

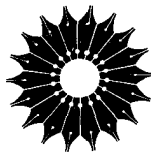


# فيزيڪ عمومي

جلد سوم

فيزيڪ ڪوانتومي و آماري

مارچلو آلونسو  
ادوارد جي. فين



# فيزيك عمومى

جلد سوم

فيزيك كوانتومى و آمارى

مارچلو آلونسو  
ادوارد جى. فين

ترجمه ناصر ميرفخرايى، ايرج هرمزديارى

# بسم الله الرحمن الرحيم

## فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار
۵	قسمت اول فیزیک کوانتومی
۷	۰۱ اساس فیزیک کوانتومی
۸	۱.۱ مقدمه
۸	۲.۱ تابش الکترومغناطیسی
۱۱	۳.۱ تابش جسم سیاه
۱۷	۴.۱ گسیل فوتوالکتریک
۲۰	۵.۱ پراکندگی تابش به وسیله الکترونهاى آزاد
۲۴	۶.۱ فوتونها
۲۹	۷.۱ حالتهاى مانا
۳۵	۸.۱ شواهد تجربى حالتهاى مانا
۳۹	۹.۱ برهم کنش تابش با ماده
۴۳	۱۰.۱ ذرات و ميدانها
۴۹	۱۱.۱ ذرات و بسته موجها
۵۱	۱۲.۱ اصل عدم قطعیت هایزبرگ برای مکان و تکانه
۵۵	۱۳.۱ رابطه عدم قطعیت برای زمان و انرژی
۵۹	مسائل
۶۷	مراجع

۶۹	۲. مکانیک کوانتومی
۷۰	۱.۲ مقدمه
۷۰	۲.۲ تابع موج و چگالی احتمال
۷۴	۳.۲ معادله شرودینگر
۷۷	۴.۲ پله پتانسیل
۸۳	۵.۲ ذره درجه پتانسیل
۹۳	۶.۲ نوسانگر هماهنگ
۹۹	۷.۲ ترازهای انرژی و تابع موجها در حالت کلی
۱۰۶	۸.۲ نفوذ در سد پتانسیل
۱۱۵	۹.۲ تقارن، تابع موجها، و پارینه
۱۱۷	۱۰.۲ معادله مستقل از زمان شرودینگر
۱۲۳	۱۱.۲ احتمال گذار و قواعد گزینش
۱۲۵	۱۲.۲ نظریه صوری مکانیک کوانتومی
۱۳۲	مسائل
۱۴۲	مراجع
۱۴۳	۳. اتمهای تک الکترونی
۱۴۴	۱.۳ مقدمه
۱۴۴	۲.۳ اتم هیدروژن
۱۵۲	۳.۳ طیف هیدروژن
۱۵۵	۴.۳ کوانتش تکانه زاویه ای
۱۶۰	۵.۳ تابع موجهای تک الکترونی تحت تأثیر نیروهای مرکزی
۱۷۴	۶.۳ اثر زیمان
۱۷۷	۷.۳ اسپین الکترون
۱۸۱	۸.۳ جمع تکانه های زاویه ای
۱۸۳	۹.۳ برهم کنش اسپین-مدار
۱۸۹	مسائل
۱۹۷	مراجع
۱۹۹	۴. اتمهای چند الکترونی
۲۰۰	۱.۴ مقدمه
۲۰۰	۲.۴ اتم هلیوم
۲۱۰	۳.۴ اصل طرد

۲۱۳	۴.۴	ساختار الکترونی اتمها
۲۱۷	۵.۴	جفت شدگی I-S
۲۲۵	۶.۴	اتمهای با یک یا دو الکترون ظرفیت
۲۳۱	۷.۴	طبقه‌های پرتو ایکس
۲۳۵		مسائل
۲۳۹		مراجع
۲۴۱	۰۵	مولکولها
۲۴۲	۱۰۵	مقدمه
۲۴۳	۲۰۵	یون مولکول هیدروژن
۲۵۲	۳۰۵	اوربیتالهای مولکولی مولکولهای دو اتمی
۲۵۶	۴۰۵	پیکربندی الکترونی بعضی از مولکولهای دو اتمی
۲۶۵	۵۰۵	مولکولهای چند اتمی
۲۷۲	۶۰۵	مولکولهای مزدوج
۲۷۷	۷۰۵	چرخشهای مولکولی
۲۸۱	۸۰۵	ارتعاشات مولکولی
۲۸۹	۹۰۵	گذارهای الکترونی در مولکولها
۲۹۳	۱۰۰۵	نتیجه
۲۹۳		مسائل
۲۹۸		مراجع
۳۰۱	۰۶	جامدات
۳۰۲	۱۰۶	مقدمه
۳۰۲	۲۰۶	انواع جامدات
۳۱۶	۳۰۶	نظریه نواری جامدات
۳۲۰	۴۰۶	مدل الکترون آزاد جامد
۳۲۶	۵۰۶	حرکت الکترون در ساختار دوره‌ای
۳۳۸	۶۰۶	رساناها، نارساناها، و نیمرساناها
۳۴۷	۷۰۶	نظریه کوانتومی رسانندگی الکتریکی
۳۵۳	۸۰۶	گذارهای تابشی در جامدات
۳۵۸		مسائل
۳۶۴		مراجع

۳۶۵	۰۷ ساختار هسته‌ای
۳۶۶	۱۰۷ مقدمه
۳۶۶	۲۰۷ ایزوتوپها، ایزوتونها، و ایزوبارها
۳۶۹	۳۰۷ یکای جرم اتمی
۳۷۰	۴۰۷ خواص هسته
۳۷۹	۵۰۷ انرژی بستگی هسته‌ای
۳۸۵	۶۰۷ نیروهای هسته‌ای
۳۸۸	۷۰۷ حالت پایه دوترون
۳۹۱	۸۰۷ پراکندگی نوترون-پروتون در انرژیهای پایین
۴۰۱	۹۰۷ مدل پوسته‌ای
۴۱۱	۱۰۰۷ گذارهای تابشی هسته‌ای
۴۱۷	مسائل
۴۲۲	مراجع
۴۲۵	۰۸ فرایندهای هسته‌ای
۴۲۶	۱۰۸ مقدمه
۴۲۶	۲۰۸ واپاشی پرتوزا
۴۳۵	۳۰۸ واپاشی آلفا
۴۴۱	۴۰۸ واپاشی بتا
۴۵۱	۵۰۸ واکنشهای هسته‌ای
۴۶۲	۶۰۸ شکافت هسته‌ای
۴۶۹	۷۰۸ همجوشی هسته‌ای
۴۷۵	۸۰۸ منشأ عناصر
۴۷۹	مسائل
۴۸۶	مراجع
۴۸۹	۰۹ ذرات بنیادی
۴۹۰	۱۰۹ مقدمه
۴۹۱	۲۰۹ منشأ ذرات
۴۹۳	۳۰۹ ذرات و پاد ذرات
۵۰۱	۴۰۹ ناپایداری ذره
۵۱۴	۵۰۹ قوانین پایستگی
۵۲۲	۶۰۹ ناوردایی، تقارن، و قوانین پایستگی

۵۳۲	۷.۹	تشدیدها
۵۴۱	۸.۹	ذره بنیادی چیست؟
۵۴۹		مسائل
۵۵۵		مراجع
۵۵۷		<b>قسمت دوم فیزیک آماری</b>
۵۵۹	۰.۱۰	مکانیک آماری کلاسیک
۵۶۰	۱.۱۰	مقدمه
۵۶۰	۲.۱۰	تعادل آماری
۵۶۲	۳.۱۰	قانون توزیع ماکسول - بولتزمن
۵۷۱	۴.۱۰	دما
۵۷۸	۵.۱۰	تعادل گرمایی
۵۸۱	۶.۱۰	کاربرد در گاز ایده آل
۵۸۸		مسائل
۵۹۴		مراجع
۵۹۷	۰.۱۱	<b>ترمودینامیک</b>
۵۹۸	۱.۱۱	مقدمه
۵۹۸	۲.۱۱	پایستگی انرژی سیستم ذرات
۶۰۰	۳.۱۱	سیستمهای چندذره ای؛ کار
۶۰۲	۴.۱۱	سیستمهای چندذره ای؛ دما
۶۰۳	۵.۱۱	قانون اول ترمودینامیک
۶۰۶	۶.۱۱	نمایش نموداری فرایندها
۶۱۱	۷.۱۱	فرایندهای خاص
۶۱۳	۸.۱۱	آنتروپی و قانون دوم ترمودینامیک
۶۱۹	۹.۱۱	آنتروپی و گرما
۶۲۴	۱۰.۱۱	بحث فرایندها بر حسب آنتروپی
۶۲۹		مسائل
۶۳۷		مراجع
۶۳۹	۰.۱۲	<b>خواص گرمایی گازها</b>
۶۴۰	۱.۱۲	مقدمه
۶۴۰	۲.۱۲	معادله حالت یک گاز ایده آل

صفحه	عنوان
۶۴۳	معادلهٔ حالت گازهای حقیقی ۳.۱۲
۶۵۲	ظرفیت گرمایی يك گاز تك اتمی ایده آل ۴.۱۲
۶۵۵	ظرفیتهای گرمایی يك گاز چند اتمی ایده آل ۵.۱۲
۶۶۲	اصل هم پاری انرژی ۶.۱۲
۶۶۶	مسائل
۶۷۰	مراجع
۶۷۱	۰.۱۳ آمار کوانتومی
۶۷۲	۱.۱۳ مقدمه
۶۷۲	۲.۱۳ قانون توزیع فرمی - دیراک
۶۷۶	۳.۱۳ گاز الکترونی
۶۸۰	۴.۱۳ کاربرد آمار فرمی - دیراک در الکترونهای فلزات
۶۸۳	۵.۱۳ قانون توزیع بوز-اینشتین
۶۸۶	۶.۱۳ گاز فوتونی
۶۹۳	۷.۱۳ ظرفیت گرمایی جامدات
۶۹۷	۸.۱۳ گاز ایده آل در آمار کوانتومی
۷۰۱	۹.۱۳ مقایسهٔ سه آمار
۷۰۱	مسائل
۷۰۷	مراجع
۷۰۹	پیوستها
۷۲۷	پاسخ مسائل فرد
۷۵۸	فهرست راهنما



## پیشگفتار

این کتاب سومین و آخرین جلد از يك دوره کتاب تحت عنوان کلی فیزیک عمومی است. هدف این دوره ارائه مفاهیم فیزیک در سطح مقدماتی دوره کارشناسی برای دانشجویان رشته‌های علوم و مهندسی به صورتی منطقی و یکدست و با تأکید بر مفاهیم و قوانین اساسی است که پایه فیزیک را تشکیل می‌دهد، مانند قوانین پایستگی و همبستگی متقابل میان ذرات و میدانها، و دیدگاه اتمی ماده. سعی کرده‌ایم مفاهیم فیزیکی را به صورتی ارائه دهیم که دانشجوی درک روشنی از معانی نظری آنها کسب کند، بنیادهای تجربی آنها را تشخیص دهد، و همبستگی نزدیک میان نظریه و تجربه را متوجه شود. همچنین سعی کرده‌ایم که دانشجوی توانایی استفاده از ریاضیات مورد نیاز برای بیان این مفاهیم را کسب کند. مطالب ارائه شده در سه جلد معادل يك دوره دو نیمسال در فیزیک عمومی به اضافه يك دوره يك (یادو) نیمسال در فیزیک جدید است. در جلد اول مکانیک و برهم کنش گسرنشی، در جلد دوم برهم کنشهای الکترومغناطیسی و امواج، و در جلد سوم فیزیک کوانتومی و آماری (از جمله ترمودینامیک) بررسی می‌شود. با آنکه این سه جلد باهمدیگر ارتباط نزدیک دارند و توالی منطقی را دنبال می‌کنند، هر جلد به تنهایی و به طور مستقل می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. این موضوع خصوصاً در جلد سوم صادق است، زیرا اکثر مطالب موجود در يك دوره فیزیک جدید مقدماتی را در بر می‌گیرد.

اصولاً در دوره‌های تحصیلی تمام علوم سعی می‌شود که موضوعات جدید را در برنامه تحصیلی بگنجانند. ما امیدواریم که این دوره نیز با بالا بردن سطح درک دانشجویان در مفاهیم فیزیکی و توانایی او در کاربرد آنها در موضوعات مربوط بتواند این هدف را برآورده کند. این امر باعث می‌شود که بسیاری از دوره‌های میانی که در حال حاضر در دوره تحصیلی کارشناسی ارائه می‌شود به سطح بالاتری ارتقا یابند. دوره‌های سنتی مکانیک، الکترومغناطیس، و فیزیک جدید در سطح کارشناسی در این ارتقا سود بیشتری خواهند برد. از این رو، دانشجوی دوره تحصیلی کارشناسی خود را با معلومات بالاتری در مقایسه با دوره‌های قبلی به پایان خواهد رسانید، و مخصوصاً برای کسانی که دوره تحصیلی رسمی

خود را در این مقطع‌ها می‌کنند، بیشتر مفید خواهد بود. به این ترتیب برای ارائه دوره‌های جدیدتر و جالبتر در سطح کارشناسی ارشد نیز امکان بیشتری فراهم می‌شود. اخیراً در کتابهای درسی در دوره‌های مقدماتی سایر رشته‌های علمی نیز از همین روش استفاده شده است.

قسمت اول این جلد فیزیک کوانتومی نام دارد. مفاهیم کوانتومی جوهر فیزیک امروز را تشکیل می‌دهند. متأسفانه به‌جز مقدمه مختصری در مورد نظریه‌های بور و نیز دوگانگی موج-ذره در دوره‌های فیزیک عمومی مقدماتی، غالباً مفاهیم مکانیک کوانتومی و کاربردهای آنها را به دانشجویان ارائه نمی‌کنند. معمولاً تنها دانشجویان سالهای بالای فیزیک و شیمی، آن هم در سالهای آخر، مکانیک کوانتومی را می‌آموزند. در حالی که این دانشجویان باید تا آنجا که امکان دارد، زودتر اطلاعاتی درباره مفاهیم کوانتومی کسب کنند تا بتوانند بعداً از این معلومات در مراحل بعدی دوره کارشناسی استفاده کنند. در آمریکا این روش قویاً توسط کمیسیون فیزیک دانشگاهی پذیرفته شده است. گرایشهای حاضر در زیست‌شناسی و مهندسی در این جهت است که دانشجویان این رشته‌ها نیز درک اساسی از فیزیک حالت جامد و ساختار مولکول داشته باشند. بنا بر این سعی کرده‌ایم که مکانیک کوانتومی را به‌طریقی به دانشجویان ارائه دهیم که با وجود مقدماتی بودن آن، بتواند مفاهیم کوانتومی را در وضعیتهای مختلف به‌کاربرد.

فصل اول مقدمه‌ای است در اساس دیدگاههای کوانتومی، این موضوع در فصل دوم بازمینه لازم در مکانیک کوانتومی دنبال می‌شود. در این فصل به روشی تأکید می‌کنیم که در آن، از روی شکل تابع انرژی پتانسیل و نیز معلوماتی درباره ماهیت کلی تابع موجها بتوان اطلاعات فیزیکی مربوط به یک سیستم را استنتاج کرد. در فصول بعدی، یعنی از فصل سوم تا نهم، مفاهیم و تکنیکهای کوانتومی در مورد تحلیل اتمها، مولکولها، جامدات، هسته‌ها، و ذرات بنیادی به‌کار می‌رود.

در قسمت دوم این کتاب (که فیزیک آماری نامیده شده است)، روشهای آماری را برای بررسی خواص ماده کپه‌ای به‌کار می‌بریم. فیزیک آماری نیز، همانند مکانیک کوانتومی، یک ابزار پر قدرت و دارای شالوده محکمی است که دانشجوی هر چه زودتر باید با آن آشنا شود. پس از بررسی مکانیک آماری کلاسیک در فصل دهم، ترمودینامیک را از دیدگاه آماری در فصل یازدهم معرفی می‌کنیم و در فصل دوازدهم آن را در مورد گازهای ایده‌آل و حقیقی به‌کار می‌بریم. ما معتقدیم که این شیوه مناسبترین روش برای آشنا کردن دانشجویان با مفاهیم ترمودینامیک است. در فصل سیزدهم، کتاب با مقدمه مختصری درباره آمار کوانتومی به پایان می‌رسد.

چون خیلی از دانشجویان مفاهیم اساسی نسبیت را در دوره فیزیک عمومی فرا می‌گیرند، نظریه نسبیت خاص در پیوست مورد بحث قرار گرفته است. (بحث کاملتر در مورد نسبیت در جلد اول و دوم آمده است). موضوعات جنبی خاصی چون سرعت گروه و روشهای آشکارسازی ذرات نیز در پیوست ارائه شده‌اند. دوره حساب دیفرانسیل و انتگرال عمومی را نیز برای نیازمندیهای ریاضی مطالب کتاب در نظر گرفته‌ایم. ضمناً آن

قسمت از محاسبات ریاضی را که برای درک مفاهیم فیزیکی ضروری نیستند حذف و یا به قسمت مسائل واگذار کرده ایم. يك مثال از این نوع محاسبات پیدا کردن بعضی جوابهای معادلهٔ شرودینگر است که بسیار خسته کننده هستند.

بسیاری از کاربردهای اصول اساسی و نیز بحث دربارهٔ بعضی مطالب پیشرفته تر در مثالهای حل شده آمده است. کتاب طوری تدوین شده است که دانشجو می تواند تمامی مثالها را در دور اول مطالعه حذف کند. در دور دوم مطالعه، دانشجو باید مثالهایی را در نظر بگیرد که مدرس آنها را انتخاب می کند. مدرس می تواند این مثالها را بر حسب مقاصد مورد نظر به بحث بگذارد یا به صورت اختیاری در نظر بگیرد. بخشهایی از این کتاب را می توان بدون ازدست دادن پیوستگی مطالب، حذف کرد. مسائل انتهایی هر فصل، به ترتیب مطالب ارائه شده مطرح شده اند و مسائل مشکلتر در پایان آمده است. تعداد زیاد مسائل متنوع بدان معنی است که مدرس می تواند بر حسب توانایی دانشجویان خود آنها را انتخاب کند. لذا با انتخاب مناسب از مواد این کتاب، مدرس می تواند مطالب را در يك دورهٔ يك تا دو نیم سالی ارائه دهد.

مارچلو آلونسو

ادوارد جی. فین

قسمت اول

# فيزيك كوانتومی

۱. اساس فيزيك كوانتومی
۲. مكانيك كوانتومی
۳. اتمهای تك الكترونی
۴. اتمهای چند الكترونی
۵. مولكولها
۶. جامدات
۷. ساختار هسته ای
۸. فرایندهای هسته ای
۹. ذرات بنیادی

یکی از هدفهای اساسی فیزیک تحلیل خواص عناصر اصلی ساده و بررسی فرایندهایی است که در نتیجه برهم کنش میان این عناصر رخ می دهند. این عناصر اصلی که به ذرات اساسی یا بنیادی معروف اند، همان الکترونها، پروتونها، و نوترونها (وسایر ذرات) هستند که به هم می پیوندند و هسته ها، اتمها، و مولکولها را تشکیل می دهند. این گروهها نیز به نوبه خود با هم ترکیب می شوند و ماده کپهای تشکیل می دهند. اگرچه حرکت ذرات بنیادی بر اساس اصول پایستگی تکانه، تکانه زاویه ای، و انرژی انجام می شود ولی تحلیل این حرکت نیازمند چارچوبی است که از چندین جهت با چارچوب به کار رفته در مکانیک کلاسیک (یا مکانیک نیوتونی) برای تحلیل حرکت ماکروسکوپیک متفاوت است. این نظریه جدید که با ظرافت خاصی پرداخته و ارائه شده است، مکانیک کوانتومی نام دارد. طبیعی است که قبل از به کار بردن این نظریه برای بررسی اتمها، مولکولها و هسته ها باید کاملاً با آن آشنا شویم. اتمها و مولکولها اساساً در نتیجه برهم کنشهای الکترومغناطیسی میان هسته های باردار مثبت و الکترونها باردار منفی تشکیل می شوند. از این رو، بدون اینکه به سایر نیروهای کمابیش شناخته شده متوسل شویم می توانیم، با ترکیب قوانین الکترومغناطیس و قوانین مکانیک کوانتومی، اتمها و مولکولها را مطالعه کنیم. همین روش را می توان برای مطالعه گازها، مایعات، و جامدات نیز به کار برد. از طرف دیگر، هسته ها اساساً در نتیجه برهم کنش جدیدی که به برهم کنش قوی یا هسته ای معروف است شکل می گیرند. چون برهم کنش قوی هنوز هم به طور کامل شناخته نشده است، تحلیل آن خیلی پیچیده تر است، در نتیجه، بحث مربوط به هسته ها در این کتاب یک بحث توصیفی خواهد بود.

شاید بتوان گفت که مطالعه ذرات بنیادی فعالترین و در عین حال جالب توجه ترین شاخه فیزیک معاصر است. علاوه بر برهم کنش قوی برهم کنش دیگری، که به برهم کنش ضعیف معروف است، میان این ذرات مشاهده می شود. برهم کنش گرانشی، که ضعیفترین نوع برهم کنشهاست، در ساختار بنیادی ماده نقش چندانی ندارد. مقدار نسبی این چهار برهم کنش عبارت است از

۱	قوی
۱۰-۲	الکترومغناطیسی
۱۰-۱۳	ضعیف
۱۰-۳۸	گرانشی

فرایندهایی که در آنها ذرات بنیادی شرکت دارند با صورت بندی جدیدی، که به نظریه میدان کوانتومی معروف است و تا حدودی با صورت بندی مکانیک کوانتومی فرق دارد مطالعه می شوند. این نظریه بسیار پیچیده است و در این کتاب بحثی از آن به میان نمی آید.

# اساس فيزيك كو انتومى

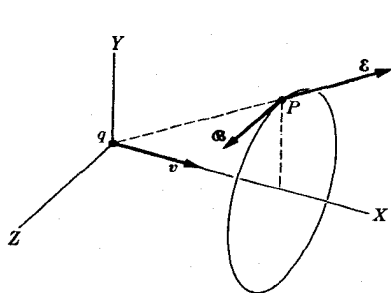
مقدمه	۱۰۱
تابش الكتر و مغناطيسى	۲۰۱
تابش جسم سياه	۳۰۱
كسيل فوتو الكترىك	۴۰۱
پراكنندگى تابش به وسيله الكتر و نهاى آزاد	۵۰۱
فوتونها	۶۰۱
حالاتهاى مانا	۷۰۱
شواهد تجربى حالاتهاى مانا	۸۰۱
برهم كنش تابش با ماده	۹۰۱
ذرات و ميدانها	۱۰۰۱
ذرات و بسته موجهها	۱۱۰۱
اصل عدم قطعيت هايزنبرگ برآى مكان و تكانه	۱۲۰۱
رابطه عدم قطعيت برآى زمان و انرژى	۱۳۰۱

## ۱.۱ مقدمه

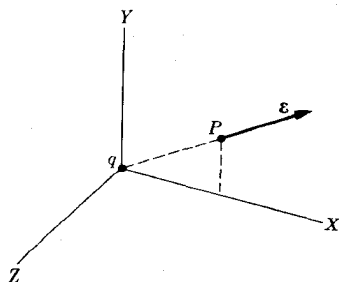
در اواخر قرن نوزدهم و در خلال ربع اول قرن بیستم، شواهد تجربی نشان داد که برهم کنش تابش الکترومغناطیسی با ماده کاملاً با قوانین الکترومغناطیس سازگار نیست. این قوانین که نتیجه کار آمپر، لاپلاس، فاراده، هانری، ماکسول، و دیگران اند در معادلات ماکسول برای میدان الکترومغناطیسی خلاصه شده‌اند. در همان زمان نظریه ساختار اتمی ماده، عمدتاً در نتیجه کشف الکترون و تأیید مدل هسته‌ای اتم، در حال تکوین بود. ضمناً آزمایشهای دیگری، فیزیكدانان را واداشت که در مفاهیم خود از حرکت ذرات زیر اتمی تجدید نظر کنند زیرا این ذرات دقیقاً بر طبق فرضهای مکانیک نیوتونی حرکت نمی‌کردند. برای تبیین این مشاهدات جدید، ایده‌های نوینی که کم و بیش هوددی بودند، به وسیله چندین فیزیكدان مطرح شد. به مرور زمان و با کوشش تعداد زیادی از فیزیكدانان برجسته، این ایده‌ها تکامل یافتند و به صورتی که امروزه به نظریه کوانتومی معروف است درآمدند. شاید بتوان گفت که فیزیک معاصر بر اساس این نظریه استوار است. در این فصل، پایه‌های مهم و تجربی فیزیک کوانتومی را مروری کنیم.

## ۲.۱ تابش الکترومغناطیسی

برهم کنش الکترومغناطیسی میان دو ذره باردار را می‌توان به بهترین وجه بر حسب مفاهیم میدانهای الکتریکی و مغناطیسی حاصل از بار الکتریکی بیان کرد. هنگامی که ذره بارداری نسبت به ناظر لختی در حال سکون است، ناظر میدانی را که به میدان الکتریکی بار معروف است اندازه گیری می‌کند (شکل ۱.۱). اما اگر بار الکتریکی نسبت به ناظر در حال حرکت باشد، ناظر میدان متفاوتی را مشاهده می‌کند که میدان الکترومغناطیسی بار نام دارد (شکل ۲.۱). در حالت اخیر نیز یکی از مؤلفه‌ها را مؤلفه میدان الکتریکی و مؤلفه دیگر را مؤلفه میدان مغناطیسی می‌نامند. این میدانها به سرعت و شتاب بار الکتریکی نسبت به ناظر بستگی دارند. چون تفکیک میدان حاصل از بار به میدان الکتریکی و مغناطیسی به حرکت نسبی بار



شکل ۲.۱ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بار در حال حرکت یکنواخت.



شکل ۱.۱ میدان الکتریکی بار در حال سکون.

و ناظر بستگی دارد، از این رو فقط از میدان الکترومغناطیسی ذره باردار صحبت به میان می آید. از طرف دیگر، هنگامی که ذره‌ای در میدان الکترومغناطیسی حاصل از ذرات باردار دیگر حرکت می کند، نیرویی بر آن وارد می شود که از رابطه زیر به دست می آید

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$\mathbf{E}$  و  $\mathbf{B}$  به ترتیب میدانهای الکتریکی و مغناطیسی هستند که ناظر اندازه گیری می کند. سرعت ذره نسبت به ناظر  $\mathbf{v}$  است. از این طریق می توانیم بر هم کنش الکترومغناطیسی ذرات باردار را بر حسب میدانها توصیف کنیم.

برای ایجاد میدان الکترومغناطیسی انرژی لازم است. انرژی موجود در یکای حجم میدان الکترومغناطیسی درخلاً برابر است با

$$E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathcal{B}^2 \quad (101)$$

که در آن  $\epsilon_0$  و  $\mu_0$  به ترتیب گذردهی و تراوایی خلاً نام دارند. انرژی میدان الکترومغناطیسی ایستا (یعنی میدانی که نسبت به زمان تغییر نمی کند) ثابت باقی می ماند. اما هنگامی که میدان وابسته به زمان است، انرژی الکترومغناطیسی در هر نقطه نسبت به زمان تغییر می کند. تغییرات زمانی میدان الکترومغناطیسی موج الکترومغناطیسی ایجاد می کند که با سرعت زیرممتشر می شود

$$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \approx 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1} \quad (201)$$

که برابر سرعت نور درخلاً است. بنا بر این می توان گفت که این موج حامل انرژی میدان الکترومغناطیسی است. این انرژی که به وسیله موج الکترومغناطیسی حمل می شود را گاهی تابش الکترومغناطیسی می گویند.

بار در حال سکون نسبت به ناظر، میدان ایستا تولید می کند و انرژی الکترومغناطیسی تابش نمی کند. همچنین می توان نشان داد که بار در حال حرکت مستقیم الخط یکنواخت نیز انرژی الکترومغناطیسی تابش نمی کند، زیرا انرژی کل میدان الکترومغناطیسی آن ثابت باقی می ماند. برای بار با حرکت شتابدار وضع کاملاً متفاوت است. انرژی کل میدان الکترومغناطیسی بار شتابدار نسبت به زمان تغییر می کند. بنا بر این بار شتابدار، انرژی الکترومغناطیسی تابش می کند.

آهنگ تابش انرژی بار الکتریکی  $q$  که با سرعت  $\mathbf{v}$  و شتاب  $\mathbf{a}$  حرکت می کند هنگامی که سرعت در مقایسه با سرعت نور کوچک باشد، عبارت است از

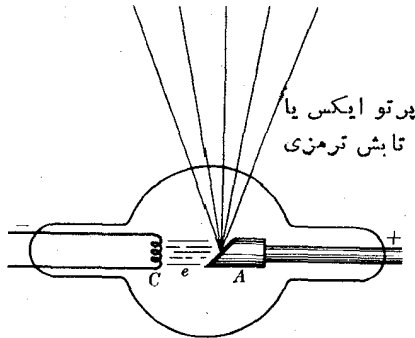
$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 a^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \quad (301)$$

یک نتیجه بسیار مهم این است که هر گاه بخوایم حرکت بار شتابدار پایسته بماند



برای جبران انرژی تابش شده باید انرژی به آن بدهیم. این بدان معنی است که وقتی یک یون به طریقی، مثلاً درشتا بدهنده وان دوگراف یا درسیکلوترون شتاب می گیرند، کسری از انرژی داده شده به آن به صورت تابش الکترومغناطیسی تلف می شود. اما بجز در انرژیهای نسبیته، این اتلاف انرژی قابل چشمپوشی است. ذرات باردار به دام افتاده در میدان مغناطیسی زمین، در لکه های خورشید، یا در اجسام سماوی دور مانند سحابی خرچنگ نیز تابشی گسیل می کنند که به تابش سنکروترونی معروف است. این تابش از بسامدهای رادیویی تا فرابنفش فرین را در بر می گیرد.

هر گاه ذره، به جای شتاب تندشونده، شتاب کندشونده داشته باشد باز هم معادله (۳۰۱) معتبر است و انرژی تابش شده برابر با افزایش انرژی میدان الکترومغناطیسی ناشی از کاهش سرعت بار الکتریکی است. به عنوان مثال، هنگامی که یک ذره باردار تند مانند الکترون یا پروتون به هدفی برخورد کند و متوقف شود، قسمت عمده ای از انرژی کل آن به صورت تابش ظاهر می شود (شکل ۳۰۱). این تابش به نام تابش ترمزی<sup>۱</sup> معروف است. پروتو ایکس که در فیزیک، پزشکی، و صنعت کاربرد دارد با همین ساز و کار عمده تولید می شود. انرژی تابش شده به وسیله ذره باردار ممکن است توسط ذرات باردار دیگری که تحت کنش میدان الکترومغناطیسی حاصل از ذره اول قرار می گیرند جذب شود. از این رو می توان برهم کنش میان دوزة باردار را به صورت تبادل انرژی از طریق گسیل و جذب توصیف کرد. به عنوان مثال، آنتن یک فرستنده رادیویی در اثر نوسان الکترونیهای موجود



شکل ۳۰۱ تابش گسیل شده به وسیله بار الکتریکی هنگامی که با هدف موجود در لامپ پرتو ایکس برخورد می کند.

۱. تابش ترمزی از کلمات آلمانی Bremsung (شتاب منفی) و strahlung (تابش) گرفته شده است. م.

در آن، انرژی الکترومغناطیسی تابش می‌کند. قسمتی از این انرژی را الکترونهاى موجود در آنتن گیرنده رادیویی می‌گیرند و سیگنال تولید می‌کنند.

تحلیل فرایندهای گسیل و جذب تابش (یعنی برهم کنش تابش و ماده). برای آگاهی از رفتار ماده بسیار ضروری و اساسی است. همان‌طور که در بخشهای زیر خواهیم دید فیزیک کوانتومی در نتیجه تحلیل چنین فرایندهایی تکامل پیدا کرده است.

مثال ۱۰۱ آهنگ تابش انرژی به وسیله یک دوقطبی الکتریکی در حال نوسان.

حل: فرض کنید بار الکتریکی  $q$  در راستای محور  $z$  طوری حرکت می‌کند که مکان آن در هر لحظه با رابطه  $z = z_0 \cos \omega t$  داده می‌شود. این معادله با یک حرکت نوسانی با دامنه  $z_0$  و بسامد زاویه‌ای  $\omega$  متناظر است. از این رو، بار  $q$  هم‌ارز یک دوقطبی الکتریکی در حال نوسان است. شتاب ذره برابر است با  $a = -\omega^2 z$ . از جانشانی این مقدار در معادله (۳۰۱) خواهیم داشت

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 z^2 \omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (4.1)$$

چون  $z$  با زمان تغییر می‌کند، آهنگ تابش انرژی نیز نوسانی است. برای به دست آوردن میانگین آهنگ تابش انرژی، با استفاده از رابطه  $(z^2)_{\text{ave}} = (1/2)z_0^2$ ، خواهیم داشت

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{ave}} = \frac{q^2 z_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \quad (5.1)$$

می‌توان گفت که یک دوقطبی الکتریکی در حال نوسان، انرژی را با آهنگ میانگینی که به وسیله معادله (۵.۱) داده می‌شود تابش می‌کند. این تابش با یک میدان الکترومغناطیسی که با همان بسامد دوقطبی نوسان می‌کند متناظر است.

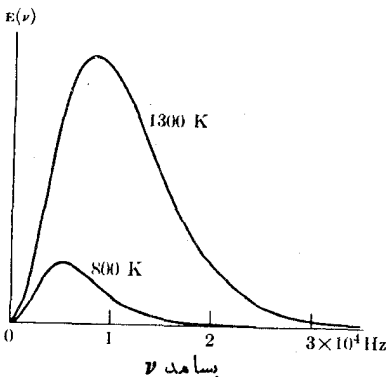
### ۳۰۱ تابش جسم سیاه

کاواکی را در نظر می‌گیریم که دیوارهای آن در دمای مشخصی قرار دارند. اتمهای تشکیل دهنده دیوارها تابش الکترومغناطیسی گسیل می‌کنند. این اتمها در همین زمان تابش گسیل شده به وسیله سایر اتمهای دیوارها را نیز جذب می‌نمایند. میدان تابش الکترومغناطیسی تمام فضای کاواک را اشغال می‌کند. هنگامی که تابش به دام افتاده در داخل کاواک با اتمهای موجود در دیوارها به ترازمندی رسید مقدار انرژی گسیل شده به وسیله اتمها در واحد زمان با مقدار انرژی جذب شده توسط آنها برابر می‌شود. از این رو، هنگامی که تابش موجود در کاواک با دیوارها در حال ترازمندی است، چگالی انرژی میدان الکترومغناطیسی ثابت خواهد بود. تجربه نشان داده است که در حالت ترازمندی، تابش الکترومغناطیسی به دام افتاده توزیع انرژی کاملاً مشخصی دارد، بدین معنی که به هر بسامدی یک چگالی انرژی

نسبت داده می‌شود که فقط به‌دمای دیواره‌ها بستگی دارد و از جنس دیواره‌ها مستقل است. چگالی انرژی مربوط به تابشی با بسامدهای میان  $\nu$  و  $\nu + d\nu$  به صورت  $E(\nu)d\nu$  نوشته می‌شود که در آن  $E(\nu)$  چگالی انرژی به‌ازای واحد گستره بسامد است و به‌چگالی انرژی تکفام معروف است. در شکل ۴۰۱ تغییر مشاهده شده  $E(\nu)$  با بسامد  $\nu$  برای دودمای متفاوت نشان داده شده است، منحنیهای از این نوع برای اولین بار در سال ۱۸۹۹ به‌وسیله لومر و پرینگشایم به‌طور تجربی به‌دست آمد. همچنان‌که از روی شکل دیده می‌شود، چگالی انرژی برای هر یک از دودما در یک بسامد مشخص بیشینه کاملاً مشخصی دارد. همچنین توجه کنید که بسامدی که به‌ازای آن چگالی انرژی بیشینه است، با افزایش دما افزایش می‌یابد. این موضوع تغییر رنگ جسم تابش‌کننده را هنگام تغییر دمای آن توضیح می‌دهد.

هر گاه روزنه کوچکی در یکی از دیواره‌های کاواک ایجاد شود، قسمتی از تابش به‌خارج منتقل می‌شود که می‌توان آن را تحلیل کرد. هنگامی که جسم در دماهای بالا قرار دارد و شدت تابش ترازمندی موجود در کاواک نیز بسیار زیاد است، روزنه به‌صورت خیلی روشن ظاهر می‌شود. ولی در دماهای پایین، هنگامی که شدت تابش ترازمندی در ناحیه مرئی طیف قابل چشمپوشی است، روزنه به‌صورت کاملاً سیاه دیده می‌شود. به‌همین دلیل تابش خارج شده از کاواک، توسط افرادی که در قرن نوزدهم آن را تحلیل می‌کردند به تابش جسم سیاه معروف شد.

مسئله پیدا کردن ساز و کاری که باعث می‌شود اتمهای تابش‌کننده بتوانند توزیع انرژی مشاهده شده در تابش جسم سیاه را تولید کنند، به‌پیدایش فیزیک کوانتومی منجر شد. تا اواخر قرن نوزدهم، همه کوششهایی که با استفاده از مفاهیم موجود در آن زمان، برای تبیین این توزیع انرژی صورت می‌گرفت با ناکامی کامل مواجه می‌شد. در حدود سال ۱۹۰۰، ماکس پلانک فیزیکدان آلمانی پیشنهاد کرد که هر گاه تابش موجود در کاواک با اتمهای دیواره‌ها در حال ترازمندی باشد میان توزیع انرژی تابش و انرژی اتمهای موجود در کاواک یک همخوانی وجود دارد. پلانک، برای اینکه مدلی از اتمهای تابش‌کننده به‌دست بدهد فرض کرد که هر اتم، همچون یک نوسانگر هماهنگ، با بسامد معین  $\nu$  نوسان می‌کند.



شکل ۴۰۱ چگالی انرژی تکفام تابش جسم سیاه در دماهای متفاوت تابعی از بسامد.

پلانک به عنوان دومین فرض پیشنهاد کرد که

هر نوسانگر انرژی تابشی را فقط در مقداری که با بسامد خودش،  $\nu$ ، متناسب است می تواند گسیل یا جذب کند.

فرض اخیر در نظریه کلاسیک الکترومغناطیسی (آن طور که در معادلات ماکسول بیان شده است) مطرح نمی شود. در این نظریه، گسیل یا جذب انرژی به صورت پیوسته مجاز است. هرگاه در یک تک فرایند حاصل از برهم کنش میان یک نوسانگر و تابش الکترومغناطیسی انرژی  $E$  جذب یا گسیل شود، فرض پلانک با معادله زیر بیان می شود.

$$E = h\nu \quad (۶.۱)$$

که در آن  $h$  ثابت تناسب، بنا به فرض برای تمام نوسانگرها یکسان است. بنا بر این، هنگامی که نوسانگری تابش الکترومغناطیسی را جذب یا گسیل می کند، انرژی آن به مقدار  $h\nu$  افزایش یا کاهش می یابد. معادله (۶.۱) حاکی از آن است که

انرژی نوسانگرهای اتمی کوانتیده است.

یعنی هر نوسانگر با بسامد  $\nu$  فقط می تواند مقادیر مشخصی انرژی داشته باشد که عبارت انداز  $0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots$  و مانند آن (البته با این فرض که کمینه انرژی نوسانگر صفر است). از این رو، مقادیر ممکن انرژی هر نوسانگر با بسامد  $\nu$  در حالت کلی با رابطه زیر داده می شود

$$E_n = nh\nu \quad (۷.۱)$$

که در آن  $n$  یک عدد درست و مثبت است. همچنان که می دانیم، انرژی هر نوسانگر با مجذور دامنه آن متناسب است. بنا بر این، با تنظیم مناسب دامنه نوسانها می توانیم کاری کنیم که یک نوسانگر با بسامد معین هر مقدار انرژی داشته باشد. با توجه به آنچه گفته شد می توان گفت که ایده پلانک یک فرض هوددی بود که با مفاهیم کلاسیک نمی شد آن را توضیح داد و تنها به این دلیل که در عمل «درست از آب درمی آمد» و فیزیکدانان نیز در آن زمان توجیه بهتری نداشتند، پذیرفته شد. ناگفته نماند که هنوز هم یک تبیین مناسب وجود ندارد و باید کوانتش بعضی کمیتهای فیزیکی را به صورت یک واقعیت بنیادی طبیعت بپذیریم. پلانک، با استفاده از پاره های نکات آماری، همراه با معادله (۶.۱) رابطه زیر را برای چگالی انرژی تابش جسم سیاه به دست آورد

$$E(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (۸.۱)$$

که در آن  $k$  ثابت بولتزمن است. این رابطه که به طرز شگفت انگیزی با مقادیر تجربی  $E(\nu)$  در دماهای متفاوت سازگار است، به عنوان رابطه درست تابش جسم سیاه پذیرفته و به قانون تابش پلانک معروف شد.

يك جنبهٔ جالب این است که امروزه نمی توان استنتاج پلانک را از نظر فیزیکی چشمگیر دانست (و به همین دلیل است که آن را حذف می کنیم). به عبارت دیگر، مسئله ای که پیدایش نظریهٔ کوانتومی را شتاب داد برای اولین بار با يك روش نه چندان رضایت بخش حل شده. این مسئله به ناچار چندین سال مسکوت ماند تا اینکه نظریهٔ کوانتومی در سایر جنبه های فکری توسعه پیدا کرد و يك روش محاسباتی مناسب به دست آمد. این موضوع را در بخش ۶.۱۳ مطالعه خواهیم کرد. با این حال، ایده های پلانک، مخصوصاً معادلات (۶.۱) و (۷.۱)، افکار جدیدی را در فیزیکدانان دیگری که بر روی دیگر پدیده های مربوط کار می کردند برانگیخت. این موضوع به توسعه و پیشرفت سریع نظریهٔ کوانتومی منجر شد.

در معادله (۶.۱) ثابت اختیاری  $h$ ، معروف به ثابت پلانک، وارد شده است. مقدار  $h$  که از قرار دادن مقادیر تجربی مربوط  $E(v)$  در معادله (۸.۱) به دست می آید برابر است با

$$h = 6.6256 \times 10^{-34} \text{ J s} \quad (9.1)$$

ثابت پلانک یکی از مهمترین ثابتهای فیزیک است.

**مثال ۲.۱** چگالی انرژی تکفام تابش جسم سیاه را بر حسب طول موج بیان کنید.

**حل:** گاهی بهتر است که چگالی انرژی تکفام، به جای بسامد، بر حسب طول موج بیان شود. در اینجا  $E(\lambda)$  را بر طبق رابطه  $E(\lambda)d\lambda = -E(v)dv$  تعریف می کنیم. علامت منفی به خاطر این است که علامت  $d\lambda$  و  $dv$  یکی نیست، هر چند که  $E(\lambda)$  و  $E(v)$  هر دو مثبت اند. از این رو، چون  $v = c/\lambda$  است، خواهیم داشت

$$\frac{dv}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$$

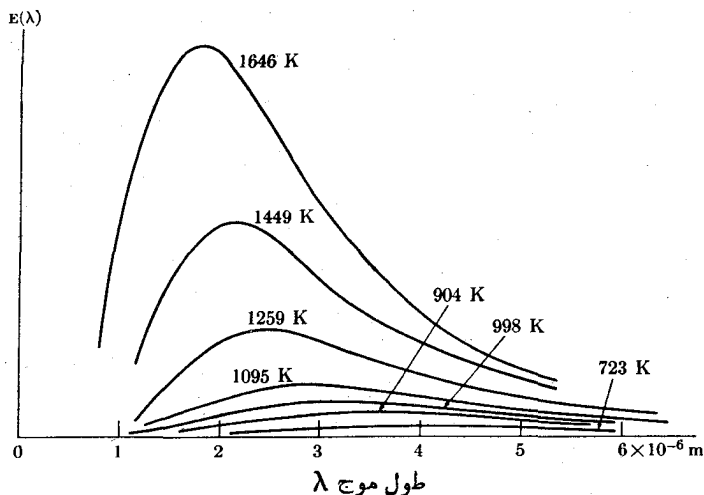
و

$$E(\lambda) = -\frac{E(v)dv}{d\lambda} = \frac{E(v)c}{\lambda^2}$$

با قرار دادن مقداری که در معادله (۸.۱) به دست آمد به جای  $E(v)$  و با در نظر گرفتن  $v = c/\lambda$  نتیجه زیر به دست می آید

$$E(\lambda) = \frac{\lambda \pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (10.1)$$

در شکل ۵.۱ منحنی تغییرات  $E(\lambda)$  برای دماهای متفاوت نشان داده شده است. در طول موجی که به دما وابسته است، قله مشخصی دیده می شود.



شکل ۵.۱ چگالی انرژی تکفام تابش جسم سیاه در دماهای متفاوت بر حسب تابعی از طول موج.

مثال ۳.۱ طول موجی را به دست آورید که در آن، چگالی انرژی تکفام تابش جسم سیاه در یک دمای مشخص بیشینه باشد.

حل: در اینجا از معادله (۱۰.۱) استفاده می‌کنیم و برای سهولت  $x$  را برابر  $hc/\lambda kT$  می‌گیریم. در این صورت  $E(\lambda)$  به صورت زیر درمی‌آید

$$E(\lambda) = \frac{\lambda^5 \pi^5 k^5 T^5}{15 c^3 h^3} \frac{x^5}{e^x - 1}$$

برای به دست آوردن بیشینه مقدار  $E(\lambda)$  ابتدا  $dE/dx$  را به دست می‌آوریم و سپس آن را مساوی با صفر قرار می‌دهیم. معادله حاصل عبارت است از

$$e^{-x} + \frac{1}{5}x - 1 = 0$$

این یک معادله غیر جبری است که به روش تقریب متوالی حل می‌شود و در آن  $x = 4.96511$  از این رو  $b = \lambda T$  که در آن

$$b = \frac{hc}{4.96511k} = 2.8978 \times 10^{-3} \text{ mK}$$

ضریب  $b$  به ثابت جابجایی وین معروف است. رابطه

$$\lambda T = b \quad (11.1)$$

همان قانون جا به جایی وین است که در سال ۱۸۹۶ به وسیله ویلهلم وین کشف شد. بر طبق این قانون بیشینه های  $E(\lambda)$  در دماهای متفاوت  $T_1, T_2, T_3, \dots$  و... به سه طریقی در طول موجهای  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  واقع می شوند که

$$\lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_2 = \lambda_3 T_3 = \dots$$

بنا بر این مشاهده می شود که با افزایش دمای جسم، قله توزیع انرژی آن به طرف طول موجهای کوتاهتر جا به جا می شود و رنگ آن را تغییر می دهد. بنا بر این، قانون جا به جایی وین روش خوبی برای تعیین دمای اجسام داغ نظیر کوره ها یا ستاره هاست. این کار با به دست آوردن طول موجی که در آن شدت تابش بیشینه است صورت می گیرد.

ضمناً قانون وین روشی را برای اندازه گیری  $h$  بر حسب مقدار تجربی  $b$  و تعریف آن بر حسب  $h, c, k$  و  $k$  که در بالا آمد، به دست می دهد. سازگاری نتایج به دست آمده با سایر اندازه گیریهای  $h$  دلیل دیگری مبنی بر صحت قانون توزیع پلانک است.

مثال ۴۰۱ چگالی انرژی کل تابش جسم سیاه را بر حسب تابعی از دما به دست آورید.

حل: چون  $E(v)dv$  چگالی انرژی در گستره  $dv$  بسامد  $dv$  تابش جسم سیاه است، چگالی انرژی کل برابر است با

$$E = \int_0^{\infty} E(v)dv = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{v^3 dv}{e^{hv/kT} - 1}$$

واضح است که  $E$  برابر سطح زیر منحنی  $E(v)$  در شکل ۴۰۱ است. با قراردادن متغیر  $x = hv/kT$  خواهیم داشت  $dv = (kT/h)dx$  و از این رو

$$E = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

مقدار انتگرال برابر است با ۶۴۹۳۸ و در نتیجه

$$E = aT^4 \quad (12.1)$$

که در آن

$$a = \frac{5179504\pi k^4}{c^3 h^3} = 7.5643 \times 10^{-16} \text{ Jm}^{-3} \text{ K}^{-4}$$

معادله (۱۲.۱) به قانون استفان-بولتزمن معروف است. این معادله در سال ۱۸۷۹ به طور تجربی به وسیله ژوزف استفان کشف شد و چند سال بعد، با به کار بردن روشهای ترمودینامیکی، به وسیله لودویگ بولتزمن از لحاظ نظری صحت آن به اثبات رسید. محاسبه نشان می دهد که انرژی گسیل شده از جسم سیاه در واحد سطح و در واحد زمان، که به گسیلندگی تابشی

معروف است، با رابطه  $F = \sigma T^4$  داده می‌شود و در آن

$$\sigma = \left(\frac{1}{4}\right) ca = 5.6693 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

ثابت استفان-بولتزمن نام دارد.

وابستگی  $E$  یا  $F$  به  $T^4$  از طریق تجربی اثبات شده است. به کمک مقدار اندازه‌گیری شده  $a$  یا  $\sigma$  می‌توان  $h$  را مجدداً محاسبه کرد و باز هم مقدار سازگاری برای آن به دست آورد. از قانون استفان-بولتزمن و با اندازه‌گیری گسیلندگی تابشی جسم سیاه می‌توان دمای جسم سیاه را تعیین کرد.

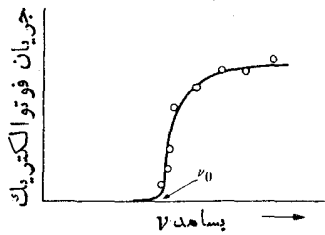
لازم به یادآوری است که بیشتر اجسام تابش‌کننده، از قبیل خورشید، رشته‌تابان لامپ یا گاز داغ، مثل اجسام سیاه رفتار نمی‌کنند و بنا بر این دقیقاً از روابط به دست آمده در این بخش پیروی نمی‌کنند.

## ۴.۱ گسیل فوتوالکتریک

هاینریش هرتز، در سال ۱۸۸۷، هنگام مطالعه تخلیه الکتریکی میان دو الکترود به عنوان چشمه امواج الکترومغناطیسی مشاهده کرد که شدت تخلیه در صورت تاباندن نور فرا بنفش به الکترودها افزایش می‌یابد. تعبیر این اثر آن بود که الکترون‌ها از سطوح روشن شده گسیل می‌شوند. یک سال بعد ویلهلم هالواک هنگامی که سطوح بعضی فلزات مانند روی، روییدوم، پتاسیوم، و سدیم را روشن می‌کرد متوجه شد که گسیل الکترونی صورت می‌گیرد. این فرایند که در آن الکترون‌ها در نتیجه کنش تابش با ماده گسیل می‌شوند به گسیل فوتوالکتریک یا اثر فوتوالکتریک معروف است. الکترون‌های گسیل شده را، به دلیل روش تولید آنها، فوتوالکترون می‌گویند. هنگامی که شدت تابش فرودی بر سطح فلز افزایش می‌یابد، گسیل الکترونی نیز افزایش خواهد یافت زیرا انرژی بیشتری برای گسیل الکترون‌ها موجود است؛ اما، یک وابستگی مشخصه به بسامد تابش فرودی نیز مشاهده می‌شود. این بدان معنی است که برای هر ماده، یک کمینه بسامد  $\nu_0$  یا بسامد آستانه، برای تابش الکترومغناطیسی وجود دارد که به ازای تابش‌های با بسامد کمتر از آن، شدت تابش فرودی هر چه باشد، هیچ فوتوالکترونی تولید نخواهد شد. در شکل ۶.۱، جریان فوتوالکتریک به صورت تابعی از بسامد تابش الکترومغناطیسی فرودی نشان داده شده است.

در فلز الکترون‌هایی وجود دارند که به صورت کمابیش آزاد در شبکه بلوری حرکت می‌کنند. این الکترون‌ها در ماه‌های معمولی نمی‌توانند از فلز خارج شوند، زیرا انرژی آنها برای غلبه بر انرژی پتانسیل کولنی سطح فلز کافی نیست. یک راه برای افزایش انرژی الکترون‌ها گرم کردن فلز است. این الکترون‌های «تبخیر شده» به ترموالکترون‌ها معروف‌اند. این همان نوع گسیل الکترونی است که در لامپ‌های الکترونی وجود دارد. با این حال، همان‌طور که آزمایش‌های هرتز و هالواک نشان می‌دهد، راه دیگر آزاد کردن الکترون‌ها از





شکل ۶.۱ جریان فوتوالکتریک به صورت تابعی از بسامد تابش فرودی.

فلز جذب انرژی از تابش الکترومغناطیسی است. فرض می‌کنیم انرژی لازم برای آزاد کردن الکترون از فلز مشخصی برابر با  $\phi$  باشد. در این صورت، با فرض اینکه انرژی جذب شده توسط الکترون  $E$  باشد، اختلاف  $E - \phi$  به صورت انرژی جنبشی  $E_k$  الکترون خارج شده ظاهر می‌شود. از این رو، می‌توان نوشت

$$E_k = E - \phi \quad (۱۳.۱)$$

واضح است که اگر  $E$  از  $\phi$  کوچکتر باشد هیچ الکترونی گسیل نخواهد شد. آلبرت اینشتین (در سال ۱۹۰۵) وابستگی تابش فوتوالکتریک به بسامد تابش فرودی را تبیین کرد. اینشتین پیشنهاد کرد که الکترونهاى آزاد، هنگام برهم‌کنش با تابش الکترومغناطیسی مثل نوسانگرهای اتمی پلانک در تابش جسم سیاه رفتار می‌کنند. از این رو بر طبق معادله (۶.۱)، انرژی  $E$  جذب شده توسط الکترون در یک تک‌فرایند از تابش الکترومغناطیسی به بسامد  $\nu$  برابر است با  $E = h\nu$ . بنابراین، معادله (۱۳.۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$E_k = h\nu - \phi \quad (۱۴.۱)$$

همه الکترونها به مقدار یکسانی انرژی  $\phi$  برای خروج از فلز نیاز ندارند. کمینه مقدار انرژی  $\phi_0$  را تابع کلامی نامیم. از این رو، بیشینه انرژی جنبشی الکترونهاى خارج شده برابر است با

$$E_{k, \max} = h\nu - \phi_0 \quad (۱۵.۱)$$

از این معادله نتیجه می‌شود که در بسامد  $\nu_0$  که برای آن

$$h\nu_0 - \phi_0 = 0 \quad \text{یا} \quad \nu_0 = \frac{\phi_0}{h}$$

است، بیشینه انرژی جنبشی الکترونها برابر با صفر است. بنابراین،  $\nu_0$  کمینه بسامد یا بسامد

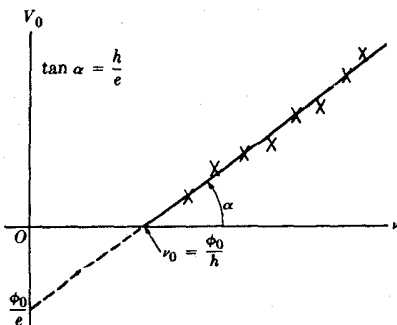
آستانه‌ای است که به ازای آن گسیل فوتوالکتریک رخ می‌دهد. به ازای بسامدهای کوچکتر از  $\nu_0$ ، به گونه‌ای که  $h\nu < \phi_0$ ، هیچ گسیلی رخ نمی‌دهد زیرا الکترون‌ها نمی‌توانند در یک تک‌فرایند انرژی کافی برای خروج از فلز را جذب کنند و در این حالت است که شدت تابش هیچ نقشی ایفا نمی‌کند. از این رو، پیشنهاد اینشتین وابستگی مشاهده‌شده اثر فوتوالکتریک به بسامد تابش را خیلی خوب توضیح می‌دهد.

با استفاده از روشی که در شکل ۷.۱ نشان داده شده است می‌توان بیشینه انرژی جنبشی  $E_{k, \max}$  را اندازه‌گیری کرد. با اعمال اختلاف پتانسیل  $V$  میان صفحات  $A$  و  $C$  می‌توان حرکت فوتوالکترون‌ها را به تأخیر انداخت. در ولتاژ مشخص  $V_0$ ، شدت جریانی که به وسیله الکترومتر  $E$  نشان داده می‌شود به طور ناگهانی به مقدار صفر سقوط می‌کند. این بدان معنی است که هیچ الکترونی، حتی سریعترین الکترون‌ها، نمی‌تواند به صفحه  $C$  برسد. در این صورت داریم  $E_{k, \max} = eV_0$  و معادله (۱۵.۱) به صورت زیر درمی‌آید

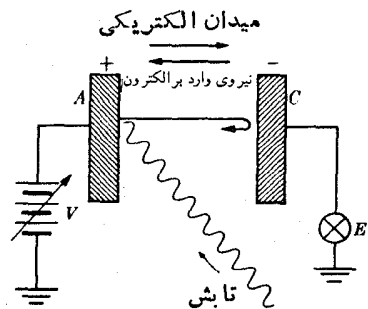
$$eV_0 = h\nu - \phi_0 \quad (16.1)$$

با تغییر بسامد  $\nu$  می‌توان یک سری مقادیر برای پتانسیل توقف  $V_0$  به دست آورد. اگر معادله (۱۶.۱) صحیح باشد نتیجه ترسیم مقادیر  $V_0$  بر حسب  $\nu$  باید به صورت خط مستقیم ظاهر شود. همان‌طور که در شکل ۸.۱ دیده می‌شود، این موضوع دقیقاً همان چیزی است که به دست آمده است. شیب این خط مستقیم برابر است با  $\tan \alpha = h/e$ . با اندازه‌گیری  $\alpha$  و به کار بردن مقدار معلوم  $e$  می‌توان  $h$  ثابت پلانک را مجدداً محاسبه کرد. نتیجه به دست آمده همان است که در تابش جسم سیاه به دست آمد. این سازگاری را می‌توان تأیید دیگری برای فرض پلانک، که در معادله (۶.۱) آمده است، در نظر گرفت.

به کمک مقدار مشاهده شده  $\nu_0$  می‌توان تابع کار فلز، یعنی رابطه  $\phi_0 = h\nu_0$  را به دست آورد و آن را با مقادیر تابع کار به دست آمده از طریق روشهای دیگر مقایسه کرد. نتایج



شکل ۸.۱ رابطه میان پتانسیل توقف و بسامد تابش در اثر فوتوالکتریک.



شکل ۷.۱ آرایش تجربی برای مشاهده اثر فوتوالکتریک،

حاصل باهم سازگاری دارند.

### ۵.۱ پراکندگی تابش به وسیله الکترونهاى آزاد

تاکنون فقط انرژى وابسته به تابش الکترومغناطیسی را مطالعه می کردیم. اما موج الکترومغناطیسی، علاوه بر انرژى، تکانه نیز دارد (این موضوع تعجب آور نیست زیرا انرژى و تکانه باهم ارتباط نزدیک دارند). با توجه به اینکه تابش الکترومغناطیسی با سرعت  $c$  انتشار می یابد، با به کار بردن معادلات ماکسول می توان نشان داد که برای يك موج الکترومغناطیسی تخت رابطه میان انرژى و تکانه به صورت زیر است

$$E = cp \quad (17.1)$$

اما مطابق نظریه نسبیت [معادله (پ.۱۱)] انرژى ذره ای با جرم سکون  $m_0$  و تکانه  $p$  از رابطه زیر به دست می آید

$$E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} \quad (18.1)$$

در حالت  $m_0 = 0$ ، معادله اخیر به صورت معادله (۱۷.۱) درمی آید. از این رو می توان نتیجه گرفت که رابطه میان انرژى و تکانه برای يك موج الکترومغناطیسی تخت و ذره ای با جرم سکون صفر یکسان است.

هنگامی که موج الکترومغناطیسی جذب، گسیل، یا پراکنده می شود، انرژى و تکانه با ذراتی که این فرایند را انجام می دهند مبادله می شود. بنا بر این هنگام تحلیل هر فرایندی که در آن، تابش الکترومغناطیسی با ذرات باردار برهم کنش می کند باید قوانین پایستگی انرژى و تکانه را به کار ببریم؛ البته باید یادمان باشد که معادله (۱۷.۱) را برای قسمت متناظر با موج الکترومغناطیسی منظور کنیم.

هنگاهی که برهم کنش موج الکترومغناطیسی با يك ذره باردار آزاد، مثلاً با يك الکترون آزاد را بررسی می کنیم نتیجه فوق مسائل مشخصی را مطرح می کند. به عنوان مثال، هر گاه الکترونی مقدار انرژى  $E$  را از موج الکترومغناطیسی دریافت کند باید حتماً تکانه ای برابر با  $p = E/c$  را نیز جذب نماید. حال اگر فرض کنیم که الکترون آزاد ابتدا در چارچوب مرجع ناظر در حال سکون بوده است، انرژى جذب شده به انرژى جنبشی آن تبدیل می شود. از طرفی می دانیم که رابطه انرژى جنبشی الکترون با تکانه، یعنی با  $p_e$ ، به صورت زیر است

$$E_k = c\sqrt{m_e^2 c^2 + p_e^2} - m_e c^2$$

این رابطه با معادلات  $p_e = E/c$  و  $E_k = E$ ، آن طور که اصول پایستگی انرژى و تکانه ایجاب می کنند، ناسازگار است. بنابراین، می توان چنین نتیجه گرفت که الکترون آزاد

نمی تواند بدون نقض اصول پایستگی انرژی یا تکانه با موج الکترومغناطیسی برهم کنش داشته باشد. این موضوع ممکن است در دانشجو این گمان را ایجاد کند که چرا هنگام بررسی اثر فوتوالکتريک در بخش قبل هیچ اشاره ای به این مسئله نکردیم. دلیل این مطلب آن است که وقتی الکترون به اتم، یا مولکول، یا جسم جامدی مقید است انرژی و تکانه جذب شده میان الکترون و اتم، یا مولکول، یا شبکه جامدی که الکترون به آن مقید است، تقسیم می شود. در چنین اوضاعی همواره این امکان وجود دارد که انرژی و تکانه به نسبت درستی تقسیم شوند به طوری که این دو کمیت پایسته باقی بمانند. اما اتم، مولکول، یا جامد (جرم هر کدام از اینها از جرم الکترون بسیار بزرگتر است) فقط کسر کوچکی از انرژی (و تکانه) موجود را حمل می کنند، آنقدر کوچک که معمولاً به حساب نمی آید. در مورد الکترون آزاد، چون ذره دیگری وجود ندارد تا الکترون بتواند انرژی و تکانه را با آن تقسیم کند جذب یا پراکندگی، بدون نقض پایستگی هر یک از این دو کمیت امکان ندارد.

امسأ، تجربه چیز دیگری می گوید. هنگامی که تابش الکترومغناطیسی از ناحیه ای عبور می کند که در آن الکترون آزاد وجود دارد علاوه بر تابش فرودی تابش دیگری بسا بسامد متفاوت هم مشاهده می شود. این تابش جدید را به عنوان تابش پراکنده شده به وسیله الکترونهاي آزاد تعبیر می کنند. بسامد تابش پراکنده از بسامد تابش فرودی کوچکتر و طول موج آن از طول موج تابش فرودی بزرگتر است. طول موج تابش پراکنده به راستای پراکندگی بستگی دارد (شکل ۹۰۱). این اثر غالب توجه را اولین بار کامپتون، فیزیکدان آمریکایی، در اوایل سال ۱۹۲۵ مشاهده و تحلیل کرد و به همین دلیل به اثر کامپتون معروف است.

با فرض اینکه  $\lambda$  طول موج تابش فرودی و  $\lambda'$  طول موج تابش پراکنده است، کامپتون نتیجه گرفت که  $\lambda' - \lambda$  فقط به وسیله راستای پراکندگی تعیین می شود. یعنی، هرگاه  $\theta$  زاویه میان امواج فرودی و راستایی باشد که در آن امواج پراکنده مشاهده می شوند (شکل ۱۰۰۱)، طول موج تابش پراکنده  $\lambda'$  بر حسب زاویه پراکندگی  $\theta$  با رابطه تجربی زیر تعیین می شود

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta) \quad (19.1)$$

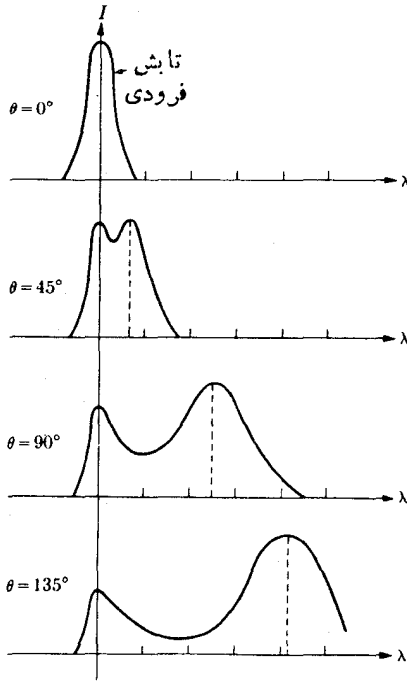
که در آن  $\lambda_c$  ثابتی است که مقدار آن برابر است با

$$\lambda_c = 2.4262 \times 10^{-12} \text{ m}$$

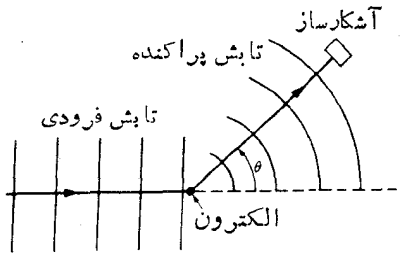
ثابت  $\lambda_c$  به طول موج کامپتون برای الکترونها معروف است. با توجه به رابطه  $\lambda = c/v$  که در آن  $v$  بسامد موج است، معادله (۱۹۰۱) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{v'} - \frac{1}{v} = \frac{\lambda_c}{c} (1 - \cos \theta) \quad (20.1)$$

اکنون پراکندگی موج الکترومغناطیسی به وسیله الکترون را می توان به صورت



شکل ۹۰۱ توزیع شدت تابش پراکنده توسط الکترون آزاد در زوایای پراکندگی متفاوت.



شکل ۱۰۰۱ پراکندگی کامپتون.

«برخورد» میان موج و الکترون مجسم کرد، زیرا در این فرایند تبادل انرژی و تکانه وجود دارد. ضمناً چون موج با سرعت  $c$  منتشر می شود و رابطه انرژی-تکانه آن، یعنی رابطه  $E = cp$  به رابطه انرژی-تکانه ذره ای با جرم سکون صفر شباهت دارد، این پراکندگی بسایند مشابه برخوردی باشد که در آن جرم سکون یکی از ذرات شرکت کننده صفر است و با سرعت  $c$

حرکت می کند.

این برخورد را می توان خیلی ساده تحلیل کرد. فرض می کنیم  $E$  و  $E'$ ، به ترتیب مقادیر انرژی ذره بسا جرم سکون صفر قبل و بعد از برخورد؛  $p = E/c$  و  $p' = E'/c$  نیز مقادیر تکانه متناظر با آنهاست. هر گاه  $p_0$  تکانه الکترون پس از برخورد باشد، بر طبق اصول پایستگی انرژی و تکانه خواهیم داشت

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_0 \quad (21.1)$$

$$E + m_0 c^2 = E' + c \sqrt{m_0^2 c^2 + p_0^2} \quad (22.1)$$

معادله (21.1) را به صورت  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$  می نویسیم و پس از مجذور کردن طرفین آن نتیجه می گیریم

$$p_0^2 = p^2 + p'^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = \frac{1}{c^2} (E^2 + E'^2 - 2EE' \cos \theta)$$

$\theta$  زاویه ای است که تحت آن ذره با جرم سکون صفر منحرف یا پراکنده می شود. از حل معادله (22.1) برای  $p_0^2$  خواهیم داشت

$$p_0^2 = \frac{(E + m_0 c^2 - E')^2}{c^2} - m_0^2 c^2$$

$$= \frac{1}{c^2} [E^2 + E'^2 + 2(E - E')m_0 c^2 - 2EE']$$

پس از مساوی قرار دادن دو رابطه  $p_0^2$  و حذف جملات مشترك داریم

$$E - E' = \frac{EE'}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta)$$

از تقسیم طرفین این معادله بر  $EE'$  نتیجه می شود

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta) \quad (23.1)$$

تسا به میان معادلات (20.1) و (23.1) كاملاً محسوس و قراتر از يك تشابه جبری محض است. هر دوی آنها در مورد يك فرایند برخورد، در کلیترین شکل آن، به کار می روند. ضمناً همچنان که قبلاً گفتیم، رابطه انرژی-تکانه برای موج الکترومغناطیسی،  $E = cp$ ، به رابطه انرژی-تکانه برای ذره ای با جرم سکون صفر شبیه است [معادله (23.1)]. در نتیجه بسامد  $\nu$  و انرژی  $E$  به صورت زیر به یکدیگر مربوط می شوند

$$E = h\nu \quad (24.1)$$

رابطه مشابهی نیز برای  $E'$  وجود دارد که به صورت  $E' = h\nu'$  نوشته می شود. در اینجا  $h$  یک ثابت عمومی است که نشان دهنده تناسب میان بسامد موج الکترومغناطیسی و انرژی وابسته به آن در فرایند «برخورد» است. بنا بر این معادله (۲۳.۱) به صورت زیر درمی آید

$$\frac{1}{h\nu'} - \frac{1}{h\nu} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

یا

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) \quad (25.1)$$

که به ظاهر با معادله (۲۵.۱) یکسان است. برای به دست آوردن رابطه ای هم ارز با رابطه (۱۹.۱)، معادله (۲۵.۱) را در  $c$  ضرب می کنیم و از رابطه  $\lambda = c/\nu$  استفاده می کنیم. نتیجه حاصل به صورت زیر است

$$\lambda' - \lambda = \left( \frac{h}{m_e c} \right) (1 - \cos \theta) \quad (26.1)$$

در این صورت طول موج کامپتون برای الکترون، یعنی  $\lambda_c$ ، با رابطه زیر به جرم الکترون پراکنده مربوط می شود

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} \quad (27.1)$$

به کمک مقادیر معلوم  $\lambda_c$ ،  $m_e$ ، و  $c$  می توان مقدار ثابت  $h$  را محاسبه کرد و همان مقداری را به دست آورد که قبلاً در ارتباط با تابش جسم سیاه و اثر فوتوالکترونیک برای ثابت پلانک به دست آمد. از این رو، معادله (۲۳.۱) اساساً با معادله (۶.۱) یکسان است. بنا بر این نتیجه می گیریم که پراکندگی تابش الکترومغناطیسی به وسیله الکترون آزاد را به شرطی می توانیم «توصیف» کنیم که این فرایند را با برخورد یک الکترون آزاد، و ذره ای با جرم سکون صفر که انرژی آن قبل و بعد از برخورد به ترتیب برابر  $E = h\nu$  و  $E' = h\nu'$  است یکی بدانیم.

## ۶.۱ فوتونها

تیمین ما از اثر کامپتون را به دلیل نتایج احتمالی و چند جانبه آن باید با دقت کامل تحلیل کرد. در اینجا فرضهای خود را مجدداً بیان می کنیم.

الف) پراکندگی تابش الکترومغناطیسی به وسیله الکترون آزاد را می توان به صورت برخوردی میان الکترون و ذره ای با جرم سکون صفر در نظر گرفت.

ب) تابش الکترومغناطیسی نقش ذره با جرم سکون صفری را ایفا می کند که ما به اختصار آن را فوتون می نامیم.

ج) انرژی و تکانه ذره با جرم سکون صفر (یا فوتون)، مطابق روابط زیر با بسامد و طول موج تابش الکترومغناطیسی مربوط می شود.

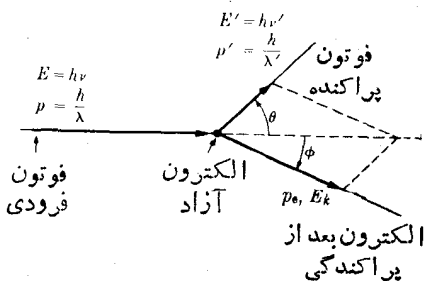
$$E = hv, \quad p = \frac{h}{\lambda} \quad (28.1)$$

دومین رابطه از تبدیلهای زیر به دست می آید

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{و} \quad p = \frac{E}{c} = \frac{hv}{c}$$

اثر کامپتون را می توان به صورت برخوردی که در شکل ۱۱.۱ نمایش داده شده است مجسم کرد. در اینجا فوتونی با بسامد  $\nu$  بزرگ الکترون در حال سکون برخورد می کند و مقداری تکانه و انرژی به آن منتقل می کند. در اثر این برهم کنش، فوتون پراکنده شده انرژی کمتر و بسامد کوچکتری،  $\nu'$ ، خواهد داشت. تکانه الکترون پس از پراکندگی برابر است با تفاوت میان تکانه های فوتون فرودی و فوتون پراکنده. از طریق تجربه می توان این حقیقت را اثبات کرد. با آنکه این آزمایش مشکل است ولی به هر حال انجام شده و نتایج آن به طور خیلی خوبی با نتایج نظری سازگار است.

اکنون این سؤال مطرح می شود که معانی فیزیکی مفهوم فوتون و روابط تعریف کننده (۲۸.۱) چیست؟ از این مطالب لزوماً نتیجه نمی شود که تابش الکترومغناطیسی به صورت جریانانی از فوتونهاست، که خود یک توضیح تصویری ممکن است. با توجه به اثر کامپتون می توان، انرژی  $E = hv$  و تکانه  $p = h/\lambda$  فوتون را به صورت انرژی و تکانه جذب شده به وسیله الکترون آزاد از موج الکترومغناطیسی فرودی تعبیر کرد. در این صورت، فوتون با انرژی  $E' = hv'$  و تکانه  $p' = h/\lambda'$  عبارت است از انرژی و تکانه ای که به وسیله الکترون مجدداً در داخل تابش پراکنده شده گسیل می شود. به عبارت دیگر، می توان این طور در نظر



شکل ۱۱.۱ رابطه تکانه و انرژی در پراکندگی کامپتون.



گرفت که اثر کامپتون در دو مرحله روی می‌دهد: ابتدا فوتونی با انرژی  $h\nu$  به وسیله الکترون جذب می‌شود و سپس این الکترون فوتونی با انرژی  $h\nu'$  گسیل می‌کند. این الکترون مقدار انرژی  $E_k = E - E'$  و تکانه  $\mathbf{p}_e = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$  کسب می‌کند که بر اساس پایستگی انرژی و تکانه با رابطه زیر بهم مربوط می‌شوند

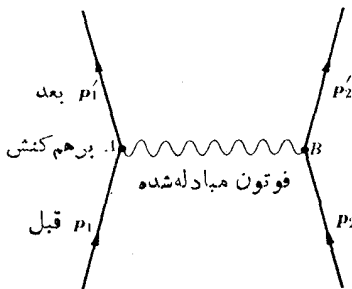
$$E_k = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p_e^2} - m_0 c^2$$

بر اساس این تعبیر از اثر کامپتون، همراه با بحث قبلی مربوط به تابش جسم سیاه و اثر فوتوالکتریک می‌توان نتیجه گرفت که فوتون عبارت است از «کوانتوم» تکانه و انرژی الکترومغناطیسی که در یک تک‌فراپند به وسیله یک ذره باردار گسیل یا جذب می‌شود. این کوانتوم به کمک بسامد تابش تعیین می‌شود. بنابراین، می‌توان اصل زیر را بیان کرد:

هنگامی که موج الکترومغناطیسی با ذره بارداری برهم‌کنش می‌کند، مقادیر انرژی و تکانه‌ای که در فرایند مبادله می‌شود مقادیر معنای با یک فوتون اند.

این اصل یکی از قوانین اساسی فیزیک است. این اصل در تمام فرایندهای تابشی که شامل ذرات باردار و میدانهای الکترومغناطیسی هستند کاربرد دارد. با اینکه این اصل از هیچکدام از قوانینی که تا کنون بیان کردیم یا قبلا در باره آنها بحث کردیم جدا نیست، ولی یک اصل کاملا جدید است و باید آن را هم تراز قوانین عمومی دیگر، همچون قوانین پایستگی انرژی و تکانه، در نظر گرفت. کشف این قانون در ربع اول قرن بیستم، یک رویداد بسیار مهم در تحول علم فیزیک به‌شمار می‌رود.

همچنان که در شکل ۱۲-۱ دیده می‌شود، مفهوم فوتون نمایش تصویری ساده‌ای از برهم‌کنش الکترومغناطیسی میان دو ذره باردار به‌دست می‌دهد. این برهم‌کنش با تبادل



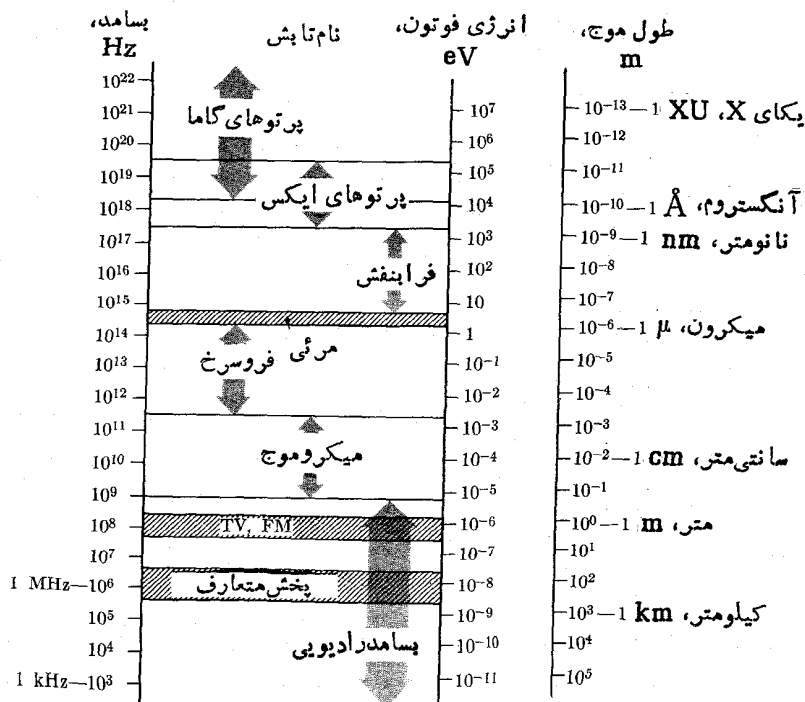
شکل ۱۲-۱ برهم‌کنش الکترومغناطیسی به صورت مبادله فوتونها. فوتونها انرژی و تکانه را از یک بار به بار دیگر منتقل می‌کنند.

تکانه و انرژی متناظر است. بعد از برهم‌کنش: تکانه‌های اولیه  $p_1$  و  $p_2$  ذره بد  $p'_1$  و  $p'_2$  تبدیل می‌شوند. با اینکه این برهم‌کنش در لحظه خاصی جایگزیده نیست، بسرای سهولت آن را در یک زمان بخصوص و در مسکنهای  $A$  و  $B$  نشان داده‌ایم. ذره ۱ از طریق میدان الکترومغناطیسی خود با ذره ۲ برهم‌کنش می‌کند. در نتیجه ذره ۲ مقداری انرژی و تکانه، هم‌ارز با یک فوتون، می‌گیرد و سرعتش متناظر با آن تغییر می‌کند. در این صورت حرکت ذره ۱ باید طوری تغییر کند که با میدان جدید، یعنی با میدان اولیه منهای یک فوتون متناظر باشد. البته فرایند معکوس نیز امکان‌پذیر است، یعنی ممکن است ذره ۱ یک فوتون از میدان ذره ۲ بگیرد. بنابراین می‌توان گفت که میان ذرات ۱ و ۲ مبادله فوتونها صورت می‌گیرد؛ به عبارت دیگر:

برهم‌کنشهای الکترومغناطیسی را می‌توان به‌صورت نتیجه تبادله فوتونها میان ذرات با داد برهم‌کنش‌کننده توصیف کرد.

در هر لحظه، تکانه کل یک دستگاه دو ذره‌ای به‌صورت زیر است

$$p_1 + p_2 + p_{\text{میدان}}$$



شکل ۱۳۰۱ طیف الکترومغناطیسی.

که در آن میدان  $\mathbf{p}$  تکانه وابسته به میدان الکترومغناطیسی ذرات باردار و میدان  $E_1 + E_2 + E_3$  نیز انرژی کل است.

شکل ۱۳.۱ نواحی مختلف طیف الکترومغناطیسی را همراه با نام متداول هر ناحیه نشان می‌دهد. طول موج، بسامد، و انرژی فوتونهای وابسته نیز مشخص شده است.

مثال ۵.۱ انرژی فوتون برحسب الکترون ولت را برحسب طول موج آن به متر بیان کنید. با به کار بردن این نتیجه، طول موج پرتوهای ایکس را برحسب ولتاژ شنا بدهنده اعمال شده به لامپ پرتو ایکس به دست آورید.

حل: از روابط  $E = h\nu = c$  و  $\lambda\nu = c$  معادله  $E = hc/\lambda$  را به دست می‌آوریم. امامی دانیم که

$$hc = (6.6256 \times 10^{-34} \text{ Js})(2.9979 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}) = 1.9863 \times 10^{-25} \text{ Jm}$$

با توجه به اینکه  $1 \text{ eV} = 1.6021 \times 10^{-19} \text{ J}$ ، خواهیم داشت

$$hc = 1.2397 \times 10^{-6} \text{ eVm}$$

و در نتیجه

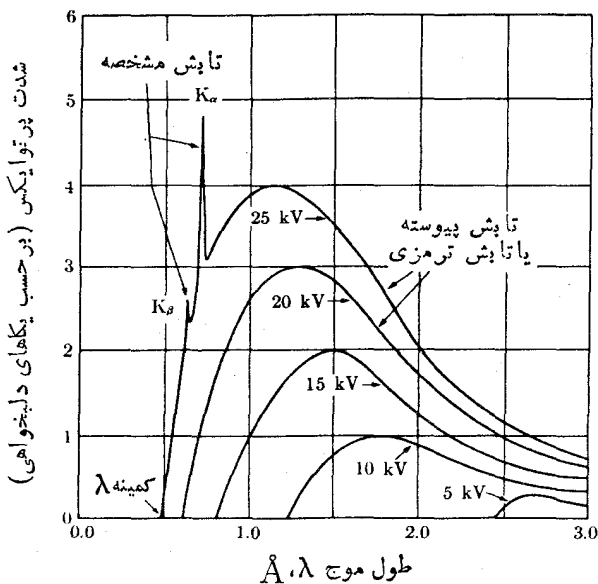
$$E = 1.2397 \times 10^{-6} / \lambda \approx 1.24 \times 10^{-6} / \lambda$$

که در آن  $E$  برحسب الکترون ولت و  $\lambda$  برحسب متر است.

همان‌طور که در ارتباط با شکل ۳.۱ توضیح دادیم، پرتوهای ایکس در اثر برخورد الکترونهای تند به آنود لامپ پرتو ایکس ایجاد می‌شوند. انرژی الکترون ممکن است در چندین برخورد متوالی تابیده و در نتیجه چندین فوتون تولید شود، یا در یک تک برخورد تمام انرژی به صورت یک تک فوتون تابش شود. واضح است که پراثرزترین فوتونهای گسیل شده از لامپ پرتو ایکس آنهایی هستند که در فرایند اخیر گسیل می‌شوند. طول موج این فوتونها کوتاهترین طول موج است. به عبارت دیگر، هرگاه  $V$  ولتاژ شنا بدهنده (برحسب ولت) باشد، که همان انرژی الکترونها برحسب الکترون ولت است، طول موج پرتوهای ایکس تولید شده مساوی است با (یا بزرگتر است از) طول موج آستانه‌ای که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\lambda_0 = \frac{1.24 \times 10^{-6}}{V} \text{ m}$$

به عنوان مثال، در لامپ تلویزیون، الکترونها تحت تأثیر اختلاف پتانسیلی در حدود ۱۸۰۰۰ ولت شتاب می‌گیرند. هنگامی که الکترونها به صفحه تلویزیون می‌رسند ناگهان متوقف می‌شوند. در نتیجه صفحه تلویزیون درست مثل لامپ پرتو ایکس، پرتو ایکس را گسیل می‌کند (اما شدت آن خیلی کم است). هنگامی که الکترونها به وسیله صفحه تلویزیون متوقف



شکل ۱۴۰۱ توزیع شدت در طیف پرتو ایکس مولیبدن بر حسب تأییش از ولتاژ. پتانسیل برانگیختگی سری K برابر است با ۲۰٫۱ kV و به صورت خارهای مشخصه بر روی منحنی ۲۵ kV ظاهر می‌شود.

می‌شوند کمینه طول موج پرتوهای ایکس ایجاد شده برابر است با  $\lambda = 699 \times 10^{-11} \text{ m}$ . این رابطه از طریق تجربی تأیید شده است. شکل ۱۴۰۱ شدت پرتوهای ایکس حاصل از يك لامپ پرتو ایکس را بر حسب تأییش از طول موج فوتونهای گسیل شده برای مقادیر مختلف  $V$  نشان می‌دهد.

### ۷.۱ حالت‌های مانا

هنگامی که موج الکترومغناطیسی با سیستمی از ذرات بسازدار، مثل اتمها، مولکولها یا هسته‌ها برهم‌کنش می‌کند، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی موج در حرکت بارها آشفتگی ایجاد می‌کنند. به زبان فیزیک کلاسیک، می‌توان گفت که این موج نوسان واداشته‌ای را بر حرکت طبیعی بارها اعمال می‌کند. این کار باعث می‌شود که سیستم بارها، انرژی جذب کند. در نوسانگر کلاسیکی، هنگامی که بسامد نوسانات واداشته با بسامد طبیعی نوسانگر برابر است، جذب انرژی راحت صورت می‌گیرد. این وضع را تشدید می‌نامند. در حالت تشدید، آهنگ جذب شده توسط نوسانگر به بیشینه می‌رسد.

به تجربه معلوم شده است که اتمها، مولکولها، هستهها و بهطور کلی، هر مجموعه‌ای از ذرات باردار، دارای یک سری بسامدهای تشدید  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$  هستند که در آنها جذب تابش الکترومغناطیسی بسیار قابل توجه است. در سایر بسامدها مقدار جذب ناچیز است. بسامدهای تشدید  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$  طیف جذبی ماده را تشکیل می‌دهند. فرض می‌کنیم سیستم در آغاز در پایدارترین حالت یا کمینه انرژی است که به حالت پایه معروف است. در این صورت، هنگامی که این سیستم تابش الکترومغناطیسی جذب کند، به حالت دیگری که انرژی آن بالاتر است می‌رود. این حالت را حالت برانگیخته می‌نامند. در مورد دو قطبی الکتریکی نوسانی کلاسیک، حالت برانگیخته با دامنه نوسان بزرگتر متناظر است. واضح است که سیستم ذرات باردار در حالت برانگیخته می‌تواند انرژی اضافی خود را به شکل تابش الکترومغناطیسی آزاد کند. بسامدهای مشاهده شده در تابش گسیل شده، طیف گسیلی سیستم را تشکیل می‌دهند. آزمایش نشان می‌دهد که

بسامدهای مشاهده شده در طیف جذبی سیستم ذرات باردار، در طیف گسیلی آن نیز مشاهده می‌شوند.

به عنوان مثال، اتمهای سدیم برای نوری با بسامد  $5.09 \times 10^{14} \text{ Hz}$  یا طول موج  $5.89 \times 10^{-7} \text{ m}$  جذب خاصی از خود نشان می‌دهند. این مقادیر دقیقاً همان مقادیر بسامد و طول موج خط زردی هستند که بخار سدیم برافروخته گسیل می‌کند.

وجود طیفی متشکل از بسامدهای کاملاً مشخص مسئله‌ای بود که در اواخر قرن نوزدهم و آغاز قرن بیستم فیزیکدانان را پاك گیج کرده بود. نیلس بور، فیزیکدان دانمارکی در سال ۱۹۱۳ برای حل این مسئله یک ایده جدید و انقلابی پیشنهاد کرد. بور از مفهوم فوتون، آن طور که در بخش قبل تحلیل شد، استفاده کرد و فرض پلانک، معادله (۶.۱)، را بسط داد. فرض کنید اتمی در حالت انرژی  $E$  تابشی با بسامد  $\nu$  را جذب کند و به حالت دیگری با انرژی بالاتر  $E'$  برود. تغییر در انرژی اتم برابر است با  $E' - E$ . از طرف دیگر، انرژی جذب شده از تابش در یک تک فرایند باید برابر با انرژی فوتون، یعنی برابر با  $h\nu$  باشد. پایستگی انرژی ایجاب می‌کند که این دو کمیت با هم برابر باشند. بنا بر این

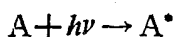
$$E' - E = h\nu \quad (29.1)$$

این رابطه به فرمول بود معروف است. به همین ترتیب، هر گاه اتمی از حالت با انرژی  $E'$  به حالت با انرژی پایینتر  $E$  برود بسامد تابش گسیل شده با معادله (۲۹.۱) داده می‌شود. اینکه فقط بسامدهای مشخص  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$  در گسیل و جذب مشاهده می‌شوند، به شرطی قابل توضیح است که فرض کنیم انرژی اتم فقط می‌تواند مقادیر مشخص  $E_1, E_2, E_3, \dots$  باشد. هر مقدار انرژی مجاز را یک تسراذ انرژی می‌نامند. در این صورت، تنها بسامدهای ممکنه که در گسیل یا جذب تابش نتیجه می‌شوند آنهايي هستند که با گذارهای میان دو تراز انرژی مجاز متناظرند، یعنی  $\nu = (E_i - E_j)/h$ . بنا بر این، فرض بور را

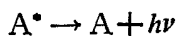
می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

انرژی يك سیستم از ذرات باردار، مثل اتم، مولکول، یا هسته، فقط می‌تواند مقادیر مشخص  $E_1, E_2, E_3, \dots$  باشد، یعنی انرژی کوانتیده است. حالت‌های متناظر با این انرژیها را حالت‌های مانا یا ویژه حالتها و مقادیر ممکن انرژی را ترازهای انرژی می‌نامند.

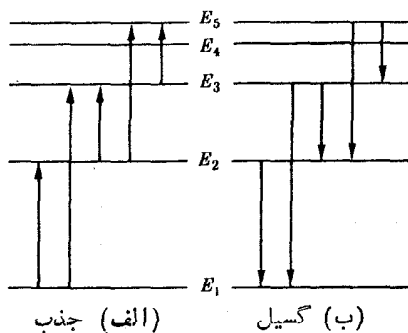
جذب تابش الکترومغناطیسی، یا هر انرژی دیگر، به گذار اتم (مولکول یا هسته) از یک حالت مانا به حالت مانای دیگر با انرژی بالاتر منجر می‌شود. در فرایند معکوس نیز گسیل تابش الکترومغناطیسی رخ می‌دهد. بسامد تابش موجود در این فرایند با معادله (۲۹.۱) داده می‌شود. در شکل ۱۵.۱ پاره‌ای از این گذارها نشان داده شده است. فرایندی که در آن اتم در حالت پایه، که با  $A$  نمایش می‌دهیم، یک فوتون جذب کند و به حالت برانگیخته  $A^*$  برود، را به صورت زیر نشان می‌دهیم



فرایند معکوس با گسیل فوتون همراه است



ایده سیستم‌های متشکل از ذرات بارداری که فقط مجموعه گسسته‌ای از حالت‌های مانا داشته باشند با مکانیک نیوتونی بیگانه است. به کمک قوانین مکانیک نیوتونی، حرکت یک ذره به وسیله شرایط اولیه آن که دلخواه هستند، تعیین می‌شود. از این رو، ذره می‌تواند هر مقدار انرژی، که شرایط اولیه دلخواه تعیین کند (مکان و سرعت)، داشته باشد. به عنوان مثال، این مسئله هنگامی که یک قمر مصنوعی در یک مدار پایدار قرار می‌گیرد، مصداق پیدا



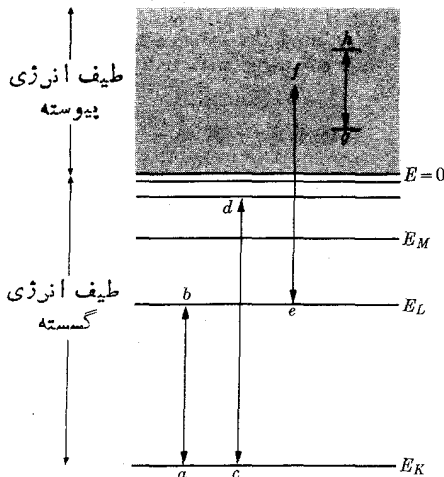
**شکل ۱۵.۱** گذارهای میان حالت‌های مانا. فضای نسبی ترازهای انرژی و گذارهای ممکن به نوع سیستم بستگی دارند.

می‌کند. فضا نورد به‌طور دلخواه می‌تواند مدار، و از این رو انرژی، سفینه فضایی خود را به راحتی با تغییر دادن سرعت در یک زمان معین تغییر دهد. به همین ترتیب در مکانیک نیوتونی، الکترون موجود در اتم هیدروژن مجاز است هر مقدار انرژی را که به شرایط حرکتی اش وابسته است، داشته باشد. هنگامی که الکترون توسط پروتون گیر می‌افتد و تشکیل اتم می‌دهد، این شرایط وجود دارند. این الکترون با جذب یک مقدار دلخواه انرژی می‌تواند مدار خود را تغییر دهد. با این حال، ظاهراً طبیعت باروشهای متفاوتی عمل می‌کند، بدین معنی که فقط حرکتهای مشخصی می‌توانند مجاز یا ممکن باشند. به عبارت دیگر، حالت‌های مانا را باید به عنوان یک حقیقت اساسی در طبیعت پذیرفت.

قبول ایده حالت‌های مانا مشکل دیگری را در چارچوب فیزیک کلاسیک مطرح می‌کند. هنگامی که الکترون به دور هسته اتم گردش می‌کند، حرکت آن هم شتاب مماسی دارد و هم شتاب مرکز گرا، یعنی حرکت آن شتابدار است. بنابراین، می‌توان تصور کرد که این الکترون به‌طور پیوسته از خود انرژی تابش می‌کند. در نتیجه انرژی الکترون به‌طور پیوسته کاهش می‌یابد و مدار آن جمع‌تر و کوچکتر می‌شود. این موضوع وجود حالت‌های مانا را غیر ممکن می‌کند. اما نه این انقباض ساده و نه آن تابش پیوسته انرژی وابسته به آن تاکنون مشاهده نشده است. بنابراین، چون پیشگوییهای الکترو دینامیک کلاسیک در اینجا مصداق پیدا نمی‌کند، می‌توان نتیجه گرفت که الکترونی (یا هر ذره باردار دیگری) که در یک حالت مانا حرکت می‌کند با اصول دیگری که تاکنون مورد بحث قرار نگرفته‌اند توصیف می‌شود. در فصل دوم در مورد این اصول جدید بحث خواهیم کرد.

فرض بور در مورد حالت‌های مانا بزرگ اساس موردی و بدون هیچگونه توجیه نظری بنا شده بود. با وجود این، موفقیت فرضیه بور سبب شد سایر فیزیکدانان نیز آزمایش‌هایی برای آزمودن این ایده انجام دهند. به سرعت، مقدار قابل توجهی اطلاعات جمع آوری و بر اساس آنها خواص اتمی جدیدی کشف شد. چنین وضعی تاکنون به دفعات در فیزیک معاصر رخ داده است. یک فیزیکدان تیزبین و شجاع مفهوم جدیدی را پیشنهاد می‌کند، این ایده دیگران را به تفکر و انجام آزمایش‌های جدید وامی‌دارد و به زودی دورنماهای جدیدی پدیدار می‌شود.

طیف انرژی حالت‌های مانا لزوماً یک طیف گسسته نیست. در موارد زیادی تمام مقادیر انرژی موجود در یک گستره مشخص (یا نوار) مجازند و یک طیف پیوسته انرژی تشکیل می‌دهند. به عنوان مثال، الکترون و پروتون را در نظری گبریم و انرژی را هنگامی که هر دوی آنها در حال سکون‌اند و فاصله میان آنها بسیار زیاد است مساوی با صفر اختیار می‌کنیم. در این صورت تمام حالت‌های مانا با انرژی منفی و متناظر با حالت‌های مقیدی که در آنها، الکترون برای تشکیل اتم هیدروژن به دور پروتون گردش می‌کند کوانتیده‌اند و انرژی آنها فقط می‌تواند مقادیر مشخص  $E_K$ ،  $E_L$ ،  $E_M$ ، ... باشد (شکل ۱۶.۱). از طرف دیگر، حالت‌های با انرژی مثبت کوانتیده نیستند و انرژی آنها می‌تواند هر مقداری باشد. این حالت‌ها نامقیدند و با وضعیتی که در آن یک الکترون از فاصله بسیار دور و با



شکل ۱۶.۱ منشأ طیف انرژی گسسته و پیوسته ناشی از حالت‌های مانای گسسته.

انرژی جنبشی اولیه مشخصی به طرف يك پروتون پرتاب می‌شود متناظرند. الکترون پس از عبور از نزدیک‌های پروتون از امتداد اولیه منحرف می‌شود و بدون تشکیل سیستم مقید، به فاصله بینهایت منتقل می‌شود. انرژی سیستم در این حالت به وسیله انرژی جنبشی اولیه الکترون که می‌تواند به طور دلخواه انتخاب شود، تعیین می‌شود.

گذارها می‌توانند میان دو حالت از طیف انرژی گسسته، مانند گذارهای  $cd$  و  $ab$  در شکل ۱۶.۱، یا میان يك حالت از طیف گسسته و يك حالت از طیف پیوسته، مانند گذار  $ef$ ، و یا میان دو حالت از طیف پیوسته مانند گذار  $gh$ ، رخ دهند.

### مثال ۶.۱ پایستگی انرژی و تکانه در گذارهای تابشی.

**حل:** در دید اول، تا آنجا که به پایستگی انرژی مربوط می‌شود معادله (۲۹.۱) صحیح است. با این حال، بررسی دقیقتر نشان می‌دهد که این معادله به يك اصلاح جزئی نیاز دارد. در بخش ۶.۱ یاد آور شدیم که فوتون علاوه بر انرژی  $h\nu$  تکانه‌ای هم‌ارز با  $h/\lambda = h\nu/c$  را نیز با خود حمل می‌کند و هر دوی آنها (یعنی تکانه و انرژی) در گذارهای تابشی از يك حالت به حالت دیگر باید پایسته باشند. ابتدا گسیل توسط يك اتم در حال سکون را در نظر می‌گیریم. تکانه این اتم قبل از گذار برابر صفر است. پس از گذار، اتم باید با تکانه‌ای مساوی و مخالف با تکانه فوتون پس‌زده شود، یعنی

$$0 = P_{\text{اتم}} + P_{\text{فوتون}}$$

یا از نظر بزرگی



$$P_{\text{اتم}} = P_{\text{فوتون}} = hv/c \quad (30.1)$$

اکنون بایستگی انرژی را در نظر می‌گیریم. در آغاز اتمی داریم که در یک حالت مانای با انرژی  $E_i$  در حال سکون قرار دارد. پس از گذار نیز یک اتم با انرژی جنبشی  $P_{\text{اتم}}^2/2M$  واقع در یک حالت مانای با انرژی  $E_f$  و نیز یک فوتون با انرژی  $hv$  وجود دارد. بنابراین، بر طبق بایستگی انرژی داریم

$$E_i = E_f + \frac{P_{\text{اتم}}^2}{2M} + hv \quad (31.1)$$

یا با به کار بردن معادله (30.1) خواهیم داشت

$$E_i - E_f = hv \left( 1 + \frac{hv}{2Mc^2} \right) \quad (32.1)$$

هنگامی که  $hv$  در مقایسه با  $2Mc^2$  بسیار کوچک است، آخرین جمله قابل چشم‌پوشی است و معادله (32.1) به معادله (29.1) تبدیل می‌شود. این حالت در گذارهای اتمی و مولکولی صادق است. به طور کلی،  $hv$  کوچکتر از  $Mc^2$  است و معادله (32.1) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$hv = (E_i - E_f) \left( 1 + \frac{hv}{2Mc^2} \right)^{-1} = (E_i - E_f) \left( 1 - \frac{hv}{2Mc^2} \right)$$

در این رابطه از بسط  $(1+x)^{-1} = 1 - x + \dots$  استفاده کرده‌ایم که در آن  $x = hv/2Mc^2$  و در مقایسه با واحد کمیت کوچکی است. هر گاه به جای  $hv$  در داخل پرانتز  $E_i - E_f$  قرار دهیم رابطه زیر به دست می‌آید

$$hv = E_i - E_f - \frac{(E_i - E_f)^2}{2Mc^2} \quad (33.1)$$

جمله آخر اساساً انرژی پس‌زنی اتم است. بنابراین، در فرایند گسیل، انرژی فوتون گسیل شده از اختلاف میان دو تراز انرژی گسیل‌کننده (اتم، مولکول، یا هسته) کمی کوچکتر است. این اختلاف برابر است با انرژی پس‌زنی گسیل‌کننده. از طرف دیگر، در فرایند جذب باید معادله (31.1) را به صورت زیر بنویسیم

$$E_i + hv = E_f + \frac{P_{\text{اتم}}^2}{2M} \quad (34.1)$$

زیرا در این حالت یک فوتون در حالت اولیه (و نه در حالت نهایی) وجود دارد. بایستگی تکانه ایجاب می‌کند که فوتون  $P_{\text{اتم}} = P_{\text{اتم}}$  باشد که با هم‌ارز با معادله (30.1) است.

بنا بر این هنگامی که از تقریب بالا استفاده می‌کنیم، معادله (۳۴.۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$h\nu = (E_f - E_i) \left(1 - \frac{h\nu}{\gamma M c^2}\right)^{-1} = (E_f - E_i) \left(1 + \frac{h\nu}{\gamma M c^2}\right)$$

یا

$$h\nu = E_f - E_i + \frac{(E_f - E_i)^2}{\gamma M c^2} \quad (35.1)$$

بنا بر این، برای اینکه جذبی رخ دهد، انرژی فوتون جذب شده باید کمی بیشتر از اختلاف انرژی میان دو تراز جذب کننده باشد تا بتواند انرژی جنبشی جذب کننده پس‌زنی را توجیه کند.

یک نتیجه این تحلیل این است که فوتون گسیل شده به وسیله یک سیستم (اتم، مولکول، یا هسته) در گذار  $b \rightarrow a$  نمی‌تواند به وسیله سیستم مشابه دیگری جذب شود و آن سیستم گذار معکوس  $a \rightarrow b$  را انجام دهد. بنا بر این طیف گسیلی باطیف جذبی یکی نیست. در مثال ۱۵.۱ مجدداً به این موضوع اشاره خواهیم کرد. برای گذارهای اتمی و مولکولی که در آنها  $E_f - E_i$  از مرتبه چند الکترون ولت و  $M c^2$  نیز از مرتبه  $10^{11}$  eV است، جمله تصحیحی در معادلات (۳۳.۱) و (۳۵.۱) از مرتبه  $10^{-10}$  eV است که قابل چشم‌پوشی است. از طرف دیگر، برای گذارهای هسته‌ای،  $E_f - E_i$  می‌تواند از مرتبه  $10^6$  eV باشد. چون  $M c^2$  از همان مرتبه گذارهای اتمی است، جمله تصحیحی از مرتبه  $10$  eV خواهد بود که نسبتاً مهمتر است.

## ۸.۱ شواهد تجربی حالت‌های مانا

تاکنون مفهوم حالت‌های مانا را به عنوان مفهوم ساده‌ای برای توضیح طیف گسسته سیستم‌های اتمی معرفی کردیم. با این حال، وجود گذارهای میان حالت‌های مانا در آزمایش‌های متعددی تأیید و اثبات شده است. در این باره می‌توان از برخوردهای ناکشسان نام برد که در آنها قسمتی از انرژی جنبشی پرتابه به صورت انرژی داخلی به هدف منتقل می‌شود. این برخوردها به برخوردهای ناکشسان نوع اول معروف‌اند. برخوردهای ناکشسان نوع دوم با فرایند معکوس متناظرند.

فرض کنید ذره تند  $q$  با سیستم  $A$  (که می‌تواند اتم، مولکول، یا هسته باشد) واقع در حالت پایه با انرژی  $E_1$  برخورد کند. در نتیجه برهم‌کنش پرتابه-سیستم (که می‌تواند الکترومغناطیسی یا هسته‌ای باشد)، تبادل انرژی صورت می‌گیرد. فرض کنید  $E_2$  انرژی اولین سطح برانگیخته سیستم است. هر گاه انرژی جنبشی پرتابه باشد برخورد کشسان خواهد بود ولی اگر پرتابه آنقدر انرژی جنبشی داشته باشد که بتواند انرژی برانگیختگی  $E_2 - E_1$  را به هدف منتقل کند برخورد ناکشسان است و می‌توان آن را به صورت زیر

$$A + q \text{ تند} \rightarrow A^* + q \text{ کند}$$

وقتی جرم پرتابه  $q$  در مقایسه با جرم هدف  $A$  بسیار کوچک باشد، مثل حالت مربوط به برخورد الکترون با اتم، شرط برخورد ناکشسان (مثال ۷.۱) عبارت است از

$$E_k \geq E_\gamma - E_\lambda \quad (۳۶.۱)$$

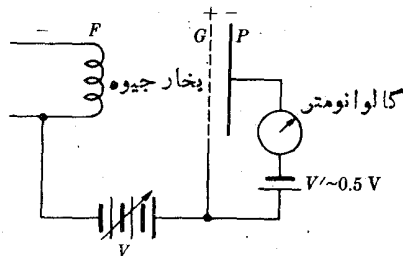
که در آن  $E_k = mv^2/2$  انرژی جنبشی پرتابه قبل از برخورد است. پس از برخورد، انرژی جنبشی پرتابه برابر است با  $E_k' = E_k - (E_\gamma - E_\lambda)$ ، زیرا انرژی تلف شده توسط پرتابه در برخورد برابر است با  $E_\gamma - E_\lambda$ .

برای ارائه یک مثال واقعی، الکترونی را در نظر می‌گیریم که با انرژی جنبشی  $E_k$  از میان ماده‌ای (مثلاً بخار جیوه) عبور می‌کند. در صورتی که  $E_k$  کوچکتر از اولین انرژی برانگیختگی جیوه (یعنی  $E_\gamma - E_\lambda$ ) باشد، همه برخوردها کشسان اند و الکترونها هنگام عبور از میان بخار به میزان خیلی آرامی انرژی از دست می‌دهند، زیرا حداکثر انرژی تلف شده در هر برخورد تقریباً مساوی با مقدار زیر است (مسئله ۵۵.۱)

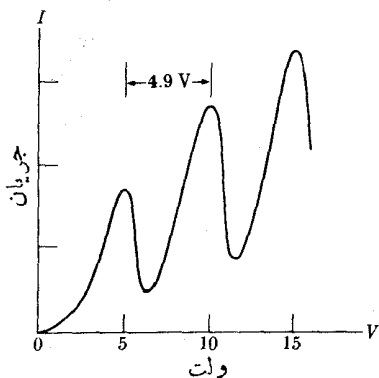
$$\Delta E_k \approx -4(m_e/M)E_k \approx 5 \times 10^{-6} E_k$$

اما اگر  $E_k$  بزرگتر از  $E_\gamma - E_\lambda$  باشد برخورد می‌تواند ناکشسان باشد و الکترون ممکن است انرژی  $E_\gamma - E_\lambda$  را در یک تک برخورد از دست دهد. هرگاه انرژی جنبشی اولیه الکترون خیلی از  $E_\gamma - E_\lambda$  بیشتر نباشد، انرژی الکترون پس از برخورد ناکشسان برای برانگیختن سایر اتمها کافی نخواهد بود. بعد از آن برخوردهای متوالی الکترون از نوع کشمان خواهد بود. اما اگر انرژی جنبشی الکترون در آغاز خیلی زیاد باشد تعداد برخوردهای ناکشسان بیشتر می‌شود و در هر برخورد مقداری انرژی،  $E_\gamma - E_\lambda$  از دست می‌دهد. در این حالت، قبل از اینکه حرکت الکترون کند شود و انرژی آن از انرژی آستانه برخوردهای ناکشسان کمتر شود تعداد زیادی اتم را برانگیخته می‌کند.

این فرایند در سال ۱۹۱۴ برای اولین بار به وسیله فرانک و هرتز مشاهده شد. در شکل ۱۷.۱ آرایش آزمایش آنها نشان داده شده است. رشته گرم شده  $F$  الکترونهایی را گسیل می‌کند که تحت اثر پتانسیل متغیر  $V$  به طرف شبکه  $G$  شتاب می‌گیرند. فضای میان  $F$  و  $G$  با بخار جیوه پر شده است. میان شبکه  $G$  و صفحه جمع‌کننده  $P$  پتانسیل ترمزی کوچک،  $V'$  (در حدود تقریباً ۵۰ ولت) اعمال می‌شود، به گونه‌ای که آن الکترونهایی که انرژی جنبشی آنها پس از یک یا چند برخورد ناکشسان خیلی کم می‌شود نمی‌توانند به صفحه  $P$  برسند و توسط گالوانومتر ثبت نمی‌شوند. هنگامی که  $V$  افزایش می‌یابد، شدت جریان  $I$  صفحه  $P$  مطابق آنچه در شکل ۱۸.۱ نشان داده شده است افت و خیز می‌کند، و قلدها در فاصله‌ای در حدود ۴۹ ولت ظاهر می‌شوند. فرورفتگی اول با الکترونهایی متناظر است



شکل ۱۷۰۱ آرایش آزمایش فرانک-هرتز برای تحلیل برخورد‌های ناکشسان نوع دوم.



شکل ۱۸۰۱ تغییرات جریان الکترونی بر حسب پتانسیل شتاب‌دهنده در آزمایش فرانک-هرتز.

کسه تمام انرژی جنبشی خود را پس از يك برخورد ناکشسان بسا يك اتم جیوه از دست می‌دهند. در این برخورد اتم جیوه برانگیخته می‌شود. فرورفتگی دوم با الکترونی‌هایی متناظر است که با دو اتم جیوه برخورد ناکشسان می‌کنند و تمام انرژی جنبشی خود را از دست می‌دهند و به‌همین ترتیب تا به آخر. اتمهای برانگیخته جیوه در بازگشت به‌حالت پایه، مطابق رابطه  $Hg^* \rightarrow Hg + h\nu$ ، فوتونی با انرژی  $h\nu = E_2 - E_1$  گسیل می‌کنند. از شواهد تجربی طیف‌نمایی می‌دانیم که بخار جیوه، هنگامی که برانگیخته می‌شود، تابشی با طول موج  $2.536 \times 10^{-7} \text{ m}$  (بسا  $2536 \text{ \AA}$ ) متناظر بسا فوتونسی بسا انرژی  $h\nu = 4.86 \text{ eV}$  گسیل می‌کند. تابشی با این طول موج هنگام عبور يك باریکه الکترون از میان بخار جیوه مشاهده شده است. از این رو، این آزمایش ساده یکی از دلایل محکم و قابل توجه وجود حالت‌های ماناست.

آزمایش مشابه دیگر برانگیختگی کولنی هسته‌هاست. بدعنوان مثال، هنگامی که پروتونی از نزدیکی هسته‌ای عبور می‌کند، برهم‌کنش الکتریکی میان آن دو می‌تواند منجر

به یک برخورد ناکشسان شود و در نتیجه هسته به یکی از پایینترین حالت‌های برانگیخته برود. این هسته هنگام مراجعت به حالت پایه، فوتونهای پرتوگامایی با انرژی از مرتبه چندین keV گسیل می‌کند. به همین دلیل برانگیختگی کولنی یکی از مهمترین روشهای تجربی برای آشکارسازی و تحلیل ویژه حالت‌های با انرژی پایین در هسته‌هاست.

مثال ۷۰۱ انرژی جنبشی آستانه لازم برای برانگیختگی هدف در یک برخورد ناکشسان نوع اول را محاسبه کنید.

حل: جرم پرتابه و هدف را به ترتیب با  $m$  و  $M$  نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم که هدف در آغاز در چارچوب مرجع آزمایشگاه در حال سکون باشد. هرگاه  $p$  تکانه پرتابه قبل از برخورد و  $p'$  و  $P$  نیز به ترتیب تکانه‌های پرتابه و هدف پس از برخورد باشد، در این صورت پایستگی تکانه ایجاب می‌کند که رابطه زیر برقرار باشد

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{P} \quad (۳۷.۱)$$

به طریق مشابه، اگر  $E_1$  انرژی حالت مانای اولیه هدف و  $E_2$  انرژی حالت نهایی باشد، برطبق پایستگی انرژی باید رابطه زیر برقرار باشد

$$\frac{1}{2m}p^2 + E_1 = \frac{1}{2m}p'^2 + \frac{1}{2M}P^2 + E_2$$

یا اگر  $\Delta E = E_2 - E_1$  باشد

$$\frac{1}{2m}p^2 = \frac{1}{2m}p'^2 + \frac{1}{2M}P^2 + \Delta E \quad (۳۸.۱)$$

کمینه انرژی جنبشی که پرتابه برای این فرایند لازم دارد مقدار انرژی است که در آن هم پرتابه و هم هدف پس از برخورد در چارچوب مرجع مرکز جرم در حال سکون باشند، به گونه‌ای که تمام انرژی جنبشی در چارچوب مرجع مرکز جرم صرف برانگیختگی هدف بشود. در این صورت، هدف و پرتابه پس از برخورد، در چارچوب مرجع آزمایشگاه با همان سرعت  $v_{CM}$  که سرعت مرکز جرم سیستم است حرکت می‌کنند. بنابراین، روابط  $\mathbf{P} = Mv_{CM}$  و  $\mathbf{p}' = mv_{CM}$  برقرار است. اما اگر  $v$  سرعت پرتابه قبل از برخورد باشد، خواهیم داشت

$$v_{CM} = \frac{mv}{m+M}$$

و بنابراین

$$p' = \frac{m^2 v}{m+M} = \frac{mp}{m+M}, \quad P = \frac{mMv}{m+M} = \frac{Mp}{m+M}$$

البته این معادلات با معادله (۳۷.۱) سازگارند. از جانشانی این مقادیر در معادله (۳۸.۱) نتیجه زیر به دست می‌آید

$$\frac{M}{m+M} \left( \frac{1}{\gamma m} p^2 \right) = \Delta E$$

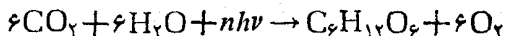
یا

$$E_k = \frac{1}{\gamma m} p^2 = \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \Delta E \quad (39.1)$$

این معادله مقدار انرژی جنبشی آستانه‌ای را به دست می‌دهد که پرتابه باید برای برانگیختن هدف داشته باشد تا آن را به اولین تراز برانگیخته ببرد. هرگاه پرتابه خیلی سبکتر از هدف باشد، یعنی  $m \ll M$ ، خواهیم داشت  $E_k \approx \Delta E = E_2 - E_1$ . این وضع به برخورد ناکشسان الکترون با اتم یا مولکول مربوط می‌شود و مسا در تحلیل آزمایش فرانک-هرتز آن را به کار بردیم. با این حال، هنگامی که هسته‌ها در اثر برخورد ناکشسان خود با پروتون‌ها، برانگیختگی کولنی را متحمل می‌گردند، باید معادله (۳۹.۱) را به کار ببریم. دلیل این موضوع این است که به طور کلی، مخصوصاً در برخورد با هسته‌های سبک،  $m/M$  نمی‌تواند در مقایسه با واحد کوچک باشد.

## ۹.۱ برهم‌کنش تابش با ماده

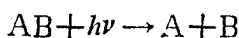
برهم‌کنش تابش با ماده یکی از اساسیترین فرایندهاست و بسیاری از فرایندهای طبیعت معلول همین فرایندهند. به‌عنوان مثال، کسره زمین در معرض شارش پیوسته‌ای از تابش الکترومغناطیسی حاصل از خورشید قرار دارد و در نتیجه آن، زندگی بر روی کره زمین از طریق فرایند فوتوسنتز امکان‌پذیر می‌شود (یعنی، تشکیل ترکیبات جدید عمده‌تاً کربوهیدراتها، از سنتز کربن دی‌اکسید و آب در نتیجه جذب فوتون. ترکیبی به نام کلروفیل نقش مهمی در این واکنش ایفا می‌کند). این فرایند را می‌توان به صورت زیر نوشت



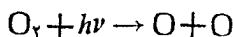
تعداد فوتونهای این فرایند،  $n$ ، ثابت نیست و انرژی آنها اکثراً در ناحیه مرئی طیف قرار دارد. این فرایند بسیار پیچیده‌تر از آن چیزی است که توسط معادله بالا بیان می‌شود و هنوز تحقیقات بسیار فعالی در این زمینه جریان دارد. فوتوسنتز نه تنها از این جهت مهم است که کربوهیدراتها، یعنی، منبع نهایی و اصلی غذا و انرژی اکثر ارگانیسمهای زنده را تولید می‌کند بلکه از این جهت نیز مهم است که مقدار اکسیژن موجود در جو را به وسیله

آزاد کردن اکسیژن کنترل می‌کند؛ اکسیژن آزاد شده نیز در بسیاری از فرایندهای اکسندۀ روی زمین به سرعت مصرف می‌شود.

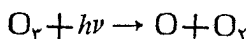
فوتوسنتز تنها يك نمونه از واکنشهای بسیاری است که با جذب تابش آغاز می‌شوند. بررسی این واکنشها را فوتوشیمی می‌گویند. هر واکنش فوتوشیمیایی مستلزم دخالت فوتونهایی است که انرژی مشخصی دارند. مثال دیگر فرایندهایی که از جذب تابش ناشی می‌شوند تفکیک مولکول در اثر جذب فوتون است، یعنی



يك نمونه از این واکنشها، که از اهمیت ژئوفیزیکی و بیولوژیکی خاصی برخوردار است، تفکیک اکسیژن موجود در اتمسفر در اثر جذب تابش فرابنفش با طول موج از  $1600 \text{ \AA}$  تا  $2400 \text{ \AA}$  است (یعنی فوتونهایی با انرژی بین  $7.78 \text{ eV}$  و  $5.2 \text{ eV}$ ). این فرایند را می‌توان با معادله زیر نشان داد

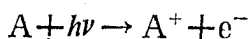


اکسیژن اتمی حاصل با اکسیژن مولکولی ترکیب می‌شود و اوزون،  $O_3$ ، تشکیل می‌دهد که آن نیز به نوبه خود، با جذب تابش فرابنفش به طول موج بین  $2400 \text{ \AA}$  تا  $3600 \text{ \AA}$  (یعنی فوتونهایی با انرژی بین  $5.2 \text{ eV}$  و  $3.4 \text{ eV}$ ) تفکیک فوتوشیمیایی متحمل می‌شود. این واکنش با معادله زیر نشان داده می‌شود



این دو واکنش عملاً تمامی تابش فرابنفش پرتوهای نور خورشید را قبل از رسیدن به سطح زمین جذب می‌کنند. اگر تابش فرابنفش می‌توانست به سطح زمین برسد در اثر واکنشهای فوتوشیمیایی با عناصر سلول، آنزیمها و مانند آنها، می‌توانست بسیاری از ارگانسیمها را منهدم کند.

فرایند عکاسی نیز مثال دیگری از واکنش فوتوشیمیایی است. مولکولهای برومید نقره در اثر تابش تجزیه می‌شوند و در نتیجه آن اتمهای نقره يك تصویر به اصطلاح منفی تشکیل می‌دهند. بعداً در فرایند ظهور فیلم، تصویر دائمی ظاهر می‌شود. هنگامی که فوتون انرژی کافی داشته باشد، جذب آن به وسیله اتم یا مولکول می‌تواند به گسیل الکترون منجر شود. آنچه باقی می‌ماند اتم یا مولکول یونیده است. این فرایند را می‌توان با معادله زیر بیان کرد



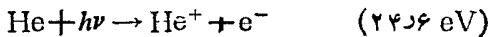
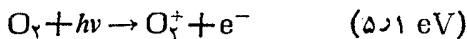
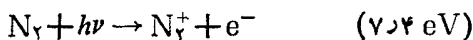
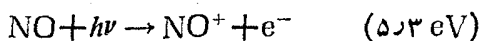
این فرایند به فوتودیونش معروف است و هم‌ارز است با اثر فوتوالکتریک در فلزات که در بخش ۳.۱ مورد بحث قرار گرفت. به همین دلیل این اثر را فوتوالکتریک اتمی نیز می‌نامند. هنگامی که يك باریکه تابش فرابنفش (ایکس یا گاما) از داخل ماده عبور می‌کند، در نتیجه فرایند

فوتویونش، در طول مسیر یونش تولید می‌کند. انرژی لازم برای استخراج يك الكترون از يك اتم یا مولکول را با  $I$  نمایش می‌دهیم. این انرژی را پتانسیل یونش می‌نامند. در این صورت انرژی جنبشی الكترون پرتاب‌شده با رابطه زیر داده می‌شود

$$E_k = h\nu - I \quad (۴۰.۱)$$

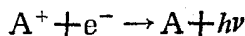
که شبیه به معادله (۱۴.۱) است. ضمناً در این معادله از انرژی پس‌زنی یون چشم‌پوشی شده است. معادله (۴۰.۱) نشان می‌دهد که انرژی فوتون برای ایجاد فوتویونش، باید مساوی یا بزرگتر از  $I$  باشد. مقدار  $I$  به حالت مانایی که در آغاز به وسیله الكترونها پرتاب‌شده اشغال شده است، وابسته است. به عنوان مثال، هرگاه بخواهیم الكترونی را از حالت پایه اتم هیدروژن به بیرون پرتاب کنیم، حداقل انرژی لازم فوتون باید  $13.6 \text{ eV}$  باشد. ولی هرگاه الكترون در اولین حالت برانگیخته باشد مقدار انرژی لازم فقط  $3.4 \text{ eV}$  خواهد بود. برای اتمهای هلیوم، انرژی یونش برای کندن الكترون از حالت پایه برابر است با  $24.6 \text{ eV}$ .

در ناحیه بالاتر از جو که یونکره نامیده می‌شود، تراکم بیش از حد یونها و الكترونها آزاد (در حدود  $10^{11}$  یون در متر مکعب) اکثراً ناشی از اثر فوتوالکتريک حاصل از تابش فرابنفش و ایکس خورشید در اتمها و مولکولهاست. برخی از این واکنشها که بیشتر به وقوع می‌پیوندند عبارت‌اند از



پتانسیلهای یونش در داخل پراتنز نوشته شده‌اند. واکنشهای ثانویه بسیار زیادی در نتیجه این یونشها در اتمسفر رخ می‌دهد.

فرایند معکوس فوتویونش به گیراندازی تابشی معروف است. در این فرایند، الكترون آزادی با انرژی جنبشی  $E_k$  به وسیله يك یون گیرانداخته می‌شود و همراه با گسیل يك فوتون حالت مقیدی ایجاد می‌کند. یعنی



انرژی فوتون برابر است با

$$h\nu = E_k + I \quad (۴۱.۱)$$

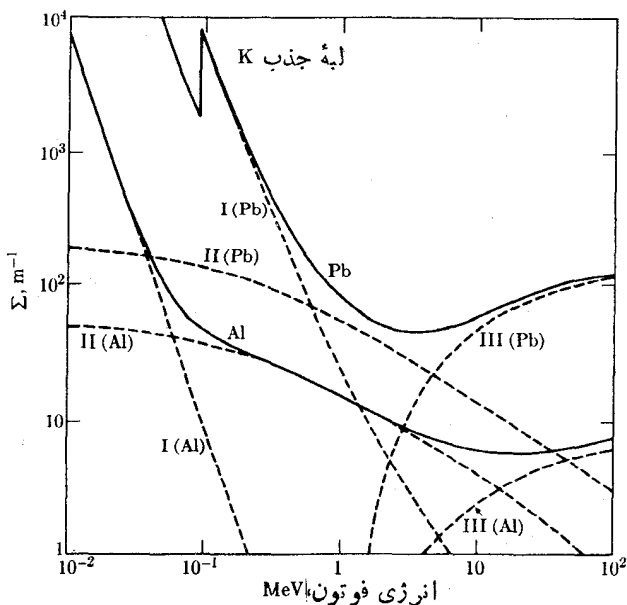
هنگامی که انرژی فوتون از انرژی بستگی الكترون در اتم یا مولکول بیشتر است، الكترون را می‌توان آزاد در نظر گرفت. در چنین حالتی، پراکندگی کامپتون (بخش ۵.۱)



از اثر فوتوالکتریک محتملتر است. اگر انرژی فوتون از  $2m_e c^2$  (مساوی با  $1.02 \text{ MeV}$ ) که دو برابر انرژی سکون الکترون است)، بیشتر باشد فرایند دیگری که به فرایند آفرینش زوج الکترون-پوزیترون معروف است هم رخ می‌دهد. (پوزیترون ذره‌ای است که جرم آن برابر جرم الکترون ولی بار آن مثبت است.) آفرینش زوج الکترون-پوزیترون که به تولید زوج معروف است به صورت زیر نوشته می‌شود

$$h\nu \rightarrow e^+ + e^- \quad (۲۲.۱)$$

در بخش ۳.۹ این فرایند را به تفصیل مطالعه می‌کنیم. در اینجا فقط می‌گوییم که فوتون به یک الکترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود. چون انرژی وابسته به جرم سکون الکترون یا پوزیترون برابر است با  $m_e c^2$ ، کمینه انرژی که فوتون باید داشته باشد تا یک زوج الکترون-پوزیترون تولید کند برابر  $2m_e c^2$  خواهد بود.



**شکل ۱۹.۱** سطح مقطعهای ماکروسکوپی که مربوط به جذب فوتونها در آلومینیوم و سرب. منحنیهای پر سطح مقطعهای کل هستند. منحنیهای ۱ سطح مقطعهای جزئی مربوط به اثر فوتوالکتریک، منحنیهای ۲ سطح مقطعهای جزئی مربوط به اثر کامپتون، و منحنیهای ۳ سطح مقطعهای جزئی مربوط به تولید زوج اند.

در انرژیهای بالا تابش الکترومغناطیسی ممکن است با هسته‌های اتمی نیز برهم کنش کند و آنها را به حالت‌های برانگیخته ببرد. در این حالت، گسیل يك ذره هسته‌ای (مثلاً يك پروتون) در يك واکنش به اصطلاح فوتو هسته‌ای، یا حتی شکافت هسته از جمله فرایندهایی هستند که می‌توانند رخ دهند. این فرایندها را در فصل هشتم مطالعه می‌کنیم.

هنگامی که يك باریکه تابش از داخل ماده عبور می‌کند، انرژی آن به تدریج در اثر فرایندهایی که در بالا بیان شد جذب می‌شود. بنابراین اگر  $I_0$  شدت تابش قبل از ورود به داخل ماده باشد، شدت آن پس از عبور از ضخامت  $x$  با رابطه زیر داده می‌شود.

$$I = I_0 e^{-\Sigma x} \quad (۴۳.۱)$$

که در آن  $\Sigma$  مشخصه هر ماده و هر فرایند بخصوصی است و به ضریب جذب خطی یا سطح مقطع ماکروسکوپیك معروف است.  $\Sigma$ ، در صورتی که  $x$  بر حسب متر باشد، به صورت  $m^{-1}$  بیان می‌شود. این کمیت تابع انرژی فوتونهاست [برای استخراج معادله (۴۳.۱) به مثال ۸.۸ رجوع کنید].

در هر ماده يك سطح مقطع ماکروسکوپیك برای هر فرایند ممکن از قبیل اثر فوتوالکتريك، پراکندگی کامپتون، تولید زوج و نظایر آنها وجود دارد. سطح مقطع کل هر ماده عبارت است از مجموع تمام سطح مقطه‌های جزئی. در شکل ۱۹.۱، سطح مقطه‌های ماکروسکوپیك جزئی و کلی برای آلومینیوم و سرب در سه فرایند بالا نشان داده شده است. توجه کنید که در انرژیهای پایین، اثر فوتوالکتريك؛ در انرژیهای متوسط، اثر کامپتون؛ و بالاخره در انرژیهای بالا، تولید زوج فرایند غالب اند.

## ۱۰.۱ ذرات و میدانها

در اواخر ربع اول قرن بیستم، انقلاب مهم دیگری در مفاهیم فیزیکی به وقوع پیوست و روش توصیف ما درباره حرکت يك ذره را به طور اساسی تغییر داد.

تجارب حسی به ما می‌گویند که اشیایی را که لمس می‌کنیم و می‌بینیم، شکل و اندازه کاملاً مشخصی دارند و از این رو در فضا جایگزین شده هستند. از این رو، ایسن احساس در ما به وجود می‌آید که ذرات بنیادی (یعنی الکترونها، پروتونها، نوترونها، و نظایر آنها) را نیز چنین پنداریم و آنها را کره‌های کوچکی بدانیم که شعاع مشخصه، جرم، و بار دارند. اما، این برون‌یابی فراتر از تجربه حسی مستقیم ماست و ما باید قبل از هر چیز آن را با دقت تحلیل کنیم.

تجربه نشان می‌دهد که تصور حسی برون‌یابی شده ما در مورد اجزای اساسی تشکیل دهنده ماده نادرست است. رفتار دینامیکی ذرات بنیادی ایجاب می‌کند که به هر ذره يك میدان (یا يك میدان ماده) به همان طریق نسبت دهیم که، در روش معکوس، يك فوتون را (که معادل یا يك ذره است) به میدان الکترومغناطیسی نسبت دادیم. این میدان ماده، رفتار دینامیکی

ذره را به همان طریقی توصیف می‌کند که میدان الکترومغناطیسی رفتار فوتونهایی با تکانه و انرژی معین را. هنگام بحث در ارتباط میان میدان ماده و خواص دینامیکی ذره (یعنی تکانه و انرژی) می‌توانیم از روابطی که قبلا برای فوتون به دست آوردیم کمک بگیریم. با نوشتن روابط (۲۸.۱) به صورت معکوس، می‌توان فرض کرد که طول موج  $\lambda$  و بسامد  $\nu$  میدان تکفام وابسته به ذره‌ای با تکانه  $p$  و انرژی  $E$  با روابط زیر داده می‌شوند

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad \nu = \frac{E}{h} \quad (۴۴.۱)$$

که در آن، مانند قبل،  $h$  ثابت پلانک است. این روابط در سال ۱۹۲۴ میلادی برای اولین بار به وسیله فیزیکدان فرانسوی لویی دو بروی مطرح شدند و به همین دلیل طول موج  $\lambda = h/p$  به طول موج دو بروی ذره معروف است. با معرفی عدد موج  $k = 2\pi/\lambda$  و بسامد زاویه‌ای  $\omega = 2\pi\nu$  می‌توان معادلات (۴۴.۱) را به شکل متقارنتری نوشت

$$p = \frac{h}{2\pi}k, \quad E = \frac{h}{2\pi}\omega$$

یا، با تعریف ثابت جدید  $\hbar$  که به  $h$  چ باد معروف است، یعنی

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05457 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

خواهیم داشت

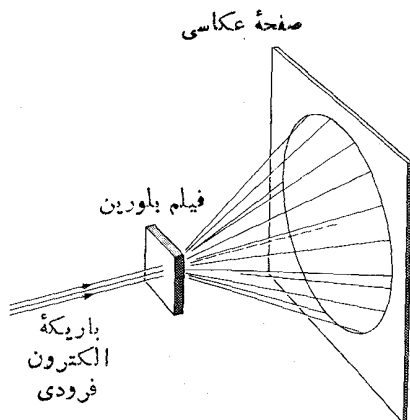
$$p = \hbar k, \quad E = \hbar \omega \quad (۴۵.۱)$$

اگر فرض ما، که در معادلات (۴۴.۱) یا (۴۵.۱) بیان شد، صحیح باشد باید انتظار داشته باشیم که هر وقت حرکت ذره به طریقی آشفته شود که میدان وابسته به آن نتواند آزادانه انتشار یابد، باید (همچون مورد امواج کشسان و الکترومغناطیسی) پدیده‌های تداخل و پراش مشاهده شوند، و در واقع همین طور هم هست.

قبل از اینکه آزمایشهایی را بیان کنیم که تداخل و پراش میدان ماده را نشان می‌دهند، سعی می‌کنیم مقدار طول موج دو بروی وابسته به یک ذره را برآورد کنیم. الکترونهایی که در اختلاف پتانسیل الکتریکی  $V$  شتاب می‌گیرند، مقدار انرژی  $eV$  را به دست می‌آورند. از این رو، انرژی جنبشی آنها برابر است با  $p^2/2m_e = eV$  به گونهای که  $p = \sqrt{2m_e eV}$ . بنابراین، با قرار دادن مقادیر  $e$ ،  $m_e$  و  $h$  می‌توان طول موج دو بروی جنبشی الکترونهایی را به دست آورد

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV}} = 1.223 \times \frac{10^{-9}}{\sqrt{V}} \text{ m} \quad (۴۶.۱)$$

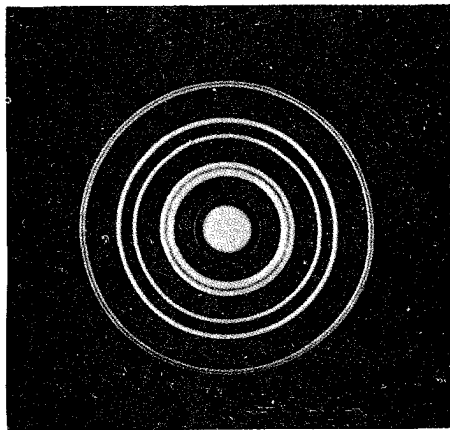
که در آن،  $V$  بر حسب ولت است. هنگامی که انرژی جنبشی الکترون بر حسب الکترون



شکل ۲۰.۱ آرایش تجربی مربوط به مشاهده پراش الکترون هنگام عبور از میان ماده بلورین.

ولت است از فرمول بالا نیز می توان استفاده کرد. به ازای  $V \sim ۱۰۴$  (که در گستره ولتاژ لامپهای تلویزیونی است)، طول موج در حدود  $۱۱-۱۰ \text{ m}$  است که با طول موج پرتو ایکس قابل مقایسه است. این بدان معنی است که هر گاه یک باریکه از الکترونهاى تند را از طریق بلورى روانه کنیم، نقشهای پراش را که از پراکندگی میدان مساده ناشی می شوند به دست خواهیم آورد. این نقشهای پراش که با الکترونهاى ورودی متناظرند، به نقشهای مشاهده شده برای پرتو ایکس شباهت دارند.

در سال ۱۹۲۷ میلادی ج. پ. تامسون دانشمند انگلیسی یک سری آزمایش انجام داد که هدف از آن مطالعه عبور یک باریکه الکترون از میان یک فیلم نازک از ماده بلورین بود. الکترونها پس از عبور از میان فیلم به یک صفحه عکاسی، مطابق شکل ۲۰.۱ برخورد می کردند. اگر الکترونها به مفهوم ماکروسکوپی همچون ذره رفتار می کردند، تصویر تیره و نامشخصی مشاهده می شد زیرا به طور کلی هر الکترونی در اثر برخورد با اتمهای موجود در بلور یک جور پراکنده می شد. اما نتیجه به دست آمده با نقشهای دی-شرر مربوط به پراش پرتو ایکس به وسیله یک ماده بس بلور، همان طور که در شکل ۲۱.۱ دیده می شود، مشابه بود. به همین طریق، هنگامی که باریکه الکترون از میان تک بلوری عبور می کند، نقشهای لکه های لاوه همان طور که در شکل ۲۲.۱ دیده می شود به دست می آید. نقشهای اخیر برای پرتو ایکس نیز مشاهده شده اند. هر گاه فاصله میان صفحات بلور معلوم باشد و از فرمولی استفاده شود که برای پرتو ایکس به دست آمده است، در آن صورت از روی ساختار این نقشها طول موج دو بروی،  $\lambda$ ، محاسبه می شود. مقادیر حاصل برای  $\lambda$  را می توان با مقادیر حاصل از فرمول (۲۶.۱) مقایسه کرد. این نتایج، در داخل محدوده خطای آزمایش، با هم توافق و سازگاری کامل دارند.

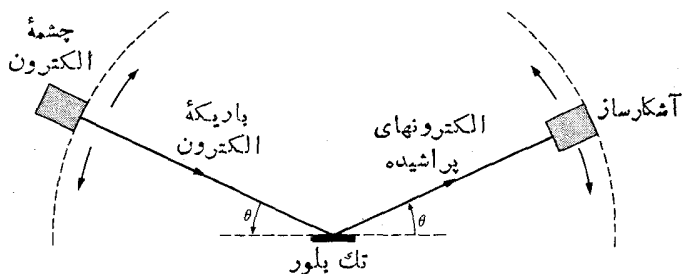


شکل ۲۱۰۱ پراش الکترونها به وسیله پودر بلوری.



شکل ۲۲۰۱ پراش الکترونهاى  $80 \text{ keV}$  به وسیله تک بلور کربن (گرافیت).

در آزمایشهای معروف دیویسون-گرم، که تقریباً همزمان با آزمایش تامسون انجام شدند، یک باریکه الکترون تحت زاویه‌ای به وجه یک بلور تابانده شد. الکترونهاى پراشیده به کمک آشکارسازی که مطابق شکل ۲۳۰۱ نسبت به چشمه الکترونها متقارن بود مشاهده شدند. این روش همانند آرایش براگ برای مشاهده پراش پرتو ایکس است. نتیجه



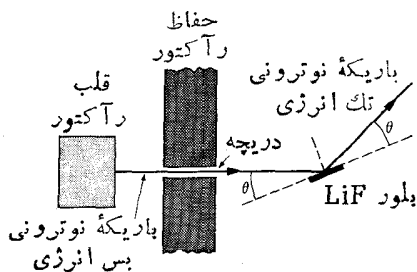
شکل ۲۳.۱ آزمایش دیویسون-گرمر برای مشاهده پراکندگی براگ الکترونها.

حاصل نشان داد که هر بار که شرط براگ (برای پرتو ایکس) برقرار می‌شود جریان الکترونی ثبت شده به وسیله آشکارساز به بیشینه مقدار می‌رسید. شرط براگ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (۴۷.۱)$$

که در آن  $d$  فاصله جدایی لایه‌های متوالی اتم در بلور است و  $\lambda$  نیز به وسیله معادله (۴۶.۱) داده می‌شود.

در آزمایشهای انجام شده بسا پروتونها و نوترونها نیز همین پدیده پراش براگ مشاهده می‌شود. پراش نوترون مخصوصاً بسیار مفید است، زیرا یکی از بهترین وسایل مطالعه ساختار بلورهاست. آزمایشگرها از پارایکة نوترونی تکفام استفاده و عبور آن را از میان بلور تحلیل می‌کنند. نوترونهاي خارج شده از رآکتور هسته‌ای پس از عبور از يك دریچه (شکل ۲۴.۱) دارای يك طیف پهن انرژی (یا تغییر وسیع در تکانه) هستند. به عبارت دیگر، می‌توان گفت که پارایکة نوترونی تکفام نیست بلکه شامل طیفی متشکل از تعداد



شکل ۲۴.۱ طیف‌سنج بلوری نوترون.

زیادی طول موج دوبروی است. هنگامی که باریکه نوترونی حاصل از رآکتور با یک بلور (مثلاً بلور LiF) برخورد می‌کند، نوترونیهای مشاهده شده در راستای متقارن فقط با طول موجی متناظرند که شرط براگ (۴۷.۱) آن را تعیین می‌کند. بنابراین نوترونها دارای انرژی و تکانه کاملاً مشخص‌اند. در این صورت بلور همچون پالایه انرژی یسا تکفام ساز عمل می‌کند. این باریکه نوترونی تک انرژی به نوبه خود برای مطالعه سایر مواد (به وسیله پراش) یسا برای تحلیل واکنشهای هسته‌ای که شامل نوترونیهای با انرژی معین‌اند بدکار می‌رود.

مثال ۸.۱ طول موج دوبروی نوترونیهای گرمایی در دمای  $25^\circ\text{C}$  چقدر است؟

حل: منظور از نوترونیهای گرمایی نوترونیهای است که در دمای مشخصی با ماده تعادل گرمایی دارند. بنابراین، میانگین انرژی جنبشی این نوترونها یسا میانگین انرژی جنبشی مولکولهای یک گاز کامل در همان دما یکسان است. از این رو میانگین انرژی جنبشی نوترونیهای گرمایی با رابطه  $E_{\text{ave}} = \frac{3}{2} kT$  داده می‌شود که در آن،  $T$  دمای مطلق و  $k$  ثابت بولتزمن است [معادله (۴۱.۱۰) را ببینید]. با توجه به اینکه دما برابر است با  $25^\circ\text{C}$ ، داریم،  $T = 298\text{K}$  و در نتیجه

$$E_{\text{ave}} = \frac{3}{2} kT = 6.17 \times 10^{-21} \text{ J} = 3.85 \times 10^{-2} \text{ eV}$$

تکانه متناظر مساوی است با

$$p = \sqrt{2m_n E_{\text{ave}}} = 4.05 \times 10^{-24} \text{ m kg s}^{-1}$$

بنابراین با به کار بردن معادله (۴۴.۱) برای میانگین طول موج دوبروی نوترونیهای گرمایی نتیجه زیر به دست می‌آید

$$\lambda = 1.85 \times 10^{-10} \text{ m}$$

(ضمناً، با توجه به فاصله جدایی میان صفحات در بلور NaCl که برابر

$$d = 2.82 \times 10^{-10} \text{ m}$$

است، مشاهده می‌کنیم اولین بیشینه پراش برای نوترونیهای با این طول موج تحت زاویه  $\theta = 19^\circ$  رخ می‌دهد).

مثال ۹.۱ الکترونی در فاصله زیاد از یک پروتون رها می‌شود. طول موج الکترون هنگامی که (الف) در فاصله یک متری از پروتون، (ب) در فاصله  $5.0 \times 10^{-10} \text{ m}$  از پروتون قرار دارد، محاسبه کنید (فاصله اخیر در حدود اندازه شعاع مدار الکترون در حالت پایه اتم هیدروژن است).

حل: در فاصله  $r$  از پروتون، الکترون از میان پتانسیلی عبور می کند که با رابطه زیر داده می شود

$$V = e / 4\pi\epsilon_0 r = 1.24 \times 10^{-9} / r \quad V$$

که در آن  $r$  بر حسب متر است. با جانمایی این مقدار در معادله (۴۶.۱) برای طول موج الکترون رابطه زیر را به دست خواهیم آورد

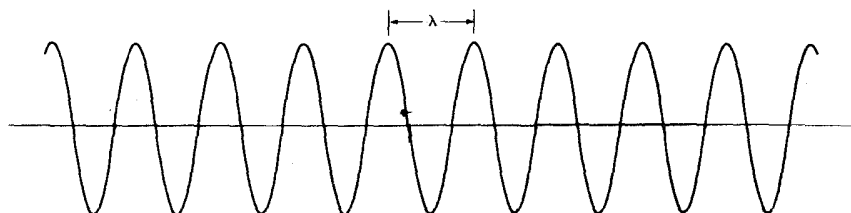
$$\lambda = 3.24 \times 10^{-5} \sqrt{r} \quad m$$

از روی این نتیجه معلوم می شود که وقتی الکترون به پروتون نزدیک می شود طول موج کاهش می یابد. دلیل این مطلب آن است که الکترون به طرف پروتون شتاب می گیرد و با کاهش فاصله، تکانه آن افزایش می یابد. هنگامی که الکترون در فاصله یک متری از پروتون قرار دارد، طول موج برابر  $3.24 \times 10^{-5} m$  است و هنگامی که به فاصله  $0.5 \times 10^{-10} m$  پروتون می رسد، طول موج برابر با  $2.27 \times 10^{-10} m$  می شود. این طول موج از مرتبه بزرگی ابعاد اتم هیدروژن است. اما برای جای دادن الکترون در یک مدار پایدار حول پروتون (در اتم هیدروژن)، لازم است که طول موج آن را تا مقدار مناسبی میزان کنیم (این مقدار تقریباً در حدود  $3.14 \times 10^{-10} m$  است). همان طور که بعداً خواهیم دید، این کار ایجاب می کند که مقدار مشخصی انرژی به وسیله الکترون تلف شود. این انرژی به صورت تابش گسیل می شود.

## ۱۱.۱ ذرات و بسته موجها

با استفاده از روابط (۴۴.۱) می توان میدان متناظر با ذره آزادی را که با تکانه کاملاً مشخص  $p$  و انرژی  $E = p^2 / 2m$  حرکت می کند، به وسیله یک موج هماهنگ با دامنه ثابت نمایش داد (شکل ۲۵.۱). تقارن ایجاب می کند که دامنه موج در تمام فضا یکسان باشد، زیرا هیچ نیرویی بر ذره وارد نمی شود و در نتیجه میدان ماده وابسته به آن در هیچ ناحیه ای بیشتر از ناحیه دیگر واپیچش پیدا نمی کند. سرعت فاز میدان ذره آزاد به صورت زیر تعریف می شود

$$v_p = \lambda v = \frac{h}{p} \frac{E}{h} = \frac{E}{p} = \frac{p}{2m} = \frac{1}{2} v$$



شکل ۲۵.۱ قطار موج پیوسته متناظر با یک ذره جای ناگزیده.

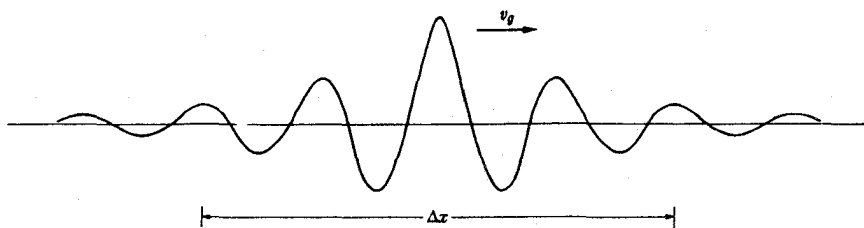


یعنی، سرعت فاز میدان ماده برابر نصف سرعت ذره است. اما چنین سرعتی نتیجه تجربی ندارد زیرا ما نمی‌توانیم سرعت فضا یک موج هماهنگک خالص را مستقیماً اندازه‌گیری کنیم. فقط می‌توانیم سرعت گروه امواج را اندازه‌گیری کنیم (پیوست ۳). اینکدامنه میدان ماده در تمام فضا یکسان است، این فکر را در ما ایجاد می‌کند که میدان ماده ذره آزاد هیچگونه اطلاعاتی در باره جایگزیدن یک ذره آزاد با تکانه کاملاً مشخص در فضا به دست نمی‌دهد. به عبارت دیگر، میدان ماده مستقل از مکان ذره است و مشاهده میدان به هر طریق، مکان ذره را آشکار نمی‌کند.

از روی بینش فیزیکی و آگاهی خود در مورد میدانها و امواج می‌دانیم که یک ذره جایگزیده در ناحیه مشخص  $\Delta x$  از فضا متناظر با میدان ماده‌ای است که دامنه یا شدت آن در چنین ناحیه‌ای بسیار بزرگ و لی در خارج از آن بسیار کوچک است. یک میدان ممکن است در ناحیه مشخصی برقرار باشد و در خارج از آن ناحیه به شدت کاهش یابد. چنین امکانی از طریق فرایند تداخل، به وسیله برهم نهی امواج با بسامدها و طول موجهای متفاوت، فراهم می‌شود. نتیجه حاصل بسته موج نام دارد که در شکل ۲۶.۱ نشان داده شده است. سرعتی که بسته موج با آن انتشار می‌یابد سرعت گروه  $v_g$  نام دارد و با رابطه  $v_g = d\omega/dk$  داده می‌شود [معادله (پ) ۲۹]. با استفاده از روابط (۴۵.۱) و  $E = p^2/2m$  می‌توان سرعت گروه میدان ماده متناظر با یک ذره آزاد را به صورت زیر نوشت

$$v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v$$

از این رو، درست همان طور که بینش فیزیکی ما نیز حکم می‌کند، سرعت گروه میدان ماده (یعنی سرعت انتشار بسته موج) برابر سرعت ذره است. در این صورت نتیجه می‌گیریم که هر ذره جایگزیده در ناحیه مشخصی از فضا به یک میدان یا یک بسته موج وابسته است که دامنه آن فقط در آن ناحیه بسیار مهم است و سرعت ذره همان سرعت گروه میدان یا بسته موج است.



شکل ۲۶.۱ بسته موج متناظر با یک ذره جایگزیده در فاصله  $\Delta x$ .

## ۱۲.۱ اصل عدم قطعیت هایز نبرگ برای مکان و تکانه

اکنون وضع خاصی را بررسی می‌کنیم که نمی‌توان آن را برحسب مکانیک کلاسیک توضیح داد. برای اینکه یک بسته موج در فضا جایگزیده شود باید چندین میدان با طول موج متفاوت  $\lambda$  (یا با مقادیر متفاوت عدد موج  $k$ ) بر روی هم بیفتند. اگر بسته موج روی ناحیه  $\Delta x$  گسترش پیدا کند، مقادیر اعداد موج مربوط به امواج تداخلی، که بسته موج را تشکیل می‌دهند و دامنه قابل توجهی دارند طوری در گستره  $\Delta k$  قرار می‌گیرند که طبق نظریه تحلیل فوریه داریم

$$\Delta x \Delta k \sim 2\pi$$

اما برطبق معادلات (۴۴.۱) یا (۴۵.۱)، منظور از طول موجهای متفاوت  $\lambda$  یا اعداد موج مختلف  $k$  این است که چندین مقدار  $p$  وجود دارد که در رابطه  $\Delta p = \hbar \Delta k$  صدق می‌کنند. بنا براین، با در نظر گرفتن  $h = 2\pi\hbar$  رابطه بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$\Delta x \Delta p \sim h \quad (۴۸.۱)$$

معنی فیزیکی رابطه (۴۸.۱) به صورت زیر است: هرگاه ذره‌ای در داخل ناحیه  $\Delta x/2 - x$  و  $x + \Delta x/2$  قرار داشته باشد (یعنی، عدم قطعیت در مکان ذره است)، میدان وابسته به آن به وسیله برهم نهادن امواجی با تکانه‌های میان  $p - \Delta p/2$  و  $p + \Delta p/2$  نمایش داده می‌شود که در آن  $\Delta p$  از طریق رابطه (۴۸.۱) به  $\Delta x$  مربوط می‌شود.  $\Delta p$  نیز عدم قطعیت در تکانه ذره است. رابطه (۴۸.۱) نشان می‌دهد که هرچه  $\Delta x$  بزرگتر باشد،  $\Delta p$  کوچکتر خواهد بود و برعکس. به عبارت دیگر، اطلاعات ما در باره جایگزینی یک ذره در فضا به قیمت آگاهی ما در باره تکانه آن به دست می‌آید. هرچه که آگاهی ما در باره مکان ذره دقیقتر باشد، اطلاعات ما نسبت به تکانه آن از دقت کمتری برخوردار است و برعکس. به همین دلیل است که یک ذره با تکانه کاملاً مشخص ( $\Delta p = 0$ ) با موجی نمایش داده می‌شود که با دامنه ثابت در تمام فضا گسترش یافته است ( $\Delta x \sim \infty$ )، به گونه‌ای که هیچ اطلاعاتی در مورد مکان آن نخواهیم داشت. ما نمی‌توانیم همزمان، مکان و تکانه یک ذره را با دقتی تعیین کنیم که در یک زمان  $\Delta x = 0$  و  $\Delta p = 0$  باشد. این موضوع با رابطه (۴۸.۱) مطابقت ندارد. رابطه (۴۸.۱) رابطه مطلوب میان عدم قطعیت‌های  $\Delta x$  و  $\Delta p$  در مکان  $x$  و تکانه  $p$  ذره را به دست می‌دهد. اما در بیشتر موارد  $x$  و  $p$  با دقت کمتری مشخص‌اند و بنا براین ما به جای رابطه (۴۸.۱) باید از رابطه کلیتر زیر استفاده کنیم

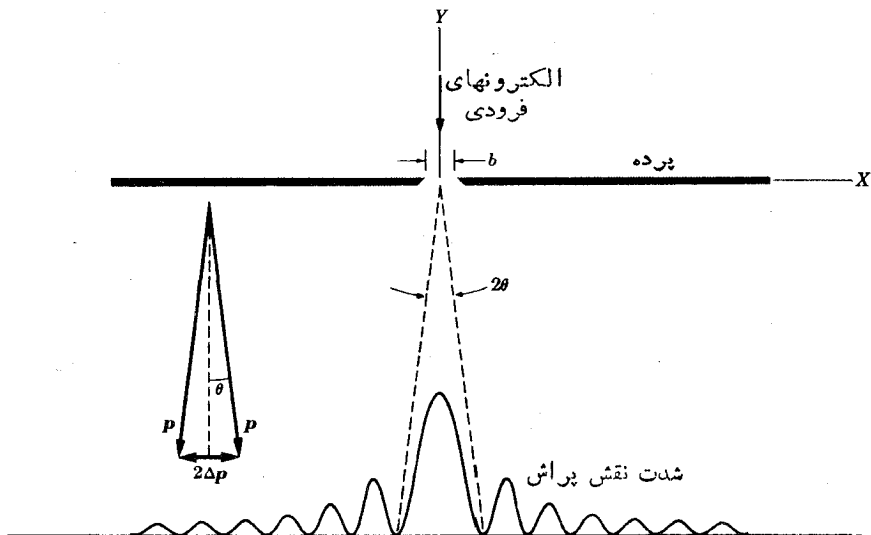
$$\Delta x \Delta p \geq h$$

نتیجه بیان شده به وسیله رابطه (۴۸.۱) به اصل عدم قطعیت هایز نبرگ معروف است. این اصل را می‌توانیم به صورت زیر بیان کنیم:

محال است که مکان و تکانه یک ذره را بتوان همزمان و با دقت کامل تعیین کرد.

اصل فوق یکی از حقایق اساسی طبیعت است، و تاحدی از روابط (۴۵.۱) بنیادینتر است، اگر چه ما در اینجا در جهت عکس عمل کردیم. برای بهتر فهمیدن اصل عدم قطعیت چند موضوع فیزیکی ممکن را در نظر می گیریم.

منظور از این گفته که مکان یک ذره  $x$ ، تکانه آن  $p$  است این است که ما ناچاریم همزمان مختصه  $x$  و تکانه  $p$  را اندازه گیری کنیم، زیرا بدون اندازه گیری، هیچگونه اطلاعاتی در اختیار نخواهیم داشت. اما اگر فرایند اندازه گیری را تحلیل کنیم، مشاهده می کنیم که در مقیاس اتمی نمی توانیم مکان یا تکانه را بی آنکه آشفتگی قابل توجهی در حرکت ذره به وجود آوریم اندازه گیری کنیم. برای نشان دادن این موضوع چند آزمایش ساده را در نظر می گیریم. به عنوان مثال فرض کنید می خواهیم مختصه  $x$  یک ذره را با مشاهده اینکه آیا ذره از میان سوراخ (به پهنای  $b$ ) یک پرده عبور می کند یا نمی کند، تعیین کنیم (شکل ۲۷.۱). دقتی که با آن مکان ذره مشخص می شود با اندازه سوراخ محدود می شود، یعنی  $\Delta x \sim b$ . اما این سوراخ در میدان وابسته به ذره آشفتگی ایجاد می کند و آن هم به نوبه خود تغییر متناظری در حرکت ذره به وجود می آورد که به وسیله نقشهای پراش حاصل دیده می شود. عدم قطعیت در تکانه موازی با محور  $X$  ذره به وسیله زاویه  $\theta$ ، متناظر با بیشینه مرکزی نقش پراش، تعیین می شود، زیرا این ذره پس از عبور از شکاف، با احتمال زیاد در داخل زاویه  $2\theta$  حرکت خواهد کرد. برطبق نظریه پراش حاصل از یک شکاف راستگوشه، زاویه  $\theta$  با رابطه  $\sin \theta = \lambda/b$  داده می شود. در این صورت



شکل ۲۷.۱ اندازه گیری مکان و تکانه ذره ای که از میان شکافی عبور می کند.

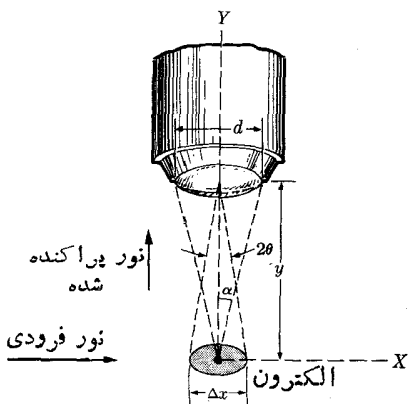
$$\Delta p \sim p \sin \theta = \left(\frac{h}{\lambda}\right) \left(\frac{\lambda}{b}\right) = \frac{h}{b}$$

یعنی  $\Delta p$  عدم قطعیت در تکانه موازی با محور  $X$  است. بنابراین،  $\Delta x \Delta p \sim h$  با رابطه (۲۸.۱) سازگار است. توجه کنید که برای اینکه بتوانیم مکان ذره را دقیقتر تعیین کنیم باید از یک شکاف بسیار باریک استفاده کنیم. اما شکاف خیلی باریک هم سبب ایجاد یک پیشینه مرکزی خیلی پهن در نقش پراش می شود که آن هم به معنی عدم قطعیت بزرگ در تعیین مؤلفه  $X$  تکانه ذره است. برعکس، برای کاهش عدم قطعیت در تعیین مؤلفه  $X$  تکانه، پیشینه مرکزی در نقش پراش باید خیلی باریک باشد. این کار مستلزم یک شکاف بسیار پهن است که به نوبه خود منجر به یک عدم قطعیت بزرگ در مختصه  $X$  ذره می شود.

آزمایش دیگری که نشان می دهد نمی توان ذره را بدون ایجاد آشفتگی در آن مشاهده کرد مربوط به حالتی است که در آن مکان الکترون را به کمک میکروسکوپ تعیین می کنند (شکل ۲۸.۱). برای مشاهده الکترون باید آن را با نوری به طول موج  $\lambda$  روشن کنیم. نوری که از میکروسکوپ عبور می کند نوری است که به وسیله الکترون هنگام مشاهده پراکنده می شود. تکانه فوتونهای پراکنده شده برابر است با  $h/\lambda =$  فوتون  $p$  و برای نفوذ به داخل عدسی شیئی، فوتونها باید در داخل مخروطی با زاویه  $\alpha$  حرکت کنند، به طوری که عدم قطعیت در تعیین مؤلفه  $X$  تکانه های آنها برابر با مقدار زیر باشد

$$\Delta p \sim p_{\text{فوتون}} \sin \alpha \sim \frac{hd}{2\lambda y}$$

زیرا  $\sin \alpha \approx d/2y$ . این مقدار با عدم قطعیت در مؤلفه  $X$  تکانه الکترون پس از پراکندگی



شکل ۲۸.۱ اندازه گیری مکان و تکانه ذره به کمک میکروسکوپ.

نور نیز برابر است، زیرا در فرایند پراکندگی، مقداری تکانه میان الکترون و فوتون مبادله می‌شود. از طرف دیگر، مکان دقیق الکترون به دلیل پراش نوری که از میان عدسی شیئی میکروسکوپ عبور می‌کند نامشخص است. بنابراین عدم قطعیت در مکان الکترون با قطر دیسک مرکزی موجود در نقش پراش برابر خواهد بود. این قطر با  $2y \sin \theta$  برابر است که در آن  $\lambda \sim \sin \theta$  از این رو

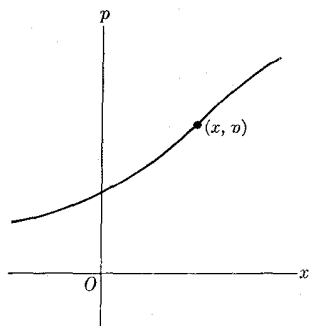
$$\Delta x \sim 2y \sin \theta \sim \frac{2y\lambda}{d}$$

باز هم نتیجه می‌شود که  $\Delta x \Delta p \sim h$ . توجه کنید که برای اینکه بتوانیم مکان الکترون را دقیقتر تعیین کنیم باید تابشی با طول موج خیلی کوتاه‌تر را به کار ببریم ولی چنین تابشی آشفتگی بزرگی را در تکانه ذره ایجاد می‌کند. برعکس، برای ایجاد آشفتگی کوچک در تکانه باید تابشی با طول موج خیلی بلند را به کار ببریم که به نوبه خود، عدم قطعیت بزرگی در مکان ایجاد می‌کند.

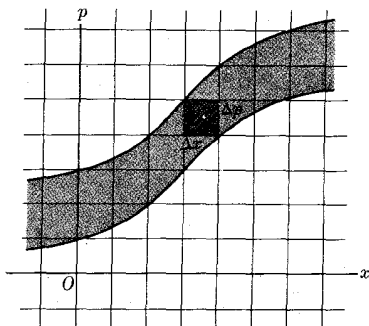
این دو مثال به وضوح نشان می‌دهند که اصل عدم قطعیت نتیجه مستقیم فرایند اندازه‌گیری است. اندازه‌گیری در سطح اتمی به طور اجتناب‌ناپذیری موجب آشفتگی قابل توجهی در سیستم می‌شود که ناشی از برهم‌کنش میان وسیله اندازه‌گیری و کمیت اندازه‌گیری‌شونده است. اصل عدم قطعیت حاکی از آن است که ما هرگز نمی‌توانیم مسیر یک ذره را با دقت مطلقی که در مکانیک کلاسیک امکان‌پذیر است تعریف کنیم. با وجود این، مکانیک کلاسیک در مورد اجسام بزرگ، نظیر اجسامی که مورد نظر یک مهندس است، صادق است زیرا به دلیل کوچکی ثابت پلانک،  $h$ ، عدم قطعیت آمده در رابطه (۴۸.۱) برای یک جسم ماکروسکوپی، خیلی کوچکتر از خطاهای تجربی در مقادیر اندازه‌گیری‌شده  $x$  و  $p$  است. اما، برای ذرات با ابعاد اتمی، مفهوم مسیر کاملاً بی‌معنی است زیرا نمی‌توان آن را با دقت تعریف کرد. بنا بر این تصویری متفاوت با آنچه در فیزیک کلاسیک مطرح است، برای حرکت لازم است. به همین دلیل کاربرد مفاهیمی چون سرعت، شتاب، و نیرو در مکانیک کوانتومی محدود خواهد بود. از طرف دیگر، مفهوم انرژی بیشتر اهمیت پیدا می‌کند زیرا همان‌طور که در فصل بعد خواهیم دید، بیشتر به «حالت» سیستم مربوط می‌شود تا به «مسیر» آن.

برای توصیف حالت دینامیکی ذره به طریق نموداری (یعنی توصیف مکان و تکانه آن در هر زمان)، از یک فضای نوعی که به فضای فاذا معروف است استفاده می‌کنیم. در حالت مربوط به حرکت یک بعدی، فضای فاز دو بعد دارد که در آن طول با مختصه مکانی  $x$  و عرض با تکانه  $p$  متناظرند (شکل ۲۹.۱). در مکانیک کلاسیک حالت یک ذره در فضای فاز با نقطه‌ای به مختصات  $(p, x)$  نمایش داده می‌شود، زیرا در مکانیک کلاسیک مکان و تکانه را می‌توان

۱. از ضرب ۱۲۲ که در نظریه پراش به وسیله روزنه دایره‌ای در موج تخت ظاهر می‌شود، صفت نظر کرده‌ایم.



(الف)



(ب)

شکل ۲۹.۱ مسیر کلاسیکی و کوانتومی یک ذره در فضای فاز.

همزمان با دقت تعیین کرد. هنگامی که ذره در حال حرکت است این نقطه نوعی، خطی را در فضای فاز به دست می‌دهد [شکل ۲۹.۱ (الف)]. در مکانیک کوانتومی تصویر کاملاً متفاوت است. هر گاه فضای فاز را به سلولهای کوچک به اضلاع  $\Delta x$  و  $\Delta p$  تقسیم کنیم به طوری که در داخل یکی از این سلولها قرار دارد. با گذشت زمان، مسیر این نقطه یک سطح نواری را رسم می‌کند که همان طور که در شکل ۲۹.۱ (ب) دیده می‌شود از به هم پیوستن یک سری سلولهای کوچک به دست می‌آید.

### ۱۳.۱ رابطه عدم قطعیت برای زمان و انرژی

علاوه بر رابطه عدم قطعیت ( $\Delta x \Delta p \sim h$ ) موجود میان مختصات و تکانه یک ذره در حال حرکت، رابطه عدم قطعیت دیگری نیز میان زمان و انرژی وجود دارد. فرض کنید می‌خواهیم نه تنها انرژی ذره بلکه زمانی را نیز که در آن ذره دارای چنین انرژی است اندازه‌گیری کنیم. اگر  $\Delta E$  و  $\Delta t$  عدم قطعیت در مقادیر این کمیتها باشند رابطه زیر برقرار است

$$\Delta t \Delta E \sim h \quad (۲۹.۱)$$

این رابطه را می‌توانیم به طریق زیر توضیح دهیم. هر گاه بخواهیم زمانی را که در آن ذره از نقطه مشخصی عبور می‌کند، تعریف کنیم باید ذره را به وسیله یک تپ یا یک بسته موج که دارای دوام بسیار کوتاه  $\Delta t$  است نمایش دهیم. اما برای ایجاد چنین تپی باید میدانهای با بسامد متفاوتی را برهم نهمیم که فقط در گستره  $\Delta \omega$  بسامد، حول بسامد  $\omega$ ، دامنه قابل توجهی دارند و طبق نظریه تحلیل فوریه در رابطه زیر صادق می‌کنند

$$\Delta t \Delta \omega \sim 2\pi$$

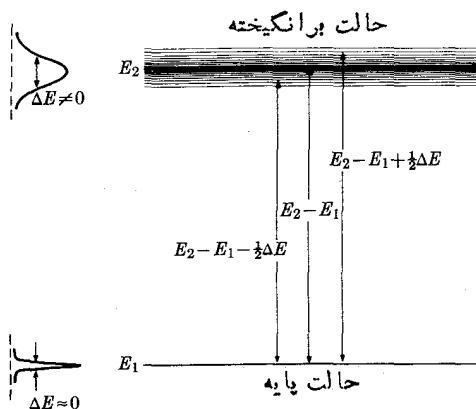
با ضرب این رابطه در مقدار  $\hbar$  و با یادآوری اینکه  $E = \hbar \omega$  و  $2\pi \hbar = h$  رابطه (۴۹.۱) به دست می آید. رابطه (۴۹.۱) مطلوبترین رابطه میان عدم قطعیت‌های  $\Delta E$  و  $\Delta t$  است. اما در بیشتر موارد،  $t$  و  $E$  با دقت کمتری معلوم اند، به گونه‌ای که به جای رابطه (۴۹.۱) باید از رابطه کلیتر زیر استفاده کنیم

$$\Delta t \Delta E \gtrsim h$$

رابطه عدم قطعیت (۴۹.۱) ایجاب می کند که در مورد مفهوم ویژه حالتها تجدید نظر کنیم. الکترونی را در نظر می گیریم که در ویژه حالت برانگیخته یک اتم قرار دارد. این الکترون پس از مدتی به ویژه حالت دیگری که انرژی آن کمتر است گذار تابشی انجام می دهد. اما ما هیچ وسیله‌ای در اختیار نداریم تا بر اساس آن با قطعیت پیشگویی کنیم که الکترون چه مدت زمانی قبل از گذار در ویژه حالت باقی می ماند. همان طور که در فصل بعد خواهیم دید، فقط می توانیم در باره احتمال در واحد زمان اینکه الکترون به حالت انرژی پایینتری برود صحبت کنیم. بنا بر این، میانگین مدت زمانی که الکترون در ویژه حالت باقی می ماند، یعنی طول عمر حالت که با احتمال گذار یاد شده در بالا نسبت عکس دارد، در محدوده عدم قطعیت  $\Delta t$  مشخص می شود. بنا بر این، انرژی ویژه حالت الکترون دقیقاً معلوم نیست بلکه یک عدم قطعیت به اندازه  $\Delta E$  دارد.  $\Delta E$  از رابطه (۴۹.۱) به دست می آید. غالباً  $\Delta E$  به عنوان پهنای انرژی حالتی در نظر گرفته می شود که انرژی آن با احتمال زیاد میان  $E - \Delta E/2$  و  $E + \Delta E/2$  قرار دارد (شکل ۳۰.۱). می توان فرض کرد که  $\Delta t$  در حدود مرتبه بزرگی طول عمر حالت برانگیخته است. از این رو، هر چه طول عمر یک حالت برانگیخته کوتاهتر باشد، عدم قطعیت در انرژی این حالت بزرگتر خواهد بود. برای حالت پایه که طول عمر آن بینهایت است، زیرا سیستمی که در حالت پایه قرار دارد هیچگونه گذاری به ویژه حالت با انرژی کمتر انجام نمی دهد، خواهیم داشت  $\Delta t \sim \infty$ . در نتیجه  $\Delta E = 0$  یعنی، انرژی حالت پایه را می توان دقیقاً تعیین کرد.

به دلیل پهنای انرژی ویژه حالتها انرژی آزاد شده یا جذب شده در یک گذار نمی تواند کاملاً مشخص و معین باشد. از این رو، در گذار میان حالت‌های انرژی  $E_1$  و  $E_2$ ، فوتونهای گسیل شده یا جذب شده در گستره انرژی  $E_2 - E_1 \pm \Delta E/2$  قرار دارند که در آن  $\Delta E$  پهنای انرژی کل در هر دو حالت است.

عامل دیگر پهن شدن بیشتر انرژی ویژه حالتها ناشی از انتقال الکترومغناطیسی دوپلر است. اتمهای ماده در حال حرکت اند و از نظر یک ناظر، تعدادی از آنها به طرف جلو و تعدادی به طرف عقب حرکت می کنند. در نتیجه، بسامد مشاهده شده مربوط به تابش گسیل شده به وسیله اتم بر حسب راستای حرکت نسبی تغییر می کند. در اکثر گذارهای اتمی و مولکولی، پهن شدن ناشی از اثر دوپلر بسیار بزرگتر از پهن شدن ناشی از اصل عدم



شکل ۳۰.۱ پهنای ترازهای انرژی.

قطعیت است ولی برای گذارهای هسته‌ای معمولاً کوچکتر است.

مثال ۱۰.۱ احتمال جذب تشدید در گذارهای اتمی و هسته‌ای در نتیجه پهنای انرژی ویژه حالتها را بررسی کنید.

حل: در مثال ۶.۱ دیدیم که در گذار میان حالت‌های انرژی  $E_1$  و  $E_2$ ، فوتون گسیل شده یا جذب شده دارای مقدار انرژی است که به ترتیب به اندازه  $(E_2 - E_1)^2 / 2Mc^2$  کوچکتر یا بزرگتر است از  $E_2 - E_1$ . بنابراین، اگر پهنای انرژی  $\Delta E$  بزرگتر از  $(E_2 - E_1)^2 / 2Mc^2$  باشد فوتونهای گسیل شده توسط یک سیستم می‌توانند توسط سیستم دیگری از همان نوع جذب شوند. اما اگر  $\Delta E$  کوچکتر باشد جذب ازوماً رخ نمی‌دهد. حالت اول معمولاً در سیستمهای اتمی و مولکولی و حالت دوم بیشتر در هسته‌ها دیده می‌شود. به عنوان مثال، در مورد گذار اتمی  $486 \text{ eV}$  در جیوه (بخش ۸.۱)، طول عمر حالت برانگیخته جیوه در حدود  $10^{-8}$  ثانیه است. انرژی سکون اتم جیوه که جرم اتمی آن در حدود  $200 \text{ amu}$  یا  $3.34 \times 10^{-25} \text{ kg}$  است با  $1.86 \times 10^{11} \text{ eV} = Mc^2$  برابر است. بنابراین، جمله‌ای که برای پس‌زنی اتمی با  $486 \text{ eV}$  در نظر گرفته می‌شود به صورت زیر است

$$\frac{(E_2 - E_1)^2}{2Mc^2} = 7.15 \times 10^{-11} \text{ eV}$$

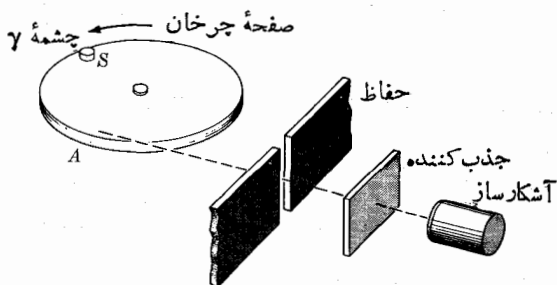
عدم قطعیت در انرژی تراز برانگیخته اتم جیوه، که طول عمر آن  $\Delta t \sim 10^{-8} \text{ s}$  است، برابر است با  $\Delta E \sim h/\Delta t = 4.14 \times 10^{-7} \text{ eV}$ . این مقدار با ضریبی در حدود  $10^4$



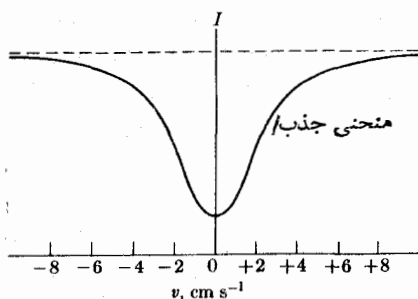
از جمله تصحیح بزرگتر است. بنابراین با این مثال نوعی می توان نتیجه گرفت که اثرهای پس زنی ناشی از پایستگی تکانه در گذارهای اتمی و مولکولی مانع جذب تشدیدی نخواهند شد. اینک به عنوان یک مثال از گذار هسته‌ای، حالت مربوط به پرتو گامای ( $1.33 \text{ MeV}$ ) گسیل شده از  ${}^{60}\text{Ni}$  را در نظر می گیریم. انرژی سکون اتم نیکل که جرم اتمی آن در حدود  $60 \text{ amu}$  یا  $1 \times 10^{-25} \text{ kg}$  است، برابر است با  $5.961 \times 10^8 \text{ eV} = Mc^2$ . ضمناً داریم  $E_\gamma - E_1 = 1.33 \times 10^6 \text{ eV}$ . بنابراین جمله تصحیح که برای پس زنی هسته‌ای در نظر گرفته می شود برابر است با  $(E_\gamma - E_1)^2 / 2Mc^2 = 1.58 \text{ eV}$  که (در مقایسه با  $E_\gamma - E_1$ ) نسبتاً بزرگتر از حالت مربوط به اتم است. طول عمر حالت برانگیخته هسته‌ای در حدود  $\Delta t \sim 10^{-14} \text{ s}$  است. از این رو، عدم قطعیت در انرژی تراز برانگیخته برابر است با  $\Delta E \sim h / \Delta t = 0.5414 \text{ eV}$  و با ضریبی در حدود ۳۸ از جمله تصحیح کوچکتر است. بنابراین، اثرهای پس زنی ناشی از پایستگی تکانه در گذارهای هسته‌ای بسیار مهم اند. این اثرها در بسیاری موارد سبب می شوند که هسته نتواند فوتون گامای گسیل شده از هسته مشابه دیگر را جذب کند.

### مثال ۱۱.۱ درباره اثر موسباوئر بحث کنید.

حل: در مثال قبل دیدیم که در گذارهای هسته‌ای، عدم قطعیت انرژی ناشی از عمر محدود حالت هسته‌ای برانگیخته بسیار کوچکتر از انرژی پس زنی هسته است و بنابراین، برای فوتون پرتو گامای گسیل شده از هسته غیر ممکن است که توسط هسته مشابه دیگری جذب شود. اما در شرایط خاص می توان اثرهای پس زنی را با یک ضریب بزرگ کاهش داد. این کار وقتی شدنی است که هسته‌های گسیل کننده و جذب کننده در یک شبکه بلوری مقید باشند و شرایط طوری باشد که به جای پس زنی یک تک اتم، شبکه بلوری پس زده شود. در این حالت جرم آنقدر زیاد است که انرژی پس زنی در مقایسه با  $E_\gamma - E_1$  بسیار کوچک خواهد بود. از این رو، ممکن است جذب تشدید رخ دهد. این فرایند که در سال ۱۹۵۸ برای اولین بار توسط موسباوئر فیزیکدان آلمانی مشاهده شد، به اثر موسباوئر معروف است. اثر موسباوئر برای تحقیق در پاره‌ای خواص مهم فیزیکی به کار می رود. به عنوان مثال، به کمک آرایش شکل ۳۱.۱ می توان پهنای طبیعی انرژی  $\Delta E$  یک حالت هسته‌ای را تعیین کرد. چشمه پرتو گاما در لبه یک صفحه چرخان که سرعت آن قابل تنظیم است قرار دارد. هنگامی که چشمه در وضع  $A$  است، تابش آن از حفره واقع در حفاظ عبور می کند و به جذب کننده که اتمهای آن از نوع اتمهای ماده چشمه است می رسد. گسیل کننده و جذب کننده هر دو در داخل بلورهایی قرار داده شده اند تا اثرهای پس زنی تا حدود خیلی زیادی حذف شود. هنگامی که گسیل کننده نسبت به جذب کننده در حال سکون است، جذب تشدید مشاهده می شود. اما اگر صفحه چرخان به حرکت در آید، جذب تشدید غیر ممکن خواهد بود زیرا در نتیجه حرکت چشمه نسبت به جذب کننده، انتقال دوپلر در بسامد پرتو گامای گسیل شده ظاهر می شود.



شکل ۳۱.۱ آرایش تجربی برای اندازه گیری پهنای یک تراز انرژی.



شکل ۳۲.۱ جریان آشکارساز بر حسب تابعی از سرعت صفحه چرخان.

شکل ۳۲.۱ شدت تابش انتقال یافته را نشان می‌دهد. توجه کنید که بیشینه در جذب در سرعت نسبی صفر رخ می‌دهد و هنگامی که سرعت نسبی در هر یک از دو راستا افزایش یابد، شدت جذب کاهش می‌یابد. برای سرعت نسبی در حدود  $4 \text{ cm s}^{-1}$ ، که با تغییر بسامد و پلر در حدود  $\Delta E \sim 1.33 \times 10^{-10} E$  یا تغییر انرژی  $\Delta v \sim v(v/c) = 1.33 \times 10^{-10} v$  متناظر است، شدت جذب عملاً قابل چشمپوشی است. این نشان می‌دهد که پهنای انرژی حالت در حدود نصف انرژی بیشینه است.

## مسائل

۱۰۱ هر گاه الکترونی تحت اختلاف پتانسیل یک ولت شتاب بگیرد، انرژی جنبشی آن یک الکترون ولت افزایش پیدا می‌کند. (الف) نشان دهید که  $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ . (ب) هر گاه الکترون تحت اختلاف پتانسیلهای  $10 \text{ V}$ ،  $50 \text{ kV}$ ، و  $1 \text{ MV}$  شتاب بگیرد، افزایش انرژی آن چقدر است؟ (ج) با فرض اینکه الکترون از حال سکون شروع به حرکت کند،

سرعت نهایی آن را حساب کنید.

۲۰۱ يك چشمه گازی، نوری به طول موج  $5 \times 10^{-7} \text{m}$  را گسیل می کند. با فرض اینکه هر مولکول به صورت نوسانگری با بار  $e$  و دامنه  $10^{-10} \text{m}$  رفتار کند، (الف) میانگین آهنگ تابش انرژی به ازای مولکول را محاسبه کنید. (ب) هر گاه آهنگ کل تابش انرژی چشمه  $1 \text{W}$  باشد، چه تعداد مولکول به طور همزمان در حال گسیل اند؟

۳۰۱ مقدار  $(dE/dt)_{\text{ave}}$  را که از معادله (۵.۱) به دست می آید، برای پروتون موجود در هسته برآورد کنید. فرض می کنیم که برای پرتوهای گامای با انرژی کم،  $z$  در حدود  $10^{-15} \text{m}$  و  $\omega$  نیز در حدود  $5 \times 10^{20} \text{Hz}$  است.

۴۰۱ به کمک معادلات ماکسول می توان نشان داد که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در يك موج الکترومغناطیسی تخت با رابطه  $\mathcal{E} = c\mathcal{B}$  به هم مربوط می شوند. نشان دهید که چگالی انرژی در موج را می توان به صورت  $E = \epsilon_0 \mathcal{E}^2$  نوشت.  $I$  شدت موج مساوی با مقدار انرژی است که در واحد زمان از سطح مقطع واحد عمود برداستای انتشار شارش می یابد. نشان دهید که  $I = c\epsilon_0 \mathcal{E}^2$ .

۵۰۱ چگالی تکانه در يك موج الکترومغناطیسی را می توان به صورت  $\mathbf{p} = \epsilon_0 \mathcal{E} \times \mathcal{B}$  نوشت. نشان دهید که این عبارت دارای یکی یکی تکانه بریکای حجم است. همچنین نشان دهید که برای موج تخت،  $E = pc$  است. [دانهایی: رابطه میان  $\mathcal{E}$  و  $\mathcal{B}$  در يك موج تخت را در نظر بگیرید و از عبارتی که برای  $E$  در مسئله ۴۰۱ داده شده است، استفاده کنید.]

۶۰۱ تابش الکترومغناطیسی حاصل از خورشید با آهنگ  $1.4 \times 10^2 \text{Wm}^{-2}$  بر سطح زمین تابیده می شود. با فرض اینکه بتوان این تابش را به صورت يك موج تخت در نظر گرفت، (الف) بسزرگی دامنه های میدان الکتریکی و مغناطیسی این موج و چگالی تکانه آن را برآورد کنید. (ب) هر گاه این تکانه به وسیله سطح زمین جذب شود مقدار فشار تابشی وارد بر زمین را محاسبه کنید.

۷۰۱ دامنه میدان الکتریکی امواج رادیویی که يك دستگاه رادیو دریافت می کند مساوی با  $1 \text{Vm}^{-1}$  است. با فرض اینکه بتوان موج را تخت در نظر گرفت، (الف) دامنه میدان مغناطیسی، (ب) میانگین شدت موج، (ج) میانگین چگالی انرژی، و (د) میانگین چگالی تکانه را محاسبه کنید. (ه) با فرض اینکه دستگاه رادیو در فاصله يك کیلومتری از ایستگاه فرستنده قرار دارد و ایستگاه نیز انرژی را به صورت همسانگرد تابش می کند، قدرت ایستگاه را تعیین کنید. [دانهایی: به خاطر داشته باشید که اگر میدان الکتریکی با دامنه  $\mathcal{E}$  به طور هماهنگ تغییر کند، میانگین زمانی مجذور میدان برابر است با  $\mathcal{E}^2/2$ .]

۸۰۱ نشان دهید که شدت تابش حاصل از سوراخ کوچک موجود در دیواره های يك کاواک در تعادل حرارتی با تابش (یعنی، جسم سیاه)، به وسیله رابطه  $I = cE/4$  داده می شود که

در آن،  $E$  چگالی انرژی تابش است. همچنین نشان دهید که ثابت استفان - بولتزمن برابر است با  $\sigma = ca/4$  که در آن،  $a = 7.56 \times 10^{-16} \text{ Jm}^{-2}\text{K}^{-4}$  (مثال ۴.۱).

۹.۱ شکل مجانبی قانون تابش پلانک را برای دو حالت زیر به دست آورید. (الف) بسامد بسیار بالا، (ب) بسامد بسیار پایین. رابطه اول به قانون تابش وین و رابطه دوم به قانون تابش دیلی - جینز معروف است.

۱۰.۱ طول موج متناظر با قله طیف تابش جسم سیاه در دمای  $300 \text{ K}$  (دمای معمولی) چقدر است؟ چگالی انرژی تکفام در این طول موج را تعیین کنید.

۱۱.۱ با فرض اینکه خورشید یک جسم سیاه کروی به شعاع  $7 \times 10^8 \text{ m}$  است، دما و چگالی انرژی تابش موجود در آن را محاسبه کنید. شدت تابش خورشید در سطح زمین (که در فاصله  $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$  از خورشید قرار دارد) مساوی با  $1.4 \times 10^2 \text{ Wm}^{-2}$  است. آیا این برآورد واقع بینانه است؟ در این باره توضیح دهید.

۱۲.۱ تابع کار فوتوالکتریک پتاسیوم برابر با  $2.0 \text{ eV}$  است. با فرض اینکه نوری به طول موج  $3.6 \times 10^{-7} \text{ m}$  به آن تابیده شود، (الف) پتانسیل توقف فوتوالکترونها را به دست آورید. (ب) انرژی جنبشی و سرعت تندترین الکترونها را تعیین کنید.

۱۳.۱ یک باریکه نور تکفام بخواهد به طول موج  $4.0 \times 10^{-7} \text{ m}$  به فلزی که تابع کار آن  $2.0 \text{ eV}$  است می تابد. شدت این باریکه برابر با  $3.0 \times 10^{-9} \text{ Wm}^{-2}$  است، مطلوب است: (الف) تعداد الکترونها که در یک ثانیه از سطح یک متر مربع گسیل می شوند. (ب) مقدار انرژی که در یک ثانیه در یک متر مربع جذب می شود. (ج) انرژی جنبشی فوتوالکترونها.

۱۴.۱ انرژی بستگی یک الکترون داخلی در سرب برابر است با  $9 \times 10^3 \text{ eV}$ . هنگامی که سرب تحت تابش الکترومغناطیسی مشخصی قرار می گیرد و فوتوالکترونها به میدان مغناطیسی  $10^{-2} \text{ T}$  داخل می شوند دایره ای به شعاع  $0.25 \text{ m}$  می پیمایند. (الف) تکانه و انرژی الکترونها و (ب) انرژی فوتونها را محاسبه کنید.

۱۵.۱ هنگامی که سطح فلز مشخصی تحت تابش نوری با طول موجهای مختلف قرار می گیرد، پتانسیلهای توقف فوتوالکترونها به صورتی که در جدول زیر آمده است اندازه گیری می شوند.

ولت $V$	$\lambda (\times 10^{-7} \text{ m})$	ولت $V$	$\lambda (\times 10^{-7} \text{ m})$
۰.۶۲	۴.۹۲	۱.۴۸	۳.۶۶
۰.۳۶	۵.۴۶	۱.۱۵	۲.۰۵
۰.۲۴	۵.۷۹	۰.۹۳	۲.۳۶

منحنی تغییرات پتانسیل توقف (روی محور  $y$ ) را بر حسب بسامد نسوز (روی محور  $x$ ) رسم کنید و از روی آن: (الف) بسامد آستانه، (ب) تابع کار فوتوالکتریک فلز، و (ج) نسبت  $h/e$  را تعیین کنید.

۱۶۰۱ فوتونی با انرژی  $10^4 \text{ eV}$  با الکترون آزاد ساکنی برخورد می‌کند و آن را تحت زاویه  $60^\circ$  پراکنده می‌کند، مطلوب است (الف) تغییرات انرژی، بسامد، و طول موج فوتون و (ب) انرژی جنبشی، تکانه، و راستای الکترون پراکنده شده.

۱۷۰۱ تابشی به طول موج  $10^{-10} \text{ m}$  (یک آنگستروم) پراکندگی کامپتون را در یک نمونه کربن متحمل می‌شود. هر گاه تابش پراکنده شده در راستای عمود بر راستای فرودی مشاهده شود، مطلوب است (الف) طول موج تابش پراکنده شده و (ب) انرژی جنبشی و راستای حرکت الکترونهای پراکنده شده.

۱۸۰۱ با توجه به مسئله قبل، هر گاه الکترونها تحت زاویه  $60^\circ$  درجه نسبت به تابش فرودی پس زده شوند، مطلوب است (الف) طول موج و راستای تابش پراکنده شده و (ب) انرژی جنبشی الکترون.

۱۹۰۱ انرژی و طول موج فوتونی را محاسبه کنید که بتواند بیشینه انرژی  $60 \text{ keV}$  را به یک الکترون آزاد منتقل کند.

۲۰۰۱ یک باریکه پرتو ایکس تکفام به طول موج  $10^{-11} \text{ m}$  به یک ورقه نازک فلزی برخورد می‌کند. تابش پراکنده شده یکبار تحت زاویه  $90^\circ$  و بار دیگر تحت زاویه  $60^\circ$  مشاهده می‌شود. در هر یک از حالات فوق دو بسامد عمده‌ای را که آشکار خواهند شد تعیین کنید.

۲۱۰۱ نشان دهید که در پراکندگی کامپتون، هنگامی که الکترون آزاد در راستایی پراکنده شود که بسا فوتون فرودی زاویه  $\phi$  تشکیل می‌دهد، انرژی جنبشی الکترون از رابطه زیر به دست می‌آید

$$E_k = \frac{h\nu(2\alpha \cos^2 \phi)}{[(1+\alpha)^2 - \alpha^2 \cos^2 \phi]}$$

که در آن  $\alpha = h\nu/m_e c^2$ .

۲۲۰۱ نشان دهید که در پراکندگی کامپتون، رابطه میان زوایایی که راستاهای فوتون پراکنده شده و الکترون پس زدن را تعریف می‌کند به صورت  $\cot \phi = (1+\alpha) \tan \theta / 2$  است، که در آن  $\alpha = h\nu/m_e c^2$ .

۲۳۰۱ شدت یک باریکه تابش الکترومغناطیسی تکفام برابر است با  $1 \text{ W m}^{-2}$ . میانگین تعداد فوتونهای موجود در یک متر مکعب را برای دو حالت زیر به دست آورید: (الف)

امواج رادیویی با بسامد  $1\text{ kHz}$  و (ب) پرتوهای گامای با انرژی  $10\text{ MeV}$ .

۲۴۰۱ کمیته شدت نوری را که با چشم می توان مشاهده کرد در حدود  $10^{-10}\text{ Wm}^{-2}$  است. با این شدت چه تعداد فوتون (به طول موج  $10^{-7}\text{ m}$ ) در مدت یک ثانیه به مردمک چشم وارد می شود؟ سطح مردمک را مساوی با  $10^{-4}\text{ m}^2$  در  $5 \times 10^{-4}$  بگیرید.

۲۵۰۱ بسامد و طول موج فوتونهایی را تعیین کنید که به وسیله سیستمهای زیر جذب می شوند: (الف) هسته ای که  $10^3\text{ eV}$  انرژی جذب می نماید، (ب) اتمی که  $1\text{ eV}$  انرژی جذب می کند، و (ج) مولکولی که  $10^{-2}\text{ eV}$  انرژی جذب می نماید.

۲۶۰۱ اتمهای سدیم تابش الکترومغناطیسی  $10^{-7}\text{ m}$  در  $5.99 \times 10^9$  جذب یا گسیل می کنند که متناظر با ناحیه زرد طیف مرئی است. انرژی فوتونهای جذب شده یا گسیل شده را تعیین کنید.

۲۷۰۱ (الف) بلندترین طول موجی که می تواند تابش تشدید را در جیوه ایجاد کند برابر  $10^{-7}\text{ m}$  در  $2.536 \times 10^8$  است. اولین پتانسیل برانگیختگی جیوه چقدر است؟ (ب) طیف گسیلی جیوه شامل خطوط یا شدت زیاد در طول موجهای  $1850\text{ \AA}$ ،  $2536\text{ \AA}$ ،  $3132\text{ \AA}$ ،  $5460\text{ \AA}$ ، و  $5780\text{ \AA}$  است. ضمناً خطوط با شدت کمی هم در طول موجهای  $1402\text{ \AA}$ ، و  $12072\text{ \AA}$  وجود دارند. انرژی این گذارها را محاسبه و یک نمودار تراز انرژی مشابه با شکل ۱۵۰۱ (ب) را رسم کنید. در صورتی که می دانیم خط  $2536\text{ \AA}$  وابسته به برانگیختگی از حالت پایه به اولین حالت برانگیخته است.

۲۸۰۱ خطوط D سدیم (مسئله ۲۶۰۱) هنگامی ظاهر می شوند که سدیم به وسیله الکترونهایی که تحت اختلاف پتانسیل  $2.11$  ولت شتاب گرفته اند بمباران می شود. مقدار  $h/e$  را محاسبه کنید.

۲۹۰۱ کمیته انرژی لازم برای جدا کردن اتمهای کربن و اکسیژنی که مولکول مونوکسید کربن را تشکیل می دهند، برابر است با  $11\text{ eV}$ . کمیته بسامد و بیشینه طول موج تابش الکترومغناطیسی را که برای تفکیک مولکول لازم است محاسبه کنید.

۳۰۰۱ فوتونی با انرژی  $10^4\text{ eV}$  به وسیله یک اتم هیدروژن در حال سکون جذب و در نتیجه آن، الکترون در همان راستای تابش فرودی پرتاب می شود. با چشمپوشی از انرژی لازم برای جدا کردن الکترون (در حدود  $13.6\text{ eV}$ )، تکانه و انرژی الکترون و فوتون را به دست آورید.

۳۱۰۱ هرگاه الکترونی که تحت اختلاف پتانسیل  $40\text{ kV}$  شتاب گرفته است، به طور ناگهانی در آنتی کاتود یک لامپ پرتو ایکس متوقف شود، کوتاهترین طول موج تابش ترمزی مشاهده شده چقدر است؟ با توجه به شکل ۱۳۰۱، ناحیه ای از طیف الکترومغناطیسی را تعیین کنید که این طول موج را دربر می گیرد.

۳۲۰۱ در نواحی بالاتر جو، اکسیژن مولکولی به وسیله فوتونهای آمده از خورشید به دو اتم اکسیژن تفکیک می شود. بیشینه طول موج فوتونی که این فرایند را موجب می شود مساوی با  $m \cdot 10^{-7} \times 1.75$  است. انرژی بستگی  $O_2$  را تعیین کنید.

۳۳۰۱ معادلات (۴۰۰۱) و (۴۱۰۱) را با به حساب آوردن اثر پس زنی یون تصحیح کنید. با به کار بردن معادلات تصحیح شده، کمینه انرژی که یک فوتون باید داشته باشد تا اتم هیدروژن را یونیده کند به دست آورید.

۳۴۰۱ نشان دهید که در فرایند باز ترکیب، محال است که واکنش  $A^+ + e \rightarrow A$  بدون نقض پایستگی انرژی یا تکانه به وقوع بپیوندد مگر اینکه ذره سوم نیز حضور داشته باشد.

۳۵۰۱ ثابت کنید که در معادله (۴۲۰۱)، هر گاه ماده ای (حداقل یک هسته) حضور نداشته باشد، پایستگی تکانه و انرژی غیر ممکن خواهد بود.

۳۶۰۱ فوتونی با انرژی  $2.99 \text{ MeV}$  هنگام عبور از میان سرب یک زوج الکترون-پوزیترون می آفریند. ذرات ایجاد شده انرژی جنبشی یکسان دارند. تکانه، انرژی، و سرعت هر ذره را محاسبه کنید. از انرژی پس زنی اتم سرب چشمپوشی کنید.

۳۷۰۱ هر گاه فوتونی با انرژی  $1.30 \text{ MeV}$  از میان ماده ای عبور کند، بالاترین تعداد ممکن پوزیترونهايي که می تواند بیا فریند چقدر است؟

۳۸۰۱ پرتوهای گامای با انرژیهای  $0.05$ ،  $0.03$ ، و  $1 \text{ MeV}$ ، ولی بسا شدتهای مساوی، روی یک جذب کننده سربی فرودمی آیند. ضرایب جذب خطی برای این انرژیها به ترتیب عبارتند از  $8 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$ ،  $5 \times 10^5 \text{ m}^{-1}$ ، و  $0.78 \text{ m}^{-1}$  (الف) مطلوب است محاسبه ضخامت سرب مورد نیاز برای کاهش شدت هر باریکه به یک دهم مقدار اولیه و (ب) در عمق ۵ میلیمتری، نسبت شدت کل (هر سه انرژی) به شدت فرودی کل چقدر است؟

۳۹۰۱ ضخامت نیم مقدار  $x_{1/2}$  ضخامتی است که یک جذب کننده باید داشته باشد تا شدت باریکه فرودی پرتوهای ایکس را به نصف مقدار اولیه کاهش دهد. نشان دهید  $x_{1/2} = \ln 2 / \Sigma$ . ضخامت نیم مقدار سرب را برای پرتوهای ایکس با انرژیهای  $0.05$ ،  $0.01$ ، و  $1 \text{ MeV}$  محاسبه کنید. [داهنمایی: برای ضرایب جذب خطی به شکل ۱۹۰۱ رجوع کنید.]

۴۰۰۱ پرتوهای ایکس از میان ورقه های آلومینیومی که ضخامت هر یک  $4 \times 10^{-3} \text{ m}$  است عبور می کنند. آهنگ شمارش شمارگر گایگر بر حسب تسابعی از تعداد ورقه ها به صورت  $8 \times 10^3$ ،  $4.7 \times 10^3$ ،  $2.8 \times 10^3$ ،  $1.65 \times 10^3$ ، و  $9.7 \times 10^2$  شمارش در دقیقه به ترتیب برای ۵، ۱، ۲، ۳، و ۴ ورقه است. ضریب جذب خطی آلومینیوم را محاسبه و از روی شکل ۱۹۰۱ انرژی پرتوهای ایکس را برآورد کنید.

۴۱۰۱ چه تعداد لایه نیم مقدار از يك ماده مورد نیاز است تا شدت باریکه پرتو ایکس را  $1/16 \times 10^8 / 1/2000$  مقدار فرودی اولیه کاهش دهد؟

۴۲۰۱ طول موج دوبروی الکترونی را هنگامی که انرژی آن برابر با  $1eV$ ،  $100eV$ ، و  $1000eV$  است محاسبه کنید. چه طول موجهایی به طور قابل توجه در بلور نیکل پراشیده می شوند؟ (در بلور نیکل، فاصله جدایی اتم در حدود  $2.15 \text{ \AA}$  است.) انرژی الکترونی را محاسبه کنید که تحت زاویه  $30^\circ$  پراش براگ را متحمل می شوند.

۴۳۰۱ پرتوهای ایکس تکفام ( $\lambda = 1.2 \text{ \AA}$ ) روی نمونه ای از پودر KCl فرود می آیند. يك صفحه عکاسی مسطح در فاصله يك متری از پودر عمود بر باریکه فرودی قرار دارد. شعاعهای براگ مرتبه اول و مرتبه دوم را تعیین کنید. فاصله جدایی صفحات براگ مساوی با  $3.14 \text{ \AA}$  است.

۴۴۰۱ باریکه باریکی از نوترونهاي گرمایی حاصل از يك رآکتور هسته ای بر روی بلوری که فاصله جدایی صفحات آن  $1.60 \text{ \AA}$  است فرود می آید. زاویه براگ را طوری تعیین کنید که نوترونهاي دوالکترون ولتی به شدت پراشیده شوند.

۴۵۰۱ نشان دهید که نسبت طول موج دوبروی هر ذره به طول موج کامپتون همان ذره برابر است با  $1 - \sqrt{(c/v)^2}$

۴۶۰۱ ثابت کنید که حتی تحت شرایط نسبیتی، سرعت گروه يك بسته موج با سرعت ذره برابر است. ضمناً نشان دهید که سرعت فاز میدان ماده در سرعتهای نسبیتی مساوی با  $c^2/v$  است.

۴۷۰۱ فرض کنید که باریکه ای از الکترونهاي به طول موج دوبروی مساوی با  $5-10 \text{ m}$  از میان شکافی به پهنای  $10^{-4} \text{ m}$  عبور می کنند. تعیین کنید که تحت اثر پراش شکاف، چه پاشیدگی زاویه ای ایجاد می شود؟

۴۸۰۱ هر کاوه ای باید همواره از شیه مورد مطالعه کوچکتر باشد (حداقل با يك ضریب ده). در غیر این صورت يك آشفتنگی قابل توجه در مکان و سرعت شیه ایجاد می شود. هر گاه (الف) از فوتون، (ب) از الکترون، و (ج) از نوترون برای کاویدن هسته ای به قطر  $10^{-14} \text{ m}$  استفاده شود کمیته انرژی ذره را محاسبه کنید.

۴۹۰۱ سرعت پرتوئی در راستای X با دقت  $10^{-2} \text{ ms}^{-1}$  اندازه گیری می شود. حدود دقتی را به دست آورید که با آن بتوان موضع پرتون را همزمان در دو حالت زیر تعیین کرد (الف) در امتداد محور X و (ب) در امتداد محور Y. مسئله فوق را برای حالتی که در آن ذره مورد نظر يك الکترون است تکرار کنید.

۵۰۰۱ مکان الکترونی با عدم قطعیت  $1 \text{ \AA}$  ره تعیین می شود. عدم قطعیت در تکانه آن را



تعیین کنید. اگر انرژی الکترون در حدود  $1\text{ keV}$  باشد، عدم قطعیت در انرژی آن را برآورد کنید. مسئله فوق را برای پروتونی تکرار کنید که در قطر یک هسته (تقریباً  $10^{-14}\text{ m}$ ) با انرژی از مرتبه  $2\text{ MeV}$  محبوس شده است.

**۵۱۰۱** نشان دهید که در فضای فاز، مسیر نقطه‌ای که نمایش دهنده یک نوسانگر همسانگ با بسامد زاویه‌ای  $\omega$  است، به صورت یک بیضی با نیم محورها  $A$  و  $m\omega A$  است. که در آن،  $m$  جرم نوسانگر و  $A$  دامنه حرکت آن است. مساحت بیضی را به دست آورید و نشان دهید که این مساحت برابر است با  $2\pi E/\omega$  که در آن،  $E$  انرژی کل نوسانگر است. این مقدار را با معادله (۷.۱) مقایسه و ثابت کنید که سطح هر بیضی مجاز برابر است با  $nh$  و در نتیجه، مساحت‌های دو بیضی متوالی به مقدار ثابت  $h$  با یکدیگر اختلاف دارند. این موضوع را به توضیح وابسته با شکل ۲۹.۱ ربط دهید.

**۵۲۰۱** پهنای خط و پاشیدگی بسامد مربوط به یک تب  $10^{-9}\text{ s}$  حاصل از یک لیزر ساقوتی ( $\lambda = 63 \times 10^{-7}\text{ m}$ ) را به دست آورید.

**۵۳۰۱** هر گاه چشمه‌ای با سرعت  $u$ ، نسبت به ناظری حرکت کند، بسامد تابش اندازه‌گیری شده به وسیله ناظر، یک انتقال به مقدار  $\Delta\nu = \nu u/c$  را نشان می‌دهد که در آن، بر حسب اینکه حرکت به طرف ناظر باشد یا از او دور شود،  $u$  به ترتیب مثبت یا منفی است و  $\nu$  نیز مقدار بسامد در حالتی است که چشمه در حال سکون است. این اثر به انتقال الکترومغناطیسی ددپلر معروف است. چون مولکولهای گاز در حرکت کاتوره‌ای هستند، انتقال دوپلر برای هر مولکول متفاوت خواهد بود. این عمل موجب پهن شدگی در خط می‌شود که با رابطه  $\delta = 2(v/c)\sqrt{2kT \ln 2/m}$  داده می‌شود.  $m$  جرم مولکول و  $T$  دمای مطلق گاز است. مقدار پهنای دوپلر را در دمای معمولی ( $300\text{ K}$ ) برای گذار اتمی  $486\text{ eV}$  در جیوه و برای گذار هسته‌ای  $1.33\text{ MeV}$  در  ${}^{60}\text{ Ni}$  محاسبه کنید. در هر حالت اثر واقع برجذب تشدید را بحث نمایید.

**۵۴۰۱** خط پرتو گامای گسیل شده از  ${}^{191}\text{ Ir}$  دارای یک انرژی متوسط  $129\text{ keV}$  است و پهنای اندازه‌گیری شده خط در شدت نیم بیشینه نیز برابر است با  $4.6 \times 10^{-6}\text{ eV}$ . (الف) طول عمر متوسط حالت برانگیخته‌ای که این خط را گسیل می‌کند برآورد کنید. (ب) سرعت نسبی چشمه و ناظر چقدر باشد تا انتقال دوپلر مرتبه اول حاصل از آن با پهنای خط اندازه‌گیری شده برابر باشد.

**۵۵۰۱** نشان دهید که بیشینه تغییر در انرژی جنبشی ذره‌ای به جرم  $m$  (با انرژی جنبشی اولیه  $E_k$ ) هنگامی که با ذره‌ای به جرم  $M$  واقع در حال سکون در چارچوب مرجع آزمایشگاه برخورد می‌کند برابر است با  $\Delta E_k = -4AE_k/(1+A)^2$  که در آن  $A = M/m$ . (الف) مقدار حدی را هنگامی که  $M \gg m$  به دست آورید. (ب) منحنی تغییرات  $\Delta E_k$  را بر حسب  $A$  رسم کنید.

1. "Early Work in Electron Diffraction," G. Thomson, *Am. J. Phys.*, 29, 821 (1961).
2. "The Scattering of X-rays as Particles," A. Compton, *Am. J. Phys.* 29, 817 (1961).
3. "Einstein's Proposal of the Photon Concept," A. Arons and M. Peppard, *Am. J. Phys.*, 33, 367 (1965).
4. "60 Years of Quantum physics," E. Condon, *Physics Today*, October 1962, page 37.
5. "Paths to Quantum Theory Historically Viewed," F. Hund. *Physics Today*, August 1966. page 23.
6. "The Mossbauer Effect," S. de Benedetti, *Sci. Am.*, April 1960, page 72.
7. *Introduction to Modern Physics*, F. Richtmyer, E. Kennard, and T. Lauritsen. New York: McGraw-Hill, 1955, Chapter 3, Sections 43, 44, 49-55; Chapter 4; Chapter 5, Sections 86 and 87; Chapter 6, Sections 90-95.
8. *Great Experiments in Physics*, Morris Shamos, editor. New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1959, Chapter 17 (Einstein); Appendix 2 (Planck); Appendix 5 (Compton).
9. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1963, Chapter 37.
10. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1958, Chapters 31 and 32.

## مکانیک کوآنتومی

مقدمه	۱۰۲
تابع موج و چگالی احتمال	۲۰۲
معادله شرودینگر	۳۰۲
پله پتانسیل	۴۰۲
ذره در جعبه پتانسیل	۵۰۲
نوسانگر هماهنگ	۶۰۲
ترازهای انرژی و تابع موجها در حالت کلی	۷۰۲
نفوذ در سد پتانسیل	۸۰۲
تقارن، تابع موجها، و پارپته	۹۰۲
معادله مستقل از زمان شرودینگر	۱۰۰۲
احتمال گذار و قواعدگزینش	۱۱۰۲
نظریه صوری مکانیک کوآنتومی	۱۲۰۲

## ۱.۲ مقدمه

حرکت اجسام را، می‌توان برحسب قواعد کلاسیکی مبتنی بر شواهد تجربی (و مستقل از برهم‌کنشهای موجود میان آنها) بیان کرد. این قواعد یا اصول عبارت‌اند از (۱) پایستگی تکانه، (۲) پایستگی تکانه زاویه‌ای، و (۳) پایستگی انرژی. براساس این قوانین، یک صورتبندی به نام مکانیک کلاسیک برای بیان حرکت ذرات مطرح شد که در آن فرض شده بود ذرات در فضا جایگزیده‌اند و آنها را می‌توان، بدون اینکه آشفتگی قابل توجهی در حرکتشان ایجاد شود، مشاهده کرد. به‌طورکلی، این فرضها از دقت زیادی برخوردار نیستند و بیشتر به‌صورت ضمنی وضع شده‌اند. این صورتبندی برای بیان و تحلیل حرکت اجسام متنوعی از سیارات گرفته تا الکترونها، به‌کار می‌رود. اما نتایجی که مکانیک کلاسیک دربارهٔ عناصر اصلی تشکیل‌دهندهٔ ماده به‌دست می‌دهد تقریبی است و در مواردی حتی کاملاً نارساست.

در فصل قبل دیدیم که در نتیجهٔ شواهد تجربی مجبوریم که برای بیان رفتار ماده، چندین مفهوم جدید تعریف کنیم. اگرچه قوانین پایستگی تکانه، تکانه زاویه‌ای، و انرژی معتبر باقی می‌مانند، اما اصل عدم قطعیت ما را بر آن می‌دارد که توصیف کامل حرکت ذرات اتمی برحسب مکانیک کلاسیک را کنار بگذاریم. کوانتش انرژی (و شاید سایر کمیت‌های فیزیکی) ایدهٔ جدید دیگری است که در مکانیک کلاسیک وجود ندارد. یک نظریهٔ خوب باید شامل اطلاعاتی دربارهٔ ترازهای انرژی مجاز باشد. برهم‌کنش تابش و ماده از طریق جذب یا گسیل فوتونها مفهوم جدید دیگری است که باید مطرح شود.

بنا بر این وضع ایجاد می‌کند که صورتبندی جدیدی را که به مکانیک کوانتومی معروف است مطرح کنیم. این صورتبندی جدید انقلاب بزرگی در فیزیک ایجاد کرده است. مکانیک کوانتومی در شکل امروزش نتیجهٔ کار لوئی دو بروی، اروین شرودینگر، ورنر هایزنبرگ، پل دیراک، ماکس بورن، و سایر دانشمندانی بوده است که از سال ۱۹۲۰ به بعد روی آن کار کرده‌اند. مکانیک کوانتومی برای درک رفتار عناصر اصلی تشکیل‌دهندهٔ ماده بسیار ضروری است. با آنکه این نظریه براساس ریاضیات پیچیده‌ای بنا شده است، اما ایده‌های اساسی آن نسبتاً ساده هستند. در این فصل، پاره‌ای از جنبه‌های اساسی مکانیک کوانتومی را به‌اختصار بررسی می‌کنیم، به‌گونه‌ای که بتوانیم این نظریه را در تحلیل ساختار اتمی، مولکولی، و هسته‌ای، که در فصل‌های آینده مطالعه خواهیم کرد، به‌کار ببریم.

## ۲.۲ تابع موج و چگالی احتمال

در بخش ۱۲.۱ نتیجه گرفتیم که نمی‌توانیم دربارهٔ مسیر یک ذرهٔ اتمی، آنطور که در مکانیک کلاسیک مطرح است، صحبت کنیم. به‌عنوان مثال، نمی‌توان پرسید که آیا الکترونها در اتم در مدارهای بیضی‌وار به‌دور هسته حرکت می‌کنند یا خیر. طرح چنین سؤالی بی‌معناست، حتی اگر نیروهای وارد بر ذرات، چنین مدارهای کلاسیکی را ایجاد کرده باشند.

حاله این پرسش مطرح می‌شود که اگر نتوانیم در مورد مسیر يك الكترون یا هر ذره اتمی دیگر صحبت کنیم، چگونه می‌توانیم حرکت آن را توصیف کنیم؟

اطلاعات لازم برای جواب دادن به این پرسش را هیدان ماده، که در بخش ۱۰.۱ معرفی شد فراهم می‌کند. برای کسب چنین اطلاعاتی لازم است که از آگاهی خود درباره امواج ایستاده استفاده کنیم، یعنی امواجی که در ناحیه مشخصی محبوس شده‌اند، مانند امواج حاصل از ریسمان مرتعی که دو انتهای آن ثابت است، ستونی از هوای نوسان کننده که دو انتهای آن بسته است، یا تابش الکترومغناطیسی که در داخل کاواکی بادیواره‌های کاملاً رسانا به دام افتاده است. یادآوری می‌کنیم که در امواج ایستاده، دامنه موج در هر نقطه از فضا ثابت است. در نقاطی که بزرگتر باشد موج شدیدتر خواهد بود.

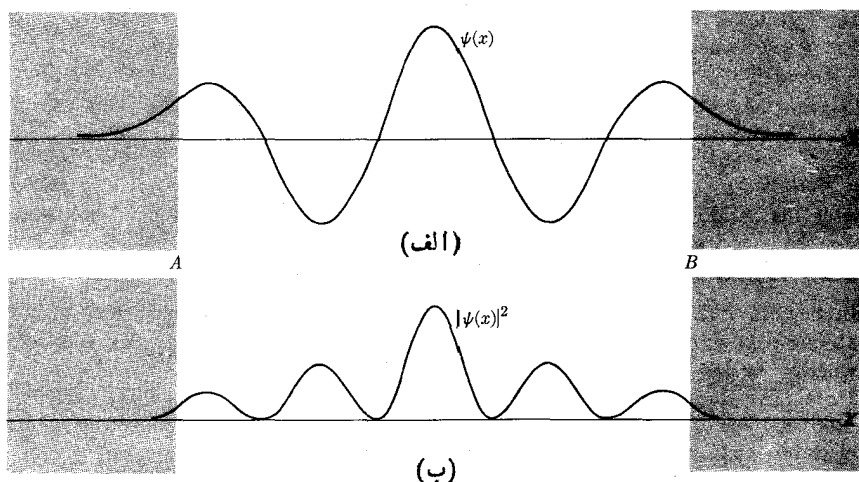
وضع مشابهی نیز در حالت مربوط به ذرات اتمی رخ می‌دهد. به عنوان مثال، الکترون موجود در اتمی را در نظر می‌گیریم. چنین الکترونی در فاصله خیلی دور از هسته حرکت نمی‌کند بلکه، عمدتاً در ناحیه کوچکی از فضا با ابعادی در حدود  $10^{-9} \text{ m}$  محبوس است. بنا بر این، میدان ماده وابسته به آن را می‌توان بر حسب امواج ایستاده‌ای که در این ناحیه جایگزیده‌اند توصیف کرد. در داخل این ناحیه، دامنه امواج از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر می‌کند و در خارج آن عملاً صفر می‌شود. در اینجا دامنه میدان ماده را با  $\psi(x)$  نشان می‌دهیم. دامنه  $\psi(x)$  غالباً تابع موج نامیده می‌شود. با وجود آنکه چنین نامی گمراه کننده است اما به دلایل تاریخی هنوز هم به کار می‌رود. شاید بهتر می‌بود که آن را دامنه میدان ماده می‌نامیدیم.

می‌دانیم که شدت يك حرکت موجی با مجذور دامنه متناسب است. بنا بر این، شدت هیدان ماده با  $|\psi(x)|^2$  داده می‌شود. تابع موج  $\psi(x)$  را گاهی با يك تابع مختلط بیان می‌کنیم. یعنی با تابعی که شامل  $i = \sqrt{-1}$  است. مزدوج مختلط تابع موج هنگامی به دست می‌آید که هر  $i$  را با  $-i$  عوض کنیم. مزدوج مختلط تابع  $\psi$  با  $\psi^*$  نشان داده می‌شود. در این صورت

$$|\psi(x)|^2 \equiv \psi^*(x)\psi(x)$$

برای يك تابع حقیقی داریم  $\psi^* = \psi$  است. اکنون ببینیم که چه معنی فیزیکی را می‌توانیم به شدت میدان ماده نسبت دهیم. چون میدان ماده حرکت ذره را بیان می‌کند، می‌توان گفت در آن نواحی از فضا که در آنها ذره بسا احتمال بیشتری یافت می‌شود، مقدار  $|\psi(x)|^2$  بزرگتر است.

به عنوان مثال، تابع موج  $\psi(x)$  برای ذره‌ای که عمدتاً در ناحیه میان  $A$  و  $B$  محبوس است، در شکل ۱۰.۲ (الف) نشان داده شده است. توجه کنید که  $\psi(x)$  در خارج ناحیه  $AB$  به شدت کاهش می‌یابد. در داخل این ناحیه که احتمال یافتن ذره زیاد است تابع موج به صورت نوسانی است. شدت میدان ماده که با  $|\psi(x)|^2$  داده می‌شود، در شکل ۱۰.۲ (ب) نشان داده شده است.



شکل ۱.۲ (الف) تابع موج ذره‌ای که میان  $A$  و  $B$  حرکت می‌کند. (ب) توزیع احتمال متناظر با تابع موج شکل (الف).

بیان کمی این موضوع به صورت زیر است

احتمال یافتن ذره‌ای که با تابع موج  $\psi(x)$  بیان می‌شود، در فاصله  $dx$  حول نقطه  $x$  مساوی است با  $|\psi(x)|^2 dx$ .

به عبارت دیگر، احتمال در یکای طول (یا چگالی احتمال) یافتن ذره در  $x$  مساوی بسا مقدار زیر است

$$P(x) = |\psi(x)|^2$$

در اینجا برای سهولت فرض می‌کنیم که حرکت فقط در یک راستا صورت می‌گیرد. اما در حالت کلی، حرکت در فضا انجام می‌شود و تابع موج (یا دامنه میدان-ماده) به سه مختصات  $x$ ،  $y$ ، و  $z$  [یعنی،  $\psi(x, y, z)$ ] وابسته است. بنابراین  $|\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz$  عبارت است از احتمال یافتن ذره در حجم  $dx dy dz$  حول نقطه‌ای با مختصات  $x$ ،  $y$ ،  $z$ ، یا رابطه

$$P = |\psi(x, y, z)|^2 \quad (1.2)$$

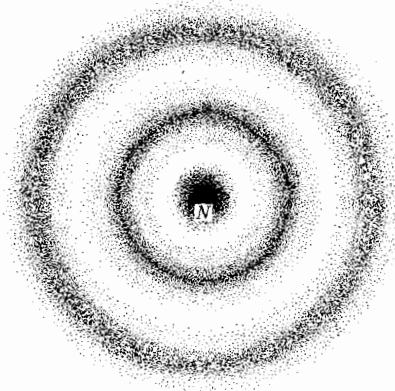
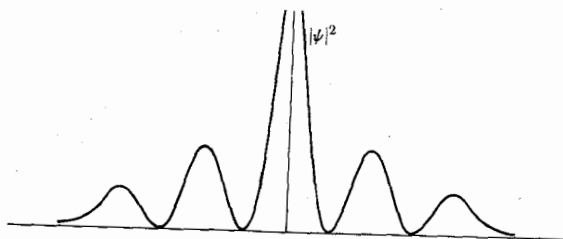
عبارت است از احتمال در یکای حجم یا چگالی احتمال یافتن ذره در  $x$ ،  $y$ ،  $z$ . به عنوان

مثال، فرض کنید می‌خواهیم  $\psi(x, y, z)$  را برای الکترون موجود در يك اتم محاسبه و  $|\psi|^2$  را مانند شکل ۲.۲ رسم کنیم. در این شکل، هسته اتم است و درجه تاریکی نیز با مقدار  $|\psi(x, y, z)|^2$  متناسب است. از این رو، نقاط تاریکتر نشان‌دهنده نواحی هستند که در آنها، احتمال یافتن الکترون خیلی زیاد است، لازم به یادآوری است که این تنها چیزی است که در باره جایگزیدگی الکترون در اتم می‌توانیم بگوییم زیرا بحث در باره مدار دقیق الکترون غیرممکن است. احتمال یافتن الکترون در داخل حجم معین  $V$  برابر است با

$$P_V = \int_V |\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz$$

از طرف دیگر می‌دانیم که الکترون باید همواره يك جایی در فضا وجود داشته باشد و بنابراین، اگر انتگرال فوق را در تمام فضا بسط دهیم، احتمال قطعیت پیدا می‌کند یعنی برابر با يك می‌شود. در نتیجه داریم

$$\int_{\text{تمام فضا}} |\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz = 1 \quad (۲.۲)$$



شکل ۲.۲ توزیع احتمال برای الکترون موجود در اتم.

این رابطه به شرط بهنجادش معروف است. این شرط شکلهای ممکن تابع موج  $\psi(x, y, z)$  را به شدت محدود می‌کند. زیرا هر تابع موج دلخواهی همیشه در معادله (۲.۲) صدق نمی‌کند. در حالت خاص وقتی مختصات  $x$ ،  $y$ ، و  $z$  خیلی بزرگ‌اند، تابع  $\psi(x, y, z)$  باید به سرعت کاهش یابد تا انتگرال در تمام فضا وجود داشته باشد.

### ۳.۲ معادله شرودینگر

مرحله بعدی به دست آوردن قاعده‌ای است که به کمک آن بتوانیم دامنه میدان یا تابع موج  $\psi$  را برای مسئله دینامیکی نتیجه بگیریم. آشکار است که تابع موج  $\psi(x)$  باید به حالت دینامیکی ذره وابسته باشد. این حالت دینامیکی به وسیله نیروهای وارد بر ذره و نیز با انرژی کل ذره تعیین می‌شود. اما اگر نیروها از نوع نیروهای پایستار باشند حرکت به کمک انرژی پتانسیل  $E_p(x)$  ذره مشخص می‌شود. بنابراین می‌توان انتظار داشت که تابع موج  $\psi(x)$  باید به طریق دیگر به انرژی پتانسیل و انرژی کل ذره، یعنی به

$$E = \frac{p^2}{2m} + E_p(x)$$

بستگی داشته باشد. در واقع، قاعده به دست آوردن  $\psi(x)$  به صورت معادله دیفرانسیلی بیان می‌شود که به معادله شرودینگر معروف است. این معادله در سال ۱۹۲۶ توسط شرودینگر فیزیکدان آلمانی فرمولبندی شد. در مسائل یک بعدی، این معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + E_p(x)\psi = E\psi \quad (3.2)$$

که در آن  $m$  جرم ذره است. معادله شرودینگر در مکانیک کوانتومی یک معادله اساسی است، همان طور که معادله نیوتون یعنی رابطه  $F = dp/dt$  در مکانیک کلاسیک یا معادله‌های ماکسول در الکترومغناطیس از چنین خصوصیتی برخوردارند. واضح است که جوابهای  $\psi$  معادله (۳.۲) به شکل انرژی پتانسیل  $E_p(x)$  وابسته‌اند.

لازم به یادآوری است که ما بر آن نیستیم که معادله شرودینگر را به تفصیل به دست آوریم، زیرا این کار از برنامه این کتاب خارج است. در عوض، در مثال ۱.۲ بایک روش شهودی، از طریق قیاس مطالبی که برای دانشجو آشنا تر است، آن را توجیه خواهیم کرد. همچنین در بخش ۱۲.۲ در زمینه صوری مکانیک کوانتومی نشان خواهیم داد که این معادله چگونه به دست آمده است.

در حالت مربوط به ذره آزاد، انرژی پتانسیل مساوی با صفر است (یعنی  $E_p(x) \equiv 0$ ) و معادله شرودینگر به صورت زیر درمی‌آید

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$



که می توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \quad (4.2)$$

از طرفی می دانیم که برای ذره آزاد،  $E = p^2/2m$  است. بنابراین، هر گاه بر طبق معادله (۴.۱)، مقدار  $p$  را مساوی با  $\hbar k$  اختیار کنیم، که در آن  $k$  عدد موج است، در آن صورت  $E = \hbar^2 k^2/2m$  و در نتیجه معادله (۴.۲) به صورت زیر درمی آید

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0 \quad (5.2)$$

که مشابه با معادله ای است که برای دامنه امواج ایستاده به طول موج  $\lambda = 2\pi/k = h/p$  وجود دارد. به عنوان مثال، دامنه امواج ایستاده موجود در یک ریسمان یا در یک ستون گاز یا امواج الکترومغناطیسی به دام افتاده در یک کواک در این معادله صدق می کند.<sup>۱</sup> با یادآوری اینکه  $i = \sqrt{-1}$  و  $i^2 = -1$  است، مشاهده می شود که معادله دیفرانسیل (۵.۲) می تواند جوابهایی به صورت تابع موجهای زیر داشته باشد

$$\psi(x) = e^{ikx} \quad \text{و} \quad \psi(x) = e^{-ikx} \quad (6.2)$$

همان طور که در بخش ۱۰.۲ خواهیم دید، تابع موج  $\psi = e^{ikx}$  نشان دهنده ذره آزادی با تکانه  $p = \hbar k$  و انرژی  $E = p^2/2m = \hbar^2 k^2/2m$  است که در جهت  $+X$  حرکت می کند و تابع موج  $\psi = e^{-ikx}$  نیز ذره آزادی را نشان می دهد که با همان تکانه و انرژی ولی در جهت مخالف یعنی در جهت  $-X$  حرکت می کند. جواب عمومی معادله (۵.۲) را می توان به صورت یک ترکیب خطی از دو جواب داده شده در معادله (۶.۲) نوشت، یعنی

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (7.2)$$

این تابع موج با جهت حرکت بخصوصی متناظر نیست، بلکه به صورت برهم نهی جوابهای حرکت در جهات  $+X$  و  $-X$  است که درست با وضع به دست آمده در امواج ایستاده یکسان است. (به عنوان مثال، یادآوری می شود که امواج ایستاده واقع بر روی یک ریسمان از برهم نهی امواجی به دست می آیند که در دو جهت انتشار می یابند و در دو انتهای ثابت بازتاب می کنند.)

توجه کنید که از معادلات (۶.۲) نتیجه می شود

۱. به بخشهای ۴.۲۲ تا ۹.۲۲ جلد دوم این کتاب مراجعه کنید.

$$|\psi(x)|^2 = \psi^*(x)\psi(x) = e^{-ikx} \cdot e^{ikx} = 1$$

اینکه  $|\psi(x)|^2 = 1$ ، یا مساوی بامقدار ثابتی است، بدان معنی است که احتمال یافتن ذره در هر نقطه‌ای یکسان است. به عبارت دیگر،  $\psi = e^{\pm ikx}$  گویای وضعی است که در آن ما در مورد مکان، عدم قطعیت کامل داریم. این موضوع با اصل عدم قطعیت سازگاری دارد زیرا  $\psi = e^{\pm ikx}$  ذره‌ای را توصیف می‌کند که تکانه آن  $p = \hbar k$  را با دقت می‌شناسیم، یعنی  $\Delta p$  مساوی صفر است که در نتیجه لازم است  $\Delta x$  به سمت بینهایت میل کند. بنا بر این، برای به دست آوردن اطلاعاتی درباره مکان یک ذره جایگزیده در داخل ناحیه  $\Delta x$  باید چندین جواب به صورت  $Ae^{ikx}$ ، با مقادیر مختلف  $k$  (یا  $p$ )، و با دامنه مناسب  $A$  در گستره  $\Delta k$  (یا  $\Delta p$ ) را برهم نهیم، یعنی باید یک بسته موج را تشکیل دهیم (شکل ۲۶.۱). این بسته موج را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد

$$\psi(x) = \int A(k)e^{ikx} dk \quad (۸.۲)$$

که در آن  $A(k)$  دامنه متناظر با تکانه  $p = \hbar k$  است.

معادله شرودینگر (۳.۲) ذره‌ای را توصیف می‌کند که در خط مستقیم، در حال حرکت است (حرکت یک بعدی). برای ذره‌ای که در فضا حرکت می‌کند، معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + E_p(x, y, z)\psi = E\psi \quad (۹.۲)$$

که آشکارا بسط معادله (۳.۲) است به سه مختصه‌ای که نسبت به هم متقارن اند. در حالت مربوط به ذره آزاد داریم  $E_p(x, y, z) \equiv 0$  و معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = E\psi$$

جواب این معادله که توصیف کننده ذره آزادی با تکانه  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$  و انرژی  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$  است، به صورت زیر است

$$\psi = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

اثبات این موضوع را به دانشجو واگذار می‌کنیم و فقط یادآوری می‌کنیم که

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z \quad \text{و} \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

مثال ۱۰.۲ توجیه شهودی معادله شرودینگر.

حل: گفتیم که در مکانیک کوانتومی، تابع موج  $\psi(x)$  نقشی شبیه به دامنه  $\psi(x)$  در یک

موج ایستاده ایفا می‌کند. برای حرکت موج در يك بعد، دامنه موج ایستاده‌ای به طول موج  $\lambda$  در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} + k^2 \xi = 0$$

که در آن  $k = 2\pi/\lambda$  به عدد موج این موج ایستاده معروف است. اکنون با توجه به معادله (۴۵.۱) یساده‌آوری می‌کنیم که در مکانیک کوانتومی  $p = \hbar k$ ، به گونه‌ای که می‌توان انتظار داشت که تابع موج  $\psi(x)$  در معادله مشابهی از نوع زیر صدق کند

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{p^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

اگرچه هنگام نوشتن معادله موج ایستاده فرض می‌کنیم  $k$  ثابت است و بنا بر این  $p$  نیز باید ثابت باشد ولی ایسن فرض معمولاً در مورد ذره‌ای که تحت اثر نیرویی قرار دارد، صادق نخواهد بود. با وجود این، معادله بالا را حتی وقتی که  $p$  هم ثابت نیست به کار خواهیم برد. در این صورت با یادآوری اینکه انرژی کل برابر است با  $E = p^2/2m + E_p(x)$  می‌توان نوشت

$$p^2 = 2m[E - E_p(x)]$$

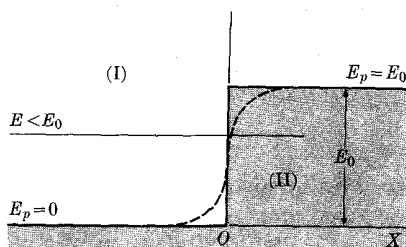
و در نتیجه، معادله قبل به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - E_p(x)] \psi = 0$$

که اگر کمی جملات آن را جا به جا کنیم، مشاهده می‌کنیم که درست همان معادله شرودینگر (۳.۲) است. لازم به یادآوری است که ما هنوز معادله شرودینگر را به دست نیاورده‌ایم، بلکه از طریق مقایسه صرفاً منشأ آن را تا روابط (۴۴.۱) یا (۴۵.۱) دنبال کرده‌ایم.

## ۴.۲ پله پتانسیل

به عنوان اولین مثال از موارد استعمال معادله شرودینگر، تابع موج  $\psi(x)$  را برای ذره‌ای تعیین می‌کنیم که در ناحیه‌ای با انرژی پتانسیل مطابق شکل ۳.۲ حرکت می‌کند. این وضع به پله پتانسیل معروف است. یعنی انرژی پتانسیل به ازای  $x < 0$  مساوی با صفر و به ازای  $x > 0$  برابر مقدار ثابت  $E_0$  است. باید توجه داشت که هیچ پتانسیل فیزیکی یک چنین تغییرات تند و ناگهانی را از خود بروز نمی‌دهد و منطقیتر آن است که تغییر در پتانسیل را، همان‌طور که در شکل با خط چین نشان داده شده است، به صورت هموار در نظر بگیریم. به عنوان مثال، الکترونهای آزاد موجود در فلز یک چنین تغییر همواری را در نزدیکی سطح



شکل ۳.۲ پتانسیل. (در این شکل و نیز در شکلهای بعدی، تمام نواحی از لحاظ کلاسیکی ممنوع به صورت سایه دار نشان داده شده اند.)

فلز تجربه می کنند. اما مطالعه پله پتانسیل غیر فیزیکی از نظر ریاضی ساده تر است و نتایج آن را می توان، به عنوان نشانی از وضع فیزیکی، در مورد حالت های واقعی به کار برد. در اینجا لازم است دو حالتی را که در آنها  $E < E_0$  و  $E > E_0$  است، جدا گانه بررسی کنیم. الف)  $E < E_0$ . در این حالت، بر طبق مکانیک کلاسیک، ذره نمی تواند در طرف راست نقطه  $O$  وجود داشته باشد زیرا در این صورت، انرژی جنبشی  $E_k = E - E_0$  منفی خواهد بود که محال است. بنابراین، اگر  $E < E_0$  باشد،  $x > 0$  نشان دهنده ناحیه ای است که بر طبق مکانیک کلاسیک ممنوع است. این بدان معنی است که در مورد الکتردهای آزاد موجود در فلز، آن عده از الکتردهای با انرژی  $E < E_0$  نمی توانند از فلز بگریزند و در نتیجه، وقتی به سطح فلز برسند مجدداً به داخل آن باز می گردند.

برای به دست آوردن  $\psi(x)$  در یک پله پتانسیل باید معادله شرودینگر را به طور جدا گانه برای نواحی  $x < 0$  (یا ناحیه I) و  $x > 0$  (یا ناحیه II) بنویسیم. در ناحیه I، که در آن  $E_p = 0$  معادله (۳.۲) به صورت زیر درمی آید

$$\frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_1 = 0$$

که با معادله (۴.۲) برای یک ذره آزاد یکسان است. جواب عمومی آن از نوعی است که با معادله (۷.۲) داده می شود یا

$$\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (10.2)$$

این معادله به این صورت معروف یک ذره فرودی ( $e^{ikx}$ ) و یک ذره بازتابیده ( $e^{-ikx}$ ) است. در اینجا دامنه متفاوتی را به ذره بازتابیده نسبت داده ایم تا هر تغییر ممکن باریکه فرودی را

در نتیجه بازتاب در  $x = 0$  به حساب آوریم. در ناحیه (II) که در آن  $E_p(x) = E_0$  است، معادله شرودینگر به صورت زیر درمی آید

$$\frac{d^2\psi_\gamma}{dx^2} + \frac{2m(E - E_0)}{\hbar^2}\psi_\gamma = 0 \quad (11.2)$$

هنگامی که  $E$  کوچکتر از  $E_0$  است، کمیت مثبتی را به صورت  $\alpha^2 = 2m(E_0 - E)/\hbar^2$  تعریف می کنیم، به گونه ای که معادله دیفرانسیل (11.2) به صورت زیر درمی آید

$$\frac{d^2\psi_\gamma}{dx^2} - \alpha^2\psi_\gamma = 0$$

جواب ایسن معادله دیفرانسیل ترکیبی از توابع  $e^{-\alpha x}$  و  $e^{\alpha x}$  است که با جانشانی مستقیم می توان صحت آن را تحقیق کرد. اما تابع افزایشی  $e^{\alpha x}$  نمی تواند قابل قبول باشد، زیرا می دانیم که دامنه میدان در ناحیه (II) بسیار کوچک است. تجربه نشان می دهد که یافتن یک ذره در چنین ناحیه ای محتمل نیست (در اینجا مجدداً یادآوری می کنیم که بر طبق مکانیک کلاسیک چنین چیزی غیر ممکن است). بنابراین فقط باید تابع نمایی نزولی  $e^{-\alpha x}$  را به کار برد، یعنی

$$\psi_\gamma(x) = Ce^{-\alpha x}$$

اینکه  $\psi_\gamma(x)$  مساوی با صفر نیست حاکی از آن است که احتمالاً ذره در ناحیه (II) یافت می شود. این موضوع یکی از جالبترین ویژگیهای است که مکانیک کوانتومی را از مکانیک کلاسیک متمایز می کند بدین معنی که در مکانیک کوانتومی، عموماً مرزهای ناحیه ای که در آن یک ذره می تواند حرکت کند، مرزهای کاملاً مشخصی نیستند. اما چون نمای  $\psi(x)$  منفی (یا کاهشی) است، احتمال یافتن ذره ای با انرژی  $E < E_0$  در طرف راست پله پتانسیل (یعنی جایی که  $x > 0$ )، با افزایش  $x$  به سرعت کاهش می یابد. بنابراین نتیجه می گیریم که به طور کلی، ذره نمی تواند جای خیلی دوری برود و داخل ناحیه ای شود که بر طبق مکانیک کلاسیک ناحیه ممنوع است.

تابتهای  $A$ ،  $B$ ، و  $C$  را فقط در صورتی می توانیم تعیین کنیم که از شرط پیوستگی میدان ماده یا تابع موج در  $x = 0$  استفاده کنیم. این شرط آشکارا یک الزام فیزیکی است. یعنی تابع موج جایی که پله پتانسیل را قطع می کند باید به طور هموار تغییر کند. این شرط ایجاب می کند که به ازای  $x = 0$  تساویهای زیر برقرار باشد

$$\psi_1 = \psi_2 \quad \text{و} \quad \frac{d\psi_1}{dx} = \frac{d\psi_2}{dx} \quad x = 0$$

این شرایط روابط  $A + B = C$  و  $ik(A - B) = -\alpha C$  را به دست می دهند که به نوبه

خود، روابط زیر از آنها نتیجه می‌شود

$$B = \frac{(ik + \alpha)A}{ik - \alpha} \quad \text{و} \quad C = \frac{2ikA}{ik - \alpha}$$

به طوری که

$$\psi_1(x) = A \left( e^{ikx} + \frac{ik + \alpha}{ik - \alpha} e^{-ikx} \right), \quad \psi_2(x) = \frac{2ik}{ik - \alpha} A e^{-\alpha x}$$

به این صورتی که تابع  $\psi_1$  را نوشته‌ایم،  $|A|^2$  شدت میدان ورودی است. شدت میدان بازتابیده عبارت است از

$$|B|^2 = \left| \frac{ik + \alpha}{ik - \alpha} A \right|^2 = \frac{ik + \alpha}{ik - \alpha} \cdot \frac{-ik + \alpha}{-ik - \alpha} |A|^2 = |A|^2$$

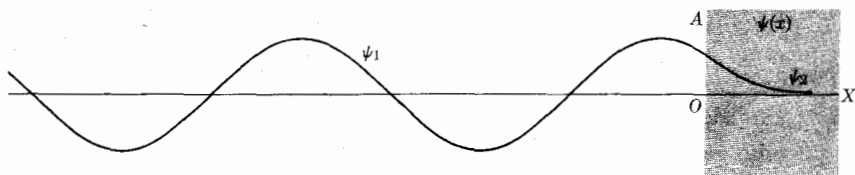
بنابراین نتیجه می‌گیریم که هم میدان فرودی و هم میدان بازتابیده شدت یکسانی دارند. این نتیجه را می‌توان به این صورت تعبیر کرد که، تمام ذراتی که با انرژی  $E < E_0$  به پله پتانسیل می‌رسند به عقب برمی‌گردند، از جمله آنهایی که اندکی به داخل ناحیه (II) نفوذ می‌کنند. این تعبیر با تصور فیزیکی این فرایند سازگاری دارد. تابع  $\psi_1(x)$  را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت

$$\psi_1(x) = \frac{A}{ik - \alpha} [(ik - \alpha)e^{ikx} + (ik + \alpha)e^{-ikx}]$$

بما توجه به رابطه  $e^{\pm ikx} = \cos kx \pm i \sin kx$ ، رابطه فوق به صورت زیر درمی‌آید

$$\psi_1(x) = \frac{2ik}{ik - \alpha} A \left( \cos kx - \frac{\alpha}{k} \sin kx \right)$$

از این رو، بدون توجه به ضریب مختلط مشترک  $2ik/(ik - \alpha)$  که در  $\psi_1$  و  $\psi_2$  ضرب می‌شود، هر دو تابع را می‌توان به وسیله منحنیهای موجود در شکل ۴.۲ نمایش داد. هرچه انرژی پتانسیل  $E_0$  بزرگتر باشد مقدار  $\alpha$  نیز بزرگتر خواهد بود و در نتیجه، به ازای  $x > 0$  و به ازای انرژی معین  $E$ ، تابع  $\psi_1$  سریعتر به صفر می‌رسد. در حد، یعنی وقتی  $E_0$  خیلی بزرگ است  $\alpha$  نیز خیلی بزرگ می‌شود و تابع  $\psi_1$  اساساً برابر با صفر می‌شود ( $\psi_1 \equiv 0$ )، در این صورت هیچ ذره‌ای نمی‌تواند به داخل ناحیه‌ای که بر طبق مکانیک کلاسیک ناحیه ممنوع است (یعنی به طرف راست و به ازای  $x > 0$ ) نفوذ کند.



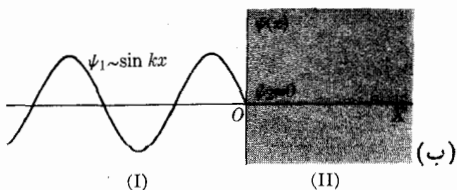
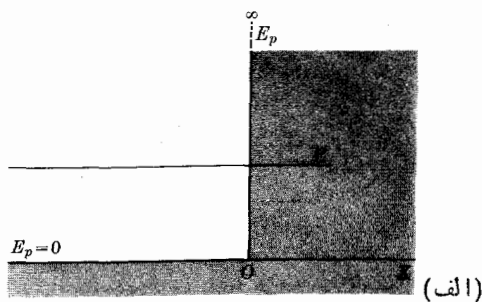
شکل ۴.۲ تابع موج يك پله پتانسیل به ارتفاع  $E_0$  هنگامی که انرژی ذره کوچکتر از  $E_0$  است.

به عبارت دیگر، تمام ذرات در  $x = 0$  بازتابیده می شوند. در این حالت، عبارت بالا برای  $\psi_1$  به صورت زیر درمی آید

$$\psi_1 = \psi_i A \sin kx = C \sin kx$$

این موضوع در شکل ۵.۲ نشان داده شده است. (به دانشجو توصیه می شود که این وضعیت را با وضعیت امواج واقع بر ریسمانی که يك انتهایش ثابت است مقایسه کند.)

(ب) حالت  $E > E_0$ . در این حالت، هرگاه مجدداً فرض کنیم که ذرات از طرف چپ به پله نزدیک می شوند، توصیف کلاسیکی این است که تمام ذرات به داخل ناحیه (II) پیش می روند، هر چند با سرعتی کمتر از سرعت در ناحیه (I). در  $x = 0$ ، ذرات ناگهان شتاب منفی می گیرند زیرا انرژی جنبشی آنها در ناحیه (II) کوچکتر از انرژی جنبشی در ناحیه (I) است. باید توجه داشت که توصیف مکانیک کوانتومی در این مورد متفاوت



شکل ۵.۲ (الف) دیوار پتانسیل. ذره نمی تواند به داخل ناحیه  $x > 0$  نفوذ کند. (ب) تابع موج مربوط به دیوار پتانسیل.

است. در ناحیه (I)، جواب هنوز هم با معادله (۱۰.۲) یعنی با  $\psi_1 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$  داده می‌شود، البته اگر فرض کنیم که امکان بازتاب تعدادی از ذرات وجود دارد (این فرض را بعداً بررسی خواهیم کرد). اما در ناحیه (II) جواب به شکل دیگری خواهد بود زیرا در این حالت  $E$  بزرگتر از  $E_0$  است و باید کمیت مثبت  $k'^2 = 2m(E - E_0)/\hbar^2$  را به طریقی تعریف کنیم که معادله (۱۱.۲) به صورت زیر درآید.

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + k'^2\psi_2 = 0$$

جواب این معادله نیز شبیه به جواب معادله (۷.۲) است. چیزی که در این حالت مسلم است این است که در ناحیه (II) ذراتی داریم که فقط به طرف راست حرکت می‌کنند و از این رو، باید بنویسیم

$$\psi_2(x) = Ce^{ik'x} \quad (12.2)$$

در این صورت با به کار بردن شرایط مرزی در  $x=0$ ، در مورد توابعی که با معادله‌های (۱۰.۲) و (۱۲.۲) داده می‌شوند، خواهیم داشت

$$A+B=C, \quad k(A-B)=k'C$$

که جوابهای آنها به صورت زیرند

$$B = \frac{(k-k')A}{(k+k')}$$

$$C = \frac{2kA}{(k+k')}$$

به گونه‌ای که

$$\psi_1(x) = A \left( e^{ikx} + \frac{k-k'}{k+k'} e^{-ikx} \right)$$

$$\psi_2(x) = \frac{2k}{k+k'} A e^{ik'x}$$

اینکه  $B$  صفر نیست نشانه آن است که تعدادی از ذرات در  $x=0$  بازتابیده شده‌اند، که بازم با نتیجه پیشگویی شده در مکانیک کلاسیک تفاوت دارد. این بازتاب رفتار مشخصه



تمام میدانهاست؛ بدین معنی که هر گاه میدانها ضمن انتشار با ناحیه‌ای مواجه شوند که در آن، خواص فیزیکی محیط ناپیوستگی دارد، چنین رفتاری از خود بروز خواهند داد. در حالت مربوط به امواج کشسان و امواج الکترومغناطیسی، این رفتار به خوبی شناخته شده است.

مثال ۲۰۲ ضرایب بازتاب و عبور پتانسیل را به ازای  $E > E_0$  تعیین کنید.

حل: سرعت ذره در نواحی (I) و (II) را به ترتیب با  $v = p/m = \hbar k/m$  و  $v' = \hbar k'/m$  نمایش می‌دهیم. با توجه به اینکه شدت ذرات ورودی (یعنی تعداد ذراتی که در یکای حجم در باریکه فرودی وجود دارند) با  $|A|^2$  داده می‌شود، در این صورت، «شار» باریکه ورودی یا چگالی جریانی ذره (یعنی تعداد ذراتی که در یکای زمان از یکای سطح عبور می‌کنند) مساوی با  $v|A|^2$  خواهد بود. «شار» میدان بازتابیده برابر با  $v|B|^2$  است زیرا برای میدان بازتابیده، سرعت تغییر نمی‌کند. سرانجام، شار میدان عبوری نیز مساوی با  $v'|C|^2$  است. بنا بر این ضرایب بازتاب و عبور عبارت‌اند از

$$R = \frac{v|B|^2}{v|A|^2} = \left( \frac{k-k'}{k+k'} \right)^2$$

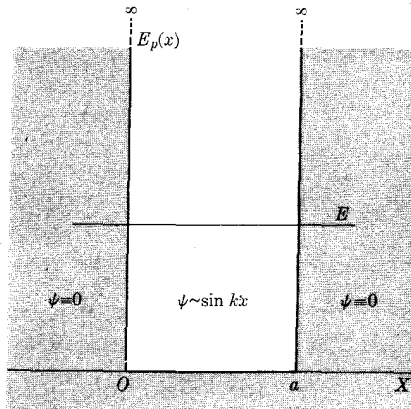
$$T = \frac{v'|C|^2}{v|A|^2} = \frac{k'}{k} \left( \frac{2k}{k+k'} \right)^2 = \frac{4kk'}{(k+k')^2}$$

هم  $R$  و هم  $T$  کوچکتر از واحدند زیرا باریکه ذرات ورودی به باریکه‌های بازتابیده و عبوری تجزیه می‌شود. به دانشجو توصیه می‌شود که درستی رابطه  $R + T = 1$  را، که شرط پایستگی تعداد ذرات ایجاب می‌کند، تحقیق کند، زیرا شار ذرات ورودی باید با مجموع شار ذرات بازتابیده و عبوری برابر باشد.

## ۵.۲ ذره درجه پتانسیل

به‌عنوان مثال دوم، حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن ذره مقیداست، همچون مولکولهای گاز داخل یک جعبه در ناحیه‌ای از  $x=0$  تا  $x=a$  حرکت کند. در این حالت، مولکول تا قبل از برخورد با دیواره آزادانه حرکت می‌کند و پس از برخورد نیز به عقب برمی‌گردد. برای الکترون آزاد موجود در یک قطعه فلز نیز وضع مشابهی وجود دارد، البته به شرطی که از برهم‌کنش الکترون با یونهای مثبت چشمپوشی کنیم و ارتفاع سد پتانسیل نیز به مراتب از انرژی جنبشی الکترون بزرگتر باشد. در چنین حالتی الکترون می‌تواند آزادانه در داخل فلز حرکت کند ولی نمی‌تواند از آن خارج شود.

در اینجا می‌توان هر یک از این وضعیتهای فیزیکی را مطابق شکل ۶.۲ با پتانسیل راستگوشه‌ای نمایش داد. این پتانسیل و نمودار انرژی پتانسیل شکل ۳.۲، حالت ساده‌شده‌ای



شکل ۶.۲ جعبه پتانسیل يك بعدی به پهنای  $a$ .

از انرژیهای پتانسیلی هستند که در واقع در طبیعت وجود دارند. این نمودار انرژی پتانسیل ساده شده به جعبه پتانسیل معروف است. به ازای  $0 < x < a$  خواهیم داشت  $E_p(x) = 0$  زیرا ذره در چنین ناحیه‌ای آزادانه حرکت می‌کند ولی در  $x=0$  و  $x=a$  انرژی پتانسیل ناگهان به بینهایت افزایش می‌یابد. این گفته بدان معنی است که در چنین نقاطی نیروهای بسیار قوی وارد می‌شود و آن را مجبور به بازگشت می‌کند. بنابراین، بدون توجه به اینکه مقدار انرژی  $E$  چقدر است، ذره نمی‌تواند در طرف چپ  $x=0$  یا طرف راست  $x=a$  وجود داشته باشد. (شکل ۵.۲ و بحث بخش ۴.۲ درباره مقادیر خیلی بزرگ  $E_0$  را به خاطر بیاورید) در این صورت در دو ناحیه  $(x < 0$  و  $x > a)$  تابع موج برابر صفر است یعنی  $\psi(x) \equiv 0$ . در ناحیه  $0 < x < a$  مسئله یادشده اساساً همان مسئله ذره آزاد است. معادله شرودینگر برای تابع موج ذره آزاد همان معادله (۵.۲) است، یعنی

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

چون ذره میان  $x=0$  و  $x=a$  به طرف جلو و عقب حرکت می‌کند تابع موج (مانند حالت مربوط به پله پتانسیل) با معادله (۷.۲) داده می‌شود، یعنی

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

که شامل حرکت در هر دو جهت است. طبق شرایط مرزی لازم است که در  $x=0$  و  $x=a$  تابع موج مساوی با صفر باشد، یعنی  $\psi(x) = 0$  در این صورت

$$\psi(x=0) = A + B = 0$$

$$B = -A$$

بنا بر این

$$\psi(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) = 2iA \sin kx = C \sin kx$$

که در آن ضریب  $C$  برابر است با  $2iA$ . شرط مرزی در  $x = a$  نیز رابطه

$$\psi(x=a) = C \sin ka = 0$$

را به دست می‌دهد. چون  $C$  نمی‌تواند صفر باشد، (زیرا در این صورت تابع موجی وجود نخواهد داشت) بنا بر این نتیجه می‌گیریم  $\sin ka = 0$  و یا  $ka = n\pi$ ، که در آن  $n$  یک عدد درست است. از حل این رابطه برای  $k$  داریم

$$k = \frac{n\pi}{a} \quad \text{یا} \quad p = \hbar k = \frac{n\pi\hbar}{a} \quad (13.2)$$

که مقادیر ممکن تکانه ذره، یعنی  $p = \hbar k$ ، را به دست می‌دهد. انرژی ذره، متناظر با مقادیر  $k$  که به وسیله معادله (۱۳.۲) داده می‌شوند، عبارت است از

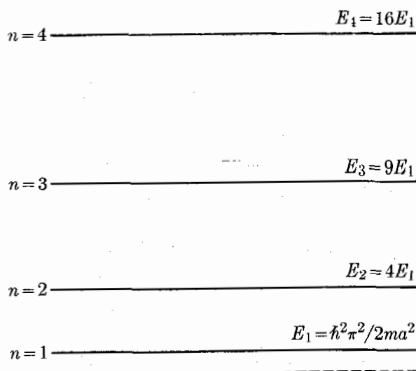
$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (14.2)$$

و یا اگر  $E_n = \hbar^2 \pi^2 / 2ma^2$  انرژی به ازای  $n = 1$  باشد، در این صورت می‌توان نوشت

$$E = E_1, 4E_1, 9E_1, \dots$$

بنا بر این، نتیجه می‌گیریم که ذره نمی‌تواند هر مقدار انرژی دلخواهی داشته باشد بلکه فقط می‌تواند مقادیری را که با معادله (۱۴.۲) داده می‌شوند و در شکل ۷.۲ نیز نشان داده شده‌اند، اختیار کند. به‌طور خلاصه، انرژی ذره کوانتیده است. این وضع جدیدی است زیرا در مثال قبل در بلبه پتانسیل مجبور نبودیم که هیچگونه محدودیتی بر انرژی تحمیل کنیم.

۱. دانشجو ممکن است تشابه فوق‌العاده زیاد میان روشهای ریاضی به‌کاررفته در چندین مسئله فیزیکی متفاوت را تشخیص دهد، مثلاً ریسمان مرتعی با دوانتهای ثابت و مسئله ذره در جعبه پتانسیل. همچنان که مشاهده می‌شود، وضع فیزیکی تغییر می‌کند ولی تکنیک ریاضی بدون تغییر باقی می‌ماند (به‌همین دلیل است که قبل از شروع به مطالعه فیزیک، باید ریاضیات پایه را به‌طور کامل فرا گرفته باشیم). البته نباید چنین تصور شود که چون صورتبندی ریاضی یکسان است، پس وضعیتهای فیزیکی نیز مشابه‌اند. به‌عنوان مثال، نباید امواج مادی را با امواج موجود در طول یک ریسمان مشابه دانست.



شکل ۷.۲. ترازهای انرژی برای جعبه پتانسیل یک بعدی.

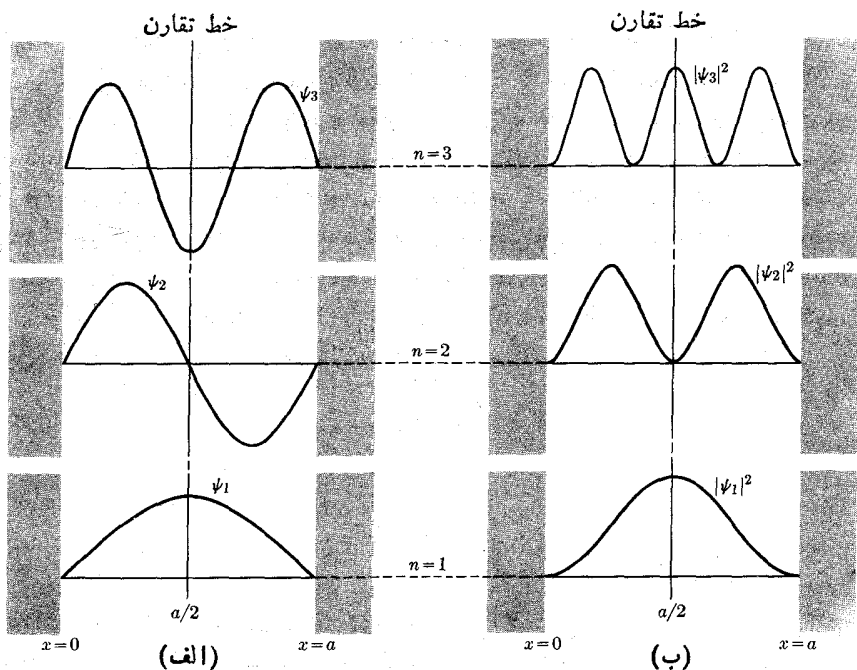
این وضع که تنها مقادیر انرژی مشخصی می‌توانند مجاز باشند، به هیچوجه ویژگی خاص این مسئله بخصوص نیست، بلکه عموماً هر وقت معادله شرودینگر (۳.۲) را برای انرژی پتانسیلی حل می‌کنیم که ذره‌ای را در ناحیه محدودی محبوس می‌کند، چنین وضعی صادق است. (یادآوری می‌کنیم که در حالت پله پتانسیل، ذره در ناحیه محدودی حبس نمی‌شود و بنا بر این انرژی نیز کوانتیده نیست.) کوانتش انرژی ناشی از این حقیقت است که تابع موج به وسیله انرژی پتانسیل و شرایط مرزی تعیین می‌شود. به طور کلی هر تابع موج قابل قبول  $\psi(x)$  که شرایط مرزی مسئله فیزیکی را برآورده کند، فقط می‌تواند برای مقادیر مشخص انرژی  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n, \dots$  وجود داشته باشد. بنا بر این، صورتبندی ریاضی مکانیک کوانتومی، آن طور که با معادله شرودینگر داده می‌شود، کوانتش انرژی و یک مجموعه گسسته از ترازهای انرژی مجاز را به طور طبیعی با هم وحدت می‌دهد. در این مسئله، علاوه بر پی بردن به این حقیقت که انرژی کوانتیده است، این نتیجه را نیز گرفتیم که تکانه ذره نیز کوانتیده است و می‌تواند مقادیر ممکنه‌ای را که با معادله (۱۳.۲) داده می‌شوند اختیار کند. با وجود این، این مسئله یک حالت کلی نیست.

تابع موجهای متناظر با مقادیر  $k$  که با رابطه (۱۳.۲) داده می‌شوند عبارت اند از

$$\psi_n(x) = C \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (15.2)$$

که درحقیقت با توابع دامنه مجاز برای امواج ایستاده موجود در ریسمان مرتعش بادوانتهای ثابت یکسان اند. در شکل ۸.۲ (الف)، تابع موجها برای سه ترازا اول انرژی نشان داده شده است. در شکل ۸.۲ (ب) نیز چگالی احتمالی  $|\psi_n|^2$  برای همان ترازهای انرژی نمایش داده شده است.

ضمناً در این حالت ساده می‌توانیم مقادیر انرژی داده شده با معادله (۱۴.۲) را با



شکل ۸.۲ (الف) سه تابع موج اول برای ذره موجود درجه‌بندی پتانسیل. (ب) چگالیهای احتمال متناظر با سه حالت بالا.

استفاده از مقایسه با ریسمان مرتعش به دست آوریم. یادآوری می‌کنیم که در ریسمان با دو انتهای ثابت و به فاصله  $a$  از یکدیگر فقط در صورتی امواج ایستاده تشکیل می‌شود که، طول موج  $\lambda$  مقادیر زیر را دارا باشد

$$\frac{1}{2}\lambda = a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{3}a, \dots, \frac{1}{n}a$$

یا

$$\lambda = \frac{2a}{n}$$

در این صورت  $p = h/\lambda = nh/2a = n\pi\hbar/a$  مقادیر ممکن تکانه هستند که با معادله (۱۳.۲) سازگارند؛ بنابراین، انرژی با معادله (۱۴.۲) داده می‌شود اما برای پتانسیلهای پیچیده‌تر، از این قیاس استفاده نمی‌شود، و یک جواب معادله شرودینگر مورد نیاز است. یادآوری این نکته جالب به نظر می‌رسد که کمینه انرژی ذره موجود درجه‌بندی پتانسیل

برابر است با  $E_1 = \hbar^2 \pi^2 / 2ma^2$  و نه یسا صفر (همچنان که انتظار می‌رود). این کمینه انرژی به‌اصل عدم قطعیت مربوط می‌شود. واضح است که عدم قطعیت در مکان ذره عبارت است از  $\Delta x \sim a$ . ذره با تکانه  $p$  در حال حرکت به طرف جلو و عقب است و در این صورت، عدم قطعیت در تکانه به صورت  $\Delta p \sim p$  خواهد بود. اصل عدم قطعیت ایجاب می‌کند که  $\Delta x \Delta p \geq \hbar$ . بنا بر این،  $a(2p) \geq \hbar$  یا  $p \geq \hbar/a$  که نتیجه  $E \geq E_1$  را به دست می‌دهد. وجود انرژی نقطه صفر که معمولاً با  $E_1$  مشخص می‌شود نمونه تمام مسائلی است که در آنها یک ذره در ناحیه محدودی محبوس شده است.

برای تکمیل این بحث، ثابت  $C$  را که در معادله (۱۵.۲) ظاهر شده است تعیین می‌کنیم. در این حالت، برای شرط بهنجارش (۲۱.۲) داریم

$$\int_0^a |\psi_n|^2 dx = 1$$

یا

$$C^2 \int_0^a \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = 1$$

زیرا گستره تابع از صفر تا  $a$  است. مقدار انتگرال برابر است با  $a/2$ . بنا بر این  $C^2(a/2) = 1$  یا  $C = \sqrt{2/a}$ . در نتیجه، تابع موجهای بهنجارشده عبارت اند از

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

یکی دیگر از خواص جالب تابع موجها این است که این توابع برهم عمودند، یعنی

$$\int_0^a \psi_n^* \psi_{n'} dx = 0 \quad n \neq n' \quad (16.2)$$

در حالت مورد بحث می‌توان صحت این گفته را به طریق زیر تحقیق کرد. با توجه به اینکه توابع  $\psi_n(x)$  حقیقی اند و بنا بر این  $\psi_n^*(x) \equiv \psi_n(x)$ ، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \int_0^a \psi_n^* \psi_{n'} dx &= \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi x}{a} dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a \left[ \cos \frac{(n-n')\pi x}{a} - \cos \frac{(n+n')\pi x}{a} \right] dx = 0 \end{aligned}$$

که در آن از روابط مثلثاتی برای  $\cos(\alpha \pm \beta)$  استفاده شده است.

می‌توان نشان داد که خاصیت متعامد بودن خاصیت کلی جوابهای معادله شرودینگر است و منحصر به توابع جعبه پتانسیل نیست (بخش ۱۲.۲).

مثال ۳.۲ ترازهای انرژی و تابع موجهای مربوط به یک ذره واقع در داخل جعبه پتانسیلی به اضلاع  $a, b, c$  را به دست آورید (شکل ۹.۲).

حل: با تعمیم استدلال قبلی، یادآوری می‌کنیم که سه مؤلفه  $p_x, p_y, p_z$  تکانه ذره باید در روابطی مشابه با معادله (۱۳.۲) برای جعبه یک بعدی صدق کنند بنا بر این

$$p_x = \frac{\pi \hbar n_x}{a}, \quad p_y = \frac{\pi \hbar n_y}{b}, \quad p_z = \frac{\pi \hbar n_z}{c}$$

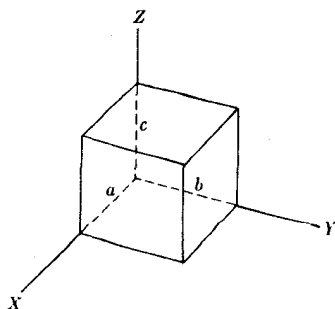
که در آن  $n_x, n_y, n_z$  و  $n_x, n_y, n_z$  اعداد درست اند. در این صورت

$$E = \frac{1}{2m} p^2 = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left( \frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right) \quad (17.2)$$

رابطه بالا ترازهای انرژی ذره واقع در جعبه پتانسیل سه بعدی را به دست می‌دهد. از مقایسه معادله (۱۷.۲) با معادله (۱۵.۲) نتیجه می‌گیریم که تابع موج را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\psi = C \sin \frac{n_x \pi x}{a} \sin \frac{n_y \pi y}{b} \sin \frac{n_z \pi z}{c} \quad (18.2)$$

در اینجا دانشجو باید با جانمایی مستقیم معادله (۱۸.۲) در معادله شرودینگر (۹.۲)، به ازای  $E_p = 0$  نشان دهد که مقدار داده شده به وسیله معادله (۱۷.۲) برای انرژی نیز قابل حصول است و درشش رخ جعبه پتانسیل نیز تابع موج مساوی با صفر است، یعنی  $\psi = 0$ . این همان در بایستی بود که برای جعبه پتانسیل یک بعدی در نظر گرفتیم. همچنین توجه کنید که معادله (۱۸.۲) از لحاظ صوری معادل با معادله تابع دامنه برای امواج ایستاده به دام افتاده در یک کاواک راستگوشه است.



شکل ۹.۲ جعبه پتانسیل سه بعدی.

يك وضع مهم هنگامي پيش می آید که جعبه پتانسیل مکعبی باشد، یعنی  $a = b = c$ . در این حالت، انرژیهای ممکن با رابطه زیر داده می شوند

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{\pi \hbar^2}{2ma^2} k^2$$

که در آن  $k^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$  و تابع موجهای متناظر عبارت اند از

$$\psi = C \sin \frac{\pi n_x x}{a} \sin \frac{\pi n_y y}{a} \sin \frac{\pi n_z z}{a}$$

توجه کنید که انرژی فقط به  $k^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$  وابسته است. این بدان معنی است که انرژی تمام حالتهای متناظر با تمام اعداد درست  $n_x, n_y, n_z$  و  $n_x$  که مقدار یکسانی را برای  $k$  به دست می دهند، یکسان است. اما، هنگامی که اعداد  $n_x, n_y, n_z$  تغییر می کنند بی آنکه مقدار  $k$  تغییر کند، تابع موج نیز تغییر خواهد کرد. از این رو ممکن است یک تراز انرژی مشخص به چندین تابع موج یا حالتهای دینامیکی وابسته باشد. در چنین وضعی گفته می شود که تبهگنی وجود دارد. مرتبه تبهگنی هر تراز انرژی که با  $g$  نمایش داده می شود، برابر است با تعداد تابع موجهای متفاوت (یا مستقل) مربوط به این تراز انرژی. در جدول ۱۰۲، این موضوع برای شش تراز اول انرژی يك جعبه پتانسیل مکعبی شکل نشان داده شده است و در آن  $E_1$  برابر است با  $\pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$ .

جدول ۱۰۲ ترازهای انرژی و تبهگنیها در جعبه پتانسیل مکعبی شکل  
( $E_1 = \pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$ )

تبهگنی $g$	ترکیبهای $n_x, n_y, n_z$	انرژی
۱	(۱, ۱, ۱)	$3E_1$
۴	(۲, ۱, ۱) (۱, ۲, ۱) (۱, ۱, ۲)	$6E_1$
۳	(۲, ۲, ۱) (۲, ۱, ۲) (۱, ۲, ۲)	$9E_1$
۳	(۳, ۱, ۱) (۱, ۳, ۱) (۱, ۱, ۳)	$11E_1$
۱	(۲, ۲, ۲)	$12E_1$
۶	(۱, ۲, ۳) (۳, ۲, ۱) (۲, ۳, ۱) (۱, ۳, ۲) (۲, ۱, ۳) (۳, ۱, ۲)	$14E_1$



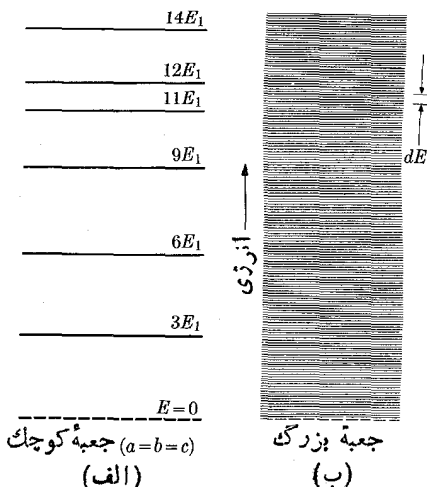
مثال ۴۰۲ تعداد ترازهای انرژی موجود در گستره کوچک انرژی  $dE$  برای ذره‌ای واقع در جعبه پتانسیل بسیار بزرگ را مورد بحث قرار دهید.

حل: برای سهولت، جعبه پتانسیل مکعبی شکلی به اضلاع  $a$  را در نظر می‌گیریم. در این صورت با توجه به مسئله قبل، ترازهای انرژی ذره در جعبه با رابطه زیر داده می‌شوند

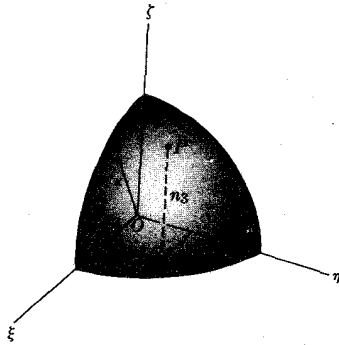
$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

که در آن  $n_x, n_y, n_z$  و  $n$  اعداد درست‌اند. مشاهده می‌کنیم که برای جعبه کوچک (یعنی مقدار کوچک  $a$ )، ترازهای انرژی مطابق آنچه در شکل ۱۰۰۲ (الف) نشان داده شده است از یکدیگر فاصله دارند. ولی برای جعبه بسیار بزرگ، همانند حالت مربوط به مولکولهای گاز موجود در ظرف یا برای الکترونهای موجود در فلز، ترازهای متوالی به قدری بهم نزدیک‌اند که عملاً طیف پیوسته‌ای را مانند شکل ۱۰۰۲ (ب) تشکیل می‌دهند. مسئله این است که تعیین کنیم وقتی جعبه پتانسیل بسیار بزرگ است، چه تعداد تراز انرژی در گستره کوچک  $dE$  وجود دارند. این مسئله خیلی شبیه به مسئله پیدا کردن مدهای نوسان امواج به دام افتاده در کاواکی است که ابعاد آن خیلی بزرگتر از طول موج است.

اکنون مختصات  $\xi, \eta, \zeta$  و  $\xi^2, \eta^2, \zeta^2$  فضای نمایشی مشخص را معرفی می‌کنیم (شکل ۱۱۰۲). هر نقطه با مختصات  $n_x = \xi, n_y = \eta, n_z = \zeta$  نشان‌دهنده یک تراز انرژی است و به هر نقطه در این فضای نمایشی یک سلول با حجم واحد مربوط می‌کنیم. در اینجا  $k$  را به صورت  $k^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$  تعریف می‌کنیم و می‌گوییم تعداد نقاطی که مختصات



شکل ۱۰۰۲ ترازهای انرژی برای (الف) جعبه پتانسیل کوچک، (ب) جعبه پتانسیل بزرگ.



شکل ۱۱.۲

درست مثبت دارند و بر سطح کره‌ای به شعاع  $k$  قرار دارند، حالت‌های مختلف وابسته به انرژی  $E$  را به دست می‌دهند که در آن

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} k^2$$

برای به دست آوردن تعداد حالت‌های  $N(E)$  با انرژی بین صفر و  $E$  باید حجم یک هشتم کره‌ای به شعاع  $k$  را تعیین کنیم، زیرا فقط مقادیر مثبت  $n_x$ ،  $n_y$ ، و  $n_z$  مجازند. بنابراین، با به خاطر آوردن اینکه  $\hbar = h/2\pi$  است، خواهیم داشت

$$N(E) = \frac{1}{8} \left( \frac{4}{3} \pi k^3 \right) = \frac{\pi}{6} V \left( \frac{2mE}{\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} = \frac{8\pi V}{3h^3} (2m^3)^{1/2} E^{3/2}$$

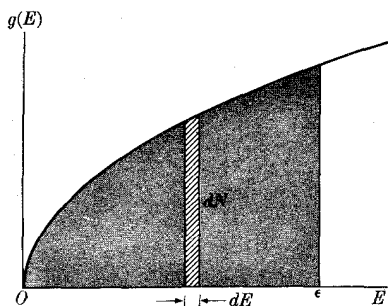
که در آن  $V = a^3$  حجم جعبه پتانسیل است. تعداد حالت‌های با انرژی بین  $E$  و  $E+dE$  نیز با دیفرانسیل‌گیری از عبارت بالا به دست می‌آید

$$dN(E) = \frac{4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} E^{1/2} dE$$

برای سهولت می‌نویسیم  $dN(E) = g(E) dE$ ، بنابراین

$$g(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} E^{1/2} \quad (19.2)$$

برابر تعداد حالت‌ها در بازه واحد انرژی در انرژی  $E$  است. تابع  $g(E)$  در شکل ۱۲.۲ رسم شده است. مساحت باریکه‌ای به پهنای  $dE$  نیز تعداد متناظر  $dN = g(E) dE$  از



شکل ۱۲۰۲ چگالی ترازهای انرژی درجه‌بندی پتانسیل مکعبی شکل بزرگ.

حالتها را در این گستره انرژی مشخص می‌کند. مساحت زیر منحنی از  $E=0$  تا  $E=\epsilon$  تعداد کل حالتها را در این بازه انرژی به دست می‌دهد. بعداً در حل مسائل از معادله (۱۹۰۲) استفاده می‌کنیم.

گاهی بهتر است که برای سهولت از تعداد حالتها موجود در بازه تکانه  $dp$  بین  $p$  و  $p+dp$  استفاده کنیم. با توجه به اینکه ذره موجود در داخل جعبه همچون یک ذره آزاد رفتار می‌کند، برای انرژی رابطه  $E = p^2 / 2m$  را خواهیم داشت. در اینجا  $g(p)$  را طوری تعریف می‌کنیم که  $dN = g(p) dp = g(E) dE$  باشد و در نتیجه داریم

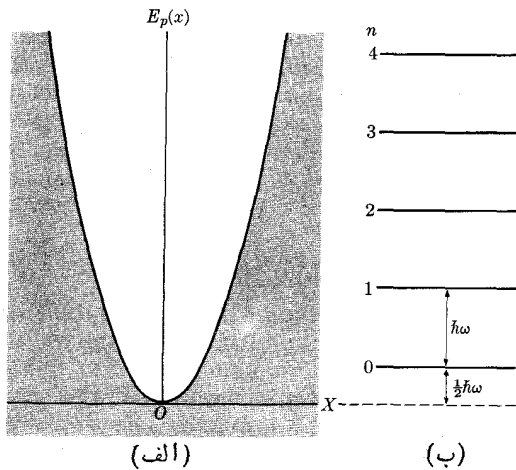
$$\frac{dN}{dp} = g(p) = g(E) \frac{dE}{dp} = \frac{4\pi V}{h^3} p^2$$

این رابطه برای تعداد مدهای امواج طولی به دام افتاده در کاواکی به حجم  $V$  نیز به کار می‌رود. در این حالتها بهتر است که از بسامد  $\nu$  استفاده کنیم. با توجه به رابطه  $p = h/\lambda$  و  $\nu = c/\lambda$  که در آن  $c$  سرعت فزای امواج است، و بسا تعریف  $g(\nu)$  به طریقی که  $g(\nu) d\nu = g(p) dp$  باشد، رابطه مفیدی را به صورت زیر به دست خواهیم آورد

$$g(\nu) = g(p) \frac{dp}{d\nu} = \frac{4\pi V}{c^3} \nu^2 \quad (2002)$$

## ۶.۲ نوسانگر هماهنگ

یک مسئله فیزیکی مهم عبارت است از مسئله نوسانگر هماهنگ که انرژی پتانسیل آن، همان طور که در شکل ۱۳۰۲ دیده می‌شود، با رابطه  $E_p = kx^2/2$  داده می‌شود. این مسئله می‌تواند اطلاعات پراهمیتی را درباره ارتعاشات اتمی در مولکولها و جامدات فراهم کند، زیرا در تقریب اول می‌توان فرض کرد که حرکت نسبی اتمها در داخل مولکولها و جامدات به صورت حرکت نوسانی هماهنگ است. در این حالت، معادله شروودینگر به صورت زیر درمی‌آید



شکل ۱۳.۲ (الف) انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ. (ب) ترازهای انرژی.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2\psi = E\psi$$

در اینجا بر آن نیستیم که این معادله را به طریق صوری حل کنیم، بلکه فقط می‌خواهیم نتایج اساسی آن را بیان کنیم. با توجه به اینکه بسامد زاویه‌ای برای نوسانگر هماهنگ مساوی با  $\omega = \sqrt{k/m}$  است، مقادیر ممکن انرژی ویژه حالتها با رابطه زیر به دست می‌آید

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad (21.2)$$

که در آن  $n$  مساوی با صفر یا یک عدد درست مثبت است، یعنی  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  از این رو، خواهیم داشت

$$E_n = \frac{1}{2} \hbar\omega, \frac{3}{2} \hbar\omega, \frac{5}{2} \hbar\omega, \dots$$

ترازهای انرژی شکل ۱۳.۲ به یک فاصله از هم قرار دارند و هر کدام به اندازه  $\hbar\omega$  (یا به اندازه  $h\nu$  زیرا  $\omega = 2\pi\nu$  و  $\hbar = h/2\pi$ ) با تراز مجاور خود اختلاف دارند.

یک نتیجه جالب آن است که کمینه انرژی نوسانگر هماهنگ برابر است با  $\hbar\omega/2$  یا  $h\nu/2$ . این مقدار به انرژی نقطه صفر نوسانگر معروف است زیرا با  $n=0$  متناظر است. این نتیجه، مانند نتیجه مشابه برای جعبه پتانسیل، با اصل عدم قطعیت ارتباط نزدیک دارد. کمینه انرژی کلاسیک با نقطه  $O$ ، واقع در قعر منحنی انرژی پتانسیل، متناظر است. اما در چنین نقطه‌ای  $x=0$  و نیز  $p=0$  چون در چنین وضعی هیچ نوسانی وجود ندارد، بنابراین ما به طور همزمان و با دقت کافی از مکان و تکانه ذره آگاهی داریم. ظاهراً این گفته

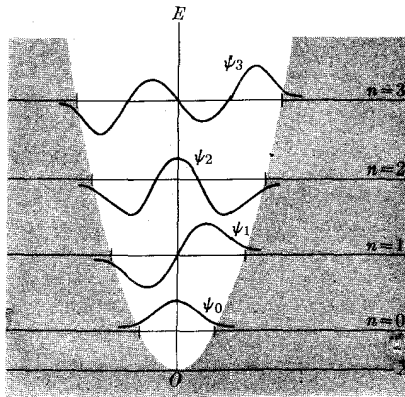
با اصل عدم قطعیت سازگاری ندارد. بنابراین، اولین تراز انرژی یا حالت پایه باید پایبندترین تراز انرژی باشد که با اصل عدم قطعیت سازگار است. برای روشن شدن مطلب یادآوری می‌کنیم که دامنه  $x$  نوسانها برای این تراز بخصوص، بسیار کوچک است و در نتیجه می‌توان نوشت  $(\Delta x/2) \sim x_0$ . ضمناً دامنه  $p_0$  تغییرات تکانه خیلی کوچک است به گونه‌ای که می‌توان نوشت  $(\Delta p/2) \sim p_0$ . انرژی یک نوسانگر کلاسیک با دامنه  $x_0$  برابر است با  $E = m\omega^2 x_0^2 / 2$  و با توجه به رابطه  $p_0 = m\omega x_0$  خواهیم داشت

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 x_0^2 = \frac{1}{2} \omega(x_0)(m\omega x_0) = \frac{1}{2} \omega x_0 p_0 \sim \frac{1}{8} \omega \Delta x \Delta p \sim \frac{1}{8} \hbar \omega \sim \frac{1}{2} \hbar \omega$$

در اینجا رابطه کلی تابع موجها برای نوسانگر هماهنگ ساده را به دست نمی‌آوریم (مسئله ۱۶.۲). جدول ۲.۲ چند تابع موج اول را نشان می‌دهد که در آنها  $\psi_0$  با حالت پایه متناظر است. این توابع در شکل ۱۴.۲ نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که در حدود کلاسیک نوسان، که با خطوط کوتاه قائم در هر حالت نشان داده شده است، این توابع سریعاً صفر نمی‌شوند. همان‌طور که قبلاً در بخش ۴.۲ برای پله پتانسیل در حالت  $E < E_0$  به دست آوردیم (شکل ۴.۲)، با آنکه به سرعت کاهش می‌یابند، اما از حدود کلاسیکی، فراتر می‌روند. این بدان معنی است که دامنه یک نوسانگر در مکانیک کوانتومی برخلاف حالت کلاسیک به صورت تیز تعریف نمی‌شود. در مکانیک کوانتومی ذره می‌تواند در یک لحظه خاص در ناحیه‌ای یافت شود که از نظر مکانیک کلاسیک، ناپستی در آنجا باشد. اما آزمایشهای زیادی این نتیجه را تأیید می‌کنند (این موضوع را بعداً بررسی خواهیم کرد). در شکل ۱۵.۲ چگالی احتمال  $P = |\psi(x)|^2$  برای حالت‌های متناظر با تابع موجهای موجود

جدول ۲.۲ تابع موجهای نوسانگر هماهنگ  $(a^2 = m\omega/\hbar)$

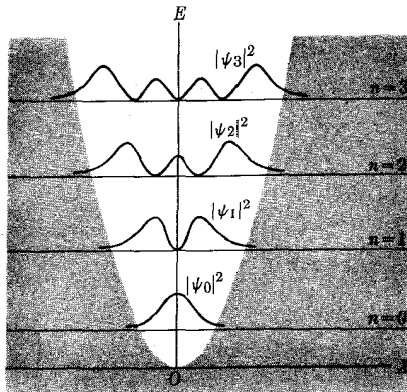
$\psi_n(x)$	$E_n$	$n$
$\psi_0(x) = (a/\sqrt{\pi})^{1/2} e^{-a^2 x^2/2}$	$\frac{1}{2} \hbar \omega$	۰
$\psi_1(x) = (a/2\sqrt{\pi})^{1/2} 2ax e^{-a^2 x^2/2}$	$\frac{3}{2} \hbar \omega$	۱
$\psi_2(x) = (a/8\sqrt{\pi})^{1/2} (2a^2 x^2 - 2) e^{-a^2 x^2/2}$	$\frac{5}{2} \hbar \omega$	۲
$\psi_3(x) = (a/48\sqrt{\pi})^{1/2} (8a^3 x^3 - 12ax) e^{-a^2 x^2/2}$	$\frac{7}{2} \hbar \omega$	۳



شکل ۱۴.۲ تابع موجهای متناظر با چهار تراز اول انرژی نوسانگر هماهنگ.

در شکل ۱۵.۲ نشان داده شده است. توجه کنید که، با اینکه احتمال مشاهده ذره در خارج حدود کلاسیکی نوسان مقدار معینی است اما ذره عمدتاً در ناحیه کلاسیکی محبوس است.

تا اینجا نوسانگرهای خطی، یعنی نوسانگرهایی که فقط در یک بعد نوسان می کنند را بررسی کردیم. در حالت کلی (سه بعدی)، مانند حالت مربوط به اتم موجود در جامد، ترازهای انرژی با رابطه زیر داده می شوند



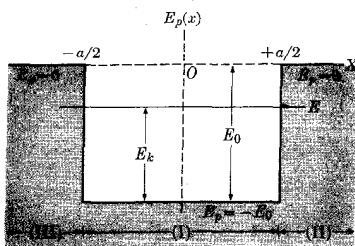
شکل ۱۵.۲ چگالیهای احتمال متناظر با چهار تراز اول انرژی نوسانگر هماهنگ.

$$E_n = \left(n + \frac{3}{4}\right) h\omega \quad (۲۲.۲)$$

تنها اختلاف در این است که در اینجا انرژی نقطه صفر به جای مقدار  $h\omega/2$  برابر مقدار  $h\omega(3/4)$  است، زیرا ما باید انرژیهای نقطه صفر برای نوسانهای موجود در امتداد محوره های  $X, Y, Z$  متناظر با انرژی  $h\omega/2$  برای هر مختصه، را با یکدیگر جمع کنیم.

**مثال ۵.۲** ویژه حالت‌های ممکن برای انرژی پتانسیل شکل ۱۶.۲ را بررسی کنید. چنین انرژی پتانسیلی به چاه پتانسیل معروف است. این انرژی پتانسیل با روابط  $E_p = E_0 - E$  به ازای  $|x| \leq a/2$  و  $E_p = 0$  به ازای  $|x| > a/2$  تعریف می‌شود. این نوع انرژی پتانسیل دارای کاربردهای مهم بسیاری است، مخصوصاً وقتی که با نیروهای کوتاه‌برد سروکار داریم، یعنی نیروهایی که در فواصل بزرگتر از یک مقدار معین (برد) بسیار کوچک و قابل چشم‌پوشی‌اند. این بدان معنی است که در خارج این برد، مقدار پتانسیل ثابت است. ظاهراً این وضع در مورد نیروهای هسته‌ای صادق است.

**حل:** این مسئله معادل است با مسئله دوپله پتانسیل که یکی تصویر آینه‌ای دیگری است و به فاصله  $a$  از یکدیگر قرار دارند. از نظر کلاسیک، برای انرژی منفی (یعنی  $E < 0$ )، ذره باید در داخل چاه محبوس باشد یا به عبارت دیگر، ذره میان دوحد  $x = -a/2$  و  $x = +a/2$  باقی بماند اما، با توجه به مثالهای قبلی انتظار می‌رود که چنین وضعی در مکانیک کوانتومی صادق نباشد. برای ناحیه (I)، که در آن  $-a/2 \leq x \leq a/2$ ، انرژی پتانسیل ثابت است و ذره، با آنکه مقید است که به طرف جلو و عقب حرکت کند، اما اساساً آزاد است. از این رو، دامنه میدان آن یعنی  $\psi_1(x)$  باید مجدداً تابع هماهنگی از نوع (۷.۲) باشد. در نواحی ممنوع (II) و (III)، دامنه‌های میدان  $\psi_2(x)$  و  $\psi_3(x)$  بسایند



شکل ۱۶.۲ چاه پتانسیل راستکوشه یک بعدی به پهنای  $a$  و عمق  $E_0$ .

به طور نمایی نزول کند، یعنی همان طور که قبلا در شکل ۴.۲ برای يك پله پتانسیل منفرد نشان دادیم. بنا بر این، شرط مرزی به کار رفته برای به دست آوردن تابع موج شکل ۴.۲ را باید دوبار به کار برد، يك بار در  $x = -a/2$  و بار ديگر در  $x = a/2$ . چون ما دو مجموعه شرایط مرزی را به کار می بریم، فقط برای مقادیر مشخصی از انرژی می توانند صادق باشند. در نتیجه، انرژی،  $E$ ، ذره موجود در چاه پتانسیل کوانتیده است. مقادیر ممکن  $E$  را نمی توان به صورت ساده ای بیان کرد و در اینجا نیز وارد بحث آن نمی شویم (برای يك حالت مشابه به مثال ۶.۲ رجوع کنید). تعداد ترازهای انرژی محدود است و فقط می تواند يك یا دو یا سه و مانند آن باشد، که به عمق  $E_0$  و پهنای چاه پتانسیل،  $a$ ، بستگی دارد. یعنی برای حالتی که در آن  $E_0 a^2 < \pi^2 \hbar^2 / 2m$  است، فقط يك تراز انرژی ممکن وجود دارد برای

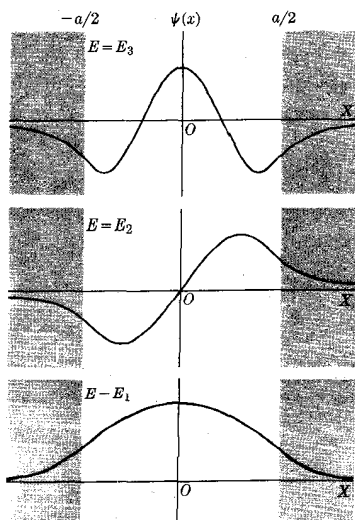
$$\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} < E_0 a^2 < \frac{4\pi^2 \hbar^2}{2m}$$

دو تراز انرژی، و برای

$$\frac{4\pi^2 \hbar^2}{2m} < E_0 a^2 < \frac{9\pi^2 \hbar^2}{2m}$$

نیز سه تراز انرژی وجود دارد و به همین ترتیب.

در شکل ۱۷.۲ تابع موجهای حالت پایه و دو حالت برانگیخته اول، برای حالتی که در آن سه تراز انرژی مجازند نشان داده شده است. مشاهده می شود که تشابهی میان این توابع و تابع موجهای نوسانگر هماهنگ وجود دارد. در اینجا دانشجو باید چگالی احتمالی



شکل ۱۷.۲ سه تابع موج اول در يك چاه پتانسیل يك بعدی.

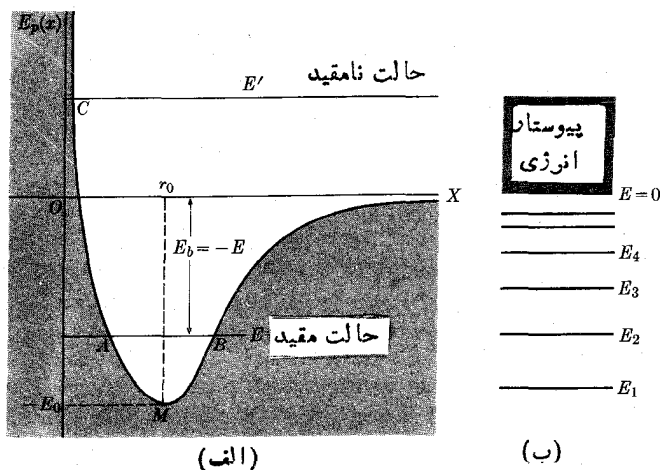


$P = |\psi|^2$  متناظر با این حالتها را رسم کند. همچنین بررسی حالتی که در آن  $E > E_0$  است و نیز رسم تابع موجها و چگالیهای احتمال را به دانشجو واگذار می کنیم. در این حالت، تمام مقادیر انرژی قابل قبول اند و انرژی کوانتیده نخواهد بود.

## ۷.۲ ترازهای انرژی و تابع موجها در حالت کلی

در بحث پله پتانسیل، جعبه پتانسیل، نوسانگر هماهنگ، و چاه پتانسیل، ماهیت کلی ویژه حالتها و تابع موجها مطرح می شود. شکل ۱۸.۲ (الف) انرژی پتانسیل  $E_p(x)$  را نشان می دهد که با انرژی پتانسیل به دست آمده در مسئله نیروی مرکزی یا در مولکول دو اتمی مشابه است. برای مقادیر بزرگ  $x$ ، انرژی پتانسیل به مقدار اساساً ثابتی می رسد که بنا به قرارداد آن را صفر انرژی در نظر می گیریم. هنگامی که فاصله ها کاهش می یابند، انرژی پتانسیل کم می شود که نشان دهنده نیروی جاذبه است. در  $M$ ، انرژی پتانسیل کمینه و برابر با  $-E_0$  است. فاصله متناظر  $r_0$  از  $O$  نیز فاصله جدایی تعادل کلاسیکی است. هنگامی که این فاصله مقدار بیشتری کاهش می یابد، انرژی پتانسیل به سرعت افزایش می یابد که نشان دهنده نیروی دافعه است.

در انرژیهای منفی، حرکت از دیدگاه کلاسیکی مقید است. به عنوان مثال، هنگامی که انرژی ذره  $E$  است، از دیدگاه کلاسیک حرکت آن به صورت یک حرکت نوسانی میان  $A$  و  $B$  است. این دو نقطه به حدود کلاسیکی نوسان معروف اند. برای انرژیهای مثبت ( $E > 0$ ) مانند  $E'$ ، ذره ای که از طرف راست به این ناحیه نزدیک می شود، هنگام رسیدن به نقطه  $C$



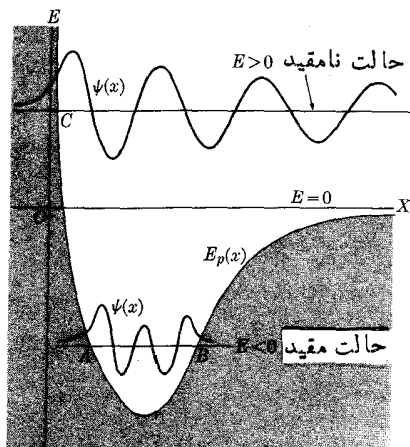
شکل ۱۸.۲ (الف) منحنی انرژی پتانسیل کلی متناظر با نیروی دافعه قوی در مقادیر کوچک  $x$  و برهم کنش قابل چشمپوشی در مقادیر بزرگ  $x$ . (ب) ترازهای انرژی متناظر با انرژی پتانسیل نشان داده شده در (الف).

متوقف می شود و سپس به طرف عقب برمی گردد و به بینهایت می رود. به همین دلیل است که نقطه  $C$  به نقطه برگشت کلاسیکی معروف است.

در مکانیک کوانتومی نیز توصیف همین است، منتهی بعضی خصوصیات جدید پدیدار می شود: (الف) حالت های مقید فقط در انرژی های منفی مشخصی پدیدار می شوند به گونه ای که به ازای  $0 < E$  یک طیف گسسته از ترازها یا حالت های انرژی وجود دارد. این موضوع صحیح است زیرا به ازای  $0 < E$ ، حرکت به دو حد کلاسیکی نوسان محدود می شود و از این رو، در شرط مرزی بر تابع موجها اعمال می کند. بدین ترتیب جواب های مناسب معادله شرودینگر فقط برای انرژی های مشخصی وجود دارند. این همان وضعی است که به عنوان مثال در حالت مربوط به جعبه پتانسیل به دست آوردیم. (ب) حالت های نامقید فقط برای تمام انرژی های مثبت وجود دارند. بنابراین چنین می گوئیم که به ازای  $0 < E$ ، یک طیف پیوسته از ترازها یا حالت های انرژی موجود است. دلیل این مطلب این است که وقتی  $0 < E$ ، حرکت فقط به یک نقطه، یعنی نقطه برگشت کلاسیکی، محدود می شود به گونه ای که فقط یک شرط مرزی مورد نیاز است. در نتیجه، جواب معادله شرودینگر باید ثابت دلخواه یعنی انرژی، به اندازه کافی انعطاف پذیر خواهد بود. این وضع قبلاً در مورد پله پتانسیل مطرح شده است. از نظر فیزیکی، چنین وضعی به این دلیل رخ می دهد که ما همیشه می توانیم انرژی ذره را هنگامی که در فاصله خیلی زیادی قرار دارد، به طور دلخواهی ثابت در نظر بگیریم. مثلاً، هنگامی که ذره بار داری در یک ماشین شتاب می گیرد و سپس به طرف هسته هدفی پرتاب می شود، یا هنگامی که یک اتم با اتم دیگری در گاز برخورد می کند، این کار را می توان انجام داد. (طیف های گسسته و پیوسته انرژی به طور طرح وار در شکل ۱۸.۲ (ب) نشان داده شده اند). اما، در حالت مربوط به انرژی پتانسیل مانند آنچه در شکل ۱۳.۲ نشان داده شده و با نوسانگر هماهنگ متناظر است، هیچ طیف انرژی پیوسته ای وجود ندارد و تمام ترازها گسسته اند.

هنگامی که ذره در حالت مقید با انرژی منفی  $E$  قرار دارد، کمینه انرژی مورد نیاز برای اینکه ذره به فاصله خیلی دور برده شود برابر است با  $E_p = -E$ . این انرژی به انرژی بستگی ذره در آن حالت معروف است (گاهی، هنگامی که به حالت پایه مولکول دو اتمی اشاره می کنیم آن را انرژی تفکیک می نامیم، زیرا کمینه انرژی لازم برای جدا کردن دو اتم هنگامی است که مولکول در حالت پایه خود قرار دارد. در حالت مربوط به الکترون موجود در داخل اتم یا مولکول، این انرژی به انرژی یونش معروف است).

تابع موج های مربوط به  $0 < E$  به تابع موج های نوسانگر هماهنگ شباهت دارند، به استثنای اینکه شکل دقیق آنها به شکل انرژی پتانسیل  $E_p(x)$  وابسته است. شکل ۱۹.۲ تابع موج را برای تراز انرژی منفی ( $0 < E$ ) طیف گسسته (یعنی حالت مقید) و نیز برای تراز انرژی مثبت ( $0 > E$ ) طیف پیوسته (یعنی حالت نامقید) نشان می دهد. در هر دو حالت، تابع موجها تا آن طرف حدود کلاسیکی حرکت امتداد می یابد ولی در خارج آن حدود به سرعت کاهش پیدا می کند. مخصوصاً برای مقادیر بزرگ  $x$ ، تابع موج انرژی



شکل ۱۹.۲ شکل تابع موجهای مربوط به حالت‌های مقید و نامقید متناظر با انرژی پتانسیل نشان داده شده در شکل ۱۸.۲ (الف).

مثبت یا حالت نامقید، به تابع موج ذره آزاد شبیه است و شکل مجانبی آن با معادله (۷.۲) داده می‌شود

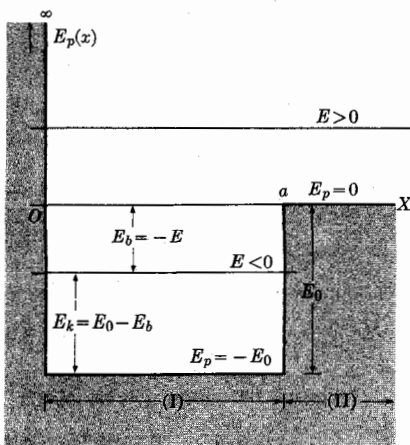
$$\psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

زیرا باید نشانهندهنده ذره ورودی و ذره خروجی یا بازتابیده باشد.

**مثال ۶.۲** ترازهای انرژی و تابع موجهای مربوط به انرژی پتانسیل بیان شده با منحنی شکل ۲۵.۲ را بررسی کنید. در  $x=0$ ، انرژی پتانسیل به سمت بینهایت میل می‌کند. به ازای  $0 < x < a$ ، انرژی پتانسیل مقدار ثابتی برابر با  $E = -E_0$  دارد و به ازای  $x > a$  نیز مساوی با صفر است. از این رو، می‌توان گفت که چنین انرژی پتانسیلی، یک «مربع» ایده‌آل شده از منحنی انرژی پتانسیل شکل ۱۸.۲ است.

**حل:** ابتدا حالت  $E < 0$  را در نظر می‌گیریم، که با حالت‌های مقید متناظر است. در چنین حالتی ذره مجبور است که به‌طور کلاسیکی در ناحیه‌ی میان  $x=0$  و  $x=a$  یا در ناحیه (I) حرکت کند. بنابراین، انرژی  $E_0 = -E$  عبارت است از انرژی تفکیک یا انرژی بستگی یعنی کمیته انرژی برای برداشتن ذره از چاه پتانسیل. با توجه به  $E_p(x) = -E_0$ ، معادله شرودینگر (۳.۲) برای چنین ناحیه‌ای به صورت زیر درمی‌آید

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} - E_0 \psi = E \psi$$



شکل ۲۰.۲ چاه پتانسیل راستگوشه که در  $x = 0$  به وسیله یک دیوار پتانسیلی محدود شده است.

یا

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k_i^2\psi = 0$$

که در آن

$$k_i^2 = 2m \frac{(E_0 + E)}{\hbar^2} = 2m \frac{(E_0 - E_b)}{\hbar^2}$$

و  $p_i = \hbar k_i$  نیز تکانه در داخل چاه است. جواب این معادله به وسیله معادله (۷.۲) داده می شود یا

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_i x} + Be^{-ik_i x}$$

با به خاطر آوردن حالت مربوط به جمع پتانسیل لازم می آید که در  $x = 0$  تابع  $\psi_1$  مساوی با صفر باشد، این بدان معنی است که  $A + B = 0$  یا  $B = -A$  از این رو

$$\psi_1(x) = A(e^{ik_i x} - e^{-ik_i x}) = C \sin k_i x$$

که در آن  $C$  برابر است با  $2iA$ . در ناحیه (II) که با  $x > a$  متناظر است، با در نظر گرفتن  $E_p(x) = 0$ ، معادله شرودینگر به صورت زیر درمی آید

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha^2\psi = 0$$

که در آن

$$\alpha^2 = -\frac{\gamma m E}{\hbar^2} = \frac{\gamma m E_b}{\hbar^2}$$

با به خاطر آوردن بحث پله پتانسیل که در بخش ۴.۲ مطرح شد، مشاهده می شود که جواب این معادله به صورت زیر است

$$\psi_2(x) = De^{-\alpha x}$$

اکنون باید شرایط پیوستگی تابع موج در  $x=a$  را در نظر بگیریم، یعنی

$$\psi_1 = \psi_2$$

و

$$\frac{d\psi_1}{dx} = \frac{d\psi_2}{dx}$$

که از آن روابط زیر به دست می آید

$$C \sin k_1 a = De^{-\alpha a}$$

و

$$k_1 C \cos k_1 a = -\alpha De^{-\alpha a}$$

هر گاه دو رابطه بالا را بر یکدیگر تقسیم کنیم، ضرایب  $C$  و  $D$  حذف می شود و خواهیم داشت

$$k_1 \cot k_1 a = -\alpha \quad (23.2)$$

یا با قراردادن عبارات مربوط به  $k_1$  و  $\alpha$  نتیجه می گیریم

$$\left[ \frac{\gamma m (E_0 - E_b)}{\hbar^2} \right]^{1/2} \cot \left[ \frac{\gamma m (E_0 - E_b)}{\hbar^2} \right]^{1/2} a = - \left[ \frac{\gamma m E_b}{\hbar^2} \right]^{1/2}$$

در این معادله تنها کمیتی که تاکنون به طور دلخواه باقی مانده است انرژی  $E_0$  است. از این رو این معادله بیان کننده شرطی برای ترازهای انرژی ممکن در داخل چاه است. اما چون یک معادله غیر جبری است، مشکل است که  $E_0$  را همانند آنچه برای جعبه پتانسیل انجام

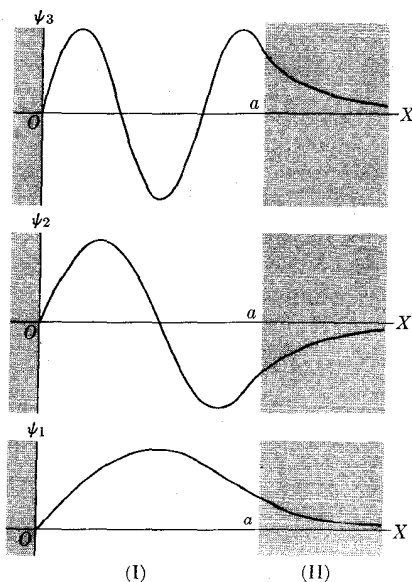
دادیم، به صورت ساده‌ای به دست آوریم. این وضع خیلی شبیه است به حالتی که قبلاً در ارتباط با چاه مربعی شکل بیان کردیم (مثال ۵.۲). از این رو، بسته به عمق  $E_0$  چاه امکان دارد که هیچ، يك، یا دو، ... تراز انرژی موجود باشد. می‌توان نشان داد که اگر  $E_0 a^2 < \pi^2 \hbar^2 / \lambda m$ ، هیچ حالت مقیدی وجود ندارد. اگر

$$\frac{\pi^2 \hbar^2}{\lambda m} < E_0 a^2 < \frac{9\pi^2 \hbar^2}{\lambda m}$$

فقط يك حالت مقید موجود است و اگر  $9\pi^2 \hbar^2 / \lambda m < E_0 a^2 < 25\pi^2 \hbar^2 / \lambda m$  دو حالت مقید وجود دارد و به همین ترتیب از این رو، تعداد ترازهای انرژی مقید به مقدار حاصل ضرب  $E_0 a^2$  یعنی انرژی ضربدر مجذور گستره چاه پتانسیل وابسته است.

در شکل ۲۱.۲، تابع موجهای مربوط به حالتی که در آن سه حالت مقید وجود دارد نشان داده شده‌اند. دانشجو می‌تواند این توابع را با آنهایی که برای انرژی پتانسیل موجود در شکل ۱۸.۲ داده شده‌اند، مقایسه کند. از این رو، این مثال نسبتاً ساده می‌تواند به دانشجو کمک کند تا بحث ما در ارتباط با انرژی پتانسیل واقعیت‌تر شکل ۱۸.۲ را، که به پتانسیل فیزیکی نزدیکتر است، بهتر درک کند.

اکنون حالت‌های انرژی مثبت (یعنی  $E > 0$ ) را در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌شود



شکل ۲۱.۲ تابع موجهای متناظر با چاه پتانسیل

نشان داده شده در شکل ۲۰.۲.

که چنین حالتی با حالتی مقید متناظر نیستند، زیرا در اینجا ذره می تواند میان  $x = 0$  و  $x = \infty$  حرکت کند. مجدداً با استفاده از رابطه  $k_i^2 = 2m(E_0 + E)/\hbar^2$  به گونه ای که  $p_i = \hbar k_i$  تکانه در داخل چاه باشد، می توانیم جواب را به ازای  $x < a$  مانند قبل به صورت زیر بنویسیم، یعنی

$$\psi_1(x) = C \sin k_i x$$

در اینجا به ازای  $x > a$  که در آن  $E_p$  مساوی با صفر است، معادله شرودینگر به صورت زیر درمی آید

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E \psi$$

یا

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0$$

که در آن  $k^2 = 2mE/\hbar^2$  و  $p = \hbar k$  نیز تکانه ذره آزاد در خارج چاه است. جواب این معادله از نوعی است که به وسیله معادله (۲۰۲) داده شده است. اما در این حالت برای سهولت بهتر است در شکل معادل آن یعنی به صورت زیر بنویسیم

$$\psi_2(x) = D \sin(kx + \delta)$$

کمیت  $\delta$  به انتقال فاز معروف است. معنی فیزیکی آن را به طور مختصر توضیح می دهیم. با به کار بردن شرایط پیوستگی تابع موج در  $x = a$  رابطه زیر را به دست می آوریم

$$k_i \cot k_i a = k \cot(ka + \delta) \quad (24.2)$$

تفاوت این معادله با معادله (۲۳.۲)، علاوه بر سایر چیزها، در این است که در این معادله

۱. با توجه به رابطه زیر مشاهده می شود که هر دو شکل کاملاً با هم هم ارزند

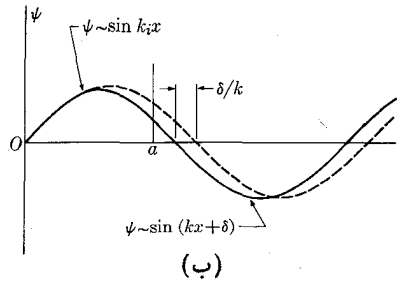
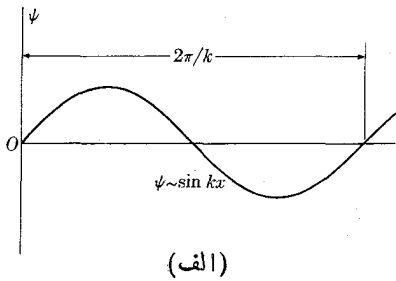
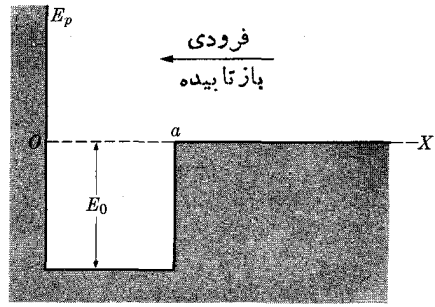
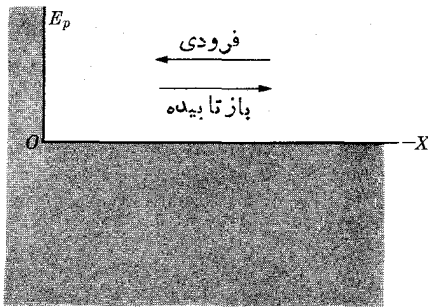
$$e^{\pm ikx} = \cos kx \pm i \sin kx$$

در این صورت

$$\begin{aligned} \psi &= A e^{ikx} + B e^{-ikx} = (A+B) \cos kx + i(A-B) \sin kx \\ &= C \sin(kx + \delta) \end{aligned}$$

که در آن

$$\tan \delta = \frac{(A+B)}{i(A-B)}$$



شکل ۲۲.۲ منشأ انتقال فاز.

کمیت دلخواه  $\delta$ ، که همان انتقال فاز است، وجود دارد. از این رو، با انتخاب مناسب انتقال فاز  $\delta$ ، همیشه می‌توان معادله (۲۴.۲) را برای هر انرژی  $E$  (یا تکانه  $\hbar k$ ) به کار برد و در نتیجه، همان‌طور که انتظار می‌رفت، طیف انرژی مثبت پیوسته است.

منشأ انتقال فاز را می‌توان به طریق زیر درک کرد. اگر انرژی پتانسیل مانند انرژی پتانسیل شکل ۵.۲ بود که در شکل ۲۲.۲ (الف) (به صورت معکوس) نشان داده شده است، در آن صورت تابع موج به صورت  $\psi \sim e^{ikx} - e^{-ikx} \sim \sin kx$  درمی‌آید که شامل باریکه‌های ذرات فرودی و بازتابیده است؛ طول موج هر دو باریکه برابر  $\lambda = 2\pi/k$  است. ولی هنگامی که چاه پتانسیل [شکل ۲۲.۲ (ب)] را داخل کنیم، تابع موج در ناحیه  $0 \leq x \leq a$  واپیچیده خواهد شد، و باینکه در  $x > a$  هنوز هم طول موج مساوی  $2\pi/k$  است، منحنی  $\sin kx$  را باید در امتداد محور  $X$  به اندازه  $\delta/k$  جابه‌جا کنیم تا در نقطه  $x = a$  به طور همواری به تابع موج موجود در چاه (که طول موج متفاوت  $\lambda_i = 2\pi/k_i$  را داراست) پیوندد. به عبارت دیگر، یک اصلاح موضعی در انرژی پتانسیل میان  $x = 0$  و  $x = a$  تمام روی تابع موج تأثیر می‌گذارد. این موضوع به ازای  $x > a$  با انتقال فاز  $\delta$  بیان می‌شود.

## ۸.۲ نفوذ در سد پتانسیل

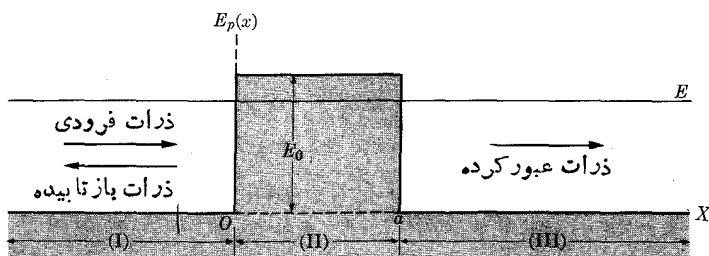
این که تابع موج می‌تواند فراتر از حدود کلاسیکی حرکت گسترش پیدا کند به پدیده مهمی



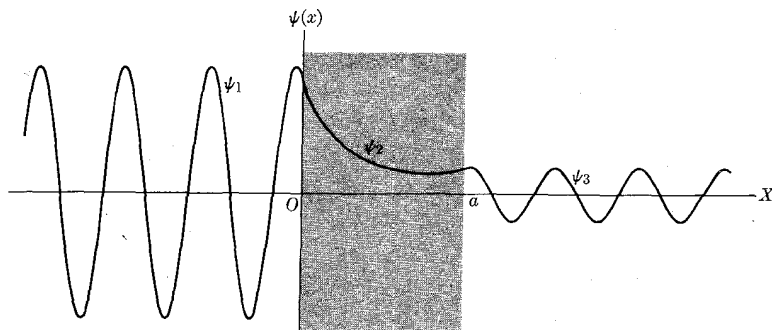
منجر می شود که به نفوذ در سد پتانسیل معروف است. در اینجا پتانسیلی را مطابق آنچه در شکل ۲۳.۲ نشان داده شده است در نظر می گیریم. این پتانسیل که وارونه چاه پتانسیل شکل ۱۶.۲ است، از دوپله پتانسیل تشکیل شده است که به سد پتانسیل معروف است. در اینجا نیز مانند قبل، حالت های  $E < E_0$  و  $E > E_0$  را به طور جداگانه بررسی می کنیم. مکانیک کلاسیک ایجاب می کند که وقتی ذره ای با انرژی  $E < E_0$  از طرف چپ به سد نزدیک می شود، مطابق آنچه قبلا در بخش ۴.۲ آمد، در  $x = 0$  به طرف عقب بازتابیده شود. اما، هنگامی که مسئله را بر طبق مکانیک کوانتومی بررسی می کنیم و جواب معادله شرودینگر را برای نواحی (I)، (II)، (III) به دست می آوریم، نتیجه می گیریم که تابع موج به طور کلی به صورت تابع موج شکل ۲۴.۲ است. مؤلفه های این تابع عبارت اند از

$$\psi_1 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad \psi_2 = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x}, \quad \psi_3 = A'e^{ikx}$$

که در آن  $k$  و  $\alpha$  همانند آنچه در بخش ۴.۲ گفتیم عبارت اند از



شکل ۲۳.۲ سد پتانسیل راستکوشه به پهنای  $a$  و ارتفاع  $E_0$ .



شکل ۲۴.۲ تابع موج متناظر با سد پتانسیل موجود در شکل ۲۳.۲ به ازای انرژی کوچکتر از ارتفاع سد.

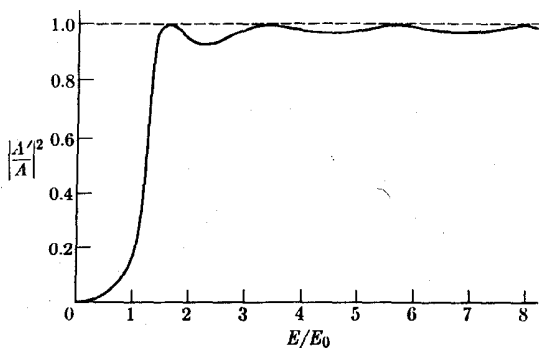
$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{و} \quad \alpha^2 = \frac{2m(E_0 - E)}{\hbar^2}$$

تابع موج  $\psi_1$  (مانند حالت‌های قبل) شامل ذرات فرودی و بازتابیده است.  $\psi_1$  به‌طور نمایی فرو می‌افتد، ولی باید شامل نمای مثبت نیز باشد، زیرا سد فقط تا  $x = a$  گسترش می‌یابد و نمای مثبت را نباید لزوماً، همچون حالت پله پتانسیل مستثنی کرد. چون  $\psi_1$  در  $x = a$  هنوز هم مساوی با صفر نیست لذا تابع موج به‌صورت نوسانی  $\psi_1$  تا ناحیه (III) ادامه می‌یابد که در آن  $\psi_1$  نشان‌دهنده ذرات عبور کرده‌ای است که انرژی آنها همان انرژی ذرات فرودی ولی دامنه آنها برابر  $A'$  است که به‌طور کلی با  $A$  تفاوت دارد. چون  $\psi_1$  مساوی با صفر نیست لذا احتمال معینی وجود دارد که ذره در ناحیه (III) باشد. به‌عبارت دیگر، برای ذره‌ای که انرژی جنبشی آن حتی از ارتفاع سد پتانسیل هم کوچکتر است امکان عبور از سد وجود دارد.

به‌ازای  $E > E_0$  توصیف کلاسیکی فرایند حاکی از آن است که تمام ذرات می‌توانند از سد پتانسیل عبور کنند و به‌طرف راست آن برسند. اما، در مکانیک کوانتومی به‌همان دلیلی که در حالت پله پتانسیل عنوان شد، بعضی از ذرات در  $x = 0$  و در  $x = a$  بازتابیده می‌شوند. از این‌رو، توابع موج در سه ناحیه به‌صورت زیر خواهند بود

$$\psi_1 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad \psi_2 = Ce^{ik'x} + De^{-ik'x}, \quad \psi_3 = A'e^{ikx}$$

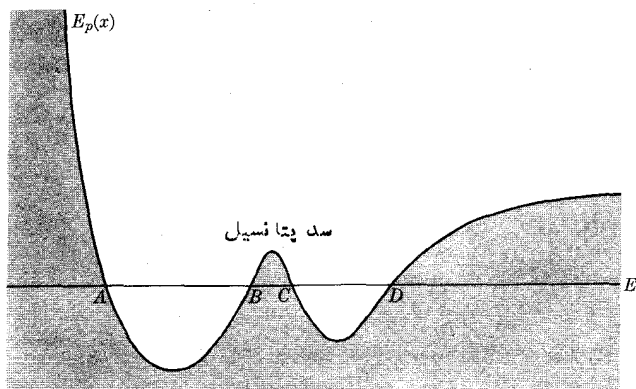
که در آن  $k' = \sqrt{2m(E - E_0)}/\hbar$  و  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$  تکانه ذرات هنگام عبور از سد پتانسیل است. با به‌کار بردن شرایط مرزی در  $x = 0$  و  $x = a$  می‌توان ضرایب  $B, C, D$ ، و  $A'$  را برحسب  $A$  در هر دو حالت  $E < E_0$  و  $E > E_0$  تعیین کرد. شفافیت سد به‌صورت  $T = |A'|^2/|A|^2$  تعریف می‌شود که مطابق آنچه در شکل ۲۵.۲ دیده می‌شود، با انرژی  $E$  تغییر می‌کند. توجه کنید که برای  $E > E_0$ ، عبور کامل ( $T = 1$ ) به‌ازای مقادیر مشخصی از  $E/E_0$  وجود دارد. این مقادیر با وضعیت‌هایی متناظرند که در آنها طول موج ذره، که



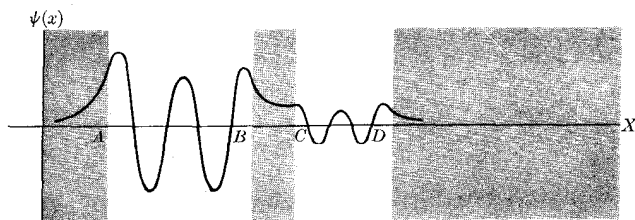
شکل ۲۵.۲ ضریب عبور سد پتانسیل راستگوشه.

هنگام عبور از سد پتانسیل با رابطه  $\lambda' = 2\pi/k'$  داده می‌شود، مساوی مضر بی از  $2a$  باشد. این وضعیت را اثر تشدید در نظر می‌گیرند.

شکل ۲۶.۲ یک حالت کلیتر را نشان می‌دهد. طبق مکانیک کلاسیک، هر گاه ذره دارای انرژی  $E$  باشد می‌تواند میان  $A$  و  $B$  یا میان  $C$  و  $D$  حرکت کند. اگر ذره در آغاز میان  $A$  و  $B$  باشد هرگز میان  $C$  و  $D$  یافت نخواهد شد و برعکس. اما در مکانیک کوانتومی، باز هم منطبق متفاوتی حاکم است. هنگامی که معادله شرودینگر را برای این پتانسیل حل کنیم تابع موج  $\psi$  را مطابق آنچه در شکل ۲۷.۲ نشان داده شده است، به دست خواهیم آورد. با توجه به مثالهای قبل انتظار می‌رود که تابع موج میان نقاط  $A$  و  $B$  نوسانی باشد ولی در سمت راست  $B$  به‌طور نمایی تغییر کند. اما، در نقطه  $C$  تابع موج هنوز هم مقدار مشخص و معینی دارد. میان  $C$  و  $D$  که از دیدگاه کلاسیکی یک منطقه مجاز است، تابع موجها مجدداً به‌صورت نوسانی در می‌آیند. در سمت راست  $D$ ، تابع موج یکبار دیگر به‌طور نمایی کاهش می‌یابد. بنا بر این، نتیجه می‌گیریم که احتمال مشخص و معینی وجود دارد که ذره میان  $A$  و  $B$  یا میان  $C$  و  $D$  یافت شود. به عبارت دیگر، هر گاه ذره ابتدا میان  $A$  و  $B$  باشد،



شکل ۲۶.۲ حالت کلی سد پتانسیل.



شکل ۲۷.۲ شکل تابع موج در حالت کلی سد پتانسیل.

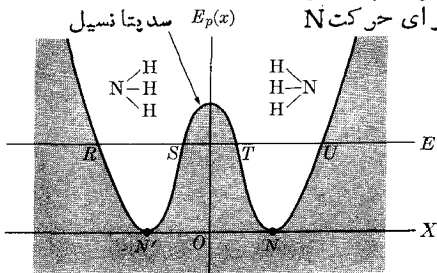
در زمان بعدی ممکن است میان  $C$  و  $D$  یافت شود و برعکس. برای اینکه عمل فوق اتفاق بیفتد، ذره باید از میان سد پتانسیل بین  $B$  و  $C$  عبور کند.

در مکانیک کلاسیک مسئله‌ای نظیر نفوذ در سد پتانسیل وجود ندارد زیرا با وضعی متناظر است که در آن، ذره دارای انرژی جنبشی منفی یا تکانه موهومی است. اما، هیچگونه اشکالی در مکانیک کوانتومی ایجاد نمی‌کند، زیرا نباید اصرار داشته باشیم که منطق مکانیک کلاسیک را در حوزه اتمی به کار بریم. نفوذ در سد پتانسیل در موارد بسیاری مشاهده شده است که در اینجا فقط دموورد آن را بررسی می‌کنیم.

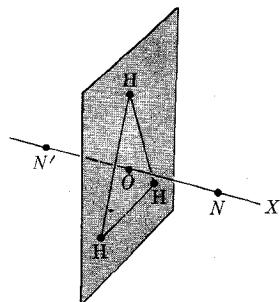
مولکول آمونیاک ( $NH_3$ ) هرمی است که اتم  $N$  در رأس و سه اتم  $H$  در قاعده آن قرار دارند [شکل ۲۸.۲ (الف)]. واضح است که اتم  $N$  می‌تواند در یکی از دو مکان تعادل متقارن  $N'$  و  $N''$  واقع در دو طرف قاعده هرم قسار گیرد. چون  $N'$  و  $N''$  باید مکانهای تعادل باشند، انرژی پتانسیل مربوط به حرکت اتم  $N$  در امتداد محور هرم باید دو کمینه داشته و نیز شکل آن مانند شکل متقارن ۲۸.۲ (ب)، با یک سد پتانسیل میان  $N'$  و  $N''$  باشد. هرگاه اتم  $N$  ابتدا در  $N$  باشد، ممکن است سرانجام از سد پتانسیل عبور کند و به  $N''$  برسد. اگر انرژی این حرکت کمتر از ارتفاع سد پتانسیل باشد، مانند تراز انرژی  $E$  در شکل، حرکت اتم  $N$  ترکیبی است از یک حرکت نوسانی میان  $R$  و  $S$  یا میان  $T$  و  $U$  (بسته به اینکه در کدام طرف صفحه باشد) و یک حرکت نوسانی خیلی آرامتر میان دو ناحیه کلاسیکی که از سد پتانسیل عبور می‌کند. بسامد حرکت دوم برای حالت پایه  $NH_3$  برابر است با  $10^{11} \times 2.3786$  Hz. از حرکت نوع دوم برای تعریف استاندارد زمان در ساعت‌های اتمی استفاده می‌شود.

به‌عنوان مثال دوم، الکترونها موجود در فلز را در نظر می‌گیریم. انرژی پتانسیل این الکترونها در شکل ۲۹.۲ (الف) نشان داده شده است. برای اینکه الکترونی در بالاترین تراز انرژی بتواند از فلز فرار کند باید مقداری انرژی حداقل مساوی با  $\phi$  به آن داده شود. این مقدار انرژی را می‌توان از طریق گرم کردن فلز یا به وسیله جذب یک فوتون

انرژی پتانسیل برای حرکت  $N$

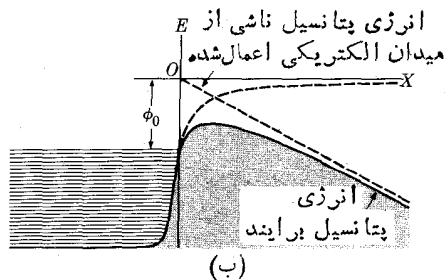
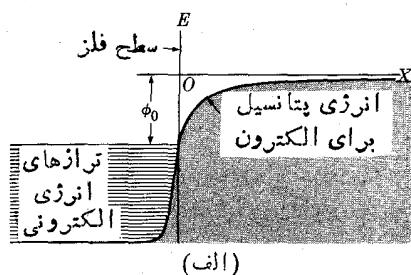


(ب)



(الف)

شکل ۲۸.۲ (الف) حرکت معکوس اتم نیتروژن در مولکول آمونیاک. (ب) انرژی پتانسیل برای حرکت معکوس.

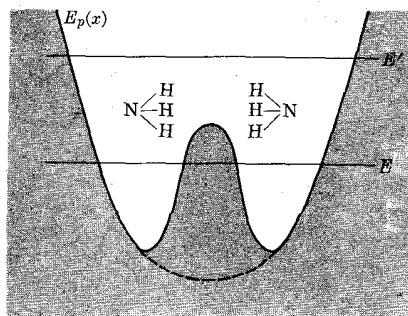


**شکل ۲۹.۲ (الف)** انرژی پتانسیل الکترون در فلز بدون اعمال میدان الکتريکی خارجی. **(ب)** انرژی پتانسیل برآیند هنگامی که میدان الکتريکی خارجی اعمال می‌شود.

(همانند حالت مربوط به اثر فوتوالکتريک) فراهم کرد. اما با به کار بردن يك میدان الکتريکی خارجی، که پتانسیل آن با خط چین مستقیم در شکل ۲۹.۲ (ب) نشان داده شده است، نیز امکان فرار برای الکترون فراهم می‌شود. انرژی پتانسیل برآیند با خط پر در شکل ۲۹.۲ (ب) نشان داده شده و با يك سد پتانسیل هم ارز است. پر انرژی‌ترین الکترونهاي فلز می‌توانند از سد عبور کنند و گسیل الکترونی توسط میدان را موجب شوند. در بخش ۳.۸ هنگام مطالعه گسیل ذرات آلفا به وسیله هسته‌ها اثر دیگری در مورد نفوذ در سد را بررسی خواهیم کرد.

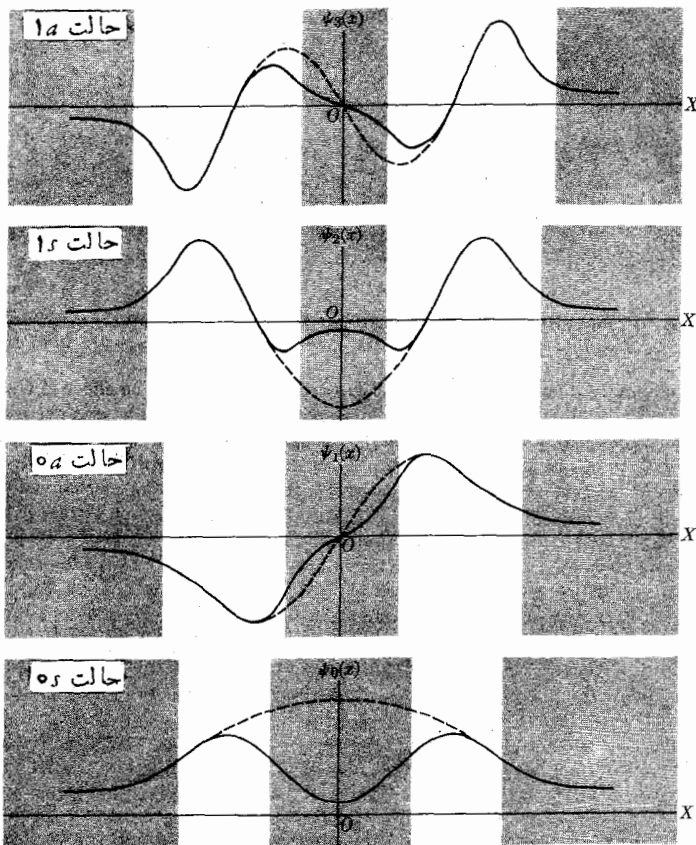
**مثال ۷.۲** تحلیل تابع موجها و ترازهای انرژی برای حرکت معکوس نیتروژن در مولکول  $\text{NH}_3$ .

**حل:** برای نشان دادن اینکه چگونه می‌توانیم اطلاعات بسیار مفیدی را از تحلیل کیفی تابع موجها به دست آوریم، حرکت معکوس نیتروژن در مولکول  $\text{NH}_3$  را با تفصیل بیشتری بررسی می‌کنیم. شکل ۳۰.۲ معرف همان انرژی پتانسیلی است که در شکل ۲۸.۲ (ب)



**شکل ۳۰.۲** انرژی پتانسیل برای حرکت معکوس در  $\text{NH}_3$ .

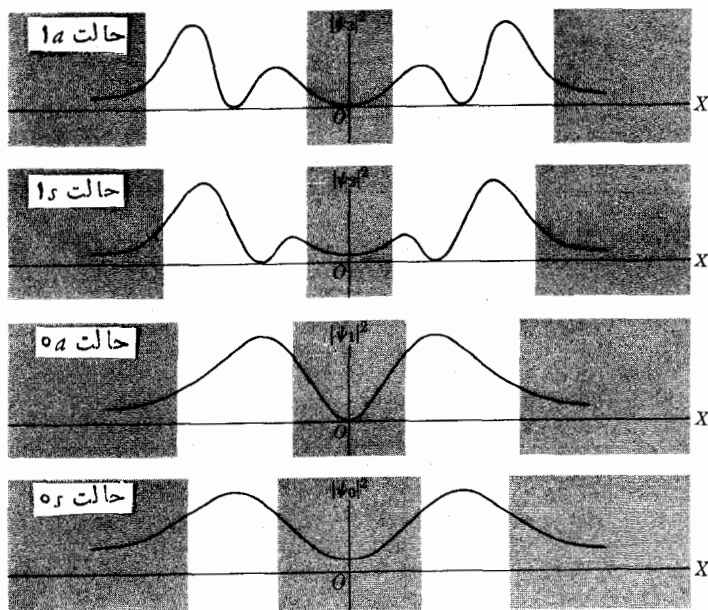
نشان داده شده است. در اینجا انرژی پتانسیل را طوری در نظر می‌گیریم که گویی انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده‌ای است که بر آمدگی یا سد در مرکز آن قرار دارد. در اثر این بر آمدگی مرکزی اختلالی در حرکت ذره، عمدتاً هنگام عبور آن از مرکز، به وجود می‌آید. همان‌طور که قبلاً نشان داده شد. برای ذراتی با انرژی‌هایی چون  $E$  که کوچکتر از ارتفاع سد پتانسیل است - این اثر موجب می‌شود که احتمال یافتن ذره در ناحیه مرکزی کاهش یابد. به عبارت دیگر، به زبان مکانیک کوانتومی، باید گفت که بر آمدگی فوق سبب واپیچش تابع موجهای پتانسیل نوسانگر هماهنگ در ناحیه مرکزی می‌شود و دامنه آنها را در این نواحی کاهش می‌دهد. شکل ۳۱.۲ چهار تابع موج اول را برای پتانسیل نوسانگر هماهنگ، برای حالتی که بر آمدگی وجود ندارد، به صورت خط چین نشان می‌دهد. هنگامی



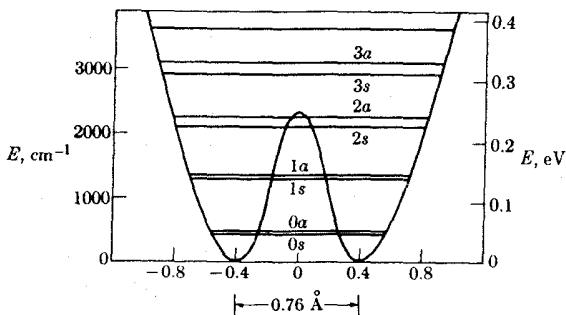
شکل ۳۱.۲ تابع موجهای متناظر با چهار تراز با پایبندترین انرژی برای حرکت معکوس در  $\text{NH}_3$ .

که اثر سد مرکزی نیز منظور شود، تابع موجهای واقعی به صورت خطوط پر نشان داده می‌شوند. در شکل ۳۲.۲ نیز چگالیهای احتمال متناظر یعنی  $|\psi(x)|^2$ ، نمایش داده شده‌اند.

تحلیل این چگالیهای احتمال نشان می‌دهد که  $|\psi_0|^2$  و  $|\psi_1|^2$  تقریباً یکسان‌اند. اختلاف اصلی در آن است که  $|\psi_0|^2$  نسبت به  $|\psi_1|^2$ ، احتمال بیشتری را برای یافتن ذره در داخل چاه پتانسیل نمایش می‌دهد. بنابراین انرژیهای  $E_0$  و  $E_1$  ویژه حالت‌های متناظر نیز باید تقریباً مساوی با یکدیگر باشند. همین مسئله برای  $|\psi_2|^2$  و  $|\psi_3|^2$  نیز وجود دارد، اگرچه تشابه این دو تابع موج به اندازه تشابه میان  $\psi_0$  و  $\psi_1$  نیست. از این‌رو، ترازهای انرژی  $E_2$  و  $E_3$  نیز باید خیلی به یکدیگر نزدیک باشند، البته نه به آن نزدیکی که  $E_0$  و  $E_1$  از یکدیگر قرار دارند. با این حال، برای انرژیهای بزرگتر از ارتفاع سد مرکزی (مانند انرژی  $E'$  در شکل ۳۰.۲)، اثر اختلال سد به مقدار قابل توجهی کاهش می‌یابد و تابع موجها و ترازهای انرژی اساساً شبیه به تابع موجها و ترازهای انرژی نوسانگر هماهنگ هستند. ترازهای انرژی در شکل ۳۳.۲ نشان داده شده‌اند. اعداد موجود در این شکل نیز با ترازهای انرژی مولکول  $NH_3$  متناظرند. ارتفاع سد پتانسیل در  $NH_3$  در حدود  $2.54 \text{ eV}$  است. شکل بالا نیز نشان می‌دهد که فاصله جدایی میان زوج تراز



شکل ۳۲.۲ چگالیهای احتمال متناظر با تابع موجهای نشان داده شده در شکل ۳۱.۲.



شکل ۳۳.۲ ترازهای انرژی برای حرکت معکوس در  $\text{NH}_3$ .

$0s$  و  $0a$  متناظر با تابع موجهای  $\psi_0$  و  $\psi_1$  یا میان زوج تراز  $1s$  و  $1a$  متناظر با تابع موجهای  $\psi_2$  و  $\psi_3$  در مقایسه با جدایی میان دو زوج از ترازهای انرژی بسیار کوچک است. در جدول ۳.۲ هشت تراز اول انرژی  $\text{NH}_3$  آمده است. در بخش آینده، نماد به کار رفته برای نمایش هر تراز توضیح داده می شود.

جدول ۳.۲ ترازهای انرژی ارتعاشی برای حرکت محوری اتم N در مولکول  $\text{NH}_3$  نسبت به حالت پایه.

eV	$\text{cm}^{-1}$	تراز
۰٫۳۵۴۷	۲۸۶۱	۳a
۰٫۲۹۵۰	۲۳۸۰	۳s
۰٫۲۳۶۷	۱۹۱۰	۲a
۰٫۱۹۸۰	۱۵۹۷٫۲	۲s
۰٫۱۲۲۲	۹۸۶۰۰	۱a
۰٫۱۱۷۸	۹۵۰۱۶	۱s
$۹٫۸۲ \times 10^{-5}$	۰٫۷۹	0a
۰٫۰۰	۰٫۰۰	0s

\* یکای  $\text{cm}^{-1}$  در بخش ۳.۳ تعریف خواهد شد. این یکا معادل است با  $1 \text{ eV} = ۸۰۶۷۲۵ \text{ cm}^{-1}$ .

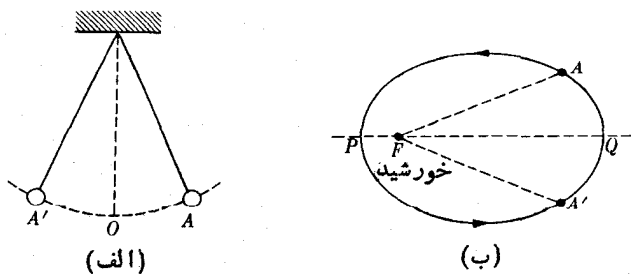


مهمترین نتیجه به دست آمده از این مثال آن است که وقتی دو چاه پتانسیل به وسیله سد پتانسیلی از یکدیگر تفکیک می شوند، ترازهای انرژی پایینتر در زوجهای نزدیک بهم، یا دوتاییها گروه بندی می شوند. هر گاه به جای دو چاه، سه چاه موجود باشد در این صورت ترازهای انرژی به صورت سطوح سه تایی گروه بندی می شوند و به همین ترتیب. همان طور که بعداً (در فصول پنجم و ششم) خواهیم دید، این موضوع در مطالعه مولکولها و جامدات بسیار حائز اهمیت خواهد بود.

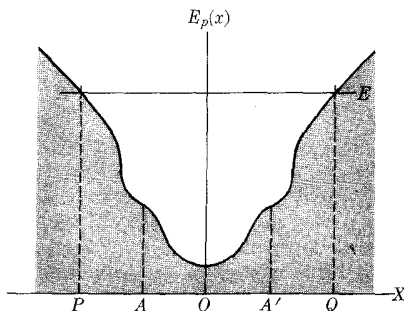
## ۹.۲ تقارن، تابع موجها، و پاریته

برای فیزیکی دانی که می خواهد اطلاعات مفیدی را بدون انجام محاسبه به دست آورد، مسائل تقارن غالباً می توانند کمک بسیار مفیدی باشند. به عنوان مثال، در حرکت آونگ (یا در هر حرکت هماهنگ ساده)، مکان تعادل  $O$  [شکل ۳۴.۲ (الف)] یک مرکز تقارن است. بنابراین، هنگامی که آونگ در مکانهای متقارن قرار دارد (مثلاً در  $A$  و  $A'$ )، سرعت و شتاب آن باید از نظر اندازه یکسان باشد؛ زمان مورد نیاز برای حرکت میان  $O$  و  $A$  باید مساوی با مدت زمان لازم برای حرکت میان  $O$  و  $A'$  باشد؛ تغییر در سرعت، یا در انرژی جنبشی، یا در انرژی پتانسیل در رفتن از  $A$  تا  $O$  باید با تغییر متناظر در رفتن از  $A'$  تا  $O$  یکسان باشد و به همین ترتیب. در مورد حرکت سیاره ای [شکل ۳۴.۲ (ب)]، خط  $PQ$  یک محور تقارن مدار است و بنابراین سرعت و شتاب یک سیاره در مکانهای متقارن  $A$  و  $A'$  باید از نظر اندازه یکسان باشد؛ زمانهای رفتن از  $A$  تا  $P$  و از  $P$  تا  $A'$  باید با یکدیگر برابر باشند و به همین ترتیب. به طور کلی هر گاه انرژی پتانسیل نسبت به نقطه مشخصی، مانند نقطه  $O$  در شکل ۳۵.۲ متقارن باشد، وقتی جسم در مکانهای متقارنی از قبیل  $A$  و  $A'$  قرار گیرد، شرایط دینامیکی باید یکسان باشد.

نکات مربوط به تقارن در مکانیک کوانتومی، نسبت به مکانیک کلاسیک از اهمیت بیشتری برخوردارند. به عنوان مثال، وقتی مسئله طوری است که انرژی پتانسیل مرکز تقارن دارد، و این مستلزم آن است که ذره در مکانهای متقارن، حالت دینامیکی یکسانی داشته باشد،



شکل ۳۴.۲ حرکات متقارن: (الف) آونگ، (ب) مدار سیاره ای.



شکل ۳۵.۲ انرژی پتانسیل متقارن.

احتمال یافتن ذره در چنین مکانهای متقارنی باید برابر باشد. چون این احتمال با  $|\psi|^2$  داده می‌شود، نتیجه می‌گیریم که اگر  $A'$  و  $A$  دو مکانی باشند که نسبت به مرکز تقارن مسئله متقارن اند (شکل ۳۵.۲) در این صورت باید داشته باشیم

$$|\psi_{A'}|^2 = |\psi_A|^2 \quad (25.2)$$

یعنی اگر منحنی تغییرات  $|\psi|^2$  را رسم کنیم، نمودار حاصل نسبت به مرکز تقارن باید متقارن باشد. اینک با فرض اینکه تابع موجها حقیقی اند، معادله (۲۵.۲) ایجاب می‌کند

$$\psi_{A'} = \pm \psi_A \quad (26.2)$$

بنابراین تابع موج در نقاط متقارن باید از نظر بزرگی کاملاً یکسان ولی می‌تواند علامت مخالف داشته باشد. در حالت  $\psi_{A'} = +\psi_A$  می‌گوییم که تابع موج دارای پاریدته زوج و در حالت  $\psi_{A'} = -\psi_A$  پاریدته فرد است.

به‌طور کلی وقتی بخواهیم تابع موج را در دو مکان متقارن بررسی کنیم، از پاریده که به رفتار تابع موج اطلاق می‌شود استفاده می‌کنیم. در این صورت می‌توان نتیجه گرفت که

برای مسائلی که مرکز تقارن دارند، ویژه حالتها به وسیله تابع موجهایی بیان می‌شوند که پاریدته آنها کاملاً مشخص (زوج یا فرد) است.

اینک می‌خواهیم ببینیم که چگونه می‌توان این نتیجه بسیار مهم را در مورد مسائلی که قبلاً بررسی کردیم، به کار برد. در جعبه پتانسیل شکل ۶.۲، نقطه  $x = a/2$  مرکز تقارن است و بنابراین تابع موجها نسبت به  $x = a/2$  باید زوج یا فرد باشند. این موضوع را به وضوح می‌توان در شکل ۸.۲ (الف) مشاهده کرد، به گونه‌ای که می‌توان گفت که حالتها با  $n = 1, 3, 5, \dots$  پاریدته زوج دارند در حالی که پاریدته حالتها با  $n = 2, 4, 6, \dots$  فرد است. توزیعهای احتمال، که در شکل ۸.۲ (ب) دیده می‌شوند، شرط

بیان شده در معادله (۲۵.۲) را که همان متقارن بودن نسبت به  $x = a/2$  است، بر آورده می کنند.

برای حالت مربوط به نوسانگر هماهنگ، مرکز تقارن نقطه  $x = 0$  است (شکل ۱۳.۲). در اینجا تابع موجها به ازای  $n = 0, 1, 2, \dots$  پاریته زوج دارند در حالی که پاریته آنها به ازای  $n = 1, 3, 5, \dots$  فرد است (شکل ۱۴.۲). توزیع احتمال برای تمام ویژه حالتها نسبت به  $x = 0$  متقارن است (شکل ۱۵.۲).

هنگامی که تابع موجها برای چاه پتانسیل را بررسی می کردیم، اصل تقارن را به طور ضمنی به کار بردیم. چاه یساده شده دارای مرکز تقارنی در  $x = 0$  است (شکل ۱۶.۲)، اما انرژی پتانسیل مثال ۶.۲ هیچگونه تقارنی از خود نشان نمی دهد (شکل ۲۰.۲)، و تابع موجهای متناظر نیز نه زوج اند و نه فرد (شکل ۲۱.۲).

انرژی پتانسیل مربوط به حرکت معکوس اتم  $N$  در مولکول  $NH_3$ ، که در مثال ۷.۲ مورد بحث قرار گرفت (شکل ۳۰.۲) نیز دارای يك مرکز تقارن است و تابع موجهای متناظر زوج یا فردند (شکل ۳۱.۲). تابع موجهای زوج یا متقارن با  $S$  و توابع فرد یا پاد متقارن با  $a$  مشخص می شوند. در جدول ۳.۲، تابع موجهای زوج و فرد متوالی به صورت  $1s, 2s, 3s, 4s, 5s, 6s$ ، و غیره نشان داده شده اند.

حقیقت جالب دیگری که پیشتر متذکر شدیم و با مراجعه به شکلهای ۸.۲، ۱۴.۲، ۱۷.۲ و ۳۱.۲ نیز می توان آن را نتیجه گرفت، به قرار زیر است: تابع موج حالت پایه همیشه علامت یکسانی دارد (یا به زبان جبری می توان گفت که تابع موج حالت پایه دیشه ندارد، در حالی که تابع موجهای اولین، دومین، سومین و ... حالت برانگیخته، محور را به تعداد یکبار، دوبار، سه بار، و ... قطع می کنند (یا دارای يك، دو، سه، ... ریشه هستند) یا به زبان دیگر تغییر علامت می دهند. بنابراین می توان نتیجه گرفت که

هرچه تابع موج بیشتر تغییر علامت بدهد (یا هرچه که تعداد دیشهها زیادتر باشند)، انرژی ویژه حالت مربوط بزرگتر خواهد بود.

## ۱۰.۲ معادله مستقل از زمان شرودینگر

تاکنون فقط توزیع فضایی میدان مساده را بررسی و دامنه یا تابع موج  $\psi(x)$  آن را محاسبه می کردیم. ولی هیچ چیزی درباره تغییر زمانی میدان نگفته ایم. برای بحث در مورد وابستگی زمانی، باید معادله ای داشته باشیم که شامل زمان باشد. چنین معادله ای به معادله وابسته به زمان شرودینگر معروف است. این معادله همان نقشی را در مکانیک کوانتومی ایفا می کند که معادلات ماکسول در الکترومغناطیس. معادله وابسته به زمان شرودینگر به صورت زیر است

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + E_p(x)\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (27.2)$$

که در آن به جای تابع  $\psi(x)$  از تابع موج  $\Psi(x, t)$  استفاده شده است به گونه ای که بستگی فضایی و زمانی هر دو در تابع یادشده وارد شده اند. مشاهده می شود که این معادله برای میدان ماده، یعنی  $\Psi(x, t)$ ، به طور اساسی با معادله  $\partial^2 \xi / \partial t^2 = v^2 \partial^2 \xi / \partial x^2$  که بیان کننده امواج کشسان یا الکترومغناطیسی است، اختلاف دارد زیرا فقط شامل مشتق زمانی مرتبه اول  $\partial \Psi / \partial t$  است نه مشتق زمانی مرتبه دوم آن. معادله (۲۷.۲) از جهتی به معادله مربوط به پدیده های انتقال  $\partial^2 \xi / \partial x^2 = a^2 \partial^2 \xi / \partial t^2$  شباهت دارد که شامل مشتق زمانی مرتبه اول است و رسانش گرمایی و پخش را بیان می کند. اما اینجا نیز یک اختلاف بسیار مهم وجود دارد. این اختلاف ضریب موهمی  $v = \sqrt{-1}$  است که در مشتق زمانی موجود در معادله شرودینگر ضرب شده است. بنابراین، میدان بیان شده به وسیله معادله (۲۷.۲) از یک طرف با امواج کشسان یا الکترومغناطیسی و از طرف دیگر با امواج گرمایی یا پخش اختلاف دارد. لذا باید از مقایسه میان میدانهای مکانیک کوانتومی و امواج الکترومغناطیسی و کشسان چشم پوشیم.

توجه کنید که در اینجا فقط معادله وابسته به زمان شرودینگر را نوشته ایم و در اینجا نحوه به دست آوردن آن با نحوه استخراج معادله موج برای امواج کشسان در ریسمان یا برای امواج الکترومغناطیسی فرق دارد. می توان گفت که معادله (۲۷.۲) یک قانون اساسی طبیعت است، درست همان طور که قانون القای الکترومغناطیسی فاراده - هانری یا اصل پایستگی تکانه، قوانین اساسی طبیعت به شمار می روند، و دیگر اینکه شکل ریاضی این معادله نتیجه تحلیل دقیق حقایق تجربی و تفکر شهودی است. این بیان اساساً صحیح است اما، اگر از پاره ای فرضهای اساسی شروع کنیم می توانیم معادله شرودینگر را به دست آوریم. این کار در نظریه صوری مکانیک کوانتومی انجام شده است و در اینجا مطرح نمی شود؛ با این حال در بخش ۱۲.۲ اشاره مختصری به آن خواهیم کرد. در اینجا لازم است نکته زیر را خاطر نشان کنیم: اینکه معادله وابسته به زمان شرودینگر شامل هم مشتق زمانی مرتبه اول و هم شامل مشتق مکانی مرتبه دوم است، می تواند مستقیماً به این واقعیت مربوط شود که انرژی ذره از طریق رابطه  $E = p^2 / 2m + E_p(x)$  به مجذور تکانه وابسته است.

اینک می خواهیم جوابی از معادله (۲۷.۲) را به دست آوریم که برای بیان ویژه حالتها مناسب است. با توجه به اطلاعات خود در باره امواج ایستاده می توان فرض کرد که چنین جوابی باید متغیرهای مکان و زمان را به طور جداگانه ای در بر داشته باشد. در اینجا جوابی به شکل زیر را امتحان می کنیم که

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar} \quad (28.2)$$

سپس باید ثابت کنیم که  $E$  انرژی و  $\psi(x)$  دامنه ای است که در معادله (۳.۲) صدق می کنند. بدین منظور یادآوری می کنیم که

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \psi(x) e^{-iEt/\hbar}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \psi}{dx^2} e^{-iEt/\hbar}$$

با قراردادن این دو عبارت در معادله (۲۷.۲) و حذف عامل مشترک  $e^{-iEt/\hbar}$ ، معادله (۳.۲) برای  $\psi(x)$  به دست می آید و بنا بر این،  $E$  باید انرژی کل سیستم باشد. در نتیجه، میدان ماده داده شده با معادله (۲۸.۲) با بسامد زاویه ای زیر نوسان می کند

$$\omega = \frac{E}{\hbar}$$

یا

$$E = \hbar\omega = hv$$

که با معادلات (۴۲.۱) و (۴۵.۱) هماهنگی دارد. همان طور که قبلاً گفتیم، میدان بیان شده به وسیله معادله (۲۸.۲) میدانی است از نوع میدانهای مربوط به امواج ایستاده زیرا قسمتهای فضایی و زمانی در دو عامل متفاوت ظاهر شده اند. اما، هنگامی که با امواج ایستاده در ریسمانها، در ستونهای هوا، یا در کاواکهای فلزی مقایسه شود، اختلاف مهمی میان آنها دیده می شود. این اختلاف مهم عبارت از این است که قسمت زمانی رانمی توان به صورت  $\sin \omega t$  یا  $\cos \omega t$  نوشت بلکه باید به صورت  $e^{-i\omega t} \equiv e^{-iEt/\hbar}$  نوشته شود. دلیل این امر آن است که معادله (۲۷.۲) يك معادله مرتبه اول از زمان است. یعنی، وابستگی زمانی امواج مکانیک کوانتومی همواره به صورت مختلط ظاهر می شود. برای ذره آزادی که با تکانه  $p = \hbar k$  در راستای  $X$  حرکت می کند، داریم

$$\psi(x) = Ae^{ikx}$$

بنابراین تابع موج وابسته به زمان به صورت زیر است

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar} = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad (۲۹.۲)$$

که موجی را توصیف می کند که در راستای  $X$  با سرعت فاز  $v_p = \omega/k = E/p = v/2$  حرکت می کند (در بخش ۱۱.۱ نیز آن را بررسی کردیم). این موضوع این گفته را که تابع موج  $\psi(x) = e^{ikx}$  مربوط به ذره ای است که در راستای  $X$  حرکت می کند و در بخش ۳.۲ به آن اشاره کردیم تأیید می کند. به طریق مشابه، تابع موج وابسته به زمان متناظر با  $\psi(x) = e^{-ikx}$  عبارت است از تابع  $\Psi(x, t) = Ae^{-i(kx + \omega t)}$  که معرف موجی است که در راستای  $-X$  انتشار می یابد. اما، نمی توان  $\cos(kx - \omega t)$  یا  $\sin(kx - \omega t)$

را به جای معادله (۲۹.۲) برای بیان  $\Psi(x, t)$  در مورد يك ذره آزاد به كار برد، زیرا این توابع جوابهای معادله (۲۷.۲) نیستند.  
برای ذره موجود در جعبه پتانسیل داریم

$$\psi(x) = A \sin \frac{n\pi x}{a} = \frac{A(e^{in\pi x/a} - e^{-in\pi x/a})}{2i}$$

$$\Psi(x, t) = A \sin \frac{n\pi x}{a} e^{-iEt/\hbar} = \left[ \frac{A}{2i} e^{i(n\pi x/a - Et/\hbar)} - e^{-i(n\pi x/a + Et/\hbar)} \right]$$

این معادله با دومی موجی متناظر است که در دو جهت مخالف در حرکت اند و امواج ایستاده را، همانند حالت مربوط به ریسمان مرتعش با دوانتهای ثابت به وجود می آورند.  
جوابی که به صورت معادله (۲۸.۲) است بیان کننده ذره ای است که با انرژی کاملاً مشخص، متناظر با یکی از ترازهای انرژی یا ویژه حالتها، در حرکت است. در این حالت

$$|\Psi(x, t)|^2 = [\psi^*(x)e^{iEt/\hbar}][\psi(x)e^{-iEt/\hbar}] = |\psi(x)|^2 \quad (30.2)$$

بنا بر این، چگالی احتمالی  $|\Psi(x, t)|^2$  مستقل از زمان است. به همین دلیل بود که قبلاً حالتهای بیان شده با معادله (۲۸.۲) را حالت مانا یا ویژه حالت نامیدیم. اما باید توجه کرد که معادله (۲۸.۲) تنها جواب معادله (۲۷.۲) نیست، بلکه جوابهای دیگری نیز وجود دارند که برای آنها  $|\Psi(x, t)|^2$  مستقل از زمان نیست. حالتهای متناظر نیز حالت مانا نخواهند بود. با به کار بردن نتیجه ای از نظریه معادله های دیفرانسیل، می توان جواب عمومی معادله (۲۷.۲)، متناظر با ناویژه حالتها، را به صورت ترکیب خطی جوابهای ویژه حالت بیان کرد، یعنی

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} \quad (31.2)$$

(این رابطه شباهت زیادی به تحلیل فوریه برای يك موج دارد). عبارت بالا در مورد  $\Psi(x, t)$  يك جواب معادله (۲۷.۲) است زیرا می توان اثبات کرد که هر جمله، که از نوع داده شده در معادله (۲۸.۲) باشد، يك جواب معادله (۲۷.۲) و مجموع آنها نیز يك جواب است زیرا معادله (۲۷.۲) يك معادله دیفرانسیل همگن خطی است.  
اکنون حالتی را در نظر می گیریم که در آن بتوان  $\Psi(x, t)$  را به صورت مجموع دو ویژه حالت بیان کرد، یعنی

$$\Psi(x, t) = c_1 \psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 \psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar} \quad (32.2)$$

برای به دست آوردن تابع موج اولیه،  $t$  را مساوی بسا صفر قرار می دهیم، و در نتیجه خواهیم داشت

$$\Psi(x, 0) = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$$

ضرایب  $c_1$  و  $c_2$  را، در صورتی که تابع  $\Psi(x, 0)$  معلوم باشد (مسئله ۳۷.۲) می توان به کمک يك روش ریاضی ساده و سر راست محاسبه كرد. از این رو، اگر تابع موج اولیه  $\Psi(x, 0)$  معلوم باشد، می توانیم  $\Psi(x, t)$  را تعیین کنیم. توزیع احتمال متناظر با  $\Psi(x, t)$  عبارت است از

$$\begin{aligned} P(x, t) &= |\Psi(x, t)|^2 \\ &= \{c_1^* \psi_1^* e^{iE_1 t/\hbar} + c_2^* \psi_2^* e^{iE_2 t/\hbar}\} \{c_1 \psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 \psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar}\} \\ &= |c_1 \psi_1|^2 + |c_2 \psi_2|^2 + c_1 c_2^* \psi_1 \psi_2^* e^{-i(E_1 - E_2)t/\hbar} \\ &\quad + c_1^* c_2 \psi_1^* \psi_2 e^{i(E_1 - E_2)t/\hbar} \quad (33.2) \end{aligned}$$

از این رو،  $P(x, t)$  ثابت نیست بلکه شامل جمله هایی است که با بسامد زاویه ای  $\omega = (E_1 - E_2)/\hbar$  یا بسامد خطی  $\nu = (E_1 - E_2)/h$  نوسان می کنند. بنابراین، حالت توصیف شده به وسیله تابع معلوم  $\Psi(x, t)$  حالت مانا نخواهد بود. این نتیجه ایده روشنتری را درباره اختلاف میان حالت های مانا و حالت های نامانا به دست می دهد. اگرچه  $|\Psi(x, t)|^2$  برای حالت های مانا مستقل از زمان است، در حالت های نامانا  $|\Psi(x, t)|^2$  شامل يك سری جمله های نوسانی با بسامدهای  $\nu = (E_n - E_{n'})/h$  است.

تابع موج داده شده با معادله (۳۲.۲) می تواند دستگاهی را در خلال گذار میان ویژه حالت های  $E_1$  و  $E_2$  توصیف کند. هرگاه ذره ای که گذار انجام می دهد باردار باشد، می توان گفت که در خلال گذار، همچون نوسانگری رفتار می کند که بسامد آن برابر بسامد معادله بور (۲۹.۱) یعنی برابر  $\nu = (E_1 - E_2)/h$  است و در نتیجه می تواند تابش الکترومغناطیسی با همان بسامد را گسیل یا جذب کند. به این ترتیب صورت بندی مکانیک کوانتومی به طور طبیعی با معادله بور یعنی با رابطه  $E_1 - E_2 = h\nu$  یکی می شود.

مثال ۸۰۲ تابع موجی که حرکت معکوس مولکول  $\text{NH}_3$  را توصیف می کند توضیح دهید.

حل: فرض کنید که ابتدا، اتم  $\text{N}$  (با احتمال زیاد) در حالت پایه چاه پتانسیل طرف راست قرار دارد (شکل ۳۵.۲). بنابراین، تابع موج اولیه باید در چاه طرف راست بسیار بزرگ و در چاه طرف چپ خیلی کوچک باشد. لذا تابع موج اولیه را می توان به صورت زیر نوشت

$$\Psi(x, 0) = \Psi_R$$

که در شکل ۳۶.۲ (الف) نشان داده شده است. ضمناً با توجه به شکل توابع  $\psi_1$  و  $\psi_2$  در شکل ۳۱.۲ می توان با تقریب خوبی چنین نوشت

$$\Psi(x, 0) = \Psi_R \approx \psi_0 + \psi_1$$

پس از گذشت زمان مشخص  $t$ ، تابع موج با رابطه زیر داده می شود

$$\Psi(x, t) = \psi_0 e^{-iE_0 t/\hbar} + \psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar}$$

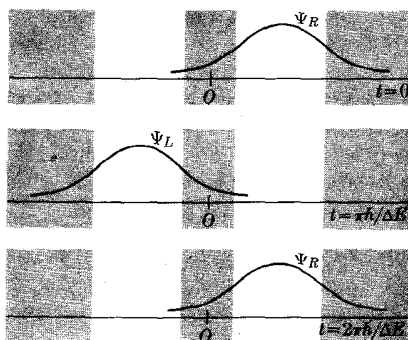
با قراردادن  $\Delta E = E_1 - E_0$  عبارت بالا به صورت زیر درمی آید

$$\Psi(x, t) = (\psi_0 + \psi_1 e^{-i\Delta E t/\hbar}) e^{-iE_0 t/\hbar}$$

در زمان  $t = \pi\hbar/\Delta E$ ، نمای موجود در پرانتز مساوی با ۱- است، در نتیجه

$$\Psi(x, t) = (\psi_0 - \psi_1) e^{-iE_0 t/\hbar} = \Psi_L e^{-iE_0 t/\hbar}$$

که در آن از روی شکل های  $\psi_0$  و  $\psi_1$  شکل ۳۱.۲، مشاهده می شود که  $\Psi_L \approx \psi_0 - \psi_1$  در طرف چپ متمرکز شده است. این موضوع در شکل ۳۶.۲ نیز نشان داده شده است. بنابراین، ذره که در مثال ما اتم N است (با احتمال زیاد) در چاه پتانسیل طرف چپ قرار دارد. به عبارت دیگر، مولکول  $\text{NH}_3$  معکوس شده است. واضح است که در زمان  $t = 2\pi\hbar/\Delta E$  ذره مجدداً در طرف راست قرار خواهد گرفت. بنابراین بسامد حرکت معکوس مولکول با رابطه  $\nu = \Delta E / 2\pi\hbar = (E_1 - E_0)/h$  داده می شود. مقدار تجربی برای  $\nu$  برابر با  $2.38 \times 10^{10} \text{ Hz}$  است که از روی آن می توان اختلاف انرژی  $E_1 - E_0$  را محاسبه کرد و مقدار  $9.84 \times 10^{-5} \text{ eV}$  را به دست آورد. این مقداری است که در جدول ۳.۲ داده شده است.



شکل ۳۶.۲ توصیف حرکت معکوس  $\text{NH}_3$  به وسیله تابع موجهای وابسته به زمان.



## ۱۱.۲ احتمال گذار و قواعد گزینش

در اینجا منطقی به نظر می‌رسد که سؤال زیر برای دانشجو مطرح شود: مکانیک کوانتومی چگونه می‌تواند پیشگویی کند که چه وقت گذار رخ می‌دهد؟ به عبارت دیگر، هر گاه اتم، مولکول، یا هسته‌ای در یک حالت برانگیخته باشد، چگونه می‌توان فهمید که کی و کجا پرش به حالت با انرژی پایینتر را آغاز می‌کند؟ یا هر گاه اتم، مولکول، یا هسته تحت اثر میدان الکترومغناطیسی خارجی قرار گیرد، چگونه می‌توان تعیین کرد که آیا انرژی را جذب کرده و به حالت برانگیخته می‌رود یا نه؟ در جواب به این سؤالها باید گفت که ما نمی‌توانیم در مورد زمان دقیقی که گذار رخ خواهد داد صحبتی به میان آوریم بلکه برای هر پرشی، مثلاً پرش از حالت  $i$  به حالت  $f$ ، احتمال گذار  $T_{if}$  در واحد زمان وجود دارد. بر طبق قوانین مکانیک کوانتومی و برهم‌کنشهایی که مسؤول وقوع این گذارند، این احتمال را می‌توان محاسبه کرد. هر چه  $T_{if}$  بزرگتر باشد، احتمال وقوع این گذار بیشتر خواهد بود. البته اگر  $T_{if}$  مساوی با صفر باشد، گذار غیرممکن یا ممنوع است. این نتیجه حاکی از آن است که گذارهایی که در معادله بور یعنی در رابطه  $\nu = (E' - E)/h$  صدق می‌کنند، همگی ممکن نیستند زیرا علاوه بر پایستگی انرژی، نکات دیگری نیز در این فرایند دخالت می‌کنند. به عنوان مثال، تکانه زاویه‌ای نیز باید پایسته باشد. همچنین به دلیل تقارن فضایی سیستم (یعنی پاریته تابع موجها)، ممکن است تابع موج حالت اولیه نتواند طوری خود را تغییر دهد که به وسیله یک فرایند تابشی مناسب به تابع موج حالت نهایی تبدیل شود. این محدودیت در گذارهای ممکن به قواعد گزینش منجر می‌شود. این قواعد بیان می‌کنند که از میان گذارها کدام یک محتملتر یا مجازند، یعنی برای آنها احتمال گذار بسیار زیاد است.

در خلال یک گذار الکترومغناطیسی، ممکن است سیستم به صورت چند قطبی نوسانی الکتریکی یا مغناطیسی رفتار کند و بنابراین، گذارهای دو قطبی، چهار قطبی الکتریکی یا مغناطیسی و مانند آن وجود دارد که هر کدام با احتمال گذار و قواعد گزینش مختص به خود مشخص می‌شوند. معمولاً محتملترین گذار دو قطبی الکتریکی است؛ و پس از آن دو قطبی مغناطیسی و چهار قطبی الکتریکی قرار دارند. گذارهای چند قطبی مرتبه بالاتر دارای احتمال گذار بسیار کمترند و به طور کلی، بجز در چند حالت بخصوص در هسته‌ها، در نظر گرفته نمی‌شوند. گذارهایی که برای آنها احتمال گذار دو قطبی الکتریکی غیر صفر است به گذارهای مجاز مرتبه اول معروف اند. هنگامی که احتمال گذار دو قطبی الکتریکی مساوی با صفر باشد، گذار را گذار ممنوع مرتبه اول می‌نامند. باید توجه داشت که چنین گذاری ممکن است با آهنگ خیلی کمی رخ دهد، مانند گذار دو قطبی مغناطیسی یا گذار چهار قطبی الکتریکی (یا حتی یک گذار چند قطبی مرتبه بالاتر). به عنوان مثال، احتمال گذار دو قطبی الکتریکی نوسانگر هماهنگ هنگامی مخالف صفر است که

$$\Delta n = \pm 1 \quad (34.2)$$

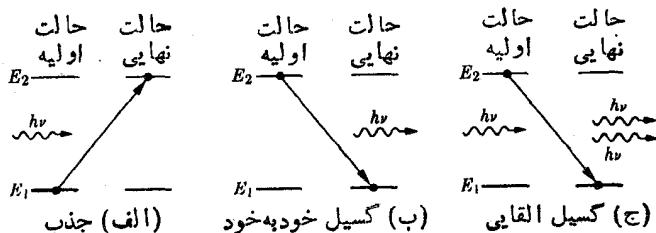
که در آن  $\Delta n = n_f - n_i$ . رابطه اخیر، قاعده گزینش برای گذارهای مجاز مرتبه اول

نوسانگر را به دست می‌دهد. این بدان معنی است که گذارهای مجاز مرتبه اول نوسانگر هماهنگ عبارتند از گذار از یک حالت مجاور به حالت دیگر، یعنی از حالتی که عدد کوانتومی  $n$  آن به مقدار  $\pm 1$  با عدد کوانتومی حالت مجاور اختلاف دارد. از این رو، بر طبق معادله (۲۱.۲)، انرژی جذب شده ( $\Delta n = +1$ ) یا گسیل شده ( $\Delta n = -1$ ) در یک گذار برابر است با

$$|E_f - E_i| = \hbar\omega = h\nu \quad (۳۵.۲)$$

که در آن  $\nu$  بسامد نوسانگر هماهنگ است. از مقایسه معادلات (۳۵.۲) با معادله بور معلوم می‌شود که نوسانگر هماهنگ فقط می‌تواند تابش را با بسامدی که با بسامد خودش برابر است (بسامد نوسانی کلاسیک) گسیل یا جذب کند و در نتیجه، طیف آن فقط به یک بسامد محدود می‌شود.

هنگامی که یک سیستم در حالت برانگیخته قرار دارد، فقط برای مدت زمان مشخصی در این حالت باقی می‌ماند زیرا ایسن احتمال وجود دارد که به تراز انرژی پایینتر برود. میانگین طول عمر حالت برانگیخته با احتمال گذار کل آن حالت، یعنی با مجموع احتمال گذار به تمام ترازهای انرژی پایینتر، نسبت عکس دارد. آشکار است که طول عمر حالت پایه یک سیستم منزوی بینهایت است، زیرا سیستم نمی‌تواند پرشی به تراز پایینتر را انجام دهد. طول عمرهای مربوط به گذارهای مجاز اتمی و مولکولی در حدود  $10^{-8}$  تا  $10^{-14}$  ثانیه است، در حالی که طول عمر گذارهای هسته‌ای در گستره زمانی  $10^{-8}$  تا  $10^{14}$  ثانیه قرار دارد. با آنکه در یک سیستم واقع در حالت برانگیخته، ممکن است گذارهایی با گسیل انرژی از طریق پرش به حالت با انرژی پایینتر به صورت خودبه‌خود رخ دهد، با وجود این هر گاه سیستم بخواهد انرژی جذب کند، لازم است که یک عامل خارجی دخالت کند. هر گاه در ابتدا سیستم پادشده در حالت برانگیخته باشد، این عامل خارجی می‌تواند علاوه بر گسیل انرژی خودبه‌خود حاصل از آشفتنگی ایجاد شده در سیستم، گسیل انرژی رانیز القا کند. این تابش که در بسیاری موارد حائز اهمیت است، به گسیل القایی معروف است. این سه فرایند (جذب، گسیل خودبه‌خود، و گسیل القایی) در شکل ۳۷.۲ نشان داده شده‌اند. در مثال



شکل ۳۷.۲ فرایندهای تابشی: (الف) جذب، فوتون فرودی جذب می‌شود. (ب) گسیل خودبه‌خود که منجر به گسیل فوتون می‌شود. (ج) گسیل القایی تحت اثر فوتون فرودی.

۵.۱۳ رابطه میان احتمال گذار خودبه‌خود و القایی را به‌دست خواهیم آورد.

## ۱۲.۲ نظریه صوری مکانیک کوانتومی

تاکنون نظریه کوانتومی را بر اساس معادله شرودینگر برای سیستم‌های اتمی مطرح می‌کردیم. به کمک تابع موجهای حاصل از حل معادله شرودینگر می‌توانیم اطلاعاتی را درباره ترازهای انرژی ممکن سیستم، احتمال یافتن سیستم در ناحیه بخصوصی از فضا، احتمال گذار از یک تراز انرژی به تراز دیگر، بسامد تابش الکترومغناطیسی گسیل شده یا جذب شده، و... را به‌دست آوریم. با این حال، تا اینجا به نظر می‌رسید که تنها اطلاعاتی را که ما می‌توانیم از قوانین مکانیک کوانتومی استخراج کنیم فقط اطلاعات مربوط به انرژی سیستم است. اما در واقع این طور نیست و می‌توان اصول مکانیک کوانتومی را به طریق صوری بیان کرد و تمام اطلاعات لازم درباره یک سیستم فیزیکی را به‌دست آورد. در اینجا می‌خواهیم به طریقی ساده این نظریه صوری را معرفی کنیم.

ابتدا مسئله را در حالت یک بعدی در نظر می‌گیریم. معادله شرودینگر (۳.۲) را می‌توان

به صورت زیر نوشت

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) + E_p(x) \right] \psi(x) = E \psi(x) \quad (36.2)$$

هنگام نوشتن طرف چپ معادله طوری از تابع موج  $\psi(x)$  فاکتورگیری کردیم که گویی عامل مشترک کمیات داخل گروه است. اما، هر جمله داخل گروه باید بر طبق سرشت خاص خود بر تابع  $\psi(x)$  اثر یا عمل کند. یعنی،  $E_p(x)$  در  $\psi(x)$  ضرب می‌شود در حالی که جمله  $d^2/dx^2$  مشتق دوم  $\psi(x)$  را به‌دست می‌دهد. به زبان ریاضی می‌توان گفت که عبارت

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \left( -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) + E_p(x) \quad (37.2)$$

که در داخل گروه ظاهر می‌شود، یک عملگر است که وقتی بر تابعی مانند  $\psi(x)$  عمل کند (یعنی  $\mathbf{H}\psi(x)$ )، در نتیجه یک سری اعمال ریاضی، که به طور صریح در تعریف  $\mathbf{H}$  وجود دارند، تابع جدیدی به‌دست می‌دهد. معادله (۳۶.۲) را می‌توان به صورت نمادی زیر نوشت

$$\mathbf{H}\psi(x) = E\psi(x) \quad (38.2)$$

این بدان معنی است که اثر  $\mathbf{H}$  بر روی  $\psi(x)$  عبارت است از حاصل ضرب  $\psi(x)$  در ثابت  $E$ . واضح است که وقتی  $\mathbf{H}$  بر روی تابع دلخواهی اثر کند، نتیجه آن لزوماً مثل حالتی نیست که آن تابع در ضرب ثابتی ضرب می‌شود، بلکه به طور کلی تابع دیگری است که با اولی

اختلاف دارد. تسوابعی که در معادله (۳۸.۲) صدق می کنند به ویژه تابعهای عملگر  $H$  معروف اند و مقادیر متناظر  $E$  نیز ویژه مقادیرهای عملگر نامیده می شوند. برای عملگر اختیاری  $A$ ، ویژه تابعها و ویژه مقادیر آنها اینها اند که در معادله زیر صدق می کنند

$$A\psi(x) = a\psi(x) \quad (39.2)$$

در حالت کلی یک سری ویژه مقدار  $a_1, a_2, a_3, \dots$  و یک سری ویژه تابع  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$  وابسته به آنها وجود دارند که به طبیعت عملگر و نیز به شرایط مرزی ریاضی بستگی دارند. این ویژه تابعها نتیجه ای از خواص فیزیکی سیستم اند. در بعضی حالتها چندین تابع موج به یک ویژه مقدار مشخص وابسته اند و در این موارد، ویژه مقدار را تبهگن می نامند.

در مکانیک کوانتومی این عملگرها بهره ای تعلق دارند که به آنها هریتی گفته می شود؛ هریتی از نام هر میت ریاضیدان فرانسوی گرفته شده است. برای تمام توابع  $\Phi_1$  و  $\Phi_2$  که شرایط مرزی مورد نظر را بر آورده می کنند، این عملگرها در شرط زیر صدق می کنند

$$\int \Phi_1^* A \Phi_2 d\tau = \int [A \Phi_1]^* \Phi_2 d\tau \quad (40.2)$$

می توان نشان داد که

ویژه مقادیرهای عملگرهای هریتی حقیقی و ویژه تابعهای آنها متعامدند.

یعنی

$$\int \psi_i^* \psi_j d\tau = \delta_{ij} \quad (41.2)$$

که در آن  $\psi_i$  و  $\psi_j$  ویژه تابعهایی هستند که به ویژه مقادیرهای  $a_i$  و  $a_j$  عملگر  $A$  تعلق دارند. عملگر  $H$  که با معادله (۳۷.۲) داده می شود، نقش بسیار مهمی در مکانیک کوانتومی ایفای کند و به عملگر هامیلتونی دستگاه معروف است. در مکانیک کلاسیک، هنگامی که انرژی کل بر حسب تکانه و مختصات دستگاه بیان می شود آن را، هامیلتونی می نامند. از این رو، برای ذره ای که در یک راستا حرکت می کند، هامیلتونی کلاسیک عبارت است از

$$H_{\text{کلاسیک}} = \frac{1}{2m} p^2 + E_p(x) \quad (42.2)$$

هامیلتونی کلاسیک و مکانیک کوانتومی را می توان به طریق ساده ای به یکدیگر مربوط کرد. از مقایسه معادلات (۳۷.۲) و (۴۲.۲) مشاهده می شود که به کمک همخوانی زیر می توان هامیلتونی کلاسیک را به هامیلتونی مکانیک کوانتومی تبدیل کرد

$$p \rightarrow -i\hbar \frac{d}{dx} \quad (43.2)$$

(علامت منفی در معادلهٔ (۴۳.۲) فقط به خاطر سهولت در نظر گرفته شده است.) برای حرکت در فضای سه بعدی، هامیلتونی کلاسیک به صورت زیر است

$$H_{\text{کلاسیک}} = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + E_p(\mathbf{r}) \quad (۴۳.۲)$$

که در آن  $\mathbf{r}$  بردار مکان ذره و  $\mathbf{p}^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$  است. بسط منطقی همخوانی یادشده با معادلهٔ (۴۳.۲) عبارت است از

$$p_x \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \quad (۴۵.۲)$$

با استفاده از عملگر برداری  $\nabla$ ، که دل نام دارد و به صورت زیر تعریف می شود

$$\nabla = \mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

معادلهٔ (۴۵.۲) را می توان به شکل خلاصه تر زیر نوشت

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (۴۶.۲)$$

هر گاه عملگر  $-i\hbar \nabla$  را به جای  $\mathbf{p}$  در هامیلتونی کلاسیک به کار بریم عملگر مکانیک کوانتومی به دست می آید

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_p(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + E_p(\mathbf{r}) \quad (۴۷.۲)$$

اکنون اگر عملگر  $\mathbf{H}$  بر روی تابع  $\psi(\mathbf{r})$  اثر کند خواهیم داشت

$$\mathbf{H}\psi(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + E_p(\mathbf{r})\psi$$

هر گاه  $\psi$  ویژه تابع عملگر  $\mathbf{H}$  باشد، در این صورت داریم  $\mathbf{H}\psi = E\psi$  که در آن  $E$  ویژه مقدار عملگر  $\mathbf{H}$  است، یا

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + E_p(\mathbf{r})\psi = E\psi$$

رابطهٔ بالا درست همان معادلهٔ شرودینگر در فضای سه بعدی است که قبلا در معادلهٔ (۹.۲) بیان شد. بنابراین می توان گفت که معادلهٔ (۴۷.۲) عملگر هامیلتونی مکانیک کوانتومی يك ذره در فضای سه بعدی است.

بر اساس رابطه (۴۶.۲) می توان اصل اول مکانیک کوانتومی را به صورت زیر بیان کرد:

۰۱. به هر کمیت فیزیکی  $A(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ ، که تابعی از مکان و مکانۀ یک ذره است، یک عملگر کوانتومی وابسته است که با قرارداد  $-i\hbar\nabla$  به جای  $\mathbf{p}$ ، به دست می آید، یعنی

$$\cdot A(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla)$$

بنا بر این عملگرهای هامیلتونی (۳۷.۲) یا (۴۷.۲) به ترتیب، عملگرهای کوانتومی مربوط به انرژی کل سیستم برای حرکت در فضای یک و سه بعدی هستند. به طریق مشابه، به انرژی جنبشی  $E_k = p^2/2m$  نیز عملگر  $-(\hbar^2/2m)\nabla^2$  در فضای سه بعدی یا عملگر  $-(\hbar^2/2m)d^2/dx^2$  در فضای یک بعدی مربوط می شود. در جدول ۴.۲، عملگرهای کوانتومی برای چند کمیت فیزیکی آمده است. اصل دوم مکانیک کوانتومی نیز به صورت زیر بیان می شود:

۰۲. هنگامی که کمیت فیزیکی  $A(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  اندازه گیری می شود، ویژه مقادیرهای عملگر کوانتومی  $A(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla)$  تنها مقادیر ممکن اند که به دست می آیند.

به این طریق نه تنها مقادیر انرژی بلکه مقادیر هر کمیت فیزیکی دیگر را نیز می توان تعیین کرد. بنا بر این اصل فوق می گوید که چه اطلاعات فیزیکی را می توان درباره یک سیستم به دست آورد. برای بیان این اصل به صورت ریاضی می توان از معادله عملگر زیر استفاده کرد

$$A(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla)\psi = a\psi \quad (48.2)$$

اکنون می خواهیم مقادیر ممکن  $a$  و توابع  $\psi$  را که این معادله دیفرانسیل را با شرایط مرزی مورد نیاز برآورده می کنند به دست آوریم. ویژه مقادیرهای  $a_1, a_2, a_3, \dots$  تنها نتایج ممکن از یک اندازه گیری  $A$  هستند. همچنین می گوئیم که ویژه تابعهای  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$

جدول ۴.۲ عملگرهای کوانتومی.

عملگر کوانتومی	تعریف کلاسیکی	کمیت
$\mathbf{r}$	$\mathbf{r}$	مکان
$-i\hbar\nabla$	$\mathbf{p}$	تکانه
$-i\hbar\mathbf{r} \times \nabla$	$\mathbf{r} \times \mathbf{p}$	تکانۀ زاویه ای
$-(\hbar^2/2m)\nabla^2$	$p^2/2m$	انرژی جنبشی
$-(\hbar^2/2m)\nabla^2 + E_p(\mathbf{r})$	$p^2/2m + E_p(\mathbf{r})$	انرژی کل

تا آنجا که به کمیت فیزیکی  $A$  مربوط است حالت‌های ممکن سیستم را توصیف می‌کنند. واضح است که اگر سیستم در حالتی باشد که به وسیلهٔ ویژه تابع  $\psi_n$  متناظر با عملگر  $A$  بیان شود، در این صورت مقدار کمیت فیزیکی  $A$  برابر با  $a_n$  خواهد بود. در اینجا این سؤال مطرح می‌شود که اگر سیستم در حالتی باشد که با تابع  $\Phi$  که هیچکدام از جواب‌های  $\psi_n$  معادلهٔ (۴۸.۲) نیست بیان شود، چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ در چنین حالتی می‌گوییم که  $A$  مقدار دقیقی ندارد. از بسط تابع موج  $\Phi$  بر حسب ویژه تابع‌های  $\psi_n$  عملگر  $A$  خواهیم داشت

$$\Phi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + c_3\psi_3 + \dots = \sum c_n\psi_n$$

واضح است که وقتی توابع  $\psi_n$  متعامد باشند داریم

$$c_n = \int \psi_n^* \Phi d\tau \quad (49.2)$$

بنابراین، اصل سوم مکانیک کوانتومی به صورت زیر بیان می‌شود:

۳. هنگامی که حالت سیستم با تابع موج  $\Phi(\mathbf{r})$  متناظر باشد، احتمال به دست آوردن مقدار  $a_n$  در نتیجهٔ اندازه‌گیری کمیت فیزیکی  $A(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  برابر است با  $|c_n|^2$  که در آن  $c_n$  با معادلهٔ (۴۹.۲) داده می‌شود و  $\psi_n$  ویژه تابع عملگر  $A(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla)$  متناظر با ویژه مقدار  $a_n$  است.

می‌توان نشان داد که معادلهٔ (۱.۲) یک کاربرد بخصوص از این اصل است هنگامی که کمیت فیزیکی اندازه‌گیری شده مکان ذره باشد.

بر طبق اصل سوم، هنگامی که تابع موج  $\Phi$  ویژه تابع عملگر  $A$  نیست، نمی‌توان گفت که مقدار دقیق  $A$  چقدر است، و هرگاه مرتباً  $A$  را اندازه‌گیری کنیم، نتایج متفاوتی و به دست خواهیم آورد که هر کدام احتمال مشخصی را دارا هستند. اما در مورد میانگین یا مقدار انتظاری  $A$  در حالتی که به وسیلهٔ  $\Phi$  بیان شده است می‌توان صحبت به میان آورد. به عنوان یک نتیجهٔ فرعی اصل سوم، می‌توان نشان داد

هنگامی که حالت سیستم با تابع  $\Phi(\mathbf{r})$  متناظر باشد میانگین یا مقدار انتظاری کمیت فیزیکی  $A(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  عبارت است از

$$A_{ave} = \int_{\text{تمام فضا}} \Phi^* A(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla) \Phi d\tau \quad (50.2)$$

در معادلهٔ (۵۰.۲) ابتدا باید  $A$  بر روی  $\Phi$  عمل کند، و سپس در  $\Phi^*$  ضرب و سرانجام انتگرال گرفته شود. معادلهٔ (۵۰.۲) به شرطی صحیح خواهد بود که تابع  $\Phi$  بهنجار شده به یک باشد، یعنی  $\int \Phi^* \Phi d\tau = 1$ . اما اگر  $\Phi$  بهنجار شده به یک نباشد، باید

به جای معادله (۵۰.۲) چنین نوشت

$$A_{ave} = \frac{\int \Phi^* \mathbf{A} \Phi d\tau}{\int \Phi^* \Phi d\tau} \quad (51.2)$$

اصولی را که بیان کردیم ایستا هستند، از این جهت که هیچ اطلاعاتی را در باره تحول زمانی دستگاه به دست نمی دهند. برای به دست آوردن یک نظریه دینامیک، به اصل چهارم مکانیک کوانتومی نیاز خواهیم داشت

۴. تحول زمانی یک سیستم فیزیکی به وسیله معادله زیر بیان می شود

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathbf{H} \Psi \quad (52.2)$$

که در آن  $\mathbf{H}$  عملگر هامیلتونی دستگاه است.

همان طور که مشاهده می شود، هنگامی معادله (۵۲.۲) با معادله (۲۷.۲) در فضای یک بعدی یکسان است که  $\mathbf{H}$  با معادله (۳۷.۲) داده شده باشد. با به کار بردن ایده عملگرها می توان گفت که معادله دینامیکی (۵۲.۲) را می توان با قراردادن عملگر  $i\hbar \partial / \partial t$  به جای انرژی  $E$  در معادله (۳۸.۲) به دست آورد. یعنی

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (53.2)$$

در اینجا نمی خواهیم بیشتر از آنچه گفته شد، در باره نظریه صوری مکانیک کوانتومی صحبت کنیم. اصولی که تاکنون بیان شده اند، برای هدفهای این کتاب کافی هستند.

مثال ۹.۲ هرگاه تابع موج با یکی از ویژه حالتها متناظر باشد، مقدار میانگین تکانه ذره موجود در جعبه پتانسیل را به دست آورید.

حل: در بخش ۵.۲، تابع موجهای ذره موجود در جعبه یک بعدی را به صورت زیر به دست آوردیم

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

چون این توابع بهنجار شده هستند، معادله (۵۰.۲) را به کار می بریم، بنابراین

$$p_{ave} = \int_{-a}^a \psi_n^* \left( -i\hbar \frac{d}{dx} \right) \psi_n dx$$



زیرا  $-i\hbar d/dx$  عملگر متناظر با  $p$  است، اما می‌دانیم

$$\frac{d\psi_n}{dx} = \sqrt{\frac{2}{a}} \left(\frac{n\pi}{a}\right) \cos \frac{n\pi x}{a}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$p_{ave} = -i\hbar \frac{\gamma n\pi}{a^2} \int_{-a}^a \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} dx = 0$$

ممکن است به‌ظاهر این نتیجه با معادلهٔ (۱۳.۲) تناقض داشته باشد. طبق معادلهٔ اخیر تکانهٔ ذرهٔ موجود در جعبه برابر است با  $n\pi\hbar/a$ . با این حال، مقدار  $p = n\pi\hbar/a$  بزرگی تکانه را به دست می‌دهد. اما می‌دانیم که تکانه یک کمیت برداری است و ذرهٔ واقع در جعبه به‌طور متقارن به طرف جلو و عقب حرکت می‌کند و راستای تکانهٔ آن تغییر می‌کند. بنابراین، طبیعی است که  $p_{ave} = 0$  باشد.

مثال ۱۰۰۲ ماتریسهای وابسته به یک کمیت فیزیکی را بررسی کنید.

حل: ویژه تابعهای  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$  هامیلتونی، یعنی ویژه تابعهایی که در معادلهٔ  $H\psi_n = E\psi_n$  صدق می‌کنند را در نظر می‌گیریم. با فرض اینکه  $A$  کمیت فیزیکی دیگری است، برای هر زوج از توابع  $\psi_m$  و  $\psi_n$  می‌توان سری کمیت‌های زیر را به دست آورد

$$A_{mn} = \int \psi_m^* A \psi_n d\tau \quad (54.2)$$

این کمیتها را می‌توان به صورت ماتریسی زیر مرتب کرد

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} & \dots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \dots & A_{mn} & \dots \end{pmatrix}$$

این آرایسه را ماتریس  $A$  می‌نامند و  $A_{mn}$  نیز عناصر این ماتریس هستند. عناصر  $A_{11}$ ،  $A_{22}$ ،  $A_{33}$ ،  $A_{nn}$ ،  $\dots$  را نیز به خاطر موضعشان در ماتریس عناصر قطری ماتریس می‌نامند. برای محاسبهٔ ماتریس هر عملگر ازومی ندارد که ویژه تابعهای هامیلتونی به کار برده شوند، زیرا از ویژه تابعهای هر عملگر دیگر می‌توان استفاده کرد.

محاسبه عناصر ماتریس در پاره‌ای از مسائل کوانتومی بسیار حائز اهمیت است. در اینجا فقط آن را در یک مثال نشان می‌دهیم. عناصر ماتریس بردار مکان عبارت‌اند از

$$r_{mn} = \int \psi_m^* r \psi_n d\tau$$

می‌توان ثابت کرد که احتمال گذار از حالت  $i$  به حالت  $f$  با گسیل یا جذب تابش مربوط به دو قطبی الکتریکی با انرژی  $E_i - E_f = \hbar\omega$  به وسیله معادله زیر داده می‌شود

$$T_{if} = \frac{e^2 \omega^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} |\mathbf{r}_{if}|^2 \quad (55.2)$$

بنابراین اگر  $\mathbf{r}_{if} = 0$  باشد، گذار از نوع ممنوع مرتبه اول است. به این طریق می‌توان قواعد گزینش بیان شده در بخش ۱۱.۲ را به دست آورد. حالت قطبش تابش به وسیله مؤلفه‌های  $\mathbf{r}_{if}$  تعیین می‌شود. به عنوان مثال، اگر  $x_{if} = y_{if} = 0$  و  $z_{if} \neq 0$  باشد، تابش گسیل شده یا جذب شده در راستای موازی با محور  $Z$  قطبیده خواهد بود. چون انرژی گسیل شده در گذار مساوی با  $\hbar\omega$  است، آهنگ تابش انرژی عبارت است از

$$\frac{dE}{dt} = \hbar\omega T_{if} = \frac{e^2 \omega^4}{3\pi\epsilon_0 c^3} |\mathbf{r}_{if}|^2$$

پس از مقایسه این رابطه با نتیجه به دست آمده در مثال ۱.۱، برای یک نوسانگر کلاسیک، نتیجه می‌گیریم که در خلال گذار، الکترون به صورت یک دو قطبی الکتریکی با بسامد زاویه‌ای  $\omega$  و دامنه  $2|\mathbf{r}_{if}|$  رفتار می‌کند.

## مسائل

۱۰۲ ذره‌ای با تابع موج  $\psi(x) = e^{-(x-x_0)^2/2\alpha}$  توصیف می‌شود. تابع موج  $\psi(x)$  و توزیع احتمال  $|\psi(x)|^2$  را رسم و عدم قطعیت در مکان و در تکانه ذره را برآورد کنید.

۲۰۲ نشان دهید که برای جویباری از ذرات که با انرژی  $E > E_0$  به پله پتانسیلی به ارتفاع  $E_0$  برخورد می‌کنند، رابطه  $R + T = 1$  برقرار است (مثال ۲۰۲).

۳۰۲ در هر یک از دو حالت زیر چه تغییری در ترازهای انرژی جعبه پتانسیل یک بعدی ایجاد می‌شود؟ (الف) اندازه جعبه کاهش یابد. (ب) اندازه جعبه افزایش یابد.

۴۰۲ الکترونی را در نظر می‌گیریم که در جعبه پتانسیل یک بعدی به پهنای  $2.0 \text{ \AA}$  قرار دارد. انرژی نقطه صفر را محاسبه کنید. با استفاده از اصل عدم قطعیت، در باره اثر تابش فرودی که برای تعیین موضع الکترون با دقت یک درصد (یعنی  $\Delta x = 0.02 \text{ \AA}$ ) به کار رفته بحث کنید.

۵۰۲ انرژی نقطه صفر الکترونی را بر اورد کنید که در داخل ناحیه‌ای به اندازه  $m \cdot 10^{-14}$ ، که در حدود بزرگی ابعاد هسته‌ای است، محبوس شده است. این انرژی را با انرژی پتانسیل گرانشی و نیز با انرژی پتانسیل کولنی الکترون و پروتونی که در همان فاصله از یکدیگر قرار دارند، مقایسه کنید. بر اساس این قیاس، در مورد امکان اینکه الکترون بتواند در داخل هسته وجود داشته باشد، بحث کنید.

۶۰۲ انرژی نقطه صفر نوترونی را محاسبه کنید که در داخل هسته‌ای که اندازه آن  $m \cdot 10^{-15}$  است، محبوس شده است.

۷۰۲ نشان دهید که اختلاف انرژی نسبی  $\Delta E/E$  میان هر زوج تراز مجاور ذره موجود در یک جعبه عبارت است از  $(2n+1)/n^2$ .

۸۰۲ تابع موجهای ذره موجود در جعبه پتانسیل را که به وسیله معادله (۱۸.۲) داده شده است، بهنجار و ثابت کنید  $C = \sqrt{\lambda/abc} = \sqrt{\lambda/V}$ .  $V$  حجم جعبه است.

۹۰۲ ثابت کنید که تابع موجهای سه بعدی معادله (۱۸.۲) متعامند.

۱۰۰۲ تابع  $g(p)$  را که در مثال ۴.۲ داده شده است، بر حسب  $p$  رسم و آن را با شکل ۱۲.۲ مقایسه کنید. اختلاف میان آن دو را نیز بیان کنید.

۱۱۰۲ نشان دهید که حجم فضای فاز متناظر با ذره متحرک موجود در داخل ناحیه‌ای به حجم  $V$ ، که تکانه آن میان  $p$  و  $p+dp$  است برابر است با  $4\pi V p^2 dp$ . با توجه به اینکه کمینه اندازه یک سلول در فضای فاز، که ذره‌ای بتواند در داخل آن جایگزیده شود، برابر است با  $h^3$ ، تعداد حالت‌های کوانتومی با تکانه میان  $p$  و  $p+dp$  را که برای ذره قابل حصول است، به دست آورید و با نتایج مثال ۴.۲ مقایسه کنید.

۱۲۰۲ نشان دهید که ترازهای انرژی و تابع موجهای ذره‌ای که در صفحه  $XY$  موجود در جعبه پتانسیل دو بعدی به ابعاد  $a$  و  $b$  حرکت می‌کند، عبارت‌اند از

$$E = \left( \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \right) \left( \frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} \right)$$

و

$$\psi = C \sin \left( \frac{n_x \pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n_y \pi y}{b} \right)$$

تبهنگنی ترازها را به ازای  $a=b$  بررسی کنید. همچنین ثابت بهنجارش  $C$  را به دست آورید.

۱۳۰۲ با توجه به مسئله ۱۲.۲، هرگاه جعبه دو بعدی خیلی بزرگ ولی اضلاع آن یکسان

باشد، تعداد حالت‌های کوانتومی را در دومورد زیر به دست آورید. (الف) حالت‌های کوانتومی با انرژی میان  $E$  و  $E + dE$ . (ب) حالت‌های کوانتومی با تکانه میان  $p$  و  $p + dp$ .

۱۴۰۲ با انتگرال گیری مستقیم ثابت کنید که تابع موج‌های  $\psi_0$  و  $\psi_1$  برای نوسانگر هماهنگ (جدول ۲.۲) بهنجار شده‌اند. همچنین نشان دهید که  $\psi_0$  با  $\psi_1$  و  $\psi_1$  متعامد است.

۱۵۰۲ انرژی نقطه صفر و فواصل ترازهای انرژی را در حالت‌های زیر محاسبه کنید. (الف) در نوسانگر هماهنگ يك بعدی با بسامد نوسانی  $400 \text{ Hz}$ ، (ب) در نوسانگر هماهنگ سه بعدی با بسامد نوسانی  $400 \text{ Hz}$ ، و (ج) در مولکول CO، در صورتی که دو اتم با بسامد  $10^{11} \times 6433 \text{ Hz}$  نوسان کنند.

۱۶۰۲ عبارت کلی جواب‌های معادله شرودینگر برای نوسانگر هماهنگ به صورت زیر است

$$\psi_n = N_n H_n(ax) e^{-a^2 x^2 / 2}$$

که در آن  $N_n = \sqrt{a / \pi^{1/2} 2^n n!}$  ثابت بهنجارش و  $a = \sqrt{m\omega / \hbar}$  توابع  $H_n(ax)$  به چند جمله‌ای هریت معروف‌اند و به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2})$$

چهار تابع موج اول ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) را بنویسید و آنها را با عبارت‌های جدول ۲.۲ مقایسه کنید.

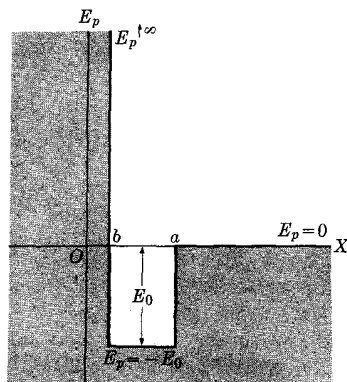
۱۷۰۲ تابع موج‌های نوسانگر هماهنگ سه بعدی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\psi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) = N_{n_x} N_{n_y} N_{n_z} \times H_{n_x}(ax) H_{n_y}(ay) H_{n_z}(az) e^{-a^2 r^2 / 2}$$

که در آن کمیت‌های مختلف همان کمیت‌هایی هستند که در مسئله ۱۶۰۲ تعریف شده‌اند. انرژی نوسانگر برابر است با  $E = (n + 3/2)\hbar\omega$  که در آن  $n = n_x + n_y + n_z$  است. نشان دهید که تبهگنی هر حالت به صورت  $g = (n+1)(n+2)/2$  داده می‌شود. تابع موج‌های متناظر با  $n = 0, 1, 2$  را به طور کامل بنویسید. یادآوری می‌شود که تابع موج به ازای  $n = 0$  دارای تقارن کروی است. شکل تابع موجها را به ازای  $n = 1$  تحلیل کنید.

۱۸۰۲ تعیین کنید که در هر يك از دو حالت زیر ترازهای انرژی چاه پتانسیل يك بعدی چه تغییری می‌کنند. (الف) عمق چاه کاهش یا بسد. (ب) عمق چاه افزایش یا بسد. مسئله را برای هنگامی که پهنای چاه تغییر می‌کند، ولی عمق آن ثابت می‌ماند، تکرار کنید.

۱۹۰۲ چاه پتانسیلی به پهنای  $a$  را در نظر می‌گیریم. هر گاه مطابق شکل ۳۸.۲ يك قسمت مرکزی سخت به پهنای  $b$  را به آن اضافه کنیم، چه تغییری در ترازهای انرژی و تسابح موج‌های این چاه ایجاد می‌شود؟ [داهنمایی: مثال‌های ۵.۲ و ۶.۲ را ببینید.]



شکل ۳۸۰۲

۲۰۲ چاه پتانسیلی به عمق  $E_0$  و پهنای  $a$  را در نظر می‌گیریم (مثال ۶۰۲). تابع موجهای ممکن مربوط به حالت‌های مقید زیر را رسم کنید

$$E_0 a^2 < \pi^2 \hbar^2 / \lambda m \quad (\text{الف})$$

$$\pi^2 \hbar^2 / \lambda m < E_0 a^2 < 9\pi^2 \hbar^2 / \lambda m \quad (\text{ب})$$

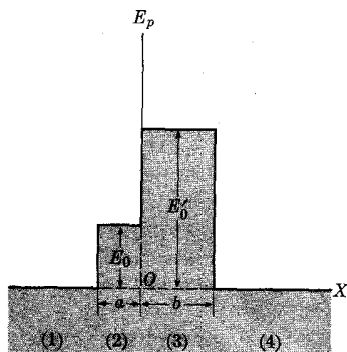
$$9\pi^2 \hbar^2 / \lambda m < E_0 a^2 < 25\pi^2 \hbar^2 / \lambda m \quad (\text{ج})$$

۲۱۰۲ عمق چاه،  $E_0$ ، را برای نوترونی برآورد کنید که در داخل چاه پتانسیل راستگوشه یک بعدی به پهنای  $m \times 10^{-15} \times 3$  قرار دارد و انرژی بستگی آن،  $E_b$ ، برابر  $20 \text{ MeV}$  است. فرض می‌کنیم که فقط یک تراز انرژی امکان‌پذیر است.

۲۲۰۲ معادله (۲۳۰۲)، یعنی  $k_i \cot k_i a = -\alpha$  را می‌توان به کمک نمودار و به طریق زیر حل کرد. ابتدا کمیت‌هایی را مطابق  $\xi = k_i a$ ،  $\eta = \alpha a$ ، و  $\rho = (\sqrt{2mE_0} / \hbar) a$  تعریف می‌کنیم. در این صورت  $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$ . همچنین از معادله (۲۳۰۲) رابطه  $\eta = -\xi \cot \xi$  را به دست می‌آوریم. با فرض اینکه  $\xi$  محور طول و  $\eta$  محور عرض باشد، منحنی  $\eta = -\xi \cot \xi$  را رسم کنید و نشان دهید که دایره  $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$ ، بسته به مقدار  $\rho$  یکبار، دوبار، سه‌بار، و... منحنی را قطع می‌کند. نقاط تقاطع با مقادیر مجاز  $E_0 a^2$  متناظرند. نشان دهید که این مقادیر با مقادیر  $E_0 a^2$  که در این فصل داده شد سازگارند.

۲۳۰۲ برای سد پتانسیل مربعی شکل ۲۳۰۲، ضرایب  $B$ ،  $C$ ،  $D$ ، و  $A'$  را بر حسب ضریب  $A$  برای دو حالت زیر تعیین کنید. (الف)  $E < E_0$  و (ب)  $E > E_0$ .

۲۴۰۲ انرژی پتانسیلی را مطابق شکل ۳۹۰۲ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که ذرات فرودی از طرف چپ به آن نزدیک می‌شوند. تابع موجها را برای هر یک از نواحی انرژی

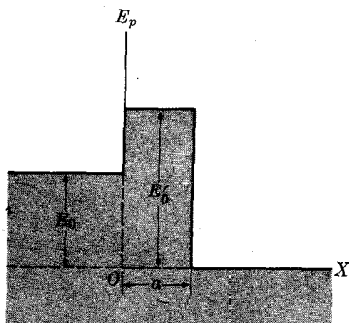


شکل ۳۹.۲

پتانسیل بنویسید و منحنی آنها را رسم کنید. این بحث را برای سه حالت متمایز که در آنها  $E < E_0$ ،  $E < E_0 < E_0'$ ، و  $E > E_0'$  است، انجام دهید.

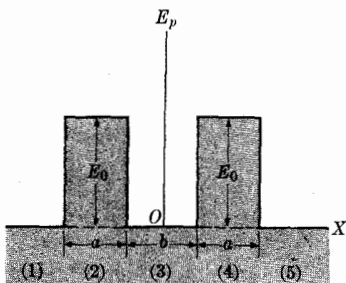
۲۵.۲ مسئله قبل را برای حالتی که در آن ذرات از طرف راست به سد پتانسیل یاد شده نزدیک می‌شوند، تکرار کنید.

۲۶.۲ انرژی پتانسیلی را مطابق آنچه در شکل ۴۰.۲ نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم. در سه حالت زیر، رابطه ریاضی کلی و شکل تابع موج را برای یک ذره فرودی که از طرف راست به آن نزدیک می‌شود، بررسی کنید. (الف)  $E < E_0$ ، (ب)  $E_0 < E < E_0'$  و (ج)  $E > E_0'$ . دو حالت آخر را برای ذره‌ای تکرار کنید که از طرف چپ به آن نزدیک می‌شود.



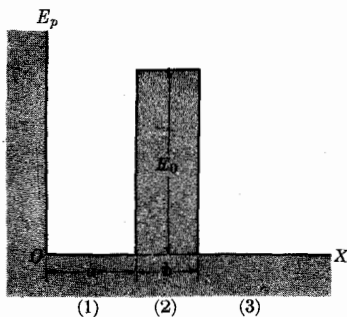
شکل ۴۰.۲

۲۷.۲ انرژی پتانسیلی را مطابق شکل ۴۱.۲ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که ذره فرودی یکبار با  $E < E_0$  و بار دیگر با  $E > E_0$  از طرف چپ به آن نزدیک می‌شود. تابع موج را در هر یک از نواحی انرژی پتانسیل بنویسید و منحنی آنها را رسم کنید. آیا برای ذره‌ای که در آغاز در ناحیه (۳) قرار دارد، ممکن است یک ویژگی خاص وجود داشته باشد؟



شکل ۴۱.۲

۲۸.۲ تابع موج را در هر یک از نواحی انرژی پتانسیل نشان داده شده در شکل ۴۲.۲ بنویسید و منحنی آن را رسم کنید.

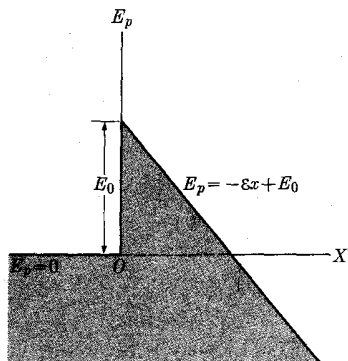


شکل ۴۲.۲

۲۹.۲ ذره‌ای تحت اثر میدان الکتریکی یکنواخت  $\mathcal{E}$  در مسیر راست‌خط طوری حرکت می‌کند که انرژی پتانسیل آن  $E_p = -\mathcal{E}x$  است. (الف) معادله شرودینگر را برای این حرکت به دست آورید. (ب) برای حالتی که انرژی  $E$  بزرگتر یا کوچکتر از صفر باشد، تابع موجها را رسم کنید. آیا انرژی کوانتیده است؟

۳۰.۲ با توجه به انرژی پتانسیل شکل ۴۳.۲ تابع موجها را برای ذره‌ای رسم کنید که از طرف راست به آن نزدیک می‌شود و انرژی کل آن به صورت یکی از حالات زیر است.

(الف) منفی؛ (ب) میان صفر و  $E_0$ ، و (ج) بزرگتر از  $E_0$ . هرگاه انرژی کل ذره بزرگتر از  $E_0$  باشد در هنگامی که ذره در نواحی  $x > 0$  و  $x < 0$  حرکت می کند، طول موج آن چگونه تغییر می کند؟ مسئله بالا را برای حالتی تکرار کنید که ذره از طرف چپ به آن نزدیک می شود. این وضع متناظر است با انرژی پتانسیل الکترون موجود در یک فلز هنگامی که میدان الکتریکی خارجی  $\mathcal{E}$  به آن اعمال شده باشد.



شکل ۴۳.۲

۳۱.۲ ذره ای تحت تأثیر انرژی پتانسیل  $E_p(x) = -E_0 e^{-\alpha x^2}$  حرکت می کند. (الف) منحنی تغییرات  $E_p(x)$  را رسم کنید. (ب) هنگامی که انرژی کل منفی یا مثبت باشد، تابع موجها را رسم کنید. (ج) آیا انتظاری رود که برای بعضی گستره های انرژی، ترازهای انرژی کوانتیده وجود داشته باشد؟ (د) انرژی نقطه صفر ذره را برآورد کنید. [داهنمایی: یادآور می شود که برای انرژیهای نزدیک به  $-E_0$ ، ذره با بسامد

$$\omega = [(d^2 E_p / dx^2) / m]^{1/2}$$

نوسان می کند.]

۳۲.۲ نشان دهید که برای چند جمله ایهای هرمیتی تعریف شده در مسئله ۱۶.۲، اگر  $n$  زوج باشد داریم

$$H_n(-\xi) = H_n(\xi)$$

و هرگاه  $n$  فرد باشد داریم

$$H_n(-\xi) = -H_n(\xi)$$

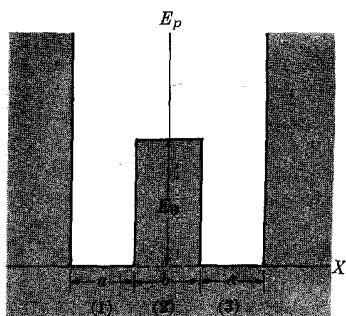
و از این راه نتیجه بگیرید که برای نوسانگر هماهنگ یک بعدی، بسته به فرد یا زوج بودن



$n$ ، پاریته تابع موجها زوج یا فرد است. همچنین نشان دهید که بسته به این که  $n$  زوج یا فرد باشد، پاریته نوسانگر هماهنگ سه بعدی مسئله ۱۷.۲ می تواند زوج یا فرد باشد.

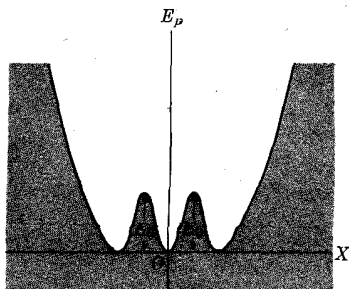
۳۳.۲ نشان دهید که پاریته تابع موجهای ذره موجود در جعبه پتانسیل با معادله (۱۸.۲) هنگامی که  $n = n_1 + n_2 + n_3$  زوج یا فرد باشد، فرد یا زوج است.

۳۴.۲ با توجه به انرژی پتانسیل شکل ۴۴.۲، تابع موج را برای هر ناحیه بنویسید و تابع موجها و ترازهای انرژی را برای  $E < E_0$  و  $E > E_0$  رسم کنید. یادآوری می شود که سه تابع موجها متقارن (زوج) و پاد متقارن (فرد) هستند. هنگامی که  $E_0$  یا  $b$  خیلی بزرگ شود، درباره تأثیری که بر ترازهای انرژی مجاور ایجاد می شود، بحث کنید.



شکل ۴۴.۲

۳۵.۲ ذره ای با انرژی پتانسیل نشان داده شده در شکل ۴۵.۲ حرکت می کند. تابع موجها و توزیعهای احتمال برای سه تراز یا پایینترین انرژی را رسم و مشخص کنید که این سه تراز دارای انرژیهای خیلی نزدیک به یکدیگرند. شکل کلی ترازهای انرژی را رسم کنید.



شکل ۴۵.۲

۳۶.۲ تابع موج وابسته به زمان را برای باریکه‌ای از ذرات آزاد که با معادله (۲۹.۲) داده شده است، در نظر می‌گیریم که در آن،  $|A|^2$  میانگین تعداد ذرات در یکای حجم است. نشان دهید که تعداد ذراتی که در واحد زمان از یکای سطح عبور می‌کند (یعنی شار ذرات)، برابر است با  $\hbar |A|^2 k/m$ .

۳۷.۲ با در دست داشتن رابطه

$$\Psi(x, t) = c_1 \psi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 \psi_2(x) e^{-iE_2 t/\hbar}$$

که در آن ویژه تابعهای  $\psi_1(x)$  و  $\psi_2(x)$  متعامد و بهنجار شده هستند، نشان دهید که

$$c_1 = \int \psi_1^*(x) \Psi(x, 0) dx$$

و

$$c_2 = \int \psi_2^*(x) \Psi(x, 0) dx$$

این نشان می‌دهد که در هر زمان، تابع موج را می‌توان بر حسب تابع موج اولیه  $\Psi(x, 0)$  به دست آورد. نتیجه را به حالتی تعمیم دهید که در آن داریم

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$$

۳۸.۲ نشان دهید که تابع موجهای ذره آزاد  $\psi(x) = e^{\pm ikx}$  عبارت‌اند از ویژه تابعهای عملگر تکانه مربوط به ویژه مقادیرهای  $\pm \hbar k$ .

۳۹.۲ کدامیک از توابع زیر ویژه تابعهای عملگر  $d/dx$  هستند؟ (الف)  $e^{ikx}$ ، (ب)  $e^{ax}$ ، (ج)  $\sin kx$ . ویژه مقدار مربوط را نیز در هر حالت نشان دهید. همین عمل را برای عملگر  $d^2/dx^2$  تکرار کنید.

۴۰.۲ نشان دهید که عملگر تکانه  $-i\hbar d/dx$  هرمیتی است. [داهنمایی: با قرار دادن عملگر تکانه به جای  $A$ ، عبارت واقع در طرف چپ معادله (۴۰.۲) را به صورت جزء به جزء انتگرال بگیرید و رفتار تابع موجها را در  $\pm \infty$  منظور کنید.]

۴۱.۲ مقادیر میانگین یا مقادیر انتظاری  $x$ ،  $x^2$ ،  $p$ ، و  $p^2$  را برای حالت‌های  $n=0$  و  $n=1$  نوسانگر هماهنگ خطی به دست آورید.

۴۲.۲ مقادیر میانگین یا مقادیر انتظاری  $x$ ،  $x^2$ ،  $p$ ،  $p^2$  را برای حالت پایه و اولین حالت برانگیخته ذره واقع در جعبه پتانسیل یک بعدی به دست آورید.

۴۳.۲ عملگرهای مربوط به سه مؤلفه عمود بر هم تکانه زاویه‌ای مداری  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  را به‌طور کامل بنویسید.

۴۴.۲ جابه‌جاگر دو عملگر  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  عبارت است از  $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$  که با نماد  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  نمایش داده می‌شود. نشان دهید

$$[x, p_x]\psi = i\hbar\psi$$

$$[y, p_x]\psi = 0$$

و

$$[z, p_x]\psi = 0$$

که در آن  $\psi$  یک تابع اختیاری است. معمولاً تابع موج به‌طور صریح نوشته نمی‌شود. بنابراین روابط بالا به‌صورت  $[x, p_x] = i\hbar$  و  $[y, p_x] = 0$  و  $[z, p_x] = 0$  نوشته می‌شوند (جابه‌جاگرها نقش بسیار مهمی را در مکانیک کوانتومی ایفا می‌کنند).

۴۵.۲ عناصر ماتریسی  $p_{01}, x_{02}, x_{01}, p_{02}$  را برای مختصات و تکانه‌های نوسانگر هماهنگ (یک بعدی) خطی به‌دست آورید.

۴۶.۲ ذره‌ای درجه‌ی پتانسیل یک بعدی به پهنای  $a$  حرکت می‌کند. از روی تابع موجهای بهنجار شده، عناصر ماتریسی  $x_{nm}$  و  $p_{nm}$  را به‌دست آورید. همچنین نشان دهید که  $p_{nm} = im\omega_{nm}x_{nm}$  که در آن برای  $\omega_{nm}$  چنین داریم

$$\omega_{nm} = \frac{(E_n - E_m)}{\hbar}$$

۴۷.۲ قاعده‌ی گزینش برای گذار دو قطبی الکتریکی ذره موجود در جعبه‌ی پتانسیل یک بعدی را به‌دست آورید. [دانه‌مایی: مثال ۱۰.۲ را ببینید.]

۴۸.۲ نشان دهید که اگر  $\psi_1$  و  $\psi_2$  ویژه‌تابعهای مستقل یک عملگر خطی متناظر با ویژه مقدار تبهگن یکسانی باشند، تابع  $\phi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$  نیز یک ویژه‌تابع عملگر متناظر با همان ویژه مقدار تبهگن خواهد بود. همچنین نشان دهید که اگر  $\psi_1$  و  $\psi_2$  متعامد نباشند، در این صورت ثابتها را می‌توان طوری انتخاب کرد که ویژه‌تابع  $\phi$  بهنجار شده و با  $\psi_1$  متعامد باشد. این نتیجه بسیار حائز اهمیت است زیرا نشان می‌دهد که ویژه‌تابعهای متناظر با ویژه مقدارهای تبهگن را همیشه می‌توان متعامد فرض کرد. روش بالا را برای سه ویژه‌تابع  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  و  $\psi_4$  تعمیم دهید. برای این کار، دو ترکیب خطی  $\phi_1$  و  $\phi_2$  از این سه تابع را طوری تشکیل دهید که بهنجار شده و با  $\psi_4$  متعامد باشند.

۴۹.۲ انحنای تابع  $\psi(x)$  با  $d^2\psi/dx^2$  متناسب است. با به‌کار بردن معادله‌ی شرودینگر

نشان دهید که اگر  $E < E_p(x)$  باشد، تابع موج  $\psi(x)$  به سمت محور  $X$  تفرق دارد و اگر  $E > E_p(x)$  باشد، تابع موج  $\psi(x)$  به طرف محور  $X$  تحدب خواهد داشت. این نتیجه را با منحنیهای تابع موجها که در این فصل بررسی شد امتحان کنید.

## مراجع

1. "Quantum-Mechanical Tunneling," J. Fermer, *Am. J. Phys.*, 34, 1168 (1966).
2. "The Philosophical Basis of Bohr's Interpretation of Quantum Mechanics," R. Hall, *Am. J. Phys.*, 33, 624 (1965).
3. "Quantum Mechanics as a Model," T. Buch, *Am. J. Phys.*, 34, 653 (1966).
4. "Interpretation of Quantum Mechanics and the Future of Physics," E. Witmer, *Am. J. Phys.*, 35, 40 (1967).
5. *Elements of Wave Mechanics*, N. Mott. Cambridge: Cambridge University Press, 1962, Chapters 1, 2, 3, and 4.
6. *Introduction to Modern Physics*, F. Richtmyer, E. Kennard, and T. Lauritsen. New York: McGraw-Hill, 1955, Chapter 6, Sections 96-102.
7. *Elementary Wave Mechanics*, W. Heitler, second edition. Oxford: Oxford University Press, 1956, Chapters 1 and 2.
8. *Atomic Spectra and Atomic Structure*, G. Herzberg. New York: Dover Press, 1944, Chapter 1.
9. *Structure of Matter*, W. Finkelburg. New York: Academic Press, 1964, Chapter 4.
10. *Quantum Theory of Matter*, J. Slater. New York: McGraw-Hill, 1951, Chapters 1, 2, and 3.

## اتمهای تک الکترونی

- ۱.۳ مقدمه
- ۲.۳ اتم هیدروژن
- ۳.۳ طیف هیدروژن
- ۴.۳ کوانتش تکانه زاویه‌ای
- ۵.۳ تابع موجهای تک الکترونی تحت تأثیر نیروهای مرکزی
- ۶.۳ اثر زیمان
- ۷.۳ اسپین الکترون
- ۸.۳ جمع تکانه‌های زاویه‌ای
- ۹.۳ برهم‌کنش اسپین - مدار

## ۱.۳ مقدمه

مطالعه اتمها را با مروری بر دانسته‌های خود درباره ساختار اتم آغاز می‌کنیم. ابعاد هر اتم در حدود  $10^{-9}$  m است. اتم شامل هسته نسبتاً سنگینی (با ابعادی در حدود  $10^{-14}$  m) است که در اطراف آن تعدادی الکترون چرخان هر یک با بار  $e$ ، فضای باقی مانده حجم اتم را اشغال می‌کنند. هسته از  $A$  ذره به نام نوکلئون، تشکیل شده است ( $A$ ، عدد جرمی) که از آن،  $Z$  ذره پروتون ( $Z$ ، عدد اتمی)، هر کدام با بار  $+e$  و بقیه یعنی  $N (= A - Z)$  ذره نوترونند؛ نوترونها بار الکتریکی ندارند. بنا بر این بار الکتریکی هسته هر اتم برابر  $+Ze$  است. تعداد الکترونهاي موجود در هر اتم با تعداد پروتونهاي آن (یعنی  $Z$  پروتون) برابر است و از این رو، اتم از لحاظ الکتریکی خنثی است. اما، در لحظات مشخصی، یک اتم ممکن است تعدادی الکترون بگیرد یا از دست بدهد و در نتیجه، بار الکتریکی آن منفی یا مثبت شود. در این حالت اتم را یون می‌گویند. جرم نوکلئون در حدود ۱۸۵۰ برابر جرم الکترون است. جرم اتم نیز عملاً برابر جرم هسته آن است.

اما بیشتر خواص اتم، مثل خاصیت کشسانی و خاصیت الکترومغناطیسی، ناشی از الکترونهاي آن است. برهم کنشهای الکترومغناطیسی میان الکترونها و هسته‌های اتمهای متفاوت در بستگی آنها به یکدیگر و تشکیل مولکولها، در واکنشهای شیمیایی، و عملاً در تمام خواص ماده نقش مهمی ایفا می‌کنند.

با در نظر گرفتن برهم کنشهای الکترومغناطیسی میان الکترونها و اجزای هسته (پروتونها و نوترونها) می‌توان حرکت الکترونهاي موجود در اطراف هسته را توجیه کرد. چون برهم کنشهای الکترومغناطیسی به خوبی شناخته شده هستند این امکان وجود دارد که حرکت الکترون را به طور دقیق بیان کنیم. اما همین مسئله برای هسته بسیار پیچیده است، زیرا برهم کنشهای دیگری در آن دخالت می‌کنند که هنوز به خوبی شناخته نشده‌اند. هنگامی که حرکت الکترون را تحلیل می‌کنیم، حتماً باید از روشهای مکانیک کوانتومی که در فصل قبل آمد استفاده کنیم.

در این فصل، خواص اتمها و یونهاي تک الکترونی را مطالعه می‌کنیم (اتم هیدروژن، ساده‌ترین اتم تک الکترونی است). اتمهای چند الکترونی را در فصل بعد مطالعه خواهیم کرد. مطالعه اتم تک الکترونی می‌تواند ما را در درک مسائل اساسی مربوط به ساختار اتم یاری دهد.

## ۲.۳ اتم هیدروژن

اتم هیدروژن ساده‌ترین اتمهای موجود در طبیعت است. هسته این اتم فقط از یک پروتون تشکیل شده است، بنابراین در این اتم  $A = 1$  و  $Z = 1$ . در اطراف این پروتون، تنها یک تک الکترون حرکت می‌کند. بنا بر این، می‌توانیم محاسبات خود را در مورد سایر اتمها یعنی اتمهایی که هسته آنها شامل  $Z$  پروتون و بار کل مثبت آنها مساوی با  $+Ze$  است به کار

بریم (شکل ۱.۳). در اینجا دو تقریب را در نظر می‌گیریم، نخست آنکه هسته در یک دستگاه لخت در حال سکون است. این تقریب می‌تواند یک فرض منطقی باشد، زیرا هسته به دلیل داشتن جرم بسیار بزرگتر از جرم الکترون، عملاً بر مرکز جرم اتم منطبق است. تا هنگامی که نیروهای خارجی بر اتم وارد نشود، مرکز جرم اتم در یک دستگاه لخت در حال سکون قرار دارد. تقریب دوم اینکه میدان الکتریکی هسته را میدان الکتریکی حاصل از یک بار نقطه‌ای در نظر می‌گیریم. این فرض نیز منطقی به نظر می‌رسد، زیرا اندازه هسته (یعنی در حدود  $10^{-14} \text{m}$ )، در مقایسه با میانگین فاصله الکترون از هسته (یعنی در حدود  $10^{-10} \text{m}$ ) بسیار کوچک است. اما در تحلیلهای دقیقتر لازم است که اندازه و شکل هسته را نیز در محاسبه منظور کنیم.

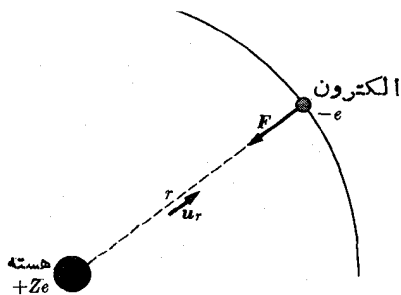
حرکت الکترون نسبت به هسته به کمک برهم کنش کولنی موجود میان آن دو تعیین می‌شود. این برهم کنش با نیروی جاذبه مرکزی و عکس مجذوری که بر الکترون وارد می‌شود، بیان و به وسیله معادله زیر داده می‌شود

$$\mathbf{F} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r \quad (1.3)$$

در این صورت، انرژی پتانسیل سیستم الکترون - هسته به صورت زیر خواهد بود

$$E_p(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.3)$$

اما چون حرکت الکترون را باید به کمک مکانیک کوانتومی تحلیل کنیم این مسئله را نمی‌توانیم با استفاده از معادله حرکت نیوتونی  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$  حل کنیم. برای حل این مسئله باید از معادله شرودینگر که در آن انرژی پتانسیل با معادله (۲.۳) داده می‌شود استفاده کنیم. چون حرکت الکترون سه بعدی است معادله (۹.۲) را به کار می‌بریم. در نتیجه، معادله شرودینگر به صورت زیر خواهد بود



شکل ۱.۳ الکترونی حول یک هسته در حرکت است.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi = E\psi \quad (3.3)$$

این معادله يك مسئله بسیار دشوار ریاضی است و دانشجو هنوز آمادگی کامل برای حل آن را ندارد بنا بر این فعلا توجه خود را به مطالعه انرژی ویژه حالتها معطوف و بحث در مورد تابع موجهای  $\psi$  را به بخش ۴.۳ موکول می کنیم.

قبل از هر چیز ثابتی را که به ثابت ریذبرگ معروف است به صورت زیر تعریف می کنیم

$$R_{\infty} = \frac{m_e e^4}{4\epsilon_0^2 \hbar^2 c} = 1.0974 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (4.3)$$

ترازهای انرژی ممکن برای ویژه حالتهای مقید الکترون که از معادله (۳.۳) به دست می آیند، با عبارت زیر داده می شوند

$$E_n = -\frac{R_{\infty} h c Z^2}{n^2} = -\frac{2.180 \times 10^{-18} Z^2}{n^2} \text{ J} \quad (5.3)$$

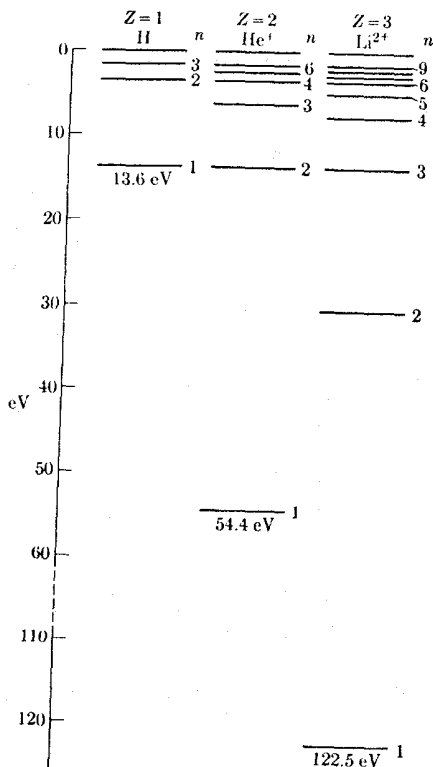
که در آن  $n = 1, 2, 3, \dots$  (یعنی اعداد درست مثبت). گاهی برای سهولت بهتر است که نتیجه را بر حسب الکترون ولت بیان کنیم. در این صورت با ایجاد تغییرات مناسب در یگاها خواهیم داشت

$$E_n = -\frac{13.6057 Z^2}{n^2} \text{ eV} \quad (6.3)$$

توجه کنید که مقادیر انرژی کل منفی هستند. این موضوع با نتیجه کلاسیک در مورد حرکت تحت تأثیر نیروی عکس مجذوری، هنگامی که مدار بیضیوار یا مقیداست، سازگاری دارد. نقطه صفر انرژی به حالتی گفته می شود که در آن دو ذره (الکترون و هسته) در فاصله بینهایت از یکدیگر در حال سکون قرار دارند. بنا بر این، معادله (۶.۳)، در مکانیک کلاسیک، با انرژی حرکت ذرات بر روی مدارهای بیضیوار هم ارز است. با این حال باید به خاطر داشته باشیم که در مکانیک کوانتومی هیچگاه نباید از مدارهای دقیق صحبتی به میان آوریم.

عبارت (۶.۳) در مورد اتمی به کار می رود که دارای يك تک الکترون است. از این رو این رابطه برای هیدروژن ( $Z=1$ ) و ایزوتوپهای آن، دو تریوم ( $Z=1, A=2$ ) و تریتیوم ( $Z=1, A=3$ )، برای هلیوم یکبار یونیده ( $Z=2$ )، برای لیتیوم دو بار یونیده ( $Z=3$ )، برای لیتیوم خود را از دست داده است،  $Z=2$ )، برای لیتیوم دوبار یونیده ( $Z=3$ )، و مانند آن به کار می رود. شکل ۲.۳ ترازهای انرژی نظری متناظر را نشان می دهد. مقادیر مناسب  $n$  برای تعدادی از ترازها در بررسی ذکر شده اند.





شکل ۲.۳ تعدادی از ترازهای انرژی H، He<sup>+</sup> و Li<sup>2+</sup>.

توجه کنید که بعضی از ترازهای موجود در شکل ۲.۳ بر یکدیگر منطبق اند. به عنوان مثال، ترازهای اتم هیدروژن به ترتیب بر آن عده از ترازهای He<sup>+</sup> که دارای مقادیر  $n = 3, 6, 9, \dots$  و نیز بر آن عده از ترازهای Li<sup>2+</sup> که دارای مقادیر  $n = 2, 4, 6, \dots$  هستند، منطبق اند. دلیل این انطباق آن است که بعضی از ضرایب مشترک به ازای مقادیر مربوط Z در معادله (۶.۳) حذف می شوند. اما باید توجه داشت که این انطباق دقیقاً در طبیعت رخ نمی دهد. در یک چارچوب لخت، هسته در حال سکون نیست بلکه همراه با الکترون حول مرکز جرم سیستم الکترون - هسته می چرخد. با این حال، با قراردادن جرم کاهیده سیستم الکترون - هسته به جای جرم الکترون در معادله (۲.۳) می توان حرکت نسبی الکترون و هسته را تحلیل کرد. با فرض اینکه جرم هسته M باشد جرم کاهیده اتم به صورت زیر خواهد بود<sup>۱</sup>

۱. به بخش ۹.۳ جلد اول رجوع کنید.

جدول ۱۰۳ ثابت ریذبرگ ( $R_\infty = 10,973,731 \text{ m}^{-1}$ ).

$R, \text{ m}^{-1}$	$A$	$Z$	اتم
۱۰,۹۶۷,۷۵۸	۱	۱	هیدروژن (H)
۱۰,۹۷۰,۷۴۲	۲	۱	دوتریوم (D)
۱۰,۹۷۱,۷۳۵	۳	۱	تریویوم (T)
۱۰,۹۷۲,۲۲۷	۴	۲	هلیوم ( $\text{He}^+$ )
۱۰,۹۷۲,۸۸۰	۷	۳	لیتیوم ( $\text{Li}^{2+}$ )
۱۰,۹۷۳,۰۷۰	۹	۴	بریلیوم ( $\text{Be}^{3+}$ )

$$\mu = \frac{m_e M}{m_e + M} = \frac{m_e}{1 + m_e/M}$$

بنابراین، در معادله (۵.۳) باید به جای ثابت ریذبرگ  $R_\infty$  مقدار زیر را قرار دهیم

$$R = \frac{\mu e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 c} = R_\infty \frac{\mu}{m_e} = R_\infty \left( \frac{1}{1 + m_e/M} \right) \quad (7.3)$$

در نتیجه، ترازهای انرژی بسا رابطه  $E = -RhcZ^2/n^2$  داده می‌شوند. در جدول ۱۰۳ مقدار  $R$  برای چند هسته آمده است. واضح است که  $R_\infty$  متناظر با حالتی است که در آن جرم هسته بینهایت است ( $M = \infty$ ). این موضوع خود دلیل قراردادن شاخص پایین نماد را بیان می‌کند.

تاکنون فقط حالت‌های انرژی منفی، یا حالت‌های مقید، را بررسی می‌کردیم. حالت‌های انرژی مثبت، که در بیان کلاسیکی با مدارهای هذلولوی متناظرند، حالت‌های نامقیدی‌اند که در آنها الکترون با انرژی جنبشی کافی از فاصله بسیار دور به هسته نزدیک می‌شود و پس از آنکه در اثر برهم‌کنش کولنی با هسته از مسیر حرکت راست‌خط منحرف‌شده، مجدداً به سمت بینهایت به حرکت خود ادامه می‌دهد. همان‌طور که در بخش ۷.۲ گفته شد، حالت‌های انرژی مثبت کوانتیده نیستند، زیرا انرژی جنبشی اولیه می‌تواند هر مقدار دلخواهی داشته باشد و از این رو، حالت‌های پیوسته تشکیل دهد.

مثال ۱۰۳ استخراج نیمه کلاسیک رابطه مربوط به ترازهای انرژی هیدروژن.

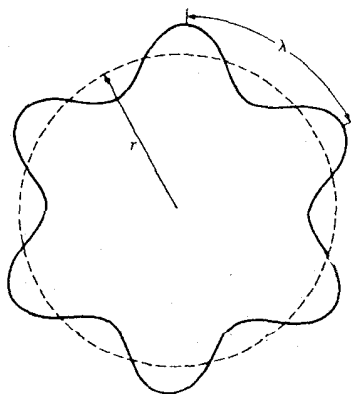
حل: همان طور که در انتهای بخش ۵.۲، با به کار بردن مفاهیم حاصل از معلومات خود دربارهٔ امواج ایستاده، ترازهای انرژی را برای ذره‌ای که در داخل جعبهٔ پتانسیل حرکت می‌کرد توجیه کردیم، به همان طریق نیز می‌توان معادلهٔ (۵.۳) را برای ویژه حالت‌های اتم‌های هیدروژن گونه توجیه کرد. فرض کنیم که الکترون مدار دایره‌ای را مطابق شکل ۳.۳ طی می‌کند. تکانهٔ الکترون در مدار دایره‌ای برابر مقدار ثابت  $p$  است. برای اینکه مدار پایک ویژه حالت متناظر باشد باید بتواند امواج ایستاده‌ای به طول موج  $\lambda = h/p$  را بر روی خود جای دهد، و این امر منطقی به نظر می‌رسد. همان طور که از شکل ۳.۳ دیده می‌شود این شرط مستلزم این است که طول مدار برابر ضرب درستی از  $\lambda$  باشد، یعنی  $2\pi r = n\lambda = nh/p$  یا

$$rp = \frac{nh}{2\pi} \quad (۸.۳)$$

با توجه به اینکه  $rp$  تکانهٔ زاویه‌ای الکترون است، مشاهده می‌کنیم که ویژه حالت‌ها حالت‌هایی اند که برای آنها، تکانهٔ زاویه‌ای ضریب درستی از  $\hbar = h/2\pi$  است. با توجه به رابطهٔ  $p = m_e v$  می‌توان معادلهٔ (۸.۳) را به صورت زیر نوشت

$$m_e v r = \frac{nh}{2\pi} \quad (۹.۳)$$

از طرف دیگر، برای آنکه الکترون بر روی مدار دایره‌ای حرکت کند، لازم است  $F = m_e v^2/r$  باشد که در آن  $F$  نیروی مرکز گرا است. در حالت مربوط به الکترونی که حول هسته حرکت می‌کند، نیروی مرکز گرا همان نیروی کولنی است که با معادلهٔ (۹.۳) داده می‌شود. بنابراین



شکل ۳.۳ امواج ایستاده واقع بر یک دایره.

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (10.3)$$

$$m_e v^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

با حذف  $v$  میان معادلات (۹.۳) و (۱۰.۳) خواهیم داشت

$$r = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{\pi m_e Z e^2} = \frac{n^2}{Z} a_0 \quad (11.3)$$

که در آن

$$a_0 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2} = 5.2917 \times 10^{-11} \text{ m} \quad (12.3)$$

به شعاع بود معروف است. رابطه (۱۱.۳) شعاع مدارهای مجاز دایره‌ای را به دست می‌دهد و  $a_0$  شعاع بور نیز «شعاع» مدار حالت پایه ( $n=1$ ) در هیدروژن ( $Z=1$ ) است. هرگاه معادله (۲.۳) را برای انرژی پتانسیل سیستم الکترون - هسته به کار ببریم، انرژی الکترون در مدار دایره‌ای را می‌توانیم به صورت زیر بیان کنیم

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

بدین ترتیب، هرگاه از معادله (۱۰.۳) برای حذف  $m_e v^2$  استفاده کنیم، چنین خواهیم داشت

$$E = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 (2r)} \quad (13.3)$$

با قرار دادن مقدار  $r$ ، مطابق آنچه با معادله (۱۱.۳) داده شده است، نتیجه زیر به دست می‌آید

$$E = -\frac{m_e e^4 Z^2}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} = -\frac{R_\infty hc Z^2}{n^2}$$

که با معادلات (۴.۳) و (۶.۳) سازگاری دارد. در اینجا لازم است نکته‌ای را در مورد این نتیجه گیری تذکر دهیم: این نتیجه علاوه بر اینکه فقط در مورد مدارهای دایره‌ای به کار می‌رود، اعتبار آن تماماً به اعتبار معادله (۸.۳)، که در بخش ۴.۳ به تفصیل بررسی خواهد شد، وابسته است. از طرف دیگر، در اینجا مفهوم مدار باید به صورت ناحیه‌ای در نظر گرفته شود که الکترون با احتمال زیادی در آنجا یافت می‌شود، و معادله (۱۱.۳) فقط معرف بزرگی ناحیه‌ای است که الکترون بیشتر اوقات در آن ناحیه حرکت می‌کند و بنا بر این معرف اندازه‌ای تم خواهد بود.

از ترکیب معادلات (۹.۳) و (۱۱.۳) می‌توان سرعت الکترون در هر ویژه مدار را به دست آورد

$$v = \frac{nh}{2\pi m_e r} = \frac{hZ}{2\pi m_e a_0 n} = \frac{2199 \times 10^5 Z}{n} \text{ m s}^{-1}$$

این نتیجه را فقط باید به عنوان نشانی از حدود بزرگی سرعت الکترون در نظر گرفت. توجه کنید که با افزایش انرژی (مقدار بزرگتر  $n$ ) سرعت کاهش می‌یابد. ضمناً با توجه به  $n/Z \sim v/c \sim 7 \times 10^{-3} Z/n$  نتیجه می‌گیریم که به استثنای مقادیر بزرگ  $Z$  و مقادیر کوچک  $n$ ، سرعت  $v$  خیلی کوچکتر از  $c$  است ( $v \ll c$ ). بدین ترتیب، به جز هنگامی که دقت خیلی زیاد مورد نظر باشد، تصحیحاتی بسیار مهم نخواهند بود. با این حال باید توجه داشت از دید نظری، این تصحیحات بسیار پراهمیت‌اند.

مثال ۲.۳ بزرگی جمله تصحیح موجود در معادله (۷.۳) را که از حرکت هسته‌ای ناشی می‌شود، برای انرژی ویژه حالت‌های سبکترین اتمها یعنی  $H$ ،  $D$ ،  $T$ ،  $He^+$ ، و  $Li^{2+}$ ، برآورد کنید.

حل: چون  $m_e/M$  کمیت بسیار کوچکی است، با به کار بردن تقریب  $(1+x)^{-1} = 1-x+\dots$  می‌توان معادله (۷.۳) را به صورت زیر نوشت

$$R = R_\infty \left(1 - \frac{m_e}{M}\right)$$

یا

$$\Delta R = R - R_\infty = -\frac{m_e}{M} R_\infty$$

جرم اتم با عدد جرمی  $A$  را می‌توان با تقریب خوبی به صورت  $M = 1667 \times 10^{-27} A \text{ kg}$  نوشت. با توجه به مقدار  $m_e = 911 \times 10^{-31} \text{ kg}$  خواهیم داشت

$$\frac{m_e}{M} = 545 \times \frac{10^{-4}}{A}$$

بنابراین، چون انرژی با  $R$  متناسب است، می‌توان نوشت

$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{m_e}{M} = \% -100 \frac{m_e}{M} = \% -\frac{545 \times 10^{-2}}{A}$$

که در آن  $\Delta E$  تغییر انرژی از مقدار داده شده در معادله (۵.۳) است. نتایج به دست آمده برای سبکترین عناصر در جدول ۲.۳ آمده است.

جدول ۲۰۳ تصحیح‌های انرژی هنگامی که حرکت هسته‌ای در نظر گرفته شود.

اتم	H	D	T	He <sup>+</sup>	Li <sup>2+</sup>
A	۱	۲	۳	۴	۷
$(m_e/M) \times 10^4$	۵۳۴۵	۲۳۷۵	۱۳۸۲	۱۳۴۶	۵۳۷۸
$-(\Delta E/E), \%$	۵۳۵۴۵	۵۳۵۲۷۵	۵۳۵۱۸۲	۵۳۵۱۳۴	۵۳۵۰۷۸

اینکه  $\Delta E/E$  برای H، D، و T مقادیر متفاوتی دارد، بدان معنی است که ترازهای انرژی برای این سه ایزوتوپ هیدروژن کمی جابه‌جا شده‌اند و در نتیجه اثری ایجاد می‌کنند که به اثر ایزوتوپی معروف است. به‌طریقی مشابه، ترازهای زوج He<sup>+</sup> کاملاً بر ترازهای H منطبق نیستند. فرانکلند و لوکیه هنگامی که در سال ۱۸۶۸ طیف خورشید را تحلیل می‌کردند با استفاده از همین اختلاف کوچک توانستند هلیوم را کشف کنند.

### ۳.۳ طیف هیدروژن

همان‌طور که در شکل ۲.۳ مشاهده کردیم، انرژی ویژه حالتها با عدد کوانتومی  $n$  افزایش می‌یابد. برای یک یون هیدروژن گونه، اختلاف در انرژی میان ترازهای متناظر با  $n_1$  و  $n_2$  می‌باشد. عبارت است از ( $n_2 > n_1$ )

$$E_2 - E_1 = \left( -\frac{RhcZ^2}{n_2^2} \right) - \left( -\frac{RhcZ^2}{n_1^2} \right) = RhcZ^2 \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

هنگامی که شرط بور،  $\nu = (E_2 - E_1)/h$  [معادله (۲۹.۱)]، را به کار ببریم و از اثرهای پس‌زنی چشمپوشی کنیم، بسامد تابش الکترومغناطیسی گسیل شده یا جذب شده به وسیله اتم در گذاری میان حالت‌های متناظر با  $n_1$  و  $n_2$  برابر است با

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h} = R_c Z^2 \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

$$= 3.2899 \times 10^{15} Z^2 \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \text{ Hz} \quad (14.3)$$

گاهی در طیف نمایی ترجیح می‌دهند به جای بسامد از عدد موج که به صورت

این تعریف می‌شود، استفاده کنند. دلیل این کار آن است که در اندازه گیریهای طیف نمایی معمولاً طول موج تعیین می‌شود نه بسامد. در سیستم MKSC عدد موج با یکای  $m^{-1}$  داده می‌شود، با اینکه، رایجترین یکا  $cm^{-1}$  است. در حالت اخیر، معادله بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$\bar{\nu} = RZ^2 \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = 1.0972 \times 10^5 Z^2 \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) cm^{-1}$$

این عبارت (یا عبارت قبل) را فرمول بالمر می‌نامند و فقط در مورد اتمهای هیدروژن گونه به کار می‌رود. چون در طیف نما (منشور یا توری)، هر گذار به صورت یک خط (که تصویر شکاف است) ظاهر می‌شود، این طیف به طیف خطی معروف است و واژه‌های خط و گذار غالباً به عنوان واژه‌های مترادف به کار می‌روند.

طیف هیدروژن ( $Z=1$ ) (و به طریق مشابه طیف سایر اتمها) برحسب سریهایی رده بندی می‌شود و هر سری شامل گذارهایی است که در پایینترین تراز انرژی مشترک‌انده شکل ۴.۳ سریهای مختلف اتم هیدروژن را نشان می‌دهد.

۱. سری لیمان:  $n_1 = 1, n_2 = 2, 3, 4, \dots$

۲. سری بالمر:  $n_1 = 2, n_2 = 3, 4, \dots$

۳. سری پاشن:  $n_1 = 3, n_2 = 4, 5, \dots$

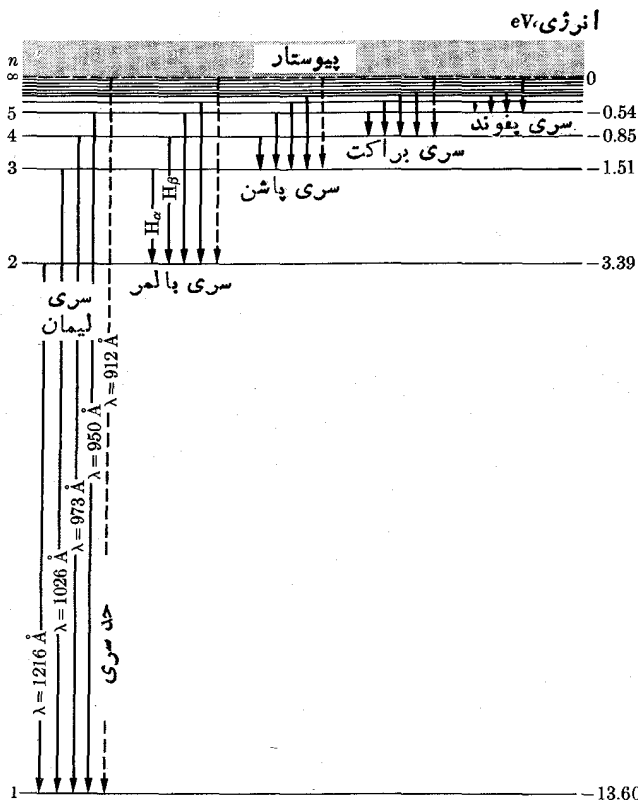
۴. سری براکت:  $n_1 = 4, n_2 = 5, 6, \dots$

۵. سری پفوند:  $n_1 = 5, n_2 = 6, 7, \dots$

سری بالمر که قسمت اعظم آن در ناحیه مرئی قرار دارد به راحتی با یک طیف نمایی معمولی قابل مشاهده است. سری لیمان در ناحیه فرابنفش و بقیه سریها نیز در ناحیه فروسرخ قرار دارند. گذارهای نشان داده شده در شکل ۴.۳ با طیف گسیلی متناظرند. گذارهای معکوس در طیف جذبی رخ می‌دهند.

از نظر تاریخی، مسئله توضیح طیفهای خطی هیدروژن و سایر عناصر موجب شده که برای اولین بار نظریه کوانتومی در مورد اتم به کار رود. بالمر ریاضیدان سوئیس در سال ۱۸۸۵، مدتها قبل از تدوین نظریه کوانتومی، موفق شد رابطه (۱۴.۳) را به طور تجربی و بدون هیچگونه توضیح نظری مربوط به ساختار اتمی به دست آورد. در سال ۱۹۱۳ بور دانشمند دانمارکی که در آن زمان در دانشگاه کبریج بود، موفق شد که برای اولین بار، معادله (۱۴.۳) را با معرفی مفهوم ویژه حالتها به دست آورد. چون مکانیک کوانتومی هنوز

۱. عدد موج  $\bar{\nu}$  تعداد طول موجهای موجود در یکای طول را به دست می‌دهد. این عدد را با عدد موج  $k = 2\pi/\lambda$  که به یک ذره وابسته است و در بخش ۱۰.۱ تعریف شده اشتباه نکنید.



در آن تاریخ فرمول‌بندی نشده بود، روش بور شامل یک سری فرض هوددی بود که شباهت زیادی به محاسبات انجام شده در مثال ۱.۳ داشت.

**مثال ۳.۳** اولین پتانسیل برانگیختگی و انرژی یونش هیدروژن را تعیین کنید.

**حل:** همان‌طور که در بحث آزمایش فرانک - هرتز در بخش ۸.۱ توضیح دادیم، اولین پتانسیل برانگیختگی عبارت است از مقدار انرژی که برای بردن اتم از حالت پایه به اولین تراز برانگیخته مورد نیاز است. در اتمهای هیدروژن گونه، این حالتها به ترتیب با  $n=1$  و  $n=2$  متناظرند. با قرار دادن  $n=1$ ،  $n=2$  در معادله (۶.۳) و بسا در نظر گرفتن  $Z=1$  نتیجه  $E_1 = -13.6 \text{ eV}$ ،  $E_2 = -3.4 \text{ eV}$  را به دست خواهیم آورد. از این رو انرژی مورد نیاز برای برانگیختن اتم از حالت پایه به اولین حالت برانگیخته برابر است با  $E_2 - E_1 = 10.2 \text{ eV}$ . هرگاه اتم هیدروژن به وسیله یک برخورد الکترونی



ناکشسان، همانند آنچه در لوله تخلیه الکتریکی گاز رخ می‌دهد، به اولین تراز برانگیخته برده شود، هنگام برگشت به حالت پایه، تابشی با بسامد زیرگسیل می‌کند

$$\nu = (E_2 - E_1)/h = 2.47 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

که طول موج آن برابر مقدار زیر است

$$\lambda = 1.216 \times 10^{-7} \text{ m}$$

چنین تابشی در ناحیه فرابنفش قرار دارد. انرژی یونش مقدار انرژی است که برای بردن الکترون از حالت پایه ( $n=1$ ) به حالت انرژی صفر ( $n=\infty$ ) مورد نیاز است و بنابراین، با  $E_1 = 13.6 \text{ eV}$  برابر است. یونش می‌تواند از برخورد ناکشسان اتم هیدروژن با الکترون یا ذره باردار دیگر، یا با اتم دیگر، و یا از جذب اتمی یک فوتون با بسامدی مساوی یا بزرگتر از  $3.29 \times 10^{15} \text{ Hz}$  (یا طول موجی مساوی یا کوچکتر از  $9.12 \times 10^{-8} \text{ m}$ )، نتیجه شود.

### ۴.۳ کوانتش تکانه زاویه‌ای

اکنون می‌دانیم که انرژی یک سیستم اتمی کوانتیده است. اینک می‌خواهیم ببینیم که آیا امکان دارد که سایر کمیت‌های فیزیکی نیز کوانتیده باشند، یعنی فقط مقید به مقادیر معینی برای سیستم باشند. در پایان بخش ۵.۲ یادآوری کردیم که تکانه ذره موجود در جعبه پتانسیل نیز کوانتیده است. در اکثر مثال‌های فصل دوم، تکانه و (یا) انرژی، ثابت‌های حرکت بودند، یعنی کمیت‌هایی که مقدار آنها در خلال حرکت ذره تغییر نمی‌کند. در این صورت بررسی این مسئله منطقی به نظر می‌رسد که آیا دیگر ثابت‌های حرکت نیز کوانتیده هستند یا نه؟

می‌دانیم که برای حرکت‌های ناشی از نیروهای مرکزی، تکانه زاویه‌ای  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  نسبت به مرکز نیرو ثابت حرکت است. این موضوع در مکانیک کوانتومی نیز صادق است. تحلیل دقیق نظری و تجربی نشان می‌دهد که تکانه زاویه‌ای کوانتیده است، یعنی فقط می‌تواند مقادیر گسسته‌ای داشته باشد. می‌توان نشان داد که بزرگی تکانه زاویه‌ای با مقادیر زیر مشخص می‌شود (مثال ۴.۳)

$$L^2 = l(l+1)\hbar^2 \quad (15.3)$$

که در آن  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$  یک عدد درست مثبت است. با این حال، در اتم‌های هیدروژن گونه، مقادیر  $l$  برای هر تراز انرژی محدود می‌شود به مقادیر  $n$  متناظر با تراز انرژی و بیشینه مقدار  $l$  برابر است با  $n-1$ ، بنابراین

در یک میدان کولنی، به ازای هر مقدار  $n$ ، که یک تراز انرژی را مشخص می‌کند،  $n$  مقدار متمایز تکانه زاویه‌ای از  $l=0$  تا  $l=n-1$  وجود دارد.

جدول ۳.۳ نمایش حالت‌های تکانه زاویه‌ای و تبهگنی اساسی برای حرکت ناشی از نیروهای مرکزی.

تکانه زاویه‌ای، $l$	۰	۱	۲	۳	۴	۵
نماد	s	p	d	f	g	h
تبهگنی، $g = 2l + 1$	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱

معمولا مقادیر ممکن  $l$  را با حروفی مطابق آنچه در جدول ۳.۳ نشان داده شده است، مشخص می‌کنند. بنابراین به‌ازای  $n = 1$  خواهیم داشت  $l = 0$ ، که آن را با s نمایش می‌دهیم. به‌ازای  $n = 2$  حالت‌های  $l = 0$  و  $l = 1$  یا s و p وجود دارند و به‌ازای  $n = 3$  حالت‌های  $l = 0$  و  $l = 1$  و  $l = 2$  یا s و p و d موجودند، و به‌همین ترتیب.

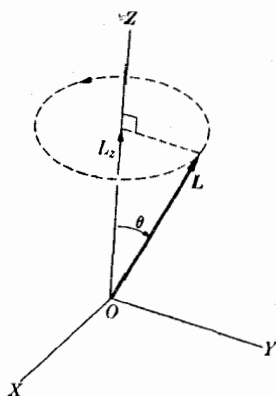
در یک میدان مرکزی متفاوت با میدان کوانتی، مقادیر  $l$  وابسته به هر تراز انرژی نیز مختلف اند. به‌عنوان مثال، در حالت مربوط به نوسانگر سه‌بعدی، انرژی پتانسیل برابر است با  $E_p = kr^2/2$ . ترازهای انرژی ممکن عبارت‌اند از  $E = (n + 3/2)\hbar\omega$  [معادله (۲۲.۲)]، و برای هر  $n$ ، مقادیر  $l$  عبارت‌اند از  $n, n-2, n-4, \dots, 1, 0$  یا صفر. در این صورت به‌ازای  $n = 0$  خواهیم داشت  $l = 0$ ، یا حالت s، و به‌ازای  $n = 1$ ،  $l = 1$ ، یا حالت p و به‌ازای  $n = 2$  مقادیر  $l$  عبارت‌اند از صفر و ۲ یا حالت s، d، و ...

علاوه بر محدودیتی که در مورد بزرگی تکانه زاویه‌ای وجود دارد، شواهد تجربی (که بعداً مورد بحث قرار خواهند گرفت) نشان می‌دهند که تکانه زاویه‌ای از نظر دامنه نیز محدودیت دارد. چنین وضعی را کوانتس فضایی می‌نامند. این گفته بدان معنی است که زاویه‌ای که  $\mathbf{L}$  با محور Z تشکیل می‌دهد، نمی‌تواند هر مقداری داشته باشد (شکل ۵.۳). یا به‌عبارت دیگر، می‌توان نشان داد که مقادیر مؤلفه  $L_z$  کوانتیده‌اند و بسا رابطه زیر داده می‌شوند (مثال ۴.۳)

$$L_z = m_l \hbar \quad (16.3)$$

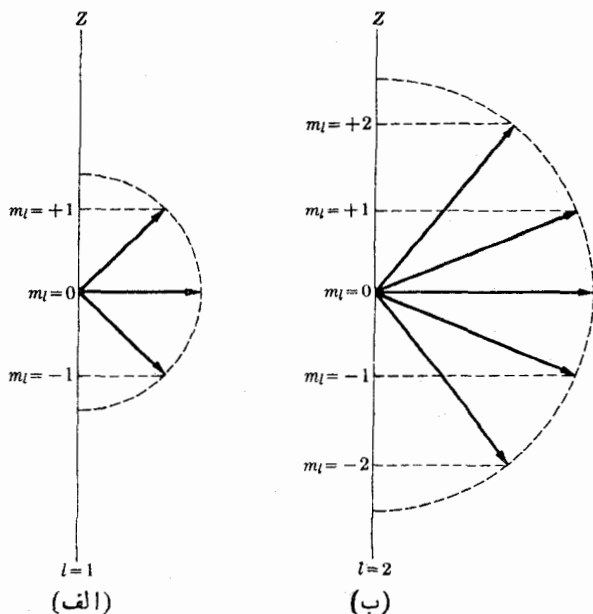
که در آن  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l$ ، یعنی  $m_l$  عددی درست مثبت یا منفی از صفر تا  $l$  است. عدد کوانتومی  $m_l$  نمی‌تواند از  $l$  بزرگتر باشد زیرا در این صورت  $|L_z|$  بزرگتر خواهد بود که ناممکن است. بنابراین نتیجه می‌شود که

به‌ازای هر مقدار تکانه زاویه‌ای،  $2l + 1$  مقدار  $m_l$  یا  $2l + 1$  سمتگیری متفاوت برای  $\mathbf{L}$  وجود دارد.



شکل ۵-۳

شکل ۶-۳ این وضع را به ازای  $l=2$  و  $l=1$  نشان می‌دهد. کمیت  $g=2l+1$  را تبیه‌گنی اساسی حالت تکانه زاویه‌ای می‌نامند. می‌توان نشان داد که این تبیه‌گنی نتیجه تقارن کروی حرکت ناشی از نیروی مرکزی است. در جدول ۳-۳ مقادیر  $g$  به ازای چند مقدار از تکانه زاویه‌ای آمده‌است.



شکل ۶-۳ کوانتش فضایی به ازای  $l=2$  و  $l=1$ .

در مکانیک کلاسیک، تکانه زاویه‌ای ناشی از نیروی مرکزی، هم از نظر بزرگی و هم از نظر جهت ثابت است. با این حال، در مکانیک کوانتومی، بزرگی تکانه زاویه‌ای با معادله (۱۵.۳) و بزرگی یکی از مؤلفه‌هایش نیز با معادله (۱۶.۳) داده می‌شود. اما برای مشخص کردن جهت تکانه زاویه‌ای باید دو مؤلفه دیگر آن یعنی  $L_x$  و  $L_y$  نیز معلوم باشند. يك تحلیل دقیق، که در اینجا به‌خاطر پیچیدگی ریاضی وارد بحث آن نمی‌شویم، نشان می‌دهد که

تعیین دقیق بیش از يك مؤلفه تکانه زاویه‌ای ناممکن است.

بنابراین، اگر  $L_z$  معلوم باشد، آگاهی ما درباره  $L_x$  و  $L_y$  در بهترین حالت با عدم قطعیت  $\Delta L_x$  و  $\Delta L_y$ ، که رابطه عدم قطعیت زیر را برآورده می‌کنند، همراه خواهد بود.

$$\Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{1}{2} \hbar L_z$$

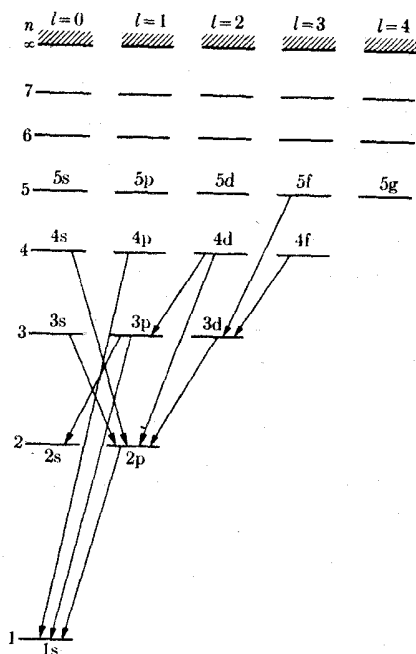
این رابطه شبیه‌است به روابط عدم قطعیت مربوط به مکان و تکانه [معادله (۲۸.۱)]، و انرژی و زمان [معادله (۴۹.۱)]. به عبارت دیگر

در مکانیک کوانتومی تعیین دقیق جهت تکانه زاویه‌ای ناممکن است.

چون فقط می‌توانیم  $|L|$  و  $L_z$  را بشناسیم می‌توانیم بردار تکانه زاویه‌ای  $L$  در شکل ۵.۳ را به‌صورت برداری که تحت زاویه ثابت  $\theta$  حول محور  $Z$  حرکت تقدیمی می‌کند تصور کنیم.

از این بحث نتیجه می‌گیریم که ترازهای انرژی اتمهای هیدروژن گونه تا حدی از تصویر ساده‌ای که در معادله (۶.۳) و شکل ۲.۳ به آن اشاره شد پیچیده‌ترند. در میدان کولتی، هر تراز انرژی متناظر با يك  $n$  مشخص، شامل  $n$  حالت تکانه زاویه‌ای مختلف است که همگی انرژی یکسانی دارند و  $l$  از صفر تا  $n-1$  تغییر می‌کند (این موضوع در شکل ۷.۳ نشان داده شده‌است). این ترازها با  $ns$ ،  $np$ ، و  $nd$  و نظایر آن مشخص می‌شوند (این نتیجه با توصیف کلاسیکی حرکت ناشی از نیروی عکس مجذوری سازگار است. در این توصیف با وجودی که خروج از مرکز مدارهای بیضیوار به تکانه زاویه‌ای بستگی دارد، انرژی مستقل از تکانه زاویه‌ای است). در نظریه دقیقتر اتمهای لك الکترونی، که در آن سایر اثرها (مثلاً تصحیحات نسبی) نیز منظور می‌شوند، حالت‌های تکانه زاویه‌ای متفاوت متناظر با يك  $n$ ، با انرژی‌های مختلف پدیدار می‌شوند.

هر گاه نیرو از نوع عکس مجذوری نباشد، آن عده از ترازهایی که مقدار  $n$  آنها یکسان ولی تکانه‌های زاویه‌ای آنها متفاوت است (یعنی ترازهای  $ns$ ،  $np$ ،  $nd$ ، و مانند آن)، همگی لزوماً انرژی یکسانی نخواهند داشت. بنابراین، تحت اثر نیروهای مرکزی، انرژی عموماً به  $n$  و  $l$  وابسته است ولی به  $m_l$  بستگی ندارد، زیرا در میدان نیروی مرکزی، سم‌گیری مدار اهمیت ندارد.



شکل ۷۰۳ گذارهای میان حالت‌های مکانة زاویه ای مختلف.

اما اینکه در هر اتم هیدروژن گونه، هر تراز از چندین حالت مکانة زاویه ای تشکیل شده است، از لحاظ گذارها حائز اهمیت فراوان است. برای حرکت در پتانسیل نیروی مرکزی، قواعد گزینش برای گذارهای دوقطبی الکتریکی عبارت‌اند از

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta m_l = 0, \pm 1 \quad (17.3)$$

این قواعد گزینش از قانون پایستگی مکانة زاویه ای نتیجه می‌شوند، زیرا فوتون گسیل یا جذب شده، با خود مکانة زاویه ای حمل می‌کند و بنابراین مکانة زاویه ای اتم باید تغییر کند تا مکانة زاویه ای حمل شده به وسیله فوتون جذب یا گسیل شده را جبران کند. قانون پایستگی مکانة زاویه ای و قاعده کوانتومی مربوط به جمع مکان‌های زاویه ای (بخش ۸.۳)، گذارهای  $\pm 1, \Delta l = 0$  را مجاز می‌دارند. با این حال، پاریته تابع موجهای در پتانسیل مرکزی (که در بخش ۵.۳ به آن بازمی‌گردیم) امکان حالت  $\Delta l = 0$  را ممنوع می‌کند. قواعد گزینش (۱۷.۳) ایجاب می‌کند که گذارها فقط میان حالت‌های مکانة زاویه ای موجود در ستون‌های مجاور شکل ۷۰۳ رخ دهند. برخی از این گذارهای ممکن نشان داده شده‌اند. توجه کنید که برطبق این قواعد، حالت ۲s نمی‌تواند به حالت ۱s، که تنها تراز پایینتر موجود است، تبدیل شود. به همین دلیل است که حالت ۲s یک حالت شبه پایدار

نامیده می‌شود. قواعد (۱۷.۳) برای گذارهای دو قطبی الکتریکی، که محتملترین گذارها هستند معتبرند. برای سایر گذارها مثل گذارهای دو قطبی مغناطیسی یا چهار قطبی الکتریکی، قواعد گزینش متفاوتی وجود دارد. احتمال این گذارها نسبت به گذارهای دو قطبی الکتریکی بسیار کم است. به همین دلیل است که در طیفهای اتمی، معمولاً گذارهای دو قطبی الکتریکی به حساب می‌آیند.

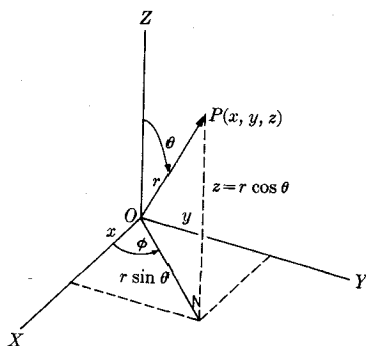
اکنون معادله (۸.۳) را بررسی می‌کنیم. با توجه به اینکه برای مدار دایره‌ای  $rp$  عبارت است از تکانه زاویه‌ای  $L$ ، مشاهده می‌کنیم که معادله (۸.۳) به صورت  $L = n\hbar$  درمی‌آید. اما این نتیجه با معادله (۱۵.۳) یعنی  $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$  سازگار نیست. به این ترتیب مدل ساده و شهودی به کار رفته در مثال ۱.۳ برای به دست آوردن معادله (۸.۳) صحیح نیست (اگرچه نتیجه حاصل صحیح است). این موضوع مجدداً به دانشجو هشدار می‌دهد که نمی‌توان مفاهیم موجی را، هنگامی که در مکانیک کوانتومی به کار می‌روند، برون‌یابی کرد (مگر اینکه توجه و دقت بسیار زیادی مبذول شود). در این حالت از تکانه زاویه‌ای، اختلاف موجود ناشی از این حقیقت است که نمی‌توان امواج الکترونی را به یک مسیر دایره‌ای محض محدود کرد. با این حال، با قرار دادن  $l = n - 1$  در معادله (۱۵.۳) خواهیم داشت

$$L^2 = (n-1)n\hbar^2 = (n^2 - n)\hbar^2$$

هرگاه  $n$  بزرگ باشد، این عبارت را می‌توان با تقریب به صورت  $L^2 = n^2\hbar^2$  یا  $L = n\hbar$  نوشت که با معادله (۸.۳) سازگار است. از این رو، به ازای مقادیر بزرگ  $n$ ،  $l = n - 1$  به مدارهای دایره‌ای کلاسیک نزدیک می‌شود. این موضوع بیانی است از اهل همخوانی بود که به موجب آن، برای اعداد کوانتومی بزرگ، بیان کوانتومی به بیان کلاسیکی نزدیک می‌شود.

### ۵.۳ تابع موجهای تک الکترونی تحت تأثیر نیروهای مرکزی

تابع موج  $\psi(x, y, z)$  برای اتمهای هیدروژن گونه از حل معادله شرودینگر، معادله (۳.۳)، به دست می‌آید. انرژی پتانسیلی که در این معادله پدیدار می‌شود، یعنی  $E_p = -Ze^2 / 4\pi\epsilon_0 r$  با یک نیروی مرکزی متناظر است. ممکن است انتظار داشته باشیم که میان تابع موجهای تمام مسائل مربوط به نیروی مرکزی [یعنی مسائلی که در آنها، انرژی پتانسیل فقط تابعی از فاصله است و بنابراین به صورت  $E_p(r)$  نوشته می‌شود] تشابه مشخصی وجود داشته باشد. به دلیل تقارن گروه انرژی پتانسیل می‌توان بحث مربوط به مسائل نیروی مرکزی را با استفاده از مختصات کروی  $r, \theta, \phi$  به صورت ساده‌ای درآورد (شکل ۸.۳). ثابت می‌شود که تابع موج تک الکترون موجود در میدان مرکزی را می‌توان به صورت حاصلضرب دو عامل نوشت که یکی از آنها به فاصله الکترون از مبدأ و دیگری به سمتگیری بردار مکان



شکل ۸.۳ مختصات کروی.

$\mathbf{r}$ ، که با زوایای  $\theta$  و  $\phi$  مشخص می‌شود، وابسته است. از این رو، این تابع را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$$

قسمت شعاعی  $R(r)$  به شکل بخصوص  $E_p(r)$ ، یعنی انرژی پتانسیل متناظر با نیروی وارد بر الکترون وابسته است. اما چون قسمت زاویه‌ای  $Y(\theta, \phi)$  نتیجه‌ای از تقارن کروی نیروی مرکزی است، از شکل بخصوص  $E_p(r)$  یا انرژی پتانسیل مستقل است. به عبارت دیگر توابع زاویه‌ای  $Y(\theta, \phi)$  برای تمام مسائل نیروی مرکزی یکسان‌اند. در اینجا نمی‌خواهیم چگونگی به دست آوردن تابع موجها را تحلیل کنیم، اگرچه بسیار ساده و سرراست است (مثال ۴.۳)، بلکه می‌خواهیم مهمترین خواص تابع موجها را مورد بحث قرار دهیم.

ددر مسئله نیروی مرکزی، قسمت زاویه‌ای تابع موج کاملاً با بزرگی و مؤلفه  $Z$  تکانه زاویه‌ای الکترون تعیین می‌شود.

بزرگی تکانه زاویه‌ای با عدد کوانتومی  $l$  تعیین و مؤلفه  $Z$  یا سمتگیری نیز با  $m_l$  مشخص می‌شود. به همین دلیل است که تابع موجهای متناظر با مقادیر مشخص  $L^2$  و  $L_z$  به صورت  $Y_{lm_l}(\theta, \phi)$  نشان داده می‌شوند. ریاضیدانان این توابع را هماهنگهای کروی می‌نامند.

جدول ۴.۳ توابع زاویه‌ای  $Y_{lm_l}$  را به ازای  $l = 0, 1, 2$  نشان می‌دهد. این جدول به صورتی است که در اکثر مسائل فیزیکی کاربرد دارد. جدول ۵.۳ توابع زاویه‌ای را به صورتی به دست می‌دهد که در مبحث بستگی مولکولی مناسب‌تر است. توابع موجود در جدول ۵.۳ به مقدار خاص  $m_l$  وابسته نیستند بلکه به  $|m_l|$  یا  $m_l^2$  تعلق دارند و به جای  $L_x$ ، با  $L^2$  و  $L_z^2$  متناظرند.

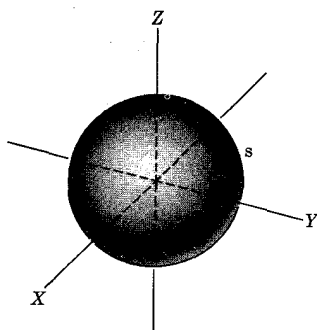
جدول ۴-۳ توابع زاویه‌ای متناظر با  $L_x$  و  $L_y$ .

تابع زاویه‌ای	$m_l$	$l$
$Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$	۰	۰
$Y_{10} = \sqrt{3/4\pi} \cos \theta$	۰	۱
$Y_{1\pm 1} = \mp \sqrt{3/8\pi} \sin \theta e^{\pm i\phi}$	$\pm 1$	
$Y_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{5/4\pi} (3 \cos^2 \theta - 1)$	۰	۲
$Y_{2\pm 1} = \mp \sqrt{15/8\pi} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$	$\pm 1$	
$Y_{2\pm 2} = \frac{1}{2} \sqrt{15/2\pi} \sin^2 \theta e^{\pm i2\phi}$	$\pm 2$	

جدول ۵-۳ توابع زاویه‌ای متناظر با  $L_x^2$  و  $L_y^2$ .

تابع زاویه‌ای	$ m_l $	$l$
$s = 1/\sqrt{4\pi}$	۰	۰
$p_z = \sqrt{3/4\pi} \cos \theta$	۰	۱
$p_x = \sqrt{3/4\pi} \sin \theta \cos \phi$ $p_y = \sqrt{3/4\pi} \sin \theta \sin \phi$	۱	
$d_{z^2-r^2} = \sqrt{5/16\pi} (3 \cos^2 \theta - 1)$	۰	۲
$d_{xz} = \sqrt{15/4\pi} \sin \theta \cos \theta \cos \phi$ $d_{yz} = \sqrt{15/4\pi} \sin \theta \cos \theta \sin \phi$	۱	
$d_{x^2-y^2} = \sqrt{15/4\pi} \sin^2 \theta \cos 2\phi$ $d_{xy} = \sqrt{15/4\pi} \sin^2 \theta \sin 2\phi$	۲	



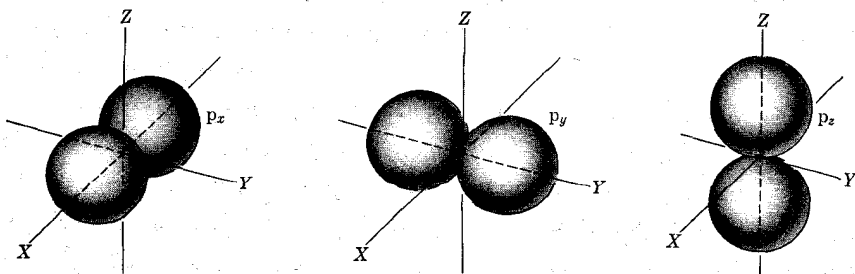


شکل ۹.۳ تابع موج زاویه‌ای برای حالت‌های  $s$  ( $l=0$ ).

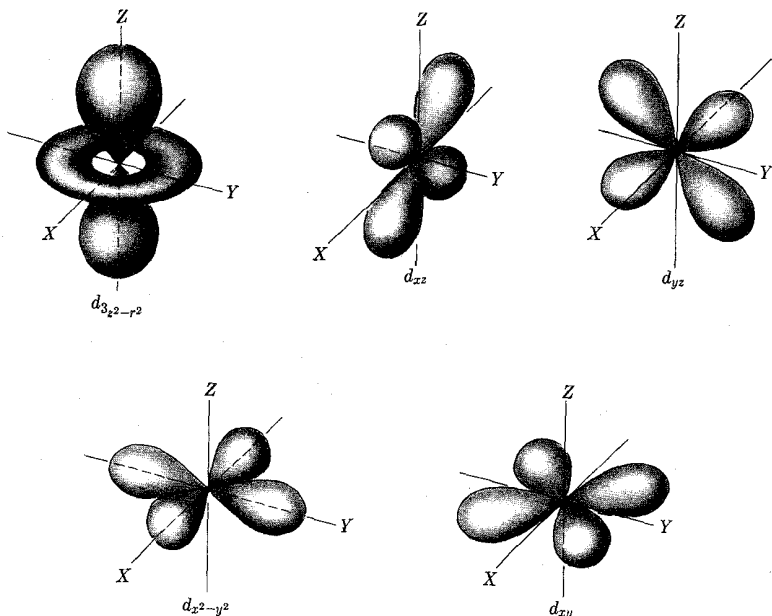
از جدول ۵.۳ دیده می‌شود که به ازای  $l=0$  (یا حالت‌های  $s$ )، تنها تابع موجی که وجود دارد مستقل از زوایاست، یعنی حالت‌های  $s$  تقارن کروی دارند. این موضوع را می‌توان در نمودار قطبی شکل ۹.۳، که در آن مقدار تابع  $s$  در هر راستای  $(\theta, \phi)$  با طول خطی از مبدأ نشان داده شده است، مشاهده کرد. مکان هندسی نقاط انتهایی، یک سطح کروی تشکیل می‌دهد. این نتیجه قابل فهم است زیرا اگر تکانه زاویه‌ای مساوی با صفر باشد، هیچ سمتگیری مرجعی برای مدار الکترون وجود نخواهد داشت.

به ازای  $l=1$  (یا حالت‌های  $p$ )، سه تابع زاویه‌ای وجود دارند که نمایش دهنده سمتگیری ممکن تکانه زاویه‌ای یا سه مقدار  $\pm 1, 0$  اند. این توابع در جدول ۵.۳ با  $p_x, p_y, p_z$  مشخص شده و در نمودار قطبی شکل ۱۰.۳ نشان داده شده‌اند. این توابع با حرکت مرجح الکترون در امتداد هر محور مختصات متناظرند. این نتیجه برای توصیف بستگی شیمیایی بسیار حائز اهمیت است.

به ازای  $l=2$  (یا حالت‌های  $d$ )، پنج تابع زاویه‌ای مختلف وجود دارد. همان‌طور که از نمودارهای قطبی شکل ۱۱.۳، که توابع  $d$  جدول ۵.۳ را نمایش می‌دهند، دیده می‌شود، توزیع زاویه‌ای این حالت‌ها پیچیده‌تر است. برای مقادیر بزرگتر  $l$  این وضع



شکل ۱۰.۳ تابع موجهای زاویه‌ای مربوط به حالت‌های  $p$  ( $l=1$ ).



شکل ۱۱.۳ تابع موجهای زاویه‌ای مربوط به حالت‌های  $d$  ( $l=2$ ).

بازهم پیچیده‌تر می‌شود.

يك خاصیت مهم توابع زاویه‌ای  $Y_{lm_l}$  آن است که پاریمت آنها برابر با  $(-1)^l$  است. یعنی به‌ازای  $l=0, 2, 4, \dots$  (اعداد درست زوج)، مقدار و علامت توابع  $Y_{lm_l}$  در نقاطی که نسبت به مبدأ مختصات متقارن‌اند یکسان است و از این رو، این توابع زوج‌اند، در حالی که به‌ازای  $l=1, 3, 5, \dots$  (اعداد درست فرد) مقدار توابع  $Y_{lm_l}$  در نقاط متقارن یکسان ولی علامت آنها در این نقاط متقارن مخالف است و در نتیجه این توابع فردند. می‌توان نشان داد که برای گذارهای دو قطبی الکتریکی پاریمت حالت‌های ابتدایی و انتهایی مخالف است و بنابراین، این حالت‌ها نمی‌توانند مقدار  $l$  یکسان داشته باشند. به همین دلیل همان‌طور که قبلاً در ارتباط با معادله (۱۷.۳) نشان داده شد  $\Delta l = 0$  برای این گذارها ناممکن است.

قسمت شعاعی  $R(r)$  تابع موج  $\psi(r, \theta, \phi)$  به انرژی و بزرگی تکانه زاویه‌ای آن وابسته است نه به سمتگیری آن. این موضوع قابل فهم است زیرا تقارن کروی میدان مرکزی حاکی از آن است که توزیع شعاعی حرکت الکترون باید از سمتگیری تکانه زاویه‌ای آن، یعنی از مقدار  $m_l$  مستقل باشد. این مانسته کوانتومی نتیجه کلاسیکی است که در آن انرژی و بزرگی تکانه زاویه‌ای «اندازه» مدار را تعیین می‌کنند. بنابراین، تابع شعاعی به  $n$ ، عدد کوانتومی وابسته به انرژی، و نیز به  $l$  (ولی نه به  $m_l$ ) وابسته است. این توابع شعاعی

به صورت  $R_{nl}(r)$  نوشته می شوند و تابع موجهای کل به صورت زیر در می آید

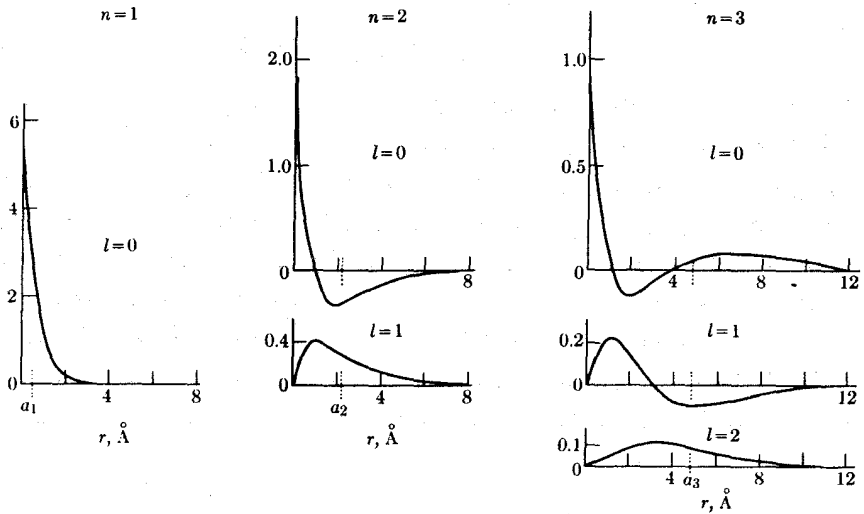
$$\psi_{nlm_l}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_{lm_l}(\theta, \phi) \quad (18.3)$$

جدول ۶.۳ توابع شعاعی متناظر با سه تراز اول انرژی اتمهای هیدروژن گونه را به دست می دهد. این توابع در شکل ۱۲.۳ نشان داده شده اند. خط چین موجود در هر حالت نشان دهنده شعاع کلاسیکی مدار است که با معادله (۱۱.۳) توافق دارد. از روی شکل دیده می شود که، با اینکه الکترون با احتمال زیاد در داخل شعاع کلاسیکی مدار قرار دارد، ولی می تواند در فواصل بزرگتر نیز یافت شود. احتمال یافتن الکترون در داخل یک پوسته کروی به شعاعهای  $r$  و  $r+dr$ ، بدون توجه به مکان زاویه ای آن، متناسب است با  $r^2 [R_{nl}(r)]^2$  (مسئله ۲۵.۳). شکل ۱۳.۳ این احتمالات را نشان می دهد.

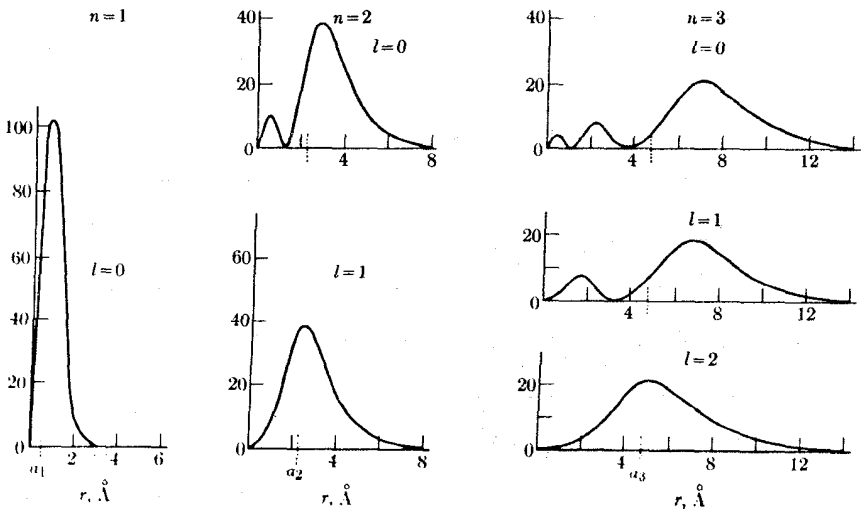
نکته جالبی که به راحتی از شکل ۱۲.۳ استنباط می شود این است که به ازای مقادیر کوچک  $r$ ، توابع شعاعی برای الکترونهاي  $s$  نسبتاً بزرگ اند. در اینجا می گوئیم که

جدول ۶.۳ تابع موجهای شعاعی اتمهای هیدروژن گونه.

$R_{nl}(r) (\rho = Zr/na_0)$	$l$	$n$
$R_{10}(r) = 2 \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-\rho/2}$	۰	۱
$R_{20}(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} (2 - \rho) e^{-\rho/2}$	۰	۲
$R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \rho e^{-\rho/2}$	۱	
$R_{30}(r) = \frac{1}{9\sqrt{3}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} (6 - 6\rho + \rho^2) e^{-\rho/2}$	۰	۳
$R_{31}(r) = \frac{1}{9\sqrt{6}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \rho(2 - \rho) e^{-\rho/2}$	۱	
$R_{32}(r) = \frac{1}{9\sqrt{30}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \rho^2 e^{-\rho/2}$	۲	



شکل ۱۲.۳ تابع موجهای شعاعی هیدروژن به ازای  $n=1, 2, 3$ . عرض منحنیها در هر حالت عبارت است از  $[R_{nl}(r) m^{-3/2}] \times 10^{-8}$ .

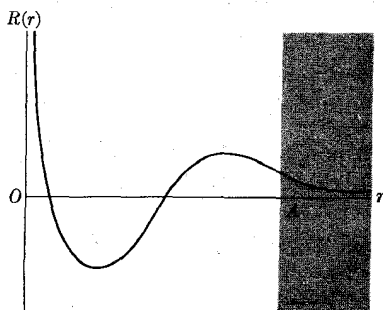
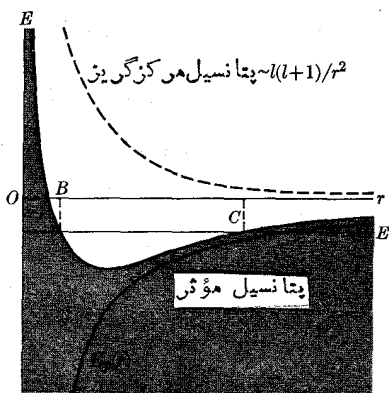
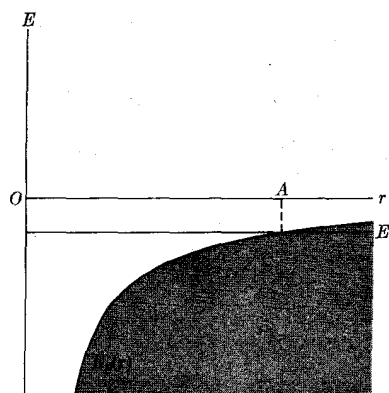


شکل ۱۳.۳ توزیع احتمال شعاعی در هیدروژن به ازای  $n=1, 2, 3$ . عرض منحنیها در هر حالت عبارت است از  $[r^2 R_{nl}(r) m^{-1}] \times 10^{-15}$ .

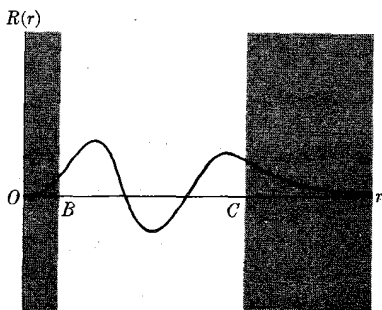
الکترونهاي s مدارهای نفوذی را توصیف می کنند که خیلی به هسته نزدیک می شوند. الکترونهاي p کم نفوذتر از الکترونهاي s و الکترونهاي d از الکترونهاي p هم کم نفوذترند، و به همین ترتیب برای مقادیر بزرگتر تکانه زاویه ای. این موضوع هنگامی به راحتی قابل فهم است که در نظر بگیریم (هم در مکانیک کلاسیک و هم در مکانیک کوانتومی) حرکت شعاعی ناشی از نیروی مرکزی با یک پتانسیل مؤثر متناظر است

$$E_{p,eff} = E_p(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = E_p(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \quad (19.3)$$

که در آن  $E_p(r)$  انرژی پتانسیل نیروی مرکزی است (مثلا پتانسیل کولنی در حالت مربوط به الکترون) و  $L^2/2mr^2$  پتانسیل مرکزگریز است (مثال ۵.۳). برای حالت های s می دانیم که  $l=0$  و در نتیجه، هیچ پتانسیل مرکزگریزی وجود نخواهد داشت، به گونه ای که داریم  $E_{p,eff} = E_p$ . از این رو، هر الکترون مقید s با انرژی منفی  $E$  [شکل ۱۴.۳ (الف)]،



الکترون s ( $l=0$ )  
(الف)



$l \neq 0$   
(ب)

شکل ۱۴.۳ پتانسیل مؤثر و تابع موج شعاعی به ازای  $l=0$  و  $l \neq 0$  برای حرکت ناشی از نیروی مرکزی.

می تواند به طریق کلاسیکی میان  $O$  و  $A$  حرکت کند و بدین ترتیب به مبدأ مختصات دسترسی داشته باشد. بنابراین قسمت شعاعی تابع موج باید به صورتی باشد که در پایین شکل نشان داده شده است (تعداد نوسانهای تابع موج به انرژی وابسته است). ولی برای سایر مقادیر تکانه زاویه ای، پتانسیل مؤثر به صورتی است که در شکل ۱۴.۳ (ب) نشان داده شده است. بنابراین، یک الکترون با انرژی  $E$  باید به طریق کلاسیکی میان  $B$  و  $C$  حرکت کند. این نتیجه را به زبان مکانیک کوانتومی چنین بیان می کنیم که در خارج حدود کلاسیکی حرکت، تابع موج باید خیلی سریع کاهش یابد و بنابراین در نزدیکی مبدأ باید خیلی کوچک باشد. هرچه تکانه زاویه ای بزرگتر باشد، تابع موج به مقدار بیشتری به خارج از مبدأ رانده می شود و مدار نیز «نفوذپذیری» کمتری دارد.

این مشخصه حرکت الکترون در بسیاری از خواص مهم اتم دیده می شود. به عنوان مثال، الکترونهای  $s$  نسبت به شکل و ساختار داخلی هسته بسیار حساس اند، در حالی که الکترونهای با تکانه زاویه ای بزرگتر نسبت به شکل و ساختار هسته ای از حساسیت کمتری برخوردارند.

**مثال ۴.۳** عملگرهای تکانه زاویه ای و ویژه تابعها را تحلیل کنید.

**حل:** با توجه به جدول ۴.۲ بخش ۱۲.۲ می دانیم که عملگر تکانه زاویه ای با رابطه زیر داده می شود

$$\mathbf{L} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla = -i\hbar \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ x & y & z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{vmatrix}$$

که از آن برای مؤلفه  $Z$  نتیجه زیر به دست می آید

$$L_z = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (20.3)$$

برای مؤلفه های  $L_x$  و  $L_y$  نیز عبارتهای مشابهی وجود دارد. برای سهولت، بهتر است  $L_z$  را بر حسب مختصات کروی بیان کنیم. با توجه به شکل ۳.۸ داریم

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

از طرف دیگر

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = -r \sin \theta \sin \phi = -y, \quad \frac{\partial y}{\partial \phi} = r \sin \theta \cos \phi = x, \quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$$

بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

عملگر  $L_z$  را می توان به صورت زیر نوشت

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (21.3)$$

می توان نشان داد که این رابطه یک رابطه کلی است و عملگر کوانتومی متناظر با مؤلفه تکانه زاویه ای در امتداد هر راستایی با  $-i\hbar \partial / \partial \phi$  داده می شود، که در آن  $\phi$  زاویه ای است که حول این راستا اندازه گیری می شود. طبق معادله (۴۸.۲)، ویژه معادله عبارت است از  $L_z \Phi = L_z \Phi$  که در آن  $\Phi(\phi)$  ویژه تابع و  $L_z$  ویژه مقدار است. بنابراین هرگاه معادله (۲۱.۳) را برای  $L_z$  به کار بریم خواهیم داشت

$$-i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = L_z \Phi$$

یا

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = im_l \Phi$$

که در آن  $L_z = m_l \hbar$  یا  $m_l = L_z / \hbar$  است. جواب این معادله عبارت است از  $\Phi = C e^{im_l \phi}$  که در آن  $C$  ثابت بهنجارش است. چون  $\phi$  و نیز  $\phi + 2\pi$  نشان دهنده یک نقطه از فضا هستند باید داشته باشیم  $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$  و در نتیجه  $e^{im_l(\phi + 2\pi)} = e^{im_l \phi}$  یا  $e^{i2\pi m_l} = 1$ . این موضوع ایجاب می کند که  $m_l$  یک عدد درست مثبت یا منفی باشد، یعنی  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (که قبلاً در بخش ۴.۳ نیز نشان داده شد). برای تعیین  $C$ ، از شرط بهنجارش استفاده می کنیم که در این حالت عبارت است از  $\int_0^{2\pi} \Phi^* \Phi d\phi = 1$  یا

$$\int_0^{2\pi} (C^* e^{-im_l \phi})(C e^{im_l \phi}) d\phi = |C|^2 \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi |C|^2 = 1$$

یا، با فرض اینکه  $C$  حقیقی است، داریم  $C = 1/\sqrt{2\pi}$ . بنابراین ویژه تابعهای بهنجارشده مؤلفه  $Z$  تکانه زاویه ای عبارت اند از

$$\Phi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l \phi}, \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (22.3)$$

ویژه مقدارهای  $L_z = m_l \hbar$  ضرایب درستی از  $\hbar$  هستند.

مربع بزرگی تکانه زاویه‌ای با عملگر  $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$  داده می‌شود، که در آن  $L_x$  و  $L_y$  عملگرهایی شبیه به عملگر  $L_z$  اند [معادله (20.3)]. با انجام عملیات ریاضی و تبدیل به مختصات کروی می‌توان نشان داد که مربع تکانه زاویه‌ای با عملگر کوانتومی زیر نشان داده می‌شود

$$L^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (23.3)$$

ویژه معادله عبارت است از  $L^2 Y(\theta, \phi) = L^2 Y(\theta, \phi)$ ، که در آن ویژه تابع، که به زوایای  $\theta$  و  $\phi$  وابسته است، به صورت  $Y(\theta, \phi)$  نشان داده شده و ویژه مقدار نیز  $L^2$  است. این معادله با معادله دیفرانسیل زیر متناظر است.

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \frac{L^2}{\hbar^2} Y = 0$$

می‌توان نشان داد که برای به دست آوردن جوابی که در بایستهای مکانیک کوانتومی را برآورده کند، لازم است که  $L^2/\hbar^2 = l(l+1)$  که در آن  $l$  یک عدد درست مثبت است. یعنی  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ . در این شکل ما نتایج را به دست می‌آوریم که قبلاً در بخش 5.3 به صورت  $L^2 = l(l+1)\hbar^2$  بیان شدند. جوابهای معادله حاصل، یعنی

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + l(l+1)Y = 0$$

همان توابع آمده در جدول 4.3 هستند و به صورت  $Y_{lm_l}$  نوشته می‌شوند. در این جدول دیده می‌شود که توابع  $Y_{lm_l}$  عبارت اند از حاصلضرب یک عامل وابسته به  $\theta$  در عامل دیگری که به  $\phi$  بستگی دارد. [عامل  $\phi$  با معادله (22.3) یکسان است.] یعنی

$$Y_{lm_l} = P_l^{m_l}(\cos \theta) e^{im_l \phi}$$

در این صورت با در نظر گرفتن اینکه  $Y_{lm_l}$  ویژه تابعهای عملگرهای  $L^2$  و  $L_z$  اند، می‌توان نوشت

$$L^2 Y_{lm_l} = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm_l}, \quad L_z Y_{lm_l} = m_l \hbar Y_{lm_l}$$

مثال 5.3 معادله شرودینگر را برای حرکت ناشی از نیروهای مرکزی تحلیل کنید.



حل: از معادله (۹.۲) می‌دانیم که معادله شرودینگر برای حرکتی با انرژی پتانسیل  $E_p(r)$  به صورت زیر نوشته می‌شود

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + E_p(r) \psi = E \psi$$

اکنون اگر مختصات راستگوشه  $x, y, z$  را به مختصات کروی  $r, \theta, \phi$  تبدیل کنیم، معادله فوق پس از یک سری عملیات جبری طولانی به صورت زیر درمی‌آید

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \right\} \psi + E_p(r) \psi = E \psi$$

با توجه به معادله (۲۳.۳) که مربوط به عملگر  $L^2$  است، می‌توان نوشت

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \right) \psi + E_p(r) \psi = E \psi$$

با قراردادن  $\psi = R(r) Y_{lm_l}(\theta, \phi)$  و اینکه  $L^2 Y_{lm_l} = l(l+1) \hbar^2 Y_{lm_l}$  است، معادله بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R + E_p(r) R = ER$$

این معادله معادله‌ای است که فقط شامل قسمت شعاعی  $R(r)$  تابع موج  $\psi$  است. معمولاً از تساوی  $R(r) = u(r)/r$  استفاده می‌کنند که در این صورت نتیجه زیر به دست می‌آید

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[ E_p + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u = Eu \quad (23.3)$$

این معادله را گاهی معادله شعاعی شرودینگر می‌نامند. از مقایسه این معادله با معادله یک بعدی شرودینگر، یعنی معادله (۳.۲)، نتیجه می‌گیریم که حرکت شعاعی معادل است با یک حرکت یک بعدی ناشی از انرژی پتانسیل مؤثری که با معادله (۱۹.۳) داده می‌شود، یعنی

$$E_{p,\text{eff}} = E_p(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$$

جمله  $E_{p,\text{cen}} = l(l+1)\hbar^2/2mr^2$  یک پتانسیل مرکز گریز است زیرا «نیروی» متناظر با آن، یعنی  $F = -\partial E_{p,\text{cen}}/\partial r$  مثبت و از این رو، جهت آن به طرف خارج مبدأ است. هنگامی که انرژی پتانسیل به صورت  $E_p(r) = -Ze^2/4\pi\epsilon_0 r$  است، معادله

دیفرانسیلی به دست می آید که جوابهای آن، برای حرکت ناشی از نیروهای کولنی، توابع شعاعی آمده در جدول ۳.۳ هستند. برای شکل‌های دیگر انرژی پتانسیل، توابع شعاعی متفاوتی به دست می آید.

مثال ۶.۳ تصحیح نسبی انرژی در اتمهای هیدروژن گونه.

حل: همان طور که در بخش ۱۲.۲ توضیح دادیم، معادله شرودینگر (۳.۳) با عبارت ناسبیتی  $E = p^2 / 2m_e + E_0$  به دست می آید. این روش هنگامی صحیح است که سرعت الکترون در مقایسه با سرعت نور بسیار کوچک باشد. در مثال ۱.۳، مقدار  $v/c$  را برای الکترون موجود در یک ویژه حالت بر آورد کردیم و نتیجه گرفتیم که از مرتبه  $Z/n \times 10^{-2}$  است. با وجود آنکه اثر نسبی ناشی از این سرعت خیلی کوچک است، اما به راحتی می توان آن را با روشهای طیف نمایی آشکار کرد. انرژی نسبی الکترونی که با تکانه  $p$  در حرکت است و انرژی پتانسیل آن  $E_p$  است [معادله (ب. ۱۱) را ببینید] عبارت است از

$$E = c\sqrt{m_e^2 c^2 + p^2} + E_p - m_e c^2$$

که در آن انرژی جرم سکون از آن کم شده است تا صفر انرژی برحالت ناسبیتی منطبق شود. با فرض اینکه تکانه  $p$  خیلی کوچکتر از  $m_e c$  است، رادیکال موجود در رابطه بالا را می توان تا جمله مرتبه دوم بسط داد و نتیجه زیر را به دست آورد

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2m_e} p^2 - \frac{1}{8m_e^3 c^2} p^4 + \dots + E_p \\ &= \left( \frac{1}{2m_e} p^2 + E_p \right) - \frac{1}{8m_e^3 c^2} p^4 + \dots \end{aligned} \quad (25.3)$$

دو جمله داخل پرانتز تقریب ناسبیتی مربوط به انرژی را به دست می دهد. بنابراین، جمله آخر عبارت است از تصحیح نسبی مرتبه اول انرژی کل الکترون که آن را با  $\Delta E_r$  نمایش می دهیم. از این رو

$$\Delta E_r = -\frac{1}{8m_e^3 c^2} p^4 = -\frac{1}{2m_e c^2} \left( \frac{p^2}{2m_e} \right) \left( \frac{p^2}{2m_e} \right)$$

جملات مشابه موجود در داخل پرانتزها با انرژی جنبشی ناسبیتی الکترون متناظرند. بنابراین (به عنوان یک تقریب منطقی)، با به کار بردن نتیجه معادلات (۱۰.۳) و (۱۳.۳)، برای پرانتز اول می توان چنین نوشت

$$\frac{p^2}{2m_e} = \frac{1}{2} m_e v^2 = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0(2r)} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0(2r)} = -E$$

برای پرانتز دوم، می توان نوشت  $p^2/2m_e = (1/2)m_e v^2$  بنا براین

$$\Delta E_r = -\frac{1}{2m_e c^2}(-E)\left(\frac{1}{2}m_e v^2\right) = \frac{1}{4} \frac{v^2}{c^2} E$$

از این رو، تصحیح نسبیتی از مرتبه  $(v/c)^2$  برابر انرژی الکترون است. به عنوان مثال، در اتم هیدروژن،  $(v/c)^2$  از مرتبه  $10^{-5}$  است و بنا براین  $\Delta E_r \sim 10^{-5} E$  یا در حدود ۰.۰۰۱٪ انرژی  $E$  است با آنکه این کمیت کوچک است، اما در آزمایشگاه می توان آن را به وسیله تکنیکهای تجربی به آسانی آشکار کرد.

برای به دست آوردن یک نتیجه دقیقتر توجه کنید که جمله آخر موجود در معادله (۲۵.۳) را، که در مقایسه با دو جمله اول بسیار کوچک بود، می توان به صورت یک اختلال کوچک در نظر گرفت. برای محاسبه اثر آن بر روی ویژه حالتها می توان میانگین یا مقدار انتظاری آن را به کمک معادله (۵۰.۲) بر آورد کرد. بنا براین برای حالتی که با تابع موج  $\psi_{nlm_l}$  بیان می شود، خواهیم داشت

$$\Delta E_r = -\frac{1}{8m_e^3 c^2} (p^4)_{\text{ave}} = -\frac{1}{8m_e^3 c^2} \int \psi_{nlm_l}^* p^4 \psi_{nlm_l} d\tau$$

نتیجه این محاسبه به صورت زیر است

$$\Delta E_r = \frac{|E_n| Z^4 \alpha^2}{n} \left( \frac{3}{4n} - \frac{1}{l + (1/2)} \right) \quad (26.3)$$

که در آن

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

به ثابت ساختار دیز معروف است و  $|E_n|$  قدر مطلق انرژی است که با معادله (۵.۳) داده می شود. بنا براین در این تقریب، ترازهای انرژی با رابطه  $E = E_n + \Delta E_r$  داده می شوند. چون تصحیح نسبیتی (۲۶.۳) همچنان که به  $n$  بستگی دارد، به  $l$  نیز وابسته است، ترازهایی که  $n$  آنها یکسان ولی مقادیر  $l$  آنها متفاوت است، انرژی یکسان نخواهند داشت. به عبارت دیگر، تصحیح نسبیتی تبهگنی تصادفی را که در حالت مربوط به میدان کولنی به دست آوردیم، از بین می برد. همچنین برای تمام مقادیر  $n$  و  $l$ ، تصحیح نسبیتی همواره منفی است. برای یک  $n$  مشخص، هرچه مقدار  $l$  کوچکتر باشد تصحیح نسبیتی بزرگتر خواهد بود. بنا براین، حالتهای  $1s$  و  $2s$  در اتم هیدروژن، حالتهایی اند که برای آنها این تصحیح بسیار مهم است.

دیوال نظریه نسبیتی دقیقتری را برای الکترون مطرح کرد. در نظریه دیوالگ، از همان

آغاز معادله شرو دینگر متناظر با انرژی نسبیته به کار می رود و از این راه ترازهای دقیقی برای انرژی به دست می آیند. اما باید توجه کرد که نظریه دیراک بسیار پیچیده تر از آن است که در این کتاب مطرح شود.

### ۶.۳ اثر زیمان

هنگامی که حرکت الکترون تحت تأثیر میدان مغناطیسی خارجی مختل می شود، کوانتس فضایی به بهترین وجه پدید می آید. تحت اثر میدان مغناطیسی به اندازه کافی قوی، هر خط طیف در اتم تک الکترونی به صورت یک خط سه تایی درمی آید که نزدیک به هم قرار گرفته اند. فاصله میان خطوط برای تمام اتمها و خطوط یکسان و با بزرگی میدان مغناطیسی متناسب است. این اثر را اولین بار در سال ۱۸۹۶ زیمان، فیزیکدان معروف هلندی مشاهده کرد و به همین دلیل به افتخار او، به اثر زیمان معروف شده است.

الکترونی که با بسامد زاویه ای  $\omega$  روی مدار دایره ای گردش می کند، از هر نقطه مدار  $\omega/2\pi$  بار در ثانیه عبور می کند و بنا بر این، با جریان  $I = e(\omega/2\pi)$  متناظر است. چون مدار جریان خیلی کوچک است، با دو قطبی مغناطیسی معادل است که گشتاور مغناطیسی آن برابر است با جریان ضرب بدر مساحت مدار. بنا بر این، گشتاور دو قطبی مغناطیسی مداری الکترون عبارت است از

$$M_L = e \left( \frac{\omega}{2\pi} \right) (\pi r^2) = \frac{1}{2} e \omega r^2$$

با توجه به اینکه برای مدار دایره ای:

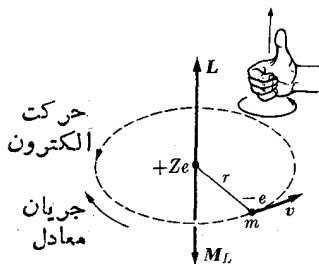
$$L = m_e v r = m_e \omega r^2$$

خواهیم داشت

$$M_L = \left( \frac{e}{2m_e} \right) L$$

که رابطه میان اندازه های  $M_L$  و  $L$  است. در اینجا، همان طور که در شکل ۱۵.۳ دیده می شود، راستای  $L$  با راستای حرکت الکترون ارتباط دارد. از طرف دیگر، بار الکترون منفی است و در نتیجه، جریسان معادل در خلاف جهت حرکت الکترون خواهد بود. این موضوع سبب می شود که  $M_L$  در خلاف جهت  $L$  قرار گیرد. از این رو می توان ارتباط میان  $M_L$  و  $L$  را با معادله برداری زیر بیان کرد

$$M_L = - \frac{e}{2m_e} L \quad (27.3)$$



شکل ۱۵.۳ ارتباط میان گشتاور مغناطیسی مداری و تکانه زاویه‌ای الکترون.

اگرچه این رابطه را برای مدار دایره‌ای به دست آوردیم و از مکانیک کلاسیک استفاده کردیم در مکانیک کوانتومی نیز برای هر حرکت دلبخواه با تکانه زاویه‌ای  $L$  معتبر است. مؤلفه  $Z$  گشتاور مغناطیسی مداری عبارت است از

$$M_{Lz} = -\frac{e}{2m_e} L_z = -\frac{e\hbar}{2m_e} m_l = -\mu_B m_l \quad (28.3)$$

که در آن کمیت زیر را هگنتون بود می‌نامند

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.27322 \times 10^{-24} \text{ J T}^{-1} = 5.78564 \times 10^{-5} \text{ eV T}^{-1} \quad (29.3)$$

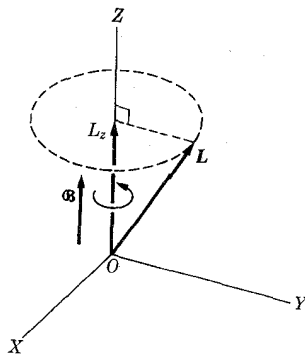
هنگامی که گشتاور دو قطبی مغناطیسی  $M$  در میدان مغناطیسی  $\mathcal{B}$  قرار می‌گیرد، انرژی برابر  $E_{\mathcal{B}} = -M \cdot \mathcal{B}$  به دست می‌آورد. بنابراین، وقتی اتمی در میدان مغناطیسی خارجی قرار گیرد، انرژی اضافی الکترون چرخان که از میدان مغناطیسی خارجی ناشی می‌شود برابر است با

$$E_{\mathcal{B}} = -M_L \cdot \mathcal{B} = -\frac{e}{2m_e} L \cdot \mathcal{B} \quad (30.3)$$

در همان زمان، گشتاور نیروی وارد بر الکترون با رابطه زیر داده می‌شود

$$\tau = M_L \times \mathcal{B} = -\frac{e}{2m_e} L \times \mathcal{B}$$

این موضوع سبب می‌شود که تکانه زاویه‌ای  $L$  حول راستای میدان مغناطیسی  $\mathcal{B}$  حرکت تقدیمی داشته باشد، (شکل ۱۶.۳). هرگاه محور  $Z$  در امتداد موازی با میدان مغناطیسی  $\mathcal{B}$  اختیار شود، معادله (۳۰.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت



شکل ۱۶۰۳ حرکت تقدیمی تکانه زاویه‌ای ناشی از میدان مغناطیسی خارجی.

$$E_{\mathcal{B}} = -M_{L_z} \mathcal{B}$$

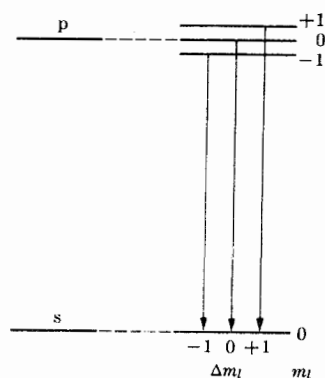
یا با به کار بردن معادله (۲۸.۳) خواهیم داشت

$$E_{\mathcal{B}} = \mu_B \mathcal{B} m_l \quad (۳۱.۳)$$

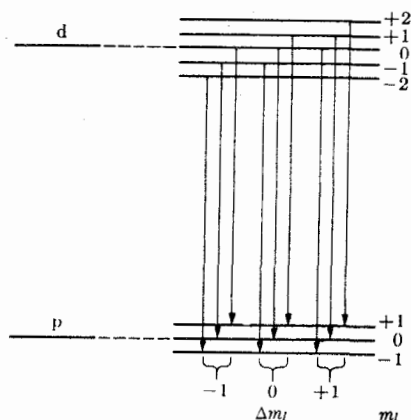
همان‌طور که مشاهده می‌شود، به جای گستره پیوسته‌ای از مقادیر، می‌تواند  $l+1$  مقدار متمایز داشته باشد. این مقادیر به  $l+1$  سمتگیری ممکن  $L$  نسبت به  $\mathcal{B}$  مربوط اند و همگی به فاصله یکسان  $\mu_B \mathcal{B}$  از یکدیگر قرار دارند.

انرژی کل الکترون مقید به اتمی که در میدان مغناطیسی خارجی قرار گرفته است برابر است با  $E_n + E_{\mathcal{B}}$  که در آن  $E_n$  انرژی حرکت الکترون در غیاب میدان مغناطیسی است. بنابراین، معادله (۳۱.۳) نشان می‌دهد که با حضور میدان مغناطیسی، هر تراز انرژی بسا اعداد کوانتومی  $l$  و  $n$  به  $l+1$  تراز شکافته می‌شود. فاصله جدایی میان ترازهای متوالی نیز در بسامدهای وابسته به گذارهای میان این ترازها بازتاب می‌یابد. در شکل ۱۷.۳ این وضع برای ترازهای  $s$ ،  $p$ ، و  $d$  نشان داده شده است. حالت‌های با  $l=0$  (یا حالت‌های  $s$ ) تحت تأثیر میدان مغناطیسی قرار نمی‌گیرند. حالت‌های با  $l=1$  (یا حالت‌های  $p$ ) به سه حالت متساوی‌الفاصله‌ای شکافته می‌شوند که بسا سمتگیری‌هایی که در آنها  $m_l = +1, 0, -1$  است متناظرند. از این رو، گذار  $p \rightarrow s$  به صورت یک گذار سه تایی درمی‌آید که یکی از آنها با گذار  $m_l = 0 \rightarrow m_l = 0$ ، یا بسامد اصلی متناظر است، و دو تای دیگر با  $m_l = 0 \rightarrow m_l = \pm 1$  متناظرند که اختلاف بسامد آنها برابر با مقدار زیر است

$$\Delta\nu = \pm \frac{\mu_B \mathcal{B}}{h} = 1.40 \times 10^{10} \mathcal{B} \text{ Hz} \quad (۳۲.۳)$$



(الف)



(ب)

شکل ۱۷.۳ شکافتگی ترازهای انرژی  $p$ ،  $s$ ، و  $d$  ناشی از میدان مغناطیسی خارجی. فاصله جدایی میان ترازهای متوالی برابر است با  $\mu_B B$ .

بنابراین، هر تک خط  $p \rightarrow s$  موجود در شکل ۸.۳ به صورت سه خط نزدیک به هم درمی آید. به طریق مشابه، حالت‌های با  $l=2$  (یا حالت‌های  $d$ ) به پنج تراز با فاصله مساوی شکافته می شوند که با سمتگیریهایی  $L$  به ازای مقادیر  $0, \pm 1, \pm 2$   $m_l$  متناظرند. در اینجا بر طبق قاعده گزینش  $0, \pm 1$ ، گذار  $d \rightarrow p$  دارای ۹ امکان است. اما، گذارهای متناظر با مقدار یکسان  $\Delta m_l$  همگی دارای تغییر انرژی مساوی اند و در نتیجه خط طیفی یکسانی را به دست می دهند. بنابراین، نتیجه می گیریم، با آنکه ۹ گذار ممکن وجود دارد، طیف گذار  $d \rightarrow p$  تحت اثر میدان مغناطیسی خارجی فقط شامل سه خط است که در آن  $\Delta l$  هنوز هم با معادله (۳۲.۳) داده می شود.

کوانتش تکانه زاویه ای، حقایق تجربی اثر زیمان را به وضوح توضیح می دهد. هر گاه تکانه زاویه ای، به جای کوانتش فضایی، می توانست هر سمتگیری را داشته باشد، اثر میدان مغناطیسی سبب پهن شدن هر تراز می شد. در این صورت ترازهای جدید یک نوار انرژی به پهنای  $2\mu_B BL$  را اشغال می کردند و هر خط به صورت یک نوار درمی آمد. همان طور که قبلاً گفتیم، به این دلیل اثر زیمان به عنوان نشانی برای کوانتش فضایی محسوب می شود. در حقیقت، اثر زیمان یکی از پدیده هایی بود که پذیرش ایده کوانتش تکانه زاویه ای را تسریع کرد.

## ۷.۳ اسپین الکترون

همچنان کسه می دانیم، کره زمین علاوه بر حرکت مداری به دور خورشید، از یک حرکت

دورانی یا چرخان حول محور خود نیز برخوردار است. بنا براین تکانه زاویه‌ای کل زمین برابر است با جمع برداری تکانه زاویه‌ای مداری و تکانه زاویه‌ای اسپینی آن. در قیاس با این حرکات می‌توان فرض کرد که الکترون مقید در اتم نیز به دور خود می‌چرخد. با این حال، نمی‌توان الکترون را به صورت یک ذره چرخان کروی توصیف کرد زیرا از ساختار داخلی آن بی‌اطلاع هستیم. از این رو، نمی‌توانیم تکانه زاویه‌ای اسپینی الکترون را با روشی مشابه با روش محاسبه تکانه زاویه‌ای اسپینی زمین بر حسب شعاع و سرعت زاویه‌ای آن محاسبه کنیم. ایده اسپین الکترون اولین بار در سال ۱۹۲۶ توسط گودشمیت و اولن‌بک برای توضیح بعضی خصوصیات طیف اتمهای تک الکترونی ارائه شد (این خصوصیات در بخش ۹.۳ بررسی خواهند شد). هر گاه  $S$  تکانه زاویه‌ای اسپینی الکترون و  $L$  تکانه زاویه‌ای مداری آن باشد تکانه زاویه‌ای کل برابر می‌شود با  $J = L + S$ . به ازای مقادیر مشخص  $L$  و  $S$  مقدار  $J$  به سمتگیری نسبی آنها وابسته است و می‌توان انتظار داشت که این موضوع در پاره‌ای از خواص اتمی بازتاب پیدا کند که البته چنین نیز هست.

اسپین الکترون با استفاده از شواهد تجربی بسیار زیادی به اثبات رسید. به عنوان مثال، در آزمایش اشترن-گورلاخ که اولین بار در سال ۱۹۲۴ انجام شد، اسپین الکترون مستقیماً مشاهده شد. چون الکترون یک ذره باردار است، اسپین آن باید گشتاور دو قطبی مغناطیسی اسپینی یا ذاتی  $M_S$  تولید کند. هر گاه می‌توانستیم الکترون را به صورت یک جسم باردار صلب و چرخان در نظر بگیریم، رابطه میان  $M_S$  و  $S$  به صورت رابطه میان  $M_L$  و  $L$  [معادله (۲۷.۳)] درمی‌آمد. اما، وضع این طور نیست و باید چنین نوشت

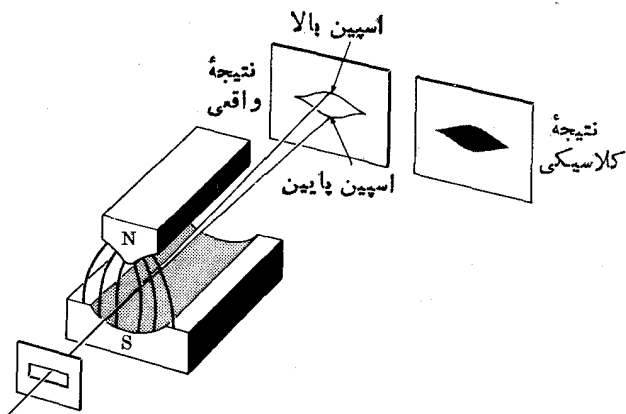
$$M_S = -g_S \frac{e}{2m_e} S$$

که در آن  $g_S$  به نسبت ژیرومغناطیسی الکترون معروف است. مقدار تجربی  $g_S$  برابر است با ۲.۰۰۵۴۴. برای اکثر مقاصد عملیاتی می‌توان  $g_S$  را برابر با مقدار ۲ قرار داد. بنا براین، گشتاور دو قطبی مغناطیسی کل الکترون مداری و چرخان برابر است با

$$M = M_L + M_S = -\frac{e}{2m_e} (L + g_S S) \quad (۳۳.۳)$$

که البته نه تنها به بزرگیهای  $L$  و  $S$  بلکه به سمتگیری نسبی آنها نیز وابسته است. اکنون فرض می‌کنیم که باریکه‌ای از اتمهای هیدروژن گونه از میان میدان مغناطیسی ناهمگنی عبور کند (شکل ۱۸.۳). اثر این میدان بر روی دو قطبی مغناطیسی اعمال نیرویی است که راستا و بزرگی آن به سمتگیری نسبی میدان مغناطیسی و دو قطبی مغناطیسی وابسته است. به عنوان مثال، اگر سمتگیری دو قطبی مغناطیسی با میدان مغناطیسی موازی باشد، می‌کوشد که در راستای افزایش میدان مغناطیسی حرکت کند، و اگر پاد موازی باشد در





شکل ۱۸۰۳. آزمایش اشترن-گرلاخ.

راستای کاهش میدان مغناطیسی تمایل به حرکت خواهد داشت.

در آزمایش اشترن-گرلاخ، میدان مغناطیسی ناهمگن از شکل دادن وجوه دو قطب، همانند شکل ۱۸۰۳، ایجاد می شود. شدت میدان مغناطیسی در راستای S-N افزایش می یابد. اگر اتمهای هیدروژن گونه در حالت پایه باشند، تکانه زاویه ای مداری الکترون برابر صفر است (حالت S یا  $l=0$ ) و تمام گشتاور مغناطیسی از اسپین ناشی می شود. بنابراین باریکه اتمی به وسیله میدان مغناطیسی از مسیر خود منحرف می شود که به سمتگیری  $M_s$  یا معادل با آن، به سمتگیری S وابسته است. نتیجه آزمایش این است که باریکه اتمی به وسیله میدان مغناطیسی ناهمگن به دو قسمت شکافته می شود. این نشان می دهد که

اسپین الکترون فقط می تواند دو سمتگیری موازی یا پادموازی را نسبت به میدان مغناطیسی دارا باشد.

چون، طبق آنچه در بخش ۴.۳ گفته شد، تعداد سمتگیریهای بردار تکانه زاویه ای نسبت به محور ثابت Z برابر است با  $g = 2l + 1$  برای اسپین مقدار  $g = 2$  یا  $l = 1/2$  را خواهیم داشت. هر گاه عدد کوانتومی اسپینی را به جای  $l$  با  $s$  و عدد کوانتومی متناظر با مؤلفه  $S_z$  را نیز با  $m_s$  نمایش دهیم، در این صورت خواهیم داشت  $s = 1/2$  و  $m_s = \pm 1/2$

$$S^2 = s(s+1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2, \quad s = \frac{1}{2}$$

(۳۲.۳)

$$S_z = m_s \hbar, \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

در شكل ۱۹.۳، دو مقدار مجاز  $m_z$  (یعنی  $+1/2$  و  $-1/2$ ) متناظر با دو سمتگیری ممکن  $S$  نشان داده شده‌اند. معمولاً، این دو حالت را به اختصار به صورت حالت اسپین بالا ( $\uparrow$ ) و حالت اسپین پایین ( $\downarrow$ ) نامگذاری می‌کنند، هر چند که در واقع هیچگاه اسپین در امتداد محور  $Z$  یا مخالف با آن قرار نمی‌گیرد.

تابع موج وابسته به مؤلفه  $S_z$  اسپین را با  $\chi_{m_z}$  نمایش خواهیم داد. در اینجا شكل صحیح  $\chi_{m_z}$  مورد نظر نیست بلکه خواص اصلی آن مورد نظر است که عبارت‌اند از

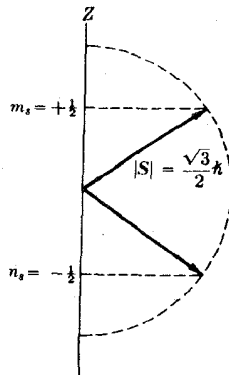
$$S^2 \chi_{m_z} = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_{m_z}, \quad S_z \chi_{m_z} = m_z \hbar \chi_{m_z}$$

گاهی به جای  $\chi_{m_z}$  از نمادگذاری  $\chi_+$  و  $\chi_-$  که به ترتیب با  $m_z = +1/2$  و  $m_z = -1/2$  متناظرند استفاده می‌کنیم. بنابراین تابع موج کامل الكترونی که در داخل يك میدان مرکزی حرکت می‌کند به صورت زیر است

$$\psi_{nlm_l m_s} = R_{nl}(r) Y_{lm_l}(\theta, \phi) \chi_{m_s} \quad (35.3)$$

از معادله (۳۵.۳) دیده می‌شود که برای توصیف کامل حالت الكترون موجود در میدان مرکزی، چهار عدد کوانتومی لازم است که عبارت‌اند از  $n$ ،  $l$ ،  $m_l$  و  $m_s$ . خواص اسپین الكترون، که با معادله (۳۴.۳) بیان شد، را نمی‌توان بر حسب هیچکدام از مدل‌های کلاسیکی الكترون توصیف کرد. اما، هنگامی که مفاهیم مکانیک کوانتومی را با اصل نسبیت ترکیب کنیم، می‌توانیم آنها را به طور نظری بیان کنیم. این کار را دیراک در حدود سال ۱۹۲۸ انجام داد. در اینجا وارد در بحث تحلیل دیراک نمی‌شویم زیرا جزو برنامه این کتاب نیست.

هنگامی که  $l \neq 0$  در حالت قرار دارد، شکافتگی حاصل از میدان مغناطیسی



شكل ۱۹.۳ سمتگیری‌های ممکن اسپین نسبت به محور  $Z$ .

به گشتاور مغناطیسی کل، یا به تکانه زاویه‌ای کل  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  وابسته است. بنابراین، آزمایش اشترن-گرلاخ را می‌توان برای تعیین تکانه زاویه‌ای کل حالت یک اتم به کار برد.

### ۸.۳ جمع تکانه‌های زاویه‌ای

در بخش قبل دیدیم که تکانه زاویه‌ای برایند  $\mathbf{J}$  الکترون در اتم هیدروژن گونه برابر است با مجموع تکانه زاویه‌ای مداری  $\mathbf{L}$  و تکانه زاویه‌ای اسپینی  $\mathbf{S}$ ، یعنی  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ . بررسی مقادیر ممکن  $\mathbf{J}$  بر طبق مکانیک کوانتومی بسیار با اهمیت است. برای اینکه تحلیل ماکاربرد عمومی داشته باشد، فرض می‌کنیم دو تکانه زاویه‌ای داریم که با  $\mathbf{J}_1$  و  $\mathbf{J}_2$  مشخص می‌شوند. به عنوان مثال، این دو تکانه می‌توانند با تکانه زاویه‌ای مداری الکترون و اسپین آن (درست همان طور که در بخش قبل بررسی شد)، یا با تکانه دو الکترون موجود در یک اتم متناظر باشند (حالت اخیر را در فصل بعد بررسی خواهیم کرد). در این صورت نشان داد که در حالت کلی،  $J_1 = j_1(j_1 + 1)\hbar^2$ ،  $J_2 = j_2(j_2 + 1)\hbar^2$  و  $J = j(j + 1)\hbar^2$  می‌تواند نشان داد که در حالت کلی،  $J_1$  و  $J_2$  می‌توانند اعداد درست یا نیمدرست باشند، یعنی مقادیر ۵، ۱/۲، ۱، ۳/۲، ۲، ۵/۲، ... و نظایر آن را دارا باشند. همان طور که قبلاً گفته شد، تکانه‌های زاویه‌ای مداری فقط می‌توانند اعداد درست باشند.

هرگاه  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$  تکانه زاویه‌ای برایند باشد، به طوری که داشته باشیم  $J = J_1 + J_2$ ، در این صورت خواهیم داشت

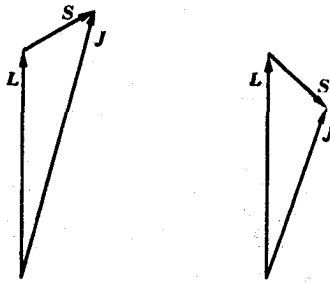
$$J = j(j+1)\hbar^2, \quad J_1 = m_1\hbar^2, \quad m = \pm j, \pm(j-1), \dots \quad (۳۶.۳)$$

که در آن  $m = m_1 + m_2$  است. اما چون  $\mathbf{J}_1$  و  $\mathbf{J}_2$  می‌توانند سمتگیریهایی نسبتی مختلفی داشته باشند، چندین مقدار ممکن برای  $\mathbf{J}$  وجود خواهد داشت. بنا بر این، نتیجه می‌گیریم که عدد کوانتومی  $J$  می‌تواند از  $j_1 + j_2$  تا  $|j_1 - j_2|$  کلیه مقادیری را که به اندازه یک واحد با هم اختلاف دارند شامل باشد، یا به عبارت دیگر می‌تواند فقط مقادیر زیر را داشته باشد

$$j = j_1 + j_2, \quad j_1 + j_2 - 1, \quad j_1 + j_2 - 2, \dots, \quad |j_1 - j_2|$$

اولین مقدار با حالتی متناظر است که در آن  $\mathbf{J}_1$  و  $\mathbf{J}_2$  «موازی» و مقدار آخر متناظر با حالتی است که دو تکانه زاویه‌ای بالا «پاد موازی» باشند. مقادیر متوالی  $J$  به اندازه یک واحد با یکدیگر اختلاف دارند و اگر  $j_1 \leq j_2$ ، تعداد کل امکانات مساوی با  $2j_1 + 1$  خواهد بود.

به عنوان مثال، هرگاه  $j_2 = 1/2$ ، مقادیر ممکن  $J$  عبارت‌اند از  $j_1 + 1/2$  و  $j_1 - 1/2$  که با سمتگیریهایی موازی و پاد موازی متناظرند. از این رو، در حالت مربوط به الکترون، هرگاه  $\mathbf{J}_1 = \mathbf{L}$  و  $\mathbf{J}_2 = \mathbf{S}$ ، برای مقادیر ممکن تکانه زاویه‌ای کل  $\mathbf{J}$  خواهیم داشت  $J = l \pm 1/2$ . در شکل ۲۵.۳ این دو وضع به ازای  $J = l \pm 1/2$  نشان داده شده‌اند.



(اسپین بالا)  $j = l + \frac{1}{2}$   
(الف)

(اسپین پایین)  $j = l - \frac{1}{2}$   
(ب)

شکل ۲۰.۳ سمتگیریهایی نسبی ممکن  $L$  و  $S$  به ازای  $l = 2$ .

بنابراین خواهیم داشت

اسپین الکترون فقط می تواند دو سمتگیری ممکن را نسبت به تکانه زاویه ای مداری داشته باشد.

برای  $l = 0$  (یا حالت  $s$ ) فقط مقدار  $j = 1/2$  امکان پذیر است. هرگاه مقدار  $j$  را به صورت شاخص نشان دهیم، حالت های ممکن الکترون موجود در میدان مرکزی به صورتی مشخص می شوند که در جدول ۷.۳ آمده است.

به عنوان یک مثال دیگر، هرگاه  $j_1 = 1$  و  $j_2 \geq 1$ ، در این صورت  $j$  می تواند مقادیر  $1 + j_1$ ،  $j$ ، یا  $1 - j_1$  را داشته باشد. می توان ثابت کرد که در گذار دو قطبی الکتریکی، تکانه زاویه ای حمل شده به وسیله فوتون دارای مقدار  $j$  برابر با یک است. در این صورت اگر  $j_1$  تکانه زاویه ای مداری الکترون و  $j_2 = 1$  نیز از آن فوتون باشد،

جدول ۷.۳ نمایش حالت های الکترونی.

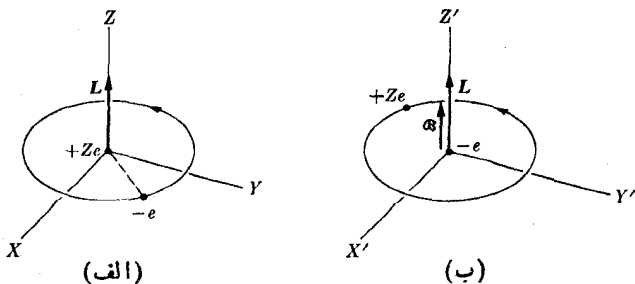
$l$	۰	۱	۲	۳
$j$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
نماد	$s_{1/2}$	$p_{1/2}$	$d_{3/2}$	$f_{5/2}$

مقادیر مجاز تکانه زاویه‌ای مدارای الکترون پس از گسیل یا جذب فوتون می‌تواند  $l+1$ ،  $l$  و  $l-1$  باشد که با  $\Delta l = \pm 1, 0$  متناظر است. همچنانکه در بخش ۴.۳ گفتیم، نکات مربوط به پاریته حالت  $\Delta l = 0$  را مجاز نمی‌داند.

### ۹.۳ برهم کنش اسپین-مدار

سمتگیری دوگانه اسپین الکترون نسبت به تکانه زاویه‌ای مدارای اثر بسیار مهمی تولید می‌کند که عبارت است از دوگانه شدن ترازهای انرژی (به جز تراز  $s$ ) اتمهای هیدروژن گونه. این دوگانه شدن ترازها به نوبه خود باعث می‌شود که خطوط طیف نیز هر کدام به دو خط شکافته شوند. در نتیجه، خطوط طیف به صورت زوج پدیدار می‌شوند که بسامدها یا طول موجهای آنها خیلی نزدیک به یکدیگر است و به همین دلیل آنها را دو تایی می‌نامند. به عنوان مثال، دو تایی معروف سدیم از دو خط زرد نزدیک به هم (یا خطوط  $D$  سدیم) تشکیل شده و با طول موجهای  $5890 \text{ \AA}$  و  $5896 \text{ \AA}$  متناظر است. در واقع، مسئله مربوط به توضیح این خطوط دو تایی بود که به ایده اسپین الکترون با دو سمتگیری ممکن منجر شد.

دو تایی شدن ترازهای انرژی نتیجه‌ای از برهم کنش اسپین-مدار است. منشأ این برهم کنش به صورت زیر بیان می‌شود. در چارچوب مرجع  $XYZ$  که به هسته اتم متصل است، الکترون به صورتی پدیدار می‌شود که با تکانه زاویه‌ای  $L$  به دور هسته در گردش است [شکل ۲۱.۳ (الف)]. اما در چارچوب مرجع  $X'Y'Z'$  که به الکترون متصل است، به نظر می‌آید که هسته حول الکترون گردش می‌کند. چون بار هسته مثبت است، میدان مغناطیسی  $\mathcal{B}$  را در چارچوب  $X'Y'Z'$  تولید می‌کند که با تکانه زاویه‌ای  $L$  موازی است. با توجه به اینکه الکترون نسبت به چارچوب  $X'Y'Z'$  ساکن است، تنها برهم کنش میدان مغناطیسی هسته‌ای عبارت است از برهم کنش با گشتاور مغناطیسی اسپینی الکترون یعنی  $M_S$ . این برهم کنش با  $\mathcal{B}$  متناسب است. با توجه به اینکه  $\mathcal{B}$  با  $L$  و  $M_S$  نیز با  $S$  موازی است، بنابراین برهم کنش فوق با  $S \cdot L$  متناسب خواهد بود. به همین دلیل



شکل ۲۱.۳ منشأ برهم کنش اسپین-مدار.

این اثر به برهم کنش اسپین-مدار معروف است. در نتیجه، برای انرژی الکترون که از برهم کنش اسپین-مدار ناشی می‌شود می‌توان نوشت

$$E_{SL} = aS \cdot L \quad (۳۷۰۳)$$

که در آن  $a$  کمیتی است که به متغیرهای مختلفی که به حرکت الکترون تأثیر می‌گذارد وابسته است و در اینجا لزومی ندارد که از شکل دقیق  $a$  آگاه باشیم. با توجه به اینکه  $E_n$  انرژی حرکت الکترون است و با فرض اینکه فقط یک میدان مرکزی وجود دارد در این صورت، با در نظر گرفتن برهم کنش اسپین-مدار، برای انرژی کل خواهیم داشت

$$E = E_n + E_{SL} = E_n + aS \cdot L \quad (۳۸۰۳)$$

هنگام نوشتن این رابطه فرض می‌کنیم که برهم کنش اسپین-مدار هیچ تأثیری بر انرژی ناشی از نیروهای مرکزی ندارد. تا هنگامی که  $E_{SL}$  در مقایسه با  $E_n$  بسیار کوچک باشد چنین فرضی را می‌توان معتبر و قانونی دانست. به ازای یک مقدار مشخص  $L$  و  $S$ ، برهم کنش اسپین-مدار  $E_{SL}$  به سمتگیری نسبی این دو بردار وابسته است اما چون  $S$  فقط می‌تواند دو سمتگیری ممکن را نسبت به  $L$  داشته باشد، بنا بر این نتیجه می‌گیریم که

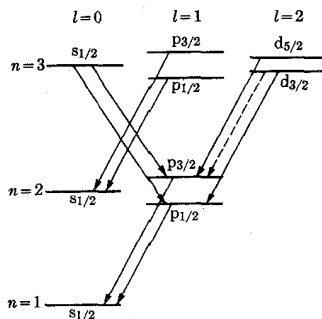
برای هر مقدار مشخص  $l$ ، هر قواز انرژی الکترون در نتیجه برهم کنش اسپین-مدار به دو تراز نزدیک به یکدیگر شکافته می‌شود.

یک تراز متناظر با حالتی است که در آن  $L$  و  $S$  با یکدیگر موازی یا اسپین بالا هستند ( $j = l + 1/2$ ) و تراز دیگر متناظر با حالتی است که  $L$  و  $S$  پاد موازی یا اسپین پایین اند ( $j = l - 1/2$ ). واضح است که ترازهای  $s$  ( $l = 0$ ) منفرد باقی می‌مانند. با حضور برهم کنش اسپین-مدار، اعداد کوانتومی مورد نیاز برای مشخص کردن حالت تکانه زاویه‌ای الکترون عبارت‌اند از  $l$ ،  $j$ ، و  $m$ ، که در آن  $m$  به ویژه مقدار  $J_z$  مربوط می‌شود. طبق پایدگی تکانه زاویه‌ای، قواعد گزینش برای گذارهای دو قطبی الکترونی عبارت‌اند از

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta j = 0, \pm 1, \quad \Delta m = 0, \pm 1 \quad (۳۹۰۳)$$

گذارهای با  $\Delta j = 0$  بسیار ضعیف‌اند زیرا مستلزم این هستند که جهت اسپین نسبت به تکانه زاویه‌ای مدار الکترون معکوس شود. اما نیرویی که بتواند این وارونی اسپینی را ایجاد کند همان برهم کنش اسپین-مدار است که نیرویی نسبتاً ضعیف است.

شکل ۲۲.۳ نشان می‌دهد که چگونه ترازهای شکل ۷.۳ تحت تأثیر برهم کنش اسپین-مدار قرار می‌گیرند. در این شکل، پاره‌ای از گذارهای ممکن نیز نشان داده شده‌اند. گذار نسبتاً ضعیف  $p_{3/2} \rightarrow d_{3/2}$  در این شکل با خط چین نشان داده شده است. بنا بر این



شکل ۲۲.۳ شکافتگی ترازهای انرژی ناشی از برهم کنش اسپین-مدار همراه با چند گذار ممکن. خط چینها نشان دهنده گذاری با احتمال بسیار کم اند.

مشاهده می شود که خطوط طیفی متناظر با گذارهای میان ترازهای  $s$  و  $p$  دو تایی اند، در حالی که خطوط متناظر با گذارهای میان ترازهای  $p$  و  $d$  سه تایی هستند، هر چند یکی از خطوط به قدری ضعیف است که خطوط مربوط به گذار اخیر دو تایی به نظر می رسند.

مثال ۷.۳ محاسبه فاصله جدایی میان دو تراز انرژی ناشی از برهم کنش اسپین-مدار.

حل: در این مثال می خواهیم مقدار  $E_{SL}$  را برای دو حالت اسپین بالا و اسپین پایین محاسبه کنیم و اختلاف آنها را به دست آوریم. این اختلاف مقدار شکافتگی ترازهای انرژی را به دست می دهد. بدین منظور باید مقدار  $S \cdot L$  را در هر دو حالت تعیین کنیم. با توجه به رابطه  $J = L + S$  خواهیم داشت

$$J^2 = L^2 + S^2 + 2S \cdot L$$

که از آن رابطه زیر به دست می آید

$$S \cdot L = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$$

هر گاه مقادیر  $L^2$ ،  $S^2$ ، و  $J^2$  را، که با معادلات (۱۵.۳)، (۳۴.۳)، و (۳۶.۳) داده می شوند در رابطه بالا قرار دهیم خواهیم داشت

$$S \cdot L = \frac{1}{2} \left\{ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right\} \hbar^2$$

$$S \cdot L = \begin{cases} \frac{1}{2} l \hbar^2, & \text{اسپین بالا, } j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} (l+1) \hbar^2, & \text{اسپین پایین, } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

از این رو، هر گاه معادله (۳۸.۳) را به کار ببریم، ترازهای انرژی به صورت زیر درمی آیند

$$E(\uparrow) = E_n + E_{SL}(\uparrow) = E_n + \frac{1}{2} a l \hbar^2, \quad j = l + \frac{1}{2}$$

$$E(\downarrow) = E_n + E_{SL}(\downarrow) = E_n - \frac{1}{2} a (l+1) \hbar^2, \quad j = l - \frac{1}{2}$$

در این صورت اگر  $a$  مثبت باشد، ترازهای با  $j = l + 1/2$  نسبت به تراز انرژی نیروی مرکزی  $E_n$  کمی بالاتر قرار می گیرند و ترازهای با  $j = l - 1/2$  کمی پایینتر از آن واقع می شوند. برای تکمیل محاسبه باید مقدار  $a$  را بر آورد کنیم. اما چون این محاسبه فراتر از سطح این کتاب است، فقط نتیجه نهایی آن را در اینجا می آوریم

$$a = \frac{|E_n| Z^2 \alpha^2}{\hbar^2 n l (l+1) (l+1/2)}$$

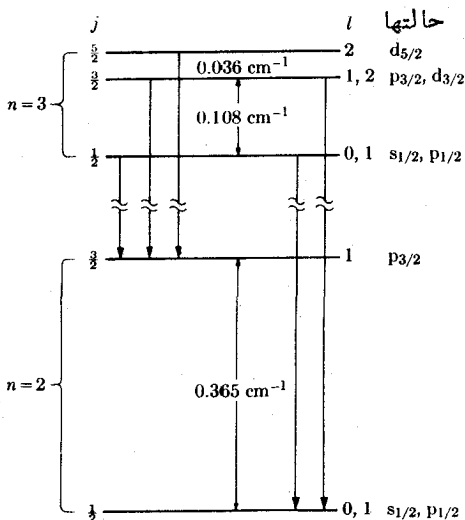
که در آن  $\alpha$  ثابت ساختار ریز (مثال ۶.۳) و  $|E_n|$  نیز قدر مطلق انرژی الکترون در غیاب برهم کنش اسپین-مدار است. فاصله جدایی میان دو تراز انرژی عبارت است از

$$\Delta E_{SL} = \frac{1}{2} a \hbar^2 (2l+1) = \frac{|E_n| Z^2 \alpha^2}{n l (l+1)} \approx 5.32 \times 10^{-5} \frac{|E_n| Z^2}{n l (l+1)}$$

از این رو فاصله جدایی میان ترازها که از برهم کنش اسپین-مدار ناشی می شود، در مقایسه با  $|E_n|$  بسیار کوچک است و با افزایش  $n$  و  $l$  مقدار آن کاهش می یابد. به عنوان مثال، برای حالت  $2p$  در اتم هیدروژن،  $\Delta E_{SL}$  در حدود  $4.6 \times 10^{-5} \text{ eV}$  است. بنابراین، گذار از حالت  $2p$  به حالت  $1s$  شامل دو خطی خواهد بود که بسامد آنها به مقدار  $5.3 \times 10^{13} \text{ m}$  یا طول موج آنها به مقدار  $1.11 \times 10^{10} \text{ Hz}$  در اینجا بد نیست که این مقادیر را با بسامد  $2.47 \times 10^{15} \text{ Hz}$  و طول موج  $1.21 \times 10^{-7} \text{ m}$  که با گذار در غیاب برهم کنش اسپین-مدار متناظرند، مقایسه کنیم.

هر گاه تصحیح نسیتی آمده در معادله (۲۶.۳) را به برهم کنش اسپین-مدار اضافه کنیم، ترازهای انرژی، با تقریب مرتبه اول، با رابطه زیر داده می شوند

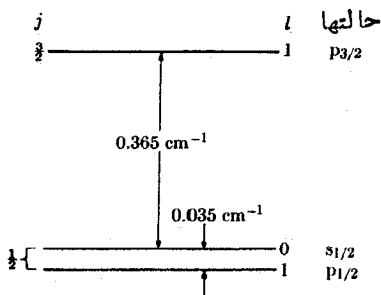




شکل ۲۳.۳ ساختار ریز برای گذار  $n=3$  به  $n=2$  در اتم هیدروژن.

$$E = E_n + \frac{|E_n| Z^2 \alpha^2}{n} \left( \frac{3}{4n} - \frac{1}{j + (1/2)} \right)$$

از این رو ترازهای با  $n$  و  $z$  یکسان، بریکدیگر منطبق خواهند بود. تراز  $n=1$  فقط دارای مقدار  $z = 1/2$  است و به صورت منفرد باقی می‌ماند. در شکل ۲۳.۳ ترازهای انرژی به ازای  $n=2$  و  $n=3$  و گذارهای مجاز میان این ترازها برای اتم هیدروژن نشان داده شده‌اند. اندازه گیرها و محاسبات دقیقتر نشان می‌دهند که حالت‌های با  $l$  متفاوت ولی  $z$  یکسان بریکدیگر منطبق نیستند بلکه به فاصله کمی از هم قرار دارند. به عنوان مثال، در شکل ۲۴.۳



شکل ۲۴.۳ شکافکی تراز  $n=2$  در اتم هیدروژن همراه با انتقال لمب.

آرایش واقعی ترازها به ازای  $n=2$  در اتم هیدروژن نشان داده شده است. جدایی میان ترازهای  $s_{1/2}$  و  $p_{1/2}$  به انتقال لیمب معروف است.

مثال ۸.۳ محاسبه گشتاور مغناطیسی الکترون با حضور برهم کنش اسپین-مدار.

حل: برهم کنش اسپین-مدار  $E_{SL} = a\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$  به سمتگیری نسبی  $\mathbf{S}$  و  $\mathbf{L}$  یعنی به زاویه ای که این دو تکانه زاویه ای باهم می سازند، بستگی دارد. اما هنگامی که انرژی پتانسیل به زاویه بستگی دارد، گشتاور نیرویی در راستای عمود بر صفحه زاویه اعمال می شود. بنابراین گشتاور نیرویی در راستای عمود بر  $\mathbf{S}$  و  $\mathbf{L}$  وجود دارد که سبب حرکت تقدیمی آنها می شود. با این حال، هر گاه هیچ گشتاور نیروی خارجی وارد نشود تکانه زاویه ای کل  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  باید ثابت باقی بماند. بنابراین می توان اثر برهم کنش اسپین-مدار را به صورت حرکت تقدیمی  $\mathbf{S}$  و  $\mathbf{L}$  حول براینشان مجسم کرد. این موضوع در شکل ۲۵.۳ نشان داده شده است. بر طبق معادله (۲۳.۳)، گشتاور دو قطبی مغناطیسی الکترون، به ازای  $g \approx 2$ ، با رابطه زیر داده می شود

$$\mathbf{M} = -\left(\frac{e}{2m_e}\right)(\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) = -\left(\frac{e}{2m_e}\right)(\mathbf{J} + \mathbf{S})$$

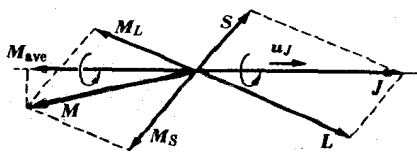
که مستقیماً در خلاف جهت  $\mathbf{J}$  نیست. بنابراین،  $\mathbf{M}$  نیز دارای حرکت تقدیمی حول  $\mathbf{J}$  خواهد بود. مقدار میانگین  $\mathbf{M}$  برابر است یا مؤلفه  $\mathbf{M}$  در جهت موازی با  $\mathbf{J}$ . بنابراین، می توان چنین نوشت

$$\mathbf{M}_{\text{ave}} = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{u}_J)\mathbf{u}_J$$

که در آن  $\mathbf{u}_J$  بردار یكایی است که در راستای  $\mathbf{J}$  قرار دارد و می توان آن را به صورت  $\mathbf{u}_J = \mathbf{J}/J$  نوشت. بنابراین

$$\mathbf{M}_{\text{ave}} = -\left(\frac{e}{2m_e}\right)(\mathbf{J} + \mathbf{S}) \cdot \mathbf{J} \frac{\mathbf{J}}{J^2} = -\left(\frac{e}{2m_e}\right) \left(1 + \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}}{J^2}\right) \mathbf{J}$$

با توجه به رابطه  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  می توان نوشت  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = 1/2(J^2 + S^2 - L^2)$  از این رو،



شکل ۲۵.۳ براینده میانگین گشتاور مغناطیسی.

هنگامی که مربعات تکانه‌های زاویه‌ای را با عبارات کوانتومی آنها جایگزین کنیم، نتیجه زیر به دست می‌آید

$$M_{ave} = -\left(\frac{e}{2m_e}\right)gJ$$

که در آن

$$g = 1 + \frac{S \cdot J}{J^2} = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \quad (40.3)$$

به ضریب لاندو معروف است. مقدار این ضریب برای حالت‌های اسپین بالا و پایین برابر است با

$$g = 1 \pm \frac{1}{2l+1}, j = l \pm \frac{1}{2} \quad (41.3)$$

در میدان مغناطیسی ضعیف، که تأثیر قابل توجهی بر روابط دینامیکی (۲۵.۳) ندارد، انرژی برهم‌کنش عبارت است از

$$E_{\mathcal{B}} = -M_{ave} \cdot \mathcal{B} = \left(\frac{e}{2m_e}\right)g\mathcal{B}J_z = \mu_B g \mathcal{B} m \quad (42.3)$$

این رابطه نقش‌های زیمان را به صورتی پیچیده‌تر از آنچه در بخش ۶.۳ بررسی شد به دست می‌دهد. اثر زیمان که با معادله (۴۲.۳) داده شده است، بسیار پراهمیت است زیرا که امکان محاسبه  $g$  را به طور تجربی فراهم می‌کند و در نتیجه به کمک آن می‌توان مقادیر  $l$  و  $l$  را برای الکترون تحقیق کرد. نتایج بخش ۶.۳ در میدان مغناطیسی قوی هم معتبرند، به طوری که برهم‌کنش مغناطیسی خیلی بزرگتر از برهم‌کنش اسپین-مدار است و اثر اخیر می‌توان چشمپوشی کرد.

## مسائل

۱۰۳ با فرض اینکه الکترون اتم هیدروژن بر روی مدارهای دایره‌ای حرکت می‌کند، سرعت زاویه‌ای و انرژی‌های یتانسیل و جنبشی الکترون را بر حسب تابعی از عدد کوانتومی  $n$  محاسبه و ضرایب عددی را نیز بر آورد کنید (مثال ۱۰۳). مقادیر محاسبه شده را بر حسب توابعی از  $n$  رسم و گرایش آنها را با افزایش انرژی کل الکترون تعیین کنید.

۲۰۳ انرژی پس‌زنی و سرعت پس‌زنی اتم هیدروژن را در حالتی به دست آورید که با گسیل فوتون از حالت  $n=4$  به حالت  $n=1$  می‌رود. به کمک نتیجه به دست آمده، صحت فرضی را که هنگام نوشتن معادله (۱۴.۳) وضع شد اثبات کنید.

۳۰۳ هر گاه میانگین طول عمر حالت تحریک شده هیدروژن در حدود  $10^{-8}$  ثانیه باشد، بر آورد کنید که الکترون تا قبل از گذار به حالت  $n=1$ ، چند دور در دو حالت زیر می‌چرخد.

(الف) هنگامی که در حالت  $n=2$  قرار دارد. (ب) هنگامی که در حالت  $n=15$  قرار دارد. (ج) این اعداد را با تعداد دوره‌هایی که کره زمین در مدت  $2 \times 10^9$  سال عمر خود به دور خورشید می‌گردد، مقایسه کنید.

۴۰۳ طول موجهای پنج خط در سری بالمر اتم هیدروژن عبارت‌اند از  $4101.76 \text{ \AA}$ ،  $4340.1 \text{ \AA}$ ،  $4861.3 \text{ \AA}$ ،  $6563.0 \text{ \AA}$  و  $10938.1 \text{ \AA}$ . تغییرات  $\bar{\nu}$  را بر حسب  $n$  برای سری بالمر رسم کنید. با استفاده از منحنی حاصل، مقدار  $n$  مربوط به تراز بالاتر را برای هر یک از پنج طول موج داده شده به دست آورید.

۵۰۳ اختلاف طول موج بین خطوط  $H_{\alpha}$  (یعنی خطوط متناظر با گذار از  $n=3$  به  $n=2$ ) اتمهای هیدروژن، دوتریوم و تریتیوم را که از اختلاف جرم آنها ناشی می‌شود محاسبه کنید.

۶۰۳ کدام یک از خطوط طیف هیدروژن در ناحیه مرئی طیف (میان  $4000 \text{ \AA}$  و  $7000 \text{ \AA}$ ) قرار دارد؟ کدام یک از خطوط  $He^+$  در همین ناحیه واقع است؟ چگونه می‌توان تشخیص داد که اتم هیدروژن در یک نمونه هلیوم وجود دارد یا نه؟

۷۰۳ نشان دهید که برای فوتون می‌توان از هم‌ارزیهای  $1 \text{ eV} = 1.9739 \times 10^{-8} \text{ cm}^{-1}$  استفاده کرد.

۸۰۳ فرض کنید که آزمایش فرانک-هرتز را با استفاده از هیدروژن اتمی به صورت بخار انجام می‌دهید. در این صورت اگر حداکثر انرژی الکترونها برابر با  $12.75 \text{ eV}$  باشد، چه خطوطی را در طیف هیدروژن مشاهده خواهید کرد؟

۹۰۳ (الف) با به کار بردن روش آمده در مثال ۱۰۳، بسامد حرکت دایره‌ای الکترون موجود در اتم هیدروژن را برای تراز متناظر با عدد کوانتومی  $n$  محاسبه کنید. (ب) بسامد تابش گسیل شده در گذار از حالت  $n$  به حالت  $n-1$  را محاسبه کنید. (ج) نشان دهید هنگامی که عدد  $n$  خیلی بزرگ است، نتایج قسمت (الف) و (ب) با یکدیگر توافق دارند.

۱۰۰۳ تابع موجهای تکانه زاویه‌ای  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  را می‌توان با استفاده از رابطه  $Y_{lm} = N_{lm} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}$  محاسبه کرد که در آن

$$N_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1(l-m)!}{2\pi(l+m)!}}$$

ثابت بهنجارش و  $P_l^m(\xi)$  نیز تابع وابسته لژاندر است که با توابع زیر تعریف می‌شود

$$P_l^m(\xi) = (-1)^m (1-\xi^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(\xi)}{d\xi^m}$$

و

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l$$

این توابع به چند جمله‌ایهای لژاندر معروف اند. مقدار  $Y_{lm}$  را به‌ازای  $l=0, 1, 2$  محاسبه و با عبارات داده شده در جدول ۴.۳ مقایسه کنید.

۱۱.۳ با توجه به مسئله ۱۰.۳ نشان دهید که چندجمله‌ایهای لژاندر بنا به تعریف، توابعی از درجه  $l$  اند و بر حسب اینکه  $l$  زوج یا فرد باشد، فقط شامل توانهای زوج یا فرد  $\xi$  هستند.

۱۲.۳ با محاسبه مستقیم تعیین کنید که تابع موجهای جدول ۵.۳ ویژه تابعهای کدامیک از عملگرهای زیرند؟ (الف)  $L_x$ ، (ب)  $L_y$ .

۱۳.۳ نمودار قطبی  $|Y_{lm}|^2$  را به‌ازای  $l=1$  و  $0 \leq m \leq 1$  رسم کنید. همین عمل را برای تابع موجهای زاویه‌ای  $p_x^2$ ،  $p_y^2$  و  $p_z^2$  تکرار و نتایج را با یکدیگر مقایسه کنید.

۱۴.۳ با توجه به تعریف توابع وابسته لژاندر که در مسئله ۱۰.۳ آمد، نشان دهید که پارامتر آنها مساوی با  $l(l+1)$  است. [داده‌هایی: تحقیق کنید که با جانشانی  $\xi -$  به جای  $\xi$ ، تعاریف  $P_l(\xi)$  و  $P_l^m(\xi)$  چه تغییراتی می‌کنند.]

۱۵.۳ در مختصات کروی، عمل پارامتر  $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$  (یا  $x, y, z \rightarrow -x, -y, -z$ ) با تبدیل  $r, \theta, \phi \rightarrow r, \pi - \theta, \pi + \phi$  بیان می‌شود. رفتار تابع موجهای زاویه‌ای آمده در جدول ۴.۳ را تحلیل و صحت قاعده آمده در متن درس را، که بنا به آن پارامتر توابع  $Y_{lm}$  با  $l(l+1)$  برابر است تحقیق کنید. همین کار را برای تابع موجهای جدول ۵.۳ نیز تکرار کنید.

۱۶.۳ (الف) نشان دهید که تابع موجهای زاویه‌ای داده شده در جدول ۵.۳ را می‌توان با ترکیب خطی مناسب تابع موجهای جدول ۴.۳ به دست آورد. (ب) تابع موجهای جدول ۵.۳ را بر حسب  $x, y, z$ ، و  $r$  بیان کنید و نمادگذاری به کار رفته برای توصیف آنها را مورد بررسی قرار دهید.

۱۷.۳ عملگرهای  $L_x$  و  $L_y$  را در مختصات کروی بیان کنید. با به کار بردن این مقادیر و معادله (۲۱.۳) برای  $L_x$ ، عبارت (۲۳.۳) را به دست آورید.

۱۸.۳ معادله شعاعی (۲۴.۳) را برای یک ذره آزاد ( $E_p = 0$ ) بنویسید. با جانشانی مستقیم در معادله نشان دهید که به‌ازای  $l=0$  و  $l=1$ ، جوابهایی که شرط  $u=0$  به‌ازای  $r=0$  را برآورده می‌کنند عبارت‌اند از  $u = \sin kr$  و  $u = (\sin kr)/kr - \cos kr$  که در آن  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ . جواب کامل ذره آزاد،  $\psi_{lm}(r)$ ، منجمله قسمت زاویه‌ای، را به‌ازای  $l=0$  و  $l=1$  بنویسید. تابع موج  $l=0$  را به صورت ترکیبی از یک موج کروی ورودی و یک موج کروی خروجی تعبیر کنید. [یادآوری: می‌توان نشان داد که تابع موج عمومی برای ذره آزاد با تکانه  $p = \hbar k$  و تکانه زاویه‌ای مداری  $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$  به صورت

$$\psi_{lm} = j_l(kr)Y_{lm}(\theta, \phi)$$

است که در آن  $j_l(kr)$  به تابع کروی بسل مرتبه  $l$  معروف است. برای بررسی توابع بسل لازم است که دانشجو به یک کتاب ریاضی مراجعه کند و  $j_0(kr)$  و  $j_l(kr)$  را محاسبه و آنها را با نتایج به دست آمده در قسمت اول این مسئله مقایسه کند.

۱۹۰۳ می توان نشان داد که تابع موج ذره آزادی که با تکانه  $\hbar k$  در راستای محور  $Z$  حرکت می کند، به صورت زیر بیان می شود

$$\psi = e^{ikz} = \sum_l i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(kr) Y_{l,0}(\theta)$$

چرا فقط تابع موجهای  $m_l = 0$  تابع موجهای مجازند؟ چرا جواب شامل چندین تابع تکانه زاویه ای است؟ دو جمله اول مجموع بالا را به طور کامل بنویسید (برای تعریف  $j_l$  به مسئله قبل رجوع کنید).

۲۰۳ تابع موجهای شعاعی اتم هیدروژن با رابطه زیر داده می شوند

$$R_{nl}(r) = N_{nl} e^{-\rho/2} \rho^l L_{n-l}^{2l+1}(\rho)$$

که  $\rho = 2Zr/na_0$  و  $L_i^s$  چند جمله ایهای وابسته لاگر هستند، که به صورت زیر تعریف می شوند

$$L_i^s(\rho) = \frac{d^s}{d\rho^s} [L_i(\rho)]$$

که در آن

$$L_i(\rho) = e^\rho \frac{d^i}{d\rho^i} [\rho^i e^{-\rho}]$$

و  $N_{nl}$  ثابت بهنجارش است که با رابطه زیر داده می شود

$$N_{nl} = - \left[ \left( \frac{2Z}{na_0} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^2} \right]^{1/2}$$

تمام توابع شعاعی به ازای  $n = 1, 2, 3$  را بنویسید و آنها را با عبارات داده شده در جدول ۶.۳ مقایسه کنید.

۲۱۰۳ نشان دهید که چند جمله ایهای وابسته لاگر، که در مسئله ۲۰۳ تعریف شدند، از درجه  $s-l$  هستند. این موضوع نشان می دهد که  $s \leq l$ . از این رو قاعده ای را اثبات کنید که برای یک  $n$  مشخص، بیشینه مقدار  $l$  مساوی با  $n-1$  باشد.

۲۲۰۳ به کمک اطلاعات مسئله ۲۰۳ نشان دهید که تابع موجهای شعاعی هیدروژن به ازای مقادیر کوچک  $r$  به صورت  $\rho^l$  و به ازای مقادیر بزرگ  $r$  به صورت  $\rho^3 e^{-\rho/2}$  رفتار می کنند. در این صورت نتیجه بگیرید که هر چه مقدار  $l$  بزرگتر باشد، مدار از نفوذپذیری کمتری

برخوردار است.

۲۳.۳ با جانشانی مستقیم نشان دهید که  $R_{10}$  يك جواب از معادله شعاعی شرودینگر است.

۲۴.۳ ثابت کنید که تابع موجهای تکانه زاویه‌ای  $Y_{lm_l}(\theta, \phi)$  آمده در جدول ۴.۳ متعامد و بهنجار شده هستند. (شرط تعامد و بهنجارش آن است که

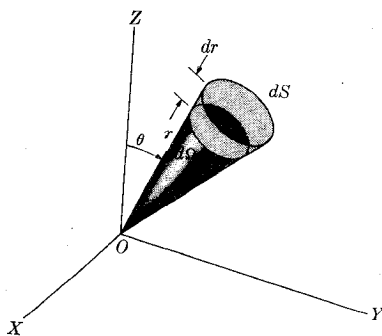
$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{lm_l}^* Y_{l'm_l'} d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{m_l m_l'}$$

که در آن  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$  و  $\delta_{ab}$  به‌ازای  $a=b$  برابر با يك و در غیر این صورت مساوی با صفر است.)

۲۵.۳ عنصر حجمی در مختصات کروی (شکل ۲۶.۳) عبارت است از

$$dV = dr dS = r^2 dr d\Omega$$

احتمال یافتن يك الکترون در این عنصر حجمی مساوی است با  $|\psi|^2 r^2 dr d\Omega$ . ثابت کنید که احتمال یافتن الکترون در داخل يك پوسته کروی به شعاعهای  $r$  و  $r+dr$  (بدون توجه به وضعیت زاویه‌ای) با  $|R_{nl}|^2 r^2 dr$  داده می‌شود. [دانهمایی: به‌جای  $\psi$  مقدار آن در معادله ۱۸.۳ را قرار دهید و با استفاده از شرط بهنجارش به‌ازای  $Y_{lm_l}$  که در مسئله ۲۴.۳ داده شده است، بر روی تمام زوایا انتگرال بگیرید.]



شکل ۲۶.۳

۲۶.۳ با به‌کار بردن نتیجه مسئله قبل مطلوب است: (الف) محتملترین فاصله و (ب) میانگین فاصله الکترون از پروتون در حالت ۱s در اتم هیدروژن. این نتایج را با شعاع مدار بور به‌ازای  $n=1$  مقایسه کنید.

۲۷.۳ (الف) بسا به‌کار بردن عنصر حجمی مسئله ۲۵.۳ نشان دهید که شرط بهنجارش

تابع موجهای  $\psi_{nlm_l}$  مستلزم آن است که  $\int_0^\infty |R_{nl}|^2 r^2 dr = 1$  (ب) با توجه به شکل ۱۳.۳ نشان دهید، همان طور که شرط بهنجارش ایجاد می کند، سطح زیر هر منحنی مساوی است با یک. [داهنمایی: هر قسمت را به صورت یک مثلث در نظر گیرید.]

۲۸.۳ مقدار میانگین  $r$  در اتمهای هیدروژن گونه با رابطه زیر داده می شود

$$r_{ave} = \frac{n^2 a_0}{Z} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{l(l+1)}{n^2} \right] \right\}$$

مقدار  $r_{ave}$  را برای تمام حالت‌های با  $n = 1, 2, 3$  محاسبه کنید. این مقادیر را با شعاعهای متناظر بور مقایسه کنید. با به کار بردن  $r_{ave}$  به عنوان مقیاسی از اندازه مدار، حالت‌های  $nl$  را بر طبق میانگین فواصل افزایشی از هسته مرتب کنید.

۲۹.۳ تابع موجهای شعاعی یک یا چند گره دارند. گره ناحیه‌ای است که در آن احتمال یافتن الکترون مساوی با صفر است. مقدار  $r$  را برای ناحیه‌ای که در آن این حالت برای تابع موج ۲s در جدول ۶.۳ اتفاق می افتد به دست آورید.

۳۰.۳ با به کار بردن معادله (۲۴.۳) نشان دهید که، بدون توجه به مقدار تکانه زاویه‌ای، تابع موج شعاعی ذره آزاد در فواصل زیاد از مبدأ مختصات با  $e^{\pm ikr}/r$  متناسب است که در آن  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ . از این رو، تابع موج کامل را می توان به صورت  $f(\theta)e^{\pm ikr}/r$  نوشت، که در آن  $f(\theta)$  به تکانه زاویه‌ای وابسته است. هر دو علامت را تعبیر کنید.

۳۱.۳ انتگرالهای شعاعی و زاویه‌ای مورد نیاز برای محاسبه عناصر ماتریس  $z = r \cos \theta$  میان حالت‌های  $nlm_l$  و  $n'l'm'_l$  را بنویسید. نشان دهید که عناصر ماتریس مساوی با صفر اند مگر اینکه  $m_l = m'_l$  باشد.

۳۲.۳ تصحیح نسبیته کسری  $\Delta E_r/E_n$  را برای ترازهای انرژی  $n = 2$  در اتم هیدروژن برآورد کنید.

۳۳.۳ شکافتگی ترازهای  $d, p$ ، و  $f$  یک اتم تک الکترونی در نتیجه اثر نسبیته را تحلیل کنید. [داهنمایی: مثال ۶.۳ را ببینید.]

۳۴.۳ جریان الکتریکی الکترون را در سه مدار اول بور ( $n = 1, 2, 3$ ) تعیین کنید. ضمناً گشتاور دو قطبی مغناطیسی الکترون را برای هر حالت محاسبه کنید.

۳۵.۳ نمودارهای ترازهای انرژی را برای حالت‌های  $4f$  و  $3d$  هیدروژن در حضور میدان مغناطیسی رسم کنید. نشان دهید که در گذار  $3d \rightarrow 4f$  تعداد خطوط طیفی مساوی با سه است. هر گاه میدان مغناطیسی مساوی با  $0.5 \text{ T}$ ، و توان تفکیک طیف سنج برابر با  $10^{-11} \text{ m}$  باشد، آیا خطوط قابل مشاهده هستند؟

۳۶.۳ به طور تجربی، مقدار  $e/m_e$  را می توان با مشاهده اثر زیمان به دست آورد. هر گاه



فاصله جدایی میان دو خط در میدان  $T = 450$  برابر با  $10^{10} \times 29$  عره باشد، مقدار  $e/m_0$  را به دست آورید. جدایی طول موج برای خط هیدروژن در گذار  $n=2$  به  $n=1$  چقدر است؟ برای  $H_{\alpha}$  (یعنی گذار  $n=3$  به  $n=2$ ) جدایی طول موج بزرگتر یا کوچکتر یا یکسان با آن است؟

۳۷.۳ نیروی وارد بر یک دو قطبی مغناطیسی با گشتاور  $M$  از طرف میدان مغناطیسی ناهمگن  $B$  با شیب  $dB/dz$  برابر است با  $F = \pm M(dB/dz)$ . هر گاه شیب در ناحیه مشخصی برابر با  $10^2 Tm^{-1} \times 1.5$  باشد، نیروی وارد بر الکترون را که از گشتاور دو قطبی مغناطیسی اسپینی آن ناشی می‌شود، محاسبه کنید. هر گاه اتم هیدروژن در راستای عمود بر چنین میدانی به اندازه یک متر حرکت کند، جا به جایی عمودی را محاسبه کنید. سرعت اتم هیدروژن برابر است با  $10^5 ms^{-1}$  و اسپین آن نیز در راستای موازی یا پادموازی با میدان مغناطیسی قرار دارد.

۳۸.۳ باریکه‌ای از اتمهای نقره با سرعت متوسط  $10^2 ms^{-1} \times 7$  از میدان مغناطیسی ناهمگنی عبور می‌کند و طول  $1m$  را که در آن شیب میدان در راستای عمود بر حرکت آنها مساوی با  $10^2 Tm^{-1} \times 3$  است، می‌پیماید. بیشینه فاصله جدایی دو باریکه را که از این ناحیه مغناطیسی خارج می‌شوند، به دست آورید. فرض می‌کنیم که گشتاور مغناطیسی خالص هر اتم برابر است با یک مگنتون بور.

۳۹.۳ چه سیگنالی از بسامد رادیویی می‌تواند در میدان مغناطیسی  $T = 10^{-1}$  گذارهای اسپین الکترون را از سمتگیری موازی به سمتگیری پادموازی (یا برعکس)، تغییر دهد؟

۴۰.۳ با استفاده از معادله (۳۹.۳) ثابت کنید که اعداد داده شده برای شکافتگی اسپین-مدار ترازهای انرژی هیدروژن در شکل ۲۳.۳ درست اند. همان انرژیهای شکافتگی را برای  $He^+$  نیز محاسبه کنید.

۴۱.۳ در مثال ۸.۳ نشان دادیم که برهم کنش اسپین-مدار باعث می‌شود که  $L$  و  $S$  حول برابند آنها یعنی حول  $J$  که ثابت است، حرکت تقدیمی کنند. در این حالت نشان دهید که  $L_z$  و  $S_z$  نمی‌توانند مقادیر کاملاً مشخصی داشته باشند، حتی با وجود اینکه مجموع آنها (یعنی  $J_z$ ) ثابت است. در نتیجه،  $m_l$  و  $m_s$  اعداد کوانتومی خوبی نیستند در حالی که  $m$  یک عدد کوانتومی خوب است.

۴۲.۳ شکافتگی تراز  $3d$  در اتم هیدروژن را که از میدان مغناطیسی ناشی می‌شود، در دو حالت زیر تحلیل کنید. (الف) هنگامی که میدان مغناطیسی ضعیف است. (ب) هنگامی که میدان مغناطیسی در مقایسه با برهم کنش اسپین-مدار قوی است

۴۳.۳ شکافتگی خطوط در گذار  $3d \rightarrow 2p$  با حضور میدان مغناطیسی را هنگامی که میدان در مقایسه با برهم کنش اسپین-مدار ضعیف است بررسی کنید.

۴۴.۳ عبارت نسبیتی مربوط به انرژی ذره آزاد عبارت است از  $E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$  معادله شرودینگر نسبیتی متناظر را با قرار دادن عملگر  $-i\hbar \nabla$  (که بر طبق جدول ۴.۲ داده شده است) به جای  $p$  به دست آورید. این معادله به معادله کلین-گوردون معروف است. (الف) جواب متناظر با ذره آزادی را که در طول محور  $X$  حرکت می کند به دست آورید. (ب) نشان دهید که برای یک ذره آزاد با تکانه زاویه ای صفر، تسایع موج به صورت  $\psi = Ce^{-ikr}/r$  است که در آن  $\mu = m_0 c / \hbar$  با  $2\pi$  برابر عکس طول موج کامپتون ذره مساوی است.

۴۵.۳ برای یک ذره نسبیتی که در ناحیه انرژی پتانسیل  $E_p$  حرکت می کند، انرژی کل به صورت  $E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} + E_p$  نوشته می شود که آن را می توان به صورت زیر نیز نوشت

$$(E - E_p)^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

با قرار دادن عملگر  $-i\hbar \nabla$  به جای  $p$  (مسئله ۴۴.۳) معادله شرودینگر متناظر را برای اتم هیدروژن به دست آورید. [یادآوری: این معادله، ترازهای انرژی نسبیتی صحیح هیدروژن را به دست نمی دهد.]

۴۶.۳ می توان نشان داد که برهم کنش اسپین-مدار عبارت است از

$$E_{SL} = \frac{1}{2m_0^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dE_p}{dr} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$$

که در آن  $E_p$  انرژی پتانسیل ناشی از برهم کنش الکتریکی با هسته است. با به کار بردن نتیجه

$$(r^{-3})_{ave} = \frac{Z^3}{a_0^3 n^3 l(l + \frac{1}{2})(l + 1)}$$

عبارت مربوط به شکافتگی اسپین-مدار، یعنی  $\Delta E_{SL}$ ، را که در مثال ۷.۳ داده شده است، به دست آورید.

۴۷.۳ طبق مثال ۶.۳، تصحیح نسبیتی ترازهای انرژی در اتم تک الکترونی را می توان با محاسبه میانگین مقدار  $p^4 \approx 4m^2(E_n - E_p)^2$  به دست آورد که در آن  $E_n$  با فرمول بالمر داده می شود و  $E_p = -Ze^2 / 4\pi\epsilon_0 r$  نیز انرژی پتانسیل الکترون است. با به کار بردن نتایج

$$(r^{-1})_{ave} = \frac{Z}{a_0 n^2}$$

$$(r^{-2})_{ave} = \frac{Z^2}{a_0^2 n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

معادله (۲۶.۳) را به دست آورید.

### مراجع

1. "Papers Given at the Niels Bohr Memorial Session," A. Bohr, F. Bloch, J. Neilson, J. Rosenfeld, V. Weisskopf, and J. Wheeler, *Physics Today*, October 1963, page, 22.
2. "The Evolution of the Balmer Series," L. Banet, *Am. J. Phys.*, 34, 496 (1966).
3. "Orbital Angular Momentum in Quantum Mechanics," M. Whippman, *Am. J. Phys.*, 34, 656 (1966).
4. "A. Quantum - Dynamical Description of Atoms and Radiative Processes," G. Fowles, *Am. J. Phys.* 31, 407 (1963).
5. *Elements of Wave Mechanics*, N. Mott, Cambridge: Cambridge University Press, 1962, Chapter 4, Sections 4-13; Chapter 5, Sections 1. 2. 1 and 4.3.
6. *Principles of Modern Physics*, R. Leighton, New York: McGraw-Hill, 1959, Chapters 5 and 6.
7. *Atomic Spectra and Atomic Structure*, G. Herzberg, New York: Dover, 1951, Chapter 1.
8. *The Behavior of Electrons in Atoms*, R. Hochstrasser, New York: Benjamin, 1964.
9. *Structure of Matter*, W. Finkelburg, New York: Academic Press, 1964, Chapter 3.
10. *Quantum Theory of Matter*, J. C. Slater, New York: McGraw-Hill, 1951, Chapter 5.
11. *Introduction to Modern Physics*, R. Richtmyer, E. Kennard, and T. Lauritsen, New York: McGraw-Hill 1955, Chapter 5, Sections 80-83; Chapter 6, Sections 104-108.

## اتمهای چندالکترونی

مقدمه	۱۰۴
اتم هلیوم	۲۰۴
اصل طرد	۳۰۴
ساختار الکترونی اتمها	۴۰۴
جفت شدگی L-S	۵۰۴
اتمهای با یک یا دو الکترون ظرفیت	۶۰۴
طیفهای پرتو ایکس	۷۰۴

## ۱.۴ مقدمه

تمام اتمها، بجز اتم هیدروژن و بعضی یونهای عناصر سبک، شامل چندین الکترون اند. بنابراین، به نظر می آید که بحث اتم تک الکترونی مطالعه شده در فصل قبل ارزش عملی چندانی نداشته باشد. با این حال، درک خواص اتمهای تک الکترونی می تواند در تحلیل اتمهای چندالکترونی بسیار سودمند و مفید واقع شود.

مشکل اول در مطالعه اتم چندالکترونی آن است که توصیف حرکت هر الکترون منفرد ناممکن است، زیرا علاوه بر در نظر گرفتن برهم کنش الکتریکی هر الکترون با هسته، باید برهم کنشهای متقابل میان الکترونها نیز در نظر گرفته شود. از این رو، انرژی پتانسیل مجموعه اتم به صورت زیر خواهد بود

$$E_p = \sum_{\text{تمام الکترونها}} -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_i} + \sum_{\text{زوجها}} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (1.4)$$

دومین مجموع رابطه بالا معرف جفت شدگی در حرکت الکترونهاست و از این رو، حرکت هر الکترون را نمی توان به صورت مستقل از دیگر الکترونها در نظر گرفت. هر اصلاح یا تغییر در حرکت یک الکترون لزوماً باید بر حرکت تمام الکترونها دیگر تأثیر بگذارد. بنابراین، نمی توان در بساطه انرژی هر الکترون صحبتی به میان آورد، بلکه فقط انرژی مجموعه اتم (یا یون) باید در نظر گرفته شود. به همین دلیل از تابع موج هر الکترون صحبتی به میان نمی آوریم، بلکه فقط تابع موج کل اتم را بررسی می کنیم.

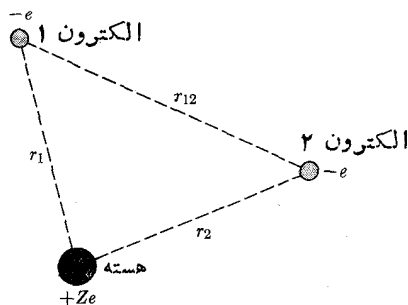
مسئله اتمهای چندالکترونی را نمی توانیم دقیق و کامل حل کنیم، بلکه از تقریبهایی مشخصی استفاده می کنیم. در اینجا می خواهیم این تقریبهها را با بحث در باره اتم هلیوم توضیح دهیم.

## ۲.۴ اتم هلیوم

در میان تمام اتمهای چندالکترونی، ساده ترین آنها آنهایی هستند که دو الکترون دارند، مانند یون هیدروژن منفی  $H^-$  ( $Z=1$ )، اتم هلیوم  $He$  ( $Z=2$ )، اتم لیتیم  $Li$  ( $Z=3$ )، و غیره. در این مورد انرژی پتانسیل الکترونها (شکل ۱.۴) عبارت است از

$$E_p = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \quad (2.4)$$

دو جمله اول رابطه بالا بسا جاذبه میان هسته و هر یک از الکترونها و جمله آخر بسا دافعه میان دو الکترون متناظر است. حتی برای این مسئله نسبتاً ساده که فقط شامل دو الکترون است نیز حل دقیق معادله شرودینگر ناممکن است. بنابراین، لازم است که چند تقریب را



شکل ۱۰۴ یون یا اتم هلیوم گونه.

به کار ببریم. چون بحث ریاضی اتمهای هلیوم گونه در این کتاب نمی آید، توجه خود را به بیان فیزیکی مسئله معطوف می کنیم و به دنبال آن، در مثال ۲.۴، به اختصار توضیح می دهیم که انرژی چگونه محاسبه می شود.

در تقریب اول می توان از جمله آخر (یا جمله مربوط به برهم کنش الکترون-الکترون) در معادله (۲.۴) چشمپوشی کرد. این تقریب معادل با آن است که فرض کنیم هر الکترون مستقل از الکترون دیگر حرکت می کند. از این رو، می توان این تقریب را مدل ذره-مستقل نامید. بنا بر این، می توانیم حرکت هر الکترون را با تابع موجهای هیدروژن گونه از نوع  $\psi_{nlm_l} = R_{nl}(r)Y_{lm_l}(\theta, \phi)$ ، که با اعداد کوانتومی مداری  $n, l, m_l$  مشخص می شوند، توصیف کنیم. از جمع کردن جملاتی از نوع معادله (۵.۳) یعنی جملات  $E = -RhcZ^2/n^2$  که برای هر الکترون در نظر گرفته می شود، انرژی اتم به دست می آید. بنا بر این، در مورد He [با قراردادن  $Z = 2$  در معادله (۵.۳)]، انرژی حرکت الکترون در حالت پایه  $n = 1$  برابر با مقدار زیر خواهد بود

$$E_{He} = 2 \times (-52.4 \text{ eV}) = -104.8 \text{ eV}$$

با این حال مقدار تجربی برابر است با  $E_{He} = -78.98 \text{ eV}$ . از این رو، نتیجه می گیریم که تقریب مرتبه اول انرژی بسیار کمی را به دست می دهد. دلیل این مطلب آن است که از دفع دو الکترون، که تمایل به افزایش انرژی اتم دارد، چشمپوشی کرده ایم.

اکنون با در نظر گرفتن اختلال حرکت الکترون، که از برهم کنش متقابل دو الکترون ناشی می شود، تقریب خود را اصلاح می کنیم. بهترین راه برای اصلاح این تقریب این است که فرض کنیم هر الکترون نه فقط در میدان مرکزی هسته بلکه همچنین در میدان مرکزی میانگینی که به وسیله الکترون دیگر ایجاد می شود، حرکت می کند. از این رو، اثر خالص ظاهری هر الکترون بر روی حرکت الکترون دیگر آن است که بار هسته را تا حدودی استتار می کند. بنا بر این، انرژی اتم در حالت پایه را می توان به صورت زیر نوشت

$$E = 2(Z - S)^2 E_H$$

که در آن  $E_H = -13.6 \text{ eV}$  (انرژی مربوط به حرکت هیدروژن گونه) و  $\mathcal{J}$  نیز ثابت استوار است که برای حالت پایه هلیوم باید مقدار آن برابر  $0.32 \text{ eV}$  باشد تا با مقدار مشاهده شده  $E_{He}$  سازگار باشد. یعنی، اثر استوار هر الکترون بر الکترون دیگر معادل حدود  $1/3$  بار الکترونی است.

برای سهولت، الکترونها را با اعداد ۱ و ۲ شماره گذاری می کنیم. چون در اولین تقریب فرض کردیم که الکترونها مستقل از هم حرکت می کنند، احتمال یافتن الکترون ۱ در یک مکان مشخص و همزمان با آن احتمال یافتن الکترون ۲ در مکان مشخص دیگر عبارت است از حاصلضرب توزیع احتمال هر الکترون، زیرا این دو رویداد، دو رویداد ناهمبسته اند، یعنی  $P_{\text{اتم}} = P(1)P(2)$ . بنابراین، نتیجه می گیریم که در مدل زده مستقل، تابع موج اتم باید به صورت حاصلضرب تابع موجهای هر الکترون باشد. هر گاه اعداد کوانتومی مداری  $nlm_1$  الکترون ۱ را با  $a$  و اعداد کوانتومی الکترون ۲ را با  $b$  نمایش دهیم، در این صورت باید بنویسیم

$$\psi_{\text{اتم}} = \psi_a(1)\psi_b(2) \quad (3.4)$$

که توزیع احتمال آن به صورت زیر است

$$|\psi_{\text{اتم}}|^2 = |\psi_a(1)\psi_b(2)|^2 = |\psi_a(1)|^2 |\psi_b(2)|^2 \quad (4.4)$$

دراثر حرکت الکترونها، میدان مرکزی میانگینی که یک الکترون در محل الکترون دیگر تولید می کند با میدان کولنی حاصل از هسته (میدان  $1/r$ ) متفاوت است. آشکار است که تابع موجهای  $\psi_a(1)$  و  $\psi_b(2)$ ، که دیگر با تابع موجهای هیدروژن گونه یکی نیستند باید کمی اصلاح شوند. این تغییر در قسمت شعاعی  $R_{nl}$  تابع موج (و نه قسمت زاویه ای  $Y_{lm}$ ) اثر می گذارد. زیرا نیروی برآیند وارد بر هر الکترون هنوز هم یک نیروی مرکزی است. با به کار بردن تکنیکهای مناسب ریاضی می توان تابع موج الکترون را بهینه کرد و در نتیجه، ترازهای انرژی اتم را با دقت نسبتاً خوبی به دست آورد.

با این حال، حتی اگر توابع آمده در معادله (۳.۴) به این طریق اصلاح شوند، این عبارت برای تابع موج اتم نمی تواند صحیح باشد. طبق تابع موج (۳.۴) الکترون ۱ در حالت  $a$  و الکترون ۲ در حالت  $b$  قرار دارد. اما تابع موج

$$\psi_{\text{اتم}} = \psi_b(2)\psi_a(1) \quad (5.4)$$

متناظر با الکترون ۲ در حالت  $a$  و الکترون ۱ در حالت  $b$ ، باید نمایش دهنده حالتی همان انرژی تابع موج معادله (۳.۴) باشد و حالت اتم را به همان خوبی معادله (۳.۴)

توصیف کند. اینکه تابع موجهای داده شده با معادلات (۳.۴) و (۵.۴) متناظر با انرژی یکسانی هستند به تبهگنی قبادلی معروف است.

در این حالت، الکترونها یکسان و تمیزناپذیرند، و تنها چیزی که می توان گفت این است که در اتم مورد نظر، یک الکترون در حالت  $a$  و الکترون دیگر در حالت  $b$  قرار دارد. این کار ایجاب می کند که تابع موج اتمی باید طوری باشد که  $|\psi_{اتم}|^2$  (که توزیع احتمال هر دو الکترون را به دست می دهد) نسبت به دو الکترون متقارن باشد، به گونه ای که هر دو الکترون نقش یکسانی را ایفا کنند. باید توجه داشت که نه تابع موج اتمی داده شده با معادله (۳.۴) و نه تابع موج اتمی داده شده با معادله (۵.۴) چنین چیزی را ایجاب نمی کنند. اما با در نظر گرفتن اینکه الکترونها تمیزناپذیرند، می توان تابع موج اتمی مناسبی را با تشکیل ترکیبهای خطی مناسبی از معادلات (۳.۴) و (۵.۴) به دست آورد، که به صورت توابع زیرند

$$\psi_{اتم} = \psi_a(1)\psi_b(2) \pm \psi_a(2)\psi_b(1) \quad (6.4)$$

در اینجا مشاهده می شود که در هر دو حالت، عبارت  $|\psi_{اتم}|^2$  نسبت به هر دو الکترون متقارن است. در شکل ۲.۴، اطلاعات موجود در توابع داده شده با معادلات (۳.۴)، (۵.۴) و (۶.۴) به صورت طرح وار نشان داده شده است.

از این به بعد، تابع موجهای داده شده با معادله (۶.۴) را تابع موجهای مداری می نامیم، زیرا رفتار فضایی یا مداری الکترونها در اتم را، بدون اشاره به اسپین توصیف می کنند. دو تابع مداری معادله (۶.۴) از یک نظر خیلی باهم متفاوت اند. تابع موج مداری با علامت مثبت، یعنی

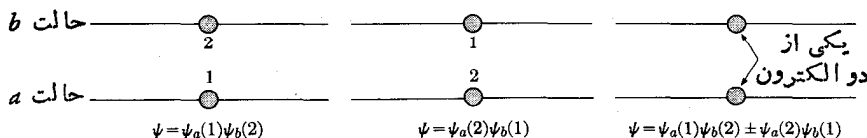
$$\psi_S(1, 2) = \psi_a(1)\psi_b(2) + \psi_a(2)\psi_b(1) \quad (7.4)$$

نسبت به دو الکترون متقارن است و با تعویض الکترونها تغییر علامت نمی دهد یعنی  $\psi_S(1, 2) = \psi_S(2, 1)$ . از طرف دیگر، تابع موج مداری با علامت منفی یعنی

$$\psi_A(1, 2) = \psi_a(1)\psi_b(2) - \psi_a(2)\psi_b(1) \quad (8.4)$$

نسبت به دو الکترون پاد متقارن است و هر گاه الکترونها تعویض شوند تغییر علامت می دهد، یعنی

$$\psi_A(1, 2) = -\psi_A(2, 1)$$



شکل ۲.۴



این رفتار متقارن در خاصیت مهم دیگری بازتاب پیدا می‌کند: انرژی اتم وابسته به  $\psi$  نمی‌تواند با انرژی متناظر با  $\psi$  یکسان باشد. مشاهده می‌کنیم که اگر الکترونها ۱ و ۲ خیلی به هم نزدیک باشند، دو جمله‌ای که آن توابع را تشکیل می‌دهند تقریباً یکسان‌اند و بنابراین  $\psi$  خیلی کوچک یا صفر خواهد بود. از این رو، تابع موج پساد متقارن  $\psi$  بیان‌کننده حالتی است که در آن الکترونها هرگز خیلی به هم نزدیک نیستند و در نتیجه، به‌طور متوسط، انرژی دافعه آنها نسبتاً کوچک است. از طرف دیگر، تابع موج متقارن  $\psi$  این احتمال را نفی نمی‌کند که الکترونها ممکن است گاهی خیلی به هم نزدیک شوند و بنابراین، میانگین انرژی دافعه حالتی که با  $\psi$  بیان می‌شود، بزرگتر از انرژی دافعه حالت  $\psi$  خواهد بود. در این صورت با واقعیت زیر مواجه می‌شویم که بنا به آن

اتمهای هلیوم‌گونه می‌توانند در دو حالت متفاوت، با انرژی متفاوت و تابع موجهای مداری اتمی  $\psi_a$  و  $\psi_b$ ، وجود داشته باشند. این تابع موجها بسا مجموعه یکسانی از اعداد کوانتومی مداری  $a$  و  $b$  وابسته به دو الکترون در مدل ذره-مستقل متناظرند.

به عبارت دیگر، هر اتم دو الکترونی دارای دو مجموعه تراز انرژی و ویژه حالت است که یکی با تابع موجهای مداری متقارن و دیگری با تابع موجهای مداری پادمتقارن بیان می‌شود. این اثر کاملاً مکانیک کوانتومی نتیجه‌ای از این واقعیت است که الکترونها را نمی‌توان از یکدیگر تمیز داد.

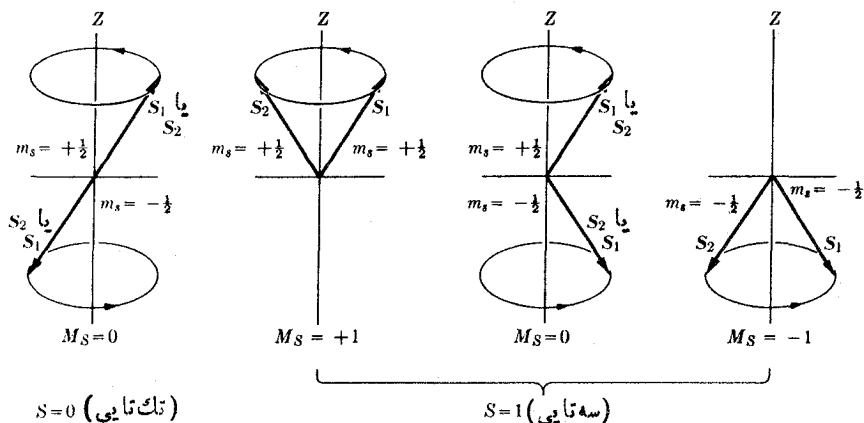
تنها استثنایی که در گفته بالا وجود دارد مربوط به حالتی است که در آن دو مجموعه اعداد کوانتومی مداری الکترونها یکسان‌اند، یعنی  $a = b$ . در این صورت

$$\psi_a = \psi_a(1)\psi_a(2) - \psi_a(2)\psi_a(1) = 0$$

در نتیجه، هنگامی که دو الکترون دارای مجموعه یکسانی از اعداد کوانتومی مداری هستند، فقط حالت مداری متقارن امکان‌پذیر خواهد بود.

تاکنون فقط توابع موجی را بررسی کردیم که توزیع فضایی الکترونها را توصیف می‌کنند. توصیف کامل حالت اتم مستلزم آن است که اسپین الکترونها را نیز در محاسبه دخالت دهیم. هر الکترون دارای اسپین  $1/2$  است. اسپین هر الکترون می‌تواند در وضع موازی یا پاد موازی با جهت اسپین الکترون دیگر قرار بگیرد و اسپین کل برابر با یک ( $S = 1$ ) یا صفر ( $S = 0$ ) را به دست دهد. حالت‌های اسپینی بسا  $S = 0$  را حالت‌های تک‌تایی می‌نامند زیرا، همان‌طور که در شکل ۳.۴ دیده می‌شود آنها را فقط می‌توان به یک طریق به دست آورد. بسا وجود این، به ازای  $S = 1$ ، بردار اسپین برآیند می‌تواند

۱. مقادیر اعداد کوانتومی مربوط به تکانه زاویه‌ای مداری کل، اسپین کل، بسا مؤلفه‌های آنها با حروف بزرگ نمایش داده می‌شوند. کمیت‌های متناظر مربوط به الکترونها منفرد نیز با حروف کوچک نشان داده می‌شوند.



شکل ۳.۴ حالت‌های اسپینی برای یک سیستم دو الکترونی.

سه سمتگیری را در فضا اختیار کند که با  $M_S = -1, 0, +1$  متناظرند. این حالتها در شکل ۳.۴ نشان داده شده‌اند. بنا بر این، حالت‌های اسپینی با  $S=1$  دارای سه تابع موج اسپینی اند و به حالت‌های سه تایی معروف اند.

می‌توان نشان داد که تابع موج اسپینی کل حالت تک تایی ( $S=0$ ) در دو الکترون پاد همقادران است، در حالی که سه تابع موج اسپینی کل حالت سه تایی ( $S=1$ ) در دو الکترون همقادران اند. این تابع موجهای اسپینی را می‌توان برحسب تابع موجهای اسپینی تک الکترونی  $\chi_{\pm}$ ، که در بخش ۷.۳ تعریف شد، به صورت زیر بیان کرد

$$\chi_A = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_+(1)\chi_-(2) - \chi_+(2)\chi_-(1)], \quad M_S = 0$$

$$\chi_S = \begin{cases} \chi_+(1)\chi_+(2), & M_S = +1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_+(1)\chi_-(2) + \chi_+(2)\chi_-(1)], & M_S = 0 \\ \chi_-(1)\chi_-(2), & M_S = -1 \end{cases} \quad (9.4)$$

مقدار  $M_S = m_{s1} + m_{s2}$  متناظر با مؤلفه  $S_z$  اسپین کل برای هر تابع موج داده شده است. ضریب  $1/\sqrt{2}$  مربوط به بهنجارش است. توجه کنید که تابع موجها با وضعیتهای توصیف شده در شکل ۳.۴ متناظرند. به طور خلاصه داریم

حالت تک تایی ( $S=0$ ): تابع موج اسپینی پاد متقارن  $\chi_A$

حالت سه تایی ( $S=1$ ): تابع موجهای اسپینی متقارن  $\chi_S$

تابع موج کل اتم را می‌توان از ترکیب تابع موج مداری (که با  $\psi_S$  یا  $\psi_A$  داده می‌شود) و تابع موج اسپینی (که با  $\chi_S$  یا  $\chi_A$  داده می‌شود) به دست آورد، یعنی

$$(\text{تابع موج اسپینی}) \times (\text{تابع موج مداری}) = \psi_S$$

واضح است که تقارن  $\psi_S$  به تقارن هر یک از دو عامل وابسته است و چون دو نوع تابع موج مداری و دو نوع تابع موج اسپینی وجود دارد، چهار ترکیب ممکن در میان آنها موجود خواهد بود. اکنون با بررسی ترازهای انرژی اتم هلیوم آشکار می‌شود که حالت‌های توصیف شده با تابع موج‌های مداری متقارن  $\psi_S$  همیشه تک‌تایی اند ( $S=0$ ) و بنا بر این با تابع موج‌های اسپینی پاد متقارن  $\chi_A$  متناظرند، در حالی که حالت‌های بیان شده با تابع موج‌های مداری پاد متقارن  $\psi_A$  همیشه سه‌تایی اند ( $S=1$ ) و از این رو با تابع موج‌های اسپینی متقارن  $\chi_S$  متناظرند. بنا بر این، به نظر می‌رسد که تنها حالت‌های مجاز در طبیعت عبارت‌اند از

$$(10.4) \quad \psi_S \chi_A = (\text{تابع موج اسپینی پاد متقارن}) \times (\text{تابع موج مداری متقارن}) = \psi_S$$

که تک‌تایی‌اند و

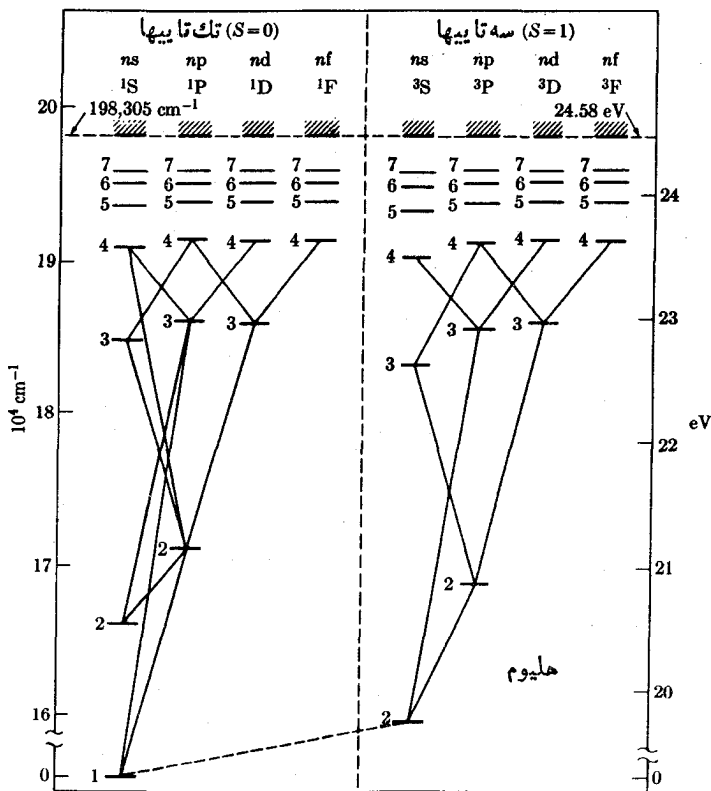
$$(11.4) \quad \psi_A \chi_S = (\text{تابع موج اسپینی متقارن}) \times (\text{تابع موج مداری پاد متقارن}) = \psi_A$$

که سه‌تایی‌اند. در هر مورد،  $\psi_S$  پاد متقارن است زیرا برابر است با حاصلضرب یک عامل متقارن در یک عامل پاد متقارن. این یک نتیجه کلی است که برای هر تعداد الکترون می‌تواند به صورت زیر بیان شود

تابع موج کل سیستمی از الکترون‌ها باید پاد متقارن باشد.

در بخش بعد، تأثیر این بیان در اتمهای چند الکترونی را به طور دقیق تحلیل خواهیم کرد. در اینجا دربارهٔ چگونگی بکارگیری این بیان در مورد ترازهای انرژی اتمهای هلیوم - گونه را به طور خلاصه بحث می‌کنیم.

شکل ۴.۴ ترازهای انرژی هلیوم را در حالتی نشان می‌دهد که یک الکترون همیشه در حالت پایه  $1s$  (با اعداد کوانتومی مداری  $n=1$ ،  $l=0$ ، و  $m_l=0$ ) و الکترون دیگر در همان حالت یا در یک حالت برانگیخته قرار دارد. اعداد کوانتومی مداری الکترون برانگیخته به صورت  $ns$ ،  $np$ ،  $nd$ ، ... در بالای شکل نشان داده شده‌اند. مقادیر انرژی نسبت به حالت پایه و پاره‌ای از گذارهای ممکن نیز نمایش داده شده‌اند. اتمهای با  $S=0$  تشکیل دهندهٔ پاراهلیوم و اتمهای با  $S=1$  نیز تشکیل دهندهٔ اورتوهلیوم هستند. توجه کنید که هیچ گذاری میان حالت‌های تک‌تایی و سه‌تایی نشان داده نشده است. چنین گذارهایی کاملاً غیر محتمل‌اند زیرا شامل یک تجدید آرایش اسپینی هستند که تنها اگر نیروهای قوی وابسته به اسپین حضور داشته باشند، ممکن خواهد بود. از این رو، از جهتی می‌توان اورتوهلیوم و پاراهلیوم را



شکل ۴.۴. ترازهای انرژی هلیوم که در آن پاره‌ای از گذارها نشان داده شده‌اند.

دو گاز متفاوت در نظر گرفت. نسبت اتمهای هر گروه سه به یک است. توجه کنید که حالت  $n=1$  فقط هنگامی وجود دارد که  $S=0$  باشد، زیرا در این حالت هر دو الکترون لزوماً اعداد کوانتومی مداری یکسانی را خواهند داشت و تابع موج مداری باید متقارن باشد.

هر حالت اتم هلیوم با یکی از حروف بزرگ S، P، D، F و مانند آن نشان داده می‌شود که با تکانه زاویه‌ای مداری کل اتم مساوی با ۰، ۱، ۲، ۳ و مانند آن (مجموع تکانه زاویه‌ای مداری دو الکترون) متناظر است. در هر مورد نشان داده شده در شکل ۴.۴، تکانه زاویه‌ای مداری کل با تکانه زاویه‌ای مداری الکترون برانگیخته برابر است، زیرا تکانه زاویه‌ای مداری الکترون دیگر برابر با صفر است. شاخص بالایی طرف چپ نیز مقدار  $1 + 2S$  یا چندتایی، را مشخص می‌کند که برای حالت‌های تک تایی مساوی با یک و برای حالت‌های سه تایی برابر با سه است.

در نتیجه برهم کنش اسپین-مدار، حالت‌های سه تایی شامل سه تراز نزدیک به هم اند که

باسه سمتگیری ممکن اسپین کل نسبت به تکانه زاویه ای مداری کل متناظرند. این چندتایی شدن ترازهای انرژی به ساختار دیز معروف است، که در شکل نشان داده نشده است. واضح است که حالت های S هیچ گونه ساختار ریزی ندارند. علاوه بر حالت های نشان داده شده در شکل ۴.۴، ممکن است تعداد زیادی ویژه حالت دیگر نیز وجود داشته باشد که در آنها هر دو الکترون در حالت برانگیخته باشند. با این حال، در اینجا چنین حالت هایی را بحث نخواهیم کرد.

مثال ۱.۴ تابع موج های  $\psi_S$  و  $\psi_A$  داده شده با معادلات (۷.۴) و (۸.۴) را بهنجار کنید.

حل: توابع  $\psi_S$  یا  $\psi_A$  را با  $\psi$  نمایش می دهیم. در این صورت، بسا در نظر گرفتن اینکه انتگرال بر روی مختصات هر دو الکترون گرفته می شود، خواهیم داشت

$$\int \psi^* \psi d\tau = \int_1 \int_2 [\psi_a^*(1)\psi_b^*(2) \pm \psi_a^*(2)\psi_b^*(1)] [\psi_a(1)\psi_b(2) \pm \psi_a(2)\psi_b(1)] d\tau_1 d\tau_2$$

$$\begin{aligned} &= \int_1 \psi_a^*(1)\psi_a(1) d\tau_1 \int_2 \psi_b^*(2)\psi_b(2) d\tau_2 \\ &\quad + \int_1 \psi_b^*(1)\psi_b(1) d\tau_1 \int_2 \psi_a^*(2)\psi_a(2) d\tau_2 \\ &\quad \pm \int_1 \psi_a^*(1)\psi_b(1) d\tau_1 \int_2 \psi_b^*(2)\psi_a(2) d\tau_2 \\ &\quad \pm \int_1 \psi_b^*(1)\psi_a(1) d\tau_1 \int_2 \psi_a^*(2)\psi_b(2) d\tau_2 \end{aligned}$$

اما، چون ویژه تابع های  $\psi_a$  و  $\psi_b$  متعامدند [معادله (۴۱.۲)]، خواهیم داشت

$$\int \psi_a^*(i)\psi_b(i) d\tau_i = \int \psi_b^*(i)\psi_a(i) d\tau_i = 0, \quad i=1, 2$$

ضمناً این ویژه تابعها بهنجارند، یعنی

$$\int_a \psi_a^*(i)\psi_a(i) d\tau_i = \int_b \psi_b^*(i)\psi_b(i) d\tau_i = 1, \quad i=1, 2$$

بنابراین نتیجه می گیریم که  $\int \psi^* \psi d\tau = 2$ . این نشان می دهد که  $\psi_S$  و  $\psi_A$  بهنجار نیستند. برای بهنجار کردن تابع موجها کافی است که آنها را درضرب  $1/\sqrt{2}$  ضرب کنیم، یعنی

$$\psi_S(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(1)\psi_b(2) + \psi_a(2)\psi_b(1)],$$

$$\psi_A(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(1)\psi_b(2) - \psi_a(2)\psi_b(1)] \quad (12.4)$$

ضمناً این موضوع علت وجودی ضریب  $1/\sqrt{2}$  در تابع موجهای اسپینی معادله (۹.۴) را نیز توجیه می کند.

مثال ۲.۴ محاسبه انرژی اتم هلیوم با استفاده از تابع موجهای بهنجار (۱۲.۴).

حل: عملگر هامیلتونی کسل مربوط به اتم هلیوم را می توان به صورت رابطه  $H = H_1 + H_2 + H_{12}$  نوشت که در آن

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} \quad \text{و} \quad H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 - \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

هامیلتونی مربوط به هر الکترون موجود در میدان کوانتی هسته اند و

$$H_{12} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

نیز مربوط به برهم کنش میان این دو الکترون است. توجه کنید که

$$H_i \psi_a(i) = E_a \psi_a(i) \quad \text{و} \quad H_i \psi_b(i) = E_b \psi_b(i), \quad i = 1, 2$$

که در آن  $E_a$  و  $E_b$  انرژی هر الکترون در حالتی است که از برهم کنش آن با الکترون دیگر چشمپوشی شود. بنابراین،  $(H_1 + H_2)\psi = (E_a + E_b)\psi$  که در آن  $\psi$  به تابع موجهای بهنجار  $\psi_S$  یا  $\psi_A$  که با معادله (۱۲.۴) تعریف شد مربوط می شود. از این رو می توان انرژی اتم هلیوم را به کمک معادله (۵.۰۲) به دست آورد، یعنی

$$E = \int \psi^* H \psi d\tau = E_a + E_b + \int \psi^* H_{12} \psi d\tau$$

با در نظر گرفتن شکل‌های بهنجار شده  $\psi_S$  و  $\psi_A$  در معادله (۱۲.۴)، با محاسبه مستقیم نتیجه زیر به دست می آید

$$\int \psi^* H_{12} \psi d\tau = C \pm K$$

که در آن

$$C = \int_1 \int_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} |\psi_a(1)|^2 d\tau_1 |\psi_b(2)|^2 d\tau_2$$

$$K = \int_1 \int_2 \frac{e_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \psi_a^*(1)\psi_b(1) d\tau_1 \psi_b^*(2)\psi_a(2) d\tau_2$$

بنا بر این

$$E = E_a + E_b + C + K$$

در این صورت می بینیم که دو مقدار انرژی ممکن به دست می آید که به ترتیب با تابع موج متقارن  $\psi_S$  (علامت مثبت) و تابع موج پادمقارن  $\psi_A$  (علامت منفی) متناظرند. می توان نشان داد که  $K$  مثبت است، لذا انرژی حالت توصیف شده با  $\psi_A$  از انرژی حالت توصیف شده با  $\psi_S$  (به اندازه  $2K$ ) کمتر است، که این با بحث شهودی قبلی ما سازگار است. کمیت  $C$  به انتگرال کولنی معروف است. این کمیت انرژی برهم کنش دو الکترون را، با فرض اینکه به ترتیب با چگالی الکتریکی  $\rho_1 = -e|\psi_a(1)|^2$  و  $\rho_2 = -e|\psi_b(2)|^2$  توزیع شده باشند، به دست می دهد. کمیت  $K$  که انتگرال تبدالی نام دارد، انرژی برهم کنش بارهای با چگالی زیر را به دست می دهد

$$\rho_1' = -e\psi_a^*(1)\psi_b(1) \quad \text{و} \quad \rho_2' = -e\psi_b^*(2)\psi_a(2)$$

این جمله هیچ گونه تعبیر کلاسیکی ندارد و یک اثر کاملاً کوانتومی است که از همسانی الکترونها ناشی می شود. محاسبه  $C$  و  $K$  کار نسبتاً مشکل و خسته کننده ای است زیرا با وجود ضریب  $r_{12}^{-2}$ ، متغیرها غیر قابل تفکیک اند.

### ۳.۴ اصل طرد

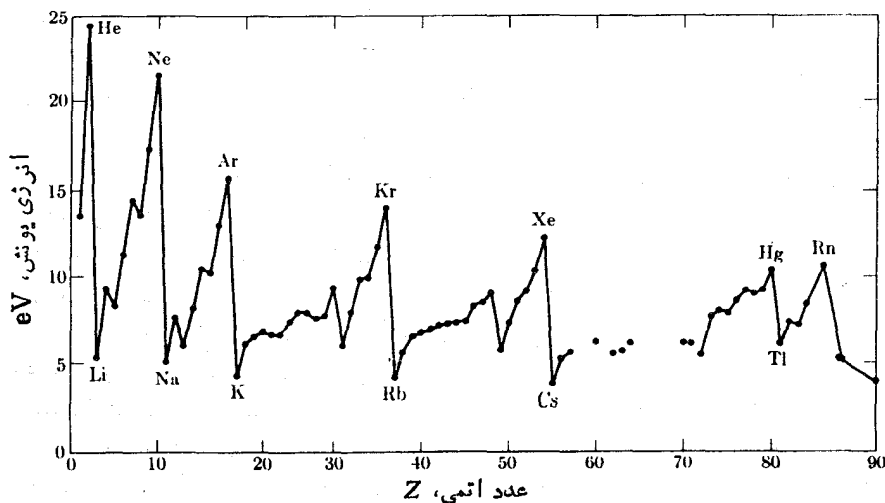
با استفاده از بحث مربوط به اتمهای هلیوم و هلیوم گونه که در بخش قبل مطرح شد، می توانیم اتمهای چندالکترونی را مطالعه کنیم. در اینجا نیز ابتدا از مدل ذره - مستقل استفاده می کنیم و فرض می کنیم که هر الکترون در میدان الکتریکی جاذبه هسته و میانگین میدان الکتریکی دافعه الکترونها را دیگر حرکت می کند. بنا بر این می توان حالت دینامیکی هر الکترون را با چهار عدد کوانتومی  $n, l, m, m_s$  توصیف کرد. سه عدد کوانتومی اول حرکت مداری الکترون و چهارمین عدد سمته گیری اسپین را مشخص می کند. انرژی حرکت مداری فقط به  $n$  و  $l$  وابسته است و از این رو، هر حالت الکترونی با نماد  $nl$  مشخص می شود. تمام الکترونها را که اعداد کوانتومی یکسان  $nl$  دارند همادز نامیده می شوند. حالت کامل اتم با نشان دادن تعداد الکترونها هم از موجود در هر حالت  $nl$  مشخص می شود. این تعیین حالت اتم را پیچیده می نماید. هر گاه تعداد  $x$  الکترون در حالت  $nl$  وجود داشته باشد، پیکربندی به صورت  $nl^x$  نشان داده می شود. به عنوان مثال، پیکربندی حالت پایه هلیوم به صورت  $1s^2$  و پیکربندی اولین حالت برانگیخته آن به صورت  $1s^2 2s$  است.

۱. در بعضی اتمها اثر اسپین - مدار به قدری قوی است که به جای اعداد کوانتومی یاد شده باید از اعداد  $n, l, j, z$  و  $m$  استفاده شود. این وضع را جفت شدگی  $z-j$  می گویند.

مدل ذره-مستقل هنگامی که با اصل دیگری که هم اکنون بیان خواهیم کرد ترکیب شود، تقریب بسیار خوبی به دست می‌دهد. اکنون به خوبی معلوم شده است که عناصر شیمیایی، نظم مشخصی را در خواص فیزیکی و شیمیایی خود نشان می‌دهند. این خواص در عناصر مختلف به صورتی کمابیش چرخه‌ای تکرار می‌شوند و چرخه‌های متوالی با اعداد اتمی ۲، ۱۰، ۱۸، ۳۶، ۵۴، ۸۶،  $Z$ ، که مربوط به گازهای بی‌اثرند تکمیل می‌شوند. گازهای بی‌اثر، یعنی هلیوم، نئون، آرگون، کریپتون، گزنون، و رادون، از لحاظ شیمیایی میل ترکیبی با عناصر دیگر ندارند و یا میل ترکیبی آنها فوق‌العاده ناچیز است. به عنوان مثال، این دوره‌ای بودن خواص عناصر از نظر انرژی‌های یونش در شکل ۵.۴ به طور مشخصی نشان داده شده است و همان طوری که مشاهده می‌شود، بعد از هر گاز بی‌اثری این روند کمابیش تکرار می‌شود.

در قرن نوزدهم شیمیدانان به وجود این خاصیت دوره‌ای بودن پی بردند. در سال ۱۸۶۹، دیمتری مندلیف دانشمند روسی، طبقه‌بندی دوره‌ای معروف عناصر را در چرخه‌ها یا دوره‌هایی که هر کدام مرکب از هشت عنصر بودند ارائه کرد. با وجود این، این طبقه‌بندی کامل نبود زیرا برخی عناصر، از قبیل عناصر واسط و خاک‌کلیه‌های نادر، با آن جور در نمی‌آمدند.

وجود این نظم در خواص اتمی حاکی از نوعی نظم یا دوره‌ای بودن در حرکت الکترونهاست. ولفگانگ پاولی فیزیکدان سوئیسی در حدود سال ۱۹۲۵ قاعده جدیدی را برای توجیه این نظم پیشنهاد کرد که به نام اصل طرد معروف است. این اصل نه تنها رفتار دوره‌ای فیزیکی و شیمیایی عناصر را به طریقی ساده و بسیار زیبا توضیح می‌دهد، بلکه حقایق مهم تجربی دیگری را در مورد ساختار اتمی به یکدیگر مربوط می‌کند.



شکل ۵.۴ انرژی یونش عناصر بر حسب عدد اتمی.



طبق اصل طرد پاولی در مدل ذره مستقل

در يك اتم، دو الکترون هرگز نمی توانند مجموعه یکسانی از اعداد کوانتومی را دارا باشند.

این قاعده مهم هم ارز با اصل عمومیتری است که در بخش ۲.۴ ارائه شد و به موجب آن تابع موج کل سیستمی از الکترونها باید پاد متقارن باشد.

این اصل را می توان بیان دیگر و عمومیتری از اصل طرد دانست. يك بررسی ساده ریاضی نشان می دهد که پاد تقارنی تابع موج نشان دهنده اعتبار اصل طرد است. اما پاد تقارنی تابع موج کل بیان عمومیتری است و حتی اگر مدل ذره مستقل تقریب مناسبی نباشد، باز هم به کار می رود.

اکنون با استفاده از مدل ذره مستقل، روش ساده ای را برای نوشتن تابع پاد متقارن بررسی می کنیم. فرض می کنیم اتمی شامل  $N$  الکترون است. تمام اعداد کوانتومی مداری و اسپینی  $n$ ،  $l$ ،  $m_l$ ، و  $m_s$  يك حالت ذره مستقل معین در اتم را با يك حرف (مثلا  $a$ ) نشان می دهیم. در این صورت پیکر بندی که در آن يك الکترون در حالت  $a$ ، الکترون دیگر در حالت  $b$ ، و... قرار دارد، را می توان با تابع موج دترمینانی زیر بیان کرد

$$\psi_{abc\dots} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_a(1) & \psi_a(2) & \psi_a(3) & \dots \\ \psi_b(1) & \psi_b(2) & \psi_b(3) & \dots \\ \psi_c(1) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (13.4)$$

این تابع موج پاد متقارن است، زیرا اگر دو الکترون (مثلا الکترون ۱ و الکترون ۲) را با یکدیگر تعویض کنیم، این عمل هم ارز با تعویض دو ستون خواهد بود و در این صورت علامت دترمینان تغییر می کند. از طرف دیگر، هر گاه دو الکترون مجموعه یکسانی از اعداد کوانتومی داشته باشند (یعنی  $a \equiv b$ )، دترمینان دارای دو سطر یکسان و در نتیجه متحد با صفر خواهد بود. این موضوع نشان می دهد که وقتی مدل ذره مستقل به کار رود، دو بیان اصل طرد با یکدیگر هم ارزند. ضریب  $1/\sqrt{N!}$  نیز فقط به دلیل بهنجارش منظور شده است. به عنوان يك مثال واقعی، تابع  $\psi_A \chi_S$  را در نظر می گیریم که در آن  $\psi_A$  با معادله (۱۲.۴) و  $\chi_S$  نیز با معادله (۹.۴) به ازای  $M_S = 1$  داده می شوند. در این صورت

۱. اصل پاد تقارنی تابع موج کل نه تنها در مورد الکترونها بلکه برای سایر ذرات بنیادی از قبیل پروتونها و نوترونها نیز به کار می رود. به دلایلی که در فصل سیزدهم توضیح داده خواهد شد، تمام ذراتی که با تابع موجهای کل پاد متقارن توصیف می شوند به نام فرمیونها معروف اند.

$$\psi = \psi_a \chi_s = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(1)\psi_b(2) - \psi_a(2)\psi_b(1)] \chi_+(1)\chi_+(2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_a(1)\chi_+(1) & \psi_a(2)\chi_+(2) \\ \psi_b(1)\chi_+(1) & \psi_b(2)\chi_+(2) \end{vmatrix}$$

این عبارت دترمینانی از نوع معادله (۱۳.۴) به ازای  $N=2$  است با این تفاوت که قسمتهای مداری و اسپینی تابع موجهای ذره-مستقل به طور مجزا نشان داده شده اند.

### ۴.۴ ساختار الکترونی آنها

اکنون این مسئله را در نظر می گیریم که چگونه می توان اصل طرد را برای تعیین پیکربندی الکترونی آنها به کار برد. ابتدا، تعداد ترکیبهای اعداد کوانتومی  $m_l$  و  $m_s$  را که برای هر مقدار تکانه زاویه ای  $l$  ممکن است، محاسبه می کنیم. این محاسبه بیشینه تعداد الکترونها را که می توانند در حالت  $nl$  قرار گیرند، به دست می دهد. می دانیم که برای هر مقدار  $l$  تعداد  $2l+1$  مقدار برای  $m_l$ ، و برای هر  $l$  نیز  $m_l$  زوج الکترون یا اسپین بالا یا پایین ( $m_s = \pm 1/2$ ) می توانند وجود داشته باشند. بنابراین بیشینه تعداد الکترونها را که می توانند بدون نقض اصل طرد در حالت  $nl$  قرار گیرند، برابر است با  $2(2l+1)$ . این موضوع به طور صریح در جدول زیر نشان داده شده است.

تکانه زاویه ای، $l$	۰	۱	۲	۳	۴
نماد :	s	p	d	f	g
عدد اشغال $2(2l+1)$	۲	۶	۱۰	۱۴	۱۸

در این صورت در فرایند تشکیل اتمهای از  $Z=1$  تا  $Z=92$  (و بالاتر)، الکترونها پایبندترین حالت های انرژی موجود را به طریقی اشغال می کنند که هر حالت می تواند حداکثر تا تعدادی که بر طبق اصل طرد مجاز است، الکترون بپذیرد. هر بار که يك حالت  $nl$  با بیشینه ظرفیت از الکترونها تکمیل می شود، حالت بعدی شروع به پر شدن می کند.

ترتیبی که در آن حالت های متوالی  $nl$  از الکترونها پر و تکمیل می شوند، در شکل ۶.۴ نشان داده شده است. ممکن است در برخی اتمهای بخصوص، این وضع اندکی متفاوت باشد، ولی به طور کلی ترتیب به طریقی است که در بالا نشان داده شده است. در دید اول «گافهای انرژی» مشخصی به چشم می خورد، یعنی نواحی که در آنها اختلاف انرژی میان دو حالت یا دو تراز بسیار بزرگتر از اختلاف انرژی میان ترازهای قبل یا بعد از آن دو است. گافهای انرژی میان ترازهای  $1s$  و  $2s$ ، میان  $2p$  و  $3s$ ، میان  $3p$  و  $4s$ ، میان  $4s$  و  $3d$ ، میان  $4d$  و  $5s$ ، میان  $5d$  و  $6s$ ، میان  $6d$  و  $7s$ ، میان  $7p$  و  $8s$ ، میان  $8p$  و  $9s$ ، میان  $9p$  و  $10s$ ، میان  $10p$  و  $11s$ ، میان  $11p$  و  $12s$ ، میان  $12p$  و  $13s$ ، میان  $13p$  و  $14s$ ، میان  $14p$  و  $15s$ ، میان  $15p$  و  $16s$ ، میان  $16p$  و  $17s$ ، میان  $17p$  و  $18s$ ، میان  $18p$  و  $19s$ ، میان  $19p$  و  $20s$ ، میان  $20p$  و  $21s$ ، میان  $21p$  و  $22s$ ، میان  $22p$  و  $23s$ ، میان  $23p$  و  $24s$ ، میان  $24p$  و  $25s$ ، میان  $25p$  و  $26s$ ، میان  $26p$  و  $27s$ ، میان  $27p$  و  $28s$ ، میان  $28p$  و  $29s$ ، میان  $29p$  و  $30s$ ، میان  $30p$  و  $31s$ ، میان  $31p$  و  $32s$ ، میان  $32p$  و  $33s$ ، میان  $33p$  و  $34s$ ، میان  $34p$  و  $35s$ ، میان  $35p$  و  $36s$ ، میان  $36p$  و  $37s$ ، میان  $37p$  و  $38s$ ، میان  $38p$  و  $39s$ ، میان  $39p$  و  $40s$ ، میان  $40p$  و  $41s$ ، میان  $41p$  و  $42s$ ، میان  $42p$  و  $43s$ ، میان  $43p$  و  $44s$ ، میان  $44p$  و  $45s$ ، میان  $45p$  و  $46s$ ، میان  $46p$  و  $47s$ ، میان  $47p$  و  $48s$ ، میان  $48p$  و  $49s$ ، میان  $49p$  و  $50s$ ، میان  $50p$  و  $51s$ ، میان  $51p$  و  $52s$ ، میان  $52p$  و  $53s$ ، میان  $53p$  و  $54s$ ، میان  $54p$  و  $55s$ ، میان  $55p$  و  $56s$ ، میان  $56p$  و  $57s$ ، میان  $57p$  و  $58s$ ، میان  $58p$  و  $59s$ ، میان  $59p$  و  $60s$ ، میان  $60p$  و  $61s$ ، میان  $61p$  و  $62s$ ، میان  $62p$  و  $63s$ ، میان  $63p$  و  $64s$ ، میان  $64p$  و  $65s$ ، میان  $65p$  و  $66s$ ، میان  $66p$  و  $67s$ ، میان  $67p$  و  $68s$ ، میان  $68p$  و  $69s$ ، میان  $69p$  و  $70s$ ، میان  $70p$  و  $71s$ ، میان  $71p$  و  $72s$ ، میان  $72p$  و  $73s$ ، میان  $73p$  و  $74s$ ، میان  $74p$  و  $75s$ ، میان  $75p$  و  $76s$ ، میان  $76p$  و  $77s$ ، میان  $77p$  و  $78s$ ، میان  $78p$  و  $79s$ ، میان  $79p$  و  $80s$ ، میان  $80p$  و  $81s$ ، میان  $81p$  و  $82s$ ، میان  $82p$  و  $83s$ ، میان  $83p$  و  $84s$ ، میان  $84p$  و  $85s$ ، میان  $85p$  و  $86s$ ، میان  $86p$  و  $87s$ ، میان  $87p$  و  $88s$ ، میان  $88p$  و  $89s$ ، میان  $89p$  و  $90s$ ، میان  $90p$  و  $91s$ ، میان  $91p$  و  $92s$ ، میان  $92p$  و  $93s$ ، میان  $93p$  و  $94s$ ، میان  $94p$  و  $95s$ ، میان  $95p$  و  $96s$ ، میان  $96p$  و  $97s$ ، میان  $97p$  و  $98s$ ، میان  $98p$  و  $99s$ ، میان  $99p$  و  $100s$ ، میان  $100p$  و  $101s$ ، میان  $101p$  و  $102s$ ، میان  $102p$  و  $103s$ ، میان  $103p$  و  $104s$ ، میان  $104p$  و  $105s$ ، میان  $105p$  و  $106s$ ، میان  $106p$  و  $107s$ ، میان  $107p$  و  $108s$ ، میان  $108p$  و  $109s$ ، میان  $109p$  و  $110s$ ، میان  $110p$  و  $111s$ ، میان  $111p$  و  $112s$ ، میان  $112p$  و  $113s$ ، میان  $113p$  و  $114s$ ، میان  $114p$  و  $115s$ ، میان  $115p$  و  $116s$ ، میان  $116p$  و  $117s$ ، میان  $117p$  و  $118s$ ، میان  $118p$  و  $119s$ ، میان  $119p$  و  $120s$ ، میان  $120p$  و  $121s$ ، میان  $121p$  و  $122s$ ، میان  $122p$  و  $123s$ ، میان  $123p$  و  $124s$ ، میان  $124p$  و  $125s$ ، میان  $125p$  و  $126s$ ، میان  $126p$  و  $127s$ ، میان  $127p$  و  $128s$ ، میان  $128p$  و  $129s$ ، میان  $129p$  و  $130s$ ، میان  $130p$  و  $131s$ ، میان  $131p$  و  $132s$ ، میان  $132p$  و  $133s$ ، میان  $133p$  و  $134s$ ، میان  $134p$  و  $135s$ ، میان  $135p$  و  $136s$ ، میان  $136p$  و  $137s$ ، میان  $137p$  و  $138s$ ، میان  $138p$  و  $139s$ ، میان  $139p$  و  $140s$ ، میان  $140p$  و  $141s$ ، میان  $141p$  و  $142s$ ، میان  $142p$  و  $143s$ ، میان  $143p$  و  $144s$ ، میان  $144p$  و  $145s$ ، میان  $145p$  و  $146s$ ، میان  $146p$  و  $147s$ ، میان  $147p$  و  $148s$ ، میان  $148p$  و  $149s$ ، میان  $149p$  و  $150s$ ، میان  $150p$  و  $151s$ ، میان  $151p$  و  $152s$ ، میان  $152p$  و  $153s$ ، میان  $153p$  و  $154s$ ، میان  $154p$  و  $155s$ ، میان  $155p$  و  $156s$ ، میان  $156p$  و  $157s$ ، میان  $157p$  و  $158s$ ، میان  $158p$  و  $159s$ ، میان  $159p$  و  $160s$ ، میان  $160p$  و  $161s$ ، میان  $161p$  و  $162s$ ، میان  $162p$  و  $163s$ ، میان  $163p$  و  $164s$ ، میان  $164p$  و  $165s$ ، میان  $165p$  و  $166s$ ، میان  $166p$  و  $167s$ ، میان  $167p$  و  $168s$ ، میان  $168p$  و  $169s$ ، میان  $169p$  و  $170s$ ، میان  $170p$  و  $171s$ ، میان  $171p$  و  $172s$ ، میان  $172p$  و  $173s$ ، میان  $173p$  و  $174s$ ، میان  $174p$  و  $175s$ ، میان  $175p$  و  $176s$ ، میان  $176p$  و  $177s$ ، میان  $177p$  و  $178s$ ، میان  $178p$  و  $179s$ ، میان  $179p$  و  $180s$ ، میان  $180p$  و  $181s$ ، میان  $181p$  و  $182s$ ، میان  $182p$  و  $183s$ ، میان  $183p$  و  $184s$ ، میان  $184p$  و  $185s$ ، میان  $185p$  و  $186s$ ، میان  $186p$  و  $187s$ ، میان  $187p$  و  $188s$ ، میان  $188p$  و  $189s$ ، میان  $189p$  و  $190s$ ، میان  $190p$  و  $191s$ ، میان  $191p$  و  $192s$ ، میان  $192p$  و  $193s$ ، میان  $193p$  و  $194s$ ، میان  $194p$  و  $195s$ ، میان  $195p$  و  $196s$ ، میان  $196p$  و  $197s$ ، میان  $197p$  و  $198s$ ، میان  $198p$  و  $199s$ ، میان  $199p$  و  $200s$ ، میان  $200p$  و  $201s$ ، میان  $201p$  و  $202s$ ، میان  $202p$  و  $203s$ ، میان  $203p$  و  $204s$ ، میان  $204p$  و  $205s$ ، میان  $205p$  و  $206s$ ، میان  $206p$  و  $207s$ ، میان  $207p$  و  $208s$ ، میان  $208p$  و  $209s$ ، میان  $209p$  و  $210s$ ، میان  $210p$  و  $211s$ ، میان  $211p$  و  $212s$ ، میان  $212p$  و  $213s$ ، میان  $213p$  و  $214s$ ، میان  $214p$  و  $215s$ ، میان  $215p$  و  $216s$ ، میان  $216p$  و  $217s$ ، میان  $217p$  و  $218s$ ، میان  $218p$  و  $219s$ ، میان  $219p$  و  $220s$ ، میان  $220p$  و  $221s$ ، میان  $221p$  و  $222s$ ، میان  $222p$  و  $223s$ ، میان  $223p$  و  $224s$ ، میان  $224p$  و  $225s$ ، میان  $225p$  و  $226s$ ، میان  $226p$  و  $227s$ ، میان  $227p$  و  $228s$ ، میان  $228p$  و  $229s$ ، میان  $229p$  و  $230s$ ، میان  $230p$  و  $231s$ ، میان  $231p$  و  $232s$ ، میان  $232p$  و  $233s$ ، میان  $233p$  و  $234s$ ، میان  $234p$  و  $235s$ ، میان  $235p$  و  $236s$ ، میان  $236p$  و  $237s$ ، میان  $237p$  و  $238s$ ، میان  $238p$  و  $239s$ ، میان  $239p$  و  $240s$ ، میان  $240p$  و  $241s$ ، میان  $241p$  و  $242s$ ، میان  $242p$  و  $243s$ ، میان  $243p$  و  $244s$ ، میان  $244p$  و  $245s$ ، میان  $245p$  و  $246s$ ، میان  $246p$  و  $247s$ ، میان  $247p$  و  $248s$ ، میان  $248p$  و  $249s$ ، میان  $249p$  و  $250s$ ، میان  $250p$  و  $251s$ ، میان  $251p$  و  $252s$ ، میان  $252p$  و  $253s$ ، میان  $253p$  و  $254s$ ، میان  $254p$  و  $255s$ ، میان  $255p$  و  $256s$ ، میان  $256p$  و  $257s$ ، میان  $257p$  و  $258s$ ، میان  $258p$  و  $259s$ ، میان  $259p$  و  $260s$ ، میان  $260p$  و  $261s$ ، میان  $261p$  و  $262s$ ، میان  $262p$  و  $263s$ ، میان  $263p$  و  $264s$ ، میان  $264p$  و  $265s$ ، میان  $265p$  و  $266s$ ، میان  $266p$  و  $267s$ ، میان  $267p$  و  $268s$ ، میان  $268p$  و  $269s$ ، میان  $269p$  و  $270s$ ، میان  $270p$  و  $271s$ ، میان  $271p$  و  $272s$ ، میان  $272p$  و  $273s$ ، میان  $273p$  و  $274s$ ، میان  $274p$  و  $275s$ ، میان  $275p$  و  $276s$ ، میان  $276p$  و  $277s$ ، میان  $277p$  و  $278s$ ، میان  $278p$  و  $279s$ ، میان  $279p$  و  $280s$ ، میان  $280p$  و  $281s$ ، میان  $281p$  و  $282s$ ، میان  $282p$  و  $283s$ ، میان  $283p$  و  $284s$ ، میان  $284p$  و  $285s$ ، میان  $285p$  و  $286s$ ، میان  $286p$  و  $287s$ ، میان  $287p$  و  $288s$ ، میان  $288p$  و  $289s$ ، میان  $289p$  و  $290s$ ، میان  $290p$  و  $291s$ ، میان  $291p$  و  $292s$ ، میان  $292p$  و  $293s$ ، میان  $293p$  و  $294s$ ، میان  $294p$  و  $295s$ ، میان  $295p$  و  $296s$ ، میان  $296p$  و  $297s$ ، میان  $297p$  و  $298s$ ، میان  $298p$  و  $299s$ ، میان  $299p$  و  $300s$ ، میان  $300p$  و  $301s$ ، میان  $301p$  و  $302s$ ، میان  $302p$  و  $303s$ ، میان  $303p$  و  $304s$ ، میان  $304p$  و  $305s$ ، میان  $305p$  و  $306s$ ، میان  $306p$  و  $307s$ ، میان  $307p$  و  $308s$ ، میان  $308p$  و  $309s$ ، میان  $309p$  و  $310s$ ، میان  $310p$  و  $311s$ ، میان  $311p$  و  $312s$ ، میان  $312p$  و  $313s$ ، میان  $313p$  و  $314s$ ، میان  $314p$  و  $315s$ ، میان  $315p$  و  $316s$ ، میان  $316p$  و  $317s$ ، میان  $317p$  و  $318s$ ، میان  $318p$  و  $319s$ ، میان  $319p$  و  $320s$ ، میان  $320p$  و  $321s$ ، میان  $321p$  و  $322s$ ، میان  $322p$  و  $323s$ ، میان  $323p$  و  $324s$ ، میان  $324p$  و  $325s$ ، میان  $325p$  و  $326s$ ، میان  $326p$  و  $327s$ ، میان  $327p$  و  $328s$ ، میان  $328p$  و  $329s$ ، میان  $329p$  و  $330s$ ، میان  $330p$  و  $331s$ ، میان  $331p$  و  $332s$ ، میان  $332p$  و  $333s$ ، میان  $333p$  و  $334s$ ، میان  $334p$  و  $335s$ ، میان  $335p$  و  $336s$ ، میان  $336p$  و  $337s$ ، میان  $337p$  و  $338s$ ، میان  $338p$  و  $339s$ ، میان  $339p$  و  $340s$ ، میان  $340p$  و  $341s$ ، میان  $341p$  و  $342s$ ، میان  $342p$  و  $343s$ ، میان  $343p$  و  $344s$ ، میان  $344p$  و  $345s$ ، میان  $345p$  و  $346s$ ، میان  $346p$  و  $347s$ ، میان  $347p$  و  $348s$ ، میان  $348p$  و  $349s$ ، میان  $349p$  و  $350s$ ، میان  $350p$  و  $351s$ ، میان  $351p$  و  $352s$ ، میان  $352p$  و  $353s$ ، میان  $353p$  و  $354s$ ، میان  $354p$  و  $355s$ ، میان  $355p$  و  $356s$ ، میان  $356p$  و  $357s$ ، میان  $357p$  و  $358s$ ، میان  $358p$  و  $359s$ ، میان  $359p$  و  $360s$ ، میان  $360p$  و  $361s$ ، میان  $361p$  و  $362s$ ، میان  $362p$  و  $363s$ ، میان  $363p$  و  $364s$ ، میان  $364p$  و  $365s$ ، میان  $365p$  و  $366s$ ، میان  $366p$  و  $367s$ ، میان  $367p$  و  $368s$ ، میان  $368p$  و  $369s$ ، میان  $369p$  و  $370s$ ، میان  $370p$  و  $371s$ ، میان  $371p$  و  $372s$ ، میان  $372p$  و  $373s$ ، میان  $373p$  و  $374s$ ، میان  $374p$  و  $375s$ ، میان  $375p$  و  $376s$ ، میان  $376p$  و  $377s$ ، میان  $377p$  و  $378s$ ، میان  $378p$  و  $379s$ ، میان  $379p$  و  $380s$ ، میان  $380p$  و  $381s$ ، میان  $381p$  و  $382s$ ، میان  $382p$  و  $383s$ ، میان  $383p$  و  $384s$ ، میان  $384p$  و  $385s$ ، میان  $385p$  و  $386s$ ، میان  $386p$  و  $387s$ ، میان  $387p$  و  $388s$ ، میان  $388p$  و  $389s$ ، میان  $389p$  و  $390s$ ، میان  $390p$  و  $391s$ ، میان  $391p$  و  $392s$ ، میان  $392p$  و  $393s$ ، میان  $393p$  و  $394s$ ، میان  $394p$  و  $395s$ ، میان  $395p$  و  $396s$ ، میان  $396p$  و  $397s$ ، میان  $397p$  و  $398s$ ، میان  $398p$  و  $399s$ ، میان  $399p$  و  $400s$ ، میان  $400p$  و  $401s$ ، میان  $401p$  و  $402s$ ، میان  $402p$  و  $403s$ ، میان  $403p$  و  $404s$ ، میان  $404p$  و  $405s$ ، میان  $405p$  و  $406s$ ، میان  $406p$  و  $407s$ ، میان  $407p$  و  $408s$ ، میان  $408p$  و  $409s$ ، میان  $409p$  و  $410s$ ، میان  $410p$  و  $411s$ ، میان  $411p$  و  $412s$ ، میان  $412p$  و  $413s$ ، میان  $413p$  و  $414s$ ، میان  $414p$  و  $415s$ ، میان  $415p$  و  $416s$ ، میان  $416p$  و  $417s$ ، میان  $417p$  و  $418s$ ، میان  $418p$  و  $419s$ ، میان  $419p$  و  $420s$ ، میان  $420p$  و  $421s$ ، میان  $421p$  و  $422s$ ، میان  $422p$  و  $423s$ ، میان  $423p$  و  $424s$ ، میان  $424p$  و  $425s$ ، میان  $425p$  و  $426s$ ، میان  $426p$  و  $427s$ ، میان  $427p$  و  $428s$ ، میان  $428p$  و  $429s$ ، میان  $429p$  و  $430s$ ، میان  $430p$  و  $431s$ ، میان  $431p$  و  $432s$ ، میان  $432p$  و  $433s$ ، میان  $433p$  و  $434s$ ، میان  $434p$  و  $435s$ ، میان  $435p$  و  $436s$ ، میان  $436p$  و  $437s$ ، میان  $437p$  و  $438s$ ، میان  $438p$  و  $439s$ ، میان  $439p$  و  $440s$ ، میان  $440p$  و  $441s$ ، میان  $441p$  و  $442s$ ، میان  $442p$  و  $443s$ ، میان  $443p$  و  $444s$ ، میان  $444p$  و  $445s$ ، میان  $445p$  و  $446s$ ، میان  $446p$  و  $447s$ ، میان  $447p$  و  $448s$ ، میان  $448p$  و  $449s$ ، میان  $449p$  و  $450s$ ، میان  $450p$  و  $451s$ ، میان  $451p$  و  $452s$ ، میان  $452p$  و  $453s$ ، میان  $453p$  و  $454s$ ، میان  $454p$  و  $455s$ ، میان  $455p$  و  $456s$ ، میان  $456p$  و  $457s$ ، میان  $457p$  و  $458s$ ، میان  $458p$  و  $459s$ ، میان  $459p$  و  $460s$ ، میان  $460p$  و  $461s$ ، میان  $461p$  و  $462s$ ، میان  $462p$  و  $463s$ ، میان  $463p$  و  $464s$ ، میان  $464p$  و  $465s$ ، میان  $465p$  و  $466s$ ، میان  $466p$  و  $467s$ ، میان  $467p$  و  $468s$ ، میان  $468p$  و  $469s$ ، میان  $469p$  و  $470s$ ، میان  $470p$  و  $471s$ ، میان  $471p$  و  $472s$ ، میان  $472p$  و  $473s$ ، میان  $473p$  و  $474s$ ، میان  $474p$  و  $475s$ ، میان  $475p$  و  $476s$ ، میان  $476p$  و  $477s$ ، میان  $477p$  و  $478s$ ، میان  $478p$  و  $479s$ ، میان  $479p$  و  $480s$ ، میان  $480p$  و  $481s$ ، میان  $481p$  و  $482s$ ، میان  $482p$  و  $483s$ ، میان  $483p$  و  $484s$ ، میان  $484p$  و  $485s$ ، میان  $485p$  و  $486s$ ، میان  $486p$  و  $487s$ ، میان  $487p$  و  $488s$ ، میان  $488p$  و  $489s$ ، میان  $489p$  و  $490s$ ، میان  $490p$  و  $491s$ ، میان  $491p$  و  $$

معرف تراز	الکترونها در پوسته	تعداد کل الکترونها در پوسته پر شده
7p 6d 5f 7s	6 10 14 2	32 ----- 118(?)
6p 5d 4f 6s	6 10 14 2	32 ----- 86 (Rn)
5p 4d 5s	6 10 2	18 ----- 54 (Xe)
4p 3d 4s	6 10 2	18 ----- 36 (Kr)
3p 3s	6 2	8 ----- 18 (Ar)
2p 2s	6 2	8 ----- 10 (Ne)
1s	2	2 ----- 2 (He)

شکل ۶.۴ ساختار پوسته‌ای ترازهای انرژی اتمی.

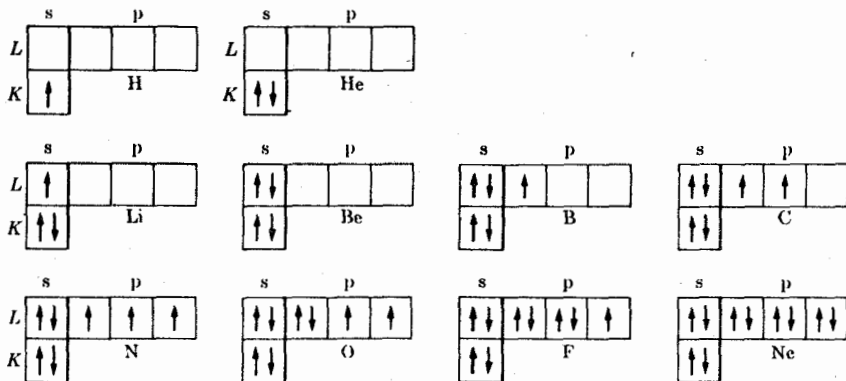
و به همین ترتیب دیده می‌شوند. ترازهای انرژی که میان دو گساف انرژی گروه‌بندی می‌شوند، یک پوسته تشکیل می‌دهند. هر حالت  $n$  که در ساختن یک پوسته شرکت دارد، به‌زیر پوسته معروف است. بیشینه تعداد الکترونها موجود در پوسته‌های کامل و متوالی دقیقاً با مقادیر ۲، ۱۰، ۱۸، ۳۶، ۵۴، ۸۶،  $Z = 118$  می‌شوند. این اعداد همان اعداد اتمی مربوط به گازهای بی‌اثرند. گاز بی‌اثر دیگری ممکن است در عدد  $Z = 118$  وجود داشته باشد، ولی تاکنون هیچ اتمی با این تعداد بسیار زیاد الکترون در طبیعت مشاهده نشده و به‌طور مصنوعی نیز ساخته نشده است. پیکربندی الکترونی حالت پایه اتمهای عناصر شیمیایی مختلف در جدول ۱.۴ نشان داده شده است. بررسی بیشتر در این باره که چگونه ده عنصر اول ساخته می‌شوند بسیار آموزنده است. این موضوع در نمودارهای شکل ۷.۴ نشان داده شده است. زیر پوسته‌های  $s$  دارای یک خانه‌اند که می‌توانند دو الکترون با اسپینهای مخالف را در خود جای دهند. زیر پوسته‌های  $p$  سه خانه دارند ( $m_l = +1, 0, -1$ ) و ظرفیت پذیرش آنها شش الکترون است. لازم به‌تذکر است که برای پر شدن هر زیر پوسته  $p$ ، همواره تا حد ممکن الکترونها

۱. در طیف‌نمایی نیز از کلمه پوسته برای نشان دادن تمام حالت‌های موجود در اتمهای چندالکترونی مربوط به  $n$  یکسان استفاده می‌شود. با این ترتیب حالت‌های با  $n = 1, 2, 3, \dots$  پوسته‌های  $K, L, M, \dots$  را تشکیل می‌دهند. این همان اصطلاحی است که در فصل ۳ برای اتمهای تک‌الکترونی به‌کار برده شد.

جدول ۱۰۴ پیکربندی الکترونی آنها

Z	نماد	حالت پایه	پیکربندی پایه	انرژی یونش، eV	Z	نماد	حالت پایه	پیکربندی پایه	انرژی یونش، eV
1	H	$2S$	$1s$	13.595	52	Te	$3P_2$	$4d^{10} 5s^2 5p^4$	9.01
2	He	$1S$	$1s^2$	24.581	53	I	$2P_{3/2}$	$4d^{10} 5s^2 5p^5$	10.454
3	Li	$2S$	[He] $2s$	5.390	54	Xe	$1S$	$4d^{10} 5s^2 5p^6$	12.127
4	Be	$1S$	$2s^2$	9.320	55	Cs	$2S$	[Xe] $6s$	3.893
5	B	$2P_{1/2}$	$2s^2 2p$	8.296	56	Ba	$1S$	$6s^2$	5.210
6	C	$3P_0$	$2s^2 2p^2$	11.256	57	La	$2D_{3/2}$	$5d 6s^2$	5.61
7	N	$4S$	$2s^2 2p^3$	14.545	58	Ce	$1G_4$	$4f 5d 6s^2$	6.54
8	O	$3P_2$	$2s^2 2p^4$	13.614	59	Pr	$4I_{9/2}$	$4f^3 6s^2$	5.48
9	F	$2P_{3/2}$	$2s^2 2p^5$	17.418	60	Nd	$5I_4$	$4f^4 6s^2$	5.51
10	Ne	$1S$	$2s^2 2p^6$	21.559	61	Pm	$6H_{5/2}$	$4f^5 6s^2$	
11	Na	$2S$	[Ne] $3s$	5.138	62	Fm	$7F_0$	$4f^6 6s^2$	5.6
12	Mg	$1S$	$3s^2$	7.644	63	Eu	$8S$	$4f^7 6s^2$	5.67
13	Al	$2P_{1/2}$	$3s^2 3p$	5.984	64	Gd	$9D_2$	$4f^7 5d 6s^2$	6.16
14	Si	$3P_0$	$3s^2 3p^2$	8.149	65	Tb	$6H_{15/2}$	$4f^9 6s^2$	6.74
15	P	$4S$	$3s^2 3p^3$	10.484	66	Dy	$5I_8$	$4f^{10} 6s^2$	6.82
16	S	$3P_2$	$3s^2 3p^4$	10.357	67	Ho	$4I_{15/2}$	$4f^{11} 6s^2$	
17	Cl	$2P_{3/2}$	$3s^2 3p^5$	13.01	68	Er	$3H_6$	$4f^{12} 6s^2$	
18	Ar	$1S$	$3s^2 3p^6$	15.755	69	Tm	$2F_{7/2}$	$4f^{13} 6s^2$	
19	K	$2S$	[Ar] $4s$	4.339	70	Yb	$1S$	$4f^{14} 6s^2$	6.22
20	Ca	$1S$	$4s^2$	6.111	71	Lu	$2D_{3/2}$	$4f^{14} 5d 6s^2$	6.15
21	Sc	$2D_{3/2}$	$3d 4s^2$	6.54	72	Hf	$3F_2$	$4f^{14} 5d^2 6s^2$	7.0
22	Ti	$3F_2$	$3d^2 4s^2$	6.83	73	Ta	$4F_{3/2}$	$4f^{14} 5d^3 6s^2$	7.88
23	V	$4F_{3/2}$	$3d^3 4s^2$	6.74	74	W	$5D_0$	$4f^{14} 5d^4 6s^2$	7.98
24	Cr	$7S$	$3d^5 4s$	6.764	75	Re	$6S$	$4f^{14} 5d^5 6s^2$	7.87
25	Mn	$6S$	$3d^5 4s^2$	7.432	76	Os	$5D_4$	$4f^{14} 5d^6 6s^2$	8.7
26	Fe	$5D_4$	$3d^6 4s^2$	7.87	77	Ir	$4F_{9/2}$	$4f^{14} 5d^7 6s^2$	9.2
27	Co	$4F_{9/2}$	$3d^7 4s^2$	7.86	78	Pt	$3D_3$	$4f^{14} 5d^8 6s^2$	8.88
28	Ni	$3F_4$	$3d^8 4s^2$	7.633	79	Au	$2S$	[Xe, $4f^{14} 5d^{10}$ ] $6s$	9.22
29	Cu	$2S$	$3d^{10} 4s$	7.724	80	Hg	$1S$	$6s^2$	10.434
30	Zn	$1S$	$3d^{10} 4s^2$	9.391	81	Tl	$2P_{1/2}$	$6s^2 6p$	6.106
31	Ga	$2P_{1/2}$	$3d^{10} 4s^2 4p$	6.00	82	Pb	$3P_0$	$6s^2 6p^2$	7.415
32	Ge	$3P_0$	$3d^{10} 4s^2 4p^2$	7.88	83	Bi	$4S$	$6s^2 6p^3$	7.287
33	As	$4S$	$3d^{10} 4s^2 4p^3$	9.81	84	Po	$3P_2$	$6s^2 6p^4$	8.43
34	Se	$3P_2$	$3d^{10} 4s^2 4p^4$	9.75	85	At	$2P_{3/2}$	$6s^2 6p^5$	
35	Br	$2P_{3/2}$	$3d^{10} 4s^2 4p^5$	11.84	86	Rn	$1S$	$6s^2 6p^6$	10.745
36	Kr	$1S$	$3d^{10} 4s^2 4p^6$	13.996	87	Fr	$2S$	[Rn] $7s$	
37	Rb	$2S$	[Kr] $5s$	4.176	88	Ra	$1S$	$7s^2$	5.277
38	Sr	$1S$	$5s^2$	5.692	89	Ac	$2D_{3/2}$	$6d 7s^2$	6.9
39	Y	$2D_{3/2}$	$4d 5s^2$	6.377	90	Th	$3F_2$	$6d^2 7s^2$	
40	Zr	$3F_2$	$4d^2 5s^2$	6.835	91	Pa	$4K_{11/2}$	$5f^2 6d 7s^2$	
41	Nb	$6D_{1/2}$	$4d^4 5s$	6.881	92	U	$5L_6$	$5f^3 6d 7s^2$	4.0
42	Mo	$7S$	$4d^5 5s$	7.10	93	Np	$6L_{11/2}$	$5f^4 6d 7s^2$	
43	Tc	$6S$	$4d^5 5s^2$	7.228	94	Pu	$7F_0$	$5f^6 7s^2$	
44	Ru	$5F_5$	$4d^7 5s$	7.365	95	Am	$8S$	$5f^7 7s^2$	
45	Rh	$4F_{9/2}$	$4d^8 5s$	7.461	96	Cm	$9D_2$	$5f^7 6d 7s^2$	
46	Pd	$1S$	$4d^{10}$	8.33	97	Bk		$(5f^8 6d 7s^2)$	
47	Ag	$2S$	$4d^{10} 5s$	7.574	98	Cf		$(5f^9 6d 7s^2)$	
48	Cd	$1S$	$4d^{10} 5s^2$	8.991	99	Fm		$(5f^{10} 6d 7s^2)$	
49	In	$2P_{1/2}$	$4d^{10} 5s^2 5p$	5.785	100	Mv		$(5f^{11} 6d 7s^2)$	
50	Sn	$3P_0$	$4d^{10} 5s^2 5p^2$	7.342	101	No			
51	Sb	$4S$	$4d^{10} 5s^2 5p^3$	8.639	102	Lw			

۱. نمادهای شیمیایی موجود در هر گروه نشان دهنده پیکربندیهای هم ارز الکترونیهای باقیمانده ای است که پوسته های پُر شده را اشغال می کنند. پیکربندیهای نشان داده شده در داخل پرانتزها نامعین اند.



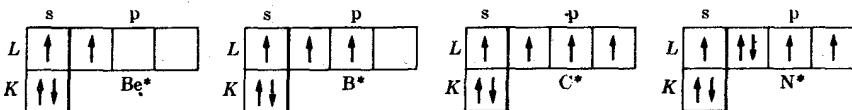
**شکل ۷۰۴** پیکربندیهای الکترونی حالت پایه اتمهای ده عنصر اول که نشان می‌دهند چگونه این ۱۰ عنصر ساخته شده‌اند.

را که اسپین آنها موازی است قرار می‌دهیم. دلیل این امر آن است که به تجربه معلوم شده‌است

مقدار برآیند اسپین حالت پایه اتمها بزرگترین مقدار ممکن است که با اصل طرد سازگار است.

نتیجه بالا به نام قاعده هوند معروف است. این خاصیت را می‌توان به طریق زیر توضیح داد. با توجه به بحث مربوط به اتم هلیوم می‌دانیم که حالت پایه باید حالتی باشد که در آن دافعه میان الکترون‌ها تا حد ممکن کوچک باشد و این مستلزم آن است که بیشینه پادتقارنی در قسمت مداری تابع موج وجود داشته باشد. چون تابع موج کل باید پاد متقارن باشد، نتیجه می‌گیریم که حالت پایه با بیشینه تقارن تابع موج اسپینی متناظر است، و این هنگامی است که اسپینهای الکترون‌ها تا حد ممکن موازی باشند.

جنبه‌های جالب توجه دیگری نیز وجود دارند که بیان آنها در ارتباط با شکل ۷۰۴ بسیار پراهمیت است. به عنوان مثال، هیدروژن یک الکترون منفرد  $1s$  و لیتیم نیز یک الکترون منفرد  $2s$  دارد، ولی الکترون  $2s$  در اتم لیتیم علاوه بر اینکه انرژی یونش آن کم است (یعنی،  $5.5\text{ eV}$  در مقایسه با  $13.6\text{ eV}$  برای هیدروژن)، به ترازهای  $2p$  نیز که نسبتاً به آنها نزدیک است دسترسی دارد. این اختلافها رفتار فلزی لیتیم را توجیه می‌کنند. به طریق مشابه، هلیوم و بریلیوم به ترتیب ترازهای کامل  $1s$  و  $2s$  را دارا هستند. اما، هلیوم یک گاز بی اثر است در حالی که بریلیوم چنین نیست. این به این دلیل است که یکی از الکترونهای  $2s$  در اتم بریلیوم می‌تواند برانگیخته شود و به یک تراز نزدیک  $2p$  برود. این حالت برانگیخته که با ظرفیت  $2$  بریلیوم متناظر است در شکل ۸۰۴ نشان داده



شکل ۸۰۴ پیکربندیهای الکترونی برانگیخته اتمهای بریلیوم، بور، کربن، و نیتروژن.

شده است. این برانگیختگی مستلزم انرژی در حدود  $27\text{ eV}$  است در صورتی که در حالت هلیوم، کمینه انرژی برانگیختگی در حدود  $20\text{ eV}$  است. به طریق مشابه، در حالت بور، اولین حالت برانگیخته را می توان با انتقال يك الکترون  $2s$  به حالت  $2p$  (آن طور که در شکل ۸۰۴ نشان داده شده است) به دست آورد. انرژی لازم برای این برانگیختگی در حدود  $36\text{ eV}$  است و با حالت سه ظرفیتی بور متناظر است. در اتمهای کربن، نیتروژن و اکسیژن وضعیت پیچیده تر است زیرا با تغییر در سمگتیری تکانه های زاویه ای اسپینی و مداری الکترونهای  $p$  می توان حالت های برانگیخته جدیدی را به دست آورد. در شکل ۸۰۴ يك حالت برانگیخته مهم کربن نشان داده شده است که با کربن چهار ظرفیتی در بسیاری از ترکیباتش متناظر است.

این تحلیل را می توانیم با این جمله خلاصه کنیم که خواص شیمیایی و فیزیکی يك عنصر شیمیایی همان قدر به پیکربندی الکترونی حالت پایه وابسته است، که به ترازهای برانگیخته نزدیک به آن. به عنوان مثال، آنچه يك گاز بی اثر را متمایز می کند این است که پوسته های این گاز کاملاً پر هستند و ضمناً، برانگیختن یکی از الکترونهای آن مقدار بسیار زیادی انرژی می خواهد زیرا گاف انرژی جداکننده آخرین تراز تکمیل شده نسبت به اولین تراز اشغال نشده بسیار بزرگ است. از طرف دیگر، اتمهایی چون لیتیوم، سدیم، پتاسیم، و مانند آنها (با  $Z=3, 11, 19, \dots$ ) شامل پوسته های تکمیل شده به اضافه يك الکترون در اولین تراز واقع در بالای گاف انرژی اند. بنابراین، لیتیوم دارای پوسته تکمیل شده  $K$  و يك الکترون  $2s$  است، سدیم دارای پوسته های تکمیل شده  $K$  و  $L$  و يك الکترون  $3s$  است، و به همین ترتیب. قید این آخرین الکترون ضعیف است و رفتار فلزی این عناصر را تعیین می کند. هنگامی که تعداد الکترونهای موجود در ورای آخرین پوسته های تکمیل شده افزایش یابد، این وضع به مراتب پیچیده تر می شود.

### ۵.۴ جفت شدگی L-S

تکانه زاویه ای کل اتم يك ویژگی بسیار مهم است زیرا (در میان چیزهای دیگر) خواص مغناطیسی اتم، و احتمال گذار در فرایندهای تابشی را تعیین می کند. هر گاه اتم منزوی باشد، تکانه زاویه ای کل آن ثابت خواهد بود. تکانه زاویه ای کسل را با عدد کوانتومی  $J$  نشان می دهیم و آن را به صورت زیر می نویسیم

$$J^2 = J(J+1)\hbar^2 \quad (14.4)$$

مؤلفه  $Z$  تکانه زاویه‌ای کل  $J$  با عدد کوانتومی  $M$  به صورت زیر مشخص می‌شود

$$J_z = M\hbar \quad (15.4)$$

که در آن

$$M = \pm J, \pm(J-1), \dots \quad (16.4)$$

با هر پیکر بندی الکترونی، چندین مقدار ممکن  $J$  متناظر است، که هر کدام به يك انرژی خاص اتم وابسته‌اند. يك مسئله مهم در مورد ساختار اتم تعیین مقادیر مجاز  $J$  برای پیکر بندی و نیز تعیین تابع موجهای متناظر با آنهاست.

يك روش برای تعیین مقادیر مجاز  $J$  به جفت شدگی  $S-L$  یا جفت شدگی اصل-ساندز معروف است. با استفاده از مدل ذره-مستقل همراه با تابع موجهای داده شده با معادله (۱۳.۴)، که در آن هر حالت الکترونی با اعداد کوانتومی  $n, l, m_l$  و  $m_s$  مشخص می‌شود، می‌توانیم تکانه زاویه‌ای مداری کل اتم را به صورت  $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i$  و  $L_z = \sum_i L_{z_i}$  تعیین کنیم. هر گاه  $M_L$  و اعداد کوانتومی وابسته به  $L^2$  و  $L_z$  باشند، داریم

$$L^2 = L(L+1)\hbar^2, \quad L_z = M_L\hbar, \quad M_L = \pm L, \pm(L-1), \dots \quad (17.4)$$

که در آن  $M_L = \sum_i m_{l_i}$  بسا هر پیکر بندی معین، بسته به سمنگیری نسبی  $\mathbf{L}_i$ ها، چندین مقدار  $L$  متناظر است. به طریق مشابه، اسپین کل اتم با روابط  $\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{S}_i$  و  $S_z = \sum_i S_{z_i}$  داده می‌شود. هر گاه  $M_S$  و اعداد کوانتومی وابسته به  $S^2$  و  $S_z$  باشند داریم

$$S^2 = S(S+1)\hbar^2, \quad S_z = M_S\hbar, \quad M_S = \pm S, \pm(S-1), \dots \quad (18.4)$$

که در آن  $M_S = \sum_i m_{s_i}$  در اینجا نیز، با هر پیکر بندی معین، بسته به سمنگیری نسبی  $\mathbf{S}_i$ ها، چندین مقدار  $S$  متناظر است.

همین که  $\mathbf{L}$  و  $\mathbf{S}$  مشخص شدند، تکانه زاویه‌ای کل پیکر بندی با رابطه  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  تعیین می‌شود. مقادیر ممکن عدد کوانتومی  $J$  (که به سمنگیری نسبی  $\mathbf{L}$  و  $\mathbf{S}$  وابسته‌اند)، عبارت‌اند از

$$J = L+S, L+S-1, \dots, |L-S| \quad (19.4)$$

در شکل ۹.۴ از این روش برای سه الکترون استفاده شده است. فرض شده است که تمام  $\mathbf{L}_i$ ها و  $\mathbf{S}_i$ ها حول برابند خود، یعنی به ترتیب حول  $\mathbf{L}$  و  $\mathbf{S}$  حرکت تقدیمی می‌کنند.  $\mathbf{L}$  و  $\mathbf{S}$  نیز به نوبه خود، حول  $\mathbf{J}$  حرکت تقدیمی دارند.

حالت‌ها را تم بسا مجموعه اعداد کوانتومی  $L, S, J$  مشخص می‌شود. حالت‌های هر پیکر بندی با  $L$  و  $S$  یکسان نیز يك جمله طیفی تشکیل می‌دهند. انرژی هر جمله در هر





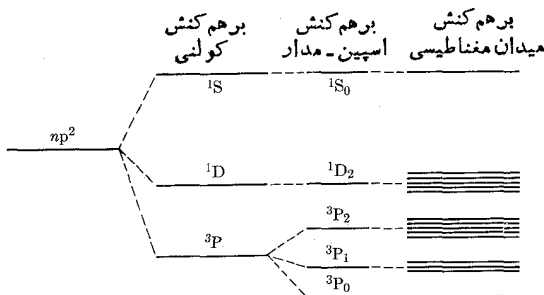
چون  $l_1 = 1$  و  $l_2 = 1$ ، مقادیر ممکن تکانه زاویه‌ای مدارى براین عبارت‌اند از  $L = 0, 1, 2$  که به حالت‌های  $S, P, D$  منجر می‌شوند. در هر حالت، اسپین‌ها می‌توانند موازی یا پادموازی باشند که در نتیجه  $S = 1$  یا  $S = 0$ . از این رو، جمله‌های طیفی ممکن پیکربندی  $(np)(n'p)$  عبارت‌اند از  ${}^1S, {}^3S, {}^1P, {}^3P, {}^1D, {}^3D$ .

هنگامی که الکترونها هم‌ارزند، در نتیجه محدودیت‌های ناشی از اصل طرد، تمام جمله‌های طیفی امکان‌پذیر نخواهند بود، به‌عنوان مثال، پیکربندی  $ns^2$ ، همچنانکه در مورد هلیوم دیدیم، فقط جمله طیفی  ${}^1S$  را مجاز می‌داند. با نگرستن به این مثال از زاویه دیگر مشاهده می‌کنیم که در پیکربندی  $ns^2$ ، هر گاه اعداد کوانتومی  $n, m_l, m_s$  و  $m_s$  یک الکترون به صورت  $(n, 0, 0, +1/2)$  باشند، اعداد کوانتومی الکترون دیگر بساید به صورت  $(n, 0, 0, -1/2)$  باشند که در این صورت  $M_S = 0$  و این مستلزم آن است که  $S$  یا صفر باشد یا یک جمله طیفی تک‌تایی باشد. به طریق مشابه، برای پیکربندی  $np^2$  تنها جمله‌های طیفی ممکن عبارت‌اند از  ${}^1S, {}^1D, {}^3P$ . این موضوع در مثال ۳.۴ نشان داده شده است. جدول ۲.۴ جمله‌های طیفی متناظر با چند پیکربندی الکترونهاى هم‌ارز را به دست می‌دهد.

با به کار بردن دو قاعده تجربی منسوب به هوند، به راحتی می‌توانیم ترتیب جمله‌های طیفی یک پیکربندی از الکترونهاى هم‌ارز را به دست آوریم. (۱) از تمام جمله‌های طیفی ممکن، جمله‌های طیفی با بالاترین چندگانگی (یا بزرگترین  $S$ )، پایینترین انرژی را دارند. از میان تمام جمله‌های طیفی با چندگانگی یکسان، جمله با پایینترین انرژی، جمله‌ای است که مقدار  $L$  آن بالاترین مقدار است. (۲) ترتیب ترازهای چندتایی هر جمله طیفی هنگامی بهنجار است (یعنی پایینترین  $J$  دارای پایینترین انرژی است) که کمتر از نیمی از زیر پوسته پر شده باشد؛ این ترتیب هنگامی وارون است که بیش از نیمی از زیر پوسته پر شده باشد. به‌عنوان مثال، در پیکربندی  $np^2$ ، این ترازها به ترتیب افزایش انرژی عبارت‌اند از  ${}^3P, {}^1D$  و  ${}^1S$  و سه تایی  ${}^3P$  به‌ازای  $J = 0$  که کمترین مقدار است، بهنجار است. این قواعد دقیق نیستند و گاهی حتی نقض می‌شوند.

جدول ۲.۴ جمله‌های طیفی الکترونهاى هم‌ارز.

جمله‌های طیفی	پیکربندی	جمله‌های طیفی	پیکربندی
${}^1D$	$d, d^9$	${}^1S$	$s$
${}^1S, {}^1D, {}^1G, {}^3P, {}^3F$	$d^2, d^8$	${}^1S$	$s^2$
${}^3P, {}^1D, {}^3F, {}^1G, {}^3H, {}^3P, {}^3F$	$d^3, d^7$	${}^3P$	$p, p^5$
${}^1S, {}^1D, {}^1F, {}^1G, {}^1I, {}^3P, {}^3D, {}^3F, {}^3G, {}^3H, {}^5D$	$d^4, d^6$	${}^1S, {}^1D, {}^3P$	$p^2, p^4$
${}^3S, {}^3P, {}^1D, {}^3F, {}^1G, {}^3H, {}^1I, {}^3P, {}^3F, {}^3D, {}^3G$	$d^5$	${}^3S, {}^3P, {}^1D$	$p^3$



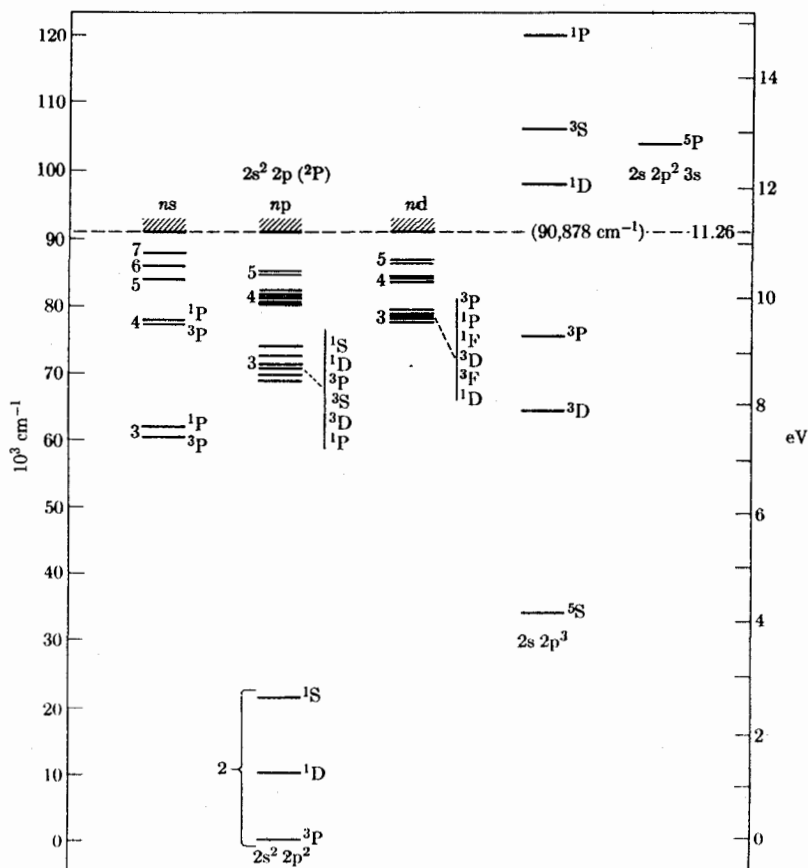
شکل ۱۰۴ ترازهای انرژی پیکر بندی  $np^2$ .

برایند گشتاور مغناطیسی میانگین هر اتم با  $J$  متناسب است. این گفته بدان معنی است که ماده متشکل از اتمهای منفرد هنگامی پارامغناطیسی است که  $J \neq 0$  باشد و به ازای  $J = 0$  دیامغناطیسی خواهد بود. در حضور میدان مغناطیسی خارجی، ترازهای انرژی حالت  $LSJ$  به  $1 + 2J$  زیر تراز (متناظر با سمتهگیریهای ممکن و متفاوت گشتاور مغناطیسی اتم نسبت به میدان مغناطیسی) شکافته می شود که همان اثر زیمان است. شکل ۱۰۴ شکافتگی انرژی پیکر بندی  $np^2$  را نشان می دهد. این شکافتگی ناشی از چندین اثری است که تاکنون بر شمرده ایم.

شکل ۱۱۴ برخی ترازهای انرژی اتم کربن را نشان می دهد و گویای پیچیدگی ترازهای انرژی برانگیخته اتمهای چند الکترونی است. پیکر بندی پایه اتم کربن به صورت  $1s^2 2s^2 2p^2$  و جمله حالت پایه نیز  $3P$  است که نزدیک به جمله های برانگیخته  $1D$  و  $1S$  قرار دارد. جمله های متوالی متناظر با برانگیختگی یکی از الکترونهای  $2p$  (که به پیکر بندیهای  $1s^2 2s^2 2p ns$ ،  $1s^2 2s^2 2p np$ ،  $1s^2 2s^2 2p nd$ ،  $1s^2 2s^2 2p nd$  منجر می شود) در سه ستون اول نشان داده شده اند. جمله های ناشی از برانگیختگی یکی از الکترونهای  $2s$ ، که به پیکر بندیهای  $1s^2 2s 2p^3$  و  $1s^2 2s 2p^2 3s$  منجر می شود، در دو ستون آخر نشان داده شده اند. نمادهای نشان داده شده در بالای هر ستون نیز با حالت یونی متناظر است که با خارج شدن الکترون برانگیخته به جای می ماند. ضمناً، حالت پیکر بندی  $1s^2 2s 2p^3$  مربوط به  $5S$  با وضع نشان داده شده در شکل ۸۰۴ متناظر است.

شکل ۱۲۰۴ برخی ترازهای انرژی اتم اکسیژن را نشان می دهد. پیکر بندی پایه اکسیژن به صورت  $1s^2 2s^2 2p^4$  و جمله حالت پایه آن نیز  $3P$  است که در نزدیکی جمله های برانگیخته  $1D$  و  $1S$  همان پیکر بندی قرار دارد. ترازهای نشان داده شده فقط با برانگیختگی یکی از الکترونهای  $2p$ ، که به پیکر بندیهای  $1s^2 2s^2 2p^3 ns$  و  $1s^2 2s^2 2p^3 np$  و غیره منجر می شود، متناظرند.

تعداد زیاد ترازهای انرژی دسترس پذیر به وضوح نشان می دهد که طیف اتمهای چند الکترونی خیلی پیچیده تر از طیف اتمهای تک الکترونی است. چندین قاعده گزینش باعث محدودیت گذارهای ممکن می شوند. قواعد گزینش مربوط به گذارهای دو قطبی الکتریکی عبارتند از



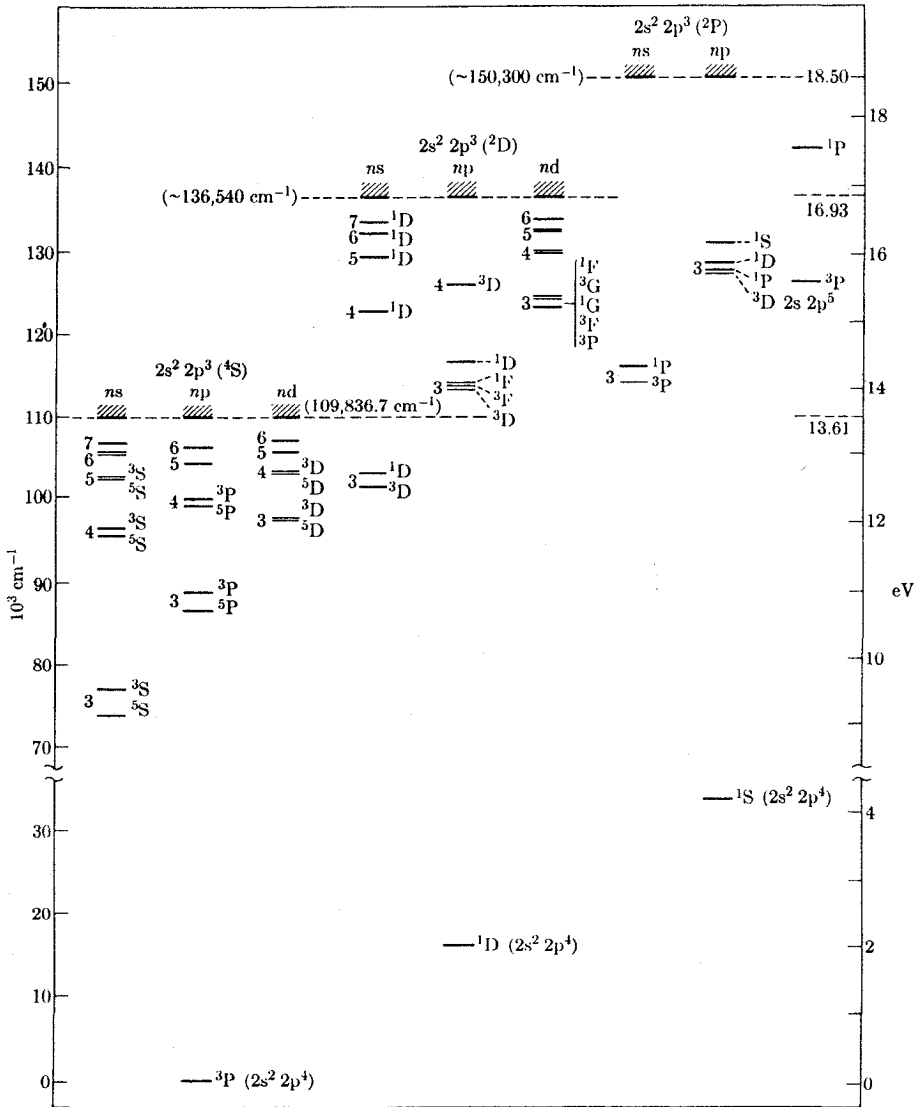
شکل ۱۱۴ ترازهای انرژی اتم کربن.

$$\Delta L = \pm 1, \quad \Delta S = 0$$

$$\Delta J = 0, \pm 1 \quad (\text{غیر از } 0 \rightarrow 0) \quad (20.4)$$

$$\Delta M = 0, \pm 1$$

امکان  $J = 0 \rightarrow J' = 0$  به خاطر قانون پایستگی تکانه زاویه ای ممنوع است، زیرا می توان نشان داد که فوتون دارای تکانه زاویه ای ذاتی یا اسپین مساوی با واحداست (بخش ۲۰۹). از این رو، محال است که گذار  $J = 0 \rightarrow J' = 0$  با گسیل (یا جذب) فوتونی که حامل تکانه زاویه ای معادل با واحداست وجود داشته باشد، بی آنکه پایستگی تکانه زاویه ای را نقض نکند. همچنین  $\Delta M = 0$  به ازای  $\Delta J = 0$  ممکن نخواهد بود زیرا مجدداً در این



شکل ۱۲۰۴ ترازهای انرژی اتم اکسیژن.

حالت پایستگی تکانه زاویه‌ای مستلزم تغییری در راستای  $J$  است، که این حاکی از تغییر در  $J_z$  بایک تغییر متناظر در  $M$  است.

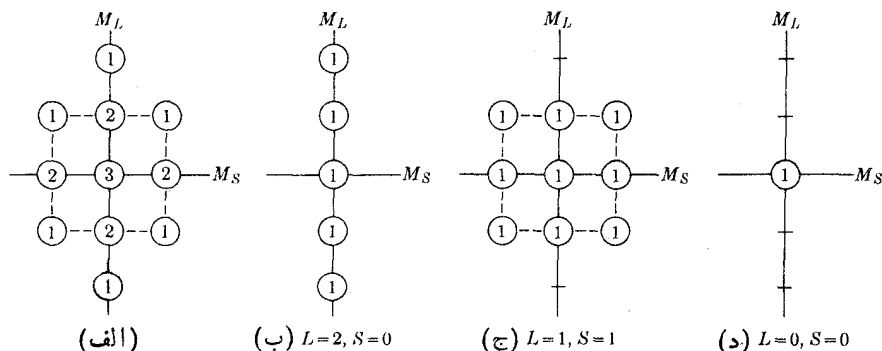
مثال ۳۰۴ تحلیل پیکربندی  $np^2$ .

حل: در این پیکربندی که با  $l=1$  متناظر است، اعداد کوانتومی الکترونها عبارت اند از  $(n, l, m_l, m_s)$  و  $(n, l, m'_l, m'_s)$ . بر طبق اصل طرد، این دو مجموعه اعداد کوانتومی باید متفاوت باشند و بنا بر این، یا باید در  $m_l$  یا  $m_s$  یا در هر دوی آن اختلاف داشته باشند. مقادیر ممکن  $m_l$  و  $m'_l$  عبارت اند از  $+1, 0, -1$ ، و مقادیر مربوط به  $m_s$  و  $m'_s$  نیز عبارت اند از  $+1/2$  یا  $-1/2$ . برای سهولت در نماد گذاری، مقادیر اسپین را به صورت به اضافه (+) یا منها (-) نشان می دهیم و اعداد کوانتومی مشترک  $n$  و  $l$  (مساوی با يك) را حذف می کنیم. جدول ۳۰۴، ۱۵ ترکیب از اعداد کوانتومی را نشان می دهد که با اصل طرد سازگارند که هر کدام يك ترکیب ممکن  $(m_l, m_s)$  و  $(m'_l, m'_s)$  را به دست می دهد. این ترکیبها بر حسب مقادیر مشترک  $M_L = m_l + m'_l$  و  $M_S = m_s + m'_s$  مرتب شده اند. هر مجموعه از اعداد کوانتومی به تابع موجی از نوع داده شده با معادله (۱۳.۴) متناظر است.

شکل ۱۳.۴ (الف)، که در آن از روش اسلاتر<sup>۱</sup> برای تحلیل پیکربندیها استفاده شده

جدول ۳۰۴ مقادیر ممکن  $m_l$  و  $m_s$  برای پیکربندی  $np^2$ .

			$M_S$ $M_L$
$+1$	$0$	$-1$	
	$(1, +)(1, -)$		$+2$
$(1, +)(0, +)$	$(1, +)(0, -)$ $(1, -)(0, +)$	$(1, -)(0, -)$	$+1$
$(1, +)(-1, +)$	$(1, +)(-1, -)$ $(0, +)(0, -)$ $(1, -)(-1, +)$	$(1, -)(-1, -)$	$0$
$(0, +)(-1, +)$	$(0, +)(-1, -)$ $(0, -)(-1, +)$	$(0, -)(-1, -)$	$-1$
	$(-1, +)(-1, -)$		$-2$

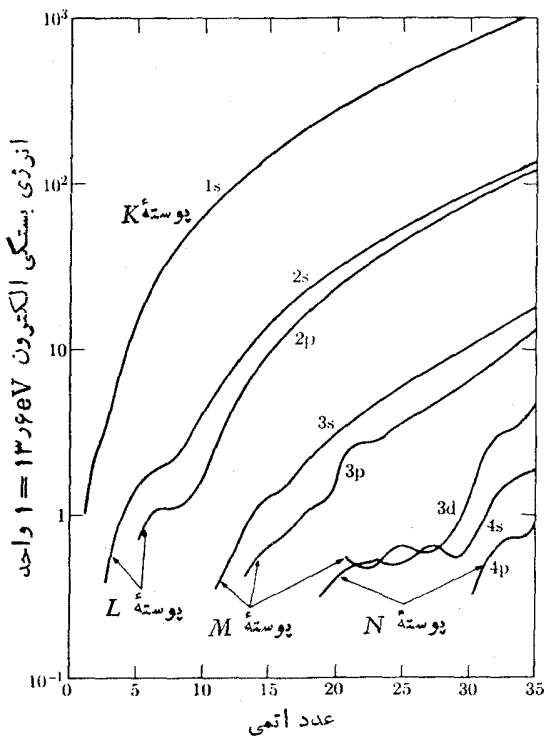


شکل ۱۳.۴ روش اسلاتر برای به دست آوردن جمله‌های پیکربندی  $np^2$ .

شده است، تعداد تابع موجهای متفاوتی را نشان می‌دهد که با هر مقدار از  $M_L$  و  $M_S$  متناظرند. از روی جدول یا از روی شکل دیده می‌شود که بیشترین مقدار  $M_L$  مساوی با ۲ است، و این باید با  $L=2$  یا یک جمله طیفی  $D$  متناظر باشد. مقدار  $M_L=2$  فقط به  $M_S=0$  وابسته است و باید با  $S=0$  متناظر باشد و یک جمله طیفی  $^1D$  تشکیل دهد. این حالت مستلزم پنج تابع موج با  $M_L=2, 1, 0, -1, -2$  و  $M_S=0$  است. این تابع موجها در شکل ۱۳.۴ (ب) نشان داده شده‌اند. ده تابع موج باقیمانده در شکل‌های ۱۳.۴ (ج) و (د) دسته‌بندی شده‌اند. آرایش (ج) شامل تمام ۹ ترکیب  $M_L=1, 0, +1$  با  $M_S=+1, 0, -1$  است و بنابراین با جمله‌ای با  $L=1$  و  $S=1$ ، یا  $^3P$  متناظر است. بالاخره، در (د)، آخرین تابع موج را با  $M_L=0$  و  $M_S=0$  داریم که باید با جمله‌ای با  $L=0$  و  $S=0$ ، یا  $^1S$  متناظر باشد. از این رو، تنها جمله‌های ممکن پیکربندی  $np^2$  را  $^1D$ ،  $^1S$  و  $^3P$  تشکیل می‌دهند.

### ۶.۴ اتمهای با یک یا دو الکترون ظرفیت

در مواردی که اتمها از پوسته‌های تکمیل شده و یک یا دو الکترون اضافی تشکیل شده‌اند می‌توانیم نظریه عمومی ساختار اتم که در بخشهای قبل مطرح شد را از یک راه خیلی ساده توضیح دهیم. الکترونهايي که پوسته‌های تکمیل شده را پر می‌کنند، مغز یا هسته مرکزی اتم را تشکیل می‌دهند و الکترونهايي باقیمانده نیز به الکترونهايي ظرفیت معروف اند. انرژی بستگی الکترونهايي مغز بیشتر از انرژی بستگی الکترونهايي ظرفیت است و همان طور که در شکل ۱۴.۴ نشان داده شده است، با عدد اتمی به سرعت افزایش می‌یابد. این شکل انرژی بستگی الکترونهايي  $1s$ ،  $2s$ ،  $2p$ ، و مانند آن را بر حسب تابعی از عدد اتمی به دست می‌دهد. بنابراین، الکترونهايي مغز قویاً مقیداند و در اکثر فرایندهایی که اتم در آنها



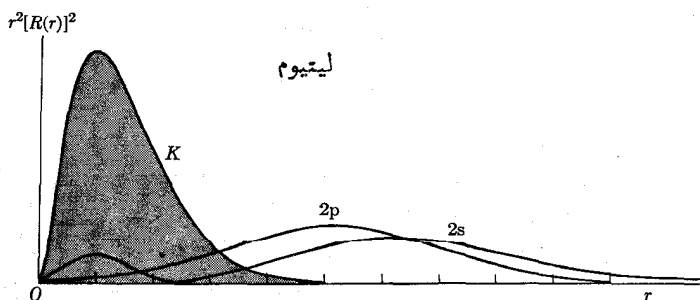
شکل ۱۴.۴ انرژی بستگی الکترونهاي داخلی به صورت تابعی از عدد اتمی.

شرکت می کند، عملاً تحت تأثیر قرار نمی گیرند. در واقع الکترونهاي ظرفیت عمدتاً عامل خواص شیمیایی اتم اند. این الکترونها در واکنشهای شیمیایی و پیوندهای شیمیایی شرکت می کنند.

به راحتی می توان نشان داد که يك پوسته کامل، که با حداکثر ظرفیت خود از الکترون پر شده است، لزوماً باید مقادیر  $L=0$  و  $S=0$  را داشته باشد. به عبارت دیگر، يك پوسته تکمیل شده و از آن جمله مغز، در تکانه زاویه ای مداری یا در اسپین اتم شرکت نمی کند. بنابراین، تکانه زاویه ای مداری و اسپین اتم هر دو به طور کامل از الکترونهاي ظرفیت اتم ناشی می شوند. به عنوان مثال، در مورد اتمهای با يك الکترون ظرفیت، اسپین اتم برابر است با  $S=1/2$  و تمام ترازهای انرژی کسه فقط در آنها الکترون ظرفیت برانگیخته می شود، دو تایی اند ( $2S+1=2$ ). در این اتمها  $L=7$  که در آن  $L$  تکانه زاویه ای مداری الکترون ظرفیت است.

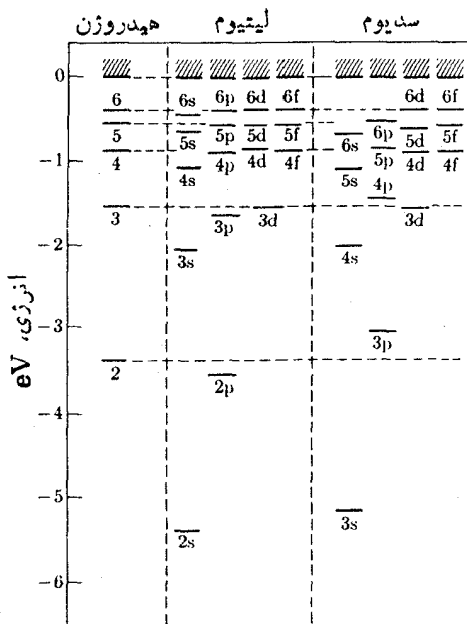
ساده ترین اتم با يك الکترون ظرفیت اتم لیتیوم ( $Z=3$ ) است. این اتم يك

الکترون خارجی یا ظرفیت و  $Z - 1 = 2$  الکترون مغز دارد. دو الکترون مغز، تراز با  $n = 1$  را اشغال می‌نمایند و پیکر بندی  $1s^2$  را تشکیل می‌دهند. هرگاه الکترون ظرفیت به طریقی حرکت کند که به داخل مغز نفوذ نکند، میدان مؤثر وارد بر آن میدانی است که از بار  $+3e$  هسته و بار  $-2e$  مغز، یا به عبارت دیگر از بار مؤثر  $+e$  نتیجه می‌شود. بنا براین، حرکت و ترازهای انرژی الکترون ظرفیت شبیه است به حرکت و ترازهایی که برای اتم هیدروژن به دست آوردیم. با توجه به بحث قبلی ما در باره تابع موجها که در بخش ۵.۳ ارائه شد، این موضوع تقریباً فقط هنگامی صادق است که تکانه زاویه‌ای  $l$  بزرگ باشد. اما برای مقادیر کوچک تکانه زاویه‌ای، و مخصوصاً برای حالت‌های  $s$  ( $l = 0$ ) مدار الکترون ظرفیت تا داخل مغز گسترش می‌یابد، و حتی به نزدیکیهای هسته نیز می‌رسد. شکل ۱۵.۴ توزیع بار شعاعی مغز لیتیوم را همراه با توزیع بار شعاعی الکترون ظرفیت برای حالت‌های  $2s$  و  $2p$  نشان می‌دهد (توزیع بار شعاعی متناسب است با  $[R(r)]^2$ ، شکل ۱۳.۳ را ببینید). بنا براین، می‌بینیم که الکترون ظرفیت درحین حرکت خود، مدت زمانی را در داخل مغز سپری می‌کند، و میزان نفوذ آن برای مدار  $s$  بیشتر از مدار  $p$  است. بار مؤثری که الکترون ظرفیت در ضمن حرکت خود در یک مدار نفوذی احساس می‌کند از  $+e$  (هنگامی که خیلی از مغز دور است) تا  $+3e$  (هنگامی که به داخل مغز نفوذ کرده است) تغییر می‌کند. انرژی متناظر نیز بین انرژی هیدروژن ( $Z = 1$ ) و انرژی  $Li^{2+}$  ( $Z = 3$ )، قرار می‌گیرد. چون نفوذ به تکانه زاویه‌ای بستگی دارد، انرژی الکترون ظرفیت نیز به تکانه زاویه‌ای بستگی خواهد داشت. هرچه تکانه زاویه‌ای کوچکتر باشد، انرژی نیز کوچکتر (منفی‌تر) و در نتیجه، نفوذ بیشتر خواهد بود. بنا براین، به جای نمودار تراز انرژی شکل ۸.۳، که در آن تمام حالت‌های با  $n$  یکسان، بدون توجه به تکانه زاویه‌ای خود مقدار انرژی یکسان دارند، نموداری خواهیم داشت که در شکل ۱۶.۴ برای اتمهای با یک الکترون ظرفیت (لیتیوم و سدیم) رسم شده است. ترازهای انرژی هیدروژن نیز برای مقایسه نشان داده شده‌اند. می‌بینیم که هرچه مقدار  $n$  و تکانه زاویه‌ای  $l$  بزرگتر باشند، ترازهای انرژی لیتیوم و سدیم به ترازهای هیدروژن نزدیکتر می‌شوند، زیرا



شکل ۱۵.۴ توزیع بار شعاعی مغز و الکترون ظرفیت در حالت‌های  $2s$  و  $2p$  در اتم لیتیوم.





شکل ۱۶.۴ ترازهای انرژی هیدروژن، لیتیوم، و سدیم.

مدارها کمتر نفوذپذیرند و میدان کولنی مؤثر با  $Z=1$  متناظر است. اما مدارهای با نفوذپذیری بیشتر دارای ترازهای انرژی هستند که از ترازهای هیدروژن کاملاً متمایز است. گذارهای ممکن الکترون ظرفیت از قواعد گزینش (۱۷.۳) پیروی می‌کنند و سریهای

طیفی زیر را به دست می‌دهند

$$ns \rightarrow n'p \quad \text{سری تیز}$$

$$np \rightarrow n's \quad \text{سری اصلی}$$

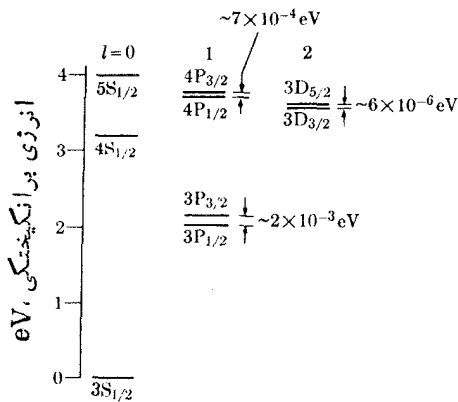
$$nd \rightarrow n'p \quad \text{سری پخشیده}$$

$$nf \rightarrow n'd \quad \text{سری برگمان}$$

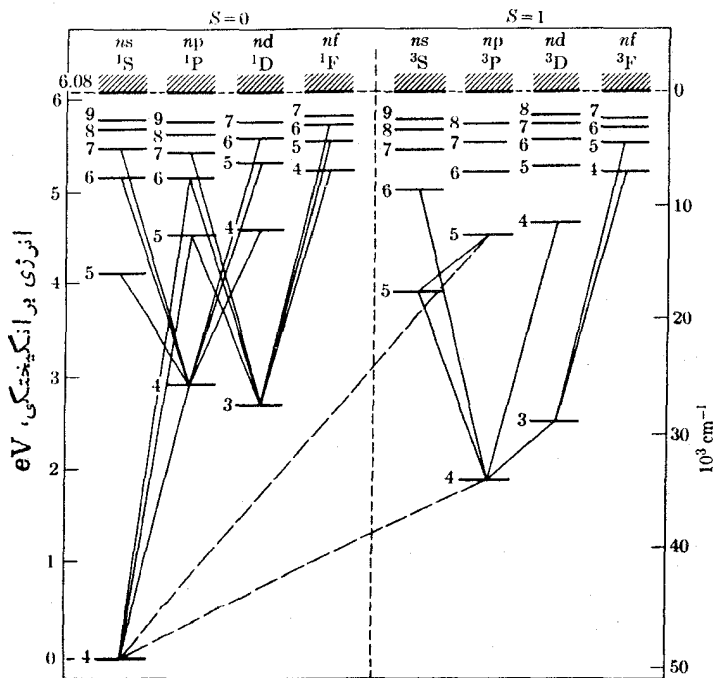
...

در نتیجه برهم کنشهای اسپین-مدار، تمام ترازهای انرژی شکل ۱۶.۴ (به استثنای ترازهای s) دو تایی اند و فاصله جدایی آنها با  $S \cdot L$  متناسب است، از این رو، به عنوان مثال، ترازهای واقعی انرژی سدیم، که در آن فقط الکترون ظرفیت برانگیخته می‌شود، به صورتی است که در شکل ۱۷.۴ نشان داده شده است.

در مورد اتمهای با دو الکترون ظرفیت، وضع خیلی شبیه به آن چیزی است که در مورد اتم هلیوم گفته شد. بر ایند اسپین دو الکترون می‌تواند مقدار ۰ یا ۱ باشد و ترازهای

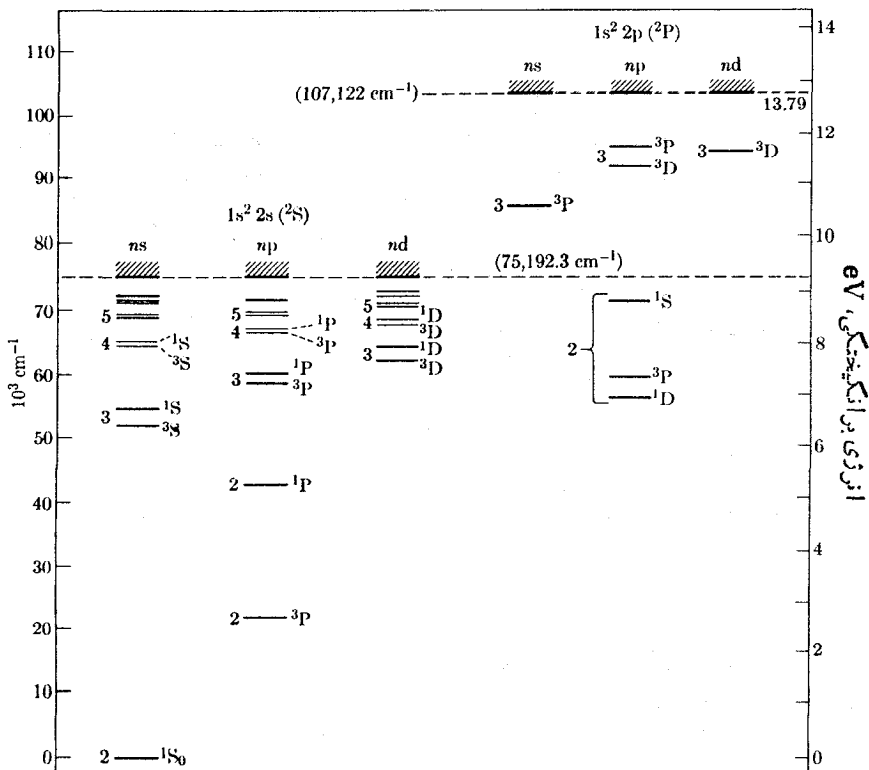


شکل ۱۷۰۴ ساختار دین ترازهای انرژی اتم سدیم که از برهم کنش اسپین-مدار ناشی شده است.



شکل ۱۸۰۴ ترازهای انرژی کلسیم همراه با پاره‌ای از گذارها.

انرژی در دو گروه تک‌تایی ( $S=0$ ) و سه‌تایی ( $S=1$ ) قرار می‌گیرند. تک‌تاییها با دو الکترون ظرفیتی که اسپینهای آنها پاد موازی‌اند و سه‌تاییها با دو الکترون ظرفیتی که اسپینهای آنها موازی‌اند متناظرند. این حالت مربوط به اتمهایی چون برلیوم، منیزیم، کلسیم، و مانند آنهاست. شکل ۱۸.۴ ترازهای انرژی اتم کلسیم را نشان می‌دهد. این ترازها با وضعی متناظرند که در آن تنها یک الکترون ظرفیت برانگیخته می‌شود. چون در حالت پایه اتم کلسیم، بیکربندی الکترونهاى ظرفیت به صورت  $4s^2$  است، حالت‌های برانگیخته با  $4s nl$  متناظرند که در آن  $n=4, 5, 6, \dots$  است. مقادیر  $nl$  الکترون برانگیخته در بالای شکل نشان داده شده‌اند. برخی از گذارهای ممکن نیز در شکل دیده می‌شوند. این گذارها باید از قواعد گزینش (۱۷.۳) پیروی کنند. دو خط چین نشان داده شده در شکل عبارت‌اند از گذارهای از یک حالت سه‌تایی به یک حالت تک‌تایی. این گذارها قاعده گزینش  $\Delta S=0$  را نقض می‌کنند و بنابراین بسیار ضعیف‌اند. البته این امکان نیز وجود دارد که هر دو الکترون ظرفیت برانگیخته شوند و ترازهای انرژی جدیدی را مطابق آنچه در شکل ۱۹.۴ برای برلیوم نشان داده شده‌است، ایجاد



شکل ۱۹.۴ ترازهای انرژی اتم برلیوم.

کنند. پیکربندی حالت پایه اتم بریلیم به صورت  $1s^2 2s^2$  است. سه ستون اول با برانگیختگی تنها یک الکترون ظرفیت متناظرند (همان طور که در شکل ۱۸.۴ برای کلسیم نشان داده شده است)، و پیکربندیها عبارتند از  $1s^2 2s \ nl$ . سه ستون باقیمانده باحالتی متناظرند که در آن از دو الکترون ظرفیت برانگیخته یکی به حالت  $2p$  و دیگری به حالت  $nl$  می رود. در این صورت پیکربندیها عبارتند از  $1s^2 2p \ n'l$ . البته حالت‌های برانگیخته دیگری نیز وجود دارند.

این تحلیل از اتمهای باریک یا دو الکترون ظرفیت برای بیان این حقیقت که تحلیل ساختار اتمی بسیار پیچیده است کافی به نظر می رسد.

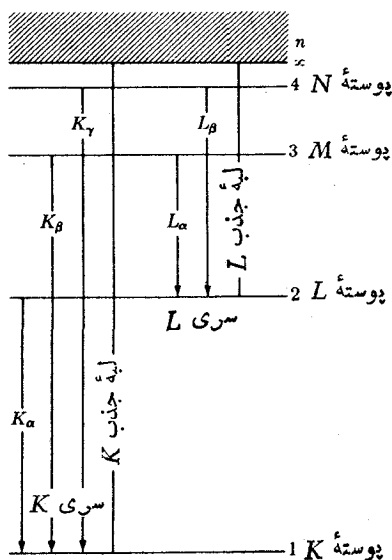
## ۷.۴ طیفهای پرتو ایکس

تاکنون فقط برانگیختگی الکترونیهای ظرفیت را که به طیف نودی منجر می شود بررسی می کردیم. باید توجه داشت که امکان برانگیختگی الکترونیهای که پوسته‌های تکمیل شده مغز را اشغال می کنند نیز وجود دارد. این برانگیختگیها، پرتو ایکس مشخصه‌ای که اتمها گسیل (یا جذب) می کنند را ایجاد می کنند.

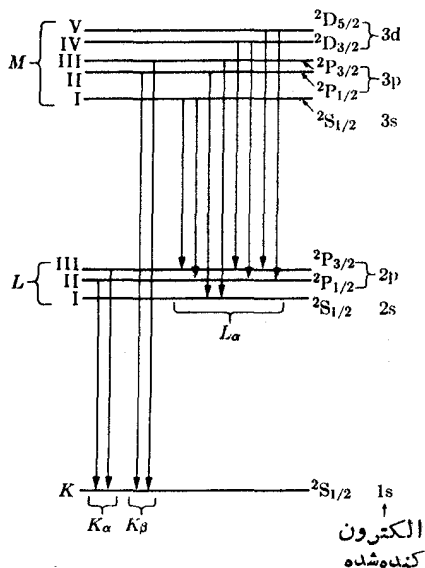
در شکل ۱۴.۱، توزیع شدت را برحسب تابعی از طول موج تابش ترمزی حاصل از آنتی کاتود یک لامپ پرتو ایکس از جنس مولیبدن، به ازای چندین ولتاژ مطالعه کردیم. با افزایش ولتاژ، قله‌های خیلی تیز و مشخص در شدت پرتو ایکس مشاهده می شود، که با طول موجهای کاملاً معین متناظرند. در شکل ۱۴.۱، قله‌ها برای اولین بار هنگامی ظاهر می شوند که ولتاژ اعمال شده مساوی با  $25 \text{ kV}$  است. (ولتاژ برانگیختگی واقعی برابر است با  $25.01 \text{ kV}$ ). این قله‌ها به پرتوهای ایکس مشخصه معروف اند. طول موج قله‌ها از ولتاژ به کار رفته مستقل اند ولی به ماده هدف بستگی دارند.

توضیح پرتو ایکس مشخصه راحت است. هنگامی که الکترونیهای موجود در لامپ پرتو ایکس با هدف برخورد می کنند، انرژی آنها ممکن است برای کندن یکی از الکترونیهای مغز کافی باشد. فرض می کنیم که الکترون پرتاب شده در پوسته  $K$  قرار دارد. هنگامی که الکترون  $K$  کنده شود، یک جای خالی (یا حفره) در پوسته  $K$  به جای می ماند. الکترون دیگری در تراز انرژی بالاتر مغز (یا شاید یک الکترون ظرفیت، یا حتی یک الکترون آزاد) می تواند این جای خالی ایجاد شده در پوسته  $K$  را اشغال کند. چون مقدار انرژی مورد بحث نسبتاً قابل توجه است، لذا تابش گسیل شده به وسیله الکترونی که این جای خالی را اشغال می کند در ناحیه پرتو ایکس طیف قرار می گیرد. الکترونی که جای خالی پوسته  $K$  را اشغال می کند، می تواند از پوسته‌های  $L$ ،  $M$ ،  $N$ ، و مانند آن آمده باشد و بنا بر این، یک سری خطوط پرتو ایکس موجود خواهند بود که با  $K_\alpha$ ،  $X_\beta$ ،  $K_\gamma$ ، و... مشخص می شوند. هر گاه جای خالی در پوسته  $L$  ایجاد شود، الکترونیها می توانند از پوسته‌های  $M$ ،  $N$ ، و مانند آن به این جای خالی بیایند که در نتیجه خطوط پرتو ایکس دیگری چون  $L_\alpha$ ،

$L_{\beta}$  و مانند آن را گسیل کنند، و به همین ترتیب. در شکل ۲۰۴ گذارهای پرتو ایکس در اتمی با  $Z \sim 36$  به طور طرح وار نشان داده شده اند. توجه کنید که گسیل پرتو ایکس فقط هنگامی امکان پذیر است که یک جای خالی در پوسته داخلی به وجود آمده باشد، زیرا طبق اصل طرد، گذار از یک تراز بالاتر به تراز پایینتری که کاملاً اشغال شده ممنوع است و در نتیجه، چنین گذاری رخ نخواهد داد. جای خالی در پوسته داخلی ممکن است با جذب تابش نیز تولید شود، که به اثر فوتوالکترونیک برای الکترونهای پوسته های  $K$ ،  $L$ ،  $M$ ، و مانند آن منجر می شود. در واقع گذارهای پرتو ایکس پیچیده تر از آن چیزی است که می توان از شکل ۲۰۴ استنباط کرد، زیرا انرژی آزاد شده به جمله های اولیه و نهایی وابسته است. به عنوان مثال، هنگامی که الکترون ۱s از پوسته  $K$  کنده شود، انرژی یون ایجاد شده منحصر به فرد است. ولی هر گاه این الکترون از پوسته  $L$  کنده شود، ممکن است الکترون ۲s یا الکترون ۲p باشد. در مورد اول، پیکربندی الکترونهای که در پوسته باقی می ماند به صورت  $1s^2 2s^2 2p^6$  است که با حالت  $^2S_{1/2}$  متناظر است ولی در مورد دوم، پیکربندی الکترونهای که در پوسته باقی می ماند به صورت  $1s^2 2s^2 2p^5$  است که با حالت های  $^2P_{3/2}$  یا  $^2P_{1/2}$  متناظرند. بنا بر این، سه حالت ممکن برای پوسته  $L$  منهای یک الکترون وجود دارند که هر کدام انرژی متفاوتی دارند. برای پوسته  $M$  منهای یک الکترون، تعداد پنج حالت ممکن وجود دارد و به همین ترتیب. این حالتها همراه با برخی از گذارهای پرتو ایکس حاصل در شکل ۲۱۰۴



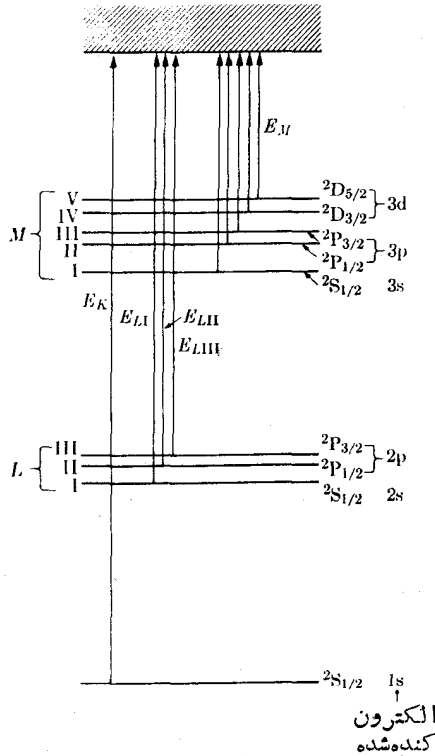
شکل ۲۰۴ گذارهای پرتو ایکس در اتمی با عدد اتمی  $Z \sim 36$ .



شکل ۲۱۰۴ ساختار ریز گذارهای پرتو ایکس.

نشان داده شده‌اند. از این رو، خطوط  $K_\alpha$  و  $K_\beta$  دوتایی‌اند و خط  $L_\alpha$  ترکیبی است از هشت خط نزدیک به هم، و به همین ترتیب.

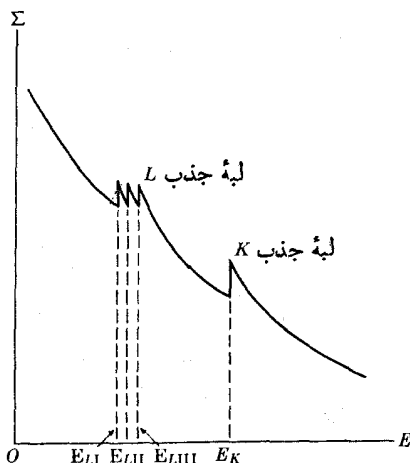
این ساختار ریز ترازهای انرژی در ضریب جذب خطی مربوط به اثر فوتوالکتریک نیز پدید می‌آید. در شکل ۲۲۰۴ مشاهده می‌شود که یک کمیته انرژی مشخص  $E_K$  برای یونیدن اتم از طریق کندن یک الکترون  $K$  مورد نیاز است. ولی هر گاه یک الکترون  $L$  کنده شود، بسته به اینکه از کدام حالت کنده شده باشد، سه انرژی یونش ممکن  $E_{L_1}$ ،  $E_{L_2}$ ،  $E_{L_3}$  وجود خواهند داشت. به طریق مشابه، هر گاه الکترون از پوسته  $M$  آمده باشد، تعداد پنج انرژی یونش وجود خواهد داشت، و به همین ترتیب. این گفته بدان معنی است که وقتی تابش الکترومغناطیسی بر ماده‌ای می‌تابد، ضریب جذب خطی یا سطح مقطع ماکروسکوپیکی  $\Sigma$  برای اثر فوتوالکتریک (بخش ۹۰۱) همانند آنچه در شکل ۲۳۰۴ نشان داده شده است، به صورت تابعی از انرژی تابش تغییر می‌کند. به طور کلی با افزایش انرژی فوتون یا کاهش طول موج،  $\Sigma$  نقصان می‌یابد. هنگامی که انرژی فوتون بالاتر از کمیته مقدار لازم برای کندن الکترون  $L$  قرار می‌گیرد،  $\Sigma$  ناگهان افزایش می‌یابد، زیرا در این صورت فوتونها با الکترونها یبشتری می‌توانند برهم کنش کنند. تنها در این مورد تعداد سه‌قله نزدیک به هم وجود دارند که به ترتیب به  $E_{L_1}$ ،  $E_{L_2}$ ،  $E_{L_3}$  متناظرند. هنگامی که انرژی فوتون در بالای مقدار  $E_K$  قرار می‌گیرد، افزایش تند دیگری در مقدار  $\Sigma$  دیده می‌شود زیرا فوتونها برای کندن یک الکترون  $K$  انرژی کافی دارند. این تغییرات ناگهانی در  $\Sigma$  به لبه‌های جذب معروف‌اند.



شکل ۲۲۰۴ گذارهای ناشی از جذب پرتوهای ایکس. این جذب با گسیل الکترون همراه است.

لبه جذب  $K$  برای سرب نیز در شکل ۱۹۰۱ نشان داده شده است. توجه کنید که، به طور کلی، انرژیهای (یا طول موجهای) مورد بحث در گسیل و جذب پرتو ایکس، به دلیل متفاوت بودن ترازهای انرژی، کاملاً یکسان نیستند. جذب و گسیل پرتو ایکس هر دو از وسایل بسیار مفیدی هستند که به کمک آنها می توان اطلاعات قابل توجهی در مورد پوسته های داخلی اتم به دست آورد.

در بعضی موارد، فوتون گسیل شده در گذار پرتو ایکس ممکن است به وسیله الکترون دیگری از همان اتم جذب و بنابراین در نتیجه اثر فوتوالکتریک داخلی، الکترون اخیر به بیرون پرتاب شود. این فرایند تبدیل داخلی پرتو ایکس به فوتوالکترونها به اثر اذله معروف است.



شکل ۲۳.۴ تغییرات ضریب جذب خطی برای پرتوهای ایکس و گاما بر حسب تابعی از انرژی فوتون.

### مسائل

۱۰۴ ترازهای انرژی اتمهای هلیوم گونه‌ها، هنگامی که یک الکترون در حالت پایه ( $n=1$ ) و الکترون دیگر در حالت برانگیخته ( $n > 1$ ) است، می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$E = -RhcZ^2 - \frac{Rhc(Z-1)^2}{n^2}$$

در این رابطه فرض بر این است که الکترون در حالت پایه یک بار هسته‌ای را به طور کامل می‌پوشاند. آیا این فرض یک فرض موجه است؟ ترازهای انرژی هلیوم را به ازای  $n$  مساوی با ۲، ۳، و ۴ محاسبه و با نتیجه تجربی مقایسه کنید. چرا با افزایش  $n$  دقت رابطه بالا برای  $E$  افزایش می‌یابد؟

۲۰۴ سه تابع  $\psi_{s\chi_A}$  معادله (۱۰.۴) را به صورت دترمینانی بنویسید. توجه کنید که تابع موج به ازای  $M_s = 0$  شامل دو دترمینان است.

۳۰۴ حالت پایه لیتیوم دارای پیکربندی الکترونی  $1s^2 2s$  است. تابع موج را برای حالتی که  $M_s = 1/2$  است، به صورت دترمینانی بنویسید.

۴۰۴ برای پیکربندی  $p^2$  (جدول ۲.۴) تابع موجهای دترمینانی متناظر با  $M_L = 2$ ،  $M_s = 0$  و  $M_L = 1$ ،  $M_s = 1$  را بنویسید.



۵.۴ يك سيستم سه الکترونی در پیکر بندی  $sp^2$  را در تقریب تک الکترونی در نظر می گیریم. تابع موج کل را به صورت دترمینانی طوری بنویسید که با  $M_L = 1$  و  $M_S = 1/2$  متناظر باشد.

۶.۴ با فرض اینکه پیکر بندی الکترونی يك اتم به صورت  $4s^2 3d$  است، تمام تابع موجهای ممکن را که با  $M_L = 1$  و  $M_S = 3/2$  متناظرند بنویسید. از صورت دترمینانی استفاده کنید.

۷.۴ پیکر بندی حالت پایه اتمهای زیر را به دست آورید: (الف) سیلیسیوم، (ب) منگنز، (ج) روییدیوم، و (د) نیکل. جمله طیفی حالت پایه آنها را نیز بنویسید.

۸.۴ پیکر بندی حالت پایه و نیز تعداد الکترونهاي زوج نشده در اتمهای زیر را تعیین کنید: (الف) گوگرد، (ب) کلسیوم، (ج) آهن، و (د) بریلیوم.

۹.۴ (الف) بروی نموداری مشابه با شکل ۷.۴، حالتهای اشغال شده برای اتمهای سیلیسیوم، کلر، و آرسنیک را هنگامی که در پیکر بندی حالت پایه قرار دارند نشان دهید. (ب) پیکر بندی الکترونی و جملههای طیفی پایه هر کدام را بنویسید.

۱۰.۴ زاویه میان تکانه زاویه ای کل و مداری را برای حالت  $^4D_{3/2}$  محاسبه کنید.

۱۱.۴ برای پیکر بندیهای زیر، جملههای طیفی را به دست آورید و نشان دهید که در هر مورد، کدام جمله طیفی دارای پایتترین انرژی است: (الف)  $ns$ ، (ب)  $np^3$ ، (ج)  $(np^2)(n's)$ ، (د)  $np^5$ ، (ه)  $(nd^2)(n'p)$ ، و (و)  $(nd)(n'd)$ .

۱۲.۴ تمام گذارهای تابشی ممکن اکسیژن را هنگامی که پیکر بندی برانگیخته به صورت  $^3D(^4D) 3d$  است بنویسید (شکل ۱۲.۴).

۱۳.۴ با توجه به شکلهای ۱۱.۴ و ۱۲.۴، پاره ای از گذارهای ممکن را که با قواعد گزینش سازگاری دارند ترسیم کنید. اعداد موج این گذارها را تعیین و با مقادیر تجربی مقایسه کنید.

۱۴.۴ جملههای طیفی پیکر بندی  $np^3$ ، را محاسبه کنید.

۱۵.۴ مقادیر  $S$ ،  $L$ ، و  $J$  برای جملههای طیفی  $^1S_0$ ،  $^3S_{1/2}$ ،  $^1P_1$ ،  $^3P_2$ ،  $^3F_4$ ،  $^3D_1$ ، و  $^3D_2$  را به دست آورید.

۱۶.۴ جملههای متناظر با پیکر بندی  $nd^2$  را به دست آورید. نتیجه به دست آمده را برای تعیین حالت پایه و اولین حالت برانگیخته تیتانیوم به کار برید.

۱۷۰۴ نشان دهید که پوسته کامل  $nl$  باید لزوماً  $L=S=0$  را دارا باشد.

۱۸۰۴ دو الکترون هم ارز  $p$  دارای جفت شدگی قوی اسپین-مدارند. هر گاه مسئله به صورت جفت شدگی  $j_1-j_2$  در نظر گرفته شود، مقادیر ممکن تکانه زاویه‌ای برایند را به دست آورید. با در نظر گرفتن جفت شدگی  $L-S$ ، مسئله را تکرار کنید. آیا در هر مورد به تعداد دفعات یکسان مقدار یکسانی برای  $J$  به دست می‌آید؟

۱۹۰۴ در جفت شدگی  $L-S$ ، می‌توان گشتاور مغناطیسی اتم را به صورت

$$M_{ave} = -(e/2m_e)gJ$$

به دست آورد؛  $J$  تکانه زاویه‌ای کل اتم است و  $g$  با معادله (۴۰.۳) داده می‌شود، که در آن  $l, s, j$  و  $z$  با  $L, S, J$ ، و  $J$  تعویض شده‌اند. مقدار  $g$  را برای کلسیوم و آلومینیوم به دست آورید. شکاف‌نگی جمله  $3p$  تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی ضعیف را بررسی کنید. شکاف‌نگی را در صورتی که میدان مغناطیسی قوی باشد پیدا کنید.

۲۰۰۴ اثر زیمان را در میدانهای مغناطیسی ضعیف و قوی برای گذارهای  ${}^2D \rightarrow {}^2F$  و  ${}^1D \rightarrow {}^1F$  در کلسیوم بررسی کنید.

۲۱۰۴ گذار  ${}^3D_1 \rightarrow {}^3P_1$  در کلسیوم به یک تک خط در  $6439 \text{ \AA}$  تبدیل می‌شود. هر گاه کلسیوم در میدان مغناطیسی  $1.40 \text{ T}$  قرار گیرد چه طول موجهایی مشاهده می‌شود؟

۲۲۰۴ فاصله جدایی نسبی میان ترازهای مختلف چندتایی  $LSJ$  ناشی از برهم کنش اسپین-مدار را می‌توان متناسب با  $S \cdot L$  در نظر گرفت. این رابطه را در مورد چندتاییهای  ${}^2D$  و  ${}^2F$  به کار ببرید. ترازهای انرژی هر چندتایی را ترسیم و گذارهای مجاز  ${}^2F \rightarrow {}^2D$  را با پیکان مشخص کنید.

۲۳۰۴ مسئله قبل را برای حالت مربوط به گذارهای  ${}^2D \rightarrow {}^2P$  و  ${}^4S \rightarrow {}^4P$  تکرار کنید.

۲۴۰۴ با استفاده از مقادیر آمده در شکل ۱۷.۴ فاصله جدایی طول موجهای خطوط  $D$  سدیم را محاسبه کنید. از روی نتیجه به دست آمده ثابت  $a$  در رابطه  $E_{SL} = aS \cdot L$  را برای حالت‌های  ${}^3P$  برآورد کنید.

۲۵۰۴ گذار  ${}^3D \rightarrow {}^3P$  در سدیم را تحلیل کنید. جدایی طول موجهای این گذار را، در صورت وجود، تعیین کنید.

۲۶۰۴ انرژی فوتونهای «سرخ» ( $6500 \text{ \AA}$ ) و «آبی» ( $4000 \text{ \AA}$ ) را بر حسب الکترون ولت محاسبه کنید. بسا به کار بردن مقیاس انرژی شکل ۱۸.۴، تعیین کنید که کدام یک از گذارهای تک تایی و سه تایی برای کلسیوم در گستره مرئی طیف قرار دارند. برآوردهای تقریبی خود را با جدول طول موجها مقایسه کنید.

۲۷.۴ رابطه ترازهای انرژی الکترون ظرفیت در اتمهای بایک الکترون ظرفیت، به صورت زیر است

$$E_n = -Rhc(Z - \delta)^2 / (n - \delta)^2$$

که در آن  $\delta$  ثابت استتار و  $\delta$  نقص کوانتومی است (که به مقادیر  $n$  و  $l$  الکترون ظرفیت مورد نظر وابسته است). مقادیر  $\delta$  برای لیتیم و سدیم عبارت اند از

	s	p	d
Li ( $Z=3$ )	۰.۳۵	۰.۵۴	۰.۵۵
Na ( $Z=11$ )	۱.۳۷	۰.۸۸	۰.۵۱

برای  $\delta$ ، مقداری مساوی با تعداد الکترونها موجود در مغز اختیار می شود. انرژی حالت پایه و اولین دوسطح برانگیخته الکترون ظرفیت را در لیتیم و سدیم به دست آورید. [دانهمایی: از شکل ۱۶.۴ استفاده کنید.]

۲۸.۴ گذار از تراز  $3p$  به تراز  $3s$  سدیم به گسیل خطی با طول موج  $5890 \text{ \AA}$  منجر می شود (از ساختار دوتایی چشم می پوشیم). با به کار بردن مقادیر ترازهای انرژی داده شده با رابطه مسئله ۲۷.۴، طول موج را محاسبه و با نتیجه تجربی مقایسه کنید. مسئله را برای گذار  $2p \rightarrow 2s$  در لیتیم تکرار کنید.

۲۹.۴ به کمک اطلاعات موجود در شکل ۱۴.۴، انرژی لبه های جذب  $K$  و  $L$  را برای آلومینیوم و اکسیژن برآورد کنید. منحنی جذب پرتو ایکس را برای این دو ماده در همان ناحیه رسم کنید.

۳۰.۴ خطوط  $K_{\alpha}$  زیر محاسبه شده اند

۵۸۳۶ $\text{\AA}$	گوگرد	۹۸۷ $\text{\AA}$	منیزیم
۲۲۹ $\text{\AA}$	کروم	۳۳۵ $\text{\AA}$	کلسیم
۱۵۴ $\text{\AA}$	مس	۱۷۹ $\text{\AA}$	کوبالت
۵۲۱ $\text{\AA}$	تنگستن	۵۹۳ $\text{\AA}$	روبییدیم

ریشه دوم بسامد  $K_{\alpha}$  را بر حسب عدد اتمی عنصر رسم کنید. در سال ۱۹۱۲، یکی از شاگردان جوان ارنست رادرفورد به نام موزلی یک رابطه تجربی به صورت  $\sqrt{\nu} = A(Z - c)$  به دست آورد (از این رابطه برای توضیح مفهوم عدد اتمی استفاده می شود). به کمک شکل، این رابطه را اثبات و مقادیر  $A$  و  $c$  را برآورد کنید. رابطه موزلی را توضیح دهید.

۳۱.۴ طول موجها و انرژیهای خطوط  $K_{\alpha}$  پرتو ایکس آلومینیوم، پتاسیوم، آهن، نیکل،

روی، مولیبدن، و نقره را محاسبه کنید. مقادیر انرژی را با مقادیر نشان داده شده در شکل ۱۴.۴ مقایسه کنید. از تابع موزلی که در مسئله قبل آمد استفاده کنید.

۳۲.۴ طول موج خط  $K_{\alpha}$  کوبالت  $1.785 \text{ \AA}$  است. اختلاف انرژی میان اوربیتالهای  $1s$  و  $2p$  در کوبالت چقدر است؟ این مقدار را با اختلاف انرژی میان اوربیتالهای  $1s$  و  $2p$  در هیدروژن (یعنی اولین خط لیمان) مقایسه کنید. چرا این اختلاف برای کوبالت خیلی بیشتر از اختلاف متناظر برای هیدروژن است؟

۳۳.۴ (الف) لبه جذب  $K$  برای تنگستن برابر  $0.178 \text{ \AA}$  و میانگین طول موجهای خطوط سری  $K$  نیز برابرند با  $0.210 \text{ \AA}$ ،  $K_{\alpha} = 0.210 \text{ \AA}$ ،  $K_{\beta} = 0.184 \text{ \AA}$ ، و  $K_{\gamma} = 0.179 \text{ \AA}$ . نمودار تراز انرژی پرتو ایکس تنگستن را شبیه آنچه در شکل ۲۰.۴ ارائه شد، رسم کنید. (ب) چه کمینه انرژی برای برانگیختن سری  $L$  تنگستن مورد نیاز است؟ طول موج خط  $L_{\alpha}$  را تعیین کنید.

۳۴.۴ لبه جذب  $L_1$  در تنگستن برابر  $1.02 \text{ \AA}$  است. با فرض اینکه یک فوتون  $K_{\alpha}$  به وسیله یکی از الکترونها  $2s$  در فرایند اوژه جذب شود، سرعت فوتوالکترون گسیل شده را تعیین کنید.

## مراجع

1. "Spectra Inform Us About Atoms," W. Meggers, *The Physics Teacher*, 2, 303 (1964).
2. "Basic Concepts of Self-Consistent Field Theory," S. Blinder, *Am. J. Phys.*, 33, 431 (1965).
3. "Terms Obtained from Configurations of Equivalent Electrons," E. Tuttle, *Am. J. Phys.*, 35, 26 (1967).
4. "Physical Basis for Hund's Rule," N. Karayianis, *Am. J. Phys.*, 32, 216 (1964) and 33, 201 (1965).
5. "H. G. J. Moseley," L. Redman, *The Physics Teacher*, 3, 151 (1965).
6. "The Scientific Career of Charles Barkla," R. Stephenson, *Am. J. Phys.*, 35, 140 (1967).
7. *Atomic Spectra and Atomic Structure*, G. Herzberg, New York: Dover, 1955, Chapters 1 and 2.
8. *Atomic Spectra*, R. Johnson, New York: John Wiley, 1950.
9. *The Behavior of Electrons in Atoms*, R. Hochstrasser, New York: Benjamin, 1965.
10. *Elements of Wave Mechanics*, N. Mott, Cambridge, England:

Cambridge University Press, 1962, Chapter 5; Sections 2.2, 2.3, 4.5, and 4.6.

11. *Structure of Matter*, W. Finkelburg, New York: Academic Press, 1964, Chapter 3, Sections 8 and 11-17.
12. *Quantum Theory of Matter*, J. Slater, New York: McGraw-Hill, 1951, Chapters 6 and 7.
13. *A Source Book in Physics*, W. Magie, Cambridge, Mass: Harvard University Press, 1963, page 600 (Roentgen).
14. *Atomic Spectra*, W. Hindmarsh, New York; Pergamon Press, 1967.
15. *Principles of Modern Physics*, R. Leighton, New York; McGraw-Hill, 1959, Chapters 7 and 8.



## مولکولها

مقدمه	۱۰۵
یون مولکول هیدروژن	۲۰۵
اوربیتالهای مولکولی مولکولهای دو اتمی	۳۰۵
پیکربندی الکترونی بعضی از مولکولهای دو اتمی	۴۰۵
مولکولهای چند اتمی	۵۰۵
مولکولهای مزدوج	۶۰۵
چرخشهای مولکولی	۷۰۵
ارتعاشات مولکولی	۸۰۵
گذارهای الکترونی در مولکولها	۹۰۵
نتیجه	۱۰۰۵

## ۱۰۵ مقدمه

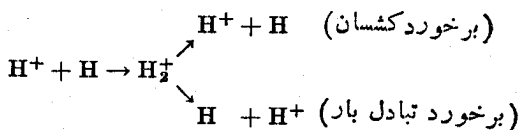
يك مسئله بسیار مهم مربوط به ساختار ماده، مطالعه ساختار مولکولهاست. چرا اتمهای کربن یا چهار اتم هیدروژن ترکیب می‌شوند و متان تشکیل می‌دهند ولی هرگز باسه یا پنج اتم هیدروژن ترکیب نمی‌شوند؟ چرا مولکول  $\text{CO}_2$  خطی، مولکول  $\text{H}_2\text{O}$  خمیده، و مولکول  $\text{NH}_3$  هرمی شکل است؟ چرا مولکول بنزن ( $\text{C}_6\text{H}_6$ ) يك شش وجهی است که در آن تمام اتمهای هیدروژن در يك صفحه قرار دارند؟ چرا اتمهای هیدروژن می‌توانند با هم ترکیب شوند و مولکول  $\text{H}_2$  تشکیل دهند در حالی که هرگز  $\text{H}_3$  تشکیل نمی‌دهند؟ چرا طیف مولکولها در مقایسه با طیف اتمها، بسیار پیچیده‌تر است و گستره آن از امواج میکرو تا فرابنفش را در بر می‌گیرد؟ تا قبل از پیدایش نظریه کوانتومی، ایسن پرسشها و بسیاری پرسشهای دیگر بدون پاسخ بودند. در واقع، یکی از موفقیت‌های جالب توجه نظریه کوانتومی پاسخ دادن به سؤالات زیادی است که فیزیکدانان و شیمی‌دانان در باره ساختار مولکولی ماده مطرح کرده بودند. در عین حال نمی‌توان گفت که نظرها در باره ساختار مولکولی يك نظر نهایی و کامل در فیزیک است.

مطالعه مولکولها را با طرح این سؤال آغاز می‌کنیم: مولکول چیست؟ اولین پاسخ این است که بگوییم مولکول عبارت است از گروهی اتم که از طریق نوعی برهم کنش به هم پیوسته‌اند. اما این پاسخ بلافاصله پرسش دیگری را در ذهن برمی‌انگیزد. آیا اتمهای این گروه حالت فردیت خود را حفظ می‌کنند؟ آیا هنگامی که مولکول تشکیل می‌شود حرکت الکترونها تحت تأثیر آن قرار می‌گیرد؟ چه نوع برهم کنشی منجر به تشکیل مولکول می‌شود؟ ضمناً می‌توان نظر دیگری را در این باره مطرح کرد و گفت مولکول عبارت است از يك گروه هسته که به وسیله الکترونها به گونه‌ای محاصره شده است که يك آرایش پایدار تشکیل می‌دهد. این نظر تعمیم ساده‌ای از مفهوم اتم است که بنا به آن اتم متشکل است از هسته‌ای که به وسیله الکترونها محصور شده است. بنابراین، به جای اینکه مولکول  $\text{H}_2$  را متشکل از دو اتم هیدروژن بدانیم، می‌توانیم آن را به صورت دو پروتون و دو الکترون در نظر بگیریم که بر طبق قوانین مکانیک کوانتومی آرایش گرفته و به وسیله نیروهای الکترومغناطیسی به یکدیگر پیوسته‌اند. این تعریف از لحاظ ساختاری از تعریف اول اساسی‌تر است. اما، همچنانکه در بسیاری موارد معمول است، اتخاذ يك وضع بینابینی بسیار راحت‌تر است. هنگامی که دو اتم با یکدیگر ترکیب می‌شوند و تشکیل مولکول می‌دهند، الکترونهاً قویاً مقید، یا داخلی (که پوسته‌های کامل مغزهای اتم مربوط خود را پر می‌کنند) عملاً مختل نمی‌شوند و مقید به هسته‌های خود باقی می‌مانند. تنها الکترونهاً خارجیتر (یا الکترونهاً ظرفیت) موجود در پوسته‌های تکمیل نشده تحت تأثیر قرار می‌گیرند و در اثر برابندنیروهای یونها (متشکل از هسته‌ها و مغزها) و نیروهای دافعه متقابل میان خود حرکت می‌کنند. این الکترونهاً ظرفیت پیوند شیمیایی و نیز بسیاری از خواص فیزیکی مولکول را تعیین می‌کنند. در این فصل از این وضع بینابینی به عنوان مدلی برای تحلیل ساختار مولکولی استفاده می‌کنیم، که البته يك تقریب بسیار خوب است.

## ۲.۵ یون مولکول هیدروژن

یون مولکول هیدروژن ( $H_2^+$ ) که شامل دو پروتون و یک الکترون است ساده ترین مولکولهاست. شیمییدانان تشکیل این مولکول را به صورت  $H + H^+ \rightarrow H_2^+$  می نویسند که در آن  $H^+$  پروتون است. به عبارت دیگر، مولکول  $H_2^+$  هنگامی تشکیل می شود که اتم هیدروژن یک پروتون بگیرد. اما هنگامی که مولکول  $H_2^+$  تشکیل شد، دیگر این امکان وجود ندارد که گفته شود کدام یک اتم هیدروژن است و کدام یک پروتون. تصویر چنین مولکولی در شکل ۱.۵ نشان داده شده است و در آن یک الکترون در میدان الکتریکی دو پروتونی که به فاصله  $r$  از هم قرار دارند حرکت می کند.

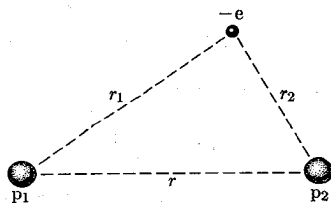
می توان گفت که الکترون به خاطر نمی آورد که ابتدا به کدام پروتون تعلق داشته است. این فراموشی الکترون هنگام برخورددهای متبادل بار به وضوح آشکار می شود. فرض می کنیم که الکترون در آغاز متعلق به پروتون  $p_1$  باشد و پروتون  $p_2$  از فاصله دور واقع در طرف راست به اتم هیدروژن نزدیک شود (شکل ۲.۵). در ناحیه کمترین فاصله نزدیکی، مولکول  $H_2^+$  فقط مدت کوتاهی دوام می آورد و پس از آن می شکند. هنگامی که این اتفاق افتاد، احتمال معینی وجود دارد که پروتون ورودی الکترون را با خود همراه ببرد. بنابراین، فرایند بالا را می توان به صورت زیر نوشت



احتمال نسبی دو فرایند بالا را می توان به صورت تابعی از انرژی پروتون ورودی محاسبه کرد. نتیجه به خوبی با شواهد تجربی سازگار است.

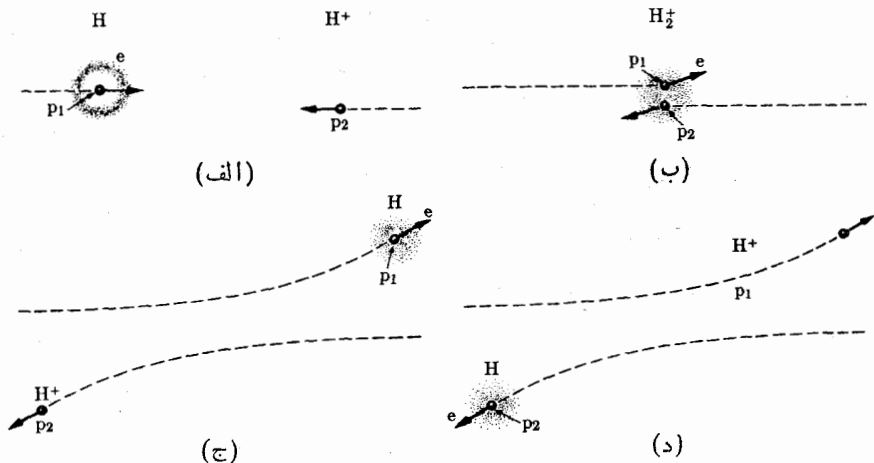
برای بحث درباره ویژه حالت های مولکول  $H_2^+$  ابتدا فرض می کنیم که دو پروتون در حالت سکون نسبی قرار دارند و معادله شرودینگر را با انرژی پتانسیل زیر می نویسیم

$$E_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r} \right) \quad (1.5)$$



شکل ۱.۵ یون مولکول  $H_2^+$

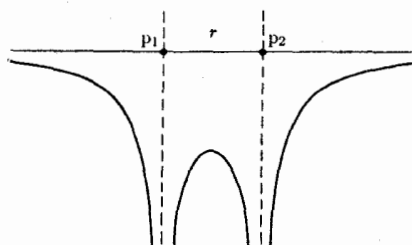




شکل ۲۰۵ (الف) و (ب) برخورد اتم هیدروژن (H) و پروتون ( $H^+$ )، آنطور که در چارچوب مرجع مرکز جرم دیده می‌شود. (ج) برخورد کشسان. (د) برخورد تبادل بار.

دو جمله اول داخل پرانتز، انرژی پتانسیل جاذبه میان الکترون و دو پروتون و جمله سوم انرژی پتانسیل دافعه میان دو پروتون است. تغییرات انرژی پتانسیل الکترونی در امتداد خط واصل میان دو پروتون در شکل ۳۰۵ نشان داده شده است. این شکل به چاه پتانسیل دو گانه‌ای که در بخش ۸۰۲ برای مولکول  $NH_3$  به دست آوردیم شبیه است.

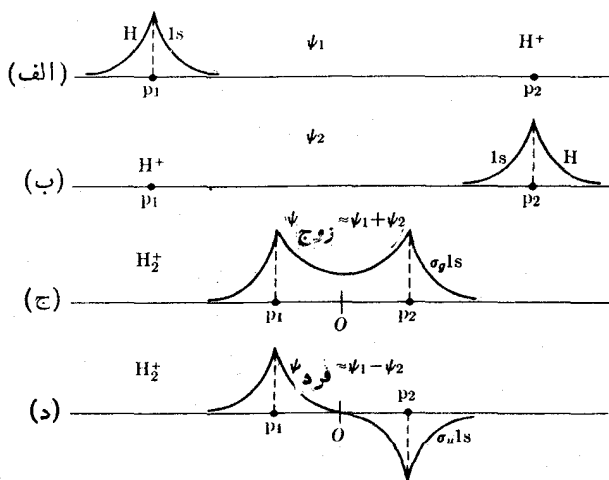
حل معادله شرودینگر برای  $H_2^+$ ، که نسبتاً پیچیده‌تر است، در مثال ۲۰۵ خواهد آمد. اما، فعلاً می‌خواهیم یک استدلال شهودیترا دنبال کنیم. ابتدا وضعی را در نظر می‌گیریم که در آن الکترون در آغاز به دور پروتون  $p_1$  می‌چرخد و اتم هیدروژن را در حالت پایه (حالت ۱s) تشکیل می‌دهد و پروتون  $p_2$  (یا  $H^+$ ) نیز در فاصله خیلی دوری در طرف راست آن قرار دارد. تابع موج الکترون عملاً تحت تأثیر پروتون  $p_1$  قرار نمی‌گیرد و از



شکل ۳۰۵ انرژی پتانسیل در امتداد خط واصل میان دو هسته در  $H_2^+$  و  $H_2$ .

این رو بر تابع  $1s$  هیدروژن که در شکل ۹.۳ رسم شده است منطبق است. بنا براین، هرگاه تابع موج الکترون را در امتداد خط واصل میان دو پروتون بر حسب تابعی از فاصله تا  $p_1$  رسم کنیم منحنی شکل ۴.۵ (الف) به دست می آید. این شکل نشان می دهد که الکترون را عمدتاً می توان حول پروتون  $p_1$  پیدا کرد. اکنون فرض می کنیم که الکترون در آغاز حول پروتون  $p_2$  می چرخد و اتم هیدروژن را در حالت  $1s$  تشکیل می دهد و پروتون  $p_1$  نیز در فاصله دور در طرف چپ آن قرار دارد. در این صورت تابع موج الکترون تابعی است که در شکل ۴.۵ (ب) نشان داده شده است.

با کاهش فاصله جدایی میان دو پروتون، تابع موج الکترون مختل می شود زیرا پروتون نزدیک شونده  $[p_2]$  در شکل ۴.۵ (الف) و  $p_1$  در شکل (ب) می کشد که الکترون را از پروتون دیگر دور کند و به طرف خود بکشد. تقارن انرژی پتانسیل الکترون در شکل ۴.۵ نشان می دهد که، توزیع احتمال الکترون نیز باید به همین طریق متقارن باشد. از این رو، وقتی مولکول  $H_2^+$  تشکیل شد، تابع موج الکترون باید قله های مشخصی حول هر پروتون که در آن انرژی پتانسیل، مطابق شکل ۴.۵، کم است داشته باشد. دو تابع موج ممکن  $H_2^+$  که تقارن مربوط به توزیع احتمال خود را دارا هستند در شکل های ۴.۵ (ج) و (د) نشان داده شده اند. تابع موج شکل (د) نسبت به مرکز مولکول یعنی نسبت به نقطه  $O$  فرد و تابع موج شکل (ج) نسبت به آن نقطه زوج است. این تابع موجها را می توان به ترتیب به صورت زوج  $\psi_+$  و فرد  $\psi_-$  نشان داد. به طور تقریبی، می توان هر یک از این دو تابع موج را به صورت ترکیب خطی تابع موجهای هیدروژن (یا اوربیتالهای اتمی)  $\psi_1$  و  $\psi_2$  بیان کرد. توابع اخیر



شکل ۴.۵ اوربیتالهای مولکولی زوج و فرد در  $H_2^+$

هر کدام با الکترونی متناظرند که حول یکی از دو پروتون ۱ و ۲ می چرخند. از این رو

$$(۲.۵) \quad \psi_1 - \psi_2 \approx \text{فردی}, \quad \psi_1 + \psi_2 \approx \text{زوجی}$$

این تابع موجها به اوربیتالهای مولکولی، با علامت اختصاری MO معروف اند. نظریه ای که برای نوشتن اوربیتالهای مولکولی از آن استفاده می کنیم نیز به ترکیب خطی اوربیتالهای اتمی یا LCAO معروف است.

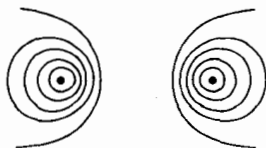
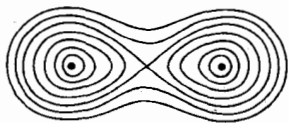
به دلایلی که بعداً بیان می شود حالتیهای متناظر با اوربیتالهای مولکولی زوج  $\psi$  و فردی  $\psi$  شکل ۴.۵ به صورت  $\sigma_g 1s$  و  $\sigma_u 1s$  نشان داده می شوند. همان طور که از توضیح زیر نتیجه می شود این حالتها باید انرژیهای متفاوتی داشته باشند. هر دو تابع موج می توانند بیشینه احتمال را برای یافتن الکترون در نزدیکی هریک از پروتونها به دست دهند و لسی مقدار زوج  $\psi$  در ناحیه میان پروتونها قابل توجه و مقدار فردی  $\psi$  در این ناحیه بسیار کوچک (یا صفر) است. این موضوع در شکل ۵.۵ نشان داده شده است. شکل ۵.۵ (الف) تغییر چگالی احتمال الکترون را در امتداد خط واصل میان دو پروتون و شکل ۵.۵ (ب) خطوط پربند احتمال یکسان در صفحه ای که از دو پروتون می گذرد و بالاخره شکل ۵.۵ (ج) نواحی سایه دار معرف احتمال نسبی یافتن الکترون در مکانهای مختلف را نشان می دهند.

هنگامی که الکترون در ناحیه میان دو پروتون قرار دارد پروتونها را همزمان می کشد و در نتیجه دافع الکتریکی آنها را خنثی می کند. هنگامی که الکترون در یکی از دو طرف پروتون قرار دارد به جدا شدن آنها کمک می کند. به عبارت دیگر، وقتی الکترون در ناحیه میان دو پروتون قرار دارد، مثل «چسب» آنها را بهم می چسباند و یک پیکر بندی پایدار تشکیل می دهد. از لحاظ انرژی می توان گفت که انرژی حالت  $\sigma_g 1s$  متناظر با زوج  $\psi$  کمتر

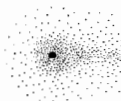


(الف)

(ب)



(ج)

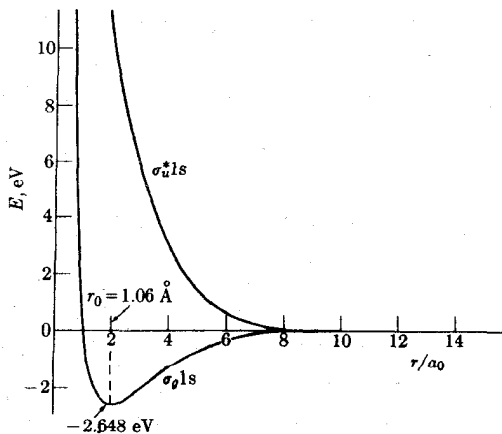


شکل ۵.۵ چگالی احتمال اوربیتالهای مولکولی زوج و فرد در  $H_2^+$ . (الف) توزیع در امتداد خط واصل میان دو پروتون، (ب) و (ج) توزیع در صفحه ای که از دو پروتون می گذرد.

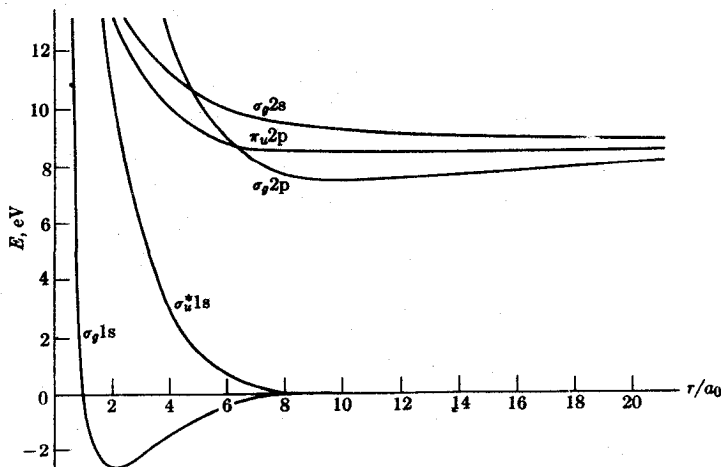
از انرژی حالت  $\sigma_{u,1s}$  متناظر با فرد  $\psi$  است. به تشابه میان بحث ما در مورد تابع موجهای  $H_2^+$  و بحث قبلی ما دربارهٔ چاه پتانسیل دو گانه در مثال ۷.۲ توجه کنید.

اختلاف در انرژی میان حالت‌های  $\sigma_g, 1s$  و  $\sigma_{u,1s}$  به فاصلهٔ جدایی دو پروتون بستگی دارد. فرض کنید که بحث را با اتم هیدروژن و پروتون  $H^+$  که در فاصلهٔ دور از آن قرار دارد آغاز می‌کنیم. هنگامی که فاصلهٔ میان آنها کاهش یابد دو انرژی متفاوت را برای هر فاصله به دست می‌آوریم که یکی با حالت  $\sigma_g, 1s$  یا تابع موج زوج  $\psi$  و دیگری با حالت  $\sigma_{u,1s}$  یا تابع موج فرد  $\psi$  متناظر است. چون انرژی پتانسیل جاذبهٔ منفی الکترون بر انرژی پتانسیل دافعهٔ مثبت پروتون در حالت  $\sigma_g, 1s$  غلبه می‌کند لذا با کاهش  $r$  انرژی خالص نیز کاهش می‌یابد. حالت عکس، برای  $\sigma_{u,1s}$  رخ می‌دهد و با کاهش  $r$  انرژی خالص افزایش می‌یابد. اما، برای فواصل کوچکتر از مقدار مشخص  $r_0$  پروتون‌ها به قدری نزدیک یکدیگر قرار دارند که حتی در حالت  $\sigma_g, 1s$  نیز انرژی پتانسیل دافعهٔ آنها بر انرژی پتانسیل جاذبهٔ الکترون غلبه می‌کند. از این رو، برای فواصل کمتر از  $r_0$ ، با کاهش  $r$  انرژی متناظر با زوج  $\psi$  افزایش می‌یابد. منحنی انرژیهای حاصل در شکل ۶.۵ نشان داده شده است.

در اینجا مستقیماً نتیجه می‌گیریم که منحنی انرژی برای  $\sigma_g, 1s$  یا زوج  $\psi$  مقدار کمینه‌ای (متناظر با فاصلهٔ جدایی تعادل دو پروتون) در بردارد که پیکربندی پایدار برای  $H_2^+$  فراهم می‌کند. ولی منحنی انرژی مربوط  $\sigma_{u,1s}$  یا فرد  $\psi$  چنین مقدار کمینه‌ای ندارد و از این رو، پیکربندی پایدار (یا مولکول) از آن نتیجه نمی‌شود. بنا بر این، می‌توان گفت که زوج  $\psi$  یک تابع موج پیوندی و فرد  $\psi$  یک تابع موج پاد پیوندی است. حالت‌ها و تابع موجهای پاد پیوندی را با ستاره مشخص می‌کنند و آنها را به صورت  $\sigma_{u,1s}^*$  می‌نویسند. فاصلهٔ جدایی تعادل پروتونی برای یون  $H_2^+$  در حالت پیوندی  $\sigma_g, 1s$  برابر است با  $1.06 \times 10^{-10} m$  و انرژی این حالت در مقدار کمینه نسبت به سیستم  $H$  (در حالت پایه)



شکل ۶.۵ انرژی پتانسیل الکترونی بر حسب تابعی از فاصلهٔ میان هسته‌ای در  $H_2^+$  برای حالت‌های  $\sigma_g, 1s$  و  $\sigma_{u,1s}^*$ .

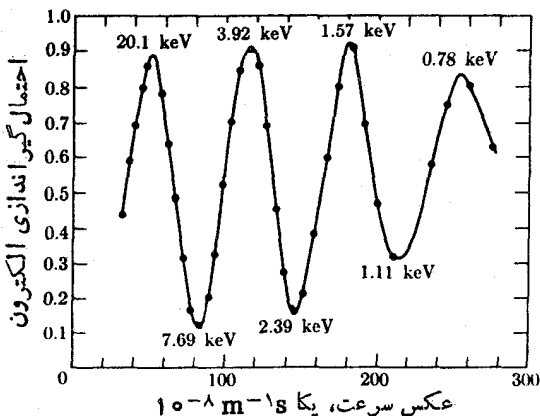


شکل ۷.۵ انرژیهای پتانسیل الکترون در  $H_2^+$  برای حالت پایه و چند حالت برانگیخته.

به اضافه  $H^+$  (در فاصله بینهایت) برابر است با  $۲۶۴۸ eV$  - در همین فاصله جدایی، انرژی حالت پادپیوندی  $\sigma_u^* 1s$  نسبت به همان حالت مرجع در حدود  $۱۰۵۲ eV$  + است. حالت‌های مولکول  $H_2^+$  که در بالا بررسی کردیم با موردی متناظرند که در آن اتم هیدروژن در آغاز در حالت پایه است. اما منحنیهای دیگری نیز شبیه به منحنیهای شکل ۶.۵ وجود دارند که با حالت‌های الکترونی برانگیخته مولکول متناظرند و به اتم هیدروژنی وابسته‌اند که در آغاز در حالت برانگیخته قرار دارد. شکل ۷.۵ چند منحنی انرژی پتانسیل ممکن را نشان می‌دهد که با حالت‌های الکترونی برانگیخته  $H_2^+$  متناظرند. نمادگذاری این حالتها را بعداً بررسی می‌کنیم.

مثال ۱.۵ برخورد تبادل بار  $H + H^+ \rightarrow H^+ + H$  را بررسی کنید.

حل: فرض می‌کنیم یک باریکه پروتون تند (یا یون  $H^+$ )، از میان گاز هیدروژن واقع در حالت اتمی (که برای آن، دما باید حداقل  $۲۴۰۰ K$  و فشار نیز  $۱۰$  میکرون جوهره یا کمتر باشد) عبور می‌کند. پروتونهای پراکنده شده تحت زاویه ثابتی مشاهده می‌شوند. در فرایند پراکنندگی تعدادی از پروتونهای ورودی الکترون اتمهای هیدروژن را گیر می‌اندازند. معلوم شده است که احتمال گیراندازی الکترون توسط پروتونهای ورودی با انرژی پروتونها تغییر می‌کند و به‌ازای بعضی انرژیهای پروتون بیشینه‌های قابل توجهی از خود



شکل ۸۰۵ احتمال گیراندازی الکترون در برخورد های تبادل بار بر حسب تابعی از عکس سرعت پروتون فرودی.

شان می دهد. شکل ۸۰۵ اطلاعات به دست آمده توسط لاک وود و اورهارت را نشان می دهد که در آن احتمال گیراندازی الکترون بر حسب عکس سرعت پروتون رسم شده است. پیشینه احتمال در انرژی هایی که نشان داده شده است دیده می شود. جنبه جالب این شکل آن است که این پیشینه ها به فاصله یکسان  $1/v$  از هم قرار دارند.

تعبیر کوانتوم مکانیکی این مطلب بسیار ساده است. در آغاز هنگامی که پروتون در فاصله دوری از اتم هیدروژن قرار دارد، تابع موج الکترون خیلی شبیه به تابع  $\psi_1$  در شکل ۴۰۵ است یعنی

$$\psi(t=0) = \psi_1 \approx \frac{1}{2} (\psi_{\text{زوج}} + \psi_{\text{فرد}})$$

همچنان که پروتون به اتم هیدروژن نزدیک می شود، تابع موج بر طبق معادله (۲۹.۲) به صورت تابع وابسته به زمان درمی آید. تابع موج وابسته به زمان را می توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{1}{2} (\psi_{\text{زوج}} e^{-iE't/\hbar} + \psi_{\text{فرد}} e^{-iE't/\hbar}) \\ &= \frac{1}{2} (\psi_{\text{زوج}} + \psi_{\text{فرد}} e^{-i\Delta E t/\hbar}) e^{-iE't/\hbar} \end{aligned}$$

که در آن  $\Delta E = E' - E$  اختلاف انرژی میان حالت های  $\sigma_u^* 1s$  و  $\sigma_g 1s$  پروتون به اضافه سیستم اتم هیدروژن است. در زمان  $t = \pi\hbar/\Delta E$  خواهیم داشت

$$\psi\left(t = \frac{\pi\hbar}{\Delta E}\right) = \frac{1}{2}(\psi_{\text{زوج}} - \psi_{\text{فرد}})e^{-iEt/\hbar} \approx \psi_{\text{فرد}}e^{-iEt/\hbar}$$

و الکترون به طرف پروتون ورودی جهش می کند زیرا سیستم با تابع موج  $\psi_{\text{فرد}}$  متناظر می شود. در زمان  $t = 2\pi\hbar/\Delta E$  الکترون به نزدیک پروتون اولیه برمی گردد. بنا بر این، می توان گفت هنگامی که پروتون ورودی  $p_2$  از نزدیکی پروتون هدف  $p_1$  عبور می کند، الکترون بسا دوره تناوب زیر مرتباً به طرف جلو و عقب از یک پروتون به طرف پروتون دیگر رفت و برگشت می کند

$$P = \frac{2\pi\hbar}{\Delta E} = \frac{h}{\Delta E}$$

برای اینکه الکترون گیر بیفتند لازم است وقتی پروتون ورودی  $p_2$  پروتون هدف  $p_1$  را پشت سر می گذارد الکترون در نزدیکی  $p_2$  باشد. در انرژیهای نشان داده شده در شکل ۸.۵، پروتون پرتابی  $p_3$  باید از فاصله خیلی نزدیکی (در حدود  $10^{-12}$  m) از پروتون هدف  $p_1$  عبور کند. می توان فرض کرد که اختلال در تابع موج الکترون فقط وقتی رخ می دهد که  $p_2$  در داخل مقطعی از مسیر به طول  $a$  باشد.

هر گاه  $v$  سرعت پروتون باشد، زمانی که در طی آن برهم کنش روی می دهد برابر  $\tau = a/v$  است. فرض می کنیم که بیشینه احتمال گیراندازی در سرعت  $v_1$  باشد. در این صورت زمان برهم کنش با  $\tau_1 = a/v_1$  برابر خواهد بود. بیشینه احتمال گیراندازی بعدی باید در زمان  $\tau_2$  صورت گیرد که از رابطه زیر به دست می آید

$$\tau_2 = \tau_1 + P$$

بنا بر این الکترون زمان کافی برای انجام یک نوسان کامل اضافی دارد و مجدداً به نزدیکی پروتون پرتابی برمی گردد. از این رو

$$P = \tau_2 - \tau_1$$

یا

$$\frac{h}{\Delta E} = a\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right)$$

بنا بر این اختلاف میان بیشینه های متوالی یعنی  $1/v_2 - 1/v_1$  باید یک مقدار ثابت باشد. به تجربه معلوم شده است که مقدار میانگین برابر  $6.6 \times 10^{-27} \text{ m}^{-1} \text{ s}$  است. در نتیجه

$$a\Delta E \approx 10^{-27} \text{ m J} \approx 6.6 \times 10^{-9} \text{ eV}$$

کمیت  $\Delta E$  (یعنی فاصله انرژی میان منحنیهای  $\sigma_u^2$  و  $\sigma_p^2$ ) ثابت نیست زیرا به فاصله جدایی پروتونها بستگی دارد (شکل ۶.۵). به طریقی مشابه، کمیت  $a$  نیز کاملاً مشخص نیست.

با در نظر گرفتن مقدار  $10 \text{ eV}$  برای  $\Delta E$ ، که با توجه به منحنی شکل ۶.۵ منطقی به نظر می رسد، خواهیم داشت  $10^{-10} \text{ m} \sim 6a$  یا در حدود شش برابر قطر مولکول که موجه و پذیرفتنی است.

تحلیل مفصلتر نیازمند محاسبه نظری کمیت  $a\Delta E$  است در حالی که ما در اینجا مقادیر تخمین زده شده را در دست داشتیم. سازگاری با نتایج تجربی نیز کاملاً رضایتبخش است.

**مثال ۲.۵** محاسبه انرژی حالت پایه  $H^+$  با به کار بردن تابع موجهای داده شده با معادله (۲.۵).

**حل:** عملگر هامیلتونی الکترون متحرک به اضافه دو پروتون، که بنا به فرض در حال سکون اند، عبارت است از

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r} \right) \quad (3.5)$$

که در آن، طبق جدول ۴.۲ جمله اول همان عملگر انرژی جنبشی الکترون است و سه جمله آخر نیز، همان طور که از معادله (۱.۵) دیده می شود انرژی پتانسیل یون را به دست می دهد. هر گاه یکی از دو تابع موج  $\psi_1 + \psi_2 = \psi$  و  $\psi_1 - \psi_2 = \psi$  فرد  $\psi$  را با  $\psi$  نشان دهیم بر طبق معادله (۵.۱.۲)، میانگین انرژی الکترون در  $H^+$  عبارت است از

$$E = \frac{\int \psi^* H \psi d\tau}{\int \psi^* \psi d\tau} \quad (4.5)$$

برای سهولت فرض می کنیم که دو تابع موج اتمی  $\psi_1$  و  $\psi_2$  با حالت اتمی یکسانی با انرژی  $E_0$  متناظرند. به عنوان مثال، در حالت پایه  $H^+$  این دو تابع موج، تابع موجهای هیدروژن گونه ۱S هستند. هنگامی که  $\psi_1$  و  $\psi_2$  حقیقی اند (همان طور که در مورد تابع موجهای ۱S چنین است) با به کار بردن معادله (۴.۵) و انجام یک محاسبه آسان (که در اینجا از ذکر آن خودداری می کنیم) می توان میانگین انرژی الکترون را به صورت زیر به دست آورد

$$E = E_0 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{A \pm B}{1 \pm S} \quad (5.5)$$

که در آن علامت مثبت با زوج  $\psi$  و علامت منفی با فرد  $\psi$  متناظر است. در این معادله،  $S = \int \psi_1 \psi_2 d\tau$  به انتگرال دی هم افتاده معروف است و مقدار آن بستگی دارد به اینکه اوربیتالهای اتمی  $\psi_1$  و  $\psi_2$  وابسته به پروتونهای متفاوت تا چه حد در فضا بر روی هم می افتند، یعنی تا چه حد  $\psi_1$  و  $\psi_2$  مقادیر قابل توجهی در یک ناحیه یکسان از فضا دارند. واضح است که  $S$  تابعی از فاصله جدایی  $r$  دو پروتون است و با کاهش  $r$  مقدار آن افزایش می یابد. ضمناً

$$A = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\psi_1^2}{r_1} d\tau = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\psi_2^2}{r_1} d\tau$$

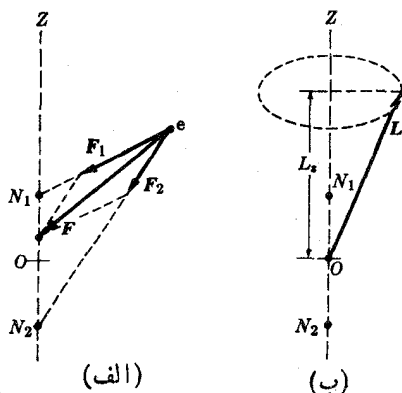


$$B = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\psi_1 \psi_2}{r_1} d\tau = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\psi_1 \psi_2}{r_2} d\tau$$

انتگرالهای  $A$  و  $B$  توابعی از فاصله جدایی هسته‌ای،  $r$  هستند. نموداری از انرژی  $E$  که با معادله (۵.۵) داده شده است، بر حسب تابعی از  $r$  منحنیهای شبیه به منحنیهای موجود در شکل ۶.۵ به دست می‌دهد. بنا بر این، همان‌طور که قبلاً به‌طور شهودی هم پیشگویی شده بود، دو حالت انرژی ممکن به دست می‌آید که زوج  $\psi$  آن با انرژی پایینتر متناظر است. در معادله (۵.۵)، جمله اول انرژی اتم تشکیل شده از یک پروتون و الکترون را به دست می‌دهد و جمله دوم نیز انرژی دافعه دو پروتون است. همچنین  $A$  انرژی جاذبه الکترون و پروتون دیگر است و  $B$  و  $S$  نیز جمله‌های کاملاً کوانتومی اند که اصلاً مانسته کلاسیکی ندارند. توجه کنید که فقط اگر  $\psi_1$  و  $\psi_2$  به‌طور قابل توجهی روی هم بیفتند مقدار  $B$  محسوس و قابل توجه خواهد بود. هر گاه روی هم افتادن  $\psi_1$  و  $\psi_2$  قابل چشمپوشی باشد  $B$  و  $S$  بسیار کوچک‌اند و انرژی نیز با  $E = E_0 + e^2/4\pi\epsilon_0 r - A$  برابر می‌شود؛ هر گاه این انرژی بر حسب تابعی از  $r$  رسم شود مقدار کمینه ندارد. بدین ترتیب روی هم افتادن و تقارن تابع موج منجر به یک مولکول پایدار می‌شود.

### ۳.۵ اوربیتالهای مولکولی مولکولهای دو اتمی

بعد از مولکول  $H_2^+$  که فقط یک الکترون دارد، ساده‌ترین مولکول دیگر  $H_2$  است که فقط دو الکترون دارد. تحلیل این مولکول به آنچه دربارهٔ مولکول  $H_2^+$  گفته شد خیلی شبیه است ولی چندین اختلاف مهم نیز میان آنها وجود دارد. چون این مولکول نسبت به مولکول  $H_2^+$  یک الکترون بیشتر دارد باید، همچنان که در مورد اتم گفتیم (بخش ۳.۴)، اصل طرد را به کار گیریم، که ایجاب می‌کند اسپین الکترونها و حرکت مداری آنها را در نظر بگیریم. این بحث را با حرکت مداری الکترونها دنبال می‌کنیم. در هر مولکول دو اتمی (یا در هر مولکول خطی) الکترونها در داخل یک میدان نیروی مرکزی حرکت نمی‌کنند و بنابراین تکانه زاویه‌ای  $L$  هر الکترون ضمن حرکت ثابت باقی نمی‌ماند. در اینجا خطی را که از میان دو هسته عبور می‌کند به صورت محور  $Z$  انتخاب می‌کنیم (شکل ۹.۵)؛ نیروی پراپند وارد بر هر الکترون همیشه از میان محور  $Z$  می‌گذرد. به عبارت دیگر این نیرو محوری است. در این مورد، گشتاور نیروی وارد بر الکترون نسبت به  $O$  بر محور  $Z$  عمود است و بنابراین مؤلفهٔ تکانه زاویه‌ای در امتداد موازی با محور  $Z$  (یعنی  $L_z$ ) ثابت خواهد بود. همان‌طور که می‌دانیم، این مؤلفهٔ تکانه زاویه‌ای می‌تواند مقادیر  $L_z = m_l \hbar$  را داشته باشد که در آن  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . علامت  $m_l$  جهت چرخش الکترون به دور محور  $Z$  را تعیین می‌کند، اما، انرژی الکترون از جهت چرخش مستقل است. بنساین، برای مشخص کردن حالت هر الکترون فقط دانستن قدر مطلق  $m_l$  (یعنی  $|m_l| = \lambda$ ) کافی است.



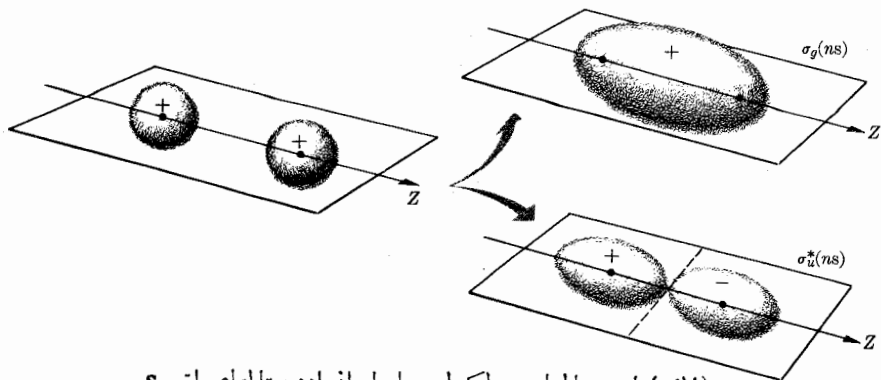
شکل ۹.۵ تکانه زاویه‌ای مدارهای الکترونی در یک مولکول دو اتمی.

حالت‌های مختلف تکانه زاویه‌ای به صورت زیر مشخص می‌شوند

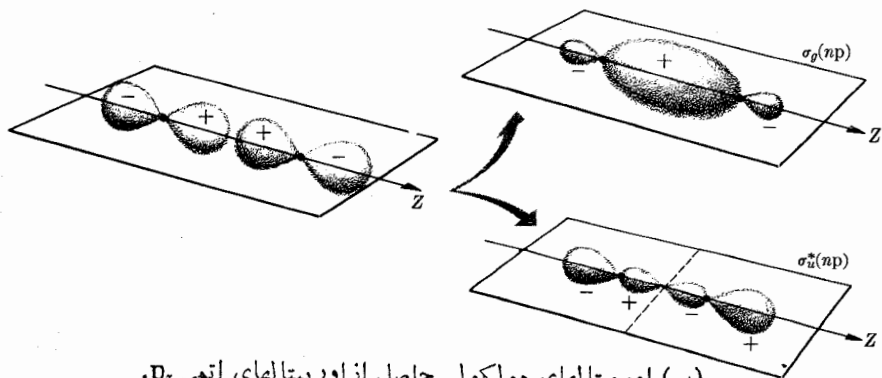
...	$\pm 3$	$\pm 2$	$\pm 1$	۰	:	$m_l$
...	۳	۲	۱	۰	:	$\lambda$
...	$\phi$	$\delta$	$\pi$	$\sigma$	:	نماد:

از این رو، بجز حالت‌های  $\sigma$ ، تمام حالت‌های تکانه زاویه‌ای دیگر دوبار تبهگن هستند زیرا  $m_l$  علامت دوگانه دارد. به علاوه، در هر یک از حالت‌های بالا، جهت اسپین الکترون نسبت به محور مولکولی می‌تواند به طرف بالا یا پایین باشد (که به ترتیب با  $1/2$  و  $m_s = +1/2$  و  $-1/2$  متناظر است)، بنابراین حالت‌های تکانه زاویه‌ای  $\sigma$  می‌توانند تعداد دو الکترون در خود جای دهند، یکی بسا اسپین به طرف بالا و دیگری با اسپین به طرف پایین؛ حالت‌های یاقیمانده  $\pi$ ،  $\delta$ ،  $\phi$ ، و... نیز می‌توانند هر کدام تا چهار الکترون در خود جای دهند که از آنها اسپین دو الکترون به طرف بالا و اسپین دو الکترون دیگر به طرف پایین خواهد بود. برای حالت‌های اوربیتالی مولکولی الکترون از نمادگذاری  $\lambda nl$  استفاده می‌کنیم (یعنی  $\delta nl$ ،  $\pi nl$ ،  $\sigma nl$  و مانند آن) که در آن  $nl$  برای نشان دادن اوربیتال‌های اتمی، که اوربیتال‌های مولکولی با ترکیب خطی آنها تشکیل می‌شود، به کار می‌رود. هر یک از این حالت‌های اوربیتالی مولکولی با انرژی متفاوتی متناظر است.

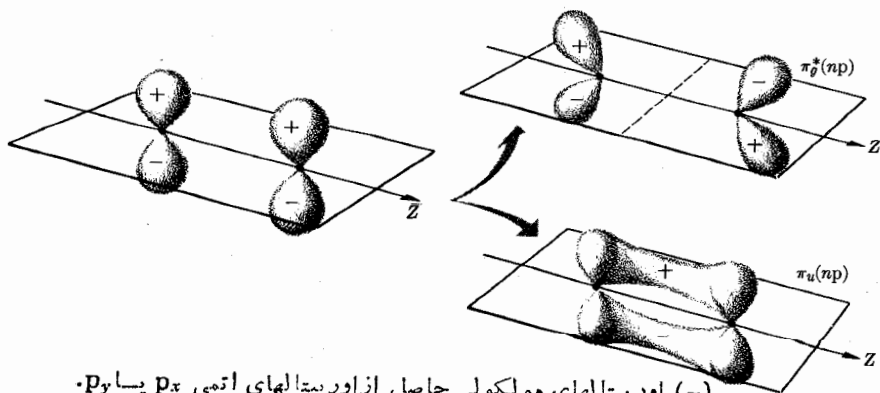
در مورد مولکول‌هایی که از دو هسته یکسان (مانند  $H_2$  و  $H_2^+$ ) تشکیل شده‌اند و به مولکول‌های همگن هسته معروف‌اند، یک تقارن بسیار مهم وجود دارد که باید در نظر گرفته شود. این مولکول‌ها مرکز تقارنی به نام  $O$  دارند؛ توزیع احتمال هر الکترون باید در نقاطی که نسبت به  $O$  متقارن‌اند یکسان باشد. بنابراین، تابع موج الکترون در نقاط متقارن بسا



(الف) اوربیتالهای مولکولی حاصل از اوربیتالهای اتمی s.



(ب) اوربیتالهای مولکولی حاصل از اوربیتالهای اتمی  $p_x$ .

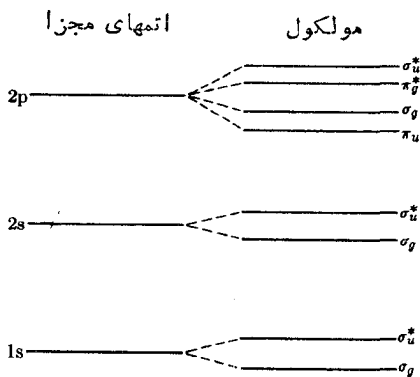


(ج) اوربیتالهای مولکولی حاصل از اوربیتالهای اتمی  $p_x$  یا  $p_y$ .

شکل ۱۰.۵ اوربیتالهای مولکولی در مولکولهای در اتمی ممکن هستند.

یکسان و یابکسان و با علامتهای مخالف باشد. به عنوان مثال، این وضعی است که برای  $H_2^+$ ، متناظر با تابع موجهای زوج  $\psi_+$  و فرد  $\psi_-$ ، در شکل ۴.۰۵ به دست آوردیم. حالتیهای تکانه زاویه‌ای بیان شده با تابع موجهای زوج  $\psi_+$  به حالتیهای  $g$  و حالتیهای بیان شده با تابع موجهای فرد  $\psi_-$  نیز به حالتیهای  $u$  معروف اند (این نامگذاری از روی کلمات آلمانی *gerade*، یا زوج، و *ungerade*، یا فرد، انتخاب شده است). بنا بر این، در مولکولهای همگن هسته حالتیهای  $\sigma_g$ ،  $\sigma_u$ ،  $\pi_g$ ،  $\pi_u$ ، و مانند آن وجود دارد. این موضوع، نمادگذاری بخش ۲.۰۵ را توجیه می‌کند. برای اینکه بفهمیم چگونه دو اتم با یکدیگر پیوند می‌خورند و مولکول تشکیل می‌دهند باید از تغییر فضایی توزیع احتمال الکترون متناظر با هر حالت تکانه زاویه‌ای آن آگاهی داشته باشیم. در شکل ۵.۰۵ (ب) این موضوع برای حالتیهای  $1s$ ،  $\sigma_g$ ،  $\sigma_u$  مولکول  $H_2^+$  مشخص شده است. روال کلی همین است که در مورد  $H_2^+$  انجام شده است. ابتدا دو اتم را در فاصله خیلی زیاد از یکدیگر در نظر می‌گیریم و حدس می‌زنیم که چگونه، ضمن اینکه دو اتم به هم نزدیک می‌شوند، تابع موجهای اتمی  $\psi_+$  و  $\psi_-$  به صورت خطی با یکدیگر ترکیب می‌شوند و یک تابع موج مولکولی یا اوربیتال  $\psi$  تشکیل می‌دهند.

شکل ۱۰.۵ چند تابع موج مولکولی یا اوربیتالهای ناشی از ترکیبهای خطی پاره‌ای از تابع موجهای اتمی مشخص (یا اوربیتالهای اتمی) را نشان می‌دهند. در این شکل فقط توزیع زاویه‌ای تابع موجها نشان داده شده است. شکل ۱۰.۵ (الف) حالتی را نشان می‌دهد که در آن دو تابع موج اتمی  $s$  که تقارن کروی دارند با هم ترکیب شده‌اند. دو تابع موج مولکولی حاصل که از ترکیب  $\psi_+$  و  $\psi_-$  به صورت  $\psi_+ \pm \psi_-$  به دست آمده‌اند در سمت راست نشان داده شده‌اند. این دو با حالتیهای  $\sigma_g$  و  $\sigma_u$  که قبلاً برای  $H_2^+$  بحث شد متناظرند. در شکل ۱۰.۵ (ب) دو تابع موج مولکولی وجود دارند که حاصل ترکیب دو تابع موج اتمی  $p_z$  و در شکل ۱۰.۵ (ج) نیز توابعی وجود دارند که حاصل ترکیب تابع موجهای اتمی  $p_x$  یا  $p_y$  هستند. تمام این توابع توسط قسمت شعاعی تابع موج مدوله



شکل ۱۱.۰۵ ترازهای انرژی الکترونی در مولکولهای دو اتمی همگن هسته.

شده‌اند. از این رو، به‌عنوان مثال، توابع  $\sigma_g$  حاصل ترکیب اوربیتالهای اتمی ۱s، ۲s و مانند آن توزیع زاویه‌ای یکسان دارند ولی در تغییر شعاعی اختلاف دارند. آن اوربیتالهای مولکولی که صفحه گره‌ای (خط چین) عمود بر خط واصل میان دو هسته دارند پاد پیوندی و بقیه پیوندی‌اند. توالی ترازهای انرژی مختلف برای هر مولکول به‌طور طرح‌وار در شکل ۱۱.۵ نشان داده شده‌است. فاصله واقعی و ترتیب ترازهای انرژی ممکن است از هر مولکول به مولکول دیگر تغییر کند و برای هر مولکول نیز به فاصله میان هسته‌ای بستگی دارد.

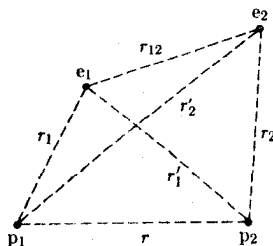
### ۴.۵ پیکربندی الکترونی بعضی از مولکولهای دو اتمی

اکنون بعضی مولکولهای هم‌هسته دو اتمی ساده را تحلیل می‌کنیم. قبلاً ساده‌ترین حالت یعنی  $H_2^+$  را در بخش ۲.۵ بررسی کردیم؛ می‌دانیم که حالت پایه  $H_2^+$  شامل یک الکترون در حالت  $1s\sigma_g$  است. سپس مولکول  $H_2$  را در نظر می‌گیریم که شامل دو الکترون و دو پروتون است (شکل ۱۲.۵). این مولکول نیز به‌قدر کافی ساده است و ما می‌توانیم آن را بدون حل عملی معادله شرودینگر تحلیل کنیم. انرژی پتانسیل الکتریکی کل سیستم عبارت است از

$$E_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2'} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r} \right) \quad (۴.۵)$$

دو جمله اول با برهم کنش  $e_1$  با پروتونهای  $p_1$  و  $p_2$ ، جمله‌های سوم و چهارم با برهم کنش  $e_2$  با  $p_1$  و  $p_2$  و جمله پنجم با دافعه میان دو الکترون متناظر است و جمله آخر معرف دافعه میان دو پروتون است. توجه کنید که به دلیل شباهت مطلق دو الکترون، دیگر نمی‌توان گفت که الکترون  $e_1$  به پروتون  $p_1$  و الکترون  $e_2$  به پروتون  $p_2$  تعلق دارد. از جهتی می‌توان گفت که آنها خصوصیات فردی خود را از دست می‌دهند و موجودیت جدیدی کسب می‌کنند که همان مولکول است.

در مرحله بعد باید، همانند آنچه در بخش ۲.۵ برای مولکول  $H_2^+$  انجام دادیم، معادله

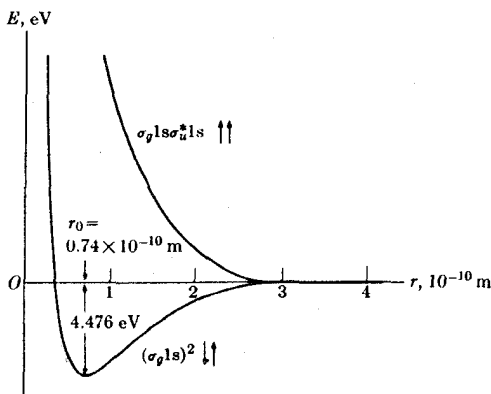


شکل ۱۲.۵ مولکول  $H_2$ .

شرویدینگر متناظر با انرژی پتانسیل بالا را تشکیل دهیم. اما این روش را دنبال نمی کنیم بلکه از بحث آمده در بخش قبل استفاده می کنیم. از این رو، بر طبق اصل طرد می توانیم فرض کنیم که دو الکترون می توانند با اسپینهای مخالف در تراز پیوندی  $1s \sigma_g$  قرار بگیرند و پیکر بندی  $(1s \sigma_g)^2$  را تشکیل بدهند. هر دو الکترون در یک حالت پیوندی هستند و یک مولکول پایدار تشکیل می دهند. انرژی مولکولی این پیکر بندی بر حسب تابعی از فاصله میان هسته ای در شکل ۱۳.۵ نشان داده شده است. جدایی تعادل هسته ها برابر  $10^{-10} \text{ m} \times 74 \times 0.74$  و انرژی تفکیک به دو اتم هیدروژن واقع در حالت پایه برابر با  $476 \text{ eV} \times 4$  است. هرگاه دو الکترون اسپین یکسان داشته باشند، یک الکترون باید در حالت پیوندی  $1s \sigma_g$  و دیگری در حالت پادپیوندی  $1s \sigma_u^*$  باشد و پیکر بندی  $(1s \sigma_g)(1s \sigma_u^*)$  را تشکیل دهند. اثر پاد پیوندی بر اثر پیوندی غلبه می کند و همان طور که در منحنی متناظر موجود در شکل ۱۳.۵ نشان داده شده است، هیچ پیکر بندی پایداری به دست نمی آید. منحنی مزبور کمینه ندارد.

اکنون  $\text{He}_2^+$  را در نظر می گیریم که سه الکترون دارد. دو الکترون در حالت پیوندی  $1s \sigma_g$  و الکترون سوم در حالت پاد پیوندی  $1s \sigma_u^*$  قرار دارد و پیکر بندی  $(1s \sigma_g)^2(1s \sigma_u^*)$  را تشکیل می دهند. نتیجه حاصل مولکول پایداری است که انرژی تفکیک آن برابر  $476 \text{ eV} \times 2$  است. مولکول  $\text{H}_2^-$  نیز سه الکترون دارد ولی چون بار هسته ای نسبتاً کوچک است انرژی تفکیک آن نیز خیلی کم و طول عمر آن نیز خیلی کوتاه است. با وجود این، در طیف نمایی آن را مشاهده کرده اند.

مولکول  $\text{He}_2$  چهار الکترون دارد که دو الکترون آن در حالت پیوندی  $1s \sigma_g$  و دو الکترون دیگر در حالت پادپیوندی  $1s \sigma_u^*$  هستند، یعنی  $(1s \sigma_g)^2(1s \sigma_u^*)^2$ ، در نتیجه هیچ



شکل ۱۳.۵ انرژی پتانسیل الکترونی بر حسب تابعی از فاصله میان هسته ای برای حالت های پیوندی و پاد پیوندی در  $\text{H}_2^-$ .

پیکر بندی یا پیداری تشکیل نمی شود. با این موضوع معلوم می شود که چرا هلیوم گاز تک اتمی است. اما، مولکول برانگیخته  $He_2$  به شرطی تشکیل می شود که یکی از الکترونهای  $1s \sigma_g^2$  به حالت پیوندی  $2s \sigma_g$  برانگیخته شود و پیکر بندی  $2s \sigma_g 1s \sigma_g^2$  را تشکیل دهد. جدول ۱۰۵ پیکر بندی الکترونی مولکولهای دو اتمی همگن هسته تا  $Ne_2$  را نشان می دهد. این جدول انرژی بستگی و طول پیوند حالت پایه این سه مولکول را نیز نشان می دهد. بعضی جنبه های جالب را می توان در این جدول مشاهده کرد. به طور کلی بستگی مولکولی هنگامی نتیجه می شود که دو الکترون با اسپینهای مخالف، در ناحیه ای میان دو اتم ترکیب شوند، متمرکز شوند؛ یعنی اوربیتالهای مولکولی پیوندی را اشغال کنند. اما، این قاعده یک قاعده دقیق نیست زیرا  $He_2^+$  فقط سه الکترون دارد و در  $B_2$  و  $O_2$ ، زوج الکترون آخر در اوربیتالهای  $\pi$  قرار دارند و اسپینهای آنها به جای اینکه مخالف باشند موازی و هم جهت اند. این مشخصه  $B_2$  و  $O_2$  ناشی از این حقیقت است که اوربیتالهای  $\pi$

جدول ۱۰۵ پیکر بندی الکترونی مولکولهای دو اتمی همگن هسته.

مولکول	پیکر بندی	انرژی تفکیک، eV	طول پیوند، Å	حالت پایه
	$\sigma_g 1s$ $\sigma_g^* 1s$ $\sigma_g 2s$ $\sigma_g^* 2s$ $\pi_g 2p$ $\sigma_g 2p$ $\pi_g^* 2p$ $\sigma_g^* 2p$			
$H_2^+$	$\uparrow$	2.65	1.06	$^2\Sigma_g$
$H_2$	$\uparrow\downarrow$	4.48	0.74	$^1\Sigma_g$
$He_2^+$	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow$	3.1	1.08	$^2\Sigma_g$
$He_2$	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$	ناپایدار		$^1\Sigma_g$
$Li_2$	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$	1.03	2.67	$^1\Sigma_g$
$Be_2$	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$	ناپایدار		$^1\Sigma_g$
$B_2$	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\uparrow$	3.6	1.59	$^3\Sigma_g$
$C_2$	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$	3.6	1.31	$^1\Sigma_g$
$N_2$	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$	7.37	1.09	$^1\Sigma_g$
$O_2$	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\uparrow$	5.08	1.21	$^3\Sigma_g$
$F_2$	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$	2.8	1.44	$^1\Sigma_g$
$Ne_2$	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$	ناپایدار		$^1\Sigma_g$

می‌توانند تا چهار الکترون در خود جای دهند (دو الکترون با اسپین به طرف بالا و دو الکترون با اسپین به طرف پایین) درحالی که این مولکولها فقط دو الکترون در آن تراز انرژی دارند. از بخش ۳.۴ می‌دانیم که دافعه میان الکترونها به ایجاد نامتقارنترین تابع موج فضایی کمک می‌کند. این موضوع، مطابق اصل طرد، متقارنترین تابع موج اسپینی را ایجاد می‌کند. این گفته به این معنی است که در این مورد، دو الکترون اسپینهای موازی و هم‌جهت دارند. چون برآیند اسپین  $O_p$  برابر با یک است، مولکول اکسیژن گشتاور دو قطبی مغناطیسی دائمی دارد و از این رو، معلوم می‌شود که چرا اکسیژن یک گاز پارامغناطیسی است درحالی که اکثر گازهای دواتمی همگن هسته دیامغناطیسی‌اند. همچنین می‌توان انتظار داشت که پایداری مولکول به تعداد نسبی زوج الکترونها پیوندی و پادپیوندی بستگی خواهد داشت. به عنوان مثال، نشان دادیم که  $He_2$  به تعداد مساوی زوج الکترون پیوندی و پادپیوندی دارد و پایدار نیست. همین موضوع در مورد  $Be_2$  نیز صادق است. بنابراین هر دو مولکول ناپایدارند. از طرف دیگر، پایداری  $N_2$ ،  $O_2$ ،  $F_2$ ، و  $Ne_2$  (آن طور که با انرژی تفکیک اندازه گیری می‌شود) کاهش می‌یابد زیرا اختلاف میان زوجهای پیوندی و پادپیوندی برای این مولکولها به ترتیب برابر ۳، ۲، ۱، و صفر است.

مؤلفه تکانه زاویه‌ای مدار کلی الکترون در طول محور مولکول با  $M_L \hbar$  داده می‌شود که در آن  $M_L = \sum_i m_{li}$ . انرژی هر حالت معین به مقدار  $\Lambda = |M_L|$  بستگی دارد. بسته به اینکه  $\Lambda$  مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳، ... را داشته باشد، این حالت با نمادهای  $\Sigma$ ،  $\Pi$ ،  $\Delta$ ،  $\Phi$ ، و مانند آن نشان داده می‌شود. در صورتی که  $S$  برآیند اسپین الکترونها موجود در مولکول باشد نماد هر حالت یا جمله به صورت  $\Lambda^{2S+1}$  است. جمله‌های حالت پایه مولکولهای موجود در جدول ۱۰۵ در آخرین ستون آمده است.

هنگامی که دو هسته تشکیل دهنده مولکول متفاوت باشند، مثل  $HCl$ ،  $CO$ ،  $NaCl$ ، مولکول به چندگن - هسته معروف است. در این مولکولها، برهم کنش کولنی هر هسته با الکترونها متفاوت است و مولکول مرکز تقارن ندارد. از این رو، با آنکه حالت‌های الکترونی هنوز هم  $\sigma$ ،  $\pi$ ،  $\delta$ ، و ... نامیده می‌شوند ولی به صورت  $\sigma$  و  $\pi$  گروه بندی نخواهند شد. به طور کلی، همان طور که در آغاز این فصل گفتیم، هنگامی که این مولکولها را بررسی می‌کنیم تنها الکترونها موجود در آخرین پوسته تکمیل نشده در هراتم را در نظر می‌گیریم.

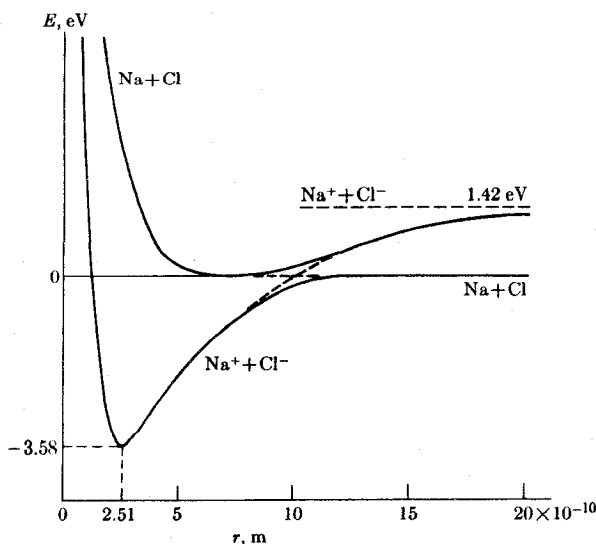
اکنون به عنوان یک مثال مورد  $NaCl$  را در نظر می‌گیریم. مسئله عبارت است از توصیف حرکت ۱۱ الکترون از اتم سدیم و ۱۷ الکترون از اتم کلر در میدان الکترونیکی حاصل از هسته‌های  $Na$  و  $Cl$  که در فاصله جدایی تعادل خود (در حالت گاز) در حدود  $10^{-10} \times 2.81$  از یکدیگر قرار دارند. برای ساده کردن مسئله، چون الکترونها موجود در پوسته‌های بسته قویاً به هسته‌های مربوط به خود مقیدند فرض می‌کنیم که حضور یک هسته ثانوی آنها را تحت تأثیر قرار نمی‌دهد. همچنین، در ارتباط با بحث قبلی، انتظار نمی‌رود الکترونهايي که در پوسته‌های تکمیل نشده قرار دارند و اسپین آنها جفت شده است به طور مؤثر در پیوند مولکول شرکت کنند. از این رو، تنها دو الکترون جفت نشده باقی می‌مانند که



شامل يك الكترون ۳s در Na و يك الكترون ۳p در Cl اند.

با استفاده ازمنطق به کار رفته برای مولکولهای همگن-هسته، می توان گفت که وقتي دو الكترون در فضای میان دو اتم متمرکز می شوند يك ترکیب پایداري ایجاد می شود. اما، چون بارهای هسته ای متفاوت اند توزیع الكترونی متقارن نخواهد بود. در مورد مولکول NaCl بار الكترونی به سمت هسته Cl جا به جا می شود زیرا هسته Cl يك میدان جاذبه قویتر تولید می کند. این موضوع به تشکیل مولکولی منجر می شود که توزیع بار آن نایکنواخت و از این رو، قطبیده است. گشتاور دو قطبی الكتريکی NaCl در حالت گازی در حدود  $m C \times 10^{-29} \times 3.5$  است. اگر الكترون ۳s اتم سدیم كاملا به اتم كلر منتقل می شد مولکول به صورت يك دو قطبی درمی آمد که بار آن  $C \times 10^{-19} \times 1.6 = e$  و طول آن مساوی با فاصله جدایی تعادل  $m \times 10^{-10} \times 2.51$  و از این رو گشتاور دو قطبی آن برابر با  $m C \times 10^{-29} \times 4.5$  بود. بنا بر این، نتیجه می گیریم که در حدود ۷۵ درصد از توزیع الكترونی الكترون ظرفیت در Na به طرف اتم Cl جا به جا می شود و می توان مولکول را متشکل از دو یون دانست که تحت تأثیر جاذبه کولنی بهم نگه داشته شده اند. برای بیان چنین وضعی می توان مولکول را به صورت  $Na^+Cl^-$  نوشت. این نوع پیوند مولکولی را پیوند یونی می نامند در حالی که وضع توصیف شده در قبل برای مولکول همگن-هسته، با يك توزیع متقارن الكترونی، به پیوند کووالانسی معروف است.

شکل ۱۴.۵ انرژی پتانسیل سیستم سدیم-كلر (در حالت گاز) را به صورت تابعی از فاصله جدایی میان هسته ای نشان می دهد. در فواصل زیاد، دو سیستم برهم کنش کننده، اتمهای Na و Cl هستند و برهم کنش آنها خیلی کوچک است به گونه ای که انرژی



شکل ۱۴.۵ منحنیهای انرژی پتانسیل برای  $Na^+Cl^-$  و NaCl.

پتانسیل عملاً مقدار ثابتی دارد. در فاصله جدایی در حدود  $m \times 10^{-10} \times 1.25$ ، انتقال بار از Na به Cl آغاز می شود. با کاهش بیشتر فاصله جدایی، انرژی پتانسیل برهم کنش به پتانسیل جاذبه کولنی میان یونهای  $Na^+$  و  $Cl^-$  شباهت پیدا می کند. اما در فاصله میان هسته های بسیار کوچک دافعه میان هسته ها و پوسته های بسته دو یون افزایش می یابد و جاذبه یونی میان  $Na^+$  و  $Cl^-$  را خنثی می کند. کمینه انرژی پتانسیل یا مکان تعادل با فاصله جدایی  $m \times 10^{-10} \times 2.51$  متناظر است.

اوربیتال مولکولی یا تابع موج یک مولکول دو اتمی چند گن-هسته نمی تواند از نوع داده شده با معادله (۲.۵) که دو هسته را به طور متقارن در بر می گیرد، باشد. بدین ترتیب (هرگاه A و B مشخص کننده دو هسته باشند) به جای نوشتن معادله (۲.۵) برای یک اوربیتال مولکولی پیوندی باید چنین نوشت

$$\psi = \psi_A + \lambda \psi_B$$

که در آن  $\psi_A$  و  $\psi_B$  تابع موجهای اتمی الکترون مربوط به هر هسته است. پارامتر  $\lambda$  طوری انتخاب شده است که انرژی محاسبه شده با مقدار تجربی سازگاری داشته باشد. بسته

جدول ۲.۵ انرژیهای تفکیک  $D$ ، طولهای پیوند  $r_0$ ، و گشتاورهای دو قطبی الکتریکی  $p$  بعضی مولکولهای دو اتمی<sup>۱</sup>.

یونی				کووالانسی			
$p, D$	$r_0, \text{\AA}$	$D, eV$	مولکول	$p, D$	$r_0, \text{\AA}$	$D, eV$	مولکول
۸.۵	۲.۵۱	۳.۵۸	NaCl	۰	۰.۷۴	۴.۴۸	H <sub>۲</sub>
۱.۰۷	۱.۲۷	۴.۴۳	HCl	۰	۲.۶۷	۱.۰۳	Li <sub>۲</sub>
۵.۸۸	۱.۶۰	۲.۵	LiH	۰	۱.۲۱	۵.۰۸	O <sub>۲</sub>
۱.۲۹	۲.۹۴	۳.۹۶	KBr	۰	۱.۰۹	۷.۳۷	N <sub>۲</sub>
۸.۶۰	۲.۵۵	۵.۹	KF	۰	۱.۹۹	۲.۴۷	Cl <sub>۲</sub>
۹.۹۷	۳.۰۶	۳.۷۶	CsCl	۰.۳۸	۱.۶۱	۳.۰۶	HI
۸.۰	۲.۷۹	۲.۹۲	KCl	۰.۱۲	۱.۱۳	۱۱.۱۱	CO
۹.۲۴	۳.۲۳	۳.۰	KI	۰.۱۵	۱.۱۵	۵.۳	NO

۱. مولکولها بر حسب مشخصه غالب پیوند دسته بندی شده اند. گشتاورهای دو قطبی الکتریکی بر حسب دبی (D) بیان شده اند. هر D برابر است با  $3.33 \times 10^{-30} \text{ mC}$ .

به این که مقدار  $\lambda$  چقدر باشد، توزیع الکترونی در ناحیه میان دو هسته یا به طرف یکی از هسته‌ها افزایش می‌یابد. در مورد اول، پیوند عمدتاً کووالانسی و در مورد دوم یونی است. برای بیشتر مولکولهای دو اتمی چندگن-هسته، این وضع حالت بینابینی میان پیوند کووالانسی خالص و پیوند یونی خالص است. به طور کلی، هر چه پیوند بیشتر از نوع یونی باشد گشتاور دو قطبی الکتریکی مولکول بزرگتر خواهد بود. به عنوان مثال، در مولکول CO که در آن بار هر دو یون با هم مشابه است مشخصه یونی پیوند نسبت به مشخصه کووالانسی آن از اهمیت کمتری برخوردار است. شاهد این ادعا نیز گشتاور دو قطبی الکتریکی نسبتاً کوچک مولکول، یعنی  $3.0 \times 10^{-30} \text{ m C}$  است. در جدول ۲.۵ انرژیهای تفکیک، طولهای پیوند، و گشتاورهای دو قطبی الکتریکی بعضی مولکولهای دو اتمی و همچنین مشخصه غالب پیوندها آمده است.

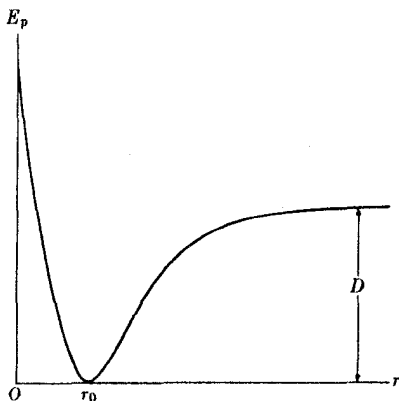
**مثال ۳.۵** بحث مربوط به پتانسیل مورس.

**حل:** يك رابطه تجربی که، تقریباً با دقت، انرژی پتانسیل يك حالت مقید و وابسته به يك مولکول دو اتمی را برای يك پیکربندی الکترونی مشخص به دست می‌دهد پتانسیل مورس نام دارد

$$E_p(r) = D[1 - e^{-a(r-r_0)}]^2 \quad (7.5)$$

که در آن ضرایب ثابت  $D$ ،  $a$ ، و  $r_0$  پارامترهای قابل تنظیم مشخصه هر مولکول اند. منحنی  $E_p(r)$  در شکل ۱۵.۵ نشان داده شده است. با به دست آوردن  $dE_p/dr$  و مساوی قرار دادن آن با صفر می‌توان کمینه مقدار  $E_p$  را به دست آورد. از این رو

$$-2Dae^{-a(r-r_0)}[1 - e^{-a(r-r_0)}] = 0$$



شکل ۱۵.۵ پتانسیل مورس.

که ایجاب می کند  $e^{-a(r-r_0)} = 1$  یا  $r = r_0$  و حاکی از آن است که  $r_0$  فاصله جدایی تعادل است. در نقطه کمینه مقدار  $E_p$  مساوی با صفر است. به ازای مقادیر خیلی بزرگ  $r$ ، نما قابل چشمپوشی است و  $E_p$  به مقدار ثابت  $D$  میل می کند. از این رو، می توان گفت که  $D$  عبارت است از انرژی مورد نیاز برای جدا کردن یا تفکیک مولکول البته اگر مولکول در آغاز در حالت کمینه انرژی پتانسیل قرار داشته باشد. با این حال، به خاطر انرژی ارتعاشی نقطه صفر (بخش ۸.۵) این موضوع باید با دقت بیشتری بررسی شود.

به ازای مقادیر کوچک  $r$ ،  $E_p$  به جای آنکه به بینهایت میل کند به مقدار  $D(1 - e^{ar_0})^2$  میل می کند و این حدی است برای پتانسیل مورس. برای درک معنی ثابت  $a$  باید تا بحث ارتعاشات مولکولی (مثال ۷.۵) منتظر بمانیم.

مثال ۴.۵ تعیین جمله های ممکن حالت پایه بعضی مولکولهای آمده در جدول ۱.۵.

حل: هنگامی که اوربیتال مولکولی  $\lambda nl$ ، هماهنگ با اصل طرد، سهم کامل الکترونیهای خود را دارد تنها حالت ممکن عبارت است از  $M_L = 0$  و  $S = 0$  یا حالت  $\Sigma^+$ . بالاترین اوربیتال مولکولی مولکولهای  $H_2$ ،  $He_2$ ،  $Li_2$ ،  $Be_2$ ،  $C_2$ ، و  $F_2$ ، که در جدول ۱.۵ آمده اند پر شده است و حالت پایه آنها عبارت است از  $\Sigma^+$ . اگر تنها یک الکترون در بالاترین اوربیتال مولکولی  $\lambda nl$  وجود داشته باشد واضح است که  $\Lambda = \lambda$  و  $S = 1/2$ . این وضع در  $H_2^+$  و  $He_2^+$  رخ می دهد که در آنها  $\lambda = 0$  و جمله حالت مولکولی کاملاً پر نشده است و لسی بیشتر از یک الکترون دارد؛ مثلاً در  $B_2$  و  $O_2$  که پیکر بندی هردوی آنها به صورت  $(\pi 2p)^2$  است. اوربیتال مولکولی  $(\pi 2p)$  شامل تابع موجهای اتمی با  $m_l = \pm 1$  و نیز  $m_s = \pm 1/2$  است. از این رو، آرایشهای ممکن اعداد کوانتومی (یا اوربیتالهای اتمی) که با اصل طرد سازگارند در جدول صفحه ۲۶۴ آمده است که در آن نمادها با تابع موج،  $(m_l, m_s)_1, (m_l, m_s)_2$  متناظرند.

از روی این جدول دیده می شود که برای تشکیل حالتهای مولکولی زیر تابع موجهای کافی وجود دارد

$$\text{حالت } \Delta: \quad M_L = \pm 2, \quad M_S = 0$$

$$\text{حالت } \Sigma^{\pm}: \quad M_L = 0, \quad M_S = \pm 1, 0$$

$$\text{حالت } \Sigma: \quad M_L = 0, \quad M_S = 0$$

از این رو، سه جمله ممکن متناظر با پیکر بندی  $(\pi 2p)^2$  وجود دارند که از میان آنها حالت پایه حالتی است که چندگانگی آن بالاتر است، یعنی حالت  $\Sigma^+$  که حالت پایه  $B_2$  و  $O_2$  است.

			$M_S / M_L$
+۱	۰	-۱	
	(۱,+)(۱,-)		+۲
			+۱
(۱,+)(-۱,+)	(۱,+)(-۱,-) (۱,-)(-۱,+)	(۱,-)(-۱,-)	۰
			-۱
	(-۱,+)(-۱,-)		-۲

مثال ۵.۵ بحث مربوط به انرژی پتانسیل يك مولکول دو اتمی در حالت پیوند یونی.

حل: يك رابطه تجربی كه با دقت نسبتاً خوبی انرژی پتانسیل پیوند یونی را توصیف می‌کند به صورت زیر است

$$E_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{b}{r^9} \quad (۸.۵)$$

جمله اول معرف جاذبه خالص کولنی میان یونها و جمله دوم معرف دافعه هسته‌ها و پوسته‌های بسته است. نمای ۹ به این دلیل انتخاب شده است كه از طریق تابع معكوس  $r^9$  بهترین تناسب را با داده‌های تجربی دارد. چون جمله دوم به  $r^{-9}$  بستگی دارد به ازای فاصله جدایی هسته‌ای به سرعت کاهش می‌یابد و فقط در فواصل كوچك قابل اهمیت است. فاصله جدایی تعادل  $r$  را می‌توان با پیدا كردن كمینه  $E_p$  به دست آورد. از این رو

$$\left(\frac{dE_p}{dr}\right)_{r=r_0} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} - \frac{9b}{r_0^{10}}$$

كه از آن نتیجه می‌شود  $b = e^2 r_0^8 / 36\pi\epsilon_0$ . انرژی متناظر  $E_p$  در نقطه كمینه كه با  $D_i$  نشان داده می‌شود عبارت است از

$$D_i = \frac{-(8/9)e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

که همان انرژی تفکیک مولکول است. این انرژی با انرژی لازم برای تجزیه مولکول (که در آغاز در حالت پایه است) به دو یون در حال سکون که در فاصله بینهایت از هم قرار دارند برابر است. در مورد  $\text{NaCl}$ ،  $D_0$  انرژی لازم برای تفکیک مولکول به دو یون  $\text{Na}^+$  و  $\text{Cl}^-$  را به دست می‌دهد. انرژی سیستم تشکیل شده از  $\text{Na}^+$  و  $\text{Cl}^-$  در فاصله جدایی بینهایت متناظر با خط چینی است که در شکل ۱۴.۵ نشان داده شده است. با قرار دادن  $m = 10^{-10} \times 2851 = r_0$  برای مولکول  $\text{NaCl}$  مقدار انرژی تفکیک  $512 \text{ eV}$  به دست می‌آید. با این حال، برای ما این مسئله جالب توجه است که انرژی لازم برای تفکیک  $\text{NaCl}$  به اتمهای خنثای  $\text{Na}$  و  $\text{Cl}$  را به دست آوریم. برای یونیده کردن اتم  $\text{Na}$  مقدار انرژی برابر با  $514 \text{ eV}$  لازم است در حالی که وقتی یون  $\text{Cl}^-$  تشکیل شد مقداری انرژی برابر با  $372 \text{ eV}$  آزاد می‌شود. بنابراین، انرژی سیستم تشکیل شده از  $\text{Na}^+$  و  $\text{Cl}^-$  در فاصله جدایی بینهایت از انرژی سیستم  $\text{Na}$  و  $\text{Cl}$  در فاصله جدایی بینهایت به مقدار  $142 \text{ eV} = 514 \text{ eV} - 372 \text{ eV}$  بیشتر است. این گفته بدان معنی است که انرژی تفکیک  $D_0$  مولکول  $\text{NaCl}$  هنگامی که به دو اتم خنثی تبدیل می‌شود برابر مقدار زیر است

$$D_0 = 512 \text{ eV} - 142 \text{ eV} = 370 \text{ eV}$$

که به طریقی از مقدار تجربی  $358 \text{ eV}$  بیشتر است. هر گاه به جای جمله معکوس دافعه  $r^{-3}$  يك جمله نمایی به شکل  $b \exp(-r/r_0)$  قرار دهیم سازگاری با داده‌های تجربی بیشتر می‌شود.

## ۵.۵ مولکولهای چنداتمی

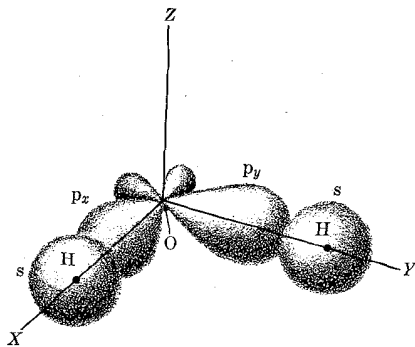
برای تحلیل حرکت الکترونی مولکولهایی که بیشتر از دو اتم دارند يك ابزار جدید و بسیار مهم وجود دارد که همان آرایش هندسی الکترونها و هسته‌ها (یا تقارن مولکولی) است. از مورد دو اتمی باید به خاطر آوریم که وقتی الکترونها پیوندی بتوانند در داخل ناحیه میان دو اتم جا بگیرند پیوند مطلوب خواهد بود. این مستلزم آن است که تابع موجهای اتمی وابسته به دو اتم که اوربیتال مولکولی را تشکیل می‌دهد تا حد امکان در امتداد خط واصل میان دو هسته گسترش یابد یا «روی هم بیفتد» و باعث شود که يك زوج الکترون (يك الکترون از هر اتم) در میان دو اتم متمرکز شود. این در بایست «بیشینه روی هم افتادن» تابع موجهای اتمی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

هر پیوند میان دو اتم در امتدادی ایجاد می‌شود که در آن تابع موجهای اتمی مربوط که اوربیتال مولکولی را تشکیل می‌دهند متمرکز می‌شوند یا روی هم می‌افتند؛ قدرت پیوند به میزان دوی هم افتادن تابع موجهای اتمی بستگی دارد.

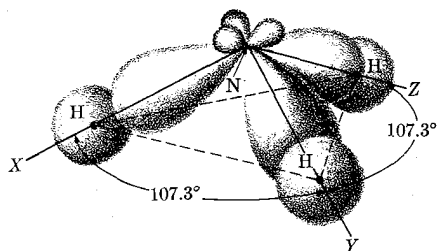
هنگامی که بخواهیم شکل یا وضع هندسی مولکولی را تعیین کنیم اصل بیشینه

روی هم افتادن بسیار مفید و سودمند خواهد بود. در اینجا به عنوان مثال مولکول آب یا  $H_2O$  را در نظر می گیریم. این مولکول ۱۰ الکترون و سه هسته دارد. در اتم اکسیژن مجدداً می توان (در تقریب اول) از تمام الکترونها بجز دو الکترون جفت نشده  $p$  در پوسته  $L$  چشم پوشید (شکل ۳.۴). این دو الکترون که مطابق شکل ۳.۴ اسپین موازی و هم جهت دارند باید از لحاظ حرکت مسداری با یکدیگر فرق داشته باشند. با توجه به شکل ۱۱.۳ که توزیع زاویه ای الکترونها  $p$  را نشان می دهد، می توان فرض کرد که یک الکترون در امتداد محور  $X$  و الکترون دیگر در امتداد محور  $Y$  قرار دارد؛ یعنی الکترونها جفت نشده  $2p$  حالت های  $p_x$  و  $p_y$  را اشغال می کنند. (الکترونها باقیمانده  $2p$  اکسیژن در امتداد محور  $Z$  قرار دارند، حالت  $p_z$ ، و اسپینهای آنها جفت شده است.) دو اتم هیدروژن که هر کدام یک الکترون  $1s$  دارند به طریقی قرار گرفته اند که الکترونها مر بوط به آنها در بهترین طریق ممکن (یعنی، با بیشینه روی هم افتادن تابع موجهای آنها) با دو الکترون جفت نشده اکسیژن جفت می شوند. بنا بر این، نتیجه می گیریم برای اینکه بیشینه روی هم افتادن ایجاد شود، دو اتم  $H$  باید به ترتیب در امتداد محورهای  $X$  و  $Y$  و در فواصل مساوی از اتم  $O$  قرار بگیرند. در نتیجه مولکولی با شکل قائم الزاویه (راستگوشه) تشکیل می شود که در شکل ۱۶.۵ نشان داده شده است.

توجه کنید که در شکل ۱۶.۵ توزیع الکترونها  $p$  از  $O$  کاملاً مساوی با آنچه در شکل ۱۱.۳ نشان داده شده است نیست. دلیل این گفته آن است که حضور اتمهای  $H$  به طریقی سبب تغییر شکل دادن، یا قطبی شدن حرکت الکترونها  $p$  از  $O$  می شوند. همچنین زاویه میان دو پیوند  $O-H$  در اثر دافعه میان دو اتم  $H$  کمی بزرگتر از  $90^\circ$  است (این زاویه دقیقاً برابر است با  $104^\circ 5'$ ). محاسبه مفصل نشان می دهد که الکترونها  $1s$  هیدروژن طوری به طرف اتم  $O$  کشیده می شوند که مراکز جرم بارهای منفی و مثبت آنها بر هم منطبق نیست و در نتیجه یک مولکول قطبیده تولید می کنند که بر ایند گشتاور دو قطبی الکتریکی آن  $1.85 \times 10^{-30} \text{ m C}$  و در امتداد خط نیمساز زاویه پیوند قرار



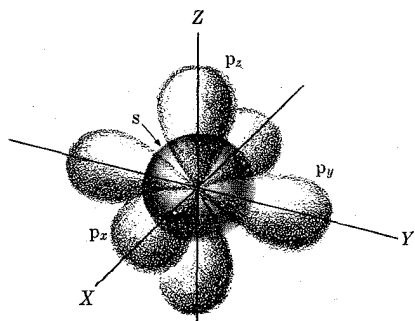
شکل ۱۶.۵ توزیع الکترونی در مولکول  $H_2O$ .



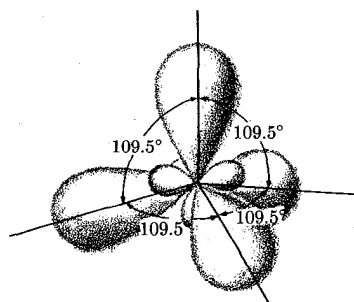
شکل ۱۷۰۵ توزیع الکترونی در مولکول  $\text{NH}_3$ .

دارد. واضح است که اگر مولکول  $\text{H}_2\text{O}$  خطی بود گشتاور دو قطبی آن صفر می‌شد. اکنون مولکول آمونیاک یا  $\text{NH}_3$  را در نظر می‌گیریم. سه الکترون جفت نشده  $2p$  در اتم N در امتداد محورهای  $X$ ،  $Y$ ، و  $Z$  قرار دارند و حالت‌های  $p_x$ ،  $p_y$ ، و  $p_z$  را اشغال می‌کنند (شکل ۷۰۴)، به گونه‌ای که مولکول  $\text{NH}_3$  یک ساختار هرمی تشکیل می‌دهد که اتم N در رأس آن و اتم‌های H در رئوس قاعده هرم آن قرار دارد (شکل ۱۷۰۵). به دلیل دافعه میان اتم‌های H زوایای رأس N به جای  $90^\circ$ ،  $107.3^\circ$  هستند. ساختار هرمی شکل یک گشتاور دو قطبی الکتریکی به مقدار  $1.5 \times 10^{-30} \text{ mC}$  در امتداد محور هرم تولید می‌کند. اگر مولکول مسطح بود گشتاور دو قطبی آن صفر می‌شد.

اتم کربن بسیار جالب توجه است. این اتم در حالت پایه فقط دو الکترون جفت نشده  $2p$  دارد، و این نمی‌تواند ترکیبات بسیار زیاد کربن را توجیه کند. همان‌طور که در شکل‌های ۸۰۴ و ۱۰۰۴ دیده می‌شود، یکی از اولین حالت‌های برانگیخته شامل یک الکترون  $2s$  و سه الکترون جفت نشده  $2p$  است که اوربیتال‌های آنها مطابق شکل ۱۸۰۵ (الف) آرایش گرفته‌اند. الکترون‌های  $2p$  مثل الکترون‌های آمونیاک عمل می‌کنند ولی الکترون  $2s$  (به دلیل نداشتن سمیتیت) پیوندی با همان شدت تولید نمی‌کند و در نتیجه موجب می‌شود



(الف) تابع موجهای  $s$ ،  $p_x$ ،  $p_y$  و  $p_z$



(ب) تابع موجهای هیبریدی شده  $sp^3$ .

شکل ۱۸۰۵ تابع موجهای ناشی از هیبریدی شدن  $sp^3$ .



که توصیف مولکولهایی چون مولکول متان ( $CH_4$ ) مشکل شود. اما این امکان وجود دارد که به کمک روشهایی به نام هیبریدی شدن تابع موجها، تابع موجهای اتمی جدیدی را در امتدادهای مورد نظر تولید کرد. انرژی يك تابع موج  $2s$  و سه تابع موج  $2p$  کربن کاملاً یکسان نیست، ولی اختلاف انرژی آنها بسیار کوچک است. با تشکیل ترکیبات خطی مناسب از این چهار تابع می توان تابع موجهای جدید یا هیبریدی به دست آورد که همگی با انرژی یکسانی متناظرند و يك بیشینه قابل توجه در هر امتداد مورد نظر دارند. يك مجموعه ممکن از ترکیبات خطی توابع  $s$ ،  $p_x$ ،  $p_y$ ، و  $p_z$  چهار تابع موج هیبریدی جدید با بیشینههایی که مطابق شکل ۱۸.۵ (ب) متوجه رتوس يك چهاروجهی هستند را به دست می دهد. راستاهایی که در امتداد آنها تابع موجهای جدید به بیشینه می رسند زوایای  $109^\circ 28'$  تشکیل می دهند. این توابع بر حسب تابع موجهای  $s$  و  $p$  به صورت زیر بیان می شوند

$$\psi_1 = \frac{1}{4}(s + p_x + p_y + p_z)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{4}(s + p_x - p_y - p_z)$$

(۹.۵)

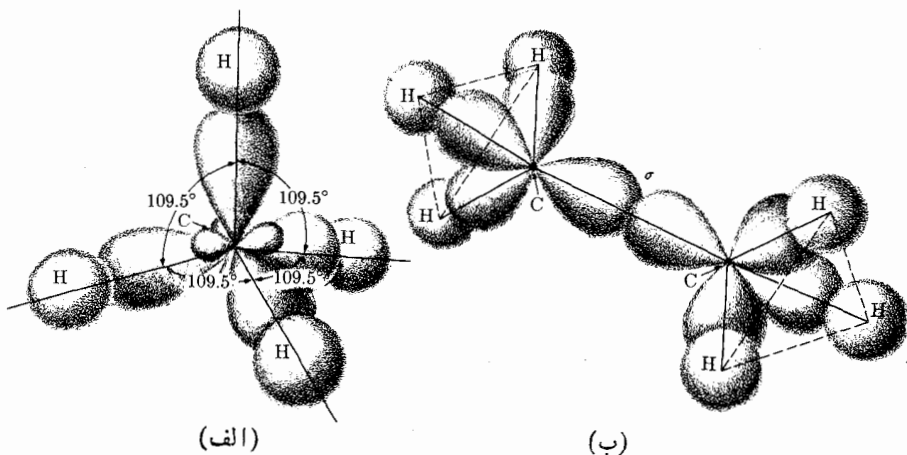
$$\psi_3 = \frac{1}{4}(s - p_x + p_y - p_z)$$

$$\psi_4 = \frac{1}{4}(s - p_x - p_y + p_z)$$

این نوع هیبریدی شدن با  $sp^3$  نشان داده می شود. توجه کنید چون تابع موجهای  $s$  و  $p$  با مقادیر مختلفی از تکانه زاویه ای متناظرند، تابع موجهای هیبریدی حالتی با تکانه زاویه ای کاملاً مشخصی را توصیف نمی کنند.

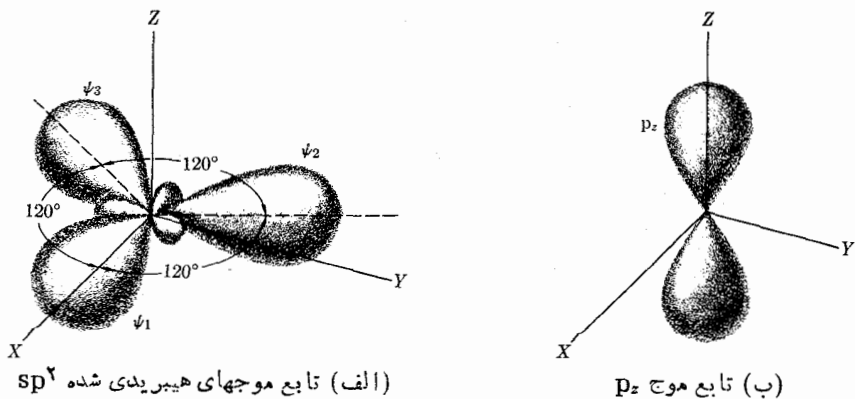
اکنون مولکول متان یعنی،  $CH_4$  را در نظر می گیریم. نتیجه می گیریم که بیشینه قدرت پیوندها هنگامی به دست می آید که الکترونهاي  $1s$  هراتم هیدروژن بیشینه روی هم افتادن را با هر يك از چهار تابع موج هیبریدی  $sp^3$  داشته باشند. در این حالت يك مولکول چهاروجهی تشکیل می شود که در شکل ۱۹.۵ (الف) نشان داده شده است. به طریق مشابه، ساختار مولکول اتان ( $H_2C-CH_3$ ) یا در شکل ۱۹.۵ (ب) نشان داده شده است. در این مولکول، دو اتم کربن از طریق روی هم افتادن دو تابع موج هیبریدی  $sp^3$  به هم پیوند می خوردند. این پیوند به خاطر شباهت با وضع اوربیتالهای  $\sigma$  در مولکولهای دواتمی به پیوند  $\sigma$  معروف است.

دانستن این مطلب بسیار مهم است که هیبریدی شدن فقط در مورد کربن به کار نمی رود بلکه در مورد هراتم یا یونی که همین پیکربندی الکترونی را دارد به کار می رود. به عنوان مثال، آرایش الکترونی یون  $N^+$  با آرایش الکترونی کربن مشابه و ساختار بنیان



شکل ۱۹۰۵ پیوندهای اوربیتالی مولکولی  $sp^3$  جایگزیده در (الف) متان، (ب) اتان.

$N^+H_4$  شبیه به ساختار  $CH_4$  است که در آن فقط  $N^+$  به جای اتم کربن نشسته است. علاوه بر هیبریدی شدن  $sp^3$  چندین امکان دیگر برای هیبریدی شدن وجود دارد که از آن جمله می توان از تابع موجهایی که مقدار تکانه زاویه ای آنها بالاتر از یک است نام برد. در اینجا فقط هیبریدی شدن  $sp^2$  و  $sp$  را به دلیل اهمیتی که دارند مورد بحث قرار می دهیم. در هیبریدی شدن  $sp^2$  تابع موجهای  $s$ ،  $p_x$  و  $p_y$  ترکیب می شوند و سه تابع موج را در صفحه  $XY$  تولید می کنند که بیشینه های آنها متوجه امتدادهایی است که سه زاویه ای  $120^\circ$  را تشکیل می دهند (شکل ۲۰۰۵). این تابع موجها بر حسب تابع موجهای  $s$



شکل ۲۰۰۵ تابع موجهای ناشی از هیبریدی شدن  $sp^2$ .

و p به صورت زیر بیان می‌شوند

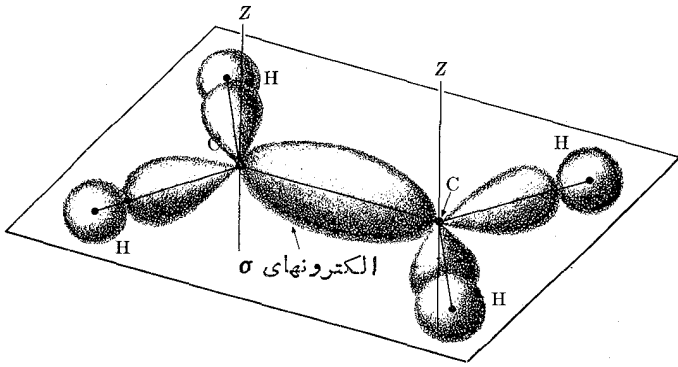
$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(s + \sqrt{2}p_x)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(s - \frac{1}{\sqrt{2}}p_x + \sqrt{\frac{3}{2}}p_y\right) \quad (10.5)$$

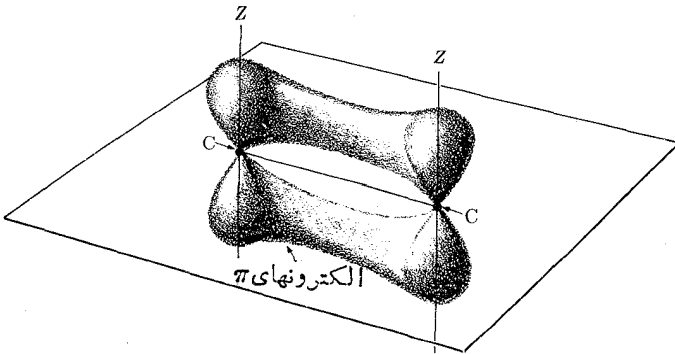
$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(s - \frac{1}{\sqrt{2}}p_x - \sqrt{\frac{3}{2}}p_y\right)$$

چهارمین الکترون، حالت  $p_z$  را اشغال می‌کند. این نوع هیبریدی شدن برای توصیف مولکولهایی چون  $H_2C=CH_2$  که در شکل ۲۱.۵ نشان داده شده است ضروری است. پیوند دوگانه میان اتمهای کربن در نتیجه روی هم افتادن یک تابع موج هیبریدی  $sp^2$  از هر اتم کربن در امتداد خط  $C-C$  (یعنی پیوند  $\sigma$ ) و روی هم افتادن تابع موجهای  $p_z$  که پیوند  $\pi$  تشکیل می‌دهند، حاصل می‌شود. پیوند اخیر به خاطر شباهت با اوربیتالهای  $\pi$  در مولکولهای دو اتمی به این نام نامیده می‌شود. اتمهای هیدروژن به تابع موجهای هیبریدی  $sp^2$  باقیمانده می‌پیوندند. در نتیجه، مولکول اتیلن یک مولکول مسطح است. پیوند دوگانه  $\sigma\pi$  دارای نوعی صلبیت است و در نتیجه چرخش مولکول حول محور  $C-C$  را مشکل می‌کند. هنگامی که یک تک پیوند موجود باشد (مثل حالت مربوط به اتان) این صلبیت پدیدار نمی‌شود و برخواص مولکولی اثر می‌کند. توجه کنید که درجه روی هم افتادن در هر پیوند  $\pi$  خیلی کمتر از درجه روی هم افتادن در پیوند  $\sigma$  است و از این رو، پیوندهای  $\pi$  کمتر از پیوندهای  $\sigma$  در انرژی بستگی شرکت دارند. به عنوان مثال، برای شکستن یک پیوند ساده  $\sigma$  مقدار انرژی  $336 \text{ eV}$  مورد نیاز است در صورتی که برای شکستن پیوند دوگانه  $\sigma\pi$  و تبدیل آن به یک پیوند  $\sigma$  فقط  $398 \text{ eV}$  انرژی لازم است.

نوع سوم هیبریدی شدن بسا اوربیتالهای اتمی  $s$  و  $p$  را  $sp$  می‌نامند که بسا تابع موجهای  $p_z \pm s$  متناظر است و بیشینه‌های قابل توجهی را در جهات  $\pm Z$  دارد. این تابع موجهای هیبریدی در شکل ۲۲.۵ نشان داده شده‌اند. برای توضیح مولکولهایی چون استیلن یا  $HC\equiv CH$  تابع موجهای هیبریدی نوع  $sp$  لازم است (شکل ۲۳.۵). پیوند سه گانه میان دو اتم کربن در نتیجه روی هم افتادن یک تابع موج هیبریدی  $sp$  از هر اتم کربن (یعنی پیوند  $\sigma$ ) و روی هم افتادن تابع موجهای  $p_x$  و  $p_y$ ، که دو پیوند  $\pi$  را تشکیل می‌دهند، حاصل می‌شود. اتمهای هیدروژن به تابع موجهای  $sp$  باقیمانده می‌پیوندند. در نتیجه، مولکول استیلن یک مولکول خطی است.

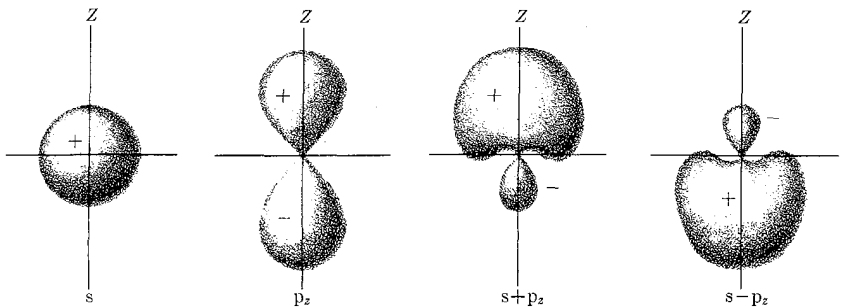


(الف)

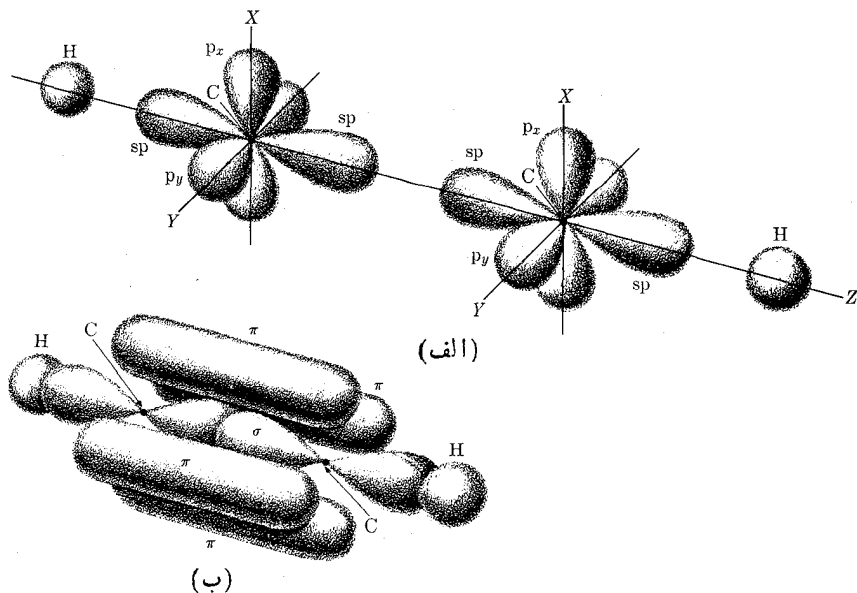


(ب)

شکل ۲۱۰۵ توزیع الکترونی در اتیلن با استفاده از هیبریدی شدن  $sp^2$ .  
 (الف) پیوند  $\sigma$ ، (ب) پیوند  $\pi$ .



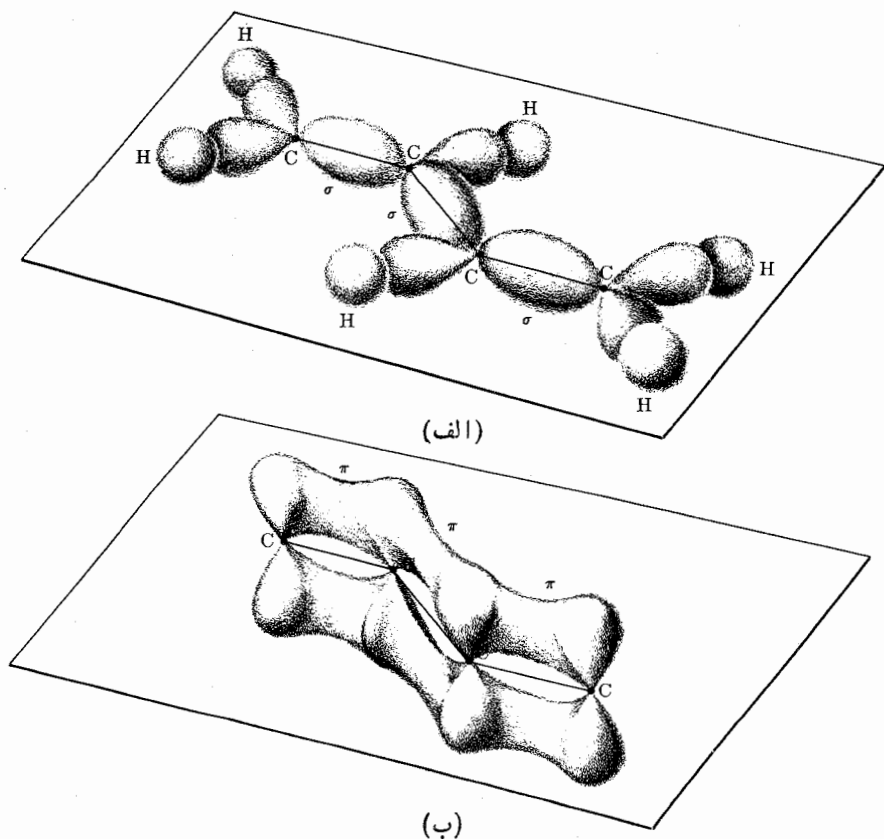
شکل ۲۲۰۵ تابع موجهای ناشی از هیبریدی شدن  $sp$ .



شکل ۲۳.۵ توزیع الکترونی در استیلن با به کار بردن هیبریدی شدن  $sp$ . (الف) تابع موجهای با اتمهای مجزا، (ب) پیوندهای  $\sigma$  و  $\pi$ .

## ۶.۵ مولکولهای مزدوج

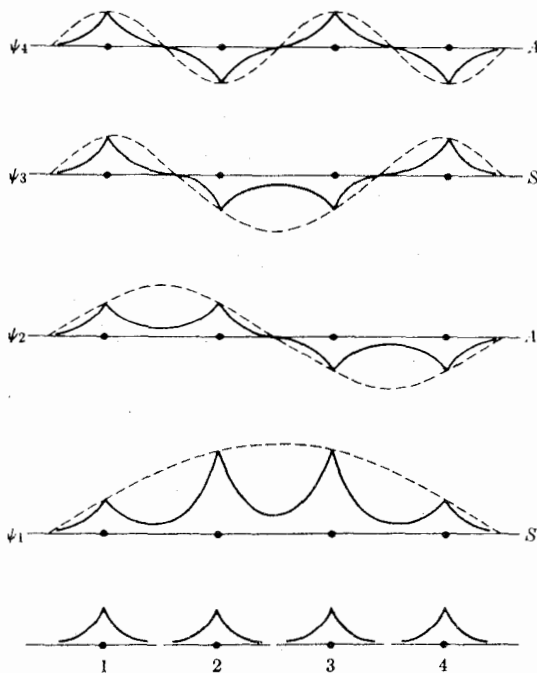
اکنون يك رده از مولکولهای مرکب را که در شیمی آلی به مولکولهای مزدوج معروف اند در نظر می گیریم. به عنوان مثال می توان از مولکول بوتادین ( $C_4H_6$ ) نام برد. ساختار الکترونی بوتادین در شکل ۲۴.۵ نشان داده شده است. اتمهای کربن در طول زنجیره توسط پیوندهای  $\sigma$  با استفاده از تابع موجهای هیبریدی  $sp^2$  بهم می پیوندند. اتمهای هیدروژن با استفاده از تابع موجهای  $sp^2$  باقیمانده به اتمهای کربن وصل می شوند. اما، علاوه بر آن، چهار الکترون  $p_z$  وجود دارند که در طول زنجیره اتم کربن پیوندهای  $\pi$  را تشکیل می دهند. در مولکولهای مزدوج، پیوندهای  $\pi$  به طریق بخصوصی رفتار می کنند. الکترونها پیوندی  $\pi$  (يك الکترون به ازای هر اتم کربن) به جای اینکه در نواحی بخصوصی از مولکول جایگزیده شوند (یعنی همانند الکترونهاي واقع در پیوندهای  $\sigma$ ) کما بیش می توانند آزادانه در طول مولکول حرکت کنند. این موضوع با استفاده از توزیع احتمال الکترونها در شکل ۲۴.۵ (ب) نشان داده شده است. همین طور الکترونهاي  $\pi$  نیز به طریق خیلی مخصوصی عمل می کنند که به تفصیل بیشتری نیاز دارد. به عنوان مثال، قطبش پذیری مولکولهای مزدوج در امتداد زنجیره کربن خیلی بیشتر از قطبش پذیری هیدروکربنهای اشباع شده ای است که فقط پیوندهای جایگزیده  $\sigma$  و تابع موجهای  $sp^3$  دارند. همچنین الکترونهاي  $\pi$



شکل ۲۴۰۵ توزیع الکترونی در بوتادین. (الف) پیوندهای جایگزیده  $\sigma$ ؛ (ب) پیوندهای جای ناگزیده  $\pi$ .

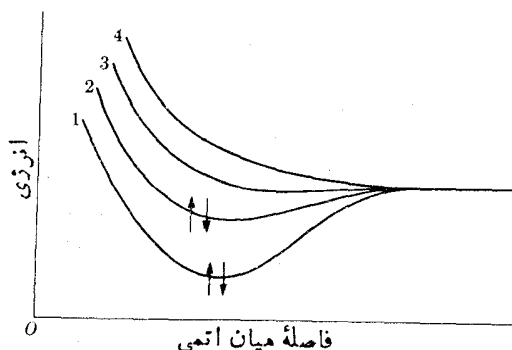
یک صلبیت مشخصی را در ساختار مولکولی ایجاد می کنند، به گونه ای که تمام اتمهای کربن در یک صفحه قرار می گیرند.

اکنون تابع موجها یا اوربیتالهای مولکولی چهار الکترون  $\pi$  را بررسی می کنیم. در پایین شکل ۲۵۰۵ تابع موج شعاعی هر الکترون پیوندی  $\pi$  را هنگامی که اتمهای کربن در فواصل خیلی دور از یکدیگر قرار دارند به طور طرحوار نشان داده ایم. هنگامی که اتمها خیلی بهم نزدیک اند (همانند وقتی که در مولکول قرار دارند) تابع موجهای ممکن با تشکیل ترکیبات خطی مناسب از تابع موجهای منفرد یا اتمی به دست می آیند. این تکنیک همانند روشی است که برای  $H_2$  و  $H_2^+$  به کار رفت اما در اینجا به جای دو اتم چهار اتم وجود دارد. به دلیل تقارن مولکول، اوربیتالهای مولکولی باید نسبت به مرکز مولکول یا



شکل ۲۵.۵ اوربیتالهای مولکولی برای الکترونهاي  $\pi$  در بوتادین.

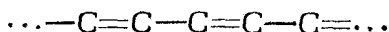
مقارن یا نامقارن باشند. در شکل ۲۵.۵ چهار تابع موج مولکولی ممکن الکترونهاي  $\pi$  با  $\psi_1$ ،  $\psi_2$ ،  $\psi_3$ ، و  $\psi_4$  نشان داده شده است که هر کدام بسا انرژی متفاوتی متناظرند که با تعداد گره‌های تابع موج افزایش می‌یابند. بنابراین، هنگامی که اتمهای کربن نزدیکتر بهم رسم شوند انرژی دستگاه، به جای اینکه همانند حالت مربوط به  $H_p$  و  $H_p^+$  به دو تراز شکافته شود، به چهار تراز نزدیک بهم تقسیم می‌شود. در شکل ۲۶.۵ چهار منحنی انرژی به طور کیفی بر حسب تابعی از فاصله میان هسته‌ای نشان داده شده‌اند. هر تراز انرژی می‌تواند دو الکترون با اسپین مخالف پذیرد. از این رو، در حالت پایه بوتادین چهار الکترون  $\pi$  حالتی متناظر با  $\psi_1$  و  $\psi_2$  را اشغال می‌کنند. دو حالت نزدیک بعدی، یعنی حالتی متناظر با  $\psi_3$  و  $\psi_4$  خالی‌اند. توزیع احتمال الکترون در شکل ۲۷.۵ نشان داده شده است. اوربیتال مولکولی  $\psi_1$  برای هر زوج اتمهای کربن از نوع پیوندی است در حالی که  $\psi_2$  برای زوجهای ۱-۲ و ۳-۴ اتمهای کربن پیوندی ولی برای زوج ۲-۳ پادپیوندی است. به همین دلیل است که توزیع احتمال کل، یک فرورفتگی را در مرکز مولکول نشان می‌دهد. این گفته به این معنی است که قدرت پیوند میان زوج ۲-۳ اتمهای کربن باید کمتر از قدرت پیوند میان زوجهای ۱-۲ و ۳-۴ باشد. از لحاظ تجربی طول پیوند ۲-۳ در



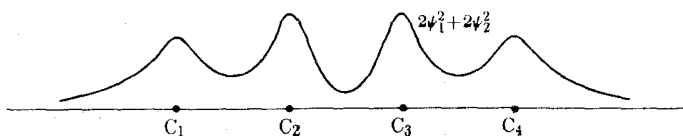
شکل ۲۶۰۵ انرژی پتانسیل الکترونی الکترونهای  $\pi$  در بوتادین برحسب تابعی از فاصله میان هسته‌ای.

حدود  $10^{-10} \text{m} \times 1.36$  است در حالی که طول پیوندهای ۱-۲ و ۳-۴ برابر با  $10^{-10} \text{m} \times 1.35$  است.

این موضوع را می‌توان طوری تعمیم داد که پولین یا یک ترکیب مزدوج شامل یک زنجیره کربن  $2n$  اتمی را در برگیرد. در مدل کلاسیکی ظرفیت می‌توان این ترکیب را به صورت زیر نوشت



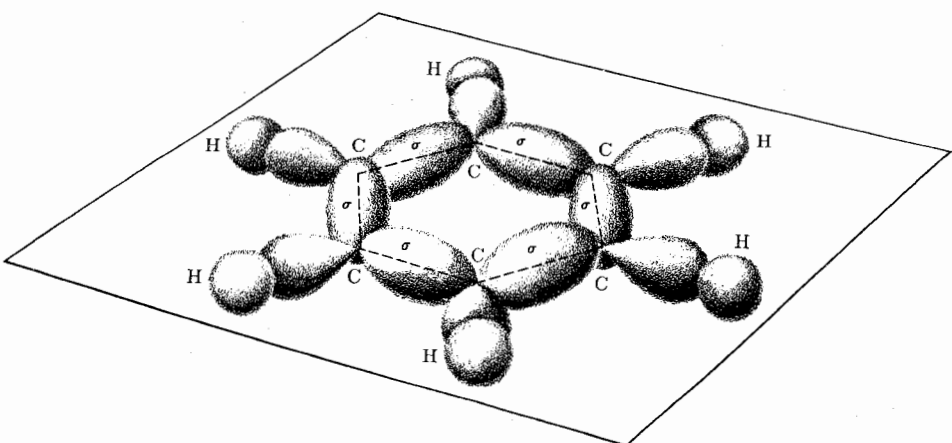
علاوه بر پیوندهای  $\sigma$  میان زوج اتمهای کربن مجاور، تعداد  $2n$  الکترون  $\pi$ ، آن طور که در شکل ۲۶۰۵ برای بوتادین نشان داده‌ایم، در امتداد مولکول بخش شده‌اند. در این صورت  $2n$  تراز انرژی نزدیک به هم با ظرفیت  $2n$  الکترون وجود دارند که باید با  $2n$  الکترون  $\pi$  پر شوند. از این رو هنگامی که این مولکولها در حالت پایه قرار دارند تنها نیمه پایین ترازهای انرژی پر می‌شوند. حرکت الکترونی در این مولکولها را می‌توان با یک مقدار نسبتاً کم انرژی به حالت برانگیخته درآورد زیرا ترازهای خالی در فاصله نزدیک قرار دارند. هنگامی که  $2n$  الکترون  $\pi$  وجود دارد، تمام ترازهای انرژی پر می‌شوند و برای برانگیخته کردن حرکت الکترونی، مولکول باید گذاری را به پیکربندی الکترونی دیگر انجام دهد. این فرایند مستلزم انرژی خیلی زیادی است. دسترس پذیر بودن ترازهای انرژی خالی پایین موجب می‌شود که بسیاری از مولکولهای مزدوج، فوتونهای واقع در ناحیه مرئی را جذب نمایند و بنابراین، رنگهای مشخصه‌ای داشته باشند.



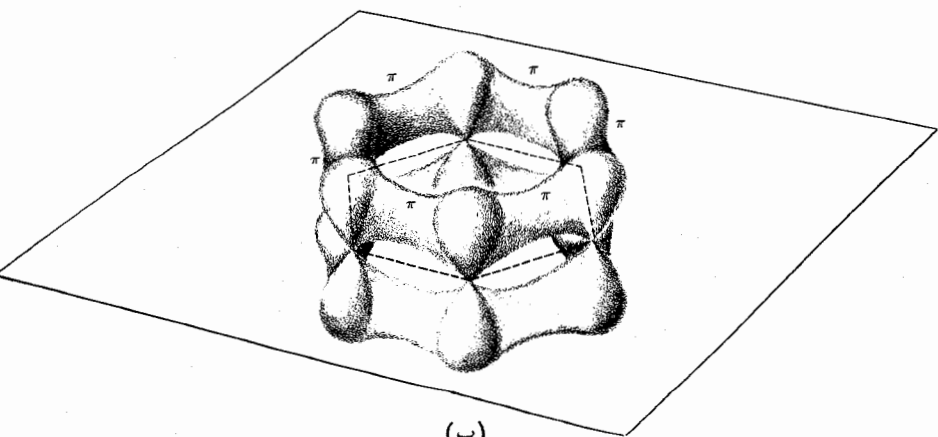
شکل ۲۷۰۵ توزیع احتمال کل الکترونهای  $\pi$  در بوتادین.



به عنوان آخرین مثال، مولکول مزدوج چرخه‌ای بنزن را در نظر می‌گیریم ( $C_6H_6$ ).  
 اتمهای کربن در رتومس یک شش ضلعی منتظم قرار دارند و توسط پیوندهای  $\sigma$  با استفاده از  
 تابع موجهای هیبریدی  $sp^2$  در امتداد هر خط  $C-C$ ، مطابق شکل ۲۸.۵ (الف)، به هم پیوسته‌اند.  
 اتمهای هیدروژن به اوربیتال  $sp^2$  باقیمانده هر اتم کربن می‌پیوندند. همچنین در اوربیتالهای  
 $p_z$  شش الکترون  $\pi$ ، یک الکترون از هر اتم کربن، وجود دارد (محور  $Z$  عمود بر صفحه  
 مولکول در نظر گرفته شده است). این الکترونها می‌توانند آزادانه در امتداد شش ضلعی  
 حرکت کنند و همانند آنچه در شکل ۲۸.۵ (ب) نشان داده شده است، یک نوع جریان بسته



(الف)



(ب)

شکل ۲۸.۵ اوربیتالهای مولکولی بنزن. (الف) پیوندهای جایگزیده  $\sigma$ ،  
 (ب) پیوندهای جای ناکزیده  $\pi$ .

ایجاد کنند که خاصیت دیامغناطیسی قوی بنزن و سایر مولکولهای مزدوج چرخه‌ای را توجیه می‌کند. تحلیل تابع موجها و ترازهای انرژی الکترونیهای  $\pi$  به تحلیل مربوط به بوتادین شبیه است، ولی این حقیقت که زنجیره کربن به صورت یک زنجیره بسته است خصوصیات جدیدی را نسبت به زنجیره کربنی باز ایجاد می‌کند. (زنجیره کربنی باز را در اینجا بحث نمی‌کنیم، مسئله ۲۰.۶ را ببینید).

در اینجا بحث مربوط به ساختار مولکولی را بیش از این دنبال نمی‌کنیم. بحث کوتاه بالا در مورد پیوند شیمیایی برای نشان دادن مفاهیم اساسیتر کافی است و ضمناً دانشجو را از پیش نسبت به مشکلاتی که با به کار بردن مفهوم کلاسیکی ظرفیت در یک شکل خیلی صلب پیش می‌آید آگاه می‌کند. تشکیل مولکول یک مسئله چند ذره‌ای شامل برهم کنشهای الکترومغناطیسی بوده و باید آن را بر طبق قواعد مکانیک کوانتومی حل کرد.

**مثال ۶.۵** اولین انرژی برانگیختگی الکترون  $\pi$  در یک مولکول مزدوج را برآورد کنید.

**حل:** برای برآورد انرژی برانگیختگی الکترون  $\pi$  می‌توان فرض کرد که الکترونیهای  $\pi$  مستقل از هم حرکت می‌کنند و حرکت آنها در داخل مولکول نیز به حرکت در یک جعبه پتانسیلی شبیه است (بخش ۵.۲) که ابعاد آن در حدود طول زنجیره کربن است. در این صورت تابع موجها با خط‌چینهایی متناظر است که در شکل ۲۵.۵ نشان داده شده است. اگر زنجیره کربن شامل  $2n$  اتم باشد، تعداد الکترون  $\pi$  وجود دارد و آخرین تراز الکترونی پر شده با تراز  $n$ ام معادله (۱۴.۲) متناظر است. اختلاف انرژی میان ترازهای  $n$ ام و  $(n+1)$ ام برابر اولین انرژی برانگیختگی است و در این صورت

$$\Delta E = \frac{\pi^2 \hbar^2 (n+1)^2}{2ma^2} - \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (2n+1) \quad (11.5)$$

$a$  طول ناحیه‌ای است که الکترونیهای  $\pi$  در آن حرکت می‌کنند و به عنوان طول مولکولی در نظر گرفته می‌شود که تا نصف طول یک پیوند در هر انتها امتداد یافته است. به عنوان مثال، در مورد بوتادین که اندازه  $a$  در حدود  $10^{-10} \text{m} \times 5.6$  و  $n=2$  است خواهیم داشت  $\Delta E = 5.86 \text{eV}$  که با فوتونهایی به طول موج  $2.12 \times 10^{-7} \text{m}$  متناظر است. مشاهده شده است که بوتادین برای تابشهای با طول موج  $2.17 \times 10^{-7} \text{m}$  از یک جذب قوی برخوردار است. از این رو، مدل خام ما یک سازگاری منطقی با تجربه از خود نشان می‌دهد.

## ۲.۵ چرخشهای مولکولی

تا کنون حرکت الکترونی مولکولهایی را مطالعه می‌کردیم که هسته‌های ثابت داشتند. مرحله بعد در تحلیل ساختار مولکولی مطالعه حرکت هسته‌ای است. ساده‌ترین حرکت هسته‌ای عبارت است از چرخشی که مولکول همچون یک جسم صلب حول مرکز جرم خود انجام می‌دهد. ابتدا چرخش مولکولهای دو اتمی را بررسی می‌کنیم.

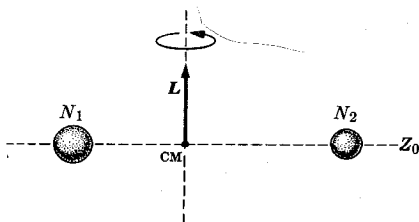
حرکت يك جسم صلب را می توان به راحتی با به کار بردن يك چارچوب مرجع متصل به جسم و متشکل از محورهای اصلی لخت مطالعه کرد. در مورد مولکولهای دو اتمی (شکل ۲۹.۵) محورهای اصلی را خط واصل میان دو هسته  $N_1$  و  $N_2$ ، یا محور  $Z_0$ ، و هر خط عمود بر آن که از مرکز جرم بگذرد تشکیل می دهند. چون جرم الکترونها بسیار کوچک است از گشتاور لختی ناشی از الکترونها می توان چشم پوشید و بنا بر این گشتاور لختی مولکول نسبت به محور  $Z_0$  مساوی با صفر است. از این رو: تکانه زاویه ای مولکول، برای چرخش حول محور  $Z_0$ ، نیز برابر با صفر و تکانه زاویه ای کل  $L$  مولکول عمود بر محور مولکولی خواهد بود. با فرض اینکه  $r$  فاصله جدایی تعادل هسته ها و  $m$  نیز جرم کاهیده مولکول باشد، گشتاور لختی نسبت به محور عمود بر  $Z_0$  که از مرکز جرم مولکول می گذرد مساوی با  $I = \mu r^2$  است. در این صورت می توانیم انرژی جنبشی چرخش مولکول را به صورت  $E_r = L^2 / 2I$  بنویسیم. با توجه به کوانتاش تکانه زاویه ای می توان بر طبق معادله (۱۵.۳) چنین نوشت  $L^2 = \hbar^2 l(l+1)$  که در آن  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$  (یا به عبارت دیگر يك عدد درست مثبت است). بنا بر این، انرژی جنبشی چرخشی مولکول می شود

$$E_r = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1) = Bhcl(l+1) \quad (12.5)$$

که در آن طبق معمول از عبارت  $\hbar^2 / 2I = Bhc$  استفاده شده است. در جدول ۳.۵ کمیت های  $B$  و  $\hbar^2 / 2I$  برای چند مولکول آمده است که به ترتیب بر حسب eV و  $\text{cm}^{-1}$  بیان شده اند. با معلوم بودن مقادیر متوالی  $l$  می توان ترازهای انرژی چرخشی مولکول را مطابق شکل ۳۰.۵ به دست آورد. ترازهای متوالی انرژی، متناظر با  $l$  و  $l+1$ ، به اندازه مقدار زیر باهم اختلاف دارند

$$\Delta E_r = 2Bhc(l+1) \quad (13.5)$$

به دلیل کوچکی مقدار  $\hbar^2 / 2I$  (یعنی  $10^{-4} \text{ eV}$ ) در مقایسه با انرژی جنبشی انتقالی (که در دمای معمولی از مرتبه  $10^{-2} \text{ eV}$  تا  $10^2 \text{ eV}$  است) بسیاری از مولکولها در دمای معمولی در حالت های چرخشی برانگیخته یافت می شوند. اگرچه جمعیت تعادل نسبی ترازهای انرژی چرخشی مختلف يك مسئله بسیار مهم است اما تحلیل آن مستلزم استفاده از

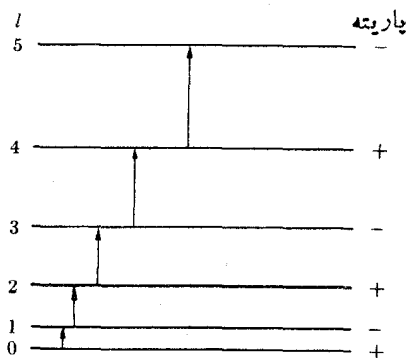


شکل ۲۹.۵ چرخش يك مولکول دو اتمی حول مرکز جرم خود.

جدول ۳۰۵ ثابتهای چرخشی و ارتعاشی بعضی مولکولهای دواتمی.

$\bar{\nu}_0, \text{cm}^{-1}$	$\hbar\omega_0, \text{eV}$	$B = \hbar / 4\pi I c, \text{cm}^{-1}$	$\hbar^2 / 2I, \text{eV}$	مولکول
۲۳۹۵	۰٫۵۴۳	۶۰۷۸۰۹	$۸۰ \times 10^{-3}$	H <sub>۲</sub>
۵۶۵	۰٫۰۶۹۸	۰٫۲۴۲	$۳٫۱ \times 10^{-5}$	Cl <sub>۲</sub>
۲۳۶۰	۰٫۲۹۲	۲٫۰۱۰	$۲٫۴۸ \times 10^{-4}$	N <sub>۲</sub>
۳۵۱	۰٫۰۴۳۲	۰٫۶۷۳	$۸٫۳ \times 10^{-4}$	Li <sub>۲</sub>
۱۵۸۰	۰٫۱۹۲	۱٫۴۴۶	$۱٫۷۸ \times 10^{-4}$	O <sub>۲</sub>
۲۱۷۰	۰٫۲۶۸	۱٫۹۳۱	$۲٫۳۸ \times 10^{-4}$	CO
۴۱۳۸	۰٫۵۱۰	۲٫۰۹۲	$۲٫۴۸ \times 10^{-3}$	HF
۲۹۹۰	۰٫۳۶۹	۱٫۰۵۹	$۱٫۳۱ \times 10^{-3}$	HCl
۲۶۵۰	۰٫۳۲۶	۸٫۴۷	$۱٫۰۵ \times 10^{-3}$	HBr
۱۲۶۶	۰٫۱۵۱	۱٫۴۸۸	$۱٫۸۴ \times 10^{-4}$	BeF

روشهای آماری است و بنا بر این مطالعه آنرا به بخش ۵.۱۲ ماکول می‌کنیم. تابع موجهای متناظر با حرکت چرخشی عبارت‌اند از توابع  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  که در بخش ۵.۳ معرفی شد و زوایای  $(\theta, \phi)$  نیز امتداد محور مولکولی Z را نسبت به محورهای X, Y, و Z که در آزمایشگاه ثابت‌اند تعریف می‌کنند. از این‌رو، پارینته هر تراز عبارت است از  $l(l+1)$



شکل ۳۰۵ حالت‌های انرژی چرخشی یک مولکول دواتمی.

و بنا براین ترازهای متوالی انرژی پاریته مخالف باهم دارند زیرا مثل اوربیتالهای اتمی  $s, p, d, \dots$  هستند. برای تابش دو قطبی الکتریکی، گذارهای مجاز از قاعده زیر پیروی می کنند

$$\Delta l = \pm 1 \quad (12.5)$$

که يك قاعده گزینش شبیه به قاعده گزینش اتمی است. از این رو، تنها گذارهایی ممکن اند که میان ترازهای مجاور انجام می شوند. بعضی گذارهای متناظر با جذب، در شکل ۳۰.۵ نشان داده شده است. هنگامی که قاعده بور،  $E_2 - E_1 = h\nu$  را به کار می بریم بسامد تابش گسیل یا جذب شده در هر گذار چرخشی عبارت است از

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = 2Bc(l+1) \quad \text{یا} \quad \bar{\nu} = 2B(l+1) \quad (15.5)$$

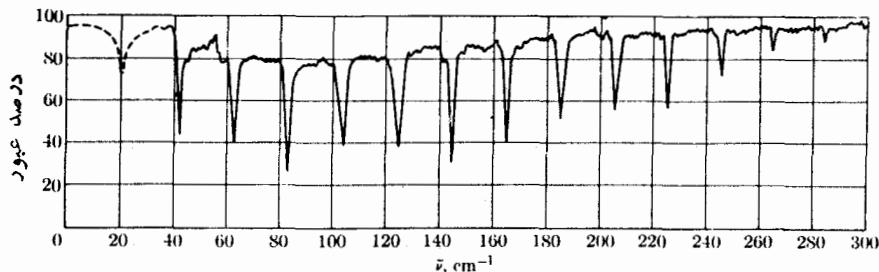
که در آن  $l$  تکانه زاویه ای پایینترین تراز موجود در گذارها و  $\bar{\nu}$  نیز عدد موج بر حسب  $\text{cm}^{-1}$  است. از این رو، طیف چرخشی مولکولهای دو اتمی شامل يك سری خطوط است که به فاصله مساوی از هم قرار دارند و مقدار آنها برابر است با

$$\Delta \bar{\nu} = 2B \text{ cm}^{-1}$$

با اندازه گیری  $\Delta \bar{\nu}$ ، می توان  $B$  و از این رو گشتاور لختی را محاسبه و به کمک آن فاصله جدایی هسته ای  $r_0$  را بر آورد کرد.

طیفهای چرخشی خالص در نواحی میکروموج یا فرسرخ دور قرار می گیرند. به علاوه، برای اینکه يك مولکول طیف چرخشی خالص داشته باشد باید گشتاور دو قطبی الکتریکی دائمی داشته باشد. در فرایند جذب تابش توسط مولکول، گشتاور دو قطبی الکتریکی دائمی با میدان الکتریکی موج ورودی برهم کنش می کند. در فرایند گسیل تابش، چرخش دو قطبی سبب تابش می شود. بنا بر این، مولکولهای دو اتمی همگن - هسته (که دو قطبی الکتریکی دائمی ندارند) طیفهای چرخشی خالص نخواهند داشت. شکل ۳۱.۵ طیف چرخشی جذبی  $\text{HCl}$  واقع در حالت گازی را نشان می دهد. هر فرورفتگی با يك جذب تشدیدي یا بیشینه متناظرست. مشاهده می شود که در سازگاری با نظریه همان طور که با معادله (۱۵.۵) بیان شد، بسامدها به فاصله مساوی از یکدیگر قرار دارند.

معادله (۱۲.۵) برای مورد مولکول صلب صادق است. اما، هنگامی که انرژی چرخشی افزایش یابد، يك کشیدگی مولکولی ناشی از اثر مرکز گریز به وجود می آید که در نتیجه آن گشتاور لختی افزایش می یابد و معادله (۱۲.۵) به تصحیح نیاز پیدا می کند. این بحث را می توان در مورد طیف چرخشی مولکولهای خطی از قبیل  $\text{CO}_2$  یا  $\text{HCN}$  نیز به کار برد. ترازهای انرژی چرخشی آن مولکولهایی که به طور کلی گشتاور لختی آنها نسبتاً بزرگ است، نسبت به اکثر مولکولهای دو اتمی، خیلی به هم نزدیکترند و بنا بر این در طیف چرخشی بسامد آنها پایین است.

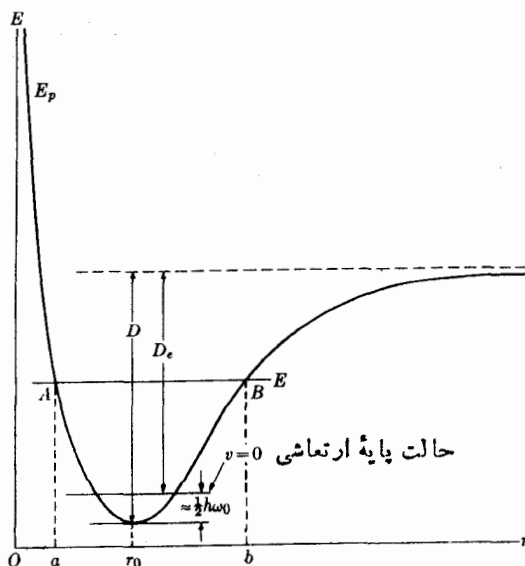


شکل ۳۱۰۵ طیف جذبی چرخشی HCl در حالت گازی.

### ۸.۵ ارتعاشات مولکولی

تا کنون هسته‌ها را نسبت به یکدیگر ثابت در نظر می‌گیریم. اما، شکل منحنی انرژی پتانسیل هر مولکول دو اتمی (همانند آنچه در شکل‌های ۶.۵، ۱۳.۵، و ۱۴.۵ نشان داده شده است) این فکر را تداعی می‌کند که هسته‌های هر مولکول حرکت نوسانی نسبی دارند.

در اینجا یک مولکول دو اتمی را در نظر می‌گیریم که انرژی پتانسیل آن برای یک پیکریندی الکترونی معین مطابق شکل ۳۲.۵ است که در آن  $r_0$  فاصله جدایی تعادل است. با فرض اینکه حرکت هسته‌ای با انرژی  $E$  متناظر باشد، از نظر کلاسیک دو هسته طوری نوسان می‌کنند که فاصله جدایی آنها میان  $Oa$  و  $Ob$  تغییر کند. اما، حرکت هسته‌ها باید



شکل ۳۲.۵ انرژی پتانسیل الکترونی در یک مولکول دو اتمی.

بر طبق مکانیک کوانتومی بیان شود. اگر انرژی پتانسیل مثل انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده که با سهمی  $\frac{1}{2}k(r-r_0)^2$  نشان داده می‌شود بسود، حرکت نوسانی نسبی دو هسته هماهنگ ساده بود و نتایج بخش ۶.۲ نیز به کار می‌رفت. بسامد زاویه‌ای نوسانات برابر است با  $\omega = \sqrt{k/\mu}$  که در آن  $\mu$  جرم کاهیده مولکول است. در بخش ۶.۲ نشان داده شد که انرژی حرکت نوسانی کوانتیده است و با معادله (۲۱.۲) داده می‌شود. از این رو، ترازهای انرژی ارتعاشی هر مولکول دو اتمی به طور تقریبی با رابطه زیر داده می‌شوند

$$E_v = \left(v + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_0 \quad (16.5)$$

که در آن  $v = 0, 1, 2, 3, \dots$  (یا عدد درست مثبت). بنابراین ترازهای انرژی ارتعاشی مولکول به فاصله یکسان از هم دیگر (و به مقدار  $\hbar \omega_0$ ) قرار دارند و مولکول نیز یک انرژی ارتعاشی نقطه صفر برابر با  $\hbar \omega_0 / 2$  دارد. به دلیل انرژی نقطه صفر، انرژی تفکیک یک مولکول دو اتمی از رابطه زیر به دست می‌آید

$$D_e = D - \frac{1}{2} \hbar \omega_0$$

این رابطه را می‌توان از شکل ۳۲.۵ نتیجه گرفت. قاعده گزینش برای گذارهای دو قطبی الکتریکی میان ترازهای ارتعاشی درست مانند معادله (۳۲.۲) است، یعنی

$$\Delta v = \pm 1 \quad (17.5)$$

چون تنها تغییر مجاز  $v$  گذار به یک تراز انرژی مجاور است، تنها بسامد جذب شده یا تابش شده در هر گذار ارتعاشی بسا بسامد طبیعی کلاسیکی  $\omega_0 / 2\pi$  برابر است. در جدول ۳.۵ مقادیر  $\hbar \omega_0$  و  $v_0 = v_0/c$  برای چند مولکول دو اتمی آمده است. بسامدهای ارتعاشی اکثر مولکولهای دو اتمی در ناحیه فرورسرخ طیف قرار دارد. برای اینکه یک گذار ارتعاشی رخ دهد (در گسیل یا در جذب)، مولکول دو اتمی باید یک گشتاور دو قطبی الکتریکی دائمی داشته باشد. از این رو، مولکولهای همگن-هسته‌ای چون  $H_2$  یا  $N_2$  گذارهای ارتعاشی خالص از خود نشان نمی‌دهند زیرا گشتاور دو قطبی الکتریکی دائمی ندارند و طیف فرورسرخ تشکیل نمی‌دهند. ولی مولکولهای قطبی چون  $HCl$  گذارهای ارتعاشی قوی از خود نشان می‌دهند.

انرژی مولکولی ناشی از هر دو حرکت چرخشی و ارتعاشی را می‌توان از ترکیب

۱. این قاعده گزینش یک قاعده سخت و سخت نیست زیرا انرژی پتانسیل، همان‌طور که در شکل ۳۲.۵ نشان داده شده است، انرژی پتانسیل یک نوسانگر هماهنگ نیست و مقادیر بالاتر  $\Delta v$  نیز ممکن‌اند، هر چند احتمال آنها کمتر است.

معادلات (۱۲.۵) و (۱۶.۵) به دست آورد، بنابراین

$$E = E_v + E_r = \left(v + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_0 + \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1) \quad (18.5)$$

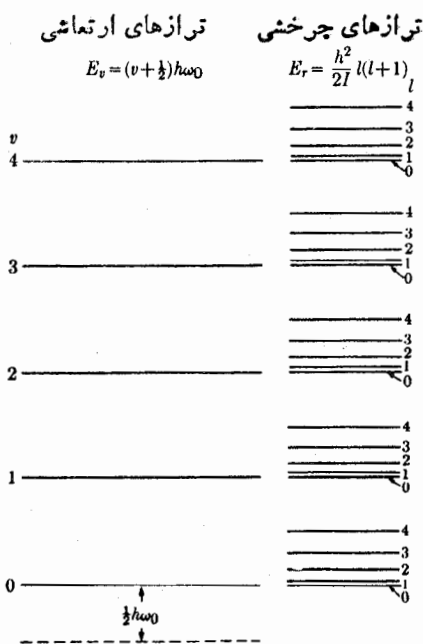
به طول کلی، کمیت  $\hbar^2/2I$  (از مرتبه  $10^{-4} \text{eV}$ ) به مراتب کوچکتر از کمیت  $\hbar \omega_0$  (از مرتبه  $10^{-1} \text{eV}$ ) است و می توان گفت به هر تراز ارتعاشی چندین تراز چرخشی وابسته است (شکل ۳۳.۵). هنگامی که قواعد گزینش  $\Delta v = \pm 1$  و  $\Delta l = \pm 1$  را برای يك گذار میان دو تراز چرخشی که متعلق به دو تراز ارتعاشی مجاورند به کار می بریم، طیف چرخشی ارتعاشی را به دست می آوریم. این طیف شامل خطوطی است که بسامدهای آن یا رابطه زیر داده می شوند

$$\nu_{v,r} = \nu_0 \pm 2Bc(l+1)$$

یا

$$\bar{\nu}_{v,r} = \bar{\nu}_0 \pm 2B(l+1), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (19.5)$$

که در آن  $l$  تراز چرخشی پایتتر است و  $B$  نیز قبلا در بخش ۷.۵ تعریف شده است.



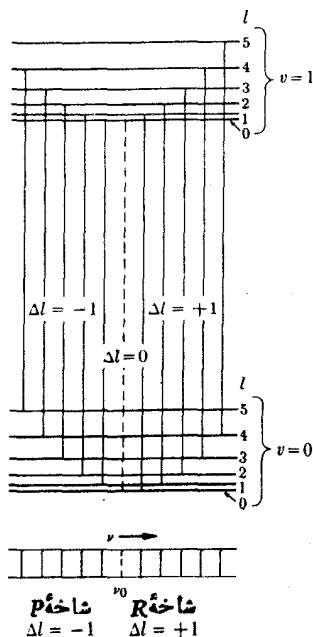
شکل ۳۳.۵ ترازهای انرژی چرخشی و ارتعاشی يك مولکول دو اتمی



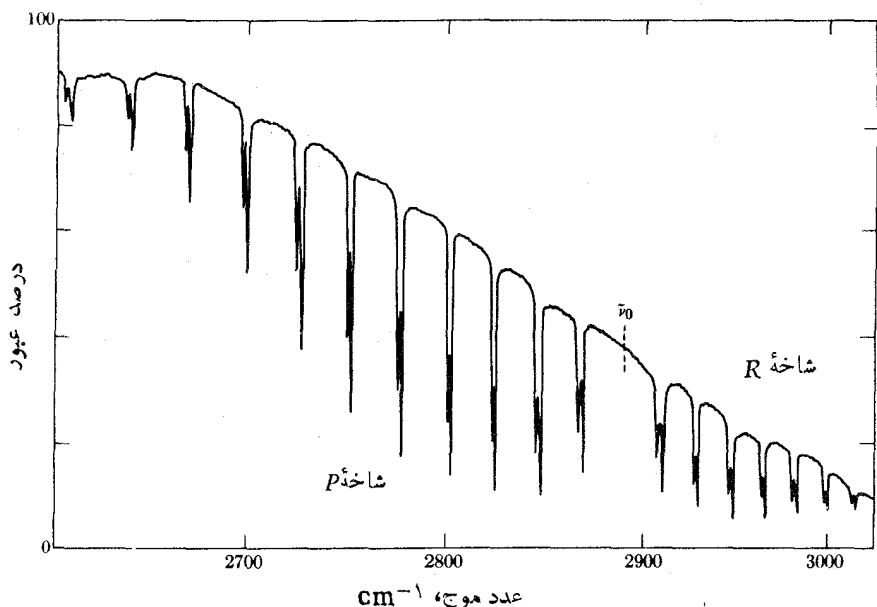
بسامدها با فاصله یکسان (به مقدار  $2Bc$ ) در دو طرف بسامد مرکزی  $\nu_0$  قرار دارند. خط با بسامد  $\nu_0$  از طیف حذف می شود زیرا مستلزم گذار  $\Delta l = 0$  است که یسک گذار ممنوع است. شکل ۳۴.۵ گذارهای چرخشی ممکن را برای گذارهای ارتعاشی  $\nu = 0 \rightarrow \nu = 1$  نشان می دهد. خطوط با  $\Delta l = +1$  به شاخه  $R$  طیف معروف اند. شاخه  $P$  نیز به خطوطی اطلاق می شود که در آنها  $\Delta l = -1$  است. شدتهای گذارهای مختلف برای گسیل و جذب به تراکم تراز انرژی اولیه بستگی دارد که آن هم به نوبه خود وابسته به دمای ماده است. این موضوع را در بخش ۵.۱۲ بررسی خواهیم کرد.

طیف چرخشی - ارتعاشی مولکول  $HCl$  در شکل ۳۵.۵ نشان داده شده است. چون  $\nu_0$  و  $I$  هر دو به جرم مولکول بستگی دارند طیف مولکولهای  $H^{37}Cl$  و  $H^{35}Cl$  که ایزوتوپهای مختلفی دارند کمی جا به جا شده است. این جا به جایی به وضوح در شکل قابل تشخیص است.

این نظریه را می توانیم به صورت زیر اصلاح کنیم. منحنی انرژی پتانسیل شکل ۳۲.۵ با منحنی انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده متناظر نیست و نوسانات ناهماهنگ اند.



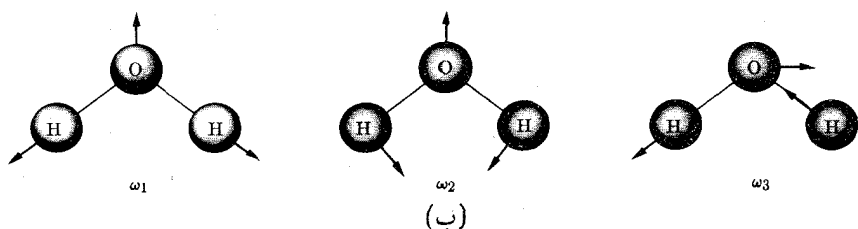
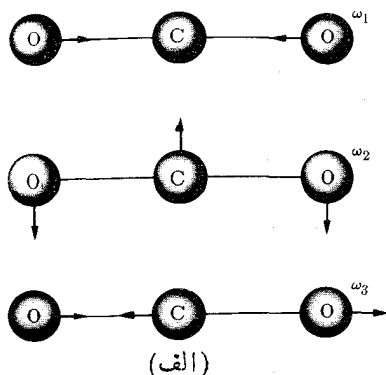
شکل ۳۴.۵ گذارهای ارتعاشی-چرخشی در يك مولکول دو اتمی.



**شکل ۳۵.۵** طیف جذبی چرخشی- ارتعاشی HCl. فرورفتگیهای بزرگ ناشی از  $H^{35}Cl$  و فرورفتگیهای کوچکتر ناشی از  $H^{37}Cl$  هستند.

برای توصیف درست انرژی ارتعاشی باید جمله‌هایی به معادله (۱۸.۵) اضافه کرد. به علاوه، با توجه به شکل منحنی انرژی پتانسیل، با تغییر انرژی ارتعاشی فاصله جدایی تعادل هسته‌ها نیز تغییر می‌کند. این موضوع باعث تغییر در گشتاور لختی و از این رو، انرژی چرخشی می‌شود. این مسئله یک اثر برهم کنش ارتعاشی- چرخشی است. تمام این جمله‌های تصحیحی معمولاً به طور تجربی با تحلیل طیف مولکول به دست می‌آیند.

طیفهای ارتعاشی مولکولهای چنداتمی پیچیده‌ترند. این طیفها بر حسب مدهای بهنجار ارتعاش مولکول تحلیل می‌شوند (مدهای بهنجار ارتعاشاتی هستند که در آنها تمام هسته‌ها با روابط فاز ثابتی ارتعاش می‌کنند). به طور کلی هر مد بهنجار، باید یک بسامد ارتعاش متفاوتی متناظرست. اما، تقارن می‌تواند بعضی بسامدها را به صورت مساوی یا تبهگن در آورد. شکل ۳۶.۵ ارتعاشات بهنجار دو مولکول ساده را نشان می‌دهد، مولکول کربن دی‌اکسید،  $CO_2$  یک مولکول خطی است و مولکول  $H_2O$  یک مولکول مسطح است. برای اینکه بسامدی در طیف ارتعاشی یا فرسرخ فعال باشد، ارتعاش بهنجار متناظر باید یک دو قطبی الکتریکی نوسانی در مولکول القا کند. به عنوان مثال، مولکول متقارن  $CO_2$  را در نظر می‌گیریم که گشتاور دو قطبی الکتریکی دائمی ندارد. نوسان  $\nu_2$  تقارن مولکول را حفظ می‌کند و گشتاور دو قطبی الکتریکی القا نمی‌کند؛ بنابراین، از لحاظ طیف نمایی، مد ارتعاشی غیر فعال است.

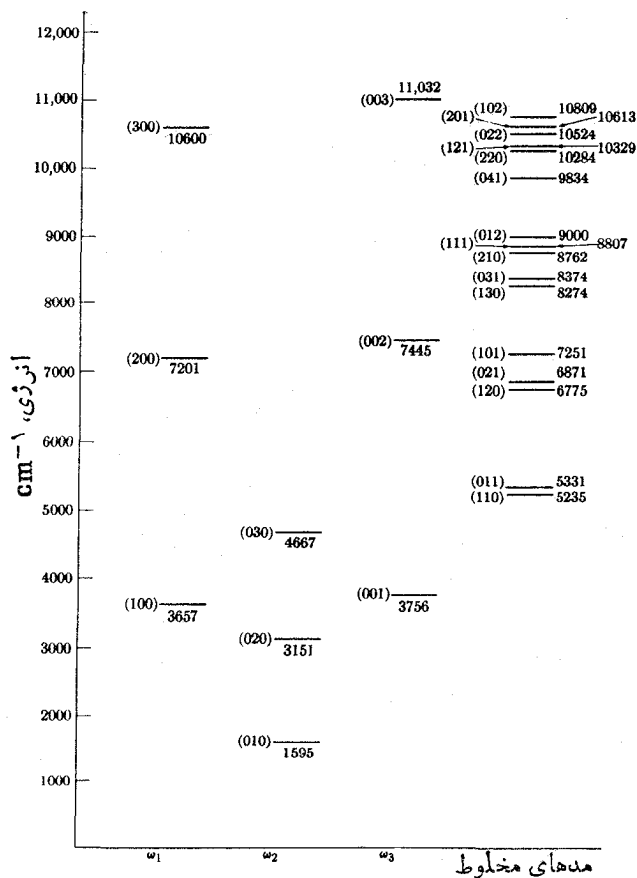


شکل ۳۶.۵ ارتعاشات بهنجار مولکولهای چند اتمی. (الف) مولکول  $\text{CO}_2$  با  $\omega_1 = 1337 \text{ cm}^{-1}$ ،  $\omega_2 = 667 \text{ cm}^{-1}$  و  $\omega_3 = 2349 \text{ cm}^{-1}$ ، (ب) مولکول  $\text{H}_2\text{O}$  با  $\omega_1 = 3657 \text{ cm}^{-1}$ ،  $\omega_2 = 1595 \text{ cm}^{-1}$  و  $\omega_3 = 3756 \text{ cm}^{-1}$ .

از طرف دیگر،  $\omega_2$  يك گشتاور دوقطبی را موازی با محور مولکول و  $\omega_1$  و  $\omega_3$  نیز يك گشتاور دوقطبی را عمود بر محور مولکول القا می کنند. بنابراین، از نظر طیف نمایی هر دو فعال اند. ضمناً  $\omega_2$  دوبار تبهگن است زیرا شامل مد نمایش داده شده باضافه مدی است که در آن اتمها عمود بر صفحه کتاب نوسان می کنند.

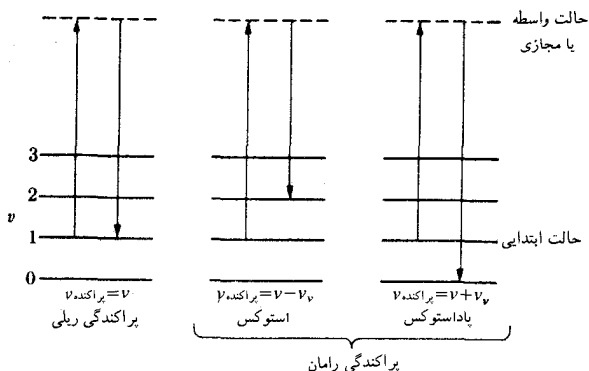
بنابراین، يك مولکول چند اتمی چندین مجموعه تراز انرژی ارتعاشی دارد که در شکل ۳۷.۵ بعضی از آنها برای  $\text{H}_2\text{O}$  نشان داده شده است. هر يك از این ترازها وابسته به ترازهای چرخشی متناظرند و از این رو طیفها را نسبتاً پیچیده ترمی سازند. يك تحلیل در مورد طیفهای چرخشی - ارتعاشی می تواند اطلاعات با ارزشی را درباره ابعاد مولکولی، وضع هندسی، انرژی تفکیک، و مانند آن به دست بدهد.

فرایند جالب توجهی به نام اثر رامان وجود دارد (به نام رامان، فیزیکدان هندی) که با آنکه اساساً يك فرایند پراکندگی است با وجود این به ارتعاشات و چرخشهای مولکولی نیز مربوط می شود. فرض کنید يك نمونه گازی را با تابش تکفامی به بسامد  $\nu$  روشن می کنیم. هر گاه تابش پراکنده شده را در امتدادی عمود بر امتداد تابش فرودی نگاه کنیم، مشاهده



شکل ۳۷۰۵ ترازهای ارتعاشی  $H_2O$  در حالت گازی. انرژی بر حسب  $cm^{-1}$  بیان شده است. اعداد داخل پرانتز بسامد ارتعاشی  $(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  متناظرند.

خواهیم کرد که این تابش، علاوه بر بسامد  $\nu$  برابر با بسامد تابش اولیه یا فرودی، کبه پراکندگی همردوس یا دیلی است، شامل تابشی با بسامد  $\nu \pm \nu_1$  است (که در آن  $\nu_1$  با بسامد طیف ارتعاشی مولکول متناظر است). این اثر به پراکندگی دامان معروف است. پراکندگی دامان را می توان به طریق زیر تعبیر کرد: مولکولی را در نظر می گیریم که در آغاز در حالت ارتعاشی  $\nu$  قرار دارد (شکل ۳۸۰۵). هنگامی که مولکول تابشی با بسامد  $\nu$  را جذب می کند ممکن است به یک حالت برانگیخته منتقل شود. اگر حالت برانگیخته یک ویژه حالت نباشد، یک تابش مجدد فوری از انرژی جذب شده وجود خواهد داشت. این مولکول با گسیل



شکل ۳۸۰۵ پراکندگی رامان و ریلی.

تابشی بسا بسامد نور فرودی می تواند به حالت اولیه برگردد. این اثر به پراکندگی ریلی معروف است. همچنین مولکول ممکن است به تراز ارتعاشی دیگری که بر طبق قاعده گزینش  $\Delta v = \pm 1$ ، بلافاصله يك تراز در بالا یا پایین تراز اولیه باشد، برگردد. این اثر به پراکندگی رامان معروف است. از این رو، بسامد تابش گسیل شده برابر  $v + v_0$  یا  $v - v_0$  است. خط با بسامد  $v - v_0$  به خط استوکس و خط با بسامد  $v + v_0$  نیز به خط پاداستوکس معروف است. اثر رامان در طیف چرخشی نیز دیده شده است. در این مورد قاعده گزینش به صورت  $\Delta l = 0, \pm 2$  است.

مثال ۷۰۵ رابطه میان ثابتها در پتانسیل مورس (مثال ۳۰۵) و بسامد ارتعاشی يك مولکول دو اتمی را به دست آورید.

حل: با فرض  $E_p = D[1 - e^{-a(r-r_0)}]^2$  می توان از رابطه زیر استفاده کرد

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

هرگاه  $x$  کوچک باشد بایک تقریب معتبر می توان بجز سه جمله اول از بقیه جملات صرف نظر کرد. با فرض  $x = a(r - r_0)$  خواهیم داشت

$$E_p = D[a(r - r_0) - \frac{1}{2}a^2(r - r_0)^2 + \dots]^2$$

$$= Da^2(r - r_0)^2 - Da^3(r - r_0)^3 + \dots \quad (20.5)$$

اگر نوسانات هماهنگ بودند نتیجه به صورت زیر درمی آمد

$$E_p = \frac{1}{4}k(r-r_0)^2$$

بنابراین، جمله اول معادله (۲۰.۵) انرژی پتانسیل هماهنگ را به دست می‌دهد و می‌توان نوشت  $k/2 = Da^2$ ، چون  $\omega_0 = \sqrt{k/\mu}$ ، خواهیم داشت

$$a^2 = \frac{\mu\omega_0^2}{2D}$$

که ثابت  $a$  را بر حسب ثابتهای معلوم مولکولی به دست می‌دهد. جمله دوم، انرژی پتانسیل ناهماهنگ است و همان‌طور که در معادله (۱۶.۵) دیده می‌شود، جملات اضافی را به انرژی ارتعاشی اضافه می‌کند. به عنوان مثال، می‌توان نشان داد که، در مرتبه اول، انرژی ارتعاشی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$E_v = \left(v + \frac{1}{4}\right)\hbar\omega_0 - \left(v + \frac{1}{4}\right)^2 x_e \hbar\omega_0$$

که در آن  $x_e = \hbar\omega_0/4D$  است.

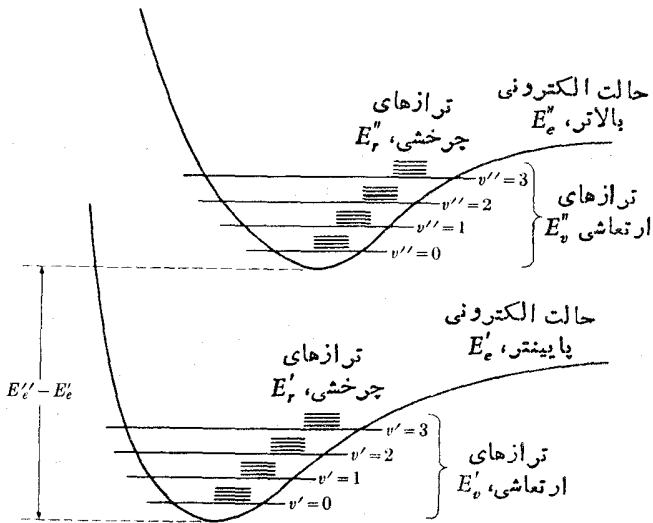
## ۹.۵ گذارهای الکترونی در مولکولها

هر مولکول معین ممکن است چندین پیکر بندی الکترونی یا ویژه حالت داشته باشد. در اینجا برای سهولت یک مولکول دو اتمی را در نظر می‌گیریم. با هر حالت الکترونی یک انرژی پتانسیل مشابه با حالت‌های الکترونی  $H_2^+$ ، که در شکل ۷.۵ نشان داده شده است متناظر است. به طور کلی، فاصله‌های تعادلی دو هسته در حالت‌های الکترونی برانگیخته با فاصله‌های متناظر در حالت پایه متفاوت است. دامنحنی انرژی پتانسیل از این نوع در شکل ۳۹.۵ نشان داده شده است. فاصله جدایی این منحنیهای انرژی در حدود ۱ تا ۱۰ eV است. از این رو، هنگامی که یک مولکول از یک پیکر بندی الکترونی به پیکر بندی دیگر گذار می‌کند، تابش تابیده در ناحیه مرئی یا ناحیه فرابنفش طیف قرار می‌گیرد.

با هر حالت الکترونی مشخص ممکن است چند حالت ارتعاشی و با هر حالت ارتعاشی نیز چندین حالت چرخشی متناظر باشد. در تقریب اول می‌توان انرژی مولکول را به صورت زیر نوشت

$$E = E_e + E_v + E_r = E_e + \left(v + \frac{1}{4}\right)\hbar\omega_0 + \frac{\hbar^2}{2I}l(l+1) \quad (21.5)$$

که در آن  $E_e$  انرژی الکترونی در وضع کمینه دامنحنی انرژی پتانسیل است (شکل ۳۹.۵). در هر گذار الکترونی ممکن است هر سه انرژی تغییر کند. به طور کلی بسامد  $\omega$  و گشتاور



شکل ۳۹.۵ ترازهای انرژی ارتعاشی و چرخشی وابسته به دو حالت الکترونی.

لختی  $I$  برای هر دو حالت الکترونی متفاوت اند. بنابراین، باید تغییر انرژی در گذار الکترونی را به صورت زیر بنویسیم

$$\Delta E = E'' - E' = \Delta E_e + \Delta E_v + \Delta E_r$$

که در آن  $\Delta E_e = E''_e - E'_e$  تغییر در انرژی الکترونی است که با اختلاف انرژی کمینه دو حالت الکترونی داده می‌شود و

$$\Delta E_v = E''_v - E'_v = \left(v'' + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega'' - \left(v' + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega'$$

تغییر در انرژی ارتعاشی است و

$$\Delta E_r = E''_r - E'_r = \frac{\hbar^2}{2I''}l''(l''+1) - \frac{\hbar^2}{2I'}l'(l'+1)$$

تغییر در انرژی چرخشی است. جمله‌های با دو پریم با حالت انرژی الکترونی بالاتر و جمله‌های با یک پریم نیز با حالت انرژی الکترونی پایینتر متناظرند. بنابراین، بسامد تابش گسیل شده یا جذب شده در هر گذار الکترونی برابر مجموع سه جمله است

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \nu_e + \nu_v(v'', v') + \nu_r(l'', l')$$

که در آن  $v_e = \Delta E_e / h$  ناشی از تغییر در انرژی الکترونی است و  $v_e(v'', v')$  و  $v_r(l'', l')$  نیز به ترتیب با تغییرات در انرژیهای ارتعاشی و چرخشی متناظرند. بسامد  $v$  بزرگترین بسامد است. برای یک گذار الکترونی مشخص، طیفها متشکل از یک سری نوادند که هر کدام بایک مقدار مشخص  $v''$  و  $v'$  و تمام مقادیر ممکن  $l''$  و  $l'$  متناظرند.

برای تعیین مقادیر ممکن  $(v''$  و  $v')$  و  $(l''$  و  $l')$  به قواعد گزینش نیاز داریم. هنگامی که گذارهای دو قطبی الکتریکی را بررسی می کنیم، قاعده گزینش چرخشی عبارت است از

$$\Delta l = 0, \pm 1$$

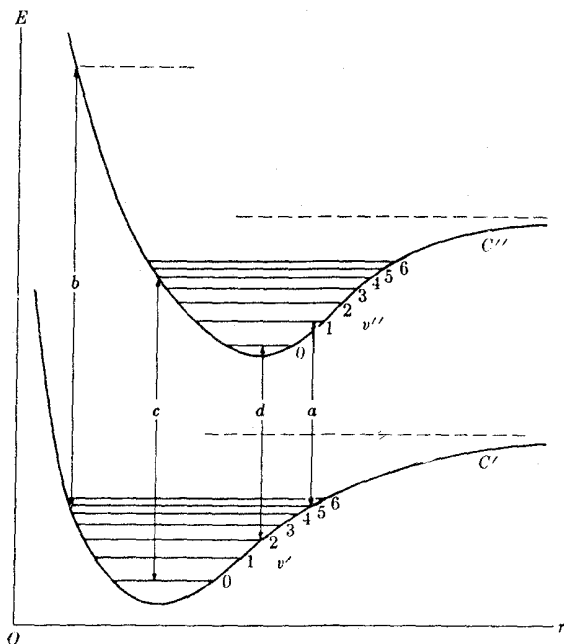
که در آن گذار  $l' = 0 \leftrightarrow l'' = 0$  غیر ممکن است. توجه کنید که در اینجا  $\Delta l = 0$  یک گذار مجاز است زیرا که یک تغییر در پیکر بندی مولکول در خلال گذار وجود دارد و نکات مربوط به پاریته را مثل موارد پیش شامل نمی شود. اما گذار  $l' = 0 \leftrightarrow l'' = 0$  ممنوع است زیرا اگر مجاز بود، محال بود اصل پایستگی تکانه زاویه ای را ارضا کند. زیرا تابش گسیل شده یا جذب شده یک واحد تکانه زاویه ای حمل می کند.

قاعده گزینش دیگر آن است که اسپین مولکول باید در هر دو حالت الکترونی موجود در گذار یکسان باشد، یعنی داشته باشیم  $\Delta S = 0$ . این قاعده از این واقعیت ناشی می شود که نیروهای وابسته به اسپین موجود در گذار آنقدر قوی نیستند که جفت شدگی اسپین الکترونها را تغییر دهند، اما از این قاعده گزینش چندان تبعیت نمی شود.

قاعده گزینش ارتعاشی تا حدودی پیچیده تر است. توجه کنید که هر گذار الکترونی در زمانی از مرتبه  $10^{-16}$  s رخ می دهد، در حالی که دوره تناوب حرکت نوسانی هسته در حدود  $10^{-12}$  s یا هزار مرتبه طولانیتر است. بنابراین، در خلال گذار الکترونی، فاصله جدایی هسته ای اساساً یکسان باقی می ماند. این بدان معنی است که خط واصل میان مکانهای اولیه و نهایی هسته در شکل ۳۹.۵ در مدت زمان گذار باید به صورت قائم باشد. از طرف دیگر، مطلوبترین گذارها باید آنهایی باشند که برای آنها هماهنگی سریع حرکت هسته با شرایط الکترونی جدید بسیار راحت باشد. به زبان مکانیک کلاسیک، مطلوبترین گذارهای ارتعاشی هنگامی رخ می دهد که سرعت نسبی هسته ها در مدت زمان گذار در هر دو حالت یکسان باشد. چون سرعت هسته ها در انتهای نوسان کلاسیکی مساوی با صفر است، محتملترین گذارها، در مدت زمان گذار، هنگامی رخ می دهند که هسته ها در یک انتهای نوسان خود و در فاصله میان هسته ای یکسان نسبت به هر دو حالت ابتدایی و نهایی باشند. به زبان مکانیک کوانتومی می توان گفت که محتملترین گذارها آنهایی اند که برای آنها تابع موج ارتعاشی حداقل و اوجش را در زمان گذار متحمل شود. چون تابع موجهای نوسانی در نواحی انتهایی نوسان کلاسیکی خیلی مشابه اند (شکل ۱۹.۲) با مدل مکانیک کوانتومی نیز به همان نتیجه ای می رسیدیم که با مدل کلاسیکی به آن رسیدیم.

اکنون به عنوان مثال، شکل ۴۰.۵ را در نظر می گیریم و فرض می کنیم مولکولی که ابتدا در حالت ارتعاش  $v' = 5$  از حالت الکترونی  $C'$  است یک گذار جذبی به حالت





شکل ۴۰۵ گذارهای الکترونی مجاز طبق اصل فرانک - کانندن.

الکترونی  $C''$  انجام می‌دهد. با رسم خطوط قائم  $a$  و  $b$  در انتهای نوسان کلاسیکی و امتداد دادن آنها تا قطع منحنی  $C''$  محتملترین حالت‌های ارتعاشی نهایی به دست می‌آید. خط  $a$  در نزدیکی  $v'' = 1$  قرار می‌گیرد و از آن گذار  $v'' = 1 \rightarrow v' = 5$  نتیجه می‌شود. خط  $b$  در بالای انرژی تفکیک قرار می‌گیرد و به تفکیک مولکول منجر می‌شود. هنگامی که گذار شامل پایینترین حالت ارتعاشی ( $v'$  یا  $v''$  مساوی با صفر) است، خط قائم باید از میان مرکز نوسانات، یعنی در  $c$  و  $d$ ، رسم شود و (در مثال ما) به گذار زیر می‌انجامد

$$v'' = 0 \rightarrow v' = 4$$

و

$$v'' = 2 \rightarrow v' = 0$$

دلیل این امر این است که بیشینه تابع موج حالت پایه هرنوسانگر در مرکز آن است (شکل ۱۹۰۲). تاکنون گذارهای جذبی را بررسی می‌کردیم اما، باید توجه داشت که همین منطق در مورد گذارهای تابشی نیز به کار می‌رود. بنابراین، گذارهای ارتعاشی وابسته به گذارهای الکترونی با قاعده گزینش  $\Delta v = \pm 1$  سازگار نیستند و  $v$  ممکن است تغییری برابر با چندین واحد متحمل شود.

قاعده‌ای را که برای تعیین گذار ارتعاشی در یک گذار الکترونی شرح دادیم به اصل

فرانک-کاندن معروف است. این قاعده اولین بار توسط فرانک بر طبق مکانیک کلاسیک و در حدود سال ۱۹۲۶ نیز مجدداً توسط کاندن بر طبق مکانیک کوانتومی فرمولبندی شده.

### ۱۰۰۵ نتیجه

در بررسی ساختار مولکولی فقط مهمترین جنبه‌ها را در نظر گرفتیم و از ذکر بسیاری نکات و جزئیات خودداری کردیم. به عنوان مثال، اسپینهای هسته‌ای بر ترازهای انرژی مولکولی تأثیر می‌کنند. در ساده‌ترین مولکولها یعنی  $H_2^+$  و  $H_2$  دو پروتون می‌توانند اسپین موازی و یا پادموازی داشته باشند و اورتو هیدروژن و پارا هیدروژن تشکیل دهند.

تقارن مولکولی نقش بسیار مهمی در تعیین ارتعاشات معمولی ممکن، و گذارهای مجاز بازی می‌کنند؛ اما بحث در مورد تقارن مولکولی خارج از سطح این کتاب است.

در مورد مولکولهای چند اتمی طیفها ممکن است به قدری پیچیده باشند که دسته‌بندی آنها، همانند آنچه در بخش ۹۰۵ برای طیفهای مولکولهای دو اتمی انجام دادیم، غیر ممکن باشد. با وجود این، این پیچیدگی یک وسیله سودمند است زیرا به کمک آن می‌توانیم مشخصات یک ترکیب معین را با مشاهده طیف آن تعیین کنیم. از طرف دیگر، بعضی گروههای اتمی طیفهای الکترونی و ارتعاشی کاملاً معینی دارند. مشاهده بسامدهای متناظر می‌تواند به عنوان نشانه‌ای برای حضور این گروهها در مولکول به کار رود.

در پایان خاطر نشان می‌کنیم که تحلیل طیفهای مولکولی بهترین وسیله برای تعیین ساختار مولکول است.

### مسائل

۱۰۵ انرژی حالت پایه  $H_2^+$  نسبت به سیستم مرکب از هیدروژن در حالت پایه و  $H^+$  در فاصله جدایی بینهایت برابر با  $26.5 \text{ eV}$  - است. (الف) انرژی  $H_2^+$  را نسبت به سیستم  $H^+ + H^+ + e$ ، در فاصله جدایی بینهایت محاسبه کنید. (ب) انرژی سیستم  $H_2^+ + e$  در فاصله جدایی بینهایت را نسبت به سیستم  $H + H$ ، مجدداً در فاصله جدایی بینهایت، و با بودن هر دو اتم در حالت‌های پایه محاسبه کنید. (ج) هرگاه انرژی تفکیک مولکول  $H_2$  به دو اتم هیدروژن واقع در حالت‌های پایه برابر با  $4.48 \text{ eV}$  باشد، انرژی یونش مولکول  $H_2$  را به دست آورید. (د) نتیجه به دست آمده در (ج) را با انرژی یونش هیدروژن اتمی مقایسه کنید.

۲۰۵ سهم دافعه کولنی دو هسته در انرژی  $H_2^+$  واقع در حالت پایه را محاسبه کنید. انرژی ناشی از برهم کنش الکترون با هسته‌ها را محاسبه کنید. [دانه‌مایی: از داده‌های مسئله قبل استفاده کنید و به خاطر داشته باشید که فاصله جدایی تعادل هسته‌ها در  $H_2^+$  برابر با

۳۰۵ معمولاً انرژیهای تفکیک و یونش را بر حسب  $\text{kcal mol}^{-1}$  بیان می کنند. نشان دهید که يك  $\text{kcal mol}^{-1}$  برابر با  $10^{-2} \times 4.184 \text{ eV}$  است. انرژی تفکیک  $\text{H}_2$  را بر حسب  $\text{kcal mol}^{-1}$  محاسبه کنید.

۴۰۵ توضیح دهید که چرا طول پیوند  $\text{H}_2^+$  برابر با  $1.06 \text{ \AA}$  است در حالی که طول پیوند  $\text{H}_2$  از آن کوتاهتر و برابر است با  $0.74 \text{ \AA}$ . ضمناً توضیح دهید که چرا انرژی تفکیک  $\text{H}_2$  ( $103.2 \text{ kcal mol}^{-1}$ ) کمتر از دو برابر انرژی تفکیک  $\text{H}_2^+$  ( $610.6 \text{ kcal mol}^{-1}$ ) است؟

۵۰۵ توضیح دهید که چرا یون  $\text{H}_2^-$  نسبت به یون  $\text{He}_2^+$  از پایداری کمتری برخوردار است البته اگر هر دو آنها پیکر بندی الکترونی یکسانی داشته باشند؟ فاصله جدایی میان هسته‌ای کدام یون بیشتر است؟

۶۰۵ انرژی  $\text{Li}_2$  را نسبت به سیستم  $2e + 2\text{Li}^+$ ، که در آن هر چهار ذره در فاصله جدایی بینهایت قرار دارند، به دست آورید. انرژی یونش لیتیم  $5.39 \text{ eV}$  است. انرژی دافعه کولنی یونهای  $\text{Li}^+$  در فاصله جدایی تعادل  $2.67 \text{ \AA}$  و سپس انرژی دو الکترون ظرفیت را محاسبه کنید.

۷۰۵ پیکر بندی الکترونی و ساختار پیوندی (الف)  $\text{Al}_2$ ، (ب)  $\text{S}_2$ ، و (ج)  $\text{Cl}_2$  را مورد بحث قرار دهید. در هر حالت، نماد مربوط به حالت پایه را بنویسید.

۸۰۵ پیکر بندی الکترونی و ساختار پیوندی مولکول  $\text{NO}$  را بررسی و آن را با مولکول  $\text{N}_2$  مقایسه کنید. کدام مولکول از پایداری بیشتری برخوردار است؟

۹۰۵ پیکر بندیهای الکترونی مولکولهای دو اتمی چندگن - هسته‌ای زیر را بنویسید (الف)  $\text{LiH}$ ، (ب)  $\text{CN}$ ، (ج)  $\text{SO}$ ، (د)  $\text{ClF}$ ، و (ه)  $\text{HI}$ . تعیین کنید که آیا مولکولها قطبی اند یا نه و در صورت قطبی بودن، مشخص کنید که کدام انتهای مولکول، مثبت و کدام انتهای آن منفی است.

۱۰۰۵ انرژی حاصل از تجزیه مولکولهای  $\text{AlCl}$  و  $\text{AlBr}$  به اتمهای خنثی را محاسبه کنید. فواصل جدایی تعادل برای این مولکولها را به ترتیب  $2.13 \text{ \AA}$  و  $2.30 \text{ \AA}$  بگیرید. مقادیر تجربی مربوط عبارت‌اند از  $71.5 \text{ kcal mol}^{-1}$  و  $55.3 \text{ kcal mol}^{-1}$ . [داهنمایی: به مثال ۵.۵ که در آن يك محاسبه مشابه برای  $\text{NaCl}$  آمده است مراجعه کنید.]

۱۱۰۵ هنگامی که اتم هیدروژن يك الکترون می گیرد به صورت  $\text{H}^-$  درمی آید و مقداری انرژی برابر با  $0.749 \text{ eV}$  آزاد می شود. انرژی یونش لیتیم برابر با  $5.39 \text{ eV}$  است. انرژی تفکیک  $\text{LiH}$  را در صورتی که فاصله جدایی تعادل هسته‌ای برابر با  $0.160 \text{ \AA}$  باشد محاسبه کنید.

۱۲۰۵ يك رابطه تجربی قابل قبول برای انرژی پتانسیل در پیوند یونی به صورت زیر است

$$E_p = -\frac{v^2 e^2}{(4\pi\epsilon_0 r)} + b e^{-2.3 \times 10^{10} r}$$

که در آن  $v$  بار یونها و  $b$  نیز ضریب ثابتی است که از روی مقادیر تجربی برای انرژی تفکیک تعیین می شود. با فرض اینکه فاصله تعادل برای مولکول KCl برابر با  $2.79 \times 10^{-10} \text{ m}$  باشد، مقدار  $b$  را به دست آورید. منحنی انرژی پتانسیل را رسم و انرژی تفکیک KCl به  $\text{K}^+$  و  $\text{Cl}^-$  را محاسبه کنید. مقدار انرژی لازم برای تفکیک آن به صورت محصولات خنثی را نیز محاسبه کنید.

۱۳۰۵ رابطه تجربی نسبتاً دقیق مربوط به محاسبه انرژی پتانسیل دو یون در پیوند یونی به صورت زیر است

$$E_p(r) = -\frac{v^2 e^2}{(4\pi\epsilon_0 r)} + b e^{-ar} - \frac{d}{r^6}$$

که در آن  $v$  بار یونهاست و  $a$  و  $b$  و  $d$  نیز ضرایب ثابتی اند که از طریق تجربی به دست می آیند. مقادیر ضرایب بالا برای LiF عبارتند از  $a = 3.25 \text{ \AA}^{-1}$ ،  $b = 895 \text{ eV}$  و  $d = 2.68 \text{ eV \AA}^6$ . انرژی لازم برای تفکیک مولکول LiF به دو یون آن را تعیین کنید. (طول پیوند LiF برابر با  $1.54 \text{ \AA}$  است). همچنین انرژی لازم برای تفکیک LiF به اتمهای خنثی را نیز محاسبه کنید. پتانسیل یونش لیتیم مساوی با  $539 \text{ eV}$  و الکترون خواهی فلور نیز برابر با  $345 \text{ eV}$  است.

۱۴۰۵ نشان دهید که پیشینه تابع موج

$$\psi = N(s + \alpha p_x + \beta p_y + \gamma p_z)$$

در جهت بردار  $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{u}_x + \beta \mathbf{u}_y + \gamma \mathbf{u}_z$  و کمینه آن نیز در جهت مخالف آن قرارداد. از این رو، پیشینه دو تابع موج هیبریدی متناظر با بردارهای  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{a}'$  در امتدادهایی است که زاویه یکسانی همانند  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{a}'$  تشکیل می دهند. بردار  $\mathbf{a}$  را برای هریک از تابع موجهای هیبریدی  $sp^2$  و  $sp^3$  که در بخش ۵.۵ معرفی شد بنویسید. نشان دهید که در مورد  $sp^3$  بردارها متوجه رئوس یک چهار وجهی اند و زوایای  $109^\circ 28'$  تشکیل می دهند و در مورد  $sp^2$  در صفحه XY قرار دارند و زوایای  $120^\circ$  باهم می سازند. [دانهمایی: توجه کنید که بردار  $\mathbf{r}$  با  $\mathbf{u}_x p_x + \mathbf{u}_y p_y + \mathbf{u}_z p_z$  متناسب است].

۱۵۰۵ نشان دهید که چهار تابع موج هیبریدی  $sp^3$  متعامداند. این کار را برای تابع موجهای  $sp^2$  نیز تکرار کنید.

۱۶۰۵ ساختار پیوندی مولکولهای زیر را بررسی کنید (الف)  $C_3H_8$ ، (ب)  $C_3H_6$ ، (ج)  $C_3H_4$ .

۱۷۰۵ ساختار پیوندی مولکولهای زیر را تحلیل کنید: (الف)  $CO_2$ ، (ب)  $CS_2$ ، (ج)  $CSTe$ ، (د)  $C_3$ ، (ه)  $CdCl_2$ ، (و)  $OCl_2$ ، (ز)  $ONCl$ ، (ح)  $SnCl_2$ ، (ط)  $S_2^{2-}$ ، و (ی)  $CN_2^-$ . کدام مولکول خطی و کدام یک خمیده است؟

۱۸۰۵ ساختار پیوندی مولکولهای زیر را تحلیل کنید: (الف)  $AsH_3$ ، (ب)  $SbF_3$ ، (ج)  $BO_3^{2-}$ ، (د)  $OH_2^+$ ، (ه)  $PCl_3$ ، (و)  $SeO_4^{2-}$ ، (ز)  $BrO_3^-$ ، (ح)  $SiF_4$ ، و (ط)  $PF_3$ . کدام مولکول مسطح و کدام یک هرمی است؟

۱۹۰۵ ساختار پیوندی مولکولهای  $BH_3$  و  $BH_4^-$  را تحلیل کنید و نشان دهید که آیا مسطح اند یا هرمی؟

۲۰۰۵ با استفاده از تابع موجهای هیبرید شده  $sp^3$  برای اتمهای اکسیژن و نیتروژن، مولکولهای  $H_2O$  و  $NH_3$  را بررسی کنید. آیا به نظر شما نسبت به آنچه که در متن کتاب ارائه شد، این یک بیان بهتر برای توصیف این مولکولها نیست؟

۲۱۰۵ ساختار پیوندی  $CH_4^-$  و  $H_3O^+$  را تحلیل کنید.

۲۲۰۵ ساختار پیوندی مولکول  $H_2CO$  را بررسی کنید. آیا این مولکول مسطح است؟

۲۳۰۵ گشتاور دوقطبی الکتریکی  $H_2O$  برابر است با  $6.2 \times 10^{-30} \text{ mC}$ . گشتاور دوقطبی متناظر با هر پیوند  $O-H$  را به دست آورید. با فرض اینکه طول پیوند  $O-H$  برابر با  $95.8 \text{ \AA}$  است، چه کسری از الکترون هیدروژن به اتم اکسیژن منتقل می شود؟

۲۴۰۵ طول کل مؤثر مولکول مزدوج  $CH_3-(CH=CH)_4-CH_3$  برابر است با  $9.8 \text{ \AA}$ . ترازهای انرژی اشغال شده توسط الکترونها  $\pi$  را رسم کنید. انرژی و طول موج فوتونها جذب شده را هنگامی که یکی از بسالاترین الکترونها  $\pi$  برانگیخته می شود به دست آورید.

۲۵۰۵ مولکول کاروتن  $\beta$  مولکول مزدوجی است که ۲۲ الکترون  $\pi$  دارد. معلوم شده است که این مولکول در  $4510 \text{ \AA}$  یک جذب قوی تابش از خود نشان می دهد. طول کل مولکول را برآورد کنید.

۲۶۰۵ نشان دهید که گشتاور لختی یک مولکول دو اتمی نسبت به محوری که برخط واصل هستهها عمود است و از مرکز جرم عبور می کند از رابطه  $I = \mu r^2$  به دست می آید که در آن  $\mu$  جرم کاهش یافته مولکول و  $r$  نیز فاصله میان هستهها است.

۲۷۰۵ خطوط مجاور در طیف چرخشی حاصل  $^{35}\text{Cl}^{19}\text{F}$  به اندازه فاصله بسامدی

$10^{10} \times 1.12$  Hz از یکدیگر جدا هستند. فاصله میان اتمی این مولکول چقدر است؟

۲۸۰۵ (الف) انرژی و طول موج فوتون جذب شده را در هنگامی که مولکول  $^{25}\text{ClHg}^{200}$  ( $r_0 = 2.23 \text{ \AA}$ )، گذارهای چرخشی  $l=0 \rightarrow l=1$  و  $l=1 \rightarrow l=2$  را انجام می دهد محاسبه کنید. (ب) این خطوط در چه ناحیه ای از طیف الکترومغناطیسی قرار دارند؟

۲۹۰۵ فرض کنید جدایی تعادل در مولکولهای  $\text{H}^{35}\text{Cl}$  و  $\text{H}^{37}\text{Cl}$  برابر یکدیگر و مقدار آن  $1.27 \text{ \AA}$  است. مطلوب است (الف) ثابت  $B$  برای ترازهای چرخشی، (ب) انرژی دو تراز چرخشی برانگیخته اول، (ج) بسامدها و طول موجهای متناظر با گذارهای  $l=0 \rightarrow l=1$  و  $l=1 \rightarrow l=2$ ، و (د) اختلاف بسامد برای خطوط متوالی برای هر مولکول. نتایج خود را با شکل ۳۱.۵ مقایسه کنید.

۳۰۰۵ انرژی سه حالت چرخشی برانگیخته اول را در مولکولهای  $\text{CO}$  و  $\text{CO}_2$  محاسبه کنید. طول موج فوتونهای جذب شده در گذارهای میان این ترازهای انرژی را به دست آورید. ۳۱۰۵ ترازهای انرژی چرخشی مولکولی که دو گشتاور لختی اصلی مساوی دارد با رابطه زیر داده می شود

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2I_1} L^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right) L_z^2$$

که در آن  $I_1$  با محورهای  $X$  و  $Y$  و  $I_2$  با محور  $Z$  متناظر است و

$$L^2 = l(l+1)\hbar^2, \quad L_z = m\hbar$$

با به کار بردن این معادله، موقعیت نسبی ترازهای انرژی چرخشی مولکولی را که دارای (الف)  $I_2 = 0.88I_1$ ، (ب)  $I_2 = 1.2I_1$  است بر آورد کنید. ترازها را بر حسب مضاربی از  $\hbar^2/2I_1$  رسم کنید.

۳۲۰۵ مولکولهای دو اتمی کاملاً صلب نیستند و به دلیل اثر مرکز گرزی، با افزایش تکانه زاویه ای مولکول، فاصله میان هسته ای نیز افزایش می یابد. (الف) چگونه این کشیدگی مولکولی، در مقایسه با مقادیر داده شده با معادله (۱۲.۵) بروی ترازهای انرژی اثر می گذارد؟ (ب) یک رابطه تجربی برای انرژی چرخشی به صورت زیر است

$$E_{\text{rot}} = \left( \frac{\hbar^2}{2I} \right) \{ l(l+1) - \delta [l(l+1)]^2 \}$$

که در آن  $\delta$  ثابت کشیدگی است. رابطه ای برای بسامدهای ناشی از گذارهای میان ترازهای چرخشی به دست آورید. این رابطه را با معادله (۱۵.۵) مقایسه کنید و ببینید که آیا اثر کشیدگی در شکل ۳۱.۵ قابل تشخیص است یا نه.

۳۳.۵ دو جسم به جرمهای  $m_1$  و  $m_2$  مطابق شکل ۴۱.۵ به وسیله فنری با ثابت کشسانی  $k$  به یکدیگر بسته شده‌اند. نشان دهید که اگر فنر در ابتدا کشیده و سپس رها شود، جرمها با بسامد  $\nu = (1/2\pi)\sqrt{k/\mu}$  نوسان خواهند کرد که در آن  $\mu$  جرم کاهیده سیستم است.



شکل ۴۱.۵

۳۴.۵ انرژی سه تراز ارتعاشی واقع در پایینترین حالت را در HF محاسبه کنید، با فرض اینکه می‌دانیم ثابت نیرو مساوی با  $9.7 \times 10^2 \text{ Nm}^{-1}$  است. عدد موج تابش جذب شده در گذار  $\nu = 0 \rightarrow \nu = 1$  را به دست آورید.

۳۵.۵ طیف فرو سرخ CO، در قدرت تفکیک پایین، یک نوار جذبی متمرکز در  $2170 \text{ cm}^{-1}$  را نشان می‌دهد. ثابت نیرو در CO را به دست آورید. منحنی انرژی پتانسیل را رسم کنید. ۳۶.۵ نسبت بسامدهای ارتعاشی مولکولهای  $^1\text{H}^{35}\text{Cl}$  و  $^2\text{H}^{35}\text{Cl}$  را با فرض اینکه ثابت نیرو برای هر دو مولکول مقدار یکسانی است، محاسبه کنید.

۳۷.۵ ثابت نیرو برای مولکول HCl را با فرض اینکه بسامد ارتعاشی برابر با  $9 \times 10^{13} \text{ Hz}$  است به دست آورید. ضمناً انرژی نقطه صفر را تعیین کنید.

۳۸.۵ با فرض اینکه مولکول  $\text{H}_2$  تابش فرو سرخ به طول موج  $2.3 \times 10^{-6} \text{ m}$  متناظر با گذار ارتعاشی  $\Delta \nu = 1$  را جذب می‌کند و هیچ تغییری در انرژیهای الکترونی یا چرخشی آن ایجاد نمی‌شود، بسامدهای ارتعاشی HD و D<sub>2</sub> را به دست آورید. فرض کنید که ثابت نیرو برای هر سه مولکول یکسان است. نتیجه را با مقادیر تجربی مقایسه کنید.

۳۹.۵ سه بسامد ارتعاشی CO<sub>2</sub> عبارت‌اند از  $6673 \text{ cm}^{-1}$ ،  $13888 \text{ cm}^{-1}$  و  $23494 \text{ cm}^{-1}$ . نموداری از چند تراز اول انرژی ارتعاشی این مولکول را رسم کنید.

۴۰.۵ مولکول CO یک گذار الکترونی دارد که چندین نوار را در ناحیه مرئی (در حدود  $6000 \text{ \AA}$ ) تولید می‌کند. جدایی میان خطوط چرخشی مجاور در هر نوار را برآورد کنید. آیا انتظار دارید که در طیف نمای با توان تفکیک پایین، نوار به صورت پیوسته ظاهر شود؟

## مراجع

1. "The Force Between Molecules," B. Derjaguin, *Sci. Am.*, July 1960, page 47.
2. "Some Aspects of Molecular Physics," J. Levelt, *Am. J. Phys.*, 28, 192 (1960).

3. "Chemistry of the Noble Gases," H. Selig, J. Malm, and H. Claassen, *Sci. Am.*, May 1964, page 66.
4. "The Zeeman Effect in Molecules," C. Quade, *Am. J. Phys.*, 23, 634 (1964).
5. *The Scientific Endeavor*. New York: Rockefeller Institute Press, 1965; "The Architecture of Molecules," by L. Pauling.
6. *Symmetry in Chemistry*, P. Dorain, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1965.
7. *The Structure of Molecules*, G. Barrow, New York: Benjamin, 1964.
8. *Electrons and the Covalent Bond*, H. Gray, New York: Benjamin, 1965.
9. *Elements of Wave Mechanics*, N. Mott, Cambridge, England: Cambridge University Press, 1962, Chapter 5, Sections 2.3, 3, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, and 4.6.
10. *Structure of Matter*, W. Finkelburg, New York: Academic Press, 1964, Chapter 4, Section 7; Chapter 6.
11. *Quantum Theory of Matter*, J. Slater, New York: McGraw-Hill, 1951, Chapters 8 and 9.
12. *Elementary Introduction to Molecular Spectra*, B. Bak, New York: Interscience, 1960.
13. *Chemical Binding and Structure*, J. Spice, New York: Macmillan, 1964.
14. *Wave Mechanics and Valency*, J. Linnett, London: Methuen, 1960.
15. *The Chemical Bond*, third edition, L. Pauling, Ithaca, N. Y.: Cornell University Press, 1967.



# ٦

## جامدات

- ١٠٠٦ مقدمه
- ٢٠٠٦ انواع جامدات
- ٣٠٠٦ نظریه نواری جامدات
- ٤٠٠٦ مدل الکترون آزاد جامد
- ٥٠٠٦ حرکت الکترون در ساختار دوره‌ای
- ٦٠٠٦ رساناها، نارساها، و نیمرساناها
- ٧٠٠٦ نظریه کوانتومی رسانندگی الکتریکی
- ٨٠٠٦ گذارهای تابشی در جامدات

## ۱.۶ مقدمه

مادهٔ کپهای، به طریقی که بر حواس مسا تأثیر می گذارد، انبوهه‌ای مشکل از تعداد بسیار زیادی اتم است. به طور کلی این انبوهه‌ها در سه حالت یا فاز فیزیکی گاز، مایع، و جامد پدیدار می شوند. در گازها، میانگین فاصلهٔ میان مولکولها خیلی بزرگتر از اندازهٔ مولکولهاست و نیروهای میان مولکولی به مراتب ضعیفتر از نیروهایی است که اتمهای موجود در مولکول را به یکدیگر پیوند می دهند. از این رو، در گازها، مولکولها حالت انفرادی خود را حفظ می کنند. از طرف دیگر، در هر جامد، اتمها (یا مولکولها) تحت اثر نیروهایی که منشأ الکترومغناطیسی دارند محکم به هم بسته شده اند و در مکانهای کمابیش ثابتی قرار گرفته اند؛ مرتبهٔ بزرگی این نیروها در حدود مرتبهٔ بزرگی نیروهایی است که در بستگی مولکولی شرکت دارند. از این رو، تا هنگامی که شرایط فیزیکی، از قبیل فشار و دما، تغییر قابل توجهی نکرده است، شکل و حجم یک جامد اساساً ثابت باقی می ماند. مایعات در وضعیتی میان گازها و جامدات قرار دارند. با این حال، نظریهٔ مایعات هنوز هم کامل نیست و در این کتاب بررسی نمی شود.

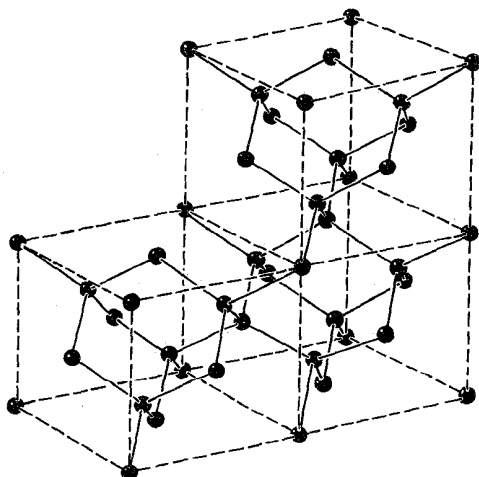
در اکثر جامدات، اتمها (یا مولکولها) موجوداتی منزوی نیستند، بلکه تحت تأثیر اتمهای مجاور خود قرار می گیرند. آرایش منظم اتمها (یسا گروههای اتمها) یکی از چشمگیرترین خصوصیات جامدات است. این گفته به این معنی است که ساختار جامدات دوره‌ای بودن یا نظمی را نشان می دهد که به شبکهٔ بلوری معروف است. بنا بر این، برای درک ساختار هر جامدی لازم است که فقط واحد اصلی یا سلول شبکه را مطالعه کنیم، زیرا تمام خواص یک جامد از یک سلول به سلولی دیگر تکرار می شود. یکی از مؤثرترین روشها برای تحلیل ساختار بلور روش پراش پرتو ایکس یا پراش نوترون است.

از دیدگاه مکانیک کوانتومی، تعیین ساختار جامد با تعیین ساختار مولکول تفاوت اساسی ندارد. این مسئله عبارت است از پیدا کردن یک پیکر بندی پایدار از هسته‌ها و الکترونیایی که تحت برهم کنشهای الکترونی خود قرار دارند و بر طبق قوانین مکانیک کوانتومی حرکت می کنند. دو اختلاف اساسی میان ساختار جامد و مولکول عبارتند از اینکه در جامد، اولاً تعداد بسیار زیادی اتم وجود دارد و ثانیاً آرایش این اتمها منظم است. برای مطالعهٔ ساختار جامد، بسته به عوامل غالب در آن، از چندین نوع تقریب استفاده می شود. در این فصل، بعضی از این روشها را تحلیل می کنیم و آنها را برای توضیح برخی خواص جامدات به کار می بریم. نکات مربوط به طبیعت آماری را در فصل سیزدهم بررسی خواهیم کرد.

## ۲.۶ انواع جامدات

جامدات را می توان بر حسب نوع پیوند مسلط رده بندی کرد. در این بخش انواع جامدات را به طور خلاصه بررسی می کنیم.

۱. جامدات کووالانسی. در هر جامد کووالانسی، اتمها با پیوندهای جهتی و جایگزیده، شبیه به آنچه در بحث مولکول  $H_2$  دیدیم، به یکدیگر می پیوندند. شبکه بلوری با سمگتگیری و طبیعت پیوندهای جهتی تعیین می شود. به عنوان یک مورد نوعی می توان از الماس نام برد که در آن چهار الکترون پیوندی هر اتم کربن مطابق آنچه قبلاً با تابع موجهای هیبریدی  $sp^3$  در شکل ۱۸.۵ نشان داده شد، سمگتگیری می کنند و ساختار بلوری شکل ۱۰.۶ را تشکیل می دهند. در این شکل، هر گلوله معرف یک هسته کربن و هر میله نیز معرف یک زوج الکترون پیوندی جایگزیده است. فاصله جدایی میان دو اتم کربن برابر  $10^{-10} m \times 1.54$  است. جامدات کووالانسی، به دلیل ساختار الکترونی صلبشان چندین خصوصیت ماکروسکوپیکی از خود نشان می دهند. این جامدات بینهایت سخت و محکم اند و تغییر شکل دادن آنها بسیار مشکل است. تمام آنها از نظر قابلیت رسانش حرارت و الکتریسته ضعیف اند، زیرا در آنها هیچ الکترون آزادی وجود ندارد تا انرژی یا بار را از یک محل به محل دیگر حمل کند. همچنین به دلیل صلب بودن پیوندها، انرژی نسبتاً زیادی برای برانگیختن ارتعاشات تمام بلور در یک جامد کووالانسی لازم است. بنا بر این، بسامد ارتعاشات تمام بلور خیلی بالاست. به طریق مشابه، انرژیهای برانگیختگی الکترونی جامدهای کووالانسی از مرتبه چند الکترون ولت است (به عنوان مثال، اولین انرژی برانگیختگی الکترونی الماس در حدود  $6eV$  است). این انرژی برانگیختگی الکترونی در مقایسه با میانگین انرژی گرمایی (از مرتبه  $kT$ ) که در دمای معمولی (یعنی  $298K$ ) در حدود  $2.4 \times 10^{-2} eV$  است، نسبتاً بزرگ است. از این رو، جامدات کووالانسی معمولاً در حالت پایه الکترونی خود قرار دارند. بسیاری از جامدهای کووالانسی شفاف اند (مخصوصاً



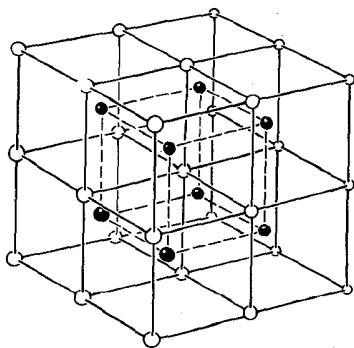
شکل ۱۰.۶ شبکه الماس.

الماس)، زیرا اولین حالت الکترونی آنها بالاتر از انرژیهای فوتون در طیف مرئی است که میان ۱۷۸ و ۳۱۱ الکترون ولت قرار دارد.

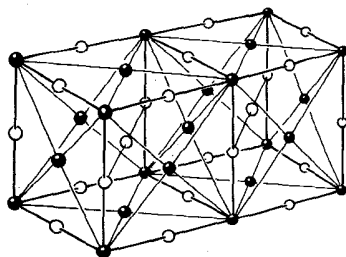
۰۴. بلورهای یونی. در سوی دیگر، بلورهای یونی قرار دارند. بلورهای یونی آرایش منظمی از یونهای مثبت و منفی را شامل می‌شوند که حاصل انتقال يك الکترون (یا بیشتر) از يك نوع اتم به اتم دیگر است. در شکل ۲.۶ ساختار بلوری NaCl و CsCl نشان داده شده است. فاصله جدایی میان اتمهای Na و Cl در حدود  $10^{-10} \text{m} \times 2.81$  است، در حالی که کوتاهترین فاصله میان اتمهای یکسان برابر است با  $10^{-10} \text{m} \times 3.97$ . یونها طوری آرایش یافته‌اند که پیکر بندی پایداری در اثر برهم کنشهای الکترونی متقابل میان آنها ایجاد می‌شود.

چون این جامدها الکترون آزاد ندارند، از نظر قابلیت رسانش حرارت و الکتریسته ضعیف‌اند. اما، در دماهای بالا، ممکن است حرکت یونها تندتر و رسانایی الکتریکی آنها بهتر شود. بلورهای یونی معمولاً سخت و شکننده هستند و در اثر نیروهای الکتروستاتیکی نسبتاً قوی میان یونها نقطه ذوبشان بالاست. بعضی بلورهای یونی تابش الکترومغناطیسی واقع در ناحیه فرورسرخ دور طیف را به شدت جذب می‌کنند. این خاصیت به انرژی لازم برای برانگیختن ارتعاشات شبکه وابسته است. این انرژی معمولاً در بلورهای یونی، کوچکتر از انرژی متناظر در بلورهای کووالانسی است (دلیل آن نیروی بستگی نسبتاً ضعیفتر آنهاست). شکل ۳.۶ عبور تابش فرورسرخ را از میان يك فیلم نازک سدیم کلرید ( $10^{-7} \text{m} \times 1.7$ ) نشان می‌دهد. بیشینه جذب در طول موج  $10^{-5} \text{m} \times 6.11$  یا بسامد  $10^{12} \text{Hz} \times 4.91$  رخ می‌دهد که با فوتونهایی با انرژی  $10^{-2} \text{eV} \times 2.03$  متناظر است.

اکثر بلورهای یونی دیامغناطیسی‌اند زیرا یونها، که ساختار پوسته‌ای کامل دارند و تمام الکترونهاي آنها زوج شده است، گشتاور مغناطیسی خالص ندارند. به عنوان مثال، پیکر بندی

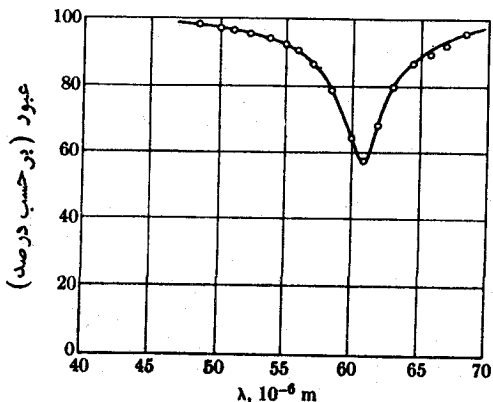


(ب)

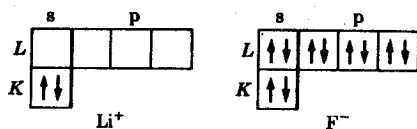


(الف)

شکل ۲.۶ (الف) شبکه NaCl و (ب) شبکه CsCl.



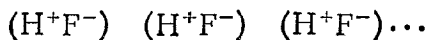
شکل ۳.۶ عبور تابش فرورسرخ از میان فیلم NaCl.

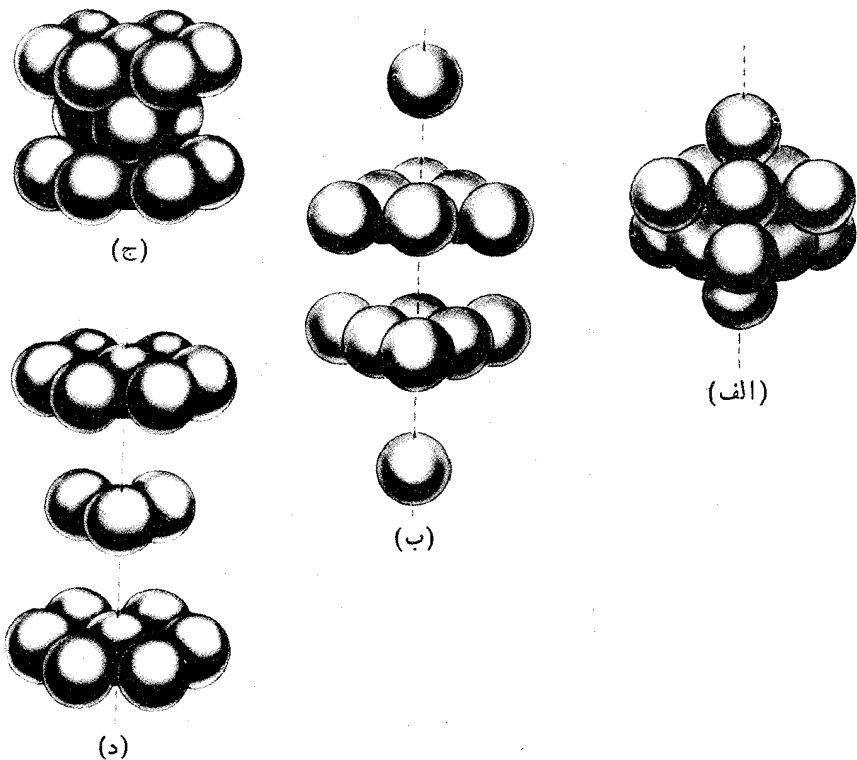


شکل ۴.۶ پیکربندیهای الکترونی  $F^-$  و  $Li^+$ .

یونهای  $Li^+$  و  $F^-$  در  $LiF$  که در شکل ۴.۶ نشان داده شده است به ترتیب به پیکربندی گازهای بی اثر  $He$  و  $Ne$  شباهت دارند (شکل ۷.۴). این تشابه در خاصیت مهم دیگری نیز بازتاب می یابد. یونها تقارن کروی دارند و از این رو بستگی آنها، برعکس پیوندهای جامدات کووالانسی، هیچگونه امتیاز جهتی از خود نشان نمی دهند. بنابراین، یونها در بلور طوری آرایش یافته اند که گویی کره های تنگ هم قرار گرفته ای هستند. البته این کره ها به بینهایت طریق کنار هم قرار می گیرند. در شکل ۵.۶ دوروش عمومی نشان داده شده است که یکی بسته بندی مکعبی یا (ccp) و دیگری بسته بندی شش ضلعی است که به اختصار (hcp) نامیده می شود.

۳. جامدات با پیوندهای هیدروژنی. جامدات با پیوند هیدروژنی ارتباط بسیار نزدیکی با بلورهای یونی دارند. این جامدات با مولکولهایی که به شدت قطبی اندویک یا چنداتم هیدروژن دارند، مانند مولکول آب ( $H_2O$ )، و هیدروفلوئوریک اسید ( $HF$ )، مشخص می شوند. یونهای مثبت هیدروژن، چون نسبتاً کوچک اند، می توانند انتهای منفی مولکولهای دیگر را جذب کنند و زنجیره هایی به صورت زیر تشکیل دهند

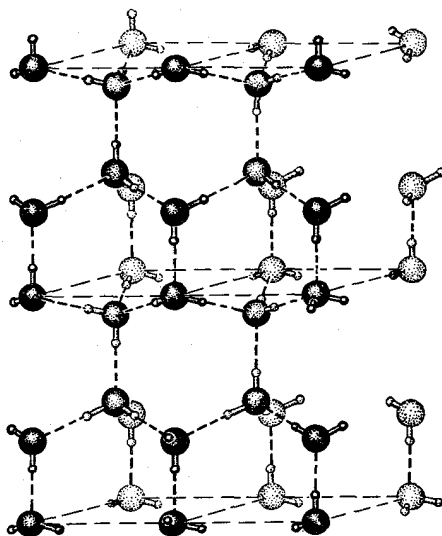




**شکل ۵۰۶** (الف) بسته‌بندی مکعبی (یا  $ccp$ )، (ب) منظره گسترده‌ای از  $ccp$ ، (ج) بسته‌بندی شش‌ضلعی (یا  $hcp$ )، و (د) منظره گسترده‌ای از  $hcp$ .

این موضوع مخصوصاً در مورد یخ که در آن مولکولهای آب آرایش چهار ضلعی دارند بسیار جالب توجه است (شکل ۶۰۶). ساختار نسبتاً باز یخ حجم بزرگتر آن را در مقایسه با آب توجیه می‌کند.

**۴. جامدات مولکولی.** این جامدات از موادی ساخته شده‌اند که مولکولهای آنها قطبی نیست. تمام الکترونهای این مولکولها زوج شده هستند به گونه‌ای که هیچ نوع پیوند کووالانسی میان اتمهای دو مولکول متفاوت تشکیل نمی‌شود. در این نوع جامدات، مولکولها خاصیت انفرادی خود را حفظ می‌کنند و با همان نیروهای میان مولکولی که میان مولکولهای گاز یا مایع وجود دارد، یعنی نیروهای وان‌دروالس به هم پیوند می‌خورند؛ این نیروها بسیار ضعیف و تقریباً با نیروهای میان دو دو قطبی الکتریکی متناظرند. این موضوع را می‌توان به صورت زیر توضیح داد. با آنکه، این مولکولها در مجموع گشتاور دو قطبی الکتریکی دائمی ندارند، با این حال پیکربندی الکترونی آنها در هر لحظه ممکن است به یک دو قطبی

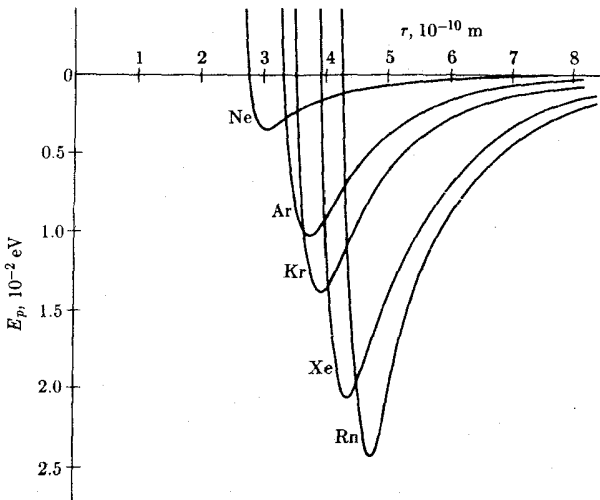


شکل ۶.۶ آرایش مولکولهای آب در یخ.

الکتریکی لحظه‌ای تبدیل شود. نیروهای وان دروالس، از برهم کنش این دو قطبیهای الکتریکی لحظه‌ای ایجاد می‌شوند. به دلایل بالا، جامدات مولکولی رسانای الکتریکی و گرمایی نیستند و نقطه ذوب آنها خیلی پایین است و خیلی تراکم پذیر و تغییر شکل پذیرند. به عنوان مثالهایی از جامدات مولکولی می‌توان از  $\text{CH}_4$ ،  $\text{Cl}_2$ ،  $\text{I}_2$ ،  $\text{CO}_2$ ،  $\text{C}_6\text{H}_6$ ، و مانند آنها در حالت جامدی خود نام برد. گازهای بی‌اثر که پوسته‌های خارجی آنها تکمیل شده است، همانند جامدات مولکولی منجمد می‌شوند. شکل ۷.۶ منحنیهای انرژی پتانسیل مربوط به برهم کنش میان دو اتم یک گاز بی‌اثر در حالت جامد را نشان می‌دهد.

**۵. فلزات.** فلزات جامداتی هستند با اهمیت عملی و نظری بسیار زیاد. انرژی یونش فلزات نسبتاً کم است و اتمهای آنها در بالاترین پوسته‌های تکمیل نشده خارجی فقط شامل چند الکترون است که به طورضعیفی مقیدند. این الکترونها با استفاده از انرژی آزاد شده، هنگام تشکیل بلور به راحتی به صورت الکترون آزاد درمی‌آیند. از این رو، هنگامی که الکترونهاى خارجی به حالت آزاد درمی‌آیند، فلز یک شبکه منظم از یونهای مثبت با تقارن کروی به دست می‌آورد. در میان چنین ساختاری، یک «گاز» الکترونی از الکترونهاى آزاد شده تشکیل می‌شود که مسؤول پیوند هستند. این الکترونها، کمابیش به طور آزاد در میان شبکه بلوری حرکت می‌کنند و بنا بر این جایگزیده نیستند.

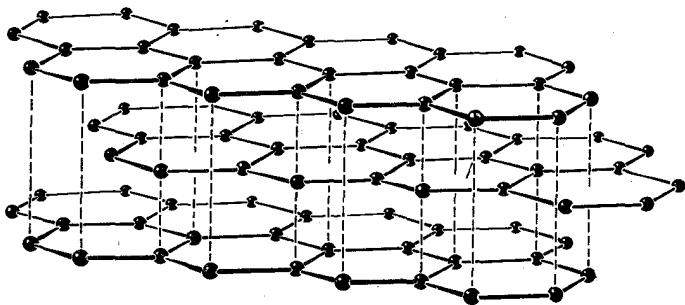
جامدات فلزی، رسانندگی گرمایی و الکتریکی بسیار خوبی دارند و در این مورد الکترونهاى آزاد نقش عمده بازی می‌کنند. الکترونهاى آزاد به راحتی می‌توانند هر مقدار انرژی (هرچند کوچک) از تابش الکترومغناطیسی یا ارتعاشات شبکه‌ای جذب کنند و انرژی



شکل ۷.۶ انرژی پتانسیل میان اتمی وان دروالس برای گازهای بی اثر.

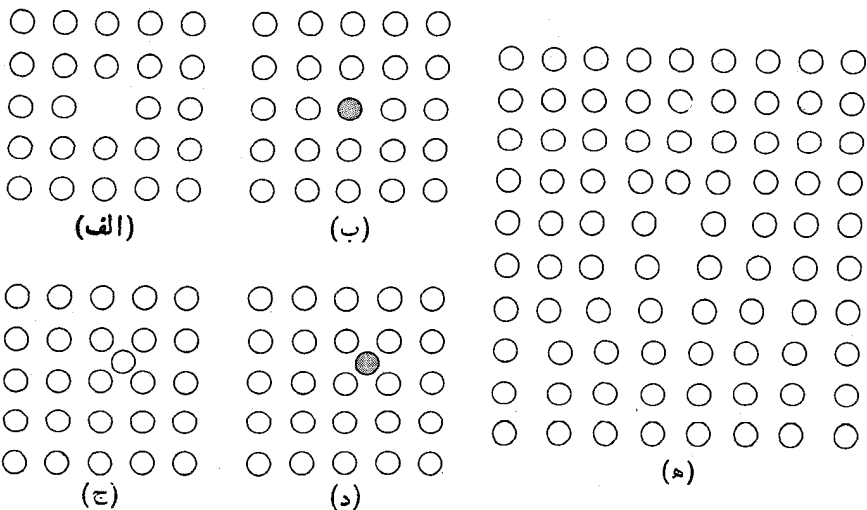
جنبشی و در نتیجه قابلیت تحرك آنها افزایش یابد. به همین دلیل فلزات کدرند، زیرا الکترونهاى آزاد می‌توانند فوتونهاى ناحیه مرئی طیف را جذب کنند و به یکی از تعداد بسیار زیاد حالتهاى کسوانتومی نزدیک به هم که در دسترسشان است برانگیخته شوند. الکترونهاى آزاد مسؤول یکی دیگر از مشخصه‌هاى فلزات اند و آن ضریب بازتاب زیاد آنها برای امواج الکترومغناطیسی، مخصوصاً در نواحى امواج با بسامد رادیویی و فرسرخ است. نیروهائی که شبکه فلزی را کنار هم نگه می‌دارند تقارن کروی دارند و بنا بر این، این شبکه‌ها شبیه به کره‌هاى تنگ هم قرار گرفته‌اى هستند که در بخش بلورهای یونی بررسی شد. رده‌بندی پیش گفته در مورد انواع جامدات را نباید خیلی جدی گرفت؛ زیرا بعضی جامدات مخلوطی از چند نوع هستند. به عنوان يك مثال جالب می‌توان از گرافیت که شامل لایه‌هایی از اتمهای کربن است که به صورت شش ضلعی آرایش یافته‌اند، نام برد (شکل ۸.۶). اتمهای واقع در هر لایه با پیوندهای کووالانسی جایگزیده  $\sigma$  به هم پیوند می‌خورند و برای این کار، همانند بزن (بخش ۶.۵) از تابع موجهای هیبریدی  $sp^2$  و پیوندهای جای ناگزیده  $\pi$  استفاده می‌کنند. الکترونهاى پیوندی جای ناگزیده  $\pi$  می‌توانند آزادانه به موازات لایه‌ها حرکت کنند و همین حرکت رسانندگی الکتريکی گرافیت در راستای موازی با لایه‌ها (اما نه در راستای عمود بر آنها) را توجیه می‌کند. لایه‌هاى متوالی اتمها همانند مولکولهای بزرگ عمل می‌کنند. این لایه‌ها، درست همانند آنچه در مورد بلورهای مولکولی وجود دارد، با نیروهای ضعیف وان دروالس پهلوی هم نگه داشته می‌شوند که طبیعت لایه‌لایه‌ای و لئزان گرافیت نیز مربوط به همین موضوع است. در واقع، به دلیل همین ساختار است که از گرافیت به عنوان روان ساز استفاده می‌کنند. طول پیوندهای  $sp^2$  در گرافیت





شکل ۸۰۶ شبکه گرافیت.

برابر با  $10^{-10} \times 1.42$  و فاصله جدایی میان لایه‌ها نیز  $10^{-10} \times 3.35$  است. ساختار هر يك از انواع جامداتی که تاکنون بیان کردیم با ساختار الکترونی اتمهای تشکیل دهنده تعیین می‌شود. ساختار الکترونی اتمها نوع و تعداد الکترونهاي موجود برای پیوند و نیز انرژی لازم برای انطباق حرکت آنها با شرایطی که در شبکه حاکم است را نشان می‌دهد (شرایطی که با شرایط موجود در اتمهای منزوی کاملاً متفاوت است). به‌طور کلی، هنگامی که جامد تشکیل می‌شود، یک مقدار مشخص انرژی برای تغییر حرکت الکترونها لازم است. اما مقدار انرژی که در فرایند تشکیل شبکه آزاد می‌شود خیلی بیشتر از این است. شبکه‌های بلوری کامل نیستند و این نقص یا ناکاملی در آنها می‌تواند ناشی از علل مختلفی باشد. شکل ۹۰۶ بعضی از نوعیترین ناکاملیها را نشان می‌دهد. در قسمت (الف) یک



شکل ۹۰۶ ناکاملیها در شبکه بلوری.

تعیین بر اثر نبودن يك اتم به وجود می آید، در حالی که در (ب) ناخالصی جانشین وجود دارد که در محل يك اتم شبکه نشسته است. ناکاملیهای ناشی از يك اتم میانین خواه از يك نوع یا از يك ناخالصی، در (ج) و (د) نشان داده شده اند. بالاخره، قسمت (ه) يك دردتنگی لپهای را نشان می دهد، که در آن به ظاهر يك لایه اتم اضافی از بالا به داخل شبکه فرورفته است. ناکاملیهای شبکه اثر بسیار مهمی در خواص الکتریکی، کشسانی، و اپتیکی جامدات دارند.

مثال ۱۰۶ محاسبه انرژی پتانسیل داخلی بلور یونی.

حل: چون در تقریب اول می توانیم يك بلور یونی را آرایش منظمی از بارهای نقطه ای مثبت و منفی در نظر بگیریم، می توان انتظار داشت که انرژی پتانسیل داخلی بلور یونی اساساً از برهم کنش الکتریکی میان یونها ناشی می شود. به عنوان مثال، مورد مربوط به NaCl را در نظر می گیریم و برهم کنش الکتریکی یون  $\text{Na}^+$  با تمام یونهای دیگر موجود در بلور را محاسبه می کنیم. همان طور که در شکل ۲۰۶ دیده می شود، هر  $\text{Na}^+$  شش یون  $\text{Cl}^-$  به عنوان نزدیکترین یونهای مجاور خود دارد که همگی در فاصله یکسانی قرار دارند. از این رو، با توجه به اینکه هر دو یون  $\text{Na}^+$  و  $\text{Cl}^-$  بارهایی دارند که قدر مطلق آنها مساوی با  $e$  است، انرژی پتانسیل جاذبه الکتریکی  $\text{Na}^+$  ناشی از شش یون  $\text{Cl}^-$  واقع در نزدیکترین فاصله برابر است با

$$E_{p1} = 6 \left( -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} (6)$$

که در آن  $R$  فاصله میان نزدیکترین یونهای مجاور است. سری بعدی یونها دوازده یون  $\text{Na}^+$  واقع در فاصله  $\sqrt{2} R$  هستند که انرژی پتانسیل دافعه زیر را نتیجه می دهند

$$E_{p2} = 12 \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2} R} \right) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left( -\frac{12}{\sqrt{2}} \right)$$

گروه بعد هشت یون  $\text{Cl}^-$  در فاصله  $\sqrt{3} R$  است که انرژی پتانسیل جاذبه زیر را تولید می کنند

$$E_{p3} = 8 \left( -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{3} R} \right) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left( \frac{8}{\sqrt{3}} \right)$$

لایه بعدی شامل شش یون  $\text{Na}^+$  واقع در فاصله  $2R$  است که پتانسیل دافعه زیر را ایجاد می کنند

$$E_{p4} = 6 \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 2R} \right) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} (-3)$$

این فرایند آنقدر ادامه می‌یابد تا تمام بلور را در برگیرد. انرژی پتانسیل حاصل از مجموع آنها به دست می‌آید

$$E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left( 6 - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} - 3 + \dots \right) = -\frac{\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (۱.۶)$$

که در آن  $\alpha$  مقدار مجموعه موجود در داخل پراوتز است که به ثابت مادلونگ معروف است. در مورد شبکه مکعبی مرکز سطحی از قبیل NaCl، ثابت مادلونگ برابر  $\alpha = 1.7476$  است. به طور کلی  $\alpha$  فقط به شکل هندسی بلور وابسته است. برای شبکه مرکز حجمی مثل CsCl، مقدار آن برابر با  $1.7627$  است.

چون  $\alpha$  مثبت است، انرژی پتانسیل منفی است و نیروهای میان یونی در تمام فواصل، بدون هیچ کمینه‌ای جاذبه‌ای هستند. بنابراین، بلور باید در یک ساختار کیپ هم بسته بندی شده، بدون هیچ پیکر بندی پایداری به هم آمیخته باشد. اما می‌دانیم، که چنین حالتی وجود ندارد. این نتیجه از فرض یونها به صورت بار نقطه‌ای حاصل می‌شود. هنگامی که دو اتم در فاصله خیلی نزدیک به هم قرار می‌گیرند دافعه هسته‌ای (که تا حدودی با پوسته‌های الکترونی استتار می‌شود) و دافعه میان پوسته‌های الکترونی پر شده وارد عمل می‌شوند. بنابراین، باید یک جمله دافعه با برد کوتاه را به انرژی پتانسیل اضافه کنیم. قبلاً در بخش ۴.۵، هنگامی که پیوندهای یونی را بررسی می‌کردیم، ایسن کار را انجام دادیم. برای به دست آوردن این جمله، یک عبارت معقول مبتنی بر پایه تجربی برای انرژی پتانسیل فرض می‌کنیم. تاکنون چندین عبارت پیشنهاد شده است و ما در اینجا فقط ساده‌ترین آنها را که ماکس بورن فیزیکدان آلمانی پیشنهاد کرده است، در نظر می‌گیریم

$$E_p(\text{دافعه}) = \frac{\beta e^2}{4\pi\epsilon_0 R^n}$$

که در آن  $\beta$  و  $n$  دو ثابت اند که باید تعیین شوند. هنگامی که  $R^n$  را به ازای  $n > 1$  به کار می‌بریم، دافعه نیرویی است با برد کوتاه که در فواصل بزرگ، در مقایسه با جاذبه یونی کولنی قابل چشمپوشی است. هر گاه این انرژی پتانسیل به معادله (۱.۶) اضافه شود، برای انرژی پتانسیل مؤثر خواهیم داشت

$$E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\alpha}{R} - \frac{\beta}{R^n} \right) \quad (۲.۶)$$

نمودار این انرژی پتانسیل به نموداری که در شکل ۱۴.۵ نشان داده شده است، شبیه است. هر گاه  $R_0$  فاصله جدایی تعادل در نظر گرفته شود، در این فاصله خواهیم داشت  $dE_p/dR = 0$  در نتیجه

$$\left(\frac{dE_p}{dR}\right)_{R=R_0} = -\frac{e^{\gamma}}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\alpha}{R_0^{\gamma}} + \frac{n\beta}{R_0^{n+1}}\right) = 0$$

یا  $\beta = \alpha R_0^{n-1}/n$  در این صورت معادله (۲.۶) را می توان به صورت زیر نوشت

$$E_p = -\frac{\alpha e^{\gamma}}{4\pi\epsilon_0 R_0} \left[ \frac{R_0}{R} - \frac{1}{n} \left(\frac{R_0}{R}\right)^n \right]$$

انرژی پتانسیل تعادل یون  $\text{Na}^+$  را می توان با قرار دادن  $R = R_0$  به دست آورد

$$E_p = -\frac{\alpha e^{\gamma}}{4\pi\epsilon_0 R_0} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

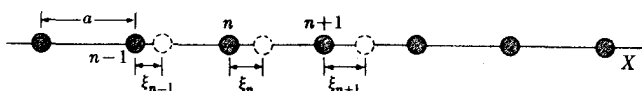
هر گاه مسئله را با یون  $\text{Cl}^-$  نیز آغاز کنیم به، نتیجه مشابهی می رسم. برای به دست آوردن انرژی داخلی کل بلور باید نتیجه بالا را برای تمام یونهای موجود در بلور با هم جمع کرد. هنگامی که این کار را انجام می دهیم باید مواظب باشیم که برهم کنش میان هر زوج یون را دوبار در محاسبه منظور نکنیم. از این رو، هر گاه تعداد زوج یونهای موجود در بلور برابر با  $N$  باشد (که در این مورد برابر با تعداد مولکولهاست)، انرژی پتانسیل داخلی بلور برابر خواهد بود با

$$U = -\frac{N\alpha e^{\gamma}}{4\pi\epsilon_0 R_0} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (3.6)$$

مقدار تجربی  $U$  برای  $\text{NaCl}$  برابر است با  $-777 \times 10^5 \text{ J mol}^{-1}$  یا  $-1857 \text{ kcal mol}^{-1}$ . این نتیجه با اندازه گیری گرمای تشکیل بلور به دست می آید. با قراردادن  $U$  در معادله (۳.۶) و عدد آووگادرو ( $6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ) برای  $N$  و نیز با در نظر گرفتن رابطه  $R_0 = 281 \times 10^{-10} \text{ m}$ ، نتیجه  $n = 9.4$  حاصل می شود. مرتبه بزرگی  $n$  برای سایر بلورهای مکعبی برابر همین مقدار است. این مقدار با محاسبات دیگر نیز سازگاری دارد.

**مثال ۲.۶** ارتعاشات شبکه ای را بررسی کنید.

**حل:** تحلیل ارتعاشات شبکه ای به دلیل تأثیر آن بر روی برخی خواص فیزیکی بلورها از اهمیت ویژه ای برخوردار است. در اینجا برای سهولت، یک شبکه خطی را در نظر می گیریم، یعنی شبکه ای که در آن، یک ردیف از اتمهای یکسان در فاصله  $a$  از یکدیگر قرار گرفته اند (شکل ۱۰.۶). مکان اتم  $n$ ام با رابطه  $x_n = na$  داده می شود. تغییر مکان اتم  $n$ ام نسبت به وضعیت تعادل را با  $y_n$  نمایش می دهیم. در تقریب اول فرض می کنیم که در خلال ارتعاشات، هر اتم فقط با دو اتم مجاور خود برهم کنش می کند. فاصله جدایی میان اتمهای  $n$ ام و



شکل ۱۰.۶ شبکه خطی اتمهای یکسان.

$(n+1)$  ام به مقدار  $\xi_n - \xi_{n+1}$  افزایش می‌یابد و هر گاه  $\beta$  ثابت کشسانی پیوند باشد، نیروی وارد بر اتم  $n$  ام که جهت آن به طرف راست است و از اتم  $(n+1)$  ام ناشی می‌شود عبارت است از

$$\beta(\xi_{n+1} - \xi_n)$$

به طریق مشابه، اتم  $(n-1)$  ام نیز نیرویی به طرف چپ بر روی اتم  $n$  ام وارد می‌کند که مقدار آن عبارت است از

$$\beta(\xi_n - \xi_{n-1})$$

بنابراین، معادله حرکت اتم  $n$  ام عبارت است از

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} &= \beta(\xi_{n+1} - \xi_n) - \beta(\xi_n - \xi_{n-1}) \\ &= \beta(\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2\xi_n) \end{aligned} \quad (۴.۶)$$

در اینجا از تمام اثرهای انتهایی چشمپوشی می‌کنیم و سعی می‌کنیم جوابی به صورت زیر به دست آوریم

$$\xi_n = \xi_0 e^{i(\omega t + kna)} \quad (۵.۶)$$

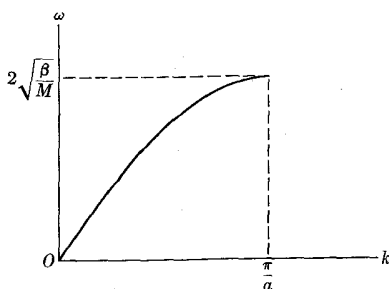
جمله  $kna$  فاز هراتم را به دست می‌دهد و به جمله فاز  $kx$  موجود در انتشار موج از میان محیط پیوسته شباهت دارد. از قراردادن رابطه (۵.۶) در معادله (۴.۶) و با حذف عوامل مشترک خواهیم داشت

$$-M\omega^2 = \beta(e^{ika} + e^{-ika} - 2) = -2\beta \sin^2 \frac{1}{2}ka$$

که از آن نتیجه زیر به دست می‌آید

$$\omega = 2\sqrt{\frac{\beta}{M}} \sin \frac{1}{2}ka \quad (۶.۶)$$

معادله فوق بسامدهای مجاز در شبکه را به دست می‌دهد. توجه کنید که مقدار بیشینه  $\omega$



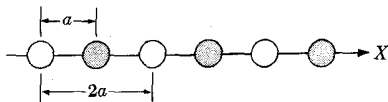
شکل ۱۱.۶ بسامد ارتعاشات شبکه‌ای  
بر حسب تابعی از  $k$ .

به ازای  $k = \pi/a$  پدیدار می‌شود. در شکل ۱۱.۶ ارتعاش  $\omega$  بر حسب تابعی از  $k$  نشان داده شده است. اینکه بسامد بیشینه‌ای وجود دارد بدان معنی است که یک حد بالا یا بسامد قطع برای امواج کشسان (یعنی آکوستیکی) در یک جامد وجود دارد. اما، این حد که برای اکثر مواد از مرتبه  $10^{15}$  Hz است، فراتر از بسامدهای فراصوتی که تاکنون در آزمایشگاهها مشاهده شده است، قرار دارد.

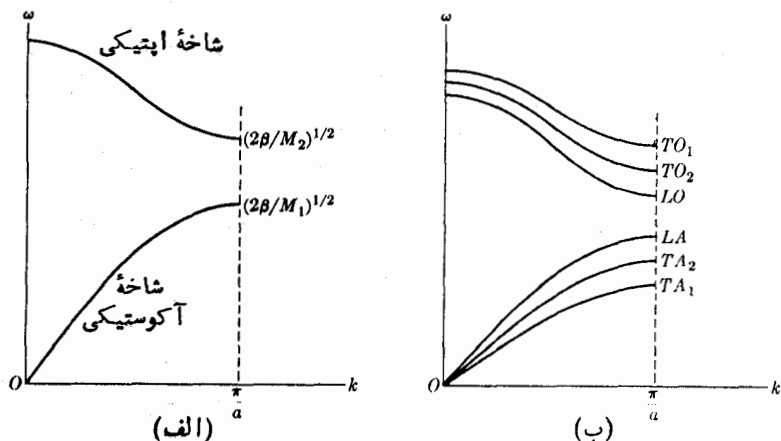
اکنون شبکه‌ای را در نظر می‌گیریم که از دو نوع اتم با جرمهای  $M_1$  و  $M_2$  تشکیل شده است. این اتمها به طور متناوب آرایش یافته‌اند، بنابراین فاصله میان اتمهای مجاور برابر با  $a$  و دوره تناوب فضایی شبکه نیز برابر با  $2a$  است (شکل ۱۲.۶). به عنوان یک شبکه نوعی می‌توان از بلور یونی نام برد. محاسبه‌ای مشابه با آنچه که در اندکی قبل انجام دادیم نشان می‌دهد که بسامدهای مجاز با رابطه زیر داده می‌شوند

$$\omega^2 = \beta \left( \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \pm \beta \left[ \left( \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right)^2 - \frac{4 \sin^2 ka}{M_1 M_2} \right]^{1/2} \quad (7.6)$$

در اینجا، همان‌طور که در شکل ۱۳.۶ (الف) دیده می‌شود، به ازای هر مقدار  $k$  دو مقدار برای  $\omega$  وجود دارد. مقادیر بالاتر  $\omega$  شاخه اپتیکی و مقادیر پایینتر نیز شاخه آکوستیکی طیف بسامد شبکه را تشکیل می‌دهند. در عمل وضع از آنچه تحلیل ما نشان می‌دهد پیچیده‌تر است زیرا هم شاخه آکوستیکی و هم اپتیکی می‌توانند بسا ارتعاشات طولی یا عرضی (نسبت به راستای انتشار)، با دو مد عرضی متناظر با دو جهت مستقل ارتعاش، متناظر باشند.

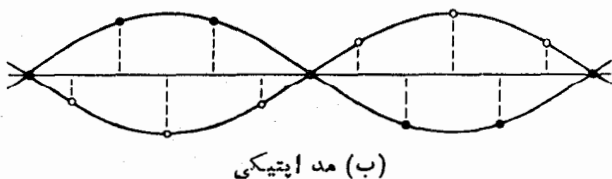
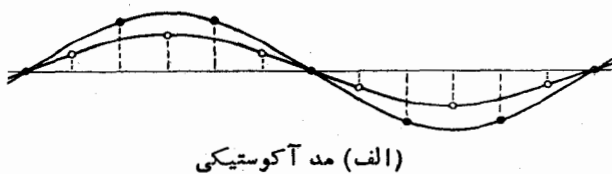


شکل ۱۲.۶ یک شبکه خطی مرکب از دو نوع اتم.



شکل ۱۳.۶ ارتعاشات آکوستیکی و اپتیکی یک شبکه خطی.

بنابراین، همان طور که در شکل ۱۳.۶ (ب) دیده می شود، به ازای هر مقدار  $k$  شش مقدار ممکن  $\omega(k)$  وجود دارد. دلیل اینکه شاخه ها به صورت «آکوستیکی» و «اپتیکی» نامگذاری شده اند آن است که در مد آکوستیکی، هر دو رده یونها به طور هم فاز و در مد اپتیکی، با اختلاف فاز  $\pi$  نوسان می کنند. هنگامی که ارتعاشات عرضی در نظر گرفته شود، جا به جایی یونها در مدهای آکوستیکی و اپتیکی ارتعاش نقشه ای را به دست می دهد که در شکل ۱۴.۶ نشان داده شده است. همان طور که از روی شکل دیده می شود، گشتاور دوقطبی القاشده در مد اپتیکی به مراتب بزرگتر است از گشتاور متناظر در مد آکوستیکی و بنابراین، مد اپتیکی نسبت به مد آکوستیکی، گسیل و جذب قویتری را از خود نشان می دهد. بسامدهای اپتیکی در ناحیه فروسرخ طیف قرار می گیرند و از این رو، پاسخ بلورهای یونی به تابش



شکل ۱۴.۶ روابط فاز میان آنها در مدهای آکوستیکی و اپتیکی.

الکترومغناطیسی فرو سرخ شدید است. برای تابش فرو سرخ (یعنی جایی که بسامد از مرتبه  $10^{12}$  Hz و طول موج از مرتبه  $10^{-4}$  m است)، مقدار  $k$  از مرتبه  $10^4 \text{ m}^{-1}$  است. از طرف دیگر، مقدار  $a$  برای اکثر جامدات یونی از مرتبه  $10^{-10}$  m است. بنا بر این،  $ka$  در حدود  $10^{-6}$  خواهد بود که مقدار بسیار کوچکی است. از این رو، بسامد تشدید بلور برای تابش الکترومغناطیسی را می توان با قرار دادن  $ka \approx 0$  در معادله (۷.۶) به دست آورد، یعنی

$$\omega_0^2 = 2\beta \left( \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \quad (۸.۶)$$

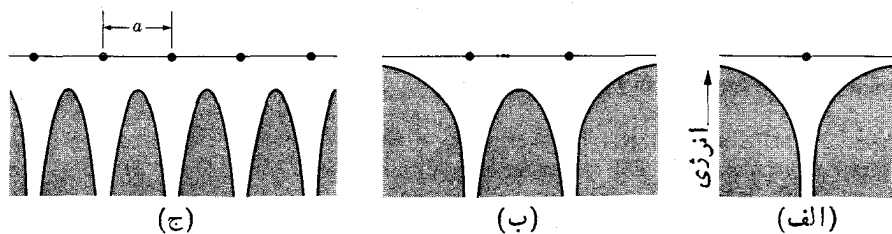
به عنوان مثال، این همان بسامد متناظر با جذب بیشینه در منحنی جذب NaCl است که در شکل ۳.۶ نشان داده شد.

در تحلیل دقیقتر، مدهای بهنجار ارتعاش هر جامد باید کسوانتیده باشند. هر گاه از انرژی ارتعاشی نقطه صفر جامد چشمپوشی کنیم، انرژیهای ارتعاشی هر مد به صورت مضاربی از  $\hbar\omega(k)$  درمی آید. برانگیختگی یا وانگیختگی هر مد ارتعاشی با جذب یا گسیل انرژی  $\hbar\omega(k)$  متناظر است. مشابهت با جذب یا گسیل تابش سبب می شود که مفهوم فونون را که انرژی آن  $E = \hbar\omega(k)$ ، تکانه آن  $p = \hbar k$  است و با سرعتی برابر با سرعت گروه گرمایی جامدات، از قبیل ظرفیت گرمایی و رسانش گرمایی، را می توان بر حسب برهم کنشهای فونون با شبکه و انتقال فونونها از میان شبکه توصیف کرد. حتی این امکان وجود دارد که از پراکندگی فونونها توسط اتمهای شبکه (مثل پراکندگی کامپتون فونونها توسط الکترونهاى اتم)، صحبت به میان آوریم. با استفاده از پراکندگی فونونها می توان تضعیف امواج صوتی با بسامد بالا هنگام عبور از یک جامد و نیز اثرهای گرمایی وابسته به این تضعیف را توصیف کنیم.

### ۳.۶ نظریه نواری جامدات

هنگامی که آرایش الکترونها در جامدات را بررسی می کنیم، می توانیم روشی را دنبال کنیم که به روش اوربیتال مولکولی به کار رفته در فصل پنجم برای تحلیل ساختار مولکولی شباهت زیادی دارد. هنگامی که الکترونی از کنار یونی عبور می کند، انرژی پتانسیلی را حس می کند که همان انرژی پتانسیل کولنی است، که با  $1/r$  متناسب است [شکل ۱۵.۶ (الف)]. هر گاه به جای یک یون دو یون وجود داشته باشد، مثلا در مولکولهای  $\text{H}_2^+$  و  $\text{H}_2$ ، در آن صورت انرژی پتانسیل شبیه به منحنی شکل ۱۵.۶ (ب) است. برای تعداد بسیار زیادی یون که به طور منظمی در یک ردیف آرایش یافته اند (مشابه با یک شبکه بلوری یک بعدی) انرژی پتانسیل به صورت آنچه در شکل ۱۵.۶ (ج) نشان داده شده است ظاهر می شود. هر گاه از اثرهای انتهایی چشمپوشی کنیم، انرژی پتانسیل همان دوره ای بودن

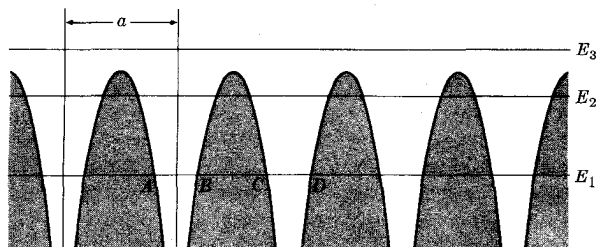




**شکل ۱۵.۶** انرژی پتانسیل کولنی ناشی از (الف) یک یون منفرد، (ب) دو یون، (ج) چندین یون واقع در یک ردیف.

(یا نظم) شبکه بلوری را از خود نشان می‌دهد. بلور واقعی یک شبکه سه بعدی است و انرژی پتانسیل هر الکترون که از میان شبکه عبور می‌کند نیز یک دوره‌ای بودن سه بعدی را از خود نشان می‌دهد که از هر سلول به سلول دیگر تکرار می‌شود.

برای تعیین ویژه حالت‌های ممکن حرکت در چنین انرژی پتانسیل دوره‌ای مجبوریم باز هم به معادله شرودینگر برگردیم. جواب معادله به شکل بخصوص انرژی پتانسیل دوره‌ای بستگی دارد. اما، دوره‌ای بودن انرژی پتانسیل این امکان را فراهم می‌کند که اطلاعات مفیدی را بدون حل کردن واقعی معادله شرودینگر به دست آوریم. در اینجا یک شبکه بلور خطی را در نظر می‌گیریم که از  $N$  یون، که در فاصله  $a$  از یکدیگر قرار دارند، تشکیل شده است (شکل ۱۶.۶). الکترونی که مقدار انرژی آن مساوی با  $E_0$  است نمی‌تواند آزادانه در میان شبکه حرکت کند بلکه عمدتاً در یکی از نواحی  $AB$ ،  $CD$ ، و مانند آن که از نظر کلاسیکی مجازند، محبوس می‌شود. درست است که چنین الکترونی بسا نفوذ از میان سد پتانسیل واقع در میان دو ناحیه مجاز می‌تواند از  $AB$  به  $CD$  رود (همان‌طور که در ارتباط با وارونی  $NH_3$  در بخش ۸.۲ توضیح داده شد)، ولی این سد به قدری بلند و پهن است که نفوذ الکترون از آن کاملاً غیر محتمل است. به همین دلیل است که الکترونیهای داخلیترا یک بلور اساساً جایگزین‌یافته‌اند و انرژیها و تابع موجهای آنها را می‌توان همانند انرژیها و تابع موجهای اتمهای منزوی در نظر گرفت. الکترونی با انرژی  $E_0$  قویاً به یون بخصوصی

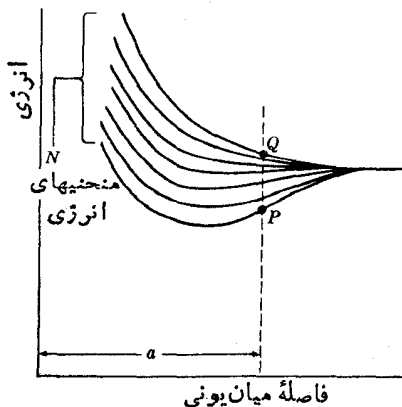


**شکل ۱۶.۶** انواع ترازهای انرژی در یک شبکه بلور خطی.

مقید نیست و با نفوذ از میان سد پتانسیل می‌تواند از میان شبکه حرکت کند. سرانجام الکترون با انرژی  $E_p$  به هیج اتم بخصوصی مقید نیست و با آزادی کامل می‌تواند از میان شبکه عبور کند. چنین الکترونهاى آزادگونه‌ای نه تنها در اکثر خواص جمعی شبکه (از قبیل رسانایی الکتریکی و گرمایی) بلکه در پیوند یونهاى اتمی که ساختار بلوری را تشکیل می‌دهند نیز نقش عمده‌ای ایفا می‌کنند.

هدف بعدی ما تعیین ترازهای انرژی ممکن است. در اینجا وضع مولکولهای  $H_2^+$  و  $H_p$  را مجدداً به خطا می‌آوریم. انرژی پتانسیل در مولکولهای دو اتمی از دو یون ناشی می‌شود و در نتیجه، با کاهش فاصلهٔ میان یونی، ترازهای انرژی اتمی به دو قسمت شکافته می‌شود (شکل ۳۰۵). به طریق مشابه، در مولکولهای مزدوج خطی که الکترونهاى پیوندی  $\pi$  دارند، از قبیل پولینها (بخش ۶۰۵)، الکترونها در يك انرژی پتانسیل دوره‌ای حرکت می‌کنند و هر تراز انرژی اتمی به تعدادی تراز، مساوی با تعداد اتمها، شکافته می‌شود. در شکل ۲۶۰۵ این موضوع برای بوتادین نشان داده شده است. بنا بر این، در يك شبکه همانند آنچه در شکل ۱۶۰۶ دیده می‌شود، هر تراز انرژی اتمی به  $N$  تراز نزدیک به هم تجزیه می‌شود. فضای میان آنها و نیز مکان آنها، همان‌طور که به‌طور کیفی در شکل ۱۷۰۶ نشان داده شده است، به فاصلهٔ جدایی میان یونی وابسته است. به‌عنوان مثال، به‌ازای فاصلهٔ میان یونی  $a$ ، ترازهای انرژی ممکن در میان  $P$  و  $Q$  قرار می‌گیرند. هنگامی که  $N$  خیلی بزرگ باشد، ترازهای مختلف انرژی به‌قدری به هم نزدیک می‌شوند که می‌توان گفت يك ذواد انرژی پیوسته تشکیل داده‌اند.

چون بر طبق اصل طرد پائولی، هر تراز می‌تواند دو الکترون، یکی با اسپین بالا و دیگری با اسپین پایین، را در خود جای‌دهد، هر نوار انرژی متناظر با هر حالت اتمی معین می‌تواند حداکثر  $2N$  الکترون یا به عبارت دیگر، دو الکترون به‌ازای هر یون را در خود

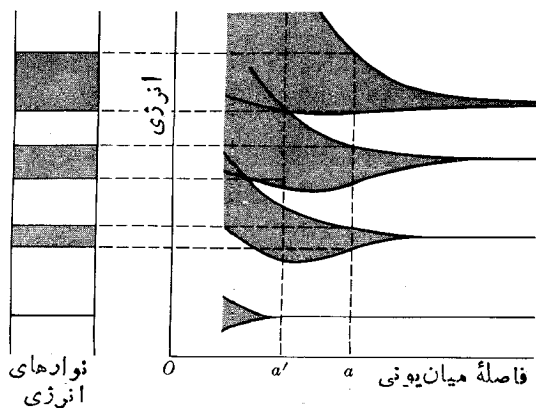


شکل ۱۷۰۶ ترازهای انرژی در يك شبکه بلور خطی بر حسب تا بی از فاصلهٔ میان یونی.

جای دهد. نوارها برحسب مقدار تکانه زاویه‌ای حالت اتمی مربوط، با  $s$ ،  $p$ ،  $d$ ، و مانند آن مشخص می‌شوند.

در هر شبکه بلوری معین تعداد زیادی نوار انرژی وجود دارد که هر کدام بایکی از ترازهای انرژی اتمهایی که شبکه را تشکیل می‌دهند متناظر است. شکل ۱۸.۶ نوارهای انرژی متناظر با چند تراز انرژی در فاصله میان یونی  $a$  را نشان می‌دهد. از روی منحنیهای انرژی طرف راست مشاهده می‌شود که هر چه تراز انرژی اتمی بالاتر باشد، فاصله میان یونی که در آن نوارها تشکیل می‌شوند نیز بزرگتر خواهد بود. دلیل این مطلب آن است که هر چه انرژی الکترونها بیشتر باشد، ناحیه‌ای که در روی آن الکترونها حرکت می‌کنند وسیعتر است و بنابراین، به راحتی تحت تأثیر یونهای واقع در نزدیکی خود قرار می‌گیرند. خصوصیت دیگر آن است که با کاهش فاصله میان یونی، نوارها بر روی هم افتادن را آغاز می‌کنند. به عنوان مثال، برای فاصله میان یونی  $a'$ ، سومین و چهارمین نوار موجود در شکل ۱۸.۶ روی هم می‌افتند. همان طور که بعداً خواهیم دید، این موضوع در توضیح خواص بیشتر جامدات نقش مهمی بازی می‌کند.

نوارهای وابسته به پوسته‌های کامل داخلیتر در اتمهای مسادر، سهم کامل خود از الکترونها را که طبق اصل طرد مجازند را دارند. همان طور که در شکل ۱۶.۶ توضیح داده شد، الکترونها موجود در چنین نوارهایی نیز کمابیش جایگزین شده‌اند. بنابراین، در بحث بعدی از ایس نوارها چشم می‌پوشیم. اما، نوار متناظر با بالاترین پوسته اتمی، که با الکترونها ظرفیت پر می‌شود، در ارتباط با خواص جامد بسیار جالب توجه است. همین نوار است که ما با تفصیل بیشتری آنرا توضیح خواهیم داد. هر گاه این نوار کاملاً پر نشده باشد، به آن نواد رسانشی و در غیر این صورت به آن نواد ظرفیت می‌گویند. نوار خالی که درست بالای نوار ظرفیت قرار دارد به نواد رسانشی معروف است.



شکل ۱۸.۶ نوارهای انرژی.

## ۴.۶ مدل الکترون آزاد جامد

به عنوان اولین تقریب در تحلیل حرکت الکترونها در نوار رسانش، از افت وخیز دوره‌ای انرژی پتانسیل چشمپوشی می‌کنیم و فرض می‌کنیم که الکترونها در ناحیه‌ای با انرژی پتانسیل میانگین ثابت حرکت می‌کنند. از این رو می‌توانیم فرض کنیم که این الکترونها آزادند و به طور مستقل حرکت می‌کنند. همچنین برای سهولت، یک شبکه خطی را بررسی خواهیم کرد. هر گاه فرض کنیم که شبکه به قدر کافی بزرگ است، بحث ما تحت تأثیر شرایط مرزی در سطوح خارجی شبکه قرار نخواهد گرفت. بنابراین، تابع موج تقریبی الکترونی با تکانه  $p = \hbar k$  عبارت است از

$$\psi = e^{ikx} \quad (۹.۶)$$

که در آن  $k$  می‌تواند مثبت یا منفی باشد تا حرکت در هر دو جهت مثبت و منفی ممکن شود. برای شبکه سه بعدی، باید تابع موج به صورت زیر باشد

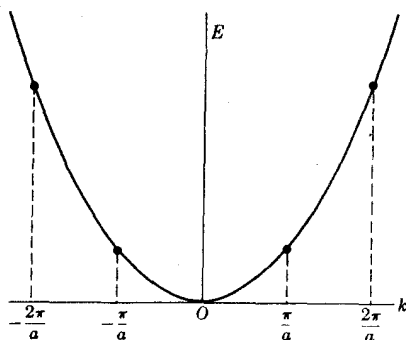
$$\psi = e^{ik \cdot r} \quad (۱۰.۶)$$

برای هر دو تابع موج داریم،  $|\psi|^2 = ۱$ ، و این بدان معنی است که احتمال وجود الکترون در هر محل از شبکه یکسان است. البته این موضوع با تصور ما از شبکه به عنوان یک ساختار دوره‌ای که دوره‌ای بودن آن باید در توزیع احتمال الکترون منعکس شود سازگاری ندارد. (به عنوان مثال، معقول به نظر می‌رسد که احتمال یافتن الکترون در نزدیکی یک یون مثبت شبکه به مراتب بزرگتر از سایر نواحی شبکه باشد.) با وجود این، مدل الکترون آزاد با آنکه یک مدل به اصطلاح خام است، ولی به هر حال اطلاعاتی را در مورد خواص خیلی از جامدات به دست می‌دهد.

هر گاه از انرژی پتانسیل ثابت میانگین چشم‌پوشیم، انرژی الکترونی که با تابع موج (۹.۶) یا (۱۰.۶) بیان می‌شود، عبارت است از

$$E = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} \quad (۱۱.۶)$$

که متناظر است با انرژی جنبشی الکترونی با تکانه  $p = \hbar k$ . تغییرات انرژی بر حسب تسابعی از  $k$  در شکل ۱۹.۶ نشان داده شده است. مدل الکترون آزاد تمام مقادیر  $k$ ، و بنابراین  $E_k$ ، را مجاز می‌داند و این بدان معنی است که این مدل نمی‌تواند اطلاعاتی را درباره پهنای یک نوار به دست بدهد، ولی ما می‌توانیم به صورت زیر آن را برآورد کنیم: یک شبکه خطی به طول  $L$  را در نظر می‌گیریم که از  $N$  یون مجزای واقع در فاصله  $a$  تشکیل شده است، به طوری که  $L = Na$ . برای تشکیل امواج ایستاده، طول موج الکترون یعنی  $\lambda$  باید شرط  $n(\lambda/2) = L$  را برآورده کند. به ازای هر مقدار  $n$ ، یک ویژه حالت مشخصی نتیجه می‌شود. اما می‌دانیم که هر نوار در شبکه‌ای متشکل از  $N$  یون فقط  $N$  حالت دارد.



شکل ۱۹.۶ انرژی الکترون آزاد بر حسب تابعی از  $k$ .

بنا بر این مقادیر ممکن  $n$  عبارت اند از ۱، ۲، ۳، ...،  $N$ . با توجه به اینکه  $k = 2\pi/\lambda$  خواهیم داشت

$$k = \frac{n\pi}{L} = \frac{n\pi}{Na}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (12.6)$$

اختلاف میان مقادیر متوالی  $k$  برابر است با  $\pi/Na$  و هر گاه  $N$  خیلی بزرگ باشد این اختلاف بسیار کوچک خواهد بود. این موضوع بررسی  $k$  به عنوان یک متغیر پیوسته را علی رغم شرط کوانتاش (۱۲.۶) توجیه می کند. با قرار دادن  $n = N$  در معادله (۱۲.۶) بیشینه مقدار  $k$  به صورت زیر به دست می آید

$$k_{\max} = \frac{\pi}{a} \quad (13.6)$$

از این رو، همان طور که در شکل ۱۹.۶ نشان داده شده است، گستره مقادیر مجاز  $k$  در محدوده این نوار میان  $-\pi/a$  و  $\pi/a$  قرار می گیرند. در این صورت برای بیشینه انرژی نوار، که پهنای نوار نیز محسوب می شود، خواهیم داشت

$$E_{\max} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_e a^2} \quad (14.6)$$

از روی معادله (۱۴.۶) دیده می شود که پهنای نوار، مستقل از تعداد یونهای تشکیل دهنده شبکه است (این نتیجه ای است که انتظار آن را داشتیم)، زیرا اضافه کردن تعداد بیشتری یون به معنی زیادتر شدن حالتهاست. ولی دوره ای بودن شبکه، که  $k_{\max}$  را برطبق معادله (۱۳.۶) تعیین می کند، به صورت یکسان باقی می ماند (مثال ۶.۶).

در اینجا مهمترین موضوع آن است که تعیین کنیم چگونه الکترونها می توانند در نواری میان انرژیهای از صفر تا  $E_{\max}$  توزیع شوند. در مثال ۴.۲ نشان دادیم که تعداد ترازهای انرژی در گستره انرژی  $dE$  که در دسترس يك ذره آزاد محصور در جعبه ای به حجم  $V$  هستند با رابطه زیر داده می شود

$$dN(E) = \frac{4\pi V (2m^3)^{3/2}}{h^3} E^{1/2} dE$$

هر تراز می تواند دو الکترون (یکی با اسپین به طرف بالا و دیگری به طرف پایین) را در خود جای دهد. بنابراین، هر گاه يك یکای حجم را در نظر بگیریم، تعداد کل الکترونهاي موجود در يكای حجم با انرژی میان  $E$  و  $E + dE$  در نوار عبارت خواهد بود از

$$dn = \frac{4\pi (2m_e^3)^{3/2}}{h^3} E^{1/2} dE = g(E) dE \quad (15.6)$$

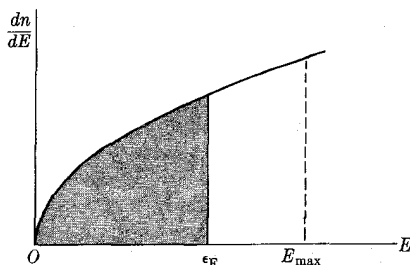
در شکل ۲۰.۶، که اساساً با شکل ۱۲.۲ یکسان است، کمیت  $g(E) = dn/dE$  نشان داده شده است. برای هر نوار مشخص، منحنی باید در  $E_{\max}$  متوقف شود. تعداد الکترونهاي موجود در يكای حجم که می توانند تا انرژی  $E$  جای داده شوند، با رابطه زیر داده می شود

$$n = \int_0^E g(E) dE$$

بنابراین، با به کار بردن معادله (۱۵.۶) خواهیم داشت

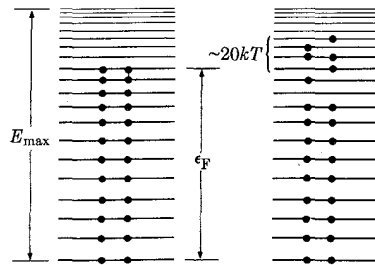
$$n = \frac{4\pi (2m_e^3)^{3/2}}{h^3} \int_0^E E^{1/2} dE = \frac{16\pi (2m_e^3)^{3/2}}{3h^3} E^{3/2} \quad (16.6)$$

هر گاه فلز در حالت پایه باشد (همچنان که بعداً خواهیم دید، این حالت در صفر مطلق رخ می دهد) تمام الکترونها، همان طور که در شکل ۲۱.۶ (الف) دیده می شود، پایینترین ترازهای



شکل ۲۰.۶ چگالی حالت های انرژی الکترونهاي

آزاد موجود در جامد.



(الف) حالت پایه (ب) حالت برانگیخته

شکل ۲۱.۶ توزیع الکترونیهای آزاد میان حالت‌های انرژی در نوار رسانش.

انرژی ممکن را که با اصل طرد سازگاری دارد اشغال می‌کنند. هر گاه تعداد کل الکترونیهای موجود در یکای حجم (یعنی  $n_0$ ) کوچکتر از تعداد کل ترازهای انرژی موجود در نوار باشد، در این صورت الکترونها تمام حالت‌های انرژی را تا بیشینه انرژی که با  $\epsilon_F$  نشان داده می‌شود و به انرژی فرمی معروف است، پر می‌کنند. هر گاه  $E = \epsilon_F$  را در معادله (۱۶.۶) قرار دهیم باید داشته باشیم  $n = n_0$ . بنابراین برای انرژی فرمی مقدار زیر به دست می‌آید

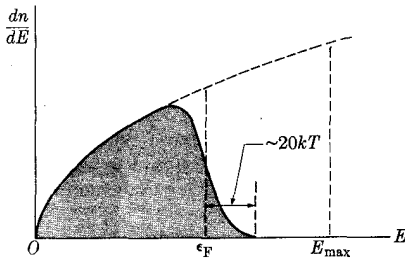
$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{8m_0} \left( \frac{3n_0}{\pi} \right)^{2/3} \quad (17.6)$$

از این رو، توزیع انرژی الکترونها در حالت پایه فلز با ناحیه سایه‌دار شکل ۲۰.۶ متناظر است. هنگامی که انرژی فرمی با پهنای نوار انرژی برابر است، این نوار به طور کامل اشغال شده است. در جدول ۱۰.۶ مقادیر محاسبه شده انرژیهای فرمی پاره‌ای از فلزات آمده است.

هنگامی که یک نوار کاملاً پر نشده است، مقدار کمی انرژی برای برانگیختن بالاترین الکترونها کافی خواهد بود تا مطابق شکل ۲۱.۶ (ب)، آنها را به ترازهای انرژی نزدیک ببرد. اما، تنها بالاترین الکترونها هستند که می‌توانند با گرما برانگیخته شوند، زیرا  $kT$  در دمای معمولی در حدود  $0.025 \text{ eV}$  است، که در مقایسه با  $\epsilon_F$  بسیار کوچک است و بر طبق اصل طرد، محال است که الکترونها کم انرژی بتوانند با این مقدار کم انرژی برانگیخته شوند و در حالت‌های اشغال شده نزدیک قرار گیرند. توزیع الکترونها در میان ترازهای

جدول ۱۰.۶ انرژی فرمی.

Al	Mg	Au	Ag	Cu	Cs	Rb	K	Na	Li	فلز
۱۱۷۹	۷۲۳	۵۷۵۴	۵۷۵۱	۴۲۰۷	۱۷۵۳	۱۷۸۲	۴۲۱۴	۳۲۱۲	۴۲۷۲	$\epsilon_F, \text{eV}$



شکل ۲۲.۶ حالت‌های انرژی اشغال‌شده در دمایی متفاوت با صفر مطلق.

انرژی در حالتی از شبکه که با گرما برانگیخته می‌شود، با ناحیه سایه‌دار در شکل ۲۲.۶ متناظر است. الکترون‌هایی که با گرما برانگیخته می‌شوند الکترون‌هایی هستند که انرژی آنها بزرگتر از  $\epsilon_F$  است. حالت‌هایی که این الکترون‌های برانگیخته اشغال می‌کنند در ناحیه‌ای از انرژی قرار می‌گیرند که از مرتبه  $20kT$  بالاتر از  $\epsilon_F$  است.

تابع کلا هر فلز مقدار انرژی است که برای کندن یک الکترون از بالاترین تراز اشغال‌شده لازم است. انرژی فرمی در صفر مطلق برابر است با بالاترین تراز اشغال‌شده. چون انرژی‌های گرمایی در مقایسه با انرژی فرمی بسیار کوچک‌اند، تنها تعداد کمی از الکترون‌ها می‌توانند حتی در دمای معمولی در بالای انرژی فرمی برانگیخته شوند. به همین دلیل است که تابع کار در گستره وسیعی از دماها عملاً ثابت است.

### مثال ۳.۶ بحث مربوط به اثر پارامغناطیسی اسپین پاولی.

**حل:** نظریه ساده الکترون آزاد، که در بخش قبل بررسی شد، برای توضیح بسیاری از خواص فلزات کافی به نظر می‌رسد. یکی از این خواص عبارت است از خاصیت پارامغناطیسی کوچکی که اکثر فلزات از خود نشان می‌دهند. پاولی این پارامغناطیسی را به یک تغییر در حالت‌های اشغال‌شده توسط الکترون‌های با اسپین بالا و پایین هنگام اعمال یک میدان مغناطیسی نسبت داد، زیرا میدان مغناطیسی به سمتگیری الکترون‌هایی که اسپین آنها در خلاف جهت میدان است کمک می‌کند.

در بخش ۶.۳ دیدیم که هر الکترون گشتاور مغناطیسی  $\mu_B$  دارد و در حضور میدان مغناطیسی  $\mathcal{B}$  نیز، مقدار انرژی  $\pm \mu_B \mathcal{B}$  را به دست می‌آورد که در آن، علامت + (یا -) متناظر است با اسپین به طرف بالا (یا پایین)، یا موازی (یا پاد موازی) با میدان مغناطیسی. هر گاه  $E$  انرژی کل الکترون باشد، انرژی جنبشی الکترون برابر خواهد بود با  $E \mp \mu_B \mathcal{B}$  که بستگی به آن دارد که اسپین به طرف بالا باشد یا پایین. بنابراین، تعداد حالت‌های اشغال‌شده با اسپین به طرف بالا و پایین عبارت است از

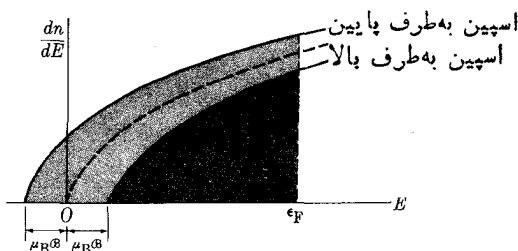


$$\left(\frac{dn}{dE}\right)_{\uparrow} = \frac{1}{\gamma} g(E - \mu_B \mathcal{B}), \quad \left(\frac{dn}{dE}\right)_{\downarrow} = \frac{1}{\gamma} g(E + \mu_B \mathcal{B})$$

ضریب  $1/2$  به این دلیل وارد شده است که در هر حالت فقط الکترونهاى با اسپین موجود در يك سمتگیری مشخص در نظر گرفته می‌شوند. شکل ۲۳.۶ نمودارهای  $(dn/dE)_{\uparrow}$  و  $(dn/dE)_{\downarrow}$  را نشان می‌دهد (در اینجا فرض می‌کنیم که دما نزدیک صفر مطلق است). همچنانکه مشاهده می‌شود، تعداد الکترونهاى با اسپین به طرف پایین از تعداد الکترونهاى با اسپین به طرف بالا بیشتر است. توجه کنید که پیشینه انرژی را مساوی با  $\epsilon_F$  گرفته‌ایم. حتی در قویترین میدانهای مغناطیسی به کار رفته در آزمایشگاه (از مرتبه  $0.1T$ )، انرژی  $\mu_B \mathcal{B}$  در حدود  $6 \times 10^{-6} \text{ eV}$  است که در مقایسه با انرژی فرمی، جدول ۱.۶، بسیار کوچک است. از این رو، دامنحنی فوق فقط کمی از یکدیگر فاصله دارند. الکترونهاى با اسپین به طرف بالا گشتاور مغناطیسی  $-\mu_B$  و الکترونهاى با اسپین به طرف پایین نیز گشتاور مغناطیسی  $+\mu_B$  را در امتداد میدان مغناطیسی دخالت می‌دهند. بنابراین گشتاور مغناطیسی خالص در یکای حجم فلز عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \int_0^{\epsilon_F} \left[ \mu_B \left(\frac{dn}{dE}\right)_{\downarrow} - \mu_B \left(\frac{dn}{dE}\right)_{\uparrow} \right] dE \\ &= \frac{1}{\gamma} \mu_B \int_0^{\epsilon_F} [g(E + \mu_B \mathcal{B}) - g(E - \mu_B \mathcal{B})] dE \\ &= \mu_B \mathcal{B} \int_0^{\epsilon_F} \frac{dg}{dE} dE = \mu_B \mathcal{B} g(\epsilon_F) \end{aligned}$$

در این محاسبه از رابطه  $g(E \pm \mu_B \mathcal{B}) = g(E) \pm \mu_B \mathcal{B} (dg/dE)$  که از بسط تیلور مشتق می‌شود استفاده کرده‌ایم. با توجه به معادلات (۱۵.۶) و (۱۷.۶) خواهیم داشت



شکل ۲۳.۶ حالت‌های انرژی اشغال شده در حضور میدان مغناطیسی خارجی.

$$g(\varepsilon_F) = \frac{3n_0}{2\varepsilon_F}$$

بنابراین مغناطش ناشی از سمنگیری مجدد اسپین عبارت است از

$$\mathfrak{M} = \frac{3n_0\mu_B^2}{2\varepsilon_F} \mathcal{B}$$

که در همان راستای  $\mathcal{B}$  قرار دارد و از این رو، یک اثر پارامغناطیسی است. بنابراین برای پذیرفتاری پارامغناطیسی اسپینی هر فلز خواهیم داشت

$$\chi_m = \frac{3n_0\mu_B^2\mu_0}{2\varepsilon_F}$$

با قراردادن مقادیر عددی و با  $\varepsilon_F \sim 2\text{eV}$  به دست می آید  $\chi_m \sim 5 \times 10^{-6}$ . تا آنجا که مرتبه بزرگی موردنظر باشد، این مقدار با نتیجه تجربی سازگاری دارد. با آنکه محاسبه را با فرض نزدیک بودن دما به صفر مطلق انجام دادیم، با این حال برای گستره نسبتاً وسیعی از دما نیز این نتیجه معتبر باقی می ماند.

از رابطه بالا دیده می شود، که چون به طور کلی برای الکترونها  $d$ ، مقدار  $n_0$  بزرگتر و  $\varepsilon_F$  نیز کوچکتر از مقادیر متناظر برای الکترونها  $s$  یا  $p$  است لذا، پارامغناطیسی الکترونی اتمهایی که پوسته های  $d$  آنها تکمیل نشده است بزرگتر خواهد بود.

## ۵.۶ حرکت الکترون در ساختار دوره ای

برای اصلاح مدل الکترون آزاد جامد، اثر ساختار دوره ای شبکه رانیز در بحث دخالت می دهیم. برای این کار از تابع موجهای ممکن شروع می کنیم. واضح است که اثر شبکه عبارت است از تغییر دادن تابع موج ذره آزاد  $e^{ik \cdot r}$ ، بنابراین، دامنه این تابع موج به جای اینکه ثابت باشد با دوره تناوب شبکه تغییر می کند. بنابراین می توان تابع موج را به صورت زیر نوشت

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ik \cdot r} u(\mathbf{r}) \quad (18.6)$$

که در آن  $u(\mathbf{r})$  یک دامنه مدوله شدنی است که از هر سلول شبکه به سلول دیگر تکرار می شود. در مورد یک شبکه خطی با فاصله  $a$ ، به جای معادله (۱۳.۶)، باید بنویسیم

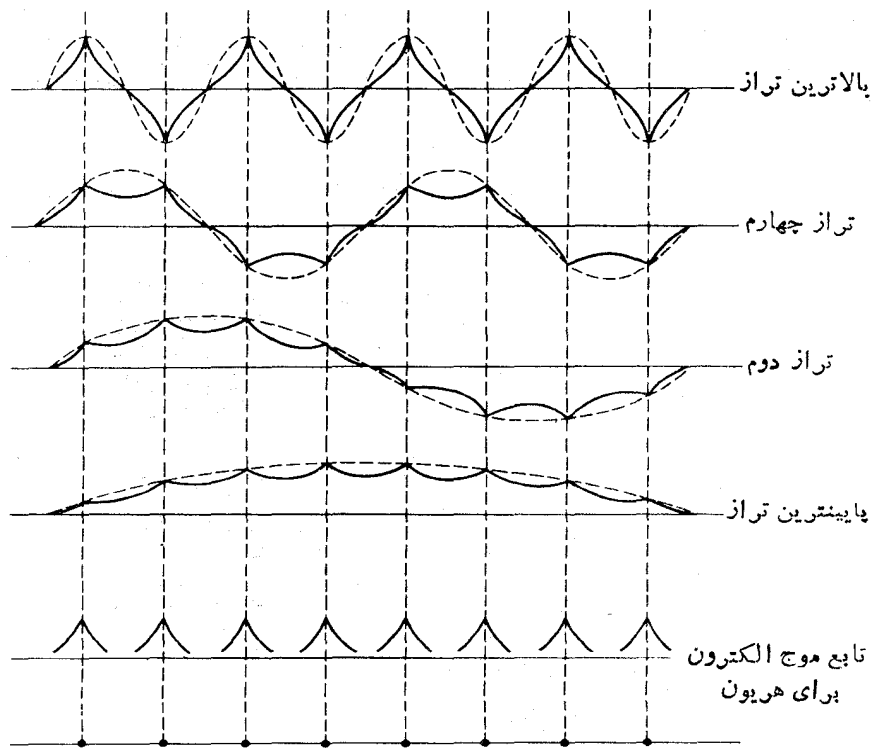
$$\psi(x) = e^{ikx} u(x) \quad (19.6)$$

که در آن  $u(x)$  شرط زیر را بر آورده می کند

$$u(x+a) = u(x) \quad (20.6)$$

روابط (۱۹.۶) و (۲۰.۶) بسا همدیگر، قضیه بلوخ را تشکیل می‌دهند (به مثال ۵.۶ مراجعه شود).

برای به دست آوردن تصویری از تابع موجهای (۱۹.۶) می‌توانیم فرض کنیم که  $u(x)$  به تابع موج اتمهای منزوی شبیه است و  $e^{ikx}$  نیز با تابع موجهای يك ذره آزاد واقع در جبهه پتانسیل تعویض شده است. بعضی از تابع موجهای مربوط به شبکه‌ای مرکب از هشت یون واقع در يك ردیف، در شکل ۲۴.۶ نشان داده شده‌اند. این نوار از هشت تراز تشکیل شده است ولی فقط چهار تابع موج نشان داده شده‌اند. توجه کنید با آنکه تکانه الکترون که با معادله (۱۹.۶) داده شد ثابت نیست با این حال می‌توان گفت که  $\hbar k$  نوعی میانگین تکانه الکترون است (مثال ۴.۶). امسأ، طول موج وابسته به  $\psi(x)$  هنوز هم به صورت  $\lambda = 2\pi/k$  نوشته می‌شود و از این رو  $k$  عدد موج الکترون است. به دلیل وجود انرژی پتانسیل ناشی از یونهای شبکه، انرژی الکترون تماماً جنبشی نیست، در صورتی که در مورد الکترون آزاد داده شده با معادله (۱۱.۶) این انرژی کاملاً به صورت انرژی جنبشی بود. رابطه مربوط به انرژی بر حسب  $k$  يك رابطه پیچیده است و به وضع هندسی شبکه بستگی دارد. نتیجه مهم



شکل ۲۴.۶ تابع موجهای در يك شبکه متشکل از هشت یون.

آن است که انرژی در مقادیر مشخصی از  $k$  يك ناپیوستگی دارد و این مقادیر برای يك شبکه خطی با فاصله  $a$  با رابطه زیر داده می‌شوند

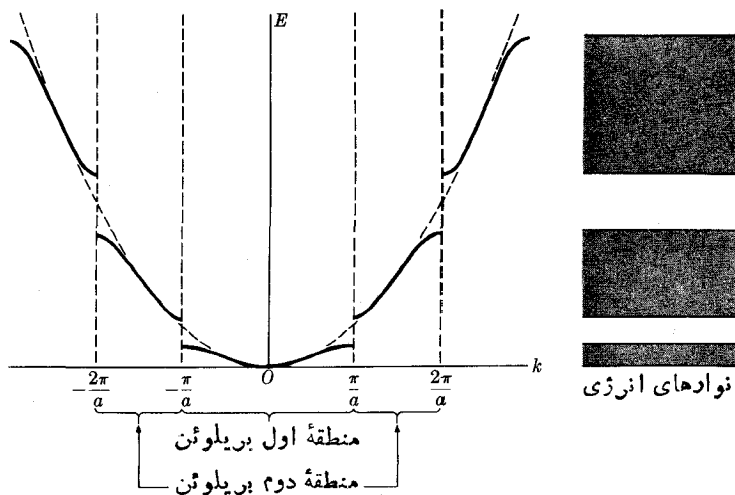
$$k = \frac{n\pi}{a}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (21.6)$$

در شکل ۲۵.۶ نمودار  $E(k)$  مربوط به این حالت نشان داده شده است. از روی منحنی دیده می‌شود که برای مقادیری از  $k$  که در نزدیکی مقادیر داده شده با معادله (۲۱.۶) نیستند، انرژی خیلی به انرژی يك ذره آزاد (که با خط چین نشان داده شده است) شباهت دارد. بنا بر این، تنها هنگامی که  $k$  نزدیک به  $n\pi/a$  است، شبکه بر روی حرکت الکترون اثر می‌گذارد و گافهای انرژی تولید می‌کند. در مقادیر میانی  $k$ ، الکترونها آزادانه در میان شبکه حرکت می‌کنند. نوارهای انرژی مجاز آنهایی هستند که با خطوط پرمتناظرند. این نوارهای انرژی در طرف راست شکل نیز نشان داده شده‌اند.

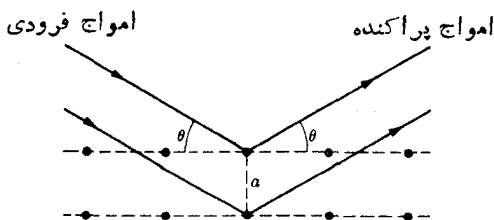
تعجب آور نیست که فقط وقتی  $k$  نزدیک به مقادیر  $n\pi/a$  است و اختلال شبکه نیز قوی است، يك الکترون می‌تواند آزادانه در میان شبکه حرکت کند بدون اینکه با مقاومت جدی مواجه شود. حرکت الکترونها در شبکه را می‌توان با انتشار موج الکترومغناطیسی در بلور مشا به دانست. هنگامی که شرط براگ برآورده شود، یعنی هنگامی که رابطه زیر برقرار است

$$2a \sin \theta = n\lambda$$

پراکنندگی موج الکترومغناطیسی به وسیله اتمهای موجود در شبکه به يك موج پراکنده و



شکل ۲۵.۶ مناطق بریلوئن در يك شبکه خطی.

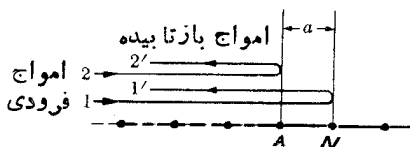


شکل ۲۶.۶ پراکندگی براگ.

تقویت شده منجر می‌شود. در رابطه بالا،  $a$  فاصله میان صفحات است و  $\theta$  نیز زاویه‌ای است که جهت انتشار با صفحات شبکه تشکیل می‌دهد (شکل ۲۶.۶). برای تابش عمودی ( $\theta = \pi/2$ )، شرط براگ به صورت  $2a = n\lambda$  درمی‌آید. برای انتشار موج در امتداد شبکه باید این شرط را در مورد شبکه خطی به کار ببریم. به عنوان مثال، هرگاه امواج ۱ و ۲ مطابق شکل ۲۷.۶ در یونهای متوالی  $A$  و  $A'$  بازتابیده شوند، پرتوهای بازتابیده  $1'$  و  $2'$  یک اختلاف مسیر برابر با  $2a$  و یک اختلاف فاز برابر با  $2\pi(2a)/\lambda$  پیدامی‌کنند. بیشینه تقویت  $1'$  و  $2'$  هنگامی رخ می‌دهد که این اختلاف فاز برابر با  $2n\pi$  باشد که از آن نتیجه  $2a = n\lambda$  به دست می‌آید. با قراردادن  $\lambda = 2\pi/k$  خواهیم داشت  $k = n\pi/a$  که با معادله (۲۱.۶) سازگاری دارد. بنابراین، این مقادیر  $k$  مقادیری هستند که در آنها، شبکه خطی مانع حرکت الکترون در یک جهت مشخص می‌شود و آنها را مجبور می‌کند که در جهت مخالف حرکت کنند. گستره مقادیر  $k$  میان  $-\pi/a$  و  $+\pi/a$  اولین منطقه بریلوئن را تشکیل می‌دهد. در حالتی که  $k$  میان  $-\pi/a$  و  $2\pi/a$  و میان  $\pi/a$  و  $3\pi/a$  قرار دارد، دومین منطقه بریلوئن را خواهیم داشت و به همین ترتیب تا به آخر.

با توجه به اینکه سرعت گروه با رابطه  $v_g = d\omega/dk$  داده می‌شود (پیوست ۳ را ببینید) و بر طبق معادله (۴۵.۱) نیز  $E = \hbar\omega$  است، سرعت الکترون را، هنگامی که با بسته موجی نمایش داده شود که حول انرژی  $E$  و عدد موج  $k$  متمرکز شده‌است، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$v = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} \quad (22.6)$$



شکل ۲۷.۶ پراکندگی براگ در شبکه خطی.

از مقایسه این معادله با شیب منحنی شکل ۲۵.۶ نتیجه می گیریم که سرعت الکترون در داخل اولین منطقه بریلوئن، همان طور که در شکل ۲۸.۶ (الف) دیده می شود، تغییر می کند و نتایج مشابهی نیز برای سایر مناطق وجود دارد. در پایین و نیز در بالای نوار سرعت مساوی با صفر است. در نواحی میانی نوار، سرعت آن خیلی نزدیک به سرعت الکترون آزاد، یعنی برابر  $\hbar k/m$  است.

با فرض اینکه  $F$  نیروی خارجی وارد بر الکترون باشد، کاری که این نیرو در زمان  $dt$  بر روی الکترون انجام می دهد مساوی با  $Fv dt$  خواهد بود. این موضوع باعث تغییر  $dE$  در انرژی الکترون می شود. بنا بر این می توانیم بنویسیم

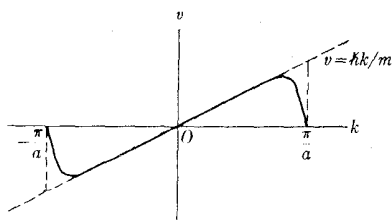
$$Fv dt = dE = \left(\frac{dE}{dk}\right) dk$$

با قراردادن رابطه مربوط به  $v$  که با معادله (۲۲.۶) داده شده است، خواهیم داشت

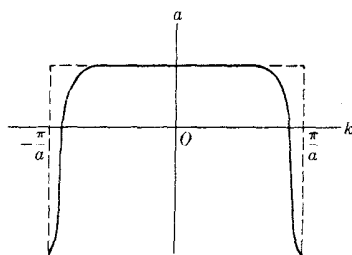
$$F = \frac{\hbar dk}{dt} \tag{۲۳.۶}$$

این معادله را می توان معادله حرکت الکترون در شبکه در نظر گرفت. از مقایسه این معادله با معادله کلاسیکی حرکت، یعنی با  $F = dp/dt$ ، نتیجه می گیریم که نقش  $\hbar k$  در حرکت الکترونی که تحت تأثیر یک نیروی خارجی از میان شبکه عبور می کند مثل نقش تکانه در حرکت الکترونی است که در فضای آزاد تحت تأثیر همان نیرو در حال حرکت است. به همین دلیل گاهی،  $\hbar k$  را تکانه شبکه ای الکترون می نامند.

برای توصیف حرکت الکترون (وقتی که با یک بسته موج نمایش داده می شود) هنگامی که تحت تأثیر یک نیروی خارجی از میان شبکه عبور می کند، باید از هر دو معادله (۲۲.۶) و (۲۳.۶) استفاده کنیم. معادله (۲۳.۶) اثر نیروی خارجی وارد بر عدد موج الکترون، یعنی بر  $k$  و معادله (۲۲.۶) نیز سرعت الکترون را که از آن نیرو به اضافه برهم کنش الکترون با شبکه ناشی می شود به دست می دهد. در اینجا الکترونی را در نظر می گیریم که در اولین منطقه بریلوئن قرار دارد و به عنوان مثال فرض می کنیم که الکترون



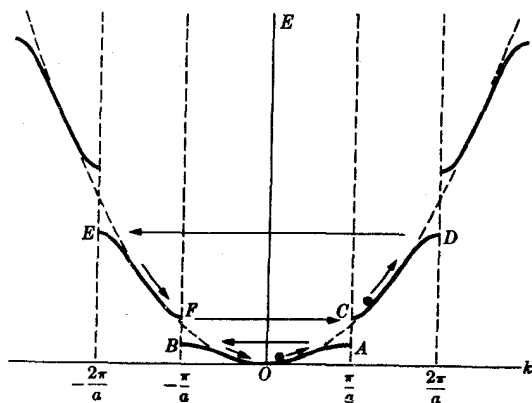
(الف)



(ب)

شکل ۲۸.۶ سرعت و شتاب به صورت تابعی از  $k$  در اولین منطقه بریلوئن یک شبکه خطی.

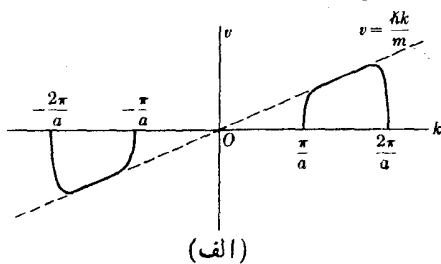
در آغاز دارای  $k = 0$  و بنابراین سرعت آن نیز مساوی با صفر است. هنگامی که نیروی اعمال شود،  $k$  بر طبق معادله (۲۳.۶) افزایش می‌یابد و از روی شکل ۲۸.۶ مشاهده می‌شود که  $v$  نیز افزایش می‌یابد، یعنی الکترون شتاب می‌گیرد. اما هنگامی که  $k$  به مقدار مشخصی نزدیک به  $\pi/a$  برسد، سرعت کاهش می‌یابد (یعنی، حتی اگر نیرو یکسان باقی بماند الکترون کند می‌شود). البته، این اثر از برهم کنش الکترون با شبکه ناشی می‌شود. به ازای  $k = \pi/a$ ، سرعت به صفر می‌رسد و لسی بسته موجی که معرف الکترون است بازتاب برآگی را در شبکه متحمل می‌شود،  $k$  مساوی با  $\pi/a$  می‌شود، و انتشار در جهت مخالف صورت می‌گیرد. واضح است که در این حالت سرعت منفی است. هرگاه نیروی وارد یکسان باقی بماند، بر طبق معادله (۲۳.۶)،  $k$  به تغییر کردن در همان راستا ادامه خواهد داد و بنابراین، چون منفی است، قدر مطلق آن کاهش می‌یابد. شکل ۲۸.۶ (الف) نشان می‌دهد که ابتدا، سرعت در جهتی مخالف با جهت نیروی خارجی افزایش می‌یابد ولی خیلی زود، بزرگی آن کاهش می‌یابد زیرا نیرو با سرعت مخالفت می‌کند، یعنی الکترون کند می‌شود تا اینکه عاقبت در  $k = 0$  سرعت مجدداً مساوی با صفر می‌شود. از آن به بعد، این چرخه مجدداً تکرار می‌شود. شتاب الکترون در خلال یک چرخه کامل در شکل ۲۸.۶ (ب) نشان داده شده است. هرگاه حالت الکترون را با نقطه‌ای بر روی نمودار  $E$  بر حسب  $k$  نشان دهیم (شکل ۲۹.۶)، می‌توانیم این فرایند را با حرکت دادن نقطه، مطابق آنچه در شکل با فلش نشان داده شده است، نمایش دهیم. هرگاه الکترون از نقطه  $O$  شروع به حرکت کند، نقطه نمایش دهنده آن از  $O$  به  $A$  می‌رود و سپس به  $B$  برمی‌گردد و به  $O$  می‌رود.



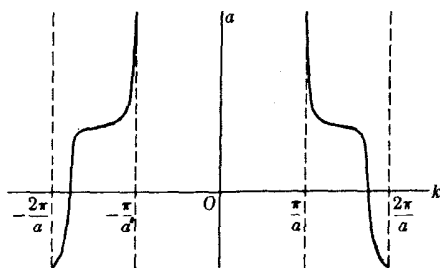
شکل ۲۹.۶ حرکت الکترونی در اولین و دومین منطقه بریلوئن در یک شبکه خطی. عدد موج و انرژی الکترون تحت اثر نیروی خارجی، همان‌طور که با فلش نشان داده شده است، در داخل یک ناحیه تغییر می‌کند.

اکنون الکترونی را در نظر می‌گیریم که در دومین منطقه بریلوئن، در گستره  $-\pi/a \leq k \leq -\pi/a$  و  $\pi/a \leq k \leq 2\pi/a$  قرار دارد. هرگاه مقدار  $k$  برای الکترون در آغاز کمی بالاتر از  $\pi/a$  باشد، نیروی وارد شده مقدار  $k$  را تا  $k = 2\pi/a$  افزایش خواهد داد. بازتاب براگ ناگهان تکانه را معکوس می‌کند و  $k$  تا به مقدار  $-\pi/a$  جهش وار برمی‌گردد. هرگاه این نیرو همچنان بر الکترون اثر کند،  $k$  نیز به افزایش یافتن ادامه خواهد داد (عملاً در قدر مطلق کاهش می‌یابد) تا اینکه به مقدار  $-\pi/a$  برسد. هنگامی که بازتاب براگ دیگری رخ دهد و تکانه مجدداً معکوس شود،  $k$  تا مقدار  $\pi/a$  تغییر می‌کند. از آن به بعد، فرایند به صورت چرخه‌ای ادامه می‌یابد. بدین ترتیب، الکترون چرخه  $C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow C$  را طی می‌کند (شکل ۲۹.۶). تغییر سرعت و شتاب الکترون در دومین منطقه بریلوئن در شکل ۳۰.۶ نشان داده شده است.

استدلال مشابهی نیز در مورد سایر مناطق بریلوئن به کار می‌رود. نتیجه مهمی را که می‌توان از بیان سینماتیکی بالا به دست آورد آن است که نیروی خارجی نخواهد توانست الکترونی را از یک منطقه بریلوئن خارج کند. از این رو، الکترون در همان نوار انرژی باقی می‌ماند مگر اینکه انرژی کافی برای عبور از گاف انرژی در یک تک فرایند (مثلاً با جذب یک فوتون) به دست آورد و به منطقه مجاور گذر کند. (اما، احتمال مشخصی وجود دارد که الکترون تحت اثر نیروی اعمال شده در



(الف)



(ب)

شکل ۳۰.۶ سرعت و شتاب بر حسب تابعی از  $k$  در دومین منطقه بریلوئن یک شبکه خطی.



بر روی گاف پل بزند. این فرایند به اثر ذره معروف است که در اینجا از بحث در مورد آن خودداری می‌کنیم.)

برای سادگی بهتر است که جرم مؤثر الکترون یعنی  $m^*$  را بر طبق رابطه  $m^* = F/a$  تعریف کنیم. در اینجا  $F$  نیروی خارجی وارد بر الکترون و  $a$  شتاب ناشی از نیروی  $F$  و نیز ناشی از برهم کنش شبکه است. از این رو، نمی‌توان انتظار داشت که  $m^*$  همان جرم الکترون، یعنی  $m_e$ ، و یا یک مقدار ثابت باشد. با در نظر گرفتن اینکه

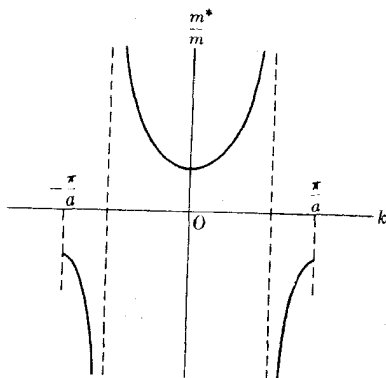
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dk} \frac{dk}{dt}$$

و به کار بردن معادلات (۲۲.۶) و (۲۳.۶) خواهیم داشت

$$m^* = \frac{\hbar^2}{d^2 E / dk^2} \quad (24.6)$$

توجه کنید که وقتی الکترون آزاد است و انرژی آن با معادله (۱۱.۶) داده می‌شود، خواهیم داشت  $m^* = m_e$ . واضح است که  $m^*$  تابعی از پارامترهای شبکه و نیز تکانه شبکه‌ای الکترون یعنی  $\hbar k$  است. از روی نمودارهای  $E$  بر حسب  $k$  (شکل ۲۵.۶) ملاحظه می‌شود که  $m^*$  در ته نوار انرژی مثبت و در بالای آن منفی است. در نقطه عطف منحنی انرژی، یعنی در بیشینه مقدار  $v$  در شکل ۲۸.۶، نیز به مقدار بسیار بزرگی (عملاً بینهایت) می‌رسد. در شکل ۳۱.۶ تغییر  $m^*$  با  $k$  در اولین منطقه بریلوئن به صورت طرح وار نشان داده شده است. در جدول ۲.۶ مقادیر  $m^*$  در ته نوار انرژی (در  $k=0$ ) برای برخی فلزات داده شده است.

بحث حرکت الکترونی در یک شبکه دوره‌ای را با بررسی چگالی حالت‌های  $g(E) = dn/dE$  تکمیل می‌کنیم. قبلاً این چگالی را برای مدل الکترون آزاد [معادله

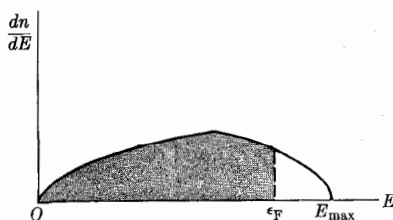


شکل ۳۱.۶ جرم مؤثر بر حسب تابعی از  $k$ .

## جدول ۲۰۶ جرم مؤثر.

فلز	Li	Na	K	Rb	Cs
$m^*/m_e$	۱٫۲۰	۰٫۹۸	۰٫۹۲	۰٫۸۷	۰٫۸۳

(۱۵.۶) و شکل ۲۰.۶] بررسی کردیم. چگالی حالتها در ته نوار، خیلی به منحنی سهمی شکل مدل الکترون آزاد شباهت دارد، ولی به جای اینکه مدام افزایش یا بسد، منحنی در بالای نوار تقریباً به صورت سهمی کاهش می یابد. این موضوع در شکل ۳۲.۶ نشان داده شده است، که البته باید آن را فقط به صورت کیفی در نظر گرفت. شکل واقعی  $dn/dE$  به ساختار شبکه و مکان نوار بستگی دارد. این شکل کما بیش مقارن  $dn/dE$  به راحتی قابل درک است. فرض می کنیم که نواری کاملاً پر شده باشد. هر گاه يك الکترون حذف شود (مثلاً به نوار رسانش برود)، می توان گفت که حفره ای آفریده شده است زیرا در این صورت، يك جای خالی در نوار ایجاد می شود. هنگامی که يك نیروی خارجی (مثلاً میدان الکتریکی) اعمال شود، ممکن است الکترونی به طرف جای خالی به حرکت در آید و حفره را پر کند. اما، این الکترون حفره جدیدی را در نوار به جای می گذارد که با حالتی که قبلاً اشغال کرده بود متناظر است. در اینجا می توان گفت که حفره طوری حرکت می کند که دقیقاً با حرکت الکترونها تحت اثر نیروی اعمال شده مخالف است و از این رو، همانند يك ذره با بار مثبت عمل می کند. صفر انرژی برای حفره ها در بالای نوار است و انرژی آنها نیز به طرف پایین، یعنی به صورت  $E_{\max} - E$ ، اندازه گیری می شود. بنابراین در بالای نوار،  $dn/dt$  خیلی به معادله (۱۵.۶) شباهت دارد با این تفاوت که  $E$  با  $E_{\max} - E$  تعویض شده است. در اینجا ممکن است این سؤال برای دانشجو مطرح شود که چرا در تحلیل خود در باره حرکت الکترون در يك شبکه دوره ای، تصویرهای کوانتومی و کلاسیکی الکترون را درهم آمیخته ایم. علت این امر آن بود که می خواستیم نتایج اساسی مورد نظر را بدون داخل شدن در محاسبات پیچیده مکانیک کوانتومی (که هدف این کتاب نیست)، به دست آوریم.



شکل ۳۲.۶ چگالی حالتهاى انرژی در يك نوار.

مثال ۴.۶ مقدار میانگین تکانه الکترونی که با تابع موج  $\psi = e^{ikx}u(x)$  بیان می‌شود را محاسبه کنید.

حل: با فرض اینکه تابع موج  $\psi(x)$  به مقدار واحد بهنجار شده است، خواهیم داشت

$$\int \psi^* \psi dx = \int u^* u dx = 1$$

با به کار بردن معادله (۵۰.۲) می‌توان میانگین تکانه الکترون را به صورت زیر نوشت

$$p_{ave} = \int \psi^* \left( -i\hbar \frac{d}{dx} \right) \psi dx$$

اما

$$\frac{d\psi}{dx} = ik e^{ikx} u(x) + e^{ikx} \frac{du}{dx}$$

و با توجه به اینکه  $\psi^* = e^{-ikx} u^*(x)$  است، خواهیم داشت

$$p_{ave} = \hbar k \int u^* u dx + \int u^* \left( -i\hbar \frac{d}{dx} \right) u dx$$

به دلیل شرط بهنجارش، اولین انتگرال واقع در طرف راست مساوی با یک است و بنابراین می‌توان نوشت

$$p_{ave} = \hbar k + p_{u,ave}$$

که در آن  $p_{u,ave}$  با جمله دوم متناظر است و می‌تواند به عنوان میانگین تکانه الکترون که از برهم کنش آن با یونهای تشکیل دهنده شبکه ناشی می‌شود، در نظر گرفته شود زیرا که این همان معنی فیزیکی است که به  $u(x)$  نسبت دادیم. به این ترتیب نتیجه می‌گیریم که میانگین تکانه الکترونها ترکیبی از دو قسمت است، یکی تکانه ذره شبکه (یا ذره شبه آزاد) یعنی  $\hbar k$  و دیگری تکانه ناشی از برهم کنش با شبکه.

مثال ۵.۶ اثبات قضیه بلوخ که بنا به آن، تابع  $u(x)$  در معادله (۱۹.۶) یک تابع دوره‌ای است و دوره تناوب آن با فاصله شبکه برابر است.

حل: یک شبکه خطی با فاصله  $a$  را در نظر می‌گیریم، به گونه‌ای که

$$E_p(x) = E_p(x+a)$$

باشد. در این صورت، چون توزیع احتمال الکترونها باید همان دوره‌ای بودن انرژی

بتانسيل را از خود نشان دهد، می توان نوشت

$$|\psi(x)|^2 = |\psi(x+a)|^2 \quad (25.6)$$

معادله (25.6) نشان می دهد که  $\psi(x+a) = C\psi(x)$ ، که در آن  $C$  کميتی است که شرط  $|C|^2 = 1$  را برآورده می کند. از این رو، می توان نوشت  $C = e^{ika}$  که در آن  $k$  يك پارامتر اختیاری است. بدین ترتیب رابطه زیر را خواهیم داشت

$$\psi(x) = e^{-ika}\psi(x+a)$$

با ضرب کردن دو طرف معادله در  $e^{-ikx}$  نتیجه زیر به دست می آید

$$e^{-ikx}\psi(x) = e^{-ik(x+a)}\psi(x+a)$$

این معادله نشان می دهد که  $u(x) = e^{-ikx}\psi(x)$  يك تابع دوره ای از  $x$  با دوره تناوب  $a$  است. بنابراین با نوشتن  $\psi(x) = e^{ikx}u(x)$  به قضیه بلوخ می رسیم.

مثال ۶.۶ محاسبه پهنای نوار انرژی با استفاده از تقریب تنگت بست.

حل: يك تابع موج تقریبی مناسب (که تقریب تنگت بست نام دارد) برای الکترونی که در يك شبکه خطی با فاصله  $a$  حرکت می کند عبارت است از

$$\psi = \sum_n e^{ikna}\phi(x-na) \quad (26.6)$$

که در آن  $\phi$  تابع موج اتمی الکترون موجود در ویژه حالت يك اتم منزوی است و  $n = 1, 2, \dots, N$  نیز معرف هر يك از اتمهای واقع در شبکه است. از این رو  $\phi(x-na)$  تابع موج متناظر با اتم  $n$  ام است و  $\psi$  يك ترکیب خطی از تابع موجهای اتمی، با فاکتورهای فاز مناسب است. این تابع موج با عبارت داده شده در شکل ۲۴.۶ متناظر است. قبل از اینکه محاسبه پهنای نوار را آغاز کنیم، باید ثابت کنیم که معادله (26.6) قضیه بلوخ را برآورده می کند. تابع موج  $\psi$  را می توان به صورت زیر نوشت

$$\psi = e^{ikx} \sum_n e^{-ik(x-na)}\phi(x-na)$$

که از مقایسه با معادله (9.6) رابطه زیر به دست می آید

$$u(x) = \sum_n e^{-ik(x-na)}\phi(x-na)$$

بنابراین

$$u(x+a) = \sum_n e^{ik[x-(n-1)a]}\phi[x-(n-1)a]$$

هر گاه تعداد اتمهایی که شبکه را تشکیل می‌دهند (یعنی  $N$ ) بسیار بزرگ باشد، به گونه‌ای که بتوان از اثرهای لبه‌ای چشمپوشی کرد، در این صورت جمع‌هایی که در هر دو عبارت ظاهر می‌شوند یکسان‌اند و داریم  $u(x) = u(x+a)$  که همان شرط مورد نیاز برای قضیه بلوخ است.

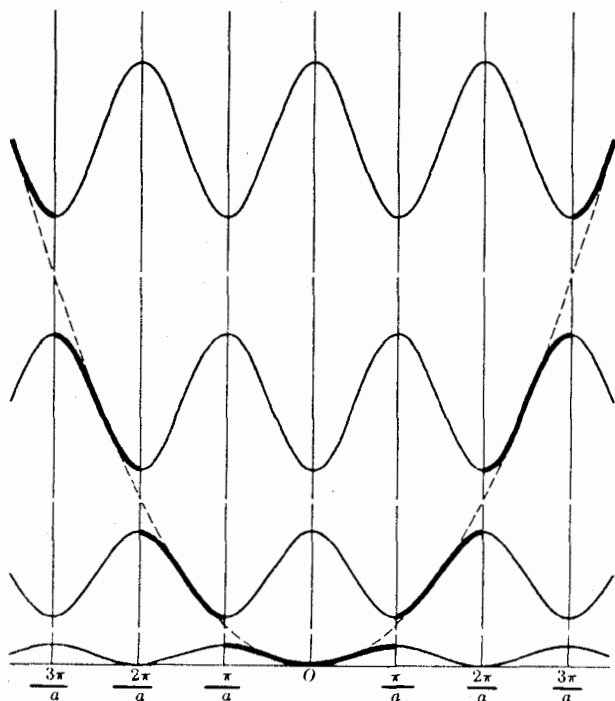
برای محاسبه میانگین انرژی الکترونی که با تابع موج (۲۶.۶) داده می‌شود، از معادله (۵۱.۲) استفاده می‌کنیم

$$E_{ave} = \frac{\int \psi^* \mathbf{H} \psi dx}{\int \psi^* \psi dx} \quad (27.6)$$

که در آن،  $\mathbf{H}$  عملگر هامیلتونی الکترون است و با رابطه زیر داده می‌شود

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dx^2} + E_p(x)$$

و  $E_p(x)$  نیز انرژی پتانسیل دوره‌ای الکترون موجود در شبکه است. یک محاسبه سرراست



شکل ۳۳.۶ انرژیهای مجاز در تقریب تنگ پست.

(که از ذکر آن خودداری می‌کنیم) نشان می‌دهد که

$$E_{ave} = E_{at} - \alpha - 2\beta \cos ka \quad (28.6)$$

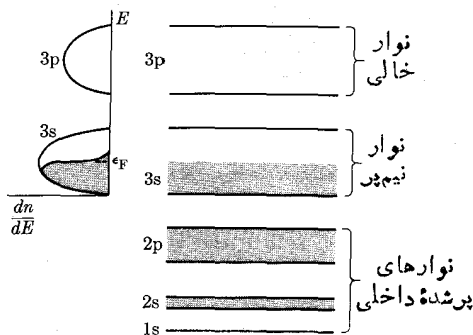
که در آن  $E_{at}$  اساساً انرژی حالت اتمی وابسته به تابع موجهای  $\phi(x-na)$  است و  $\alpha$  و  $\beta$  ثابتهای مناسب‌اند. معادله (28.6) نشان می‌دهد که، بسته به مقدار  $k$  مقادیر  $E_{ave}$  میان  $E_{at} - \alpha - 2\beta$  و  $E_{at} - \alpha + 2\beta$  قرار دارند. به عبارت دیگر، پهنای نوار مساوی با  $4\beta$  است. مقادیر  $E$ ،  $\alpha$ ، و  $\beta$  از طریق تابع موجهای  $\phi$  به حالت اتمی وابسته‌اند؛ بنابراین یک سری نوار انرژی وجود دارد که هر کدام با یک حالت اتمی وابسته‌اند. شکل ۳۳.۶ عبارت (28.6) را که برای چند نوار رسم شده‌است نشان می‌دهد. قسمتهایی که با هر یک از مناطق بریلوئن متناظرند با خطوط پرنکتر نشان داده شده‌اند. انرژی ذره آزاد نیز با سهمی خط چین نشان داده شده‌است. به‌تثابتهی که با شکل ۲۵.۶ وجود دارد توجه کنید، به‌جای انتخاب چندین گستره از  $k$  برای بیان مناطق بریلوئن، می‌توانستیم برای تمام نوارها،  $k$  را به گستره  $-\pi/a \leq k \leq \pi/a$  محدود کنیم و فقط قسمتهای مرکزی منحنیها را برای مناطق مختلف به‌کار ببریم.

### ۶.۶ رساناها، نارساناها، و نیمرساناها

یک خاصیت جالب جامدات رسانندگی الکتریکی آنهاست. پاره‌ای مواد، که به‌نادساناها معروف‌اند، رساناهای بینهایت ضعیفی برای هدایت الکتریسیته به‌شمار می‌آیند (به‌عنوان مثال می‌توان از الماس و کوارتز و به‌طور کلی اغلب جامدات کووالانسی و نیز یونی نام برد). جامدات دیگری وجود دارند که رساناهای فوق‌العاده خوبی هستند؛ در این گروه، فلزات، از قبیل مس، نقره، و مانند آنها قرار می‌گیرند. (برای به‌دست دادن یک ایده کمی، مس را در نظر می‌گیریم که رسانندگی الکتریکی آن در دمای معمولی  $10^{20}$  مرتبه بزرگتر از رسانندگی الکتریکی کوارتز است). حالت میانی بین این دو گروه فرین را رده دیگری از جامدات تشکیل می‌دهد که به نیمرساناها معروف‌اند. با اینکه نیمرساناها در مقایسه با فلزات رساناهای الکتریکی بسیار ضعیفتری هستند، با این حال رسانندگی آنها با دما افزایش می‌یابد، در حالی که رسانندگی الکتریکی فلزات با دما کاهش می‌یابد. نیمرساناهای نوعی را ژرمانیوم و سیلیسیوم تشکیل می‌دهند.

یکی از مهمترین دلایل موفقیت اولیه نظریه نواری جامدات آن بود که می‌توانست رفتار الکتریکی متفاوت و قابل توجه جامدات را به طریق نسبتاً ساده‌ای توضیح دهد. در اینجا ابتدا با استفاده از مدل الکترون آزاد بحث خود را ادامه می‌دهیم و سپس با در نظر گرفتن ساختار دوره‌ای شبکه آن را تصحیح خواهیم کرد.

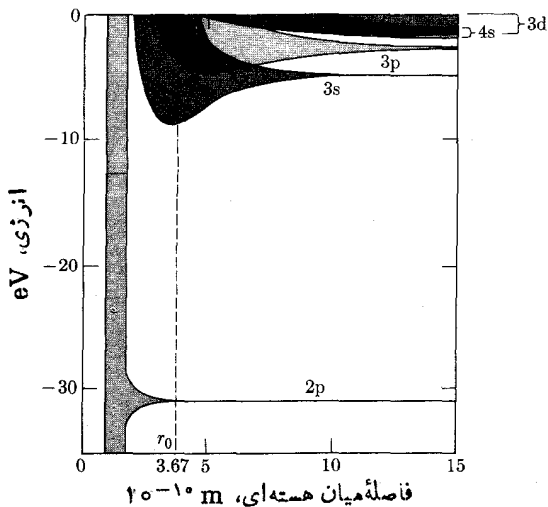
فلزی را در نظر می‌گیریم که ساختار نواری آن مطابق شکل ۳۴.۶ است، و به‌عنوان مثال، می‌تواند با ترازهای انرژی سدיום ( $Z=11$ ) متناظر باشد. نوارهای متناظر با ترازهای اتمی 1s، 2s، و 2p کاملاً پر هستند، زیرا پوسته‌های اتمی مربوط نیز پرند. اما



شکل ۳۴.۶ نوارهای انرژی در یک رسانا.

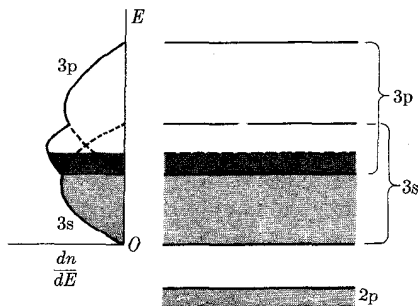
نوار ۳s، که می‌تواند تا دو الکترون به ازای هر اتم را در خود جای دهد، تنها نیمی از آن پر شده است زیرا تراز ۳s در هر اتم سدیم فقط دارای یک الکترون است. در اثر برانگیختگی گرمایی، پاره‌ای از الکترونها موجود در نوار ۳s (در حدود  $0.25 eV$ ) در دردمسای معمولی) کسب می‌کنند و توزیع آنها در میان حالت‌های انرژی نوار شباهت به توزیعی دارد که در شکل ۲۲.۶ نشان داده شده است. این الکترونها تحت اثر میدان الکتریکی خارجی، می‌توانند، بدون نقض اصل طرد مقدار کمی انرژی اضافی کسب کنند و به یکی از حالت‌های خالی نزدیک، واقع در داخل نوار، گذر کنند. برعکس برانگیختگی نامنظم گرمایی، الکترونها برانگیخته شده به وسیله میدان الکتریکی، تکانه‌ای در جهت مخالف با میدان به دست می‌آورند. این فرایند به یک حرکت جمعی از میان بلور منجر می‌شود و یک جریان الکتریکی برقرار می‌کند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که، ماده‌ای با ساختار نواری مشابه با آنچه که در شکل ۳۴.۶ نشان داده شده است، باید رسانای خوبی برای هدایت الکتریسیته باشد و به همین دلیل نیز باید رسانای گرمایی خوبی باشد؛ الکترونها واقع در بالاترین نواری که به طور کامل اشغال نشده است، مسؤول این دو فرایند هستند. به عبارت دیگر، رساناهای خوب الکتریسیته (که فلزات نیز نامیده می‌شوند) جامداتی هستند که در آنها، بالاترین نوار اشغال شده به طور کامل پر نشده است.

در عمل به دلیل برهم نهمی احتمالی بالاترین نوارها، این وضع نسبتاً پیچیده تر است. شکل ۳۵.۶ ساختار نواری واقعی سدیم را نشان می‌دهد. در فاصله تعادل  $r_0$  در فلز، که در حدود  $0.356 \times 10^{-10} m$  است، تراز ۲p عملاً بدون آشفتگی باقی می‌ماند ولی نوارهای متناظر با ترازهای اتمی ۳s و ۳p روی هم می‌افتند. بنابراین، الکترونها رسانش تعداد زیادی حالت را بیشتر از آنچه که با نوار تنهای ۳s متناظر است، در دسترس دارند. در واقع، این همپوشی خارجیترین نوارها وجه مشترك اکثر فلزات یا رساناهاست. به عنوان مثال، مورد منیزیم ( $Z = 12$ ) را در نظر می‌گیریم. پیکر بندی اتم منیزیم



شکل ۳۵.۶ نوارهای انرژی سدیم.

به صورت  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$  است و بنا بر این تمام پوسته‌های اتمی پر شده‌اند. اما، اولین تراز برانگیخته یعنی  $3p$  نسبتاً در نزدیکی  $3s$  قرار دارد. در حالت جامد ساختار نواری مشابه است با ساختار نواری سدیم که در شکل ۳۵.۶ نشان داده شده است. نوارهای  $3s$  و  $3p$  به طور طرح‌وار در شکل ۳۶.۶ نشان داده شده‌اند. معمولاً بدون همپوشی، نوار  $3s$  باید پر و نوار  $3p$  باید خالی باشد و منبذیوم نیز همان‌طور که در زیر توضیح داده می‌شود، باید عایق باشد. اما در اثر همپوشی، بالاترین الکترونهای نوار  $3s$  دارای پایستترین حالت‌های انرژی نسواری دسترس پذیر  $3p$  هستند. از این رو، پاره‌ای از الکترونهای  $3s$  به حرکت درمی‌آیند تا چند تراز پایین  $3p$  را اشغال و بدین ترتیب یک تراز انرژی تعادلی برای هر دو نوار برقرار کنند. چون تعداد کل ترازهای انرژی موجود از نوارهای  $3s$  و  $3p$



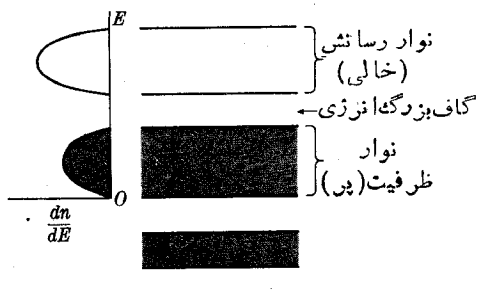
شکل ۳۶.۶ همپوشی نوارهای انرژی در یک رسانا.



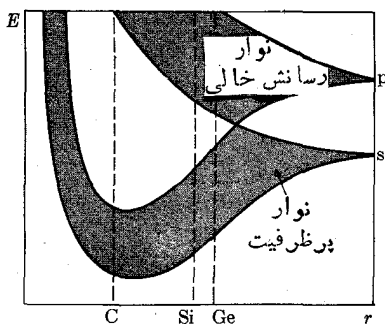
مساوی است با  $6N + 2N = 8N$  و مسا فقط  $2N$  الکترون در اختیار داریم، لذا تعداد  $6N$  حالت خالی دسترس پذیر هست. بنا بر این منیزیم رسانی خوبی خواهد بود؛ این موضوع با حقایق تجربی سازگاری دارد. موادی که پوسته‌های اتمهای آنها کامل ولی، در حالت جامد، به خاطر همپوشی یک نوار پر و یک نوار خالی رسانا هستند، اغلب نیمه فلزات نامیده می‌شوند.

در گروه فلزات واسطه، از قبیل آهن، نوارهای همپوشی عبارتند از  $3d$ ،  $4s$ ، و  $4p$  و تعداد الکترونها برای پر کردن این نوارها کافی نیست. به طریق مشابه، در گروه خاک‌کبهای نادر، نوارهای همپوشی شامل  $4f$ ،  $5d$ ،  $6s$ ،  $6p$  هستند. و از این رو، این عناصر در حالت جامد رسانا هستند.

اکنون ماده‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن، بالاترین نوار یا نوار ظرفیت کاملاً پر شده است و بر روی نوار مجاورتی که کاملاً خالی است، نمی‌افتد (شکل ۳۷.۶). چون تمام حالت‌های نوار ظرفیت اشغال شده هستند، انرژی الکترون در حالت «منجمد شده» است یعنی الکترونها نمی‌توانند بدون نقض اصل طرد حالت خود را در داخل نوار تغییر دهند. تنها راه ممکن برای برانگیختگی یک الکترون آن است که به نوار خالی رسانی انتقال داده شود؛ ولی این عمل به مقدار انرژی در حدود چند الکترون ولت نیاز دارد. از این رو، میدان الکتریکی اعمال شده نمی‌تواند الکترونها را در نوار ظرفیت شتاب دهد و در نتیجه نمی‌تواند جریان الکتریکی خالص برقرار کند. بنا بر این، چنین ماده‌ای نارسانا خواهد بود. (البته در دماهای به قدر کافی بالا یا در اثر میدانهای الکتریکی خیلی قوی پاره‌ای از الکترونها می‌توانند برانگیخته و به نوار رسانی منتقل شوند و در نتیجه جریان الکتریکی برقرار کنند.) اکثر جامدات کووالانسی، که تعداد الکترونها ظرفیت اتمهای تشکیل شده آنها زوج است نارسانا هستند. شکل ۳۸.۶ نمودار طرح وار از الماس (C) را نشان می‌دهد. نوارها با ترازهای اتمی  $2s$  و  $2p$  در الماس که می‌توانند تا ۸ الکترون را پذیرند، متناظرند. اما، اتم کربن فقط تعداد چهار الکترون برای این ترازها در اختیار دارد. (شکل‌های ۷.۴ و ۱۰.۴)، هرچه اتمها نزدیکتر شوند، نوارهای  $2s$  و  $2p$  شروع به همپوشی می‌کنند. در فواصل میان اتمی کوچکتر، مجدداً به دو نوار شکافته می‌شوند که



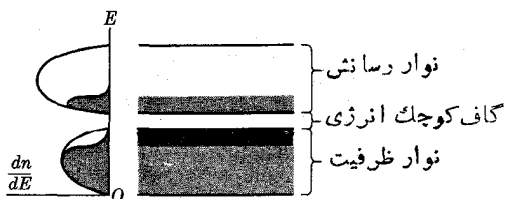
شکل ۳۷.۶ نوارهای انرژی یک نارسانا.



شکل ۳۸.۶ ساختار نواری انرژی الماس (C)، سیلیسیوم (Si)، و ژرمانیوم (Ge).

هر کدام تا چهار الکترون به‌ازای هر اتم را در خود جای می‌دهند (این نتیجه به کمک یک محاسبه مفصل قابل اثبات است). بنابراین معمولاً چهار الکترون از هر اتم در نوار پایینتر یا نوار ظرفیت قرار دارند در حالی که نوار بالاتر خالی است. در فاصله تعادل در الماس، که در حدود  $10^{-10} \times 10^5$  m است (و با C در شکل ۳۸.۶ نشان داده شده است)، گاف جداکننده پایینترین نوار یا نوار ظرفیت، از نوار خالی بالاتر در حدود ۵ eV است. این مقدار را می‌توان به عنوان یک گاف انرژی نسبتاً بزرگ در نظر گرفت که می‌تواند توضیح دهد چرا الماس یک چنین نارسای خوبی است.

همین طرح نواری در مورد ژرمانیوم و سیلیسیوم نیز به کار می‌رود (با این تفاوت که نوارها با ترازهای انرژی اتمی متفاوت و انرژیهای مختلفی متناظرند). فاصله جدایی تعادل اتمها در حالتها جامد نیز در شکل ۳۸.۶ نشان داده شده است. اما، در اینجا گاف میان نوارهای ظرفیت و رسانش در فاصله جدایی تعادل اتمها بسیار کوچکتر است (۱.۱ eV در سیلیسیوم و ۰.۷ eV در ژرمانیوم)، و این باعث می‌شود که خیلی راحت بتوان بالاترین الکترونها را موجود در نوار ظرفیت را برانگیخته کرد و به نوار رسانش فرستاد. این موضوع در شکل ۳۹.۶ نشان داده شده است. با افزایش دما، الکترونها بیشتری می‌توانند به نوار بعدی بروند. این موضوع به دو نتیجه منجر می‌شود: چند الکترون موجود در نوار بالاتر یا



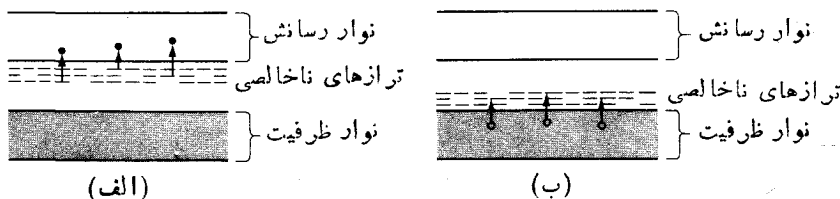
شکل ۳۹.۶ نوارهای انرژی و توزیع الکترون در یک نیم‌رسانا.

نوار رسانش به طریقی عمل می کنند که گویی در فلز هستند و حالت های خالی (یا حفره های) به جای مانده در نوار پایینتر یسا نوار ظرفیت نیز به طریق مشابهی عمل می کند اما گویی الکترون مثبت اند (جرم مؤثر آنها نیز ممکن است متفاوت باشد زیرا در نوارهای انرژی متفاوتی قرار دارند). از این رو، از الکترونهای برانگیخته موجود در نوار رسانش و از حفره های موجود در نوار ظرفیت، رسانش الکتریکی ایجاد می شود؛ رسانندگی با دما به سرعت افزایش می یابد زیرا الکترونهای بیشتری برانگیخته می شوند و به نوار رسانش می روند. به عنوان مثال، در سیلیسیوم، هنگامی که دما از  $250\text{ K}$  به  $450\text{ K}$  می رسد تعداد الکترونهای برانگیخته با ضرب ۱۰۶ افزایش می یابد. به این ترتیب، نیمرساناها عایقهایی هستند که در آنها گاف انرژی میان نوار ظرفیت و نوار رسانش در حدود  $1\text{ eV}$  و یا کمتر است، به طوری که نسبتاً به راحتی می توانیم الکترونها را از طریق گرما برانگیخته کنیم و از نوار ظرفیت به نوار رسانش بفرستیم. گافهای انرژی پاره های نارساناها و نیمرساناها در جدول ۳.۶ آمده است.

رسانش الکتریکی نیمرساناها را رسانندگی ذاتی می گویند. رسانندگی هر نیمرسانا را می توان با افزودن مقدار مشخصی ناخالصی افزایش داد. فرض کنید که تعدادی از اتمهای نیمرسانا را با اتمهای ماده متفاوتی تعویض کنیم (اتمهای ناخالصی)، و نیز فرض کنید که تعداد الکترونهای این اتمهای ناخالصی از تعداد الکترونهای اتمهای نیمرسانا بیشتر است. به عنوان مثال، هر گاه به سیلیسیوم یا ژرمانیوم، که تعداد چهار الکترون به ازای هر اتم در نوار ظرفیت دارند، چند اتم فسفر یا آرسنیک، که هر کدام تعداد پنج الکترون به ازای هر اتم در نوار ظرفیت دارند، اضافه کنیم در این صورت یک الکترون اضافی به ازای هر اتم ناخالصی خواهیم داشت. این الکترونهای اضافی (که نمی توانند در نوار ظرفیت شبکه اصلی قرار گیرند) ترازهای انرژی گسسته ای را که درست در زیر نوار رسانش قرار دارند اشغال می کنند؛ فاصله جدایی ممکن است در حدود چند دهم الکترون ولت باشد [شکل ۲۰.۶ الف]. این الکترونهای اضافی به راحتی به وسیله اتمهای ناخالصی آزاد می شوند و به صورت برانگیخته در نوار رسانش قرار می گیرند. الکترونهای برانگیخته

جدول ۳.۶ گافهای انرژی (eV).

نارسانا	eV	نیمرسانا	eV
الماس	۵٫۳۳	سیلیسیوم	۱٫۱۴
روی اکسید	۳٫۲	ژرمانیوم	۰٫۶۷
نقره کلرید	۳٫۲	تلور	۰٫۳۳
کادمیوم سولفید	۲٫۴۲	ایندیوم آنتی مونید	۰٫۲۳



شکل ۴۰.۶ ناخالصیها در يك نیمرسانا: (الف) دهندهها یا نوع  $n$ ، (ب) گیرندهها یا نوع  $p$ .

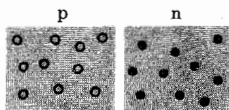
در رسانندگی نیمرسانا شرکت می کنند. این اتمهای ناخالصی را اتمهای دهنده؛ و نیمرسانا را نیمرسانای نوع  $n$  (یا منفی) می نامند.

برعکس، ناخالصی ممکن است شامل اتمهایی باشد که تعداد الکترونهاي آنها از تعداد الکترونهاي نیمرسانا کمتر است. در مواردی که سیلیسیوم و ژرمانیوم مواد میزبان هستند، اتمهای ناخالصی می توانند بور یا آلومینیوم باشند که هر کدام از آنها تنها سه الکترون شرکت می دهند. در چنین وضعیتی، ناخالصی موجب می شود که ترازهای انرژی گسسته خالی، خیلی نزدیک به بالای نوار ظرفیت، تولید شود [شکل ۴۰.۶ (ب)]. بنا بر این به راحتی می توان بعضی الکترونهاي پر انرژیتر موجود در نوار ظرفیت را برانگیخته و در ترازهای ناخالصی قرار داد. این فرایند حالتهای خالی (یا حفرهها) را در نوار ظرفیت تولید می کند. همان طور که قبلاً توضیح داده شد، این حفرهها مانند الکترونهاي مثبت عمل می کنند. این اتمهای ناخالصی را اتمهای گیرنده و نیمرسانا را نیمرسانای نوع  $p$  (یا مثبت) می نامند.

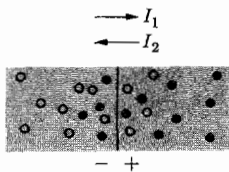
برای ایجاد تغییرات قابل ملاحظه در رسانندگی نیمرسانا کافی است که در حدود يك اتم ناخالصی به ازای هر يك میلیون اتم نیمرسانا در دست داشته باشیم. نیمرساناها از کاربرد صنعتی وسیع برخوردارند و در یکسو کنندهها، مدوله سازها، آشکارسازها، سلولهای فوتوالکتريك، ترانزیستورها، و مانند آنها کاربرد دارند.

#### مثال ۷.۰۶ بحث مربوط به پیوند $p-n$ .

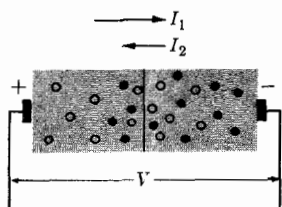
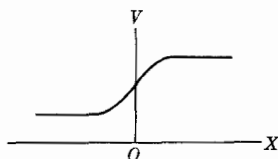
حل: يك کاربرد مهم نیمرساناها در مدارهای الکتريکی نوین پیوند  $p-n$  است. فرض کنید که دو نمونه از يك نیمرسانا، مثلاً ژرمانیوم، داریم که یکی از نوع  $p$  و دیگری از نوع  $n$  است [شکل ۴۱.۰۶ (الف)]. هر گاه این دو نمونه در تماس با یکدیگر قرار گیرند [شکل ۴۱.۰۶ (ب)]، حفرهها از طرف چپ به راست و الکترونها از طرف راست به چپ پخش می شوند. این شارش دوگانه يك لایه مضاعف از بارهای مثبت و منفی در هر دو طرف پیوند تولید و اختلاف پتانسیلی در دو سر آن برقرار می کند [آن طور که در طرف راست در (ب) نشان داده شده است] و این اختلاف پتانسیل وقتی تعادل حاصل شد، با شارش بیشتر حفرهها و الکترونها



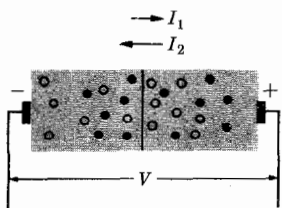
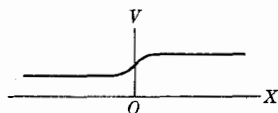
(الف) ○ : حفره‌ها (مثبت)  
● : الکترونها (منفی)



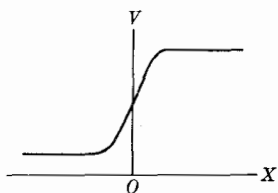
(ب)



(ج)



(د)



شکل ۴۱.۶ پیوند p-n.

در دوسر پیوند مخالفت می‌کند. در اینجا بحث خود را بر روی حفره‌ها متمرکز می‌کنیم؛ وضع مربوط به الکترونها نیز مثل حفره‌هاست منتهی در جهت مخالف.

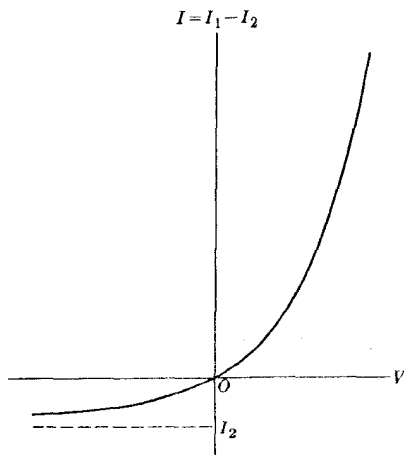
در اثر ترکیب مجدد حفره‌ها و الکترونها، تعداد حفره‌ها در نیم رساناهای نوع n کاهش می‌یابد و باعث می‌شود که جریان حفره‌ای کوچک  $I_1$  به طور مداوم از طرف p به طرف n برقرار شود. در همان زمان، در اثر برانگیختگی گرمایی، زوجهای حفره-الکترون در نیم رسانای نوع n ایجاد می‌شوند و این حفره‌های اضافی می‌توانند به سرعت با جریان  $I_2$  در دوسر پیوند به داخل ناحیه p جاری شوند. در وضعیت تعادل، هر دو جریان حفره‌ای یا یکدیگر مساوی اند؛ یعنی  $I_1 = I_2$  (همین استدلال را می‌توان در مورد الکترونها نیز به کار برد). هر گاه اختلاف پتانسیل  $V$ ، مطابق آنچه در شکل ۴۱.۶ (ج) دیده می‌شود

برقرار شود (به طوری که طرف  $p$  به قطب مثبت و طرف  $n$  به قطب منفی منبع  $V$  وصل شده باشد)، ارتفاع اختلاف پتانسیل در دوسر پیوند کاهش می یابد. این باعث می شود جریان بزرگتر  $I_1$  به طرف راست جاری شود بدون اینکه عملاً جریان  $I_2$  را که از طریق گرمایی تولید شده است و به طرف چپ جریان دارد تغییر دهد. از این رو، جریان حفره‌های خالص  $I_1 - I_2$  در دوسر پیوند و به طرف راست برقرار می شود و به دلیل ایجاد حفره‌های بیشتر از طرف  $p$ ، با افزایش  $V$  به سرعت افزایش می یابد. از طرف دیگر، هرگاه اختلاف پتانسیل  $V$  وارونه شود، همان طور که در شکل ۴۱.۶ (د) نشان داده شده است، اختلاف پتانسیل در دوسر پیوند افزایش می یابد. این موضوع مجدداً بی آنکه تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر  $I_2$  داشته باشد، مقدار  $I_1$  را کاهش می دهد زیرا ایجاد حفره‌ها از طرف  $n$  با دما محدود شده است. از این رو جریان خالصی در دوسر پیوند و به طرف چپ وجود خواهد داشت که با افزایش  $V$  به مقدار ثابت  $I_2$  نزدیک می شود.

شکل ۴۲.۶ نمودار جریان خالص در دوسر پیوند را بر حسب تابعی از  $V$  نشان می دهد. در این شکل، ولتاژ  $V$  هنگامی مثبت در نظر گرفته می شود که مطابق شکل ۴۱.۶ (ج) اعمال شود، در غیر این صورت ولتاژ منفی خواهد بود. جریان خالص را می توان با دقت نسبتاً خوبی با رابطه زیر توصیف کرد

$$I = I_1 - I_2 = I_2(e^{V/kT} - 1)$$

در اینجا نتیجه می گیریم که یک پیوند  $p-n$  مانند یکسو کننده یا وسیله آشکارساز به عبور جریان در جهت  $p \rightarrow n$  کمک می کند. این درست همان کاری است که لامپهای الکترونی



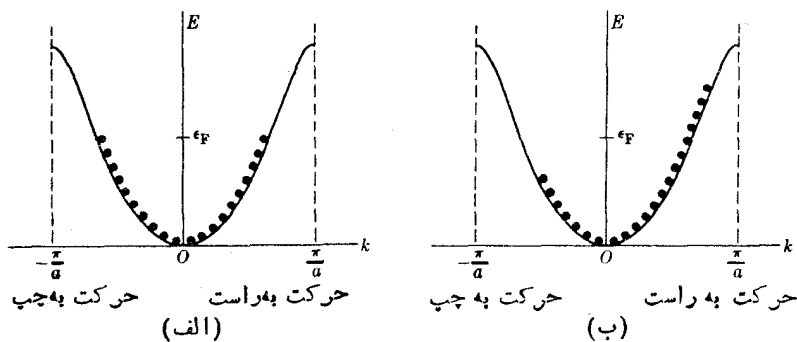
**شکل ۴۲.۶** جریان بر حسب تابعی از ولتاژ در دوسر پیوند  $p-n$ . ولتاژ  $V$  هنگامی مثبت در نظر گرفته می شود که در جهت  $p \rightarrow n$  اعمال شود در غیر این صورت منفی خواهد بود.

دوقطبی و سه قطبی انجام می دهند، با این تفاوت که پیوند p-n می تواند آن را با صرف انرژی بسیار کمتری انجام دهد.

### ۷.۶ نظریه کوانتومی رسانندگی الکتریکی

در بخش قبل رسانش الکتریکی در جامدات را از دید مدل الکترون آزاد بررسی کردیم. اما، ساختار دوره های جامد باید استفاده شود. برای سهولت، بحث خود را با مدل یک بعدی به دست آوردن نتایج کمی باید استفاده شود. برای سهولت، بحث خود را با مدل یک بعدی ادامه می دهیم. جامدی را در نظر می گیریم که در حالت پایه خود قرار دارد و میدان الکتریکی نیز بر آن اعمال نمی شود. فرض می کنیم که الکترونها در اولین ناحیه بریلوئن قرار دارند (همین استدلال برای هر ناحیه دیگری نیز به کار می رود). الکترونها پایینترین حالتی موجود در نوار را به صورت متقارن اشغال می کنند، بنا بر این هیچ جریان خاصی وجود ندارد [شکل ۴۳.۶ (الف)]. هر گاه یک میدان الکتریکی اعمال شود، تمام الکترونها تحت اثر نیرویی در جهت مخالف یا میدان قرار می گیرند و بر طبق معادله (۲۳.۶)، مقادیر  $k$  آنها در جهت نیرو افزایش می یابد. در نتیجه، همان طور که در شکل ۴۳.۶ (ب) دیده می شود، یک توزیع نامتقارن از الکترونها در داخل فلز برقرار می شود. این امر یک جریان الکتریکی خالص در فلز تولید می کند زیرا، الکترونهای بیشتری در یک جهت نسبت به جهت مخالف حرکت می کنند.

تا هنگامی که میدان الکتریکی اعمال می شود، اشغال حالتی با  $k$  موازی با نیرو نسبت به زمان افزایش می یابد و اشغال حالتی با  $k$  مخالف با نیرو نیز نسبت به زمان کاهش می یابد. به عبارت دیگر، حتی اگر میدان الکتریکی ثابت باشد، در نتیجه شتاب پیوسته الکترونها جریان به طور پیوسته ای با زمان افزایش می یابد. (هنگامی که الکترونهای سرانجام به مرز منطقه بریلوئن در  $k = \pi/a$  می رسند ممکن است اثرات



شکل ۴۳.۶ اشغال ترازهای انرژی در اولین منطقه بریلوئن؛ (الف) هیچ میدان الکتریکی اعمال نشده است، (ب) میدان الکتریکی خارجی از طرف راست به چپ وارد شده است.

پیچیده‌ای بروز کند که در اینجا از ذکر آنها خودداری می‌کنیم؛ این مسئله قبلاً در بخش ۵.۶ بررسی شده است.) نتیجهٔ بالا با تجربه سازگار نیست. اکثر رساناها از قانون اهم پیروی می‌کنند. این قانون را می‌توان به صورت آشنای  $V = RI$  و یا به صورت سادهٔ زیر نوشت

$$j = \sigma \mathcal{E} \quad (29.6)$$

که در آن  $j$  چگالی جریان است و بر حسب  $\text{Am}^{-2}$  بیان می‌شود.  $\mathcal{E}$  میدان الکتریکی اعمال شده بر حسب  $\text{NC}^{-1}$  و بالاخره،  $\sigma$  رسانندگی ماده بر حسب  $\text{m}^{-1} \Omega^{-1}$  است. عکس رسانندگی یعنی

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (30.6)$$

نیز مقاومت ویژه نام دارد و بر حسب  $\Omega \text{m}$  بیان می‌شود.

قانون اهم، در هر يك از دو صورت بالا، بیان می‌کند که میدان الکتریکی ثابت جریان الکتریکی ثابتی تولید می‌کند، یعنی، هنگامی که میدان الکتریکی اعمال شود، الکترونهاى رسانش موجود در فلز يك سرعت سوق میانگین و ثابت به دست می‌آورند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که باید سازوکاری موجود باشد تا تحت اثر میدان الکتریکی اعمال شده از شتاب گرفتن نامحدود الکترونها تا بالای نوار رسانش جلوگیری کند.

در نظریهٔ کلاسیک، که قبل از نظریهٔ کوانتومی به وسیله درود و لورنتس فرمولبندی شد، این سرعت میانگین ثابت الکترون از برخوردهای مکرر الکترونها با یونهاى مثبتی که شبکهٔ فلز را تشکیل می‌دهند ناشی می‌شود. در این برخوردها، فرض شده بود که هر الکترون تکانه‌ای را که پس از برخورد قبلی از میدان الکتریکی به دست می‌آورد به یون منتقل می‌کند و در نتیجه، از شتاب گیری پیوستهٔ آن در خلال زمانی که در خلاف جهت میدان الکتریکی اعمال شده سوق می‌یابد، جلوگیری می‌کند. این سازوکار همچنین توضیح می‌داد که در نتیجهٔ انرژی به دست آمده توسط یونها از برخوردهای الکترونی، اثر ژول ناشی می‌شود. در نظریهٔ درود-لورنتس، رسانندگی با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e} \quad (31.6)$$

که در آن  $n$  تعداد الکترونهاى موجود در یکای حجم و  $\tau$  زمان واهلش است. رابطهٔ بالا را می‌توان به صورت زیر به دست آورد: شتابی که الکترون از میدان الکتریکی اعمال شده به دست می‌آورد عبارت است از  $a = -e\mathcal{E}/m_e$ . هر گاه  $t$  زمان میان دو برخورد متوالی الکترون با یونهاى شبکه باشد، برای میانگین سرعت سوق الکترون خواهیم داشت

$$v_{\text{ave}} = \frac{1}{\tau} at = -\frac{e(\mathcal{E})t}{\tau m_e}$$

در این صورت چگالی جریان برابر است با  $j = -env_{\text{ave}} = (ne^2\tau/\tau m_e)\mathcal{E}$  که از آن

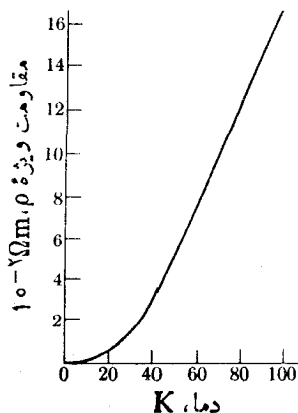


رابطه زیر به دست می آید

$$\sigma = ne^2 t / 2m_e$$

از مقایسه با معادله (۳۱.۶) خواهیم داشت  $\tau = t/2$ . بنابراین در نظریه درود-لورنتس فرض شده است که زمان واهلش  $\tau$  از نظر بزرگی، از همان مرتبه زمان میان دو برخورد متوالی الکترون با یونهای شبکه است. در دمای معمولی برای اکثر فلزات، مقدار  $\tau$  که از روی مقدار اندازه گیری شده  $\sigma$  محاسبه می شود، در مرتبه  $10^{-14}$  s است. هرگاه  $l$  میانگین جدایی یونها و  $v_e$  نیز میانگین سرعت گرمایی الکترونها در غیاب میدان الکتریکی باشد، در این صورت می توان فرض کرد که زمان واهلش از مرتبه  $l/v_e$  است. برای اکثر جامدات،  $l$  از مرتبه  $10^{-9}$  m است. هرگاه برای الکترونها نیز همان رابطه مشتق شده برای مولکولهای گاز یعنی رابطه  $v_e = \sqrt{3kT/m_e}$  را به کار ببریم (بخش ۶.۱۵)، نتیجه می گیریم که در دمای معمولی،  $v_e$  از مرتبه  $10^5$  ms $^{-1}$  است. بنابراین  $10^{-14}$  s  $\sim l/v_e$  که با مقدار تجربی  $\tau$  سازگاری دارد. اما، در دماهای پایین (ولی نه خیلی نزدیک به صفر مطلق)، رسانندگی فلزات به طور تقریبی به صورت عکس دمای مطلق (یعنی،  $\sigma \sim 1/T$  یا  $\rho \sim T$ ) تغییر می کند. این موضوع در شکل ۴۴.۶ برای سدیم نشان داده شده است. این بدان معنی است که زمان واهلش نیز به صورت عکس با دما تغییر می کند. هنگامی که مقدار تجربی  $\tau$  در دماهای پایین با مقدار  $l/v_e$  مقایسه شود، به منظور به دست آوردن یک سازگاری کمی، باید مقادیری را برای  $l$  فرض کرد که به مراتب بزرگتر از فاصله جدایی میان یونی باشد. این یکی از اولین نشانه های نادرستی نظریه درود-لورنتس بود.

از این رو، در آغاز سعی می کنیم که با به کار بردن نظریه کوانتومی توضیح دهیم که چرا الکترونها میانگین سرعت ثابتی را حفظ می کنند، و سپس تلاش می کنیم که مشا به با

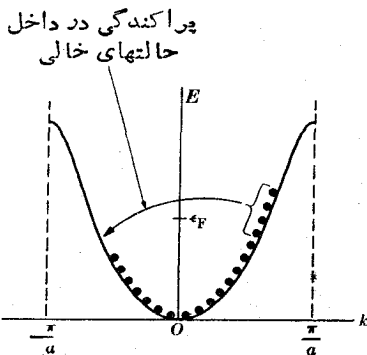


شکل ۴۴.۶ تغییر مقاومت ویژه با دما.

معادله (۳۱.۶)، يك بيان كمی را برای رسانندگی به دست آوریم.

در نظریه کوانتومی، هر الکترون با يك بسته موج نمایش داده می‌شود. ضمناً، يك پاشیدگی انرژی حول انرژی  $E$  و نیز يك پاشیدگی عدد موج وابسته، حول عدد موج  $k$  وجود دارد. حرکت بسته موج ممکن است به وسیله پراکندگی مختل شود. در آغاز، بسته موج با عدد موج  $k$  در راستای بخصوصی حرکت می‌کند؛ پس از پراکندگی، این بسته با عدد موج متفاوتی، مثلاً  $k'$  در راستای متفاوتی در حال حرکت خواهد بود. به عبارت دیگر، پراکندگی سبب ایجاد گذار  $k \rightarrow k'$  می‌شود. در گذار، مقداری تکانه و انرژی به پراکننده منتقل می‌شود. اثر میدان الکتریکی اعمال شده این است که الکترونها را در راستای مشخصی شتاب می‌دهد؛ اثر پراکندگی نیز به صورت ایجاد يك بی نظمی در حرکت الکترون ظاهر می‌شود و در نتیجه، اثر شتاب‌دهی میدان الکتریکی را مانع می‌شود.

هنگامی حالت پایا ایجاد می‌شود که این دو اثر در حالت توازن قرار گیرند؛ این حالت از لحاظ آماری، به يك سرعت میانگین ثابت برای الکترونهاي رسانش منجر می‌شود. برای اینکه چنین وضعیتی وجود داشته باشد، لازم است که به ازای هر مقداری از  $k$  واقع در داخل نوار رسانش پراکندگی رخ دهد. به عنوان مثال، حالت يك بعدی نشان داده شده در شکل ۴۵.۶ را که مشابه با شکل ۴۳.۶ (ب) است در نظر می‌گیریم. چون پراکندگی نمی‌تواند اصل طرد را نقض کند، الکترونها باید در داخل حالت‌های خالی پراکنده شوند. بنابراین، الکترونهايی که پراکنده می‌شوند آنهايی هستند که بیشترین انرژی را دارا هستند. این الکترونها در داخل آن حالت‌های خالی پراکنده می‌شوند که، در يك شبکه خطی، تکانه مخالف و (به طور کلی) انرژی پایینتری دارند. در شکل بالا این موضوع به طور طرح‌وار نشان داده شده است. اتلاف انرژی الکترون را نیز پراکننده می‌گیرد. در نتیجه پراکندگی الکترونها غالباً حرکت خود را وارونه می‌کنند و مانع اثر شتاب‌دهی میدان الکتریکی می‌شوند. اختلاف تعداد الکترونهايی که به طرف راست و چپ حرکت می‌کنند،



شکل ۴۵.۶ پراکندگی الکترونها در اولین منطقه بریلوئن به وسیله ناخالصیها.

از نظر آماری در يك مقدار ثابت حفظ و در نتیجه جریان پایداری تولید می شود. با آنکه از مدل يك بعدی استفاده کردیم، وضعیت مشابهی برای حالت سه بعدی نیز وجود دارد. بنا بر این، ملاحظه می شود که ایده پراکندگی بسته موج الکترون را می توان به صورت دلیلوجهی برای قانون اهم و نیز برای اثر ژول به کار برد. اثر ژول از انتقال انرژی و تکانه به پراکندهها نتیجه می شود.

با توجه به اینکه قبلاً در بخش ۵.۶ مشاهده کردیم که الکترون می تواند آزادانه از میان شبکه بلور حرکت کند (البته بجز هنگامی که  $k = \pm \pi/a$  است)، بنا بر این وظیفه بعدی ما این است که منابع پراکندگی فرض شده را مشخص کنیم. جواب کلی به صورت زیر است: هر بی نظمی در دوره ای بودن يك شبکه حرکت آزاد الکترون را آشفته می کند و این آشفستگی را می توان به عنوان پراکندگی در نظر گرفت. این بی نظمیهای شبکه ای از دو عامل ناشی می شوند که عبارت اند از (۱) ناکاملیهای موجود در جامد، از قبیل فضاهای خالی، اتمهای میانین و جا به جا شده، در رفتگیها، و ناخالصیها. به عنوان مثال، هر گاه مقدار کمی از اتمهای ناخالصی را به جامد اضافه کنیم به طوری که این اتمها به طور یکنواخت در جامد پخش شوند، در این صورت رسانندگی جامد اصلاح می شود. سهم رسانندگی ناشی از پراکندگی به وسیله ناکاملیهای موجود در شبکه اساساً مستقل از دماست. (۲) حرکت نوسانی گرمایی یونها که شبکه را تشکیل می دهند. چون یونها تماماً به صورت هم فاز نوسان نمی کنند، ارتعاشات آنها به افت و خیزهای کوچکی در فضای شبکه منجر می شود. با آنکه این افت و خیزها کوچک اند اما در تمام شبکه پخش می شوند. به علاوه، چون نوسانات، سطح مقطع مؤثر یونها در مقابل حرکت الکترونها را بزرگ می کنند، احتمال پراکندگی نیز متناسب با آن بزرگتر می شود. واضح است که اثر شبکه ارتعاش تابع دماست، زیرا دامنه ارتعاشات به انرژی ارتعاشی وابسته است که آنهم به نوبه خود به دما بستگی دارد.

برای اینکه مسئله را از لحاظ کمی بررسی کنیم، باز هم از معادله (۳۱.۶) برای بیان رسانندگی استفاده می کنیم و در آن، به جای جرم الکترون یعنی  $m_e$  جرم مؤثر آن، یعنی  $m^*$  را قرار می دهیم،

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m^*} \quad (32.6)$$

به طور کلی می توانیم  $m^*$  را در انرژی فرمی  $\epsilon_F$  محاسبه کنیم زیرا انرژی الکترونها رسانش خیلی با  $\epsilon_F$  تفاوت ندارد. همچنین  $n$  تعداد کل الکترونها موجود در یکای حجم در نوار رسانش نیست بلکه تعداد مؤثر الکترونهاست که در رسانش شرکت می کنند. به دلیل محدودیتهای ناشی از اصل طرد، این عدد کوچکتر از تعداد کل الکترونها موجود در نوار رسانش است.

با فرض اینکه احتمال پراکندگی الکترونها در واحد زمان بسا  $P_p$  نشان داده شود (و به همین دلیل با واحد  $s^{-1}$  بیان می شود)، زمان واهلش با رابطه زیر بیان می شود

$$\tau = \frac{1}{P_s} \quad (۳۳.۶)$$

به عبارت دیگر، هر چه احتمال پراکندگی بیشتر باشد، زمان واهلش کوچکتر و رسانندگی نیز کوچکتر خواهد بود (همان طور که در مدل فیزیکی ما مورد نیاز است). در اینجا احتمال پراکندگی در یکای طول را با  $\Sigma_s$  نمایش می‌دهیم (که از این رو با واحد  $m^{-1}$  بیان می‌شود). این کمیت به سطح مقطع پراکندگی ماکروسکوپیکی نیز معروف است. الکترونهای رسانش با سرعتی خیلی نزدیک به سرعت متناظر با انرژی فرمی  $\epsilon_F$  حرکت می‌کنند. هر گاه سرعت اخیر را با  $v_F$  نمایش دهیم خواهیم داشت  $P_s = v_F \Sigma_s$  و معادله (۳۳.۶) به صورت زیر درمی‌آید

$$\tau = \frac{1}{v_F \Sigma_s} \quad (۳۴.۶)$$

بنابراین مسئله تبدیل می‌شود به محاسبه  $\Sigma_s$  که يك محاسبه مشکل است و ما در اینجا داخل در بحث آن نمی‌شویم. با این حال، می‌توانیم در مورد آن تخمینهایی بزنیم. می‌توانیم فرض کنیم که  $\Sigma_s$  با تعداد مراکز پراکندگی موجود در یکای حجم که با  $n_s$  نمایش داده می‌شود (و با واحد  $m^{-3}$  بیان می‌شود) متناسب است، و بنابراین می‌توانیم بنویسیم

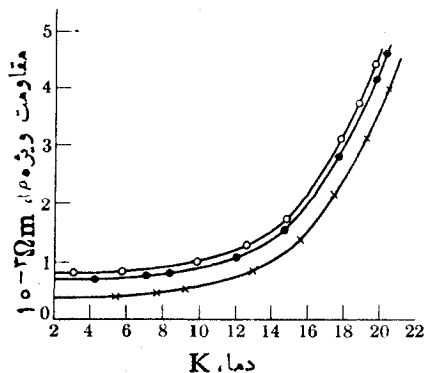
$$\Sigma_s = n_s \sigma_s$$

که در آن  $\sigma_s$  (که نباید آن را با رسانندگی اشتباه بگیریم) به سطح مقطع پراکندگی به‌ازای هر مرکز معروف است و با واحد  $m^2$  بیان می‌شود.

هر گاه برهم‌کنش میان الکترون و پراکننده‌ها را بدانیم می‌توانیم  $\sigma_s$  را با استفاده از روشهای مکانیک کوانتومی محاسبه کنیم. بنا به تعریف، سرعت فرمی  $v_F$  مستقل از دما است. همچنین در مورد ناکاملیهای شبکه، جمله‌های ظاهر شده در  $\Sigma_s$  اساساً مستقل از دما هستند. از این رو، ثابت می‌کنیم که رسانندگی ناشی از ناکاملیهای شبکه مستقل از دماست. از طرف دیگر، منطقی است فرض کنیم (و از لحاظ نظری نیز می‌توان آن را ثابت کرد) که برای ارتعاشات شبکه‌ای،  $\sigma_s$  با مجذور دامنه نوسانات یون متناسب است، یعنی  $\sigma_s \sim A^2$ . اما انرژی هر نوسانگر با مجذور دامنه متناسب است و می‌توان نوشت

$$\sigma_s \sim \text{انرژی ارتعاشی} \sim \sigma_s$$

در دماهای نه‌چندان نزدیک به صفر مطلق، میانگین انرژی ارتعاشی هر جامد با دمای مطلق  $T$  متناسب است. بنا بر این نتیجه می‌گیریم  $\sigma_s \sim T$  که برطبق معادله (۲۵.۶) بدان معنی است که  $\tau \sim 1/T$  است. بنابراین، از لحاظ معادله (۲۳.۶)، داریم که  $\sigma \sim 1/T$  و در این صورت ثابت می‌کنیم که رسانندگی ناشی از ارتعاش شبکه وابستگی به‌دما مناسبی دارد.



شکل ۴۶.۶ مقاومت ویژه سه نمونه متفاوت از سدیموم.

هرگاه  $\Sigma_{s,i}$  سطح مقطع ماکروسکوپیک ناشی از ناخالصیها و  $\Sigma_{s,e}$  نیز سطح مقطع ماکروسکوپیک ناشی از ارتعاشات گرمایی شبکه باشد، تا مادامیکه بتوانیم فرض کنیم دو احتمال پراکندگی جمع پذیر هستند، خواهیم داشت

$$\Sigma_s = \Sigma_{s,i} + \Sigma_{s,e}$$

بنابراین

$$\frac{1}{\tau} = v_F \Sigma_s = v_F (\Sigma_{s,i} + \Sigma_{s,e})$$

و لذا مقاومت ویژه فلز را می توان به صورت زیر نوشت

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m \cdot v_F}{n^2 e} (\Sigma_{s,i} + \Sigma_{s,e}) = \rho_i + \rho_e \quad (35.6)$$

که در آن  $\rho_i$  مقاومت ویژه فلز، ناشی از ناخالصیها و بنابراین اساساً مستقل از دماست (ولی از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر می کند) و  $\rho_e$  نیز مقاومت ویژه ناشی از ارتعاشات گرمایی است.  $\rho_e$  با دما افزایش می یابد و برای تمام نمونه های مختلف یک فلز، مقدار یکسانی دارد. معادله (۳۵.۶) بیانگر نتیجه تجربی کاملاً شناخته شده ای است که به قاعده ماتیسن معروف است. کمیت  $\rho_i$  نیز مقاومت ویژه باقیمانده نام دارد. شکل ۴۶.۶ مقاومت ویژه سه نمونه از سدیموم با ناخالصیهای متفاوت را در گستره دمای زیر ۲۵ K نشان می دهد. منحنیها معرف اعتبار معادله (۳۵.۶) هستند.

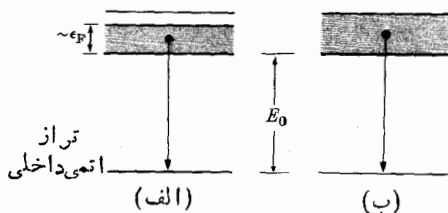
## ۸.۶ گذارهای تابشی در جامدات

تاکنون مدلی از جامدات، یعنی نظریه نواری، را مطرح کرده ایم که به صورتی سازگار

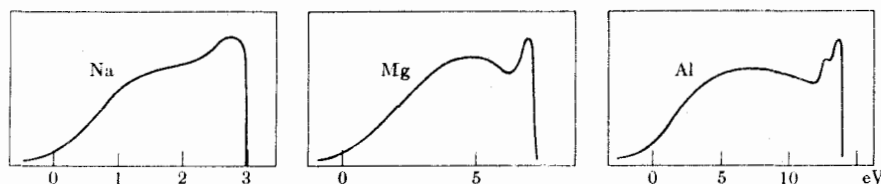
بیشتر خواص جامدات را توجیه می‌کند، البته این بالاترین چیزی است که هر فیزیکدان از يك مدل انتظار دارد. اما آیا هیچ شاهد مستقیمی در مورد وجود نوارهای انرژی و گافهای انرژی وجود دارد؟ آیا امکان اندازه‌گیری انرژی فرمی وجود دارد؟ جواب این سؤاها مثبت است. شاید بتوان گفت که مستقیمترین شاهد از گذارهای تابشی در جامدات حاصل می‌شود. ابتدا گسیل پرتو ایکس و سپس پاره‌ای از فرایندهای جذب را بررسی می‌کنیم.

هنگامی پرتو ایکس از آنها گسیل می‌شود که الکترونی در یکی از پوسته‌های خارجیتر به يك حالت خالی در یکی از پوسته‌های داخلیتر یا پوسته‌های واقع در وضعیتهای پایین سقوط کند (بخش ۷.۴). طبق نظریه نواری می‌توان گفت که گسیل پرتو ایکس در جامدات هنگامی رخ می‌دهد که، به‌عنوان مثال، الکترونی در بالاترین نوار، همانند آنچه در شکل ۴۷.۶ نشان داده شده است، گذاری به داخل نوار تراز پایینتر را که در آن يك حالت خالی وجود دارد انجام دهد. این حالت‌های خالی در اثر بمباران الکترونی یا توسط جذب تابش تولید می‌شوند. پایینترین تراز انرژی یا تراز انرژی نهایی در گذار عملاً معادل است با ترازهای انرژی اتمی زیرا، همان‌طور که قبلاً توضیح داده شد، هنگامی که جامد تشکیل شود چنین ترازهایی تحت تأثیر قرار نمی‌گیرند.

در مورد اتم، هر گذار مشخص متناظر است با ترازهای انرژی ابتدایی و انتهایی با انرژی کاملاً مشخص که به فوتونی با انرژی معین یا خط تیزی با طول موج مشخص منجر می‌شود. اما نظریه نواری وضع متفاوتی را در مورد جامدات مطرح می‌کند. الکترون می‌تواند از هر تراز انرژی ممکن واقع در بالاترین نوار، فرایند گذار را آغاز کند و بنابراین، انرژی فوتونهای گسیل شده دارای پاشیدگی از مرتبه  $\epsilon_F$  است (یعنی، فوتونها انرژیهای بین  $E_0$  و در حدود  $E_0 + \epsilon_F$  را دارا هستند). در مورد نارسانا، پاشیدگی انرژی با پهنای باند مساوی است. بنابراین، طیف به جای يك خط منفرد پرتو ایکس، شامل نواری از طول موجها خواهد بود. این واقعیتی است که به تجربه ثابت شده است. شکل ۴۸.۶ توزیعهای تجربی شدت گذارهای پرتو ایکس به تراز  $2p$  را برای سدیم، منیزیم، و



شکل ۴۷.۶ گذار الکترونی پرتو ایکس از بالاترین نوار به يك حالت اتمی خالی داخلیتر. (الف) نارسانا، (ب) نارسانا.



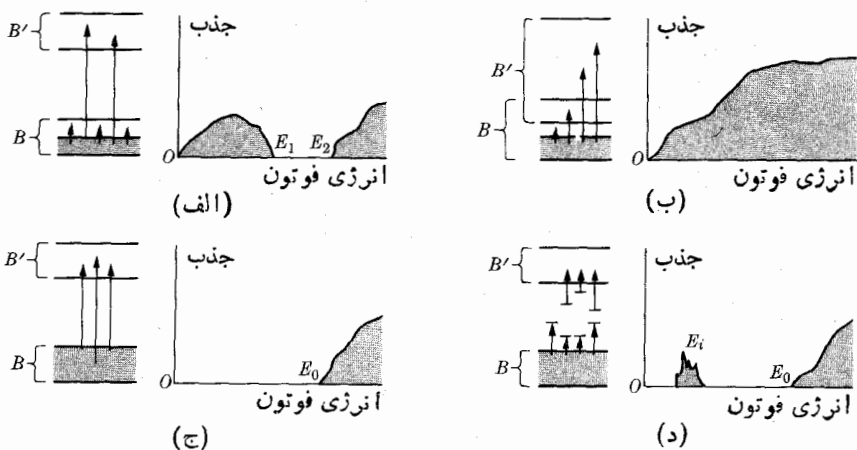
شکل ۴۸.۶ توزیع شدت گذارهای پرتو ایکس برای سدیم، منیزیم، و آلومینیوم.

آلومینیوم نشان می‌دهد. این توزیعهای شدت از لحاظ نظری از ضرب کردن  $dn/dE$ ، یعنی تعداد الکترونها در یکای حجم و در گستره انرژی واحد حول انرژی  $E$ ، و احتمال  $T(E)$  گذار از انرژی  $E$  در نوار به داخل تراز انرژی پایتتر محاسبه شده‌اند. یعنی

$$I(E) \sim \left(\frac{dn}{dE}\right) \times T(E)$$

کمیت  $dn/dE$  را در بخش ۴.۶ بررسی کردیم و  $T(E)$  را نیز می‌توانیم بر طبق روشهای مکانیک کوانتومی (بخش ۱۱.۲) محاسبه کنیم. واضح است که به ازای  $E \sim E_F$  شدت به سرعت کاهش می‌یابد. در واقع، گستره انرژی نشان داده شده در نمودارهای ۴۸.۶ از لحاظ بزرگی از مرتبه مقادیر  $E_F$  آمده در جدول ۱.۶ است. قله‌های مربوط به آلومینیوم و منیزیم ناشی از شرکت الکترونها در نوار  $3p$  است در حالی که در سدیم، تمام الکترونها در داخل نوار  $3s$  قرار دارند.

اکنون مورد جذب را در نظر می‌گیریم. شکل ۴۹.۶ پاره‌ای از وضعیتهای نوعی را نشان می‌دهد. در (الف) یک رسانا داریم که قسمتی از بالاترین نوار آن، یعنی  $B$ ، پر شده است. این نوار بایک گاف انرژی از نوار خالی  $B'$  جدا شده است. الکترونها موجود در نوار  $B$  هنگامی که فوتونهای با انرژیهای از صفر تا انرژی لازم برای رسیدن به بالای نوار را جذب می‌کنند، می‌توانند برانگیخته شوند و به داخل حالتی خالی نزدیک موجود در همان نوار بروند. فوتونهای دیگری که جذب می‌شوند آنهایی هستند که الکترونی را از  $B$  به داخل  $B'$  می‌برند. بنابراین، طیف جذبی به صورتی است که در شکل ۴۹.۶ (الف) با گافی برای ناحیه انرژی نشان داده شده است. این ناحیه مربوط به وضعیتی است که در آن هیچ فوتونی جذب نخواهد شد. هر گاه نوارهای  $B$  و  $B'$  آن طور که در شکل ۴۹.۶ (ب) نشان داده شده است، روی هم بیفتند هیچ گاف انرژی وجود ندارد و طیف جذبی پیوسته‌ای نتیجه می‌شود. در مورد نارسانا [شکل ۴۹.۶ (ج)]، تنها گذارهای از نوار ظرفیت  $B$  به داخل نوار رسانش  $B'$  امکان پذیر است. بنابراین برای القا کردن گذارها، فوتونها باید یک کمینه انرژی برابر حدود چند الکترون ولت داشته باشند. طیف جذبی حاصل در شکل ۴۹.۶ (ج) نشان داده شده است. شکل اخیر می‌تواند حالت مربوط به نیم رساناها را نیز



شکل ۴۹.۶ گذارهای جذبی پرتو ایکس در جامد.

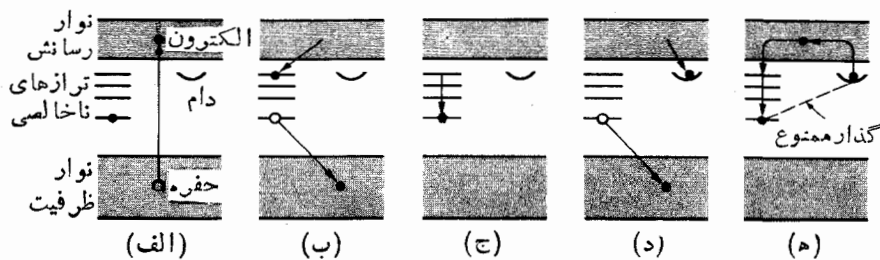
در بر گیرد، جز اینکه به دلیل کوچکی گاف انرژی آنها، پاره‌ای از الکترون‌ها نوار  $B'$  را اشغال می‌کنند؛ بنا بر این طیف جذبی شبیه است به وضعی که برای مورد (ب) نشان داده شده. نقایص شبکه، مخصوصاً ناخالصیها نتایج مهمی را در بردارند، زیرا مطابق آنچه در شکل ۴۹.۶ (د) نشان داده شده است، ترازهای انرژی جدیدی را که می‌توانند در گاف انرژی قرار گیرند تولید می‌کنند. گذارهای الکترونی در داخل این ترازهای انرژی این امکان را فراهم می‌کنند که فوتونهای با انرژیهای بسیار کوچکتر از انرژی مورد نیاز برای رفتن از  $B$  به  $B'$  جذب شوند. طیف جذبی نیز در شکل نشان داده شده است.

انرژی فوتونهای ناحیه مرئی طیف الکترومغناطیسی از  $1.6\text{ eV}$  تا  $3.72\text{ eV}$  است. هر جامد بسته به خواص جذبی اش در این گستره انرژی می‌تواند شفاف یا کدر باشد. به عنوان مثال، رساناها و نیم رساناها تماماً کدرند زیرا منحنیهای جذب آنها شبیه است به منحنیهای داده شده در شکل ۴۹.۶ (ب). نارساناهاى خالص به شرطی شفاف اند که  $E_0$  در شکل ۴۹.۶ (ج) بزرگتر از تقریباً  $3.72\text{ eV}$  باشد. اما هرگاه، در نتیجه ناخالصیها، قله‌های  $E_i$  موجود در شکل ۴۹.۶ (د) در ناحیه مرئی قرار گیرند نارسانا رنگی (یا حتی کدر) خواهد بود. به همین دلیل است که چنین ناخالصیهایی به مراکز رنگی یا مراکز  $F$  نیز معروف اند.

(حرف  $F$  از کلمه آلمانی *Farben* به معنی رنگ گرفته شده است). به عنوان مثال، سنگ سنباده خالص ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) شفاف است ولی یا قوت (که همان  $\text{Al}_2\text{O}_3$  با مقدار کمی ناخالصی کرم است)، رنگ قرمز تندی دارد. این بدان علت است که اتمهای کرم در ناحیه سبز طیف یک جذب شدید القا می‌کنند و وقتی جامد با نور سفید روشن شود، قرمز دیده می‌شود. دیگر خاصیت تابشی مهم جامدات لیانی است. به طور کلی، هنگامی که الکترونهای موجود در اتمها، مولکولها، یا جامدات به وسیله‌ای (مثلاً جذب تابش یا بمباران الکترونی)



برانگیخته شوند، چندین فرایند در ایجاد و انگیختگی بایکدیگر رقابت می کنند (از قبیل گذارهای تابشی و بر خوردهای ناکشسان). در بعضی موارد، فرایند مورد نظر عبارت است از گذار تابشی، بدین معنی که وقتی ماده تحت تابشی با طول موج مناسب قرار می گیرد و یا به وسایل دیگری برانگیخته می شود، تابان می شود. موادی که این خاصیت را دارند لیپان نامیده می شوند. لیانی در جامدات با ناخالصیها و نقایص شبکه ای ارتباط نزدیک دارد. شکل ۵۰.۶ فرایندهایی را نشان می دهد که در جامدات لیان رخ می دهد. هنگامی که الکترونی از نوار ظرفیت به نوار رسانش برود، حفره ای در نوار ظرفیت از خود به جای می گذارد. [شکل ۵۰.۶ (الف)]. در یک شبکه منظم و کاملاً خالص، معمولاً الکترون به نوار ظرفیت باز می گردد، البته با وجود اینکه ممکن است مدت زمانی برای انجام این عمل صرف کند، زیرا الکترون و حفره هر دو از قابلیت تحرك بسیار زیادی برخوردارند و می توانند در راستاهای مختلفی منحرف شوند. با اینحال، هرگاه شبکه مقداری ناخالصی داشته باشد و به دلیل این ناخالصی در ناحیه ممنوع ترازهای انرژی تولید کند، در این صورت الکترون موجود در تراز ناخالصی واقع در حالت پایین ممکن است حفره موجود در نوار ظرفیت را پر کند، در حالی که الکترون واقع در نوار رسانش ممکن است، مطابق آنچه در شکل ۵۰.۶ (ب) نشان داده شده است، به داخل یکی از ترازهای ناخالصی با انرژی زیاد (معمولاً خالی) سقوط کند. معمولاً این گذارها شامل فوتونهای کم انرژی هستند که در ناحیه مرئی قرار نمی گیرند. بالاخره الکترون ممکن است از تراز ناخالصی پر انرژی تر به تراز خالی کم انرژی تر سقوط و تابشی با انرژی کمتر (یا طول موج بیشتر) از تابش فرودی گسیل کند؛ این فرایند را لیانی می گویند [شکل ۵۰.۶ (ج)]. در مواردی، به جای رفتن از طریق فرایند نشان داده شده در شکل ۵۰.۶ (ب)، الکترون موجود در نوار رسانش ممکن است به داخل تراز انرژی که معمولاً یک دام است، و از آن، گذار تابشی به تراز انرژی ناخالصی حالت پایه ممنوع است سقوط کند [شکل ۵۰.۶ (د)]. در این مورد، الکترون در حالتی قرار دارد که به یک اتم یا مولکول واقع در حالت شبه پایدار شبیه است. الکترون به دام افتاده باید آنقدر منتظر بماند تا به وسیله سازوکاری به نوار رسانش باز گردد و پس از آن، آن طور که



شکل ۵۰.۶ سازوکار لیانی.

در شکل ۵۰.۶ (ه) نشان داده شده است، مراحل (ب) و (ج) دنبال می‌شود. به دلیل تأخیر زمانی موجود، که ممکن است تا چند ثانیه هم به درازا کشد، این فرایند را فسفرسانی می‌گویند. بنا بر این این مواد به فسفر معروف اند که يك نمونه آنها سولفید روی است. مواد فسفرسان در صفحه لامپهای پرتو کاتودی و لامپهای تلویزیون و نیز در آشکار سازهای سوسوزن به منظور آشکار ساختن پرتوهای گاما به کار می‌روند. فسفری که به طور وسیع در آشکار سازهای سوسوزن به کار می‌رود سدیم یدید (NaI) است که با TI فعال می‌شود.

## مسائل

۱۰۶ نشان دهید که تعداد پیوندهای کربن-کربن در الماس دو برابر تعداد اتمهای کربن است (شکل ۱۰.۶). انرژی مورد نیاز برای تفکیک يك مول الماس مساوی با ۱۷۰ kcal است. مقدار انرژی به ازای پیوند را تعیین و آن را بر حسب eV بیان کنید. این انرژی را با انرژی به ازای پیوند در ترکیبات  $sp^3$  مقایسه کنید.

۲۰۶ ثابت مادلونگ برای ساختار مکعبی ZnS برابر ۱۰۶۳۸ است. انرژیهای بستگی ZnS، که برای آن  $r_0 = ۲۳۵ \text{ \AA}$  است و نیز CuCl، که ساختار آن مشابه ZnS است و برای آن  $r_0 = ۲۳۴ \text{ \AA}$  است را محاسبه کنید. مقادیر تجربی عبارت‌اند از ۳۷۹ الکترون ولت بر مولکول برای ZnS و ۹۸۱ الکترون ولت بر مولکول برای CuCl.

۳۰۶ انرژی بستگی CsCl را، که برای آن  $r_0 = ۳۵۶ \text{ \AA}$  است، محاسبه و آن را با مقدار تجربی اش که برابر ۶۷۲ الکترون ولت بر مولکول است مقایسه کنید.

۴۰۶ مدول کپهای هر جامد به صورت  $\kappa = -(1/V)(\partial V/\partial p)$  تعریف می‌شود. هنگامی که انرژی فقط تابعی از حجم است، این تعریف با رابطه  $\kappa = V(d^2U/dV^2)$  معادل خواهد بود. نشان دهید که برای يك بلور یونی داریم

$$\kappa = \frac{(n-1)\alpha^2 e^2}{18\pi\epsilon_0 R^3}$$

با فرض اینکه  $n = 9$  است، مدول کپهای را برای NaCl محاسبه و آن را با مقدار تجربی  $4.2 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$  مقایسه کنید.

۵۰۶ بزرگی سرعتهای صوت در جامدات از مرتبه  $3 \times 10^3 \text{ ms}^{-1}$  است. فواصل میان اتمی در جامدات نیز در حدود  $3 \times 10^{-10} \text{ m}$  است. با فرض داشتن يك شبکه خطی، بزرگی بسامد قطع را تخمین بزنید.

۶۰۶ نشان دهید که به ازای مقادیر کوچک  $ka$ ، دو مقدار  $\omega$  را که با معادله (۷.۶) داده

شده‌اند، می‌توان به‌طور تقریبی به‌صورت زیر نوشت

$$\omega^2 = 2\beta \left( \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right)$$

$$\omega^2 = \frac{2\beta}{M_1 + M_2} (ka)^2$$

۷.۶ نشان دهید که به‌ازای  $k = \pi/2a$ ، دو مقدار  $\omega$  که با معادله (۷.۶) داده شده‌اند، عبارت‌اند از

$$\omega^2 = \frac{2\beta}{M_1} \quad \text{و} \quad \omega^2 = \frac{2\beta}{M_2}$$

۸.۶ در اکثر بلورهای یونی دو اتمی، جذب تشدیدی تابش الکترومغناطیسی در ناحیه فرسرخ (طول موج در حدود  $10^{-4} \text{ m}$ ) قرار می‌گیرد. فاصله میان اتمی از مرتبه  $2 \times 10^{-10} \text{ m}$  است. هنگامی که معادله (۸.۶) را برای به‌دست آوردن بسامد جذب تشدیدی تابش فرسرخ شبکه بلوری به‌کار می‌بریم، خطای حاصل را برآورد کنید. فرض کنید  $M_1$  و  $M_2$  به ترتیب جرم اتمهای سدیم و کلر است.

۹.۶ با به‌کار بردن بسامد بیشینه جذب، از منحنی جذب  $\text{NaCl}$  که در شکل ۳.۶ نشان داده شده است، ثابت کشسان  $\beta$  معادله (۸.۶) را محاسبه کنید. بسامدهای قطع را برای شاخه‌های آکوستیکی و اپتیکی نوسان به‌دست آورید.

۱۰.۶ فاصله میان اتمی در اکثر فلزات در حدود  $10^{-10} \text{ m}$  است. پهنای نوار رسانش را تخمین بزنید و با مقادیر انرژی فرمی داده شده در جدول ۱.۶ مقایسه کنید.

۱۱.۶ با به‌کار بردن مقادیر انرژی فرمی در جدول ۱.۶، تعداد الکترونها به‌ازای یکای حجم (یعنی  $n_0$ ) موجود در نوار رسانش لیتیوم، مس، و آلومینیوم را محاسبه کنید. نتایج خود را با تعداد الکترونهای ظرفیت به‌ازای یکای حجم برای این اتمها مقایسه کنید.

۱۲.۶ پهنای یک نوار در سدیم فلزی را با به‌کار بردن معادله (۱۴.۶) برآورد کنید. فاصله تعادل میان یونها را برابر  $3.97 \times 10^{-10} \text{ m}$  بگیریسد. نتیجه خود را با شکل ۳۵.۶ مقایسه کنید.

۱۳.۶ چگالی سدیم  $97 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}$  است. با فرض اینکه هر اتم یک الکترون را در نوار رسانش شرکت می‌دهد، انرژی فرمی را برای سدیم تعیین کنید. محاسبه را برای کلسیم با این فرض تکرار کنید که تعداد دو الکترون به‌ازای اتم در نوار رسانش شرکت می‌کنند.

۱۴.۶ پذیرفتاری پارامغناطیسی پاؤلی سدیوم را بر آورد و بسا مقدار تجربی پذیرفتاری مغناطیسی سدیوم مقایسه کنید.

۱۵.۶ می توان نشان داد که مرزهای مناطق بریلوئن در يك شبکه مربعی دو بعدی به ضلع  $a$  با مقادیر  $k_x$  و  $k_y$ ، که معادله زیر را بر آورد می کنند، داده می شوند

$$n_1 k_x + n_2 k_y = \frac{\pi(n_1^2 + n_2^2)}{a}$$

که در آن  $n_1$  و  $n_2$  اعداد درست مثبت یا منفی اند. با به کار بردن  $k_x$  و  $k_y$  به عنوان مختصات، مرزهای مناطق بریلوئن را رسم کنید. هر گاه انرژی روی محوری عمود بر صفحه  $k_x - k_y$  رسم شده باشد، سعی کنید سطح انرژی را تجسم کنید. توجه کنید که برای يك شبکه خطی، معادله بالا به معادله (۲۱.۶) تبدیل می شود. [دانهمایی: تمام ترکیبهای ممکن  $n_1$  و  $n_2$  مساوی با  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$  را امتحان و معادلات حاصل را رسم کنید.]

۱۶.۶ با به کار بردن روشی شبیه به آنچه در مثال ۴.۶ به کار رفت، نشان دهید که میانگین انرژی الکترونی که با تابع موج  $\psi = e^{ikx} u(x)$  بیان شده است، به صورت زیر است

$$E_{ave} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \left(\frac{\hbar k}{m}\right) p_{u,ave} + E_{u,ave}$$

که در آن،  $p_{u,ave}$  در مثال ۴.۶ تعریف شد و

$$E_{u,ave} = \int u^* \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + E_p(x) \right) u dx$$

معنی هر جمله را تحلیل کنید. [دانهمایی: برای عملگرهای مربوط به انرژی به جدول ۴.۲ مراجعه کنید.]

۱۷.۶ انرژی الکترون موجود در يك بلور ناهمسانگرد را می توان با رابطه

$$E = \alpha_1 k_x^2 + \alpha_2 k_y^2 + \alpha_3 k_z^2$$

بیان کرد که در آن،  $k_x$ ،  $k_y$ ، و  $k_z$  مؤلفه های بردار عدد موج  $\mathbf{k}$  در طول محورهای اصلی اند. جرم مؤثر را در طول هر محور مختصات تعیین کنید و معادلات حرکت را به دست آورید.

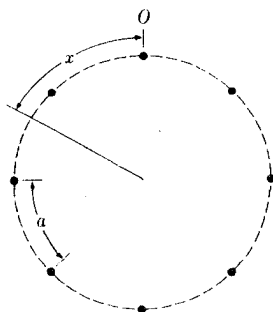
۱۸.۶ با قراردادن تابع موج معادله (۲۶.۶) در معادله برای میانگین انرژی، نشان دهید که معادله (۲۸.۶) نتیجه محاسبه است. [دانهمایی: از جمله هایی که شامل دو تابع موج  $\phi$  اند، هر گاه بیشتر از يك سلول جدا باشند، صرف نظر کنید.]

۱۹۰۶ فرض کنید الکترونی بر روی يك مسير دایره‌ای که در طول آن تعداد  $N$  یون در فواصل مساوی  $a$  از یکدیگر قرار گرفته‌اند، حرکت می‌کند (شکل ۵۱۰۶). (الف) با به کار بردن تابع موجهای از نوع بلوخ، که با معادله (۲۶۰۶) داده شده است، نشان دهید که مقادیر ممکن  $k$  با رابطه  $k = 2\pi s / Na$  داده می‌شوند که در آن  $s = 0, 1, 2, \dots, N-1$  است. (ب) با به کار بردن این نتیجه، همراه با معادله (۲۸۰۶) در مورد الکترونهاي  $\pi$  در بنزن (شکل ۲۸۰۵) نشان دهید که ترازهای انرژی ممکن عبارت‌اند از

$$E_{at} - \alpha - 2\beta, \quad E_{at} - \alpha - \beta,$$

$$E_{at} - \alpha + \beta, \quad E_{at} - \alpha + 2\beta$$

که در آن، دومین و سومین تراز دوبار تبه‌گن‌اند (ثابتهای  $E_{at}$ ،  $\alpha$ ، و  $\beta$  در مثال ۶۰۶ معرفی شده‌اند).



شکل ۵۱۰۶

۲۰۰۶ با به کار بردن نتایج مسئله ۱۹۰۶، (الف) نشان دهید که انرژی الکترونهاي  $\pi$  در بنزن برای حالت پایه برابر  $6(E_{at} - \alpha) - 8\beta$  است و اولین حالت‌های برانگیخته نیز مقادیر  $\beta$ ،  $2\beta$ ، و  $3\beta$  را در بالای حالت پایه دارند. (ب) دو حالت برانگیخته اول بنزن با  $3\beta$  و  $4\beta$  متناظر است. به کمک تحلیل ترازهای انرژی مشاهده شده بنزن ثابت کنید که  $\beta$  تقریباً مساوی با  $2\text{ eV}$  است. بر اساس این اطلاعات، بیان کنید که آیا بنزن یک ماده رنگی است یا نه.

۲۱۰۶ با فرض اینکه انرژی الکترون در يك نوار با معادله (۲۸۰۶) داده شده است. (الف) مقدار  $k$  را که به ازای آن سرعت الکترون بیشینه است به دست آورید. (ب) رابطه‌ای را برای  $m^*$  بر حسب تابعی از  $k$  بنویسید.

۲۲۰۶ سرعت و شتاب يك الکترون را در سومین منطقه بریلوئن که انرژی آن با معادله (۲۸۰۶) داده می‌شود، بر حسب تابعی از  $k$  رسم کنید.

۲۳.۶ شعاع مدار الکترون ۱s در سدیموم ( $Z=11$ ) را برآورد کنید. این مقدار را با فاصله تعادل میان یونهای سدیموم مقایسه و مشخص کنید که آیا چنین الکترونیهای در داخل فلز تحت تأثیر قرار می گیرند یا نه؟

۲۴.۶ هنگامی که یک اتم ناخالصی در داخل یک نیم رسانا نشانده شود، می توان فرض کرد که ترازهای انرژی اتمهای ناخالصی تغییر می کنند. ثابت کنید هرگاه  $E_{i,at}$  انرژی یونش اتم ناخالصی منزوی باشد، انرژی یونش آن هنگامی که در داخل نیم رسانا نشانده می شود عبارت است از  $E_{i,sc} = (\epsilon_0/\epsilon)^2 E_{i,at}$ ، که در آن  $\epsilon$  گذردهی الکتریکی نیم رساناست. انرژیهای یونش فسفر (P)، آرسنیک (As)، و آنتیموان (Sb) را که ناخالصیهای دهنده هستند، برای هنگامی محاسبه کنید که در داخل سیلیسیوم (با  $\epsilon/\epsilon_0 = 11.7$ ) و ژرمانیوم (با  $\epsilon/\epsilon_0 = 15.8$ ) نشانده شوند. مقادیر فوق را با نتایج تجربی مقایسه کنید. [داهنمای: معادلات (۴.۳) و (۵.۳) را ببینید و توجه کنید که در ثابت ریذبرگ باید  $\epsilon_0$  را با  $\epsilon$  (هنگامی که اتم در داخل یک ماده نشانده شده است)، عوض کنید.]

۲۵.۶ با مراجعه به مسئله ۲۴.۶ بررسی کنید که وقتی اتم ناخالصی در داخل یک نیم رسانا نشانده شود، در اندازه مدارهای الکترونی چه اتفاقی می افتد. با چه غلظتی از آنتیموان نشانده شده در داخل ژرمانیوم، همپوشی قابل توجهی میان مدارهای الکترونیهای خارجیتز اتمهای آنتیموان مجاور رخ می دهد؟

۲۶.۶ یک سیم مسی به سطح مقطع  $10^{-5} m^2$  حامل جریان الکتریکی  $10 A$  است. با فرض اینکه تعداد  $5 \times 10^{28}$  الکترون رسانش در هر متر مکعب مس وجود دارند، چگالی جریان و سرعت سوق الکترون را تعیین کنید.

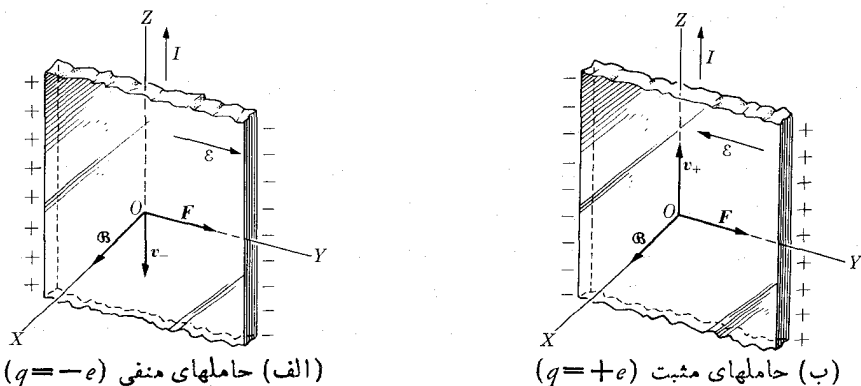
۲۷.۶ در دمای معمولی، رسانندگی نقره مقدار  $10^8 \Omega^{-1} m^{-1}$  و تعداد الکترونیهای رسانش نیز تقریباً مساوی با  $10^{28} m^{-3}$  است. زمان واهلش  $\tau$ ، سرعت فرمی، و سطح مقطع پراکندگی ماکروسکوپی  $\Sigma_p$  را برآورد کنید. ضمناً مسافت آزاد میانگین الکترون را که به صورت  $1/\Sigma_p = I_p$  تعریف می شود به دست آورید.

۲۸.۶ رسانندگی در دمای معمولی برای NaCl را که شامل یک ppm (یک قسمت به ازای میلیون) از ناخالصیهای کاتیون دوظرفیتی است برآورد کنید.

۲۹.۶ یک بلور مکعبی شامل یک ناخالصی جانشین با غلظت ۱ درصد است (برای مواد «خالص شیمیایی» این مقدار به صورت عادی در نظر گرفته می شود). میانگین فاصله میان اتمهای ناخالصی را، که در واحد فاصله میان اتمی اندازه گیری می شود، محاسبه کنید.

۳۰.۶ ژرمانیوم خیلی خالصی که در ساخت دستگاههای نیم رساناها به کار می رود شامل یک در  $10^9$  قسمت ناخالصی است که در رسانندگی الکتریکی تأثیر می گذارد. میانگین فاصله میان ناخالصیها چقدر است؟

۳۱۰۶ هنگامی که نوار فلزی، حامل جریان  $I$  در داخل میدان مغناطیسی عمود بر نوار قرار گیرد، اختلاف پتانسیلی میان نقاط مقابل لبه‌های نوار ظاهر می‌شود (شکل ۵۲۰۶). این خاصیت به‌اثروال معروف است. با توجه به شکل نشان دهید که راستای سقوط پتانسیل در دوسر نوار به‌علامت بار ذرات حمل‌کننده جریان وابسته است. هر گاه  $\mathcal{E}$  میدان الکتریکی ایجاد شده به‌وسیله بارهایی باشد که هنگام برقراری تعادل در طول لبه‌ها انباشته شده‌اند و  $\mathcal{B}$  نیز میدان مغناطیسی به‌کار رفته باشد، نشان دهید  $R_H = \mathcal{E}/j\mathcal{B} = 1/nq$  که در آن  $j$  چگالی جریسان،  $n$  تعداد حاملها به‌ازای یکای حجم، و  $q$  بار آنها است. کمیت  $R_H$  به‌ضریب هال معروف است. [یادآوری: در شکل بالا،  $\mathbf{F}$  نیروی اعمال‌شده به‌وسیله میدان مغناطیسی بر روی حاملهای بار است.]



شکل ۵۲۰۶

۳۲۰۶ با توجه به مسئله ۳۱۰۶، نشان دهید که خط واصل میان دو نقطه با پتانسیل یکسان واقع در طرفهای مقابل نوار، زاویه‌ای با راستای جریان تشکیل می‌دهد که با رابطه  $\tan \theta = nq/\sigma\mathcal{B}$  داده می‌شود و در آن  $\sigma$  رسانندگی الکتریکی نوار است.

۳۳۰۶ هر گاه هر اتم درطلای فلزی (با چگالی  $10^3 \times 193 \text{ kg m}^{-3}$ ) یک الکترون را درجریان شرکت دهد، ضریب هال برای این فلز چقدر می‌شود؟ یک نوار نازک طلا، چگالی جریانی به‌مقدار  $10^7 \text{ A m}^{-2}$  را در یک میدان مغناطیسی عرضی  $10^{-2} \text{ T}$  حمل می‌کند. با فرض اینکه رسانندگی طلا مساوی با  $5 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$  است، جابه‌جایی زاویه‌ای خطوط هم پتانسیل را به‌دست آورید. [دانهمایی: به مسائل ۳۱۰۶ و ۳۲۰۶ مراجعه کنید.]

۳۴۰۶ در  $\text{NaCl}$ ، تراز انرژی مرکز  $F$  به‌مقدار  $265 \text{ eV}$  در زیر نوار رسانش قرار دارد. چه طول موجی را جذب می‌کند؟ رنگ  $\text{NaCl}$  شامل مراکز  $F$ ، چگونه است؟

۳۵۰۶ گاف انرژی در ژرمانیوم در حدود  $75\text{ eV}$  است. در چه طول موجی، ژرمانیوم شروع به جذب نور می کند؟

### مراجع

1. "Materials," *Sci. Am.*, September 1967, the entire issue.
2. "Modern Study of Solids," J. Patterson, *Am. J. Phys.*, 32, 269 (1964).
3. "Quantum Physics in America Between the Wars," J. Slater, *Physics Today*, January 1968, page 43.
4. "The Structure of Crystal Surfaces," L. Germer, *Sci. Am.*, March 1965, page 32.
5. "Resource Letter SCR-1 on Semiconductors." P. Handler, *Am. J. Phys.* 32, 329 (1964).
6. "Energy Propagation in a Finite Lattice," W. Band and A. Bhatti, *Am. J. Phys.*, 33, 930 (1965).
7. *Introduction to Semiconductor Physics*, R. Adler and R. Longini, New York: John Wiley, 1963.
8. *Elementary Solid State Physics*, C. Kittel, New York: John Wiley, 1962.
9. *Structure of Matter*, W. Finkelburg, New York: Academic Press, 1964, Chapter 7.
10. *Quantum Theory of Matter*, J. Slater, New York: McGraw-Hill, 1951, Chapters 10, 12, 13 and 14.
11. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume II, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapter 30, Volume III, Chapters 13 and 14.





## ساختار هسته‌ای

مقدمه	۱۰۷
ایزوتوپها، ایزوتونها، و ایزوبارها	۲۰۷
یکای جرم اتمی	۳۰۷
خواص هسته	۴۰۷
انرژی بستگی هسته‌ای	۵۰۷
نیروهای هسته‌ای	۶۰۷
حالت پایه دوترون	۷۰۷
پراکندگی نوترون-پروتون در انرژیهای پایین	۸۰۷
مدل پوسته‌ای	۹۰۷
گذارهای تابشی هسته‌ای	۱۰۰۷

## ۱.۷ مقدمه

برای تکمیل بحث ساختار اتمها، اکنون داخل هسته اتم را مطالعه می‌کنیم. هسته اتم يك مجموعه از پروتونها و نوترونهایی است که ناحیه بسیار کوچکی را در مرکز اتم اشغال کرده‌اند. قطر این ناحیه از مرتبه  $10^{-14}$  م، یا، در حدود يك ده‌هزارم قطر اتم است. پروتونها و نوترونها را نوکلئون می‌نامند. اسپین هر دو  $1/2$  است و از اصل طرد پیروی می‌کنند.

هنگامی که ساختار هسته را با ساختار اتم مقایسه می‌کنیم باجنبه‌های جدیدی مواجه می‌شویم. در قدم اول، تمام ذراتی که هسته را تشکیل می‌دهند عملاً جرم یکسانی دارند درحالی که، الکترونها درمقایسه با هسته بسیار کوچک‌اند. به‌همین دلیل بود که در فصل سوم فرض کردیم که الکترونها به‌دور هسته حرکت می‌کنند و هسته در يك چارچوب لخت ثابت باقی می‌ماند. بنابراین، نمی‌توانیم از نیروی مرکزی غالبی که بر تمام ذرات تشکیل‌دهنده هسته اثر می‌کند و به‌وسیله يك جسم واقع در مرکز هسته تولید می‌شود صحبت کنیم، بلکه باید فرض کنیم که تمام ذرات تحت برهم‌کنش متقابل میان خود حرکت می‌کنند. بیشتر اوقات به عنوان يك ساده‌سازی مفید، می‌توانیم يك نوع میانگین میدان نیرو را در نظر بگیریم، یعنی می‌توانیم فرض کنیم که هر ذره تحت اثر نیرویی حرکت می‌کند که میانگین نیروهای تولیدشده به‌وسیله سایر ذرات در خلال حرکتشان است. در تقریب اول، می‌توان این نیرو را نیروی مرکزی در نظر گرفت. در تقریب دوم، ممکن است نیروهای غیر مرکزی اضافی نیز مورد نیاز باشند. معلوم شده‌است که این روش ساده در تحلیل ساختار هسته‌ای بسیار مفید است.

در قدم دوم، الکترونهای موجود در اتم بار منفی و هسته بار مثبت دارد، و این امکان وجود دارد که حرکت الکترونی را بر حسب برهم‌کنشهای الکترومغناطیسی میان الکترونها و هسته توضیح دهیم. اما هر هسته از پروتونهای با بار مثبت و نیز نوترونهایی که اصلاً بار ندارند تشکیل شده‌است. بنا بر این، نمی‌توان پایداری هسته را به‌جاذبه الکتریکی نسبت داد. برعکس، محتمل به‌نظر می‌رسد که دافعه الکتریکی میان پروتونها هسته را متلاشی کند. اینکه هسته‌های تشکیل‌شده از پروتونها و نوترونها در طبیعت وجود دارند خود نشانه واضحی از حضور برهم‌کنش دیگری سواى برهم‌کنش الکترومغناطیسی است، یعنی برهم‌کنشی که مستقیماً با بارهای الکتریکی ارتباط ندارد و به‌مراتب قویتر از برهم‌کنش الکترومغناطیسی است. ایسن برهم‌کنش به برهم‌کنش هسته‌ای یا قوی معروف است. اطلاعات ما درباره برهم‌کنش هسته‌ای هنوز کامل نیست ولی حداقل، پاره‌ای از خصوصیات مهم آن تاکنون شناخته شده‌است.

## ۲.۷ ایزوتوپها، ایزوتونها، و ایزوبارها

هر هسته با تعداد پروتونها، یا عدد اتمی  $Z$ ، و نیز تعداد کل ذرات تشکیل‌دهنده آن یا

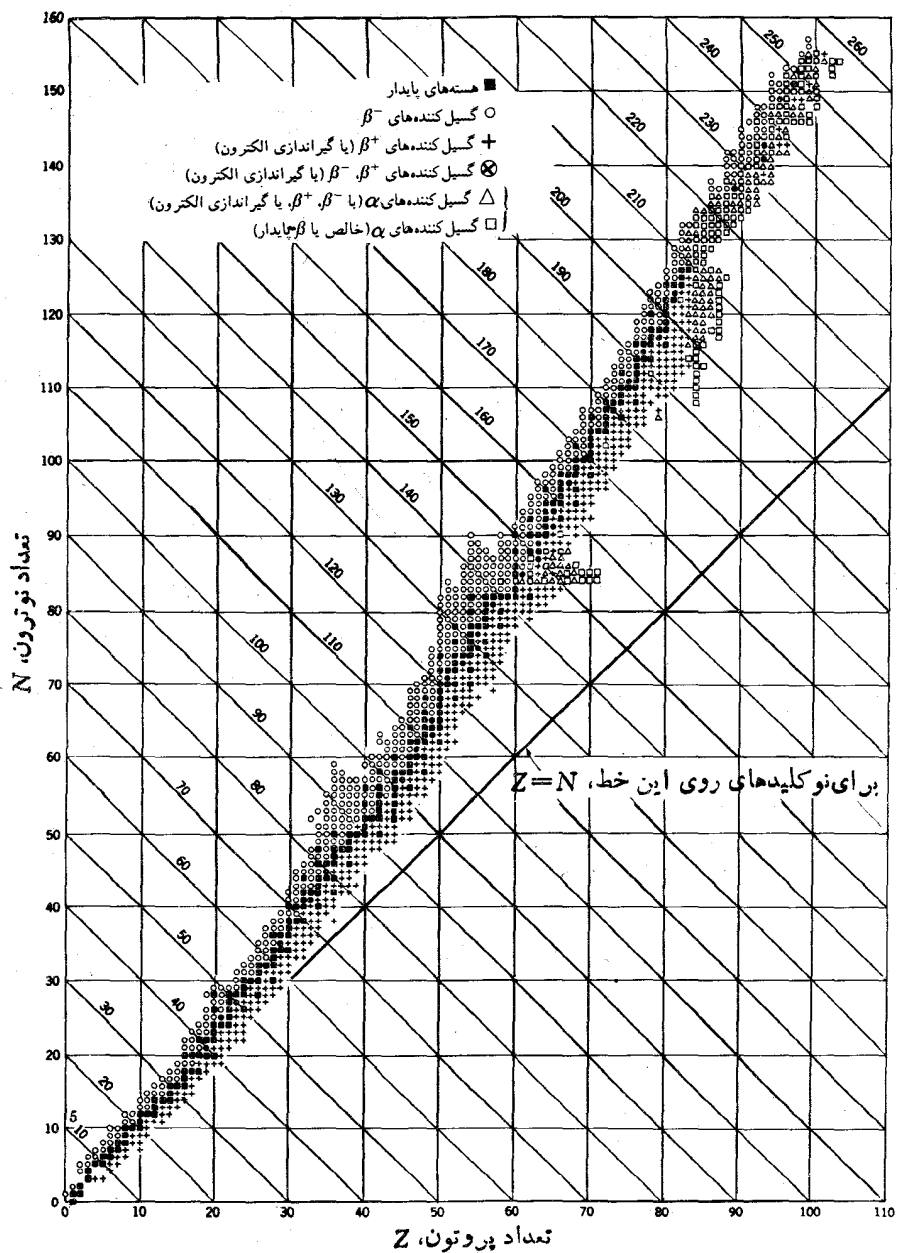
نوکلئونها مشخص می‌شود. عدد اخیر به عددجرمی  $A$  معروف است. بنا براین، تعداد نوترونها نیز با  $N = A - Z$  برابر خواهد بود. اصطلاح نوکلید، برای مشخص کردن تمام هسته‌هایی که  $Z$  یکسان و  $N$  یکسان، و از این رو،  $A$  یکسان دارند به کار رفته است. به عبارت دیگر، همان طور که تمام اتمهای با  $Z$  یکسان به یک عنصر تعلق دارند، تمام هسته‌های با ترکیب یکسان (یعنی  $Z$  و  $N$  یکسان) نیز به یک نوکلید تعلق خواهند داشت. هر نوکلید با نماد عنصر شیمیایی مربوط، بر حسب مقدار  $Z$  با شاخص بالایی واقع در طرف چپ که معرف مقدار عدد جرمی است نشان داده می‌شود، مثل  $^{12}\text{C}$ ،  $^{23}\text{Na}$ ،  $^{107}\text{Ag}$ ،  $^{238}\text{U}$  و مانند آن. گاهی برای سادگی، عدد اتمی  $Z$  نیز به طور صریح به صورت شاخص پایینی در طرف چپ نوشته می‌شود، مثل  $^{12}_6\text{C}$ ،  $^{23}_{11}\text{Na}$ ،  $^{107}_{47}\text{Ag}$ ،  $^{238}_{92}\text{U}$  و غیره.

نیروی هسته‌ای مستلزم آن نیست که تعداد پروتونها و نوترونها می‌توانند در داخل هسته همزیستی داشته باشند، ثابت باشد. در واقع انعطاف پذیری زیادی میان تعداد آنها مشاهده می‌شود. با آنکه فقط ۹۲ عنصر شیمیایی طبیعی وجود دارند (یازده عنصر نیز به طور مصنوعی تولید شده است) در حدود ۱۴۴۰ نوکلید متفاوت شناخته شده است که تقریباً ۳۴۰ تنای آنها در طبیعت موجودند و در حدود ۱۱۰۰ نوکلید نیز در آزمایشگاه تولید شده است. بعضی از نوکلیدها (در حدود ۲۸۰ نوکلید) پایدارند ولی تعداد زیادی از آنها ناپایدار یا پرتوزا هستند. شکل ۱۰۷ اکثر نوکلیدهای شناخته شده را نشان می‌دهد. هسته‌های پایدار با مربع سیاه رنگ و هسته‌های ناپایدار یا پرتوزا با نمادهای دیگری مشخص شده‌اند.

از روی شکل می‌توان مشاهده کرد که، در هسته‌های سبک تعداد نوترونها و پروتونها با هم برابرند ( $N \approx Z$ )، که نشان دهنده استقلال برهم کنش هسته‌ای از بار الکتریکی است. اما، در هسته‌های سنگینتر، تعداد نوترونها از تعداد پروتونها بیشتر می‌شود ( $N > Z$ ). برای ایجاد اثر پایدار کنندگی (که از طریق برهم کنشهای هسته‌ای صورت می‌گیرد)، لازم است که فزونی نوترونی وجود داشته باشد. این نوترونها اضافی اثر گسیختگی دفع کولنی میان پروتونها را خنثی می‌کنند. به دلیل تنوع زیاد نوکلیدها، آنها را در سه گروه ایزوتوپ، ایزوتون، و ایزوبار دسته بندی می‌کنیم.

ایزوتوپها نوکلیدهایی هستند که در آنها تعداد پروتونها یکسان اما تعداد نوترونها متفاوت است، بنا براین عدد اتمی آنها یکسان ( $Z$ ) و لسی عدد نوترونی ( $N$ ) و نیز عدد جرمی ( $A$ ) آنها متفاوت است. چون هر عنصر شیمیایی با عدد اتمی  $Z$  مشخص می‌شود، تمام ایزوتوپهای متناظر با یک مقدار  $Z$  به عنصر یکسانی تعلق دارند. به عنوان مثال  $^1\text{H}$  و  $^2\text{H}$  ایزوتوپهای هیدروژن‌اند. عدد اتمی هر دو یکسان ( $Z = 1$ )، و لسی در  $^1\text{H}$ ، عدد نوترونی مساوی با صفر ( $N = 0$ ) و در  $^2\text{H}$  مساوی با یک ( $N = 1$ ) است. ایزوتوپها در شکل ۱۰۷ در امتداد قائم قرار می‌گیرند.

ایزوتونها نوکلیدهایی هستند که در آنها تعداد نوترونها یکسان ولی تعداد پروتونها



شکل ۱۰۷ نوکلیدهای پایدار و ریزوزا. خطوط  $45^\circ$  با عدد جرمی مساوی،  $A$ ، هستند.

(عدد اتمی) و در نتیجه عدد جرمی آنها با یکدیگر متفاوت است. واضح است که ایزوتونهای با مقدار مشخص  $N$  همه با یک عنصر شیمیایی متناظر نخواهند بود. به عنوان مثال،  ${}^{12}_6\text{C}$  و  ${}^{14}_7\text{N}$  از ایزوتونها هستند. ایزوتونها در امتداد خطوط افقی شکل ۱۰۷ قرار می گیرند. بالاخره، ایزوبارها، نوکلیدهایی هستند که در آنها تعداد کل نوکلئونها (یا عدد جرمی) با یکدیگر برابر است ولی عدد اتمی ( $Z$ ) و نیز عدد نوترونی ( $N$ ) آنها با یکدیگر متفاوت است. به عنوان مثال  ${}^{12}_6\text{C}$  و  ${}^{12}_5\text{B}$  ایزوبارند زیرا در هر دوی آنها  $A = 12$  است. ایزوبارها در امتداد خطوط  $45^\circ$  در شکل ۱۰۷ قرار می گیرند.

بعضی عناصر شیمیایی فقط یک نوع هسته یا ایزوتوپ در طبیعت دارند به عنوان مثال می توان از  ${}^{19}\text{F}$  نام برد. بقیه عناصر چندین ایزوتوپ طبیعی دارند مثل قلع که ۱۰۵ ایزوتوپ و کربن که سه ایزوتوپ  ${}^{12}_6\text{C}$ ،  ${}^{13}_6\text{C}$  و  ${}^{14}_6\text{C}$  دارد. به علاوه، چهار ایزوتوپ دیگر کربن نیز تا کنون به صورت مصنوعی ایجاد شده اند. ازمیان تمام کربنهای موجود در طبیعت،  $98/89$  درصد به صورت  ${}^{12}_6\text{C}$  پدیدار می شوند. ترکیب ایزوتوپی طبیعی هر عنصر شیمیایی مشخص در تمام دنیا تقریباً به یک صورت است.

تحلیل خواص ایزوتوپها، ایزوتونها، و ایزوبارها از این جهت مهم است که جنبه های مختلفی از ساختار هسته ای را توجیه می کند. به عنوان مثال، این تحلیل به ما کمک می کند تا پیشگویی کنیم که وقتی یک نوترون یا پروتون به هسته ای اضافه شود، چه اتفاقی در پایداری آن رخ می دهد، یا اینکه تعیین کنیم که کدام پیکربندی نوترونی و پروتونی از بیشینه پایداری برخوردار است.

### ۳.۷ یکای جرم اتمی

هنگامی که خواص مشخصی از هسته ها را بررسی می کنیم، لازم نیست که جریمهای هسته ها را بر حسب یکای کیلوگرم بیان کنیم. در عوض، اغلب ساده تر آن است که یکای مخصوصی، یعنی یکای جرم اتمی (یا به اختصار amu) را به کار ببریم که برابر است با یک دوازدهم جرم اتم  ${}^{12}\text{C}$ . (توجه کنید که می گوئیم اتم نه هسته، و بنابراین جرم الکترونهای مداری نیز در این یکای جرم منظور شده است.) در نتیجه

$$1 \text{ amu} = \frac{1}{12} \times (\text{جرم یک اتم } {}^{12}\text{C})$$

مقدار یک amu بر حسب کیلوگرم عبارت است از

$$1 \text{ amu} = 1.66604 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad (1.7)$$

بنابه تعریف، یک مول از هر ماده عبارت است از جرمی برابر با  $10^{-3} M \text{ kg}$  (یا  $M \text{ g}$ ) که در آن،  $M$  از نظر عددی برابر است با جرم اتمی (یا مولکولی) ماده بر حسب amu. عدد آووگادرو،  $N_A$ ، عبارت است از تعداداتماها (یا مولکولها) در یک مول از

هر ماده. چون جرم يك اتم (یا مولکول) برابر است با  $M \text{ kg} \times 10^{-27}$   $1.66604 \times 10^{-27}$  در نتیجه

$$N_A = \frac{10^{-27} M}{1.66604 \times 10^{-27} M} = 6.0225 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

با توجه به اینکه  $N_A$  مستقل از  $M$  است، تعداد اتمها (یا مولکولها) در هر مول نیز برای تمام مواد یکسان خواهد بود.

جرمهای داده شده در جدول نوکلیدها بر حسب یکای amu بیان شده‌اند. جرم اتمی هر عنصر عبارت است از میانگین جرم بر اساس ترکیب ایزوتوپ طبیعی. بنابراین، جرم اتمی کربن برابر با  $12.000000 \text{ amu}$  نیست بلکه برابر با  $12.01115 \text{ amu}$  است که از حضور ایزوتوپهای مختلف کربن موجود در طبیعت ناشی می‌شود.

با به کار بردن رابطه  $E = mc^2$  می‌توان هم‌ارز انرژی يك amu را بر حسب ژول یا الکترون ولت بیان کرد. این محاسبه را به دانشجو واگذار می‌کنیم. نتیجه محاسبه به صورت زیر است

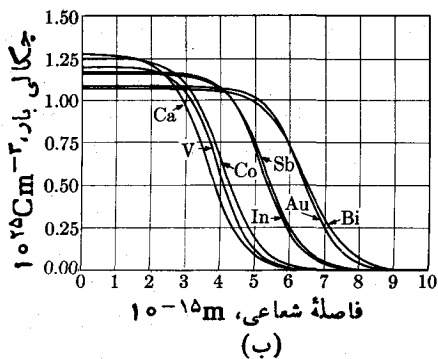
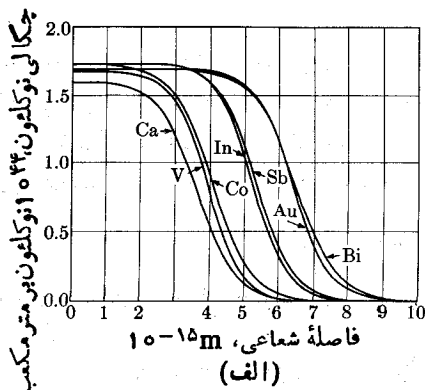
$$1 \text{ amu} = 9.31478 \times 10^8 \text{ eV} = 931.478 \text{ MeV}$$

یا در حدود يك جیگا الکترون ولت (1 GeV).

## ۴.۷ خواص هسته

برای به دست آوردن اطلاعاتی در مورد طبیعت نیروهای نگه‌دارنده پروتونها و نوترونهای موجود در هسته، دانشمندان، علاوه بر بار و جرم، چندین خاصیت فیزیکی هسته را تحلیل کرده‌اند. در اینجا بعضی از این خواص را بررسی می‌کنیم.

۰۱ اندازه. هر گاه فرض کنیم که هسته کروی است، می‌توانیم اندازه آن را بر حسب  $R$  شعاع آن بیان کنیم. با این حال، باید این مفهوم شعاع هسته‌ای را با قید احتیاط به کار ببریم. در اینجا تأکید می‌کنیم که نباید هسته را به صورت يك گلوله ییلیارد با سطح کاملاً مشخص تصور کنیم. مقدار شعاع بستگی به آن دارد که چه خاصیت هسته‌ای را برای تعیین شعاع انتخاب کنیم. چگالی ماده هسته‌ای، مطابق آنچه در شکل ۲.۷ (الف) نشان داده شده است، با فاصله از مرکز هسته تغییر می‌کند. برای يك فاصله قابل توجه از مرکز، چگالی تقریباً ثابت است و سپس به تدریج کاهش می‌یابد و در نزدیکی سطح هسته به صفر می‌رسد. بنا بر این می‌توان شعاع هسته ( $R$ ) را به صورت فاصله از مرکز هسته تا جایی که چگالی هسته‌ای به مقدار  $1/2$  کاهش یافته است تعریف نمود. به عنوان مثال، با اندازه‌گیری اختلاف انرژی ناشی از برهم‌کنش کولنی میان ایزوبارهای مجاور (یعنی، میان هسته‌های ایزوباری که فقط به مقدار يك واحد در  $Z$  باهم اختلاف دارند) یا با تحلیل انواع مختلف فرایندهای هسته‌ای، از قبیل پراکندگی نوترونهای تند توسط هسته‌ها، می‌توان این شعاع  $R$  را به دست آورد.



شکل ۲۰۷ (الف) چگالی هسته‌ای و (ب) چگالی بار بر حسب توابعی از فاصله شعاعی.

نتیجه تجربی مؤید آن است که شعاع هسته‌ای با  $A^{1/3}$  که در آن  $A$  عدد جرمی هسته است متناسب است. یعنی

$$R = r_0 A^{1/3} \quad (20.7)$$

که در آن  $r_0$  مقداری ثابت و برای تمام هسته‌ها یکسان است. مقدار قابل قبول آن عبارت است از

$$r_0 = 1.4 \times 10^{-15} m$$

ضمناً این امکان وجود دارد که توزیع بار در داخل هسته را تعیین و به کمک آن، شعاع هسته‌ای را برآورد کرد. آزمایشهای انجام شده با الکترون‌ها و میون‌های خیلی تند نشان می‌دهند که توزیع بار طوری است که در شکل ۲۰۷ (ب) نشان داده شده است. شعاع توزیع بار کوچکتر از شعاع توزیع جرم است و با مقدار زیر متناظر است

$$r_0 \approx 1.2 \times 10^{-15} m$$

بعضی هسته‌ها کاملاً کروی نیستند و می‌توان آنها را به صورت بیضوی یا حتی گلابی شکل در نظر گرفت.

چون حجم کره مساوی با  $\frac{4\pi R^3}{3}$  است، از معادله (۲۰۷) نتیجه می‌گیریم که حجم هسته برابر است با

$$V = \frac{4\pi r_0^3 A}{3} = 1.12 \times 10^{-45} A m^{-3}$$

یعنی، حجم یک هسته با تعداد نوکلئونها ( $A$ ) متناسب است. این موضوع نشان می‌دهد که نوکلئونها در فواصل میانگین ثابتی که مستقل از تعداد ذرات است قرار می‌گیرند به گونه‌ای که

حجم به ازای هر نوکلئون یک کمیت ثابت است، و برای تمام هسته‌ها نیز یکسان است. وضع مشابهی نیز برای مولکولها در مایع یا جامد موجود است.

نتیجه دیگر آن است که ماده هسته چگالی ثابتی دارد. این نتیجه را می‌توان به صورت زیر به دست آورد: جرم هر هسته با عدد جرمی  $A$  به طور تقریباً با رابطه زیر داده می‌شود

$$M = 1.66 \times 10^{-27} A \text{ kg}$$

بنابراین میانگین چگالی ماده هسته‌ای عبارت است از

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{1.66 \times 10^{-27} A \text{ kg}}{1.12 \times 10^{-45} A \text{ m}^3} = 1.49 \times 10^{18} \text{ kg m}^{-3}$$

که مستقل از  $A$  است. این چگالی در حدود  $10^{18}$  مرتبه بزرگتر از چگالی ماده کپه‌ای است و این تصویری از میزان تراکم نوکلئونها در هر هسته را به دست می‌دهد. ضمناً نشان می‌دهد که ماده کپه‌ای اصولاً تهی است زیرا اکثر جرم در هسته متمرکز شده است.

#### ۲. تکانه زاویه‌ای. برابری تکانه زاویه‌ای هسته (به دلایل تاریخی) اسپین هسته‌ای نام

دارد و با  $I$  نشان داده می‌شود. اسپین پروتونها و نوترونها، مانند الکترونها، برابر  $1/2$  است. علاوه بر این، پروتونها و نوترونها تکانه زاویه‌ای مداری وابسته به حرکت خود در داخل هسته را نیز دارند. برابری تکانه زاویه‌ای هسته‌ای (یا اسپین) از ترکیب تکانه‌های زاویه‌ای مداری و اسپینهای نوکلئونهای تشکیل‌دهنده هسته به دست می‌آید. اسپین هسته‌ای با عدد

کوانتومی  $I$  نشان داده می‌شود و بزرگی اسپین هسته‌ای برابر است با  $\hbar \sqrt{I(I+1)}$ .

مؤلفه اسپین هسته‌ای در هر راستای مشخص نیز با  $m_I \hbar$  داده می‌شود که در آن  $m_I$  بسته

به اینکه  $I$  عدد درست یا نیمدرست باشد، مقادیر زیر را می‌تواند بگیرد:  $0$  یا

$\pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots, \pm (I-1), \pm I$ . بنابراین تعداد  $2I+1$  سمتگیری ممکن برای

اسپین هسته‌ای وجود دارد. همان‌طور که در بخش ۴.۳ توضیح داده شد، در مکانیک کوانتومی همین قواعد در مورد تکانه‌های زاویه‌ای نیز معتبرند. به تجربه معلوم شده است که هر گاه

$A$  زوج باشد مقادیر  $I$  اعداد درست و هر گاه  $A$  فرد باشد اعداد نیمدرست اند و از صفر

(در  ${}^4\text{He}$  و  ${}^{12}\text{C}$ )، تا مقدار  $7$  (در  ${}^{176}\text{Lu}$ ) در تغییرند. جدول ۱.۷ چند اسپین هسته‌ای

را نشان می‌دهد. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که عملاً در تمام هسته‌های زوج-زوج (یعنی هسته‌هایی که تعداد زوجی پروتون و نوترون دارند) مقدار  $I$  برابر صفر است. این

بدان معنی است که نوکلئونهای مشابه می‌کشند که تکانه‌های زاویه‌ای خود را در جهت‌های

مخالف با یکدیگر جفت کنند. این خاصیت به اثر جفت‌شدگی معروف است. تکانه زاویه‌ای

هسته‌های زوج-فرد (یعنی هسته‌هایی که پروتونها یا نوترونهای آنها فرد است) نیمدرست

است و این فرض که اسپین هسته‌ای بر تکانه زاویه‌ای آخرین نوکلئون یا نوکلئون جفت نشده

منطبق است یک فرض معقول به نظر می‌رسد و در موارد زیادی صادق است. هسته‌های



فرد-فرد دارای دو نوکلئون جفت نشده‌اند (یک نوترون و یک پروتون) و پیشگویی نتایج تجربی کمی مشکلتر است. ولی، همان‌طور که انتظار می‌رود، تکانه‌های زاویه‌ای آنها به‌صورت اعداد درست است زیرا تعداد کسل زوجی از ذرات وجود دارد. هر نظریهٔ رضایتبخشی در مورد نیروهای هسته‌ای باید بتواند دلیل موجهی برای مقادیر تجربی  $I$  ارائه کند.

۳. گشتاور دوقطبی مغناطیسی. با توجه به بخش ۶.۳ یادآوری می‌کنیم که هر بار متحرک یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری  $M_L$  دارد که با تکانهٔ زاویه‌ای مداری خود یعنی با  $L$  متناسب است. رابطهٔ میان این دو کمیت به‌صورت زیر است

$$M_L = \left( \frac{q}{2m} \right) L$$

بار الکتریکی پروتونها  $q = e$  است و بنابراین خواهیم داشت

$$M_L = \left( \frac{e}{2m_p} \right) L \quad (۳.۷)$$

واضح است که نوترونها بدون بارند و بنابراین گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری ندارند. مؤلفهٔ گشتاور مغناطیسی در طول محور  $Z$  برابر است با

$$M_{L,z} = \left( \frac{e}{2m_p} \right) L_z = \left( \frac{e\hbar}{2m_p} \right) m_l = \mu_N m_l$$

که در آن، ثابت زیر مگنتون هسته‌ای نام دارد

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.05 \times 10^{-27} \text{ J T}^{-1} \quad (۴.۷)$$

هر گاه اسپین ذره  $S$  باشد، ذره می‌تواند یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی اسپینی اضافی که با رابطهٔ زیر داده می‌شود داشته باشد

$$M_S = g_S \left( \frac{e}{2m_p} \right) S \quad \text{یا} \quad M_{S,z} = g_S \mu_N m_S \quad (۵.۷)$$

که در آن  $g_S$  ثابت مشخصهٔ ذره است و به نسبت ژیرومغناطیسی اسپینی معروف است.<sup>۱</sup>

۱. یادآوری می‌شود که برای الکترون  $g_e = -2.00$  است (به بخش ۷.۳ مراجعه شود).

$g_{S, p}$  پروتون برابر  $+55855$  است و نشان می‌دهد که  $M_S$  با  $S$  موازی است (متناظر با یک بار مثبت است). با وجودی که نوترون بار الکتریکی ندارد، مشاهده شده است که نوترون نیز یک گشتاور مغناطیسی اسپینی متناظر با  $38263 = g_{S, n}$  دارد. علامت منفی نشان می‌دهد که  $M_S$  با  $S$  پادموازی است (که متناظر با یک بار منفی است). نتایج بالا نشان می‌دهند که پروتون و نوترون ساختار پیچیده‌ای دارند که تاکنون نتوانسته‌ایم آن را دقیقاً مشخص کنیم.

برایند گشتاور دو قطبی هسته‌ها می‌توان از ترکیب گشتاورهای دو قطبی مغناطیسی تمام نوکلئونها، به دست آورد. واضح است که برایند گشتاور دو قطبی مغناطیسی باید با اسپین هسته‌ای  $I$  رابطه داشته باشد. این ارتباط، که بسطی از معادله (۵.۷) است، به صورت زیر است

$$M = g_I \left( \frac{e}{2m_p} \right) I$$

که در آن،  $g_I$  نسبت ژیرومغناطیسی هسته‌ای است. مؤلفه برایند گشتاور دو قطبی مغناطیسی هسته در طول هر امتداد مشخصی را می‌توان با  $M_z = g_I (e/2m_p) I_z$  بیان کرد، با توجه به رابطه  $I_z = m_I \hbar$  خواهیم داشت

$$M_z = \mu_N g_I m_I \quad (6.7)$$

گشتاورهای مغناطیسی هسته‌ای به صورت ضرایبی از  $\mu_N$  و به ازای  $m_I = I$  یعنی  $\mu = M_z / \mu_N = g_I I$  محاسبه شده‌اند. بنابراین، گشتاورهای مغناطیسی پروتون و نوترون (با  $I = 1/2$ ) عبارت‌اند از  $\mu_p = +279827 \text{ nm}$  و  $\mu_n = -19131 \text{ nm}$ . جدول ۱۰.۷ پاره‌ای از مقادیر  $\mu$  را به دست می‌دهد. هر نظریه رضایتبخشی در مورد برهم‌کنشهای هسته‌ای باید بتواند دلیل موجهی برای مقادیر مشاهده شده  $\mu$  یا  $g_I$  ارائه کند.

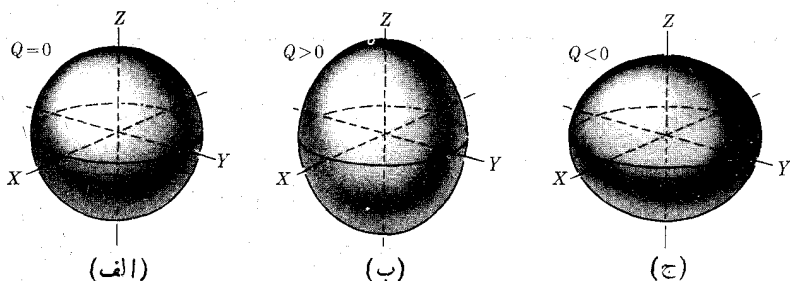
۴. گشتاور چهار قطبی الکتریکی. گشتاور چهار قطبی الکتریکی هر توزیع بار نسبت به راستای مشخصی که با محور  $Z$  نمایش داده می‌شود، با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$Q' = \sum_i q_i (3z_i^2 - r_i^2)$$

در هسته، تنها پروتونها هستند که در چهار قطبی الکتریکی شرکت می‌کنند و چون  $q_i = e$  است، خواهیم داشت

$$Q' = e \sum_p (3z_p^2 - r_p^2)$$

معمولاً چهار قطبی هسته‌ای به صورت  $Q = Q' / e$  تعریف می‌شود. واضح است که مقدار  $Q$  به راستای محور  $Z$  وابسته است. به طور قراردادی، محور  $Z$  طوری انتخاب می‌شود که تا



شکل ۳۰۷ توزیع بار متقارن نسبت به محور  $Z$ . (الف) کره، (ب) بیضیوار کشیده شده، و (ج) بیضیوار پخت در قطبین.

حد ممکن با اسپین هسته‌ای  $I$  موازی باشد. به گونه‌ای که داشته باشیم  $m_I = I$ . از این رو، گشتاور چهار قطبی الکتریکی هسته‌ای با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$Q = \sum_P (3z_P^2 - r_P^2) m_I = I \quad (7.7)$$

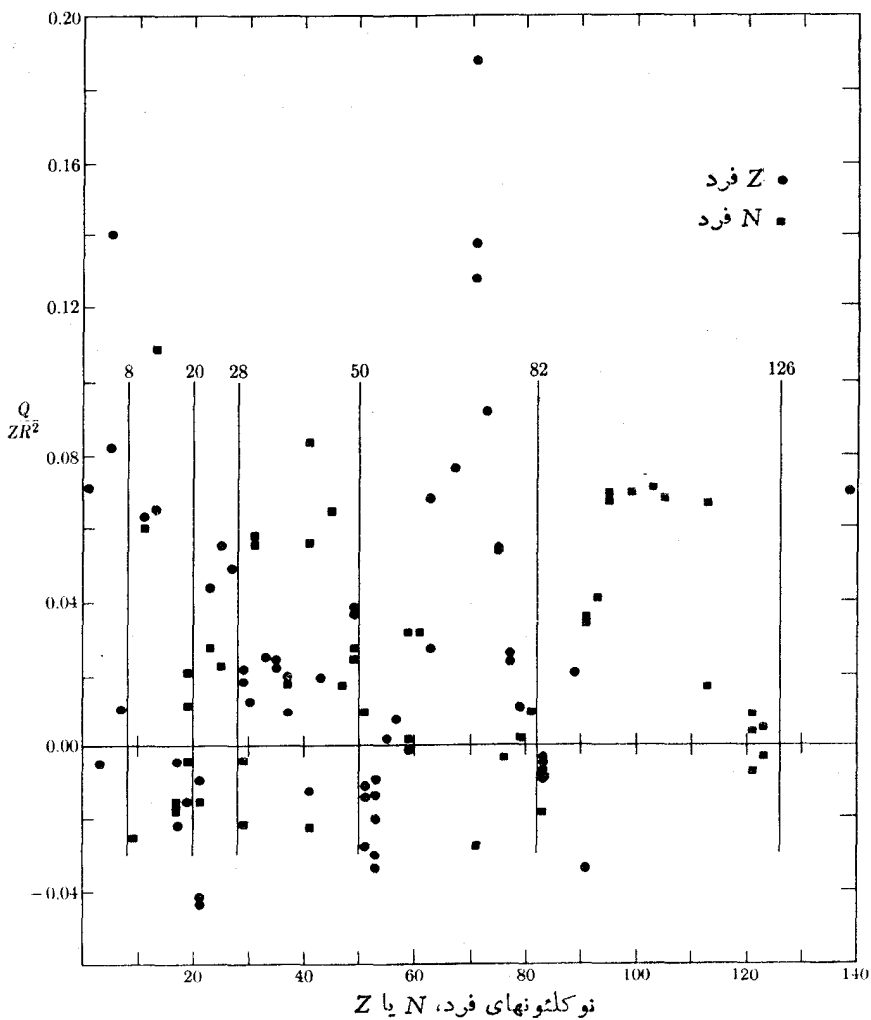
در دستگاه  $mksc$ ،  $Q$  برحسب  $m^2$  بیان می‌شود. گاهی از یکایی به نام بارن استفاده می‌شود. هر بارن برابر است با  $10^{-28} m^2$ . هر گاه پروتونها با تقارن کروی توزیع شده باشند  $Q = 0$  خواهد بود. از این رو، مقدار  $Q$  نشانه خوبی برای درجه دور بودن هر هسته از شکل کروی است. هر گاه  $Q$  مثبت باشد، هسته باید به یک بیضیوار کشیده شده در قطبین و هر گاه منفی باشد، هسته باید به یک بیضیوار پخت در قطبین شبیه باشد (شکل ۳۰۷). از لحاظ نظری می‌توان نشان داد که هسته‌های با  $I = 0$  یا  $1/2$  دارای مقدار  $Q = 0$  اند. این نتیجه را تجربه نیز تأیید کرده است. جدول ۱۰۷ مقادیر  $Q$  را برای تعدادی از هسته‌ها نشان می‌دهد. شکل ۴۰۷ نیز گشتاورهای چهار قطبی الکتریکی مشاهده شده چند هسته را نشان می‌دهد. توجه کنید که بعضی هسته‌ها گشتاور چهار قطبی الکتریکی بزرگ و غیرعادی دارند و این خود معرف تغییر شکل خیلی زیاد این هسته‌هاست. مجدداً تأکید می‌کنیم که هر نظریه رضایتبخشی در مورد برهم کنشهای هسته‌ای باید بتواند دلیل موجهی برای مقادیر مشاهده شده  $Q$  ارائه کند.

۵. پاریتته. حالت‌های هسته‌ای بسته به ساختار تابع موجهای توصیف کننده این حالتها یک پاریتته معین، زوج یا فرد، دارند. هر تابع موج هسته‌ای با تابع موجهای متناظر با هر یک از نوکلئونها وابسته است. از این رو، پاریتته حالت‌های هسته‌ای با حرکات نوکلئونی ارتباط خیلی نزدیک دارد. با این حال چگونگی این موضوع خیلی پیچیده است، در اینجا داخل بحث آن نمی‌شویم.

جدول ۱۰۷ خواص پاره‌ای از نوکلیدها.

گشتاور چهار قطبی الکتریکی، $10^{-28} m^2$	گشتاور دو قطبی مغناطیسی، nm	اسپین	جرم اتمی amu	نوکلید
۰	-۱۲۹۱۳۱	۱/۲	۱۲۰۰۸۶۶۵	$^{12}n$
۰	۲۲۷۹۲۷	۱/۲	۱۲۰۰۷۸۲۵	$^1H$
۰۲۰۰۲۸۲	۰۲۸۵۷۴	۱	۲۰۰۱۴۱۰۲	$^2H$
۰	-۲۲۱۲۷۵	۱/۲	۳۰۰۱۶۹۸۹	$^3He$
۰	۲۲۹۷۸۹	۱/۲	۳۰۰۱۶۰۵۰	$^3H$
۰	۰	۰	۳۰۰۰۲۶۰۳	$^4He$
-۰۲۰۴۵	۳۲۲۵۶۳	۳/۲	۷۰۰۱۶۰۰۴	$^7Li$
۰	۰	۰	۱۲۰۰۰۰۰۰	$^{12}C$
۰	۰۲۷۰۲۴	۱/۲	۱۳۰۰۰۳۳۵	$^{13}C$
۰۲۰۰۷	۰۲۴۰۳۶	۱	۱۴۰۰۰۳۰۷	$^{14}N$
۰	-۰۲۸۳۱	۱/۲	۱۵۰۰۰۰۱۱	$^{15}N$
۰	۰	۰	۱۵۰۹۹۴۹۲	$^{16}O$
-۰۲۰۲۶	-۱۲۸۹۳۷	۵/۲	۱۶۰۹۹۹۱۳	$^{17}O$
۰۲۰۹۳	-۰۲۶۶۱۸	۳/۲	۲۰۰۹۹۳۹۵	$^{20}Na$
۰۲۱۵	۳۲۶۴۱۴	۵/۲	۲۶۰۹۸۱۵۳	$^{27}Al$
۰۲۰۸۰	۰۲۸۲۱۸	۳/۲	۳۲۰۹۶۸۸۵	$^{35}_{17}Cl$
۰	۰	۰	۳۹۰۹۶۲۶۰	$^{40}_{20}Ca$
۰	-۱۲۳۱۷۲	۷/۲	۴۲۰۹۵۸۷۸	$^{42}_{20}Ca$
۰	۱۲۰۶	۰	۵۵۰۹۳۴۹	$^{56}_{26}Fe$
۰	۰۲۰۹۰۵	۱/۲	۵۶۰۹۳۵۴	$^{57}_{26}Fe$
۰	۳۲۸۱۰۰	۵	۵۹۰۹۳۳۸	$^{59}_{27}Co$
-۰۲۱۸۰	۲۲۲۲۶۰	۳/۲	۶۲۰۹۲۹۶	$^{63}_{29}Cu$
۰۲۳۱۰	۲۲۱۰۶۰	۳/۲	۷۸۰۹۱۸۳	$^{79}_{35}Br$

نوکلید	جرم اتمی amu	اسپین	گشتاور دو قطبی مغناطیسی، nm	گشتاور چہار قطبی الکٹریکی، $m^2 \cdot 10^{-28}$
$^{88}_{38}\text{Sr}$	۸۷.۹۰۵۶۴	۰	۰	۰
$^{92}_{41}\text{Nb}$	۹۲.۹۰۵۶۴	۹/۲	۶.۱۶۷۰	-۰.۲۲۰
$^{102}_{45}\text{Rh}$	۱۰۲.۹۰۴۸	۱/۲	۰	۰
$^{114}_{48}\text{Cd}$	۱۱۳.۹۰۳۴	۰	۰	۰
$^{127}_{51}\text{I}$	۱۲۶.۹۰۴۵	۵/۲	۲.۸۰۸۰	-۰.۲۷۰
$^{155}_{64}\text{Gd}$	۱۵۴.۹۲۷۷	۳/۲	-۰.۲۷۰۰	۱.۳۰۰
$^{175}_{71}\text{Lu}$	۱۷۴.۹۴۰۹	۷/۲	۲.۲۳۰۰	۵.۶۰۰
$^{176}_{71}\text{Lu}$	۱۷۵.۹۴۲۷	۷	۳.۱۸۰۰	۸.۰۰۰
$^{177}_{71}\text{Lu}$	۱۷۶.۹۴۳۹	۷/۲	۲.۲۴۰۰	۵.۴۰۰
$^{180}_{72}\text{Hf}$	۱۷۹.۹۴۶۸	۰	۰	۰
$^{185}_{75}\text{Re}$	۱۸۴.۹۵۰۱	۵/۲	۳.۱۷۱۶	۲.۶
$^{208}_{82}\text{Pb}$	۲۰۵.۹۸۹۲	۰	۰	۰
$^{209}_{83}\text{Bi}$	۲۰۸.۹۸۰۴	۹/۲	۴.۰۸۰۲	-۰.۳۴۰
$^{227}_{87}\text{Ac}$	۲۲۷.۰۲۷۸	۳/۲	۱.۱	۱.۷
$^{232}_{92}\text{U}$	۲۳۳.۰۳۹۵	۵/۲	۰.۷۵۲	۳.۷۵
$^{235}_{92}\text{U}$	۲۳۵.۰۴۳۹	۷/۲	۰.۷۳۵	۴.۱
$^{238}_{92}\text{U}$	۲۳۸.۰۵۰۸	۰	۰	۰
$^{241}_{94}\text{Pu}$	۲۴۰.۰۲۲۳۶	۵/۲	-۰.۷۳۰	۵.۶۰۰



شکل ۴۰۷ گشتاورهای چهارقطبی الکتریکی برای هسته‌های با  $A$  فرد. عرض منحنی بر حسب  $Q/ZR^2$  درجه بندی شده است که معرف خوبی برای انحراف از شکل کروی است.

مثال ۱۰۷ انرژی پتانسیل دافعه ناشی از برهم کنش کولنی میان پروتونها را در يك هسته محاسبه کنید.

حل: انرژی الکتریکی يك کره باردار همگن، با بار کل  $Q$  و شعاع  $R$  عبارت است از

$$E_{p(c)} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

با فرض اینکه  $Z$  پروتون موجود در هسته به‌طور یکنواخت توزیع شده باشند، با قراردادن  $Ze$  به‌جای  $Q$  و مقدار داده شده در معادله (۲.۷) به‌جای  $R$  می‌توانیم انرژی کولنی،  $E_{p(c)}$ ، هسته را محاسبه کنیم

$$E_{p(c)} = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{3}{5} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \right) \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

با قراردادن مقادیر عددی نتیجه زیر به‌دست می‌آید

$$E_{p(c)} = 9.887 \times 10^{-14} Z^2 A^{-1/3} \text{ J} = 0.617 Z^2 A^{-1/3} \text{ MeV} \quad (۸.۷)$$

چون، بار الکتریکی به‌جای اینکه بر روی حجم هسته‌ای به‌طور یکنواخت توزیع شود، در محل پروتونها متمرکز شده‌است، باید به‌جای  $Z^2$  از  $Z(Z-1)$  استفاده کنیم. زیرا هر یک از  $Z$  پروتون فقط با  $(Z-1)$  پروتون باقیمانده برهم‌کنش می‌کند. این تصحیح مخصوصاً برای هسته‌های با  $Z$  کوچک، از قبیل هلیوم، بسیار مهم است. به‌عنوان مثال، برای  ${}^4\text{He}$  با  $Z=2$  و  $A=4$  (با به‌کار بردن فرمول تصحیح‌شده) خواهیم داشت

$$E_{p(c)} = 0.776 \text{ MeV}$$

و برای  ${}^{238}\text{U}$ ، با  $Z=92$  و  $A=238$ ، مقدار  $E_{p(c)} = 879 \text{ MeV}$  را به‌دست می‌آوریم. مشاهده می‌شود که به‌دلیل وجود جمله  $Z^2$ ، انرژی دافعه کولنی به‌سرعت زیادی با تعداد پروتونها افزایش می‌یابد. در صورتی که برهم‌کنش هسته‌ای به‌اندازه کافی قوی و جاذبه‌ای باشد، هسته پایدار خواهد بود. این انرژیهای الکتریکی را باید با انرژیهای اتمها و مولکولها، که در حدود چند الکترون‌ولت‌اند، مقایسه کرد. دلیل این اختلاف زیاد در آن است که پروتونهای موجود در هسته، در مقایسه با وضعی که الکترونها در اتم دارند، در فواصل خیلی نزدیکتری نسبت به یکدیگر قرار گرفته‌اند: فاصله جدایی پروتونها در حدود یک صدهزارم میانگین فاصله جدایی الکترونهای موجود در اتمها یا مولکولهاست، و انرژی آنها در حدود ۱۰۰۰۰۰ مرتبه بیشتر از انرژی متناظر در الکترونهاست.

## ۵.۷ انرژی بستگی هسته‌ای

با مطالعه انرژی بستگی هسته‌ها، یعنی انرژی لازم برای جدا کردن نوکلئونهای تشکیل‌دهنده یک هسته، می‌توان تصویری از شدت برهم‌کنش هسته‌ای به‌دست آورد. جرم هسته به‌طور قابل توجهی کمتر از مجموع جرم نوکلئونهای تشکیل‌دهنده آن است. به‌عنوان مثال، در مورد دوترون،  $m_H = 2.014102 \text{ amu}$  در حالی که جرم پروتون و نوترون برابر است با

$$m_p = 1.007825 \text{ amu} \quad \text{و} \quad m_n = 1.008665 \text{ amu}$$

مجموع این دو مقدار برابر است با  $2.016490 \text{ amu}$  که به مقدار  $2.002388 \text{ amu}$  بزرگتر از  $m_d$  است. این اتلاف جرم در بحث انرژی بستگی توضیح داده می‌شود. یک پروتون و یک نوترون در حال سکون را که به قدر کافی از یکدیگر دورند در نظر می‌گیریم، به طوری که هیچ برهم‌کنشی میان آنها وجود نداشته باشند. در این صورت، انرژی کل آنها عبارت است از مجموع جرمهای سکون آنها یعنی

$$E = m_p c^2 + m_n c^2 = (m_p + m_n) c^2$$

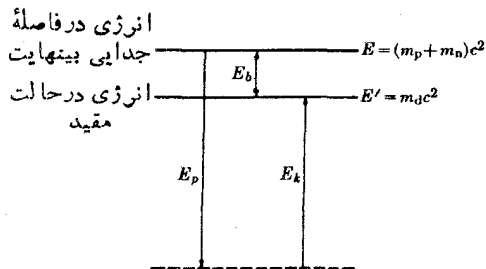
اکنون فرض می‌کنیم که این دو ذره این قدر نزدیک‌اند که بر اثر برهم‌کنش هسته‌ای خود، هسته دوترون را تشکیل می‌دهند. انرژی پتانسیل هسته‌ای آنها را با  $E_p$  نمایش می‌دهیم. این دو ذره حول مرکز جرمشان در حرکت‌اند و از این رو، انرژی جنبشی آنها برابر با  $E_k$  است. بنا بر این، در این حالت انرژی کل آنها برابر خواهد بود با

$$E' = (m_p + m_n) c^2 + E_k + E_p$$

اما هر گاه نیروهای هسته‌ای جاذبه‌ای و انرژی پتانسیل نیز در بینهایت مساوی با مقدار صفر انتخاب شود،  $E_p$  منفی خواهد بود. ضمناً چون دوترون سیستم پایدار است، قدرمطلق  $E_p$  باید بزرگتر از  $E_k$  باشد به گونه‌ای که  $E_k + E_p$  منفی شود (یادآوری می‌شود که در مورد اتم هیدروژن و همچنین در تمام سیستمهای مقید، انرژی کل بدون در نظر گرفتن انرژی جرم منفی است). بنا بر این،  $E'$  کوچکتر از  $E$  خواهد بود یا به عبارت دیگر، هنگامی که سیستم شامل دو نوکلئون مقید تشکیل شود، انرژی آزاد می‌شود. مقدار انرژی آزاد شده برابر است با

$$E_b = E - E' \tag{9.7}$$

که انرژی بستگی سیستم نامیده می‌شود. برای جدا کردن پروتون و نوترون، این مقدار انرژی باید به دوترون داده شود. شکل ۵.۷ این روابط را به روشنی نشان می‌دهد. انرژی بستگی هسته‌ای در مورد دوترون معادل است با انرژی یونش در مورد اتم هیدروژن.



شکل ۵.۷ انرژی بستگی دوترون.



با استفاده از رابطه  $E' = m_d c^2$  می‌توان جرم «مؤثر» سیستم  $n-p$  را تعریف کرد که مقدار آن برای  $m_d$  از  $m_p + m_n$  کوچکتر است. بنابراین، انرژی بستگی دوترون عبارت است از

$$E_b = (m_p + m_n)c^2 - m_d c^2 = (m_p + m_n - m_d)c^2 \\ = 931.48(m_p + m_n - m_d) \text{ MeV}$$

در عبارت آخر، جرمها باید برحسب یکای جرم اتمی بیان شوند. با توجه به مقدار

$$m_p + m_n - m_d = 0.002388 \text{ amu}$$

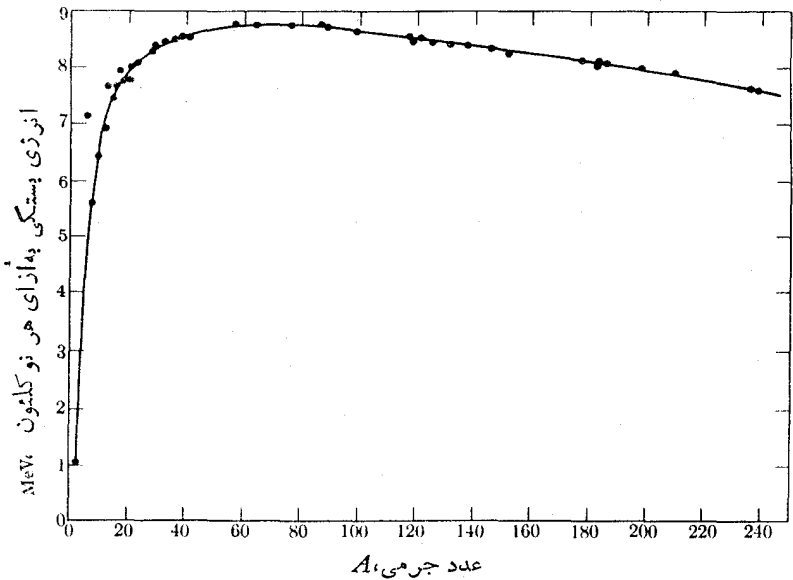
انرژی بستگی دوترون برابر با  $E_d = 2.224 \text{ MeV}$  خواهد بود. این مقدار برابر انرژی لازم برای جدا کردن پروتون و نوترون موجود در یک هسته دوترون، یا انرژی رها شده در هنگامی است که یک پروتون و یک نوترون در حال سکون با یکدیگر ترکیب می‌شوند و هسته دوترون را تشکیل می‌دهند. ازمقیسه این انرژی با نتیجه معادل برای هیدروژن، که انرژی یونش (یا بستگی) آن فقط برابر  $13.6 \text{ eV}$  است، نتیجه می‌گیریم که برهم‌کش هسته‌ای در حدود  $10^6$  مرتبه قویتر از برهم‌کشهای الکترومغناطیسی است. ضمناً در واکنشهای شیمیایی هیچ تغییر قابل اندازه‌گیری در جرم مشاهده نمی‌شود زیرا انرژی موجود در اکثر فرایندهای الکترومغناطیسی نسبتاً کوچک است (در حدود چند الکترون‌ولت) و تغییر جرم متناظر با آن در حدود چند میلیاردیم واحد جرم به‌ازای هراتم است.

برای هسته‌ای به جرم  $M$  که از  $A$  نوکلئون، یعنی  $Z$  پروتون و  $A-Z$  نوترون، تشکیل شده است، انرژی بستگی (یعنی انرژی لازم برای جدا کردن تمام نوکلئونها) عبارت است از

$$E_b = [Zm_p + (A-Z)m_n - M]c^2 \quad (10.7) \\ = 931.48[Zm_p + (A-Z)m_n - M] \text{ MeV}$$

در رابطه دوم تمام جرمها باید برحسب واحد جرم اتمی بیان شوند. بهترین شاخص برای پایداری هستهها میانگین انرژی بستگی به‌ازای هر نوکلئون، یعنی  $E_b/A$  است که مقدار آن برای هسته‌های مختلف در شکل ۶.۷ نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود این مقدار، برای هسته‌های واقع در ناحیه عدد جرمی  $A = 60$  به بیشینه مقدار خود می‌رسد. بنابراین، هر گاه دو هسته سبک به یکدیگر پیوندند و هسته‌ای با جرم متوسط تشکیل دهند (فرایندی که به همجوشی معروف است)، مقداری انرژی آزاد خواهد شد و هر گاه هسته سنگینی به دوپاره با جرم متوسط تقسیم شود (فرایندی که به شکافت معروف است) بازهم مقداری انرژی آزاد خواهد شد.

اینکه انرژی بستگی به‌ازای هر نوکلئون، عملاً مقدار ثابتی است (در بالای  $A = 10$  تغییر فقط در حدود ۱۰ درصد است) نشان می‌دهد که هر نوکلئون صرف نظر از تعداد کل



شکل ۶.۷ انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون بر حسب تابعی از عدد جرمی.

نوکلئونها، فقط با نوکلئونهای مجاور خودش برهم کنش می‌کند. این خاصیت را اشباع می‌گویند. در مولکولها نیز این اثر اشباع مشاهده شده است و در آن انرژی بستگی دو اتم عملاً مستقل از سایر اتمهای موجود در مولکول است. وضع مشابهی نیز در مایعات و جامدات وجود دارد.

در حدود سال ۱۹۳۵، وایتسکر، فیزیکدان آلمانی، یک عبارت تجربی برای انرژی بستگی هسته به دست آورد. همان طور که قبلاً گفتیم، انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون تقریباً ثابت است و بنابراین، انرژی بستگی کل یک هسته باید با تعداد کل نوکلئونها یا عدد جرمی  $A$  متناسب باشد، یعنی  $E_b = a_1 A$  که در آن  $a_1$  ثابت تناسب است. با وجود این، نوکلئونهای واقع در نزدیکی سطح هسته نسبت به نوکلئونهای موجود در داخل آن کمتر مقیدند زیرا با تعداد کمتری نوکلئون برهم کنش می‌کنند. از این رو مجبوریم که اولین برآورد خود در مورد  $E_b$  را با افزودن یک جمله منفی تصحیح کنیم. چون این موضوع یک اثر سطحی است، جمله جدید باید با مجذور شعاع هسته‌ای متناسب باشد، یا، با توجه به معادله (۲.۷) با  $A^{2/3}$  متناسب باشد. بنابراین می‌توان نوشت

$$E_b = a_1 A - a_2 A^{2/3}$$

اکنون باید انرژی دافعه کولنی پروتونها را که در آن نیز انرژی بستگی کاهش می‌یابد بررسی کنیم. از مثال ۱.۷ نتیجه گرفتیم که تصحیح کولنی باید با  $Z^2 A^{-1/3}$  متناسب باشد. بنابراین می‌توان نوشت

$$E_b = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 Z^2 A^{-1/3}$$

جمله دیگری که انرژی بستگی را کاهش می‌دهد انرژی جنبشی نوکلئونهاست. همچنانکه در مثال ۱۳.۳ خواهیم دید، انرژی جنبشی نوکلئونها با  $A + 5(N-Z)^2 A^{-1/3}$  متناسب است. قسمت اول را که با  $A$  متناسب است، می‌توان در جمله  $a_1 A$  قرار داد. بنا بر این تصحیح انرژی جنبشی موجب می‌شود که یک جمله به صورت  $-a_4(N-Z)^2 A^{-1}$  اضافه کنیم، بنا بر این

$$E_b = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 Z^2 A^{-1/3} - a_4(N-Z)^2 A^{-1} \quad (11.7)$$

از امتحان کردن این معادله با مقادیر تجربی  $E_b$  که از معادله (۱۰.۷) به دست می‌آیند، می‌توانیم چهار ثابت بالا را تعیین کنیم. هرگاه ثابتها طوری انتخاب شوند که با انرژی بستگی هسته‌های با  $A$  فرد (یعنی،  $Z$  فرد و  $N$  زوج، یا برعکس) مطابقت کنند، مشاهده خواهیم نمود که انرژی بستگی هسته‌های با  $A$  زوج به طور سیستماتیک در یکی از دو طرف مقادیر داده شده با معادله (۱۱.۷) قرار می‌گیرند، به این ترتیب که، هسته‌های زوج-زوج انرژی بستگی بزرگتر و هسته‌های فرد-فرد انرژی بستگی کمتری خواهند داشت. از این رو، برای اینکه معادله (۱۱.۷) به بهترین وجه با تمام هسته‌های با  $A > 10$  مطابقت داشته باشد، لازم است که جمله تصحیحی  $\delta$  را اضافه کنیم، به گونه‌ای که

	$Z$	$N$	$A$
	زوج	زوج	زوج
$\delta = \begin{cases} +a_5 A^{-3/4} \\ 0 \\ -a_5 A^{-3/4} \end{cases}$	زوج	فرد	فرد
	فرد	زوج	
	فرد	فرد	زوج

این جمله به انرژی تزویج هسته‌ها مربوط می‌شود. این گفته به این معنی است که به علت اثر تزویج که در بخش (۴.۷) بیان شد، به نظر می‌رسد که برهم کنش هسته‌ای به سمتگیری نسبی تکانه‌های زاویه‌ای نوکلئونها وابسته است. بنا بر این بر حسب آنکه تکانه زاویه‌ای چه تعدادی از زوج نوکلئونها در جهتهای مخالف (یا جفت شده) باشند، در مقدار انرژی بستگی تأثیر خواهد داشت. این تعداد در هسته‌های فرد-فرد، نسبتاً کم و در هسته‌های زوج-زوج نسبتاً زیاد است و در نتیجه، انرژی بستگی هسته‌های زوج-زوج بزرگتر است.

بهترین مقدار برای ثابتها، که بر حسب MeV بیان می‌شوند، عبارت‌اند از

$$a_1 = 157760, \quad a_2 = 177810, \quad a_3 = 0711,$$

$$a_4 = 237702, \quad a_5 = 34$$

در اینجا به دانشجو پیشنهاد می‌کنیم که صحت معادله (۱۱.۷) را با به کار بردن آن در مورد چند هسته بررسی کند.

با توجه به معادله (۱۰.۷) معلوم می‌شود که جرم هر هسته را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$M = Zm_p + (A - Z)m_n - E_b/c^2$$

$$= Zm_p + (A - Z)m_n - a'_1 A + a'_2 A^{1/2} + a'_3 Z^2 A^{-1/2} + a'_4 (N - Z)^2 A^{-1} - \delta' \quad (12.7)$$

مقادیر ثابتهای ظاهر شده در معادله (۱۲.۷)، هنگامی که بر حسب یکای جرم اتمی بیان می‌شوند، عبارت‌اند از

$$a'_1 = 1.669 \times 10^{-2}, \quad a'_2 = 1.91 \times 10^{-2}, \quad a'_3 = 7.63 \times 10^{-4},$$

$$a'_4 = 2.754 \times 10^{-2}, \quad a'_5 = 3.6 \times 10^{-2}$$

مثال ۲۰۷ اختلاف در جرم هسته‌های «آینه‌ای»، یعنی هسته‌هایی که  $A$  آنها فرد و یکسان است اما عدد  $Z$  در یکی برابر با عدد  $N$  در دیگری است و برعکس. به عنوان مثال،  ${}^2\text{He}$  و  ${}^2\text{H}$  یک زوج هسته‌آینه‌ای و هسته‌های  ${}^{22}\text{Na}$  و  ${}^{22}\text{Mg}$  نیز یک زوج هسته‌آینه‌ای دیگر است.

**حل:** هسته‌های آینه‌ای بسا  $A$  فرد را در نظر می‌گیریم که فقط به مقدار یک واحد در  $N$  و  $Z$  باهم اختلاف دارند، یعنی یکی به صورت  $(N, Z)$  و دیگری به صورت  $(N - 1, Z + 1)$  است. چون برای هر دو هسته  $A$  فرد است، می‌توان از جمله انرژی تزیج صرف نظر کرد. ضمناً با توجه به  $N - Z = \pm 1$ ، جمله انرژی جنبشی نیز حذف می‌شود و در نتیجه خواهیم داشت

$$M_{Z+1} - M_Z = m_p - m_n + a'_1 [(Z + 1)^2 - Z^2] A^{-1/2}$$

$$= m_p - m_n + a'_1 (2Z + 1) A^{-1/2}$$

درواقع چون هسته‌های آینه‌ای هسته‌هایی سبک‌اند (یعنی در آنها  $Z$  کوچک است)، همان طور که در مثال ۱۰۷ نشان داده شد، برای جمله کولنی باید به جای  $Z^2$  از  $Z(Z - 1)$  استفاده شود. از این رو

$$M_{Z+1} - M_Z = m_p - m_n + 2a'_3 Z A^{-1/2}$$

$$= (-1.390 + 1.9526 Z A^{-1/2}) \times 10^{-3} \text{amu}$$

با استفاده از این معادله می‌توان مقدار  $a'_3$  را به کمک مقدار مشاهده شده جرم هسته‌های آینه‌ای به دست آورد. از روی مقدار اندازه‌گیری شده  $a'_3$  نیز می‌توان ثابت  $r_0$  را برای

شعاع هسته‌ای تعیین کرد. پیشنهاد می‌کنیم که دانشجو این فرمول را در مورد دو حالت گفته شده بالا به کار برد.

مثال ۳۰۷ عدد اتمی پایدارترین هسته را به ازای عدد جرمی مشخص  $A$  محاسبه کنید.

حل: پایدارترین هسته با عدد جرمی مشخص  $A$  هسته‌ای است که مقدار انرژی بستگی آن بیشترین است. بنابراین، با ثابت فرض کردن  $A$  باید  $\partial E_b / \partial Z$  را محاسبه کنیم و آن را معادل با صفر قرار دهیم. با توجه به عبارت  $E_b$  که با معادله (۱۱.۷) داده شده است و با در نظر گرفتن  $N - Z = A - 2Z$  خواهیم داشت

$$\frac{\partial E_b}{\partial Z} = -2a_p Z A^{-1/2} + 4a_p (A - 2Z) A^{-1} = 0$$

یا، با قراردادن مقادیر عددی  $a_p$  و  $a_n$  نتیجه زیر به دست می‌آید

$$Z = \frac{A}{2 + 0.0157 A^{2/3}} \quad (13.7)$$

برای هسته‌های سبک، که مقدار  $A$  آنها کوچک است، از جمله دوم واقع در مخرج کسر می‌توان چشمپوشی کرد و در نتیجه به طور تقریبی خواهیم داشت  $Z \approx A/2$ . نتیجه فوق به طور تجربی نیز تأیید شده است. در اینجا نیز پیشنهاد می‌کنیم که دانشجو منحنی  $Z$  بر حسب تابعی از  $A$  تا ۲۴۰ (با درجات ۲۰ تایی) را رسم و آن را با شکل ۱۰۷ مقایسه کند.

## ۶.۷ نیروهای هسته‌ای

در این بخش، خواص اصلی نیروهای هسته‌ای را به طور خلاصه بیان می‌کنیم.

۱. نیروهای هسته‌ای کوتاه‌بردند. برد کوتاه بدان معنی است که تنها هنگامی که ذرات برهم کنش کننده در فاصله خیلی نزدیکی (در حدود  $10^{-15}$  m یا کمتر) از یکدیگر قرار دارند، نیروی هسته‌ای قابل توجه است. در فواصل بزرگتر، نیروی هسته‌ای قابل چشمپوشی است. می‌توانیم کوتاه‌برد بودن نیروی هسته‌ای را به این دلیل بدانیم که در فواصل بزرگتر از  $10^{-14}$  m، که با ابعاد هسته‌ای متناظر است، برهم کنشی که پراکندگی نوکلئونها را تنظیم و آنها را در داخل مولکولها گروه بندی می‌کند، برهم کنشی الکترومغناطیسی است. اگر نیروی هسته‌ای بلند برد بود، در بحث مربوط به تشکیل مولکولها، برهم کنش هسته‌ای میان هسته‌های اتمی عمده می‌شد و به همان طریق که در تشکیل اتمها و مولکولها، برهم کنش الکترومغناطیسی بر برهم کنش گرانشی ضعیفتر غالب است، نیروی هسته‌ای نیز بر نیروهای الکترومغناطیسی ضعیفتر غلبه می‌کرد.

برد نیروهای هسته‌ای را می‌توان مستقیماً با انجام آزمایشهای پراکندگی تعیین کرد. به‌عنوان مثال، فرض کنید پروتونی را به‌طرف هسته‌ای نشانه می‌رویم. این پروتون هنگام نزدیک شدن به هسته تحت تأثیر دافعه الکتریکی و نیز نیروی هسته‌ای قرار می‌گیرد. هرگاه برد نیروی هسته‌ای با برد نیروی الکتریکی قابل مقایسه باشد، بدون توجه به اینکه پروتون هنگام عبور از کنار هسته در چه فاصله‌ای (دور یا نزدیک) از آن قرار می‌گیرد، حرکت پروتون تحت تأثیر هر دو نیرو قرار می‌گیرد و توزیع زاویه‌ای پروتونهای پراکنده شده با نتایج حاصل از پراکندگی الکتریکی خالص (یا کولنی) خیلی اختلاف خواهد داشت. از طرف دیگر، هرگاه برد نیروی هسته‌ای کوچک باشد، آن‌عه از پروتونهایی که در فاصله‌ای بزرگتر از برد نیروی هسته‌ای از کنار هسته عبور می‌کنند، لزوماً فقط نیروی الکتریکی خالصی را احساس می‌کنند. تنها پروتونهایی که انرژی جنبشی کافی دارند تا بردافعه کولنی غلبه کنند و از نزدیکی هسته عبور کنند، تحت تأثیر نیروی هسته‌ای قرار خواهند گرفت و پراکندگی آنها نیز با پراکندگی کولنی خالص تفاوت خواهد داشت. مورد اخیر در تجر به مشاهده شده است و کوتاه برد بودن نیروی هسته‌ای را تأیید می‌کند.

۲. به نظر می‌رسد که نیروی هسته‌ای مستقل از بار الکتریکی است. این گفته بدان معنی است که برهم کنشهای هسته‌ای میان دو پروتون، دوترون، یا یک پروتون و یک نوترون اساساً یکسان اند. به‌عنوان مثال، دانشمندان به کمک تحلیل پراکندگی پروتون-پروتون و نوترون-پروتون، نتیجه گرفتند که قسمت هسته‌ای در هر دو مورد اساساً یکسان است. همچنین واقعیات زیر (الف) تعداد پروتونها و نوترونهای هسته‌های سبک باهم برابر است، (ب) انرژی بستگی به‌ازای هر نوکلئون تقریباً ثابت است، و (ج) اختلاف جرم هسته‌های آینه‌ای (مثال ۲.۷) را می‌توان فقط به اختلاف در انرژی کولنی نسبت داد، نشان می‌دهند که برهم کنش هسته‌ای از بار الکتریکی مستقل است. به همین دلیل تا هنگامی که نیروی هسته‌ای مورد نظر است، پروتونها و نوترونها را معادل هم می‌دانند. همان‌طور که قبلاً گفته شد، به همین دلیل است که این ذرات را نوکلئون می‌نامند.

۳. نیروی هسته‌ای به سمتگیری نسبی اسپین نوکلئونهای برهم کنش کننده بستگی دارد. این واقعیت با آزمایشهای پراکندگی و نیز به کمک تحلیل ترازهای انرژی هسته‌ای تأیید شده است. معلوم شده است که انرژی یک سیستم دو نوکلئونی که در آن، دوتو نوکلئون اسپینهای موازی دارند با انرژی سیستمی که در آن اسپین یک نوکلئون به طرف بالا و دیگری به طرف پایین است، اختلاف دارد. در واقع، حالت دستگاه نوترون-پروتون (دوترون) که در آن، اسپین هر دو نوکلئون موازی است ( $S = 1$ )، مقید است و اگر اسپینها پاد موازی باشند ( $S = 0$ ) چنین سیستم مقیدی نمی‌تواند وجود داشته باشد.

۴. نیروی هسته‌ای کاملاً مرکزی نیست بلکه به سمتگیری اسپینها نسبت به خط واصل دو نوکلئون بستگی دارد. دانشمندان با توجه به این واقعیت که حتی در ساده‌ترین هسته‌ها

(دوترون)، تکانه زاویه‌ای مداری دو نوکلئون، برخلاف هنگامی که نیروها مرکزی هستند، نسبت به مرکز جرمشان ثابت نیست، به این نتیجه رسیده‌اند. بنا بر این برای توضیح خواص حالت پایه دوترون، از قبیل گشتاور دو قطبی مغناطیسی و گشتاور چهار قطبی الکتریکی، باید از ترکیب خطی تابع موجهای  $d$  (یا  $l=0$ ) و  $d$  (یا  $l=2$ ) استفاده کنیم. ظاهر آن قسمتی از نیروی هسته‌ای ناشی از برهم کنش نسبتاً قوی اسپین-مدار است. قسمت دیگر، که نیروی تانسوری نام دارد، به برهم کنش میان دو دو قطبی خیلی شباهت دارد.

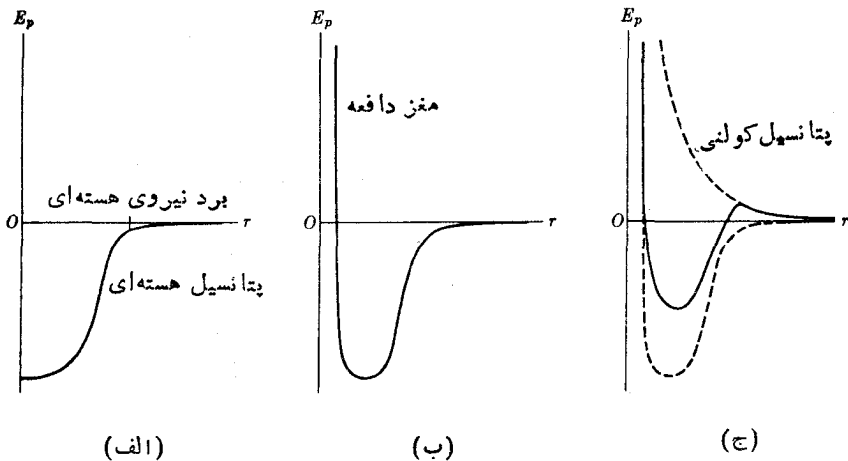
۵. نیروی هسته‌ای يك مغز دافعه دارد. این گفته بدان معنی است که در فواصل کوتاه (یعنی خیلی کوچکتر از برد)، نیروی هسته‌ای به صورت نیروی دافعه در می‌آید. این فرض برای توضیح میانگین فاصله جدایی ثابت نوکلئونها، که به متناسب بودن حجم هسته‌ای با تعداد کل نوکلئونها منجر می‌شود، وضع شده است و برای توضیح جنبه‌های مشخصی از پراکندگی نوکلئون-نوکلئون نیز به کار می‌رود.

علی‌رغم تمام آنچه در بالا گفته شد، عبارت صحیح مربوط به انرژی پتانسیل برای برهم کنش هسته‌ای میان دو نوکلئون هنوز کاملاً شناخته نشده است. تا کنون چندین معادله ارائه شده است که یکی از آنها پتانسیل یوکاوا نام دارد و در حدود سال ۱۹۳۵ میلادی به وسیله یوکاوا فیزیکدان ژاپنی پیشنهاد شده است. پتانسیل یوکاوا با رابطه زیر داده می‌شود

$$E_p(r) = -E_0 r_0 \frac{e^{-r/r_0}}{r}$$

که در آن  $E_0$  و  $r_0$  دو ثابت تجربی‌اند. ثابت  $r_0$  معرف برد نیروی هسته‌ای است و  $E_0$  نیز شدت برهم کنش را به دست می‌دهد. عامل نمایی  $e^{-r/r_0}$  انرژی پتانسیل یوکاوا را خیلی سریعتر از انرژی پتانسیل الکتریکی (که به صورت  $1/r$  تغییر می‌کند) به سمت صفر نزدیک می‌کند. اما، حتی شك و تردیدهایی در این مورد وجود دارد که آیا برهم کنش هسته‌ای را نیز می‌توان بر حسب يك تابع انرژی پتانسیل، به همان طریق که برهم کنشهای گرانشی و الکترومغناطیسی را توضیح دادیم، توصیف کرد یا نه.

به هر حال برای اکثر مسائل، برهم کنش هسته‌ای در انرژیهای کم را می‌توان به طور طرح‌وار با انرژی پتانسیلی که در شکل ۷.۷ (الف) نشان داده شده است نمایش داد. فراتر از يك فاصله مشخص، انرژی پتانسیل عملاً ثابت است، یا به عبارت دیگر، نیرو مساوی با صفر است. در فواصل خیلی کوتاه، باید مغز دافعه را نیز اضافه کرد [شکل ۷.۷ (ب)]. هنگامی که برهم کنشهای  $n-p$  و  $n-n$  را بررسی می‌کنیم این نوع پتانسیل را باید در معادله شرودینگر قرار دهیم. اما، برای برهم کنش  $p-p$ ، لازم است که دافعه کولنی  $e^2/4\pi\epsilon_0 r$  را نیز، که فقط در خارج برد نیروهای هسته‌ای مهم است، اضافه کنیم [شکل ۷.۷ (ج)]. بنا بر این، حل معادله شرودینگر می‌تواند ویژه حالت‌های سیستمهای دو نوکلئونی را به دست دهد. گاهی برای به دست آوردن اطلاعات نیمه کمی می‌توانیم پتانسیل هسته‌ای را



شکل ۷.۷ شکلهای تجربی انرژی پتانسیل هسته‌ای.

با يك چاه پتانسیل مربعی شکل عوض کنیم. ساختار هسته را نمی توانیم همانند آنها و مولکولها به طور کامل بررسی کنیم زیرا شکل دقیق انرژی پتانسیل هسته‌ای را که باید در معادله شرودینگر قرار دهیم نمی دانیم. با وجود این، آگاهی فعلی ما درباره نیروهای هسته‌ای در حدی است که می تواند پایه درستی برای بررسی ساختار هسته‌ای فراهم کند.

### ۷.۷ حالت پایه دوترون

دوترون که از يك پروتون و يك نوترون تشکیل شده است، از ساده ترین هسته‌ها به شمار می رود (البته اگر هسته هیدروژن را که فقط شامل يك پروتون است کنار بگذاریم)، اصولاً فقط برهم کنش هسته‌ای در پیوند يك نوترون و يك پروتون به یکدیگر نقش فعال دارد (از برهم کنش مغناطیسی کوچکی که از گشتاورهای مغناطیسی آنها ناشی می شود می توان چشمپوشی کرد). بنا بر این، از يك تحلیل مفصلتر در مورد خواص دوترون می توان اطلاعات با ارزشی را درباره طبیعت نیروهای هسته‌ای به دست آورد. دوترون تنها يك ویژه حالت دارد (که آشکارا همان حالت پایه است) و انرژی آن برابر است با

$$E = -E_b = -2224 \text{ MeV}$$

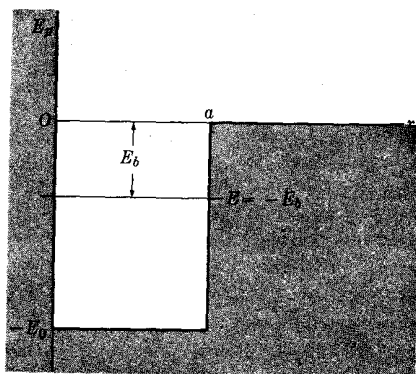
ضمناً اسپین دوترون مساوی با يك است ( $I = 1$ ). بنا بر این می توان فرض کرد که پروتون و نوترون اسپینهای موازی دارند (یعنی،  $S = 1$ ) و تکانه زاویه‌ای مداری حرکت نسبی



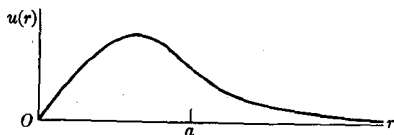
آنها حول مرکز جرم نیز مساوی باصفر است (یعنی،  $L = 0$ ) و به حالت  ${}^2S_1$  منجر می‌شود. در حالت  ${}^2S_1$  گشتاور مغناطیسی مداری وجود ندارد و گشتاور مغناطیسی دوترون با یک مساوی با  $0.8796 = 19131 - 27927 = \mu_p + \mu_n$  مگنتون هسته‌ای باشد که خیلی به مقدار تجربی  $\mu_h = 0.88574$  مگنتون هسته‌ای نزدیک است. بنا بر این به نظر می‌رسد که فرض ما دربارهٔ حالت پایه یک فرض نسبتاً خوب است. با توجه به اینکه نیروهای هسته‌ای مرکزی اندک تابع موج دوترون را می‌توان به همان صورتی بیان کرد که در معادله (۱۸.۳) در مورد یک الکترون بیان شد. در حالت  $S$ ، قسمت زاویه‌ای ثابت است (جدول ۵.۳) و مجبوریم که فقط قسمت شعاعی  $R(r) = u(r)/r$  را در نظر بگیریم که در آن،  $u(r)$  از معادله (۲۴.۳) به دست می‌آید. با قرار دادن  $l = 0$  در این معادله، که با حالت  ${}^2S_1$  متناظر است، و با یادآوری اینکه  $m$  جرم کاهیدهٔ سیستم پروتون-نوترون است (یعنی،  $m \approx m_p/2$ ) خواهیم داشت

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + E_p(r)u = Eu \quad (12.7)$$

اکنون برای سهولت، انرژی پتانسیل هسته‌ای را با چاه مربع شکلی بیان می‌کنیم که مطابق شکل ۸.۷ (الف)، عمق آن  $E_0$  و شعاع آن  $a$  است. بنا بر این مسئله به حالت خاصی تبدیل می‌شود که در مثال ۶.۲ بررسی شد زیرا معادله شرودینگر برای  $u(r)$ ، معادله (۱۴.۷)، همانند معادله شرودینگر برای  $\psi(x)$  در آن مثال است. در اینجا نتیجه می‌گیریم که شکل  $u(r)$  به صورت زیر است



(الف)



(ب)

شکل ۸.۷ (الف) چاه پتانسیل راست‌گوشهٔ دوترون. (ب) تابع موج حالت پایه.

۱. دخالت دادن یک مغز دافعه، نتایج به دست آمده در این بخش را به طور قابل توجهی تغییر نخواهد داد و به این دلیل است که از ملاحظات مربوط به آن صرف نظر می‌کنیم.

$$u(r) = \begin{cases} A \sin k_i r, & r < a \\ C e^{-\alpha r}, & r > a \end{cases}$$

که در آن

$$k_i^2 = 2m \frac{E_0 - E_b}{\hbar^2}$$

$$\alpha^2 = \frac{2mE_0}{\hbar^2}$$

این تابع موج در شکل ۸.۷ (ب) نشان داده شده است. پیوستگی ویژه تابع در  $r = a$  مستلزم آن است که معادله (۲۳.۲) برقرار باشد یعنی

$$k_i \cot k_i a = -\alpha \quad (15.7)$$

یا

$$\left[ 2m \frac{E_0 - E_b}{\hbar^2} \right]^{1/2} \cot \left[ 2m \frac{E_0 - E_b}{\hbar^2} \right]^{1/2} a = - \left[ \frac{2mE_0}{\hbar^2} \right]^{1/2}$$

در حالت مورد نظر ما،  $E_b$  معلوم است و با به کار بردن معادله بالا می‌توان اطلاعاتی را در مورد  $E_0$  و  $a$  به دست آورد. چون فقط یک ویژه حالت وجود دارد، با توجه به مثال ۶.۲ خواهیم داشت

$$\frac{\pi^2 \hbar^2}{8m} < E_0 a^2 < \frac{9\pi^2 \hbar^2}{8m}$$

حالت پایه دوترون فقط مقدار  $E_0 a^2$  را به دست می‌دهد که در حدود  $10^{-28} \text{MeV m}^2$  یا  $1.48 \times 10^{-28} \text{MeV m}^2$  است. برای اینکه  $E_0$  و  $a$  را به طور جداگانه به دست آوریم باید رابطه دیگری را نیز در دست داشته باشیم. از آزمایشهای پراکندگی می‌توان برسد  $a$  را برآورد کرد (بخش ۸.۷). از این رو اگر  $a$  از مرتبه  $10^{-15} \text{m}$  یا  $2 \times 10^{-15} \text{m}$  باشد برای  $E_0$  مقداری در حدود  $37 \text{MeV}$  به دست خواهیم آورد. لازم به یادآوری است که هر گاه به جای چاه پتانسیل مربعی شکل، نوع دیگری از پتانسیل بایر دکوتاه را به کار ببریم، مقادیر متفاوتی را برای  $E_0$  و  $a$  به دست خواهیم آورد.

در آغاز این فصل اشاره کردیم که اختلاف کوچکی میان مقادیر  $\mu_p + \mu_n$  و  $\mu_d$  وجود دارد که باید در نظر گرفته شود. ضمناً دوترون یک گشتاور چهار قطبی الکتریکی به مقدار  $Q_d = 2.82 \times 10^{-31} \text{m}^2 \text{C}$  دارد. اما حالت  $^3\text{S}_1$  تقارن کروی دارد و گشتاور

چهار قطبی الکتريکی ندارد. از این رو، به نظر می رسد که فرض ما دربارهٔ حالت پایه  ${}^2S_1$  در مورد دوترون کاملاً صادق نیست.

حالت  ${}^2S_1$  تنها حالت سازگار با  $I = 1$  نیست بلکه می توانیم حالت های  ${}^1P_1$  ( $S=0, L=1$ )،  ${}^3P_1$  ( $S=1, L=1$ ) و  ${}^3D_1$  ( $S=1, L=2$ ) را نیز داشته باشیم. هر گاه مقادیر  $\mu_H$  و  $Q_H$  برای چنین حالت هایی را نیز محاسبه کنیم، مشاهده خواهیم کرد که نتایج به دست آمده همگی با مقادیر تجربی اختلاف زیادی خواهند داشت. برای رفع این اشکال می توان فرض کرد که تابع موج حالت پایهٔ دوترون يك ترکیب خطی از چهار تابع موج ممکن است که قبلاً ذکر کردیم. اما حالت های  ${}^2S_1$  و  ${}^3D_1$  پاریتهٔ زوج و حالت های  ${}^1P_1$  و  ${}^3P_1$  نیز پاریتهٔ فرد دارند. بنابراین، هر گاه حالت پایهٔ دوترون پاریتهٔ کاملاً معینی داشته باشد (مثلاً وقتی که نیرو در دو ذره برهم کنش کننده، متقارن است)، تنها باید حالت های  ${}^2S_1$  و  ${}^3D_1$  را ترکیب کرد. محاسبهٔ مفصل (که از ذکر آن خودداری می کنیم) نشان می دهد که به منظور سازگاری با مقادیر تجربی  $\mu_H$  و  $Q_H$  باید داشته باشیم

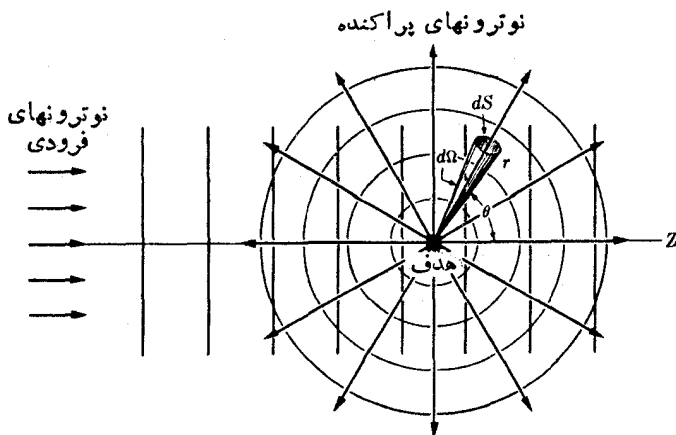
$$\psi_{\text{دوترون}} = 0.98\psi({}^2S_1) + 0.20\psi({}^3D_1)$$

این واقعیت که مجبوریم حالت های با  $L=0$  و  $L=2$  را مخلوط کنیم نشان می دهد که تکانهٔ زاویه ای مداری دوترون مقدار کاملاً مشخص و معینی ندارد و بنا بر این نیروی هسته ای کاملاً مرکزی نیست. در دوترون، قسمت غیر مرکزی به نیروی تانسوری نسبت داده می شود.

## ۸.۷ پراکندگی نوترون-پروتون در انرژیهای پایین

منبع بر ارزش دیگری که می تواند اطلاعاتی دربارهٔ نیروی هسته ای میان دوترون و پروتون به دست دهد آزمایش های پراکندگی است. برای انجام دادن آزمایش های پراکندگی پروتون - پروتون، يك باریکهٔ پروتونی حاصل از يك شتاب دهنده را بروی هدفی که شامل اتم های هیدروژن است می تابانند و پروتون های پراکنده شده را تحلیل می کنند. انحراف از پراکندگی خالص کولنی اطلاعاتی را دربارهٔ نیروی هسته ای فراهم می کند. به طریق مشابه، در پراکندگی نوترون-پروتون، يك باریکهٔ نوترونی حاصل از يك رآکتور هسته ای، یا دیگر منبع نوترونی را به طرف هدف هیدروژن نشانه می روند و نوترون های پراکنده شده را تحلیل می کنند. آزمایش های مربوط به پراکندگی نوترون-نوترون مشکل ترند، زیرا داشتن هدفی که فقط شامل نوترون باشد غیر ممکن است، بنا بر این لازم است که از روش های غیر مستقیم استفاده شود.

اکنون پراکندگی n-p را در نظر می گیریم. فرض می کنیم که باریکه ای از نوترون های با تکانهٔ  $p = \hbar k$ ، مطابق آنچه در شکل ۹.۷ دیده می شود، در امتداد محور Z حرکت می کند. از این رو، ذرات فرودی را می توان با تابع موج  $e^{ikz}$  فرودی  $\psi$  بیان کرد. چگالی



شکل ۹.۷ پراکنندگی ذرات.

جریان متناظر با این ذرات به صورت  $v = |فرودی\psi|^2 = v$  فرودی  $z$  است. هنگامی که نوترونها از نزدیکی هدف عبور کنند تحت اثر نیروی هسته‌ای حاصل از برهم کنش آنها با پروتونها از راستای حرکت اولیه خود منحرف می‌شوند. نوترونهايي که در فواصل بسیار زیاد از هدف پراکنده می‌شوند با تابع موجی نمایش داده می‌شوند که به امواج کروی شباهت دارد، یعنی، تابع موج آنها به صورت  $e^{ikr}/r$  است (مسئله ۳۰.۳). شدت پراکنندگی الزاماً در تمام راستاها یکسان نیست و به‌طور کلی به زاویه  $\theta$ ، که راستای پراکنندگی با محور  $Z$  می‌سازد، بستگی دارد. بنابراین می‌توان نوشت  $f(\theta)e^{ikr}/r =$  پراکنده  $\psi$  که در آن  $f(\theta)$  دامنه پراکنندگی نام دارد. تابع موج کل عبارت است از

$$\psi = \psi_{فرودی} + \psi_{پراکنده} = e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (۱۶.۷)$$

شار ذرات پراکنده شده در داخل سطح  $dS$  به ازای زمان واحد (شکل ۹.۷) برابر است با

$$v |فراکنده\psi|^2 = v |f(\theta)|^2 \frac{dS}{r^2}$$

اما  $dS/r^2$  برابر زاویه فضائی  $d\Omega$  است که سطح  $dS$  را در برمی‌گیرد. از این رو

$$v |f(\theta)|^2 d\Omega = \text{شار ذرات پراکنده شده در واحد زمان در داخل سطح } dS$$

سطح مقطع دیفرانسیلی  $\sigma(\theta)$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\sigma(\theta) = \frac{d\Omega \text{ پراکنده شده در واحد زمان در داخل } d\Omega}{d\Omega \times (\text{جنگالی جریان ذره فرودی})} = |f(\theta)|^2 \quad (17.7)$$

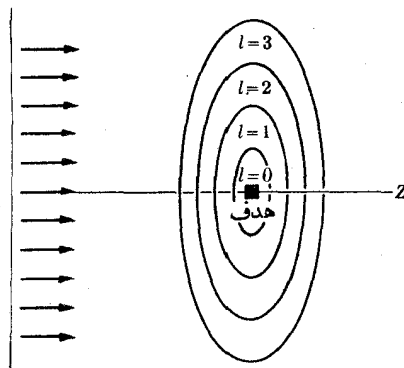
هرگاه  $\sigma(\theta)$  را از طریق تجربه پیدا کنیم، با به کار بردن معادله (۱۷.۷) می توانیم  $f(\theta)$  را به دست آوریم. بنا بر این می توانیم نیروهای هسته ای که تابع مشاهده شده  $f(\theta)$  را به دست می دهند پیدا کنیم. به کمک این موضوع می توانیم طبیعت برهم کنش هسته ای را حدس بزنیم.

هنگامی که انرژی نوترونهای ورودی خیلی کم است، عبارت ساده ای را می توانیم برای  $f(\theta)$  به دست آوریم. ابتدا یادآوری می کنیم که باریکه ورودی ترکیبی از ذرات با تکانه  $\hbar k$  در راستای موازی با محور  $Z$  است ولی چون در فواصل متفاوتی از محور حرکت می کنند، تکانه های زاویه ای مختلفی را نسبت به پراکننده به دست می آورند. یعنی، تابع موج  $e^{ikz}$  نمی تواند اطلاعاتی درباره مکان ذرات به دست دهد بلکه فقط احتمال اینکه یک ذره ورودی مشخص يك تکانه زاویه ای معین داشته باشد را به دست می دهد. از این رو، می توان گفت که تابع موج  $e^{ikz}$  يك باریکه از ذراتی را توصیف می کند که انرژی و تکانه آنها یکسان ولی تکانه زاویه ای آنها متفاوت است. به عبارت دیگر، بر طبق رابطه زیر می توان  $e^{ikz}$  را به صورت مجموعی از تابع موجهای تکانه زاویه ای بیان کرد

$$e^{ikz} = \sum_l \psi_l \quad (18.7)$$

که در آن هر  $\psi_l$  (که يك موج جزئی نام دارد) با تکانه زاویه ای مشخصی متناظر است و بستگی زاویه ای آن مثل بستگی توابع  $Y_{l0}$  در جدول ۵.۳ است. (یادآوری می شود که باید داشته باشیم  $m_l = 0$  زیرا اگر ذرات در امتداد موازی با محور  $Z$  حرکت کنند، تکانه زاویه ای آنها نسبت به مبدأ مختصات باید عمود بر محور  $Z$  باشد، یعنی  $L_z = 0$ ).

با به کار بردن يك تصویر کلاسیکی می توان پارامتر برخورد  $b$  را به صورت فاصله عمودی از محور  $Z$  (هنگامی که ذره هنوز هم در فاصله خیلی دور و در طرف چپ قرار دارد) تعریف کرد، به گونه ای که  $L = bp = b\hbar k$  اما  $L = \hbar \sqrt{l(l+1)} \approx \hbar l$  بنا بر این  $l \sim bk$  و از این رو، بر حسب تکانه زاویه ای آنها، ذرات در داخل نواحی متفاوتی که در شکل ۱۵.۷ نشان داده شده است قرار می گیرند. هنگامی که نیروی هسته ای از نوع با برد کوتاه باشد، تنها اگر  $b$  از مرتبه برد یا کوچکتر از آن باشد پراکندگی قابل توجهی وجود خواهد داشت. یعنی از میان باریکه ورودی، تنها ذراتی پراکنده می شوند که برای آنها داشته باشیم  $b \times k \ll l$  برای انرژیهای خیلی پایین،  $k$  بسیار کوچک است و تنها ذرات با  $l = 0$  پراکنده می شوند. بنا بر این می گوئیم که پراکندگی  $s$  را داریم. به زبان کوانتومی می توان گفت که در حضور پراکننده با برد کوتاه، تنها قسمت  $l = 0$  تابع موج فرودی  $\psi$  در معادله (۱۸.۷) (یا موج جزئی  $\psi_0$ ) مربوط به باریکه نوترونی با انرژی



شکل ۱۰.۷ نواحی تکانه زاویه‌ای.

خیلی کم، تغییر می‌کند و به صورت  $\psi_0$  درمی‌آید، درحالی که به ازای  $l > 0$ ، توابع  $\psi_l$  همانند توابع موجود در معادله (۱۸.۷) خواهند بود. از این رو، تابع موج اصلاح شده بر اثر پراکندگی باید به صورت زیر بیان شود

$$\psi = \psi_0 + \sum_{l>0} \psi_l$$

می‌توان نشان داد که تابع جزئی  $\psi_l$  با تکانه زاویه‌ای صفر، متناظر با تابع موج ذره آزاد  $e^{ikz}$  = فرودی  $\psi_0$  به صورت زیر است

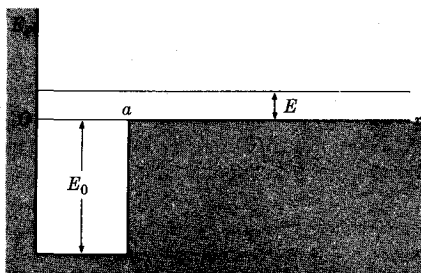
$$\psi_0 = \frac{\sin kr}{kr}$$

در شکل ۱۱.۷ (ب) تابع  $\sin kr = kr\psi_0$  با منحنی خط چین نشان داده شده است. برای به دست آوردن تابع موج تکانه زاویه‌ای صفر اصلاح شده  $\psi_0$ ، یادآوری می‌کنیم که در حالت مربوط به چاه پتانسیل راستگوشه [شکل ۱۱.۷ (الف)]، به ازای  $r > a$  ذره آزاد است ولی تابع موج آن به ازای  $r < a$  به انرژی پتانسیل هسته‌ای بستگی دارد. از این رو، تابع موج به ازای  $r > a$  هنوز هم یک جواب ذره آزاد است، ولی در طول راستای شعاعی جا به جا شده است به طوری که به آرامی به جواب به ازای  $r < a$  می‌پیوندد (مثال ۶.۲) بنابراین باید نوشت

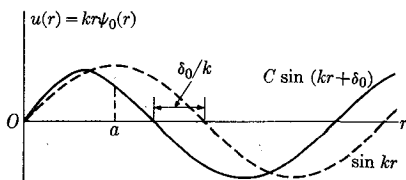
$$\psi_0' = C \frac{\sin(kr + \delta_0)}{kr}$$

کمیت  $\delta_0$  به انتقال فاز معروف است. در شکل ۱۱.۷ (ب) تابع موج

$$kr\psi_0' = C \sin(kr + \delta_0)$$



(الف)



(ب)

شکل ۱۱۰۷ (الف) چاه پتانسیل راستگوشهٔ فوترون. (ب) تابع موجهای انرژی مثبت.

با خطوط پر نمایش داده شده است. یادآوری می‌شود که دامنهٔ  $\psi$  نیز با دامنهٔ  $\psi_0$  اختلاف دارد. در این صورت می‌توان نشان داد (مثال ۴.۷) که سطح مقطع پراکنندگی دیفرانسیلی با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\sigma(\theta) = \frac{\sin^2 \delta_0}{k^2} \quad (19.7)$$

چون  $\sigma(\theta)$  مستقل از زاویهٔ  $\theta$  است، پراکنندگی تقارن کروی دارد. سطح مقطع پراکنندگی کل عبارت است از

$$\sigma = \int \sigma(\theta) d\Omega = \frac{4\pi \sin^2 \delta_0}{k^2} \quad (20.7)$$

زیرا زاویهٔ فضایی کل حول هدف مساوی است با  $4\pi$ . به کمک مقدار مشاهده شدهٔ  $\sigma$  می‌توان انتقال فاز  $\delta_0$  را از طریق تجربی به دست آورد. از طرف دیگر، هرگاه از معادلهٔ (۱۵.۷) استفاده شود، می‌توان نشان داد که در انرژیهای خیلی پایین خواهیم داشت

$$\sin^2 \delta_0 = \frac{\hbar k^2 / 2m}{E_0 + E}$$

از این رو می‌توان معادلهٔ (۲۰.۷) را به صورت زیر نوشت

$$\sigma = \frac{4\pi(\hbar^2 / 2m)}{E_0 + E} \quad (21.7)$$

در آزمایشهای پراکنندگی، فوترون و پروتون می‌توانند اسپینهای موازی (حالت سه‌تایی) یا پاد موازی (حالت منفرد) داشته باشند و بنا بر این با امتحان کردن سطح مقطع در هر حالت می‌توان تعیین کرد که آیا نیرو وابسته به اسپین است یا مستقل از آن.

نتایج تجربی نشان می‌دهند که دو سطح مقطع با هم متفاوت اند و از این رو معلوم می‌شود که نیرو وابسته به اسپین است. هر گاه يك چاه مربعی شکل را در نظر بگیریم، مقادیر عمق و پهنا برای حالت سه تایی  $E_0 = 262 \text{ MeV}$  و  $a = 225 \times 10^{-15} \text{ m}$  به دست می‌آید، در حالی که برای حالت تک تایی باید مقادیر  $E_0 = 178 \text{ MeV}$  و  $a = 281 \times 10^{-15} \text{ m}$  را به کار ببریم.

هر گاه انرژی نوترونهاي ورودی افزایش یابد، پراکنندگی بر روی امواج جزئی با تکانه زاویه‌ای بزرگتر از صفر تأثیر می‌گذارد. تأثیر بر هر موج جزئی  $\psi_l$  با انتقال فاز متناظر  $\sigma_l$  بیان می‌شود، به طوری که سطح مقطع کل با رابطه زیر داده می‌شود

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l \sin^2 \delta_l \quad (22.7)$$

معادله (۲۰.۷) با موردی متناظر است که در آن تنها انتقال فاز غیر صفر،  $\delta_0$  است. انتقالهای فاز  $\delta_l$  توابعی از انرژی اند. با اندازه‌گیری  $\sigma$  در انرژیهای مختلف و تحلیل توزیع زاویه‌ای ذرات پراکنده شده، به طور تجربی می‌توان مقادیر  $\sigma_l$  را به دست آورد. از طرف دیگر، با فرض يك انرژی پتانسیل معقول برای برهم کنش میان ذره ورودی و پراکننده می‌توان مقادیر  $\sigma_l$  را از لحاظ نظری محاسبه کرد. بنابراین، در جستجوی ما برای پیدا کردن شکل برهم کنش هسته‌ای، آزمایشهای پراکنندگی بسیار مفیدند.

مثال ۴.۷ سطح مقطع برای پراکنندگی s را محاسبه کنید.

حل: از ترکیب معادلات (۱۶.۷) و (۱۸.۷) می‌توان نوشت

$$\psi = \sum_l \psi_l + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

که هر گاه با معادله (۱۹.۷) مقایسه شود نتیجه زیر به دست می‌آید

$$\psi_0 = \psi_0 + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

از نتیجه مسئله (۱۸.۳) می‌دانیم که  $\psi_0 = A(\sin kr)/r$  است. تحلیل مفصلتر مبتنی بر بهنجارش تابع موج (که از ذکر آن در اینجا خودداری می‌کنیم) نشان می‌دهد که باید  $A$  را مساوی با  $1/k$  بگیریم. بنابراین

$$\psi_0 = \frac{\sin kr}{kr}$$

ضمناً همان طور که قبلاً نشان دادیم



$$\psi'_0 = C \frac{\sin(kr + \delta_0)}{kr}$$

از این رو، خواهیم داشت

$$C \frac{\sin(kr + \delta_0)}{kr} = \frac{\sin kr}{kr} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

با توجه به رابطه  $\sin \alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) / 2i$  پس از یک سری محاسبات جبری ساده، برای دامنه پراکندگی رابطه زیر را به دست خواهیم آورد

$$f(\theta) = \frac{e^{i\delta_0} \sin \delta_0}{k^2}$$

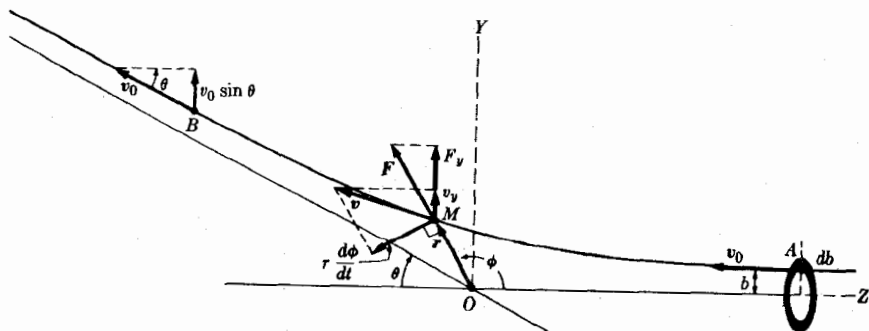
بنابراین، با به کار بردن معادله (۱۷.۷) می توانیم سطح مقطع دیفرانسیلی را به صورت زیر بنویسیم

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 = \frac{\sin^2 \delta_0}{k^2}$$

که همان عبارت داده شده در معادله (۱۹.۷) برای  $l = 0$  یا پراکندگی s است.

مثال ۵.۷ سطح مقطع پراکندگی کولنی یک ذره باردار به وسیله هسته را محاسبه کنید.

حل: هنگامی که ذره بارداری، مثلا الکترون، پروتون، یا ذره آلفا (یا هسته هلیوم) از نزدیکی یک هسته عبور می کند، تحت تأثیر یک نیروی الکتریکی دافعه یا جاذبه قرار می گیرد که به بار ذره ورودی بستگی دارد. در نتیجه، ذره ورودی، پراکنده یا از مسیر اولیه خود منحرف می شود. فرض می کنیم که  $O$  مکان هسته و  $A$  مکان اولیه پرتابه باشد که خیلی دور از  $O$  قرار دارد (شکل ۱۲.۷). سرعت اولیه ذره در  $A$  مساوی با  $v_0$  است. پارامتر



شکل ۱۲.۷ پراکندگی کولنی ذره باردار.

برخورد  $b$  عبارت است از فاصله عمودی  $A$  تا خط  $OZ$  که از نقطه  $O$  عبور می‌کند و در امتداد موازی با  $v_0$  قرار می‌گیرد. بنابراین، هنگامی که ذره در  $A$  قرار دارد، تکانه زاویه‌ای آن نسبت به  $O$  برابر با  $L = mv_0 b$  است. اگر نیرو مرکزی باشد، تکانه زاویه‌ای در خلال فرایند ثابت باقی می‌ماند.

هر گاه  $ve$  بار ذره (که برای الکترونها  $v = -1$ ، و برای پروتونها و دوترونها  $v = +1$ ، و برای هسته‌های هلیوم  $v = +2$  است) و  $Ze$  نیز بار هسته باشد، نیروی دافعه وارد بر ذره عبارت است از

$$F = \frac{vZe^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (23.7)$$

ذره ورودی تحت اثر این نیرو، یک مسیر هذلولوی را طی می‌کند و انحرافی (یا پراکنندگی) را، که با زاویه  $\theta$  داده می‌شود، متحمل می‌شود. زاویه اخیر تابعی از  $v_0$  و  $b$  یا (معادل با آن) تابعی از انرژی و تکانه زاویه‌ای پرتابه است.

هنگامی که ذره در  $M$  قرار دارد، تکانه زاویه‌ای آن برابر با  $mr^2(d\phi/dt)$  است، زیرا  $r(d\phi/dt)$  مؤلفه سرعت عمود بر  $r$  است. بنابراین، چون تکانه زاویه‌ای به خط‌اطر مرکزی بودن نیرو باید ثابت باقی بماند لذا

$$mr^2 \frac{d\phi}{dt} = mv_0 b \quad (24.7)$$

معادله حرکت در راستای  $Y$  عبارت است از

$$m \frac{dv_y}{dt} = F_y = F \sin \phi = \frac{vZe^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \phi$$

با به‌کار بردن معادله (24.7) می‌توانیم  $r^2$  را حذف کنیم و در نتیجه خواهیم داشت

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{vZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0 b} \sin \phi \frac{d\phi}{dt}$$

برای به‌دست آوردن انحراف ذره باید از این معادله، از یک حد مسیر تا حد دیگر، انتگرال گرفت. در  $A$  مقدار  $v_y$  مساوی با صفر است زیرا حرکت اولیه موازی با محور  $Z$  است و ضمناً مقدار  $\phi$  نیز صفر است. در  $B$ ، خواهیم داشت  $v_y = v_0 \sin \theta$  و  $\phi = \pi - \theta$ . توجه کنید که در  $B$  سرعت مجدداً مساوی با  $v_0$  است زیرا به دلیل تقارن (یا پایستگی انرژی)، اتلاف سرعت در هنگامی که ذره به  $O$  نزدیک می‌شود باید وقتی ذره از  $O$  دور می‌شود دوباره به‌دست آید. بنابراین

$$\int_0^{v_0 \sin \theta} dv_y = \frac{vZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0 b} \int_0^{\pi - \theta} \sin \phi d\phi$$

$$v_0 \sin \theta = \frac{vZe^{\chi}}{4\pi\epsilon_0 m v_0 b} (1 + \cos \theta)$$

با توجه به رابطه  $\cot(\theta/2) = (1 + \cos \theta) / \sin \theta$  نتیجه نهایی زیر را به دست خواهیم آورد

$$\cot(\theta/2) = \frac{4\pi\epsilon_0 m v_0^{\chi}}{vZe^{\chi}} b \quad (25.7)$$

رابطه بالا زاویه پراکنندگی را برحسب پارامتر برخورد  $b$  یا تکانه زاویه‌ای  $L = m v_0 b$  به دست می‌دهد.

اکنون سطح مقطع را، که درحالات کلی با معادله (۱۷.۷) تعریف گردید، محاسبه می‌کنیم. فرض می‌کنیم که باریکه‌ای از ذرات حاصل از یک ماشین شتاب‌دهنده به طرف هسته هدف  $O$  روانه می‌شود. تکانه زاویه‌ای یا پارامتر برخورد تمام ذرات یکسان نیست و بنا بر این همگی آنها انحراف یکسانی را متحمل نمی‌شوند. آن‌عده از ذرات که میان زوایای  $\theta$  و  $\theta + d\theta$  منحرف می‌شوند ذراتی هستند که پارامتر برخورد آنها بین مقادیر  $b$  و  $b + db$  است؛ یعنی، ذراتی که درحلقه سایه‌دار شکل ۱۲.۷ قرار گرفته‌اند. مساحت این حلقه مساوی با  $2\pi b db$  است. هرگاه تعداد ذرات موجود در باریکه فرودی در واحد سطح مقطع مساوی با  $N$  باشد، تعداد ذراتی که در واحد زمان از داخل حلقه عبور می‌کنند برابر است با  $v_0 N (2\pi b db)$ . این مقدار درست همان شار ذرات پراکنده شده در واحد زمان در داخل زاویه فضایی  $d\Omega$  است که با  $\theta$  و  $\theta + d\theta$  تعریف می‌شود. واضح است که مقدار چگالی جریان فرودی برابر  $v_0 N$  است. بنابراین، با به کار بردن معادله (۱۷.۷) برای سطح مقطع پراکنندگی خواهیم داشت

$$\sigma_c(\theta) = \frac{v_0 N (2\pi b db)}{v_0 N d\Omega} = 2\pi b \frac{db}{d\Omega} \quad (26.7)$$

که در آن، شاخص پایین  $C$  برای مشخص کردن پراکنندگی کولنی به کار رفته است. از معادله (۲۵.۷) داریم

$$b = \left( \frac{vZe^{\chi}}{4\pi\epsilon_0 m v_0^{\chi}} \right) \cot \theta/2$$

و بنا بر این

$$db = -\frac{1}{2} \left( \frac{vZe^{\chi}}{4\pi\epsilon_0 m v_0^{\chi}} \right) \csc^2(\theta/2) d\theta$$

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta = 2\pi \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) d\theta$$

از قراردادن این مقادیر در معادله (۲۶.۷) و با به کار بردن فقط مقادیر مطلق (زیرا علامت منفی صرفاً بدان معنی است که با افزایش  $b$  مقدار  $\theta$  کاهش می‌یابد) خواهیم داشت

$$\sigma_C(\theta) = \frac{v^2 Z^2 e^4}{4(\pi \epsilon_0)^2 m^2 v^4} \text{CSC}^4 \theta/2 \quad (27.7)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که ذرات پراکنده شده با قانون نیروی عکس مجذوری، برطبق رابطه  $\text{CSC}^4(\theta/2)$  به طور آماری توزیع شده‌اند. معادله (۲۷.۷) را ارنست رادرفورد فیزیکدان انگلیسی به دست آورد و در خلال سالهای ۱۹۱۱ تا ۱۹۱۳، خود او و همکارانش در آزمایشهای انجام شده برای تحلیل پراکندگی ذرات آلفا هنگام عبور از میان یک ورقه نازک آن را به کار بردند. اثبات تجربی قانون  $\text{CSC}^4(\theta/2)$  معرف شاهدی برای مدل هسته‌ای اتم است، که از آن زمان به عنوان یک مدل اتمی درست پذیرفته شده است.

هرگاه تنها نیروی وارد از هسته هدف بر پرتابه همان دافعه کولنی باشد، معادله (۲۷.۷) در تمام انرژیها برقرار خواهد بود. ولی هنگامی که تکانه زاویه‌ای (یا پارامتر برخورد) پرتابه به قدر کافی کوچک یا انرژی آن به قدر کافی بزرگ است، به طوری که از فاصله نزدیکی از کنار هسته عبور کند، اگر علاوه بر نیروی کولنی، یک نیروی هسته‌ای با برد کوتاه نیز موجود باشد انحراف از  $\sigma_C(\theta)$  وجود خواهد داشت. از تحلیل این انحرافات می‌توان انتقالهای فزاینده برای اثرات هسته‌ای محاسبه کرد. به عنوان مثال، این محاسبات می‌توانند اطلاعاتی درباره نیروی هسته‌ای میان دو پروتون به دست دهند.

هنگامی که الکترونها یا پروتونها پرتابه به کار روند، ممکن است به داخل هسته نفوذ کنند. این فرایند نیز انحرافی را از  $\sigma_C(\theta)$  تولید می‌کند که در این حالت، از توزیع بار موجود در داخل هسته ناشی می‌شود. به کمک تحلیل این انحرافات بود که هوف ستادتر و همکارانش منحنیهای شکل ۲.۷ را به دست آوردند.

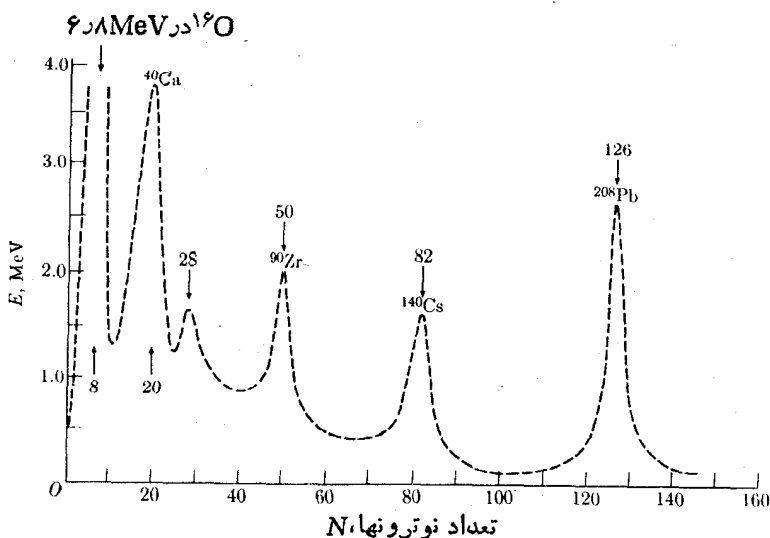
توجه کنید که در بحث بالا از بیان کلاسیکی پراکندگی کولنی استفاده کردیم که این ممکن است نسبت به روش به کار رفته در بخش قبل برای توصیف پراکندگی هسته‌ای، انحرافی به نظر برسد. اما، محاسبات ریاضی پراکندگی کولنی که با استفاده از روشهای کوانتومی انجام می‌شود نسبتاً پیچیده است که در این کتاب داخل بحث آن نمی‌شویم. یک دلیل این اشکال آن است که نیروی کولنی، که با معادله (۲۳.۷) داده می‌شود، از نوع نیروی بلند برد است و بنابراین بر تمام موجهای جزئی موجود در معادله (۱۸.۷) تأثیر می‌گذارد، حتی اگر انرژی خیلی کم باشد. از طرف دیگر، پراکندگی کولنی یکی از مواردی است که در آن نتایج توصیفهای کلاسیکی و کوانتومی با یکدیگر سازگاری دارند. می‌توان نشان داد که دامنه پراکندگی برای پراکندگی کولنی با رابطه زیر داده می‌شود

$$f_C(\theta) = \frac{vZe^2}{2(\pi\epsilon_0)mv^2} \text{csc}^2 \frac{1}{2} \theta e^{-i\gamma \ln(\sin^2 \theta/2) + i\eta} \quad (28.7)$$

که هر گاه در معادله (۱۷.۷) قرار داده شود، همان مقدار معادله (۲۷.۷) را برای  $\sigma_C$  به دست می‌دهد. در معادله بالا داریم  $\gamma = vZe^2 / \pi\epsilon_0 \hbar v$  و  $\eta$  نیز ثابتی است که به  $\gamma$  وابسته است.

## ۹.۲ مدل پوسته‌ای

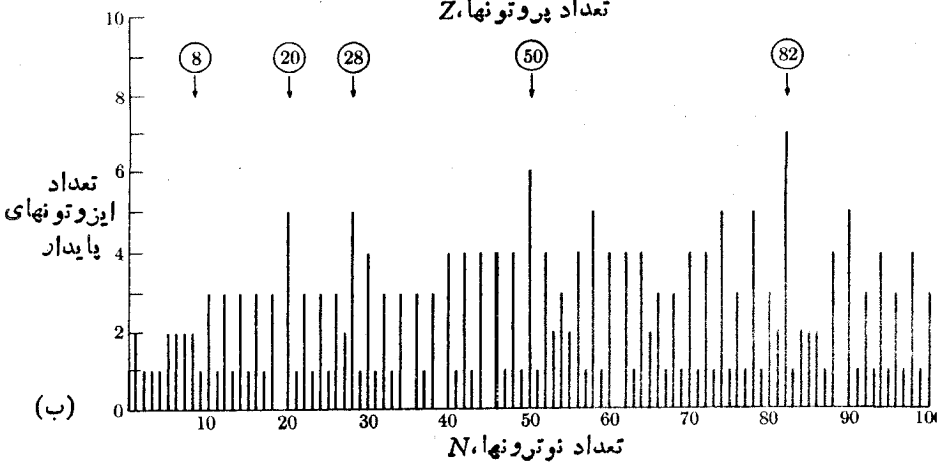
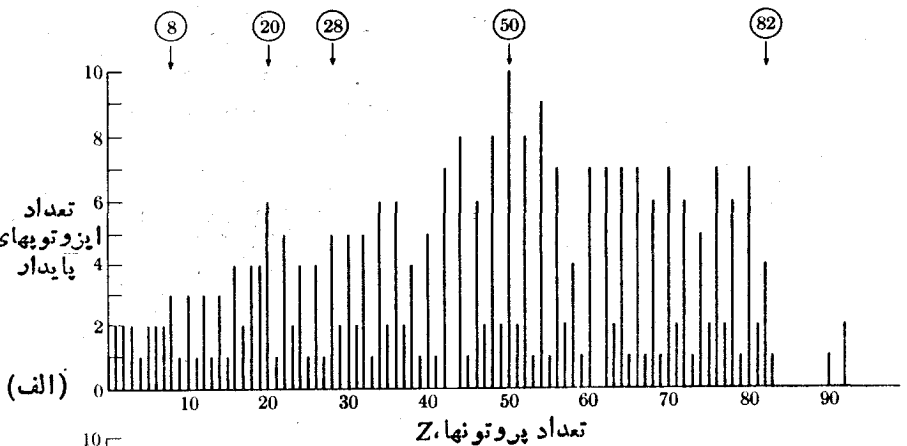
یک هدف اساسی فیزیک هسته‌ای تعیین حرکت نوکلئونهای هسته به منظور مطالعه خواص هسته‌ای در حالت پایه و نیز در حالت‌های برانگیخته است. به دلیل نبود یک نیروی مرکزی غالب و نیز به علت وجود دو نوع ذره (پروتون و نوترون) که هر کدام به طور جداگانه از اصل طرد پیروی می‌کنند این مسئله مشکلتر از مسئله مربوط به اتم است. با این حال، شواهد قوی نشان می‌دهند که هر نوکلئون در میدان نیروی میانگینی که سایر نوکلئونها تولید می‌کنند و در اولین تقریب می‌توان آنرا مرکزی در نظر گرفت، حرکت می‌کند. از این رو، با به کار بردن مدل ذره-مستقل، همانند آنچه برای الکترونهای موجود در اتم به کار رفت، می‌توانیم حالت‌های انرژی نوکلئون را با اعداد کوانتومی  $n$  و  $l$  که تراز انرژی و تکانه زاویه‌ای مداری را به دست می‌دهند، مشخص کنیم. عدد کوانتومی  $n$  برای مشخص کردن ترتیب افزایش انرژی ترازهای متوالی با  $l$  یکسان انتخاب شده است. از این رو،  $1s$ ،  $2s$ ،  $3s$ ، ... و مانند آن اولین، دومین، سومین، و... تراز انرژی به ترتیب افزایش انرژی



شکل ۱۳۰۷ انرژی اولین حالت برانگیخته برای هسته‌های زوج-زوج.

هستند و در همه آنها،  $I$  برابر صفر است.

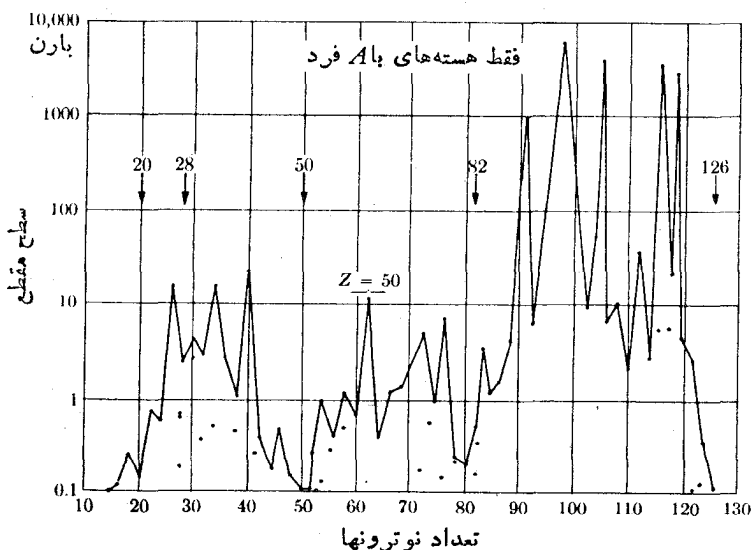
به همان ترتیب که آنها یک ساختار پوسته‌ای دارند و هنگامی که تمام ترازهای انرژی تا حداکثر ظرفیت اشغال شدند پوسته‌ها تکمیل می‌شوند، ترازهای هسته‌ای نیز یک ساختار پوسته‌ای گونه از خود نمایش می‌دهند. چون دوتونوع ذره در داخل هسته وجود دارد، لذا یک آرایش پوسته‌ای دوگانه، یکی برای پروتونها و دیگری برای نوترونها، وجود خواهد داشت. به همان طریقی که گازهای بی اثر شامل اتمهایی با پوسته‌های مشخص الکترونی کامل هستند، به ازای بعضی مقادیر  $Z$  یا  $N$  متناظر با پوسته‌های کامل نیز هسته‌هایی وجود دارند که از پایداری به خصوص بر خوردارند. این مقادیر  $Z$  یا  $N$  (که غالباً آنها را «اعداد سحر آمیز» می‌نامند) عبارت‌اند از ۲، ۸، ۲۰، ۲۸، ۵۰، ۸۲، و ۱۲۶. به عنوان مثال، شکل ۱۳۰۷ انرژی اولین حالت برانگیخته چند هسته زوج-زوج را نشان می‌دهد. همان‌طور که



شکل ۱۴۰۷ تعداد نوکلیدهای پایدار بر حسب تابعی از (الف) عدد اتمی، (ب) عدد نوترونی.

ملاحظه می‌شود، مقدار اولین انرژی برانگیختگی در هسته‌های با عدد سحر آمیز يك حالت غیرعادی را نسبت به سایر هسته‌ها نشان می‌دهد. این موضوع مؤید آن است که در هسته‌های سحر آمیز، گاف انرژی بزرگی میان آخرین تراز یا پوسته انرژی پر شده و حالت خالی بعد وجود دارد. با توجه به شکل ۵.۴ متوجه می‌شویم که چنین وضعی برای اتمهای گازهای بی اثر نیز وجود دارد. به طریق مشابه، تعداد ایزوتوپها و ایزوتونهای پایدار با  $Z$  (یا  $N$ ) مساوی با یکی از اعداد سحر آمیز، نیز نسبتاً زیاد است (شکل ۱۴.۷). همچنین سطح مقطع گیراندازی نوترونی هسته‌های با عدد سحر آمیز  $N$  نیز خیلی پایین است (شکل ۱۵.۷). این موضوع نشان می‌دهد که بستگی نوکلئون اضافی خیلی ضعیف است.

مایر و جنسن برای توضیح مقادیر اعداد سحر آمیز، در سال ۱۹۴۹ میلادی به‌طور مستقل از هم پیشنهاد کردند که علاوه بر نیروی مرکزی میانگین، یک برهم‌کنش اسپین-مدار قوی نیز در هسته‌ها وجود دارد که بر هر نوکلئون وارد می‌شود و با  $L \cdot S$  متناسب است (و لزومی ندارد که همانند مورد الکترونها در اتم که در بخش ۹.۳ بررسی شد، دارای منشأ الکترومغناطیسی باشد). شواهد تجربی وجود برهم‌کنش اسپین-مدار را تأیید کرده است (یادداشت پایان این بخش را ببینید). چون  $S$  می‌تواند به‌طور موازی و یا پادموازی با  $L$  قرار بگیرد، مقادیر متفاوتی برای تکانه زاویه‌ای کل  $J = L + S$  به دست می‌آید. هر تراز  $(n, l)$  بر اثر برهم‌کنش اسپین-مدار به دو تراز مجزا تقسیم می‌شود که در آن تراز با انرژی پایینتر متناظر است با حالت موازی  $L$  و  $S$ . از این رو، هر حالت انرژی نوکلئون با اعداد کوانتومی  $n, l$ ، و  $z$  مشخص می‌شود که در آن  $z = l \pm 1/2$  است. برای هر  $l$



شکل ۱۵.۷ سطح مقطع گیراندازی نوترون بر حسب تابعی از تعداد نوترونها.

مشخص، انرژی حالت با  $l+1/2 = j$  نسبت به انرژی حالت با  $l-1/2 = j$  کمتر است. این موضوع با مورد الکترونها در اتمها متناقض است و نشان می‌دهد که برهم کنش اسپین-مدار نمی‌تواند منشأ الکترومغناطیسی داشته باشد. چون

$$\begin{aligned} L \cdot S &= \frac{1}{2} (J^2 - L^2 - S^2) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right\} \hbar^2 \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} l \hbar^2, & j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} (l+1) \hbar^2, & j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

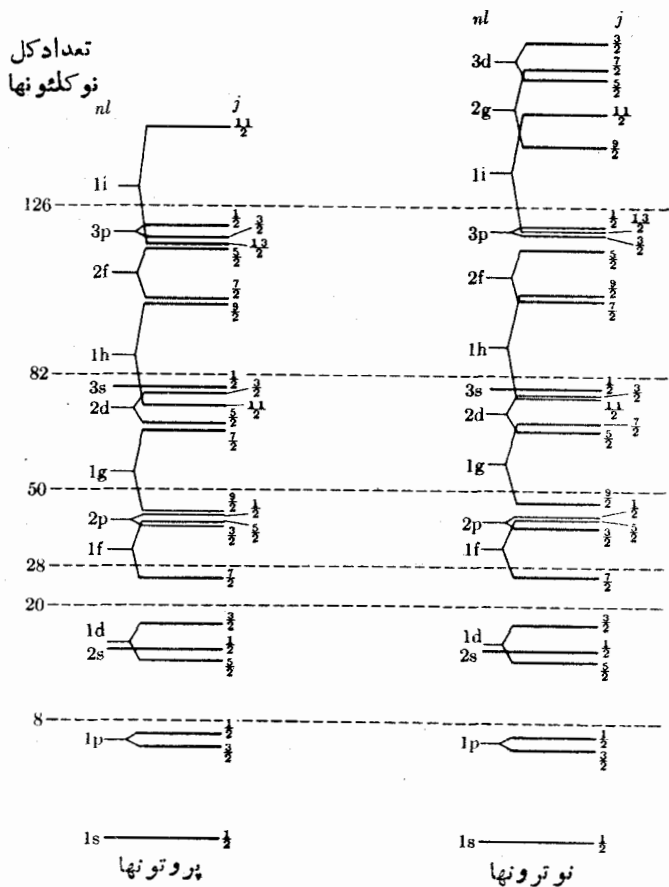
فاصله جدایی میان دو حالت با  $l$  یکسان ولی با  $z$  متفاوت با  $2l+1$  متناسب است و بنابراین با  $l$  افزایش می‌یابد. تبهگنی هر حالت  $n, l, z$  عبارت است از  $2z+1$  که با  $2z+1$  سمتگیری ممکن است نسبت به یک محور مشخص متناظر است. از این رو، طبق اصل طرد، حداکثر تعداد پروتونها یا نوترونها موجود در یک تراز یا پوسته مشخص  $n, l, z$  برابر است با  $2z+1$ ؛ یعنی

$j$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$	...
حداکثر تعداد پروتونها یا نوترونها	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	...

همانند مورد الکترونها، هر حالت نوکلئون با حروف  $s, p, d$ ، و مانند آن، متناظر با مقدار  $l$  مشخص می‌شود و شاخص پایین نیز مقدار  $z$  را به دست می‌دهد. از این رو، به ازای  $l=0$  حالت  $s_{1/2}$  را خواهیم داشت و به ازای  $l=1$  حالت‌های  $p_{1/2}$  و  $p_{3/2}$  نیز به ازای  $l=2$  حالت‌های  $d_{3/2}$  و  $d_{5/2}$  و به همین ترتیب.

آرایش ترازهای انرژی ذره منفرد برای پروتونها و نوترونها به طور طرح وار در شکل ۱۶.۷ نشان داده شده است که نشان می‌دهد چگونه هر تراز  $(n, l)$ ، بر اثر نیروی مرکزی میانگین، با برهم کنش اسپین-مدار شکافته شده است. پارینه هر تراز با  $(-1)^l$  داده می‌شود. ترتیب ترازها از الزامات شواهد تجربی پیروی می‌کند. گافهای انرژی در اعداد سحر آمیز به وضوح نشان داده شده است. هر بار که یک مقدار جدید و بزرگ  $l$  پدیدار می‌شود، این گافها مشاهده می‌شوند و شکافتگی اسپین-مدار بزرگی را تولید می‌کنند. به علت





شکل ۱۶۰۷ ترازهای انرژی پروتون و نوترون در مدل پوسته‌ای.

دافعه کولنی میان پروتونها، اختلاف اندکی میان ترازهای پروتون و نوترون موجود است. برای مرتب کردن تجربی ترازاها، چندین پتانسیل نیروی مرکزی تجربی پیشنهاد شده است ولی هیچکدام تاکنون از لحاظ نظری یا تجربی به طور کامل توجیه نشده اند.

مشاهده شده است که اسپین تمام هسته‌های زوج-زوج در حالت پایه صفر است در حالی که در هسته‌های با  $A$  فرد، که در آنها  $Z$  زوج و  $N$  فرد (یا برعکس) است، اسپین هسته‌ای  $I$  در اکثر موارد با مقدار  $Z$  آخرین حالت نوکلئون فرد تطابق دارد (فقط در چند مورد برابر با  $1-j$  است). هرگاه نوکلئون فرد یک هسته  $A$  فرد برانگیخته شود و به یک حالت نزدیک برود، عموماً اسپین هسته‌ای حالت برانگیخته با مقدار جدید  $Z$  نوکلئون برانگیخته تطابق خواهد داشت. به این ترتیب، هنگامی که تراز  $(n, l, j)$  پر

می‌شود، به نظر می‌رسد که نوکلئونهای مشابه، تکانه‌های زاویه‌ای خود را به حالت جفت شده درمی‌آورند، به گونه‌ای که اگر تعداد نوکلئونهای مشابه، یعنی پروتونها یا نوترونها، در حالت  $(n, I, j)$  زوج باشد برآیند تکانه زاویه‌ای آنها صفر و هرگاه تعداد آنها فرد باشد، برآیند تکانه زاویه‌ای آنها مساوی با  $j$  (یا  $j-1$ ) خواهد بود. برای هسته‌های فرد-فرد (که از میان آنها فقط چهارهسته پایدار موجود است)، تعیین اسپین هسته‌ای نسبتاً مشکلتر است و در اصل، تمام مقادیر درست  $I$  از  $j_p + j_n$  تا  $|j_p - j_n|$  که در آن،  $j_p$  و  $j_n$  به ترتیب با پروتون جفت نشده و نوترون جفت نشده متناظرند، مجاز خواهند بود. در بعضی حالتها، بزرگترین مقدار ممکن  $I$  مرجح است و در حالتهای دیگر کوچکترین مقدار آن. مدل پوسته‌ای ذره-مستقل نمی‌تواند این قواعد جفت شدگی یسا توزیع تکانه‌های زاویه‌ای نوکلئونها را توجیه کند. این قواعد به برهم کنش «باقیمانده»، یعنی اختلاف میان برهم کنش واقعی هسته‌ای وارد بر هر نوکلئون و میانگین نیروی مرکزی به اضافه نیروی اسپین-مدار داخل شده در مدل پوسته‌ای، نسبت داده می‌شوند. برهم کنش باقیمانده با آنچه اثر انرژی تزویج نامیده می‌شود، در پایداری هسته‌ای شرکت می‌کند. از جدول ۲۰۷ می‌توان این اثر پایدارکنندگی را مشاهده کرد. در این جدول، تعداد انواع مختلف نوکلیدهای پایدار و تقریباً پایدار (یا با عمر طولانی) آمده است. آشکارا مشاهده می‌شود که اکثر نوکلیدهای پایدار را گروه زوج-زوج تشکیل می‌دهند.

مدل پوسته‌ای در پیشگویی بسیاری از خواص حالت‌های هسته‌ای یک مدل نسبتاً موفق بوده است. در بعضی مواقع، محاسبات نسبتاً پیچیده‌ای مورد نیاز است. اما، در بسیاری موارد، محاسبات مدل پوسته‌ای برای توضیح دقیق حقایق تجربی با شکست مواجه می‌شود. به عنوان مثال، گشتاورهای چهارقطبی الکتریکی که با به کار بردن مدل پوسته‌ای محاسبه می‌شوند، مخصوصاً در نواحی میان اعداد سحرآمیز یا پوسته‌های بسته، به طور سازگاری خیلی کوچک اند.

جدول ۲۰۷ تعداد نوکلیدهای پایدار و نوکلیدهای با عمر طولانی.

عمر طولانی	پایدار	$N$	$Z$
۱۱	۱۵۵	زوج	زوج
۳	۵۳	فرد	زوج
۳	۵۰	زوج	فرد
۵	۴	فرد	فرد

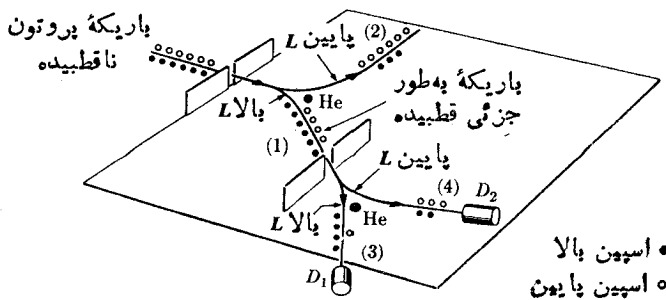
به دلیل جفت‌شدگی قوی میان نوکلئونها، چندین اثر جمعی در هر هسته وجود دارد. نوکلئونهایی که ناحیه مغز را که از پوسته‌های کاملی تشکیل شده است اشغال می‌کنند به طریقی نسبتاً مشابه با یک قطره مایع، که می‌تواند شکل نوسانات را حول یک شکل کروی متعادل نگه دارد، رفتار می‌کنند. نوسانات جمعی با حجم ثابت رخ می‌دهند و هر هسته می‌تواند چندین مد بهنجار نوسان داشته باشد. نوکلئونهای اشغال‌کننده بالاترین پوسته‌های پر نشده یک نوع اثر قطبی‌کننده‌ای اعمال می‌کنند و تمایل دارند که یک شکل غیر کروی متعادل را که خیلی به بیضیوار پخت یا کشیده شده شباهت دارد، به هسته بدهند. در نواحی  $114 < N < 90$  و  $Z > 88$  این تغییر شکل مخصوصاً بسیار بزرگ و قابل توجه است و ممکن است دلیل موجهی برای بزرگ بودن نسبی گشتاور چهار قطبی الکتریکی چنین هسته‌هایی باشد که با مدل پوسته‌ای قابل توضیح نیستند.

اثر کرب مد پوسته‌ای و اثرات جمعی یک نظریه که به مدل یکی شده هسته معروف است شکل گرفته است. در این کتاب داخل در بحث این نظریه نمی‌شویم.

### یادداشت: دلیل تجربی برهم‌کنش اسپین-مدار در هسته‌ها

برهم‌کنش اسپین-مدار هسته‌ای را می‌توان به عنوان فرض ساده‌ای برای توضیح بعضی جنبه‌های ترازهای انرژی هسته‌ای معرفی کرد. با این حال، آیا دلیل تجربی مستقیمی برای برهم‌کنش اسپین-مدار وجود دارد؟ جواب مثبت است و از تحلیل آزمایشهای پراکندگی به دست می‌آید. همان‌طور که برهم‌کنش میان میدان مغناطیسی و گشتاور دو قطبی مغناطیسی (که به صورت  $\mathcal{B} \cdot \mathbf{M}$  است) نشان‌دهنده گشتاور نیرویی است که می‌کوشد  $\mathbf{M}$  را در امتداد موازی با  $\mathcal{B}$  قرار دهد، برهم‌کنش اسپین-مدار  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r})$  نیز معرف گشتاور نیرویی است که می‌کوشد  $\mathbf{S}$  را در امتداد موازی با  $\mathbf{L}$  قرار دهد (هنگامی که علامت مثبت باشد نتیجه مخالف خواهد بود).

فرض کنیم که یک باریکه پروتونی ناقطبیده (یعنی پروتونهایی که اسپین آنها به طور کاتوره‌ای سمتگیری کرده‌اند) مطابق شکل ۱۷.۷، به طرف هسته‌های هلیوم تابیده شده است. پروتونهایی را در نظر می‌گیریم که در صفحه شکل پراکنده می‌شوند و همچنین هسته هلیوم را که پراکنده است، به عنوان مرجعی برای اندازه‌گیری تکانه زاویه‌ای مداری به کار می‌بریم. پروتونهای پراکنده شده در امتداد مسیر (۱) دارای تکانه زاویه‌ای مداری  $\mathbf{L}$  «به طرف بالا» و پروتونهایی که در امتداد مسیر (۲) پراکنده می‌شوند دارای تکانه زاویه‌ای مداری  $\mathbf{L}$  «به طرف پایین» هستند. برهم‌کنش اسپین-مدار پروتونها با هسته هلیوم به نفع پروتونهایی است که اسپین آنها در امتداد هم‌مسیری با  $\mathbf{L}$  موازی است و بنابراین، اسپینهای پروتونهای موجود در طول مسیرهای (۱) و (۲) ترجیحاً، به ترتیب، به طرف بالا و به طرف پایین هستند و هر کدام از دو باریکه به طور جزئی قطبیده می‌شود. سپس باریکه (۱) مجدداً پراکندگی ثانویه‌ای را بر اثر برخورد با هسته هلیوم دیگر متحمل می‌شود و در نتیجه به دو باریکه (۳) و (۴) به ترتیب با  $\mathbf{L}$  به طرف بالا و پایین شکافته می‌شود. اسپینهای پروتونهای موجود در طول مسیر (۳) ترجیحاً



شکل ۱۷.۷ آزمایش پراکندگی دوگانه.

به طرف بالاست و تمایل اسپین آن عده که در طول مسیر (۴) قرار دارند به طرف پایین است. چون اسپین بیشتر پروتونهای موجود در باریکه (۱) به طرف بالاست، برهم کنش اسپین-مدار باعث می‌شود که پراکندگی در داخل باریکه (۳) بیشتر از پراکندگی در باریکه (۴) باشد. بنابراین آشکارساز  $D_1$  باید نسبت به  $D_2$  جریان پروتونی بیشتری را ثبت کند. در تجربه نیز چنین واقعتی مشاهده شده است. در غیاب برهم کنش اسپین-مدار، باریکه‌های (۳) و (۴) باید از شدت یکسانی برخوردار باشند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که شواهد تجربی به وضوح وجود برهم کنش اسپین-مدار هسته‌ای را، که با قطبش حاصل از پراکندگی آشکار می‌شود، تأیید می‌کند.

**مثال ۶.۷** گشتاور دو قطبی مغناطیسی هسته با  $A$  فرد را با استفاده از مدل پوسته‌ای محاسبه کنید.

**حل:** در هسته با  $A$  فرد که در آنها  $Z$  فرد و  $N$  زوج (یا برعکس) است، بر طبق مدل پوسته‌ای ذره کاملاً مستقل، گشتاور مغناطیسی به نوکلئون فرد نسبت داده می‌شود. در سایر نوکلئونها، بر ایند تکانه‌های زاویه‌ای در جهت‌های مخالف به صورت جفت شده درمی‌آیند و بنا بر این در بر ایند گشتاور دو قطبی مغناطیسی هسته‌ای شرکت نخواهند کرد. اکنون نوکلئونی را در نظر می‌گیریم که تکانه زاویه‌ای مداری  $L$  و اسپین  $S$  را دارد. بر طبق معادلات (۳.۷) و (۵.۷) می‌توان تکانه زاویه‌ای نوکلئون را به شکلی که برای نوترونها و پروتونها معتبر است به صورت زیر نوشت

$$M = \frac{e}{2m_p} (g_l L + g_s S) \quad (29.7)$$

که در آن مقدار  $g_l = +1$  برای پروتونها و صفر برای نوترونهاست و مقادیر  $g_s$  نیز

در بخش ۴.۷ برای هر دو نوع نوکلئون داده شده است. چون  $\mathbf{L}$  و  $\mathbf{S}$  هر دو حول برابند خود یعنی حول  $\mathbf{J}$  حرکت تقدیمی دارند، میانگین، یا مقدار انتظاری  $\mathbf{M}$  در راستای  $\mathbf{J}$  است و با رابطه زیر داده می‌شود

$$\mathbf{M}_{\text{ave}} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{u}_J \mathbf{u}_J = \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{J}}{J^2} \mathbf{J}$$

که در آن  $\mathbf{u}_J$  بردار یکا و در راستای  $\mathbf{J}$  است. مؤلفه  $\mathbf{M}_{\text{ave}}$  در طول محور  $Z$  عبارت است از

$$\begin{aligned} M_{z,\text{ave}} &= \left( \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{J}}{J^2} \right) J_z = \left( \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{J}}{J^2} \right) m \hbar \\ &= \left( \frac{e \hbar}{2 m_p} \right) \left[ \frac{(g_l \mathbf{L} + g_s \mathbf{S}) \cdot \mathbf{J}}{J^2} \right] m \end{aligned} \quad (30.7)$$

همان‌طور که در بخش ۴.۷ گفته شد، مقدار جدول بندی شده گشتاور مغناطیسی  $\mu$  بنا به تعریف عبارت است از مقدار  $M_{z,\text{ave}}$  هنگامی که مقدار  $m$  بیشینه است (در این مورد هنگامی که  $J^2 = j(j+1)\hbar^2$  با توجه به رابطه  $\mu_N = e\hbar/2m_p$  از این رو، بسا توجه به رابطه  $J^2 = j(j+1)\hbar^2$  خواهیم داشت

$$\mu = \frac{(M_{z,\text{ave}})_{m=j}}{\mu_N} = \frac{g_l \mathbf{L} \cdot \mathbf{J} + g_s \mathbf{S} \cdot \mathbf{J}}{(j+1)\hbar^2} \quad (31.7)$$

اما

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{2} (J^2 + L^2 - S^2) = \frac{1}{2} \left[ j(j+1) + l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \hbar^2$$

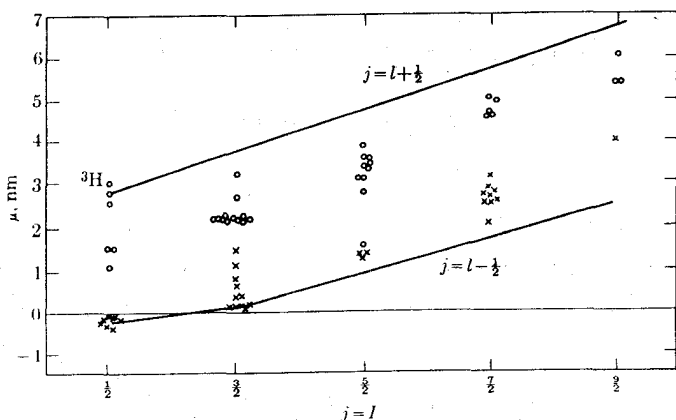
$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{2} (J^2 - L^2 + S^2) = \frac{1}{2} \left[ j(j+1) - l(l+1) + \frac{3}{4} \right] \hbar^2$$

با قراردادن این نتایج در معادله (۳۱.۷)، در دو مورد  $j = l \pm 1/2$  برای گشتاور مغناطیسی خواهیم داشت

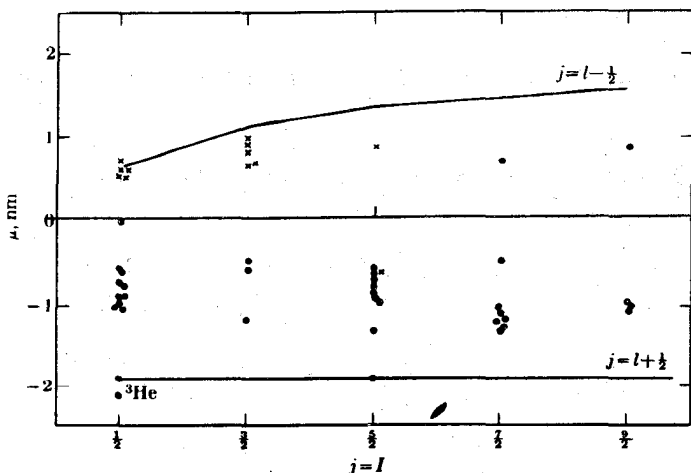
$$\mu = \left( j - \frac{1}{2} \right) g_l + \frac{1}{2} g_s, \quad j = l + \frac{1}{2}$$

$$\mu = \frac{j}{j+1} \left[ \left( j + \frac{3}{2} \right) g_l - \frac{1}{2} g_s \right], \quad j = l - \frac{1}{2} \quad (32.7)$$

در مدل پوسته‌ای ذره-مستقل، برای  $A$  فرد، اسپین هسته‌ای برابر با تکانه زاویه‌ای ذره جفت نشده در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، با قرار دادن  $I = j$  در معادلات (۳۲.۷) و قرار دادن مقادیر  $g_j$  و  $g_s$  برای پروتونها و نوترونها، دو مجموعه از مقادیر را (بر حسب آنکه  $Z$  یا  $N$  فرد باشد) برای  $\mu$  بر حسب تابعی از اسپین هسته‌ای به دست می‌آوریم. این منحنیها به نام خطوط اشعیت معروف اند، و در شکلهای ۱۸.۷ و ۱۹.۷ به ترتیب برای  $Z$  فرد و  $N$  فرد مشخص شده‌اند. مقادیر تجربی واقعی با علامت (X) برای  $j = l + 1/2$  و با دایر کوچک برای  $j = l - 1/2$  نشان داده شده‌اند. همان‌طور که از روی شکل دیده می‌شود، اکثر گشتاورهای مغناطیسی بر روی خطوط اشعیت قرار ندارند بلکه در ناحیه



شکل ۱۸.۷ گشتاورهای دو قطبی مغناطیسی و خطوط اشعیت برای هسته‌های با  $Z$  فرد.



شکل ۱۹.۷ گشتاورهای دو قطبی مغناطیسی و خطوط اشعیت برای هسته‌های با  $N$  فرد.

بین آنها واقع شده‌اند. این ناسازگاری دقیق نباید تعجب آور باشد، زیرا مدل پوسته‌ای ذره-مستقل يك مدل نسبتاً نادقیق است. با استفاده از مدل یکی شده هسته، این امکان وجود دارد که سازگاری بهتری به دست آید.

### ۱۰.۷ گذارهای تابشی هسته‌ای

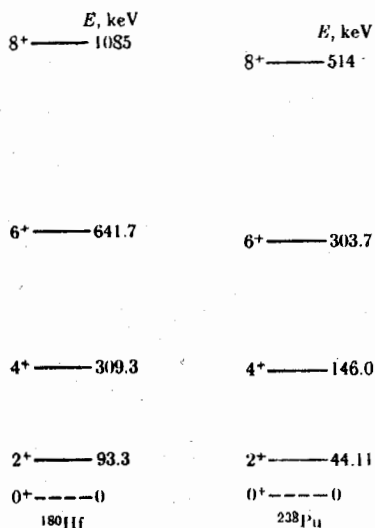
علاوه بر پیکربندی حالت پایه، هر هسته می‌تواند چندین حالت برانگیخته نیز داشته باشد. این حالتها را می‌توان در دو گروه برانگیخته‌گیهای ذره‌ای و برانگیخته‌گیهای جمعی دسته‌بندی کرد. در هر برانگیخته‌گی ذره‌ای، يك یا چند نوکلئون به تراز انرژی بالاتر منتقل می‌شوند، بدون آنکه اساساً حرکت نوکلئونهای دیگر را تحت تأثیر قرار دهند. انرژیهای برانگیخته‌گی ذره‌ای از مرتبهٔ يك میلیون الکترون‌ولت هستند.

همان‌طور که در بخش قبل گفته شد، هسته‌هایی که در نواحی دور از اعداد سحر آمیز قرار دارند و بعضی پوسته‌های آنها کاملاً پر نشده است، کروی نیستند بلکه به بیضیوارهای کشیده یا پخت شبیه‌اند. در این هسته‌های تغییر شکل یافته، همانند مورد مولکولها، محورهای اصلی در فضا می‌چرخند و يك چرخش جمعی تولید می‌کنند که در آن تمام نوکلئونها شرکت دارند. انرژی چرخشی کوانتیده است و بنا بر این هر هستهٔ تغییر شکل یافته چندین تراز انرژی چرخشی دارد. در هسته‌های زوج-زوج، ترازهای انرژی چرخشی با رابطهٔ زیر داده می‌شوند

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} I(I+1) \quad (33.7)$$

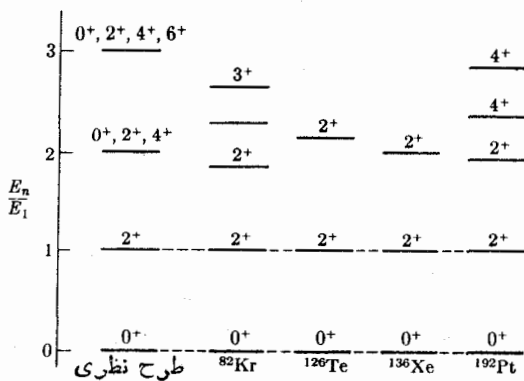
که در آن  $I$  تکانهٔ زاویه‌ای چرخش هسته، چون يك کل، است و به دلایل تقارن می‌تواند مقادیر زوج ( $I = 0, 2, 4, \dots$ ) را اختیار کند. بنا بر این تمام ترازهای چرخشی پاریتهٔ زوج دارند.  $\mathcal{I}$  نیز گشتاور لختی مؤثر است؛ این گشتاور لختی همواره کوچکتر است از گشتاور لختی که برای هسته‌ها (وقتی که آنها را بیضوی صلب در نظر گیریم) به دست می‌آوریم، زیرا تمام نوکلئونها به‌طور یکسانی در حرکت چرخشی شرکت نمی‌کنند. شکل ۲۰.۷ ترازهای انرژی چرخشی را برای  $^{180}\text{Hf}$  و  $^{238}\text{Pu}$  نشان می‌دهد. این ترازهای انرژی، نقشی را نشان می‌دهند که با معادلهٔ (۳۳.۷) داده شده است. برای هسته‌هایی غیر از هسته‌های زوج-زوج، آرایش ترازهای چرخشی پیچیده‌تر است.

علاوه بر این، چندین حالت برانگیختهٔ ارتعاشی وابسته به نوسانات جمعی ذکر شده در بخش قبل نیز می‌توانند وجود داشته باشند. این حالتها ارتعاشی برانگیخته با انرژی یکسان  $\hbar\omega$  از یکدیگر جدا می‌شوند که در آن،  $\omega$  بسامد زاویه‌ای ارتعاشی است. برای هسته‌های زوج-زوج، برابند اسپین یا تکانهٔ زاویه‌ای اولین حالت ارتعاشی برانگیخته برابر ۲ است و مقادیر اسپین دومین حالت ارتعاشی برانگیخته نیز می‌تواند صفر، دو، یا چهار باشد. پاریتهٔ هر دو تراز زوج است. شکل ۲۱.۷ پاره‌ای از ترازهای ارتعاشی  $^{82}\text{Kr}$ ،



شکل ۲۰۰۷ ترازهای انرژی چرخشی  $^{180}\text{Hf}$  و  $^{238}\text{Pu}$ .

$^{126}\text{Te}$ ،  $^{136}\text{Xe}$  و  $^{192}\text{Pt}$  را نشان می‌دهد. به‌طور کلی، انرژی‌های برانگیختگی ارتعاشی و چرخشی جمعی خیلی کوچکتر از انرژی‌های برانگیختگی ذره‌ای هستند و تا چند keV می‌رسند. این موضوع می‌تواند دلیل موجهی برای اولین ترازهای برانگیخته (واقع در پایینترین وضعیت) هسته‌های به‌شدت تغییر شکل یافته‌ای باشد که میان هسته‌های با اعداد سحر آمیز قرار می‌گیرند (شکل ۱۳۰۷).



شکل ۲۱۰۷ ترازهای انرژی ارتعاشی چند هسته.

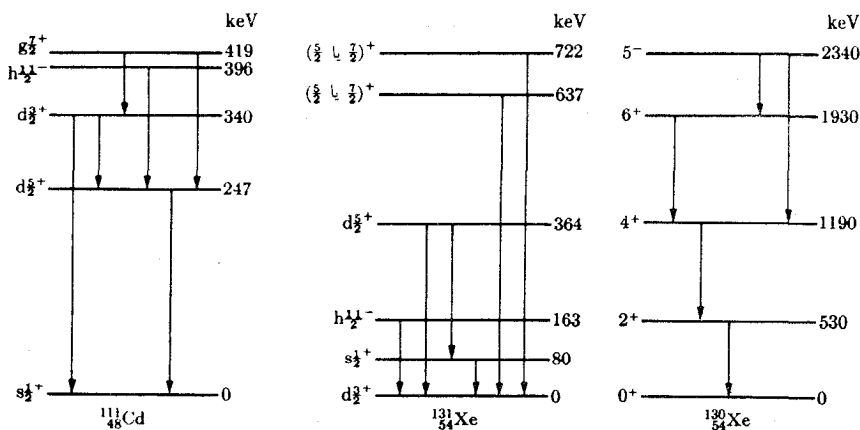


هسته‌هایی که پوسته‌های آنها کامل است کروی‌اند و ترازهای ارتعاشی یا چرخشی واقع در پایینترین وضعیت را ندارند. هسته‌هایی که پوسته‌های آنها تقریباً کامل است فقط کمی تغییر شکل پیدا می‌کنند و ترازهای برانگیخته چرخشی ندارند بلکه فقط ترازهای ارتعاشی دارند. از این بحث نتیجه می‌گیریم که ترازهای انرژی هسته به اندازه ترازهای انرژی مولکول پیچیده هستند. با این حال، پیشگویی نظری ترازهای انرژی یک هسته از پیشگویی نظری ترازهای یک مولکول مشکلتر است، زیرا ساخت مادر باره برهم کنش هسته‌ای هنوز به حد کمال نرسیده است.

هنگامی که هسته‌ای یک فوتون با انرژی مناسب را جذب می‌کند، یا وقتی که با ذره تندی (مانند پروتون یا نوترون) که از کنار آن عبور می‌کند برخورد ناکشسان می‌کند، ممکن است به یک تراز انرژی برانگیخته منتقل شود. اگر ذره باردار باشد، این فرایند را برانگیختگی کولنی می‌گویند و برای مطالعه ترازهای انرژی (واقع در پایینترین وضعیت) هسته‌های تغییر شکل یافته بسیار مفید است.

هر هسته برانگیخته می‌تواند انرژی اضافی خود را از دست بدهد و با گسیل تابش الکترومغناطیسی، که به دلایل تاریخی پرتوهای گاما نام دارد، گذاری به تراز پایه انجام دهد. از این رو، در اصل، طیف پرتو گامای هسته‌ای به طیفهای اتمی و مولکولی شباهت دارد. طیف گاما از تنظیم مجدد حرکت نوکلئونها در گذاری میان دو ویژه حالت هسته‌ای ناشی می‌شود. در شکل ۲۲.۷ پاره‌ای از گذارهای گاما در هسته‌های  $^{131}_{54}\text{Xe}$ ،  $^{130}_{54}\text{Xe}$  و  $^{114}_{48}\text{Cd}$  و همچنین تکانه زاویه‌ای و پارامتر هر تراز در طرف چپ و انرژی هر تراز نسبت به حالت پایه نیز در طرف راست نشان داده شده است.

اگرچه در آنها و مولکولها، فقط گذارهای دو قطبی الکتریکی از اهمیت ویژه‌ای



شکل ۲۲.۷ گذارهای گامای تابشی هسته‌های  $^{131}_{54}\text{Xe}$ ،  $^{130}_{54}\text{Xe}$  و  $^{114}_{48}\text{Cd}$

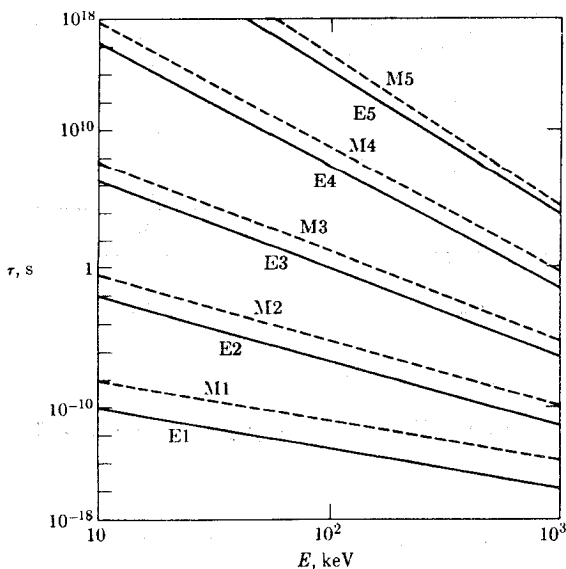
برخوردارند، در هسته‌ها غالباً گذارهای چندقطبی الکتریکی و مغناطیسی بالاتر، مخصوصاً در گذارهای جمعی که در آنها تعداد زیادی نوکلئون شرکت می‌کنند، مهم هستند. گذارهای الکتریکی و مغناطیسی با نمادهای E یا M و اعداد ۱، ۲، ۳، ... که مقدار  $\Delta I$  را به دست می‌دهند و با تابش دو قطبی، چهار قطبی، هشت قطبی، و مانند آن متناظرند مشخص می‌شوند. نوع گذار با تغییر در تکانه زاویه‌ای و نیز تغییر در پارامتر هسته به صورت زیر، تعیین می‌شود:

تغییر اسپین	$\Delta I = I_f - I_i$	۱	۲	۳	۴
تغییر پارامتر	بله	E <sub>۱</sub>	M <sub>۲</sub>	E <sub>۳</sub>	M <sub>۴</sub>
	خیر	M <sub>۱</sub>	E <sub>۲</sub>	M <sub>۳</sub>	E <sub>۴</sub>

احتمال گذارهای تابشی به اختلاف انرژی میان دو حالت موجود، عدد جرمی هسته، و تغییر اسپین وابسته است. با افزایش تغییر انرژی، احتمال گذار افزایش و با افزایش مقدار  $\Delta I$  کاهش می‌یابد. بنا بر این، برای هر تغییر انرژی مشخص، هر قدر که اختلاف در تکانه زاویه‌ای میان حالت برانگیخته و حالت پایه بیشتر باشد، احتمال گذار کمتر است و طول عمر حالت برانگیخته بیشتر خواهد بود، مگر آنکه امکان گذاری به حالت برانگیخته دیگر با انرژی کمتر و با تغییر کمتر در تکانه زاویه‌ای وجود داشته باشد. در شکل ۲۳.۷ طول عمر حالت‌های برانگیخته، بر حسب تابعی از انرژی جذب شده یا گسیل شده، برای گذارهای چندقطبی متفاوتی که شامل یک پروتون اند نشان داده شده است. مقادیر بالا بسا به کار بردن مدل پوسته‌ای و برای هسته‌ای با عدد جرمی حدود ۱۰۰ محاسبه شده‌اند.

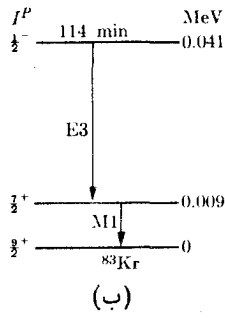
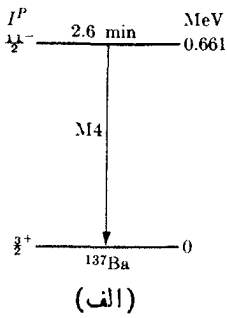
گذارهای ارتعاشی و چرخشی جمعی که در آنها  $\Delta I = ۲$  است (و بدون تغییر در پارامتر)، از نوع گذارهای E<sub>۲</sub> و یا گذارهای چهارقطبی الکتریکی اند. گذارهای چهارقطبی الکتریکی مشاهده شده در بسیاری از هسته‌های با پوسته‌های پر نشده احتمالات گذاری دارند که از مقادیر پیشگویی شده به کم‌کم مدل پوسته‌ای بزرگتر است. این موضوع نشان می‌دهد که در مقایسه با محاسبات مدل پوسته‌ای، گشتاور چهارقطبی الکتریکی این هسته‌ها و از این رو، تغییر شکل آنها نسبتاً بزرگتر است (شکل ۴.۷) همین مسئله باعث شد که مدل جمعی را برای هسته انتخاب کنند.

از شکل ۱۶.۷ دیده می‌شود که در هسته‌های بسا A فرد که مقادیر Z یا N آنها کمی از اعداد سحر آمیز ۵۰، ۸۲، یا ۱۲۶ کوچکتر است، ترازهای انرژی نزدیک به یکدیگرند و اختلاف در تکانه زاویه‌ای آنها زیاد است. این مسئله به حالت‌های برانگیخته‌ای منجر می‌شود که طول عمرهای نسبتاً طولانی دارند. به عنوان مثال، در  $^{۱۳۷}\text{Ba}$  ( $N=۸۱$ ) و  $(Z=۵۶)$ ، که در آن تعداد نوترون‌ها یکسوی کمتر از عدد سحر آمیز ۸۲ است، نوترون فرد می‌تواند در حالت‌های  $2d_{3/2}$ ،  $3s_{1/2}$  یا  $1h_{11/2}$  قرار گیرد. در واقع حالت

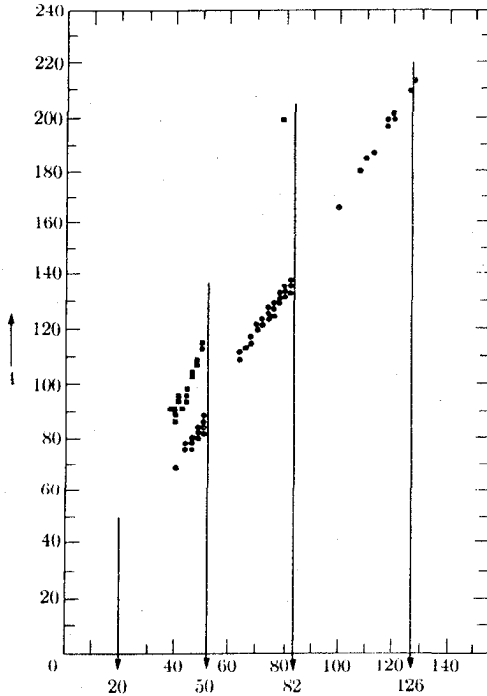


شکل ۲۳.۷ طول عمر گذارهای ذره منفرد شامل یک پروتون برای هسته‌ای با عدد جرمی تقریباً ۱۰۰ که به کمک مدل پوسته‌ای پیشگویی شده است.

پایه متناظر با پیکر بندبی است که در آن، نوترون فرد در حالت  $2d_{3/2}$  و حالت برانگیخته بعدی نیز متناظر با پیکر بندبی است که در آن، نوترون فرد در حالت  $1h_{11/2}$  قرار دارد [شکل ۲۴.۷ (الف)]. اختلاف در انرژی دو حالت برابر با  $1\text{ MeV}$   $66\text{ e}$   $6$  است. گذار میان دو حالت، با  $\Delta I = 4$  و تغییر در پارامتر متناظر است و از این رو گذار  $M4$  است. طول عمر مشاهده شده حالت برانگیخته در حدود  $2\text{ e}$  دقیقه است. به عنوان یک مثال دیگر می توان از  $^{83}\text{Kr}$  ( $Z = 36$  و  $N = 47$ ) نام برد. این هسته سه نوترون از عدد سحر آمیز  $50$  کمتر دارد. حالت‌های رقیب برای پیکر بندبی حالت پایه عبارت‌اند از  $2p_{1/2}$  و  $1g_{9/2}$ . اولین حالت، اسپین  $1/2$  و پارامتر فرد دارد. پیکر بندبی دوم می تواند اسپین  $7/2$  یا  $9/2$  و پارامتر زوج داشته باشد که به ترازهای انرژی نشان داده شده در شکل ۲۴.۷ (ب) منجر می گردد. گذار مشاهده شده به صورت  $I = (7/2)^+ \rightarrow I = (1/2)^-$  است که همان گذار  $E3$  با انرژی  $32\text{ MeV}$   $0\text{ e}$   $32$  است. طول عمر حالت  $I = 1/2$  در حدود  $114$  دقیقه است. هسته‌هایی که در حالت‌های برانگیخته هستند و طول عمر نسبتاً طولانی دارند را، ایزومر می نامند. گذارهایی که در آنها  $\Delta I > 3$  است، به عنوان گذارهای ایزومری مشخص می شوند. شکل ۲۵.۷ توزیع هسته‌هایی را نشان می دهد که حالت‌های ایزومری دارند. این هسته‌ها در گروه‌هایی ظاهر می شوند که به جزایر ایزومریسم معروف‌اند و بر طبق پیشگویی‌های مدل



شکل ۲۴.۷ گذارهای ایزومری در  $^{83}\text{Kr}$  و  $^{137}\text{Ba}$ .



→ نوکلئونهای فرد،  $N$  ● یا  $Z$  ■

شکل ۲۵.۷ ایزومرهای با عمر طولانی و با  $A$  فرد.

پوسته‌ای، درست در زیر اعداد سحرآمیز قرار می‌گیرند. در واقع، توضیح این جزایر ایزومریسم یکی از موفقیت‌های مدل پوسته‌ای است.

## مسائل

۱۰۷ با بررسی شکل ۱۰۷ (یا جدول نوکلیدها که در این فصل آمد) ثابت کنید که زوج ایزو بارهای پایدار مجاور در طبیعت وجود ندارند.

۲۰۷ فهرستی از تمام مجموعه‌های ایزوتوپی پایدار مجاور تهیه کنید که تعداد آنها از ۴ بیشتر باشد. به عنوان مثال، تیتانیوم ( $Z=22$ ) پنج ایزوتوپ پایدار مجاور دارد. از شکل ۱۰۷ یا جدول نوکلیدها، استفاده کنید.

۳۰۷ به کمک شکل ۱۰۷ (یا جدول نوکلیدها)، مجموعه‌های ایزوتوپی پایدار را بررسی کنید. عدد نوترونی  $N$  را برای مجموعه‌های بزرگتر از چهار ایزوتون پایدار بنویسید. آیا هیچ ایزوتون پایدار مجاور در میان آنها وجود دارد؟

۴۰۷ بور معمولی مخلوطی از ایزوتوپهای  $^{10}\text{B}$  و  $^{11}\text{B}$  است. جرم اتمی مخلوط (یا جرم شیمیایی) نیز مساوی با  $10.811 \text{ amu}$  است. چه درصدی از هر ایزوتوپ (الف) از لحاظ تعداد و (ب) از لحاظ جرم در بور طبیعی حضور دارد؟

۵۰۷ شعاع هسته‌ای  $^{16}\text{O}$ ،  $^{120}\text{Sn}$ ، و  $^{208}\text{Pb}$  را محاسبه کنید.

۶۰۷ با انتخاب فراوانترین ایزوتوپ، شعاع هسته‌ای را برای نوکلیدهای با  $Z$  مساوی با ۱۰، ۳۰، ۵۰، ۷۰، و ۹۰ محاسبه کنید. با به کار بردن معادله (۱۱.۳)، شعاع مدار الکترونی داخلی رانیز به دست آورید. هر دو شعاع را بر روی یک نمودار رسم کنید. نتایجی رانیز دربارهٔ برهم کنش الکترونها داخلی با هسته به دست آورید.

۷۰۷ شعاع چه هسته‌هایی مساوی با نصف شعاع  $^{236}\text{U}$  است؟

۸۰۷ با به کار بردن مدل مکانیک کوانتومی یک ذره در جعبهٔ پتانسیلی به پهنای  $10^{-15} \text{ m}$  و با در نظر گرفتن طول موج دو بروی نوکلئون  $\lambda$ ، که از مرتبهٔ  $2\pi r$  است (مقدار  $r$  برابر  $10^{-15} \text{ m}$  است)، انرژی جنبشی نوکلئون موجود در هسته را برآورد کنید.

۹۰۷ برهم کنش میان گشتاورهای مغناطیسی هسته‌ای و الکترون، به شکافتگی فوق‌دیز ترازهای انرژی اتمی منجر می‌شود. انرژی ناشی از این برهم کنش متناسب است با مقدار زیر

$$\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\mu_N\mu_B(r^{-3})_{\text{ave}}$$

که در آن  $r$  فاصلهٔ الکترون از هسته است. نشان دهید که شکافتگی فوق‌دیز، از لحاظ انرژی،

از مرتبه  $10^{-5} \text{ eV}$  است که به ساختار فوق‌ریز خطوط طیفی منجر می‌شود که وقتی خطوط در ناحیه مرئی قرار دارند، از مرتبه  $10^{-2} \text{ \AA}$  است.

۱۰۰۷ شکافتگی فوق‌ریز ترازهای انرژی اتمی مسئله قبل با **I.J** نیز متناسب است که در آن اسپین هسته‌ای **J** تکانه زاویه‌ای الکترون است. شکافتگی فوق‌ریز حالت‌های الکترونی  ${}^2\text{S}_{1/2}$ ،  ${}^2\text{P}_{1/2}$  و  ${}^2\text{P}_{3/2}$  مربوط به  ${}^{23}\text{Na}$  ( $I = 3/2$ ) را تحلیل کنید. در هر حالت، تعداد ترازها و فاصله نسبی آنها را تعیین کنید و نتایج را با یک نمودار تراز انرژی نشان دهید.

۱۱۰۷ گشتاور چهار قطبی الکتریکی یک توزیع بار بیضوی با تقارن محوری، برابر  $Q = (2/5)Z(a^2 - b^2)$  است که در آن،  $a$  در طول محور تقارن و  $b$  نیز در راستای عمود اندازه‌گیری می‌شود. متوسط شعاع هسته‌ای  $R$  با رابطه  $R^2 = ab^2$  تعریف می‌شود. (این رابطه نشان می‌دهد که حجم کره‌ای به شعاع  $R$  نیز برابر حجم بیضوی است.) نشان دهید که اگر  $a = R + \Delta R$  باشد  $b = R - \Delta R/2$  و در اولین مرتبه تقریب برای  $Q$  خواهیم داشت

$$Q = \frac{6}{5}ZR\Delta R$$

همچنین توجه کنید که  $Q/ZR^2$  (که در شکل ۴.۷ رسم شده است) با  $\Delta R/R$  متناسب است. در صورتی که اطلاعاتی در مورد تغییر شکل هسته‌ای مورد نظر باشد، تعیین کنید که از میان این منحنی و منحنی گشتاور چهار قطبی تنها، کدامیک بیشتر حاوی اطلاعات مفیدی هستند.

۱۲۰۷ با به کار بردن اطلاعات موجود در جدول ۱۰۷ و نیز نتایج مسئله ۱۱۰۷، مقدار  $\Delta R/R$  را برای  ${}^{176}\text{Lu}$ ، که یکی از هسته‌های شدیداً تغییر شکل یافته است، برآورد کنید.

۱۳۰۷ انرژی دافعه کولنی دو پروتون در  ${}^3\text{He}$  را با این فرض که در فاصله  $10^{-15} \text{ m}$   $\times 1.7$  از یکدیگر قرار دارند برآورد کنید. این انرژی را با اختلاف در انرژیهای بستگی  ${}^3\text{H}$  و  ${}^3\text{He}$  مقایسه کنید. آیا نتیجه به دست آمده با این فرض که نیروهای هسته‌ای مستقل از بارند، سازگاری دارد؟

۱۴۰۷ تعیین کنید که برای برداشتن (الف) یک پروتون و (ب) یک نوترون از  ${}^{16}\text{O}$  و  ${}^{17}\text{O}$  چه مقدار انرژی مورد نیاز است؟ آیا نتیجه به دست آمده می‌تواند حاکی از وجود نیروهای تزویج باشد؟

۱۵۰۷ به کمک جرم‌های اتمی داده شده در جدول ۱۰۷، انرژی بستگی کل، انرژی بستگی به‌ازای هر نوکلئون را برای هسته‌های  ${}^7\text{Li}$ ،  ${}^{16}\text{O}$ ،  ${}^{57}\text{Fe}$  و  ${}^{176}\text{Lu}$  محاسبه کنید.

۱۶۰۷ فرمول تجربی وایتسکر، معادله (۱۱.۷)، چهار جمله دارد. هر یک از جمله‌ها را

برحسب تابعی از  $A$  رسم کنید. برای مقادیر مناسب  $Z$  و  $N$  مربوط به چهارمین جمله آنهایی را به کار ببرید که با پایدارترین ایزوتوپ متناظرند و تنها مقادیر برگزیده  $A$  را انتخاب کنید. اهمیت نسبی هر جمله در نواحی مختلف جدول دوره‌ای را تعیین کنید.

۱۷.۷ به کمک معادله (۱۳.۷)، عدداً اتمی نوکلید پایدار برای  $A = 27, 64, 82, 125, 180$  را تعیین و این مقادیر را با اطلاعات داده شده در شکل ۱۰.۷ مقایسه کنید.

۱۸.۷ با به کار بردن فرمول وایتسکر، جرمهای اتمی  $^{12}\text{C}$ ،  $^{27}\text{Al}$ ،  $^{88}\text{Sr}$ ،  $^{185}\text{Re}$  و  $^{232}\text{U}$  را محاسبه و با مقادیر داده شده در جدول ۱۰.۷ مقایسه کنید. در پایان، درجه دقت فرمول را بررسی کنید.

۱۹.۷ با به کار بردن فرمول وایتسکر، اختلاف جرم میان هسته‌های آینه‌ای  $^{23}\text{Mg}$  و  $^{23}\text{Na}$  را محاسبه کنید. مقادیر مزبور را با نتایجی که با به کار بردن مقادیر تجربی جرمها به دست می‌آید (که به ترتیب برابرند با  $22998977$  و  $229999412$  amu)، مقایسه کنید.

۲۰.۷ (الف) انرژیهای بستگی برای  $^{16}\text{O}$ ،  $^{15}\text{O}$ ،  $^{17}\text{O}$ ،  $^{18}\text{O}$  و  $^{19}\text{O}$  را محاسبه کنید. (ب) همین کار را برای هسته‌های  $^{12}\text{C}$ ،  $^{14}\text{N}$ ،  $^{16}\text{O}$ ،  $^{17}\text{F}$  و  $^{18}\text{Ne}$  تکرار کنید. (ج) به کمک نتایج به دست آمده در (الف) و (ب)، تغییر در انرژی بستگی را برحسب یک نوترون یا یک پروتون اضافه شده در هسته توضیح دهید. جرم هسته‌هایی که در جدول ۱۰.۷ نیامده است (برحسب amu) عبارت‌اند از  $^{14}\text{C}$ ؛  $142000324$ ؛  $^{14}\text{O}$ ؛  $142000860$ ؛  $^{15}\text{O}$ ؛  $152000307$ ؛  $^{18}\text{O}$ ؛  $17999916$ ؛  $^{19}\text{O}$ ؛  $19000358$ ؛  $^{17}\text{F}$ ؛  $17000209$ ؛  $^{18}\text{Ne}$ ؛  $18000571$ .

۲۱.۷ اختلاف جرمهای زیر از طریق تجربی به دست آمده‌اند

$$^1\text{H}_2 - ^2\text{H} = 1.54334 \times 10^{-3} \text{amu}$$

$$^3\text{H} - \frac{1}{2}^{12}\text{C} = 4.2300 \times 10^{-2} \text{amu}$$

$$^{12}\text{C}^1\text{H}_4 - ^{16}\text{O} = 3.6364 \times 10^{-2} \text{amu}$$

بر اساس  $^{12}\text{C} = 12000000$  amu، جرمهای اتمی  $^1\text{H}$ ،  $^2\text{H}$  و  $^{16}\text{O}$  را محاسبه و با مقادیر تجربی مقایسه کنید.

۲۲.۷ بسک تقریب تجربی ساده برای پتانسیل هسته‌ای، پتانسیل یوکاواست که به صورت  $E_p = -E_0 r_0 e^{-r/r_0}/r$  داده می‌شود در آن  $E_0$  و  $r_0$  مقادیر زیر را دارند

$$E_0 = 50 \text{MeV} \quad \text{و} \quad r_0 = 1.25 \times 10^{-15} \text{m}$$

پتانسیل یوکاوا را برای مقادیر

$$r = 0.1r_0, 0.5r_0, r_0, 1.5r_0, 2r_0, 3r_0.$$

رسم و با انرژی پتانسیل الکتریکی دو پروتون واقع در همان فواصل جدایی مقایسه کنید.

۲۳۰۷ نشان دهید که چگونه حالت‌های  $^3S$ ،  $^1P$ ،  $^3P$  و  $^3D$  سیستم نوترون-پروتون تنها حالت‌های سازگار با اسپین هسته‌ای مساوی با واحدند.

۲۴۰۷ نشان داده می‌شود که وقتی تمام انتقال‌های فاز در نظر گرفته شوند، دامنه پراکندگی  $f(\theta)$  مربوط به پراکندگی نوترون با رابطه زیر داده می‌شود.

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_l \sqrt{4\pi(l+1)} i^l e^{i\delta_l} \sin \delta_l Y_{l0}.$$

که در آن  $\theta$  زاویه پراکندگی و  $Y_{l0}$  توابع تکانه زاویه‌ای اند. هنگامی که انرژی خیلی بزرگ نیستند، تنها دو انتقال اول فاز،  $\delta_0$  و  $\delta_1$  برای بیان پراکندگی نوترون مورد نیاز است و بقیه انتقال‌های فاز مساوی با صفرند. الف)  $f(\theta)$  و سطح مقطع دیفرانسیلی  $\sigma(\theta)$  را برای این تقریب بنویسید. ب) نشان دهید که پراکندگی تقارن کروی ندارد. چگونه تقارن را با علامتهای انتقال فاز مربوط می‌کنید؟ ج) با انتگرالگیری، سطح مقطع کل را محاسبه و ثابت کنید که با دو جمله اول موجود در معادله (۲۲.۷) سازگاری دارد. [دانه‌مایی: عبارت مربوط به  $Y_{00}$  و  $Y_{10}$  را که در جدول ۱.۳ داده شده است به کار برید.]

۲۵۰۷ نشان دهید که در یک آزمایش پراکندگی کشسان که شامل پراکندگی پروتونها بر روی پروتونها یا نوترونها بر روی پروتونهاست، هیچ ذره‌ای در چارچوب مرجع آزمایشگاه بیشتر از  $90^\circ$  پراکنده نمی‌شود (جرمها را مساوی اختیار کنید). [دانه‌مایی: از فرمولهای غیرنسبیتی که زاویه پراکندگی در چارچوب مرجع  $C$  و  $L$  را به یکدیگر مربوط می‌کنند و در پیوست کتاب آمده‌اند، استفاده کنید.]

۲۶۰۷ هرگاه یک ذره آلفا با انرژی  $4\text{MeV}$  و با پارامتر برخورد  $1.3 \times 10^{-13} \text{m}$   $2.6 \times 10^{-13}$  به یک هسته طلا نزدیک شود، تحت چه زاویه‌ای در چارچوب آزمایشگاه پراکنده می‌شود؟

۲۷۰۷ یک ذره آلفا با انرژی  $4\text{MeV}$  با یک هسته طلا تحت زاویه  $15^\circ$  پراکنده می‌شود. اندازه پارامتر برخورد را به دست آورید.

۲۸۰۷ حداقل فاصله نزدیکی را برای پروتونهای با انرژی الف)  $10\text{MeV}$  و ب)  $80\text{MeV}$  در برخورد رودر رو با هسته طلا به دست آورید و بسا شعاع هسته‌ای مقایسه کنید. ج) در کدام حالت، پروتون به هسته «برخورد» خواهد کرد؟ انرژی جنبشی پروتون را هنگامی که به هسته «برخورد» می‌کند به دست آورید.

۲۹۰۷ یک ورقه آلومینیوم در هر ثانیه تعداد  $10^3$  ذره آلفا را در راستای مشخصی پراکنده می‌کند. هرگاه ورقه آلومینیوم با ورقه طلائی به همان ضخامت تعویض شود، چه تعداد ذره



آلفا در ثانیه در همان راستا پراکنده خواهند شد؟

۳۰.۷ تعداد ذرات آلفای پراکنده شده به وسیله یک ورقه مشخص مساوی با  $10^\circ$  ذره در ثانیه تحت زاویه پراکندگی  $10^\circ$  است. تعداد ذرات آلفای پراکنده شده در هر فاصله  $10^\circ$  تا  $180^\circ$  را محاسبه کنید. نتایج را برای  $\sigma(\theta)$  رسم کنید.

۳۱.۰۷ یک باریکه از ذرات آلفای با انرژی  $12775 \text{ MeV}$  را ورقه آلومینیومی پراکنده می کند. معلوم شده است که تقریباً در  $54^\circ$ ، تعداد ذرات پراکنده شده در راستای مشخصی شروع به انحراف از مقدار پراکندگی پیشگویی شده کولنی می کند. هر گاه فرض شود که شعاع ذرات آلفا برابر با مقدار  $10^{-15} \text{ m}$  است، شعاع هسته آلومینیوم را برآورد کنید. [دانهایی: می توان نشان داد که حداقل فاصله نزدیکی از رابطه زیر به دست می آید

$$r = \left( \frac{vZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \right) \left( 1 + \csc \frac{1}{2} \theta \right)$$

۳۲.۰۷ تعیین کنید که در چه انرژی نوترونی، رابطه زیر برقرار می ماند

$$k \times \text{برد نیروی هسته ای} = 0.5$$

آیا از این نتیجه می توان در برآورد حد بالایی انرژی، که در آن تنها پراکندگی S نوترونها به وسیله پرتوونها باید مورد نظر باشد، استفاده کرد؟

۳۳.۰۷ سطح مقطع پراکندگی نوکلئون-نوکلئون در حد انرژیهای پایین،  $E \rightarrow 0$ ، را برای پتانسیل سه تایی ( $E_0 = 362 \text{ MeV}$ ) و پتانسیل یک تایی ( $E_0 = 178 \text{ MeV}$ ) محاسبه کنید. هر گاه اسپینهای ذرات به طور کاتوره ای سمتگیری کنند، چه سطح مقطعی از طریق تجربی به دست می آید؟

۳۴.۰۷ سطح مقطع پراکندگی نوکلئون-نوکلئون در حالت سه تایی ( $E_0 = 362 \text{ MeV}$ ) را برای  $1, 5, 10, 50, 100 \text{ MeV}$  محاسبه کنید. آیا می توانید نتیجه گیری کنید که در انرژیهای پایین، سطح مقطع برای پراکندگی نوکلئون-نوکلئون، به انرژی حساس نیست؟

۳۵.۰۷ (الف) با به کار بردن طرح مدل پوسته ای داده شده در شکل ۱۶.۷، پیکر بندی نوکلئونی را برای  ${}^2\text{H}$ ،  ${}^3\text{H}$ ،  ${}^4\text{He}$ ،  ${}^6\text{Li}$ ،  ${}^{12}\text{C}$ ،  ${}^{13}\text{C}$  و  ${}^{35}\text{Cl}$  به دست آورید. (ب) اسپین هسته ای این نوکلیدها را پیشگویی و با مقادیر داده شده در جدول ۱.۷ مقایسه کنید.

۳۶.۰۷ با به کار بردن روش مثال ۶.۷، گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی هسته های داده شده در مسئله قبل را محاسبه و با مقادیر تجربی ارائه شده در جدول ۱.۷ مقایسه کنید.

۳۷.۰۷ گشتاور لختی هسته ای به جرم  $M$  و شعاع میانگین  $R$  (هر گاه به صورت کره جامدی در نظر گرفته شود)، مساوی با  $\frac{2}{5}MR^2$  است. با عدد جرمی  $A$  مساوی با  $50, 100$ ،

۱۵۰۰، انرژی (بر حسب یکای MeV) پرتو گامای گسیل شده در گذاری از یک تراز انرژی چرخشی با  $l=2$  به تراز دیگری با  $l=0$  را برآورد و با انرژی پرتو گامای گسیل شده به وسیله هسته‌های زوج-زوج در آن نواحی مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای از این قیاس به دست می‌آورد؟

۳۸۰۷ از ترازهای انرژی چرخشی نشان داده شده در شکل ۲۰.۷، گشتاور لختی  $^{180}\text{Hf}$  را برآورد کنید. گشتاور لختی نسبت به محور تقارن بیضوی چرخشی مساوی با  $(2/5)Mb^2$  است که در آن،  $b$  طول نیم-محور دیگر است. تغییر شکل  $\Delta R/R$  مربوط به  $^{180}\text{Hf}$  را برآورد و با مقدار به دست آمده از گشتاور چهار قطبی الکتریکی مقایسه کنید. [راهنمایی: از رابطه  $b = R - \Delta R/2$  در مسئله ۱۱.۷ استفاده کنید.]

۳۹۰۷ با توجه به شکل ۲۲.۷، انرژی و مرتبه چند قطبی گذارهای گامای نشان داده شده برای هر سه هسته را تعیین کنید.

۴۰۰۷ با توجه به شکل‌های ۲۲.۷ (الف) و ۲۲.۷ (ب)، و با فرض اینکه هر یک از ترازهای نشان داده شده از گذار یک ذره منفرد ناشی می‌شود، پیکر بندی برای حالت پایه و هر کدام از حالت‌های برانگیخته را به کمک طرح تراز مدل پوسته‌ای شکل (۱۶.۷) بنویسید.

۴۱۰۷ با توجه به شکل ۲۲.۷ (ج)، تعیین کنید که آیا طرح تراز می‌تواند به برانگیختگیهای جمعی چرخشی نسبت داده شود یا خیر؟

## مراجع

1. "The Nuclear Force," R. Marshak, *Sci. Am.*, March 1960, page 98.
2. "Nuclear Models," R. van Wageningen, *Am. J. Phys.*, 28, 425(1960).
3. "Pauli and Nuclear Spin," S. Goudsmit, *Physics Today*, June 1961, page 18.
4. "The Nucleus Today," D. Bromley, *The Physics Teacher*, 2, 260 and 320 (1964).
5. "Problem of Nuclear Structure," V. Weisskopf, *Physics Today*, July 1961, page 18.
6. *Nuclear Forces*, D. Brink, New York: Pergamon Press, 1965.
7. *Structure of Atomic Nuclei*, C. Cook, New York: Van Nostrand, Momentum-Books, 1964.
8. *Structure of Matter*, W. Finkelburg, New York. Academic Press, 1964, Chapter 5, Sections 1-8.
9. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton and D. H. D.

- Roller, Reading, Mass: Addison-Wesley, 1958, Chapters 36, 37, 38.
10. *Principles of Modern Physics*, R. Leighton, New York: McGraw-Hill, 1959, Chapters 13, 14, 16, 18 and 19.
  11. *Nuclear Physics*, I. Kaplan. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1963.
  12. *Introduction to the Atomic Nucleus*, J. Cuninghame. Amsterdam : Elsevier Publishing Co., 1964.



## فرایندهای هسته‌ای

مقدمه	۱۰۸
واپاشی پرتوزا	۲۰۸
واپاشی آلفا	۳۰۸
واپاشی بتا	۴۰۸
واکنشهای هسته‌ای	۵۰۸
شکافت هسته‌ای	۶۰۸
همجوشی هسته‌ای	۷۰۸
منشأ عناصر	۸۰۸

## ۱۰۸ مقدمه

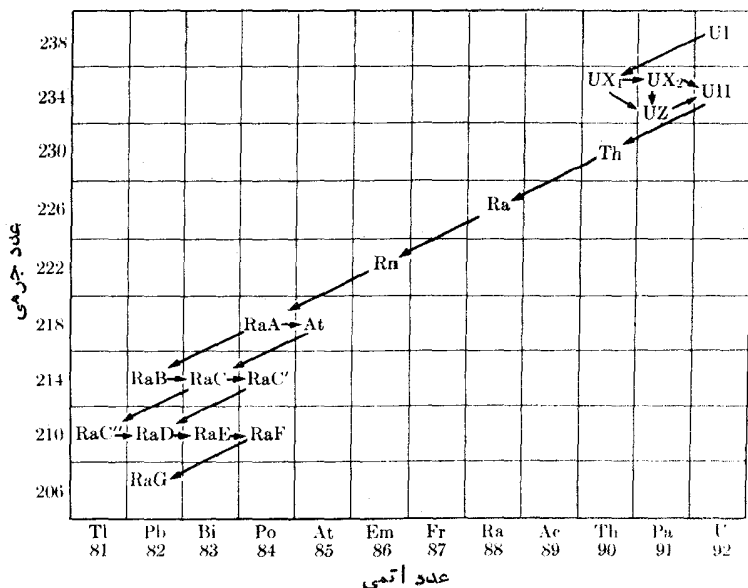
در فصل قبل، خواص اساسی هسته‌ها را (که به صورت مجموعه‌های پایداری از نوکلئونها در نظر گرفته شدند) تحلیل کردیم و مدلی ارائه دادیم که به طور کم و بیش رضایتبخشی این خواص را توجیه می‌کرد. منبع دیگری که می‌تواند اطلاعاتی درباره ساختار هسته به دست بدهد، تحلیل فرایندهایی چون فروپاشیهای هسته‌ای و واکنشهای هسته‌ای است که در آنها آرایش مجددی در انرژی یا پیکربندی نوکلئونها وجود دارد. در این فصل بعضی فرایندهای هسته‌ای را تحلیل خواهیم کرد. بسیاری از این فرایندها به طور طبیعی رخ می‌دهند و بسیاری هم با استفاده از ماشینهای شتابدهنده مختلف یا رآکتورهای هسته‌ای، به طور مصنوعی در آزمایشگاه تولید می‌شوند. بحث تجربی و نظری فرایندهای هسته‌ای هنوز هم يك بحث ناتمام از فیزیک معاصر است. تاکنون تحقیقات بسیار زیادی در این زمینه انجام شده است و هنوز هم ادامه دارد.

## ۲۰۸ واپاشی پرتوزا

هنگام بررسی شکل ۱۰۷ به این نکته اشاره کردیم که ترکیب پرتونها و نوترونها در پاره‌ای از هسته‌ها طوری است که پیکربندی پایداری ندارند. چنین هسته‌هایی ناپایدار یا پرتوزا خواهند بود. هسته‌های ناپایدار می‌کوشند که با آزاد کردن بعضی ذرات به يك پیکربندی پایدار نزدیک شوند. این ذرات را اولین بار در اواخر قرن گذشته بکرل، پیر و ماری کوری، و دیگران کشف و آنها را ذرات آلفا و بتا نامگذاری کردند.

ذرات آلفا هسته‌های هلیوم‌اند که از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده‌اند. از این رو، هنگامی که هسته‌ای از خود يك ذره آلفا گسیل می‌کند، عدد اتمی آن به اندازه دو واحد و عدد جرمی ( $A$ ) آن نیز به مقدار چهار واحد کاهش می‌یابد. بنابراین، هسته جدید يك عنصر شیمیایی متفاوت است. به عنوان مثال، هنگامی که هسته پرتوزای  ${}^{234}\text{U}$  يك ذره آلفا گسیل می‌کند، به هسته  ${}^{230}\text{Th}$  تبدیل می‌شود.

ذرات بتا الکترونی هستند که بار  $e^-$  — با خود حمل می‌کنند. از این رو، هنگامی که هسته‌ای يك ذره بتا گسیل می‌کند، عدد اتمی هسته به اندازه يك واحد افزایش می‌یابد. ولی عدد جرمی آن بدون تغییر باقی می‌ماند. به عنوان مثال، هنگامی که هسته پرتوزای  ${}^{234}\text{Th}$  يك ذره بتا گسیل می‌کند، به هسته  ${}^{234}\text{Pa}$  تبدیل می‌شود. بعضی هسته‌ها، به جای تابش الکترونها، پوزیترون تابش می‌کنند که بار  $e^+$  را با خود حمل می‌کند بنابراین، پس از گسیل پوزیترون، عدد اتمی هسته باقیمانده به مقدار يك واحد کوچکتر از هسته اولیه خواهد بود. به عنوان مثال، هنگامی که هسته  ${}^{13}\text{N}$  يك پوزیترون تابش کند، به هسته  ${}^{13}\text{C}$  تبدیل می‌شود. این دو نوع واپاشی بتا به ترتیب  $\beta^-$  و  $\beta^+$  نمایش داده می‌شوند. گاهی هسته باقیمانده یا هسته دختر در حالت برانگیخته است و بنابراین همان طور که در بخش ۱۰۷ گفته شد در گذار به حالت پایه پرتو گاما نیز گسیل می‌کند.



شکل ۱۰۸ سری پرتوزای طبیعی اورانیوم یا سری  $۲n+۴$

بسیاری ایزوتوپهای عناصر با  $Z > 81$  (یا  $A > 206$ ) به طور طبیعی پرتوزا هستند. چند هستهٔ سبکتر دیگر از قبیل  $^{14}C$  و  $^4K$  نیز که به طور طبیعی وجود دارند، پرتوزا هستند. با استفاده از رآکتورهای هسته‌ای و شتابدهنده‌های ذرات تاکنون تعداد بسیار زیادی از هسته‌های پرتوزا در آزمایشگاه تولید شده‌اند. شکل ۱۰۸ یکی از سه زنجیرهٔ پرتوزای طبیعی را نشان می‌دهد که به سری اودانیوم معروف است. جدول ۱۰۸ نیز اطلاعات مربوط به این سری را به دست می‌دهد. عدد جرمی هسته‌های موجود در این سری با  $۲n+۴$  داده می‌شوند که در آن  $n$  یک عدد درست است. دوزنجیرهٔ پرتوزای طبیعی دیگر سری آکتینیوم و سری ثودیوم هستند که به ترتیب از هسته‌هایی از نوع  $۲n+۳$  و  $۲n$  تشکیل شده‌اند. نوکلیدهای سنگینتر موجود در این دو سری  $^{235}U$  و  $^{232}Th$  هستند. در اینجا به دانشجو پیشنهاد می‌کنیم که با استفاده از جدول نوکلیدهای داده شده در متن کتاب، منحنی این دو سری را مثل منحنی شکل ۱۰۸ رسم کند.

در دو بخش بعد، واپاشیهای، آلفا و بتا را به تفصیل بررسی خواهیم کرد ولی در اینجا می‌خواهیم فقط در بارهٔ جنبه‌های مشترک این دو فرایند پرتوزا بحث کنیم. به تجربه مشاهده شده است که تمام فرایندهای پرتوزا از یک قانون نمایی پیروی می‌کنند. بنا بر این هر گاه  $N_0$  تعداد اولیهٔ هسته‌های ناپایدار باشد تعداد هسته‌های باقیمانده پس از زمان  $t$  با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (۱۰۸)$$

### جدول ۱۰۸ سری اورانیوم

انرژی ذره، MeV	ثابت فروپاشی، $s^{-1}$	نیمه عمر	نوع فروپاشی	نوکلید	انواع برتوزایی
۴۲۱۹	$۴۲۸۸ \times ۱۰^{-۱۸}$	$۴۲۵۱ \times ۱۰^۹$ y	$\alpha$	${}_{92}^{224}\text{U}$	اورانیوم I (UI)
۰۰۱۹	$۳۲۳۳ \times ۱۰^{-۷}$	۲۴۲۱ d	$\beta$	${}_{90}^{224}\text{Th}$	اورانیوم X <sub>۱</sub> (UX <sub>۱</sub> )
۴۲۳۱	$۹۲۷۷ \times ۱۰^{-۳}$	۱۲۱۸ min	$\beta$	${}_{91}^{224}\text{Pa}$	اورانیوم X <sub>۲</sub> (UX <sub>۲</sub> )
۰۰۵	$۲۲۸۸ \times ۱۰^{-۵}$	۴۲۶۶ h	$\beta$	${}_{91}^{224}\text{Pa}$	اورانیوم Z (UZ)
۴۲۷۶۸	$۸۲۸۰ \times ۱۰^{-۱۴}$	$۲۲۷۸ \times ۱۰^۵$ y	$\alpha$	${}_{92}^{224}\text{U}$	اورانیوم II (UII)
۴۲۶۸	$۲۲۷۵ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۸۲۰ \times ۱۰^۴$ y	$\alpha$	${}_{90}^{22۰}\text{Th}$	تورنیوم (Th)
۴۲۷۷۷	$۱۲۳۶ \times ۱۰^{-۱۱}$	۱۶۲۰ y	$\alpha$	${}_{88}^{22۶}\text{Ra}$	رادیم (Ra)
۵۲۴۸۶	$۲۲۱۰ \times ۱۰^{-۶}$	۴۲۸۲ d	$\alpha$	${}_{86}^{22۲}\text{Rn}$	رادون (Rn)
$\alpha: ۵.۲۹۹۸$	$۳۲۷۸ \times ۱۰^{-۳}$	۳۲۰۵ min	$\alpha, \beta$	${}_{84}^{22۸}\text{Po}$	پولونیوم A (RaA)
$\beta: ?$					
۰۰۷	$۴۲۳۱ \times ۱۰^{-۴}$	۲۶۲۸ min	$\beta$	${}_{82}^{21۴}\text{Pb}$	پلومب B (RaB)

$\alpha: \Delta 20 \text{ d}$ $\beta: 3.5 \text{ y}$	$10^4$ $\Delta 20 \text{ X } 10^{-4}$	$10^4 \text{ s}$ $1907 \text{ min}$	$\alpha$ $\alpha, \beta$	${}^{218}\text{At}$ ${}^{218}\text{Bi}$	$({}^{218}\text{At})$ $\gamma$ ${}^{218}\text{At}$ $(\text{RaC}) \text{ C}$
$10^4 \text{ s}$ $10^4 \text{ s}$	$10^4$ $10^4$	$10^4 \text{ s}$ $10^4 \text{ min}$	$\alpha$ $\beta$	${}^{214}\text{Po}$ ${}^{214}\text{Tl}$	$(\text{RaC}') \text{ C}'$ $(\text{RaC}'') \text{ C}''$
$10^4 \text{ s}$ $10^4 \text{ s}$	$10^4$ $10^4$	$10^4 \text{ s}$ $10^4 \text{ min}$	$\beta$ $\beta$	${}^{210}\text{Pb}$ ${}^{210}\text{Bi}$	$(\text{RaD}) \text{ D}$ $(\text{RaE}) \text{ E}$
$10^4 \text{ s}$ $10^4 \text{ s}$	$10^4$ $10^4$	$10^4 \text{ s}$ $10^4 \text{ min}$	$\alpha$ $\beta$	${}^{210}\text{Po}$ ${}^{210}\text{Tl}$	$(\text{RaF}) \text{ F}$ $({}^{210}\text{Tl})$ $\gamma$ ${}^{210}\text{Pb}$
$10^4 \text{ s}$ $10^4 \text{ s}$	$10^4$ $10^4$	$10^4 \text{ s}$ $10^4 \text{ min}$	$\beta$ $\beta$	${}^{210}\text{Pb}$ ${}^{210}\text{Pb}$	$(\text{RaG}) \text{ G}$



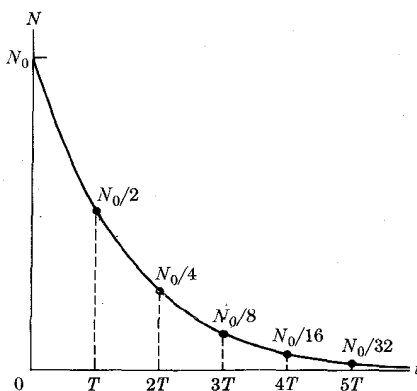
که در آن  $\lambda$  ثابت مشخصه هر نوکلید است و به ثابت فروپاشی معروف است. این ثابت بر حسب یکای  $s^{-1}$  (یا وارونه هر یکای زمان دیگر) بیان می‌شود. در شکل ۲۰.۸ منحنی نمایش معادله (۱۰.۸) رسم شده است. برای هر نوکلید پر توذا، یک فاصله زمانی ثابت  $T$  (که به نیمه‌عمر معروف است) وجود دارد که در طی آن، تعداد هسته‌های اولیه مرتباً کاهش می‌یابد و در پایان آن به نصف تعداد اولیه می‌رسند. بنا بر این هر گاه ابتدا تعداد  $N_0$  هسته (یا اتم) وجود داشته باشند، پس از گذشت زمان  $T$  فقط تعداد  $N_0/2$  و پس از گذشت زمان  $2T$  فقط  $N_0/4$  هسته باقی خواهند ماند و به همین ترتیب. برای به دست آوردن زمان  $T$  کافی است که مقادیر  $N = N_0/2$  و  $t = T$  را در معادله (۱۰.۸) قرار دهیم. بنا بر این  $e^{\lambda T} = 2$  یا  $N_0/2 = N_0 e^{-\lambda T}$  که با لگاریتم گرفتن از طرفین رابطه بالا خواهیم داشت  $\lambda T = \ln 2 = 0.693$

$$T = \frac{0.693}{\lambda} \quad (20.8)$$

که رابطه  $T$  و  $\lambda$  را به دست می‌دهد. مقادیر نیمه‌عمرهای ثبت شده گستره بسیار وسیعی دارد که از چندین سال (نیمه‌عمر واپاشی آلفای هسته  $^{209}\text{Bi}$  در حدود  $2 \times 10^{18}$  سال و واپاشی بتای هسته  $^{115}\text{In}$  در حدود  $10^{14}$  سال است)، تا کسری از ثانیه تغییر می‌کند (نیمه‌عمر واپاشی آلفای  $^8\text{Be}$  در مرتبه  $10^{-16}$  s است). از معادله (۱۰.۸) می‌توان آهنگ فروپاشی هسته‌ها را به دست آورد

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} = -\lambda N \quad (30.8)$$

این رابطه نشان می‌دهد که آهنگ فروپاشی  $dN/dt$  با تعداد هسته‌های موجود متناسب



شکل ۲۰.۸ واپاشی پر توذا بر حسب تابعی از زمان.

است. بنابراین، آهنگ فروپاشی  $dN/dt$  با نسبت و نیمه‌عمری یکسان با هسته‌های  $N$  کاهش می‌یابد. قدرمطلق آهنگ فروپاشی یعنی  $|dN/dt|$  به فعالیت ماده معروف است. آهنگ فروپاشی معمولاً برحسب یکای کوری بیان می‌شود که با  $Ci$  نشان داده می‌شود. این نام به خاطر قدردانی از زحمات پیروماری کوری در کشف پلوتونیوم و رادیوم انتخاب شده است. کوری به صورت فعالیت ماده‌ای تعریف می‌شود که در آن، تعداد  $10^{10} \times 3700$  هسته در ثانیه فروپاشیده شوند. اجزای این یکای اصلی عبارت‌اند از میلی‌کوری ( $1mCi = 10^{-3}Ci$ ) و میکروکوری ( $1\mu Ci = 10^{-6}Ci$ ).

معادلات (۱۰۸) و (۳۰۸) هر دو از قوانین آماری به‌شمار می‌روند و تنها هنگامی معتبرند که تعداد هسته‌ها بسیار زیاد باشد. ثابت فروپاشی  $\lambda$  عبارت است از احتمال واپاشی در واحد زمان برای هسته‌ها ناپایداری که برطبق یک فرایند مشخص، فروپاشیده می‌شود. احتمال اینکه هسته در فاصله زمانی  $dt$  فروپاشیده شود برابر است با  $\lambda dt$ . هر گاه تعداد  $N$  هسته وجود داشته باشند (که در آن  $N$  خیلی بزرگ است) در این صورت، می‌توان انتظار داشت که تعدادی هسته مساوی با  $(\lambda dt)N$  در خلال  $dt$  فروپاشیده شوند. بنا بر این می‌توان نوشت

$$dN = -(\lambda dt)N \quad \text{یا} \quad \frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

که همان معادله (۳۰۸) است. علامت منفی به این دلیل ظاهر می‌شود که  $N$  در نتیجه واپاشی نسبت به زمان کاهش می‌یابد. محاسبه احتمال واپاشی در واحد زمان،  $\lambda$ ، برای هر فرایند واپاشی یک مسئله بسیار مهمی است که در آن باید از روشهای دقیق مکانیک کوانتومی استفاده کرد. با توجه به بحث بالا یادآوری می‌شود که نمی‌توان صحبتی از نیمه‌عمر یک هسته منفرد به‌میان آورد یا اینکه با قاطعیت پیشگویی کرد که چه موقع یک هسته واپاشیده خواهد شد. ضمناً تکرار می‌کنیم که معادلات (۱۰۸) و (۲۰۸) فقط از لحاظ آماری معتبرند.

مثال ۱۰۸ جرم  $1000mCi$  از هسته  $^{14}C$  را محاسبه کنید. نیمه‌عمر  $^{14}C$  مساوی با ۵۵۷۰ سال است.

حل: با توجه به رابطه

$$T = 5570y = (5570 \times 10^3y) \times (2.156 \times 10^7 \frac{s}{y}) = 1.258 \times 10^{11}s$$

برای ثابت فروپاشی خواهیم داشت

$$\lambda = \frac{0.693}{T} = 3.94 \times 10^{-12}s^{-1}$$

۱. این آهنگ تقریباً مساوی با فعالیت یک گرم رادیوم (Ra) است.

همچنین

$$|dN/dt| = 1 \text{ mCi} = 3.7 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$$

بنابراین با به کار بردن معادله (۳.۸) چنین خواهیم داشت

$$N = \frac{1}{\lambda} \left| \frac{dN}{dt} \right| = 9.38 \times 10^{18} \quad \text{هسته } ^{14}\text{C}$$

مقدار بالا تعداد هسته‌های  $^{14}\text{C}$  را به دست می‌دهد که ضمناً با تعداد اتمهای کربن برابر است. جرم اتمی  $^{14}\text{C}$  برابر است با  $14.00077 \text{ amu}$ . بنا بر این جرم این تعداد از اتمهای کربن عبارت است از

$$M = (14.00077 \times 1.6604 \times 10^{-27} \text{ kg atom}^{-1}) \times (9.38 \times 10^{18} \text{ atom}) \\ = 2.18 \times 10^{-7} \text{ kg}$$

**مثال ۲.۸** یکی از روشهای تولید نوکلید پرتوزا آن است که نمونه‌ای از ماده مورد نظر در داخل رآکتور هسته‌ای قرار گیرد. در نتیجه گیراندازی نوترون به وسیله هسته‌های ماده مزبور، نوکلیدهای پرتوزا تولید می‌شوند. به عنوان مثال، هنگامی که  $^{59}\text{Co}$  با یک باریکه نوترونی بمباران شود،  $^{60}\text{Co}$  به دست می‌آید که یک چشمه پرتوزای  $\beta$  با نیمه عمر ۵.۲۷ سال است. روش دیگر برای به دست آوردن نوکلیدهای پرتوزا آن است که ماده مورد نظر را با ذرات بارداری از قبیل پروتونها یا دوترونها بمباران کنیم. در این فرایند از شتابدهنده‌ها برای انرژی دادن به ذرات فرودی یا پرتابه‌ها استفاده می‌کنیم. در هر دو حالت بالا، نوکلید جدید با آهنگ ثابت  $g$  هسته در ثانیه تولید می‌شود. تعداد هسته‌های نوکلید پرتوزای تولید شده را بر حسب زمان محاسبه کنید.

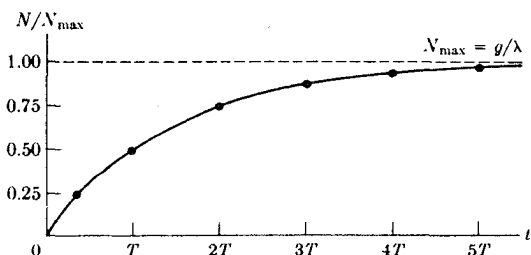
**حل:** نوکلید پرتوزا با آهنگ  $g$  هسته در ثانیه تولید می‌شود ولی در همین زمان، بر طبق معادله (۳.۸)، با آهنگ  $\lambda N$  هسته در ثانیه فرو می‌باشد که در آن،  $N$  تعداد هسته‌های موجود در آن لحظه است. از این رو، آهنگ خالص افزایش هسته‌ها در ثانیه عبارت است از

$$\frac{dN}{dt} = g - \lambda N$$

با جدا کردن متغیرها و انتگرالگیری خواهیم داشت

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N - g/\lambda} = -\lambda \int_0^t dt$$

۱. این معادله از نظر ریاضی بسا معادله سقوط آزاد جسم در شاره چسبنده یا معادله افزایش جریان الکتریکی هنگام عبور از یک القا مشابه است.



شکل ۳۰۸ تولید یک نوکلید پرتوزا بر حسب تابعی از زمان.

یا

$$\log \frac{N - g/\lambda}{N_0 - g/\lambda} = -\lambda t$$

با فرض اینکه در آغاز، تعداد هسته‌های ماده مساوی با صفر است (یعنی  $N_0 = 0$ )، بعد از گذشت زمان  $t$  چنین خواهیم داشت

$$N = \frac{g}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$$

حداکثر تعداد هسته‌های پرتوزایی را که می‌توان تحت این شرایط تولید کرد برابر است با  $N_{\max} = g/\lambda$ . تغییر  $N$  بر حسب  $t$  در شکل ۳۰۸ نشان داده شده است. یادآوری می‌کنیم که در زمان  $T$  تعداد  $g/\lambda$  ۵۰ درصد اتم و نیز در زمان  $t = 2T$  تعداد  $g/\lambda$  ۷۵ درصد اتم وجود خواهد داشت.

مثال ۳۰۸ ماده  $A$  فروپاشیده و به ماده  $B$  که پرتوزاست تبدیل می‌شود. هر گاه  $\lambda_A$  و  $\lambda_B$  ثابتهای فروپاشی مربوط به  $A$  و  $B$  باشند، تغییر  $B$  را بر حسب تابعی از زمان به دست آورید. فرض می‌کنیم که مقدار اولیه  $B$  مساوی با صفر است.

حل: بر طبق معادله (۳۰۸) جسم  $A$  با آهنگ زیر فروپاشیده می‌شود.

$$\frac{dN_A}{dt} = -\lambda_A N_A$$

به طوری که

$$N_A = N_{A_0} e^{-\lambda_A t}$$

به ازای فروپاشی هر هسته  $A$ ، یک هسته  $B$  تشکیل می‌شود. بنابراین هسته  $B$  با آهنگ  $\lambda_A N_A$  هسته در ثانیه تولید می‌شود. با این حال، در همین زمان با آهنگ  $\lambda_B N_B$  هسته در

ثانیه نیز فرو می‌باشد. از این رو، افزایش خالص هسته‌های  $B$  در واحد زمان عبارت است از

$$\frac{dN_B}{dt} = \lambda_A N_A - \lambda_B N_B$$

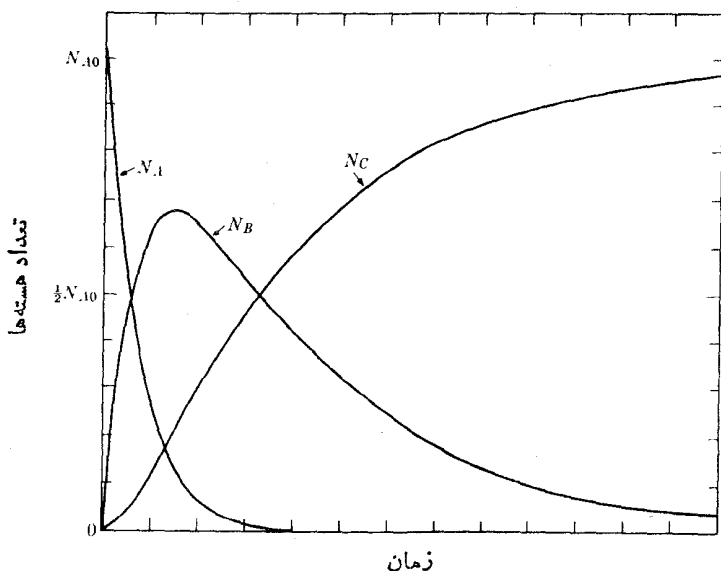
یا

$$\frac{dN_B}{dt} = \lambda_A N_{A_0} e^{-\lambda_A t} - \lambda_B N_B$$

حل این معادله که شرطه  $N_B = 0$  در زمان  $t = 0$  را بر آورده می‌کند، به صورت زیر است (دانشجو می‌تواند با قراردادن مستقیم این جواب در معادله، صحت آن را تحقیق کند)

$$N_B = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A_0} (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t})$$

هر گاه پس از فروپاشی جسم  $B$ ، جسم پایداری مانند  $C$  تولید شود، در این صورت تعداد هسته‌های  $C$  به طور مداوم افزایش می‌یابد و پس از گذشت یک زمان خیلی طولانی (در مقایسه با نیمه‌عمرهای  $A$  و  $B$ ) برابر با  $N_{A_0}$  می‌شود. تغییر  $N_A$ ،  $N_B$  و  $N_C$  نسبت به زمان در شکل ۴۰۸ نشان داده شده است. در ابتدا متوجه می‌شویم که  $B$  افزایش می‌یابد زیرا



شکل ۴۰۸ سری پرتوزا با سه عضو. در آغاز، تنها هسته مادر  $A$  با  $(T \approx 1 \text{ h})$  وجود دارد. نیمه‌عمر هسته دختر  $B$  برابر  $5 \text{ h}$  است درحالی‌که عضو سوم، یعنی هسته  $C$  پایدار است.

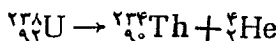
که با آهنگی سریعتر از آنچه که فرو پاشیده می‌شود، تولید می‌شود. ولی پس از یک زمان مشخص وضعیت وارونه می‌شود، زیرا فعالیت جسم مادر کاهش یافته‌است. نتایج این مثال را می‌توان در مورد زنجیره‌های پرتوزای پیچیده‌تر  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow \dots$  از قبیل سریهای پرتوزای طبیعی، نیز تعمیم داد. هنگامی که بخوایم عمر صخره‌های محتوی مواد پرتوزا را از طریق به‌دست آوردن نسبت هر ماده موجود در یک نمونه از صخره تعیین کنیم، مطالعه این واپاشیهای زنجیره‌ای بسیار سودمند خواهد بود.

### ۳.۸ واپاشی آلفا

همچنان که در بخش قبل دیدیم، واپاشی آلفا شامل گسیل یک ذره آلفا (هسته هلیوم  ${}^4_2\text{He}$ ) است که از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده‌است. عدد اتمی هسته حاصل دختر دو واحد کوچکتر و عدد جرمی آن چهار واحد کمتر از هسته مادر است. بنا بر این، هر گاه هسته‌های مادر و دختر را به ترتیب با  $X$  و  $Y$  نمایش دهیم، فرایند واپاشی آلفا را می‌توان به صورت زیر نوشت



به‌عنوان مثال  ${}^{238}_{92}\text{U}$  یک گسیل کننده آلفا است و بر طبق طرح زیر فروپاشیده می‌شود



اکثر گسیل کننده‌های آلفا را هسته‌های سنگینی تشکیل می‌دهند که با نوکلیدهای واقع در انتهای جدول دوره‌های متناظرند. در واقع، از عبارت مربوط به انرژی بستگی هسته‌ای، معادله (۱۰.۷)، می‌توان نشان داد که اکثر هسته‌های با  $A > 150$  باید گسیل کننده آلفا باشند. اما مقدار  $A$  در اکثر گسیل کننده‌های آلفا بزرگتر از ۲۰۰ است. به‌طور کلی، با چند استثناء، فرض می‌شود که نیمه عمر هسته‌های سبکتر برای واپاشی آلفا به قدری طولانی است که عملاً این مد واپاشی در آنها مشاهده نمی‌شود.

ذره آلفا یک هسته سحر آمیز دو گانه است با دو پروتون و دو نوترون که همگی در پوسته  $5/2$  قرار دارند و اسپین کل آن صفر و پارته آن زوج است. از این رو، پایداری ذرات آلفا فوق العاده زیاد است و در اکثر موارد همچون ذره منفردی، مشابه با پروتونها و نوترونها، رفتار می‌کنند. یادآوری می‌کنیم که رادرفورد نیز از ذرات آلفا به عنوان پرتاهایی برای مطالعه و بررسی ساختار درونی اتم و ایجاد مدل هسته‌ای استفاده کرد.

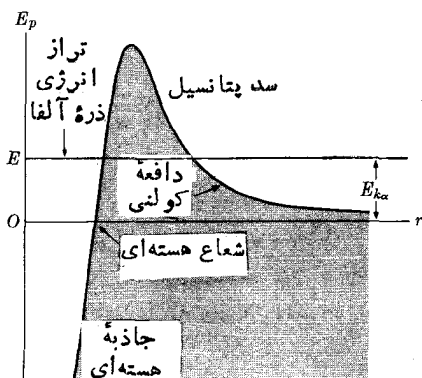
با این حال نباید تصور کرد که ذرات آلفا با چنین وضعی در داخل هسته وجود دارند. می‌توان فرض کرد که همبستگی‌های معینی در حرکت نوکلئونها وجود دارد که گاهی سبب می‌شود بعضی از آنها یک گروه بسا پیکر بندیی شبیه به پیکر بندیی ذره آلفا تشکیل دهند و برای زمان کوتاهی به صورت یک واحد دینامیکی رفتار کنند. هنگامی که چنین واحدی در نزدیکی سطح هسته قرار دارد، احتمال مشخصی وجود دارد که گروه

نوکلئونها به صورت يك ذره آلفا از هسته فرار کنند.

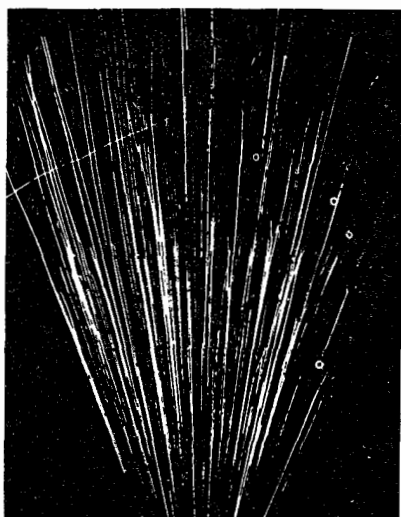
در شکل ۵.۸ انرژی پتانسیل برهم‌کش ذره آلفا با باقیمانده هسته، که خیلی به انرژی پتانسیل برهم‌کش يك پروتون با باقیمانده هسته شباهت دارد، نشان داده شده است. انرژی ذرات آلفا (در حدود ۴ تا ۹ MeV) کوچکتر از ارتفاع سد کولنی (در حدود ۴۰ MeV برای اکثر گسیل‌کننده‌های آلفا) در سطح هسته است و ذره آلفا فقط می‌تواند با نفوذ از سد پتانسیل به خارج فرار کند (بخش ۸.۲). احتمال فروپاشی در واحد زمان، یعنی  $\lambda$ ، را می‌توان بر حسب احتمال  $P$  نفوذ از سد محاسبه کرد. کمیت  $P$  با به‌کار بردن روشهای کوانتوم مکانیکی محاسبه می‌شود. نتایج به‌دست آمده به‌خوبی با مقادیر تجربی برای  $\lambda$  سازگاری دارند.

از شکل ۵.۸ مشاهده می‌شود که هرچه انرژی جنبشی  $E_{k\alpha}$  ذره آلفا بیشتر باشد، ارتفاع و پهنای سد کوچکتر است و در نتیجه، احتمال،  $P$ ، نفوذ از سد نیز بیشتر خواهد بود. بنابراین، می‌توان انتظار داشت که ثابت فروپاشی  $\lambda$  با  $E_{k\alpha}$  افزایش یابد. با بررسی جدول ۱۰.۸ نیز می‌توان این واقعیت را اثبات کرد. محاسبه مفصلتر نشان می‌دهد که احتمال انتقال  $P$  نسبت به ارتفاع و پهنای سد، و از این رو نسبت به  $E_{k\alpha}$ ، خیلی حساس است. این موضوع نشان می‌دهد که چرا يك تغییر در  $E_{k\alpha}$  با ضریبی در حدود دو یعنی از ۴۲۰ MeV (متناظر با  $^{238}\text{U}$ ) تا ۷۶۸ MeV (متناظر با  $^{214}\text{Po}$ ) منجر به تغییری در  $\lambda$  می‌شود که از  $4.8 \times 10^{-18} \text{s}^{-1}$  تا  $4.23 \times 10^3 \text{s}^{-1}$  (با ضریبی در حدود  $10^{21}$ ) را شامل است.

چون ذرات آلفا بار دارند هنگام عبور از ماده می‌توانند آنها را یونیده کنند. از این خاصیت می‌توان برای آشکارسازی ذرات آلفا استفاده کرد. این عمل به کمک دستگاههایی انجام می‌شود که یا مقداری یونش را اندازه می‌گیرند (از قبیل اتاقک یونش) یا اینکه یونش را مرئی می‌کنند (از قبیل اتاقک ابر). شکل ۶.۸ عکسی از مسیر ذرات آلفا را نشان می‌دهد



شکل ۵.۸ انرژی پتانسیل ذره آلفا و هسته.



**شکل ۶۰۸** مسیر ذرات آلفا در اتاقک ابر. به نظر می‌آید که مسیر منحرف شده ناشی از واکنش  $^{17}\text{O}(\alpha, p)^{14}\text{N}$  با اتم هیدروژن در داخل اتاقک باشد. در این عکس دو گروه ذره آلفا (هر کدام با برد مشخص) به وضوح از هم قابل تشخیص‌اند.

که با يك نمونه پرتوزا و با استفاده از يك اتاقک ابر به دست آمده است. ذرات آلفا بر اثر یونش، آنقدر انرژی از دست می‌دهند تا به قدر کافی کند می‌شوند و با گیراندازی دوالکترون به صورت اتمهای خنثی هلیوم در می‌آیند. رادرفورد اولین کسی بود که در سال ۱۹۱۹، با جمع‌آوری ذرات آلفای موجود در يك لوله تخلیه که از ماده‌ای گسیل می‌شدند، نشان داد که ذرات آلفا همان هسته‌های اتم هلیوم هستند؛ با برقرار شدن تخلیه الکتریکی در سراسر لوله، طیف هلیوم مشاهده شد.

برد ذرات آلفا به انرژی و ماده‌ای که از میان آن عبور می‌کند وابسته است. برد ذرات آلفا در هوا و تحت شرایط استاندارد (STP) فقط در حدود چند سانتی‌متر است. به عنوان مثال، برد ذرات آلفای حاصل از  $^{210}\text{Po}$  (بسیار انرژی ۵.۳ MeV) و  $^{214}\text{Po}$  (با انرژی ۷.۷ MeV) در هوا به ترتیب برابر است با ۳.۸ cm و ۷.۲۵ cm. با این حال، ذرات آلفا به راحتی جذب يك ورقه کاغذ یا يك ورقه خیلی نازک آلومینیوم می‌شوند. از شکل ۶۰۸ مشاهده می‌شود که مسیرهای ایجاد شده به وسیله ذرات آلفا در دو گروه قرار دارند که هر کدام برد مشخصی دارند.

اینکه ذرات آلفای گسیل شده به وسیله هر نوکلید مشخص برد کاملاً معینی دارد، مؤید



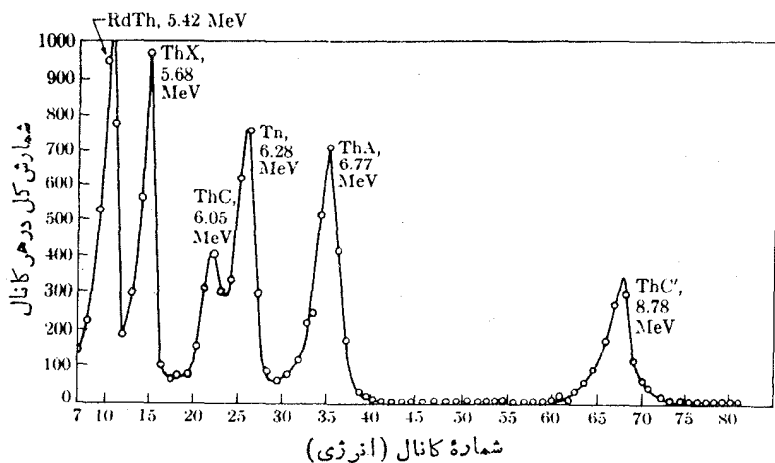
آن است که انرژی این ذرات نیز کاملاً مشخص است. شکل ۷.۸ طیف انرژی ذرات آلفای گسیل شده به وسیله تعدادی از نوکلیدهای مختلف را نشان می‌دهد. انرژی (در واحدهای اختیاری) با شماره‌های کانال دستگاه تحلیل کننده انرژی متناظر است. به راحتی مشاهده می‌شود که ذرات آلفای حاصل از هر نوکلید انرژی کاملاً مشخصی دارند. این واقعیت مؤید این است که واپاشی آلفا، همان طور که در معادله (۴.۸) بیان شد، یک مسئله دوجسمی است، بنابراین واپاشی آلفا به مسئله انفجار یک نارنجک به دو قطعه شباهت دارد. در فرایند واپاشی آلفا فرض می‌کنیم که انرژی و تکانه پایسته می‌مانند. هر گاه مقدار انرژی آزاد شده در واپاشی هسته مادر  $X$  (که در چارچوب آزمایشگاه آن را در حال سکون فرض می‌کنیم) با  $Q$  نشان داده شود در این صورت انرژی جنبشی ذره آلفا و هسته دختر  $Y$  پس از اینکه از هم جدا شدند عبارت است از [پیوست ۲، معادله (پ. ۲۷) را ببینید]

$$E_{k\alpha} = \frac{m_Y}{m_\alpha + m_Y} Q, \quad E_{kY} = \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_Y} Q \quad (5.8)$$

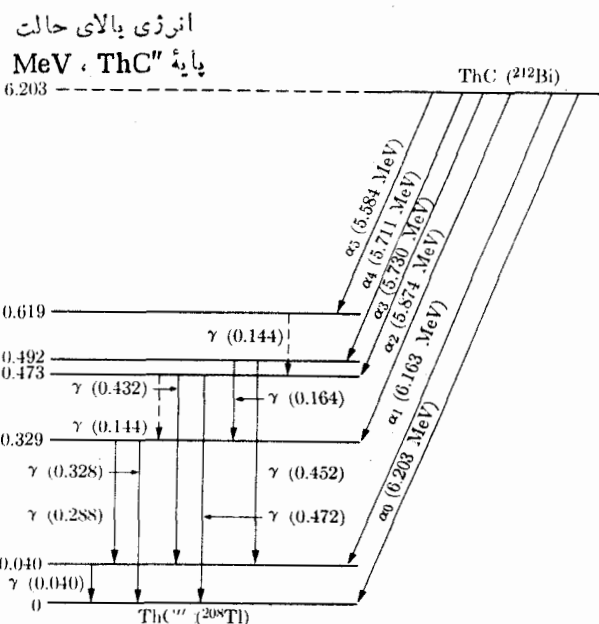
مقدار  $Q$  از تغییر جرم در فرایند به دست می‌آید، یعنی

$$Q = (m_X - m_Y - m_\alpha)c^2 \quad (6.8)$$

زیرا  $m_X c^2$  انرژی داخلی هسته مادر و  $m_Y c^2$  و  $m_\alpha c^2$  نیز انرژیهای داخلی دو قطعه حاصل از آن هستند [پیوست ۲، معادله (پ. ۲۲) را ببینید]. البته برای اینکه ذره آلفا گسیل شود، لازم است که  $Q > 0$  باشد. هر گاه جرمها بر حسب amu و  $Q$  بر حسب MeV بیان شوند، در این صورت معادله (۶.۸) به صورت زیر درمی‌آید



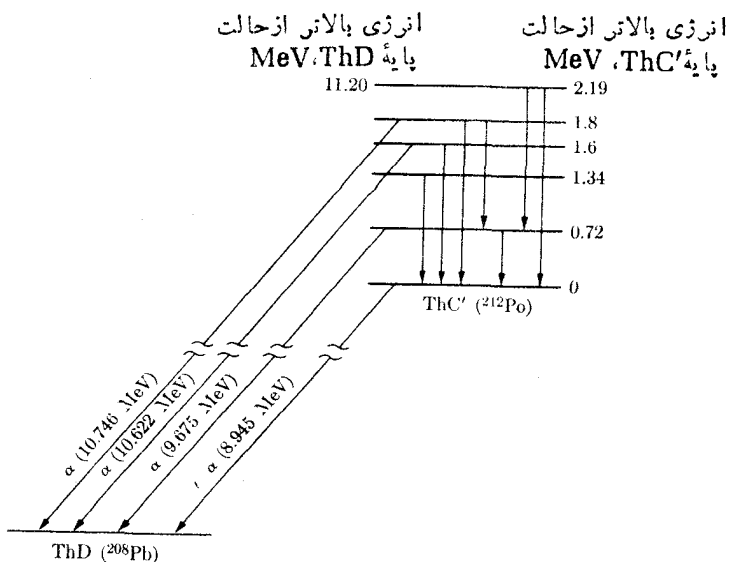
شکل ۷.۸ طیف انرژی ذره آلفای حاصل از یک نمونه رادیو توریم ( $^{228}\text{Th}$ ) و محصولات آن.



شکل ۸.۸ طرح فروپاشی مربوط به واپاشی آلفای  $^{212}\text{Bi}$  به  $^{208}\text{Tl}$ .

$$Q = 931948(m_x - m_y - m_\alpha) \quad (7.8)$$

در این معادله، جرمها می توانند با جرم هسته ها یا جرم اتمها متناظر باشند، زیرا هر گاه از جرمهای اتمی استفاده شود، جرمهای الکترون از دو طرف حذف می شوند. در پایان این بخش یادآوری می کنیم که ذرات آلفای حاصل از هر نوکلید مشخص همگی انرژی یکسان ندارند بلکه یک ساختار ریز معین دارند. به عنوان مثال، انرژی ذرات آلفای حاصل از  $^{238}\text{U}$  برابر  $4.18\text{ MeV}$  و  $4.13\text{ MeV}$  است. دلیل این امر را می توان این طور توضیح داد؛ با وجود آنکه هسته مادر می تواند در حالت پایه خود قرار داشته باشد، هسته دختر می تواند در حالت پایه یا در یکی از ویژه حالت های برانگیخته باشد. این وضع در شکل ۸.۸ نشان داده شده است. این شکل طرح واپاشی  $^{212}\text{Bi}$  (یا ThC) را با شش گذار ذره آلفا (همراه با پرتوهای گامایی که به دنبال این واپاشیها گسیل می شوند) با فلش نشان می دهد. در حالت های دیگر، عکس این حالت ممکن است اتفاق بیفتد، بدین معنی که هسته مادر می تواند در حالت پایه یا در یکی از حالت های برانگیخته باشد و هسته دختر در حالت پایه خود تشکیل شود. در شکل ۹.۸ چنین وضعیتی برای طرح فروپاشی  $^{210}\text{Po}$  (یا ThC') همراه با گذارهای گاما نشان داده شده است.



شکل ۹.۸ طرح فروپاشی مربوط به واپاشی آلفای  $^{212}\text{Po}$  به  $^{208}\text{Pb}$ .

مثال ۴.۸ انرژی جنبشی ذرات آلفای گسیل شده از  $^{232}\text{U}$  را محاسبه کنید.

حل: فرایند واپاشی به صورت  $^{232}\text{U} \rightarrow ^{228}\text{Th} + ^4\text{He}$  است. جرم عناصر موجود در این فرایند عبارت‌اند از

$$m_X = m(^{232}\text{U}) = 232.03715 \text{ amu}, \quad m_Y = m(^{228}\text{Th}) = 228.02874 \text{ amu},$$

$$m_\alpha = 4.00151 \text{ amu}$$

با به کار بردن معادله (۷.۸) خواهیم داشت  $Q = 5.42 \text{ MeV}$ . علامت مثبت  $Q$  بدان معنی است که این فرایند انرژی زاست و به خودی خود رخ می‌دهد. با استفاده از معادله (۵.۸)، انرژی جنبشی به صورت  $E_{k\text{Th}} = 0.10 \text{ MeV}$  و  $E_{k\alpha} = 5.32 \text{ MeV}$  به دست می‌آید. مقدار  $E_{k\alpha}$  با این فرض به دست می‌آید که  $^{228}\text{Th}$  در حالت پایه تشکیل می‌شود. هرگاه  $^{228}\text{Th}$  در حالت برانگیخته باشد، مقدار  $E_{k\alpha}$  کوچکتر خواهد بود. مقدار تجربی پرنرژی‌ترین ذرات آلفای حاصل از  $^{232}\text{U}$  عبارت است از  $E_k = 5.32 \text{ MeV}$  و بنابراین به نظر می‌رسد که تعبیر نظری ما صحیح است.

مثال ۵.۸ پایداری  $^{232}\text{U}$  نسبت به گسیل انواع دیگر ذرات را بررسی کنید.

حل: در اینجا ممکن است این سؤال مطرح شود که آیا هسته‌ها می‌توانند علاوه بر واپاشی

جدول ۲۰۸ مقادیر  $Q$  برای گسیل ذرات هسته‌ای مختلف از  ${}^{232}\text{U}$ .

ذره	جرم	دختر	جرم	$Q, \text{MeV}$
n	۱۰۰۰۹۰	${}^{231}\text{U}$	۲۳۱٫۱۰۸۲	۷٫۱۶ -
$p({}^1\text{H})$	۱۰۰۰۸۱	${}^{231}\text{Pa}$	۲۳۱٫۱۰۷۸	۶٫۰۵ -
$d({}^2\text{H})$	۲٫۰۱۴۷	${}^{230}\text{Pa}$	۲۳۰٫۱۰۶۰	۱۰٫۰۲ -
$t({}^3\text{H})$	۳٫۰۱۷۰	${}^{229}\text{Pa}$	۲۲۹٫۱۰۳۳	۱۰٫۰۱ -

آلفا؛ واپاشیهای پروتون، نوترون، دوترون یا انواع دیگر واپاشیها را داشته باشند؟ در جواب باید گفت که هیچیک از این واپاشیها مشاهده نشده است زیرا مقادیر  $Q$  برای همه این فرایندها منفی است. بنا بر این چنین واپاشیهایی نمی‌توانند رخ دهند مگر آنکه با صرف مقدار مناسبی انرژی، هسته مادر را در یکی از حالت‌های برانگیخته قرار دهیم، که آن هم در واکنشهای هسته‌ای مشخصی رخ می‌دهد. به عنوان مثال، با استفاده از معادله (۷۰۸) و با قرار دادن  $m_{\alpha}$  و  $m_{\gamma}$  به جای جرمهای متناظر ذره گسیل شده و هسته دختر می‌توان مقادیر  $Q$  را برای گسیل چند نوع ذره حاصل از هسته  ${}^{232}\text{U}$  محاسبه کرد. نتایج حاصل در جدول ۲۰۸ آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تمام مقادیر  $Q$  منفی و بنا بر این  ${}^{232}\text{U}$  در مقابل واپاشی به چنین محصولاتی پایدار است. دلیل اینکه گسیل آلفا در  ${}^{232}\text{U}$  امکان پذیر است این است که جرم ذره آلفا نسبتاً کم، و انرژی بستگی آن نسبتاً زیاد است.

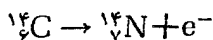
### ۴۰۸ واپاشی بتا

در شکل ۱۰۷، هسته‌های پایدار با مربع سیاه نشان داده شده است. در این شکل، هسته‌هایی که در بالای ناحیه پایداری قرار دارند الکترونیایی با بار  $e^-$  را گسیل می‌کنند. چنین فرایندی به واپاشی بتای منفی معروف است. نتیجه تجربی نشان می‌دهد که در هسته دختر، با وجود آنکه عدد جرمی آن با عدد جرمی هسته مادر برابر است، اما عدد اتمی به اندازه یک واحد از عدد اتمی هسته مادر بیشتر است. یعنی، به نظر می‌رسد که در واپاشی  $\beta^-$ ، یک پروتون به جای یک نوترون می‌نشیند و هسته‌های مادر و دختر با هم ایزوبارند. بنا بر این فرایند مزبور را می‌توان به صورت زیر بیان کرد



توجه کنید که بار کل پایسته باقی می‌ماند، زیرا بار طرف چپ معادله (۱۰۸) مساوی با  $Ze$  و بار طرف راست نیز مساوی با  $(Z+1)e - e = Ze$  است. ضمناً تعداد کل نوکلئونها

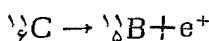
نیز پایسته می‌ماند، زیرا مقدار  $A$  در دو طرف معادله یکسان است. به‌عنوان مثال،  ${}^{14}\text{C}$  يك گسیل‌کننده  $\beta^-$  است و بر طبق طرح زیر واپاشیده می‌شود



به‌طریق مشابه، درشکل ۱۰۷ آن عده از هسته‌هایی که در زیر ناحیهٔ پایداری قرار دارند، واپاشی بتای مثبت را انجام می‌دهند. در این فرایند، پوزیترونها با بار  $+e$  گسیل می‌شوند. جرم و اسپین پوزیترونها برابر جرم و اسپین الکترونهاست ولی بار آنها مثبت است. پوزیترونها را اولین بار در سال ۱۹۲۷ دیراک بر اساس زمینه‌های نظری (در نتیجهٔ برخی در بایسته‌های نظریهٔ نسبیت که در اینجا از ذکر آنها خودداری می‌کنیم) پیشگویی و اندرسون در سال ۱۹۳۲ برای اولین بار آنها را در پرتوهای کیهانی مشاهده کرد. معلوم شده‌است که در واپاشی  $\beta^+$ ، عدد اتمی هستهٔ دختر به اندازهٔ يك واحد از عدد اتمی هستهٔ مادر کوچکتر (که مجدداً با قانون پایستگی بار الکتریکی سازگاری دارد) ولی عدد جرمی آن با عدد جرمی هستهٔ مادر برابر است. بنابراین به‌نظر می‌آید که در واپاشی  $\beta^+$  يك نوترون به‌جای يك پروتون نشسته است. در نتیجه می‌توان این فرایند را به‌صورت زیر نوشت



به‌عنوان مثال،  ${}^{11}\text{C}$  گسیل‌کنندهٔ  $\beta^+$  است و بر طبق طرح زیر واپاشیده می‌شود

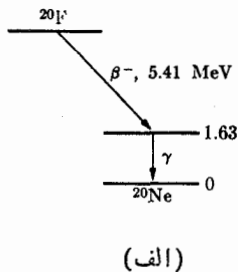


گاهی اوقات مشاهده می‌شود که هستهٔ مادر به‌جای گسیل پوزیترون، الکترونی را از یکی از داخلترین پوسته‌های اتمی (مثلاً الکترون  $K$ ) گیر می‌اندازد. این الکترون از نوع الکترونهای  $s$  است. از بخش ۵.۳ یادآوری می‌کنیم که مدارهای الکترونهای  $s$  خیلی نفاذ هستند و به‌نزدیکه‌های هسته می‌رسند؛ و بنا بر این احتمال اینکه با يك پروتون گیر انداخته شوند، نسبتاً زیاد است. در این فرایند که به‌گیراندازی الکترون ( $EC$ ) معروف است نیز در هستهٔ دختر يك پروتون جایش را به يك نوترون می‌دهد. بنا بر این می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت

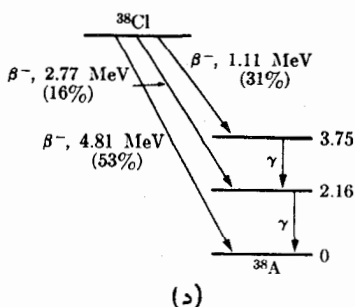


باز هم توجه کنید که بار الکتریکی و عدد نوکلئونی در فرایند پایسته می‌ماند. به‌دنبال گیراندازی الکترون توسط هستهٔ دختر، يك الکترون خارجی به‌داخل حالت خالی به‌جای مانده در پوستهٔ  $K$  سقوط می‌کند و پرتوایکس گسیل می‌شود. این پرتوهای ایکس همانند پرتوهای مشخصهٔ اتم دخترند که در بخش ۷.۴ بررسی شد.

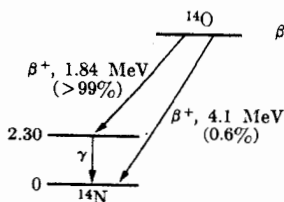
همچون حالت مربوط به واپاشی آلفا، هستهٔ دختر ناشی از واپاشی بتا یا گیراندازی الکترون می‌تواند در حالت پایه یا در يك حالت برانگیخته باشد. در مورد اخیر، فرایند با گسیل گاما همراه خواهد بود. شکل ۱۰۸ طرحهای فروپاشی پاره‌ای از گسیل‌کننده‌های بتا



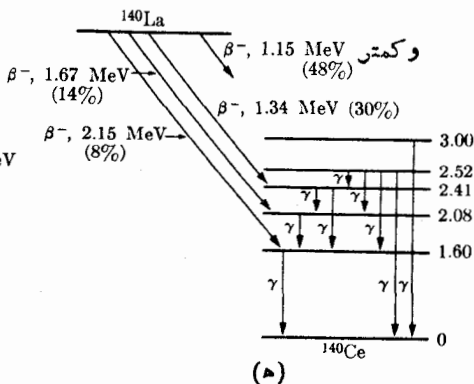
(الف)



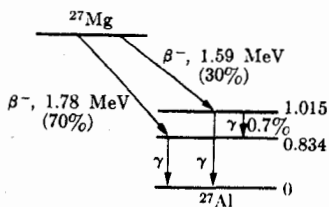
(د)



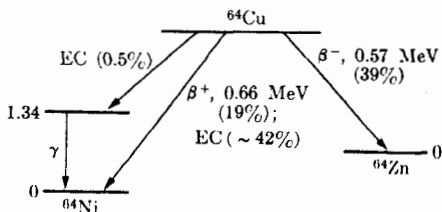
(ب)



(ا)



(ج)

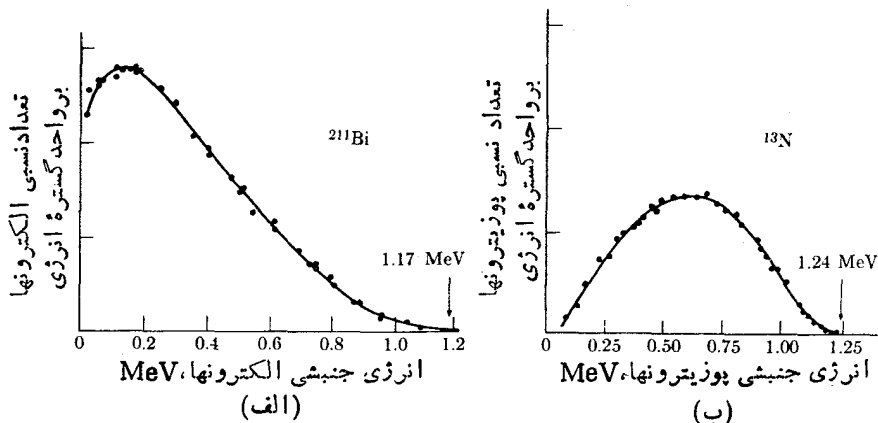


(و)

شکل ۱۰۰۸ طرحهای واپاشی برای گسیل کننده‌های مختلف  $\beta$ . (الف)  $^{20}\text{F}$ ، (ب)  $^{14}\text{O}$ ، (ج)  $^{27}\text{Mg}$ ، (د)  $^{38}\text{Cl}$ ، (ا)  $^{140}\text{La}$ ، (و)  $^{64}\text{Cu}$ .

را نشان می‌دهد.

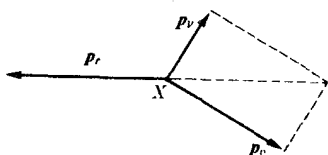
یکی از جالبترین جنبه‌های واپاشی بتا آن است که در آن الکترون‌ها و پوزیترون‌ها با گستره وسیعی از انرژی جنبشی (و تکانه) گسیل می‌شوند و این گستره از صفر تا بیشینه‌ای که با انرژی کل موجود سازگار است را در بر می‌گیرد. به عبارت دیگر، طیف انرژی الکترون‌ها و پوزیترون‌ها یک طیف پیوسته است. شکل ۱۱۰۸ (الف) توزیع انرژی الکترون‌های حاصل از واپاشی



شکل ۱۱۰۸ (الف) طیف انرژی الکترون گسیل شده در واپاشی  $\beta^-$  هسته  $^{211}\text{Bi}$ . (ب) طیف انرژی پوزیترون گسیل شده در واپاشی  $\beta^+$  هسته  $^{13}\text{N}$ .

$\beta^-$  هسته  $^{211}\text{Bi}$  (یا RaE) و شکل ۱۱۰۸ (ب) نیز توزیع انرژی پوزیترونها گسیل شده در واپاشی  $\beta^+$  هسته  $^{13}\text{N}$  را نشان می‌دهد. باید توجه داشت که معادلات (۸.۸) و (۹.۸) فرایندهای دو جسمی اند (مثل واپاشی آلفا)، و بر طبق قوانین پایستگی انرژی و تکانه لازم است که در چارچوب مرجع مرکز جرم (که در آن، هسته مادر در حال سکون است)، انرژی موجود (یعنی مقدار  $Q$  فرایند) به نسبت ثابتی میان هسته دختر و الکترون یا پوزیترون تقسیم شود [معادله (۵.۸) برای واپاشی آلفا]. این موضوع با نتیجه تجربی ذکر شده در بالا سازگار نیست.

برای رفع مشکل جدید، پاولی در سال ۱۹۳۵ پیشنهاد کرد که ذره دیگری نیز باید در واپاشی  $\beta$  گسیل شود، به طوری که در این واپاشی سه ذره حاصل شود. بر طبق قانون پایستگی بار الکتریکی، ذره سوم باید خنثی و جرم آن نیز خیلی کوچک باشد زیرا جرم کل اساساً به وسیله ذرات مشاهده شده دیگر حمل می‌شود. به همین دلیل، ذره جدید نوترینو نامگذاری شد. (این نام را انریکو فرمی فیزیکدان ایتالیایی انتخاب کرد و معنی آن «نوترون کوچک» است.) نوترینو با نماد  $\bar{\nu}$  مشخص می‌شود. همان طور که در بخش ۵.۹ خواهیم دید، معلوم شده است که در واپاشی  $\beta^+$  و گیراندازی الکترون گسیل می‌شود و دیگری پاد نوترینو است که در واپاشی  $\beta^-$  گسیل و با  $\bar{\nu}$  نشان داده می‌شود. با این حال، در این فصل، در اکثر موارد هر دو ذره را «نوترینو» خواهیم نامید. بنا بر این با دخالت دادن نوترینو و در نظر گرفتن اینکه در واپاشی بتا، این ذره نیز با خود انرژی و تکانه حمل می‌کند، از نقض قانون پایستگی انرژی و قانون پایستگی تکانه جلوگیری می‌شود. در چارچوب مرجع مرکز جرم، مجموع تکانه‌های سه ذره نتیجه شده باید مساوی با صفر باشد (شکل ۱۲.۸). اما راههای بسیار



شکل ۱۲۰۸. پایستگی تکانه در واپاشی  $\beta$ .

زیادی وجود دارد که بر اساس آنها می توان انرژی کل موجود را میان سه محصول واپاشی تقسیم کرد و از این طریق می توان توزیع انرژی پیوسته الکترونها یا پوزیترونها را به راحتی و صراحت توضیح داد. بنا بر این، فرایندهای (۸.۰۸)، (۹.۰۸)، و (۱۰.۰۸) باید به صورت زیر نوشته شوند

$${}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z+1}Y + e^- + \bar{\nu} \quad (11.8)$$

واپاشی بتای منفی

$${}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z-1}Y + e^+ + \nu \quad (12.8)$$

واپاشی بتای مثبت

$${}^A_ZX + e^- \rightarrow {}^A_{Z-1}Y + \nu \quad (13.8)$$

گیراندازی الکترون

تا اینجا می توان گفت که نوترینو کشف جالبی برای نجات دو قانون پایستگی است، ولی آیا می توان وجود آن را هم تأیید کرد؟ از لحاظ نظری می توان به کمک تحلیل آماری تعیین کرد که چطور انرژی آزاد شده در فرایند واپاشی میان الکترون (یا پوزیترون) و نوترینو تقسیم می شود (مثال ۸.۰۸). هر گاه این تحلیل با توزیع تجربی انرژی الکترونها (یا پوزیترونها) و نوترینو مقایسه شود، یک سازگاری جالب نتیجه می شود، مشروط بر آنکه جرم سکون نوترینو خیلی کوچک باشد (کمتر از  $10^{-3} m_e$ ). در عمل جرم سکون نوترینو مساوی با صفر در نظر گرفته می شود ( $m_\nu = 0$ )، و بنا بر این رابطه انرژی-تکانه برای نوترینو به صورت  $E_\nu = cp_\nu$  است. از لحاظ تجربی، درک این موضوع بسیار راحت است که مشاهده نوترینو به خاطر خواص آن، بسیار مشکل است، زیرا میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بر آن اثر نمی کنند و به دلیل داشتن جرم سکون خیلی کوچک یا تقریباً صفر نیز نمی توانیم از اندازه گیرهای جرم برای مشاهده گسیل یا گیراندازی آن استفاده کنیم. در واقع، مشاهده مستقیم نوترینو تا سال ۱۹۵۶ امکان پذیر نبود تا اینکه کوان و رینز ثابت کردند که بدون هیچ تردیدی این ذره وجود دارد. آزمایش این دو را در مثال ۶.۸ توضیح خواهیم داد.

هسته های ناپایداری که در بالای ناحیه پایداری شکل ۱۰۷ قرار دارند، تعداد خیلی زیادی نوترون (یا تعداد خیلی کمی پروتون) و آن عده که در زیر این خط واقع اند، تعداد خیلی زیادی پروتون (یا تعداد خیلی کمی نوترون) دارند. از این رو، انتظار می رود که این هسته ها بتوانند با آزاد کردن نوترونها یا پروتونهای اضافی خود به پایداری برسند. با وجود این، چنین چیزی اتفاق نمی افتد (مگر اینکه هسته در حالت برانگیخته باشد) زیرا انرژی کافی برای چنین فرایندهایی وجود ندارد (جدول ۲.۰۸). آنچه مشاهده شده این است که به جای



فرایند بالا، الکترونها و پوزیترونها گسیل می‌شوند. بنابراین می‌توان فرض کرد که يك هسته هنگامی به پایداری می‌رسد که مطابق طرح زیر، در واپاشی  $\beta^-$ ، يك نوترون به يك پروتون تبدیل شود



درحالی که مطابق طرح زیر، در واپاشی  $\beta^+$  يك پروتون به يك نوترون تبدیل می‌شود



در مورد گیراندازی الکترون نیز فرایند به صورت زیر است



بدین ترتیب هسته می‌تواند، بدون اینکه عملاً پروتون یا نوترونی گسیل کند، از فزونی نوترونها یا پروتونها رهایی یابد. این نظریه واپاشی بتا را در سال ۱۹۳۴ فرمی مطرح کرد. معادلات (۱۴.۸)، (۱۵.۸)، و (۱۶.۸) با معادلات (۱۱.۸)، (۱۲.۸)، و (۱۳.۸) سازگاری دارند و به طریق اساسیتری بیان می‌دارند که در واپاشی بتا چه اتفاقی رخ می‌دهد.

بر اساس فرایندهای بالا می‌توان به خاصیت دیگر نوترینو یعنی اسپین آن پی برد. اسپین نوترون، پروتون، الکترون، و پوزیترون هر کدام  $1/2$  است. بنابراین در فرایند  $\beta^+$  یعنی  $p \rightarrow n + e^+ + \nu$ ، تکانه زاویه‌ای طرف چپ برابر با  $1/2$  (در واحد  $\hbar$ ) است، درحالی که تکانه زاویه‌ای  $n + e^+$  بسته به اینکه اسپینهای نوترون و پوزیترون موازی یا پادموازی باشند، باید  $1/2 \pm 1/2$  یعنی برابر با يك یا صفر باشد. از این رو، نوترینو باید اسپین  $1/2$  داشته باشد و چنان سمتگیری کند که اسپین یا تکانه زاویه‌ای کل سه ذره موجود در طرف راست برابر با  $1/2$  شود. از این طریق قانون پایستگی تکانه زاویه‌ای نیز نجات می‌یابد. همین استدلال را می‌توان در مورد فرایندهای دیگر، یعنی (۱۴.۸) و (۱۶.۸) نیز به کار برد. این موضوع می‌تواند تغییرات اسپین  $\Delta I$  مشاهده شده هسته‌ها در واپاشی  $\beta$  را نیز توضیح دهد. هرگاه اسپینهای الکترون (یا پوزیترون) و نوترینو موازی باشند (حالت‌های سه تایی)، در این صورت خواهیم داشت  $\Delta I = \pm 1$  یا صفر، ولی اگر اسپینهای آنها پادموازی باشد (حالت‌های تک تایی)، مقدار  $\Delta I = 0$  نتیجه می‌شود.

فرایند (۱۴.۸) با نوترونهای آزاد نیز مشاهده می‌شود، زیرا این واکنش از نوع واکنش انرژی زاست. در واقع، مقدار انرژی موجود عبارت است از

$$Q = 931.48 [m_n - (m_p + m_e + m_\nu)] \text{ MeV} = 0.7824 \text{ MeV}$$

نوترونهای آزاد بر طبق معادله (۱۴.۸) و با نیمه عمر ۱۳ دقیقه واپاشیده می‌شوند. به همین دلیل است که نوترونهای آزاد وجود ندارند. بنابراین به محض آنکه نوترونهای آزاد تولید شوند، یا توسط هسته‌های دیگر گیر انداخته می‌شوند و یا بر طبق فرایند بالا به

پروتونها، الکترونها، و نوترینوها واپاشیده می‌شوند. از طرف دیگر، فرایندهای (۱۵۰۸) و (۱۶۰۸) از نوع انرژی گیرند (دانشجو می‌تواند با محاسبه مقدار  $Q$  برای هر فرایند این موضوع را اثبات کند). بنابراین، پروتونهای آزاد نسبت به واپاشی بتا پایدارند و همین موضوع وجود هیدروژن را توجیه می‌کند. در غیر این صورت، تمام هیدروژن یا با گیراندازی الکترون مداری و یا با فروپاشی پروتون هسته ناپدید می‌شد. با این حال فرایندهای (۱۵۰۸) و (۱۶۰۸) می‌توانند در هسته‌های پیچیده تر رخ دهند. این امر هنگامی امکان پذیر است که انرژی مورد نیاز را اختلاف انرژیهای بستگی هسته‌های مادر و دختر فراهم کند. اما، نوترونها می‌توانند در هسته‌ها عموماً به خودی خود واپاشیده نمی‌شوند زیرا حضور سایر نوکلئونها فرایند را از لحاظ انرژی ناممکن می‌کند. به همین دلیل است که اکثر نوترونها در داخل هسته‌ها پایدارند.

واپاشی بتا دو واقعیت اساسی فیزیک را روشن می‌کند. یکی اهمیت قوانین پایستگی در تحلیل فرایندهایی است که در طبیعت رخ می‌دهند و دیگری طبیعت متغیر ذرات بنیادی است. یعنی با وجود آنکه ذرات بنیادی خواص کاملاً معین و مشخصی دارند، ساختار آنها دائمی نیست و تحت محدودیتهای تحمیل شده به وسیله قوانین پایستگی، هر ذره می‌تواند به مجموعه‌ای از ذرات دیگر تبدیل شود. این موضوع یک مفهوم اساسی و جدید است که در مکانیک کلاسیک یا مکانیک کوانتومی به تفصیل بررسی و مطالعه نشده است. سرشت همبسته ذرات بنیادی دورنمای کاملاً جدیدی را در مورد ایده‌های مربوط به ساختار ماده بشارت می‌دهد. در فصل نهم، این وضع جدید را به تفصیل مطالعه خواهیم کرد.

نظریه کامل و رضایتبخشی که بتواند تمام تبدیلات ذرات بنیادی را توجیه کند هنوز وجود ندارد. فرض بر این است که فرایندهایی از قبیل (۱۴۰۸)، (۱۵۰۸)، و (۱۶۰۸) و دیگران (که در فصل نهم بررسی خواهند شد)، نتیجه برهم کنش دیگری هستند که به برهم کنش ضعیف معروف است. از تحلیل نیمه عمرها و توزیع انرژی گسیل کننده‌های بتا، تخمین زده شده است که قدرت برهم کنش ضعیف، در مقایسه با قدرت برهم کنش قوی یا هسته‌ای، از مرتبه  $10^{-13}$  و در مقایسه با برهم کنش الکترومغناطیسی از مرتبه  $10^{-11}$  است. در حال حاضر، برهم کنشهای ضعیف و قوی زمینه‌های تحقیقاتی بسیار جالبی را میان فیزیکدانان به وجود آورده‌اند و به نظر می‌رسد که برای سالهای طولانی این تحقیقات همچنان ادامه داشته باشد.

### مثال ۶۰۸ تحلیل آزمایش کوان-رینز در مورد آشکارسازی نوترینو.

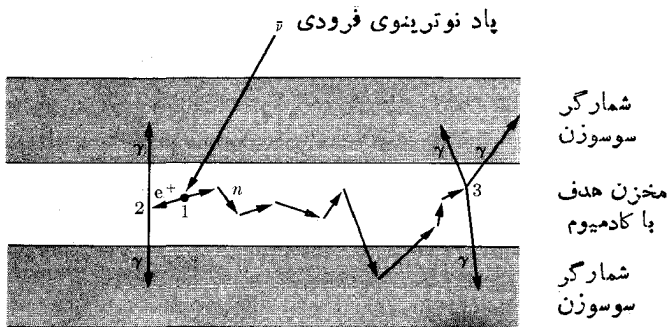
حل: هنگامی که پادنوترینو را پروتونی جذب کند، یک نوترون و یک پوزیترون ایجاد می‌شود که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت



این فرایند گیراندازی پاد نوترینو را می‌توان به همان طریقی که فرایند گیراندازی الکترون، یعنی معادله (۱۶.۸)، به معادله (۱۵.۸) مربوط می‌شود، به معادله (۱۵.۸) مربوط کرد. رآکتورهای هسته‌ای تعداد زیادی گسیل کننده  $\beta^-$  را تولید می‌کنند که همان محصولات شکافت اورانیوم اند (بخش ۵.۸). از این رو، رآکتورهای هسته‌ای منابع مهمی برای تولید پادنوترینوها هستند. هرگاه پاد نوترینوی حاصل از یک رآکتور با ماده هیدروژنی برخورد کند، فرایند (۱۷.۸) ممکن است رخ دهد.

پوزیترون را می‌توان آشکار کرد زیرا از برخورد آن با الکترون ممکن است هر دو ذره از بین بروند و گسیل پرتوگاما رخ دهد (بخش ۳.۹ را ببینید)، که آشکارسازی آن با استفاده از شمارگرهای سوسوزن به آسانی امکان پذیر است (پیوست ۷ را ببینید). با اضافه کردن کادمیوم به ماده هیدروژنی می‌توان نوترون را آشکار کرد. پس از اینکه نوترونها ضمن حرکات از میان ماده با هسته‌های دیگر برخورد کردند مرتباً انرژی از دست می‌دهند و به صورت نوترونهای کند درمی‌آیند، در این هنگام نوترونها را هسته‌های کادمیوم گیر می‌اندازند و چند پرتوگاما گسیل می‌شود. این زنجیره رویداد در شکل ۱۳.۸ نشان داده شده است. البته تأخیری در حدود چند میکروثانیه میان ایجاد پرتوهای گامای حاصل از نابودی الکترون-پوزیترون و گسیل پرتوهای گامای حاصل از گیراندازی نوترون به وسیله کادمیوم وجود دارد. با مدارهای الکترونیکی مناسب می‌توان این دو نوع پرتوگاما را از هم تشخیص داد.

تحلیل نتایج تجربی نشان می‌دهد که زنجیره رویدادهای فرضی بالا به وقوع می‌پیوندد و پادنوترینوها در واقع محصول رآکتور هستند. چندین آزمایش دیگر نیز فرضیه نوترینو را تأیید کرده‌اند. در آزمایش کوان-رینز، که در زیر زمین واقع در زیر یکی از رآکتورهای رودخانه ساوانا انجام شد، شار پادنوترینوها در حدود  $4 \times 10^{16} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  و تعداد رویدادهای ضبط شده در حدود سه رویداد در ساعت بود. قابل توجه است که شار نوترینو



**شکل ۱۳.۸** نمودار طرح‌وار آزمایش آشکارسازی نوترینو. نوترینوی ورودی با یک پروتون در محل ۱ برهم‌کنش می‌کند. پوزیترون پرتاب شده با الکترونی در محل ۲ نابود می‌شود و هسته کادمیوم نیز در محل ۳ نوترون را گیر می‌اندازد.

در زمین، که عمدتاً از خورشید حاصل می‌شوند، در حدود  $10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \times 4$  است.

مثال ۷.۸ انرژی دسترس‌پذیر برای هر یک از فرایندهای واپاشی بتا که با معادلات (۱۱.۸)، (۱۲.۸)، و (۱۳.۸) بیان می‌شوند را تعیین کنید.

حل: ابتدا واپاشی  $\beta^-$  یعنی معادله (۱۱.۸) را در نظر می‌گیریم. قبل از واپاشی، هسته‌ای با عدد اتمی  $Z$  و جرم  $m_Z$  وجود دارد. در پایان فرایند، هسته‌ای با عدد اتمی  $Z+1$  و جرم  $m_{Z+1}$  به اضافه یک الکترون (به جرم  $m_e$ ) و یک نوترینو (با جرم صفر) ایجاد می‌شود. بنابراین، انرژی موجود برای فرایند فوق عبارت است از

$$Q_{\beta^-} = [m_Z - (m_{Z+1} + m_e)]c^2 = (m_Z - m_{Z+1} - m_e)c^2$$

معمولاً به جای جرم هسته‌ای از جرم اتمی استفاده می‌شود، به طوری که خواهیم داشت  $M_Z = m_Z + Zm_e$ . با قراردادن این مقدار در رابطه بالا نتیجه زیر به دست می‌آید

$$Q_{\beta^-} = (M_Z - M_{Z+1})c^2 \quad (18.8)$$

برای واپاشی  $\beta^+$ ، یا معادله (۱۲.۸)، خواهیم داشت

$$Q_{\beta^+} = (m_Z - m_{Z-1} - m_e)c^2$$

یا با قراردادن جرمهای اتمی نتیجه زیر به دست می‌آید

$$Q_{\beta^+} = (M_Z - M_{Z-1} - 2m_e)c^2 \quad (19.8)$$

و بالاخره برای گیراندازی الکترون، یا معادله (۱۳.۸)، داریم

$$Q_{EC} = (M_Z - M_{Z-1})c^2 \quad (20.8)$$

از این رو، هنگامی که جرم اتمی یک اتم مشخص از هر یک از دو ایزوبار مجاور خود بزرگتر باشد، واپاشی از طریق  $\beta^-$  یا گیراندازی الکترون رخ می‌دهد. در مورد واپاشی  $\beta^+$ ، اختلاف جرمها باید حداقل مساوی با  $2m_e$  (یا در حدود  $1.02 \text{ MeV}$ ) باشد. در اینجا به دانشجو پیشنهاد می‌کنیم که این قواعد را با در نظر گرفتن چند گروه از ایزوبارهای موجود در جدول نوکلیدها بررسی کند. هنگام نوشتن این معادلات، از اثر ناشی از انرژی بستگی الکترونها در آنها چشمپوشی کردیم. انرژی  $Q$  (به صورت انرژی جنبشی) میان محصولات واپاشی تقسیم می‌شود. هرگاه از انرژی پس‌زنی هسته دختر چشم‌پوشیم، در این صورت  $Q$  بیشینه انرژی جنبشی الکترون یا پوزیترون موجود در معادلات (۱۱.۸) و (۱۲.۸) را نیز به دست می‌دهد.

اکنون این قواعد مهم را با ذکر چند مثال توضیح می‌دهیم. هسته  $^{14}\text{C}$  بر طبق طرح معادله (۱۱.۸) واپاشیده می‌شود و به هسته  $^{14}\text{N}$  تبدیل می‌شود. این فرایند با گسیل یک

الکترون و یک نوترینو همراه است. جرم اتمهای بالا عبارت‌اند از

$$M_Z(^{12}\text{C}) = 140007682 \text{ amu}$$

$$M_{Z+1}(^{12}\text{N}) = 140007515 \text{ amu}$$

بدین ترتیب با استفاده از معادله (۱۸.۸)، برای  $Q_{\beta^-}$  مقداری برابر با  $0.000167 \text{ amu}$  یا  $0.1556 \text{ MeV}$  به دست خواهیم آورد. بیشینه انرژی جنبشی مشاهده شده الکترونها ی پرتاب شده برابر است با  $0.155 \text{ MeV}$  که بامقدار بالا سازگاری بسیار خوبی دارد. سپس واپاشی  $^{12}\text{C}$  را در نظر می‌گیریم که برطبق معادله (۱۲.۸) به  $^{11}\text{B}$  واپاشیده می‌شود. جرم اتمهای موجود در فرایند بالا عبارت‌اند از

$$M_{Z-1}(^{11}\text{B}) = 11001279 \text{ amu} \quad \text{و} \quad M_Z(^{11}\text{C}) = 11001492 \text{ amu}$$

بنابراین اختلاف جرم آنها برابر با  $0.00213 \text{ amu}$  یا  $1.985 \text{ MeV}$  خواهد بود که از  $2m_e$  یا  $1.022 \text{ MeV}$  بزرگتر است. بنابراین گسیل پوزیترون با

$$Q_{\beta^+} = 1.985 \text{ MeV} - 1.022 \text{ MeV} = 0.963 \text{ MeV}$$

امکان پذیر است. بیشینه انرژی جنبشی اندازه‌گیری شده در مورد پوزیترونها ی مشاهده شده در این واپاشی برابر با  $0.96 \text{ MeV}$  است که بازهم بامقدار بالا سازگاری خوبی دارد. بالاخره واپاشی  $^7\text{Be}$  را در نظر می‌گیریم که جرم آن برابر است با  $M_Z(^7\text{Be}) = 7001915 \text{ amu}$ . همان‌طور که قبلاً گفته شد، از واپاشی  $^7\text{Be}$  هسته  $^7\text{Li}$  به دست می‌آید که جرم آن  $M_{Z-1}(^7\text{Li}) = 7001822 \text{ amu}$  است. اختلاف جرم این دو مساوی با  $0.00093 \text{ amu}$  یا  $0.866 \text{ MeV}$  است که از  $1.022 \text{ MeV}$  کوچکتر است و بنابراین، گسیل پوزیترون امکان پذیر نخواهد بود. در نتیجه، واپاشی از طریق گیراندازی الکترون با  $Q_{\text{EC}} = 0.866 \text{ MeV}$  صورت می‌گیرد.

مثال ۸.۸ محاسبه شکل طیف انرژی در واپاشی  $\beta$ .

حل: تعداد زیادی از هسته‌های پرتوزای  $\beta$  را در نظر می‌گیریم. الکترونها (یا پوزیترونها) ی گسیل شده در یک بازه زمانی مشخص را مشاهده می‌کنیم. تعداد الکترونها (یا پوزیترونها) ی گسیل شده بسا انرژی جنبشی بین  $E_{ke}$  و  $E_{ke} + dE_{ke}$  را با  $dN$  نشان می‌دهیم. هدف ما محاسبه  $dN/dE_{ke}$  است که تعداد الکترونها (یا پوزیترونها) به ازای گستره انرژی واحد را به دست می‌دهد. انرژی جنبشی موجود برای الکترون و نوترینو را با  $E_0$  نشان می‌دهیم که، هرگاه از انرژی پس‌زنی هسته دختر چشم‌پوشیم، عملاً مساوی بسا  $Q$  است. در این صورت  $E_0 = E_{ke} + E_{\nu}$ . واضح است که  $E_0$  باید با بیشینه انرژی جنبشی الکترون مساوی باشد. هنگامی که انرژی جنبشی الکترون در داخل گستره  $dE_{ke}$  قرار می‌گیرد،

انرژی جنبشی نوترینو در گستره  $dE_{kv} = -dE_{ke}$  واقع می‌شود. پس از واپاشی می‌توان الکترون و نوترینو را به صورت ذرات آزادی در نظر گرفت که در جعبه پتانسیل خیلی بزرگی قرار دارند. در این صورت،  $dN/dE_{ke}$  باید با تعداد حالت‌های الکترونی به ازای گستره انرژی واحد [یعنی  $g_e(E_{ke})$ ] و تعداد حالت‌های نوترینو به ازای گستره انرژی واحد  $g_\nu(E_{kv})$  متناسب باشد. یعنی  $dN/dE_{ke} \sim g_e(E_{ke})g_\nu(E_{kv})$ . از مسئله ۱۱.۲ داریم

$$g(E) = g(p) \frac{dp}{dE} \sim p^2 \frac{dp}{dE}$$

برای نوترینو که جرم سکون آن صفر است، رابطه انرژی-تکانه به صورت  $p_\nu = E_{kv}/c$  است. از این رو

$$g_\nu(E_{kv}) \sim E_{kv}^2 = (E_0 - E_{ke})^2$$

برای الکترون (که باید نسبیته در نظر گرفته شود)، رابطه انرژی-تکانه به صورت  $E_{ke} = c\sqrt{m_e^2 c^2 + p_e^2} - m_e c^2$  است و در نتیجه داریم

$$g_e(E_{ke}) \sim (E_{ke} + m_e c^2)(E_{ke}^2 + 2m_e c^2 E_{ke})^{1/2}$$

بنابراین خواهیم داشت

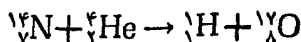
$$\frac{dN}{dE_{ke}} = C(E_{ke} + m_e c^2)(E_{ke}^2 + 2m_e c^2 E_{ke})^{1/2} (E_0 - E_{ke})^2 \quad (21.8)$$

که در آن  $C$  ثابت تناسب است و به چند عامل دیگر دخیل در واپاشی  $\beta$ ، مانند عدد اتمی  $Z$  هسته واپاشیدنی و قدرت برهم کنش ضعیف که واپاشی را باعث می‌شود بستگی دارد، همچنین به انرژی الکترون نیز وابسته است. منحنی حاصل از رسم  $dN/dE_{ke}$  بر حسب  $E_{ke}$  را می‌توان با نتایج تجربی داده شده در شکل ۱۱.۸ (الف) و ۱۱.۸ (ب) مقایسه کرد. به طور کلی، سازگاری حاصل نسبتاً خوب است. یادآوری می‌کنیم که معادله (۲۱.۸) بر اساس این فرض به دست آمده است که جرم سکون نوترینو صفر است. اما، هرگاه جرم سکون صفر نباشد، نتیجه متفاوتی را به دست می‌آوریم. بنا بر این تأیید تجربی معادله (۲۱.۸) اثبات غیرمستقیمی است برای این ادعا که جرم سکون نوترینو قابل چشم‌پوشی است. با در نظر گرفتن درجه دقت تجربه‌های حاضر می‌توان گفت که جرم سکون نوترینو باید کمتر از  $10^{-5} m_e$  باشد و لذا به راحتی می‌توان آن را مساوی با صفر اختیار کرد.

## ۵.۸ واکنشهای هسته‌ای

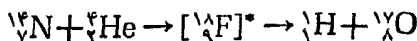
هنگامی که دو هسته بردافعه کولنی غلبه می‌کنند و به هم خیلی نزدیک می‌شوند (در فاصله

حدود برد نیروی هسته‌ای)، آرایش نوکلئونها تغییر می‌کند. این امر به یک واکنش هسته‌ای منجر می‌شود که به آرایش مجدداتما در مولکولها در یک واکنش شیمیایی شباهت دارد. واکنشهای هسته‌ای معمولا از بمباران هسته هدف ( $M_f$ ) با پرتابه هسته‌ای ( $m_i$ ) حاصل می‌شوند. در اکثر موارد، پرتابه یک نوکلئون (نوترون یا پروتون) یا یک هسته سبک مانند دوترون یا ذره آلفاست. هسته‌های سنگینتر معمولا به کار نمی‌روند زیرا که دافعه الکتریکی بین هسته‌های سنگین به پرتابه‌ای با انرژی جنبشی بسیار زیاد نیاز دارد. گاهی از فوتونهای نیز به عنوان پرتابه‌ها استفاده می‌شود. در اکثر واکنشها، همان ذره یا ذره دیگری ( $m_f$ ) به خارج پرتاب می‌شود و هسته باقیمانده یا هسته نهایی ( $M_f$ ) نیز در حالت پایه یا در حالت برانگیخته قرار می‌گیرد. واکنش با نمادهای  $M_f(m_i, m_f)M_f$  نشان داده می‌شود که در آن، هسته‌های اولیه و نهایی به ترتیب در طرف چپ و راست پراوتر و ذرات سبک ورودی و خروجی نیز در داخل پراوتر نوشته می‌شوند. به عنوان مثال، هنگامی که  ${}^{14}_7\text{N}$  با ذرات آلفا (یا  ${}^4_2\text{He}$ ) بمباران شود، نتیجه حاصل می‌تواند یک پروتون ( ${}^1_1\text{H}$ ) و هسته باقیمانده  ${}^{10}_5\text{B}$  باشد. این فرایند را می‌توان به صورت زیر



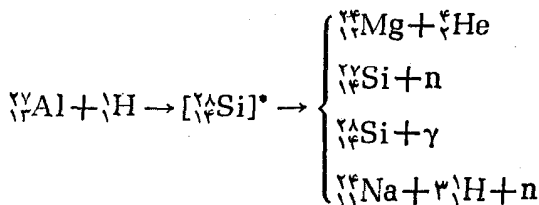
یا به صورت نمادگذاری خلاصه‌تر  ${}^{14}\text{N}(\alpha, p){}^{10}\text{B}$  نوشت.

به طور کلی، هنگامی که انرژی ذرات موجود در واکنش خیلی زیاد نباشد، احتمالا واکنش در دو مرحله انجام می‌شود: ابتدا ذره ورودی یا پرتابه گیر انداخته می‌شود و هسته میانی یا هسته مرکبی تشکیل می‌دهد که در یک حالت خیلی برانگیخته قرار دارد. در مرحله دوم، هسته مرکب می‌تواند همان ذره ورودی یا ذرات دیگری را گسیل کند و به هسته باقیمانده تبدیل شود. بنا بر این، مثال بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

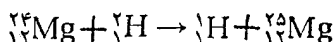


که در آن  ${}^{18}_9\text{F}$  هسته مرکب یا هسته میانی است. علامت ستاره معرف آن است که هسته در حالت برانگیخته است.

معمولا در هر واکنش هسته‌ای چندین مد و انگیختگی برای هسته مرکب وجود دارد. هر مد را یک «کانال» می‌نامند. به عنوان مثال، هنگامی که  ${}^{27}_{13}\text{Al}$  با پروتونها بمباران شود، محصولات مختلفی نتیجه می‌شود که پاره‌ای از آنها را در اینجا ذکر می‌کنیم



بعضی واکنشهای هسته‌ای را نمی‌توان با مدل هسته مرکب بیان کرد، که واکنش پوهنه کردن يك نمونه از آنهاست که به صورت زیر



یا در شکل خلاصه‌تر، به صورت  ${}^{24}_{12}\text{Mg}(d, p){}^{24}_{12}\text{Mg}$  نوشته می‌شود. شواهد تجربی نشان می‌دهند که در این فرایند، هنگامی که دوترون در فاصله خیلی نزدیکی از هسته قرار می‌گیرد، بدون اینکه هسته مرکب تشکیل شود، نوترون گیر می‌افتد و پروتون دفع می‌شود.

واکنشهای هسته‌ای اساساً فرایندهای برخوردی هستند که در آنها باید انرژی، تکانه، تکانه زاویه‌ای، تعداد نوکلئونها، و بار الکتریکی پایسته باشد. برای محاسبه پاره‌ای از این کمیتها می‌توان از روشهای مکانیک نیوتونی و مکانیک نسبیتی استفاده کرد (پیوست ۲ را ببینید). هرگاه ذرات ورودی و خروجی از يك نوع باشند، فرایند به فرایند پراکندگی معروف است. پراکندگی هنگامی کشسان است که هسته در حالت یکسانی باقی بماند، و انرژی جنبشی پایسته باشد. در پراکندگی ناکشسان هسته در حالت متفاوتی قرار می‌گیرد. در حالت ناکشسان، انرژی جنبشی ذره خروجی با انرژی جنبشی ذره ورودی تفاوت خواهد داشت.

مقدار  $Q$  واکنش هسته‌ای  $M_i(m_i, m_f)M_f$  با رابطه زیر داده می‌شود

$$Q = [(M_i + m_i) - (M_f + m_f)]c^2 \quad (22.8)$$

در عبارت بالا، همیشه جرمهای اتمی به کار می‌روند. هرگاه  $Q$  مثبت باشد، واکنش به‌ازای تمام مقادیر انرژی جنبشی ذره ورودی رخ می‌دهد، ولی هرگاه  $Q$  منفی باشد،  $m_i$  باید اقلاً انرژی جنبشی آستانه‌ای داشته باشد تا واکنش ایجاد شود. همان‌طور که در مثال ۳.۹ خواهیم دید، انرژی جنبشی آستانه ذره ورودی در چارچوب مرجع آزمایشگاه برابر است با

$$E_k = -Q \frac{M_i + m_i + m_f + M_f}{2M_i}$$

رابطه بالا مربوط به هنگامی است که ذرات به صورت نسبیتی بررسی می‌شوند. هرگاه ذرات به صورت غیر نسبیتی بررسی شوند، به طوری که  $Q$  کوچک باشد، در این صورت می‌توان به جای  $m_f + M_f$  موجود در صورت کسر بالا مقدار  $M_i + m_i$  را قرار داد و برای انرژی جنبشی آستانه پرتابه در چارچوب مرجع آزمایشگاه مقدار زیر را به دست آورد

$$E_k = -Q \frac{M_i + m_i}{M_i} = -Q \left( 1 + \frac{m_i}{M_i} \right)$$

عبارت بالا در اکثر موارد به کار می‌رود.

در بعضی موارد، پرتابه گیر می‌افتد اما ذره جدیدی گسیل نمی‌شود. بلکه در عوض، پرتو گاما (یا فوتون) گسیل می‌شود که انرژی آن به چندین عامل از جمله حالت هسته حاصل



و انرژی بستگی به اضافه انرژی جنبشی ذره گیر افتاده بستگی دارد. به عنوان مثال برای واکنش گیراندازی می‌توان از  $^{28}\text{Al}(n, \gamma)^{29}\text{Al}$  نام برد. مثال دیگر گیراندازی نوترون توسط هیدروژن در واکنش  $^2\text{H}(n, \gamma)^3\text{H}$  است؛ اتم حاصل از این واکنش، اتم دوتریوم است. فرایند معکوس نیز ممکن است رخ بدهد، بدین معنی که هسته می‌تواند یک فوتون یا پرتو گامایی را جذب کند که انرژی آن برای پرتاب یک ذره کافی و مناسب باشد. این فرایند که معادل اثر فوتوالکترون در اتمهاست، به واکنش فوتو هسته‌ای معروف است. به عنوان مثالی از این نوع فرایندها می‌توان واکنشهای  $^{24}\text{Na}(\gamma, p)^{23}\text{Na}$  و  $^2\text{H}(\gamma, n)^1\text{H}$  را نام برد.

واکنش هسته‌ای را می‌توان بر حسب سطح مقطع بیان کرد. مفهوم سطح مقطع در بخشهای ۹۰.۱ و ۸۰.۷ برای بعضی فرایندها معرفی شد. البته برای هر واکنش هسته‌ای بخصوص، یک سطح مقطع وجود دارد که بر حسب تابعی از انرژی پرتابه یا ذره ورودی بیان می‌شود. سطح مقطعا از لحاظ تجربی به صورت زیر تعریف می‌شوند. فرض کنید نمونه‌ای به ضخامت  $\Delta x$  (که در آن مقدار کوچکی است) و سطح  $A$  که شامل  $n_p$  هسته هدف در یکای حجم است، در معرض تابش ذرات ورودی (از نوع  $a$ ) با چگالی جریان  $n_a v$  ذره در یکای سطح و در یکای زمان قرار گیرد که در آن،  $n_a$  تعداد ذرات ورودی موجود در یکای حجم  $v$  نیز سرعت ذرات است. هر گاه  $N_b$  ذره خروجی (از نوع  $b$ ) در واحد زمان نمونه را ترک کند، در این صورت سطح مقطع برای واکنش  $(a, b)$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\sigma(a, b) = \frac{N_b}{(n_a v)(n_p A \Delta x)} \quad (23.8)$$

این تعریف با معادله (۱۶.۷) سازگاری دارد زیرا  $n_p A \Delta x$  تعداد کل هسته‌های هدف است و از این رو،  $N_b / (n_p A \Delta x)$  شار کل ذرات خروجی در یکای زمان به ازای هسته هدف را به دست می‌دهد. یادآوری می‌کنیم که  $N_b$  بر حسب  $\text{s}^{-1}$  و  $n_a v$  بر حسب  $\text{m}^{-2} \text{ms}^{-1}$  یا  $\text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$  بیان می‌شود و  $n_p A \Delta x$  نیز عددی بدون یکاست.  $\sigma$  نیز همانند حالت‌های قبل بر حسب  $\text{m}^2$  است. اکثر سطح مقطعا از مرتبه  $10^{-28} \text{m}^2 \sim 10^{-28} R^2$  هستند که در آن،  $R$  شعاع هسته‌ای است. کمیت  $10^{-28} \text{m}^2$  یک بادن نام دارد و همان طور که در بخش ۳.۷ گفته شد، با  $b$  نمایش داده می‌شود. بارن یکایی است که اساساً برای بیان سطح مقطعا فرایندهای هسته‌ای به کار می‌رود. یکی از اضعاف آن میلی بارن است که برابر است با  $10^{-31} \text{m}^2$ .

به ازای هر ذره ورودی مشخص  $a$  ممکن است ذرات خروجی متفاوتی مانند  $b, b', b'', \dots$ ، متناظر با کانالهای واکنشی مختلف وجود داشته باشد که هر کدام از آنها سطح مقطع مخصوص به خود، همچون  $\sigma(a, b), \sigma(a, b'), \dots$ ، و غیره را دارند. در این صورت، سطح مقطع کل برای ذره  $a$  عبارت است از

$$\sigma(a) = \sigma(a, b) + \sigma(a, b') + \sigma(a, b'') + \dots$$

سطح مقطعا جزئی و کلی هر نمونه مشخص به صورت زیر (بر حسب  $\text{m}^{-1}$ ) تعریف می‌شوند

$$\Sigma_{ab} = n_i \sigma(a, b)$$

$$\Sigma_a = n_i \sigma(a) \quad (24.8)$$

سطح مقطع هر واکنش هسته‌ای به انرژی ذره ورودی وابسته است. در بسیاری از واکنشهای هسته‌ای، سطح مقطعها قله‌های خیلی مشخصی دارند که به تشدیدها معروف اند. این تشدیدها با انرژیهای متناظرند که به‌ازای آنها احتمال وقوع واکنش بخصوصی بسیار زیاد است. تشدیدها با انرژیهای انرژی هسته مرکب ارتباط بسیار نزدیکی دارند. شکل ۱۴.۸ (الف) و (ب) سطح مقطع کل و سطح مقطع گیراندازی نوترونها در آلومینیوم را برحسب انرژی نوترون نشان می‌دهد. شکل ۱۴.۸ (ج) نیز سطح مقطع را (برحسب یکای اختیاری) برای واکنش هسته‌ای  $^{27}\text{Al}(p, n)^{27}\text{Si}$  برحسب تابعی از انرژی پروتون نشان می‌دهد. از تحلیل این منحنیها می‌توان اطلاعات باارزشی درباره ساختار هسته و حالت‌های انرژی به دست آورد. در بسیاری موارد، هسته‌ای که از یک واکنش هسته‌ای نتیجه می‌شود، ناپایدار یا پرتوزاست. در واقع، از طریق واکنشهای هسته‌ای است که به‌طور مصنوعی می‌توان هسته‌های پرتوزا تولید کرد. پرتوزایی مصنوعی را در سال ۱۹۳۴ ژولیو و کوری هنگام مطالعه واکنشهای هسته‌ای حاصل از بمباران عناصر سبک با ذرات آلفا، کشف کردند. یکی از واکنشهایی که آنان مشاهده کردند عبارت است از



هسته  ${}^{12}_6\text{N}$  ناپایدار است و برطبق طرح زیر واپاشیده می‌شود

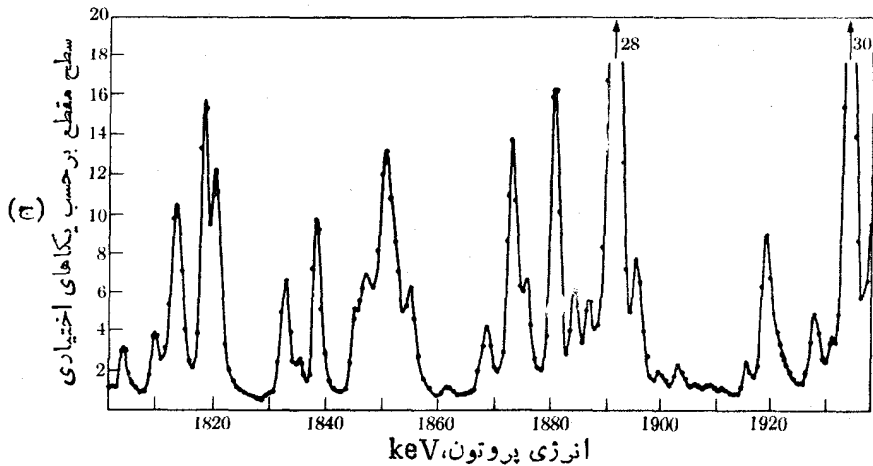
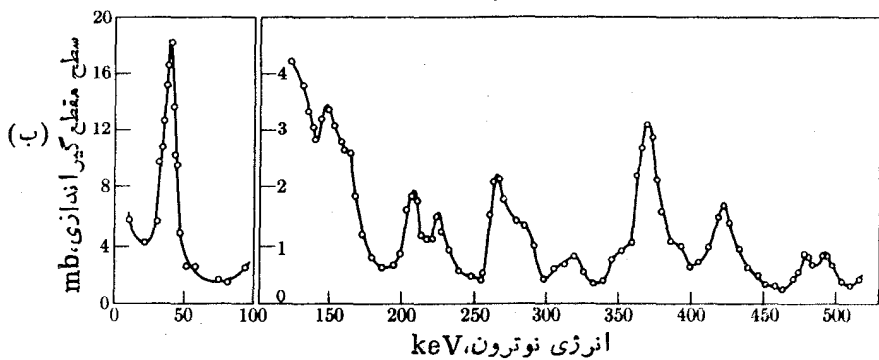
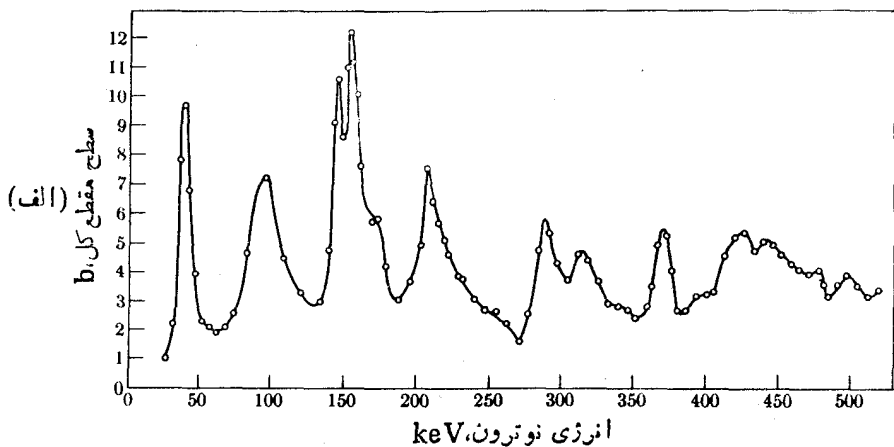


سری جالب دیگر از واکنشها آنهایی اند که از ترکیب واکنشهای گیراندازی نوترون و واپاشی بتای ایزوتوپهای اورانیوم نتیجه می‌شوند و هسته‌های جدید با  $Z = 93$  (نپتونیم) و  $Z = 94$  (پلوتونیوم) و  $Z = 95$  (آمریکیوم) تا  $Z = 100$  را تولید می‌کنند. زنجیره جزئی واکنشها در شکل ۱۵.۸ نشان داده شده است که در آن، هر پیکان افقی معرف گیراندازی نوترون و هر پیکان عمودی معرف یک واپاشی بتاست.

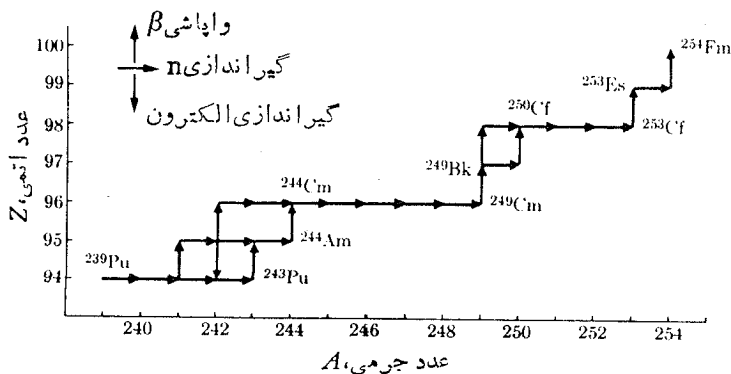
**مثال ۹.۸** تضعیف باریکه ذرات از نوع  $a$  برحسب تابعی از فاصله طی شده  $x$  در یک هدف.

**حل:** هرگاه چگالی جریان ذرات ورودی از نوع  $a$  را که بر لایه‌ای به ضخامت  $\Delta x$  برخورد می‌کند با  $I = n_a v$  نمایش دهیم، در این صورت از معادلات (۲۳.۸) و (۲۴.۸) خواهیم داشت

$$I \Sigma \Delta x = \frac{N_b}{A}$$



شکل ۱۴-۸ (الف) سطح مقطع کل، (ب) سطح مقطع گیراندازی آلومینیوم برای نوترونها برحسب تابعی از انرژی نوترون، و (ج) سطح مقطع برای واکنش  $^{27}\text{Cl}(p, n)^{27}\text{Ar}$  برحسب تابعی از انرژی پروتون.



شکل ۱۵.۸ واکنشهای هسته‌ای متوالی برای ایجاد نوکلیدهای سنگین به وسیله تابش نوترون کند بر  $^{239}\text{Pu}$ .

رابطه بالا تعداد ذرات حذف شده در یکای سطح و در یکای زمان از باریکه ورودی، یا به عبارت دیگر، کاهش در چگالی جریان پرتوها را به دست می‌دهد، که چون  $\Delta I$  منفی است با  $\Delta I$  — نمایش داده می‌شود. بنابراین داریم

$$\Delta I = -I \Delta x \quad (25.8)$$

هرگاه ضخامت  $\Delta x$  خیلی کوچک باشد، می‌توان نوشت

$$dI = -I \Sigma dx$$

یا

$$\frac{dI}{I} = -\Sigma dx$$

با انتگرالگیری از رابطه بالا و با در نظر گرفتن اینکه به ازای  $x = 0$  شار ذره ورودی مساوی با  $I_0$  است، نتیجه زیر به دست می‌آید

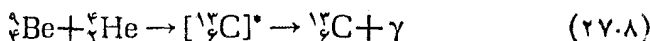
$$I = I_0 e^{-\Sigma x} \quad (26.8)$$

با اندازه‌گیری  $I$  و  $I_0$  می‌توان از رابطه بالا برای تعیین  $\Sigma$  استفاده کرد. با معلوم بودن  $\Sigma$ ، مقدار  $\sigma$  با استفاده از معادله (۲۴.۸) به دست می‌آید.

مثال ۱۵.۸ کشف نوترون.

حل: کاربرد جالب و تاریخی قوانین پایستگی در فرایندهای هسته‌ای همان تاریخ کشف نوترون است. در سال ۱۹۳۵ میلادی، بوت و بکر مشاهده کردند که وقتی بور و بریلیوم را

با ذرات آلفا بمباران کنند، تابش با قابلیت نفوذ بسیار زیادی تولید می‌شود. آنها را یافتند که این تابش از ذرات باردار تشکیل نشده است زیرا تحت تأثیر میدانهای الکتریکی یا مغناطیسی منحرف نمی‌شود. به همین دلیل تصور کردند که تابش حاصل شامل پرتوهای گامای با انرژی زیاد است و واکنش مربوط را به صورت زیر نوشتند



مقدار  $Q$  این واکنش برابر است با  $1.074 \text{ MeV}$ . چون انرژی جنبشی ذره آلفا در حدود  $5 \text{ MeV}$  است، کل انرژی موجود در چهار چوب مرجع مرکز جرم برابر است با  $1.4 \text{ MeV}$ . این انرژی باید میان اتم  ${}^{12}_6\text{C}$  و فوتون گاما تقسیم شود. بنابراین، پرتوهای گاما باید مقدار کمی انرژی در واقع کمتر از  $1.4 \text{ MeV}$  داشته باشند. به کمک اندازه‌گیریهای جذبی، معلوم شد که انرژی فوتون باید در حدود  $7 \text{ MeV}$  باشد. دو سال بعد یعنی در  $1932$ ، کوری و ژولیو مشاهده کردند که وقتی تابش حاصل از واکنش بالا از میان ماده هیدروژنی عبور کند، پرتوهای پرنانرژی تولید می‌شوند که بیشینه انرژی آنها در حدود  $7.5 \text{ MeV}$  است. تعبیر طبیعی این فرایند آن بود که فرض شود پرتوهای در اثر برخورد با فوتونهای ایجاد شده در واکنش بالا به خارج پرتاب می‌شوند و یک اثر کامپتون هسته‌ای ( $\gamma, p$ ) به وقوع می‌پیوندد. پرنانرژیترین پرتوهای حاصل برخورد های رودرویی هستند که در آنها، فوتونها پس زده می‌شود، یا به عبارت دیگر فوتونها تحت زاویه  $180^\circ$  منحرف می‌شوند. هر گاه  $E_\gamma$  و  $p_\gamma = E_\gamma/c$  به ترتیب انرژی و تکانه فوتون فرودی و  $E'_\gamma$  و  $p'_\gamma = E'_\gamma/c$  انرژی و تکانه فوتون پس زده و بالاخره  $E_k$  و  $p = \sqrt{2m_p E_k}$  نیز انرژی و تکانه پرتون باشد (که می‌توان آنرا به صورت غیرنسبیتی در نظر گرفت)، در این صورت بر طبق قانون پایستگی انرژی و تکانه خواهیم داشت

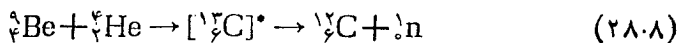
$$E_\gamma = E'_\gamma + E_k, \quad \frac{E_\gamma}{c} = -\frac{E'_\gamma}{c} + \sqrt{2m_p E_k}$$

که از آن نتیجه زیر به دست می‌آید

$$E_\gamma = \frac{1}{2}(E_k + \sqrt{2(m_p c^2)E_k})$$

با قرار دادن بیشینه مقدار  $E_k$ ، یعنی  $7.5 \text{ MeV}$  و با در نظر گرفتن اینکه  $m_p c^2$  در حدود  $938 \text{ MeV}$  است، مقدار  $E_\gamma \approx 6.4 \text{ MeV}$  به دست می‌آید. این مقدار انرژی برای فوتونهای پرتو گاما به مراتب بیشتر از انرژی حاصل از واکنشی است که در بالا به صورت  $1.4 \text{ MeV}$  داده شده است، یا از اندازه‌گیریهای جذبی نتیجه می‌شود. بدتر آنکه با در نظر گرفتن اثر محصولات واکنش Be-He بر سایر مواد، مقادیر دیگری برای  $E_\gamma$  به دست می‌آید که در بعضی موارد حتی در حدود  $90 \text{ MeV}$  است. بنابراین، از معادله (27.8) نمی‌توان نتایج سازگاری برای  $E_\gamma$  به دست آورد که با پایستگی انرژی و تکانه توافق داشته باشد.

در سال ۱۹۳۲ چادویک فیزیکدان انگلیسی نشان داد که اگر به جای پرتوهای گاما، ذرات خنثی با جرمی نزدیک به جرم پروتونها گسیل شوند تمام این اشکالات برطرف، و قوانین پایستگی حفظ می‌شوند. این ذرات خنثی را نوترون نامیدند و بنا بر این فرایند را باید به صورت زیر نوشت



چادویک با عبور دادن نوترونها از میان ماده‌ای که شامل اتمهای هیدروژن و نیتروژن بود، اندازه گیریهای دقیقی برای انرژی جنبشی پروتونها و اتمهای نیتروژن به خارج پرتاب شده انجام داد. بر اساس این اندازه گیریها جرم نوترون قابل محاسبه است. و مقداری بین ۱۰۰۰۵ و ۱۰۰۰۸ amu برای آن به دست می‌آید که با انرژیهای موجود در واکنش بالا سازگاری دارد، کمی بعد، به کمک اندازه گیریهای دقیقتر مقدار  $m_n = 1.0008665 \text{ amu}$  برای نوترون به دست آمد.

آزمایشهای چادویک اساس و پایه مدل حاضر در مورد هسته را تشکیل می‌دهد، یعنی مدلی که در آن فرض می‌شود هسته از پروتونها و نوترونها تشکیل شده است. قبل از آن، دانشمندان هسته‌ها را به صورت ترکیبی از پروتونها و الکترونها (یعنی  $A$  پروتون و  $A-Z$  الکترون، یا تعداد کل  $A-Z$  ذره) در نظر می‌گرفتند. این فرض مشکلات غیر قابل حلی را به دنبال داشت که از جمله آنها می‌توان از موارد زیر نام برد: الکترونها در مقایسه با شعاع هسته‌ای بسیار بزرگ بودند، گشتاورهای مغناطیسی الکترونها در حدود  $10^3$  مرتبه از گشتاورهای مغناطیسی هسته‌ای بزرگتر بود، و حضور آنها در داخل هسته امکان در نظر گرفتن مقادیر مشاهده شده برای اسپینهای هسته‌ای را غیر ممکن می‌ساخت. بنا بر این کشف به موقع نوترون بسیار مغتنم شمرده شد و همین کشف کمک بزرگی به مطالعه شناخت هسته کرد.

مثال ۱۱.۸ ورقه نازکی از طلا به ضخامت  $0.3 \text{ mm}$  در معرض تابش نوترونهای کند با چگالی جریان  $10^7$  نوترون بر سانتیمتر مربع بر ثانیه قرار می‌گیرد. سطح مقطع گیراندازی  ${}^{197}\text{Au}$  برای نوترونهای گرمایی  $2.8 \times 10^{-28} \text{ m}^2$  است. چگالی طلا  $19.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  و جرم اتمی آن  $197.2 \text{ amu}$  است. تعداد هسته‌های  ${}^{197}\text{Au}$  را که بر طبق واکنش  ${}^{197}\text{Au}(n, \gamma) {}^{198}\text{Au}$  در ثانیه و در  $\text{cm}^2$  تشکیل می‌شوند به دست آورید.

**حل:** سطح مقطع گیراندازی  ${}^{197}\text{Au}$  برای نوترونهای گرمایی را با  $\sigma(n, \gamma)$  و تعداد اتمهای طلا دریکی حجم رانیز با  $n_{\text{Au}}$  نمایش می‌دهیم. در این صورت بر طبق معادله (۲۴.۸)، سطح مقطع ماکروسکوپیکی برای گیراندازی نوترون برابر است با

$$\Sigma = n_{\text{Au}} \sigma(n, \gamma)$$

هرگاه چگالی جریان نوترونهای فرودی برابر  $I_0$  باشد، طبق معادله (۲۶.۸) تعداد نوترونهایی که پس از مسافت  $x$  گیر انداخته نمی‌شوند از رابطه  $I = I_0 e^{-\Sigma x}$  به دست می‌آید. از این رو، تعداد نوترونهایی که در فاصله  $x$  گیر انداخته می‌شوند برابر است با

$$I_0 - I = I_0(1 - e^{-\Sigma x})$$

که برابر است با تعداد هسته‌های طلای  $^{198}\text{Au}$  حاصل. در این مورد

$$n_{\text{Au}} = \frac{1993 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}}{19702 \text{ amu} \times 1966 \times 10^{-27} \text{ kg amu}^{-1}} = 5089 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

تعداد اتمهای  $^{197}\text{Au}$  در متر مکعب را به دست می‌دهد. بنابراین،

$$\Sigma = n_{\text{Au}} \sigma(n, \gamma) = 562 \text{ m}^{-1}$$

با قرار دادن  $x = 0.3 \text{ mm} = 3 \times 10^{-4} \text{ m}$  خواهیم داشت  $\Sigma x = 0.1686$  و  $e^{-\Sigma x} = 0.845$  در نتیجه

$$I_0 - I = 10^7 \text{ n cm}^{-2} \text{ s}^{-1} (1 - 0.845) = 1.55 \times 10^6 \text{ n cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

رابطه بالا تعداد نوترونهای جذب شده و اتمهای  $^{198}\text{Au}$  تشکیل شده در سانتیمتر مربع در ثانیه را به دست می‌دهد.

مثال ۱۲۰۸ تعیین ترازهای انرژی  $^{28}\text{Si}$  با استفاده از واکنش هسته‌ای:  $^{27}\text{Al}(p, \alpha)^{24}\text{Mg}$  و واکنش وارونه آن یعنی  $^{24}\text{Mg}(\alpha, p)^{27}\text{Al}$ .

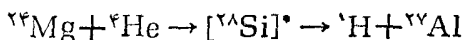
حل: هسته مرکب واکنش  $^{27}\text{Al}(p, \alpha)^{24}\text{Mg}$  هسته  $^{28}\text{Si}$  است به طوری که می‌توان نوشت



انتظار می‌رود که وقتی انرژی کل در چارچوب مرجع مرکز جرم سیستم  $^{27}\text{Al} + {}^1\text{H}$  منهای انرژی جرم سکون  $^{28}\text{Si}$  با انرژی لازم برای برانگیختگی  $^{28}\text{Si}$  به یکی از ویژه حالت‌های آن مطابقت دارد، سطح مقطع این واکنش قله‌های (یعنی تشدیدهای) قابل توجهی را از خود نشان دهد. این انرژی عبارت است از

$$[M(^{27}\text{Al}) + m_p - M(^{28}\text{Si})]c^2 + E_{kp} = (11588 + E_{kp}) \text{ MeV}$$

که در آن  $E_{kp}$  انرژی جنبشی سیستم  $(p, ^{27}\text{Al})$  در چارچوب مرجع مرکز جرم است. هنگامی که هسته مرکب تشکیل شد، ممکن است به صورت  $^{24}\text{Mg} + \alpha$  تجزیه شود.  $^{24}\text{Mg}$  می‌تواند در حالت پایه یا در یکی از حالت‌های برانگیخته باشد. حالت هسته  $^{24}\text{Mg}$  انرژی جنبشی ذره  $\alpha$  را تعیین می‌کند و وقتی که  $^{24}\text{Mg}$  به حالت پایه خود برمی‌گردد انرژی پرتوهای گامای مشاهده شده نیز به دست می‌آید. واکنش معکوس یعنی

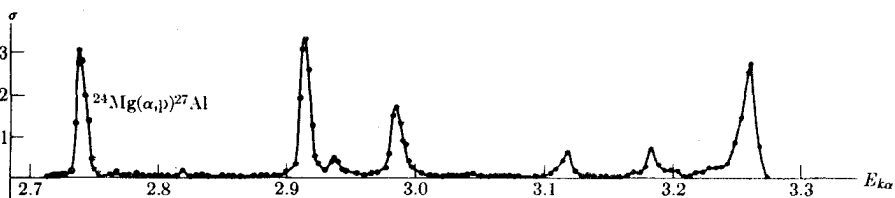
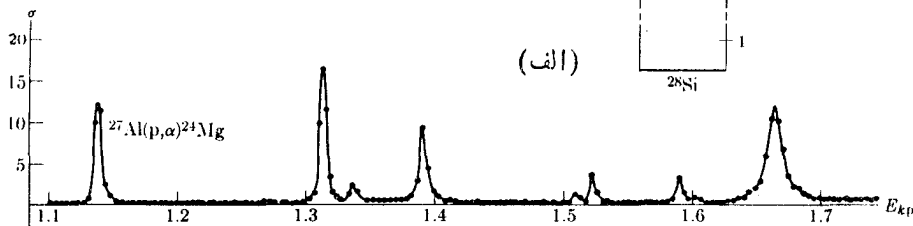
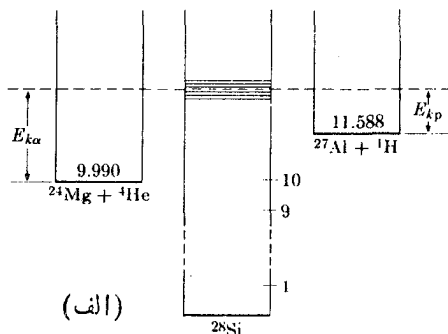


نیز هسته  $^{28}\text{Si}$  را تولید می‌کند که انرژی برانگیختگی آن با رابطه زیر داده می‌شود

$$[M(^{24}\text{Mg}) + m(^4\text{He}) - M(^{28}\text{Si})]c^2 + E_{k\alpha} = (9990 + E_{k\alpha})\text{MeV}$$

که در آن  $E_{k\alpha}$  انرژی جنبشی کل سیستم  $(\alpha, ^{24}\text{Mg})$  در چارچوب مرجع مرکز جرم است. روابط انرژیهای مختلف در شکل ۱۶۰۸ (الف) نشان داده شده است.

از این بحث نتیجه می‌شود که سطح مقطعها برای واکنش  $^{27}\text{Al}(p, \alpha)^{24}\text{Mg}$  و واکنش معکوس آن،  $^{24}\text{Mg}(\alpha, p)^{27}\text{Al}$ ، باید مجموعه یکسانی از تشدیدها را از خود نشان دهند. اما، هنگامی که انرژیها به چارچوب مرجع مرکز جرم مربوط نسبت داده شوند، برای هر تشدید، انرژی جنبشی سیستم  $(\alpha, ^{24}\text{Mg})$  به طور یکنواختی به مقدار  $17598\text{MeV} = (9990 - 11588)\text{MeV}$  از انرژی جنبشی سیستم  $(p, ^{27}\text{Al})$



انرژی جنبشی ذره ورودی به اضافه هسته هدف در چارچوب مرجع مرکز جرم

(ب)

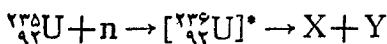
شکل ۱۶۰۸ شواهدی برای مفهوم هسته مرکب به کمک واکنشهای  $^{27}\text{Al}(p, \alpha)^{24}\text{Mg}$  و  $^{24}\text{Mg}(\alpha, p)^{27}\text{Al}$  هسته مرکب است. (الف) روابط انرژی، (ب) سطح مقطع برای هر دو واکنش.



بیشتر خواهد بود. این استنتاج را نتایج تجربی شکل ۱۶.۸ (ب) تأیید می‌کند. در این شکل سطح مقطعها برای پروتونهای با انرژی از ۱۸۱ تا ۱۸۸ MeV و برای ذرات آلفای با انرژیهای از ۲۷ تا ۳۴ MeV نشان داده شده است. نتیجه مزبور تأیید رضایتبخشی را در مورد مفهوم هسته مرکب ارائه می‌دهد و برای نشان دادن منشأ تشدیدها در واکنشهای هسته‌ای نیز به کار می‌رود. ترازهای انرژی  $^{28}\text{Si}$  در ناحیه انرژی مورد نظر را می‌توان از روی انرژی قله‌های نشان داده شده در شکل تعیین کرد.

### ۶.۸ شکافت هسته‌ای

شکافت فرایند هسته‌ای مهمی است که در آن يك هسته سنگین مثل اورانیوم یا توریوم، به دوپاره با اندازه‌های قابل مقایسه شکافته می‌شود. وقوع شکافت به صورت يك فرایند طبیعی بسیار نادر است (عقیده بر این است که  $^{238}\text{U}$  خود به خود با نیمه عمر تقریبی ۱۵۱۶ سال شکافته می‌شود). معمولاً با برانگیختن هسته، شکافت را به طور مصنوعی ایجاد می‌کنند. انرژی آستانه یا کمینه انرژی لازم برای فعالسازی شکافت يك هسته سنگین در حدود ۴ تا ۶ MeV است. یکی از مؤثرترین راههای ایجاد شکافت گیراندازی نوترون است. در بعضی موارد، انرژی بستگی نوترون گیر افتاده برای برانگیختن هسته تا بالای انرژی آستانه کافی است، به گونه‌ای که هسته به دوپاره شکافته می‌شود. به عنوان مثال این امر در مورد هسته  $^{235}\text{U}$  با گیرانداختن يك نوترون کند (یا گرمایی) صادق است. فرایند را می‌توان با معادله زیر بیان کرد



در موارد دیگر برای آنکه شکافت رخ دهد، نوترونها باید، علاوه بر انرژی بستگی، مقداری انرژی جنبشی (از مرتبه ۱ MeV) داشته باشند. این امر در  $^{235}\text{U}$  پس از گیراندازی يك نوترون تند رخ می‌دهد. دلیل این دو رفتار متفاوت به جزئیات ساختار هسته‌های مختلف که به جمله تزییح موجود در فرمول جرم [معادله (۱۲.۷)] وابسته اند، مربوط است.  $^{235}\text{U}$  هسته زوج-فردی است که ۱۴۳ نوترون دارد. هنگامی که این هسته يك نوترون گیر می‌اندازد هسته  $^{236}\text{U}$  تشکیل می‌شود که يك هسته زوج-زوج است. نوترون گیر افتاده با آخرین نوترون فرد  $^{236}\text{U}$  جفت می‌شود و انرژی تزییح اضافی ۵.۷ MeV را آزاد می‌کند. از طرف دیگر،  $^{238}\text{U}$  يك هسته زوج-زوج است که ۱۴۶ نوترون دارد که همگی جفت شده اند. هنگامی که این هسته نوترونی را گیر می‌اندازد،  $^{239}\text{U}$  تشکیل می‌شود که يك هسته زوج-فرد است. در این مورد هیچ انرژی تزییح اضافی وجود ندارد. به همین دلیل، هسته  $^{239}\text{Pu}$  با ۱۴۵ نوترون نیز می‌تواند شکافت را با گیراندازی نوترون کند متحمل شود. جدول ۳.۸ انرژی برانگیختگی پاره‌های از هسته‌های حاصل از گیراندازی نوترون و نیز انرژی فعالسازی شکافت آنها را نشان می‌دهد. به کمک این اطلاعات می‌توان دریافت که کدام يك از این هسته‌ها با نوترونهای کند شکافته می‌شوند، یا به عبارت دیگر، شکافت پذیر هستند.

## جدول ۳۰۸ شکافت پذیری هسته‌های سنگین با نوترونهای گرمایی.

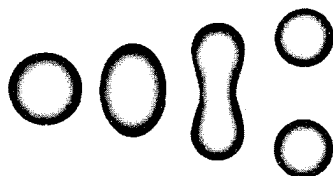
انرژی آستانه، MeV	انرژی برانگیختگی، MeV	هسته مرکب	هسته هدف
۴۰۶	۶۰۶	[ <sup>۲۳۴</sup> U]	<sup>۲۳۳</sup> U
۵۰۳	۶۰۴	[ <sup>۲۳۶</sup> U]	<sup>۲۳۵</sup> U
۵۰۵	۴۰۹	[ <sup>۲۳۹</sup> U]	<sup>۲۳۸</sup> U
۶۰۵	۵۰۱	[ <sup>۲۳۲</sup> Th]	<sup>۲۳۲</sup> Th
۵۰۰	۵۰۴	[ <sup>۲۳۲</sup> Pa]	<sup>۲۳۱</sup> Pa
۴۰۲	۵۰۰	[ <sup>۲۳۸</sup> Np]	<sup>۲۳۷</sup> Np
۴۰۰	۶۰۴	[ <sup>۲۴۰</sup> Pu]	<sup>۲۳۹</sup> Pu

هر هسته می‌تواند با جذب پرتوهای گامای با انرژی مساوی با، یا بزرگتر از انرژی آستانه لازم برای شکافت نیز به قدر کافی برانگیخته و فرایند شکافت را متحمل شود. این فرایند به فوتوشکافت معروف است. انرژیهای آستانه برای فوتوشکافت در مورد چند هسته در جدول ۴۰۸ آمده است.

در شکل ۱۷۰۸ سازوکار شکافت هسته‌ای نشان داده شده است. هسته‌ای را در نظر می‌گیریم که حالت تعادل آن مطابق آنچه در شکل ۱۷۰۸ (الف) نشان داده شده است، کروی است. هر گاه این هسته به‌طور مناسب برانگیخته شود، ممکن است مطابق آنچه در بخش ۱۵۰۷ توضیح داده شد، ارتعاشات جمعی را متحمل شود. هنگامی که انرژی برانگیختگی کم است، نوسانات حول شکل کروی نیز کوچک، و شکل هسته در بیشینه تغییر بیضیوار

## جدول ۴۰۸ انرژیهای آستانه برای فوتوشکافت.

آستانه فوتوشکافت، MeV	نوکلید
$508 \pm 0.15$	<sup>۲۳۸</sup> U
$531 \pm 0.25$	<sup>۲۳۵</sup> U
$518 \pm 0.27$	<sup>۲۳۳</sup> U
$531 \pm 0.27$	<sup>۲۳۹</sup> Pu
$540 \pm 0.22$	<sup>۲۳۲</sup> Th



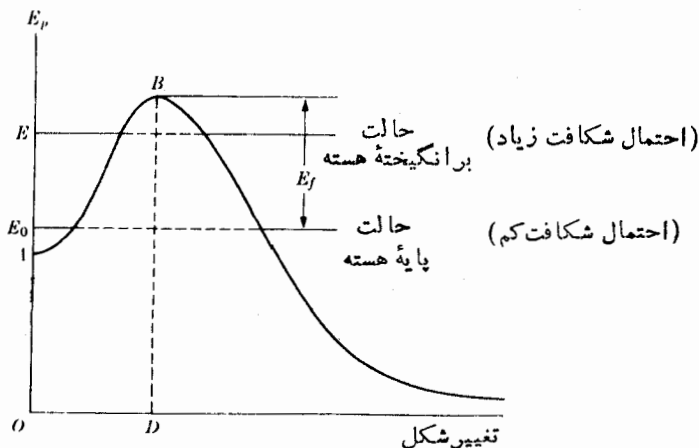
(الف) (ب) (ج) (د)

شکل ۱۷۰۸ تغییر شکل يك هسته بر حسب انرژی برانگیختگی.

خواهد بود [شکل ۱۷۰۸ (ب)]. وقتی انرژی برانگیختگی به صورت پرتوهای گاما آزاد شود، هسته به حالت تعادل خود برمی گردد. بنابراین، این فرایند يك فرایند گیراندازی نوترون تابشی است. هنگامی که انرژی برانگیختگی بزرگ است، تغییر شکل هسته، مطابق آنچه در شکل ۱۷۰۸ (ج) نشان داده شده است، خیلی بیشتر است. حتی در این مورد نیز احتمالی برای بازگشت به شکل اولیه وجود دارد که پس از وانگیختگی، با گسیل پرتو گاما همراه خواهد بود. ولی هرگاه انرژی برانگیختگی به اندازه کافی بزرگ باشد، تغییر شکل نیز می تواند به قدری بزرگ شود که دافعه الکتریکی میان دو نیمه از برهم کنش هسته‌ای بسا برد کوتاه نیز بزرگتر شود و در این صورت به جای اینکه هسته با آزاد کردن پرتوهای گاما به شکل کروی برگردد، با احتمال زیاد تغییر شکل آن بیشتر و بیشتر می شود تا اینکه بالاخره به دو پاره تقسیم می شود، یعنی مطابق آنچه در شکل ۱۷۰۸ (د) نشان داده شده است، فرایند شکافت رخ می دهد.

در شکل ۱۸۰۸ انرژی پتانسیل هسته بر حسب تغییر شکل آن به طور طرح وار نشان داده شده است. برای تغییر شکل‌های کوچکتر از يك مقدار بحرانی مشخص، که در شکل با  $D$  نشان داده شده است، نیروهای هسته‌ای بر نیروهای الکتریکی غلبه می کنند و انرژی پتانسیل با تغییر شکل افزایش می یابد؛ و منحنی  $AB$  نتیجه می شود. این منحنی در ناحیه نوسانات پایدار قرار دارد. برای تغییر شکل‌های بزرگتر از  $D$ ، نیروهای الکتریکی بر نیروهای هسته‌ای غلبه می کنند و با تغییر شکل بیشتر، انرژی پتانسیل کاهش می یابد. در مورد اخیر منحنی  $BC$  نتیجه می شود که با شکافت هسته به دو پاره متناظر است. این پاره‌ها بر اثر دافعه کولنی موجود در بین خود، از یکدیگر دور می شوند. هرگاه  $E$  به حالت پایه هسته نسبت داده شود، انرژی آستانه شکافت مساوی با  $E_f$  خواهد بود. این منحنی را فقط از لحاظ کیفی می توان اختیار کرد.

هرگاه هسته در آغاز در حالتی با انرژی کمتر از انرژی متناظر با  $B$ ، مثلا انرژی  $E_0$  یا  $E_1$ ، قرار داشته باشد نوساناتی را بدون شکافت متحمل می شود. در این حالت سد پتانسیل از وقوع شکافت خود به خود جلوگیری می کند. با این حال ممکن است هسته با تونل زدن از سد پتانسیل بتواند خود به خود شکافته شود. هنگامی که هسته در حالت پایه قرار دارد، احتمال تونل زنی بینهایت کم است. به گونه‌ای که شکافت خود به خود يك رویداد



شکل ۱۸۰۸ تابع انرژی پتانسیل برای هسته‌ای که تغییر شکل می‌دهد.

تقریباً ناممکن می‌شود. اما قابلیت نفوذ در سد پتانسیل با انرژی برانگیختگی هسته افزایش می‌یابد و احتمال فرایند شکافت را افزایش می‌دهد. واضح است که هر گاه مقدار انرژی برانگیختگی هسته از  $E_f$  بزرگتر باشد، شکافت را متحمل می‌شود. بنا بر این، هر گاه انرژی بستگی به اضافه انرژی جنبشی نوترون گیر افتاده به قدری باشد که بتواند هسته را در بالای سد پتانسیل قرار دهد، فرایند شکافت با گیراندازی نوترون به وقوع می‌پیوندد. همان طور که قبلاً گفته شد، هر گاه انرژی بستگی به تهایی کافی باشد، شکافت با نوترون کند رخ می‌دهد. برای  $^{235}\text{U}$ ، ارتفاع سد پتانسیل در حدود  $5.3 \text{ MeV}$  است و بنا بر این، انرژی بحرانی لازم برای ایجاد شکافت  $^{235}\text{U}$  در اثر گیراندازی نوترون برابر  $5.3 \text{ MeV}$  است. اما توجه کنید که یک انرژی آستانه منفرد یا تغییر شکل بحرانی یگانه وجود ندارد و این کمیتها به مد برانگیختگی هسته و حالت اولیه آن بستگی دارند.

یادآوری می‌کنیم که حتی اگر انرژی نیز در دسترس باشد، گیراندازی یک نوترون لزوماً به شکافت منجر نمی‌شود، زیرا همان طور که قبلاً توضیح دادیم، پیش از آنکه هسته شکافته شود ممکن است انرژی برانگیختگی خود را به صورت پرتوهای گاما رها کند و به جای شکافت، به فرایند گیراندازی تابشی منجر شود. بنا بر این هنگامی که گیراندازی نوترون به وقوع می‌پیوندد دو فرایند گیراندازی تابشی  $(n, \gamma)$  و شکافت  $(n, f)$  با هم رقابت می‌کنند. هر یک از این دو فرایند با سطح مقطع خود، که به ترتیب با  $\sigma(n, f)$  و  $\sigma(n, \gamma)$  نشان داده می‌شوند، و به انرژی نوترون بستگی دارند مشخص می‌شود. مقادیر این سطح مقطعها برای نوترونهایی که سرعتشان  $2200 \text{ ms}^{-1}$  است در جدول ۵.۸ آمده است. این سرعت با میانگین سرعت نوترونهای گرمایی در دمای معمولی متناظر است. در ستون آخر این جدول میانگین تعداد نوترونهای آزاد شده به ازای شکافت آمده است.

فرایند شکافت یک فرایند متقارن نیست. به طور کلی دو باره شکافت اعداد جرمی

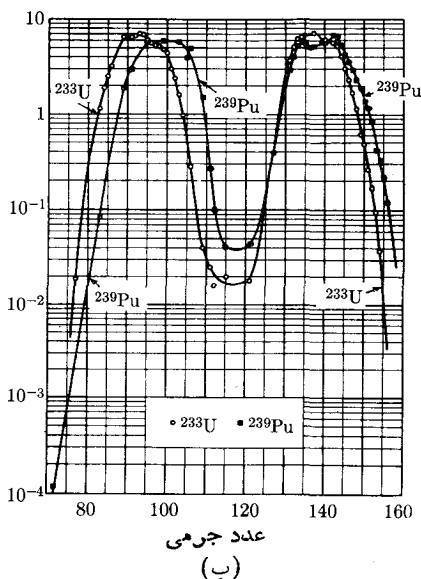
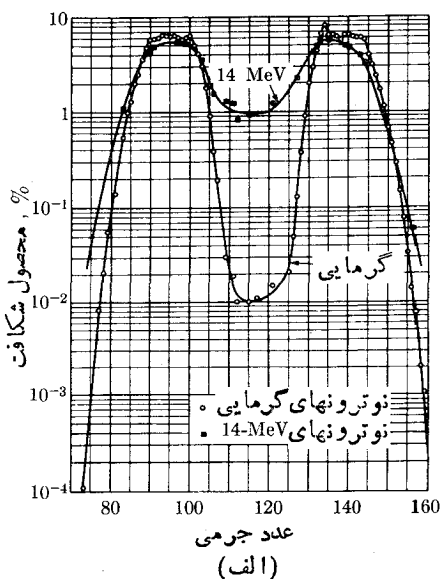
جدول ۵۰۸ خواص پاره‌ای از مواد شکافت‌پذیر برای نوترونهای گرمایی.

هسته	بارن $\sigma(n, f)$	بارن $\sigma(n, \gamma)$	$\nu$
$^{232}\text{U}$	۵۲۵	۵۳	۲٫۵۱
$^{235}\text{U}$	۵۷۷	۱۰۱	۲٫۴۴
$^{239}\text{Pu}$	۷۴۲	۲۸۶	۲٫۸۹

متفاوتی دارند. محتملترین شکافت، شکافتی است که در آن اعداد جرمی پاره‌های شکافت مطابق شکل ۱۹۰۸ بین اعداد ۹۵ و ۱۳۵ قرار دارند. این شکل، محصول شکافت  $^{232}\text{U}$  و  $^{235}\text{U}$  و  $^{239}\text{Pu}$  برای نوترونهای گرمایی را به دست می‌دهد. این موضوع را می‌توان در شکل ۱۰۷ نیز مشاهده کرد که در آن، تعداد نوکلیدهای پرتوزای واقع در بالای ناحیه پایداری مخصوصاً در نواحی اطراف  $A=90$  و  $A=135$  که به ترتیب با  $N=50$  و  $N=82$  متناظرند خیلی فراوان است. ظاهراً دلیل این عدم تقارن مربوط به تمایل هسته سنگین در شکافت شدن به دو پاره‌ای است که پوسته‌های نوترونی بسته‌ای را به ترتیب حول اعداد سحر آمیز ۵۰ و ۸۲ تشکیل می‌دهند. فرایند شکافت، به دلیل دو خاصیت، یکی آزاد شدن نوترونها در شکافت و دیگری آزاد شدن انرژی در شکافت، یک فرایند بسیار مهم برای کاربردهای عملی به شمار می‌رود.

با بررسی ناحیه پایداری موجود در شکل ۱۰۷ می‌توان به این نتیجه پی برد که در فرایند شکافت، نوترونها آزاد می‌شوند. برای سنگینترین هسته‌ها از قبیل اورانیوم، نسبت نوترونها به پروتونها در حدود  $N/Z \sim 1.55$  است که البته این نسبت تقریباً همان نسبت پاره‌های حاصل از شکافت نیز هست. اما، از روی شکل مشاهده می‌شود که برای هسته‌های پایدار با جرم متوسط، این نسبت در حدود  $N/Z \sim 1.35$  است. این گفته بدان معنی است که تعداد نوترونهای پاره‌های حاصل خیلی زیاد است و از این رو، در بالای ناحیه پایداری قرار دارند. بنابراین، اینها پاره‌های پرتوزای  $\beta^-$  هستند. در واقع، شکافت اورانیوم یکی از روشهای تولید ایزوتوپهای پرتوزای  $\beta^-$  است. اما، تعداد نوترونها آن قدر زیاد است که در طی فرایند شکافت عده‌ای از آنها آزاد می‌شوند. در جدول ۵۰۸ میانگین تعداد نوترونهای آزاد شده به ازای شکافت (که با  $\nu$  نشان داده شده است) برای بعضی نوکلیدها آمده است، البته با این فرض که شکافت به وسیله نوترونهای گرمایی ایجاد شده است.

مقدار انرژی آزاد شده در شکافت هسته‌ای را می‌توان به کمک منحنی انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون، که در شکل ۵۰۷ نشان داده شده است، به دست آورد. برای هر هسته



شکل ۱۹۰۸ (الف) محصول شکافت نوترون گرمایی و تند  $^{235}\text{U}$ . (ب) محصول شکافت گرمایی  $^{233}\text{U}$  و  $^{239}\text{Pu}$ .

سنگین، انرژی بستگی در حدود  $7.5 \text{ MeV}$  به ازای هر نوکلئون است، ولی برای هسته‌های با جرم متوسط، متناظر با دوپاره شکافت، در حدود  $8.4 \text{ MeV}$  به ازای نوکلئون است که به یک افزایش انرژی بستگی به ازای نوکلئون در حدود  $9 \text{ MeV}$  و یا انرژی کل در حدود  $200 \text{ MeV}$  برای تمام نوکلئونهای موجود در یک هسته اورانیوم منجر می‌شود. در این صورت، این مقدار از نظر بزرگی در مرتبه انرژی آزاد شده در شکافت یک اتم اورانیوم است. انرژی آزاد شده به صورت انرژی جنبشی پاره‌های شکافت، نوترونهای آزاد شده، و محصولات فروپاشی (یعنی الکترونها، فوتونها، نوترینوها) حاصل از واپاشی بتای پاره‌های پرتوزا ظاهر می‌شود. چون معمولاً نوترینوهای گسیل شده در واپاشی بتا (و همین‌طور تعدادی فوتون) از ماده‌ای که فرایند شکافت در آن به وقوع می‌پیوندد خارج می‌شوند، تنها در حدود  $185 \text{ MeV}$  به ازای هر اتم باقی می‌ماند، و این معادل مقدار انرژی است که هنوز هم به طور قابل ملاحظه‌ای از انرژی آزاد شده در یک واکنش شیمیایی بزرگتر است (انرژی اخیر از مرتبه ۳ تا  $10 \text{ eV}$  به ازای هر اتم است).

به عنوان مثال انرژی آزاد شده در شکافت  $^{235}\text{U}$  به طور متوسط، به صورت زیر توزیع

می‌شود

۱۶۷ MeV	انرژی جنبشی پاره‌ها
۵	انرژی جنبشی نوترونهای شکافت
۷	انرژی پرتوهای گاما (گسیل شده در زمان شکافت)
۵	انرژی الکترونهای واپاشی $\beta^-$
۵	انرژی واپاشی $\gamma$ پاره‌ها
۱۱	انرژی نوترونهای واپاشی $\beta^-$
۲۰۰ MeV	انرژی کل

البته باید توجه داشت که توزیع صحیح انرژی از یک مورد به مورد دیگر فرق می‌کند. این حقیقت که با جذب هر نوترونی برای ایجاد شکافت، بیشتر از دو نوترون جدید (به‌طور متوسط) گسیل می‌شوند، نشان می‌دهد که وقوع یک واکنش زنجیره‌ای امکان‌پذیر است. یعنی، هر گاه مراحل شکافت طوری باشد که پس از هر شکافت، حداقل یکی از نوترونهای جدید شکافت دیگری را باعث شود و از نوترونهای آزاد شده در شکافت اخیر نیز مجدداً یکی بتواند شکافت دیگری تولید کند و به همین ترتیب، در این صورت یک فرایند خودنگهدار یا واکنش زنجیره‌ای نتیجه می‌شود. (واکنشهای زنجیره‌ای در شیمی خیلی معمول‌اند. احتراق، یک واکنش زنجیره‌ای است. سوختن مستلزم این است که هر مولکول یک مقدار انرژی برانگیختگی مشخص داشته باشد تا بتواند با یک مولکول اکسیژن ترکیب شود، اما وقتی اولین مولکول برانگیخته و با اکسیژن ترکیب شد، انرژی آزاد شده در حدی خواهد بود که بتواند مولکولهای بیشتری از ماده سوخت را برانگیخته کند و عمل سوختن را ادامه دهد.) اگر در هر مرحله از فرایند بیشتر از یک نوترون در هر شکافت، شکافت جدیدی را باعث شود، تعداد شکافتهای بطور نمایی افزایش می‌یابد و یک واکنش زنجیره‌ای واگرا تولید می‌شود. این چیزی است که در بمب اتمی رخ می‌دهد. ولی هر گاه به‌طور متوسط، فقط یک نوترون از هر شکافت، باعث ایجاد شکافت جدیدی بشود، در این صورت یک واکنش زنجیره‌ای پایا و تحت شرایط کنترل شده تولید می‌شود. این چیزی است که در رآکتور هسته‌ای رخ می‌دهد. در رآکتورهای هسته‌ای تند، نوترونها با همان انرژی‌هایی (یک تا دویلیون الکترون ولتی) که در فرایند شکافت آزاد می‌شوند به کار می‌روند. ولی در رآکتورهای هسته‌ای گرمایی، نوترونها ابتدا در اثر برخورد با اتمهای بعضی مواد دیگر (که به کندساز معروف‌اند) کند می‌شوند و در تعادل گرمایی با ماده درمی‌آیند. به همین دلیل این نوترونها را گرمایی می‌نامند. کندساز باید ماده‌ای باشد که عدد جرمی کوچک و سطح مقطع گیراندازی نوترونی کوچکی داشته باشد. آب معمولی، آب سنگین، و گرافیت از موادی هستند که اغلب به‌عنوان کندساز به کار می‌روند.

انرژی آزاد شده در یک رآکتور هسته‌ای بایک مایع چرخان، که به خنک‌کننده معروف

است استخراج می‌شود. در رآکتورهای قدرت این انرژی برای گرم کردن یا برای تولید توان الکتریکی به کار می‌رود. در رآکتورهای تحقیقاتی نوترون‌ها برای انواع مختلف آزمایشها یا برای تولید ایزوتوپها به کار می‌روند.

مثال ۱۳۰۸ انرژی آزاد شده در گیراندازی نوترون به وسیله  $^{235}\text{U}$  و به وسیله  $^{238}\text{U}$  را تعیین و امکان شکافت  $^{235}\text{U}$  و  $^{238}\text{U}$  با نوترونهای گرمایی را بررسی کنید.

حل: مقدار  $Q$  برای واکنش گیراندازی نوترون به وسیله اتمی با عدد جرمی  $A$  به صورت زیر است

$$Q = (M_A + m_n - M_{A+1})c^2 = 931.48 (M_A + m_n - M_{A+1}) \text{ MeV}$$

که در آن، جرمهای موجود در عبارت دوم باید بر حسب واحد amu بیان شوند و همگی مربوط به جرمهای اتمی هستند.

با در نظر گرفتن مورد  $^{235}\text{U}$  که پس از گیراندازی نوترون به صورت  $^{236}\text{U}$  درمی‌آید، خواهیم داشت  $M_A(^{235}\text{U}) = 235.0439299 \text{ amu}$  و  $m_{A+1}(^{236}\text{U}) = 236.046568 \text{ amu}$  با قرار دادن  $m_n = 1.008665 \text{ amu}$  خواهیم داشت  $Q = 6.24 \text{ MeV}$ . از طرف دیگر، سدپتانسیل  $^{236}\text{U}$  برای شکافت در حدود  $5.3 \text{ MeV}$  است. بنا بر این، انرژی برانگیختگی  $^{236}\text{U}$ ، که در نتیجه گیراندازی یک نوترون به وسیله  $^{235}\text{U}$  تشکیل می‌شود، از ارتفاع سد پتانسیل برای شکافت بیشتر است. لذا نتیجه می‌گیریم که هسته  $^{236}\text{U}$  حاصل از گیراندازی نوترون به وسیله  $^{235}\text{U}$  می‌تواند فرایند شکافت را متحمل شود، حتی اگر نوترون به قدری کند باشد که انرژی جنبشی آن در فرایند قابل چشمپوشی باشد.

مورد  $^{238}\text{U}$  را در نظر می‌گیریم که پس از گیراندازی یک نوترون به صورت  $^{239}\text{U}$  در می‌آید. در اینجا داریم  $M_A(^{238}\text{U}) = 238.050788 \text{ amu}$  و  $M_{A+1}(^{239}\text{U}) = 239.05429 \text{ amu}$  از این رو، مقدار  $Q$  واکنش گیراندازی برابر است با  $4.85 \text{ MeV}$  که در حدود  $6 \text{ MeV}$  از ارتفاع سد شکافت  $^{239}\text{U}$  کمتر است. بنا بر این نتیجه می‌گیریم که تا وقتی نوترون گیرافاده انرژی جنبشی کافی، در حدی که برای وقوع فرایند لازم است، نداشته باشد شکافت تولید نمی‌شود. به تجربه معلوم شده است که کمینه انرژی جنبشی آزمایشگاهی نوترون‌ها بساید در حدود  $1 \text{ MeV}$  باشد تا شکافت  $^{238}\text{U}$  صورت گیرد.

## ۷.۸ همجوشی هسته‌ای

فرایندی که وارونه فرایند شکافت هسته‌ای است، همجوشی هسته‌ای نام دارد. در این فرایند دو هسته برخوردکننده به هم می‌پیوندند و یک هسته بزرگتر تشکیل می‌دهند. به دلیل دافعه



کولنی میان هسته‌ها، این هسته‌ها باید انرژی جنبشی مشخصی را برای غلبه بر سد پتانسیل کولنی داشته باشند تا بتوانند به قدر کافی به یکدیگر نزدیک شوند، به گونه‌ای که نیروهای هسته‌ای باعث ترکیب آنها شود. این مشکل در شکافت هسته‌ای وجود ندارد زیرا نوترون فاقد بار الکتریکی است و بنا بر این، حتی اگر انرژی جنبشی آن خیلی کوچک یا عملاً مساوی صفر باشد، می‌تواند به هسته نزدیک شود. چون سد کولنی با عدد اتمی افزایش می‌یابد، همجوشی هسته‌ای در انرژیهای جنبشی معقول فقط در هسته‌های خیلی سبک با عدد اتمی یا بار هسته‌ای کم رخ می‌دهد.

اکنون انرژی جنبشی مورد نیاز را برای اینکه بتوانیم دو هسته با اعداد اتمی  $Z_1$  و  $Z_2$  را در تماس با هم قرار دهیم برآورد می‌کنیم. هر گاه مقدار  $r$  در رابطه انرژی پتانسیل الکتریکی دو هسته  $(E_p = Z_1 Z_2 e^2 / 4\pi\epsilon_0 r)$  مساوی با مجموع شعاعهای هسته‌ای یا در حدود  $10^{-14} \text{ m}$  باشد، در این صورت خواهیم داشت

$$E_p \sim 2.4 \times 10^{-14} Z_1 Z_2 = 1.5 \times 10^5 Z_1 Z_2 \text{ eV} = 0.15 Z_1 Z_2 \text{ MeV}$$

مقدار بالا ارتفاع سد پتانسیل و بنا بر این کمیته انرژی جنبشی نسبی اولیه دو هسته را که برای وقوع همجوشی ضروری است، به دست می‌دهد. هر گاه انرژی جنبشی ذرات بر خورد کننده مساوی یا بزرگتر از مقدار  $E_p$  نباشد، فسر ایند همجوشی نمی‌تواند رخ دهد. امسأ، در انرژیهای کمی کوچکتر از  $E_p$  نیز احتمال وقوع همجوشی با نفوذ از سد پتانسیل وجود دارد. میانگین انرژی جنبشی سیستمی از ذرات که دمای آنها  $T$  است، از مرتبه  $kT$  یا در حدود

$$8.6 \times 10^{-5} T \text{ eV}$$

است که در آن  $T$  دمای مطلق است. بنا بر این انرژی  $10^5 \text{ eV}$  متناظر با دمایی در حدود  $10^9 \text{ K}$  است که به مراتب بزرگتر از دماهایی است که به نظر می‌رسد در مرکز خورشید وجود دارد. همجوشی یکی از مهمترین فرایندهایی است که در خورشید رخ می‌دهد و مهمترین چشمه انرژی آن نیز همین فرایند است. فرایند همجوشی در بین تعداد نسبتاً کمی از هسته‌های سبک صورت می‌گیرد که انرژی آنها خیلی بالاتر از میانگین انرژی موجود در دمای خورشید است.

در نتیجه برای اینکه همجوشی هسته‌ای در تعداد زیادی از هسته‌ها واقعیت پیدا کند لازم است که هسته‌های برهم کنش کننده در دماهایی باشند که به مراتب از دماهای تولید شده به وسیله حتی انرژی‌زاترین واکنشهای شیمیایی بیشتر است. در دماهای بسیار زیاد با مشکل محصور کردن ذرات برهم کنش کننده مواجه هستیم، زیرا هیچ مسأله شناخته شده‌ای نمی‌تواند چنین دماهایی را تحمل کند. ضمناً در این دماها، هسته‌ها (به دلیل برخورد) تمام الکترونهای اطراف خود را از دست می‌دهند و به اصطلاح لخت می‌شوند به گونه‌ای که ماده به صورت یک ترکیب خنثی از هسته‌های باردار مثبت و الکترونهای منفی درمی‌آید که به

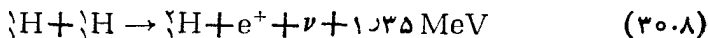
پلاسمای معروف است. برای محصور کردن ذرات از میدانهای مغناطیسی استفاده شده است. ضمناً هنگامی که شدت میدانهای مغناطیسی به سرعت افزایش یابد، پلاسمای به صورت بی دررو متراکم می شود و دمای آن افزایش می یابد تا اینکه همجوشی آغاز شود. چندین طرح مبتکرانه برای انجام این دو عمل، یعنی محصور و گرم کردن اجرا شده است.

همان طور که از شکل ۶.۷ دیدیم، در همجوشی هسته‌های سبک ( $A < 20$ ) انرژی آزاد می شود، هنگامی که دو هسته سبک ترکیب می شوند و هسته سنگینتری را تشکیل می دهند، انرژی بستگی هسته حاصل از مجموع انرژیهای بستگی دو هسته سبکتر بیشتر است و همین به آزاد شدن انرژی منجر می شود. تحت شرایط مناسب، انرژی آزاد شده در همجوشی در حدی است که می تواند هسته‌های دیگر را برانگیخته کند و یک واکنش زنجیره‌ای راه بیندازد. با ساز و کاری شبیه به ساز و کار انفجار شیمیایی، واکنش زنجیره‌ای به صورت یک انفجار هسته‌ای درمی آید اما در این مورد، به جای نیروهای الکتریکی، انفجار از نیروهای هسته‌ای ناشی می شود. واکنش زنجیره‌ای می تواند تحت شرایط کنترل شده‌ای نیز رخ دهد، اگرچه تا کنون هیچ رآکتور همجوشی کاملاً رضایتبخشی برای این کار ساخته نشده است. به عنوان ساده ترین واکنش همجوشی می توان از گیراندازی نوترون به وسیله پروتون (یا هسته هیدروژن) نام برد که به تشکیل یک دوترون منجر می شود

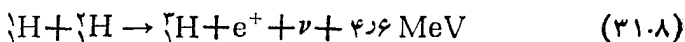


بزرگترین مزیت این واکنش آن است که در آن هیچ سد پتانسیل الکتریکی وجود ندارد تا ذره بر آن غلبه کند. همان طور که در بخش بعد خواهیم دید، دانشمندان معتقدند که این واکنش همجوشی نقش بسیار مهمی در مراحل اولیه تحول و تکامل تدریجی جهان ایفا کرده است. اما، در حال حاضر، به دلیل نبود تعداد کافی نوترون آزاد، این واکنش همجوشی نسبتاً بی اهمیت است. با وجود این هنگامی که نوترونهای حاصل از یک رآکتور هسته‌ای در داخل ماده هیدروژنی، مانند آب یا پارافین، پخش می شوند، واکنش (۲۹.۸) رخ می دهد.

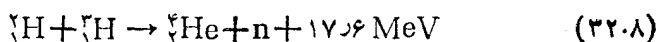
واکنش همجوشی ساده دیگر، واکنش میان دو پروتون است. چون هسته دوپروتونی وجود ندارد، این فرایند با تبدیل یکی از پروتونها به یک نوترون (که به‌بهای انرژی بستگی دوترون حاصل تمام می شود) و گسیل یک پوزیترون و یک نوترینو خواهد بود. یعنی



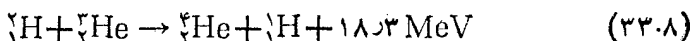
سومین واکنش همجوشی مهم نیز واکنش میان هیدروژن و دوتریوم است که به‌هسته تریتیوم منجر می شود



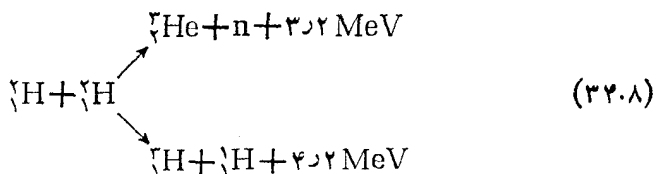
واکنشی که سطح مقطع آن بزرگ است و مقدار بسیار زیادی انرژی نیز آزاد می‌کند، واکنش میان دوتریوم و تریتیوم است



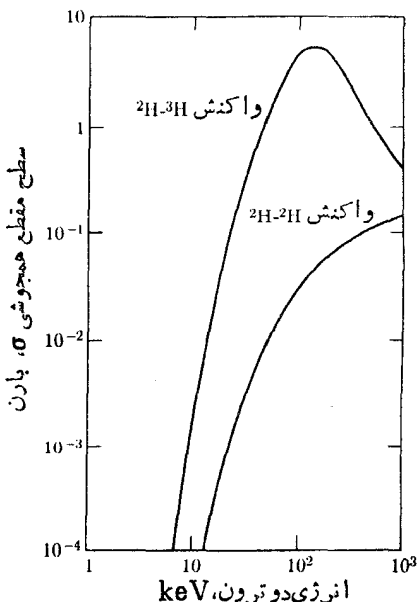
واکنش ممکن دیگر همجوشی دوتریوم و واکنشی است که شامل  ${}^3\text{He}$  است، یعنی



با این حال، چون تریتیوم و  ${}^3\text{He}$  به راحتی دسترس پذیر نیستند، همجوشی دوهسته دوتریوم یا دوترونها از اهمیت عملی بیشتری برخوردار است. مزیت دیگر این واکنش آن است که در آن تنها یک نوع هسته به کار می‌رود. محصولات حاصل ممکن است متفاوت باشند. به عنوان مثال، دو محصول متفاوت که احتمال وقوع آنها یکسان است عبارتند از



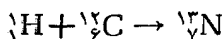
سطح مقطع فرایندهای (۳۲.۸) و (۳۴.۸) در شکل ۲۰.۸ نشان داده شده است.



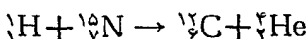
شکل ۲۰.۸ سطح مقطعات واکنشهای همجوشی دوترون-دوترون و دوترون-تریون بر حسب تابعی از انرژی دوترون.

با آنکه انرژی آزاد شده در يك واکنش همجوشی منفرد به مراتب کوچکتر از انرژی آزاد شده در يك واکنش شکافت منفرد است، انرژی به‌ازای جرم واحد آن به مراتب بزرگتر است (زیرا دوتریوم يك سوخت خیلی سبک است). برای واکنش همجوشی دوتریوم-دوتریوم، انرژی در حدود  $2 \times 10^{14} \text{ J kg}^{-1}$  از سوخت است که بیشتر از دو برابر مقدار متناظر در شکافت اورانیوم است. به دلیل فراوانی نسبی دوتریوم (تقریباً يك اتم دوتریوم به‌ازای حدود ۷۰۰۰ اتم هیدروژن)، و نیز هزینه نسبتاً کم استخراج دوتریوم از آب (در حدود ۲۰ ریال به‌ازای هر گرم)، دانشمندان پیشگویی می‌کنند که هر گاه طرح‌های مربوط به همجوشی کنترل شده به مرحله اجرا در آید، فرایند همجوشی می‌تواند به يك منبع تقریباً نامحدود انرژی تبدیل شود.

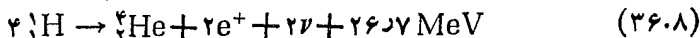
واکنشهای همجوشی منشأ انرژی خورشید و ستاره‌های دیگر هستند. به عنوان یکی از مهمترین فرایندهای همجوشی می‌توان از چرخه کربن یا چرخه بت نام برد که معادل است با همجوشی چهار پروتون به يك هسته هلیوم. چرخه مزبور طی مراحل زیر صورت می‌گیرد



(۳۵.۸)

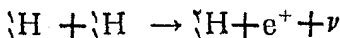


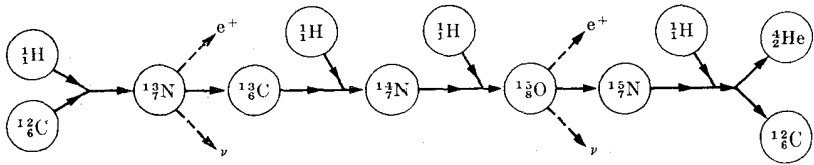
از جمع کردن تمام واکنشها و حذف جمله‌های مشترک خواهیم داشت



انرژی خالص آزاد شده در فرایند مساوی با  $26.7 \text{ MeV}$  یا در حدود  $6.6 \times 10^{14} \text{ J kg}^{-1}$  از  ${}^1_1\text{H}$  مصرف شده است. توجه کنید که اتم کربن به عنوان يك نوع کاتالیزور عمل می‌کند، زیرا در انتهای چرخه مجدداً بدون تغییر ظاهر می‌شود. زمان لازم برای اینکه يك اتم کربن این چرخه را در خورشید طی کند در حدود  $6 \times 10^6$  سال است. در شکل ۲۱.۸ چرخه مزبور به صورت طرح وار نشان داده شده است.

واکنش همجوشی دیگری که در ستاره‌ها صورت می‌گیرد چرخه پروتون-پروتون یا چرخه کریشفیلد<sup>۱</sup> است که شامل مراحل زیر است



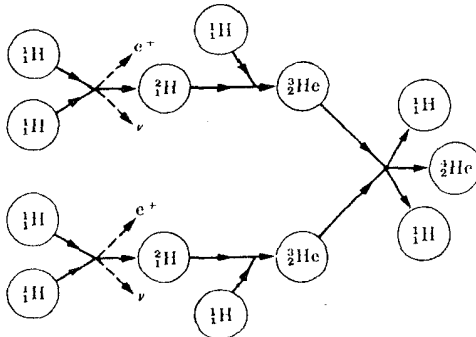


شکل ۲۱.۸ چرخه کربن.

از ترکیب مناسب این واکنشها نیز مجدداً معادلۀ (۳۶.۸) نتیجه می‌شود. دوره چرخه پروتون-پروتون در خورشید در حدود  $10^9 \times 3$  سال است. در شکل ۲۲.۸ چرخه مزبور به صورت طرح وار نشان داده شده است

همان‌طور که در بخش بعد خواهد آمد، اختر فیزیکدانان معتقدند که در حال حاضر، در خورشید و ستارگانی با ساختار مشابه آن، چرخه پروتون-پروتون بر چرخه کربن غلبه دارد، ولی در بسیاری از ستارگان جوانتر، وضع برعکس است، یعنی چرخه کربن از اهمیت بیشتری برخوردار است. ضمناً عقیده بر آن است که در ستارگان پیرتر که دماهای آنها بسیار بالاتر است، انواع دیگر واکنشهای همجوشی نیز صورت می‌گیرد.

برآورد شده است که فرایند (۳۶.۸) در خورشید با آهنگ  $5.64 \times 10^{11} \text{ kgs}^{-1}$  به وقوع می‌پیوندد و در آن هیدروژنها به هم جوش می‌خورند و هلیوم تولید می‌کنند. مقدار انرژی آزاد شده در این فرایند برابر  $3.7 \times 10^{26} \text{ W}$  است که از این مقدار، تنها در حدود  $1.8 \times 10^{14} \text{ W}$  (اکثراً به صورت تابش الکترومغناطیسی) به کره زمین می‌رسد. این مقدار هنوز هم حدود  $10^5$  مرتبه بزرگتر از تمام قدرتهای صنعتی ایجاد شده در روی زمین است.

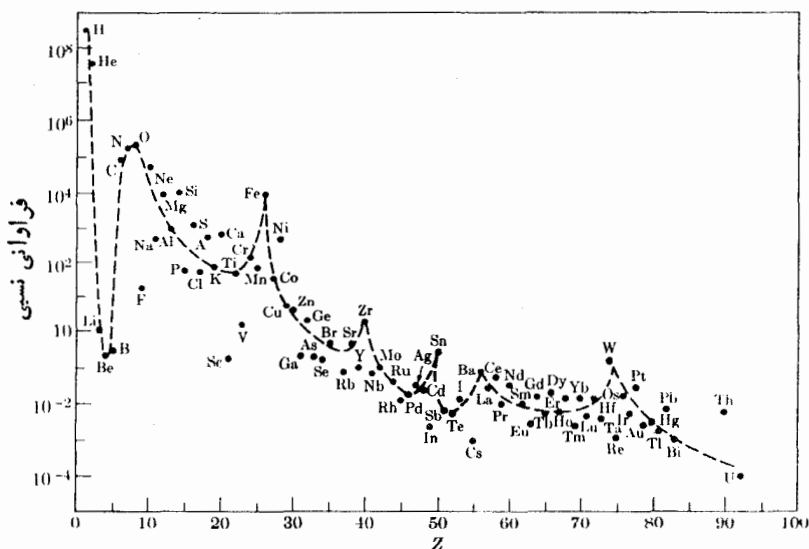


شکل ۲۲.۸ چرخه پروتون-پروتون.

## ۸.۸ منشأ عناصر

اکنون سؤال جالب و مهمی را در باره منشأ عناصر بررسی می‌کنیم. منظور از منشأ سازوکاری است که به وسیله آن (با فرض وجود ماده اولیه مشخص) ترکیب فعلی عالم حاصل شده است. آنچه در اینجا می‌آید صرفاً حاصل تفکر و اندیشه است، زیرا شواهد موجود برای تحلیل کامل این رویداد کافی نیست.

یکی از سرنخهایی که ما برای این نتیجه گیری از آن استفاده کرده ایم فراوانی نسبی عناصر شیمیایی متفاوت موجود در جهان (شکل ۲۳.۸) و ترکیب ایزوتوپی آنهاست. همان طور که از روی شکل دیده می‌شود، هیدروژن از جمله فراوانترین عناصر است و پس از آن هلیوم قرار دارد. بعد از یک سقوط ناگهانی در فراوانی که متناظر با لیتیوم، برلیوم، و بور است، فراوانی شکل یک روند کاهشی منظم را دنبال می‌کند و در  $Z > 35$  یا  $A > 80$  به صورت هموار درمی‌آید که البته با چند بیشینه قابل توجه خصوصاً برای آهن و نوکلیدهای مجاور آن همراه است. این عناصر در  $Z = 92$  متوقف می‌شوند. زیرا تعداد هسته‌های موجود با  $Z > 92$  اساساً مساوی با صفر است، اگرچه در آزمایشگاه توانسته‌اند عناصر تا  $Z = 103$  را به طور مصنوعی تولید کنند. از نظر ترکیب ایزوتوپی نیز عناصر سبکتر از لحاظ ایزوتوپی پایداری که تعداد کمتری نوترون دارند غنی هستند، در حالی که هسته‌های سنگینتر، از لحاظ ایزوتوپی که تعداد نوترونهای آنها بیشتر است غنی‌اند.



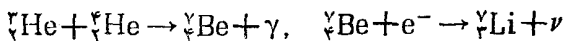
شکل ۲۳.۸ فراوانی عناصر در جهان.

۱. تاکنون توانسته‌اند عناصر تا  $Z = 108$  را در آزمایشگاه مشاهده کنند.م.

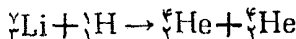
ضمناً هسته‌های با  $A$  زوج فراوانتر از هسته‌های با  $A$  فردند. جالب توجه این است که هیچ هسته‌ای با  $A=5$  یا  $A=8$  در طبیعت یافت نشده‌است.

فراوانی نسبی و ترکیب ایزوتوپی به‌دست آمده نه تنها در نمونه‌های استخراج شده از قسمت‌های مختلف و اعماق مختلف پوسته سخت زمین، بلکه حتی در نمونه‌های به‌دست آمده از شهابسنگها که از فضای خارج به‌سطح زمین سقوط می‌کنند نیز یکسان است. چنین ترکیب ثابتی نشان می‌دهد که، حداقل در کیهانشان ما، همگی عناصر در فرایند تقریباً یکسانی تشکیل شده‌اند. تخمین زده شده است که «زمان صفر» این فرایند در حدود  $10^9 \times (2+8)$  سال قبل رخ داده است. این عدد با در نظر گرفتن نکات مختلف اختر فیزیکی از قبیل سرعت کیهانشانه‌های دور شونده و نیز با تحلیل زنجیره‌های پرتوهای طبیعی به‌دست آمده است.

نظریه‌های مختلفی برای توضیح ترکیب کلی عالم پیشنهاد شده است، اما هیچکدام کاملاً رضایتبخش نبوده است. در مقبولترین نظریه<sup>۱</sup> فرض می‌شود که عناصر تحت شرایط متغیری در ستارگان بسامم ترکیب می‌شوند. توالی رویدادها در این نظریه به‌صورت زیر است: فرض کنید که در آغاز (یعنی در «زمان صفر») جرم بسیار بزرگی از هیدروژن گازی (شاید با چند نوترون آزاد) وجود داشته باشد. تحت افت و خیزهای آماری و برهم‌کنش گرانشی، مقداری از این هیدروژن ممکن است به‌صورت خوشه‌ها (یاستارگان) منقبض شود و به چگالی از مرتبه  $10^5 \text{ kg m}^{-3}$  برسد. در فرایند انقباض، تبدیل انرژی پتانسیل گرانشی به انرژی جنبشی دمای گاز را افزایش می‌دهد (در حدود  $10^7 \text{ K}$ ). در چنین دماهایی چرخه پروتون-پروتون معادله (۳۷۰۸) امکان پذیر می‌شود. از این رو، تشکیل هلیوم آغاز می‌شود. با واکنشهای محصول چرخه پروتون-پروتون نیز این امکان ایجاد می‌شود که مقادیر نسبتاً کمی از هسته‌های با جرم اتمی بالاتر هم تشکیل شوند. به‌عنوان مثال،  ${}^7\text{Li}$  از طریق فرایند زیر تشکیل می‌شود



قسمتی از لیتیم از طریق واکنش زیر مجدداً به هلیوم تبدیل می‌شود



واکنشهای همجوشی دیگر از قبیل (۲۹۰۸)، (۳۱۰۸)، و (۳۳۰۸) نیز می‌توانند با مقدار خیلی کمتری، به وقوع بپیوندند.

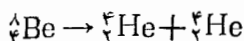
چون هلیوم سنگینتر از هیدروژن است، هسته‌های هلیوم حاصل از چرخه پروتون-پروتون بر اثر گرانش به مرکز (یسا مغز) ستاره انتقال می‌یابند. بنا بر این چگالی در مغز ممکن است حتی تا مقدار  $10^8 \text{ kg m}^{-3}$  نیز افزایش یابد. افزایش حاصل در انرژی جنبشی هسته‌های هلیوم در مغز باعث می‌شود که دمای مغز (حتی تا مقادیر  $10^8 \text{ K}$ ) افزایش یابد.

۱. این نظریه را به‌فاولر (Fowler)، هویل (Hoyle)، بربریج (Burbridge)، و گسین-اشتین (Greenstein) و دیگران نسبت می‌دهند.

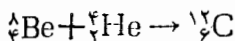
دمای سطح ستاره‌ای که در داخل آن مقدار زیادی هسته‌های هلیوم انباشته شده‌است، افزایش می‌یابد و سپس رنگ آن نیز تغییر می‌کند. افزایش در دما و چگالی هسته‌های هلیوم در مغز سبب بالابردن امکان ایجاد  ${}^8\text{Be}$  از طریق واکنش همجوشی هلیوم می‌شود یعنی



که در حدود  $10^{-16}$  ثانیه بعد به صورت زیر واپاشیده می‌شود



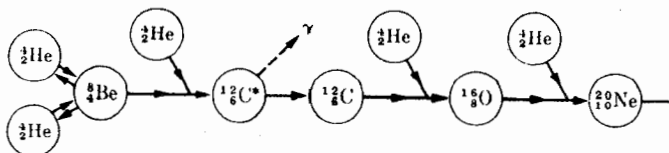
با این حال، تحت غلظت نسبتاً زیاد هلیوم، برای دیگر هسته‌های هلیوم این امکان وجود دارد که قبل از وقوع این واپاشی، گیر بیفتند و واکنش زیر را نتیجه دهند



متناوباً، محصولات میانی موجود در زنجیره پروتون-پروتون (یعنی  ${}^2\text{H}$  و  ${}^3\text{He}$ ) ممکن است جذب بریلیم شوند و به ترتیب  ${}^5\text{B}$  و  ${}^{12}\text{C}$  را (در مقادیری خیلی کمتر از مقدار  ${}^{12}\text{C}$ ) تشکیل دهند. ضمناً واکنشهای دیگری نیز با احتمال وقوع کمتر ممکن است رخ دهند و سایر عناصر سبک را تشکیل دهند.

زنجیره رویدادهایی که شرح آنها در بالا آمد نشان می‌دهد که چطور می‌توان از گافهای در  $A=5$  و  $A=8$  گذر کرد. ضمناً این سازوکار می‌تواند کمیابی لیتیوم، بریلیم و بور را توجیه کند و فراوانی نسبتاً زیاد  ${}^{12}\text{C}$  را نیز توضیح دهد. با همین فرایند گیراندازی هلیوم، تشکیل هسته‌های متوالی سنگینتری از قبیل  ${}^{16}\text{O}$ ،  ${}^{20}\text{Ne}$ ، و دیگر هسته‌ها امکان پذیر می‌شود. تنها محدودیت در مورد گیراندازی هلیوم مربوط به مقدار انرژی لازم برای هسته‌های هلیوم به منظور غلبه بر دافعه کولنی هسته سنگینتر است. شکل ۲۴.۸، نمایش طرح وار سری رویدادهای پیش‌بینی شده به وسیله این نظریه را که از گیراندازی هلیوم (یا سوختن آن) حاصل می‌شود نشان می‌دهد.

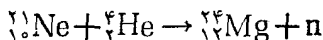
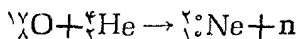
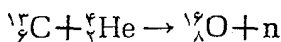
با تولید هسته‌های سنگینتر، مقادیر بیشتری هلیوم مصرف و انقباض گرانشی بیشتری برای ستاره ایجاد می‌شود. این عمل سبب می‌شود که چگالیهای ناحیه مغز حتی تا مرتبه  $10^9 \text{kg m}^{-3}$  نیز افزایش یابد (با افزایش متناظری در انرژی جنبشی هسته‌ها و دمای مغز که به حدود  $10^9 \text{K}$  می‌رسد). تحت این شرایط که چگالی خیلی زیاد و دما خیلی بالاست،



شکل ۲۴.۸ فرایند سوختن هلیوم.



وقوع واکنشهای هسته‌ای دیگری نیز امکان پذیر است که می‌توانند هسته‌های با عدد جرمی بالاتر را تولید کنند (تا گروه آهن، یعنی در حدود  $A=60$ ، ولی نه بالاتر از آن زیرا محدودیتهای انرژی توصیف شده این امکان را فراهم نمی‌کنند). گاهی ممکن است، از طریق واکنشهای  $(\alpha, n)$  نوترونهای آزاد تولید شوند. واکنشهای مربوط عبارتند از



این نوترونها همراه با بعضی نوترونهای اولیه که به پروتونها و پاشیده نشده‌اند، می‌توانند، با گیراندازی نوترون (به جای گیراندازی ذرات باردار) در تولید هسته‌های با اعداد جرمی بالاتر، یعنی بالاتر از گروه آهن، شرکت کنند. در موارد زیادی، واکنشهای گیراندازی نوترون به‌وای پاشی  $\beta^-$  منجر می‌شوند (همان‌طور که قبلاً دیدیم، هر بار که هسته‌ای تعداد زیادی نوترون کسب کند، از طریق گسیل الکترون و پاشیده خواهد شد). پس از واپاشی  $\beta^-$ ، عدد اتمی هسته حاصل زیادتر می‌شود و بنابراین زنجیره می‌تواند به طرف مقادیر بالاتر  $Z$  پیش برود. البته با گذشت زمان، تعداد نوترونهای آزاد کاهش می‌یابد و این خود مبین این واقعیت است که چرا فراوانی عناصر سنگینتر نسبتاً کمتر است زیرا تولید عناصر سنگینتر کلاً به گیراندازی نوترون وابسته است. چون «آتش گیری» اولیه هر ستاره مبتنی بر یک افت و خیز آماری است، انتظار نمی‌رود که تمام ستارگان موجود در عالم، رشته‌مشابهی را با آهنگ یکسان طی کرده باشند و می‌توان گفت که در حال حاضر، ستارگان در مراحل مختلفی از تکامل خود قرار دارند. اساساً، خورشید نیز هنوز در مرحله اول تکامل خود قرار دارد و تصور می‌رود که ترکیب آن به صورت  $74\% \text{H}$  و  $26\% \text{He}$  در صد هیدروژن،  $17\% \text{O}$  و  $1\% \text{C}$  در صد هلیوم، و  $7\% \text{O}$  درصد از بقیه عناصر باشد. ستارگانی که، هم‌اکنون چرخه پروتون-پروتون فرایند غالب در آنهاست، ستارگان (دسته اصلی نامیده می‌شوند و آن دسته از ستارگان که، در آنها مهمترین فرایند، فرایند سوختن هلیوم است، به دلیل رنگشان به گولهای سرخ معروف هستند. تصور می‌رود که در بسیاری از ستارگان، سه مرحله ترکیب و درهم آمیختن هسته‌ها که این نظریه پیشگویی می‌کند به صورت همزمان در حال وقوع باشد. بدین ترتیب کسه هیدروژن در سطح می‌سوزد و واکنشهای هلیوم در لایه میانی (و داغتر) به وقوع می‌پیوندد و بالاخره، عناصر سنگین در مغز خیلی داغتر ستاره تشکیل می‌شوند. ستارگانی که طبق پیشگویی این نظریه تکامل می‌یابند به ستارگان نسل اول معروف‌اند.

گاهی، ناپایداریهایی حاصل در خلال تحول و نیز پیر شدن یک ستاره ممکن است منجر به پرتاب مقداری ماده از قسمت داخلی ستاره به فضای میان ستاره‌ای شود. این مواد با هیدروژن منقبض نشده و با گرد و غبار فضای خارج‌تر مخلوط می‌شوند. انقباض قسمتی از این مخلوطها پس از گذشت زمان طولانی می‌تواند ستارگان نسل دوم و یا نسل بعدی را تولید

کند. در این ستارگان جوانتر است که چرخه کربن، یعنی معادله (۳۵.۸)، نقش بسیار مهمی ایفا می‌کند.

نظریه مربوط به منشأ عناصر خلیلی پیچیده تر از آن است که در اینجا به طور خلاصه عنوان شد. آنچه در اینجا گفته شد تنها می‌تواند در حدی باشد که دانشجو را به ارزش و اهمیت ایده‌های کشف شده در این زمینه جالب فیزیک آگاه کند.

## مسائل

۱۰۸ نیمه عمر  ${}^9\text{Sr}$  برابر با ۲۸ سال است. تعیین کنید: (الف) ثابت فروپاشی  ${}^9\text{Sr}$  (ب) فعالیت یک میلی گرم  ${}^9\text{Sr}$  بر حسب کوری و نیز به صورت هسته‌ها در ثانیه، (ج) زمان لازم برای اینکه یک میلی گرم از آن به  $250 \mu\text{g}$  کاهش یابد و (د) فعالیت پس از گذشت این زمان.

۲۰۸ فعالیت یک نمونه تازه تهیه شده از ماده پرتوزایی که به نوکلید پایداری واپاشیده می‌شود، هر ۲۰ ثانیه اندازه گیری می‌شود. نتایج اندازه گیری شده (بر حسب  $\mu\text{Ci}$ ) که از لحظه  $t = 0$  به بعد به دست آمده به صورت زیر است:  $496; 434; 372; 310; 248; 186; 124; 62$  (الف) منحنی لگاریتم طبیعی فعالیت بر حسب زمان را رسم کنید. (ب) ثابت فروپاشی و نیمه عمر نمونه را به دست آورید. (ج) چه تعداد هسته پرتوزا در زمان  $t = 0$  در نمونه وجود داشته است.

۳۰۸ نمونه‌ای از دو ماده پرتوزای متفاوت تشکیل شده است که نیمه عمر آنها به ترتیب ۲ ساعت و ۲۰ دقیقه است. در آغاز، یک میلی کوری از ماده اول و ۹ میلی کوری از ماده دوم وجود دارد. (الف) بسا به کار بردن کاغذ نیم لگاریتمی، فعالیت هر ماده و نیز فعالیت کل نمونه را بر حسب تسابعی از زمان رسم کنید. (ب) در چه زمانی فعالیت کل مساوی با یک میلی کوری می‌شود؟ (ج) در چه زمانی فعالیت ماده بسا نیمه عمر کوتاهتر به ۱ درصد فعالیت ماده با نیمه عمر طولانیتر می‌رسد؟

۴۰۸ فعالیت ماده‌ای مرتباً در هر ۳۰ ثانیه اندازه گیری می‌شود. مقادیر به دست آمده (بر حسب شمارش در دقیقه) به صورت زیر است:  $3000; 2711; 2422; 2133; 1844; 1555; 1266; 977; 688; 399$  (الف) لگاریتم فعالیت را بر حسب زمان رسم کنید. (ب) تعیین کنید چه تعداد مواد پرتوزا حضور داشته و نیمه عمر و ثابت فروپاشی هر کدام چقدر بوده است. [راهنمایی: ابتدا، با امتداد دادن منحنی در خط مستقیمی که به طرف زمان صفر می‌رود، فعالیت ماده با نیمه عمر طولانیتر را کم و فعالیت باقیمانده را رسم کنید. این عمل را آنقدر ادامه دهید تا به یک خط مستقیمی برسید که مربوط به ماده با نیمه عمر کوتاهتر است.]

۵۰۸ نشان دهید که عمر متوسط، يك ماده پرتوزا از رابطه زیر به دست می آید

$$T_{\text{ave}} = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t dN$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

۶۰۸ مثال ۲۰۸ را با این فرض حل کنید که در آغاز تعداد  $N_0$  هسته پرتوزا وجود دارد. خصوصاً حالت‌هایی را در نظر بگیرید که در آن  $N_0 < g/\lambda$  و  $N_0 > g/\lambda$  است.

۷۰۸ با توجه به مثال ۳۰۸ نشان دهید که تعداد هسته‌های ماده C (نوکلید پایدار) بر حسب تابعی از زمان با رابطه زیر داده می‌شود

$$N_C = \frac{N_{A_0}}{\lambda_B - \lambda_A} \times [\lambda_B(1 - e^{-\lambda_A t}) - \lambda_A(1 - e^{-\lambda_B t})]$$

۸۰۸ با توجه به مثال ۴۰۸ نشان دهید زمانی که به ازای آن تعداد هسته‌های ماده B به بیشینه مقدار خود برسد مساوی است با

$$\frac{\ln(\lambda_B/\lambda_A)}{\lambda_B - \lambda_A}$$

۹۰۸ يك حلقه پیستون فولادی به جرم ۲۵ g در داخل يك رآكتور هسته‌ای در معرض تابش قرار می‌گیرد. و فعالیت آن به ۹۰۹ mCi می‌رسد (این فعالیت مربوط به نوکلید  $^{59}\text{Fe}$  است که نیمه‌عمر آن برابر است با  $10^6 \times 3.90$ ). دو روز بعد، حلقه پیستون در داخل يك موتور آزمایشی نصب می‌شود. پس از گذشت آزمایش ده روزه، روغن موتور جمع‌آوری و به منظور بررسی فعالیت  $^{59}\text{Fe}$  بررسی می‌شود. نتیجه به دست آمده نشان می‌دهد که میانگین فعالیتی به مقدار  $10^2 \times 9.8$  فروپاشی در ثانیه برای  $200 \text{ cm}^3$  از نمونه روغن وجود دارد. بسا در نظر گرفتن اینکه ظرفیت روغن موتور مساوی با ۷۰۶ لیتر است، جرم آهن فرسوده شده (یا از بین رفته) حلقه پیستون را به دست آورید.

۱۰۰۸ فعالیت کربن موجود در نمونه‌های زنده برابر  $0.0007 \mu\text{Ci}$  به ازای هر کیلوگرم است که از  $^{14}\text{C}$  ناشی می‌شود. فعالیت زغال چوب به دست آمده از محل آتش یکی از اردوگاه‌های سرخ‌پوستان نیز برابر  $0.0048 \mu\text{Ci kg}^{-1}$  است. با در نظر گرفتن اینکه نیمه‌عمر  $^{14}\text{C}$  در حدود ۵۷۶۰ سال است، سالی را که برای آخرین بار این اردوگاه مورد استفاده قرار گرفته است را محاسبه کنید.

۱۱۰۸ لگاریتم ثابت فروپاشی را بر حسب انرژی و پاشیهای آلفای داده شده در جدول ۱۰۸ رسم کنید. نشان دهید که نقاط تقریباً در امتداد يك خط مستقیم قرار می‌گیرند، به گونه‌ای که  $\log \lambda = aE_{\alpha} + b$ . مقادیر  $a$  و  $b$  را برای بهترین تناسب تعیین کنید.

۱۲۰۸ انرژی ذره آلفای رها شده از  $^{144}\text{Nd}$  را هنگامی که به  $^{140}\text{Ce}$  واپاشیده می‌شود محاسبه کنید. ضمناً انرژی پس‌زنی هستهٔ دختر را نیز به دست آورید. جرم سکون این هسته‌ها به ترتیب برابر است با  $143991000 \text{ amu}$  و  $13999054 \text{ amu}$ .

۱۳۰۸ یک برخورد کشسان میان ذرهٔ آلفا و یک هستهٔ به جرم نامشخص در داخل اتاقک ابر مشاهده می‌شود. ذرهٔ آلفا تحت زاویهٔ  $55^\circ$  از راستای اولیهٔ خود منحرف می‌شود و هسته مسیری را طی می‌کند که زاویهٔ آن با راستای فرودی  $35^\circ$  است. جرم هسته را به دست آورید.

۱۴۰۸ بسرد،  $R$ ، ذرات آلفا در هوا و انرژیهای ذرهٔ آلفا،  $E$ ، با رابطهٔ تجربی  $R = 0.318 E^{3/2} \text{ m}$  به یکدیگر مربوط می‌شوند که در آن  $E$  بر حسب MeV است. (الف) برای انرژیهای ذرهٔ آلفایی که در شکل ۸-۸ نشان داده شده است، برد ذرات آلفای گسیل شده را هنگامی که  $^{211}\text{Bi}$  واپاشیده می‌شود تعیین کنید. (ب) واپاشی آلفای  $^{212}\text{Po}$  در اتاقک ابر مشاهده و چهاربرد  $1122$ ،  $1100$ ،  $9857$ ، و  $8951$  سانتیمتر اندازه‌گیری می‌شود. انرژیهای این ذرات آلفا را محاسبه کنید (شکل ۹-۸).

۱۵۰۸ طیف واپاشی آلفای حاصل از  $^{226}\text{Ra}$  ساختار سه‌تایی دارد که در آن، انرژیهای ذرات آلفا برابر است با  $4777$ ،  $4893$ ، و  $4342$  MeV. با فرض آنکه نوکلید دختر  $^{222}\text{Rn}$  در حالت پایه و دو حالت برانگیخته تشکیل شده است، نمودار تراز انرژی را رسم کنید و گسیل پرتوی گامای وابسته به گذار را نشان دهید.

۱۶۰۸ مدهای ممکن واپاشی  $^4\text{K}$ ، که جرم سکون آن  $399640 \text{ amu}$  است، را نشان دهید و انرژی موجود برای هر فرایند ممکن را محاسبه کنید.

۱۷۰۸ به کمک اندازه‌گیریهای جرم نشان دهید که  $^{64}\text{Cu}$  می‌تواند واپاشی  $\beta^+$  و  $\beta^-$  یا گیراندازی الکترون را انجام دهد. به تجربه می‌دانیم که  $^{64}\text{Cu}$  نیمه‌عمر  $12.8$  ساعت را بسا  $39$  درصد بتای منفی،  $19$  درصد بتای مثبت، و  $42$  درصد گیراندازی الکترون دارد. انرژی موجود برای هر یک از این سه فرایند را محاسبه کنید.

۱۸۰۸ (الف) نشان دهید که  $^6\text{Be}$  با گیراندازی الکترون واپاشیده می‌شود. جرم سکون این هسته برابر  $7016929 \text{ amu}$  است. (ب) انرژی و تکانهٔ نوترینو و هستهٔ دختر  $^6\text{Li}$  را محاسبه کنید.

۱۹۰۸ بیشینهٔ انرژی الکترون در واپاشی  $\beta^-$  هستهٔ  $^2\text{H}$  را محاسبه کنید.

۲۰۰۸ از واپاشی  $\beta^+$  هستهٔ  $^{14}\text{O}$ ، هستهٔ دختر  $^{14}\text{N}$  ایجاد می‌شود که غالباً (بیشتر از  $99$  درصد موارد) در حالت برانگیخته قرار دارد. به کمک اطلاعات تجربی داده شده در شکل ۱۰۰۸ (ب) و با در نظر گرفتن این واقعیت که جرم سکون  $^{14}\text{N}$  برابر  $140003074 \text{ amu}$

است، جرم  $^{14}\text{O}$  را محاسبه کنید.

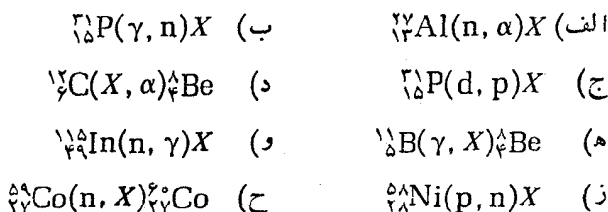
۲۱۰۸ جرمهای ایزوبارهای با  $A = 40, 64, 134$  را بر حسب  $Z$  رسم کنید. زنجیره‌های ممکن واپاشیهای  $\beta$  و نیز پایدارترین نوکلیدها را نشان دهید. بسا اتصال مقادیر بالاتر و پایینتر به یکدیگر، که از نوکلیدهای پایدار آغاز می‌شود، نشان دهید که خطوط رابط به صورت سهمی هستند. جدایی جرم میان این دو خط را اندازه‌گیری کنید و نشان دهید که با جمله تصحیح فرد-زوج معادله (۱۱.۷) یعنی

$$\delta = \pm 34 A^{-2/4} \text{ MeV}$$

سازگاری دارد.

۲۲۰۸ توزیع انرژی الکترونها در واپاشی  $\beta$  را، که با معادله (۲۱۰۸) داده می‌شود، برای  $E_0 = 124 \text{ MeV}$  ترسیم و با شکل ۱۱.۸ (ب) مقایسه کنید.

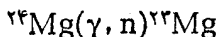
۲۳۰۸ معادلات واکنش هسته‌ای زیر را با گذاشتن نوکلید یا ذره مناسب در محلهایی که با  $X$  مشخص شده‌است، تکمیل کنید



۲۴۰۸ کاستی جرم هر هسته به صورت  $\Delta = A - M$  تعریف می‌شود که در آن،  $A$  عدد جرمی و  $M$  جرم هسته‌ای بر حسب amu است. مقدار  $Q$  واپاشی  $\beta^-$  و  $\beta^+$  و واکنش  $M_i(m_i, m_f)M_f$  را بر حسب مقدار کاستی جرم  $\Delta$  برای هر یک از ذرات موجود بیان کنید. [داهنمایی: به مثالهای ۴.۸ و ۵.۸ مراجعه کنید.]

۲۵۰۸ ذره‌ای به جرم  $m_i$  با انرژی جنبشی  $E_k$  (در چارچوب مرجع آزمایشگاه) با هسته‌ای به جرم  $M_i$  که در آغاز در این چارچوب در حال سکون قرار دارد برخورد می‌کند. نشان دهید که (الف) انرژی جنبشی کل سیستم در چارچوب مرجع مرکز جرم برابر است با  $E_k M_i / (M_i + m_i)$ . (ب) انرژی کل موجود برای واکنش  $M_i(m_i, m_f)M_f$  برابر است با  $Q + E_k M_i / (M_i + m_i)$ . (ج) انرژی جنبشی آستانه  $m_i$  در چارچوب مرجع آزمایشگاه (هنگامی که  $Q$  منفی است) برابر است با  $Q(M_i + m_i) / M_i$ . در این مسئله، ذرات را غیر نسبیتی در نظر بگیرید.

۲۶۰۸ برای واکنش فوتوهسته‌ای زیر



انرژی آستانه فوتون را تعیین کنید. جرمهای سکون نوکلیدهای مادر و محصول به ترتیب برابرند با  $2398504$  و  $22999412 \text{ amu}$ .

۲۷۰۸ دستگاه شتابدهنده مشخصی می تواند ذرات با یک واحد بار را تا انرژی  $2 \text{ MeV}$  و ذرات با دو واحد بار را تا انرژی  $4 \text{ MeV}$  شتاب دهد. هرگاه  $^{12}\text{C}$  با پروتونها، دوترونها، و ذرات آلفای حاصل از این دستگاه بمباران شود چه واکنشهایی را می توان مشاهده کرد؟

۲۸۰۸ از بمباران  $^7\text{Li}$  با پروتونهای  $70 \text{ MeV}$  دو ذره آلفا تولید می شود که انرژی جنبشی هر کدام برابر  $90 \text{ MeV}$  است. (الف) مقدار  $Q$  واکنش را محاسبه کنید. (ب) اختلاف میان انرژی جنبشی کل ذرات آلفا و انرژی جنبشی پروتون اولیه را در چارچوب مرجع آزمایشگاه محاسبه کنید.

۲۹۰۸ جرم سکون  $^{27}\text{Al}$  مساوی با  $2698154 \text{ amu}$  است. جرم هسته های محصول واکنشهای زیر را به دست آورید

$$Q = 7722 \text{ MeV}, \quad ^{27}\text{Al}(n, \gamma)^{28}\text{Al} \quad (\text{الف})$$

$$Q = 1894 \text{ MeV}, \quad ^{27}\text{Al}(p, \alpha)^{24}\text{Mg} \quad (\text{ب})$$

$$Q = 5497 \text{ MeV}, \quad ^{27}\text{Al}(d, p)^{28}\text{Al} \quad (\text{ج})$$

$$Q = 6693 \text{ MeV}, \quad ^{27}\text{Al}(d, \alpha)^{25}\text{Mg} \quad (\text{د})$$

۳۰۰۸ نشان دهید که مقدار  $Q$  واکنش هسته ای  $M_i(m_i, m_f)M_f$  از رابطه زیر به دست می آید

$$Q = E_f \left[ 1 + \left( \frac{m_f}{M_f} \right) \right] - E_i \left[ 1 - \left( \frac{m_i}{M_i} \right) \right]$$

که در آن  $E_i$  انرژی جنبشی ذره فرودی و  $E_f$  انرژی جنبشی ذراتی است که تحت زاویه  $90^\circ$  نسبت به راستای ذره فرودی مشاهده می شوند.

۳۱۰۸ برای واکنشهای زیر، انرژی آستانه پرتابه در چارچوب مرجع آزمایشگاه را به دست آورید.

$$^{14}\text{N}(\alpha, p)^{17}\text{O} \quad (\text{الف}), \quad ^{16}\text{O}(n, \alpha)^{13}\text{C} \quad (\text{ب})$$

فرض کنید هسته هدف در حال سکون است.

۳۲۰۸ نمونه ای از سیلیسیوم طبیعی با باریکه دوترونی به انرژی  $20 \text{ MeV}$  بمباران می شود. (الف) تمام واکنشهای ممکن را بنویسید که در آنها، یک پروتون یا یک ذره آلفا به صورت ذرات پرتاب شده ظاهر می شوند. (ب) در هر حالت، انرژی جنبشی ذره پرتاب شده

در چارچوب مرجع مرکز جرم و بیشینه و کمینه انرژی جنبشی آن در چارچوب مرجع مرکز جرم را به دست آورید.

۳۳۰۸ در انرژیهای نسبتاً پایین (گرمایی)، سطح مقطع گیراندازی نوترون برای بسیاری از مواد با سرعت نوترون نسبت عکس دارد و به نام قانون  $1/v$  معروف است. منحنی لگاریتم سطح مقطع نوترون گرمایی بر حسب انرژی جنبشی نوترون به چه صورت ظاهر می‌شود؟

۳۴۰۸ با توجه به اینکه سطح مقطع گیراندازی  $^{197}\text{Au}$  برای نوترونها از قانون  $1/v$  پیروی می‌کند (مسئله ۳۳۰۸)، و سطح مقطع گیراندازی آن برای نوترونهای گرمایی  $(0.025\text{ eV})$  مساوی با  $99\text{ b}$  است، سطح مقطع جذب  $^{197}\text{Au}$  را برای نوترونهای  $100\text{ eV}$  به دست آورید. چه ضخامتی از ورقه طلا می‌تواند ۲۰ درصد از یک باریکه نوترونی  $100\text{ eV}$  را جذب کند؟

۳۵۰۸ یک ورقه تانتال به ضخامت  $0.02\text{ cm}$  که چگالی آن برابر  $10^4\text{ kg m}^{-3} \times 10^6$  است، به مدت ۲ ساعت در معرض تابش باریکه نوترون گرمایی با شار  $10^{16}\text{ Nm}^{-2}\text{ s}^{-1}$  قرار می‌گیرد. تحت واکنش  $^{182}\text{Ta}(n, \gamma)^{182}\text{Ta}$  هسته  $^{182}\text{Ta}$  با نیمه عمر ۱۱۴ روز تشکیل می‌شود. فعالیت ورقه مزبور بلافاصله پس از تابش برابر با  $10^7 \times 10^{23}$  فروپاشی در ثانیه در  $\text{cm}^2$  است. مطلوب است (الف) تعداد هسته‌های  $^{182}\text{Ta}$  تشکیل شده. (ب) سطح مقطع برای واکنش  $(n, \gamma)$  که به تشکیل  $^{182}\text{Ta}$  منجر می‌شود.

۳۶۰۸ یک ورقه فولادی در رآکتور هسته‌ای به عنوان میله کنترل به کار می‌رود. ضخامت این ورقه  $1059\text{ mm}$  است و ۲ درصد وزن آن را بور تشکیل می‌دهد. سطح مقطعهای جذب آهن و بور برای نوترونهای پرانرژی به ترتیب مساوی با  $255\text{ b}$  و  $755\text{ b}$  است. (الف) سطح مقطعهای جذب ماکروسکوپیک هر یک از این عناصر موجود در ورقه فولادی بوردار را به دست آورید. (ب) چه کسری از باریکه نوترونی هنگام عبور از این ورقه جذب می‌شود؟ (ج) سطح مقطع ماکروسکوپیک ورقه را در حالتی محاسبه کنید که مقدار بور تا ۳ درصد افزایش یابد (چگالی بور مساوی با  $10^3\text{ kg m}^{-3} \times 205$  و چگالی فولاد نیز مساوی با  $10^3\text{ kg m}^{-3} \times 109$  است).

۳۷۰۸ یک باریکه نوترونی به انرژی  $370\text{ keV}$  به یک ورقه نازک آلومینیومی به ضخامت  $1\text{ mm}$  تابیده می‌شود. با در نظر گرفتن اینکه سطح مقطع گیراندازی آلومینیوم برای نوترونهای با این انرژی مساوی با  $3\text{ mb}$  است [شکل ۱۴۰۸ (ب)]، تعیین کنید چه کسری از این نوترونها گیر می‌افتند. چگالی آلومینیوم برابر با  $10^3\text{ kg m}^{-3} \times 2700$  است.

۳۸۰۸ مسئله ۳۷۰۸ را برای یک باریکه نوترونی که انرژی آن در حدود  $45\text{ keV}$  است تکرار کنید. شکل ۱۴۰۸ (ب) قله‌ای به مقدار تقریبی  $18\text{ mb}$  را در سطح مقطع گیراندازی

برای انرژی ۴۵ keV نشان می‌دهد.

۳۹۰۸ سطح مقطع گیراندازی  ${}^1_0\text{B}$  برای نوترونهای گرمایی در حدود ۴۰۰۰ b است. برای جذب ۹۹ درصد از باریکه نوترون گرمایی چه ضخامتی از  ${}^1_0\text{B}$  مورد نیاز است؟ (چگالی بور مساوی با  $10^3 \times 2.75 \text{ kg m}^{-3}$  است.)

۴۰۰۸ نشان دهید که  ${}^6\text{Li}$  در مقابل فرایند شکافت پایدار است. این بررسی را با تحلیل تمام راههایی که ممکن است این هسته شکافته شود انجام دهید (به عنوان مثال،  ${}^6\text{Li} \rightarrow \text{d} + \alpha$ ، و غیره). به طریق مشابه نشان دهید که  ${}^5\text{Li}$  و  ${}^5\text{He}$  در مقابل شکافت ناپایدار هستند.

۴۱۰۸ در فوتوشکافت  ${}^{235}\text{U}$  به  ${}^9_0\text{Kr}$  و  ${}^{142}\text{Ba}$  و سه نوترون، مقدار کل انرژی آزادشده را به کمک اختلاف جرم محاسبه کنید. این انرژی را با انرژی دافعه کولنی اولیه دو پاره باردار مقایسه کنید. فرض کنید که هنگام وقوع شکافت، این پاره‌ها درست در حال تماس با یکدیگر قرار دارند.

۴۲۰۸ انرژی موردنیاز برای شکافت هسته  ${}^4_2\text{He}$  به: (الف)  ${}^3_1\text{H}$  و  $\text{p}$ ؛ (ب)  ${}^3_2\text{He}$  و  $\text{n}$  را محاسبه کنید. اختلاف میسان این انرژیها را برحسب خواص نیروهای هسته‌ای توضیح دهید.

۴۳۰۸ نشان دهید که انرژی آزادشده در شکافت اورانیوم ( $185 \text{ MeV}$  به ازای هر اتم) معادل با  $10^{13} \times 8.3 \text{ J kg}^{-1}$  است. با چه آهنگی باید شکافت اورانیوم صورت گیرد تا قدرتی برابر ۱ MW تولید شود؟ برای اینکه ۱ kg اورانیوم مصرف شود چه مدت زمان طول خواهد کشید؟ (البته با این فرض که به‌طور پیوسته در حال ایجاد قدرت ۱ MW باشد.)

۴۴۰۸ می‌توان نشان داد که هر گاه  $2.5A/Z^2 \approx a_p A/a_n Z^2$ ، که در آن  $a_p$  و  $a_n$  ضرایب موجود در فرمول وایتسکر، معادله (۱۱.۷)، هستند کوچکتر از واحد باشد، شکافت خودبه‌خود رخ می‌دهد. این نسبت را برای  ${}^{132}\text{Xe}$ ،  ${}^{142}\text{Ce}$ ،  ${}^{200}\text{Hg}$ ،  ${}^{235}\text{U}$  و  ${}^{255}\text{Fm}$  محاسبه کنید.

۴۵۰۸ انرژی برانگیختگی هسته حاصل را هنگامی که یک نوترون با هر یک از هسته‌های زیر گیرانداخته شود محاسبه کنید.  ${}^{240}\text{Pu}$ ،  ${}^{239}\text{Pu}$ ،  ${}^{238}\text{U}$ ،  ${}^{233}\text{U}$ ،  ${}^{232}\text{Th}$  و  ${}^{232}\text{Th}$  کدامیک از این هسته‌ها با نوترونهای گرمایی شکافت پذیرند.

۴۶۰۸ (الف) میانگین دمای پلاسمای دوتریوم چقدر باید باشد تا فرایند همجوشی صورت پذیرد؟ [دانه‌ماهی: این مسئله را می‌توان با محاسبه انرژی دافعه کولنی میان دوترونها هنگامی که در داخل برد نیروی هسته‌ای، یعنی  $10^{-15} \text{ m}$ ، قرار دارند محاسبه کرد.]



(ب) انرژی آزاد شده در همجوشی دو هسته دوتریوم و تبدیل آن به يك ذره آلفا را محاسبه کنید.

۴۷۰۸ در فرایند همجوشی  ${}^{12}\text{C} \rightarrow {}^4\text{He}$  چه مقدار انرژی آزاد می‌شود؟ این فرایند مرحله دوم ترکیب هسته‌ای در ستارگان به وقوع می‌پیوندد. قدرت تولید شده در این فرایند را در ستاره‌ای محاسبه کنید که در آن،  $5 \times 10^9 \text{ kg}$  از  ${}^4\text{He}$  در ثانیه از طریق فرایند همجوشی به  ${}^{12}\text{C}$  تبدیل می‌شود.

۴۸۰۸ چرخه نیتروژن در فرایند همجوشی به چرخه کربن، معادله (۳۵۰۸)، شباهت دارد. این چرخه با گیراندازی يك فوتون توسط هسته  ${}^{14}\text{N}$  آغاز می‌شود. پس از واکنشهای متوالی که در آن نوکلیدهای  ${}^{15}\text{O}$ ،  ${}^{15}\text{N}$ ،  ${}^{16}\text{O}$ ،  ${}^{17}\text{F}$ ،  ${}^{17}\text{O}$  حضور دارند، هسته  ${}^{14}\text{N}$  مجدداً ایجاد می‌شود. حاصل همجوشی ترکیب چهار پروتون و تبدیل آنها به يك ذره آلفاست. (الف) مراحل مختلف چرخه نیتروژن را به صورت مفصلتر بنویسید. (ب) انرژی کل آزاد شده در چرخه نیتروژن چقدر است؟

۴۹۰۸ نشان دهید که با در نظر گرفتن انرژی تولید شده توسط خورشید، جرم آن باید به میزان  $4 \times 10^9 \text{ kgs}^{-1}$  کاهش یابد. برای اینکه جرم خورشید به ۱ درصد آن تقلیل یابد چه زمانی باید طی شود؟ (جرم خورشید برابر با  $1.98 \times 10^{30} \text{ kg}$  است.)

۵۰۰۸ چه مدت طول می‌کشد تا در نتیجه اتلاف جرم خورشید بر اثر تابش، طول سال به اندازه يك ثانیه افزایش یابد؟ (به مسئله قبل رجوع کنید.) یادآوری می‌کنیم که مربع دوره تناوب حرکت هر سیاره به دور خورشید با جرم خورشید نسبت عکس دارد.

۵۱۰۸ با فرض اینکه آهنگ همجوشی هیدروژن به هلیوم در خورشید از آغاز به صورت یکسان باقی مانده است، نشان دهید که عمر خورشید باید از مرتبه  $2 \times 10^{10}$  سال باشد. عمر برآورد شده خورشید بر اساس محاسبات دیگر در مرتبه  $10^{11}$  سال است.

## مراجع

1. "Resource Letter NR-1 on Nuclear Reaction," T. Griffy, *Am. J. Phys.*, 35, 297(1967).
2. "The Discovery of Nuclear Fission," H. Graetzer, *Am. J. Phys.*, 32, 9(1964).
3. "A Study of the Discovery of Fission," E. Sparberg, *Am. J. Phys.*, 32, 2(1964).
4. "Nuclear Fission," R. Leachman, *Sci. Am.*, August 1965, page 49.

5. "Thermonuclear Reactions," G. Thomson, *Am. J. Phys.*, 28, 221; (1960).
6. "Recent Developments in Controlled Fusion," A. Bishop, *Physics Today*, March 1964, page 19.
7. "The Origin of the Elements," by W. A. Fowler and "The Structure of Nuclei" by V. Weisskopf in *The Scientific Endeavor*, New York: Rockefeller Institute Press, 1965.
8. *Structure of Matter*, W. Finkelburg, New York: Academic Press, 1964, Chapter V, Sections 9-19.
9. *Principles of Modern Physics*, R. Leighton, New York: McGraw-Hill, 1959, Chapters 16 and 17.
10. *Nuclear Physics*, I. Kaplan, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963.
11. *Introduction to the Atomic Nucleus*, J. Cuninghame, Amsterdam: Elsevier, 1964.
12. *Radioactivity and Its Measurement*, W. Mann and S. Garfinkel; Princeton, N. J.: Van Nostrand, Momentum Books, 1966.
13. *A Source Book in Physics*, W. Magie, Cambridge, Mass.: Harvard University Press (1963), page 613 (Becquerel); page 617 (P. and M. S. Curie).

# ۹

## ذرات بنیادی

- ۱۰۹ مقدمه
- ۲۰۹ منشا ذرات
- ۳۰۹ ذرات و پادذرات
- ۴۰۹ ناپایداری ذره
- ۵۰۹ قوانین پایستگی
- ۶۰۹ ناوردایی، تقارن، و قوانین پایستگی
- ۷۰۹ تشدیدها
- ۸۰۹ ذره بنیادی چیست؟

## ۱.۹ مقدمه

در این فصل بحث ساختار ماده را با بررسی مختصر سنگ بناهای تشکیل دهنده تمام مواد، به پایان می‌بریم. این سنگ بناها را ذرات اساسی، یا بنیادی می‌نامیم. تاکنون در این کتاب با ذرات زیر آشنا شده‌ایم: پروتون، نوترون، الکترون، پوزیترون، و نوترینو، به این فهرست باید فوتون را نیز اضافه کرد زیرا آن هم یک ذره بنیادی به حساب می‌آید. به نظر می‌رسد که سه ذره اول تنها ذراتی باشند که برای توضیح ساختار اتمها و هسته‌ها، ضروری و مورد نیازند. ظاهراً پوزیترون برای این منظور ضروری نیست، اما وجود آن، اعتبار مفاهیم نسبیتی و کوانتومی را هنگامی که در قلمرو ذرات بنیادی به کار می‌روند تأیید می‌کند (این موضوع مستلزم یک تحلیل ریاضی است که خارج از سطح این کتاب است). به نظر می‌رسد، نوترینو برای تأیید سه قانون اساسی پایداری انرژی، تکانه، و تکانه زاویه‌ای مورد نیاز است. فوتون نیز حامل برهم کنش الکترومغناطیسی میان ذرات باردار است. یعنی، برهم کنش الکترومغناطیسی دو بار الکتریکی به صورت تبادل فوتونها میان آنها توصیف می‌شود (بخش ۶.۱).

آیا می‌توان انتظار داشت که ذرات بنیادی دیگری هم وجود دارند؟ در مقام قیاس به نظر می‌رسد که برهم کنش قوی میان پروتونها و نوترونها نیز نیاز به یک ذره حامل دارد. این ذره را پیون می‌نامند. (این نام از مزون  $\pi$  گرفته شده است) برهم کنش گرانشی میان دو جرم نیز نیاز به ذره حامل دیگری دارد که گراویتون نام دارد. به طریق مشابه، برهم کنش ضعیف نیز باید وابسته به یک ذره حامل باشد که به ذره  $W$  معروف است. در واقع پیونها در پرتوهای کیهانی مشاهده شده و به مقدار زیادی نیز در شتابدهنده‌های پرنرژی ایجاد شده‌اند، ولی تاکنون هیچ شاهد تجربی برای گراویتون یا ذره  $W$  به دست نیامده است. ۱. در سی سال اخیر تعداد زیادی ذره (گاهی به صورت پیشگویی و گاهی بدون شک تردید) مشاهده شده‌اند. به نظر می‌رسد که بعضی از این ذرات به طور نسبتاً عجیبی رفتار می‌کنند و هیچ دلیلی برای وجود آنها تاکنون به دست نیامده است. بیشتر از ۳۰ ذره نسبتاً پایدار (با عمر متوسط بیشتر از  $10^{-10}$  ثانیه) و در حدود ۵۰ ذره با عمر خیلی کوتاه (یعنی عمر متوسط حتی کوتاهتر از  $10^{-21}$  ثانیه) نیز که به ذرات تشدیدی یا تشدیدها معروف‌اند، شناسایی شده‌اند. با اختراع شتابدهنده‌های با انرژی خیلی بالا که می‌توانند ذراتی با انرژی چند GeV تولید کنند و نیز با اصلاح تکنیکهای مشاهده ذرات، کشف این ذرات بنیادی امکان پذیر شده است. این تکنیکها عبارت‌اند از اتاقکهای ابر، خباب، و جرقه و نیز امولسیونهای عکاسی (که در تمام آنها ذرات باردار از خود مسیرهای قابل رؤیتی به جای می‌گذارند). علاوه بر آن می‌توان از انواع مختلف آشکارسازها از قبیل شمارگرهای گایگر-مولر، سوسوزن، و چرنکوف همراه با مدارهای الکترونیکی بسیار پیچیده نام برد. در این بخش بر آن نیستیم که در بحث این تکنیکهای تجربی داخل شویم. با ایسن حال،

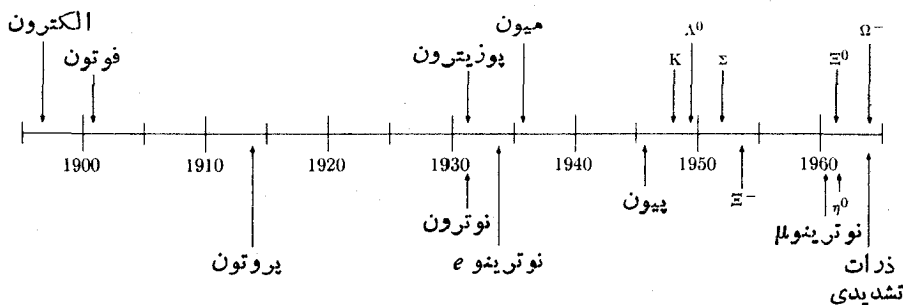
پاره‌ای از دستگاہهای آشکارساز ذرات را در پیوست ۷ کتاب آورده‌ایم.

به خاطر پیچیدگیهای ریاضی موجود در نظریهٔ ذرات بنیادی، که فراتر از سطح یک کتاب مقدماتی مکانیک کوانتومی است، ادامهٔ بحث در صفحات بعد غالباً به صورت کیفی و توصیفی ارائه می‌شود.

## ۲.۹ منشأ ذرات

جدول ۱.۹ لیستی از ذرات شناخته شده (تا حدود سال ۱۹۶۷) را همراه با پاره‌ای از خواص آنها نشان می‌دهد. در این جدول ذرات تشدیدنی نیامده است. در شکل ۱.۹ نیز جدول زمانی مربوط به کشف این ذرات آمده است. سه کمیت اصلی به کار رفته برای تشخیص ذرات عبارت‌اند از جرم، بار، و اسپین و بقیهٔ خواص بعداً ارائه خواهند شد. ذرات بنیادی، بر حسب جرم و برهم کنش حاکم خود به چهار گروه زیر دسته بندی می‌شوند. (الف) بوزونهای بدون جرم، (ب) لپتونها یا ذرات سبک، (ج) مزونها یا ذرات با جرم میانی، و (د) بادیونها یا ذرات سنگین. (بوزون و فرمیون کسه به عدهٔ ذرات جدول اضافه شده است در فصل ۱۳ توضیح داده خواهد شد. در اینجا فقط یادآوری می‌کنیم که فرمیونها از اصل طرد پیروی می‌کنند در صورتی که بوزونها نمی‌کنند.) باریونها و مزونها در تمام چهار برهم کنش قوی، الکترومغناطیسی، ضعیف، و گرانشی شرکت می‌کنند. لپتونها نسبت به برهم کنشهای قوی حساس نیستند. فوتونها به برهم کنش الکترومغناطیسی و گراویتونها به برهم کنش گرانشی مربوط می‌شوند.

یکی از سؤالات معما برانگیز و پاسخ داده نشده در مورد ذرات بنیادی آن است که ظاهرأ جرم ذرات از نوعی نظم و قاعدهٔ خاص تبعیت نمی‌کند. از طرف دیگر، ذرات یا بار الکتریکی ندارند یا بار آنها  $e$  است، واقعیتی که باید با قانون پایستگی بار الکتریکی ارتباط نزدیک داشته باشد. به طریق مشابه، تمام فرمیونها اسپین  $1/2$  دارند، به استثنای  $\Omega^-$



**شکل ۱.۹** جدول زمانی مربوط به کشف تجربی ذرات بنیادی. بعضی ذرات بر اساس زمینه‌های نظری قبل از مشاهدهٔ تجربی پیشگویی شده و بقیه نیز به صورت غیرمنتظره‌ای مشاهده شده‌اند.

جدول ۱۰۹ ذرات بنیادی

پادذره	اسپین (بر حسب $\hbar$ )	بار (بر حسب e)	انرژی سکون MeV	جرم سکون (بر حسب $m_e$ )	نماد	ذره
$g$	۲	۰	۰	۰	$g$	بوزونهای بدون جرم گر اویتون (?)
$\gamma$	۱	۰	۰	۰	$\gamma$	فوتون
$\bar{\nu}$	۱/۲	۰	۰	۰	$\nu$	لپتونها (فرمیونها) نوترینو
$e^+$	۱/۲	-۱	۰۵۱۱	۱	$e^-$	الکترون
$\mu^+$	۱/۲	-۱	۱۰۵۷	۲۰۶۷۸	$\mu^-$	میون
$\pi^-$	۰	+۱	۱۴۰	۲۷۳۷۹	$\pi^+$	مزونها (بوزونها) پیون
$\pi^0$	۰	۰	۱۳۵	۲۶۴۷۲	$\pi^0$	
$\bar{K}^-$	۰	+۱	۴۹۴	۹۶۶۷۷	$K^+$	کائون
$\bar{K}^0$	۰	۰	۴۹۸	۹۷۴۷۶	$K^0$	
$\eta^0$	۰	۰	۵۴۹	۱۰۷۴	$\eta^0$	مزون- $\eta$
$\bar{p}^-$	۱/۲	+۱	۹۳۸۷۳	۱۸۳۶۷۲	$p^+$	بادیونها (فرمیونها) نوکلئونها پروتون
$\bar{n}^0$	۱/۲	۰	۹۳۹۷۶	۱۸۳۸۷۷	$n^0$	نوترون
$\bar{\Lambda}^0$	۱/۲	۰	۱۱۱۶	۲۱۸۴	$\Lambda^0$	هیپرونها لاندا
$\bar{\Sigma}^-$	۱/۲	+۱	۱۱۸۹	۲۳۲۷	$\Sigma^+$	سیگما
$\bar{\Sigma}^0$	۱/۲	۰	۱۱۹۲	۲۳۳۳	$\Sigma^0$	
$\bar{\Sigma}^+$	۱/۲	-۱	۱۱۹۷	۲۳۴۲	$\Sigma^-$	
$\bar{\Xi}^0$	۱/۲	۰	۱۳۱۵	۲۵۷۳	$\Xi^0$	کیسی
$\bar{\Xi}^+$	۱/۲	-۱	۱۳۲۱	۲۵۸۵	$\Xi^-$	
$\bar{\Omega}^+$	۳/۲	-۱	۱۶۷۴	۳۲۷۶	$\Omega^-$	اومگا

که ظاهراً اسپین آن  $\frac{3}{2}$  است، تمام بوزونها اسپین آنها صفر (مزونها) یا عدد درست (فوتون) است. ضمناً اکثر ذرات گشتاور دو قطبی مغناطیسی نیز دارند.

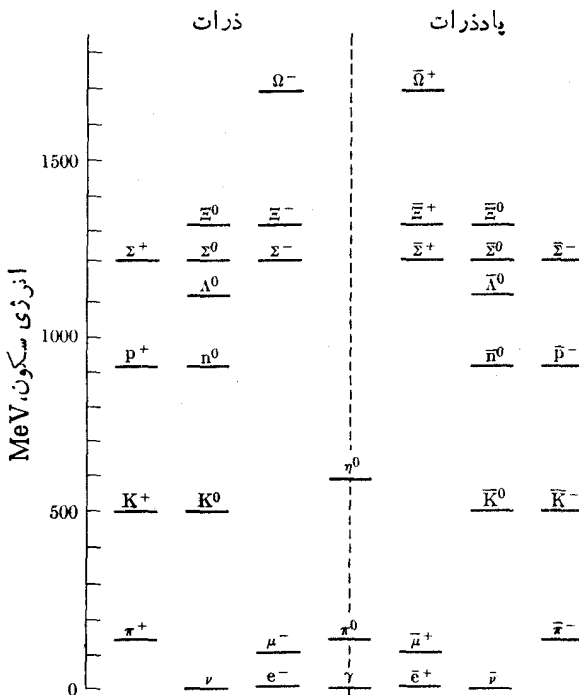
اسپین فوتون با توجه به این واقعیت استنتاج شده است که در تمام گذارهای تابشی شامل گسیل یا جذب فوتونها به وسیله ذرات، هسته‌ها، اتمها، یا مولکولها، هر گاه تکانه زاویه‌ای کل هر دو حالت اولیه و نهایی صفر باشد، این گذارها اکیداً ممنوع هستند. این امر نشان می‌دهد که فوتون تکانه زاویه‌ای ذاتی یا اسپین دارد. تحلیل مفصلتر (که در اینجا از بیان آن خودداری می‌کنیم) نشان می‌دهد که اسپین فوتون برابر یک است زیرا فوتون به یک میدان برداری، یعنی میدان الکترومغناطیسی، وابسته است. چون جرم سکون فوتون صفر است، می‌توان نشان داد که اسپین فوتون می‌تواند به صورت موازی ( $m_s = +1$ ) یا پاد موازی ( $m_s = -1$ ) با تکانه آن قرار بگیرد. ولی به هر حال هیچ گاه عمود بر آن ( $m_s = 0$ ) نخواهد بود. مورد اول با تابش قطبیده دورانی چپگرد و مسورد دوم نیز با تابش قطبیده دورانی راستگرد متناظر است. این نتیجه معادل با این گفته است که میدان الکترومغناطیسی یک موج مسطح بردار استای انتشار عمود است.

### ۳.۹ ذرات و پادذرات

به هر ذره بنیادی یک پاد ذره وابسته است. در جدول ۱.۹، پاد ذرات در ستون آخر آمده است. پاد ذره با همان نماد ذره و لسی همراه با خطی واقع در بالای آن مشخص می‌شود. (بعضی اوقات، برای سهولت، این خط کوچک نیز حذف می‌شود.) جرم و اسپین پادذرات برابر با جرم و اسپین ذره است ولی خواص الکترومغناطیسی یعنی بار و گشتاور مغناطیسی آنها مخالف هم است (سایر خواص آنها نیز که بعداً بیان خواهند شد با هم مخالف است).

چهار ذره فوتون، گراویتون، و مزونها  $90^\circ$  و  $180^\circ$ ، پاد ذره خود نیز هستند. وجود پاد ذره الزام نسبیّت و مکانیک کوانتومی است. دیراک پاد ذرات را قبل از اینکه به طور تجربی مشاهده شوند، پیشگویی کرد. در بعضی موارد با وجود آنکه پاره‌ای از پاد ذرات هنوز هم به طور تجربی شناخته نشده‌اند ولی وجود آنها بر اساس نظری مسلم فرض می‌شود. در شکل ۲.۹ ذرات و پادذرات به طریق متقارنتری نشان داده شده‌اند. پوزیترون اولین پاد ذره‌ای بود که مشاهده شد. اندرسون فیزیکدان امریکایی در سال ۱۹۳۳ هنگام تحلیل و مطالعه پرتوهای کیهانی در اتاقک ابر آن را کشف کرد. در سال ۱۹۵۵ نیز گروهی از محققان دانشگاه کالیفرنیا پاد پروتونها را برای اولین بار کشف کردند. کمی بعد از آن نیز پاد نوترونها مشاهده شدند.

در مورد نوترینو، خاصیت مهمی وجود دارد که به کمک آن می‌توان ذره و پاد ذره را از هم تشخیص داد و این ناشی از این واقعیت است که جرم سکون آنها مساوی با صفر است. (و نیز به دلیل عدم پایستگی پارته، به بخش ۶.۹ مراجعه کنید.) جهت اسپین هر نوترینو همیشه در خلاف جهت تکانه آن است (تکانه در جهت حرکت است)، در حالی که، برای پاد نوترینو،



شکل ۲۰۹ آرایش ذرات و پادذرات بر حسب انرژی سکون و بار آنها.

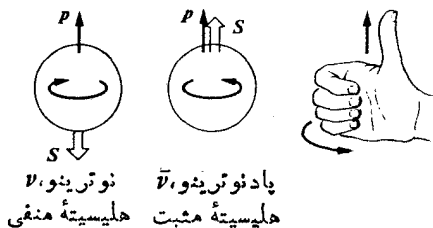
تکانه و اسپین هم جهت اند (شکل ۳۰۹). به همین دلیل نوترینو دارای هلیسیتته منفی و برابر با  $-1$  (که با  $\hbar$  مشخص می شود) و پاد نوترینو نیز دارای هلیسیتته مثبت مساوی با  $+1$  است. این خاصیت از طریق تحلیل واپاشی پیونها و میونها و نیز به کمک واپاشی  $\beta$  (بخش ۴۰۹) به دست آمد. برای سایر ذرات با اسپین  $1/2$  که جرم سکون غیر صفر دارند (مثلاً الکترونها)، هم ذره و هم پاد ذره می توانند، بدون هیچگونه تبعیضی، هلیسیتته مثبت یا منفی داشته باشند، یعنی  $\hbar = \pm 1$ .

ذره و پاد ذره ممکن است با هم ترکیب شوند و یکدیگر را نابود کنند. انرژی کل، از جمله انرژی سکون آنها، به صورت ذرات دیگری ظاهر می شود. در این فرایند باید چند قانون پایستگی برقرار باشد. به عنوان مثال، الکترون  $e^-$  و پاد ذره اش یعنی پوزیترون  $e^+$  می توانند همراه با یکدیگر نابود شوند و فوتوهایی را گسیل کنند. این فرایند به فرایند نابودی زوج معروف است. هر گاه اسپین آنها مخالف و تکانه زاویه ای مداری نسبی آنها نیز صفر باشد، فرایند به صورت زیر خواهد بود



به دلیل پایستگی انرژی و تکانه است که دو فوتون گسیل می شوند. هر گاه الکترون و پوزیترون

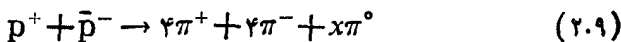




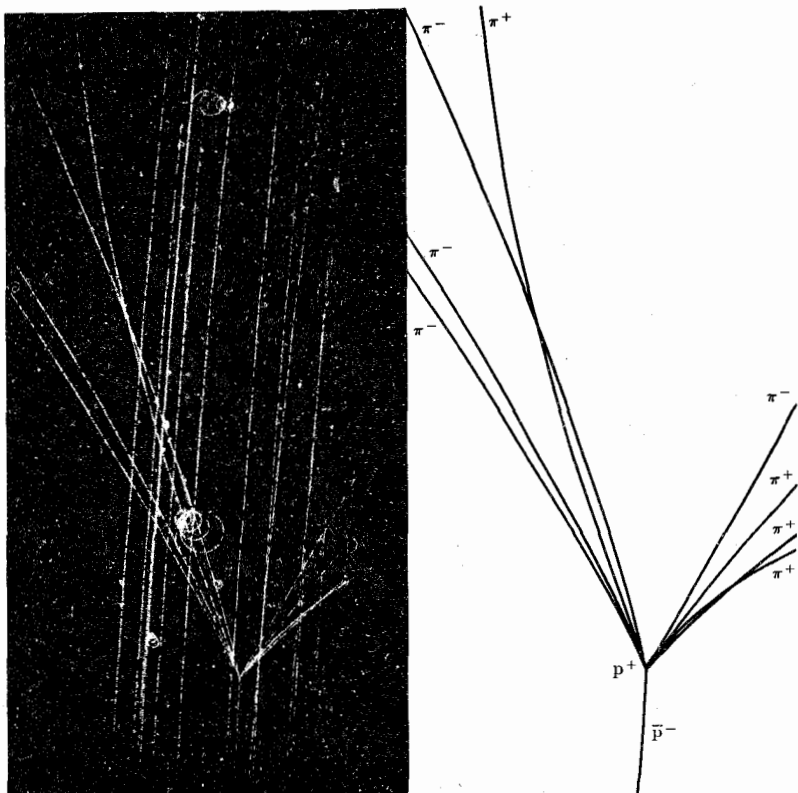
شکل ۳۰۹ هلیسیتۀ نوترینو و پادنوترینو مخالف یکدیگر است.

در چارچوب مرجع آزمایشگاه در حال سکون باشند (که در این صورت بر چارچوب مرجع مرکز جرم منطبق است)، انرژی کل موجود مساوی با  $105.22 \text{ MeV} = 2m_e c^2$  و تکانه کل نیز برابر با صفر است. هرگاه فوتونی با انرژی  $E_\gamma = 2m_e c^2$  گسیل شود، لازم است تکانه‌ای برابر با  $p_\gamma = E_\gamma/c = 2m_e c$  را با خود حمل کند و بدین ترتیب، اصل پایستگی تکانه نقض می‌شود، زیرا تکانه اولیه مساوی با صفر است. برای حفظ پایستگی انرژی و تکانه لازم است که دو فوتون مساوی در دو جهت مخالف گسیل شوند. بنا بر این هر فوتون باید مقداری انرژی مساوی با  $511 \text{ MeV} = m_e c^2$  داشته باشد. هنگامی که پوزیترونهای حاصل از هسته پرتوزای  $\beta^+$  از میان ماده عبور می‌کنند، فوتونهایی با این انرژی مشاهده می‌شوند. تکانه زاویه‌ای نیز باید پایسته بماند و هرگاه اسپین الکترون و پوزیترون در جهت مخالف هم باشند اسپین فوتونها نیز باید مختلف جهت باشند. این وضع مستلزم این است که فوتونها قطبش دورانی یکسان داشته باشند (یا اینکه باید در جهت‌های متعامد قطبیده شوند). هرگاه الکترون یا پوزیترون (یا هر دو) در چارچوب مرجع آزمایشگاه در حال سکون نباشند، محاسبه را می‌توان با استفاده از قوانین پایستگی انرژی و تکانه انجام داد و انرژی و تکانه فوتونها را به صورتی که در آزمایشگاه اندازه‌گیری می‌شوند به دست آورد. توجه کنید که در معادله (۱۰۹)، بار نیز پایسته است.

نابودی پروتون - پاد پروتون یک فرایند پیچیده‌تر است و در آن چند ذره تولید می‌شوند که اکثراً بیون‌اند. این نابودی (که در داخل اتاقک حباب صورت می‌گیرد) در شکل ۴۰۹ نشان داده شده است و با فرایند زیر متناظر است



پاد پروتون ورودی با یکی از پروتونهای موجود در گاز اتاقک نابود می‌شود. برای اینکه بار الکتریکی پایسته بماند باید تعداد پیونهای مثبت و منفی با یکدیگر مساوی باشند. تعیین تعداد مزونهای  $\pi^0$  حاصل مشکل است زیرا هیچگونه ردی را از خود در داخل اتاقک به جای نمی‌گذارند. تعداد کل ذرات تولید شده به انرژی موجود بستگی دارد.

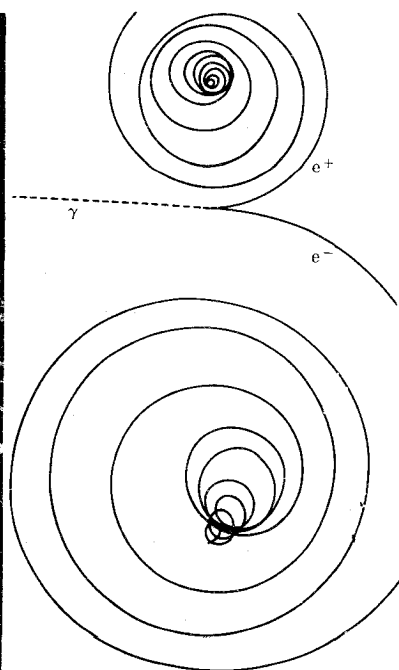
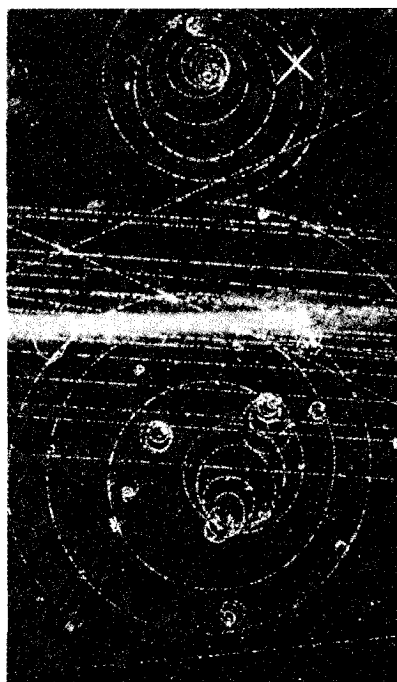


شکل ۴۰۹ نابودی پروتون - پادپروتون.

برعکس، يك ذره و پاد ذره اش ممكن است همزمان توليد شوند. شكل ۵۰۹ توليد يك زوج الكترون-پوزيترون را پس از وارد شدن يك فوتون (از طرف چپ) به داخل اتاقك ابر نشان می دهد، یعنی



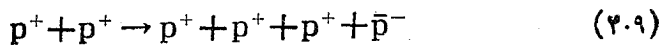
رد فوتون قابل رؤیت نیست. واضح است که برای تولید زوج الكترون-پوزيترون، فوتون باید يك مقدار انرژی حداقل برابر با  $1.02 \text{ MeV} = 2m_e c^2$  داشته باشد. برای اینکه انرژی و تكانه در معادله (۳۰۹) پایسته بماند، فرایند مزبور باید در نزدیکی يك هسته رخ دهد تا، در نتیجه جفت شدگی الكترومغناطیسی آن با سیستم، انرژی و تكانه لازم برای پایستگی هردو كمیت را از آن بگیرد. به همین دلیل در مواد با اعداد اتمی بالا (مثل سرب)، تولید زوج الكترون با شدت بیشتری صورت می گیرد زیرا در این مواد، جفت شدگی الكترومغناطیسی



شکل ۵۰۹ تولید زوج الکترون-پوزیترون.

با زوج الکترون-پوزیترون قویتر است. تولید زوج الکترون یکی از اساسیترین فرایندهایی است که جذب فوتونهای پرانرژی به وسیله مواد مختلف را توجیه می کند. (در انرژیهای پایین، اثر فوتوالکتریک و در انرژیهای ۱ MeV و ۱ MeV نیز اثر کامپتون از اهمیت ویژه ای برخوردارند (بخش ۹.۱ و شکل ۱۹۰.۱)).

به طریق مشابه، یک زوج پروتون-پادپروتون را می توان در یک برخورد پرانرژی پروتون-پروتون، بر طبق معادله زیر تولید کرد



(توجه داشته باشید که این معادله تنها فرایندی نیست که در برخورد پروتون-پروتون به وقوع می پیوندد.) گروه دانشگاه کالیفرنیا در آزمایشهایی که به کشف پاد پروتون منجر شد، از این فرایند استفاده کرده است (مثال ۲۰۹). برای اینکه فرایند (۲۰۹) به وقوع پیوندد، انرژی جنبشی آستانه پروتون ورودی (هرگاه پروتون هدف در حال سکون باشد) باید اقلابرا برابر  $564 \text{ GeV}$  باشد. (برای محاسبه این مقدار به مثال ۳۰۹ رجوع کنید.) ظاهراً کهنکشان ما به جای اینکه مخلوط یکنواختی از ذرات و پاد ذرات باشد

عمدتاً از ذرات تشکیل شده است و این موضوع می تواند آن را در مقابل نابودی محافظت کند. البته این گفته به این معنی نیست که سایر کیهکشانهها عمدتاً از باد ذرات تشکیل نشده اند، اگر چه هیچ گواه بارزی برای این فرض وجود ندارد. در هر حال جالب توجه است به این مسئله بیندیشیم که اگر يك کیهکشان و يك پادکیهکشان با یکدیگر برخورد کنند چه اتفاقی می افتد. اخترفیزیکدانها این ایده را تعمیم داده و پیشنهاد کرده اند که انفجارات مشاهده شده در کیهکشانههای دور ممکن است ناشی از نابودی ماده-پادماده باشد.

**مثال ۱۰۹** پوزیترونیم سیستمی است متشکل از يك پوزیترون و يسك الکترون (مشابه با سیستم الکترون-پروتون در اتم هیدروژن)، که حول مرکز جرمشان می چرخند. این سیستم را بررسی کنید.

**حل:** هنگامی که يك پوزیترون و يك الکترون به یکدیگر نزدیک می شوند، سیستم پایداری تشکیل می دهند که ویژه حالت های آن، مثل ویژه حالت های هیدروژن که در بخش ۲.۳ بررسی شد، محاسبه می شوند. با  $\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}$  به معادله (۷.۳) یاد آوری می کنیم که در مورد پوزیترونیم، جرم دو ذره یکسان است یعنی  $m_e = M$  و بنا بر این، ثابت ریذبزرگ متناظر عبارت است از  $R' = R/2$ . با قراردادن این مقدار در معادله (۵.۳) و به ازای  $Z = 1$ ، ترازهای انرژی مانای پوزیترونیم با رابطه زیر به دست می آید

$$E_n = -\frac{R'h}{2n^2} = -\frac{6.8}{n^2} \text{eV}$$

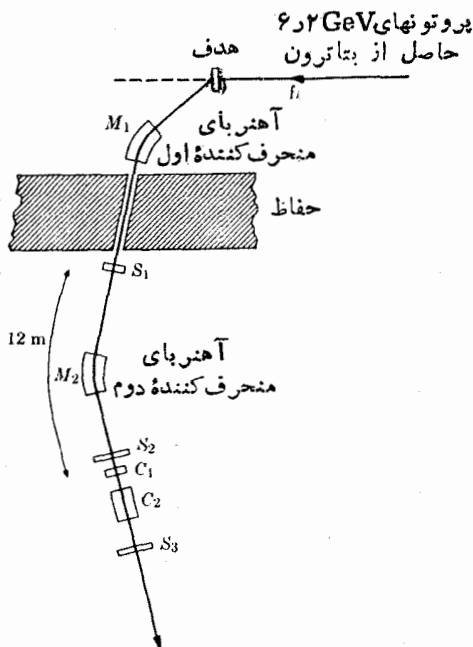
ترازهای انرژی واقعی در اثر تصحیحات نسبیاتی با عبارت پیچیده تری داده می شوند. برطبق معادله (۱۰۹)، به دلیل احتمال نابودی زوج، عمر پوزیترونیم زودگذر است. هر گاه زوج پوزیترون - الکترون با تکانه زاویه ای مداری صفر حرکت کنند (یعنی در حالت پایه ۱S باشند) و اسپین آنها پادموازی باشد (حالت تک تایی ۱S)، در این صورت سرانجام نابود و به دو فوتون تبدیل می شوند. این دو فوتون همان طور که قبلاً توضیح داده شد، یا به طور هم سو قطبیده دورانی یا در دو صفحه عمود بر هم قطبیده خطی می شوند. نیمه عمر حالت منفرد برابر با  $1.2 \times 10^{-10}$  s است. هر گاه اسپین آنها موازی باشد (حالت سه تایی ۳S)، پایستگی تکانه زاویه ای و همچنین بعضی قواعد گزینش اضافی وابسته به تقارن سیستم، واپاشی به دو فوتون را ممنوع می کنند. از این رو، از نابودی زوج پوزیترون - الکترون سه فوتون ایجاد می شود. انرژی فوتونها در هر مورد باید با  $1.022 \text{ MeV}$ ، یعنی کل انرژی سکون دو ذره نابودشدنی، جمع شود. نیمه عمر حالت سه تایی مساوی با  $1.2 \times 10^{-7}$  s است. مارتین دوچ<sup>۱</sup> در سال ۱۹۵۱ میلادی وجود پوزیترونیم را تأیید کرد. هنگامی که يك باریکه پوزیترون از میان گازی عبور کند، تعداد مشخصی از پوزیترونها قبل از نابود شدن، انمهای

پوزیترونیم تشکیل می‌دهند. نسبت احتمال تشکیل پوزیترونیم تک‌تایی به احتمال تشکیل پوزیترونیم سه‌تایی به صورت يك به سه است. به دلیل عمر خیلی طولانی پوزیترونیم سه‌تایی، این اتم می‌تواند در واکنش شیمیایی با اتمها یا مولکولهای گاز شرکت کند. در این طریق، هالیدهای پوزیترونیم مشاهده شده‌اند. این «ترکیبات» عمر پوزیترونیم را کوتاه می‌کنند، زیرا پوزیترون ممکن است با الکترون دیگری از اتم یا مولکول، که اسپین مخالف دارد، نابود شود. هم‌اکنون، تحقیقات فعالی در زمینه «شیمی» پوزیترونیم در حال انجام است.

### مثال ۲۰۹ آزمایش پادپروتون.

**حل:** شاید بتوان گفت که یکی از جالبترین آزمایشهای انجام شده در زمینه فیزیک ذرات بنیادی آزمایشی است که به کشف پادپروتون منجر شد. منظور از انجام این آزمایش این بود که ذرات با بار  $e^-$  و جرم  $m_p$  را آشکار کنند. پروتونهای حاصل از بواترون دانشگاه کالیفرنیا که تا انرژی  $2\text{ GeV}$  شتاب گرفته بودند، به هدف مناسبی برخورد می‌کردند که واکنشهای تولید ذراتی چون مزونهای  $K^+$ ،  $\pi^+$  و  $\mu^-$  همراه با چند ذره  $\bar{p}$  را در برداشت. آهنربای منحرف کننده  $M_1$  تنها ذرات باردار منفی را که از داخل حفره موجود در دیواره محافظ عبور می‌کردند انتخاب می‌کرد (شکل ۶۰۹). در این شکل، آشکارسازهای سوسوزن با علامت  $S$  و شمارگرهای چرنکوف با علامت  $C$  مشخص شده‌اند. این وسایل طوری ساخته شده‌اند که تنها نسبت به ذرات با يك گستره انرژی مشخص، حساس اند (پیوست ۷ را ببینید). بین  $S_1$  و  $S_2$  يك آهنربای منحرف کننده دیگر،  $M_2$ ، قرار داشت که به عنوان انتخاب کننده تکانه رفتار می‌کرد، زیرا مکان آشکارسازها شعاع مسیر را ثابت نگه می‌داشت و تنها ذراتی که تکانه آنها برابر  $p = \epsilon B r$  بود به طور مناسب منحرف و به طرف  $S_2$  روانه می‌شدند. میدان مغناطیسی، به دلیل مزیت‌های مشخص تجربی، متناظر با  $p = 1.19\text{ GeV}/c$  انتخاب شده بود که کمی کوچکتر از تکانه‌ای است که اکثر پاد پروتونها با آن ایجاد می‌شوند ( $1.75\text{ GeV}/c$ ).

تعداد بسیار زیادی از ذرات باردار منفی ( $K^-$ ،  $\pi^-$ ،  $\mu^-$ ) و تعدادی پاد پروتون از داخل آهنربای  $M_2$  عبور می‌کردند (برآورد شده بود که نسبت پاد پروتون به سایر ذرات به صورت يك به ۴۰۰۰۰ است). برای تشخیص پاد پروتونها لازم بود که سرعت ذرات معلوم باشد. سرعت پاد پروتونی که تکانه آن  $1.19\text{ GeV}/c$  باشد در حدود  $0.78c$ ، و سرعت پیونی با همان تکانه در حدود  $0.99c$  است. آشکارسازهای سوسوزن  $S_1$  و  $S_2$  در فاصله  $12\text{ m}$  از یکدیگر قرار داشتند. زمان لازم برای اینکه يك پاد پروتون و يك پیون با این تکانه‌ها فاصله  $S_1$  تا  $S_2$  را طی کنند به ترتیب برابر با  $5.1 \times 10^{-8}\text{ s}$  و  $4.0 \times 10^{-8}\text{ s}$  بود. از این رو،  $S_1$  و  $S_2$  در انطباق تأخیری قرار می‌گرفتند به طوری که فقط اگر  $S_1$  و  $S_2$  تپهایی با بازه زمانی  $5.1 \times 10^{-8}\text{ s}$  تحویل می‌دادند، سیگنالی مشاهده



شکل ۶.۹ آرایش تجربی برای مشاهده پاد پروتون.

می شود. از این رو، مشاهده این انطباقهای تأخیری می توانست نشانه ای از عبور يك پاد پروتون باشد. با این حال، زمینه مزونی به قدری بالاست که برای حذف انطباقهای تصادفی ناشی از عبور دو پيون مختلف از میان  $S_1$  و  $S_2$  با تأخیر زمانی  $10^{-8} \times 5.1$ ، احتیاطهای دیگری لازم بود. آشکارساز چرنکوف  $C_1$  تنها به ذرات با سرعت بیشتر از  $0.80c$  و آشکارساز چرنکوف  $C_2$  نیز فقط برای ذرات با سرعت بین  $0.75c$  و  $0.78c$  حساس بود. سرعت پاد پروتونها تا زمان رسیدن به آشکارسازهای چرنکوف، تا مقداری در حدود  $0.76c$  کاهش می یافت. از این رو،  $C_1$  نسبت به پاد پروتون غیر حساس ولی نسبت به مزونها حساس بود. عکس این موقعیت نیز برای  $C_2$  صادق بود. بنابراین، برای جلوگیری از شمارشهای نادرست، آشکارساز  $C_1$  به صورت پساد انطباقی و  $C_2$  به صورت انطباقی بسا سیگنالهای حاصل از  $S_1$  و  $S_2$  مربوط می شوند. یعنی، فقط هنگامی که (الف)  $S_1$  و  $S_2$  تپهای تأخیری  $10^{-8} \times 5.1$  را ثبت می کردند، (ب)  $C_1$  هیچ تپی را ثبت نمی کرد و، (ج)  $C_2$  يك تپ ثبت می کرد، آزمایش کنندگان می دانستند که پاد پروتون از میان سیستم عبور کرده بود. به منظور يك بررسی اضافی، میدان مغناطیسی  $M_2$  تغییر داده شد، در این حالت، تنها وقتی مقدار میدان بازمان پرواز از قبل انتخاب شده برای پاد پروتونها متناظر بود، تپها دریافت می شدند. آزمایشی که چمبرلن، سگره، وایگانده، و ایسیلانتیس در سال ۱۹۵۵ انجام دادند، بسیار موفقیت آمیز بود و وجود پاد پروتونها را تأیید کرد.

## ۴.۹ ناپایداری ذره

فرایندهای آفرینش و نابودی (بخش قبل) همراه با فرایند واپاشی (بخش ۴.۸) نشانه‌ای از يك خاصیت کلی تر ذرات بنیادی به نام ناپایداری آنهاست. به عبارت دیگر، تحت شرایط مناسب، ذرات بنیادی می‌توانند در اثر برهم‌کنش خود به ذرات دیگری تبدیل شوند. اندکی بعد توضیح خواهیم داد که منظور از «شرایط مناسب» چیست. ذرات ناپایدار، واپاشی خود به خود را با يك نیمه‌عمر کاملاً مشخصی متحمل می‌شوند. جدول ۲.۹ مدهای واپاشی و نیز نیمه‌عمرهای ذرات ناپایدار را نشان می‌دهد. در مواردی که بیش از يك مد واپاشی امکان‌پذیر است، احتمال نسبی هر مد نیز داده شده است. در بعضی واپاشیها، پاد نوترونها نیز نشان داده شده‌اند. این کار در توافق با قانون پایستگی لپتونها (که در بخش ۵.۹ بررسی خواهد شد) انجام شده است. توجه کنید که تنها چهار ذره (وپاد ذره آنها) در مقابل واپاشی خود به خود پایدارند. این ذرات عبارت‌اند از فوتون، نوترینو، الکترون، و پروتون. در میان تمام ذرات ناپایدار، نوترون ذره‌ای است که طولانیترین نیمه‌عمر را دارد. این موضوع نشان می‌دهد که چرا ماده از الکترونها، پروتونها، و نوترونها تشکیل شده است. توجه کنید که مزونها (به استثنای  $\pi^0$  و  $\eta^0$ ) نیمه‌عمرهایی در حدود  $10^{-8}$  s دارند در حالی که نیمه‌عمر بار یونها از مرتبه  $10^{-1}$  s است.

يك شرط لازم برای واپاشی خود به خود آن است که جرم سکون ذرهٔ مادر از مجموع جرمهای سکون ذرات دختر بیشتر باشد. این شرط بر اساس پایستگی انرژی وضع شده است. علاوه بر انرژی، تکانه و تکانه زاویه‌ای نیز باید پایسته باقی بمانند. هنگام تحلیل واپاشیهای ذرات بنیادی از این شرط به عنوان يك اصل راهنما استفاده می‌کنیم.

میون منفی اولین ذرهٔ ناپایداری بود که مشاهده شد (شکل ۱.۹). این ذره در سال ۱۹۳۷ میلادی در پرتوهای کیهانی کشف شد. واپاشی میون همیشه به ظهور يك الکترون منجر می‌شود. این الکترونها يك طیف پیوستهٔ انرژی، شبیه به طیف واپاشی  $\beta$  (شکل ۱۱.۸) دارند که بیشینهٔ انرژی جنبشی آن در حدود  $53 \text{ MeV}$  است. از این دو واقعیت نتیجه می‌گیریم که واپاشی میون نمی‌تواند يك فرایند دو جسمی باشد، و لازم است که علاوه بر الکترون، حداقل دو ذرهٔ خنثی دیگر تولید شوند. چون بیشینهٔ انرژی الکترون به مراتب بزرگتر از انرژی سکون آن (یعنی  $5 \text{ MeV}$ ) است، بیشینهٔ تکانهٔ الکترون برابر مقدار زیر است

$$p_{\max} \approx \frac{E_{\max}}{c} = \frac{53 \text{ MeV}}{c}$$

این بیشینهٔ تکانه هنگامی ایجاد می‌شود که دو ذرهٔ دیگر هر دو در جهت مخالف با جهت الکترون گسیل شوند و هر دو ذره باید تکانهٔ کلی برابر  $53 \text{ MeV}/c$  حمل کنند. اگر ذرات نوترینو باشند، انرژی کل آنها مساوی با  $53 \text{ MeV}$  خواهد بود. از این رو، انرژی کل آزاد شده در واپاشی میون در حدود  $106 \text{ MeV}$  است که عملاً با انرژی سکون میون

جدول ۲.۹ مدهای واپاشی ذره.

نیمه عمر، S	احتمال نسبی، %	مد واپاشی	ذره	
		پایدار	فوتون	
$1.52 \times 10^{-6}$		پایدار پایدار $\mu^- \rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}$	نوترینو الکترون میون	لپتونها
$1.78 \times 10^{-8}$	۱۰۰ $\sim 10^{-4}$	$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ $\rightarrow e^+ + \nu$	پیون	
$6 \times 10^{-17}$	۹۹ ۱	$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ $\rightarrow \gamma + e^+ + e^-$		
$1.256 \times 10^{-9}$	۶۳ ۲۱ ۵.۶ ۴.۸ ۳.۴ ۱.۷	$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ $\rightarrow \pi^+ + \pi^0$ $\rightarrow 2\pi^+ + \pi^-$ $\rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu$ $\rightarrow \pi^0 + \mu^+ + \nu$ $\rightarrow \pi^+ + 2\pi^0$	کائون	
$4 \times 10^{-8}$	۱۸ ۱۴ ۶.۳ ۱۱.۳	$K^0 \rightarrow \pi^\pm + e^\mp + \nu$ $\rightarrow \pi^\pm + \mu^\mp + \nu$ $\rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ $\rightarrow 3\pi^0$		مزونها
$6.0 \times 10^{-11}$	۳۵ ۱۵	$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ $\rightarrow 2\pi^0$		

۱. برای به دست آوردن واپاشی پاد ذرات، در هر دو طرف معادلات، ذرات را به پاد ذرات تبدیل کنید.

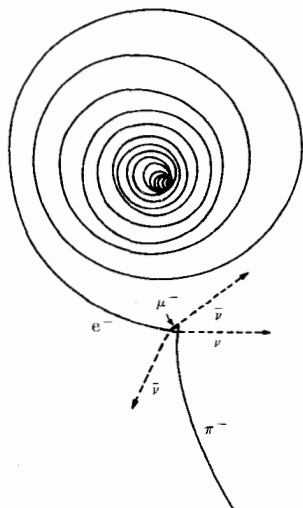


جدول ۲۰۹ (ادامه)

نیمه عمر، s	احتمال نسبی، %	مد و اباشی	ذره	
$< 10^{-16}$	۳۳	$\eta^0 \rightarrow \gamma + \gamma$	اتا	
	۲۰	$\rightarrow \pi^0 + \gamma + \gamma$		
	۲۰	$\rightarrow 3\pi^0$		
	۲۲	$\rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$		
	۵	$\rightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma$		
		پایدار	پروتون	
$7.0 \times 10^2$		$n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}$	نوترون	
$1.74 \times 10^{-10}$	۶۶	$\Lambda^0 \rightarrow p^+ + \pi^-$	لاندا	
	۳۴	$\rightarrow n^0 + \pi^0$		
$5.96 \times 10^{-11}$	۵۳	$\Sigma^+ \rightarrow p^+ + \pi^0$	سیگما	
	۴۷	$\rightarrow n^0 + \pi^+$		
$< 7 \times 10^{-15}$		$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$		باریونها
$1.1 \times 10^{-10}$		$\Sigma^- \rightarrow n^0 + \pi^-$		
$2.0 \times 10^{-10}$		$\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$	کیسی	
$1.2 \times 10^{-10}$		$\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$		
$10^{-10}$	۵۰	$\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + K^-$	امگا	
	۵۰	$\rightarrow \Xi^0 + \pi^-$		

برابر است (جدول ۱۰۹). اسپین میون به‌طور مستقل اندازه‌گیری شده و برای آن مقدار  $1/2$  به‌دست آمده‌است، از این رو، قانون پایداری تکانه زاویه‌ای عامل دیگری است که واپاشی میون به یک الکترون و یک نوترینو (هر کدام بسا اسپین  $1/2$ ) را ممنوع می‌کند. اما، این قانون اجازه می‌دهد که میون به یک الکترون و دو نوترینو واپاشیده شود. بنا بر این، با اطمینان می‌توان فرض کرد که واپاشی میون منفی را می‌توان با مد واپاشی آمده در جدول ۲۰۹ نشان داد.

پیون نیز ذره دیگری است که مشاهده شده‌است. این ذره در سال ۱۹۴۶ در امولسیونهای عکاسی مخصوصی که در معرض تابش پرتوهای کیهانی قرار گرفته بودند کشف (پیوست ۷ را ببینید) و کمی بعد نیز به‌طور مصنوعی (به وسیله پرتوهای شتاب گرفته در سنکروترون برکلی) ایجاد شد. در سال ۱۹۳۵ یوکاوا فیزیکدان ژاپنی برای توضیح برد کوتاه نیروهای هسته‌ای این ذره را پیشگویی کرده بود (بخش ۸۰۹). میونهای حاصل از واپاشی پیون انرژی جنبشی ثابتی در حدود  $41 \text{ MeV}$  دارند که معرف دو جسمی بودن واپاشی پیون است. بنا بر این می‌توان فرض کرد که در واپاشی پیون، علاوه بر میون، یک نوترینو نیز در جهت مخالف گسیل می‌شود. چون تکانه میونی با انرژی جنبشی بالا برابر با  $295 \text{ MeV}/c$  است، این مقدار باید تکانه نوترینو نیز باشد. در این صورت، انرژی



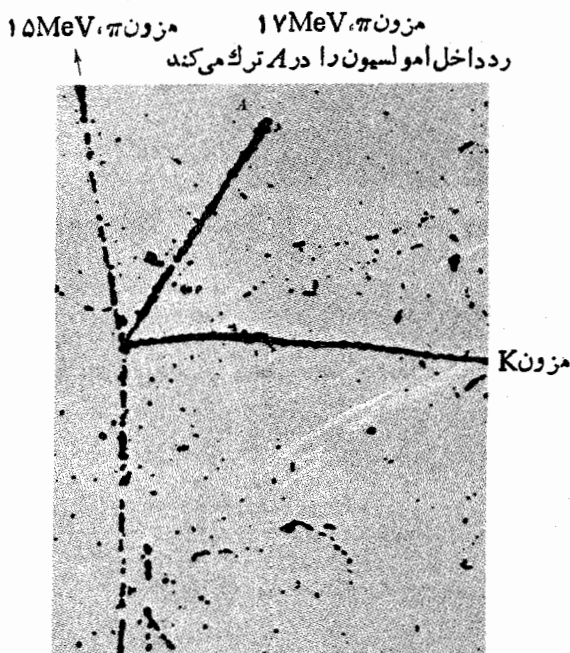
شکل ۲۰۹ واپاشی مزون  $\pi^-$  که واپاشی میون را نیز به دنبال دارد.

نوترینو برابر با  $2995 \text{ MeV}$  است. از این رو، انرژی کل آزاد شده در واپاشی پيون برابر مقدار زیر است

$$10597 \text{ MeV} + 41 \text{ MeV} + 2995 \text{ MeV} = 13933 \text{ MeV}$$

که با زهم، تقریباً با انرژی سکون پيون (یعنی  $140 \text{ MeV}$ ) سازگاری دارد. بنابراین می توان فرض کرد که طرح واپاشی پيون مطابق جدول ۲.۹ است. از واپاشی  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$  نتیجه می گیریم که اسپین پيون مساوی با صفر یسا يك است. از تحلیل فرایندهای دیگری که شامل پيونها هستند، معلوم می شود که اسپین این ذره مساوی با صفر است. شکل ۷.۹ واپاشی يك پيون به میون را (در اتاقك حباب) نشان می دهد که به دنبال آن، واپاشی میون به الکترون نیز صورت می گیرد. نوترینوهای ایجاد شده ردی از خود به جای نمی گذارند. مشاهده این رویدادهای دوگانه خیلی معمول است.

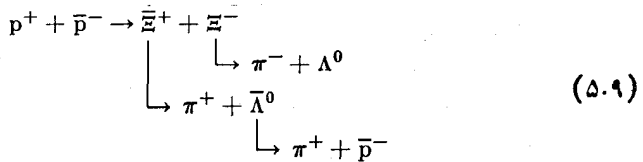
به طریق مشابه، شکل ۸.۹ نیز واپاشی کائون به سه پيون را، در امولسیون عکاسی نشان می دهد. تحلیل تکانه های این سه پيون نشان می دهد که ذره خنثای دیگری در این فرایند گسیل نمی شود. این موضوع با پایداری تکانه و انرژی نیز سازگاری دارد. از طرف دیگر،



مزون  $\pi$ ,  $43 \text{ MeV}$

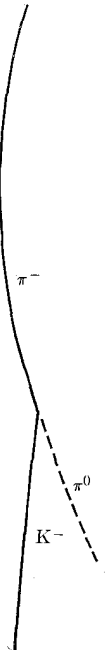
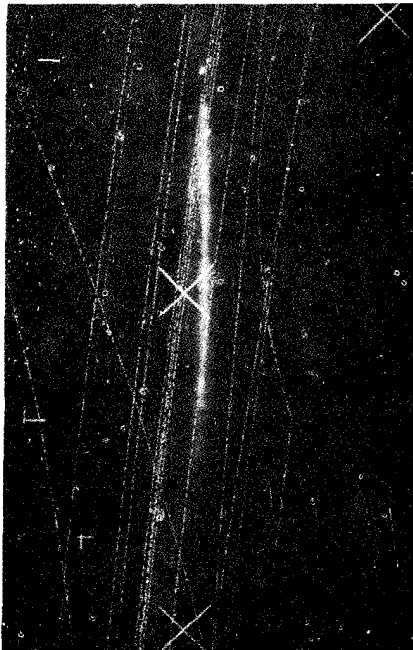
شکل ۸.۹ واپاشی مزون K به سه پيون (مد  $\pi$ ).

شکل ۹.۹ واپاشی کائون به یک ذره باردار و یک ذره خنثی را نشان می‌دهد. در شکل ۱۰.۹ نیز فرایند پیچیده‌تری نشان داده شده است که در آن نابودی اولیه پروتون-پساده پروتون، به یک سری از ذراتی منجر می‌شود که واپاشیهای بعدی را متحمل می‌شوند. تمام فرایند بالا را می‌توان به صورت زیر بیان کرد



هر کدام از این فرایندها دقیقاً با قوانین پایستگی انرژی و تکانه امتحان شده‌اند. به کمک این روش می‌توانیم ذرات خنثی را نیز، که از خود هیچگونه ردی به جای نمی‌گذارند، شناسایی کنیم.

ناپایداری یک ذره مشخص را می‌توان با این واقعیت نیز توضیح داد که در هر برخورد پرانرژی بین دوزره، چندین ذره جدید تولید می‌شوند. به عنوان مثال در برخورد پروتون-



شکل ۹.۹ واپاشی مزون K به دو پیون (مد θ).





مثال ۳۰۹ انرژی آستانه فرایندی را محاسبه کنید که در آن پرتابه‌ای به یک هسته ساکن در آزمایشگاه برخورد می‌کند و چندین ذره جدید تولید می‌کند.

حل. هرگاه پرتابه و هدف را با  $P_1$  و  $P_2$  و ذرات حاصل را نیز با  $P_i$  نمایش دهیم، می‌توانیم فرایند را به صورت زیر بنویسیم

$$P_1 + P_2 \rightarrow \sum_i P_i$$

اگر تکانه  $P_1$  در چارچوب مرجع آزمایشگاه  $\mathbf{p}$  باشد، انرژی کل آن برابر  $c\sqrt{m_1^2 c^2 + p^2}$  خواهد بود. چون  $P_2$  در چارچوب مرجع آزمایشگاه در حال سکون قرار دارد، انرژی کل آن برابر است با  $m_2 c^2$ . بنابراین مقدار انرژی کل در چارچوب آزمایشگاه برابر است با

$$E = c\sqrt{m_1^2 c^2 + p^2} + m_2 c^2$$

و  $\mathbf{p}$  نیز تکانه کل است. در چارچوب مرجع مرکز جرم، تکانه دو ذره مساوی با صفر است، یعنی  $\mathbf{p}' = 0$  (پیوست ۱ را ببینید). انرژی کل در این سیستم را با  $E'$  نمایش می‌دهیم. با توجه به رابطه انرژی-تکانه، کمیت  $E'^2 - c^2 p'^2$  تحت تبدیل لورنتس، که دو چارچوب مرجع لخت را به یکدیگر مربوط می‌کند، ناورد باقی می‌ماند. بنابراین، با در نظر گرفتن  $\mathbf{p}' = 0$  خواهیم داشت

$$E'^2 - c^2 p'^2 = E'^2$$

بر طبق قوانین پایستگی انرژی و تکانه لازم است که پس از وقوع فرایند، انرژی کل محصولات در چارچوب مرجع مرکز جرم هنوز هم مساوی با  $E'$  و تکانه کل مساوی با صفر باشد. واضح است که کمینه انرژی مورد نیاز برای فرایند، متناظر با وضعیتی است که در آن تمام ذرات حاصل در چارچوب مرجع مرکز جرم در حال سکون قرار گیرند، به طوری که انرژی کل در چنین چارچوبی مساوی با  $E' = \sum_i m_i c^2$  است. از قرارداد این مقادیر در معادله قبل داریم

$$m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2m_1 m_2 c^2 \sqrt{m_1^2 c^2 + p^2} = (\sum_i m_i)^2 c^4$$

هرگاه  $E_k$  انرژی جنبشی پرتابه در چارچوب آزمایشگاه باشد، در این صورت

$$c\sqrt{m_1^2 c^2 + p^2} = E_k + m_1 c^2$$

با قرار دادن این مقدار در معادله قبل و حذف عامل مشترک  $c^2$  خواهیم داشت

$$(m_1 + m_2)^2 c^2 + 2m_2 E_k = (\sum_i m_i)^2 c^2$$

بنابراین

$$E_k = -\frac{QM}{2m_\gamma} \quad (۸.۹)$$

که در آن  $Q = (m_\gamma + m_\gamma - \sum m_i)c^2$  و  $M = m_\gamma + m_\gamma + \sum m_i$ . معادله (۸.۹) مقدار انرژی جنبشی آستانه‌ای را به دست می‌دهد که پرتابه باید داشته باشد تا فرایند مورد نظر رخ دهد. هر گاه  $Q$  مثبت باشد هیچ انرژی جنبشی آستانه‌ای موجود نخواهد بود و انرژی سکون ذرات اولیه برای تولید ذرات نهایی کافی است. تنها در حالتی که  $Q$  منفی باشد انرژی آستانه وجود خواهد داشت. مورد استعمال معادله (۸.۹) را با به کار بردن آن در دو حالت خاص نشان می‌دهیم.

(الف) آستانه برای تولید پيون در برخورد پروتون-پروتون. با در نظر گرفتن يك پيون خنثی داریم  $p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + p^+ + \pi^0$  بنا بر این

$$Q = -m_\pi c^2, \quad M = 2m_p + m_\pi, \quad m_\gamma = m_p$$

که با قرار دادن در معادله (۸.۹) خواهیم داشت

$$E_k = \frac{m_\pi c^2 (2m_p + m_\pi)}{2m_p} = \left(2 + \frac{m_\pi}{2m_p}\right) m_\pi c^2 \approx 290 \text{ MeV}$$

برای پيون باردار نیز همین نتیجه به دست می‌آید.

(ب) آستانه برای تولید پاد پروتون در برخورد پروتون-پروتون. در این حالت فرایند به صورت زیر است  $p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + p^+ + p^+ + \bar{p}^-$  جرم تمام ذرات یکسان و برابر  $m_p$  است، بنا بر این

$$m_\gamma = m_p, \quad Q = -2m_p c^2, \quad M = 6m_p$$

در نتیجه، برای انرژی آستانه خواهیم داشت

$$E_k = \frac{(2m_p c^2)(6m_p)}{2m_p} = 6m_p c^2 = 5.64 \times 10^3 \text{ MeV} = 5.64 \text{ GeV}$$

مثال ۴.۹ گشتاور مغناطیسی هیپرون  $\Lambda^0$  را تعیین کنید.

حل: در این مثال آزمایش جالبی را بیان می‌کنیم که تکنیکهای به کار رفته برای تعیین خواص ذرات بنیادی را نشان می‌دهد. در اینجا می‌خواهیم روش اندازه‌گیری گشتاور مغناطیسی هیپرون  $\Lambda^0$  را بررسی کنیم. این روش، که مشابه با روش به کار رفته برای تعیین گشتاور مغناطیسی هر هیپرون است، شامل سه مرحله زیر است: (الف) تولید باریکه قطبیده



$\Lambda^{\circ}$ ، (ب) عبور باریکه قطبیده از میان يك میدان مغناطیسی قوی که تغییری در راستای گشتاور مغناطیسی تولید می کند، و (ج) اندازه گیری زاویه چرخش گشتاور مغناطیسی.

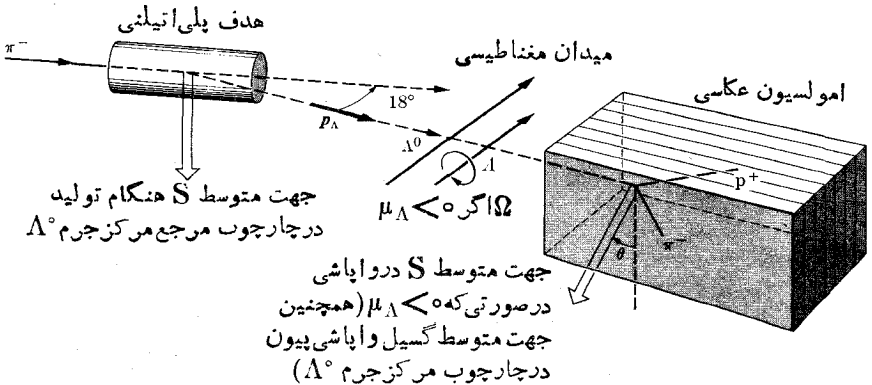
برای تحلیل واپاشی ذرات قطبیده  $\Lambda^{\circ}$  در میدان مغناطیسی، چندین آزمایش طرح ریزی شده است. در اینجا آزمایشی را می آوریم که در سال ۱۹۶۴ در سرن (سازمان اروپایی برای تحقیقات هسته ای) انجام شده است. باریکه ای از پیونهای منفی حاصل از پروتون سنکروترون سرن، که تکانه آنها برابر  $1.05 \text{ GeV}/c$  است، با يك هدف پلی اتیلنی برخورد می کند. (شکل ۱۳.۹)، و واکنش  $\pi^{-} + p^{+} \rightarrow \Lambda^{\circ} + K^{\circ}$  به وقوع می پیوندد. تکانه طوری انتخاب می شود که با انرژی متناظر باشد که در آن، سطح مقطع مربوط به واکنش بیشینه باشد. چون انرژی ذره  $\pi^{-}$  به انرژی آستانه، یعنی به مقدار  $0.78 \text{ GeV}$ ، نزدیک است (معادله ۸.۰۹)، ذرات  $\Lambda^{\circ}$  و  $K^{\circ}$  نسبت به آزمایشگاه، عمدتاً در راستای به طرف جلو تولید می شوند زیرا در چارچوب مرجع مرکز جرم فرایند، این ذرات عملاً در حال سکون قرار دارند.

ذرات  $\Lambda^{\circ}$  قویاً قطبیده اند و اسپین آنها (S) در جهت عمود بر صفحه تولید قرار دارد (منظور از صفحه تولید صفحه ای است که با جهت حرکت ذره فرودی  $\pi^{-}$  و جهت حرکت ذره منتجه  $\Lambda^{\circ}$  تعیین می شود). ذرات  $\Lambda^{\circ}$  حاصل در زوایای میان  $13^{\circ}$  و  $23^{\circ}$  نسبت به جهت فرود از میان میدان مغناطیسی قوی  $15 \text{ T}$ ، که عمود بر  $p_{\Lambda}$  و S قرار دارد، عبور می کنند.

طبق معادله (۵.۷)، گشتاور مغناطیسی  $\Lambda^{\circ}$  باید به صورت زیر نوشته شود

$$\mathbf{M}_{\Lambda} = g_{\Lambda} \left( \frac{e}{2m_{\Lambda}} \right) \mathbf{S}$$

که در آن  $g_{\Lambda}$  نسبت ژیرومغناطیسی  $\Lambda^{\circ}$  است. معمولاً گشتاور مغناطیسی را به صورت زیر می نویسند



شکل ۱۳.۹ نمودار طرح و آرایش گشتاور مغناطیسی  $\Lambda^{\circ}$ .

$$\mathbf{M}_\Lambda = g_\Lambda \left( \frac{m_p}{m_\Lambda} \right) \left( \frac{e}{2m_p} \right) \mathbf{S} = \mu_\Lambda \left( \frac{e}{m_p} \right) \mathbf{S}$$

کمیتی کسه در تجربه مشاهده می‌شود به صورت  $\mu_\Lambda = g_\Lambda (m_p/m_\Lambda) / 2$  است که گشتاور مغناطیسی  $\Lambda^\circ$  را بر حسب مگنتون هسته‌ای به دست می‌دهد. در حضور میدان مغناطیسی  $\mathcal{B}$ ، گشتاور نیروی  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}_\Lambda \times \mathcal{B}$  تولید می‌شود، و معادله حرکت اسپین به صورت  $d\mathbf{S}/dt = \boldsymbol{\tau}$  یا به صورت زیر است

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mu_\Lambda \left( \frac{e}{m_p} \right) \mathbf{S} \times \mathcal{B} = -\mu_\Lambda \left( \frac{e}{m_p} \right) \mathcal{B} \times \mathbf{S}$$

و  $\mathbf{S}$  حول  $\mathcal{B}$  با سرعت زاویه‌ای زیر حرکت تقدیمی می‌کند

$$\boldsymbol{\Omega} = -\mu_\Lambda \left( \frac{e}{m_p} \right) \mathcal{B}$$

هر گاه  $\mu_\Lambda$  منفی باشد،  $\mathbf{S}$  در همان جهتی که با فلش  $A$  در شکل ۱۳.۹ مشخص شده است، حول  $\mathcal{B}$  حرکت تقدیمی می‌کند و اگر  $\mu_\Lambda$  مثبت باشد در جهت مخالف آن. پس از زمان  $t$  اسپین  $\mathbf{S}$  به اندازه زاویه  $\theta = \Omega t$  چرخش کرده است. هر گاه  $v$  سرعت ذره  $\Lambda^\circ$  و  $l$  نیز مسافت طی شده در میدان مغناطیسی باشد، خواهیم داشت  $t = l/v$  و در این صورت

$$\theta = \mu_\Lambda \left( \frac{e}{m_p} \right) \frac{\mathcal{B} l}{v} \quad (9.9)$$

بنابراین هر گاه بتوانیم  $\theta$  را مشاهده کنیم، می‌توانیم  $\mu_\Lambda$  را بر حسب کمیات شناخته شده تعیین کنیم.

جالبترین (و مشکلترین) قسمت آزمایش اندازه‌گیری  $\theta$  است که مستلزم تعیین راستای  $\mathbf{S}$  پس از عبور  $\Lambda^\circ$  از میدان مغناطیسی است. با مشاهده توزیع زاویه‌ای محصولات واپاشی  $\Lambda^\circ$  می‌توان زاویه  $\theta$  را اندازه‌گیری کرد. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، مقداری امولسیون عکاسی در راستای باریکه  $\Lambda^\circ$  قرار می‌گیرد. بسیاری از ذرات  $\Lambda^\circ$  بر طبق فرایند  $\Lambda^\circ \rightarrow \pi^- + p^+$  در داخل امولسیونها واپاشیده می‌شوند. چون هر دو محصول واپاشی از ذرات باردار تشکیل شده‌اند، مسیرهایی را از خود در امولسیونها به جای می‌گذارند.

۱. به دلیل انرژیهای موجود، محاسبه را باید با استفاده از مکانیک نسبیتی انجام دهیم. با این حال، برای سهولت، از محاسبه غیرنسبیتی استفاده می‌کنیم. زیرا این محاسبه هنگامی که  $\Lambda^\circ$  در راستای عمود بر  $\mathcal{B}$  حرکت می‌کند، نتیجه صحیح را (تا آنجا که به  $\mathcal{B}$  مربوط است) به دست می‌دهد.

در واپاشی  $\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p^+$  پیوندها به صورت ناهمسانگرد (ولی متقارن) نسبت به راستای S در چارچوب مرجع مرکز جرم  $\Lambda^0$  توزیع می‌شوند. هر گاه  $\phi$  زاویه میان تکانه  $\pi^-$  و S باشد، به طور تجربی توزیع زاویه‌ای  $\pi^-$  در چارچوب مرجع مرکز جرم  $\Lambda^0$  به صورت متناسب با  $1 + k \cos \phi$  به دست می‌آید که با يك بیشینه قوی در راستای S متناظر است. از این رو، با تحلیل توزیع زاویه‌ای پیوندهای واپاشی موجود در باریکه‌ای از ذرات  $\Lambda^0$  قطبیده می‌توان راستای قطبش  $\Lambda^0$  را، که راستای S است، تعیین کرد و بدین طریق زاویه  $\theta$  را به دست آورد. سپس با به کار بردن معادله (۹.۹) می‌توان  $\mu_\Lambda$  را نتیجه گرفت. محاسبات عملی به نکات دقیق مربوط به کمیت‌های وابسته به چارچوب‌های مرجع آزمایشگاه و مرکز جرم  $\Lambda^0$  نیاز دارد. مقدار به دست آمده در سرن برابر با  $\mu_\Lambda = 0.28 \pm 0.05$  مگنتون هسته‌ای بود. از لحاظ نظری، مقدار پیشگویی شده بر اساس نظریه «روش هشت‌لای» گل‌مان مساوی با  $0.95 -$  مگنتون هسته‌ای است (بخش ۸.۹). قبل، در بروکهایون، آرگون، و دانشگاه کالیفرنیا نیز گشتاور مغناطیسی  $\Lambda^0$  با استفاده از روش‌های مشابه اندازه‌گیری شده و به ترتیب نتایج  $0.55 \pm 0.15$  nm،  $0.66 \pm 0.05$  nm، و  $0.77 \pm 0.16$  nm به دست آمده بود. در جدیدترین اندازه‌گیری (۱۹۶۶) که هیل و همکارانش در آزمایشگاه ملی بروکهایون انجام داده‌اند، مقدار  $0.73 \pm 0.07$  nm به دست آمده است.

## ۵.۹ قوانین پایستگی

در تمام فرایندهای مطرح شده در بخش قبل، معلوم شده است که قوانین پایستگی زیر بدون هیچ استثنایی برقرارند

(۱) پایستگی تکانه

(۲) پایستگی تکانه زاویه‌ای

(۳) پایستگی انرژی

(۴) پایستگی بار

در داخل محدودیت‌های تحمیل شده به وسیله این چهار قانون پایستگی، ذرات بنیادی در دید اول به صورت يك گروه وحشی از موجودات فیزیکی دیده می‌شوند که بدون هیچ نظم ظاهری در این فرایندها تمايل دارند به یکدیگر تبدیل شوند. به عنوان مثال، می‌توان فهمید که چرا الکترون و پوزیترون پایدارند زیرا هیچ ذره باردار سبکتر دیگری وجود ندارند تا این دو ذره بتوانند بدون تخلف از پایستگی بار الکتریکی به آنها واپاشیده شوند. اما چرا پروتون پایدار است و مثلا بر طبق طرح  $p^+ \rightarrow \pi^+ + \nu$  واپاشیده نمی‌شود؟ چرا فرایندهایی از قبیل  $\gamma \rightarrow e^- + p^+$ ،  $\Lambda^0 \rightarrow \bar{p}^- + \pi^+$ ، یا  $\pi^+ + p^+ \rightarrow \Sigma^+ + \pi^+$  که با قوانین پایستگی فوق سازگاری دارند، در طبیعت رخ نمی‌دهند؟ چرا طیف جرمی

ذرات ظاهر آکاتوره‌ای است؟

وضع بالا مشابه با وضع کیمیا گران قرون وسطی است که بدون اطلاع از ساختار اتمی یا مولکولی سعی در شناخت و درک واکنشهای شیمیایی داشتند. امروزه فیزیکدانان تلاش می‌کنند که نظمی را در این آشوب ظاهری پیدا کنند. خوشبختانه، با کشف قوانین جدید پایستگی، که بیشتر به قانون پایستگی بارشبهات دارند تا به سه قانون اول پایستگی، نوعی نظم پدیدار شده است. این قوانین عبارت‌اند از

(۵) پایستگی لپتونها

(۶) پایستگی باریونها

(۷) پایستگی اسپین ایزوتوبی

(۸) پایستگی شگفتی

اکنون به‌طور خلاصه هر یک از این قوانین را بررسی می‌کنیم.

داده‌های تجربی حاکی از آن‌اند که مزونها و فوتونها (و به‌طور کلی تمام ذرات با اسپین صفر و یک) را می‌توان به‌هر تعدادی تولید و یا نابود کرد (و این یکی از دلایلی است که آنها را بوزونها می‌نامند). از طرف دیگر، تعداد لپتونها و باریونها که می‌توانند در یک فرایند منفرد تولید و یا نابود شوند، محدود است. به عنوان مثال، فرایند تولید زوج الکترون  $e^- + e^+$  که در آن دو لپتون، یعنی یک الکترون و پاد ذره‌اش (پوزیترون) آفریده می‌شوند، یک فرایند امکان‌پذیر است ولی فرایند تولید الکترون-پروتون  $e^- + p^+$ ، که با چهار قانون اول پایستگی سازگاری دارد، نمی‌تواند به وقوع بپیوندد. در این فرایند (که مشاهده نشده است) تنها یک لپتون و یک باریون تولید می‌شود. این واقعیات تجربی پایه و اساس پنجمین و ششمین قانون پایستگی را شکل می‌دهند.

**پایستگی لپتونها.** ابتدا عدد کوانتومی لپتونی  $\mathcal{L}$  را که به صورت  $\mathcal{L} = +1$  برای ذرات لپتون و  $\mathcal{L} = -1$  برای پاد ذرات لپتون تعریف می‌شود معرفی می‌کنیم. ذرات غیر لپتونی دارای عدد لپتونی صفر اند. بنا بر این

در هر فرایند، عدد لپتونی کل باید بدون تغییر باقی بماند.

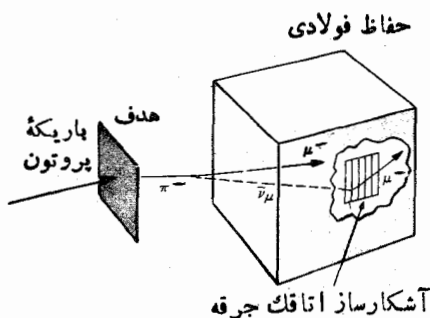
در اینجا به چند مثال اشاره می‌کنیم. در فرایند  $e^- + e^+ \rightarrow \gamma$ ، عدد لپتونی، طرف چپ  $\mathcal{L} = 0$  و در طرف راست  $\mathcal{L} = 0 = 1 - 1$  است. با این حال در فرایند مشاهده نشده  $e^- + p^+ \rightarrow \gamma$  برای طرف چپ  $\mathcal{L} = 0$  و برای طرف راست  $\mathcal{L} = +1$  است و بدین ترتیب پایستگی لپتونها نقض می‌شود. قانون پایستگی لپتونها مستلزم آن است که معادله (۱۴.۸) به صورت زیر نوشته شود تا عدد لپتونی کل مساوی با صفر در هر دو طرف ظاهر شود

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}$$

$$\mathcal{L} = 0 \quad 0 + 1 - 1$$

از این رو، پایداری لپتونها مستلزم آن است که در واپاشی  $\beta^-$ ، یک پاد نوترینو  $\bar{\nu}$  (و نه یک نوترینو) گسیل شود. ضمناً بساید معادله (۱۷.۸) را به صورت  $p^+ + \bar{\nu} \rightarrow n + e^+$  بنویسیم تا عدد لپتونی کل  $L = -1$  در هر دو طرف وجود داشته باشد. به همین دلیل در آزمایش کوان-رینز<sup>۱</sup> (مثال ۶.۸)، یک پاد نوترینو آشکار شد. توجه کنید که معادلات (۱۵.۸) و (۱۶.۸) در واپاشی  $\beta^+$  و گیراندازی الکترون به یک نوترینو نیاز دارند تا از قانون پایداری لپتونی پیروی کنند. با امتحان طرحهای واپاشی جدول ۲.۹ دانشجو می تواند قانون پایداری لپتونیها را در هر حالت اثبات و این واقعیت که در بعضی موارد یک پاد نوترینو پدیدار می شود را، توجیه کند.

در اینجا این واقعیت را نیز متذکر می شویم که در شواهد تجربی اخیر (۱۹۶۲) به نظر رسید که نوترینوهای حاصل از واپاشی پیون با نوترینوهای حاصل از واپاشی میون یا واپاشی بتا یکی نیستند. این آزمایش را یک گروه از دانشگاه کلمبیا در شتابدهنده آزمایشگاه ملی بروکهایون انجام داده است و نمودار طرح وار آن در شکل ۱۴.۹ نشان داده شده است. در این آزمایش، یک اتاقک جرقه با حفاظ سنگین در معرض تابش پاد نوترینوهای حاصل از واپاشی پیونی  $\bar{\nu} + \mu^+ \rightarrow \pi^+ + \mu^+$  قرار می گرفت. پیونها در اثر برخورد پروتونهای پراثری با یک هدف مناسب ایجاد شده بودند. پاد نوترینوها با هسته های موجود در اتاقک جرقه برخورد می کردند. اگر این پاد نوترینوها بسا پاد نوترینوهای حاصل از واپاشی  $\beta$  یکی بودند، می توانستند یکی از واکنشهای  $p^+ + \bar{\nu} \rightarrow n + e^+$  یا  $p^+ + \bar{\nu} \rightarrow n + \mu^+$  را تولید کنند. اما، اگر دونوع نوترینو وجود داشت، تنها واکنش دوم می توانست یک واکنش مجاز باشد. پس از یک دوره آزمایش به مدت چند روز، که در آن تخمین زده شد که ۱۵<sup>۱۴</sup> پاد نوترینو از میان اتاقک جرقه عبور کرده است، در حدود ۵ فرایند مشاهده شد که در آنها، میون تولید شده بود ولی هیچ پوزیترونی مشاهده نشد. این



شکل ۱۴.۹ نمودار طرح وار آزمایش  $\bar{\nu}$ .

موضوع حاکی از آن بود که واکنش اول يك واکنش ممنوع است و نوترینوهای حاصل در واپاشی پيون همانهایی نیستند که در واپاشی  $\beta$  تولید می‌شوند. بنا بر این اکنون باید چنین نوشت

$$\begin{aligned} \pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, & \pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \bar{\nu}_\mu, \\ \mu^- &\rightarrow e^- + \nu_\mu + \nu_e, & \mu^+ &\rightarrow \bar{e}^+ + \bar{\nu}_\mu + \bar{\nu}_e, \\ n &\rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e, & p^+ &\rightarrow n + \bar{e}^+ + \nu_e, \\ p^+ + \bar{\nu}_e &\rightarrow n + \bar{e}^+, & p^+ + \bar{\nu}_\mu &\rightarrow n + \mu^+ \end{aligned}$$

که در آن  $\nu_\mu$  معرف نوترینوی وابسته به میون در واپاشی پيون و  $\nu_e$  نیز نوترینوی وابسته به الکترون در واپاشی میون یا واپاشی نوکلئون است.

**پایستگی باریونها.** با تعریف عدد کوانتومی بادیونی  $b$  به صورت  $b = +1$  برای تمام ذرات باریون و  $b = -1$  برای تمام پاد ذرات باریون و صفر برای تمام ذرات غیر باریون می‌توان گفت

در هر فرایند، عدد بادیونی کل باید بدون تغییر باقی بماند.

دانشجو خود می‌تواند اثبات کند که این قانون در تمام فرایندهای شامل باریونها، از قبیل معادلات (۲.۹)، (۴.۹)، (۵.۹)، (۶.۹)، و (۷.۹)، که قبلاً توصیف شدند و نیز در تمام طرحهای واپاشی آمده در جدول ۲.۹ صادق است. چون پروتون سبکترین باریون است واپاشی آن به ذرات سبکتر (که نمی‌توانند باریون باشند) قساون پایستگی باریونها را نقض می‌کند و این نشان می‌دهد که چرا پروتون يك ذره پایدار است. بنا بر این دنیایی که ما در آن زندگی می‌کنیم، تا حد مشخصی نتیجه‌ای، از قوانین پایستگی لپتونها و باریونهاست.

**پایستگی اسپین ایزوتوپی.** در شکل ۲.۹، ذرات و پاد ذرات بر حسب جرم یا انرژی سکون خود دسته بندی شده‌اند. هنگامی که تنها ذراتی را در نظر داریم که تحت برهم کنشهای قوی قرار می‌گیرند (مزونها و بساریونها)، مشاهده می‌کنیم که به صورت چندتایی مثل تک تایی ( $\Lambda^0, \Omega^-, \eta^0$ )، دوتایی ( $K^0, K^+, n^0, p^+, \bar{\Sigma}^-, \bar{\Sigma}^0, \bar{\Sigma}^+$ )، و سه تایی ( $\Sigma^0, \Sigma^+$  و  $\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+$ ) پدیدار می‌شوند. این نشان می‌دهد که هر چند تایی را می‌توان با کمیت جدیدی که اسپین ایزوتوپی  $\tau$  نام دارد توصیف کرد، به گونه‌ای که  $\tau = 1, 2, 3, \dots$  تعداد ذرات موجود در هر چند تایی را به دست می‌دهد. بنا بر این،  $\tau = 0, 1, 2, 3, \dots$

۱. ذره  $\pi^0$  که با پاد ذره خود یکسان است، در مرکز نمودار قرار گرفته است و مجموعه  $\pi^0, \pi^+, \pi^-$  باید به صورت مخصوصی در نظر گرفته شود.

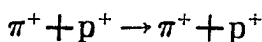
به ترتیب برای تک‌تاییها، دوتاییها، سه‌تاییها و مانند آن در نظر گرفته می‌شود. کلمه «ایزوتوپی» از این نظر به کار می‌رود که  $\tau$  به ذراتی گفته می‌شود که جرم و اسپین آنها در عمل یکسان اند و بنا بر این مکان یکسانی را در یک مقیاس جرم اشغال می‌کنند. توجه کنید که  $\tau$  شباهتی به تکانه زاویه‌ای  $J$  دارد که می‌تواند  $1 + J$  سمتگیری در فضا اختیار کند که هر کدام با مقدار مؤلفه  $Z$  خود یعنی  $J_z$  مشخص می‌شود. به همین دلیل است که به  $\tau$  «اسپین» گفته می‌شود. بنا بر این، اسپین ایزوتوپی را می‌توان به صورت برداری در یک فضای نمایشی مشخص، که فضای اسپین ایزوتوپی نام دارد، در نظر گرفت. طول این بردار برابر است با  $\sqrt{\tau(\tau+1)}$  و می‌تواند  $1 + 2\tau$  سمتگیری ممکن را نسبت به محور  $Z$  داشته باشد که متناظرند با مقادیر ممکن مؤلفه  $Z$  آن و با رابطه زیر داده می‌شوند

$$\tau_z = \pm\tau, \pm(\tau-1), \pm(\tau-2),$$

هر ذره موجود در یک چندتایی با یک مقدار  $\tau_z$  متناظر است و مقادیر  $\tau_z$  بر حسب کاهش بار مرتب می‌شوند. به عنوان مثال، برای پروتونها  $\tau_z = +1/2$  و برای نوترونها  $\tau_z = -1/2$  است. اسپین ایزوتوپی چندتاییهای ذرات و پساد ذرات یکسان‌اند ولی مقادیر  $\tau_z$  آنها مخالف یکدیگر است. در جدول ۳.۹ اسپین ایزوتوپی مزونها و باریونها داده شده است.

اسپین ایزوتوپی کل  $\mathcal{J}$  یک سیستم از ذرات را می‌توان از جمع برداری اسپین ایزوتوپی هر ذره به دست آورد. برای این منظور لازم است که از قواعد جمع تکانه زاویه‌ای (بخش ۸.۳) استفاده کرد. به عنوان مثال سیستم  $p^+ + p^+$  را در نظر می‌گیریم. این دو ذره هر کدام دارای  $\tau_z = 1/2$  اند که از جمع آنها، مقادیر  $\mathcal{J} = 1$  یا صفر برای اسپین ایزوتوپی نتیجه به دست می‌آید. ولی  $\mathcal{J}_z = 1/2 + 1/2 = 1$  است. بنا بر این سیستم مشکل از دو پروتون لزوماً با  $\mathcal{J} = 1$  متناظر است. اما سیستم  $p^+ + n$  دارای  $\mathcal{J}_z = 1/2 - 1/2 = 0$  است و از این رو اسپین ایزوتوپی کل می‌تواند  $\mathcal{J} = 1$  یا صفر باشد. به طریق مشابه،  $\pi^+ + p^+$  می‌تواند اسپین ایزوتوپی کل  $3/2$  یا  $1/2$  داشته باشد. ولی داریم  $\mathcal{J}_z = 1 + 1/2 = 3/2$ ، به گونه‌ای که لازم است  $\mathcal{J} = 3/2$  باشد. از طرف دیگر،  $\pi^0 + p^+$  و  $\pi^- + p^+$  که به ترتیب دارای  $\mathcal{J}_z = 1/2$  و  $\mathcal{J}_z = -1/2$  - اند، می‌توانند با  $\mathcal{J} = 3/2$  یا  $\mathcal{J} = 1/2$  متناظر باشند.

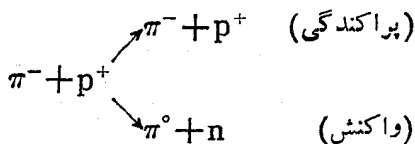
به نظر می‌رسد که برهم کنش قوی یا هسته‌ای مستقل از بار است. به عنوان مثال، شواهد تجربی فسرآوانی نشان می‌دهند که برهم کنش برای زوجهای  $(\mathcal{J}_z = -1)$   $n n$ ،  $(\mathcal{J}_z = 0)$   $n p^+$  و  $(\mathcal{J}_z = +1)$   $p^+ p^+$  یکسان است. بنا بر این، برهم کنش قوی مستقل از مقدار کل  $\mathcal{J}$  برای ذرات برهم کنش کننده است. از این رو برهم کنش قوی میان دو ذره تنها به اسپین ایزوتوپی کل آنها یعنی  $\mathcal{J}$  وابسته است. به عنوان مثال، در فرایند پراکندگی



جدول ۳۰۹ اسپین ایزوتوپی  $(\tau, \tau_z)$ ، شگفتی  $\mathcal{S}$ ، و فوق بار  $(y)$  مزونها و باریونها<sup>۱</sup>

$y$	$\mathcal{S}$	$\tau_z$	$\tau$	ذرات
				مزونها
۰	۰	(۱, ۰, -۱)	۱	$\pi^+, \pi^0, \pi^-$
۱	۱	(۱/۲, -۱/۲)	۱/۲	$K^+, K^0$
۰	۰	۰	۰	$\eta^0$
				باریونها
۱	۰	(۱/۲, -۱/۲)	۱/۲	$p^+, n$
۰	-۱	۰	۰	$\Lambda^0$
۰	-۱	(۱, ۰, -۱)	۱	$\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$
-۱	-۲	(۱/۲, -۱/۲)	۱/۲	$\Xi^0, \Xi^-$
-۲	-۳	۰	۰	$\Omega^-$

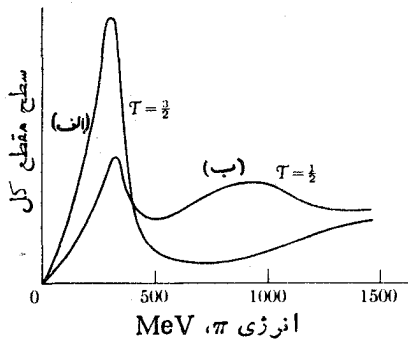
داریم  $\mathcal{S}_z = 3/2$ ، که لزوماً باید با  $\mathcal{S} = 3/2$  در هر دو طرف معادله متناظر باشد. سطح مقطع مشاهده شده مطابق آنچه در منحنی (الف) شکل ۱۵.۹ دیده می‌شود، با انرژی پرتابه  $\pi^+$  تغییر می‌کند و در انرژی نزدیک به  $300 \text{ MeV}$  يك بیشینه کاملاً مشخص دارد. اما در مورد زیر



داریم  $\mathcal{S}_z = -1/2$  که می‌تواند با  $\mathcal{S} = 3/2$  یا  $\mathcal{S} = 1/2$  متناظر باشد. سطح مقطع مشاهده شده کل در منحنی (ب) شکل ۱۵.۹ نشان داده شده است. قله متناظر با  $\mathcal{S} = 3/2$  عملاً در همان انرژی حالت قبل  $\pi^+ + p^+$  با اسپین ایزوتوپی کسل یکسان، قرار می‌گیرد ولی در حدود انرژی  $1000 \text{ MeV}$  قله دومی مشاهده می‌شود که به حالت  $\mathcal{S} = 1/2$  نسبت داده می‌شود.

۱. علامت شگفتی و فوق بار یاد ذرات با علامت شگفتی و فوق بار ذرات متناظر مخالف است. مزونها و باریونها غالباً با نام مشترك هادرونها مشخص می‌شوند.





شکل ۱۵.۹ سطح مقطع مربوط به برخوردهای  $\pi^- + p^+$  (الف) و  $\pi^+ + p^+$  (ب) برحسب تابعی از انرژی.

در نتیجه تحلیل فرایندهایی که در آنها ذرات با برهم کنش قوی شرکت می کنند، می توان گفت

اسپین ایزوتوپی کل  $\mathcal{C}$  در برهم کنشهای قوی پایسته است.

پایستگی اسپین ایزوتوپی کل قانونی است که تنها در برهم کنشهای قوی صادق است و در فرایندهای برهم کنش الکترومغناطیسی یا ضعیف می تواند نقض شود. به عنوان مثال، در فرایند مشاهده شده  $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ ، در طرف چپ داریم  $\mathcal{C} = 1/2$  در حالی که  $\mathcal{C}$  در طرف راست می تواند یک یا صفر باشد، بنا براین  $\mathcal{T}$  پایسته نیست. علاوه بر قانون پایستگی اسپین ایزوتوپی کل داریم

در برهم کنشهای قوی و الکترومغناطیسی، مؤلفه اسپین ایزوتوپی کل،  $\mathcal{C}_z$ ، پایسته است.

این قانون در تمام موارد رعایت می شود و با قانون پایستگی بار الکتریکی کاملاً هم ارز است.

پایستگی شگفتی. برای مشخص کردن ذراتی که تحت برهم کنشهای قوی قرار می گیرند، کمیت دیگری به نام شگفتی، که با  $\mathcal{G}$  نشان داده می شود معرفی شده است. این کمیت طوری تعریف می شود که بار یک ذره در یک چندتایی با رابطه زیر داده می شود

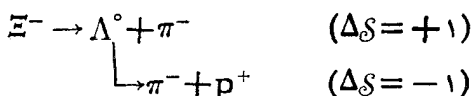
$$q = e\left(\tau_z + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}\mathcal{G}\right) \quad (11.9)$$

مقادیر مختلف  $\mathcal{G}$  در جدول ۳.۹ آمده است. شگفتی ذرات و پساد ذرات مخالف یکدیگر است. پایستگی شگفتی ایجاب می کند که

شگفتی کل  $\mathcal{S}$  باید در فرایندهای حاصل از برهم‌کنشهای قوی و الکترومغناطیسی یکسان باقی بماند.

به‌عنوان مثال، فرایند  $\pi^- + p^+ \rightarrow n^0 + \Lambda^0$  که با تمام قوانین پایستگی دیگر توافق دارد، فرایندی است که مشاهده نشده است، زیرا شگفتی کل در طرف چپ مساوی با صفر و در طرف راست برابر با ۱- است. اما، فرایندهایی از قبیل  $\pi^+ + p^+ \rightarrow \Sigma^+ + K^+$  و  $\pi^- + p^+ \rightarrow \Lambda^0 + K^0$  مشاهده شده‌اند. در هر دو مورد بالا، شگفتی کل مساوی با صفر باقی می‌ماند. یعنی، در تمام برخوردهای پیون-نوکلئون (یعنی، سیستمی که شگفتی آن صفر است)، هیبرونها باید به‌صورت جفت و با شگفتی مساوی ولی مخالف تولید شوند. این پدیده به تولید وابسته معروف است. در واقع، مشاهده تولید وابسته بعضی هیبرونهای مشخص باعث شد که فکر قانون پایستگی شگفتی مطرح شود.

پایستگی شگفتی يك قانون تخطی ناپذیر نیست و در برهم‌کنشهای ضعیف، که تغییری به اندازه  $\pm 1$  در شگفتی را مجاز می‌داند، نقض می‌شود. در اکثر واپاشیهای باریونی (جدول ۲۰۹) پایستگی شگفتی نقض می‌شود و این نشان می‌دهد که واپاشیها به‌وسیله برهم‌کنشهای ضعیف به‌وقوع می‌پیوندند. به‌عنوان مثال



هیبرونها نمی‌توانند با حفظ پایستگی شگفتی از طریق برهم‌کنش قوی به باریونها واپاشیده شوند زیرا مقدار  $Q$  مربوط به‌چنین فرایندهایی منفی است. این امر نشان می‌دهد که چرا هیبرونها در مقایسه با زمانی که برای تولید یا نابودیشان در برهم‌کنشهای قوی (که در حدود  $10^{-23}$  s است) صرف می‌شود این قدر به‌کندی (در حدود  $10^{-10}$  s) واپاشیده می‌شوند. از روی این دو زمان می‌توان نتیجه گرفت که قدرت برهم‌کنش ضعیف در حدود  $10^{-13}$  s برابر قدرت برهم‌کنش قوی است.

ناگفته نماند که پارامتر دیگری نیز وجود دارد که می‌تواند به جای شگفتی برای رده‌بندی ذرات به کار رود. این پارامتر فوق‌بدا نام دارد و به‌صورت  $\mathcal{Y} = b + \mathcal{S}$  تعریف می‌شود. مقادیر فوق‌بار در جدول ۳۰۹ آمده است. قانون پایستگی شگفتی را می‌توان با قانون پایستگی فوق‌بار، که از قانون پایستگی باریونها و تعریف  $\mathcal{Y}$  ناشی می‌شود، تعویض کرد. به‌نظر می‌رسد که قوانین پایستگی جدید گفته‌شده در این بخش کمابیش قراردادهای موردی هستند که بسرای توضیح حقایق تجربی به کار می‌روند. با این حال، این واقعیت که این قوانین به‌طور سازگاری در موارد متعددی به کار می‌روند نشان می‌دهد که معنی فیزیکی عمیقتری دارند. در حال حاضر، ارتباط آنها با خواص فیزیکی ذرات در تمام حالات کاملاً شناخته نشده است و هنوز می‌تواند موضوع تحقیقات جدی باشد.

## ۶.۹ ناوردایی، تقارن، و قوانین پایستگی

بعضی از قوانین پایستگی بحث شده در این فصل را می‌توان به بعضی خواص ناوردایی و تقارنی سیستم‌های فیزیکی که در اینجا به‌طور خلاصه به آنها اشاره می‌کنیم، مربوط دانست.

**انتقال فضایی.** فرض کنید که فضا همگن و یکنواخت است، یعنی در تمام نقاط تقارن انتقالی دارد. در این صورت باید نتیجه بگیریم که یک سیستم فیزیکی، بدون توجه به اینکه در چه مکانی در فضای خالی قرار گرفته است، رفتار یکسانی از خود نشان می‌دهد. به زبان ریاضی، می‌توان گفت که توصیف خواص یک سیستم فیزیکی منزوی تحت انتقال سیستم نسبت به چارچوب مرجع ناورد است. به عنوان مثال، یک مولکول منزوی که ترکیبی از چند الکترون و هسته است، بدون توجه به اینکه نسبت به ناظر در چه محلی قرار دارد باید با جمله‌های کاملاً یکسانی توصیف شود. از طرف دیگر، می‌دانیم که تکانه کل سیستم منزوی ثابت است. از این رو، می‌توان ثابت کرد که

پایستگی تکانه یک سیستم منزوی نتیجه‌ای از ناوردایی انتقالی قوانین توصیف کننده سیستم است.

در بعضی موارد ممکن است سیستم منزوی نباشد ولی محیط فیزیکی یک تقارن انتقالی مشخصی داشته باشد. الکترونی را در نظر می‌گیریم که میان دو صفحه موازی بینهایت بزرگ که حامل بارهای الکتریکی مساوی و مخالف اند قرار دارد. واضح است که اگر الکترون در امتداد موازی با صفحات جا به جا شود، شرایط فیزیکی تغییر نمی‌کنند. بنا بر این، هر گاه الکترون به حرکت در آید، تکانه آن در امتداد موازی با صفحات ثابت باقی می‌ماند. (این موضوع معمولاً این‌طور بیان می‌شود که میدان الکتریکی حاصل از صفحات باردار در امتداد عمود بر صفحات است.) بنا بر این، مجدداً این نتیجه را به دست می‌آوریم که پایستگی تکانه در هر راستای مشخص نتیجه‌ای از ناوردایی انتقالی شرایط فیزیکی در آن راستاست.

**چرخش فضایی.** هر گاه فرض کنیم که فضا همسانگرد است (یعنی در هر نقطه تقارن چرخشی دارد)، در این صورت توصیف خواص یک سیستم منزوی باید مستقل از سمتگیری آن در فضا نسبت به چارچوب مرجع باشد. مجدداً یک مولکول منزوی را در نظر می‌گیریم: توصیف خواص این مولکول از سمتگیری مولکول نسبت به ناظر مستقل است. از طرف دیگر، می‌دانیم که تکانه زاویه‌ای کل هر سیستم منزوی ثابت است. بنا بر این می‌توان ثابت کرد که پایستگی تکانه زاویه‌ای هر سیستم منزوی نتیجه‌ای از ناوردایی چرخشی قوانین توصیف کننده سیستم است.

در بعضی موارد، حتی اگر سیستم منزوی نباشد، سیستم فیزیکی می‌تواند یک تقارن چرخشی مشخصی داشته باشد. به عنوان مثال، میدان نیروی مرکزی تقارن کروی دارد.

در این صورت می‌دانیم که در نتیجه تقارن، تکانه زاویه‌ای (نسبت به مرکز نیرو) ذره‌ای که تحت اثر نیروهای مرکزی حرکت می‌کند، ثابت است. هرگاه میدان تقارن استوانه‌ای داشته باشد، مثل مورد مربوط به نیروی وارد بر الکترون در یک مولکول دو اتمی یا ذره باردار واقع در یک میدان مغناطیسی یکنواخت، در این صورت مؤلفه تکانه زاویه‌ای نسبت به محور تقارن ثابت باقی می‌ماند. بنابراین مجدداً به این نتیجه می‌رسیم که پایستگی تکانه زاویه‌ای نسبت به هر راستای مشخص نتیجه‌ای از تقارن چرخشی شرایط فیزیکی نسبت به آن است.

تقارن انتقالی و چرخشی، محدودیتهای مشخصی را در شکل ریاضی قوانین فیزیکی اعمال می‌کنند. با این حال، این موضوعی است که در اینجا نمی‌توانیم با تفصیل بیشتری آن را بررسی کنیم.

**انتقال زمانی.** نوردایی نسبت به انتقال زمانی بدان معنی است که هرگاه یک سیستم فیزیکی را آماده کنیم و آن را بدون دخالت عوامل خارجی به حال خود واگذاریم تا رشد کند، این سیستم بدون توجه به زمانی که در آن آماده شد، یا به عبارت دیگر بدون توجه به مبدأ زمان انتخاب شده، به صورت یکسان تکامل می‌یابد. با استفاده از استدلال نسبتاً مشکلتری می‌توان ثابت کرد که

پایستگی انرژی هر سیستم منزوی نتیجه‌ای از نوردایی قوانین توصیف‌کننده سیستم نسبت به مبدأ زمان انتخاب شده است.

یعنی نسبت به انتقال زمانی نساورد است. قوانین مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی نسبت به انتقال زمانی ناوردا هستند.

**تبدیل پیمانه‌ای.** وابسته کردن چهارمین قانون پایستگی (یعنی پایستگی بار) به تبدیل متقارن و خاصیت نوردایی مشکلتتر است. می‌توان نشان داد که

پایستگی بار نتیجه‌ای از نوردایی قوانین میدان الکترومغناطیسی (یعنی معادلات ماکسول) نسبت به یک تبدیل «پیمانه‌ای»<sup>۱</sup> است.

در این کتاب نمی‌توانیم منظور از تبدیل پیمانه‌ای را به طور کامل توضیح دهیم. یک مسورد ساده از تبدیل پیمانه‌ای تغییر در صفر پتانسیل الکتریکی است، تغییری که بر میدان الکتریکی یا شکل معادلات ماکسول تأثیر نمی‌گذارد. نوع دیگر تبدیل «پیمانه‌ای» تغییر فاز تابع موج یعنی قراردادن  $\phi \rightarrow \phi + e$  به جای  $\phi$  است. واضح است که چگالی احتمال  $|\psi|^2$  که یک

۱. به عنوان مثال به کتاب زیر مراجعه کنید

کمیت قابل مشاهده است، بدون تغییر باقی می ماند.

**چرخش اسپین ایزوتوپی.** آیا عملیات متقارن دیگری هم وجود دارد که بتواند با قوانین پایستگی ارتباط داشته باشد؟ قبلان نشان دادیم که اسپین ایزوتوپی به دلیل استقلال بار برهم کنش قوی پایسته می ماند. می توانیم این موضوع را مثل چهار قانون پایستگی قبلی به صورت زیر بیان کنیم

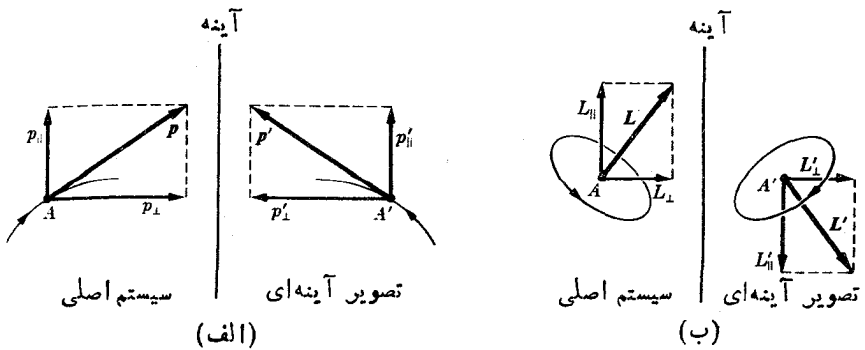
اسپین ایزوتوپی به این دلیل پایسته می ماند که برهم کنشهای قوی نسبت به چرخشها در فضای اسپین ایزوتوپی ناوردا هستند.

این ناوردایی بدان معنی است که برهم کنش باید شامل اسپین ایزوتوپی  $T_1$  و  $T_2$  ذرات برهم کنش کننده فقط به صورت  $T_1, T_2$  باشد، که از لحاظ چرخشی ناورداست، و نه به صورت  $T_{12}, T_{21}$  که این طور نیست. متأسفانه بیش از این نمی توان بر معنی ریاضی بیان فوق تأکید کرد ولی تشابه آن با پایستگی تکانه زاویه ای تحت نیروهای مرکزی آشکار است.

**بازتاب بار.** هرگاه تمام بارهای الکتریکی با بارهای با علامت مخالف تعویض شوند (یعنی  $q \rightarrow -q$ )، برهم کنشهای الکترومغناطیسی دقوی ناوردا باقی می مانند. این بیان به بازتاب بار معروف است. می توان نشان داد که این موضوع به پایستگی مؤلفه  $Z$  اسپین ایزوتوپی کل  $\vec{J}$  در این برهم کنشها منجر می شود.

هیچ خاصیت تقارنی ساده یا رفتار ناوردایی تاکنون به پایستگی لبتونها و بار یونها وابسته نشده است. اما، سه عملیات متقارنتر وجود دارند که در رفتار اساسی ماده بسیار مهم هستند. این سه عبارت اند از پارته  $P$ ، مزدوج بار  $C$  و برگشت زمانی  $T$ .

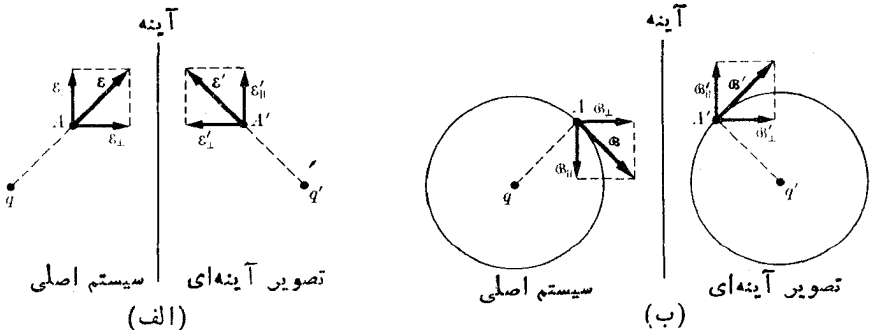
**پارته.** مفهوم پارته که قبلا در بخش ۹.۲ نیز به آن اشاره کردیم، به عملیات بازتاب فضایی، در يك صفحه یا از میان نقطه ای چون مبدأ مختصات، اطلاق می شود. ابتدا رفتار چند کمیت دینامیکی را نسبت به بازتاب در يك صفحه بررسی می کنیم. ذره  $A$  را که با تکانه  $\mathbf{p}$  در حال حرکت است در نظر می گیریم [شکل ۱۶.۹ (الف)]. تصویر آینه ای  $A$  ذره دیگری مانند  $A'$  است که با تکانه  $\mathbf{p}'$  به طریقی حرکت می کند که  $p_{||} = p'_{||}$ ،  $p_{\perp} = -p'_{\perp}$  و در آن علامتهای  $||$  و  $\perp$  به ترتیب راستهای موازی و عمود بر صفحه را نشان می دهند. اکنون ذره ای را در نظر می گیریم که مطابق آنچه در شکل ۱۶.۹ (ب) نشان داده شده است، با تکانه زاویه ای  $L$  حرکت می کند. تصویر آینه ای  $A$  ذره دیگری مانند  $A'$  است که مطابق شکل چرخش می کند و بنابراین، تکانه زاویه ای آن  $L'$  است، به طوری که  $L_{||} = -L'_{||}$ ،  $L_{\perp} = L'_{\perp}$ . در این صورت ملاحظه می شود که در بازتاب در صفحه،  $\mathbf{p}$  و  $L$  به صورتهای مختلفی رفتار می کنند. به همین دلیل است که  $\mathbf{p}$  يك بردار قطبی و  $L$  يك بردار محوری



نامیده می‌شود. تمام بردارهایی که به قسمی در قوانین فیزیکی شرکت می‌کنند یا قطبی‌اند یا محوری. با امتحان کردن شکل ۱۷.۹ دانستجو می‌تواند ثابت کند که میدان الکتریکی، یک بردار قطبی و میدان مغناطیسی، یک بردار محوری است. نیرو نیز برداری قطبی است. قوانین مکانیک کلاسیک نسبت به بازتاب، یعنی نسبت به عملیات پارینه  $P$ ، ناوردا هستند. به عبارت دیگر، هرگاه سیستم فیزیکی مشخصی قوانین کلاسیک حرکت را بر آورده کند، تصویر آینه‌ای آن نیز قوانین حرکت را بر آورده می‌کند و می‌تواند در طبیعت رخ دهد. این بدان معنی است که در بیانهای ریاضی قوانین فیزیک کلاسیک، کمیات قطبی و محوری باید به طریقی ظاهر شوند که رابطه میان آنها تحت بازتاب فضایی تغییر نکند. بنابراین، می‌توان گفت که مکانیک کلاسیک نسبت به بازتاب فضایی ناورداست.

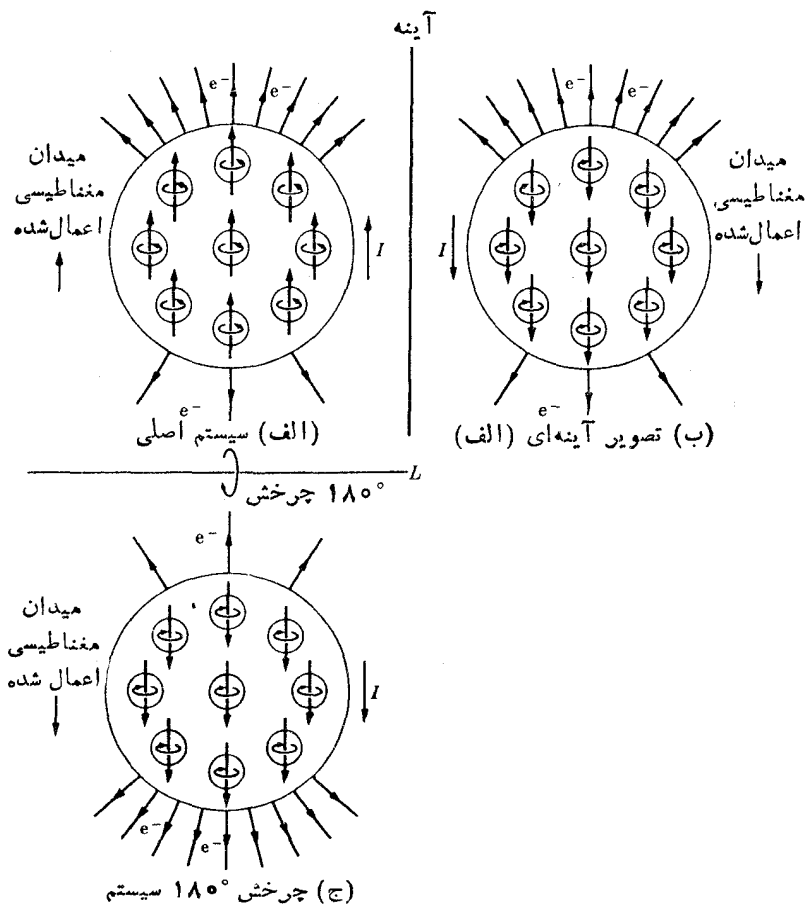
طبق قانون پایستگی پارینه داریم

هنگامی پارینه در یک فرایند پایسته است که تصویر آینه‌ای آن فرایند نیز فرایندی باشد که بتواند در طبیعت رخ دهد.



می توان نشان داد که معادلات ماکسول برای میدان الکترومغناطیسی نسبت به بازتاب فضایی ناوردا هستند و بنا براین در برهم کنشهای الکترومغناطیسی، پاریته پایسته می ماند. فیزیکدانان فکر می کردند که پاریته در تمام برهم کنشها، بدون استثنا، باید پایسته بماند، حتی در مواردی که هیچ شاهد تجربی مستقیم برای حمایت این فرض وجود نداشت. اینان آنچنان به این خاصیت طبیعت مطمئن بودند که وقتی لی و یانگ در سال ۱۹۵۶ اعتبار ناوردایی تحت بازتاب فضایی برای فرایندهای ناشی از برهم کنشهای ضعیف را مورد تردید قرار دادند، به شدت یکه خوردند. پیشنهاد لی و یانگ برای حل معمایی که در آن زمان به معمای  $\pi$ - $\theta$  معروف بود، مطرح شد. بنا براین قضیه، برای هر ذره که با تابع موج یا میدان متناظر خود توصیف می شود پاریته ذاتی مشخصی وجود دارد. دلایل خوبی وجود دارند که بر مبنای آنها می توانیم فرض کنیم مزونها پاریته منفی دارند (مثال ۵.۹ را ببینید). با توجه به جدول ۲.۹ مشاهده می شود که کائون (مثبت یا منفی)، در میان امکانات دیگر، مدهای واپاشی  $K^{\pm} \rightarrow \pi^{\pm} + \pi^{\mp}$  و  $K^{\pm} \rightarrow \pi^{\pm} + \pi^{\pm}$  را نیز دارد. می توان نشان داد که (مثال ۶.۹)، هرگاه فرض کنیم هر ذره پاریته کاملاً معینی دارد، در این صورت اگر پاریته در اولین مد واپاشی کائون پایسته بماند، در دومین مد واپاشی پایسته نخواهد بود و برعکس. اولین مد واپاشی، مد واپاشی  $\pi$  و دومین مد، مد  $\theta$  نام دارد (شکلهای ۸.۹ و ۹.۹). با مطرح شدن چنین مسئله غامضی، فیزیکدانان، برای نجات قانون پایستگی پاریته فرض کردند که دو مزون، با اینکه در تمام جنبهها به جز مد واپاشی یکسان اند، باید متفاوت باشند و هر کدام پاریته مخصوص به خود داشته باشند. یانگ و لی پیشنهاد کردند که می توان ایده یکسان بودن دو مزون (بسا پاریته کاملاً معین) را به بهای این شرط پذیرفت که پایستگی پاریته در واپاشی برهم کنشهای ضعیف نقض می شود. ضمناً برای امتحان پایستگی پاریته در فرایندهای ناشی از برهم کنشهای ضعیف، چندین آزمایش نیز پیشنهاد کردند.

در سال ۱۹۵۷ میلادی، یکی از معروفترین آزمایشها را وو و همکارانش در مؤسسه ملی استانداردها انجام دادند. نمونه ای از  $^{12}\text{C}^{60}$  طوری قطبیده شده بود که اسپین هستهها در یک خط قرار داشت. (برای این منظور لازم بود که نمونه در یک میدان مغناطیسی قوی قرار گیرد و دما به صفر مطلق نزدیک شود.) همان طور که در شکل ۱۸.۹ (الف) دیده می شود، آنها نتیجه گرفتند که الکترونها حاصل از واپاشی  $\beta^{-}$  هسته  $^{12}\text{C}^{60}$  در جهت اسپین  $^{12}\text{C}^{60}$  (یا راستای قطبش) خیلی بیشتر از جهت مخالف گسیل می شوند. این نشان می داد احتمال اینکه هسته  $^{12}\text{C}^{60}$  یک الکترون حاصل از واپاشی را در جهت اسپین خود گسیل کند بیشتر از آن است که در جهت مخالف آن گسیل کند. هنگامی که تمام سیستم را با چرخاندن آن به اندازه  $180^{\circ}$  حول خط  $L$  برگرداندند، قطبش، اسپینها، و میدان مغناطیسی نیز وارونه شدند. وضعیت تجربی جدیدی، همانند آنچه در شکل ۱۸.۹ (ج) نشان داده شده است حاصل شد که جهت بیشینه شدت گسیل الکترون نیز  $180^{\circ}$  چرخیده بود. از طرف دیگر، تصویر آینه ای (الف) در (ب) نشان داده شده است که در آن اسپینها و میدان مغناطیسی وارونه شده اند، زیرا بردارهایی محوری اند، اما جهت بیشینه شدت گسیل

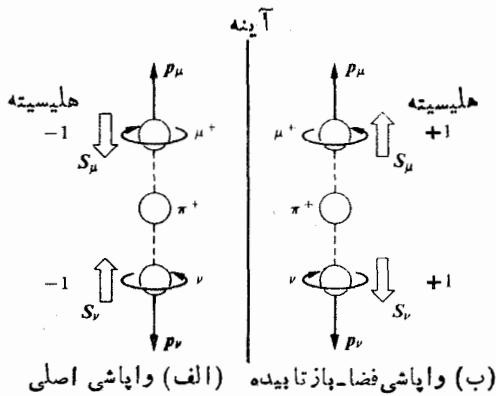


شکل ۱۸۰۹ آزمایش  ${}^6\text{Co}$  مربوط به امتحان پایستگی پاریته در واپاشی  $\beta$ .

الکترون تغییر نکرده است. مقایسه (ب) و (ج) به وضوح نشان می‌دهد که (ب) با آنچه در طبیعت موجود است متناظر نیست و از این رو، شاهد تجربی مستقیمی است برای این موضوع که در برهم کنشهای ضعیف، که مسوول واپاشی  $\beta$  هستند، پاریته پایسته نمی‌ماند. پس از آزمایش  ${}^6\text{Co}$ ، دلایل تجربی زیادی برای پایسته نماندن پاریته در برهم کنشهای ضعیف به دست آمد. اما به نظر می‌رسد که در فرایندهای ناشی از برهم کنشهای قوی (و نیز الکترومغناطیسی) پاریته پایسته است.

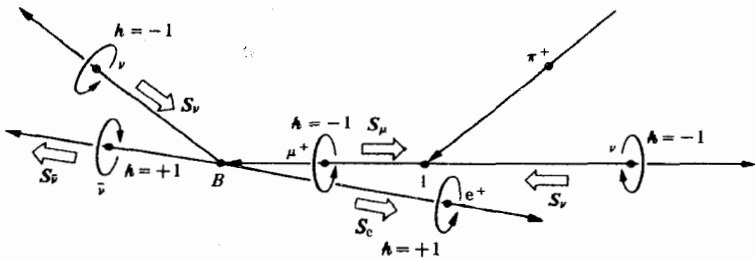
به عنوان دومین مثال از ناپایستگی پاریته، واپاشی پیونسی  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$  شکل ۱۹۰۹ (الف) را در نظر می‌گیریم. اسپین پیون برابر صفر است و به منظور پایستگی تکانه زاویه‌ای، اسپینهای میون و نوترینو باید در دو جهت مخالف باشد. همچنین به منظور





شکل ۱۹۰۹ ناپایستگی پاریته در واپاشی  $\pi$ .

مطابقت کردن با هلیسیتیته نوترینو، اسپینهای آنها نیز باید آن طور باشد که در شکل نشان داده شده است (شکل ۳۰۹). با این حال، سیستم آینه‌ای شکل ۱۹۰۹ (ب) در طبیعت وجود ندارد، زیرا هلیسیتیته نوترینو نادرست خواهد بود. در عمل، به دلیل این واقعیت که در واپاشی  $\pi^+$  مزونهای  $\mu^+$  هلیسیتیته منفی دارند، فیزیکدانان نتیجه گرفتند که هلیسیتیته نوترینو نیز منفی است. اگر هلیسیتیته نوترینو مثبت یا منفی بود، هلیسیتیته مزون  $\mu^+$  نیز به همان نسبت مثبت یا منفی می‌شد. در این مورد تصویر آینه‌ای موجود در شکل ۱۹۰۹ با فرایند مشاهده شده‌ای متناظر می‌شد و پاریته در واپاشی پیون پایسته می‌ماند. یک آزمایش نوعی که با آن می‌توان هلیسیتیته  $\mu^+$  را تعیین کرد در شکل ۲۰۰۹ نشان داده شده است. پوزیترونهای گسیل شده در واپاشی  $\mu^+$  تقریباً همیشه تحت زاویه  $180^\circ$  نسبت به راستای اصلی حرکت  $\mu^+$  حرکت می‌کنند و هلیسیتیته آنها مثبت ( $\lambda = +1$ ) است. از این رو، به منظور پایستگی تکانه زاویه‌ای لازم است که هلیسیتیته ذرات دیگر آن طور باشد که در شکل نشان داده شده است.



شکل ۲۰۰۹ تعیین هلیسیتیته  $\mu^+$ .

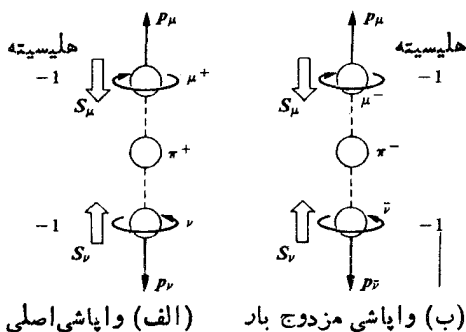
مزدوج بار. این عملیات شامل تعویض تمام ذرات با پاد ذره‌های خود بدون هیچگونه تغییر در دیگر خواص فیزیکی آنها از قبیل تکانه یا اسپین است.

هر سیستم هنگامی نسبت به مزدوج بار ناودداست که اگر فرایندی در سیستم اصلی امکان پذیر باشد، فرایند متناظر آن نیز در سیستم مزدوج بار امکان پذیر باشد.

ظاهراً فرایندهای ناشی از برهم کنشهای قوی و الکترومغناطیسی نسبت به مزدوج بار ناورد هستند. این موضوع به پایستگی  $J$  و از این رو به پایستگی  $J$  منجر می شود. اما، فرایندهای شامل برهم کنشهای ضعیف نسبت به مزدوج بار ناورد نیستند. مثلاً در واپاشی پیون به عنوان یک نمونه [شکل ۲۱.۹ (الف)] سیستم مزدوج بار [شکل ۲۱.۹ (ب)] ایجاد نمی شود زیرا در آن صورت پاد نوترینو هلیسیتیته غلط خواهد داشت.

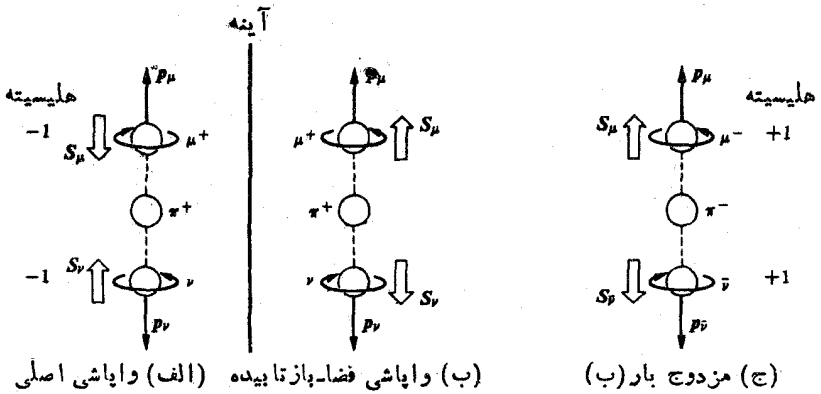
با وجود این، مقایسه شکل‌های ۱۹.۹ و ۲۱.۹ امکان جدیدی را مطرح می کند. فرض کنید که ابتدا، بازتاب فضایی یا عملیات پارته  $P$  را بر روی سیستم شکل ۲۱.۹ (الف) و سپس مزدوج بار  $C$  را مطابق آنچه در شکل ۲۲.۹ نشان داده شده است انجام دهیم. سیستم حاصل از عملیات ترکیبی  $(CP)$  نیز در طبیعت به وقوع می پیوندد، یعنی داریم  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}$  از این رو

برهم کنشهای ضعیف تحت عملیات ترکیبی  $CP$  ناوددا هستند.



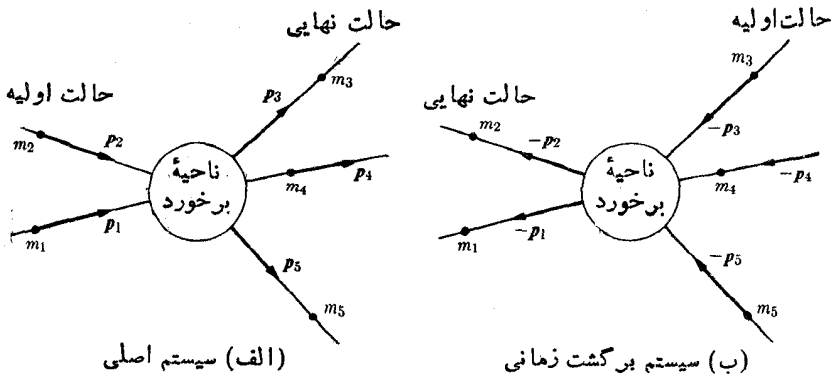
شکل ۲۱.۹ کاربرد مزدوج بار در واپاشی  $\pi$ .

۱. آزمایشهایی را که اخیراً در پروکهیون و سرن در مورد واپاشی  $\eta^0$  به  $\pi^0$ ،  $\pi^+$ ، و  $\pi^-$  انجام شده است برای یافتن عدم تقارن احتمالی در رفتار  $\pi^+$  و  $\pi^-$  تحلیل کرده اند. نتایج تجربی، بحثهایی را درباره ناوردایی برهم کنشهای الکترومغناطیسی نسبت به مزدوج بار برانگیخته است. با این حال، این موضوع (در زمان نوشتن این کتاب) هنوز کاملاً حل نشده است.



شکل ۲۲.۹ عملیات ترکیبی CP در واپاشی π.

برگشت زمانی. هر گاه جهت گذشت زمان وارونه شود چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ یعنی اگر  $t$  با  $-t$  تعویض شود آیا معادلات حاصل هنوز هم فرایندهای ممکن را توصیف می‌کنند؟ در نتیجه برگشت زمانی، کمیات سرعت، تکانه، و تکانه زاویه‌ای معکوس می‌شوند و در هر برخورد، حالت‌های اولیه و نهایی باهم تعویض می‌شوند (شکل ۲۳.۹). شم ما که با شواهد تجربی محکم چه در سطح ماکروسکوپی و چه در سطح اتمی تأیید می‌شود، حکم می‌کند که قوانین فیزیکی نسبت به برگشت زمانی ناورد باشند. به آسانی نشان داده می‌شود که قوانین مکانیک کلاسیک و الکترومغناطیس تحت برگشت زمانی ناوردا هستند. به عنوان مثال،  $dp/dt$  تحت برگشت زمانی ناورد است، زیرا معرف تعویض‌های  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  و  $t \rightarrow -t$  است. میدان الکترومغناطیس  $\mathcal{E}$  نیز تحت برگشت زمانی ناورد است. اما، میدان مغناطیسی تبدیل  $\mathcal{B} \rightarrow -\mathcal{B}$  را متحمل می‌شود زیرا برگشت زمانی سبب وارونه شدن سرعتها و از این رو جریانها می‌شود. بنا بر این  $\nabla \times \mathcal{B}$  تحت برگشت زمانی ناورد است زیرا هر دو ضریب



شکل ۲۳.۹ عملیات T.

تغییر علامت می دهند و معادله حرکت ذره باردار یعنی  $d\mathbf{p}/dt = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  نسبت به برگشت زمانی ناوردا می ماند.

برهم کنشهای قوی و ضعیف نیز تحت برگشت زمانی ناوردا در نظر گرفته می شوند، اگرچه این مسئله اخیراً مورد بحث قرار گرفته است. ظاهراً تجارب اخیر (۱۹۶۶) در مورد یک شکل مخصوص واپاشی کائون خنثی ( که فقط در ۳ درصد موارد به وقوع می پیوندد) نشان دهنده آن است که برهم کنشهای ضعیف می توانند از اصل ناوردایی تحت برگشت زمانی پیروی نکنند.

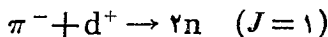
این بخش را با بیان یک قضیه مهم دیگر به پایان می بریم.

تمام قوانین فیزیکی تحت عملیات  $CPT$  ناوردا در نظر گرفته می شوند.

یعنی این قوانین تحت عملیات ترکیبی برگشت زمانی  $T$ ، پارته  $P$ ، و مزدوج بار  $C$  ناوردا هستند. این قضیه حتی در مواردی که در آنها قوانین تحت عملیات منفردی ناوردا نیستند نیز صادق است.

### مثال ۵.۹ پارته پیون.

**حل:** چون این موضوع در ارتباط با سایر محاسبات بسیار جالب توجه است، نشان می دهیم که چگونه پارته پیون تعیین می شود. فرض کنید بساریکه ای از مزونهای  $\pi^-$  از میان دوتریوم مایع عبور می کند. بسیاری از پیونها پس از کندشدن، به وسیله دوترونها گیر می افتند و در ویژه حالتی مشابه با ویژه حالتی الکترونی حرکت می کنند. سیستمهای تشکیل شده را اتمهای مزیک می نامند. هرگاه حالت مزیک برانگیخته شود، پیونها به سرعت به حالت پایه  $1S$  که با گسیل انرژی همراه است سقوط می کنند. در حالت پایه، تکانه زاویه ای مداری  $\pi^-$  مساوی با صفر است. با توجه به صفر بودن اسپین پیون، تکانه زاویه ای کل اتم مزیک مساوی با تکانه دوترون خواهد بود، یعنی  $J = 1$ . ابعاد مدار  $1S$  مزون  $\pi^-$  برابر با  $1/280$  ابعاد مدار  $1S$  الکترون است و بنابراین احتمال بسیار زیادی وجود دارد که پیون با دوترون برخورد کند. محتملترین واکنشی که ممکن است رخ دهد به صورت زیر است



در این فرایند، تکانه زاویه ای پایسته است. بنا بر این تکانه زاویه ای کل دو نوترون حاصل نیز باید مساوی بایک باشد. اما می دانیم که نوترونها از اصل طرد پیروی می کنند و تابع موج کامل (مداری  $\times$  اسپین) دو نوترون باید نامتقارن باشد. پارته تابع موجهای مداری مساوی با  $(-1)^l$  است. دو نوترون می توانند اسپین موازی ( $S=1$ ) یا پادموازی ( $S=0$ ) داشته باشند. توابع اسپین به ازای  $S=1$  متقارن و به ازای  $S=0$  نامتقارن اند (بخش ۲.۴). در این صورت  $S=1$  باید با تکانه زاویه ای مداری فرد  $l=1, 3, 5, \dots$  و  $S=0$  با تکانه زاویه ای زوج  $l=0, 2, 4, \dots$  ترکیب شود، لذا حالتی ممکن

دو نوترون عبارت انداز

$$S = 1: {}^3P_0, {}^3P_1, {}^3P_2, {}^3F_2, {}^3F_3, {}^3F_4, \dots$$

$$S = 0: {}^1S_0, {}^1D_2, {}^1G_4, \dots$$

که در آن، طبق معمول، تکانه زاویه‌ای کل به صورت شاخص پایین نشان داده شده است. تنها حالت با  $J = 1$ ، حالت  ${}^3P_1$  است که در این صورت باید حالت دو نوترون متناظر با تکانه زاویه‌ای مداری  $I_n = 1$  باشد.

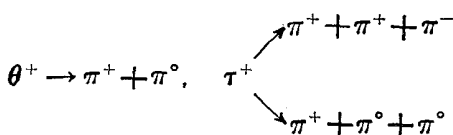
پارته‌های سه‌ذره موجود را با  $P_\pi, P_p, P_n$  و تکانه زاویه‌ای مداری دو نوترون را با  $I_d$  و تکانه زاویه‌ای مداری دو نوترون را با  $I_n$  نمایش می‌دهیم. پارته‌طرف چپ معادله مساوی است با  $(-1)^{I_d} P_\pi P_p P_n$  و پارته‌طرف راست معادله نیز برابر است با  $(-1)^{I_n} P_n^2$ . پایستگی پارته در برهم‌کنشهای قوی مستلزم آن است که

$$P_\pi P_p P_n (-1)^{I_d} = P_n^2 (-1)^{I_n}$$

اما حالت پایه دو نوترون دارای  $I_d = 0$  (با ترکیب کوچکی از  $I_d = 2$ ) است (بخش ۷.۷) و نشان دادیم که  $I_n = 1$  است. بنا بر این  $P_\pi P_p = -P_n$ . هر گاه فرض کنیم که پارته پروتون و نوترون یکسان است (که یک فرض قابل قبول است زیرا این ذرات حالت‌های مختلف بار نوکلئون هستند)، در این صورت نتیجه می‌گیریم که  $P_\pi = -1$  و پارته  $\pi^-$  فرد است. هنگام بحث درباره پارته مسزون  $\pi^0$  به تحلیل نسبتاً پیچیده‌تری نیاز داریم. این موضوع مبتنی بر این واقعیت است که فرایند  $\pi^- + d^+ \rightarrow \pi^0 + 2n^0$  به وقوع نمی‌پیوندد. نتیجه باید پارته فرد برای ذره  $\pi^0$  سازگاری دارد. بنا بر این، نتیجه می‌گیریم که تمام پیوندها پارته فرد دارند.

**مثال ۶.۹** ناپایستگی پارته در واپاشی مزون K.

**حل:** جدول ۲.۹ نشان می‌دهد که مزون K می‌تواند به دو یاسه پیون واپاشیده شود. همان‌طور که قبلاً گفتیم، هنگامی که این نوع واپاشیها برای اولین بار مشاهده شدند، فیزیکدانان فرض کردند که این واپاشیها از دو مزون متفاوت، که به ترتیب مزون  $\theta$  و  $\tau$  نامیده شدند، ناشی می‌شوند. این واپاشیها به صورت زیر نوشته می‌شوند



در محدوده دقت تجربی، مزونهای  $\theta$  و  $\tau$  لااقل از لحاظ جرم، بار، اسپین، و طول عمر یکسان هستند؛ بنابراین، طبیعی بود که آنها را ذرات یکسانی در نظر بگیرند. عیب این فرض

در سال ۱۹۵۶ آن بود که هر گاه پاریمه دریک واپاشی پایسته بود دردیگری نمی توانست پایسته بماند. در اینجا این مسئله را تحلیل می کنیم.

با کار کردن در چارچوب مرجع ذره واپاشیدنی، فرض کنید که  $s_\theta$  مقدار اسپین  $\theta^+$  باشد. طبق پایستگی تکانه زاویه ای لازم است که تکانه زاویه ای کل  $l$  سیستم  $\pi^+ + \pi^0$  نسبت به نقطه واپاشی نیز  $s_\theta$  باشد، یعنی  $l = s_\theta$ . از طرف دیگر، پاریمه ذاتی پیون برابر با ۱- است (مثال ۵.۹) بنابراین، پاریمه سیستم  $\pi^+ + \pi^0$  برابر با

$$(-1)^2(-1)^l = (-1)^{s_\theta}$$

خواهد بود. با توجه به اینکه  $P_\theta$  پاریمه ذاتی مزون  $\theta$  است و در واپاشی  $\theta^+$  پاریمه پایسته می ماند، باید داشته باشیم

$$P_\theta = (-1)^{s_\theta} = \begin{cases} +1 & s_\theta = 0 \\ -1 & s_\theta = 1 \end{cases}$$

به ازای  $s_\theta = 0$       به ازای  $s_\theta = 1$

شواهد تجربی محکمی وجود دارد که نشان می دهد  $s_\theta = 0$  است و بنا بر این باید داشته باشیم  $P_\theta = +1$ .

اکنون واپاشی ذره  $\tau^+$  را با  $s_\tau$  نمایش می دهیم. با به کار بردن طرح واپاشی  $\tau^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ ، تکانه زاویه ای سیستم  $\pi^+ + \pi^+ + \pi^-$  نسبت به مرکز جرمشان را با  $l$  و تکانه زاویه ای نسبت به مرکز جرم تمام سیستم ترکیب شده از مرکز جرم  $(\pi^+ + \pi^+)$  و ذره  $\pi^-$  را نیز با  $L$  نشان می دهیم (با به کار بردن طرح واپاشی دیگری که در بالا به آن اشاره شد نیز می توان به همین نتیجه رسید). مرکز جرم تمام سیستم در نقطه ای قرار دارد که در آن واپاشی  $\tau^+$  صورت می گیرد. بنابراین طبق پایستگی تکانه زاویه ای لازم است که  $I + L = s_\tau$  باشد، و بر اساس قاعده کوانتومی برای جمع تکانه های زاویه ای نیز لازم است که

$$|I - L| \leq s_\tau \leq I + L$$

از طرف دیگر، پاریمه محصولات واپاشی برابر با  $(-1)^{l+L} = -(-1)^{l+L}$  است. بنابراین، هر گاه  $P_\tau$  پاریمه ذاتی مزون  $\tau$  باشد و اگر در واپاشی  $\tau^+$  نیز پاریمه پایسته باشد، باید داشته باشیم

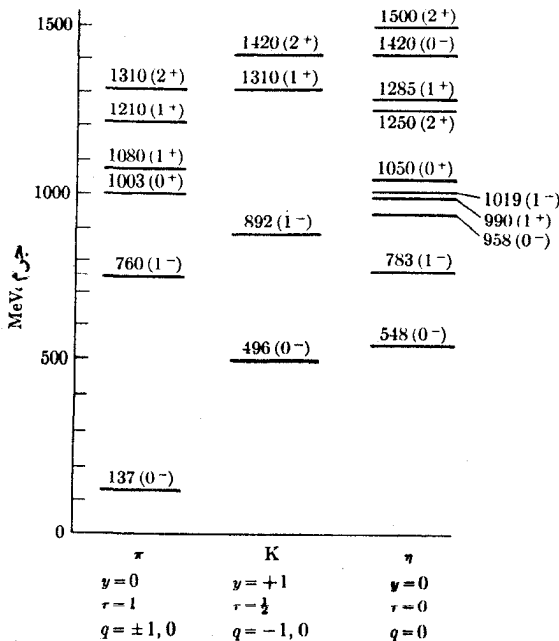
$$P_\tau = -(-1)^{l+L}$$

چون به نظر می رسد که اسپین مزون  $\tau$  مساوی با صفر است ( $s_\tau = 0$ )، باید داشته باشیم  $l = L$  و از این رو  $I + L$  مساوی است با عدد درست زوج و بنا بر این  $P_\tau = -1$ . از این رو،

هر گاه  $s_\theta = s_\pi = 0$  باشد، خواهیم داشت  $P_\theta = -P_\pi$  و پاریته دو ذره یکسان نخواهد بود. (هر گاه  $s_\theta = s_\pi = 1$  باشد، پس از یک تحلیل نسبتاً مشکلتر به همین نتیجه خواهیم رسید). بنابراین، فرض یکسان بودن ذرات  $\theta$  و  $\pi$  حاکی از آن است که قانون پاریته در یکی از این دو واپاشی نقض شده است.

### ۷.۹ تشدیدها

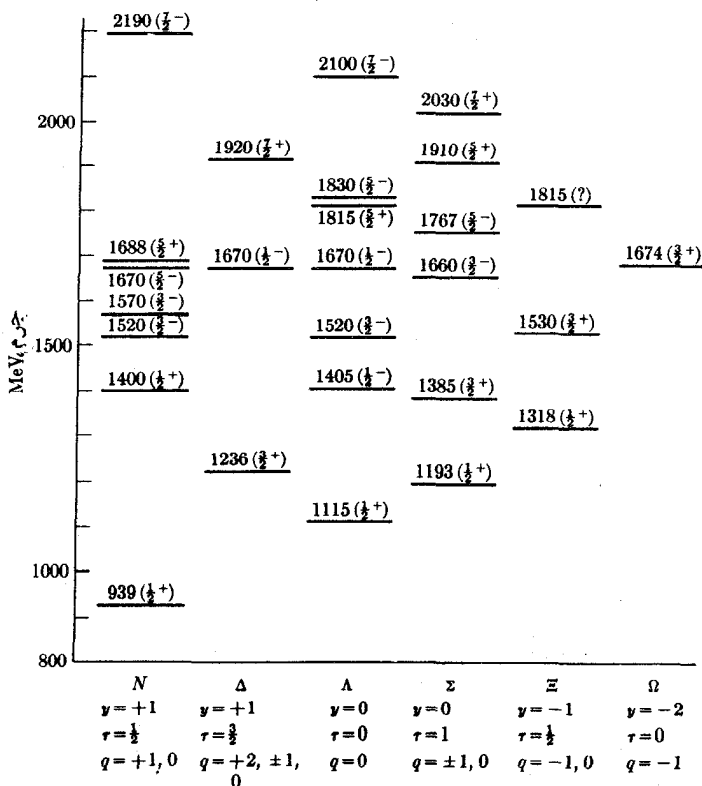
ذرات بنیادی جدول ۱۰۹، را می توان با توجه به معیارهایی که برای ذرات در نظر گرفته شده است ذرات با عمر طولانی در نظر گرفت. علاوه بر این ذرات با عمر طولانی، شواهد تجربی به دست آمده در چند سال اخیر نشان می دهند که ذرات با عمر خیلی کوتاهی نیز وجود دارند که به ذرات تشدید یا تشدیدها معروف اند. نیمه عمر این ذرات به قدری کوتاه است (در حدود  $10^{-20}$  تا  $10^{-15}$  ثانیه یا کمتر) که هیچ گونه رد قابل تشخیصی از خود در اتاقکهای حباب یا جرقه به جای نمی گذارند. این ذرات را می توان بر حسب عدد باریونی، فوق بار، و اسپین ایزوتوپی رده بندی و با همان نمادهای به کار رفته برای باریونها و مزونهای که اعداد کوانتومی آنها، بسا تشدیدها یکسان است مشخص کرد، منتهی باید بر حسب افزایش جرم



شکل ۲۴۰۹ تشدیدهای مزونی. اسپین و پاریته هر تشدید در داخل پرانتز داده شده است.

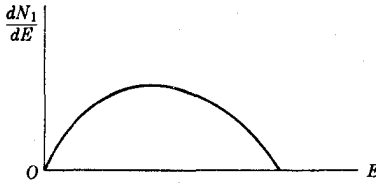
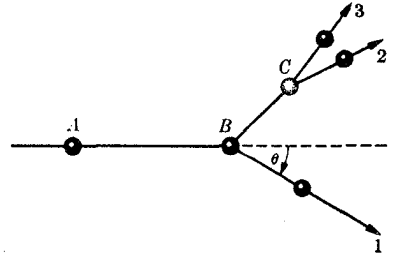
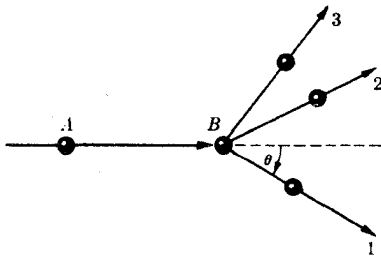
شاخصهای پایین ۱، ۲، ۳، ... را اضافه کرد. تعداد این تشدیدها با احتساب تمام حالت‌های بار و پاد ذرات در حدود ۸۵ است و این تعداد مرتباً در حال افزایش است. شکل ۲۴.۹ تعدادی از تشدیدهای مزونی و شکل ۲۵.۹ نیز تعدادی از تشدیدهای باریونی شناخته شده را نشان می‌دهد. در این شکل‌ها جرمها (بر حسب MeV)، اسپینها، و پارته‌های آنها نیز نشان داده شده‌اند.

تشدیدها به کمک اصول پایستگی انرژی و تکانه شناسایی می‌شوند. فرض کنید که ذره  $A$  با ذره دیگری مانند  $B$  که در چارچوب مرجع آزمایشگاه در حال سکون قرار دارد، برخورد می‌کند و ذرات ۱، ۲، ۳ را تشکیل می‌دهد [شکل ۲۶.۹ (الف)]، یعنی  $A + B \rightarrow 1 + 2 + 3$ . هر گاه ذره ۱ را تحت زاویه معینی نسبت به راستای حرکت  $A$  مشاهده کنیم، یک طیف پیوسته انرژی می‌بینیم، زیرا پایستگی انرژی و تکانه، برای یک راستای مشخص از حرکت ذره ۱، راستاهای متفاوت حرکت و انرژیهای مختلفی را برای ذرات ۲ و ۳ مجاز می‌داند. اکنون فرض می‌کنیم که فرایند بالا در دو مرحله صورت می‌گیرد،

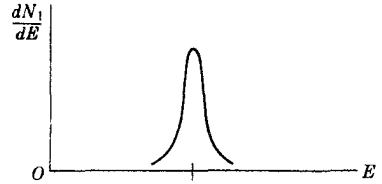


شکل ۲۵.۹ تشدیدهای باریونی. اسپین و پارته هر تشدید در داخل پرانتز داده شده است.





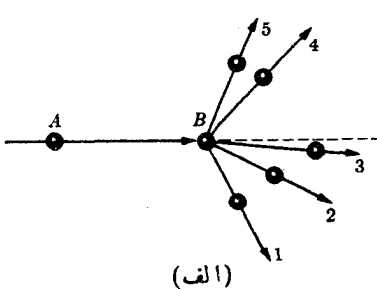
(الف)



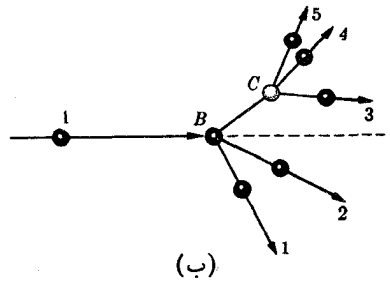
(ب)

شکل ۲۶.۹

در مرحله اول فقط دو ذره تولید می‌شود، یعنی  $A + B \rightarrow 1 + C$  و در مرحله دوم ذره  $C$  به دو ذره ۲ و ۳ واپاشیده می‌شود یعنی  $C \rightarrow 2 + 3$  [شکل ۲۶.۹ (ب)]. چون فرایندها فقط شامل دوزره است، برای هر راستای معین حرکت، انرژی ذره ۱ ثابت و طیف انرژی آن مانند چیزی است که در شکل نشان داده شده است. در این مورد انرژی ذرات  $2 + 3$  نیز ثابت خواهد بود. شکل ۲۷.۹ وضعیت پیچیده‌تری را نشان می‌دهد که در آن پنج ذره تولید شده‌اند. هر گاه ذرات ۳، ۴، و ۵ از واپاشی ذره  $C$  میانمی‌پسندند، همبستگی مشخصی باید میان انرژیهای آنها وجود داشته باشد. بنابراین با تحلیل انرژی ذرات حاصل از یک برخورد می‌توانیم تعیین کنیم که آیا فرایند در یک مرحله به وقوع می‌پیوندد یا در دو مرحله.

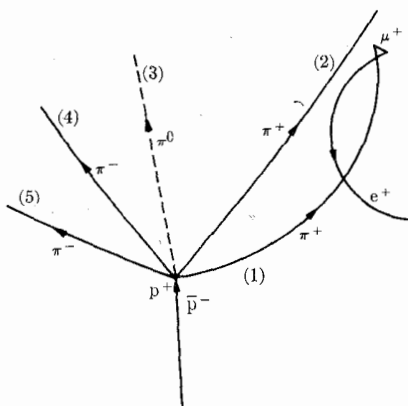
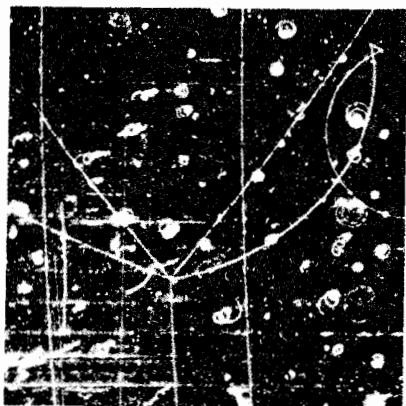


(الف)



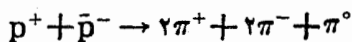
(ب)

شکل ۲۷.۹

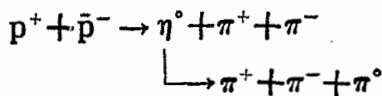


شکل ۲۸.۹ تولید تشدید  $\eta^0$  در واکنش نابودی پروتون-پاد پروتون.

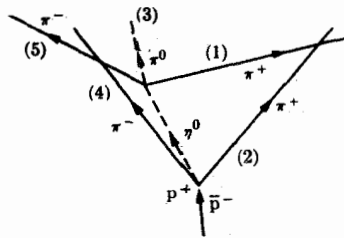
اولین ذره تشدید پی، که در حدود سال ۱۹۶۰ کشف شد، ذره  $\eta^0$  بود که در آن زمان  $\omega^0$  نامیده شد. این ذره در نتیجه تحلیل واکنش نابودی پروتون-پاد پروتون که در اتاقک حباب دانشگاه برکلی مشاهده شده بود کشف شد. یک نمونه از این نابودیها در شکل ۲۸.۹ نشان داده شده است که با تولید پنج پیون متناظر است



البته  $\pi^0$  قابل رؤیت نیست، ولی به کمک پایستگی تکانه و انرژی می توان به وجود آن پی برد. این فرایند را می توان همانند آنچه در شکل ۲۸.۹ رسم شده است نمایش داد. با تحلیل انرژیهای مزونها به کمک این واکنش و بسیاری فرایندهای مشابه دیگر می توان نتیجه گرفت که ۳ تا از این مزونها (در حالت مورد نظر ما مزونهایی که  $\pi^+$ ،  $\pi^-$ ،  $\pi^0$  و  $\pi^+$  مشخص شده اند) از واپاشی ذره کوتاه عمری ناشی شده اند که جرم سکون آن در حدود  $548 \text{ MeV}$  است و از این رو، یکی از  $\eta$  مزونهای است که با  $\eta^0$  مشخص می شود. بنا بر این به جای طرح بالا باید چنین نوشت



مراحل مختلف این فرایند در شکل ۲۹.۹ نشان داده شده است. توجه کنید که حتی اگر مزون  $\eta^0$  با سرعت نور ( $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ) حرکت کند، با توجه به طول عمر آن ( $2.6 \times 10^{-16} \text{ s}$ ) نمی تواند مسافتی بیشتر از  $3 \times 10^{-12} \text{ m}$  را طی کند. اندازه گیری یک چنین کمیتی در عکس



شکل ۲۹.۹ ناحیه بوهم کنش فرایند شکل ۲۸.۹ که در حدود ۱۰<sup>۱۲</sup> مرتبه بزرگ شده است.

اتاقک حباب غیر ممکن است.

تشدیدها توسط برهم کنشهای قوی واپاشیده می شوند، که طول عمر بی اندازه کوتاه آنها را هم توجیه می کند. تعدادی از واپاشیهای مشاهده شده عبارت اند از

مزونها

باریونها

$$\pi^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$$

$$N^+ \rightarrow p^+ + \pi^0$$

$$N^+ \rightarrow \eta^0 + \pi^+$$

$$\eta^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$$

$$\Lambda^0 \rightarrow \Sigma^0 + \pi^0$$

$$\Lambda^0 \rightarrow \Sigma^+ + \pi^-$$

$$K^+ \rightarrow K^+ + \pi^0$$

$$\Sigma^+ \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+$$

$$\Delta^{++} \rightarrow p^+ + \pi^+$$

در اینجا دانشجو باید قوانین پایستگی را در مورد این واپاشیها به کار ببرد و تعیین کند که کدام یک از این قوانین نقض شده است. همچنین توضیح دهد که چرا این واپاشیها توسط برهم کنشهای قوی به وقوع می پیوندند.

مثال ۷.۹ محاسبه پاشیدگی انرژی (در آزمایشگاه) دو فوتونی که از واپاشی مزون  $\pi^0$  با انرژی کل  $E_\pi$  نسبت به چارچوب آزمایشگاه تولید می شوند.

حل: مزون  $\pi^0$  با انرژی  $E_\pi$  و تکانه  $p_\pi$  نسبت به چارچوب آزمایشگاه (یا چارچوب  $L$ ) را در نظر می گیریم. در این صورت  $E_\pi = c\sqrt{m_\pi^2 c^2 + p_\pi^2}$ . سرعت مزون [در پیوست ۱، معادله (پ.۱۵)] را ببینید] برابر است با

$$v = \frac{c^2 p_\pi}{E_\pi} \quad (۱۲.۹)$$

که سرعت چارچوب مرجع مرکز جرم (که در آن  $\pi^0$  در حال سکون است) نسبت به چارچوب آزمایشگاه نیز هست. در چارچوب مرجع مرکز جرم، دو فوتون حاصل از واپاشی  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$  با انرژی  $E'_\gamma = (1/2)m_\pi c^2$  و تکانه  $p'_\gamma = E'_\gamma/c = (1/2)m_\pi c$  در جهتهای مخالف

گسیل می‌شوند. به واسطه تقارن در چارچوب مرجع مرکز جرم، فوتونها به‌طور همسانگرد گسیل می‌شوند. اما در چارچوب مرجع آزمایشگاه وضعیت چنین نیست، و به دلیل حرکت مرکز جرم، فوتونها بیشتر در جهت رو به جلو به حرکت درمی‌آیند.

به دلیل اثر دوپلر انرژی فوتونها در چارچوبهای مرکز جرم و آزمایشگاه یکسان نیست. به‌طور کلی، انرژی دو فوتون در چارچوب آزمایشگاه با هم برابر نیست. بیشینه پاشیدگی انرژی هنگامی ایجاد می‌شود که یک فوتون در راستای  $\pi$  (یا به طرف جلو) و دیگری در جهت مخالف آن (یا به طرف عقب) گسیل شود. در این صورت محاسبه انرژی دو فوتون در چارچوب آزمایشگاه آسان خواهد بود. هر گاه  $E_{\gamma 1}$  انرژی فوتون گسیل شده به طرف جلو و  $E_{\gamma 2}$  نیز انرژی فوتون گسیل شده به طرف عقب باشد، تکانه‌های آنها در راستای  $\pi$  عبارت‌اند از  $p_{\gamma 1} = E_{\gamma 1}/c$  و  $p_{\gamma 2} = -E_{\gamma 2}/c$  پایدگی انرژی و تکانه با روابط زیر داده می‌شود

$$E_{\pi} = E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2}, \quad p_{\pi} = E_{\gamma 1}/c - E_{\gamma 2}/c \quad (۱۳.۹)$$

به طوری که

$$E_{\gamma 1} = \frac{1}{2}(E_{\pi} + cp_{\pi}) \quad \text{و} \quad E_{\gamma 2} = \frac{1}{2}(E_{\pi} - cp_{\pi}) \quad (۱۴.۹)$$

از این رو پاشیدگی انرژیهای فوتونها در چارچوب آزمایشگاه به صورت  $\Delta E = E_{\gamma 1} - E_{\gamma 2} = cp_{\pi}$  است.

اکنون این فرمولها را در يك حالت خاص به کار می‌بریم. در برخورد  $\pi^- - p^+$  مشاهده شده که محصولات نهایی اغلب از يك نوترون و دو فوتون تشکیل شده‌اند. بنابراین واکنش بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

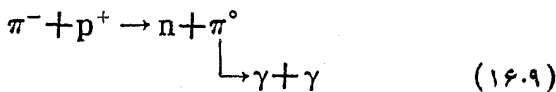


اگر این واکنش در يك مرحله به وقوع بپیوندد [یعنی متناظر با شکل ۲۶.۹ الف) و با شناسایی درست ذرات]، در این صورت مسئله، مسئله سه جسم خواهد بود. با فرض اینکه  $\pi^-$  و  $p^+$  هر دو در چارچوب آزمایشگاه در حال سکون باشند، انرژی کل موجود عبارت است از

$$Q = (m_{\pi^-} + m_p - m_n)c^2 = 139 \text{ MeV}$$

این انرژی باید به صورت انرژی جنبشی سه ذره حاصل ظاهر شود. چون این انرژی می‌تواند به صورت پیوسته‌ای میان سه ذره توزیع شود، فوتونها می‌توانند هر مقدار انرژی از صفر تا تقریباً ۱۳۹ MeV داشته باشند.

فرایند مشابه دیگر فرایندی است که در دو مرحله به وقوع می‌پیوندد یعنی



که با شکل ۲۶.۹ (ب) متناظر است. در این مورد انرژی آزاد شده (البته اگر  $\pi^-$  و  $p^+$  هر دو در چارچوب مرجع آزمایشگاه در حال سکون باشند) عبارت است از

$$Q = (m_{\pi^-} + m_p - m_n - m_{\pi^0})c^2 = 4 \text{ MeV}$$

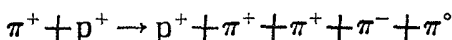
این انرژی به صورت انرژی جنبشی  $\pi^0$  و  $n$  ظاهر می شود و لذا بر طبق قوانین پایستگی انرژی و تکانه [در پیوست ۲، معادله (پ.۲۷) را ببینید] انرژی جنبشی  $\pi^0$  برابر است با

$$E_{k, \pi^0} = \frac{m_n}{m_n + m_{\pi^0}} Q \approx 3.6 \text{ MeV}$$

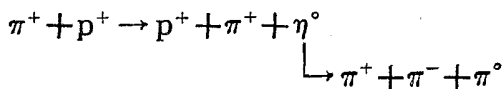
در این رابطه ما از فرمول غیرنسبیتی استفاده کرده ایم، زیرا انرژی جنبشی پیون خیلی کوچکتر از جرم سکون آن است. بنابراین، انرژی کل  $\pi^0$  متناظر با  $cp_{\pi} \sim 3.1 \text{ MeV}$  در حدود  $138.6 \text{ MeV}$  است، که برابر پاشیدگی انرژی فوتونهای حاصل از واپاشی پیون است. در این صورت انرژیهای فوتون در گستره  $(138.6 \pm 3.1)/2 \text{ MeV}$  یا از  $E_{\gamma 1} \sim 5.4 \text{ MeV}$  تا  $E_{\gamma 2} \sim 85 \text{ MeV}$  قرار می گیرند. این چیزی است که به طور تجربی مشاهده شده است و ثابت می کند که برخورد  $p^+ - \pi^-$  یک فرایند دو مرحله ای است که بر طبق معادله (۱۶.۹) به وقوع می پیوندد. بنا بر این، این مثال نشان دهنده چیزی است که ما درباره شناسایی تشدیدها به کمک همبستگیهای انرژی-تکانه گفته ایم.

### مثال ۸.۹ آشکارسازی ذره $\eta^0$ .

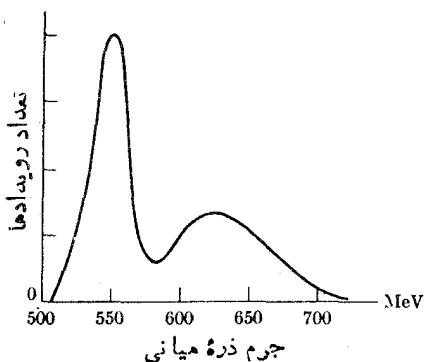
**حل:** همچنان که در ارتباط با شکل‌های ۲۸.۹ و ۲۹.۹ گفتیم، عمر ذره  $\eta^0$  آنچنان کوتاه است که نمی تواند ردهای قابل اندازه گیری در اتاقک حباب از خود به جای بگذارد. به همین دلیل است که ذره  $\eta^0$  مانند یک تشدید رفتاری کند. واکنش زیر را در نظر می گیریم



هرگاه تمام پیونها در زمان برخورد تولید شوند، فرایند بالا با شکل ۲۷.۹ (الف) متناظر است، و هیچ همبستگی میان انرژی و تکانه پنج ذره وجود ندارد به استثنای آن رابطه ای که در اثر قوانین پایستگی کلی به سیستم تحمیل می شود. اما این امکان وجود دارد که این فرایند در دو مرحله به وقوع پیوندد.



که متناظر با شکل ۲۷.۹ (ب) است. در این مورد، انرژی و تکانه سه ذره حاصل از واپاشی  $\eta^0$  باید با انرژی و تکانه ذره ای به جرم معین سازگار باشد. توجه کنید که در این مورد باید داشته باشیم



**شکل ۳۰.۹** جرم تجربی تشدید میانی  $\eta^0$ . اگر این ذره وجود نداشت، یک توزیع جرم بدون قله‌ها مشاهده می‌شد.

$$E_{\pi} + E_p \rightarrow E'_p + E'_{\pi} + E_{\eta}$$

$$\mathbf{p}_{\pi} + \mathbf{p}_p \rightarrow \mathbf{p}'_p + \mathbf{p}'_{\pi} + \mathbf{p}_{\eta}$$

از لحاظ تجربی ممکن است  $E_{\eta}$  و  $\mathbf{p}_{\eta}$  را با اندازه‌گیری سایر کمیتها تعیین کنیم، و به کمک آن مقادیر بتوانیم جرم  $\eta^0$  را به دست آوریم. اشکال کار در آن است که دو  $\pi^+$  را مشاهده می‌کنیم و نمی‌توانیم بگوییم که کدام یک  $\pi^+$  اولیه است و کدام یک از  $\eta^0$  نتیجه شده است. بنا بر این مجبوریم که محاسبات جرم را برای  $\eta^0$  در هر دو مورد با استفاده از هر دو  $\pi^+$  انجام دهیم. این نتیجه تجربی در شکل ۳۰.۹ نشان داده شده است. قله مشخص موجود در حدود جرمی معادل با ۵۵۰ MeV (که با  $\pi^+$  متناسظر است) دلیل آن است که فرایند مزبور دو مرحله‌ای است و شامل یک ذره  $\eta^0$  با جرمی در این حدود است. باقیمانده توزیع جرم ناشی از انتخاب غلط یک  $\pi^+$  در هر مورد است. از این رو، مجدداً ملاحظه می‌کنیم که چطور قوانین پایستگی به ما این امکان را می‌دهند که به وجود ذراتی پی ببریم که به هیچ طریق دیگری نمی‌توان آنها را مشاهده کرد.

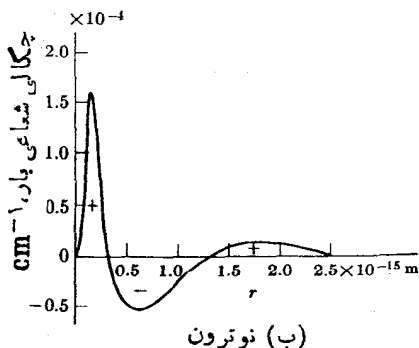
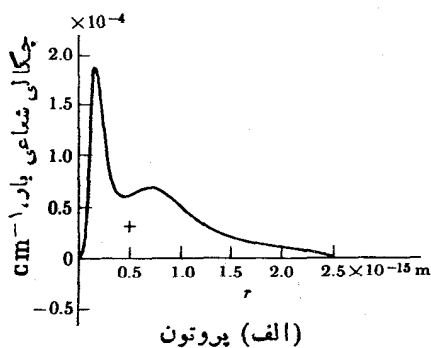
## ۸.۹ ذره بنیادی چیست؟

اکنون این سؤال مطرح می‌شود که آیا در وضعیتی هستیم که ذره بنیادی را تعریف کنیم؟ می‌دانیم که ذرات بنیادی موجودیتهای فیزیکی دقیقی هستند که با خواص مشخصی همچون بار، جرم، اسپین، و مانند آن توصیف می‌شوند و نیز می‌دانیم که این ذرات بر طبق برهم‌کنشهای کم و بیش مشخصی چون برهم‌کنشهای قوی، الکترومغناطیسی، ضعیف، و گرانشی با هم برهم‌کنش می‌کنند، و بالاخره می‌دانیم که تمام فرایندهایی که میان این ذرات

به وقوع می پیوندد از قوانین پایستگی مشخصی پیروی می کنند. با وجود این، هنوز هم تعداد زیادی سؤال جدی و مهم وجود دارند. مثلاً چرا تعداد زیادی از این نوع ذرات وجود دارد؟ هر کدام از آنها در طبیعت چه وظیفه‌ای به عهده دارند؟ چگونه به هم مربوط می شوند؟ چرا مقادیر جرم و اسپین مشخصی دارند؟ چرا به دو رده کاملاً متمایز بوزونها و فرمیونها تقسیم می شوند؟

به همان طریقی که اتمها را بررسی می کنیم، یعنی آنها را به صورت ترکیبی از اجزای اساسی مشخص (الکترونها، پروتونها، و نوترونها) در نظر می گیریم، و یا هسته‌ها را ترکیبی از پروتونها و نوترونها می دانیم، می توانیم فرض کنیم که تمام ذرات بنیادی نیز ترکیبی از سنگ بناهای مشخصی یا مجموعه‌ای از ذرات فوق بنیادی هستند. گل‌مان نام کوادک را برای این ذرات فوق بنیادی پیشنهاد کرد. کوادکها خواص جدید و مشخصی مانند بار کسری ( $e/3$  یا  $2e/3$ ) و مانند آن دارند. اما به رغم تحقیقات شدید و گسترده، هنوز کسی موفق نشده است که کوادکها را مشاهده کند. به عبارت دیگر می توانیم فرض کنیم که مثلاً، تمام باریونها و ذرات تشدیدی آنها حالت‌های برانگیخته یک باریون اساسی هستند (البته می توان استدلال مشابهی را برای مزونها نیز به کار برد)، درست مثل اتم هیدروژن که می تواند در حالت پایه و یا در یکی از حالت‌های برانگیخته خود وجود داشته باشد و هر حالت انرژی، تکانه زاویه‌ای، و پارته مخصوص به خود دارد. هنوز هیچ نظریه قابل قبولی در این باره مطرح نشده است.

به هر تقدیر، آنچه را که ما ذرات بنیادی می نامیم، ظاهراً جوهرهای بسیطی نیستند. فیزیکدانان برای چندین سال نوکلئون را متشکل از یک مغز، یعنی یک نوکلئون «لخت» که غیر قابل مشاهده است، می دانستند که با ابری از پیونها احاطه شده است، درست مثل اتم که از یک هسته و یک ابر الکترونی تشکیل شده است. توزیع شعاعی بار این ابر پیونی برای پروتون و نوترون می تواند مطابق آنچه باشد که در شکل ۳۱۰۹ نشان داده شده است. برای نوترون، بار کل مساوی با صفر است (ضمناً با همین روش می توانیم نوترون را از



شکل ۳۱۰۹ توزیع نظری شعاعی بار برای (الف) پروتونها، (ب) نوترونها.

پاد نوترون تشخیص دهیم، زیرا در مورد پاد نوترون، علامت لایه‌های مختلف توزیع بار وارونه می‌شود). این نمودارها شبیه به نمودارهای موجود در شکل ۱۳.۳ برای توزیع شعاعی بار الکترون در اتم هستند. تاکنون هیچ نظریه‌ای در مورد دینامیک پیون در نوکلئون مطرح نشده است، ولسی ظاهراً ابر پیونی ممکن است به سطوح انرژی بالاتری برانگیخته شود و، درست مثل اتمها که می‌توانند به حالت‌های الکترونی مختلف برانگیخته شوند، ایزو بارهای نوکلئونی تشکیل دهد.

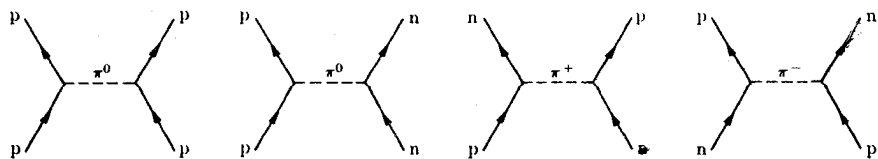
جنبه جالب توجه دیگر، تعبیر این برهم کنشها به عنوان نتیجه‌ای از تبادل بوزونها بین ذرات برهم کنش کننده است. همان طور که در شکل ۱۳.۱ دیده می‌شود، از مبادله فوتونها میان دو ذره باردار، برهم کنش الکترومغناطیسی نتیجه می‌شود. به طریق مشابه، می‌توان قبول کرد که برهم کنش قوی نیز، مانند آنچه در شکل ۳۲.۹ نشان داده شده است، نتیجه تبادل پیون‌ها میان ذرات برهم کنش کننده است. ذرات مبادله شده را ذرات «مجازی» می‌نامند زیرا نمی‌توان آنها را به صورت موجودیهای مجزا آشکار کرد. با این مدل که برای توضیح برهم کنشها به کار می‌رود، برد کوتاه نیروهای هسته‌ای را می‌توان به راحتی توجیه کرد. پروتون یک سیستم ایستا نیست، بلکه همواره تعدادی از پیونهای اطراف خود را دفع و مجدداً جذب می‌کند. هنگامی که یک پیون مجازی گسیل شود، انرژی پروتون به اندازه مقدار زیر تغییر می‌کند

$$\Delta E \sim m_{\pi} c^2 \sim 140 \text{ MeV}$$

طبق اصل عدم قطعیت هایزنبرگ [معادله (۲۹.۱)]. این پیون بدون نقض قوانین مکانیک کوانتومی می‌تواند در خلال مدت زمان  $\Delta t$  وجود داشته باشد، به طوری که

$$\Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E} \sim \frac{\hbar}{m_{\pi} c^2} \sim 10^{-22} \text{ s}$$

پس از این مدت پیون مجازی باید توسط نوکلئون مجدداً جذب یا اینکه با نوکلئون دیگری مبادله شود. اگر فرض کنیم که در این مدت پیون با سرعتی نزدیک به سرعت نور حرکت کند، بیشینه مسافتی که می‌تواند طی کند در حدود  $10^{-14} \text{ m}$  است. بدین ترتیب برای اینکه نوکلئون دیگری بتواند پیون مجازی را جذب کند، حتماً باید حداکثر



شکل ۳۲.۹ برهم کنش قوی حاصل از تبادل پیونها.



در این فاصله از نوکلئون اولی قرار داشته باشد. با کمی دقت به این واقعیت پی می‌بریم که این فاصله دقیقاً برابر بزرگی برد برهم‌کنش هسته‌ای است. با در نظر گرفتن این مدل برای نوکلئونها و برهم‌کنشهای آنها به این نکته پی می‌بریم که این بیان که هر هسته متشکل است از پروتونها و نوترونها واقعاً مطلب را بیش از حد ساده می‌کند. بهترین دلیل این موضوع که نوترون مقید معادل با نوترون آزاد نیست، این است که به‌طور کلی نوترونهای مقید پایدارند و واپاشیده نمی‌شوند.

در مورد برهم‌کنشهای الکترومغناطیسی می‌توان فرض کرد که یک ذره باردار دائم فوتونهای مجازی گسیل و جذب می‌کند. جرم سکون فوتونهای مجازی گسیل شده به‌وسیله ذرات باردار، برابر صفر است و از این رو، افت و خیز انرژی،  $\Delta E$ ، ذره باردار می‌تواند هر مقدار دلخواهی باشد. ضمناً طول زمانی که فوتون مجازی می‌تواند وجود داشته باشد، قبل از اینکه جذب مجدد شود یا با ذره باردار دیگری مبادله شود، نیز اختیاری است. محاسبه نشان می‌دهد که نیروی میان دو ذره باردار که از مبادله فوتونهای با جرم سکون صفر نتیجه می‌شود، باید به‌صورت عکس مجذور فاصله میان دو بار تغییر کند. این نتیجه با قانون کولن سازگار است.

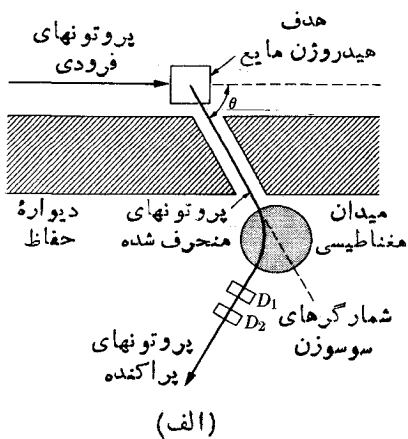
بنابر این چنین به نظر می‌آید که پیوندها حاملهای برهم‌کنش قوی هستند. به همین دلیل وجود گراویتون نیز به‌عنوان حامل برهم‌کنش گرانشی فرض شده است. ضمناً ذره دیگری نیز (یک بوزون ضعیف یا  $W$ ) حامل برهم‌کنشهای ضعیف در نظر گرفته شده است. البته باید توجه داشت که هیچیک از این ذرات تاکنون مشاهده نشده‌اند.

با اینکه نظریه ذرات بنیادی هنوز در مراحل اولیه تکاملی قرار دارد، فیزیکدانان تاکنون توانسته‌اند (به کمک پاره‌ای از مفاهیم دقیق ریاضی) اطلاعاتی در باره ارتباط میان ذرات به‌دست آورند. شاید بتوان گفت که جالبترین نظریه همان نظریه پیشنهاد شده در سال ۱۹۶۱ توسط کلمان و نویمان باشد که دوش هشت‌لا معروف است و به مجموعه‌ای از هشت عملگر اساسی نیاز دارد. این نظریه پیشگویی می‌کند که، میان باریونها و مزونها، مضاربی از هشت زده باید وجود داشته و روابط مشخصی میان اعداد کوانتومی و جرم آنها برقرار باشد. همچنین فرض شده است که گروههای دیگری با تعداد بیشتری زده نیز وجود دارند. این نظریه پیشگویی کرد که ذره  $\Omega$  وجود دارد و کمی بعد در فوریه سال ۱۹۶۴ این ذره در آزمایشگاه ملی بروکهایون مشاهده شد (مثال ۱۰.۹).

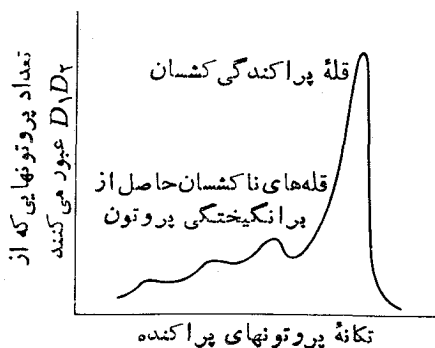
فیزیک ذرات بنیادی یکی از فعالترین و پرتحرکترین شاخه‌های فیزیک معاصر است و تحقیقات زیادی در این زمینه صورت می‌گیرد. برای بررسی مسائل موجود مرتباً شتابدهنده‌های جدید و بزرگی ساخته می‌شوند، اما همین شتابدهنده‌ها نیز با آشکار ساختن فرایندهای جدید و غیر منتظره غالباً مسائل تازه‌ای را ایجاد می‌کنند. با وجود این، امید می‌رود که در سالهای آینده آگاهی ما در زمینه ذرات بنیادی به پایه آگاهی ما در مورد هسته‌ها، آنها، و مولکولها برسد.

**مثال ۹.۰۹** پراکندگی ناکشسان پروتونهای پرانرژی ناشی از برخورد های پروتون-پروتون را بررسی کنید.

**حل:** آزمایش مهمی که وجود حالت های برانگیخته نوکلئونی را نشان می دهد (یعنی، ایزوبارهای نوکلئونی که در آنها ابر پیونی به يك حالت انرژی برانگیخته بالا رفته است)، تحلیل برخوردهای پروتون-پروتون است. آرایش تجربی این آزمایش در شکل ۳۳.۹ (الف) نشان داده شده است. پروتونهای خارج شده از شتاب دهنده به يك هدف هیدروژن مایع برخورد می کنند. آن تعداد از پروتونهایی که تحت زاویه ثابت  $\theta$  پراکنده می شوند از داخل میدان مغناطیسی  $B$  عبور می کنند. تحت اثر این میدان، تعدادی از پروتونها قوسی از يك دایره به شعاع ثابت  $r$  را طی می کنند. به كمك راستای اولیه حرکت و وضعیت آشکارسازهای  $D_1$  و  $D_2$  می توان مقدار  $r$  را به دست آورد. در نتیجه، تکانه پروتونها به كمك رابطه  $p = eBr$  تعیین می شود. با تغییر شدت میدان مغناطیسی می توان تکانه پروتونهایی را که از میان آشکارسازهای ثابت عبور می کنند تغییر داد و توزیع تکانه پروتونهای پراکنده شده را تحلیل کرد. نتایج تجربی در شکل ۳۳.۹ (ب) نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود، علاوه بر قله اصلی در توزیع تکانه پروتونها (متناظر با پراکندگی کشسان توسط هدف)، چندین قله ثانویه نیز وجود دارد که با پروتونهایی که تکانه یا انرژی جنبشی آنها کمتر است متناظرند. این قله های ثانویه با پراکندگی ناکشسانی که در آن، پروتونهای ورودی قسمتی از انرژی جنبشی خود را به يك پروتون هدف منتقل می کنند و آن را به يك حالت ایزوباری برانگیخته به انرژی معین بالا می برند متناظرند. با کمی دقت معلوم می شود که این آزمایش شبیه است به آزمایش برخورد ناکشسان اتم-الکترون فرانک و هرتز که وجود ویژه حالت های اتمی برانگیخته با انرژی مشخص را



(الف)



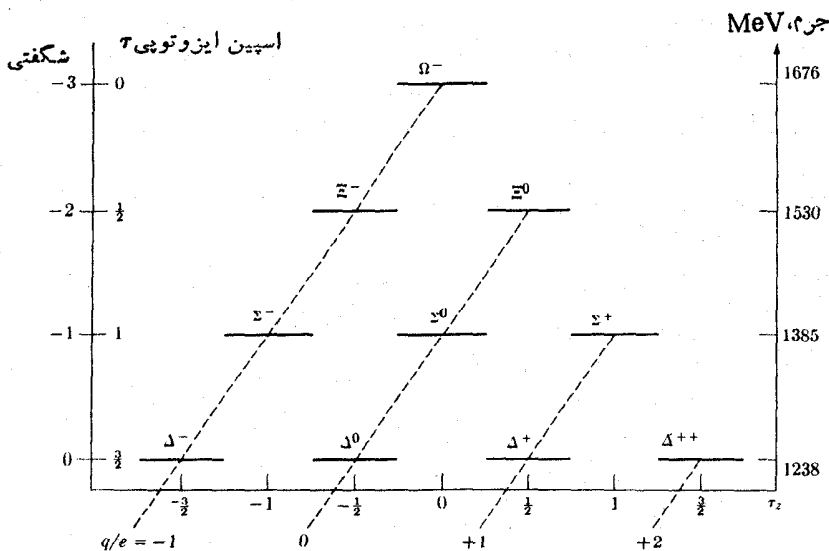
(ب)

**شکل ۳۳.۹** (الف) نمودار طرح وار مربوط به آزمایش پراکندگی ناکشسان پروتون-پروتون. (ب) نتایج تجربی نشان دهنده قله های پراکندگی ناکشسان.

نشان می‌دهد.

### مثال ۱۰.۹ آزمایش امگامفی را توضیح دهید.

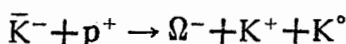
حل: بر طبق نظریه «روش هشت لای» گلگمان، ذرات به دسته‌ها و خانواده‌هایی تقسیم بندی می‌شوند به گونه‌ای که تمام اعضای یک خانواده اسپین و پاریته یکسان دارند. هر گاه به تشدیدهای نشان داده شده در شکل ۲۵.۹ نظر افکنیم و نمودار خانواده ده ذره سبکتر با اسپین ۳/۲ (و پاریته مثبت) را رسم کنیم، آرایش شکل ۳۴.۹ را به دست خواهیم آورد که از تقارن هندسی خاصی برخوردار است. در زمان پیشنهاد گلگمان (یعنی در سال ۱۹۶۱) فقط حالت‌های چهار تایی  $\Delta$  و سه تایی  $\Sigma$  شناخته شده بودند. ولی کمی بعد (یعنی در سال ۱۹۶۲) وجود حالت دوتایی  $\Xi$  نیز گزارش و معلوم شد که به خوبی با این طرح مطابقت دارد. به کمک نظم ساختار هرمی می‌توان پیشگویی کرد که مشخصه ذره باقیمانده واقع در قله هرم باید  $\tau_p = 0$  و  $\tau_n = 0$  باشد و از این رو یک حالت یکتایی است. ضمناً شگفتی آن باید  $-3 = \mu$  باشد که بر طبق معادله (۱۱.۹) بار  $-e$  را به دست می‌دهد. بالاخره، از نظم موجود در اختلاف‌های جرم  $\Sigma - \Delta$  و  $\Xi - \Sigma$  می‌توان حدس زد که این ذره جدید باید (که گلگمان آن را  $\Omega^-$  نامید) جرمی در حدود  $1675 \text{ MeV}$  داشته باشد.



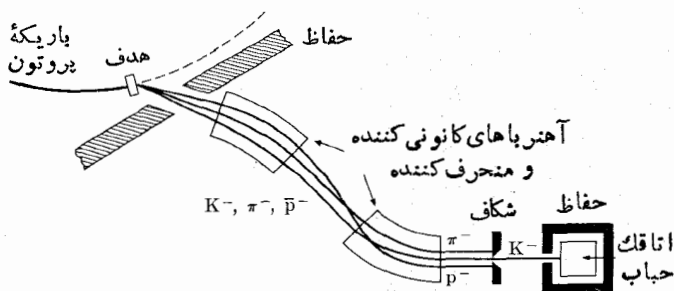
شکل ۳۴.۹ آرایش حاصل از روش هشت لای، گلگمان در مورد هیپرون‌های سبکتر با اسپین ۳/۲ و پاریته مثبت.

بنا بر این ذره‌ای که جای آن در نمودار خالی بود کاملاً شناسایی شد (البته باید توجه داشت که پیشگویی گل‌مان بزرگ منبای نظری استوار بود که خیلی جدیتر از این آرایش هندسی ساده است). به کمک این خواص فیزیکدانان تجربی انتظار داشتند که، با توجه به قوانین پایستگی،  $\Omega^-$  به  $\pi^- + \pi^-$ ،  $\pi^- + \pi^0$ ، و یا  $\bar{K}^- + \Lambda^0$  واپاشیده شود. این بدان معنی بود که آنها با مشاهده محصولات واپاشی، می‌توانستند سرنخی برای پیدا کردن این ذره به دست بیاورند.

قدم بعدی آن بود که آیا می‌توان این ذره را در آزمایشگاه تولید و مشاهده کرد؟ يك فرایند ممکن، که با قوانین پایستگی سازگاری دارد، به صورت زیر است.



در سال ۱۹۶۳ در آزمایشگاه ملی بروک‌هیون شرایط لازم برای تولید این ذره فراهم شد. يك باریکه پسر تون ۳۳ GeV ایجاد شده در شتابدهنده به يك هدف تنگستن برخورد و مزونهای  $\bar{K}^-$  را همراه با پیونها، پاد پروتونها، و سایر ذرات تولید می‌کرد. برای جدا کردن مزونهای  $\bar{K}^-$  از سایر ذرات، آزمایش‌کنندگان يك آرایش ابتکاری را که طرح ساده آن در شکل ۳۵.۹ دیده می‌شود ابداع کردند. برای سهولت آزمایش آنها ذرات  $\bar{K}^-$  با انرژی جنبشی ۵۵۰ GeV را اختیار کردند (که کاملاً در بالای انرژی آستانه ۳۲۲ MeV فرایند قرار دارد) و به کمک يك آهنربای منحرف‌کننده آنها را از لوله شتابدهنده خارج کردند. باریکه خارج شده، علاوه بر ذرات  $\bar{K}^-$ ، شامل تعداد زیادی  $\pi^-$  و تعداد کمی  $\bar{p}^-$  بود و بنابراین وظیفه بعدی آن بود که ذرات  $\bar{K}^-$  را از سایر ذرات جدا کنند. به کمک يك مجموعه ثانویه از آهنرباهای منحرف‌کننده و جداکننده همراه با يك آرایش شکاف امکان جداسازی ذرات  $\bar{K}^-$  از بقیه ذرات فراهم شد. سپس این باریکه تقریباً خالص  $\bar{K}^-$  را (که فقط شامل حدود ۱۰ درصد  $\pi^-$  و بدون پاد پروتون بود)



شکل ۳۵.۹ نمودار طرح‌وار مربوط به آزمایش  $\Omega^-$ . قبل از جداسازی به‌ازای هر ۱۰ ذره  $\bar{K}^-$  تعداد تقریباً ۸۰۰  $\pi^-$  و ۱۰  $\bar{p}^-$  وجود داشت. پس از جداسازی، این تعداد به فقط يك  $\pi^-$  (بدون  $\bar{p}^-$ ) کاهش یافت.



تکانه‌ها، و جهت‌های حرکت  $\Lambda^\circ$  و دو ذره  $\gamma$  به دست می‌آید و از این رو وضعیت رأس  $D$  و انرژی، تکانه، و جهت حرکت  $\Xi^\circ$  مشخص می‌شود. بالاخره با به کار بردن اطلاعات قبلی، آزمایش کنندگان موفق شدند که انرژی و تکانه  $\Omega^-$  را از روی اطلاعات به دست آمده در رأس  $E$  محاسبه کنند. تحلیل انجام شده مقدار جرمی بین  $1668\text{MeV}$  و  $1686\text{MeV}$  را به دست داد. دومین عکس که چند هفته پس از آن گرفته شد گستره جرم را بین  $1671\text{MeV}$  و  $1677\text{MeV}$  به دست داد که با پیشگویی نظری سازگاری داشت. طول مسیر  $\Omega^-$  در اتاقک در حدود  $2.5\text{cm}$  بود و این نشان می‌داد که طول عمر  $\Omega^-$  در حدود  $10^{-10}\text{s} \sim 10^8\text{m} / 3 \times 10^8\text{ms}^{-1} \times 10^{-2}$  است.

### مسائل

۱۰۹ شعاع، انرژی، و سرعت زاویه‌ای مدار حالت پایه پوزیترونیم را محاسبه و اولین انرژی برانگیختگی آن را نیز تعیین کنید. به طور متوسط تا قبل از اینکه پوزیترونیم نابود شود، چه تعداد گردش را در دو حالت زیر انجام می‌دهد (الف) هر گاه در حالت تکتابی قرار داشته باشد (ب) هر گاه در حالت سه‌تابی واقع شده باشد.

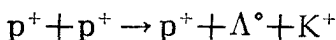
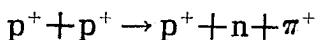
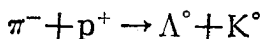
۲۰۹ هنگامی که مزون باردار  $\mu$  و یک الکترون یا پوزیترون حول همدیگر گردش می‌کنند میونیم تشکیل می‌شود. انرژی و شعاع میونیم در حالت پایه را تعیین کنید و انرژی تفکیک آن را به دست آورید.

۳۰۹ یک پیون منفی می‌تواند بر روی یک مدار پایدار حول هسته قرار گیرد و اتم هزیک تشکیل دهد. با فرض اینکه بتوان انرژی و شعاع مدار مزونیک را با همان فرمولهای به کار برده شده برای مدارهای الکترونی در اتم هیدروژن محاسبه کرد (مثال ۱۰۳). (الف) هنگامی که یک پیون آزاد در حال سکون در حالت پایه حول یک پروتون قرار می‌گیرد، چه مقدار انرژی رها می‌شود. (ب) شعاع مدار حالت پایه یک پیون در حرکت به دور پروتون را محاسبه کنید. (ج) هسته‌ای را تخمین بزنید که برای آن، شعاع مدار حالت پایه پیون مساوی با شعاع هسته باشد.

۴۰۹ یک کائون خنثی با انرژی جنبشی  $100\text{MeV}$  در حین حرکت به دو پیون با علامت مخالف واپاشیده می‌شود. انرژی جنبشی یکی از پیونها مساوی با  $200\text{MeV}$  است، تکانه هر پیون و زوایایی را که مسیر آنها در چارچوب مرجع آزمایشگاه تشکیل می‌دهد محاسبه کنید.

۵۰۹ مزون خنثای  $K^\circ$  به یک زوج پیون باردار مختلف‌العلامه واپاشیده می‌شود. در آغاز مسیر پیونها در چارچوب مرجع آزمایشگاه متعامد است ولی بعداً تحت اثر میدان مغناطیسی  $T \times 10^{-1} 85$  خمیده می‌شوند، به طوری که به ترتیب شعاعهای  $8\text{m}$  و  $16\text{m}$  را پیدا می‌کنند. جرم سکون مزون  $K^\circ$  و انرژی جنبشی آن را محاسبه کنید.

۶۰۹ مقدار  $Q$  و انرژی آستانه پرتابه در چارچوب مرجع آزمایشگاه را برای واکنشهای زیر تعیین کنید



در هر مورد، پرتابه اولین ذره و هدف دومین ذره است که فرض می شود در چارچوب مرجع آزمایشگاه در حال سکون قرار دارد.

۷۰۹ کمینه انرژی جنبشی مورد نیاز برای پروتون ورودی در فرایند نشان داده شده در شکل ۱۲.۹ را محاسبه کنید.

۸۰۹ انرژی فوتون در فرایند  $\pi^- + p^+ \rightarrow n + \gamma$  را هنگامی که هر دو ذره برخوردکننده در حال سکون قرار دارند تعیین کنید.

۹۰۹ انرژی جنبشی آستانه ذره ورودی برای فرایندهای نشان داده شده در شکل‌های ۱۰.۹ و ۱۱.۹ را به دست آورید.

۱۰۰۹ میدان مغناطیسی برای مقدار انتخاب شده تکانه  $\bar{p}^-$  در آزمایش پاد پروتون (مثال ۲.۹) چقدر است؟

۱۱۰۹ در فرایند  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$  حالتی را در نظر می گیریم که در آن فوتونها در چارچوب مرجع مرکز جرم در راستای عمود بر  $p_{\pi}$  (چارچوب مرجع آزمایشگاه) گسیل می شوند. نشان دهید که در چارچوب مرجع آزمایشگاه انرژیهای آنها مساوی با  $E_{\pi}/2$  است و در راستایی که با  $p_{\pi}$  زاویه  $\tan^{-1} m_{\pi} c / p_{\pi}$  می سازد حرکت می کنند.

۱۲۰۹ يك مزون  $\pi^0$  که انرژی جنبشی آن در چارچوب مرجع آزمایشگاه مساوی با انرژی سکون خودش است به دو فوتون واپاشیده می شود. فرض کنید که در چارچوب مرجع مرکز جرم، فوتونها به ترتیب تحت زوایای  $30^\circ$  و  $210^\circ$  نسبت به راستای حرکت  $\pi^0$  در چارچوب مرجع آزمایشگاه گسیل می شوند. انرژیهای آنها و زاویه ای که با راستاهای حرکت آنها در چارچوب مرجع آزمایشگاه تشکیل می شود چقدر است؟

۱۳۰۹ واپاشی مزون  $\pi^0$  به دو فوتون را در نظر می گیریم. هر گاه انرژیهای فوتونها را با  $E_1$  و  $E_2$  نشان دهیم، ثابت کنید که بین آنها رابطه زیر برقرار است

$$E_1 E_2 = \frac{(m_{\pi} c^2)^2 / 2}{(1 - \cos\theta)}$$

که در آن  $\theta$  زاویه بین راستاهای حرکت فوتونهاست که در چارچوب مرجع آزمایشگاه اندازه گیری می شود.

۱۴۰۹ باریکسهای از پیوندهای منفی ( $\pi^-$ ) در داخل اتاقک حباب وارد و واکنش  $\pi^- + p^+ \rightarrow \Lambda^0 + K^0$  را موجب می شوند. در داخل اتاقک، فرایندهای واپاشی متوالی  $\Lambda^0$  و  $K^0$  نیز رخ می دهد. یک میدان مغناطیسی نیز در ناحیه اشغال شده به وسیله اتاقک اعمال می شود. نموداری رسم کنید که تمام فرایندها را نشان دهد. توجه کنید که ذرات خنثی را با خط چین و ذرات باردار را با خطوط پر با انحنا مناسب نمایش دهید.

۱۵۰۹ پوزیترونی با انرژی ۱ MeV به الکترونی که در چارچوب مرجع آزمایشگاه در حال سکون قرار دارد برخورد می کند و هر دو نابود می شوند. (الف) انرژی دو فوتون گسیل شده را در چارچوب مرجع مرکز جرم به دست آورید. (ب) هرگاه یک فوتون در راستای حرکت پوزیترون و دیگری در جهت مخالف گسیل شود، انرژیهای آنها را در چارچوب مرجع آزمایشگاه محاسبه کنید.

۱۶۰۹ احتمال نابودی پوزیترونها در واحد زمان مساوی با  $\lambda = 7.48 \times 10^{-15} \text{ ns}^{-1}$  است که در آن  $n$  تعداد الکترونها در یکای حجم است. نشان دهید که نیمه عمر پوزیترونهايي که در داخل آرگون ( $Z = 18$ ) حرکت می کنند برابر با  $T = 2.67 \times 10^{-7} / p$  است که در آن  $p$  فشار آرگون بر حسب فشار جو است.

۱۷۰۹ درشتابدهنده (AGS) پروکهیون پروتونها می توانند تا انرژی ۳۳ GeV شتاب بگیرند. (الف) چه انرژی برای واکنشهای با پروتونها (واقع در حال سکون در چارچوب مرجع آزمایشگاه) در اتاقک حباب هیدروژن پروکهیون موجود است؟ (ب) هرگاه پروتونها بر روی حلقه ای انباشته شوند و سپس با پروتونهاى انباشته بر روی حلقه دیگری، که همان انرژی را دارند ولی در جهتی مخالف در حال چرخش هستند، واکنش کنند چه مقدار انرژی در دسترس خواهد بود؟

۱۸۰۹ مزون  $\pi$  با انرژی ۱۰۰ MeV واپاشیده و مزون  $\mu$  تولید می شود که در راستای رو به جلو گسیل می شود. انرژی جنبشی مزون  $\mu$  در چارچوب مرجع آزمایشگاه را محاسبه کنید.

۱۹۰۹ هنگامی که ذره  $\Sigma^+$  واقع در حال سکون در چارچوب مرجع آزمایشگاه به یک ذره  $\Lambda^0$  واپاشیده می شود انرژی فوتون گسیل شده را محاسبه کنید.

۲۰۰۹ با به کار بردن تبدیل لورنتس برای انرژی و تکانه [پیوست ۱ معادله (پ) ۱۶] را ببینید، معادلات (۱۴۰۹) را به دست آورید. معادلات اخیر، انرژی و تکانه فوتونها در چارچوبهای مرکز جرم و آزمایشگاه را به یکدیگر مربوط می کند. [محور  $X$  را موازی با سرعتی اختیار کنید که با معادله (۱۲۰۹) داده شده است.]



۲۱.۹ با توجه به فرایند  $\pi^- + p^+ \rightarrow \Lambda^0 + K^0$ ، (الف) مقادیر ممکن  $\mathcal{J}$  برای دو ذره واکنش کننده و نیز برای دو ذره حاصل را به دست آورید. مقدار  $\mathcal{J}$  را برای پایستگی اسپین ایزوتوپی تعیین و مشخص کنید که آیا  $\mathcal{J}_z$  و  $\mathcal{J}$  پایسته هستند یا خیر. (ب) تحلیل بالا را برای فرایند  $\pi^- + p^+ \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$  تکرار کنید و نتیجه بگیرید که آیا این فرایند در طبیعت رخ می دهد یا نه.

۲۲.۹ با توجه به فرایند  $p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + n + \pi^+$  اسپین ایزوتوپی کل را تعیین و مشخص کنید که آیا  $\mathcal{J}_z$  و شکفتنی پایسته اند یا خیر. این تحلیل را برای

$$p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + n + e^+ + \nu_e$$

نیز تکرار کنید. احتمال وقوع این فرایند خیلی کمتر از فرایند اول است، چرا؟

۲۳.۹ در فرایندهای برهم کنش قوی زیر چند قانون پایستگی (به استثنای پایستگی انرژی، تکانه، و تکانه زاویه ای) را بررسی کنید.

$$p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + \Lambda^0 + K^+ \quad (\text{الف})$$

$$\pi^- + p^+ \rightarrow \Sigma^0 + K^0 \quad (\text{ب})$$

$$p^+ + p^+ \rightarrow \Xi^0 + p^+ + K^0 + K^+ \quad (\text{ج})$$

$$\Lambda^0 + p^+ \rightarrow n + p^+ + \bar{K}^0 \quad (\text{د})$$

$$\bar{K}^- + p^+ \rightarrow K^+ + \Xi^- \quad (\text{ه})$$

در هر مورد، مقادیر  $\mathcal{J}_z$ ،  $\mathcal{J}$ ، و  $\mathcal{S}$  را برای ذرات برهم کنش کننده و ذرات حاصل تعیین کنید.

۲۴.۹ در فرایندهای زیر کدام يك از قوانین پایستگی تأیید و کدام يك نقض می شود؟

$$\eta^0 \rightarrow p^+ + e^- \quad \pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma?$$

چرا واپاشی  $\Sigma^+ \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$  رخ می دهد ولی فرایند  $\Sigma^+ \rightarrow p^+ + \gamma$  مشاهده نشده است؟  
چرا واپاشی  $\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$  صورت می گیرد ولی فرایند  $\Xi^- \rightarrow \eta^0 + \pi^-$  مشاهده نشده است؟

۲۵.۹ فرایند  $\bar{K}^- + p^+ \rightarrow \Omega^- + K^+ + K^0$  را از لحاظ قوانین پایستگی تحلیل کنید. انرژی جنبشی آستانه ذره  $\bar{K}^-$  را محاسبه کنید.

۲۶.۹ نشان دهید که فرایندهای  $\pi^- + p^+ \rightarrow n + \gamma$ ،  $\pi^- + d \rightarrow 2n + \gamma$ ، و  $\pi^+ + d \rightarrow 2p^+$  همگی حاکی از آن اند، که اسپین پیون برابر صفر یا يك است. (مسئله ۲۷.۹ را ببینید.)

۲۷۰۹ سطح مقطع فرایند  $p^+ + p^+ \rightarrow \pi^+ + d$  را با  $\sigma_1$  و سطح مقطع فرایند واژونه  $p^+ + d \rightarrow p^+ + p^+$  را با  $\sigma_2$  نمایش می‌دهیم. می‌توان نشان داد که سطح مقطعه‌ها با رابطه زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند

$$\sigma_1 = \frac{3}{2} \left( \frac{p_\pi}{p_p} \right)^2 (2s_\pi + 1) \sigma_2$$

که در آن  $p_p$  و  $p_\pi$  تکانه پروتون یا پیون ورودی در چارچوب مرجع مرکز جرم و  $s_\pi$  اسپین پیون است. از طریق تجربی معلوم شده است که برای پروتونهای با انرژی  $340 \text{ MeV}$  در چارچوب مرجع آزمایشگاه داریم  $\sigma_1 = 0.18 \text{ mb}$  و برای پیونهای با انرژی  $29 \text{ MeV}$  در چارچوب مرجع آزمایشگاه داریم  $\sigma_2 = 3.1 \text{ mb}$ . ثابت کنید که این نتایج تجربی با  $s_\pi = 0$  سازگارند ولی با  $s_\pi = 1/2$  سازگار نیستند. [داهنمایی: در صورتی که انرژیهای جنبشی محاسبه شود، برای به دست آوردن  $p_p$  و  $p_\pi$  در چارچوب مرجع مرکز جرم فرمولهای غیرنسبیتی به کار می‌رود.] ضمناً به منظور تأیید رابطه بین  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  ثابت کنید که انرژیهای کل در چارچوب مرجع مرکز جرم، قابل مقایسه‌اند.

۲۸۰۹ با به کار بردن قانون پایستگی تکانه زاویه‌ای نشان دهید که در واپاشی  $\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p^+$  برآیند تکانه زاویه‌ای مداری محصولات در چارچوب مرجع مرکز جرم باید مساوی با صفر (کانال s) یا یک (کانال p) باشد. در نتیجه، می‌توان نشان داد که توزیع زاویه‌ای پیونها با  $1 + k \cos \phi$  متناسب است که در آن  $\phi$  زاویه بین راستای حرکت پیون (در چارچوب مرجع مرکز جرم) و اسپین ذره  $\Lambda^0$  است. ثابت کنید که این توزیع زاویه‌ای با پایستگی پارته سازگاری ندارد. مقدار تجربی  $k$  مساوی با ۲/۳ است. [داهنمایی: برای اثبات قسمت آخر، بازتاب را در صفحه عمود بر اسپین ذره  $\Lambda^0$  در نظر بگیرید.]

۲۹۰۹ نشان دهید که واپاشی  $\eta^0$  پایستگی اسپین ایزوتوپی را نقض می‌کند. چه برهم کنشی می‌تواند مسؤل این فرایند باشد؟

۳۰۰۹ تابع موج اسپین ایزوتوپی یک نوکلئون متناظر با  $\pm 1/2$  را با  $\xi(\pm)$  نمایش می‌دهیم، به طوری که  $\xi(+)$  متناظر است با یک پروتون و  $\xi(-)$  نیز متناظر است با یک نوترون. به همین طریق با تابع موج اسپین دو ذره (بخش ۲۰۴) توابع موج اسپین ایزوتوپی دو نوکلئون متناظر با  $\mathcal{C} = 1$  و  $\mathcal{C} = 0$  را بنویسید. مقدار  $\tau_z$  را در هر حالت نشان دهید و مشخص کنید که هر تابع موج شامل چه ذراتی است.

۳۱۰۹ هر گاه  $r_{ij}$  فاصله بین ذرات  $i$  و  $j$  باشد، نشان دهید که  $f(r_{ij})$  تحت انتقال خطی ناورد است. آیا برهم کنشهای گرانشی و الکتریکی تحت انتقال خطی ناورد هستند یا خیر؟

۳۲۰۹ جدولی تشکیل دهید که رابطه برهم کنشهای قوی، الکترومغناطیسی، و ضعیف را با قوانین پایستگی اسپین ایزوتوپی، شگفتی، پارته، مزدوج بار، و برگشت زمانی نشان دهد.

۳۳.۹ توضیح دهید که چگونه میدانهای الکتریکی و مغناطیسی تحت تأثیر برگشت زمانی قرار می‌گیرند؟ نشان دهید که معادلات ماکسول نسبت به برگشت زمانی ناوردا هستند.

۳۴.۹ نشان دهید که بازتاب بر روی صفحه  $XY$  (یا هر صفحه مختصات دیگر) یک چارچوب راستگرد را به یک چارچوب چپگرد تغییر می‌دهد.

۳۵.۹ نشان دهید که اگر  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  بردارهای قطبی باشند،  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  یک بردار محوری است و هر گاه  $\mathbf{A}$  قطبی و  $\mathbf{B}$  محوری باشد، در این صورت  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  قطبی است. [داهنمایی: رفتار  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  تحت بازتاب در صفحه  $XY$  را تحلیل کنید].

۳۶.۹ مؤلفه‌های راستگوشه  $\mathbf{L}$  را نوشته و نحوه تغییر آنها برای بازتاب بر روی صفحه  $XY$  را تحلیل کنید. نتیجه را با بحث مربوط به شکل ۱۶.۹ مقایسه کنید.

۳۷.۹ رفتار معادلات ماکسول در ارتباط با بازتاب بر روی صفحه  $XY$  را بررسی کنید. آیا می‌توان نتیجه گرفت که این معادلات با پایداری پاریته دربرهم کنشهای الکترومغناطیسی سازگارند؟

۳۸.۹ نشان دهید که یک بازتاب در مبدأ مختصات (یعنی تبدیل  $x, y, z$  به  $-x, -y, -z$ ) معادل با یک بازتاب در صفحه  $XY$  و سپس چرخش به اندازه  $180^\circ$  حول محور  $Z$  است. پس از آن نتیجه بگیرید که رفتار پاریته نسبت به بازتاب در یک صفحه و یک نقطه یکسان است.

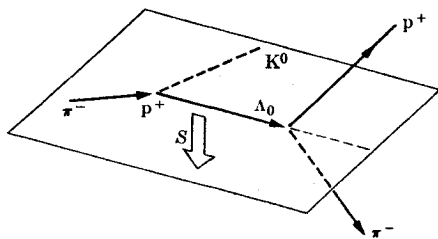
۳۹.۹ می‌توان نشان داد که در گذارهای دو قطبی الکتریکی، پاریته میدان الکترومغناطیسی فوتون فرد است. نشان دهید که هر گاه پاریته در گذار پایسته باشد، قاعده گزینش  $\Delta l \neq 0$  که در بخش ۴.۳ بیان شد لازم است، یا به صورتی کلی‌تر، حالت‌های اولیه و نهایی باید پاریته‌های مخالف داشته باشند.

۴۰.۹ نواحی زیرمنحنیهای نشان داده شده در شکل ۳۱.۹ را برآورد و آنها را با بار یک پروتون و یک نوترون مقایسه کنید.

۴۱.۹ مشاهده شده است که  $^{152}\text{Eu}$  طبق فرایند  $^{152}\text{Eu} + e^- \rightarrow ^{152}\text{Sm}^* + \gamma$  با گیراندازی الکترون و ساماریوم برانگیخته نیز بر طبق فرایند  $^{152}\text{Sm}^* \rightarrow ^{152}\text{Sm} + \gamma$  با گسیل گاما واپاشیده می‌شود. اسپین هر دو هسته  $^{152}\text{Eu}$  و  $^{152}\text{Sm}$  برابر صفر است. با مشاهده پرتو گامای گسیل شده در جهت مخالف با جهت گسیل نوترینوها، فیزیکدانان نتیجه گرفتند که فوتونها عمده‌تاً به صورت راستگرد قطبیده می‌شوند (یعنی هلیسیت آنها منفی است). نشان دهید که این موضوع حاکی از آن است که نوترینو نیز هلیسیت منفی دارد. [داهنمایی: پایداری تکانه زاویه‌ای را برای این فرایند چون یک کل تحلیل کنید].

۴۲.۹ در فرایند  $\pi^- + p^+ \rightarrow \Lambda^0 + K^0$  ذرات  $\Lambda^0$  شدیداً قطبیده‌اند و اسپین آنها عمود

بر صفحه تولید در راستای بردار  $\mathbf{p}_\pi \times \mathbf{p}_\Lambda$  قرار دارد (شکل ۳۷.۹). آیا پارینه در این فرایند پایسته می ماند؟ ذره  $\Lambda^0$  به  $\pi^-$  و  $p^+$  واپاشیده می شود. محصولات اخیر عمدتاً در راستاهایی که در شکل نشان داده شده است گسیل می شوند. آیا در فرایند واپاشی  $\Lambda^0$  پارینه پایسته است؟ (با مسئله ۲۸.۹ مقایسه کنید.)



شکل ۳۷.۹

۴۳.۹ نشان دهید که اگر در آزمایش  $^6\text{Co}$  (شکل ۱۸.۹) الکترونها با شدت یکسانی در راستاهای به طرف جلو و عقب گسیل شوند، پارینه در فرایند پایسته می ماند.

## مراجع

1. "Evolution of the Physicist's Picture of Nature," P. Dirac, *Sci. Am.*, May 1963, page 45.
2. "Early Work on the Positron and Muon," C. Anderson. *Am. J. Phys.*, 29, 825 (1961).
3. "The Role of Elementary Particle Research in the Development of Modern Physics, V. Weisskopf. *Physics Today*, June 1963, page 16.
4. "Particles and Principles," M. Gell-Mann, *Physics Today*, November 1964, page 22.
5. "Thirty Years of Meson Physics," R. Oppenheimer, *Physics Today*, November 1966, page 51.
6. "Resource Letter SAP.1 on Subatomic Particles" C. Swartz. *Am. J. Phys.*, 34, 1079 (1966).
7. "The Conservation Laws of Physics," G. Feinberg and M. Goldhaber, *Sci. Am.*, October 1963, page 33.
8. "Violation of Symmetry in Physics," E. Wigner, *Sci. Am.*,

- December 1965, page 28.
9. "Resonance Particles," P. Hill, *Sci. Am.*, January 1963, page 38.
  10. "Quarkways to Particle Symmetry," L. Brown, *Physics Today*, February 1966, page 44.
  11. "Unified Theories of Elementary Particles," S. Blackman, *Physics Today*, February 1966, page 55.
  12. *Structure of Matter*, W. Finkelburg, New York: Academic Press, 1964, Chapter 5, Sections 20-26.
  13. "Symmetry and Conservation Laws," E. Wigner and "Elementary Particles," G. Chew, published in *The Scientific Endeavor*. New York, Rockefeller Institute, 1965.
  14. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands, Reading, Mass.: Addison-Wesley; 1963, Chapter 52.
  15. *The Fundamental Particles*, C. Swartz, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1965.
  16. *Elementary Particles*, D. Frisch and A. Thorndike, New York: Momentum Books, Van Nostrand, 1964.
  17. *Particles and Accelerators*, R. Gouiran, World University Library, New York: McGraw-Hill, 1967.

قسمت دوم

# فيزيك آمارى

۰۱۰ مکانیک آمارى کلاسیک

۰۱۱ ترمودینامیک

۰۱۲ خواص گرمایی گازها

۰۱۳ آمار کوانتومی

در فصول قبل، اجزای اساسی ماده یعنی ذرات، هسته‌ها، اتمها، و مولکولها را مطالعه کردیم. اما می‌دانیم که در عمل نمی‌توان اتمها یا مولکولهای منفرد را دید یا حس کرد، بلکه فقط می‌توان نتیجه تعداد زیادی از آنها را که به نحو کم و بیش منظمی رفتار می‌کنند مشاهده کرد. به عبارت دیگر، فقط می‌توان فرایندهای ماکروسکوپی را مشاهده کرد. خواص ماده کبهای (یا خواص ماکروسکوپی)، آن طوری که ما معمولاً آنها را مشاهده می‌کنیم، نتیجه این اعمال جمعی یا گروهی است. اصولاً رفتار جمعی تعداد زیادی از اتمها و مولکولها حاصل برهم کنش الکترومغناطیسی آنهاست، زیرا نقش برهم کنش گرانشی بسیار ناچیز است و برهم کنشهای قوی و ضعیف هم تنها در فرایندهای هسته‌ای مهم هستند. فرایندهای آشنایی چون ذوب، تبخیر، پخش، رسانش الکتریکی و گرمایی، گسیل الکترونی به وسیله فلزات داغ و بسیاری موارد دیگر، و نیز مفاهیمی از قبیل دما، ظرفیت گرمایی، گرمای تغییر فاز، و مانند آن همگی در این گروه از خواص جمعی قرار می‌گیرند. درک و کنترل این پدیده‌های جمعی است که عمده‌تاً توجه فیزیکدانان کاربردی، مهندسان، شیمی‌دانان و سایر دانشمندان را در تلاشهای خود برای استفاده از نیروهای طبیعت در جهت رفاه بشر به خود جلب می‌کند. به منظور توصیف فرایندهایی که تعداد بسیار زیادی از ذرات را شامل می‌شود، روشهای خاصی را باید تدوین کرد. چنین روشهایی باید الزاماً از طبیعت آماری برخوردار باشند، زیرا نمی‌توان جزئیات حرکت ذرات منفرد را بررسی کرد. (و نیز لزومی ندارد چنین تلاشی را برای کسب نتایجی که ارزش عملی ندارند انجام داد.) به همین دلیل، بحث مربوط به فرایندهای ماکروسکوپی از دیدگاه مولکولی را فیزیک آماری به عهده گرفته است. واژه «آماری» به تکنیکی اطلاق می‌شود که فرایندهای شامل تعداد زیادی ذره را، بدون بررسی رفتار تک تک آنها، توصیف می‌کند. بنا بر این، برای بحث درباره اتمهای چند الکترونی و هسته‌های چند نوکلئونی از روشهای آماری استفاده می‌شود.

در این بخش ابتدا روش آماری را که مکانیک آماری کلاسیک نام دارد بررسی خواهیم کرد و کاربردهای عمومی آن را در ترمودینامیک بحث خواهیم نمود. سپس این روش را برای تجزیه و تحلیل خواص گازها به کار خواهیم برد. سپس، با مقدمه مختصری بر مکانیک آماری کوانتومی همراه با برخی از کاربردهای آن، این بخش را به پایان خواهیم رساند.

## مکانیک آماری کلاسیک

مقدمه	۱۰۱۰
تعادل آماری	۲۰۱۰
قانون توزیع ماگسول-بولتزمان	۳۰۱۰
دما	۴۰۱۰
تعادل گرمایی	۵۰۱۰
کاربرد در گاز ایده آل	۶۰۱۰



## ۱.۱۰ مقدمه

مکانیک بر اساس چند اصل کلی، نظیر بایستگی انرژی و تکانه، که در مورد حرکت ذرات برهم‌کنش‌کننده به کار می‌روند پایه‌ریزی شده است. در این فصل، این اصول مکانیک را به سیستم‌های چند ذره‌ای تعمیم می‌دهیم و بدون بررسی جزئیات حرکت هر ذره، روش‌هایی را مورد تأکید قرار می‌دهیم که برای بررسی‌های خواص جمعی یا ماکروسکوپی سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرند. این روش، مکانیک آماری نام دارد. در اینجا مفهوم «ذره» معنای وسیعی به کار رفته است و از یک ذره بنیادی نظیر الکترون، تا انبوهه‌ای از ذرات بنیادی نظیر اتم یا مولکول را در بر می‌گیرد. از این رو، یک «ذره» هر یک از واحدهای پایدار و کاملاً مشخصی است که یک سیستم فیزیکی معین را تشکیل می‌دهد.

با توجه به اینکه در هر سانتیمتر مکعب از یک گاز در فشار و دمای متعارف، حدود  $3 \times 10^{19}$  مولکول وجود دارد، به آسانی به این واقعیت پی می‌بریم که چگونه برای بررسی و مطالعه خواص ماکروسکوپی ماده به روش آماری نیاز داریم. برای تعیین خواص کپه‌ای گاز، نظیر فشار و دمای آن، در نظر گرفتن جزئیات حرکت هر یک از مولکول‌ها نه تنها عملاً غیرممکن بلکه غیرضروری است. از طرف دیگر، برای انجام تحلیل آماری هر سیستم چند ذره‌ای، لازم است بر آورد معقولی از حالات دینامیکی هر یک از ذرات بر اساس خواص عمومی آنها در دست داشته باشیم. این بر آورد را با معرفی مفهوم احتمال توزیع ذرات بین حالت‌های دینامیکی مختلفی که در آنها این ذرات یافت شوند، انجام می‌دهیم. باید توجه داشت که استفاده از مفهوم احتمال بدان معنی نیست که فرض کنیم ذرات بی آنکه از قوانین کاملاً مشخصی پیروی کنند، به نحوی کاتوره‌ای یا آشوبناک در حرکت‌اند. مفهوم احتمال از روشی ناشی می‌شود که ما برای بر آورد حالت‌های دینامیکی ذرات موجود در یک سیستم به کار می‌بریم، نه از سازوکاری که با آن، ذرات سیستم، در نتیجه برهم‌کنش‌های خود، در طبیعت میان حالت‌های دینامیکی ممکن توزیع می‌شوند. بدین ترتیب، اعتبار تحلیل آماری هر سیستم چند ذره‌ای مستقیماً به اعتبار فرض‌های ما درباره توزیع احتمال ذرات بستگی دارد.

## ۲.۱۰ تعادل آماری

یک سیستم منزوی متشکل از تعداد  $N$  ذره را که در آن هر ذره به چندین حالت با انرژی‌های  $E_1, E_2, E_3, \dots$  دسترسی دارد در نظر می‌گیریم. حالت‌های انرژی ممکن است گوانتیده باشند (مانند حالت‌های چرخشی و ارتعاشی در هر مولکول)، یا عملاً یک طیف پیوسته تشکیل دهند (مانند انرژی جنبشی انتقالی مولکول‌های یک گاز). در هر زمان خاصی، ذرات در میان حالت‌های مختلفی توزیع می‌شوند، به گونه‌ای که انرژی  $n_1$  ذره  $E_1$  و انرژی  $n_2$  ذره  $E_2$  باشد و به همین ترتیب. تعداد کل ذرات برابر است با

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + \dots = \sum_i n_i \quad (1.10)$$

و فرض می‌کنیم در کلیه فرایندهایی که در سیستم روی می‌دهد، این تعداد ثابت باقی بماند. انرژی کل سیستم برابر است با

$$U = n_1 E_1 + n_2 E_2 + n_3 E_3 + \dots = \sum_i n_i E_i \quad (۲.۱۰)$$

در این رابطه که برای انرژی کل سیستم نوشته شده است به‌طور ضمنی فرض می‌شود که ذرات بدون برهم‌کنش‌اند (یا خیلی کم برهم‌کنش دارند)، به‌گونه‌ای که بتوان به‌هر ذره مقداری انرژی نسبت داد که فقط به‌مختصات آن بستگی دارد. هرگاه برهم‌کنش‌ها را به‌حساب آوریم، جملاتی به‌صورت  $E_{p_{12}} + E_{p_{13}} + \dots + E_{p_{23}} + \dots$  متناظر با انرژی پتانسیل برهم‌کنش میان زوج ذرات را نیز باید به‌معادله (۲.۱۰) اضافه کنیم. هر جمله شامل مختصات هر دو ذره برهم‌کنش‌کننده است. در چنین حالتی دیگر نمی‌توان از انرژی هر ذره صحبت به‌میان آورد، بلکه تنها انرژی سیستم معنی دارد.

در نگاه اول ممکن است این‌طور به‌نظر برسد که بحث ما از واقعیت به دور است، زیرا تمام ذرات تشکیل‌دهنده سیستم‌های فیزیکی در حال برهم‌کنش‌اند. با این حال، تحت شرایط خاصی می‌توان از تکنیکی به‌نام هیدان خود-سازگار استفاده کرد؛ در این تکنیک فرض می‌شود که هر ذره تحت تأثیر هیپانگین برهم‌کنش ذرات دیگر و با میانگین انرژی پتانسیلی که فقط به‌مختصات ذره بستگی دارد قرار دارد، به‌گونه‌ای که هنوز هم می‌توان  $U$  را به‌صورت معادله (۲.۱۰)، و البته در این مورد به‌صورت  $E_i = E_{ki} + E_{pi\text{ave}}$  نوشت. در مواردی که برهم‌کنش‌های میان ذرات باید به‌طور صریح در نظر گرفته شود، لازم است روش‌های دیگری به‌کار رود. در فصل دوازدهم، این موارد را در ارتباط با گازهای حقیقی مورد بحث قرار خواهیم داد.

انرژی کل  $U$  در سیستم‌های منزوی باید ثابت باشد. با این حال، توزیع ذرات میان حالت‌های انرژی موجود ممکن است در نتیجه برهم‌کنش‌های متقابل و برخوردهای آنها تغییر کند. مثلاً، در یک گاز ممکن است یک مولکول تند با مولکول کندتری برخورد کند؛ پس از برخورد ممکن است از سرعت مولکول تند کاسته و بر سرعت مولکول کند افزوده شود، یا اینکه اتم برانگیخته‌ای به‌طور ناگهانی با اتم دیگری برخورد کند و انرژی برانگیختگی آن به‌صورت انرژی جنبشی به‌هر دو اتم منتقل شود. از این‌رو، در هر دو مثال، ذرات پس از برخورد در حالت‌های مختلفی قرار می‌گیرند. به‌عبارت دیگر، اعداد  $n_1, n_2, n_3, \dots$  که معرف پارش (یا توزیع)  $N$  ذره میان حالت‌های انرژی موجود هستند، ممکن است تغییر کنند. منطقی است فرض کنیم که برای هر حالت ماکروسکوپی از یک سیستم ذرات، توزیعی وجود دارد که بر هر توزیع دیگری برتری دارد. به‌عبارت دیگر، می‌توان گفت که با داشتن شرایط فیزیکی سیستم ذرات (یعنی، تعداد ذرات، انرژی کل، و ساختار هر ذره)، محتملترین پارش وجود دارد. هنگامی که سیستم به این پارش می‌رسد، گفته می‌شود که در

تعداد آماری قرار دارد

هر سیستم موجود در تعداد آماری از محتملترین پارش دور نخواهد شد (به‌استثنای

افت و خیزهای آماری)، مگر اینکه در اثر يك كنش خارجي مختل شود. این گفته به این معنی است که اعداد پارش  $n_1, n_2, n_3, \dots$  ممکن است بدون اثرات ماکروسکوپیك قابل توجه (یا قابل مشاهده) حول مقادیر متناظر با محتملترین پارش افت و خیز کنند. به عنوان مثال، فرض کنید گازی در تعادل آماری قرار دارد، و در آن مولکولی با انرژی  $E_i$  به مولکول دیگری با انرژی  $E_j$  برخورد می کند؛ پس از برخورد، انرژیهای این دو مولکول  $E_i$  و  $E_j$  است. می توان فرض کرد که در زمان کوتاهی، زوج دیگری از مولکولها از حالت های انرژی  $E_i$  و  $E_j$  خارج می شود و همین زوج یا زوج دیگری از آنها به حالت های انرژی  $E_i$  و  $E_j$  می رسد به گونه ای که، از لحاظ آماری پارش تغییر نمی کند.

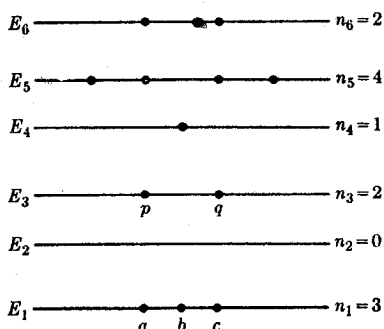
مسئله اصلی مکانیک آماری عبارت است از یافتن محتملترین پارش (یا قانون توزیع) يك سیستم منزوی که ترکیب آن معلوم است. وقتی محتملترین پارش به دست آید، مسئله بعدی طرح روشهایی برای استنتاج خواصی است که به طور ماکروسکوپیکی مشاهده می شوند. برای به دست آوردن قانون توزیع، چند فرض باید وضع شود. ممکن است چندین فرض موجه وضع شود تا اینکه قانون توزیع موافق با نتایج تجربی به دست آید. در حال حاضر سه قانون توزیع یا آمار وجود دارد. یکی از این سه قانون، قانون توزیع ماکسول-بولتزمن است، که شالوده آماد کلاسیک است. در این فصل ما قانون توزیع ماکسول-بولتزمن را مطالعه می کنیم.

مکانیک آماری کلاسیک در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم توسط کسانی چون لودویگ بولتزمن (۱۹۰۶-۱۸۴۴)، جیمز ماکسول (۱۸۷۹-۱۸۳۱)، و ژوسیا گیبس (۱۹۰۳-۱۸۳۹) تکامل یافت. مکانیک آماری کلاسیک دامنه کار برد وسیعی، مخصوصاً در مورد خواص گازها، دارد. دو قانون توزیع دیگر یعنی قانون توزیع فرمی-دیراک و بوز-اینشتین، به آماد کوانتومی مربوط می شوند که در فصل ۱۳ مورد مطالعه قرار خواهند گرفت. مکانیک آماری کلاسیک را می توان به صورت مقدار حدی دو آمار کوانتومی در نظر گرفت.

### ۳.۱۰ قانون توزیع ماکسول-بولتزمن

سیستمی را در نظر می گیریم که از تعداد زیادی ذره یکسان و تمایز پذیر تشکیل شده است. منظور از ذرات یکسان این است که این ذرات ساختار و ترکیب یکسانی دارند، و منظور از ذرات تمایز پذیر این است که ما می توانیم هر ذره را از ذره مشابه دیگر تشخیص دهیم یا اینکه اختلاف میان آنها را بیان کنیم. در نگاه اول به نظر می رسد که میان یکسانی و تمایز پذیری تناقض وجود دارد، و در واقع هم چنین است. بعداً این نقص آشکار را بررسی خواهیم کرد، اما نتایجی را که اکنون به دست می آوریم به قدری ساده اند که يك بحث ابتدایی در مورد چنین سیستمی را توجیه می کنند.

اکنون حالت خاص پارش  $n_1, n_2, n_3, \dots$  را با آرایش هندسی شکل ۱۰۱۰ نمایش می دهیم. هر خط نشان دهنده حالت بخصوصی از انرژی  $E_i$  و تعداد نقاط نیز معرف



شکل ۱۰۱۰. توزیع ذرات میان حالت‌های مختلف انرژی.

تعداد  $n_i$  ذره در هر حالت انرژی است. در این مثال داریم  $n_1 = 3$ ،  $n_2 = 0$ ،  $n_3 = 2$ ،  $n_4 = 1$  و نظایر آن.

فرض اول این است که تمام حالت‌های انرژی به‌طور یکسان در دسترس ذرات سیستم قرار دارند، یعنی، تمام حالت‌های انرژی از احتمال اشغال یکسانی برخوردارند. در این صورت، می‌توان فرض کرد

احتمال یک‌پارشی با تعداد راه‌های مختلفی که در آنها ذرات می‌توانند در میان حالت‌های انرژی موجود توزیع شوند و این پارشی بخصوص را تولید کنند متناسب است.

به‌عنوان مثال، می‌خواهیم ببینیم که چند راه متفاوت وجود دارد که در آنها می‌توانیم به پارشی شکل ۱۰۱۰ برسیم. منظور از «متفاوت» این است که اعداد  $n_1$ ،  $n_2$ ،  $n_3$ ، ... ثابت‌اند، در حالیکه ذرات موجود در هر حالت متفاوتند. یعنی پارشی که در آن ذره  $a$  در حالت  $E_1$  و ذره  $p$  در حالت  $E_3$  قرار دارد با پارشی که در آن ذره  $a$  در حالت  $E_3$  و ذره  $p$  در حالت  $E_1$  واقع است تفاوت دارد. این نتیجه‌ای از این فرض است که ذرات تمایز پذیرند. اگر ذرات تمایز ناپذیر بودند، باید فرض می‌کردیم که این دو پارشی یکسان هستند.

برای پر کردن حالت  $E_1$ ، اولین ذره را می‌توان از میان یکی از  $N$  ذره موجود انتخاب کرد. بنابراین، تعداد  $N$  راه تمایز پذیر برای انتخاب اولین ذره وجود دارد. دومین ذره را می‌توان به  $N - 1$  راه متفاوت انتخاب کرد، زیرا تنها  $N - 1$  ذره دسترس پذیر است. سومین ذره را می‌توان به  $N - 2$  راه متفاوت انتخاب کرد. بنا بر این تعداد کل راه‌های تمایز پذیر متفاوتی که می‌توان برای انتخاب سه ذره اول اختیار کرد و آنها را در حالت  $E_1$  قرار داد برابر است با

$$N(N-1)(N-2) = \frac{N!}{(N-3)!} \quad (3.10)$$

اکنون سه ذره انتخاب شده را با  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  مشخص می‌کنیم. این ذرات را می‌توان در هر یک از  $3! = 6$  مرتبه مختلف یا جایگشت‌های  $abc$ ،  $bca$ ،  $cab$ ،  $acb$ ،  $bac$ ،  $cba$  اختیار کرد. ولی این  $3!$  مرتبه مختلف برای قرار دادن  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  در  $E_1$  پارش یکسانی را به دست می‌دهد، زیرا تمام آنها با ذرات  $a$  و  $b$  و  $c$  موجود در حالت  $E_1$  متناظرند. هر پارشی تنها با تعداد و برجسب ذرات در هر حالت تعیین می‌شود، نه با مرتبه‌ای که ذرات در آن جا گرفته‌اند (وقتی ذرات آرایش گرفتند دیگر مرتبه جاگذاری آنها اهمیتی ندارد). بنابراین، برای به دست آوردن تعداد کل راه‌های متفاوت تمایز پذیری که می‌توان سه ذره اول را در حالت  $E_1$  انتخاب کرد، لازم است معادله  $(3.10)$  را بر  $3!$  تقسیم کنیم. در نتیجه داریم

$$\frac{N!}{3!(N-3)!}$$

از این رو، رابطه کلی برای تعداد کل راه‌های مختلف تمایز پذیر به منظور قرار دادن  $n_1$  ذره در حالت  $E_1$  مساوی است با

$$\frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \quad (4.10)$$

که درست برابر تعداد جایگشت‌های  $N$  ذره است که در هر بار تعداد  $n_1$  ذره از آن اختیار شده است. هنگامی که به دومین حالت  $E_2$  می‌رویم، تنها  $N - n_1$  ذره در دسترس است. بنابراین، اگر بخواهیم  $n_2$  ذره را در حالت  $E_2$  قرار دهیم باید معادله  $(4.10)$  را به صورتی به کار بریم که در آن  $N - n_1$  به جای  $N$  و  $n_2$  نیز به جای  $n_1$  به کار رود. در نتیجه

$$\frac{(N - n_1)!}{n_2!(N - n_1 - n_2)!} \quad (5.10)$$

برای حالت سوم فقط  $N - n_1 - n_2$  ذره باقی می‌ماند. در این حالت می‌خواهیم  $N_3$  ذره را در آن قرار دهیم، به طوری که به جای معادله  $(4.10)$  خواهیم داشت

$$\frac{(N - n_1 - n_2)!}{n_3!(N - n_1 - n_2 - n_3)!}$$

این فرایند را می‌توان ادامه داد تا اینکه تمام حالت‌های انرژی مورد نظر پر شوند. تعداد کل راه‌های مختلف تمایز پذیر برای به دست آوردن پارش  $n_1$ ،  $n_2$ ،  $n_3$ ، ... از ضرب روابط  $(4.10)$  و  $(5.10)$  و عبارات متوالی برای تمام حالات انرژی باقی مانده حاصل می‌شود. در این عمل دانشجو باید توجه کند که تعدادی از ضرایب نظیر  $(N - n_1)$ ،

$(N - n_1 - n_2)!$  و مانند آن حذف می‌شوند و رابطه ساده زیر به دست می‌آید

$$P = \frac{N!}{n_1! n_2! n_3! \dots} \quad (۶.۱۰)$$

که تعداد راههای متفاوت تمایزپذیر برای رسیدن به پارش  $n_1, n_2, n_3, \dots$  را به دست می‌دهد. اکنون فرض می‌کنیم که احتمال به دست آوردن این پارش متناسب با  $P$  است. مثلاً برای پارش شکل ۱.۱۰، احتمال  $P$  برابر است با

$$P = \frac{N!}{3! 5! 2! 1! 4! \dots}$$

در اینجا باید  $0!$  را مساوی با  $1$  بگیریم زیرا  $n_i = 0$  را فقط می‌توان به یک طریق انتخاب کرد. اعداد  $n_1, n_2, n_3, \dots$  در معادله (۶.۱۰) باید طوری اختیار شوند که معادلات (۱.۱۰) و (۲.۱۰) که تعداد کل ذرات و انرژی کل را به دست می‌دهند، برقرار بمانند.

تا اینجا فرض کردیم که تمام حالت‌های دسترس‌پذیر از احتمال یکسانی برای پرشدن برخوردارند. ممکن است حالت‌ها احتمالهای ذاتی مختلفی مانند  $g_i$  داشته باشند. مثلاً، یک حالت انرژی مشخص ممکن است با چندین حالت تکانه زاویه‌ای مختلف سازگار و بنابراین احتمال پر شدن آن بیشتر باشد. هنگامی که این احتمال ذاتی به حساب آید، احتمال  $P$  هر پارش مشخص اندکی با معادله (۶.۱۰) اختلاف خواهد داشت. واضح است که اگر  $g_i$  احتمال یافتن یک ذره در تراز انرژی  $E_i$  باشد، احتمال یافتن دو ذره در آن تراز مساوی با  $g_i^2 = g_i \times g_i$  و برای  $n_i$  ذره برابر با  $g_i^{n_i} = g_i \times g_i \times g_i \times \dots \times g_i$  خواهد بود. از این رو، به جای اینکه احتمال کل هر پارش مشخص با معادله (۶.۱۰) داده شود با رابطه زیر داده می‌شود

$$P = \frac{N! g_1^{n_1} g_2^{n_2} g_3^{n_3} \dots}{n_1! n_2! n_3! \dots} \quad (۷.۱۰)$$

اکنون شرط تمایزپذیری را حذف می‌کنیم. هر گاه تمام ذرات یکسان و تمایزناپذیر باشند، مثلاً اگر در پارش شکل ۱.۱۰ جای ذرات  $a$  و  $p$  عوض شود، در این صورت نمی‌توان تفاوتی میان آنها تشخیص داد. بنابراین، تمام  $N!$  جایگشت میان ذرات پرکننده حالت‌های مختلف، پارش یکسانی را به دست می‌دهند. این بدان معنی است که باید معادله (۷.۱۰) را بر  $N!$  تقسیم کنیم تا نتیجه زیر به دست آید

$$P = \frac{g_1^{n_1} g_2^{n_2} g_3^{n_3} \dots}{n_1! n_2! n_3! \dots} = \prod_{i=1}^N \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \quad (۸.۱۰)$$

رابطه بالا احتمال یک توزیع در آمار ماکسول-بولتزمن است.

با پیدا کردن پیشینه  $P$  [که با معادله (۸.۱۰) داده شده است] به گونه‌ای که با شرایط (۱۰.۱۰) و (۲۰.۱۰) سازگار باشد، و در آن  $N$  و  $U$  ثابت باشند، می‌توان حالت تعادل متناظر با محتملترین پارش را به دست آورد. این روش که تکنیک ریاضی ساده‌ای است، در مثال ۱۰.۱۰ با جزئیات بیشتر توضیح داده شده است. نتیجه این است که پارش با پیشینه احتمال، با رابطه زیر داده می‌شود

$$n_i = g_i e^{-\alpha - \beta E_i} \quad (9.10)$$

$\alpha$  و  $\beta$  دو پارامتری هستند که به خواص فیزیکی سیستم بستگی دارند (این موضوع بعداً توضیح داده خواهد شد). کمیت  $\alpha$  را می‌توان بر حسب تعداد کل ذرات، یعنی  $N$ ، بیان کرد. با به کار بردن معادله (۹.۱۰) داریم

$$\begin{aligned} N &= n_1 + n_2 + n_3 + \dots \\ &= g_1 e^{-\alpha - \beta E_1} + g_2 e^{-\alpha - \beta E_2} + \dots \\ &= e^{-\alpha} (g_1 e^{-\beta E_1} + g_2 e^{-\beta E_2} + g_3 e^{-\beta E_3} + \dots) \\ &= e^{-\alpha} \left( \sum_i g_i e^{-\beta E_i} \right) = e^{-\alpha} Z \end{aligned}$$

که در آن

$$Z = \sum_i g_i e^{-\beta E_i} \quad (10.10)$$

کمیت  $Z$  که تابع پارش نام دارد، رابطه بسیار مهمی است که غالباً در خیلی از محاسبات به کار می‌رود. بنابراین می‌توان نوشت:  $e^{-\alpha} = N/Z$  و معادله (۹.۱۰) به صورت زیر درمی‌آید

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta E_i} \quad (11.10)$$

معادله (۱۱.۱۰) قانون توزیع ماکسول-بولتزمن است. کمیت  $\beta$  به انرژی سیستم، یا به عبارت دقیقتر، همچنانکه در بخش (۲۰.۱۰) توضیح داده خواهد شد، به انرژی متوسط یک ذره مربوط می‌شود.

اکنون یک کاربرد از معادله (۱۱.۱۰) را بررسی می‌کنیم. با توجه به تعریف مقدار متوسط، می‌دانیم که مقدار متوسط (برای هر پارش مشخص) هر خاصیت فیزیکی  $F(E)$  که بتوان آن را بر حسب تابعی از انرژی ذره  $E$  بیان کرد، با رابطه زیر داده می‌شود

$$F_{\text{ave}} = \frac{1}{N} \left[ \sum_i n_i F(E_i) \right]$$

و با استفاده از معادله (۱۱.۱۰)، برای محتملترین پارش یا پارش تعادل خواهیم داشت

$$F_{\text{ave}} = \frac{1}{Z} \sum_i g_i F(E_i) e^{-\beta E_i} \quad (12.10)$$

مثلا اگر ذرات يك سیستم فقط در دو حالت انرژی  $E_1 = +\varepsilon$  و  $E_2 = -\varepsilon$  با احتمال یکسان ( $g_1 = g_2 = 1$ ) قرار داشته باشند، در این صورت داریم

$$Z = e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2} = e^{-\beta \varepsilon} + e^{\beta \varepsilon} = 2 \cosh \beta \varepsilon$$

و انرژی متوسط ذره برابر است با

$$\begin{aligned} E_{\text{ave}} &= \frac{1}{Z} (E_1 e^{-\beta E_1} + E_2 e^{-\beta E_2}) \\ &= \frac{\varepsilon e^{-\beta \varepsilon} - \varepsilon e^{\beta \varepsilon}}{2 \cosh \beta \varepsilon} = -\varepsilon \tanh \beta \varepsilon \end{aligned}$$

برای انرژی کل خواهیم داشت

$$U = N E_{\text{ave}} = -N \varepsilon \tanh \beta \varepsilon$$

که به کمک آن می توان  $\beta$  را بر حسب  $U$  به دست آورد.

مثال ۱۰.۱۰ محتملترین پارش یا پارش تعادل را به دست آورید.

حل: بنا به تعریف، محتملترین پارش یا پارش تعادل با بیشینه  $P$  متناظر است. این بیشینه نیز به نوبه خود با وضعی متناظر است که در آن به ازای تغییرات کوچک  $dn_1, dn_2, \dots, dn_p$  در اعداد اشغال  $n_1, n_2, \dots, n_p$  تغییر  $P$  عملا صفر باشد ( $dP = 0$ ). با این حال، از نظر ریاضی آسانتر خواهد بود اگر به جای به دست آوردن بیشینه  $P$ ، بیشینه  $\ln P$  را که با همان مقدار  $P$  متناظر است به دست آوریم. در این صورت، از معادله (۸.۱۰) داریم

$$\begin{aligned} \ln P &= n_1 \ln g_1 + n_2 \ln g_2 + n_3 \ln g_3 + \dots \\ &\quad - \ln n_1! - \ln n_2! - \ln n_3! - \dots \end{aligned}$$

با استفاده از فرمول استرلینگ برای لگاریتم سازه ای يك عدد خیلی بزرگ (بیوست ۵ را ببینید)، داریم

$$\ln x! \approx x \ln x - x$$

و با فرض اینکه  $n_1, n_2, n_3, \dots$  اعداد بزرگی باشند (زیرا به طور کلی سیستمهای فیزیکی



از تعداد بیشماری ذره تشکیل شده‌اند)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \ln P &= n_1 \ln g_1 + n_2 \ln g_2 + n_3 \ln g_3 + \dots \\ &\quad - (n_1 \ln n_1 - n_1) - (n_2 \ln n_2 - n_2) - (n_3 \ln n_3 - n_3) - \dots \\ &= -n_1 \ln \frac{n_1}{g_1} - n_2 \ln \frac{n_2}{g_2} - \dots + (n_1 + n_2 + \dots) \end{aligned}$$

یا با استفاده از معادله (۱۰.۱۰) می‌توان نوشت

$$\ln P = N - \sum_i n_i \ln \frac{n_i}{g_i} \quad (۱۳.۱۰)$$

با توجه به اینکه  $N$  ثابت و  $dN$  مساوی بسا صفر است، دیفرانسیل رابطه بالا نتیجه زیر را به دست می‌دهد

$$\begin{aligned} d(\ln P) &= - \sum_i (dn_i) \ln \frac{n_i}{g_i} - \sum_i n_i d \left( \frac{\ln n_i}{g_i} \right) \\ &= - \sum_i (dn_i) \ln \frac{n_i}{g_i} - \sum_i n_i \frac{(dn_i)}{n_i} \\ &= - \sum_i (dn_i) \ln \frac{n_i}{g_i} - \sum_i dn_i \end{aligned} \quad (۱۴.۱۰)$$

از معادله (۱۰.۱۰) به خاطر صفر بودن  $dN$  (زیرا  $N$  ثابت است) داریم

$$\sum_i dn_i = 0 \quad (۱۵.۱۰)$$

بنابراین معادله (۱۴.۱۰) به معادله زیر خلاصه می‌شود

$$-d(\ln P) = \sum_i \left( \frac{\ln n_i}{g_i} \right) dn_i = 0 \quad (۱۶.۱۰)$$

طرف راست این معادله را مساوی با صفر قرار داده‌ایم زیرا ما حالت تعادلی را می‌خواهیم پیدا کنیم که برای آن  $P$  بیشینه یا  $dP = 0$  و بنابراین  $d(\ln P) = P^{-1} dP = 0$  است. اگر تمام تغییرات  $dn_1, dn_2, dn_3, \dots$  اختیاری باشند، معادله (۱۶.۱۰) را می‌توان با تشکیل روابط زیر برقرار کرد

$$\ln \frac{n_1}{g_1} = 0, \quad \ln \frac{n_2}{g_2} = 0, \quad \ln \frac{n_3}{g_3} = 0, \dots \quad \text{یا} \quad n_1 = g_1, \quad n_2 = g_2, \dots$$

اما تغییرات  $dn_i$  کاملاً اختیاری نیستند، زیرا شرط (۱۵.۱۰) با ثابت بودن تعداد ذرات به دست آمده است، و همین طور شرط

$$\sum_i E_i dn_i = 0 \quad (17.10)$$

حاصل ثابت بودن انرژی داخلی است و از دیفرانسیل گیری معادله (۲۰.۱۰) و با توجه به  $dU = 0$  به دست می آید.

به منظور جبران دو شرط (۱۵.۱۰) و (۱۷.۱۰)، دو پارامتر اختیاری را، که تکثیرکننده نامعین نام دارند، بر طبق تکنیک ریاضی لاگرانژ (پیوست ۷ ببینید)، معرفی می کنیم. از ضرب معادله (۱۵.۱۰) در  $\alpha$  و معادله (۱۷.۱۰) در  $\beta$  و جمع این دو با معادله (۱۶.۱۰) خواهیم داشت

$$\sum_i \left( \ln \frac{n_i}{g_i} + \alpha + \beta E_i \right) dn_i = 0$$

در رابطه بالا دو ضریب دلخواه  $\alpha$  و  $\beta$  به خاطر جبران دو شرط محدودکننده (۱۵.۱۰) و (۱۷.۱۰) اضافه شده است. بنا بر این، توزیع تعادل به شرطی به دست می آید که

$$\ln \frac{n_i}{g_i} + \alpha + \beta E_i = 0$$

یا

$$n_i = g_i e^{-\alpha - \beta E_i}$$

که همان نتیجه ای است که قبلاً در معادله (۹.۱۰) به دست آمد.

**مثال ۲۰.۱۰** سیستمی متشکل از ۴۰۰۰ ذره است که می توانند در یکی از سه حالت انرژی یا تراز انرژی هم فاصله که انرژیهای آنها برابر  $\epsilon$ ،  $2\epsilon$  و  $3\epsilon$  است و همگی از احتمال ذاتی یکسان  $g$  برخوردارند قرار گیرند (شکل ۲۰.۱۰). مثلاً این سیستم می تواند شامل اتمهایی باشد که تکانه زاویه ای کل آن مساوی با یک است و در میدان مغناطیسی قرار دارند. احتمالهای نسبی پارشی که در آن ۲۰۰۰ ذره در تراز پایین، ۱۷۰۰ ذره در تراز

$$E_3 = 2\epsilon \text{-----} n_3$$

$$E_2 = \epsilon \text{-----} n_2$$

$$E_1 = 0 \text{-----} n_1$$

**شکل ۲۰.۱۰** سیستمی با سه تراز انرژی.

میانی، و ۳۰۰۰ ذره در تراز بالاتر قرار دارند، را با پارشی که از انتقال ذره‌ای از تراز میانی به تراز پایین و انتقال ذره دیگری به تراز بالاتر حاصل می‌شود مقایسه کنید (فرایندی است که با پایستگی انرژی سازگاری دارد).

حل: بر طبق معادله (۸.۱۰)، احتمالاتی مربوط به پارشهای اول و دوم عبارت‌اند از

$$P_1 = \frac{g^{4000}}{20000! 17000! 3000!}, \quad P_2 = \frac{g^{4000}}{20001! 16998! 3001!}$$

به جای محاسبه مقادیر  $P_1$  و  $P_2$  [با استفاده از معادله (۱۳.۱۰)] نسبت آنها را به دست می‌آوریم

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{17000 \times 16999}{20001 \times 3001} = \frac{2888300}{602301} = 478$$

از این رو، هر گاه از بین ۴۰۰۰ ذره فقط دو ذره را به ترازهای دیگر منتقل کنیم احتمال با ضریب ۴۷۸ تغییر می‌کند. این بدان معنی است که پارشهای  $P_1$  و  $P_2$  هر دو از پارش تعادل فاصله دارند. این وضع از جمعیت فراوان تراز میانی ناشی می‌شود. بنابراین سیستم تلاش می‌کند تا در حالتی قرار گیرد که تراز میانی آن جمعیت کمتری دارد. به دانشجو پیشنهاد می‌کنیم که این مسئله را با در نظر گرفتن توزیعهای ممکن دیگری که همگی با همان انرژی کل سیستم سازگاری دارند تکرار کنند. (دو ذره دیگر را از تراز میانی بردارید، یا ذره‌ای را از تراز بالا و ذره دیگری را از تراز پایین به تراز میانی منتقل و احتمالاتی نسبی را مجدداً محاسبه کنید.)

مثال ۳۰۱۰ محتملترین پارش یا پارش تعادل سیستم مثال ۲۰۱۰ را تعیین کنید.

حل: سیستم از  $N = 4000$  ذره تشکیل شده و بنا بر داده‌های ارائه شده در مثال ۲۰۱۰، انرژی کل آن برابر  $23000 \varepsilon = 20000 \times 0 + 17000 \times \varepsilon + 3000 \times (2\varepsilon)$  است. (شکل ۲۰۱۰). با به کار بردن معادله (۹.۱۰) برای محتملترین پارش، بر طبق نمادگذاری شکل ۲۰۱۰ و با  $g_1 = g_2 = g_3 = g$  باید داشته باشیم

$$n_1 = g e^{-\alpha}, \quad n_2 = g e^{-\alpha - \beta \varepsilon}, \quad n_3 = g e^{-\alpha - 2\beta \varepsilon}$$

یا اگر  $e^{-\beta \varepsilon}$  را با  $x$  نمایش دهیم، خواهیم داشت:  $n_2 = n_1 x$  و  $n_3 = n_1 x^2$ . از این رو، شرایط (۱۰.۱۰) و (۲۰.۱۰) که به ترتیب تعداد کل ذرات و انرژی کل را به دست می‌دهند به معادلات زیر تبدیل می‌شوند

$$n_1 + n_1 x + n_1 x^2 = 4000, \quad (n_1 x) \varepsilon + (n_1 x^2) (2\varepsilon) = 23000 \varepsilon$$

از حذف ضریب مشترک  $\varepsilon$  در رابطه دوم خواهیم داشت

$$n_1(1+x+x^2) = 4000$$

$$n_1(x+2x^2) = 2300$$

با حذف  $n_1$  معادله‌ای را برای  $x$  به دست خواهیم آورد

$$27x^2 + 17x - 23 = 0$$

یا  $x = 0.5034$  (فقط از ریشه مثبت استفاده شده است. چرا؟) بنا بر این  $n_1 = 2277$  (عدد گرد شده است). همین طور،  $n_2 = 1146$  و  $n_3 = 577$ . احتمال پارش متناظر عبارت است از

$$P = \frac{g^{4000}}{2277! 1146! 577!}$$

اکنون تغییر در  $P$  را برای هنگامی که دو ذره از تراز میانی برداشته و به ترازهای بالا و پایین منتقل می‌شوند، محاسبه می‌کنیم. احتمال پارش جدید برابر است با

$$P' = \frac{g^{4000}}{2278! 1144! 578!}$$

و نسبت دو احتمال عبارت است از

$$\frac{P'}{P} = \frac{1146 \times 1145}{2278 \times 578} = \frac{1312170}{1316684} = 0.9966$$

بنا بر این، دو احتمال اساساً یکسان هستند؛ چنین چیزی باید وجود داشته باشد، زیرا اگر  $P$  بیشینه باشد، به ازای تغییر کوچک در تعداد توزیع یک پارش تعادل  $\Delta P$  باید صفر یا خیلی کوچک باشد.

### ۴.۱۰ دما

پارامتر  $\beta$  در معادلات (۱۰.۱۰) و (۱۱.۱۰) مستقیماً به یک کمیت فیزیکی (دما) مربوط می‌شود که در اصل برای توصیف یک تجربه حسی معرفی شده است تا توصیف خاصیت آماری انبوهی از ذرات. ابتدا یادآوری می‌کنیم که اگر بخواهیم سازگاری بعدی در معادلات (۱۰.۱۰) و (۱۱.۱۰) وجود داشته باشد، باید  $\beta$  را بر حسب عکس پگاهای انرژی یعنی  $J^{-1}$ ،  $eV^{-1}$ ، و غیره بیان کنیم. با به کار بردن معادله (۱۱.۱۰)، برای انرژی کل یک سیستم ذرات در تعادل آماری خواهیم داشت

$$U = n_1 E_1 + n_2 E_2 + n_3 E_3 + \dots$$

$$= \frac{N}{Z} (g_1 E_1 e^{-\beta E_1} + g_2 E_2 e^{-\beta E_2} + g_3 E_3 e^{-\beta E_3} + \dots)$$

یا

$$U = \frac{N}{Z} (\sum_i g_i E_i e^{-\beta E_i}) \quad (18.10)$$

با استفاده از تعریف (۱۰.۱۰) در مورد تابع پارش می توانیم  $U$  را به صورت دیگری بنویسیم

$$U = -\frac{N}{Z} \frac{d}{d\beta} (\sum_i g_i e^{-\beta E_i}) = -\frac{N}{Z} \frac{dZ}{d\beta} = -N \frac{d}{d\beta} (\ln Z) \quad (19.10)$$

که رابطه مهمی میان انرژی کل و تابع پارش سیستم در تعادل آماری است. انرژی متوسط یک ذره برابر است با

$$E_{\text{ave}} = \frac{U}{N} = -\frac{d}{d\beta} (\ln Z) \quad (20.10)$$

توجه کنید که اگر سیستم فیزیکی معین با  $g_i$  ها و  $E_i$  ها توصیف شود، تابع پارش  $Z$  (و از این رو انرژی کل  $U$ ) و نیز انرژی متوسط یک ذره معین، یعنی  $E_{\text{ave}}$ ، تابعی از  $\beta$  (و نیز پارامترهای دیگری که حالت ماکروسکوپیک نظیر حجم و فشار را تعیین می کنند) هستند. یعنی می توان از پارامتر  $\beta$  برای مشخص ساختن انرژی داخلی سیستم استفاده کرد. اما، معلوم شده است که برای سادگی بیشتر بهتر است به جای  $\beta$  از کمیت فیزیکی جدیدی استفاده کرد. این کمیت دمای مطلق سیستم نام دارد که با  $T$  نمایش داده و با رابطه زیر تعریف می شود

$$kT = \frac{1}{\beta} \quad (21.10)$$

واضح است که کمیت  $kT$  باید برحسب یکاهای انرژی نظیر ژول یا الکترون ولت بیان شود. ثابت  $k$  ثابت بولتزمن نام دارد و مقدار آن پس از آنکه یکاهای  $T$  انتخاب شوند تعیین می شود. اکنون باید نشان داده شود که دمایی که در اینجا تعریف شد با دمایی که مثلاً با یک دماسنج گازی اندازه گیری می شود مطابقت دارد. این کار را بعداً در بخش ۲.۱۲ انجام خواهیم داد، در اینجا کافی است بگوییم که وقتی  $T$  برحسب یکای کلوین، که با  $K$  نشان داده می شود، بیان شود مقدار ثابت بولتزمن مساوی است با

$$k = 1.3805 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} = 8.6178 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$$

البته می توان  $k$  را برابر واحد گرفت و دما را مستقیماً برحسب یکاهای انرژی نظیر ژول یا الکترون ولت اندازه گیری کرد. این امر کاملاً امکان پذیر است. اما، سنت بیان دما برحسب درجه، که مدتها قبل از شناخت ارتباط میان دما و ساختار مولکولی سیستم مطرح شده بود، به قدری در فیزیک جا افتاده است که تقریباً کنار گذاشتن آن را غیرممکن (و شاید هم نامطلوب) کرده است. کمیت  $\beta$  (بجز در بعضی حالت های خاص) همانطور که بعداً نشان داده خواهد شد کمیتی مثبت است، از این رو دمای مطلق  $T$  نیز مثبت است. پایینترین دما یعنی صفر نیز صفر مطلق نام دارد.

باید به خاطر داشت که تعریف آماری دما، آنطور که در معادله (۲۱.۱۵) آمده است، تنها برای یک سیستم از ذرات واقع در تعادل آماری معتبر است و از این رو برای ذره منفرد یا سیستمی که در تعادل قرار ندارد کاربرد ندارد. دلیل این گفته این است که پارامتر  $\beta$  تنها در ارتباط با محاسبه احتمالاتین پارش یک سیستم، که بنا به تعریف با حالت تعادل متناظر است، ظاهر می شود. اگر سیستم در تعادل نباشد، هنوز هم می توان از دمای «مؤثر» هر جزء کوچک سیستم، با فرض اینکه هر کدام تقریباً در حال تعادل اند، صحبت به میان آورد.

با داخل کردن تعریف (۲۱.۱۵) برای دما در معادله (۱۵.۱۵) می توان تابع پارش تعادل را به صورت زیر نوشت

$$Z = \sum_i g_i e^{-E_i/kT} \quad (22.15)$$

به طریق مشابه، اعداد اشغال تعادل با رابطه زیر داده می شوند

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-E_i/kT} \quad (23.15)$$

که قانون توزیع ماکسول-بولتزمن را برحسب دما به دست می دهد. نظر به اینکه  $\beta = 1/kT$  لذا  $d\beta = -dT/kT^2$  و معادله (۱۹.۱۵) را می توان به صورت زیر نوشت

$$U = kNT^2 \frac{d}{dT} (\ln Z) \quad (24.15)$$

انرژی متوسط به ازای ذره،  $U/N$ ، مساوی است با

$$E_{ave} = kT^2 \frac{d}{dT} (\ln Z) \quad (25.15)$$

توجه کنید که معادله (۲۵.۱۵)، رابطه میان انرژی متوسط به ازای ذره یک سیستم واقع در تعادل آماری و دمای سیستم را به دست می دهد. واضح است که رابطه دقیق به ساختار میکروسکوپی سیستم بستگی دارد. این ساختار با تابع پارش  $Z$  بیان می شود و برای

گاز ایده آل، گاز حقیقی، مایع، و یا جامد، متفاوت است. بنا بر این، می توان گفت که دمای هرسیستم در تعادل آماری کمیتهی است که با انرژی متوسط به ازای ذره ارتباط دارد. این ارتباط به ساختار سیستم وابسته است.

در حالت کلی، مقدار متوسط هر خاصیت ذره، یعنی  $F(E)$  که قبلاً در معادله (۱۲.۱۰) تعریف شد، اکنون به صورت زیر درمی آید

$$F_{\text{ave}} = \frac{1}{Z} \sum_i g_i F(E_i) e^{-E_i/kT} \quad (۲۶.۱۰)$$

و از این رو تابعی از دماست. مثلاً، برای سیستمی متشکل از ذرات با انرژیهای  $\pm \varepsilon$  و  $-\varepsilon$  که قبلاً در پایان بخش ۳.۱۰ بررسی شد، انرژی متوسط هر ذره در دمای  $T$  برابر است با

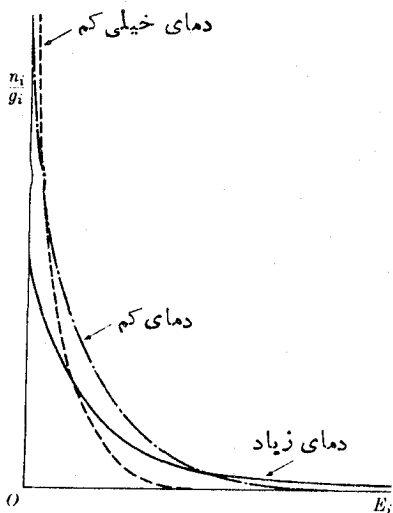
$$E_{\text{ave}} = -\varepsilon \tanh\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)$$

از آنجا که تابع نمایی  $e^{-E_i/kT}$  در معادله (۲۳.۱۰) تابعی نزولی از  $E_i/kT$  است، هر چه کسر  $E_i/kT$  بزرگتر باشد مقدار عدد اشغال  $n_i$  کوچکتر می شود. بنا بر این، در هر دمای مشخص، هر چه انرژی  $E_i$  بزرگتر باشد مقدار  $n_i$  کوچکتر خواهد بود. به عبارت دیگر، اشغال حالتی قابل دسترس برای ذرات با افزایش انرژی آنها کاهش می یابد. همان طور که در شکل ۳.۱۰ نشان داده شده است، در دماهای خیلی کم تنها پایینترین ترازهای انرژی اشغال می شوند. اما در دماهای بالاتر (که با مقادیر کوچکتر  $E_i/kT$  برای هر انرژی مشخص متناظرند)، با انتقال ذرات از ترازهای انرژی پایینتر به بالاتر، جمعیت نسبی ترازهای انرژی بالاتر افزایش می یابد (این موضوع نیز در شکل ۳.۱۰ نشان داده شده است). در دمای صفر مطلق فقط پایینترین تراز انرژی یسا تراز پایه اشغال می شود. توجه کنید که رابطه اعداد اشغال میان دو تراز انرژی  $E_j$  و  $E_i$  عبارت است از

$$\frac{n_j}{n_i} = \frac{g_j}{g_i} e^{-(E_j - E_i)/kT} = \frac{g_j}{g_i} e^{-\Delta E/kT} \quad (۲۷.۱۰)$$

که در آن  $\Delta E$  اختلاف انرژی میان دو تراز است. بنا بر این تنها اگر  $\Delta E$  خیلی کوچکتر از  $kT$  باشد،  $n_j$  و  $n_i$  قابل مقایسه هستند.

مثال ۴.۱۰ برای دماهای  $100\text{ K}$ ،  $300\text{ K}$  (دمای معمولی)، و  $1000\text{ K}$ ، نسبت میان اعداد اشغال برای دو تراز متناظر با  $\Delta E$  مساوی با هر یک از مقادیر زیر را به دست آورید: (الف)  $10^{-4}\text{ eV}$  که مقداری معادل با فاصله ترازهای چرخشی برای بسیاری از مولکولها



شکل ۳۰۱۰ توزیع ماکسول-بولتزمن در سه دمای متفاوت.

است، (ب)  $5 \times 10^{-2} \text{ eV}$  که با ترازهای ارتعاشی مولکولی متناظر است، و (ج)  $3 \text{ eV}$  که در حدود اندازه برانگیختگی الکترونی آنها و مولکولهاست. فرض کنید  $g = 1$ .

حل: با توجه به اینکه  $k = 8.61718 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$  داریم

$$\Delta E/kT = 1.1603 \times 10^4 \Delta E/T \quad \text{و} \quad kT = 8.61718 \times 10^{-5} T \text{ eV}$$

که  $\Delta E$  بر حسب الکترون ولت بیان شده است. بنا بر این، برای مقادیر داده شده  $\Delta E$  مقادیر  $n_j/n_i$  در سه دما در جدول زیر آمده است:

۱۰۰۰ K	۳۰۰ K	۱۰۰ K	$\text{eV} \cdot \Delta E$
۰.۹۹۸۸	۰.۹۹۶۲	۰.۹۸۸۵	$10^{-4}$
$5.60 \times 10^{-1}$	$1.45 \times 10^{-1}$	$3 \times 10^{-2}$	$5 \times 10^{-2}$
$8 \times 10^{-16}$	$8 \times 10^{-49}$	$3 \times 10^{-164}$	۳۰۰۰

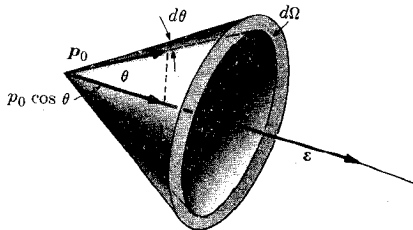
بنا بر این، به ازای  $\Delta E = 10^{-4} \text{ eV}$  دوتراز در تمام دماهای مورد نظر عملاً به طور یکسان اشغال می‌شوند. این موضوع بیان می‌کند که چرا طیف کامل جذبی چرخشی مولکولها، همان طور که در شکل ۳۵.۵ برای HCl نشان داده شد، در دمای معمولی مشاهده می‌شود.



در  $\Delta E = 5 \times 10^{-2} \text{ eV}$  جمعیت تراز بالاتر در دمای معمولی قابل ملاحظه است. این بدان معنی است که در دماهای معمولی خیلی از مولکولها در حالت ارتعاشی برانگیخته‌ای قرار دارند. اما، در  $\Delta E = 3 \text{ eV}$  نسبت  $n_j/n_i$  به قدری کوچک است که می‌توان تراز بالاتر را در تمام دماهای مورد نظر، واقعاً خالی فرض کرد. از این رو، اکثر آنها و مولکولها (در دمای معمولی) در حالت الکترونی پایه قرار دارند. تنها در دماهای خیلی بالا (همچون در بسیاری از ستارگان خیلی داغ) است که تعداد قابل توجهی از آنها و مولکولها در حالت‌های الکترونی برانگیخته هستند. در آزمایشگاه، برانگیخته‌گیهای الکترونی از برخورد‌های ناکشسان مولکولهای گاز با الکترونهاى تند در تخلیه الکتريکى به وجود می‌آیند.

**مثال ۵۰۱۰** سیستمی متشکل از مولکولهای قطبی را در نظر می‌گیریم که در میدان الکتريکى یکنواختی قرار دارد. هر گاه این سیستم از هر تأثیر خارجی دیگری منزوی شده باشد، قطبش سیستم را بر حسب تابعی از دما محاسبه کنید.

**حل:** گشتاور دو قطبی الکتريکى هر مولکول را با  $p_0$  نمایش می‌دهیم. فرض می‌کنیم که اثر میدان الکتريکى اعمال شده فقط سمتگیری کاتوره‌ای مولکولها را تغییر دهد بی‌آنکه حرکات انتقالی یا داخلی آنها (چرخشی یا ارتعاشی) را آشفته کند، و نیز فرض می‌کنیم که مولکولها آزادند از عمل سمت‌دهی میدان الکتريکى پیروی کنند. انرژی هر مولکول که گشتاور دو قطبی آن با میدان الکتريکى  $\mathcal{E}$  زاویه  $\theta$  تشکیل می‌دهد برابر است با  $E(\theta) = -p_0 \mathcal{E} \cos \theta$ . چون زاویه  $\theta$  می‌تواند هر مقداری را بین  $0$  و  $\pi$  اختیار کند انرژیهای حالت‌های در دسترس، گسسته نیست بلکه به‌طور پیوسته تغییر می‌کنند. از این رو، به‌جای اینکه دنبال تعداد مولکولهایی باشیم که در زاویه  $\theta$  سمتگیری کرده‌اند، باید تعداد مولکولهایی را به‌دست آوریم که دو قطبیهای آنها در داخل زاویه فضایی  $d\Omega$  قرار گرفته‌اند؛ زاویه  $d\Omega$  به صورت فضای میان مخروط‌های با زوایای  $\theta$  و  $\theta + d\theta$  تعریف می‌شود (شکل ۴۰۱۰). مقدار این زاویه فضایی برابر است با:  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ ، و با به‌کار بردن معادله (۲۲۰۱۰) و قرار دادن  $d\Omega$  به جای  $g$  و بسا قرار دادن انتگرال به‌جای



شکل ۴۰۱۰

جمع‌زنی می‌توان تابع توزیع را به صورت زیر نوشت

$$Z = \int_0^\pi e^{p_0 \varepsilon \cos \theta / kT} 4\pi \sin \theta d\theta = 4\pi \left( \frac{kT}{p_0 \varepsilon} \right) \sinh \left( \frac{p_0 \varepsilon}{kT} \right)$$

سمتگیری مولکولها باید نسبت به راستای میدان الکتریکی متقارن، و مقدار متوسط گشتاور دو قطبی الکتریکی آنها نیز موازی با  $\mathcal{E}$  باشد. از این رو، برای به دست آوردن  $p_{ave}$  باید  $(p_0 \cos \theta)_{ave}$  را برآورد کرد زیرا  $p_0 \cos \theta$  مؤلفه گشتاور دو قطبی الکتریکی در راستای  $\mathcal{E}$  است. با به کار بردن معادله (۲۶.۱۰) و قرار دادن انتگرال به جای جمع‌زنی خواهیم داشت

$$p_{ave} = \frac{1}{Z} \int_0^\pi (p_0 \cos \theta) e^{p_0 \varepsilon \cos \theta / kT} 4\pi \sin \theta d\theta$$

$$= p_0 \left( \coth \frac{p_0 \varepsilon}{kT} - \frac{kT}{p_0 \varepsilon} \right)$$

نتیجه اخیر فرمول لاندون نام دارد. در مقادیر خیلی بزرگ  $\mathcal{E}$  یا دمای خیلی کم (یعنی برای  $p_0 \varepsilon \gg kT$ ) داریم

$$\frac{kT}{p_0 \varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{و} \quad \coth \left( \frac{p_0 \varepsilon}{kT} \right) \rightarrow 1$$

به گونه‌ای که  $p_{ave} = p_0$ . این بدان معنی است که برای میدان الکتریکی خیلی قوی یا در دماهای نزدیک صفر مطلق، تمام مولکولها عملاً در راستای موازی با میدان الکتریکی سمتگیری می‌کنند. هر گاه  $\mathcal{E}$  کوچک یا  $T$  بزرگ باشد (یعنی  $p_0 \varepsilon / kT \ll 1$ ) با استفاده از بسط مجانبی

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \dots$$

خواهیم داشت

$$p_{ave} = \frac{p_0 \varepsilon}{3kT}$$

هر گاه تعداد  $n$  مولکول در یکای حجم موجود باشد قطبش ماده عبارت است از

$$\mathcal{P} = n p_{ave} = \left( \frac{n p_0 \varepsilon}{3kT} \right) \mathcal{E}$$

این رابطه برای محاسبه گذردهی الکتریکی محیطی که از مولکولهای قطبی تشکیل شده است

به کار می رود. هنگامی که مولکولها گشتاور مغناطیسی دائمی دارند، مغناطش ماده ای کسه در میدان مغناطیسی خارجی قرار دارد از محاسبه مشابهی به دست می آید. این اثر سمنگیری موجب پیدایش پارامغناطیس می شود. اما، در این مورد اشکال ایجاد می شود، زیرا گشتاور مغناطیسی به تکانه زاویه ای مربوط می شود، و همان طور که در بخش ۴.۳ مشاهده شد، بردار اخیر سمنگیری محدودی دارد. از این رو، به جای انتگرالگیری باید عمل جمع زنی انجام شود. نتیجه نهایی هنوز هم با آنچه برای گشتاور دو قطبی الکتریکی به دست آمد، شباهت زیادی دارد (مسئله ۸.۱۰).

### ۵.۱۰ تعادل گرمایی

سیستمی متشکل از دو گروه ذره متفاوت را در نظر می گیریم. می توان گفت که هر گروه از ذرات يك زیرسیستم تشکیل می دهد. این دو زیرسیستم مثلا ممکن است شامل مایعی باشند که جامدی در آن غوطه ور شده است، و یا مخلوطی از دو گاز یا مایع، یا دو جامد در حال تماس باشد. در اثر برخورد یا برهم کنشهای دیگر ممکن است انرژی میان ذرات تشکیل دهنده دو زیرسیستم مبادله شود، ولی فرض بر این است که انرژی کل مجموعه سیستم ثابت باقی می ماند. تعداد کل ذرات هر زیرسیستم را با  $N$  و  $N'$  و ترازهای انرژی متناظر را که در دسترس ذرات هستند با  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_p$  و  $E'_1, E'_2, E'_3, \dots, E'_p$  نمایش می دهیم. هر گاه واکنشی میان ذرات در دو زیرسیستم وجود نداشته باشد، تعداد کل ذرات در هر زیرسیستم و نیز انرژی کل سیستم ثابت است. اما انرژی هر زیرسیستم پایسته نیست زیرا به خاطر برهم کنشهای آنها، انرژی ممکن است میان آنها مبادله بشود. بنا بر این برای دو زیرسیستم باید اعداد اشغال  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_p$  و  $n'_1, n'_2, n'_3, \dots, n'_p$  در هر پارس معین شرایط زیر را بر آورده کنند

$$N = \sum_i n_i = \text{const.} \quad (28.10)$$

$$N' = \sum_j n'_j = \text{const.} \quad (29.10)$$

$$U = \sum_i n_i E_i + \sum_j n'_j E'_j = \text{const.} \quad (30.10)$$

احتمال هر پارش یا توزیع مشخص از حاصلضرب دو رابطه مشابه با معادله (۸.۱۰) به دست می آید که هر رابطه مربوط به يك زیرسیستم است

$$P = \left[ \frac{g_1^{n_1} g_2^{n_2} g_3^{n_3} \dots}{n_1! n_2! n_3! \dots} \right] \times \left[ \frac{g'_1^{n'_1} g'_2^{n'_2} g'_3^{n'_3} \dots}{n'_1! n'_2! n'_3! \dots} \right] \quad (31.10)$$

تعادل سیستم مرکب را می توان با این شرط که  $P$  باید بیشینه باشد در توافق با معادلات

(۲۸.۱۰)، (۲۹.۱۰)، و (۳۰.۱۰) به دست آورد. نتیجه عبارت است از (مثال ۶.۱۰)

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta E_i}, \quad n'_j = \frac{N'}{Z'} g'_j e^{-\beta E'_j} \quad (۳۲.۱۰)$$

که در آن  $Z$  و  $Z'$  تابع پارشهای مربوط به دو زیرسیستم است. ضمناً یادآوری می‌کنیم که پارامتر  $\beta$  برای دو زیرسیستم در وضعیت تعادل باید یکسان باشد. با توجه به تعریف دما، معادله (۲۱.۱۰)، نتیجه می‌گیریم که

دو سیستم برهم‌کنش‌کننده متفاوت که در تعادل آماری قرار دارند باید دمای یکسانی داشته باشند.

چنین بیانی قانون صفرم ترمودینامیک نام دارد. در این صورت گفته می‌شود که زیرسیستم‌ها در تعادل گرمایی قرار دارند. بدین ترتیب هنگامی که  $1/kT$  به جای  $\beta$  قرار گیرد، به جای معادله (۳۲.۱۰) می‌توان نوشت

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-E_i/kT}, \quad n'_j = \frac{N'}{Z'} g'_j e^{-E'_j/kT}$$

که در آن  $T$  دمای مطلق مشترک دو زیرسیستم است. روابط موجود برای  $n_i$  و  $n'_j$  نشان می‌دهند که در تعادل گرمایی هر زیرسیستم، آنچنان محتملترین پارش یکسانی را به دست می‌آورد که گویی منزوی است و در همان دمای  $T$  قرار دارد. بنا بر این، چنین روابطی گویای این واقعیت‌اند که به مفهوم آماری، انرژی هر زیرسیستم بعد از رسیدن به تعادل گرمایی ثابت باقی می‌ماند. این بدان معنی است که گرچه ممکن است هر دو سیستم در سطح میکروسکوپی تبادل انرژی داشته باشند اما این تبادل دو طرفه است و به طور متوسط، هیچ انرژی خالصی به طور یک جانبه مبادله نمی‌شود. بنا بر این، به طور آماری، انرژی هر زیرسیستم ثابت باقی می‌ماند. در این صورت نتیجه می‌شود که وقتی دو جسم با دمای متفاوت در تماس با یکدیگر قرار گیرند، تبادل انرژی تا هنگامی ادامه می‌یابد، که هر دو جسم به تعادل گرمایی با دمای یکسان می‌رسند. در چنین نقطه‌ای، هیچ تبادل انرژی خالصی صورت نمی‌گیرد.

قانون صفرم اساس اندازه‌گیری دمای هر جسم است؛ با قراردادن جسم در وضعیت تماس با یک جسم استاندارد مدرج (یا یک دماسنج) این دما تعیین می‌شود. ضمناً قانون صفرم با احساس معمولی ما در مورد مفهوم دما، که بر اساس آن وقتی دو جسم «سرد» و «گرم» در تماس با یکدیگر قرار می‌گیرند، جسم سرد، گرم و جسم گرم، سرد می‌شود و هر دو به دمای یکسانی می‌رسند، سازگاری دارد. بنا بر این، گرچه در ابتدا مفهوم دما در ارتباط با تجربه حسی انسان معرفی شد، که البته به وضع فیزیکی بدن انسان بستگی داشت،

اما اینک می توان آن را با رابطه آماری (۲۱.۱۰) دقیقاً تعریف کرد.

مثال ۶.۱۰ رابطه (۳۲.۱۰) را به دست آورید.

حل: هنگامی که  $P$  با معادله (۳۱.۱۰) داده می شود، هر گاه همان روش به دست آوردن معادله (۱۶.۱۰) را به کار ببریم خواهیم داشت

$$-d(\ln P) = \sum_i \ln \frac{n_i}{g_i} dn_i + \sum_j \ln \frac{n'_j}{g_j} dn'_j = 0 \quad (33.10)$$

در این صورت، شرایط محدودکننده (۲۸.۱۰)، (۲۹.۱۰)، و (۳۰.۱۰) روابط زیر را نتیجه می دهند

$$\sum_i dn_i = 0 \quad (34.10)$$

$$\sum_j dn'_j = 0 \quad (35.10)$$

$$\sum_i E_i dn_i + \sum_j E'_j dn'_j = 0 \quad (36.10)$$

از ضرب معادله (۳۴.۱۰) در  $\alpha$ ، و معادله (۳۵.۱۰) در  $\alpha'$ ، و معادله (۳۶.۱۰) در  $\beta$  و قراردادن آنها در معادله (۳۳.۱۰) خواهیم داشت

$$\sum_i \left( \ln \frac{n_i}{g_i} + \alpha + \beta E_i \right) dn_i + \sum_j \left( \ln \frac{n'_j}{g_j} + \alpha' + \beta E'_j \right) dn'_j = 0$$

که مستلزم آن است که (به همان دلیلی که در مورد یک نوع ذره عنوان شد) روابط زیر برقرار باشد

$$\ln \frac{n_i}{g_i} + \alpha + \beta E_i = 0, \quad \ln \frac{n'_j}{g_j} + \alpha' + \beta E'_j = 0$$

در نتیجه

$$n_i = g_i e^{-\alpha - \beta E_i}, \quad n'_j = g'_j e^{-\alpha' - \beta E'_j}$$

یا با استفاده از روابط (۲۸.۱۰) و (۲۹.۱۰) و حذف  $e^{-\alpha}$  و  $e^{-\alpha'}$  خواهیم داشت

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta E_i}, \quad n'_j = \frac{N'}{Z'} g'_j e^{-\beta E'_j}$$

توجه کنید که ما  $\alpha$  و  $\alpha'$  را به کار می‌بریم زیرا تعداد ذرات هر زیر سیستم به طور جداگانه پایسته است، اما تنها از يك  $\beta$  استفاده می‌کنیم زیرا این انرژی کل است که پایسته است.

### ۶.۱۰ کاربرد در گاز ایده‌آل

مرحله بعد این است که تعیین کنیم آیا در طبیعت سیستم ذراتی وجود دارد که رفتار جمعی آنها با پیشگوییهای قانون ماکسول-بولتزمن سازگار باشد؟ تاکنون این توزیع را به صورت يك بنای نظری کم و بیش معقول ارائه می‌کردیم. تجربه این واقعیت را تأیید می‌کند که در گستره وسیعی از دماها می‌توان اکثر گازها را بر طبق آمار ماکسول-بولتزمن توصیف کرد. اکنون برای سهولت گازهای ایده‌آل را که از مولکولهای تک اتمی تشکیل شده‌اند در نظر می‌گیریم. بدین ترتیب مجبور نیستیم که انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای میان مولکولی و نیز انرژی وابسته به حرکات ارتعاشی یا چرخشی داخلی مولکولها را در بحث خود دخالت دهیم. تمام انرژی مولکولی را به صورت انرژی جنبشی انتقالی در نظر می‌گیریم، به طوری که  $E_i$  در معادله (۱۱.۱۰) برابر است با

$$E_i = \frac{1}{2m} p_i^2 = \frac{1}{2} m v_i^2 \quad (۳۷.۱۰)$$

اما توجه کنید که همان‌طور که در مثال ۶.۲ توضیح دادیم، انرژی جنبشی گاز ایده‌آلی که حجم نسبتاً بزرگی را اشغال کرده است ممکن است کوانتیده نباشد بلکه طیف پیوسته‌ای داشته باشد. بنا بر این، باید معادله (۲۲.۱۰) را دوباره بنویسیم و به جای علامت جمع علامت انتگرال به کار ببریم

$$Z = \int_0^\infty e^{-E/kT} g(E) dE \quad (۳۸.۱۰)$$

که در آن  $g(E)dE$  به جای  $g_i$  آمده و معرف تعداد حالت‌های مولکولی در گستره انرژی میان  $E$  و  $E+dE$  است. این عدد از سم‌تگیهای متفاوت تکانه  $p$  برای هر انرژی مشخص ناشی می‌شود. از معادله (۳۰.۲) مثال ۶.۲ داریم

$$g(E)dE = \frac{4\pi V(2m^3)^{1/2}}{h^3} E^{1/2} dE \quad (۳۹.۱۰)$$

که در آن  $V$  حجم اشغال شده توسط گاز است. بنا بر این

$$Z = \frac{4\pi V(2m^3)^{1/2}}{h^3} \int_0^\infty E^{1/2} e^{-E/kT} dE$$

محاسبه انتگرال طرف راست (پیوست ۴ را ببینید) مقدار  $\sqrt{\pi(kT)^3}/2$  را به دست می‌دهد.

بنابراین

$$Z = \frac{V(\sqrt{\pi}mkT)^{3/2}}{h^3} \quad (40.10)$$

که تابع پارش يك گاز تك اتمی ایده آل را بر حسب تابعی از دما و حجم گاز به دست می دهد. با لگاریتم گرفتن از طرفین آن خواهیم داشت

$$\ln Z = C + \frac{3}{2} \ln kT$$

که در آن  $C$  شامل تمام کمیت‌های ثابت باقی مانده است. با قراردادن این مقدار  $\ln Z$  در معادله (۲۵.۱۰) انرژی متوسط مولکولها به صورت زیر به دست می آید

$$E_{\text{ave}} = \frac{3}{2} kT \quad (41.10)$$

بنابراین انرژی جنبشی متوسط مولکولهای يك گاز ایده آل در تعادل آماری، با دمای مطلق گاز متناسب است. از لحاظ تاریخی، معادله (۴۱.۱۰) در قرن نوزدهم، مدت‌ها قبل از معرفی مکانیک آماری، در ارتباط با نظریه جنبشی گازها ارائه شده بود. در نتیجه همین ارتباط بود که به جای  $\beta$  ضریب  $1/kT$  را پیشنهاد کردند. لذا انرژی کل گازی که شامل  $N$  مولکول است از رابطه زیر به دست می آید

$$U = NE_{\text{ave}} = \frac{3}{2} kNT$$

بنابراین نتیجه می گیریم که انرژی داخلی يك گاز تك اتمی ایده آل تنها به دمای آن بستگی دارد. این نتیجه مستقیمی از تعاریف ما درباره گاز ایده آل و دماست. انتظار نداریم که چنین روابطی برای گازهای حقیقی یا مواد دیگر صادق باشد زیرا قسمتی از انرژی داخلی آنها انرژی پتانسیل است و لذا به فاصله جدایی مولکولها، یعنی به حجم ماده بستگی دارد. اگر  $N$  تعداد مولهای ۱ گاز  $N_A = 6.0225 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  ثابت آووگادرو باشد، که برابر است با تعداد مولکولها در يك مول از ماده و برای تمام مواد مقدار آن یکسان است، خواهیم داشت:  $N = N/N_A$ . از این رو

$$U = \frac{3}{2} NkN_A T = \frac{3}{2} NRT \quad (42.10)$$

۱. یادآوری می کنیم که يك مول از ماده عبارت است از مقداری از آن ماده بر حسب گرم که با جرم مولکولی آن بر حسب amu برابر است.

که در آن

$$\begin{aligned}
 R &= kN_A = 8.3143 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \\
 &= 1986 \text{ cal mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \\
 &= 5.1894 \times 10^{19} \text{ eV mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad (43.10)
 \end{aligned}$$

ثابت گاز نام دارد.

اکنون با قراردادن  $g(E)dE$  به جای  $g_i$  آن طور که در معادله (۳۹.۱۰) داده شده است، عبارت (۲۳.۱۰) برای توزیع مولکولها در میان انرژیهای مختلف به صورت زیر درمی آید

$$dn = \frac{N}{Z} e^{-E/kT} g(E) dE = \frac{N}{Z} \frac{\sqrt{\pi} V (\gamma m^r)^{1/2}}{h^3} E^{1/2} e^{-E/kT} dE$$

که در آن  $dn$  تعداد مولکولهای با انرژی میان  $E$  و  $E + dE$  است. با قراردادن مقدار  $Z$  که با معادله (۴۰.۱۰) داده شده است، داریم

$$\frac{dn}{dE} = \frac{\sqrt{\pi} N}{(\pi kT)^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/kT} \quad (44.10)$$

که فرمول ماکسول برای توزیع انرژی مولکولها در يك گاز ایده آل است. این یکی از اولین کاربردهای روشهای آماری در فیزیک است که ابتدا جیمز ماکسول در حدود سال ۱۸۵۷ آن را از راه دیگری به دست آورد. معادله (۴۴.۱۰) در شکل ۵.۱۰ برای دو دمای متفاوت رسم شده است.

گاهی اوقات به جای توزیع انرژی به توزیع سرعت نیاز داریم. با توجه به رابطه  $E = mv^2/2$  داریم

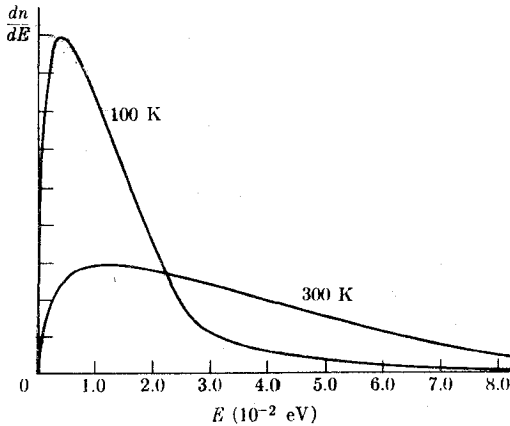
$$\frac{dn}{dv} = \frac{dn}{dE} \frac{dE}{dv} = mv \frac{dn}{dE}$$

با قراردادن  $E = mv^2/2$  در معادله (۴۴.۱۰) رابطه زیر به دست می آید

$$\frac{dn}{dv} = \sqrt{\pi} N \left( \frac{m}{\gamma \pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} \quad (45.10)$$

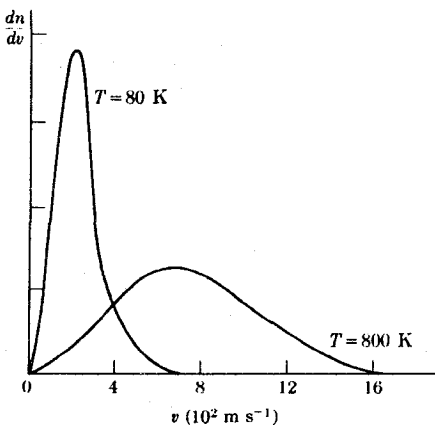
که فرمول ماکسول برای توزیع سرعت مولکولها در يك گاز ایده آل است. رابطه بالا تعداد مولکولهایی را که با سرعت میان  $v$  و  $v + dv$  در حرکت اند، بدون توجه به راستای حرکت، به دست می دهد. در شکل ۶.۱۰ توزیع سرعت برای اکسیژن در دو دمای متفاوت نشان داده شده است.



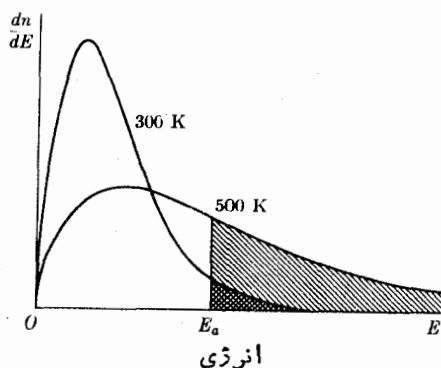


**شکل ۵.۱۰** توزیع انرژی مولکولی در دو دمای ۱۰۰ K و ۳۰۰ K. توجه کنید که بر طبق معادله (۴۴.۱۰) توزیع انرژی مستقل از جرم مولکولی است.

یک آزمون مهم برای قابلیت کار برد آمار ماکسول-بولتزمن در گازهای ایده آل این است که ببینیم آیا توزیعهای انرژی و سرعت نشان داده شده در شکل‌های ۵.۱۰ و ۶.۱۰ در عمل روی می‌دهند، یا نه؟ یک راه غیر مستقیم برای این کار عبارت است از تحلیل ارتباط آهنگ واکنشهای شیمیایی با دما. فرض کنید واکنش بخصوصی فقط هنگامی رخ



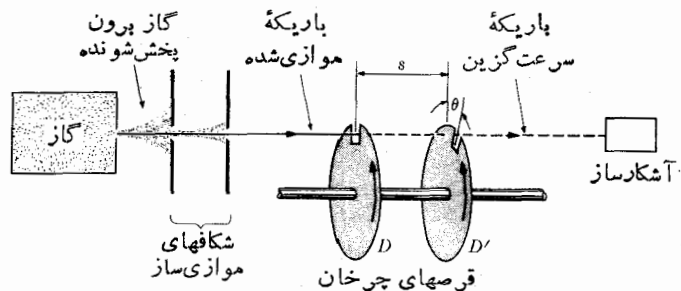
**شکل ۶.۱۰** توزیع سرعت مولکولی برای اکسیژن در دو دمای ۸۰ K و ۸۰۰ K. توجه کنید که بر طبق معادله (۴۵.۱۰) توزیع سرعت به جرم مولکولی بستگی دارد.



شکل ۷۰۱۰ تعداد مولکولهای با انرژی بیش از  $E_a$  در دو دمای متفاوت. در هر حالت، این تعداد با ناحیه سایه دار مشخص شده است.

می دهد که مولکولهای برخورد کننده انرژی مشخصی مساوی با یا بزرگتر از  $E_a$  دارند. در این صورت، آهنگ واکنش در دمای مشخص به تعداد مولکولهایی بستگی دارد که انرژی مساوی با یا بزرگتر از  $E_a$  دارند. در شکل ۷۰۱۰ این تعداد با نواحی سایه دار زیر منحنیهای دمای بالا و دمای پایین نشان داده شده اند. معلوم می شود که تعداد مولکولها در دمای بالا نسبت به دمای پایین بیشتر است. با محاسبه مناسب می توان اثر این مولکولهای اضافی را پیشگویی، و پیشگویی نظری را با داده های تجربی مقایسه کرد. نتایج تجربی با معادله (۲۵.۱۰) سازگاری خوبی دارند. این امر قابلیت کاربرد آمار ماکسول-بولتزمن در مورد گازها را تأیید می کند.

اثبات مستقیم شامل «شمارش» واقعی تعداد مولکولها در هر بازه انرژی یا سرعت است. برای این منظور روشهای تجربی متفاوتی به کار رفته است. یکی از این روشها استفاده از سرعت گزین یا «برشگر» است که در شکل ۸۰۱۰ نشان داده شده است. در این شکل



شکل ۸۰۱۰ گزینشگر سرعت مولکولی.

دو قرص دندانه‌دار  $D$  و  $D'$  با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  می‌چرخند و دندانه‌های آنها به اندازه زاویه  $\theta$  جابه‌جا شده‌اند. هنگامی که مولکولهای گاز از کوره با دمای مشخص خارج می‌شوند (این فرایند بردن پخششی نام دارد)، اگر سرعتهای آنها برابر  $v = \omega r / \theta$  باشد می‌توانند از میان هر دو دندانه عبور کنند و به آشکارساز برسند. در عمل، چون دندانه‌ها پهناي معین دارند، سرعت مولکولهای عبور کرده در گستره مشخص  $\Delta v$  حول مقدار معینی خواهد بود. هنگامی که  $\omega$  یا  $\theta$  تغییر کند، سرعت مولکولهای رسیده به آشکارساز می‌تواند تغییر کند. هر گاه آزمایشهای متفاوتی برای سرعتهای مختلف  $v$  انجام شود، توزیع سرعت و انرژی به دست می‌آید. نتایج تجربی پیشگویی آمار ماکسول-بولتزمن را همان‌طور که با معادلات (۴۴.۱۰) و (۴۵.۱۰) بیان شده‌است، تأیید می‌کند.

همان‌طور که در بخش ۶.۸ توضیح داده شد، نوترونهاي تولید شده در فرایند شکافت در یک رآکتور هسته‌ای با مهار گر مناسبی کند می‌شوند تا اینکه در دمای رآکتور به تعادل گرمایی می‌رسند. بنابراین، نوترونها در رآکتور هسته‌ای گرمایی همچون گاز ایده‌آل رفتار می‌کنند و توزیع انرژی آنها با قانون ماکسول یعنی معادله (۴۴.۱۰) سازگاری دارد؛ یعنی، نوترونهاي گرمایی از آمار ماکسول-بولتزمن پیروی می‌کنند. این واقعیت در طرح رآکتور هسته‌ای اهمیت اساسی دارد. هر گاه نوترونهاي خارج شده از پنجره رآکتور را از برشگری مشابه با آنچه که در شکل ۸.۱۰ داده شده است عبور دهیم، یک باریکه نوترونی تک انرژی به دست می‌آید.

**مثال ۷.۱۰** محتملترین انرژی و سرعت مولکولهای گاز در یک دمای مشخص را به دست آورید. این مقادیر به ترتیب با بیشینه‌های  $dn/dE$  و  $dn/dv$  متناظرند.

**حل:** برای به دست آوردن بیشینه  $dn/dE$  در دمای مشخص، که با معادله (۴۴.۱۰) داده شده‌است، فقط لازم است که بیشینه  $y = E^{1/2} e^{-E/kT}$  را محاسبه کنیم. از این رو

$$\frac{dy}{dE} = \left( \frac{1}{2} E^{-1/2} - \frac{E^{1/2}}{kT} \right) e^{-E/kT} = 0$$

که از آن خواهیم داشت  $E_{mp} = kT/2$ . بنابراین در دمای معمولی که برای آن  $kT \sim 0.025 \text{ eV}$  است داریم  $E_{mp} \sim 0.0125 \text{ eV}$ .

به طریق مشابه برای به دست آوردن بیشینه  $dn/dv$ ، که با معادله (۴۵.۱۰) داده می‌شود، باید بیشینه  $y = v^2 e^{-mv^2/2kT}$  را محاسبه کنیم. در این صورت داریم

$$\frac{dy}{dv} = \left( 2v - \frac{mv^2}{kT} \right) e^{-mv^2/2kT} = 0$$

بنابراین  $v_{mp} = \sqrt{2kT/m}$ . این سرعت با انرژی  $E = kT$  متناظر است و بنابراین با

$E_{mp}$  تفاوت دارد. آیا دانشجوی می تواند علت این اختلاف را توضیح دهد؟

مثال ۸۰۱۰ سرعت متوسط ( $v_{ave}$ ) و سرعت ریشه میانگین مربعی ( $v_{rms}$ ) مولکولهای یک گاز ایده آل را به دست آورید.

حل: سرعت متوسط با رابطه زیر تعریف می شود

$$v_{ave} = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v \, dn = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v \frac{dn}{dv} \, dv$$

با قراردادن مقدار  $dn/dv$  که از معادله (۴۵.۱۰) به دست می آید خواهیم داشت

$$v_{ave} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-mv^2/2kT} \, dv$$

ابتدا با قراردادن  $u = v^2$  و  $du = 2v \, dv$  انتگرال را به صورت زیر تغییر می دهیم

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} u e^{-(m/2kT)u} \, du$$

سپس از طریق انتگرالگیری پاره ای نتیجه  $(2kT/m)^2/2$  حاصل می شود، بنابراین

$$v_{ave} = \left( \frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2} = \left( \frac{2.55kT}{m} \right)^{1/2} = 1.13 v_{mp}$$

سرعت ریشه میانگین مربعی با رابطه  $v_{rms}^2 = (v^2)_{ave}$  تعریف می شود. متوسط  $v^2$  نیز از رابطه زیر به دست می آید

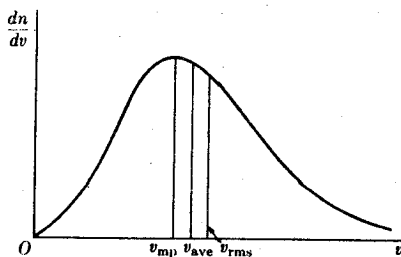
$$(v^2)_{ave} = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v^2 \, dn$$

ضمناً با توجه به اینکه  $v^2 = 2E/m$ ، می توان چنین نوشت

$$(v^2)_{ave} = \frac{2}{m} \frac{1}{N} \int_0^{\infty} E \, dn = \frac{2}{m} E_{ave}$$

زیرا انرژی متوسط به صورت  $E_{ave} = (1/N) \int E \, dn$  تعریف می شود. اما برطبق معادله (۴۴.۱۰) برای یک گاز ایده آل  $E_{ave} = (3/2)kT$  و از این رو

$$v_{rms}^2 = (v^2)_{ave} = \frac{2}{m} \left( \frac{3}{2} kT \right) = \frac{3kT}{m}$$



شکل ۹.۱۰ محتملترین سرعت، سرعت متوسط، و سرعت ریشه میانگین مربعی یک گاز.

$$v_{rms} = \left( \frac{3kT}{m} \right)^{1/2} = 1.225 v_{mp}$$

در شکل ۹.۱۰ سه سرعت  $v_{mp}$ ،  $v_{ave}$  و  $v_{rms}$  نشان داده شده است.

### مسائل

۹.۱۰ با توجه به مثال ۲.۱۰، تغییر در احتمال توزیع را در حالتی به دست آورید که در آن یک ذره از تراز بالا و دیگری از تراز پایین به تراز میانی انتقال یابند. برای محتملترین پارش به دست آمده در مثال ۳.۱۰ نیز مسئله را تکرار کنید.

۲.۱۰ در مثال ۲.۱۰ با به کار بردن معادله (۱۳.۱۰) برای  $\ln P$  نسبت  $P_4/P_1$  را محاسبه کنید.

۳.۱۰ دمای سیستم ارائه شده در مثال ۳.۱۰ را در هنگامی که در تعادل آماری قرار دارد با فرض  $\epsilon = 0.02 \text{ eV}$  تعیین کنید.

۴.۱۰ نسبت تعداد الکترونهايي که اسپین آنها موازی و پاد موازی با میدان مغناطیسی است را بر حسب تابعی از دما به دست آورید. این تعداد را برای دمای  $T$  مساوی با  $10 \text{ K}$ ،  $300 \text{ K}$ ، و  $1000 \text{ K}$  بر آورد کنید. [دانهمایی: یاد آوری می کنیم که گشتاور مغناطیسی اسپینی الکترونها با رابطه  $M_s = -2\mu_B S$ ، معادله (۳۳.۳)، داده می شود.]

۵.۱۰ (الف) نشان دهید که تابع پارش برای یک گاز الکترون واقع در میدان مغناطیسی  $B$  برابر است با  $Z = 2 \cosh(\mu_B B/kT)$  که در آن  $\mu_B$  مگنتون بور است. (ب) انرژی مغناطیسی گاز الکترون واقع در میدان مغناطیسی را محاسبه کنید. سپس نشان دهید که پارامغناطیسی الکترونهاي آزاد با مغناطش  $M = n\mu_B \tanh(\mu_B B/kT)$  متناظر است که در آن  $n$  تعداد الکترونها در یکای حجم است. (ج) مقادیر حدی تابع پارش و مغناطش

را در دماهای خیلی پایین و خیلی بالا به دست آورید.

۶۰۱۰ انرژیهای ممکن يك سیستم ذرات عبارت اند از  $5e, 4e, 3e, 2e, \dots, ne, \dots$  (الف) نشان دهید که تابع پارش سیستم (با  $g_i = 1$ ) عبارت است از

$$Z = (1 - e^{-\epsilon/kT})^{-1}$$

(ب) انرژی متوسط ذرات را محاسبه کنید. (ج) مقدار حدی انرژی متوسط را برای وقتی که  $\epsilon$  خیلی کوچکتر از  $kT$  است به دست آورید.

۷۰۱۰ سیستمی از ذرات با انرژیهای  $5e, 4e, 3e, 2e, \dots, ne, \dots$  را در نظر می گیریم. هر گاه مقدار انرژی  $\epsilon$  مساوی  $10^{-3}eV$  یا  $1eV$  باشد، نموداری رسم کنید که اعداد اشغال را برای (الف)  $1000K$ ، (ب)  $3000K$ ، و (ج)  $8000K$  نشان دهد. [دانهایی: نتیجه مسئله ۶۰۱۰ را برای تابع پارش به کار برید.]

۸۰۱۰ گشتاور مغناطیسی آنها (یا مولکولهای) که تکانه زاویه ای آنها  $J$  است از معادله (۴۰.۳) به دست می آید،  $M = -\mu_B g J$ . (الف) هر گاه آنها در میدان مغناطیسی  $\mathcal{B}$  (موازی با محور  $Z$ ) قرار گیرند، رابطه ای به دست آورید که تعداد آنها  $J_x$  که مقدار  $J_x$  آنها برابر با  $m\hbar$  است را به دست بدهد. (ب) نشان دهید که تابع پارش سیستم آنها عبارت است از

$$Z = \frac{\sinh \left[ \left( j + \frac{1}{2} \right) \frac{\mu_B g \mathcal{B}}{kT} \right]}{\sinh \left[ \frac{1}{2} \frac{\mu_B g \mathcal{B}}{kT} \right]}$$

(ج) ثابت کنید که برای  $j = 1/2$  تابع پارش به تابعی تبدیل می شود که در مسئله ۵۰۱۰ برای الکترونها به دست آمد.

۹۰۱۰ انرژی متوسط مغناطیسی متوسط آنها در نظر گرفته شده در مسئله قبل را تعیین کنید. به کمک این نتیجه ثابت کنید که گشتاور مغناطیسی متوسط آنها در راستای موازی با میدان مغناطیسی از رابطه زیر به دست می آید

$$M_{ave} = \mu_B g \left[ \left( j + \frac{1}{2} \right) \coth \left( j + \frac{1}{2} \right) x - \frac{1}{2} \coth \frac{1}{2} x \right]$$

که در آن  $x = \mu_B g \mathcal{B} / kT$ . مقادیر حدی  $M_{ave}$  را برای هنگامی که  $x$  در مقایسه با واحد خیلی کوچک یا خیلی بزرگ است به دست آورید.

۱۰۰۱۰ در چه دمایی تعداد مولکولهای يك گاز ایده آل در گستره واحد انرژی در  $2 \times 10^{-2} \text{ eV}$  يك چهارم مقداری است که با  $1 \times 10^{-2} \text{ eV}$  متناظر است؟

۱۱۰۱۰ نسبت تعداد مولکولهای يك گاز ایده آل در گستره واحد انرژی در انرژیهای  $2 \text{ eV}$  و  $2 \text{ eV}$  را به دست آورید. فرض کنید که دمای گاز (الف)  $100 \text{ K}$ ، (ب)  $300 \text{ K}$ ، و (ج)  $600 \text{ K}$  است.

۱۲۰۱۰ نقاط کافی برای رسم نمودارهای تابع توزیع انرژی مولکولی برای يك کیلو مول از گاز ایده آل را در دمای  $200 \text{ K}$  و  $600 \text{ K}$  محاسبه کنید.

۱۳۰۱۰ (الف) سرعت ریشه میانگین مربعی، سرعت متوسط، و محتملترین سرعت مولکولهای اکسیژن در دمای  $300 \text{ K}$  را محاسبه کنید. (ب) محتملترین سرعت مولکولهای اکسیژن را در دماهای زیر به دست آورید:  $100 \text{ K}$ ،  $300 \text{ K}$ ،  $1000 \text{ K}$ ، و  $10000 \text{ K}$ .

۱۴۰۱۰ (الف) متوسط انرژی جنبشی انتقالی يك مولکول گاز ایده آل در  $300 \text{ K}$  را محاسبه کنید. (ب) سرعت ریشه میانگین مربعی را برای گازهای هیدروژن ( $\text{H}_2$ )، اکسیژن ( $\text{O}_2$ )، یا بخار جیوه ( $\text{Hg}$ ) محاسبه کنید. نتایج به دست آمده برای هیدروژن و اکسیژن را با سرعت صوت در این گازها مقایسه کنید.

۱۵۰۱۰ سرعت ریشه میانگین مربعی (الف) اتمهای هلیوم در  $2 \text{ K}$ ، (ب) مولکولهای نیتروژن در  $27^\circ \text{C}$ ، و (ج) اتمهای جیوه در  $100^\circ \text{C}$  را محاسبه کنید.

۱۶۰۱۰ در چه دمایی متوسط انرژی جنبشی انتقالی يك مولکول گاز ایده آل، بامتوسط انرژی جنبشی انتقالی یون يك بار یونیده‌ای که جرم آن برابر با جرم مولکول و در عبور از اختلاف پتانسیلهای (الف)  $1 \text{ ولت}$ ، (ب)  $1000 \text{ ولت}$ ، و (ج)  $1000000 \text{ ولت}$ ، از حالت سکون شتاب می‌گیرد، برابر است؟ از اثرات نسیتی چشم‌پوشی کنید.

۱۷۰۱۰ با استفاده از معادله (۴۵.۱۰) تعداد نسبی مولکولهای يك گاز ایده آل را که سرعت آنها میان  $v_{ave}$  و  $1.2v_{ave}$  است در دو حالت زیر تعیین کنید (الف)  $v = v_{ave}$  و  $dv = 0.2v_{ave}$ ، (ب)  $v = 1.1v_{ave}$  و  $dv = 0.1v_{ave}$ .

۱۸۰۱۰ نشان دهید که تعداد مولکولهایی از يك گاز ایده آل که مؤلفه سرعتشان در گستره  $v_x$  و  $v_x + dv_x$ ،  $v_y$  و  $v_y + dv_y$ ، و  $v_z$  و  $v_z + dv_z$  قرار دارد، از رابطه زیر به دست می‌آید

$$dn = N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} dv_x dv_y dv_z$$

[دقت کنید که در معادله (۴۵.۱۰) برای این مورد باید به جای  $dv_x dv_y dv_z$ ،  $4\pi v^2 dv$ ، عنصر انتگرالگیری  $dv_x dv_y dv_z$  را قرار بدهیم. صحت این جانشانی را اثبات کنید.]

۱۹.۱۰ نشان دهید که تعداد مولکولهایی از یک گاز ایده آل که دارای مؤلفه  $X$  سرعت بین  $v_x$  و  $v_x + dv_x$  هستند، بدون توجه به مقادیر مؤلفه‌های  $v_y$  و  $v_z$ ، عبارت است از

$$dn = N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-mv_x^2 / 2kT} dv_x$$

[دانهمایی: انتگرال رابطه به دست آمده در مسئله ۱۸.۱۰ را روی  $v_y$  و  $v_z$  انجام دهید. حدود انتگرالگیری در هر مورد باید از  $-\infty$  تا  $+\infty$  باشد.]

۲۰.۱۰ از نتیجه به دست آمده در مسئله ۱۹.۱۰ مقدار متوسط (الف)  $v_x$ ، (ب)  $v_x^2$ ، و (ج)  $|v_x|$  را برای یک گاز ایده آل تعیین کنید.

۲۱.۱۰ تابع خطای  $\text{erf}(x)$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x'^2} dx'$$

در جدول ۱.۱۰ پاره‌ای از مقادیر این تابع آمده است. با به کار بردن نتیجه مسئله ۱۹.۱۰ نشان دهید که تعدادی از مولکولهای یک گاز کامل که دارای مؤلفه  $X$  سرعتی بین صفر و  $v_x$  هستند از رابطه زیر به دست می‌آید

$$N(0, v_x) = N \text{erf}(x)$$

که در آن  $x = (m/2kT)^{1/2} v_x$  و تعداد مولکولهایی که مؤلفه  $X$  سرعتی بزرگتر از  $v_x$  را دارند برابر است با

$$N(v_x, \infty) = N \left[ \frac{1}{2} - \text{erf}(x) \right]$$

۲۲.۱۰ چه کسری از مولکولهای یک گاز ایده آل، مؤلفه‌های  $X$  سرعت مثبت و بزرگتر از  $v_{mp}$  دارند؟

۲۳.۱۰ در یک گاز ایده آل، چه کسری از مولکولها دارای سرعتی هستند که مؤلفه آن در



جدول ۱۰۱۰ مقادیر  $\text{erf}(x)$

$x$	$\text{erf}(x)$	$x$	$\text{erf}(x)$
۰	۰	۱٫۶	۰٫۴۸۸۲
۰٫۲	۰٫۲۱۱۱۳	۱٫۸	۰٫۴۹۴۶
۰٫۴	۰٫۲۱۴۲	۲٫۰	۰٫۴۹۷۷
۰٫۶	۰٫۳۰۱۹	۲٫۲	۰٫۴۹۹۱
۰٫۸	۰٫۳۷۱۱	۲٫۴	۰٫۴۹۹۶
۱٫۰	۰٫۴۲۱۴	۲٫۶	۰٫۴۹۹۹
۱٫۲	۰٫۴۵۵۲	۲٫۸	۰٫۵۰۰۰
۱٫۴	۰٫۴۷۶۲	۳٫۰	۰٫۵۰۰۰

\* برای مقادیر بزرگتر  $x$ ، مقادیر  $\text{erf}(x)$  تا چهار رقم بامعناد در ۰٫۵۰۰۰ ثابت باقی می‌مانند.

راستای محور  $X$  (الف) کوچکتر از  $v_{mp}$ ، (ب) بزرگتر از  $v_{mp}$ ، (ج) کوچکتر از  $v_{ave}$  و (د) بزرگتر از  $v_{ave}$  است؟ [داهنمایی: مسئله ۲۱۰۱۰ را ببینید.]

۲۴۰۱۰ در یک گاز ایده آل، چه کسری از مولکولها دارای مؤلفه  $X$  سرعتی بین  $-v_{mp}$  و  $+v_{mp}$  هستند؟

۲۵۰۱۰ نشان دهید در یک گاز کامل تعداد مولکولهایی که سرعتشان میان صفر و  $v$  است از رابطه زیر به دست می‌آید

$$N(0, v) = \frac{1}{2} N \left[ \text{erf}(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2} \right]$$

که در آن  $x^2 = mv^2 / 2kT$ . ضمناً تعداد مولکولهایی را به دست آورید که سرعت آنها بیش از  $v$  است. [داهنمایی: معادله (۲۵۰۱۰) را به کار ببرید و انتگرالگیری پاره‌ای انجام دهید.]

۲۶۰۱۰ با استفاده از نتیجه مسئله ۲۵۰۱۰ کسری از مولکولهای یک گاز ایده آل را محاسبه

کنید که سرعتی (الف) کوچکتر از  $v_{mp}$ ، (ب) بزرگتر از  $v_{mp}$ ، (ج) کوچکتر از  $v_{ave}$ ، و (د) بزرگتر از  $v_{ave}$  دارند.

۲۷۰۱۰ چه درصدی از مولکولهای اکسیژن در دمای (الف)  $1000\text{ K}$ ، (ب)  $10000\text{ K}$  و (ج)  $100000\text{ K}$  دارای سرعتی بیش از  $10^3\text{ ms}^{-1}$  اند؟ این موضوع را به کمک نمودار بر حسب تابع توزیع نشان دهید.

۲۸۰۱۰ با استفاده از نتیجه مسئله ۲۵۰۱۰، درصد مولکولها در يك گاز ایده آل را که انرژی آنها در دمای (الف)  $300\text{ K}$ ، (ب)  $600\text{ K}$ ، (ج)  $10000\text{ K}$  بزرگتر از  $5\text{ eV}$  است، به دست آورید. [دانهایی: توجه کنید که در رابطه به دست آمده در مسئله ۲۵۰۱۰،  $x = (E/kT)^{3/2}$  است.]

۲۹۰۱۰ نشان دهید که تعداد مولکولهایی از گاز که با سرعتهای میان  $v$  و  $v+dv$  دریکی سطح و یکی زمان به دیواره ظرف برخورد می کنند برابر با  $\frac{1}{4}v(dn/dv)dv$  است. سپس نشان دهید تعداد کل مولکولهایی که در یکی زمان به دیواره برخورد می کنند برابر  $\frac{1}{4}nv_{ave}$  است، که در آن  $n$  در هر دو مورد، تعداد مولکولها دریکی حجم است. توجه کنید که مولکولهایی که با سرعت  $v$  در یکی سطح و در یکی زمان برخورد می کنند و در راستایی که با عمود بر دیواره ظرف زاویه  $\theta$  تشکیل می دهد حرکت می کنند، آنهایی هستند که در داخل حجم استوانه ای به ارتفاع  $v \cos \theta$  قرار دارند. ضمناً کسری از مولکولها که در داخل زاویه فضایی  $d\Omega$  حرکت می کنند مساوی است با

$$\frac{1}{4\pi} \frac{dn}{dv} dv d\Omega \quad \text{و} \quad d\Omega = \pi \sin \theta d\theta$$

۳۰۰۱۰ فرض کنید در دیواره کوره ای که شامل گازی در دمای  $T$  است حفره کوچکی ایجاد شده است. نشان دهید تعداد مولکولهایی که با سرعت میان  $v$  و  $v+dv$  دریکی زمان از یکی سطح خارج می شوند برابر است با

$$dn = \pi N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^3 e^{-mv^2/2kT} dv$$

که در آن  $N$  تعداد کل مولکولها دریکی حجم کوره است. تعداد کل مولکولهایی را به دست آورید که در یکی زمان از یکی سطح خارج می شوند. ضمناً نشان دهید که سرعت متوسط و سرعت ریشه میانگین مربعی مولکولی درباریکه خروجی عبارت اند از

$$v_{ave} = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}$$

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

مقایسه‌ای با مقادیر مربوط به مولکولهای درون کوره انجام دهید و نتایج آزمایش آمده در شکل ۸.۱۰ را ارزیابی کنید. [دانهمایی: از نتایج مسئله قبل استفاده کنید.]

۳۱.۱۰ (الف) نشان دهید که طول موج دو بروی ذره‌ای به جرم  $m$  که با محتملترین سرعت توزیع ماکسول در دمای  $T$  حرکت می‌کند برابر است با  $\lambda = h / (\sqrt{2mkT})^{1/2}$  که در آن  $k$  ثابت بولتزمن است. (ب) طول موج دو بروی نوترونی را محاسبه کنید که با محتملترین سرعت توزیع ماکسول در دمای  $20^\circ\text{C}$  در حرکت است. این طول موجها را با فاصله جدایی میان اتمی یک جامد مقایسه کنید.

۳۲.۱۰ چه کسری از اتمهای H و (ب) مولکولهای HCl در دمای  $300\text{K}$ ، در اولین حالت برانگیخته خواهند بود؟

۳۳.۱۰ فرض کنید که انرژی مولکولهای سیستمی را بتوان به صورت مجموع دو جمله نوشت، یعنی

$$E_i = E_{i, tr} + E_{i, int}$$

که در آن  $E_{i, tr}$  حرکت انتقالی و  $E_{i, int}$  درجات آزادی داخلی (نظیر چرخش و ارتعاش یک مولکول) یا برهم کنش با میدان الکتریکی یا مغناطیسی است. هرگاه  $g_{i, tr}$  و  $g_{i, int}$  احتمالات ذاتی متناظر با هر دو نوع حرکت باشند، خواهیم داشت،  $g_i = g_{i, tr} g_{i, int}$ . نشان دهید (الف)  $Z = Z_{tr} Z_{int}$  که در آن  $Z$  تابع پارش کل و  $Z_{tr}$  و  $Z_{int}$  توابع پارش انتقالی و داخلی اند؛ و (ب)  $U = U_{tr} + U_{int}$ .

## مراجع

1. "What is Probability?", R. Carnap, *Sci. Am.*, September 1953, page 128.
2. "Thermodynamics, Statistics, and Information," L. Brillouin, *Am. J. Phys.*, 29, 318 (1961).
3. "The Work of T. H. Berlin in Statistical Mechanics," M. Kac, *Physics Today*, October 1964, page 40.
4. "New Approach to Statistical Mechanics," R. Weinstock, *Am. J. Phys.*, 35, 710 (1967).
5. *Statistical Mechanics*, G. Rushbrooke, London: Oxford University Press, 1949.

6. *Statistical Physics*, G. Wannier, New York: John Wiley, 1966, Chapters 1, 2, and 3.
7. *Fundamentals of Statistical Thermodynamics*, R. Sonntag and G. Van Wylen, New York: John Wiley, 1966, Chapters 1 and 2.
8. *Statistical Thermodynamics*, E. Schrödinger, Cambridge: Cambridge University Press, 1964, Chapters 1 and 2.
9. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapter 40.

## ترمودینامیک

مقدمه	۱۰۱۱
پایستگی انرژی سیستم ذرات	۲۰۱۱
سیستمهای چندذره‌ای؛ کار	۳۰۱۱
سیستمهای چندذره‌ای؛ گرما	۴۰۱۱
قانون اول ترمودینامیک	۵۰۱۱
نمایش نموداری فرایندها	۶۰۱۱
فرایندهای خاص	۷۰۱۱
آنتروپی و قانون دوم ترمودینامیک	۸۰۱۱
آنتروپی و گرما	۹۰۱۱
بحث فرایندها بر حسب آنتروپی	۱۰۰۱۱

۱.۱۱ مقدمه

در فصل ۱۵ از مدل آماری برای توصیف سیستمهایی متشکل از ذرات یکسان استفاده کردیم و این مدل را که به آماد ماکسول-بولتزمن معروف است در موارد خاصی که در آنها ذرات با یکدیگر برهم‌کنش نداشته‌اند (یعنی گاز ایده‌آل) به‌کار بردیم. اما ذراتی که در طبیعت یافت می‌شوند همیشه با یکدیگر برهم‌کنش دارند. از این رو، قدم بعدی، بحث در مورد مجموعه‌ای از ذرات برهم‌کنش‌کننده نظیر اتمها یا مولکولهای درحالت جامد، مایع، بخار یا حتی نوکلئونهای موجود در یک هسته است. همچنین می‌خواهیم میان پیشگوییهای مکانیک آماری و کمیتهایی که از طریق تجربی در سطح ماکروسکوپیك اندازه‌گیری یا مشاهده می‌کنیم رابطه‌ای برقرار کنیم. ضمناً به‌جای اینکه يك سیستم منزوی واقع در تعادل آماری را در نظر بگیریم، می‌خواهیم بدانیم هنگامی که سیستم با محیط اطراف خود برهم‌کنش می‌کند چه اتفاقی رخ می‌دهد، زیرا این معمولترین وضعی است که در طبیعت وجود دارد.

فاصلهٔ میان مکانیک آماری و خواص ماکروسکوپیك ماده را شاخه‌ای از فیزیک به‌نام ترمودینامیک پر می‌کند. از نظر تاریخی، علم ترمودینامیک، در خلال قرون هجدهم و نوزدهم پیش از معرفی روشهای آماری و قبل از اینکه مفاهیم گرما و دما شناخته شوند، به‌وجود آمد. این علم، همچون يك نظریهٔ تقریباً صوری و دقیق که نتایج آن، به‌خاطر هم‌زمان بودن آن با توسعهٔ ماشینهای گرمایی، در مهندسی از اهمیت به‌سزایی برخوردار بود یا به‌عرصهٔ هستی گذاشت. در اواخر قرن نوزدهم درست هنگامی که روشهای آماری با کار مایر، بولتزمن، گیبس، و دیگران درحال تکوین بود، ترمودینامیک با تحقیقات کارنو، ژول، کلوین، و دیگران به‌اوج خود رسید. پیشرفت روشهای آماری و کاربرد آنها در فرایندهای شیمیایی لزوم تجدیدنظر در فرمولبندی ترمودینامیک را اجتناب‌ناپذیر کرد. با این حال، این علم از لحاظ کاربرد، تغییرات چندانی نکرده است.

در این فصل، ترمودینامیک را از دیدگاه مکانیک آماری بررسی می‌کنیم.

۲.۱۱ پایستگی انرژی سیستم ذرات

سیستم ذراتی را در نظر می‌گیریم که هم تحت تأثیر برهم‌کنشهای متقابل همدیگر و هم تحت تأثیر نیروهای خارجی قرار دارد. چنین سیستمی مثلاً می‌تواند يك مولکول هیدروژن که اجزای آن را دو پروتون و دو الکترون تشکیل می‌دهند و یا گازی شامل تعداد زیادی مولکول هیدروژن باشد. در حالت اخیر، ذرات تشکیل‌دهندهٔ سیستم مولکولها هستند. بنابراین در تقریب اول می‌توان از ساختار داخلی آنها چشمپوشی کرد. اگر  $E_{pij}$  انرژی پتانسیل ناشی از برهم‌کنش ذرات  $i$  و  $j$  باشد، انرژی پتانسیل داخلی سیستم برابر است با

$$E_{p \text{ int}} = \sum_{\text{تمام زوجها}} E_{pij} = E_{p_{۱۲}} + E_{p_{۱۳}} + \dots + E_{p_{۲۲}} + \dots \quad (۱.۱۱)$$

به طریق مشابه، مجموع انرژی جنبشی ذرات نسبت به مرکز جرم سیستم<sup>۱</sup> که انرژی جنبشی داخلی نام دارد، عبارت است از

$$E_{k \text{ int}} = \sum_{\text{ذرات}} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \dots \quad (2.11)$$

توجه کنید در معادله (۲.۱۱) که به انرژی جنبشی مربوط است، به هر ذره یک جمله و در معادله (۱.۱۱) که به انرژی پتانسیل مربوط است، به هر ذره یک جمله اختصاص دارد، زیرا این معادله فقط برهم کنشهای دو ذره‌ای را شامل می‌شود. در این صورت، انرژی داخلی کل سیستم، یعنی  $U$  عبارت است از

$$U = E_{k \text{ int}} + E_p \text{ int} \quad (3.11)$$

در گاز ایده‌آل، نیروهای بین‌مولکولی وجود ندارد و انرژی داخلی درست برابری همان انرژی جنبشی است. در بعضی موارد، همان‌طور که در بخش ۲.۱۵ اشاره شد، انرژی پتانسیل را می‌توان به صورت مجموع جملاتی نوشت که هر یک فقط به یک ذره اختصاص دارد. این موضوع هنگامی امکان‌پذیر است که در تقریب اول بتوان به جای انرژی پتانسیل بین‌ذره‌ای، انرژی پتانسیل متوسط مربوط به هر ذره را قرار داد. اگر هیچ نیروی خارجی به ذرات سیستم اثر نکند (یعنی سیستم از اثرات خارجی کاملاً منزوی باشد)، در این صورت  $U$  تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر:

انرژی داخلی یک سیستم ذرات منزوی ثابت می‌ماند.

هنگامی که نیروهای خارجی بر ذرات سیستم اثر می‌کنند، عموماً انرژی داخلی ثابت نمی‌ماند. فرض کنید که در آغاز سیستم در حالتی با انرژی داخلی  $U_0$  است. حالت سیستم در اثر نیروهای خارجی پیوسته تغییر می‌کند، به طوری که پس از زمان مشخصی انرژی داخلی سیستم به  $U$  می‌رسد. مقدار کل کاری را که در خلال همین مدت نیروهای خارجی بر روی ذرات سیستم انجام می‌دهند با  $W_{\text{ext}}$  نشان می‌دهیم. کار  $W_{\text{ext}}$  مجموع جملات فراوانی است که هر کدام به ذره‌ای که تحت اثر نیروی خارجی قرار دارد وابسته است. پایستگی انرژی ایجاب می‌کند که

$$U - U_0 = W_{\text{ext}} \quad (4.11)$$

رابطه بالا بیان می‌دارد که

۱. برای بیان انرژی جنبشی باید یک چارچوب مرجع تعریف کنیم، زیرا در غیر این صورت مقدار آن نامعین خواهد بود.

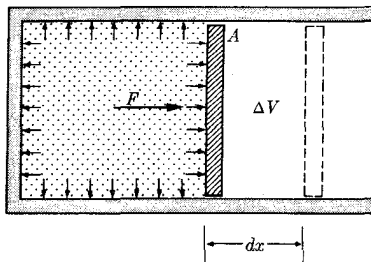
تغییرات انرژی داخلی يك سیستم ذرات مساوی است با کاری که نیروهای خارجی بر روی سیستم انجام می‌دهند.

حتی هنگامی که نیروهای خارجی بر سیستم اثر می‌کنند، ممکن است مقدار کل کار انجام شده توسط آنها مساوی با صفر باشد، یعنی  $W_{ext} = 0$ . در چنین حالتی انرژی داخلی تغییر نمی‌کند؛ یعنی  $U = U_0$ . هر گاه کاری روی سیستم انجام شود ( $W_{ext}$  مثبت) انرژی داخلی آن افزایش می‌یابد ( $U > U_0$ )، اما اگر خود سیستم کار انجام دهد ( $W_{ext}$  منفی) انرژی داخلی آن کاهش می‌یابد ( $U < U_0$ ).

### ۳.۱۱ سیستمهای چند ذره‌ای؛ کار

سیستمهایی در ترمودینامیک مورد نظر ماست که از تعداد بی‌شماری ذره تشکیل شده‌اند. از این رو، محاسبه کار خارجی به صورت مجموع کارهای منفردی که روی هر ذره انجام می‌شود بسیار مشکل است. به همین دلیل برای سهولت،  $W_{ext}$  را به صورت مجموع دو جمله می‌نویسیم که هر دو طبیعت آماری دارند. یکی از این دو جمله را کار و دیگری را گرما می‌نامیم. در بیشتر موارد مخصوصاً هنگامی که با ماشینهای گرمایی سروکار داریم بهتر است به جای محاسبه  $W_{ext}$ ، یعنی کاری که از خارج بر روی سیستم انجام می‌شود، کاری که سیستم بر روی خارج انجام می‌دهد (یعنی  $W_{sys}$ ) را محاسبه کنیم. چون هر دو کار انجام شده با تغییر مکان یکسان، ولی نیروهای مساوی و مختلف‌الجهت متناظرند، از لحاظ بزرگی مساوی و از لحاظ علامت باهم مخالف هستند، یعنی  $W_{sys} = -W_{ext}$ . از این به بعد برای نمایش کار انجام شده توسط سیستم به جای  $W_{sys}$  از  $W$  استفاده خواهیم کرد.

برای مثال گازی را در داخل يك مخزن استوانه‌ای در نظر می‌گیریم (شکل ۱۰۱۱). این گاز می‌تواند از طریق برخوردها و برهم‌کنشهای مولکولهایش با مولکولهای دیواره مخزن، با محیط اطراف انرژی و تکانه مبادله کند. تبادل تکانه را با نیرویی که هر مولکول در محل برخورد با دیواره با دیواره به آن وارد می‌کند نشان می‌دهیم. این نیروهای منفرد در هر نقطه



شکل ۱۰۱۱ کار انجام شده در حین انبساط گاز.



افت و خیز دارند، اما چون برخوردهای بی‌شماری بر روی سطح وسیعی صورت می‌گیرد، اثر کلی را می‌توانیم با نیروی متوسط  $F$  که بر تمام سطح وارد می‌شود نمایش دهیم. فشار گاز (یعنی،  $p$ ) به صورت نیروی متوسط بر یکای سطح تعریف می‌شود. در این صورت، اگر  $A$  مساحت سطح باشد داریم

$$p = \frac{F}{A} \quad \text{یا} \quad F = pA \quad (5.11)$$

هرگاه یکی از دیواره‌های مخزن، مانند پیستون شکل ۱.۱۱ متحرک باشد، نیروی وارد شده توسط گاز می‌تواند دیواره را به اندازه  $dx$  جا به جا کند. بنا بر این، تبادل انرژی سیستم با دنیای خارج را می‌توان با کار انجام شده توسط این نیرو در حین جا به جایی بیان کرد. در این صورت داریم

$$dW = F dx = pA dx = p dV \quad (6.11)$$

که در آن  $dV = A dx$  تغییر حجم گاز است. پس اگر حجم از  $V_0$  به  $V$  برسد، کار خارجی انجام شده توسط گاز در حین انبساط برابر خواهد بود با

$$W = \int_{V_0}^V p dV \quad (7.11)$$

برای محاسبه این انتگرال باید رابطه بین  $p$  و  $V$  را بدانیم. این رابطه برای گازها و مواد دیگر به تفصیل بررسی شده است و ما بعداً از آن استفاده خواهیم کرد. کار خارجی انجام شده بر روی گاز برابر است با

$$W_{\text{ext}} = - \int_{V_0}^V p dV \quad (8.11)$$

اکنون بعضی یکاهای متداول فشار را ذکر می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که فشار باید بر حسب یکای نیرو بر یکای سطح بیان شود. بنابراین، در سیستم  $\text{mksc}$  فشار بر حسب نیوتون بر مترمربع یا  $\text{Nm}^{-2}$  اندازه‌گیری می‌شود. سایر یکاهای عبارت‌اند از دین بر سانتیمتر مربع ( $\text{dyncm}^{-2}$ ) و پوند-نیرو بر اینچ مربع ( $\text{lbf in}^{-2}$ ). یکای مفید دیگری که اغلب برای بیان فشار گازها به کار می‌رود اتمسفر است که به اختصار به صورت  $\text{atm}$  نوشته و با تساوی زیر تعریف می‌شود

$$1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2} = 14.7 \text{ lbf in}^{-2}$$

یک اتمسفر تقریباً برابر فشار معمولی جو زمین است که در سطح دریا بر اجسام وارد می‌شود.

مثال ۱.۱۱ حجم گازی  $3.0 \text{ m}^3$  است و فشاری معادل  $2 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$  وارد می‌کند.

در فشار ثابت، حجم گاز را به  $45 \text{ m}^3$  افزایش می‌دهیم. کار انجام شده توسط گاز را محاسبه کنید.

حل: با استفاده از معادله (۷.۱۱) در فشار ثابت داریم

$$W = \int_{V_0}^V p dV = p \int_{V_0}^V dV = p(V - V_0) \quad (9.11)$$

این نتیجه کلیت دارد و برای هر سیستمی که حجم آن در فشار ثابت تغییر کند به کار می‌رود. با قراردادن مقادیر عددی داریم

$$W = 3 \times 10^4 \text{ J}$$

مثال ۲.۱۱ حجم يك گاز به طریقی منبسط می‌شود که رابطه  $pV = C$  (مقدار ثابتی است) برقرار بماند. برقراری این رابطه مستلزم این است که دمای گاز ثابت بماند که همان قانون بویل است. هر گاه حجم از  $V_1$  به  $V_2$  افزایش یابد کار انجام شده را محاسبه کنید.

حل: با استفاده از معادله (۸.۱۱) داریم

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} C \frac{dV}{V} = \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (10.11)$$

بنابراین کار انجام شده به نسبت  $V_2/V_1$  میان دو حجم (کسه نسبت انبساط نامیده می‌شود) بستگی دارد. در طراحی ماشینهای احتراق داخلی، نسبت تراکم (یا انبساط) یکی از عواملی است که توان موتور را تعیین می‌کند.

## ۴.۱۱ سیستمهای چند ذره‌ای؛ گرما

باید توجه داشت که معادله (۷.۱۱) يك هیانگین ماکروسکوپیک است و از حاصل جمع تمامی تبدلات انرژی میان تك تك مولکولهای گاز و مولکولهای پیستون به دست می‌آید. اما چگونه می‌توان تبادل انرژی ناشی از برهم کنش مولکولهای گاز با دیواره‌ها را که در واقع ثابت می‌مانند، محاسبه کرد؟ در این مورد، نمی‌توان از روش به کار رفته برای محاسبه  $W$  استفاده کرد. گرچه هنوز هم می‌توان نیروی متوسط وارد بر دیواره را تعریف کرد ولی تعریف جا به جایی متوسط دیواره ممکن نیست. در هر برهم کنش انفرادی میان مولکولهای گاز و دیواره، نیروی کوچکی وارد و تغییر مکان کوچکی در مولکولهای دیواره حاصل می‌شود. اگر می‌توانستیم هر يك از این مقادیر بینهایت کوچک کار را محاسبه و همگی را با یکدیگر جمع کنیم در این صورت می‌توانستیم کاری را که سیستم بر روی خارج انجام می‌دهد محاسبه کنیم. بدیهی است که این روش به دلیل اینکه تعداد عوامل موجود در فرایند بی‌شمار

است تقریباً غیرممکن است. از این رو، مفهوم ماکروسکوپی یا آماری جدیدی به نام گرما تعریف می‌کنیم تا بتوانیم چنین کاری را توجیه کنیم.

مقدار متوسط کار خارجی یا انرژی مبادله شده میان یک سیستم و محیط اطراف آن را که حاصل تبدلات انفرادی انرژی ناشی از برخوردهای مولکولهای سیستم و مولکولهای محیط اطراف است گرما می‌نامیم و آن را با  $Q$  نشان می‌دهیم. از این تعریف هنگامی استفاده می‌کنیم که نمی‌توانیم کار را به صورت نیرو ضربدر فاصله بیان کنیم. بنا بر این  $Q$  مجموع تک تک کارهای خارجی کوچک بی‌شماری است که نمی‌توان آنها را به صورت حاصلضرب میانگین نیرو در میانگین فاصله بیان کرد.

بر طبق قراردادی که برای تعیین علامت پذیرفته شده است، گرمای  $Q$  هنگامی مثبت است که کار خارجی خالصی بر روی سیستم انجام می‌شود و هنگامی منفی است که سیستم کار خالصی بر روی خارج انجام می‌دهد. در حالت اول سیستم گرما جذب کرده و در حالت دوم گرما از دست داده است.

چون گرما با کار متناظر است، می‌توان آن را بر حسب ژول بیان کرد. اما معمولاً گرما را بر حسب یکایی به نام کالری (که به اختصار cal نوشته می‌شود)، بیان می‌کنند. هنگامی که کالری به عنوان یکای اندازه گیری گرما معرفی شد طبیعت گرما هنوز به وضوح درک نشده بود. به هر حال کالری یکای دیگری برای اندازه گیری کار و انرژی است و فقط به گرما اختصاص ندارد.

در اینجا لازم است تأکید کنیم که دانشجو نباید گرما را شکل جدید و متفاوتی از انرژی در نظر بگیرد، بلکه باید آن را شکل خاصی از انتقال انرژی یا کار بداند که در آن تعداد بی‌شماری ذره شرکت دارند. قبل از اینکه مفاهیم برهم کنش و ساختار اتمی ماده به وضوح شناخته شود، فیزیکدانان انرژی را به دو نوع تقسیم کرده بودند: انرژی مکانیکی که با انرژی پتانسیل گرانشی و انرژی جنبشی متناظر است. و انرژی غیرمکانیکی که به انواع گسرها، انرژی شیمیایی، انرژی الکتریکی، تابشی و مانند آن تقسیم می‌شود. این تقسیم بندی اکنون اعتبار ندارد. امروزه فیزیکدانان فقط انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی را به رسمیت می‌شناسند که از این میان، انرژی پتانسیل، بسته به طبیعت برهم کنشی فیزیکی مربوط، به اشکال گوناگون بیان می‌شود و گرما و تابش بیانگر دو سازوکار برای انتقال انرژی اند. انرژی شیمیایی صرفاً یک اصطلاح ماکروسکوپی است که برای بیان انرژی وابسته به برهم کنشهای الکتریکی در اتمها و مولکولها به کار می‌رود، یعنی انرژی که در فرایندهای شیمیایی به صورت تغییر آرایش اتمها در مولکولها ظاهر می‌شود.

## ۵.۱۱ قانون اول ترمودینامیک

در دو بخش قبل دیدیم که وقتی با سیستمهای متشکل از ذرات بی‌شمار سروکار داریم،

مقدار کل کال خادجی را باید به صورت مجموع دو جمله، یعنی  $Q + W_{\text{ext}}$  بیان کنیم. همان طور که در بخشهای ۳.۱۱ و ۴.۱۱ گفته شد،  $W_{\text{ext}}$  معرف کار خارجی در هنگامی است که بتوان آن را به صورت حاصلضرب میانگین نیرو در فاصله محاسبه کرد و  $Q$  نیز نمایانگر کار خارجی در هنگامی است که باید آن را به صورت گرما بیان داشت. در این صورت، معادله (۴.۱۱) برای اصل پایستگی انرژی باید به صورت زیر نوشته شود

$$U - U_0 = Q + W_{\text{ext}} \quad (11.11)$$

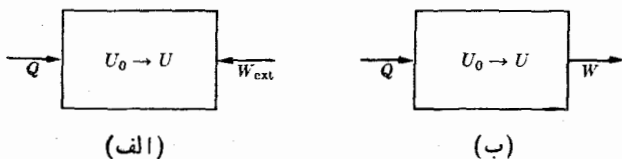
که می توان آن را به صورت جمله زیر بیان کرد

تغییر انرژی داخلی هر سیستم برابر است با گرمای جذب شده به اضافه کار خادجی انجام شده بر روی سیستم.

به کمک نمودار می توان معادله (۱۱.۱۱) را به صورت شکل ۲.۱۱ (الف) نشان داد:  $Q$  گرمایی است که سیستم جذب می کند و  $W_{\text{ext}}$  کاری است که بر روی سیستم انجام می شود و مجموع آنها یعنی  $Q + W_{\text{ext}}$  به صورت انرژی داخلی  $U - U_0$  سیستم در آن ذخیره می شود. گاهی اوقات، خصوصا در کار بردهای مهندسی، به جای کار خارجی  $W_{\text{ext}}$  که بر روی سیستم انجام می شود کار خارجی  $W$  را که سیستم انجام می دهد می نویسند. همان طور که قبلا توضیح داده شده، این کار برابر منفی کاری است که بر روی سیستم انجام شده است. با قراردادن  $W_{\text{ext}} = -W$  به جای معادله (۱۱.۱۱) رابطه زیر را خواهیم داشت

$$U - U_0 = Q - W \quad (12.11)$$

در شکل ۲.۱۱ (ب) منحنی نمایش معادله (۲.۱۱) رسم شده است. در این شکل  $Q$  گرمایی است که سیستم جذب می کند،  $W$  کاری است که سیستم انجام می دهد و اختلاف  $Q - W$  به صورت  $U - U_0$  انرژی داخلی سیستم، در آن ذخیره می شود. عبارات مربوط به معادلات (۱۱.۱۱) و (۱۲.۱۱) را قانون اول ترمودینامیک می گویند که در واقع قانون پایستگی انرژی برای سیستمهایی است که از ذرات بی شماری تشکیل شده اند. کار خارجی به طور قراردادی به دو جمله آماری تقسیم شده است که یک جمله آن بازهم کار نامیده می شود و جمله دیگر گرما.



شکل ۲.۱۱ رابطه میان گرما، کار، و انرژی داخلی.

باید توجه داشت که بر حسب تعریف، انرژی داخلی هر سیستم فقط به حالت آن سیستم بستگی دارد، خواه سیستم در تعادل باشد یا نباشد، و به طریقی که سیستم به آن حالت می رسد بستگی ندارد. اما، فقط هنگامی که سیستم در حالت تعادل قرار دارد و ذرات تشکیل دهنده آن از آمار ماکسول-بولتزمن پیروی می کنند، می توان از معادله (۲۴.۱۰) برای محاسبه  $U$  استفاده کرد، یعنی داریم

$$U = kNT^2 \frac{d}{dT} (\ln Z)$$

از طرف دیگر، کار  $W$  و گرمای  $Q$  کمیت هایی هستند که مستقیماً به فرایندی که سیستم را از حالت اولیه به حالت نهایی می برد وابسته اند. یعنی، وقتی سیستم از یک حالت اولیه مشخص به یک حالت نهایی مشخصی می رود چندین فرایند ممکن است به وقوع بپیوندند. برای تمام فرایندهایی که حالت های یکسانی را بهم مربوط می کنند، مقادیر  $U$  و  $U_0$  انرژی داخلی اولیه و نهایی یکی هستند، به طوری که اختلاف  $\Delta U = U - U_0$  مستقل از فرایند است. ولی به طور کلی، مقادیر گرمای  $Q$  و کار  $W$  برای هر فرایند متفاوت است. به عبارت دیگر، تقسیم تبادل انرژی به گرما و کار بستگی به فرایند دارد.

یکی از حالت های جالب هنگامی رخ می دهد که سیستم تبدیل چرخه ای یا به اختصار یک چرخه را پشت سر گذارد. این به این معنی است که در انتهای فرایند سیستم به حالت اولیه خود باز می گردد. بنابراین

$$U = U_0 \quad \text{و} \quad \Delta U = U - U_0 = 0$$

که با قراردادن در معادله (۱۲.۱۱) نتیجه می شود

$$Q = W \quad (۱۳.۱۱)$$

از این رو در یک چرخه، گرمایی که سیستم جذب می کند تماماً به کار  $W$  که سیستم انجام می دهد تبدیل می شود. این درست اساس کار ماشین های گرمایی است که هدف از طرح آنها جذب گرما و انجام کار به روش چرخه ای است.

هر گاه تبدیلی که در سیستم به وجود می آید بی نهایت کوچک باشد، در معادله (۱۲.۱۱) به جای  $\Delta U = U - U_0$ ،  $Q$ ، و  $W$  باید به ترتیب  $dU$ ،  $dQ$  و  $dW$  را قرار دهیم. با انجام این کار، معادله زیر به دست می آید

$$dU = dQ - dW \quad (۱۴.۱۱)$$

این معادله قانون اول ترمودینامیک را به صورت دیفرانسیلی بیان می کند. توجه کنید که برای تغییرات بی نهایت کوچک در  $Q$  و  $W$  از  $dQ$  و  $dW$  استفاده شده است و نه از  $dQ$  و  $dW$ . دلیل این مطلب آن است که می خواهیم تأکید کنیم با آنکه  $U$  تابعی از حالت

است و تغییر آن فقط به حالت‌های ابتدایی و انتهایی بستگی دارد، ولی  $Q$  و  $W$  کمیت‌هایی هستند که تنها به فرایندها وابسته‌اند. به زبان ریاضی،  $dU$  دیفرانسیل کامل متغیرهایی است که در تعریف سیستم به کار رفته‌اند درحالی که برای  $dQ$  و  $dW$  این چنین نیست.

هنگامی که کار  $dW$  ناشی از انبساط یا تغییر درحجم باشد، از معادله (۸.۱۱) خواهیم داشت  $dW = p dV$  و معادله (۱۲.۱۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$dU = dQ - p dV \quad (15.11)$$

باید توجه داشت که علاوه بر انبساط ممکن است انواع دیگری از کار نیز وجود داشته باشند که بر حسب متغیرهای مسئله بسا عبارات متفاوتی بیان شوند. مثلا، هر گاه بار  $dq$  با نیروی الکتروموتوری  $V_g$  حرکت کند باید نوشت  $dW = V_g dq$

## ۶.۱۱ نمایش نموداری فرایندها

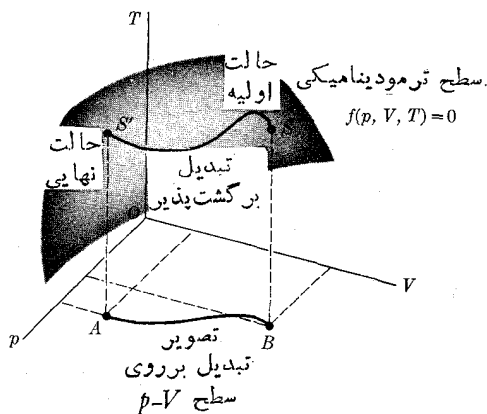
برای اینکه حالت تعادل سیستمی متشکل از اتمها یا مولکولها را به طور ماکروسکوپی توصیف کنیم، پاره‌ای از پارامترهای ماکروسکوپی یا آماری را به کار می‌بریم. رایجترین این پارامترها فشار، دما، و حجم است. از انرژی داخلی کل هم می‌توان استفاده کرد ولی این کار معمول نیست. هر گاه سیستم از دو یا چند ماده مستقل تشکیل شده باشد، برای آن که حالت سیستم را به نحوی کامل مشخص کنیم، از تناسب نسبی آنها نیز باید آگاهی داشته باشیم.

متغیرهای ماکروسکوپی با آماری که حالت سیستم واقع در تعادل را بیان می‌کنند همگی مستقل نیستند بلکه بایک رابطه ریاضی بنام معادله حالت که مشخصه ساختار فیزیکی سیستم است به یکدیگر مربوط می‌شوند. مثلا، معادله حالت یک گاز ایده آل (بخش ۲.۱.۲ را ببینید) عبارت است از

$$pV = NRT \quad (16.11)$$

که در آن  $N$  تعداد مول و  $R$  ثابت گاز است که با معادله (۳.۱۰) تعریف می‌شود. یکی از مهمترین مسائل فیزیک آماری به دست آوردن معادله حالت برای انواع مختلف مواد است، زیرا آگاهی از معادله حالت از اهمیت علمی و نظری قابل ملاحظه‌ای برخوردار است.

در اینجا معادله حالت یک ماده همگن را  $f(p, V, T) = 0$  نمایش می‌دهیم. با استفاده از محورهای  $p$ ،  $V$ ، و  $T$  (شکل ۳.۱۱) می‌توان این تابع را با سطحی که سطح ترمودینامیکی نام دارد نمایش داد. هر حالت تعادل خاصی از سیستم که با مقادیر معینی از  $p$ ،  $V$ ، و  $T$  مشخص می‌شود، با نقطه  $S$  در روی سطح نمایش داده می‌شود. هر گاه سیستم فرایند یا تبدیلی را از سر بگذرانند، سرانجام به حالت تعادل دیگر  $S'$  که آن هم روی سطح



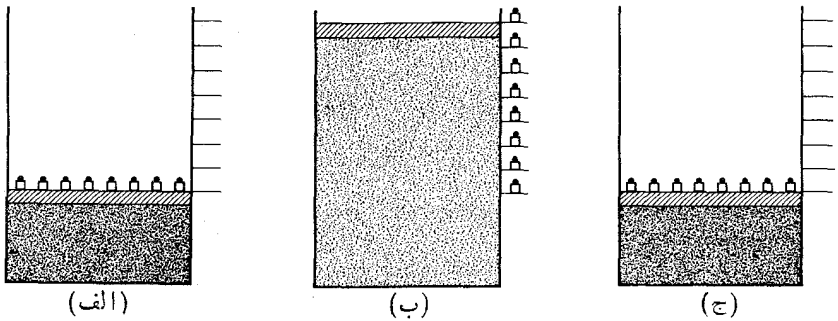
شکل ۳۰۱۱ سطح ترمودینامیکی.

قرار دارد می‌رسد. به‌طور کلی، حالت‌های میانی اشغال‌شده در تبدیل  $S \rightarrow S'$  حالت‌های تعادل نیستند و نمی‌توان آنها را با نقاط واقع بر روی سطحی به‌معادله زیر نمایش داد

$$f(p, V, T) = 0$$

اما، هر گاه تبدیل خیلی به‌کندی رخ دهد (یعنی همواره تبدیلات بی‌نهایت کوچک صورت گیرد، به‌طوری که در هر مرحله سیستم فقط کمی از حالت تعادل به‌دور باشد)، می‌توان به‌طور معقول فرض کرد که سیستم در هر لحظه در تعادل آماری قرار دارد. هر تبدیل از این نوع را تبدیل برگشت‌پذیر می‌گویند.

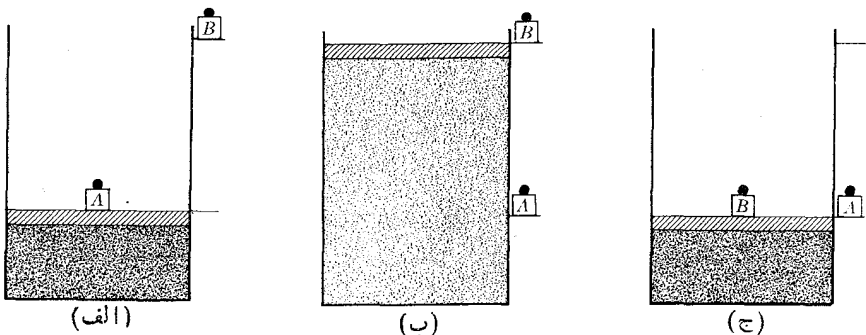
برای نمایش تبدیل برگشت‌پذیر می‌توان از انبساط گاز استفاده کرد. در شکل ۳۰۱۱ فرض کنید که پیستون توسط وزنه‌های خیلی کوچکی در محل خود قرار گرفته است [شکل ۳۰۱۱ (الف)]. در وضع تعادل، فشار گاز متراکم‌شده مساوی با فشار ناشی از وزنه‌ها به‌اضافه فشار جو است. هر گاه یکی از وزنه‌ها، بسا لغزاندن آن به‌یکسو و قرار گرفتن روی سکوی جانبی، از روی پیستون برداشته شود فشار خارجی به‌مقدار کمی کاهش می‌یابد و تعادل گاز کمی برهم می‌خورد. در این صورت گاز کمی منبسط می‌شود و دوباره به‌سرعت به‌حالت تعادل می‌رسد. هر گاه این فرایند چندین مرتبه تکرار شود، گاز سرانجام تا حجمی که در شکل (ب) نشان داده شده است منبسط می‌شود و وزنه‌ها که قبلاً در روی پیستون قرار داشتند همگی بر روی سکوها جای می‌گیرند. چون فرایند به آرامی رخ داده است، می‌توان فرض کرد که گاز دائماً در تعادل آماری و انبساط برگشت‌پذیر بوده است. برای بازگشت گاز به‌حالت اولیه لازم است که به‌ترتیب همان وزنه‌ها را در محل اولیه خود بر روی پیستون قرار دهیم. در انتهای این فرایند پس از تکمیل یک چرخه، بی‌آنکه تغییری در محیط اطراف ایجاد شود گاز در حالت اولیه خود قرار می‌گیرد. به‌عبارت دیگر، در چرخه‌ای که کاملاً از تبدیلات برگشت‌پذیر تشکیل شده است می‌توان تقریبی داد که تغییر



شکل ۴.۱۱ انبساط و تراکم برگشت پذیر يك گاز.

قابل مشاهده‌ای در سیستم یا در محیط اطراف ایجاد نشود.

از طرف دیگر، هر فرایند ناپذیر هنگامی روی می‌دهد که سیستم به مقدار قابل توجهی از حالت تعادل خود دور شود. در خلال این فرایند، کمیات آماری نظیر فشار و دما نامعین هستند. سرانجام در پایان فرایند، سیستم به حالت جدیدی که با فشار و دمای معینی مشخص می‌شود به وضع تعادل باز می‌گردد. به طور کلی، فرایندهای برگشت ناپذیر با سرعت زیادی روی می‌دهند. باز هم با استفاده از انبساط گاز می‌توان فرایند برگشت ناپذیر را توصیف کرد. گاز مورد بحث در شکل ۵.۱۱ (الف) همان است که در شکل ۴.۱۱ (الف) وجود داشت، ولی این بار تمام وزنه‌ها در وزنه‌ای که  $A$  می‌نامیم جمع شده‌اند. توجه کنید که وزنه  $B$  نیز در سطح بالاتری وجود دارد. هر گاه وزنه  $A$  به طور ناگهانی برداشته شود، فشار خارجی فوراً کاهش می‌یابد و گاز با تلاطم شدیدی که در حرکت مولکولی‌اش ایجاد می‌شود به سرعت منبسط می‌شود، یعنی فرایند برگشت ناپذیر است. در خلال این فرایند، سرعت‌های مولکولی از قانون توزیع ماکسول - بولتزمن پیروی نمی‌کنند. بالاخره پیستون در مکان



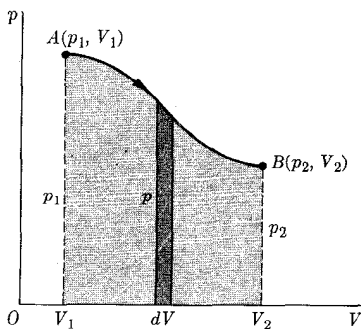
شکل ۵.۱۱ تراکم و انبساط برگشت ناپذیر يك گاز.



مشخصی به سکون درمی آید و سرانجام با دما و فشار کاملاً مشخصی به وضع تعادل باز می گردد [شکل ۵.۱۱ (ب)]. برای اینکه گاز به حالت اولیه خود باز گردد می توان وزنه  $B$  را در روی پیستون قرار داد، در این صورت پیستون به طرف پایین حرکت می کند و فرایندی به وقوع می پیوندد که ممکن است عکس فرایند قبلی باشد یا نباشد. همان طور که در شکل ۵.۱۱ (ج) نشان داده شده است، در پایان فرایند هنگامی که یک بار دیگر تعادل برقرار می شود گاز مجدداً به حالت اولیه خود باز می گردد و چرخه را تکمیل می کند. با این حال، تغییر مشخصی در محیط اطراف حاصل شده است. وزنه  $B$  که در آغاز در بالا بود اینک در پایین قرار دارد. از این رو، در چرخه ای که به طور کلی یا جزئی از تبدیلات برگشت ناپذیر تشکیل شده است، سیستم به حالت اولیه خود بازمی گردد، اما تغییر قابل اندازه گیری مشخصی در محیط اطراف ایجاد می شود.

واضح است که هر تبدیل برگشت پذیر را می توان با خطی بر روی سطح ترمودینامیکی  $f(p, V, T) = 0$ ، که حالت های اولیه و نهایی  $S$  و  $S'$  را به یکدیگر وصل می کند مشخص کرد ولی فرایند برگشت ناپذیر را نمی توان به این طریق نمایش داد.

سه پارامتر  $p$ ،  $V$ ، و  $T$  مستقل از هم نیستند زیرا با معادله حالت  $f(p, V, T) = 0$  به یکدیگر ارتباط پیدا می کنند. بنابراین معمولاً برای نمایش هر فرایند مشخص لازم است که فقط از دو مختصه استفاده کنیم. برای گازها مخصوصاً از نمودار  $p-V$  استفاده می شود. مثلاً در شکل ۶.۱۱ تبدیل برگشت پذیری از حالت  $A$  با فشار  $p_1$  و حجم  $V_1$  به حالت  $B$  با فشار  $p_2$  و حجم  $V_2$  در نمودار  $p-V$  نشان داده شده است. در هر لحظه می توان دما را از معادله حالت به دست آورد. نمودار  $p-V$  مخصوصاً برای فرایندهای گازی مفید است زیرا با کاری که گاز انجام می دهد رابطه نزدیکی دارد. با توجه به معادله (۷.۱۱) یادآوری می کنیم



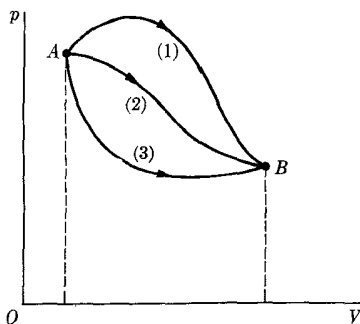
**شکل ۶.۱۱** نمودار یک فرایند برگشت پذیر در صفحه  $p-V$ . کاری که سیستم انجام می دهد با ناحیه سایه دار مشخص شده است.

کسه  $pdV$  عبارت است از مساحت نواری به پهنای  $dV$  و ارتفاع  $p$  و بنابراین، کار انجام شده به وسیله سیستم در انتقال از  $A$  به  $B$  توسط يك فرایند مشخص با رابطه زیر داده می شود

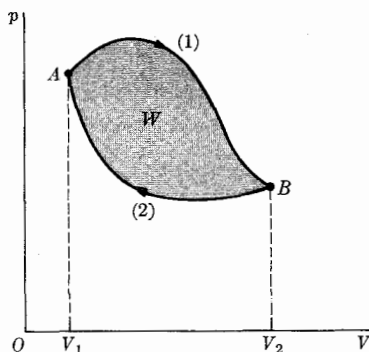
$$W_{A \rightarrow B} = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

در این صورت کار انجام شده متناظر با تبدیل عبارت است از سطح زیر منحنی  $AB$  در شکل ۶.۱۱. این موضوع به ما کمک می کند تا آنچه را که در بخش ۵.۱۱ در مورد بستگی کار با فرایند بیان کردیم خوب درک کنیم. شکل ۷.۱۱ چندین فرایند متناظر با منحنیهای (۱)، (۲)، و (۳) را نشان می دهد که در تمام آنها سیستم از حالت  $A$  به حالت  $B$  انتقال می یابد. چون سطح زیر منحنی متفاوت است، کار انجام شده در هر فرایند نیز متفاوت خواهد بود. برای هر سه فرایند، حالت های اولیه و نهایی یکسان اند و از این رو تغییر  $\Delta U = U_A - U_B$  در انرژی داخلی در هر حالت یکسان است. بنابراین گرمای متناظر با هر فرایند، که با  $Q = \Delta U + W$  داده می شود، متفاوت خواهد بود. هرگاه فرایند برگشت ناپذیر باشد، آن را نمی توان در نمودار  $p-V$  نمایش داد و محاسبه کار مشکلتر است.

اکنون چرخه ای را در نظر می گیریم که در آن سیستم در طول فرایند (۱) از  $A$  به  $B$  انتقال می یابد و در طول فرایند (۲) از  $B$  به  $A$  باز می گردد (شکل ۸.۱۱). در انتقال از  $B$  به  $A$  مقدار کار مساوی است با سطح زیر منحنی (۱)، و کار انجام شده در برگشت از  $B$  به  $A$  برابر همنهای سطح زیر منحنی (۲) است، زیرا بر روی سیستم کار انجام می شود. از این رو، کار خالصی که سیستم در خلال این چرخه انجام می دهد، یعنی  $W$ ، عبارت است از ناحیه سایه داری که در داخل منحنی معرف چرخه محصور شده است، یعنی



شکل ۷.۱۱ کار انجام شده در انتقال از حالت  $A$  به حالت  $B$  به وسیله سیستم بستگی دارد.



شکل ۸۰۱۱ چرخه کار انجام شده توسط سیستم در رسم چرخه در جهت ساعتگرد مساوی است با سطح محصور شده به وسیله چرخه در نمودار  $p-V$ .

$$\begin{aligned}
 \text{چرخه } W &= \oint pdV = \text{سطح زیر منحنی (۱)} - \text{سطح زیر منحنی (۲)} \\
 &= \text{سطح داخل منحنی } A(1)B(2)A
 \end{aligned}$$

همانطور که در بخش ۵۰۱۱ گفته شده، ماشینهای گرمایی در یک فرایند چرخه‌ای با جذب گرما، کار انجام می‌دهند. اگر فرایند برگشت پذیر باشد، با اطلاع از نمودار  $p-V$  چرخه می‌توان کار انجام شده در هر چرخه را محاسبه کرد. این کار مساوی است با گرمای خالص جذب شده به وسیله سیستم در خلال چرخه.

### ۷۰۱۱ فرایندهای خاص

اکنون چند فرایند خاص را در نظر می‌گیریم که در آنها، کار فقط از انبساط ناشی می‌شود. از این رو، معادله (۱۵۰۱۱) یعنی  $dU = dQ - pdV$  برای یک فرایند بینهایت کوچک معتبر است. تبدیل تک-حجم تبدیلی است که در آن حجم ثابت می‌ماند. بنابراین  $dV = 0$  و معادله (۱۵۰۱۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$dU_V = dQ_V, \quad V = \text{const.} \quad (17.11)$$

که در آن شاخص پایین  $V$  برای تأکید بر این واقعیت است که معادله فوق فقط در حجم ثابت معتبر است. با انتگرالگیری از معادله (۱۷۰۱۱)، [یا با قراردادن  $W = 0$  در معادله (۱۲۰۱۱)]، برای یک تبدیل مشخص داریم

$$U - U_0 = Q_V, \quad V = \text{const.}$$

پس در هر تبدیل تک-حجم، تغییر در انرژی داخلی مساوی است با گرمای جذب شده که به دلیل نبود کار خارجی این نتیجه قابل انتظار است.

اکنون مفهوم ظرفیت گرمایی (دحجم ثابت،  $C_V$ ) را تعریف می‌کنیم که برابر است با گرمای جذب شده به وسیلهٔ یک مول از ماده در تغییر یکای دما در حجم ثابت. با استفاده از معادلهٔ (۱۷.۱۱) خواهیم داشت

$$C_V = \frac{1}{N} \frac{dQ_V}{dT} = \frac{1}{N} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (18.11)$$

که در آن  $N$  تعداد مولهای موجود در سیستم است. در محاسبهٔ  $\partial U / \partial T$  باید نشان دهیم که  $V$  ثابت است زیرا ممکن است دما را به طریق دیگری نیز تغییر دهیم و در نتیجه انرژی داخلی به طریق دیگری تغییر کند. به طور کلی، ظرفیت گرمایی  $C_V$  ثابت نیست بلکه با دما تغییر می‌کند. چون  $C_V$  مشخصه‌ای از هر ماده است، کمیت آماری یا ماکروسکوپیکی مهمی به شمار می‌آید.

تبدیل تک فشار، تبدیلی است که در آن فشار ثابت می‌ماند. در این صورت  $dp = 0$  و می‌توان  $d(pV)$  را به جای  $pdV$  قرارداد. با قراردادن این رابطه در معادلهٔ (۱۵.۱۱) داریم

$$dU = dQ_p - d(pV)_p, \quad p = \text{const.}$$

که در آن شاخص پایین  $p$  جهت تأکید بر این واقعیت است که معادله فقط در فشار ثابت معتبر است. بنا بر این

$$dQ_p = dU_p + d(pV)_p = d(U + pV)_p = dH_p, \quad p = \text{const.} \quad (19.11)$$

که در آن کمیت زیر

$$H = U + pV \quad (20.11)$$

آنتالپی سیستم نام دارد. با انتگرالگیری از معادلهٔ (۱۹.۱۱) برای یک تبدیل مشخص داریم

$$H - H_0 = Q_p, \quad p = \text{const.} \quad (21.11)$$

بنا بر این در هر تبدیل تک فشار، تغییر در آنتالپی مساوی است با گرمای جذب شده. بر طبق معادلهٔ (۹.۱۱)، کار انجام شده در هر تبدیل تک فشار برابر است با

$$W_p = p(V - V_0) \quad (22.11)$$

ظرفیت گرمایی (دفشار ثابت،  $C_p$ )، به صورت گرمای جذب شده به وسیلهٔ یک مول از ماده در تغییر واحد دما در فشار ثابت تعریف می‌شود، از این رو

$$C_p = \frac{1}{N} \frac{dQ_p}{dT} = \frac{1}{N} \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p \quad (23.11)$$

توجه کنید که هر دو ظرفیت گرمایی  $C_p$  و  $C_v$  در سیستم یکاهای  $\text{mksc}$  برحسب  $\text{JK}^{-1} \text{mol}^{-1}$  بیان می‌شوند. اما، معمولاً از یکای دیگری که  $\text{cal}^\circ\text{C}^{-1} \text{mol}^{-1}$  است استفاده می‌کنیم. ظرفیت گرمایی متوسط آب در فشار جو ثابت مساوی است با  $1.8700 \text{ cal}^\circ\text{C}^{-1} \text{mol}^{-1}$ . از لحاظ تاریخی، بسرای اولین بار کالری به صورت انرژی مورد نیاز برای افزایش دمای یک گرم آب (یا  $1/18$  مول) به اندازه  $1^\circ\text{C}$  در فشار ثابت تعریف شده بود.

تبدیل تکدما، تبدیلی است که در آن دما تغییر نمی‌کند. برای گاز ایده آل که انرژی داخلی آن،  $U = (3/2)NRT$  فقط به دما بستگی دارد، انرژی داخلی در یک فرایند تکدما تغییر نمی‌کند، یعنی  $dU_T = 0$ . بنابراین از معادله (۱۴.۱۱) خواهیم داشت

$$dQ_T = dW_T \quad \text{یا} \quad Q_T = W_T$$

فقط برای گاز ایده آل

مجدداً تکرار می‌کنیم که این رابطه فقط برای تبدیل تکدماهای گاز کامل معتبر است.

تبدیل بی‌درد، تبدیلی است که در آن سیستم نه گرما جذب می‌کند و نه گرما از دست می‌دهد. بنابراین  $dQ_a = 0$  و از معادله (۱۴.۱۱) خواهیم داشت

$$dU_a = -dW_a \quad (24.11)$$

که در آن شاخص پایین  $a$  معرف بی‌درد (آدیاباتیک) است. طبق رابطه (۲۴.۱۱)، کار انجام شده در هر تبدیل بی‌درد سبب تغییر انرژی داخلی سیستم می‌شود. از این رو، دمای هر گاز ایده آل (واکثر مواد) باید در خلال یک انبساط بی‌درد کاهش و در حین یک تراکم بی‌درد افزایش یابد.

## ۸.۱۱ آنتروپی و قانون دوم ترمودینامیک

در فصل ۱۰ پارش تعادل یک سیستم را به دست آوردیم که به خواص اجزای سیستم بستگی دارد و با محتملترین توزیع مولکولهای سیستم در میان حالت‌های متفاوت انرژی دسترس پذیر متناظر است. تحت چنین شرایطی  $P$  (یا  $\ln P$ ) بیشینه است. هرگاه سیستم با وجود منزوی بودن در وضع تعادل نباشد، می‌توان فرض کرد که در پارشی (یا توزیعی) با احتمال کمتر از احتمال بیشینه یا تعادل قرار دارد. با گذشت زمان، تحت برهم کنشهایی که میان مولکولها یا اجزای آن صورت می‌گیرد، سیستم تحول می‌یابد تا به پارش با احتمال بیشینه برسد. در چنین لحظه‌ای سیستم به تعادل آماری می‌رسد و انتظار نمی‌رود که در  $P$  (یا  $\ln P$ ) تغییری ایجاد شود مگر اینکه سیستم با یک عامل خارجی مختل شود.

برای بیان این گرایش طبیعی به سوی تعادل آماری که در نتیجه تحول به سمت پارش با احتمال بیشینه صورت می‌گیرد، مفهوم مهم آنتروپی  $S$  معرفی شده است. آنتروپی

به صورت زیر تعریف می شود

$$S = k \ln P \quad (25.11)$$

که در آن ثابت بولتزمن  $k$  به خاطر سهولت در نوشتن روابط ریاضی که به دنبال می آید، معرفی شده است. از این رو، آنتروپی هر سیستم با لگاریتم احتمال  $P$  پارشی که با حالت سیستم متناظر است متناسب است. این تعریف آنتروپی برای هر پارش یا هر حالت، خواه در وضع تعادل یا غیر آن کاربرد دارد و با دما که فقط برای حالتها یا پارشهای تعادل تعریف می شود مغایر است. ضمناً این تعریف بدان معنی است که آنتروپی هر سیستم خاصیتی از حالت سیستم است و بنا بر این:

تغییرات آنتروپی هر سیستم، هنگامی که از حالتی به حالت دیگر می رود، از فرایندی که این انتقال را موجب می شود، مستقل است.

زیرا به احتمال پارشهای اولیه و نهایی بستگی دارد. واضح است که برای حالتهای تعادل، آنتروپی را می توان به صورت تابعی از متغیرهای ماکروسکوپی که حالت را تعریف می کنند بیان کرد. تبدیل برگشت پذیر هر سیستم، خواه منزوی باشد خواه غیر منزوی، که در آن آنتروپی سیستم تغییر نکند تبدیل تک آنتروپیک نام دارد.

هنگامی که دو سیستم با احتمالات  $P_1$  و  $P_2$  در دست باشند، احتمال کل توزیع ناشی از ترکیب این دو سیستم برابر  $P = P_1 P_2$  خواهد بود. بنابراین  $S = k \ln P = k \ln P_1 + k \ln P_2 = S_1 + S_2$  به این ترتیب ملاحظه می کنیم که آنتروپی یک کمیت جمع پذیر است. این یکی از دلایلی است که چرا استفاده از مفهوم آنتروپی ساده تر از مفهوم احتمال است.

با در نظر گرفتن تعریف  $S$  و با یادآوری اینکه (بخش ۲.۱۰) حالت تعادل آماری با محتملترین پارش متناظر است، نتیجه می گیریم که آنتروپی هر سیستم منزوی در تعادل آماری برابر بیشینه مقداری است که با شرایط فیزیکی سیستم سازگار است. از این رو، در یک سیستم منزوی پس از آنکه به تعادل آماری می رسد تنها فرایندهایی می توانند روی دهند که با شرط عدم تغییر آنتروپی، یا  $dS = 0$ ، سازگاری داشته باشند. واضح است که اینها فرایندهای برگشت پذیرند، زیرا سیستم منزوی در وضع تعادل قرار دارد. از طرف دیگر، هرگاه یک سیستم منزوی در وضع تعادل نباشد، طبیعتاً در جهتی تحول می یابد که آنتروپی آن افزایش یابد. زیرا اینها فرایندهایی هستند که سیستم را به سوی حالت با احتمال بیشینه یا تعادل آماری سوق می دهند. از این رو، فرایندهایی که با احتمال بیشتر در یک سیستم منزوی روی می دهند آنها هستند که شرط زیر در مورد آنها برقرار است

$$dS \geq 0 \quad (26.11)$$

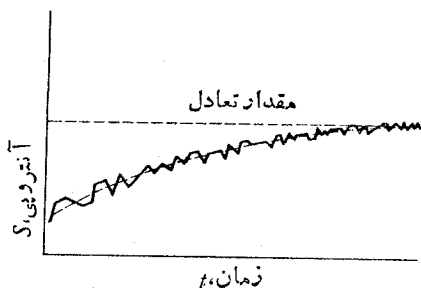
نامساوی هنگامی صادق است که سیستم منزوی در آغاز در تعادل نیست و فرایندهای برگشت ناپذیرند. بنا بر این می توان قانون دوم ترمودینامیک را به صورت زیر بیان کرد

محتملترین فرایندهایی که در یک سیستم منزوی می‌توانند روی دهند آنهایی هستند که در آنها آنتروپی یا افزایش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

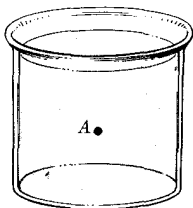
برای جمله فوق باید یک تغییر آماری در نظر گرفت زیرا در یک لحظه بخصوص به خاطر افت و خیزهایی که در توزیع مولکولی وجود دارد آنتروپی سیستم منزوی ممکن است کاهش یابد ولی هر قدر مقدار کاهش بیشتر باشد احتمال وقوع آن کمتر خواهد بود. بنابراین زمانی که سیستم تحول می‌یابد و به سوی تعادل پیش می‌رود تغییر آنتروپی را می‌توان مطابق شکل ۹.۱۱ توسط خط نامنظمی نشان داد.

قانون دوم ترمودینامیک مبین این واقعیت مشخص است که در هر سیستم منزوی، گرایش یا جهت کاملاً مشخصی برای وقوع فرایندها وجود دارد و این گرایش با جهتی که آنتروپی در آن سمت افزایش می‌یابد تعیین می‌شود.

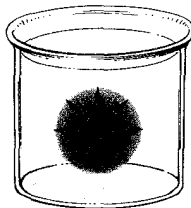
پدیده‌های ترابری نظیر پخش مولکولی و رسانش گرمایی مثالهای خوبی از فرایندهایی هستند که همیشه در یک جهت رخ می‌دهند. می‌توان نشان داد که در هر دو مورد، آنتروپی سیستم افزایش می‌یابد. پخش در جهتی رخ می‌دهد که غلظت در آن سو به یکسان شدن گرایش دارد که سیستم همگنی را نتیجه می‌دهد. فرایند عکس، یعنی تبدیل خود به خود یک سیستم همگن به یک سیستم ناهمگن، که با کاهش در آنتروپی متناظر است، هرگز مشاهده نشده است. مثلاً هر گاه یک قطره جوهر در نقطه  $A$  واقع در داخل ظرف پر آبی ریخته شود [شکل ۱۰.۱۱ (الف)]، مولکولهای جوهر به سرعت در تمام آب پخش می‌شوند و پس از مدتی رنگ آب کاملاً یکنواخت می‌شود [شکل ۱۰.۱۱ (ج)]. در این فرایند، آنتروپی سیستم افزایش می‌یابد. با این حال، اگر در یک زمان معین، سرعت تمام مولکولها دقیقاً معکوس شود، تمام جوهر سرانجام در نقطه  $A$  جمع و کاهش در آنتروپی را باعث می‌شود. واضح است که احتمال وقوع این رویداد بسیار کم است و تاکنون نیز هرگز مشاهده نشده است. از طرف دیگر، حتی پس از برقراری تعادل ممکن است در مکانهای مختلف، افت و



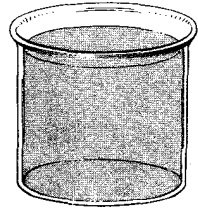
شکل ۹.۱۱ تغییر آنتروپی یک سیستم منزوی هنگامی که سیستم تحولی به سوی تعادل انجام می‌دهد.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۱۰.۱۱ پخش برگشت ناپذیر جوهر در آب.

نخیزهای کوچکی در غلظت مولکولهای جوهر روی دهد اما در بیشتر موارد این افت و خیزها قابل ملاحظه نیست.

هر گاه سیستم منزوی نباشد، در اثر برهم کنش با سیستمهای دیگر ممکن است آنتروپی آن کاهش یابد، که در این صورت آنتروپی آن سیستمها نیز باید تغییر کند. ولی با وجود این، مقدار کل تمام تغییرات آنتروپی که توسط سیستمهای موجود در فرایند حاصل می شود باید با معادله (۲۶.۱۱) سازگاری داشته باشد، یعنی برای فرایند برگشت پذیر رابطه  $dS = 0$  و برای فرایند برگشت ناپذیر رابطه  $dS > 0$  برقرار باشد.

به عنوان مثال، هر گاه ترکیب دو سیستم منزوی باشد و آنتروپی کل آنها  $S = S_1 + S_2$ ، فرایندهایی می توانند در این سیستم مرکب روی دهند که در رابطه زیر صدق کنند

$$dS = dS_1 + dS_2 \geq 0.$$

در حین فرایند، ممکن است آنتروپی یکی از اجزا کاهش یابد ولی تغییر خالص آنتروپی برای مجموعه سیستم باید مثبت یا صفر باشد.

اهمیت عمده قانون دوم ترمودینامیک، که با معادله (۲۶.۱۱) بیان شده، در این است که فرایندهایی را که احتمال وقوع آنها در عالم، چون یک کل، بیشتر است مشخص می کند. بنابراین ممکن است فرایندهای زیادی وجود داشته باشد که به دلیل سازگاری با قوانین دیگر (نظیر پایستگی انرژی)، بتوانند روی دهند، اما به دلیل اینکه قانون دوم یا شرط (۲۶.۱۱) را نقض می کنند احتمال وقوع آنها فوق العاده کم می باشد.

مثال ۳۰.۱۱ آنتروپی سیستمی که از آمار ماکسول-بولتزمن پیروی می کند و در تعادل آماري قرار دارد را تعیین کنید.

حل: با توجه به معادله (۱۳.۱۰) در مورد  $\ln P$  در آمار ماکسول-بولتزمن و با در نظر گرفتن رابطه  $N = \sum_i n_i$  خواهیم داشت

$$\begin{aligned} S &= k \ln P = k \left[ \sum_i n_i \ln g_i - \sum_i n_i \ln n_i + \sum_i n_i \right] \\ &= -k \sum_i n_i \ln (n_i / g_i) + kN \end{aligned} \quad (27.11)$$



اما از معادله (۲۳.۱۰) داریم

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-E_i/kT}$$

لگاریتم گرفتن از این معادله نتیجه زیر را به دست می دهد

$$\ln \frac{n_i}{g_i} = -\frac{E_i}{kT} - \ln \frac{Z}{N}$$

بنابر این معادله (۲۷.۱۱) به صورت زیر درمی آید

$$\begin{aligned} S &= k \left[ \sum_i n_i \frac{E_i}{kT} + \sum_i n_i \ln \frac{Z}{N} + \sum_i n_i \right] \\ &= \frac{1}{T} \left( \sum_i n_i E_i \right) + k \left( \sum_i n_i \right) \ln \frac{Z}{N} + kN \end{aligned}$$

اکنون با توجه به معادلات (۱۰.۱۰) و (۲۰.۱۰) نتیجه نهایی زیر به دست می آید

$$S = \frac{U}{T} + kN \ln \frac{Z}{N} + kN = \frac{U}{T} + k \ln \frac{Z^N}{N!} \quad (28.11)$$

مثال ۴۰.۱۱ آنتروپی یک گاز ایده آل در تعادل آماری را به دست آورید.

حل: می دانیم که در یک گاز ایده آل  $U = (3/2)kNT$  و در معادله (۴۰.۱۰) تابع پارش گاز ایده آل را به صورت زیر به دست آوردیم

$$Z = \frac{V(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}$$

با قراردادن این رابطه در معادله (۲۸.۱۱) خواهیم داشت

$$S = \frac{5}{2}kN + kN \ln \frac{V(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3 N}$$

نتیجه اخیر معادله ساکود-تترود نام دارد که می توان آن را به صورت زیر نیز نوشت

$$S = kN \ln(vT^{3/2}) + S_0 \quad (29.11)$$

که در آن  $v = V/N$  حجم به ازای مولکول است و تمام کمیت هایی که متغیر نیستند در  $S_0$  خلاصه شده اند. یعنی

$$S_0 = \frac{5}{2} kN + kN \ln \frac{(\gamma \pi mk)^{3/2}}{h^3}$$

مثال ۵.۱۱ تغییر آنتروپی گاز ایده آل در حین انبساط آزاد را بررسی کنید.

حل: هنگامی که یک مخزن محتوی گاز را به یک مخزن خالی وصل کنیم، انبساط آزاد رخ می دهد. چنین فرایندی برگشت ناپذیر است و برای مدتی تعادل از بین می رود تا این که حالت نهایی حاصل شود. این مثالی از یک طرفه بودن فرایندهای برگشت ناپذیر است، زیرا همان طور که در شکل ۱۱.۱۱ دیده می شود، هرگاه در ابتدا گاز در مخزن ۱ قرار داشته باشد و به وسیله ای (مثلا برداشتن دیواره  $W$ ) آزادانه وارد مخزن ۲ شود، پس از مدت کوتاهی مولکولهای گاز در تمام حجم  $(1+2)$  توزیع می شوند. اما کسی انتظار ندارد که بعد از زمان مشخصی، تمام مولکولهای گاز در نتیجه حرکات مولکولی مجدداً در مخزن ۱ جمع شوند. چنین فرایندی امکان پذیر و لسی کاملاً غیر محتمل است. بنابراین، در طبیعت فرایند انبساط آزاد  $V \rightarrow 2V$  روی می دهد ولی فرایند معکوس آن هرگز اتفاق نمی افتد. بر طبق قانون دوم ترمودینامیک، فرایند اول با افزایش آنتروپی گاز و فرایند دوم با کاهش آن متناظر است.

اکنون تغییر در آنتروپی را محاسبه می کنیم. در حالت اولیه آنتروپی گاز برابر است با

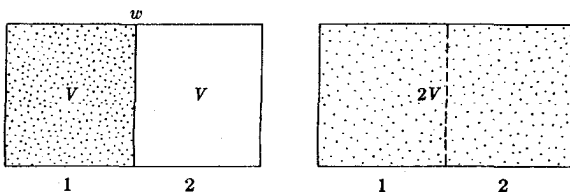
$$S_1 = kN \ln (vT^{3/2}) + S_0$$

وقتی تعادل دوباره برقرار و حجم دو برابر شود، آنتروپی به مقدار زیر می رسد

$$S_2 = kN \ln (2vT^{3/2}) + S_0$$

دما تغییر نکرده زیرا انرژی جنبشی متوسط مولکولهای گاز ایده آل تغییر نکرده است. مولکولها فقط در فضای وسیعتری حرکت می کنند. بنابراین، تغییر آنتروپی در این فرایند عبارت است از

$$S = S_2 - S_1 = kN \ln 2 > 0 \quad (30.11)$$



شکل ۱۱.۱۱

بنا بر این فرایند (برگشت ناپذیر)ی که به طور قطع در طبیعت روی می دهد، آنتروپی گاز را افزایش می دهد.

اما فرایند عکس که در آن، فرض می کنیم ابتدا گاز تمام مخزن (یا حجم  $2V$ ) را اشغال می کند و سپس بعد از زمان مشخصی فقط در حجم  $V$  واقع در طرف چپ شکل جمع می شود، با کاهش در آنتروپی متناظر است، یعنی

$$\Delta S' = S_1 - S_2 = -kN \ln 2 < 0 \quad (31.11)$$

گرچه واکنش اخیر امکان پذیر است ولی اگر گساز منزوی باشد احتمال وقوع آن بسیار ضعیف است. البته ما می توانیم گاز را به صورت تکدما متراکم و حجم آن را از  $2V$  به  $V$  کاهش دهیم که با کاهش در آنتروپی مساوی با مقدار داده شده در معادله (۳۱.۱۱)، متناظر است. ولی این کار مستلزم کنش خارجی است و از این رو لازم است که تغییرات آنتروپی خارجی را نیز در نظر بگیریم تا تغییر کل در آنتروپی عالم را به دست آوریم.

در اینجا خوب است که همین وضعیت را به کمک احتمالات بررسی کنیم. از تعریف (۲۵.۱۱) داریم

$$S_2 - S_1 = k \ln P_2 - k \ln P_1 = k \ln \frac{P_2}{P_1}$$

که از مقایسه آن با معادله (۳۰.۱۱) خواهیم داشت

$$\ln \frac{P_2}{P_1} = N \ln 2 = \ln 2^N \quad \text{یا} \quad \frac{P_2}{P_1} = 2^N$$

به طور کلی، تعداد مولکولهای گاز، یعنی  $N$  خیلی بزرگ و از این رو،  $P_2$  خیلی بزرگتر از  $P_1$  است که آهنگ سریع انبساط آزاد گاز تا حجم  $2V$  را توجیه می کند. برای فرایند معکوس  $V \rightarrow 2V$  نتیجه  $2^N = P_1/P_2$  حاصل می شود که برای تعداد  $N$  مولکول کسه معمولاً در هر نمونه از گاز وجود دارد، کمیت بسیار کوچکی است. به این ترتیب احتمال بسیار ضعیفی وجود دارد (با آنکه امکان پذیر است) که در زمان مشخصی تمام مولکولهای گاز در نتیجه برهم کنشهای خود مجدداً در ناحیه  $V$  واقع در طرف چپ شکل تجمع پیدا کنند. البته اگر تعداد مولکولها خیلی کم باشد (مثلاً،  $2$  و  $1$ )  $N$  خواهیم داشت  $1/2$  یا  $1/4$  و این امکان وجود دارد که در زمان کوتاهی «تمام» مولکولها را در طرف چپ مشاهده کنیم. اما در این صورت روشهای آماری غیر ضروری و بی معنی است و حتی این امکان وجود دارد که بتوان زمانهای دقیقی را کسه یکی از دو ذره یا هر دو در یک طرف یا طرف دیگر قرار دارند محاسبه کرد.

## ۹.۱۱ آنتروپی و گرمما

اکنون باید ببینیم که چگونه آنتروپی با سایر کمیتهای ترمودینامیکی که قبلاً به آنها اشاره

کردیم مربوط می‌شود. فرض کنید که یک سیستم واقع در تعادل آماری در نتیجه برهم کنش با محیط اطراف خود تبدیل بینهایت کوچکی انجام می‌دهد. این برهم کنش سبب می‌شود که اعداد پارش  $n_i$  و حالت‌های انرژی ممکن  $E_i$  تغییر کنند. چون  $U = \sum_i n_i E_i$  لذا خواهیم داشت

$$dU = \sum_i E_i dn_i + \sum_i n_i dE_i \quad (۳۲.۱۱)$$

این معادله، اعم از اینکه فرایند برگشت پذیر باشد یا نباشد همیشه برقرار است. با این حال، در این بخش توجه خود را تنها به تبدیلات برگشت پذیر معطوف می‌کنیم، به گونه‌ای که در هر لحظه اساساً سیستم در تعادل آماری باشد. در این صورت فرایند باید آنقدر آرام باشد که توزیع مولکولها در هر لحظه بتواند با محتملترین پارش متناظر باشد.

در بررسی معادله (۳۲.۱۱) یاد آوری می‌کنیم که مجموعه اول  $\sum_i E_i dn_i$  با تغییر در انرژی داخلی ناشی از توزیع مجدد مولکولها میان ترازهای دسترس پذیر انرژی و مجموعه دوم،  $\sum_i n_i dE_i$  با تغییر در انرژی داخلی ناشی از تغییر در ترازهای انرژی متناظر است. در ابتدا جمله دوم را بررسی می‌کنیم. در بخش ۵.۲ ویژه حالت‌های ذره در جعبه پتانسیل یک بعدی به پهنای  $a$  را بررسی کردیم و رابطه زیر را برای ترازهای انرژی به دست آوردیم

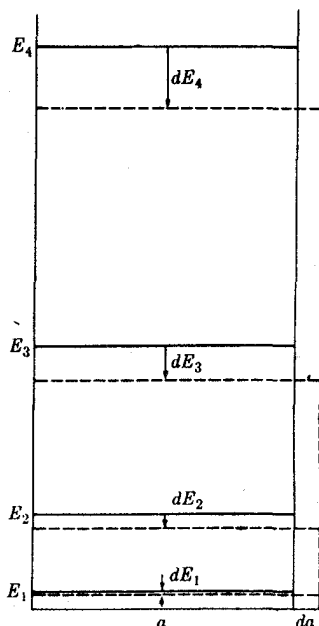
$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}$$

هر گاه پهنای  $a$  به مقدار  $da$  تغییر کند، ترازهای انرژی، مطابق آنچه که در شکل ۱۲.۱۱ نشان داده شده است، به اندازه  $dE_n$  تغییر می‌کنند. همچنین در جعبه پتانسیل سه بعدی با هر شکل نیز تغییر مشابهی در ترازهای انرژی ایجاد می‌شود. بنابراین، در مورد انبساط یک گاز، تغییر در انرژی  $\sum_i n_i dE_i$  از تغییر در ابعاد یا حجم مخزن ناشی می‌شود و از این رو با چیزی متناظر است که ما آن را کار نامیده ایم. با توجه به معادله (۱۴.۱۱)،  $dU = dQ - dW$  نتیجه می‌گیریم که کار انجام شده توسط سیستم برابر است با

$$dW = - \sum_i n_i dE_i \quad (۳۳.۱۱)$$

معادله (۳۳.۱۱) کار انجام شده به وسیله سیستم را بر حسب تغییر در ترازهای انرژی به دست می‌دهد که مثلاً از تغییر در حجم ناشی شده است. این موضوع تعریف آماری کار انجام شده به وسیله سیستم را بر پایه‌ای استوارتر از آنچه قبلاً در بخش ۳.۱۱ ارائه شد، قرار می‌دهد. با قراردادن معادلات (۳۲.۱۱) و (۳۳.۱۱) در معادله  $dU = dQ - dW$  نتیجه می‌گیریم که برای گرمای جذب شده به وسیله سیستم باید چنین نوشت

$$dQ = \sum_i E_i dn_i \quad (۳۴.۱۱)$$



شکل ۱۲-۱۱ تغییر در ترازهای انرژی جعبه پتانسیل ناشی از تغییر در پهنای جعبه.

یعنی کمیت آماری که ما به عنوان گرما تعریف کردیم عبارت است از تغییر در انرژی سیستم در اثر پرشهای مولکولی میان ترازهای انرژی و این پرشها از مبادله انرژی بسا محیط اطراف ناشی می شوند. این نتیجه اساساً با تعریف قبلی گرما که در بخش ۴-۱۱ ارائه شد سازگار است.

در خلال يك فرایند برگشت پذیر رابطه مهمی میان تغییر در آنترپی، گرمای جذب شده، و دمای مطلق وجود دارد. این رابطه به صورت زیر است

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad \text{فقط برای فرایند برگشت پذیر} \quad (۳۵-۱۱)$$

که نتیجه ای مستقیم از تعاریف (۲۵-۱۱) برای آنترپی و (۳۴-۱۱) برای گرمای جذب شده است. اثبات آن در مثال ۶-۱۱ آمده است. رابطه (۳۵-۱۱) نشان می دهد که آنترپی بر حسب  $\text{cal K}^{-1}$  یا  $\text{JK}^{-1}$  بیان می شود که بر حسب یکاهای  $k$  به طور ضمنی در تعریف (۲۵-۱۱) آمده است.

از معادله (۳۵-۱۱) داریم  $dQ = TdS$  که بسا قراردادن آن در معادله (۱۴-۱۱)

برای يك فرایند برگشت پذیر رابطه زیر را به دست می آوریم

$$dU = T dS - dW \quad (۳۶.۱۱)$$

وقتی فقط کار انبساطی انجام می شود رابطه فوق به صورت زیر درمی آید

$$dU = T dS - p dV \quad (۳۷.۱۱)$$

که تغییر در انرژی داخلی درحین يك فرایند برگشت پذیر را بر حسب تغییرات در حجم و آنتروپی بیان می کند. باز هم تأکید می کنیم که معادله (۳۶.۱۱) عموماً معتبر است، درحالی که معادلات (۳۶.۱۱) و (۳۷.۱۱) را فقط برای فرایندهای برگشت پذیر می توان به کار برد.

از معادله (۳۷.۱۱) هر گاه حجم ثابت باشد داریم  $dU_V = T dS_V$  یا

$$\frac{1}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_V = k \frac{\partial}{\partial U} (\ln P)_V$$

به طور کلی می توان نشان داد که  $P$  يك تابع افزایشی انرژی سیستم است، یعنی تا هنگامی که حجم ثابت می ماند، هرچه انرژی بیشتر باشد احتمال پارش  $P$  نیز بیشتر خواهد بود. از این رو، برای چنین سیستمهایی، دمای مطلق  $T$  يك کمیت مثبت است. به همین دلیل  $T = 0$  صفر مطلق نامیده می شود زیرا در چنین مواردی دمای کمتر از این مقدار نمی تواند موجود باشد. از لحاظ تاریخی، مفهوم آنتروپی در فیزیک در جهتی مخالف با آنچه در بحث ما ارائه شد توسعه یافت. در اواسط قرن نوزدهم، سهولت استفاده از رابطه  $dQ/T$  برای چندین محاسبه ترمودینامیکی را کلونین، کلاؤسیوس، و دیگران تشخیص دادند. در سال ۱۸۶۵ میلادی، کلاؤسیوس نام آنتروپی را برای مشخص ساختن کمیتی که تغییرات آن در حین يك فرایند برگشت پذیر با رابطه (۳۵.۱۱)، یعنی  $dS = dQ/T$  داده می شد انتخاب کرد. رابطه میان آنتروپی، آن طور که توسط کلاؤسیوس تعریف شد، و احتمال يك پارش که با معادله (۲۵.۱۱)، یعنی رابطه  $S = k \ln P$  داده می شود را اولین بار در سال ۱۸۷۷ لودویگ بولتزمن بیان کرد. وقتی بررسی مولکولی فرایندهای ترمودینامیکی بنیادینتر تشخیص داده شد، به جای تعریف کلاؤسیوس، تعریف بولتزمن در مورد آنتروپی از لحاظ نظری مناسبتری پیدا کرد.

### نکاتی در مورد علامت دمای مطلق

تغییر احتمال  $P$  با انرژی کل  $U$  درحجم ثابت را می توان به طور شهودی و به صورت زیر تحلیل کرد؛ فرض کنید سیستمی از ذرات در جعبه ای با حجم ثابت محصور شده است. بنسباً برای این ترازهای انرژی ممکن نیز ثابت خواهند بود. از این رو، اگر انرژی سیستم بخواهد افزایش یابد، تعدادی از ذرات باید از ترازهای انرژی پایینتر به تراز بالاتر انتقال یابند. فرض کنید

به ازای یک انرژی کل مشخص،  $n_1, n_2, n_3, \dots$  اعداد اشغال پارش باشند که در آن، در وضع تعادل سیستم رابطه  $n_1 > n_2 > n_3 > \dots$  برقرار است. همچنین برای سهولت فرض می‌کنیم که  $g_1 = g_2 = g_3 = \dots = 1$ . در این صورت احتمال این پارش تعادل برابر است با

$$P = \frac{1}{n_1! n_2! n_3! \dots}$$

اکنون فرض کنید که انرژی کل سیستم،  $U$ ، فزونی یابد و این افزایش انرژی با انتقال ذره‌ای از تراز  $E_1$  به تراز  $E_3$  همراه باشد. در این صورت برای احتمال پارش جدید خواهیم داشت

$$P' = \frac{1}{(n_1 - 1)! n_2! (n_3 + 1)! \dots}$$

بنابراین

$$\frac{P'}{P} = \frac{n_1}{n_3 + 1}$$

هر گاه  $n_1$  حداقل به اندازه ۲ واحد از  $n_3$  بزرگتر باشد (به طور کلی  $n_1$  خیلی بزرگتر از  $n_3$  است)،  $P'$  بزرگتر از  $P$  خواهد بود. بنا بر این به طور کلی نتیجه می‌گیریم که در حجم ثابت،  $P$  با انرژی  $U$  افزایش می‌یابد. البته این امکان وجود دارد که تحت شرایط مشخصی احتمال پارش تغییر نکند، یا حتی ممکن است با افزایش انرژی کل، کاهش یابد. در حالت خاص، هنگامی که ذرات سیستم فقط تعداد محدودی (یا مشخصی) از حالت‌های قابل دسترس را در اختیار دارند، می‌توان نشان داد که  $P$  برای گستره‌های مشخص انرژی، ممکن است تابع نزولی از انرژی باشد. این موضوع، پیدایش دمای مطلق منفی در چنین انرژی‌هایی را موجب می‌شود (مسئله ۱۷.۱۱).

**مثال ۶۰۱۱** معادله (۳۵.۱۱) را برای رابطه بین تغییر آنتروپی و گرمای جذب شده توسط یک سیستم در تبدیل برگشت پذیر به دست آورید.

**حل:** فرض کنید که سیستم مورد نظر از آمار ماکسول-بولتزمن پیروی کند، فرضی که از اعتبار وسیعی برخوردار است. در این صورت، آنتروپی برای یک حالت تعادل با معادله (۲۸.۱۱) داده می‌شود. یعنی

$$S = \frac{U}{T} + kN \ln \frac{Z}{N} + kN$$

برای تبدیل برگشت پذیر بینهایت کوچکی که در آن تعداد کل ذرات تغییر نمی‌کند

$$dS = \frac{dU}{T} - \frac{U}{T^2} dT + kN \frac{dZ}{Z} \quad (۳۸.۱۱)$$

زیرا  $d(\ln Z) = dZ/Z$  است. با توجه به رابطه (۲۲.۱۰) برای تسایع پارش در آمار ماکسول-بولتزمان،  $Z = \sum_i g_i e^{-E_i/kT}$  و داریم

$$dZ = - \sum_i \frac{dE_i}{kT} g_i e^{-E_i/kT} + \sum_i \frac{E_i}{kT^2} g_i e^{-E_i/kT} dT$$

در این صورت، با استفاده از معادله (۲۵.۱۰) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} kN \frac{dZ}{Z} &= - \frac{1}{T} \sum_i \frac{N}{Z} g_i e^{-E_i/kT} dE_i + \frac{1}{T^2} \sum_i \frac{N}{Z} g_i e^{-E_i/kT} E_i dT \\ &= - \frac{1}{T} \sum_i n_i dE_i + \frac{1}{T^2} \sum_i n_i E_i dT = \frac{dW}{T} + \frac{U}{T^2} dT \end{aligned} \quad (۳۹.۱۱)$$

برای به دست آوردن نتیجه آخر، از معادلات (۲.۱۰) و (۳۳.۱۱) استفاده کردیم. با قرار دادن معادله (۳۹.۱۱) در معادله (۳۸.۱۱) خواهیم داشت

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{dW}{T} = \frac{dU + dW}{T}$$

در این صورت، از معادله (۱۴.۱۱) داریم:  $dU + dW = dQ$  سرانجام نتیجه می‌گیریم

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

که رابطه (۳۵.۱۱) است و تغییر در آنتروپی را به گرمای جذب شده مربوط می‌کند. باید به خاطر داشت که معادله (۳۵.۱۱) تنها برای یک فرایند بازگشت پذیر معتبر است زیرا در این بحث از تابع پارش تعادل استفاده کرده‌ایم.

### ۱۰.۱۱ بحث فرایندها بر حسب آنتروپی

هنگامی که سیستمی با تبدیل برگشت پذیر از حالت ۱ به حالت ۲ می‌رسد، از معادله (۳۵.۱۱) داریم

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad (۴۰.۱۱)$$

که تغییر در آنتروپی را به دست می‌دهد. چون آنتروپی تنها به حالت سیستم بستگی دارد،



در انتقال سیستم از حالت ۱ به حالت ۲، انتگرال طرف راست معادله بالا مستقل از تبدیل برگشت پذیر طی شده خواهد بود. همچنین  $\Delta S = S_2 - S_1$  فقط به حالت‌های ابتدایی و انتهای بستگی دارد و نه به فرایند.

برای تبدیل برگشت پذیر تکدما،  $T$  ثابت است و معادله (۴۰.۱۱) به صورت زیر درمی آید

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{T} \int_1^2 dQ = \frac{Q}{T} \quad \text{یا} \quad Q = T(S_2 - S_1) \quad (41.11)$$

فقط برای فرایندهای تکدما

از این رو، بر حسب آنکه گرما جذب یا دفع شود، تغییر  $S_2 - S_1$  مثبت یا منفی خواهد بود زیرا  $T$  مثبت است. برای تبدیل برگشت پذیر بی دررو، چون  $dQ_e = 0$  معادله (۴۰.۱۱) نتیجه زیر را به دست می‌دهد

$$S_2 - S_1 = 0 \quad \text{یا} \quad S = \text{const.} \quad (42.11)$$

بنابراین، تبدیلات برگشت پذیر بی دررو در آنتروپی ثابت صورت می‌گیرند و به همین دلیل تک آنتروپیک نیز هستند. اما، توجه کنید که هر تبدیل برگشت نا پذیر بی دررو لزوماً تک آنتروپیک نخواهد بود.

همچنین از معادله (۳۵.۱۱) داریم

$$Q = \int_1^2 T dS \quad (43.11)$$

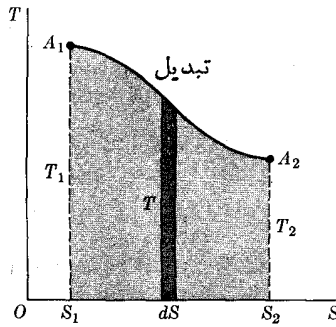
که گرمای جذب شده در انتقال از حالت ۱ به حالت ۲ در یک تبدیل برگشت پذیر را به دست می‌دهد. این انتگرال به تبدیل بخصوصی بستگی دارد. در واقع در نموداری که طول با  $T$  و عرض با آنتروپی  $S$  متناظر است، تبدیل برگشت پذیر را می‌توان با خطی همچون شکل ۱۳-۱۱ نمایش داد. در این صورت  $Q$  برابر سطح زیر منحنی از  $S_1$  تا  $S_2$  است. هر گاه تبدیل به صورت چرخه‌ای نظیر  $A(1)B(2)A$  باشد، (شکل ۱۴-۱۱)، در این صورت تغییر در آنتروپی مساوی با صفر است،  $S_2 - S_1 = 0$ ، زیرا به حالت اولیه باز می‌گردیم و داریم

$$\Delta S = \oint \frac{dQ}{T} = 0 \quad \text{چرخه برگشت پذیر} \quad (44.11)$$

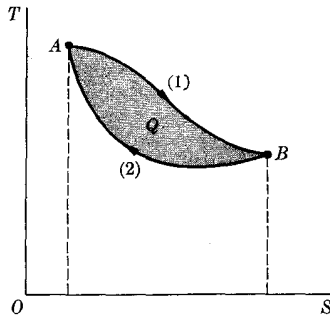
در حالی که گرمای خالص جذب شده به وسیله سیستم در چرخه برابر است با

$$Q = \oint T dS = (T, S)$$

$$= \text{کار انجام شده توسط سیستم در حین چرخه} \quad (45.11)$$



شکل ۱۳-۱۱ نموداریک فرایند برگشت پذیر در صفحه  $T-S$ . گرمای جذب شده درحین فرایند با ناحیه سایه دار مشخص شده است.



شکل ۱۴-۱۱ چرخه گرمای جذب شده به وسیله سیستم در طی چرخه ساعتگرد مساوی با ناحیه ای است که با چرخه در نمودار  $T-S$  محصور شده است.

در محاسبات ترمودینامیکی، این رابطه از اهمیت به سزایی برخوردار است. باید توجه داشت که همانند فشار، حجم، یا دما، آنتروپی نیز متغیری است که می تواند برای بیان یک فرایند به کار رود.

**مثال ۲-۱۱** کارایی گرمایی ماشینی را که در یک چرخه کارنو کار می کند محاسبه کنید.

**حل:** چرخه کارنو چرخه ای است که از دو تبدیل تکدما و دو تبدیل بی دررو تشکیل شده است.

بدون توجه به آنکه ماده کار چیست، این چرخه با مستطیل  $ABCD$  در شکل ۱۵.۱۱ نمایش داده می شود که در آن  $AB$  و  $CD$  تبدیلات تکدما، و  $BC$  و  $DA$  تبدیلات بی دررو یا تک آنتروپیک هستند. این چرخه، همان طور که توسط پیکانها نشان داده شده است، به طریق ساعتگرد رسم شده است. دمای دو فرایند تکدما را با  $T_1$  و  $T_2$  نمایش می دهیم که در آن  $T_1$  بزرگتر از  $T_2$  است. درحین فرایند تکدمای  $AB$  در دمای بالاتر  $T_1$ ، آنتروپی افزایش می یابد و سیستم مقدار انرژی  $Q_1$  جذب می کند؛ در خلال فرایند تکدمای  $CD$  در دمای پایینتر  $T_2$  آنتروپی کاهش می یابد و مقدار گرمای  $Q_2$  دفع می شود. در حین دو تبدیل بی دررو، آنتروپی ثابت می ماند و گرمایی بامحیط اطراف مبادله نمی شود. برطبق معادلات (۴۱.۱۱) و (۴۲.۱۱)، تغییرات در آنتروپی درحین هر تبدیل برابر است با

$$\Delta S_{AB} = Q_1/T_1, \quad \text{تکدما، گرمای جذب شده}$$

$$\Delta S_{BC} = 0, \quad \text{بی دررو}$$

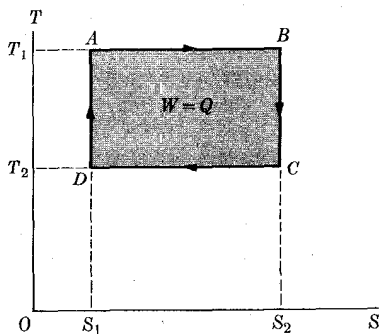
$$\Delta S_{CD} = -Q_2/T_2, \quad \text{تکدما، گرمای دفع شده}$$

$$\Delta S_{DA} = 0, \quad \text{بی دررو}$$

تغییر خالص آنتروپی در چرخه مساوی صفر است و داریم

$$\Delta S_{\text{چرخه}} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \quad (46.11)$$

معادله بالا رابطه میان گرمای جذب و دفع شده و دماهای متناظر را به دست می دهد. معادله (۴۶.۱۱) برای هر نوع ماده ای که چرخه کارنو را انجام می دهد، خواه گاز ایده آل باشد یا نباشد، صادق است زیرا هیچ فرض خاصی را درباره ساختار داخلی ماده در نظر نگرفته ایم. در مورد یک گاز، چرخه بایک سری از تراکمها و انبساطها همراه است.



شکل ۱۵.۱۱ چرخه کارنو در نمودار  $T-S$ .

گرمای خالص جذب شده به وسیله سیستم در حین چرخه عبارت است از  $Q = Q_1 - Q_2$ ، که همچنین با کار  $W$  انجام شده توسط سیستم در خلال چرخه مساوی است. بر طبق معادله (۴۵.۱۱) می توان نوشت

$$W = Q = ABCD \text{ مساحت مستطیل} = (T_1 - T_2)(S_2 - S_1).$$

از طرف دیگر

$$Q_1 = T_1 \Delta S_{AB} = T_1(S_2 - S_1)$$

بنابراین، کارایی یک ماشین گرمایی که طبق چرخه کارنو کار می کند (و در هر چرخه به صورت نسبت کار انجام شده به گرمای جذب شده در بالاترین دما تعریف می شود) برابر است با

$$E = \frac{W}{Q_1} = \frac{(T_1 - T_2)(S_2 - S_1)}{T_1(S_2 - S_1)} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (۴۷.۱۱)$$

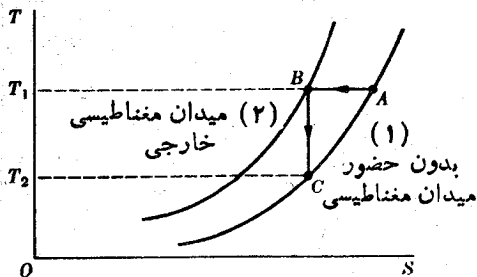
از این رو، مشاهده می شود که کارایی یک ماشین گرمایی که طبق چرخه کارنو برگشت پذیر کار می کند، مستقل از ماده به کار رفته است و فقط به دو دمای کار بستگی دارد. این نتیجه عموماً به نام قضیه کارنو معروف است.

همچنین معادله (۴۷.۱۱) نشان می دهد که دمای مطلق باید کمیت مثبتی باشد. زیرا اگر  $T_2$  منفی بود، کارایی گرمایی بزرگتر از یک (یا بزرگتر از ۱۰۰ درصد) می شد که با پایستگی انرژی سازگار نیست. قضیه کارنو، علاوه بر اهمیت آن در طرح ماشینهای گرمایی، نشان می دهد که یک ماشین گرمایی برگشت پذیر می تواند به عنوان یک دماسنج به کار رود. برای این منظور لازم است که ماشین میان یک دمای استاندارد و دمایی که باید تعیین شود کار کند. با اندازه گیری کارایی ماشین و به کار بردن معادله (۴۷.۱۱) می توان دمای نامعلوم را به دست آورد.

مثال ۸.۱۱ سرد کردن با وامغانطش بی دررو را بررسی کنید.

حل: یکی از مهمترین روشهای به کار رفته برای سرد کردن یک ماده تا دماهای  $10^{-3}K$  روشی است که وامغانطش بی دررو نام دارد. در اینجا فقط یک بحث کیفی را ارائه می دهیم و بدون داخل شدن در جزئیات ریاضی، ایده های فیزیکی را بررسی می کنیم.

آنتروپی هر ماده با دما، کم و بیش مطابق آنچه در منحنی (۱) در شکل ۱۶.۱۱ نشان داده شده است، افزایش می یابد. هر گاه ماده پارامغانطیسی باشد و یک میدان مغناطیسی اعمال شود، این میدان با اثر نظم دهی خود باعث می شود که گشتاورهای مغناطیسی مولکولها در راستای میدان مغناطیسی سمتگیری کنند. همان طور که در منحنی (۲) در شکل ۱۶.۱۱ نشان داده شده است، ایسن اثر باعث می شود که آنتروپی کاهش یابد، زیرا کنش میدان مغناطیسی از بی نظمی مولکولها می کاهد.



شکل ۱۶.۱۱ و امغناطش بی دررو.

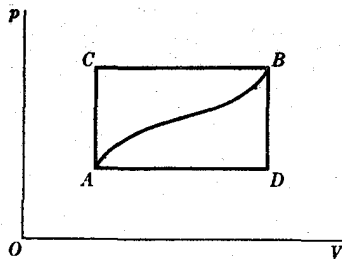
اکنون فرض کنید که ماده در آغاز، بدون حضور میدان مغناطیسی در حالت  $A$  قرار دارد و میدان مغناطیسی هم به طور تکدما اعمال می شود. در ماده تبدیل  $AB$  صورت می گیرد. سپس میدان مغناطیسی را به طور بی دررو قطع می کنیم. در این صورت اگر فرایند برگشت پذیر باشد، آنتروپی تغییر نمی کند و در سیستم تبدیل  $BC$  صورت می گیرد که به نقطه  $C$  منحنی (۱) متناظر با دمای  $T_2$  که خیلی کمتر از دمای اولیه  $T_1$  است ختم می شود. هر گاه این فرایند چندین مرتبه تکرار شود، به دماهای خیلی پایین می توان دسترسی پیدا کرد.

### مسائل

۱۰۱۱ گازی از حجم  $5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  تا حجم  $9 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  انبساط می یابد و این در حالی است که فشار آن در  $20 \text{ atm}$  ثابت نگاه داشته می شود. چه مقدار انرژی باید به صورت گرما به گاز داده شود تا (الف) انرژی داخلی آن مقدار ثابتی باقی بماند؟ (ب) انرژی داخلی آن به اندازه مقدار کار خارجی انجام شده افزایش یابد؟ نتیجه را بر حسب کالری و ژول بیان کنید.

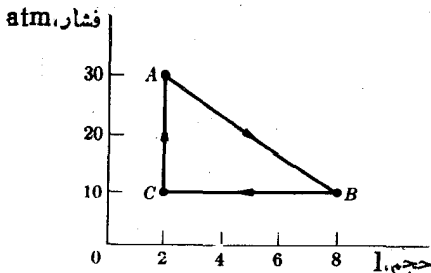
۲۰۱۱ حجم گازی که در آغاز در فشار  $4 \text{ atm}$  برابر  $4 \times 10^{-2} \text{ m}^3$  است طبق رابطه  $pV = \text{const}$  انبساط می یابد. تحت چنین شرایطی، دما و در نتیجه انرژی داخلی گاز ثابت می ماند. هنگامی که حجم دو برابر شود، کار انجام شده و گرمای جذب شده را محاسبه کنید.

۳۰۱۱ هنگامی که سیستمی در طول مسیر  $ACB$  از حالت  $A$  به حالت  $B$  آورده می شود (شکل ۱۷.۱۱)،  $80 \text{ J}$  گرما جذب می کند و  $30 \text{ J}$  کار انجام می دهد. (الف) اگر کار انجام شده  $10 \text{ J}$  باشد، در طول مسیر  $ADB$  چه مقدار گرما توسط سیستم جذب می شود؟ (ب) سیستم در مسیر منحنی از حالت  $B$  به حالت  $A$  بازگردانیده می شود. کار انجام شده روی سیستم برابر  $20 \text{ J}$  است. آیا سیستم گرما جذب می کند یا از دست می دهد و چقدر؟ (ج) اگر  $U_A = 0$  و  $U_D = 40$ ، گرمای جذب شده در فرایندهای  $AB$  و  $AD$  را تعیین کنید.



شکل ۱۷-۱۱

۴۰۱۱ گازی مطابق شکل ۱۸-۱۱ چرخه‌ای را طی می‌کند. این چرخه در هر دقیقه ۱۰۰ مرتبه تکرار می‌شود. توان حاصل را تعیین کنید. داده‌های مسئله عبارت‌اند از: در فشار  $A$  در فشار  $B$  و حجم  $V = 21$ ، در  $B$  فشار  $10 \text{ atm}$  و حجم  $8$  است.



شکل ۱۸-۱۱

۵۰۱۱ خطوط مربوط به تبدیلات تک‌حجم یک گاز ایده‌آل را برای سه حجم متفاوت و خطوط مربوط به تبدیلات تک‌فشار را در سه فشار متفاوت و تبدیلات تک‌دما را برای سه دمای متفاوت بر روی یک نمودار رسم کنید.

۶۰۱۱ نشان دهید که کار انجام شده توسط یک گاز ایده‌آل در خلال یک انبساط تک‌دما برابر است با

$$W_T = NRT \ln \frac{V_2}{V_1} = NRT \ln \frac{P_1}{P_2}$$

در این فرایند چه مقدار گرما جذب می‌شود؟ [دانه‌مایی: از معادله (۱۶-۱۱) استفاده کنید.]

۷۰۱۱ ظرفیت گرمایی،  $C_p$ ، اکثر مواد (بجز در دماهای خیلی پایین) را می‌توان به نحو رضایت بخشی با فرمول تجربی زیر بیان کرد

$$C_p = a + \gamma bT - cT^{-2}$$

که در آن  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  ثابت هستند و  $T$  دمای مطلق است. (الف) گرمای مورد نیاز برای بالا بردن دمای یک مول از ماده از  $T_1$  به  $T_2$  در فشار ثابت را بر حسب  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  محاسبه کنید. (ب) ظرفیت گرمایی متوسط بین دماهای  $T_1$  و  $T_2$  را به دست آورید. (ج) هنگامی که  $C_p$  بر حسب  $\text{JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$  بیان شود، مقادیر عددی ثابتها برای منیزیم عبارت اند از:  $a = 25.7 \times 10^3$ ،  $b = 3.13$ ،  $c = 3.27 \times 10^8$ . ظرفیت گرمایی منیزیم در  $300\text{K}$  و ظرفیت گرمایی متوسط میان  $200\text{K}$  و  $400\text{K}$  را محاسبه کنید.

۸۰۱۱ ضریب انبساط حجمی در فشار ثابت به صورت زیر

$$\beta = \left(\frac{1}{V}\right) \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

و مدول کپهای تکدما نیز به صورت زیر تعریف می شوند

$$\kappa = -\left(\frac{1}{V}\right) \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

ثابت کنید

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial \kappa}{\partial T}\right)_p$$

۹۰۱۱ گازی متشکل از  $N$  مولکول در دمای  $T$ ، مخزنی به حجم  $V_1$  را اشغال کرده و مخزن با یک دیواره برداشتنی از یک مخزن خالی به حجم  $V_2$  جدا شده است. هنگامی که دیواره برداشته می شود گاز تمام حجم  $V_1 + V_2$  را اشغال می کند. نشان دهید (الف) دمای گاز ثابت می ماند و (ب) تغییر در آنتروپی برابر است با  $\Delta S = kN \ln(1 + V_2/V_1)$ . (ج) ثابت کنید  $\Delta S$  مثبت است.

۱۰۱۱ دو نمونه گاز متفاوت  $a$  و  $b$  را در نظر می گیریم که هر دو در دمای یکسان  $T$  قرار دارند و به ترتیب از  $N_a$  و  $N_b$  مولکول تشکیل شده اند. این دو گاز دو مخزن مجاور به حجمهای  $V_1$  و  $V_2$  را که بایک دیواره برداشتنی از یکدیگر جدا شده اند اشغال کرده اند. هنگامی که دیواره برداشته می شود و دو گاز با یکدیگر مخلوط شوند،  $N_a$  مولکول از گاز  $a$  و  $N_b$  مولکول از گاز  $b$  مشترکاً حجم  $V_1 + V_2$  را اشغال می کنند. نشان دهید (الف) دما ثابت می ماند و (ب) تغییر در آنتروپی برابر است با

$$\Delta S = kN_a \ln(1 + V_2/V_1) + kN_b \ln(1 + V_1/V_2)$$

(ج) ثابت کنید  $\Delta S$  مثبت است.

۱۱۰۱۱ دو نمونه گاز یکسان در دمای یکسان  $T$  قرار دارند و به ترتیب از  $N_1$  و  $N_2$  مولکول تشکیل شده اند. این دو گاز دو مخزن مجاور به حجمهای  $V_1$  و  $V_2$  را که با یک

دیواره برداشتنی از یکدیگر جدا شده‌اند اشغال کرده‌اند. هنگامی که دیواره برداشته می‌شود، گازی متشکل از  $N_1 + N_2$  مولکول حجم  $V_1 + V_2$  را اشغال می‌کنند. نشان دهید (الف) دما ثابت می‌ماند و (ب) تغییر در آنتروپی برابر است با

$$\Delta S = kN_1 \ln \left[ \frac{(V_1 + V_2)N_1}{(N_1 + N_2)V_1} \right] + kN_2 \ln \left[ \frac{(V_1 + V_2)N_2}{(N_1 + N_2)V_2} \right]$$

(ج) همچنین نشان دهید که اگر فشار هر دو گاز در ابتدا یکسان بود تغییر در آنتروپی صفر می‌شد، چرا؟

۱۲۰۱۱ انرژی آزاد هلمهولتز به صورت  $F = U - TS$  تعریف می‌شود. نشان دهید

$$F = -kNT \left[ \ln \frac{Z}{N} + 1 \right]$$

$F$  را برای یک گاز ایده‌آل به دست آورید. همچنین نشان دهید پارامتر  $\alpha$  که در معادله (۱۱.۱۰) تعریف شد، برابر است با  $-F/kNT$ .

۱۳۰۱۱ با توجه به سیستم بیان‌شده در مسئله ۳۳.۱۰ نشان دهید که (الف) ظرفیت گرمایی سیستم را می‌توان به صورت  $C_p = C_{v, tr} + C_{v, int}$  و (ب) آنتروپی سیستم را به صورت  $S = S_{tr} + S_{int}$  نوشت که در آن

$$S_{tr} = \frac{U_{tr}}{T} + kN \ln \frac{Z_{tr}}{N} + kN$$

$$S_{int} = \frac{U_{int}}{T} + kN \ln Z_{int}$$

و در محاسبه ظرفیت گرمایی یک گاز پارامغناطیسی واقع در میدان مغناطیسی با  $S_{mag} = U_{mag}/T + kN \ln Z_{mag}$  به کار می‌رود.

۱۴۰۱۱ یک سیستم از ذراتی تشکیل شده است که درجات آزادی داخلی آنها با حالت‌های انرژی  $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \dots$  متناظر است و در آن  $n$  از صفر تا بینهایت تغییر می‌کند. آنتروپی و ظرفیت گرمایی ناشی از درجات آزادی داخلی سیستم را به دست آورید. [دانهایی: مسائل ۶.۱۰ و ۱۳.۱۱ را ببینید.]

۱۵۰۱۱ سیستمی از ذراتی تشکیل شده است که، علاوه بر انرژی جنبشی انتقالی ذرات، در نتیجه درجات آزادی داخلی آنها، فقط می‌تواند در یکی از دو حالت انرژی  $\epsilon$  و  $\epsilon + \epsilon_0$



وجود داشته باشد. آنتروپی و ظرفیت گرمایی (در حجم ثابت) سیستم را که از درجات آزادی داخلی سیستم ناشی می‌شود، برحسب تابعی از دمای سیستم به دست آورید. هر دو کمیت را برحسب تابعی از دمای مطلق سیستم رسم کنید. [داهنمایی: مسئله ۱۳.۱۱ را ببینید.] به کمک نتیجه به دست آمده، آنتروپی مغناطیسی و ظرفیت گرمایی مغناطیسی الکترونیهای واقع در یک میدان مغناطیسی را محاسبه کنید.

۱۶.۱۱ سیستمی متشکل از  $N$  مولکول، هر کدام با تکانه زاویه‌ای  $z$  و نسبت ژیرومغناطیسی  $g$ ، در میدان مغناطیسی  $\mathcal{B}$  قرار دارد. نشان دهید که آنتروپی ناشی از میدان مغناطیسی هنگام تعادل برابر است با

$$S_m = -kNjx \left[ \left(1 + \frac{1}{2j}\right) \coth \left(j + \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2j} \coth \frac{1}{2}x + \ln \frac{\sinh \left(j + \frac{1}{2}\right)x}{\sinh \frac{1}{2}x} \right]$$

که در آن  $x = g\mu_B \mathcal{B} / kT$  همچنین ظرفیت گرمایی در حجم ثابت را محاسبه کنید.

۱۷.۱۱ سیستمی شامل  $N$  ذره است. ذرات فقط می‌توانند در یکی از دو حالت با انرژی  $\epsilon$  یا  $-\epsilon$  قرار داشته باشند، و انرژی جنبشی انتقالی ندارند، هر گاه انرژی کل سیستم  $U$  باشد، نشان دهید که دمای مطلق از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{2\epsilon} \ln \frac{N - U/\epsilon}{N + U/\epsilon}$$

ثابت کنید اگر  $U$  منفی (مثبت) باشد دمای مطلق مثبت (منفی) خواهد بود. به عنوان مثال، این وضعیت در مورد مجموعه‌ای از ذرات (الکترونها) با اسپین  $1/2$  هنگامی به کار می‌رود که ذرات در میدان مغناطیسی قرار دارند و فقط انرژی برهم کنش اسپین-مدار در نظر گرفته می‌شود. [داهنمایی: ابتدا نشان دهید

$$\ln P = N \ln 2 - \frac{1}{2}(N + U/\epsilon) \ln (N + U/\epsilon)$$

$$- \frac{1}{2}(N - U/\epsilon) \ln (N - U/\epsilon)$$

سپس  $\ln P$  را بر حسب تابعی از  $U$  رسم کنید. توجه کنید که  $U$  از  $N\varepsilon$  — تا  $N\varepsilon$  تغییر می کند.

۱۸۰۱۱ اسپین مولکولهای اکسیژن برابر ۱ است و در نتیجه اکسیژن یک گاز پارامغناطیسی است. تابع پارش اسپین اکسیژن را هنگامی که در میدان مغناطیسی  $\mathcal{B}$  قرار می گیرد تعیین کنید. انرژی، گشتاور مغناطیسی متوسط، آنتروپی اسپین، و ظرفیت گرمایی در حجم ثابت ناشی از میدان مغناطیسی این گاز را به دست آورید.

۱۹۰۱۱ نشان دهید که تغییر در آنتروپی ماده ای که در فشار ثابت به طور برگشت پذیر گرم می شود (با فرض اینکه گرمای ویژه ثابت می ماند) برابر است با

$$S_2 - S_1 = NC_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

نتیجه حاصل را برای یک کیلوگرم آب که از دمای معمولی (۲۹۸ K) تا نقطه جوش آن (۳۷۳ K) گرم می شود به کار برید.

۲۰۰۱۱ هنگامی که ماده ای تغییر فاز می دهد (مثلا ذوب، تبخیر، تصعید، وغیره، یا برعکس)، گرما در دمای ثابت جذب (یا آزاد) می شود. برای آب، گرمای ذوب برابر  $1440 \text{ cal mol}^{-1}$  و گرمای تبخیر برابر  $9720 \text{ cal mol}^{-1}$  است. تغییر در آنتروپی یک مول آب را که به طور برگشت پذیر در فشار ثابت یک اتمسفر از  $20^\circ\text{C}$  — تا  $150^\circ\text{C}$  گرم می شود محاسبه کنید. ظرفیت گرمایی یخ برابر  $9.0 \text{ cal K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  و ظرفیت گرمایی بخار در فشار ثابت مساوی  $8.6 \text{ cal K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  است.

۲۱۰۱۱ هرگاه  $\xi$  تابعی از متغیرهای  $x$  و  $y$  باشد در این صورت

$$d\xi = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_x dy$$

بنابراین از معادله (۳۷.۱۱) داریم

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V$$

و

$$p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$$

با مشتق گیری از (الف)  $H = U + pV$ ، (ب)  $F = U - TS$  (که انرژی آزاد هلمهولتز نام دارد)، و (ج)  $G = U + pV - TS$  (که انرژی آزاد گیبس نام دارد) عباراتی متناظر با روابط بالا را به دست آورید.

۲۲.۱۱ اگر  $d\xi = X dx + Y dy$  يك ديفرانسیل كامل باشد به طوری كه  $X = (\partial\xi/\partial x)_y$  و  $Y = (\partial\xi/\partial y)_x$ ، خواهيم داشت  $(\partial X/\partial y)_x = (\partial Y/\partial x)_y$ . از روی توابع ترمودینامیکی (الف)  $U$ ، (ب)  $H = U + pV$ ، (ج)  $F = U - TS$ ، و (د)  $G = U + pV - TS$ ، روابطی از نوع بیان شده را بنویسید. این روابط را روابط ماکسول می نامند. [داهنمایی: مسئله قبل را ببینید.]

۲۳.۱۱ پاره‌ای از کمیت‌های ترمودینامیکی با تعداد ذرات (یا با جرم سیستم) متناسب اند و برخی دیگر مستقل از تعداد ذرات اند. کمیت‌های نوع اول را جمع‌پذیر و نوع دوم را جمع‌ناپذیر می گویند. تعیین کنید کدام يك از کمیات زیر جمع‌پذیر و کدام يك جمع‌ناپذیر هستند؟

$$U, W, Q, p, V, T, S, H, \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p, C_p, C_v, F = U - TS \quad \text{و} \quad G = U + pV - TS$$

۲۴.۱۱ نشان دهید كه  $\beta^2 TV / Nk = C_p - C_v$ . [داهنمایی: ابتدا  $dS$  را بر حسب  $dT$  و  $dV$  بیان کنید. سپس نشان دهید كه

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

برای تعریف  $\beta$  و  $k$  مسئله ۸.۱۱ را ببینید.]

۲۵.۱۱ اگر  $p$  فشاری باشد كه در آن، يك ماده در وضع تعادل در دمای  $T$  در دو فاز وجود دارد و  $V_1$  و  $V_2$  حجم‌های يك مول از ماده در هر فاز باشند، نشان دهید كه

$$L = T \left(\frac{dp}{dT}\right) (V_2 - V_1)$$

كه در آن  $L$  گرمای مولی تغییر فاز است، یعنی گرمای جذب شده هنگامی كه يك مول از يك فاز به فاز دیگر تبدیل می شود. این رابطه معادله کلاپیرون نام دارد. [داهنمایی: از رابطه

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

كه در مسئله ۲۲.۱۱ به دست آمده است استفاده کنید.]

۲۶.۱۱ در فشار ثابت، يك مول از يك گاز ایده‌آل در دمای  $25^\circ\text{C}$  و فشار  $1 \text{ atm}$  گرم می شود تا اینکه حجم آن سه برابر می شود. (الف)  $\Delta U$ ، (ب)  $W$ ، (ج)  $Q$ ، (د)  $\Delta S$ ،

(ه)  $\Delta H$ ، (و)  $\Delta F$ ، و (ز)  $\Delta G$  را محاسبه کنید. (برای تعاریف  $F$  و  $G$  مسئله ۲۱-۱۱ را ببینید.)

۲۷-۱۱ تغییر در آنتروپی، انتالپی، و انرژی داخلی يك مول آب را هنگامی که در دمای  $0^\circ\text{C}$  و فشار  $1\text{ atm}$  ذوب می‌شود محاسبه کنید. چگالی یسرخ  $10^3 \text{ kg m}^{-3} \times 0.9$  و چگالی آب  $10^3 \text{ kg m}^{-3} \times 1.0$  و گرمای ذوب آب  $1440 \text{ cal mol}^{-1}$  است.

۲۸-۱۱ (الف) يك كيلو گرم آب در دمای  $0^\circ\text{C}$  با يك جسم بزرگ که دمای آن  $100^\circ\text{C}$  است در تماس قرار می‌گیرد. وقتی آب به دمای  $100^\circ\text{C}$  می‌رسد، تغییر در آنتروپی آب، جسم، و عالم چقدر است؟ (ب) هرگاه برای گرم کردن آب از  $0^\circ\text{C}$  تا  $100^\circ\text{C}$  ابتدا آن را در تماس با يك جسم بزرگ به دمای  $50^\circ\text{C}$  و سپس در تماس با يك جسم بزرگ به دمای  $100^\circ\text{C}$  قرار دهیم، تغییرات در آنتروپی آب و عالم چقدر خواهد بود؟ (ج) توضیح دهید که چگونه می‌توان آب را از  $0^\circ\text{C}$  تا  $100^\circ\text{C}$  گرم کرد بی‌آنکه تغییری در آنتروپی عالم ایجاد شود؟

۲۹-۱۱ جسمی با ظرفیت گرمایی  $C_{p1}$  که شامل  $N_1$  مول در دمای  $T_1$  است، در تماس گرمایی با جسم دیگری به ظرفیت گرمایی  $C_{p2}$  قرار می‌گیرد که محتوی  $N_2$  مول در دمای  $T_2$  است. تنها فرایندی که می‌تواند روی دهد تبادل گرمایی است. آیا فرایند برگشت پذیر است یا برگشت ناپذیر؟ (الف) نشان دهید که وقتی تعادل گرمایی حاصل شود، دمای مشترك برابر است با

$$T = \frac{N_1 C_{p1} T_1 + N_2 C_{p2} T_2}{N_1 C_{p1} + N_2 C_{p2}}$$

ثابت کنید  $T$  دمایی بین  $T_1$  و  $T_2$  است. (ب) نشان دهید تغییر کل در آنتروپی برابر است با

$$\Delta S = N_1 C_{p1} \ln \frac{T}{T_1} + N_2 C_{p2} \ln \frac{T}{T_2}$$

همچنین ثابت کنید که  $\Delta S$  مثبت است. [دانهمایی: برای معادله آخر فرض کنید که  $T_1$  کوچکتر از  $T_2$  است به گونه‌ای که ترتیب سه‌ما عبارت است از  $T_1 < T < T_2$  سپس کمیت  $N_2 C_{p2} \ln(T/T_1)$  را به رابطه فوق برای  $\Delta S$  اضافه و کم کنید.]

۳۰-۱۱ فرض کنید که  $100\text{ g}$  آب  $90^\circ\text{C}$  به داخل ظرف آلومینیومی  $3\text{ kg}$  كيلو گرمی که در دمای معمولی  $25^\circ\text{C}$  قرار دارد ریخته شود. پس از حصول تعادل گرمایی، تغییر در آنتروپی آلومینیوم، آب، و تمام سیستم را محاسبه کنید. آیا فرایند برگشت پذیر است یا برگشت ناپذیر؟

۳۱-۱۱ مایعی به دمای  $T_1$  با مقدار مساوی از همان مایع به دمای  $T_2$  مخلوط می‌شود. از لحاظ گرمایی سیستم عایق بندی شده است. نشان دهید تغییر آنتروپی عالم برابر است با

$$\Delta S = 2NC_p \ln \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}}$$

و ثابت کنید که الزاماً مثبت است.

۳۲.۱۱ هنگامی که یک مول بخار  $100^\circ\text{C}$  در فشار ثابت  $1\text{ atm}$  در اثر تراکم تکدما چگالیده می‌شود،  $Q$ ،  $W$ ،  $\Delta H$ ،  $\Delta U$ ، و  $\Delta S$  را محاسبه کنید. گرمای تبخیر آب  $9720\text{ cal mol}^{-1}$  و چگالی بخار در چنین شرایطی برابر  $1686\text{ kgm}^{-3}$  است.

۳۳.۱۱ یک لیتر گاز ایده‌آل در دمای  $300\text{ K}$  و فشار  $15\text{ atm}$  به طور تکدما منبسط می‌شود تا اینکه حجم آن به  $10$  لیتر می‌رسد.  $Q$ ،  $W$ ،  $\Delta U$ ،  $\Delta H$ ، و  $\Delta S$  را محاسبه کنید.

۳۴.۱۱ یک مول نیتروبنزن  $\text{C}_6\text{H}_5\text{NO}_2$  در دمای  $210^\circ\text{C}$  و فشار  $1\text{ atm}$  تبخیر می‌شود. گرمای تبخیر مساوی  $9730\text{ cal mol}^{-1}$  است. مقادیر (الف)  $Q$ ، (ب)  $W$ ، (ج)  $\Delta H$ ، (د)  $\Delta U$ ، (ه)  $\Delta S$ ، (و)  $\Delta F$ ، و (ز)  $\Delta G$  را محاسبه کنید.

۳۵.۱۱ چگالی انرژی  $E$  تابش جسم سیاه فقط تابعی از دماست (معادله ۸.۱). هم‌چنین فشاری که تابش همسانگرد روی یک سطح کاملاً جاذب وارد می‌کند برابر  $(1/3)E$  است. با استفاده از معادله (۳۷.۱۱) نشان دهید که  $E$  با  $T^4$  متناسب است که همان قانون استفان-بولتزمن است (مثال ۴.۱). [دانهایی: در معادله (۳۷.۱۱) بنویسید  $U = EV$  و توجه کنید که  $dE = (dE/dT)dT$ . سپس از خواص یک دیفرانسیل کامل، همان‌طور که در مسئله ۲۱.۱۱ به کار رفت، استفاده کنید.]

۳۶.۱۱ نشان دهید برای چرخه برگشت پذیری که در آن فقط کار انبساطی انجام می‌شود داریم

$$\oint \frac{dW}{p} = 0$$

به تشابه این معادله با معادله (۴۴.۱۱) توجه کنید.

## مراجع

1. "The Microscopic Interpretation of Entropy," D. Frisch, *Am. J. Phys.*, 34, 1171 (1966).
2. "Irreversibility in Simple Systems," A. Hobson, *Am. J. Phys.*, 34, 411 (1966).
3. "A Hundred Years of Entropy," M. Dutta, *Physics Today*, January 1968, page 75.

4. "Concepts of Classical Thermodynamics," A. Buchdahl, *Am. J. Phys.*, 28, 196 (1960).
5. *Statistical Thermodynamics*, E. Schrödinger, Cambridge: Cambridge University Press, 1964, Chapters 3, 4, and 5.
6. *Statistical Physics*, G. Wannier. New York: John Wiley, 1966, Part I.
7. *Fundamentals of Statistical Thermodynamics*, R. Sonntag and G. Van Wylen, New York: John Wiley, 1966, Chapter 4.
8. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapters 44, 45, and 46.
9. *A Source Book in Physics*, W. Magie, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, page 220 (Carnot), page 228 (Clausius), page 236 (Kelvin), page 262 (Boltzmann).

## خواص گرمایی گازها

- ۱۰۱۲ مقدمه  
۲۰۱۲ معادله حالت يك گاز ایده آل  
۳۰۱۲ معادله حالت گازهای حقیقی  
۴۰۱۲ ظرفیت گرمایی يك گاز تك اتمی ایده آل  
۵۰۱۲ ظرفیتهای گرمایی يك گاز چند اتمی ایده آل  
۶۰۱۲ اصل هم پاری انرژی

## ۱.۱۲ مقدمه

در دو فصل قبل، خواص عمومی ماده به صورت کپهای، یعنی خواص مکانیکی، الکتریکی، گرمایی، و شیمیایی ماده یا انبوههٔ عظیمی از اتمها یا مولکولها را بررسی کردیم. بررسی این خواص را می توانیم از دو جهت مخالف ادامه بدهیم. بررسی تجربی شامل اندازه گیریهای وسیع آزمایشگاهی و تنظیم جدول برای خواصی نظیر چگالی، گرمای ویژه، رسانش گرمایی و الکتریکی، چسبندگی، مدولهای کشسانی، کشش سطحی، انبساط گرمایی، آهنگ و اکشنهای شیمیایی و غیره و وابستگی تجربی این کمیتها به عوامل خارجی نظیر فشار و دما، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی اعمال شده، و غیره است. این روش سنتی را کسانی به کار گرفته اند که عمدتاً به کسب اطلاعاتی در مورد این خواص برای کار بردهای خاصی علاقه مند بوده اند. روش دیگر بررسی نظری است که شامل ارزیابی خواص کپهای ماده بر حسب ساختار اتمی و مولکولی و بر حسب برهم کنشهای میان اتمها و مولکولها است. با آنکه چنین برهم کنشهایی اساساً الکترومغناطیسی هستند، اما بعضی فرضهای ساده کننده که بیشتر ماهیت پدیده شناسی دارند (نظیر انرژی پتانسیل بین مولکولی مناسب و معقول) نیز در نظر گرفته می شوند. چون تعداد ذرات موجود در ماده فزون بر شمار است، بررسی نظری مستلزم به کارگیری روشهای آماری است.

در این فصل با حل چند مسئلهٔ نمونه که به خواص گرمایی گازها مربوط اند بررسی نظری را بیشتر توضیح می دهیم. بسط روشهای این فصل به حالتهاى دیگر ماده یا موضوعات خاص به رشته های مهندسی، شیمی-فیزیک، و فیزیک کار بردی مربوط است و در این کتاب انجام نمی شود.

## ۲.۱۲ معادلهٔ حالت یک گاز ایده آل

از میان تمام سیستمهای ذرات، گاز ایده آل ساده ترین سیستم است و در این بخش، معادلهٔ حالت آن را به دست می آوریم. در مثال ۶.۱۱ معادلهٔ (۳۹.۱۱) را به دست آوردیم، یعنی

$$kN \frac{dZ}{Z} = \frac{\bar{a}W}{T} + \frac{U}{T^2} dT \quad (1.12)$$

این معادله، تغییر در تابع پارش را به کار انجام شده توسط سیستم و تغییر دمای آن مربوط می کند. در مورد گاز، که در آن تنها کار عبارت است از کار انبساطی، داریم  $\bar{a}W = p dV$  ضمناً  $d(\ln Z) = dZ/Z$  از این رو، می توان معادلهٔ (۱.۱۲) را به صورت زیر نوشت

$$kN d(\ln Z) = \frac{p dV}{T} + \frac{U dT}{T^2}$$

اگر دما ثابت باشد،  $dT = 0$ ، و از حل رابطهٔ فوق برای  $p$  خواهیم داشت



$$p = kNT \left[ \frac{\partial(\ln Z)}{\partial V} \right]_T \quad (۲.۱۲)$$

که در آن شاخص پايين  $T$  معرف ثابت بودن دماست. معادله (۲.۱۲) فشار يك سيستم را به دما، حجم، و ساختار داخلی آن (که با  $Z$  بيان می شود) مربوط می سازد. بنابراین، رابطه ای به صورت  $f(p, V, T) = 0$  را به دست می دهد. بدین ترتيب می توان معادله (۲.۱۲) را معادله حالت سيستم نامید.

برای گاز ايده آل، تابع پارش با معادله (۴۰.۱۰) داده می شود

$$Z = \frac{V(\sqrt{\pi}mkT)^{3/2}}{h^3} \quad (۳.۱۲)$$

که با قراردادن در معادله (۲.۱۲) خواهیم داشت

$$p = \frac{kNT}{V} \quad (۴.۱۲)$$

معادله (۴.۱۲) معادله حالت يك گاز ايده آل است و گاهی به صورت زیر نوشته می شود

$$pV = kNT \quad (۵.۱۲)$$

و يا چون  $R = kN_A = kN/N$ ، که در آن  $N = N/N_A$  تعداد مولهای گاز و  $N_A$  عدد آووگادرو است، داریم

$$pV = NRT \quad (۶.۱۲)$$

این معادله را می توان به طرق (شاید مستقیمتر) دیگر نیز به دست آورد. در يك مورد می توان فشار گاز را با تحليل تغيير در تکانه مولکولهای گاز هنگام برخوردشان با دیوارهای ظرف محاسبه کرد. در روش دیگر می توان با استفاده از قضیه ویريال نشان داد که معادله (۵.۱۲) فشار گاز را در هنگامی به دست می دهد که از نیروهای میان مولکولی صرف نظر شده است. این واقعیت که در تمام حالات نتیجه یکسانی حاصل می شود مبین سازگاری این روشهاست.

**نکاتی در مورد اندازه گیری دما** در بخش ۴.۱۰ دمای يك سيستم ذرات را به انرژی متوسط هر ذره وابسته کردیم. در معادله (۴.۱۰) یعنی  $E_{k, ave} = (3/2)kT$  رابطه میان دمای گاز ايده آل و انرژی جنبشی متوسط مولکولهای گاز را به صورت مشخصتری بيان کردیم. با این حال، اکنون باید دوجنبه مهم را بررسی کنیم. اول اینکه، در معادله (۲۳.۱۰) دو کمیت جدید  $T$  (دمای مطلق) و  $k$  (ثابت بولتزمن) را داخل کردیم و باید ببینیم که چگونه می توان آنها را

مستقلاً اندازه‌گیری کرد. دوم اینکه، تمام انسانها با مفهوم دما که مبتنی بر تجربه حسی است و توسط احساس ما از سرد و گرم تعیین می‌شود، آشنا هستند. همگی عادت داریم که دما را بر حسب عددی اندازه‌گیری کنیم که توسط دستگاهی به نام دماسنج حاصل می‌شود. بنا بر این باید تعریف آماری دما را به این تصور حسی مربوط کنیم.

گازی به جرم  $M$  را که شامل  $N$  مولکول است در نظر می‌گیریم. هر گاه از اثر نیروهای میان مولکولی صرف‌نظر کنیم، معادله حالت با رابطه (۵.۱۲) داده می‌شود، یعنی  $pV = kNT$ . فرض کنید که گاز را با سیستم فیزیکی دیگری که بنا به فرض می‌تواند در دمای ثابتی باقی بماند به تعادل گرمایی می‌رسانیم. این سیستم می‌تواند مخلوط آب و یخ واقع در وضع تعادل در فشار متعارف  $1 \text{ atm}$  باشد. این وضعیت را نقطه انجماد معمولی آب می‌گویند. فشار و حجم گاز را در این دمای ثابت اندازه می‌گیریم و به ترتیب مقادیر  $p_0$  و  $V_0$  را به دست می‌آوریم. سپس مقدار مناسب (ولسی اختیاری)  $T_0$  را به دمای ثابت، که ضمناً دمای گاز نیز هست، اختصاص می‌دهیم. بنا بر این می‌توانیم بنویسیم  $p_0 V_0 = kNT_0$ . این رابطه به‌طور خودکار مقدار ثابت بولتزمن یعنی  $k = p_0 V_0 / NT_0$  را مشخص می‌سازد، زیرا با دانستن جرم هر مولکول می‌توان  $N$  را به دست آورد.

برای تعیین دمای گازی که فشار آن  $p$  و حجم آن  $V$  است می‌توان به کمک معادله  $pV = kNT$  و به کار بردن مقادیر استاندارد، ضریب  $kN$  را حذف کرد و رابطه زیر را نتیجه گرفت

$$T = T_0 \left( \frac{pV}{p_0 V_0} \right)$$

که  $T$  را بر حسب دمای مرجع استاندارد  $T_0$  و دیگر کمیت‌های قابل اندازه‌گیری به دست می‌دهد. بدین طریق، جرم گاز به یک دماسنج گازی تبدیل شده است. هر گاه حجم گاز در مقدار ثابتی برابر با  $V_0$  نگه داشته شود، خواهیم داشت  $T = T_0 (p/p_0)$  که مربوط به یک دماسنج گازی حجم - ثابت است. البته به جای گاز می‌توان از مواد دیگری نظیر مایعات یا فلزات که ابعاد (حجم یا طول) آنها با دما تغییر می‌کند به عنوان دماسنج استفاده کرد. در دماسنج‌های دیگر از رساناهای الکتریکی (نظیر سیم‌های پلاتین) که مقاومتشان با دما تغییر می‌کند، استفاده می‌کنند. چون معادله حالت این مواد پیچیده‌تر است، در عمل این دماسنج‌ها را نیز از روی دماسنج گازی مدرج می‌کنند. در این مورد، دماسنج فقط در نقاط درجه بندی یا دماسنج گازی توافق دارد. نظر به اینکه خاصیت انتخاب شده ممکن است به‌طور خطی با دمای گاز تغییر نکند این امکان وجود دارد که در دماهای میانی اختلاف مختصری حاصل شود.

مقدار  $T_0$  را می‌توان بر اساس دیدگاه‌های متفاوتی انتخاب کرد. مثلاً ممکن است فرایند دیگری را نظیر جوشیدن آب در فشار استاندارد  $1 \text{ atm}$  که نقطه جوش معمولی آب نام دارد، که وقوع آن در دمای مشخصی امکان‌پذیر است، برگزینیم. در این صورت می‌توان دمای این نقطه مرجع دوم را  $100$  واحد (یا درجه) در بالای  $T_0$  که به عنوان نقطه انجماد معمولی آب انتخاب شده است، در نظر گرفت. هر گاه  $p_1$  و  $V_1$  فشار و حجم گاز در این دمای جدید باشند، خواهیم

داشت:  $p_1 V_1 = kN(T_0 + 100)$  اگر مقدار  $kN$  را از معادله  $p_0 V_0 = kNT_0$  به دست آوریم و آن را در معادله بالا قرار دهیم به نتیجه زیر می‌رسیم

$$T_0 = \frac{100 p_0 V_0}{(p_1 V_1 - p_0 V_0)}$$

که از آن می‌توان مقدار عددی  $T_0$  را در این مقیاس اختیاری به دست آورد. در نتیجه این نوع آزمایش (و بسیاری آزمایشهای دیگر که در آنها از روشهای مختلفی استفاده می‌شود) مقدار  $273.15$  برای  $T_0$  به دست می‌آید. هر واحد یک درجه کلوین نام دارد و با  $K$  نمایش داده می‌شود. امروزه ترجیح می‌دهند که، بنا به تعریف، مقدار  $T_0 = 273.15 K$  را به دمای نقطه انجماد معمولی آب نسبت دهند. در این صورت، برای ثابت بولتزمن مقدار  $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{JK}^{-1}$  به دست می‌آید.

باید توجه داشت که روش بالا برای اندازه‌گیری دما مبتنی بر تقریب گاز ایده‌آل است. هرگاه از گازهای مختلفی استفاده کنیم، نتایج حاصل یکسان نخواهند بود زیرا اثر نیروهای میان مولکولی، آن‌طور که در معادله  $(7.12)$  بخش بعد ارائه خواهد شد، برای هر گاز متفاوت است. معمولاً از هیدروژن یا هلیوم استفاده می‌کنند. مطلوب‌ترین وضع آن است که مقیاس دما مستقل از ماده‌ای باشد که به عنوان محیط اندازه‌گرفتنی به کار می‌رود این کار را می‌توان با استفاده از یک ماشین گرمایی برگشت‌پذیر که در چرخه کار نوکامی کند انجام داد (مثال 7.11). در این صورت، کارایی ماشین مستقل از ماده به کار رفته در ماشین است و با معادله  $(7.11)$  یعنی رابطه  $E = (T_1 - T_2)/T_1$  داده می‌شود. هرگاه به جای  $T_2$  دمای استاندارد  $T_0$  و به جای  $T_1$  نیز دمای  $T$  را که می‌خواهیم اندازه‌گیری کنیم قرار دهیم، داریم

$$E = \frac{T - T_0}{T}$$

به این ترتیب اگر  $E$  را اندازه بگیریم  $T$  به دست می‌آید. به طور تجربی معلوم شده است که برای یک ماشین گرمایی که میان نقاط معمولی جوش و انجماد آب کار می‌کند،  $E = 100/373$  است. هرگاه برای آن دو دما  $T - T_0 = 100$  درجه باشد، مجدداً خواهیم داشت  $T_0 = 273 K$ . دمایی که با استفاده از یک ماشین برگشت‌پذیر به دست می‌آید دمای ترمودینامیکی نام دارد. این روش را کلوین پیشنهاد کرده است. کلوین و زول هر دو با انجام آزمایشهایی دقیق، دمای اندازه‌گیری شده توسط دماسنج هیدروژنی حجم ثابت را با دمای ترمودینامیکی مقایسه کردند.

### ۳.۱۲ معادله حالت گازهای حقیقی

هنگامی که با گازهای حقیقی سروکار داریم، باید نیروهای میان مولکولسی و بعد معین

مولکولها را به حساب آوریم. نیروهای میان مولکولی برد خیلی کوتاهی دارند که بافاصله میان مولکولها به سرعت کاهش می‌یابد. بنا بر این هر چه فشار يك گاز حقیقی به فشار گاز ایده‌آل، معادله (۷.۱۲)، نزدیکتر باشد حجم مولکولی یعنی  $V/N$  بزرگتر می‌شود. این موضوع اقتضا می‌کند که فشار گاز حقیقی را بر حسب يك سری از توانهای منفی  $V/N$  به صورت زیر بنویسیم

$$p = \frac{NRT}{V} + \frac{N^2A}{V^2} + \frac{N^2B}{V^3} + \frac{N^2C}{V^4} + \dots \quad (7.12)$$

معادله بالا را می‌توان به عنوان معادله حالت يك گاز حقیقی در نظر گرفت.  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ، ... کمیت‌های مشخصه هر گاز هستند و دومین، سومین، ... ضرایب ویریا نام دارند. این کمیتها تابع دما هستند و به قدرت نیروهای میان مولکولی بستگی دارند. با اندازه‌گیری  $p$  در دماها و حجمهای مختلف می‌توان ضرایب ویریا  $A(T)$ ،  $B(T)$ ، ... را به طور تجربی به دست آورد. ولی برای یافتن نشانی از همبستگی میان ضرایب ویریا و نیروهای میان مولکولی لازم است روابط نظری مشخصی را به دست آوریم. يك امکان این است که از قضیه ویریا، که در کتابهای درسی مکانیک اثبات آن می‌آید، استفاده کنیم. هنگامی که این قضیه برای يك گاز به کار می‌رود، به صورت زیر است.

$$pV = NRT + \frac{1}{3} \left( \sum_{\text{تمام زوجها}} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} \right)_{\text{ave}} \quad (8.12)$$

که در آن  $\mathbf{F}_{ij}$  نیروی وارد از طرف مولکول  $j$  بر مولکول  $i$ ، بردار مکان مولکول  $i$  نسبت به مولکول  $j$  است و جمع زنی روی تمام زوج مولکولها انجام می‌شود. از مقایسه معادله (۸.۱۲) با معادله (۷.۱۲) خواهیم داشت

$$\frac{1}{3} \left( \sum_{\text{تمام زوجها}} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} \right)_{\text{ave}} = N \left( \frac{NA}{V} + \frac{N^2B}{V^2} + \frac{N^2C}{V^3} + \dots \right) \quad (9.12)$$

که در اصل این امکان را به ما می‌دهد تا ضرایب ویریا  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ، ... را به نیروهای میان مولکولی همبسته سازیم. همان طور که هم‌اکنون خواهیم دید، روشهای مکانیک آماری محاسبه ساده تری را برای ضرایب ویریا به دست می‌دهند. با این حال، چون مکانیک آماری سیستمهای متشکل از ذرات برهم‌کنش‌کننده از مکانیک سیستمهای متشکل از ذرات غیر برهم‌کنش‌کننده اندکی پیچیده تر است به ناچار بعضی از راههای استخراج روابط را حذف می‌کنیم.

در اینجا کمیت  $\mathcal{Z} = Z^N / N!$  را که به تابع پادش بزرگ سیستم ذرات غیر برهم

کنش کننده معروف است معرفی می کنیم. در این صورت توجه کنید که

$$\ln \mathcal{Z} = \ln \left( \frac{Z^N}{N!} \right) = N \ln Z - \ln N!$$

معادله حالت (۲.۱۲) را می توان به صورت زیر نوشت

$$p = kT \left[ \frac{\partial}{\partial V} (\ln \mathcal{Z}) \right]_T \quad (۱۰.۱۲)$$

با استفاده از معادله (۳.۱۲)، برای گاز ایده آل داریم

$$\mathcal{Z}_{\text{گاز ایده آل}} = \frac{1}{N!} \left[ \frac{V (2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \right]^N \quad (۱۱.۱۲)$$

هنگامی که گازهای حقیقی را بررسی می کنیم و بنا بر این بامولکولهای برهم کنش کننده سروکار داریم، ناچاریم روشهای مکانیک آماری ارائه شده در فصل ۱۰ را بسط دهیم تا انرژی پتانسیل داخلی  $E_{piz}$  تمام زوجها  $E_p = \sum$  را نیز در بر گیرد. در اینجا نمی توانیم در جزئیات ریاضی این بسط وارد شویم، کافی است متذکر شویم که در حالت یک گاز حقیقی، تابع پارش بزرگ  $\mathcal{Z}$  به صورت زیر خواهد بود

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{N!} \left[ \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \right]^N \int \int \dots \int e^{-E_p/kT} dV_1 dV_2 \dots dV_N \quad (۱۲.۱۲)$$

تمام مولکولها

که در آن  $N$  انتگرال حجمی متناظر بایک برای هر مولکول است. این عبارت به ظاهر مشکل در واقع بسط خیلی ساده ای از تابع پارش برای یک گاز ایده آل است زیرا برای گاز ایده آل باید قسرا دهیم  $E_p = 0$  و لذا  $e^{-E_p/kT} = 1$ . بنا بر این انتگرال چندگانه بالا به صورت زیر درمی آید

$$\int \int \dots \int dV_1 dV_2 \dots dV_N = V \cdot V \cdot V \dots = V^N \quad (۱۳.۱۲)$$

تمام مولکولها

زیرا هر مولکول می تواند در تمام حجم موجود یافت شود. در این صورت، معادله (۱۲.۱۲) به صورت زیر درمی آید

$$\mathcal{Z}_{\text{گاز ایده آل}} = \frac{1}{N!} \left[ \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \right]^N V^N = \frac{1}{N!} \left[ \frac{V (2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \right]^N$$

که با معادله (۱۱.۱۲) سازگار است.

حال با توجه به معادله (۱۲.۱۲)، انرژی پتانسیل را باید به صورت زیر بنویسیم

$$E_p = \sum_{\substack{\text{تمام} \\ \text{زوجها}}} E_{pij}$$

و نیز باید از رابطه معقولی برای  $E_p$ ، انرژی پتانسیل بین مولکولی استفاده کنیم. با دانستن  $E_p$  ممکن است در اصل بتوان  $\mathcal{Z}$  را برآورد کرد. با استفاده از معادله (۱۰.۱۲) می توان فشار  $p$  را به دست آورد و نتیجه را در توانهای معکوس حجم  $V$  بسط داد. بدین طریق می توان رابطه ای بین پتانسیل میان مولکولی  $E_{pij}$  و ضرایب ویریا  $A$  و  $B$  و ... برقرار کرد. چون به طور تجربی می توان ضرایب ویریا  $A$ ،  $B$ ، ... را تعیین کرد، لذا راهنمای بسیار مفیدی برای بررسی شکل پتانسیل بین مولکولی  $E_{pij}$  بر اساس نوعی روش آزمایش - و - خطا وجود دارد و به کمک آن می توان ضرایب ویریا صحیح را محاسبه کرد. در بقیه این بخش برخی از این روشها را از نظر خواهیم گذراند.

اکنون انتگرال چندگانه معادله (۱۲.۱۲) را در نظر می گیریم، یعنی

$$I = \int \int \dots \int e^{-E_p/kT} dV_1 dV_2 \dots dV_N$$

تمام مولکولها

که در آن جمع زنی  $E_p = \sum_{\substack{\text{تمام} \\ \text{زوجها}}} E_{pij}$  شامل  $N(N-1)/2$  جمله است که تعداد کل زوجهای مختلف مولکولهاست. با توجه به رابطه زیر

$$e^{(x+y+z\dots)} = e^x \cdot e^y \cdot e^z \dots$$

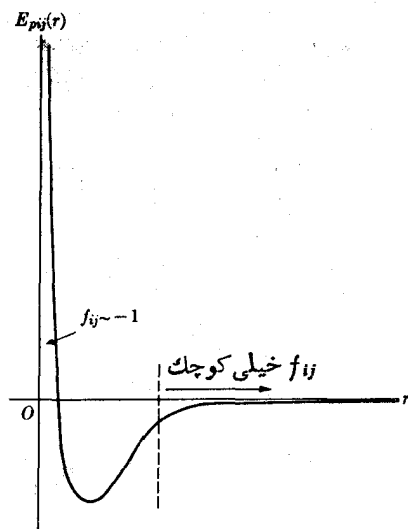
خواهیم داشت

$$e^{-E_p/kT} = \prod_{\substack{\text{تمام} \\ \text{زوجها}}} e^{-E_{pij}/kT}$$

که در آن نماد  $\prod$  به معنی حاصلضرب تمام جملات موجود است. ضمناً وقتی که  $E_{pij}$  خیلی کوچک است عامل نمایی عملاً مساوی بایک می شود. اما (بجز وقتی که مولکولها نسبتاً بهم نزدیک اند)، به خاطر کوتاه برد بودن نیروهای میان مولکولی،  $E_{pij}$  خیلی کوچک است (شکل ۱۰.۱۲). از این رو با استفاده از بسط  $e^{-x} = 1 - x + x^2/2 - \dots$  می توان نوشت

$$e^{-E_{pij}/kT} = 1 - \frac{E_{pij}}{kT} + \frac{1}{2} \left( \frac{E_{pij}}{kT} \right)^2 \dots = 1 + f_{ij} \quad (14.12)$$

و کمیت  $f_{ij}$  خیلی کوچک خواهد بود مگر وقتی که دو مولکول خیلی بهم نزدیک باشند. بنا بر این



شکل ۱۰۱۲ انرژی پتانسیل میان مولکول‌ها.

$$e^{-E_p/kT} = \prod_{\text{تمام زوجها}} (1 + f_{ij}) = 1 + \sum_{\text{تمام زوجها}} f_{ij} + \dots$$

جملات حذف شده شامل حاصلضربهای ۲، ۳، ...  $f_{ij}$  هستند و از آنها صرف نظر می‌کنیم، اگرچه، در یک نظریه دقیقتر باید آنها را در نظر بگیریم. با چنین تقریبی می‌توان انتگرال  $I$  را به صورت زیر نوشت

$$I = \int \int \dots \int_{\text{تمام مولکولها}} \left( 1 + \sum_{\text{تمام زوجها}} f_{ij} + \dots \right) dV_1 dV_2 \dots dV_N$$

جمله‌ای که دارای عامل ۱ است پس از انتگرال‌گیری مقدار  $V^N$  را به دست می‌دهد که با نتیجه قبل برای گاز ایده‌آل در معادله (۱۳.۱۲) توافق دارد. در این صورت جملات بعدی سهم نیروهای میان مولکول‌ها را نشان می‌دهند. جملات  $N(N-1)/2$  همگی مشابه یکدیگرند، زیرا برای تمام زوج مولکولها یکسان است. از این رو، می‌توان سهم آنها را به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{2} N(N-1) V^{N-2} \int \int f_{12} dV_1 dV_2 \quad (15.12)$$

که در آن زوج مولکولهای ۱ و ۲ را انتخاب کرده‌ایم و عامل  $V^{N-2}$  از انتگرال حجمی

برای  $N-2$  مولکول باقی مانده نتیجه شده است. برای محاسبه انتگرال دو گانه می توان ابتدا مبدأ مختصات را بر مولکول ۱ منطبق گرفت و انتگرال را روی  $dV_2$  انجام داد (شکل ۲۰۱۲). هر گاه فاصله ۱ و ۲ را با  $r$  نمایش دهیم، خواهیم داشت

$$\int_1 \int_2 f_{12}(r) dV_1 dV_2 = \int_1 \left\{ \int_2 f_{12}(r) 4\pi r^2 dr \right\} dV_1$$

که در آن، به دلیل تقارن کروی مسئله برای عنصر حجم از رابطه  $dV_2 = 4\pi r^2 dr$  استفاده شده است، انتگرال زیر

$$\beta = \int_0^\infty f_{12}(r) 4\pi r^2 dr \quad (16.12)$$

مستقل از مکان مولکول ۱ است (مادام که به دیواره های مخزن نزدیک نباشد) و بنابراین

$$\int_1 \int_2 f_{12}(r) dV_1 dV_2 = \int_1 \beta dV_1 = \beta \int dV_1 = \beta V$$

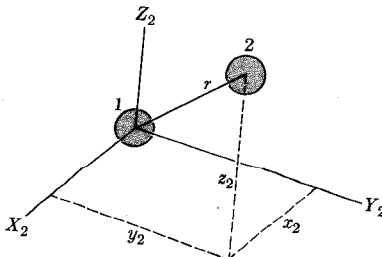
وقتی  $N$  خیلی بزرگ است، می توان با تقریب معتبری  $N^2/2$  را به جای  $N(N-1)/2$  قرار داد که در این صورت معادله (۱۵.۱۲) به صورت  $N^2 V^{N-1} \beta / 2$  درمی آید و بنابراین انتگرال  $I$  را می توان به صورت زیر نوشت

$$I = V^N + \frac{1}{2} N^2 V^{N-1} \beta = V^N \left( 1 + \frac{N^2 \beta}{2V} \right)$$

اما اگر در بسط  $e^{-E_p/kT}$  جملات بعدی رانیز به حساب آوریم، برای  $I$  نتیجه زیر به دست خواهد آمد

$$I = V^N \left( 1 + \frac{N\beta}{2V} \right)^N$$

نتیجه قبل درست همان دو جمله اول در بسط دو جمله ای رابطه بالاست. در این صورت



شکل ۲۰۱۲



تابع پارش بزرگ گاز حقیقی، معادله (۱۲.۱۲)، تا اولین مرتبه تقریب با رابطه زیر داده می‌شود

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{N!} \left[ \frac{V(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \right]^N \left( 1 + \frac{N\beta}{2V} \right)^N \quad (17.12)$$

برای یک گاز حقیقی این رابطه را باید با معادله (۱۱.۱۲) مقایسه کرد. آخرین عامل در معادله (۱۷.۱۲) سهم نیروهای میان مولکولی است که به تابع پارش بزرگ افزوده شده است. اکنون برای به دست آوردن معادله حالت یک گاز حقیقی از معادله (۱۰.۱۲) استفاده

می‌کنیم. از رابطه (۱۷.۱۲) برای  $\mathcal{Z}$  داریم

$$\ln \mathcal{Z} = N \ln V + N \ln \left( 1 + \frac{N\beta}{2V} \right) + F(T)$$

که در آن بقیه جملاتی را که ثابت اند و یا به دما بستگی دارند و در معادله (۱۰.۱۲) مشتق تأثیری ندارند به صورت  $F(T)$  نوشته‌ایم. اکنون با فرض اینکه  $x \equiv N\beta/2V$  در مقایسه با ۱ کوچک است، جمله دوم را با استفاده از  $\ln(1+x) \sim x$  به طور تقریبی می‌نویسیم (در فشار-دمای متعارف مقدار  $N\beta/2V$  از مرتبه  $10^{-4}$  است). از این رو

$$\ln \mathcal{Z} = N \ln V + \frac{N^2\beta}{2V} + F(T)$$

بنابراین

$$\left[ \frac{\partial}{\partial V} (\ln \mathcal{Z}) \right]_T = \frac{N}{V} - \frac{N^2\beta}{2V^2}$$

با قراردادن در معادله (۱۰.۱۲) خواهیم داشت

$$p = kT \left[ \frac{N}{V} - \frac{N^2\beta}{2V^2} \right] = \frac{kNT}{V} - \frac{kTN^2\beta}{2V^2}$$

ولی با توجه به  $R = kN_A$  و  $N = NN_A$  می‌توان نوشت

$$\bar{p} = \frac{NRT}{V} - \frac{N^2RTN_A\beta}{2V^2} \quad (18.12)$$

که معادله حالت برای گاز حقیقی است و در تقریب اولیه به صورت قضیه ویريال بیان شده است. توجه داشته باشید که در معادله (۱۸.۱۲) فقط دو جمله به دست آورده‌ایم. این در اثر نوع تقریبی است که در محاسبه  $\mathcal{Z}$  به کار برده‌ایم. هنگامی که این جملات را به حساب آوریم بسط کامل ویريال نتیجه می‌شود. از مقایسه معادله (۱۸.۱۲) با معادله (۷.۱۲) ملاحظه

می‌کنیم که دومین ضریب ویریا در این تقریب برابر است با

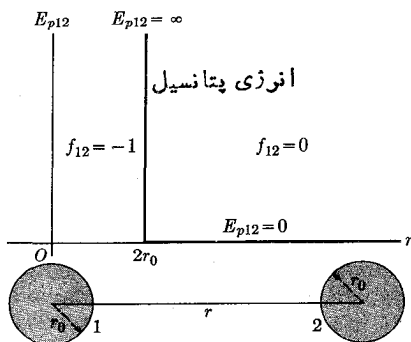
$$A(T) = -\frac{1}{4}RTN_A\beta \quad (19.12)$$

که مستقیماً برهم کنش میان مولکولی (که با  $\beta$  مشخص شده است) و ضریب ویریا  $A(T)$  را (که از طریق تجربی تعیین می‌شود) به یکدیگر مربوط می‌کند. این همان ارتباط بین برهم کنش میان مولکولی و ضرایب ویریا است که قبلاً متذکر شدیم.

پیش از این بحث را دنبال نمی‌کنیم. آنچه گفته شد برای نشان دادن روش برخورد با مسئله مربوط به معادلهٔ حالت یک گاز حقیقی، و به‌طور کلی هر سیستم متشکل از مولکولهای برهم کنش‌کننده، کافی است. بحث مربوط به مایعات و جامدات پیچیده‌تر است و در این کتاب نمی‌آید.

**مثال ۱۰۱۲** دومین ضریب ویریا را برای گازی که از کرات سخت غیر برهم کنش‌کننده به شعاع  $r_0$  تشکیل شده است محاسبه کنید.

**حل:** این تقریباً یک گاز حقیقی «غیر واقعی» است زیرا مادام که فاصلهٔ مراکز مولکولها برابر  $2r_0$  است، هیچ نیروی میان مولکولی وجود ندارد و پس از آن نیز یک نیروی دافعه قوی وارد عمل می‌شود. از این رو، انرژی پتانسیل میان مولکولی به ازای  $r > 2r_0$  برابر  $E_{p12} = 0$  و به ازای  $r < 2r_0$  برابر  $E_{p12} = \infty$  است که به  $f_{12} = 0$  به ازای  $r > 2r_0$  و  $f_{12} = -1$  به ازای  $r < 2r_0$  منجر می‌شود. این پتانسیل که معمولاً پتانسیل «سخت-مغز» نام دارد در شکل (۳۰۱۲) نشان داده شده است. این پتانسیل به این دلیل انرژی پتانسیل



**شکل ۳۰۱۲** انرژی پتانسیل میان مولکولی سخت-مغز. در هیچ فاصله‌ای نیروی جاذبه وجود ندارد

غیرواقعی نام دارد که نمی‌تواند چگالش تولید کند زیرا کمینه ندارد و بنا بر این فاصلهٔ جدایی پایداری میان مولکولها موجود نیست. اما، مدل ساده‌ای به دست می‌دهد که به کمک آن می‌توان بدون به کار بردن پیچیدگیهای غیر ضروری ریاضی، ایده‌های فیزیکی را بررسی کرد. با قراردادن مقادیر  $f_{۱۲}$  در معادلهٔ (۱۶.۱۲) خواهیم داشت

$$\beta = \int_0^{r_0} (-1) 4\pi r^2 dr = -\frac{4}{3}\pi(r_0)^3 = -\frac{32\pi r_0^3}{3}$$

با قراردادن این مقدار در معادلهٔ (۱۹.۱۲)، دومین ضریب ویریا به صورت زیر درمی‌آید

$$A = RT N_A \left( \frac{16\pi r_0^3}{3} \right) = RTb$$

که در آن  $b = N_A(16\pi r_0^3/3)$  چهار برابر حجم مولکولهای موجود در یک مول است. بنابراین، در تقریب اول، معادلهٔ حالت گاز متشکل از کرات سخت به صورت زیر خواهد بود

$$p = \frac{NRT}{V} + \frac{N^2 RTb}{V^2}$$

**مثال ۲۰۱۲** نتایج مثال قبل را در مورد حالتی به کار ببرید که در آن نیروهای میان مولکولی از نوع نیروی جاذبه ولی خیلی ضعیف‌اند، بجز به ازای  $r < r_0$  که در آن نیروی دافعهٔ خیلی قوی وارد عمل می‌شود و مولکولها را به کرات تقریباً سخت نفوذناپذیری تبدیل می‌کند.

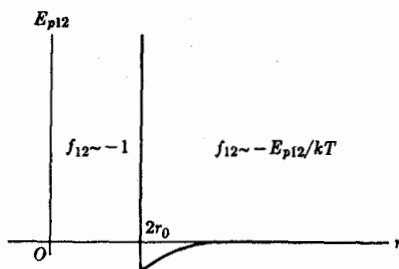
**حل:** به عنوان یک تعمیم منطقی از محاسبهٔ انجام شده در مثال قبل، می‌توان به ازای  $r > r_0$ ، نیروهای میان مولکولی نسبتاً ضعیف ولی جاذبه‌ای را در نظر بگیریم (شکل ۲۰۱۲). در این صورت می‌توانیم بحث مورد نظر را با فرض  $f_{ij} = -1$  به ازای  $r < r_0$  ادامه دهیم. هر گاه  $E_{p12}/kT$  در مقایسه با واحد کوچک باشد از معادلهٔ (۱۶.۱۲) به ازای  $r > r_0$  می‌توان نوشت:  $f_{۱۲} = -E_{p12}/kT$  بنابراین معادلهٔ (۱۶.۱۲) نتیجهٔ زیر را به دست می‌دهد

$$\beta = \int_0^{r_0} (-1) 4\pi r^2 dr + \int_{r_0}^{\infty} (-E_{p12}/kT) 4\pi r^2 dr = -\frac{32\pi r_0^3}{3} + \frac{\alpha}{kT}$$

که در آن کمیت

$$\alpha = \int_{r_0}^{\infty} (-E_{p12}) 4\pi r^2 dr$$

کمیتی است مثبت زیرا به ازای  $r > r_0$ ،  $E_{p12}$  منفی است (شکل ۲۰۱۲). با قراردادن



**شکل ۴۰۱۲** انرژی پتانسیل میان مولکولی با یک مغز سخت و جاذبه ضعیف در فواصل بزرگتر.

این مقدار در معادله (۱۹.۱۲)، استفاده از تعریفی که قبلاً برای  $b$  به کار بردیم و قرار کردن  $a = N_A \alpha / 2$  برای دومین ضریب ویریال خواهیم داشت  $A = RTb - a$ . در این صورت به کمک معادله (۷.۱۲)، معادله حالت در اولین تقریب به صورت زیر خواهد بود

$$p = \frac{NRT}{V} + \frac{N^2(RTb - a)}{V^2} + \dots \quad (۲۰.۱۲)$$

این معادله با دقت نسبتاً خوبی در مورد بسیاری از گازهای حقیقی صادق است، مخصوصاً وقتی که مقادیر  $V/N$  بزرگ باشند. ضرایب  $a$  و  $b$  را ثابتهای وان دوالس می نامند. این ثابتها در جدول ۱۰۱۲ برای چند گاز حقیقی داده شده اند

### ۴.۱۲ ظرفیت گرمایی یک گاز تک اتمی ایده آل

در بخش ۷.۱۱ ظرفیتهای گرمایی یک ماده در حجم و فشار ثابت را به صورت زیر تعریف کردیم

$$C_V = \frac{1}{N} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V, \quad C_p = \frac{1}{N} \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p \quad (۲۱.۱۲)$$

که در آن  $H = U + pV$  آنتالپی ماده است. محاسبه نظری ظرفیتهای گرمایی هر ماده، علاوه بر آنکه در برخی محاسبات عملی به عنوان ضریب مهم است، وسیله ای را فراهم می کند که به کمک آن بتوان صحت مدل انتخاب شده جهت بیان ماده را مورد بررسی قرار داد. در این بخش، ظرفیتهای گرمایی یک گاز ایده آل را محاسبه می کنیم و از مقایسه آنها با مقادیر تجربی برای گازهای حقیقی، می توانیم نتیجه بگیریم که مدل گاز ایده آل تا چه اندازه یک تقریب خوب به شمار می آید.

## جدول ۱۰۱۲ ثابتهای وان دروالس.

ماده	$a$ بر حسب $\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}\text{mol}^{-2}$	$b$ بر حسب $\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{mol}^{-1}$
هلیوم	$3.7446 \times 10^3$	۰.۰۲۳۷۰
هیدروژن	۲۴.۶۸	۰.۰۲۶۶۱
نئون	۲۱.۲۸	۰.۰۱۷۰۹
نیتروژن	۱۴۰.۴	۰.۰۳۹۱۳
اکسیژن	۱۳۷.۴	۰.۰۳۱۸۳
آمونیاک	۴۲۱.۲	۰.۰۳۷۰۷
کربن دی اکسید	۳۶۲.۸	۰.۰۴۲۶۷
سولفور دی اکسید	۶۷۸.۱	۰.۰۵۶۳۶
آب	۵۵۱.۹	۰.۰۳۰۴۹

ابتدا يك گاز تك اتمی ایده آل را در نظر می گیریم. انرژی داخلی چنین گازی فقط انرژی جنبشی انتقالی است و با رابطه  $U = (3/2)NRT$  داده می شود. با استفاده از معادله (۲۱.۱۲) خواهیم داشت

$$C_V = \frac{3}{2}R = 12.4715 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$= 2.9807 \text{ cal mol}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \quad (22.12)$$

با در نظر گرفتن معادله (۶.۱۲)،  $(pV = NRT)$ ، برای انتالپی يك گاز ایده آل داریم

$$H = U + pV = \frac{5}{2}NRT$$

از این رو، از معادله (۲۱.۱۲) نتیجه زیر به دست می آید

$$C_p = \frac{5}{2}R = 20.7858 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$= 4.9678 \text{ cal mol}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \quad (23.12)$$

بنابراین تمام گازهای تك اتمی ایده آل ظرفیتهای گرمایی یکسان دارند که مستقل از ساختار

اتمهاست. از نتایج بالا رابطه زیر را به دست می آوریم

$$C_p - C_v = R \quad (24.12)$$

یعنی  $C_p$  به اندازه مقدار  $R$  از  $C_v$  بزرگتر است. دلیل این امر آن است که  $C_v$  فقط به تغییر در انرژی داخلی مربوط است در حالی که  $C_p$  علاوه بر آن، وقتی که در فشار ثابت دمای گاز یک درجه افزایش می یابد، کار انبساطی گاز را نیز شامل می شود. به آسانی می توان نشان داد که این کار دقیقاً مساوی با  $R$  است. هرگاه فشار گاز ثابت باشد،  $p dV = NR dT$ ، و دما یک درجه افزایش یابد، کار انجام شده برابر است با

$$W_p = \int p dV = \int_T^{T+1} NR dT = NR$$

به این ترتیب کاری که گاز بر روی یک مول انجام می دهد مساوی با  $R$  است. به کمک این استدلال مشاهده می کنیم که معادله (۲۴.۱۲) برای تمام گازهای ایده آل، خواه یک اتمی، خواه غیر آن، معتبر است.

رابطه دیگری که میان ظرفیتهای گرمایی یک گاز تک اتمی ایده آل برقرار است

چنین است

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} = 1.667 \quad (25.12)$$

همان طور که در جدول ۳.۱۲ (در انتهای ایسن فصل) نشان داده شده است تقریباً اکثر گازهای تک اتمی از این رابطه پیروی می کنند.

مثال ۳.۱۲ معادله حالت یک گاز ایده آل را بر حسب فشار، حجم، و آنتروپی به دست آورید.

حل: چون آنتروپی خاصیتی از حالت یک گاز است، آن را می توان به عنوان متغیری برای تعریف حالت یک گاز، به همان طریقی که از فشار، حجم، یا دما استفاده می شود، به کار برد. از معادله حالت،  $pV = NRT$  داریم

$$\ln p + \ln V = \ln NR + \ln T.$$

بعدها مشتقگیری خواهیم داشت

$$\frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} \quad (26.12)$$

در مورد یک گاز ایده آل، که در آن انرژی داخلی فقط به دما بستگی دارد، داریم  $dU = NC_v dT$ . بنابراین قانون اول ترمودینامیک یعنی معادله (۳۷.۱۱)،

$$dU = T dS - p dV \text{، رابطه زیر را به دست می دهد}$$

$$NC_V dT = T dS - p dV$$

که از آن (با تقسیم کردن بر  $T$  و استفاده از معادله حالت) خواهیم داشت

$$NC_V \frac{dT}{T} = dS - NR \frac{dV}{V} \quad (۲۷.۱۲)$$

از حذف  $dT/T$  بین معادلات (۲۶.۱۲) و (۲۷.۱۲) و با استفاده از رابطه  $C_p - C_V = R$  به دست می آوریم

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = \frac{dS}{NC_V}$$

که در آن  $\gamma = C_p/C_V$ . با انتگرال گیری نتیجه زیر حاصل می شود

$$\ln p + \gamma \ln V = \frac{S}{NC_V} + \ln(\text{const.})$$

یا

$$pV^\gamma = (\text{const.}) e^{S/NC_V} \quad (۲۸.۱۲)$$

که معادله حالت یک گاز ایده آل بر حسب  $p$ ،  $V$ ، و  $S$  است. هرگاه تبدیل بی دررو و برگشت پذیر باشد (یعنی اگر تک آنتر و پیک باشد)، معادله به صورت زیر درمی آید

$$pV^\gamma = \text{const.} \quad (۲۹.۱۲)$$

در فرایندهایی که شامل گازهاست، این معادله کاربردهای فراوانی دارد.

## ۵.۱۲ ظرفیتهای گرمایی یک گاز چند اتمی ایده آل

هنگامی که گاز ایده آل تک اتمی نیست، در محاسبه ظرفیتهای گرمایی باید ساختار مولکولها را نیز به حساب آوریم. انرژی یک مولکول چند اتمی از سه جمله تشکیل شده است که عبارت اند از انرژی انتقالی، انرژی چرخشی، و انرژی ارتعاشی. یعنی<sup>۱</sup>

$$E_{\text{مولکول}} = E_{\text{tr}} + E_{\text{rot}} + E_{\text{vib}} \quad (۳۰.۱۲)$$

۱. برای سهولت فرض می کنیم که این سه انرژی جمع پذیرند. با این حال اگر بخواهیم دقیقتر صحبت کنیم باید بگوییم که در میان انرژیهای چرخشی و ارتعاشی، بعضی جملات به صورت حاصل ضرب نیز وجود دارند.

از انرژی الکترونی مولکولها صرف نظر می کنیم زیرا به ندرت در برانگیختگی گرمایی گاز شرکت می کند. برانگیختگی الکترونی مستلزم مقداری انرژی حداقل حدود  $1\text{ eV}$  است. این انرژی تقریباً  $40$  برابر بزرگتر از میانگین انرژی جنبشی گرمایی در دمای معمولی ( $298\text{ K}$ ) است، و بنابراین، به دمای از مرتبه  $10^4\text{ K}$  نیاز خواهیم داشت تا تعداد قابل توجهی از مولکولها در حالت های الکترونی برانگیخته به وجود آیند (مثال  $4010$ ). البته در چنین دماهایی، اکثر مولکولهای گاز در اثر برخورد شکسته می شوند.

از طرف دیگر، انرژی جنبشی چرخشی مولکولهای چند اتمی از مرتبه  $10^{-4}\text{ eV}$  است و بنابراین حتی در دماهایی که در مقایسه با دمای معمولی پایین هستند نیز مولکولها به آسانی می توانند به ترازهای چرخشی برانگیخته انتقال یابند. انرژیهای ارتعاشی در گستره  $10^{-3}\text{ eV}$  تا  $10^{-1}\text{ eV}$  قرار دارند و لذا در دمای معمولی، مولکولها ممکن است در چند حالت ارتعاشی برانگیخته پایتتر دیده شوند.

برای محاسبه تأثیر حرکات داخلی بر ظرفیت گرمایی یک گاز چند اتمی، باید ابتدا (با استفاده از روشهای آماری) توزیع مولکولهای گاز در میان حالت های چرخشی و ارتعاشی را پیدا کنیم. در اینجا ساده ترین حالت که یک گاز دو اتمی است را در نظر می گیریم. طبق معادله (۱۲.۵) انرژی جنبشی چرخشی مولکولهای دو اتمی برابر است با

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2 I (l+1)}{2I}$$

که در آن  $I$  گشتاور لختی مولکول نسبت به محور عمودی است که از مرکز جرم می گذرد و  $l$  تکانه زاویه ای مولکول نسبت به مرکز جرم است. همان طور که در بخش ۷.۵ گفته شد، تکانه زاویه ای می تواند  $l+1$  سمگیری متفاوت با انرژی یکسان داشته باشد، به گونه ای که ضریب  $l+1$  به کار رفته در معادله (۲۳.۱۰) مساوی  $l+1$  است. بنابراین، هنگامی که از آمار ماکسول-بولتزمن استفاده می کنیم توزیع تعادل مولکولها میان حالت های چرخشی دسترس پذیر عبارت است از

$$n_{\text{rot}} = \frac{N}{Z_{\text{rot}}} (2l+1) e^{-\hbar^2 I (l+1) / 2IKT} = \frac{N}{Z_{\text{rot}}} (2l+1) e^{-l(l+1)\Theta_r/T} \quad (31.12)$$

که در آن  $\Theta_r = \hbar^2 / 2Ik$  دمای مشخصه چرخش است. در جدول ۲۰.۱۲ مقادیر  $\Theta_r$  برای چند گاز دو اتمی داده شده است. با توجه به این جدول مشاهده می کنیم که حتی برای هیدروژن نیز این مقادیر در مقایسه با دمای معمولی بسیار کوچک اند. در شکل ۵.۱۲ مقادیر  $n_{\text{rot}}$  برای سه مقدار  $T/\Theta_r$  نشان داده شده است. با افزایش  $T$  تعداد مولکولهای موجود در حالت های چرخشی برانگیخته نیز افزایش می یابند.

بر طبق تعریف عمومی در معادله (۲۲.۱۰)، تابع پارش چرخشی  $Z_{\text{rot}}$  برابر است با

$$Z_{\text{rot}} = \sum_l (2l+1) e^{-l(l+1)\Theta_r/T} \quad (32.12)$$



جدول ۲۰۱۲ دماهای مشخصه برای چرخش و ارتعاش مولکولهای دو اتمی.

$\Theta_r, K$	$\Theta_r, K$	ماده
۶۱۴۰	۸۵۰۵	هیدروژن
۳۱۲۰	۲۰۷۷	کربن مونواکسید
۲۲۶۰	۲۰۰۹	اکسیژن
۸۱۰	۰۰۳۴۷	کلر
۴۷۰	۰۰۱۱۷	برم
۲۳۰	۰۰۲۲۲	سدیوم
۱۴۰	۰۰۵۸۱	پتاسیوم

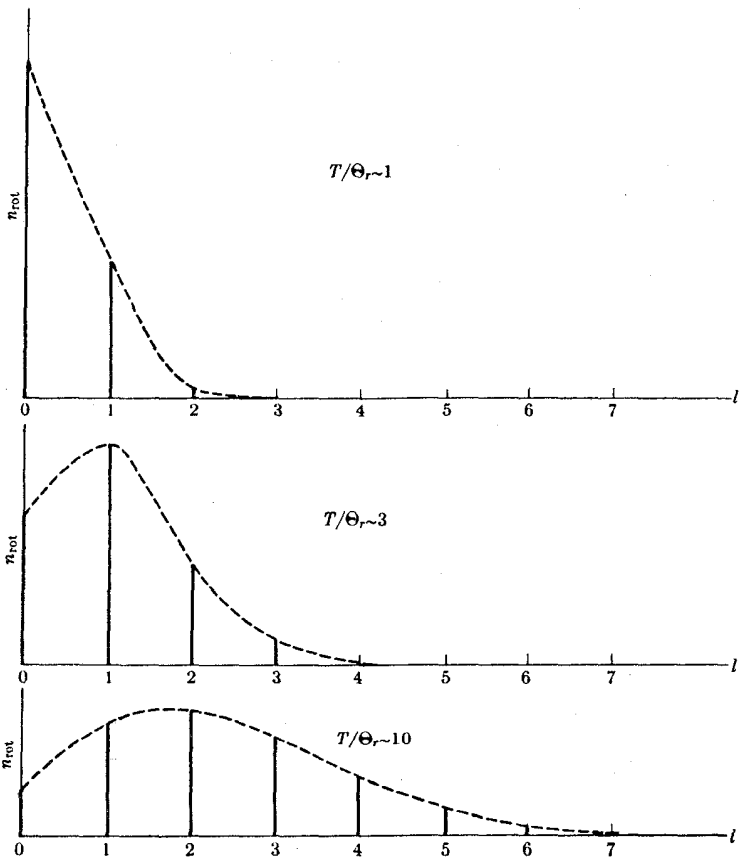
با محاسبه تابع پارش چرخشی  $Z_{rot}$  می توان انرژی چرخشی  $U_{rot}$  گاز را به کمک معادله (۲۴.۱۰) به دست آورد

$$U_{rot} = kNT^2 \frac{d}{dT} (\ln Z_{rot}) \quad (۳۳.۱۲)$$

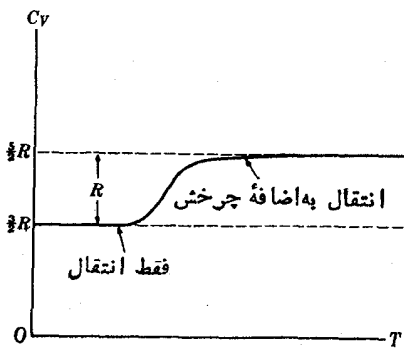
انرژی داخلی کل گاز برابر است با

$$U = U_{tr} + U_{rot} = \frac{3}{2}NRT + U_{rot} \quad (۳۴.۱۲)$$

زیرا  $U_{tr} = (3/2)NRT$  برای به دست آوردن ظرفیت گرمایی در حجم ثابت  $C_V$ ، معادله (۳۴.۱۲) را در معادله (۲۱.۱۲) قرار می دهیم. همان طور که در شکل ۶.۱۲ دیده می شود، ظرفیت گرمایی به تدریج با دما افزایش می یابد زیرا نه تنها برای افزایش انرژی انتقالی مولکولها، بلکه برای افزایش انرژی چرخشی آنها، از طریق آوردن مولکولهای بیشتری به ترازهای چرخشی برانگیخته، نیز انرژی مورد نیاز است. شکل ۶.۱۲ نشان می دهد که در دمای بالا نسبت به  $\Theta_r$ ، ترازهای  $C_V$  تقریباً به  $(5/2)R$  می رسند. این موضوع را می توان به طریق زیر توضیح داد. در دماهای خیلی بالاتر از  $\Theta_r$  (که در آن  $\Theta_r/T$  خیلی کوچک است)، تعداد بسیار زیادی از حالت های چرخشی اشغال شده اند. ضمناً در مقایسه با انرژی گرمایی، فاصله میان ترازهای چرخشی خیلی کوچک می شود و با گرفتن انتگرال به جای مجموع در معادله (۳۲.۱۲) می توان  $Z_{rot}$  را محاسبه کرد. ضمناً به جای  $1 + 2l$  و  $l(l+1)$



شکل ۵.۱۲ اشغال ترازهای چرخشی در یک گاز دو اتمی به ازای سه مقدار از  $T/\Theta_r$ .



شکل ۶.۱۲ تغییر ظرفیت گرمایی یک گاز دو اتمی در اثر برانگیختگی ترازهای چرخشی.

به ترتیب مقادیر  $2l$  و  $l^2$  را قرار می دهیم. در این صورت داریم

$$Z_{\text{rot}} = \int_0^{\infty} \nu l e^{-(\Theta_r/T)\nu} d\nu = \frac{T}{\Theta_r}$$

از این رو  $\ln Z_{\text{rot}} = \ln T - \ln \Theta_r$  و معادله (۳۳.۱۲) رابطه زیر را به دست می دهد

$$U_{\text{rot}} = kNT = NRT \quad (۳۵.۱۲)$$

زیرا  $kN = NR$  بنا بر این در  $T \gg \Theta_r$  برای انرژی کل خواهیم داشت

$$U = U_{\text{tr}} + U_{\text{rot}} = \frac{3}{2}NRT + NRT = \frac{5}{2}NRT \quad (۳۶.۱۲)$$

با قراردادن معادله (۳۶.۱۲) در معادله (۲۱.۱۲) نتیجه می گیریم

$$C_v = \frac{5}{2}R \quad (۳۷.۱۲)$$

از این رو، در دماهای بالا در مقایسه با  $\Theta_r$ ، انرژی جنبشی چرخشی یک مولکول دو اتمی به اندازه  $R$  به ظرفیت گرمایی در حجم ثابت یک گاز دو اتمی ایده آل می افزاید. همین نتیجه برای گازهای متشکل از مولکولهای چند اتمی خطی نیز صادق است.

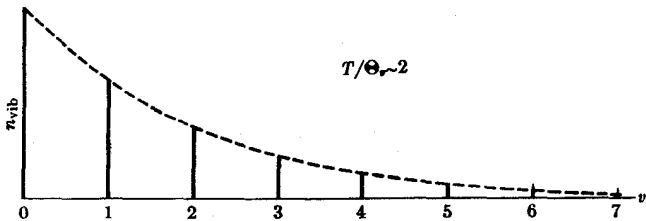
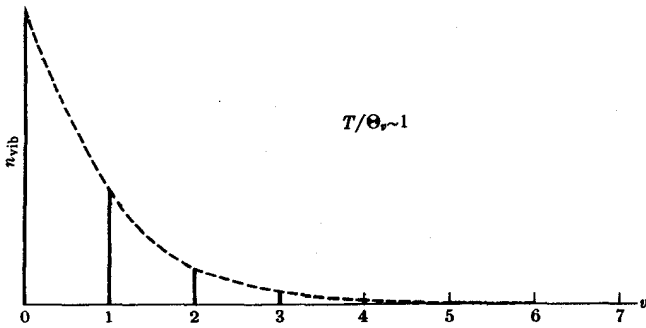
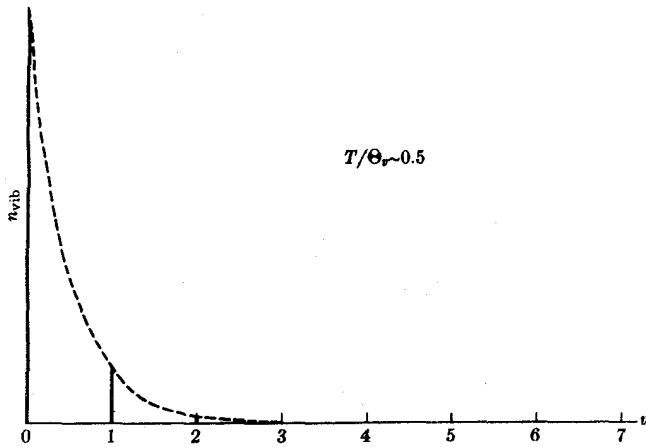
اکنون انرژی ارتعاشی گاز دو اتمی ایده آل را محاسبه می کنیم. فرض می کنیم که ارتعاشات به صورت هماهنگ ساده اند. بنا بر این، بر طبق معادله (۱۶.۵)، ترازهای انرژی ارتعاشی با رابطه  $E_{\text{vib}} = (v + 1/2)\hbar\omega$  داده می شوند. لذا وقتی مجدداً از آمار ماکسول-بولتزمن و رابطه  $g_v = 1$  که به این حالت مربوط می شود، استفاده کنیم، اشغال ترازهای ارتعاشی عبارت می شود از

$$n_{\text{vib}} = \frac{N}{Z_{\text{vib}}} e^{-(v+1/2)\hbar\omega/kT} = \frac{N}{Z_{\text{vib}}} e^{-(v+1/2)\Theta_v/T} \quad (۳۸.۱۲)$$

که در آن  $\Theta_v = \hbar\omega/k$  دمای مشخصه ارتعاش است. در جدول ۲.۱۲ مقدار آن برای چند مولکول دو اتمی داده شده است. توجه کنید که در تمام حالتها،  $\Theta_v$  خیلی بزرگتر از  $\Theta_r$  است. ضمناً در اکثر حالتها  $\Theta_v$  بزرگتر از دمای معمولی است. شکل ۷.۱۲ مقادیر  $n_{\text{vib}}$  را برای سه مقدار  $T/\Theta_v$  نشان می دهد. با افزایش  $T$  تعداد مولکولهای موجود در ترازهای ارتعاشی برانگیخته نیز افزایش می یابد، ولی به خاطر  $\Theta_v > \Theta_r$ ، ترازهای ارتعاشی برانگیخته پایین در دماهایی که در آنها بسیاری از ترازهای چرخشی اشغال شده اند، به طور قابل ملاحظه ای اشغال می شوند. در برخی موارد، در انرژیهای پایینتر از انرژیهای که در آنها ترازهای ارتعاشی بالاتر به طور قابل توجهی به انرژی داخلی می افزاید، مولکولها گسسته می شوند.

تابع پارش ارتعاشی  $Z_{\text{vib}}$  برابر است با

$$Z_{\text{vib}} = \sum_v e^{-(v+1/2)\Theta_v/T} = e^{-\Theta_v/2T} \left( \sum_v e^{-v\Theta_v/T} \right) \quad (۳۹.۱۲)$$



شکل ۷.۱۲ اشغال ترازهای ارتعاشی در یک گاز دو اتمی به ازای سه مقدار  $T/\Theta_v$ .

با استفاده از رابطه جمع یک تصاعد هندسی نزولی نامحدود

$$\sum x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad x < 1 \text{ برای}$$

و با توجه به اینکه در این حالت داریم:  $x = e^{-\Theta_v/T}$ ، برای تابع پارش ارتعاشی نتیجه زیر به دست می آید

$$Z_{\text{vib}} = \frac{e^{-\Theta_v/2T}}{1 - e^{-\Theta_v/T}} \quad (۲۰.۱۲)$$

از نتیجه اخیر خواهیم داشت

$$\ln Z_{\text{vib}} = -\frac{\Theta_v}{2T} - \ln(1 - e^{-\Theta_v/T})$$

و

$$\frac{d}{dT}(\ln Z_{\text{vib}}) = \frac{\Theta_v}{2T^2} + \frac{\Theta_v/T^2}{e^{\Theta_v/T} - 1}$$

برطبق معادله (۲۲.۱۰)، انرژی ارتعاشی گاز از رابطه زیر به دست می‌آید

$$U_{\text{vib}} = kNT^2 \frac{d}{dT}(\ln Z_{\text{vib}}) = \frac{1}{2}kN\Theta_v + \frac{kN\Theta_v}{e^{\Theta_v/T} - 1} \quad (۲۱.۱۲)$$

از بخش ۸.۵ به یاد داریم که  $k\Theta_v/2 = \hbar\omega/2$  انرژی ارتعاشی نقطه صفر يك مولکول است. بنابراین جمله  $kN\Theta_v/2$  را کل انرژی ارتعاشی نقطه صفر گاز در نظر می‌گیریم. این انرژی ثابت، با آنکه ممکن است نسبتاً بزرگ باشد، بره‌فرایندی که در آن فقط اختلاف انرژی مطرح است تأثیر نمی‌گذارد. برای محاسبه ظرفیت گرمایی در حجم ثابت باید  $U_{\text{vib}}$  را به  $U_{\text{tr}} + U_{\text{rot}}$  اضافه کرد و مجدداً معادله (۲۱.۱۲) را به کار برد. در دماهای بالا کمیت  $\Theta_v/T$  خیلی کوچک است، لذا با استفاده از تقریب  $e^x = 1 + x + \dots$  برای مقادیر کوچک  $x$  می‌توان نوشت

$$e^{\Theta_v/T} - 1 = \left(1 + \frac{\Theta_v}{T} + \dots\right) - 1 = \frac{\Theta_v}{T} + \dots \quad (۲۲.۱۲)$$

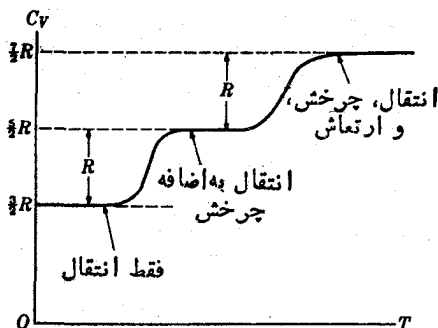
بنابراین معادله (۲۱.۱۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$U_{\text{vib}} = \frac{1}{2}kN\Theta_v + kNT = kNT \left(1 + \frac{\Theta_v}{2T}\right) \quad (۲۳.۱۲)$$

از این رو، نوسانهای مولکولی مقداری به انرژی داخلی می‌افزایند که برای دماهای خیلی بزرگتر از  $\Theta_v$  برابر است با

$$U_{\text{vib}} = kNT = NRT \quad (۲۴.۱۲)$$

این انرژی مساوی مقداری است که برای انرژی چرخشی داده شده، با معادله (۳۵.۱۲)



شکل ۸۰۱۲ تغییر ظرفیت گرمایی در حجم ثابت برای یک گاز دو اتمی ناشی از برانگیختگی نرزه‌های چرخشی و ارتعاشی.

نتیجه گرفتیم. مقدار مجانبی انرژی کل در دماهای خیلی بالا برابر است با

$$U = U_{tr} + U_{rot} + U_{vib} = \frac{3}{2}NRT + NRT + NRT = \frac{5}{2}NRT$$

که با ظرفیت گرمایی کل متناظر است

$$C_V = \frac{5}{2}R \quad (۴۵.۱۲)$$

از مقایسه این مقدار با معادله (۳۷.۱۲) نتیجه می‌گیریم که در دماهای بالا، ارتعاشات مولکولهای دو اتمی به اندازه  $R$  به گرمای ویژه در حجم ثابت گاز دو اتمی می‌افزایند. شکل ۸۰۱۲ برای یک گاز دو اتمی، رفتار کلی  $C_V$  را بر حسب افزایش دما نشان می‌دهد. این رفتار را اندازه‌گیریهای تجربی به خوبی تأیید کرده‌اند.

## ۶.۱۲ اصل هم‌پاری انرژی

انرژی جنبشی متوسط مولکولهای یک گاز ایده‌آل، ناشی از حرکت انتقالی آن، برابر است با

$$E_{ave} = \frac{3}{2}kT \quad (۴۶.۱۲)$$

حرکت انتقالی به سه مختصه  $x$ ،  $y$ ، و  $z$  که برای مشخص کردن مرکز جرم مولکول لازم هستند، وابسته است. در این صورت می‌توان فرض کرد که، به خاطر تقارن فضا، انرژی جنبشی متوسط برای حرکت در طول هر محور مختصات برابر است با

$$\varepsilon = \frac{1}{2}kT \quad (۲۷.۱۲)$$

چنانچه برای این، اگر گاز طوری مقید بود که مولکولها فقط می‌توانستند در صفحه‌ای با دو درجه آزادی یادو مختصه حرکت کنند، انتظار داشتیم که انرژی جنبشی متوسط مولکولها دو برابر  $\varepsilon$  یا برابر  $kT$  باشد.

اکنون چرخش يك مولکول دو اتمی (یا خطی) را در نظر می‌گیریم. سمتگیری محور مولکول (شکل ۹.۱۲) با زوایای  $\alpha$  و  $\beta$  که با دو محور مختصات  $X$  و  $Y$  تشکیل می‌دهد، تعیین می‌شود. از این رو چرخش يك مولکول دو اتمی (و به طور کلی هر مولکول خطی) دو درجه آزادی دارد. از این رو، با بسط معادله (۲۷.۱۲) به حرکت چرخشی يك مولکول می‌توان انتظار داشت که انرژی جنبشی متوسط مولکول برابر باشد با

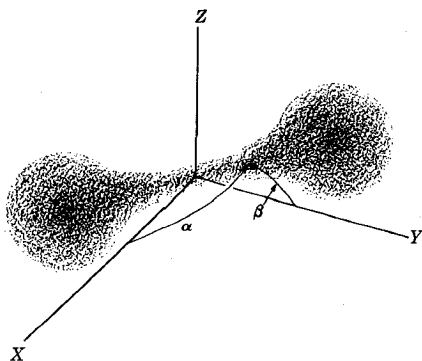
$$E_{ave}(\text{چرخشی}) = 2\varepsilon = kT$$

و نیز انرژی کل چرخش گاز، متشکل از مولکولهای دو اتمی (یا خطی) مساوی باشد با

$$U_{rot} = NE_{ave}(\text{چرخشی}) = kNT = NRT$$

این مقدار با نتیجه داده شده در معادله (۳۵.۱۲) که برای دماهای بالا (در مقایسه با  $\Theta_r$ ) معتبر است، توافق دارد.

به طریق مشابه، حرکت ارتعاشی هر مولکول دو اتمی فقط يك درجه آزادی دارد و انرژی ارتعاشی متوسط چنین مولکولی باید مساوی  $\varepsilon = kT/2$  باشد. اما، در حرکت ارتعاشی ما هم انرژی جنبشی داریم و هم انرژی پتانسیل که مقادیر متوسط آنها مساوی است. بنابراین انرژی ارتعاشی متوسط يك مولکول دو برابر انرژی جنبشی به ازای هر درجه



شکل ۹.۱۲ برای مشخص کردن سمتگیری يك مولکول خطی در فضا دو زاویه لازم است.

آزادی است، یا

$$E_{ave}(\text{ارتعاشی}) = 2\varepsilon = kT$$

و انرژی کل ارتعاش گاز دو اتمی باید مساوی با مقدار زیر باشد

$$U_{vib} = NE_{ave}(\text{ارتعاشی}) = kNT = NRT$$

که مجدداً با نتیجه داده شده در معادله (۲۴.۱۲) که برای دماهای بالا (درمقایسه با  $\Theta_v$ ) معتبر است، توافق دارد.

بنابراین می توان قاعده خیلی مهمی را که اصل هم پاری انرژی نام دارد به صورت زیر معرفی کرد.

در دماهایی که به قدر کافی بالا هستند، به گونه ای که  $kT$  درمقایسه با فاصله جدایی ترازهای انرژی وابسته به یک درجه آزادی مشخص مولکولها بزرگ است، انرژی مولکولی متوسط به ازای هر درجه آزادی مساوی  $kT/2$  است. (به دلیل موجود بودن انرژی پتانسیل سهم انرژی ارتعاشی به مقدار  $kT$  به ازای هر درجه آزادی ارتعاشی است.)

این اصل به ما کمک می کند تا بحث بخش قبل را به مولکولهای چند اتمی تعمیم دهیم. یک مولکول چند اتمی را در نظر می گیریم که سه درجه آزادی برای حرکت انتقالی و  $f$  درجه آزادی داخلی برای حرکت چرخشی و ارتعاشی دارد (هر ارتعاش دو درجه به حساب می آید). انرژی مولکولی متوسط در دماهای بالا برای گازی متشکل از این مولکولها با رابطه زیر داده می شود

$$E_{ave} = (3 + f)\varepsilon = \frac{3 + f}{2} kT$$

و انرژی داخلی کل عبارت است از

$$U = NE_{ave} = \frac{3 + f}{2} kNT = \frac{3 + f}{2} NRT$$

در دمای بالا، ظرفیت گرمایی گاز در حجم ثابت به مقدار زیر میل می کند

$$C_V = \frac{3 + f}{2} R \quad (48.12)$$

اکنون بر طبق معادله (۲۴.۱۲)، داریم  $C_p - C_V = R$  یا  $C_p = C_V + R$  که برای تمام گازهای ایده آل بدون توجه به ساختار مولکولی آنها معتبر است. هر گاه برای  $C_p$  از معادله (۴۸.۱۲) استفاده کنیم، خواهیم داشت

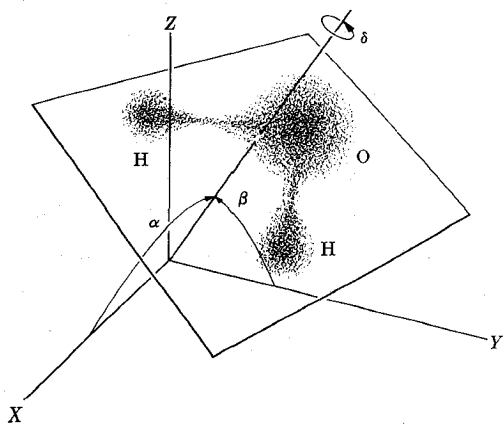


$$C_p = \frac{\delta + f}{\gamma} R \quad (۴۹.۱۲)$$

بنابراین نسبت  $\gamma = C_p / C_v$  برابر می‌شود با

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{\delta + f}{۳ + f} \quad (۵۰.۱۲)$$

در واقع در این فرمولها  $f$  فقط با آن عده از درجات آزادی متناظر است که برای آنها در دمای مشخص، تعداد خیلی زیادی از حالت‌های برانگیخته، اشغال شده است. از این رو، هرگاه  $T$  بزرگتر از  $\Theta_p$  ولی کوچکتر از  $\Theta_v$  باشد،  $f$  فقط بسا درجات آزادی چرخشی متناظر است. اما اگر  $T$  خیلی بزرگتر از  $\Theta_p$  باشد، در این صورت  $f$  به تمام درجات آزادی مربوط می‌شود. همان‌طور که قبلاً در معادله (۲۵.۱۲) نشان داده شد، برای يك گاز تك اتمی داریم  $f = ۰$  و  $\gamma = ۵/۳ = ۱.۶۷$  برای يك گاز دو اتمی (و به‌طور کلی برای هر مولکول خطی در حالت گازی) در دمای معمولی (وقتی فقط حرکت چرخشی به حساب آید) داریم  $f = ۲$  و  $\gamma = ۷/۵ = ۱.۴۰$ . هر گاه مولکول خطی نباشد ولی مسطح باشد، نظیر آب ( $H_2O$ ) یا اینکه سه بعدی باشد، مانند آمونیاك ( $NH_3$ )، در این صورت سه درجه آزادی چرخشی وجود دارد، زیرا برای مشخص کردن محور (شکل ۱۰.۱۲)، علاوه بر زوایای  $\alpha$  و  $\beta$  به زاویه چرخشی  $\delta$  حول محور نیز نیاز خواهیم داشت. از این رو،  $f = ۳$  و  $\gamma = ۸/۶ = ۱.۳۳$ . بنابراین اندازه‌گیری  $\gamma$  می‌تواند اطلاعات مهمی درباره ساختار داخلی يك مولکول فراهم سازد. مثلاً از جدول ۳.۱۲، که مقدار  $\gamma$  را برای چند گاز به دست



شکل ۱۰.۱۲ برای مشخص کردن سمتگیری يك مولکول غیر خطی نظیر  $H_2O$  در فضا به سه زاویه نیاز داریم.

جدول ۳۰۱۲ نسبتهای ظرفیتهای گرمایی برای چند گاز.

ماده	$\gamma$	ماده	$\gamma$
هلیوم	۱٫۶۵۹	کلر	۱٫۳۵۵
نئون	۱٫۶۶۴	هیدروژن سولفید	۱٫۳۳۲
آرگون	۱٫۶۶۸	بخار آب	۱٫۳۲۴
هیدروژن	۱٫۴۱۰	آمونیاک	۱٫۳۱۰
اکسیژن	۱٫۴۰۱	کربن دی اکسید	۱٫۳۰۴
نیتروژن	۱٫۴۰۴	اتیلن	۱٫۲۵۵
کربن دی اکسید	۱٫۴۰۴		

می دهد، ملاحظه می کنیم که  $H_2O$  مسطح است و نه خطی، و نیز گازهای بی اثر همگی تک اتمی اند ( $f = 0$ ). مولکول  $CO_2$  یک استثنای قابل توجه است زیرا با آنکه خطی است ولی در آن  $\gamma = 1.304$  است که به مقدار یک مولکول مسطح خیلی نزدیک است. می دانیم که  $CO_2$  خطی است زیرا گشتاور دو قطبی الکتریکی آن صفر است. اختلاف ظاهری به این واقعیت مربوط می شود که در  $CO_2$  هر دو ارتعاشی خمشی، یک انرژی ارتعاشی نسبتاً کوچک دارد. این ارتعاش دو درجه آزادی اضافه می کند و لذا برای  $CO_2$  نسبت ظرفیتهای گرمایی باید نزدیک به مقدار  $1.285 = 9/7$  باشد.

### مسائل

۱۰۱۲ با استفاده از بسط ویریال در مورد معادله حالت یک گاز که با معادله  $(20.12)$  داده شده است، کاری که یک گاز در هنگام انبساط تکدما از حجم  $V_1$  تا حجم  $V_2$  انجام می دهد را محاسبه کنید. نتیجه به دست آمده را برای یک مول هیدروژن که در دمای  $300 K$  از حجم  $3 \times 10^{-2} m^3$  تا  $5 \times 10^{-2} m^3$  انبساط می یابد به کار برید. این مقدار را با مقداری که با استفاده از رابطه گاز ایده آل به دست می آید مقایسه کنید.

۲۰۱۲ رابطه زیر یک معادله تجربی است که دان دروالس برای توصیف گاز حقیقی ارائه کرده است

$$\left(p + \frac{N^2 a}{V^2}\right)(V - Nb) = NRT$$

این معادله را به صورت ویریا بنویسید و آن را با معادله (۲۰.۱۲) مقایسه کنید.

۳.۱۲ دمای بویل يك گاز حقیقی دمای است که در آن دومین ضریب ویریا صفر است. نشان دهید که دمای بویل مساوی است با  $a/Rb$ . دمای بویل را برای برخی از گازهای داده شده در جدول ۱۰.۱۲ محاسبه کنید. [دانهایی: دمای بویل دمای است که در آن می توان يك گاز حقیقی را به صورت گازی در نظر گرفت که تا دومین مرتبه تقریب از معادله گاز ایده آل پیروی می کند.]

۴.۱۲ ضریب انبساط حجمی يك ماده در فشار ثابت به صورت زیر تعریف می شود

$$\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

مقدار  $\beta$  را برای دو حالت زیر به دست آورید (الف) يك گاز ایده آل و (ب) گاز حقیقی که از معادله وان دروالس که در مسئله ۲.۱۲ داده شده است، پیروی می کند.

۵.۱۲ مدول کپه ای يك ماده در دمای ثابت با رابطه زیر تعریف می شود

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

مقدار  $\kappa_T$  را برای دو حالت زیر به دست آورید (الف) يك گاز ایده آل و (ب) گاز حقیقی که از معادله وان دروالس که در مسئله ۲.۱۲ داده شده است، پیروی می کند.

۶.۱۲ يك معادله حالت تجربی برای گازهای حقیقی که دیترسی ارائه کرده است، عبارت است از:  $p(V - Nb)e^{Na/VRT} = NRT$ . این معادله را به صورت ویریا بنویسید و آن را با معادله (۲۰.۱۲) مقایسه کنید.

۷.۱۲ معادله يك فرایند تك آنتروپیک برای گاز ایده آل را بر حسب (الف) فشار و دما (ب) حجم و دما بیان کنید.

۸.۱۲ نشان دهید که کار انجام شده به وسیله يك گاز ایده آل در خلال تبدیل تك آنتروپیک (یا بی درروی برگشت پذیر) به صورت زیر است

$$\frac{NR(T_1 - T_2)}{(\gamma - 1)}$$

۹.۱۲ شیبهای تبدیل تك آنتروپیک و تبدیل تکدمای يك گاز ایده آل را در يك نقطه بر روی نمودار  $p-V$  مقایسه کنید. از این مقایسه نتیجه بگیرید که در انبساط تك آنتروپیک گاز ایده آل دما کاهش می یابد. توضیح دهید چرا چنین است؟

۱۰.۱۲ هنگامی که ماده کار در چرخه کار نو يك گاز ایده آل است، این چرخه را در نمودار

$p-V$  رسم کنید. نشان دهید اگر  $V_1, V_2, V_3, V_4$  و  $V_5$  حجمهای گاز در انتهای هر تبدیل باشند، داریم

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

۱۱۰۱۲ کار انجام شده توسط گاز را در حین هر یک از تبدیلهایی که چرخه کارنو را تشکیل می دهند محاسبه کنید و نشان دهید که کار انجام شده خالص برابر است با

$$W = NR(T_2 - T_1) \ln \frac{V_2}{V_1}$$

سپس ثابت کنید که معادله (۲۷.۱۱) برقرار می ماند. [دانهمایی: از نتیجه مسئله ۱۰.۱۲ استفاده کنید.]

۱۲۰۱۲ تراکم پذیری بی درروی یک ماده به صورت زیر تعریف می شود

$$\kappa_s = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_s$$

مقدار  $\kappa_s$  را برای گاز ایده آل به دست آورید. انتشار امواج کشسان در گاز یک فرایند بی دررو است و سرعت انتشار با رابطه  $v = \sqrt{\kappa_s / \rho}$  داده می شود که  $\rho$  چگالی است. توضیح دهید که چرا با اندازه گیری  $v$  می توان  $\gamma$  را محاسبه کرد؟ نشان دهید که  $v$  فقط به دمای مطلق بستگی دارد.

۱۳۰۱۲ در دمای  $300\text{ K}$  و فشار  $2\text{ atm}$  گاز ایده آلی حجم  $5\text{ m}^3$  را اشغال می کند. این گاز به طور تکدما منبسط می شود و حجم آن به  $12\text{ m}^3$  می رسد. سپس به طور تک فشار تا حجم اولیه متراکم می شود. بالاخره فشار به طور تک حجم افزایش می یابد تا اینکه گاز به حالت اولیه خود باز گردد. (الف) فرایند را در نمودار  $p-V$  رسم کنید. (ب) دما را در انتهای هر تبدیل تعیین کنید. (ج) کار انجام شده در خلال چرخه را به دست آورید. فرض کنید  $\gamma = 1.4$ .

۱۴۰۱۲ یک گاز ایده آل در دمای  $300\text{ K}$  و فشار  $2\text{ atm}$  حجمی برابر  $5\text{ m}^3$  را اشغال می کند. گاز به طور بی دررو منبسط می شود و حجم آن به  $12\text{ m}^3$  می رسد. سپس به طور تکدما متراکم می شود و حجم آن به همان مقدار حجم اولیه برمی گردد. سرانجام فشار به طور تک حجم افزایش می یابد تا اینکه گاز به حالت اولیه خود باز گردد. (الف) فرایند را در نمودار  $p-V$  رسم کنید. (ب) دما را در انتهای انبساط بی دررو تعیین کنید. (ج) کار انجام شده در خلال چرخه را به دست آورید. فرض کنید  $\gamma = 1.4$ .

۱۵۰۱۲ یک گاز ایده آل در آغاز در دمای  $300\text{ K}$ ، فشار  $p_1 = 3\text{ atm}$ ، و حجم  $V_1 = 4\text{ m}^3$

قرار دارد. سپس به طور تکدما منبسط می شود و حجم آن به  $۱۶ \text{ m}^3$  می رسد. به دنبال آن یک فرایند تک حجم تا فشاری که تراکم بی دررویی گاز را به حالت اولیه بازگرداند به وقوع می پیوندد. با فرض اینکه تمام فرایندها برگشت پذیرند، محاسبات زیر را انجام دهید (الف) در نمودار  $p-V$  و نمودار  $T-S$  چرخه را رسم کنید و تمام نقاط انتهایی را به دقت با عدد مشخص سازید. (ب) کار انجام شده و تغییر آنتروپی را در خلال هر فرایند و در حین چرخه محاسبه کنید. فرض کنید  $\gamma = ۱.۴$ .

۱۶۰۱۲ هنگامی که در معادله  $(۳۲.۱۲)$ ، به جای  $۲l+۱$  و  $l(l+۱)$  به ترتیب  $۲l$  و  $l^2$  قرار دهیم، خطای حاصل در محاسبه  $Z_{\text{rot}}$  را برآورد کنید.

۱۷۰۱۲ درصد مولکولهای یک گاز دو اتمی در حالت پایه ( $l=0$ ) و اولین حالت چرخشی برانگیخته ( $l=1$ ) را در دماهای  $T = ۲\Theta_r$  و  $T = \Theta_r$  محاسبه کنید.

۱۸۰۱۲ تعداد مولکولهای هیدروژن در یک مول در دومین حالت چرخشی برانگیخته ( $l=2$ ) را با تعداد مولکولهای کلر در یک مول در همان حالت برانگیخته در دمای  $300 \text{ K}$  مقایسه کنید.

۱۹۰۱۲ تعداد مولکولهای هیدروژن در یک مول در دومین حالت ارتعاشی برانگیخته ( $v=2$ ) را با تعداد مولکولهای کلر در یک مول در همان حالت برانگیخته در دمای  $300 \text{ K}$  مقایسه کنید.

۲۰۰۱۲ یک مول از گاز  $\text{CO}$  را در نظر می گیریم. تعداد مولکولها در سه حالت اول انرژی ارتعاشی را در دمای معمولی ( $300 \text{ K}$ ) و  $1000 \text{ K}$  محاسبه کنید.

۲۱۰۱۲ نشان دهید که ظرفیت گرمایی ارتعاشی یک گاز در حجم ثابت با رابطه زیر داده می شود

$$C_{V, \text{vib}} = R \left( \frac{\hbar\omega}{kT} \right)^2 \frac{e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2}$$

مقادیر حدی را برای  $T \gg \Theta_v$  و  $T \ll \Theta_v$  به دست آورید.

۲۲۰۱۲ با استفاده از نتیجه مسئله ۱۳.۱۱ نشان دهید که آنتروپی یک گاز دو اتمی ناشی از چرخشهای مولکولی برابر است با

$$S_{\text{rot}} = kN \left[ 1 + \ln \left( \frac{T}{\Theta_r} \right) \right]$$

[دانهمایی: وقتی مولکول هم هسته است، می توان نشان داد که باید از  $T/2\Theta_r$  استفاده کنیم. این موضوع به خاطر نصف شدن حالت های تمیز پذیر در اثر تقارن مولکول است.]

۲۳۰۱۲ با استفاده از نتیجه مسئله ۱۳.۱۱ نشان دهید که آنتروپی یک گاز دو اتمی ناشی از

ارتعاشات مولکولی برابر است با

$$S_{\text{vib}} = kN \left[ \left( \frac{\Theta_v}{T} \right) (e^{\Theta_v/T} - 1) - \ln(1 - e^{-\Theta_v/T}) \right]$$

ثابت کنید که برای دماهای کوچک،  $S_{\text{vib}}$  به صفر میل می‌کند در حالی که برای دماهای بالا  $S_{\text{vib}}$  به مقدار زیر نزدیک می‌شود

$$kN \left[ 1 + \ln \left( \frac{T}{\Theta_v} \right) \right]$$

### مراجع

1. "The Definition of the Perfect Gas," P. Landsberg, *Am. J. Phys.*, 29, 695 (1961).
2. "Energy Equipartition: A Restatement," W. Lawless, *Am. J. Phys.*, 32, 686 (1964).
3. *Introduction to Chemical Physics*, J. Slater, New York: McGraw-Hill, 1964, Chapters 9 and 12.
4. *Statistical Physics*, G. Wannier. New York: John Wiley, 1966, Part I.
5. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands, Reading, Mass: Addison-Wesley, 1963, Chapter 41.
6. *Molecular Thermodynamics*, J. Fay, Reading Mass.: Addison-Wesley, 1965.
7. *A Source Book in Physics*, W. Magie, Cambridge, Mass: Harvard University Press, 1963, page 247 (Bernoulli).

## آمار کوانتومی

مقدمه	۱۰۱۳
قانون توزیع فرمی-دیراک	۲۰۱۳
ساز الکترونی	۳۰۱۳
کاربرد آمار فرمی-دیراک در الکترونهای فلزات	۴۰۱۳
قانون توزیع بوز-اینشتین	۵۰۱۳
ساز فوتونی	۶۰۱۳
ظرفیت گرمایی جامدات	۷۰۱۳
ساز ایده آل در آمار کوانتومی	۸۰۱۳
مقایسه سه آمار	۹۰۱۳

## ۱۰۱۳ مقدمه

در فصل ۱۰ آمار کلاسیک را که با روش محاسبه احتمال یک پارش مشخص [معادله (۸۰۱۰)] و نیز با قانون توزیع ماکسول-بولتزمن [معادله (۹۰۱۰)] مشخص می‌شود، بررسی کردیم، معادله اخیر برای محتملترین پارش یا پارش تعادل به کار می‌رود. در آن فصل، از هر گونه ملاحظات مبتنی بر تقارن که به توزیع ذرات میان حالت‌های مختلف وابسته به هر تراز انرژی دسترس پذیر مربوط می‌شود صرف نظر کردیم. اما، همان طور که در فصل ۴ گفته شد، ممکن است بر تعداد راه‌های مختلفی که در آنها یک گروه از ذرات می‌توانند میان تابع موجهای وابسته به هر حالت انرژی توزیع شوند، محدودیت‌های مشخصی وجود داشته باشد. واضح است که این محدودیت‌ها که منشأ کوانتومی دارند، بر احتمال هر پارش مشخص تأثیر می‌گذارند. نظریه‌ای که در آن این ملاحظات تقارن به حساب می‌آیند را آمار کوانتومی می‌گویند. دو نوع آمار کوانتومی وجود دارد: اولین آمار به ذراتی مربوط می‌شود که از اصل طرد پیروی می‌کنند و از این رو با تابع موجهای پادمتقارن توصیف می‌شوند. این نوع آمار را آمار فرمی-دیراک و این گونه ذرات را فرمیون می‌نامند. دومین آمار به ذراتی مربوط می‌شود که توسط اصل طرد مقید نمی‌شوند و با تابع موجهای متقارن توصیف می‌شوند. این نوع آمار را آمار بوز-اینشتین و این گونه ذرات را بوزون می‌نامند. در هر دو آمار کوانتومی فرض بر این است که ذرات یکسان و از هم تمیزناپذیرند. در دماهای بالا و چگالیهای پایین، آمار کلاسیک و دونوع آمار کوانتومی عملاً نتیجه یکسانی را به دست می‌دهند.

در این فصل به اختصار هر دو نوع آمار کوانتومی را بررسی می‌کنیم و آنها را در چند مسئله فیزیکی مهم به کار می‌بریم.

## ۲۰۱۳ قانون توزیع فرمی-دیراک

در اینجا می‌خواهیم احتمال یک پارش سیستمی از ذرات را با این فرض که ذرات یکسان و تمیزناپذیرند مجدداً محاسبه کنیم. علاوه بر این، فرض می‌کنیم که ذرات از اصل طرد پیروی می‌کنند و بنا بر این هر دو ذره نمی‌توانند در یک حالت دینامیکی یکسان قرار بگیرند و تابع موج تمام سیستم باید پادمتقارن باشد. انریکو فرمی (۱۹۵۴-۱۹۰۱) فیزیکدان امریکایی متولد ایتالیا، اولین کسی بود که این سیستمها را مورد بحث قرار داد و بنا بر این ذراتی که کلیه شرایط بالا را داشته باشند فرمیون نامیده می‌شوند. به تجربه معلوم شده است که تمام ذرات بنیادی با اسپین  $1/2$  فرمیونها هستند.

برای محاسبه راه‌های مختلف و تمیز پذیری که در آنها یک سیستم از فرمیونها می‌توانند در یک پارش مشخص آرایش بگیرند، لازم است که در تعریف احتمال ذاتی یا احتمال حالت  $\epsilon$  تجدید نظر کنیم. در آمار کوانتومی،  $\epsilon$  با حالت‌های کوانتومی مختلف مربوط به یک انرژی مشخص (یا تبهگنی حالت انرژی) داده می‌شود. به هر حالت کوانتومی یک تابع موج ذره وابسته است. این تابع موجها نیز به نوبه خود با هر یک از آرایشهای ممکن اعداد کوانتومی



متناظر با يك تراز انرژی مشخص تعیین می‌شوند. مثلا، برای ذرات با اسپین  $1/2$  که تحت تأثیر نیروهای مغناطیسی قرار ندارند، هر ذره می‌تواند در هر يك از حالت‌های انرژی با اسپین بالا یا اسپین پایین ( $m_s = \pm 1/2$ ) قرار گیرد، و لذا  $g_i = 2$  است. برای حرکت در يك میدان مرکزی، انرژی از سمگتگیری تکانه زاویه‌ای مدار مستقل است. کمیت اخیر يك تبهگنی مساوی با  $2l + 1$  تولید می‌کند که برابر مقدار  $g$  برای آن حالت انرژی است. در بخش ۵.۱۲ هنگامی که تابع پارش چرخشی مولکولها را بررسی می‌کردیم، از این نتیجه استفاده کردیم. هر گاه ذرات اسپین داشته باشند، تبهگنی کل مساوی با  $2(2l + 1)$  خواهد بود. به علاوه، اگر چندین حالت تکانه زاویه‌ای با انرژی یکسانی سازگار باشند (مثلا در میدان کولنی)، مقادیر بزرگتری برای  $g_i$  به دست می‌آید. چون اصل طرد مانع از آن می‌شود که دو ذره با اعداد کوانتومی مساوی در حالت انرژی یکسانی وجود داشته باشند؛  $g_i$ ها بیشینه تعداد ذراتی را که به دست می‌دهند (فرمیونها) که بدون نقض اصل طرد می‌توانند در يك تراز انرژی قرار بگیرند. بنابراین مقادیر  $n_i$  مربوط به هر پارش مشخص نمی‌توانند از  $g_i$  مربوط به هر تراز انرژی تجاوز کنند. یعنی  $n_i \leq g_i$ .

برای پر کردن تراز انرژی  $E_i$  با  $n_i$  ذره توجه داشته باشید که اولین ذره را می‌توان در هر کدام از حالت‌های موجود  $g_i$  قرار داد. یعنی به این ذره می‌توانیم هر مجموعه‌ای از اعداد کوانتومی موجود  $g_i$  را نسبت دهیم. بنابراین می‌توان ذره را در یکی از حالت‌های متفاوت  $g_i$  جای داد. دومین ذره می‌تواند در یکی از  $g_i - 1$  حالت‌های باقیمانده قرار گیرد. سومین ذره می‌تواند یکی از  $g_i - 2$  حالت‌های باقیمانده را پر کند و به همین ترتیب، تا اینکه تمام  $n_i$  ذره در تراز انرژی قرار گیرند. بنابراین، تعداد کل راه‌های مختلف آرایش  $n_i$  ذره درین  $g_i$  حالت با انرژی  $E_i$  برابر است با

$$g_i(g_i - 1)(g_i - 2) \dots (g_i - n_i + 1)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\frac{g_i!}{(g_i - n_i)!} \quad (1.13)$$

تا اینجا اصل طرد را در نظر گرفتیم. هر گاه علاوه بر این، ذرات تمیز ناپذیر باشند، هنگامی که  $n_i$  ذره در میان حالت‌هایی که در تراز انرژی  $E_i$  اشغال می‌کنند تغییر آرایش یابند، این امکان وجود نخواهد داشت که هیچگونه اختلافی را تشخیص دهیم. (همان طور که هنگام بحث قانون توزیع ماکسول-بولتزمن دیدیم این تعداد مساوی با  $n_i!$  است.) بنابراین از تقسیم رابطه (۱.۱۳) بر  $n_i!$  می‌توانیم تعداد کسل آرایشهای مختلف و تمیز پذیر  $n_i$  ذره یکسان در میان  $g_i$  حالت انرژی  $E_i$  را به دست آوریم، یعنی

$$\frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!} \quad (2.13)$$

از ضرب تمام عبارات نظیر رابطه (۲.۱۳) برای هر یک از ترازهای انرژی موجود می توان تعداد کل راههای مختلف تمیز پذیر را برای به دست آوردن پارش  $n_1, n_2, n_3, \dots$  در میان ترازهای انرژی  $E_1, E_2, E_3, \dots$  به دست آورد. لذا، احتمال پارش به صورت زیر درمی آید

$$P = \frac{g_1!}{n_1!(g_1 - n_1)!} \cdot \frac{g_2!}{n_2!(g_2 - n_2)!} \cdot \frac{g_3!}{n_3!(g_3 - n_3)!} \dots$$

$$= \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!} \quad (3.13)$$

در این صورت، همان طور که در فصل ۱۰ برای قانون توزیع ماکسول-بولتزمن انجام دادیم، با محاسبه بیشینه  $\ln P$  باید محتملترین پارش را به دست آوریم. (این کار را در مثال ۱۰.۱۳ انجام خواهیم داد.) در نتیجه محتملترین پارش با تعداد زیر متناظر است

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta E_i} + 1} \quad (4.13)$$

که قانون توزیع فرمی-دیراک است. در اینجا پارامتر  $\beta$  همان نقشی را ایفا می کند که در قانون توزیع ماکسول-بولتزمن، معادله (۹.۱۰)، دارا بود. بنا بر این مجدداً دمای سیستم فرمیونها در تعادل آماری را با معادله (۲۳.۱۰) تعریف می کنیم، یعنی

$$kT = \frac{1}{\beta}$$

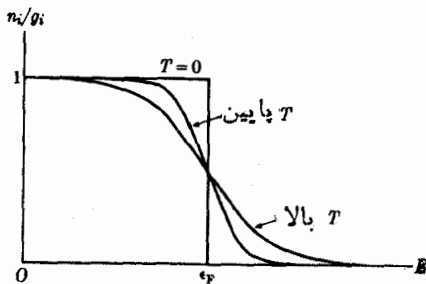
کمیت  $\alpha$  هنوز هم با شرط  $\sum n_i = N$  تعیین می شود. در اکثر موارد  $\alpha$  کمیتی منفی است. با این حال، معمولاً کمیت  $\epsilon_F$  که بعد انرژی دارد را تعریف می کنیم که با معادله زیر به  $\alpha$  مربوط می شود

$$\epsilon_F = -\alpha kT$$

در این صورت، معادله (۴.۱۳) به صورت زیر درمی آید

$$n_i = \frac{g_i}{e^{(E_i - \epsilon_F)/kT} + 1} \quad (5.13)$$

در اکثر موارد، انرژی  $\epsilon_F$  مقدار مثبتی است و نقش بسیار مهمی در کاربردهای فیزیکی ایفا می کند، و در عمل می توان آن را مستقل از دما در نظر گرفت. از معادله (۵.۱۳) ملاحظه می کنیم که به ازای  $T = 0$  تمام حالت های انرژی تا  $E = \epsilon_F$  کاملاً اشغال شده اند ( $n_i = g_i$ ).



شکل ۱۰۱۳ تابع توزیع  $n_i/g_i$  در آمار فرمی-دیراک در سه دما.

درحالی که تمام حالت‌های با  $E > \epsilon_F$  خالی هستند ( $n_i = 0$ ). دلیل این امر این است که

$$\lim_{T \rightarrow 0} e^{(E_i - \epsilon_F)/kT} = \begin{cases} 0 & \text{برای } E_i - \epsilon_F < 0 \\ \infty & \text{برای } E_i - \epsilon_F > 0 \end{cases}$$

این وضع در شکل ۱۰۱۳ که در آن، تابع توزیع  $n_i/g_i$  برای دماهای مختلف رسم شده نشان داده شده است. به عنوان مقایسه، آمار ماکسول-بولتزمن را به خاطر آورید که در آن در  $T = 0$  تمام ذرات باید در تراز انرژی پایه باشند. در آمار فرمی-دیراک، اصل طرد از این تجمع در تراز پایه جلوگیری می‌کند و در  $T = 0$  ذرات پایتترین ترازهای انرژی موجود تا انرژی  $\epsilon_F$  را اشغال می‌کنند. بنابراین، انرژی  $\epsilon_F$  نشانی از بیشینه انرژی فرمیون‌ها در سیستم را به دست می‌دهد. لذا  $\epsilon_F$  معادل با انرژی فرمی است، که در بخش ۴.۶ به هنگام بحث درباره الکترون‌های آزاد در فلزات آن را معرفی کردیم و از این رو، در اینجا نیز همان نام را برایش در نظر می‌گیریم. در دماهای بالاتر، با انتقال ذرات از حالت‌های با انرژی پایتتر، اشغال حالت‌های با انرژی‌های بزرگتر از  $\epsilon_F$  آغاز می‌شود. اما، برای دماهایی که در رابطه  $kT \ll \epsilon_F$  صدق می‌کنند، اساساً فقط حالت‌های با انرژی نزدیک به  $\epsilon_F$  اشغال می‌شوند. دلیل این امر این است که تمام حالت‌های انرژی پایین کاملاً پر شده‌اند و اصل طرد از ورود فرمیون اضافی به این حالت‌ها جلوگیری می‌کند. از این رو، همان‌طور که در منحنی‌های شکل ۱۰۱۳ نشان داده شده است، فقط فرمیون‌هایی که انرژی آنها نزدیک به  $\epsilon_F$  است می‌توانند با جذب انرژی نسبتاً کوچک  $kT$  به حالت‌های اشغال نشده بالاتر انتقال یابند. دمای  $\Theta_F$  که در رابطه  $k\Theta_F = \epsilon_F$  صدق می‌کند را، دمای فرمی می‌گویند.

مثال ۱۰۱۳ قانون توزیع فرمی-دیراک را به دست آورید.

حل: این مسئله نیز، همانند حالت مربوط به آمار ماکسول-بولتزمن (مثال ۱۰۱۰)، شامل یافتن بیشینه  $\ln P$  تحت شرایط  $\sum_i n_i = N$  و  $\sum_i n_i E_i = U$  است. ابتدا با استفاده از تقریب

استرلینگ  $\ln P, \ln x! = x \ln x - x$  را به دست می آوریم. در این صورت داریم

$$\ln P = \sum_i [g_i \ln g_i - n_i \ln n_i - (g_i - n_i) \ln (g_i - n_i)]$$

سپس  $-d(\ln P)$  را محاسبه می کنیم و مساوی با صفر قرار می دهیم تا بیشینه  $P$  به دست آید

$$-d(\ln P) = \sum_i [\ln n_i - \ln (g_i - n_i)] dn_i = 0 \quad (۶.۱۳)$$

از ترکیب معادله (۶.۱۳) با معادلات (۱۵.۱۰) و (۱۷.۱۰)، (یعنی روابط  $\sum_i dn_i = 0$  و  $\sum_i E_i dn_i = 0$ )، که در این حالت نیز صدق می کنند، و به ترتیب در ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  ضرب شده اند (مثال ۱۰.۱۰) به رابطه زیر خواهیم رسید

$$\ln n_i - \ln (g_i - n_i) + \alpha + \beta E_i = 0$$

یا

$$\frac{n_i}{g_i - n_i} = e^{-\alpha - \beta E_i}$$

از حل این رابطه برای  $n_i$  سرانجام معادله (۴.۱۳) را به دست خواهیم آورد.

### ۳.۱۳ گاز الکترونی

شاخصترین سیستم فرمیونها را الکترونهای يك فلز تشکیل می دهند زیرا، همان طور که در فصل ۴ دیدیم، الکترونها از اصل طرد پیروی می کنند. در فصل ۶ ترازهای انرژی الکترونها در يك فلز را بررسی کردیم و نشان دادیم که در نوارهایی گروه بندی شده اند. نوارهای پایینتر عملاً در تمام دماها از الکترون پر شده اند و لزومی ندارد که در اینجا آنها را بررسی کنیم. اما نوار بالاتر فقط تا تراز انرژی معینی به طور جزئی از الکترون پر شده است. بر این اساس در بخش ۴.۶ مفهوم انرژی فرمی را معرفی کردیم.

ما باید فقط توزیع الکترونها را در گستره پیوسته ترازهای انرژی در نوار بالاتر (یا نوار پر نشده)، که نوار رسانش نیز نام دارد، بررسی کنیم. بنا بر این، نقطه صفر انرژی را در پایین نوار رسانش قرار می دهیم. ضمناً فرض می کنیم مادام که انرژی الکترونها در این نوار قرار دارد، الکترونها آزادانه در داخل رسانا حرکت می کنند. این يك فرض منطقی است و صحت آن در فصل ۶ اثبات شده است. ضمناً چون طیف انرژی الکترونها در این نوار عملاً يك طیف پیوسته است، باید در معادله (۵.۱۳)، همان طور که قبلاً برای گاز ایده آل انجام دادیم، به جای  $g_i$ ،  $g(E)dE$  را قرار بدهیم. از این رو،  $dn$  یعنی تعداد الکترونهای با انرژی بین  $E$  و  $E+dE$  برابر است با

$$dn = \frac{g(E) dE}{e^{(E - \epsilon_F)/kT} + 1} \quad (۷.۱۳)$$

که در آن  $E$  از پایین نوار رسانش اندازه گیری می شود و  $g(E)dE$  تعداد حالت‌هایی را به دست می دهد که در گستره انرژی بین  $E$  و  $E+dE$  قرار دارند. برای  $g(E)dE$  می توان مجدداً رابطه (۳۹.۱۰) را به کار برد، اما لازم است آن را در ۲ ضرب کنیم تا دو سهمگیری ممکن اسپین الکترونها را نیز، که هر کدام به حالت متفاوتی از یک انرژی منجر می شوند، به حساب آوریم، یعنی

$$g(E)dE = \frac{\lambda \pi V (\gamma m^3)^{1/2}}{h^3} E^{1/2} dE \quad (۸.۱۳)$$

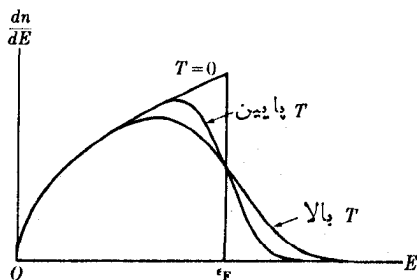
هرگاه معادله (۸.۱۳) را در معادله (۷.۱۳) قرار دهیم، یعنی  $dn/dE$  تعداد الکترونها را آزاد در گستره انرژی واحد را به صورت زیر به دست خواهیم آورد

$$\frac{dn}{dE} = \frac{\lambda \pi V (\gamma m^3)^{1/2}}{h^3} \frac{E^{1/2}}{e^{(E-\epsilon_F)/kT} + 1} \quad (۹.۱۳)$$

که فرمول فرمی-دیراک برای توزیع انرژی الکترونها را آزاد، یا به طور کلی فرمیونهای آزاد است. در شکل ۲.۱۳ این فرمول به ازای  $T=0$ ، برای دمای پایین، و برای دمای بالا در مقایسه با  $\epsilon_F = \epsilon_F/k$  رسم شده است. قبلاً در بخش ۷.۶، هنگام بحث درباره رسانندگی الکتریکی، این توزیع را به صورت کیفی بررسی کردیم.

انرژی فرمی بر حسب تسابعی از دما را می توان با این شرط به دست آورد که انتگرالگیری معادله (۹.۱۳) روی تمام انرژیها، تعداد کل الکترونها در نوار رسانش، یعنی  $N$  را نتیجه می دهد. با فرض اینکه  $\epsilon_F$  عملاً مستقل از  $T$  است، می توان  $N$  را در  $T=0$  محاسبه کرد (بخش ۴.۶) و نتیجه زیر را به دست آورد

$$\epsilon_F = \frac{h^2}{\lambda m} \left( \frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3} \quad (۱۰.۱۳)$$



شکل ۲.۱۳ توزیع انرژی یک سیستم از فرمیونها در سه دما.

جدول ۱۰۱۳ انرژی فرمی و دمای فرمی برای چند فلز.

فلز	$\epsilon_F$ , eV	$K$ , $\Theta_F$
Li	۲۷۷۲	$۵۰۵ \times ۱۰^۴$
Na	۳۱۱۲	۳۷۷
K	۲۱۱۴	۲۲۴
Cu	۷۰۵۴	۸۰۲
Ag	۵۵۵۱	۶۰۴
Au	۵۵۵۴	۶۰۴

بنابراین اگر  $N/V$  یعنی تعداد الکترونها در سانس در یکای حجم را بدانیم، می‌توانیم انرژی فرمی الکترونها در فلز را به دست آوریم. جدول ۱۰۱۳ مقادیر  $\epsilon_F$ ، و نیز دمای فرمی  $\Theta_F$  را برای چند فلز نشان می‌دهد.

مثال ۲۰۱۳ انرژی کل یک گروه از  $N$  فرمیون را در دمای خیلی پایین تعیین کنید.

حل: انرژی کل  $U$  با رابطه زیر داده می‌شود

$$U = \int E dn = \int E \frac{dn}{dE} dE$$

چون دما خیلی پایین است، می‌توان (بسیار تقریب خوبی) از مقدار  $dn/dE$  به ازای  $T = 0$  استفاده کرد که همان  $g(E)$  است. از این رو

$$\frac{dn}{dE} = \frac{\lambda \pi V (\gamma m^3)^{1/2}}{h^3} E^{1/2}$$

ضمناً فقط از صفر تا  $\epsilon_F$  انتگرال می‌گیریم. بنابراین

$$U = \frac{\lambda \pi V (\gamma m^3)^{1/2}}{h^3} \int_0^{\epsilon_F} E^{3/2} dE = \frac{16 \pi V (\gamma m^3)^{1/2}}{5 h^3} \epsilon_F^{5/2}$$

با استفاده از معادله (۱۰.۱۳) می‌توان این رابطه را به صورت زیر نوشت

$$U = \frac{3}{5} N \epsilon_F$$

که کمینه انرژی یک سیستم از  $N$  فرمیون است. انرژی متوسط به ازای ذره عبارت است از

$$E_{ave} = \frac{U}{N} = \frac{3}{5} \epsilon_F$$

مثال ۳۰.۱۳ انرژی جنبشی نوکلئونها در هسته را بسا این فرض که دو سیستم فرمیون (نوترونها و پروتونها) وجود دارند، در دمای خیلی پایین تعیین کنید.

حل: با استفاده از معادله (۱۰.۱۳) می توان  $\epsilon_F$  را در رابطه  $U$  که در مثال قبل به دست آوردیم حذف کنیم

$$U = \frac{3}{40} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m} \frac{N^{5/3}}{V^{2/3}}$$

در حالت هسته ای دو نوع ذره، نوترونها و پروتونها، وجود دارند که تعداد آنها  $N$  و  $Z$  و حجم  $V$  برای هر دو مشترک است. بنابراین، اگر از اختلاف جرم مختصر دو ذره صرف نظر کنیم، انرژی جنبشی کل برابر است با

$$U_t = \frac{3}{40} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{V^{2/3}}$$

اما با توجه به معادله (۲.۷) حجم هسته ای مساوی است با  $V = (4/3)\pi R^3 = (4/3)\pi r_0^3 A$  و بنابراین

$$U_t = \frac{3}{40} \left( \frac{9}{4\pi^2} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m r_0^3} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}} = c \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}}$$

که در آن

$$c = \frac{3}{40} \left( \frac{9}{4\pi^2} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m r_0^3} \sim 372 \times 10^{-12} \text{ J} = 2324 \text{ MeV}$$

می دانیم که  $A = N + Z$ . از طرف دیگر، بنا به تعریف  $D = N - Z$  از این رو

$$N = \frac{1}{2}(A + D) \quad \text{و} \quad Z = \frac{1}{2}(A - D)$$

بنابراین

$$N = \frac{1}{2}A \left( 1 + \frac{D}{A} \right) \quad \text{و} \quad Z = \frac{1}{2}A \left( 1 - \frac{D}{A} \right)$$

با قراردادن این مقادیر در رابطه  $U$  خواهیم داشت

$$U_i = 2^{-5/3} cA \left\{ \left(1 + \frac{D}{A}\right)^{5/3} + \left(1 - \frac{D}{A}\right)^{5/3} \right\}$$

هرگاه از بسط دو جمله‌ای استفاده کنیم:  $(1+x)^n = 1 + nx + (1/2)n(n-1)x^2 + \dots$  و به خاطر داشته باشیم که به طور کلی  $D/A$  در مقایسه با یک کوچک است، خواهیم داشت

$$\left(1 + \frac{D}{A}\right)^{5/3} = 1 + \frac{5}{3} \frac{D}{A} + \frac{5}{9} \frac{D^2}{A^2} + \dots$$

$$\left(1 - \frac{D}{A}\right)^{5/3} = 1 - \frac{5}{3} \frac{D}{A} + \frac{5}{9} \frac{D^2}{A^2} - \dots$$

بنابراین، با مرتبه تقریبی که اختیار کرده‌ایم

$$U_i = 2^{-2/3} cA \left\{ 1 + \frac{5}{9} \frac{D^2}{A^2} + \dots \right\} = 2^{-2/3} cA + (2^{-2/3} c) \frac{5}{9} \frac{(N-Z)^2}{A} + \dots$$

جمله اول انرژی را به دست می‌دهد که با تعداد کل ذرات متناسب است در حالی که جمله دوم توزیعی است که با اختلاف  $N - Z$  متناسب است. با توجه به آنچه در بخش ۵.۷ آمد، مشخص است که جمله اول در جمله‌ای از فرمول انرژی کل، معادله (۱۱.۷)، که با  $A$  متناسب است، مستتر است، در حالی که جمله دوم با  $a_4(N-Z)^2/A$  متناسب است، بنابراین

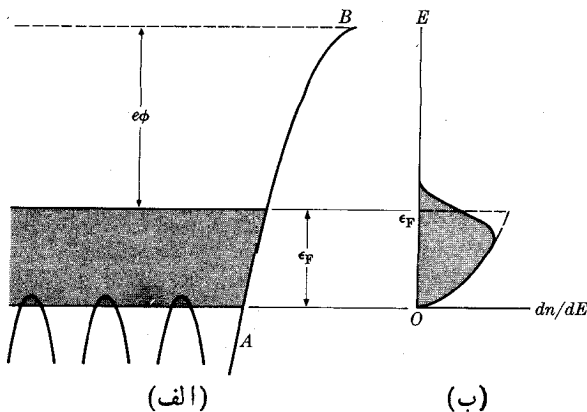
$$a_4 = \frac{5}{9} (2^{-2/3} c) = 8.33 \text{ MeV}$$

این مقدار تقریباً یک سوم نتیجه تجربی حاصل برای  $a_4$  است. هرگاه تقریب موجود در مدل به کار رفته را در نظر بگیریم این ناسازگاری تعجب آور نخواهد بود.

### ۴.۱۳ کاربرد آمار فرمی-دیراک در الکترونهاي فلزات

اکنون برخی اثرهای فیزیکی فلزات را که بر حسب آمار فرمی-دیراک به کار رفته در الکترونهاي آزاد فلزات قابل توضیح هستند در نظر می‌گیریم. شکل ۳.۱۳ منحنی انرژی پتانسیل یک الکترون در داخل و در سطح فلز را نشان می‌دهد. انرژی پتانسیل در نزدیکی سطح با منحنی  $AB$  داده می‌شود. همان‌طور که در منحنی توزیع در شکل (ب) دیده می‌شود، در دماهای معمولی نوار رسانش عمدتاً فقط تا انرژی فرمی  $\epsilon_F$  از الکترونها پر شده است. بنابراین، برای کندن یک الکترون از فلز حداقل باید انرژی مساوی آنچه که در شکل ۳.۱۳ با  $e\phi$  نشان داده شده است به الکترون داده شود. مثلاً این همان چیزی است که در





شکل ۳.۱۳ نوار رسانش در فلز در دمای معمولی.

اثر فوتوالکتریک (بخش ۴.۱) روی می‌دهد که در آن فوتوالکترونها فقط هنگامی گسیل می‌شوند که  $h\nu > e\phi$  باشد. کمیت  $\phi$  تابع کار فلز نام دارد. اما، در دماهای بالاتر، اشغال حالت‌های الکترونی تا انرژیهای کاملاً بالاتر از  $\epsilon_F$  نیز گسترش می‌یابد. اگر دما به اندازه کافی بالا باشد، برخی الکترونهای بزرگتر از  $\epsilon_F + e\phi$  می‌گیرند و از فلز خارج می‌شوند. این فرایند گسیل گرما یونی نام دارد و اساس کار لامپهای الکترونی را تشکیل می‌دهد.

هرگاه با استفاده از قانون توزیع فرمی-دیراک تعداد الکترونها را محاسبه کنیم که با انرژی کافی به سطح فلز می‌رسند و در راستای حرکت از آن می‌گریزند، می‌توانیم چگالی جریان گرما الکتریکی  $j$  را که از سطح فلز خارج می‌شود بر حسب دمای فلز به دست آوریم. نتیجه به صورت زیر است

$$j = \frac{4\pi m_e}{h^3} (kT)^2 e^{-e\phi/kT} = AT^2 e^{-e\phi/kT} \quad (11.13)$$

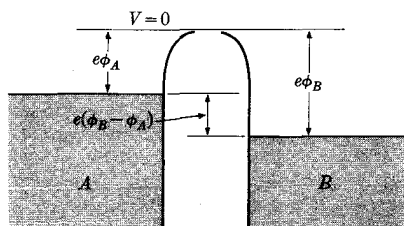
که معادله ریچاردسون-داشمن نام دارد. این معادله به چندین دلیل دقیقاً همواره برقرار نمی‌ماند. اول اینکه، گسیل الکترونی به شرایط سطح و همین‌طور به سمتگیری سطح نسبت به شبکه بلوری فلز خیلی حساس است. ضمناً با افزایش دما، به دلیل افزایش تعداد الکترونها که انرژی بیشتر از تراز فرمی دارند، تابع کار تغییر می‌کند. جدول ۲.۱۳ برخی از مقادیر تجربی  $\phi$  و  $A$  را برای چند فلز نشان می‌دهد. استفاده از آمار ماکسول-بولتزمن، بستگی دمایی متفاوتی را به دست می‌دهد و از این رو گسیل گرما یونی یک دلیل غیرمستقیم از این واقعیت است که الکترونها از آمار فرمی-دیراک پیروی می‌کنند.

مثال دیگر در مورد وجود انرژی فرمی در فلزات اختلاف پتانسیل تماسی میان دو فلز

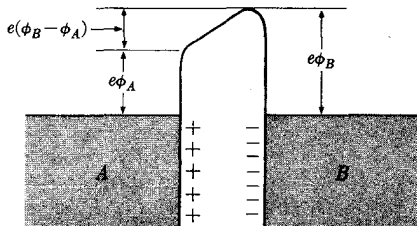
جدول ۲۰۱۳ مقادیر تابع کار  $\phi$  و ثابت گرمایونی  $A$  که به طور تجربی از معادله (۱۱.۱۳) به دست آمده اند.

فلز	$\phi, eV$	$A, eV \cdot K^{-1}$
Cs	۱.۷۸	۱۲۰
Gr	۴.۲۴	۲۸
W	۴.۲۵	۷۵
Pt	۶.۲۲	۳۲
Ta	۴.۲۱	۵۵
Ni	۴.۲۶	۳۰
Ca	۳.۲۲	۶۰
Th	۳.۲۴	۶۰
Mo	۴.۲۳	۶۰

است. فرض کنید که دو فلز  $A$  و  $B$  را در اختیار داریم که اتصال الکتریکی باهم ندارند [شکل ۲۰۱۳ (الف)]. در غیاب هر میدان الکتریکی خارجی، انرژی پتانسیل الکترون خارج از فلز، مساوی صفر است و ترازهای فرمی مربوط فلزات در انرژیهای  $e\phi_B$  و  $e\phi_A$  زیر انرژی پتانسیل خارج فلزات قرار دارند. فرض کنید که  $\phi_A$  بزرگتر از  $\phi_B$  است. در این صورت وقتی فلزات به یکدیگر متصل نیستند تراز فرمی  $A$  بالاتر از تراز فرمی  $B$  قرار می گیرد. هنگامی که دو فلز اتصال الکتریکی دارند [شکل ۲۰۱۳ (ب)] الکترونها پراورزیده از  $A$  به طرف  $B$  جریان می یابند (یا در آن پخش می شوند) و ترازهای بالاتر از تراز اولیه فرمی  $B$  را پر و ترازهای بالاتر در نوار رسانش  $A$  را خالی می کنند. تعادل هنگامی برقرار می شود که ترازهای بالاتر اشغال شده نوارهای رسانش در  $A$  و  $B$  مساوی باشند. به این ترتیب فلز  $A$  که تابع کار کوچکتری دارد بار مثبت و فلز  $B$  که دارای تابع کار بزرگتری است بار منفی می گیرد. این عمل به اختلاف پتانسیلی میان دو فلز منجر می شود که اساساً مساوی با  $\phi_B - \phi_A$  است و با مقدار تجربی سازگاری دارد. در شکل ۲۰۱۳ (ب)، انرژی پتانسیل الکترون در انتقال از یک فلز به طرف فلز دیگر در حین عبور از فضای میان آن دو و پس از برقراری تعادل باخط پر نشان داده شده است.



(الف)



(ب)

شکل ۴.۱۳ اساس اختلاف پتانسیل تماسی.

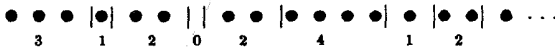
### ۵.۱۳ قانون توزیع بوز-اینشتین

تجربه نشان می‌دهد که سیستم‌های متشکل از ذرات یکسان و تمیزناپذیری وجود دارند که مقید به اصل طرد نیستند. در این سیستمها هیچ‌حدی برای تعدادی از این ذرات که می‌توانند در حالت کوانتومی یکسان قرار بگیرند وجود ندارد. تابع موجی که این سیستم ذرات را توصیف می‌کند باید متقارن باشد. ذراتی که این شرایط را برآورده می‌کنند بوزون نام دارند که به افتخار بوز، فیزیکدان هندی که اولین بار آمار این نوع ذرات را تحقیق کرد، نامگذاری شده‌اند. به‌طور تجربی معلوم شده است که تمام ذرات با اسپین درست (صفر یا یک) بوزون هستند. از این رو، هسته‌های هلیوم و مزونها مثالهایی از بوزونها هستند. گازهای  ${}^4\text{He}$  و  $\text{H}_2$  نیز از آمار بوز-اینشتین پیروی می‌کنند.

در آمار بوز-اینشتین، مانند آمار فرمی-دیراک،  $\epsilon$ ها تبهگنی هر تراز انرژی را به دست می‌دهند. برای محاسبه راههای مختلف و تمیز پذیری که در آنها یک سیستم بوزون می‌تواند آرایش بگیرد و یک پارش ایجاد کند، ابتدا باید تعداد آرایشهای تمیز پذیر  $n_i$  ذره ما بین  $\epsilon_i$  حالت مربوط به تراز انرژی  $E_i$  را که منجر به تابع موجهای متقارن می‌شوند محاسبه کنیم. این تعداد آرایش مساوی با تعداد راههایی است که در آن  $n_i$  شیء مشابه می‌توانند ما بین  $\epsilon_i$  جعبه توزیع یابند، بی آنکه حدی برای تعداد اشیای موجود در یک جعبه بخصوص وجود داشته باشد. برای به دست آوردن این عدد به طریق زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید که  $n_i$  ذره

۱. به سهولت می‌توان دریافت که هسته‌ای نظیر  ${}^4\text{He}$ ، که از چهار فرمیون تشکیل شده است، بوزون است. تابع موجی را در نظر می‌گیریم که دوهسته هلیوم را توصیف می‌کند. برای تعویض دوهسته باید تمام فرمیونها را تعویض کرد. هر بار که دو فرمیون را تعویض می‌کنیم تابع موج سیستم تغییر علامت می‌دهد. ولی چون چهار زوج فرمیون در سیستم وجود دارند، تعویض تمام فرمیونها تابع موج را بدون تغییر باقی می‌گذارد. یعنی برای دو هسته، تابع موج متقارن ولی برای هر زوج فرمیون پاد متقارن است. این منطق در مورد هر سیستمی به کار می‌رود که در آن «ذرات» (هسته‌ها و مولکولها و مانند آن) از تعدادی زوج فرمیون تشکیل شده‌اند. بنابراین این «ذرات» مانند بوزونها رفتار می‌کنند.

را در يك ردیف جای می‌دهیم و همان‌طور که در شکل زیر برای يك حالت بخصوص نشان داده شده است، با قرار دادن  $1 - g_i$  بخش در جاهای مناسب، آنها را در  $g_i$  حالت کوانتومی موجود توزیع می‌کنیم



تعداد کل آرایشهای ممکن ذرات و بخشها مساوی است با تعداد جایگشتهای  $n_i + g_i - 1$  شیء در يك ردیف، که برابر  $(n_i + g_i - 1)!$  است. اما چون ذرات یکسان و تمیز ناپذیرند، تمام جایگشتهایی که فقط در ترتیب ذرات باهم اختلاف دارند یکسان هستند. از این‌رو، باید عدد فوق‌را بر  $n_i!$  تقسیم کنیم. به‌علاوه تمام جایگشتهای بخشها حالت فیزیکی یکسانی را نتیجه می‌دهند. بنابراین باید این عدد را بر  $(g_i - 1)!$  نیز تقسیم کنیم. به این ترتیب، تعداد کل آرایشهای تمیز پذیر  $n_i$  ذره در بین  $g_i$  حالت برابر مقدار زیر خواهد بود

$$\frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!} \quad (12.13)$$

همان‌طور که قبلاً گفتیم، برای به‌دست آوردن تعداد کل راههای مختلف تمیز پذیر مربوط به تشکیل پارس  $n_1, n_2, n_3, \dots$  در میان ترازهای انرژی  $E_1, E_2, E_3, \dots$  باید تمام عبارات شبیه معادله (12.13) برای هر تراز انرژی موجود را در یکدیگر ضرب کنیم، که به احتمال پارس زیر منجر می‌شود

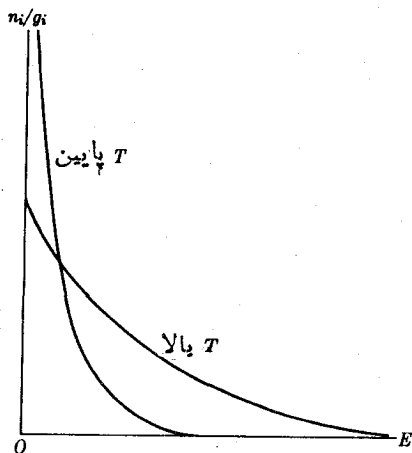
$$P = \frac{(n_1 + g_1 - 1)!}{n_1!(g_1 - 1)!} \cdot \frac{(n_2 + g_2 - 1)!}{n_2!(g_2 - 1)!} \cdot \frac{(n_3 + g_3 - 1)!}{n_3!(g_3 - 1)!} \dots$$

$$= \prod_i \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!} \quad (13.13)$$

مرحله بعدی یافتن محتملترین پارس است که از طریق محاسبه بیشینه  $\ln P$  به‌دست می‌آید. (این کار را در مثال ۴.۱۳ انجام خواهیم داد.) نتیجه این است که محتملترین پارس با اعداد زیر متناظر است

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta E_i} - 1} \quad (14.13)$$

که همان قانون توزیع بوز-اینشتین است. در اینجا پارامتر  $\beta$  همان نقشی را ایفا می‌کند که در قوانین توزیع ماکسول-بولتزمن و فرمی-دیراک به‌عهدده داشت. باز هم دمای سیستم بوزونها در تعادل گرمایی را با معادله (۲۳.۱۵) تعریف می‌کنیم، یعنی



شکل ۵۰۱۳ تابع توزیع  $n_i/g_i$  در آمار بوز-اینشتین در دو دما.

$$kT = \frac{1}{\beta}$$

لذا معادله (۱۴۰۱۳) به صورت زیر درمی آید

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + E_i/kT} - 1} \quad (۱۵۰۱۳)$$

مانند قبل، ثابت  $\alpha$  با شرط  $\sum_i n_i = N$  تعیین می شود.  $\alpha$  آن گونه که در آمار فرمی-دیراک معنی خاصی دارد در آمار بوز-اینشتین ندارد. چون  $n_i$  نمی تواند منفی شود،  $\alpha$  باید مثبت باشد.

توزیع بوزونها از منحنی شکل ۵۰۱۳، که در آن تابع توزیع  $n_i/g_i$  برای دو دما رسم شده است، پیروی می کند. به خاطر وجود علامت منفی در مخرج، توزیع بوز-اینشتین بیش از توزیع ماکسول-بولتزمن بر ترازهای انرژی پایینتر تأکید می کند.

مثال ۴۰۱۳ قانون توزیع بوز-اینشتین را اثبات کنید.

حل: همانند دو مورد قبل (مثالهای ۱۰۱۵ و ۱۰۱۳)، این مسئله شامل یافتن بیشینه  $\ln P$  تحت شرایط  $\sum_i n_i E_i = U$  و  $\sum_i n_i = N$  است. ابتدا با استفاده از فرمول استرلینگ  $\ln P$  را محاسبه می کنیم و خواهیم داشت

$$\ln P = \sum [(n_i + g_i - 1) \ln(n_i + g_i - 1) - n_i \ln n_i - (g_i - 1) \ln(g_i - 1)]$$

سپس با قرار دادن  $d(\ln P)$  مساوی با صفر، بیشینه  $P$  را به دست می آوریم

$$-d(\ln P) = \sum_i [-\ln(n_i + g_i - 1) + \ln n_i] dn_i = 0 \quad (۱۶.۱۳)$$

مرحله بعد ترکیب معادله (۱۶.۱۳) با معادلات (۱۵.۱۰) و (۱۷.۱۰) است (یعنی  $\sum_i E_i dn_i = 0$ ،  $\sum_i dn_i = 0$ )، که پس از ضرب کردن، به ترتیب، در  $\alpha$  و  $\beta$ ، پایستگی تعداد ذرات و انرژی را به دست می دهد. بنابراین داریم

$$-\ln(n_i + g_i - 1) + \ln n_i + \alpha + \beta E_i = 0$$

با فرض اینکه  $n_i + g_i$  در مقایسه با ۱ خیلی بزرگ باشد، می توان در اولین جمله معادله بالا از ۱ چشم پوشید و نتیجه زیر را به دست آورد

$$\ln \frac{n_i}{n_i + g_i} = -\alpha - \beta E_i \quad \text{یا} \quad \frac{n_i}{n_i + g_i} = e^{-\alpha - \beta E_i}$$

از حل آن برای  $n_i$ ، معادله (۱۴.۱۳) نتیجه می شود.

### ۶.۱۳ گاز فوتونی

شاید بتوان گفت که مهمترین کاربرد آمار بوز-اینشتین تحلیل تابش الکترومغناطیسی است که در يك كاواك محبوس شده و با اتمهای دیواره كاواك در تعادل گرمایی قرار دارد. همان طور که در بخش ۳.۱ گفتیم، این تابش را تابش جسم سیاه می نامند. اتمهای دیواره كاواك تابش را به طور پیوسته جذب و مجدداً گسیل می کنند تا تعادل حاصل شود، و این هنگامی روی می دهد که آهنگهای گسیل و جذب تابش یکسان باشند. در وضعیت تعادل، طیف تابش الکترومغناطیسی محبوس شده توزیع انرژی کاملاً مشخصی دارد، یعنی، با هر بسامد يك شدت تابش جسم سیاه متناظر می شود که فقط به دمای دیواره ها بستگی دارد و مستقل از جنس آنهاست.

در بخش ۹.۱ دیدیم که وقتی تابش الکترومغناطیسی با ماده برهم کنش می کند، چنان رفتار می کند که گویی از «ذراتی» به نام فوتون تشکیل شده است که هر کدام تکانه ای برابر  $h/\lambda$  و انرژی برابر  $h\nu$  دارند که در آن  $\lambda$  طول موج و  $\nu$  بسامد تابش است. بنابراین می توان فرض کرد که تابش جسم سیاه در وضع تعادل مانند يك گاز فوتونی رفتار می کند. البته فرض می کنیم که برهم کنشی میان خود فوتونها روی نمی دهد، بلکه فقط با اتمهای دیواره برهم کنش می کنند. چون فوتونها تمیزپذیر نیستند و چیزی نمی تواند مانع از آن شود که تعدادی فوتون انرژی یکسانی داشته باشند (تجربه نشان می دهد که شدت تابش در هر بسامد می تواند بدون هیچگونه محدودیتی افزایش یابد)، لذا فوتونها را می توان همانند بوزونها در نظر گرفت که از آمار بوز-اینشتین پیروی می کنند.

اما در چنین حالتی باید وضعیت مشخصه‌ای را مد نظر قرار دهیم. تعداد فوتونها ثابت نیست، زیرا به وسیله اتمهای موجود در دیواره کاواک جذب یا گسیل می‌شوند. بنابراین شرط (۱۵.۱۰)،  $\sum_i dn_i = 0$ ، را باید کنار گذاشت. این به آن معنی است که پارامتر  $\alpha$  ضروری نیست. پس باید در معادله (۱۵.۱۳) قرار دهیم  $\alpha = 0$ ، به طوری که  $n_i = g_i / (e^{E_i/kT} - 1)$ ، به علاوه، هر گاه کاواک در مقایسه با طول موج متوسط تابش بزرگ باشد، طیف انرژی فوتونها را می‌توان به صورت پیوسته در نظر گرفت، زیرا در چنین حالتی، اختلاف انرژی بین مقادیر انرژی مجاز متوالی یا طول موجهای مربوط فوق‌العاده کوچک است (شکل ۱۰.۲).

تحت چنین شرایطی در معادله (۱۵.۱۳) باید به جای  $g_i$ ،  $g(E) dE$  را قرار دهیم که نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$dn = \frac{g(E)dE}{e^{E/kT} - 1} \quad (17.13)$$

چون انرژی فوتونها بر طبق  $E = hv$  به سامد مربوط می‌شود، تابع  $g(v)$  را می‌توان طوری تعریف کرد که داشته باشیم  $g(E) dE = g(v) dv$  که در آن  $g(v) dv$  تعداد مدهای نوسانی موجود در گستره بسامد  $dv$  متناظر با گستره انرژی  $dE$  است. قبلا در معادله (۲۰.۲)، تعداد مدهای نوسانی برای امواج محبوس شده در کاواکی به حجم  $V$  را به دست آوردیم. اما لازم است که آن را در ۲ ضرب کنیم تا دو راستای مستقل قطبش را به حساب آورده باشیم، زیرا امواج الکترومغناطیسی عرضی اند. بنابراین، تعداد حالتها در تابش جسم سیاه با بسامد بین  $v$  و  $v + dv$  یا انرژی بین  $E$  و  $E + dE$  برابر است با

$$g(E) dE = g(v) dv = \frac{8\pi V}{c^3} v^2 dv \quad (18.13)$$

بنابراین می‌توان معادله (۱۷.۱۳) را به صورت زیر نوشت

$$dn = \frac{8\pi V}{c^3} \frac{v^2 dv}{e^{hv/kT} - 1} \quad (19.13)$$

انرژی مربوط به  $dn$  فوتون در گستره بسامد  $dv$  مساوی  $(hv) dn$  و انرژی در یکای حجم برابر  $(hv) dn/V$  است. بالاخره، توزیع چگالی انرژی  $E(v)$  در تابش جسم سیاه با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$E(v) = \frac{hv}{V} \frac{dn}{dv}$$

به گونه‌ای که  $E(v) dv$  انرژی در یکای حجم متناظر با تابش با بسامد بین  $v$  و  $v + dv$  را به دست می‌دهد. به واسطه معادله (۱۹.۱۳)، این چگالی انرژی با رابطه زیر داده

می‌شود

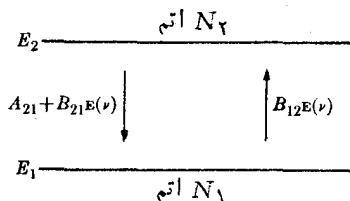
$$E(\nu) = \frac{\lambda \pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (20.13)$$

که همان معادله معروف تابش پلانک است که قبلاً بدون اثبات در معادله (۸.۱) آمد و برای دماهای متفاوت نیز در شکل ۵.۱ نمایش داده شد. سازگاری معادله (۲۰.۱۳) با واقعیات تجربی نیز دلیل محکمی است بر این ایده که تابش از فوتون‌هایی تشکیل شده است که از آمار بوز-اینشتین پیروی می‌کنند. در اینجا یادآوری می‌کنیم که همین مسئله تابش جسم سیاه بود که پلانک را واداشت تا فرض کند وقتی تابش با ماده برهم‌کنش می‌کند، به‌اندازه کوانتوم‌های  $h\nu$  انرژی جذب یا گسیل می‌دارد. اما، اثبات اصلی پلانک را نمی‌توان دقیق و بی‌عیب در نظر گرفت زیرا او، از یک طرف فرض کرد که اتم‌های دیواره کاواک همانند نوسانگرهایی عمل می‌کنند که انرژی آنها به‌جای مقدار  $E = (n + 1/2) h\nu$  برابر  $E = nh\nu$  است و از طرف دیگر از آمار ماکسول-بولتزمن استفاده کرد. جالب اینجاست که نتایج او صحیح بود. اما اگر انرژی نقطه صفر،  $h\nu/2$ ، در محاسبات پلانک وارد شود، رابطه حاصله دیگر قابل قبول نخواهد بود. بنا بر این، چندسالی باید می‌گذشت تا اینکه اثبات رضایت‌بخشی برای مسئله، همان‌طور که در این کتاب ارائه شده است یافت شود.

**مثال ۵.۱۳.** گذارهای تابشی خود به‌خود و القایی را بررسی کنید.

**حل:** در بخش ۷.۱ توضیح دادیم که هر سیستم واقع در تراز انرژی برانگیخته ممکن است به‌طور خود به‌خود به تراز انرژی پایینتر فرود آید و یا اینکه اگر تابشی با بسامد مناسب حضور داشته باشد، ممکن است سیستم القا (یا برانگیخته) شود و با گسیل تابش به تراز پایینتر جهش کند.

دو تراز انرژی  $E_1$  و  $E_2$  را در نظر می‌گیریم که به ترتیب با  $N_1$  و  $N_2$  اتم اشغال شده‌اند (شکل ۶.۱۳). انرژی فوتون‌های متناظر با گذارهای میان این دو تراز باید برابر  $h\nu = E_2 - E_1$  باشد. اتم‌هایی که در تراز  $E_2$  قرار دارند ممکن است به‌طور خود به‌خود



**شکل ۶.۱۳.** گذارهای القایی و خود به‌خود.



به داخل تراز  $E_1$  جهش کنند. احتمال گذار گسیلی خود به خود متناظر در یکای زمان را  $A_{21}$  می نامیم. اگر تابشی با بسامد  $\nu$  حضور داشته و چگالی انرژی آن  $E(\nu)$  باشد، گذارهای جذبی از  $E_1$  به  $E_2$  ایجاد می شوند. طبیعی است که فرض کنیم تعداد چنین گذارهایی در یکای زمان با چگالی انرژی  $E(\nu)$  متناسب است. یعنی احتمال گذار جذبی القایی در یکای زمان برابر است با  $B_{12}E(\nu)$  که در آن  $B_{12}$  احتمال گذار در یکای زمان و یکای شدت تابش است. اما به دلیل برهم کنشی که تابش با اتمهای برانگیخته در تراز  $E_2$  می کند؛ گذارهای گسیلی از  $E_2$  تا  $E_1$ ، با احتمال گذار گسیلی القایی در یکای زمان  $B_{21}E(\nu)$  را نیز ایجاد می کند. بنابراین احتمال گسیلی کل در یکای زمان از تراز  $E_2$  به تراز  $E_1$  برابر است با  $A_{21} + B_{21}E(\nu)$ . اگر  $N_2$  اتم در تراز  $E_2$  وجود داشته باشد، تعداد اتمهایی که در یکای زمان از  $E_2$  به  $E_1$  جهش می کنند مساوی است با  $[A_{21} + B_{21}E(\nu)]N_2$ . در همین زمان، تعداد اتمهایی که در یکای زمان از  $E_1$  به  $E_2$  جهش می کنند مساوی است با  $B_{12}E(\nu)N_1$ . بنابراین تغییرخالص اتمها در یکای زمان در تراز  $E_2$  برابر است با آهنگ بهره توسط جذب منهای آهنگ اتلاف به وسیله گسیل، یا

$$\frac{dN_2}{dt} = \underbrace{B_{12}E(\nu)N_1}_{\text{جذب}} - \underbrace{[A_{21} + B_{21}E(\nu)]N_2}_{\text{گسیل}}$$

با يك بهره مساوی (ولی با علامت مخالف) برای تراز پاینتر. هنگامی که بین اتمها و تابش تعادل برقرار شود، باید داشته باشیم  $dN_2/dt = 0$  یا

$$B_{12}E(\nu)N_1 = [A_{21} + B_{21}E(\nu)]N_2$$

بنابراین تعداد گذارهای جذبی و گسیلی میان دو تراز در یکای زمان مقدار یکسانی است. اگر اتمها در تعادل گرمایی باشند و از آمار ماکسول-بولتزمن پیروی کنند (که در اکثر موارد فرض معقولی است)، در این صورت داریم

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{(E_2 - E_1)kT} = e^{h\nu/kT}$$

به گونه ای که

$$B_{12}E(\nu)e^{h\nu/kT} = A_{21} + B_{21}E(\nu) \quad (21.13)$$

یا

$$E(\nu) = \frac{A_{21}/B_{12}}{e^{h\nu/kT} - B_{21}/B_{12}}$$

از مقایسه این رابطه با معادله (20.13)، که چگالی انرژی برای تابش در تعادل با ماده را

به دست می دهد، نتیجه می گیریم که

$$\frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \quad \text{و} \quad \frac{B_{21}}{B_{12}} = 1$$

این نتیجه ای است که اینشتین در سال ۱۹۱۷ برای اولین بار به دست آورد. رابطه دوم نشان می دهد که احتمالهای جذب و گسیل القایی در یکای زمان مساوی اند. با محاسبه نمی توان مقادیر  $A_{21}$ ،  $B_{21}$  و  $B_{12}$  را به دست آورد. این مقادیر با استفاده از ملاحظات مکانیک کوانتومی به دست می آیند.

از معادله (۲۱.۱۳)، با  $B_{12} = B_{21}$  نسبت بین احتمال گسیل خود به خود  $A_{21}$  و احتمال گسیل القایی  $B_{21}E(\nu)$  را، در هنگامی که ماده با تابش در تعادل است، به صورت زیر نتیجه می گیریم

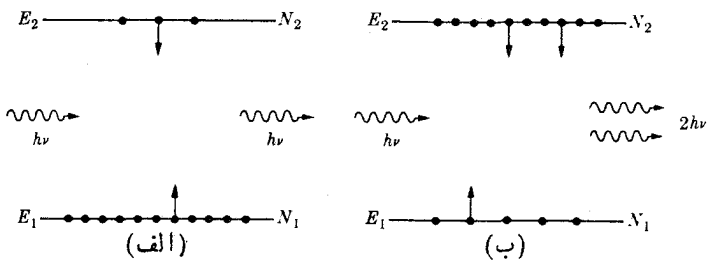
$$\frac{\text{احتمال گسیل خود به خود}}{\text{احتمال گسیل القایی}} = \frac{A_{21}}{B_{21}E(\nu)} = e^{h\nu/kT} - 1 \quad (22.13)$$

بنابراین اگر  $h\nu \gg kT$  باشد، گسیل خود به خود خیلی محتملتر از گسیل القایی خواهد بود که در این صورت می توان از آن کاملاً صرف نظر کرد. این موضوع در مورد گذارهای الکترونی در اتمها و مولکولها و در مورد گذارهای تابشی در هستهها صدق می کند. اما اگر  $h\nu \ll kT$  باشد، همان طور که در ناحیه میکروموج طیف صادق است، گسیل القایی ممکن است، غالب شود.

گسیل القایی نتیجه کنش تابش ورودی روی اتمهای (یا مولکولهای) ماده است. از این رو نوسانات اتمی و اداشته نسبت به تابش ورودی اختلاف فاز ثابتی دارند. این بدان معنی است که تمام اتمها به طور هم فاز تابش می کنند و لذا گسیل القایی همدرس است. از طرف دیگر، گذارهای خود به خود به طور کاتوره ای روی می دهند و هیچگونه همبستگی میان زمانهایی که در آنها اتمها گذار را انجام می دهند وجود ندارد. بنابراین، فازهای تابشهای اتمی به طور کاتوره ای توزیع می شوند. در این صورت می گوئیم که گسیل خود به خود ناهمدرس است.

مثال ۶.۱۳ لیزرها و میزرها را بررسی کنید.

حل: همان طور که در مثال قبل توضیح داده شد، هنگامی که تابش و ماده در تعادل گرمایی قرار دارند، هیچ جذب یا گسیل خالصی روی نمی دهد زیرا تعداد کل گذارهای گسیلی و جذبی در یکای زمان مساوی اند. این موضوع در شکل ۷.۱۳ (الف) نشان داده شده است. با آنکه ممکن است احتمال گذار القایی، کوچکتر از احتمال گذار خود به خود باشد،



شکل ۷.۱۳ اصل اساسی طرز کار لیزرها و میزرها.

جذب و گسیل با یکدیگر منطبق می‌شوند زیرا در تعادل گرمایی تراز پایینتر جمعیت انبوه‌تری در خود جای می‌دهد. در حالت کلی، که تابش با ماده برهم کنش می‌کند، بی‌آنکه الزاماً در تعادل باشد، خواهیم داشت

$$\frac{\text{آهنک گسیل}}{\text{آهنک جذب}} = \frac{[A_{21} + B_{21}E(\nu)]N_2}{B_{12}E(\nu)N_1} = \left(1 + \frac{A_{21}}{B_{21}E(\nu)}\right) \frac{N_2}{N_1}$$

که در آن  $E(\nu)$  توزیع انرژی تابش ورودی را به دست می‌دهد. هر گاه اختلاف انرژی  $E_2 - E_1$  به قدر کافی کوچک باشد، به طوری که آهنک  $h\nu/kT$  خیلی کوچک باشد (همان طور که در دمای معمولی در ناحیه میکروموج روی می‌دهد). معادله (۲۲.۱۳) نشان می‌دهد که  $A_{21}/B_{21}E(\nu)$  در مقایسه با یک قابل اغماض است. در این حالت می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{آهنک گسیل}}{\text{آهنک جذب}} \approx \frac{N_2}{N_1}$$

هر گاه ماده در تعادل گرمایی باشد،  $N_2$  کوچکتر از  $N_1$  و آهنک گسیل نیز کوچکتر از آهنک جذب است. اما اگر به طریقی جمعیت نسبی ترازهای برانگیخته و پایه وارونه شود، به طوری که  $N_2$  بزرگتر از  $N_1$  و آهنک  $N_2/N_1$  بزرگتر از ۱ شود، در این صورت آهنک گسیل بزرگتر از آهنک جذب خواهد شد. به عبارت دیگر، هر گاه تابشی با چگالی انرژی  $E(\nu)$  از این سیستم عبور کند، تابشی که از آن خارج می‌شود فوتونهای با بسامد  $\nu$  بیشتری نسبت به تابش فرودی دارد [شکل ۷.۱۳ (ب)]، که به «تقویت» تابش در آن بسامد منجر می‌شود. البته این موضوع فقط هنگامی صحیح است که  $E_2 - E_1 = h\nu$  باشد. چون نسبت به اتمهای برانگیخته اتمهای بیشتری و انگیزه می‌شوند، تراز بالاتر شروع می‌کند به خالی شدن به طوری که از میزان تقویت کاسته و تعادل گرمایی مجدداً برقرار می‌شود. از این رو، برای حفظ حالت تقویت، باید به طریقی، تراز بالاتر را به طور پیوسته از اتم پرکنیم یا از تراز پایین اتم برداریم. وسایلی که چنین عملی

در آنها انجام می‌شود را هیژد و لیزر می‌گویند. نام آنها، بسته به ناحیه‌ای از طیف الکترومغناطیسی که در آن کار می‌کنند، از حروف اول (معادل انگلیسی کلمات «تقویت میکروموج به وسیله گسیل القایی تابش»<sup>۱</sup> و «تقویت نور به وسیله گسیل القایی تابش»<sup>۲</sup> گرفته شده است.

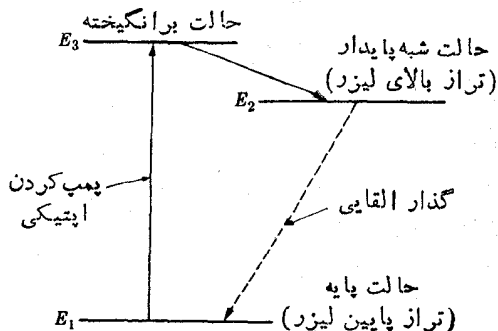
وسایل مختلفی طرح ریزی شده است تا به کمک آنها بتوان تراز بالا را به صورتی دائمی و یکنواخت پر نگه داشت. تمام این روشها مستلزم صرف انرژی است و کارایی میزرها و لیزر عبارت است از نسبت بین انرژی خروجی و انرژی ورودی. یک روش نوعی پمپ کردن اپتیکی است که در آن مقدار زیادی انرژی صرفاً به منظور برانگیختن سیستم به انرژیهای بالاتر، به طور مداوم و یا مقطعی به سیستم داده می‌شود. هنگامی که سیستم به حالت پایه باز می‌گردد، بعضی از اتمهای برانگیخته به حالت‌های شبه پایدار می‌روند، و جمعیت این حالتها نسبت به حالت‌های پایینتر بسیار بیشتر می‌شود (شکل ۸۰۱۳). بنا بر این تابش القایی بسامد  $\nu = (E_2 - E_1)/h$  تقویت مطلوب را به دست می‌دهد.

لیزرها و میزرها خیلی مفیدند زیرا باریکه خیلی شدیدی از تابش تکفام همدوس تولید می‌کنند. می‌دانیم وقتی چند چشمه به صورت هم فاز (یا همدوس) تابش می‌کنند، دامنه متوجه برابر مجموع دامنه‌های منفرد است. هر گاه تمام چشمه‌ها یکسان باشند داریم

$$\text{دامنه چشمه } N \times = \text{دامنه متوجه همدوس}$$

که در آن  $N$  تعداد چشمه‌هاست. چون شدت چشمه بامجدور دامنه متناسب است، خواهیم داشت

$$\text{شدت چشمه } N^2 \times = \text{شدت متوجه همدوس}$$



شکل ۸۰۱۳ لیزر سه تراز.

1. Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation.
2. Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

هر گاه تعداد چشمه‌ها زیاد باشد، تابش القایی ممکن است خیلی شدید شود. از طرف دیگر، هر گاه چشمه‌ها به صورت ناهمدوس تابش کنند، شدتهای انفرادی به صورت خطی اضافه می‌شوند، یعنی

$$\text{شدت چشمه } N \times = \text{شدت منتجه ناهمدوس}$$

بنابراین در لیزرها و میزرها، تابش تکفام همدوس القایی، در مقایسه با تابش ناهمدوس خود به خودی که در این دستگاهها نوبه نامیده می‌شوند خیلی شدید است. در لیزرها و میزرها به خاطر غالب بودن گذارهای القایی، نوبه نسبتاً کوچکتر از چیزی است که در نوسانگرها و تقویت کننده‌های معمولی وجود دارد. تقویت کننده‌های میزری هنگامی به کار می‌روند که نوبه‌های خیلی کم، مهم هستند، نظیر کارهای رادیو نجومی، ارتباطات ماهواره‌ای، و طیف‌سنجی میکروموج.

### ۷.۱۳ ظرفیت گرمایی جامدات

همان‌طور که در فصل ۶ توضیح داده شد، جامدات انبوه منظمی از تعداد بسیار زیادی اتم (یا مولکول) هستند که با نیروهای چسبناک قوی ناشی از برهم کنشهای الکتریکی آنها، در مکانهای تعادل ثابت خود قرار گرفته‌اند. تنها حرکات انفرادی اتمها ارتعاشات کوچک آنها حول مکانهای تعادل خود آنهاست. اما جفت شدگی میان اتمها آنچنان قوی است که نمی‌توان یک اتم را بدون آشفتگی اتمهای مجاور و سرانجام آشفتگی تمام جامد، به ارتعاش در آورد. بنا بر این، باید برانگیختگیهای ارتعاشی جمعی جامد را، مشابه با آنچه که در مثال ۲.۶ برای یک شبکه خطی در نظر گرفتیم، بررسی کنیم.

این ارتعاشهای جمعی موجب می‌شوند که امواج ایستاده در جامدات تشکیل شود. بسامدهای این امواج به شکل و اندازه جسم بستگی دارند، و تا حدودی به امواج ایستاده در کاواک شبیه هستند. با آنکه بسامدهای ممکن طیف گسسته دارند اما اگر ابعاد جسم در مقایسه با ابعاد اتمی نسبتاً بزرگ باشد فاصله جدایی آنها خیلی کوچک است و می‌توان طیف را پیوسته در نظر گرفت. این امواج ایستاده از همان نوع امواج کشسانی هستند که از طریق جسم جامد منتشر می‌شوند و بنا بر این سرعت انتشار آنها مساوی سرعت امواج کشسان است که سرعت صوت نیز نامیده می‌شود

در هر جامدی دو نوع موج کشسان وجود دارند: طولی و عرضی، که به ترتیب با سرعت  $v_l$  و  $v_t$  انتشار می‌یابند. برای به دست آوردن تعداد مدهای مختلف ارتعاش در گستره بسامد میان  $v$  و  $v + dv$ ، که به صورت  $g(v)dv$  بیان می‌شود، باید مدهای طولی و عرضی را جداگانه بشماریم. بنا بر این با استفاده از معادله (۱۸.۱۳) و با قرار دادن  $v$  به جای  $c$ ، برای این امواج عرضی خواهیم داشت

$$g_t(v) dv = \frac{8\pi V}{v_l^3} v^2 dv$$

درحالی که برای امواج طولی، که يك درجه آزادی دارند، مدهای ارتعاش نصف می شوند

$$g_i(v) dv = \frac{4\pi V}{v_i^3} v^2 dv$$

در هر رابطه، سرعت انتشار  $v_i$  و  $v_e$  را که به ترتیب با امواج طولی و عرضی متناظرند، به کار می بریم. لذا، تعداد کل مدهای ارتعاشی درگستره  $dv$  برابر است با

$$g(v) dv = g_i(v) dv + g_e(v) dv = 4\pi V \left( \frac{1}{v_i^3} + \frac{2}{v_e^3} \right) v^2 dv \quad (23.13)$$

در يك محیط پیوسته، هیچگونه حدی برای تعداد کل مدهای ارتعاشی وجود ندارد. اما در يك جامد، که ساختار اتمی دارد و شامل  $N$  اتم است هرمد ارتعاشی باید برحسب  $3N$  مختصه مکانی آنها بیان شود. بنا براین چنین شرطی برروی تعداد کل مدهای آزادی مستقل، حدی تحمیل می کند که باید مساوی با  $3N$  باشد. این نیز به نوبه خود حدی بر بسامد ارتعاشی بیشینه تحمیل می کند زیرا با استفاده از معادله (23.13) باید داشته باشیم

$$3N = \int_0^{v_0} g(v) dv = 4\pi V \left( \frac{1}{v_i^3} + \frac{2}{v_e^3} \right) \int_0^{v_0} v^2 dv$$

یا

$$3N = 4\pi V \left( \frac{1}{v_i^3} + \frac{2}{v_e^3} \right) \frac{v_0^3}{3} \quad (24.13)$$

که بسامد قطع  $v_0$  را تعیین می کنند (بسامد قطع در ارتعاشات شبکه بلوری در مثال ۲.۶ بررسی شده است). با استفاده از معادله (24.13) می توان معادله (23.13) را به صورت زیر نوشت

$$g(v) dv = \frac{9N}{v_0^3} v^2 dv \quad (25.13)$$

مسئله ای که در اینجا مورد بحث قرار دارد خیلی به مسئله امواج الکترومغناطیسی ایستاده در يك کواک شباهت دارد. آن بحث منجر به معرفی مفهوم گاز فوتونی شد که در بخش ۶.۱۳ برای تحلیل تابش جسم سیاه از آن استفاده کردیم. بنا براین به مدهای ارتعاشی جامد، که الزاماً کوانتیده اند، گاز فوتونی را نسبت می دهیم که از «ذرات» یا فوتونهای با انرژی  $h\nu$  تشکیل شده است. مفهوم فوتون در مثال ۲.۶ معرفی شد. چون تمام فوتونها یکسانند و هیچگونه حدی برای تعداد فوتونها درحالت انرژی یکسان نیز وجود ندارد، لذا می توان انتظار داشت که فوتونها در تعادل گرمایی از آمار بوز-اینشتین پیروی کنند. ضمناً تعداد فوتونها هم ثابت نیست، زیرا برحسب اینکه انرژی مدهای ارتعاشی زیاد یا

کم شود، تعداد فونونها ممکن است افزایش یا کاهش یابد. بنا بر این همان طور که قبلاً در مورد گاز فوتونی انجام دادیم، لازم است که از معادله (۱۵.۱۳) به ازای  $\alpha = 0$  استفاده کنیم و  $g(\nu) d\nu$  را که با معادله (۲۵.۱۳) داده شده است به جای  $g$  قرار دهیم. لذا تعداد فونونهای با انرژی  $E = h\nu$  در گستره بسامد میان  $\nu$  و  $\nu + d\nu$  و در تعادل گرمایی با شبکه جامد در دمای  $T$  برابر است با

$$dn = \frac{g(\nu) d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{9N}{\nu_0^3} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

برای انرژی ارتعاشی کل جامد در گستره بسامد  $d\nu$  داریم

$$dU = h\nu dn = \frac{9Nh}{\nu_0^3} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

و انرژی ارتعاشی کل جامد مساوی است با

$$U = \int_0^{\nu_0} h\nu dn = \frac{9Nh}{\nu_0^3} \int_0^{\nu_0} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

به این انرژی باید انرژی نقطه صفر وابسته به هر یک از مدهای ارتعاشی را اضافه کنیم. اما، این انرژی مستقل از دماست و در اینجا مورد نظر ما نیست. بنا بر این، ظرفیت گرمایی جامد در حجم ثابت برابر است با

$$C_V = \frac{1}{N} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{9N_A h^2}{\nu_0^3 k T^2} \int_0^{\nu_0} \frac{\nu^4 e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2} d\nu \quad (26.13)$$

برای سهولت، دمای دبی  $\Theta_D$  را به صورت  $k\Theta_D = h\nu_0$  تعریف می کنیم یا

$$\Theta_D = \frac{h\nu_0}{k} \quad (27.13)$$

در جدول ۳.۱۳ مقدار  $\Theta_D$  برای چند جامد داده شده است.

با توجه به رابطه  $kN_A = R$  و برقراری  $x = h\nu/kT$  می توان معادله (۲۶.۱۳)

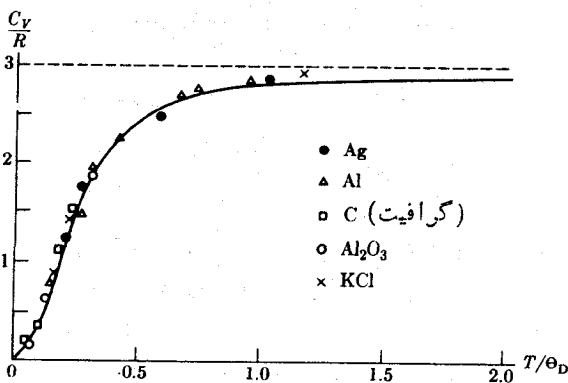
را به صورت ساده تری نوشت

$$C_V = 9R \left( \frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \quad (28.13)$$

در شکل ۹.۱۳ نمودار  $C_V$  بر حسب  $T/\Theta_D$  رسم شده است. با توجه به نقاط تجربی که در شکل مشخص شده است، مشاهده می کنیم که چگونه اکثر مواد دقیقاً از منحنی نظری پیروی می کنند.

جدول ۳۰۱۳ دماهای دبی برای برخی جامدات.

$K \cdot \Theta_D$	ماده	$K \cdot \Theta_D$	ماده
۳۶۶	Ge	۲۲۵	Ag
۱۵۹	Na	۱۶۵	Au
۲۵۶	Ni	۱۸۶۰	C (الماس)
۲۲۹	Pt	۳۳۹	Cu



شکل ۹۰۱۳ ظرفیت گرمایی یک شبکه بلوری بر حسب تابعی از دما.

باید توجه داشت که در دماهای از مرتبه  $\Theta_D$  یا بیشتر، ظرفیتهای گرمایی تمام مواد عملاً به مقدار  $3R$  می‌رسد. این نتیجه قانون دولن-پتی نام دارد. زیرا اولین بار این افراد در قرن نوزدهم میلادی به‌طور تجربی به این قانون پی بردند. ضمناً این نتیجه با اصل هم‌پاری انرژی نیز سازگاری دارد، زیرا برای  $kT \gg h\nu_0 = k\Theta_D$  و برای هر درجه آزادی  $(kT/2) = kT$  برابر  $2$  و برای سه درجه آزادی هر اتم مساوی  $3kT$  باشد. بنابراین

$$U = N(3kT) = 3kNT = 3NRT$$

که با  $C_V = 3R$  متناظر است و با قانون دولن-پتی سازگاری دارد. موادی که دمای دبی آنها خیلی بزرگتر از دمای معمولی است، به‌طور قابل توجهی از قانون دولن-پتی در چنین دماهایی انحراف خواهند داشت. اکنون در حالت خاص فلزات باید دید کسه برای محاسبه ظرفیت گرمایی  $C_V$  آیا



لازم است انرژی الکترونیهای آزاد رسانش را به حساب آوریم یا خیر؟ به خاطر می‌آوریم که الکترونیهای آزاد از آمار فرمی-دیراک پیروی می‌کنند و هم پاری انرژی در مورد آنها فقط در دمایی به کار می‌رود که در رابطه  $kT \gg \epsilon_F$  یا  $T \gg \epsilon_F/k = \Theta_F$  صدق کند که در آن  $\epsilon_F$  انرژی فرمی و  $\Theta_F$  دمای فرمی است. اما هنگامی که مقادیر  $\epsilon_F$  و  $\Theta_F$  را در جدول ۱۰۱۳ بررسی می‌کنیم، ملاحظه می‌شود که دمای فرمی  $\Theta_F$  به قدری بالاست که وقتی فلز در دمای به کار رفته در آزمایشگاه و صنعت گرم می‌شود فقط تعداد کمی از الکترونها برانگیخته می‌شوند. لذا توزیع الکترونها در گرمای ویژه فلزات بسیار اندک و قابل اغماض است. با این حال باید توجه داشت که در دماهای خیلی پایین نزدیک به صفر مطلق، وقتی  $C_V$  هم خیلی کوچک است، همان طور که از شکل ۹۰۱۳ دیده می‌شود، توزیع الکترونها در  $C_V$  نسبتاً مهم است. در این دماها، تعداد خیلی اندکی از الکترونها که به بالای تراز فرمی  $\epsilon_F$  برانگیخته شده‌اند، مقداری انرژی بیشتر از انرژی ارتعاشات جمعی شبکه به انرژی داخلی اضافه می‌کنند.

### ۸۰۱۳ گاز ایده‌آل در آمار کوانتومی

تمام ذرات از آمار فرمی-دیراک یا بوز-اینشتین پیروی می‌کنند. بنا بر این حتی گاز ایده‌آل نیز باید از دیدگاه آمار کوانتومی تحلیل شود. ابتدا گاز ایده‌آل متشکل از ذراتی را در نظر می‌گیریم که از آمار بوز-اینشتین پیروی می‌کنند. (که معمولترین وضعیت است زیرا مولکولها دارای اسپین صفر یا اسپین درست‌اند). تعداد مولکولهای با انرژی میان  $E$  و  $E+dE$  یعنی  $dn$  از معادله (۱۵۰۱۳) به دست می‌آید که در آن به جای  $g$  رابطه زیر را که همان معادله (۳۹۰۱۵) است قرار می‌دهیم

$$g(E)dE = \frac{4\pi V(\gamma m^3)^{1/2}}{h^3} E^{1/2} dE$$

بنابر این

$$dn = \frac{4\pi V(\gamma m^3)^{1/2}}{h^3} \frac{E^{1/2} dE}{e^{\alpha + E/kT} - 1}$$

با قراردادن  $x = E/kT$  و با توجه به معادله (۴۰۰۱۵) برای تابع پارش یک گاز ایده‌آل  $Z = V(\gamma \pi m k T)^{3/2} / h^3$ ، تعداد کل مولکولها را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$N = \frac{4Z}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{e^{\alpha + x} - 1} \quad (29.13)$$

با توجه به اینکه در آمار بوز-اینشتین  $\alpha$  مثبت است خواهیم داشت

$$(e^{\alpha+x} - 1)^{-1} = e^{-\alpha-x} (1 - e^{-\alpha-x})^{-1} = e^{-\alpha} (e^{-x} + e^{-\alpha-x} + \dots)$$

و با قرار دادن در معادله (۲۹.۱۳) رابطه زیر به دست می آید

$$N = Ze^{-\alpha} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha} + \dots \right)$$

در تقریب اول می توان نوشت  $e^{-\alpha} = N/Z$  که همان نتیجه به دست آمده در بخش ۳.۱۰ است. در تقریب دوم داریم

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{Z} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha} + \dots \right)^{-1} = \frac{N}{Z} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N}{Z} + \dots \right) \quad (30.13)$$

که می توان  $\alpha$  را بر حسب تابعی از  $N$  و  $T$  به دست آورد. انرژی کل گاز برابر است با

$$U = \int_0^{\infty} E dn = \frac{\sqrt{2} Z k T}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^{3/2} dx}{e^{\alpha+x} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} k T Z e^{-\alpha} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha} + \dots \right)$$

بالاخره با در نظر گرفتن مقدار  $e^{-\alpha}$  که با معادله (۳۰.۱۳) داده شده است داریم

$$U = \frac{\sqrt{3}}{2} k N T \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N}{Z} - \dots \right) \quad (31.13)$$

از مقایسه این رابطه با نتیجه کلاسیک یا ماکسول-بولتزمان گاز ایده آل، یعنی  $U = (3/2) k N T$  ملاحظه می کنیم که اثر کوانتومی در آمار بوز-اینشتین باعث می شود که انرژی گاز کاهش یابد. می توان نشان داد که فشار گاز مساوی است با (مثال ۷.۱۳)

$$p = \frac{k N T}{V} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N}{Z} - \dots \right) \quad (32.13)$$

و از این رو می بینیم که، در آمار بوز-اینشتین، فشار یک گاز ایده آل نیز کمتر از فشار گاز ایده آل کلاسیک (یا ماکسول-بولتزمان) است.

انحراف یک گاز ایده آل کوانتومی از گاز ایده آل کلاسیک را تبهگنی گاز می نامند (در اینجا «تبهگنی» هیچ رابطه ای با تبهگنی حالت های کوانتومی ندارد). با مشاهده اینکه  $N/Z$  با  $(N/V) T^{-3/2}$  متناسب است، درمی یابیم که تبهگنی یک گاز در دمای پایین و چگالی بالا از اهمیت بیشتری برخوردار می شود و این شرطی است که در نزدیک نقطه

چگالش روی می‌دهد. در فشار و دمای متعارف برای اکثر گازها  $N/Z$  از مرتبه ۵-۱۰ است و بنابراین تبهگنی گاز قابل چشمپوشی است، و این نشان می‌دهد که در چنین گازهایی می‌توان با اطمینان از آمار ماکسول-بولتزمن استفاده کرد.

هیدروژن و هلیوم سبکترین گازهایی هستند که از آمار بوز-اینشتین پیروی می‌کنند. مقدار  $N/Z$  برای  $H_2$  در نقطه جوش معمولی آن،  $K = 20.4$ ، برابر  $10^{-2} \times 8.4 \times 10^8$  و برای هلیوم در  $4.2 K$  برابر  $1.39 \times 10^8$  است. بنابراین هلیوم گازی است که در آن، تبهگنی باید اثرات قابل مشاهده‌ای ایجاد کند. در واقع، برخی رفتار عجیب هلیوم در حالت چگال آن، که به صورت He-II شناخته شده است، به تبهگنی کامل بوز-اینشتین نسبت داده می‌شود. در مورد گاز ایده‌آلی که از آمار فرمی-دیراک پیروی می‌کند (نظیر هیدروژن تک‌اتمی) نتایج کاملاً مشابه است، اما، به خاطر می‌آوریم که در آمار فرمی-دیراک  $\alpha$  می‌تواند منفی یا مثبت باشد و از این رو، حالت‌های  $\alpha > 0$  و  $\alpha < 0$  باید به طور جداگانه بررسی شوند. در اینجا نمی‌خواهیم این حالت را به تفصیل توضیح دهیم، با وجود این، خاطر نشان می‌کنیم که گرچه در صفر مطلق، فشار گاز ایده‌آلی که از آمار ماکسول-بولتزمن یا آمار بوز-اینشتین پیروی می‌کند صفر است، فشار گاز ایده‌آلی که از آمار فرمی-دیراک تبعیت می‌کند به مقدار مشخصی در نزدیک صفر مطلق میل می‌کند، یعنی، یک فشار نقطه صفر در آن وجود دارد. دلیل این امر این است که حتی در صفر مطلق، مجموعه‌ای از فرمیونها دارای انرژی نقطه صفر  $U = 3/5 (N \epsilon_F)$  هستند (مثال ۲.۱۳). با توجه به معادله (۳۷.۱۱) یعنی رابطه زیر

$$dU = T dS - p dV$$

هنگامی که آنتروپی ثابت باشد خواهیم داشت،  $dU_S = -p dV_S$ . از این رو

$$p = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S \quad (33.13)$$

بنابراین فشار نقطه صفر سیستم فرمیونها برابر است با

$$p = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S = - \frac{3}{5} N \frac{\partial \epsilon_F}{\partial V}$$

از معادله (۱۰.۱۳) داریم:  $\epsilon_F = -(2/3) \ln V + C$  بنابراین  $\partial \epsilon_F / \partial V = -2 \epsilon_F / 3V$  که نتیجه زیر را برای فشار نقطه صفر یک گاز فرمی-دیراک به دست می‌دهد

$$p = \frac{2}{5} \frac{N \epsilon_F}{V} \quad (34.13)$$

مثال ۷.۱۳ رابطه فشار یک گاز ایده‌آل را بر حسب انرژی داخلی و حجم به دست آورید.

حل: به خاطر می‌آوریم که طبق معادله (۳۳.۱۳)، فشار یک سیستم ذرات را می‌توان

با رابطه  $p = -(\partial U / \partial V)_S$  محاسبه کرد. اما  $U = \sum_i n_i E_i$  در این صورت در هر فرایند در آن تروپی ثابت، اعداد اشغال  $n_i$  باید ثابت بمانند، زیرا همان طور که در بخش ۹.۱۱ توضیح داده شد، تغییر در آن تروپی (با جذب گرمایی) به تغییری در  $n_i$ ‌ها وابسته است. به این ترتیب  $(\partial U / \partial V)_S = \sum_i n_i (\partial E_i / \partial V)$  و داریم

$$p = - \sum_i n_i \frac{\partial E_i}{\partial V} \quad (35.13)$$

با فرض اینکه گاز ایده آل از ذرات غیر برهم کنش کننده تشکیل شده است که درجهه مکعبی به ضلع  $a$  و حجم  $V = a^3$  قرار دارند، ترازهای انرژی با معادله (۱۷.۲) داده می شوند

$$E_i = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (N_x^2 + N_y^2 + N_z^2) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mV^{2/3}} (N_x^2 + N_y^2 + N_z^2)$$

که رابطه زیر را به دست می دهد

$$\frac{\partial E_i}{\partial V} = -\frac{2}{3} \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mV^{5/3}} (N_x^2 + N_y^2 + N_z^2) = -\frac{2}{3} \frac{E_i}{V}$$

با قراردادن این نتیجه در معادله (۳۵.۱۳) رابطه زیر را برای فشار سیستم ذرات غیر برهم کنش کننده به دست می آوریم

$$p = \frac{2}{3} \sum_i \frac{n_i E_i}{V} = \frac{2}{3} \frac{U}{V} \quad (36.13)$$

برای گاز ایده آلی که از آمار ماکسول-بولتزمن پیروی می کند، داریم  $U = (3/2)kNT$  و از این رو  $p = kNT/V$  که با معادله (۱۶.۱۱) سازگاری دارد. برای یک گاز ایده آل بوز-اینشتین، باید معادله (۳۱.۱۳) را برای  $U$  به کار ببریم که در این صورت همان نتیجه قبل را که در معادله (۳۲.۱۳) برای  $p$  بیان شد به دست می آوریم، برای گاز ایده آل فرمی-دیراک در صفر مطلق  $U = (3/5)N\epsilon_F$  و  $p = (2/5)N\epsilon_F/V$  که همان مقدار داده شده در معادله (۳۴.۱۳) است. در دماهای متفاوت با صفر مطلق فشار به علامت  $\alpha$  بستگی دارد. هر گاه  $\alpha$  مثبت باشد، که معمولاً در دماهای خیلی بالا چنین است، فشار یک گاز ایده آل فرمی-دیراک برابر است با

$$p = \frac{kNT}{V} \left( 1 + \frac{1}{45/2} \frac{N}{Z} - \dots \right)$$

و از این رو کمی بزرگتر از فشار گاز ایده آل کلاسیک است. هر گاه  $\alpha$  منفی باشد، که در دماهای پایین چنین است، فشار برابر است با

$$p = \frac{2}{5} \frac{N \epsilon_F}{V} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 - \dots \right]$$

### ۹.۱۳ مقایسه سه آمار

در بخش قبل دیدیم که در چگالش پایین و دماهای بالا، اثرات کوانتومی برای گازهای ایده آل نسبتاً کوچک اند. در اینجا سه آمار را مقایسه می‌کنیم تا بینیم که تا چه حدی نتایج آنها باهم قابل مقایسه است. با توجه به معادلات (۹.۱۰)، (۵.۱۳)، و (۱۴.۱۳) یعنی روابط

$$n_i = g_i e^{-\alpha - E_i/kT} \quad \text{(الف) ماکسول-بولتزمن}$$

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + E_i/kT} + 1} \quad \text{(ب) فرمی-دیراک}$$

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + E_i/kT} - 1} \quad \text{(ج) بوز-اینشتین}$$

ملاحظه می‌کنیم که این سه آمار را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{g_i}{n_i} + \delta = e^{\alpha + E_i/kT}$$

که برای آمار ماکسول-بولتزمن  $\delta = 0$ ، برای آمار فرمی-دیراک،  $\delta = -1$ ، و برای آمار بوز-اینشتین  $\delta = +1$  است. به وضوح ملاحظه می‌کنیم که اگر  $g_i/n_i \gg 1$  یا اگر  $n_i \ll g_i$  باشد (یعنی برای سیستم‌های رقیق شده) در این صورت سه آمار مزبور عملاً نتایج یکسانی را به دست می‌دهند. در دماهای بالا این امر واقعیت پیدا می‌کند (زیرا  $\alpha$  با دما افزایش می‌یابد). بنا بر این، بجز در دمای خیلی پایین، می‌توان از بیشتر اثرات آمار کوانتومی صرف نظر کرد. این موضوع، استفاده از آمار ماکسول-بولتزمن را برای بیشتر موارد تأیید می‌کند.

### مسائل

۱۰۱۳ انرژی فرمی با دما بر طبق رابطه زیر تغییر می‌کند

$$\epsilon_F(T) = \epsilon_F \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{T}{\Theta_F} \right)^2 - \dots \right\}$$

که در آن  $\epsilon_F$  مقداری در  $T = 0$  است و در جدول ۱۰۱۳ داده شده است. نشان دهید که جمله تصحیحی با تغییر ۱ درصد در انرژی فرمی در دمای  $T = \sqrt{3} \Theta_F / 5\pi$  متناظر است. این دما را برای برخی فلزات داده شده در جدول ۱۰۱۳ محاسبه کنید و نتیجه بگیرید تا چه

حدی می توان فرض کرد که انرژی فرمی میان صفر مطلق و دمای معمولی ثابت می ماند.  
 ۲۰۱۳ در فلزی که  $10^{22}$  الکترون در  $\text{cm}^3$  دارد، سرعت متوسط و انرژی متوسط الکترونها را در دمای  $0\text{K}$  به دست آورید.

۳۰۱۳ نشان دهید که تعداد فرمیونهای با سرعت بین  $v$  و  $v+dv$  در دمای  $T$  برابر است با

$$dN = \frac{4\pi V m^3}{h^3} \frac{v^2}{e^{(mv^2/2) - E_F/kT} + 1} dv$$

۴۰۱۳ نشان دهید که تعداد فرمیونهایی که مؤلفه های سرعت آنها میان  $v_x$  و  $v_x+dv_x$ ،  $v_y$  و  $v_y+dv_y$ ، و  $v_z$  و  $v_z+dv_z$  قرار دارند، برابر است با

$$dN = \frac{4\pi V m^3}{h^3} \frac{dv_x dv_y dv_z}{e^{(mv^2/2) - E_F/kT} + 1}$$

۵۰۱۳ نشان دهید که تعداد فرمیونهایی که مؤلفه سرعت آنها در طول محور  $X$  بین  $v_x$  و  $v_x+dv_x$  قرار دارد برابر است با

$$dN_x = \frac{4\pi V m^3}{h^3 kT} \ln [e^{(E_F - mv_x^2/2)/kT} + 1] dx$$

[داهنمایی: از انتگرال  $\int_0^\infty (ae^x + 1)^{-1} dx = \ln(1 + 1/a)$  استفاده کنید.]

۶۰۱۳ با استفاده از نتیجه مسئله ۵۰۱۳، معادله ریچاردسون (۱۱۰۱۳) را به دست آورید.  
 [داهنمایی: تقریب  $\ln(1+x) = x$  را برای وقتی که  $x$  کوچک است به کار برید.]

۷۰۱۳ منحنی نمایش معادله ریچاردسون-داشمن را برای گسیل گرمایونی بر حسب  $kT/e\phi$  رسم کنید. نشان دهید که در دمای  $T = e\phi/2k$  گسیل گرمایونی بیشینه است. مقدار این دما را برای برخی از فلزات داده شده در جدول ۲۰۱۳ بر آورد کنید.

۸۰۱۳ هر گاه برای تحلیل چگالی جریان گرمایونی به جای آمار فرمی-دیراک از آمار ماکسول-بولتزمن استفاده شود، رابطه زیر به دست می آید

$$j = AT^{1/2} e^{-e\phi/kT}$$

(الف) این معادله را اثبات کنید. (ب) منحنی  $j$  بر حسب  $kT/e\phi$  را رسم و با منحنی معادله ریچاردسون-داشمن مقایسه کنید. در هر دو مورد فرض کنید که  $\phi = 3\text{eV}$ . (ج) دمای  $\Theta = e\phi/k$  را برای بعضی فلزات بر آورد نموده، و معین کنید که آیا در دماهای معمولی، هر دو معادله نتایج تمیزپذیر و واضحی به دست می دهند یا خیر.

۹۰۱۳ نشان دهید که مقدار نظری ثابت  $A$  در معادله (۱۱۰۱۳) برابر  $1.20 \text{ A cm}^{-2} \text{ K}^{-2}$  است.

۱۰۰۱۳ از بحث ارائه شده در فصل ۲ در مورد پله پتانسیل، می‌دانیم که پاره‌ای از الکترونی‌هایی که به سطح فلز می‌رسند، حتی اگر انرژی آنها بیش از  $e\phi$  باشد باید به داخل فلز باز گردند. (الف) با در نظر گرفتن این اثر، معادله (۱۰۰۱۳) را اصلاح کنید. این واقعیت را توجیه کنید که مقادیر تجربی  $A$  (جدول ۲۰۱۳) کوچکتر از مقدار نظری داده شده در مسئله قبل است. (ب) ضریب بازتاب برای سزیوم و کروم را به دست آورید.

۱۱۰۱۳ برای چه مقداری از انرژی  $E$  بزرگتر از  $\varepsilon_F$ ، با تقریب ۱۰ درصد از معادله (۵۰۱۳) داریم

$$n_i = g_i e^{-(E - \varepsilon_F)/kT}$$

۱۲۰۱۳ برای انرژی‌های داده شده در مسئله ۱۱۰۱۳، به جای معادله (۹۰۱۳) می‌توان نوشت

$$N(E)dE = \frac{\lambda \pi V (\gamma m^3)^{1/2}}{h^3} E^{1/2} e^{-(E - \varepsilon_F)/kT}$$

نشان دهید که تعداد الکترونی‌های در یکای حجم با انرژی‌های مساوی یا بزرگتر از مقدار مشخص  $E_0 > \varepsilon_F$  برابر است با

$$\frac{\lambda \pi V (\gamma m^3)}{h^3} e^{\varepsilon_F/kT} kT \times \left\{ (\pi kT)^{1/2} \left[ \frac{1}{2} - \operatorname{erf} \frac{E_0}{kT} \right] + E_0^{1/2} e^{-E_0/kT} \right\}$$

[دانهمایی: مسئله ۲۱۰۱۰ را ببینید.]

۱۳۰۱۳ با استفاده از نتیجه مسئله ۱۲۰۱۳، برای فلزی با  $\varepsilon_F = 2.00 \text{ eV}$ ،  $\phi = 3.00 \text{ eV}$ ، نسبت تعداد الکترونی‌های در یکای حجم که انرژی آنها مساوی یا بزرگتر از تابع کار در دمای معمولی است را با تعداد آنها در دمای  $1000 \text{ K}$  به دست آورید. [دانهمایی: مسئله ۱۱۰۱۳ را ببینید.]

۱۴۰۱۳ در میدان تابش جسم سیاه در  $300 \text{ K}$  تعداد فوتونی‌های در متر مکعب با بسامد میان  $\nu_{\max}$  و  $1.05 \nu_{\max}$  را به دست آورید. با قاعده چگالی انرژی متناظر است.

۱۵۰۱۳ فرض کنید فوتونها همانند نوسانگرهای کلاسیک با انرژی متوسط  $kT$  رفتار می‌کنند. توزیع چگالی انرژی را به دست آورید. این قانون ریلی-جینز است که در مسئله ۹۰۱ بدان اشاره شده است. چرا وقتی تقریب بسامد کم را در قانون تابش پلانک در نظر می‌گیریم، این فرض توزیع انرژی یکسانی را نتیجه می‌دهد؟

۱۶۰۱۳ فرض کنید که فوتونها از آمار ماکسول-بولتزمن پیروی می‌کنند. توزیع چگالی انرژی را به دست آورید. این قانون وین است که در مسئله ۹۰۱ بدان اشاره شده است. چرا وقتی تقریب بسامد زیاد را در قانون تابش پلانک در نظر می‌گیریم، این فرض توزیع انرژی

یکسانی را نتیجه می‌دهد؟

۱۷.۱۳ با استفاده از جدول ۳.۱۳، بیشینه بسامد و کمینه طول موج فوتونها را در ژرمانیوم و الماس به دست آورید. سپس با طول موج نوترونها در دمای معمولی (۳۰۰ K) مقایسه کنید.

۱۸.۱۳ نسبت احتمال گسیل خود به خود به احتمال گسیل القایی در ۳۰۰ K را برای موارد زیر تعیین کنید. (الف) ناحیه میکروموج  $10^{12} \text{ Hz} \approx \nu$  و (ب) ناحیه اپتیکی  $10^{15} \text{ Hz} \approx \nu$

۱۹.۱۳ نشان دهید که در دماهایی که در مقایسه با  $\Theta_D$  خیلی کوچک اند، رابطه دبی برای ظرفیت گرمایی برابر است با

$$C_V = \frac{12}{5} R \pi^2 \left( \frac{T}{\Theta_D} \right)^3$$

بستگی  $C_V$  به  $T^3$  در دماهای پایین از طریق تجربه اثبات شده است. [داهنمایی: در معادله (۲۸.۱۳) قرار دهید  $x = \Theta_D/T$  و توجه کنید که حد بالا را می‌توان مساوی با بینهایت قرار داد.]

۲۰.۱۳ با استفاده از داده‌های تجربی ارائه شده در جدول زیر برای نیکل و نقره، دمای دبی آنها را تعیین کنید. جرمهای اتمی به ترتیب برابر ۵۹ و ۱۰۸ و چگالیها نیز برابر  $8.9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  و  $1.05 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$  هستند.

cal mol <sup>-1</sup> , C <sub>V</sub> K <sup>-1</sup>		K <sub>D</sub> T
Ag	Ni	
۰.۲۰۰۰۱۳	۰.۲۰۰۰۴۱	۲
۰.۲۰۰۰۲۴	۰.۲۰۰۰۸۰	۴
۰.۲۰۰۰۸۹	۰.۲۰۰۱۳۲	۶
۰.۲۰۰۲۴۲	۰.۲۰۰۱۸۶	۸
۰.۲۰۰۴۷۸	۰.۲۰۰۲۳۸	۱۰
۰.۲۰۰۸۳۰	۰.۲۰۰۳۰۴	۱۲
۰.۲۰۱۳۴	۰.۲۰۰۳۷۹	۱۴
۰.۲۰۲۰۱	۰.۲۰۰۴۸۳	۱۶



۲۱۰۱۳ با استفاده از نمودار شکل ۹.۱۳، ظرفیت گرمایی در دمای معمولی را برای (الف) سدیم، (ب) طلا، (ج) مس، و (د) الماس برآورد و با مقادیر تجربی مقایسه کنید.

۲۲۰۱۳ (الف) سیستمی متشکل از  $N$  نوسانگر هماهنگ با بسامد  $\nu$  را در نظر می‌گیریم که از آمار ماکسول-بولتزمن پیروی می‌کنند. ظرفیت گرمایی سیستم در حجم ثابت را به دست آورید. (ب) این مدل را اینشتین در اولین تلاش خود برای استفاده از روشهای آماری در توضیح ظرفیت گرمایی جامدات به کار برده است. با معرفی ثابت  $\Theta_E = \hbar\nu/k$ ،  $C_V$  را بر حسب  $\Theta_E/T$  بیان و با رابطه  $C_V$  در نظریه دیبی مقایسه کنید. نحوه تفکیک این نظریه‌ها را تحلیل کنید. [دانه‌مایی: نظریه اینشتین به این دلیل کنار گذاشته شد که غیرممکن بود مقدار  $\Theta_E$ ی به دست آمده برای هر ماده بتواند با نتایج تجربی در دو دمای بالا و پایین سازگاری داشته باشد].

۲۳۰۱۳ نشان دهید که ظرفیت گرمایی در حجم ثابت برای یک گاز ایده‌آل بوز-اینشتین با رابطه زیر داده می‌شود

$$C_V = \frac{3}{2}R \left[ 1 + \frac{1}{2^{3/2}} \left( \frac{N}{Z} \right) + \frac{1}{3^{3/2}} \left( \frac{N}{Z} \right)^2 + \dots \right]$$

که در آن  $Z$  با معادله (۳۸.۱۰) داده می‌شود. در دمای معمولی و فشار ۱ atm تأثیر تبهگنی گاز بر ظرفیت گرمایی هلیوم را برآورد کنید.

۲۴۰۱۳ نشان دهید که ظرفیت گرمایی در حجم ثابت برای یک گاز ایده‌آل فرمی-دیراک با رابطه زیر داده می‌شود

$$C_V = \frac{1}{2}R\pi^2 \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right) \left[ 1 - \frac{3\pi^2}{10} \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right]$$

به کمک این نتیجه، ظرفیت گرمایی ناشی از الکترونهای آزاد در یک فلز را برآورد کنید. ثابت کنید که، بجز در دماهای خیلی پایین، ظرفیت گرمایی الکترونی در مقایسه با ظرفیت گرمایی شبکه‌ای که با نظریه دیبی داده می‌شود قابل چشمپوشی است.

۲۵۰۱۳ نشان دهید دمای که در آن، ظرفیتهای گرمایی شبکه‌ای و الکترونی باهم مساوی هستند برابر است با

$$T_e = \left( \frac{5\Theta_D^2}{22\pi^2\Theta_F} \right)^{1/2}$$

این دما را برای برخی فلزات برآورد کنید. نشان دهید که در دماهای پایینتر از مقدار  $T_e$ ، ظرفیت گرمایی الکترونی بزرگتر از ظرفیت گرمایی شبکه‌ای است، در حالی که برای دماهای

بزرگتر از  $T_e$  عکس آن صادق است. [داهنمایی: از نتیجه مسئله‌های ۱۹.۱۳ و ۲۴.۱۳ استفاده کنید.]

۲۶.۱۳ به کمک رابطه داده شده در مسئله ۲۴.۱۳ برای ظرفیت گرمایی یسک گاز ایده آل فرمی-دیراک، نشان دهید که در  $\epsilon_F/kT \ll 1$  آنروپی گاز برابر است با

$$S = \left( \frac{NR\pi^2}{2} \right) \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right) \times \left[ 1 - \left( \frac{\pi^2}{15} \right) \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right]$$

۲۷.۱۳ در فشار و دمای متعارف مقدار  $N/Z$  را برای  $N_2$  برآورد کنید، که در آن  $Z$  تابع پارش کلاسیک است. در رابطه (۳۲.۱۳) برای فشار یک گاز بوز-اینشتین، اثر نسبی جمله تبهگنی گاز را تعیین کنید. ضمناً تأثیر این اثر نسبی را بر ظرفیت گرمایی این گاز به دست آورید (مسئله ۲۳.۱۳).

۲۸.۱۳ فشار نقطه صفر گاز الکترونی در یک فلز را برآورد کنید. با در نظر گرفتن مقدار به دست آمده، توضیح دهید که چگونه الکترونها در داخل فلز باقی می‌مانند.

۲۹.۱۳ نشان دهید که آنروپی سیستم ذرات در آمار کوانتومی با رابطه زیر داده می‌شود

$$S = \frac{U}{T} + \alpha kN \pm k \sum_i g_i \ln(1 \pm e^{-\alpha - E_i/kT})$$

که در آن علامت مثبت (منفی) با آمار فرمی-دیراک (بوز-اینشتین) متناظر است. ضمناً نشان دهید اگر  $\alpha$  خیلی کوچک باشد، در هر دو مورد رابطه مربوط به  $S$  به معادله (۲۸.۱۱) خلاصه می‌شود. داهنمایی: ابتدا با استفاده از معادله (۳.۱۳) یا (۱۳.۱۳) نشان دهید که

$$\ln P = \sum_i \pm g_i \left[ \left( 1 \pm \frac{n_i}{g_i} \right) \ln \left( 1 \pm \frac{n_i}{g_i} \right) \pm \left( \frac{n_i}{g_i} \right) \ln \left( \frac{n_i}{g_i} \right) \right]$$

۳۰.۱۳ در آمار کوانتومی، تابع پارش به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Z_q = \pm \sum_i g_i \ln(1 \pm e^{-\alpha - E_i/kT})$$

که در آن علامت مثبت (منفی) به آمار فرمی-دیراک (بوز-اینشتین) مربوط می‌شود. نشان دهید که تعداد کل ذرات، انرژی کل، و آنروپی با روابط زیر داده می‌شوند

$$N = - \left( \frac{\partial Z_q}{\partial \alpha} \right)_T$$

$$U = kT^2 \left( \frac{\partial Z_q}{\partial T} \right)_\alpha$$

$$S = kT \left( \frac{\partial Z_q}{\partial T} \right)_\alpha + \alpha kN + kZ_q$$

[داهنمایی: برای رابطه آخر، به رابطه  $S$  در مسئله ۲۹.۱۳ رجوع کنید].

۳۱.۱۳ نشان دهید که وقتی  $\alpha$  خیلی کوچک است،  $Z_q = e^{-\alpha} Z$  که در آن  $Z_q$  تابع پارش کوانتومی است که در مسئله ۳۰.۱۳ تعریف شده و  $Z$  تابع پارش کلاسیک تعریف شده در معادله (۲۲.۱۵) است. ضمناً نشان دهید که اولین رابطه در مسئله ۳۰.۱۳ به یک اتحاد و دومین و سومین رابطه به ترتیب به معادلات (۲۴.۱۵) و (۲۸.۱۱) خلاصه می‌شوند.

۳۲.۱۳ نشان دهید که تابع پارش یک گاز فوتونی برابر است با

$$Z = \left( \frac{8\pi^5 V}{45} \right) \left( \frac{kT}{hc} \right)^3$$

سپس نشان دهید که انرژی کل یک گاز فوتونی مساوی با

$$U = \left( \frac{8\pi^5 V}{15} \right) \frac{(kT)^4}{(hc)^3}$$

و آنتروپی نیز مساوی با  $S = 4U/3T$  است. [داهنمایی: توجه کنید که  $\int_0^\infty x^2 \ln(1 - e^{-x}) dx = -\pi^4/15$  از روابط مسئله ۳۰.۱۳ استفاده کنید].

## مراجع

1. "Thermodynamics and Quanta in Planck's Work," M. Klein, *Physics Today*, November 1966, page 23.
2. "Evolution of Masers and Lasers," B. Lengyel, *Am. J. Phys.*, 34, 903 (1966).
3. "Resource Letter MOP-1 on Masers and on Optical Pumping," H. Moos, *Am. J. Phys.* 32, 589 (1964).
4. *Statistical Thermodynamics*, E. Schrödinger, Cambridge, Cambridge University Press, 1964, Chapter 13.
5. *Statistical Physics*, G. Wannier. New York: John Wiley, 1966, Part I.
6. *Fundamentals of Statistical Thermodynamics*, R. Sonntag and G. Van Wylen, New York: John Wiley, 1966 Chapters, 7, 8, and 11.
7. *The Feynman Lectures in Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass. Addison-Wesley, 1963 Chapters 41 and 42.

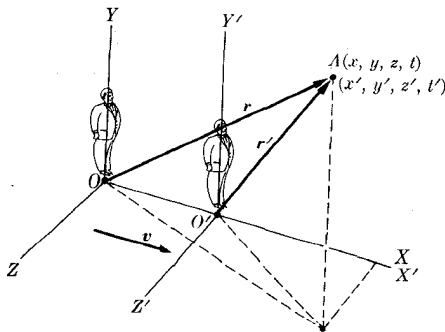
## پیوستها

- یادداشت‌های تکمیلی
- جدول یکاها و نمادها
- جدول تناوبی عناصر
- جدول ثابت‌های اساسی
- جدول ضرایب تبدیل
- جدول توابع مثلثاتی
- جدول نکاریم
- جدول توابع نمایی

# یادداشتهای تکمیلی

## ۱. مکانیک نسبیتی

دو ناظر لخت  $O$  و  $O'$  در حرکت نسبی را در نظر می‌گیریم. هر گاه  $v$  سرعت  $O'$  نسبت به  $O$  باشد، سرعت  $O$  نسبت به  $O'$  مساوی  $-v$  است. سیستمهای  $XYZ$  و  $X'Y'Z'$  به ترتیب متصل به  $O$  و  $O'$  را چنان رسم می‌کنیم که محورهای  $X$  و  $X'$  موازی با سرعت نسبی  $v$  و محورهای  $Y$  و  $Y'$  موازی با یکدیگر باشند. در این صورت محورهای  $Z$  و  $Z'$  نیز موازی می‌شوند (شکل پ.۱).



شکل پ.۱ چارچوبهای مرجع در حرکت انتقالی نسبی یکنواخت.

فرض کنیم وقتی  $O$  و  $O'$  بر یکدیگر منطبق اند یک سیگنال نوری در مبدأ مشترک تولید شود. اگر  $c$  سرعت نور در خلأ باشد که توسط  $O$  اندازه گیری می شود، بعد از گذشت زمان  $t$  ناظر  $O$  مشاهده می کند که جبهه موج سیگنال کره ای است به شعاع  $r$ ، به گونه ای که وقتی موج به نقطه  $A$  می رسد، باید داشته باشیم:  $r = ct$  یا چون

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

در این صورت

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (پ.۱)$$

این يك اصل اساسی پذیرفته شده است که سرعت نور برای تمام ناظرهای لخت یکسان است. شالوده تجربی این گفته در آزمایشهای مسایکلسون و مورلی نهفته است. این آزمایشگران سرعت نور را نسبت به زمین در راستاهای مختلف اندازه گیری کردند و بدون توجه به راستای انتشار، نتیجه یکسانی به دست آوردند. بنابراین، اگر ناظر  $O'$  نیز سرعت نور را در تمام راستاها  $c$  اندازه بگیرد (به گونه ای که برای  $O'$  نیز جبهه موج سیگنال يك کره باشد)، وقتی موج نوری به نقطه  $A$  می رسد، باید داشته باشد  $r' = ct'$  یا

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad (پ.۲)$$

توجه کنید که ناظر  $O'$  نه تنها برای نقطه  $A$  مختصات فضایی متفاوتی را نسبت به آنچه ناظر  $O$  برای این نقطه اندازه گیری می کند، به دست می آورد، بلکه برای او زمان رسیدن سیگنال نور به نقطه  $A$  نیز با زمان اندازه گیری شده توسط  $O$  تفاوت دارد. فرض چنین شرطی برای آنکه سرعت نور برای هر دو ناظر یکسان باشد ضروری است.

اکنون باید تبدیلی را به دست آوریم که کمیت های اندازه گیری شده  $(x, y, z, t)$  و  $(x', y', z', t')$  توسط دو ناظر  $O$  و  $O'$  را به یکدیگر مربوط کند و تغییر مکان فضایی و بازه زمانی دو رویداد زیر را به دست دهد: (۱) گسیل يك سیگنال نور در زمانی که  $O$  و  $O'$  بر هم منطبق اند و (۲) رسیدن آن به نقطه  $A$  به گونه ای که هر دو مجموعه از کمیتها به ترتیب در معادلات (پ.۱) و (پ.۲) صدق کنند. تقارن مسئله ایجاب می کند که داشته باشیم  $y' = y$  و  $z' = z$ . ضمناً چون برای ناظر  $O$  داریم  $OO' = vt$  باید به ازای  $x' = 0$  (نقطه  $O'$ ) داشته باشیم  $x = vt$ . بنا بر این  $x' = k(x - vt)$  که در آن  $k$  ثابتی است که باید تعیین شود. چون  $t'$  با  $t$  تفاوت دارد، می توان فرض کرد که  $t' = a(t - bx)$  که در آن  $a$  و  $b$  نیز ثابت هایی هستند که باید تعیین شوند (در تبدیل گالیله داریم،  $k = a = 1$  و  $b = 0$ ). با قرار دادن این مقادیر در معادله (پ.۲) خواهیم داشت

$$k^2(x^2 - 2vxt + v^2t^2) + y^2 + z^2 = c^2a^2(t^2 - 2bxt + b^2x^2)$$

یا اگر جملات را مرتب کنیم

$$(k^2 - b^2 a^2 c^2) x^2 - 2(k^2 v - b a^2 c^2) x t + y^2 + z^2 = \left( a^2 - \frac{k^2 v^2}{c^2} \right) c^2 t^2$$

اما این معادله باید با معادله (پ.۱) یکسان باشد، بنابراین

$$k^2 - b^2 a^2 c^2 = 1, \quad k^2 v - b a^2 c^2 = 0, \quad a^2 - \frac{k^2 v^2}{c^2} = 1$$

از حل این سه معادله، مقادیر  $k$ ،  $a$ ، و  $b$  را به صورت زیر به دست خواهیم آورد

$$k = a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{و} \quad b = \frac{v}{c^2} \quad (\text{پ.۳})$$

لذا تبدیلی که با نوردایی سرعت نور سازگاری دارد چنین است

$$\begin{aligned} x' &= \frac{(x - vt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{(t - vx/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (\text{پ.۴})$$

این مجموعه از روابط، تبدیل لورنتس نام دارد. به دلیل رابطه‌ای که میان معادلات (پ.۱) و (پ.۲) ایجاد شده است، می‌گوییم که در تبدیل لورنتس وقتی از سیستم  $x y z t$  به سیستم متفاوت  $x' y' z' t'$  می‌رویم، معادله درجه دوم  $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$  ناوردا باقی می‌ماند. به ازای  $v \ll c$  تبدیل لورنتس به تبدیل گالیله تبدیل می‌شود. هر گاه  $m_0$  جرم زره‌ای باشد که نسبت به یک ناظر در حالت سکون قرار دارد، تکانه زره وقتی نسبت به همان ناظر با سرعت  $v$  در حرکت است برابر است با

$$\mathbf{p} = k m_0 \mathbf{v} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m \mathbf{v} \quad (\text{پ.۵})$$

که در آن

$$m = k m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{پ.۶})$$

جرم مؤثر زره نسبت به ناظر است. به ازای  $v \ll c$  رابطه (پ.۵) به رابطه ناسنسیتی تکانه

تبدیل می‌شود.

نیروی وارد بر ذره به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

برای محاسبه انرژی جنبشی ذره، با توجه به  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  و  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = v dv$  چنین

داریم

$$\begin{aligned} E_k &= \int_0^v \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^v \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^v \mathbf{v} \cdot d \left( \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \end{aligned}$$

با انتگرالگیری پاره‌ای خواهیم داشت

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \int_0^v \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - m_0 c^2 \end{aligned}$$

از ترکیب دو جمله اول با یک مخرج مشترک می‌توان نوشت

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 = (m - m_0) c^2 \quad (۷.پ)$$

بنابراین می‌توان گفت که به دلیل وابستگی جرم به سرعت طبق معادله (۶.پ)، بهره در انرژی جنبشی یک ذره را می‌توان به صورت بهره در جرم  $\Delta m = m - m_0$  در نظر گرفت. این تغییر را می‌توانیم تعمیم دهیم و به هر تغییر در انرژی  $\Delta E$  یک سیستم ذرات، تغییری در جرم  $\Delta m$  وابسته کنیم. این دو تغییر با رابطه زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند

$$\Delta E = (\Delta m) c^2 \quad (۸.پ)$$

کمیت  $m_0 c^2$  انرژی سکون ذره نام دارد و کمیت زیر انرژی کل ذره است.

$$E = E_k + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc^2 \quad (۹.پ)$$

انرژی کل ذره، که در اینجا تعریف شد، شامل انرژی جنبشی و انرژی سکون است ولی



انرژی پتانسیل را شامل نمی‌شود.

از ترکیب معادلات (پ.۵) و (پ.۹) مشاهده می‌کنیم که

$$v = \frac{c^2 p}{E} \quad (پ.۱۰)$$

با استفاده از معادله (پ.۵) برای حذف  $v$  در معادله (پ.۱۰) داریم

$$E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} \quad (پ.۱۱)$$

چون  $E_k = E - m_0 c^2 = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} - m_0 c^2$  است، وقتی سرعت در مقایسه با  $c$  (یا وقتی  $p$  در مقایسه با  $m_0 c$ ) کوچک است خواهیم داشت

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 p^2 + \frac{3}{8} \frac{p^4}{m_0^3 c^2} + \dots \quad (پ.۱۲)$$

که به‌ازای  $p \ll m_0 c$  به فرمول نسبیتی  $E_k = p^2 / 2m_0$  تبدیل می‌شود. يك حالت مخصوص و جالب توجه هنگامی رخ می‌دهد که جرم سکون ذره صفر است ( $m_0 = 0$ )، که در مورد فوتون و نوترینو صدق می‌کند. در این صورت معادله (پ.۱۱) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$E = cp \quad \text{یا} \quad p = \frac{E}{c} \quad (پ.۱۳)$$

با قرار دادن این رابطه در معادله (پ.۱۰) رابطه  $v = c$  حاصل می‌شود. لذا ذره با جرم سکون صفر فقط می‌تواند با سرعت نور حرکت کند و هرگز نمی‌تواند در يك سیستم لخت در حال سکون باشد.

معادله (پ.۱۱) را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2$$

چون  $p$  يك کمیت برداری و مؤلفه‌های آن نسبت به چارچوب  $XYZ$  (چارچوب ناظر  $O$ ) برابر  $p_x$ ،  $p_y$ ، و  $p_z$  است، لذا به‌جای رابطه بالا می‌توان چنین نوشت

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 \quad (پ.۱۴)$$

نسبت به ناظر  $O'$  که با سرعت  $v$  نسبت به  $O$  در حرکت است، باید چنین نوشت

$$p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2 - \frac{E'^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 \quad (پ.۱۵)$$

تشابه معادلات (پ.۱۴) و (پ.۱۵) با معادلات (پ.۱) و (پ.۲) اقتضا می‌کند که داشته باشیم

$$p_x \rightarrow x, \quad p_y \rightarrow y, \quad p_z \rightarrow z, \quad ct \rightarrow E/c$$

در تبدیل لورنتس (پ.۴) روابط زیر را برای مختصات فضایی و زمانی تشکیل می‌دهیم تا تبدیل تکانه و انرژی به‌دست آید، یعنی

$$p'_x = \frac{(p_x - vE/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$p'_y = p_y \quad (\text{پ.۱۶})$$

$$p'_z = p_z$$

$$E' = \frac{(E - vp_x)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

هرگاه سیستمی متشکل از ذرات غیر برهم کنش کننده در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم تکانه کل سیستم را به‌صورت  $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$  و انرژی کل را به‌صورت زیر بنویسیم

$$E = \sum_i m_i c^2 = M c^2$$

که در آن  $M = \sum_i m_i$ . اگرچه در دینامیک نسبیتی تعریف مرکز جرم غیرممکن است، اما می‌توانیم سرعت مرکز جرم یا سرعت سیستم  $v_c$  را برطبق رابطه (پ.۱۵) با معادله زیر تعریف کنیم

$$v_c = \frac{c^2 \mathbf{P}}{E} = \frac{\mathbf{P}}{M} \quad (\text{پ.۱۷})$$

در چارچوب مرجعی که با سرعت  $v_c$  نسبت به  $O$  در حرکت است، تکانه کل سیستم صفر است (این سیستم را چارچوب مرجع تکانه صفر یا چارچوب مرجع  $C$  نامند). این بیان را می‌توان به‌صورت زیر اثبات کرد: فرض کنید که ناظر  $O'$  با سرعت  $v$  نسبت به  $O$  در راستای موازی با  $\mathbf{P}$  حرکت می‌کند. در این صورت، طبق قرارداد نحوه گزینش محوره‌های مختصات، داریم  $P_x = P$ ،  $P_y = P_z = 0$  و  $P'_x = P'$  و  $P'_y = P'_z = 0$ . لذا از رابطه اول معادله (پ.۱۶) نتیجه می‌شود

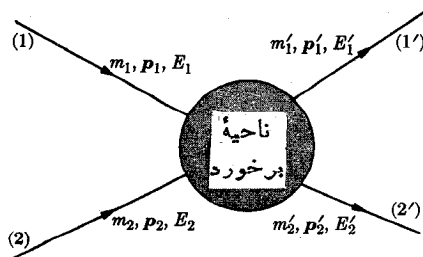
$$P' = k \left( \frac{P - vE}{c^2} \right) \quad (\text{پ.۱۸})$$

هر گاه ناظر  $O'$  در چارچوب  $C$  باشد، از نظر او باید  $P' = 0$  و از اینجا نتیجه می گیریم که  $v = c\sqrt{P/E}$  که مساوی با سرعت  $v$  در معادله (پ.۱۷) است.

## ۲. برخوردها

در يك سیستم از ذرات منزوی (یعنی سیستم ذراتی که تحت تأثیر هیچگونه نیرو یا کنش خارجی قرار ندارد)، تکانه و انرژی کل، در يك چارچوب مرجع لخت، ثابت می ماند. این دو قانون پایستگی از هم مستقل نیستند، زیرا با توجه به تبدیل لورنتس معادله (پ.۱۶) برای انرژی و تکانه، پایستگی تکانه در تمام چارچوبهای لخت، پایستگی انرژی را نیز ایجاب می کند. اکنون این قوانین پایستگی را برای تحلیل برخوردها به کار می بریم. وقتی دو ذره به یکدیگر نزدیک می شوند، برهم کنش متقابل آنها موجب تغییر حرکت آنها و بنابراین باعث تبادل انرژی و تکانه میان آنها می شود. در این صورت گفته می شود که برخوردی روی داده است. در بعضی برخوردها (نظیر واکنشهای هسته ای و شیمیایی)، ذرات نهایی با ذرات اولیه تفاوت دارند. هنگامی که ذرات اولیه و نهایی یکسان باشند، برخورد را پراکندگی نامند.

معمولاً در هر آزمایش برخورد، به حرکت ذرات در قبل از برخورد آگاهی داریم، زیرا چنین حرکتی بستگی به این دارو که چگونه آزمایش آماده شده است. مثلاً، يك ذره ممکن است پروتون یا الکترونی باشد که در شتابدهنده الکتروستاتیکی شتاب گرفته است و ذره دیگر می تواند اتمی باشد که در آزمایشگاه عملاً در وضع سکون قرار دارد. در این صورت حالت نهایی، یعنی حرکت دو ذره در نقاط دور از ناحیه برخورد (شکل پ.۲)، را در نظر می گیریم. از طرف دیگر، هر گاه نیروهای میان ذرات را بشناسیم، تا هنگامی که از حالت اولیه آگاهی داشته باشیم، می توانیم حالت نهایی را پیش بینی کنیم. به این ترتیب، تحلیل آزمایشهای برخورد می تواند اطلاعات با ارزشی را در باره برهم کنش میان ذرات برهم کنش کننده فراهم سازد. این یکی از دلایلی است که چرا آزمایشهای برخورد این همه مورد توجه فیزیکدانان است. چون فقط نیروهای داخلی در برخورد نقش دارند، تکانه و انرژی کل هر دو پایسته اند.



شکل پ.۲. تکانه و انرژی کل در تمام برخوردها پایسته اند.

هر گاه  $p_1$  و  $p_2$  تکانه هر ذره قبل از برخورد و  $p'_1$  و  $p'_2$  تکانه پس از برخورد باشد، پایستگی تکانه ایجاب می کند که

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 \quad (\text{پ. } ۱۹)$$

و پایستگی انرژی

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2 \quad (\text{پ. } ۲۰)$$

که در آن هر انرژی با معادله (پ. ۱۱) داده می شود، به گونه ای که می توان نوشت

$$c\sqrt{m_1^2 c^2 + p_1^2} + c\sqrt{m_2^2 c^2 + p_2^2} = c\sqrt{m_1^2 c^2 + p_1'^2} + c\sqrt{m_2^2 c^2 + p_2'^2} \quad (\text{پ. } ۲۱)$$

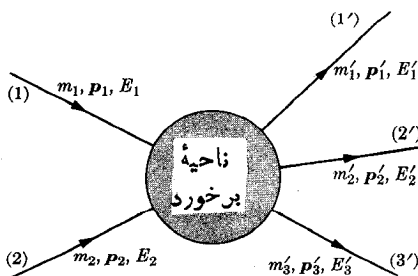
با تغییرات مناسب در معادلات (پ. ۱۹) و (پ. ۲۰) می توان تکانه های نهایی ذرات را بر حسب تکانه های اولیه به دست آوریم. ولی معمولاً عملیات جبری آن نسبتاً پیچیده است. با توجه به رابطه  $E = E_k + m_0 c^2$  که در آن  $E_k$  انرژی جنبشی است، به جای معادله (پ. ۲۰) می توان نوشت

$$E_{k1} + m_1 c^2 + E_{k2} + m_2 c^2 = E'_{k1} + m_1 c^2 + E'_{k2} + m_2 c^2$$

کمیت  $Q$  را به صورت تغییر در انرژی جنبشی در حین برخورد تعریف می کنیم

$$Q = (E'_{k1} + E'_{k2}) - (E_{k1} + E_{k2}) = (m_1 + m_2 - m'_1 - m'_2) c^2 \quad (\text{پ. } ۲۲)$$

بنابراین  $Q$  نیز مساوی با تغییر در انرژیهای سکون در حین برخورد است. به ازای  $Q = 0$  انرژی جنبشی در برخورد پایسته است و برخورد را کشسان می گویند. برای  $Q < 0$  کاهش در انرژی جنبشی (یا افزایش در جرم) حاصل می شود و برخورد را ناکشسان نوع اول یا انرژی گپو می نامند. بالاخره برای  $Q > 0$ ، افزایش در انرژی جنبشی ذرات (یا کاهش در جرم) وجود خواهد داشت و برخورد ناکشسان نوع دوم یا انرژی زا نام دارد. وقتی بیش از دو ذره در یک برخورد ایجاد شوند (شکل پ. ۳) تعاریف فوق به صورت زیر درمی آیند



شکل پ. ۳ تکانه و انرژی پایسته اند، حتی اگر تعداد ذرات ثابت نباشد.

$$Q = (\sum E_k)_{\text{نهایی}} - (\sum E_k)_{\text{اولیه}} = [(\sum m_i)_{\text{نهایی}} - (\sum m_i)_{\text{اولیه}}] c^2 \quad (۲۳.پ)$$

در حالت  $Q < 0$  يك حداقل انرژی جنبشی آستانه برای ذرات ورودی مورد نیاز است تا برخورد صورت گیرد یا «راه بیفتد». با در نظر گرفتن این واقعیت که ذرات حاصل همگی در چارچوب  $C$  در حال سکون اند، می‌توان انرژی جنبشی آستانه را در چارچوب  $L$  (یا چارچوب آزمایشگاه) محاسبه کرد. رابطه انرژی جنبشی آستانه را در مثال ۳.۹ محاسبه کردیم.

برای واکنشهای هسته‌ای در انرژیهای نسبتاً پایین، تمام ذرات را می‌توان (به‌طور کلی) به‌صورت ناسبیتی در نظر گرفت، به‌گونه‌ای که  $E_k = p^2/2m$ . در اینجا حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن يك پرتابه به‌جرم  $m_1$  و تکانه  $p_1$  به‌هسته‌ای به‌جرم سکون  $m_2$  که در آزمایشگاه در حال سکون قرار دارد ( $p_2 = 0$ )، هدف نامیده می‌شود، برخورد می‌کند. [شکل پ.۴ (الف)]. پس از برخورد، ذرات حاصل مطابق شکل پ.۴ (ب) حرکت می‌کنند. پایستگی تکانه رابطه  $p_1 = p'_1 + p'_2$  یا  $p'_2 = p_1 - p'_1$  را به‌دست می‌دهد. بنا بر این

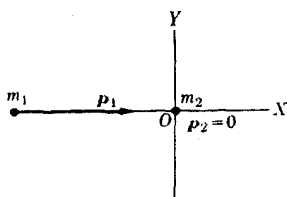
$$p_1'^2 = (p_1 - p'_1)^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1 p'_1 \cos \theta$$

با استفاده از تعریف (پ.۲۲) برای  $Q$  خواهیم داشت

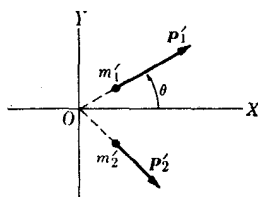
$$\begin{aligned} Q &= \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} - \frac{p_1^2}{2m_1} \\ &= \frac{p_1'^2}{2m_1} - \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} (p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1 p'_1 \cos \theta) \end{aligned}$$

یا

$$Q = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_1'^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} \right) p_1^2 - \frac{p_1 p'_1}{m_2} \cos \theta$$



(الف) قبل



(ب) بعد

شکل پ.۴. رابطه میان تکانه‌ها نسبت به چارچوب  $L$  قبل و پس از برخورد.

با توجه به رابطه  $E_k = p^2/2m$  می‌توان نتیجه فوق را به صورت زیر بیان کرد

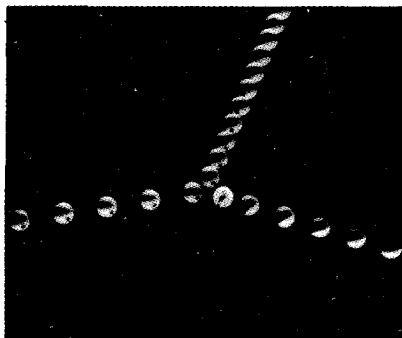
$$Q = E_{k_1} \left(1 + \frac{m_1'}{m_2'}\right) - E_{k_1} \left(1 - \frac{m_1}{m_2'}\right) - 2 \frac{\sqrt{m_1 m_1' E_{k_1} E_{k_1'}}}{m_2'} \cos \theta \quad (24.پ)$$

این نتیجه، کسه معادله  $Q$  نام دارد، کاربردهای فراوانی در فیزیک هسته‌ای دارد. وقتی برخورد کشان ( $Q=0$ ) و تمام ذرات یکسان باشند،  $m_1 = m_1' = m_2 = m_2'$ ، پایستگی انرژی رابطه  $p_1'^2 + p_2'^2 = p_1^2 + p_2^2$  را نتیجه می‌دهد در حالی که از پایستگی تکانه یعنی از رابطه  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2'$  خواهیم داشت  $p_1^2 + p_2^2 + 2\mathbf{p}_1' \cdot \mathbf{p}_2' = p_1'^2 + p_2'^2 + 2\mathbf{p}_1' \cdot \mathbf{p}_2'$  از ترکیب این نتایج، نتیجه می‌شود  $\mathbf{p}_1' \cdot \mathbf{p}_2' = 0$  یا  $\mathbf{p}_1' \cdot \mathbf{p}_2' = 0$  بر  $\mathbf{p}_2'$  عمود است. از این رو، در چارچوب  $L$  دو ذره پس از برخورد تحت زوایای قائمه حرکت می‌کنند. این موضوع را می‌توان در شکل پ.۵ (الف) مشاهده کرد کسه برخورد دو گلوله بیلیارد را که یکی از آنها در ابتدا ساکن است، نشان می‌دهد. شکل پ.۵ (ب) برخورد دو هسته هلیوم را در اتاقک ابر نشان می‌دهد. هسته هلیوم ورودی ذره آلفای حاصل از یک ماده پرتوزا و هسته هلیوم هدف گاز داخل اتاقک است. در هر دو مورد، پس از برخورد دو ذره تحت زوایای قائمه حرکت می‌کنند.

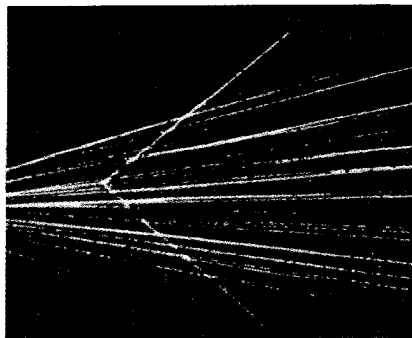
مورد جالب دیگر فرایند گیراندازی است که در آن ذره‌ای به جرم  $m_1$  و تکانه  $\mathbf{p}_1$  با ذره ساکنی به جرم  $m_2$  برخورد می‌کند و ذره سومی به جرم  $M$  حاصل می‌شود. لذا  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_M$  و  $Q = E_{kM} - E_{k_1}$ ، اما

$$E_{kM} = \frac{p_M^2}{2M} = \frac{p_1^2}{2M} = E_{k_1} \left(\frac{m_1}{M}\right)$$

از این رو،



(الف)



(ب)

شکل پ.۵ (الف) برخورد دو گلوله بیلیارد یکسان. (ب) برخورد دو ذره آلفا. در هر دو حالت، یکی از ذرات در آغاز در چارچوب  $L$  در حال سکون قرار دارد. تکانه‌های آنها پس از برخورد در چارچوب  $L$  زاویه  $90^\circ$  تشکیل می‌دهند.

$$Q = -E_{k1} \left(1 - \frac{m_1}{M}\right) \quad (\text{پ. ۲۵})$$

کمیت  $Q$  - انرژی برانگیختگی ذره محصول نظیر انرژی برانگیختگی هسته مرکب در يك واکنش هسته‌ای است. در اکثر موارد داریم  $M \approx m_1 + m_2$  و بنا بر این

$$Q = -E_{k1} \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{پ. ۲۶})$$

عکس فرایند گیراندازی، که انفجار نام دارد، هنگامی روی می‌دهد که ذره به دو پاره یا بیشتر منفجر یا واپاشیده شود. مثلاً این فرایند هنگامی رخ می‌دهد که نارنجکی منفجر می‌شود، یا ذره‌ای به چند ذره دیگر واپاشیده می‌شود، و یا در هسته‌ای فرایند شکافت به وقوع می‌پیوندد. موردی را در نظر می‌گیریم که در آن ذره  $m$  در آغاز در چارچوب  $L$ ، که بر چارچوب  $C$  منطبق است، در حال سکون قرار دارد. اگر ذره به دو پاره به جرم‌های  $m_1$  و  $m_2$  تقسیم شود، به گونه‌ای که  $Q = (m - m_1 - m_2)c^2$ ، در تقریب ناسبیتی خواهیم داشت

$$0 = p_1 + p_2 \quad \text{و} \quad Q = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}$$

از معادله اول نتیجه می‌گیریم که  $p_1 = -p_2$  یا  $p_1 = p_2$ . از این رو، دو پاره با تکانه‌هایی که قدم‌مطلق آنها مساوی است در جهت‌های مخالف حرکت می‌کنند. در این صورت معادله دوم رابطه زیر را به دست می‌دهد

$$Q = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_1^2 = \frac{1}{2\mu} p_1^2$$

که در آن  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  جرم کاهش‌یافته دو ذره است. لذا  $p_1 = p_2 = (2\mu Q)^{1/2}$  و دو پاره با تکانه‌های کاملاً مشخص جدا از یکدیگر حرکت می‌کنند. انرژی‌های جنبشی دو پاره نیز کاملاً مشخص‌اند و با رابطه زیر داده می‌شوند

$$E_{k1} = \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} Q, \quad E_{k2} = \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} Q \quad (\text{پ. ۲۷})$$

اگر ذرات به صورت نسبیتی در نظر گرفته شوند، نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$E_{k1} = \frac{m - m_1 + m_2}{2m} Q, \quad E_{k2} = \frac{m - m_2 + m_1}{2m} Q$$

وقتی ذره اولیه به بیشتر از دو پاره تقسیم شود، تکانه‌ها و انرژی‌های آنها مقادیر

منحصر به فردی نخواهند بود. معادلات پایستگی عبارت اند از

$$0 = \sum_i p_i \quad \text{و} \quad Q = \sum_i E_{ki}$$

و این معادلات با مقادیر مختلفی از  $p_i$  برقرار می‌مانند. در حالت خاص یک انفجار یا واپاشی به سه پاره داریم

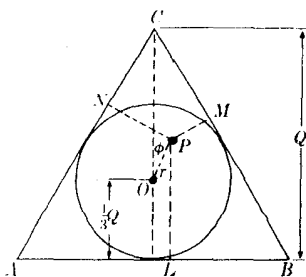
$$0 = p_1 + p_2 + p_3, \quad Q = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3}$$

یک راه تصویری ساده برای نمایش توزیع ممکن تکانه‌ها بین سه ذره وجود دارد. مثلث متساوی‌الاضلاعی به ارتفاع  $Q$  رسم می‌کنیم (شکل پ. ۶). فواصل عمودی از هر نقطه  $P$  تا اضلاع مثلث مقادیر انرژی سه پاره در یک واپاشی مشخص را به دست می‌دهد. به علاوه، پایستگی تکانه ایجاب می‌کند که نقطه  $P$  (در حالت نانسیتی) داخل دایره‌ای به شعاع  $Q/3$  که محاط در مثلث است قرار گیرد (در حالت نسبیته منحنی از وضع دایره کمی منحرف می‌شود). این نمایش نمودار دالیتس نام دارد و برای تشخیص اینکه آیا یک مد بخصوص واپاشی یک ذره با واپاشی سه ذره‌ای متناظر است یا نه، به‌طور گسترده‌ای به کار می‌رود. برای اثبات این گفته توجه کنید که الزاماً  $p_1 + p_2 \geq p_3$  و سه انرژی را نیز می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$E_{k1} = PN = \frac{1}{3}Q + r \cos\left(\phi - \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$E_{k2} = PM = \frac{1}{3}Q + r \cos\left(\phi + \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$E_{k3} = PL = \frac{1}{3}Q + r \cos \phi$$



شکل پ. ۶ نمودار دالیتس برای شکست سه ذره‌ای.



## ۳. سرعت گروه

موج هماهنگی را در نظر می‌گیریم که بتوان آن را به صورت  $\xi = A \sin(kx - \omega t)$  یا با رابطهٔ مختلط  $\xi = Ae^{i(kx - \omega t)}$  بیان کرد. بسامد زاویه‌ای این موج  $\omega$  و طول موج آن برابر  $\lambda = 2\pi/k$  است. کمیت  $v = \omega/k$  سرعت فاز نام دارد. اما، سرعت فاز، الزاماً سرعتی نیست که به هنگام تحلیل یک حرکت موجی مشاهده می‌کنیم. هر گاه یک موج هماهنگ پیوسته داشته باشیم (یا آن طور که گاهی گفته می‌شود، یک قطار موج با طول نامحدود که مانند روابط فوق داده شده باشد)، موج یک طول موج و یک بسامد دارد. اما این موج برای انتقال سیگنال مناسب نخواهد بود، زیرا مفهوم سیگنال چیزی است که در زمان مشخصی شروع و پس از گذشت زمان معینی خاتمه می‌یابد. یعنی، موج باید شکلی شبیه به شکل پ.۷ داشته باشد. موجی با این شکل را تپ می‌نامند. بنا بر این، اگر سرعتی را که سیگنال با آن انتقال می‌یابد اندازه‌گیری کنیم، مفهوم آن اساساً سرعت حرکت این تپ خواهد بود.

ممکن است در آغاز بگوییم که این سرعت همان سرعت فاز  $v = \omega/k$  است. زیرا این سرعت سرعت انتشار امواج است. اما، یک عامل مهمی در اینجا داخل می‌شود. موج یا تپ نشان داده شده در شکل پ.۷ هماهنگ نیست زیرا دامنهٔ آن در طول محور  $x$  ثابت نمی‌ماند. از این رو، باید آنالیز فوریه را در مورد موج انجام دهیم. با انجام این کار درمی‌یابیم که این موج در واقع شامل چندین بسامد و طول موج است. البته اگر سرعت انتشار مستقل از بسامدها باشد (یعنی پاشیدگی وجود نداشته باشد)، در این صورت تمام مؤلفه‌های فوریهٔ تپ با سرعت یکسانی حرکت می‌کنند و درست است که بگوییم سرعت تپ همان سرعت فاز امواج است. اما، در یک محیط پاشنده هر مؤلفهٔ فوریه سرعت انتشار مختص به خود دارد و لذا باید وضعیت را با دقت بیشتری بررسی کنیم.

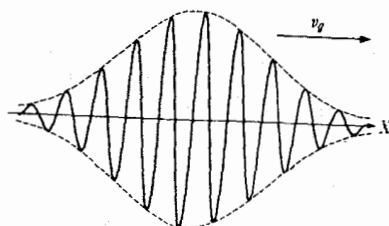
برای سهولت موردی را در نظر می‌گیریم که بتوان تپ را به دو بسامد  $\omega$  و  $\omega'$  که تقریباً مساوی هستند تجزیه کرد، به گونه‌ای که  $\omega' - \omega$  خیلی کوچک باشد. ضمناً فرض می‌کنیم که دامنهٔ آنها نیز یکی است. بنا بر این با استفاده از یک موج سینوسی خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\xi &= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(k'x - \omega' t) \\ &= A[\sin(kx - \omega t) + \sin(k'x - \omega' t)] \\ &= 2A \cos \frac{1}{2}[(k' - k)x - (\omega' - \omega)t] \sin \frac{1}{2}[(k' + k)x - (\omega' + \omega)t]\end{aligned}$$

چون  $\omega$  و  $\omega'$  و نیز  $k$  و  $k'$  تقریباً مساوی‌اند، به جای  $(\omega' + \omega)/2$  و  $(k' + k)/2$  می‌توان به ترتیب  $\omega$  و  $k$  را قرار داد، بنابراین

$$\xi = 2A \cos \frac{1}{2}[(k' - k)x - (\omega' - \omega)t] \sin(kx - \omega t) \quad (\text{پ. ۲۸})$$

معادلهٔ (پ. ۲۸) معرف حرکت موجی است که دامنه‌اش مدوله شده است. مدوله‌سازی با



شکل پ. ۷ تب موج.

ضرب زیر داده می‌شود

$$2A \cos \frac{1}{4} [(k' - k)x - (\omega' - \omega)t]$$

که در شکل پ. ۸ نیز نشان داده شده است. خود دامنه مدوله‌شدنی با حرکت موجی متناظر است که با سرعت زیر انتشار می‌یابد

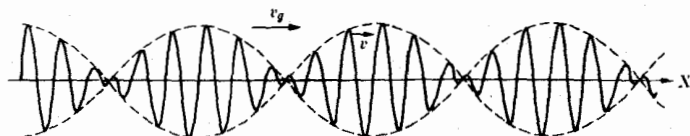
$$v_g = \frac{\omega' - \omega}{k' - k} = \frac{d\omega}{dk} \quad (\text{پ. ۲۹})$$

که سرعت گروه نام دارد. موج دامنه، که در شکل پ. ۸ با خط چین نشان داده شده است، با این سرعت منتشر می‌شود. با توجه به رابطه  $\omega = kv$  معادله (پ. ۲۹) به صورت زیر درمی‌آید

$$v_g = v + k \frac{dv}{dk} \quad (\text{پ. ۳۰})$$

هرگاه موج را بر حسب نمادگذاری مختلط نیز نمایش دهیم، نتیجه یکسانی را به دست خواهیم آورد.

اگر سرعت فاز مستقل از طول موج باشد داریم  $dv/dk = 0$  و  $v_g = v$ . بنابراین همان‌طور که قبلاً گفتیم، در محیطهای غیر پاشنده تفاوتی میان سرعت فاز و سرعت گروه وجود ندارد. اما در یک محیط پاشنده سرعت گروه می‌تواند بزرگتر یا کوچکتر از سرعت



شکل پ. ۸ سرعت فاز و سرعت گروه.

فاز باشد. در این صورت نتیجه می گیریم که بیشینه تپ در شکل پ. ۷ با سرعت گروه  $v$  انتشار می یابد. در مکانیک کوانتومی، ذره ای که در ناحیه  $\Delta x$  جایگزیده است با یک بسته موج نمایش داده می شود و سرعت ذره که مساوی با سرعت سیگنال است همان سرعت گروه است.

اگرچه معادله (پ. ۳۰) را فقط برای مورد دو بسامد به دست آوردیم، اما برای موردی که تپ شامل بسامدهای از گستره  $\omega - \Delta\omega$  تا  $\omega + \Delta\omega$  باشد نیز صادق است. با این حال باید توجه داشت که این موضوع واقعاً پیچیده تر از چیزی است که در اینجا گفته شد و بحث جامع آن خارج از سطح این کتاب است.

### ۴. بعضی انتگرالهای مفید

در فصل ۱۰ یک انتگرال به صورت  $I = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx$  ارائه شد. اکنون این انتگرال را بر آورد می کنیم. هر گاه به جای متغیر  $x$  از نماد  $y$  برای متغیر انتگرالگیری استفاده کنیم داریم  $I = \int_0^\infty e^{-\alpha y^2} dy$  از ضرب این دو رابطه خواهیم داشت

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx dy$$

این انتگرال دو گانه را می توان در ربع اول صفحه  $XY$  در نظر گرفت. هر گاه به جای مختصات قائم  $(x, y)$  از مختصات قطبی  $(r, \theta)$  استفاده کنیم، نتیجه انتگرال دو گانه باید یکسان باقی بماند. با توجه به  $x^2 + y^2 = r^2$  و با قراردادن  $r dr d\theta$  به جای عنصر سطحی  $(dx dy)$  داریم

$$I^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-\alpha r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-\alpha r^2} r dr = \frac{\pi}{4\alpha}$$

بنابراین

$$I = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (\text{پ. ۳۱})$$

با مشتقگیری متوالی نسبت به  $\alpha$  خواهیم داشت

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} \quad (\text{پ. ۳۲})$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} \quad (\text{پ. ۳۳})$$

و الی آخر. از طرف دیگر، با انتگرالگیری مستقیم داریم

$$\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^2} \quad (\text{پ. } ۳۴)$$

و با مشتقگیری از معادله (پ. ۳۴) نسبت به  $\alpha$  نتیجه زیر را به دست خواهیم آورد

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^3} \quad (\text{پ. } ۳۵)$$

### ۵. فرمول استرلینگ

در فصول ۱۰ و ۱۳ چندین بار به رابطه  $\ln x!$  (که در آن  $x$  عدد درستی است) برخوردیم. وقتی  $x$  خیلی بزرگ باشد، تقریب مناسب برای  $\ln x!$  چنین است

$$\ln x! = x \ln x - x \quad (\text{پ. } ۳۶)$$

که فرمول استرلینگ نام دارد. این رابطه را به آسانی می توان به صورت زیر اثبات کرد

$$\begin{aligned} \ln x! &= \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln(x-1) + \ln x \\ &= \sum_1^x \ln x, \text{ فقط اگر } x \text{ عدد درست باشد} \end{aligned}$$

اما اگر  $x$  خیلی بزرگ باشد، بدون خطای قابل توجهی می توان مجموع یابی را به انتگرالی تبدیل کرد و چنین نوشت

$$\ln x! \approx \int_1^x \ln x dx$$

بالاخره با قراردادن  $u = \ln x$  و  $dv = x$  و انتگرالگیری پاره ای خواهیم داشت

$$\ln x! = x \ln x - x + 1$$

که با صرف نظر کردن از ۱ در مقایسه با  $x$ ، رابطه (پ. ۳۶) حاصل می شود.

### ۶. تکثیرکننده های نامعلوم لاگرانژ

این روش هنگامی برای یافتن نقاط بحرانی تابع چند متغیری  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  به کار می رود که متغیرها مستقل نیستند بلکه مقیدند میان خود روابط مشخصی داشته باشد. مثلاً فرض کنیم که این قیود با  $\phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  و  $\phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  بیان شده است. بنا بر این فقط  $n - 2$  متغیر مستقل خواهیم داشت. نقاط بحرانی  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$

مقادیری از  $x_1, x_2, \dots, x_n$  اند که برای تغییرات کوچک در متغیرها  $dF = 0$  باشد. اما رابطه زیر

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (\text{پ. ۳۷})$$

دال بر آن نیست که  $dF/dx_i = 0$  است زیرا متغیرهای  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  مستقل نیستند. بلکه برعکس با شرایط زیر محدود می شوند

$$d\phi_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (\text{پ. ۳۸})$$

و

$$d\phi_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (\text{پ. ۳۹})$$

اکنون معادلات (پ. ۳۸) و (پ. ۳۹) را در کمیت‌های اختیاری  $\alpha$  و  $\beta$  ضرب می کنیم و آنها را به معادله (پ. ۳۷) می افزاییم. نتیجه برابر است با

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} + \alpha \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial \phi_2}{\partial x_i} \right) dx_i = 0$$

چون  $n+2$  متغیر با  $\alpha$  و  $\beta$  اختیاری وجود دارند، نتیجه می شود

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \alpha \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial \phi_2}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{پ. ۴۰})$$

به کمک این مجموعه از  $n$  معادله می توان  $x_1, x_2, \dots, x_n$  را برای نقطه بحرانی  $F$  بر حسب تابعی از  $\alpha$  و  $\beta$  به دست آورد. با قراردادن در  $\phi_1 = 0$  و  $\phi_2 = 0$  ابتدا  $\alpha$  و  $\beta$  را به دست می آوریم و سپس  $x_1, x_2, \dots, x_n$  را محاسبه می کنیم. در مثالهای ۱۰.۱۰ و ۱۰.۱۳ از این روش استفاده کردیم و محتملترین پارش سیستم ذراتی را به دست آوردیم که تحت قیدهای پایستگی ذرات و پایستگی انرژی قرار دارند.

## ۷. آشکارسازی ذرات

تحلیل فرایندهایی که شامل ذرات بنیادی یا هسته‌ها هستند مستلزم روشهایی است که نه تنها عبور یک ذره از میان ناحیه مشخصی را آشکار می کنند بلکه علاوه بر آن موجب می شوند که اطلاعاتی را درباره پاره‌ای از خواص سینماتیک به دست آوریم. ما ناچاریم که از زمان عبور، راستای حرکت، سرعت، تکان یا انرژی، و پاره‌ای از خواص ذاتی نظیر بار، جرم، یا راستای اسپین ذره آگسای داشته باشیم. مسلماً هیچ روش منحصر به فردی نمی تواند

اطلاعاتی را در مورد تمام این کمیته‌ها فراهم سازد. به‌طور کلی، ترکیبی از وسایل آشکارسازی به‌کار می‌رود تا بتوان اطلاعات مورد نیاز در یک آزمایش مشخص را به‌دست آورد.

روشهای آشکارسازی به‌اثراتی بستگی دارد که در حین عبور ذره باردار از میان ماده ایجاد می‌شود. عبور ذره باردار آماده موجب برانگیختگی و یونش مولکولهای ماده می‌شود. تقریباً اکثر اسبابهای به‌کاررفته برای آشکارسازی چنین ذراتی بر اساس خاصیت یونش بنا شده‌اند. برای تابشهای بی‌بار (مثلاً پرتو ایکس و نوترونها) نیز می‌توان از اسبابهای مشابهی استفاده کرد زیرا در نتیجه برخورد می‌توانند به ذرات باردار انرژی منتقل کنند که در این صورت یونش تولید می‌شود. انواع مختلف اسبابها بر حسب ماده‌ای که در آن یونش ایجاد می‌شود و نحوه مشاهده یا اندازه‌گیری یونش باهم متفاوتند.

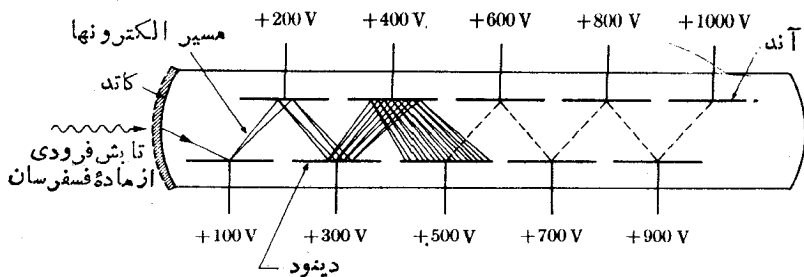
بسیاری از اسبابها بر اساس تولید یونش در گاز بنا شده‌اند. در اینجا لازم است یونشهای مثبت و منفی تشکیل شده را جدا و جمع‌آوری کرد زیرا اگر نزدیک یکدیگر باقی بمانند در زمان خیلی کوتاهی مجدداً ترکیب می‌شوند و هیچ‌گونه اثر الکتریکی به‌دست نمی‌دهند که به‌موجب آن بتوان حضور ذره را آشکار ساخت. جداسازی و جمع‌آوری یونها مستلزم یک میدان الکتریکی است و بر حسب اینکه میدان از نظر اندازه، ضعیف، قوی یا متوسط باشد، اسبابهای مختلفی نتیجه می‌شود. یونش را می‌توان در مایع یا جامد نیز ایجاد کرد. هنگامی که یونش در گازی با بخار فوق‌اشباع، در یک مایع فوق‌گرم، یا در امولسیون عکاسی تولید شود، مسیرهای ذرات را می‌توان قابل رؤیت کرد.

هنگامی که ذرات به‌مواد جامد یا مایع مشخصی که فسخ نامیده می‌شوند و خاصیت لیانی دارند برخورد کنند، قسمتی از انرژی به‌کار رفته در یونش و برانگیختگی مولکولی مجدداً به‌صورت نور مرئی یا فرابنفش گسیل می‌شود. بعضی اوقات می‌توان این نور را مشاهده کرد یا ممکن است با وسایل حساستر آن را آشکار ساخت. در این بخش پاره‌ای از روشهای متداول آشکارسازی را بررسی می‌کنیم، اگرچه بررسی دقیق آنها خارج از سطح این کتاب است.

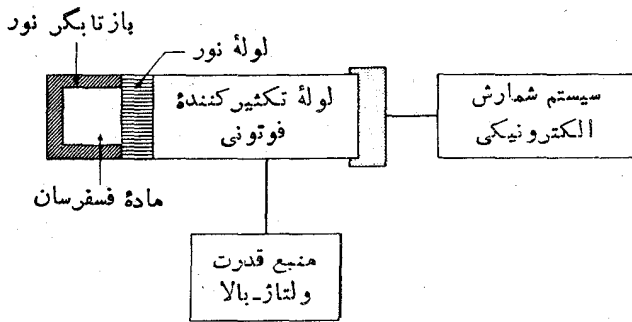
**الف) روش سوسوزنی.** در حدود سال ۱۹۰۰ معلوم شد که ذرات آلفا در سولفید روی، باریوم پلاتینوسیانید و الماس لیانی تولید می‌کنند. این لیانی شامل تعداد بی‌شماری درخشهای منفرد است که توسط یک ذره بین می‌توان آنها را مشاهده کرد. آزمایشهای دقیق نشان داده‌اند که هر ذره آلفا یک سوسو ایجاد می‌کند، به‌طوری‌که تعداد ذرات آلفای برخورد کرده به‌پرده آشکارساز مستقیماً با تعداد سوسوهای شمارش شده تعیین می‌شود. عمل شمارش را می‌توان با یک میکروسکوپ با درشتنمایی حدود ۳۰ انجام داد و به‌دقت خوبی دست یافت. این روش مخصوصاً برای شمارش ذرات آلفا در حضور تابشهای دیگر مفید است زیرا پرده سولفید روی حساسیت قابل توجهی نسبت به  $\beta$  و  $\gamma$  ندارد. در سال ۱۹۱۰ این روش توسط رادفورد برای تحلیل پراکندگی ذرات آلفا توسط هسته‌های موجود در ورقه‌های نازک به‌کار رفت.

با کشف مواد لیان جدید که به پرتوهای  $\beta$  و  $\gamma$  نیز حساس اند و ابداع لامپهای با کارایی زیاد تکثیرکن فوتونی، کاربرد شمارگرهای سوسوزن پیشرفت چشمگیری کرده است. در این جا می توان از برخی مواد جدید نام برد: نمکهای غیرآلی مخصوصاً هالیدهای قلیایی، که شامل مقدار کمی ناخالصی به عنوان فعال ساز برای لیانی است (مثلاً یدید سدیم یا پتاسیوم که با تالیوم فعال شده است)؛ مواد آلی بلورین نظیر نفتالین، آنتراسن؛ و محلولهای با ترکیب آلی نظیر ترفنیل حل شده در زایلن. لامپ تکثیرکن فوتونی، که جایگزین میکروسکوپ و ناظر شده است، سوسوهای حاصل از فسفر را به تپهای الکتریکی تقویت شده ای تبدیل می کند که می توانند شمارش یا توسط اسبابهای الکترونیکی مناسب تحلیل شوند. شمارگرهای سوسوزن جدید قادرند در هر ثانیه حدود چند میلیون درخش را آشکار و ثبت کنند و در تابشهای شدید نیز به کار روند.

در شکل پ. ۹ نمودار طرح وار یک لامپ تکثیرکن فوتونی نشان داده شده است. نور حاصل از ماده لیان به کاتد (که معمولاً از آنتیموان و سزیوم ساخته شده است) برخورد می کند و تحت اثر فوتوالکتریک، الکترونها را از آن بیرون می راند. لامپ شامل چندین الکتروود است که دینود نام دارند و پتانسیلهای متوالی افزایشی به آن اعمال می شوده فوتوالکترونها توسط میدان الکتریکی میان کاتد و اولین دینود، که پتانسیل آن نسبت به کاتد مثبت است، شتاب می گیرند و با دینود برخورد می کنند. الکترونهای شتابدار به مقدار کافی انرژی به الکترونهای موجود در دینود منتقل می کنند و پاره ای از آنها را بیرون می رانند. به ازای هر الکترونی که به دینود برخورد می کند ممکن است دهها الکترون ثانوی موجود باشد. الکترونهای اخیر را میدان الکتریکی به طرف دومین دینود هدایت می کند. این فرایند مرتباً تکرار می شود و بسا شتابی که الکترونها از دینودی به دینود دیگر به دست می آورند، جریان الکترونی تقویت می شود. جریان خروجی، یا تپ، در آند ممکن است بیش از یک میلیون مرتبه بزرگتر از جریان اولیه گسیل شده از کاتد باشد. هر ذره فرود آمده بر ماده فسفرسان یک تپ ایجاد می کند و تپها به یک سیستم الکترونیکی وارد و



شکل پ. ۹. لامپ تکثیرکن فوتونی (طرح وار).



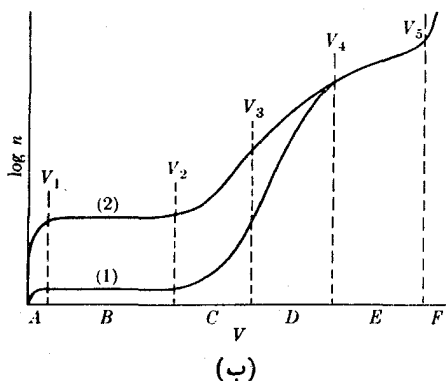
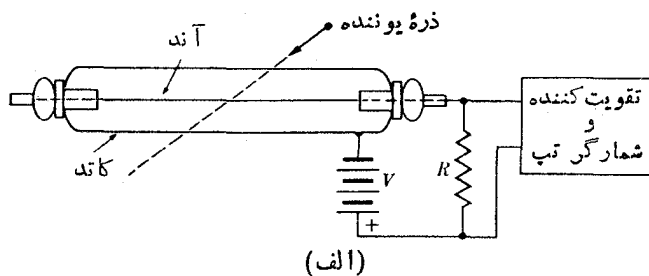
شکل پ. ۱۰ آشکارساز سوسوزن (طرح وار).

شمارش می‌شوند. سیستمهای الکترونیکی، که توسعه چشمگیری یافته‌اند، انرژی ذرات فرودی را اندازه‌گیری می‌کنند و وسیله‌ی حاصل يك طیف‌سنج سوسوزن است. در شکل پ. ۱۰ نمودار طرح وار آشکارساز سوسوزن نشان داده شده است.

(ب) ابزارهای یونشی: اتاقک یونش، شمارگر تناسبی، شمارگر گایگر-مولر. اصلی که در هر يك از این آشکارسازها به کار می‌رود، تولید یونش در يك گاز و جداسازی و جمع‌آوری یونها توسط يك میدان الکتريکی است. تفاوت‌های میان این سه سیستم را می‌توان به كمك شکل پ. ۱۱ توضیح داد. در داخل اتاقک رسانای استوانه‌ای شکل يك الکتروود رسانای مرکزی در راستای محور آن و به صورت عایق‌بندی شده نسبت به اتاقک قرار دارد. اتاقک از گازی با فشار يك اتمسفر یا کمتر پر شده است. میان دیواره اتاقک و الکتروود مرکزی از طریق مقاومت  $R$ ، ولتاژ  $V$  اعمال می‌شود. الکتروود مرکزی نسبت به دیواره اتاقک در پتانسیل مثبتی قرار دارد.

فرض کنید که یونش در اثر عبور يك ذره باردار از میان گاز تولید می‌شود. هر زوج یون شامل يك یون مثبت و يك الکترون است. برای هر یونش اولیه مشخص، تعداد زوج یونهای جمع‌آوری شده تابعی از ولتاژ به کار رفته است. در شکل پ. ۱۱ (ب)، منحنیهای (۱) و (۲) مربوط به جمع‌آوری کل یونها بر حسب تابعی از ولتاژ اعمال شده برای دو نوع مختلف تابش یوننده، نظیر يك ذره آلفا و يك ذره بتا، یا دو ذره بتای با انرژیهای مختلف، رسم شده است. برای سهولت از لگاریتم تعداد  $n$  زوج یون به عنوان محور عرضها استفاده شده است. هر گاه ولتاژی میان الکتروودها موجود نباشد، یونها مجدداً ترکیب شده و هیچگونه تپی در شمارگر ظاهر نمی‌شود. با افزایش ولتاژ تا حدود چند ولت، رقابتی میان اتلاف زوج یونها از طریق ترکیب مجدد و حذف آنها به وسیله جمع‌آوری در الکتروودها ایجاد می‌شود و برخی از الکتروونها به الکتروود مرکزی می‌رسند. در ولتاژ  $V_1$  (در حدود ۱۰ ولت)، اتلاف یونها از طریق ترکیب مجدد قابل چشمپوشی است و تمام





شکل پ ۱۱۰ (الف) شمارگر پر شده از گاز با مدار مربوطه (طرح وار). (ب) تعداد زوج یونهای جمع آوری شده در مرکز الکتروود بر حسب ولتاژ برای دو رویداد [منحنیهای (۱) و (۲)] که زوج یونهای اولیه شان خیلی باهم متفاوت است.

الکتروندهای ایجاد شده به الکتروود مرکزی می‌رسند. با افزایش  $V$  تا ولتاژ  $V_p$ ،  $n$  ثابت می‌ماند. بسته به شرایط آزمایش، ولتاژ اخیر می‌تواند تا حدود چند ده یا چند صد ولت باشد. ناحیه  $B$  بین  $V_1$  و  $V_p$  که در آن تعداد زوج یونهای جمع آوری شده مستقل از ولتاژ به کار رفته و منحنی نیز افقی است، ناحیه اتاناکت یونش نام دارد.

وقتی ولتاژ به بالاتر از  $V_p$  افزایش یابد، به دلیل پدیده‌ای که به تکثیر یا تقویت گاز معروف است،  $n$  زیاد می‌شود. الکتروندهای رها شده در یونش اولیه، قبل از رسیدن به آند، مقدار کافی انرژی به دست می‌آورند و در برخورد با مولکولهای گاز یونش اضافی تولید می‌کنند و  $n$  تقریباً به طور نمایی با  $V$  افزایش می‌یابد. هر الکترون اولیه «بهمن» کوچکی از الکترون راه می‌اندازد. اکثر الکتروندهای ثانویه در نزدیکی الکتروود مرکزی آزاد می‌شوند. رفتار دو منحنی در بالای  $V_p$  که با یونشهای اولیه متفاوت متناظر است، جالب توجه است. در گستره ولتاژهای تا  $V_p$  هر الکترون مستقلاً عمل می‌کند، و بهمین مخصوص به خود راه می‌اندازد و تحت تأثیر حضور الکتروندهای دیگر قرار نمی‌گیرد. بنابراین،

منحنیهای (۱) و (۲)، با نسبت ثابت  $n$  به موازات یکدیگر ادامه می‌یابند. لذا بین  $V_p$  و  $V_p$ ، یا ناحیه  $C$  تعداد زوج یونهای جمع‌آوری شده با یونش اولیه متناسب است. این محدوده را ناحیه عمل شمارگر تناسبی می‌نامند.

در بالای  $V_p$  اثر تکثیر گاز ادامه دارد و به سرعت افزایش می‌یابد و چون الکترونهای بیشتری بهمین تولید می‌کنند لذا برهم‌کنش میان آنها شروع می‌شود. بسا فضایی یون مثبت هر بهمین مانع توسعه بهمین دیگر می‌شود. تخلیه با الکترونهای اولیه بیشتر (منحنی ۲) زودتر از تخلیه با الکترونهای اولیه کمتر (منحنی ۱) صورت می‌گیرد و با سرعت کمتری افزایش می‌یابد. منحنیهای (۱) و (۲) به یکدیگر نزدیک می‌شوند و سرانجام در ولتاژ اعمال شده  $V_p$  با یکدیگر تلاقی می‌کنند. ناحیه  $D$  بین  $V_p$  و  $V_p$  ناحیه تناسب محدود نام دارد. در بالای  $V_p$  بار جمع‌آوری شده مستقل از یونشی می‌شود که آن را شروع کرده است، و منحنیهای (۱) و (۲) یکی می‌شوند. تقویت‌گاز تعداد کل یونها را تا مقداری که با مشخصات اتاقک و مدار خارجی محدود می‌شود، افزایش می‌دهد. ناحیه  $E$  بالای  $V_p$  ناحیه عمل شمارگر گایگر-مولر است. منحنی به ولتاژ  $V_5$  منتهی می‌شود که در آنجا تخلیه تمایل دارد تا بینهایت انتشار یابد.  $V_5$  انتهای مقیاس و ولتاژ مفید را مشخص می‌کند. ناحیه بالای  $F$  ناحیه تخلیه چپ‌پوسته است. به دلیل رفتار متفاوت یونهای گاز در میدان الکتریکی شمارگر، سه وسیله آشکارسازی ساخته شده‌است که عبارت‌اند از:

۱. اتاقک یونش، که در ولتاژهای ناحیه  $B$  عمل می‌کند، با جمع‌آوری کامل تمام الکترونهایی که در آغاز در اثر عبور ذره، بدون تقویت‌گاز، آزاد شده‌اند مشخص می‌شود. تحت شرایط مشخص، تپی تولید می‌شود که از لحاظ اندازه با تعداد این الکترونها متناسب است. با اندازه‌گیری آهنگ یونش می‌توان از این اسباب برای اندازه‌گیری شدت تابش یوننده استفاده کرد.

۲. شمارگر تناسبی، که در ناحیه ولتاژ  $C$  کار می‌کند، با تقویت‌گاز مستقل از تعداد الکترونهای اولیه مشخص می‌شود. از این رو، با آنکه تقویت‌گاز به کار می‌رود، تپ همواره با یونش اولیه متناسب است. با استفاده از این شمارگر، شمارش رویدادهای منفرد و تعیین انرژی ذراتی که یونهای کافی تولید نمی‌کنند تا تپ آشکارپذیری را در ناحیه  $B$  باعث شوند، امکان‌پذیر خواهد بود. بنابراین شمارگر تناسبی از این مزیت برخوردار است که امکان اندازه‌گیریهای نوع تپ تابش بتا را ممکن می‌سازد، یعنی کاربردی که اتاقکهای یونش نمی‌توانند برای آن از حساسیت کافی برخوردار باشند.

۳. شمارگر گایگر-مولر که به شمارگر گایگر یا G-M نیز معروف است، در ناحیه ولتاژ  $E$  کار می‌کند، با پاشیدگی تخلیه در تمام طول شمارگر مشخص می‌شود و منجر به تولید تپی می‌شود که اندازه آن مستقل از یونش اولیه است. این شمارگر مخصوصاً برای شمارش ذراتی نظیر ذرات بتا و پروتوگاما، که خاصیت یسوندگی اندکی دارند مفید است. شمارگر G-M معمولاً شامل سیم ظرفی (تنگستن) است که در طول محور لوله محتوی گازی با

فشار حدود ۲ تا ۱۰ سانتیمتر جیوه نصب شده است. شمارگر می تواند لوله ای باشد که از فلزی نظیر مس، یا استوانه فلزی واقع در داخل يك لوله شیشه ای ساخته شده است. گاز مناسب را مخلوط ۹۰ درصد آرگون و ۱۰ درصد اتیل الکل تشکیل می دهد. اختلاف پتانسیل (حدود بین ۸۰۰ تا ۱۲۰۰ ولت) نیز طوری اعمال می شود که لوله نسبت به سیم منفی باشد.

در ناحیه گایگر-مولر تخلیه پیوسته ای با رها شدن الکترونهاي ثانویه از دیواره های لوله تولید می شود که ناشی از اثرات جنبی حاصل از بهمن یونهای اولیه است. دلیل تولید این الکترونهاي ثانویه این است که وقتی مثلاً يك یون مثبت آرگون در برخورد با سطح فلزی کاتد خنثی می شود، مقدار قابل توجهی انرژی آزاد می شود که ممکن است برای بیرون انداختن يك الکترون از سطح کاتد به کار رود. این الکترونها در حرکت به طرف الکتروود مرکزی، یونهای جدیدی تولید می کنند و به این وسیله عمل تخلیه را دائمی می سازند. به منظور آماده کردن شمارگر برای رویداد جدید لازم است که تخلیه متوقف یا «خاموش» شود. این فرو نشانیدن ممکن است از طریق الکترونیکی با پایین آوردن ولتاژ پس از هر شمارش صورت گیرد. با این حال، فرو نشانیدن معمولاً در خود گاز انجام می شود. مثلاً اگر گاز شامل آرگون با ۱۰ درصد اتیل الکل باشد، در این صورت به دلیل تبادلهای بار در اثر برخورد های یونهای آرگون با مولکولهای الکل، یونهای مثبتی که به کاتد می رسد، یونهای الکل هستند و به طور کلی نمی توانند الکترونها را از سطح کاتد جدا کنند. در عوض این انرژی برای شکستن مولکول الکل به کار می رود و پس از اینکه بهمن اولیه به الکتروودها رسید تخلیه به سرعت متوقف می شود. ضمناً الکترونهاي ثانویه توسط فوتونهاي ایجاد شده در بهمن نیز آزاد می شوند. مولکولهای الکل فوتونها را جذب می کنند، بی آنکه الکترونها را آزاد کنند.

در وسایل الکتريکی بحث شده، یونها، اعم از اینکه از لحاظ تعداد تکثیر شده یا نشده باشند، جمع آوری شده و تپ ولتاژی تولید می کنند که ممکن است به کوچکی  $10 \mu V$  باشد. يك تقویت کننده الکترونیکی تپ، این ولتاژهای کوچک را می گیرد و تا سطحی که معمولاً در گستره ۵ تا ۵۰ ولت قرار دارد تقویت می کند. سپس تپهای ولتاژ تقویت شده باید به طریقی شمارش شوند، به گونه ای که آهنگ آنها را بشود اندازه گیری کرد. تعداد تپهای نشان داده شده روی شمارگر تعداد ذراتی را به دست می دهد که وارد فضای میان الکتروودها شده اند. وسایل الکترونیکی دیگری نیز برای اندازه گیری اندازه تپ وجود دارند که به کمک آنها می توان انرژی ذره فرودی را تعیین کرد. از این رو، نه فقط می توان وقوع يك تپ را ثبت کرد بلکه می توان تپها را (به وسیله يك مدار تفکیک کننده الکترونیکی) بر حسب اندازه آنها، یا (به وسیله يك مدار زمان بندی الکترونیکی) بر حسب بازه های زمانی که در خلال آن می رسند، دسته بندی کرد. لذا آشکارساز، جزئی از يك مدار با اسباب الکترونیکی مناسب را تشکیل می دهد.

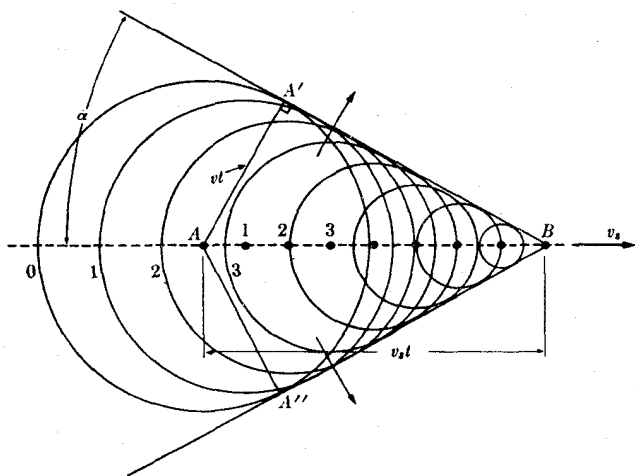
ج) آشکارسازی فوترون. اکثر فرایندهایی که توقف نوترونها در ماده را شامل می‌شوند می‌توان برای آشکارسازی نوترونها به‌کار برد، زیرا پس از گسیل پرتوگاما، ذرات باردار یا به‌صورت اثر اولیه یا به‌صورت اثر ثانویه به‌حرکت درمی‌آیند. فرایندهایی که در آشکارسازی فوترون به‌کار می‌روند عبارت‌اند از:

۱. واکنشهای هسته‌ای القا شده با نوترون که ذرهٔ بارداری (نظیر پروتونها، ذرات آلفا، و غیره) را به‌صورت محصولات واکنش ایجاد می‌کنند.
۲. شکافت القایی در بعضی عناصر سنگین.
۳. برخورد های کشمان میان نوترونها و هسته‌ها، بخصوص هسته‌های هیدروژن، که در نتیجهٔ آن به‌حرکت درمی‌آیند.
۴. گیراندازی نوترونها توسط ایزوتوپهای پایدار مشخص، که سپس به ایزوتوپهای پرتوزایی تبدیل می‌شوند که پرتوگاما یا ذرات بتا گسیل می‌کنند (روش فعال‌سازی).

مثال کلاسیک آشکارسازی فوترون، شمارگر بسور برای نوترونهای کند است. این اسباب يك شمارگر گازی است که داخل دیواره‌های آن یا با بور آستر شده است و یا شمارگر از گاز  $BF_3$  (ترجیحاً غنی شده در  $^{10}B$ ) پر شده است. واکنش اصلی را  $^{10}B(n, \alpha)^7Li$  تشکیل می‌دهد. برد ذرهٔ آلفا و هستهٔ پس‌زندهٔ  $^7Li$  کوتاه است، به‌گونه‌ای که در اکثر رویدادها در گاز متوقف می‌شوند و تمام انرژی آزاد شده به‌یونش و برانگیختگیهای اتمی تبدیل می‌شود. شمارگر در ناحیهٔ تناسبی عمل می‌کند و لذا تشخیص میان رویدادهای القا شده با نوترون و رویدادهایی که با پرتوگاما یا پرتوکیپانی زمینه ناشی می‌شوند تقریباً ساده است. مثالهای دیگر از واکنشهایی که برای آشکارسازیهای فوترون کند به‌کار می‌روند عبارت‌اند از  $^6Li(n, t)^4He$ ،  $^{14}C(n, p)^{14}N$  و  $^{114}Cd(n, \gamma)^{114}Cd$ .

واکنشهای هسته‌ای در آشکارسازی نوترون‌تند نیز به‌کار می‌روند، با این حال کارایی آنها به‌اندازهٔ کارایی شمارگرهای بور برای نوترونهای کند بالا نیست زیرا سطح مقطع نوترون تند هیچگاه نمی‌تواند به‌اندازهٔ سطح مقطع  $^{10}B$  برای نوترونهای کند باشد. چون شمارگر  $BF_3$  برای نوترونهای کند از سادگی و کارایی خوبی برخوردار است، يك طریق طبیعی برای ساختن آشکارساز برای نوترونهای تند این است که شمارگر  $BF_3$  را با پارافین احاطه کنند تا، نوترونهای تند در اثر برخورد های کشمان کند شوند به‌طوری که بتوانند به‌صورت نوترونهای گرمایی در داخل شمارگر پخش شوند. تمام شمارگر نوترون تند را می‌توان با حفاظ کادمیوم نسبت به نوترونهای کند بی‌حس ساخت.

د) شمارگر چرنکوف. سرعت نور در يك مایع یا جامد شفاف با رابطهٔ  $v = c/n$  داده می‌شود که در آن  $n$  ضریب شکست است. هر گاه ذرهٔ بارداری در حین عبور از این محیط دارای سرعتی بیش از  $v$  (یعنی بزرگتر از سرعت نور در این محیط) باشد، اتمهایی که در اثر عبور ذرهٔ باردار از نزدیکی آنها موقتاً از لحاظ الکتریکی قطبیده می‌شوند، نور گسیل



شکل پ ۱۲۰ جبهه موج نور در تابش چرنکوف.

می‌کنند. در این فرایند، اختلال میدان الکتریکی بر روی اتم یک گشتاور دو قطبی گذرا تولید می‌کند که باعث گسیل امواج الکترومغناطیسی می‌شود. دلیل اینکه چرا چنین نوری فقط وقتی گسیل می‌شود که سرعت از  $v = c/n$  تجاوز کند این است که تنها در این حالت نور حاصل از تمام اتمها در طول مسیر می‌تواند هم‌دوس باشد. شکل پ ۱۲۰ نشان می‌دهد که چگونه از امواج ابتدایی گسیل شده از نقاط مختلف در طول مسیر ذره، یک جبهه موج تشکیل می‌شود. برای یک سرعت مشخص ذره،  $v_s$ ، نور در یک مخروط گسیل می‌شود که در آن زاویه  $\alpha$  از رابطه  $\sin \alpha = v/v_s = c/nv_s$  به دست می‌آید. کسر قابل ملاحظه‌ای از تابش چرنکوف در قسمت مرئی طیف قرار دارد که تقریباً با ناحیه با بالاترین حساسیت لامبهای تکثیرکن فوتونی نیز متناظر است. انواع گوناگونی از آشکارسازهای چرنکوف وجود دارد که در آنها فقط نور گسیل شده در راستای بخصوص ثبت می‌شود. در این صورت این آشکارساز وسیله‌ای است که به سرعت حساسیت دارد و بدیهی است که از آن می‌توان فقط برای ذرات با  $v_s > c/n$  استفاده کرد.

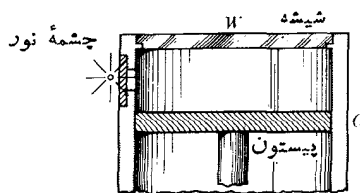
**ه) اتاقل ابر.** یکی از مهمترین اسبابها برای انجام تحقیقات اساسی بر روی تابش اتاقل ابر است. این اسباب که اولین بار در سال ۱۹۱۲ از آن استفاده شد، مبتنی بر کشف ویلسون است که بنا به آن یونها برای چگالش بخار آب فوق اشباع به صورت هسته‌هایی عمل می‌کنند. در هر اتاقل ابر، گازی که از بخار اشباع شده است، با حرکت سریع یک پیستون منبسط می‌شود. این انبساط بی‌دررو است و دما را پایین می‌آورد. این سرد شدن بیش از اندازه‌ای است که بر روی اثر افزایش در حجم غلبه کند و هوا با بخار آب فوق اشباع

می‌شود، هر گاه پرتو یوننده‌ای داخل اتاقک شود، یونهای تشکیل شده به صورت نقاط چگالش برای بخار رفتار می‌کنند و مسیر پرتو به شکل خط نازک ابری ظاهر می‌شود. در اکثر اتاقکهای انبساط، مخلوط بخار-گاز را هوا با آب یا آرگون با اتیل الکل در فشار جو تشکیل می‌دهد.

نمودار ساده‌ای که طرز کار اتاقک ابر را نشان می‌دهد در شکل پ.۱۳ دیده می‌شود. یک طرف استوانه  $C$  با پنجره شیشه‌ای  $W$  و طرف دیگر آن بسا پیستون فلزی بسته شده است. مقدار کمی آب اتاقک هوا را در حالت اشباع نگاه می‌دارد. هنگامی که پیستون به طرف پایین کشیده شود، همان طور که اشاره شد، هوا به صورت فوق اشباع درمی‌آید و در حضور تابش یوننده مسیرهای ابری تشکیل می‌شوند. به کمک نوری که از بدنه استوانه می‌تابد، مسیرها را می‌توان مرئی و از طریق پنجره مشاهده یا از آنها عکسبرداری کرد. به وسیله میدان الکتریکی میان پیستون و حلقه فلزی می‌توان یونها را جدا کرد. پیستون به مکان اولیه خود بازگردانده و اتاقک برای تابش بعدی آماده می‌شود.

اتاقک ابر ویلسون این امکان را فراهم می‌کند که بتوان برهم کنشهای میان ذرات باردار و اتمهای منفرد را از طریق عکسبرداری مسیرهای اقبی تابشهای یوننده مطالعه کرد. در این صورت فرصت کافی برای تحلیل این فرایندها وجود خواهد داشت. تغییرات و اصلاحات زیادی در اتاقک ابر اولیه صورت گرفته است. مثلاً به منظور دست یابی به تعداد زیادی عکس، آرایشها طوری ترتیب داده شده است که به طور خودکار بتوان انبساط را تکرار کرد و عکسبرداری را به صورت پیوسته انجام داد. اگر دوعکس برجسته‌نما به طور همزمان گرفته شود، مسیر ذره را می‌توان در فضا مشخص کرد.

با قراردادن اتاقک ابر میان قطبهای یک آهنربای الکتریکی، امکان تمایز میان ذرات باردار مثبت و منفی وجود خواهد داشت. از روی انحنای مسیر هر ذره در میدان مغناطیسی می‌توان علامت بار و بزرگی تکانه ذره را تعیین کرد. ذرات متفاوت مسیرهای مختلفی تولید می‌کنند. از این رو، ذرات کند و سنگین نظیر ذرات آلفا مسیرهای پهن و متراکمی تولید می‌کنند که گاهی با خمیدگیهای تیز و با زاویه کوچک (مخصوصاً نزدیک به انتهای مسیر) که از انحراف ناگهانی ناشی از یک برخورد نتیجه می‌شود همراه است. الکترونها ی کند مسیرهای باریک و پیچ و خم‌دار ایجاد می‌کنند، زیرا پراکنندگیهای فراوانی را متحمل می‌شوند در حالی که ذرات تند، سبک یا سنگین، مسیرهای باریک تولید می‌کنند.



شکل پ.۱۳ اتاقک ابر ویلسون (طرح وار).

(و) **اتاقک حباب**. برای ذرات با انرژی بالا یک اشکال اتاقک ابر این است که چگالی گاز به اندازه کافی زیاد نیست تا موجب شود تعداد قابل توجهی برهم کنش در داخل اتاقک روی دهند. شاید مهمتر از همه این باشد که زمان بازیابی اتاقک ابر پس از هر انبساط خیلی طولانی است (در حدود دهها ثانیه). بنابراین، برای تحقیقات ذرات بنیادی، از اتاقک حباب به جای اتاقک ابر استفاده می شود که می توان گفت برعکس اتاقک ابر است. اتاقک حباب حاوی مایعی است که فشار و دمای آن درست در نزدیکی نقطه جوش آن قرار دارد. هر گاه فشار به طور ناگهانی کاهش یابد، مایع فوق گرم می شود و حبابها ترجیحاً در اطراف یونها تشکیل می شوند. در اتاقک حباب هیدروژن، هیدروژن مایع فوق گرم ( $\sim 20\text{ K}$ ) محیطی است که ذرات از میان آن عبور می کنند. یونهای به جای مانده در مسیر یک ذره باردار به صورت هسته های تبخیر برای هیدروژن مایع درمی آیند که اثر آن را به صورت زنجیری از حبابها می توان مشاهده یا عکسبرداری کرد. هر گاه ذراتی که با پروتونها قویاً برهم کنش می کنند از اتاقک حباب عبور کنند، واکنشها روی می دهند و اثر ذره ورودی و نیز محصولات واکنش را می توان مطالعه کرد. اگر اتاقک حباب در میدان مغناطیسی باشد و از مسیرها عکسبرداری شود، بار و تکانه ذرات متفاوتی را می توان درعکسها اندازه گرفت.

(ز) **اتاقک جرقه ای**. یکی از جدیدترین اختراعات در زمینه آشکارسازیهای به کار رفته در انرژی بالا، اتاقک جرقه ای است که از تعدادی صفحات فلزی جدا از یکدیگر تشکیل شده و فاصله حدود چند میلیمتر میان آنها نیز به طور یکنواخت از گاز نئون پسر شده است. صفحات یک درمیان به زمین وصل شده اند و به بقیه صفحات یک تپ ولتاژ کوتاه ( $5\text{ kV}$ ) داده می شود. اندازه این تپ طوری است که در محلهایی که گاز یونیده شده است جرقه تولید کند. رد یونهای به جای مانده توسط هر ذره نفوذی را این جرقه ها تشکیل می دهند. عکس گرفته شده از جرقه های میان تمام صفحات می تواند مسیر ذره را مشخص کند.

(ح) **امولسیونهای عکاسی**. ذره یونی کننده ای که از میان امولسیون یک صفحه عکاسی می گذرد، مسیری را برجای می گذارد که شامل تعدادی دانه حساس شده برومید نقره است. امولسیونهای عکاسی خاصی، که به امولسیونهای هسته ای معروف اند، ساخته شده است. این امولسیونها به خاطر مقدار زیاد برومید نقره (که می تواند چهار مرتبه بیشتر از مقداری باشد که در صفحات عکاسی یافت می شود) و به لحاظ اندازه دانه و نیز ضخامت امولسیون می توانند از امولسیونهای اپتیکی تمیز پذیر باشند. مانند اتاقک ابر، پس از ظهور صفحه عکاسی می توان مسیر ذره را ثبت کرد و اطلاعات متنوعی را از طریق مطالعه مسیرها به دست آورد. شمارش مسیرهای منفرد می تواند میزان تعداد ذرات داخل شده به صفحه را مشخص و مطالعه تفضیلی مسیرها نیز اطلاعاتی را در باره جرم، بار، و انرژی ذرات فراهم کند. مزایای امولسیون عکاسی نسبت به اتاقک ابر در این است که امولسیون جامد است؛ بنابراین مسیرها

کوتاه هستند و حساسیت آن به جسای اینکه به بازه‌های کوتاه تکراری محدود شود، دائمی است. از طرف دیگر، برای ثبت وقایع ویژه می‌توان اتاقکهای متفاوت را با مدارهای انطباقی کنترل کرد. چنین فرایندی با امولسیونهای عکاسی امکان پذیر نخواهد بود.



# جدول یکاها و نمادها

بر حسب یکاهای اصلی		نام یکا	نماد	کمیت
$m\ k\ s\ A$	$m\ k\ s\ C$			
$m$		متر	$l, s$	طول
$kg$		کیلوگرم	$m$	جرم
$s$		ثانیه	$t$	زمان
$ms^{-1}$			$v$	سرعت
$ms^{-2}$			$a$	شتاب
$s^{-1}$			$\omega$	سرعت زاویه‌ای
$s^{-1}$			$\omega$	پسامد زاویه‌ای
$s^{-1}$		هرتز (Hz)	$\nu$	پسامد
$m\ k\ g\ s^{-1}$			$P$	تکانه
$m\ k\ g\ s^{-2}$		نیوتون (N)	$F$	نیرو
$m^2\ k\ g\ s^{-1}$			$L$	تکانه زاویه‌ای
$m^2\ k\ g\ s^{-2}$			$\tau$	گشتاور نیرو
$m^2\ k\ g\ s^{-2}$		ژول (J)	$W$	کار
$m^2\ k\ g\ s^{-2}$		وات (W)	$P$	توان
$m^2\ k\ g\ s^{-2}$		ژول (J)	$E_k, E_p, U, E$	انرژی
$m^2\ k\ g\ s^{-2}$ / ذره		درجه کلوین (K)	$T$	دما
$m^2\ s^{-1}$			$D$	ضریب پخش
$m\ k\ g\ s^{-2}\ K^{-1}$			$K$	ضریب رسانندگی گرمایی
$m^{-1}\ k\ g\ s^{-1}$			$\eta$	ضریب چسبندگی
$m^{-1}\ k\ g\ s^{-2}$			$Y$	مدول یانگ
$m^{-1}\ k\ g\ s^{-2}$			$\kappa$	مدول کپه‌ای
$m^{-1}\ k\ g\ s^{-2}$			$G$	مدول برشی
$m^2\ k\ g$			$I$	گشتاور اختی
$ms^{-2}$			$G$	میدان گرانشی
$m^2\ s^{-2}$			$V_G$	پتانسیل گرانشی
$A\ s$	$C$	کولن	$q, Q$	بار الکتریکی
$A$	$s^{-1}\ C$	آمپر	$I$	شدت جریان الکتریکی
$m^2\ k\ g\ s^{-2}\ A^{-2}$	$m^2\ k\ g\ s^{-1}\ C^{-2}$	اهم (Ω)	$R$	مقاومت الکتریکی
$m\ k\ g\ s^{-2}\ A^{-1}$	$m\ k\ g\ s^{-2}\ C^{-1}$		$E$	میدان الکتریکی
$m^2\ k\ g\ s^{-2}\ A^{-1}$	$m^2\ k\ g\ s^{-2}\ C^{-1}$	ولت (V)	$V$	پتانسیل الکتریکی
$m^{-2}\ A$	$m^{-2}\ s^{-1}\ C$		$j$	چگالی جریان
$m^2\ k\ g\ s^{-2}\ A^{-2}$	$m^2\ k\ g\ C^{-2}$	هانری (H)	$L$	القا
$m^{-2}\ k\ g^{-1}\ s\ A^2$	$m^{-2}\ k\ g^{-1}\ s^2\ C^2$		$\epsilon_0$	گذردهی الکتریکی
$m^{-2}\ s\ A$	$m^{-2}\ C$		$\varphi$	قطبش
$m^{-2}\ s\ A$	$m^{-2}\ C$		$\mathcal{D}$	جابجایی دی الکتریکی
$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$	$kg\ s^{-1}\ C^{-1}$	تسلا (T)	$B$	میدان مغناطیسی
$m\ k\ g\ s^{-2}\ A^{-2}$	$m\ k\ g\ C^{-2}$		$\mu_0$	تراوایی مغناطیسی
$m^{-1}\ A$	$m^{-1}\ s^{-1}\ C$		$\mathcal{M}$	مغناطش
$m^{-1}\ A$	$m^{-1}\ s^{-1}\ C$		$\mathcal{H}$	میدان مغناطیسی کننده
$m^2\ k\ g\ s^{-2}\ A^{-1}$	$m^2\ k\ g\ s^{-1}\ C^{-1}$	وبر (Wb)	$\Phi_B$	شار مغناطیسی
$ms\ A$	$m\ C$		$P$	گشتاور دو قطبی الکتریکی
$m^2\ s\ A$	$m^2\ C$		$Q$	گشتاور چهار قطبی الکتریکی
$m^2\ A$	$m^2\ s^{-1}\ C$		$M$	گشتاور دو قطبی مغناطیسی
$m^2\ A$	$m^2\ s^{-1}\ C$		$Q$	گشتاور چهار قطبی مغناطیسی
$m^{-2}\ k\ g^{-1}\ s^2\ A^2$	$m^{-2}\ k\ g^{-1}\ s^2\ C^2$	فاراد (F)	$C$	ظرفیت

## جدول تناوبی عناصر

جرمهای اتمی که بر مبنای جرم اتمی ایزوتوپ (همجای) اصلی کربن برابر عدد درست ۱۲٫۰۰۰۰۰۰، تعیین شده‌اند، آخرین مقادیر [ (۱۳۴۰ ه.ش) ۱۹۶۱ ] پذیرفته شده از طرف اتحادیه بین‌المللی شیمی محض و کاربردی هستند. یکای جرمی که در این جدول به کار رفته است یکای جرم اتمی (amu) نامیده می‌شود:

گروه ← I II III IV

دوره ۱	سری ۱	I	II	III	IV
۱	۱H ۱٫۰۰۷۹۷				
۲	۲	۲Li ۶٫۹۳۹	۴Be ۹٫۰۱۲۲	۵B ۱۰٫۸۱۱	۶C ۱۲٫۰۱۱۱۵
۳	۳	۱۱Na ۲۲٫۹۸۹۸	۱۲Mg ۲۴٫۳۱۲	۱۳Al ۲۶٫۹۸۱۵	۱۴Si ۲۸٫۰۸۶
۴	۴	۱۹K ۳۹٫۱۰۲	۲۰Ca ۴۰٫۰۸	۲۱Sc ۴۴٫۹۵۶	۲۲Ti ۴۷٫۹۰
	۵	۲۹Cu ۶۳٫۵۴	۳۰Zn ۶۵٫۳۷	۳۱Ga ۶۹٫۷۲	۳۲Ge ۷۲٫۵۹
۵	۶	۳۷Rb ۸۵٫۴۷	۳۸Sr ۸۷٫۶۲	۳۹Y ۸۸٫۹۰۵	۴۰Zr ۹۱٫۲۲
	۷	۴۷Ag ۱۰۷٫۸۷۰	۴۸Cd ۱۱۲٫۴۰	۴۹In ۱۱۴٫۸۲	۵۰Sn ۱۱۸٫۶۹
۶	۸	۵۵Cs ۱۳۲٫۹۰۵	۵۶Ba ۱۳۷٫۳۴	۵۷-۷۱ سری لانتانیدها*	۷۲Hf ۱۷۸٫۴۹
	۹	۷۹Au ۱۹۶٫۹۶۶۷	۸۰Hg ۲۰۰٫۵۹	۸۱Tl ۲۰۴٫۳۷	۸۲Pb ۲۰۷٫۲۱۹
۷	۱۰	۸۷Fr [۲۲۳]	۸۸Ra [۲۲۶٫۰۵]	۸۹- سری اکتینیدها**	

۶۲Sm	۶۱Pm	۶۰Nd	۵۹Pr	۵۸Ce	۵۷La	} سری لانتانیدها
۱۵۰٫۳۵	[۱۴۷]	۱۴۴٫۲۴	۱۴۰٫۹۰۷	۱۴۰٫۱۲	۱۳۸٫۹۱	
۹۴Pu	۹۳Np	۹۲U	۹۱Pa	۹۰Th	۸۹Ac	} سری اکتینیدها
[۲۴۲]	[۲۳۷]	۲۳۸٫۰۳	[۲۳۱]	۲۳۲٫۰۳۸	[۲۲۷]	

### جدول ثابتهای اساسی

مقدار	نماد	ثابت
$۲۹۹۹۷۹ \times ۱۰^۸ \text{ms}^{-۱}$	$c$	سرعت نور
$۱٫۶۰۲۱ \times ۱۰^{-۱۹} \text{C}$	$e$	بار بنیادی
$۹٫۱۰۹۱ \times ۱۰^{-۳۱} \text{kg}$	$m_e$	جرم سکون الکترون
$۱٫۶۷۲۵ \times ۱۰^{-۲۷} \text{kg}$	$m_p$	جرم سکون پروتون
$۱٫۶۷۴۸ \times ۱۰^{-۲۷} \text{kg}$	$m_n$	جرم سکون نوترون
$۶٫۶۲۵۶ \times ۱۰^{-۳۴} \text{Js}$	$h$	ثابت پلانک
$۱٫۰۵۴۵ \times ۱۰^{-۳۴} \text{Js}$	$\hbar = h/2\pi$	
$۱٫۷۵۸۸ \times ۱۰^{۱۱} \text{kg}^{-۱}\text{C}$	$e/m_e$	نسبت بار به جرم الکترون
$۴٫۱۳۵۶ \times ۱۰^{-۱۵} \text{Js C}^{-۱}$	$h/e$	نسبت $h$ به $e$
$۵٫۲۹۱۷ \times ۱۰^{-۱۱} \text{m}$	$a_0$	شعاع بور
$۲٫۴۲۶۲ \times ۱۰^{-۱۲} \text{m}$	$\lambda_{C,e}$	طول موج کامپتون الکترون
$۱٫۳۲۱۴ \times ۱۰^{-۱۵} \text{m}$	$\lambda_{C,p}$	طول موج کامپتون پروتون
$۱٫۰۹۷۴ \times ۱۰^۷ \text{m}^{-۱}$	$R$	ثابت ریذبرگ

$1 \text{amu} = 1.66054 \times 10^{-27} \text{kg}$ . در این مقیاس، جرم اتمی کربن  $^{12}\text{C}$  است، زیرا متوسط ایزوتوپهای طبیعی موجود کربن است. برای عناصری که به طور مصنوعی ساخته می‌شوند، جرم اتمی تقریبی با دقت کمترین ایزوتوپ آن در داخل کروشه داده شده است.

0	VIII			VII	VI	V
$^4\text{He}$ ۴.۰۰۲۶						
$^{10}\text{Ne}$ ۲۰.۱۸۳				$^9\text{F}$ ۱۸.۹۹۸۴	$^{10}\text{O}$ ۱۵.۹۹۹۴	$^{14}\text{N}$ ۱۴.۰۰۶۷
$^{18}\text{Ar}$ ۳۹.۹۴۸				$^{37}\text{Cl}$ ۳۵.۴۵۳	$^{32}\text{S}$ ۳۲.۰۶۴	$^{31}\text{P}$ ۳۰.۹۷۳۸
	$^{58}\text{Ni}$ ۵۸.۷۱	$^{59}\text{Co}$ ۵۸.۹۳۳۲	$^{56}\text{Fe}$ ۵۵.۸۴۷	$^{55}\text{Mn}$ ۵۴.۹۳۸۰	$^{52}\text{Cr}$ ۵۱.۹۹۶	$^{51}\text{V}$ ۵۰.۹۴۲
$^{36}\text{Kr}$ ۸۳.۹۰				$^{80}\text{Br}$ ۷۹.۹۰۹	$^{78}\text{Se}$ ۷۸.۹۶	$^{79}\text{As}$ ۷۴.۹۲۱۶
	$^{46}\text{Pd}$ ۱۰۶.۹۴	$^{45}\text{Rh}$ ۱۰۱.۹۰۵	$^{44}\text{Ru}$ ۱۰۱.۰۷	$^{43}\text{Tc}$ [۹۹]	$^{42}\text{Mo}$ ۹۵.۹۴	$^{41}\text{Nb}$ ۹۲.۹۰۶
$^{54}\text{Xe}$ ۱۳۱.۳۰				$^{51}\text{I}$ ۱۲۶.۹۰۴۴	$^{52}\text{Te}$ ۱۲۷.۶۰	$^{51}\text{Sb}$ ۱۲۱.۷۵
	$^{78}\text{Pt}$ ۱۹۵.۰۹	$^{77}\text{Ir}$ ۱۹۲.۲۲	$^{76}\text{Os}$ ۱۹۰.۰۲	$^{75}\text{Re}$ ۱۸۶.۰۲	$^{74}\text{W}$ ۱۸۳.۸۵	$^{73}\text{Ta}$ ۱۸۰.۹۴۸
$^{86}\text{Rn}$ [۲۲۲]				$^{85}\text{At}$ [۲۱۰]	$^{84}\text{Po}$ [۲۱۰]	$^{83}\text{Bi}$ ۲۰۸.۹۸۰

$^{71}\text{Lu}$ ۱۷۴.۹۷	$^{70}\text{Yb}$ ۱۷۳.۰۴	$^{69}\text{Tm}$ ۱۶۸.۹۳۴	$^{68}\text{Er}$ ۱۶۷.۲۶	$^{67}\text{Ho}$ ۱۶۴.۹۳۰	$^{66}\text{Dy}$ ۱۶۲.۵۰	$^{65}\text{Tb}$ ۱۵۸.۹۲۴	$^{64}\text{Gd}$ ۱۵۷.۲۵	$^{63}\text{Eu}$ ۱۵۱.۹۶
۱۰۳	$^{102}\text{No}$	$^{101}\text{Md}$ [۲۵۶]	$^{100}\text{Fm}$ [۲۵۵]	$^{۹۹}\text{Es}$ [۲۵۳]	$^{۹۸}\text{Cf}$ [۲۴۹]	$^{۹۷}\text{Bk}$ [۲۴۹]	$^{۹۶}\text{Cm}$ [۲۴۵]	$^{۹۵}\text{Am}$ [۲۴۳]

مقدار

نماد

ثابت

$$9.27332 \times 10^{-24} \text{J T}^{-1}$$

$\mu_B$

مگنتون بور

$$6.02225 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$N_A$

ثابت آووگادرو

$$1.38065 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

$k$

ثابت بولتزمن

$$8.31447 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

$R$

ثابت گازهای کامل

$$2.2414 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$$

$V_0$

حجم گاز کامل در شرایط معمارفی (STP)

$$9.96487 \times 10^4 \text{ C mol}^{-1}$$

$F$

ثابت فاراده

$$8.98755 \times 10^8 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$$

$K_e$

ثابت کولن

$$8.98755 \times 10^{11} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ C}^2$$

$\epsilon_0$

گذردهی خلا

$$1.00000 \times 10^{-7} \text{ m kg C}^{-2}$$

$K_m$

ثابت مغناطیسی

$$1.35596 \times 10^{-6} \text{ m kg C}^{-2}$$

$\mu_0$

تراوایی خلا

$$6.670 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

$\gamma$

ثابت گرانش

$$9.7805 \text{ ms}^{-2}$$

$g$

شتاب گرانی در سطح دریا و در استوا

$$\sqrt{3} = 1.73205; \sqrt{2} = 1.41421; e = 2.71828; \pi = 3.14159$$

ثابت‌های عددی:

فشار  
 $1 \text{ Nm}^{-2} = 9.8665 \times 10^{-6} \text{ atm}$   
 $= 1.4750 \times 10^{-4} \text{ lbf in}^{-2} = 10 \text{ dyn cm}^{-2}$   
 $1 \text{ atm} = 1.475 \text{ lbf in}^{-2} = 1.013 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$   
 $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ dyn cm}^{-2}$

انرژی  
 $1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg} = 0.239 \text{ cal}$   
 $= 6.2422 \times 10^{18} \text{ eV}$   
 $1 \text{ eV} = 10^{-6} \text{ MeV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ erg}$   
 $= 1.07 \times 10^{-9} \text{ amu}$   
 $1 \text{ cal} = 4.184 \text{ J} = 2.39 \times 10^{10} \text{ eV}$   
 $= 2.3805 \times 10^{10} \text{ amu}$   
 $1 \text{ amu} = 1.494 \times 10^{-10} \text{ J}$   
 $= 3.826 \times 10^{-11} \text{ cal} = 931.5 \text{ MeV}$

دما  
 $K = 273.15 + ^\circ\text{C}$   
 $^\circ\text{C} = 5(^{\circ}\text{F} - 32)/9$   
 $^{\circ}\text{F} = 9/5^{\circ}\text{C} + 32$

توان  
 $1 \text{ W} = 1.341 \times 10^{-7} \text{ hp}$   
 $1 \text{ hp} = 745.7 \text{ W}$

بار الکتریکی  
 $1 \text{ C} = 3 \times 10^9 \text{ stC}$   
 $1 \text{ stC} = 1/3 \times 10^{-9} \text{ C}$

جریان  
 $1 \text{ A} = 3 \times 10^9 \text{ stA}$   
 $1 \text{ stA} = 1/3 \times 10^{-9} \text{ A}$   
 $1 \mu\text{A} = 10^{-6} \text{ A}, 1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A}$

میدان الکتریکی  
 $1 \text{ NC}^{-1} = 1 \text{ Vm}^{-1} = 10^{-1} \text{ Vcm}^{-1}$   
 $= 1/3 \times 10^{-9} \text{ st Vcm}^{-1}$

پتانسیل الکتریکی  
 $1 \text{ V} = 1/3 \times 10^9 \text{ stV}$   
 $1 \text{ stV} = 3 \times 10^{-9} \text{ V}$

مقاومت  
 $1 \Omega = 10^9 \mu\Omega$   
 $1 \text{ M}\Omega = 10^6 \Omega$

ظرفیت  
 $1 \text{ F} = 9 \times 10^{11} \text{ stF}$   
 $1 \text{ stF} = 1/9 \times 10^{-11} \text{ F}$   
 $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}, 1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$

میدان مغناطیسی  
 $1 \text{ T} = 10^4 \text{ Gs (گاوس)}, 1 \text{ Gs (گاوس)} = 10^{-4} \text{ T}$

شار مغناطیسی  
 $1 \text{ Wb} = 10^8 \text{ Mx (ماکسول)}$   
 $1 \text{ (ماکسول)} = 10^{-8} \text{ Wb}$

میدان مغناطیسی کننده  
 $1 \text{ Am}^{-1} = 4\pi \times 10^{-3} \text{ اورستد}$   
 $1 \text{ Os (اورستد)} = 1/4\pi \times 10^3 \text{ Am}^{-1}$

در تمام موارد، عدد ۳ عملاً به جای ۳.۱۴۱۵۹ و عدد ۹ به جای ۸.۹۸۷۶۵۴ به کار رفته است.

زمان  
 $1 \text{ s} = 1.6667 \times 10^{-7} \text{ min} = 2.7778 \times 10^{-2} \text{ hr}$   
 $= 3.169 \times 10^{-8} \text{ yr}$   
 $1 \text{ min} = 60 \text{ s} = 1.6667 \times 10^{-2} \text{ h}$   
 $= 1.901 \times 10^{-7} \text{ yr}$   
 $1 \text{ h} = 3600 \text{ s} = 60 \text{ min} = 1.1111 \times 10^{-2} \text{ yr}$   
 $1 \text{ yr} = 3.156 \times 10^7 \text{ s} = 5.2596 \times 10^5 \text{ min}$   
 $= 8.766 \times 10^4 \text{ h}$

طول  
 $1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm} = 3.937 \text{ in}$   
 $= 6.214 \times 10^{-4} \text{ mi}$   
 $1 \text{ mi} = 5280 \text{ ft} = 1.609 \text{ km}$   
 $1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$   
 $1 \text{ \AA} (\text{آنگستروم}) = 10^{-8} \text{ cm}$   
 $= 10^{-10} \text{ m} = 10^{-4} \mu\text{ (میکرون)}$   
 $1 \mu\text{ (میکرون)} = 10^{-6} \text{ m}$   
 $1 \text{ AU (یکای اخترشناسی)} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$   
 $1 \text{ سال نوری} = 9.46 \times 10^{16} \text{ m}$   
 $1 \text{ پارسک} = 3.084 \times 10^{16} \text{ m}$

زاویه  
 $1 \text{ rad (رادان)} = 57.3^\circ$   
 $1^\circ = 1.74 \times 10^{-2} \text{ rad}$   
 $1' = 2.91 \times 10^{-4} \text{ rad}$   
 $1'' = 4.85 \times 10^{-6} \text{ rad}$

مساحت  
 $1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2 = 1.55 \times 10^{-6} \text{ in}^2 = 10.76 \text{ ft}^2$   
 $1 \text{ in}^2 = 6.452 \text{ cm}^2$   
 $1 \text{ ft}^2 = 144 \text{ in}^2 = 9.29 \times 10^{-2} \text{ m}^2$

حجم  
 $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3 = 10^3 \text{ لیتر}$   
 $= 35.3 \text{ ft}^3 = 6.1 \times 10^4 \text{ in}^3$   
 $1 \text{ ft}^3 = 28.3 \times 10^3 \text{ cm}^3 = 28.32 \text{ لیتر}$   
 $1 \text{ in}^3 = 16.39 \text{ cm}^3$

سرعت  
 $1 \text{ ms}^{-1} = 10^2 \text{ cms}^{-1} = 3.281 \text{ ft s}^{-1}$   
 $1 \text{ ft s}^{-1} = 30.48 \text{ cms}^{-1}$   
 $1 \text{ mi min}^{-1} = 60 \text{ mi hr}^{-1} = 88 \text{ ft s}^{-1}$

شتاب  
 $1 \text{ ms}^{-2} = 10^2 \text{ cm s}^{-2} = 3.281 \text{ ft s}^{-2}$   
 $1 \text{ ft s}^{-2} = 30.48 \text{ cm s}^{-2}$

جرم  
 $1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g} = 2.205 \text{ lb}$   
 $1 \text{ lb} = 453.6 \text{ g} = 0.4536 \text{ kg}$   
 $1 \text{ amu} = 1.666 \times 10^{-27} \text{ kg}$

نیرو  
 $1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyn} = 0.2248 \text{ lbf} = 0.102 \text{ kgf}$   
 $1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N} = 2.248 \times 10^{-6} \text{ lbf}$   
 $1 \text{ lbf} = 4.448 \text{ N} = 4.448 \times 10^5 \text{ dyn}$   
 $1 \text{ kgf} = 9.81 \text{ N}$

جدول توابع مثلثاتی

tg	cos	sin	زاویه		tg	cos	sin	زاویه	
			رادیان	درجه				رادیان	درجه
۱٫۰۳۶	۰٫۶۹۵	۰٫۷۱۹	۰٫۸۰۳	۴۶۰	۰٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۰	۰۰
۱٫۰۷۲	۰٫۶۸۲	۰٫۷۳۱	۰٫۸۲۰	۴۷۰	۰٫۰۱۸	۱٫۰۰۰	۰٫۰۱۸	۰٫۰۱۷	۱۰
۱٫۱۱۱	۰٫۶۶۹	۰٫۷۴۳	۰٫۸۳۸	۴۸۰	۰٫۰۳۵	۰٫۹۹۹	۰٫۰۳۵	۰٫۰۳۵	۲۰
۱٫۱۵۰	۰٫۶۵۶	۰٫۷۵۵	۰٫۸۵۵	۴۹۰	۰٫۰۵۲	۰٫۹۹۹	۰٫۰۵۲	۰٫۰۵۲	۳۰
۱٫۱۹۲	۰٫۶۴۳	۰٫۷۶۶	۰٫۸۷۳	۵۰۰	۰٫۰۷۰	۰٫۹۹۸	۰٫۰۷۰	۰٫۰۷۰	۴۰
۱٫۲۳۵	۰٫۶۲۹	۰٫۷۷۷	۰٫۸۹۰	۵۱۰	۰٫۰۸۸	۰٫۹۹۶	۰٫۰۸۷	۰٫۰۸۷	۵۰
۱٫۲۸۰	۰٫۶۱۶	۰٫۷۸۸	۰٫۹۰۸	۵۲۰	۰٫۱۰۵	۰٫۹۹۵	۰٫۱۰۵	۰٫۱۰۵	۶۰
۱٫۳۲۷	۰٫۶۰۲	۰٫۷۹۹	۰٫۹۲۵	۵۳۰	۰٫۱۲۳	۰٫۹۹۳	۰٫۱۲۲	۰٫۱۲۲	۷۰
۱٫۳۷۶	۰٫۵۸۸	۰٫۸۰۹	۰٫۹۴۲	۵۴۰	۰٫۱۴۱	۰٫۹۹۰	۰٫۱۳۹	۰٫۱۴۰	۸۰
۱٫۴۲۸	۰٫۵۷۴	۰٫۸۱۹	۰٫۹۶۰	۵۵۰	۰٫۱۵۸	۰٫۹۸۸	۰٫۱۵۶	۰٫۱۵۷	۹۰
۱٫۴۸۳	۰٫۵۵۹	۰٫۸۲۹	۰٫۹۷۷	۵۶۰	۰٫۱۷۶	۰٫۹۸۵	۰٫۱۷۴	۰٫۱۷۵	۱۰۰
۱٫۵۴۰	۰٫۵۴۵	۰٫۸۳۹	۰٫۹۹۵	۵۷۰	۰٫۱۹۴	۰٫۹۸۲	۰٫۱۹۱	۰٫۱۹۲	۱۱۰
۱٫۶۰۰	۰٫۵۳۰	۰٫۸۴۸	۱٫۰۱۲	۵۸۰	۰٫۲۱۳	۰٫۹۷۸	۰٫۲۰۸	۰٫۲۰۹	۱۲۰
۱٫۶۶۴	۰٫۵۱۵	۰٫۸۵۷	۱٫۰۳۰	۵۹۰	۰٫۲۳۱	۰٫۹۷۴	۰٫۲۲۵	۰٫۲۲۷	۱۳۰
۱٫۷۳۲	۰٫۵۰۰	۰٫۸۶۶	۱٫۰۴۷	۶۰۰	۰٫۲۴۹	۰٫۹۷۰	۰٫۲۴۲	۰٫۲۴۴	۱۴۰
۱٫۸۰۴	۰٫۴۸۵	۰٫۸۷۵	۱٫۰۶۵	۶۱۰	۰٫۲۶۸	۰٫۹۶۶	۰٫۲۵۹	۰٫۲۶۲	۱۵۰
۱٫۸۸۱	۰٫۴۷۰	۰٫۸۸۳	۱٫۰۸۲	۶۲۰	۰٫۲۸۷	۰٫۹۶۱	۰٫۲۷۶	۰٫۲۷۹	۱۶۰
۱٫۹۶۳	۰٫۴۵۴	۰٫۸۹۱	۱٫۱۰۰	۶۳۰	۰٫۳۰۶	۰٫۹۵۶	۰٫۲۹۲	۰٫۲۹۷	۱۷۰
۲٫۰۵۰	۰٫۴۳۸	۰٫۸۹۹	۱٫۱۱۷	۶۴۰	۰٫۳۲۵	۰٫۹۵۱	۰٫۳۰۹	۰٫۳۱۴	۱۸۰
۲٫۱۴۵	۰٫۴۲۳	۰٫۹۰۶	۱٫۱۳۴	۶۵۰	۰٫۳۴۴	۰٫۹۴۶	۰٫۳۲۶	۰٫۳۳۲	۱۹۰
۲٫۲۴۶	۰٫۴۰۷	۰٫۹۱۴	۱٫۱۵۲	۶۶۰	۰٫۳۶۴	۰٫۹۴۰	۰٫۳۴۲	۰٫۳۴۹	۲۰۰
۲٫۳۵۶	۰٫۳۹۱	۰٫۹۲۱	۱٫۱۶۹	۶۷۰	۰٫۳۸۴	۰٫۹۳۴	۰٫۳۵۸	۰٫۳۶۷	۲۱۰
۲٫۴۷۵	۰٫۳۷۵	۰٫۹۲۷	۱٫۱۸۷	۶۸۰	۰٫۴۰۴	۰٫۹۲۷	۰٫۳۷۵	۰٫۳۸۴	۲۲۰
۲٫۶۰۵	۰٫۳۵۸	۰٫۹۳۴	۱٫۲۰۴	۶۹۰	۰٫۴۲۵	۰٫۹۲۱	۰٫۳۹۱	۰٫۴۰۱	۲۳۰
۲٫۷۴۸	۰٫۳۴۲	۰٫۹۴۰	۱٫۲۲۲	۷۰۰	۰٫۴۴۵	۰٫۹۱۴	۰٫۴۰۷	۰٫۴۱۹	۲۴۰
۲٫۹۰۴	۰٫۳۲۶	۰٫۹۴۶	۱٫۲۳۹	۷۱۰	۰٫۴۶۶	۰٫۹۰۶	۰٫۴۲۳	۰٫۴۳۶	۲۵۰
۳٫۰۷۸	۰٫۳۰۹	۰٫۹۵۱	۱٫۲۵۷	۷۲۰	۰٫۴۸۸	۰٫۸۹۹	۰٫۴۳۸	۰٫۴۵۴	۲۶۰
۳٫۲۷۱	۰٫۲۹۲	۰٫۹۵۶	۱٫۲۷۴	۷۳۰	۰٫۵۱۰	۰٫۸۹۱	۰٫۴۵۴	۰٫۴۷۱	۲۷۰
۳٫۴۸۷	۰٫۲۷۶	۰٫۹۶۱	۱٫۲۹۲	۷۴۰	۰٫۵۳۲	۰٫۸۸۳	۰٫۴۷۰	۰٫۴۸۹	۲۸۰
۳٫۷۳۲	۰٫۲۵۹	۰٫۹۶۶	۱٫۳۰۹	۷۵۰	۰٫۵۵۴	۰٫۸۷۵	۰٫۴۸۵	۰٫۵۰۶	۲۹۰
۴٫۰۱۱	۰٫۲۴۲	۰٫۹۷۰	۱٫۳۲۶	۷۶۰	۰٫۵۷۷	۰٫۸۶۶	۰٫۵۰۰	۰٫۵۲۴	۳۰۰
۴٫۳۳۲	۰٫۲۲۵	۰٫۹۷۴	۱٫۳۴۴	۷۷۰	۰٫۶۰۱	۰٫۸۵۷	۰٫۵۱۵	۰٫۵۴۱	۳۱۰
۴٫۷۰۵	۰٫۲۰۸	۰٫۹۷۸	۱٫۳۶۱	۷۸۰	۰٫۶۲۵	۰٫۸۴۸	۰٫۵۳۰	۰٫۵۵۹	۳۲۰
۵٫۱۴۵	۰٫۱۹۱	۰٫۹۸۲	۱٫۳۷۹	۷۹۰	۰٫۶۴۹	۰٫۸۳۹	۰٫۵۴۵	۰٫۵۷۶	۳۳۰
۵٫۶۷۱	۰٫۱۷۴	۰٫۹۸۵	۱٫۳۹۶	۸۰۰	۰٫۶۷۵	۰٫۸۲۹	۰٫۵۵۹	۰٫۵۹۳	۳۴۰
۶٫۳۱۴	۰٫۱۵۶	۰٫۹۸۸	۱٫۴۱۴	۸۱۰	۰٫۷۰۰	۰٫۸۱۹	۰٫۵۷۴	۰٫۶۱۱	۳۵۰
۷٫۱۱۵	۰٫۱۳۹	۰٫۹۹۰	۱٫۴۳۱	۸۲۰	۰٫۷۲۷	۰٫۸۰۹	۰٫۵۸۸	۰٫۶۲۸	۳۶۰
۸٫۱۴۴	۰٫۱۲۲	۰٫۹۹۳	۱٫۴۴۹	۸۳۰	۰٫۷۵۴	۰٫۷۹۵	۰٫۶۰۲	۰٫۶۶۴	۳۷۰
۹٫۵۱۴	۰٫۱۰۵	۰٫۹۹۵	۱٫۴۶۶	۸۴۰	۰٫۷۸۱	۰٫۷۸۸	۰٫۶۱۶	۰٫۶۶۳	۳۸۰
۱۱٫۴۳	۰٫۰۸۷	۰٫۹۹۶	۱٫۴۸۴	۸۵۰	۰٫۸۰۷	۰٫۷۷۷	۰٫۶۲۹	۰٫۶۸۱	۳۹۰
۱۴٫۳۰	۰٫۰۷۰	۰٫۹۹۸	۱٫۵۰۱	۸۶۰	۰٫۸۳۹	۰٫۷۶۶	۰٫۶۴۳	۰٫۶۹۸	۴۰۰
۱۹٫۰۸	۰٫۰۵۲	۰٫۹۹۹	۱٫۵۱۸	۸۷۰	۰٫۸۶۹	۰٫۷۵۵	۰٫۶۵۸	۰٫۷۱۶	۴۱۰
۲۴٫۶۴	۰٫۰۳۵	۰٫۹۹۹	۱٫۵۳۶	۸۸۰	۰٫۹۰۰	۰٫۷۴۳	۰٫۶۶۹	۰٫۷۳۳	۴۲۰
۵۷٫۲۹	۰٫۰۱۷	۱٫۰۰۰	۱٫۵۵۳	۸۹۰	۰٫۹۳۳	۰٫۷۳۱	۰٫۶۸۲	۰٫۷۵۱	۴۳۰
∞	۰٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۵۷۱	۹۰۰	۰٫۹۶۶	۰٫۷۱۹	۰٫۶۹۵	۰٫۷۶۸	۴۴۰
					۱٫۰۰۰	۰٫۷۰۷	۰٫۷۰۷	۰٫۷۸۵	۴۵۰

## جدول لکارتیم

N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۰	۰۰۰۰	۰۰۰۰	۳۰۱۰	۴۷۷۱	۶۰۲۱	۶۹۹۰	۷۷۸۲	۸۴۵۱	۹۰۲۱	۹۵۲۲
۱	۰۰۰۰	۰۴۱۲	۰۷۹۲	۱۱۳۹	۱۴۶۱	۱۷۶۱	۲۰۴۱	۲۳۰۲	۲۵۵۲	۲۷۸۸
۲	۳۲۱۰	۳۲۲۲	۳۴۲۲	۳۶۱۷	۳۸۰۲	۳۹۷۹	۴۱۵۰	۴۳۱۲	۴۴۷۲	۴۶۲۲
۳	۴۷۷۱	۴۹۱۲	۵۰۵۱	۵۱۸۵	۵۳۱۵	۵۴۴۱	۵۵۶۲	۵۶۸۲	۵۷۹۸	۵۹۱۱
۴	۶۰۲۱	۶۱۲۸	۶۲۲۲	۶۳۲۵	۶۴۳۵	۶۵۲۲	۶۶۲۸	۶۷۲۱	۶۸۲۲	۶۹۰۲
۵	۶۹۹۰	۷۰۷۶	۷۱۶۰	۷۲۲۳	۷۳۱۲	۷۴۰۲	۷۴۸۲	۷۵۵۹	۷۶۲۲	۷۷۰۹
۶	۷۷۸۲	۷۸۵۲	۷۹۲۲	۷۹۹۲	۸۰۶۲	۸۱۲۹	۸۱۹۵	۸۲۶۱	۸۳۲۵	۸۳۸۸
۷	۸۴۵۱	۸۵۱۳	۸۵۷۳	۸۶۳۲	۸۶۹۲	۸۷۵۱	۸۸۰۸	۸۸۶۵	۸۹۲۱	۸۹۷۶
۸	۹۰۲۱	۹۰۸۵	۹۱۲۸	۹۱۹۱	۹۲۴۲	۹۲۹۲	۹۳۴۵	۹۳۹۵	۹۴۴۵	۹۴۹۲
۹	۹۵۲۲	۹۵۹۰	۹۶۳۸	۹۶۸۵	۹۷۳۱	۹۷۷۷	۹۸۲۳	۹۸۶۸	۹۹۱۲	۹۹۵۶
۱۰	۰۰۰۰	۰۰۴۳	۰۰۸۶	۰۱۲۸	۰۱۷۰	۰۲۱۲	۰۲۵۳	۰۲۹۲	۰۳۳۲	۰۳۷۲
۱۱	۰۴۱۲	۰۴۵۳	۰۴۹۲	۰۵۳۱	۰۵۶۹	۰۶۰۷	۰۶۴۵	۰۶۸۲	۰۷۱۹	۰۷۵۵
۱۲	۰۷۹۲	۰۸۳۸	۰۸۶۴	۰۸۹۹	۰۹۳۲	۰۹۶۹	۱۰۰۲	۱۰۳۸	۱۰۷۲	۱۱۰۶
۱۳	۱۱۳۹	۱۱۷۳	۱۲۰۶	۱۲۳۹	۱۲۷۱	۱۳۰۳	۱۳۳۵	۱۳۶۷	۱۳۹۹	۱۴۳۰
۱۴	۱۴۶۱	۱۴۹۲	۱۵۲۳	۱۵۵۳	۱۵۸۴	۱۶۱۴	۱۶۴۲	۱۶۷۳	۱۷۰۳	۱۷۳۲
۱۵	۱۷۶۱	۱۷۹۰	۱۸۱۸	۱۸۴۷	۱۸۷۴	۱۹۰۳	۱۹۳۱	۱۹۵۹	۱۹۸۷	۲۰۱۴
۱۶	۲۰۴۱	۲۰۶۸	۲۰۹۵	۲۱۲۲	۲۱۴۸	۲۱۷۵	۲۲۰۱	۲۲۲۷	۲۲۵۳	۲۲۷۹
۱۷	۲۳۰۲	۲۳۰۲	۲۳۵۵	۲۳۸۰	۲۴۰۵	۲۴۳۰	۲۴۵۵	۲۴۸۰	۲۵۰۴	۲۵۲۹
۱۸	۲۵۵۲	۲۵۷۷	۲۶۰۱	۲۶۲۵	۲۶۴۸	۲۶۷۲	۲۶۹۵	۲۷۱۸	۲۷۴۲	۲۷۶۵
۱۹	۲۷۸۸	۲۸۱۰	۲۸۳۲	۲۸۵۴	۲۸۷۸	۲۹۰۰	۲۹۲۳	۲۹۴۵	۲۹۶۷	۲۹۸۹
۲۰	۳۰۱۰	۳۰۴۲	۳۰۵۴	۳۰۷۵	۳۰۹۶	۳۱۱۸	۳۱۳۹	۳۱۶۰	۳۱۸۱	۳۲۰۱
۲۱	۳۲۲۲	۳۲۴۳	۳۲۶۴	۳۲۸۴	۳۳۰۴	۳۳۲۴	۳۳۴۵	۳۳۶۵	۳۳۸۵	۳۴۰۴
۲۲	۳۴۲۲	۳۴۴۲	۳۴۶۴	۳۴۸۳	۳۵۰۲	۳۵۲۲	۳۵۴۱	۳۵۶۰	۳۵۷۹	۳۵۹۸
۲۳	۳۶۱۷	۳۶۳۶	۳۶۵۵	۳۶۷۴	۳۶۹۲	۳۷۱۱	۳۷۲۹	۳۷۴۷	۳۷۶۵	۳۷۸۲
۲۴	۳۸۰۲	۳۸۲۰	۳۸۳۸	۳۸۵۶	۳۸۷۲	۳۸۸۹	۳۹۰۹	۳۹۲۷	۳۹۴۵	۳۹۶۲
۲۵	۳۹۷۹	۳۹۹۷	۴۰۱۴	۴۰۳۱	۴۰۴۸	۴۰۶۵	۴۰۸۲	۴۰۹۹	۴۱۱۶	۴۱۳۲
۲۶	۴۱۵۰	۴۱۶۶	۴۱۸۳	۴۲۰۰	۴۲۱۶	۴۲۳۲	۴۲۴۹	۴۲۶۵	۴۲۸۱	۴۲۹۸
۲۷	۴۳۱۲	۴۳۳۰	۴۳۴۶	۴۳۶۲	۴۳۷۸	۴۳۹۴	۴۴۰۹	۴۴۲۵	۴۴۴۰	۴۴۵۶
۲۸	۴۴۷۲	۴۴۸۷	۴۵۰۲	۴۵۱۸	۴۵۳۳	۴۵۴۸	۴۵۶۴	۴۵۷۹	۴۵۹۴	۴۶۰۹
۲۹	۴۶۲۲	۴۶۳۹	۴۶۵۴	۴۶۶۹	۴۶۸۳	۴۶۹۸	۴۷۱۳	۴۷۲۸	۴۷۴۲	۴۷۵۷
۳۰	۴۷۷۱	۴۷۸۶	۴۸۰۰	۴۸۱۴	۴۸۲۹	۴۸۴۳	۴۸۵۷	۴۸۷۱	۴۸۸۶	۴۹۰۰
۳۱	۴۹۱۲	۴۹۲۸	۴۹۴۲	۴۹۵۵	۴۹۶۹	۴۹۸۳	۴۹۹۷	۵۰۱۱	۵۰۲۴	۵۰۳۸
۳۲	۵۰۵۱	۵۰۶۵	۵۰۷۹	۵۰۹۲	۵۱۰۵	۵۱۱۹	۵۱۳۲	۵۱۴۵	۵۱۵۹	۵۱۷۲
۳۳	۵۱۸۵	۵۱۹۸	۵۲۱۱	۵۲۲۴	۵۲۳۷	۵۲۵۰	۵۲۶۳	۵۲۷۶	۵۲۸۹	۵۳۰۲
۳۴	۵۳۱۵	۵۳۲۸	۵۳۴۰	۵۳۵۳	۵۳۶۶	۵۳۷۸	۵۳۹۱	۵۴۰۳	۵۴۱۶	۵۴۲۸
۳۵	۵۴۲۱	۵۴۳۲	۵۴۴۵	۵۴۵۸	۵۴۷۰	۵۴۸۰	۵۴۹۲	۵۵۰۲	۵۵۱۹	۵۵۳۱
۳۶	۵۵۶۳	۵۵۷۵	۵۵۸۷	۵۵۹۹	۵۶۱۱	۵۶۲۳	۵۶۳۵	۵۶۴۷	۵۶۵۸	۵۶۷۰
۳۷	۵۶۸۲	۵۶۹۴	۵۷۰۵	۵۷۱۷	۵۷۲۹	۵۷۴۰	۵۷۵۲	۵۷۶۳	۵۷۷۵	۵۷۸۶
۳۸	۵۷۹۸	۵۸۰۹	۵۸۲۱	۵۸۳۲	۵۸۴۳	۵۸۵۵	۵۸۶۶	۵۸۷۷	۵۸۸۸	۵۸۹۹
۳۹	۵۹۱۱	۵۹۲۲	۵۹۳۳	۵۹۴۴	۵۹۵۵	۵۹۶۶	۵۹۷۷	۵۹۸۸	۵۹۹۹	۶۰۱۰
۴۰	۶۰۴۱	۶۰۴۱	۶۰۴۲	۶۰۵۳	۶۰۶۴	۶۰۷۵	۶۰۸۵	۶۰۹۶	۶۱۰۷	۶۱۱۷
۴۱	۶۱۲۸	۶۱۳۸	۶۱۴۰	۶۱۵۰	۶۱۷۰	۶۱۸۰	۶۱۹۱	۶۲۰۱	۶۲۱۲	۶۲۲۲
۴۲	۶۲۲۲	۶۲۲۲	۶۲۳۲	۶۲۴۳	۶۲۷۴	۶۲۸۴	۶۲۹۴	۶۳۰۴	۶۳۱۴	۶۳۲۵
۴۳	۶۳۲۵	۶۳۲۵	۶۳۳۵	۶۳۴۵	۶۳۷۵	۶۳۸۵	۶۳۹۵	۶۴۰۵	۶۴۱۵	۶۴۲۵
۴۴	۶۴۲۵	۶۴۴۴	۶۴۵۴	۶۴۶۴	۶۴۷۴	۶۴۸۴	۶۴۹۳	۶۵۰۳	۶۵۱۳	۶۵۲۲
۴۵	۶۵۳۲	۶۵۴۲	۶۵۵۱	۶۵۶۱	۶۵۷۱	۶۵۸۰	۶۵۹۰	۶۵۹۹	۶۶۰۹	۶۶۱۸
۴۶	۶۶۲۸	۶۶۳۷	۶۶۴۶	۶۶۵۶	۶۶۶۵	۶۶۷۵	۶۶۸۴	۶۶۹۳	۶۷۰۲	۶۷۱۲
۴۷	۶۷۲۱	۶۷۳۰	۶۷۳۹	۶۷۴۹	۶۷۵۸	۶۷۶۷	۶۷۷۶	۶۷۸۵	۶۷۹۴	۶۸۰۳
۴۸	۶۸۱۲	۶۸۱۱	۶۸۲۰	۶۸۲۹	۶۸۳۸	۶۸۴۷	۶۸۵۶	۶۸۶۵	۶۸۷۴	۶۸۸۳
۴۹	۶۹۰۲	۶۹۱۱	۶۹۲۰	۶۹۲۸	۶۹۳۷	۶۹۴۶	۶۹۵۵	۶۹۶۴	۶۹۷۲	۶۹۸۱
۵۰	۶۹۹۰	۶۹۹۸	۷۰۰۷	۷۰۱۶	۷۰۲۴	۷۰۳۳	۷۰۴۲	۷۰۵۰	۷۰۵۹	۷۰۶۷
N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

## جدول نگاریم

N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۵۰	۶۹۹۰	۶۹۹۸	۷۰۰۷	۷۰۱۶	۷۰۲۴	۷۰۳۳	۷۰۴۲	۷۰۵۰	۷۰۵۹	۷۰۶۷
۵۱	۷۰۷۶	۷۰۸۴	۷۰۹۳	۷۱۰۱	۷۱۱۰	۷۱۱۸	۷۱۲۶	۷۱۳۵	۷۱۴۳	۷۱۵۲
۵۲	۷۱۶۰	۷۱۶۸	۷۱۷۷	۷۱۸۵	۷۱۹۴	۷۲۰۲	۷۲۱۰	۷۲۱۸	۷۲۲۶	۷۲۳۵
۵۳	۷۲۴۳	۷۲۵۱	۷۲۵۹	۷۲۶۷	۷۲۷۵	۷۲۸۴	۷۲۹۲	۷۳۰۰	۷۳۰۸	۷۳۱۶
۵۴	۷۳۲۴	۷۳۳۲	۷۳۴۰	۷۳۴۸	۷۳۵۶	۷۳۶۴	۷۳۷۲	۷۳۸۰	۷۳۸۸	۷۳۹۶
۵۵	۷۴۰۴	۷۴۱۲	۷۴۱۹	۷۴۲۷	۷۴۳۵	۷۴۴۳	۷۴۵۱	۷۴۵۹	۷۴۶۶	۷۴۷۴
۵۶	۷۴۸۲	۷۴۹۰	۷۴۹۷	۷۵۰۵	۷۵۱۳	۷۵۲۰	۷۵۲۸	۷۵۳۶	۷۵۴۴	۷۵۵۱
۵۷	۷۵۵۹	۷۵۶۶	۷۵۷۴	۷۵۸۲	۷۵۸۹	۷۵۹۷	۷۶۰۴	۷۶۱۲	۷۶۱۹	۷۶۲۷
۵۸	۷۶۳۴	۷۶۴۲	۷۶۴۹	۷۶۵۷	۷۶۶۴	۷۶۷۲	۷۶۸۰	۷۶۸۸	۷۶۹۴	۷۷۰۱
۵۹	۷۷۰۹	۷۷۱۶	۷۷۲۳	۷۷۳۱	۷۷۳۸	۷۷۴۵	۷۷۵۲	۷۷۶۰	۷۷۶۷	۷۷۷۴
۶۰	۷۷۸۲	۷۷۸۹	۷۷۹۶	۷۸۰۳	۷۸۱۰	۷۸۱۸	۷۸۲۵	۷۸۳۲	۷۸۳۹	۷۸۴۶
۶۱	۷۸۵۳	۷۸۶۰	۷۸۶۸	۷۸۷۵	۷۸۸۲	۷۸۸۹	۷۸۹۶	۷۹۰۳	۷۹۱۰	۷۹۱۷
۶۲	۷۹۲۴	۷۹۳۱	۷۹۳۸	۷۹۴۵	۷۹۵۲	۷۹۵۹	۷۹۶۶	۷۹۷۳	۷۹۸۰	۷۹۸۷
۶۳	۷۹۹۳	۸۰۰۰	۸۰۰۷	۸۰۱۴	۸۰۲۱	۸۰۲۸	۸۰۳۵	۸۰۴۱	۸۰۴۸	۸۰۵۵
۶۴	۸۰۶۲	۸۰۶۹	۸۰۷۵	۸۰۸۲	۸۰۸۹	۸۰۹۶	۸۱۰۲	۸۱۰۹	۸۱۱۶	۸۱۲۲
۶۵	۸۱۲۹	۸۱۳۶	۸۱۴۲	۸۱۴۹	۸۱۵۶	۸۱۶۲	۸۱۶۹	۸۱۷۶	۸۱۸۲	۸۱۸۹
۶۶	۸۱۹۵	۸۲۰۲	۸۲۰۹	۸۲۱۵	۸۲۲۲	۸۲۲۸	۸۲۳۵	۸۲۴۱	۸۲۴۸	۸۲۵۴
۶۷	۸۲۶۱	۸۲۶۷	۸۲۷۴	۸۲۸۰	۸۲۸۷	۸۲۹۳	۸۲۹۹	۸۳۰۶	۸۳۱۲	۸۳۱۹
۶۸	۸۳۲۵	۸۳۳۱	۸۳۳۸	۸۳۴۴	۸۳۵۱	۸۳۵۷	۸۳۶۳	۸۳۷۰	۸۳۷۶	۸۳۸۲
۶۹	۸۳۸۸	۸۳۹۵	۸۴۰۱	۸۴۰۸	۸۴۱۴	۸۴۲۰	۸۴۲۶	۸۴۳۲	۸۴۳۹	۸۴۴۵
۷۰	۸۴۵۱	۸۴۵۷	۸۴۶۳	۸۴۷۰	۸۴۷۶	۸۴۸۲	۸۴۸۸	۸۴۹۴	۸۵۰۰	۸۵۰۶
۷۱	۸۵۱۳	۸۵۱۹	۸۵۲۵	۸۵۳۱	۸۵۳۷	۸۵۴۳	۸۵۴۹	۸۵۵۵	۸۵۶۱	۸۵۶۷
۷۲	۸۵۷۳	۸۵۷۹	۸۵۸۵	۸۵۹۱	۸۵۹۷	۸۶۰۳	۸۶۰۹	۸۶۱۵	۸۶۲۱	۸۶۲۷
۷۳	۸۶۳۳	۸۶۳۹	۸۶۴۵	۸۶۵۱	۸۶۵۷	۸۶۶۳	۸۶۶۹	۸۶۷۵	۸۶۸۱	۸۶۸۶
۷۴	۸۶۹۸	۸۶۹۸	۸۷۰۴	۸۷۱۰	۸۷۱۶	۸۷۲۲	۸۷۲۷	۸۷۳۳	۸۷۳۹	۸۷۴۵
۷۵	۸۷۵۱	۸۷۵۶	۸۷۶۸	۸۷۷۴	۸۷۸۰	۸۷۸۶	۸۷۹۱	۸۷۹۶	۸۷۹۷	۸۸۰۲
۷۶	۸۸۰۸	۸۸۱۴	۸۸۲۰	۸۸۲۵	۸۸۳۱	۸۸۳۷	۸۸۴۲	۸۸۴۸	۸۸۵۴	۸۸۵۹
۷۷	۸۸۶۵	۸۸۷۱	۸۸۷۶	۸۸۸۲	۸۸۸۷	۸۸۹۳	۸۸۹۹	۸۹۰۴	۸۹۱۰	۸۹۱۵
۷۸	۸۹۲۱	۸۹۲۷	۸۹۳۲	۸۹۳۸	۸۹۴۳	۸۹۴۹	۸۹۵۴	۸۹۶۰	۸۹۶۵	۸۹۷۱
۷۹	۸۹۷۶	۸۹۸۲	۸۹۸۷	۸۹۹۳	۸۹۹۸	۹۰۰۴	۹۰۰۹	۹۰۱۵	۹۰۲۰	۹۰۲۵
۸۰	۹۰۳۱	۹۰۳۶	۹۰۴۲	۹۰۴۷	۹۰۵۳	۹۰۵۸	۹۰۶۳	۹۰۶۹	۹۰۷۴	۹۰۷۹
۸۱	۹۰۸۵	۹۰۹۰	۹۰۹۶	۹۱۰۱	۹۱۰۶	۹۱۱۲	۹۱۱۷	۹۱۲۲	۹۱۲۸	۹۱۳۳
۸۲	۹۱۳۸	۹۱۴۳	۹۱۴۹	۹۱۵۴	۹۱۵۹	۹۱۶۵	۹۱۷۰	۹۱۷۵	۹۱۸۰	۹۱۸۶
۸۳	۹۱۹۱	۹۱۹۶	۹۲۰۱	۹۲۰۶	۹۲۱۲	۹۲۱۷	۹۲۲۲	۹۲۲۷	۹۲۳۲	۹۲۳۸
۸۴	۹۲۴۳	۹۲۴۸	۹۲۵۳	۹۲۵۸	۹۲۶۳	۹۲۶۹	۹۲۷۴	۹۲۷۹	۹۲۸۴	۹۲۸۹
۸۵	۹۲۹۴	۹۲۹۹	۹۳۰۴	۹۳۰۹	۹۳۱۵	۹۳۲۰	۹۳۲۵	۹۳۳۰	۹۳۳۵	۹۳۴۰
۸۶	۹۳۴۵	۹۳۵۰	۹۳۵۵	۹۳۶۰	۹۳۶۵	۹۳۷۰	۹۳۷۵	۹۳۸۰	۹۳۸۵	۹۳۹۰
۸۷	۹۳۹۵	۹۴۰۰	۹۴۰۵	۹۴۱۰	۹۴۱۵	۹۴۲۰	۹۴۲۵	۹۴۳۰	۹۴۳۵	۹۴۴۰
۸۸	۹۴۴۵	۹۴۵۰	۹۴۵۵	۹۴۶۰	۹۴۶۵	۹۴۶۹	۹۴۷۴	۹۴۷۹	۹۴۸۴	۹۴۸۹
۸۹	۹۴۹۴	۹۴۹۹	۹۵۰۴	۹۵۰۹	۹۵۱۴	۹۵۱۸	۹۵۲۳	۹۵۲۸	۹۵۳۳	۹۵۳۸
۹۰	۹۵۴۲	۹۵۴۷	۹۵۵۲	۹۵۵۷	۹۵۶۲	۹۵۶۶	۹۵۷۱	۹۵۷۶	۹۵۸۱	۹۵۸۶
۹۱	۹۵۹۰	۹۵۹۵	۹۶۰۰	۹۶۰۵	۹۶۰۹	۹۶۱۴	۹۶۱۹	۹۶۲۴	۹۶۲۸	۹۶۳۳
۹۲	۹۶۳۸	۹۶۴۳	۹۶۴۷	۹۶۵۲	۹۶۵۷	۹۶۶۱	۹۶۶۶	۹۶۷۱	۹۶۷۵	۹۶۸۰
۹۳	۹۶۸۵	۹۶۸۹	۹۶۹۴	۹۶۹۹	۹۷۰۳	۹۷۰۸	۹۷۱۳	۹۷۱۷	۹۷۲۲	۹۷۲۷
۹۴	۹۷۳۱	۹۷۳۶	۹۷۴۱	۹۷۴۵	۹۷۵۰	۹۷۵۴	۹۷۵۹	۹۷۶۳	۹۷۶۸	۹۷۷۳
۹۵	۹۷۷۷	۹۷۸۲	۹۷۸۶	۹۷۹۱	۹۷۹۵	۹۸۰۰	۹۸۰۵	۹۸۰۹	۹۸۱۴	۹۸۱۸
۹۶	۹۸۲۳	۹۸۲۷	۹۸۳۲	۹۸۳۶	۹۸۴۱	۹۸۴۵	۹۸۵۰	۹۸۵۴	۹۸۵۹	۹۸۶۳
۹۷	۹۸۶۸	۹۸۷۲	۹۸۷۷	۹۸۸۱	۹۸۸۶	۹۸۹۰	۹۸۹۴	۹۸۹۹	۹۹۰۳	۹۹۰۸
۹۸	۹۹۱۲	۹۹۱۷	۹۹۲۱	۹۹۲۶	۹۹۳۰	۹۹۳۴	۹۹۳۹	۹۹۴۳	۹۹۴۸	۹۹۵۲
۹۹	۹۹۵۶	۹۹۶۱	۹۹۶۵	۹۹۶۹	۹۹۷۳	۹۹۷۸	۹۹۸۳	۹۹۸۷	۹۹۹۱	۹۹۹۶
۱۰۰	۰۰۰۰	۰۰۰۴	۰۰۰۹	۰۰۱۳	۰۰۱۷	۰۰۲۲	۰۰۲۶	۰۰۳۰	۰۰۳۵	۰۰۳۹
N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

جدول توابع نمایی

$e^{-x}$	$e^x$	$x$	$e^{-x}$	$e^x$	$x$
۰,۰۸۲۱	۱۲,۱۸۲	۲,۵	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰	۰,۰
۰,۰۷۴۳	۱۳,۴۶۴	۲,۶	۰,۹۵۱۲	۱,۰۵۱۳	۰,۰۵
۰,۰۶۷۲	۱۴,۸۸۰	۲,۷	۰,۹۰۴۸	۱,۱۰۵۲	۰,۱۰
۰,۰۶۰۸	۱۶,۴۴۵	۲,۸	۰,۸۶۰۷	۱,۱۶۱۸	۰,۱۵
۰,۰۵۵۰	۱۸,۱۷۴	۲,۹	۰,۸۱۸۷	۱,۲۲۱۴	۰,۲۰
۰,۰۴۹۸	۲۰,۰۸۶	۳,۰	۰,۷۷۸۸	۱,۲۸۴۰	۰,۲۵
۰,۰۴۵۰	۲۲,۱۹۸	۳,۱	۰,۷۴۰۸	۱,۳۴۹۹	۰,۳۰
۰,۰۴۰۸	۲۴,۵۳۳	۳,۲	۰,۷۰۴۷	۱,۴۱۹۱	۰,۳۵
۰,۰۳۶۹	۲۷,۱۱۳	۳,۳	۰,۶۷۰۳	۱,۴۹۱۸	۰,۴۰
۰,۰۳۳۴	۲۹,۹۶۴	۳,۴	۰,۶۳۷۶	۱,۵۶۸۳	۰,۴۵
۰,۰۳۰۲	۳۳,۱۱۵	۳,۵	۰,۶۰۶۵	۱,۶۴۸۷	۰,۵۰
۰,۰۲۷۳	۳۶,۵۹۸	۳,۶	۰,۵۷۶۹	۱,۷۳۳۳	۰,۵۵
۰,۰۲۴۷	۴۰,۴۴۷	۳,۷	۰,۵۴۸۸	۱,۸۲۲۱	۰,۶۰
۰,۰۲۲۴	۴۴,۷۰۱	۳,۸	۰,۵۲۲۰	۱,۹۱۵۵	۰,۶۵
۰,۰۲۰۲	۴۹,۴۰۲	۳,۹	۰,۴۹۶۶	۲,۰۱۳۸	۰,۷۰
۰,۰۱۸۳	۵۴,۵۹۸	۴,۰	۰,۴۷۲۴	۲,۱۱۷۰	۰,۷۵
۰,۰۱۶۶	۶۰,۳۴۰	۴,۱	۰,۴۴۹۳	۲,۲۲۵۵	۰,۸۰
۰,۰۱۵۰	۶۶,۶۸۶	۴,۲	۰,۴۲۷۴	۲,۳۳۹۶	۰,۸۵
۰,۰۱۳۶	۷۳,۷۰۰	۴,۳	۰,۴۰۶۶	۲,۴۵۹۶	۰,۹۰
۰,۰۱۲۳	۸۱,۴۵۱	۴,۴	۰,۳۸۶۷	۲,۵۸۵۷	۰,۹۵
۰,۰۱۱۱	۹۰,۰۱۷	۴,۵	۰,۳۶۷۹	۲,۷۱۸۳	۱,۰
۰,۰۱۰۱	۹۹,۴۸۴	۴,۶	۰,۳۴۲۹	۲,۸۵۴۲	۱,۰۱
۰,۰۰۹۱	۱۰۹,۹۵	۴,۷	۰,۳۲۰۱۲	۳,۰۰۰۱	۱,۰۲
۰,۰۰۸۲	۱۲۱,۵۱	۴,۸	۰,۲۹۷۲۵	۳,۱۶۶۳	۱,۰۳
۰,۰۰۷۴	۱۳۴,۲۹	۴,۹	۰,۲۷۶۶	۳,۳۵۵۲	۱,۰۴
۰,۰۰۶۷	۱۴۸,۴۱	۵	۰,۲۵۸۱	۳,۵۶۱۷	۱,۰۵
۰,۰۰۶۰	۱۶۴,۴۳	۶	۰,۲۴۰۹	۳,۷۹۵۳	۱,۰۶
۰,۰۰۵۴	۱۸۲,۶۶	۷	۰,۲۲۵۲	۴,۰۶۷۳	۱,۰۷
۰,۰۰۴۸	۲۰۳,۱۰	۸	۰,۲۱۰۳	۴,۳۷۹۶	۱,۰۸
۰,۰۰۴۳	۲۲۶,۱۰	۹	۰,۱۹۶۶	۴,۷۲۸۹	۱,۰۹
۰,۰۰۰۰۵	۲۲۰۲۶	۱۰	۰,۱۸۳۵	۵,۱۱۸۹	۱,۱۰
			۰,۱۷۲۵	۵,۵۴۶۲	۱,۱۱
			۰,۱۶۱۰	۶,۰۲۵۰	۱,۱۲
			۰,۱۵۰۳	۶,۵۶۴۲	۱,۱۳
			۰,۱۴۰۷	۷,۱۷۲۳	۱,۱۴



## پاسخ مسائل فرد

### فصل ۱

۱۰۱ (ب)  $10 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ ،  $10^4 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-15} \text{ J}$

۱۰۲ (ج)  $1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$ ؛  $0.814 \text{ eV}$ ،  $0.299 \text{ eV}$ ،  $0.500 \text{ eV}$

۱۰۳  $1.78 \times 10^3 \text{ J}$

۱۰۴ (الف)  $(1/3) \times 10^{-9} \text{ T}$ ؛ (ب)  $1.33 \times 10^{-6} \text{ W m}^{-2}$ ؛ (ج)  $4.22 \times 10^{-15} \text{ J m}^{-2}$

(د)  $1.67 \text{ W}$ ؛ (ه)  $1.4 \times 10^{-22} \text{ m}^{-2} \text{ kg s}^{-1}$

۱۰۵  $E(\nu) = \lambda \pi k T \nu^3 / c^2$ ؛  $E(\nu) = (\lambda \pi h \nu^3 / c^2) e^{-h\nu/kT}$

۱۱۰  $0.214 \text{ J m}^{-2}$ ،  $4100 \text{ K}$

۱۳۰۱ (الف) الکترون بر متر مربع بر ثانیه  $1.7 \times 10^{10}$ ؛ (ب)  $3.0 \times 10^{-9} \text{ W m}^{-2}$

(ج)  $1.76 \times 10^{-19} \text{ J}$

۱۵۰۱ (الف)  $4.55 \times 10^{14} \text{ Hz}$ ؛ (ب)  $1.88 \text{ eV}$ ؛ (ج)  $4.1274 \times 10^{-15} \text{ J s C}^{-1}$

۱۷۰۱ (الف)  $1.024 \times 10^{-10} \text{ m}$ ؛ (ب)  $4.71 \times 10^{-17} \text{ J}$ ؛  $4.33^\circ$  نسبت به جهت فرودی

۱۹۰۱  $7.43 \times 10^{-12} \text{ m}$ ،  $1.6678 \text{ keV} = 2.67 \times 10^{-14} \text{ J}$

۲۳۰۱ (الف) فوتون بر متر مکعب  $5.03 \times 10^{21}$ ؛ (ب) فوتون بر متر مکعب ۲۵۸۵

۲۵۰۱ (الف)  $1.24 \times 10^{-9} \text{ m}$ ؛ (ب)  $1.24 \times 10^{-6} \text{ m}$ ؛ (ج)  $1.24 \times 10^{-4} \text{ m}$

۲۷۰۱ (الف)  $4.892 \text{ eV}$ ؛ (ب)  $6.7064 \text{ eV}$ ،  $4.8922 \text{ eV}$ ،  $3.9614 \text{ eV}$

$2.1465 \text{ eV}$ ،  $2.2723 \text{ eV}$

$$۱۰۱۳ \times ۱۰^{-۲} \text{m}, ۲۰۶۵ \times ۱۰^{۱۵} \text{Hz} \quad ۲۹۰۱$$

$$۳۰۱ \times ۱۰^{-۱۱} \text{m} \quad ۳۱۰۱$$

$$\text{بیشتر از انرژی بستگی} \quad ۷۰۵ \times ۱۰^{-۳} \text{eV} \quad ۳۳۰۱$$

$$۱۲۷ \quad ۳۷۰۱$$

$$۸۰۷۷ \times ۱۰^{-۳} \text{m}, ۲۰۳۹ \times ۱۰^{-۳} \text{m}, ۱۰۰۵ \times ۱۰^{-۴} \text{m} \quad ۳۹۰۱$$

$$۱۰۰ \text{ (ج)}, ۴۰ \text{ (ب)}, ۸ \text{ (الف)} \quad ۴۱۰۱$$

$$۸۰۰۶ \text{ cm}, ۷۰۹۸ \text{ cm} \quad ۴۳۰۱$$

$$۵^{\circ} ۴۷' \quad ۴۷۰۱$$

$$۴۹۰۱ \text{ (الف) برای هر فوتون: } ۳۰۹ \text{ m}, \text{ برای هر الکترون: } ۷۰۳ \times ۱۰^۳ \text{m} \text{ (ب) با دقت نامحدود برای هر دو مورد}$$

$$۲۰۱۳ \text{ MeV یا } ۵۰۱۵ \times ۱۰^{۱۴} \text{ Hz}, ۴۰۲۶ \times ۱۰^{-۶} \text{ eV یا } ۱۰۰۳ \times ۱۰^۹ \text{ Hz} \quad ۵۳۰۱$$

$$\Delta E_k = -2E_k/A \text{ (الف)} \quad ۵۵۰۱$$

## فصل ۲

۳۰۲ اختلاف انرژی میان ترازها (الف) افزایش می‌یابد؛ (ب) کاهش می‌یابد.

$$E_{\text{coul}} = ۱۰۲۴ \times ۱۰^۴ \text{ MeV}, E_{\text{grav}} = ۶۰۳۴ \times ۱۰^{-۱۷} \text{ eV}, ۳۰۸ \times ۱۰^۳ \text{ MeV} \quad ۵۰۲$$

$$(a^x p / 2\pi \hbar^x) dp \text{ (ب)}; (ma^x / 2\pi \hbar^x) dE \text{ (الف)} \quad ۱۳۰۲$$

$$۱۰۳۴ \times ۱۰^{-۳} \text{ eV} \text{ (ج)}; ۲۰۴۸ \times ۱۰^{-۱۲} \text{ eV} \text{ (ب)}; ۸۰۲۷ \times ۱۰^{-۱۳} \text{ eV} \text{ (الف)} \quad ۱۵۰۲$$

$$۲۲۰۷ \text{ MeV} \quad ۲۱۰۲$$

$$C = A(k^x - ika)e^{-\alpha a} / R, B = [-A(\alpha^x + k^x) \sinh \alpha a] / R \text{ (الف)} \quad ۲۳۰۲$$

$$\text{که در آن } A' = -2A(ika)e^{-ika} / R, D = -A(k^x + ika)e^{\alpha a} / R$$

$$R = (\alpha^x - k^x) \sin \alpha a - 2iak \cos \alpha a$$

$$C = -A(k'/k + 1)e^{-ik'a} / R', B = -iA(k'^x / k^x - 1) \sin k'a / R' \text{ (ب)}$$

$$\text{که در آن } A' = -2A(k'/k)e^{-ika} / R', D = -A(k'/k - 1)e^{ik'a} / R'$$

$$R' = i(k'^x / k^x + 1) \sin k'a - 2(k'/k) \cos k'a$$

$$: E < E_0 \quad ۲۵۰۲$$

$$\psi_1 = Ge^{-ikx}, \psi_2 = Ee^{\alpha x} + Fe^{-\alpha x}, \psi_3 = Ce^{\alpha'x} + De^{-\alpha'x}, \psi_4 = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}$$

$$: E_0 < E < E'$$

بالا مثل  $\psi_1, \psi_2 = Ee^{ik'x} + Fe^{-ik'x}$ ،  $\psi_3$  و  $\psi_4$  مثل بالا

$$E > E'$$

بالا مثل  $\psi_1, \psi_2 = Ee^{ik''x} + Fe^{-ik''x}$ ،  $\psi_3 = Ce^{ik'x} + De^{-ik'x}$ ،  $\psi_4$  مثل بالا

$$: E < E_0 \quad ۲۷۰۲$$

$$\psi_3 = Ee^{ikx} + Fe^{-ikx}, \psi_4 = Ce^{-\alpha x} + De^{\alpha x}, \psi_1 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$\psi_5 = Ie^{ikx}, \psi_6 = Ge^{-\alpha x} + He^{\alpha x}$$

$$: E > E_0$$

$\psi_4 = Ge^{ik'x} + He^{-ik'x}$ ،  $\psi_5 = Ce^{ik'x} + De^{-ik'x}$ ،  $\psi_6$  و  $\psi_7$  و  $\psi_1$  مثل بالا

$$۲۹۰۲ \text{ الف) } (-\hbar^2 / 2m) d^2\psi / dx^2 - \mathcal{E}x\psi = E\psi \text{ (ب) نه}$$

$$-E_0 + \hbar (\alpha E_0 / 2m)^{1/2} \text{ (د) } ۳۱۰۲$$

۳۹۰۲ به ازای  $d/dx$  الف) بلی،  $ik$ ؛ (ب) بلی،  $\alpha$ ؛ (ج) نه، به ازای  $d^2/dx^2$

الف) بلی،  $-k^2$ ؛ (ب) بلی،  $\alpha^2$ ؛ (ج) بلی،  $-k^2$

۴۱۰۲ به ازای  $n=0$ ،  $\hbar / 2m\omega$ ،  $0$ ،  $m\hbar\omega / 2$

به ازای  $n=1$ ،  $\hbar / 6m\omega$ ،  $(17/6)m\hbar\omega$

$$L_y = -i\hbar(z\partial/\partial x - x\partial/\partial z), L_x = -i\hbar(y\partial/\partial z - z\partial/\partial y) \quad ۴۳۰۲$$

$$L_z = -i\hbar(x\partial/\partial y - y\partial/\partial x)$$

$$0, 0 / -i\sqrt{(\hbar m\omega)/2} / \sqrt{\hbar/2m\omega} \quad ۴۵۰۲$$

$$\Delta n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \quad ۴۷۰۲$$

### فصل ۳

$$E_p = -۴۳۶ \times 10^{-18} / n^2 \text{ J}, \omega = ۴۱۳۴ \times 10^{16} / n^3 \text{ s}^{-1} \quad ۱۰۳$$

$$E_k = ۲۱۸ \times 10^{-18} / n^2 \text{ J}$$

۳۰۳ الف)  $۸۲۲۲ \times 10^6$  مدار؛ (ب)  $۱۰۴ \times ۱۰۹۵$  مدار

$$\Delta\lambda_{H-T} = ۲۳۸ \text{ \AA}, \Delta\lambda_{H-D} = ۱۷۸ \text{ \AA} \quad ۵۰۳$$

۹۰۳ الف)  $۶۵۸ \times 10^{15} / n^3 \text{ Hz}$  (ب)  $۶۵۸ \times 10^{15} (n-1/2) / [n(n-1)]^2 \text{ Hz}$



۲۷۰۴ لیتیوم:  $3s, -201\text{ eV}$ ;  $2p, -354\text{ eV}$ ;  $2s, -5315\text{ eV}$   
 سدیموم:  $3s, -5120\text{ eV}$ ;  $3p, -3028\text{ eV}$ ;  $3s, -1967\text{ eV}$  (۳d در  $-152\text{ eV}$ )

۲۹۰۴ آلومینیوم:  $115\text{ eV}$ ;  $109\text{ keV}$ ; اکسیژن:  $101\text{ keV}$ ;  $46\text{ eV}$

۳۱۰۴ آلومینیوم:  $1470\text{ eV}$ ;  $840\text{ \AA}$ ; پتاسیوم:  $3452\text{ eV}$ ;  $3359\text{ \AA}$   
 آهن:  $7121\text{ eV}$ ;  $174\text{ \AA}$ ; نیکل:  $7965\text{ eV}$ ;  $155\text{ \AA}$ ; روی:  $9221\text{ eV}$ ;  $134\text{ \AA}$   
 مولیبدن:  $18700\text{ eV}$ ;  $664\text{ \AA}$ ; نقره:  $23600\text{ eV}$ ;  $525\text{ \AA}$

۳۳۰۴ (ب)  $83\text{ keV}$ ;  $13495\text{ \AA}$

### فصل ۵

۱۰۵ (الف)  $1625\text{ eV}$ ; (ب)  $1095\text{ eV}$ ; (ج)  $1523\text{ eV}$

۳۰۵  $6106\text{ kcal mol}^{-1}$

(ب)  $7۰۵$   $(\sigma_g 1s)^2 (\sigma_u 1s)^2 (\sigma_g 2s)^2 (\sigma_u 2s)^2 (\sigma_g 2p)^2 (\pi_u 2p)^4$

$(\pi_g 2p)^4 (\sigma_u 2p)^2 (\sigma_g 3s)^2 (\sigma_u 3s)^2 (\sigma_g 3p)^2 (\pi_u 3p)^4 (\pi_g 3p)^4$ ;  $\Sigma_g^-$

۹۰۵ (الف)  $\text{Li}^+ \text{H}^-$ ; (ب)  $\text{H}^+ \text{I}^-$

۱۱۰۵  $525\text{ eV}$

۱۳۰۵  $6245\text{ eV}$ ;  $837\text{ eV}$

۲۳۰۵  $506 \times 10^{-3}\text{ mC}$ ;  $33$

۲۵۰۵  $177\text{ \AA}$

۲۷۰۵  $283\text{ \AA}$

۲۹۰۵ برای  $\text{H}^{25}\text{Cl}$  (الف)  $2195015\text{ cm}^{-1}$ ; (ب)  $296658 \times 10^{-3}\text{ eV}$

$62450 \times 10^{11}\text{ Hz}$  ( $4651 \times 10^{-4}\text{ m}$ ) (ج)  $799974 \times 10^{-3}\text{ eV}$

$21950\text{ cm}^{-1}$  (د)  $12900 \times 10^{11}\text{ Hz}$  ( $2326 \times 10^{-4}\text{ m}$ )

۳۱۰۵ (الف)  $E_{\text{rot}} = [I(l+1) + (1/4)m^2] \hbar^2 / 2I$

(ب)  $E_{\text{rot}} = [I(l+1) - (1/4)m^2] \hbar^2 / 2I$

۳۵۰۵  $1906 \times 10^3\text{ Nm}^{-1}$

۳۷۰۵  $51861\text{ eV}$ ;  $5162 \times 10^3\text{ Nm}^{-1}$

فصل ۶

۱۰۶  $3.686 \text{ eV}$

۳۰۶ بر مولکول  $6.371 \text{ eV}$

۵۰۶  $3 \times 10^{12} \text{ Hz}$

۹۰۶  $6.934 \times 10^5 \text{ kg s}^{-2}$ ،  $4.885 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ ،  $6.046 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$

۱۱۰۶ اتم بر متر مکعب  $4.560 \times 10^{28}$ ، اتم بر متر مکعب  $8.498 \times 10^{28}$

اتم بر متر مکعب  $1.660 \times 10^{29}$

۱۳۰۶  $3.151 \text{ eV}$ ؛  $4.445 \text{ eV}$

۱۷۰۶  $m_i^* = \hbar / 2\alpha_i$  و  $\partial^2 x_i / \partial t^2 = 2Fa_i / \hbar^2$  که در آن  $i$  به ترتیب معادل  $x$ ،  $y$ ، و  $z$  است.

۲۱۰۶ (الف)  $n\pi / 2a$ ؛ (ب)  $\hbar^2 / (2\beta a^2 \cos ka)$

۲۳۰۶  $4.811 \times 10^{-12} \text{ m}$

۲۵۰۶ تقریباً یک اتم در  $10^6$

۲۷۰۶  $3.663 \times 10^{-14} \text{ s}$ ،  $1.39 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ ،  $1.998 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ ،  $5.05 \times 10^{-8} \text{ m}$

۲۹۰۶  $10a$

۳۳۰۶  $1.057 \times 10^{-10} \text{ m}^3 \text{ C}^{-1}$ ،  $62.1^\circ$

۳۵۰۶ میکرون ۱۶۵

فصل ۷

۵۰۷  $3.62 \times 10^{-15} \text{ m}$ ،  $6.90 \times 10^{-15} \text{ m}$ ،  $8.28 \times 10^{-15} \text{ m}$

۷۰۷  $^{28}\text{Si}$ ،  $^{29}\text{Si}$ ،  $^{30}\text{Si}$

۱۳۰۷  $5.85 \text{ MeV}$ ،  $5.76 \text{ MeV}$ ، بلی

۱۵۰۷  $^7\text{Li}$ :  $3.924 \text{ MeV}$ ، برنو کلئون  $5.61 \text{ MeV}$ ؛  $^{16}\text{O}$ :  $12.762 \text{ MeV}$ ،

برنو کلئون  $7.98 \text{ MeV}$ ؛  $^{57}\text{Fe}$ :  $4.9990 \text{ MeV}$ ، برنو کلئون  $8.77 \text{ MeV}$ ؛  $^{176}\text{Lu}$ :

$14.1797 \text{ MeV}$ ، برنو کلئون  $8.06 \text{ MeV}$

۱۷۰۷  $^{13}(\text{Al})$ ،  $^{28}(\text{Ni})$ ،  $^{36}(\text{Kr})$ ،  $^{52}(\text{Te})$ ،  $^{72}(\text{Hf})$

$$5.062 \times 10^{-3} \text{ amu } 19.7$$

$$15999492 \text{ amu } , 20014100 \text{ amu } , 100078217 \text{ amu } 21.7$$

$$2016 \times 10^{-13} \text{ m } 27.7$$

$$362 \times 10^4 \text{ ذره بر ثانیه } 29.7$$

$$280 \times 10^{-15} \text{ m } 31.7$$

$$0.150 \text{ b } 33.7$$

$$:(1s_{1/2})_p(1s_{1/2})_n : {}^2\text{H} ; (1s_{1/2})_p(1s_{1/2})_n : {}^2\text{H (الف)} 35.7$$

$$:(1s_{1/2})_p(1s_{1/2})_n : {}^4\text{He} ; (1s_{1/2})_p(1s_{1/2})_n : {}^4\text{He}$$

$$(1s_{1/2}^2 1p_{3/2}^2)_p(1s_{1/2}^2 1p_{3/2}^2 1p_{1/2})_n : {}^{12}\text{C} ; (1s_{1/2}^2 1p_{3/2}^2)_p(1s_{1/2}^2 1p_{3/2}^2)_n : {}^{12}\text{C}$$

$$1/2, 0, 0, 1/2, 1/2, 1 \text{ یا } 0 \text{ (ب)}$$

$$A = 150, 382 \text{ keV } , A = 100, 74 \text{ keV } , A = 50, 222 \text{ keV } 37.7$$

### فصل ۸

$$: 10.8 \text{ (الف)} 10^{-8} \text{ s}^{-1} ; 786 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1} \text{ (ب)} 112 \text{ سال}$$

$$132 \times 10^4 \text{ s}^{-1} \text{ (د)}$$

$$28 \text{ mg } 9.8$$

$$m_\alpha 13.8$$

$$Q_{EC} = 1.66 \text{ MeV } , Q_{\beta^-} = 0.565 \text{ MeV } , Q_{\beta^+} = 0.64 \text{ MeV } 17.8$$

$$1863 \text{ keV } 19.8$$

$$: {}^{64}\text{Cu} \text{ (ز)} ; {}^{115}\text{In} \text{ (و)} ; {}^3\text{H} \text{ (س)} ; \gamma \text{ (د)} ; {}^{32}\text{P} \text{ (ج)} ; {}^{32}\text{P} \text{ (ب)} ; {}^{24}\text{Na} \text{ (الف)} 23.8$$

$$\gamma \text{ (ح)}$$

$$: {}^{12}\text{C}(d, n){}^{13}\text{N} , {}^{12}\text{C}(d, p){}^{13}\text{C} , {}^{12}\text{C}(d, \gamma){}^{13}\text{N} , {}^{12}\text{C}(p, \gamma){}^{13}\text{N} 27.8$$

$${}^{12}\text{C}(\alpha, \gamma){}^{16}\text{O} , {}^{12}\text{C}(d, \alpha){}^{10}\text{B}$$

$$: 2798192 \text{ amu} \text{ (ج)} ; 2398676 \text{ amu} \text{ (ب)} ; 2798245 \text{ amu} \text{ (الف)} 29.8$$

$$2398586 \text{ amu} \text{ (د)}$$

$$234 \text{ MeV} \text{ (ب)} ; 1535 \text{ MeV} \text{ (الف)} 31.8$$

۳۳۰۸ خط مستقیم

۳۵۰۸ (الف) اتم  $10^4 \times 1.74$ ; (ب) ۲۲ b

۳۷۰۸  $10^{-6} \times 1.806$

۳۹۰۸ ۲۷۷۷ cm

۴۱۰۸ ۱۸۸ MeV

۴۳۰۸  $10^{-8} \text{ kgs}^{-1} \times 1.2$ ، ۲۶ سال

۴۵۰۸  $^{232}\text{Th}$ : ۴۹۹۵ MeV؛  $^{232}\text{Th}$ : ۲۳۲ MeV؛  $^{232}\text{U}$ : ۵۷۸۵ MeV؛

$^{234}\text{U}$ : ۵۷۲۶ MeV؛  $^{239}\text{Pu}$ : ۶۴۴۵ MeV؛  $^{240}\text{Pu}$ : ۵۷۴۱ MeV؛

۴۷۰۸  $^{238}\text{W}$ :  $10^{23} \times 2.92$ ، ۷۷۲۸ MeV

۴۹۰۸ سال  $10^{11} \times 1.28$

### فصل ۹

۱۰۹ (الف) ۳۷۷؛ (ب)  $10^3 \times 5.26$

۳۰۹ (الف) ۲۷۵۳ KeV؛ (ب)  $10^{-12} \times 2.85$ ؛ (ج)  $^{107}\text{Ag}$

۵۰۹ جرم سکون: ۵۰۲ MeV؛  $E_k$ : ۶۸۰ MeV

۷۰۹ ۷۴۸۰ MeV

۹۰۹ برای شکل ۱۰۰۹: ۱۸۴۰ MeV، برای شکل ۱۱۰۹: ۱۸۱۰ MeV

۱۵۰۹ (الف) ۵۱۱ MeV؛ (ب) به جلو: ۱۷۴۴ MeV، به عقب: ۵۸ MeV

۱۷۰۹ (الف) ۸۷۳ GeV؛ (ب) ۶۸ GeV

۱۹۰۹ ۱۴۳۷۸ MeV

۲۱۰۹ (الف)  $\mathcal{E}_\pi = 1$ ،  $\mathcal{E}_p = 1/2$ ،  $\mathcal{E}_\Lambda = 0$ ،  $\mathcal{E}_K = 1/2$ ؛ (ب)  $\mathcal{E}_\pi = 1$ ،  $\mathcal{E}_p = 1/2$ ،

$\mathcal{E}_\Lambda = 0$ ،  $\mathcal{E}_\pi = 0$ ، بر اثر ناپایداری  $\mathcal{E}_z$ ،  $\mathcal{E}_y$  و  $\mathcal{E}_x$  نمی تواند به وقوع بپیوندد.

۲۳۰۹ (الف)  $p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + \Lambda^0 + K^+$



$$\begin{array}{l} \mathcal{T}_z: \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \\ \mathcal{T}: \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \\ \mathcal{S}: \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \end{array}$$

$\mathcal{T}_z, \mathcal{T}, \mathcal{S}$  پایسته هستند.

۲۵.۹  $\mathcal{T}, \mathcal{T}_z, \mathcal{S}$  پایسته هستند.

۳۳.۹  $\mathcal{B}$  به  $\mathcal{B}$  تبدیل می‌شود

فصل ۱۰

۱۰۱۰ ۱۰۲۰۶، ۱۰۱۴، ۱۰۱۰

۳۰۱۰ ۳۴۸۰K

۵۰.۱۰ (ب)  $U = -\mu_B B N \tanh(\mu_B B / kT)$

(ج) وقتی  $T \rightarrow 0, Z \rightarrow 2$  و  $M \rightarrow -\mu_B B N / kT$

وقتی  $T \rightarrow \infty, Z \rightarrow \infty$  و  $M \rightarrow -\mu_{BN}$

۹۰.۱۰  $U = -\mu_B B g [(j+1/2) \coth(j+1/2)x - (1/2) \coth(1/2)x]$

۱۱.۱۰  $(E_1/E_2)^{1/2} e^{-(E_1-E_2)/kT}$  (الف)  $6.3 \times 10^{-9}$ ؛ (ب)  $5.0395$ ؛ (ج)  $2.52$

۱۳.۱۰ (الف)  $4.78 \times 10^2 \text{ms}^{-1}$ ،  $4.74 \times 10^2 \text{ms}^{-1}$ ،  $3.79 \times 10^3 \text{ms}^{-1}$

(ب)  $2.25 \times 10^3 \text{ms}^{-1}$ ،  $3.79 \times 10^3 \text{ms}^{-1}$ ،  $7.12 \times 10^3 \text{ms}^{-1}$

$2.25 \times 10^4 \text{ms}^{-1}$

۱۵.۱۰ (الف)  $1.11 \times 10^2 \text{ms}^{-1}$ ؛ (ب)  $5.16 \times 10^3 \text{ms}^{-1}$

(ج)  $2.16 \times 10^3 \text{ms}^{-1}$

۱۷.۱۰ (الف)  $5.166$ ؛ (ب)  $0.163$

۲۳.۱۰ (الف)  $42\%$ ؛ (ب)  $8\%$ ؛ (ج)  $43.8\%$ ؛ (د)  $6.2\%$

۲۷.۱۰ (الف)  $0\%$ ؛ (ب)  $35\%$ ؛ (ج)  $93\%$

۳۱.۱۰ (ب)  $\lambda = h / (\gamma mkT)^{1/2} = 1.81 \times 10^{-10} \text{m}$



$$I=1: 55.3\%, I=0: 30.2\%, T=2\Theta,$$

$$19.12 \text{ مولکول } H_2 \times 10^6, 1.2 \times 10^6 \text{ مولکول } Cl_2 \times 10^{21}$$

فصل ۱۳

$$220 kT \quad 11.13$$

$$E(\nu) = (\lambda \pi \nu^2 / c^2) kT \quad 15.13$$

$$209 \times 10^{-7} \quad 27.13$$

## فهرست راهنما

- |   |   |
|---|---|
| <p>~ دهنده ۳۴۴</p> <p>~ گیرنده ۳۴۴</p> <p>~ مزیک ۵۳۱، ۵۲۹</p> <p>~ میانین ۳۱۰</p> <p>~ هیدروژن ۱۴۴</p> <p>~ اتمسفر ۶۰۱</p> <p style="text-align: center;">اثر</p> <p>~ اوژه ۲۳۴</p> <p>~ پارامغناطیسی اسپین پاؤلی ۳۲۴</p> <p>~ جفت شدگی ۳۷۲</p> <p>~ جمعی در هسته ۴۰۷</p> <p>~ رامان ۲۸۶</p> <p>~ زبر ۳۳۳</p> <p>~ زیمان ۱۷۴</p> <p>~ ژول ۳۵۱</p> <p>~ فوتوالکتريك ۱۷، ۶۸۱</p> <p>~ اتمی ۴۰</p> <p>~ کامپتون ۲۱</p> <p>~ موسباوئر ۵۸</p> <p>~ هال ۳۶۳</p> | <p style="text-align: right;">آزمایش</p> <p>~ آشکارسازی نوتروینو ۴۴۷</p> <p>~ اشترن-گرلاخ ۱۷۸</p> <p>~ امگا منفی ۵۴۶</p> <p>~ کوان-رینز ۴۴۷</p> <p>~ آشکارساز نوترون ۷۳۴</p> <p style="text-align: right;">آمار</p> <p>~ بوز-اینشتین ۶۷۲</p> <p>~ فرمی-دیراک ۶۷۲، ۶۷۵</p> <p>~ ماکسول-بولتزمن ۵۶۲، ۶۷۵</p> <p>~ آنتالپی ۶۱۲، ۶۵۲</p> <p>~ آنتروپی ۶۱۳</p> <p>~ گاز ایده آل ۶۱۷، ۶۱۸</p> <p style="text-align: right;">اتاقک</p> <p>~ ابر ۴۳۷، ۷۳۵</p> <p>~ جرقه ۷۳۷</p> <p>~ حباب ۷۳۷</p> <p>~ یونش ۷۳۰</p> <p style="text-align: right;">اتم</p> |
|---|---|

اصول مکانیک کوانتومی ۱۲۸، ۱۲۹	احتمال ۷۲
اعداد سحر آمیز ۴۰۲	~ توزیع ۵۶۰
الکترون ۴۹	~ حالت ۶۷۲
~ ظرفیت ۲۲۵	~ ذاتی ۵۶۵، ۶۷۲
الماس ۳۰۳	~ گذار ۵۶، ۱۲۳
امولسیونهای عکاسی ۷۳۷	~ تابشی ۴۱۴
انبساط آزاد ۶۱۸	~ خودبه خود ۶۸۹
انتقال	~ گسیل القایی ۶۸۹
~ الکترومغناطیسی دوپلر ۵۶، ۶۶	~ واپاشی ۴۳۱
~ زمانی ۵۲۳	اختلاف پتانسیل تماسی ۶۸۱
~ فاز ۱۰۵، ۳۹۶	ارتعاش
~ فضایی ۵۲۲	~ جمعی ۴۱۲
~ لمب ۱۸۸	~ جامدات ۶۹۳
انتگرال تبادلی ۲۱۰	دمای مشخصه ~ ۶۵۹
انتگرال کولنی ۲۱۰	~ شبکه‌ای ۳۱۲
اندازه‌گیری دما ۶۴۱	~ مولکولی ۲۸۱
اندرسون، کارل دیوید ۴۹۳	اسپین
انرژی	~ الکترون ۱۷۸
~ آزاد گیبس ۶۳۴	~ ایزوباری ۵۱۸
~ آزاد هلمهولتز ۶۳۲، ۶۳۴	~ ایزوتوبی ۵۱۷
~ آستانه ۵۱۰	جدول ~ مزون و باریون ۵۱۹
جدول ~ برای فوتوشکافت ۴۶۳	پایستگی تکانه زاویه‌ای ~ ۱۷۸
~ ارتعاشی نقطه صفر ۲۶۳، ۲۸۲	~ فوتون ۴۹۳
~ برانگیختگی ۳۵	گشتاور دو قطبی ~ ۱۷۸
~ بستگی ۱۰۰	~ هسته‌ای ۳۷۲
~ هسته‌ای ۳۷۹	استفان، ژوزف ۱۶
~ پتانسیل داخلی ۵۹۸	اسلاتر، جان کلارک ۲۲۴
~ توزیع ۳۸۳، ۴۰۶	اشباع ۳۸۲
~ تفکیک ۱۰۰، ۲۶۵، ۲۸۲	اصل
جدول ~ مولکولهای دو اتمی ۲۶۱	~ طرد ۲۱۱
~ جنبشی آستانه ۳۸	~ عدم قطعیت هایزنبرگ ۵۱
~ جنبشی چرخش ۲۷۸	~ فرانک-کاندن ۲۹۳
~ داخلی کل ۵۹۸	~ هم‌پاری انرژی ۶۶۴
~ سکون ۷۱۴	~ همخوانی ۱۶۰

- ~ شیمیائی ۶۰۳  
 ~ فرمی ۳۲۳، ۶۷۵  
 جدول ~ ۳۲۳، ۶۷۸  
 ~ نقطہ صفر ۸۸، ۹۴  
 ~ یونش ۱۰۰  
 ~ عناصر ۲۱۱  
 اور بیٹال اتمی ۲۴۶  
 اور بیٹال مولکولی ۲۴۶، ۲۵۵  
 اور توہلیوم ۲۰۶  
 اور توہیدروژن ۲۹۳  
 ایزوبار ۳۶۹  
 ~ نوکلئونی ۵۲۵  
 ایزوتوپ ۳۶۷  
 ایزوتون ۳۶۷  
 ایزوسپین ۵۱۸  
 ایزومر ۴۱۵  
 اینٹین، آلبرٹ ۱۸، ۶۹۰  
 بارن ۳۷۵، ۴۵۴  
 باریون ۴۹۲  
 باز تاب بار ۵۲۴  
 بالمر، جان یا کوب ۱۵۳  
 برانگیختگی  
 ~ جمعی ۴۱۲  
 ~ ذرہ ای ۴۱۱  
 ~ کولنی ۳۷، ۴۱۳  
 بر خورد تبادل بار ۲۴۳، ۲۴۸  
 بر خورد ناکشسان ۳۵  
 برد ۹۷، ۴۸۱  
 بردار قطبی ۵۲۴  
 بردار محوری ۵۲۴  
 برشگر ۵۸۵  
 برگشت زمانی ۵۳۰  
 برون پخشی ۵۸۶  
 برہم کنش  
 ~ ارتعاشی-چرخشی ۲۸۵  
 ~ اسپین-مدار ۱۸۳، ۴۰۳  
 ~ الکترومغناطیسی ۸  
 ~ باقیمانده ۴۰۶  
 ~ ضعیف ۴۴۷  
 ~ قوی ۳۶۶  
 ~ ہستہ ای ۳۶۶، ۳۸۳  
 بستہ موج ۴۹، ۷۶  
 بلور یونی ۳۰۴  
 بور، نیلس ۴۰، ۱۵۴  
 بورن، ماکس ۳۱۱  
 بوز، ساتیندرانات ۶۸۳  
 بوزون ۶۷۲، ۶۸۳  
 ~ بدون جرم ۴۹۲  
 ~ ضعیف ۵۵۴  
 بولتزن، لودویگ ۵۶۲، ۶۲۲  
 بہنجارش ۷۴، ۸۸  
 ~ و متعاہد بودن تابع موج ۸۸  
 پاؤلی، ولفگانگ ۲۱۱  
 پاد پروتون ۴۹۹  
 پاد ذرہ ۴۹۳  
 پاد نوٹرینو ۴۴۴  
 پارامتر بر خورد ۳۹۳  
 پاراہلیوم ۲۰۶  
 پاراہیدروژن ۲۹۳  
 پارش تعادل ۵۶۷  
 پاریتہ ۱۱۵، ۳۷۵، ۴۰۴، ۵۲۴  
 پایستگی ~ ۵۲۴  
 ~ تابع موج ۱۶۴  
 پالایہ انرژی ۴۸  
 پایستگی  
 ~ اسپین ایزوتوبی ۵۱۷

- پیلانک، ماکس ۱۲  
 قانون تابش ~ ۱۳، ۶۸۸  
 پله پتانسیل ۷۷  
 پمپ کردن اپتیکی ۶۹۲  
 پوزیترون ۴۲، ۴۴۲  
 پوزیترونیوم ۴۹۸  
 پهنای انرژی ۵۶  
 پیکر بندی ۲۱۰  
 جدول ~ الکترونی آنها ۲۱۵  
 جدول ~ الکترونی مولکولهای  
 دواتمی همگن هسته ۲۷۳  
 بیون ۴۹۰، ۵۰۴  
 ~ مجازی ۵۴۳  
 پیوند  
 ~ کووالانسی ۲۶۰  
 ~  $\pi^-$  و  $\sigma^-$  ۲۷۰  
 ~ هیدروژنی با جامدات ۳۰۵  
 ~ یونی ۲۶۰  
 ~ p-n ۳۴۴، ۳۴۵  
 تابش  
 ~ الکترومغناطیسی جسم سیاه ۹  
 ~ ترمزی ۱۰  
 ~ جسم سیاه ۱۱، ۱۲، ۶۸۶  
 ~ سنکروترون جسم سیاه ۱۰  
 گسیلندگی ~ ۱۶  
 تابع پارش ۵۶۶  
 ~ بزرگ ۶۴۴  
 ~ حقیقی ۶۴۵، ۶۴۹  
 ~ گاز تک اتمی ایده آل ۵۸۲  
 تابع خطا ۵۹۱  
 جدول ~ ۵۹۲  
 تابع کار ۱۸، ۳۲۴، ۶۸۱  
 جدول ~ ۶۸۲  
 ~ انرژی ۵۲۳  
 ~ بار ۵۲۳  
 ~ باریون ۵۱۷  
 ~ پارته ۵۲۴  
 ~ تکانه ۵۲۲  
 ~ زاویه ای ۵۲۲  
 ~ ذرات ۸۳  
 ~ شکفتی ۵۲۰  
 ~ لپتون ۵۱۵  
 پتانسیل  
 ~ مورس ۲۶۲  
 ~ یوکاوا ۳۸۷  
 ~ یونش ۴۱  
 پخش ۶۱۵  
 پدیده ترابری ۶۱۵  
 پراش پرتو ایکس ۴۶  
 پراش نوترون ۴۷  
 پراکنندگی ۴۵۳  
 ~ براگ ۳۲۸  
 ~ رامان ۲۸۷  
 ~ رابلی ۲۸۷  
 ~ کشان ۴۵۳  
 ~ کولنی ۳۹۷  
 ~ ناکشان ۴۵۳  
 ~ نوترون-پروتون ۳۹۱  
 ~ همدوس ۲۸۷  
 ~ ۳۹۷S  
 پرتو  
 طیف جذبی ~ ایکس ۲۹  
 ~ کیهانی ۵۰۹  
 ~ گاما ۴۱۳، ۴۲۶  
 ~ مشخصه ایکس ۲۳۱  
 پروتون ۴۹۰  
 پلاسما ۴۷۱

- تابع موج ۷۱
- ترازهای ارتعاشی مولکول آب ۲۸۷
- ترازهای انرژی ۳۱، ۸۶
- ترازهای ارتعاشی مولکول، آمونیاک ۱۱۴
- جدول ~ و تبه‌گنیها در جعبه پتانسیل ۹۰
- جدول ~ کربن ۲۲۲
- جدول ~ کلسیوم ۲۲۹
- جدول ~ هلیوم ۲۰۷
- جدول ~ هیدروژن ۱۴۷
- تراکم بی‌دررو ۶۶۹
- ترکیب خطی اوربیتالهای اتمی ۲۴۶
- ترمودینامیک ۵۹۸
- قانون اول ۶۰۴
- تریتیموم ۴۷۲
- تشدید ۲۹، ۴۵۵، ۴۹۰، ۵۳۴
- تصحیح انرژی هنگام حرکت هسته‌ای، جدول ۱۵۲
- تصحیح نسبیتی انرژی ۱۷۲
- تعادل آماری ۵۶۱
- تعادل گرمایی ۵۷۹
- تغییر فاز ۶۳۵
- گرمای مولی ~ ۶۳۵
- تفکیک ۴۰
- انرژی ~ ۱۰۰
- تقریب تنگ بست ۳۳۶
- تکانه
- پایستگی ~ ۵۲۲
- زاویه‌ای ~ ۵۲۲
- زاویه‌ای اسپینی ۱۷۸
- زاویه‌ای کل ۲۱۷، ۱۷۸
- زاویه‌ای هسته ۳۷۲
- شبکه‌ای ~ ۳۳۰
- ~ اسپینی ۲۰۵
- ~ برای حرکت معکوس مولکول آمونیاک ۱۱۲
- پهنج‌ارش و متعام بودن ~ ۸۸
- پاد پیوندی ۲۴۷
- پیوندی ۲۴۷
- جدول ~ نوسانگر هماهنگ ۹۵
- ~ دترمینانی ۲۱۲
- زاویه‌ای ۱۶۱، ۱۶۲
- جدول ~ ۱۶۲
- ~ شعاعی ۱۶۵
- ~ ترازهای انرژی هیدروژن ۱۶۵
- جدول ~ ۱۶۵
- ~ مداری ۲۰۳
- ~ مولکولی ۲۵۵
- تامسون، جورج ۴۵
- تبدیل
- ~ برگشت پذیر ۶۰۷
- ~ برگشت ناپذیر ۶۰۸
- ~ بی‌دررو ۶۱۳، ۶۲۵
- ~ پیمان‌های ۵۲۳
- ~ تک آنتروپیک ۶۱۴
- ~ تک حجم ۶۱۱
- ~ تکدما ۶۱۳، ۶۲۵
- ~ تک فشار ۶۱۲
- ~ چرخه‌ای ۶۰۵
- ~ لورنتس ۷۱۳
- تبه‌گنی ۹۰
- ~ اساسی ۱۵۷
- جدول ~ ۱۵۶
- ~ تبادل ۲۰۳
- ~ گازها ۶۹۸، ۶۹۹
- تحلیل فوریه ۵۱



- تک تایی ۲۰۴  
 تکثیر کننده نامعین، لاگرانژ ۵۶۹  
 تکفام ساز ۴۸  
 تولید زوج ۴۲، ۴۹۶، ۲۹۷  
 ~ الکترون ۲۹۷  
 تولید وابسته ۵۲۱  
 تهیه‌جا ۳۱۰
- ثابت  
 ~ بولتزمن ۵۷۲  
 جدول ~ چرخشی و ارتعاشی بعضی  
 مولکولهای دو اتمی ۲۷۹  
 جدول ~ گرمایونی ۶۸۲  
 ~ ریدبرگ ۱۴۶  
 جدول ~ ۱۴۸  
 ~ ساختار ریز ۱۷۳  
 ~ فروپاشی ۴۳۰  
 ~ گاز ۵۸۳  
 ~ مادلو ننگ ۳۱۱  
 ~ وان در والس ۶۵۳  
 جدول ~ ۶۵۳
- جابه‌جاگر ۱۴۱  
 جامد  
 ~ با پیوند هیدروژنی ۳۰۵  
 ~ کووالانسی ۳۰۳  
 ~ مولکولی ۳۰۶  
 ~ یونی ۳۰۴  
 جذب پرتو ایکس در جامدات ۳۵۴  
 جذب تشدید ی ۵۷  
 جرم  
 ~ اتمی ۳۷۰  
 ~ کاهیده ۱۴۷  
 ~ مؤثر ۳۳۳
- جدول ~ ۳۳۴  
 جزایر ایزومرسم ۴۱۵  
 جسم سیاه  
 تابش ~ ۱۱، ۱۲، ۶۸۶  
 تابش الکترومغناطیسی ~ ۹  
 تابش سنکروترونی ~ ۱۰  
 جعبه پتانسیل ۸۴  
 ~ دوبعدی ۱۳۳  
 جفت شدگی  
 ~ راسل-ساندرز ۲۱۸  
 ~ z-z ۲۱۰  
 ~ L-S ۲۱۷  
 جمله حالت پایه مولکولی ۲۶۳  
 جمله طیفی ۲۱۸  
 جدول ~ الکترونیهای هم‌ارز ۲۲۰
- چادویک، جیمز ۳۴۵  
 چارچوب مرجع آزمایشگاه ۳۸  
 چارچوب مرجع مرکز جرم ۳۸، ۷۱۶  
 چاه پتانسیل ۹۷  
 چرخش  
 ~ اسپین ایزوتوبی ۵۲۴  
 ~ جمعی ۴۱۱  
 دمای مشخصه ~ ۶۵۶  
 ~ فضایی ۵۲۲  
 ~ مولکولی ۲۷۷  
 چرخه ۶۰۵  
 ~ بت ۴۷۳  
 ~ پروتون-پروتون ۴۷۳، ۴۷۴  
 ~ کارنو ۶۲۲، ۶۴۳  
 ~ کربن ۴۷۳  
 ~ کریشفیلد ۴۷۳  
 ~ نیتروژن ۴۸۶  
 چگالی احتمال ۷۲

درجه کلوین ۵۷۲، ۶۴۳  
 در رفتگی لبه‌ای ۳۱۰  
 دما (ی) ۶۴۱  
 اندازه گیری ~ ۶۴۱  
 ~ بویل ۶۶۷  
 ~ ترمودینامیکی ۶۴۳  
 ~ دبی ۶۹۵  
 جدول ~ ۶۹۶  
 ~ فرمی ۶۷۵  
 جدول ~ ۶۷۸  
 ~ مشخصه ارتعاش ۶۵۹  
 جدول ~ ۶۵۷  
 ~ مشخصه چرخش ۶۵۶  
 جدول ~ ۶۵۷  
 ~ مطلق ۵۷۲، ۶۲۲  
 ~ منفی ۶۲۳  
 دماسنج ۶۴۲  
 ~ گازی حجم ثابت ۶۴۲  
 دو بروی، لویی ۴۴  
 دوتایی ۱۱۵، ۱۸۳  
 دوترون ۳۷۹، ۳۸۸  
 دوتریوم ۴۷۲  
 دو قطبی الکتریکی ۱۱  
 گذار ~ ۱۲۳  
 دهنده ۳۴۴  
 دیوار پتانسیل ۸۱  
 دیویسون، کلینتون جوزف ۴۶

ذره

~ آلفا ۴۲۶  
 ~ اساسی ۴۹۰  
 ~ بتا ۴۲۶  
 ~ بنیادی ۴۴۷، ۴۹۰، ۵۴۱  
 جدول ~ ۴۹۲

چگالی انرژی تکفام ۱۲  
 چندتایی ۲۰۷، ۲۱۹، ۵۱۷  
 چند جمله‌ای  
 ~ لژاندر ۱۹۱  
 ~ وابسته لژاندر ۱۹۰  
 ~ هرمیت ۱۳۴  
 حالت  
 ~ برانگیخته ۳۰  
 ~ ارتعاشی هسته‌ای ۴۱۱  
 ~ پایه ۳۰  
 ~ شبه پایدار ۱۵۹، ۱۶۰  
 ~ مانا ۳۱، ۱۲۰  
 معادله ~ ۶۰۶  
 ~ مقید ۱۴۸  
 ~ مولکولی ۲۵۳  
 ~ نامانا ۳۱، ۱۲۰  
 ~ نامقید ۱۴۸  
 حفره ۳۳۴

خاصیت

جدول ~ مواد شکافت پذیر ۴۶۶  
 جدول ~ نوکلیدها ۳۷۶  
 ~ لیانی ۳۵۶  
 خط استوکس ۲۸۸  
 خط پاداستوکس ۲۸۸  
 خطوط اشمیت ۴۱۰  
 خنک کننده ۴۶۸

دام ۳۵۷

دامنهٔ پراکندگی ۳۹۲، ۴۲۰  
 دامنهٔ میدان ماده ۷۱  
 دبی ۲۶۱  
 درجهٔ آزادی ۶۶۳

- ~ تشدید یابی ۵۳۴  
 ~ تمایز پذیری ۵۶۲  
 ~ مجازی ۵۴۳  
 ~ یکسان ۵۶۲  
 ~ W ۴۹۰  
 رآکتور هسته‌ای ۴۶۸  
 رآکتور همجوشی ۴۷۵  
 رادر فورد، ارنست ۴۵۰  
 رامان، چاندراسکار ۲۸۶  
 رسانا ۳۳۸  
 رسانندگی ۳۴۸  
 ~ ذاتی ۳۴۳  
 روابط ماکسول ۶۳۵  
 روش هشت‌لا ۵۴۴  
 زمان واهلش ۳۴۸  
 زوج ۲۵۵  
 ~ الکترون-پوزیترون ۴۲  
 زیمان، پیتر ۱۷۴  
 ژولیو، فردریک ۴۵۵، ۴۵۸  
 ساختار ریز ۲۵۸  
 ~ سدیموم ۲۲۹  
 ستارگان رشته اصلی ۴۷۸  
 ستارگان نسل اول ۴۷۸  
 ستارگان نسل بعدی ۴۷۸  
 ستارگان نسل دوم ۴۷۸  
 سد پتانسیل ۱۵۷  
 سرعت  
 ~ ریشه میانگین مربعی ۵۸۷  
 ~ صورت ۶۹۳  
 ~ فاز متوسط ۵۰  
 ~ فرمی ۳۵۲  
 ~ متوسط ۳۵۲  
 ~ گروه ۷۲۳، ۳۲۹، ۵۰  
 ~ متوسط ۵۸۵  
 ~ مرکز جرم ۳۸  
 سرعت گزین ۵۸۵  
 سری  
 ~ اصلی ۲۲۸  
 ~ اکتینیوم ۴۲۷  
 ~ اورانیوم ۴۲۷  
 جدول ~ ۴۲۸  
 ~ بالمر ۱۵۳  
 ~ براکت ۱۵۳  
 ~ برگمان ۲۲۸  
 ~ پاشن ۱۵۳  
 ~ پخشیده ۲۲۸  
 ~ پرتوزا ۴۲۷  
 ~ پفوند ۱۵۳  
 ~ توریم ۴۲۷  
 ~ تیز ۴۲۸  
 ~ لیمان ۱۵۳  
 ~ هیدروژن ۱۵۳  
 سطح ترمودینامیکی ۶۰۶  
 سطح مقطع ۴۵۴  
 ~ پراکندگی به‌ازای هر مرکز ۳۵۲  
 ~ پراکندگی کل ۳۹۵  
 ~ پراکندگی کولنی ۳۹۷  
 ~ پراکندگی ماکروسکوپیك ۳۵۲  
 ~ دیفرانسیلی ۳۹۲  
 ~ ماکروسکوپیك ۴۳، ۴۵۴  
 ستکروترون، تابش جسم سیاه ۱۰  
 سوختن هلیوم ۴۷۷  
 سه‌تایی ۲۰۵  
 شاخه آکوستیکی ۳۱۴

طیف

~ انرژی پیوسته ۳۲  
 ~ پرتو ایکس ۲۹  
 ~ پیوسته ۳۲، ۱۰۰  
 ~ ترازهای انرژی هیدروژن ۱۵۳  
 ~ جذبی ۳۰  
 ~ خطی ۱۵۳  
 ~ گسسته ۳۲، ۱۰۰  
 ~ گسیلی ۳۰  
 نوار ~ ۲۸۵  
 طیف سنج سوسوزن ۷۳۰

ظرفیت گرمایی

~ جامدات ۶۹۳  
 ~ در حجم ثابت ۶۱۲، ۶۵۲  
 ~ در فشار ثابت ۶۱۲، ۶۵۲

عدد اتمی ۱۴۴، ۳۶۶  
 عدد جرمی ۱۴۴، ۳۶۷  
 عدد کوانتومی باریونی ۵۱۷  
 عدد کوانتومی لپتونی ۵۱۵  
 عدد موج ۷۷، ۱۵۲  
 عملگر ۱۲۵  
 جدول ~ کوانتومی ۱۲۸  
 عملیات  
 ~ پارینه ۵۲۹  
 ~ CP ۵۲۹  
 ~ CPT ۵۳۱  
 عنصر ماتریس ۱۳۱

غول سرخ ۴۷۸

فرانک، جیمز ۳۶، ۲۹۳  
 فراوانی نسبی ۴۷۵

شاخهٔ اپتیکی ۳۱۴

شبکه ۳۰۳  
 ~ بلوری ۳۰۳  
 شدت حرکت موجی ۷۱  
 شرط براگک ۴۷  
 شرو دینگر، اروین ۷۲  
 شعاع بور ۱۴۰  
 شعاع هسته ۳۷۰  
 شکافت ۳۸۱، ۴۶۲  
 ~ خود به خود ۴۶۴  
 ~ هسته‌ای رآکتور ۴۶۸  
 شکافت پذیری هسته‌های سنگین، جدول ۴۶۳  
 شکافتگی فوق ریز ۴۱۷  
 شگفتی ۵۲۰  
 جدول ~ مزون و باریون ۵۱۹  
 شمار گر

~ تناسبی ۷۳۰

~ چرنکوف ۷۳۴  
 ~ سوسوزن ۷۲۸  
 ~ گایگر-مولر ۷۳۰

ضخامت نیم مقدار ۶۴

ضریب

~ انبساط حجمی ۶۳۱، ۶۶۷  
 ~ بازتاب پلهٔ پتانسیل ۸۳  
 ~ جذب خطی ۴۳  
 ~ عبور پلهٔ پتانسیل ۸۳  
 ~ لانه ۱۸۹  
 ~ ویریا ۶۴۴

طول پیوند مولکولهای دو اتمی، جدول ۲۶۱

طول عمر ۵۶

طول موج دوبروی ۴۴

طول موج کامپتون ۲۱

- فرد ۲۵۵  
 فرمول  
 ~ استرلینگ ۷۲۶، ۵۶۷  
 ~ انرژی بستگی هسته‌ای و ایتسکر ۳۸۲  
 ~ بالمر ۱۵۳  
 ~ بور ۳۰  
 ~ لانژون ۵۷۷  
 ~ ماکسول برای گاز ایده‌آل ۵۸۳  
 فرمی، انریکو ۶۷۲، ۴۴۶  
 فرمیون ۶۷۲، ۴۹۲، ۲۱۲  
 فسفوسانی ۳۵۸  
 فشار ۶۰۱  
 ~ نقطه صفر ۶۹۹  
 فضای اسپین ایزوتوپی ۵۱۸  
 فضای فاز ۵۴  
 فعالیت ۴۳۱  
 فلز ۳۰۷، ۳۳۹  
 فوتوشکافت ۴۶۳  
 فوتون ۲۵، ۴۹۰  
 ~ مجازی ۵۴۴  
 فوتویونش ۴۱  
 فوق‌بار ۵۲۱  
 جدول ~ ۵۱۹  
 فوتون ۳۱۶  
 قاعده  
 ~ گزینش ۱۲۳، ۱۵۹  
 ~ گذار دو قطبی الکتریکی ۲۲۱  
 ~ ماتیسن ۳۵۳  
 ~ هوند ۲۱۶، ۲۲۰  
 قانون  
 ~ استفان-بولتزمن ۱۶  
 ~ اول ترمودینامیک ۶۰۴  
 ~ اهم ۳۴۸  
 ~ بویل ۶۰۲  
 ~ تابش پلانک ۹، ۱۳، ۶۸۸  
 ~ توزیع بوز-اینشتین ۶۸۳  
 ~ توزیع فرمی-دیراک ۶۷۴  
 ~ توزیع ماکسول-بولتزمن ۵۷۳، ۵۶۶  
 ~ جابه‌جایی وین ۱۶  
 ~ دولن-پتی ۶۹۶  
 ~ دوم ترمودینامیک ۶۱۴  
 ~ ریلی-جینز ۶۱، ۷۰۳  
 ~ صفرم ترمودینامیک ۵۷۹  
 قضیه بلوخ ۳۲۷  
 قضیه ویریا ۶۴۴  
 کائون ۵۰۵  
 کار ۵۹۹  
 ~ خارجی ۶۰۴  
 کارایی ماشین گرمایی ۶۲۸  
 کاستی جرم ۴۸۲  
 کالری ۶۰۳  
 کامپتون، آرتور هالی ۲۱  
 کاندن، ادوین ۲۹۳  
 کشف نوترون ۴۵۹  
 کمیت جمع‌پذیر ۶۳۵  
 کمیت جمع‌ناپذیر ۶۳۵  
 کندساز ۴۶۸  
 کوآرک ۵۴۲  
 کوانتس  
 ~ انرژی ۸۶  
 ~ تکانه انرژی ۱۵۶  
 ~ فضایی ۱۵۶  
 کوری (یکا) ۴۳۱  
 ~، ایرن ۴۵۵، ۴۵۸  
 ~، پیر ۴۳۱  
 ~، ماری ۴۳۱

- کیلوکالری برمول ۲۹۴
- گاز الکترونی ۶۷۶
- گاز ایده آل، توزیع انرژی ۵۸۳
- گاز فوتونی ۶۸۶
- گاز فونونی ۶۹۲
- گاف انرژی، جدول ۳۴۳
- گذار
- احتمال ~ ۵۶، ۱۲۳
- ~ ارتعاشی-چرخشی ۲۸۲
- ~ الکترونی در مولکولها ۲۸۹
- ~ ایزومری ۴۱۵
- ~ تابشی القایی ۶۸۸
- ~ تابشی خودبه خود ۶۸۸
- ~ تابشی در جامدات ۳۵۴
- ~ چندقطبی ۴۱۴
- ~ دوقطبی ۱۲۳
- گذردهی الکتریکی ۳۶۲
- گرافیت ۳۰۸
- گراویتون ۴۹۰
- گرما (ی) ۶۰، ۶۰۲
- ~ بخار ۶۳۴
- ~ ذوب ۶۳۴
- ~ مولی تغییر فاز ۶۳۵
- گرم، لستر هالبرت ۴۶
- گسیل (ی)
- ~ القایی ۱۲۴، ۶۹۰
- ~ الکترونی توسط میدان ۱۱۱
- ~ توسط میدان ۱۱۱
- ~ خودبه خود ۱۲۴
- طیف ~ ۳۰
- ~ گرمایونی ۶۸۱
- گسیلندگی تابشی ۱۶
- گشتاور
- ~ چهارقطبی الکتریکی ۳۷۴، ۴۱۷
- ~ دوقطبی الکتریکی ۱۱
- جدول ~ درمولکول دواتمی ۲۶۱
- ~ دوقطبی مغناطیسی ۳۷۳، ۴۰۷
- ~ اسپینی ۱۷۸
- ~ مداری ۱۷۴
- ~ هسته ای ۴۰۸
- کلمان، موری ۵۴۴
- گیس، ژوسیا ۵۶۲
- گیراندازی
- ~ الکترون ۴۲۲
- ~ تابشی ۴۱
- ~ نوترون ۴۵۵
- گیرنده ۳۴۴
- لبه های جذب ۲۲۳
- لپتون ۴۹۱
- لی، تسونگ دائو ۵۲۶
- لیزر ۶۹۰
- ماکسول، جیمز ۵۶۲
- متعامد ۱۲۶
- محتملترین انرژی ۵۸۶
- محتملترین پارش ۵۶۱، ۵۶۷
- محتملترین سرعت ۵۸۷
- مد
- ~ بهنجار ارتعاش ۲۸۵
- ~ واپاشی ذره ناپایدار ۵۰۲
- جدول ~ ۵۰۲
- مدار نفوذی ۱۶۷
- مدل
- ~ الکترون آزاد ۳۲۰
- ~ پوسته ای ۴۰۱
- ~ ذره مستقل ۴۰۶

موزلی، هنری ۲۳۸  
 موسباوئر، رودولف لودویگ ۵۸  
 مول ۵۸۲  
 مولکول ۲۴۲  
 آب ۲۶۶  
 ترازهای ارتعاشی ۲۸۷  
 آمونیاک ۲۶۷  
 اتان ۲۶۸  
 اتیلن ۲۷۰  
 استیلن ۲۷۰  
 اکسیژن ۲۵۹  
 بنزن ۲۷۶، ۳۶۱  
 بوتادین ۲۷۲  
 چندگن هسته ۲۵۹  
 سدیم کلرید ۲۵۹  
 کاروتن  $\beta$  ۲۹۶  
 کربن دیوکسید ۲۸۵  
 متان ۲۶۸  
 مزدوج ۲۷۲  
 همگن هسته ۲۵۳  
 هیدروژن ۲۵۶  
 هیدروژن کلرید ۲۸۰  
 میانگین طول عمر ۱۲۴  
 میدان  
 الکترومغناطیسی ۸  
 ماده ۴۳  
 خود-سازگار ۵۶۱  
 گسیل ۱۱۱  
 میز ۶۹  
 میونیوم ۵۲۹  
 نابودی پروتون-پاد پروتون ۴۹۵  
 نابودی زوج الکترون ۴۹۴  
 ناپایستگی پاریته ۵۲۸

ذره-مستقل ۲۰۱  
 کپه‌ای ۳۵۸، ۶۶۷  
 تکدما ۶۳۱  
 یکی شده هسته ۲۰۷  
 مراکز رنگی ۳۵۶  
 مراکز F ۳۵۶  
 مزدوج بار ۵۲۹  
 مزون ۲۹۲  
 معادله  
 تابش پلانک ۶۸۸  
 حالت ۶۰۶  
 دیترسی ۶۶۷  
 سیستم ۶۴۱  
 گاز ایده‌آل ۶۴۱  
 گاز حقیقی ۶۴۲، ۶۴۹  
 وان دروالس ۶۶۶  
 ریچاردسون-داشمن ۶۸۱  
 ساکور-تروود ۴۷۸  
 شرودینگر ۷۴  
 شعاعی شرودینگر ۱۷۱  
 کلایپرون ۶۳۵  
 کلین-گوردون ۱۹۶  
 مستقل از زمان شرودینگر ۱۱۷  
 نسبیته شرودینگر ۱۹۶  
 Q ۷۱۸  
 مقاومت ویژه ۳۴۸  
 باقیمانده ۳۵۳  
 مقدار انتظاری ۱۲۹  
 مقدار Q برای گسیل ذرات هسته‌ای، جدول  
 ۴۴۱  
 مگنتون بور ۱۷۵  
 مگنتون هسته‌ای ۳۷۳  
 منطقه بریلوئن ۳۲۸  
 موج جزئی ۳۹۳

- |                                 |   |
|---------------------------------|---|
| نیمرستانا (ی) ۳۳۸               | نارسانا ۳۳۸                             |
| نوع $\pi$ ۳۴۴                   | ناکاملی ۳۱۰، ۳۵۱                        |
| نوع $p$ ۳۴۴                     | نسبت                                    |
| نیمه عمر ۴۳۰                    | نسب $\sim$ انبساط ۶۰۲                   |
| نیمه فلز ۳۴۱                    | نسب $\sim$ ژیرومغناطیسی ۱۷۸             |
| واپاشی                          | نسب $\sim$ اسپینی ۳۷۳                   |
| نسب $\sim$ آلفا ۴۲۱             | نسب $\sim$ هسته‌ای ۳۷۴                  |
| نسب $\sim$ بتا ۴۴۱              | نسب $\sim$ ظرفیتهای گرمایی ۶۵۴          |
| نسب $\sim$ خودبه خود ۵۰۱        | جدول $\sim$ ۶۶۶                         |
| واکنش                           | نظریه درود-لورنتس ۳۲۸                   |
| نسب $\sim$ برهنه کردن ۲۵۳       | نظریه کارنو ۶۲۳                         |
| نسب $\sim$ زنجیره‌ای ۴۶۸        | نفوذ در سد ۱۰۷                          |
| نسب $\sim$ فوتو هسته‌ای ۴۲، ۴۵۴ | نقشهای دبی-شرر ۴۵                       |
| نسب $\sim$ هسته‌ای ۴۵۱، ۴۵۲     | نقشهای لکه‌های لاهه ۴۵                  |
| نسب $\sim$ Q ۴۵۳، ۴۸۲           | نقطه برگشت کلاسیکی ۱۰۰                  |
| وامغناطش بی دررو ۶۲۸            | نمایش حالت‌های الکترونی، جدول ۱۸۲       |
| و و ۵۲۶                         | نمایش حالت‌های تکانه زاویه‌ای، جدول ۱۵۶ |
| ویژه تابع ۱۲۶                   | نمودار دالیتز ۷۲۲                       |
| ویژه مقدار ۱۲۶                  | نمودار $P-V$ ۶۰۹                        |
| وین، ویلهلم ۱۵                  | نوار انرژی ۳۱۸، ۳۳۹                     |
| قانون جابه‌جایی $\sim$ ۱۶       | نوار رسانش ۳۱۹                          |
| هادرون ۵۱۹                      | نوار ظرفیت ۳۱۹                          |
| هامیلتونی ۱۲۶                   | نوترون ۴۹۰                              |
| هایزنبرگ، ورنر ۵۱               | نسب $\sim$ گرمایی ۴۸                    |
| اصل عدم قطعیت $\sim$ ۵۱         | نوترینو ۴۴۴، ۴۹۰                        |
| هرتز، گوستاو ۳۶                 | نوسانگرهای هماهنگ گوانتوم مکانیکی ۹۳    |
| هرتز، هاینریش ۱۷                | نوفه ۶۹۳                                |
| هرمیتی ۱۲۶                      | نوکلئون ۳۶۶                             |
| هسته                            | نسب $\sim$ ایزوبار ۵۲۵                  |
| نسب $\sim$ آینه‌ای ۳۸۴          | نوکلید ۳۶۷                              |
| نسب $\sim$ دختر ۲۲۶             | جدول $\sim$ با عمر خیلی طولانی ۴۰۶      |
| نسب $\sim$ مرکب ۲۵۲             | جدول $\sim$ پایدار ۴۰۶                  |
|                                 | نویمان ۵۴۴                              |
|                                 | نیروی وان دروالس ۳۰۶                    |



یانگ، چن نینگ ۵۲۶  
یخ ۳۰۷  
یکای جرم اتمی ۳۶۹  
یوکاوا، هیداکی ۵۰۴، ۳۸۷  
یون ۱۴۴  
~ مولکول هیدروژن ۲۴۳  
یونکره ۴۱

هلیسیته ۴۹۴  
هلیوم ۶۹۹  
هماهنگهای کروی ۱۶۱  
همپاری انرژی ۶۶۴  
همجوشی ۳۸۱، ۴۶۹  
راکتور ~ ۴۷۰  
هیبریدی شدن تابع موجهها ۲۶۸