل هندسی ساده‌ای دارند، در دو حالت ویژه، مطالعه می‌کنیم. در پراش فرانهوفر فرض می‌کنیم که پرتوهای تابش موازی‌اند و همچنین فرض می‌کنیم که نقش تداخلی را در فاصله خیلی دور مشاهده



شکل ۱۰۲۳ رفتار جریانی از ذرات که روی پرده‌ای با روزنه کوچک فرود می‌آیند.

* به دانشجویان توصیه می‌کنیم که بخش ۲۰۲۵ را از نو بخوانند.



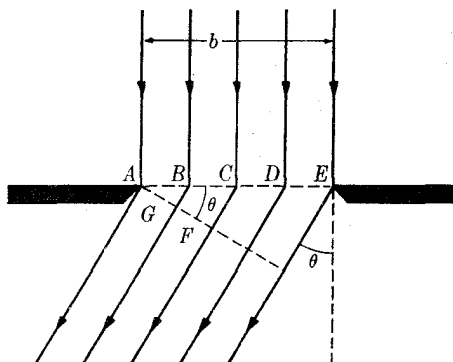
شکل ۲۰۲۳ رفتار موج هنگام رسیدن به پرده‌ای که روی آن روزنه کوچکی وجود دارد.

می‌کنیم، به گونه‌ای که تنها پرتوهای پراش موازی را به‌طور مؤثر دریافت می‌کنیم. برای این کار از یک عدسی که پرتوهای پراش هم‌راستا را در یک نقطه متمرکز می‌کند نیز می‌توان استفاده کرد. در پراش فرنیل، یا منشأ پرتوهای تابش یک چشمه نقطه‌ای است، یا پرتوهای پراش در نقطه معلومی از فضا مشاهده می‌شوند و یا هر دو همزمان وجود دارند.

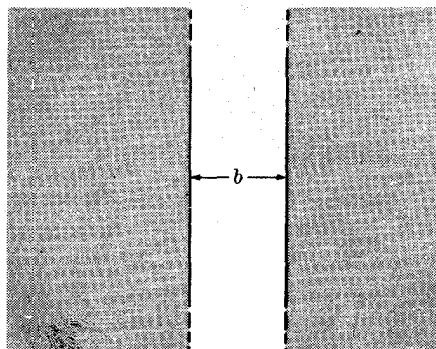
هنگامی که مانه‌های ایجاد شده در مقابل موج خود به چشمه‌های جدید موج تبدیل شوند پدیده پراکندگی که خیلی به پدیده پراش نزدیک است، رخ می‌دهد. در فصل ۱۹ پراکندگی امواج الکترومغناطیسی توسط الکترونهاى منفرد مطالعه شد، در این فصل پراکندگی را از دید کلی‌تر به‌طور خلاصه بررسی می‌کنیم.

۲۰۲۳ پراش فرانهوفر توسط شکاف مستطیل شکل

برای تحلیل پراش ابتدا، یک شکاف بسیار باریک و خیلی دراز را در نظر می‌گیریم که در آن بتوان از اثرهای لبه چشم پوشید. همچنین فرض می‌کنیم که موجهای تابش بر سطح شکاف عمودند. این کار، بدون اینکه وضع فیزیکی را تغییر دهد، محاسبه را خیلی آسان می‌کند. بنا به اصل هویگنس، هنگامی که موج تابش روی شکاف می‌افتد، هر نقطه از سطح آن به یک چشمه فرعی تبدیل می‌شود. این چشمه‌ها موجهای جدیدی گسیل می‌کنند که در این حالت موجهای پراش نامیده می‌شوند و دامنه بر ایند به کمک معادله (۲۰۲۵) حساب می‌شود. اگر موجهای پراش را از زاویه‌های مختلف θ نسبت به راستای موج تابش نگاه کنیم (شکل ۲۰۲۳)، مشاهده می‌کنیم که شدت آنها در بعضی راستاها صفر است. چنین راستاهایی با



(ب)



(الف)

شکل ۳.۲۳ پراش حاصل از یک شکاف باریک و دراز.

رابطه زیر داده می‌شوند

$$b \sin \theta = n\lambda \quad , n \neq 0 \quad (1.23)$$

n عدد درست مثبت یا منفی، b طول شکاف و λ طول موج موجهای تابش است. مقدار $n = 0$ را کنار نهاده‌ایم، زیرا متناظر است با مشاهده در امتداد راستای موج تابش و آشکار است که موجب بیشینه روشنایی می‌شود.

از معادله (۱.۲۳) داریم

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{b} \quad (2.23)$$

بنابراین به ازای $\sin \theta = \pm \lambda/b, \pm 2\lambda/b, \pm 3\lambda/b, \dots$ شدت برابر صفر است. برای توجیه معادله (۱.۲۳) یادآوری می‌کنیم که مطابق معادله (۸.۲۲) تداخل ویرانگر نتیجه برهم نهی دو پرتویی است که اختلاف مسیر آنها برابر

$$r_1 - r_2 = (\text{یک عدد درست فرد}) \times \frac{\lambda}{2}$$

است. ولی از شکل ۳.۲۳ پیداست که برای پرتوهایی به منشأ A و نقطه وسط C داریم

$$r_1 - r_2 = CF = \frac{1}{2} b \sin \theta = n \left(\frac{\lambda}{2} \right)$$

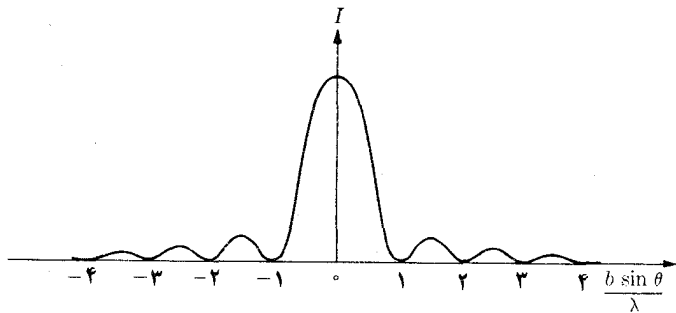
از این رو به ازای $n = 1, 3, 5, \dots$ برای این دو پرتو و همچنین سایر زوج پرتوهای دیگری که از نقطه‌هایی به فاصله $b/2$ تولید می‌شوند تداخل ویرانگر است و هیچ موجی در راستای زاویه θ دیده نمی‌شود. به ازای n زوج، نقطه‌های A و B را به فاصله $b/4$ در نظر می‌گیریم، در این صورت داریم

$$r_1 - r_2 = BG = \frac{1}{4}b \sin \theta = \frac{n \lambda}{2 \cdot 2}$$

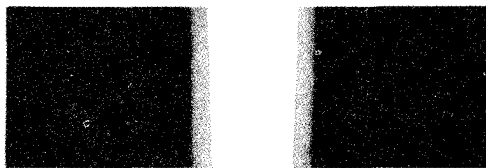
بنابراین اگر $n/2$ عدد درست فرد، یعنی $n = 2, 6, 10, \dots$ باشد، تداخل این دو پرتو و همچنین سایر زوج پرتوهای کسه به فاصله $b/4$ تولید می‌شوند و برانگیز است. مجدداً موجی در راستای متناظر با زاویه θ مشاهده نمی‌شود. می‌توان این شیوه را تا آنجا تعمیم داد که تمام اعداد درست را دربرگیرد. با وجود این به ازای $\theta = 0$ برای پرتوهای کسه از نقاط مختلف می‌آیند هیچ اختلاف فازی وجود ندارد و تداخل سازنده است و به یک بیشینه واضح منتهی می‌شود.

بین هر شدت صفری که از معادله (۱.۲۳) به دست می‌آید یک بیشینه وجود دارد، ولی بتدریج از شدت بیشینه‌ها کاسته می‌شود، این وضع با وضع تداخل فرق می‌کند. شکل ۴.۲۳ شدت موجهای پراش را برحسب θ نشان می‌دهد. توجه کنید که پهنای بیشینه مرکزی دو برابر پهنای سایر بیشینه‌هاست. شکل ۵.۲۳ نقش پراش واقعی یک شکاف مستطیل شکل را نشان می‌دهد.

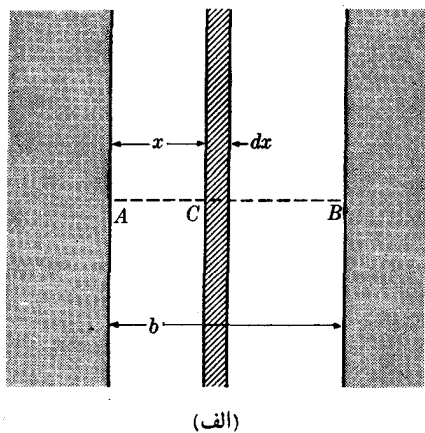
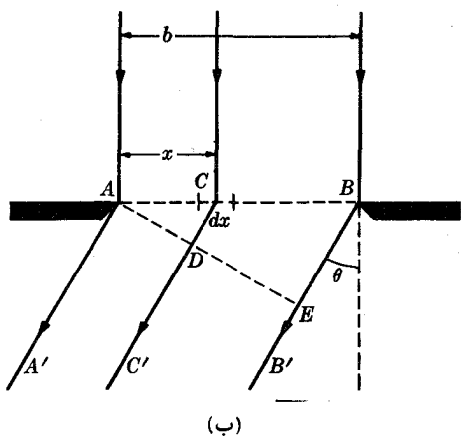
محاسبه توزیع شدت شکل ۴.۲۳ بسیار آسان و سودمند است. چنانکه شکل ۶.۲۳ الف نشان می‌دهد، اگر شکاف را به نوارهای بسیار باریک، هر کدام به پهنای dx تقسیم کنیم، می‌توان هر نوار را مانند یک چشمه فرعی موج با دامنه کم $d\xi$ در نظر گرفت.



شکل ۴.۲۳ توزیع شدت نقش پراش حاصل از شکاف باریک و دراز.



شکل ۵.۲۳ نقش پراش فرانهورف حاصل از شکاف باریک و دراز.

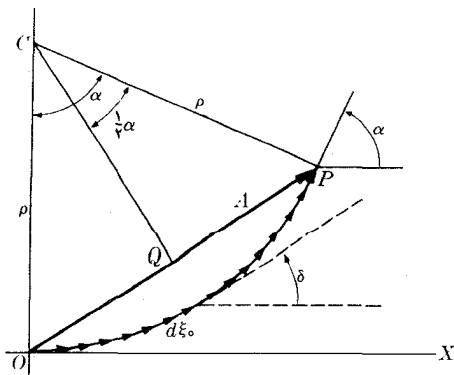


شکل ۶.۲۳

اگر پرتوهای گسیل شده در راستای متناظر با زاویه θ (شکل ۶.۲۳ ب) را در نظر بگیریم، اختلاف فاز بین پرتوهای AA' و CC' (به عنوان مرجع) برابر است با

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} CD = \frac{2\pi x \sin \theta}{\lambda} \quad (۳.۲۳)$$

بنابراین متناسب با x افزایش می‌یابد. برای به دست آوردن دامنه در راستای متناظر با زاویه θ ، باید بردارهای چرخان موجهایی را که از تمام نوارهای بین A و B می‌آیند رسم کنیم. چون تمام آنها دارای دامنهٔ بینهایت کوچک‌اند و نیز چون زاویهٔ فاز δ متناسب با x افزایش پیدا می‌کند، بردارهای چرخان، کمان OP از دایره‌ای به مرکز C و شعاع ρ را رسم می‌کنند (شکل ۷.۲۳). دامنهٔ بسرازند وتر OP است. زاویهٔ مماس در هر نقطه بر کمان بین O و P درست برابر δ است که از معادلهٔ (۳.۲۳) به دست می‌آید. در نقطهٔ P ،



شکل ۷.۲۳

متناظر با $x=b$ ، زاویه خط مماس با خط افقی برابر است با

$$\alpha = \frac{2\pi b \sin \theta}{\lambda} \quad (4.23)$$

این زاویه‌ای است که دو پرتو CO و CP نیز باهم تشکیل می‌دهند. بنابراین دامنه برآیند برابر است با

$$A = OP \text{ وتر} = 2QP = 2\rho \sin \frac{1}{2}\alpha = 2\rho \sin \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \quad (5.23)$$

برای مشاهده در راستای عمود، تمام بردارها موازی‌اند و برآیند آنها درست برابر است با مجموع طولهای آنها که مساوی طول کمان OP است. بنابراین اگر برای مشاهده عمودی ($\theta = 0$) دامنه برآیند را با A_0 نشان دهیم، داریم

$$A_0 = OP \text{ کمان} = \rho\alpha = \rho \frac{2\pi b \sin \theta}{\lambda} \quad (6.23)$$

از تقسیم معادله (۵.۲۳) بر معادله (۶.۲۳) بدست می‌آید

$$A = A_0 \left[\frac{\sin \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}} \right] \quad (7.23)$$

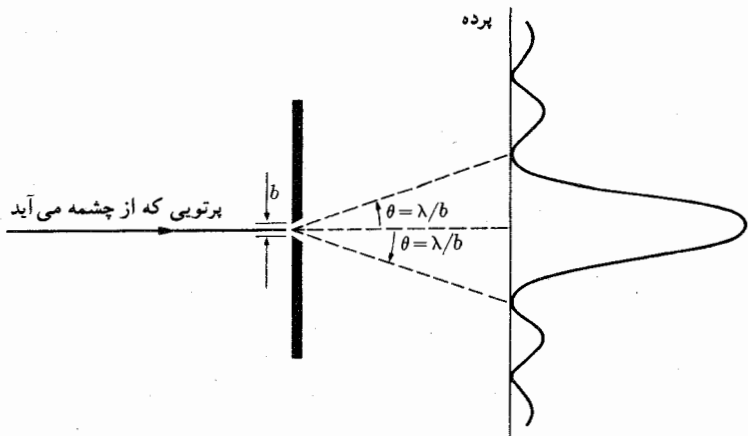
و چون شدت متناسب با مجذور دامنه است، داریم

$$I = I_0 \left[\frac{\sin \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}} \right]^2 = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \quad (8.23)$$

$u = \pi b \sin \theta / \lambda$ فرض شده است. بدین طریق ثابت می‌شود که مطابق معادله (۱۰.۲۳)، شدتهای صفر بدازای $u = n\pi$ یا $b \sin \theta = n\lambda$ بدست می‌آیند، به استثنای $n = 0$ ، زیرا در این صورت $(\sin u / u)_{u=0} = 1$ است. برای به دست آوردن شدتهای بیشینه، باید مقادیری برای u پیدا کرد که در $dI/du = 0$ صدق کنند (رک مثال ۱۰.۲۳). ولی چون این بیشینه‌های شدت با مقادیر افزایشی پیاپی u متناظرند، بیش از پیش تضعیف می‌شوند و سرانجام به نقش شکل ۴.۲۳ منتهی می‌شوند. برای λ های خیلی کوچکتر از b ، نخستین صفرهای شدت در هر طرف بیشینه مرکزی با زاویه زیر متناظرند

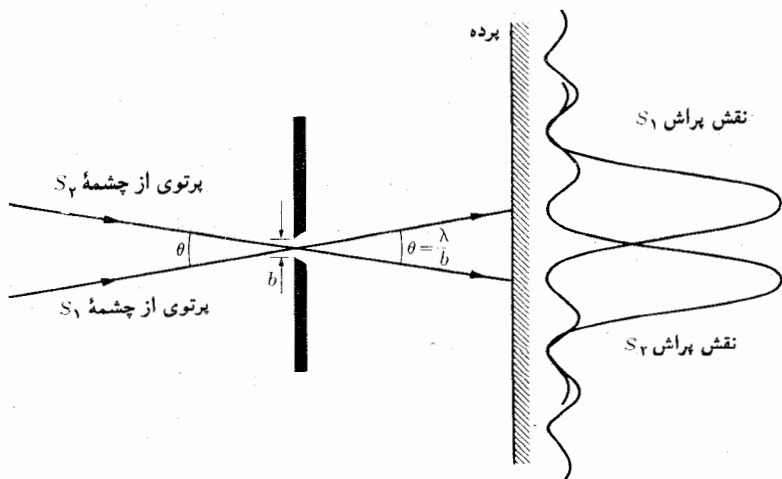
$$\theta \approx \sin \theta = \pm \frac{\lambda}{b} \quad (9.23)$$

که از قرارداد $n = \pm 1$ در معادله (۱۰.۲۳) بدست می‌آید. این نتیجه را در شکل ۸.۲۳



شکل ۸۰۲۳ زاویهٔ فراگیر قلهٔ مرکزی شدت در نقش پراش حاصل از يك تك شكاف

نشان داده ایم. مفهوم مفید دیگر توان تفکیک يك شكاف است که به وسیلهٔ لرد ریلی فیزیکدان انگلیسی تعریف شده است. این توان کمیته زاویهٔ فراگیر دوجام حاصل از دو چشمهٔ نقطه‌ای بسیار دور است که نقشهای پراش مربوط به آنها از هم تمیز داده می‌شوند. اگر موجهایی که از دو چشمهٔ دور S_1 و S_2 می‌آیند در راستاهایی که با هم زاویهٔ θ می‌سازند از داخل يك شكاف بگذرند (شکل ۹۰۲۳)، نقشهای پراش این امواج با هم ترکیب می‌شوند. چنانکه در طرف راست شکل ۹۰۲۳ نشان داده ایم، هنگامی توانایی تمیز آغاز می‌شود که بیشینهٔ مرکزی یکی روی اولین صفر یکی از دو طرف بیشینهٔ مرکزی



شکل ۹۰۲۳ قاعدهٔ ریلی برای توان تفکیک شكاف.

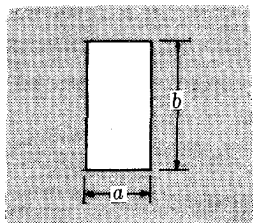
دیگری می افتد. ولی در این صورت بنا به معادله (۹.۲۳) و مطابق شکل ۸.۲۳، زاویه θ باید برابر باشد با

$$\theta = \frac{\lambda}{b} \quad (10.23)$$

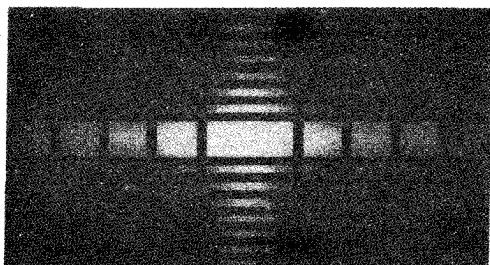
از این رابطه توان تفکیک شکاف مطابق تعریف ریلی به دست می آید. اگر فرض کنیم که S_1 و S_2 دو نقطه از یک شیء خیلی دور باشند، کمینه جدایی زاویه ای بین آنها، برای اینکه هنگام نگاه کردن به شیء از داخل شکاف قابل تمیز باشند، از معادله (۱۰.۲۳) به دست می آید. اگر نوری که از داخل شکاف می گذرد تصویری روی پرده تشکیل دهد و مثلاً این تصویر توسط میکروسکوپ مشاهده شود، میکروسکوپ دارای هر بزرگنمایی باشد، غیرممکن است جزئیات بیشتری غیر از آنچه توان تفکیک شکاف اجازه می دهد نشان دهد. این ملاحظات باید در طرح اسبابهای اپتیکی مورد توجه قرار گیرند.

اگر شکاف به شکل مستطیل و با ابعاد قابل مقایسه a و b باشد (شکل ۱۰.۲۳)، نقش پراش ترکیبی است از دو نقش مربوط به هر زوج از اضلاع مستطیل. به جای سری نوارهای نشان داده شده در شکل ۵.۲۳، مطابق شکل ۱۱.۲۳ یک سری مستطیل به دست می آید که به صورت چلیپا قرار دارند.

در این محاسبات سازه راستایی $g = (1 + \cos \theta) / 2$ را که هنگام بحث در اصل هویگنس در معادله (۲.۲۵) وارد شد به حساب نیاورده ایم. این سازه موجب می شود دامنه



شکل ۱۰.۲۳ شکاف مستطیل شکل.



شکل ۱۱.۲۳ نقش پراش فرانیهوفر شکاف مستطیل شکل که بلندی آن دو برابر پهناي آن است.

بیشینه‌های مرتبه بالاتر بیشتر کاهش یابند.

مثال ۱۰۲۳ بزرگی بیشینه‌های پیاپی نقش پراش حاصل از يك شكاف را برآورد کنید.

حل: بنا به معادله (۸.۲۳) بیشینه‌های پیاپی در بیشینه‌های کسر $\sin u/u$ رخ می‌دهند. بنا بر این باید به دست آوریم

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\sin u}{u} \right) = 0 \quad \text{یا} \quad \operatorname{tgu} = u$$

این يك معادله غیر جبری است، از همانگونه‌ای که قبلاً در مثال ۶.۲۲ برخورد داشتیم. جوابهای این معادله با رسم منحنیهای $y = u$ و $y = \operatorname{tgu}$ و پیدا کردن نقاط تقاطع آنها به دست می‌آید. انجام این کار را به عهده دانشجو واگذار می‌کنیم. ولی با فرض اینکه بیشینه‌های $\sin u/u$ خیلی نزدیک به بیشینه‌های $\sin u$ رخ می‌دهند، یعنی هنگامی که $u = (n + 1/2)\pi$ است بتوان جوابها را برآورد کرد. مقادیر واقعی u همواره اندکی کمتر از این برآوردند. با چشم پوشی از این اختلاف جزئی، مشاهده می‌کنیم که مقادیر $\sin u/u$ در بیشینه‌ها عبارت‌اند از $1/(n + 1/2)\pi$ و شدتهای متناظر عبارت‌اند از

$$I = \frac{I_0}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} = 0.0545 I_0, 0.0516 I_0, 0.0508 I_0.$$

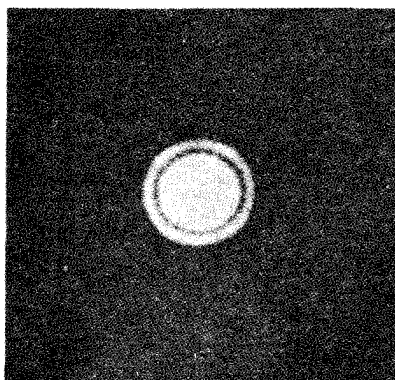
۳.۲۳ پراش فرانهوفر توسط روزنه دایره‌ای

نقش پراش حاصل از روزنه دایره‌ای بیشتر خصوصیات را که قبلاً در حالت شكاف مستطیلی مشاهده کردیم نشان می‌دهد. ولی به جای نقش مستطیلی شبیه آنچه در شکل ۱۱.۲۳ مشاهده کردیم، نقش پراش عبارت است از يك قرص روشن که، همچنانکه شکل ۱۲.۲۳ نشان می‌دهد، حلقه‌های يك درمیان روشن و تاریک آن را احاطه کرده‌اند. شعاعهای قرص مرکزی و حلقه‌های پیاپی سری ساده‌ای تشکیل نمی‌دهند. از تحلیل ریاضی پراش دایره‌ای که به دلیل وضع هندسی آن خیلی پیچیده‌تر از حالت شكاف مستطیلی است صرف نظر می‌کنیم. اگر R شعاع روزنه باشد (شکل ۱۳.۲۳)، زاویه متناظر با اولین حلقه تاریک با رابطه زیر داده می‌شود

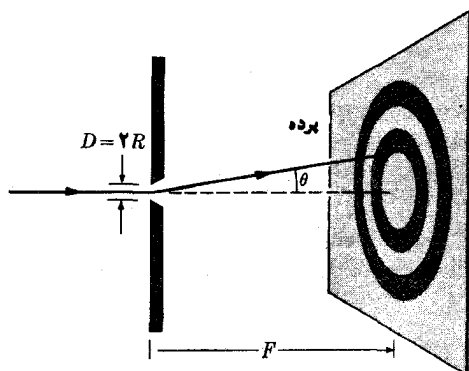
$$\frac{2\pi R \sin \theta}{\lambda} = 3.8317 \quad (11.23)$$

یا

$$\theta \approx \sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{2R} = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (12.23)$$

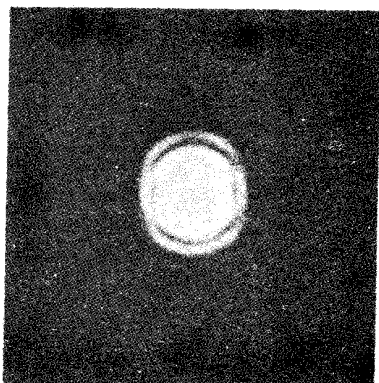


شکل ۱۲.۲۳ نقش پراش فرانیهوفر در روزنه دایره‌ای.

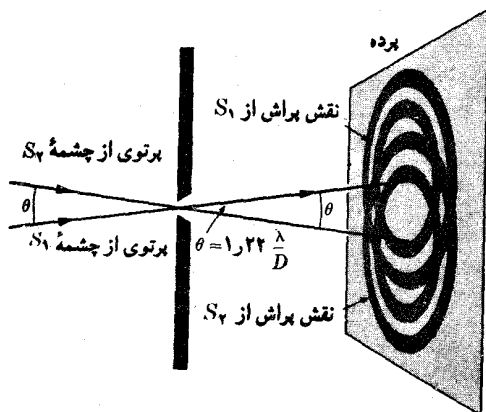


شکل ۱۳.۲۳

$D = 2R$ قطر روزنه و θ برحسب رادیان است. همچنین از این رابطه توان تفکیک روزنه دایره‌ای نیز به دست می‌آید، که مطابق تعریف ریلی عبارت است از کمینه زاویه بین راستاهای تابش دوموج تخت از دو چشمه نقطه‌ای دور که امکان تشخیص نقشهای پراش مربوط به هریک از آنها وجود دارد. این امر هنگامی پیش می‌آید که مرکز روشن قرص نقش پراش یکی از چشمه‌ها بر اولین حلقه تاریک نقش پراش چشمه دیگر منطبق باشد (شکل ۱۴.۲۳). جدایی زاویه‌ای با معادله (۱۲.۲۳)، یعنی $\theta = 1.22\lambda/D$ داده می‌شود. این رابطه در بخش ۵.۲۱ هنگام گفتگو درباره درشت‌نمایی تلسکوپ ظاهر شد. عدسی در واقع یک روزنه دایره‌ای است، و بنابراین تصویر یک نقطه، که در فصل



(ب)



(الف)

شکل ۱۴.۲۳ قاعده ریلی دربارهٔ توان تفکیک یک روزنهٔ دایره‌ای. قسمت (ب) نمایش تصویر دوچشمه نقطه‌ای به فاصلهٔ قابل تمیز توسط یک عدسی.

۲۱ آن را نقطهٔ دیگری فرض کردیم در واقع یک نقش پراش است. ولی، معمولاً شعاع عدسی در مقایسه با طول موج نور به قدری بزرگ است که در بیشتر کار بستهای عملی، می‌توان پدیدهٔ پراش را نادیده گرفت.

مثال ۲.۲۳ یک عدسی به قطر ۲ cm دارای فاصلهٔ کانونی ۴۰ cm است. این عدسی را با باریکهٔ نور موازی تکفام به طول موج $599 \times 10^{-7} \text{ m}$ روشن می‌کنند. شعاع قرص مرکزی نقش پراش مشاهده شده در صفحهٔ کانونی و همچنین توان تفکیک عدسی را برای این طول موج پیدا کنید.

حل: با استفاده از معادلهٔ (۱۲.۲۳) زاویهٔ فراگیر قرص مرکزی عبارت است از

$$\theta = 1.22 \times \frac{599 \times 10^{-7} \text{ m}}{2 \times 10^{-2} \text{ m}} = 1.80 \times 10^{-5} \text{ rad} = 371''$$

این زاویه توان تفکیک عدسی نیز هست. با استفاده از معادلهٔ (۴.۲) شعاع قرص مرکزی عبارت است از

$$r = f\theta = 40 \text{ cm} \times 1.8 \times 10^{-5} \text{ rad} = 72 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

بنابراین، در عمل می‌توان گفت که، تصویر نقطه‌ای در صفحهٔ کانونی است.

۴.۲۳ پراش فرانهورف توسط دو شکاف مساوی و موازی

اکنون دو شکاف هر کدام به پهنای b و به فاصلهٔ a از یکدیگر را در نظر می‌گیریم (شکل

۱۵.۲۳). حال برای راستای متناظر با زاویه θ دو مجموعه از موجهای پراش توسط هر یک از شکافها به وجود می آید و آنچه در واقع مشاهده می شود نتیجه تداخل این موجهاست. یا بگفته دیگر، اکنون ترکیبی از تداخل و پراش وجود دارد. برای تعیین شدت موجهای برآیند بر حسب زاویه θ ، باید دامنه برآیند را برای هر شکاف حساب کنیم و برای به دست آوردن دامنه نهایی آن دو دامنه را باهم ترکیب کنیم. این کار در شکل ۱۶.۲۳ با رسم بردارهای چرخان مختلف نشان داده شده است. مقدار زاویه α از معادله (۴.۲۳) محاسبه می شود. بردار \overline{OP} دامنه برآیند A_1 از شکاف ۱ است. مقدار این دامنه، بنا به معادله (۷.۲۳) برابر است با

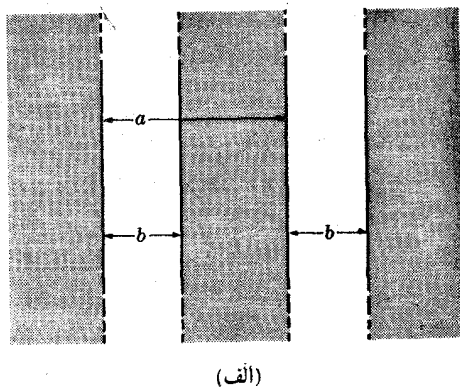
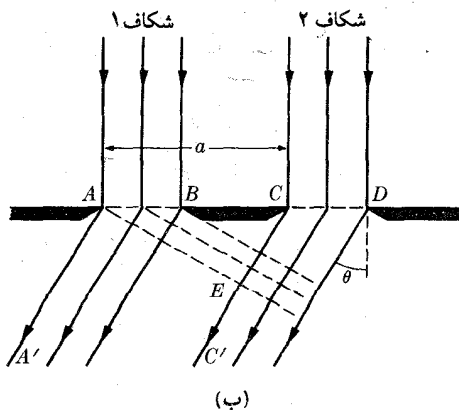
$$A_1 = A_0 \frac{\sin(\pi b \sin \theta / \lambda)}{\pi b \sin \theta / \lambda} \quad (۱۳.۲۳)$$

چون پهنای دو شکاف یکی است، مقدار دامنه برآیند برای شکاف ۲ برابر می شود با A_1 ، ولی فاز مختلف است. چنانکه از شکل ۱۵.۲۳ پیداست، بین پرتوهای متناظر با شکافهای ۱ و ۲، مانند AA' و CC' ، اختلاف فاز ثابتی برابر با

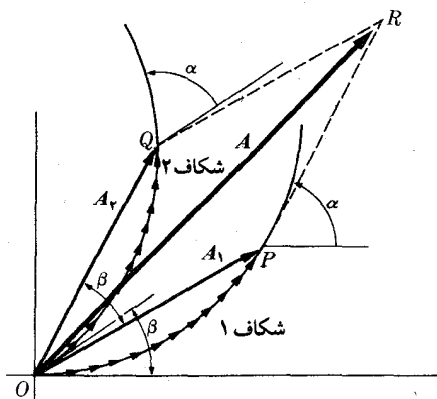
$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} CE = \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \quad (۱۴.۲۳)$$

وجود دارد. در نتیجه دامنه های متناظر با بردارهای وابسته به دو شکاف، زاویه ای برابر با β با یکدیگر می سازند. بنابراین، در شکل ۱۶.۲۳، خط $OQ = A_2$ برای شکاف ۲ از چرخاندن خط $OP = A_1$ (مربوط به شکاف ۱) به اندازه زاویه β به دست می آید. در این صورت دامنه برآیند برابر است با

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \beta}$$



شکل ۱۵.۲۳ نمای جلویی و مقطع دو شکاف باریک، دراز و موازی.



شکل ۱۶.۲۳

با قراردادن $A_1 = A_2$ و با استفاده از معادله (پ.۱۴)، می‌توان نوشت

$$A = A_1 \sqrt{2(1 + \cos \beta)} = 2A_1 \cos \frac{1}{2} \beta$$

در نتیجه از معادله‌های (۱۳.۲۳) و (۱۴.۲۳) به‌دست می‌آید

$$A = 2A_0 \frac{\sin(\pi b \sin \theta / \lambda)}{\pi b \sin \theta / \lambda} \cos \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

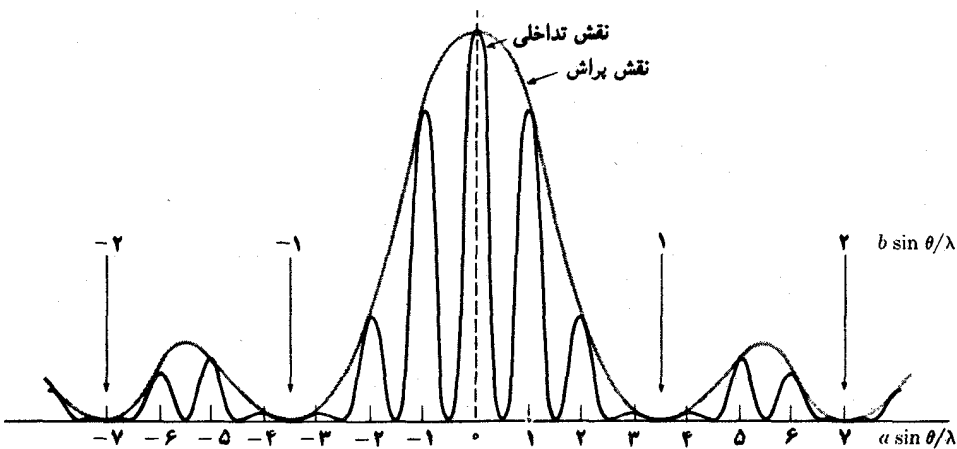
بنابراین، توزیع شدت، که می‌دانیم متناسب با مجذور دامنه است، برابر می‌شود با

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\pi b \sin \theta / \lambda)}{\pi b \sin \theta / \lambda} \right]^2 \cos^2 \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \quad (۱۵.۲۳)$$

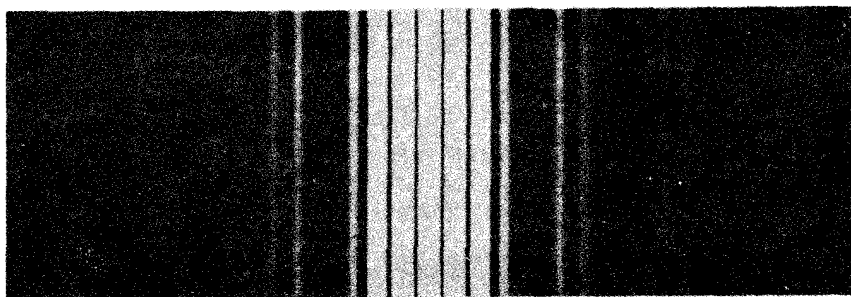
اگر این معادله را با معادله (۸.۲۳) که برای یک شکاف به دست آوردیم مقایسه کنیم، می‌بینیم که در اینجا سازه اضافی $\cos^2(\pi a \sin \theta) / \lambda$ ظاهر شده است. ولی اگر به معادله (۱۵.۲۲) که توزیع شدت در نقش تداخلی دوچشمه همزمان را به دست می‌داد برگردیم، می‌بینیم، تا جایی که به سازه تداخلی مربوط است، معادله (۱۵.۲۳) با معادله (۱۵.۲۳) مطابقت دارد، زیرا a در معادله (۱۵.۲۳) فاصله دو شکاف و در معادله (۱۵.۲۳) فاصله دوچشمه است. بنابراین معادله‌ای که نقش کلی پراش دو شکاف را بیان می‌کند معادله‌ای است که نقش تداخلی دوچشمه همزمان را توصیف می‌کند. دوچشمه همزمان توسط رابطه نقش پراش یک تک‌شکاف مدوله شده است. این موضوع را شکل ۱۷.۲۳ و عکس ۱۸.۲۳ نشان می‌دهند.

ملاحظه کنید که بیشینه‌های نقش تداخلی برای

$$\pi a \sin \theta / \lambda = n\pi \quad \text{یا} \quad \sin \theta = n(\lambda / a)$$



شکل ۱۷.۲۳ توزیع شدت (روی صفحه‌ای عمود بر نور تابش) نتیجه تداخل دو شکاف باریک، دراز و موازی.

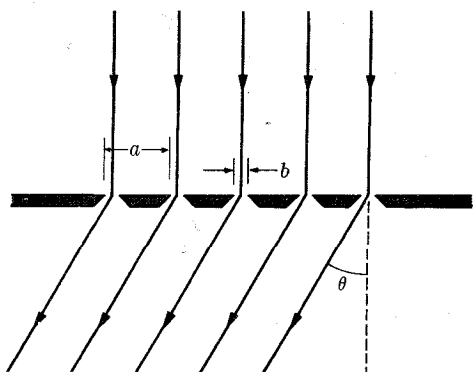


شکل ۱۸.۲۳ نقش پراش فرانهِوفر ناشی از دو شکاف باریک، دراز و موازی.

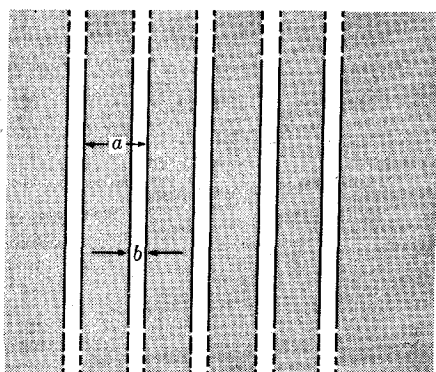
به وجود می‌آیند، در صورتی که صفرهای نقش پراش با معادله (۲.۲۳)، یا $\sin \theta = n'(\lambda/b)$ داده می‌شوند. چون $a > b$ است، بنابراین فاصله بین صفرها در نقش پراش بزرگتر از فاصله بین بیشینه‌ها در نقش تداخلی است. در نتیجه، هنگامی که دو شکاف وجود دارند، فریزهای روشن خیلی باریکتر و فاصله بین آنها نیز خیلی کمتر از فریزهای حاصل از تک شکاف است.

۵.۲۳ توریهای پراش

گام منطقی بعدی بررسی نقش پراش حاصل از چند شکاف موازی با پهنای یکسان b و فاصله‌های یکسان a است. تعداد شکافها را N فرض می‌کنیم. از شکل ۱۹.۲۳ و از تشابه با مسئله دو شکاف پیداست که در راستای متناظر با زاویه θ باید تداخل N چشمه همزمان



(ب)



(الف)

شکل ۱۹.۲۳ نمای جلویی و مقطع توری پراش.

یکی به ازای هر شکاف) را که توسط نقش پراش تک شکاف مدوله شده‌اند مشاهده کنیم. چون فاصله بین چشمه‌های پیاپی a است، سازه تداخل برای شدت همان است که در معادله (۱۴.۲۳) به دست آورديم، یعنی

$$\left[\frac{\sin(N\pi a \sin \theta / \lambda)}{\sin(\pi a \sin \theta / \lambda)} \right]^2$$

در صورتی که، بنا به معادله (۸.۲۳)، سازه مربوط به پراش عبارت است از

$$\left[\frac{\sin(\pi b \sin \theta / \lambda)}{\pi b \sin \theta / \lambda} \right]^2$$

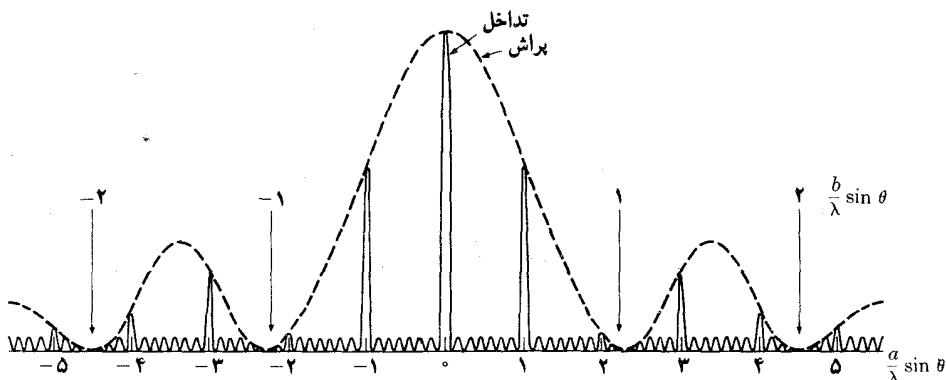
در این صورت توزیع شدت برابر می‌شود با

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\pi b \sin \theta / \lambda)}{\pi b \sin \theta / \lambda} \right]^2 \left[\frac{\sin(N\pi a \sin \theta / \lambda)}{\sin(\pi a \sin \theta / \lambda)} \right]^2 \quad (۱۶.۲۳)$$

اگر N ، تعداد شکافها، زیاد باشد نقش عبارت می‌شود از یک سری فریزهای روشن و باریک، متناظر با بیشینه‌های اصلی نقش تداخلی، که بنا به معادله (۱۵.۲۳) با

$$a \sin \theta = n\lambda \quad \text{یا} \quad \sin \theta = n(\lambda/a) \quad (۱۷.۲۳)$$

داده می‌شوند که در آن $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ است، ولی شدتهای آنها توسط نقش پراش مدوله شده‌اند. شکل ۲۰.۲۳ حالت مربوط به هشت شکاف ($N=8$) را نشان می‌دهد. بر حسب مقدار n ، بیشینه‌های اصلی اول، دوم، سوم، ... و غیره را مرتبه پراش می‌نامند.



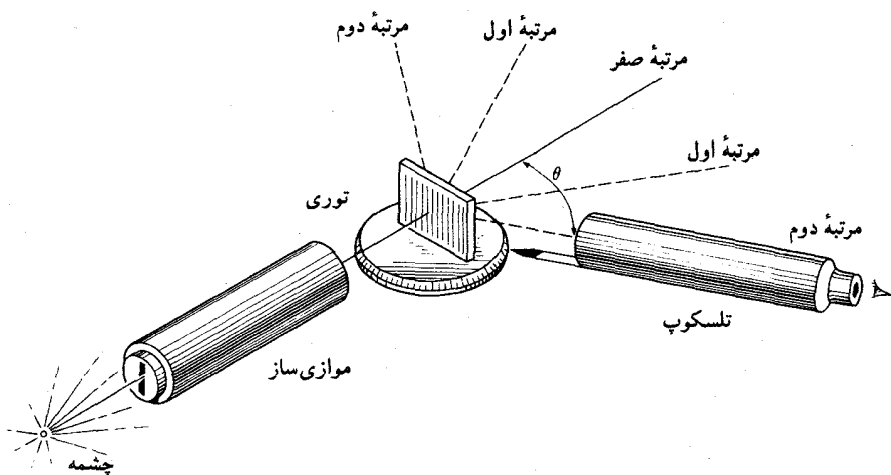
شکل ۲۰.۲۳ توزیع شدت توسط توری پراش روی صفحه‌ای عمود بر راستای نور تابش و موازی با توری.

دستگاهی که اکنون مطالعه کردیم توری پراش انتقالی نامیده می‌شود. برای تحلیل نور فروسرخ نزدیک، مرئی یا فرابنفش، توریهای پراش انتقالی شامل چندین هزار شکاف در هر سانتی مترند که از حرك خطهای موازی روی يك فیلم شفاف به دست می‌آیند. این خطها فضاهای تار بین شکافها را تشکیل می‌دهند. در توری پراش از طریق بازتاب نیز می‌توان کار کرد؛ يك سری خطوط موازی روی يك سطح فلزی حك می‌کنند، نوارهای باریک بین خطها نور را باز می‌تابانند و نقش پراش تولید می‌کنند (رک مسئله ۳۱.۲۳). برای اصلاح قانونی کردن پرتوها گاهی سطح فلز را کوژ انتخاب می‌کنند (رک مسئله ۳۲.۲۳).

اگر توری که دارای چندین طول موج است روی توری بتابد، طول موجهای مختلف بیشینه‌های پراش را در زاویه‌های مختلف تولید می‌کنند، مگر بیشینه مرتبه صفر که برای تمام طول موجها یکی است. مجموعه بیشینه‌های يك مرتبه معلوم برای تمام طول موجها بیناب تشکیل می‌دهند. بدین طریق بینابهای مرتبه اول، دوم، سوم و غیره به دست می‌آیند. توجه کنید که هر چه طول موج بلندتر باشد، انحراف يك بیناب مرتبه معلوم نیز بیشتر است. بنا بر این سرخ بیش از بنفش منحرف می‌شود و این درست عکس آن چیزی است که هنگام پاشیدگی نور توسط منشور پیش می‌آید. پاشندگی توری با رابطه $D = d\theta/d\lambda$ تعریف می‌شود. بنا به معادله (۱۷.۲۳) داریم $\cos \theta \, d\theta/d\lambda = n/a$ به گونه‌ای که به دست می‌آید

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{n}{a \cos \theta} \quad (18.23)$$

این رابطه نشان می‌دهد که هر چه مرتبه پراش بالاتر باشد، پاشیدگی نیز بیشتر است. توریهای پراش در تحلیل بیناب، در گستره وسیعی از نواحی بیناب الکترومغناطیسی، اهمیت‌شان زیاد است و چندین برتری چشمگیر نسبت به منشورها دارند. یکی از این برتورها این است که



شکل ۲۱.۲۳ بیناب نمای توری. چشمه در مقابل شکاف موازی ساز قرار دارد. توری پراش در راستای عمود بر محور موازی ساز قرار دارد و بینابهای مرتبه‌های مختلف را توسط تلسکوپ متحرک آزمایش می‌کنند.

توری پراش به‌خاکصیت پاشندگی ماده سازنده توری بستگی ندارد، بلکه تنها به‌شکل هندسی وابسته است. شکل ۲۱.۲۳ عناصر اصلی یک بیناب نمای توری را نشان می‌دهد.

مثال ۳۰.۲۳ در یک توری ۲۰۰۰۰ خط در طول ۴ cm وجود دارد. جدایی زاویه‌ای تمامی بیناب مرتبی را برای بیناب پراش مرتبه اول و دوم به‌دست آورید. چنانکه در بخش ۱۹.۱۹ گفتیم، فرض می‌کنیم که طول موج از $3790 \times 10^{-7} \text{ m}$ تا $770 \times 10^{-7} \text{ m}$ است.

حل: برای a داریم

$$a = \frac{4 \times 10^{-2} \text{ m}}{20000} = 2 \times 10^{-6} \text{ m}$$

بنابراین از معادله (۱۷.۲۳) برای $n = 1$ به‌دست می‌آید

$$\sin \theta_{\text{سرخ}} = \frac{770 \times 10^{-7} \text{ m}}{2 \times 10^{-6}} = 0.385 \quad \text{یا} \quad \theta_{\text{سرخ}} = 19^\circ 34'$$

$$\sin \theta_{\text{بنفش}} = \frac{3790 \times 10^{-7}}{2 \times 10^{-6}} = 0.195 \quad \text{یا} \quad \theta_{\text{بنفش}} = 11^\circ 15'$$

بنابراین بیناب مرتبه اول زاویه‌ای برابر با $8^\circ 19'$ را می‌پوشاند. همچنین برای بیناب مرتبه دوم، همچنانکه دانشجو می‌تواند خودش حساب کند، زاویه‌ای برابر با $22^\circ 27'$

به دست می آید. آیا بیناب کاملی از مرتبه سوم امکان پذیر است؟

مثال ۴.۲۳ هنگامی که زاویه تابش موج تکفام تختی که روی یک توری پراش می تابد مخالف صفر باشد جای بیشینه ها را پیدا کنید. در شکل ۲۲.۲۳ زاویه تابش برابر i و زاویه پراش برابر θ است.

حل: بیشینه های اصلی با نقش تداخلی تعیین می شوند و نقش تداخلی نیز به نوبه خود توسط اختلاف فاز بین پرتوهای متناظر با شکافهای پیاپی تعیین می شود. شکل ۲۲.۲۳ نشان می دهد که چنین اختلاف فازی با رابطه زیر داده می شود

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (AB + BC) = \frac{2\pi a (\sin i + \sin \theta)}{\lambda}$$

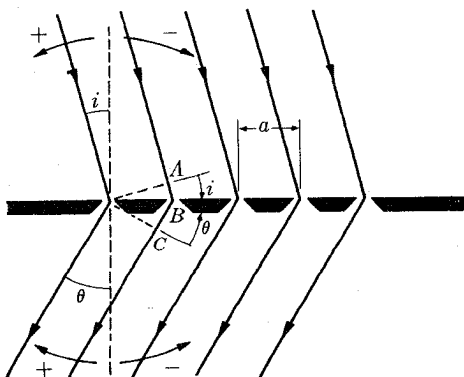
برای اینکه این رابطه صورت عمومی پیدا کند، زاویه های i و θ باید علامتهای نشان داده شده در شکل را دارا باشند. در این صورت شرط یافتن یک بیشینه عبارت است از

$$a(\sin i + \sin \theta) = n\lambda \quad \text{یا} \quad \sin \theta = n\lambda/a - \sin i$$

برای $n=0$ داریم $\sin \theta = -\sin i$ یا $\theta = -i$ ، این زاویه متناظر با امتداد پرتو تابش است. اگر با استفاده از معادله (پ.۷)، در شرط بالا برای یک بیشینه مجموع دو سینوس را به حاصل ضرب تبدیل کنیم، نتیجه می شود

$$2a \sin \frac{1}{2}(i + \theta) \cos \frac{1}{2}(i - \theta) = n\lambda$$

در نتیجه انحراف $D = i + \theta$ برای بیشینه مرتبه n با رابطه زیر داده می شود



شکل ۲۲.۲۳ توری پراش به کاررفته برای تابشهای مایل.

$$\sin \frac{1}{2} D = (n\lambda / 2a) \sec \frac{1}{2} (i - \theta)$$

بنابراین برای $\theta = i$ انحراف کمینه است و زاویه تابش برای کمینه انحراف برای مرتبه n با رابطه زیر داده می‌شود

$$\sin i = n\lambda / 2a$$

مثال ۵.۲۳ درتوان تفکیک يك توری پراش بحث کنید.

حل: اگر دو موج تخت تکفام، با طول موجهای کمی متفاوت، روی يك توری پراش بتابند، بیشینه‌های اصلی يك مرتبه پراش برای هر طول موج می‌توانند چنان نزدیک بهم قرار گیرند که تمیز دادن آنها از یکدیگر غیرممکن شود. برای اینکه دو طول موج از يك مرتبه معلوم را بتوان تمیز داد (یا از هم تفکیک کرد)، باید بیشینه اصلی یکی از طول موجها بر اولین صفر این یا آن لبه بیشینه اصلی موج دیگر منطبق شود. اگر $\Delta\lambda$ کمینه اختلاف طول موجی باشد که برای آن شرط بالا در طول موج معلوم λ برآورده می‌شود، تسوان تفکیک توری برابر می‌شود با

$$R = \lambda / \Delta\lambda$$

به عنوان مثال طول موج λ را که در معادله (۱۷.۲۳) صدق می‌کند در نظر می‌گیریم. بیشینه‌های شدت با زاویه داده شده با رابطه $\sin \theta = n\lambda / a$ متناظرند. در این صورت داریم

$$\cos \theta \Delta\theta = n \Delta\lambda / a$$

ولی صفرهای این یا آن لبه بیشینه مرتبه n ، بنا به معادله (۱۶.۲۳) با رابطه زیر داده می‌شوند

$$\frac{N\pi a \sin \theta}{\lambda} = (Nn \pm 1)\pi \quad \text{یا} \quad \sin \theta = \frac{Nn \pm 1}{N} \frac{\lambda}{a}$$

با نشان دادن دو زاویه داده شده توسط این رابطه با θ' و θ'' ، داریم $\sin \theta' - \sin \theta'' = 2\lambda / Na$ یا با استفاده از معادله (پ. ۷) به دست می‌آید

$$\sin \frac{1}{2} (\theta' - \theta'') \cos \frac{1}{2} (\theta' + \theta'') = \lambda / Na$$

بنابراین می‌توان $(\theta'' - \theta') / 2$ را به جای $\sin \frac{1}{2} (\theta' - \theta'')$ و $\cos \theta$ را به جای

$$\cos \frac{1}{2} (\theta' + \theta'')$$

$$\frac{1}{2} (\theta' - \theta'') \cos \theta = \Delta\theta \cos \theta = \lambda / Na$$

ولی بنا به معادلهٔ پیش $\cos \theta \Delta \theta = n \Delta \lambda / a$ است. بنا بر این در خاتمه به دست می آید

$$\lambda / N = n \Delta \lambda \quad \text{یا} \quad R = \lambda / \Delta \lambda = nN$$

بنا بر این هر چه تعداد خطهای توری زیاد و مرتبهٔ بیناب بالاتر باشد به همان اندازه $\Delta \lambda$ کوچکتر و توان تفکیک توری بیشتر می شود. از طرف دیگر، توان تفکیک مستقل از بلندی و فاصلهٔ بین خطهای توری است.

مثال ۶.۲۳ تعیین کنید که آیا توری مثال ۳.۲۳ می تواند دو خط زرد بیناب سدیم به طول موجهای $58896 \times 10^{-7} \text{ m}$ و $58890 \times 10^{-7} \text{ m}$ را از هم جدا کند؟

حل: طول موج میانگین دو خط $58893 \times 10^{-7} \text{ m}$ و فاصلهٔ آنها $6 \times 10^{-10} \text{ m}$ است. بنا به نتیجه های مثال ۵.۲۳ توان تفکیک توری برابر $R = Nn = 2 \times 10^4 n$ است. برای یک طول موج معلوم کمینه فاصلهٔ بین طول موجها در بیناب مرتبهٔ اول برابر است با

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{58893 \times 10^{-7}}{2 \times 10^4 \times 1} = 29447 \times 10^{-11} \text{ m}$$

که برابر یک بیستم اختلاف بین دو خط بیناب سدیم است. بنا بر این دو خط D در بیناب مرتبهٔ اول را می توان به طور مشخص با توری مشاهده کرد.

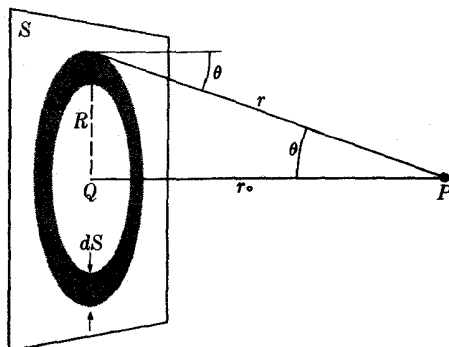
۶.۲۳ پراش فرنل

چنانکه در بخش ۱.۲۳ توضیح دادیم، پراش فرنل هنگامی رخ می دهد که یا چشمهٔ نقطه ای امواج تابشی یا نقطه ای که فریزها را مشاهده می کنند و یا هر دو در فاصلهٔ متناهی نسبت به روزنه یا مانع جای داشته باشند. محاسبهٔ ریاضی پراش فرنل خیلی پیچیده تر از پراش فرانهوفر است، ولی مراد فیزیکی هر دو یکی است. در نتیجه، تنها در نمودهای اصلی بحث می کنیم و ضمناً چشمه موجها را به قدری دور از پرده فرض می کنیم که موجهای تابش تخت و انتشار آنها در راستای عمود بر پرده باشد.

فرض کنید که حرکت موجی را در جبههٔ موج تخت S می شناسیم و می خواهیم آن را در نقطهٔ مورد نظر P حساب کنیم (شکل ۲۳.۲۳). بنا به اصل هویگنس-کیرشهف، که آن را در بخش ۲.۲۵ فرمول بندی کردیم، می توان جبههٔ موج را به سطحهای جزئی تقسیم کرد. تقارن ایجاب می کند که آنها را حلقه های دایره ای به مرکز نقطهٔ Q (تصویر P روی صفحهٔ S) در نظر بگیریم. در این صورت، سطح جزئی dS در حرکت موجی در نقطهٔ P ، بنا به معادلهٔ (۲.۲۵)، دارای دامنه ای است متناسب با

$$\frac{dS}{r} g(\theta) \quad (19.23)$$

در این رابطه dS سطح حلقه است. فاز اولیهٔ موج حاصل از dS در نقطهٔ P برابر می شود با

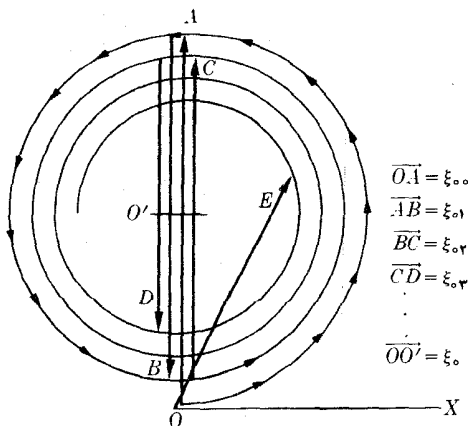


شکل ۲۳.۲۳

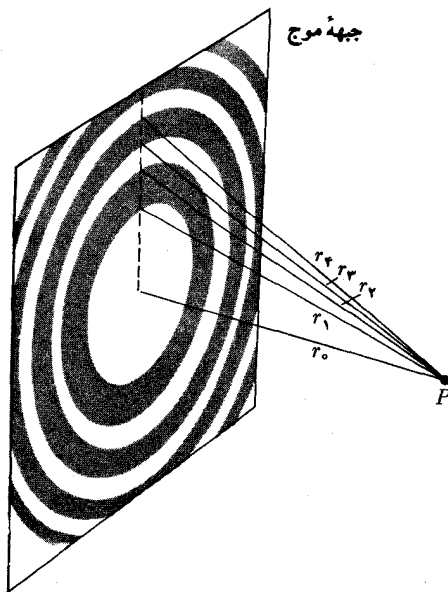
$$\delta = \frac{2\pi r}{\lambda} \quad (20.23)$$

با افزودن بردارهای چرخان وابسته به حلقه‌های پیاپی که با معادله‌های (۱۹.۲۳) و (۲۰.۲۳) مشخص می‌شوند، می‌توان دامنهٔ برآیند را در نقطهٔ P به دست آورد. به سبب سازه‌های $1/r$ و $g(\theta)$ ، بردارهای چرخان بتدریج کوچکتر می‌شوند. و همچنانکه شکل ۲۴.۲۳ نشان می‌دهد، به جای دایره مارپیچ به دست می‌آید.

برای آسانی محاسبه و با توجه به اینکه λ خیلی کوچکتر از r_0 است، می‌توان سطح را به حلقه‌هایی به نام منطقه‌های فرنل (شکل ۲۵.۲۳) تقسیم کرد، که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ P



شکل ۲۴.۲۳



شکل ۲۵.۲۳ منطقه‌های پیمایی فرنل.

هر بار به اندازه $\lambda/2$ کوچکتر می‌شود، یعنی

$$r_1 = r_0 + \lambda/2, \quad r_2 = r_1 + \lambda/2, \quad r_3 = r_2 + \lambda/2, \quad \dots$$

چنین آرایشی دارای این ویژگی است که موجهایی که از مناطق پیمایی به نقطه P می‌رسند اختلاف فازشان برابر است و به گونه‌ی ویرانگر باهم تداخل می‌کنند، یعنی

$$\delta_{n+1} - \delta_n = \frac{2\pi}{\lambda}(r_{n+1} - r_n) = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{2} \right) = \pi$$

که با تداخل ویرانگر متناظر است [معادله (۲۱.۱۲) را ببینید]. اگر دامنه حاصل از منطقه n ام در نقطه P باشد، که با مقدار داده شده با معادله (۱۹.۲۳) متناسب است، دامنه برآیند در نقطه P برابر می‌شود با

$$\xi_o = \xi_{o0} - \xi_{o1} + \xi_{o2} - \xi_{o3} + \dots \quad (21.23)$$

این رابطه را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$\xi_o = \frac{1}{2} \xi_{o0} + \left(\frac{1}{2} \xi_{o0} - \xi_{o1} + \frac{1}{2} \xi_{o2} \right) + \left(\frac{1}{2} \xi_{o2} - \xi_{o3} + \frac{1}{2} \xi_{o4} \right) + \dots$$

بزرگی دامنه منطقه‌های نزدیک به هم تقریباً برابر است، گرچه با افزایش n از مقدار آنها کاسته می‌شود، یعنی $\xi_{o0} > \xi_{o1} > \xi_{o2} > \dots$. بدین طریق با تقریب خوبی می‌توان

نوشت $\xi_{0,2} - \xi_{0,1} + \frac{1}{4} \xi_{0,0} \approx 0$ و یا به صورت کلیتر

$$\frac{1}{4} \xi_{0,(n-1)} - \xi_{0,n} + \frac{1}{4} \xi_{0,(n+1)} \approx 0$$

درواقع معادلهٔ مجموع (۲۱.۲۳) برای يك صفحهٔ بینهایت به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\xi_0 = \frac{1}{4} \xi_{0,0} \quad (22.23)$$

و مبدأ حرکت موجی در نقطهٔ P قسمتی از جبههٔ موج است که با آن مستقیماً در يك خط قرار دارد و تنها با نصف اولین منطقهٔ فرنل برابر است.

توجه کنید که هر منطقهٔ فرنل از تعداد زیادی سطوح جزئی دایره‌ای، مطابق شکل ۲۴.۲۳، تشکیل شده است. جهت آشنایی با این وضع بر حسب نموداری از بردار دامنه، مانند شکل ۲۴.۲۳، توجه کنید که برای منطقهٔ اول فاصله از r_0 به $r_0 + 1/2\lambda$ ، یا فاز از $2\pi r_0/\lambda$ به $2\pi r_0/\lambda + \pi$ می‌رسد. این امر بدین معنی است که اگر تمام بردارهای دامنهٔ مربوط به چشمه‌های فرعی واقع در داخل این منطقه را رسم کنیم، اختلاف فاز آنها بتدریج از ۰ به π می‌رسد. این بردارها در شکل ۲۴.۲۳ کمائی از ۰ تا A را تشکیل

می‌دهند و دامنهٔ ξ_0 منطقهٔ اول با بردار \overrightarrow{OA} داده شده است. برای منطقهٔ دوم فاصله از $r_0 + \lambda/2$ به $r_0 + \lambda$ یا فاز از $2\pi r_0/\lambda + \pi$ به $2\pi r_0/\lambda + 2\pi$ می‌رسد. از اینجا مجدداً اختلاف فاز π بین دو فرین به دست می‌آید، به گونه‌ای که منطقهٔ دوم با کمائی از A تا B متناظر است و دامنهٔ برایندهٔ ξ_0 برابر بردار \overrightarrow{AB} است. این روند آتقدر تکرار می‌شود تا تمام منطقه‌ها را بپوشانند. مارپیچ در نقطه جمع می‌شود، به گونه‌ای که دامنهٔ برایندهٔ برابر می‌شود با OO' ، که تقریباً، مطابق معادلهٔ (۲۲.۲۳) برابر $\overrightarrow{OA}/2$ است.

در این مرحله، چون $r_n = r_0 + n\lambda/2$ است، بنا به شکل ۲۵.۲۳، می‌توان قبول کرد که شعاع منطقهٔ n برابر است با $r_n^2 = (r_0 + n\lambda/2)^2 = r_0^2 + n\lambda r_0 + n^2 \lambda^2/4$. اگر n خیلی بزرگ نباشد (اگر $\lambda \ll r_0$ باشد) می‌توان از جملهٔ دوم چشم‌پوشید و نوشت

$$R_n^2 = n\lambda r_0 \quad (23.23)$$

ضمناً این رابطه نشان می‌دهد که تمام منطقه‌های فرنل دارای سطح یکسان $\pi\lambda r_0$ اند. اگر پرده مانعی در مقابل جبههٔ موج تشکیل دهد، وضع کاملاً با معادلهٔ (۲۲.۲۳) فرق می‌کند؛ زیرا در این صورت دخالت بعضی مناطق در حرکت موجی در نقطهٔ P جزئی است (یا اصلاً دخالت ندارند). اکنون فرض می‌کنیم که موجی در راستای عمود بر پرده‌ای، که دارای روزنهٔ دایره‌ای به شعاع a است، می‌تابد. نقطهٔ مشاهده روی خطی است عمود بر پرده که از مرکز روزنه می‌گذرد به گونه‌ای که منطقه‌های فرنل با روزنه هم‌مرکزند. اگر این نقطه به فاصلهٔ r از روزنه قرار گیرد، به طوری که $a^2 = \lambda r$ شود، تنها يك منطقه از روزنه

می گذرد و در نقطه P دامنه ξ_{00} را به وجود می آورد. ξ_{00} دو برابر مقداری است که از معادله (۲۲.۲۳) برای تمام جبهه موج به دست آورديم. روشنایی دامنه در نقطه P چهار مرتبه بیشتر از موقعی است که پرده وجود ندارد و مانعی در مقابل جبهه موج نیست. اگر روزنه خیلی بزرگ یا نقطه خیلی نزدیک باشد، به گونه ای که $a^2 = 2\lambda r_0$ ، دو منطقه اول از روزنه می گذرند، و دامنه $\xi_{02} - \xi_{00}$ را که عملاً برابر صفر است تولید می کنند و به تازگی در نقطه P منجر می شود. به طور کلی، تا هنگامی که تقریب به کار رفته معتبر بماند، بر حسب اینکه n فرد یا زوج باشد، در مرکز نقش پراش بیشینه روشنایی یا تاریکی به وجود می آید. n تعداد منطقه های فرنل موجود در داخل روزنه است نسبت به نقطه ای که نقش پراش در آنجا مشاهده می شود. شکل ۲۶.۲۳ این وضع را برای مقادیر مختلف n نشان می دهد. از نمودار شکل ۲۴.۲۳ پیداست هنگامی که تنها یک منطقه بی پوشش وجود دارد،

دامنه برآیند برابر است با $\vec{OA} = \xi_{00}$. اگر دو منطقه بی پوشش باشد دامنه برآیند برابر است با $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \xi_{00} - \xi_{01}$. برای سه منطقه این دامنه برابر می شود با

$$\begin{aligned} \vec{OC} &= \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} \\ &= \xi_{00} - \xi_{01} + \xi_{02} \approx \frac{1}{2}(\xi_{00} + \xi_{02}) \end{aligned}$$

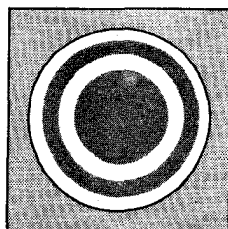
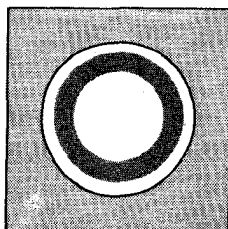
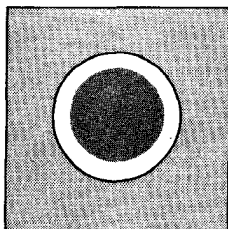
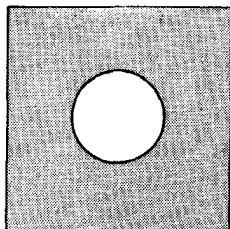
و همین طور تا به آخر. به طور کلی، اگر تعدادی منطقه کامل فرنل، به اضافه کسری بی پوشش باشند، می توان دامنه برآیند را با رسم نموداری مشابه با نمودار شکل ۲۴.۲۳ به دست آورد. بردار \vec{OE} که از نقطه O تا E ادامه دارد با تعداد درست منطقه ها به اضافه کسر آخری متناظر است. در شکل ۲۴.۲۳، E به چهار منطقه کامل به اضافه کسری از منطقه

یک منطقه
مرکز روشن

دو منطقه
مرکز تاریک

سه منطقه
مرکز روشن

چهار منطقه
مرکز تاریک



$n=1$
 $a^2 = \lambda r_0$

$n=2$
 $a^2 = 2\lambda r_0$

$n=3$
 $a^2 = 3\lambda r_0$

$n=4$
 $a^2 = 4\lambda r_0$

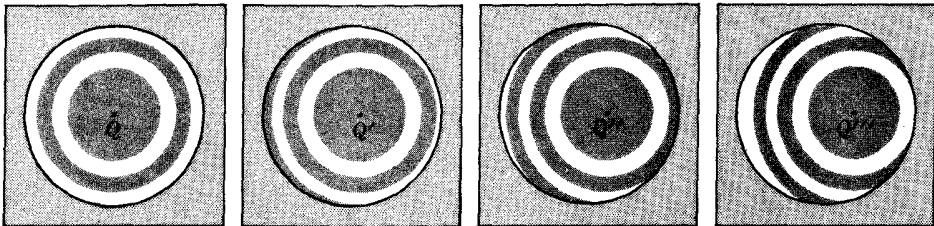
شکل ۲۶.۲۳ تغییر منطقه های فرنل برای یک نقطه ثابت، بر اثر تغییر اندازه روزنه.

پنجم متناظر است.

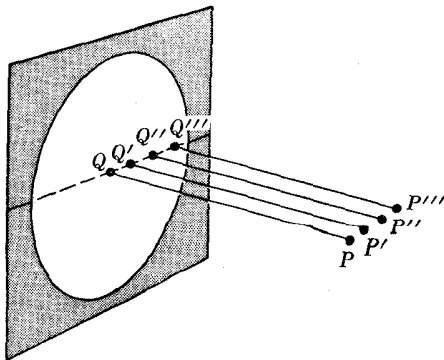
هنگامی که نقطه مشاهده به جانی به موازات پرده جا بجا می شود، منطقه های فرنل نیز با آن جا بجا می شوند، ولی همچنانکه شکل ۲۷.۲۳ نشان می دهد، دیگر نسبت به روزنه متقارن نیستند. در این شکل، همچنانکه شکل ۲۸.۲۳ نشان می دهد، هر حالت با مکانهای مختلف P ، P' ، P'' و P''' نقطه مشاهده متناظر است. منطقه ها بترتیب در Q ، Q' ، Q'' و Q''' تمرکز یافته اند. نتیجه این است که سهم منطقه های مختلف فعال در حرکت موجی بسرایند یکی نیست و نقش پراشی متشکل از حلقه های هم مرکز با P و روشنایی مختلف، مطابق شکل ۲۹.۲۳ به وجود می آورند. شکل ۳۰.۲۳ توزیع شدت را بر حسب فاصله از محور روزنه نشان می دهد. شکل روزنه دایره ای و شعاع آن a است و شامل چندین منطقه است.

اگر به جای روزنه دایره ای، یک قرص دایره ای وجود داشته باشد، نقش پراش تغییر نمی کند بجز در مرکز که همیشه روشن است. دلیل آن این است که همیشه سهم اولین منطقه پوشیده فرنل در مرکز مثبت است. این دلیل همان است که در مورد یک جبهه موج تخت بکلی بی پوشش بیان شد (شکل ۳۱.۲۳).

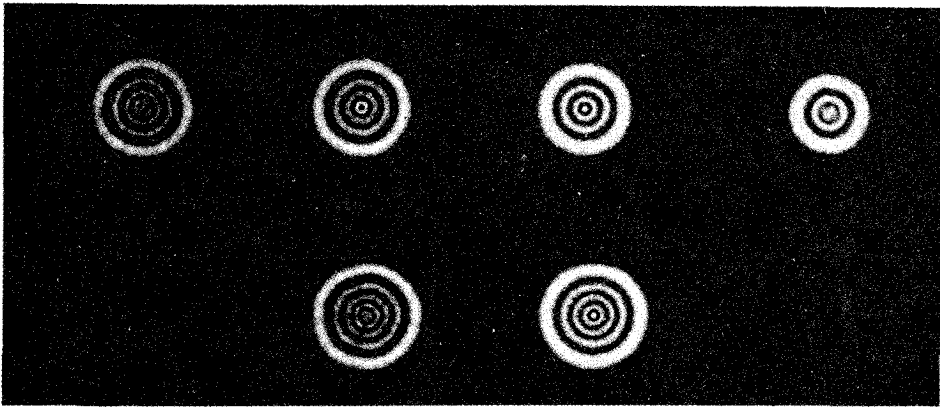
برای شکاف مستطیل شکل، وضع خیلی شبیه به روزنه دایره ای است، با این تفاوت که



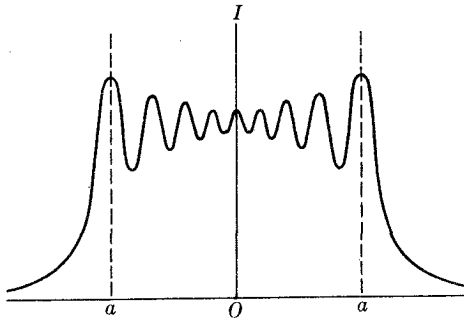
شکل ۲۷.۲۳ تغییر منطقه های فرنل بر اثر جا بجایی نقطه مشاهده به موازات صفحه روزنه، به گونه ای که شکل ۲۸.۲۳ نشان می دهد.



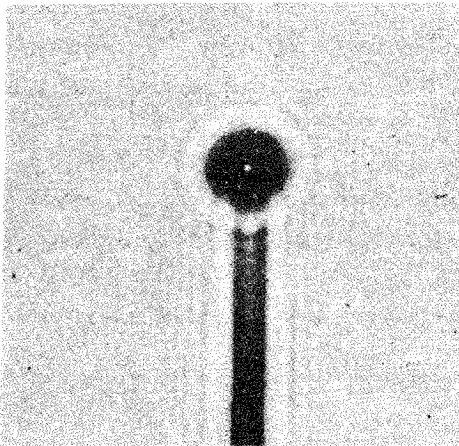
شکل ۲۸.۲۳



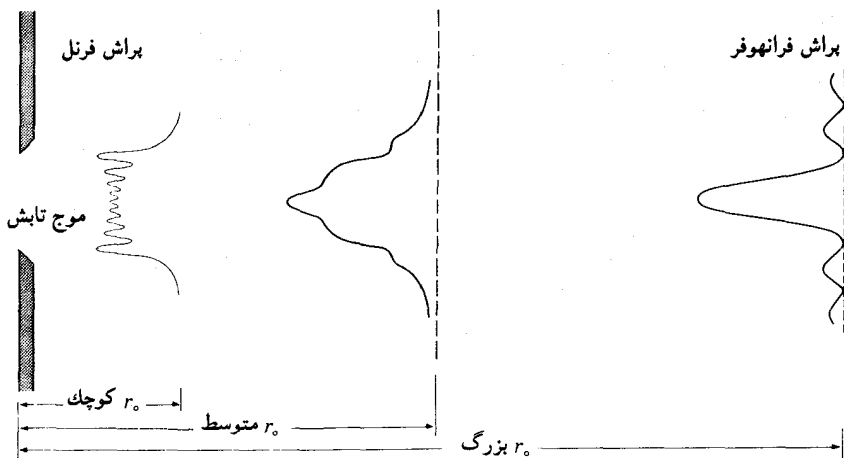
شکل ۲۹.۲۳ نقشه‌های پراش فرنل برای روزنه‌های دایره‌ای باشعاعهای متفاوت.



شکل ۳۰.۲۳ توزیع شدت در پراش فرنل برای روزنه دایره‌ای.



شکل ۳۱.۲۳ پراش فرنل حاصل از قرص دایره‌ای کوچک که روی میله ساریک نصب شده است.



شکل ۳۲.۲۳ تغییر نقش پراش به نسبت فاصله نقطه از روزنه.

منطقه‌های فرنل به جای حلقه، نوارهایی به موازات شکاف اند. همچنانکه شکل ۳۲.۲۳ نشان می‌دهد، بتدریج که از شکاف دور می‌شویم، نقش پراش از نقش فرنل به نقش فرانهوفر تغییر پیدا می‌کند.

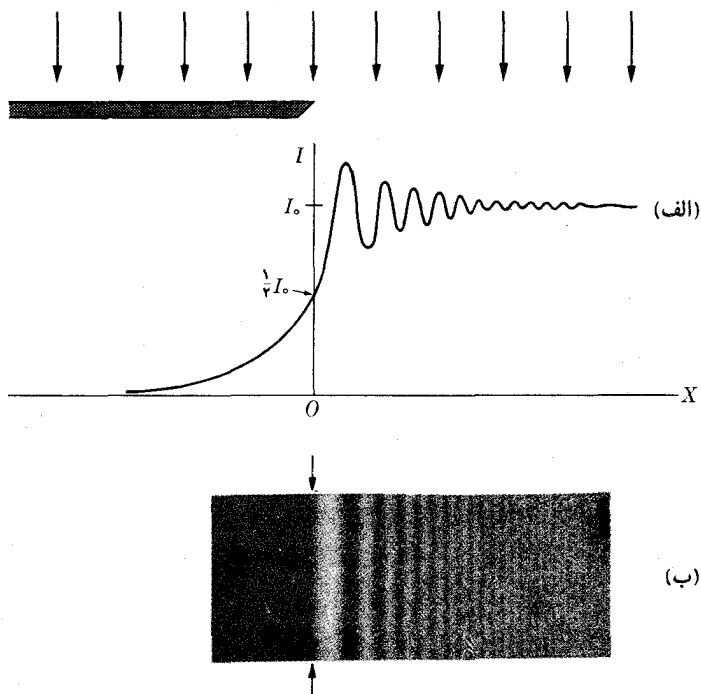
توزیع شدت در نقش پراش در لبه‌ها مطابق شکل ۳۳.۲۳ است. شدت در داخل سایه هندسی بتدریج صفر می‌شود و در ناحیه روشنایی هندسی، نیز در چند طول موج اول افت و خیز می‌کند.

مثال ۷.۲۳ پرده‌ای که دارای سوراخ کوچکی به قطر 1 mm است با نوری به طول موج $589 \times 10^{-7}\text{ m}$ روشن می‌شود. فاصله بین پرده و دورترین نقطه تاریک را در امتداد عمود بر پرده حساب کنید.

حل: در این حالت شعاع روزنه برابر $a = 0.5\text{ mm} = 5 \times 10^{-4}\text{ m}$ و طول موج برابر $\lambda = 589 \times 10^{-7}\text{ m}$ است. دورترین نقطه تاریک نقطه‌ای است که در آن تنها دو منطقه فرنل داخل روزنه هستند، از این رو با قرارداد $n = 2$ در معادله (۲۳.۲۳) و $R_n = a$ داریم، $a^2 = 2\lambda r_0$ یا $r_0 = a^2 / 2\lambda = 0.0212\text{ m}$ ؛ یعنی دورترین نقطه تاریک تقریباً در فاصله 21.2 cm از پرده قرار دارد. به‌طور کلی، نقطه‌های پیاپی به فاصله $a^2 / 2m\lambda$ (n عددی درست است) از پرده قرار دارند.

۷.۲۳ پراکندگی

تاکنون در مطالعه پراش به‌طور ضمنی پذیرفتیم که موانه‌ای که در مسیر موج قرار می‌گیرند



شکل ۳۳.۲۳ (الف) توزیع شدت ذر پراش فرنل حاصل از لبة مستقیم (ب) عکس پراش فرنل حاصل از لبة مستقیم.

نقش غیر فعال بازی می کنند. یعنی فرض می کردیم که تنها نقش آنها سد کردن جلوی بخشی از جبهه موج است، بدون اینکه خودشان موج جدیدی به آن بیفزایند. با چنین فرضی، اثرهای مشاهده شده پراش فقط از حرکت واپیچیده موج تابشی ناشی می شوند.

با این حال، در بیشتر موارد، این امر بیان واقعیت نیست؛ به عنوان مثال فرض کنید که کره ای کشسان در هوا از جایی آویزان است و موج تراکمی یا صوتی در نزدیکیهای آن تولید می شود. هنگامی که موج از اطراف کره می گذرد در وهله نخست، پراشی از گونه ای که در پیش مطالعه کردیم متحمل می شود. ولی افزون بر آن، افت و خیزهای فشار همراه موج موجب می شود که در کره کشسان تغییر شکلهای متناوبی به وجود آید. نوسانهای سطح کره به نوبه خود آشفتگی جدید یا امواجی در هوای اطراف تولید می کنند. این موجها با موج اصلی ترکیب می شوند. موجهای جدیدی که کره در حال نوسان تولید می کند موجهای پراکنده و این فرایند را پراکنندگی می نامند.

همچنین اگر يك کره رسانا در مسیر موج الکترومغناطیسی قرار گیرد، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی موج نوسانهای در بارهای آزاد کره القا می کنند و ایس بارهای نوسانی مطابق نظریه تابش الکترومغناطیسی که در فصل ۱۹ توضیح داده شد موج

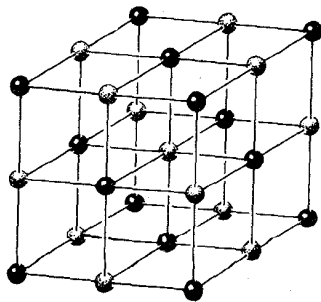
الکترومغناطیسی جدید یا پراکنده تولید می کنند.

در فصل ۱۹ پراکندگی يك الکترون را، که در مقیاس اتمی يك مسئله دینامیکی محض است بررسی کردیم. در اینجا پراکندگی را شرح می دهیم که بیشتر ما کروسکوپیست است زیرا در این پراکندگی اجسام شامل اتمها و یا الکترونهای خیلی زیادی هستند. می توان بزرگی این پراکندگی ما کروسکوپیست را با به کار بستن چند شرط مرزی در سطح جسم حساب کرد؛ این شرایط ماهیت موج پراکنده را تعیین می کنند. به عنوان مثال در مورد کره کاملاً رسانا، لازم است که مؤلفه مماسی میدان الکتریکی بر ایند در سطح کره (یعنی مجموع میدانهای الکتریکی موج تابش و موج پراکنده) برابر صفر باشد.

فرايندهای پراکندگی در تمام پدیده های موجی فوق العاده مهم اند. اما بحث کاملتر پراکندگی نیاز به ریاضیاتی دارد که از گنجایش این کتاب خارج است.

۸.۲۳ پراکندگی پرتو x توسط بلورها

موجهای الکترومغناطیسی با طول موج کوتاهتر از فرابنفش، مانند پرتوهای x یا پرتوهای γ ، توسط اجسامی که دارای ابعاد به کار رفته در ناحیه ایتیکی اند، به طور قابل ملاحظه ای پراشیده نمی شوند. اما، يك شبکه بلوری، با اتمها و مولکولهایی که به طور منظم در فاصله هایی از مرتبه 10^{-10} m قرار گرفته اند يك محیط عالی برای تولید پراش پرتوهای x است. این مسئله به دو دلیل خیلی پیچیده تر از آن است که تا کنون در این فصل مورد بحث بوده است. نخست، چون چنین بلورهایی آرایه سه بعدی دارند، مراکز پراشنده بیشتر در فضا پخش اند تا در يك راستا، همان طور که شکل ۳۴.۲۳ برای نموداری از بلور NaCl نشان می دهد. (کره های تاریک و روشن بترتیب با یونهای Na^+ و Cl^- متناظرند.) ثانیاً، تحت تأثیر میدان الکتریکی يك موج الکترومغناطیسی، همچنانکه قبلاً در بخش ۹.۱۹ توضیح داده ایم، اتمها یا مولکولهای بلور به چشمه های فرعی تابش تبدیل می شوند. بنابراین، در واقع



شکل ۳۴.۲۳ نمایش ساده شده ای از بلور کلرور سدیم که نشان دهنده آرایش منظم اتمهای تشکیل دهنده شبکه مکعبی است.

سروکار ما بیشتر با پراکندگی است تا پراش.

هنگامی که پرتوهای x از داخل بلور می گذرند، شدت پرتوهای پراکنده یا پراشیده نتیجه تداخل (در امتداد راستای مشاهده) امواج گسیل شده از هر اتم یا هر مولکول است. اگر بلور از بیش از یک نوع اتم درست شده باشد، هر نوع اتم به گونه مختلفی در پراکندگی پرتوهای x دخالت می کند. از این رو، جهت سهولت محاسبه، فرض می کنیم که بلور تنها از یک نوع اتم درست شده است و در هر یاخته آن تنها یک اتم وجود دارد. نتیجه های به دست آمده کلی اند. تصحیحی که باید برای مواردی که بیش از یک نوع اتم وجود دارد به کار برد بسیار آسان و مستقیماً قابل محاسبه است. ولی در اینجا وارد بحث آن نمی شویم. دو اتم A و B را که به فاصله r از هم قرار دارند در نظر می گیریم (شکل ۳۵.۲۳). بردار \mathbf{u}_i یکا در امتداد راستای انتشار موجهای تابش و بردار \mathbf{u}_s یکای مشابهی در امتداد راستای موجهای پراکنده است. اختلاف راه موجهای تابش و پراکنده برای این دو اتم برابر است با $AD - BC$ و اختلاف فاز آنها با رابطه زیر داده می شود

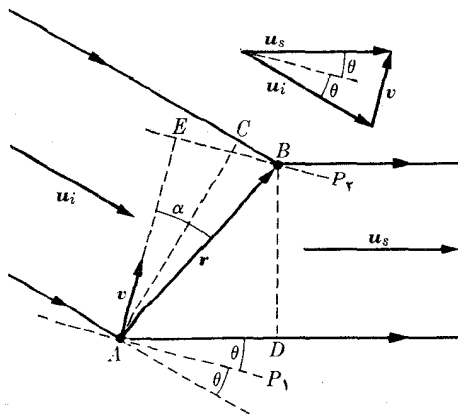
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (AD - BC)$$

ولی $AD = \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{r}$ و $BC = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{r}$ است. در نتیجه داریم

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{r} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \quad (24.23)$$

که در آن $\mathbf{v} = \mathbf{u}_s - \mathbf{u}_i$ است. اگر زاویه بین \mathbf{u}_i و \mathbf{u}_s را با 2θ نشان دهیم، از شکل ۳۵.۲۳ پیدا است که

$$v = 2\sin\theta \quad (25.23)$$



شکل ۳۵.۲۳ پراکندگی پرتو x توسط دو اتم A و B.

شرط تداخل سازنده در راستای \mathbf{u}_r عبارت است از $\delta = 2n\pi$ ، یا بسا استفاده از معادله (۲۴.۲۳) به دست می آید

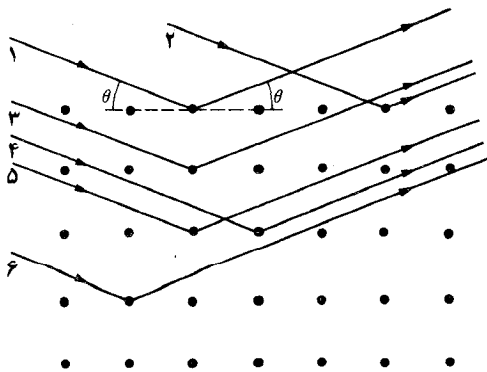
$$v \cdot r = n\lambda \quad (24.23)$$

در اینجا نیز مانند پیش n عدد درست مثبت یا منفی است. معادله (۲۴.۲۳) نمایش یک صفحه عمود بر بردار v است (رک مثال ۱۱.۳). در نتیجه، برای طول موج معلوم λ و راستای داده برای موج تابش، از معادله (۲۴.۲۳)، برای هر مقدار از n یک سری صفحه های موازی به دست می آید. شکل ۳۵.۲۳، دوتا از این صفحه ها، P_1 و P_2 ، را نشان می دهد. برای تمام اتمهای واقع روی این صفحه ها شرط (۲۴.۲۳) صادق است و همه آنها در ایجاد شدت بیشینه در راستای \mathbf{u}_r سهیم اند. در معادله (۲۴.۲۳)، $n = 0$ متناظر با صفحه ای است که از نقطه A می گذرد، $n = \pm 1$ متناظر با نزدیکترین صفحه هایی است که بلافاصله در دو طرف صفحه اول قرار دارند، و $n = \pm 2$ با زوج صفحه های بعدی متناظر است و به همین...

مطابق شکل ۳۵.۲۳ و بسا به کار بردن معادله (۲۵.۲۳) می بینیم که $v \cdot r = vr \cos \alpha = 2d \sin \theta$ است با $d = AE = r \cos \alpha$. در این صورت معادله (۲۴.۲۳) به شکل زیر درمی آید

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (27.23)$$

این رابطه به نام معادله براگ معروف است. این شرط که $\sin \theta$ باید کمتر از یک باشد محدوده ای برای مقادیر n به وجود می آورد، وضع هندسی حاصل از این معادله را در شکل ۳۶.۲۳ نشان داده ایم. برای پرتو هایی مانند (۱) و (۲) که به وسیله اتمهای یک صفحه پراکنده می شوند اختلاف فاز برابر صفر ($n = 0$) است و به گونه سازنده تداخل می کنند. اما این وضع برای هر زاویه تابشی رخ می دهد. مطلب مهمی که از شرط براگ فهمیده

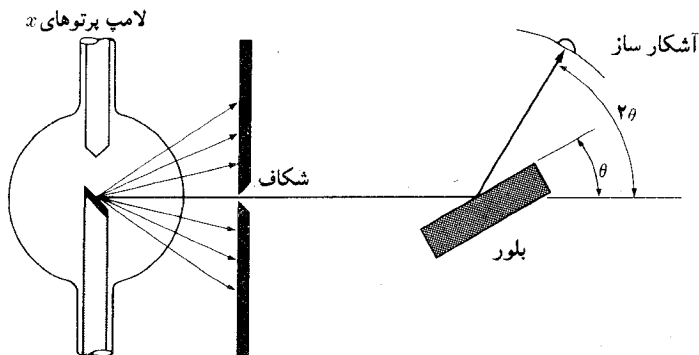


شکل ۳۶.۲۳ چندین صفحه پراکنده در یک بلور.

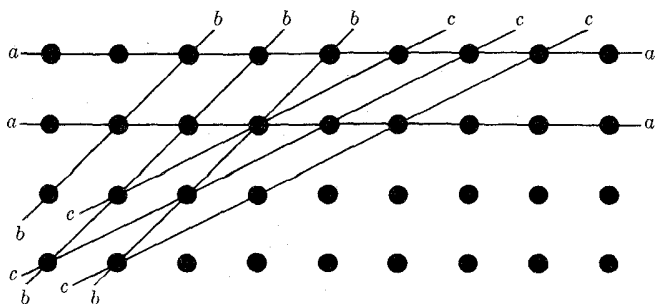
می شود این است که پرتوهای مانده ۳، ۴، ۵، ... نیز که از صفحه های پیاپی می آیند تداخلشان سازنده است و بیشینه خیلی بزرگی به وجود می آورند. بنا بر این شرط براگ نوعی اثر جمعی را بیان می کند که در آن پرتوهای پراکنده از کلیه اتمها در بعضی صفحه های موازی به گونه سازنده باهم تداخل می کنند. برای صفحه های ثابت (یا برای d ثابت) و طول موج λ ، تغییر زاویه θ به طور متناوب نقاط با شدت بیشینه یا کمینه تولید می کنند، که با تداخل سازنده [معادله ۲۷.۲۳] یا ویرانگر متناظرند. توجه کنید که اگر طول موج λ معلوم باشد می توان از معادله (۲۷.۲۳) برای اندازه گیری فاصله صفحه ها، d ، و یا برعکس استفاده کرد. نمودار طرحواره یك اسباب تجرّبی جهت مشاهده پراکندگی براگ يك بلور، که بیناب سنج پرتوهای x نام دارد، در شکل ۳۷.۲۳ نشان داده شده است.

برای تابش راستای داده θ_0 ، از معادله (۲۶.۲۳) چندین خانواده ممکن از صفحه های موازی تعریف می شود که در راستاهای θ_1 ، سرشتی هر خانواده، بیشینه پراکندگی به وجود می آورند. شدت به تعداد اتمهای هر خانواده از صفحه ها بستگی دارد. چند تا از این خانواده های ممکن را در شکل ۳۸.۲۳ نشان داده ایم. هر صفحه به مراکز پراکندگی با چگالی و فواصل مختلف مربوط می شود. اگر پرده ای در سر راه پرتوهای پراکنده که توسط تک بلوری پراشیده می شوند (شکل ۳۹.۲۳) قرار گیرد، نقشی منظم که سرشتی ساختار بلوری است ظاهر می شود. این نقش منظم را نقش لایه می نامند. هر لکه در نقش با راستای θ_1 مربوط به خانواده های مختلف صفحه های نشان داده شده در شکل ۳۸.۲۳ متناظر است. عکس شکل ۴۰.۲۳ یکی از این نقشهای لایه را نشان می دهد.

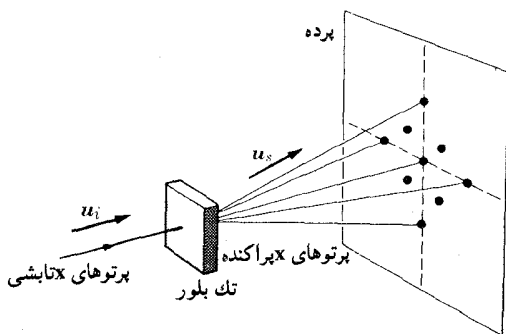
اگر جسم پراکننده، به جای يك تک بلور، گردی شامل شمار زیادی خرد و ریزهای بلورها با سمتگیریهای کاتوره ای باشد، بردارهای θ_1 متناظر روی سطوح مخروطی توزیع



شکل ۳۷.۲۳ بیناب سنج بلوری برای پرتوهای x. پرتوهای x توسط لامپ سمت چپ تولید می شوند و توسط شکاف روی قطعه ای سرب به صورت موازی درمی آیند و به وسیله بلور پراشیده می شوند. پرتوهای x پراشیده را توسط آشکار ساز متحرک که معمولاً يك اتاقک یونی است مشاهده می کنند.



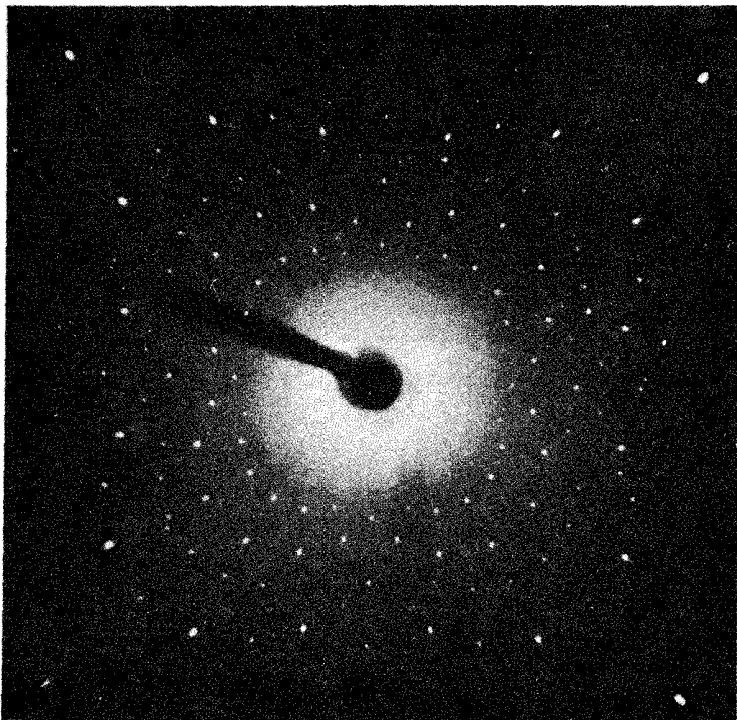
شکل ۳۸۰۲۳ چندین صفحهٔ پراکنندهٔ ممکن موازی در یک بلور.



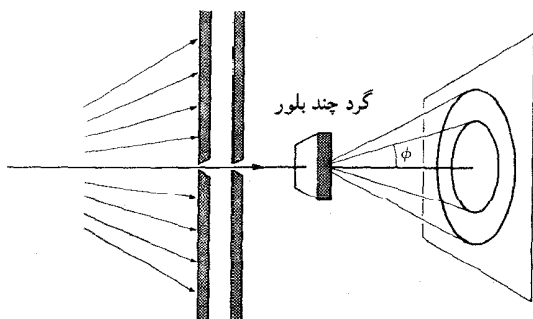
شکل ۳۹۰۲۳ پراش لاوهٔ پرتوهای X توسط تک بلور.

می‌شوند. این سطوح مخروطی، چنانکه شکل ۴۱۰۲۳ نشان می‌دهد، حول راستای تابش قرار دارند. مطابق شکل ۴۲۰۲۳، روی یک فیلم عکاسی از هرسطح مخروطی یک حلقهٔ روشن ظاهر می‌شود و مجموع حلقه‌ها به نقشه‌های دی-شرر معروف شده‌اند. از تحلیل نقشه‌های شکل‌های ۴۰۰۲۳ و ۴۲۰۲۳، می‌توان ساختار درونی بلور، یا برعکس طول موج پرتوهای X را تعیین کرد.

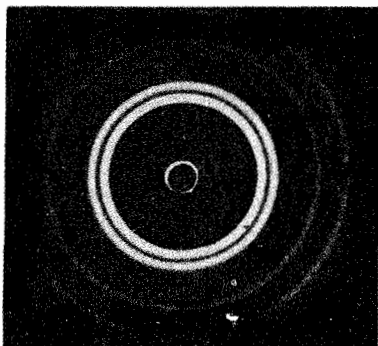
لازم است خاطر نشان کنیم که هنگامی که، در اواخر قرن نوزدهم، رونتگن برای اولین بار پرتوهای X را مشاهده کرد، بحث‌های شدیدی بر سر ماهیت آنها در گرفت. آیا این پرتوها موج‌اند یا ذره؟ برای یافتن پاسخ این سؤال، فیزیکدانان به یاری اسباب‌هایی همانند آنهایی که در آزمایش‌های مربوط به نور به کار می‌رفتند به آزمایش‌های پراش و تداخل پرداختند. ولی نتایج به دست آمده یا منفی بودند یا قانع‌کننده نبودند. گرایش عمومی حول اجتناب از هرگونه تعبیر موجی دور می‌زد، تا اینکه لاوه، براگ و دیگران عبور پرتوهای X را از داخل بلورها بررسی کردند و به نتیجه‌هایی رسیدند که دلیل قاطعی بر ماهیت موجی تابش X بود.



شکل ۴۰.۲۳ نقش پراش لایه در بلور کوارتز. کوشش شده است که اثر باریکه نور مستقیم را بپوشانند.



شکل ۴۱.۲۳ پراش پرتوهای X توسط گرد بلور.



شکل ۴۲.۲۳ نقش پراش پرتوهای X توسط گرد آلومینیوم.

مثال ۸.۲۳ یک باریکه پرتوهای X توسط قطعه بلور نمک ترکی پراشیده می شود. بیناب مرتبه اول با زاویه $۵۰' ۶^\circ$ متناظر است و فاصله بین صفحه ها برابر $۲۷۸۱ \times ۱۰^{-۱} \text{m}$ است. طول موج پرتوهای X و جای بیناب مرتبه دوم را تعیین کنید.

حل: از معادله براگ (۲۷.۲۳) با $d = ۲۷۸۱ \times ۱۰^{-۱} \text{m}$ و $\theta = ۶^\circ ۵۰'$ و $n = ۱$ به دست می آید

$$\lambda = ۲d \sin \theta = ۶۶۹ \times ۱۰^{-۱} \text{m}$$

برای یافتن جای بیناب مرتبه دوم n را برابر ۲ می گیریم. در این صورت، داریم $\sin \theta = n\lambda / ۲d = ۰.۲۳۸$ یا $\theta = ۱۳^\circ ۴۶'$. توجه کنید که مرتبه بیشینه پراش را شرط $n\lambda / ۲d < ۱$ محدود می کند که در مورد این مثال عبارت است از $n < ۸.۴$ ، یعنی $n_{\max} = ۸$.

فهرست منابع

1. «A Student Experiment in Fresnel Diffraction,» P. Young, *Am. J. Phys.* 32, 367 (1964)
2. «Crystals,» E. Wood, *The Physics Teacher* 3, 7 (1965)
3. «Early Studies in x-Ray Crystallography,» A. Hull and C. Burdick, *Physics Today*, October 1958, Page 18
4. Undergraduate Research Project: Photon Diffraction,» R. Biser, *Am. J. Phys.* 31, 29 (1963)
5. *Light: Principles and Experiments*, G. Monk. New York. Dover Press. 1963, Chapter 12

6. *Optics*, B. Rossi. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1957, Chapter 4
7. *Great Experiments in Physics*, Morris Shamos, editor, New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1959, Chapter 8 (Fresnel); Chapter 14 (Roentgen).
8. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapter 30, Volume II, Chapter 30.
9. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 204 (Grimaldi); page 318 (Fresnel); page 365 (Rowland).
10. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Sections 30.2, 30.3, and 30.6.

مسئله‌ها

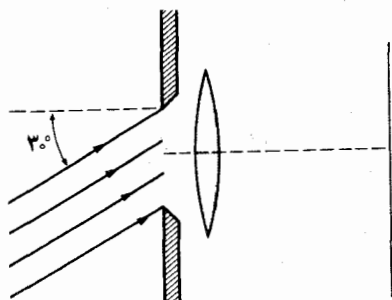
۱۰۲۳ پرتوهای موازی نور سبز جیوه، به طول موج $500 \times 10^{-7} \text{ m}$ از شکافی به پهنای 40 cm می‌گذرند و به یک عدسی با فاصله کانونی 40 cm می‌تابند. فاصله بیشینه مرکزی از اولین کمینه روی پرده‌ای که در صفحه کانونی عدسی قرار دارد چقدر است؟

۲۰۲۳ نقش پراش فرانیهوفر حاصل از یک تک‌شکاف، با دو برابر اندازه‌های آن در شکل ۵۰۲۳، روی یک فیلم عکاسی واقع در صفحه کانونی یک عدسی به فاصله کانونی 40 cm تشکیل می‌شود. طول موج نور به کار رفته $500 \times 10^{-7} \text{ m}$ است. پهنای شکاف را حساب کنید. [راهنمایی: فاصله بین کمینه‌های متناظر در طرفین بیشینه مرکزی را (روی عکس) اندازه بگیرید.]

۳۰۲۳ برای مشاهده دو چشمه نقطه‌ای خیلی دور که 1 m از هم فاصله دارند از تلسکوپ استفاده می‌کنند. شیئی تلسکوپ را با پرده‌ای که روی آن شکافی به پهنای 1 mm وجود دارد پوشانده‌اند. بیشینه فاصله‌ای که در آن این دو چشمه قابل تمیزند (بر حسب متر) چقدر است؟ طول موج را برابر $500 \times 10^{-7} \text{ m}$ بگیرد.

۴۰۲۳ نقش پراش فرانیهوفر یک تک‌شکاف در صفحه کانونی یک عدسی به فاصله کانونی 1 m مشاهده می‌شود. پهنای شکاف 4 mm است. نور فرودی دارای دو طول موج λ_1 و λ_2 است. کمینه چهارم متناظر با λ_1 و کمینه پنجم متناظر با λ_2 در فاصله 5 mm از بیشینه مرکزی برهم منطبق می‌شوند. λ_1 و λ_2 را حساب کنید.

۵۰۲۳ موج تخت تکفامی به طول موج λ با زاویه فرود 30° روی يك پرده کدر که روی آن شکاف باریک و درازی به پهنای a وجود دارد می‌تابد (شکل ۴۳.۲۳). پشت پرده يك عدسی همگرا جای دارد که محور اپتیکی آن بر صفحه پرده عمود است. نقش پراش مشاهده شده روی صفحه کانونی عدسی را شرح دهید.



شکل ۴۳.۲۳

۶۰۲۳ در پراش فرانوفر توزیع شدت حاصل از سه شکاف یکسان و همفاصله را توضیح دهید. راستای فرود را عمود بر شکافها بگیرید.

۷۰۲۳ يك موج تخت تکفام با طول $m \times 10^{-7} \times 60$ در راستای عمود بر پرده تختی که روی آن يك روزنه به شکل مستطیل، $100 \text{ mm} \times 0.5 \text{ mm}$ ، وجود دارد می‌تابد. (الف) نقش پراش مشاهده شده بر روی صفحه کانونی يك عدسی همگرا به فاصله کانونی 2 m را شرح دهید. عدسی مستقیم پشت روزنه قرار دارد. (ب) اضلاع مستطیلی را پیدا کنید که از خطهای تاریک اطراف بیشینه مرکزی تشکیل شده است.

۸۰۲۳ در نقش پراش يك زوج شکاف، سومین بیشینه اصلی ناپیداست؛ زیرا بیشینه تداخل بر صفر اول پراش منطبق شده است. (الف) نسبت a/b را پیدا کنید. (ب) توزیع شدت را برای چندین بیشینه در دو طرف بیشینه مرکزی رسم کنید. (ج) تصویر بزرگ شده‌ای از فریزها را به گونه‌ای که روی پرده ظاهر می‌شوند رسم کنید.

۹۰۲۳ شعاع قرص مرکزی نقش پراش فرانوفر حاصل از تصویر يك ستاره را حساب کنید که: (الف) يك دور بین عکاسی به قطر 2.5 cm و فاصله کانونی 7.5 cm و (ب) شیئی تلسکوپی به قطر 1.5 cm و فاصله کانونی 1.5 m نشان می‌دهند. طول موج نور را $m \times 10^{-7} \times 500$ فرض کنید.

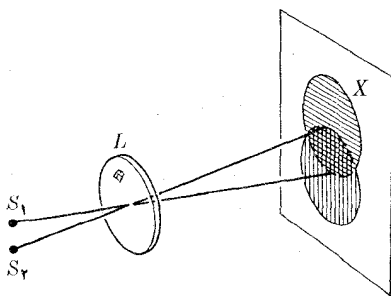
۱۰۰۲۳ دو سوراخ سوزن که فاصله آنها 1.5 mm است جلوی يك چشمه نورانی قرار دارند. این سوراخها را به وسیله يك عدسی که روی آن را پرده‌ای که در مرکز آن سوراخی

به شکل دایره (روزنه) و به قطر 4 mm وجود دارد می‌پوشاند نگاه می‌کنند. از چه فاصلهٔ بیشینه‌ای دوسوراخ سوزن قابل تمیزند؟ طول موج را $5.85 \times 10^{-7} \text{ m}$ فرض کنید.

۱۱.۲۳ نقش پراش فرانیهوفر حاصل از یک زوج شکاف در صفحهٔ کانونی یک عدسی به فاصلهٔ کانونی 50 cm مشاهده می‌شود. طول موج نور تکفام فرودی $5.85 \times 10^{-7} \text{ m}$ است. مشاهده می‌شود که فاصلهٔ بین دو کمینهٔ مجاور از بیشینهٔ مرتبهٔ صفر 5 m است و بیشینهٔ مرتبهٔ چهارم ناپیدا است. پهنای شکافها و فاصلهٔ بین مرکزهای آنها را حساب کنید.

۱۲.۲۳ فاصلهٔ چراغهای اتومبیلی که به ما نزدیک می‌شود برابر 130 m است. اگر قدرت تفکیک چشم فقط با پراش تعیین شود، فاصله‌ای را که در آن دو چراغ با چشم غیر مسلح قابل تمیز است برآورد کنید. طول موج میانگین را $5.85 \times 10^{-7} \text{ m}$ و قطر مردمک چشم را 5 mm بگیرد. این نتیجه را با توان تفکیکی که در بخش ۵.۲۱ برای چشم به دست آوردیم مقایسه کنید.

۱۳.۲۳ در شکل ۴۴.۲۳ دو چشمهٔ نقطه‌ای S_1 و S_2 به فاصلهٔ 6 mm از یکدیگر در 50 متری عدسی L قرار دارند. عدسی L از آنها تصویرهایی تشکیل می‌دهد که فقط با ملاک ریلی قابل تمیزند. فاصلهٔ کانونی عدسی 20 cm است قطر اولین حلقه‌های پراش چقدر است؟

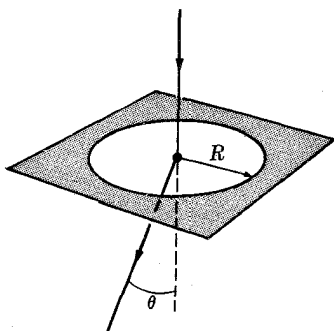


شکل ۴۴.۲۳

۱۴.۲۳ دو ستاره با درخشندگی یکسان تحت زاویهٔ 1 ثانیه دیده می‌شوند. با فرض اینکه طول موج برابر $5.85 \times 10^{-7} \text{ m}$ است (الف) کمترین قطر، عدسی شیئی تلسکوپی که این دو ستاره را از یکدیگر جدا می‌کند چقدر است؟ درشتنمایی تلسکوپ چقدر باید باشد؟ (ج) اگر فاصلهٔ کانونی عدسی شیئی 1.80 m باشد فاصلهٔ کانونی عدسیی را که باید برای چشمی به کار برده شود حساب کنید.

۱۵.۲۳ در مورد پراش فرانیهوفر، می‌توان ثابت کرد که دامنهٔ موجهای پراشیده توسط یک روزنهٔ دایره‌ای به شعاع R متناسب است با تابع بسل $J_1(x)$ (به یکی از جدولهای عدسی

مراجعه کنید). در این رابطه برای تابش عمودی $x = (\pi R/\lambda) \sin \theta$ است، و θ زاویه‌ای است که پرتوهای پراشیده با محور اپتیکی می‌سازند (شکل ۴۵.۲۳). (الف) نشان دهید که راستاهایی که برای آنها دامنه موجهای پراشیده برابر صفر است با جوابهای معادله $J_1(x) = 0$ متناظرند. (ب) با نگاه کردن به پاسخهای $J_1(x) = 0$ (به یکی از جدولهای عددی مربوط مراجعه کنید). مقادیر $\sin \theta$ را برای سه راستای اول با دامنه صفر پیدا کنید و بدین طریق درستی معادله (۱۱.۲۳) را کنترل کنید. (ج) با فرض اینکه پرتوهای پراشیده توسط یک عدسی همگرا، به فاصله کانونی f ، روی پرده‌ای در صفحه کانونی آن متمرکز می‌شوند، رابطه پرتوهای سه حلقه تاریک اول را بنویسید. (توجه کنید که در این مسئله به جای $\sin \theta$ می‌توان θ قرار داد). (د) به ازای $R = 0.1 \text{ mm}$ ، $\lambda = 589 \times 10^{-7} \text{ m}$ و $f = 20 \text{ cm}$ مقادیر θ و شعاع حلقه‌ها را حساب کنید.



شکل ۴۵.۲۳

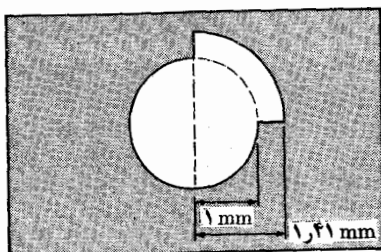
۱۶.۲۳ نور تکفامی به طول موج $600 \times 10^{-7} \text{ m}$ از یک چشمه نقطه‌ای دور از داخل یک روزنه دایره‌ای می‌گذرد. نقش پراش فرنل روی پرده‌ای که در یک متری پشت روزنه جای دارد مشاهده می‌شود. قطر روزنه دایره‌ای را پیدا کنید هرگاه (الف) فقط مناطق مرکزی فرنل، (ب) چهار منطقه اول فرنل را در معرض نمایش قرار دهد.

۱۷.۲۳ نقطه‌ای در فاصله 1 cm از یک روزنه دایره‌ای که با نوری به طول موج $589 \times 10^{-7} \text{ m}$ روشن می‌شود قرار دارد. اگر روزنه با دو منطقه فرنل متناظر باشد، شعاع آن را تعیین کنید.

۱۸.۲۳ نوری به طول موج $589 \times 10^{-7} \text{ m}$ روی یک روزنه دایره‌ای به شعاع 0.1 mm می‌تابد. نقطه‌ای در چه فاصله‌ای از روزنه باید قرار گیرد تا روزنه با: (الف) ۳ منطقه فرنل، (ب) چهار منطقه فرنل متناظر شود؟ در هر مورد تعیین کنید که این نقطه روشن است یا تاریک.

۱۹.۲۳ یک موج نور تخت و تکفام به طول $\lambda = 589 \times 10^{-7} \text{ m}$ در راستای عمودی

بر پرده‌ای کسه روی آن روزنه‌ای مطابق شکل ۴۶.۲۳ وجود دارد می‌تابد. شعاع دایره داخلی برابر ۱ mm و دایره خارجی ۱۲۴ mm است. (الف) دامنه و شدت آشفتنگی اپتیکی را در نقطه P واقع در فاصله ۲ m از پرده روی محور دایره‌ها، نسبت به مقداری که در نبودن پرده به دست می‌آیند، حساب کنید. (ب) فاز این آشفتنگی را نسبت به فازی که در نقطه P در نبودن پرده مشاهده می‌شود تعیین کنید.



شکل ۴۶.۲۳

۲۵.۲۳ موجهای نوری به طول موج $56 \times 10^{-7} \text{ m}$ از روزنه دایره‌ای به قطر ۲۶۵ mm می‌گذرند. نقش پراش فونل را روی پرده‌ای به فاصله ۱ m از روزنه مشاهده می‌کنند. (الف) مرکز نقش پراش روشن ظاهر می‌شود یا تاریک؟ (ب) پسرده را در چه فاصله‌ای از روزنه قرار بدهیم تا عکس وضع (الف) به دست آید؟

۲۱.۲۳ موجی تخت با طول $50 \times 10^{-7} \text{ m}$ در راستای عمود بر پرده‌ای که روی آن يك روزنه دایره‌ای به قطر ۴ mm وجود دارد، می‌تابد. (الف) جای نقطه‌های با شدت بیشینه و کمینه را در امتداد محور پرده تعیین کنید. (ب) آخرین کمینه در چه فاصله‌ای از پرده جای دارد.

۲۲.۲۳ پرده‌ای که روی آن روزنه دایره‌ای به شعاع ۴ cm وجود دارد به وسیله تابش عمودی موجهای نوری تخت روشن می‌شود. فرض کنید که نور فرودی آمیزه‌ای از دو باریکه نسور تکفام به طول موجهای $600 \times 10^{-7} \text{ m}$ و $400 \times 10^{-7} \text{ m}$ است. نقطه‌هایی از محور عمود بر پرده را، که از مرکز روزنه می‌گذرند، و در آنها تنها یکی از دو طول موج مشاهده می‌شود پیدا کنید.

۲۳.۲۳ يك موج تخت تکفام به طول موج $60 \times 10^{-7} \text{ m}$ با تابش عمودی روی يك توری تراگسیل تخت، که دارای ۵۰۰ خط در هر ۱ mm است، می‌تابد. زاویه انحراف بینابهای مرتبه اول، دوم و سوم را تعیین کنید.

۲۴.۲۳ در هرسانتیمتر از يك توری تخت تراگسیل ۴۰۰۰ خط وجود دارد. جدایی

زاویه‌ای را در بیناب مرتبه دوم، بین خطهای α و β اتم هیدروژن که طول موجهای آنها بترتیب $m \times 10^{-7} \times 656$ و $m \times 10^{-7} \times 410$ اند، بر حسب درجه، حساب کنید. تابش را عمودی فرض کنید.

۲۵.۲۳ الف) نوری در بیناب مرتبه اول توسط يك توری تراگسیل که دارای ۶۰۰۰ خط در هر cm است 25° منحرف می‌شود. طول موج آن چقدر است؟ انحراف این طول موج در بیناب مرتبه دوم چقدر می‌شود؟ تابش را عمودی فرض کنید.

۲۶.۲۳ بزرگترین طول موج قابل مشاهده در بیناب مرتبه چهارم يك توری تراگسیل با ۵۰۰۰ خط در هر cm کدام است؟ تابش را عمودی فرض کنید.

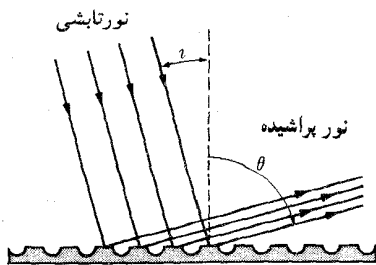
۲۷.۲۳ اگر مرزهای بیناب مرئی را متناظر با طول موجهای $m \times 10^{-7} \times 4$ و $m \times 10^{-7} \times 7$ فرض کنیم، زاویه‌های فراگیر بینابهای مرتبه اول و مرتبه دوم زا که توسط يك توری تخت با ۶۰۰۰ خط در هر cm تولید می‌شوند پیدا کنید. تابش را عمودی فرض کنید

۲۸.۲۳ نشان دهید که در يك توری با خطهای خیلی زیاد، شدت اولین بیشینه فرعی در دو طرف بیشینه اصلی اول برابر است با ۴٪ شدت بیشینه اصلی.

۲۹.۲۳ يك توری تراگسیل به طول ۴ cm دارای ۴۰۰۰ خط در هر cm است، توان تفکیک این توری را برای طول موجی برابر با $m \times 10^{-7} \times 59$ ، در بیناب مرتبه اول پیدا کنید. آیا این توری می‌تواند دو خط بیناب با طول موجهای $m \times 10^{-7} \times 5890$ و $m \times 10^{-7} \times 5896$ ، که دوتایی زرد سدیم را تشکیل می‌دهند، از هم جدا کند؟ همچنین برای طول موج مورد نظر، کمینه انحراف و باشندگی متناظر را حساب کنید.

۳۰.۲۳ نشان دهید که برای هر فاصله‌ای بین خطهای يك توری، بیناب مرتبه سوم بنفش روی بیناب مرتبه دوم سرخ را می‌پوشاند. تابش را عمودی فرض کنید.

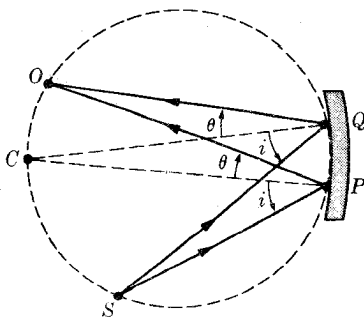
۳۱.۲۳ يك توری بازتابی از حك خطهای خیلی ظریف توسط الماس روی سطح صیقلی يك فلز بدست می‌آید (شکل ۴۷.۲۳). فاصله‌های صیقلی شده بین خطهای مجاور، هم ارز



شکل ۴۷.۲۳

با شکافهای يك توری تراگیسل انسد. نشان دهید که بیشینه‌های اصلی به شرط $a(\sin i - \sin \theta) = n\lambda$ به دست می‌آیند. در این رابطه a فاصله بین دو خط پیاپی است.

۳۲.۲۳ جهت اطمینان از قانونی شدن صحیح پرتوها به وسیله يك توری پراش، اج.ا. رولند فیزیکدان آمریکایی دو توری کاو با شعاع بزرگ درست کرد. فرض کنید که C در شکل ۴۸.۲۳ مرکز انحناي توری و قطر دایره نقطه چین برابر شعاع توری باشد. ثابت کنید که برای هر چشمه‌ای مانند S واقع روی دایره (الف) تمام پرتوها با زاویه تابش یکسان روی توری می‌تابند، (ب) تمام پرتوهای پراشیده توسط توری با زاویه یکسانی از توری خارج می‌شوند و در نقطه‌ای مانند O روی دایره نقطه چین به یکدیگر می‌رسند. از این رو اگر يك فیلم عکاسی در نقطه O ، مماس بر دایره، جای بدهند بیناب پراش متناظر با این زاویه پراش را می‌تواند ثبت کند. این وسیله را مونتاژ دلدن می‌نامند و در آزمایشگاههای فیزیک برای پژوهشهای بیناب نمودی به طور گسترده از آن استفاده می‌کنند. [داهنمایي: توجه کنید که عمود بر توری در نقطه تابش از نقطه C می‌گذرد و سطح توری خیلی کم با سطح دایره نقطه چین فاصله دارد.]



شکل ۴۸.۲۳

۳۳.۲۳ فاصله بین صفحه‌های اصلی در بلور NaCl برابر $10^{-1} \times 282$ m است. معلوم شده است که بازتاب مرتبه اول براگک باریکه‌ای از پرتوهای x تکفام، تحت زاویه 10° تولید می‌شوند. (الف) طول موج پرتوهای x را حساب کنید، (ب) چه زاویه‌ای با بیناب مرتبه دوم متناظر است؟

۳۴.۲۳ یدور پتاسیم، KI، بلور مکعبی با چگالی $10^3 \times 313$ kgm⁻³ است. کمترین فاصله بین صفحه‌ها، یعنی طول يك یاخته بنیادی را پیدا کنید. زاویه‌های متناظر با دو بازتاب اول براگک را برای پرتوهای x به طول موج $10^{-1} \times 30$ m به دست آورید.

۳۵.۲۳ در يك لامپ پرتو x الکترونها با اختلاف پتانسیل 10^5 V شتاب می‌گیرند.

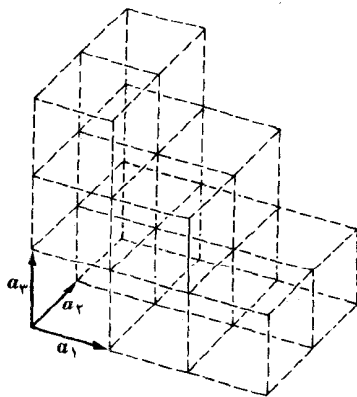
پرتوهای x تولید شده را با بلور مسئله ۳۳.۲۳ می‌آزمایند. زاویه متناظر با بیناب مرتبه اول کوتاهترین طول موج تولیدی لامپ را پیدا کنید.

۳۶.۲۳ باریکه‌ای از پرتوهای x به طول موج $۵ \times 10^{-11} \text{ m}$ روی گسردی متشکل از خورده بلورهای KCl با سمتگیریهایی کاتوره‌ای می‌تابد. فاصله شبکه بلور برابر $۱۰^{-۱} \times ۳۴ \text{ m}$ است. یک فیلم عکاسی در ۱ m از گرد جای داده‌اند. (الف) شعاع دایره‌های متناظر با بینابهای مرتبه اول و دوم صفحه‌هایی را پیدا کنید که فاصله بین آنها با فاصله شبکه یکسان است؛ (ب) شعاع دایره‌های ناشی از صفحه‌هایی را تعیین کنید که با صفحه‌های حالت (الف) زاویه ۴۵° می‌سازند.

۳۷.۲۳ یک شبکه بلوری می‌تواند با سه بردار اصلی \mathbf{a}_1 ، \mathbf{a}_2 ، \mathbf{a}_3 مشخص شود، به گونه‌ای که برای هر جایگاهی که ترکیب خطی از مضربهای درست این سه بردار باشد ساختار شبکه تناوبی است (شکل ۲۹.۲۳). (الف) ثابت کنید که بردارهایی که جای نسبی دو نقطه که جای یکسانی را در دو یاخته مختلف اشغال می‌کنند، به دست می‌دهند به صورت $\mathbf{r} = \gamma_1 \mathbf{a}_1 + \gamma_2 \mathbf{a}_2 + \gamma_3 \mathbf{a}_3$ اند. γ_1 ، γ_2 و γ_3 عددهای درست مثبت یا منفی اند. (ب) نشان دهید که اتمهای شرکت کننده در بیناب پراش پرتوهای x مرتبه n با عددهای درست داده می‌شوند که در رابطه $(\gamma_1 \mathbf{a}_1 + \gamma_2 \mathbf{a}_2 + \gamma_3 \mathbf{a}_3) = n\lambda$ صدق می‌کنند. \mathbf{v} از معادله (۲۴.۲۳) تعیین می‌شود. (ج) ثابت کنید که شدت تابش پراکنده در راستای وابسته به \mathbf{v} ، متناسب است با $(A_1 A_2 A_3)^2$ که در آن

$$A_i = \sin(N_i \pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i / \lambda) / \sin(\pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i / \lambda)$$

و N_i شمار یاخته‌های بلور در راستای \mathbf{a}_i است. (د) با استفاده از نتیجه حالت (ج) نشان



شکل ۲۹.۲۳

دهید که بیشینه‌های اصلی در راستایی جای دارند که در رابطه‌های

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_1 = n_1 \lambda, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_2 = n_2 \lambda, \quad \text{و} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_3 = n_3 \lambda$$

صدق می‌کنند. n_1 ، n_2 و n_3 عددهای درست‌اند. این رابطه‌ها را معادله‌های لاره می‌نامند. (ه) با به‌کار بردن بردارهای وارون، \mathbf{a}^1 ، \mathbf{a}^2 و \mathbf{a}^3 (مسئله ۲۹.۳ را ببینید) ثابت کنید که

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_i + (n_1 \mathbf{a}^1 + n_2 \mathbf{a}^2 + n_3 \mathbf{a}^3) \lambda$$

این معادله جای لکه‌های روشن را در نقش لاره (شکل ۴۰.۲۳) تعیین می‌کند.

پدیده‌های ترابری

مقدمه	۱.۲۴
بخش مولکولی، قانون فیک	۲.۲۴
رسانش گرمایی، قانون فوریه	۳.۲۴
ترابری همراه با تولید و درآشامی	۴.۲۴
وشکسانی	۵.۲۴
مسافت آزاد میانگین، بسامد و مقطع برخورد	۶.۲۴
نظریه مولکولی پدیده‌های ترابری	۷.۲۴
نتیجه	۸.۲۴

۱۰۲۳ مقدمه

در فصلهای ۱۸ تا ۲۳ چند پدیده مهم را مطالعه کردیم، که همگی تحت عنوان حرکت موجی بیان می‌شوند. هر چند این موجها با گستره‌ای وسیع از پدیده‌های فیزیکی متناظرند که از موجهای کشسان در محیط مادی گرفته تا موجهای الکترومغناطیسی در خلا را دربر دارند، ولی همگی يك سرشت مشترك دارند؛ یعنی میدانهای وابسته به آنها از معادله موج (۱۱۰۱۸) پیروی می‌کنند

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (10.23)$$

این امر توصیف کلی بسیاری از خواص آنها را، بدون توجه به ماهیت فیزیکی ویژه هر يك ممکن می‌سازد. یکی از این خواص انتشار بدون واپیچش آشفتهگی فیزیکی است، زیرا در تمام حالتها شکل موج تغییر نمی‌کند و می‌توان آن را، بخصوص شکل موج در محیطی ناپاشنده را، با رابطه $f(x \pm vt)$ بیان کرد.

معادله‌ای مانند معادله (۱۰۲۳) توزیع فضایی و تطور زمانی میدان ξ را توصیف می‌کند. ولی میدانهای دیگری نیز وجود دارند که با معادله‌های دیگری توصیف می‌شوند و توابع دیگری از فضا و زمان اند. انتشار این میدانها ممکن است با واپیچش یا تضعیف همراه باشد، و بنابراین نمی‌توان آنها را با معادله‌ای به صورت $f(x \pm vt)$ بیان کرد. یا وجود این، در بعضی موارد بازم می‌توان از سرعت انتشار حرف زد. در اینجا تنها گونه خاصی از این میدانها را بررسی می‌کنیم. این میدان با گروهی مهم از مسایل فیزیکی متناظر است که دارای بعضی خصوصیات مشترك اند و می‌توان آنها را تحت عنوان کلی پدیده‌های ترابری بیان کرد. پدیده‌های ترابری فرایندهایی هستند که در آنها انتقال (یا ترابری) خالص ماده، انرژی یا اندازه حرکت در مقیاس بزرگ یا ماکروسکوپیک وجود دارد. خصوصیات مشترك فیزیکی این پدیده‌ها را می‌توان با روشهای همانندی توصیف و با يك معادله «انتشار» مرتبه اول نسبت به زمان (در حالتها خیلی ساده) به صورت زیر مشخص کرد

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (20.23)$$

در اینجا a سرشتی ثابت هروضع و ξ میدان متناظر با پدیده خاص ترابری است. باید متوجه بود که بسیاری از پدیده‌های ترابری از معادله‌هایی پیچیده‌تر از معادله (۲۰۲۳) پیروی می‌کنند. بنابراین معادله (۲۰۲۳) را باید تنها تقریب مرتبه اول (ولی رضایت بخشی) از این معادلات در نظر گرفت. در این فصل به شرح مختصری از سه پدیده ترابری: (الف) پخش مولکولها و نوترونها، (ب) رسانش گرما و (ج) وشکسانی می‌پردازیم.

۲۰۲۴ پخش مولکولی، قانون فیک

می‌دانیم که هنگام باز کردن دريك شیشه عطر یا هر آبگون با بوی مشخص دیگری، بد عنوان

مثال آمونیاک، در اتاق بسته در نقاط مختلف اتاق بوی آن به مشام می‌رسد. می‌گوییم که مولکولهای آبگون، پس از تبخیر، در هوا پخش و در تمام فضای اطراف منتشر شده‌اند. همین امر هنگام انداختن یک جبهه قند در داخل لیوان آب رخ می‌دهد. قند بتدریج حل می‌شود، و درعین حال، مولکولهای حل شده قند در داخل آب پخش و بالاخره در تمام حجم آب توزیع می‌شوند. به عنوان آخرین مثال، فرض می‌کنیم که دو گاز در داخل ظرفی که مطابق شکل ۱۰۲۴ توسط تیغه‌ای به دو قسمت تقسیم شده است قرار دارند. اگر تیغه را برداریم مشاهده می‌کنیم که دو گاز در داخل یکدیگر پخش می‌شوند، تا اینکه، بعد از مدتی، آمیزه همگنی به دست می‌آید.

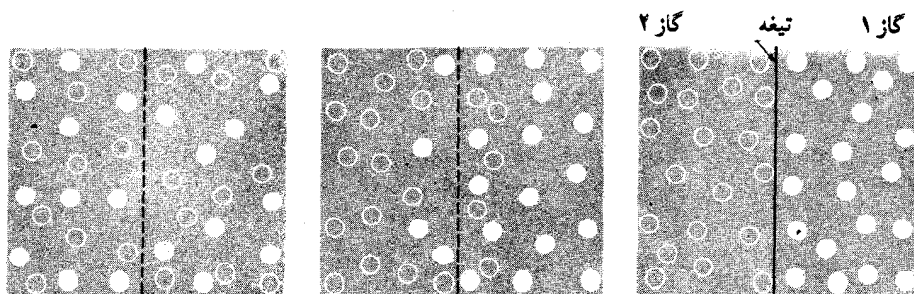
این مثالها، مانند سایر مثالهایی که دانشجو با آنها آشناست، یک سرشت بنیادی از فرایند پخش را نشان می‌دهند.

برای اینکه فرایند پخش رخ دهد، باید توزیع مولکولهای جسم در فضا ناهمگن باشد.

تعداد مولکولهای جسم در واحد حجم (که آن را غلظت می‌نامیم) را n می‌نامیم. بنا به بیان بالا، برای اینکه پخش رخ دهد، باید مقدار n از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر کند. سرشت دوم عبارت است از

پخش در راستای کاهش غلظت رخ می‌دهد.

و بنا بر این می‌کوشد تا توزیع مولکولی ماده پخشی را در تمام فضا یکسان کند. بدین طریق تمایل کاملاً معینی برای پخش شدن وجود دارد. ولی این تمایل را باید به گونه آماری یا ماکروسکوپی بررسی کرد، زیرا ممکن است افتخیزهای موضعی در فاصله زمانی کوتاه شارش مولکولی را در بعضی جاها برعکس کند. به طور کلی پخش نتیجه اغتشاش مولکولی است. اغتشاش باعث برخوردهای متعدد



(ج)

(ب)

(الف)

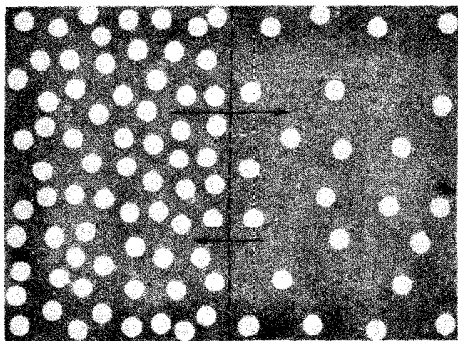
شکل ۱۰۲۴ پخش گاز. (الف) دو گاز توسط تیغه‌ای از هم جدا شده‌اند. (ب) کمی بعد از برداشتن تیغه، مولکولهایی از هر گاز در طرف دیگر دیده می‌شود. (ج) پس از مدتی، آمیزه دو گاز همگن است و عمل پخش متوقف می‌شود.

بین مولکولها می‌شود و در اثر آن مولکولها پراکنده می‌شوند. فرض کنید که گازی ناحیه‌ای را که توسط تیغه‌ای بسه دویخش تقسیم شده اشغال کرده است (شکل ۲۰۲۴)، به گونه‌ای که چگالی گاز در دو طرف یکسان نیست ولی دما و در نتیجه سرعت مولکولها یکسان است. اگر تیغه را برداریم، در فصل مشترك دوجریان مولکولی به وجود می‌آید، که با پیکانهای افقی نشان داده شده‌اند. این دوجریان نتیجه برخوردها و پراکندگیها در دو طرف است. ولی جریان از چپ به راست بیشتر است زیرا در قسمت چپ که غلظت بیشتر است بسامد برخوردها نیز زیادتر است. بنابراین يك جریان خالص به سمت راست وجود دارد، که به پخش از چپ به راست، یعنی از ناحیه با غلظت بیشتر به ناحیه با غلظت کمتر منجر می‌شود.

از این به بعد، پخش يك ماده را تنها در داخل خودش، یا در داخل محیط دیگری (گاز، آبگون، جامد) که همگن است و بنابراین جای مولکولهای آن علی‌الاصول ثابت است بررسی می‌کنیم. در مورد دوماده که یکی در داخل دیگری پخش می‌شود بحث نخواهیم کرد، زیرا بررسی این موضوع اندکی متفاوت است. همچنین از اثرهای نیروهای بین مولکولی چشم می‌پوشیم.

فرض کنید که غلظت در راستایی که آن را محور X می‌نامیم تغییر می‌کند (شکل ۳۰۲۴)، ولی در صفحه‌های عمود بر این راستا یکسان باقی می‌ماند. در این صورت تعداد آنها یا مولکولها در واحد حجم (یعنی غلظت) تنها تابع x است و آن را با $n(x)$ نشان می‌دهند و بر حسب m^{-3} بیان می‌کنند. بنابراین پخش در راستای محور X صورت می‌گیرد. چگالی جریان ذرات، یعنی تعداد خالص ذراتی را که در واحد زمان از سطح واحد عمود بر راستای پخش می‌گذرند Z می‌نامیم. این چگالی جریان ذرات را بر حسب $m^{-2} s^{-1}$ بیان می‌کنند. اگر ماده همگن (یعنی n ثابت) باشد، چگالی جریان برابر صفر می‌شود؛ زیرا تعداد ذراتی که از يك سو و از سوی مخالف می‌گذرند با هم برابرند و ترازبری خالص ماده وجود ندارد. ولی اگر ماده ناهمگن باشد، از يك نقطه به نقطه دیگر n تغییر می‌کند و يك

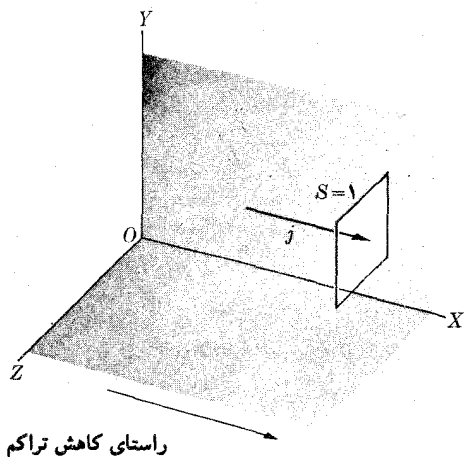
P



تراکم زیاد

تراکم کم

شکل ۲۰۲۴ جریان پخش در دو راستا یکسان نیست.



شکل ۳.۲۴

جریان برآیند یا ترابری (انتقال) ماده به وجود می‌آید. استنباط فیزیکی ما، که تجربه نیز آن را تأیید می‌کند، حکم می‌کند که بپذیریم هر چه تغییر غلظت $n(x)$ در واحد طول یا گرادیان غلظت بیشتر (یا به گفته دیگر $\partial n / \partial x$ بزرگتر) باشد چگالی جریان نیز بزرگتر است. همچنین آزمایش نشان می‌دهد که بین چگالی جریان j و تغییرات غلظت در واحد طول $\partial n / \partial x$ رابطه‌ای وجود دارد، یعنی

$$j = -D \frac{\partial n}{\partial x} \quad (3.24)$$

ثابت تناسب D را ضریب پخش می‌نامند و آن به جنس ماده بستگی دارد. علامت منفی نشان می‌دهد که شارش خالص در راستایی است که n کاهش می‌یابد. بیشتر فرایندهای پخش بخوبی در معادله (۳.۲۴) صدق می‌کنند، مگر هنگامی که غلظت n بینهایت ضعیف یا خیلی زیاد باشد، یا اینکه در فاصله کوتاهی ناگهان تغییر کند، به گونه‌ای که نتوان استدلال آماری را به کار برد. معادله (۳.۲۴) که قانون فیک نامیده می‌شود، در سال ۱۸۵۵/۱۲۳۴، توسط آدلف-فیک (۱۲۵۸-۱۲۸۵/۱۲۲۹-۱۹۰۱) فیزیولوژیست آلمانی پیشنهاد شده است. ضریب پخش D به حالت مولکولی ماده پختی (چنانکه آن را برای گازها در بخش ۷.۲۴ ثابت خواهیم کرد) وابسته است و بر حسب $m^2 s^{-1}$ بیان می‌شود، یعنی یکاهای معادله (۳.۲۴) سازگارند. فرض کنیم که D مستقل از غلظت است، این فرض تقریبی است که در گستره‌ای وسیع از شرایط معتبر است. قانون فیک رابطه‌ای بین چگالی جریان و تغییر غلظت ماده در واحد طول (یا گرادیان) برقرار می‌کند.

از ترکیب قانون فیک با اصل بقای مولکولها (ثابت ماندن تعداد مولکولها) رابطه‌ای

به دست می‌آید که در آن تنها غلظت ظاهر می‌شود. بدین منظور، چنانکه شکل ۴.۲۴ نشان می‌دهد، یک حجم جزئی به طول dx و سطح مقطع S موازی با راستای پخش در نظر می‌گیریم. حجم آن برابر می‌شود با

$$dV = S dx \times \text{مساحت سطح مقطع} = S dx$$

تعداد ذرات واقع در این حجم در یک لحظه معلوم برابر است با $n dV = nS dx$. شار ورودی (یعنی تعداد مولکولهای داخل شونده از سمت چپ در واحد زمان) برابر با jS و شار خروجی از سمت راست برابر $j'S$ است. قانون بقای مولکولها ایجاب می‌کند که آهنگ غلظت برابر اختلاف شار ورودی و خروجی باشد، یعنی

شار خروجی - شار ورودی = آهنگ انباش

$$\text{آهنگ انباش} = jS - j'S$$

بنابراین داریم

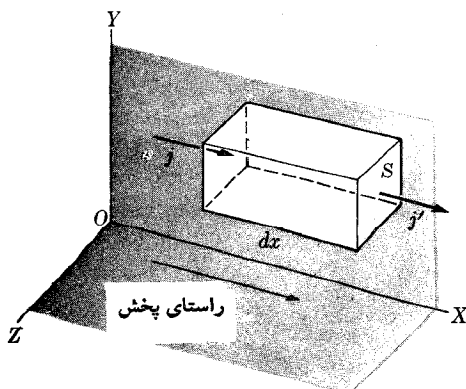
$$\text{آهنگ انباش} = -(j' - j)S = -(dj)S = -\frac{\partial j}{\partial x} S dx$$

در این رابطه $dj = j' - j$ برابر است با اختلاف چگالی جریان در دو طرف. ولی آهنگ انباش برابر است با افزایش تعداد مولکولها در واحد زمان در واحد حجم $(\partial n / \partial t)$ ضربدر حجم $S dx$. بنابراین داریم

$$\text{آهنگ انباش} = \frac{\partial n}{\partial t} S dx$$

با مساوی قرار دادن دو رابطه آهنگ انباش و با ساده کردن آنها با $S dx$ ، به دست می‌آید

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$$



شکل ۴.۲۴ پخش در داخل حجم جزئی.

با استفاده از قانون فیک یا $j = -D(\partial n / \partial x)$ ، برای حذف j داریم

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (۴.۲۴)$$

این معادله پخش است، از همان نوعی است که قبلاً با معادله (۲.۲۴) نشان داده‌ایم. این معادله که بقای تعداد ذرات را نشان می‌دهد، گاهی قانون دوم فیک نیز می‌نامند. این معادله، مانند معادله موج، شامل یک مشتق دوم نسبت به مکان است ولی مشتق نسبت به زمان آن از مرتبه اول است. این امر اختلاف عمده‌ای را آشکار می‌کند که، هم از لحاظ فیزیکی و هم از لحاظ ریاضی، در فرایندهای پخش در مقایسه با انتشار امواج که از معادله (۱۱.۱۸) پیروی می‌کنند، وجود دارد.

حالت خاصی را، حالت پایا، که در آن غلظت مستقل از زمان است، در نظر می‌گیریم. در این حالت $\partial n / \partial t = 0$ است و با حذف ثابت D ، معادله (۴.۲۴) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0 \quad (۵.۲۴)$$

با انتگرال گرفتن از این معادله به دست می‌آید

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \text{const} \quad (۶.۲۴)$$

ولی اگر $\partial n / \partial x = \text{const}$ باشد، از معادله (۳.۲۴) به دست می‌آید $j = \text{const}$. بنا بر این در شرایط مانا یا پایا چگالی جریان از داخل تمام مقاطع به یک اندازه است، چیزی که از لحاظ فیزیکی روشن است. چگالی جریان ثابت بدین معنی است که در داخل هر عنصر حجم، مانند آنچه در شکل ۴.۲۴ نشان داده‌ایم، تعداد ذره‌هایی که بر اثر پخش از یک سو وارد می‌شوند برابر است با تعداد ذراتی که از سوی دیگر خسارج می‌شوند. یعنی در هیچ نقطه‌ای از محیط نه انباشت ذرات وجود دارد و نه تغییر در غلظت، امری که با مفهوم شرایط مانا یا پایا سازگار است. از معادله (۳.۲۴) داریم

$$\frac{\partial n}{\partial x} = -\frac{j}{D}$$

با انتگرال گرفتن از این رابطه می‌توان نوشت

$$\int_{n_0}^n dn = \int_0^x -\frac{j}{D} dx$$

n_0 غلظت ذرات در نقطه $x = 0$ است. چون در این حالت j/D ثابت است، بنا بر این داریم

$$n = -\frac{j}{D}x + n_0 \quad (۷.۲۲)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که غلظت ذرات، همچنانکه شکل ۵.۲۴ نشان می‌دهد، در راستای انتشار با افزایش طول به‌طور خطی کاهش می‌یابد. معادله (۷.۲۲) را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

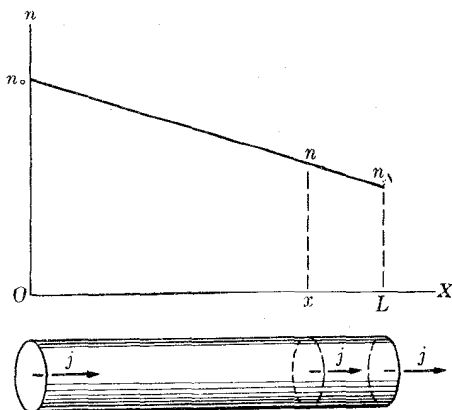
$$j = D \frac{n_0 - n}{x}$$

این رابطه با قانون فیک، که با معادله (۳.۲۲) بیان می‌شود، هم‌ارز است ولی تنها برای جریان ثابت معتبر است. در غیر این صورت معادله بالا جریان میانگین بین دو نقطه به‌فاصله x را به‌دست می‌دهد.

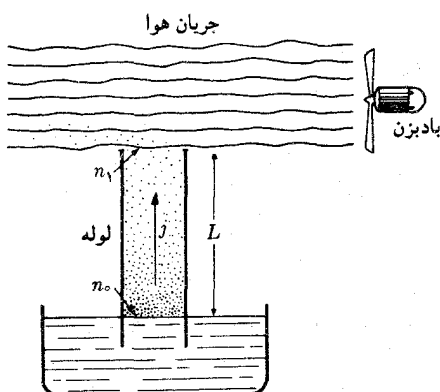
توجه کنید که در شرایط مانا، باید ذرات از یک طرف با آهنگ ثابت وارد و از طرف دیگر با همین آهنگ خارج شوند. بدین معنی که اگر بخواهیم غلظت را در دو طرف لوله‌ای به طول L ، شکل ۵.۲۴، ثابت نگاه داریم، باید در نقطه $x = L$ در واحد زمان همان تعداد ذره خارج شوند که در $x = 0$ در واحد زمان وارد می‌شوند. اگر غلظت را در $x = L$ برابر n_1 بگیریم، از معادله بالا به‌دست می‌آید

$$j = D \frac{n_0 - n_1}{L} \quad (۸.۲۲)$$

به‌عنوان مثال فرض کنید که لوله قائمی داریم که دو سر آن باز است. یک‌سر این لوله در داخل آبگونی است که در حال بخارشدن است بنابراین مولکولهای آبگون در هوای داخل لوله پخش می‌شوند (شکل ۶.۲۴). جریان هوا در سر دیگر لوله مولکولهایی را



شکل ۵.۲۴ تغییر غلظت ناشی از پخش پایا در امتداد لوله.

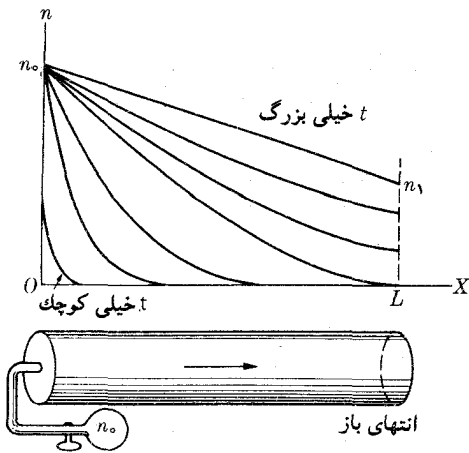


شکل ۶.۲۴ پخش بخار آب در طول لوله.

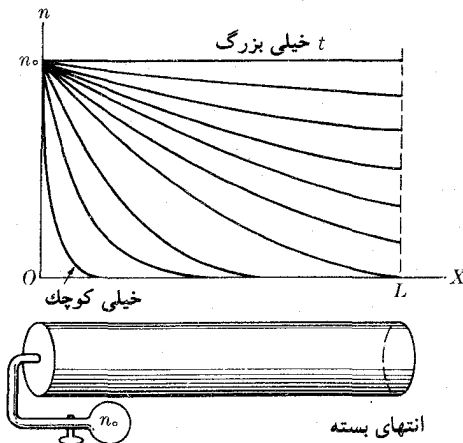
که بدانجا می‌رسند باخود می‌برد و شرایط پایا به‌وجود می‌آورد: تعداد مولکول‌هایی که در اثر تبخیر از پایین داخل لوله می‌شوند برابر با تعداد مولکول‌هایی است که در بالا به‌وسیله جریان هوا حذف می‌شوند. در واقع، این یکی از روش‌های اندازه‌گیری ضریب پخش D است. می‌توان با اندازه‌گیری مقدار آبی که در فاصله زمانی معین تبخیر می‌شود مقدار J را پیدا کرد. از طریق آزمایش می‌توان n_0 غلظت در قاعده و n_1 غلظت در رأس را تعیین کرد. در این صورت برای محاسبه D می‌توان از معادله (۸.۲۴) استفاده کرد.

وضعی را که در بالا بررسی کردیم بر این فرض متکی است که قبلاً به‌حالت پایا دست یافته‌ایم. مسئله مهم دیگر این است که چگونه می‌توان به این حالت پایا دست یافت. مسئله شکل ۵.۲۴ را از نو در نظر می‌گیریم. فرض کنید که در آغاز هیچ‌یک از مولکول‌های گاز پخش در لوله وجود ندارد. در لحظه معلومی، $t = 0$ ، یک سر لوله را به چشمه‌گازی با غلظت ثابت n_0 وصل می‌کنیم، مولکول‌ها با آهنگ معینی از سر دیگر لوله خارج می‌شوند. اگر پس از اتصال لوله به چشمه‌گاز، غلظت مولکول‌ها را در طول لوله در زمان‌های مختلف اندازه بگیریم، منحنی‌های مختلف شکل ۷.۲۴ به‌دست می‌آیند. تنها پس از زمان طولانی به‌حالت پایا می‌رسیم و آن زمانی است که آهنگ خروج مولکول‌ها در $x = L$ با آهنگ ورود مولکول‌ها در $x = 0$ برابر است. در این صورت غلظت در طول لوله با معادله (۷.۲۴) بیان می‌شود. اگر سر دیگر لوله بسته باشد، تغییر غلظت مطابق شکل ۸.۲۴ است. حالت پایا متناظر با غلظت یکنواخت در سراسر لوله است. تمام این نتیجه‌ها را می‌توان با حل معادله وابسته به‌زمان (۴.۲۴) به‌دست آورد، بحث ریاضی آن خیلی مشکل‌تر از حالت پایاست و در اینجا از اشاره به آن صرف نظر می‌کنیم.

مثال ۱۰.۲۴ هنگام پخش بخار آب در هوا، ضریب پخش در فشار طبیعی و دمای 20°C برابر $2.19 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ است. در آزمایشی همانند شکل ۶.۲۴، طول لوله یک متر و سطح مقطع آن 20 cm^2 است. مقدار آبی را که در هر ثانیه در داخل لوله تبخیر می‌شود



شکل ۷.۲۴ تغییر غلظت بر حسب زمان برای پخش در لوله‌ای که یک سر آن باز است. غلظت در هر نقطه تغییر می‌کند تا جایی که به حالت پایا برسد (خط راست).



شکل ۸.۲۴ تغییر غلظت بر حسب زمان برای پخش در امتداد لوله‌ای که یک سر آن بسته است. حالت پایا هنگامی است که تراکم یکنواخت باشد.

پیدا کنید.

حل: ابتدا باید چگالی جریان را از معادله (۸.۲۴) تعیین کنیم. اگر فرایندها به قدری بخار فرض کنیم که بتوان در هر لحظه ناحیه پایین را سیر شده در نظر گرفت، برای چگالی بخار

آب در دمای 20°C مقدار $1.73 \times 10^{-2} \text{kgm}^{-3}$ به دست می‌آید و اگر m جرم يك مولکول باشد، تعداد مولکولها در واحد حجم قاعده لوله برابر می‌شود با $n_0 = (1.73 \times 10^{-2}/m)m^{-3}$. همچنین می‌توان فرض کرد که غلظت در رأس به قدری کوچک است که می‌توان n_0 را برابر صفر گرفت. در چنین شرایطی $j = Dn_0/L$ بنا بر این داریم

$$j = \frac{(2.19 \times 10^{-5}) \left(1.73 \times \frac{10^{-2}}{m}\right)}{1.0} = \frac{3.78 \times 10^{-7}}{m} \text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$$

جرم تبخیر شده در هر ثانیه در داخل لوله برابر است با

$$M = jSm = (3.78 \times 10^{-7})(2 \times 10^{-3}) = 7.56 \times 10^{-10} \text{kg s}^{-1}$$

جرم تبخیر شده در يك ساعت برابر می‌شود با $2.37 \times 10^{-6} \text{kg}$ یا در حدود 2.37mg . چون جرم يك مولکول آب برابر $2.98 \times 10^{-26} \text{kg}$ است، بنا بر این تعداد مولکولهای تبخیر شده در هر ثانیه برابر می‌شود با 2.54×10^{16} یا 1.27×10^{15} مولکول در هر سانتی متر مربع در هر ثانیه.

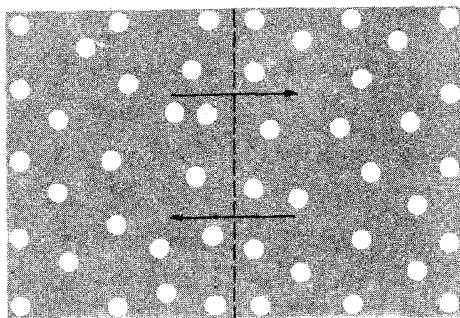
۳.۲۴ رسانش گرمایی، قانون فوریه

رسانش گرمایی یکی دیگر از پدیده‌های ترازبری است که در آن انرژی ناشی از اغتشاش مولکولی از يك محل به محل دیگر انتقال می‌یابد و متناظر با آن دما تغییر می‌کند. هر وقت دمای يك نقطه از جسم با دمای نقطه دیگر آن فرق کند، یعنی اگر انرژی میانگین مولکولها در نقاط مختلف جسم با هم یکی نباشد، رسانش گرمایی روی می‌دهد. این اختلاف دما موجب شارش خالص انرژی می‌شود. بنا بر این می‌توان رسانش گرمایی را به عنوان انتقال انرژی ناشی از اختلاف دما تعریف کرد

رسانش گرمایی در داستای کاهش دما رخ می‌دهد.

و در نتیجه می‌کوشد دما را در تمام جسم یکنواخت کند. به سبب اختلاف حرکت مولکولها در جامدها، آبگونها و گازها، سازوکار رسانش گرمایی در این سه حالت از ماده با هم فرق دارد. در گازها، و از بعضی لحاظ در آبگونها می‌توان گفت که رسانش گرمایی از برخورد بین مولکولهای تندرو و مولکولهای کندرو به وجود می‌آید. برخوردهایی که اثرشان انتقال انرژی جنبشی مولکولهای تندروتر به مولکولهای کندروتر است. سازوکار رسانش گرمایی در جامدها پیچیده تر است.

ظرف پر از گازی را که در تمام حجم آن گرادیان دما وجود دارد در نظر می‌گیریم. در جاهایی که دما بالاتر است سرعت مولکولها به طور متوسط بیشتر از جاهایی است که دما پایین تر است. به عنوان مثال، در شکل ۳.۲۴ فرض کنید که گاز سمت چپ گرمتر از سمت راست

گاز گرم P گاز سرد

شکل ۹.۲۴

است. در اثر برخورد بین مولکولها در مرز دو گاز و همچنین پخش مولکولهای «گرم» از چپ به سمت راست و مولکولهای «سرد» از راست به چپ، انتقال خالص انرژی از سمت چپ به سمت راست به وجود می آید که آن را گرما می نامیم. (یادآوری می کنیم که در پخش ۱۰.۹ مفهوم گرما تعریف شده است.)

در جامدها، انتقال گرما از طریق جابجایی مولکولها وجود ندارد، زیرا تنها حرکت مولکولها در جامد ارتعاش در اطراف وضع ترازمندی آنها و فرایند مربوط به ترابری این انرژی ارتعاشی در امتداد شبکه بلوری جامد است. با وجود این در فلزها یک پدیده اضافی وجود دارد، زیرا الکترونها رسانشی (که در داخل فلز با یونهای مثبت در تعادل دمایی اند) آزادانه می توانند در داخل حجم فلز جابجا شوند. الکترونها رسانشی مانند مولکولهای یک گاز رفتار می کنند و می کوشند تا در داخل فلز از ناحیه های گرم به سمت ناحیه های سرد پخش شوند و در اثر برخورد با الکترونها دیگر و با یونهای شبکه مقداری انرژی به ناحیه های سردتر انتقال می دهند.

در گازها و آبگونها به سبب اختلاف چگالی ناشی از اختلاف دما ممکن است انتقال ماده نیز وجود داشته باشد. این فرایند که همرفت نامیده می شود از مقوله مورد گفتگو در بالا نیست. زیرا همرفت اساساً از شرط ناپایداری ماکروسکوپیکی ناشی می شود نه اغتشاش مولکولی.

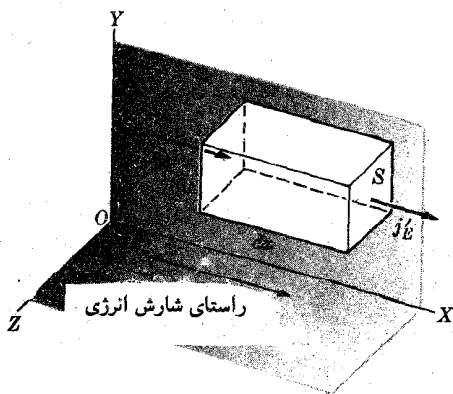
چگالی جریان انرژی ناشی از اختلاف دما، یعنی انرژی که در واحد زمان از سطح واحد واقع در راستای عمود بر شارش انرژی می گذرد را j_E می نامیم. این راستا را محور X فرض می کنیم. چنانکه قبلاً آموختیم، شارش انرژی در راستای کاملاً معین، که همان راستای کاهش دماست، رخ می دهد. دما را با نشان T می دهیم. تغییر دما در واحد طول جسم (یا گرا دیان دما) برابر است با $\partial T / \partial x$. بجز مواردی که دما در فاصله کوتاهی سرعت تغییر می کند، آزمایش نشان می دهد که j_E با $\partial T / \partial x$ متناسب است یعنی

$$j_E = -K \frac{\partial T}{\partial x} \quad (9.24)$$

K ضریب سرشتی هر ماده است و رسانندگی گرمایی نامیده می شود. علامت منفی نشان می دهد که شارش انرژی در راستای کاهش دماست. این رابطه که به قانون فوریه معروف است، در حدود سال ۱۸۱۵/۱۱۹۴ توسط دانشمند فرانسوی ژوزف فوریه (۱۱۴۷-۱۲۰۹) / (۱۷۶۸-۱۸۳۰) پیشنهاد شده است. توجه کنید که j_E با یکای $\text{Jm}^{-2}\text{s}^{-1}$ و $\delta T / \delta x$ بر حسب $^{\circ}\text{Cm}^{-1}$ بیان می شوند. بنابراین، K بر حسب $^{\circ}\text{C}^{-1}\text{s}^{-1}\text{Jm}^{-1}$ یا $\text{mkgs}^{-3}\text{C}^{-1}$ بیان می شود. با وجود این، گاهی K را بر حسب $\text{cal m}^{-1}\text{s}^{-1}\text{C}^{-1}$ نیز بیان می کنند. قانون فوریه در رسانندگی گرمایی، خیلی شبیه به قانون فیک در مورد پخش است. در واقع، رابطه ای بین رسانندگی گرمایی K و ضریب پخش D وجود دارد. به این موضوع در بخش ۷.۲۴ اشاره شده است. گرچه سازوکار رسانش گرمایی در گازها، آبگونها و جامدها متفاوت است ولی قانون فوریه در هر سه حالت به کار می رود.

مرحله بعدی یافتن رابطه ای است که در آن تنها دما وارد می شود. می توان با بهره جویی از اصل بقای انرژی این رابطه را به دست آورد. مطابق شکل ۱۰.۲۴، فرض کنید که یک عنصر حجمی به طول dx و سطح مقطع S در راستای موازی با شارش انرژی قرار دارد. حجم آن برابر است با $dV = S dx$. اگر ρ چگالی جسم باشد جرم آن برابر می شود با $dm = \rho dV = \rho S dx$. انرژی که در واحد زمان از سمت چپ به داخل عنصر حجمی وارد می شود (شار دودی انرژی) برابر $j_E S$ و انرژی که از سمت راست از این حجم خارج می شود (شار خروجی انرژی) برابر با $j'_E S$ است. بهره انرژی در واحد زمان در داخل حجم برابر است با

$$\begin{aligned} \text{شار خروجی} - \text{شار ورودی} &= \text{آهنگ بهره انرژی} \\ &= j'_E S - j_E S = -(j'_E - j_E) S \\ &= -dj_E = -\frac{\delta j_E}{\delta x} dx \end{aligned}$$



شکل ۱۰.۲۴ رسانش گرمایی از داخل عنصر حجم.

هیچ فرایند دیگری رخ ندهد، بهره انرژی به معنی افزایش انرژی مولکولهای موجود در داخل حجم و یا افزایش دماست.

مقدار گرمایی را که يك ماده درمی‌آشامد تا دمای آن يك درجه افزایش پیدا کند گرمای ویژه آن ماده تعریف می‌کنند و با علامت c نشان می‌دهند. گرمای ویژه برحسب $\text{Jkg}^{-1}\text{C}^{-1}$ (یا $\text{cal kg}^{-1}\text{C}^{-1}$) بیان می‌شود. در نتیجه، اگر دمای جسمی به اندازه dT افزایش پیدا کند، انرژی درآشامیده توسط واحد جرم برابر است با $c dT$. اگر این افزایش دما در زمان dt صورت گیرد، انرژی درآشامیده توسط واحد جرم در واحد زمان برابر می‌شود با $c (\partial T / \partial t)$. چون جرم عنصر حجمی برابر $\rho S dx$ است، می‌توان برای بهره انرژی آن در واحد زمان نوشت

$$\text{بهره انرژی} = (\rho S dx) \left(c \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t} dx$$

با برابر گرفتن دو رابطه آهنگ بهره انرژی و حذف سازه مشترك $S dx$ ، بدست می‌آید

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_E}{\partial x}$$

اگر از قانون فوریه، معادله (۹.۲۴)، استفاده کنیم (همچنین اگر K رسانندگی گرمایی را ثابت بگیریم) معادله بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

(۱۰.۲۴) یا

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

با

$$a^2 = \frac{K}{\rho c} \quad (۱۱.۲۴)$$

بنابراین معادله (۱۰.۲۴) در مورد رسانش گرمایی از نوع معادله (۴.۲۴) در مورد پخش مولکولی است، ولی بجای اصل بقای تعداد مولکولها، اصل بقای انرژی را بیان می‌کند. جوابهای این معادله نیز از لحاظ ریاضی همانند جوابهای معادله (۴.۲۴) اند، منتها در اینجا بجای توزیع غلظت به توزیع دما مربوط می‌شوند. در حالت پایسا $\partial T / \partial t = 0$ است و در نتیجه داریم

$$\frac{\partial j_E}{\partial x} = 0 \quad \text{یا} \quad j_E = \text{ثابت}$$

یا به‌دیگر سخن، چگالی جریان انرژی از هر سطح مقطع جسم مقداری ثابت است. به‌عنوان مثال، فرض کنید که یک میله استوانه‌ای عایق بندی شده داریم، به گونه‌ای که از سطوح جانبی آن هیچگونه انرژی تلف نمی‌شود (شکل ۱۱.۲۴). حالت پایا ایجاد می‌کند که مقدار انرژی که در واحد زمان از طرف چپ، که در دمای بالاتری است، به‌داخل استوانه وارد می‌شود، از طرف راست، که در دمای پایین‌تری است، خارج شود. اگر $j_E = \text{const}$ باشد، از انتگرال معادله (۹.۲۴) به‌دست می‌آید

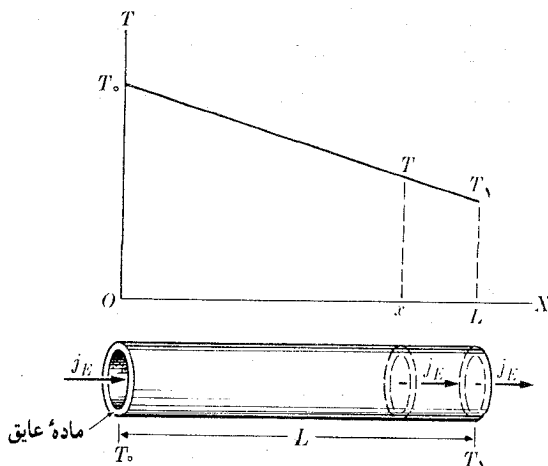
$$T = -\frac{j_E}{K}x + T_0 \quad (12.24)$$

T دما در نقطه $x = 0$ است. تابع T بر حسب x ، مطابق معادله (۱۲.۲۴)، در شکل ۱۱.۲۴ رسم شده است. معادله (۱۲.۲۴) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$j_E = K \frac{T_0 - T}{x} \quad (13.24)$$

توجه کنید که اگر به‌ازای $x = L$ ، $T = T_1$ باشد، در این صورت از معادله (۱۳.۲۴) به‌دست می‌آید

$$j_E = K \frac{T_0 - T_1}{L} \quad (14.24)$$



شکل ۱۱.۲۴ توزیع پایای دما در طول میله‌ای که از نظر گرمایی عایق بندی شده است و دو سر آن در دماهای ثابت قرار دارند.

از این رابطه چگالی جریان انرژی در طول يك میله عایق بندی شده بر حسب دماهای دوسر آن به دست می آید.

مثال ۲۰۲۴ دو دیواره از جنس مختلف به ضخامت L_1 و L_2 و رسانندگی گرمایی K_1 و K_2 باهم در تماس اند (شکل ۱۲۰۲۴). دمای سطحهای خارجی T_1 و T_2 است. در شرایط پایا دمای سطح تماس را پیدا کنید.

حل: چون شار انرژی از داخل هر دو دیواره یکی است، بنا به معادله (۱۳۰۲۴) داریم

$$j_E = \frac{K_1(T_1 - T)}{L_1} \quad \text{و} \quad j_E = \frac{K_2(T - T_2)}{L_2}$$

به گونه ای که

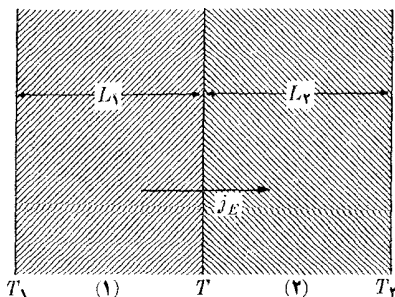
$$\frac{K_1(T_1 - T)}{L_1} = \frac{K_2(T - T_2)}{L_2}$$

یا

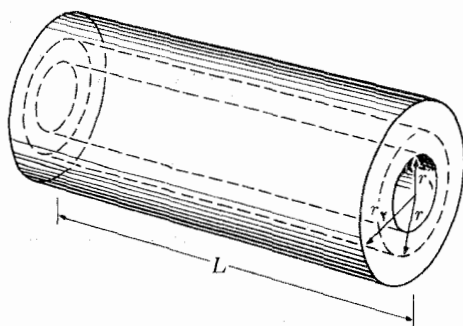
$$T = \frac{K_1 T_1 L_2 + K_2 T_2 L_1}{K_1 L_2 + K_2 L_1} \quad (15.24)$$

T دمای سطح تماس است.

مثال ۳۰۲۴ لوله ای دارای شعاع داخلی r_1 و شعاع خارجی r_2 است. دمای داخل آن T_1 و دمای خارج آن T_2 است. توزیع دما را در یک سطح مقطع قایم و نیز شارش گرما را از داخل این مقطع در واحد طول پیدا کنید (شکل ۱۳۰۲۴). فرض می کنیم که $T_1 > T_2$ است.



شکل ۱۲۰۲۴ شارش گرما از داخل دو دیواره از جنس مختلف که باهم در تماس اند.



شکل ۱۳.۲۴ شار شعاعی گرما در داخل لوله ضخیم.

حل: از قانون فوریه، معادله (۹.۲۴)، می‌توانیم شار انرژی را در هر راستایی بنویسیم. در این مسئله، لوله تقارن استوانه‌ای دارد و شار انرژی شعاعی است، بنابراین باید بنویسیم

$$j_E = -K \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

در این صورت، انرژی که از داخل هر لایه لوله به شعاع r و بنابراین به سطح $(2\pi r)L$ می‌گذرد برابر است با

$$\Phi_E = j_E \times \text{مساحت} = -2\pi L K r \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

در حالت پایا، باید این انرژی برای تمام لایه‌ها یکسان و بنابراین مستقل از r باشد. در نتیجه Φ_E ثابت است و داریم $r \partial T / \partial r = C$ که در آن C ثابت است. بنابراین به دست می‌آید $dT = C(dr/r)$ از انتگرال این رابطه داریم

$$\int_{T_1}^T dT = C \int_{r_1}^r \frac{dr}{r} \quad \text{یا} \quad T - T_1 = C \ln \frac{r}{r_1}$$

برای $T = T_2$ ، $r = r_2$ می‌شود، به گونه‌ای که

$$T_2 - T_1 = C \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \text{یا} \quad C = \frac{T_2 - T_1}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}$$

از اینجا رابطه دما در فاصله r به دست می‌آید

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (۱۶.۲۴)$$

و رابطهٔ مربوط به‌شار انرژی عبارت است از

$$\Phi_E = \frac{2\pi LK(T_1 - T_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

مثال ۴.۲۴ دما در سطح جسمی به صورت دوره‌ای تغییر می‌کند. این دما با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$T = T_0 \sin \omega t \quad (۱۷.۲۴)$$

T_0 دامنهٔ افتاخیزهای دما در سطح است. توزیع دما در داخل جسم را حساب کنید (این مسئله را بدعنوان مثال، می‌توان در تحلیل تغییرات دما در زیر سطح زمین به‌کار برد. سطح زمین افتاخیز کمابیش منظم روزانهٔ دما دارد. افتاخیز سالانه‌ای نیز بر این چرخهٔ روزانهٔ افزوده می‌شود).

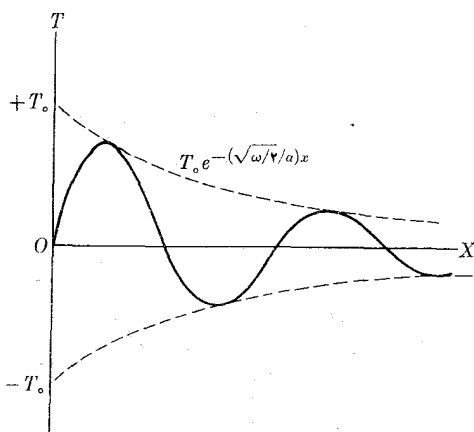
حل: شرایط در سطح جسم همانند بدنه‌وسان و داشتن انتهای یک ریسمان است که نتیجهٔ آن انتشار موجی در امتداد آن است. بنابراین ابتدا می‌توان پذیرفت که این مسئله‌جوابی به‌صورت زیر دارد

$$T = T_0 \sin(\omega t - kx) \quad (۱۸.۲۴)$$

اگر چنین جوابی درست باشد، رابطهٔ بالا نمایش «موج گرمایی» است. این رابطه در $x = 0$ به‌صورت معادلهٔ (۱۷.۲۴) درمی‌آید و بدین طریق شرایط مرزی را برآورده می‌کند. ولی، معادلهٔ (۱۸.۲۴) نمی‌تواند جوابی برای معادلهٔ انتشار (۱۵.۲۴) باشد، زیرا معادلهٔ (۱۵.۲۴) به‌ازای هر مقداری از k صادق نیست زیرا $\partial^2 T / \partial x^2 = -k^2 T_0 \sin(\omega t - kx)$ و $\partial T / \partial t = \omega T_0 \cos(\omega t - kx)$ است و معادلهٔ (۱۵.۲۴) به‌ازای هر مقدار k صادق نیست زیرا $\partial^2 T / \partial x^2 = -k^2 T_0 \sin(\omega t - kx)$ است. ولی اگر مطالعهٔ انتشارموج الکترومغناطیسی را در یک رسانا به یاد داشته باشیم (بخش ۱۲.۲۵) که در آن یک مشتق مرتبهٔ اول نسبت به‌زمان ظاهر و به تضعیف موج منجر می‌شود، می‌توانیم توقع داشته باشیم که مسئلهٔ حاضر را نیز با فرض یک جواب به‌صورت یک موج تضعیف شده توصیف کنیم. دانشجو می‌تواند با جانشانی مستقیم در معادلهٔ (۱۵.۲۴) تحقیق کند که رابطهٔ زیر

$$T = T_0 e^{-(1/\sqrt{\gamma})x} \sin\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega}}{a}x\right) \quad (۱۹.۲۴)$$

یک جواب است. این رابطه به‌ازای $x = 0$ به‌معادلهٔ (۱۷.۲۴) تحویل می‌شود و از این رو شرایط مرزی مسئله را برآورده می‌کند. در نتیجه معادلهٔ (۱۹.۲۴) یک «موج گرمایی تضعیف



شکل ۱۴.۲۴ موج گرمایی.

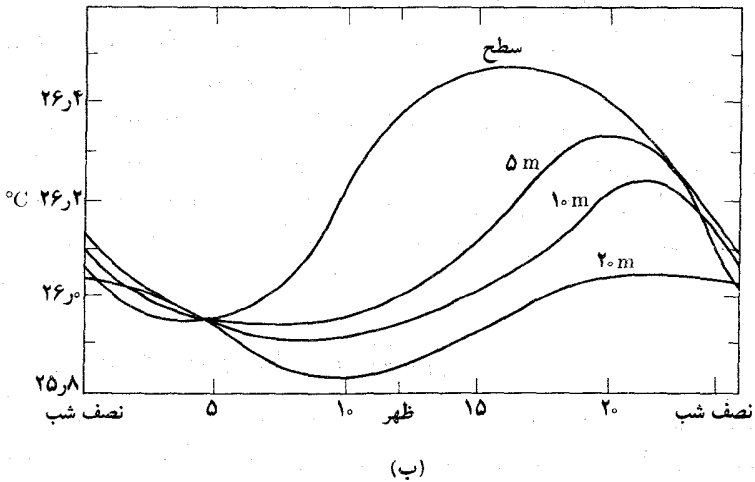
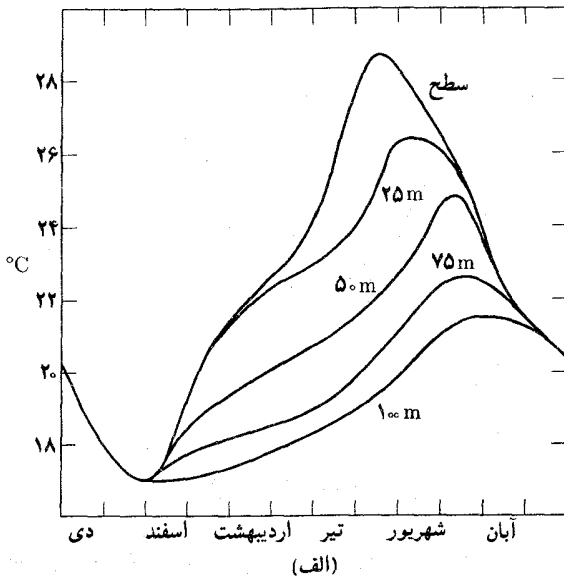
شده» را توصیف می کند، که مطابق شکل ۱۴.۲۴، در محیط منتشر می شود. با توجه به اینکه در معادله (۱۹.۲۴)، $k = \sqrt{\omega/2}/a$ است، سرعت فاز موج گرمایی برابر می شود با $v = \omega/k = a\sqrt{2\omega}$ و با افزایش بسامد نیز افزایش می یابد.

این مسئله نشان می دهد که در اعماق زمین یا در قعر اقیانوسها دما در طول سال عملاً ثابت باقی می ماند، واقعیتی که آزمایش نیز آن را ثابت می کند. تغییرات روزانه و سالانه دما در نقطه ای واقع در وسط اقیانوس اطلس در ژرفاهای گوناگون در شکل ۱۵.۲۴ الف و ب نشان داده شده است. توجه کنید که با افزایش ژرفا از دامنه موج گرما کاسته می شود و نیز تأخیر فازی در اثر سرعت انتشار محدود موج گرمایی از سطح آب به سمت داخل آن وجود دارد.

۴.۲۴ ترابری همراه با تولید و درآشامی

هنگام گفتگو درباره فرایندهای پخش در بخش ۲.۲۴ به معادله (۴.۲۴) دست یافتیم که بقای تعداد ذرات را بیان می کند. بقای تعداد ذرات ایجاب می کند که اختلاف بین شارهای ورودی و خروجی در واحد زمان از دو طرف یک جزء حجم برابر باشد با انباشت در واحد زمان در داخل این جزء حجم. وضع کلیتر هنگامی است که، افزون بر پخش محض که منشأ آن حرکت مولکولی است، فرایندهای دیگری نیز دخالت داشته باشند.

به عنوان مثال، فرض کنید که گازی همزمان با پخش در داخل گاز دیگر، در فرایند دیگری نیز، مثلاً واکنش شیمیایی شرکت می کند و بدین طریق بعضی از مولکولهای آن حالت گازی خود را از دست می دهند. در این صورت اگر بخواهیم معادله توازن را برای تعداد کل مولکولها در حجم معین بنویسیم، باید تعداد مولکولهایی را که در این فرایند



شکل ۱۵.۲۴ (الف) تغییر سالانه دما در ژرفاهای مختلف در وسط اقیانوس اطلس. (ب) تغییر روزانه در ژرفاهای مختلف در اقیانوس اطلس در طول تابستان.

اضافی حذف می‌شوند به حساب آوریم. وضع وارون این نیز ممکن است پیش بیاید، یعنی در جزء حجمی که پخش رخ می‌دهد ممکن است در اثر فرایند حاصل تعدادی مولکول تولید شود. هنگامی که تولید و درآشامی وجود دارد، رابطه توازن برای تعداد ذرات به شکل زیر است

در آشامی - تولید + بهره پخش = انبارش

تمام کمیتها در واحد زمان و واحد حجم منظور شده‌اند. انبارش با $\partial n / \partial t$ داده می‌شود. بنا به استدلالی که برای به دست آوردن معادله (۲۰.۲۴) به کار بردیم، بهره پخش برابر است با $D(\partial^2 n / \partial x^2)$. در این صورت اگر تولید را با P و درآشامی را با A نشان دهیم معادله توازن به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + P - A \quad (20.24)$$

برای حل این معادله باید در هر مورد ماهیت تولید P و درآشامی A را بشناسیم. کاربرد این معادله را در مورد نوترونها در راکتور گرما هسته‌ای نشان خواهیم داد.

راکتور هسته‌ای وسیله‌ای است که در آن نوترونها توسط شکافت (یا تقسیم) اتمهای اورانیوم، که سوخت نامیده می‌شوند، تولید می‌شوند. اتمهای اورانیوم در تمام حجم راکتور توزیع شده‌اند.

هنگامی که یک اتم اورانیوم در نتیجه گیراندازی یک نوترون به دوپاره شکافته می‌شود، نوترونهای جدیدی، که خیلی تندروترند، آزاد می‌شوند. در راکتور گرما هسته‌ای ماده دیگری بنام کندکننده اضافه می‌کنند. در بیشتر راکتورها کندکننده گرافیت یا آب است. هنگامی که نوترونهای تندرو حاصل از شکافت اورانیوم با اتمهای کندکننده برخورد می‌کنند، انرژی از دست می‌دهند (رک مثال ۱۳.۹) و بالاخره به حالت ترازمندی انرژی با اتمهای کندکننده می‌رسند. در این صورت این نوترونها را نوترونهای کند یا نوترونهای گرمایی می‌نامند. از این نوترونها برای تولید شکافتهای جدید در اتمهای اورانیوم استفاده می‌شود. نوترونهای گرمایی در داخل راکتور سرگردان یا پخش می‌شوند تا اینکه توسط اتمهای مواد مختلف سازنده راکتور، بویژه سوخت اورانیوم درآشامیده (یا گیرانداخته) می‌شوند و یا از طریق دیوارهای راکتور فرامی‌کنند. از این رو، راکتور گرما هسته‌ای که با فرایند پخش نوترونها عمل می‌کند با تولید و درآشامی همراه است.

در یک راکتور همگن سوخت اورانیوم و کندکننده در داخل حجم راکتور به‌طور یکنواخت به هم آمیخته‌اند. در این حالت می‌توان ثابت کرد که $P - A$ یعنی اختلاف بین تولید و درآشامی با n متناسب است؛ یعنی $P - A = Cn$. که در آن C ثابت است و به پارامترهای درگیر در طرح راکتور بستگی دارد. بنابراین معادله (۲۰.۲۴) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + Cn \quad (21.24)$$

در حالت پایا $\partial n / \partial t = 0$ است و معادله (۲۱.۲۴) به صورت زیر درمی‌آید

$$D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + Cn = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + B^2 n = 0 \quad (22.24)$$

$B^2 = C/D$ کمافش نام دارد. پاسخ معادله (۲۲.۲۴) به صورت زیر است.

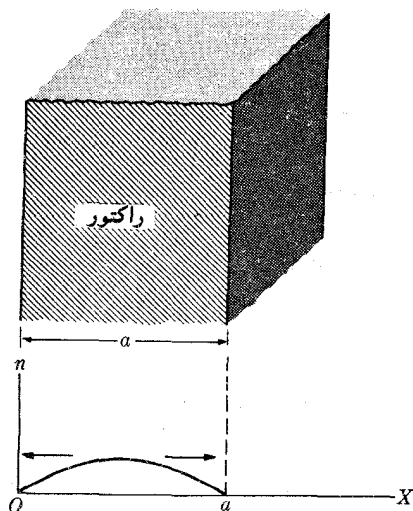
$$n = n_0 \sin Bx + n_1 \cos Bx \quad (23.24)$$

چنانکه می‌توان از جانشانی مستقیم ثابت کرد، n_0 و n_1 ثابت اند و از شرایط مرزی تعیین می‌شوند.

اگر راکتور به شکل بره‌ای به ضخامت a باشد، شهود فیزیکی حکم می‌کند که بگوییم، هر چند نوترون‌ها در داخل تمام حجم تولید می‌شوند، اما از طریق دو سطح محدودکننده بره فرار می‌کنند. در نتیجه چگالی نوترون‌ها در مرکز بره بیشینه و با نزدیک شدن به دیواره‌های آن کاهش می‌یابد، و مطابق شکل ۱۶.۲۴ دوجریان پخش به وجود می‌آید. در این صورت انتظار می‌رود که به ازای $x = a$ و $x = 0$ داشته باشیم $n = 0$. با قرار دادن $x = 0$ در معادله (۲۳.۲۴) به دست می‌آید $n_1 = 0$ ؛ بنا بر این معادله (۲۳.۲۴) به صورت $n = n_0 \sin Bx$ درمی‌آید. با قرار دادن $x = a$ به دست می‌آید $\sin Ba = 0$ یا $Ba = \pi$ (بزرگ عدد درست). ولی n نمی‌تواند منفی باشد زیرا نماینده تعداد نوترون‌ها در واحد حجم است. بالاخره به این نتیجه می‌رسیم که تنها جواب ممکن در حالت پایا عبارت است از $Ba = \pi$ ، در این صورت برای کمافش به دست می‌آید

$$B = \frac{\pi}{a} \quad (24.24)$$

این معادله رابطه‌ای بین اندازه بره راکتور و تولید و درآشامی نوترون‌ها برقرار می‌کند،



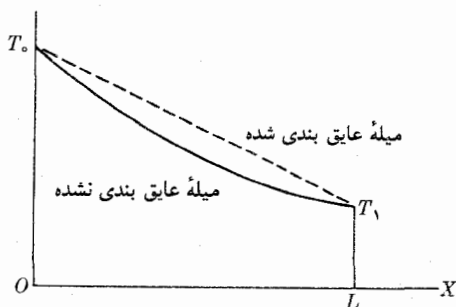
شکل ۱۶.۲۴ توزیع نوترون‌ها در داخل راکتور هسته‌ای.

که با B مشخص می‌شود. از این‌رو، این معادله را طراحان راکتور برای تعیین ترکیب درست راکتور جهت تأمین کار آن در شرایط پایا به‌کار می‌برند. بسرای راکتورهای با اشکال هندسی دیگر نتایج متناظری به‌دست می‌آید.

در رسانش گرمایی نیز هرگاه چشمه‌های انرژی در داخل حجم جسم توزیع شده باشند یا اتلاف انرژی بتواند در سطح جسم روی دهد و وضع همانندی ممکن است پیش بیاید. به‌عنوان مثال، توزیع دما را در شرایط حالت پایا برای میله‌ای که سطح بیرونی آن عایق گرمایی نیست در نظر می‌گیریم، به‌گونه‌ای که انرژی به‌صورت گرما از بدنه میله بد محیط خارج داده می‌شود. آنگاه اتلاف انرژی متناسب است با مساحت سطح میله و می‌توان آن را متناسب با اختلاف دمای بین میله و محیط اطراف آن در نظر گرفت؛ این تناسب تا هنگامی برقرار است که اختلاف دما خیلی زیاد نباشد. این رابطه را قانون سردشدن نیوتون می‌نامند. اعتبار این قانون تقریبی است. اگر دمای محیط خارج را صفر بگیریم، اتلاف انرژی در هر نقطه از سطح با T متناسب است. حتی اگر تمام سطح میله را با ماده عایقی بپوشانند، باز هم مقداری گرما از طریق سطح تلف می‌شود. زیرا عایق کامل وجود ندارد و نتیجه مثال ۳.۲۴ نشان می‌دهد که اتلاف انرژی به اختلاف دمای بین سطح خارجی و داخلی عایق نیز بستگی دارد. نتیجه اتلاف سطحی این است که در حالت پایا، چنانکه شکل ۱۷.۲۴ نشان می‌دهد، دما به‌طور نمایی در طول میله کاهش می‌یابد و مانند میله عایق بندی شده تغییر آن خطی نیست.

۵.۲۴ وشکسانی

چنانکه در ابتدای این فصل گفتیم، پدیده ترابری سوئی نیز وجود دارد که در گازها (و به‌طور کلی در شاره‌ها) رخ می‌دهد. این پدیده که وشکسانی نام دارد، هم به‌بخش مولکولی و هم به‌رسانش گرمایی عمیقاً وابسته است. در بخش ۱۰.۷، هنگام مطالعه حرکت جسم در داخل یک شاره، ضریب وشکسانی را معرفی کردیم، ولی آن را به‌طور دقیق تعریف نکردیم.



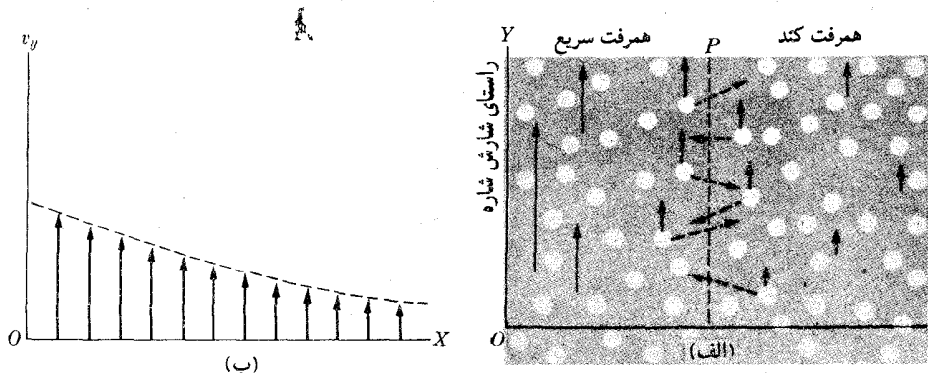
شکل ۱۷.۲۴ توزیع دما در امتداد میله‌ای که از نظر گرمایی متزوی نیست و دوسر آن در دماهای ثابت نگه‌داشته شده‌اند.

شاره‌ای را در نظر بگیرید که در آن علاوه بر اغتشاش گرمایی مولکولها يك حرکت کلی ماده یا يك جریان همرفت برای کل شاره وجود دارد. جریان هوا در آهنگری یا جریان آب در داخل جویبار یا اوله‌را می‌توان به‌عنوان مثال ذکر کرد. فرض کنید که شاره مطابق شکل ۱۸.۲۴ حرکت می‌کند، که در آن v_y سرعت همرفت در راستای محور Y است و لی مقدار آن تابعی از فاصله روی محور X است. صفحه P را عمود بر محور X و در نتیجه موازی راستای همرفتی شاره در نظر می‌گیریم. اما، مولکولها تنها در راستای موازی محور Y حرکت نمی‌کنند زیرا دارای حرکت گرمایی اند و بایکدیگر برخورد می‌کنند. در نتیجه مولکولها به‌طور دایم از صفحه P می‌گذرند، خواه از چپ به سمت راست و خواه از راست به سمت چپ. هر مولکول دارای يك اندازه حرکت همرفتی (موازی با محور Y) است. در وضع شکل ۱۸.۲۴، مولکولهایی که از چپ به سمت راست می‌گذرند نسبت به مولکولهایی که از راست به سمت چپ حرکت می‌کنند اندازه حرکت بیشتری انتقال می‌دهند. این اختلاف در اندازه حرکت موجب می‌شود که اندازه حرکت همرفتی به سمت راست صفحه P افزایش و به سمت چپ صفحه P کاهش پیدا کند.

j_p چگالی جریان اندازه حرکت، عبارت است از اندازه حرکت همرفتی (موازی محور Y) که در واحد زمان از داخل صفحه‌ای به مساحت واحد انتقال پیدا می‌کند. این صفحه عمود بر راستایی است که در آن سرعت همرفتی تغییر می‌کند، و در مثال بالا محور X است. آزمایش نشان می‌دهد که j_p متناسب است با تغییر سرعت همرفتی v_y در واحد طول در امتداد محور X ، یعنی گرادیان سرعت همرفتی (dv_y/dx) . بنا بر این می‌توان رابطه زیر را نوشت

$$j_p = -\eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad (25.24)$$

که خیلی شبیه به قانون فیک در مورد پخش و قانون فوریه در باره رسانش گرمایی است. علامت منفی در معادله (۲۵.۲۴) از آنجا ناشی می‌شود که انتقال اندازه حرکت در راستایی

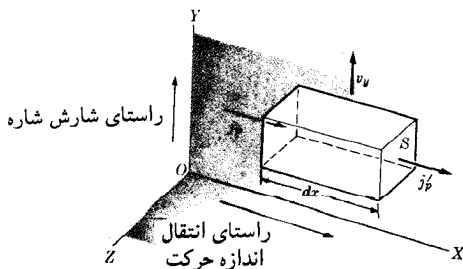


شکل ۱۸.۲۴ حالت شاره‌ای که در آن حرکت کلی ماده به اغتشاش گرمایی مولکولها افزوده شده است.

صورت می گیرد که در آن سرعت همرفت کاهش می یابد. سازهٔ تنامب η ضریب وشکسانی شماره است. توجه کنید که j_p بر حسب $(mks^{-1})m^{-2}s^{-1}$ یا $m^{-2}kgs^{-1}$ و $\partial v_y / \partial x$ بر حسب s^{-1} بیان می شوند. در این صورت ضریب وشکسانی بر حسب $m^{-1}kgs^{-1}$ بیان می شود، یک دهم این یکا پواژ نام دارد و علامت اختصاری آن P است (رک جدول ۲۰۷). این مسئله را می توان از زاویه دیگری نیز نگاه کرد. چون، در توضیح ما، شاره سمت راست صفحه P اندازه حرکت همرفتی (موازی با محور Y) کسب می کند ولی شاره سمت چپ صفحه P اندازه حرکت همرفتی ازدست می دهد، می توان گفت که به این شاره درست راست P نیرویی موازی با راستای شارش و درست سمت چپ صفحه P نیرویی برابر ولی درسوی مخالف بر آن وارد می شود. مقدار این نیرو بر واحد سطح را تنش برشی می نامند و با τ نشان می دهند. چون نیرو برابر است با مشتق اندازه حرکت نسبت به زمان، از آنجا نتیجه می گیریم که $\tau = j_p$ است. می توان در این رابطه سازگاری یکها را مشاهده کرد، زیرا τ (که نیرو بر واحد سطح است) بر حسب Nm^{-2} یا $m^{-2}kgs^{-2}$ بیان می شود، که درست همان یکایی است که قبلا برای j_p به دست آوردیم. بنا بر این معادله (۲۵.۲۴) را می توان به صورت $\tau = \eta(\partial v_y / \partial x)$ نوشت.

اکنون اصل بقای اندازه حرکت را در مورد شاره به کار می بریم. جزء حجمی به طول dx و سطح مقطع قایم S را در نظر می گیریم (شکل ۱۹.۲۴). سرعت همرفت جزء حجم v_y است. مولکولهایی که از سمت چپ به داخل جزء حجم نفوذ می کنند افزایش در اندازه حرکت در واحد زمان (به نام شار اندازه حرکت ورودی) موازی محور X و برابر $j_p S$ موجب می شوند. مولکولهایی که از سمت راست خارج می شوند اتلافی در اندازه حرکت در واحد زمان (به نام شار اندازه حرکت خروجی) موازی محور X و برابر $j'_p S$ موجب می شوند. از این رو بهره خالص اندازه حرکت در واحد زمان در داخل جزء حجم به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \text{شار خروجی} - \text{شار ورودی} &= \text{آهنگ بهره اندازه حرکت} \\ &= j_p S - j'_p S = -(j'_p - j_p) S \\ &= -\frac{\partial j_p}{\partial x} S dx \end{aligned}$$



شکل ۱۹.۲۴ انتقال اندازه حرکت از داخل جزء حجم.

اگر اندازه حرکت همرفتی در واحد حجم شاره را با p_y نشان دهیم، بهره اندازه حرکت شاره موجود در داخل جزء حجم، در واحد زمان، به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\text{آهنگ بهره اندازه حرکت} = \frac{\partial p_y}{\partial t} S dx$$

بنابراین با مساوی قرار دادن دو نتیجه و حذف سازه مشترک $S dx$ به دست می‌آید

$$\frac{\partial p_y}{\partial t} = - \frac{\partial J_p}{\partial x}$$

توجه کنید که سمت چپ این معادله نیروی وارد بر واحد حجم را نشان می‌دهد و بنابراین سمت راست را می‌توان نیروی وشکسانی مؤثر وارد بر واحد حجم شاره نامید. ممکن است نیروهای دیگری نیز در امتداد محور Y بر شاره اثر کنند. به عنوان مثال، شاره‌ای که در يك کانال یا لوله‌ای مورب حرکت می‌کند تحت تأثیر وزن خود نیز هست. این نیروی اضافی وارد بر واحد حجم را با f نشان می‌دهیم. از این رو f نشان‌دهنده بهره اندازه حرکت اضافی در واحد حجم و در واحد زمان است و معادله بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{\partial p_y}{\partial t} = - \frac{\partial J_p}{\partial x} + f$$

از ترکیب این نتیجه با معادله (۲۵.۲۴) و با در نظر گرفتن اینکه $p = \rho v_y$ است، ρ چگالی شاره است، داریم

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} f \quad (۲۶.۲۴)$$

این رابطه معادله حرکت شاره وشکسان است و بقای اندازه حرکت شاره را بیان می‌کند. اگر f/ρ که نقش $P-A$ را در معادله (۲۵.۲۴) بازی می‌کند به این معادله اضافه کنیم درمی‌یابیم که این رابطه همانند معادله (۲۰.۲۴) است. f/ρ را می‌توان به عنوان افزایش (یا کاهش) اندازه حرکت در واحد زمان و واحد جرم (یعنی به عنوان تولید یا درآشامی اندازه حرکت) ناشی از اثرهای خارجی وارد بر شاره تعبیر کرد. در نبودن نیروهای خارجی، معادله (۲۶.۲۴) به صورت زیر تحویل می‌شود

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

کسه مشابه معادله بخش (۴.۲۴) است و در آن تنها η/ρ جایگزین D و v_y جایگزین n شده‌اند. لازم به تذکر است که معادله (۲۶.۲۴) تنها در مورد شاره‌های تراکم ناپذیر و با سرعت همرفتی کم معتبر است؛ برای شاره‌هایی که از این شرایط پیروی نمی‌کنند، جمله‌های

دیگری باید به این معادله افزوده شوند.

مثال ۵۰۲۴ توزیع سرعتها را در یک شاره و شكسان که بین دو صفحه موازی، مانند کانال، حرکت می کند تعیین کنید. نیروی وارد بر واحد حجم را ثابت و شرایط را پایا فرض کنید.

حل: چون شرایط پایا است بنابراین $\partial v_y / \partial t = 0$ و معادله (۲۶.۲۴) به صورت زیر درمی آید

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = -\frac{f}{\eta}$$

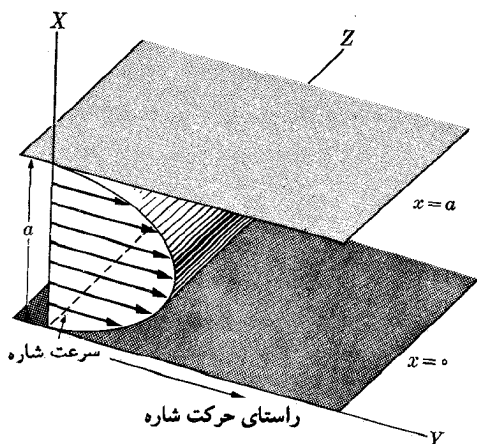
چون در این مسئله f/η ثابت است از انتگرال آن نسبت به x داریم

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{f}{\eta} x + c_1$$

c_1 ثابت انتگرال است. از انتگرال گیری مجدد آن داریم

$$v_y = -\frac{f}{2\eta} x^2 + c_1 x + c_2$$

برای تعیین ثابتهای انتگرال c_1 و c_2 باید از شرایط مرزی استفاده کنیم. چون یک شاره و شكسان می کوشد به بدنه بچسبد، شاره در تماس با این دو جدار باید سرعتش خیلی کم باشد، که آن را صفر می گیریم. از این رو، مطابق شکل ۲۵.۲۴، به عنوان شرایط مرزی



شکل ۲۵.۲۴ توزیع سرعتها در جریان یک شاره و شكسان بین دو صفحه موازی.

به ازای $x=0$ و $x=a$ باید داشته باشیم $v_y = 0$. از این شرایط به دست می‌آید

$$c_1 = fa/2\eta \quad \text{و} \quad c_2 = 0. \quad \text{بالاخره}$$

$$v_y = \frac{f}{2\eta} (ax - x^2)$$

از این رابطه سرعت همرفتی شاره بر حسب فاصله از صفحه $x=0$ به دست می‌آید، و همچنانکه شکل نشان می‌دهد، به صورت سهمی است. در صفحه میانی سرعت بیشینه است. اگر شاره در راستای قائم حرکت کند، f را می‌توان وزن واحد حجم شاره، یعنی ρg در نظر گرفت. هنگامی که شاره بین دو صفحه افقی حرکت می‌کند، نیروی f از اعمال گرادیان فشار در امتداد راستای حرکت به وجود می‌آید. در این حالت، بسا توجه به بخش ۱۴۰۹ داریم

$$f = -\partial p / \partial x$$

اگر p_1 و p_2 فشار دو نقطه به فاصله l از یکدیگر باشند داریم

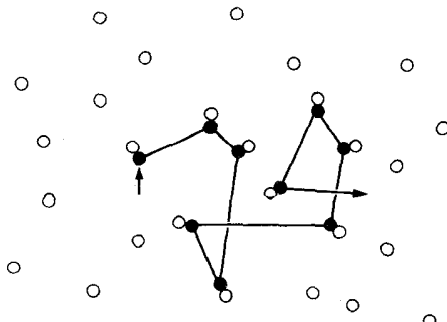
$$f = (p_1 - p_2) / l$$

$$v_y = \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} (ax - x^2)$$

۶.۲۴ مسافت آزاد میانگین، بسامد و مقطع برخورد

اکنون مفاهیمی را مورد بحث قرار می‌دهیم که در توصیف پدیده‌های ترابری گازها از دیدگاه مولکولی اهمیت دارند. چون مولکولهای گاز در حرکت دائم اند، خیلی زیاد باهم برخورد می‌کنند و مسیر آنها به صورت زیگززاگ در می‌آید (شکل ۲۴-۲۱). برای توصیف حرکت این مولکولها سه مفهوم مفید زیر لازم اند، مسافت آزاد میانگین، بسامد برخورد و مقطع برخورد.

مسافت آزاد میانگین، l ، فاصله میانگینی است که یک مولکول بین دو برخورد می‌پیماید. این فاصله را می‌توان برای یک مولکول در مدت زمان طولانی و با پیدا کردن طول متوسط مسافتهای بین برخوردهای پیاپی حساب کرد. همچنین، در یک لحظه معین، می‌توان



شکل ۲۴-۲۱ مسافت آزاد میانگین مولکول.

این فاصله را با تعقیب تعداد زیادی مولکول که يك برخورد را پشت سر می گذارند و پیدا کردن فاصله میانگینی که این مولکولها تا برخورد بعدی می پیمایند نیز حساب کرد. از دیدگاه آماری این دو روش هم ارزند.

بسامد برخورد، Γ ، تعداد برخوردهایی است که يك مولکول در هر ثانیه دارد. مسافت آزاد میانگین و بسامد برخورد به شدت بهم وابسته اند، زیرا اگر v_{ave} سرعت میانگین يك مولکول باشد، طول زمان میانگین بین دو برخورد برابر است با $t = l/v_{ave}$ و تعداد برخوردها در يك ثانیه برابر است با $1/t$ یا

$$\Gamma = \frac{v_{ave}}{l} \quad (27.24)$$

بسامد برخورد را بر حسب s^{-1} بیان می کنند. بدیهی است که اگر N مولکول در حجم معلومی وجود داشته باشد، تعداد کل برخوردهای تمام مولکولها در داخل حجم برابر است با $N\Gamma$.

مفهوم مفید دیگر Σ مقطع برخورد ماکروسکوپی است که با تعداد برخوردهای يك مولکول در واحد طول تعریف و با رابطه زیر نوشته می شود

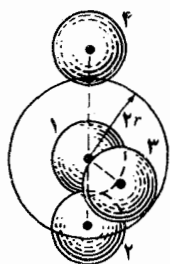
$$\Sigma = \frac{1}{l} \quad (28.24)$$

مقطع برخورد بر حسب m^{-1} بیان می شود.

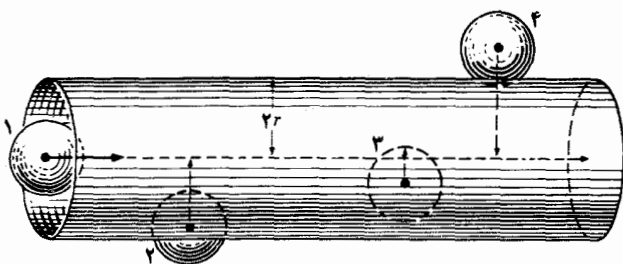
مسافت آزاد میانگین l به صورت زیر به ابعاد مولکول مربوط می شود: تعداد مولکولهای موجود در واحد حجم را با n و «شعاع» هر مولکول را با r نشان می دهیم. منظور از «شعاع» این نیست که تمام مولکولها کروی اند، با وجود این، به سبب حرکت چرخشی تندشان، در واقع همانند کره عمل می کنند. اگر از نیروهای بین مولکولی چشم پوشیم و بپذیریم که مولکولها چون گویهای بیلیارد رفتار می کنند، شرط اینکه دو مولکول با هم برخورد کنند این است که تصویر خط فاصل بین مرکزهای آنها روی صفحه عمود بر راستای حرکت نسبی آنها، کمتر از $2r$ باشد (شکل ۲۳.۲۴). در این صورت اگر فرض کنیم که مولکول ۱ به سمت راست حرکت کند، ناحیه مؤثر اطراف مولکول ۱ که در داخل آن باید مرکز مولکول دیگر قرار بگیرد تا برخورد رخ دهد استوانه ای به شعاع $2r$ است. اگر فاصله بین دو مرکز کمتر از $2r$ باشد، مانند مولکولهای ۲ و ۳، برخورد رخ می دهد. اگر این فاصله بزرگتر از $2r$ باشد، مانند حالت مولکول ۴، هیچگونه برخوردی صورت نمی گیرد.

اکنون بره ای به ضخامت dx و سطح S را در نظر می گیریم (شکل ۲۳.۲۴). تعداد کل مولکولهای گاز در داخل این بره برابر است با $nSdx$. هر مولکول مساحت معینی به شعاع $2r$ را می پوشاند، یعنی مانع عبور آزاد مولکولی مانند M می شود. چنین مساحتی با رابطه زیر داده می شود

$$\sigma = \pi(2r)^2 = 4\pi r^2 \quad (29.24)$$

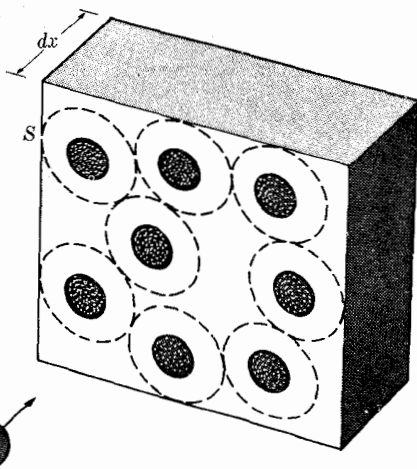


(ب)



(الف)

شکل ۲۲-۲۴ حجم استوانه برخورد که یک مولکول جاروب می‌کند. مولکولهایی که مرکز آنها در داخل استوانه باشد با مولکول ۱ برخورد می‌کنند. (الف) دید از پهلو (ب) دید از رویه و منهای حجم.



شکل ۲۳-۲۴

و آنرا مقطع برخورد میکروسکوپی می‌نامند. سطح کل مستور توسط تمام مولکولهای بره (فرض می‌کنیم که برهم‌نهی وجود ندارد. این فرض تا هنگامی که غلظت خیلی زیاد نباشد و dx خیلی کوچک باشد، درست است) برابر است با $(nS dx)\sigma$. آنگاه احتمال اینکه M هنگام عبور از داخل بره برخوردی داشته باشد عبارت است از

$$\frac{(nS dx)\sigma}{S} = n\sigma dx$$

از این رو تعداد برخوردهای M در طول واحد برابر است با $n\sigma$. این همان است که قبلاً به عنوان مقطع برخورد میکروسکوپی تعریف کردیم. بنابراین داریم

$$\Sigma = n\sigma \quad (30.24)$$

و مسافت آزاد میانگین مولکول عبارت است از

$$l = \frac{1}{\Sigma} = \frac{1}{n\sigma} \quad (31.24)$$

اینکه مسافت آزاد میانگین l به شعاع مولکول وابسته است امکان برآورد ابعاد مولکولی را از روی اندازه گیری l فراهم می کند.

هنگامی که نیروهای بین مولکولی را به حساب آوریم، همان طور که در مثال ۱۶۰۷ در مورد پراکندگی در اثر نیروی عکس مجذوری گفتیم، این مولکولها حتی اگر فاصله آنها بیشتر از قطرشان باشد، راستایشان تغییر می کند و پراکندگی یا «بسر خورد» رخ می دهد. در این حالت کلی تر نیز σ بامعادله های (۳۰.۲۴) و (۳۱.۲۴)، که در واقع تعریفهای Σ و l اند، به Σ و l مربوط می شود، ولی معادله (۲۹.۲۴) را دیگر نمی توان به کار برد.

توجه کنید که معادله (۳۱.۲۴) تازمانی درست است که مولکولهای بره شکل ۲۳.۲۴ را بی حرکت در نظر بگیریم. ولی، اگر این مولکولها در حرکت باشند، مانند مورد گاز، احتمال برخورد بزرگتر و، بنابراین مسافت آزاد میانگین کوچکتر می شود. به عنوان مثال، رابطه ای که در آن توزیع سرعتها در داخل گاز منظور شده عبارت است از

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$$

σ از معادله (۲۹.۲۴) به دست می آید. این رابطه هم ارز معادله $\Sigma = \sqrt{2}n\sigma$ است، بنا بر این می توان گفت مقطع برخورد مؤثر حقیقی يك مولکول به جای σ ، $\sigma\sqrt{2}$ است.

مفهومهای مقطع مؤثر و مساحت آزاد میانگین را می توان به فرایندهای دیگری غیر از برخورد نیز، مثلا در آشامی و گیراندازی، تعمیم داد. به عنوان مثال، اگر مولکولی در جریان پخش توسط مولکول دیگری گیر بیفتد، l_a مسافت آزاد میانگین در آشامی، فاصله میانگینی را به دست می دهد که يك مولکول قبل از گیر افتادن (یا در آشامیده شدن) می پیماید. همچنین مقطع ماکروسکوپیك در آشامی Σ_a با رابطه

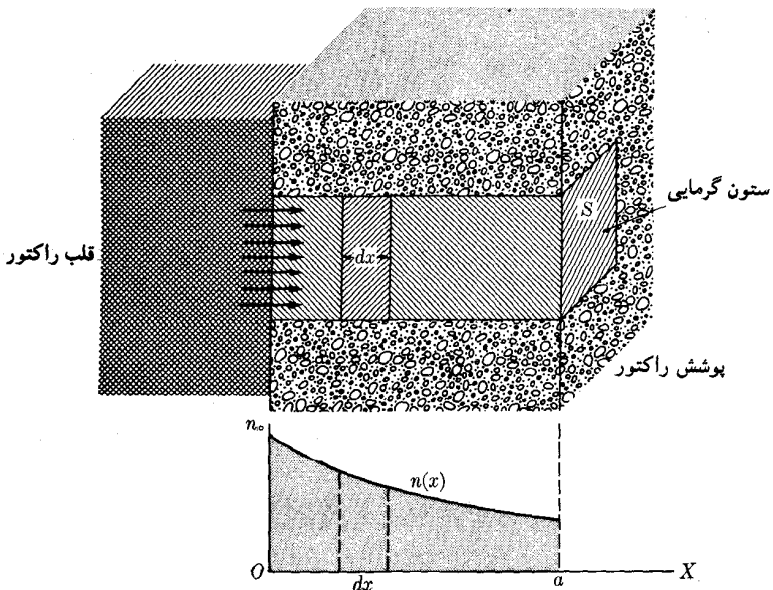
$$\Sigma_a = \frac{1}{l_a}$$

تعریف می شود که عبارت است از احتمال در آشامیده شدن مولکول در واحد طول.

مثال ۶۰۲۴ پخش نوترونها را در يك محیط نساتکثیری، مانند آب یا گرافیت، که در آن نوترونها در آشامیده می شوند نه تولید، مورد بحث قرار دهید. به عنوان مثال، ستون گرمایی را اکتور هسته ای، چنین وضعی دارد. این ستون جرمی از آب یا گرافیت است که در همسایگی یکی از پهلوهای را اکتور قرار دارد. نوترونهای تولید شده در داخل را اکتور

را می‌توان در داخل این ستون پخش کرد و از آنها در آزمایشهای بسیار زیادی استفاده کرد. این ستون را از این نظر گرمایی می‌گویند که نوترونهايي که از آنجا خارج می‌شوند با اتمهای سازنده ستون در تعادل دمایی اند.

حل: دستگاه فیزیکی مربوط در شکل ۲۴.۲۴ نشان داده شده است. نوترونها هنگام خروج از هسته یا قلب راکتور، از سمت چپ به داخل ستون گرمایی نفوذ می‌کنند و در آنجا پخش می‌شوند. در جریان فرایند پخش، نوترونها با اتمهای سازنده ستون برخورد می‌کنند. در بعضی موارد برخورد به گیراندازی نوترون توسط اتمهای ماده منجر می‌شود. مسافت آزاد میانگین در آشامی، یعنی مسافت میانگینی را که يك نوترون قبل از گیرافتادن می‌پیماید، با l_a نشان می‌دهیم. مقطع ماکروسکوپیك در آشامی ماده عبارت است از $\Sigma_a = 1/l_a$. برای نوترونهاي گرمایی، Σ_a در آب در حدود 22 m^{-1} و در گرافیت برابر 37 m^{-1} است. این عددها نشان می‌دهند که آب نوترونهاي کند را خیلی راحتتر از گرافیت گیر می‌اندازد. اکنون بسره‌ای به ضخامت dx و سطح مقطع S ، مطابق شکل ۲۴.۲۴، را در نظر می‌گیریم. تعداد کل نوترونهاي داخل این بره برابر است با $nS dx$. کل مسافتی که این نوترونها در واحد زمان می‌پیمایند برابر با $(nS dx)v_{ave}$ است. سرعت میانگین نوترونهاست. بنابراین تعداد کل نوترونهايی که در واحد زمان توسط ماده در آشامیده می‌شوند برابر می‌شود با $\Sigma_a (nS dx)v_{ave}$ و یا در واحد حجم برابر است با $n \Sigma_a v_{ave}$.



شکل ۲۴.۲۴ غلظت نوترونها در امتداد ستون گرمایی يك راکتور.

از این رو، معادله (۲۰.۲۴) با حذف سازه مربوط به تولید و نکه داشتن سازه در آشامی به صورت زیر درمی آید

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - v_{ave} \Sigma_a n$$

در شرایط پایا $\partial n / \partial t = 0$ است و داریم

$$D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - v_{ave} \Sigma_a n = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \alpha^2 n = 0$$

در رابطه بالا $\alpha^2 = v_{ave} \Sigma_a / D$ است. جواب این معادله دیفرانسیلی برابر است با

$$n = n_0 e^{-\alpha x} + n_1 e^{\alpha x}$$

n_0 و n_1 از شرایط مرزی دو سر ستون گرمایی تعیین می شوند. چون برای نوترونهای گرمایی D/v_{ave} در آب و گرافیت بترتیب 0.05084 m و 0.05092 m است، α برای آب برابر 51.18 m^{-1} و برای گرافیت برابر 20055 m^{-1} می شود. گاهی از $L = 1/\alpha$ ، به نام طول پخش، یاد می کنند. بنا بر این مقادیر L برای نوترونهای گرمایی در آب برابر $1.95 \times 10^{-2} \text{ m}$ و در گرافیت برابر 0.050 m است. اگر ستون گرمایی خیلی درازتر از L باشد، برای x های خیلی بزرگ n برابر صفر می شود. این امر ایجاب می کند که $n_1 = 0$ و $n = n_0 e^{-\alpha x}$ باشد، که به فروافت (میرایی) نمایی تعداد نوترونها هنگام حرکت در طول ستون منجر می شود. در این صورت طول پخش، $L = 1/\alpha$ ، برابر با فاصله ای است که در انتهای آن تعداد نوترونها به $1/e$ یا به 36% تعداد اولیه کاهش می یابد.

۲۰.۲۴ نظریه مولکولی پدیده‌های ترابری

در قسمت اول این فصل، پدیده‌های ترابری را از دیدگاه کلی یا ماکروسکوپیک مطالعه کردیم، بدون اینکه به رفتار مولکولایی که علت این پدیده‌هاست توجهی کرده باشیم. در آن قسمت برای پخش از قانون فیک

$$j = -D \frac{\partial n}{\partial x} \quad (32.24)$$

برای رسانش گرمایی از قانون فوریه

$$j_E = -K \frac{\partial T}{\partial x} \quad (33.24)$$

و قانون شارش و شکان

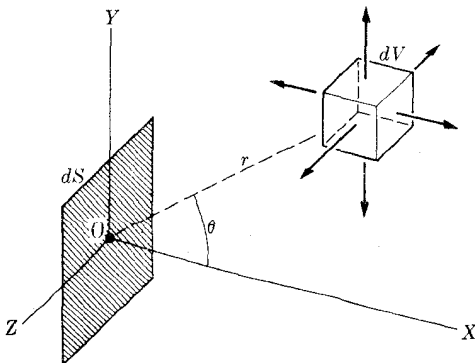
$$j_p = -\eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad (34.24)$$

استفاده کردیم. تمام این قوانین پایه تجربی دارند و در شرایط مرزی اشاره شده در هر مورد معتبرند. اکنون می‌خواهیم کمیتهای D ، K و η را با خواص مولکولی مربوط کنیم. گفتگوی ما منحصر به گازهاست.

چنانکه قبلاً گفتیم، سه فرایند ترابری را که مطالعه کردیم همگی از اغتشاش مولکولی ناشی می‌شوند. پخش مولکولی از انتقال مولکولها از ناحیه‌ای که غلظت مولکولی بیشتر است به ناحیه‌ای که دارای غلظت کمتری است به وجود می‌آید. رسانش گرمایی از انتقال انرژی از ناحیه‌ای که در آن مولکولها تندتر حرکت می‌کنند، و بنا بر این دما بسالاست، به ناحیه‌ای که مولکولها کندترند و بنا بر این دما پایین است ناشی می‌شود. همچنین، وشکسانی ناشی از انتقال اندازه حرکت وابسته به حرکت همرفتی از ناحیه با حرکت همرفتی تندتر به ناحیه با حرکت همرفتی کندتر است.

گام بعدی به دست آوردن این قوانین بر حسب مدل مولکولی است. شرح اثبات این مرحله یکی از آموزنده‌ترین استدلالهای به کار رفته در فیزیک است. با وجود این از نظر ریاضی بسیار پیچیده است و ما در اینجا تنها به توضیح روش آن می‌پردازیم. منطق به کار رفته در این استدلال به شرح زیر است؛ ابتدا پدیده پخش را در نظر می‌گیریم. با توجه به شکل ۲۵.۲۴، مسئله عبارت است از به دست آوردن تعداد کل مولکولهایی که از سطح dS (در واحد زمان) می‌گذرند. dS بر راستای پخش، که در اینجا محور X است، عمود است.

در این صورت حجم dV را به فاصله r از dS در نظر می‌گیریم. تعداد مولکولهایی که در داخل این حجم وجود دارند برابر ndV و تعداد برخوردهایی که این مولکولها در واحد زمان می‌کنند برابر ΓndV است. تعداد معینی از این مولکولها بعد از برخورد به سمت dS می‌روند. ولی همه آنها به dS نمی‌رسند زیرا ممکن است با انجام برخوردهای دیگری راهشان عوض شود. از این رو، بسايد تعیین کنیم که چند تا از این مولکولها،



شکل ۲۵.۲۴

بعد از برخورد در داخل حجم dV در واحد زمان، از سطح dS می‌گذرند. براینده جریان مولکولها از داخل سطح dS از انتگرال روی تمام فضا، (برای اینکه تمام نواحی ماده به حساب آورده شود)، به دست می‌آید. بدیهی است، برای اینکه جریان براینده وجود داشته باشد، باید n به گونه‌ای با x تغییر کند که تعداد ذراتی که از سمت راست می‌آیند و از dS می‌گذرند با تعداد ذراتی که از سمت چپ می‌آیند و از dS می‌گذرند برابر نباشد. زیرا در غیر این صورت تقارن ایجاب می‌کند که جریان براینده برابر صفر باشد. بنا بر این رابطه به دست آمده از چگالی جریانی از داخل dS را با قانون فیک برای پخشیه که با معادله (۳۲.۲۴) داده می‌شود با هم مقایسه می‌کنیم. در این صورت از این نتیجه می‌توان مقدار ضریب پخش D را بر حسب ثابتهای مولکولی به دست آورد. در مورد رسانش گرمایی باید انرژی انتقال یافته توسط هر مولکول را از داخل dS به حساب آورد. برای وشکسانی باید اندازه حرکت همرفتی توسط هر مولکول را محاسبه کرد. نتیجه تمام این محاسبات نشان می‌دهد که ضریب پخش مولکولی با رابطه زیر به دینامیک مولکولی مربوط می‌شود

$$D = \frac{1}{3} v_{ave} l \quad (35.24)$$

در این رابطه v_{ave} سرعت میانگین و l مسافت آزاد میانگین مولکولهاست. رابطه زیر ضریب رسانش گرمایی را بیان می‌کند

$$K = \left(\frac{3}{4} kn\right) D = \frac{1}{4} nk v_{ave} l \quad (36.24)$$

بالاخره ضریب وشکسانی با رابطه

$$\eta = D(nm) = \frac{1}{3} nm v_{ave} l \quad (37.24)$$

داده می‌شود. رابطه‌های (۳۵.۲۴) و (۳۶.۲۴) و (۳۷.۲۴) ارتباط بسیار نزدیک میان سه پدیده ترابری را نشان می‌دهند.

نظریه پدیده‌های ترابری را که در بالا توضیح دادیم می‌توان تقریب پخشیه نامید. برای دستیابی به نظریه کاملتر باید بعضی سازه‌های اضافی را به حساب آورد که منجر به معادله‌های پیچیده تری می‌شوند.

اگر اثر نیروهای بین مولکولی را به حساب آوریم، مقادیر اندازه‌گیری شده برای D ، K و η حصول پارامترهای تعریف کننده پتانسیل بین مولکولی را امکانپذیر می‌کنند و نتیجه بلادرنگ آن بر آورد ابعاد مولکول است. با اندازه‌گیری یکی از این ضرایب می‌توان مسافت آزاد میانگین و از آنجا مقطع مؤثر σ و شعاع مولکول را حساب کرد. ولی باید در نظر داشت که مقادیر محاسبه شده برای مسیر آزاد میانگین و شعاع مولکولها مقادیری تقریبی اند. در جدول ۱.۲۴ مقادیر به دست آمده از آزمایش این ضرایب برای چند

جدول ۱۰۲۴ مقادیر تجربی ضرایب پخش D ، رسانندگی گرمایی K و وشکسانی η ، در شرایط متعارفی دما و فشار.

$r \times 10^{10}$ m	$\eta \times 10^5$ $m^{-1} kgs^{-1}$	$K \times 10^2$ $m kgs^{-1}K^{-1}$	$D \times 10^5$ m^2s^{-1}	مواد
۰۰۹۰	۱۰۸۶	۱۴۰۳		He
۱۰۰۶	۲۰۹۷	۴۰۶۰	۴۰۵۲	Ne
۱۰۵۰	۲۰۱۰	۱۰۶۳	۱۰۵۷	A
۲۰۰۲	۲۰۱۰	۰۰۵۲	۰۰۵۸	Xe
۱۰۱۲	۰۰۸۴	۱۶۰۸	۱۲۰۸	H ₂
۱۰۵۱	۱۰۸۹	۲۰۴۲	۱۰۸۱	O ₂
۱۰۵۴	۱۰۶۶	۲۰۳۷	۱۰۷۸	N ₂
۱۰۸۹	۱۰۳۹	۱۰۴۹	۰۰۹۷	CO ₂
۱۰۸۳	۰۰۹۲	۲۰۶۰	۲۰۱۲	NH ₃
۱۰۷۰	۱۰۰۳	۳۰۰۴	۲۰۰۶	CH ₄

* شعاعهای مولکولی از داده‌های تجربی وشکسانی محاسبه شده‌اند.

گاز تک‌اتمی، دو‌اتمی، چنداتمی و همچنین شعاعهای مولکولی آنها که از داده‌های وشکسانی بدست آمده‌اند، گردآوری شده است.

مثال ۷۰۲۴ ضرایب D و K ی هیدروژن را در شرایط متعارفی دما و فشار برآورد و آنها را با مقادیر بدست آمده از راه آزمایش مقایسه کنید.

حل: باید کمیت‌های v_{ave} ، l و n را در این شرایط تعیین کنیم. جرم یک مولکول هیدروژن $3.34 \times 10^{-27} kg$ است. تعداد مولکولها در دمای $T = 273K$ و فشار $p = 1.01 \times 10^5 Nm^{-2}$ با استفاده از قانون گازهای کامل، معادله (۶۲.۹)، $pV = NkT$ برابر است با $n = p/kT = 2.68 \times 10^{25} m^{-3}$. می‌توان ثابت کرد که سرعت میانگین با رابطه $v_{ave} = \sqrt{3kT/m}$ داده می‌شود. بنابراین، در این حالت داریم $v_{ave} = 1.69 \times 10^3 ms^{-1}$. بالاخره اگر شعاع مولکول هیدروژن را برابر

$r = 1.12 \times 10^{-10} \text{ m}$ بگیریم، برای مسافت آزاد میانگین مقدار

$$l = 1/\sqrt{2} n\sigma = 1.68 \times 10^{-7} \text{ m}$$

به دست می آید.

با قراردادن مقادیر بالا در معادله های (۳۵.۲۴) و (۳۶.۲۴) به دست می آید

$$D = 9.42 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

و

$$K = 5.25 \times 10^{-2} \text{ m kg s}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

مقادیر تجربی متناظر عبارت اند از $D = 1.28 \times 10^{-5}$ و $K = 6.8 \times 10^{-2}$. بنابراین در نظریه ساده شده ما که بر پایه گاز کامل تک اتمی بنا شده است، دستکم مرتبه های درست بزرگی را به دست می دهد. تعمیم این نظریه با در نظر گرفتن انرژی انتقالی توسط حرکات داخلی، از قبیل چرخشها و ارتعاشها سازگاری بین مقادیر تجربی و نظری را بهبود می بخشد. بویژه، رسانندگی گرمایی گاز دو اتمی در سازه ۳۳ ضرب می شود.

۸.۲۴ نتیجه

به نظر می رسد که پدیده های فیزیکی که در این فصل توصیف کردیم با پدیده هایی که قبلاً در قسمت سوم توصیف شده اند ارتباط چندانی ندارند و بنابراین از خط استدلالی که تا کنون دنبال می کردیم منحرف شده ایم. این امر از بعضی لحاظ درست است. ولی از طرف دیگر، صرف نظر از اهمیت بنیادی پدیده های تراپیری، بررسی آنها به عنوان تظاهر اغتشاش مولکولی بسیار سودمند است؛ زیرا این بررسی نشان می دهد که تمام میدانها لزوماً به صورت حرکت موجی نوعی $(x \pm vt)$ ، که از معادله موجی (۱۱.۱۸) پیروی می کند، منتشر نمی شوند، بلکه در طبیعت گونه های دیگر انتشار نیز وجود دارند.

فهرست منابع:

1. «Density Gradients», G. Ostor, *Sci. Am.*, August 1965, Page 70.
2. «The Conduction of Heat in Solids», R. Sproull, *Sci. Am.*, December 1962, page 92.
3. «Measurement of Molecular Diameters and Average Velocities», R. Warner, *Am. J. Phys.* 29, 736 (1961).
4. «Development of the Kinetic Theory of Gases. VI. Viscosity», S. Brush, *Am. J. Phys.* 30, 269 (1962).
5. «Heat Waves and Angström's Method», H. Bryant, *Am. I. Phys.* 31, 325 (1963).

6. «Variation of Air Viscosity with Temperature», M. McNally, *Am. J. Phys.* 31, 732 (1963).
7. «Transport Properties of a Gas Mixture», E. Desloge, *Am. J. Phys.* 32, 733 and 742 (1964).
8. «Temperature and Pressure Dependence of the Viscosity of Gases», D. Cronin, *Am. J. Phys.* 33, 835 (1965).
9. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapter 43.
10. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 377 (Stefan).
11. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Chapter 25.

مسئله‌ها:

۱۰۲۴ اگر ضریب پخش D تابع غلظت و بنابراین تابع x باشد معادله (۴.۲۴) چگونه تغییر می‌کند؟

۲۰۲۴ ثابت کنید که رابطه‌ای که بقای تعداد ذرات را بیان می‌کند در فضای سه‌بعدی به صورت $\delta n / \delta t = -\text{div } \mathbf{j}$ درمی‌آید. در این حالت معادله (۴.۲۴) را چگونه باید نوشت؟

۳۰۲۴ گرادیان دما برای یک میله مسی عایق‌بندی شده 25°C در هر سانتی‌متر است. (الف) اختلاف دمای بین دو نقطه به‌فاصله 5 cm از این میله را حساب کنید. (ب) مقدار گرمایی را که (در هر ثانیه) از واحد سطح عمود بر میله می‌گذرد تعیین کنید. رسانندگی گرمایی مس برابر است با $3.84 \times 10^2 \text{ m kg s}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

۴۰۲۴ رسانندگی گرمایی نقره در حدود $10 \text{ cal cm}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ است. شارش گرما از داخل یک قرص نقره‌ای به‌ضخامت 1 cm و سطح 2 cm^2 را در هر ثانیه حساب کنید. اختلاف دمای بین دو طرف قرص را 10°C بگیرید.

۵۰۲۴ اتاقی دارای سه پنجره با سطح کلی 2 m^2 است. کلفتی شیشه‌ها 4 cm است. دمای داخل اتاق 20°C و دمای خارج آن 10°C است. مقدار گرمایی را که از طریق پنجره‌ها در هر ثانیه و در هر ساعت می‌گذرد حساب کنید. رسانندگی گرمایی شیشه $10^{-1} \text{ m kg s}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ است.

۶.۲۴ دو میله استوانه‌ای، یکی از مس و دیگری از فولاد، هر کدام به طول 1 m و سطح مقطع 1 cm^2 از يك سر به هم جوش داده شده‌اند. سر آزاد میله مسی در دمای 100°C و سر آزاد میله فولادی در دمای 0°C ثابت نگه داشته می‌شوند. حساب کنید (الف) دمای سرهای مشترك آنها را، (ب) گرادیان دما در میله مسی و میله فولادی را، (ج) مقدار گرمایی که در هر ثانیه از هر مقطع لوله‌امی گذرد، (د) نمودار دما در طول میله را رسم کنید. رسانندگی گرمایی مس و فولاد به ترتیب برابرند یا 384×10^2 و $0.046 \times 10^2\text{ m kg s}^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

۷.۲۴ میله‌ای به طول 2 m دارای هسته‌ای از فولاد به قطر 1 cm است که دور آن را يك غلاف مسی به قطر خارجی 2 cm پوشانده است. سطح خارجی میله از لحاظ گرمایی عایق است. يك سر این میله در دمای 100°C و سر دیگر آن در دمای 0°C نگهداری می‌شود. (الف) جریان کل گرما را در لوله، در حالت پایایی نهایی حساب کنید. (ب) چه بخشی از این گرما توسط هر کدام از مواد انتقال داده می‌شود؟ رسانندگیهای گرمایی در مسئله ۶.۲۴ داده شده‌اند.

۸.۲۴ دمای اولیه يك میله عایق‌بندی شده گرمایی T_1 است. يك سر این میله را ناگهان به دمای بالاتر T_0 می‌برند در صورتی که سردیگر آن در دمای T_1 نگهداری می‌شود. با يك رشته منحنی، تغییر دما در طول میله را تا رسیدن به حالت پایایی نهایی، شکل ۱۱.۲۴، نشان دهید.

۹.۲۴ دو سر يك میله فلزی عایق‌بندی شده به طول L در دمای 0°C نگهداری شده‌اند، در صورتی که دمای اولیه میله برابر با $T = 50 \sin(\pi x/L)$ باشد (الف) به کمک نموداری دمای اولیه میله، همچنین با چندین منحنی توزیع دما را در زمانهای پیاپی نشان دهید. (ب) در چند نقطه از میله سوی جریان گرما را نشان دهید. نمودار چگالی جریان گرمای اولیه را رسم کنید و آن را با نتیجه به دست آمده از حالت (ب) مقایسه کنید. همچنین جریان گرما را در چند نقطه در زمانهای پیاپی نشان دهید. T بر حسب $^\circ\text{C}$ است.

۱۰.۲۴ يك لوله حمل بخار، به شعاع 2 cm ، توسط پوشش استوانه‌ای از ماده نارسا به ضخامت 2 cm پوشانده شده است. دمای لوله بخار 100°C و دمای پوشش خارجی 20°C است. رسانندگی گرمایی ماده نارسا برابر $8.04 \times 10^{-2}\text{ m kg s}^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ است. (الف) گرادیان دما $\delta T/\delta x$ را در سطح داخلی و خارجی پوشش حساب کنید. (ب) نمودار T را بر حسب r رسم کنید. (ج) مقدار گرمای تلف شده توسط پوشش را در واحد زمان و در هر متر لوله حساب کنید.

۱۱.۲۴ يك کره توخالی به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 در دمای داخلی T_1 و دمای خارجی T_2 نگهداری می‌شود. نشان دهید مقدار گرمایی که از کل سطح هم‌مرکز با

کره و واقع بین R_1 و R_2 می‌گذرد برابر است با

$$\Phi_Q = \frac{4\pi K(T_1 - T_2) R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

همچنین ثابت کنید که دمای داخل کره بر حسب فاصله از مرکز با رابطه $T = C/r + C'$ تغییر می‌کند. در این رابطه داریم

$$C = \frac{(T_1 - T_2) R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

و

$$C' = \frac{2T_1 R_2 - T_1 R_1 - T_2 R_2}{R_2 - R_1}$$

۱۲.۲۴ قانون سرد شدن نیوتون (رک بخش ۴.۲۴) را می‌توان به صورت

$$j_E = h(T - T_m)$$

نشان داد، که در آن T دمای جسم، T_m دمای محیط اطراف جسم، h ضریبی است به نام ضریب انتقال گرما و j_E انرژی است که از واحد سطح جسم در واحد زمان به محیط خارج می‌رود. (الف) یکاهای h را پیدا کنید. (ب) معادله‌ای بنویسید که آهنگ تغییر انرژی داخلی جسمی به مساحت S را در نتیجه سرد شدن به دست می‌دهد.

۱۳.۲۴ جسم کوچکی به مساحت S ، جرم M ، گرمای ویژه c و در دمای اولیه T_0 را محیطی به دمای T_m احاطه کرده است. نشان دهید که دمای جسم بر حسب زمان با رابطه $T = T_m + (T_0 - T_m)e^{-At}$ داده می‌شود. $A = hS/Mc$ و h ضریب انتقال گرماست (رک مسئله ۱۲.۲۴). به ازای T_0 بیشتر از، برابر با و کوچکتر از T_m نمودار T را بر حسب t رسم کنید.

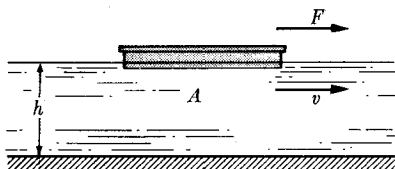
۱۴.۲۴ یک لوله استوانه‌ای فلزی به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 ، رسانندگی گرمایی K با غلافی به شعاع خارجی R_3 و رسانندگی گرمایی K' پوشانده شده است. اگر دمای سطح داخلی لوله را در مقدار T_1 و دمای سطح خارجی را در مقدار T_3 نگه دارند، نشان دهید که T_2 ، دمای سطح مشترک لوله و غلاف با رابطه

$$\frac{T_1 K \ln(R_3/R_2) + T_3 K' \ln(R_2/R_1)}{K \ln(R_3/R_2) + K' \ln(R_2/R_1)}$$

داده می‌شود.

۱۵.۲۴ نشان دهید که سرعت گروه موج گرمایی مثال ۴.۲۴ دو برابر سرعت فاز است.

۱۶.۲۴ يك كرجی به مساحت A در آبی به ژرفای h با حرکت یکنواختی با سرعت v حرکت می‌کند. ثابت کنید که برای کشیدن این كرجی نیرویی برابر با $F = \eta Av/h$ لازم است. η ضریب وشکسانی آب است (شکل ۲۶.۲۴).



شکل ۲۶.۲۴

۱۷.۲۴ ثابت کنید که مقدار شارهای که در واحد زمان از سطحی عمود بر صفحه‌های شکل ۲۰.۲۴ بطول واحد در امتداد محور Z می‌گذرد با رابطه

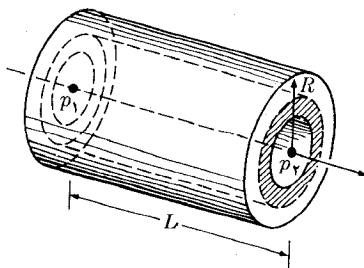
$$\frac{(p_1 - p_2) a^3}{12 \eta l}$$

داده می‌شود.

۱۸.۲۴ يك شاره وشکسان (بهضریب وشکسانی η)، بهطور پایا از يك لوله افقی به شعاع R و طول L می‌گذرد (شکل ۲۷.۲۴). فشار در دو سر لوله برابر p_1 و p_2 ، و بالاتر از p_2 است. نشان دهید که (الف) سرعت شاره در فاصله r از محور برابر است با $v = (p_1 - p_2)(R^2 - r^2)/4\eta l$ ، (ب) حجم شارهای که در واحد زمان از تمام مقطع لوله می‌گذرد برابر است با

$$V = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{(p_1 - p_2)}{L}$$

این رابطه به نام فرمول پوازدی معروف است. [دانهیایی: يك پوسته استوانه‌ای به شعاع r



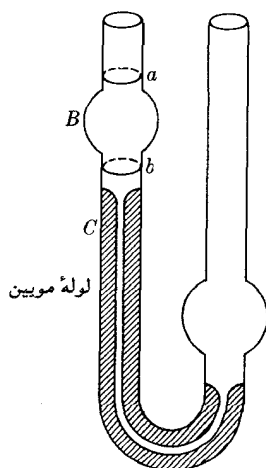
شکل ۲۷.۲۴

و $r+dr$ را که نیروها بر آن اثر می‌کنند در نظر بگیرید و سرعت شاره را برای $R=r$ برابر صفر بگیرید.

۱۹۰۲۴ يك سريك لوله موئين به طول ۱۰ cm و قطر ۱ mm با جريان آبی با فشار ۲ atm در ارتباط است. سردیگر لوله در فشار ۱ atm است. ضریب وشكسانی آب ۰۱۰۵ پواز است. چقدر آب در هر ثانیه از لوله موئين خسارج می‌شود. [دانهایی: از نتایج مسئله ۱۸۰۲۴ استفاده کنید.]

۲۰۰۲۴ جريان شاره‌ای را، از داخل يك لوله استوانه‌ای به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 ، در نظر می‌گیریم. فشار در دو سر لوله p_1 و p_2 ، و p_1 بیشتر از p_2 است. سرعت شاره را در فاصله r از محور و حجم شاره‌ای را که در واحد زمان از هر مقطع لوله خسارج می‌شود حساب کنید. نتیجه را با نتیجه مسئله ۱۸۰۲۴ برای $R_1 = 0$ و $R_2 = R$ مقایسه کنید. [دانهایی: توجه کنید که سرعت شاره برای $r = R_1$ و $r = R_2$ برابر صفر است.]

۲۱۰۲۴ شکل ۲۸۰۲۴ يك وشكسانی سنج معمولی را نشان می‌دهد. این دستگاه تشکیل شده است از ظرف B که توسط لوله موئين C امتداد پیدا می‌کند. ظرف را پر از آبگون می‌کنند و زمانی را که طول می‌کشد تا سطح آبگون از a به b برسد اندازه می‌گیرند. برای آبگونهای با چگالی ρ_1 و ρ_2 ، زمانهای t_1 و t_2 به دست آمده است. ثابت کنید نسبت وشكسانی این دو آبگون برابر است با $\eta_1/\eta_2 = \rho_1 t_1 / \rho_2 t_2$



شکل ۲۸۰۲۴

۲۲۰۲۴ چگالی استن و آب در دمای 20°C بترتیب برابر است با ۷۹۲ و ۱۰۰۰

10050×10^{-2} و شکسانی آب در دمای 20°C برابر است با 0.9982 cm^{-3} .
پواز. اگر برای عبور بین دو علامت يك و شكسانی سنج آب 12056s و استن 4986s
زمان صرف کنند، و شكسانی استن چقدر است؟ [دانه‌مایی: 0.21024].

۲۳.۲۴ و شكسانی استن در دماهای مختلف در جدول زیر داده شده است.

دما بر حسب $^\circ\text{C}$	-۶۰	-۳۰	۰	۳۰
$\eta \times 10^{-2}$	۰.۹۳۲	۰.۵۷۵	۰.۳۹۹	۰.۲۹۵
پواز				

با رسم $\ln \eta$ بر حسب $1/T$ ، که در آن T دمای مطلق استن است، ثابت کنید که
 $\ln \eta = a + b/T$ نمایش تغییرات η بر حسب T است و ثابتهای a و b را پیدا کنید

۲۴.۲۴ از معادله (۳۱.۲۴)، مسافت آزاد میانگین مولکولهای يك گاز را بر حسب دما و فشار معین کنید. مسافت آزاد میانگین هیدروژن را در دمای 100°C و فشار 10^{-6} atm حساب کنید. مقدار مسافت آزاد میانگین اکسیژن چقدر می‌شود؟ همین محاسبه را برای هر دو گاز در شرایط متعارفی دما و فشار از نو حل کنید.

۲۵.۲۴ با فرض اینکه قطر مولکول هیدروژن برابر 10^{-10} m 2.2×10^{-10} است، تعداد برخوردهایی که يك مولکول هیدروژن در يك ثانیه متحمل می‌شود در (الف) $T = 300 \text{ K}$ و (ب) $p = 1 \text{ atm}$ ، $T = 500 \text{ K}$ و $p = 1 \text{ atm}$ ، (ج) $T = 300 \text{ K}$ و $p = 10^{-4} \text{ atm}$ حساب کنید. (د) تعداد کل برخوردهایی را که در 1 cm^3 در يك ثانیه در حالتی (الف)، (ب) و (ج) رخ می‌دهد پیدا کنید.

۲۶.۲۴ قطر مولکول N_2 (ازت) حدود 10^{-10} m 3.0×10^{-10} است. (الف) مسافت آزاد میانگین ازت را در دمای 300 K و فشار 1 atm و 10^{-9} atm حساب کنید. (ب) يك دستگاه تخلیه خوب امکان می‌دهد که فشار تا 10^{-9} atm تخلیه شود. مسافت آزاد میانگین ازت در این فشار چقدر است؟ (ج) اگر قطر لوله تخلیه در فشار 10^{-9} atm برابر 5 cm باشد، يك مولکول N_2 بین دو برخورد پیاپی با مولکول دیگر N_2 چندبار به دیواره‌های لوله برخورد می‌کند؟

۲۷.۲۴ می‌توان ثابت کرد که بین N_0 مولکول از گازی که در لحظه معلومی وارد برخورد می‌شوند، تنها تعداد $N = N_0 e^{-x/l}$ مولکول قبل از برخورد بعدی فاصله‌ای به اندازه x طی می‌کنند (l مسافت آزاد میانگین است). درصد مولکولهایی را پیدا کنید که در فواصل $10l$ و $1l$ ، $1l$ و $0.5l$ برخورد بعدی را انجام می‌دهند. مقداری برای x پیدا کنید

که به‌ازای آن N نصف N_0 باشد.

۲۸.۲۴ گسروهی از مولکولهای اکسیژن مسافت آزاد خود را در دمای 300 K و در فشاری شروع می‌کنند که مسافت آزاد میانگین آنها 20 cm می‌شود. بعد از مدتی نصف مولکولها متحمل برخورد می‌شوند و نصف دیگر برخورد نمی‌کنند. این مدت زمان را تعیین کنید. فرض می‌کنیم که تمام مولکولها با سرعت میانگین v_{ave} حرکت می‌کنند (برای سرعت میانگین v_{ave} به‌مثال ۷.۲۴ مراجعه کنید).

۲۹.۲۴ تغییرات ضرایب D و K در یک گاز کامل نسبت به‌دما و فشار چگونه است؟

۳۰.۲۴ با تحلیل معادله (۳۷.۲۴) ثابت کنید که ضریب وشکسانی گاز کامل تنها به‌دمای آن بستگی دارد. در صورت امکان ماهیت و وسعت این بستگی را پیدا کنید.

۳۱.۲۴ وشکسانی گاز کربنیک در گستره‌ی دماهای جدول زیر داده شده است. η را بر حسب \sqrt{T} رسم کنید. در این رابطه T بر حسب دمای مطلق است. نسبت η/\sqrt{T} را حساب کنید. با توجه به‌مسئله ۳۰.۲۴ چه نتیجه می‌گیرید؟

دما بر حسب $^{\circ}\text{C}$	-۲۱	۰	۱۰۰	۱۸۲	۳۰۲
$10^6 \eta$ پواز	۱۲۰۹	۱۳۰۹	۱۸۰۶	۲۲۰۲	۲۶۰۸

۳۲.۲۴ ضرایب D ، K و η را برای هلیوم و اکسیژن در شرایط متعارفی دما و فشار حساب کنید و آنها را با مقادیر به‌دست آمده از راه آزمایش مقایسه کنید.

۳۳.۲۴ مقادیر نظری رابطه‌های K/D و η/D را برای گاز کامل حساب کنید. این نسبتها را با نتیجه‌های به‌دست آمده از آزمایش در گازهای جدول ۱.۲۴ مقایسه کنید.

۳۴.۲۴ دو صفحه موازی به‌فاصله 5 cm در دماهای 298 K و 301 K قرار دارند. فضای بین دو صفحه با H_β پر شده است. شارش گرما بین دو صفحه را بر حسب $\text{J m}^{-2}\text{ s}^{-1}$ حساب کنید.

۳۵.۲۴ ضریب وشکسانی آمونیاک در دمای 0°C برابر 9.2×10^{-5} پواز است. مسافت آزاد میانگین و بسامد برخورد مولکول آمونیاک را در شرایط متعارفی دما و فشار حساب کنید. همچنین شعاع آن را برآورد کنید.

۳۶.۲۴ ضریب وشکسانی متان در 0°C برابر 1.03×10^{-5} پواز است. قطر مولکولی آن را حساب کنید.

۳۷.۲۴ در دمای 25°C ضریب وشکسانی H_2 برابر 8.2×10^{-5} پواز است. اگر در لوله‌ای به طول ۱ m بسا اختلاف فشار ۳ atm سه لیتر H_2 در هر دقیقه جریان داشته باشد، قطر لوله چقدر است؟ [دانهمایی: از فرمول پوازوی در مسئله ۱۸.۲۴ استفاده کنید].

۳۸.۲۴ رسانندگی گرمایی O_2 و H_2 را باهم مقایسه کنید. از اختلاف قطر مولکولی آنها چشم پوشید.

پیوستها

رابطه‌ها و جدولهای ریاضی
جدول تناوبی عناصر
جدول یکاها و نمادها
جدول ضرایب تبدیل
پاسخ مسئله‌های فرد
واژه‌نامه
اسامی دانشمندان
جدولهای داخل متن
فهرست راهنما

رابطه‌ها و جدولهای ریاضی

این پیوست، که برخی از فرمولهای ریاضی را که بیشتر در این کتاب به کار رفته‌اند در بر- می‌گیرد، به عنوان مرجعی که بتواند سریعاً در دسترس دانشجویان قرار گیرد فراهم شده است. در موارد نادری نیز برخی یادداشتهای ریاضی را در داخل متن کتاب گنجانیده‌ایم. بحث و اثبات اغلب این فرمولها در هر کتاب آنالیز ریاضی یافت می‌شود. از آن جمله اند کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، نوشته جرج، ب. توماس (چاپ و انتشار مرکز نشر دانشگاهی) و

Quick Calculus: A Short Manual of self Instruction, by D. Kelpner and N. Ramsey (John Wiley and Sons, New York, 1963)

که می‌توان مقدمه کوتاهی از مفاهیم پایه‌ای حساب دیفرانسیل و انتگرال را، به صورت برنامه ریزی شده، در آن یافت. دانشجو نیازمند به مراجعه به شماری از جدولهاست که به صورت کتاب اند. از میان آنها کتابهای زیر را می‌توان نام برد:

C.R.C. Standard Mathematical Tables (Chemical Rubber Company, Cleveland, Ohio, 1963); *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, by H. B. Dwight (Macmillan Company, New York, 1961).

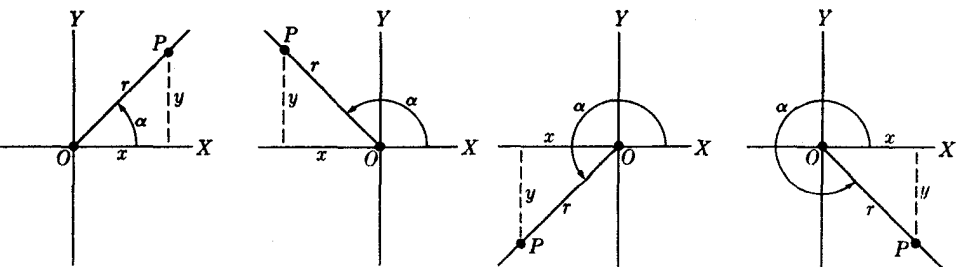
به دانشجو توصیه می‌کنیم که کتاب *Handbook of Chemistry and Physics* را که همه ساله از طرف Chemical Rubber Company, Cleveland, Ohio منتشر می‌شود در دست داشته باشد. این کتاب مقادیر معتابهی از داده‌های ریاضی، شیمی و فیزیک را نیز دربردارد.

۱. رابطه‌های مثلثاتی

بر اساس نمادهای شکل پ. ۱ می‌توان رابطه‌های زیر را تعریف کرد:

$$\sin \alpha = y/r, \quad \cos \alpha = x/r, \quad \operatorname{tg} \alpha = y/x \quad (۱.پ)$$

$$\operatorname{csc} \alpha = r/y, \quad \operatorname{sec} \alpha = r/x, \quad \operatorname{cotg} \alpha = x/y \quad (۲.پ)$$



شکل پ. ۱

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha \quad (۳.پ)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \sec^2 \alpha - 1 = \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (۴.پ)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (۵.پ)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (۶.پ)$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta) \quad (۷.پ)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad (۸.پ)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad (۹.پ)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (۱۰.پ)$$

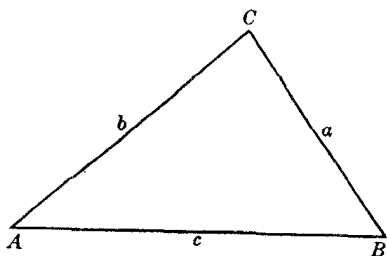
$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \quad (۱۱.پ)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \quad (۱۲.پ)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (۱۳.پ)$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha), \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha). \quad (۱۴.پ)$$

در هر مثلثی بر اساس نمادهای شکل پ. ۲، داریم



شکل پ. ۲

$$\text{قانون سینوسها: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (\text{پ.۱۵})$$

$$\text{قانون کسینوسها: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \quad (\text{پ.۱۶})$$

۲. لگاریتم

(الف) تعریف e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = ۲.۷۱۸۲۸۱۸\dots \quad (\text{پ.۱۷})$$

تابعهای نمایی $y = e^x$ و $y = e^{-x}$ در شکل پ.۳ رسم شده‌اند.

(ب) لگاریتم طبیعی، لگاریتم در پایه e (به شکل پ.۴ مراجعه کنید):

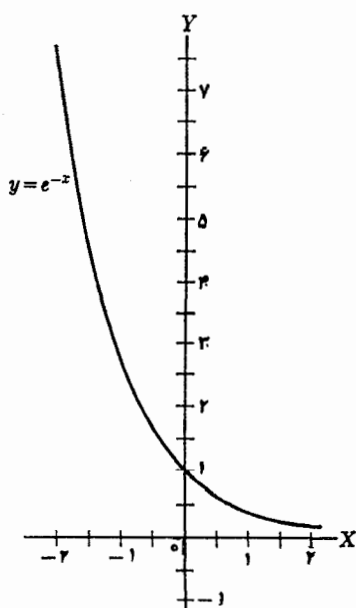
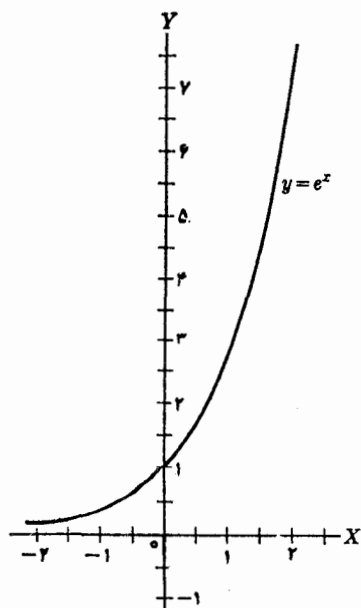
$$y = \ln x \quad \text{اگر } x = e^y \quad (\text{پ.۱۸})$$

لگاریتم اعشاری یا لگاریتم در پایه ده:

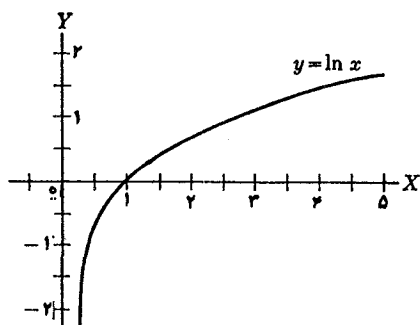
$$y = \log x \quad \text{اگر } x = ۱۰^y \quad (\text{پ.۱۹})$$

لگاریتم طبیعی و اعشاری با رابطه زیر به هم مربوطند:

$$\ln x = ۲.۳۰۳ \log x, \quad \log x = ۰.۴۳۴ \ln x. \quad (\text{پ.۲۰})$$



شکل پ.۳



شکل پ. ۴

۳. بسط توان

(الف) بسط دوجمله‌ای:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!}a^{n-p}b^p + \dots \quad (\text{پ. ۲۱})$$

اگر n یک عدد صحیح و مثبت باشد، بسط، دارای $(n-1)$ جمله است. در تمام موارد دیگر شمار جمله‌های بسط بینهایت است. حالتی که در آن $a = 1$ و b یک کمیت x باشد بوفور در متن کتاب آمده است. بنابراین بسط $(1+x)^n$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (\text{پ. ۲۲})$$

(ب) چند بسط سری مفید دیگر:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \quad (\text{پ. ۲۳})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (\text{پ. ۲۴})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots \quad (\text{پ. ۲۵})$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots \quad (\text{پ. ۲۶})$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots \quad (\text{پ. ۲۷})$$

برای $x \ll 1$ ، تقریبهای زیر می‌توانند قابل قبول باشند:

$$(1+x)^n \approx 1 + nx \quad (\text{پ. ۲۸})$$

$$e^x \approx 1 + x, \quad \ln(1+x) \approx x \quad (\text{پ. ۲۹})$$

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1, \quad \operatorname{tg} x \approx x. \quad (\text{پ. ۳۰})$$

در نظر داشته باشید که در رابطه‌های (پ. ۲۵)، (پ. ۲۶)، (پ. ۲۷) و (پ. ۳۰)، x باید بر حسب رادیان باشد.

(ج) بسط به صورت رشته تیلر:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \left(\frac{df}{dx} \right)_0 + \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_0 + \dots + \frac{1}{n!} (x - x_0)^n \left(\frac{d^nf}{dx^n} \right)_0 + \dots \quad (\text{پ. ۳۱})$$

اگر $x - x_0 \ll 1$ باشد تقریب زیر را می‌توان به کار برد:

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) \left(\frac{df}{dx} \right)_0. \quad (\text{پ. ۳۲})$$

۴. اعداد مختلط

با توجه به تعریف $i^2 = -1$ یا $i = \sqrt{-1}$ ، داریم

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{پ. ۳۳})$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad (\text{پ. ۳۴})$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \quad (\text{پ. ۳۵})$$

۵. توابع هذلولوی

برای تجسم رابطه‌های زیر به شکل پ. ۵ مراجعه کنید:

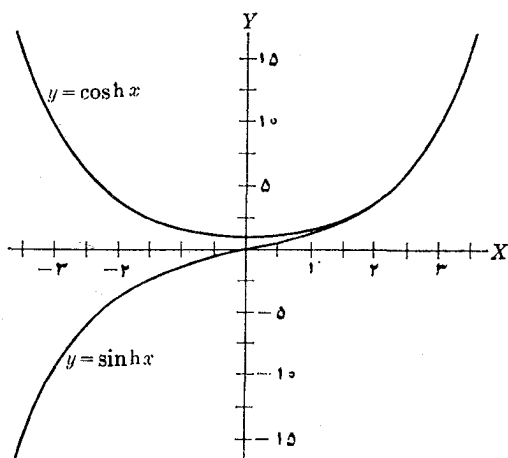
$$\cosh \theta = \frac{1}{2} (e^\theta + e^{-\theta}) \quad (\text{پ. ۳۶})$$

$$\sinh \theta = \frac{1}{2}(e^{\theta} - e^{-\theta}) \quad (\text{پ. ۳۷})$$

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1 \quad (\text{پ. ۳۸})$$

$$\sinh \theta = -i \sin(i\theta), \quad \cosh \theta = \cos(i\theta) \quad (\text{پ. ۳۹})$$

$$\sin \theta = -i \sinh(i\theta), \quad \cos \theta = \cosh(i\theta) \quad (\text{پ. ۴۰})$$



شکل پ. ۵

۶. تابع اصلی، مشتق و انتگرال آن

$f(u)$	df/dx	$\int f(u) du$
u^n	$nu^{n-1} du/dx$	$u^{n+1}/(n+1) + C \quad (n \neq -1)$
u^{-1}	$-(1/u^2) du/dx$	$\ln u + C$
$\ln u$	$(1/u) du/dx$	$u \ln u - u + C$
e^u	$e^u du/dx$	$e^u + C$
$\sin u$	$\cos u du/dx$	$-\cos u + C$
$\cos u$	$-\sin u du/dx$	$\sin u + C$
$\operatorname{tg} u$	$\sec^2 u du/dx$	$-\ln \cos u + C$
$\operatorname{cotg} u$	$-\csc^2 u du/dx$	$\ln \sin u + C$

$f(u)$	df/dx	$\int f(u)du$
$\arcsin u$	$(du/dx)/\sqrt{1-u^2}$	$u \sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$
$\sinh u$	$\cosh u du/dx$	$\cosh u + C$
$\cosh u$	$\sinh u du/dx$	$\sinh u + C$

یک قاعده سودمند برای انتگرال گیری، به نام انتگرال گیری جزء به جزء، عبارت است از

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (\text{پ.۴۱})$$

این روش، برای به دست آوردن مقدار انتگرال سمت چپ به کمک انتگرال سمت راست، بوفور به کار می رود.

۷. مقدار میانگین یک تابع

مقدار متوسط یا میانگین تابعی مانند $y = f(x)$ در بازه (a, b) مطابق رابطه زیر تعریف می شود:

$$y_{\text{ave}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b y dx. \quad (\text{پ.۴۲})$$

همچنین مقدار میانگین y^2 چنین تعریف می شود:

$$(y^2)_{\text{ave}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b y^2 dx. \quad (\text{پ.۴۳})$$

کمیت $\sqrt{(y^2)_{\text{ave}}}$ مقدار دیشه میانگین مربعی $y = f(x)$ در بازه (a, b) نام دارد و معمولاً با y_{ave} اختلاف دارد و آن را با y_{rms} نشان می دهند.

۸. روابط اساسی نسبیت

در رابطه های زیر، v سرعت چارچوب S' نسبت به چارچوب S و محورهای X' و X موازی با v در نظر گرفته شده اند. مقدار k برابر است با $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$.
(الف) تبدیل لورنتس برای مکان و زمان:

$$\begin{aligned} x' &= k(x - vt) & x &= k(x' + vt') \\ y' &= y & y &= y' \\ z' &= z & z &= z' \\ t' &= k(t - vx/c^2) & t &= k(t' + vx'/c^2) \end{aligned} \quad (\text{پ.۴۴})$$

(ب) تبدیل لورنتس برای اندازه حرکت و انرژی:

$$\begin{aligned}
 p'_{x'} &= k(p_x - vE/c^2) & p_x &= k(p'_{x'} + vE'/c^2) \\
 p'_{y'} &= p_y & p_y &= p'_{y'} \\
 p'_{z'} &= p_z & p_z &= p'_{z'} \\
 E' &= k(E - vp_x) & E &= k(E' + vp'_{x'})
 \end{aligned}
 \tag{۴۵.پ}$$

(ج) تبدیل لورنتس برای نیرو (ذره به طور لحظه‌ای نسبت به چارچوب S' ساکن فرض می‌شود):

$$F'_{x'} = F_x, \quad F'_{y'} = kF_y, \quad F'_{z'} = kF_z
 \tag{۴۶.پ}$$

(د) تعریف اندازه حرکت:

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2} = km_0 \mathbf{v}$$

(ه) رابطه بین انرژی و اندازه حرکت:

$$E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}.$$

جدول نکاریتم

N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۰	۰۰۰۰	۳۰۱۰	۴۷۷۱	۶۰۲۱	۶۹۹۰	۷۷۸۲	۸۴۵۱	۹۰۳۱	۹۵۴۲
۱	۰۰۰۰	۰۴۱۴	۰۷۹۲	۱۱۳۹	۱۴۶۱	۱۷۶۱	۲۰۴۱	۲۳۰۴	۲۵۵۳	۲۷۸۸
۲	۳۰۱۰	۳۲۲۲	۳۴۲۴	۳۶۱۷	۳۸۰۲	۳۹۷۹	۴۱۵۰	۴۳۱۴	۴۴۷۲	۴۶۲۴
۳	۴۷۷۱	۴۹۱۴	۵۰۵۱	۵۱۸۵	۵۳۱۵	۵۴۴۱	۵۵۶۳	۵۶۸۲	۵۷۹۸	۵۹۱۱
۴	۶۰۲۱	۶۱۲۸	۶۲۳۲	۶۳۳۵	۶۴۳۵	۶۵۳۲	۶۶۲۸	۶۷۲۱	۶۸۱۲	۶۹۰۲
۵	۶۹۹۰	۷۰۷۶	۷۱۶۰	۷۲۴۳	۷۳۲۴	۷۴۰۲	۷۴۸۲	۷۵۵۹	۷۶۳۴	۷۷۰۹
۶	۷۷۸۲	۷۸۵۲	۷۹۲۲	۷۹۹۳	۸۰۶۲	۸۱۲۹	۸۱۹۵	۸۲۶۱	۸۳۲۵	۸۳۸۸
۷	۸۴۵۱	۸۵۱۳	۸۵۷۳	۸۶۳۳	۸۶۹۲	۸۷۵۱	۸۸۰۸	۸۸۶۵	۸۹۲۱	۸۹۷۶
۸	۹۰۳۱	۹۰۸۵	۹۱۳۸	۹۱۹۱	۹۲۴۳	۹۲۹۴	۹۳۴۵	۹۳۹۵	۹۴۴۵	۹۴۹۴
۹	۹۵۴۲	۹۵۹۰	۹۶۳۸	۹۶۸۵	۹۷۳۱	۹۷۷۷	۹۸۲۳	۹۸۶۸	۹۹۱۲	۹۹۵۶
۱۰	۰۰۰۰	۰۰۴۳	۰۰۸۶	۰۱۲۸	۰۱۷۰	۰۲۱۲	۰۲۵۳	۰۲۹۴	۰۳۳۴	۰۳۷۴
۱۱	۰۴۱۴	۰۴۵۳	۰۴۹۲	۰۵۳۱	۰۵۶۹	۰۶۰۷	۰۶۴۵	۰۶۸۲	۰۷۱۹	۰۷۵۵
۱۲	۰۷۹۲	۰۸۲۸	۰۸۶۴	۰۸۹۹	۰۹۳۴	۰۹۶۹	۱۰۰۴	۱۰۳۸	۱۰۷۲	۱۱۰۶
۱۳	۱۱۳۹	۱۱۷۳	۱۲۰۶	۱۲۳۹	۱۲۷۱	۱۳۰۳	۱۳۳۵	۱۳۶۷	۱۳۹۹	۱۴۳۰
۱۴	۱۴۶۱	۱۴۹۲	۱۵۲۳	۱۵۵۳	۱۵۸۴	۱۶۱۴	۱۶۴۴	۱۶۷۳	۱۷۰۳	۱۷۳۲
۱۵	۱۷۶۱	۱۷۹۰	۱۸۱۸	۱۸۴۷	۱۸۷۴	۱۹۰۳	۱۹۳۱	۱۹۵۹	۱۹۸۷	۲۰۱۴
۱۶	۲۰۴۱	۲۰۶۸	۲۰۹۵	۲۱۲۲	۲۱۴۸	۲۱۷۵	۲۲۰۱	۲۲۲۷	۲۲۵۳	۲۲۷۹
۱۷	۲۳۰۴	۲۳۳۰	۲۳۵۵	۲۳۸۰	۲۴۰۵	۲۴۳۰	۲۴۵۵	۲۴۸۰	۲۵۰۴	۲۵۲۹
۱۸	۲۵۵۳	۲۵۷۷	۲۶۰۱	۲۶۲۵	۲۶۴۸	۲۶۷۲	۲۶۹۵	۲۷۱۸	۲۷۴۲	۲۷۶۵
۱۹	۲۷۸۸	۲۸۱۰	۲۸۳۳	۲۸۵۶	۲۸۷۸	۲۹۰۰	۲۹۲۳	۲۹۴۵	۲۹۶۷	۲۹۸۹
۲۰	۳۰۱۰	۳۰۳۲	۳۰۵۴	۳۰۷۵	۳۰۹۶	۳۱۱۸	۳۱۳۹	۳۱۶۰	۳۱۸۱	۳۲۰۱
۲۱	۳۲۲۲	۳۲۴۳	۳۲۶۴	۳۲۸۴	۳۳۰۴	۳۳۲۴	۳۳۴۵	۳۳۶۵	۳۳۸۵	۳۴۰۴
۲۲	۳۴۲۴	۳۴۴۴	۳۴۶۴	۳۴۸۳	۳۵۰۲	۳۵۲۲	۳۵۴۱	۳۵۶۰	۳۵۷۹	۳۵۹۸
۲۳	۳۶۱۷	۳۶۳۶	۳۶۵۵	۳۶۷۴	۳۶۹۲	۳۷۱۱	۳۷۲۹	۳۷۴۷	۳۷۶۶	۳۷۸۴
۲۴	۳۸۰۲	۳۸۲۰	۳۸۳۸	۳۸۵۶	۳۸۷۴	۳۸۹۲	۳۹۰۹	۳۹۲۷	۳۹۴۵	۳۹۶۲
۲۵	۳۹۷۹	۳۹۹۷	۴۰۱۴	۴۰۳۱	۴۰۴۸	۴۰۶۵	۴۰۸۲	۴۰۹۹	۴۱۱۶	۴۱۳۳
۲۶	۴۱۵۰	۴۱۶۶	۴۱۸۳	۴۲۰۰	۴۲۱۶	۴۲۳۲	۴۲۴۹	۴۲۶۵	۴۲۸۱	۴۲۹۸
۲۷	۴۳۰۴	۴۳۲۰	۴۳۳۶	۴۳۵۲	۴۳۶۸	۴۳۸۳	۴۴۰۹	۴۴۲۵	۴۴۴۰	۴۴۵۶
۲۸	۴۴۷۲	۴۴۸۷	۴۵۰۲	۴۵۱۸	۴۵۳۳	۴۵۴۸	۴۵۶۴	۴۵۷۹	۴۵۹۴	۴۶۰۹
۲۹	۴۶۲۴	۴۶۳۹	۴۶۵۴	۴۶۶۹	۴۶۸۳	۴۶۹۸	۴۷۱۳	۴۷۲۸	۴۷۴۲	۴۷۵۷
۳۰	۴۷۷۱	۴۷۸۶	۴۸۰۰	۴۸۱۴	۴۸۲۹	۴۸۴۳	۴۸۵۷	۴۸۷۱	۴۸۸۶	۴۹۰۰
۳۱	۴۹۱۴	۴۹۲۸	۴۹۴۲	۴۹۵۵	۴۹۶۹	۴۹۸۳	۴۹۹۷	۵۰۱۱	۵۰۲۴	۵۰۳۸
۳۲	۵۰۵۱	۵۰۶۵	۵۰۷۹	۵۰۹۲	۵۱۰۵	۵۱۱۹	۵۱۳۲	۵۱۴۵	۵۱۵۹	۵۱۷۲
۳۳	۵۱۸۵	۵۱۹۸	۵۲۱۱	۵۲۲۴	۵۲۳۷	۵۲۵۰	۵۲۶۳	۵۲۷۶	۵۲۸۹	۵۳۰۲
۳۴	۵۳۱۵	۵۳۲۸	۵۳۴۰	۵۳۵۳	۵۳۶۶	۵۳۷۸	۵۳۹۱	۵۴۰۳	۵۴۱۶	۵۴۲۸
۳۵	۵۴۴۱	۵۴۵۳	۵۴۶۵	۵۴۷۸	۵۴۹۰	۵۵۰۲	۵۵۱۴	۵۵۲۷	۵۵۳۹	۵۵۵۱
۳۶	۵۵۶۳	۵۵۷۵	۵۵۸۷	۵۵۹۹	۵۶۱۱	۵۶۲۳	۵۶۳۵	۵۶۴۷	۵۶۵۸	۵۶۷۰
۳۷	۵۶۸۲	۵۶۹۴	۵۷۰۵	۵۷۱۷	۵۷۲۹	۵۷۴۰	۵۷۵۲	۵۷۶۳	۵۷۷۵	۵۷۸۶
۳۸	۵۷۹۸	۵۸۰۹	۵۸۲۱	۵۸۳۲	۵۸۴۳	۵۸۵۵	۵۸۶۶	۵۸۷۷	۵۸۸۸	۵۸۹۹
۳۹	۵۹۱۱	۵۹۲۲	۵۹۳۳	۵۹۴۴	۵۹۵۵	۵۹۶۶	۵۹۷۷	۵۹۸۸	۵۹۹۹	۶۰۱۰
۴۰	۶۰۲۱	۶۰۳۱	۶۰۴۲	۶۰۵۳	۶۰۶۴	۶۰۷۵	۶۰۸۵	۶۰۹۶	۶۱۰۷	۶۱۱۷
۴۱	۶۱۲۸	۶۱۳۸	۶۱۴۰	۶۱۵۰	۶۱۶۰	۶۱۸۰	۶۱۹۱	۶۲۰۱	۶۲۱۲	۶۲۲۲
۴۲	۶۲۲۲	۶۲۳۳	۶۲۴۳	۶۲۵۳	۶۲۶۴	۶۲۸۴	۶۲۹۴	۶۳۰۴	۶۳۱۴	۶۳۲۵
۴۳	۶۳۳۵	۶۳۴۵	۶۳۵۵	۶۳۶۵	۶۳۷۵	۶۳۸۵	۶۳۹۵	۶۴۰۵	۶۴۱۵	۶۴۲۵
۴۴	۶۴۳۵	۶۴۴۴	۶۴۵۴	۶۴۶۴	۶۴۷۴	۶۴۸۴	۶۴۹۳	۶۵۰۳	۶۵۱۳	۶۵۲۲
۴۵	۶۵۳۳	۶۵۴۳	۶۵۵۱	۶۵۶۱	۶۵۷۱	۶۵۸۰	۶۵۹۰	۶۵۹۹	۶۶۰۹	۶۶۱۸
۴۶	۶۶۲۸	۶۶۳۷	۶۶۴۶	۶۶۵۵	۶۶۶۵	۶۶۷۵	۶۶۸۴	۶۶۹۳	۶۷۰۲	۶۷۱۲
۴۷	۶۷۲۱	۶۷۳۰	۶۷۳۹	۶۷۴۹	۶۷۵۸	۶۷۶۷	۶۷۷۶	۶۷۸۵	۶۷۹۴	۶۸۰۳
۴۸	۶۸۱۲	۶۸۱۱	۶۸۳۰	۶۸۳۹	۶۸۴۸	۶۸۵۷	۶۸۶۶	۶۸۷۵	۶۸۸۴	۶۸۹۳
۴۹	۶۹۰۲	۶۹۱۱	۶۹۲۰	۶۹۲۸	۶۹۳۷	۶۹۴۶	۶۹۵۵	۶۹۶۴	۶۹۷۲	۶۹۸۱
۵۰	۶۹۹۰	۶۹۹۸	۷۰۰۷	۷۰۱۶	۷۰۲۴	۷۰۳۳	۷۰۴۲	۷۰۵۰	۷۰۵۹	۷۰۶۷
N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

جدول لگاریتم

N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۵۰	۶۹۹۰	۶۹۹۸	۷۰۰۷	۷۰۱۶	۷۰۲۴	۷۰۳۳	۷۰۴۲	۷۰۵۰	۷۰۵۹	۷۰۶۷
۵۱	۷۰۷۶	۷۰۸۴	۷۰۹۳	۷۱۰۱	۷۱۱۰	۷۱۱۸	۷۱۲۶	۷۱۳۵	۷۱۴۳	۷۱۵۲
۵۲	۷۱۶۰	۷۱۶۸	۷۱۷۷	۷۱۸۵	۷۱۹۳	۷۲۰۲	۷۲۱۰	۷۲۱۸	۷۲۲۶	۷۲۳۴
۵۳	۷۲۴۳	۷۲۵۱	۷۲۵۹	۷۲۶۷	۷۲۷۵	۷۲۸۴	۷۲۹۲	۷۳۰۰	۷۳۰۸	۷۳۱۶
۵۴	۷۳۲۴	۷۳۳۲	۷۳۴۰	۷۳۴۸	۷۳۵۶	۷۳۶۴	۷۳۷۲	۷۳۸۰	۷۳۸۸	۷۳۹۶
۵۵	۷۴۰۴	۷۴۱۲	۷۴۱۹	۷۴۲۷	۷۴۳۵	۷۴۴۳	۷۴۵۱	۷۴۵۹	۷۴۶۶	۷۴۷۴
۵۶	۷۴۸۲	۷۴۹۰	۷۴۹۷	۷۵۰۵	۷۵۱۳	۷۵۲۰	۷۵۲۸	۷۵۳۶	۷۵۴۳	۷۵۵۱
۵۷	۷۵۵۹	۷۵۶۶	۷۵۷۴	۷۵۸۲	۷۵۸۹	۷۵۹۷	۷۶۰۴	۷۶۱۲	۷۶۱۹	۷۶۲۷
۵۸	۷۶۳۴	۷۶۴۲	۷۶۴۹	۷۶۵۷	۷۶۶۴	۷۶۷۲	۷۶۷۹	۷۶۸۶	۷۶۹۴	۷۷۰۱
۵۹	۷۷۰۹	۷۷۱۶	۷۷۲۴	۷۷۳۱	۷۷۳۸	۷۷۴۵	۷۷۵۲	۷۷۶۰	۷۷۶۷	۷۷۷۴
۶۰	۷۷۸۲	۷۷۸۹	۷۷۹۶	۷۸۰۳	۷۸۱۰	۷۸۱۸	۷۸۲۵	۷۸۳۲	۷۸۳۹	۷۸۴۶
۶۱	۷۸۵۳	۷۸۶۰	۷۸۶۸	۷۸۷۵	۷۸۸۲	۷۸۸۹	۷۸۹۶	۷۹۰۳	۷۹۱۰	۷۹۱۷
۶۲	۷۹۲۴	۷۹۳۱	۷۹۳۸	۸۹۴۵	۷۹۵۲	۷۹۵۹	۷۹۶۶	۷۹۷۳	۷۹۸۰	۷۹۸۷
۶۳	۷۹۹۳	۸۰۰۰	۸۰۰۷	۸۰۱۴	۸۰۲۱	۸۰۲۸	۸۰۳۵	۸۰۴۲	۸۰۴۸	۸۰۵۵
۶۴	۸۰۶۲	۸۰۶۹	۸۰۷۵	۸۰۸۲	۸۰۸۹	۸۰۹۶	۸۱۰۲	۸۱۰۹	۸۱۱۶	۸۱۲۲
۶۵	۸۱۲۹	۸۱۳۶	۸۱۴۲	۸۱۴۹	۸۱۵۶	۸۱۶۲	۸۱۶۹	۸۱۷۶	۸۱۸۲	۸۱۸۹
۶۶	۸۱۹۵	۸۲۰۲	۸۲۰۹	۸۲۱۵	۸۲۲۲	۸۲۲۸	۸۲۳۵	۸۲۴۱	۸۲۴۸	۸۲۵۴
۶۷	۸۲۶۱	۸۲۶۷	۸۲۷۴	۸۲۸۰	۸۲۸۷	۸۲۹۳	۸۲۹۹	۸۳۰۶	۸۳۱۲	۸۳۱۹
۶۸	۸۳۲۵	۸۳۳۱	۸۳۳۸	۸۳۴۴	۸۳۵۱	۸۳۵۷	۸۳۶۳	۸۳۷۰	۸۳۷۶	۸۳۸۲
۶۹	۸۳۸۸	۸۳۹۵	۸۴۰۱	۸۴۰۸	۸۴۱۴	۸۴۲۰	۸۴۲۶	۸۴۳۲	۸۴۳۹	۸۴۴۵
۷۰	۸۴۵۱	۸۴۵۷	۸۴۶۳	۸۴۷۰	۸۴۷۶	۸۴۸۲	۸۴۸۸	۸۴۹۴	۸۵۰۰	۸۵۰۶
۷۱	۸۵۱۳	۸۵۱۹	۸۵۲۵	۸۵۳۱	۸۵۳۷	۸۵۴۳	۸۵۴۹	۸۵۵۵	۸۵۶۱	۸۵۶۷
۷۲	۸۵۷۳	۸۵۷۹	۸۵۸۵	۸۵۹۱	۸۵۹۷	۸۶۰۳	۸۶۰۹	۸۶۱۵	۸۶۲۱	۸۶۲۷
۷۳	۸۶۳۳	۸۶۳۹	۸۶۴۵	۸۶۵۱	۸۶۵۷	۸۶۶۳	۸۶۶۹	۸۶۷۵	۸۶۸۱	۸۶۸۶
۷۴	۸۶۹۲	۸۶۹۸	۸۷۰۴	۸۷۱۰	۸۷۱۶	۸۷۲۲	۸۷۲۷	۸۷۳۳	۸۷۳۹	۸۷۴۵
۷۵	۸۷۵۱	۸۷۵۶	۸۷۶۲	۸۷۶۸	۸۷۷۴	۸۷۷۹	۸۷۸۵	۸۷۹۱	۸۷۹۷	۸۸۰۲
۷۶	۸۸۰۸	۸۸۱۴	۸۸۲۰	۸۸۲۵	۸۸۳۱	۸۸۳۷	۸۸۴۲	۸۸۴۸	۸۸۵۴	۸۸۵۹
۷۷	۸۸۶۵	۸۸۷۱	۸۸۷۶	۸۸۸۲	۸۸۸۷	۸۸۹۳	۸۸۹۹	۸۹۰۴	۸۹۱۰	۸۹۱۵
۷۸	۸۹۲۱	۸۹۲۷	۸۹۳۳	۸۹۳۸	۸۹۴۳	۸۹۴۹	۸۹۵۴	۸۹۶۰	۸۹۶۵	۸۹۷۱
۷۹	۸۹۷۶	۸۹۸۲	۸۹۸۷	۸۹۹۳	۸۹۹۹	۹۰۰۴	۹۰۰۹	۹۰۱۵	۹۰۲۰	۹۰۲۵
۸۰	۹۰۳۱	۹۰۳۶	۹۰۴۲	۹۰۴۷	۹۰۵۳	۹۰۵۸	۹۰۶۳	۹۰۶۹	۹۰۷۴	۹۰۷۹
۸۱	۹۰۸۵	۹۰۹۰	۹۰۹۶	۹۱۰۱	۹۱۰۶	۹۱۱۲	۹۱۱۷	۹۱۲۲	۹۱۲۸	۹۱۳۳
۸۲	۹۱۳۸	۹۱۴۳	۹۱۴۹	۹۱۵۴	۹۱۵۹	۹۱۶۵	۹۱۷۰	۹۱۷۵	۹۱۸۰	۹۱۸۶
۸۳	۹۱۹۱	۹۱۹۶	۹۲۰۱	۹۲۰۶	۹۲۱۲	۹۲۱۷	۹۲۲۲	۹۲۲۷	۹۲۳۲	۹۲۳۸
۸۴	۹۲۴۳	۹۲۴۸	۹۲۵۴	۹۲۵۸	۹۲۶۳	۹۲۶۹	۹۲۷۴	۹۲۷۹	۹۲۸۴	۹۲۸۹
۸۵	۹۲۹۴	۹۲۹۹	۹۳۰۴	۹۳۰۹	۹۳۱۵	۹۳۲۰	۹۳۲۵	۹۳۳۰	۹۳۳۵	۹۳۴۰
۸۶	۹۳۴۵	۹۳۵۰	۹۳۵۵	۹۳۶۰	۹۳۶۵	۹۳۷۰	۹۳۷۵	۹۳۸۰	۹۳۸۵	۹۳۹۰
۸۷	۹۳۹۵	۹۴۰۰	۹۴۰۵	۹۴۱۰	۹۴۱۵	۹۴۲۰	۹۴۲۵	۹۴۳۰	۹۴۳۵	۹۴۴۰
۸۸	۹۴۴۵	۹۴۵۰	۹۴۵۵	۹۴۶۰	۹۴۶۵	۹۴۶۹	۹۴۷۴	۹۴۷۹	۹۴۸۴	۹۴۸۹
۸۹	۹۴۹۴	۹۴۹۹	۹۵۰۴	۹۵۰۹	۹۵۱۳	۹۵۱۸	۹۵۲۳	۹۵۲۸	۹۵۳۳	۹۵۳۸
۹۰	۹۵۴۳	۹۵۴۷	۹۵۵۲	۹۵۵۷	۹۵۶۲	۹۵۶۶	۹۵۷۱	۹۵۷۶	۹۵۸۱	۹۵۸۶
۹۱	۹۵۹۰	۹۵۹۵	۹۶۰۰	۹۶۰۵	۹۶۰۹	۹۶۱۴	۹۶۱۹	۹۶۲۴	۹۶۲۸	۹۶۳۳
۹۲	۹۶۳۸	۹۶۴۳	۹۶۴۷	۹۶۵۲	۹۶۵۷	۹۶۶۱	۹۶۶۶	۹۶۷۱	۹۶۷۵	۹۶۸۰
۹۳	۹۶۸۵	۹۶۸۹	۹۶۹۴	۹۶۹۹	۹۷۰۳	۹۷۰۸	۹۷۱۳	۹۷۱۷	۹۷۲۲	۹۷۲۷
۹۴	۹۷۳۱	۹۷۳۶	۹۷۴۱	۹۷۴۵	۹۷۵۰	۹۷۵۴	۹۷۵۹	۹۷۶۴	۹۷۶۸	۹۷۷۳
۹۵	۹۷۷۷	۹۷۸۲	۹۷۸۶	۹۷۹۱	۹۷۹۵	۹۸۰۰	۹۸۰۵	۹۸۰۹	۹۸۱۴	۹۸۱۸
۹۶	۹۸۲۳	۹۸۲۷	۹۸۳۲	۹۸۳۶	۹۸۴۱	۹۸۴۵	۹۸۵۰	۹۸۵۴	۹۸۵۹	۹۸۶۳
۹۷	۹۸۶۸	۹۸۷۲	۹۸۷۷	۹۸۸۱	۹۸۸۶	۹۸۹۰	۹۸۹۴	۹۸۹۹	۹۹۰۳	۹۹۰۸
۹۸	۹۹۱۲	۹۹۱۷	۹۹۲۱	۹۹۲۶	۹۹۳۰	۹۹۳۴	۹۹۳۹	۹۹۴۳	۹۹۴۸	۹۹۵۲
۹۹	۹۹۵۶	۹۹۶۱	۹۹۶۵	۹۹۶۹	۹۹۷۴	۹۹۷۸	۹۹۸۳	۹۹۸۷	۹۹۹۱	۹۹۹۶
۱۰۰	۰۰۰۰	۰۰۰۴	۰۰۰۹	۰۰۱۳	۰۰۱۷	۰۰۲۲	۰۰۲۶	۰۰۳۰	۰۰۳۵	۰۰۳۹
N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

جدول توابع مثلثاتی

tg	cos	sin	زاویه		tg	cos	sin	زاویه	
			رادیان	درجه				رادیان	درجه
۱٫۰۳۴	۰٫۶۹۵	۰٫۷۱۹	۰٫۸۰۳	۴۶۰	۰٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۰	۰
۱٫۰۷۲	۰٫۶۸۲	۰٫۷۳۱	۰٫۸۲۰	۴۷۰	۰٫۰۱۷	۱٫۰۰۰	۰٫۰۱۷	۰٫۰۱۷	۱
۱٫۱۱۱	۰٫۶۶۹	۰٫۷۴۳	۰٫۸۳۸	۴۸۰	۰٫۰۳۵	۰٫۹۹۹	۰٫۰۳۵	۰٫۰۳۵	۲
۱٫۱۵۰	۰٫۶۵۶	۰٫۷۵۵	۰٫۸۵۵	۴۹۰	۰٫۰۵۲	۰٫۹۹۹	۰٫۰۵۲	۰٫۰۵۲	۳
۱٫۱۹۲	۰٫۶۴۳	۰٫۷۶۶	۰٫۸۷۳	۵۰۰	۰٫۰۷۰	۰٫۹۹۸	۰٫۰۷۰	۰٫۰۷۰	۴
۱٫۲۳۵	۰٫۶۲۹	۰٫۷۷۷	۰٫۸۹۰	۵۱۰	۰٫۰۸۷	۰٫۹۹۶	۰٫۰۸۷	۰٫۰۸۷	۵
۱٫۲۸۰	۰٫۶۱۶	۰٫۷۸۸	۰٫۹۰۸	۵۲۰	۰٫۱۰۵	۰٫۹۹۵	۰٫۱۰۵	۰٫۱۰۵	۶
۱٫۳۲۷	۰٫۶۰۲	۰٫۷۹۹	۰٫۹۲۵	۵۳۰	۰٫۱۲۳	۰٫۹۹۳	۰٫۱۲۲	۰٫۱۲۲	۷
۱٫۳۷۶	۰٫۵۸۸	۰٫۸۰۹	۰٫۹۴۲	۵۴۰	۰٫۱۴۱	۰٫۹۹۰	۰٫۱۳۹	۰٫۱۴۰	۸
۱٫۴۲۸	۰٫۵۷۴	۰٫۸۱۹	۰٫۹۶۰	۵۵۰	۰٫۱۵۸	۰٫۹۸۸	۰٫۱۵۶	۰٫۱۵۷	۹
۱٫۴۸۳	۰٫۵۵۹	۰٫۸۲۹	۰٫۹۷۷	۵۶۰	۰٫۱۷۶	۰٫۹۸۵	۰٫۱۷۴	۰٫۱۷۵	۱۰
۱٫۵۴۰	۰٫۵۴۵	۰٫۸۳۹	۰٫۹۹۵	۵۷۰	۰٫۱۹۴	۰٫۹۸۲	۰٫۱۹۱	۰٫۱۹۲	۱۱
۱٫۶۰۰	۰٫۵۳۰	۰٫۸۴۸	۱٫۰۱۲	۵۸۰	۰٫۲۱۳	۰٫۹۷۸	۰٫۲۰۸	۰٫۲۰۹	۱۲
۱٫۶۶۴	۰٫۵۱۵	۰٫۸۵۷	۱٫۰۳۰	۵۹۰	۰٫۲۳۱	۰٫۹۷۴	۰٫۲۲۵	۰٫۲۲۷	۱۳
۱٫۷۳۲	۰٫۵۰۰	۰٫۸۶۶	۱٫۰۴۷	۶۰۰	۰٫۲۴۹	۰٫۹۷۰	۰٫۲۴۲	۰٫۲۴۴	۱۴
۱٫۸۰۴	۰٫۴۸۵	۰٫۸۷۵	۱٫۰۶۵	۶۱۰	۰٫۲۶۸	۰٫۹۶۶	۰٫۲۵۹	۰٫۲۶۲	۱۵
۱٫۸۸۱	۰٫۴۶۹	۰٫۸۸۳	۱٫۰۸۲	۶۲۰	۰٫۲۸۷	۰٫۹۶۱	۰٫۲۷۶	۰٫۲۷۹	۱۶
۱٫۹۶۳	۰٫۴۵۴	۰٫۸۹۱	۱٫۱۰۰	۶۳۰	۰٫۳۰۶	۰٫۹۵۶	۰٫۲۹۲	۰٫۲۹۷	۱۷
۲٫۰۵۰	۰٫۴۳۸	۰٫۸۹۹	۱٫۱۱۷	۶۴۰	۰٫۳۲۵	۰٫۹۵۱	۰٫۳۰۹	۰٫۳۱۴	۱۸
۲٫۱۴۵	۰٫۴۲۳	۰٫۹۰۶	۱٫۱۳۴	۶۵۰	۰٫۳۴۴	۰٫۹۴۶	۰٫۳۲۶	۰٫۳۳۲	۱۹
۲٫۲۴۴	۰٫۴۰۷	۰٫۹۱۴	۱٫۱۵۲	۶۶۰	۰٫۳۶۴	۰٫۹۴۰	۰٫۳۴۲	۰٫۳۴۹	۲۰
۲٫۳۵۶	۰٫۳۹۱	۰٫۹۲۱	۱٫۱۶۹	۶۷۰	۰٫۳۸۴	۰٫۹۳۴	۰٫۳۵۸	۰٫۳۶۷	۲۱
۲٫۴۷۵	۰٫۳۷۵	۰٫۹۲۷	۱٫۱۸۷	۶۸۰	۰٫۴۰۴	۰٫۹۲۷	۰٫۳۷۵	۰٫۳۸۴	۲۲
۲٫۶۰۵	۰٫۳۵۸	۰٫۹۳۴	۱٫۲۰۴	۶۹۰	۰٫۴۲۴	۰٫۹۲۱	۰٫۳۹۱	۰٫۴۰۱	۲۳
۲٫۷۴۸	۰٫۳۴۲	۰٫۹۴۰	۱٫۲۲۲	۷۰۰	۰٫۴۴۵	۰٫۹۱۴	۰٫۴۰۷	۰٫۴۱۹	۲۴
۲٫۹۰۴	۰٫۳۲۶	۰٫۹۴۶	۱٫۲۳۹	۷۱۰	۰٫۴۶۶	۰٫۹۰۶	۰٫۴۲۳	۰٫۴۳۶	۲۵
۳٫۰۷۸	۰٫۳۰۹	۰٫۹۵۱	۱٫۲۵۷	۷۲۰	۰٫۴۸۸	۰٫۸۹۹	۰٫۴۳۸	۰٫۴۵۴	۲۶
۳٫۲۷۱	۰٫۲۹۲	۰٫۹۵۶	۱٫۲۷۴	۷۳۰	۰٫۵۱۰	۰٫۸۹۱	۰٫۴۵۴	۰٫۴۷۱	۲۷
۳٫۴۸۷	۰٫۲۷۶	۰٫۹۶۱	۱٫۲۹۲	۷۴۰	۰٫۵۳۲	۰٫۸۸۳	۰٫۴۶۹	۰٫۴۸۹	۲۸
۳٫۷۳۲	۰٫۲۵۹	۰٫۹۶۶	۱٫۳۰۹	۷۵۰	۰٫۵۵۴	۰٫۸۷۵	۰٫۴۸۵	۰٫۵۰۶	۲۹
۴٫۰۱۱	۰٫۲۴۲	۰٫۹۷۰	۱٫۳۲۶	۷۶۰	۰٫۵۷۷	۰٫۸۶۶	۰٫۵۰۰	۰٫۵۲۴	۳۰
۴٫۳۳۲	۰٫۲۲۵	۰٫۹۷۴	۱٫۳۴۴	۷۷۰	۰٫۶۰۱	۰٫۸۵۷	۰٫۵۱۵	۰٫۵۴۱	۳۱
۴٫۷۰۵	۰٫۲۰۸	۰٫۹۷۸	۱٫۳۶۱	۷۸۰	۰٫۶۲۵	۰٫۸۴۸	۰٫۵۳۰	۰٫۵۵۹	۳۲
۵٫۱۴۵	۰٫۱۹۱	۰٫۹۸۲	۱٫۳۷۹	۷۹۰	۰٫۶۴۹	۰٫۸۳۹	۰٫۵۴۵	۰٫۵۷۶	۳۳
۵٫۶۷۱	۰٫۱۷۴	۰٫۹۸۵	۱٫۳۹۶	۸۰۰	۰٫۶۷۵	۰٫۸۲۹	۰٫۵۵۹	۰٫۵۹۳	۳۴
۶٫۳۱۴	۰٫۱۵۶	۰٫۹۸۸	۱٫۴۱۴	۸۱۰	۰٫۷۰۰	۰٫۸۱۹	۰٫۵۷۴	۰٫۶۱۱	۳۵
۷٫۱۱۵	۰٫۱۳۹	۰٫۹۹۰	۱٫۴۳۱	۸۲۰	۰٫۷۲۷	۰٫۸۰۹	۰٫۵۸۸	۰٫۶۲۸	۳۶
۸٫۱۴۴	۰٫۱۲۲	۰٫۹۹۳	۱٫۴۴۹	۸۳۰	۰٫۷۵۴	۰٫۷۹۹	۰٫۶۰۲	۰٫۶۴۶	۳۷
۹٫۵۱۴	۰٫۱۰۵	۰٫۹۹۵	۱٫۴۶۶	۸۴۰	۰٫۷۸۱	۰٫۷۸۸	۰٫۶۱۶	۰٫۶۶۳	۳۸
۱۱٫۴۳	۰٫۰۸۷	۰٫۹۹۶	۱٫۴۸۴	۸۵۰	۰٫۸۱۰	۰٫۷۷۷	۰٫۶۲۹	۰٫۶۸۱	۳۹
۱۴٫۳۰	۰٫۰۷۰	۰٫۹۹۸	۱٫۵۰۱	۸۶۰	۰٫۸۳۹	۰٫۷۶۶	۰٫۶۴۳	۰٫۶۹۸	۴۰
۱۷٫۰۸	۰٫۰۵۲	۰٫۹۹۹	۱٫۵۱۸	۸۷۰	۰٫۸۶۹	۰٫۷۵۵	۰٫۶۵۶	۰٫۷۱۶	۴۱
۲۰٫۹۶۴	۰٫۰۳۵	۰٫۹۹۹	۱٫۵۳۶	۸۸۰	۰٫۹۰۰	۰٫۷۴۳	۰٫۶۶۹	۰٫۷۳۳	۴۲
۲۷٫۲۹	۰٫۰۱۷	۱٫۰۰۰	۱٫۵۵۳	۸۹۰	۰٫۹۳۳	۰٫۷۳۱	۰٫۶۸۲	۰٫۷۵۰	۴۳
۰٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۵۷۱	۹۰۰	۰٫۹۶۶	۰٫۷۱۹	۰٫۶۹۵	۰٫۷۶۸	۴۴
					۱٫۰۰۰	۰٫۷۰۷	۰٫۷۰۷	۰٫۷۸۵	۴۵

جدول توابع نمایی

e^{-x}	e^x	x	e^{-x}	e^x	x
۰٫۰۸۲۱	۱۲٫۱۸۲	۲٫۵	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۰٫۰۰
۰٫۰۷۴۳	۱۳٫۴۶۶	۲٫۶	۰٫۹۵۱۲	۱٫۰۵۱۳	۰٫۰۵
۰٫۰۶۷۲	۱۴٫۸۸۰	۲٫۷	۰٫۹۰۴۸	۱٫۱۰۵۲	۰٫۱۰
۰٫۰۶۰۸	۱۶٫۴۴۵	۲٫۸	۰٫۸۶۰۷	۱٫۱۶۱۸	۰٫۱۵
۰٫۰۵۵۰	۱۸٫۱۷۴	۲٫۹	۰٫۸۱۸۷	۱٫۲۲۱۴	۰٫۲۰
۰٫۰۴۹۸	۲۰٫۰۸۶	۳٫۰	۰٫۷۷۸۸	۱٫۲۸۴۰	۰٫۲۵
۰٫۰۴۵۰	۲۲٫۱۹۸	۳٫۱	۰٫۷۴۰۸	۱٫۳۴۹۹	۰٫۳۰
۰٫۰۴۰۸	۲۴٫۵۳۳	۳٫۲	۰٫۷۰۴۷	۱٫۴۱۹۱	۰٫۳۵
۰٫۰۳۶۹	۲۷٫۱۱۳	۳٫۳	۰٫۶۷۰۳	۱٫۴۹۱۸	۰٫۴۰
۰٫۰۳۳۴	۲۹٫۹۶۴	۳٫۴	۰٫۶۳۷۶	۱٫۵۶۸۳	۰٫۴۵
۰٫۰۳۰۲	۳۳٫۱۱۵	۳٫۵	۰٫۶۰۶۵	۱٫۶۴۸۷	۰٫۵۰
۰٫۰۲۷۳	۳۶٫۵۹۸	۳٫۶	۰٫۵۷۶۹	۱٫۷۳۳۳	۰٫۵۵
۰٫۰۲۴۷	۴۰٫۴۴۷	۳٫۷	۰٫۵۴۸۸	۱٫۸۲۲۱	۰٫۶۰
۰٫۰۲۲۴	۴۴٫۷۰۱	۳٫۸	۰٫۵۲۲۰	۱٫۹۱۵۵	۰٫۶۵
۰٫۰۲۰۲	۴۹٫۴۰۲	۳٫۹	۰٫۴۹۶۶	۲٫۰۱۳۸	۰٫۷۰
۰٫۰۱۸۳	۵۴٫۵۹۸	۴٫۰	۰٫۴۷۲۴	۲٫۱۱۷۰	۰٫۷۵
۰٫۰۱۶۶	۶۰٫۳۴۰	۴٫۱	۰٫۴۴۹۳	۲٫۲۲۵۵	۰٫۸۰
۰٫۰۱۵۰	۶۶٫۶۸۶	۴٫۲	۰٫۴۲۷۴	۲٫۳۳۹۶	۰٫۸۵
۰٫۰۱۳۶	۷۳٫۷۰۰	۴٫۳	۰٫۴۰۶۶	۲٫۴۵۹۶	۰٫۹۰
۰٫۰۱۲۳	۸۱٫۴۵۱	۴٫۴	۰٫۳۸۶۷	۲٫۵۸۵۷	۰٫۹۵
۰٫۰۱۱۱	۹۰٫۰۱۷	۴٫۵	۰٫۳۶۷۹	۲٫۷۱۸۳	۱٫۰
۰٫۰۱۰۱	۹۹٫۴۸۴	۴٫۶	۰٫۳۵۰۹	۳٫۰۰۴۲	۱٫۱
۰٫۰۰۹۱	۱۰۹٫۹۵	۴٫۷	۰٫۳۳۵۱	۳٫۳۲۰۱	۱٫۲
۰٫۰۰۸۲	۱۲۱٫۵۱	۴٫۸	۰٫۳۲۰۲	۳٫۶۶۹۳	۱٫۳
۰٫۰۰۷۴	۱۳۴٫۲۹	۴٫۹	۰٫۳۰۶۶	۴٫۰۵۵۲	۱٫۴
۰٫۰۰۶۷	۱۴۸٫۴۱	۵	۰٫۲۹۳۱	۴٫۴۸۱۷	۱٫۵
۰٫۰۰۶۰	۱۶۳٫۴۳	۶	۰٫۲۸۰۹	۴٫۹۵۳۰	۱٫۶
۰٫۰۰۵۴	۱۷۹٫۶۶	۷	۰٫۲۶۹۱	۵٫۴۷۳۹	۱٫۷
۰٫۰۰۴۹	۱۹۸٫۱۰	۸	۰٫۲۵۸۳	۶٫۰۴۹۶	۱٫۸
۰٫۰۰۴۵	۲۱۹٫۳۱	۹	۰٫۲۴۸۶	۶٫۶۸۵۹	۱٫۹
۰٫۰۰۴۱		۱۰	۰٫۲۴۰۳	۷٫۳۸۹۱	۲٫۰
۰٫۰۰۳۷	۲۲۰٫۲۶		۰٫۲۳۲۵	۸٫۱۶۶۲	۲٫۱
۰٫۰۰۳۳			۰٫۲۲۵۰	۹٫۰۲۵۰	۲٫۲
۰٫۰۰۳۰			۰٫۲۱۸۱	۹٫۹۷۴۲	۲٫۳
۰٫۰۰۲۷			۰٫۲۱۰۰	۱۱٫۰۲۳	۲٫۴
۰٫۰۰۲۴			۰٫۲۰۲۷		
۰٫۰۰۲۱			۰٫۱۹۵۹		
۰٫۰۰۱۸			۰٫۱۸۹۶		
۰٫۰۰۱۶			۰٫۱۸۳۷		
۰٫۰۰۱۴			۰٫۱۷۸۱		
۰٫۰۰۱۲			۰٫۱۷۲۸		
۰٫۰۰۱۰			۰٫۱۶۷۸		
۰٫۰۰۰۸			۰٫۱۶۳۰		
۰٫۰۰۰۶			۰٫۱۵۸۴		
۰٫۰۰۰۴			۰٫۱۵۴۰		
۰٫۰۰۰۳			۰٫۱۴۹۷		
۰٫۰۰۰۲			۰٫۱۴۵۶		
۰٫۰۰۰۱			۰٫۱۴۱۶		
۰٫۰۰۰۰			۰٫۱۳۷۷		

جدول تناوبی عناصر

جرمهای اتمی که بر مبنای جرم اتمی ایزوتوپ (همجای) اصلی کربن برابر عدد درست ۱۲٫۰۰۰۰۰۰، تعیین شده‌اند، آخرین مقادیر [۱۹۶۱ (۰.ش.ه. ۱۳۴۰)] پذیرفته شده از طرف اتحادیه بین‌المللی شیمی محض و کاربردی هستند. یکای جرمی که در این جدول به کار رفته است یکای جرم اتمی (amu) نامیده می‌شود:

گروه ← I II III IV

دوره ۱	سری ۱	I ۱H ۱٫۰۰۷۹۷	II ۴Be ۹٫۰۱۲۲	III ۵B ۱۰٫۸۱۱	IV ۶C ۱۲٫۰۱۱۱۵
۲	۲	۳Li ۶٫۹۳۹	۹Be ۹٫۰۱۲۲	۱۰B ۱۰٫۸۱۱	۱۲C ۱۲٫۰۱۱۱۵
۳	۳	۱۱Na ۲۲٫۹۸۹۸	۱۲Mg ۲۴٫۳۱۲	۱۳Al ۲۶٫۹۸۱۵	۱۴Si ۲۸٫۰۸۶
۴	۴	۱۹K ۳۹٫۱۰۲	۲۰Ca ۴۰٫۰۸	۲۱Sc ۴۴٫۹۵۶	۲۲Ti ۴۷٫۹۰
	۵	۲۹Cu ۶۳٫۵۴	۳۰Zn ۶۵٫۳۷	۳۱Ga ۶۹٫۷۲	۳۲Ge ۷۲٫۵۹
۵	۶	۳۷Rb ۸۵٫۴۷	۳۸Sr ۸۷٫۶۲	۳۹Y ۸۸٫۹۰۵	۴۰Zr ۹۱٫۲۲
	۷	۴۷Ag ۱۰۷٫۸۷۰	۴۸Cd ۱۱۲٫۴۰	۴۹In ۱۱۴٫۸۲	۵۰Sn ۱۱۸٫۶۹
۶	۸	۵۵Cs ۱۳۲٫۹۰۵	۵۶Ba ۱۳۷٫۳۴	۵۷La ۱۳۸٫۹۱	۷۲Hf ۱۷۸٫۴۹
	۹	۷۹Au ۱۹۶٫۹۶۷	۸۰Hg ۲۰۰٫۵۹	۸۱Tl ۲۰۴٫۳۷	۸۲Pb ۲۰۷٫۱۹
۷	۱۰	۸۷Fr [۲۲۳]	۸۸Ra [۲۲۶٫۰۵]	۸۹Ac [۲۲۷]	۹۰Th ۲۳۲٫۰۳۸

۶۲Sm ۱۵۰٫۳۵	۶۱Pm [۱۴۷]	۶۰Nd ۱۴۴٫۲۴	۵۹Pr ۱۴۰٫۹۰۷	۵۸Ce ۱۴۰٫۱۲	۵۷La ۱۳۸٫۹۱	}	سری لانتانیدها
۹۴Pu [۲۴۲]	۹۳Np [۲۳۷]	۹۲U ۲۳۸٫۰۳	۹۱Pa [۲۳۱]	۹۰Th ۲۳۲٫۰۳۸	۸۹Ac [۲۲۷]		

جدول ثابتهای اساسی

ثابت

مقدار	نماد	سرعت نور
$۲٫۹۹۷۹ \times ۱۰^۸ \text{ms}^{-۱}$	c	سرعت نور
$۱٫۶۰۲۱ \times ۱۰^{-۱۹} \text{C}$	e	بار بنیادی
$۹٫۱۰۹۱ \times ۱۰^{-۳۱} \text{kg}$	m_e	جرم سکون الکترون
$۱٫۶۷۲۵ \times ۱۰^{-۲۷} \text{kg}$	m_p	جرم سکون پروتون
$۱٫۶۷۴۸ \times ۱۰^{-۲۷} \text{kg}$	m_n	جرم سکون نوترون
$۶٫۶۲۵۶ \times ۱۰^{-۳۴} \text{Js}$	h	ثابت پلانک
$۱٫۰۵۴۵ \times ۱۰^{-۳۴} \text{Js}$	$\hbar = h/2\pi$	
$۱٫۷۵۸۱ \times ۱۰^{۱۱} \text{kg}^{-۱}\text{C}$	e/m_e	نسبت بار به جرم الکترون
$۴٫۱۳۵۶ \times ۱۰^{-۱۵} \text{Js C}^{-۱}$	h/e	نسبت h به e
$۵٫۲۹۱۷ \times ۰^{-۱۱} \text{m}$	a_0	شعاع بور
$۲٫۴۲۶۲ \times ۱۰^{-۱۲} \text{m}$	$\lambda_{C,0}$	طول موج کامپتون الکترون
$۱٫۳۲۱۴ \times ۱۰^{-۱۵} \text{m}$	$\lambda_{C,p}$	طول موج کامپتون پروتون
$۱٫۰۹۷۴ \times ۱۰^۷ \text{m}^{-۱}$	R	ثابت ریذبرگ

۱amu = ۱.۶۶۰۵۴ × ۱۰^{-۲۷}kg
 در این مقیاس، جرم اتمی کربن ۱۲.۰۱۱۱۵ است، زیرا متوسط ایزوتوپهای طبیعی موجود کربن است. برای عنصری که به طور مصنوعی ساخته می‌شوند، جرم اتمی تقریبی پذیرفته‌شده آن در داخل کروشه داده شده است.

0	VIII			VII	VI	V
^۴ He ۴.۰۰۲۶						
^{۱۰} Ne ۲۰.۱۸۳				^۹ F ۱۸.۹۹۸۴	^{۱۸} O ۱۵.۹۹۹۴	^{۱۷} N ۱۴.۰۰۶۷
^{۱۸} Ar ۳۹.۹۴۸				^{۱۷} Cl ۳۵.۴۵۳	^{۱۶} S ۳۲.۰۶۴	^{۱۵} P ۳۰.۹۷۳۸
	^{۲۸} Ni ۵۸.۷۱	^{۲۷} Co ۵۸.۹۳۳۲	^{۲۶} Fe ۵۵.۸۴۷	^{۲۵} Mn ۵۴.۹۳۸۰	^{۲۴} Cr ۵۱.۹۹۶	^{۲۳} V ۵۰.۹۴۲
^{۳۶} Kr ۸۳.۷۸۰				^{۳۵} Br ۷۹.۹۰۹	^{۳۴} Se ۷۸.۹۶	^{۳۳} As ۷۴.۹۲۱۶
	^{۴۶} Pd ۱۰۶.۹۴	^{۴۵} Rh ۱۰۲.۹۰۵	^{۴۴} Ru ۱۰۱.۰۷	^{۴۳} Tc [۹۹]	^{۴۲} Mo ۹۵.۹۴	^{۴۱} Nb ۹۲.۹۰۶
^{۵۴} Xe ۱۳۱.۳۰				^{۵۳} I ۱۲۶.۹۰۴۴	^{۵۲} Te ۱۲۷.۶۰	^{۵۱} Sb ۱۲۱.۷۵
	^{۷۸} Pt ۱۹۵.۰۹	^{۷۷} Ir ۱۹۲.۲۲	^{۷۶} Os ۱۹۰.۲۲	^{۷۵} Re ۱۸۶.۲	^{۷۴} W ۱۸۳.۸۵	^{۷۳} Ta ۱۸۰.۹۴۸
^{۸۶} Rn [۲۲۲]				^{۸۵} At [۲۱۰]	^{۸۴} Po [۲۱۰]	^{۸۳} Bi ۲۰۸.۹۸۰

^{۷۱} Lu	^{۷۰} Yb	^{۶۹} Tm	^{۶۸} Er	^{۶۷} Ho	^{۶۶} Dy	^{۶۵} Tb	^{۶۴} Gd	^{۶۳} Eu
۱۷۴.۹۷	۱۷۳.۰۴	۱۶۸.۹۳۴	۱۶۷.۲۶	۱۶۴.۹۳۰	۱۶۲.۵۰	۱۵۸.۹۲۴	۱۵۷.۲۵	۱۵۱.۰
۱۰۳	^{۱۰۲} No	^{۱۰۱} Md	^{۱۰۰} Fm	^{۹۹} Es	^{۹۸} Cf	^{۹۷} Bk	^{۹۶} Cm	^{۹۵} A
	[۲۵۶]	[۲۵۵]	[۲۵۴]	[۲۴۹]	[۲۴۹]	[۲۴۹]	[۲۴۵]	[۲۴

مقدار

نماد

ثابت

$۹.۲۷۳۳۲ \times ۱۰^{-۲۴} \text{J}^{-۱}$	μ_B	مکنتون بور
$۶.۰۲۲۲۵ \times ۱۰^{۲۳} \text{mol}^{-۱}$	N_A	ثابت آووگادرو
$۱.۳۸۰۵ \times ۱۰^{-۲۳} \text{J}^\circ\text{K}^{-۱}$	k	ثابت بولتزمن
$۸.۳۱۴۳ \text{J}^\circ\text{K}^{-۱} \text{mol}^{-۱}$	R	ثابت گازهای کامل
$۲.۲۴۱۴ \times ۱۰^{-۲} \text{m}^3 \text{mol}^{-۱}$	V_0	حجم گاز کامل در شرایط متعارفی (STP)
$۹.۶۴۸۷ \times ۱۰^۴ \text{C mol}^{-۱}$	F	ثابت فاراده
$۸.۹۸۷۴ \times ۱۰^۹ \text{N m}^\circ\text{C}^{-۲}$	K_e	ثابت کولن
$۸.۸۵۴۴ \times ۱۰^{-۱۱} \text{N}^{-۱} \text{m}^{-۲} \text{C}^۲$	ϵ_0	گذردهی خلا
$۱.۰۰۰۰۰ \times ۱۰^{-۷} \text{m kg C}^{-۲}$	K_m	ثابت منطاطیسی
$۱.۳۵۶۶ \times ۱۰^{-۶} \text{m kg C}^{-۲}$	μ_0	تراوایی خلا
$۶.۶۷۰ \times ۱۰^{-۱۱} \text{N m}^\circ\text{kg}^{-۲}$	γ	ثابت گرانش
$۹.۷۸۰۵ \text{ms}^{-۲}$	g	شتاب گرانی در سطح دریا و دراستوا

ثابتهای عددی: $\sqrt{3} = ۱.۷۳۲۰$; $\sqrt{2} = ۱.۴۱۴۲$; $e = ۲.۷۱۸۳$; $\pi = ۳.۱۴۱۶$

جدول یکاها و نمادها

بر حسب یکاهای اصلی	نام یکا	نماد	کمیت
$m\ k\ s\ A$	$m\ k\ g\ s\ C$		
m		l, s	طول
kg		m	جرم
s		t	زمان
ms^{-1}		v	سرعت
ms^{-2}		a	شتاب
s^{-1}		ω	سرعت زاویه‌ای
s^{-1}		ω	بسامد زاویه‌ای
s^{-1}	هرتز (Hz)	ν	بسامد
$m\ k\ g\ s^{-1}$		p	اندازه حرکت
$m\ k\ g\ s^{-2}$	نیوتون (N)	F	نیرو
$m^2\ k\ g\ s^{-1}$		L	اندازه حرکت زاویه‌ای
$m^2\ k\ g\ s^{-2}$		τ	گشتاور نیرو
$m^2\ k\ g\ s^{-2}$	ژول (J)	W	کار
$m^2\ k\ g\ s^{-2}$	وات (W)	P	توان
$m^2\ k\ g\ s^{-2}$	ژول (J)	E_k, E_p, U, E	انرژی
$m^2\ k\ g\ s^{-2}$ / درجه	درجه کلوین (K)	T	دما
$m^2\ s^{-1}$		D	ضریب پخش
$m\ k\ g\ s^{-2}\ K^{-1}$		K	ضریب رسانندگی گرمایی
$m^{-1}\ k\ g\ s^{-1}$		η	ضریب وشکسانی
$m^{-1}\ k\ g\ s^{-2}$		Y	مدول یانگ
$m^{-1}\ k\ g\ s^{-2}$		κ	مدول بیه‌ای
$m^{-1}\ k\ g\ s^{-2}$		G	مدول برشی
$m^2\ k\ g$		I	گشتاور اجتنی
$m\ s^{-2}$		G	میدان گرانشی
$m^2\ s^{-2}$		V_0	پتانسیل گرانشی
$A\ s$	C	q, Q	بار الکتریکی
A	$s^{-1}\ C$	I	شدت جریان الکتریکی
$m^2\ k\ g\ s^{-2}\ A^{-2}$	$m^2\ k\ g\ s^{-1}\ C^{-2}$	R	مقاومت الکتریکی
$m\ k\ g\ s^{-2}\ A^{-1}$	$m\ k\ g\ s^{-2}\ C^{-1}$	E	میدان الکتریکی
$m^2\ k\ g\ s^{-2}\ A^{-1}$	$m^2\ k\ g\ s^{-1}\ C^{-1}$	V	پتانسیل الکتریکی
$m^{-2}\ A$	$m^{-2}\ s^{-1}\ C$	j	چگالی جریان
$m^2\ k\ g\ s^{-2}\ A^{-2}$	$m^2\ k\ g\ C^{-2}$	L	اقا
$m^{-2}\ k\ g^{-1}\ s^2\ A^2$	$m^{-2}\ k\ g^{-1}\ s^2\ C^2$	ϵ_0	گذرددی
$m^{-2}\ s\ A$	$m^{-2}\ C$	φ	قطبش
$m^{-2}\ s\ A$	$m^{-2}\ C$	\mathcal{D}	جابجایی دی الکتریکی
$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$	$kg\ s^{-1}\ C^{-1}$	B	میدان مغناطیسی
$m\ k\ g\ s^{-2}\ A^{-2}$	$m\ k\ g\ C^{-2}$	μ_0	تراوایی مغناطیسی
$m^{-1}\ A$	$m^{-1}\ s^{-1}\ C$	\mathcal{M}	مغناطیس
$m^{-1}\ A$	$m^{-1}\ s^{-1}\ C$	\mathcal{H}	میدان مغناطیان
$m^2\ k\ g\ s^{-2}\ A^{-1}$	$m^2\ k\ g\ s^{-1}\ C^{-1}$	Φ_B	شار مغناطیسی
$m\ s\ A$	$m\ C$	p	گشتاور دو قطبی الکتریکی
$m^2\ s\ A$	$m^2\ C$	Q	گشتاور چهار قطبی الکتریکی
$m^2\ A$	$m^2\ s^{-1}\ C$	M	گشتاور دو قطبی مغناطیسی
$m^2\ A$	$m^2\ s^{-1}\ C$	Q	گشتاور چهار قطبی مغناطیسی
$m^{-2}\ k\ g^{-1}\ s^2\ A^2$	$m^{-2}\ k\ g^{-1}\ s^2\ C^2$	C	ظرفیت
	(F) فاراد		

فشار

$$1 \text{ Nm}^{-2} = 9.866 \times 10^{-6} \text{ atm}$$

$$= 1.359 \times 10^{-4} \text{ lbf in}^{-2} = 10 \text{ dyn cm}^{-2}$$

$$1 \text{ atm} = 1.47 \text{ lbf in}^{-2} = 1.013 \times 10^6 \text{ Nm}^{-2}$$

$$1 \text{ bar} = 10^6 \text{ dyn cm}^{-2}$$

انرژی

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg} = 0.239 \text{ cal}$$

$$= 6.242 \times 10^{18} \text{ eV}$$

$$1 \text{ eV} = 10^{-9} \text{ MeV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ erg}$$

$$= 2.38 \times 10^4 \text{ amu}$$

$$1 \text{ amu} = 1.49 \times 10^{-10} \text{ J}$$

$$= 3.82 \times 10^{-11} \text{ cal} = 931 \text{ MeV}$$

دما

$$^{\circ}\text{K} = 273.15 + ^{\circ}\text{C}$$

$$^{\circ}\text{C} = 5(^{\circ}\text{F} - 32)/9$$

$$^{\circ}\text{F} = 9^{\circ}\text{C} + 32/5$$

توان

$$1 \text{ W} = 1.341 \times 10^{-7} \text{ hp}$$

$$1 \text{ hp} = 745.7 \text{ W}$$

بار الکتریکی

$$1 \text{ C} = 3 \times 10^9 \text{ stC}$$

$$1 \text{ stC} = 1/3 \times 10^{-9} \text{ C}$$

جریان

$$1 \text{ A} = 3 \times 10^9 \text{ stA}$$

$$1 \text{ stA} = 1/3 \times 10^{-9} \text{ A}$$

$$1 \mu\text{A} = 10^{-6} \text{ A}, 1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A}$$

میدان الکتریکی

$$1 \text{ NC}^{-1} = 1 \text{ Vm}^{-1} = 10^{-3} \text{ Vcm}^{-1}$$

$$= 1/3 \times 10^{-3} \text{ st Vcm}^{-1}$$

پتانسیل الکتریکی

$$1 \text{ V} = 1/3 \times 10^{-3} \text{ stV}$$

$$1 \text{ stV} = 3 \times 10^3 \text{ V}$$

مقاومت

$$1 \Omega = 10^9 \mu\Omega$$

$$1 \text{ M}\Omega = 10^6 \Omega$$

ظرفیت

$$1 \text{ F} = 9 \times 10^{11} \text{ stF}$$

$$1 \text{ stF} = 1/9 \times 10^{-11} \text{ F}$$

$$1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}, 1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$$

میدان مغناطیسی

$$1 \text{ T} = 10^4 \text{ gauss}, 1 \text{ gauss} = 10^{-4} \text{ T}$$

شار مغناطیسی

$$1 \text{ Wb} = 10^8 \text{ ماکسول}$$

$$1 \text{ ماکسول} = 10^{-8} \text{ Wb}$$

میدان مغناطیسی

$$1 \text{ Am}^{-1} = 4\pi \times 10^{-3} \text{ اورستد}$$

$$1 \text{ اورستد} = 1/4\pi \times 10^3 \text{ Am}^{-1}$$

در تمام موارد، عدد ۳ عملاً به جای ۲.۹۹۸ و عدد ۹ به جای ۸.۹۸۷ به کار رفته است.

زمان

$$1 \text{ s} = 1.667 \times 10^{-2} \text{ min} = 2.778 \times 10^{-4} \text{ hr}$$

$$= 3.169 \times 10^{-8} \text{ yr}$$

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s} = 1.667 \times 10^{-2} \text{ hr}$$

$$= 1.901 \times 10^{-7} \text{ yr}$$

$$1 \text{ hr} = 3600 \text{ s} = 60 \text{ min} = 1.141 \times 10^{-2} \text{ yr}$$

$$= 3.156 \times 10^7 \text{ s} = 5.259 \times 10^5 \text{ min}$$

$$= 8.766 \times 10^3 \text{ hr}$$

طول

$$1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm} = 3.937 \text{ in}$$

$$= 6.214 \times 10^{-4} \text{ mi}$$

$$1 \text{ mi} = 5280 \text{ ft} = 1.609 \text{ km}$$

$$1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$$

$$1 \text{ \AA} (\text{آنگستروم}) = 10^{-10} \text{ cm}$$

$$= 10^{-8} \text{ m} = 10^{-4} \mu\text{ (میکرون)}$$

$$1 \mu\text{ (میکرون)} = 10^{-6} \text{ m}$$

$$1 \text{ AU} (\text{واحد نجومی}) = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$$

$$1 \text{ سال نوری} = 9.46 \times 10^{15} \text{ m}$$

$$1 \text{ پارسک} = 3.084 \times 10^{16} \text{ m}$$

زاویه

$$1 \text{ rad} (\text{رادیان}) = 57.3^{\circ}$$

$$1^{\circ} = 1.74 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

$$1' = 2.91 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$1'' = 4.85 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

مساحت

$$1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2 = 1.55 \times 10^{-6} \text{ in}^2 = 1.076 \times 10^{-7} \text{ ft}^2$$

$$1 \text{ in}^2 = 6.452 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ ft}^2 = 144 \text{ in}^2 = 9.29 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

حجم

$$1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3 = 10^3 \text{ لیتر}$$

$$= 35.3 \text{ ft}^3 = 6.1 \times 10^5 \text{ in}^3$$

$$1 \text{ ft}^3 = 28.3 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 28.3 \text{ لیتر}$$

$$1 \text{ in}^3 = 16.39 \text{ cm}^3$$

سرعت

$$1 \text{ m s}^{-1} = 10^2 \text{ cm s}^{-1} = 3.281 \text{ ft s}^{-1}$$

$$1 \text{ ft s}^{-1} = 30.48 \text{ cm s}^{-1}$$

$$1 \text{ mi min}^{-1} = 60 \text{ mi hr}^{-1} = 88 \text{ ft s}^{-1}$$

شتاب

$$1 \text{ m s}^{-2} = 10^2 \text{ cm s}^{-2} = 3.281 \text{ ft s}^{-2}$$

$$1 \text{ ft s}^{-2} = 30.48 \text{ cm s}^{-2}$$

جرم

$$1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g} = 2.205 \text{ lb}$$

$$1 \text{ lb} = 453.6 \text{ g} = 0.4536 \text{ kg}$$

$$1 \text{ amu} = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

نیرو

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyn} = 0.2248 \text{ lbf} = 0.102 \text{ kgf}$$

$$1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N} = 2.248 \times 10^{-6} \text{ lbf}$$

$$1 \text{ lbf} = 4.448 \text{ N} = 4.448 \times 10^5 \text{ dyn}$$

$$1 \text{ kgf} = 9.81 \text{ N}$$

پاسخ مسئله‌های فرد

فصل ۱۴

$$۱۰۱۴ \quad ۱۰^{-۸} \text{ N} \quad ۴۲۱ \times ۱۰^{۳۶}, ۱۱۶ \times ۱۰^{۳۶}$$

$$۳۰۱۴ \quad ۱۰^{۴۴} \times ۴۱۴, ۱۰^{۳۶} \times ۱۱۶$$

$$۵۰۱۴ \quad (d + 2l \sin \theta)^2 \operatorname{tg} \theta = 9 \times 10^9 (q^2 / mg)$$

$$۷۰۱۴ \quad (الف) ۱۰^{-۱۵} \text{ N} \times ۴۸, (ب) ۱۰^{۱۴} \text{ g} \times ۵۳۸, ۱۰^{۱۵} \text{ ms}^{-۲} \times ۲۲۸۵$$

$$۹۰۱۴ \quad (الف) ۱۰^۳ \text{ NC}^{-۱} \times ۱۰۱۱, (ب) ۱۰^۵ \text{ ms}^{-۱} \times ۲۶۷$$

$$۱۱۰۱۴ \quad (الف) ۱۰^{-۹} \text{ s} \times ۵۶۹, (ب) ۱۰^{-۲} \text{ m} \times ۱۴۲, (ج) ۱۰^{-۲} \text{ m} \times ۹۸۶$$

$$۲ \quad ۱۳۰۱۴$$

$$۱۵۰۱۴ \quad (الف) ۱۰^{-۴} \text{ ms}^{-۱} \times ۲۵$$

$$(ب) \quad ۱۰^{-۴} \times ۵۹۸۴, ۱۰^{-۴} \times ۱۵۷۱, ۱۰^{-۴} \times ۲۱۵۹$$

$$۱۰^{-۴} \times ۳۳۳۳, ۱۰^{-۴} \text{ ms}^{-۱} \times ۵۵۹۵, (ج) ۱۰^{-۴} \times ۴۴۸۴$$

$$۱۰^{-۴} \times ۴۰۷۱, ۱۰^{-۴} \times ۴۶۵۹, ۱۰^{-۴} \times ۵۸۳۳$$

$$۱۰^{-۴} \text{ ms}^{-۱} \times ۷۵۹۵, (د) \text{ ثابت برابر } ۱۰^{-۴} \times ۵۸۷ \text{ و بار اضافی به ترتیب}$$

$$۶, ۷, ۸, ۱۰ \text{ و } ۱۳ \text{ برابر آن است, (ه) } ۱۰^{-۹} \text{ C} \times ۱۶۰۱۷$$

$$۱۷۰۱۴ \quad ۹۵۱ \text{ V}$$

$$۱۹۰۱۴ \quad (الف) ۱۰^{-۳} \text{ N} \times ۴۵ - (جاذبه), ۱۰^{-۳} \text{ N} \times ۹ \text{ (در راستای بار),}$$

$$۱۰^{-۷} \text{ C} \times ۳ - (جاذبه), (ب) ۱۰^{-۴} \text{ J} \times ۹,$$

$$۱۰^{-۴} \text{ J} \times ۴۵ - (ج) ۱۰^{-۴} \text{ J} \times ۱۸ - , \text{ برابر نصف مجموع مقادیر حالت}$$

(ب)، زیرا در حالت (ب) هر زوج دوپاد در نظر گرفته شده است.

$$۲۱۰۱۴ \text{ ms}^{-۲} \times ۱۰^{۲۸}، ۴۸۸۸ \times ۱۰^{-۱۲} \text{ J}، (ب) ۳۷۸۲ \times ۱۰^۷ \text{ ms}^{-۱}$$

$$۲۳۰۱۴ \text{ C} \times ۱۰^{-۷}، ۳ \text{ m}$$

$$۲۵۰۱۴ \text{ V} \times ۱۰^{۳}$$

$$۲۷۰۱۴ \text{ (الف)} \text{ V} \times ۱۰^۴، -۱۸۸ \times ۱۰^۴ \text{ NC}^{-۱}، -۳۶۶ \times ۱۰^۵ \text{ NC}^{-۱}، (ب) ۴۲۲۲ \times ۱۰^۵ \text{ V}$$

$$۱۰۱۲۳ \times ۱۰^۸ \text{ NC}^{-۱}، (ج) ۱۰۵۴ \times ۱۰^۶ \text{ V}، ۱۰۱۲۵ \times ۱۰^۸ \text{ NC}^{-۱}$$

$$(د) ۹ \times ۱۰^۳ \text{ V}، -۹ \times ۱۰^۵ \text{ NC}^{-۱}، زاویه ۱۹۹۱^\circ \text{ با خط واصل بارها}$$

می‌سازد، (ه) روی خط واصل دوبار، در خارج خط و به فاصله ۴۴۵m از بار کوچکتر.

$$۲۹۰۱۴ \text{ (ب)} \frac{۲q}{۴\pi\epsilon_0}، (ا) x = \pm \sqrt{۴ - a^2}، x(a^2 + x^2)^{۳/۲}$$

$$۳۳۰۱۴ \text{ (الف)} \text{ NC}^{-۱}، ۵۰ \text{ NC}^{-۱}، (ب) ۱۰۷۸ \text{ NC}^{-۱}$$

$$۳۷۰۱۴ \text{ (الف)} \text{ J} \times ۱۰^{-۱۸}، -۴۳۵۸ \times ۱۰^{-۱۸} \text{ J}، (ب) ۲۱۷۹ \times ۱۰^{-۱۸} \text{ J}$$

$$۶۷۵۶ \times ۱۰^{۱۵} \text{ Hz}، (د) -۲۱۷۹ \times ۱۰^{-۱۸} \text{ J}، (ج)$$

$$۳۹۰۱۴ \text{ (الف)} (e^2/4\pi\epsilon_0)(-1/r + 1/R)$$

$$(ب) (e^2/4\pi\epsilon_0)(-4/r + 1/R + 1/R_0)$$

R فاصله بین الکترونها و R_0 فاصله بین هسته‌هاست.

۴۱۰۱۴ نانسییتی:

$$v_p = ۱۳۸۴ \times ۱۰^۴ \sqrt{V} \text{ ms}^{-۱} \text{ و } v_e = ۵۷۹۳۱ \times ۱۰^۵ \sqrt{V} \text{ ms}^{-۱}؛ V \text{ بر-}$$

حسب ولت است.

$$۴۳۰۱۴ \text{ برای الکترون: (الف)} \text{ V} \times ۱۰^۴، ۴۶۶۲ \times ۱۰^۴ \text{ V}، (ب) ۲۹۴۵ \times ۱۰^۵ \text{ V}$$

$$(ج) ۷۸۶ \times ۱۰^۵ \text{ V}$$

$$\text{برای پروتون: (الف)} \text{ V} \times ۱۰^۷، ۸۵۶ \times ۱۰^۷ \text{ V}، (ب) ۴۰۷ \times ۱۰^۸ \text{ V}$$

$$(ج) ۱۲۴۳ \times ۱۰^۹ \text{ V}$$

$$۴۵۰۱۴ \text{ c} \times ۲۱۵$$

$$۴۷۰۱۴ \text{ (ب)} \sqrt{(2e/m)V_0} (1/v)، (ج) neV_0 [1 + (nv^2 L^2 / 2c^2)]^{-1/2}، (د) L \sqrt{n} [1 + (nv^2 L^2 / 2c^2)]^{-1/2}$$

$$۴۹۰۱۴ \text{ MeV} \times ۱۲۴۴$$

$$۵۱۰۱۴ \text{ MeV} \times ۱۶۷۰۲، ۱۷۰۰۱ \text{ MeV} \text{ برای هر هسته، } ۸۰۷۰۹ \text{ MeV}، ۲۷۰۰۲ \text{ MeV}$$

$$\text{برای هر هسته، } ۲۵۰۷۰ \text{ MeV}، ۲۷۲۴۷ \text{ MeV} \text{ برای هر هسته، } ۴۸۶۷۸ \text{ MeV}$$

۳۳۸۰ MeV برای هر هسته، ۷۷۹۰ MeV، ۳۸۹۵ MeV برای هر هسته،
 ۹۷۳۳۷ MeV، ۴۰۹۱ MeV برای هر هسته.

۵۳.۱۴ (الف) $1.115 \times 10^{-14} \text{ m}$ ، (ب) تقریباً ۱۱۱۵ برابر شعاع

۵۵.۱۴ (الف) $3.352 \times 10^6 \text{ ms}^{-1}$ ، $3.352 \times 10^{-3} \text{ m}$ ، (ب) ۱۷۹۹ m

۵۷.۱۴ (ب) $2.29 \times 10^6 \text{ ms}^{-1}$ ، (ج) $2.29 \times 10^6 \text{ ms}^{-1}$

(د) $1.0 \times 10^{23} \text{ NC}^{-1}$ ، $6.0 \times 10^{23} \text{ NC}^{-1}$ ، (ه) $1.056 \times 10^{18} \text{ ms}^{-2}$
 $1.776 \times 10^{17} \text{ ms}^{-2}$

۵۹.۱۴ (الف) $1.222 \times 10^7 \text{ ms}^{-1}$ ، $3.783 \times 10^7 \text{ ms}^{-1}$

(ب) $3.975 \times 10^7 \text{ ms}^{-1}$ تقریباً 18° با راستای میدان،

(ج) $6.10 \times 10^{-1} \text{ m}$ ، $7.695 \times 10^{-1} \text{ m}$ ، (د) $7.195 \times 10^{-16} \text{ J}$ یا

$4.49 \times 10^2 \text{ eV}$

۶۱.۱۴ 5.57×10^{-16} ، 1.02×10^{-15}

$\sqrt{2z/a}$ ، $\sqrt{2az}$ ، $q\sigma/2m\epsilon_0$ ، ۶۳.۱۴

۶۵.۱۴ (الف) سهمی، (ب) $(v_0 \sin \alpha)^2/2a = z_{\text{max}}$ ، (ج) $v_0 \cos \alpha \sqrt{2z_{\text{max}}/a}$
 در اینجا α زاویه اولیه بالای افق و $a = \sigma/2m\epsilon_0$ است.

(۶۷.۱۴)
$$(-q^2/\pi\epsilon_0\alpha) \left\{ \ln 2 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda n^2}} + \frac{(-1)^{n-i}}{\sqrt{n^2+i^2}} \right) \right\}$$

$\approx 0.56(-q^2/\pi\epsilon_0 a)$

۶۹.۱۴ $(\sigma/2\epsilon_0) \ln(R^2/r^2 + 1)$ ، $(\sigma/2\epsilon_0)(\sqrt{R^2+r^2} - r)$

۷۱.۱۴ $\epsilon_{||} = 0$ ، $\epsilon_{\perp} = (2/4\pi\epsilon_0 R) \sin \theta$

$-\frac{1}{r}(\sigma/\epsilon_0)z$ ، $\sigma/2\epsilon_0$ ، ۷۳.۱۴

۷۷.۱۴ نسبت به محور Y : $Q = -3qa^2$ ، $V = -Q/4\pi\epsilon_0 Y^3$

$\epsilon = -Q/3\pi\epsilon_0 y^4$. نسبت به محور Z دارای همان شکل اما علامت منفی با علامت مثبت عوض شده و جای y را z گرفته است.

۷۹.۱۴ $\text{Arcsine}^{-1}(e^2/4\pi\epsilon_0)(1/aE_k)$ ، در اینجا E_k انرژی جنبشی پروتون است.

۸۳.۱۴ (ب) $4.8 \times 10^{-10} \text{ stC}$ ، (ج) $1 \text{ dyn cm}^2 \text{ stC}^{-2}$ ، K_e

$$\frac{1}{4} \times 10^{-2} \text{ dyn st C}^{-1} = 1 \text{ NC}^{-1} \text{ (د)} \quad \epsilon_0 = \left(\frac{1}{4}\pi\right) \text{ st C}^2 \text{ dyn}^{-1} \text{ cm}^{-2}$$

$$K_e = 9 \times 10^9 \text{ dyn cm}^2 \text{ abC}^{-2} \text{ ۸۵-۱۴}$$

$$\epsilon_0 = \left(\frac{1}{4}\pi\right) \times \frac{1}{9} \times 10^{-2} \text{ dyn}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ ab C}^2$$

$$1 \text{ abC} = 3 \times 10^{10} \text{ st C}$$

$$\epsilon = 9 \times 10^9 \text{ q/r}^2, V = 9 \times 10^9 \text{ q/r} \text{ ۸۷-۱۴}$$

۸۹-۱۴ برای هیدروژن: $-137598 = \text{eV}$, -33499 ۵eV , $-137598 = \text{eV}$

، -1072 eV ، -08499 eV

برای هلیوم یونیده: -54392 eV ، -137598 eV ، -67039 eV

۴۰۷۹۴ eV ، -33499 ۵eV

فصل ۱۵

$$10^7 \text{ s}^{-1}, 5968 \times 10^{-5} \text{ T} \quad 10.15$$

$$1744 \times 10^8 \text{ s}^{-1} \text{ (ج)}, 3779 \times 10^{-1} \text{ m} \text{ (ب)}, 3748 \times 10^{-2} \text{ m} \text{ (الف)} \quad 30.15$$

$$1743 \times 10^{-6} \text{ s}, 1774 \text{ m} \text{ (ب)}, 4377 \times 10^{-8} \text{ s}, 08528 \text{ m} \text{ (الف)} \quad 50.15$$

$$213 \times 10^{-2} \text{ m} \quad 70.15$$

$$64 \times 10^{-3} \text{ m} \text{ (ب)}, 372 \times 10^{-3} \text{ m} \text{ (الف)} \quad 90.15$$

$$\mathbf{F}_\varphi = -\mathbf{u}_x qvB/\sqrt{2}, \mathbf{F}_\tau = \mathbf{u}_z qvB/\sqrt{2}, \mathbf{F}_\rho = 0, \mathbf{F}_\lambda = \mathbf{u}_z qvB \quad 110.15$$

$$\mathbf{F}_\varphi = -\mathbf{u}_z qvB/\sqrt{3} + \mathbf{u}_x qvB/\sqrt{3}, \mathbf{F}_\delta = -\mathbf{u}_x qvB$$

$$130.15 \quad 2 \times 10^{-1} \text{ T} \text{ در راستای منفی محور } Y \text{ است.}$$

$$4783 \times 10^{-2} \text{ m} \text{ (ج)}, 177 \times 10^7 \text{ ms}^{-1} \text{ (الف)} \quad 150.15$$

$$960 \text{ V} \text{ (ب)}, 10206 \text{ R} \text{ (الف)} \quad 170.15$$

$$1724 \times 10^{-3} \text{ m} \quad 210.15$$

$$4 \times 10^6 \text{ ms}^{-1} \text{ (ب)}, 2087 \times 10^{-1} \text{ T} \text{ (الف)} \quad 250.15$$

$$9(895) \text{ (د)}, 0817 \text{ MeV} \text{ (ج)}$$

$$4 \times 10^6 \text{ ms}^{-1} \text{ (ب)}, 2074 \times 10^{-1} \text{ T} \text{ (الف)} \quad \text{برای ذره آلفا:}$$

$$8(892) \text{ (د)}, 0833 \text{ MeV} \text{ (ج)}$$

$$372 \times 10^6 \text{ ms}^{-1}, 08136 \text{ MeV} \text{ (ب)}, 08209 \text{ T} \text{ (الف)} \quad 270.15$$

۱۷۵۷m ۲۹.۱۵

۳۳.۱۵ (الف) $x = (v_0 m / qB) \sin(qB/m)t$ (ج) $d^2 \mathbf{r} / dt^2 = (q/m)(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

(ه) شتاب خطی ثابت. $z = -(m/qB) \cos(qB/m)t$, $y = \frac{1}{\gamma} (q\epsilon/m)t^2$

۳۷۷۸ × ۱۰^{-۸} A m^{-۲} ۳۹.۱۵

۴۱.۱۵ (الف) ۴۵ × ۱۰^{-۳} Nm (ب) ۴ × ۱۰^{-۲} A m^{-۲}

(ج) ۸۰۰۷ × ۱۰^{-۲} Nm

۴۳.۱۵ (الف) T (۱.۳۲ × ۱۰^{-۲}) \mathbf{u}_y , (ب) گشتاور دوقطبی مغناطیسی و میدان همراستا

هستند بنابراین هیچ زوج نیرویی اثر نمی‌کنند.

۴۵.۱۵ ۰۳ rad

۴۷.۱۵ (الف) $-u_x (10^{-2}) N$, (ب) $u_x (-5 \times 10^{-4}) + u_y (10^{-3}) Nm$

۴۹.۱۵ (الف) $8.804 \times 10^{10} s^{-1}$, (ب) $1.337 \times 10^8 s^{-1}$

۱۵۱.۱۵

۵۹.۱۵ $2.403 \times 10^{-2} N$

۶۳.۱۵ (الف) $\mu_0 I / \pi a$, (ب) $\mu_0 I / 3\pi a$, (ج) $0.2 \mu_0 I / 3\pi a$

۶۵.۱۵ (ب) $u_x (\mu_0 I a / \pi r^2)$ در اینجا $r^2 = a^2 + x^2$, (د) $x = 0$ برای نقطه‌های

روی محور Y (ب) $u_y (\mu_0 I a / \pi r^2)$ در اینجا $r^2 = a^2 - y^2$

(د) $y = \pm a$

۱۵۶۷.۱۵

۶۹.۱۵ (الف) $(\mu_0 J / \pi) \arctg(\omega / 2d)$, (ب) $1/2 \mu_0 J$

۷۱.۱۵ $1.02 \times 10^{-2} m$

۷۳.۱۵ ۴۶۲۶ A

۷۵.۱۵ $F'_1 = F_1$, $F'_2 = -F'_1$ اگر بارها روی محور X باشند، اگر بارها روی محور

Y باشند: $F_1 = \sqrt{1 - v^2/c^2} F'_1$

۱۷۷.۱۵، ۱۰۰۰۵، ۱۰۱۵، ۲۲۹

۷۹.۱۵ (الف) $2.31 \times 10^{-20} N$ (دافعه)، $2.57 \times 10^{-25} N$ (جاذبه)

(ب) $2.31 \times 10^{-25} N$ (دافعه)، (ج) $3.85 \times 10^{-20} N$ ، $2.46 \times 10^{-20} N$

فصل ۱۶

۱۰۱۶ برای میدان الکتریکی داریم

$$q/4\pi\epsilon_0 r^2, (q/4\pi\epsilon_0 r^2) \frac{r^3 - R_1^3}{R_1^3 - R_2^3}, 0$$

برای پتانسیل الکتریکی:

$$q/4\pi\epsilon_0 r, (q/4\pi\epsilon_0) \left(\frac{3R_1^3 r - r^3 - 2R_1^3}{R_1^3 - R_2^3} \right)$$

$$3.16 \quad \text{(الف) } -e/\pi a_0^2, \text{(ب) } -0.424e$$

$$\text{(ج) } (-e/4\pi\epsilon_0 r^2) [1 + e^{-2r/a_0} - 2(1+r/a_0)^2 e^{-2r/a_0}]$$

$$x = r/a_0 = 4.48 \text{ می آید از آن به دست می آید } x^2 + 4x + 2 = 2 \times 10^{-2} e^x \text{ (د)}$$

$$5.16 \quad \text{(الف) } ca^3, \epsilon_0 ca^3, 2\epsilon_0 cx, \text{(ب) } 0, 0, 0$$

$$7.16 \quad \text{(الف) } C: (10/13) \times 10^{-9} \text{ و } (3/13) \times 10^{-9} \text{ (ب) } (4.75 \times 10^{-9} \text{ J})$$

$$\text{(ج) } 3.46 \times 10^{-9} \text{ J}$$

$$9.16 \quad \text{(ج) } 4\pi\epsilon_0 E_0 a^2, \text{(د) } E_0 \cos \theta (1 + 2a^3/r^3)$$

$$-(\epsilon_0 E_0/a) \cos \theta, -E_0 \sin \theta (1 - a^3/r^3)$$

$$11.16 \quad \text{(الف) } 1.675, \text{(ب) } 1.575$$

$$15.16 \quad \text{(الف) } 0.4844 \text{ m}^2, \text{(ب) } 10^2 \text{ V}$$

$$17.16 \quad \text{(الف) } 3.80 \text{ nF}, \text{(ب) } 7.6 \times 10^3 \text{ V}, \text{(ج) } 1.443 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$\text{(د) } 1.37 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$21.16 \quad \text{به هم بستن متوالی: (الف) } \frac{2}{3} \mu\text{F}, \text{(ب) } \frac{4}{3} \times 10^{-5} \text{ F}, \frac{80}{9}, \frac{60}{9}, \text{ و } \frac{40}{9} \text{ V}$$

$$\text{(ج) } \frac{4}{3} \times 10^{-4} \text{ J}, \text{ به هم بستن موازی: (الف) } 6.75 \mu\text{F}, \text{(ب) } 3 \times 10^{-5}$$

$$13 \times 10^{-4} \text{ J (ج), } 200 \text{ V}, 6 \times 10^{-5} \text{ F و } 4 \times 10^{-5}$$

$$23.16 \quad \text{(الف) برای } C_1: C: 6 \times 10^{-4} \text{ C}, 200 \text{ V}, \text{ برای } C_2: C: 2 \times 10^{-4} \text{ C}, 100 \text{ V و}$$

$$\text{برای } C_3: C: 4 \times 10^{-4} \text{ C}, 100 \text{ V (ب) } 9 \times 10^{-2} \text{ J}$$

$$27.16 \quad \text{(الف) } -(\epsilon_0 S/x^2) dx, \text{(ب) } \frac{1}{y} (Q^2/\epsilon_0 S) dx, \text{(ج) } \frac{1}{y} (Q^2/\epsilon_0 S)$$

اگر پتانسیل بیشینه ثابت باشد: (الف) همان نتیجه‌های بالا،

$$\frac{1}{4}(\epsilon_0 SV^2/x) \text{ (ج)}, \frac{1}{4}(\epsilon_0 SV^2/x) dx \text{ (ب)}$$

$$206 \times 10^{-14} \text{ S } 31.16$$

$$33.16 \text{ (الف) } 9\Omega, 48A, 124V, 12\Omega, 8A, 96V, 6\Omega, 16A, 96V$$

$$4\Omega, 24A, 96V, 20\Omega, 12A, 240V, 5\Omega, 60A, 300V, 10\Omega \text{ (ب)}$$

$$7\Omega, 24A, 168V, 12\Omega, 6A, 72V, 3\Omega, 4A, 12V, 2A, 6\Omega, 12V$$

$$10\Omega, 6A, 60V, 18\Omega, 4A, 72V, 9\Omega, 8A, 72V, 7.5\Omega, 4\Omega \text{ (ج)}$$

$$9A, 36V, 9\Omega, 6A, 54V, 16\Omega, 3A, 48V, 3\Omega, 2A, 6V, 30\Omega$$

$$3A, 90V \text{ (د) از هر مقاومت شدت جریان } 10A \text{ می‌گذرد، بجز مقاومت مرکزی}$$

که هیچ اختلاف پتانسیلی بین دوسر آن برقرار نمی‌شود.

$$35.16 \text{ (الف) } 32\Omega, \text{ (ب) } 20V$$

$$37.16 \text{ W } 90$$

$$41.16 \text{ (الف) دو برابر، (ب) به نصف کاهش پیدا می‌کند، (ج) به یک چهارم می‌رسد.}$$

$$43.16 \text{ (الف) نه، (ب) } 148\Omega, \text{ (ج) } 22\Omega$$

$$47.16 \text{ (الف) } 2828.6V, \text{ (ب) } 337V$$

$$49.16 \text{ (الف) } 1A, \text{ (ب) } 8V, \text{ (ج) } 12\Omega, \frac{1}{18}A, 6\Omega, \frac{1}{9}A, 6\Omega, \frac{1}{6}A, 22\Omega, \frac{1}{3}A$$

$$8\Omega, \frac{2}{3}A, 5\Omega, \frac{8}{15}A, 20\Omega, \frac{2}{15}A$$

$$51.16 \text{ (الف) } -\frac{2}{9}V, \text{ (ب) } \frac{13}{28}A$$

$$55.16 \text{ (الف) } 5 \times 10^{-5}\Omega, \text{ (ب) } 205 \times 10^5\Omega$$

$$59.16 \text{ برای } r < R_1, (\mu_0/2\pi)(Ir/R_1^2), \text{ برای } R_1 < r < R_2, (\mu_0/2\pi)I/r, \text{ برای } r > R_2, (\mu_0/2\pi r)(R_2^2 - r^2)/(R_2^2 - R_1^2)$$

$$\text{برای } R_2 < r < R_3, (\mu_0 I/2\pi r)(R_3^2 - r^2)/(R_3^2 - R_2^2), \text{ برای } r > R_3, 0$$

$$0, r > R_3$$

$$67.16 \text{ (الف) } -0.24Wb, \text{ (ب) } 0, \text{ (ج) } 0.24Wb$$

فصل ۱۷

$$10.17 \text{ (الف) } -16\pi V, \text{ (ب) } +16\pi V, \text{ (ج) } 32\pi V, \text{ (د) } 16\pi V, \text{ (ه) } 32\pi V$$

۵۰۱۷ (الف) دایره‌های هم‌مرکز در سوی ساعتگرد، (ب) $5 \times 10^{-3} \text{NC}^{-1}$

$7\pi \times 10^{-3} \text{V}$ (ج) $1.57 \times 10^{-2} \text{A}$ ، (د) ۵، (ه) مفهوم اختلاف پتانسیل واقعاً قابل به‌کار بردن نیست مگر در شرایط تراز مندی، (و) $3.14 \times 10^{-2} \text{V}$

۷۰۱۷ (الف) ۲۷، (ب) $2tV$ ، (ج) ۵، ۵، (د) tA ، tA

۹۰۱۷ سر a در پتانسیل بالاتری است.

۱۳۰۱۷ (الف) $1.72 \times 10^{-2} \text{WbA}^{-1}$ ، (ب) $2.9 \times 10^{-1} \text{Wb}$

(ج) $4.8 \times 10^{-1} \text{V}$

۱۹۰۱۷ $\mu_0 NA / 2\pi R$ در اینجا A سطح مقطع قائم پیچدها و R شعاع چنبره است.

۲۳۰۱۷ $\mu_0 Iabv / 2\pi(r+vt)(r+a+vt)$

۲۷۰۱۷ (ب) $q = (B/A)(e^{At/R} - 1)$ ، $I = (B/R)e^{At/R}$ ، در اینجا

$B = q_0 / C_2$ و $A = (C_2 - C_1) / C_1 C_2$

۳۱۰۱۷ (الف) $I = C\omega_f V \epsilon_0 \cos\omega_f t$

۳۳۰۱۷ (الف) $5 \times 10^{-4} \text{A}$ ، (ب) $5 \times 10^{-2} \text{A}$ ، (ج) 5A

۳۵۰۱۷ (الف) $5 \times 10^{-2} \text{A}$ ، (ب) $5 \times 10^{-3} \text{A}$ ، (ج) $5 \times 10^{-4} \text{A}$

۳۹۰۱۷ (الف) $0.38\pi \sin 20\pi t \text{ V}$ ، (ب) $0.19\pi \sin(20\pi t - \pi \times 10^{-2}) \text{ A}$

۴۱۰۱۷ (الف) 9.821 A ، 109.9° ، (ب) $9.821 \sin(120\pi t - 109.9^\circ) \text{ V}$

$3.5735\pi \sin(120\pi t - 79.1^\circ) \text{ V}$

$(4092/\pi) \sin(120\pi t - 100.9^\circ) \text{ V}$

۴۳۰۱۷ (الف) ۵۰، (ب) ۱، (ج) 9.804 A ، (د) ۵۰، (ه) 9.804 A ، (و) ۱

۴۵۰۱۷ مدار ۱: $1/Z = \sqrt{1/R^2 + \omega_f^2/C^2}$ ، $\text{tg}^{-1}(-\omega_f R/C)$

مدار ۲: $1/Z = (1/\omega_f L) - \omega_f/C$ ، 90°

مدار ۳: $1/Z = \sqrt{1/R^2 + (1/\omega_f L - \omega_f/C)^2}$

$\text{tg}^{-1}(R/\omega_f LC)(C - \omega_f L)$

۴۷۰۱۷ (ج) پاک‌گیری بینهایت است. q/ϵ_0 ۵۳۰۱۷

فصل ۱۸

۳۰۱۸ (الف) ۱۰، (ب) ۵، (ج) ۱۰۰، (د) 50 m s^{-1}

۹۰۱۸ (الف) $8.86 \times 10^{-3} \text{ m}$ ، $1.69 \times 10^{-2} \text{ m}$ ، $2.35 \times 10^{-2} \text{ m}$

(ب) $8.786 \times 10^{-3} \text{ m}$ ، $2.799 \times 10^{-3} \text{ m}$ ، $-2.799 \times 10^{-3} \text{ m}$ ،

(ج) $0.056 \cos(3x - 2t)$ ، $6 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$ ، 0.667 m s^{-1} (د)

(الف) $\xi = 10^{-4} \sin 2\pi(1.98 \times 10^{-3}x - 10t)$ ۱۱.۱۸

(ب) $1.56\pi^2 + 10^{-2} \text{ J m}^{-2}$ ، $3.16\pi^3 \times 10^{-5} \text{ W}$ (ج)

(د) در حدود 1 mW

۱۳.۱۸ 15.6 m s^{-1}

۱۵.۱۸ $3.20 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$

۱۷.۱۸ (الف) ضربدر $\sqrt{2}$ ، (ب) تقسیم بر $\sqrt{2}$ ، (ج) ضربدر ۴، (د) تقسیم بر ۴

۱۹.۱۸ 99 m s^{-1}

۲۱.۱۸ (الف) 1.278 m s^{-1} ، (ب) 0.268 m s^{-1}

(ج) $\xi = 10^{-3} \sin 2\pi\left(\frac{1}{3}x - 432t\right)$ ، (د) $5.75 \times 10^{-2} \text{ W}$

۲۳.۱۸ (الف) $1.25 \times 10^{-2} \text{ m}$ ، (ب) $6.25 \times 10^{-3} \text{ m}$ ، $4.9 \times 10^2 \text{ N}$

(ج) $5.06 \times 10^2 \text{ m s}^{-1}$ ، $1.60 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$

۲۷.۱۸ $0.579 \text{ m s}^{-1} \text{ K}^{-1}$

۲۹.۱۸ (الف) $\rho = \rho_0 [1 + (\mathcal{P}_0/k) \sin 2\pi(x/\lambda - t/P)]$

$\xi = (\mathcal{P}_0 \lambda / 2\pi k) \cos 2\pi(x/\lambda - t/P)$

۳۱.۱۸ برای ضعیف‌ترین صوت قابل شنیدن: $4.749 \times 10^{-13} \text{ W m}^{-2}$ ، -3.5 dB ،

$1.43 \times 10^{-11} \text{ m}$

برای قویترین صوت: 0.881 W m^{-2} ، 119 dB ، $2.00 \times 10^{-5} \text{ m}$

۳۳.۱۸ (الف) در ۴ ضرب می‌شود، (ب) در $\sqrt{10}$ ضرب می‌شود.

۳۵.۱۸ (الف) 5.79 ، (ب) 2.98×10^{-2}

۳۷.۱۸ (الف) $1.869 \times 10^2 \text{ m s}^{-1}$ ، (ب) 1.875 m s^{-1} ، (ج) 7.342 m s^{-1}

(د) 7.089 m s^{-1}

۴۱.۱۸ $\xi = \xi_0 \left\{ 2 \cos \frac{1}{2} [(k - k')x - (\omega - \omega')t] + 1 \right\} \sin(kx - \omega t)$

۴۳.۱۸ $3v_p - 2\sqrt{Y/\rho}$ ، $\sqrt{Y/\rho}$

۴۷.۱۸ (الف) 529.2 Hz ، (ب) 470.4 Hz

۴۹.۱۸ (الف) $1.088 \times 10^3 \text{ Hz}$ ، (ب) $9.117 \times 10^2 \text{ Hz}$

$$\sigma = \frac{1}{4} (1 - Y/3k) \quad 55.18$$

۱.۳۴۴ × ۱۰^{۱۰} Nm^{-۲}، -۰.۱۰۰۷، ۲.۵۴ × ۱۰^{۱۰} Nm^{-۲}، ۰.۲۹۰۲ ۵۷.۱۸

۵۹.۱۸ (الف) $v = k\sqrt{-a}$ (ω انگاری است)، (ب) نه، (ج) نه

فصل ۱۹

۱۰.۱۹ (الف) ۳m، در صفحه XY قطبیده خطی است، در راستای X منتشر می شود،

$$B_z = \frac{1}{6} \times 10^{-8} \cos [2\pi \times 10^8 (t - x/c)] \quad B_x = B_y = 0 \quad (\text{ب})$$

$$3.316 \times 10^{-4} \text{ W m}^{-2} \quad (\text{ج})$$

۳.۱۹ (الف) $B_y = -E_z/c$ ، $B_x = 0$ ، $E_y = E_z = E_0 \sin(kx - \omega t)$ ، $E_x = 0$

$$E_y = -\frac{1}{4} E_0 \sin(kx - \omega t) \quad E_x = 0 \quad (\text{ب}) \quad B_z = E_z/c$$

$$B_z = B_y/c \quad B_y = -E_z/c \quad B_x = 0 \quad E_z = \frac{\sqrt{3}}{4} E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$E_z = E_0 \sin(kx - \omega t) \quad E_y = E_0 \cos(kx - \omega t) \quad E_x = 0 \quad (\text{ج})$$

$$E_x = 0 \quad (\text{د}) \quad B_z = E_y/c \quad B_y = -E_z/c \quad B_x = 0$$

$$E_z = \frac{1}{4} E_0 \sin(kx - \omega t) \quad E_y = E_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$B_z = E_y/c \quad B_y = -E_z/c \quad B_x = 0$$

۵.۱۹ (الف) قطبیده دایره ای راستگرد، (ب) قطبیده خطی، زاویه ۳۱۵° با صفحه XY

می سازد، (ج) قطبیده بیضیوار راستگرد، قطر بزرگ آن زاویه ۳۱۵° با صفحه

XY می سازد، (د) قطبیده بیضیوار چپگرد، قطر بزرگ آن زاویه ۴۵° با صفحه

XY می سازد در هر حالتی، $B_z = E_y/c$ و $B_y = -E_z/c$ است.

$$B_z = (E_y/c)T \quad E_y = \sqrt{24\pi} \cos [4\pi \times 10^6 (x - ct)] \text{ NC}^{-1} \quad 7.19$$

$$3.84 \times 10^{-6} \text{ T} \quad 1.15 \times 10^2 \text{ NC}^{-1} \quad 9.19$$

$$133 \text{ W} \quad \frac{1}{3} \times 10^{-7} \text{ T} \quad 11.19$$

۱۳۰۱۹ (الف) $10^{-9} T \times \frac{1}{3}$ ، (ب) $10^{-6} W m^{-2} \times 1.33$ ،

(ج) $10^{-15} J m^{-3} \times 4.42$ ، (د) $167 W$

۲۱۰۱۹ (الف) $10^{-2} W m^{-2} \times 796$ ، (ب) $10^2 NC^{-1} \times 7.75$ ، $10^{-6} T \times 2.58$ ،

(ج) $10^{-6} J m^{-2} \times 2.652$ ، $10^{-15} m^{-2} kgs^{-1} \times 8.84$

۲۳۰۱۹ (الف) $10^{-12} W \times 2.02$ ، (ب) $10^{11} \times 4.95$ مولکول (یعنی در حدود

$10^{-11} \times 8$ درصد یک مولکول گرم)

۲۷۰۱۹ (الف) $10^{11} eVs^{-1} \times 4.01$ ، در هر دور $5.63 eV$ ، (در این صورت یک

مدار الکترونی، از لحاظ کلاسیکی نمی‌تواند خود را بیش از در حدود 10^{-11} ثانیه

نگهدارد)، (ب) $10^{-2} eVs^{-1} \times 1.10$ ، $10^{-10} eV \times 5.22$ در هر دور،

(ج) $10^{-9} eVs^{-1} \times 3.26$ ، $10^{-15} eV \times 6.63$ در هر دور.

۳۱۰۱۹ $10^{16} s^{-1} \times 2.11$ ، $10^{25} \times 3.80$ ، قابل مقایسه با 10^{25} در هر m^3

۳۳۰۱۹ $10^{16} s^{-1} \times 1.82$ ، $(\omega^2 / (3.29 \times 10^{32} - \omega^2)) \times 10^{28} \times 6.05 + 1 = n$

۱۹، ۱۸، ۱۷، ۱۶، ۱۵، ۱۴، ۱۳، ۱۲، ۱۱، ۱۰، ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱

۳۵۰۱۹ (الف) $10^{-9} m \times 1.24$ ، (ب) $10^{-6} m \times 1.24$ ، (ج) $10^{-4} m \times 1.24$

۳۷۰۱۹ (الف) $274 MeV$ ، (ب) $40 MeV$

۳۹۰۱۹ برای الکترون: $10^{-23} kg ms^{-1} \times 5.402$ ، $10^4 eV$ ،

برای پروتون: $10^{-23} kg ms^{-1} \times 4.868$ (در راستای مخالف)، $2.88 eV$

۴۱۰۱۹ (الف) $10^{14} Hz \times 4.555$ ، (ب) $10^{14} Hz \times 4.888$ ،

(ج) $10^{-15} J s C^{-1} \times 4.1274$

۴۳۰۱۹ (الف) $m^{-2} s^{-1}$ (الکترون) $10^{10} \times 1.704$ ، (ب) $10^{-9} W m^{-2} \times 3.0$

۴۵۰۱۹ $9.8781 eV$ ، $10^{16} Hz \times 2.39$ ، $10^{-12} m \times 1.21$ ،

(ب) $9.8781 eV$ ، $10^{-24} kg ms^{-1} \times 5.37$ ، 60.5°

۴۷۰۱۹ (الف) $10^{-10} m \times 1.012$ ، 59° ، (ب) $143.2 eV$

فصل ۲۰

۳۰۲۰ از مس به فولاد: 1.0327 و 0.3269 ، $\xi_i = 2 \sin 20\pi(t - x/4231) cm$ ،

$\xi_r = 2.0654 \sin 20\pi(t - x/4517) cm$ ،

$\xi_r = 0.6538 \sin 20\pi(t - x/4231) cm$ ، از فولاد به مس: 0.9673 ،

$$\xi_i = 2 \sin 20\pi (t - x/4517) \text{ cm} \quad \text{الف) } 0.3269$$

$$\xi_r = 1.9346 \sin 20\pi (t - x/4231) \text{ cm}$$

$$\xi_r = -0.6528 \sin 20\pi (t - x/4517) \text{ cm}$$

۵۰۲۰ الف) 0.0579 و 0.07194 ، ب) 0.3023 و 0.6966

۷۰۲۰ الف) 0.02 ، $R_\pi = R_\sigma = -0.02$ ، $T_\pi = T_\sigma = 0.02$ ، $R_\pi = R_\sigma = 0.02$ ، ب) 0.02 ، $R_\pi = R_\sigma = 0.02$

ج) تنها تغییر فاز در بازتاب شیشه‌ها به وجود می‌آید.

۹۰۲۰ 56.4° ، 33.6°

۱۱۰۲۰ الف) 36.9° ، ب) عمود بر صفحه تابش.

۱۵۰۲۰ در حالت اول: $T_\sigma = 0$ ، $T_\pi = 0.8468$ ، $R_\sigma = 0$ ، $R_\pi = -0.1289$

در حالت دوم: $T_\sigma = 0.8433$ ، $T_\pi = 0$ ، $R_\sigma = 0.1567$ ، $R_\pi = 0$

در حالت سوم: $T_\sigma = 0$ ، $T_\pi = 0.4980$ ، $R_\sigma = 0$ ، $R_\pi = 0.3311$

در حالت چهارم: $T_\sigma = -0.4395$ ، $T_\pi = 0$ ، $R_\sigma = -0.5604$ ، $R_\pi = 0$

۱۷۰۲۰ برای پرتو بازتاب: $R_\sigma = -0.3046$ ، $R_\pi = -0.1033$ ، سوی پرتو

قطبیده بیضیوار مخالف پرتو تابش است، برای پرتو شکست: $T_\pi = 0.7259$ ،

$T_\sigma = 0.0705$ ، پرتو قطبیده بیضیوار همسو با پرتو فرودی است.

۲۱۰۲۰ $3.82 \times 10^{-7} \text{ m}$ ، $3.80 \times 10^{-7} \text{ m}$ ، $0.85 \times 10^{14} \text{ Hz}$

۲۳۰۲۰ الف) $8.726 \times 10^{-7} \text{ m}$ ، ب) $1.745 \times 10^{-6} \text{ m}$

ج) $3.490 \times 10^{-6} \text{ m}$

۲۷۰۲۰ در حالت (۲) نور قطبیده خطی و در راستای محور تراگسیل A است، (۳) چنانکه

در مثال ۴۰۲۰ نشان داده شد، نور معمولاً قطبیده بیضیوار است. در حالت (۴)

نور قطبیده خطی در راستای محور تراگسیل C است.

۲۹۰۲۰ الف) زاویه 45° با محور Y در سوی پاد ساعتگرد ب) زاویه 45° با محور Y

در سوی ساعتگرد، ج) $1:0.828$

۳۱۰۲۰ الف) آری، ب) روشن، ج) تاریک

۳۳۰۲۰ 1.194 g

۳۵۰۲۰ الف) $\Delta\theta = 2.4 \times 10^{-4} (pT/p_0 T_0) \text{ tg } \theta$ ، در اینجا p_0 و T_0 فشار و دما

در شرایط طبیعی هستند.

۳۷۰۲۰ $n(y) = n_0 \sqrt{[B^2 + A^2 \cos^2(y/B)] / (B^2 + A^2)}$

فصل ۲۱

۳۰۲۱ (الف) $0.778m$ ، $0.556m$ ، (ب) $1m$ ، $1.0m$ ، (ج) $1.33m$ ،
 $1.67m$ ؛ (د) ∞ ، ∞ ، برای شیء مجازی، $0.270m$ ، $0.901m$ -

۵۰۲۱ (الف) $0.48m$ ، همگرا، (ب) $1.92m$ ، همگرا، (ج) $1.2m$ ، واگرا،

(د) $0.80m$ ، همگرا، (ه) $2.4m$ ، همگرا، (و) $0.3m$ ، همگرا، (ز) $0.60m$
 واگرا

۷۰۲۱ $8cm$ ، 21

۹۰۲۱ $40cm$ یا $37.5cm$

۱۱۰۲۱ $32cm$ ، مقایسه‌شده با فاصله کانونی $5cm$

۱۹۰۲۱ دید از پهلو خیلی نزدیک: $4cm$ از سطح، $8cm$ ؛ از سمت دورتر: $2cm$
 از سطح و 133

۲۱۰۲۱ (الف) $438cm$ درست چپ رویه تخت، (ب) 171

۲۳۰۲۱ (الف) $20cm$ ، (ب) مجازی و مستقیم، (ج) $1mm$

۲۵۰۲۱ $20cm$ در داخل عدسی، از سطح به شعاع $20cm$ ، $5cm$ در خارج عدسی،
 از سطح به شعاع $10cm$

$2R$ ۲۷۰۲۱

۳۵۰۲۱ (الف) $0.24m$ ، (ب) $1.2m$ ، 6 (ج) $0.15m$ ، $0.375m$ ، (د) $0.109m$ ،
 0.545

37.21 $538cm$

۳۹۰۲۱ (الف) $1.07m$ ، حقیقی، (ب) $0.67m$ ، حقیقی، (ج) $0.8m$ ، حقیقی،
 (د) $0.27m$ ، مجازی، (ه) $0.1m$ ، حقیقی

۴۱۰۲۱ (الف) $0.48m$ ، همگرا، (ب) $1.92m$ ، همگرا، (ج) $1.2m$ ، واگرا،
 (د) $0.8m$ ، همگرا، (ه) $2.4m$ ، همگرا (و) $0.3m$ ، همگرا، (ز) $0.60m$ ، واگرا

۴۳۰۲۱ $18cm$ ، $60cm$ ، (الف) $10cm$ ، (ب) $117cm$

۴۷۰۲۱ $484cm$ ، $516cm$ ، $484cm$ ، $516cm$ ، $484cm$ ، $516cm$ -

۵۱۰۲۱ 1.521 ، 40°

۵۵۰۲۱ 53° ، پرتو دارای بازتاب کلی است، 63.2° ، پرتو به اندازه زاویه 24.4°
 منحرف می‌شود.

$1.19 \times 10^{-2} \text{ rad} = 41' 57.21$

$$F_o = -۱۶۷\text{cm}, F_i = ۴۱۷\text{cm} \quad ۵۹.۲۱$$

$$۲۱.۱^\circ \quad ۶۱.۲۱$$

فصل ۲۲

$$۳۰۲۵\text{mm}, ۱۰۶۲\text{mm} \text{ (ب)}, ۰.۰۶۴\text{mm} \text{ (الف)} \quad ۱۰.۲۲$$

$$۰.۲۸۶\text{mm} \quad ۳.۲۲$$

$$۹ \times ۱۰^{-۵}\text{m} = ۰.۰۹\text{mm} \quad ۵.۲۲$$

۷.۲۲ (الف) با محاسبه از نقطه وسط دو چشمه، اولین کمینه در هر طرف به فاصله

۰.۲۵m، به دنبال آن هر ۰.۵m قرار دارد، (ب) روی هدلولی هایی که با

$r_1 - r_2 = \pm (n/۴) m$ مشخص می شوند، (ج) از نور روی هدلولی هایی که

معادله شان یکی است. (د) نه

$$۱.۲۲ \times ۱۰^{-۷} \text{rad} = ۰.۰۲۴'' \text{ (ثانیه کمانی)} \quad ۹.۲۲$$

$$۱۱.۲۲ \text{ در حدود } ۴ \text{ ثانیه کمانی}$$

$$-۱۲ \text{ dB} \quad ۱۳.۲۲$$

$$۲.۹۵ \times ۱۰^{-۴} \text{ rad} \quad ۱۹.۲۲$$

۲۱.۲۲ (الف) ۵۶، (ب) ۰.۲π ، برای نوری که با زاویه ۳۰° می تابد:

(الف) ۰.۶، (ب) π

۲۳.۲۲ برای نور بازتاب: (الف) ۲۰.۳° ، (ب) ۳۷.۷° ، برای نور عبوری:

(الف) ۳۷.۷° ، (ب) ۲۰.۳°

$$۱۸۲ \text{ (ب)}, ۲.۱۹\sqrt{N} \times ۱۰^{-۳}\text{m} \quad ۲۷.۲۲$$

۲۹.۲۲ (الف) ۲۹۹۰۲ Hz ، ۵۹۸۰۴ Hz ، ۸۹۹۰۶ Hz ، (ب) ۲m ، ۱m ، ۰.۰۶۷m

$$\xi_1 = ۲\xi_0 \sin \pi x \cos ۶۰۰\pi t, \quad \xi_2 = ۲\xi_0 \sin ۲\pi x \cos ۱۲۰۰\pi t \quad \text{(د)}$$

$$\xi_3 = ۲\xi_0 \sin ۳\pi x \cos ۱۸۰۰\pi t$$

۳۱.۲۲ (الف) ۲۸۹۰۶ Hz ، ۵۷۹۰۲ Hz ، (ب) ۱۴۵۰۸ Hz ، ۴۳۷۰۴ Hz

$$۲۴۰۴۳ \text{ Hz} \quad ۳۳.۲۲$$

۳۷.۲۲ برای ارتعاش اصلی: (۰، ۱) و (۱، ۰)، واگنی دوگانه، برای هماهنگ اول:

۱-۱، برای هماهنگ دوم: (۰، ۲) و (۲، ۰)، واگنی دوگانه، برای هماهنگ

سوم، (۰، ۳) و (۳، ۰)، برای هماهنگ چهارم: (۰، ۲)، برای هماهنگ پنجم:

(۰، ۳) و (۳، ۰)، برای ششمی: (۰، ۳) و (۳، ۰)، برای هفتمی: (۰، ۲) و (۲، ۰)

(۲، ۳). توجه کنید که هماهنگی دوازدهم $v = 510$ از مقادیر (۳، ۴)، (۴، ۳)، (۵، ۵) و (۵، ۵) به‌طور چهارگانه واکن است.

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad ۴۱۰۲۲$$

فصل ۲۳

$$۰۰۵۶ \text{ mm} \quad ۱۰۲۳$$

$$۲ \times ۱۰^۳ \text{ m} \quad ۳۰۲۳$$

$$۰۰۴۸ \text{ mm} \times ۰۰۲۴ \text{ mm} \quad (\text{ب}) \quad ۷۰۲۳$$

$$۷۷۰۳ \times ۱۰^{-۶} \text{ m} \quad (\text{ب}), \quad ۲۷۰۵ \times ۱۰^{-۶} \text{ m} \quad (\text{الف}) \quad ۹۰۲۳$$

$$۵ \times ۱۰^{-۵} \text{ m}, \quad ۱۰۲۵ \times ۱۰^{-۵} \text{ m} \quad ۱۱۰۲۳$$

$$۲۷۴ \times ۱۰^{-۵} \text{ m} \quad ۱۳۰۲۳$$

$$(۱۰۲۲\lambda/D)f \quad (\text{ج}), \quad ۳۷۲۳۹\lambda/D, \quad ۲۷۲۳۳\lambda/D, \quad ۱۰۲۲\lambda/D \quad (\text{ب}) \quad ۱۵۰۲۳$$

$$(۳۷۲۳۹\lambda/D)f, \quad (۲۷۲۳۳\lambda/D)f$$

$$۲۷۲۴ \times ۱۰^{-۴} \text{ m} \quad ۱۷۰۲۳$$

۱۹۰۲۳ (الف) ۱۵ برابر دامنه بدون پوشش و ۲۷۲۵ برابر شدت بدون پوشش

$$\frac{۳}{۴}\pi \quad (\text{ب})$$

$$۴۰۰ \text{ m} \quad (\text{ب}), \quad (۸۰۰/n) \text{ m} \quad (\text{الف}) \quad ۲۱۰۲۳$$

$$۶۴۷۲^\circ, \quad ۳۶۶۹^\circ, \quad ۱۷۷۵^\circ \quad ۲۳۰۲۳$$

$$۴۳۱^\circ \quad (\text{ب}), \quad ۵۷۷۰ \times ۱۰^{-۷} \text{ m} \quad (\text{الف}) \quad ۲۵۰۲۳$$

$$۲۸۷۵^\circ, \quad ۱۲۷۰^\circ \quad ۲۷۰۲۳$$

$$۴۱۱ \times ۱۰^۵ \text{ m}^{-۱}, \quad ۷^\circ, \quad \text{در حدود ۷}, \quad ۱۶۰۰۰۰ \quad ۲۹۰۲۳$$

$$۲۰۷۳^\circ \quad (\text{ب}), \quad ۹۷۹۱ \times ۱۰^{-۱۱} \text{ m} \quad ۳۳۰۲۳$$

$$۱۷۳^\circ \quad ۳۵۰۲۳$$

فصل ۲۴

۱۰۲۴ به‌سمت راست معادله (۲۴.۴) جمله $(\partial D/\partial n)(\partial n/\partial x)^2$ را بیفزایید.

$$۹۰۶ \times ۱۰^۲ \text{ J m}^{-۲} \text{ s}^{-۱} \quad (\text{ب}), \quad -۱۲۷۵^\circ \text{ C} \quad (\text{الف}) \quad ۳۰۲۴$$

$$۱۵۷۸ \times ۱۰^۶ \text{ J h}^{-۱} \quad \text{یا} \quad ۴۳۸ \times ۱۰^{-۲} \text{ J s}^{-۱} \quad (۴۳۸ \text{ kW}) \quad ۵۰۲۴$$

۷۰۲۴ (الف) 1.57 J s^{-1} یا 1.125 cal s^{-1} ، (ب) در مس ۹۶٪، در فولاد ۴٪

۱۹۰۲۴ $2.45 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$

۲۳۰۲۴ $b = 815, a = -8520$

۲۵۰۲۴ (الف) 6.00×10^9 ، (ب) 4.65×10^9 (ج) 6.00×10^5 ،

1.46×10^{21} ، 6.80×10^{28} ، 1.46×10^{29}

۲۷۰۲۴ $x = 1 \ln 2$ ، 4.75×10^{-3} ٪، 13.75 ٪، 36.8 ٪، 60.6 ٪

۲۹۰۲۴ $K \propto \sqrt{T}, D \propto T/P$

۳۱۰۲۴ $1.76 \times 10^{-6} \text{ PK}^{-1/2}$

۳۳۰۲۴ $K/D = \frac{3}{2} P/T = 555$ در شرایط متعارفی دما و فشار،

در شرایط متعارفی دما و فشار $\eta/D = pm/kT = 4.45 \times 10^{-2} \text{ m}$

(m بر حسب amu)

۳۵۰۲۴ $1.83 \times 10^{-10} \text{ m}$ ، $9.321 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ ، $6.25 \times 10^{-8} \text{ m}$

۳۷۰۲۴ 0.654 mm

واژه نامه انگلیسی به فارسی

aberration	ابیراهی
absorption	در آشامی، جذب
accelerator	شتا بدهنده
accumulation	انبارش
achromatic	اقام، نافام
adiabatic	بی دررو
angular magnification	درشتنمایی، بزرگنمایی زاویه‌ای
angular separation	جدایی زاویه‌ای
antinode	گره، پاد شکم
aperture	روزنه، دهانه
arcturus	نگهبان شمال، سماک رامح
array	آرایه
attenuation	تضعیف
babinet compensator	پارسنگ باینه
band	نوار
birefringence	دوشکستی
bootes	گاوجران
boundary condition	شرط مرزی
broadside array	آرایه عمودی
bremsstrahlung	تابش ترمزی

buckling	کمانش
bulk modulus	مدول کپهای، مدول تراکمپذیری
caustic	سطح سوزان
cavity	کاواک
cell	یاخته
chromatic aberration	ابیراهی رنگی
closed path	حلقه، مدار بسته
coherent	همدوس
coil	پیچ
concave	کاو
conduction	رسانش
conductivity	رسانندگی
conductor	رسانا، هادی
constructive interference	تداخل سازنده
convergent	همگرا
convection	همرفت
convex	کوز
core	هسته، قلب
corona borealis	تاج شمالی
crab nebula	سحابی خرچنگ
curl	تاو
cycle	چرخه، دور
daily cycle	چرخه روزانه
decay	واپاشی
degeneracy	واگنی
destructive interference	تداخل ویرانگر
dextrorotatory	ماده راستگرد
dichroism	دوفامی
diffraction pattern	نقش پراش
diffusion	پخش
dipole	دوقطبی
dispersion 1	پاشندگی

dispersion 2	پاشیدگی
dispersive medium	محیط پاشنده
distorsion	واپیچش
disturbance	آشفته‌گی
divergence	واگرایی
domain	حوزه
double refraction	شکست دوگانه
drift	رانه
electrolysis	برق‌کافت، الکترولیز
emission spectrum	بیناب گسیلی
enantiomorphism	رو به رو دیسی
energy flow	شارش انرژی
eyepiece	چشمی
fission	شکافت
flexural	خمشی
fluctuation	افتاخیز، افت وخیز
focus	کانون
frequency	بسامد
fringe	فریز
grating	توری
ground state	حالت پایه
hydra	شجاع
harmonic	هماهنگ
impedance	پاگیری
incoherent	ناهمدوس
induction	القا
insulator	نارسانا
interaction	برهم‌کنش
invariant	ناوردا
ionospheret	یونکره، یونسفر

irrotational	بی تاو
junction	گره
levorotatory	ماده چپگرد
lattice	شبکه
magnetization 1	مغناطش
magnetization 2	مغناطیدگی
magnetizing field	میدان مغناطان
magnification	بزرگنمایی
mean free path	مسافت آزاد میانگین
mechanism	سازوکار
monochromatic	تکفام
monoclinic	تک ما یلی
node	گره
noise	نوفه
objective	شیشی
optical fibers	الیاف اپتیکی
permeability	تراوایی
permitivity	گذردهی
photopic	نورکار
polarization 1	قطبش
polarization 2	قطبیدگی
pulse	تپ
quantization	کوانتشن
radiation	تابش
random	کاتوره ای
rate	آهنک
reactance	پاگیری انگاری

reduced mass	جرم کاهش یافته
reflection	بازتاب
refractive telescope	تلسکوپ شکستی
relaxation time	زمان واهلش
resolving power	توان تفکیک
resonance	باز آوایی
resonator	باز آواگر
saturated	سیر شده
scalar	نردار
scattering	پراکندگی
scotopic	تارکار
screening	استتار
self flux	خودشار
shearing stress	تنش برشی
signal	علامت، سیگنال
slab	بره
solenoid	سیملوله
source	چشمه
standing wave	موج ایستاده
stationary state 1	ویژه حالت
stationary state 2	حالت مانا
stationary wave	موج ساکن
stereoisomerism	سان مون کنجی
stigmat	غیر آستیگمات
strain	کرنش
stress	تنش
superconductor	ابر رسانا
susceptibility	پذیرفتاری
transport	ترابری
traveling	رونده
telescope	تلسکوپ، دوربین
tension	کشش
thermal column	ستون گرمایی

toroidal	چنبره‌ای
triclinic	سه مایلی
virgo	سنبله
virtual	مجازی
vision	دید
wave guide	موج‌گیر
wave packet	بسته موج
zenith	سرسو، سمت الرأس

واژه‌نامه

فارسی به انگلیسی

array	آرایه
broadside array	آرایه عمودی
disturbance	آشفتنگی
rate	آهنگ
superconductor	ابرسانا
aberration	ابیراهی
chromatic aberration	ابیراهی رنگی
screening	استتار
achromatic	افام، نافام
fluctuation	افتاخیز، افت و خیز
induction	القا
optical fibers	الیاف اپتیکی
accumulation	انبارش
resonator	باز آواگر
resonance	باز آوایی
reflection	بازتاب
reflecting	بازتابی
magnification	بزرگنمایی
angular magnification	بزرگنمایی زاویه‌ای، درشتنمایی

electrolysis	برقکافت، الکترولیز
slab	بره
interaction	برهم کنش
wave packet	بسته موج
irrotational	بی تاو
adiabatic	بی دررو
emission spectrum	بیناب گسیلی
antinode	پادگره، شکم
babinet compensator	پاره سنگک با بینه
dispersion 1	پاشندگی
dispersion 2	پاشیدگی
impedance	پاگیری
reactance	پاگیری انگاری
diffusion	پخش
susceptibility	پذیرفتاری
diffraction	پراش
scattering	پراکندگی
retardiation	پس افتادگی
coil	پیچه
radiation	تابش
bremstrahlung	تابش ترمزی
corona borealis	تاج شمالی
scotopic	تارکار
curl	تاو
pulse	تپ
constructive interference	تداخل سازنده
destructive interference	تداخل ویرانگر
transport	ترابری
permeability	تراوایی
attenuation	تضعیف
monochromatic	تکفام
monoclinic	تک ما یلی
refracting telescope	تلسکوپ شکستی

resolving power	توان تفکیک
shearing stress	تنش برشی
grating	توری
angular separation	جدایی زاویه‌ای
absorption	جذب، در آشامی
cycle	چرخه
daily cycle	چرخه روزانه
source	چشمه
eyepiece	چشمی
toroidal	چنبره‌ای
ground state	حالت پایه
stationary state 2	حالت مانا
closed path	حلقه، مدار بسته
domain	حوزه
fluxral	خمش
self flux	خودشار
absorption	در آشامی، جذب
cycle	دور
telescope	دوربین
birefringence	دو شکستی
dichroism	دوفامی
dipole	دوقطبی
aperture	دهانه، روزنه
vision	دید
drift	رانه
conductor	رسانا
conduction	رسانش
conductivity	رسانندگی
enantiomorphism	رو به رو دیسی

aperture	روزنه، دهانه
traveling	رونده، سیار
relaxation time	زمان واهلش
mechanism	سازوکار
stereoisomerism	سان مون کنجی
thermal column	ستون گرمایی
crab nebula	سحابی خرچنگ
cluster nebula	سحابی خوشه‌ای
zenith	سرسو، سمت الرأس
caustic	سطح سوزان
arcturus	سماک رامح، نگهبان شمال
zenith	سمت الرأس، سرسو
virgo	سنبله
saturated	سیر شده
signal	سیگنال
solenoid	سیملوله
triclinic	سه مایل
energy flow	شارش انرژی
lattice, net-work	شبهه
accelererator	شتاب‌دهنده
hydra	شجاع
boundary condition	شرط مرزی
fission	شکافت
double refraction	شکست دوگانه
antinode	شکم، پادگره
objective	شیئی
stigmat	غیر آستیگمات
decay	واپاشی
fringe	فریز

polarization 1	قطبش
polarization 2	قطبیدگی
core	قلب، هسته
random	کاتورهای
focus	کانون
concave	کاو
cavity	کاواک
strain	کرنش
tension	کشش
buckling	کمانش
quantization	کوانتشن
convex	کوژ
bootes	گاوچران
permutivity	گذردهی
node, junction	گره
levorotatory	ماده چپگرد
dextrorotatory	ماده راستگرد
corresponding	متناظر
closed path	مدار بسته، حلقه
shear modulus	مدول برشی
bulk modulus 1	مدول تراکمپذیری، مدول کپهای
bulk modulus 2	مدول کپهای، مدول تراکمپذیری
virtual	مجازی
order of diffraction	مرتبه پراش
mean free path	مسافت آزاد میانگین
magnetizing	مغناطان
magnetization-1	مغناطش
magnetization-2	مغناطیدگی
standing wave	موج ایستاده
wave guide	موجبر
insulator	نارسانا

achromatic	نافام (افام)
invariant	ناوردا
incoherent	ناهمدوس
scalar	نردار
pattern	نقش
arcturus	نگهبان شمال، سماءک رامج
band	نوار
photopic	نورکار
noise	نوفه
decay	واپاشی
distorsion	واپچش
divergence	واگرایی
degeneracy	واگنی
stationary state 1	ویژه حالت
conductor	هادی، رسانا
core	هسته، قلب
harmonic	هماهنگ
coherent	همدوس
convection	همرفت
convergent	همگرا
cell	یاخته
ionosphere	یونکره

اسامی دانشمندان

Stokes, Sir George Gabriel (1819-1903)	استوکس، سر جورج گابریل ۵۱۶ ریاضیدان و فیزیکدان انگلیسی
Snell, Willbrod von Royen (1591-1626)	اسنل، فون روین ویلی برود ۴۷۳ ریاضیدان آلمانی
Ampere, Andre Marie (1775-1836)	آمپر، اندره ماری ۴۷ فیزیکدان فرانسوی
Anderson, Carl David (1905-)	اندرسون، کارل دیوید ۸۹ فیزیکدان امریکایی
Oersted, Hans Christian (1777-1851)	اورستد، هانس کریستیان ۲۵۸ فیزیکدان دانمارکی
Avcgado, Count Amedeo (1776-1856)	آووگادرو، کنت آمه‌دمو ۲۴ شیمی‌دان و فیزیکدان ایتالیایی
Ohm, George (1787-1854)	اوم، گئورگ ۲۱۱ فیزیکدان آلمانی
Einstein, Albert (1879-1955)	اینشتین، آلبرت ۴۳۹ فیزیکدان آلمانی
Balmer, John (1825-1898)	بالمر، جان ۴۳۶ فیزیکدان سوئیسی
Bragg, Sir William Lawrence (1890-1971)	براک، سر ویلیام لارنس (بسر) ۶۶۴ فیزیکدان انگلیسی
Brewster, Sir David (1781-1868)	بروستر، سردیوید ۴۸۸ فیزیکدان اسکاتلندی

Bohr, Niels (1885-1962)	بور، نیلس ۴۳۵ فیزیکدان دانمارکی
Boltzmann, Ludwig Eduard (1844-1906)	بولتزمن، لودویگ ادوارد ۲۳ فیزیکدان اتریشی
Biot, Jean (1774-1862)	بیو، ژان ۱۱۷ فیزیکدان فرانسوی
Pascal, Blaise (1623-1662)	پاسکال، بلز ۲۹۹ فیلسوف و ریاضیدان فرانسوی
Plank, Max (1858-1947)	پلانک، ماکس ۱۱۳ فیزیکدان آلمانی
Poynting, John Henry (1852-1914)	پوینتینگ، جان هنری ۴۰۱ دانشمند انگلیسی
Poiseuille, Jean Louis Marie (1799-1869)	پوازوی، ژان لوئی ماری ۷۱۹ پزشک فرانسوی
Poisson, Simeon Denis (1781-1840)	پواسون، سیمئون دنی ۱۸۳ ریاضیدان فرانسوی
Thomson Sir Joseph John (1856-1940)	تامسون، سر جوزف جان ۹۷ فیزیکدان انگلیسی
Tesla, Nicholas (1856-1943)	تسلا، نیکولاس ۸۳ مهندس آمریکایی
Taylor, Brook (1685-1731)	تیلر، بروک پ ۷۳۰ ریاضیدان انگلیسی
Cerenkov Pavel Alekseyevich (1904-)	چرنکوف، پاول الکسی یویچ ۴۴۴ دانشمند روسی
Deye, Peter Joseph Wilhelm (1884-1966)	دیی، پتر جوزف ویلهلم ۶۶۶ فیزیکدان آلمانی
Descartes, René (1596-1630)	دکارت، رنه ۵۲۴ فیلسوف و ریاضیدان فرانسوی
Doppler Christian Johan (1803-1853)	دوپلر، کریستیان یوهان ۳۷۷ فیزیکدان اتریشی
Dirac, Paul Adrien Maurice (1912-1984)	دیراک، پل آدرین موریس ۸۹ فیزیکدان انگلیسی

Rutherford, Ernest (1871-1937)	رادرفورد، ارنست ۲۹ فیزیکدان انگلیسی
Rowland, Henry Augustus (1848-1901)	رولند، هنری آگوستوس ۶۷۵ فیزیکدان آمریکایی
Roentgen, Wilhelm Conrad (1845-1923)	روننگن، ویلهلم کونراد ۴۵۴ فیزیکدان آلمانی
Rydberg, Johannes Robert (1854-1919)	ریدبرگ، یوهانس رابرت ۷۷ فیزیکدان سوئدی
Rayleigh. John William Strutt (1842-1979)	ریلی، جان ویلیام استروت ۶۴۱ ریاضیدان و فیزیکدان انگلیسی
Joule, James Prescott (1818-1889)	ژول، جیمز پرسکات ۲۱۴ فیزیکدان انگلیسی
Savart, Felix (1791-1841)	ساوار، فلیکس ۱۱۷ پزشک و فیزیکدان فرانسوی
Scherrer, Paul (1890-1979)	شرر، پل ۶۶۶ دانشمند سویسی
Faraday, Michael (1791-1867)	فاراده، مایکل ۲۵۲ دانشمند انگلیسی
Feynman, Richard Phillips (1918-)	فاینمن، ریچارد فیلپس ۴۳۷ فیزیکدان آمریکایی
Fermat, Pierre de (1601-1665)	فرما، پیردو ۵۵۸ ریاضیدان فرانسوی
Fresnel, Augustin (1788-1827)	فرنل، اگوستین، ۴۹۱ فیزیکدان فرانسوی
Fraunhofer, Joseph, von (1787-1826)	فرانهوفر، جوزف فون ۵۵۴ فیزیکدان آلمانی
Fourier, Joseph (1788-1830)	فوریه، ژوزف ۶۹۱ ریاضیدان و فیزیکدان فرانسوی
Fick, Adolf (1829-1901)	فیک، آدولف ۶۸۳ زیست‌شناس آلمانی

Cockret, Sir John Douglas (1897-1967)	کاکرکرافت، سر جان داگلاس ۴۰ دانشمند انگلیسی (جایزه نوبل ۱۹۵۱)
Compton, Arthur Holly (1892-1962)	کامپتون، آرتور هالی ۴۳۰ فیزیکدان آمریکایی
Cavendish Henry (1731-1810)	کاوندیش، هنری ۱۰ شیمیدان انگلیسی
Kerst, Donald William (1911-)	کرست، دونالد ویلیام ۲۶۸ فیزیکدان آمریکایی
Kelvin, Sir William Thomsos (1824-1907)	کلوین، سرویلیام تامسون ۲۴۰ ریاضیدان و فیزیکدان انگلیسی
Christiansen, Prof. Wilburnorman (1913-)	کریستیانسن، پروفیسور ویلبرنورمان ۶۲۶ استاد استرالیایی
Curie Maris (Sklodowska Maria) (1867-1934)	کوری، ماری (سکلودوفسکا) ۲۴۱ شیمیدان لهستانی-فرانسوی
Cauchy, Augustin Baron (1789-1857)	کوشی، اگوستین بارون ۵۵۲ ریاضیدان فرانسوی
Coulomb, Charles (1736-1806)	کولن، شارل ۱۰ فیزیکدان فرانسوی
Kirchhof, Gustav (1824-1887)	کیرشهف، گوستاو ۴۶۹ فیزیکدان آلمانی
Gauss, Karl Friedrich (1777-1855)	گائوس، کارل فریدریش ۱۷۵ منجم، ریاضیدان و فیزیکدان آلمانی
Geiger, Hans (1882-1945)	گایگر، هانس ۲۹ فیزیکدان آلمانی
Grimaldi, Francesco (1618-1663)	گریمالدی، فرانسیسکو ۶۰۱ دانشمند ایتالیایی
Laplace Pierre Simon (Marquis de) (1749-1827)	لاپلاس، پیرسیمون (مارکی دو) ۱۱۴ دانشمند فرانسوی
Larmor, Sir Joseph (1857-1942)	لارمور، سر جوزف ۴۱۸ ریاضیدان انگلیسی
Lawrence, Ernest Orlando (1901-1958)	لارنس، ارنست اورلاندو ۹۷ فیزیکدان آمریکایی

Langevin, Paul (1867-1946)	لانژون، پل ۱۹۹ فیزیکدان فرانسوی
Laue Max Von (1879-1960)	لاوه، ماکس فون ۶۶۵ فیزیکدان آلمانی
Lorentz, Hendrik (1853-1928)	لورنتس، هندریک ۸۲ فیزیکدان دانمارکی
Mach, Ernest (1838-1916)	ماخ، ارنست ۳۸۵ فیزیکدان اتریشی
Marsden, Sir Ernest (1889-1970)	مارسدن، سر ارنست ۲۹ فیزیکدان انگلیسی
Maxwell, James Clerk (1831-1879)	ماکسول، جیمز کلارک ۳۰۳ فیزیکدان انگلیسی
Malus, Etienne Louis (1775-1812)	مالوس، اتین لوئی ۵۰۲ فیزیکدان فرانسوی
Millikan, Robert Andrews (1869-1953)	میلیکان، رابرت اندروز ۲۰ فیزیکدان آمریکایی
Newton, Sir Isaac (1642-1727)	نیوتون، ایزاک ۳ دانشمند انگلیسی
Watt, James (1736-1819)	وات، جیمز مهندس و مبتکر انگلیسی
Walton, Ernest Thomas Sinton (1903-)	والتون، ارنست توماس سنتون ۴۰ فیزیکدان ایرلندی (جایزه نوبل ۱۳۵۱)
Van Allen, James Alfred (1914-)	وان آلن، جیمز آلفرد ۹۳ فیزیکدان آمریکایی
Van De Graff, Robert Jemison (1901-1967)	وان دو گراف، رابرت جمیسون ۴۰ فیزیکدان آمریکایی
Weber, Wilhelm Eduard (1804-1891)	ویر، ویلهلم ادوارد ۲۳۲ فیزیکدان آلمانی
Volta, Alessandro (1745-1827)	ولتا، الساندرو ۳۴ فیزیکدان ایتالیایی
Hall, Edwin Herbert (1855-1938)	هال، ادوین هربرت ۸۴ فیزیکدان آمریکایی

Hallwachs Wilhelm (1859-1922)	هالواکس، ویلهلم ۲۳۸ فیزیکدان آلمانی
Hertz Heinrich (1857-1894)	هرتز، هاینریش ۶۰۳ فیزیکدان آلمانی
Henry, Joseph (1797-1878)	هنری، جوزف ۲۷۹ فیزیکدان آمریکایی
Helmholtz, Hermann Ludwic (1821-1894)	هلمهولتز، هرمان لودویک ۱۶۵ زیست‌شناس و فیزیکدان آلمانی
Hooke, Robert (1635-1703)	هوک، رابرت ۳۴۴ دانشمند انگلیسی
Huygens, Christiaan (1629-1695)	هویگنس، کریستیان ۴۶۸ فیزیکدان هلندی
Young, Thomas (1775-1829)	یانگ، توماس ۵۸۰ فیزیکدان انگلیسی

جدولهای داخل متن

صفحه	عنوان
۲۲	جرم و بار الکترون، پروتون و نوترون
۵۳	۱۰۱۴ مولکولهای قطبی
۱۱۰	اسپین الکترون، پروتون و نوترون
۱۹۷	۱۰۱۶ پذیرفتاری الکتریکی در دمای اتاق
۲۱۳	۲۰۱۶ رسانندگی الکتریکی در دمای اتاق
۲۳۹	۳۰۱۶ پذیرفتاری مغناطیسی در دمای اتاق
۲۴۴	۴۰۱۶ معادله‌های میدان الکترومغناطیسی ایستا
۲۵۵	۵۰۱۶ آمپر، ولت
۲۵۹	۶۰۱۶ پذیرفتاری مغناطیسی در دماهای مختلف
۲۹۱	۱۰۱۷ تناظر بین يك نوسانگر ويك مدار الکتریکی
۳۰۹	۲۰۱۷ معادلات ماکسول
۳۴۵	۱۰۱۸ تابتهای کشسانی
۳۸۲	۲۰۱۸ سرعت صوت در برخی مواد
۴۵۳	طول موج رنگها
۴۹۰	۱۰۲۵ ضریب شکست مطلق چند ماده
۴۹۵	۲۰۲۵ ضریب شکست اصلی چند بلور
۵۲۶	۱۰۲۱ قرارداد علامتها برای آینه‌های کروی
۵۳۲	۲۰۲۱ قرارداد علامتها در سطح کروی شکستار
۵۵۵	۳۰۲۱ ضریب شکست و توان پاشندگی
۷۱۴	۱۰۲۲ مقادیر تجربی η ، K ، D

فهرست راهنما

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>قانون - ماکسول ۲۶۴، ۳۱۰</p> <p>آنالیز</p> <p> - فوریه ۳۳۹</p> <p> آنالیز وور ۵۰۱</p> <p> - انرژی ۱۹</p> <p>آنتن</p> <p> مقاومت - ۴۱۰</p> <p> مقاومت تابشی - ۴۱۰</p> <p> آنود ۲۳</p> <p> آنیون ۲۴</p> <p> آووکادرو</p> <p> عدد - ۲۴</p> <p>آهننگ</p> <p> - انبارش ۶۸۴</p> <p> - بهره‌اندازه حرکت ۷۰۳</p> <p> - بهره‌انرژی ۶۹۱، ۶۹۲</p> <p> - غلظت ۶۸۴</p> <p>آینه</p> <p> بزرگنمایی - ۵۳۰</p> <p> - بیضیوار ۵۲۷</p> <p> تشکیل تصویر در - ۵۲۳</p> <p> - سهمی شکل ۵۲۷</p> <p> فاصله کانونی - ۵۲۴</p> <p> - کاو ۵۲۵، ۵۲۶</p> | <p>آرایه عمودی ۵۸۶</p> <p>آزمایش</p> <p> - پراکندگی ۲۷</p> <p> - تاسون ۹۶</p> <p> - دوشکاف یانگ ۵۸۰</p> <p> - قطره روغن ۲۰</p> <p> - میلیکان</p> <p> آستانه</p> <p> بسامد - ۴۴۱</p> <p> - درد ۳۶۶</p> <p> - شنوایی ۳۶۵</p> <p> آشکارساز چرنکوف ۴۴۴</p> <p> آکوستیک ۳۸۱</p> <p> الکترو - ۳۸۲</p> <p> - ساختمان ۳۸۲</p> <p> - موسیقی ۳۸۲</p> <p>آلفا</p> <p> ذره - ۲۷</p> <p>آمبر ۴۷، ۱۲۰</p> <p>شکل دیفرانسیلی قانون - ۲۲۹، ۲۳۱</p> <p>شکل دیفرانسیلی قانون - ماکسول ۳۰۵</p> <p>قانون - ۲۲۵، ۳۰۳</p> <p>قانون - برای میدان مغناطیسی ۲۲۳</p> <p>قانون - لاپلاس ۱۱۴، ۱۳۶</p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

- آینه
- فوتوالکتریک ۴۳۸، ۴۴۱
- اتمی ۴۴۱
- فوتو هسته‌ای ۴۴۱
- کامپتون ۴۳۰
- مگنتو-اپتیک کاتن-موتن ۴۹۴
- واپیچش ۱۹۵، ۲۳۸
- هال ۸۴
- اسپین ۱۱۰، ۱۱۳
- الکترون ۱۱۳
- برهم کنش — مدار ۱۴۰، ۱۴۲
- پروتون ۱۱۳
- فوتون ۴۳۷
- نوترون ۱۱۳
- استوکس
- رابطه‌های — ۵۱۶
- اسنل
- قانون — ۴۷۳
- اصل
- بقای بار الکتریکی ۹، ۳۰
- فرما ۵۵۸
- هویگنس ۴۶۸
- اقام (ناقام) ۵۵۶
- افت بار ۳۰۰
- القا
- خود — ۲۷۸
- ی متقابل ۲۹۷
- مولد — یی ۲۹۸
- نیروی محرکه — یی ۲۷۲
- قانون — ۲۷۴
- ی الکترومغناطیسی ۲۶۴
- ناشی از حرکت نسبی رسانا و میدان
- مغناطیسی ۲۷۰
- و پتانسیل الکتریکی ۲۷۶
- و اصل نسبیت ۲۷۴
- الکتروآکوستیک ۳۸۲
- کانون — های کروی ۵۲۳
- کروی ۵۲۴
- کوژ ۵۲۵، ۵۲۶
- لوید ۶۲۲
- مغناطیسی ۹۱
- اب کولن ۷۶
- ایبراهی ۴۵۰
- رنگی ۵۵۳
- — طولی ۵۵۵
- — عدسی ۵۵۴
- — عرضی ۵۵۵
- کروی ۵۲۶، ۵۴۰، ۵۶۴، ۵۷۰
- اپتیک ۴۵۲
- الیاف — ی ۶۱۶
- محور — ی ۴۹۲-۴۹۳
- هندسی ۵۲۳
- اتاق تاریک ۵۲۲
- اتاقک ابری ۸۸
- اتم
- هیدروژن ۳۰
- ساختار — ۲۶
- مدل پلاسمایی — ۲۷
- مدل هسته‌ای — ۲۸
- اتلاف تابشی ۴۲۴
- اثر
- استتاری ۲۰۲
- الکترو-اپتیک کر ۴۹۴
- پراکندگی ۶۳۵
- تیندال ۴۲۸
- دوپلر ۳۷۷، ۴۴۶
- ژول ۲۱۴
- سمگیری ۲۳۸، ۲۳۹
- فاراده ۵۰۸

- الکتروود ۲۱
الکتروودینامیک
- کلاسیک ۳۱۰
- کوانتومی ۳۱۰
الکتروستاتیک ۹
الکترومتر ۲۵۱
الکترولیز (برقکافت) ۲۳
الکترون ۶، ۹۷
اسپین - ۱۱۰
بار - ۲۲
نفنگک - ی ۱۹
جرم - ۲۲
حفره - ۸۵
- رسانشی ۲۱۵
شعاع - ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۸۷
فوتو - ۴۳۸
- گرمایی ۴۳۹
- مفید ۴۴۷
الکتروسیسته ۶
- مثبت ۶
- منفی ۶
الکتریکی عرضی ۶۱۹
الیاف اپتیکی ۶۱۶
انبارش ۶۹۹
آهننگ - ۶۸۴
انتشار
توصیف ریاضی - ۳۳۳
انتقال به سوی سرخ ۴۴۷
انتگرال
- تبادل ۲۴۰
- خطی ۲۱۸
- روی سطح ۱۷۱
اندازه حرکت
بهره - ۷۰۳
- پرواز ۱۴۵
- زاویه‌ای داخلی ۱۱۰
- همرفتی ۷۰۲
اندازه گیری طول موج ۵۸۲
اندرومدا (زن در زنجیر) ۴۴۷
انرژی
- الکتریکی الکترون ۲۱۰
- - هسته ۲۰۹
باز آوایی - ۲۹۳
- پتانسیل الکتریکی ۳۴، ۳۷
- - دو قطبی الکتریکی ۵۳
- تابشی ۴۲۴
تراز - ۴۳۵
تصحیح نسبیته - ۴۴، ۴۵
- رسانای کروی باردار ۲۰۷
- کل ۲۸۶، ۲۹۸
- کولنی هسته ۳
- میدان ۲۹۸
- میدان مغناطیسی ۲۸۴
- یونش اتم هیدروژن ۴۳
اورستد ۲۵۸
اهم ۲۱۲
قانون - ۲۱۲
ایزوتوپ ۳۱
ایستا
- آمپر ۲۵۸
- فاراد ۲۴۸
- کولن ۷۶
- ولت ۷۷
اینشتین، آلبرت ۴۳۹
بایینه
پارسنگ - ۵۱۷
بار
- آزاد ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳
اصل بقای - الکتریکی ۹

مسافت آزاد میانگین - ۷۰۶	بار
مقطع - ۷۰۶، ۷۰۷	- الکترون ۲۲
-- ماکروسکوپیکی ۷۰۷	- الکتریکی ۸
-- میکروسکوپیکی ۷۰۸	-- مثبت ۸
بردار	-- منفی ۸
پتانسیل - ی ۲۶۰	- بنیادی ۲۲
- پوئین تینگ ۴۰۱	تعریف عملیاتی - ۸
- چرخان جریان ۲۹۳	- قطبش ۱۹۲
- نیروی محرکه الکتریکی ۲۹۳	- منجمد ۱۹۱
- مغناطش ۲۳۳	باز آوا
- موج ۳۶۷	فلوئورسانس - یی ۴۲۷
بزرگنمایی	کاواک - ۶۱۰
- آینه کروی ۵۳۰	- گر ۶۰۳
- خطی ۵۴۶	- گر آکوستیکی ۶۱۱
- زاویه ای (درشتنمایی) ۵۴۶	- یی ۲۹۳
- سطح کروی شکستار ۵۴۰	- یی انرژی ۲۹۳
- عدسی ۵۴۰	بازتاب ۴۶۸
- میکروسکوپ ۵۴۵	پاد - ۶۲۸
برقکافت (الکترولیز) ۲۳	زاویه - ۴۷۳
بروستر	سطح سوزان - ۵۲۷
قانون - ۴۸۸	ضریب - ۴۸۵
برهم کنش ۲	- کلی ۴۷۷
- از راه دور ۱۴۲	- مرجهای الکترومغناطیسی ۴۸۵
- اسپین مدار ۱۴۱	-- تخت ۴۷۳
- الکترومغناطیسی ۲، ۸۱، ۳۰۷	موجهای - ۴۷۳
- الکتریکی ۶	- موجهای کروی ۴۷۸
- ضعیف ۲	بالمر
- قوی ۲	فرمول - ۴۳۶
- گرانشی ۲	بتاترون ۲۶۸
- مغناطیسی ۸۰	براکگ
- هسته ای ۲	معادله - ۶۶۴
بسامد	برخورد ۴۸۱
- آستانه ۴۴۱	بسامد - ۷۰۶، ۷۰۷
- اصلی ۵۹۳	پارامتر - ۲۸
- باز آوایی ۲۹۴	- رودر رو ۳۴، ۴۶

نگار جرم بن بریج ۱۵۱	بسامد
نما ۵۵۰	برخورد ۷۰۶، ۷۰۷
یو و ساوار	رادویوی ۲۵۲
فرمول - ۱۱۷	زاویه‌ای ۴۳۵
پاد	سیکلو ترونی ۸۷، ۹۸
باز آوایی ۳۲۲	قطع ۶۲۰
پوشش - بازتاب ۶۲۸	لارمور ۲۴۳
فرومغناطیس ۲۴۱	بسل
گره (شکم) ۵۷۹	تابع - ۶۷۱
پارامغناطیس ۲۳۹	بلور
پارسنگک باینه ۵۱۷	تک مایلی ۴۹۴
پاشندگی ۳۷۵، ۳۵۹، ۵۴۹	تک محوری ۴۹۲
توان - ۵۵۵	دومحوری ۴۹۴
توری - ۶۴۹	سه مایلی ۴۹۴
منشور ۵۵۰	مثبت ۴۹۲
پاشیدگی ۵۴۹	مکعب مستطیلی ۴۹۴
بهنجار	منفی ۴۹۲
پاگیری ۲۹۱	دستگاه - ۴۹۲
انگاری ۲۹۱	بن بریج
پتانسیل	بیناب نگار جرم - ۱۵۱
الکتریکی ۳۴	بور ۴۳۵
ایست ۴۴۰	شعاع - ۴۴
برداری ۲۶۰	فرمول - ۴۳۵
صفر ۱۲۷، ۲۲۶	بی تاو
گرادیان - ۳۵	موج - ۳۷۴
مغناطیسی ۱۲۷، ۲۲۶	بی در رو
نرده‌ای ۲۷۶	فرایند - ۳۵۱
پتانسیومتر ۲۵۶	بیناب ۵۵۰
بخش	الکترومغناطیسی ۱۹۵، ۴۵۵
تقریب - ۷۱۷	سنج پرتوهای X ۶۶۵
درحالت پایا ۶۸۵	جرم - - ۹۴
ضریب - ۶۸۳، ۷۱۴	دمپستر ۹۴
طول - ۷۱۱	گسیلی ۴۱۰
	فروسرخ ۲۰۲
	مرئی ۲۵۲

تداخل سنج - ۶۲۳	پخش
پلاروید ۴۹۷	معادله - ۶۸۵
پلازما ۲۶	- مولکولی ۶۸۵
پلانک	- نوترون ۷۰۹
ثابت - ۱۱۳، ۴۳۲	پدیده
پواز ۷۰۳	- ترابری ۶۸۵
پوازی	- نظریه مولکولی ۷۱۱
فرمول - ۷۱۹	پذیرفتاری
پواسون	- الکتریکی ۱۸۸
معادله - ۱۸۳	- ایستا ۱۹۶
نسبت - ۳۹۰	- پارامغناطیسی ۲۳۹، ۲۴۰
پوئین تینگ	- مغناطیسی ۲۳۷
بردار - ۴۰۱	- مؤثر ۱۹۹
پوزیترون ۸۹	پراش ۶۳۴
پوشش پاد بازتاب ۶۲۸	- پرتوهای X ۶۶۲
پیچه ۱۰۷، ۲۹۹	توری - ۶۴۷، ۶۵۱
- بازآوا ۶۱۱	- فرانهور ۶۳۵
- چنبره ای ۲۲۷	- فرنل ۶۳۵، ۶۵۳
- هلمهولتز ۱۶۵	مرتبه - ۶۴۸
پیوند یونی ۲۵	پراکندگی ۴۲۷، ۶۶۰
	- پرتوهای X ۶۶۲
	زاویه - ۳۴
تابش	پرتو
- بار شتابدار ۳۱۶	- X ۴۵۴
- ترمزی ۴۱۹، ۴۵۴	- بتا ۱۹
- جسم سیاه ۴۳۲	- فرابنفش ۴۵۳
- چسرنکوف ۴۴۴	- کاتودی ۹۶، ۹۷
- دوقطبی الکتریکی نوسانی ۴۰۵	- کیهانی ۹۱
- مغناطیسی نوسانی ۴۱۱	- گاما ۴۵۵
- سنکروترونی ۴۲۱	پروتون ۲۲
فشار - ی ۴۰۲	اسپین - ۱۱۰
- کیهانی ۴۵۶	بار - ۲۲
تابع	جرم - ۲۲
- بسل ۶۷۱	پس افتادگی ۱۴۳
- کار فلز ۴۳۹	پل
تاج شمالی ۴۴۸	

- تارکار ۴۵۳
 تاسون
 آزمایش - ۹۶
 تبادل انرژی ۲۹۸
 تب ۳۳۹، ۳۷۵
 تداخل ۵۷۶
 سازنده ۵۷۸، ۶۳۷
 سنج پل ۶۲۳
 رادیویی - - ۶۲۵
 چندگانه ۶۲۶
 دوجزئی گرین بانگ ۶۲۵
 لایه نازک ۵۸۶
 ناشی از بازتاب ۵۸۶
 ویرانگر ۵۷۸، ۶۳۶
 تراز انرژی ۴۳۵
 ترازی
 جریان ۱۲۵
 پیچشی کاوندیش ۱۵
 ترانسفورماتور ۲۹۸
 تراوایی
 مغناطیسی ۲۳۷
 - - - - - خلا ۱۱۵
 - - - - - نسبی ۲۳۷
 تسلا ۸۳، ۲۳۲
 تصویر ۵۲۵
 بار ۲۴۶
 - - - - - حقیقی ۵۲۵
 - - - - - مجازی ۵۲۵
 تفنگ الکترونی ۱۹
 تلسکوپ
 بازتابی ۵۴۷
 شکستی ۵۴۶
 مون پالومار ۵۴۷
 تنش ۳۴۳
 برشی ۳۵۶، ۷۰۳
- عمودی ۳۴۳، ۳۴۴
 توان ۲۱۴، ۲۸۴
 الکتریکی ۴۷
 پاشندگی ۵۵۵
 تفکیک ۵۴۵، ۵۵۳
 چشم ۵۴۵، ۵۴۷
 - - - - - شکاف ۶۴۰، ۶۴۳
 - - - - - عدسی ۶۴۴
 تورمالین ۴۹۷
 توری
 بازتابی ۶۷۴
 پر اش ۶۴۷، ۶۵۱
 - - - - - انتقالی ۶۴۹
 توان تفکیک - پر اش ۶۵۲
 توصیف ریاضی انتشار ۳۳۳
 تیغه
 چارک موج ۴۹۷
 متوازی السطوح ۴۷۷
 نیم موج ۴۹۷
 تیندال
 اثر - ۴۲۸
- ثابت
 پلانک ۱۱۳، ۴۳۲
 جفت شدگی ۲۹۸
 دی الکتریک ۱۹۳
 ریدبرگ ۷۷، ۴۳۶
 فاراده ۲۴
 کشسانی ۳۴۷، ۵۹۹
 - - - - - K_9 ، ۱۰
- جابجایی
 الکتریکی ۱۹۱، ۱۹۳
 جریان - ۳۰۷
 جبهه موج ۴۶۸

- جدايي زاويه‌اي ۶۴۱، ۶۴۳
جرم
بيناب سنج - ۹۴، ۹۵، ۱۵۱
- سکون الکترون ۴۲
- پروتون ۴۲
- سکون صفر ۴۳۱
- نوترون ۴۲
عدد - ی ۳۲
- کاهیده ۴۳
جریان
- آزاد ۲۳۵
- الکتريکی ۴۷، ۱۷۲، ۲۱۰
- بسته ۱۴۲
- جابجایی ۳۰۷
- چگالی - ۱۷۲
- سيملوله‌اي ۱۲۵
- مغناطش ۲۳۴، ۲۳۵
چرخزاد
- بهنجار ۱۰۲
- کشیده ۱۰۲
- کوتاه ۱۰۲
مسیرهای - ی ۱۰۲
چرنکوف
آشکارسازهای - ۴۴۴
تابش - ۴۴۴
چشمه
- ثانوی ۴۶۹
- موج ۴۰۴
- میدان الکترومغناطیسی ۲۳۱، ۲۳۳
- الکتريکی ۲۴۳
چگالی
- انرژی ۲۰۷، ۲۸۶
- جریان ۱۷۲
- اندازه حرکت ۷۰۲
- ذرات ۶۸۲
- سطحی بار ۱۹۳
چنبره‌اي
پيچۀ - ۲۲۷
چندقطبی الکتريکی ۵۸
چهارقطبی
- الکتريکی ۵۸
- مغناطیسی ۱۲۷
حالت
- برانگیخته ۴۲۷
- پایا ۶۸۵
- پایه ۳۰
ویژه - ۳۰، ۴۳۵
حرکت
- دوره‌اي در زمان ۳۲۸
- دوره‌اي در فضا ۳۲۸
رابطه - موجی ۳۳۴
معادله دیفرانسیل - موجی ۳۴۱
- موجی ۳۳۴
- دوره‌اي ۳۳۸
- طولی ۳۴۷
- هماهنگ ۳۳۹
حلقه‌های نیوتون ۵۹۰
حوزه مغناطیسی ۲۴۰
خازن ۲۰۲، ۲۰۳
به هم بستن متوالی - ها ۲۰۵
به هم بستن موازی - ها ۲۰۵
خوس بزرگ ۴۴۸
خط نیرو ۱۳
- ی میدان الکتريکی ۱۳، ۱۶، ۵۰
- مغناطیسی ۲۳۲
خود
- القا ۲۷۸

دوره

- فضایی ۳۳۵
- نوسان ۳۳۶
- دوشکستی ۴۹۹
- دوفامی ۴۹۷
- دوقطبی
- الکتریکی ۱۸۸
- برهم‌کنش بین دو - الکتریکی ۵۶
- مغناطیسی ۱۲۳
- میدان الکتریکی - ۵۱
- دو منشور فرنل ۵۷۹، ۶۲۲
- دی‌الکتريك ۱۸۸
- ثابت - ۱۹۳
- دیامغناطیس ۲۳۸
- دید ۴۵۲
- تارکار ۴۵۳
- نورکار ۴۵۲
- دیراک، پل آدرین موریس ۸۹
- ذره ۳۲۹
- آلفا ۲۷
- بنیادی ۲۲
- ذره‌بین ۵۴۳
- رابطه
- براگگ ۶۶۴
- حرکت موجی ۳۳۴
- های استوکس ۵۱۶
- رادیوتلسکوپ ۵۱۷
- بازتابی پارکر ۵۲۸
- راکتور ۶۹۹
- قلب - ۷۱۰
- گرماسته‌ای ۶۹۹
- همگن ۶۹۹
- رسانا ۱۸۹

خود

- القایی ۲۷۸
- انرژی ۲۸۷
- شار ۲۷۸
- دی-شرر
- نقش - ۶۶۶
- درآشامی ۶۹۷
- تابش الکترومغناطیسی ۴۲۵
- مسافت آزاد میانگین - ۷۰۹
- مقطع ماکروسکوپیك - ۷۰۹
- میکروسکوپیك - ۷۰۹
- درشتنمایی (بزرگنمایی زاویه‌ای) ۵۴۶
- دستگاه
- بلور ۴۹۲
- نافام (افام) ۵۵۶، ۵۵۷
- واگرا ۵۳۳
- همگرا ۵۳۳
- دسی‌بل ۳۶۶
- دکارت
- فرمول - برای بازتاب ۵۲۴
- - - شکست ۵۳۲
- - - عدسی نازک ۵۳۷
- دمای کوری ۲۴۱
- دمپستر
- بیناب‌سنج - ۹۵
- دوپلر
- اثر - ۳۷۷، ۴۴۶
- دوترون ۱۴۸
- دوتریوم ۳۱
- دوچشمه
- همدوس ۵۷۹
- همزمان ۵۷۶، ۶۴۶
- دوربین ۵۴۳
- نجومی ۵۴۷
- یرکس ۵۴۷

- ۶۸۹ رسانش گرمایی
رسانندگی
- الکتریکی ۲۱۵، ۲۱۲، ۲۱۵
- گرمایی ۶۹۱
رنگ ۴۵۲، ۴۵۳
طول موج - ها ۴۵۳
- مکمل ۵۰۳
رو به رو دیسی ۵۰۷
روزنه دایره‌ای ۶۴۲
روننگن ۴۵۴، ۶۶۶
روند
مونتاز - ۶۷۵
رونده
موج - ۳۲۷
رؤیت واضح
حداقل - ۵۴۳
ریدبرگ
ثابت - ۷۷، ۴۳۶
ریلی
قاعده - ۶۴۴
ملاک - ۶۷۱
زاویه
- انحراف ۵۴۹
- بازتاب ۴۷۳
- بحرانی ۴۷۵
- پراکندگی ۳۴
- تابش ۴۷۳
جدایی - ای ۶۴۱
- شکست ۴۷۳
- قطبش ۴۸۸
زمان واهلش ۲۱۵، ۲۸۳
زن در زنجیر (اندرودما) ۴۴۷
ژول ۲۱۴
- اثر - ۲۱۴
ژیرومغناطیسی
نسبت - ۱۱۰
ساختار
- اتمی ۲۶
- الکتریکی ماده ۲۳
سان‌مون کنجی ۵۰۷
سحابی
- خرچنگ (سرطان) ۴۲۲
- خوشه‌ای ۴۴۸
سرسو (سمت الرأس) ۵۱۹
سرعت
- انتشار برهم کنش ۱۴۲
- - موج طولی ۳۴۸
- رانه الکترون ۲۱۳، ۲۱۵
سطح - فونل ۴۹۴
- صوت ۳۸۰
- فاز ۳۳۳، ۳۷۵
- گروه ۳۷۶
- همرفتی شاره ۷۰۶
سطح
- سوزان ۴۷۵
- - بازتاب ۵۲۷
- - شکست ۵۴۰
- شکمها ۵۷۹
- کاو ۵۲۵
- کوژ ۵۲۵
- گرهما ۵۷۹
- مقطع ۳۲
- - دیفرانسیلی ۳۳
- موج ۴۶۸
- هم پتانسیل ۱۴، ۱۵، ۳۷
سلول
- های استوانه‌ای ۴۵۳

- سلول
 - های مخروطی ۴۵۳
 سماک رامح (نگهبان شمال) ۴۲۷
 سمت الرأس (سرسو) ۵۱۹
 سنبله ۴۴۸
 سنجۀ
 - بار ۱۲۰
 - جریان ۱۲۰
 سنکروترون ۱۰۱، ۴۲۰
 تابش - ی ۴۲۱
 - هیدروژن ۱۰۱
 سنکروسیکلوترون ۱۰۱
 سیکلوترون ۹۷، ۹۹، ۴۲۰
 بسامد - ی ۸۷، ۹۸
 سیموله ۱۲۵، ۲۲۷، ۲۹۹
 جریان - ای ۱۲۵
 - چنبره‌ای ۲۹۹
 میدان - ای ۱۲۵
- شار
 - الکتریکی ۱۷۳
 - بار خالص ۳۰۰
 - خروجی ۳۰۰
 - ورودی ۳۰۰
 - چگالی جریان ۱۷۲
 - خروجی ۱۷۱، ۶۸۴
 - انرژی ۶۹۱
 - ذرات ۱۷۲
 - مثبت ۱۷۱
 - مغناطیسی ۲۳۲، ۲۶۵
 - منفی ۱۷۱
 - میدان برداری ۱۷۰
 - ورودی ۱۷۱، ۶۸۴
 - انرژی ۵۹۱
- انرژی ۳۶۴
 - گرما ۶۹۴
 شبکه
 - الکتریکی ۲۲۱
 شتابدهنده
 - الکتروستاتیک ۴۰
 - چرخه‌ای ۴۲۰
 - خطی ۶۹
 - کاکرافت-والتون ۴۰
 - وان دوگراف ۴۰، ۶۹
 شجاع ۴۴۸
 شدت
 - بیشینه ۳۶۶
 - کمینه ۳۶۵
 - موج ۳۶۵
 - الکترومغناطیسی ۴۰۰
 - - کروی ۳۷۴
 - میدان الکتریکی ۱۲
 - مغناطیسی ۸۲
 شرایط
 - پایا ۶۸۵
 - مانا ۶۸۵
 - مرزی ۴۷۰، ۶۰۰
 شرط
 - براگ ۶۶۴، ۶۶۵
 شعاع
 - اتم ۳۰
 - الکترون ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۸۷
 - بور ۴۴
 - هسته ۳۰
 شکافت
 - هسته‌ای ۴۵۶
 شکست ۴۶۸
 - در سطح کروی ۵۳۱
 - دوگانه ۴۹۱، ۴۹۸
- شارش

شکست	— دوگانه کروی ۴۷۸
— زاویه — ۴۷۳	
— ضریب — ۴۷۳، ۴۷۵، ۴۸۵	
— — مطلق ۴۴۲	
— — نسبی ۴۷۰	
— موجهای تخت ۴۷۳	
شکم (پادگره) ۵۷۹، ۵۹۳، ۵۹۹	
خط — ۵۷۷، ۶۰۵	
سطح — ۵۷۹	
ضریب	— انتقال ۴۸۵
	— بازتاب ۴۸۵
	— پخش ۶۸۳
	— شکست ۴۷۳، ۴۷۵، ۴۸۵، ۵۵۵
	— — مطلق ۴۴۲
	— — نسبی ۴۷۵
	— وشکسانی ۷۰۱، ۷۰۲
	طول
	— پخش ۷۱۱
	— موج ۳۳۵
	— کامپتون الکترون ۴۳۱
	— کامپتون پروتون ۴۳۳
	ظرفیت
	— الکتریکی ۲۰۲
	— رسانای کروی ۲۰۲
	— شیمیایی ۲۲
	— معادل ۲۰۵، ۲۶
	عدد
	— آووگادرو ۲۴
	— اتمی ۲۶
— جرمی ۳۱	
— کوانتومی اندازه حرکت زاویه ای ۱۱۳	
— — اسپینی ۱۱۳	
— — مغناطیسی ۱۱۳	
— موج ۳۳۵	
عدسی ۵۳۶	
— چشمی ۵۴۳	
— شیئی ۵۴۳	
— مغناطیسی ۱۵۴	
— نازک ۵۳۷، ۵۳۹	
— واگرا ۵۳۹	
— همگرا ۵۳۹	
غلظت ۶۸۱	
غیر آستیکمات ۵۲۷	
فاراد ۲۰۲	
فاراده	
اثر — ۵۰۸	
ثابت — ۲۴	
قانون — — هنری ۲۶۴، ۲۶۵	
فاصله کانونی ۵۲۴	
— تصویر ۵۳۲	
— شیئی ۵۳۲، ۵۳۸	
فاینمن	
نمودار — ۴۳۷	
فراصوت (ماوراصوت) ۳۸۱	
فرانیهوفر	
پراش — ۶۳۴، ۶۶۰	
— — توسط روزنه ۶۴۲	
— — — دوشکاف ۶۴۴	
— — — شکاف مستطیل شکل ۶۳۵	
نقش پراش — ۶۳۷، ۶۴۱، ۶۴۷	
فرستنده ۲۹۸	

۴۲۷ - بازآوایی فوتو	فرما اصل - ۵۵۸
۵۰۳ - الاستیسیته	فرمول
۴۳۸ - الکترون	- بالمر ۴۳۶
۴۴۱، ۴۳۸ - اثر الکتريک	- بور ۴۳۵
۴۳۳ فوتون فوریه	- بیو و ساوار ۱۱۷
۶۹۱، ۳۳۸ - آنالیز	- پوازوی ۷۱۹
۶۹۱، ۶۸۹ - قانون	- دکارت ۵۲۴، ۵۳۲، ۵۳۷
۳۳۸ - قضیه	- کوشی ۵۵۲
فیک	- لارمور ۴۱۸
۶۸۳، ۶۸۵ - قانون	- لانژون ۱۹۹
۶۸۵ - قانون دوم	- لینارد ۴۲۳
	- هلمهولتز ۵۶۸
	فرنل
قاعدۀ	بیضوی - ۴۹۱، ۴۹۲
۶۴۴ - ریلی	پراش - ۶۳۵، ۶۵۳
۳۴۱ - زنجیری مشتقها	دومنشور - ۵۷۹، ۶۲۲
قانون	سطح سرعت - ۴۹۲
۳۰۳، ۲۲۵ - آمپر	منطقه - ۶۵۴، ۶۵۶، ۶۵۷
۲۲۳ - برای میدان مغناطیسی	نقش پراش - ۶۰۰، ۶۵۹
۱۳۶، ۱۱۴ - لاپلاس	فروالکتريک ۱۹۹
۳۰۱، ۲۶۴ - ماکسول	فروسرخ ۴۵۲
۴۷۳ - اسنل	- دور ۴۵۲
۲۲۲ - اول کیرشهف	- میانی ۴۵۲
۲۱۲، ۲۱۱، ۲۱۰ - اهم	- نزدیک ۴۵۲
۴۸۸ - بروستر	فرومغناطیس ۲۴۰
۶۸۵ - دوم فیک	فریت ۲۴۱
۲۲۲ - کیرشهف	فری مغناطیس ۲۴۱
۲۳۱، ۲۲۹ - آمپر	فسفرسانس ۴۲۷
۳۰۵ - ماکسول	فشار
۲۷۶ - فاراده-هنری	- الکتريکی ۱۹۱
۲۶۵، ۲۶۴ - فاراده-هنری	- تابشی ۴۰۲
۶۹۱، ۶۸۹ - فوریه	گرادیان - ۷۰۹
۶۸۳، ۶۸۵ - فیک	فعالیت ایتیکی ۵۰۴
۹ - کولن	فلوئورسانس ۴۲۷

کامپتون	قانون
۴۳۰	— گاوس ۱۷۵، ۱۷۶
اثر — ۴۳۰	— مالوس ۵۰۲
پراکندگی — ۴۳۱	— نیوتون ۷۰۱
طول موج — الکترون ۴۳۱	قطبش ۱۳، ۱۸۸، ۱۸۹
— پروتون ۴۳۳	— امواج عرضی ۳۵۴
کانون	بار — ۱۹۲
— آینه کروی ۵۲۴	— رنگی ۵۰۲
— اول ۵۳۲، ۵۳۸	زاویه — ۴۸۸
— تصویر ۵۳۲، ۵۳۸	— ماده ۱۸۷
— دوم ۵۳۲، ۵۳۸	— موج الکترومغناطیسی توسط بازتاب
— شیئی ۵۳۲، ۵۳۸	۴۸۸
— ی شدن مغناطیسی ۱۵۲	— — — با شکستهای پیاپی ۴۸۹
— ی کردن میکروسکوپ ۵۴۴	قطبش پذیری ۱۹۴
کاواک ۶۱۰	— اتمی ۱۹۵
— بازآوا ۶۱۰	— ایستا ۱۹۵
کلوندیش	— دینامیک ۱۹۶
ترازوی پیچشی — ۱۰	— مؤثر ۱۹۸
کر	— میانگین ۱۹۸
اثر الکترو-اپتیک — ۴۹۴	قطب مغناطیسی ۸۰، ۸۱
کرنش ۵۰۳	قطبی
— برشی ۳۵۶	مختصات — ۴۹
— عمودی ۳۴۳، ۳۴۴	مولکولهای — ۵۱، ۵۳
کشسانی	مولکولهای دو اتمی — ۵۲
ثابت — ۳۴۷، ۵۹۹	قطبیده
کشش سطحی ۳۵۸	— خطی ۴۹۷
کمانش ۷۰۰	— دایره ای ۳۵۴
کمترین (کوتهترین) فاصله نزدیک شدن ۳۳	کاتن-موتن
کمر بند	اثر — ۴۹۴
— های وان آلن ۹۳	کاتود ۲۱
کواتش ۲۰، ۵۹۳	پرتوی — ۹۶، ۹۷
— اندازه حرکت زاویه ای	کاتوره ای ۱۹۸، ۵۸۳
— انرژی ۳۰، ۴۳	کاتیون ۲۴
— بار الکتریکی ۲۰	کاکرافت-والتون
— بسامد ۵۹۳	شتابده — ۴۰
— طول موج ۵۹۳	

— یونی ۲۳	کوانتس
گره ۵۹۸، ۵۹۳، ۵۹۲	— فضایی ۳۵
خط — ۶۰۸، ۶۰۵، ۵۷۷	کوانتومی
سطح — ۵۸۱، ۵۷۹	الکترو دینامیک — ۳۱۰
گریمالدی فرانسیسکو ۶۰۱	مکانیک — ۴۳۴
گسیل گرما یونی ۲۳	کوری
گشتاور	دما — ۲۴۱
— چهار قطبی ۵۹	کوشی
— القایی ۱۸۷	فرمول — ۵۵۲
— دایمی ۱۸۷	کولن
— مغناطیسی ۱۰۶	اب — ۷۶
گیرنده ۲۹۸	قانون — ۹
لاپلاس	کیرشهف ۴۶۹
قانون آمپر — ۱۱۴، ۱۳۶	قانون اول — ۲۲۲
معادله — ۱۳۸	قانون دوم — ۲۲۲
لاپلاسی ۱۸۳	گالوانومتر تانژانسی ۱۲۴
لارمور	گام طبیعی ۵۹۴
بسامد — ۱۱۱، ۲۴۳	گاوجران ۴۴۸
فرمول — ۴۱۸	گاؤس ۱۷۵
لارنس ۹۷	شکل دیفرانسیلی قانون — ۱۸۱
لانژون	قانون — ۱۷۵، ۱۷، ۳۹۵
فرمول — ۱۹۹	— برای میدان الکتریکی ۱۷۲، ۳۰۱
لاوه	۳۰۹
معادله — ۶۷۷	— برای میدان مغناطیسی ۲۳۲، ۳۰۹، ۳۹۵
نقش — ۶۶۵	گایگر ۲۹
لوله	گذردهی ۱۱، ۱۹۳
— ارگک ۵۹۶	— خلا ۱۱
— دوسر باز ۵۹۶	— مغناطیسی ۲۳۷
— یک سر باز ۵۹۹	— نسبی ۱۹۳، ۲۳۷
لینارد	گردش
فرمول — ۴۲۳	— میدان ۲۱۸
ماخ	— مغناطیسی ۲۲۴
موج — ۳۸۰، ۳۸۱	گرما ۶۹۰
	— ی ویژه ۶۹۲

مدولاسیون دامنه ۳۷۶	ماده
مرکز اپتیکی عدسی ۵۳۷	- کپه ای ۸
مسافت آزاد میانگین ۷۰۶	- چپگرد ۵۰۵
- درآشامی ۷۰۹	- راستگرد ۵۰۵
معادله	مارپیچ
- براگ ۶۶۴	- چپگرد ۵۰۷
- پخش ۶۸۵	- راستگرد ۵۰۷
- پواسون ۱۸۳	ماکسول ۳۰۳، ۳۱۲
- دیفرانسیل حرکت موجی ۳۴۱	شکل دیفرانسیلی قانون آمپر - ۳۰۵
- لاپلاس ۱۸۳	قانون آمپر - ۲۶۴، ۳۱۰
- لاه ۶۷۷	معادلات - ۳۰۹
- ماکسول ۳۰۷، ۳۰۹	مالوس
- موج ۵۹۴	قانون - ۵۰۲
- نیوتون ۵۶۴	قضیه - ۴۷۱
مغناطان	مانیثیت ۲۴۱
میدان - ۲۳۴، ۲۳۵	متناظر
مغناطش	نقاط - ۴۷۱
بردار - ۲۳۳	محور
- ماده ۲۳۲	- اپتیکی ۴۹۲، ۴۹۳
مغناطیدگی ۲۳۸	- اصلی ۵۲۳
مغناطیس ۸۰	تک - ی ۴۹۲
مغناطیسی عرضی ۶۲۰	دو - ی ۴۹۴
مقاومت	مدارهای
- الکتریکی ۲۱۱، ۲۱۴	- جفت شده ۲۹۶
به هم بستن - ها ۲۱۶	- نوسانی ۶۱۲
- متوالی - ها ۲۱۶	مدل
- موازی - ها ۲۱۶، ۲۱۷	- پلاسمایی ۲۸
- تابشی آنتن ۴۱۰	- هسته ای ۲۸ و ۲۹
مقطع برخورد	مدول
- ماکروسکوپیکی ۷۰۷	- برشی ۳۴۴، ۳۵۶
- درآشامی ۷۰۹، ۷۱۰	- تراکمپذیری ۳۴۴
- میکروسکوپیکی ۷۰۸	- سختی ۳۴۴
منحنی	- کپه ای ۳۴۴
- دندان اره ای ۳۸۹	- کشسانی فنر ۳۴۷، ۶۰۰
- سیار ۳۳۳	- یانگ ۳۴۴

- | | |
|----------------------|------------------------------|
| ۴۷۳ - شکست ۴۶۸ | منشور ۵۴۸ |
| ۳۸۰ - شوک ۳۸۰ | دو - فونل ۵۸۰، ۶۲۰ |
| ۳۶۷ - طولی ۳۴۷ | - نیکول ۵۰۰ |
| ۴۹۲ - عادی | - ولاستون ۵۱۸ |
| ۳۶۷ - عرضی ۳۵۲، ۳۵۴ | موج ۳۲۹ |
| ۴۹۳ - غیرعادی | - استوانه‌ای ۳۶۸ |
| ۳۴۸ - فشار ۳۵۰ | - الکترومغناطیسی ایستاده ۶۰۱ |
| ۳۶۹ - کروی ۳۶۸ | - الکترومغناطیسی تخت ۳۹۴ |
| ۳۷۳ - خروجی | - ایستاده ۵۹۴ |
| ۳۷۳ - متباعد | - دو بعدی ۶۰۵ |
| ۳۷۳ - متقارب | - سه بعدی ۶۱۰ |
| ۳۷۳ - ورودی | - یک بعدی ۵۹۰ |
| ۳۷۳ - هماهنگ | - بازتاب ۴۶۸ |
| ۲۸۱ - کشسان ۳۴۲، ۳۵۵ | - برشی ۳۵۷ |
| ۳۵۹ - گرانی | بسته - ۳۳۹ |
| ۶۹۷ - گرمایی | - بی‌تاو ۳۷۴ |
| ۳۸۱ - ماخ ۳۸۰ | - پراکنده ۴۲۷، ۶۶۱ |
| ۳۸۰ - مخروطی | - پیچشی ۳۵۷ |
| ۳۵۹ - مویینه | - تخت ۳۶۸ |
| ۴۵۲ - میکرو | - هماهنگ ۳۶۷ |
| ۳۵۱ - نرده‌ای | - تراکمی ۳۴۸ |
| ۴۹۷ - نیم | - تکفام ۴۵۳ |
| ۳۵۹ - وزنی | تیغه چارک - ۴۹۷ |
| ۳۳۵ - هماهنگ | تیغه نیم - ۴۹۷ |
| ۶۳۱ - موجبر ۶۱۳ | - ثانوی ۴۶۹ |
| ۶۱۷ - آکوستیکی | - جابجایی ۳۵۱ |
| ۶۱۶ - اپتیکی | - دایره‌ای ۳۶۹ |
| ۶۱۵ - الکترومغناطیسی | - دو بعدی ۳۶۶ |
| مولد | - رادیویی ۴۵۴ |
| ۲۹۸ - القایی | - رونده ۳۳۷ |
| ۲۲۰ - انرژی | - ساکن ۵۷۶ |
| مولکول ۷۱۲ | - سطحی ۳۵۷ |
| ۷۱۳ - پخش ی | - سه بعدی ۳۶۶ |
| ۵۱ - قطبی | - سیملوله‌ای ۳۷۴ |
| | - سینوسی ۳۳۵ |

نگهبان شمال (سماک رامح) ۴۴۷

نمک

۶۶۸ - ترکی

۲۰۰ - روش

نوترون ۳۱

اسپین - ۱۱۰

بار - ۲۲

جرم - ۲۲

کند - ۶۹۹

گرمايي - ۶۹۹

نورکار ۴۵۳

نوسان

آزاد ۲۸۸، ۲۹۰

الکتريکي ۲۸۸

واداشته ۲۹۰

نوسانگر

میرا ۲۹۱

نیروی - ۱۹۵

هرتز ۶۰۳

نیروی

بین جریانهها ۱۱۸

پایستار ۲۱۷

لورنتس ۸۲

محركه الكتريکي ۲۱۷، ۲۱۹، ۲۶۴

۲۹۱

حرکتی ۲۷۴

مغناطیسی ۸۱، ۳۰۴

وابسته به سرعت ۱۴۲

وشکسانی ۷۰۴

هسته‌ای ۳۰، ۳۱

نیکول

منشور - ۵۰۰

نیوتون

برکولان ۱۲

حلقه‌های - ۵۹۰

مون پالومار

تلسکوپ - ۵۴۷

مونتاز رولند ۶۷۵

میدان

الکترومغناطیسی ۱۳۱، ۱۳۳، ۳۰۷

الکتريکي ۱۲

یکتواخت ۱۶

ایستا ۱۷۰، ۱۹۶

چشمه - ۲۴۳، ۲۳۱، ۳۰۹

سیملوله‌ای ۱۲۴

شدت - الکتريکي ۱۲

مغناطان ۲۳۴، ۲۳۵

مغناطیسی ۱۱۳، ۱۲۱

میانگین ۲۶۸

میانگین ۲۹۲

میرایی ۲۹۰

میکروسکوپ ۵۴۳

بزرگنمایی - ۵۲۵

توان تفکیک - ۵۴۵

کانونی کردن - ۵۴۴

میکروموج ۴۵۲

ناتکثیری ۷۰۹

نافام (افام) ۵۵۶

دستگاه - ۵۵۶

ناوردا ۹۶

ناهمدوس ۵۷۹

ناهمسانگرد ۳۶۹

نقش ۵۷۷

پراش ۶۲۲

فرانهورفر ۶۴۷

فرنال ۶۳۵، ۶۵۳

تداخلی ۵۷۹، ۶۴۷

دی-شور ۶۶۶

لاوه ۶۶۵

هرابا تیت ۴۹۷	نیوتون
هرتز ۳۹۴	قانون - ۷۰۱
هسته‌ای	معادله - ۵۶۴
برهم کنش - ۲	واگرایی ۱۸۲
هلمهولتز	واگتی
پیچ‌های - ۱۶۵	- مد ارتعاش ۶۳۱
فرمول - ۵۶۸	وان آلن
هماهنگ ۵۹۳	کمر بندهای تابشی - ۹۳
- فرد ۵۹۹	وان دوگراف
موج - ۳۷۳، ۳۶۷، ۳۳۵	شتا بدهنده - ۴۰
هم پتانسیل ۳۷	واهلش
همدوس ۵۷۹	زمان - ۲۱۵، ۲۸۳
همرفت ۶۹۰	وبر ۲۳۲
همسانگرد ۳۶۹	- بر آمپر ۲۷۹
همگن	- بر ثانیه ۲۶۵
رآکتور - ۶۹۹	- بر متر مربع ۲۳۲
هندسه	وتستون
- موج ۵۲۳	پل - ۲۵۵
هنری ۲۹۷	وشکسانی ۷۰۱
شکل دیفرانسیلی قانون فاراده - ۲۷۶	ضریب - ۷۰۳، ۷۱۲
قانون فاراده - ۲۶۴، ۲۶۵	ولاستون
هوك	مشور - ۵۱۸
قانون - ۳۴۴	ولت ۴۰، ۳۴
هویگنس	الکترون - ۴۲
ترسیم - ۴۶۹	- بر متر ۳۶
اصل - ۴۶۸	ولتا ۳۴
یانگ	ویژه حالت ۳۰، ۳۳۵
آزمایش دوشکاف - ۵۸۰	هال
برکس	اثر - ۸۴
دوربین - ۵۴۷	هالواکس ویلهلم ۴۳۸
یونکره (یونسفر) ۴۵۳	