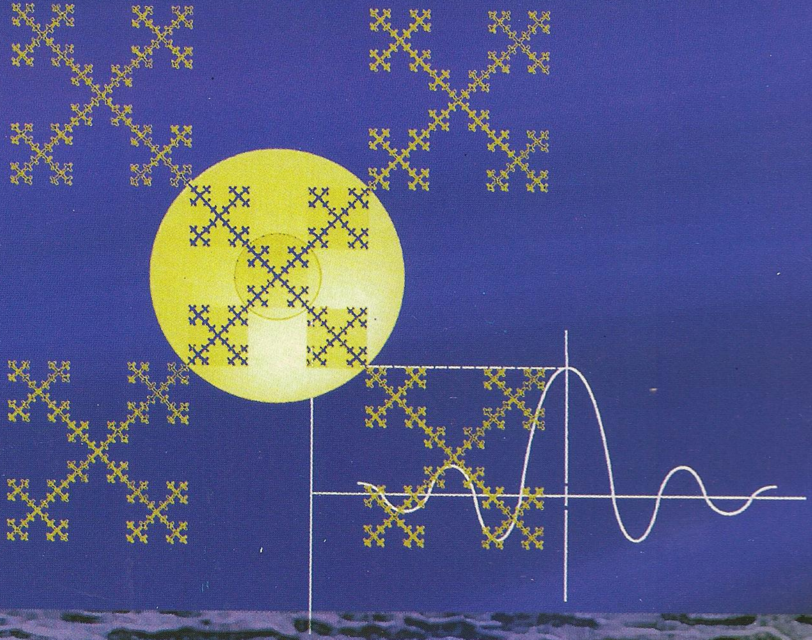
فیزیک موج

استیون نتل

ترجمهٔ محمدرضا کلاه‌چی



فیزیک موج

استیون نتل

ترجمهٔ محمدرضا کلاه‌چی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

مرکز نشر دانشگاهی
۱۱۳۲

فیزیک
۱۰۱

Wave Physics
Stephen Nettel
Springer, 1995

فیزیک موج
تألیف استیون نتل
ترجمهٔ دکتر محمدرضا کلاه‌چی
ویراستهٔ دکتر منیژه رهبر

حروفچین: مریم حسینی‌نیا
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۸۲
تعداد ۲۰۰۰
چاپ: محمدامین

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

نیتل، استیون، ۱۹۳۸ - م. Nettel, Stephen
فیزیک موج / استیون نتل؛ ترجمهٔ محمدرضا کلاه‌چی. ـــ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۲.
شش، ۳۰۶ ص. : مصور، جدول. ـــ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۱۳۲. فیزیک؛ ۱۰۱)
ISBN 964-01-1132-5
فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: Wave physics: oscillations-solitons-chaos. , c1995.
۱. امواج. ۲. مکانیک موجی. الف. کلاه‌چی، محمدرضا، مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان.
۵۳۱/۱۱۳۳ QC۱۵۷/ن۹ف۹
۱۳۸۲
کتابخانهٔ ملی ایران ۲۶۲۵۱ - ۸۲م

بسم‌الله الرحمن الرحیم

فهرست

عنوان | صفحه

پیشگفتار ویراست دوم

تعدادی مثال و مسئله برای روشن ساختن مفاهیم بنیادی اضافه شده است، و خطاهای چاپی اصلاح شده‌اند.

ویراست اول چند بار در رِنسلییر در یک درس سال دوم با استفاده از روش آموزش دوسویه تدریس شده است. این روش شامل جلسات حل تمرین منظم است که در آن دانشجویان به‌صورت گروهی با استفاده از ورقه‌های گزارش کار تمرین می‌کنند. ورودی را دانشجویان ارشدتر کارشناسی یا کارشناسی ارشد که نقش مربی را دارند تأمین می‌کنند. معلوم شده است که با این روش می‌توان این درس را علاوه بر دانشجویان ممتاز، که کتاب ابتدا برای آنها تدوین شده بود، می‌توان برای دانشجویان بیشتری به‌کار برد. ظاهراً عامل اصلی موفقیت دانشجو در این درس پایهٔ ریاضی اوست. خوشوقتم که از دانشجویانی که نقش مربی را داشته‌اند تشکر کنم. به‌ویژه از هوارد گولدوفسکی، بیونگ کیم، و رشیل تامسون که مسئولیت کلاسهای مختلف را به‌عهده داشتند سپاسگزارم. تجربه درسی ما در بازنگری فعلی مؤثر بوده است.

استیون نِتِل

تروی، اوت ۱۹۹۴

پیشگفتار ویراست اول

این کتاب برای نیم‌سال سوم دورهٔ کارشناسی فیزیک نوشته شده است؛ مخاطبان این کتاب دانشجویانی هستند که در برنامه‌های درسی پیشرفته ثبت‌نام کرده‌اند و به‌طور معمول خود را برای کسب مدارک عالی در علوم پایه یا مهندسی آماده می‌کنند. نیم‌سال سوم اغلب تنها فرصتی است که بخش فیزیک می‌تواند به آن دسته از دانشجویان که رشتهٔ اصلی آنها فیزیک نیست، زمینه‌ای منسجم از فیزیک امواج ارائه کند؛ این زمینه بعداً به دانشجو کمک می‌کند تا با اعتماد به‌نفس با مسائل کاربردی، خصوصاً کاربردهایی که اساس آنها مکانیک کوانتومی است، روبه‌رو شود.

فیزیک، مبحثی یکپارچه است. تجربه نشان می‌دهد که با فرورفتن به عمق مطالب و فراگیری پیوندهای ریاضی بین پدیده‌های گوناگون، پیشرفت کار آسان‌تر می‌شود. با وجود این، گامهایی که ما را از فیزیک موج کلاسیک به «مبانی فیزیکی نظریهٔ کوانتومی» هایزنبرگ بردند، بنابه روایت تاریخ ازگامهای بعدی که با جزئیاتِ کاربردی سروکار داشت، دشوارتر بودند. توجه به این نکات، فیزیک کلاسیک نوسانها و امواج که در اینجا شکل می‌گیرد، از نظر ریاضی، نسبت به دروس متداول سال دوم پیشرفته‌تر است. هدف توضیح پدیده‌های کلاسیک و در عین حال ایجاد زمینه‌ای برای مکانیک موج مقدماتی است که به تلفیق منطقی مبحث اخیر در ارائه مطالب می‌انجامد. فصلهای پایانی دربارهٔ امواجِ غیرخطی، سولیتونها و آشوب، مفاهیم شناخته شدهٔ قبلی را در رفتار موجی گسترش می‌دهد، ضمن اینکه خواننده را با مباحث مهم فعلی در فیزیک موج آشنا می‌سازد.

کتاب با فصل کاملی دربارهٔ ریاضی آغاز می‌شود که آنالیز فوریه را در قالب توابع تعمیم‌یافته گسترش می‌دهد. هدف این است که دانشجویان را در «ساده‌ترین» شرایط با مفاهیم جدید آشنا سازد، تا بعد، هنگام مطالعهٔ فصلهای مربوط به فیزیک کلاسیک خود این مفاهیم را تشخیص دهند و به‌کار بندند. بدین طریق، هنگامی که در فصل ۶ نوبت به مکانیک موجی می‌رسد، دانشجویان

باید بتوانند فیزیک نوین را از ریاضیات تمیز دهند. ام. جی. لایت‌هیل، در رساله‌ای به‌نام «تحلیل فوریه و توابع تعمیم‌یافته» متذکر می‌شود که، «نظریهٔ توابع تعمیم‌یافته... تاحد زیادی زحمت درک تبدیل فوریه را کم می‌کند». به‌کارگیری توابع تعمیم‌یافته («نظریهٔ توزیعهای» شوارتز) از انتگرالهای تعریف نشده‌ای مانند $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikx}dk$، که هنوز در کتابهای درسیِ مکانیک کوانتومی متداول است، اجتناب می‌کند. فصل دوم، دربارهٔ نوسانها، ممکن است تا حدودی سرشت مروری داشته باشد. بنابراین، مبحث فیزیکی از جایی شروع می‌شود که با آن دانشجوی سال اول قبلاً با آن آشناست ولی احتمالاً فقط درکی ناقص از آن دارد.

امید است این کتاب برای گروههای گوناگون خواننده مفید باشد، برای دانشجویان ممتاز فیزیک و ریاضیات، دانشجویان کارشناسی ارشد که برای امتحان جامع دکتریٔ‌خود را آماده می‌کنند، و همچنین استادانی که در پی مسائل امتحانی هستند. مسائل، با ارائه چالشها، مانع از یکنواختی می‌شوند. در اینجا، از بسیاری مسائل به‌منظور تثبیت نتایج مهم استفاده شده است. بدین‌ترتیب، پرداختن به مسائل فعالیتی بامعنی می‌شود و همین‌طور کارایی فرایند یادگیری نیز افزایش می‌یابد.

پیش نیازهای این کتاب منحصر به دروس مکانیک و الکتریسیته و مغناطیسِ سال اول دانشگاه برمبنای حسابان است. این کتاب حاصل درس فیزیک ممتاز است که مؤلف از سال ۱۹۷۳ به کرات آن را در رِنسِلییِر درس داده است. تجربهٔ مؤلف نشان می‌دهد که شش فصل اول کتاب را می‌توان به‌راحتی در طول نیم‌سال چهارده هفته‌ای متداول تدریس کرد.

استیون نِتِل

تِرویْ، فوریه ۱۹۹۲

۱

مبنایی ریاضی برای فیزیک موج

چکیده

این فصل با آشنایی با مفاهیم اصلی نظریهٔ توابع تعمیم‌یافته آغاز می‌شود. توسعهٔ ریاضی فیزیک موج، خود با ارزیابی برخی انتگرالهای اساسی شامل توابع گاؤسی آغاز می‌شود. بخشی مختصر دربارهٔ متغیرهای مختلط، انتگرالهای دیگری را نیز به‌دست می‌دهد. پس از آشنایی شهودی با تابع دلتای دیراک، نشان می‌دهیم که این تابع مثالی از توابع تعمیم‌یافته است، یعنی، با خانوادهٔ مشخصی از دنباله‌های هم‌ارز داده می‌شود. اعضای این دنباله‌ها می‌باید توابع خوش‌رفتاری، مانند توابع گاؤسی، باشند. صفات «هم‌ارز» و «خوش‌رفتار» به‌دقت تعریف خواهند شد. نمایش فوریه به‌صورت تجزیهٔ توابع متغیرهای مکانی، به توابع هماهنگ با تمام طول‌موجهای ممکن، معرفی خواهد شد. با استفاده از تشابه با بردارهای پایه در سه‌بُعد، نشان می‌دهیم که امواج هماهنگ، پایه‌ای کامل را در فضای تابع بینهایت بُعدی (فضای هیلبرت) تشکیل می‌دهند. فرمول تبدیل فوریه همانند تصویرکردن بردارها برای به‌دست آوردن مؤلفه‌ها، به‌دست می‌آید، و تابع دلتای دیراک نقشی همانند نقش دلتای کرونکر بازی می‌کند. مثالهای حل شده، شامل تبدیل فوریهٔ موج مربعی، بازسازی کامپیوتری موج مربعی با استفاده از تبدیل فوریهٔ آن، و راست هنجاری توابع دلتای دیراک انجام می‌شود. مسئلهٔ ۱ــ۱۷، که تابع گرین را برای فرایند پخش به‌دست می‌آورد، مخصوصاً به‌عنوان زمینه برای فصل ۶، «مکانیک موج»، توصیه می‌شود.

۱ـ۱ مقدمه‌ای بر مفاهیم

امواج، نقشی فراگیر در طبیعت دارند. امواج مکانیکی را داریم که شامل امواج لرزه‌ای، امواج صوتی در هوا و امواج آب می‌شود. امواج الکترومغناطیسی نیز وجود دارند، و امواج کوانتوم مکانیکی که زیربنای تمام مواد هستند. این پدیده‌های موجی گوناگون، را می‌توان براساس مفاهیم ریاضی وحدت‌بخش فهمید.

در مطالعهٔ مکانیک ذره‌ای، از بردارها برای توصیف جابه‌جایی، سرعت، وکمیتهای دیگر حرکت استفاده می‌کنیم. در سه‌بُعد، هر بردار $\boldsymbol{F}$ را می‌توان از سه جزء ساختمانی یعنی سه برداریکهٔ متداولِ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ ساخت:

$$\boldsymbol{F} = A_۱\boldsymbol{i} + A_۲\boldsymbol{j} + A_۳\boldsymbol{k}$$

$A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، مؤلفه‌های دامنه هستند که $\boldsymbol{F}$ را تعیین می‌کند اجزاء ساختمانی متناظر برای امواج یک‌بُعدی، در فضا $\sin kx$، $\cos kx$ در قلمرو زمانی $\sin \omega t$، $\cos \omega t$ است. در اینجا، k عدد موج نامیده می‌شود. ارتباط آن با طول‌موج λ چنین است

$$k = \frac{۲\pi}{\lambda}$$

به همین ترتیب، ω، بسامد زاویه‌ای برحسب رادیان/ثانیه با دورهٔ T برحسب ثانیه، یا بسامد ν برحسب Hz (تناوب/ثانیه) به‌صورت زیر مربوط می‌شود

$$\omega = ۲\pi\nu = \frac{۲\pi}{T}$$

برای راحتی کارِ ریاضی، اغلب توابع هماهنگ را در قالب تابع نمایی مختلط بیان می‌کنیم

$$\mathrm{e}^{ikx} = \cos kx + \mathrm{i}\sin kx \qquad \mathrm{i} = \sqrt{-۱}$$

می‌گوییم که ذره‌ای در سه‌بُعد دارای سه درجهٔ آزادی است. کمیتهای حرکت برای سیستمهای پیوسته مثل تار بلندِ کشیده شده دارای بینهایت درجهٔ آزادی است. در طول تار بینهایت نقطه وجود دارد و حرکت هر نقطه را باید مشخص کرد. از دیدگاه دیگر، جابه‌جایی تار اغلب به‌صورت تابع پیوسته‌ای از مکان در هر زمان مشخص می‌شود. شگفت‌انگیز نیست که این توابع پیوسته را با بردارهایی در «فضای تابع» که بینهایت بُعد و در نتیجه بینهایت درجهٔ آزادی دارد، نمایش دهیم. بینهایت جزء ساختمانی یا توابع پایهٔ لازم، با توجه به اینکه k (یا ω) متغیری پیوسته است که بینهایت مقدار را درگسترهٔ $-\infty < k < \infty$ اختیار می‌کند. حاصل می‌شود. هر مقدار جدید k، دو تابع پایهٔ جدید $\cos kx$، $\sin kx$ را به‌دست می‌دهد.

در حوزهٔ زمانی در می‌یابیم که فکر $\sin\omega t$، $\cos\omega t$ به‌عنوان مؤلفه‌های پایه فکر جدیدی نیست. هرکس که به بازتولید موسیقی با کیفیت بالا علاقه‌مند است با روش تجزیهٔ سیگنال $F(t)$ به سیگنالهای مجزا هر یک با یک بسامد ω، دامنهٔ مشخص $B(\omega)$ و فاز $\delta\omega$ آشنایی دارد. سپس می‌توان $F(t)$ را به‌صورت جمع همهٔ این سیگنالهای مجزا، یعنی انتگرالی روی همهٔ بسامدهای ممکن، بیان کرد:

$$F(t) \sim \int_{\circ}^{\infty} B(\omega)\sin(\omega t+\delta\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}d\omega$$

که در انتگرال آخر، $A(\omega)$ عددی مختلط است و چنان اختیار می‌شود که اختلاف فاز $\delta\omega$ را به‌حساب آورد و $F(t)$ را حقیقی کند. دستگاه با کیفیت بالای ایده‌آل دستگاهی است که تمام مؤلفه‌های بسامدی مختلف را به‌طور یکسان پردازش (تبدیل و تقویت) کند.

امکان تجزیهٔ توابع مکانی به مؤلفه‌های هماهنگ با تمام طول‌موجهای ممکن را ریاضیدان فرانسوی ژوزف فوریه در سال ۱۸۸۲ در رسالهٔ «نظریهٔ تحلیلی گرما» مطرح کرد. در فضای یک‌بعدی چنین می‌نویسیم

$$F(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}dk$$

در طبیعت، جفتهای «متضاد» یا متقاطر نقطه و بینهایت و غیره وجود دارند. به‌زودی خواهیم دید که موج e^{ikx} هم متضاد خود را دارد که به تابع دلتای دیراک $\delta(x)$ [یا $\delta(k)$] معروف است و به افتخار فیزیکدان بریتانیایی برنده جایزهٔ نوبل، پی.اِی.اِم. دیراک نامگذاری است. تابع $\delta(x)$ دارای قله‌ای بینهایت باریک، در $x=\circ$ است. ویژگیهای $\delta(x)$ به قرار زیر است:

$$\delta(x)=\circ \qquad x\neq\circ$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = ۱$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\delta(x)dx = F(\circ)$$

ویژگی آخر که برای هر تابع «فیزیکی» $F(x)$ صادق است، به‌طور شهودی، از جایگزیدگی $\delta(x)$ در $x=\circ$ به‌دست می‌آید. اگر e^{ikx} نشان‌دهندهٔ پدیده‌ای بینهایت گسترده باشد که در هر نقطهٔ بین $-\infty < x < \infty$ یافت شود، $\delta(x)$ نقطهٔ مقابل آن است و جایگزیدگی کامل را نشان می‌دهد.

با گسترش ریاضیات فیزیک موج، خصوصاً در فصل ۶ که با امواج مادّی (مکانیک کوانتومی) سروکار دارد، نیاز به تابع دلتا را خواهیم دید.

توجه کنید که، مجموعهٔ دامنه‌های مؤلفهٔ موج، $A(k)$، هر تابع خاص $F(x)$ را که تحت آنالیز فوریه قرار می‌گیرد، مشخص می‌کند. مسئلهٔ اصلی در آنالیز فوریه این است که با داشتن $F(x)$، چگونه می‌توان این ضرایب (مختلط) بسط را (که دارای دامنه و فاز هستند) یافت؟ این کار را یافتن تبدیل فوریهٔ تابع معین می‌نامند. روش به‌دست آوردن تبدیل، همانند تصویر کردن بردار و به‌دست آوردن یکی از مؤلفه‌های آن است. برای بردارها، لازمهٔ این‌کار راست هنجاری بردارهای یکهٔ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ است. برای توابع، خواهیم دید که $u_k \equiv ۱/\sqrt{۲\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ بهنجار است و دو تابع پایهٔ u'_k، u_k با شرط $k \neq k'$، متعامدند.

راست هنجاری $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ بدان‌معنی است که این بردارها بر یکدیگر عمودند(متعامد) و هر بردار دارای طول واحد است (بهنجار). روش بررسی راست هنجاری توابع همانند ضرب نقطه‌ای بردارها با گرفتن «انتگرالهای همپوش» مناسب میسر می‌شود. انتگرالهای همپوش را می‌توان با انتگرال‌گیری از حاصلضرب همیوغ مختلط تابع اول، u_k^* در تابع دوم، $u_{k'}$، درگسترهٔ $-\infty < x < \infty$ به‌دست آورد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_k^*(x) u_{k'}(x) dx = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-k')x} dx$$

به‌نظر دیراک محاسبات فیزیکی انتگرالهای همپوش باید به تابع دلتا، $\delta(k-k')$، بینجامد. چون اگر $k \neq k'$، $\delta(k-k') = ۰$، برای توابع با kی متفاوت انتگرال همپوش صفر خواهد بود و اگر $k = k'$ باشد، $u_k(x)$، را می‌توان به جهتی بهنجار تلقی کرد. بدین‌ترتیب، می‌بینیم که هنگام یافتن تبدیلهای فوریه، یعنی، هنگام تصویر کردن تک‌تک مؤلفه‌های موجِ یک تابع به شناخت تابع دلتای دیراک نیازمندیم.

این بحث نیاز به توجیه ریاضی دارد. در حال حاضر، انتگرال همپوش دو تابع u_k و $u_{k'}$ هنوز تعریف نشده است، یعنی، با بسط گسترهٔ انتگرال‌گیری به بینهایت، به حدّی میل نمی‌کنیم. به علاوه، تابع دلتای دیراک تابعی نیست که بتوانیم به‌ازای هر مقدار متغیر مستقل x، مقداری به آن نسبت دهیم. این مشکلات منشأ فیزیکی دارند. اگر $\mathrm{e}^{(\mathrm{i}kx)}/\sqrt{۲\pi}$ نمایانگر موجی باشد که پدیده‌ای را نشان می‌دهد، آنگاه در مسائل فیزیکی باید پذیرفت که این موج باید دارای آغاز (در فضا یا زمان، اگر به‌جای x، t بگذاریم) و پایانی باشد. چنین است که اگر از نظریهٔ توابع تعمیم‌یافته دقیق‌تر برای کار با تابع دلتا استفاده کنیم و از آنجا با روشی سازگار جلو رویم، اثر مرزهای دوردست اما فیزیکی خودبه‌خود منظور خواهد شد و فقدان تعریف ریاضی انتگرالهای راست هنجارکننده برطرف می‌شود.

نظریهٔ توابع تعمیم‌یافته با شناسایی برخی توابع به عنوان توابع مناسب آغاز می‌شود. این توابع، به‌طوری که در بخش بعد خواهیم دید، توابعی هستند. که در حدّ x به‌سمت $\pm\infty$، به‌طور منظم به‌صفر میل می‌کنند. منشأ تعریف توابع تعمیم‌یافته در این مشاهده است که، اگر چه $\delta(x)$ به‌معنای متداول تابع نیست، اما می‌توان آن را با دنباله‌های نامتناهی خاصی از توابع مناسب، نشان داد. تابع تعمیم‌یافتهٔ $f(x)$ با دنباله‌ای نامتناهی از انتگرالها، به‌وسیلهٔ معادلهٔ زیر تعریف می‌شود

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)F(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)F(x)dx$$

در اینجا، $f_n(x)$، هر دنباله از توابع مناسب $f_n(x),\ n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ است که مقدار حدی مطلوب را به انتگرال می‌دهد، برای مثال، $F(\circ)$ هنگامی که $f(x) = \delta(x)$. $F(x)$ هم هر تابع مناسب دلخواه است، و می‌توان آن را «تابع آزمون» برای دنباله‌های مختلف تلقی کرد. در مورد تابع دلتا، اعضای هر دنباله با افزایش n، تیزتر و بلندتر می‌شوند. همچنین می‌توان تبدیلهای فوریهٔ (FT) توابع تعمیم‌یافته را با دنباله‌هایی که اعضای آنها FTهای اعضای دنبالهٔ اولیه هستند، تعریف کرد.

وقتی که با کاربرد مداوم با تابع تعمیم‌یافته آشنا شدیم، سرشت مجرد آن، درست مانند سرشت مجرد مشتق معمولی، مشکلی به‌وجود نخواهد آورد. منشأ نظریهٔ توابع تعمیم‌یافته، در «نظریهٔ توزیعهای» لوران شوارتز است که در سال ۱۹۵۱ ارائه شد. این نظریه را سپس جورج تمپل و ام. جی. لایت‌هیل به صورتی که در اینجا ارائه می‌شود گسترش دادند. در بخش مطالعات بیشتر که در انتهای فصل می‌آید، رسالهٔ ام. جی. لایت‌هیل آمده است. این نظریه امکان آن را فراهم می‌آورد که در تحلیل فوریه، نه تنها تابع دلتا و مشتقهای آن، بلکه توابع ساده‌ای مانند ثابتها و توانهای x را، که معمولاً کنار گذاشته می‌شوند وارد کنیم. رهیافت ما به آنالیز فوریه برحسب مبنایی راست هنجار و توابع تعمیم‌یافته، هم در یادگیری این آنالیز مفید است و هم در گسترش فیزیک کلاسیک و امواج مادّی.

۱ـ۲ انتگرالهای مهم

تابع $g(x)$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$g_a(x) \equiv \sqrt{\frac{a}{\pi}}\mathrm{e}^{-ax^{۲}} \qquad (۱ـ۱)$$

که در آن a عددی حقیقی و مثبت است. این تابع که نامش را از ریاضیدان آلمانی، کارل فردریش گاؤس (۱۷۷۷ـ۱۸۵۵) می‌گیرد، نه تنها در فیزیک بلکه در تحلیلهای آماری نیز کاربرد زیادی

دارد. در اینجا به محاسبهٔ انتگرالهایی که انتگرالده آنها شامل توابع گاؤسی است می‌پردازیم؛ این انتگرالها بارها در شاخه‌های گوناگون فیزیک به‌کار می‌آیند.

حدود این انتگرالها $x = \pm\infty$ است. به‌خاطر اینکه در حد $|x| \to \infty$، توابع $g_a(x)$ بسرعت به صفر می‌گرایند، این انتگرالها کاملاً خوش‌تعریف‌اند. در واقع، $g_a(x)$ مثالی مهم از توابعی است که آنها را توابع مناسب خواندیم. تعریف صوری تابع مناسب تابعی است که همه‌جا و هرچند بار مشتق‌پذیر باشد، و تابع و همهٔ مشتق‌هایش در حد $|x| \to \infty$، حداکثر از مرتبهٔ $|x|^{-N}$، به‌ازای همهٔ مقادیر N، هستند.

اولین انتگرال مهم برای ما عبارت است از

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} dx \tag{۱\_۲}$$

که می‌توانیم با ترفندی آن را محاسبه کنیم. می‌نویسیم

$$\begin{aligned} I_1^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ay^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned} \tag{۱\_۳}$$

با تبدیل به مختصات قطبی θ، r و به‌خاطر داشتن اینکه $dxdy$ به $rdrd\theta$ تبدیل می‌شود. I_1^2 چنین خواهد بود

$$I_1^2 = \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \, \mathrm{e}^{-ar^2} = 2\pi \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ar^2} r dr = \frac{\pi}{a} \tag{۱\_۴}$$

نتیجهٔ مطلوب عبارت است از

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}} \tag{۱\_۵}$$

در مقدمه، به‌راحتی کار با توابع «بهنجارکننده»، یا توابعی که اندازهٔ نسبی آنها را می‌توان تنظیم کرد، اشاره کردیم. از (۱_۳) ملاحظه می‌کنیم که، $g_a(n)$، چنان تعریف شده است که

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(x) dx = 1 \tag{۱\_۶}$$

انتگرال بعدی مورد علاقهٔ ما عبارت است از

$$I_۲ = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(kx)\mathrm{e}^{-ax^۲}dx \qquad (۱-۷)$$

از چه شگردی می‌توانیم استفاده کنیم؟ بگذارید از بسط تیلور $\cos(kx)$ استفاده کنیم،

$$\cos(kx) = ۱ - \frac{(kx)^۲}{۲!} + \frac{(kx)^۴}{۴!} - \ldots \qquad (۱-۸)$$

سپس از انتگرالی که با $I_۱$ نشان دادیم نسبت به a مشتق می‌گیریم تا داشته باشیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^۲\mathrm{e}^{-ax^۲}dx = \frac{۱}{۲a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (۱\text{ـ}۹\text{الف})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^۴\mathrm{e}^{-ax^۲}dx = \frac{۳}{۲^۲a^۲}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (۱\text{ـ}۹\text{ب})$$

و غیره که با مشتق‌گیریهای متوالی حاصل می‌شود. با قرار دادن (۱ـ۸) در (۱ـ۷) و استفاده از (۱ـ۵ تا ۱ـ۹) داریم:

$$\begin{aligned} I_۲ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\left[۱ - \frac{k^۲}{۴a} + k^۴\frac{۳}{a^۲۴!۲^۲} - k^۶\frac{۳\times ۵}{a^۳۶!۲^۳} + \ldots\right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\left[۱ - \frac{k^۲}{۴a} + \left(\frac{k^۲}{۴a}\right)^۲\frac{۱}{۲!} - \left(\frac{k^۲}{۴a}\right)^۳\frac{۱}{۳!} + \ldots\right] \end{aligned} \qquad (۱\text{ـ}۱۰)$$

در عبارت (۱ـ۱۰) جمله‌ای که در داخل کروشه ظاهر شده است همان بسط تیلور $\mathrm{e}^{-k^۲/(۴a)}$ است. (در اینجا، از این قضیه بهره گرفته‌ایم که در عبارتهایی که در آنها با قرار دادن قدرمطلق هر جمله به‌جای آن جمله، همگرایی حفظ می‌شود، می‌توان جای انتگرال و مجموع‌یابی را با هم عوض کرد.) نتیجهٔ ما عبارت است از

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \cos kx\, \mathrm{e}^{-ax^۲}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-k^۲/۴a}} \qquad (۱-۱۱)$$

طرف راست (۱ـ۱۱) مجدداً گاؤسی است. به‌علاوه، هر چه عدد موج k، بزرگتر باشد، یعنی هر چه $\cos kx$ سریعتر نوسان کند، انتگرال همپوش (۱ـ۱۱) کوچکتر می‌شود. اگر a بزرگ باشد. تابع گاؤسی اولیه باریک است و انتگرال همپوش برحسب k پهن می‌شود.

پیش از خاتمه این بخش، به انتگرال دیگری نیاز داریم:

$$I_۳ = \int_{-\infty}^{\infty} \sin kx \, \mathrm{e}^{-ax^۲} dx = ۰ \qquad (۱\text{ـ}۱۲)$$

چرا این انتگرال صفر است؟ خواننده متوجه می‌شود در حالی که $\cos kx = \cos(-kx)$، $\sin kx = -\sin(-kx)$، $\cos kx$ دارای تقارن زوج، و $\sin kx$ دارای تقارن فرد حول $x = ۰$ است. حال، در (۱ـ۱۲)، انتگرال همپوش تابع فرد ($\sin kx$) و تابع زوج $\mathrm{e}^{-ax^۲}$ را می‌گیریم. چنین انتگرال همپوشی همواره صفر است، زیرا به‌ازای هر مقدار گسترهٔ x و $x + dx$، مقداری مساوی ولی با علامت مخالف در گسترهٔ $-(x + dx)$ و $-x$ وجود دارد؛ انتگرالده فرد است.

۱ـ۳ اعداد مختلط

در مطالعهٔ معادله‌های جبری درجه دوم و بالاتر خواننده با استفاده از i، جذر ۱ −، مواجه شده است. با استفاده از i می‌توان مجموعهٔ اعداد مختلط z را از جفت اعداد حقیقی ساخت. می‌نویسیم

$$z = a + \mathrm{i}b \qquad (۱\text{ـ}۱۳\text{الف})$$

که a و b اعداد حقیقی هستند.

اعداد مختلط را می‌توان به‌صورت نقطه‌هایی بر «صفحهٔ مختلط» نشان داد، شکل ۱ـ۱. مختصهٔ x قسمت حقیقی عدد، یعنی a، و مختصهٔ y قسمت مجازی آن، یعنی b، را به‌دست می‌دهد. منظور از «تساوی» دو عدد مختلط آن است که قسمت‌های حقیقی دو عدد با هم، و قسمت‌های مجازی دوعدد نیز باهم مساوی باشند:

$$z = z' \qquad (۱\text{ـ}۱۳\text{ب})$$

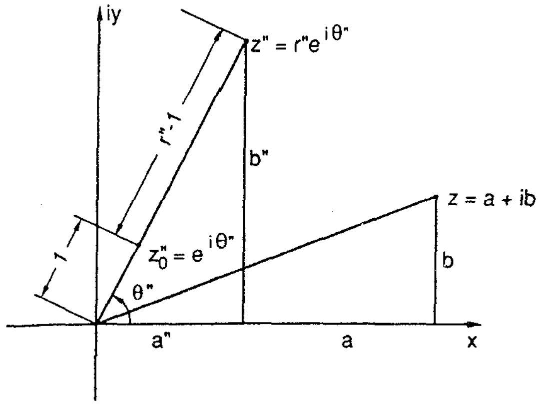
به‌همراه

$$z = a + \mathrm{i}b, \qquad z' = a' + \mathrm{i}b'$$

یعنی

$$a = a' \qquad b = b'$$

در شکل ۱ـ۱ مشاهده می‌کنیم که اگر $z = z'$ باشد، z و z' با یک نقطه در صفحهٔ مختلط نشان داده می‌شوند. برای عملیات جبری مختلف با اعداد مختلط، خواننده می‌تواند به کتابهای جبر در سطوح متوسط و به مسائل آخر این فصل مراجعه کند.



شکل ۱ـ۱ دو عدد مختلط دلخواه z و z'' که برروی صفحهٔ مختلط نشان داده شده‌اند. r'' قدرمطلق z'' و θ'' فاز z'' است. $z''_\circ$ نیز نشان داده شده است که قدرمطلق آن واحد است، $z''_\circ = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta''}$.

بسط آشنای تابع e^x،

$$\mathrm{e}^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \dots$$

را به اعداد مختلط تعمیم می‌دهیم

$$\mathrm{e}^z = ۱ + z + \frac{z^۲}{۲!} + \frac{z^۳}{۳!} + \dots \qquad (۱۴\text{ـ}۱)$$

در اینجا z هر عدد مختلط دلخواهی است.

حال ببینیم هنگامی که z کاملاً مجازی است، یعنی

$$z \equiv \mathrm{i}\theta \qquad (۱۵\text{ـ}۱)$$

چه اتفاقی می‌افتد؛ θ عددی حقیقی است. با به یاد آوردن $\mathrm{i}^۲ = -۱$ از (۱ـ۱۴) چنین نتیجه می‌شود

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = ۱ + \mathrm{i}\theta - \frac{\theta^۲}{۲!} - \frac{\mathrm{i}\theta^۳}{۳!} + \frac{\theta^۴}{۴!} \dots$$

قسمت‌های حقیقی و مجازی را دسته‌بندی می‌کنیم:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = ۱ - \frac{\theta^۲}{۲!} + \frac{\theta^۴}{۴!} + \dots + i\left(\theta - \frac{\theta^۳}{۳!} + \dots\right)$$

با یادآوری بسط توابع سینوس و کسینوس: $\sin\theta = \theta - \theta^۳/۳! + \theta^۵/۵!\ldots$ و $\cos\theta = ۱ - \theta^۲/۲! + \theta^۴/۴!\ldots$. مشاهده می‌کنیم که

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta} \qquad (۱\text{ـ}۱۶)$$

در نمایش هندسی اعداد مختلط، $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta''}$ متناظر با نقطه‌ای در نوک بردار شعاعی به‌طول واحد است که با محور حقیقی زاویهٔ θ'' می‌سازد. بدین‌ترتیب، تصویر بردار شعاعی بر محورهای x و y، قسمت‌های حقیقی و مجازی $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta''}$ را به‌دست می‌دهند. اغلب عدد مختلط دلخواه z'' را به‌صورت زیر می‌نویسیم،

$$z'' = r''\mathrm{e}^{i\theta''} = a'' + \mathrm{i}b''$$

$$r'' = \sqrt{a''^۲ + b''^۲}, \qquad \tan\theta'' = \frac{b''}{a''} \qquad (۱\text{ـ}۱۷)$$

z'' همان نقطهٔ نوک بردار شعاعی به طول r'' است که با محور حقیقی زاویهٔ θ'' می‌سازد، r'' را قدرمطلق z'' می‌نامند، $r'' = |z''|$ با θ'' فاز عدد مختلط است. شکل ۱ـ۱ تمام این روابط را به‌روشنی بیان می‌کند.

استفاده از (۱ـ۱۷) برای $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ برحسب توابع مثلثاتی امکان ترکیب کردن (۱ـ۱۱) و (۱ـ۱۲) را فراهم می‌کند:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{-ax^۲}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{k^۲}{۴a}}} \qquad (۱\text{ـ}۱۸)$$

[معادلهٔ (۱ـ۱۸) را می‌توان مستقیماً با استفاده از قضیهٔ کوشی به‌دست آورد. این قضیه ما را مجاز می‌دارد تا پربند انتگرال‌گیری را از محور حقیقی به $x - \mathrm{i}k/۲a$ منتقل کنیم.] نظریهٔ متغیرهای مختلط به نتایج جدید بسیاری در ریاضیات می‌انجامد. اعداد مختلط، همچنین، بسیاری از رابطه‌های فیزیک را ساده می‌کنند. همان‌طورکه در فصل ۶ خواهیم دید، اعداد مختلط در فرمولبندی مکانیک کوانتومی ضروری هستند. رابطهٔ (۱ـ۱۸) نتیجه‌ای است که از آن استفاده بسیار خواهیم کرد.

۱ـ۴ تابع دلتای دیراک

بگذارید ابتدا درکی شهودی از «تابع» دلتای دیراک به‌کمک شبیه‌سازی آن با دنباله‌ها به‌دست آوریم، و سپس با استفاده از نظریهٔ توابع تعمیم‌یافته به‌صورت دقیق به آن بپردازیم. از مقدمه به‌خاطر داریم که سروکارمان با تابعی نوک‌تیز به شکل $\delta(x-a)$ است، که نوکِ تیز آن در a است. خواص

$\delta(x-a)$ را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\delta(x-a)dx = F(a) \qquad \text{(۱ـ۱۹الف)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)dx = ۱ \qquad \text{(۱ـ۱۹ب)}$$

$$\delta(x-a) = ۰ \quad \text{اگر} \quad x \neq a \qquad \text{(۱ـ۱۹ج)}$$

که در اینجا $F(x)$ یک تابع مناسب است.

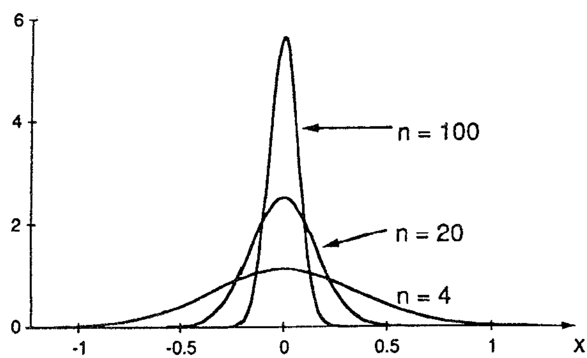
اگر چه $\delta(x)$ یک تابع به معنای متعارف نیست، اما رفتار آن را می‌توان با دنباله‌ای از توابع نمایش داد. با قراردادن عدد صحیح n به‌جای a در (۱ـ۶) و $g_n(x)$ را به‌ازای $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$ به‌دست می‌آوریم:

$$g_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^۲} \qquad \text{(۱ـ۲۰)}$$

باید انتگرال زیر را بررسی کنیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)F(x)dx \quad \text{در حد} \quad n \to \infty$$

در شکل ۱ـ۲ رفتار $g_n(x)$ را برحسب δx با افزایش n نشان می‌دهیم. بدیهی است که $g_n(x)$ بلندتر و جایگزیده‌تر می‌شود. اما مساحت زیرمنحنی («قدرت» تابع) ثابت باقی می‌ماند.



شکل ۱ـ۲ با افزایش n، تابع گاؤسی بسرعت تابعی نوک‌تیز خواهد شد. این تابع، «تابع دلتای دیراک» را شبیه‌سازی می‌کند. مساحت زیر همهٔ منحنی‌ها برابر واحد است.

چون به‌ازای n بزرگ، $g_n(x)$ نوک‌تیزی در $x = \circ$ دارد، همهٔ انتگرال مربوط به حوالی $x = \circ$ است. می‌توانیم فرض کنیم که $F(x)$ دارای مقدار ثابت $F(\circ)$ در این حوالی است. بدین‌ترتیب، داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)F(x)dx \cong \int_{-\infty}^{\infty} F(\circ)g_n(x)dx = F(\circ)\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)dx = F(\circ)$$

که در تساوی آخر از (۱ـ۶) استفاده کرده‌ایم:

در رهیافت دقیق از دنبالهٔ منظم توابع مناسب استفاده می‌کنیم طبق تعریف، دنباله‌ای از توابع مناسب $f_n(x)$ هنگامی منظم است که به‌ازای هر تابع مناسب $F(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)F(x)dx$$

موجود باشد. دو دنبالهٔ منظم توابع مناسب هم‌ارز خوانده می‌شوند اگر حد این دو دنباله یکسان باشد. برای مثال دنباله‌های $e^{-x^{2}/4n}$ و $e^{-x^{4}/n^{2}}$ هم‌ارزند. بالاخره، تابع تعمیم‌یافته $f(x)$، طبق تعریف دنبالهٔ منظم $f_n(x)$ از توابع مناسب است، و دو تابع تعمیم‌یافته را مساوی خوانند اگر دنباله‌های آنها هم‌ارز باشند. بدین‌ترتیب، تابع تعمیم‌یافته $f(x)$ را چنین می‌نویسیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)F(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)F(x)dx \qquad (۱-۲۱)$$

بسیاری از توابع معمولی، $f_{\text{or}}(x)$، را می‌توان توابع تعمیم‌یافته در نظر گرفت. تنها شرط لازم این است که لااقل یک دنبالهٔ منظم از توابع مناسب $f_n(x)$ موجود باشد که برای آن

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)F(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{or}}(x)F(x)dx \qquad (۱-۲۲)$$

[می‌توان نشان داد که اگر $f_{\text{or}}(x)$ چنان باشد که $(1+x^{2})^{-N}f_{\circ}(x)$ در گسترهٔ $-\infty$ تا ∞ به‌ازای یک N مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه دنباله منظم $f_n(x)$ را می‌توان ساخت.] معادلهٔ (۱ـ۲۲) حیطهٔ نظریهٔ توابع تعمیم‌یافته را بسیار گسترش می‌دهد.

حال، ثابت می‌کنیم که دنباله‌های هم‌ارز $g_n(x)$، ر.ک (۱ـ۲۰)، تابع تعمیم‌یافتهٔ $\delta(x)$ را چنان تعریف می‌کنند که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)F(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)F(x)dx = F(\circ) \qquad (۱-۲۳)$$

اثبات. به‌ازای هر تابع مناسب $F(x)$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-nx^2}F(x)dx-F(0)\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-nx^2}[F(x)-F(0)]dx\right|$$

$$\leq |F'(x)|_{\max}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-nx^2}|x|dx$$

$$=|F'(x)|_{\max}(n\pi)^{-\frac{1}{2}}\rightarrow 0 \quad \text{وقتی‌که} \quad n\rightarrow\infty$$

در اینجا فرض کردیم که $|F(x)-F(0)|$ همواره کمتر از بیشینهٔ مشتق درگسترهٔ $-\infty < x < \infty$ ضربدر $|x|$، $|F'(x)|_{\max}|x|$، است.

۱ـ۵ آنالیز فوریه

در بخش ۱ـ۱ نشان دادیم که آنالیز فوریه به تجزیهٔ توابع به «امواج» مجزا، یعنی مؤلفه‌های دوره‌ای، مربوط می‌شود. در فیزیک کلاسیک، یعنی فیزیکی که قبل از پیدایش مکانیک کوانتومی فرمولبندی شد، پدیده‌های فیزیکی به دو دستهٔ ذره‌ای و موجی تقسیم می‌شدند. فصلهای ۳ تا ۵ به امواج، چنانکه در فیزیک کلاسیک می‌آیند، می‌پردازد. آنالیز فوریه همواره ابزاری برای کار با این امواج بوده است. فصل ۶ با شرح مکانیک کوانتومی آغاز می‌شود: که در آن جنبه‌های ذره‌ای و موجی را می‌توان به یک پدیده نسبت داد. اینجاست که آنالیز فوریه کلید درک این همزادی است.

برای سیستمی که مرزهایش در بینهایت است، باید بینهایت طول‌موج ممکن را در نظر بگیریم. تابع مناسب $F(x)$، $-\infty < x < \infty$، را با انتگرالی روی تمام مقادیر عدد موج k نشان می‌دهیم:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}dk \qquad (۱\text{ـ}۲۴)$$

برای راحتی کار از $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ به‌جای تجزیه آن به سینوس و کسینوس استفاده می‌کنیم. اگر ضرایب $A(k)$ را نیز مختلط در نظر بگیریم، کلی‌ترین حالت را خواهیم داشت زیرا $A(k)$ حاوی فاز نیز خواهد بود. $F(x)$ ممکن است حقیقی یا مختلط باشد. این مطالب را با جزئیات بیشتری در مسائل آخر فصل بررسی می‌کنیم. در آنجا در خواهیم یافت که اگر مثلاً $F(x)$ تابعی حقیقی و زوج از x باشد، نمایش فوریه (۱ـ۲۴) فقط شامل جمله‌های $\cos(kx)$ و ضرایب فوریه حقیقی

$A(k)$ خواهد بود. خاطر نشان می‌کنیم که مقادیر $|A(k)|$ معیار اهمیت نسبی مؤلفه‌های مختلف موج، $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$، در تابع مورد نظر $F(x)$ هستند.

رابطهٔ (۱ـ۲۴) فقط هنگامی مفید است که راهی برای یافتن $A(k)$ به‌ازای هر تابع $F(x)$ وجود داشته باشد. وقتی $A(k)$ به‌دست آمد، آن را تبدیل فوریهٔ $F(x)$ نامند. تابعی وجود دارد که تبدیل فوریهٔ آن را می‌توانیم با معلومات کنونی خود بیابیم. از رابطهٔ (۱ـ۱۸) می‌توانیم تبدیل فوریهٔ تابع دلتای دیراک را به‌دست آوریم. با این نمایش فوریه می‌توانیم رابطهٔ (۱ـ۲۴) را برای $A(k)$ حل کنیم و تبدیل فوریهٔ هر تابع مناسب $F(x)$ را به‌دست آوریم.

با قرار دادن $1/(4n)$ به‌جای a، n بازهم عددی صحیح است، و تعویض نقشهای k و x در (۱ـ۱۸)، داریم

$$g_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}e^{-\frac{k^2}{4n}}dk \qquad (۱ـ۲۵)$$

حال می‌نویسیم

$$g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} b_n(k)e^{ikx}dk \qquad (۱ـ۲۶\text{الف})$$

رابطهٔ (۱ـ۲۶الف) به‌همان شکل رابطهٔ (۱ـ۲۴) است و تبدیل فوریهٔ مطلوب، $b_n(k)$، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$b_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{k^2}{4n}} \qquad (۱ـ۲۶\text{ب})$$

اکنون، فرض کنید که تابع تعمیم‌یافتهٔ دلخواه $f(x)$ با دنباله $f_n(x)$ داده شود، که هر عضو از دنباله دارای نمایش فوریهٔ زیر است

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} a_n(k)e^{ikx}dk \qquad (۱ـ۲۷\text{الف})$$

در این صورت می‌توان نشان داد که تبدیل فوریهٔ همهٔ دنباله‌های هم‌ارز $f_n(x)$، یعنی $a_n(k)$، نیز همگی دنباله‌های هم‌ارز و منظم توابع مناسب هستند. فرض کنید $a(k)$ تابع تعمیم‌یافته‌ای برابر با دنباله‌های $a_n(k)$ باشد. یعنی، با استفاده از (۱ـ۲۱)

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(k)F(k)dk = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a_n(k)F(k)dk \qquad (۱ـ۲۷\text{ب})$$

در اینجا $a(k)$ تعریف تبدیل فوریهٔ تابع تعمیم‌یافتهٔ $f(x)$ خواهد بود.

اگر به دنباله‌های تبدیل فوریه‌ای $g_n(x)$، یعنی همان دنباله‌های $b_n(k)$، بازگردیم، حد بدیهی زیر را خواهیم داشت.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{k^۲}{۴n}} F(k)dk = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)dk \qquad (\text{۱ـ۲۸الف})$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\right) F(k)dk = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} b_n(k)F(k)dk \qquad (\text{۱ـ۲۸ب})$$

از (۱ـ۲۶الف)، (۱ـ۲۷)، و (۱ـ۲۸ب) نتیجه می‌شود که

> تبدیل فوریهٔ $\delta(x)$ عبارت است از $b(k) = ۱/\sqrt{۲\pi}$. $\delta(x)$ و $۱/\sqrt{۲\pi}$ هر دو از توابع تعمیم‌یافته هستند

چگونه می‌توانیم به این نکته پی ببریم که تبدیل فوریهٔ تابع دلتا عددی ثابت است؟ اگر $A(k)$ در (۱ـ۲۴) مقداری ثابت باشد در این صورت تمام امواج در $x = ۰$ همفاز خواهند بود و در آنجا انباشته می‌شوند، و مقداری را که به بینهایت میل می‌کند خواهیم داشت. اگر $x \neq ۰$، آنگاه اگر چه برخی امواج مانند $(\cos kx + \mathrm{i}\sin kx)$، مثلاً، در نقطهٔ x دارای قسمت حقیقی و مجازی مثبت هستند، اما سهم آنها به وسیلهٔ امواجی که دارای عدد موج $(k \pm \pi/x)$ هستند خنثی خواهد شد. نتیجه نهایی آن است که جمع همهٔ امواج با دامنه‌های تقریباً مساوی در نهایت بجز در نقطهٔ $x = ۰$، که در آن بینهایت بزرگ می‌شود، به صفر میل خواهد کرد. در تمرینها از خواننده خواسته‌ایم که نشان دهد که سهم قسمت مجازی انتگرالی که $\delta(x)$ را تعیین می‌کند، به‌خاطر تقارن صفر است.

در حالت کلی، مدل یافتن $A(k)$، یعنی معکوس (۱ـ۲۴)، روش تصویرکردن بردار $\boldsymbol{F}$ به‌منظور یافتن هر مؤلفهٔ مورد نظر است. هر بردار دلخواه $\boldsymbol{F}$ را می‌توان در دستگاه سه‌بُعدی دکارتی برحسب سه بردار یکهٔ متقابلاً متعامد $\boldsymbol{v}_۱, \boldsymbol{v}_۲, \boldsymbol{v}_۳$ (به‌جای $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$) نشان داد:

$$\boldsymbol{F} = A_۱\boldsymbol{v}_۱ + A_۲\boldsymbol{v}_۲ + A_۳\boldsymbol{v}_۳ \qquad (\text{۱ـ۲۹})$$

به‌همراه

$$\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = \delta_{ij} \qquad i,j = ۱,۲,۳ \qquad (\text{۱ـ۳۰})$$

نمادی که در طرف راست (۱ـ۳۰) آمده است، دلتای کرونکر δ_{ij} نام دارد. مقدار آن برای $i = j$ واحد و برای $i \neq j$ صفر است. بدین‌ترتیب رابطهٔ (۱ـ۳۰) بیانگر راست هنجاری بردارهای پایهٔ

v_1, v_2, v_3 است. برای یافتن یکی از مؤلفه‌ها در (۱ـ۲۹)، مثلاً A_i، ضرب برداری نقطه‌ای دوطرف رابطه را با v_i می‌گیریم. این روش، مؤلفهٔ مطلوب $\boldsymbol{F}$ را از راه تصویرکردن بردار، به‌دست می‌دهد. برای مثال، ضرب نقطه‌ای با v_1 می‌دهد

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{F} = A_1 \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + A_2 \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + A_3 \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_3$$

با استفاده از (۱ـ۳۰) داریم،

$$A_1 = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{F} \qquad (۱\text{ـ}۳۱)$$

اثبات اینکه هر تابع مناسب $F(x)$ را می‌توان بدون خطا با نمایش فوریه‌ای مانند (۱ـ۲۴) نشان داد دشوار نیست (مسئلهٔ ۱۹):

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} dk \qquad (۱\text{ـ}۲۴)$$

در بخش ۱ـ۱ خاطرنشان کردیم که این نمایش را می‌توان با بسط هر بردار $\boldsymbol{F}$ در مبنای $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ (۱ـ۲۹) مقایسه کرد. توابع $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}/\sqrt{2\pi}$، $-\infty < k < \infty$، پایه یا مجموعه‌ای کامل را برای توابع مناسب تشکیل می‌دهند.

اینک می‌خواهیم راست‌هنجاری این مجموعهٔ پایه از توابع را ثابت کنیم. برای این منظور (۱ـ۲۵) را دوباره می‌نویسیم، این‌بار، x را با $(k-k')$ و k را با x جایگزین می‌کنیم. داریم،

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4n}} dx = g_n(k-k')$$

با دو تعریف زیر

$$u_k(x) \equiv \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{2\pi}} \qquad u^*_{k'}(x) \equiv \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}}{\sqrt{2\pi}} \qquad (۱\text{ـ}۳۲\ \text{الف})$$

داریم

$$\boxed{\int u^*_{k'}(x) u_k(x) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4n}} dx = g_n(k-k')} \qquad (۱\text{ـ}۳۲\text{ب})$$

که با در نظر گرفتن (۱ـ۲۳)، در می‌یابیم که $g_n(k-k')$ دنباله‌ای است برابر با $\delta(k-k')$.

در حد $n \to \infty$، رابطهٔ (۱ـ۳۲ب) به‌شرط راست هنجاری برای $u_k(x)$ و $u_{k'}(x)$ بدل می‌شود. همان‌طورکه در بخش ۱ـ۱ گفته شد، این شرط شامل «یافتن انتگرال همپوش» یکی از توابع و مزدوج همیوغ تابع دیگر است. رابطهٔ (۱ـ۳۲ب) برای امواجی نمایی، مانند رابطهٔ راست هنجاری بردارهای پایه است. تابع دلتای دیراک، $\delta(k-k')$، که با دنبالهٔ $g_n(k-k')$ برابر است، جایگزین دلتای کرونکر δ_{ij}، در (۱ـ۳۰) می‌شود. شباهت دو شرط را می‌توان با مقایسهٔ خواص دو نوع تابع دلتا دید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(k-k')dk' = ۱ \quad \text{با} \quad \delta_{ij} = ۱ \quad i = j$$

و

$$\delta(k-k') = ۰ \ \text{اگر} \ k \neq k' \quad \text{با} \quad \delta_{ij} = ۰ \quad i \neq j$$

باز هم اگر $k = k'$ باشد دو موج در (۱ـ۳۲ب) همه‌جا با یکدیگر همفازند و انتگرال همپوش آنها در حد $n \to \infty$ به ∞ میل خواهد کرد. اگر $k \neq k'$ باشد دارای یک فاز نسبی $(k-k')x$ هستیم که با k' تغییر می‌کند و به حذف کلی می‌انجامد.

ضریب $\mathrm{e}^{-x^۲/۴n}$ یا عضوی از دنبالهٔ هم‌ارز دیگر، رهنمودی برای انتگرال‌گیری (۱ـ۳۲ب) فراهم می‌سازد، و هنگامی که n به بینهایت میل می‌کند، بخشی از تعریف راست هنجاری امواج نمایی است. بدون این ضریب انتگرال معین نخواهد بود؛ خواننده می‌تواند به‌سادگی بررسی کند که با گسترش دامنهٔ انتگرال‌گیری، هیچ حدّی به‌وجود نمی‌آید. همان‌طورکه در بخش ۱ـ۱ اشاره کردیم، نیاز به تعریف ریاضی، دارای یک همتای فیزیکی است. ضریب $\mathrm{e}^{-x^۲/۴n}$ در حد $n \to \infty$ نشان می‌دهد که مؤلفه‌های موج هم آغاز و پایانی دارند. هر یک از امواج به‌صورت $\mathrm{e}^{-x^۲/۸n}$ به‌تدریج از بین می‌روند (در عمل، آنها یا جذب می‌شوند، یا اینکه منتظر بازگشت بازتابهای آنها نمی‌شویم.)

پس از تصویر کردن بردارها، دو طرف رابطهٔ (۱ـ۲۴) را در $۱/\sqrt{۲\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}$ و $\mathrm{e}^{-x^۲/۴n}$ ضرب می‌کنیم و روی تمام xها انتگرال می‌گیریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x} \mathrm{e}^{-\frac{x^۲}{۴n}} F(x)dx$$

$$= \frac{۱}{۲}\pi \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x} \mathrm{e}^{-\frac{x^۲}{۴n}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}dk\right] dx$$

ترتیب انتگرال‌گیری را در طرف راست عوض می‌کنیم (این روش را در مورد توابع مناسب می‌توان

توجیه کرد):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik'x} e^{\frac{-x^2}{4n}} F(x)dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} e^{-\frac{x^2}{4n}} dx\right] dk$$

به‌علاوه، اگر طرف راست را اول بنویسیم و رابطه را با استفاده از (۱ـ۳۲) ساده کنیم، داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(k-k')A(k)dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-ik'x}e^{-\frac{x^2}{4n}}dx$$

حال، اگر حد $n \to \infty$ را در نظر بگیریم، می‌توانیم از (۱ـ۳۲) برای ساده کردن طرف چپ استفاده کنیم. طرف راست نیز با به‌کار بردن (۱ـ۲۸الف) ساده می‌شود. نتیجه عبارت است از

اگر

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx}dk \qquad (۱ـ۲۴)$$

پس

$$A(k') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-ik'x}dx \qquad (۱ـ۳۳)$$

رابطهٔ (۱ـ۳۳) تبدیل فوریهٔ مورد نظر برای رابطهٔ (۱ـ۲۴) است. دو معادله را برای مقایسه در کنار یکدیگر گذاشته‌ایم. اگر چه این دو رابطه شبیه به یکدیگر به‌نظر می‌رسند، ولی در واقع بجز برای یک علامت منفی دارای ارتباطی دوجانبه هستند، با وجود این بد نیست در ابتدا آنها را با دو تعبیر کاملاً متفاوت معنی کنیم. معادلهٔ (۱ـ۲۴) نمایش فوریه تابع معلومِ $F(x)$ است، یعنی $F(x)$ را به‌صورت جمع روی توابع پایه $1/\sqrt{2\pi}e^{ikx}$ با دامنه‌های مختلط $A(k)$ نشان می‌دهد. رابطهٔ (۱ـ۳۳)، یعنی تبدیل فوریه، چگونگی یافتن این دامنه‌ها، $A(k)$، را با داشتن $F(x)$، مشخص می‌کند. توجه کنید که (۱ـ۳۳) مشابه رابطهٔ (۱ـ۳۱) است که مؤلفهٔ مورد نظر بردار را با تصویر کردن آن به‌دست می‌دهد. رابطهٔ (۱ـ۳۳) مؤلفهٔ تابع پایه‌ایِ مطلوب را به‌دست می‌آورد.

به این شکل، نشان دادیم که (۱ـ۲۴) و (۱ـ۳۳) برای توابع مناسب معتبر هستند. بنابراین، آنها را می‌توان برای دنباله‌های مناسب $f_n(x)$ و $a_n(k)$ هم که به‌ترتیب مساوی با توابع تعمیم‌یافتهٔ $f(x)$ و $a(k)$ هستند به‌کار بست. به‌طور خلاصه:

اگر

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a_n(k) \mathrm{e}^{ikx} dk \qquad \text{(۱ـ۲۷الف)}$$

پس

$$a_n(k') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x} dx \qquad \text{(۱ـ۳۴)}$$

و برای یادآوری تعریف $f(x)$ و $a(k)$ را نیز می‌آوریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)F(x)dx \cong \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)F(x)dx \qquad \text{(۱ـ۲۱)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(k)F(k)dk \cong \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_n(k)F(k)dk \qquad \text{(۱ـ۲۷ب)}$$

همان‌طور که قبلاً گفتیم، دنباله‌های $a_n(k)$ در صورتی که دنباله‌های $f_n(x)$ هم‌ارز باشند، معادل‌اند. و تابع تعمیم‌یافتهٔ $a(k)$، طبق تعریف، تبدیل فوریهٔ تابع تعمیم‌یافتهٔ $f(x)$ است. به همراه (۱ـ۲۲) دیدیم که گروه وسیعی از توابع را می‌توان توابع تعمیم‌یافته در نظر گرفت. ترکیب توابع مناسب و تمام توابع تعمیم‌یافته شامل همهٔ توابعی هستند که فیزیکدان نظری ممکن است به نمایش فوریهٔ آنها نیاز داشته باشند.

خواننده ممکن است از خود بپرسد که آیا ارزیابی توابع $A(k)$ به‌وسیلهٔ (۱ـ۳۳) یا (۱ـ۳۴) همیشه کار ساده‌ای است؟ در عمل، اوضاع چندان پیچیده نیست. به غیر از تابع دلتای دیراک دوتابع دیگر وجود دارند که اغلب به آنها بیش از آنالیز فوریه‌شان نیاز پیدا می‌کنیم. این توابع عبارت‌اند از گاؤسی و «موج مربعی». قبلاً در (۱ـ۱۸ و ۱ـ۲۵) نمایش گاؤسی را دیدیم. آنالیز فوریهٔ تابع گاؤسی خود یک تابع گاؤسی است. نتیجه‌ای که به‌خوبی شناخته شده است. «موج مربعی» را در مثالهای ۱ـ۱ و ۱ـ۲ تحلیل کردیم. برخی تبدیلهای سادهٔ دیگر را در مثالها و مسائل خواهیم دید. بسیاری از تبدیلها را می‌توان در جداول منتشر شده یافت. برخی از این تبدیلها از نظریهٔ متغیرهای مختلط به‌دست آمده‌اند[1]. یک رهیافت متفاوت استفاده از روشهای عددی معمولاً، استفاده از رایانه، است. خواننده نمونهٔ این موارد

۱. تبدیل فوریهٔ بسیاری از توابع که توابع معمولی هستند را می‌توان توابع تعمیم‌یافته در نظر گرفت و مستقیماً از رابطهٔ (۱ـ۳۳) برای توزیع مناسب به‌دست آورد. اما، به هرحال گاهی باید دنبالهٔ مناسبی را بیابیم که در (۱ـ۲۲) صدق کند. نگاه کنید به مثال ۲.

را در مثال ۱ـ۲، و یک مسئله رایانه‌ای به‌عنوان تمرین آزمایشگاهی در انتهای بخش خواهد یافت.

مثال ۱ـ۱

تبدیل فوریهٔ تابع موجِ مربعیِ $F(x)$ را که با

$$F(x) = ۰ \qquad x \geq a, x \leq -a$$
$$F(x) = v \qquad a > x > -a$$

تعریف می‌شود به‌دست آورید و دربارهٔ نتیجه آن بحث کنید.

حل: نمایش فوریه برای توابع مناسب با رابطهٔ (۱ـ۲۴) داده می‌شود، e^{ikx} را در (۱ـ۲۴) بسط می‌دهیم. [بحث در این مورد را که $F(x)$ تابعی مناسب نیست، بلکه «تابعی معمولی است که می‌توان آن را تابع تعمیم‌یافته تلقی کرد»، به انتهای مثال ۲ـ۱ موکول می‌کنیم.] داریم:

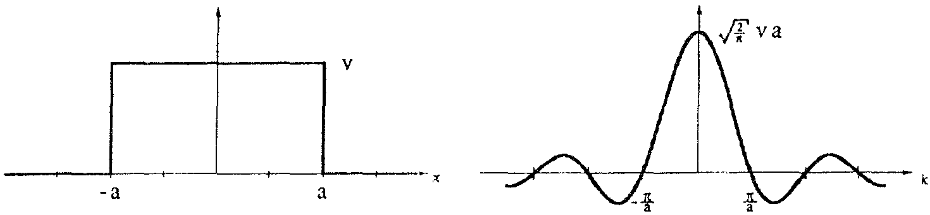
$$A(k) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\cos kx - \mathrm{i} \sin kx) F(x) dx$$

بار دیگر، چون $F(x)$ نسبت به x زوج و $\sin kx$ فرد است، انتگرال $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(kx) \times F(x) dx$ صفر می‌شود. ■

حال، با استفادهٔ مستقیم از تعریف $F(x)$، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} A(k) &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x) \cos kx dx \\ &= \frac{v}{\sqrt{۲\pi}} \int\limits_{-a}^{a} \cos kx dx \\ &= \frac{v}{\sqrt{۲\pi}} \frac{[\sin ka - \sin(-ka)]}{k} \\ &= \frac{\sqrt{۲} v}{\sqrt{\pi} k} \sin(ka) \end{aligned}$$

باید دربارهٔ این نتیجه بحث کنیم: ابتدا متوجه می‌شویم که $A(k)$ تابعی زوج از k است. این نکته ما را مجاز می‌دارد تا سهم $+k$ و $-k$ را در انتگرال، با هم در نمایش فوریهٔ اوّلیه (۱ـ۲۴)



شکل ۱ـ۳ موج مربعی و تبدیل فوریه‌اش، مثال ۱ـ۱.

منظور کنیم، و نمایشی جدیدی را که برای همهٔ توابع زوج معتبر است بنویسیم:

$$F(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{\circ}^{\infty} A(k) \cos kx dk$$

که در آن از تساوی $\mathrm{e}^{ikx} + \mathrm{e}^{-ikx} = ۲ \cos kx$ استفاده کرده‌ایم.

حال اگر به نتیجه‌ای که برای $A(k)$ به‌دست آمد بپردازیم و از خود بپرسیم که در چه مقادیری از k انتظار داریم ضریب $A(k)$ بارزتر از جاهای دیگر باشد، ممکن است حدس بزنیم که جواب، در مجاورت $k = \pi/۲a$ باشد، زیرا حلقهٔ مرکزی $\cos \pi x/۲a$ بیش از همه شبیه تابع مورد نظر ماست و می‌توان انتظار داشت که بیشترین انتگرال همپوش را با آن داشته باشد. در حالت کلی، طول‌موجهای بلند ($ka \ll ۱$) نمایش صحیح یک تابع را در بلند ـ برد تضمین می‌کند، و طول‌موجهای کوتاه، به نمایش تغییرات سریع تابع می‌پردازند. با این تذکر که

$$\lim_{k \to \circ} \sin \frac{ka}{k} = a$$

مشاهده می‌کنیم که در مورد فعلی (شکل ۱ـ۳)، در گسترهٔ

$$\frac{\pi}{a} \tilde{>} |k| > \circ$$

بیشترین سهم را در تبدیل فوریه به‌دست می‌آوریم.

برای مقادیر بزرگ $|k|$، $A(k)$ به آرامی به صفر میل می‌کند. طول‌موجهای خیلی کوتاه برای ایجاد لبه‌های کاملاً تیز در $x = \pm a$ ضروری هستند (همان‌طور که در مثال بعد ثابت خواهیم کرد).

بالاخره، متوجه می‌شویم که $\Delta k \approx ۱/a$ گستره‌ای از k است که در آن مهمترین مؤلفه‌های فوریه را به‌دست می‌آوریم، و $\Delta x \approx a$ گسترهٔ تابع اولیه است، بنابراین

$$\boxed{\Delta x \Delta k \approx ۱}$$

این مهمترین نتیجه‌ای است که می‌توان آن را به هر تابع و تبدیل فوریه‌اش تعمیم داد. گسترش زیاد در فضای معمولی به گستردگی کم در «فضای k» می‌انجامد و برعکس. بعداً، این نتیجه را به‌صورت دقیق‌تر در مورد تابع گاؤسی ثابت خواهیم کرد.

مثال ۱ـ۲

با استفاده از رایانه نشان دهید که نمایش کسینوسی فوریه با $\sqrt{۲/\pi}(\sin k)/k$، یک موج مربعی می‌دهد که از $x = -۱$ تا $x = +۱$ با ارتفاع واحد گسترش یافته است. سهم طول‌موجهای کوتاه را به صراحت نشان دهید.

حل: با توجه به مثال ۱ـ۱

$$F(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{۰}^{\infty} A(k) \cos kx dk$$

$$= \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\infty} \frac{\sin k}{k} \cos kx dk \cong I_۱ + I_۲$$

که در اینجا $I_۱$ را سهم اصلی حاصل از انتگرال‌گیری تا $k = ۳\pi/۴$ و $I_۲$ را سهم طول‌موجهای کم با عدد موج بزرگ، مثلاً ۳۲π گرفته‌ایم. داریم

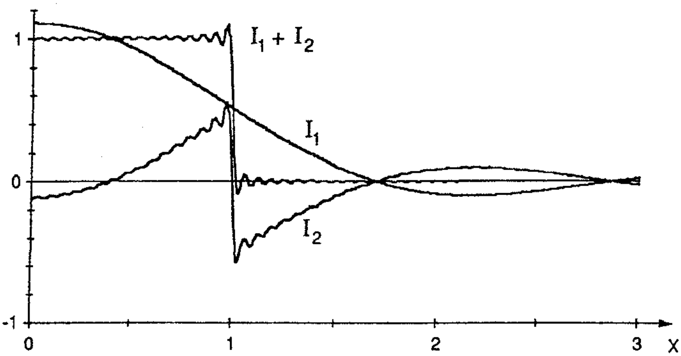
$$I_۱ \equiv \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{۳\pi/۴} \frac{\sin k}{k} \cos kx dk$$

$$I_۲ = \frac{۲}{\pi} \int_{۳\pi/۴}^{۳۲\pi} \frac{\sin k}{k} \cos kx dk$$

به صورت عددی δk را برابر ۰٫۰۵ می‌گیریم و توجه می‌کنیم که $۴۷٫۱۲۴ = ۰٫۰۵/(۳\pi/۴)$.
سپس $I_۱$ و $I_۲$ را در نقاط $x = ۰٫۰۱m$، $m = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۳۰۰$ ارزیابی می‌کنیم، حد n به‌صورت زیر در مجموعیابی تعریف شده است:

$$I_۱ = \frac{۲ \times ۰٫۰۵}{\pi} \left[\frac{۱}{۲} + \sum_{n=۱}^{۴۷} \frac{\sin(۰٫۰۵n)}{۰٫۰۵n} \cos(۰٫۰۵nx)\right]$$

$$I_۲ = \frac{۲ \times ۰٫۰۵}{\pi} \left[\sum_{n=۴۸}^{۲۰۱۰} \frac{\sin(۰٫۰۵n)}{۰٫۰۵n} \cos(۰٫۰۵nx)\right] \blacksquare$$



شکل ۱ـ۴ ترکیب فوریه‌ای تابع موج مربعی به‌ازای $x > ۰$. سهم اصلی، $I_۱$، ناشی ازگسترهٔ $۰ < k < ۳\pi/۴$ است. $I_۲$ سهم طول‌موجهای کوچک در گسترهٔ $۳\pi/۴ < k < ۳۲\pi$ و $(I_۱ + I_۲)$ نیز نشان داده شده‌اند. نوسانهای سریع ناشی از پدیدهٔ گیبس است، مثال ۱ـ۲.

شکل ۱ـ۴، $I_۱$، $I_۲$ و $(I_۱ + I_۲)$ را برحسب x به‌ازای $x > ۰$، نشان می‌دهد. متوجه می‌شویم که $I_۱$ به‌راستی نمایش موج مربعی هموار شده است. قسمت تیز موج مربعی ناشی از سهم $I_۲$ است.

افت ناگهانی $F(x)$ در $x = ۱$ سبب نوسانهای سریع در نمایش فوریه در این نقطه می‌شود. طول‌موج مشخصهٔ این نوسانها، λ، در حدود $۲\pi/k_۰$ است که $k_۰$ بزرگترین k (عدد موج قطع) در محاسبات عددی ماست. اگر می‌توانستیم $k_۰$ را تا بینهایت افزایش دهیم، این نوسانها کاملاً ازبین نمی‌رفتند، بلکه به نوسانهایی با پهنای صفر و دامنه‌ای کوچک در مقادیر تابع، $F = ۱$ و $F = ۰$، در $x = ۱$ (و در $x = -۱$) تبدیل می‌شدند. این نوسانها هرگاه که تابع مورد نظر دارای شیب بینهایت باشد رخ می‌دهد و به پدیدهٔ گیبس معروف است.

چند نکته را دربارهٔ این پدیده خاطرنشان می‌کنیم. چون این نوسانها دارای ارتفاعی متناهی و پهنای صفر هستند، در صورتی‌که تابع مورد نظر به صورت ضریب در انتگرال نشان داده شود، اثری بر انتگرال نخواهد داشت.

دوم اینکه، اگر $F(x)$ را به عنوان تابعی تعمیم‌یافته در نظر بگیریم، از این پدیده اجتناب خواهد شد، یعنی $F(x)$ را «برابر» با دنبالهٔ $f_n(x)$ بگیریم، که ناپیوستگیهای $f_n(x)$ در $x = \pm ۱$ را برروی گستره‌ای به پهنای $۱/n$ «پخش کند». تنها شرط باقی‌مانده این است که در نمایش فوریهٔ f_n، عدد موج قطع $k_۰$ در رابطهٔ $k_۰ \gg n$ صدق کند.

بالاخره، صورت تحلیلی $A(k)$ که در مثال ۱ـ۱ به‌دست آمد، به همان نتیجهٔ نهایی انتگرالهای آزمون که تبدیل تعمیم‌یافتهٔ (۱ـ۲۷ب) را تعریف می‌کند، می‌انجامد که روش یافتن $a_n(k)$ در حد $n \to \infty$ است. بدین‌ترتیب، تبدیل فوریهٔ «تابعی معمولی که بتوان

آن را تابعی تعمیم‌یافته تلقی کرد»، با وجود اینکه خود تابعی مناسب نیست، اما غالباً می‌توان آن را مستقیماً با استفاده از (۱ـ۳۳) به‌دست آورد (زیرنویس بخش قبل)، اگر چه در این مورد مشکلاتی مختصر به‌وجود می‌آید. نتایج مستقیم مانند صورت تحلیلی $A(k)$ در اینجا، یا نتایجی که در مسائل ۱ـ۱۱ تا ۱ـ۱۳ج آمده‌اند، معمولاً در محاسبات فیزیکی به‌کار گرفته می‌شوند. اما اگر برای مثال، مشتقهای توابع ناپیوسته (چند جمله‌ایهای توابع تبدیل) در میان باشد، مسلماً به تمام نظریهٔ توابع تعمیم‌یافته نیاز خواهیم داشت.

مثال ۱ـ۳

تابع دلتا دارای ویژگی راست هنجاری، مشابه با رابطهٔ (۱ـ۳۲ب) برای توابع $u_k(x)$ است، یعنی

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\delta(x-b)dx = \delta(a-b)$$

با استفاده از نظریهٔ توابع تعمیم‌یافته اثبات صوری این نتیجه شهودی را فراهم آورید. (در بستر مکانیک کوانتومی (فصل ۶)، این ویژگی به‌جای (۱۹ـ۱ب) متضمن «بهنجارش» تابع دلتاست.)

حل: روابط (۱ـ۲۱) و (۱ـ۳۲ب) نشان می‌دهند که برای طرف چپ رابطهٔ بالا باید حد $l \to \infty$، $m \to \infty$ و $n \to \infty$ را برای I_{lmn} در نظر بگیریم که

$$I_{lmn} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^۲}{۴l}} g_m(x-a) g_n(x-b)dx$$

با نمایش فوریهٔ $g_m(x-a)$ و $g_n(x-b)$ به‌شکل (۱ـ۲۶ب) و با عوض کردن ترتیب انتگرال‌گیری، داریم

$$\begin{aligned}(۲\pi)^۲ I_{lmn} &= \\ &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{x^۲}{۴l}} e^{ik_۱(x-a)} e^{ik_۲(x-b)}\right] dx e^{-\frac{k_۱^۲}{۴m}} e^{-\frac{k_۲^۲}{۴n}} dk_۱ dk_۲ \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ۲\pi g_l(k_۱+k_۲) e^{-ik_۱ a} e^{-ik_۲ b} e^{-\frac{k_۱^۲}{۴m}} e^{-\frac{k_۲^۲}{۴n}} dk_۱ dk_۲\end{aligned}$$

در حد $l \to \infty$ (در حد $l \to \infty$، $I_{lmn} \equiv I_{mn}$)، با استفاده از (۱ـ۲۳) داریم

$$۲\pi I_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_۲(a-b)} e^{-\frac{k_۲^۲(n+m)}{۴nm}} dk_۲$$

و یا $\delta(a-b)$ است. چه ابتدا n بزرگ شود و سپس m، یا هر دو با هم بزرگ می‌شوند. $I_{mn} = g_{nm/n+m}(a-b)$، که در واقع دنباله‌ای برای $\delta(a-b)$ است. ■

مثال ۱ـ۴

در فصل ۶، در ارتباط با اصل دوم مکانیک کوانتومی، گفته می‌شود که جواب معادلهٔ

$$xu_\xi(x) = \xi u_\xi(x) \qquad (۶ـ۲۰)$$

عبارت است از

$$u_\xi(x) = \delta(x-\xi) \qquad (۶ـ۲۱)$$

یعنی مرکز تابع دلتای دیراک در ξ است. این گزاره را برحسب نظریهٔ توابع تعمیم‌یافته فرمولبندی و دلیل آن را بیان کنید.

حل: با درک این نکته که $u_\xi(x)$ و $xu_\xi(x)$ توابع تعمیم‌یافته‌ای هستند، رابطهٔ (۶ـ۲۰) به این معنی است که

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)xu_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\xi u_\xi(x)dx \qquad (۶ـ۲۰ \text{ الف})$$

که در آن $F(x)$ هر تابع مناسبی است. همین‌طور (۶ـ۲۱) به این معنی است که

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)u_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\xi)F(x)dx \qquad (۶ـ۲۱ \text{ الف})$$

که در این رابطه هم توابع مناسب به همراه $F(x)$ که خود تابعی است در انتگرالها ظاهر می‌شود.

به‌عنوان برهان (۶ـ۲۰الف)، با قرار دادن $xF(x)$ به‌جای $F(x)$ در (۶ـ۲۱الف) بازهم تابع مناسبی داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xF(x)u_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xF(x)\delta(x-\xi)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xF(x)g_n(x-\xi)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi F(x)g_n(x-\xi)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\xi u_\xi(x)dx$$

که در خط دوم و سوم در حالت حدی داریم $\xi F(\xi)$ و تساوی آخر از (۶ـ۲۱الف) نتیجه می‌شود. ■

مثال ۱ـ۵

نشان دهید که تبدیل فوریهٔ $xf(x)$، اگر تبدیل فوریهٔ $f(x)$ را با $a(k)$ نشان دهیم، برابر است با $\mathrm{i}a'(k)$، و بدین‌ترتیب نشان دهید که تبدیل فوریهٔ x برابر است با $\sqrt{2\pi}\mathrm{i}\delta'(k)$، و این دو به‌ترتیب توابعی تعمیم‌یافته از x و k به‌شمار می‌آیند. علامت پریم مشخص‌کنندهٔ مشتق نسبت به متغیر مربوطه است.

حل: به یاد داریم که تبدیل فوریه دنبالهٔ معمولی $f_n(x)$، یعنی $a_n(k)$، تبدیل فوریهٔ $f(x)$، یعنی $a(k)$ را تعریف می‌کند. با مشتق‌گیری از دوطرف (۱ـ۳۴) نسبت به k داریم،

$$a'_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -\mathrm{i}xf_n(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}dx$$

با وارون کردن رابطهٔ بالا، خواهیم داشت

$$-\mathrm{i}xf_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a'_n(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}dk$$

که نشان می‌دهد تبدیل فوریهٔ $xf_n(x)$ در حد $n \to \infty$ برابر با $ia'(k)$ است. به‌علاوه، اگر $f_n(x)$ را برابر $\mathrm{e}^{-x^2/4n}$ اختیار کنیم، که یکی از دنباله‌های هم‌ارز با واحد است، بر طبق (۱ـ۱۸) خواهیم داشت:

$$a_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/4n}\mathrm{e}^{-ikx}dx = \sqrt{2n}\mathrm{e}^{-nk^2}$$

به عبارت دیگر، $a_n(k)$ دنبالهٔ مربوط به $\sqrt{2\pi}\delta(k)$ و $a'_n(k)$ دنبالهٔ مربوط به $\sqrt{2\pi}\delta'(k)$ است. بدین‌ترتیب، از قسمت اول مثال چنین نتیجه می‌گیریم که تبدیل فوریهٔ x برابر با $\mathrm{i}\sqrt{2\pi}\delta'(k)$

است. (فرمولبندی نظریهٔ توابع تعمیم‌یافته برحسب توابع مناسب این قابلیت را دارد که این نتایج را برای هر توان دلخواه x و هر مشتق مرتبهٔ بالاتر تابع δ تعمیم دهد.) ■

مسائل

۱ـ۱ فرمولی کلی برای انتگرال‌گیری زیر بیابید

$$\frac{۱}{(۲n)!}\int_{-\infty}^{\infty} x^{۲n}\mathrm{e}^{-ax^۲}\,dx$$

۱ـ۲ تابعی را تقریباً مناسب می‌خوانیم که همه‌جا و تا هر مرتبه مشتق‌پذیر باشد، چنانکه تابع و مشتق‌هایش در حد $x \to \infty$ به‌ازای یک N با تقریب $|x|^N$ سازگار باشند. نشان دهید که حاصلضرب تابع مناسب و تابع تقریباً مناسب، تابعی مناسب است.

۱ـ۳ $۱/(a+\mathrm{i}b)$ را به‌صورت جمع عددی حقیقی و عددی موهومی بنویسید.

۱ـ۴ الف) $z_۱ = A_۱\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_۱}$ را در $z_۲ = A_۲\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_۲}$ ضرب کنید ($A_۱$، $A_۲$، $\theta_۱$، $\theta_۲$ حقیقی هستند). عمل ضرب را برروی صفحهٔ مختلط نشان دهید.

ب) حالت خاص $A_۱ = A_۲$، $\theta_۱ = -\theta_۲$ را در نظر بگیرید. دربارهٔ ارتباط بین $z_۱$ و $z_۲$ چه می‌توانید بگویید؟

۱ـ۵ الف) قضیه دو مواور را ثابت کنید:

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$$

ب) فرمولهایی را برای $\cos = ۳\theta$ و $\sin ۳\theta$ بیابید.

۱ـ۶ الف) نشان دهید که اگر مشتق $f'(x)$ تابع تعمیم‌یافتهٔ $f(x)$ با دنبالهٔ $f'_n(x)$ تعریف شود که خود $f(x)$ با $f_n(x)$ تعریف می‌شود، آنگاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)F(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)F'(x)dx$$

ب) $\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{e}^{-x^۲/n}\delta'(x)dx$ را بیابید.

ج) $g'_n(x)$ را به‌ازای nهای بزرگ رسم کنید. نقش آن به عنوان بخشی از انتگرالده چیست؟

۱ـ۷ در نمایش دنبالهٔ g_n برای تابع δ، (۱ـ۲۶الف)، کمیتهای مختلطی در طرف راست ظاهر شده‌اند، در حالی که طرف چپ حقیقی است آیا می‌توانید این پارادوکس را حل کنید.

۱ـ۸ یک سیگنال رادیویی ورودی FM دارای دامنهٔ $E(t)$ است، t زمان را نشان می‌دهد. $E(t)$ را به‌صورت برهم‌نهی تمام بسامدهای زاویه‌ای ω بنویسید. به نظر شما قدرمطلق ضرایب فوریه، $|A(f = \omega/2\pi)|$ چه شکلی دارد؟ نمودار تقریبی آن را برحسب f رسم کنید. برروی محور بسامد، عدد بگذارید.

راهنمایی: به صفحهٔ رادیوی FM خود نگاه کنید و به یاد آورید که نوارهای کناری هر کانال تقریباً تا حدود ۷۵ kHz± گسترش یافته است.

۱ـ۹ در متن کتاب دربارهٔ نمایش فوریه، (۱ـ۲۴) چنین آمده است، «برای راحتی از شکل e^{ikx} به جای تجزیهٔ آن به سینوس و کسینوس استفاده کنیم. اگر ضرایب $A(k)$ را نیز مختلط در نظر بگیریم، دیگر کلی‌ترین حالت را در نظر گرفته‌ایم، زیرا $A(k)$ حاوی فاز نیز خواهد بود. $F(x)$ ممکن است حقیقی یا مختلط باشد.»

الف) رابطه‌ای کلی بین $A(k)$ و $A(-k)$ بیابید به‌طوری که $F(x)$ حقیقی باشد.

ب) $A(k)$ را به‌صورت $A(k) = |A_k|e^{i\theta_k}$ بنویسید، که در آن $|A_k|$ دامنه و θ_k فاز است. نمایش فوریهٔ $F(x)$ را برحسب این کمیتها بیابید، فرض کنید $F(x)$ حقیقی است. حال، نمایش فوریه را به سینوس و کسینوس تبدیل کنید و نشان دهید که در واقع، بدون از دست رفتن کلیت به اندازهٔ کافی پارامتر به‌دست می‌آید. (توابع $\sin kx$ و $\cos kx$ به‌ازای $0 < k < \infty$ یک پایهٔ کامل را تشکیل می‌دهند، و به‌ازای هر تابع هماهنگ و مقدار k، یک پارامتر لازم است. شاید گسسته‌سازی گستره‌ای از k به بازه‌های کوچک و محدود سودمند باشد.)

ج) نشان دهید وقتی که $F(x)$ مختلط است. بازهم به اندازهٔ کافی پارامتر برای حفظ کلّیت در اختیار داریم.

۱ـ۱۰ الف) نشان دهید که هر تابع را می‌توان به‌صورت مجموع یک تابع زوج $f_e(x)$ و یک تابع فرد $f_o(x)$ نوشت.

ب) نشان دهید که نمایش فوریه، (۱ـ۲۴) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty C(k)\cos kx\,dk + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty S(k)\sin kx\,dk$$

$C(k)$ و $S(k)$ را برحسب $A(k)$ بیابید

ج) بسط فوریهٔ $f_e(x)$ و $f_o(x)$ در قسمت (الف) را برحسب $A(k)$، $A(-k)$ و همچنین برحسب $C(k)$ و $S(k)$ بیابید.

د) انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos k'x \cos kx \mathrm{e}^{-x^۲/۴n} dx$$

و سپس فرمول ساده‌ای برای $C(k)$ برحسب $f_{\mathrm{e}}(x)$ به‌دست آورید.

ه) انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin k'x \cos kx \mathrm{e}^{-x^۲/۴n} dx$$

۱ـ۱۱ الف) $A(k)$، تبدیل فوریهٔ تابع زیر را بیابید

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathrm{e}^{-ax} \qquad x \geq ۰ \\ &= ۰ \qquad\qquad x < ۰ \end{aligned}$$

ب) $F(x)$ را به‌صورت انتگرالی روی سینوسها و کسینوسها نمایش دهید.

۱ـ۱۲ الف) با استفاده از جداول تبدیلهای فوریه تبدیل فوریهٔ $\sin nx/\pi x$ را پیدا کنید.

ب) با مراجعه به مثال ۱ـ۱ راهی برای تأیید یافته‌های خود بیابید

ج) نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{\pi x} = \delta(x)$$

و دربارهٔ آن بحث کنید.

د) دو دنبالهٔ هم‌ارز برای $\delta(x)$ پیشنهاد کنید.

۱ـ۱۳ الف) با استفاده از روشهای مسئلهٔ ۱ـ۱۲، یعنی با در نظرگرفتن دنباله‌های تبدیل فوریه، نشان دهید که دنبالهٔ

$$f_n(x) \equiv \frac{۱}{n\pi}[x^۲ + n^{-۲}]^{-۱}$$

با $\delta(x)$ برابر است.

ب) نشان دهید که

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{x + \frac{\mathrm{i}}{n}} dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \frac{x}{x^۲ + n^{-۲}} dx - \mathrm{i}\pi \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\delta(x) dx \end{aligned}$$

ج) اگر

$$P\int\limits_{n-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{x}dx \equiv \lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{-\frac{1}{n}} \frac{F(x)}{x}dx + \int\limits_{+\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{F(x)}{x}dx$$

نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\frac{x}{x^{2}+n^{-2}}dx = P\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{F(x)}{x}\right]dx$$

د) نشان دهید که تبدیل فوریهٔ دنبالهٔ توابع مناسب

$$f_n(x) = \frac{1}{n\pi}e^{-\frac{x^{2}}{n^{2}}}[x^{2}+n^{-2}]^{-1}$$

با رابطهٔ زیر داده می‌شود،

$$a_n(k) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[e^{-\frac{k}{n}}Erfc\left(n^{-2}-\frac{nk}{2}\right)+e^{\frac{k}{n}}Erfc\left(n^{-2}+\frac{nk}{2}\right)\right]e^{n^{-4}}$$

که در آن $-\infty < y < \infty$ $Erfc(y) = 2/\sqrt{\pi}\int\limits_{y}^{\infty}e^{-x^{2}}dx$ چرا در (۱ـ۱۳الف) می‌گوییم «نشان دهید»؟

۱ـ۱۴ (قضیهٔ پارسوال برای توابع مناسب). نشان دهید که اگر $F_1(x)$ و $F_2(x)$ توابع مناسب و $A_1(k)$ و $A_2(k)$ تبدیل فوریهٔ آنها باشد. آنگاه

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} A_1(k)A_2(k)dk = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(-x)F_2(x)dx$$

۱ـ۱۵ الف) نشان دهید که

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)H(y-x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(k)B(k)e^{iky}dk$$

که در اینجا، $A(k)$ و $B(k)$، به‌ترتیب تبدیل فوریهٔ $F(x)$ و $H(x)$ هستند. این نتیجه به «قضیهٔ فالتونگ» موسوم است.

ب) معادلهٔ انتگرالی زیر را که در آن $F(x)$ تابع مجهول و $C(x)$ و $H(x)$ معلوم هستند، حل کنید.

$$G(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)H(y-x)dx$$

۱ـ۱۶ تابع همبستگی برای یک فرایند کاتوره‌ای با یک متغیر کاتوره‌ای x با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$C(\tau) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)\mathrm{e}^{-\frac{t^۲}{۴n}} dt$$

با نمایش $x(t)$ به‌صورت انتگرال فوریه

$$x(t) = \sqrt{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(f)\mathrm{e}^{۲\pi \mathrm{i} f t} df$$

نشان دهید که به‌ازای $x(t)$ حقیقی،

$$C(\tau) = ۲\sqrt{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |A(f)|^۲ \cos(۲\pi f\tau) df$$

۱ـ۱۷ الف)[1] نشان دهید که معادلهٔ پخش

$$\partial\varrho \frac{(t,x)}{\delta t} = D\partial^۲ \varrho \frac{(t,x)}{\delta x^۲}$$

دارای جوابهایی به‌صورت زیر (که در حد $x \to \pm\infty$ محدود باقی می‌مانند) است

$$\varrho_k = \mathrm{e}^{(\mathrm{i}kx - k^۲ Dt)}$$

ب) در حالت کلی

$$\varrho = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\mathrm{e}^{(\mathrm{i}kx - k^۲ Dt)} dk$$

اگر در $t = ۰$ داشته باشیم

$$\varrho(۰, x) = \delta(x - x_۰)$$

$A(k)$ را پیدا کنید.

ج) نشان دهید که برای شرط اولیه داده شده در (ب)، نتیجهٔ حاصل به عبارت زیر می‌انجامد

$$\varrho = (x,t) = \frac{۱}{\sqrt{۴\pi Dt}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_۰)^۲}{۴Dt}}$$

۱ـ۱۸ عضو $f_n(x)$ از دنبالهٔ مربوط به یک تابع معمولی مورد نظر $f_{\mathrm{or}}(x)$، (۱ـ۲۲)، را می‌توان به‌صورت زیر ساخت

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{or}}(t) S\{n(t-x)\} n\mathrm{e}^{-\frac{t^۲}{n^۲}} dt$$

---

۱. مسئلهٔ ۱ـ۱۷ برای فصل ۶ دربارهٔ مکانیک موجی حائز اهمیت است.

که در آن تابع $S(y)$، که لایت‌هیل آن را «تابع پخش‌کننده» می‌نامد به‌صورت زیر است

$$S(y) = \mathrm{e}^{-\frac{۱}{۱-y^۲}} \left[\int_{-۱}^{۱} \mathrm{e}^{-\frac{۱}{۱-z^۲}} dz\right]^{-۱} \quad ۱ > y > -۱$$

$$S(y) = ۰ \qquad y < -۱, y > ۱$$

الف) $S(y)$ چگونه بهنجار شده است؟

ب) $f_{\mathrm{or}}(t)$ برروی چه گستره‌ای میانگین‌گیری («پخش») شده است؟

ج) منظور از ضریب $\mathrm{e}^{-t^۲/n^۲}$ چیست؟

۱ـ۱۹ کمال. توابع $\mathrm{e}^{ikx}/\sqrt{۲\pi}$، $\infty > k > -\infty$، مجموعه‌ای کامل را تشکیل می‌دهند، اگر نمایش فوریهٔ

$$\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\mathrm{e}^{ikx} dk \qquad \text{که در آن} \qquad A(k) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{e}^{-ikx} dx$$

برای هر تابع مناسب $F(x)$، به‌ازای تمام مقادیر x (این نمایش فوریه) به $F(x)$ میل کند.

برای کامل بودن، عبارت داده شده برای $A(k)$ را در نمایش فوریهٔ بالا جایگزین کنید و ثابت کنید که برای همهٔ مقادیر x، $F(x)$ به‌دست می‌آید.

۱ـ۲۰ انتگرالهای همپوش. با تعمیم (۱ـ۲۹)، دو بردار دلخواه $\boldsymbol{F}_A$ و $\boldsymbol{F}_B$ را در فضای N بعدی می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\boldsymbol{F}_A = \sum_{i=۱}^{N} A_i \boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{F}_B = \sum_{i=۱}^{N} B_i \boldsymbol{u}_i \qquad i = ۱, ۲, ۳, \ldots, N$$

که در آن $\boldsymbol{u}_i$ مانند رابطهٔ (۱۱ـ۳۰) بردارهای پایهٔ راست هنجارند. ضرب نقطه‌ای بردارها چنین است:

$$\boldsymbol{F}_A \cdot \boldsymbol{F}_B = \sum_{i=۱}^{N} A_i B_i$$

که جمع حاصلضربهای مؤلفه‌های متناظر باهم است.

اکنون می‌خواهیم این مفاهیم را به کمک فرمولبندی گسسته‌ای که حد پیوسته آن را به‌سادگی خواهیم یافت، به «فضای تابع» تعمیم دهیم. بنابراین، بازهٔ متناهی Δ را در x انتخاب می‌کنیم و برد مجازی را برای x در نظر می‌گیریم:

$$\frac{-N\Delta}{۲} < x \leq \frac{N\Delta}{۲}$$

که در آن N عدد زوج بزرگی است. ابتدا با N تابع «موج مربعی»، $h_i(x)$، شروع می‌کنیم:

$$h_i(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \qquad x_{i-1} < x \leq x_i$$
$$= 0 \qquad \frac{N\Delta}{2} \geq x > x_i, \;\; x_{i-1} > x > \frac{-N\Delta}{2}$$

که در آن $x_i = (i)\Delta$ و $i = \frac{-N}{2}+1, \frac{-N+2}{2}, \ldots \frac{+N}{2}$.

$h_i(x)$ پایه‌ای را تشکیل می‌دهد؛ درگسترهٔ داده شده، هر تابعی از x مثل $F_A(x)$ $F_B(x)$، ... را می‌توان با دقت فزاینده در حد $\Delta \to 0$ و $N \to \infty$، برحسب این پایه نمایش داد:

$$F_A(x) \cong \sum_{i=-N/2+1}^{N/2} A_i h_i(x); \;\; F_B(x) \cong \sum_{i=-N/2+1}^{N/2} B_i h_i(x)$$

به‌علاوه، توابع $h_i(x)$ مستقل از یکدیگرند (یعنی نمی‌توان آنها را به‌صورت ترکیب خطی یکدیگر نوشت). در واقع هر یک از آنها فقط در مکان مخصوص خودش وجود دارد، این توابع هیچ‌گونه همپوشی فضایی ندارند. خاصیت اخیر را می‌توان با تعریف انتگرال همپوش دو تابع، به‌صورت تحلیلی به بهترین وجه توصیف کرد. اگر این دو تابع $i \neq j$، $h_j(x)$، $h_i(x)$ باشند، انتگرال همپوش آنها صفر است. داریم:

$$I_{ij} = \int_{-N\Delta/2}^{N\Delta/2} h_i(x)h_j(x)dx = \delta_{ij}$$

که در آن انتگرال روی x، انتگرال همپوش I_{ij} هر دو تابع $h_i(x)$، $h_j(x)$ دلخواه را تعریف می‌کند و دلتای کرونکر، δ_{ij}، در طرف راست، راست هنجاری «توابع موج مربعی» تعریف شده را می‌رساند.

۱) اکنون می‌توانیم حدس بزنیم که انتگرال همپوش دو تابع دلخواه $F_A(x)$ و $F_B(x)$ به همان شکل ضرب نقطه‌ای بردارهای $\boldsymbol{F}_A$ و $\boldsymbol{F}_B$ در بالاست. با بسط $F_A(x)$ و $F_B(x)$ برحسب توابع موج مربعی $h_i(x)$ نشان دهید که

$$\int_{-N\Delta/2}^{N\Delta/2} F_A(x)F_B(x)dx = \sum_{i=-N/2+1}^{N/2} A_i B_i$$

که مجموع حاصلضرب مؤلفه‌های متناظر با هم است (این مؤلفه‌ها همان ضرایب بسط هستند).

۲) نشان دهید که

$$A_i \cong \int_{-N\Delta/2}^{N\Delta/2} F_A(x)h_i(x)dx$$

انتگرال همپوش $F_A(x)$ با عضو پایهٔ $h_i(x)$ همانند تصویر کردن یک بردار دلخواه برروی یکه است. آیا $A_i \cong \sqrt{\Delta}F_A(x_i)$؟

۳) فرض کنید می‌توانیم پایهٔ راست هنجار دیگری بیابیم، که برای آن هم تابع همپوش جدید $I_{ij} = \delta_{ij}$ باشد. پایهٔ جدید می‌تواند مثلاً از N تابع زیر تشکیل شده باشد

$$\sqrt{\frac{۲}{N\Delta}}\sin k_j x, \sqrt{\frac{۲}{N\Delta}}\cos k_j x, \qquad k_j = \frac{۲\pi j}{N\Delta}, j = ۱, ۲, ۳, \ldots, \frac{N}{۲}$$

با بسط برحسب $u_i(x)$، نشان دهید که

$$\int\limits_{-N\Delta/۲}^{+N\Delta'/۲} F_A(x)F_B(x)dx = \sum_{i=-N/۲+۱}^{N/۲} \widetilde{A}_i\widetilde{B}_i$$

که در آن $\widetilde{A}_i$ و $\widetilde{B}_i$ ضرایب بسط جدید هستند.

چون برای توابع فقط یک انتگرال همپوش (ضرب نقطه‌ای) $\int F_A(x)F_B(x)dx$، وجود دارد مجموع $\sum A_iB_i$ مستقل از انتخاب پایه است. آیا می‌توان تبدیل خطی‌ای را که توابع $u_i(x)$ را برحسب $h_i(x)$ توصیف می‌کند، چرخشی در فضای تابع بخوانیم؟ فرمولی تقریبی برای ضرایب در چنین تبدیلی به‌دست آورید. فرمولی برای ضرایب جدید بسط، $\widetilde{A}_i$، به‌دست آورید.

پیشنهاد برای تمرین آزمایشگاهی

با استفاده از رایانه عبارت زیر را محاسبه کنید

$$\frac{۱}{۲\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^۲}{۴n}}e^{ikx}dk = \frac{۱}{\pi}\int\limits_{۰}^{\infty} \cos kx e^{-\frac{k^۲}{۴n}}dk$$

و با $\sqrt{n/\pi}e^{-nx^۲}$ مقایسه کنید، و بدین‌ترتیب نشان دهید که گاؤسی بودن تبدیل فوریهٔ یک تابع گاؤسی، ادعایی معتبر است. مقادیر مختلف δk و همین‌طور $k_{\max}$ باید امتحان شوند. مثال ۱ـ۲ ممکن است مفید باشد.

برای مطالعهٔ بیشتر

M. J. Lighthill: *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions* (Cambridge University Press, 1985)

نتایج ریاضی که تنها به ذکر آنها پرداختیم، در این رسالهٔ مختصر که در سطح کارشناسی نوشته شده است، اثبات شده‌اند.

R. D. Stuart: *An Introduction to Fourier Analysis* (Science Paperback, Halsted, New York 1966).

در این رسالهٔ مختصر، رهیافت سنتی‌تری به آنالیز فوریه در سطح مقدماتی آمده است.

H. Margenau. G. M. Murphy: *The Mathematics of Physics and Chemistry.* (Van Nostrand, New York 1943)

ارائه بسیار خوبی از بسیاری مباحث بررسی شده در اینجا، که ممکن است انتخاب دیگری را برای مطالعهٔ آنها را در همین سطح فراهم کند.

A. Erdelyi (ed.): *Tables of Integral Transforms* (McGraw-Hill, New York, 1954)

اینها احتمالاً معروفترین جداول تبدیلهای انتگرالی هستند.

۲

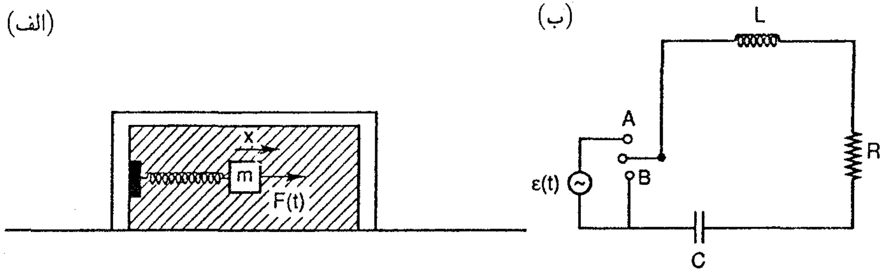
نوسانهای سیستمهای مکانیکی و الکتریکی

چکیده

معادلهٔ حرکتِ سیستم مکانیکی متشکل از جرم در انتهای فنرکه در محیط چسبنده نوسان می‌کند، با معادلهٔ مشابه آن برای سیستم الکتریکی شامل مدار RLC مقایسه می‌شود. تفاوت دینامیک طبیعی و دینامیک واداشته به‌دقت مشخص می‌شود. برای حرکت طبیعی، مسئلهٔ مقدار اولیه، برای میرایی (ناشی از چسبندگی) اندک، یا مقاومت الکتریکی ناچیز، حل خواهد شد. پدیدهٔ تشدید در ارتباط با تحلیل حرکت واداشته به‌طور کامل بررسی خواهد شد و ویژگیهای تشدید، با تأکید برضریب کیفیت Q، به مشخصات حرکت طبیعی مربوط می‌شود. یکی از بخشهای بعدی به تبیین طرز کار کلی نوسانگرها اختصاص دارد و با توصیف ساعت آونگی گسترش می‌یابد. در بخش مسائل، حرکت طبیعی را به‌ازای میرایی غیرقابل چشمپوشی بررسی خواهیم کرد، همین‌طور روش تابع گرین را برای یافتن جوابهای حرکت واداشته معرفی می‌کنیم.

۲ـ۱ سیستمها و معادله‌های آنها

شکل ۲ـ۱الف جرم m را نشان می‌دهد که به‌انتهای فنری با ثابت فنر k متصل شده است، این جرم در محیط چسبنده‌ای قرار دارد که نیروی مخالف حرکت bdx/dt را بر جرم وارد می‌کند،



شکل ۲ـ۱ (الف) سیستم مکانیکی خطی قلنبه تحت تأثیر نیروی محرک $F(t)$. جرم در محیط چسبنده غوطه‌ور است. نوسانهای طبیعی میرا وقتی $F(t) = ۰$ است رخ می‌دهند. (ب) مدار الکتریکی مشابه با سیستم (الف). با این فرض که خازن C در ابتدا باردار باشد، وقتی کلید در موقعیت B قرار گیرد، مدار، نوسانهای طبیعی میرا انجام می‌دهد. وقتی کلید در وضعیت A است، مدار، نوسانهای واداشته را تحت تأثیر ولتاژ $\varepsilon(t)$ انجام می‌دهد.

dx/dt سرعت جرمی است که به اندازهٔ x از وضعیت تعادل یا سکون خود جابه‌جا شده باشد. به‌علاوه، اگر نیروی خارجی وابسته به زمان $F(t)$ به‌جرم وارد شود، نیروی کلی برروی جرم چنین خواهد بود

$$F(t) - b\frac{dx}{dt} - kx$$

از قانون دوم نیوتون $F = ma$، داریم

$$F(t) = m\frac{d^۲x}{dt^۲} + b\frac{dx}{dt} + kx \qquad (۱\text{ـ}۲)$$

شکل ۲ـ۱ـب سیستم الکتریکی با القاگر L، مقاومت R و خازن C را نشان می‌دهد که به‌صورت سری به یکدیگر متصل شده‌اند. اگر emf خارجی وابسته به زمان $\varepsilon(t)$ به سیستم اعمال شود، با توجه به این که انرژی بار با یک دفعه حرکت در مدار تغییر نمی‌کند، یعنی وقتی مجموع ولتاژهای حول مدار را مساوی صفر قرار دهیم، داریم

$$\varepsilon(t) = L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} \qquad (۲\text{ـ}۲)$$

و چون جریان، I، با dq/dt داده می‌شود که در آن q بار الکتریکی خازن است، داریم

$$\varepsilon(t) = L\frac{d^۲q}{dt^۲} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \qquad (۳\text{ـ}۲)$$

رابطه‌های (۲ـ۱) و (۲ـ۳) یکسان هستند. اگر از تناظر کمیتهای زیر استفاده کنیم،

$F(t)$ با $\varepsilon(t)$ (۲ـ۴ الف)

x با q (۲ـ۴ب)

m با L (۲ـ۴ج)

b با R (۲ـ۴د)

k با $\frac{1}{C}$ (۲ـ۴هـ)

این بدان‌معنی است که اگر جواب مناسبی برای معادلهٔ (۲ـ۱) داشته باشیم، این جواب برای معادله (۲ـ۳) نیز جوابی مناسب است و برعکس. به همین دلیل از مدار شکل (۲ـ۱ب) به‌عنوان مشابه الکتریکی سیستم شکل (۲ـ۱الف) یاد می‌کنیم و به‌همین صورت، سیستم شکل (۲ـ۱الف) مشابه مکانیکیِ مدار شکل (۲ـ۱ب) است.

به‌طور کلی، کمیتهای مکانیکی و الکتریکی که در (۲ـ۴) آمده‌اند، از نظر فیزیکی کاملاً متفاوت‌اند. ابتدا معلوماتمان دربارهٔ آنها را مرور می‌کنیم. تمام مواد جرم دارند و در فیزیک کلاسیک تمام اشیاء مادی از قوانین نیوتون پیروی می‌کنند. ویژگی القاییدگی الکتریکی L، ناشی از قانون آمپر است که بنابه آن جریانهای الکتریکی میدانهای مغناطیسی به‌وجود می‌آورند، و قانون فاراده که طبق آن میدانهای مغناطیسی متغیر ولتاژ القا می‌کنند. جهت این ولتاژها، بنابه قانون لنز، به‌گونه‌ای است که با تغییرات شارمغناطیسی مخالفت می‌کند. نتیجهٔ نهایی، پیدایش ولتاژ مخالف LdI/dt است، که در آن، القاییدگی L، معیاری از جفت‌شدگی بین شارمغناطیسی و جریان مدار است.

اما در مورد ضریب b، شاید عادی‌ترین عامل کشش چسبندگی، مقاومت هوا باشد (اتومبیلی که با سرعت زیاد در حرکت است، مقدار زیادی از انرژی خود را صرف گرم کردن جوّ اطراف خود می‌کند). منشأ مقاومت الکتریکی R نیز اصطکاکی است. در این مورد، مهمترین مانع جریان بارهای الکتریکی، یعنی الکترونها، ارتعاشهای نامنظم گرمایی اتمهایی است که رسانا را تشکیل می‌دهند، در نتیجه نیرویی روبه عقب متناسب با میانگین سرعتِ روبه جلوی الکترونها به‌وجود می‌آید.

نیروی $-kx$، که x در آن جابه‌جایی از تعادل را نشان می‌دهد، قانون معروف هوک برای فنر است. فنر چیزی نیست که فقط در تشک یا آزمایشگاه یافت شود. هر سیستم مکانیکی، تا زمانی که تغییر شکل آن از حد کشسانی‌اش فراتر نرود، رفتاری فنرمانند دارد. حتی حرکت عمودی مرکز ساختار پیچیده‌ای مانند یک پل معلق که به‌خاطر تنش حاصل از حرکت یک کامیون برروی آن به‌وجود

می‌آید، را می‌توان با سیستم فنری نشان داد. ظرفیت خازن C طبق تعریف، نسبت بارالکتریکی خازن، q، به ولتاژ لازم برای نگه‌داشتن آن بار برروی خازن است. به یاد داریم که انباشته شدن بارالکتریکی میدانهای الکتریکی تولید می‌کند و این میدانها انباشتن بیشتر بارالکتریکی را دشوار می‌سازند. خازن بزرگ، خازنی است که در آن بارالکتریکی زیاد میدانهای کوچکی به‌وجود می‌آورد، چنانکه حتی آخرین بارالکتریکی را می‌توان با صرف انرژی اندکی برروی خازن قرار داد. همان‌طور که هر سیستم مکانیکی دارای نوعی خاصیت فنری است، هر سیستم الکتریکی نیز دارای نوعی ظرفیت است. نه تنها بین صفحات فلزی خازن هوایی کوچکی که موج رادیوها را تنظیم می‌کند ظرفیتی وجود دارد، بلکه، مثلاً، بین سیم انتقال نیروی فشار قوی و زمین هم ظرفیتی موجود است.

در واقع، معادله (۲ـ۱) تا زمانی که بتوان سیستمی را قلنبه تلقی کرد، هر سیستم مکانیکی خطی را توصیف می‌کند. همین‌طور، (۲ـ۳) نیز هر سیستم الکتریکی خطی قلنبه را تعریف می‌کند. واژهٔ «قلنبه» بدان‌معنی است که بستگی زمانی تنها یک پارامتر حاوی تمام اطلاعاتی است که می‌خواهیم. برای مثال، حرکت یک پل معلق به‌طور کلی شامل حرکت نسبی قسمت‌های مختلف آن است و نه فقط حرکت مرکز آن. در نظر گرفتن جزئیات حرکت پل، آن را سیستمی توزیع شده می‌سازد. در مورد خط انتقال نیروی الکتریکی، اگر این خط طویل باشد، هرگز نمی‌توانیم آن را به‌طور رضایتبخشی قلنبه در نظر بگیریم، زیرا به‌خاطر توزیع ظرفیت بین رساناهای ورودی و خروجی، بارالکتریکی q، با حرکت در امتداد خط، در هر لحظه از زمان مقدار متفاوتی اختیار می‌کند. در فصلهای آینده، خواهیم دید که چگونه بررسی سیستمهای توزیع شده بر مبنای سیستمهای قلنبه، که در این فصل به آن می‌پردازیم، قرار دارد.

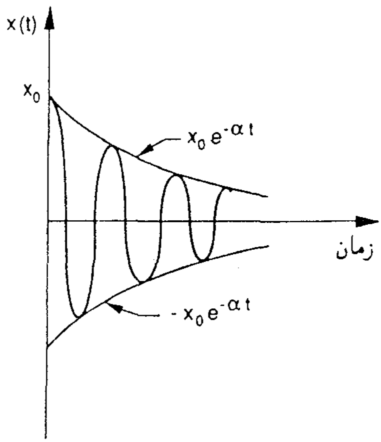
معادلهٔ (۲ـ۱)، یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی است. توجه کنید که جابه‌جایی و مشتقهای مختلف آن، همه به توان یک رسیده‌اند. اگر از حد کشسانی فنر فراتر می‌رفتیم، قانون سادهٔ هوک اعتبار خود را از دست می‌داد و معادلهٔ دیفرانسیل حاکم دیگر خطی نیست. اگر در سیستم الکتریکی جریان آن‌قدر بزرگ می‌شد که گرم شدن رسانا سبب تغییر مقاومت الکتریکی می‌شد، یعنی اگر R تابع dq/dt بود، (۲ـ۳) دیگر خطی نمی‌شد. معادله‌های دیفرانسیل خطی یک ویژگی فوق‌العاده ارزشمند دارند و آن این است که، اگر جواب بخصوصی برای معادله، به‌ازای نیروی محرک معین، به‌دست آورده باشیم و سپس به‌ازای یک نیروی محرک جدید، جواب دوّمی به‌دست آوریم و همین‌طور یک جواب سوم، مجموع دو جواب و یا مجموع همهٔ جوابها هم خود جواب معادله است، به شرطی که نیروی محرک، مجموع نیروهای محرک متناظر با هر یک از جوابها باشد. این بدان‌معنی است که، وقتی با مشکل حل (۲ـ۱) برای نیروی محرک پیچیدهٔ $F(t)$ مواجه هستیم (نیروهای محرک، در عمل ممکن است پیچیده باشند)، می‌توانیم به نمایش فوریه که در فصل اول

دیدیم، متوسل شویم. و $F(t)$ را به‌صورت جمع مؤلفه‌هایش بنویسیم، که هر مؤلفه فقط یک حرکت هماهنگ ساده در زمان داشته باشد، سپس مسئله را برای هر یک از این مؤلفه‌های نیروی محرک حل کنیم و سرانجام، تمام جوابها را با هم جمع کنیم. برای روشن شدن مطلب به بخش مسائل رجوع کنید.

مشخصهٔ دیگر (۲ـ۱، ۳) که باید بفهمیم، بارز و از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است. این مشخصه آن است که طرف چپ صفر است یا صفر نیست؛ به عبارت دیگر، نیروی محرک $F(t)$ به سیستم مکانیکی و یا نیروی محرکه الکتریکی $\varepsilon(t)$، بر سیستم الکتریکی اثر می‌کند، یا نمی‌کند. اگر این نیروها اعمال نشوند، معادله‌های دیفرانسیل را همگن نامند. اگر $F(t)$ صفر باشد، جرم، پس از رها شدن با جابه‌جایی اوّلیه یا سرعت اولیه یا هر دو، مطابق میل سیستم حرکت خواهد کرد. این حرکت آزاد سیستم را حرکت طبیعی آن می‌نامیم. همین‌طور، با قرار دادن کلید در وضعیت B شکل (۲ـ۱ب)، می‌توانیم ولتاژ محرک $\varepsilon(t)$ را از سیستم الکتریکی حذف کنیم و در نتیجه، پاسخ طبیعی آن را به‌دست آوریم. این مسئله، با موردی که نیروی محرک $F(t)$ یا ولتاژ محرک $\varepsilon(t)$ وجود دارد، متفاوت است. مثلاً، ممکن است یک نفر به‌طور مرتب جرم شکل (۲ـ۱الف) را چکش بزند، بدیهی است که در این صورت $x(t)$ با حرکت طبیعی جرم تفاوت خواهد داشت. حل (۲ـ۱) به‌ازای $F(t)$ معین، حرکت واداشتهٔ جرم را توصیف می‌کند. به همین صورت، اگر در شکل (۲ـ۱ب) به وضعیت A بازگردیم، بستگی زمانی بارها و جریانها، پس از گذشت زمان کوتاهی، کاملاً تحت تأثیر ولتاژ الکتریکی، $\varepsilon(t)$، مولّد خواهد بود و پاسخ واداشتهٔ سیستم الکتریکی را به‌دست خواهیم آورد. سرشت خطّی معادله‌های دیفرانسیل حاکم، جواب عمومی را به‌صورت مجموع جواب واداشته و جواب طبیعی به‌دست می‌دهد، که جواب طبیعی را شرایط اولیه مشخص می‌کنند. در عمل، خواهیم دید که، جواب طبیعی میرا می‌شود و به آن جواب گذرا می‌گویند. در نتیجه، کار بعدی را به دوبخش تقسیم می‌کنیم. در قسمت اول به تحلیل حرکت طبیعی سیستمها و در قسمت دوم به پاسخهای واداشتهٔ آنها می‌پردازیم. به‌علاوه، همان‌طور که خواهیم دید، رابطه‌های مهمی بین این دو پاسخ برقرار است.

۲ـ۲ حرکت طبیعی سیستمها

به تجربه می‌دانیم که اگر جرم شکل (۲ـ۱الف) را از وضعیت تعادل آن در $x = 0$ تا نقطه $x = x_0$ جابه‌جا کنیم و سپس آن را، مثلاً، با سرعت اولیهٔ صفر رها کنیم، چه اتفاقی می‌افتد. جرم، در حالی که آن را به وضعیت تعادل می‌کشد، شتاب می‌گیرد. هنگامی که به $x = 0$ می‌رسد،



شکل ۲ـ۲ بر مبنای مشاهده، انتظار داریم جرم شکل ۲ـ۱ هنگامی که نیرویی خارجی بجز مقاومت هوا بر آن وارد نمی‌شود، با دامنه‌ای که کوچکتر و کوچکتر می‌شود نوسان کند. برای Q برابر ۲۰۰۰، باید ۶۰۰ نوسان را در شکل رسم می‌کردیم تا به زمان $1/\alpha$ برسیم.

نیرویی که فنر بر آن وارد می‌کند صفر است. اما جرم که در این نقطه دارای انرژی جنبشی قابل ملاحظه‌ای است، در واقع بیشینه انرژی جنبشی‌اش را داراست، و نیرویی بینهایت بزرگ لازم است تا آن را ناگهان متوقف کند، جرم به حرکت خود ادامه می‌دهد تا به نزدیکی $x = -x_0$ برسد. در این نقطه، انرژی جنبشی آن را فنر جذب کرده است، جرم متوقف می‌شود و حرکتش را در جهت عکس شروع می‌کند. به این خاطر می‌گوییم «نزدیک» به $x = -x_0$، زیرا می‌دانیم که مقدار کمی از انرژی براثر میرایی ناشی از چسبندگی، تلف شده است. بدین‌ترتیب، جرم حرکتی مانند شکل ۲ـ۲ خواهد داشت به این نوع حرکت نوسانهای میرا می‌گوییم.

از نظر تحلیلی، نوسانهای میرا به صورت زیر هستند

$$x(t) = (A' \sin \omega t + B' \cos \omega t) e^{-\alpha t} \qquad (۲\text{ـ}۵)$$

یعنی، شکل عادی نوسانهای با بسامد ω در اینجا در ضریب $e^{-\alpha t}$، با αی مثبت، ضرب شده‌اند. ضریب $e^{-\alpha t}$ با گذشت زمان به‌صورت هموار کاهش می‌یابد و باعث میرایی نوسانها می‌شود. ضرایب A' و B' دامنه هستند، اندازهٔ آنها تابع مکان و سرعت اولیهٔ جرم است؛ اما فعلاً آنها را کنار می‌گذاریم.

برای بررسی (۲ـ۵) و یافتن کمیتهای ω و α، $x(t)$ را در معادلهٔ حرکت (۲ـ۱) قرار می‌دهیم:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (۲\text{ـ}۶)$$

برای اینکه کار را آسان کنیم، می‌نویسیم

$$x(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{-\alpha t} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} \qquad \text{(۲ـ۷ الف)}$$

$$\Omega = w + \mathrm{i}\alpha \qquad \text{(۲ـ۷ب)}$$

در اینجا A عددی مختلط است، و نما را برحسب «بسامد مختلط» Ω نوشته‌ایم. از فصل ۱، به‌خاطر داریم که انتخاب معقول فاز عدد مختلط A، سبب می‌شود قسمت حقیقی $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ را بتوان به‌صورت هر ترکیب دلخواه سینوس و کسینوس نوشت (مسئلهٔ ۱ـ۹). همزمان با آن، $x(t)$ هنگامی که به‌صورت (۲ـ۷الف) تعریف شود، دارای قسمت موهومی نیز می‌شود. معادلهٔ خطی حرکت با ضرایب حقیقی، قسمت حقیقی و قسمت موهومی $x(t)$ را به‌طور مستقل تعیین می‌کند. اما $x(t)$ که حرکت جرم را تعیین می‌کند، چگونه می‌تواند عددی مختلط باشد؟ پاسخ آن است که، اگر چه با $x(t)$ مختلط کار می‌کنیم، اما این قسمت حقیقی x است که جواب فیزیکی معادلهٔ دیفرانسیلی مورد نظر را در بردارد. قسمت موهومی به مانند اضافه باری است که آن را سرانجام کنار می‌گذاریم. اگر چه موضوع کمی پیچیده به نظر می‌رسد، اما در واقع بسیار عملی است، زیرا، همان‌طور که خواهیم دید مشتق‌گیری از توابع نمایی کار بسیار آسانی است.

با قرار دادن (۲ـ۷الف) در (۲ـ۶) و مشتق‌گیریهای لازم داریم،

$$m(\mathrm{i}\Omega)^۲ A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + b(\mathrm{i}\Omega)A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + kA\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} = ۰$$

ضریب مشترک $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}$ به این معنی است که جوابی به شکل (۲ـ۷الف) در واقع در (۲ـ۶) صدق می‌کند. با حذف این ضریب Ω را از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آوریم

$$-m\Omega^۲ + \mathrm{i}\Omega b + k = ۰$$

این رابطه با استفاده از (۲ـ۷ب) به‌صورت زیر در می‌آید

$$-m(\omega^۲ - \alpha^۲ + ۲\omega \mathrm{i}\alpha) + \mathrm{i}b(\omega + \mathrm{i}\alpha) + k = ۰$$

با جداکردن قسمت‌های حقیقی و موهومی داریم

$$-\, m\omega^۲ + m\alpha^۲ - \alpha b + k = ۰$$

$$-\, ۲\omega\alpha m + b\omega = ۰$$

از معادلهٔ دوم داریم،

$$\alpha = \frac{b}{2m} \qquad \text{(۲ـ۸ الف)}$$

و از معادلهٔ اول،

$$-m\omega^2 + \frac{b^2}{4m} - \frac{b^2}{2m} + k = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \qquad \text{(۲ـ۸ ب)}$$

اگر ضریب میرایی ناشی از چسبندگی، b، را در (۲ـ۸ب) مساوی صفر قرار دهیم، بسامد زاویه‌ایِ نوسانگر مکانیکی سادهٔ بدون میرایی متشکل از جرم m و فنر با ثابت k را به‌دست می‌آوریم،

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(۲ـ۹)}$$

در بسیاری کاربردها، جملهٔ اصطکاکی $b/2m$ در (۲ـ۸ب) به تصحیح ناچیزی بر بسامد زاویه‌ای ω_0 می‌انجامد. بسامد زاویه‌ای ω_0 را بسامد طبیعی سیستم می‌نامند، اگر چه هنگامی که سیستم به‌طور طبیعی (یعنی بدون نیروی محرک) حرکت می‌کند، بسامد واقعی آن ω اندکی با ω_0 تفاوت دارد. سرانجام، (۲ـ۸الف) و (۲ـ۸ ب)را چنین می‌نویسیم

$$\omega_{\mathrm{f}} = (\omega_0^2 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(۲ـ۱۰)}$$

$$\alpha = \frac{b}{2m} \qquad \text{(۲ـ۸ الف)}$$

شاخص f نشان می‌دهد که نوسانها آزاد هستند.

حال، به رابطهٔ اولیهٔ (۲ـ۵) باز می‌گردیم و ضرایب تعیین نشدهٔ A' و B' را می‌یابیم. این کار را برای همین مسئله‌ای که مطرح کرده‌ایم، یعنی جرمی که در $t = 0$ به نقطهٔ $x = x_0$ جابه‌جا شده و سرعت اولیهٔ آن صفر است انجام می‌دهیم. فعلاً فرض می‌کنیم که جملهٔ مربوط به اصطکاک کوچک است. در زمان $t = 0$ با استفاده از (۲ـ۵) داریم

$$x|_{t=0} = B' \qquad \text{(۲ـ۱۱ الف)}$$

از (۲ـ۵) مشتق هم می‌گیریم تا سرعت جرم dx/dt را بیابیم:

$$\frac{dx}{dt} = \omega_{\mathrm{f}}(A' \cos \omega_{\mathrm{f}} t - B' \sin \omega_{\mathrm{f}} t)\mathrm{e}^{-\alpha t} + \text{جملهٔ کوچک} \qquad (۲ـ۱۲)$$

جمله کوچک ناشی از مشتق‌گیری $\mathrm{e}^{-\alpha t}$ است، و به واسطهٔ تناسب با α' کوچک است زیرا با جملهٔ دیگر متناسب با ω که کوچک نیست مقایسه می‌شود. با کنار گذاشتن جملهٔ کوچک، این معادله در $t = \circ$ به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\circ} = \omega_{\mathrm{f}} A' \qquad (۲ـ۱۱ب)$$

بنابراین برای حالتی که میرایی کم است، داریم

$$A' = \circ \qquad B' = x_\circ \qquad (۲ـ۱۳الف و ب)$$

$$x(t) = x_\circ \mathrm{e}^{-\alpha t} \cos \omega_{\mathrm{f}} t \qquad (۲ـ۱۳ج)$$

بدیهی است که دامنه‌های A' و B' را می‌توان به هر مقدار جابه‌جایی و سرعت جرم در $t = \circ$ برازش داد. در مسئلهٔ ۲ـ۵ مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای را دقیقاً، یعنی با α غیر صفر، حل خواهیم کرد. با وجود این، مورد میرایی ناچیز اغلب در فصلهای آینده مطرح خواهد شد. قبلاً هم توجه شما را به شکل ۲ـ۲ که $x(t)$ را نشان می‌دهد جلب کردیم. دو منحنی $\pm x_\circ \mathrm{e}^{-\alpha t}$ نقش پوش را دارند. هر وقت که کسینوس ۱+ شود، یعنی در فاصله‌های زمانی $۲\pi/\omega_{\mathrm{f}}$، $x(t)$ با منحنی بالایی مماس می‌شود. به‌همین ترتیب، در نیم دوره‌ها، هنگامی که $\cos \omega_{\mathrm{f}} t$ برابر ۱− است، $x(t)$ با منحنی پایینی مماس می‌شود. حتی اگر $\cos \omega t$ حاوی انتقال فاز هم باشد، که برای α غیر صفر چنین است، این مطلب صادق است. توجه کنید که نقطه‌های تماس در واقع بیشینه‌ها و کمینه‌های چرخه‌ها نیستند (مسئلهٔ ۲ـ۴).

حال که مسئلهٔ حرکت طبیعی سیستم مکانیکی را حل کردیم، حل مسئلهٔ مشابه برای سیستم الکتریکی را نیز در اختیار داریم. تنها باید از فهرست تناظر بین کمیتها، (۲ـ۴)، استفاده کنیم. مشاهده می‌کنیم که در مورد سیستم الکتریکی در $t = \circ$، خازن دارای بار اولیهٔ $q_\circ$ است، اما جریان اولیهٔ در مدار صفر است، $dq/dt = \circ$. تحول زمانی بار خازن، همانند (۲ـ۱۳ج) چنین است

$$q(t) = q_\circ \mathrm{e}^{-\alpha t} \cos \omega_{\mathrm{f}} t \qquad (۲ـ۱۴)$$

در اینجا، در مقایسه با (۲ـ۸) تا (۲ـ۱۰) داریم

$$\omega_{\mathrm{f}} = (\omega_{\circ}^{۲} - \alpha^{۲})^{\frac{۱}{۲}} \qquad \text{(۲ـ۱۵ الف)}$$

بسامد طبیعی سیستم، که باز هم آن را با $\omega_{\circ}$ نشان می‌دهیم، چنین است،

$$\omega_{\circ} = \sqrt{\frac{۱}{LC}}, \qquad \text{(۲ـ۱۵ب)}$$

و

$$\alpha = \frac{R}{۲L} \qquad \text{(۲ـ۱۵ج)}$$

بدین‌ترتیب، نتیجه می‌گیریم که شکل ۲ـ۲ علاوه بر $x(t)$ نمایش $q(t)$ نیز هست. بالاخره، توجه می‌کنیم که در سیستم مکانیکی، انرژی بین فنر (هنگامی که جابه‌جایی در قلهٔ مثبت یا منفی است) و انرژی جنبشی جرم (هنگامی که سرعت بیشینه است). جابه‌جا می‌شود، در سیستم الکتریکی، انرژی بین خازن، هنگامی که بار بیشینه است، و القاگر، وقتی که جریان بیشینه است، جابه‌جا می‌شود.

اگر چه دو سیستم مکانیکی و الکتریکی از جنبه‌های کیفی بسیار شبیه یکدیگرند، اما تفاوتِ کمّی قابل توجهی در تعداد چرخه‌های سیستم تا هنگام میراشدن، بین آنها وجود دارد. میرایی $\mathrm{e}^{-\alpha t}$ نشان می‌دهد که $۱/\alpha$ معیار زمانی است که حرکت نوسانی سیستم می‌تواند ادامه یابد، و معمولاً به آن ثابت زمانی گویند. چون دورهٔ هر چرخه با تقریب بسیار خوبی برابر $۲\pi/\omega_{\circ}$ است، نسبت $(۱/\alpha)/(۲\pi/\omega_{\circ})$، معیاری از تعداد چرخه‌های مجاز به‌دست می‌دهد. در مورد سیستم الکتریکی داریم

$$\text{نسبت} = \frac{\dfrac{۲L}{R}}{\dfrac{۲\pi}{\omega_{\circ}}} = \frac{\omega_{\circ} L}{\pi R} \qquad \text{(۲ـ۱۶ الف)}$$

و برای سیستم مکانیکی

$$\text{نسبت} = \frac{\dfrac{۲m}{b}}{\dfrac{۲\pi}{\omega_{\circ}}} = \frac{\omega_{\circ} m}{\pi b} \qquad \text{(۲ـ۱۶ب)}$$

معمولاً، ضریب کیفیت Q چنین تعریف می‌شود

$$Q = \frac{\omega_\circ L}{R} \quad \text{الکتریکی} \tag{۲ـ۱۷ الف}$$

$$Q = \frac{\omega_\circ m}{b} \quad \text{مکانیکی} \tag{۲ـ۱۷ ب}$$

اغلب Q برای سیستمهای الکتریکی بیشتر از سیستمهای مکانیکی است که نشان می‌دهد سیستم الکتریکی می‌تواند نوسانهای بیشتری داشته باشد. در حالی که برای سیستم مکانیکی Q در حدود ۵۰ قابل قبول است، سیستمهای الکتریکی که در بسامدهای رادیویی کار می‌کنند می‌توانند Qهای از مرتبهٔ چندین هزار داشته باشند.

۲ـ۳ حرکت واداشته

همان‌طور که گفتیم، نیروی محرک $F(t)$ که در طرف چپ (۲ـ۱) ظاهر می‌شود، معمولاً تابع ساده‌ای نیست. هدف ما در اینجا یافتن حرکت $x(t)$ متناظر با یک مؤلفهٔ فوریهٔ دلخواه آن نیرو، یعنی یک وابستگی زمانی هماهنگ ساده است. سپس اگر بخواهیم می‌توانیم پاسخ کلی سیستم را با جمع کردن هر یک از مؤلفه‌های فوریهٔ موجود در نیروی محرک به‌دست آوریم. بنابراین می‌نویسیم

$$F(t) = F_\circ \cos\omega t \tag{۲ـ۱۸ الف}$$

برای مورد مشابه الکتریکی، پاسخ مورد نظر با نیروی محرک هماهنگ کاربردی عملی دارد، زیرا بسیاری از مولدهای الکتریکی چنان طراحی می‌شوند که ولتاژهای کاملاً هماهنگ با بسامد ثابت یا قابل تنظیم ω تولید کنند،

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_\circ \cos\omega t \tag{۲ـ۱۸ ب}$$

از ترکیب (۲ـ۱۸الف) و (۲ـ۱)، می‌بینیم که مسئله‌ای که می‌خواهیم حل کنیم. به‌صورت معادلهٔ دیفرانسیل زیر است

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_\circ \cos\omega t \tag{۲ـ۱۹}$$

این معادله را هم مانند معادلهٔ بخش قبل حل می‌کنیم، یعنی اول $x(t)$ را کمیتی مختلط در نظر می‌گیریم و پس از یافتن جواب، قسمت موهومی آن را کنار می‌گذاریم چون قرار است قسمت‌های موهومی کنار گذاشته شوند، ساده‌تر است معادلهٔ (۲ـ۱۹) را به صورت زیر بنویسیم

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_\circ e^{i\omega t} \tag{۲ـ۲۰}$$

قسمت حقیقی این معادله همان معادلهٔ (۲ـ۱۹) است. همین‌طور می‌نویسیم

$$x(t) = Ae^{i\omega t} \tag{۲-۲۱}$$

که در آن A ثابتی مجهول و کمیتی مختلط است که تأخیر فازی را که در پی آن هستیم به‌دست می‌دهد. توجه کنید که فرض کردیم $x(t)$ دقیقاً همان بسامد زاویه‌ای نیروی محرک، یعنی ω، را دارد. این یک واقعیت تجربی و پیامد تعامد امواج فوریه است، که اگر سیستمی به‌طور مداوم با یک بسامد خاص به حرکت درآید، در همان بسامد پاسخ خواهد داد.

با قرار دادن (۲ـ۲۱) در (۲ـ۲۰) و مشتق‌گیریهای مربوط، داریم

$$(i\omega)^{2}mAe^{i\omega t} + i\omega bAe^{i\omega t} + kAe^{i\omega t} = F_{0}e^{i\omega t}$$

باز هم ضریب مشترک $e^{i\omega t}$ ظاهر می‌شود، که آن را حذف می‌کنیم و A را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} A &= \frac{F_{0}}{(-m\omega^{2} + i\omega b + k)} \\ &= \frac{F_{0}(-m\omega^{2} + k - i\omega b)}{[(-m\omega^{2} + k)^{2} + \omega^{2}b^{2}]} \end{aligned} \tag{۲-۲۲}$$

در معادلهٔ آخر، A چنان نوشته شده است که قسمت حقیقی و قسمت موهومی آن مشخص باشد.

این نتیجه را می‌توانیم با معرفی واکنایی مکانیکی، X ساده کنیم

$$\omega X = m\left(\omega^{2} - \frac{k}{m}\right) = m(\omega^{2} - \omega_{0}^{2}) \tag{۲ـ۲۳ الف}$$

با استفاده از (۲ـ۲۲) داریم:

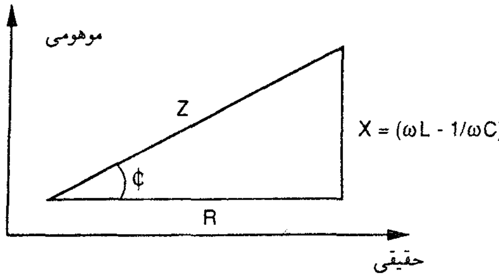
$$A = -\frac{F_{0}}{\omega}\left(\frac{X + ib}{X^{2} + b^{2}}\right) = \frac{Z^{*}F_{0}}{i\omega|Z|^{2}}$$

که در آن، Z، کمیت مختلطی است به‌نام امپدانس مکانیکی و طبق رابطه زیر تعریف می‌شود

$$Z = b + iX \tag{۲ـ۲۳ب}$$

مثلثی که در صفحهٔ مختلط شکل ۲ـ۳ وجود دارد، زاویهٔ فاز ϕ را که مثبت است، مشخص می‌کند. بنابراین می‌نویسیم

$$Z = |Z|e^{i\phi}$$



شکل ۲ـ۳ زاویهٔ فاز مثبت ϕ.

و

$$A = \frac{-\mathrm{i}F_{\circ}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}}{\omega|Z|}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{Re}\{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{\frac{F_{\circ}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\phi+\omega t-\frac{\pi}{2})}}{\omega|Z|}\right\} \end{aligned}$$

زیرا $-\mathrm{i}$ را به‌صورت $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$ نیز می‌توان نوشت. به عبارت دیگر داریم

$$x(t) = F_{\circ}\frac{\sin(\omega t - \phi)}{\omega|Z|} \qquad (\text{۲ـ۲۴ الف})$$

که در آن

$$\sin\phi = \frac{X}{|Z|} \qquad (\text{۲ـ۲۴ ب})$$

و

$$|Z| = [b^{2} + X^{2}]^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{۲ـ۲۴ ج})$$

قبل از اینکه دربارهٔ این نتیجه بحث کنیم، به همانند الکتریکی این مسئله می‌پردازیم و نتیجهٔ متناظر با آن را هنگامی که به سیستم الکتریکی ولتاژ هماهنگ سادهٔ $\varepsilon(t)$ که در (۲ـ۱۸ب) آمده است، اعمال می‌شود، می‌نویسیم. به‌جای ارائهٔ نتایج برحسب بار خازن q، معمولاً آنها را برحسب جریان الکتریکی $I = dq/dt$، یعنی کمیتی که همانند سرعت، dx/dt، در سیستم مکانیکی است

نشان می‌دهد. بنابراین، از (۲ـ۲۴ الف) نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و ازکمیتهای متناظر (۲ـ۴) نیز استفاده می‌کنیم. بدین‌ترتیب برای جریان الکتریکی، داریم

$$I(t) = \varepsilon_\circ \frac{\cos(\omega t - \phi)}{|Z|} \qquad \text{(۲ـ۲۵الف)}$$

با

$$Z = R + \mathrm{i}X \qquad \text{(۲ـ۲۵ب)}$$

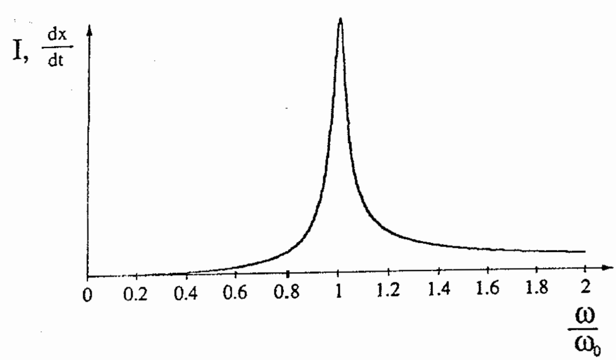
$$X = \omega L - \frac{۱}{\omega C} = \frac{L}{\omega}(\omega^۲ - \omega_\circ^۲) \qquad \text{(۲ـ۲۵ج)}$$

و ϕ باز هم $\sin^{-۱}(X/|Z|)$ است.

آنچه در این نتیجه عملاً مورد توجه ماست. چگونگی تغییرات جریان در هنگامی است که دامنهٔ ولتاژ محرک، $\varepsilon_\circ$، را ثابت نگه می‌داریم و بسامد زاویه‌ای محرک، ω، را تغییر می‌دهیم، که معمولاً به آن، پاسخ سیستم گویند. برای مشاهده واضح این پاسخ، آن را در شکل ۲ـ۴ به‌صورت تغییرات دامنهٔ جریان برحسب بسامد محرک ω، به‌ازای ولتاژ ورودی $\varepsilon_\circ$ ثابت، رسم می‌کنیم. چون R معمولاً مقدارکوچکی است، تابع دارای بیشینهٔ تیزی در

$$\omega = \omega_\circ \qquad \text{(۲ـ۲۶)}$$

است. دراینجا جملهٔ وابسته به بسامد در مخرج (۲ـ۲۵الف)، یعنی در Z ،که هرگز منفی نمی‌شود،



شکل ۲ـ۴ پاسخ تشدیدی، این تابع هم برای سیستم الکتریکی و هم سیستم مکانیکی صادق است. جریان الکتریکی، یا سرعت ذره، برحسب بسامد زاویه‌ای نیروی محرک رسم شده است، دامنهٔ نیروی محرک ثابت نگه‌داشته شده است. تشدید (پاسخ بهینه)، در بسامد طبیعی، $\omega_\circ$، سیستم الکتریکی یا مکانیکی رخ می‌دهد. این نمودار به‌ازای $Q = ۲۰$ رسم شده است.

صفر می‌شود. به‌علاوه، از (۲ـ۲۴ج) می‌بینیم که در مجاورت $\omega_{\circ}$، تابع پاسخ به صورت هموار و تقریباً متقارن کاهش می‌یابد.

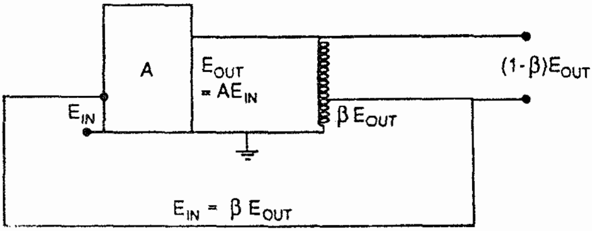
شرط (۲ـ۲۶)، تشدید نامیده می‌شود، واژه‌ای که حاکی از چیزی است که عملاً در این بسامد رخ می‌دهد، یعنی بیشینهٔ پاسخ به‌ازای دامنهٔ ورودی ثابت. در واقع، اگر R به صفر میل کند، دامنهٔ پاسخ به بینهایت میل می‌کند. با توجه به (۲ـ۲۴) می‌بینیم که در تشدید، زاویهٔ فاز ϕ، که انتقال فاز را نشان می‌دهد، به‌ازای تمام مقادیر R، صفر است، $\phi = \circ$، یعنی $\varepsilon_{\circ}(t)$ و $I(t)$ همفاز هستند. به‌ازای ولتاژ محرک $\varepsilon_{\circ}$ ثابت، توان جذب شده بیشینه است (مسئلهٔ ۲ـ۸). دور از تشدید، $\phi \neq \circ$ و وقتی $R = \circ$ است، توانی که در بخشی از چرخه به مدار منتقل شده است، در بقیهٔ چرخه به محرک پس داده می‌شود. اما، در تشدید، اگر R صفر باشد، دامنه بزرگتر و بزرگتر می‌شود، زیرا توان را نوسانگری که اتلاف ندارد به‌طور مداوم جذب می‌کند.

سیستمهای مکانیکی هم پاسخهایی دارند که درست مانند سیستمهای الکتریکی تشدید دارند. وقتی که یک چرخ اتومبیل در گودالی می‌افتد و برای آزاد کردن اتومبیل عده‌ای آن را هل می‌دهند، حرکت اتومبیل به جلو و عقب (تا اینکه بالاخره از محلی که گیر افتاده رها شود) نمونه‌ای از تشدید مکانیکی است. همچنین اگر اسکی‌بازانی که در پای کوه سوار صندلیهای بالابر می‌شوند، همگی با زمان‌بندی معین روی صندلی خود تکان بخورند، صندلیها حرکتی عمودی با دامنه‌ای خطرناک پیدا خواهند کرد، که نمونه‌ای از تشدید مکانیکی است. بسیاری از تجربه‌های روزانهٔ ما از تشدید، مربوط به سیستمهای گسترده است، که جزئیات آن را به فصلهای بعد بررسی می‌کنیم.

سیستم الکتریکی یکی از پایه‌های اصلی فنّاوری الکترونیک است. این مدار در اولین مرحله از گیرنده‌های مخابراتی موجود است، که برروی بسامد تشدیدی که بسامد همان سیگنال ورودی است تنظیم می‌شود. همچنین، این مدار، جزء اصلی نوسانگری (نوسانگر L_C) است که مورد استفادهٔ بسیار دارد. عملکرد بیشتر سیستمهای ارتباطاتی مستلزم وجود نوسانگرهای پایدار در فرستنده‌ها و گیرنده‌هاست.

۲ـ۴ نوسانگرها

اکنون به‌طور اجمالی به چگونگی کار نوسانگر L_C می‌پردازیم. جزء اصلی آن، یک تقویت‌کننده است، ابزاری که سیگنالهای ورودی را با ضریب A بزرگ می‌کند و انرژی لازم برای این‌کار را از جای دیگری می‌گیرد. بخشی از خروجی این تقویت‌کننده، که آن را با β نشان می‌دهیم دوباره به آن باز می‌گردد تا قسمتی از ورودی را تشکیل دهد، شکل ۲ـ۵. بقیهٔ $(1-\beta)$ خروجی تقویت‌کننده صرف کاربردهای مفید دیگر می‌شود. برای شروع کار، خواننده باید انواع مختلفی از سیگنالهای



شکل ۲ـ۵ عملکرد نوسانگر. می‌بینیم که شرط نوسان پایدار $A\beta = ۱$ است.

الکتریکی بی‌معنی را که در مدار حرکت می‌کنند در نظر بگیرد (نوفه)؛ منشأ آنها ممکن است گرمایی باشد و یا سیگنالهای سرگردانی که از وسایل الکتریکی دیگر گرفته شده‌اند. همواره می‌توان تبدیل فوریهٔ زمانی همهٔ این اغتشاشات را گرفت. همهٔ بسامدهای ممکن موجود خواهند بود. کمیتهای A و β تابع بسامد و مختلط‌اند تا شامل انتقال فاز نیز بشوند. حال، به دلیل پاسخ بسیار تقویت شدهٔ مدار L_C که در حوالی $\omega_{\circ}$ وارد (بار) تقویت‌کننده می‌شود، ضریب تقویت، A، در حوالی $\omega_{\circ}$، بزرگ و بسیار حساس به بسامد خواهد بود. بنابراین، به‌ازای ω معین در حوالی تشدید، شرایط رشد، یعنی βA حقیقی و

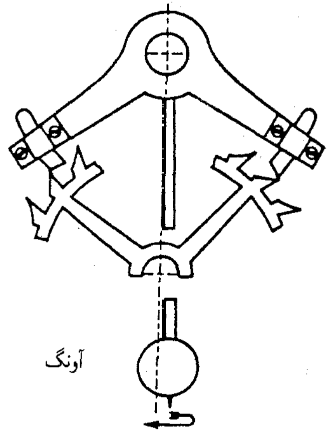
$$\beta(\omega)A(\omega) > ۱ \qquad (۲\text{-}۲۷)$$

فراهم خواهد آمد. شرط (۲ـ۲۷) باعث رشد می‌شود زیرا با توجه به آن سیگنال با هر دور حرکت در مدار افزایش می‌یابد. اما، در واقع آنچه به وقوع می‌پیوندد آن است که به محض به کار افتادن سیستم، اثرهای غیرخطی A را چنان محدود می‌کنند که رابطه زیر برقرار شود

$$\beta(\omega)A(\omega) = ۱ \qquad (۲\text{-}۲۸)$$

باید تأکید شود که (۲ـ۲۷) و (۲ـ۲۸) علاوه بر اندازه، دارای فاز نیز هستند. βA مختلط به‌جای رشد موجب تداخل ویرانگر می‌شود. انتقال فاز A و β باید برابر و در خلاف جهت یکدیگر باشند. با استفاده از (۲ـ۲۵) می‌توان مشاهده کرد که در حوالی تشدید، نه تنها اندازهٔ پاسخ، بلکه فاز آن نیز دستخوش بزرگترین تغییر می‌شود. این به نوبهٔ خود نشان می‌دهد که، (۲ـ۲۸) فقط برای بسامد نسبتاً خوش‌تعریف برقرار است، و یا به عبارت دیگر، خروجی نوسانگر دارای بسامد نسبتاً پایا خواهد بود، که شرط اصلی در سیستمهای مخابراتی است.

در مثال ۲ـ۱ ویژگی دیگر سیستمهای تشدیدی را نشان خواهیم داد، یعنی هر چه مقدار ضریب کیفیت Q (۲ـ۱۷الف و ب)، بیشتر باشد، تابع تشدید باریکتر و دقیق‌تر خواهد شد و تغییر فاز در هنگام عبور از بسامد تشدید سریعتر صورت می‌گیرد. این نکته ارتباط پایداری بسامد را با Q امکان‌پذیر می‌سازد و تلاشهای مهندسان را برای یافتن راههای دستیابی به Qهای بزرگتر توجیه



شکل ۲ـ۶ چرخ دنگِ ساعت آونگ‌دار.

می‌کند. بالاخره، نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان از عملکرد نوسانگر برای ساعت مکانیکی آونگی استفاده کرد که بررسی آن، برخلاف مورد الکتریکی، به تفصیل امکان‌پذیر است.

شکل ۲ـ۶ چرخ دنگ را نشان می‌دهد. یک اهرم آزاد کننده با دو گیره به آونگ متصل است. این اهرم را به‌خاطر شکل ظاهری‌اش لنگر می‌نامند. این لنگر، حرکت چرخ ضامن‌دار زیر خود را که تحت تأثیر فنر اصلی ساعت است، کنترل می‌کند. اگر لنگر مانع نمی‌شد، چرخ ضامن‌دار در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخید. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، نوک آونگ به سمت راست در حرکت است. وقتی برمی‌گردد، یعنی در حرکت به چپ، درست در طرف چپ وضعیتی که نشان داده شده است، گیرهٔ طرف چپ لنگر، چرخ ضامن‌دار را آزاد می‌کند، که در این هنگام به اندازهٔ عرض یک دندانه حرکت می‌کند و در نهایت توسط گیرهٔ طرف راست لنگر از حرکت بیشتر باز می‌ایستد. ساعت «تیک» می‌کند. معکوس این فرایند، هنگام نزدیک شدن وزنهٔ آونگ از سمت چپ به مرکز، اتفاق می‌افتد، دندانهٔ راست چرخ ضامن‌دار را آزاد می‌کند ـ «تاک». چرخ ضامن‌دار به اندازهٔ یک دندانه و شکاف بین دو دندانهٔ مجاور به جلو رفته است و آونگ یک چرخه را طی کرده است.

انرژی باید بدون گذاشتن تأثیر چندان بر دورهٔ آونگ به‌آن منتقل شود. در واقع، شیب لبه‌های گیره‌ها چنان است که جریان انرژی را از چرخ ضامن‌دار به لنگر، یعنی به آونگ، تضمین می‌کند. برای درک نمایش ساعت به صورت تقویت‌کننده‌ای با فیدبک، می‌توانید تصور کنید که آونگ و لنگر به‌جای چرخ ضامن‌دار، دارای محرکی دوره‌ای هستند. از تحلیل حرکت واداشته می‌دانیم که به‌ازای نیروی محرکی با دامنهٔ ثابت، فقط نزدیک بسامد طبیعی پاسخی با دامنهٔ بزرگ خواهیم

داشت. یعنی، فقط در اینجاست که حرکت لنگر به‌قدر کافی بزرگ است که چرخ ضامن‌دار را کنترل کند. در واقع چرخ ضامن‌دار در نزدیکی تشدید و با فازی مناسب، انرژی را به آونگ میرا (به دلیل اصطکاک هوا) پس می‌خوراند. همزمان با آن، چرخ ضامن‌دار یک خروجی نیز دارد، که نیروی محرک چرخ دنده‌هایی است که آن را به عقربه‌های ساعت متصل می‌کند. بنابراین، اگر به آونگ در ابتدا نیرویی وارد شود و یا فقط رها شود، در نهایت باید با بسامد ω که به بسامد طبیعی خیلی نزدیک است، نوسان کند، بسامدی که در آن $\beta(\omega)A(\omega)$ مساوی با یک شود. (تقویت‌کننده شامل آونگ، چرخ دنگ و منبع توان است، خروجی آن در حرکت چرخ ضامن‌دار است. سیگنال فیدبک شده از چرخ ضامن‌دار به لنگر تقویت می‌شود.)

۲ـ۵ خلاصه

دیدیم که هم سیستم مکانیکی و هم مشابه الکتریکی آن، اگر برانگیخته و سپس به حال خود رها شوند، دستخوش نوسانهایی خواهند شد که به تدریج میرا می‌شود، آهنگ این میرایی به اندازهٔ عامل میرایی بستگی دارد که می‌تواند کشش ناشی از چسبندگی یا مقاومت الکتریکی باشد. بسامد زاویه‌ای این نوسانها نسبت به بسامدی که در نبود میرایی وجود دارد و آن را بسامد طبیعی سیستم نامند، فقط اندکی جابه‌جا می‌شود. هنگامی که این سیستمها با ورودی که تابع هماهنگ ساده‌ای از زمان است به حرکت در آیند، پاسخ آنها هنگامی که بسامد محرک با بسامد طبیعی سیستم، که مشخصهٔ حرکت آزاد سیستم است، برابر شود به سرعت افزایش می‌یابد. منظور از «پاسخ» تغییر در دامنهٔ سرعت جرم یا تغییر در جریان الکتریکی برحسب بسامد نیروی محرک است. این پدیده را تشدید گویند.

همچنین، متوجه می‌شویم که سیستمهای با ضریب کیفیت، Q، بالا در حرکت طبیعی از یک طرف، قبل از میرایی، دستخوش نوسانهای زیادی می‌شوند و از طرف دیگر سیستمهایی با پاسخ تشدیدی بسیار تیز هستند. ارتباط بین این دو نکته و کاربرد این سیستمها در نوسانگرها و ساعتها کاملاً سر راست نیست و در اصل به تغییرات سریع فاز برحسب بسامد در نزدیکی تشدید برمی‌گردد. این همان ویژگی تشدید است که نوسان مانا را به‌وجود می‌آورد. این در نهایت همان چیزی است که برمبنای شهودی انتظار داریم.

مثال ۲ـ۱

نشان دهید که عرض منحنی‌های تشدید با ضریب کیفیت، Q، رابطهٔ مستقیم دارند.

حل: اگر در مخرج (۲ـ۲۵الف) R و X را مساوی یکدیگر قرار دهیم، شرطی برای بسامد محرک به‌دست می‌آوریم که بر طبق آن جریان به میزان $1/\sqrt{2}$ برابر مقدار تشدیدی‌اش، موسوم

به نقطهٔ نیم ـ توان، می‌رسد

$$L(\omega_\circ - \omega)\frac{(\omega_\circ + \omega)}{\omega} = R$$

چون هنوز در حوالی تشدید هستیم، در جملهٔ سوم طرف چپ عبارت بالا (و نه جملهٔ دوم!)، $\omega_\circ$ را جانشین ω می‌کنیم،

$$L(\omega_\circ - \omega)۲ \cong R$$

برای عرض تابع در نقطهٔ نیم ـ توان، $\Delta\omega$، داریم

$$\Delta\omega = ۲(\omega_\circ - \omega)$$

بنابراین $\Delta\omega/\omega_\circ = R/\omega_\circ L = ۱/Q$.

این، همان نتیجهٔ مطلوب است، یعنی، عرض نسبی در نیم ـ توان، با عکس ضریب کیفیت، Q، متناسب است. ■

مثال ۲ـ۲

یک مدار الکتریکی سری شامل R، L و C بدون بار الکتریکی، ناگهان در $t = \circ$ به یک باتری با ولتاژ ثابت $V_\circ$ متصل می‌شود. تغییرات بار خازن برحسب، $q(t)$، را بیابید؟ فرض کنید R کوچک است.

حل: مسئله را می‌توان با مقایسه با مشابه مکانیکی آن به‌خوبی فهمید. می‌دانیم که اگر ناگهان نیروی ثابت $F_\circ$ را به سیستم مکانیکی اعمال کنیم. در آن لحظه جرم اصلاً حرکت نمی‌کند، اما نقطهٔ تعادل فنر به اندازهٔ $x_\circ = F/k$ جابه‌جا می‌شود. وضعیت مسئلهٔ ما مشابه حالتی است که جرم با سرعت اولیهٔ صفر، اما جابه‌جایی اولیهٔ $-F_\circ/k$ نسبت به وضعیت تعادل شروع به حرکت می‌کند. تبدیل این شرایط به سیستم الکتریکی جواب را به‌دست می‌دهد:

$$q = -CV_\circ \cos\omega_{\text{f}} t e^{-\alpha t} + CV_\circ, \qquad \alpha = \frac{R}{۲L}$$ ■

مسائل

۲ـ۱ با ترکیب قوانین آمپر و فاراده نشان دهید که خود القایی یک سیم‌پیچ استوانه‌ای بلند از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$L = \mu_\circ n^۲ l A$$

که در آن n تعداد دورها در واحد طول، l طول سیم‌پیچ استوانه‌ای و A سطح مقطع آن است.

۲ـ۲ نشان دهید که اگر $x_۱(t)$ جواب (۲ـ۱) با نیروی محرک $F_۱(t)$ و $x_۲(t)$ جواب مربوط به نیروی محرک $F_۲(t)$ باشد، $(x_۱ + x_۲)$ جواب معادله است، اگر $F_۱ + F_۲$ نیروی محرک باشد. در مورد معادله‌های دیفرانسیل همگن، که نیروی محرک ندارد، چه می‌توانید بگویید؟ در این مورد چه چیزی $x(t)$ را مشخص می‌کند؟

۳ـ۲ برای $\alpha = ۰$، یعنی وقتی که همه بار خازن در مدار جریان یافته است، چرا جریان الکتریکی در مداری که حرکت طبیعی خود را انجام می‌دهد، متوقف نمی‌شود؟ برای پاسخ می‌توانید از مشابه مکانیکی کمک بگیرید. با فرض اینکه مقاومت در مدار صفر باشد، در لحظه‌ای که $q = ۰$ است، dI/dt چقدر است؟

۴ـ۲ α کوچک است. مسئلهٔ قبل نسبتاً آسان بود. اکنون در مورد وضعیت

$$\frac{dI}{dt} = ۰$$

وقتی که مقاومت در مدار، اگر چه کوچک، اما صفر نیست، بحث کنید.

الف) فرض کنید تغییرات جریان برحسب زمان از رابطهٔ زیر به‌دست آید

$$I(t) = I_۰ (\cos \omega_f t) e^{-\alpha t}, \qquad \alpha = \frac{R}{۲L}$$

منحنی تغییرات $I(t)$ برحسب t را رسم کنید. کمینه‌های منحنی پیش از کمینه‌های $\cos \omega_f t$ قرار دارند تا بعد از آن؟ بیشینه‌ها چطور؟ توضیح ساده‌ای برای پاسخ خود بدهید.

ب) محل فرینه‌های $I(t)$ را به‌صورت تحلیلی بیابید، و پاسخ خود در بخش (الف) را کنترل کنید.

ج) با استفاده از معادلهٔ دیفرانسیل حرکت برای $Q(t)$ بار Q را از فرینه‌های $I(t)$ یعنی وقتی $dI/dt = ۰$ است بیابید. دلیل فیزیکی اینکه Q برای $\alpha = ۰$ صفر نمی‌شود چیست؛ علامت Q در مقایسه با I چیست؟ سرانجام، نشان دهید که در فرینه‌های $I(t)$، $Q(t)$ تا مرتبهٔ اول از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$Q(t) \cong -\left(\frac{۲\alpha}{\omega_۰^۲}\right) I_۰ e^{-\alpha t}$$

د) دربارهٔ جوابهای مشابه مکانیکی پرسشهای بخش (الف) و (ب) بحث کنید.

۲ـ۵ الف) α کوچک نیست. در این صورت باید از (۲ـ۱۲) به‌جای (۲ـ۱۱ب) استفاده کنیم. نشان دهید که شرایط اولیهٔ

$$q|_{t=0} = Q_0 \qquad I|_{t=0} = 0$$

اگر

$$I = -Q_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_f} e^{-\alpha t} \sin \omega_f t$$

باشد، دقیقاً برقرارند.

راهنمایی: ابتدا نشان دهید که

$$q = Q_0 (\cos \omega_f t + \frac{\alpha}{\omega_f} \sin \omega t) e^{-\alpha t}$$

ب) یک حالت خاص وقتی به وجود می‌آید که α چنان بزرگ است که

$$\omega_f^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 = 0$$

این حالت را میرایی بحرانی نامند. در حالت میرایی بحرانی، رابطهٔ ساده‌ای برای I برحسب زمان به‌دست آورید. نمودار $I(t)$ را در این حالت رسم کنید.

راهنمایی: $\lim\limits_{\omega \to 0} (\sin \omega t)/\omega = t$.

۲ـ۶ الف) α بزرگ است. اگر $\alpha \ll \omega_0$، می‌توانیم دو ثابت میرایی مثبت α_1 و α_2، تعریف کنیم:

$$\alpha_1 = \alpha + (\alpha^2 - \omega_0^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\alpha_2 = \alpha - (\alpha^2 - \omega_0^2)^{\frac{1}{2}}$$

نشان دهید که به‌ازای شرایط اولیهٔ مسئلهٔ ۲ـ۵، $q(t)$ برای نوسانگر آزاد از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

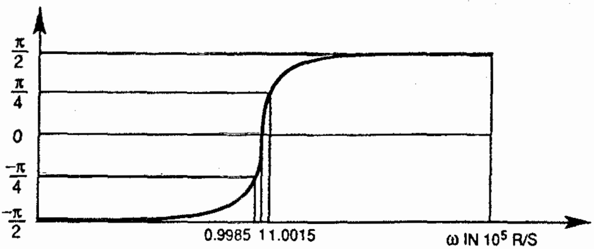
$$q(t) = Q_0 \frac{\alpha_1 e^{-\alpha_2 t} - \alpha_2 e^{-\alpha_1 t}}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

و پس از گذشت زمانی طولانی

$$q(t) \approx Q_0 e^{\frac{-t}{\tau}}$$

که در آن τ، زمان واهلش، با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\tau = \frac{2\alpha}{\omega_0^2}$$



شکل ۲ـ۷ تغییرات فاز ϕ برحسب ω در نزدیکی تشدید، مسئله ۲ـ۷ب.

ب) نشان دهید که اگر به نوسانگر نیرویی با بسامد کم، $\omega \ll \omega_\circ$، اعمال شود،

$$q(t) = \frac{\varepsilon_\circ C}{(۱ + \omega^۲\tau^۲)^{\frac{۱}{۲}}} \sin(\omega t - \phi)$$

که در آن τ همان زمان واهلش در قسمت (الف) است. در حد $\omega \to \circ$، ϕ چه مقداری را اختیار می‌کند؟ دامنهٔ نوسانگر مکانیکی به چه مقداری میل می‌کند؟ دامنهٔ $x(t)$ را برحسب ω رسم کنید.

۲ـ۷ الف) این گزاره را که در متن آمده است بررسی کنید: «...در حوالی تشدید، نه تنها اندازهٔ پاسخ، بلکه فاز آن نیز دستخوش بزرگترین تغییر می‌شود.»

ب) هنگام بررسی پاسخ تشدیدی یک مدار L_C_R، دیدیم که تأخیر فاز جریان ϕ طبق نمودار شکل ۲ـ۷ است. تعداد نوسانهای آزاد این مدار را در زمانی که بار اولیهٔ $Q_\circ$ به $Q_\circ/\mathrm{e}$ افت می‌کند، به‌دست آورید.

۲ـ۸ الف) نشان دهید که توان میانگینی را که نوسانگر مکانیکی جذب می‌کند، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\bar{P} = \frac{F_\circ^۲}{۲|Z|} \cos\phi$$

ب) ثابت کنید نقطه‌هایی که در مثال ۲ـ۱ به عنوان نقاط نیم‌ـ‌توانِ منحنی تشدید انتخاب شدند، در واقع متناظر با نیم‌ـ‌توان هستند.

۲ـ۹ الف) جواب معادلهٔ نوسانگر واداشته

$$m\frac{d^۲x}{dt^۲} + b\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

$$x(\circ) = \circ, \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\circ} = \circ, \qquad F(t) = \circ \quad t < \circ$$

را می‌توان با استفاده از نمایش فوریهٔ $F(t)$ یافت. نشان دهید که این جواب چنین است

$$x(t) = \frac{-۱}{\sqrt{۲\pi m}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega^۲ - ۲\mathrm{i}\alpha\omega - \omega_۰^۲} d\omega$$

که در آن $F(\omega)$ تبدیل فوریهٔ $F(t)$ است.

ب) جواب معادلهٔ نوسانگر واداشته

$$m\frac{d^۲x}{dt^۲} + b\frac{dx}{dt} + kx = \delta(t - t_۰)$$

تابع گرین، $G(t-t_۰)$، نامیده می‌شود. نشان دهید که

$$\begin{aligned} G(t-t_۰) &= \frac{\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_۰)} \sin \omega_{\mathrm{f}}(t-t_۰)}{\omega_{\mathrm{f}} m} \qquad && t > t_۰ \\ &= ۰ && t < t_۰ \\ \omega_{\mathrm{f}}^۲ &= \omega_۰^۲ - \alpha^۲ \end{aligned}$$

اگر ذرهٔ نوسان‌کننده در شروع حرکت $t = t_۰$ در $x = ۰$ باشد.

ج) نیروی محرک، $F(t)$، را به‌صورت مجموع نیروهایی که در زمان به حول $\Delta t_۰$، $۲\Delta t_۰$ و غیره توزیع شده‌اند به صورت زیر بنویسید

$$F(\Delta t_۰) g_n(t - \Delta t_۰)\Delta t_۰ + F(۲\Delta t_۰) g_n(t - ۲\Delta t_۰)\Delta t_۰ + \ldots$$

یعنی به صورت

$$F(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(t-t_۰)F(t_۰)dt_۰ = \int_{-\infty}^{\infty} F(t_۰)\delta(t-t_۰)dt_۰$$

اینک از قسمت (ب) استفاده کنید و رابطه‌ای برای $x(t)$ تحت تأثیر $F(t)$ به‌دست آورید.

د) با مراجعه قسمت‌های (الف تا ج)، از قضیهٔ فالتونگ، مسئلهٔ ۱ـ۱۵، استفاده کنید و نشان دهید که

$$\begin{aligned} \frac{-۱}{\sqrt{۲\pi m}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega^۲ - ۲\mathrm{i}\alpha\omega - \omega_۰^۲} d\omega &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} G(\omega) d\omega \\ &= \frac{\sqrt{۲\pi}\mathrm{e}^{-\alpha t} \sin \omega_{\mathrm{f}} t}{\omega_{\mathrm{f}} m} \\ &= ۰ \qquad t < ۰ \end{aligned}$$

این انتگرال را می‌توان مستقیماً با استفاده از نظریهٔ متغیر مختلط محاسبه کرد، بنابراین جواب $x(t)$ را که در قسمت (ج) حاصل شد، مستقیماً بررسی کنید.

۲ـ۱۰ پذیرفتاری الکتریکی AC، که با χ نشان داده می‌شود، با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$P(\omega) = \chi(\omega)\varepsilon_{\circ} E(\omega)$$

که در آن، P، گشتاور دو قطبی در واحد حجم است و در مدل ساده‌ای برای قطبیدگی با رابطهٔ

$$P(\omega) = Nex(\omega)$$

داده می‌شود. در اینجا، N یون در واحد حجم وجود دارد که هر یک دارای بار e هستند و به‌صورت هماهنگ حول $x(\omega) = \circ$ نوسان می‌کند.

با مراجعه به مسئله ۲ـ۹ (د) نشان دهید که

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^{۲}}{\epsilon_{\circ}} G(\omega)$$

فرض کنید $\chi(\omega) = \chi_{۱}(\omega) + i\chi_{۲}(\omega)$ که در آن $\chi_{۱}$ و $\chi_{۲}$ حقیقی‌اند.

$\chi_{۱}$ و $\chi_{۲}$ را برحسب ω به‌دست آورید و آنها را رسم کنید. کدام‌یک از دو تابع $\chi_{۱}(\omega)$ و $\chi_{۲}(\omega)$ به اتلاف توان مربوط می‌شود؟

برای مطالعهٔ بیشتر

R. Resnick and D. Halliday: *Physics*, Vols. I and II (Wiley, New York 1977)

مقدمه‌ای بر نوسانهای هماهنگ در این جلد آمده است.

I. G. Main: *Vibrations and Waves in Physics* (Cambridge University Press, Cambridge 1978)

بررسی کاملی از تمام درجات میرایی در نوسانگرها در این کتاب یافت می‌شود.

P. R. Wallace: *Mathematical Analysis of Physical Problems* (Dover, New York 1984)

بررسی کامل نوسانگر در بطن مبحث تحلیل فوریه در این کتاب آمده است.

۳

امواج روی تارهای کشیده

چکیده

ساده‌ترین نمونهٔ سیستم گستردهٔ دارای حرکت موجی خطی، تار تحت کششی است که اختلالی در آن به وجود آید. این فصل با به‌دست آوردن معادلهٔ موج حاکم بر ارتعاشهای سیم آغاز می‌شود. مانند فصل ۲، تحلیل مسئله را به دو قسمت حرکت طبیعی و حرکت واداشته تقسیم می‌کنیم. نشان می‌دهیم که حرکت طبیعی از بینهایت جزء مستقل از یکدیگر تشکیل شده است که هر یک را اصطلاحاً یک مد طبیعی می‌نامند. به هر مد، نوسانگری هماهنگ با بسامد طبیعی مشخصهٔ آن مد وابسته است. وابستگیهای مکانی مدها روی هم رفته، پایهٔ راست هنجار کاملی را در بازه‌ای که سیم اشغال کرده است تشکیل می‌دهند. این نکته، حل مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای را آسان می‌سازد.

تحلیل حرکت واداشته حاکی از آن است که نوسانگر مشخصهٔ هر مد، درست همانند تک‌نوسانگری که در فصل قبل بررسی شد، دارای یک پاسخ تشدیدی است.

۳ـ۱ معادلهٔ حرکت تار

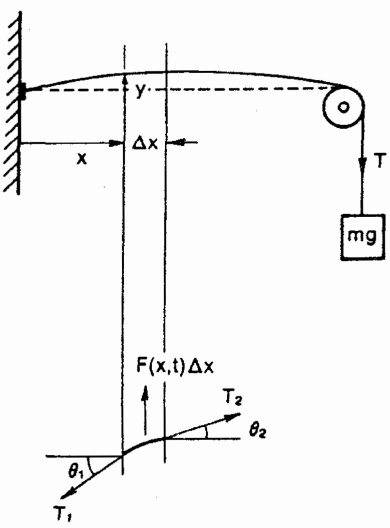
در فصل قبل میان سیستمهای قلنبه و سیستمهای گسترده تمایز قائل شدیم. ساده‌ترین نمونهٔ سیستم گسترده، سیستمی است که فقط در یک بُعد گسترش یافته باشد، در مکانیک سیم انعطاف‌پذیر

تحت کشش را داریم. سیم ویولن یک مثال بدیهی است، همین‌طور تارهای صوتی انسان. این مسئله را به تفصیل بررسی خواهیم کرد، زیرا دارای تمام عناصر قابل تحلیل ذاتی سیستم گسترده، با حداقل پیچیدگی است. بدین‌ترتیب مسائل این فصل به مراتب پیچیده‌تر از مسائل فصل پیش است. یافتن دلیل آن مشکل نیست: اگر قرار بود تار را به اتمهای تشکیل دهنده‌اش تقسیم کنیم، می‌توانستیم حرکت هر اتم را با روشهای فصل قبل مطالعه کنیم. اما در آن صورت باید تعداد بسیار زیادی اتم، یا سیستم قلنبه یا تعداد بسیار زیادی متغیرهای مستقل یا درجات آزادی را در نظر می‌گرفتیم. به‌جای انجام این محاسبهٔ اتمی، تار را یک سیستم پیوسته در نظر می‌گیریم. حتی در این حالت نیز، ممکن است در مشخص کردن حرکت، بستگی زمانی مجموعه‌ای نامتناهی از متغیرها دخیل باشد، که متناظر با بینهایت درجه آزادی است.

مانند فصل قبل، قانون دوم نیوتون معادلهٔ حرکتی را می‌دهد که جوابهایش حرکت سیستم را در شرایط مشخص پیش‌بینی می‌کنند. شکل ۳ـ۱ تار انعطاف‌پذیری را نشان می‌دهد که تحت کشش T قرار دارد و کمی از حالت تعادل خارج شده است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، هر نقطه از سیم را می‌توان با مقدار مختصهٔ x که فاصلهٔ افقی از سر تار است، مشخص کرد. اگر طول تار L باشد، x از صفر تا L تغییر می‌کند. جابه‌جایی عمودی یا عرضی تار در هر نقطه با مختصهٔ y، اندازه‌گیری می‌شود. این مختصه تابع دو متغیر است، می‌نویسیم $y(x,t)$، که t معرّف زمان است.

برخلاف فصل گذشته، با توابع بیش از یک متغیر سروکار داریم. وقتی مشتق این توابع را محاسبه



شکل ۳ـ۱ بالا: سیم انعطاف‌پذیر تحت کشش T کمی از حالت تعادل خارج شده است. قرقره بی‌اصطکاک است. پایین: قطعه Δx سیم تحت نیروی عمودی بر واحد طول $F(x,t)$ است.

می‌کنیم، معمولاً به مشتق جزئی نیاز داریم. مشتقهای جزئی $y(x,t)$ با رابطه‌های زیر تعریف می‌شوند،

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{۱}{\Delta x[y(x+\Delta x,t) - y(x,t)]} \qquad \text{(۱ـ۳ الف)}$$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{۱}{\Delta t[y(x,t+\Delta t) - y(x,t)]} \qquad \text{(۱ـ۳ ب)}$$

مشتق جزئی $\partial y/\partial x$ مشتق معمولی y نسبت به x است، در حالی که متغیر دیگر یعنی t، پارامتری ثابت قلمداد می‌شود. همان‌طور که انتظار می‌رود، معادلهٔ حرکت تار برحسب مشتق‌های جزئی، یک معادله دیفرانسیل جزئی، خواهد بود. در واقع، سیستمهای گسترده از معادله‌های دیفرانسیل جزئی پیروی می‌کنند، و باید یاد بگیریم چگونه این معادله‌ها را حل کنیم.

برای یافتن معادلهٔ حرکت تار، مسئله را با منزوی کردن قطعه‌ای از تار که بین x و $x + \Delta x$، در شکل ۳ـ۱، قرار دارد تحلیل می‌کنیم. برایند نیروهای وارد بر این قطع چیست؟ می‌دانیم که در طول یک تار انعطاف‌پذیر، کشش همواره در راستای مماس برسیم اعمال می‌شود. نکتهٔ مهم در مسئلهٔ فعلی، این است که شیبهای تار در دو انتهای این قطعه تفاوت دارند؛ در زمان t، این دوشیب به‌صورت زیرند (شکل ۳ـ۱)

$$\tan\theta_{۲} = \frac{\partial y(x+\Delta x,t)}{\partial x}$$

$$\tan\theta_{۱} = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

اکنون قید مهمی را در تمامی این فصل اعمال خواهیم کرد فرض می‌کنیم که فقط با ارتعاشهای کوچک تار سروکار داریم. زاویه‌های $\theta_{۱}$ و $\theta_{۲}$ همواره آن‌قدر کوچک‌اند که در بسط تیلور توابع مثلثاتی فقط جملهٔ اول را نگه می‌داریم. این قید باعث می‌شود که معادلهٔ دیفرانسیل حرکت خطی شود. یادآور می‌شویم که این به معنای آن است که فقط توان اول $y(x,t)$ ظاهر خواهد شد. بنابراین از نظر فیزیکی، طبق معمول، با ایده‌آل‌سازی، یعنی نوعی تقریب سروکار داریم که انتظار داریم بسیار مفید باشد.

در شکل ۳ـ۱ می‌بینیم که مؤلفه‌های افقی نیروهایی که بر تار اعمال می‌شوند $T_{۱}\cos\theta_{۱}$ و $T_{۲}\cos\theta_{۲}$ هستند. اما چون $\theta_{۱}$ و $\theta_{۲}$ زاویه‌های کوچکی هستند، $\cos\theta_{۱}$ و $\cos\theta_{۲}$ را واحد می‌گیریم. چون تار در جهت افقی حرکت نمی‌کند، داریم

$$T_{۱}\cos\theta_{۱} = T_{۲}\cos\theta_{۲}, T_{۱} = T_{۲} \equiv T$$

کشش T در تمامی طول تار یکسان است، اگر چه جرم تار را نادیده نخواهیم گرفت.

مؤلفه‌های عمودی کشش $T\sin\theta_۱$ و $T\sin\theta_۲$ هستند. بازهم، چون زاویه‌ها کوچک هستند، به‌جای سینوس تانژانت می‌گذاریم، به‌طوری که برایند مؤلفه‌های عمودی نیروهایی که به دو سر قطعهٔ تار وارد می‌شود با رابطهٔ زیر داده می‌شود.

$$T(\sin\theta_۲ - \sin\theta_۱) = T\left[\frac{\partial y(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right]$$

امکان اعمال نیروی عمودی خارجی بر تار، برایمان جالب توجه است. بدین‌منظور، کافی است که این نیرو را همواره به جهت عمودی مقید کنیم. اگر بگوییم نیروی $F(x,t)$ برواحد طول به نقطهٔ x از تار اعمال می‌شود، آنگاه نیرویی که بر قطعه سیم وارد می‌شود، $F(x,t)\Delta x$ خواهد بود.

برای جملهٔ مربوط به شتاب جرم نیز می‌باید عبارتی تحلیلی بیابیم. فرض می‌کنیم که تار یکنواخت و دارای چگالی ثابت است، یعنی جرم بر واحد طول را ϱ می‌گیریم. جرم قطعه سیم $\varrho\Delta x$ می‌شود، شتاب عمودی این قطعه $\partial^۲ y(x,t)/\partial t^۲$ است، اعمال و قانون دوم نیوتون به مؤلفه‌های عمودی، معادلهٔ حرکت مورد نظر را می‌دهد:

$$T\left[\frac{\partial y(x+\Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial y(x)}{\partial x}\right] + F(x,t)\Delta x = \varrho\Delta x\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲}$$

یا

$$\boxed{\frac{T}{\varrho}\frac{\partial^۲ y(x,t)}{\partial x^۲} + \frac{F(x,t)}{\varrho} = \frac{\partial^۲ y(x,t)}{\partial t^۲} \qquad L > x > ۰ \qquad y \ll L} \quad (۲\text{ـ}۳)$$

برای رسیدن به (۳ـ۲)، معادله را به $\varrho\Delta x$ تقسیم کرده‌ایم و با گرفتن حد $\Delta x \to ۰$ و استفاده از (۳ـ۱ الف) به نتیجهٔ زیر رسیده‌ایم:

$$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{۱}{\Delta x}\left[\frac{\partial y(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right] = \frac{\partial^۲ y(x,t)}{\partial x^۲}$$

۳ـ۲ حرکت طبیعی تار

مانند فصل قبل، بین دو مسئلهٔ حرکت طبیعی تار، یعنی حرکت تار وقتی که پس از ضربهٔ اولیه به حال خود گذاشته شود و نیروی خارجی بر آن اعمال نشود و حرکت واداشتهٔ تار تحت تأثیر نیروی محرک مشخص $F(x,t)$، تفاوت می‌گذاریم. حرکت طبیعی یا حرکت واداشتهٔ هر سیستم

گسترده را می‌توان، حرکت موجی، نامید. معمولاً اولین تجربهٔ ما از حرکت موجی در کودکی امواج سطح آب است این امواج عرضی هستند، جابه‌جایی فیزیکی آب عمود بر جهت حرکت (انتشار) امواج است. امواج مورد بررسی در این فصل نیز عرضی هستند و چون خطی هستند، تحلیل آنها ساده‌تر است. امواج سطحی آب در فصل آخر می‌آیند که بررسی خود را به امواج غیرخطی تعمیم می‌دهیم.

چون قرار نیست در این بخش نیروی خارجی داشته باشیم، مسئلهٔ مورد نظر، درک پیامدهای معادلهٔ زیر است

$$\frac{\partial^۲ y(x,t)}{\partial t^۲} = s^۲ \frac{\partial^۲ y(x,t)}{\partial x^۲} \qquad (۳\_۳)$$

این معادله با مساوی صفر قرار دادن $F(x,t)$ در (۳ـ۲) و جانشین کردن متعارف به‌دست می‌آید.

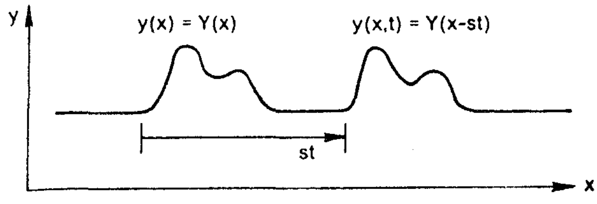
$$s^۲ = \frac{T}{\varrho} \qquad (۴\_۳)$$

معادلهٔ دیفرانسیل جزئی (۳ـ۲) یک معادلهٔ موج است، در واقع می‌توان آن را بنیادی‌ترین معادلهٔ موج مورد مطالعه در فیزیک خواند.

یک راه نوشتن جواب این معادلهٔ موج به‌صورت شگفت‌انگیزی کلی است:

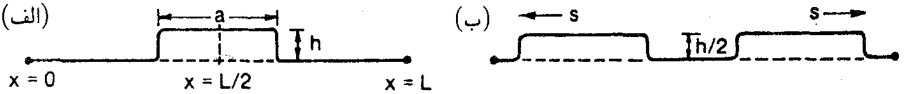
$$y(x,t) = Y_۱(x - st) + Y_۲(x + st) \qquad (۵\_۳)$$

در اینجا، $Y_۱$، $Y_۲$ می‌تواند هر تابع معقولی باشد. منظور از تابع «معقول» تابعی به اندازه کافی پیوسته است تا بتوان شکل فیزیکی تار را، بدون نیاز به تا کردن، به آن نسبت داد.[۱] معنی جواب $Y(x-st)$ چیست؟ فرض کنید که در $t = ۰$، تار به شکل دلخواه $Y(x)$ در آمده باشد. در این صورت، در زمان بعدی t، جزء خاصی از تار که دارای این شکل است اکنون در فاصلهٔ st به طرف راست قرار دارد. این را در شکل ۳ـ۲ نشان داده‌ایم. می‌توان گفت که آشفتگی، بدون توجه



شکل ۳ـ۲ یکی از جوابهای ممکن معادلهٔ موج. موج به سمت راست حرکت می‌کند.

۱. اثبات (۳ـ۵) ساده است. فرض کنید که $\xi = x - st$، پس $\partial^۲ Y(x-st)/\partial t^۲ = s^۲ Y''$ که Y'' مشتق دوم $Y(\xi)$ نسبت به ξ است. همین‌طور $\partial^۲ Y(x-st)/\partial x^۲ = Y''$.



شکل ۳ـ۳ (الف) جابه‌جایی تارکشیده شده‌ای که در ابتدا ساکن است. (ب) حرکت تار در نتیجهٔ تقارن اولیه.

به سرشت آن، با سرعت یکنواخت s به طرف راست حرکت می‌کند. جواب $Y(x+st)$ تعبیر مشابهی دارد، فقط در این مورد آشفتگی به طرف چپ حرکت می‌کند.

اگر به (۳ـ۴) رجوع کنیم، می‌بینیم که s، که اکنون دریافته‌ایم سرعت حرکت موجی در سیم است، با زیاد شدن کشش سیم افزایش می‌یابد، اگر چه فقط به صورت جذر آن، و با افزایش چگالی سیم هم به همان ترتیب کاهش می‌یابد. مسلماً، این همان چیزی است که ممکن است از تجربهٔ روزمرهٔ خود دربارهٔ انواع پاسخهای کشسان انتظار داشته باشیم.

اینک، از اطلاعاتی که دربارهٔ جوابهای معادلهٔ موج به‌دست آورده‌ایم، برای بررسی مسئله‌ای خاص استفاده می‌کنیم: در شکل ۳ـ۳ الف، تاری در فاصلهٔ $x = L/۲ - a/۲$ و $x = L/۲ + a/۲$ به اندازهٔ h جابه‌جا و در قسمت‌های دیگر اصلاً جابه‌جا نشده است. به عبارت دیگر، تار را به شکل «موجی مربعی» درآورده‌ایم. حرکت طبیعی تار اگر پس از جابه‌جایی بدین‌صورت از حالت سکون رها شود چگونه است؟ آیا این طرح به سمت راست حرکت خواهد کرد یا چپ؟ نسبت به نقطهٔ مرکزی تار، یعنی وسط آن، وضعیت طرف راست درست مانند وضعیت طرف چپ است. بنابراین، موج مربعی به دو موج هر یک با جابه‌جایی $h/۲$ تقسیم خواهد شد، یکی از موجها به طرف راست و دیگری به طرف چپ حرکت خواهد کرد. شکل ۳ـ۳ب وضعیت را پس از بازهٔ زمان اندکی نشان می‌دهد. در مسئلهٔ ۳ـ۱، این جواب را به‌طور تحلیلی بررسی خواهیم کرد، و احتمال داشتن سرعت اولیه را نیز منظور می‌کنیم.

اما هنگامی که موجهای مربعی متحرک به دو انتهای تار برسند چه می‌شود؟ باید فرض کنیم که دو انتهای تار محکم بسته شده‌اند. به عبارت دیگر، شرایط مرزی تار چنین است

$$y(\circ, t) = \circ \qquad y(L, t) = \circ \tag{۳ـ۶}$$

یک روش تحلیلیِ ترسیمی وجود دارد (روش تصویرها) که برخورد با اثر نقطه‌های انتهایی ثابت را امکان‌پذیر می‌کند، به مثال ۳ـ۱ در انتهای فصل مراجعه کنید. اما، گاهی، مخصوصاً اگر رفتار دراز مدت مورد نظر باشد، بررسی تحلیلی‌تری از جوابهای معادلهٔ موج، نسبت به آنچه تاکنون دیده‌ایم،

مورد نیاز است. در بررسی‌های بعدی، با سیستمهای گستردهٔ دیگری سروکار خواهیم داشت، و باز هم به معلومات بیشتری نیاز داریم.

۳ـ۳ مدهای بهنجار

می‌توانیم معادلهٔ موج (۳ـ۳) را به روش نسبتاً خاصی حل کنیم. چون جوابی که با این روش خاص به‌دست می‌آوریم، کلی‌ترین جواب خواهد بود. لزومی ندارد خود را با روشهای ممکن دیگر برای حل این معادله مشغول کنیم. حاصلضرب دو تابع را، که یکی فقط به x و دیگری فقط به t بستگی دارد، به جای $y(x,t)$ قرار می‌دهیم:

$$y(x,t) = u(x)v(t) \tag{۳-۷}$$

اگر (۳ـ۷) را مستقیماً در (۳ـ۳) قرار دهیم، داریم

$$u(x)\frac{d^2v(t)}{dt^2} = s^2 v(t)\frac{d^2u(x)}{dx^2}$$

سپس، طرفین را بر حاصلضرب $u(x)v(t)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{v(t)}\frac{d^2v(t)}{dt^2} = \frac{s^2}{u(x)}\frac{d^2u(x)}{dx^2} \tag{۳-۸}$$

معادلهٔ اخیر، ویژگی قابل ملاحظه‌ای دارد. طرف چپ تابع t است، نه x و طرف راست به x وابسته است، اما نه به t، و با وجود این، دو طرف به‌ازای تمام مقادیر x و t باید برابر باشند. این فقط وقتی صادق است که هر طرف مساوی با مقدار ثابت یکسانی باشد، یعنی مقداری که نه به x وابسته باشد و نه به t. با توجه به گامهای بعدی، این ثابت را $-\omega^2$ می‌نامیم. بدین‌ترتیب، داریم

$$\frac{1}{v(t)}\frac{d^2v(t)}{dt^2} = -\omega^2 \tag{۳ـ۹ الف}$$

$$\frac{s^2}{u(x)}\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\omega^2 \tag{۳ـ۹ ب}$$

اولین مورد را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -\omega^2 v(t) \tag{۳ـ۱۰ الف}$$

این معادلهٔ نوسانگر هماهنگ بدون میرایی است، که در فصل ۲ بررسی کردیم. پاسخ آن چنین است

$$v(t) = \sin \omega t, \quad \text{یا} \quad \cos \omega t, \quad \text{یا} \quad e^{i\omega t} \qquad \text{(۳ـ۱۱ الف)}$$

و یا هر ترکیب دلخواهی از اینها. باز هم تابعی دوره‌ای از زمان داریم که ω بسامد زاویه‌ای آن است. به همین ترتیب، (۳ـ۹ب) را به صورت

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{s^2}u(x) = 0$$

می‌توان نوشت، و حل آن

$$u(x) = \sin\left(\frac{\omega}{s}\right)x \quad \text{یا} \quad \cos\left(\frac{\omega}{s}\right)x \quad \text{یا} \quad e^{i(\frac{\omega}{s})x} \qquad \text{(۳ـ۱۱ب)}$$

است. چون این توابع از نظر مکانی دوره‌ای هستند، همانند فصل ۱، بردار موج k را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$k = \frac{\omega}{s} \qquad \text{(۳ـ۱۲)}$$

خلاصهٔ کار تا اینجا چنین است که، جواب معادلهٔ موج (۳ـ۳) برای تار کشیده شده، حاصلضرب تابعی دوره‌ای از فضا، u، و تابعی دوره‌ای از زمان، v، است. علاوه بر معادلهٔ (۳ـ۳)، شرایط مرزی (۳ـ۶) نیز می‌باید برقرار باشند. چون این شرایط همواره صادق هستند، باید به $u(x)$ تکیه کنیم. شرایط لازم و کافی چنین‌اند

$$u(0) = 0 \qquad u(L) = 0 \qquad \text{(۳ـ۱۳)}$$

نتیجه می‌گیریم که، برای اینکه u در $x = 0$ صفر شود، باید جوابهای ممکن (۳ـ۱۱ب) را به تابع سینوس محدود کنیم. برای برقراری شرط مرزی در $x = L$، در می‌یابیم که باید برای بردار موج k محدودیت قائل شویم، بردار موج به مقادیر خاصی محدود می‌شود، داریم

$$u(x) = \sin k_n x$$

$$u(L) = 0$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{(۳ـ۱۴ الف)}$$

در (۳ـ۱۴ الف)، n می‌تواند هر عدد صحیح مثبتی باشد. اعداد صحیح منفی را کنار می‌گذاریم، زیرا آنها دوباره همان توابع را با علامت منفی به‌دست می‌دهند، به عبارت دیگر همان جوابها دوباره تکرار می‌شوند.

با در نظر گرفتن رابطهٔ (۳ـ۱۲) مقادیر ممکن بسامد زاویه‌ای را نیز باید محدود کنیم،

$$\omega_n = sk_n = \frac{n\pi s}{L} \qquad (۳\text{ـ}۱۴\,\text{ب})$$

اینک جواب معادلهٔ موج چنین است

$$y_n(x,t) = (A_n \sin\omega_n t + B_n \cos\omega_n t)\sqrt{\frac{۲}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (۳\text{ـ}۱۵)$$

در اینجا A_n و B_n ثابتهای دلخواه هستند. معادلهٔ (۳ـ۱۵) بدون توجه به اینکه، این دو ثابت چه مقداری را اختیار کنند، جواب معادلهٔ موج (۳ـ۳) است. $\sqrt{۲/L}$ ضریب «بهنجارش» است. خواهیم دید که وجود آن وضع بهتری را به‌وجود می‌آورد. سرانجام، متوجه می‌شویم که انتخاب ثابت حقیقی منفی در (۳ـ۹ الف و ب) برای به‌دست آوردن شرایط «مرزی» فیزیکی در فضا و زمان ضروری است.

چون، همان‌طورکه قبلاً اشاره شد، معادلهٔ موج خطی است، جوابهایش فقط به صورت (۳ـ۱۵) با n صحیح و مثبت نیست، بلکه مجموع هر تعداد از این جوابها نیز، خود جواب مسئله است:

$$y(x,t) = \sum_{n=۱}^{\infty}(A_n \sin\omega_n t + B_n \cos\omega_n t)\sqrt{\frac{۲}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (۳\text{ـ}۱۶\,\text{الف})$$

بدین‌ترتیب با در اختیار داشتن دو مجموعهٔ نامتناهی ثابتهای A_n و B_n، هر حرکت طبیعی تار کشیده شده‌ای را که دو سرش بسته است را می‌توان به درستی توصیف کرد. کلی‌ترین جواب معادلهٔ موج را با اعمال شرایط مرزی $x = ۰$ و $x = L$ به‌دست آورده‌ایم. مقادیر A_n و B_n به شرایط اولیه یعنی به شکل اولیهٔ تار و به توزیع سرعتها در طول تار که با آن حرکت آزاد بعدی را شروع می‌کنیم، وابسته‌اند. تعمیمی از جواب سادهٔ هماهنگ را که برای یک نوسانگر در فصل گذشته یافتیم، به‌دست آورده‌ایم. اینجا هم، قبل از اینکه بتوانیم مسئلهٔ خاصی را حل کنیم، لازم است بررسی صوری خود را با نوشتن جواب متناظر (۳ـ۱۶ الف) برای توزیع سرعت برروی تار، کامل کنیم:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=۱}^{\infty}\omega_n(A_n \cos\omega_n t - B_n \sin\omega_n t)\sqrt{\frac{۲}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (۳\text{ـ}۱۶\,\text{ب})$$

به مسئلهٔ شکل ۳ـ۳ باز می‌گردیم. از (۳ـ۱۶الف و ب)، در زمان $t = \circ$، داریم:

$$y(x, \circ) = \sum_n B_n \sqrt{\frac{۲}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{۳ـ۱۷ الف}$$

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=\circ} = \circ = \sum_n A_n \omega_n \sqrt{\frac{۲}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{۳ـ۱۷ب}$$

طرف چپ (۳ـ۱۷ الف) همان تابع x در شکل ۳ـ۳ است، یعنی جابه‌جایی اولیهٔ تار. چون فرض می‌کنیم که تار، در تمام طولش، از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند، طرف چپ (۳ـ۱۷ الف) را مساوی با صفر قرار داده‌ایم. آنچه در طرف راست می‌بینیم، عبارتهایی هستند که بسیار شبیه نمایشهای فوریهٔ توابع دلخواهی هستند که در فصل اول بررسی کردیم، تفاوت فقط در جزئیات است؛ در فصل ۱ با توابعی سروکار داشتیم که در گسترهٔ بینهایت $\infty- < x < \infty$ قرار داشتند، در حالی که در اینجا این گستره محدود است:

$$L > x > \circ$$

متناظر با آن، در آنجا گسترهٔ k شامل تمام مقادیر ممکن می‌شد، در حالی که اینجا، k به مقادیر گسستهٔ خاصی مقید است که با اعداد صحیح مثبت مشخص شده‌اند. انتگرال فصل ۱ به جمع برروی این مقادیر گسسته تبدیل شده است. اما ایده‌های کلی یکسان است و ثابتهای A_n و B_n هم به همان طریق به‌دست خواهند آمد.

اولین نکته‌ای که وجودش را مسلّم می‌کنیم، این است که توابع u_n

$$u_n = \sqrt{\frac{۲}{L}} \sin k_n x = \sqrt{\frac{۲}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = ۱, ۲, ۳, \ldots \tag{۳ـ۱۸}$$

هم، مجموعه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند:

$$\int_\circ^L u_n(x) u_m(x) dx = \circ \quad \text{وقتی} \quad n \neq m \tag{۳ـ۱۹ الف}$$

به علاوه، به خاطر ضریب $\sqrt{۲/L}$، انتگرال‌گیری باز هم نشان می‌دهد که

$$\int_\circ^L u_n(x) u_m(x) dx = ۱ \quad \text{وقتی} \quad n = m \tag{۳ـ۱۹ب}$$

رابطهٔ (۳ـ۱۹ب) حاکی از آن است که توابع u_n بهنجار شده‌اند. قبلاً هم گفتیم که (۳ـ۱۶الف) کلی‌ترین جواب مسئله است. معادله‌های (۳ـ۱۷) به‌ازای هر انتخاب فیزیکی توابع $y(x,\circ)$ و $\partial y(x,\circ)/\partial t$ برقرارند. این نکات، همانند فصل ۱، به این می‌انجامد که توابع

$$u_n(x), \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

مجموعهٔ راست هنجار کاملی از توابع پایه را تشکیل می‌دهند.

اینک از (۳ـ۱۹) برای حل (۳ـ۱۷) استفاده می‌کنیم. طرفین (۳ـ۱۷ الف) را در $\sqrt{۲/L}\sin m\pi x/L$ ضرب می‌کنیم و از طرفین برروی گسترهٔ تعریف شدهٔ x انتگرال می‌گیریم:

$$\sqrt{\frac{۲}{L}}\int_{\circ}^{L}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)y(x,\circ)dx=\sum_{n=۱}^{\infty}B_n\left(\frac{۲}{L}\right)\int_{\circ}^{L}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

اگر طرف راست این رابطه را با (۳ـ۱۹ الف) مقایسه کنیم، مشاهده می‌کنیم که همهٔ جملات این جمع به غیر از جمله‌ای که در آن $n = m$ است، صفرند. به علاوه، (۳ـ۱۹ب) نشان می‌دهد که این جملهٔ بخصوص جمع، همان B_m است. اگر معادله را برای B_m حل کنیم، فرمول مطلوب را برای ضریب B_m به‌دست می‌آوریم:

$$B_m = \sqrt{\frac{۲}{L}}\int_{\circ}^{L}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)y(x,\circ)dx = \int_{\circ}^{L}u_m(x)y(x,\circ)dx \qquad \text{(۳ـ۲۰ الف)}$$

همین رویه در مورد (۳ـ۱۷ب) به فرمول زیر می‌انجامد.

$$A_m = \frac{۱}{\omega_m}\sqrt{\frac{۲}{L}}\int_{\circ}^{L}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\frac{\partial y(x,\circ)}{\partial t}dx$$

$$= \frac{۱}{\omega_m}\int_{\circ}^{L}u_m(x)\frac{\partial y(x,\circ)}{\partial t}dx \qquad \text{(۳ـ۲۰ب)}$$

بالاخره، با استفاده از (۳ـ۲۰) برای تابع بخصوص $y(x,\circ)$ در شکل ۳ـ۳، می‌توان نوشت

$$B_m = h\sqrt{\frac{۲}{L}}\int_{L/۲-a/۲}^{L/۲+a/۲}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

زیرا، $y(x,\circ)$ در جاهای دیگر صفر است. با محاسبهٔ انتگرال داریم

$$B_m = \frac{۲h\sqrt{۲L}}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{۲}\sin\left(\frac{am}{L}\cdot\frac{\pi}{۲}\right) \qquad \text{(۳ـ۲۱ الف)}$$

چون سرعت اولیه همه‌جا صفر است، از (۳ـ۲۰ب) همچنین داریم

$$A_m = 0 \qquad \text{(۳ـ۲۱ب)}$$

که به ازای تمام m برقرار است. متوجه می‌شویم که B_m همه برای مقادیر زوج m صفر است و این به خاطر ضریب $\sin(m\pi/2)$ در (۳ـ۲۱ الف) است. وضعیت شبیه حالتی است که در مثال ۱ـ۱ به آن برخوردیم. تقارن زوج نسبت به مرکز تار، تمام توابع u_n را که نسبت به وسط تار تقارن فرد دارند، کنار می‌گذارد.

معادله‌های (۳ـ۱۶ الف) و (۳ـ۲۱) حل مسئلهٔ شرط اولیه‌ای ما را تشکیل می‌دهند. هنگامی که ضرایب A_m، B_m که از (۳ـ۲۱) به‌دست آمده‌اند، در عبارت کلی (۳ـ۱۶ الف) قرار گیرند، شکل‌گیری جابه‌جایی y را در تمام نقاط x به‌ازای تمام زمانها خواهیم داشت. می‌بینیم که اگر سیستمی گسترده چون تارکشیده شده داشته باشیم، که مکانها و سرعتهای آن در زمانی اولیه، $t = 0$، مشخص هستند، روال منظمی برای یافتن حرکت سیستم در زمانهای بعدی وجود دارد. با توجه به دلایل فیزیکی، انتظار داریم که این جواب یکتا باشد؛ یعنی وقتی که سیستم شروع به حرکت کرد، تحول آن همواره به یک شکل است. ریاضیات مؤید آن است که معادلهٔ دیفرانسیل جزئی از نوع معادلهٔ موج، با شرایط مرزی مشخص، اگر مقادیر اولیهٔ مکان و سرعت معین شده باشند فقط دارای یک جواب است. چون، راه‌حلی که ارائه شد، نسبتاً طولانی است، آن را در جدول ۳ـ۱ خلاصه کرده‌ایم.

یک جنبهٔ (۳ـ۱۶ الف) نیازمند توضیح بیشتری است. متوجه می‌شویم وقتی مقادیر دامنه‌های A_n و B_n مشخص شدند، در طول ثابت باقی می‌مانند. هیچ ارتباطی میان مؤلفه‌های مختلف جوابهای y_n در (۳ـ۱۵)، وجود ندارد:

$$y_n(x,t) = (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) u_n(x)$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \qquad \text{(۳ـ۱۶ الف)}$$

کمیتی که به وضوح این استقلال مؤلفه‌های مختلف حرکت را نشان می‌دهد، انرژی تار است، که به صورت جمع جمله‌های مختلف، هر یک به‌ازای یک مقدار n، نوشته می‌شود. این نکته در یکی از مسائل انتهای فصل مطرح می‌شود. در رهیافتهای پیشرفته‌تر می‌توان حرکت سیستم را با در نظر گرفتن انرژیهای جنبشی و پتانسیل، به‌جای نیروها، به‌دست آورد. در آن صورت، مسئله به یافتن توابع $y_n(x,t)$ که سهم مستقل از یکدیگر در عبارت انرژی دارند، تبدیل می‌شود.

با همهٔ این ویژگیها، دیگر شگفت‌انگیز نیست که به جوابهای مستقل مسئله، y_n، نامی را اختصاص دهیم. آنها مدهای بهنجار حرکت سیستم هستند. یکی از پیامدهای جواب (۳ـ۱۶ الف)

جدول **۳ـ۱** روال منظم حل یک مسئلهٔ مقدار اولیه برای سیستمی که آشفته شده است

سیمی تحت کشش T در فاصلهٔ $x = \circ$ تا $x = L$ قرار دارد. چگالی آن ϱ است. جابه‌جایی کوچک سیم، y، در معادلهٔ موج زیر صدق می‌کند

$$\frac{\partial^{۲} y(x,t)}{\partial t^{۲}} = s^{۲} \frac{\partial^{۲} y(x,t)}{\partial x^{۲}} \tag{۳ـ۳}$$

که در آن

$$s^{۲} = \frac{T}{\varrho} \tag{۳ـ۴}$$

شرایط مرزی عبارت‌اند از

$$y(\circ, t) = \circ, \qquad y(L,t) = \circ \tag{۳ـ۶}$$

جواب کلی که به‌ازای تمام زمانها در (۳ـ۳) و (۳ـ۶) صدق می‌کند، چنین است،

$$y(x,t) = \sum_{n=۱}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) u_n(x) \tag{۳ـ۱۶ الف}$$

در اینجا، $\omega_n = sk_n$ و $u_n(x)$ مجموعهٔ راست هنجارِ کاملِ توابعِ

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{۲}{L}} \sin k_n x \tag{۳ـ۱۸}$$

است، که در آن

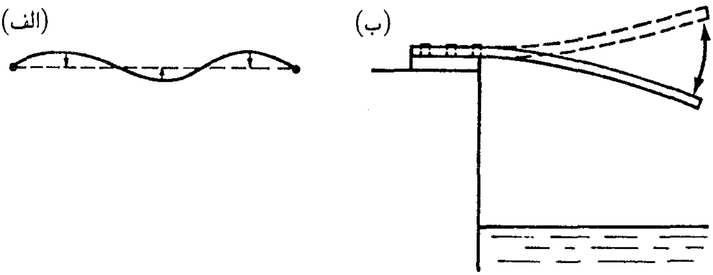
$$k_n = \frac{n\pi}{L} \tag{۳ـ۱۴ الف}$$

ضرایب A_n، B_n با استفاده از شرایط اولیه، از طریق فرمولهای

$$A_n = \frac{۱}{\omega_n} \int_{\circ}^{L} u_n(x) \left. \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right|_{t=\circ} dx \tag{۳ـ۲۰ الف}$$

$$B_n = \int_{\circ}^{L} u_n(x) y(x, \circ) dx \tag{۳ـ۲۰ ب}$$

به‌دست می‌آیند.



شکل ۳ـ۴ (الف) تار کشیده شده که فقط در مد $n = ۳$ نوسان می‌کند. (ب) تختهٔ پرش شنا که در پایین‌ترین مد خود نوسان می‌کند. هر مد بالاتری که در ابتدا برانگیخته شود، به سرعت میرا خواهد شد.

آن است که اگر قرار باشد تار را چنان برانگیزیم که در ابتدا فقط یک مد، مثلاً، $y_۱$، وجود داشته باشد، آنگاه، تار در طول زمان فقط با این مد نوسان خواهد کرد، شکل ۳ـ۴. در عمل، اغلب، مدهای بالاتر به سرعت میرا می‌شوند و فقط پایین‌ترین مد (مد بنیادی) باقی می‌ماند، شکل ۳ـ۴ب. می‌گوییم مدها مشخصهٔ سیستم هستند. [در بررسی‌های پیشرفته‌تر از نام «ویژه تابع» برای توابع $y_n(x, t)$ نیز استفاده می‌شود، ویژه در آلمانی به معنای مشخصه است. در فصل ۶، هنگامی که به مکانیک کوانتومی می‌رسیم، بر مفاهیمی که به همراه نامگذاری اخیر می‌آیند، تأکید خواهیم کرد.] به‌طور خلاصه می‌توان گفت که، حرکت سیستمهای گسترده را می‌توان به‌صورت برهم نهی مدهای پایهٔ حرکت، مدهای بهنجار، در نظر گرفت.

اکنون مدهای بهنجار تار را با جزئیات بیشتر بررسی می‌کنیم. ابتدا متوجه می‌شویم که بستگی زمانی همهٔ آنها، هماهنگ ساده است. در واقع، بسامدهای زاویه‌ای ω_n مضربهای صحیحی از پایین‌ترین بسامد $\omega_۱$ هستند، که آن را بسامد بنیادی سیستم می‌نامند، داریم

$$\omega_n = n\omega_۱ \quad n = ۱, ۲, ۳ \ldots \quad \omega_۱ = \frac{\pi s}{L}$$

بسامدهای بالاتر را گاهی هماهنگهای بالاتر یا تُنهای بالاتر می‌گویند.

مدهای بهنجاری که یافته‌ایم، نمونه‌ای از امواج ایستاده هستند. دیدیم که تعریف موج عبارت بود از هرگونه آشفتگی (حرکت) در سیستم گسترده آشفته شده برای تار همگن (چگالی ثابت) دریافتیم که مدهای بهنجار هم در فضا و هم در زمان هماهنگ ساده هستند. در بررسی‌های مقدماتی، از ابتدا امواج به صورت تابعی زیر مطرح می‌شوند

$$y = A \begin{Bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \cos kx \\ \sin kx \end{Bmatrix}$$

یعنی به‌صورت یکی از چهار حاصلضرب ممکن. این امواج را ایستاده می‌نامند، زیرا محل شکمها و گره‌های آنها در فضا تغییر نمی‌کند.

یک رابطهٔ دیگر هم وجود دارد که مشخصهٔ امواج هماهنگ است. فرض کنید $f_n(=\omega_n/۲\pi)$، بسامد مشخصهٔ یک موج باشد. فرض کنید λ_n (که قبلاً در (۱ـ۱۰) به‌صورت $۲\pi/k_n$ معرفی شد)، طول‌موج مربوط به آن باشد. دراین صورت اندکی عملیات جبری نشان می‌دهد که (۳ـ۱۴ب) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\lambda_n f_n = s = \text{سرعت موج} \qquad (۳\text{ـ}۲۲)$$

نتیجه‌ای که مستقل از n است. علاوه بر امواج ایستاده، از امواج پیشرونده نیز می‌توان سخن گفت،

$$y = A\sin(kx - \omega t)$$

متوجه می‌شویم که اینها مثال خاصی از جواب (۳ـ۵) معادلهٔ موج هستند. در اینجا رابطهٔ $\lambda f = s$ تعبیر فیزیکی واضحی دارد. چون نمی‌توان فرض کرد که هر خواننده‌ای با این ایده‌های مقدماتی آشناست، در بخش مسائل دوباره به آنها می‌پردازیم.

۳ـ۴ حرکت واداشتهٔ تار کشیده

با حل مسئلهٔ حرکت طبیعی تار به حرکت واداشتهٔ آن می‌پردازیم؛ چگونه سیستم به اعمال نیروی محرک پاسخ می‌دهد؟ چون اکنون انتظار داریم $F(x,t)$ در (۳ـ۲) تأثیر کنترل کننده باشد، با در نظر گرفتن (۳ـ۴)، معادلهٔ (۳ـ۲) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم،

$$\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲} + \beta\frac{\partial y}{\partial t} - s^۲\frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲} = \frac{F(x,t)}{\varrho} \qquad (۳\text{ـ}۲۳)$$

در اینجا یک نیروی میرایی در واحد طول $-(\beta\varrho\partial y/\partial t)$، را که متناسب با سرعت، $\partial y/\partial t$، است اضافه کرده‌ایم، درست همانند نیروی میراکنندهٔ $-bdx/dt$ که در فصل ۱ به نوسانگر هماهنگ اضافه کردیم. اما، خواهیم دید که نیازی به توصیف مفصل اثرات آن نیست. بلکه، به خاطر تعریف ریاضی، آن را وارد کرده‌ایم، یعنی برای اجتناب از برخی بینهایت‌ها، و در آنچه در زیر می‌آید، اغلب نیروی میراکننده را بینهایت کوچک فرض خواهیم کرد.

لازم نیست مسئله تار تحت تأثیر نیروی دلخواه را حل کنیم. بلکه، حالت خاص نیروی جایگزیده در فضا را که بستگی زمانی آن هماهنگ ساده باشد بررسی می‌کنیم. با استفاده از تابع دلتای

دیراک فصل ۱ که به صورت (۱ـ۲۳) تعریف شده است، می‌توانیم رابطه‌ای تحلیلی برای نیرویی که در فضا جایگزیده است بنویسیم. بنابراین، برای نیروی در واحد طول $F(x,t)$ داریم

$$F(x,t) = F_\omega \delta(x - x_\circ) \cos \omega t \qquad (۳\text{ـ}۲۴)$$

نیروی کل وارد بر تار را نیز می‌توان با انتگرال $F(x,t)$ روی تار به‌دست آورد

$$\int_\circ^L F(x,t)dx = \int_\circ^L F_\omega \delta(x - x_\circ) \cos \omega t dx = F_\omega \cos \omega t$$

اگر (۳ـ۲۳) و (۳ـ۲۴) را با هم ترکیب کنیم داریم

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial y}{\partial t} - s^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{F_\omega}{\varrho} \delta(x - x_\circ) \cos \omega t \qquad (۳\text{ـ}۲۵)$$

اگر بخواهیم پاسخ تار را به یک نیروی دلخواه در فضا و زمان بدانیم، همواره می‌توانیم آن را به مجموع جملاتی به صورت (۳ـ۲۴) با بسامدهای متفاوت و مکانهای مختلف $x_\circ$ در طول تار، تجزیه کنیم. سپس از خاصیت معادله‌های خطی ناهمگن که در فصل قبل به آن اشاره کردیم استفاده می‌کنیم، به این‌ترتیب که، جواب این نوع معادله‌ها مجموع تک‌تک جوابهاست، که هر یک با مساوی قرار دادن طرف راست معادله با مؤلفهٔ بخصوصی از نیروی محرک به‌دست آمده‌اند. در اینجا به این جزئیات نمی‌پردازیم و آنها را به مسائل موکول می‌کنیم، در عوض سعی می‌کنیم اثر نیرویی به صورت (۳ـ۲۴) را به خوبی درک کنیم.

پاسخ زمانی سیستمی که تحت اثر نیروی محرک هماهنگ ساده، به شکل (۳ـ۲۵) باشد، چیست؟ در ابتدا، باید بین پاسخ حالت مانا و پاسخ اولیه تفاوت بگذاریم. مورد اخیر، جوابی از معادلهٔ موج همگن را به میان می‌آورد که سرانجام باید برای مطابقت با شرایط اولیهٔ مسئله منظور شود. در تحلیل پاسخ اولیه، که همان مسئلهٔ مقدار اولیه بخشهای گذشته است، دریافتیم که همهٔ مدهای بهنجار حرکت به میزانهای مختلف برانگیخته می‌شوند، و سیستم در تمامی این مدها نوسان می‌کند. اما، در آن تحلیل، میرایی ناشی از اصطکاک را در نظر نگرفتیم. عمل نیروی میراکننده به لحاظ کیفی با آنچه برای تک‌نوسانگر در فصل ۲ بررسی کردیم. یکسان است. در عمل، مدهای بالاتر یا سریعتر حرکت، زودتر انرژی خود را از دست می‌دهند تا سرانجام نوبت به مد بنیادی برسد. این اثرات را بازهم «گذرا» می‌نامیم، و در می‌یابیم که طول عمر آنها، مانند تک‌نوسانگر با قدرت نیروی میراکننده، β، نسبت عکس دارد. وقتی پاسخ گذرا از بین برود، چه باقی می‌ماند؟ آنچه باقی می‌ماند، حرکت برانگیخته، یعنی حرکتی که صرفاً به نیروی محرک هماهنگ پیوستهٔ پایا بستگی

دارد. تا آنجایی که به این حالت پایا مربوط می‌شود، می‌توان فرض کرد که نیروی محرک همواره، از زمان منهای بینهایت، حضور داشته است.

اگر نیروی محرک واقعاً از زمان منهای بینهایت وجود داشته و در آینده هم موجود باشد، می‌دانیم که پاسخ سیستم چگونه خواهد بود. از فصل ۱، به یاد داریم که توابعی از نوع $\cos\omega t$، $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ در حوزهٔ زمانی نامتناهی متعامد هستند. پیامد منطقی حاصل آن است که پاسخ زمانی y، هم درست مانند نوسانگر هماهنگ واداشته در فصل ۲، هماهنگ ساده با همان بسامد نیروی محرک خواهد بود. اگر انتقال فاز ناشی از میرایی را نادیده بگیرم، یعنی β را بینهایت کوچک فرض کنیم، خواهیم داشت $y(x,t)\propto\cos\omega t$. فعلاً، به‌طور کلی‌تر می‌نویسیم

$$y(x,t)\propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \qquad (۳\text{ـ}۲۶)$$

اما وابستگی فضایی y به x برای حرکت واداشته چگونه است؟ در اینجا می‌توانیم به روش بخشهای گذشته برگردیم، و به یاد آوریم که مجموعهٔ توابع $u_n(x)$ در (۳ـ۱۸) مجموعه‌ای کامل از توابع در گسترهٔ $x=۰$ تا $x=L$ است، در صورتی که نقطه‌های انتهایی ثابت باشند. با استفاده از این نکته و در نظر داشتن (۳ـ۲۶)، $y(x,t)$ را به شکل

$$y(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}C_n u_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \qquad (۳\text{ـ}۲۷)$$

می‌نویسیم. مانند بخشهای سابق C_n مجموعه‌ای از ضرایب (مختلط) را تشکیل می‌دهد، که جواب مطلوب را به‌دست می‌دهد [که با قسمت حقیقی (۳ـ۲۷) داده می‌شود].

با قراردادن (۳ـ۲۷) در (۳ـ۲۵) داریم

$$\sum_{n=۱}^{\infty}C_n\left[u_n(x)\left(\frac{d^۲}{dt^۲}+\beta\frac{d}{dt}\right)-s^۲\frac{d^۲u_n(x)}{dx^۲}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=\frac{F_\omega}{\varrho}\delta(x-x_۰)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

با مشتق‌گیریهای لازم، چنین به‌دست می‌آوریم

$$-\sum_{n=۱}^{\infty}C_n u_n(x)(\omega^۲-\mathrm{i}\omega\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+s^۲\sum_{n=۱}^{\infty}C_n k_n^۲ u_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=\frac{F_\omega}{\varrho}\delta(x-x_۰)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

اگر ضریب مشترک $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ را حذف کنیم، چنین داریم که

$$\sum_{n}C_n u_n(x)(s^۲k_n^۲+\mathrm{i}\omega\beta-\omega^۲)=\frac{F_\omega}{\varrho}\delta(x-x_۰)$$

اکنون از ترفند معمولِ ضرب کردن طرفین در $u_m(x)$ و انتگرال‌گیری روی x از ۰ تا L استفاده می‌کنیم:

$$\sum_n C_n(s^۲k_n^۲ + \mathrm{i}\omega\beta - \omega^۲)\int_۰^L u_m(x)u_n(x)dx = \frac{F_\omega}{\varrho}\int_۰^L u_m(x)\delta(x-x_۰)dx$$

به واسطهٔ راست هنجاری (۳ـ۱۹ الف و ب)، طرف چپ به فقط یک جمله تقلیل می‌یابد؛ طرف دوم را با استفاده از تعریف تابع دلتای دیراک (۱ـ۲۳)، محاسبه می‌کنیم. داریم

$$C_m(s^۲k_m^۲ + \mathrm{i}\omega\beta - \omega^۲) = \frac{F_\omega}{\varrho}u_m(x_۰)$$

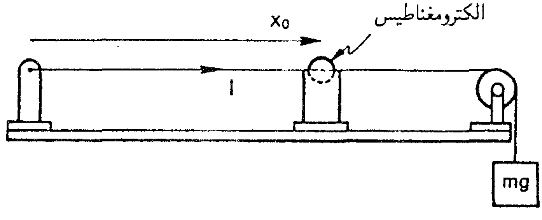
با مراجعه به (۳ـ۱۴ب)، یعنی $\omega_m = sk_m$، C_m را چنین می‌نویسیم

$$C_m = \frac{\frac{F_\omega}{\varrho}u_m(x_۰)}{(\omega_m^۲ + \mathrm{i}\omega\beta - \omega^۲)}$$

وقتی این نتیجه را برای C_m، در (۳ـ۲۷) قرار می‌دهیم و قسمت حقیقی را در نظر بگیریم، پاسخ مطلوب را برای تار به‌دست می‌آوریم. در فصل ۲، تمام پیامدهای میرایی، $\beta \neq ۰$، را سنجیده‌ایم. در اینجا β را بسیار کوچک فرض می‌کنیم، به‌طوری که اگر درست در تشدید نباشیم، بتوانیم با گرفتن قسمت حقیقی، $y(x,t)$ را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\boxed{y(x,t) = \frac{F_\omega}{\varrho}\sum_n \frac{u_n(x)u_n(x_۰)}{(\omega_n^۲ - \omega^۲)}\cos\omega t \qquad \omega \neq \omega_n, n = ۱, ۲, ۳\ldots} \qquad (۲۸\text{-}۳)$$

ابزار آزمون (۳ـ۲۸) را می‌توان به‌سادگی ساخت. شکل ۳ـ۵ نمودار طرح‌وار آن را نشان می‌دهد. سیم سبکی که انتهای چپ آن ثابت است. طرف دیگر آن از روی قرقره‌ای که در منتهی‌الیه



شکل ۳ـ۵ سیم حامل جریان DC است که با I نشان داده شده است. نیروی لورنتس، $Il \times \mathbf{B}$ که در $x_۰$ بر سیم وارد می‌شود، سیم را در راستای قائم با بسامد برق شهر به نوسان در می‌آورد. به کمک این ابزار می‌توان حرکت برانگیختهٔ سیم کشیده را بررسی کرد.

میز قرار دارد می‌گذرد و دارای قلابی است که وزنه‌های مختلف به آن متصل می‌شود. این ابزار آهنربای الکتریکی کوچکی نیز دارد که میدان مغناطیسی نوسان‌کننده‌ای تولید می‌کند، بسامد آن را می‌توان همان بسامد برق شهر $(2\pi)60\ \mathrm{rad/s}$ فرض کرد. جریان الکتریکی DC در سیم فرستاده می‌شود، تا نیروی لورنتس $(I\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B})$، سیم را با بسامد برق شهر در جهتی عمود بر سیم و میدان مغناطیسی اعمال شده، به حرکت در آورد. محل آهنربا را که قابل تنظیم است با $x_\circ$ نشان می‌دهیم و نیرو در واحد طول را با $\delta(x-x_\circ)F_\omega\cos\omega t$ (کل نیرو $F_\omega\cos\omega t$ است). نمایش تابع دلتای نیروی اعمال شده به شرطی معتبر است که گسترهٔ میدان مغناطیسی در مقایسه با طول‌موجهای برانگیخته مورد نظر کوچک باشد.

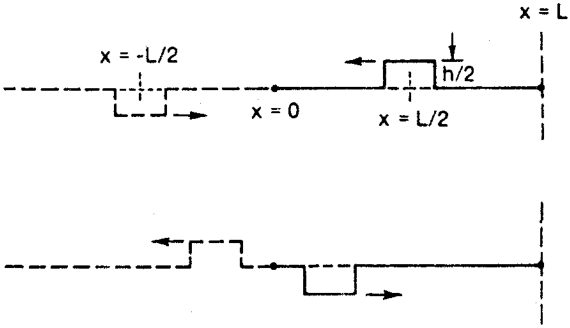
بدون توجه به محل آهنربا کشش نوسانی وجود خواهد داشت و وِز وِزی شنیده خواهد شد. بسامد نوسان را هم همواره می‌توانیم با استروبسکوپ اندازه بگیریم و مطمئن شویم که همان بسامد برق شهر است، و بدین‌ترتیب ضریب آخر در (۳ـ۲۸) یعنی $\cos\omega t$ را بررسی کنیم. اما اگر بسامد نوسان سیم چیز دیگر از آب درآید متعجب می‌شویم! البته، وجود هماهنگهای بالاتر در ولتاژ برق شهر همواره امکان‌پذیر است.

حال اگر کشش سیم را تغییر دهیم، دامنهٔ نوسانهای سیم ناگهان به شدت افزایش می‌یابد. این بدان‌معنی است که به یکی از صفرهای مخرج (۳ـ۲۸) برخورده‌ایم، یعنی، کشش را چنان تنظیم کرده‌ایم که

$$n\left(\frac{\pi}{L}\right)\sqrt{\frac{T}{\varrho}}=\omega_n=\omega \qquad (۳\text{ـ}۲۹)$$

سیستم در حالت تشدید قرارگرفته است. اوضاع در اینجا شبیه چیزی است که برای نوسانگر قلنبه داشتیم، با این تفاوت که اکنون بینهایت تشدید، یکی به‌ازای هر مد بهنجار n، داریم. اگر میرایی را مانند فصل قبل به صراحت منظور می‌کردیم، مخرج (۳ـ۲۸) به شکل پیچیده‌تر (۲ـ۲۴ج) می‌شد و در تشدید متناهی باقی می‌ماند.

علاوه بر محاسبهٔ n از (۳ـ۲۹) و تأیید اینکه عددی صحیح است، با مشاهدهٔ دقیق و یا به کمک تکه کاغذهایی متصل به سیم برای مشخص کردن محل گره‌ها، می‌توانیم ثابت کنیم که نوسانهای سیم موج ایستاده‌ای را تشکیل می‌دهند که دقیقاً با تابع $u_n(x)$ در (۳ـ۲۸) توصیف می‌شود. با توجه به (۳ـ۲۸) همچنین متوجه می‌شویم که پاسخ سیم هنگامی بیشینه است که آهنربا درست در محل یکی از شکمهای موج ایستاده قرار داده شود. این رفتار را وجود ضریب $u_n(x_\circ)$ در صورت (۳ـ۲۸) پیش‌بینی می‌کند. به‌نظر می‌آید که این ضریب تأثیر جفت‌شدگی



شکل ۳ـ۶ بازتاب تپ از انتهای ثابت با استفاده از روش تصاویر.

آهنربا را به سیستم می‌سنجد. معمولاً کسی زحمت بررسی وجود ضریب اول یعنی F_ω/ϱ در (۳ـ۲۸) را به خود نمی‌دهد. اما البته حضور آن براساس دلایل فیزیکی منطقی است. بنابراین، استدلال ریاضی ما را می‌توان به راحتی و به‌طور کامل آزمود و شناختی کامل از کل به‌دست آورد.

مثال ۳ـ۱

وقتی تپی که در شکل ۳ـ۳ب به انتهای چپ تار نزدیک می‌شود، به تکیه‌گاه ثابت آن برسد، جابه‌جایی آن چگونه می‌شود؟

حل: تابعی که تپ اولیه را که به طرف چپ تار حرکت می‌کند با $y(x,t) = Y(x+st)$ نشان می‌دهیم. ■

فرض کنید جابه‌جایی $y(x,t) = Y(x+st) - Y(st-x)$ را در نظر بگیریم. که در آن تپ دوم در $t = 0$ در حوالی $x = -L/2$ است. $y(x,t)$ جوابی کاملاً قابل قبول است. این جواب

الف) در $t = 0$ برای $L > x > 0$ شرایط اولیه را داراست،

ب) در معادلهٔ موج برای تار صدق می‌کند،

ج) شرایط مرزی را در $x = 0$ و $x = L$ داراست (شرط دوم را فقط برای زمانی محدود).

در $x = 0$، $y(0,t) = Y(st) - Y(st) = 0$.

چون شرایط (الف تا ج) شرایط لازم و کافی برای جواب هستند، مسئله را حل کرده‌ایم. دقت کنید که $Y(st-x)$ تپی است که، مطابق شکل به طرف راست حرکت می‌کند. اثر تکیه‌گاه ثابت، تولید موج «بازتابیده» است.

مسائل

۳ـ۱ جواب کلی $y(x,t)$ را برای سیم کشیده شده با جابه‌جایی اوّلیه $y_\circ(x)$ [$y_\circ(x) = y(x,\circ)$]، و سرعت اولیهٔ $v_\circ(x)$، [$v_\circ(x) = \partial y(x,t)/\partial t|_{t=\circ}$]، به‌دست آورید. وقایع شکل **۳ـ۳** چگونه از جواب شما به‌دست می‌آید؟

راهنمایی: فرض کنید $y(x,t) = g_۱(x+st) + g_۲(x-st)$، که در آن $g_۱$ و $g_۲$ را باید بیابید.

۳ـ۲ با انتگرال‌گیری مستقیم، (۳ـ۱۹ الف و ب) را ثابت کنید.

۳ـ۳ (۳ـ۲۱ الف) و (۳ـ۳۲ب) را ثابت کنید. درباره نتایجی که در این روابط وجود دارد بحث کنید.

راهنمایی: نگاه کنید به مثال ۱ـ۱.

۳ـ۴ تاری به طول L که دو سرش ثابت هستند، فقط در مد بهنجار دوم، $n = ۲$، نوسان می‌کند. سرعت اولیهٔ آن برای تمام مقادیر x صفر است.

الف) نمودار طرح‌واری از تار در زمانهای

$$t = \frac{۱}{۸}\frac{۲\pi}{\omega_۲}, \qquad t = \frac{۱}{۴}\frac{۲\pi}{\omega_۲}, \qquad t = \frac{۵}{۸}\frac{۲\pi}{\omega_۲}$$

رسم کنید که جابه‌جایی تمام xها را نشان دهد.

ب) نموداری از جابه‌جایی y برحسب زمان در نقطهٔ $x = (۳/۸)L$ و $x = L/۲$ رسم کنید.

ج) بگویید چرا آنچه رسم کرده‌اید متناظر با امواج ایستاده است.

۳ـ۵ تاری به طول ۱ متر ثابت است. اگر تمام بردارهای موج کوچکتر از $۱۰۰\,\mathrm{m}^{-۱}$، یعنی $k < ۱۰۰m^{-۱}$، را به حساب آوریم، این سیم چند مد بهنجار دارد؟

۳ـ۶ کل انرژی جنبشی یک تار مرتعش از انتگرال زیر به‌دست می‌آید

$$\mathrm{K.E}(t) = \frac{۱}{۲}\int_\circ^L \varrho \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^۲ dx$$

الف) چرا این انتگرال انرژی جنبشی را می‌دهد؟

ب) انرژی پتانسیل سیم کشیده، $V(t)$، حاصل کاری است که در برابر کشش T هنگامی صورت می‌گیرد که به دلیل جابه‌جایی، سیم بلندتر می‌شود. نشان دهید که

$$V(t) = \frac{T}{۲}\int_\circ^L \left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right]^۲ dx$$

ج) از رابطهٔ (۳ـ۱۶ب) استفاده کنید و نشان دهید که کل انرژی را می‌توان به‌صورت مجموع جمله‌های مربوط به مدهای بهنجار نوشت، چنانکه هر مد به‌طور مستقل و جدا از مدهای دیگر در این مجموع ظاهر شود.

۳ـ۷ الف) توان $P(x,t)$ منتقل شده در هر نقطه x تار حاصلضرب نیروی عرضی وارد از طرف چپ تار به طرف راست آن در سرعت عرضی تار در x است. نشان دهید که به‌ازای هر موج $y(x-st)$، P از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید،

$$P(x,t) = sT(y')^2$$

که در آن

$$\xi \equiv x - st \quad \text{و} \quad y' = \frac{dy(\xi)}{d\xi}$$

ب) حاصلضرب چگالی انرژی این موج (که از مسئلهٔ قبل به‌دست می‌آید) و سرعت موج s را به‌دست آورید. نتیجه را با $P(x,t)$ در قسمت (الف) مقایسه کنید.

۳ـ۸ در زمان $t = 0$ تار به صورتی که در شکل ۳ـ۷ آمده است، جابه‌جا شده است، در این زمان تار از حالت سکون رها می‌شود.

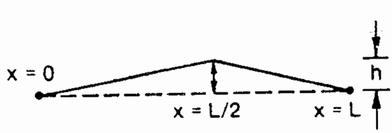
الف) این جابه‌جایی را به‌صورت بسطی از مدهای بهنجار بنویسید و ضرایب A_n، B_n را محاسبه کنید.

ب) شدت صوتی که تار نوسان کننده در هر یک از بسامدهای بهنجار تولید می‌کند متناسب با مربع دامنهٔ آن مد است. نشان دهید که شدت صوت پنجمین هماهنگ کمتر از ۲٫۰ درصد شدت صوت مد بنیادی است.

راهنمایی: آیا هماهنگهای زوج موجودند؟ و

$$\int \frac{hx}{\frac{L}{2}} \sin ax\,dx = \frac{2h}{a^2 L}\sin ax - \frac{2hx}{La}\cos ax + C$$

ج) با در نظر گرفتن هماهنگهای کمتر از چهارم، شکل تار را در $t = 0$ رسم کنید. بحث کنید و به علامتهای $(\pm)$ مختلف نیز توجه داشته باشید.



شکل ۳ـ۷ مسئلهٔ ۳ـ۸.

۳ـ۹ الف)[1] دو مد بهنجار را برای نوسانگرهای جفت شدهٔ شکل ۳ـ۸ بیابید.
راهنمایی: در معادله‌های حرکت قرار دهید

$$X_I(t) = X_I \cos \omega t \qquad I = ۱, ۲$$

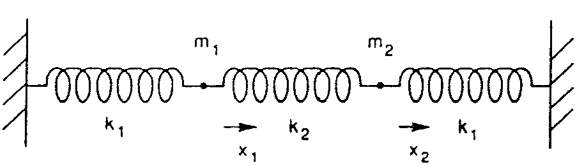
و دو مقدار ممکن ω را که جوابهای غیرصفر برای X_I به‌دست می‌دهند پیدا کنید. فرض کنید $m_۱ = m_۲ = m$.

ب) نشان دهید که وقتی $k_۲ \ll k_۱$، انرژیی که ابتدا به جرم طرف چپ، $m_۱$، دارد بین دو جرم $m_۱$ و $m_۲$ با دورهٔ $\beta \equiv k_۲/m$ و π/β که در آن m جرم مشترک است، ردوبدل می‌شود.
راهنمایی: $x_۱(t)$ و $x_۲(t)$ را برحسب مدهای بهنجار بیان کنید. شرایط اولیه زیر را در نظر بگیرید.

$$x_۱(\circ) = A, \qquad \left.\frac{dx_۱}{dt}\right|_{t=\circ} = \circ$$
$$x_۲(\circ) = \circ, \qquad \left.\frac{dx_۲}{dt}\right|_{t=\circ} = \circ$$

اکنون، $x_۱(t)x_۱^*(t)$، $x_۲(t)x_۲^*(t)$ یعنی مربع دامنه‌ها را محاسبه کنید.

ج) دو آونگ یکسان با اتصال محکم میله‌های آویزشان به دو سر یک میلهٔ پیچشی افقی به یکدیگر جفت شده‌اند. تحلیلی کیفی از رفتار سیستم را هنگامی که آونگ طرف چپ به یکسو کشیده می‌شود (عمود بر میله) و از حالت سکون رها می‌شود، و در حالی که آونگ طرف راست از نقطهٔ تعادل خود در پایین رها می‌شود به‌عمل آورید.
این آزمایش نمایش آزمایشگاهی مناسبی است.



شکل ۳ـ۸ مسئلهٔ ۳ـ۹.

۳ـ۱۰ سیمی به طول ۱٫۵ متر، ۲٫۵ گرم جرم دارد. چه جرمی باید به انتهای آن آویخته شود تا تشدید در سومین مد طبیعی حاصل شود؟ بسامد محرک آهنربای الکتریکی $۶۰\,\mathrm{Hz}$ است.

۱. مسئلهٔ ۳ـ۹ برای فصل ۶ دربارهٔ مکانیک موجی اهمیت دارد.

۳ـ۱۱ روش کلی نمایش تابع دلخواه $y(x)$ که در فاصلهٔ ۰ تا L دوره‌ای باشد، استفاده از مجموعهٔ کامل توابع تناوبی به‌شکل زیر است

$$y(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} A_n \sin \frac{۲n\pi x}{L} + \sum_{n=۰}^{\infty} B_n \cos \frac{۲n\pi x}{L}$$

پس، چرا مجموعهٔ $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ و $\sin(n\pi x/L)$، برای حالتی که دو انتهای سیم ثابت است، به عنوان مجموعه‌ای کامل ذکر می‌شود.

راهنمایی: به گسترهٔ بزرگتر ۰ تا $۲L$ فکر کنید و تابعی با تقارن مناسب را در نظر بگیرید.

۳ـ۱۲ الف) نشان دهید که سری ذکر شده در مسئلهٔ ۳ـ۱۱ برای $y(x)$ را می‌توان به‌صورت

$$y(x) \frac{\sqrt{۲\pi}}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(k_n) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n x}$$

نوشت، که در آن $k_n = ۲\pi n/L$. a_n را برحسب A_n و B_n بیابید.

ب) نشان دهید که

$$a_n(k_n) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-L/۲}^{+L/۲} y(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_n x} dx$$

که در آن x، به‌جای از ۰ تا L، در فاصلهٔ $-L/۲$ تا $L/۲$ قرار دارد.

ج) در قسمت الف)، در حد $L \to \infty$، $y(x)$ به چه انتگرالی میل می‌کند؟ رابطهٔ متناظر برای $a(k)$ کدام است؟

۳ـ۱۳ رابطهٔ فشار اضافی $p(x, t)$ یک موج صوتی که در جهت x در گاز حرکت می‌کند، با تراکم $\partial y(x, t)/\partial x$ به‌صورت $p(x, t) = -B\partial y(x, t)/\partial x$ است. در اینجا y جابه‌جایی مولکولی میانگین از حالت تعادل، و B «مدول کشسانی حجمی بی‌دررو» است. اگر امواج صوتی با بسامدهای ثابت یک دیاپازون را، در یک ستون شیشه‌ای با ارتفاع قابل تنظیم بفرستیم، تشدید به‌وجود می‌آید.

الف) با در نظر گرفتن نیروهایی وارد و شتاب برشی از گاز به ضخامت Δx نشان دهید

$$s^۲ \frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲} = \frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲}$$

که در آن، $s^۲ = B/\varrho$ و ϱ چگالی است.

ب) مجموعهٔ مدهای بهنجار $y_n(x,t)$ را برای جابه‌جایی میانگین مولکولهای هوا نسبت به حالت تعادل به‌دست آورید. شرایط مرزی را چنین بگیرید: فشار اضافی در بالای ستون وجود ندارد و جابه‌جایی میانگین در قسمت بستهٔ پایین استوانه صفر است. آیا این مدها طولی (دارای جابه‌جایی در جهت حرکت موج) هستند، یا مانند امواج روی تار، عرضی هستند؟

ج) با توجه به روش مسئلهٔ ۳ـ۹ پیرامون کامل بودن مجموعهٔ مدهایی که به‌دست آورده‌اید بحث کنید.

راهنمایی: گسترهٔ $-۲L < x < ۲L$ را در نظر بگیرید.

د) بدون اینکه محاسبه را عملاً انجام دهید، توضیح دهید که چگونه می‌توان نتیجه‌ای مشابه با (۳ـ۲۸) به‌دست آورد، و با فرض اینکه سیستم از جایی نزدیک به بالای ستون هوا برانگیخته می‌شود، فکر می‌کنید نتیجه چه باشد. در چه بسامدهایی تشدید به‌وجود می‌آید؟

۳ـ۱۴ نیروی $F(t) = F_۰ \cos\omega_۰ t$ به‌طور عمودی به انتهای $x = ۰$ تار بلندی به چگالی ϱ و کشش افقی T وارد می‌آید. (تار بلند متناظر با حالتی است که سیگنال بازتابیده یا بسیار کوچک است و یا به‌قدری دیر می‌رسد که به حساب نمی‌آید.)

الف) چرا عبارت $y = -y_۰ \sin(\omega_۰ x/s - \omega_۰ t)$ را موج پیشرونده می‌خوانیم؟ تعبیر فیزیکی رابطهٔ $\lambda f = s$ برای این موج چیست؟

راهنمایی: چند موج در واحد زمان از کنار ناظر ساکن می‌گذرند؟

ب) با این فرض که موج پیشرونده‌ای که در $x = ۰$ در طرف برانگیخته سیم سرچشمه بگیرد، نشان دهید که نسبت $F(t)/[\partial y(۰,t)/\partial t]$ در تمام زمانها از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{F(t)}{\dfrac{\partial y}{\partial t}} = \frac{T}{s}$$

که در آن s سرعت موج است.

ج) با استفاده از اصل برهم نهی نشان دهید که چرا برای تار بلندی که نیروی اعمال شده خارجی بر آن صفر است می‌توان نوشت

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int\limits_۰^\infty \left[A(\omega)\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{s}\right) + B(\omega)\sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{s}\right)\right] d\omega \qquad x > ۰$$

د) اگر در انتهای $x = \circ$

$$\frac{\partial y(\circ, t)}{\partial t} = \frac{۱}{۲}\frac{F_\circ s}{T}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_\circ t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\circ t})\mathrm{e}^{-\frac{t^۲}{۴n}}$$

نشان دهید که

$$A(\omega) = \sqrt{۲\pi}\left(\frac{F_\circ s}{T}\right)[g_n(\omega_\circ - \omega) + g_n(\omega_\circ + \omega)]$$

که در آن

$$g_n(x) \equiv \sqrt{\frac{n}{\pi}}\mathrm{e}^{-nx^۲}$$

$$B(\omega) = \circ$$

ه) تابع $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t - \omega x/s}$ را تابع مناسب بگیرید و از قسمت‌های (ج) و (د) $\partial y(x,t)/\partial t$ در حد $n \to \infty$ استفاده کنید.

و) با استفاده از قسمت‌های (ج) و (د) $\partial y(x,t)/\partial t$ را بدون در نظر گرفتن حد $n \to \infty$ بیابید و دربارهٔ و نتیجهٔ حاصل بحث کنید.

۳ـ۱۵ الف) انتهای $x = \circ$ یک تار تحت کشش که در $x = L$ ثابت است چنان برانگیخته می‌شود که $y(\circ, t) = A\cos\omega_\circ t$. با فرض اینکه تار در ابتدا ساکن باشد، $y(x,t)$ را به‌دست آورید.

راهنمایی: فرض کنید $z(x,t) = y(x,t) + [A(x-L)/L]\cos\omega_\circ t$.

ب) تفاوتها و شباهتهای نتیجهٔ خود را با گزارهٔ زیر ذکر کنید: اگر یک انتهای سیمی با بسامد طبیعی به حرکت درآید در حالی که انتهای دیگر ثابت است، موج ایستاده مربوطه برروی سیم شکل می‌گیرد.

۳ـ۱۶ با در نظر گرفتن نتیجهٔ مختلط حاصل در بخش ۳ـ۴ برای C_n، نشان دهید که برای تار بلند، و هنگامی که $\omega \gg b$، جواب برانگیختهٔ (۳ـ۲۷)، به‌ازای $x > x_\circ$ به‌صورت زیر در می‌آید

$$y(x,t) = \frac{F_\circ}{\varrho s}\mathrm{Re}\left\{\frac{-i}{\omega - \frac{\mathrm{i}b}{۲}}\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(t - \frac{x - x_\circ}{s}\right)\right]\exp\left[\frac{-(x-x_\circ)b}{۲s}\right]\right\}$$

و به ازای $x < x_\circ$، به عبارت زیر،

$$= \frac{F_\circ}{\varrho s}\mathrm{Re}\left\{\frac{-i}{\omega - \frac{\mathrm{i}b}{۲}}\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(t + \frac{x - x_\circ}{s}\right)\right]\exp\left[\frac{(x - x_\circ)b}{۲s}\right]\right\}$$

اینها، دو موج پیشروندهٔ میرا هستند که از $x = x_\circ$ سرچشمه می‌گیرند و در جهتهای مخالف حرکت می‌کنند. در اینجا، تار بلند یعنی سیمی که در آن $L \gg s/b$ و $L\omega/s \gg ۱$، که ω بسامد محرک است و نقطهٔ حرکت $x_\circ$ به یک فاصله از دو انتهای سیم قرار دارد.

توجه کنید که برای b/ω کوچک

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}vP}dv}{v^۲ + \mathrm{i}b\omega - \omega^۲} \simeq \frac{\pi\mathrm{i}}{(\omega - \frac{\mathrm{i}b}{۲})}\exp\left[-P\left(\mathrm{i}\omega + \frac{b}{۲}\right)\right] \quad \text{اگر} \quad P > \circ$$

$$= \frac{\pi\mathrm{i}}{(\omega - \frac{\mathrm{i}b}{۲})}\exp\left[P\left(\mathrm{i}\omega + \frac{b}{۲}\right)\right] \quad \text{اگر} \quad P < \circ$$

برای مطالعهٔ بیشتر

W. C. Elmore, M. A. Heald: *Physics of Waves* (Dover, New York 1985)

P. R. Wallace: *Mathematical Analysis of Physical Problems* (Dover, New York 1984)

P. M. Morse, K. V. Ingard: *Theoretical Acoustics* (Mc Graw Hill, New York, 1968)

۴

امواج الکترومغناطیسی

چکیده

دستاورد امواج یک‌بُعدی در فصل ۳ در مورد سیستم شش‌بُعدی میدانهای الکترومغناطیسی به‌کار خواهد رفت. فصل با شکل انتگرالی معادله‌های ماکسول آغاز می‌شود که فرض می‌کنیم خواننده به‌صورت مقدماتی با آن آشناست. تعاریف ریاضی و اهمیت فیزیکی عملگرهای برداری، گرادیان، دیورژانس و تاو ارائه می‌شود. در پیوست این فصل خواننده دلایل هم‌ارزی این عملگرهای تعاریف، و تعابیر فیزیکی را می‌یابد. شکل دیفرانسیلی معادله‌های ماکسول پس از آن خواهد آمد. با شروع از فضای آزاد نشان خواهیم داد که معادله‌های ماکسول به معادله‌های موج برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی می‌انجامد. جوابهای این معادله‌ها موج، انتشار امواج الکترومغناطیسی، یعنی نور در ناحیهٔ مرئی و غیره، را به‌دست می‌دهند. جوابها را می‌توان تعدیل کرد تا برای سیستمهای بسته، کاواکها، همانند تار متناهی با دو سر ثابت، به‌کار روند. باز هم، مانند فصلهای ۲ و ۳، مدهای بهنجار، حرکت طبیعی و در مسئلهٔ ۴ـ۲۱، حرکت واداشته و تشدید را خواهیم داشت. سرانجام، معادله‌های ماکسول را در حالت کلی، یعنی با چشمه‌های گسترده، چگالیهای بار و جریان، در فضا حل خواهیم کرد. قضیهٔ هلمهولتز، که مشخص می‌کند چه چیزی تعیین‌کنندهٔ میدانهای برداری است، ارائه می‌شود و برای یافتن میدانهای الکتریکی و مغناطیسی برحسب چشمه‌ها،

به‌کار می‌رود. در بخش آخر، از جوابهای کلی برای محاسبهٔ توان تابشی آنتن دوقطبی استفاده خواهیم کرد.

۴ــ۱ شکل انتگرالی معادله‌های ماکسول

تحول میدانهای مغناطیسی و الکتریکی در فضا و زمان، فصل مشترکهای بسیاری با حرکت مکانیکی سیستمهای گسترده که در فصل گذشته بررسی کردیم، دارد. خواهیم دید که این میدانها در بعضی معادله‌های موج صدق می‌کنند. چشمه‌های آشفتگیهای مکانیکی نیروهای وارد هستند، و معمولاً در طرف راست معادله‌های موج ظاهر می‌شوند؛ آنها را جمله‌های محرک نامیده‌ایم. چشمه‌های میدانهای الکترومغناطیسی بارهای الکتریکی q و چگالیهای جریان $\boldsymbol{j}$ هستند، و آنها هم در طرف راست معادله‌های موج مربوط به خودشان ظاهر می‌شوند. الکترومغناطیس از این نظر پیچیده است که دارای دو میدان یعنی، میدان الکتریکی $\boldsymbol{E}$ و میدان الکتریکی $\boldsymbol{B}$ است، که با یکدیگر جفت شده‌اند.

فرض می‌کنیم که خواننده تا اندازه‌ای با شکل انتگرالی قانونهای الکترومغناطیس آشناست:

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\oint \varrho dv \qquad (۴\text{ــ}۱)$$

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (۴\text{ــ}۲)$$

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \qquad (۴\text{ــ}۳)$$

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \int \left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (۴\text{ــ}۴)$$

این چهار رابطه، شکل انتگرالی معادله‌های ماکسول هستند. به‌کمک آنها می‌توانیم میدانهای برداری $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ و $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ را برای هر توزیع بار در واحد حجم، $\varrho(\boldsymbol{r},t)$ و هر توزیع جریان الکتریکی در واحد سطح، $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$، پیدا کنیم. در این فصل نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان معادله‌ها را حل کرد و این میدانها را یافت.

معادلهٔ اول (۴ــ۱) قانون گاؤس است. بنابه این قانون انتگرال میدان الکتریکی برروی هر سطح بسته، یعنی شار الکتریکی، برابر است با کل بار درون حجمی که این سطح آن را محصور کرده است (تقسیم بر ε_0). معادلهٔ دوم، قانون فاراده، نشان می‌دهد که انتگرال خطی میدان الکتریکی در هر مسیر بسته برابر است با منهای آهنگ زمانی تغییر شار مغناطیسی، یعنی منهای آهنگ تغییر انتگرال میدان مغناطیسی در سطحی که مسیر آن را محصور کرده است. دو معادلهٔ بعدی، شامل

انتگرالهایی با همان سرشت انتگرالهای دو معادلهٔ قبلی است در (۴ـ۳) می‌بینیم که چشمه‌های مغناطیسی مشابه با چگالی بار الکتریکی نداریم. معادلهٔ (۴ـ۴) قانون آمپر است، که ماکسول آن را اصلاح کرده است. $\varepsilon_\circ$ و $\mu_\circ$ گذردهی و تراوایی فضای آزاد هستند؛ در دستگاه یکاهای mks، $\varepsilon_\circ = ۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}$ و $\mu_\circ = ۴\pi \times ۱۰^{-۷}$.

همان‌طور که خواننده آگاه است، استفادهٔ مستقیم از این معادله‌ها فقط در مواردی با تقارنهای خاص میسر است. مثلاً، با استفاده از (۴ـ۱)، همواره می‌توانیم میدان الکتریکی صفحهٔ باردار با ابعاد نامتناهی را بیابیم. به‌همین‌ترتیب، با استفاده از (۴ـ۴) می‌توان میدان مغناطیسی یک رسانای بینهایت طویل حامل جریان را یافت.

۴ـ۲ شکل دیفرانسیلی معادله‌های ماکسول

شکل دیفرانسیلی معادله‌های ماکسول برحسب عملگرهای گرادیان، دیورژانس و تاو است. این عملگرها به‌صورت خاصی بر میدانهای برداری اثر می‌کنند و نتیجهٔ هر عملکرد، تعبیر فیزیکی خاصی دارد. در اینجا، به‌نحوهٔ عملکرد عملگرها و همچنین به تعبیرهای فیزیکی مربوطه می‌پردازیم. این تعبیرها بدیهی نیستند. در پیوست، روند کلی اثبات قضایا را در حالت ساده‌تر دوبُعدی ارائه خواهیم داد. خوانندهٔ علاقه‌مند، با نوع استدلالهای مربوطه آشنا خواهد شد.

در دستگاه دکارتی، عملگر برداری «∇» را چنین تعریف می‌کنیم

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{k} \qquad (۴\text{ـ}۵)$$

که در آن $\boldsymbol{i}$، $\boldsymbol{j}$، $\boldsymbol{k}$ بردارهای یکه در جهتهای x، y، z هستند.

گرادیان: تعریف آن چنین است

$$\text{grad}\psi(x,y,z) \equiv \nabla\psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\boldsymbol{k} \qquad (۴\text{ـ}۶\text{الف})$$

که در آن، ψ تابعی نرده‌ای از x، y، z است؛ که با آن کار می‌کنیم. گرادیان، میدان نرده‌ای $\psi(x,y,z)$ میدان برداری $\nabla\psi$ را می‌سازد. اگر $\boldsymbol{c}$ بردار یکه‌ای در جهت معین باشد، تعبیر فیزیکی $\nabla\psi$ آن است که $\boldsymbol{c}\cdot\nabla\psi$، آهنگ تغییر ψ را در جهت $\boldsymbol{c}$ به‌دست می‌دهد. با توجه به اینکه، اگر θ زاویهٔ بین دو بردار باشد، مقدار

$$(\boldsymbol{c}\cdot\nabla\psi) = |\nabla\psi|\cos\theta$$

هنگامی بیشینه می‌شود که بردار یکهٔ $\boldsymbol{c}$ با $\nabla\psi$ همسو شود، می‌بینیم که $\nabla\psi$ در جهت بیشترین آهنگ تغییر ψ قرار دارد، و مقدارش بیشینهٔ آهنگ تغییر را مشخص می‌کند. در الکتروستاتیک،

رابطهٔ بین میدان الکتریکی و پتانسیل نرده‌ای ϕ همان‌طور که خواننده احتمالاً می‌داند چنین است، $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$.

دیورژانس

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(x,y,z) \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial Fy}{\partial y} + \frac{\partial Fy}{\partial y} \qquad (\text{۴ـ۶ب})$$

به‌طور صوری ضرب نقطه‌ای برداری را بین ∇ و $\boldsymbol{F}$ می‌گیریم، و از میدان برداری $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ میدان نرده‌ای $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ را می‌سازیم. دیورژانس، شار خالص میدان برداری $\boldsymbol{F}$ در واحد حجم را که از یک حجم بینهایت کوچک خارج می‌شود، اندازه می‌گیرد. یعنی

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}}{\oint dv} \quad \text{در حد} \quad \oint dv \to 0 \qquad (\text{۴ـ۶ج})$$

منشأ واژهٔ «شار» برای انتگرال سطحی میدان برداری در مکانیک شاره‌هاست، که در آنجا میدان، سرعت است و بنابراین شار کل جریان شاره است که در واحد زمان از سطح عبور می‌کند.

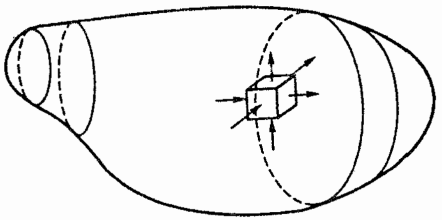
تاو:

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{F}(x,y,z) \equiv \nabla \times \boldsymbol{F} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}\right] \times [Fx\boldsymbol{i} + Fy\boldsymbol{j} + Fz\boldsymbol{k}] \qquad (\text{۴ـ۶د})$$

تاو را با محاسبهٔ صوری ضرب برداری عملگر ∇ و میدان برداری $\boldsymbol{F}(x,y,z)$، که ∇ برروی این بردار اثر می‌کند، به‌دست می‌آوریم. یک میدان برداری باز هم یک میدان برداری می‌دهد. تعبیر فیزیکی تاو این است که اگر انتگرال خطی یک میدان برداری $\boldsymbol{F}$ را در پربندی که مساحت بینهایت کوچک $\Delta\boldsymbol{S}$ را محصور می‌کند، به‌دست آوریم، یعنی $\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$ را محاسبه کنیم، در حدی که اندازهٔ مساحت $|\Delta\boldsymbol{S}|$ به صفر میل می‌کند، تاو در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \Delta\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} \qquad (\text{۴ـ۶هـ})$$

در اینجا $\Delta\boldsymbol{S}$ طبق قاعدهٔ معمول دست راست، در راستای عمود بر صفحهٔ انتگرال‌گیری است. از بحث مربوط به گرادیان، نتیجه می‌گیریم که، جهت تاو بر صفحهٔ انتگرال‌گیری که بیشترین مقدار انتگرال خطی در واحد سطح را می‌دهد عمود است. اندازهٔ تاو، انتگرال خطی حول $\Delta\boldsymbol{S}$ در این وضعیت تقسیم بر $|\Delta\boldsymbol{S}|$ در حدی است که $|\Delta\boldsymbol{S}|$ به صفر میل کند.



شکل ۴ـ۱ شار خالصی که از حجم کوچک Δv خارج می‌شود، $[\nabla \cdot \boldsymbol{F}(x,y,z)]\Delta v$ است. اگر برروی تمام حجم بستهٔ دلخواه انتگرال بگیریم، در نهایت با شار خالصی که از سطح خارجی بیرون می‌آید، مواجه خواهیم بود ـ قضیهٔ گاؤس.

تاو، «گردش» در واحد سطح را در نقطهٔ معینی از میدان برداری می‌دهد. یعنی معیار آهنگ پیچش خطوط نیرو، یا جریان است؛ به عبارت دیگر «گردشاری» میدانی است که بر روی آن اثر می‌کند. اگر میدان، سرعت شاره باشد، مقدار غیر صفر تاو مستلزم چرخش شاره است.

در نظر کسانی که برای اولین بار با این سه تعریف مواجه می‌شوند، ممکن است درک این مفاهیم دشوار باشد. اما فکر می‌کنیم که اگر خواننده دنبالهٔ مطالب فصل را پی گیرد و مثالها و مسائل را مطالعه کند، به‌تدریج این عملگرهای برداری تسلط خواهد یافت.

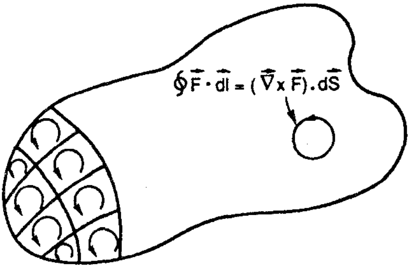
دو قضیهٔ مقدماتی وجود دارد ـ یکی مربوط به دیورژانس است، که گاؤس کشف کرد و دیگری به تاو مربوط می‌شود و جی. استوکس (۱۸۱۹ـ۱۹۰۳)، فیزیکدان انگلیسی آن را کشف کرد. انتگرال $\oint \nabla \cdot \boldsymbol{F} dv$ را برروی حجم بستهٔ دلخواهی مانند شکل ۴ـ۱ در نظر بگیرید، $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ یک میدان برداری پیوسته است. از تعریف دیورژانس، می‌دانیم که جزء انتگرالده $\mathrm{div}\boldsymbol{F}dv$ (که در آن dv جزء حجم است)، برابر است با شار خالصی که از این جزء سرچشمه می‌گیرد، یعنی شار خروجی منهای شار ورودی. شار خروجی از هر جزء یا وارد جزء مجاور می‌شود و یا اگر جزء در سطح باشد، از آن بیرون می‌زند. طبق قضیهٔ گاؤس داریم:

$$\int \nabla \cdot \boldsymbol{F} dv = \int F \cdot d\boldsymbol{S} \tag{۴ـ۷}$$

در شکل ۴ـ۲ سطح دلخواهی را نشان داده‌ایم که پربند خاصی آن را محصور کرده است. می‌خواهیم انتگرال زیر را که برروی سطحی که این پربند آن را محصور کرده است به‌دست آوریم:

$$\int (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S}$$

می‌دانیم که جزء $(\mathrm{curl}\,\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S})$ نشان‌دهندهٔ انتگرال خطی میدان برداری $\boldsymbol{F}$ حول پربند کوچکی است که $d\boldsymbol{S}$ را محصور کرده است. اگر سهم اجزاء مجاور سطح را به انتگرال خطی بیفزاییم پربندهای داخلی یکدیگر را خنثی می‌کنند، زیرا همواره انتگرالهای خطی در جهت مخالف وجود دارد. تمام آنچه باقی خواهد ماند، انتگرال خطی F در مسیر پربندی است که تمام سطح را



شکل ۴ـ۲ انتگرال خطی در مسیر یکی از پربندهای کوچکی که با $[\nabla\cdot\boldsymbol{F}(x,y,z)]\cdot d\boldsymbol{S}$ داده می‌شود. اگر برروی تمام سطح انتگرال بگیریم، انتگرالهای خطی برروی پربندهای درونی یکدیگر را خنثی می‌کنند و در نهایت انتگرال خطی $\boldsymbol{F}$ روی مسیر بیرونی باقی می‌ماند ـ قضیهٔ استوکس.

محصور می‌کند. بدین‌ترتیب، قضیهٔ استوکس را داریم که چنین است

$$\int (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{F}\cdot dl \qquad (۸\text{ـ}۴)$$

انتگرال تاو یک میدان برداری روی هر سطح دلخواه برابر است با انتگرال خطی میدان برداری حول پربندی که سطح را محصور می‌کند.

اکنون از این قضیه‌ها استفاده می‌کنیم تا معادله‌های ماکسول (۴ـ۱) تا (۴ـ۴) را به‌صورتی قابل فهم‌تر معادله‌های دیفرانسیل بازنویسی کنیم. اولین معادلهٔ ماکسول، معادلهٔ (۴ـ۱)، را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_\circ} \qquad (۹\text{ـ}۴)$$

بدیهی است که با انتگرال‌گیری طرفین از (۴ـ۹) روی حجمی دلخواه و استفاده از قضیهٔ گاؤس، می‌توان به (۴ـ۱) بازگشت. توان شکل انتگرالی معادله‌های ماکسول به‌واسطهٔ گستره‌های دلخواه است که بر انتگرال‌گیری روی آنها انجام می‌شود. با انتخاب دو حجم دلخواه در (۴ـ۱) که فقط اندکی با هم تفاوت دارند، و کم کردن نتیجه‌ها از یکدیگر می‌توان شکل دیفرانسیلی معادلهٔ ماکسول، معادلهٔ (۴ـ۹)، را مستقیماً از (۴ـ۱) به‌دست آورد. دو شکل معادله کاملاً هم‌ارز هستند.

همین‌طور، استفاده از قضیهٔ استوکس، (۴ـ۸)، به‌شکل دیفرانسیلی، (۴ـ۲) می‌انجامد:

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (۱۰\text{ـ}۴)$$

و حال که به اینجا رسیده‌ایم، به‌راحتی می‌توانیم با بازنویسی (۴ـ۳) و (۴ـ۴) کار را به انجام برسانیم:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \circ \qquad (۱۱\text{ـ}۴)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_\circ\left[j + \varepsilon_\circ\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right] \qquad (۱۲\text{ـ}۴)$$

معادله‌های (۴ـ۹) تا (۴ـ۱۲) شکل دیفرانسیلی معادله‌های ماکسول هستند. این معادله‌ها اغلب در بررسی‌های پیشرفته‌تر نظریهٔ الکترومغناطیس به‌کار می‌روند.

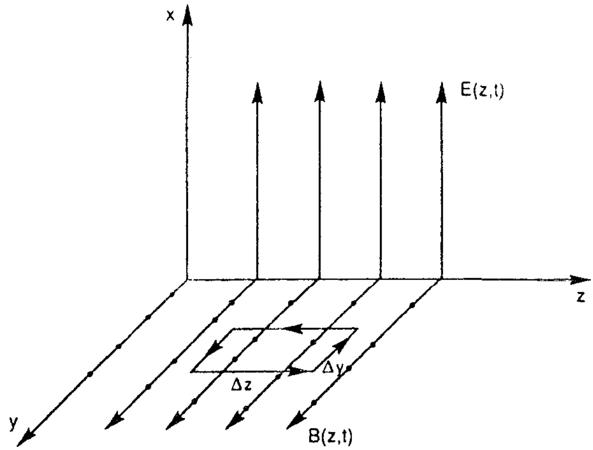
۴ـ۳ امواج الکترومغناطیسی تخت در فضای آزاد

در فصل ۳، تحت عنوان، امواج برروی تار کشیده، آموختیم که دو نوع مسئله را حل کنیم، اولین مسئله، رفتار بعدی سیستمی بود که تحت تأثیر نیرویی قرار گرفته است، که آن را مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای نامیدیم، و دوم، مسئلهٔ تعیین پاسخ سیستمی بود که بی‌وقفه تحت تأثیر نیروهای اعمال شده قرار دارد، یعنی تعیین حرکت واداشتهٔ سیستم. اکنون، مسئلهٔ مشابه را برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بررسی می‌کنیم.

قبلاً دیدیم که چشمه‌های میدان، بارهای الکتریکی و جریانهای الکتریکی، با نیروهای اعمال‌شده در سیستمهای مکانیکی هم‌ارزند. در این بخش، به‌عنوان مقدمه، وضعیتی را بررسی می‌کنیم که در آن هیچ چشمه‌ای وجود ندارد، فقط اختلالی وجود دارد که یا زودتر از زمان مشاهده و یا در مکانی متفاوت موجود بوده است. به این ترتیب، با فضای آزاد سروکار داریم. (حضور ماده، عموماً مستلزم وجود بار و جریان است، نگاه کنید به فصل بعد.) برای سادگی خود را به مختصات دکارتی محدود می‌کنیم. اگرچه علاقه‌مند به کار در سه بُعد هستیم، اما معمولاً برای تحلیل مسائل در هر دستگاه مختصات، ابتدا آشفتگیهایی را در نظر می‌گیریم که فقط به یکی از این مختصه‌ها وابسته هستند؛ این آشفتگیها روی سطوحی که در دستگاه دکارتی، تخت هستند، تغییرات فضایی ندارند. مثلاً، برای نیرویی در جهت z، صفحاتی را با zهای ثابت داریم، که همان صفحهٔ xy یا صفحات موازی با آن هستند. به‌این ترتیب، در این بخش، امواج الکترومغناطیسی تخت در فضای آزاد را در نظر می‌گیریم.

در جستجوی جوابهای تخت برای $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{B}$ هستیم که در معادله‌های ماکسول صادق باشند، جوابهای $\boldsymbol{E}(z,t)$ و $\boldsymbol{B}(z,t)$ که تابع z و زمان t هستند ولی به x و y بستگی ندارند. معلوم نیست که بتوانیم چنین جوابهایی را بیابیم، اما می‌توانیم نشان دهیم که چگونه می‌توان آنها را یافت و اینکه چگونه می‌توان چنین جوابهایی را تعمیم داد تا مجموعهٔ کاملی را به‌وجود آورند. به این‌ترتیب، مبنای لازم را برای حل هر نوع مسئلهٔ الکترومغناطیس در فضای آزاد را به‌رغم محدودیتهای ذکرشده، خواهیم داشت.

جوابهای تختی که به دنبالشان هستیم، عرضی خواهند بود. میدان عرضی را می‌توان میدانی در نظر گرفت که دیورژانس آن صفر است. از (۴ـ۹) نتیجه می‌شود که، $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \varrho/\varepsilon_0$ در فضای آزاد، که در آن چگالی بار ϱ صفر است، به‌صورت $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$ درمی‌آید و همچنین همواره داریم $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$. به‌عبارت دیگر، منظور از جواب عرضی جوابی است که در آن $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{B}$ کاملاً



شکل ۴ـ۳ موج EM عرضی. نقطه‌ها نشان می‌دهند که میدان الکتریکی به‌صورت عمودی از صفحهٔ z و y خارج می‌شود. $\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}$ را دور مسیر مستطیلی که نشان داده شده است محاسبه می‌کنیم و حاصل را با $\mu_\circ$ ضرب در جریان جابه‌جایی $\int \varepsilon_\circ \partial \boldsymbol{E}/\partial t \cdot d\boldsymbol{S}$ که از سطح مستطیلی می‌گذرد، مساوی قرار می‌دهیم.

در صفحه‌های عمود بر جهت انتشار، جهت z، قرار دارند. در بخش مسائل نشان خواهیم داد که این دو تعریف برای عرضی بودن، هم‌ارزند.

هنوز هم اطلاعی از جهت بردارهای $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{B}$ در صفحات xـy نداریم. اما چنانکه خواهیم دید، بدون از دست دادن کلّیت، می‌توان در ابتدا فرض کرد که میدان $\boldsymbol{E}$ و در نتیجه مشتق زمانی آن، $\partial \boldsymbol{E}/\partial t$، به‌ازای تمام z و t در یک جهت ثابت قرار دارند. این وضعیت در شکل ۴ـ۳ نشان داده شده است، که در آن جهت $\boldsymbol{E}$ و $\partial \boldsymbol{E}/\partial t$ را جهت x گرفته‌ایم. در این شکل تصویر خطوط نیروی الکتریکی در صفحهٔ zـx را به‌صورت خطهای عمودی نشان داده‌ایم و این خطوط را برروی صفحهٔ zـy با نقطه‌ها نشان داده‌ایم که معرّف آن است که میدان در جهت عمودی از این صفحه خارج می‌شود.

بگذارید معادلهٔ ماکسول را به شکل انتگرالی (۴ـ۴) (که تعمیم قانون آمپر است) به‌کار بندیم. مستطیل کوچکی را روی صفحهٔ zـy، مطابق شکل ۴ـ۳ در نظر می‌گیریم، و میدان مغناطیسی را حول این مسیر انتگرال می‌گیریم. چون $\boldsymbol{B}$ فقط تابع z است و به y بستگی ندارد، بدیهی است که سهم دو قطعهٔ موازی با محور z در انتگرال خطی یکدیگر را خنثی می‌کنند. برای دو قطعهٔ باقی‌مانده، اگر طبق قاعدهٔ دست راست برای جریانی که در جهت $x+$ قرار دارد، در جهت پادساعتگرد حرکت کنیم، داریم

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = -B_y(z+\Delta z, t)\Delta y + B_y(z,t)\Delta y$$

در نبود چگالی جریان، (۴ـ۴) چنین است

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_\circ \varepsilon_\circ \int \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S}$$

در مورد مستطیل بینهایت کوچک، ترکیب (۴ـ۴) با نتیجه‌ای که برای انتگرال خطی $\boldsymbol{B}$ به‌دست آورده‌ایم، چنین می‌شود

$$-[B_y(z+\Delta z, t) - B_y(z,t)]\Delta y = \mu_\circ \varepsilon_\circ \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} \Delta z \Delta y$$

اگر طرفین را بر Δz تقسیم کنیم و حد $\Delta z \to \circ$ را در نظر بگیریم، داریم

$$-\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial z} = \mu_\circ \varepsilon_\circ \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} \qquad (۱۳ـ۴)$$

با انتگرال‌گیری دور مستطیلهایی که در دو صفحهٔ دیگر قرار دارند، اطلاعات بیشتری به‌دست می‌آوریم. در واقع می‌توان رابطه‌های مطلوب را مستقیماً از شکل دیفرانسیلی معادلهٔ ماکسول، یعنی، مستقیماً از رابطهٔ (۴ـ۱۲) به‌دست آورد. برحسب مؤلفه‌های دکارتی داریم

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{B} &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}\right] \times [B_x(z,t)\boldsymbol{i} + B_y(z,t)\boldsymbol{j}] \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{k} \times [B_x(z,t)\boldsymbol{i} + B_y(z,t)\boldsymbol{j}] \\
&= \left(\frac{\partial B_x(z,t)}{\partial z}\right)\boldsymbol{j} - \left(\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\partial \boldsymbol{E}/\partial t$ در جهت x است و $\boldsymbol{j} = \circ$، (۴ـ۱۲) چنین می‌دهد

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_\circ \varepsilon_\circ \left(\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t}\right)\boldsymbol{i}$$

و یا، با ترکیب با نتیجه‌ای که برای $\nabla \times \boldsymbol{B}$ به‌دست آوردیم، داریم

$$\left(\frac{\partial B_x(z,t)}{\partial z}\right)\boldsymbol{j} - \left(\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} = \mu_\circ \varepsilon_\circ \left(\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t}\right)\boldsymbol{i}$$

مؤلفهٔ x در این رابطهٔ آخر، مجدداً (۴ـ۱۳) را می‌دهد، که باید هم همین‌طور باشد. مؤلفهٔ y این رابطه حاکی از آن است که

$$B_x(z,t) = \circ \qquad (۱۴ـ۴ \text{ الف})$$

اگر شرایط مرزی ایجاب کنند، همواره می‌توان میدانهایی را که به‌لحاظ فضایی ثابت هستند نیز اضافه کرد.

اکنون، معادلهٔ ماکسول دیفرانسیلی، یعنی معادلهٔ (۴ـ۱۰) را همانند (۴ـ۱۲)، در نظر می‌گیریم. با استفاده از تشابه این دو و اینکه $\boldsymbol{E}$ فقط دارای مؤلفهٔ x است، داریم

$$\left(\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z}\right)\boldsymbol{j} = -\left(\frac{\partial B_x}{\partial t}\right)\boldsymbol{i} - \left(\frac{\partial B_y}{\partial t}\right)\boldsymbol{j} - \left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)\boldsymbol{k}$$

در واقع، قبلاً می‌دانستیم که B_x وجود ندارد و B_z صفر است، زیرا $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{B}$ هر دو عرضی هستند. در اینجا مشاهده می‌کنیم که باید B_z مستقل از زمان باشد. چون به حالت مانایی که ممکن است به جوابهای وابسته به زمان مورد نظرمان اضافه شوند، علاقه‌مند نیستیم، داریم

$$B_z(z,t) = 0 \qquad \text{(۴ـ۱۴ب)}$$

با توجه به (۴ـ۱۴الف) و (۴ـ۱۴ب) درمی‌یابیم که میدان مغناطیسی، همانند میدان الکتریکی، فقط محدود به یک راستا یعنی نور y است. از روی مؤلفهٔ y آخرین رابطه‌ای که به‌دست آوردیم، رابطهٔ دومی پیدا می‌کنیم که (۴ـ۱۳) را همراهی می‌کند،

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial B}{\partial z} \qquad \text{(۴ـ۱۳)}$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \text{(۴ـ۱۵)}$$

که در این رابطه‌ها، شاخص x را از E و y را از B حذف کرده‌ایم.

این دو معادله را می‌توان به‌سادگی از هم جدا کرد. با مشتق‌گیری دو طرف رابطهٔ اول نسبت به زمان و طرفین رابطهٔ دوم نسبت به z و کم کردن دو رابطهٔ حاصل از یکدیگر داریم،

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{(۴ـ۱۶ الف)}$$

همچنین می‌توانیم، از اولی نسبت به z و از دومی نسبت به t مشتق بگیریم، و حاصل را با هم جمع کنیم. در این صورت داریم

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{(۴ـ۱۶ب)}$$

هر یک از این معادله‌ها درست به همان شکل معادلهٔ موجی هستند که در فصل گذشته برای جابه‌جایی سیم کشیده به‌دست آوردیم. بنابراین، جوابهایی داریم که مثلاً به‌صورت زیر هستند،

$$E = E_\circ \sin(kz \pm \omega t) \qquad \text{(۴ـ۱۷ الف)}$$

$$B = B_\circ \sin(kz \pm \omega t) \qquad \text{(۴ـ۱۷ ب)}$$

$E_\circ$ و $B_\circ$ دامنه‌های موج، k و ω، به‌ترتیب بردار موج و بسامد زاویه‌ای آن هستند. دقت کنید که بردار موج و بسامد زاویه‌ای را برای $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{B}$ یکسان، و دو موج را همفاز در نظر گرفته‌ایم. این قیود برای برقراری (۴ـ۱۳) و (۴ـ۱۵) لازم هستند. همچنین باید داشته باشیم

$$E_\circ = cB_\circ \qquad \text{(۴ـ۱۷ ج)}$$

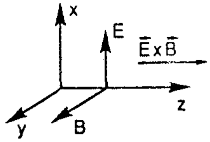
از معادله‌های موج سرعت موج را می‌دانیم؛ سرعت با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_\circ \varepsilon_\circ}} \qquad \text{(۴ـ۱۸)}$$

خواننده ممکن است به‌خوبی بداند که وقتی سرعت نور اندازه گرفته شد، سازگاری بسیار خوبی با مقدار محاسبه شده از (۴ـ۱۸) با استفاده از مقادیر اندازه‌گیری شده برای گذردهی و تراوایی فضای آزاد داشت. این توافق، بلافاصله سرشت نور را مشخص کرد. این رویداد را، که بخش تحلیلی آن بیش از همه مدیون جیمز کلارک ماکسول (۱۸۳۱ـ۱۸۷۹) است و موفقترین آزمایشهای آن (در ۱۸۸۰) مربوط به آلبرت ا. مایکلسون (۱۸۵۲ـ۱۹۳۱)، می‌توان احتمالاً بزرگترین کشف فیزیک تاکنون، قلمداد کرد؛ بی‌شک این کشف بزرگترین کشف فیزیک در قرن نوزدهم است. تمام تابش الکترومغناطیسی، از پرتوهای گاما در انتهای بالایی طیف بسامدها گرفته تا امواج رادیویی در انتهای پایین این طیف، در معادله‌های ماکسول صدق می‌کنند و با سرعت یکسان c در فضای آزاد منتشر می‌شوند. درک همهٔ این پدیده‌ها ناشی از قوانین محدودتری است که برای اولین بار کولن، آمپر و فاراده کشف کردند.

تصویری که تا اینجا از نور داریم، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی است که مانند رابطهٔ (۴ـ۱۷) در فضا و زمان تغییر می‌کنند، بردار میدان الکتریکی در یک جهت (جهت x) تثبیت شده است و بردار میدان مغناطیسی در جهت عمود بر آن (جهت y)، و نور در جهت عمود بر این دو (شکل ۴ـ۴) منتشر می‌شود.

خواننده ممکن است بداند که حتی در فضای آزاد هم، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی حامل انرژی هستند، و چگالی انرژی آنها به‌ترتیب، $\frac{1}{2}\varepsilon_\circ E^2$ و $\frac{1}{2}\mu_\circ B^2$ است. در نتیجه، می‌توان نشان



شکل ۴ـ۴ جهت انتشار که با، $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ مشخص می‌شود، میدان الکتریکی $\boldsymbol{E}$ و میدان مغناطیسی $\boldsymbol{B}$، مجموعه‌ای از بردارهای متقابلاً متعامد را تشکیل می‌دهند. بردار پوئین تینگ $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E}(\text{۱}/\mu_\circ) = \boldsymbol{S}$، شدت را به‌دست می‌دهد (نگاه کنید به مسائل).

داد (نگاه کنید به مسائل) که شدت (انرژی در واحد زمان در واحد سطح) موج الکترومغناطیسی با بردار پوئین‌تینگ، $\boldsymbol{S}$، (که به افتخار جان هنری پوئین‌تینگ (۱۸۵۲ـ۱۹۱۴) نامگذاری شده است)، داده می‌شود:

$$\boldsymbol{S} = \frac{\text{۱}}{\mu_\circ}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \qquad (\text{۴ـ۱۹})$$

$|\boldsymbol{S}|$ نه‌تنها شدت موج را می‌دهد، بلکه $\boldsymbol{S}$، همان‌طور که خواننده می‌تواند به‌راحتی ثابت کند، در جهت انتشار موج نیز هست. سه بردار $\boldsymbol{E}$، $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{S}$ یک موج EM تخت را مشخص می‌کنند.

برخلاف امواج مکانیکی، هیچ محیطی برای انتشار EM لازم نیست. اگر به شکل ۴ـ۳ و روش به‌دست آوردن (۴ـ۱۳) رجوع کنیم، مشاهده می‌کنیم که آنچه، میدانهای مغناطیسی را به‌وجود می‌آورد، یا «به حرکت درمی‌آورد»، ورقه‌های چگالی جریان جابه‌جایی،$(\partial\boldsymbol{E}/\partial t)\,\varepsilon_\circ$ ، است که در صفحات موازی با صفحهٔ xـy قرار گرفته‌اند. (رجوع به مثال ۴ـ۱ در انتهای فصل، ممکن است برای خواننده سودمند باشد.) منشأ ورقه‌های جریان جابه‌جایی چیست؟ پاسخ این است که ورقه‌های میدان مغناطیسی متغیر، که آنها هم در صفحه‌های موازی با صفحهٔ xـy اما با $\boldsymbol{B}$ عمود بر $\boldsymbol{E}$ قرار دارند و به نوبهٔ خود، بنابه قانون فاراده، میدانهای $\boldsymbol{E}$ را به‌وجود می‌آورند. البته، چون موج حامل انرژی است، باید یک عامل آغاز آشفتگی وجود داشته باشد، درست همان‌طور که یک نفر باید انتهای تار کشیده را تکان بدهد تا انتشار آغاز شود. بارهای الکتریکی نوسان‌کننده که اجزاء نوسان‌کنندهٔ جسمی داغ هستند یا جریانهایی که در آنتن رادیو به‌وجود می‌آید آشفتگی اولیه را به‌وجود می‌آورند.

تابشی که مطالعه کردیم، دارای قطبش خطی است، یعنی در صفحهٔ xـz قرار دارد که میدان الکتریکی به آن محدود است. صفحهٔ xـz ویژگی خاصی ندارد. به‌طورکلی، نور متشکل از تابشی است که در همهٔ جهتها قطبیده است. از نظر ریاضی، برای رسیدن به کمال باید به مد مورد نظر، مد دومی را بیفزاییم که میدانهایش نسبت به اولی به اندازهٔ نود درجه حول محور z چرخیده‌اند، یعنی، میدان $\boldsymbol{E}$ در جهت y و میدان $\boldsymbol{B}$ در جهت x است. این دو، به همراه یکدیگر، دو مد قطبشی هستند که در جهت z انتشار می‌یابند و از ترکیب آنها در مجموع هر قطبش دلخواه را می‌توان به‌دست آورد.

در فصل ۱، دیدیم که چگونه هر تابعی که در یک بُعد بین + و − بینهایت محدود است را می‌توان با مجموعهٔ کامل حالت‌های زیر نشان داد.

$$\sin kx, \qquad \cos kx; \qquad k \geq 0$$

این نمایش را می‌توان با در نظر گرفتن «بردار موج» $\boldsymbol{k}$ به‌عنوان برداری واقعی که به‌جای اینکه یک عدد باشد دارای جهتی در فضاست، به سه‌بُعد تعمیم داد. در سه‌بُعد، مجموعهٔ کامل حالت‌ها به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\sin \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}, \qquad \cos \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$$

$$\sin \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = \sin(k_1 x + k_2 y + k_3 z), \qquad 0 < k_1, k_2, k_3 < \infty$$

که در آن، k_1، k_2 و k_3 مؤلفه‌های دکارتی بردار موج $\boldsymbol{k}$ هستند. $\sin \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ موج تختی را نشان می‌دهد که در جهت $\boldsymbol{k}$ منتشر می‌شود، نگاه کنید به مسئلهٔ ۴ـ۶.

برای یافتن مجموعه‌ای کامل از توابع که به‌وسیلهٔ آنها بتوان هر سیگنال (حرکت طبیعی) الکترومغناطیسی را نشان داد، باید امواج EM تخت را که تاکنون بررسی کرده‌ایم، به همین ترتیب تعمیم دهیم. مجموعهٔ امواج را با این فرض که در تمام جهتهای دلخواه، و نه فقط z، منتشر می‌شوند، بسط می‌دهیم. چون دربارهٔ امواج پیشرونده و نه امواج ایستاده صحبت می‌کنیم، مقادیر منفی $\boldsymbol{k}$ را نیز مجاز می‌شماریم. بدین‌ترتیب، مجموعهٔ کامل امواج EM چنین است،

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t), \qquad \text{با} \tag{۴ـ۲۰ الف}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t), \qquad -\infty < k_1, k_2, k_3 < \infty \tag{۴ـ۲۰ ب}$$

چون این مجموعه باید معرّف امواج عرضی باشد، می‌باید $\boldsymbol{E}_0$ را چنان محدود کنیم که در راستای عمود بر بردار موج $\boldsymbol{k}$ قرار گیرد و $\boldsymbol{B}_0$ عمود بر $\boldsymbol{E}_0$ باشد. وقتی این سمتگیری انتخاب شد (تعیین صفحهٔ قطبش)، مجموعهٔ کامل مدها به‌ازای هر $\boldsymbol{k}$ دلخواه، با انتخاب $\boldsymbol{E}_0$ی که عمود بر انتخاب اولیه باشد، مشخص می‌شود. با گزینش دو قطبش برای هر $\boldsymbol{k}$ در (۴ـ۲۰الف و ب)، مجموعهٔ کامل توابع را که برای توصیف انتشار هر سیگنال EM در فضای آزاد لازم است، در اختیار داریم.

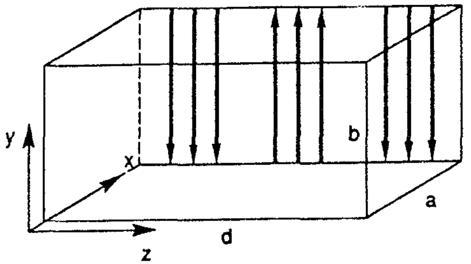
از فصل ۳ (مسئلهٔ ۳ـ۱۴) به یاد داریم که در حالت یک‌بُعدی، که می‌توان بازتاب موج را نادیده گرفت، سیگنالی که بستگی زمانی آن هماهنگ باشد را فقط یک تک‌موج پیشرونده حمل

می‌کند. همین ملاحظات را می‌توان در تحلیل تابش مثلاً، آنتن فرستندهٔ تلویزیونی که در دوردست واقع است، به‌کار بست. در حوالی آنتن، یعنی، در فاصلهٔ چند طول‌موج یا کمتر، طرح تابش بسیار پیچیده است. اما، در فاصلهٔ تعداد زیادی طول‌موج شکلی کروی خواهد داشت، و تابش مربوط به هر بسامد را فقط یک موج پیشرونده حمل می‌کند، که در این مورد کروی است. این موج کروی را می‌توان به نوبهٔ خود به امواج تخت از نوع (۴ـ۲۰الف و ب) تجزیه کرد، چون این امواج مجموعه‌ای کامل را تشکیل می‌دهند. به‌طور کلی، ابعاد آنتن گیرنده در مقایسه با شعاع انحنای موج تراگسیلیده، واقعاً کوچک است، بنابراین سیگنال با بسامد مشخصی را که آنتن دریافت می‌کند عملاً می‌توان با یکی از امواج مجموعهٔ (۴ـ۲۰الف و ب) که در جهت گیرنده در حرکت است، نشان داد. به همین‌ترتیب، امواج پیشرونده کروی که حامل تابش خورشید هستند درکانون یک عدسی ساده متمرکز می‌شوند، که نشان می‌دهد، عدسی که در مقیاس خورشیدی بسیار کوچک است، امواج تخت دریافت می‌کند.

در بخش بعد، به تابش الکترومغناطیسی می‌پردازیم که باز هم در فضای عاری از چشمه منتشر می‌شوند، اما در محدوده‌ای مقید هستند، یعنی، به بررسی تابش درکاواکها می‌پردازیم. خواهیم دید که، جوابهایی که در آنجا به‌دست خواهیم آورد با جوابهایی که اینجا برای فضای آزاد بدون مرز حاصل شد، تشابه بسیار دارند. در واقع، آن جوابها ترکیبهایی از یک زیرمجموعهٔ متناهی هستند.

۴ـ۴ سیستمهای الکترومغناطیسی توزیع شده ـ کاواکها

در فصل ۲، دینامیک سیستمهای الکتریکی و مکانیکی با یک درجهٔ آزادی را بررسی کردیم. در فصل ۳، به سیستمهای مکانیکی توزیع شده پرداختیم. اکنون باید سیستمهای الکتریکی توزیع شده را مطالعه کنیم. دیدیم که به‌هنگام ساختن نوسانگرهای الکتریکی، به‌عنوان جزء زمان‌سنج، از مدارهای قلنبهٔ LC استفاده می‌شود. اینها، همان ویژگیهای پاسخ تشدیدی را دارند که همتاهای مکانیکی‌شان، فنر و آونگ. اما، با افزایش بسامد تشدید به فراتر از ناحیهٔ معمول بسامد رادیویی، مدارهای قلنبهٔ LC هم به‌خاطر اتلاف تابشی و هم به‌دلیل دشواریهایی ساخت اجزاء دقیق مدارهای با مقادیر کوچک L و C دیگر رضایتبخش نیستند. ظرفیت ناخواسته بین‌رساناهایی که L را تشکیل می‌دهند و همین‌طور القاییدگی «سرگردان» بیش از حد زیاد می‌شوند. اجزاء کوچک خود به خود به سیستمهای فیزیکی بدل می‌شوند که با دید صحیح‌تر، توزیع شده به حساب می‌آیند، نگاه کنید به جلد دوم درسهای فیزیک فاینمن که آنجا این مبحث تحت عنوان مطالعهٔ بیشتر آورده شده است. این سیستمهای جدید، چیزی جز محفظه‌ها، قوطیها یا جعبه‌هایی به اِشکال مختلف نیستند، که دیوارهٔ آنها از موادی است که رساناهای خوب الکتریکی هستند. این‌گونه سیستمها را



شکل ۴ـ۵ کاواک مکعب‌مستطیلی ـ جعبه‌ای بسته با دیواره‌های به‌شدت رسانا. پیکانها جریانهایی مد $TE_{۱۰۳}$ را برروی صفحهٔ پشتی، نشان می‌دهند.

کاواکهای تشدیدگر می‌نامیم. برای دستیابی به نوسانگرهای بسامد بالا، می‌توان کاواک را با سیمهای آنتن کوچک به بقیهٔ مدار متصل کرد، و یا حتی می‌توان آنها را مستقیماً با عبور جریان الکترونی که از آنها می‌گذرد، مانند آنچه در کلیسترون انجام می‌شود، به هم جفت کرد.

البته سیستمهای الکتریکی توزیع‌شده علاوه بر سیستمهای بسته (کاواکها)، سیستمهای باز را که در انتقال انرژی به‌کار گرفته می‌شوند نیز در بر می‌گیرند. در بسامدهای بالا، انتقال انرژی در امتداد سیمهای معمولی، باز هم با اتلاف زیاد انرژی به دلیل تابش همراه است، و بنابراین به موجبرها و کابلهای هم‌محور متوسل می‌شویم. تحلیل این‌گونه سیستمهای باز مستلزم تحلیل کاواکهاست، که به آن خواهیم پرداخت. بررسی نسبتاً مفصل خود را در متن به کاواکهای مکعب‌مستطیلی محدود می‌کنیم و مثالهایی از سیستمهای باز را در بخش مسائل خواهیم آورد.

بدین‌ترتیب، هدف ما بررسی رفتار فضا زمانی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در کاواک مکعب مستطیلی به ابعاد $a \times b \times d$ است (شکل ۴ـ۵). هیچ‌گونه انرژی به میدانهایی که در داخل جعبهٔ فلزی محصور شده‌اند اضافه و یا از آن کم نمی‌شود. مانند فصلهای قبل، می‌توان به بررسی رفتار واداشته پرداخت، یعنی چه می‌شود اگر آنتن کوچکی را در داخل جعبه قرار دهیم و به مولد سیگنال خارجی متصل کنیم. (جزئیات حالت واداشته به بخش مسائل موکول می‌شود.) اگرچه می‌توان به‌راحتی کاری کرد که بجز انرژی اولیه مولد میدانها انرژی دیگری وارد کاواک نشود، اما مانند سیستمهایی که در فصلهای قبل بررسی کردیم. مقداری اتلاف انرژی وجود خواهد داشت که منشأ آن اصطکاک است. این عوامل فعالیت الکترومغناطیسی موجود در کاواک را به‌تدریج از بین می‌برند. این اتلافها ناشی از آن است که میدانها در دیواره‌های کاواک که هرگز رساناهای کامل نیستند، جریانهای الکتریکی به‌وجود می‌آورند این اتلافها را نادیده می‌گیریم.

میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ممکن درکاواک را می‌توان مانند جابه‌جایی تارکشیده، با یافتن میدانهایی که هم جوابهای معادله‌های موج حاکم بر دستگاه باشند و هم در شرایط مرزی مربوط به دیواره‌های کاواک، صدق کنند، تعیین کرد. همچنین، شرایط جنبی $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = ۰$ و $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = ۰$ را نباید فراموش کرد. شرایط مرزی تار کشیده ساده بود، هیچ‌یک از دو سر آن نمی‌توانست حرکت

کند. شرایط مرزی برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی چندان بدیهی نیستند. می‌خواهیم با دیواره‌های کاواک که رساناهای کامل هستند، کار کنیم. در این صورت، میدانهای الکتریکی چنان شکل می‌گیرند که مؤلفهٔ مماسی آنها در مرز صفر شود. اگر چنین نبود، دیواره‌ها حامل جریانهای نامتناهی می‌شدند که به میدانهای بینهایت می‌انجامید. در عمل، چون با رساناهای خوب ولی نه کامل سروکار داریم، مؤلفهٔ مماسی کوچکی باقی می‌ماند. ایده‌آل‌سازی، جواب عملی ولی نه کامل را می‌دهد. چون میدانهای الکتریکی در دیواره‌ها نفوذ نمی‌کنند، شاید انتظار رود که قیودی بر میدانهای مغناطیسی همراه آنها اعمال شود. شرط واقعی آن است که باید مؤلفهٔ عمودی $\boldsymbol{B}$ در مرز صفر شود. داریم

$$\text{در مرز}\begin{cases} \boldsymbol{E}_{\parallel} = 0 \\ \boldsymbol{B}_{\perp} = 0 \end{cases} \qquad (۲۱\text{_}۴)$$

برای یافتن شرط دوم به معادلهٔ (۴ـ۱۱)، $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ نیز نیاز است، نگاه کنید به بخش مسائل. در واقع، برای رساناهای کامل، می‌توان میدانها را بدون شرط دوم به‌دست آورد. اگر شرط مرزی برای میدان $\boldsymbol{E}$ صادق باشد، این شرط نیز خود به خود برقرار است. دلیل اصلی آن، سازگاری درونی معادله‌های ماکسول است.

در (۴ـ۲۰) مجموعهٔ کاملی از توابع را برای توصیف میدان الکترومغناطیسی در فضای آزاد، یعنی فضای عاری از چشمه‌ها و مرزهای واقع در بینهایت، داده شده است. این توابع، در معادله‌های وابسته به زمان ماکسول صدق می‌کنند. معلوم شده است که، زیرمجموعهٔ مناسبی از این توابع نیز در شرایط مرزی کاواک مکعب‌مستطیلی صدق می‌کند و مجموعه‌ای کامل، یعنی پایه‌ای را در فضای درون کاواک تشکیل می‌دهد.

توابع (۴ـ۲۰) امواج پیشرونده هستند. برای برقراری شرایطی که مرزهای ثابت کاواک به‌وجود می‌آورند، در ابتدا باید آنها را باز ترکیب کرد تا امواج ایستاده تشکیل دهند. نشان خواهیم داد که امواج ایستاده‌ای که پایهٔ کاواک مورد نظر را می‌سازند به‌صورت زیرند،

$$E_x = E_1 \cos\omega t \cos k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z \qquad (۴\text{ـ}۲۲\text{ الف})$$

$$E_y = E_2 \cos\omega t \sin k_1 x \cos k_2 y \sin k_3 z \qquad (۴\text{ـ}۲۲\text{ب})$$

$$E_z = E_3 \cos\omega t \sin k_1 x \sin k_2 y \cos k_3 z \qquad (۴\text{ـ}۲۲\text{ج})$$

که در آن، E_1، E_2، E_3 دامنه‌های موج و k_1، k_2، k_3 مؤلفه‌های بردار موج هستند.

بگذارید نگاه دقیق‌تری به (۴ـ۲۲الف) بیندازیم. برای اینکه مؤلفه‌های مماسی $\boldsymbol{E}$ در مرزهای کاواک در $y = 0$ و $z = 0$، صفر شوند، از توابع سینوسی برای بستگی E_x به y و z استفاده کرده‌ایم. به‌علاوه، با نگاه به هر سه معادله، شرایط مرزی مؤلفه‌های بردار موج $\boldsymbol{k}$ را به زیرمجموعهٔ زیر محدود می‌کند

$$k_1 = \frac{l\pi}{a}, \qquad k_2 = \frac{m\pi}{b}, \qquad k_3 = \frac{n\pi}{d} \tag{۴ـ۲۳}$$

که در آن l، m، n اعداد صحیح مثبت، $1, 2, 3, \ldots$ هستند و حداکثر شاید یکی از آنها صفر باشد. a، b، c ابعاد کاواک هستند.

مانند قبل، $k^2 = \omega^2/c^2$ که در آن c سرعت نور است. در نتیجه بسامدهای زاویه‌ای برای حرکت طبیعی عبارت‌اند از

$$\omega_{l,m,n}^2 = c^2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \tag{۴ـ۲۴الف}$$

$$= c^2\left(\frac{l^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} + \frac{n^2\pi^2}{d^2}\right) \tag{۴ـ۲۴ب}$$

دقت کنید که فاز را در (۴ـ۲۲الف) به دلخواه صفر گرفته‌ایم. در واقع، شرایط اولیه حاصل از انگیزش کاواک، مقدار فاز را تعیین می‌کنند.

مانند حالت فضای آزاد، شرط $\nabla \boldsymbol{E} = 0$ در صورتی صادق است که $\boldsymbol{k}$ را عمود بر $\boldsymbol{E}$ انتخاب کنیم. در اینجا، این شرط محدودیت زیر را به‌وجود می‌آورد.

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{k} = E_1 k_1 + E_2 k_2 + E_3 k_3 = 0 \tag{۴ـ۲۵}$$

به‌علاوه، $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ دلیل انتخاب بستگی کسینوسی، E_x به x و E_y به y است.

تا اینجا، به $\boldsymbol{B}$ کاری نداشته‌ایم. می‌توان آن را با استفاده از رابطهٔ زیر محاسبه کرد

$$-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times \boldsymbol{E} \tag{۴ـ۱۰}$$

که بستگی زمانی $\boldsymbol{B}$ به‌صورت $\sin \omega t$ است. دوباره درمی‌یابیم که $\boldsymbol{B}$ بر $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{k}$ عمود است. برای دستیابی به تمام جوابهای مستقل کاواک، باز هم فرض می‌کنیم که بردارهای $\boldsymbol{E}$ دو جهت عمود بر هم دلخواه را در صفحه‌ای که بر بردار موج $\boldsymbol{k}$ عمود است، اختیار می‌کنند. مجموعهٔ کامل پایه را می‌توان با نوشتن همهٔ بردارهای موج مجاز $\boldsymbol{k}$، یعنی با در نظر گرفتن

سه‌تایی‌های مجاز l، m، n در (۴ـ۲۳)، و نسبت دادن هر دو قطبش به هرکدام از $\boldsymbol{k}$ها، به‌دست آورد.

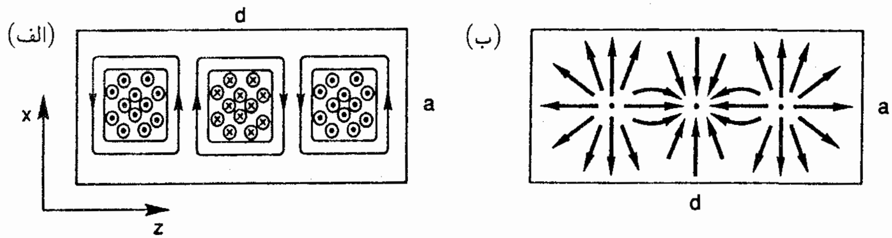
روش طبقه‌بندی مدها که در اینجا ارائه داده‌ایم، معمولاً در شکل‌گیری صوری نظریه‌های فیزیکی، مثلاً، به‌هنگام حل مسائل ترمودینامیک و مکانیک آماری به‌کار می‌رود. اما، به‌هنگام کار با مسائل توصیفی با جزئیات بیشتر، مجموعه‌ای از مدهای مشخص که شرط $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \circ$ را برقرار می‌کنند ترجیح داده می‌شوند. عامل زمانی را کنار می‌گذاریم تا بر این نکته تأکید کنیم که با مجموعه‌ای کامل از مدهای فضایی سروکار داریم که برای مسائل واداشته نیز مناسب هستند.

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{TE}} = -\left(\frac{k_۲}{k}\right)\cos k_۱ x \sin k_۲ y \sin k_۳ z \boldsymbol{i} + \frac{k_۱}{k}\sin k_۱ x \cos k_۲ y \sin k_۳ z \boldsymbol{j} \qquad \text{(۴ـ۲۶ الف)}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{TM}} = \left[\frac{k_۱^۲ + k_۲^۲}{k^۲}\right]\sin k_۱ x \sin k_۲ y \cos k_۳ z \boldsymbol{k} - \left[\frac{k_۱ k_۳}{k^۲}\right]\cos k_۱ x \sin k_۲ y \sin k_۳ z \boldsymbol{i} - \left[\frac{k_۳ k_۲}{k^۲}\right]\sin k_۱ x \cos k_۲ y \sin k_۳ z \boldsymbol{j} \qquad \text{(۴ـ۲۶ب)}$$

در اینجا عددهای موج $k_۱$، $k_۲$، $k_۳$، k مانند قبل هستند، یعنی در (۴ـ۲۳) و (۴ـ۲۴الف، ب) صدق می‌کنند. اگرچه این مجموعه تا حدی تخصصی‌تر از مجموعهٔ قبلی است، زیرا جهت z را برمی‌گزینند، با این حال مجموعه‌ای کامل است. مدها، آن‌طور که نوشته شده‌اند، متعامدند. (برای تحقیق این نکته، ضرب برداری نقطه‌ای آنها را در نظر بگیرید و برروی حجم کاواک از آن انتگرال بگیرید.) دقت کنید که نوع اول مدها را، در (۴ـ۲۶الف)، «الکتریکی عرضی» نامیده‌ایم زیرا میدان الکتریکی در جهت z نداریم. به‌همین ترتیب، دستهٔ دوم را «مغناطیسی عرضی» نامیده‌ایم، زیرا برای این مدها، میدان مغناطیسی در جهت z، که از (۴ـ۱۰) به‌دست می‌آید، صفر است. همین مدها را می‌توان برای توصیف میدانهایی که در جهت z موجبرها منتشر می‌شوند، به‌کار برد. کاواکهای EM کاربردهای بسیاری در فنّاوری دارند، مثلاً، جزء لاینفک لیزرها هستند.

در شکل ۴ـ۶، مد $\mathrm{TE}_{۱۰۳}$، یعنی با $l = ۱$، $m = \circ$ و $n = ۳$، را نشان داده‌ایم. این شکل مربوط به لحظه‌ای است که $\omega t = ۳\pi/۲$. جملهٔ وابسته به زمان $\cos \omega t$ در $E(x, z)$ ضرب



شکل ۴ـ۶ (الف) مد $\mathrm{TE}_{۱۰۳}$. خطوط بسته میدان B را نشان می‌دهند، دایره‌ها نمایانگر جریان جابه‌جایی $\varepsilon_{\circ} = \partial \boldsymbol{E}/\partial t$ هستند. تغییری در جهت y صورت نمی‌گیرد. (ب) جریانها در صفحهٔ بالایی کاواک. خطهای $\varepsilon_{\circ}\partial \boldsymbol{E}/\partial t$ در کاواک به خطوط $\boldsymbol{J}$ در صفحه بالایی می‌پیوندند و خطهای $\boldsymbol{J}$ در صفحه‌های کناری ادامه می‌یابد (شکل ۴ـ۵)؛ $\nabla\cdot(\boldsymbol{J}+\varepsilon_{\circ}\partial \boldsymbol{E}/\partial t) = \circ$.

می‌شود. با استفاده از (۴ـ۲۶الف) مشاهده می‌کنیم که میدان الکتریکی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{TE}_{۱۰۳}} = k_{۱}(k_{۱}^{۲}+k_{۳}^{۲})^{-\frac{۱}{۲}}\sin k_{۱}x \sin k_{۳}z\boldsymbol{j}$$
$$= d(d^{۲}+۹a^{۲})^{-\frac{۱}{۲}}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{۳\pi z}{d}\boldsymbol{j}$$

در نمودار این شکل، جریان جابه‌جایی $\varepsilon_{\circ} = \partial \boldsymbol{E}/\partial t$، را هنگامی‌که به‌طور عمودی از صفحه بیرون می‌آید با نقطه و هنگامی‌که به‌درون صفحه است با ضربدر نشان داده‌ایم. خطهای پیوسته، خطهای $\boldsymbol{B}$ هستند که از (۴ـ۱۰) محاسبه می‌شوند. اگر میدانهای مغناطیسی معلوم باشند، از روی شرایط مرزی می‌توانیم جریانهای سطحی را در دیواره‌های کاواک نیز برآورد کنیم. با استفاده از استدلال مثال ۴ـ۱، درمی‌یابیم که دیواره‌های کاواک حامل جریانهای سطحی به‌ازای واحد طول است، که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید،

$$J_s = \frac{۱}{\mu_{\circ}}B_{\tan,s} \qquad \text{(۴ـ۲۷الف)}$$

$B_{\tan,s}$ (مؤلفهٔ مماسی) میدان مغناطیسی در سطح مورد نظر است در سطح داخلی کاواک رابطهٔ زیر را داریم

$$\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{n}\times\frac{\boldsymbol{B}_s}{\mu_{\circ}} \qquad \text{(۴ـ۲۷ب)}$$

که در آن $\boldsymbol{n}$ برداریکه به داخل کاواک در جهت عمود بر سطح، و $\boldsymbol{B}_s$ میدان مغناطیسی در سطح است.

جریانهای سطحی براورد خوبی از جریانهای واقعی هستند حتی وقتی که مقاومت الکتریکی دیواره‌های کاواک مجدد است. بدین‌ترتیب، می‌توانیم کمیت W، یعنی میانگین انرژی تلف‌شده در هر چرخه به‌صورت گرمای ژول را محاسبه کنیم. مانند مدارهای LC، می‌توانیم شاخص کیفیت Q را برای کاواکی که در مد خاصی نوسان می‌کند، به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$Q = ۲\pi \frac{\text{میانگین زمانی انرژی ذخیره‌شده در کاواک}}{\text{انرژی تلف‌شده در هر چرخهٔ کار}} = ۲\pi \frac{U}{W} \qquad \text{(۴ـ۲۸ الف)}$$

انرژی ذخیره‌شده در یک مد بخصوص، U، با محاسبهٔ انتگرال حجمی چگالی انرژی به‌دست می‌آید. چگالیهای الکتریکی و مغناطیسی، با توجه به بخش قبل، با مربع میدانهای مربوط متناسب‌اند. در نتیجه، اگر α ثابت میرایی برای میدانها باشد، مانند ثابتی که در فصل ۲ برای سیستمهای قلنبه داشتیم، انرژی به‌صورت $e^{-۲\alpha t}$ افت می‌کند. می‌توان نوشت

$$U = U_{\circ}\, \mathrm{e}^{-۲\alpha t} \qquad \text{(۴ـ۲۸ ب)}$$

$$\frac{dU}{dt} = -۲\alpha U \equiv -\frac{W}{T} = -Wf \qquad \text{(۴ـ۲۸ ج)}$$

که در آن، f بسامد و T دورهٔ نوسان مد است و با تعاریف W به‌صورت میانگین اتلاف در هر چرخه، W/T آهنگ اتلاف انرژی است. سرانجام،

$$\alpha = \frac{Wf}{۲U} = \frac{۲\pi}{Q}\frac{f}{۲} = \frac{\text{۵}}{۲Q} \qquad \text{(۴ـ۲۸ د)}$$

که همان رابطهٔ بین ضریب میرایی و ضریب کیفیت برای سیستمهای قلنبه است. دقت کنید که اگر برای سیستمهای اخیر، فقط یک Q وجود دارد، در مورد سیستمهای توزیع‌شده، هر مد نوسانی دارای Q مخصوص خود است. متوجه می‌شویم که، Q بالا، یعنی اتلاف کم، پاسخ تشدیدی تیزی را ایجاب می‌کند، به‌عبارت دیگر، نشانهٔ کارکرد خوب درکاربردهای نوسانی یا کاربردهای گزینشی است. این نکته، برای کاواکی که مانند مدار $L\text{ـ}C$ در یکی از مدهایش «در حال تشدید» است، مصداق دارد.

۴ـ۵ پتانسیل برداری و جوابهای مربوط به آن برای معادله‌های ماکسول

پیش از آغاز بحث پتانسیل برداری، دو ویژگی معروف عملگرهای برداری را تذکر می‌دهیم. اگر با گرفتن تاو میدان برداری معین، میدان برداری دیگری بسازیم، دیورژانس این میدان برداری دوم

صفر است. با توجه به نمادها، برای هر میدان برداری $\boldsymbol{F}(x, y, z)$،

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0 \tag{۴ـ۲۹الف}$$

رابطهٔ (۴ـ۲۹الف) یک اتحاد برداری است: دیورژانسِ تاو صفر است. (مثال ۴ـ۲) اتحاد دوم این است که تاوِ گرادیان صفر است

$$\nabla \times (\nabla \psi) = 0 \tag{۴ـ۲۹ب}$$

که در آن $\psi(x, y, z)$ یک میدان نرده‌ای است.

زیربنای درک معادله‌های برداری مانند معادله‌های ماکسول، قضیه‌ای مهم، به‌نام قضیهٔ هلمهولتز است که آن را بدون اثبات ذکر می‌کنیم. صورت نهایی آن را می‌توان با الکتروستاتیک مقدماتی، چنانکه در یکی از مسائل خواهید دید، توجیه کرد. برای اثبات دقیق قضیه، خواننده می‌تواند به کتاب پیشرفته‌تر پنوفسکی و فیلیپس که در انتهای فصل آمده، رجوع کند. بنابه این قضیه هر میدان برداری $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ با معلوم بودن تاو و دیورژانس آن به‌صورت یکتا تعیین می‌شود به شرطی‌که میدانهای منبع، یعنی تاو و دیورژانس آن در بینهایت صفر شوند. فرض کنید داریم

$$\nabla \times \boldsymbol{F}(x, y, z) = \boldsymbol{c}(x, y, z) \tag{۴ـ۳۰الف}$$

و

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}(x, y, z) = d(x, y, z) \tag{۴ـ۳۰ب}$$

که در اینجا $\boldsymbol{c}$ و d به‌ترتیب میدانهای برداری نرده‌ای هستند که چشمه‌ها را تشکیل می‌دهند. میدان $\boldsymbol{F}$ در این صورت چنین است

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = -\nabla \psi(x, y, z) + \nabla \times \boldsymbol{G}(x, y, z) \tag{۴ـ۳۱الف}$$

که در آن،

$$\psi(x, y, z) \frac{1}{4\pi} \int \frac{d(x', y', z') dx' dy' dz'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{۴ـ۳۱ب}$$

و

$$\boldsymbol{G}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{c}(x', y', z') dx' dy' dz'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{۴ـ۳۱ج}$$

به‌علاوه، برای این شکل G

$$\nabla \cdot \boldsymbol{G} = ۰ \qquad \text{(۴ـ۳۱د)}$$

[صورتهای دیگر $\boldsymbol{G}(x,y,z)$ هم مجازند، می‌توان هر میدانی که تاو آن صفر باشد را به $\boldsymbol{G}(x,y,z)$ اضافه کرد. اما، در هر مورد $\nabla\times\boldsymbol{G}$ از جواب اینجا به‌دست خواهد آمد. $\boldsymbol{F}(x,y,z)$، که یکتاست، تعیین شده است.]

میدان $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ مجموع $-\nabla\psi(x,y,z)$ و $\nabla\times\boldsymbol{G}$ است، یعنی یک بخش طولی (با تاو صفر) و یک بخش عرضی (با دیورژانس صفر) دارد. بخش طولی آن صرفاً با دیورژانس $\boldsymbol{F}$ مشخص می‌شود، و بخش عرضی فقط با تاو $\boldsymbol{F}$ داده می‌شود.

پتانسیل نرده‌ای (۴ـ۳۱ب) را می‌توان همانند پتانسیل الکتریکی در الکتروستاتیک به‌دست آورد، یعنی با در نظر گرفتن جزئی از چگالی چشمه، $d(x',y',z')dx'dy'dz'$ و تقسیم آن بر فاصلهٔ بین جزء چگالی چشمه و مکان مشاهده و افزودن این جمله‌ها تا اینکه تمام چگالی چشمه در نظر گرفته شود. پتانسیل برداری $\boldsymbol{G}(x,y,z)$ را هم به همین‌ترتیب محاسبه می‌کنیم، منتهی در این مورد چشمهٔ $\boldsymbol{c}$ یک بردار است.

بگذارید قضیهٔ هلمهولتز را برای (۴ـ۱۱ و ۱۲) به‌کار بندیم. چون دیورژانس B همیشه صفر است، بلافاصله می‌توان نوشت

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \qquad \text{(۴ـ۳۲الف)}$$

علاوه بر آن، طبق (۴ـ۳۱د)،

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = ۰ \qquad \text{(۴ـ۳۲ب)}$$

و از (۴ـ۳۱ج) داریم،

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \mu_۰ \int \frac{\left[\boldsymbol{j}(r',t) + \varepsilon_۰\left(\partial\boldsymbol{E}\dfrac{(r',t)}{\partial t}\right)\right]dv'}{۴\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad \text{(۴ـ۳۲ج)}$$

در اینجا، $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ پتانسیل برداری برای میدان مغناطیسی در نقطهٔ $\boldsymbol{r}(x,x,z)$ است، و dv' خلاصه شدهٔ $dx'dy'dz'$ است. یادآوری می‌کنیم که میدانهای مختلف علاوه بر فضا به زمان نیز بستگی دارند. معادلهٔ (۴ـ۳۲ج) نتیجهٔ نهایی برای $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ نیست، زیرا چشمهٔ $\boldsymbol{j}+\varepsilon_۰(\partial\boldsymbol{E}/\partial t)$

هنوز حاوی یکی از میدانهای مجهول، یعنی $\boldsymbol{E}$ است. استفاده مستقیم از قضیهٔ هلمهولتز به حل کامل مسئله نمی‌انجامد، مگر در شرایط استاتیک که در آن $\partial \boldsymbol{E}/\partial t = 0$.

باز هم به‌دلیل جفت‌شدگی میدانهای $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{B}$ در معادله‌های ماکسول، نمی‌توان از قضیهٔ هلمهولتز برای یافتن $\boldsymbol{E}$ مستقیماً سود جست. اما، در اینجا می‌توان از قضیهٔ هلمهولتز برای یافتن نتیجهٔ مفیدی بهره گرفت که به حل مسئله یافتن میدانهای موجود برحسب چشمه‌ها می‌انجامد. با به‌کار بردن (۴ـ۳۲ الف) معادلهٔ (۴ـ۱۰) را بازنویسی می‌کنیم

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{A})$$

یا

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0 \qquad \text{(۴ـ۳۳ الف)}$$

با رجوع به قضیهٔ گاؤس (۴ـ۹)، برای دیورژانس $\boldsymbol{E}$، و توجه به اینکه از روی (۴ـ۳۲ب) داریم $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$، به‌دست می‌آوریم

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(۴ـ۳۳ب)}$$

که در آن ϱ چگالی بار است. به این‌ترتیب، معادله‌های (۴ـ۳۳الف و ب)، تاو و دیورژانس $\boldsymbol{E} + \partial \boldsymbol{A}/\partial t$ را به‌دست می‌دهند و با استفاده از آنها و استناد به قضیهٔ هلمهولتز (۴ـ۳۱) می‌توان نوشت

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

یا

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad \text{(۴ـ۳۴)}$$

که در آن

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = \int \frac{\varrho(\boldsymbol{r}', t)dv'}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \qquad \text{(۴ـ۳۵)}$$

پتانسیل ϕ همان پتانسیلی است که در الکتروستاتیک با آن روبه‌رو می‌شویم.

اکنون عبارت دیگری برای $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ به‌دست می‌آوریم، که مانند (۴ـ۳۵) فقط شامل چشمه‌هاست. معادلهٔ (۴ـ۱۲) را چنان بازنویسی می‌کنیم که میدانهای مجهول در طرف چپ و

چشمه‌ها در طرف راست باشند:

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} + \mu_\circ \varepsilon_\circ \frac{\partial^۲ \boldsymbol{A}}{\partial t^۲} = \mu_\circ \boldsymbol{j} - \mu_\circ \varepsilon_\circ \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \qquad (۳۶\text{-}۴)$$

در اینجا $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{B}$ را برحسب پتانسیلها جایگزین کرده‌ایم. چون ϕ را از (۴ـ۳۵) می‌دانیم، جملهٔ $\mu_\circ \varepsilon_\circ \nabla(\partial\phi/\partial t)$ را چشمه در نظر گرفته‌ایم. بنابه یک اتحاد برداری معروف داریم

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^۲ \boldsymbol{A}$$

اما $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \circ$. اگر به‌جای $\mu_\circ \varepsilon_\circ$، $۱/c^۲$ قرار دهیم، (۴ـ۳۶) چنین می‌شود

$$\nabla^۲ \boldsymbol{A} - \frac{۱}{c^۲} \frac{\partial^۲ \boldsymbol{A}}{\partial t^۲} = -\mu_\circ \boldsymbol{j}_{\mathrm{T}} \qquad (\text{۴ـ۳۷ الف})$$

که در آن

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{T}} = \boldsymbol{j} - \varepsilon_\circ \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \qquad (\text{۴ـ۳۷ب})$$

شاخص T یعنی کل.

پتانسیل برداری در معادلهٔ موج با جملهٔ محرک $-\mu_\circ \boldsymbol{j}_{\mathrm{T}}$ صدق می‌کند.

قبلاً با معادلهٔ موج یعنی با معادله‌ای که بر جابه‌جایی تار حکمفرماست، یعنی معادلهٔ (۳ـ۲) آشنا شدیم:

$$\frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲} - \frac{۱}{s^۲} \frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲} = \frac{F(x,t)}{\varrho}$$

به‌خاطر داریم که در ناحیهٔ عاری از «چشمهٔ» تار، یعنی، جایی که نیروی خارجی اعمال شده $F(x,t)$ صفر است، جواب را می‌توان به‌صورت زیر نوشت [معادلهٔ (۳ـ۵)]

$$y(x,t) = Y\left(t \pm \frac{x}{s}\right)$$

که در آن s سرعت موج است.

غیر از آن، معادلهٔ موج (۴ـ۳۷ الف) برای $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ به معادلهٔ دیگری که جواب آن برای ما شناخته شده است، شباهت دارد، این معادله همان معادلهٔ لاپلاس برای ϕ است: از ترکیب (۴ـ۹) و (۴ـ۳۴) و باز با یادآوری $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \circ$ به‌دست می‌آوریم

$$\nabla^۲ \phi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_\circ} \qquad (۳۸\text{-}۴)$$

که جواب آن دقیقاً رابطهٔ (۴ـ۳۵) است.

این دو جواب، یعنی (۴ـ۳۵) و (۳ـ۵)، جواب واقعی (۴ـ۳۷الف) را برای $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ توجیه می‌کنند:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\mu_\circ\int\frac{\boldsymbol{j}_{\mathrm{T}}(r',t')dv'}{۴\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad \text{(۴ـ۳۹الف)}$$

که در آن

$$t'=t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c} \qquad \text{(۴ـ۳۹ب)}$$

این نتیجه برای $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ را جواب تأخیری می‌نامند، زیرا جریان $\boldsymbol{j}_{\mathrm{T}}$ نه در زمان t، بلکه در زمان زودتر $t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c$، یعنی در زمانی‌که میدان «تولید شده بود» محاسبه می‌شود. درست مانند امواج روی تار، پیغام با سرعتی ثابت منتقل می‌شود، منتهی اینجا در سه بُعد و با دامنهٔ نزولی. جواب دیگری که دارای $t'=t+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c$ و از نظر ریاضی کاملاً معتبر است، تاکنون ارزش عملی چندانی نیافته است. در بخش مسائل، از خواننده می‌خواهیم تا نشان دهد که عبارت (۴ـ۳۹الف) واقعاً جواب فیزیکی معادلهٔ موج (۴ـ۳۷الف) برای $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ است. در آنجا، همانند الکتروستاتیک، جواب را به‌صورت برهم‌نهی جوابهای مربوط به اجزایی که چشمه‌های نقطه‌ای $\boldsymbol{j}_{\mathrm{T}}(r',t')dv'$ را تشکیل می‌دهند، در نظر می‌گیریم:

$$d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\mu_\circ\boldsymbol{j}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}',t')\frac{dv'}{۴\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad \text{(۴ـ۳۹ج)}$$

معادله‌های (۴ـ۳۷ـ۳۹الف و ب) به‌ترتیب برای پتانسیلهای ϕ و $\boldsymbol{A}$ و معادله‌های (۴ـ۳۲ و ۳۴ و ۳۵) که میدانهای $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{E}$ را برحسب پتانسیلها بیان می‌کنند، کار یافتن این میدانها را برحسب چشمه‌های ϱ و $\boldsymbol{j}$، یعنی کار حل کردن معادله‌های ماکسول را کامل می‌کنند. در جدول ۴ـ۱، معادله‌های حاکم بر میدانهای الکترومغناطیسی و جوابهایشان خلاصه شده‌اند.

جواب (۴ـ۳۹ج) برای $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ (یک تابع گرین) را می‌توان با جواب مسئلهٔ ۳ـ۱۶ مقایسه کرد که برای اختلال ناشی از نیروی نقطه‌ای برروی تار بلند، یعنی، هنگامی‌که بازتاب از انتهای تار را نادیده می‌گیریم، حاصل شد. در نتیجه از (۴ـ۳۹) می‌توان تابش الکترومغناطیسی ناشی از هر توزیع چشمه در فضا و زمان (مثلاً یک آنتن) را مستقیماً محاسبه کرد، به این شرط که تابش به فضای آزاد صورت گیرد. در بخش بعدی که بخش نهایی این فصل است، این موضوع را با یافتن میدانهای تابشی آنتن «دوقطبی» ساده نشان می‌دهیم.

سرانجام، باز هم خاطرنشان می‌کنیم که پتانسیلهای $\boldsymbol{A}$ و ϕ یکتا نیستند، اگرچه $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{B}$ به‌طور یکتا توسط چشمه‌ها مشخص می‌شوند. انتخاب ما را به‌خاطر رابطهٔ $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\circ$ «پیمانه عرضی» می‌نامند. منشأ آن حکم قضیهٔ هلمهولتز است، که در آن $\boldsymbol{G}$ را چنان انتخاب کردیم که $\nabla\cdot\boldsymbol{G}=\circ$

جدول ۴ـ۱ خلاصهٔ روابط اساسی میدانهای الکترومغناطیسی

شکل دیفرانسیلی معادله‌های ماکسول	شکل انتگرالی معادله‌های ماکسول
$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\varrho}{\varepsilon_\circ}$	$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \varepsilon_\circ^{-1} \int \varrho dv$
$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\int \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S}$
$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \circ$	$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = \circ$
$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_\circ \left[\boldsymbol{j} + \varepsilon_\circ \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right]$	$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_\circ \int \left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_\circ \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \cdot d\boldsymbol{S}$

در پیمانهٔ عرضی $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \circ$ و

پتانسیل برداری $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mu_\circ \int \boldsymbol{j}_{\mathrm{T}}(r', t')dv'}{\text{۴}\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

با $$\boldsymbol{j}_T = \boldsymbol{j} - \varepsilon_\circ \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$$

پتانسیل نرده‌ای $$\phi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\int \varrho(r', t)dv'}{\text{۴}\pi\varepsilon_\circ |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

با $$t' = t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

$$\nabla \equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad \oint \nabla \cdot \boldsymbol{F} dv = \oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\oint (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$$

شود. چون، حل برخی از مسائل فیزیک جدید، به بهترین نحو در این پیمانه انجام می‌شود، گاهی آن را پیمانهٔ مکانیک کوانتومی نیز می‌نامند. در یکی از مسائل نشان می‌دهیم که چگونه باید ϕ را با تبدیل $\boldsymbol{A}$ به پیمانه‌ای متفاوت، یعنی با $\nabla \cdot \boldsymbol{A} \neq \circ$ تغییر داد.

۴ـ۶ تابش دوقطبی

به‌عنوان کاربردی از پتانسیلهای تأخیری، تابش آنتن دوقطبی را بررسی می‌کنیم. واژهٔ دوقطبی از بسط موسوم به «چندقطبی» میدانها برحسب توانهای نسبت اندازهٔ آنتن، l، به فاصلهٔ مشاهده‌کننده تا آنتن $|\boldsymbol{r}|$، گرفته شده است. فرض می‌کنیم، این نسبت کوچک باشد، $|\boldsymbol{r} \gg l|$. برای یافتن تابش دوقطبی متعارف، ابعاد آنتن باید نسبت به طول‌موج تابش کوچک باشد، و این طول‌موج نیز

باید نسبت به r کوچک باشد. بدین‌ترتیب، در پی توان کل تابش‌شده از آنتنی به‌طول l، با شرط $l \ll \lambda \ll |r|$ هستیم که به‌طور هماهنگ تغذیه می‌شود. نتایج حاصل در ارتباطات الکتریکی و فیزیک اتمی کاربرد دارد.

در آغاز، عبارت تأخیری برای پتانسیل برداری $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$، معادلهٔ (۴ـ۳۹الف)، را به دو قسمت می‌کنیم،

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r},t) \tag{۴ـ۴۰الف}$$

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r},t) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(r',t')dv'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{۴ـ۴۰ب}$$

$$\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r}_1,t) \equiv -\frac{1}{4\pi c^2}\int \frac{\nabla'\left[\dfrac{\partial\phi(\boldsymbol{r}',t')}{\partial t'}\right]dv'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{۴ـ۴۰ج}$$

که در اینجا باز هم داریم $t' = t - |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c$؛ در (۴ـ۴۰ج)، ∇' مشتق‌گیری نسبت به مختصات r' است.

داریم،

$$\nabla \times \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{۴ـ۴۱}$$

این رابطه را می‌توان به‌راحتی با توجه به این نکته که هر مؤلفهٔ ∇، مثلاً x، را می‌توان به‌صورت زیر نوشت، اثبات کرد:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{A}_2 &= \frac{1}{4\pi c^2}\int\left(\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\boldsymbol{i}\times\nabla'\left[\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r}',t')}{\partial t'}\right]dv' \\ &= \frac{-1}{4\pi c^2}\int\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{\partial}{\partial x'}\boldsymbol{i}\times\nabla'\left(\frac{\partial\phi}{\partial t'}\right)dv'\end{aligned}$$

در اینجا، در سطر اول $\partial/\partial x$ را زیر انتگرال برده‌ایم و متغیرهای مشتق‌گیری را عوض کرده‌ایم. با انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء و در نظرگرفتن اینکه جملهٔ اولِ آن در $x' = \pm\infty$ صفر است، به‌سطر دوم می‌رسیم. وقتی‌که هر سه مؤلفه را با هم در نظر بگیریم، مشاهده می‌کنیم که فقط تاو گرادیان در انتگرالده باقی می‌ماند، که نتیجهٔ صفر را می‌دهد. چون تاو $\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r},t)$ صفر است، میدان مغناطیسی $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ فقط از $\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r},t)$ به‌دست می‌آید. پس از یافتن $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ معادلهٔ ماکسول (۴ـ۱۲) را برای یافتن $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ به‌کار می‌گیریم. به این‌ترتیب لزومی به یافتن $\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r}',t)$ و $\phi(\boldsymbol{r}',t)$ نیست.

حال اگر فرض کنیم که فاصلهٔ بین مشاهده‌کننده و آنتن بسیار بزرگتر از ابعاد آنتن است، می‌توانیم به‌جای $\frac{1}{|r-r'|}$ در (۴ـ۴۰ب) $1/r$ بگذاریم و آن را از زیر انتگرال بیرون آوریم:

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r},t) \cong \frac{\mu_0}{4\pi r}\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t')dv' \qquad (42\text{-}4)$$

در حالت کلی چگالی جریان $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید،

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \varrho(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) \qquad (43\text{-}4)$$

که در آن ϱ چگالی بار و $\boldsymbol{u}$ سرعت بار است. اگر فرض کنیم که بار به اجزاء کوچک q_i تقسیم شده باشد،

$$q_i = \int \varrho dv_i$$

که با سرعت $\boldsymbol{u}_i$ حرکت می‌کنند، آنگاه $\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)dv'$ همان $\sum_i q_i\boldsymbol{u}_i(t)$ می‌شود. توزیع کلی بار برای یک آنتن رادیو و همین‌طور برای هر اتم، خنثی خواهد بود. فرض می‌کنیم که این بارهای مثبت هستند که نسبت به بارهای منفی ساکن با همان اندازهٔ حرکت می‌کنند.

گشتاور دوقطبی را طبق رابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$\boldsymbol{p}_i(t) \equiv q_i\boldsymbol{r}_i(t)$$

که در آن $\boldsymbol{r}_i$ محل بار iام است و با مشتق‌گیری نسبت به زمان داریم $\dot{\boldsymbol{p}}_i(t) = q_i\boldsymbol{u}_i$. با محدود کردن جمع روی بارهای مثبت متحرک داریم

$$\sum_i q_i\boldsymbol{u}_i = \sum_i \dot{\boldsymbol{p}}_i(t)$$

یعنی مشتقهای گشتاور دوقطبی نسبت به زمان.

با توجه به این فرض که طول آنتن l در مقایسه با طول‌موج تابش λ کوچک است، $2\pi l/\lambda \ll 1$، می‌توان هرگونه اختلاف فاز به‌خاطر تأخیر ناشی از اندازهٔ متناهی آنتن را نادیده گرفت. در این صورت می‌توانیم یک بستگی زمانی هماهنگ ساده را برای کل گشتاور دوقطبی آنتن در نظر بگیریم:

$$\boldsymbol{p}(t) = \sum_i \boldsymbol{p}_i(t) \equiv \boldsymbol{p}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

با استفاده از تعریف زمان تأخیری t'،

$$\omega t' = \omega t - \left(\frac{\omega}{c}\right) r$$

و بالاخره، داریم

$$\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', t')dv' = \mathrm{i}\omega \boldsymbol{p}_\circ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'} = \mathrm{i}\omega \boldsymbol{p}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\frac{d\boldsymbol{p}(t)}{dt}$$

که در آن $k = \omega/c$. از معادله (۴ـ۴۲) داریم:

$$\boldsymbol{A}_\text{۱}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mu_\circ}{\text{۴}\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}\frac{d\boldsymbol{p}(t)}{dt} \qquad (\text{۴۴ـ۴})$$

محاسبهٔ $\nabla \times \boldsymbol{A}_\text{۱}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ و $\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon_\circ \mu_\circ (\partial \boldsymbol{E}/\partial t)$، که معادلهٔ اخیر معادلهٔ ماکسول (۴ـ۱۲) در فضای آزاد است، اکنون کاملاً سرراست است و در یکی از مسائل مطرح شده است. به‌علاوه، با انتگرال‌گیری از بردار پوئین‌تینگ، $\boldsymbol{S}$،

$$\boldsymbol{S} = \frac{\text{۱}}{\mu_\circ}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \qquad (\text{۱۹ـ۴})$$

برروی سطح کره‌ای به شعاع r، در بخش مسائل درمی‌یابیم که توان کلی که از سطح کره عبور می‌کند، مستقل از r است، زیرا با توجه به پایستگی انرژی l باید در حالت مانا باشد و از فرمول معروف زیر به‌دست می‌آید

$$\bar{P} \equiv \int \bar{S}(r) r^\text{۲} d\Omega = \frac{p_\circ^\text{۲} \omega^\text{۴}}{\text{۱۲}\pi\varepsilon_\circ c^\text{۳}} \qquad (\text{۴۵ـ۴})$$

خط تیره روی P و S نشان می‌دهد که میانگین زمانی در یک چرخه گرفته شده است.

مثال ۴ـ۱

دسته‌ای از سیمهای مستقیم بینهایت طویل به‌طور مرتب پهلوی یکدیگر برروی یک صفحهٔ نامتناهی مطابق شکل ۴ـ۷الف قرار دارند. اگر جریان هر سیم I و N سیم در هر متر مربع وجود داشته باشد، الف) چگالی جریان سطحی مؤثر چقدر است؟ ب) میدان مغناطیسی موجود در بالای این رسانا با فرض اینکه در زیر آن میدانی وجود ندارد، چقدر است؟

راهنمایی: از شکل انتگرالی (۴ـ۴) استفاده کنید.

حل: جریان سطحی J_s، یعنی، کل جریان در واحد سطح مقطع با $J_s = NI$ داده می‌شود. در نبود میدان الکتریکی وابسته به زمان، (۴ـ۴) چنین است

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_\circ \int \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S}$$

به‌عنوان مداری برای انتگرال طرف چپ، مسیر مستطیلی عمود بر صفحهٔ سیمها را که در شکل ۴ـ۷الف با خط‌چین نشان داده شده است، انتخاب می‌کنیم. از روی تقارن، میدان مغناطیسی افقی است و هیچ میدان مغناطیسی در ناحیهٔ پربندی زیرین وجود ندارد. انتگرال‌گیری در امتداد بالایی مسیر Bl را می‌دهد، که در آن l طول مستطیل است. جریانی که از سطح مقطعی که حول آن انتگرال گرفتیم می‌گذرد، چنین است.

$$\int J \cdot d\boldsymbol{S} = J_{\mathrm{s}} l = NIl$$

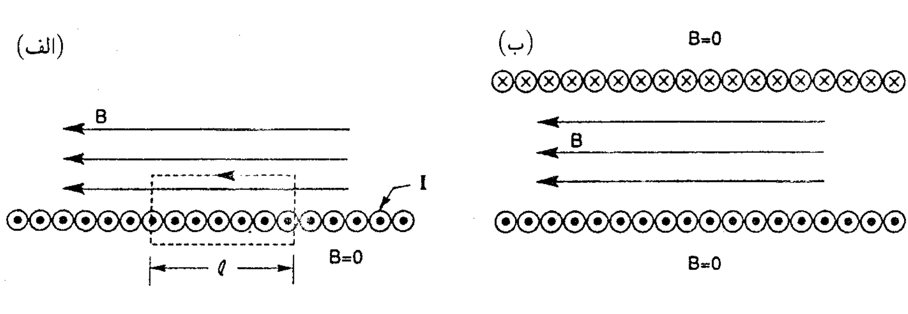
با به‌کار بستن (۴ـ۴) برای نتیجهٔ بالا داریم

$$|B|l = \mu_\circ NIl$$

$$B = \mu_\circ NI$$

جهت میدان مغناطیسی کل که این رساناها به‌وجود می‌آورند در شکل (۴ـ۷الف) آمده است. از روی تقارن، ممکن است انتظار داشته باشیم که میدانهای مساوی با جهتهای مخالف در بالا و پایین هر یک به اندازهٔ $\mu_\circ (NI)/۲$ موجود باشد. در واقع ممکن است یک ورقهٔ حامل جریانهای بازگرداننده در جای دیگر وضعیت شکل ۴ـ۷ب را به‌وجود آورد، این وضعیت کاملاً مشابه خازن الکتریکی است (میدانها یکدیگر را در داخل تقویت و در خارج خنثی می‌کنند).

این مثال وضعیتی را نشان می‌دهد که در آن ورقه‌های جریان، ورقه‌های میدان مغناطیسی موازی را به‌وجود می‌آورند، و جریانها در جهت عمود بر میدانها قرار می‌گیرند. این حالت را در امواج EM تخت بخش ۴ـ۳ داریم، که ورقه‌های جریان را نه بارهایی که در سیم جریان دارند، بلکه جریانهای جابه‌جایی $\varepsilon_\circ \partial \boldsymbol{E}/\partial t$ تولید می‌کنند. این وضعیت را در کاواکها هم می‌یابیم، که



شکل ۴ـ۷ (الف) مثال ۴ـ۱ دسته‌ای از سیمهای موازی طویل بلند. (ب) مثال ۴ـ۱ دو صفحه از این سیمها که بر هم نهاده شده‌اند.

در آنها جریانهای سطحی J_s میدانهای مغناطیسی را از نفوذ به داخل دیواره‌های رسانا بازمی‌دارد و آنها را در داخل کاواک محدود می‌کند. ■

مثال ۴ـ۲

نشان دهید که دیورژانس میدان تاوی همواره صفر است.

حل: دیورژانس هر میدان برداری $\boldsymbol{F}$ چنین است

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

و

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{F} =& \nabla \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \times (F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}) \\ =& \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

با توجه به اینکه مشتقهای جزئی درجه دوم مستقل از ترتیب مشتق‌گیری‌هستند، می‌بینیم که تمام جمله‌ها دوبه‌دو یکدیگر را حذف می‌کنند و اتحاد ثابت می‌شود. ■

مثال ۴ـ۳

معادلهٔ اول ماکسول، $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \varrho/\varepsilon_0$ در عملکرد دیود خلأ، به‌خوبی نشان داده می‌شود. در دیود خلأ، الکترونها به‌صورت گرمایی در نبود میدان الکتریکی و با سرعت بسیار ناچیزی ازکاتد گسیل می‌شوند. این الکترونها ضمن پیمودن فاصلهٔ d در خلأ تا آند که نسبت به کاتد در پتانسیل ثابت V قرار دارد، شتاب می‌گیرند. وجود جریان یعنی وجود چگالی بار ϱ (که منفی خواهد بود زیرا بار الکترون منفی است). اگر الکترودها را به‌صورت صفحات تخت نامتناهی موازی صفحهٔ yـz فرض کنیم، ϱ فقط به x بستگی خواهد داشت: $\varrho(x)$. این چگالی بار، طبق معادلهٔ ماکسول بر میدان الکتریکی $E(x)$ اثر خواهد گذاشت: میدان $E(x)$ در جهت x است و مقدارش منفی است، یعنی از آند به کاتد که در $x = 0$ قرار دارد. بنابراین $\varrho(x)$ بر حرکت الکترونها اثر خواهد گذاشت. اما در حالت مانا که $\varrho(x)$ برحسب زمان ثابت است، جریان بر واحد سطح، J، باید مستقل از x و زمان t باشد. در حل مسئله، ابتدا بستگی مکانی پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi(x)$ را در حالت مانا و سپس بستگی J به پتانسیل اعمال‌شدهٔ V را در حالت مانا خواهیم یافت.

حل: چگالی جریان J با رابطهٔ زیر به بار در واحد حجم، ϱ، مربوط می‌شود

$$J = -\varrho(x)v(x)$$

که در آن J و $v(x)$، سرعت الکترون، هر دو مثبت‌اند. در حالت مانا

$$E(x) = -\frac{d\phi(x)}{dx} \quad \text{و} \quad \phi(d) = V,\ \phi(0) = 0$$

چون الکترونها از حالت سکون شروع به حرکت می‌کنند و فرض می‌کنیم که فقط از طریق میدان الکتریکی متوسط $E(x)$ بر یکدیگر تأثیر می‌گذارند، از پایستگی انرژی داریم:

$$\frac{1}{2}mv^2(x) + e\phi(x) = 0$$

سرانجام، $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \varrho/\varepsilon_0$ چنین می‌شود

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = -\frac{\varrho(x)}{\varepsilon_0}$$

حال اگر $\varrho(x)$ را به نفع J حذف کنیم، با استفاده از

$$v(x) = \left[\frac{2|e|\phi(x)}{m}\right]^{\frac{1}{2}}$$

داریم

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = \frac{J}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2|e|}}\frac{1}{\phi^{\frac{1}{2}}(x)}$$

و یا

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = CJ\phi^{-\frac{1}{2}}(x), \qquad C \equiv \frac{1}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2|e|}}$$

این معادلهٔ همگن درجهٔ دو را می‌توان به معادله‌ای درجه یک تبدیل کرد، فرض کنید که $\phi(x)$ و $x(\phi)$ را می‌دانیم، $y(\phi)$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$y(\phi) \equiv \frac{d\phi(x)}{dx}$$

معادلهٔ درجهٔ دوم چنین خواهد شد

$$\frac{dy(\phi)}{d\phi}\frac{d\phi(x)}{dx} = CJ\phi^{-\frac{1}{2}}(x)$$

و یا

$$ydy = CJ\frac{d\phi}{\phi^{\frac{1}{2}}}$$

پس از انتگرال‌گیری از طرفین معادله، داریم

$$\frac{1}{2}y^{2} = 2CJ\phi^{\frac{1}{2}}$$

ثابتهای انتگرال‌گیری صفر هستند، زیرا در $x = 0$ داریم $\phi = 0$، و میدان الکتریکی، $-y$، هم در $\phi = 0$ صفر است. بنابراین،

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = 2[CJ]^{\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{4}}(x)$$

دوباره با انتگرال‌گیری از طرفین این رابطه داریم

$$\phi(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{3}}[CJ]^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}$$

که رابطهٔ مطلوب برای پتانسیل استاتیک $\phi(x)$ را نشان می‌دهد. به‌علاوه، جریان J با رابطهٔ زیر به افت پتانسیل در دو سر دیود، $\phi(d) = V$، مربوط می‌شود،

$$J = \frac{4}{9Cd^{2}}V^{\frac{3}{2}}$$

این نتیجهٔ کاملاً غیراهمی برای دیود خلأ به قانون چایلد ـ لانگ‌مویر معروف است. خواننده تحلیل بیشتری از این نتایج را برای دیود، در مسئله ۴ـ۸ـ۱ خواهد یافت. ■

مثال ۴ـ۴

با بازنویسی رابطهٔ (۴ـ۲۶الف) برای مدهای TE کاواک، میدانهای EM را در جهت مثبت z در موجبری که در $z = 0$ برانگیخته می‌شود، به‌دست آورید. به‌ازای مقادیر داده شدهٔ l، m و بسامد ω، مقدار k_3 را بیابید. تحقیق کنید که $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$

راهنمایی: به مسئلهٔ ۱۳ـ۱۴ رجوع کنید.

حل: همانند مسئلهٔ ۳ـ۱۴ بستگی زمانی مربوط به امواج پیشرونده در جهت مثبت z، به‌صورت $\cos(k_3 z - \omega t + \delta_{l,m})$ است، که در آن بردار انتشار k_3 و فاز $\delta_{l,m}$ به مد خاص بستگی دارند و $\delta_{l,m}$ را شرایط مرزی در انتهای برانگیخته، $z = 0$، تعیین می‌کند. با این بستگی زمانی می‌توان هم معادلهٔ موج همگن برای $\boldsymbol{E}(x, y, z, t)$ در داخل موجبر و هم شرایط مرزی را

در $z \to \infty$ برقرار کرد ـ یعنی سیگنالی که در جهت منفی δ (به‌طرف عقب) منتشر شود، وجود ندارد.

برای میدان الکتریکی در مد l، m می‌نویسیم:

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{TE}_{l,m}}(x,y,z,t) = \left[-\frac{km}{k}\cos(k_l x)\sin(k_m y)\hat{\boldsymbol{i}}\right.$$
$$\left.+\frac{k_l}{k}\sin(k_l x)\cos(k_m y)\hat{\boldsymbol{j}}\right]\cos(k_۳ - \omega t + \delta_{l,m})$$

که در آن

$$k_l = \frac{l\pi}{a}, \quad k_m = \frac{m\pi}{b}, \quad l = ۱, ۲, ۳, \ldots \quad \text{و} \quad m = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

برای یافتن $k_۳$، میدان الکتریکی داده شده را در معادلهٔ موج همگن در فضای آزاد برای $\boldsymbol{E}$، قرار می‌دهیم (رجوع کنید به مسئلهٔ ۴ـ۱۳):

$$\nabla^۲\boldsymbol{E} - \frac{۱}{c^۲}\frac{\partial^۲\boldsymbol{E}}{\partial t^۲} = ۰$$

این معادله باید برای هر مؤلفهٔ $\boldsymbol{E}$ جداگانه صادق باشد. به‌طور کوتاه، معادله را چنین می‌نویسیم:

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{TE}_{l,m}}(x,y,z,t) \equiv [E_۱(x,y)\hat{\boldsymbol{i}} + E_۲(x,y)\hat{\boldsymbol{j}}]\cos(k_۳ z - \omega t + \delta_{l,m})$$

با مشتق‌گیریهای لازم داریم،

$$\nabla^۲ E_۱ = \left(\frac{\partial^۲}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial y^۲}\right)E_۱ = -(k_l^۲ + k_m^۲)E_۱$$
$$\nabla^۲ E_۲ = -(k_l^۲ + k_m^۲)E_۲$$

و بدین‌ترتیب،

$$\nabla^۲\boldsymbol{E}_{\mathrm{TE}_{l,m}} = -(k_l^۲ + k_m^۲ + k_۳^۲)\boldsymbol{E}_{\mathrm{TE}_{l,m}}$$

با مشتق‌گیری نسبت به t، درمی‌یابیم که معادله موج در صورتی صادق است که

$$k^۲ \equiv k_l^۲ + k_m^۲ + k_۳^۲ = \frac{\omega^۲}{c^۲}$$

و رابطهٔ $k_۳$ را بسامد محرک ω و k_l و k_m به‌دست می‌آید. برای بحث بیشتر به مسئلهٔ ۴ـ۱۳ مراجعه کنید.

حال اگر به $\nabla \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{TE}l,m}$ توجه کنیم، داریم

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\ \boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot E_۱(x,y)\boldsymbol{i}\cos(k_۳ z-\omega t+\delta_{l,m})$$
$$=\frac{k_l k_m}{k}\sin k_l x\sin k_m y\cos(k_۳ z-\omega t+\delta_{l,m})$$
$$=-\nabla\cdot[E_۲(x,y)\boldsymbol{j}]\cos(k_۳ z-\omega t+\delta_{l,m})$$

واضح است که برای صفر شدن دیورژانس $\boldsymbol{E}$ که شرط لازم در فضای آزاد داخل موجبر است، فاز $\delta_{l,m}$ برای هر دو بردار مؤلفهٔ $E_{\mathrm{TE}l,m}$ باید یکسان باشد.

متوجه می‌شویم که مدها چنان طراحی شده‌اند که شرایط مرزی در دیواره‌های موجبر را برقرار سازند. کار یافتن میدان الکتریکی داخل موجبر با تعیین دامنه و فاز هر مد TEو TM ناشی از میدانهای محرک یا چشمه‌های موجود در $z=۰$، کامل می‌شود. ■

مسائل

۴ـ۱ یک ناظر در فاصلهٔ $۱\mathrm{cm}$ از صفحهٔ عایقی به ابعاد $۵\mathrm{m}\times۵\mathrm{m}$، میدان الکتریکی $۴\times۱۰^۴\mathrm{V/m}$ را اندازه می‌گیرد، میدان الکتریکی در فاصلهٔ $۸۰\mathrm{m}$ از صفحه را براورد کنید. توزیع بار روی صفحه را یکنواخت فرض کنید.

۴ـ۲ با استفاده از (۴ـ۴) فرمولی برای میدان مغناطیسی اطراف سیم بلندی که حامل جریان I است را به‌دست آورید.

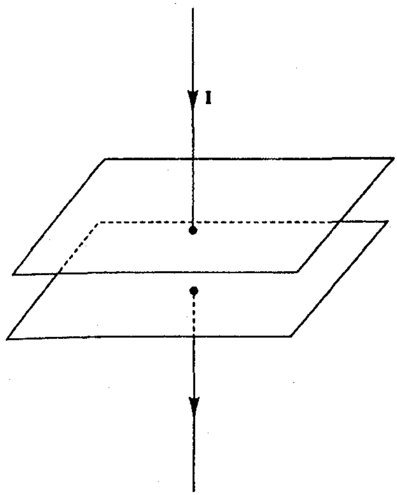
۴ـ۳ سیم بلندی به‌صورت سری به خازن صفحه موازی، طبق شکل ۴ـ۸ متصل شده است. اگر جریان در سیم I باشد، نشان دهید که

الف) $$I=C\frac{dV}{dt}$$

ب) $$I_۱=C\frac{dV}{dt}$$

که در آن $I_۱$ کل جریان جابه‌جایی است که از خازن می‌گذرد. چرا نتیجهٔ $I=I_۱$ برای سازگاری درکاربرد قانون آمپر (۴ـ۴) در این مورد لازم است؟

راهنمایی: جریانی را در نظر بگیرید که به‌جای عبور از سطحی که سیم ورودی را قطع می‌کند، از سطحی عبور کند که از بین صفحات خازن می‌گذرد.



شکل ۴ـ۸ مسئلهٔ ۴ـ۳.

۴ـ۴ الف) نشان دهید که چگونه تعبیر فیزیکی دیورژانس و قانون پایستگی بار به رابطهٔ معروف زیر می‌انجامد

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \circ$$

که در آن $\boldsymbol{j}$ و ϱ به‌ترتیب چگالی جریان و چگالی بار است.

ب) از (۴ـ۱۲) نتیجه بگیرید که $\nabla \cdot (\boldsymbol{j} + \varepsilon_\circ \, \partial \boldsymbol{E}/\partial t)$ باید صفر شود.

ج) از قسمت (الف) و یکی دیگر از معادله‌های ماکسول استفاده کنید و نتیجهٔ قسمت (ب) را تحقیق کنید.

د) توزیع جریان حقیقی و جریان جابه‌جایی را برروی صفحات خازن و مسئلهٔ ۴ـ۳ و در داخل آن نشان دهید. همچنین خطوط میدان مغناطیسی را درست بالا و پایین صفحات نشان دهید. دربارهٔ کاربرد (۴ـ۴) در این مورد بحث کنید.

۴ـ۵ می‌دانیم که ذره‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت $\boldsymbol{\omega}$ دارای سرعت خطی $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ است.

الف) $\nabla \times \boldsymbol{v}$ را بیابید. (می‌توانید بدون از دست رفتن کلّیت، فرض کنید $\boldsymbol{\omega} = |\omega|\boldsymbol{k}$، که در آن $\boldsymbol{k}$ بردار یکه در جهت z است.)

ب) با استفاده از نتیجهٔ بخش (الف) $\oint \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} \,/\, \int d\boldsymbol{S}$ را محاسبه کنید که آن $\int d\boldsymbol{S}$ سطحی است که مسیر $\oint d\boldsymbol{r}$ آن را دربرمی‌گیرد، این مسیر را در صفحهٔ xـy فرض کنید. صحت نتیجه را با محاسبهٔ $\oint \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}$ برای مسیر دایره‌ای تحقیق کنید.

ج) رابطه‌ای تحلیلی برای پتانسیل برداری $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ که میدان مغناطیسی یکنواخت $\boldsymbol{B}$ را مثلاً، در جهت z به‌دست می‌دهد بنویسید. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ چه شکلی دارد؟

د) دو شاره با سرعت $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ را که یکی دارای تاو است و دیگری تاو ندارد، از هم تمیز دهید. آیا هیچ‌یک از آنها دارای جزء چرخشی است؟

۴ـ۶ الف) موج زیر را در نظر بگیرید

$$\psi = \psi_\circ \mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} = \psi_\circ \mathrm{e}^{i(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t)}$$

نشان دهید که مکان هندسی نقاط با فاز ثابت، یک صفحه تشکیل می‌دهد.

ب) امواج طولی و عرضی را طبق رابطهٔ زیر در نظر بگیرید

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{l} = F_\circ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$$

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{t} = F_\circ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\frac{\boldsymbol{k}_\perp}{|\boldsymbol{k}_\perp|}, \qquad \boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{k}\equiv\circ$$

نشان دهید که $\nabla\cdot\boldsymbol{F}_\mathrm{t}=\circ$ و $\nabla\times\boldsymbol{F}_\mathrm{l}=\circ$.

چون هر تابع، طولی یا عرضی، را می‌توان به‌صورت بسط فوریهٔ این امواج نوشت، در مورد دو تعریف مختلفی که برای هریک از دو حالت طولی و عرضی که در متن بیان شد وقتی یک جهت انتشار مشخص وجود دارد چه نتیجه‌ای را می‌توانید بگیرید.

۴ـ۷ الف) معادلهٔ (۴ـ۲۸) $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{B}$ را برای موج عرضی EM همفاز نشان می‌دهد. آیا این وضعیت اتفاقی است؟

ب) رابطهٔ $E_\circ = cB_\circ$ (۴ـ۱۷ج) را به‌دست آورید.

۴ـ۸ با استفاده از اتحاد برداری زیر، برای هر دو میدان برداری $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ و $\boldsymbol{B}(x,y,z)$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

نشان دهید که

$$\nabla\cdot\boldsymbol{S}\equiv\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}\times\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_\circ}\right) = \frac{-\partial}{\partial t}\left[\frac{B^۲}{۲\mu_\circ}+\frac{\varepsilon_\circ E^۲}{۲}\right]$$

بگویید چرا $\boldsymbol{S}$، بردار پوئین‌تینگ، را می‌توان به‌عنوان شارژ انرژی تعبیر کرد.

۴ـ۹ میانگین زمانی شدت نور خورشید که به لایهٔ بیرونی جوّ برخورد می‌کند $۱۴۰۰\,\mathrm{W/m^۲}$ است. با این فرض که موج EM فرودی، تخت است $E_\circ$، دامنهٔ میدان الکتریکی را که به لایهٔ بیرونی برخورد می‌کند به‌دست آورید.

۴ـ۱۰ با استفاده از $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = ۰$ نشان دهید که اگر میدان $\boldsymbol{B}$ به رسانای کامل نفوذ نکند مؤلفهٔ عمود بر سطحش باید صفر باشد.

راهنمایی: سطح گاؤسی را به‌صورت «یک قوطی کوچک» چنان در نظر بگیرید که سطح رسانا، پهلوهای آن را قطع کند.

۴ـ۱۱ در یک کاواک مکعب‌مستطیلی می‌توان فرض کرد که بردارهای موج $k_۱$، $k_۲$، $k_۳$ فضایی موسوم به فضای معکوس تشکیل می‌دهند. نشان دهید که تعداد مدهای طبیعی امواج ایستاده مربوط به جزء از حجم $\Delta^۳ k$ این فضا برابر است با

$$\Delta N = \frac{۲V}{\pi^۳ \Delta^۳ k}$$

که در آن V حجم کاواک است،

$$\Delta^۳ k = \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$$

۴ـ۱۲ الف) با استفاده از میدان الکتریکی معین، میدان مغناطیسی مربوط به مد $\mathrm{TE}_{۱۰۳}$ را به‌دست آورید و صحت شکل ۴ـ۶ را تحقیق کنید.

ب) توزیع جریان مربوط به این مد را در دیوارهٔ انتهایی، $z = d$، محاسبه کنید.

۴ـ۱۳ مد TE که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\boldsymbol{E} = E_۰ \sin \frac{\pi x}{a} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\omega t - \frac{۲\pi z}{\lambda g}\right]} \boldsymbol{j}$$

در موجبر مکعب‌مستطیلی به پهنای $\Delta x = a$ منتشر می‌شود ($\boldsymbol{j}$ بردار یکه در جهت y است).

الف) با استفاده از معادله‌های ماکسول نشان دهید که در داخل موجبر، معادلهٔ موج فضای آزاد چنین است

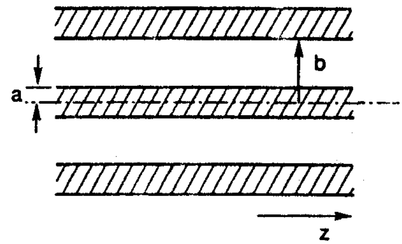
$$\nabla^۲ E = -\frac{۱}{c^۲}\left(\frac{\partial^۲ E}{\partial t^۲}\right) = ۰$$

ب) نشان دهید که

$$\lambda_g = \frac{\lambda_۰}{\sqrt{۱ - \left(\frac{\lambda_۰}{۲a}\right)^۲}}$$

که در آن $\lambda_۰ = ۲\pi c/\omega$.

ج) بسامد قطع، $\omega_۲$، را به‌دست آورید. درکمتر از این بسامد مد منتشر نمی‌شود، یعنی، برحسب z به‌صورت نمایی میرا می‌شود.



شکل ۴ـ۹ مسئلهٔ ۴ـ۱۴.

د) $\boldsymbol{B}$ را محاسبه و سطح مقطع $x-z$ را رسم کنید و در یک لحظه از زمان میدانهای $\partial \boldsymbol{E}/\partial t$ و $\boldsymbol{B}$ را در موجبر در گسترهٔ $\Delta z = \lambda_g$ نشان دهید. فرض کنید $\omega > \omega_c$.

راهنمایی: نگاه کنید به مثال ۴ـ۴

۴ـ۱۴ توان در یک کابل هم‌محور در مد اصلی TEM جریان دارد. در فضای آزاد $b > r > a$ (شکل ۴ـ۹)، میدان الکتریکی E با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\boldsymbol{E} = E_\circ u(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\omega t - \frac{۲\pi z}{\lambda}\right]} \boldsymbol{a}_r$$

که در آن، r و z مختصات استوانه‌ای هستند و $\boldsymbol{a}_r$ بردار یکه در جهت شعاعی است.

الف) در نمایی جانبی مانند آنچه در شکل ۴ـ۹ آمده است، به‌کمک خطوط میدان، جریان جابه‌جایی $\varepsilon_\circ(\partial \boldsymbol{E}_\circ/\partial t)$ را در یک طول‌موج سیگنال گسیل شده نشان دهید.

ب) به‌همین ترتیب میدانهای مغناطیسی را رسم کنید. کدام‌یک از معادله‌های ماکسول برای یافتن میدان لازم‌اند؟ بالاخره، جریانهای حقیقی در رساناها را نیز نشان دهید.

ج) با بهره‌گیری از قانون گاؤس (۴ـ۱) شکل تابع $u(r)$ را با توجه به اینکه هیچ چگالی باری در فضای آزاد $b > r > a$ وجود ندارد، تعیین کنید.

د) $\nabla_\perp^۲ E$ را بیابید (متن زیر).

ه) با استفاده از معادلهٔ

$$\nabla^۲ E - \frac{۱}{c^۲}\frac{\partial^۲ E}{\partial t^۲} = \circ$$

نشان دهید که $\omega\lambda = ۲\pi c$. آیا بسامد قطعی برای مد بنیادی انتشار وجود دارد؟ (مسئلهٔ ۴ـ۱۳)

در مختصات استوانه‌ای:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \left[\frac{۱}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E\phi}{\partial z}\right]\hat{\boldsymbol{a}}_r + \left[\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}\right]\hat{\boldsymbol{a}}_\phi$$

$$+\left[\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial_r}(rE_\phi)-\frac{۱}{r}\left(\frac{\partial E_r}{\partial \phi}\right)\right]\boldsymbol{a}_z$$

به‌علاوه،

$$\nabla^۲\boldsymbol{E}\equiv\nabla^۲_\perp\boldsymbol{E}+\nabla^۲E_z\boldsymbol{a}_z$$

$$\nabla^۲_\perp\boldsymbol{E}=\left(\nabla^۲\boldsymbol{E}_r-\frac{E_r}{r^۲}-\frac{۲}{r^۲}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{a}}_r+\left(\nabla^۲E_\phi-\frac{E_\phi}{r^۲}\frac{۲}{r^۲}\frac{\partial E_r}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{a}}_\phi$$

و برای میدان نرده‌ای $\psi(r,z,\phi)$

$$\nabla^۲\psi=\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{۱}{r^۲}\frac{\partial^۲\psi}{\partial\phi^۲}+\frac{\partial^۲\psi}{\partial z^۲}$$

۴ـ۱۵ الف) با شروع از (۴ـ۳۳ الف و ب) نشان دهید که افزودن میدان بدون تاو $-\nabla\chi$ به $\boldsymbol{A}$، که در آن $\chi(\boldsymbol{r},t)$ هر میدان نرده‌ای با شرایط مرزی مناسب است که نه‌تنها تغییری در $\boldsymbol{B}$ به‌وجود نمی‌آورد بلکه $\boldsymbol{E}$ را نیز تغییر نمی‌دهد و بدین‌صورت جوابهای یکتا را برای معادله‌های ماکسول تضمین می‌کند.

راهنمایی: پیش از به‌کار بردن قضیهٔ برداری هلمهولتز، نشان دهید که

$$\chi(r,t)=-\frac{۱}{۴\pi}\int\frac{(\nabla')^۲\chi(\boldsymbol{r}')dv'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

ب) نشان دهید که در پیمانهٔ لورنتس $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=(-۱/c^۲)(\partial\phi/\partial t)$ (۴ـ۳۱) به‌صورت زیر در می‌آید،

$$\nabla^۲\boldsymbol{A}-\frac{۱}{c^۲}\frac{\partial^۲\boldsymbol{A}}{\partial t^۲}=-\mu_\circ\boldsymbol{j}$$

$$\nabla^۲\phi-\frac{۱}{c^۲}\frac{\partial^۲\phi}{\partial t^۲}=-\varrho/\varepsilon_\circ$$

χ چیست؟

۴ـ۱۶ الف) با استفاده از (۴ـ۳۱الف) نشان دهید که

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=-\nabla\psi(x,y,z)+\nabla\times\boldsymbol{G}(x,y,z)$$

برای چشمه‌های d و $\boldsymbol{c}$ معادله‌های (۴ـ۳۰الف و ب)

$$-\nabla^۲\psi=d,\qquad -\nabla^۲\boldsymbol{G}=\boldsymbol{c}$$

با فرض $\nabla_\circ\boldsymbol{G}=\circ$، برقرارند.

ب) با پذیرفتن جواب «الکتروستاتیکی»

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{d(r')dv'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

به‌عنوان حل $-\nabla^2\psi = d$، که در آن به‌ازای $|\boldsymbol{r}| \to \infty$ داریم $\psi(\boldsymbol{r}) \to 0$، آیا می‌توانید $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$ را که در همین شرط مرزی صدق می‌کند پیدا کنید؟

۴ـ۱۷ با استفاده از جدول ۴ـ۱، برای هنگامی‌که ϱ و $\boldsymbol{j}$ مستقل از زمان هستند، $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{B}$ را برحسب ϱ و $\boldsymbol{j}$ بنویسید. در چه شرایطی می‌توان میدان برداری را صرفاً به‌صورت گرادیان میدان نرده‌ای، به‌صورت تاو میدان برداری، و یا به‌صورت ترکیبی از این دو نوشت؟ برای جوابهای خود دلیل بیاورید.

۴ـ۱۸ سیم مستقیمی را که از $z' = -L/2$ تا $z' = +L/2$ کشیده شده است و حامل جریان مستقل از زمان I است در نظر بگیرید.

الف) انتگرالی برای پتانسیل برداری $\boldsymbol{A}(r,z,\phi)$ برحسب چگالی جریان معین $\boldsymbol{j}(r',z',\phi)$ بنویسید ولی آن را محاسبه نکنید. جواب خود را با حالت سیم نازک در $z = 0$ که حامل جریان I از $z' = -L/2$ تا $z' = L/2$ است، ساده کنید.

ب) $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ را با مشتق‌گیری‌از نتیجهٔ (الف) در زیر انتگرال باقی‌ماندهٔ $\int dz'$ حساب کنید.

ج) انتگرال‌گیری را کامل کنید تا $\boldsymbol{B}(r,0,\phi)$ را بیابید.

د) نتیجه را برای B در حد $L\to\infty$ در نظر بگیرید و آن را با نتیجهٔ مسئلهٔ ۴ـ۲ مقایسه کنید.

در مختصات استوانه‌ای $\nabla\times\boldsymbol{A}$ چنین است:

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_r+\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{a}_\phi+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)-\frac{\partial A_r}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_z$$

۴ـ۱۹ از رابطهٔ استاتیک

$$d\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{d\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

قانون بیوـ ساوار را به‌دست آورید:

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{l}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

راهنمایی: $\nabla\times(\psi\boldsymbol{F}) = \psi\nabla\times\boldsymbol{F}+(\nabla\psi)\times\boldsymbol{F}$

۴ـ۲۰ الف) نشان دهید که پتانسیل برداری $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ که از توزیع جریان نقطه‌ای $I_{\mathrm{T}}(0,t)\delta^3(\boldsymbol{r})$ در مبدأ، به‌وجود می‌آید. در معادلهٔ موج

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=0$$

در هر نقطه غیر از $\boldsymbol{r}=0$ صادق است، به‌شرطی که

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\mu_0\boldsymbol{I}_T\frac{\left(0,t-\dfrac{r}{c}\right)}{(4\pi r)}$$

راهنمایی: در مختصات کروی

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\psi\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\psi\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

ب) معادلهٔ پواسون برای توزیع بار $q_0\,\delta^3(\boldsymbol{r})$ چنین است

$$\nabla^2\phi=-q_0\,\delta^3\frac{(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}$$

با استفاده از قانون گاؤس نشان دهید که

$$-\oint\nabla\phi(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{q_0}{\varepsilon_0}$$

که شرط مرزی برای $\phi(\boldsymbol{r})$ در $\boldsymbol{r}=0$ است.

ج) با توجه به (۴ـ۳۵) می‌دانیم که برای توزیع بار (ب)،

$$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

و در الکتروستاتیک میدان الکتریکی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\nabla\phi(\boldsymbol{r})=\frac{q_0\,\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

(قانون عکس مجذور). با محاسبهٔ مستقیم نشان دهید که این شکل از $\nabla\phi(\boldsymbol{r})$ شرط مرزی را در (ب) به‌ازای کرهٔ بینهایت کوچک واقع در مبدأ، برقرار می‌کند.

د) در $r = \circ$، شرط مرزی را مشابه با آنچه در (ب) آمد، برای $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند به‌دست آورید.

$$\nabla^{\text{۲}}\boldsymbol{A} - \frac{\text{۱}}{c^{\text{۲}}}\frac{\partial^{\text{۲}}\boldsymbol{A}}{\partial t^{\text{۲}}} = -\mu_\circ \boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}(\circ,t)\delta^{\text{۳}}(\boldsymbol{r})$$

ه) با محاسبهٔ مستقیم تحقیق کنید که

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \mu_\circ \boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}\frac{\left(\circ, t-\dfrac{r}{c}\right)}{(\text{۴}\pi r)}$$

در شرط مرزی (د) صدق می‌کند.

راهنمایی: برای کرهٔ بینهایت کوچک که مرکز آن در مبدأست، جملات «اضافی» هم (که در (د) به‌دست نیامدند) ممکن است، بینهایت کوچک باشند.

و) نتیجهٔ بالا را برای $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ به‌کار برید و رابطهٔ کلی (۴ـ۳۹) را به‌دست آورید.

۴ـ۲۱ کاواک شکل ۴ـ۵ به‌وسیلهٔ آنتن نازکی که از سطح زیرین $y = \circ$، تا سطح بالایی $y = b$ کشیده شده است و در $x = a/\text{۲}$ و $z = d/\text{۱۲}$ قرار دارد برانگیخته می‌شود. بدین‌ترتیب، چگالی جریان در آنتن با قسمت حقیقی رابطه زیر داده می‌شود

$$\boldsymbol{J} = I_\circ\,\delta\left(x-\frac{a}{\text{۲}}\right)\delta\left(z-\frac{d}{\text{۱۲}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{j}$$

که در آن ω بسامد زاویه‌ای و $\boldsymbol{j}$ بردار یکه در جهت y است. چگالی بار ϱ صفر است.

الف) نشان دهید که دامنه پتانسیل برداری وابسته به مد $\mathrm{TE}_{\text{۱۰۳}}$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{TE}_{\text{۱۰۳}}} &= \frac{\mu_\circ}{k^{\text{۲}}-k_\circ^{\text{۲}}}\left(\frac{\text{۴}k^{\text{۲}}}{Vk_{\text{۱}}^{\text{۲}}}\right)I_\circ\, b\frac{k_{\text{۱}}}{k}\sin\frac{k_{\text{۱}}a}{\text{۲}}\sin\frac{k_{\text{۳}}d}{\text{۱۲}} \\ &= \frac{\text{۲}\sqrt{\text{۲}}\mu_\circ I_\circ}{ad(k^{\text{۲}}-k_\circ^{\text{۲}})}\sqrt{\text{۱}+\text{۹}a^{\text{۲}}/d^{\text{۲}}} \end{aligned}$$

که در آن k همان $k_{\text{۱۰۳}}$ است و $k_\circ$ نسبت بسامد محرک ω به سرعت نور است.

ب) مفهوم «تشدید» را برحسب نتیجه‌ای که برای دامنه به‌دست آمده است، بیان کنید و دربارهٔ تأثیر اتلافی در دیواره‌های کاواک برروی نتایج، اظهار نظر کنید.

ج) میدان الکتریکی مد $\mathrm{TE}_{۱۰۳}$ را در محل آنتن محاسبه کنید و رابطه‌ای برای افت ولتاژ خارجی در آنتن بنویسید.

د) با استفاده از ج) امپدانس z را برای این مُد حساب کنید. نشان دهید که برای این مد، مدار معادل برای کاواک، شامل L و C موازی است. L و C را بیابید. ضرایب C_s با رابطهٔ زیر تعریف می‌شوند

$$\boldsymbol{A}(x, y, z, t) = \sum_s C_s \boldsymbol{u}_s(x, y, z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

که در آن $\boldsymbol{u}_s$ مدهای (۴ـ۲۶) برای میدان الکتریکی هستند.

۴ـ۲۲ ثابت کنید که میانگین زمانی توان تابشی آنتن دوقطبی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\bar{P} = \frac{\varrho_\circ^۲ \omega^۴}{۱۲\pi\varepsilon_\circ c^۳} \qquad (۴۵\text{-}۴)$$

در مختصات کروی

$$\nabla \times \boldsymbol{F}(r, \theta, \phi) = \frac{ar}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\phi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right] + \frac{a\theta}{r}\left[\frac{۱}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\phi)\right] + \frac{a\phi}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]$$

ابتدا نشان دهید که در «ناحیهٔ تابش»، $d \ll \lambda \ll r$ (بر خلاف «ناحیهٔ نزدیک» $d \ll r \ll \lambda$) میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، هر یک با دور شدن از آنتن به‌صورت $۱/r$ کاهش می‌یابند.

۴ـ۲۳ نشان دهید که قانون کولن نه‌تنها در الکتروستاتیک معتبر است بلکه میدان الکتریکی طولی را در الکترودینامیک نیز به‌دست می‌دهد.

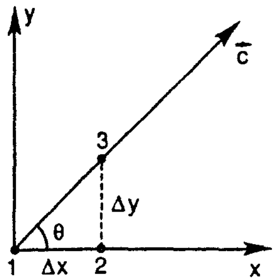
تمرین آزمایشگاهی

با یک کلیسترون، مد EM کاواک را برانگیخته کنید و به‌دنبال تشدید بگردید. طرحهای میدانهای $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{B}$ را در مدهای تشدیدی بررسی کنید.

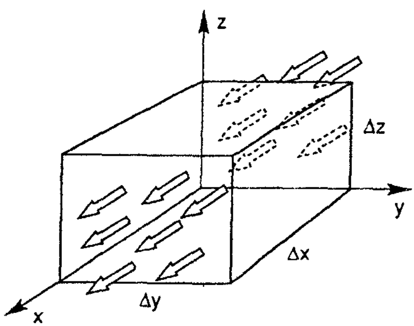
۴ـ پ (پیوست)

بررسی مفهوم عملگرهای برداری

گرادیان: می‌خواهیم نشان دهیم که اگر $\boldsymbol{c}$ برداریکه‌ای در جهت ثابت معین باشد، $\boldsymbol{c}\cdot\psi(x, y, z)$ آهنگ تغییرات ψ را در جهت $\boldsymbol{c}$ مشخص می‌کند.



شکل ۴ـپـ۱ $c \cdot \nabla \psi$ آهنگ تغییر ψ در جهت c را مشخص می‌کند.



شکل ۴ـپـ۲ شار خروجی میدان برداری $\boldsymbol{V}$ در واحد حجم $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$ است. میدان برداری $V \times \boldsymbol{i}$ در شکل نشان داده شده است، شار از $x = ۰$ وارد می‌شود و از $x = \Delta x$ خارج می‌شود.

مسئله را در دوبُعد در نظر می‌گیریم. با توجه به شکل ۴ـپـ۱، تغییر ψ از نقطهٔ ۱ به نقطهٔ ۳ چنین است:

$$\begin{aligned}\psi(۳) - \psi(۱) &= [\psi(۲) - \psi(۱)] + [\psi(۳) - \psi(۲)] \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\Delta y\end{aligned}$$

آهنگ تغییرات ψ در جهت c چنین است

$$\frac{\psi(۳) - \psi(۱)}{\sqrt{(\Delta x)^۲ + (\Delta y)^۲}} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial \psi}{\partial y}\sin\theta \qquad (۴ـپـ۱)$$

از سوی دیگر

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c} \cdot \nabla \psi &= c_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + c_y \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial \psi}{\partial y}\sin\theta\end{aligned}$$

زیرا $\boldsymbol{c}$ بردار یکه است.

دیورژانس: می‌خواهیم نشان دهیم که شار خالص میدان برداری $\boldsymbol{V}$ که به‌ازای واحد حجم از حجم بسیار کوچک خارج می‌شود، از رابطهٔ $\nabla \cdot \boldsymbol{V}(x, y, z)$ به‌دست می‌آید.

شاری که از وجه $x = \Delta x$ در شکل ۴ـپـ۲ خارج می‌شود چنین است:

$$\left[V_x(x, y, z) + \frac{\partial V_x(x, y, z)}{\partial x}\Delta x\right]\Delta y \Delta z$$

و شاری که از وجه پشتی در $x = 0$ وارد می‌شود عبارت است از:

$$V_x(x, y, z)\Delta y \Delta z$$

که شار خالص زیر را می‌دهد

$$\frac{\partial V_x(x, y, z)}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z$$

برای شار خالص از وجوه بالا و پایین، داریم

$$\frac{\partial V_z(x, y, z)}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z$$

سرانجام، با در نظر گرفتن شار خالص خروجی از وجوه $y = 0$ و $y = \Delta y$، برای شار خالص خروجی از واحد حجم داریم،

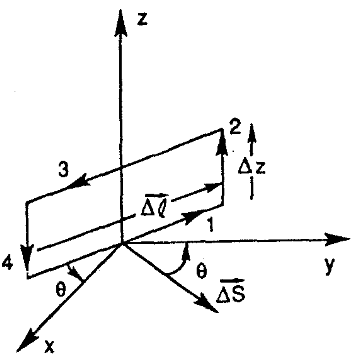
$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad (۴\text{ـپـ}۲)$$

که همان رابطهٔ مطلوب است.

تاو: می‌خواهیم نشان دهیم که انتگرال خطی میدان برداری $\boldsymbol{V}$ دور پربندی که مساحت بسیار کوچک $\Delta \boldsymbol{S}$ را، دربر می‌گیرد برابر است با $(\nabla \times \boldsymbol{V}) \cdot \Delta \boldsymbol{S}$.

$\Delta \boldsymbol{S}$ را در صفحهٔ xـy چنان در نظر می‌گیریم که با محور y زاویهٔ θ بسازد، داریم

$$\begin{aligned}(\nabla \times \boldsymbol{V}) \cdot \Delta \boldsymbol{S} &= \left[\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}\right.\\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right] \cdot [\boldsymbol{i}\sin\theta + \boldsymbol{j}\cos\theta]|\Delta \boldsymbol{S}|\\ &= \left[\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\sin\theta + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\cos\theta\right](\Delta z)(\Delta l) \qquad (۴\text{ـپـ}۳)\end{aligned}$$



شکل ۴ـپـ۳ انتگرال خطی میدان برداری $\boldsymbol{V}$ در مسیر بسته‌ای که مساحت ΔS را در بر می‌گیرد $(\nabla\times\boldsymbol{V})\cdot\Delta\boldsymbol{S}$ است. اندازهٔ بردار $\Delta\boldsymbol{S}$ مساحت $\Delta l\Delta z$ است، و جهت آن عمود بر مساحت بینهایت کوچک است.

انتگرال خطی $\oint \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ را مانند شکل ۴ـپـ۳ به چهار جزء تقسیم می‌کنیم،

$$I_1 = \boldsymbol{V}(x,y,z)\cdot\Delta\boldsymbol{l} \equiv \boldsymbol{V}\cdot\Delta\boldsymbol{l}$$

$$I_2 = (V_z + \nabla V_z\cdot\Delta\boldsymbol{l})\Delta z$$

$$I_3 = -\left(\boldsymbol{V} + \frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial z}\Delta z\right)\cdot\Delta\boldsymbol{l}$$

$$I_4 = -V_z\Delta z$$

$$\oint \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$= -\left(\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial z}\right)\cdot\Delta\boldsymbol{l}\Delta z + (\nabla V_z\cdot\Delta\boldsymbol{l})\Delta z$$

توجه کنید که

$$\Delta\boldsymbol{l} = (-\boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta)(\Delta l)$$

به این ترتیب،

$$\oint \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} = \left[\left(\frac{-\partial V_x}{\partial z}\boldsymbol{i} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\boldsymbol{j}\right)\cdot(-\boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial V_z}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\boldsymbol{j}\right)\cdot(-\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j})\right](\Delta z\Delta l)$$

که همان طرف راست (۴ـپـ۳) است.

برهانی که از جزء سطحی که با زاویه می‌سازد استفاده می‌کند، از نظر محاسباتی دشوار است. شکل متقارن ∇ در مختصات دکارتی، بردار بودن $\nabla\times\boldsymbol{V}$ را بهتر نشان می‌دهد، یعنی اینکه

$\nabla \times \boldsymbol{V}$ تحت چرخش یا انتقال مثل بردار تبدیل می‌شود و همچنین $(\nabla \times \boldsymbol{V}) \cdot \Delta \boldsymbol{S}$ به مانند $\oint \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ نرده‌ای است، یعنی تحت تبدیل ناوردا باقی می‌ماند.

مسئلهٔ ۴ـپ‌ـ۱. در تحلیل دیود خلأ، مثال ۴ـ۳، نتیجهٔ زیر را برای پتانسیل الکتروستاتیکی به‌دست آوردیم،

$$\phi(x) = \left(\frac{۳}{۲}\right)^{\frac{۴}{۳}} (CJ)^{\frac{۲}{۳}} x^{\frac{۴}{۳}}$$

$E(x)$، $\varrho(x)$، $v(x)$ را محاسبه کنید و تحقیق کنید که

$$J = -\varrho(x) v(x)$$

به x بستگی ندارد.

نمودار $\phi(x)$، $E(x)$، $\varrho(x)$ را برحسب x رسم کنید و با نمودارهای مشابهی که در آنها $\varrho(x)$ صفر، اما $\phi(۰)$ و $\phi(d)$ آنها مثل این مسئله است، مقایسه کنید. در هر دو مورد دربارهٔ مساحت $-\int_۰^d E(x)dx$ چه می‌دانیم؟

اکنون، جعبه‌ای مکعب‌مستطیلی در نظر بگیرید که سطح مقطع آن به موازات صفحهٔ yـz، یعنی موازی با صفحات آند و کاتد باشد و از x تا $x + \Delta x$ در ناحیهٔ $۰ < x < d$ که نمودارهای بالا قرارگرفته باشد. خطهای میدان الکتریکی را به مانند آنچه در شکل ۴ـپ‌ـ۲ برای $V_x(x,y,z)\boldsymbol{i}$ آمده است، رسم کنید، اما خطهای میدان در داخل جعبه را نیز در نظر بگیرید. شار خالصی که از جعبه خارج می‌شود، چقدر است؟ محاسبه را تا مرتبهٔ اول Δx انجام دهید. بار الکتریکی کل در داخل جعبه چقدر است؟ بارهای الکتریکی را که در داخل جعبه به‌وجود می‌آیند نشان دهید. آیا خطوط الکتریکی رسم شده به‌دقت وضعیت خطوط الکتریکی را برحسب x نشان می‌دهند؟ حال، $E(x)$ و $\varrho(x)$ را در حد $x \to ۰$ محاسبه کنید، اما نه در $x = ۰$! توضیح دهید. آیا شکل انتگرالی معادلهٔ ماکسول برای حل مشکل در $\Delta x = x$، $x \to ۰$، مفید است؟

مسئلهٔ ۴ـپ‌ـ۲. شاره‌ای در کانال مکعب‌مستطیل شکلی در جهت y با سرعت $v(x,y)$ که به عمق، یعنی z، بستگی ندارد ولی ممکن است به موقعیت عرضی x بستگی داشته باشد، حرکت می‌کند. دو حالت را در نظر بگیرید:

۱) $$v(x,y) = v(x)\boldsymbol{j}$$

۲) $$v(x,y) = v(y)\boldsymbol{j}$$

خطوط میدان سرعت را برای هر دو حالت رسم کنید. تفاوتها و شباهتهای دو حالت را با محاسبهٔ $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ و $\boldsymbol{v} \times \nabla$ برای هر یک به‌دست آورید. درکدام حالت جهت کانال تغییر می‌کند؟ آیا ممکن است یکی از این دو حالت برای شاره‌ای تراکم‌ناپذیر و شتابدار به‌کار رود؟ بحث کنید. کدام جریان را می‌توان لایه‌ای در نظر گرفت.

برای مطالعهٔ بیشتر

R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: *Lectures on Physics II* (Addison-Wesley; Reading. MA, 1962)

W. K. H. Panofsky, M. Phillips: *Classical Electricity and Magnetism* (Addison Wesley, Reading, MA, 1962)

۵

نور-اپتیک فیزیکی، شکست

چکیده

فصل قبل دربارهٔ امواج EM مبنایی برای گسترش اپتیک فیزیکی فراهم می‌آورد، که خود به‌طور سنتی زمینهٔ مکانیک موجی (فصل ۶) است. به‌علاوه، در این فصل انتشار امواج EM را در دی‌الکتریکها تحلیل می‌کنیم، هدف این بررسی، درک شکست و بازتاب در فصل مشترکهاست، که پدیدهٔ اصلی اپتیک هندسی است. فصل با بحثی پیرامون تولید نور به‌عنوان پیامد گذارهای کوانتومی در ماده آغاز می‌شود و نقش اصل عدم قطعیت هایزنبرگ در محدود کردن همدوسی بیان می‌شود. پس از آن تحلیل پراش از یک تک‌شکاف با استفاده از نواحی فرنل و پیامدهای حاصل برای تفکیک اجسام روشن خواهد آمد. ملاحظات خاصی دربارهٔ پراش پرتو x از بلورها (توریهای سه‌بُعدی) مبحث اپتیک فیزیکی را تکمیل می‌کند. سرانجام، به بررسی انتشار امواج EM تخت در دی‌الکتریکهای عایق می‌پردازیم. مثالهای حل‌شده، دربارهٔ تداخل نور حاصل از دو شکاف، و جزئیات بازتاب و شکست در فصل مشترک است. مسئله‌هایی نیز به اثر فوتوالکتریک اینشتین، اصل هویگنس، روزنهٔ مربعی، توریها، معیار ریلی برای تفکیک، پراش دبی ـ شرر پرتو x، و تضعیف نور در فلزها می‌پردازد. پیوست انتهای این فصل پایه‌ای محکم برای تحلیلِ فرنلیِ پراش با استفاده از روش تابع گرین برای حل معادله‌های موج ناهمگن است.

۵ـ۱ سرشت نور و تولید آن

چشم انسان به تابش الکترومغناطیسی با طول‌موجهای درگسترهٔ $6500\,\text{Å}$ در ناحیهٔ سرخ تا $4500\,\text{Å}$ در ناحیهٔ بنفش حساس است. (۱ انگستروم $\text{Å} = 10^{-10}$ متر) برخی پدیده‌های مشخصهٔ حرکت موجی به‌صورت عام، و امواج EM، یعنی پراش و تداخل، در ناحیهٔ نور مرئی به‌طور خاص، عمیقاً بررسی شده‌اند. این مطالعات موضوع اپتیک فیزیکی را تشکیل می‌دهند و بیشتر این فصل به آنها اختصاص دارد.

با توجه به فیزیک کلاسیک، یعنی فیزیکی که بیش از پیدایش و تکامل مکانیک کوانتومی در قرن بیستم، وجود داشت، تمامی انواع تابش EM را بارهای الکتریکی شتابدار تولید می‌کنند. برای نور مرئی، این ذرات باردار عموماً الکترونهای متصل به اتمها هستند. در همین زمینه، پرتوهای γ را می‌توان ناشی از بارهای موجود در هسته‌های شتابدار، پرتوهای فروسرخ را ناشی از یونهای شتابدار و همان‌طور که قبلاً گفتیم، امواج رادیویی را حاصل شتاب چگالیهای بار ماکروسکوپی در آنتن دانست. در هر یک از این موارد، حرکت این بارها را می‌توان نوسانهایی حول نقطهٔ تعادل، نوسانگرهای الکترومغناطیسی تلقی کرد. در این‌صورت، بسامد تابش EM همان بسامد نوسان‌بار است.

در فیزیک جدید وضع تا اندازه‌ای متفاوت است. با این همه، با وجود سرشت ظاهراً متفاوت مفاهیم کلاسیک و جدید، فیزیک جدید در شرایط خاصی، طبق «اصل تطابق» با فیزیک کلاسیک سازگار می‌شود. این اصل را برای نخستین نیلس بور تشریح کرد؛ نقش عظیم او را در فیزیک جدید خواهیم دید. در فیزیک کوانتومی، ذرات برخی حالت‌های مشخص را اشغال می‌کنند؛ اگر این حالت‌ها مانا باشند، انرژی مشخص و ثابتی خواهند داشت. اگر ذره‌ای از یک حالت با انرژی مشخصهٔ E_a گذاری، به حالتی که انرژی مشخصه‌اش E_b است انجام دهد، این اختلاف انرژی $E_a - E_b$ با فرض مثبت بودن، اغلب به‌صورت تابش EM گسیل می‌شود. بسامد این تابش چیست؟

آلبرت اینشتین در ۱۹۰۵ تعبیر معروف خود را از اثر فوتوالکتریک ارائه داد. او نتیجه گرفت که تابش EM به‌صورت بسته‌های گسسته، کوانتومها، گسیل می‌شود که هر کوانتوم تابش، به‌نام فوتون، دارای انرژی $h\nu$ است. ν بسامد تابش برحسب هرتز است و h (که برابر $6{,}624 \times 10^{-34}\,\text{J/s}$ است) به افتخار ماکس پلانک، ثابت پلانک نام دارد. پلانک چندی قبل قبل از آن، در ۱۹۰۰ توانسته بود، آنچه را که به تابش جسم سیاه موسوم است با فرمولی که شامل ثابت فیزیکی جدید پیشنهادی او بود، تطبیق دهد. پلانک مقدار تقریبی این ثابت جدید، h، را با استفاده از داده‌های آزمایشی تعیین کرد. فرض اینشتین مفهوم مشخصی به یافتهٔ پلانک داد.

به‌سادگی معلوم شده است که اگر ذره‌گذاری از تراز انرژیِ بالاتر E_a به تراز انرژی پایین‌تر E_b

داشته باشد، عموماً فقط یک فوتون گسیل می‌شود و رابطهٔ

$$E_a - E_b = h\nu_\circ \tag{۵ـ۱}$$

برقرار است، که بلافاصله بسامد $\nu_\circ$ را برای تابش گسیل شده می‌دهد.

در یک اتم منزوی انرژیهای مشخصهٔ حالت‌های گوناگون، یعنی ترازهای انرژی الکترونی، از یکدیگر جدا هستند. در نتیجه تابش گسیل شده فقط با بسامدهای گسستهٔ خاصی رخ می‌دهد. اما اگر اتمها در یک بلور مانند بلور تنگستن مجتمع شوند، ترازهای گسسته پهن می‌شوند و نوارهای انرژی پیوسته‌ای را به‌وجود می‌آورند. در این صورت به‌جای طیف گسسته‌ای که مشخصهٔ گازها، یعنی اتمهای منزوی است طیفی پیوسته به‌دست می‌آوریم که شامل همهٔ بسامدهاست.

بنابراین، از طرفی نور از «ذرات» گسسته‌ای به نام فوتون تشکیل شده است و از طرف دیگر، سرشت موجی نیز دارد، اگر چنین نبود چگونه می‌توانستیم از بسامد $\nu_\circ$ صحبت کنیم؟ بررسی فصل ۱ دربارهٔ نمایش فوریه کمک می‌کند تا این پارادوکس را تا حد زیادی حل کنیم. توضیح بیشتر به فصلهای بعد موکول می‌شود که بحث خود را گسترش می‌دهیم تا شامل امواج مادی نیز بشود.

طبیعتاً فرض بر این است که تابش در زمان مشخصی، $t = ۰$، گسیل می‌شود. اما بهتر است فرض کنیم که تپ تابشی گسیل شده است بازهٔ زمانی کوچکی را به حول $t = ۰$، مثلاً، از $-\Delta t/۲$ تا $+\Delta t/۲$، اشغال می‌کند. مثلاً، میدان مغناطیسی مربوط به این تپ در شکل ۵ـ۱، در خلال این بازهٔ زمانی موجود است. این میدان را چنین نمایش می‌دهیم

$$B(t) = \cos\omega_\circ t \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B_\omega e^{i\omega t} d\omega, \tag{۵ـ۲ الف}$$

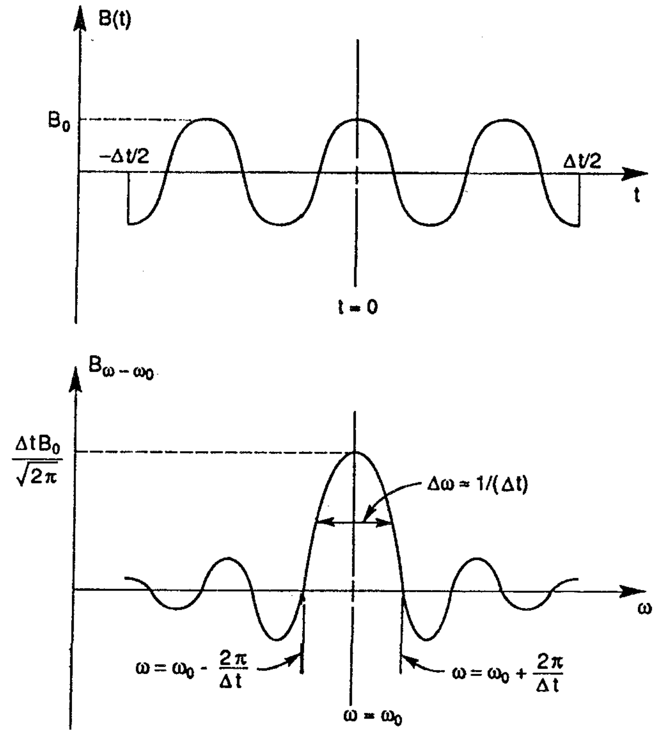
$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\omega-\omega_\circ} \cos\omega t \, d\omega \tag{۵ـ۲ب}$$

$$\omega = ۲\pi\nu_\circ \tag{۵ـ۲ج}$$

$\nu_\circ$ از (۵ـ۱) به‌دست می‌آید. در (۵ـ۲ الف) عاملی را که با بسامد $\nu_\circ$ نوسان می‌کند جدا کرده‌ایم، عامل باقی‌مانده

$$\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B_\omega e^{i\omega t} d\omega$$

پوش موج مربعی را نشان می‌دهد که با دامنهٔ $B_\circ$ از $-\Delta t/۲$ تا $+\Delta t/۲$ گسترش یافته است.



شکل ۵ـ۱ سیگنال نوری با میدان مغناطیسی $B(t)$ که بازهٔ زمانی Δt را اشغال می‌کند. $B_{\omega-\omega_\circ}$ تبدیل فوریهٔ کسینوسی موج مربعی پوش آن است.

از مثال ۱ـ۱ می‌دانیم که تبدیل فوریهٔ کسینوسی $B(t)$، یعنی $B_{\omega-\omega_\circ}$ در رابطهٔ

$$B_{\omega-\omega_\circ} = B_\circ \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\ \frac{\sin\left[\left(\omega-\omega_\circ\right)\frac{\Delta t}{۲}\right]}{(\omega-\omega_\circ)} \qquad (۵\text{ـ}۳)$$

صدق می‌کند، (شکل ۵ـ۱)، نمایش واقعی‌تر سیگنال تابش براساس احتمال یافتن ذره در حالت برانگیختهٔ بالایی به‌صورت $e^{-\gamma t}$ است، که در آن $۱/\gamma$ «طول عمر» برانگیختگی است. در نتیجه سیگنال حاصل همان بستگی زمانی را دارد که نوسانهای میرا (مسئلهٔ ۵ـ۳).

در اینجا به جزئیات ساختار $B(t)$ یا تبدیلش $B_{\omega-\omega_\circ}$ واقعاً علاقه‌مند نیستیم، بلکه صورت کلی رابطهٔ فوریه مورد نظر ماست: اگر $B(t)$ ناحیه‌ای از زمان به عرض تقریبی Δt را اشغال کند، $B_{\omega-\omega_\circ}$ گستره‌ای از بسامد به پهنای $\Delta\omega$ را حول $\omega_\circ$ اشغال می‌کند، به‌طوری که

$$\Delta\omega\Delta t \simeq ۱ \qquad (۵\text{ـ}۴)$$

قبلاً هم، در فصل ۱، این رابطه را به‌دست آورده‌ایم، خصوصاً به مثال ۱ـ۱ مراجعه کنید، در نتیجه تابع هموار پهن دارای تبدیل فوریه باریک است، و برعکس.

خلاصه اینکه، نور با گذار نزولی الکترون از یک تراز انرژی به تراز انرژی پایین‌تر تولید می‌شود. (جذب نور با یک گذار صعودی نیز امکان‌پذیر است). در مکانیک کوانتومی، در این حالت، قلهٔ تبدیل فوریهٔ نمایی $B(t)$ در $-\omega_\circ$، وارد کار می‌شود.) تپ نوری حاصل، بازهٔ زمانی متناهیی را اشغال می‌کند که با گسترهٔ بسامدهای هماهنگی که برای نمایش زمانی تپ لازم‌اند، نسبت عکس دارد. اما نقش (۵ـ۱) که بسامد تابش گسیل شده را به ترازهای انرژی مرتبط می‌کند چیست؟

در فصل بعد خواهیم دید که فقط سیستمهای کاملاً پایدار، یعنی سیستمهایی که به هیچ‌وجه برحسب زمان تغییر نمی‌کنند، دارای ترازهای انرژی کاملاً تیز، یعنی دارای حالت‌های مانا هستند. این موضوع با جامعترین اصل مکانیک کوانتومی، «اصل عدم قطعیت هایزنبرگ» سازگار است. اما، اتمهای مثلاً، بلور تنگستن کاملاً پایدار نیستند. نه تنها انرژی گرمایی بلور آنها را آشفته می‌کند، بلکه خود فرایند تابش نیز از پایداری ترازهای بالاتر می‌کاهد. بنابراین، فرض می‌کنیم که پهنای تراز E_a، ΔE، مقدار مشخصی است که در عمل از مرتبهٔ J $۱۰^{-۲۰}$ است، در حالی که پهنای تراز از پایین‌تر را می‌توان نادیده گرفت بدین‌ترتیب، طبق (۵ـ۱)، گسترهٔ بسامدهای تابش گسیل‌شده چنین است،

$$\Delta\nu = \frac{\Delta E}{h}, \qquad \Delta\omega = ۲\pi\frac{\Delta E}{h}$$

و از (۵ـ۴)، طول تپ، که آن را به منزلهٔ عدم قطعیت در زمان گسیل می‌گیریم، با رابطهٔ زیر داده می‌شود،

$$\Delta t \simeq \frac{۱}{\Delta E}\cdot\frac{h}{۲\pi}$$

و یا

$$\Delta E\Delta t \simeq \frac{h}{۲\pi} \qquad (۵\text{ـ}۵)$$

این رابطه، اصل عدم قطعیت هایزنبرگ به شکلی است که برای تابش به‌کار می‌رود. آیا این اصل در بررسی پراش و تداخل که هم اکنون به آن می‌پردازیم هیچ، پیامد عملی نیز به‌همراه دارد؟

در واقع چنین است. پدیده‌های پراش و تداخل در نتیجه باز ترکیب قسمت‌های گوناگون باریکهٔ نور به‌وجود می‌آیند. طبعاً، میدان مغناطیسی (یا الکتریکی) را برای چنین باریکه‌ای به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$B(\omega) = B_\circ \sin(kx - \omega t + \delta_\omega)$$

در اینجا δ_ω فاز است، که آن را صریحاً نشان داده‌ایم. با اندکی تفکر معلوم می‌شود تا زمانی که نور از فرایند تابشی مشخصی ناشی شود $\delta\omega$ کمیتی معین است، اما انتظار نداریم که بین این فاز و فاز مربوط به نوری با بسامد مشخص حاصل از گذار دیگر، ارتباطی وجود داشته باشد. بنابراین، اگرچه اثرهای باز ترکیب فرایندهای مختلف تابشی را مشاهده می‌کنیم، اما این اثرها به شکل کاتوره‌ای با یکدیگر جمع می‌شوند. ما فقط روابط خاصی را بررسی خواهیم کرد، که حداکثر از یک طول همدوسی به‌صورت زیر سرچشمه می‌گیرند

$$l \simeq c\Delta t \simeq \frac{\hbar c}{\Delta E}, \qquad \left(\hbar = \frac{h}{۲\pi}\right) \tag{۶_۵}$$

یعنی فقط از یک فرایند تابشی.

نور معمولی را، به‌دلیل ویژگی کاتوره‌ای فازهایش، تابش ناهمدوس می‌نامیم. خواننده، احتمالاً می‌داند دستگاههایی به نام لیزر وجود دارند که تابش بسیار همدوسی تولید می‌کنند. تداخل و پراش با نور لیزر بسیار چشمگیرتر از نور چشمه‌های سنتی است. پدیده‌هایی را که در اوایل قرن نوزدهم فیزیکدانها کشف کردند و نسلهای زیادی از دانشجویان به مطالعه آن پرداختند، فقط در عصر کوانتومی کنونی جلوهٔ واقعی خود را نشان داده‌اند.

۵ـ۲ پراش

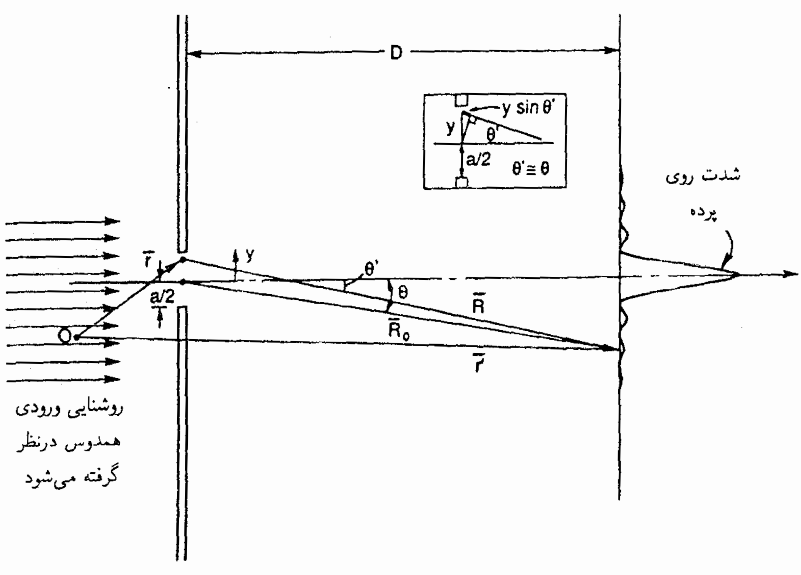
تاکنون بررسی‌های ما اساساً به سیستمهای بسته‌ای چون نوسانگرهای قلنبه، تارهای متناهی کشیده شده، و کاواکهای مشدد سیستم محدود بوده است. اما، نوع دیگری از مسائل مانند سیستم باز، دارای شار مانا را هم به اختصار دیده‌ایم. مثالهایی از این دست عبارت‌اند از موجی که در تار نامتناهی منتشر می‌شود، مسئلهٔ ۳ـ۱۴ و یا امواج تخت EM پیشرونده در فصل قبل. این‌گونه مسائل عموماً دارای این خصوصیت ساده‌کننده‌اند که همگی در حالت مانا هستند. جریان یا شار به‌طور مدام جریان دارد، و هرگز شروع یا متوقف نمی‌شود. فرض بر آن است که حالت گذرایی مربوط به حالت شروع مدتها قبل اتفاق افتاده است. به‌نظر می‌آید که در این وضعیتها نکتهٔ چندانی برای آموختن وجود ندارد، که البته همین‌طور هم هست، تا اینکه به‌نحوی در «باریکهٔ» مانعی مثل یک شکاف باریک و یا جسمی واکنش‌پذیر اختلال ایجاد می‌کند. در این‌صورت به مسئله‌ای موسوم به «مسائل پراکندگی» سروکار داریم. بسیاری از واکنشهای شیمیایی را می‌توان مسائل پراکندگی درنظر گرفت، تداخل و پراش در اپتیک فیزیکی هم از این نوع مسائل هستند.

میدانهایی که شار انرژی را تشکیل می‌دهند از معادله‌های موج پیروی می‌کنند. روش حلی که معمولاً به‌کار گرفته می‌شود روش تابع گرین است که در فصلهای گذشته با آن آشنا شدیم. تابع گرین

جواب معادلهٔ موج در حالی است که «چشمهٔ» برحسب زمان یا فضا یا هر دو نقطه‌ای باشد و شرایط مرزی مناسب نیز وجود داشته باشند. پس از یافتن تابع گرین، مسئله را حداقل علی‌الاصول، می‌توان به‌سادگی حل کرد، این کار با جمع توابع گرین مربوط به تمام چشمه‌های نقطه‌ای که چشمهٔ اصلی را تشکیل می‌دهند انجام می‌شود. خواننده علاقه‌مند تحلیل کامل روش تابع گرین در اپتیک فیزیکی را در پیوست انتهای فصل خواهد یافت.

در اینجا به روشی قدیمی که فرمولبندی آن را کریستین هویگنس در حدود ۱۶۷۰ انجام داد، قناعت می‌کنیم. با این حال، فرمولبندی کامل ریاضی که این فصل از آن به‌دست می‌آید، همان روش تابع گرین فیزیک نظری است. اصل هویگنس را می‌توان چنین بیان کرد که هر نقطه از جبههٔ موج به‌صورت چشمهٔ نقطه‌ای اغتشاش ثانوی یک موجک کروی عمل می‌کند که با سرعت c حرکت می‌کند. میدانی که بعداً در یک نقطه مشاهده می‌شود، حاصل‌جمع میدانهای مربوط به هر یک از این اغتشاشهای ثانویه است، و پوش آنها جبههٔ موج جدید را به‌دست می‌دهد.

اکنون مسئلهٔ باریکهٔ تخت همدوسی از نور را درنظر بگیرید که از روزنهٔ مستطیلی می‌گذرد (شکل ۵ـ۲). روشنایی که برروی پرده‌ای که در فاصلهٔ D از روزنه قرار دارد مشاهده می‌شود چگونه است؟ اگر با باریکه‌ای از ذرات سریع که برطبق مکانیک نیوتونی حرکت می‌کردند، سروکار داشتیم،



شکل ۵ـ۲ پراش از تک‌شکاف. نسبت به مبدأ دلخواه O، داریم $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}$. $|\boldsymbol{R}| \simeq |\boldsymbol{R}_0| + y\sin\theta$. پهنای شکاف اغراق‌آمیز است.

روشنایی روی پرده به ناحیه‌ای مستطیلی مربوط به روزنه یعنی سایهٔ هندسی آن محدود می‌شد. اما، روشنایی روی پرده کمی گسترده‌تر است و به‌علاوه شدت آن به‌صورت تابع پیچیده‌ای بسرعت تغییر می‌کند. این رفتار یعنی تمایل به‌خم‌شدن در گوشه‌ها مشخصهٔ تمام پدیده‌های موجی است و پراش نام دارد. همان‌طور که خواهیم دید، طول‌موج مربوط به باریکه را می‌توان از روی طرح روشنایی روی پرده، یعنی از روی طرح پراش به‌دست آورد.

فرض می‌کنیم که شکاف در جهت بیرون از صفحهٔ شکل ۵ـ۲ (جهت افقی) بسیار دراز است، چنانکه در واقع با مسئله‌ای یک‌بُعدی سروکار خواهیم داشت که تعیین تغییرات دامنهٔ میدانها برحسب جابه‌جایی (عمودی) برروی پرده است. با توجه به اصل هویگنس روزنه را به اجزایی از مساحت، $(dx\,dy)$، تقسیم می‌کنیم، x مختصه‌ای است که در امتداد افقی (یعنی خارج از صفحهٔ شکل ۵ـ۲) قرار دارد و y مختصهٔ عمودی است. هر جزء را به منزلهٔ چشمه موج نور ثانوی می‌گیریم.

چگونه می‌توانیم به‌طور تحلیلی میدان الکتریکی (یا مغناطیسی) حاصل از این اجزاء را به‌دست آوریم؟ بنابه اصل اولیه هویگنس، موجکهای ثانوی تابشگرهای همسانگرد در جهت جلو درنظرگرفته می‌شوند. از نظر شهودی چنین فرضی منطقی است زیرا در درجهٔ اول این اصل باید توانایی توجیه انتشار موج تخت معمولی را داشته باشد. [تحلیل کامل روش تابع گرین ضریب مایل بودن را به‌دست می‌دهد که تابش رو به عقب را ممنوع می‌سازد. چون با زاویه‌های کوچک سروکار داریم این ضریب را می‌توان در جهت رو به جلو ثابت فرض کرد، نگاه کنید به پیوست.] به‌علاوه. در هر سیستم اپتیکی، خود سیستم معمولاً تأثیری در قطبیدگی تابش فرودی ندارد و در نتیجه قطبیدگی تابش گسیلی معمولاً ذکر نمی‌شود. بنابراین، به‌عنوان تقریبی خوب، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را با یک میدان نرده‌ای نمایش می‌دهند. این میدان نرده‌ای به اغتشاش اپتیکی موسوم است و به‌طور یکسان در تمام جهتهای چشمه‌های ثانوی، تابش می‌کند. در عین حال ملاحظات بخش قبل را نیز باید در نظر داشت، اینکه نور فقط در حد یک طول همدوسی به‌طور ملموس با خودش تداخل می‌کند.

در نتیجه، فقط توجه خود را به‌اندازهٔ میدان الکتریکی مربوط به تابشِ موجک کروی از جزئی در $\boldsymbol{r}$، محدود می‌کنیم، و برای این اغتشاش اپتیکی درکه نقطه $\boldsymbol{r}$ روی پرده اندازه‌گیری می‌شود، تناسب زیر را می‌نویسیم.

$$dE \propto \frac{e^{ikR}}{R} dx\ dy \qquad \text{(۵ـ۷ الف)}$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} \qquad \text{(۵ـ۷ ب)}$$

ثابت تناسب (که در هر صورت نمی‌توان آن را مستقیماً یافت، نگاه کنید به پیوست)، نقش مهمی در این تحلیل ندارد.

عبارت (۵ـ۷ الف) موج کروی با بردار موج k را نشان می‌دهد. توجه کنید که نقطه‌های با فاز ثابت برروی سطوح کروی هم‌مرکز، که $\boldsymbol{r}$ این مرکز را نشان می‌دهد، قرار دارند، و شار تابشی در واحد سطح دارند که متناسب با مربع دامنه است، از قانون عکس مجذوری پیروی می‌کند، توانی که از هر سطح کروی می‌گذرد، با توجه به پایستگی انرژی، یکسان است.

برای یافتن دامنهٔ کل میدان در نقطهٔ $\boldsymbol{r}'$ برروی پرده، سهم همهٔ اجزاء تشکیل‌دهندهٔ روزنه را با یکدیگر جمع می‌کنیم. اگر بپذیریم که در آزمایشهای اپتیکی، تغییرات δR در R که در مخرج رابطهٔ (۵ـ۷ الف) آمده است، در مقایسه با R ناچیز است، در حالی که تغییرات در ضریب فاز kR که مساوی با $2\pi\delta R/\lambda$ است، سریع است، نتیجه را می‌توانیم باز هم ساده‌تر کنیم؛ δR در مقایسه با طول‌موج λ نور کوچک نیست. در نتیجه می‌نویسیم

$$E(r') \propto \int\int \mathrm{e}^{ikR} dx\, dy \qquad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}(x, y) \qquad (۵ـ۸)$$

همان‌طور که قبلاً هم اشاره کردیم، روزنه در جهت افقی (x) دراز است و می‌توانیم مسئله را به‌عنوان مسئله‌ای تک‌بُعدی بررسی کنیم (اگر در نقطهٔ میانی افقی طرح روی پرده باشیم و به‌طور عمودی حرکت کنیم، همواره می‌توانیم سهم (فازورها) قسمت‌هایی متقارن نسبت به $x = 0$ روزنه را با هم جمع کنیم. فاز خالص در نهایت همان فازی است که در جزء دریچه در $x = 0$ برای همان مقدار y به‌دست می‌آید. اگر از مرکز پرده دور شویم، این روش دیگر معتبر نخواهد بود زیرا در این‌صورت تمام اجزاء را نمی‌توان با هم جفت کرد. اما با فرض دراز بودن شکاف و حذف اثرات انتهایی، شدت ثابتی در جهت x به‌دست می‌آید. خوانندهٔ علاقه‌مند را به مسئلهٔ ۵ـ۷ دربارهٔ روزنهٔ مربعی ارجاع می‌دهیم.)

اگر مکان نقطهٔ منتخب $\boldsymbol{r}$ برروی پرده را با زاویهٔ θ مشخص کنیم (شکل ۵ـ۲)، با تقریب خوبی می‌توانیم بنویسیم

$$R = R_0 + y \sin\theta \qquad (۵ـ۹\ \text{الف})$$

[این تقریب در حد $a/D \to 0$ دقیق می‌شود، شکل ۵ـ۲. یا یک عدسی را در مجاور روزنه قرار می‌دهیم تا باریکه‌ای را که با θ مشخص می‌شود در نقطهٔ $\boldsymbol{r}'$ متمرکز کند. در عمل یا از عدسی استفاده می‌شود (پراش فرانهوفر) و یا a/D کوچک انتخاب می‌شود (پراش فرنل).]

از ترکیب (۵ـ۸) و (۵ـ۹) در نهایت داریم

$$B(r') \propto \mathrm{e}^{ikR_0} \int_{-a/2}^{+a/2} \mathrm{e}^{iky\sin\theta} dy$$

با انتگرال‌گیری، داریم

$$B(r') \propto \mathrm{e}^{ikR_\circ} \left| \frac{۲ \sin\left(\frac{ka \sin\theta}{۲}\right)}{k \sin\theta} \right| \qquad \text{(۵ـ۹ب)}$$

معمولاً قرار می‌دهیم

$$\alpha = \frac{ka \sin\theta}{۲} = \frac{۲\pi}{\lambda} \frac{a \sin\theta}{۲} \qquad \text{(۵ـ۹ج)}$$

در نتیجه

$$B(r') \propto \mathrm{e}^{ikR_\circ} \left| \frac{\sin\alpha}{\alpha} \right| \qquad \text{(۵ـ۹د)}$$

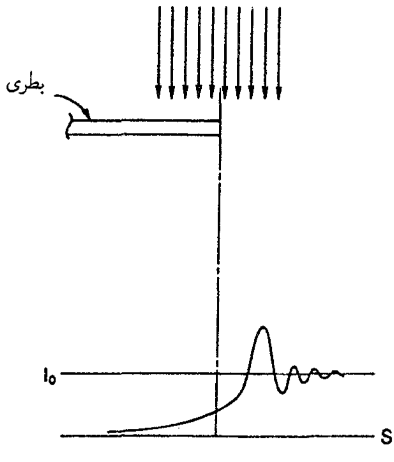
شدت تابش، I، برحسب توان بر واحد سطح (مسئلهٔ ۴ـ۸) با مربع میدان الکتریکی یا مغناطیسی متناسب است. شدت در مرکز طرح، یعنی در $\alpha = \circ$، بیشینه است. در اینجا به‌صورت گذرا متذکر می‌شویم که α، که با (۵ـ۹ج) داده شده است، اختلاف فاز اپتیکی بین شعاع نور ناشی از بالای روزنه و شعاعی که از مرکز روزنه می‌آید را نشان می‌دهد، شکل ۵ـ۲. وقتی $\alpha = \circ$، ضریب $\sin\alpha/\alpha$ و مربع آن، بیشینه، یعنی برابر یک می‌شوند. با مربع کردن $B(r')$، شدت در r یعنی در θ را چنین می‌نویسیم

$$I(\theta) = I_\circ \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} \right)^۲ \qquad \text{(۵ـ۱۰)}$$

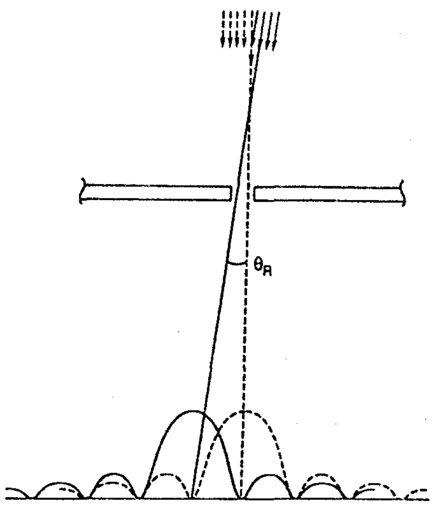
که در آن $I_\circ$ بیشینه شدت در مرکز طرح است. $I(\theta)$، طرح پراش تک‌شکافی در شکل ۵ـ۲ آمده است.

طرحهای پراش شکلهای هندسی دیگر، بجز تک‌شکافی دراز، کاملاً بررسی شده‌اند. در بخش مسائل به بررسی طرح پراش از شکاف مستطیلی متناهی می‌پردازیم. طرح کاملاً شناخته شده، طرح پراش از نیم صفحه در شکل ۵ـ۳ است. در اینجا به‌صورت تصویری می‌بینیم نور در گذر از لبه‌ها خم می‌شود، یعنی مسیرش منحرف می‌شود.

اگر بیش از یک روزنه وجود داشته باشد، چه می‌شود؟ تداخل در حالت دو شکافی در مثال ۵ـ۱ بررسی شده است. طرحهای تاریک و روشن حاصل پیچیده‌تر می‌شوند (شکلهای ۵ـ۹ و ۵ـ۱۱)، و به طرحهای تداخل موسوم‌اند. تعداد شکافها ممکن است سه یا بیشتر یا حتی چندین هزار باشد. منظور از مورد اخیر توری پراش یعنی یک ابزار علمی است که تحلیل آن را در مسائل ۵ـ۹ و ۵ـ۱۰ خواهید یافت.



شکل ۵-۳ پراش از نیم صفحه. مسیر نور در گذر از لبه‌ها خم می‌شود. $I_\circ$ شدت نور روی صفحهٔ S دور از سایهٔ نیم صفحه است.



شکل ۵-۴ پراش، بر اطلاعاتی که می‌توانند توسط سیگنالهای با سرشت موجی منتقل شود، محدودیتی بنیادی اعمال می‌کند.

پراش، محدودیتی بنیادی بر اطلاعاتی که می‌توان با سیگنالهای باسرشت موجی منتقل کرد، اعمال می‌کند. شکل ۵-۴، طرح پراش مربوط به دو چشمهٔ نزدیک به‌هم است که نورشان از شکاف مستطیلی می‌گذرد. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم. با نزدیک شدن دو چشمه به یکدیگر، دو طرح ادغام می‌شوند و دیگر معلوم نیست که چیزی بجز یک چشمهٔ نور گسترده‌ای وجود دارد. اگر کوچکترین زاویهٔ بین دو چشمه که هنوز بتوان آنها را به‌صورت دو چشمه متمایز تشخیص داد θ_R باشد، تقریباً داریم

$$\theta_R \simeq \frac{\lambda}{a} \qquad (۱۱\text{-}۵)$$

زیرا اولین کمینهٔ طرح پراش در α است:

$$\alpha = \frac{۲\pi}{\lambda}\frac{a\sin\theta}{۲} = \pi, \qquad \sin\theta = \frac{\lambda}{a}$$

در (۵ـ۱۱) از آنچه به شرط ریلی موسوم است استفاده کرده‌ایم (بارون ریلی ۱۸۴۲ـ۱۹۱۹)، که بنابه آن، دو جسم را در صورتی می‌توان از یکدیگر تمیز داد که بیشینهٔ مربوط به یکی دور از کمینهٔ طرح دیگر قرار گیرد.

به‌هنگام دیدن اشیاء، معمولاً محدود به نوری هستیم که از یک روزنه مثلاً عدسی چشم انسان دریافت می‌کنیم. وقتی این روزنه‌ها دایره‌ای هستند، باید تحلیل مربوط به این شکل خاص را به‌کار ببریم. این شامل توابعی است که احتمالاً خواننده با آنها آشنا نیست (توابع بسل) و در اینجا این بررسی را دنبال نخواهیم کرد. فقط اشاره می‌کنیم که طرح مربوط به روزنهٔ دایره‌ای، دسته‌ای از حلقه‌های هم‌مرکز است، که در آن تغییرات شدت در امتداد هر شعاع دلخواه بسیار شبیه طرحی است که برای شکاف دراز مستطیلی یافتیم. شرط ریلی، که در واقع برای اولین بار برای روزنه‌های دایره‌ای فرمولبندی شد، چنین است

$$\theta_R = ۱٫۲۲\frac{\lambda}{d}$$

که در آن d قطر روزنه است.

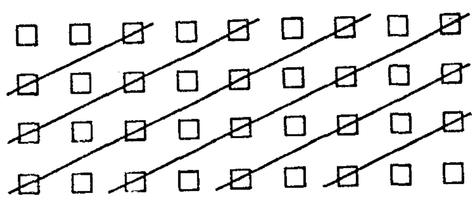
۵ـ۳ پراش پرتو x

ناحیهٔ ۱۰ تا ۱٫۱۰Å طیف الکترومغناطیسی، یعنی در حدود ۱/۱۰۰۰ طول‌موج نور مرئی، مربوط به پرتوهای x است. در حالی‌که در اتمهای سنگین، گذار الکترونهای نزدیک هسته بین ترازهای مختلف انرژی، خطوط تیز پرتو x را پدید می‌آورد، طیف پیوستهٔ پرتو x که در اینجا مورد نظر ماست را الکترونهایی گسیل می‌کنند که با سرعت زیاد در حرکت‌اند (یعنی الکترونهایی با انرژی ۵×۱۰^۴ev) و در نتیجهٔ برهم کنش با هسته‌های مادهٔ هدف، شتاب منفی می‌گیرند. این تابش را گاهی برمزشترالونگ می‌نامند، معنی این واژهٔ آلمانی، تابش ترمزی است.

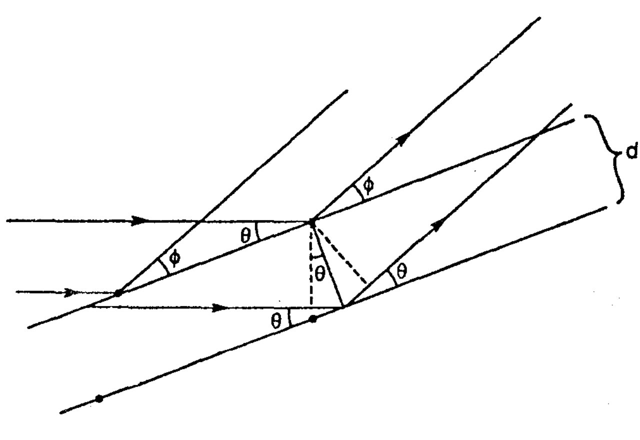
قبلاً، به تداخل حاصل از تعداد زیادی شکاف، موسوم به توری پراش، اشاره کردیم. ماکس فون‌لاؤه در سال ۱۹۱۲ فرض کرد که آرایهٔ منظم اتمها در بلور که فاصلهٔ آنها در حدود طول‌موج پرتو x، یعنی حدود ۵Å است، ممکن است به‌صورت توری پراش سه‌بُعدی عمل کند. آزمایشهای بعدی فردریش و نیپینگ، این فرض را تأیید کرد.

هنگامی که تابش الکترومغناطیسی به اتمی برخورد کند، الکترونهای اتم یا چنانکه در بخش ۵ـ۱ آمد، به ترازهای دیگر انرژی می‌روند، و یا نور فرودی را پراکنده (در جهت متفاوتی بازگسیل) می‌سازند، بدون اینکه تراز انرژی آنها عوض شود. حالت اخیر، یعنی پراکندگی کشسان است که به پراش پرتو x می‌انجامد. ببینیم چگونه می‌توان این فرایند را فهمید.

در شکل ۵ـ۵ تصویر ساده شده‌ای از بلور را به‌صورت آرایهٔ منظمی از گروههای کوچک اتمی، موسوم به یاخته‌های واحد، ارائه داده‌ایم. در بسیاری از بلورها یاختهٔ واحد دارای دو اتم یا بیشتر است، اما در ساده‌ترین بلورها، مثلاً، بلور فلز سدیم، فقط یک اتم در یاختهٔ واحد وجود دارد. در هر صورت، پراش حاصل پاسخ دسته‌جمعی یاخته‌های واحد است، که هر یک را به شکل موجودی منفرد و نه متشکل از اتمهایش درنظر می‌گیریم. بنابراین، در شکل ۵ـ۶ نقطه‌های سیاه یاخته‌های واحد را نشان می‌دهند. همان‌طورکه شکل ۵ـ۵ نشان می‌دهد، می‌توان یاخته‌های واحد



شکل ۵ـ۵ نمای مقطعی از صفحات معادل برای ساختار مکعبی، مربعها یاخته‌های واحد را نشان می‌دهند، خطوط قطری یکی از چندین انتخاب ممکن برای صفحات معادل را نشان می‌دهند.



شکل ۵ـ۶ اگرچه اتمها پرتوهای x را در همهٔ جهتها پراکنده می‌کنند، به‌ازای $\phi = \theta$، پرتوهای x ناشی از اتمهای متوالی در یکی از صفحات معادل همگی همفازند. همین‌طور اگر $2d\sin\theta = m\lambda$ باشد، پرتوهای x ناشی از صفحات متوالی همفازند.

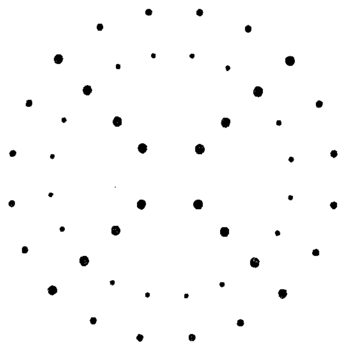
را برروی دسته‌ای از صفحات معادل قرارداد. دسته صفحات ممکن به ساختار بلور بستگی دارد. حال، یاخته‌های واحد مربوط به هر یک از صفحات می‌توانند به‌طور دسته‌جمعی در پراکندگی باریکهٔ پرتو x شرکت کنند. می‌بینیم که اگر توجه خود را به قسمتی از تابش پراکنده‌شده که در آن زاویهٔ فرودی با زاویهٔ بازتاب برابر است معطوف کنیم، $\phi = \theta$ در شکل ۵ـ۶، در این مورد تابش مربوط به همهٔ اتمهای صفحه همفاز خواهد بود (در پراش پرتو x از زاویهٔ متمم آنچه در اپتیک به‌کار می‌رود، استفاده می‌شود). این امکان وجود دارد که پرتوهای متوالی یک یاچند طول‌موج با یکدیگر اختلاف داشته باشند. این یکی از جنبه‌های پیچیده شرط تداخل سازنده است که آن را در اینجا نادیده می‌گیریم). در نتیجه، می‌توان هر صفحه را یک آینهٔ بازتابندهٔ پرتوهای x فرودی، درنظر گرفت.

اکنون، مؤلفه‌های نور که دستخوش بازتاب آینه‌ای از صفحات متوالی بلور شده‌اند، چگونه با یکدیگر تداخل می‌کنند؟ از شکل ۵ـ۶ می‌بینیم که اگر این، باریکه‌ها در صورتی همدوسی فاز دارند که

$$۲d \sin\theta = m\lambda, \qquad m = ۱, ۲, ۳, \ldots \qquad (۱۲\text{ـ}۵)$$

معادلهٔ (۵ـ۱۲) قانون معروف براگ است که به افتخار سِر ویلیام لارنس‌براگ نامگذاری شده است. بنابه این قانون اختلاف راه در بلور، $۲d\sin\theta$ باید مضرب صحیحی از طول‌موج باشد تا همدوسی را بتوان مشاهده کرد.

در یک آزمایش، باریکه‌ای از پرتوهای x با طیفی پیوسته به تک‌بلوری که برروی پایه‌ای محکم قرار داده شده است برخورد می‌کند. چشمه و آشکارساز به‌قدر کافی از بلور فاصله دارند تا بتوان از نمایش امواج تخت استفاده کرد. برای دستهٔ خاصی از صفحات، θ ثابت است. بنابراین، به‌ازای هر m، عموماً طول‌موجی وجود خواهد داشت که برای آن رابطهٔ (۵ـ۱۲) برقرار باشد. باریکه پرتوهای x پراشیده به‌صورت نقاط لاؤه برروی فیلم عکاسی پدیدار می‌شود. معمولاً، به‌ازای هر دسته از صفحات یک نقطه وجود خواهد داشت، که در نهایت به آرایهٔ منظمی، مانند شکل ۵ـ۷ می‌انجامد. بررسی این طرح بلافاصله اطلاعات صریحی دربارهٔ تقارن بلور هدف فراهم می‌کند و از جمله جهت محورهای بلور را مشخص می‌سازد. آزمایش را با پرتوهای x تکفام هم می‌توان انجام داد. می‌توان از هدف، پودری که تهیهٔ آن آسانتر است، به‌جای تک‌بلور استفاده کرد. این روش معروف دبی ـ شرر است (مسئلهٔ ۵ـ۱۲). می‌بینیم که روش پراش پرتو x روش کلی برای تحقیق بلوری بودن و تعیین ساختار ماده فراهم می‌کند.



شکل ۵ـ۷ طرح لاؤه برای بلوری که به‌صورت مناسب قرارگرفته است.

۵ـ۴ امواج EM در دی‌الکتریکها، شکست

خواننده با مفهوم قطبیدگی الکتریکی مواد یعنی جداشدن بارهای مثبت از بارهای منفی ماده در هنگام قرارگرفتن آن در میدان الکتریکی آشناست. کمیتی که این پدیده را مشخص می‌کند، میدان برداری قطبش $\boldsymbol{P}(x, y, z, t)$ است، که طبق تعریف، گشتاور دوقطبی در واحد حجم در نقطه و زمان مشخص است. نتیجهٔ اصلی مربوط به $\boldsymbol{P}$ چنین است.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{P} = -\varrho_{\text{pol}} \qquad (۵\text{-}۱۳)$$

که در آن ϱ_{pol} چگالی بار ناشی از قطبش است (مسئلهٔ ۵ـ۱۴).

مطابق معمول فقط پدیده‌های خطی را درنظر می‌گیریم و با درنظرگرفتن مؤلفه‌های فوریهٔ فضا و زمان میدانها، می‌نویسیم

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{k}, \omega) = \varepsilon_\circ \chi(\boldsymbol{k}, \omega) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega) \qquad (۵\text{-}۱۴)$$

که در آن χ را پذیرفتاری الکتریکی می‌نامند. چون χ (همان‌طورکه خواهیم دید) نرده‌ای و حقیقی است، فرض می‌کنیم $\boldsymbol{P}$ و $\boldsymbol{E}$ موازی‌اند، که معمولاً چنین است، و معمولاً همفاز هستند. از نظر فیزیکی، بین دو منشأ متفاوت قطبش که یکی، حرکت الکترونها نسبت به مرکزهای ثابت یونهای جسم (قطبش الکتریکی) و دیگری حرکت خود یونهاست (قطبش یونی و دوقطبی، که حالت اخیر وجود مولکولهای دوقطبی داخلی را ایجاب می‌کند) تفاوت می‌گذاریم. پاسخ بسامدی این سازوکارها مختلف است. متفاوت‌اند، قطبیدگی الکترونی تا بسامد قطع بالاتری نسبت به سازوکار دیگر فعال است.

مدل سادهٔ قطبش در مسئلهٔ ۲ـ۱۰ برپایهٔ مجموعه‌ای از نوسانگرهای هماهنگ واداشته، منشأ وابستگی بسامدی را به تفصیل نشان می‌دهد. بنابراین $\chi(\boldsymbol{k}, \omega)$ درواقع تابعی از بسامد، ω، است.

بستگی آن به بردار موج، $\boldsymbol{k}$، فقط در فلزات مورد نظر است، که در آنها از الکترونهای رسانش که گاز الکترونی مستقل را بوجود می‌آورند، می‌توان سخن گفت. در این بخش فقط به عایقها می‌پردازیم، و بستگی χ را به بردار موج دیگر به میان نخواهیم آورد.

خواننده با میدان جابه‌جایی $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)$ نیز آشناست که مفهومی بسیار مفید در همهٔ مسائلی است که با دی‌الکتریکها یعنی موادی که قطبیده می‌شوند، سروکار دارد. تعریف $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)$ چنین است

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) \equiv \varepsilon_\circ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t) \qquad (۱۵\text{-}۵)$$

باز هم از مؤلفه‌های فوریه استفاده می‌کنیم ولی بستگی به بردار موج را کنار می‌گذاریم، داریم

$$\boldsymbol{D}(\omega) \equiv \varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\omega) \qquad (\text{۵ـ۱۶ الف})$$

بالاخره، از (۵ـ۱۴) داریم

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\circ[\chi(\omega) + ۱] \qquad (\text{۵ـ۱۶ب})$$

که در آن $\varepsilon(\omega)$ ثابت دی‌الکتریک جسم است.

مسئلهٔ اصلی که به بررسی آن می‌پردازیم این است که چگونه امواج الکترومغناطیس در جسم عایق منتشر می‌شوند؛ این انتشار موج چه تفاوتی با انتشار فضای خالی که در بخش ۴ـ۳ توصیف شد دارد؟ اگر N گشتاور دوقطبی p_x داشته باشیم، با $p_x = qx$، چگالی جریان $J_x = qN(dx/dt)$ را نیز خواهیم داشت، به‌همراه قطبش $p_x = Nqx$ چنانکه

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{pol}} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} \qquad (۱۷\text{-}۵)$$

به‌عبارت دیگر، قطبیدگی متغیر برحسب زمان جریان ایجاد می‌کند و میدان مغناطیسی به‌وجود می‌آورد. فرض کنید به موردی علاقه‌مند هستیم که تنها چشمه‌های موجود، چگالیهای بار و جریان، ناشی از قطبش هستند. در این‌صورت، از (۵ـ۱۷) معادلهٔ ماکسول (۴ـ۱۲) در دی‌الکتریک چنین می‌شود

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_\circ \left[\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \varepsilon_\circ \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right] \qquad (۱۸\text{-}۵)$$

به همین صورت (۴ـ۹) با درنظر گرفتن (۵ـ۱۳) چنین می‌شود،

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{P}}{\varepsilon_\circ}\right) = \circ \qquad (۱۹\text{-}۵)$$

دو معادلهٔ دیگر ماکسول بدون تغییر می‌ماند:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (۱۰\text{ـ}۴)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad (۱۱\text{ـ}۴)$$

با پیروی از بخش ۴ـ۳ به‌راحتی می‌توانیم این معادله‌ها را حل کنیم. چون $\boldsymbol{P}$ موازی $\boldsymbol{E}$ گرفته می‌شود و بستگی این دو به بردار موج یکسان است باز هم انتظار جوابهای عرضی را برای (۵ـ۱۹) داریم، یعنی،

$$\nabla \cdot \boldsymbol{P} = \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \qquad (۲۰\text{ـ}۵)$$

اگر تاو (۴ـ۱۰) را بگیریم و از اتحاد برداری زیر استفاده کنیم

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E}$$

با در نظر آوردن (۵ـ۲۰) داریم

$$-\nabla^2 \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B})$$

با استفاده از (۵ـ۱۸) و (۵ـ۲۰) داریم

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \qquad (۲۱\text{ـ}۵)$$

بالاخره، اگر فقط به‌کار با یک بسامد ω در آن واحد اکتفا کنیم، می‌توانیم (۵ـ۱۴) و (۵ـ۱۶ الف) را ترکیب کنیم و رابطهٔ زیر را به‌دست آوریم

$$\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\boldsymbol{P}_\omega(\boldsymbol{r}, t)}{\varepsilon_0} = \left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}\right] \boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{r}, t)$$

که در آن شاخص پایین ω یادآور آن است که تمام وابستگیهای زمانی هماهنگ و با این بسامد است. در نتیجه، (۵ـ۱۰) را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}_\omega - \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_\omega}{\partial t^2} = 0 \qquad (۲۲\text{ـ}۵ \text{ الف})$$

همین گامها را برای به‌دست آوردن نتیجه مشابهی برای $\boldsymbol{B}$ می‌توان تکرار کرد، این‌بار با گرفتن تاو (۵ـ۱۸) داریم:

$$\nabla^2 \boldsymbol{B}_\omega - \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}_\omega}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(۵ـ۲۲ب)}$$

معادله‌های (۵ـ۲۲ الف و ب) نشان می‌دهند که می‌توانیم انتظار همان امواج تخت متحرک را که برای فضای آزاد در بخش ۴ـ۳ به‌دست آوردیم، برای دی‌الکتریکها هم داشته باشیم. تفاوت اصلی در آن است که سرعت موج از سرعت در فضای آزاد، c به،

$$v(\omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon(\omega)}}\, c \qquad \text{(۵ـ۲۳)}$$

تغییر یافته است و $v(\omega)$ همواره کمتر از c خواهد بود.

رابطهٔ (۵ـ۲۳) اهمیت کاربردی بسیار دارد. زیرا اگر باریکهٔ نور از فصل مشترکی بگذرد و از ماده‌ای با یک ثابت دی‌الکتریک به مادهٔ دیگری با ثابت دی‌الکتریک متفاوتی وارد شود، جهت باریکه در نتیجهٔ (۵ـ۲۳) تغییر می‌کند. گفته می‌شود که باریکه شکسته شده است. پدیدهٔ شکست مبنای کار عدسیها و منشورهاست؛ و اهمیت کاربردی آن در همین است. در نتیجه، نسبت $c/v(\omega)$ دارای نام خاصی است: ضریب شکست $n(\omega)$

$$n(\omega) \equiv \frac{c}{v(\omega)} = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0\,(\omega)}} \qquad \text{(۵ـ۲۴)}$$

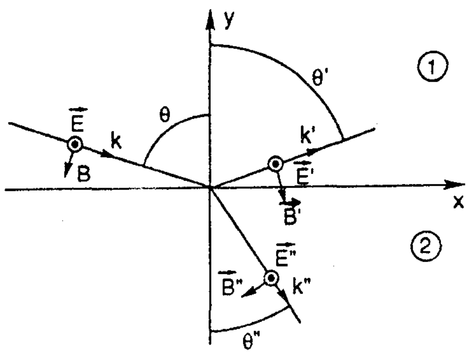
برای نوری که به‌وسیلهٔ منشور شکسته می‌شود، بستگی ضریب شکست به بسامد به تجزیهٔ نور برحسب رنگ (طول‌موج) می‌انجامد.

اکنون به تحلیل مسئلهٔ باریکه‌ای می‌پردازیم که به فصل مشترک تخت بین دو دی‌الکتریک برخورد می‌کند. در این تحلیل فرض می‌کنیم که انتشار باریکه‌های نور با اتلاف انرژی همراه نیست. در بررسی اخیر، تلویحاً فرض کردیم که پذیرفتاری الکتریکی $\chi(\boldsymbol{k},\omega)$ و در نتیجه ضریب شکست حقیقی هستند. اما لزومی ندارد که همیشه این‌طور باشد؛ اگر بین میدان الکتریکی اعمال شده، $\boldsymbol{E}$ و قطبش (یعنی جابه‌جایی بار) حاصل از آن $\boldsymbol{P}$، اختلاف فاز وجود داشته باشد، توان در دی‌الکتریک درست مانند نوسانگر هماهنگ واداشته تلف خواهد شد، اگر میرایی باعث اختلاف فاز (غیر از صفر و احتمالاً π) بین نیروی اعمال شده و جابه‌جایی شود. در این‌صورت هنوز هم می‌توان از (۵ـ۱۴) و (۵ـ۱۶) برای توصیف این حالت استفاده کرد. منتهی $\chi(\omega)$ دیگر عددی مختلط خواهد بود (مسئلهٔ ۲ـ۱۰). بنابراین، امکان تعمیم به ضریب شکست مختلط پدید می‌آید.

اما، برای مقاصد این بخش، پذیرفتاری الکتریکی $\chi(\omega)$، ثابت دی‌الکتریک $\varepsilon(\omega)$، و ضریب شکست $n(\omega)$ را حقیقی می‌گیریم.

اما، $\chi(\omega)$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد. در مدل نوسانگر هماهنگ واداشته که برای پدیدهٔ قطبیده شدن دوقطبیهای الکتریکی به‌کار می‌رود، مدلی که از نظر فیزیکی بسیار واقعی است، علامت $\chi(\omega)$ به‌هنگام گذر ω از مقدار تشدید $\omega_{\circ}$ عوض می‌شود. (در عمل، تشدیدهای متعددی متناظر با سازوکارهای مختلف قطبنده وجود دارد. وقتی ω از بالاترین این تشدیدها فراتر می‌رود، $\chi(\omega)$ منفی می‌شود.) تغییر علامت $\chi(\omega)$ به این معنی است که $n(\omega)$ به‌ازای بسامدهای بیشتر از $\omega_{\circ}$ کمتر از یک می‌شود و طبق (۵ـ۲۴) به‌سرعت $\nu(\omega)$ که از سرعت نور در فضای آزاد، بیشتر است، می‌انجامد. برای اینکه ببینیم چگونه این موضوع نظریهٔ نسبیت را که بنابه آن هیچ چیز نمی‌تواند سریعتر از c حرکت کند، معتبر نگه می‌دارد باید بررسی پدیدهٔ انتشار موج را با جزئیات بیشتری دنبال کنیم. اصولاً، $\nu(\omega)$ که پیدا کرده‌ایم سرعت فاز نام دارد، یعنی سرعت فقط یک موج هماهنگ، $\cos(kx - \omega t)$، که همان‌طور که در فصل ۱ دیده‌ایم، موجی است که از منهای بینهایت تا مثبت بینهایت در فضا و زمان گسترده است. برای انتقال اطلاعات باید بسیاری از این امواج را ترکیب کنیم (و بستهٔ موج بسازیم). این بسته با سرعت گروه خود حرکت می‌کند که همواره کمتر از c است. بررسی تحلیل بسته‌های موج و سرعت گروه را بهتر است به فصل ۷ پس از بررسی کامل اثرات پاشندگی و کار عملی با بسته‌های موج در فصل ۶ موکول می‌کنیم.

اکنون به این مسئله می‌پردازیم که وقتی نور از محیطی با ضریب شکست n_{1} به محیطی با ضریب n_{2}، $n \neq n_{2}$ که در محیط با صفحهٔ xـz در شکل ۵ـ۸ از هم جدا شده‌اند می‌تابد، چه روی می‌دهد؟ همان‌طور که ذکر شد، اپتیک هندسی، به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم برمبنای درک این مسئله فیزیکی است. حل آن به دانستن شرایط مرزی در صفحه بستگی دارد. از فصل چهارم می‌دانیم که که در نبود جریانهای سطحی، با عایقهای غیرمغناطیسی سروکار داریم که میدانهای



شکل ۵ـ۸ باریکه‌های فرودی $(\boldsymbol{k})$، بازتابیده $(\boldsymbol{k'})$، عبوری $(\boldsymbol{k''})$ در صفحهٔ فصل مشترک بین عایقهای نامغناطیسی. ضریب شکست محیط پایینی (۲) بیشتر از ضریب شکست محیط (۱) است، $n_{2} > n_{1}$. در این حالت، باریکهٔ شکسته شده به‌طرف عمود بر صفحهٔ فصل مشترک، خم می‌شود؛ میدان الکتریکی در راستای z قطبیده است (مسئله ۵ـ۱۶).

مغناطیسی B_1 و B_2 آنها، درست در بالا و پایین صفحه یکسان است، همان‌طور که مؤلفه‌های مماسی میدان الکتریکی E_x و E_z چنین‌اند. اما، چون قطبیدگی دو محیط باعث پدیدار شدن بارهای سطحی می‌شود، مؤلفه‌های عمودی میدان الکتریکی $\boldsymbol{E}$ در حالت کلی، در فصل مشترک، پیوسته نیستند. در اینجا بهتر است به میدان جابه‌جایی $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)$ که طبق (۵ـ۱۵) تعریف شده است، روی آوریم. در نبود بارهای خارجی، معنی بارهایی غیر از آنچه محیط را تشکیل می‌دهند، رابطهٔ (۵ـ۱۹) صادق است و داریم

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \qquad (۵\text{ـ}۲۵)$$

با استفاده از بررسی‌های فصل ۴ [خصوصاً مسئله ۴ـ۱۰]، مشاهده می‌کنیم که مؤلفهٔ عمودی $\boldsymbol{D}$ و نه مؤلفهٔ عمودی $\boldsymbol{E}$، در فصل مشترک پیوسته است. اگر میدانهای مغناطیسی موج فرودی و بازتابی را در شکل ۵ـ۸ به‌ترتیب $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{B}'$، و میدان موج عبوری را $\boldsymbol{B}''$ بنامیم، با نامگذاری مشابه میدانهای الکتریکی $\boldsymbol{E}$، شرایط مرزی حاکم بر میدانها در فصل مشترک را چنین می‌توان نوشت

$$\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}'' \qquad (۵\text{ـ}۲۶\ \text{الف})$$

$$E_x + E'_x = E''_x \qquad (۵\text{ـ}۲۶\text{ب})$$

$$E_z + E'_z = E''_z \qquad (۵\text{ـ}۲۶\text{ج})$$

$$D_y + D'_y = D''_y \qquad (۵\text{ـ}۲۶\text{د})$$

مثال ۵ـ۱

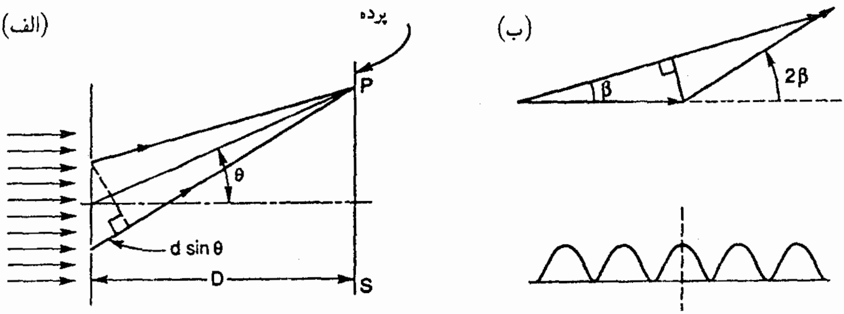
باریکه‌ای از نور تخت همدوس از دو شکاف دراز که به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند عبور می‌کند. اگر هر شکاف را فقط به یک ناحیهٔ فرنل بگیریم، یعنی از اثرات پراش چشمپوشی کنیم، نشان دهید که طرح تداخلی روی پرده‌ای که در فاصلهٔ دور D قرار دارد چنین است

$$I = I_0 \cos^2 \beta$$

که در آن I_0 شدت نور در مرکز طرح است و

$$\beta = \pi d \frac{\sin\theta}{\lambda}$$

که در آن θ مطابق با شکل ۵ـ۹ الف است.



شکل ۵ـ۹ (الف) نور ناشی از دو شکاف به طرح تداخلی برروی S می‌انجامد، مثال ۱ـ۵. (ب) مثال ۵ـ۱، بالا نمودار فازور؛ پایین طرح تداخلی با حذف اثرات ناشی از پراش.

این طرح را رسم کنید و توضیح فیزیکی صریحی برای وجود کمینه‌ها در $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$ در $\beta = (\pi/۲)(۲n + ۱)$ بدهید.

حل: با کنارگذاشتن اثرات ناشی از پراش، میدان EM در نقطهٔ P در شکل ۵ـ۹الف با جمع فازوری تک‌تک میدانها که هر یک به‌صورت فازوری نوشته شده‌اند، نشان داده می‌شود. طول این فازورها که متناظر با دامنهٔ میدانهاست یکی است، اما اختلاف فاز ۲β بین آنها وجود دارد،

$$۲\beta = \left(\frac{۲\pi}{\lambda}\right) \text{(اختلاف راههای اپتیکی)}$$
$$= \frac{۲\pi}{\lambda} \times d \sin\theta$$

با استفاده از روابط هندسی (شکل ۵ـ۹ب) داریم

$$|\text{فازور برایند}| = ۲\cos\beta \times |\text{هر یک از فازورها}|$$

و اگر به‌خاطر آوریم که شدت با مربع دامنه‌های میدان متناسب است، $I = I_۰ \cos^۲\beta$ نتیجه می‌شود. کمینه‌های شکل ۵ـ۹ب وقتی رخ می‌دهد که دو مؤلفه در جهتهای مخالف قرار گیرند (یعنی اختلاف راه اپتیکی آنها مضرب صحیحی از نیم طول‌موج باشد). در عمل طرح تداخلی به‌وسیلهٔ اثرات از پراش مدوله می‌شود (مسائل ۵ـ۱۰ و ۵ـ۱۱). ■

مثال ۵ـ۲

ثابت کنید که برای هر صفحهٔ فرود دلخواه، زاویهٔ بازتاب θ' با زاویه فرود θ، نسبت به صفحه xـz (شکل ۵ـ۸)، برابر است.

حل: در سطح فصل مشترک مؤلفه میدان الکتریکی باریکهٔ فرودی دارای بستگی زمانی و فضایی به شکل زیر است

$$E_x(\boldsymbol{r},t) = E_{x\circ}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x + k_z z - \omega t)} \qquad (۲۷\text{-}۵)$$

بدین‌ترتیب، شرط مرزی (۵ـ۲۶ب) چنین می‌شود،

$$E_{x\circ}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x+k_z z-\omega t)} + E'_{x\circ}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'_x x+k'_z z-\omega t)} = E''_{x\circ}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k''_x x+k''_z z-\omega t)} \qquad (۵ـ۲۸\ \text{الف})$$

این رابطه در هر لحظه t از زمان و در هر نقطه z, x روی صفحه نامتناهی جداکنندهٔ دو محیط برقرار است. این شرط را فقط هنگامی ممکن است برقرار ساخت که، اولاً دو میدان برحسب زمان با هم نوسان کنند، یعنی فقط یک بسامد مشخص‌کنندهٔ همهٔ میدانها باشد، که قبلاً هم در (۵ـ۲۸) فرض کردیم. ثانیاً، باید روابط زیر برقرار باشد،

$$k_x = k'_x = k''_x \qquad (۵ـ۲۸\text{ب، ج})$$

و

$$k_z = k'_z = k''_z \qquad (۵ـ۲۸\text{د، ه})$$

از طرف دیگر، میدانهای $\boldsymbol{E}$ برای هر دو باریکهٔ فرودی و عبوری در معادلهٔ موج (۵ـ۲۱ الف) با ضریب شکست $n_۱ = \sqrt{\varepsilon_۱(\omega)/\varepsilon_\circ}$ صدق می‌کند و در نتیجه

$$k_x^۲ + k_y^۲ + k_z^۲ = k_x'^۲ + k_y'^۲ + k_z'^۲ \qquad (۲۹\text{-}۵)$$

با درنظر داشتن (۵ـ۲۸ب، د) و (۵ـ۲۹) نتیجه می‌گیریم که

$$k'_y = -k_y \qquad (۳۰\text{-}۵)$$

که نتیجهٔ مطلوب $\theta = \theta'$ را می‌دهد. از خواننده دعوت می‌شود برای جزئیات تحلیل مسئله در شکل ۵ـ۸ به مسئله ۵ـ۱۶ رجوع کند. ■

مسائل

۵ـ۱ اثر فوتوالکتریک اینشتین. قانون اینشتین در مورد گسیل الکترون از فلزاتی که در معرض تابش نوری با بسامد ν قرار می‌گیرد چنین است

$$U_e = h\nu - \phi$$

الف) اگر الکترونهای فلز همهٔ ترازهای انرژی موجود را تا حداکثر انرژی ممکن که به انرژی فرمی موسوم است با یک الکترون اشغال کنند بگویید چرا U_e بیشینهٔ انرژی جنبشی هر الکترونی است که گسیل می‌شود.

ب) رابطه‌ای برای بسامد آستانه ν_c بنویسید که پایین‌تر از آن انتظار گسیل الکترونی را ندارید.

ج) الکترون ـ ولت مقدار انرژیی است که ذره‌ای با بار الکتریکی به اندازهٔ بار الکترون، $۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{c}$، به هنگام شتاب گرفتن در میدان حاصل از اختلاف پتانسیل ۱ ولت به‌دست می‌آورد. اگر تابع کار فلز، ϕ، $۱\mathrm{eV}$ باشد، بسامد آستانه، ν_e، چقدر است و طول‌موج آستانه متناظر با آن λ_c، چقدر است؟ اگر $\phi = ۱٫۸۲\mathrm{eV}$، که برای سدیم چنین است، λ_c چیست؟

د) بگویید شدت تابش بر تعداد فوتوالکترونهای گسیل شده چه تأثیری دارد، اگر،

۱) $\nu > \nu_c$

۲) $\nu < \nu_c$.

این مشاهدات قبل از اینکه اینشتین گسیل فوتونی را توضیح دهد، درک نشده بودند.

۵ـ۲ الف) اگر بسامد تابش چشمه نور به دقت مشخص باشد، در مورد زمان گسیل t چه معلوماتی به‌دست می‌آوریم؟

ب) اگر عدم قطعیت در انرژی تراز بالای یک گسیلنده $E \approx ۱۰^{-۲۰}J$ باشد، طول همدوسی در حدود چند طول‌موج λ است، اگر تابش گسیل شده دارای طول‌موج $\lambda \approx ۵۰۰۰\text{Å}$ باشد؟

۵ـ۳ اگر بدانیم که اتمی در زمان $t = ۰$ برانگیخته شده است، احتمال اینکه در زمان t هنوز هم برانگیخته باشد $\mathrm{e}^{-\gamma t}$ است، که در آن $۱/\gamma$ طول‌عمر برانگیختگی است. فرض کنید که میدان تابشی $B(t)$ با دامنهٔ نوسانگر هماهنگ میرا متناسب است و طبق رابطهٔ زیر به t بستگی دارد؟

$$\begin{aligned} B(t) &= ۰ && t < ۰ \\ &= b_۰ \sqrt{\omega_o} \cos \omega_۰ t e^{\frac{-\gamma t}{۲}} && t > ۰ \end{aligned}$$

الف) نشان دهید که مؤلفهٔ فوریه $B(t)$، یعنی $B(\omega)$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$B(\omega) = \sqrt{\frac{\omega_0}{2\pi}}\frac{b_0}{2i}\left[\frac{1}{\left(\omega - \omega_0 - i\frac{\gamma}{2}\right)} + \frac{1}{\left(\omega + \omega_0 - i\frac{\gamma}{2}\right)}\right]$$

همچنین نشان دهید که سهم ω در انرژی $U = \int U(\omega)d\omega$، که آن را با $U(\omega)$ نشان داده‌ایم چنین است

$$U(\omega) = B^*(\omega)B(\omega)\frac{c}{\mu_0}$$

راهنمایی: نگاه کنید به (۴ـ۱۷ج) و (۴ـ۱۹) و مسئلهٔ ۱ـ۱۴.

بالاخره نشان دهید که جملهٔ اصلی $U(\omega)$ متناسب است با

$$\frac{\omega_0}{\left((\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right)}$$

این همان عبارت معروف برای «شکل خط لورنتسی» است که از بررسی کوانتوم مکانیکی سیستم دو ترازی به‌دست می‌آید.

ب) روشی برای براورد $\Delta\omega$ از قسمت (الف) و Δt از $B(t)$، پیدا کنید و نتیجه را برای حاصلضرب $(\Delta\omega)(\Delta t)$ با (۵ـ۴) مقایسه کنید.

۵ـ۴ به‌کمک نمودار نشان دهید که چگونه از اصل هویگنس می‌توان برای پیش‌بینی حرکت موج EM تخت استفاده کرد.

۵ـ۵ با استفاده از (۵ـ۹ و ۱۰) به‌ازای چه مقادیری از زاویهٔ α شدت نوری که از تک‌شکاف بلند پراشیده شده است، کمینه می‌شود؟ آیا می‌توانید نتیجهٔ خود را براساس تحلیل میدانهای تابشی فرودی به‌صورت سهم یک سری از اجزاء سطح دراز و افقی (نواحی فرنل) که شکاف را تشکیل می‌دهند، به‌صورت فیزیکی تعبیر کنید.

راهنمایی: هر بار حاصل از دو ناحیهٔ فرنل را درنظر بگیرید.

۵ـ۶ اگر $a \ll \lambda$، یعنی عرض شکاف حتی در مقایسه با طول‌موج نور پراشیده هم کوچک باشد، چه بر سر طرح پراش تک‌شکافی می‌آید؟ اگر $a \gg \lambda$ چطور؟ برای هر یک از این دو حالت، مثال فیزیکی ساده‌ای ارائه دهید.

۵ـ۷ رابطه‌ای تحلیلی برای طرح پراش روزنهٔ مربعی به مساحت a^2، با $a \approx \lambda$، ارائه دهید. شکل کیفی شدت نور محاسبه شده را رسم کنید. (طرح پراش شبکه‌ای مربعی تشکیل می‌دهد.)

۸ـ۵ همان‌طور که در متن آمد، توری پراش که پرده‌ای با شکافهای موازی متعدد (N) است از ابزارهای مهم اندازه‌گیری است.

الف) با به کار گرفتن استدلال ناحیهٔ فرنل مثال ۵ـ۱، نشان دهید که اولین کمینه برای توری در $\theta = \lambda/(Nd)$ رخ می‌دهد، که در آن d فاصلهٔ بین شکافهای مجاور است.

راهنمایی: برای بیشینهٔ اصلی، تمام فازورها موازی هستند، در حالی که برای کمینهٔ متناظر با آن، فازورها Nضلعی بسته‌ای را تشکیل می‌دهند.

ب) می‌توانیم بگوییم که دو رنگ با طول‌موجهای λ و $\lambda + \Delta\lambda$ ($\Delta\lambda$ مثبت)، هنگامی از یکدیگر تفکیک می‌شوند که کمینهٔ دوم λ برروی اولین بیشینهٔ اصلی $\lambda + \Delta\lambda$، $\Delta\lambda$ (بیشینهٔ مرکزی را حساب نکرده‌ایم) بیفتد.

نشان دهید که $\Delta\lambda/\lambda = ۱/N$

چه نتیجه‌ای دربارهٔ رابطهٔ بین تعداد شکافها N و «توان تفکیک» توری پراش می‌گیرید؟

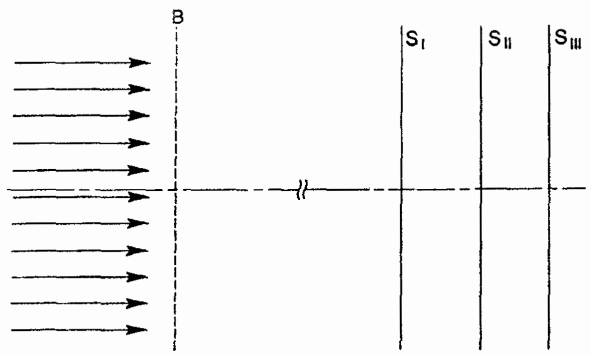
۹ـ۵ الف) وقتی توجه خود را از اولین بیشینهٔ اصلی به طیف مرتبهٔ mام، یعنی mـ امین بیشینه (بدون شمردن بیشینهٔ مرکزی) معطوف می‌کنیم، در می‌یابیم که

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{۱}{mN}$$

آیا می‌توانید این نتیجه را به‌دست آورید؟

ب) در یک توری پراش دوتایی سدیم ($۵۸۹۰\,\text{Å}$ و $۵۸۹۵{,}۹\,\text{Å}$) در مرتبهٔ سوم در زاویهٔ ۱° نسبت به عمود مشاهده می‌شود و به زحمت تفکیک شده است. پیدا کنید ۱) فاصلهٔ خطهای توری، و ۲) عرض کل آن را.

۱۰ـ۵ باریکه‌ای از همدوس تخت به مانع B برخورد می‌کند، شکل ۵ـ۱۰. $\mathrm{S_I}$، $\mathrm{S_{II}}$، $\mathrm{S_{III}}$ پرده‌هایی



شکل ۵ـ۱۰ مسئلهٔ ۵ـ۱۰.

هستند که فرض می‌کنیم پی‌درپی در فاصلهٔ تقریبی یکسان از B قرار می‌گیرند. پیشنهاد می‌شود که خواننده شکل ۵ـ۱۰ را کپی کند و سپس:

الف) روی صفحهٔ S_I طرح پراش مربوط به تک‌شکافی به عرض a که در مرکز B قرار داده می‌شود را رسم کنید. مکان اولین کمینه را مشخص کنید. طول‌موج λ است.

ب) روی صفحهٔ S_{II} طرح تداخلی ناشی از دو شکاف افقی را که به‌طور متقارن نسبت به مرکز B قرار داده شده‌اند رسم کنید، فاصله این دو شکاف d است، که $d \simeq (۹/۲)a$. اثرات پراش در نمودار را نادیده نگیرید.

ج) روی صفحهٔ S_{III} طرح تداخلی را برای همان مقادیر a و b که در قسمت (ب) ذکر شد برای تعداد زیادی از شکاف رسم کنید. تفاوت این طرح با طرح S_{II} را به روشنی، اگرچه به‌صورت کیفی، نشان دهد.

۵ـ۱۱ پرده‌ای با سه شکاف هر یک پهنای a و با فاصلهٔ d از یکدیگر را درنظر بگیرید. هر شکاف را به چهار منطقه تقسیم کنید. ضریب فاز e^{ikR} را برای هر یک از دوازده پرتو نوری که منطقه‌ها را به نقطه‌ای در θ روی پردهٔ نامتناهی متصل می‌کند منظور کنید، R فاصلهٔ منطقه تا پرده است. نشان دهید که مجموع دوازده فازور متناظر را می‌توان به‌صورت حاصلضرب عامل پراش در جملهٔ تداخلی نوشت.

۵ـ۱۲ در چه فاصله‌ای دو چراغ جلوی ماشینی که از روبه‌رو می‌آید برای اولین بار جدا از یکدیگر دیده می‌شوند؟ فرض کنید که عامل تعیین کننده، توان تفکیک محدود چشم است. مردمک را به نظر ۵ر۰ سانتیمتر و نور را به طول‌موج $۵۵۰۰\,\text{Å}$ در نظر بگیرید. فاصلهٔ چراغهای جلو از یکدیگر $۱۲۰\,\text{cm}$ است.

۵ـ۱۳ چرا طرح پراش لاوِه نقطه‌ای است در حالی‌که طرح دبی ـ شرر دسته‌ای از حلقه‌های هم‌مرکز را نشان می‌دهد؟ چگونه می‌توان باریکهٔ تکفام پرتو x به‌وجود آورد؟

۵ـ۱۴ الف) نشان دهید که بار قطبشی (جبران نشده) که به‌ازای واحد عمود بر بردار قطبش $\boldsymbol{P}$ است در مرز از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\sigma_{\text{pol}} = P$$

راهنمایی: فرض کنید n دوقطبی در واحد سطح وجود دارند، که گشتاور هر دوقطبی qd است.

ب) این نتیجه را به

$$\sigma_{\text{pol}} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}$$

تعمیم دهید، که در آن $\boldsymbol{n}$ بردار یکهٔ عمود بر سطحی است که این‌بار زاویهٔ دلخواهی با $\boldsymbol{P}$ می‌سازد.

نشان دهید که به‌طور خالص، باری که داخل حجم بسته‌ای با قطبش $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ وجود دارد با انتگرال سطحی زیر داده می‌شود

$$Q_{\text{pol}} \equiv \int \varrho_{\text{pol}} dV = -\oint \boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{A}$$

ج) سرانجام با بهره‌گیری از قضیهٔ گاؤس برای میدانهای برداری نتیجهٔ مطلوب

$$Q_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$$

را به‌دست آورید.

۱۵ـ۵ نشان دهید که

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t-\tau)d\tau$$

که در آن

$$G(\tau) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon(\omega) - ۱]e^{-\mathrm{i}\omega t} d\omega$$

نتیجهٔ حاصل برای $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)$ را وقتی $\varepsilon(\omega)$ تابع ω نیست، ساده کنید.

۱۶ـ۵ الف) برای حالتی که در شکل ۵ـ۸ آمده است، یعنی هنگامی که قطبیدگی میدانهای الکتریکی به موازات محور z است، نشان دهید که دامنه‌های میدانهای الکتریکی بازتابیده عبوری، به‌ترتیب $E'_{\circ}$ و $E''_{\circ}$، با دامنهٔ باریکهٔ فرودی، $E_{\circ}$ با روابط زیر مربوط می‌شوند

$$E'_{\circ} = \frac{(k_y - k''_y)}{(k_y + k''_y)} E_{\circ}$$

$$E''_{\circ} = \frac{۲ k_y}{(k_y + k''_y)} E_{\circ}$$

راهنمایی: از (۵ـ۲۶ الف) و (۵ـ۲۸ب، ج) استفاده کنید.

ب) قانون معروف اسنل

$$n_۲ \sin\theta'' = n_۱ \sin\theta$$

را ثابت کنید. در اینجا θ'' زاویهٔ شکست برای هر دو قطبش ممکن میدان الکتریکی است، شکل ۵ـ۸.

۵ـ۱۷ الف) نشان دهید که موج تختی که در جهت z با ضریب شکست مختلط $n = n_{\mathrm{R}} + in_{\mathrm{I}}$ منتشر می‌شود از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{E}_{\circ}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(n_{\mathrm{R}}\frac{z}{c}-t)}\mathrm{e}^{-\omega n_{\text{۱}}\frac{z}{c}}$$

ب) از معادله‌های ماکسول استفاده کنید و نشان دهید که معادلهٔ موج در فلز قطبش‌ناپذیر و غیرمغناطیسی، با رسانش σ چنین است؟

$$\nabla^{\text{۲}}\boldsymbol{E} - \left(\frac{\text{۱}}{c^{\text{۲}}}\right)\frac{\partial^{\text{۲}}\boldsymbol{E}}{\partial t^{\text{۲}}} - \mu_{\circ}\sigma\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \circ$$

نشان دهید که

$$n_{\mathrm{I}} \simeq \sqrt{\frac{\sigma}{\text{۲}\varepsilon_{\circ}\omega}} \quad \text{وقتی} \quad \sigma \gg \varepsilon_{\circ}\omega$$

مانند مورد هر رسانای خوب در هر بسامد دسترس‌پذیر. اما برای $\omega \gtrsim \text{۱۰}^{\text{۱۳}}\mathrm{rad/s}$ اثرات دینامیکی مربوط به برخوردهای الکترونی ظاهر می‌شود.

ج) اگر تضعیف میدان الکتریکی در داخل فلز به‌صورت $e^{-z/\delta}$ باشد، که در آن δ را «عمق پوست» می‌نامند، برای ریز موجی با بسامد $\text{۱۰}^{\text{۱۰}}\mathrm{Hz}$ و با $\sigma \simeq \text{۵٫۷۶} \times \text{۱۰}^{\text{۷}}(\text{۱}/\Omega m)$، مقدار عددی δ را برآورد کنید.

د) نشان دهید که رابطهٔ کلی زیر بین رسانایی مختلط $\sigma(\omega)$ و ثابت مختلط دی‌الکتریک $\varepsilon(\omega)$ برقرار است

$$\sigma(\omega) = -\mathrm{i}\omega[\varepsilon(\omega) - \varepsilon_{\circ}]$$

به اختلاف فاز ۹۰° حاصل بین $\sigma(\omega)$ و پذیرفتاری الکتریکی $\chi(\omega)$، توجه کنید و دربارهٔ آن بحث کنید.

راهنمایی:
$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_{\circ}\left[\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \varepsilon_{\circ}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right]$$

هر نوع جریان باید به‌عنوان جریان قطبشی در نظر گرفته شود.

۵ـ پ (پیوست)

هدف اصلی این پیوست آن است که نظریهٔ پراش و تداخل را که در فصل ۵ آمد بر پایهٔ اصول اولیه قرار دهد، به‌عبارت دیگر، دستاوردهای معادلهٔ موج را به میدانهای الکتریکی و مغناطیسی با

شرایط مرزی، مربوط کند. هدف دیگر آن است که تعریف دقیقی از حداقل یک نوع تابع گرین به‌دست دهد. مفهوم تابع گرین به‌طور پراکنده در این کتاب آمده است.

آنچه خلاصهٔ آن در اینجا آورده می‌شود متکی به قضیهٔ گرین در حسابان برداری است، که تعمیم قضیهٔ گاؤس است. $U(x,y,z)$ و $V(x,y,z)$ را دو میدان نرده‌ای دلخواه برحسب z,y,x درنظر بگیرید. برای این میدانها اتحاد برداری زیر برقرار است:

$$\nabla.(U\nabla V) = (\nabla U)(\nabla V) + U\nabla^{2}V \qquad (۵ـ پ ـ۱)$$

از طرفین این اتحاد می‌توان برروی هر حجم بسته‌ای انتگرال گرفت و سپس قضیهٔ گاؤس را برای طرف چپ به‌کار بست نتیجه زیر به‌دست می‌آید

$$\oint U\nabla V\cdot d\boldsymbol{S} = \int \nabla U\nabla V\,dv + \int U\nabla^{2}V\,dv \qquad (۵ـ پ ـ۲)$$

که در اینجا، انتگرال طرف چپ برروی سطحی است که حجم دلخواه را دربرمی‌گیرد. رابطهٔ دیگری مشابه با (۵ـ پ ـ۲) با تعویض U و V به‌دست می‌آید. اگر رابطهٔ دوم را از رابطهٔ (۵ـ پ ۲) کم کنیم، نتیجه مطلوب یعنی قضیهٔ گرین به‌دست می‌آید:

$$\oint [U\nabla V - V\nabla U]\cdot d\boldsymbol{S} = \int [U\nabla^{2}V - V\nabla^{2}U]dv \qquad (۵ـ پ ـ۳)$$

اکنون فرض کنید $\psi(\boldsymbol{r},t)$ جواب نرده‌ای معادلهٔ موج با جملهٔ محرک هماهنگ برحسب زمان باشد، یعنی

$$\nabla^{2}\psi(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^{2}} = -\varrho(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \qquad (۵ـ پ ـ۴)$$

که در آن $\varrho(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ چشمهٔ میدان است. جواب را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = u(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

که در آن $u(\boldsymbol{r})$ در معادلهٔ هلمهولتز با $k^{2} = (\omega/c)^{2}$ صدق می‌کند:

$$\nabla^{2}u(\boldsymbol{r}) + k^{2}u(\boldsymbol{r}) = -\varrho(\boldsymbol{r}) \qquad (۵ـ پ ـ۵)$$

روش تابع گرین چنین است حل این معادله به‌ازای چشمهٔ $\varrho(\boldsymbol{r})$ را به توزیع فضایی چشمه‌های نقطه‌ای $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{0})$ تقسیم می‌کنیم و سرانجام جواب را به‌صورت جمع تک‌تک جوابهای مربوط به چشمه‌های نقطه‌ای می‌نویسیم.

تک‌تک جوابها توابع گرین $G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)$ را تشکیل می‌دهد

$$\nabla^{2} G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)+k^{2} G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\circ) \qquad (\text{۵ـ پ ـ۶})$$

به‌زودی در می‌یابیم که اگر قرار باشد $G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)$ در حل مسائل فیزیکی برای $\psi(\boldsymbol{r},t)$ مفید باشد، شرایط مرزی $G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)$ باید به‌صورت خاصی انتخاب شوند. مسئله می‌تواند به دو صورت باشد. نوع اول به‌گونه‌ای است که در معادلهٔ حرکت (۵ پ ـ۴) برای $\psi(\boldsymbol{r},t)$، یعنی معادلهٔ ناهمگنی با شرایط مرزی مشخص آمده است. در نوع دوم مسئله، طرف راست (که جملهٔ محرک است) در داخل حجم مورد نظر صفر است، و چشمهٔ میدان فقط در مرز قرار دارد، مثلاً کاواکی که توسط جریانهای دیواره هایش برانگیخته می‌شود. حتی در این‌صورت هم، چنانکه خواهیم دید، $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_\circ)$ که تابعی است که در معادلهٔ ناهمگن (۵ـ پ ـ۶) صدق می‌کند، را می‌توان برای حل مسئلهٔ دوم به‌کار برد.

اگر چه در این پیوست تأکید برروی معادلهٔ هلمهولتز است که از بستگی زمانی هماهنگهای نیروها در تابع موج حاصل می‌شود، مفهوم تابع گرین چنانکه در فصل ۲ دیده‌ایم. به چشمه‌های میدان که وابستگی زمانی دلخواهی دارند نیز تعمیم می‌یابد. به‌علاوه، لازم نیست که تابع موج شکل متعارف (۵ـ پ ـ۴) را داشته باشد، مثلاً، معادلهٔ پواسون $\nabla^{2}\phi=-\varrho/\varepsilon_\circ$ در الکتروستاتیک را هم می‌توان با تابع گرین حل کرد، چنانکه در فصل ۴ دیدیم. در مکانیک موجی توابع گرین تا اندازه‌ای مرتبط با توابع حاضر نقش مهمی ایفا می‌کنند.

بگذارید به تابع گرین هلمهولتز $G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)$ [به‌طور دقیق‌تر $G_k(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)$، $k=\omega/c$] بازگردیم. در (۵ـ پ ـ۵)، $\boldsymbol{r}_\circ$ را به‌جای $\boldsymbol{r}$ می‌گذاریم و طرفین را در $G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)$ ضرب می‌کنیم، سپس طرفین (۵ـ پ ـ۶) را در $u(\boldsymbol{r}_\circ)$ ضرب و از آن کم می‌کنیم. با $G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)=G(\boldsymbol{r}_\circ|\boldsymbol{r})$ داریم

$$G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)\nabla_\circ^{2} u(\boldsymbol{r}_\circ)-u(\boldsymbol{r}_\circ)\nabla_\circ^{2} G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)=u(\boldsymbol{r}_\circ)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\circ)-G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)\varrho(\boldsymbol{r}_\circ)$$

حال از طرفین روی حجم دلخواه $\boldsymbol{r}_\circ$ انتگرال می‌گیریم و انتگرال جمله‌ای که شامل ϱ است را به‌طرف چپ می‌بریم، داریم

$$\begin{aligned}&\iiint[G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)\nabla_\circ^{2} u(\boldsymbol{r}_\circ)-u(\boldsymbol{r}_\circ)\nabla_\circ^{2} G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)]dv_\circ\\&+\iiint \varrho(\boldsymbol{r}_\circ)G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)dv_\circ=u(\boldsymbol{r}) \quad \text{اگر } \boldsymbol{r} \text{ داخل حجم باشد}\\&=\circ \quad \text{در غیر این‌صورت}\end{aligned}$$

بالاخره، می‌توانیم قضیهٔ گرین را در اینجا به‌کار بندیم؛ (۵ـ پ ـ۳) برای اولین انتگرال حجمی بالا

نتیجه زیر را می‌دهد

$$\underset{\circ}{u(r)} = \oint [G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)\nabla_\circ u(\boldsymbol{r}_\circ) - u(\boldsymbol{r}_\circ)\nabla_\circ G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)] \cdot d\boldsymbol{S}_\circ + \int\int\int \varrho(\boldsymbol{r}_\circ)G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)dv_\circ \qquad (۵ـ پ ـ۷)$$

در رابطهٔ بالا، $\boldsymbol{r}_\circ$ در اولین انتگرال طرف راست برروی سطح $A_\circ$ و در انتگرال دوم در داخل حجم قرار دارد.

رابطهٔ (۵ـ پ ـ۷) آن‌قدر مفید است که گاهی آن را «قاعدهٔ جادویی» نامند. مثلاً، اگر در مسئله $u(\boldsymbol{r}_\circ)$ برروی مرز مشخص، اما $\nabla_\circ u(\boldsymbol{r}_\circ)$ برروی مرز مجهول باشد، $G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که برروی مرز صفر شود. همین‌طور می‌توانیم مسئله‌ای را که در آن گرادیان $u(\boldsymbol{r}_\circ)$ برروی مرز داده شده است حل کنیم (چگونه؟). همچنین می‌توان جواب را بدون توجه به اینکه $\varrho(\boldsymbol{r}_\circ)$ وجود دارد یا همه جا صفر است، به‌دست آورد.

مسئلهٔ ۵ـپـ۱. از «قاعدهٔ جادویی» (۵ـ پ ـ۷) برای حل مسئلهٔ ۳ـ۱۵ که در آن تاری تحت کشش از انتهای $x = \circ$ به حرکت در می‌آید، استفاده کنید. شکل مناسبی برای $G_k(x|x_\circ)$ چنین است

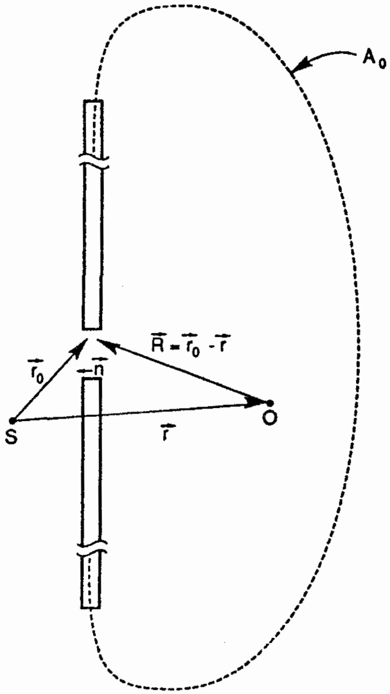
$$G_k(x|x_\circ) = -\frac{1}{k\sin(kL)} \begin{cases} \sin(kx)\sin[k(x_\circ - L)] & x \le x_\circ \\ \sin(kx_\circ)\sin[k(x-L)] & x > x_\circ \end{cases}$$

(با استفاده از روشهای مسئلهٔ ۴ـ۲۰ می‌توان تحقیق کرد که G_k در معادل یک‌بُعدی رابطهٔ (۵ـ پ ـ۶) صدق می‌کند.)

برای اینکه صحت نتیجه را برای $y(x,t)$ امتحان کنید، حد $\omega \to \circ$ را بیابید و آن را با حد متناظرش در عبارت حاصل از مسئلهٔ ۳ـ۱۵ مقایسه کنید. اگر (۳ـ۲۸) را برای $G_k(x|x_\circ)$ به‌کار بریم چه می‌شود؟

اینک (۵ـ پ ـ۷) را برای یافتن یک مؤلفهٔ (قطبش) میدان الکتریکی $E(\boldsymbol{r})$ وقتی نور چشمهٔ نقطه‌ای S به‌وسیلهٔ تک‌شکافی در مانع نامتناهی شکل ۵ـ پ ـ۱ پراشیده می‌شود به‌کار می‌بریم. برای موج کروی گسیل‌شده در S، که آن را به‌عنوان مبدأ مختصات، $\boldsymbol{r}_\circ = \circ$، درنظر می‌گیریم، داریم

$$E(\boldsymbol{r}_\circ) = E_\circ \frac{e^{ikr_\circ}}{r_\circ} \qquad (۵ـ پ ـ۸)$$



شکل ۵ـ پ ـ۱ نوری که از چشمهٔ نقطه‌ای S می‌آید، از تک‌شکاف پراشیده می‌شود و مؤلفهٔ میدان الکتریکی $E(\boldsymbol{r})$ را در نقطهٔ مشاهده O به‌وجود می‌آورد. قسمت خط‌چین مساحت $A_\circ$ در بینهایت با مانع و شکاف کامل می‌شود. $\boldsymbol{n}$ بردار یکه‌ای است که جهت آن از شکاف به‌خارج است.

$E(\boldsymbol{r}_\circ)$ در رابطهٔ بالا با $u(\boldsymbol{r}_\circ)$ در (۵ـ پ ـ۷) و $E(\boldsymbol{r})$، میدان مطلوب در نقطهٔ مشاهدهٔ O، با $u(\boldsymbol{r})$ یکسان است. سطح انتگرال‌گیری $A_\circ$ متشکل از خط‌چین مشخص شده در شکل است که با شکاف و مانع کامل می‌شود. انتخاب صحیح برای $G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)$، موجی است که از $\boldsymbol{r}$ دور می‌شود

$$G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ) = \frac{\mathrm{e}^{ik|\boldsymbol{r}_\circ - \boldsymbol{r}|}}{|\boldsymbol{r}_\circ - \boldsymbol{r}|} \qquad (۵ـ پ ـ۹)$$

ملاحظاتی که $E(\boldsymbol{r}_\circ)$ را در (۵ـ پ ـ۸) مشخص می‌کنند برای $G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)$ در (۵ـ پ ـ۹) هم صادق است، هر دو عبارت در معادله‌های موجی که طرف راست آنها دارای تکنیکی مناسب است صدق می‌کنند. دقت کنید که $G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ) = G(\boldsymbol{r}_\circ|\boldsymbol{r})$، به‌عبارت دیگر اصل دوجانبگی برقرار است، و همواره برای G برقرار خواهد بود. قسمت خط‌چین سطح $A_\circ$ در بینهایت است، و از دو حالت ممکن، موج دورشونده یا نزدیک‌شونده، اولین حالت را باید درنظر بگیریم. به‌علاوه، وضعیت فیزیکی را با این شرط که انتگرال سطحی در (۵ـ پ ـ۷) برروی مانع صفر است مشخص‌تر می‌کنیم. به‌عبارت دیگر $u(\boldsymbol{r}_\circ)$ و گرادیان آن برروی مانع صفر می‌شوند، در حالی که در داخل شکاف، $u(\boldsymbol{r}_\circ)$ و گرادیان آن با استفاده از (۵ـ پ ـ۸) به‌دست می‌آیند ـ بازتابی وجود ندارد که

موج بازگشتی را به درون شکاف بفرستد. بدین‌ترتیب با استفاده از (۵ـ پ ـ۸) داریم،

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla_\circ u(\boldsymbol{r}_\circ) = -E(\boldsymbol{r}_\circ)\left(\frac{1}{r_\circ} - \mathrm{i}k\right)\frac{\boldsymbol{r}_\circ}{r_\circ}\cdot\boldsymbol{n} \qquad \text{(۵ـ پ ـ۱۰ الف)}$$

و با استفاده از (۵ـ پ ـ۹)

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla_\circ G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ) = G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\circ|} - \mathrm{i}k\right)\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\circ}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\circ|}\cdot\boldsymbol{n} \qquad \text{(۵ـ پ ـ۱۰ب)}$$

چون طول‌موج نور، $2\pi/k$، در مقایسه با فاصله‌های $r_\circ$ یا $|\boldsymbol{r}_\circ - \boldsymbol{r}|$ کوچک است، فقط جملهٔ دومی که در پرانتز در (۵ـ پ ـ۱۰) قرار دارد، نگه‌داشته می‌شود. با قرار دادن (۵ـ پ ـ۸ تا ۱۰) در (۵ـ پ ـ۷) و درنظر گرفتن اینکه $\boldsymbol{n}$ بردار یکه‌ای است که جهتش مطابق شکل ۵ـ پ ـ۱ از مانع روبه بیرون است، داریم:

$$\begin{aligned}E(\boldsymbol{r}) &= \mathrm{i}k\int\limits_{\text{شکاف}}\left\{E(\boldsymbol{r}_\circ)G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\circ)\left[\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_\circ}{r_\circ} - \frac{(\boldsymbol{r}_\circ-\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{r}_\circ-\boldsymbol{r}|}\right]\right\}dS_\circ\\ &= \mathrm{i}kE_\circ\int\limits_{\text{شکاف}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_\circ+|r_\circ-r|)}}{(r_\circ)|\boldsymbol{r}_\circ-\boldsymbol{r}|}\left[\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_\circ}{r_\circ} - \frac{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}_\circ-\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}_\circ-\boldsymbol{r}|}\right]dS_\circ \qquad \text{(۵ـ پ ـ۱۱)}\end{aligned}$$

اگر چشمه به‌جای نقطهٔ S نزدیک به پرده از آن بسیار دور باشد، موج تخت فرودی $E_\circ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_\circ}$ را خواهیم داشت و $E(\boldsymbol{r})$ چنین خواهد بود

$$E(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{i}kE_\circ\int\limits_{\text{شکاف}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_\circ}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}_\circ-\boldsymbol{r}|}}{|\boldsymbol{r}_\circ-\boldsymbol{r}|}\left[\frac{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}_\circ-\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}_\circ-\boldsymbol{r}|} + 1\right]dS_\circ \qquad \text{(۵ـ پ ـ۱۲)}$$

در اینجا $\boldsymbol{r}_\circ$ را باید موازی $-\boldsymbol{n}$ درنظرگرفت، یعنی در جهت موج فرودی $\boldsymbol{k}$، به‌طوری که $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_\circ}$ ضریب فازی باشد.که برروی سطح شکاف ثابت است و بتوان آن را از انتگرال بیرون آورد. جمله‌ای که در کروشه قرار دارد «ضریب مایل بودن» نام دارد که در بخش ۵ـ۲ ذکر شد. واضح است که برای تغییر مسیرهای معمول چند درجه یا کمتر می‌توان این ضریب را هم ثابت فرض کرد. به این‌ترتیب (۵ـ پ ـ۱۲) به (۵ـ۷ پ) می‌انجامد.

برای مطالعهٔ بیشتر

D. Halliday, R. Resnick: *Physics*, Part Tow (Wiley, New york 1978)

خوانندگانی که با اپتیک فیزیکی آشنایی قبلی ندارند، بهتر است از این کتاب که در سطح مقدماتی‌تر به این مبحث پرداخته است، کمک بگیرند.

G. R. Fowles: *Introduction to Modern optics* (Holt, Rinehart and winston, New York 1967)

این کتاب که در سطح متوسطی به مبحث مورد نظر پرداخته است، ممکن است برای خواننده مفید باشد.

M. Born, E. Wolf: *Principles of optics* (Pergamon, New York 1959)

ارجمندترین رساله‌ای که در طول دوران دربارهٔ این مبحث نوشته شده است.

۶

مکانیک موجی

چکیده

نیاز به یک معادلهٔ موج، با توجه به رابطهٔ دوبروی برای ذرات و توصیفی که بور از مدارهای اتمی با بستگی فضایی دوره‌ای ارائه داد، احساس شد. انگیزهٔ نوشتن معادلهٔ موج شرودینگر از معادله‌های موج کلاسیک فصلهای ۳ و ۴ به‌دست آمد. سه اصل موضوع مکانیک موجی یعنی اینکه هر مشاهده‌پذیر متناظر با یک عملگر است، اینکه تنها مقادیر ممکن در اندازه‌گیری ویژه مقدارها هستند، و اینکه مقادیر میانگین را می‌توان با معادلهٔ موج شرودینگر پیش‌بینی کرد، بیان می‌شوند. نقش خاص ویژه توابع انرژی در به‌دست دادن حالت‌های مانا و همچنین نقش خاص ویژه تابعهای مختصاتی در به‌دست دادن تعبیر فیزیکی تابع موج توصیف می‌شود. سپس تحلیل انتشار ذرهٔ آزاد برحسب بسته موج به دنبال می‌آید، که مبنایی برای نمایش اصل عدم قطعیت هایزنبرگ خواهد بود. بخش ۶ـ۴ به دوگانگی موج ـ ذره و ابهام می‌پردازد و نتیجه می‌گیرد که اینها تصورات ما از دنیایی منظم را برهم نمی‌زنند. بالاخره، بخش ۶ـ۵ مربوط به طرح کلی پدیده‌های متنوعی است که به‌طور کمّی با استفاده از مکانیک کوانتومی توصیف شده‌اند. مثال ۶ـ۴ و مسئلهٔ ۶ـ۱۴ به پدیده‌های وابسته به زمان در مکانیک موجی می‌پردازد که به ترتیب با نوسانگر طبیعی و واداشته در مکانیک کلاسیک متناظرند.

۶ـ۱ منشأ معادلهٔ موج شرودینگر

در فصل قبل دیدیم که در آغاز قرن سیستم بحرانی در اپتیک وجود داشت. توصیف اینشتین از اثر فوتوالکتریک سرآغاز دوگانگی موج ـ ذره‌ای برای تابش EM بود، زیرا معلوم شد که نور نه تنها سرشت موجی دارد بلکه می‌تواند به‌صورت ذره، فوتون، نیز رفتار کند. گذشته از آن، تابش جسم سیاه را نیز باید توضیح می‌دادند. مدل ایده‌آل برای جسم سیاه، یک کاواک است. اگر کاواکی الکترومغناطیسی، مانند آنچه در فصل ۴ در نظرگرفتیم، داشته باشیم. شدت تابشی را که از سوراخ کوچکی در دیوارهٔ کاواک بیرون می‌آید را می‌توان برحسب بسامد تابش، اندازه گرفت. سوراخ از بیرون کاملاً جذب‌کنندهٔ تابش، یا سیاه، به‌نظر می‌رسد و تابش گسیل شده دقیقاً همانند تابش جسم سیاه خواهد بود. اگر دمای دیواره‌های کاواک را به‌دقت در مقدار T نگه‌داریم، با توجه به مکانیک آماری کلاسیک هر مُد طبیعی کاواک انرژی خاصی را تابش می‌کند که فقط به بسامد طبیعی آن ν و به T بستگی دارد. (مکانیک آماری نظریه‌ای میکروسکوپی است که برای تبیین ترمودینامیک به کار می‌رود.) اما تابش پیش‌بینی شدهٔ کل بسیار بیشتر از آنچه مشاهده می‌شد بود، در واقع در بالاترین بسامد واگرا می‌شد. همان‌طورکه در فصل ۵ گفتیم، پلانک قانون تجربی جدیدی به‌دست آورد که تابش هر مد را برحسب ν و T می‌داد. این قانون جدید شامل ثابت فیزیکی h، یعنی ثابت پلانک، بود.

به گفتهٔ اروین شرودینگر (۱۸۸۷ ـ ۱۹۶۱)، فیزیکدان اتریشی «مکانیک موجی در آمار متولد شد» (مکانیک آماری). افتخار پیشنهاد خوب نسبت دادن سرشت موجی به ذرات مادی برای اولین‌بار نصیب لویی دو بروی (۱۸۹۲ ـ ۱۹۸۷) فیزیکدان فرانسوی شد. دو بروی در سال ۱۹۲۲ توانست فرمولی تقریبی برای قانون تابش پلانک را مستقیماً از مکانیک آماری و با استفاده فرمولی اینشتین $E = h\nu$ برای فوتونها، به‌دست آورد. در تحلیل تابش درون کاواک به‌عنوان گاز فوتونی، دو بروی همواره مدل سنتی جنبشی گازها و مکانیک آماری را به خاطر می‌آورد. آن‌طورکه بعدها گفت، «ناگهان» دریافتم که بحران موجود در اپتیک به دلیل عدم درک دوگانگی عمومی امواج و ذرات است. برخی ایده‌های خاص او دربارهٔ «هماهنگی فازها» باعث شد که قانونی را که در آن هنگام برای فوتونها حدس زده شده بود به تمام ذرات مادی تعمیم دهد. رابطهٔ معروف دو بروی چنین است

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}} \qquad (۶ـ۱)$$

که در آن: λ طول‌موج ذرهٔ مادی و یا فوتون است، h ثابت پلانک و p تکانهٔ ذره است.

هنگامی که تابش EM جذب می‌شود، میدان الکتریکی نیرویی بر بارهای موجود در جذب‌کننده وارد می‌کند. در زمان تحقیقات دوبروی، می‌دانستند که بنابه نظریهٔ کلاسیک الکترومغناطیس، جذب انرژی U به انتقال تکانهٔ U/c به جذب‌کنندهٔ انرژی می‌انجامد. بنابراین، حدس زده می‌شد که برای فوتون با $U = h\nu$، مطابق رابطه (۶ـ۱)، $p = (h\nu)/(c) = (h)/(\lambda)$ است. کامپتون، فیزیکدان امریکایی در ۱۹۲۳ این رابطه را برای فوتونها تأیید کرد، آزمایش او پراکندگی پرتوهای x از الکترونهای هدف گرافیت بود. او متوجه شد که طول‌موج فوتونهای پراکنده شده تغییر می‌کند و این تغییر با تغییر تکانه آنها متناسب است.

برای اهداف ما مهم است که رابطهٔ (۶ـ۱) را در سال ۱۹۲۷ کلینتون دیوسون و لسترگرمر در امریکا و مستقل از آنها، سر جورج تامسون در بریتانیا به لحاظ تجربی تأیید کردند. آزمایشهای آنها شامل پراش باریکه‌های الکترونی از بلورها بود و از همان نظریهٔ پراش پرتو x که در انتهای فصل قبل آمد استفاده می‌کرد. امروزه، میکروسکوپهای الکترونی، که کاربرد مستقیم رابطهٔ دوبروی هستند (به بخش مسائل نگاه کنید)، به‌صورت ابزار علمی رایجی در آمده‌اند.

رابطهٔ دوبروی برای ذرات مادی به جستجوی یک معادلهٔ موج انجامید. ایدهٔ سرشت موجی ماده را مفهوم تناوبی بودن مدارهای اتمی در فضا، که از فیزیک اتمی به‌دست آمده بود، تقویت کرد. نیلس بور، فیزیکدان دانمارکی (۱۸۸۵ ـ ۱۹۶۲) نشان داده بود که تکانهٔ زاویه‌ای الکترون به مضربهای صحیح $h/2\pi$ «کوانتیده» است. کشف معادلهٔ موج می‌توانست به درک پدیده‌ها در مقیاس اتمی و احتمالاً زیراتمی بینجامد که به تدریج روشن می‌شد، فیزیک شناخته شده در سال ۱۹۲۴ قادر به توجیه آن نیست.

براساس آنچه آموخته‌ایم شاید انتظار تابع موج زیربنایی $\psi(x,t)$ را که به x و t وابسته است (فعلاً فقط یک بُعد را در نظر می‌گیریم) داشته باشیم. این تابع ممکن است یک تابع هماهنگ مثلاً، به‌صورت زیر باشد

$$\psi(x,t) = u(x)v(t) \qquad \text{(۶ـ۲ الف)}$$

$$u(x) = \sin kx \qquad \text{(۶ـ۲ب)}$$

$$v(t) = \sin \omega t \qquad \text{(۶ـ۲ج)}$$

بردار موج k، $k = (2\pi)/\lambda$، از طریق (۶ـ۱) به تکانه p مربوط می‌شود،

$$k = \frac{p}{\hbar} \qquad \text{(۶ـ۲د)}$$

و ω از طریق رابطهٔ اینشتین به انرژی کل E مربوط است،

$$\omega = \frac{E}{\hbar} \qquad \text{(۶ـ۲هـ)}$$

در اینجا $\hbar$ همانند فصل ۵ برابر است با $h/۲\pi$، یعنی برابر است با ثابت پلانک تقسیم بر ۲π.

بخش فضایی معادله‌های موجی که در فصل ۳ و ۴ با آنها سروکار داشتیم، در یک بُعد چنین است

$$\frac{d^۲u(x)}{dx^۲} + k^۲u(x) = ۰$$

اگر $p/\hbar$ را به‌جای k بگذاریم (۶ـ۲د) و توجه کنیم که

$$\frac{p^۲}{۲m} = T \qquad \text{(۶ـ۳الف)}$$

$$= E - V(x) \qquad \text{(۶ـ۳ب)}$$

که در آن m جرم ذره، T انرژی جنبشی، E انرژی کل و $V(x)$ انرژی پتانسیل مستقل از زمان است، داریم

$$\left[-\frac{\hbar^۲}{۲m}\frac{d^۲}{dx^۲} + V(x)\right]u(x) = Eu(x) \qquad \text{(۶ـ۳ج)}$$

معادلهٔ (۶ـ۳ج) معادلهٔ شرودینگر مستقل از زمان به‌صورتی است که کاشف بزرگ آن در سال ۱۹۲۵ نوشت. شرودینگر، با تعمیم این معادله به سه بُعد و انتخاب پتانسیل کولنی هستهٔ هیدروژن به عنوان $V(r)$ بلافاصله توانست انرژی اوربیتالهای مانای اتم هیدروژن را محاسبه کند. سپس این انرژیها با آنچه طیف نورگاز هیدروژن اتمی از اختلاف بین انرژی اوربیتالها به‌دست می‌داد مقایسه شد.

معادلهٔ موج کامل برای تار کشیده چنین است

$$\frac{\partial^۲y}{\partial x^۲} = \frac{۱}{s^۲}\frac{\partial^۲y}{\partial t^۲} \qquad \text{(۳ـ۳)}$$

با توجه به‌طرف راست معادله، یعنی $\partial^۲\psi/\partial t^۲$ مشکل بزرگی مطرح می‌شود. حاصل دوبار مشتق گرفتن از $v(t)$ همراه با معادلهٔ اینشتین (۶ـ۲هـ)، به‌جای $E\psi$ که با طرف چپ معادله توازن برقرار می‌کند، به $E^۲\psi$ می‌انجامد. در واقع، می‌توان فرض کرد که طرف راست فقط شامل یک بار مشتق‌گیری نسبت به زمان است. این فرض مشکل دیگری را به‌وجود می‌آورد. اگر قرار باشد جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل درجه اول به‌دست آوریم، این جواب باید به‌جای تابعی مثلثاتی یک

تابع نمایی باشد. به علاوه، برای اینکه در حد $t \to \pm\infty$ جواب حاصل بینهایت یا به‌صورت نمایی تضعیف نشود بلکه موج به‌وجود آورد، نمای جواب معادله باید موهومی باشد. در نتیجه، معادلهٔ موج وابسته به زمان شرودینگر، نهایی چنین است

$$\boxed{\left[\frac{-\hbar^۲}{۲m}\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}+V(x)\right]\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}} \tag{۶ـ۴}$$

اگر در (۶ـ۴)، پتانسیل $V(x)$ را صفر بگیریم، به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که جواب زیر به‌دست می‌آید

$$\psi(x,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \tag{۶ـ۵ الف}$$

و داریم

$$\hbar\omega=\frac{\hbar^۲k^۲}{۲m} \tag{۶ـ۵ب}$$

به علاوه، با به‌کار گرفتن (۶ـ۲د) و (۶ـ۲هـ) داریم

$$E=\frac{p^۲}{۲m} \tag{۶ـ۵ ج}$$

که نتیجهٔ مطلوب برای ذره آزاد است.

برای مسئله کلی پتانسیل $V(x)$ مخالف صفر، معادلهٔ (۶ـ۴) را باید کلی‌تر از (۶ـ۳ج) در نظر گرفت. معادلهٔ اخیر را می‌توان با جواب آزمایشی رابطهٔ (۶ـ۲ الف)، $u(x)v(t)$، که در بخش مسائل خواهیم دید، از معادله (۶ـ۴) به‌دست آورد. داریم

$$v(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{۶ـ۶}$$

$$\omega=\frac{E}{\hbar} \tag{۶ـ۲هـ}$$

یعنی، بسامد اینشتین برای انرژی کل E حاصل می‌شود. به همراه آن، $u(x)$ در معادلهٔ شرودینگر مستقل از زمان، (۶ـ۳ج)، که در پیش‌بینی ساختار اتمی بسیار موفقیت‌آمیز بود، صدق می‌کند. در واقع، معادلهٔ موج وابسته به زمان شرودینگر، (۶ـ۴)، معادلهٔ موج غیر نسبیتی معتبر برای ماده است.

بالاخره، متوجه می‌شویم که همهٔ بحث موجود در این فصل به پتانسیلهای مستقل از زمان $V(x)$، یعنی به سیستمهای بسته با انرژی ثابت، محدود می‌شود. این قید است که جداسازی متغیرهای فضا و زمان را ممکن می‌سازد. خود معادلهٔ (۶ـ۴) هم اگر به‌جای $V(x)$ بگذاریم $V(x,t)$ برای پتانسیلهای وابسته به زمان معتبر است. اما حل معادله اغلب دشوارتر می‌شود و به روشهای به اصطلاح اختلالی نیاز پیدا می‌کند.

۶ـ۲ اصول موضوع مکانیک موجی

چه ارتباطی بین تابع موج شرودینگر $\psi(x,t)$ بخش قبل و پدیده‌های فیزیکی وجود دارد؟ پاسخ این سؤال در ۱۹۲۵ به هیچ‌وجه روشن نبود، خصوصاً با توجه به سرشت $\psi(x,t)$ که متغیری مختلط بود. توضیح مفهوم $\psi(x,t)$ حاصل تلاش فیزیکدانان بسیار بود که باهم کار می‌کردند به‌ویژه نیلس بور در کپنهاگ، ماکس بورن (۱۸۸۲ـ۱۹۷۰)، پاسکوال جوردن (۱۹۰۲ـ۱۹۸۰) و ورنر هایزنبرگ (۱۹۰۱ـ۱۹۷۶)، هر سه در گوتینگن، پل دیراک (۱۹۰۲ـ۱۹۸۴) در کمبریج و خود شرودینگر که در آن هنگام در زوریخ بسر می‌برد. شرودینگر ارتباط بین نتایج معادلهٔ موج خود و نتایج محاسبات ماتریسی هایزنبرگ را در تابستان ۱۹۲۵ کشف کرد. (عبارت مکانیک موجی روشی بر پایهٔ معادلهٔ موج شرودینگر است، و به همراه مکانیک ماتریسی معادل با آن، دو روشی هستند که مکانیک کوانتومی را تشکیل می‌دهند.)

اصول موضوع مکانیک موجی به قرار زیر هستند:

۱. هر کمیت مشاهده‌پذیر فیزیکی با عملگری متناظر است. عملگرها جانشین توابع سادهٔ فیزیک کلاسیک هستند. جدول زیر که برای محاسبات سه‌بُعدی ذره‌ای به جرم m مناسب است مطلب را توضیح می‌دهد:

مشاهده‌پذیر	تابع کلاسیک	عملگر کوانتوم مکانیکی
مکان در مختصات و دکارتی	$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$
تکانه	$m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)i+\left(\frac{dy}{dt}\right)i+\left(\frac{dz}{dt}\right)\boldsymbol{k}\right]$	$\left(\frac{\hbar}{i}\right)\nabla$
انرژی جنبشی	$\frac{p^۲}{۲m}$	$-\frac{\hbar^۲\nabla^۲}{۲m}$
انرژی کل	$\frac{p^۲}{۲m}+V(r)$	$-\frac{\hbar^۲\nabla^۲}{۲m}+V(\boldsymbol{r})$

۲. تنها مقادیر ممکن حاصل از اندازه‌گیری مشاهده‌پذیری که عملگر متناظر با آن Q است، ویژه مقدارهای q_n و q_l، معادله‌های زیر هستند:

$$\boxed{Qu_n(\boldsymbol{r})=q_nu_n(\boldsymbol{r}) \qquad n=۱,۲,۳,\ldots} \tag{۶ـ۷الف}$$

$$\boxed{Qu_l(\boldsymbol{r})=q_lu_l(\boldsymbol{r}) \qquad \infty>l>-\infty} \tag{۶ـ۷ب}$$

در اینجا، توابع $u_l(\boldsymbol{r})$ و $u_n(\boldsymbol{r})$ باید متناهی، پیوسته و تک‌مقدار باشند و در شرایط مرزی مخصوص مسئله فیزیکی صدق کنند. با نوشتن معادله‌های (۶ـ۷ الف و ب) بین توابعی که ویژه مقدارهای گسسته دارند، (۶ـ۷ الف) و توابعی با ویژه مقدارهای پیوسته (۶ـ۷ب)، که در آنها l متغیری پیوسته است، تفاوت قائل شده‌ایم.

(در عمل، عملگر Q به همراه شرایط مرزی مشخص می‌کنند که آیا با ویژه مقدارهای پیوسته سروکار داریم یا ویژه مقدارهای گسسته و یا هر دو.) به‌علاوه، $u_n(\boldsymbol{r})$ و $u_l(\boldsymbol{r})$ باید هنجارپذیر باشند. در یک‌بُعد، بهنجارش برای اولین نوع ویژه تابع، $u_n(x)$ به‌صورت زیر است

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} u_n^*(x) u_{n'}(x) dx = \delta_{nn'}} \qquad \text{(۶ـ۸ الف)}$$

برای نوع دوم داریم:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} u_{l'}^*(x) u_l(x) dx = \delta(l' - l)} \qquad \text{(۶ـ۸ب)}$$

در اینجا $\delta_{nn'}$ دلتای کرونکر و $\delta(l' - l)$ تابع دلتای دیراک است. تمام توابع $u(x)$ متعلق به هر عملگر، پایه‌ای راست هنجار را تشکیل می‌دهند. (پایه ممکن است شامل توابعی با ویژه مقدارهای گسسته یا پیوسته یا هر دو باشند.) فعلاً، باید با چند مثال نشان دهیم که معنای ویژه تابع و ویژه مقدار چیست.

فرض کنید عملگر Q عملگر انرژی کل باشد، $Q = \boldsymbol{H}$، معمولاً از عملگر انرژی کل، $\boldsymbol{H}$، که به افتخار سِر هامیلتون (۱۸۰۵ـ۱۸۶۵)، که مکانیک کلاسیک نیوتونی را برحسب اصول وردشی فرمولبندی کرد استفاده می‌کنند و آن را هامیلتونی نامند. تعمیم معادلهٔ (۶ـ۷) به سه‌بُعد به‌صورت زیر است

$$\boldsymbol{H} u_n(\boldsymbol{r}) = E_n u_n(\boldsymbol{r}) \qquad \text{(۶-۹)}$$

مسئله‌ای را در نظر می‌گیریم که قبلاً هم از آن یاد کرده‌ایم، یعنی حرکت الکترون در اتم هیدروژن،

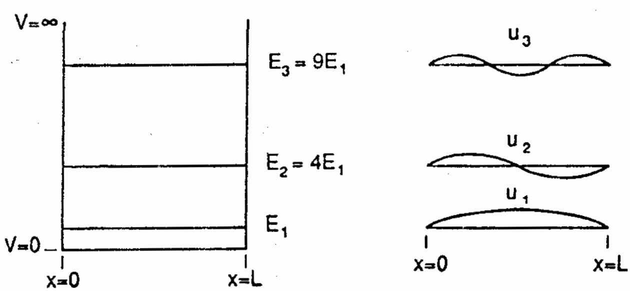
$$\boldsymbol{H} = \frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \text{(۶-۱۰)}$$

که در آن e، بار الکترون است. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، $\boldsymbol{H}$ مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل کولنی هسته است؛ هسته، ساکن در نظر گرفته می‌شود. فرض کنید که خود را به حالت‌های

مقید محدود کنیم، یعنی حالت‌های که اتم هیدروژن به الکترون و هسته تجزیه نمی‌شود، یعنی به حالت‌هایی که در آن $E < 0$. خواننده فرض خواهد کرد که (۶ـ۹) را می‌توان به‌ازای هر مقدار E حل کرد، و همین‌طور هم هست. اما، در فصل ۳ دیده‌ایم که اعمال شرایط مرزی جوابهای فیزیکی معادلهٔ دیفرانسیل را محدود می‌کند. شرایط مرزی برای $u_n(r)$ را شرایط بهنجارش (۶ـ۸) مشخص می‌کند. بدیهی است که $u_n(r)$ باید با بینهایت شدن r به صفر میل کند، این کار باید به‌صورت $(1/r)$ یا سریعتر صورت گیرد.

محاسبه نشان می‌دهد که برای $E < 0$ فقط برخی مقادیر گسستهٔ E، یعنی E_1، E_2، E_3، ...، به جوابهای (۶ـ۹) می‌انجامند که در شرایط مرزی صدق می‌کنند. این مقادیر گسستهٔ E، ویژه مقدارها هستند. این مقادیر دقیقاً همان «مقادیر ممکن انرژی کل» اصل موضوع، هستند. (بحث پیرامون اینکه در حالت $E > 0$ چه رخ دهد. در فصل ۷ خواهد آمد.) برای اتم هیدروژن با $E < 0$، ویژه مقدارها، ترازهای انرژی کوانتومی هستند که خواننده ممکن است آنها را فیزیک جدید مقدماتی یا شیمی دیده باشد. اما، توابعی که جواب معادلهٔ دیفرانسیل جزئی حاصل از یک ترکیب (۶ـ۹) و (۶ـ۱۰) هستند ممکن است توابعی شناخته شده نباشند. در واقع، اگرچه شرودینگر ریاضیدان قابلی بود، برای حل کامل مسئله در ۲۵ـ۱۹۲۴ مجبور شد با یک دوست ریاضیدان مشورت کند. (امروزه فیزیکدانها زیر و بم این توابع را یاد می‌گیرند. برای جواب مربوط به تراز با کمترین انرژی به مسئله ۶ـ۳ مراجعه کنید.) اما، مسئله مهمی وجود دارد که می‌توانیم آن را به تفصیل حل کنیم، و در اینجا آن را برای نشان دادن ویژه توابع و ویژه مقادیر حل می‌کنیم.

ذره‌ای به جرم m را در پتانسیل یک‌بُعدی در نظر می‌گیریم، شکل ۶ـ۱:



شکل ۶ـ۱ در طرف چپ، چاه پتانسیلی با دیوارهای عمودی بینهایت به همراه سه تراز اول انرژی نشان داده شده است. در طرف راست، توابع موج مستقل از زمان $u_n(x)$ متناظر با هریک از ترازها نشان داده شده است.

$$V(x) = \circ \qquad l \geq x \geq \circ$$
$$V(x) = \infty \qquad x > L, x < \circ \qquad (۶\text{-}۱۱)$$

این مسئله در فیزیک جدید اهمیت بسیار دارد، زیرا به‌عنوان مدلی ساده برای پروتونها و نوترونهای مقید x درون هسته و الکترونهای مقید در بلور فلزی به‌کار می‌رود. همچنین، مستقیماً به مدل فوتونهای مقید درکاواک مربوط می‌شود، که در نظریهٔ تابش جسم سیاه بررسی می‌شود (براساس مسئله مدهای طبیعی کاواک که در فصل ۴ فرمولبندی شد، همچنین نگاه کنید به بخش ۶ـ۵).

در جعبه یک‌بُعدی، معادلهٔ (۶ـ۹) چنین نوشته می‌شود

$$\frac{-\hbar^{۲}}{۲m}\frac{d^{۲}u_n(x)}{dx^{۲}} = E_n u_n(x) \qquad (۶\text{-}۱۲)$$

دقت کنید که توابع $u_n(x)$ را مستقل از زمان در نظر گرفته‌ایم. اگر عملگری که در معادلهٔ ویژه تابعی (۶ـ۷) ظاهر می‌شود مستقل از زمان باشد، همواره می‌توانیم این فرض را بکنیم. در این صورت همواره می‌توان معادله (۶ـ۷) را با روش جداسازی متغیرها، یعنی از طریق حل آزمایشی (۶ـ۲الف) حل کرد. بیرون جعبه که پتانسیل بینهایت است هیچ جوابی غیر از $u_n(x) = \circ$ برای (۶ـ۳) وجود ندارد. بنابراین شرایط مرزی را برای $u_n(x)$ چنین در نظر می‌گیریم

$$u_n(L) = u_n(\circ) = \circ \qquad (۶\text{-}۱۳)$$

بجز برای برخی جمله‌های ثابت، (۶ـ۱۲) و (۶ـ۱۳) همان (۳ـ۹ب) و ۳ـ۱۳ هستند که مدهای طبیعی تار به طول L را که دو سر آن ساکن است به‌دست می‌دهند. بنابراین جوابهای آشنای زیر را داریم

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{۲}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots \qquad (۶\text{-}۱۴)$$

که در آن، $u_n(x)$ بهنجار است، یعنی در رابطهٔ (۶ـ۸ الف) صدق می‌کند. با جانشین‌سازی ویژه مقدارهای انرژی را به‌دست می‌آوریم:

$$E_N = \frac{\hbar^{۲}k_n^{۲}}{۲m} \qquad (۶\text{-}۱۵\text{ الف})$$
$$k_n = \frac{n\pi}{L} \qquad (۶\text{-}۱۵\text{ب})$$

بازهم، ترازهای انرژی موجود کوانتیده هستند.

چون عملگر $\boldsymbol{H}$ عملگر وابسته به مکان در معادلهٔ وابسته به زمان شرودینگر (۶ـ۴) است، ویژه تابعها و ویژه مقدارهای $\boldsymbol{H}$، شکل کلی جواب (۶ـ۴) را نیز به‌دست می‌دهد:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n \frac{t}{\hbar}} \qquad (۶\text{ـ}۱۶)$$

که در آن A_n ثابتهای مستقل از زمان هستند و با شرط اولیه $\psi(x,0)$ داده می‌شوند.

توابع $u_n(x)$ هم نمونه‌ای از ویژه توابع هستند. یافتن مدهای بهنجار در مکانیک کلاسیک مثال خاصی از روش ریاضی کلی‌تر یافتن ویژه تابعها ویژه مقدارهاست.

معلوم شده است که برای هر عملگری که در مکانیک کوانتومی به‌کار می‌رود، ویژه مقدارها حقیقی هستند. (این عملگرهای با ویژه مقدار حقیقی، عملگرهای هرمیتی نام دارند.) چون ویژه مقدارها، مقادیر ممکن کمیتهای مشاهده‌پذیر هستند، بدیهی است برای یک نظریه سازگار باید ویژه مقدارها حقیقی باشند.

اکنون فرض کنید طول جعبهٔ یک‌بعدی شکل ۶ـ۱، یعنی L، بزرگ شود، یعنی $L \to \infty$، و در پی ویژه مقدارهای عملگر تکانه

$$\boldsymbol{p}x = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

باشیم. بنابراین، معادله‌ای که باید حل کنیم چنین است

$$-\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x} u(x) = p_k u(x) \qquad (۶\text{ـ}۱۷)$$

در اینجا هم جوابها دم دست هستند. از فصل ۱، داریم

$$u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \qquad (۶\text{ـ}۱۸)$$

با

$$p_k = \hbar k \qquad (۶\text{ـ}۲\text{د})$$

رابطهٔ (۶ـ۲د) تکانهٔ p و عدد موج k را به هم مربوط می‌کند، و همان‌طور که انتظار می‌رود با رابطهٔ دوبروی نیز سازگار است. اگر فرض کنیم $L \to \infty$، یعنی مرزها تأثیری در مسئله نداشته باشند، آنگاه هر مقداری از k مجاز است و ویژه مقدارها پیوسته هستند. بنابراین با استفاده از (۶ـ۸ب) داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{k'}^*(x) u_k(x) dx = \delta(k'-k) \qquad (۶\text{ـ}۱۹)$$

در واقع مشاهده می‌کنیم که با همان توابع $u_k(x)$ که قبلاً در رابطهٔ (۱ـ۳۲الف) فصل ۱ تعریف شدند سروکار داریم. عبارت ریاضی دقیق متناظر با (۶ـ۱۹) چنین است

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{k'}^*(x)u_k(x)e^{-\frac{x^2}{4n}}dx = g_n(k-k'), \qquad (۱ـ۳۲ب)$$

و می‌دانیم که به حد $n \to \infty$ علاقه‌مندیم. در حالت کلی، در فیزیک نتیجه‌ای که در (۶ـ۱۹) آمده است را مستقیماً می‌نویسیم و به‌کار می‌بریم، اما اگر مطمئن نیستیم که محاسبهٔ خاصی موجه است، به فرمولبندی دقیق‌تر فصل ۱ باز می‌گردیم.

سرانجام، ویژه تابعهای متغیر x را به‌دست می‌آوریم:

$$xu_\xi = \xi u_\xi(x) \qquad (۶ـ۲۰)$$

بدیهی است که جواب این معادله به‌ازای $\xi \neq x$ صفر است. دیراک کشف کرد که در مکانیک کوانتومی به تابع دلتا نیاز است. با استفاده از آن داریم.

$$u_\xi(x) = \delta(x-\xi) \qquad (۶ـ۲۱)$$

که مجدداً با بهنجارش (۶ـ۸ب)، داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\xi)\delta(x-\xi')dx = \delta(\xi-\xi') \qquad (۶ـ۲۲)$$

خواننده شاید علاقه‌مند باشد برای فرمولبندی (۶ـ۲۰) و (۶ـ۲۱) برحسب نظریهٔ توابع تعمیم‌یافته، به مثال ۱ـ۴ رجوع کند.

اگر L متناهی باشد، چه بر سر ویژه تابعهای تکانه می‌آید؟ پاسخ این سؤال که آن را به‌زودی بهتر خواهیم فهمید، این است که جوابی برای (۶ـ۱۷) که در شرایط مرزی (۶ـ۱۳) صدق کند وجود ندارد. به‌ویژه، خواننده می‌تواند تحقیق کند که ویژه حالت‌های $u_m(x)$ رابطهٔ (۶ـ۱۴) در (۶ـ۱۷) صدق نمی‌کنند. (واژه، «حالت» در ویژه حالت تلویحاً نشان می‌دهد که ویژه تابع، وضعیت و رفتار ذره ـ یعنی حالت آن ـ را تعریف می‌کند.) بنابراین، اکنون این سؤال مطرح می‌شود که اگر تابع موج شرودینگر $\psi(x,t)$ ویژه تابع عملگری که متناظر با کمیت مشاهده‌پذیر مورد نظر ماست، نباشد، چه اتفاقی می‌افتد.

۳. هنگامی که تابع موج ذره $\psi(x,t)$ است، میانگین انتظاری دنباله‌ای از اندازه‌گیریهای کمیت مشاهده‌پذیر که عملگر آن Q است، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\boxed{\bar{Q}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) Q \psi(x,t) dx} \qquad \text{(۶ـ۲۳ الف)}$$

به شرطی که $\psi^*(x,t)$ طبق رابطهٔ زیر بهنجار شده باشد،

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)\psi(x,t) dx = 1} \qquad \text{(۶ـ۲۳ب)}$$

نحوهٔ بیان این اصول موضوع، ما را برای نخستین‌بار از تفاوت بنیادی مکانیک کوانتومی با مکانیک کلاسیک آگاه می‌سازد. هدف مکانیک کلاسیک این است که براساس شرایط حاضر، تمام دینامیک را در آینده پیش‌بینی کند و چنین هم می‌کند، یعنی در آن قطعیت وجود دارد. اما کاربرد مکانیک کوانتومی دارای سرشت آماری است. این تفاوت، چنانکه خواهیم دید به هنگام فرمولبندی مکانیک کوانتومی، بحث گسترده‌ای را در میان فیزیکدانان به وجود آورد. و حتی در زمان نوشتن این کتاب، مخصوصاً به لحاظ فلسفی، مجادله هنوز ادامه دارد. اما، به‌طور کلی، فیزیکدانان طی چند سال اول بعد از پیدایش مکانیک کوانتومی، فرمولبندی استانداردی را برای آن پذیرفتند.

در مکانیک کوانتومی، بهتر است که نه تنها ایدهٔ میانگین رابطه‌های (۶ـ۲۳الف و ب)، بلکه ایدهٔ انحراف معیار رابطهٔ زیر را نیز از آمار اقتباس کرد،

$$\Delta Q \equiv \left[\overline{(Q-\overline{Q})^2}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(۶ـ۲۴ الف)}$$

با

$$\begin{aligned}\overline{(Q-\overline{Q})^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)[Q^2 - 2Q\bar{Q} + (\bar{Q})^2]\psi(x,t)dx \\ &= \bar{Q^2} - (\bar{Q})^2 \qquad \text{(۶ـ۲۴ب)}\end{aligned}$$

$\bar{Q}$ در یک‌بُعد، یک عدد است نه مثل (۶ـ۲۳الف)، یک عملگر، Q^2 به معنای اعمال دو بار متوالی Q است.

راست هنجاری مدهای بهنجار گوناگون را در مسائل فصلهای پیشین به خاطر داریم، مثلاً، در جوابهای موج ساکن تارکشیده در فصل ۳، و همچنین یادآور می‌شویم که مدهای بهنجار یک پایه

تشکیل می‌دادند. منظور از «پایه» این بود که توابع فیزیکی مورد نظر در بازهٔ معین را که شرایط مرزی مناسب را برقرار می‌کردند می‌توانستیم به راحتی برحسب این مدها بیان کنیم. از قضا این ویژگی مدهای بهنجار را می‌توان تعمیم داد: ویژه تابعهای عملگر کوانتوم مکانیکی متعلق به ویژه مقدارهای متفاوت متعامدند، و همان‌طورکه از (۶ـ۸الف) و (۶ـ۸ب) نیز انتظار داشتیم با هم یک پایه را تشکیل می‌دهند. اگر، چنانکه گاهی اتفاق می‌افتد، بیش از یک ویژه تابع مستقل به‌ازای یک ویژه مقدار عملگری وجود داشته باشد، بازهم می‌توان یک پایهٔ راست هنجار ساخت.

کامل بودن مجموعهٔ ویژه تابعها بدان‌معنی است که تابع موج شرودینگر $\psi(x,t)$ را همواره می‌توان به‌صورت مجموع آنها نوشت.

$$\boxed{\psi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(t)u_n(x)} \qquad \text{(۶ـ۲۵ الف)}$$

این در حالتی است که با پایه‌ای گسسته سروکار داشته باشیم. در مورد پایه‌ای پیوسته انتگرال زیر را خواهیم داشت،

$$\boxed{\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}B_l(t)u_l(x)dl} \qquad \text{(۶ـ۲۵ب)}$$

(در بعضی مسائل هم به مجموع نیاز داریم و هم به انتگرال.) $B(t)$ ضرایب بسط وابسته به زمان هستند. نکتهٔ مهمی که باید به آن توجه کرد این است که تنها و تنها اگر uها ویژه تابعهای عملگر انرژی کل $\boldsymbol{H}$ باشند، $B(t)$ دارای شکل زیر است

$$B_n(t)A_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n\frac{t}{\hbar}} \qquad \text{(۶ـ۲۶)}$$

که در آن n عدد صحیح است و رابطهٔ مشابهی را برای l نیز می‌توان نوشت. در اینجا A_nها مستقل از زمان هستند. این نتیجه را قبلاً به‌صورت (۶ـ۱۶) نیز بیان کردیم.

با قرار دادن (۶ـ۲۵الف) در طرف چپ شرط بهنجارش (۶ـ۲۳ب) داریم

$$\sum_{n'n}B_n^*B_n\int_{-\infty}^{\infty}u_{n'}^*(x)u_n(x)dx=\sum_n|B_n|^2$$

که برای رسیدن به آن از شرط راست هنجاری u_n ها، یعنی (۶ـ۸الف) نیز استفاده کرده‌ایم، بنابراین داریم

$$\boxed{\sum_n|B_n(t)|^2=1} \qquad \text{(۶ـ۲۷ الف)}$$

به همین ترتیب با بسط پیوستهٔ (۶ـ۲۵ب) در می‌یابیم که طرف چپ (۶ـ۲۳ب) به کمک (۶ـ۸ب) چنین است،

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B_l'^{*} B_l \int_{-\infty}^{\infty} u_l'^{*}(x) u_l(x)\, dx\, dl\, dl' = \int_{-\infty}^{\infty} |B_l|^{۲} dl$$

بنابراین داریم،

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |B_l(t)|^{۲} dl = ۱} \qquad \text{(۶ـ۲۷ب)}$$

اکنون مهم است که (۶ـ۲۵الف) را در (۶ـ۲۳) قرار دهیم، با فرض اینکه $u_n(x)$ ویژه تابعهای $\boldsymbol{Q}$ هستند. داریم:

$$\bar{\boldsymbol{Q}}(t) = \sum_{n,n'} B_{n'}^{*}(t) B_n(t) \int_{-\infty}^{\infty} u_{n'}^{*}(x) \boldsymbol{Q} u_n(x)\, dx$$

به کمک رابطهٔ (۶ـ۷الف)،$\boldsymbol{Q}u_n(x) = q_n u_n(x)$ ، داریم

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{Q}}(t) = \sum_{n} |B_n(t)|^{۲} q_n} \qquad \text{(۶ـ۲۸ الف)}$$

به همین ترتیب، در مورد توابعی که ویژه مقدارهای پیوسته دارند، $\boldsymbol{Q}(t)$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\bar{\boldsymbol{Q}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B_{l'}^{*}(t) B_l(t) \int_{-\infty}^{\infty} u_{l'}(x) \boldsymbol{Q} u_l(x)\, dx\, dl\, dl'$$

و یا

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{Q}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q_l |B_l(t)|^{۲} dl} \qquad \text{(۶ـ۲۸ب)}$$

اگر (۶ـ۲۸الف و ب) را به همراه (۶ـ۲۷الف و ب) در نظر بگیریم، ضرایب بسط $B_n(t)$ و $B_l(t)$ در (۶ـ۲۵الف و ب) دارای این تعبیر فیزیکی خواهند شد که: مربع اندازه‌های آنها فراوانی ویژه ـ مقدارهای q_n، q_l را در زمان t می‌دهد.

بار دیگر، بسط برحسب ویژه تابعهای H بسیار سودمند است. با استفاده از (۶ـ۲۶) که بستگی زمانی نمایی را برای ضرایب بسط $B_n(t)$ می‌دهد، می‌بینیم که مربع اندازهٔ آنها $|B_n(t)|^2$ مستقل از زمان است و همین‌طور انرژی کل (۶ـ۲۳الف) که برای سیستم بسته انتظار می‌رود، ثابت باشد. (برای مشخص کردن ویژه مقدارهای انرژی به‌جای h از E استفاده می‌کنیم. تا با ثابت پلانک اشتباه نشود.) حال اگر در چنین بسطی تمام ضرایب $B_n(t)$ به غیر از یکی، مثلاً $B_m(t)$، صفر باشد، می‌گوییم که ذره در ویژه حالت $u_m(x)$ است و به‌علاوه در یک حال مانا قرار دارد. در این مورد $\psi(x,t)$ دارای شکل سادهٔ زیر است.

$$\psi(x,t) = u_m(x)\mathrm{e}^{\frac{-iE_m t}{\hbar}} \qquad (۲۹\text{-}۶)$$

مقدار انتظاری انرژی کل E دقیقاً با E_m برابر می‌شود و پاشیدگی آن ΔE که طبق رابطهٔ (۶ـ۲۴الف) تعریف شد، صفر خواهد بود.

به‌علاوه، با استفاده از (۶ـ۲۳الف) که مقدار انتظاری هر مشاهده‌پذیر را تعریف می‌کند، مشاهده می‌کنیم که (۶ـ۲۹) درست است، یعنی همهٔ مقادیر انتظاری، $\bar{Q}$، مستقل از زمان هستند، که برای «حالت مانا» همین انتظار را هم داریم (به مثال ۶ـ۱ هم نگاه کنید).

اینکه $\psi(x,t)$ ویژه حالت انرژی باشد یا نه به شرایط اولیه بستگی دارد. بنابراین، وضعیت کاملاً شبیه چیزی است که در فیزیک موج کلاسیک دیدیم، یعنی توزیع انرژی کل میان مدهای بهنجار در ابتدا مشخص می‌شود و همان‌طور باقی می‌ماند.

به ویژه‌حالتی که کمترین انرژی را دارد، حالت پایه می‌گویند، مثلاً $u_۱(x)$ در مسئله چاه مربعی، شکل ۶ـ۱، یا حالت پایدار $۱s$ الکترون اتم هیدروژن. پایداری این حالت صرفاً ناشی از آن است که برای جابه‌جا کردن الکترون از این حالت انرژی مثبتی ورودی انرژی مثبت از خارج ضروری است.

اکنون به جوابهای مسئله چاه پتانسیل متناهی به عرض L، یعنی رابطه‌های (۶ـ۱۴ تا ۱۶) باز می‌گردیم. همان‌طور که گفتیم، جوابهای مانا چنین هستند.

$$\psi_n(x,t) = u_n(x)\mathrm{e}^{\frac{-E_n t}{\hbar}} \qquad (۲۹\text{ـ}۶)$$

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{۲}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots \qquad (۱۴\text{ـ}۶)$$

که ویژه‌حالت‌های عملگر انرژی کل H هستند و ویژه‌حالت‌های عملگر تکانهٔ p نیستند. در واقع، حال می‌توانیم مقدار انتظاری $\bar{p}$ را با استفاده از (۶ـ۲۸الف) محاسبه کنیم. محاسبه نشان می‌دهد (مثال ۶ـ۱) که برای هر یک از این حالت‌ها، $\psi(x,t)$، داریم $p = ۰$. علت آن است که $u_n(x)$

موج ایستاده است، یعنی از دو موج $e^{ikx}/\sqrt{2L}$ و $e^{-ikx}/\sqrt{2L}$ که هریک دارای تکانه هستند تشکیل شده است، اما این تکانه‌ها در جهتهای مخالف‌اند. از همین‌رو، انتظار داریم که $\Delta p \neq 0$، که در بخش مسائل آن را ثابت می‌کنیم.

با توجه به دو پایهٔ با ویژه‌تابعهای پیوسته که با آنها آشنا هستیم، نکات بیشتری را خواهیم آموخت. ابتدا، فرض کنید ویژه تابعهای مکان، $u_\xi(x)$ عملگر x را طبق رابطهٔ (۶ـ۲۱) به‌صورت $\delta(x-\xi)$ در نظر بگیریم. با این انتخاب $u_l(x)$ بسط انتگرال (۶ـ۲۵ب) برای $\psi(x,t)$ چنین می‌شود

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(t)\delta(x-\xi)d\xi \qquad (۶ـ۳۰\text{الف})$$

به عبارت دیگر

$$B_x(t) = \psi(x,t) \qquad (۶ـ۳۰\text{ب})$$

برای هر $\bar{Q}$، از (۶ـ۲۸ب) نتیجه می‌گیریم که

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)x\psi(x,t)dx \qquad (۶\text{-}۳۱)$$

در اینجا برای ضرایب $B_l(t)$ از رابطهٔ (۶ـ۳۰ب) استفاده کرده‌ایم. به همین ترتیب با استفاده از (۶ـ۲۷ب) داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)\psi(x,t)dx = 1 \qquad (۶ـ۲۳\text{ب})$$

بنابراین، دوباره شرط بهنجارش تابع موج شرودینگر $\psi(x,t)$ را به‌دست آورده‌ایم، که استفاده از تابع دلتا را در بهنجارکردن ویژه تابعهای پیوستهٔ $\delta(x-\xi)$ توجیه می‌کند. اکنون به تعبیر $|B_l(t)|^2$ به‌عنوان فراوانی وقوع ویژه مقدار پیوسته l، باز می‌گردیم و از (۶ـ۳۰ ب) به تعبیر فیزیکی زیر برای $\psi^*(x,t)\psi(x,t)$ می‌رسیم:

$\psi^*(x,t)\psi(x,t)$ عبارت است از احتمال یافتن ذره در مکان x در زمان t،

و یا، $\psi^*(x,t)\psi(x,t)dx$، این احتمال است که ذره در زمان t بین x و $x+dx$ قرار داشته باشد. این تعبیر فیزیکی را می‌توان مستقیماً و غیر رسمی‌تر، با استفاده از رابطهٔ (۶ـ۳۱) برای $\bar{x}(t)$ نیز

به‌دست آورد، بدین‌ترتیب شرط بهنجارش (۶ـ۲۳ب) نشان می‌دهد که ذره حتماً در جایی وجود دارد و جمع احتمالهای یافتن ذره یک است.

دست آخر، فرض کنید برای $u_l(x)$، ویژه تابعهای $u_k(x)$ را که طبق (۶ـ۱۸) تعریف می‌شوند انتخاب کنیم، یعنی $e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$. در آن صورت بسط (۶ـ۲۱ب) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B_k(t)e^{ikx}dk \tag{۶-۳۲}$$

که نمایش استاندارد فوریه (۱ـ۲۴) است که از فصل ۱ می‌دانیم. بنابراین، با داشتن $\psi(x,t)$ یافتن $B_k(t)$ کار ساده‌ای است، زیرا می‌دانیم چگونه تبدیلهای فوریه‌ای را معکوس کنیم.

به خاطر داریم ویژه‌مقدارهای عملگر $\boldsymbol{p}$، $(\hbar/i)(\partial/\partial x)$، همان $\hbar k$ هستند. فرمول کلی برای مقادیر انتظاری ویژه مقدارهای پیوسته (۶ـ۲۸ب) با بسط برحسب ویژه تابعهای تکانه فرم کاملاً واضح زیر را پیدا می‌کند

$$\bar{p}_x(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hbar k|B_k(t)|^2dk \tag{۶ـ۳۳الف}$$

همین‌طور، با ترکیب (۶ـ۳۰ب) و (۶ـ۳۱) می‌توان نوشت،

$$\bar{x}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x|B_x(t)|^2dx \tag{۶ـ۳۳ب}$$

متوجه می‌شویم که $u_k(x)$ برای ذرهٔ آزاد، هم ویژه تابع عملگر انرژی کل $\boldsymbol{H}$ [یعنی، عملگر انرژی جنبشی $-(\hbar^2/2m)(\partial^2/\partial x^2)$، چون $V(x)=0$]، و هم ویژه تابع عملگر تکانه $-i\hbar\partial/\partial x$ است. به این ترتیب، وسوسه می‌شویم که فقط از یک موج $u_k e^{iE_k\hbar/t}$، که در آن $E_k=(\hbar^2k^2/2m)$ است به‌عنوان جواب $\psi(x,t)$ معادلهٔ موج شرودینگر در مسائلی که تکانهٔ ذره خوش‌تعریف است، $\boldsymbol{p}=\hbar k$، $\Delta p=0$، استفاده کنیم. اما، با توجه به بهنجارش تابع دلتای (۶ـ۸ب) برای $u_k(x)$، این کار مستقیماً امکان‌پذیر نیست. در عوض باید از ترفند دیگری، مثل گفتن اینکه می‌دانیم ذره با احتمال (شدت، اگر صحبت از باریکه ذرات است، که معمولاً چنین است) مشخصی بین نقاط a و b وجود دارد استفاده کنیم و سپس $\psi(x,t)$ را به نسبت احتمال وجود در این گستره بهنجار کنیم. یک شگرد دیگر استفاده از به اصطلاح شرایط مرزی دوره‌ای یعنی رهیافتی است که در بخش مسائل به آن پرداخته‌ایم. از سوی دیگر، تابع دلتا، $\delta(x-\xi)$، با ویژگی بنیادی

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\xi)dx=1 \tag{۱ـ۱۹ب}$$

(که نباید با شرط راست هنجاری (۶ـ۲۲) اشتباه گرفته شود)، به هنگام جایگزیده کردن ذره، یعنی به‌دست آوردن چگالی احتمال $\psi^*(x,t)\psi(x,t)$ بسیار سودمند است. موارد عملی این نکات در بخش بعد واضحتر می‌شوند.

۶ـ۳ حرکت ذرهٔ آزاد. اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

در بخش قبل اصول موضوع مکانیک موجی را به‌طور صوری ارائه، و بعضی مسائل را حل کردیم. برای اینکه عملکرد مکانیک موجی ملموس‌تر شود، ابتدایی‌ترین مسئله بنیادی مکانیک موجی کلاسیک یعنی ذرهٔ آزاد، را حل می‌کنیم که طبق قانون اول نیوتون اگر ساکن نباشد، «به حرکتی یکنواخت ادامه می‌دهد». چگونه ممکن است، معادل $x = vt$ را با استفاده از معادلهٔ شرودینگر و اصول موضوع مکانیک موجی به‌دست آورد؟

روش کار، حل مسئله مقدار اولیه است، که در آن معادلهٔ شرودینگر معادلهٔ موج حاکم بر رفتار ذره است. این همان روشی است که در مورد معادلهٔ بخش در مسئلهٔ ۱ـ۱۷ یا مسئله تپ پیشرونده بر تار کشیده در فصل ۳ با استفاده از معادلهٔ موج موجود به‌کار بستیم.

به‌عنوان شرط اولیه می‌نویسیم

$$\psi(x,\circ) = \alpha \mathrm{e}^{\left(-\frac{x^{۲}}{۴a^{۲}}\right)+\mathrm{i}k_\circ x}$$

در اینجا ثابت α از شرط بهنجارش زیر به‌دست می‌آید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,\circ)\psi(x,\circ)dx = ۱ \qquad (\text{۶ـ۲۳ب})$$

یادآور می‌شویم که (۶ـ۲۳ب) تضمین می‌کند که احتمال کل برای اینکه ذره بالاخره در جایی قرار داشته باشد، یک است. داریم،

$$\alpha^{۲}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^{۲}}{۲a^{۲}}}dx = \alpha^{۲}\sqrt{۲a^{۲}\pi} = ۱$$

که در آن از (۱ـ۵) استفاده کرده‌ایم. بنابراین، تابع موج بهنجار شدهٔ $\psi(x,\circ)$ چنین است

$$\psi(x,\circ) = (۲\pi a^{۲})^{-\frac{۱}{۴}}\mathrm{e}^{\left(-\frac{x^{۲}}{۴a^{۲}}\right)+\mathrm{i}k_\circ x} \qquad (\text{۶ـ۲۴ب})$$

چرا از چنین تابع پیچیده‌ای به‌عنوان شرط اولیه شروع می‌کنیم؟ چرا توزیع احتمال اولیه، $\psi^*(x,\circ)\psi(x,\circ)$ را صرفاً $\delta(x)$ اختیار نمی‌کنیم؟ لااقل در این صورت می‌دانیم که ابتدا ذره در $x=\circ$ قرار دارد. این پرسشها ما را به قلب مکانیک موجی می‌برند. برای دادن پاسخ کامل باید $\psi(x,\circ)$ در (۶ـ۳۴ب) را با بسط فوریه نمایش می‌دهیم [۱ـ۲۴]:

$$\psi(x,\circ)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}dk \qquad \text{(۶ـ۳۵الف)}$$

و

$$A(k)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,\circ)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}dx \qquad \text{(۱ـ۳۳)}$$

$$=\left(\frac{۲a^۲}{\pi}\right)^{\frac{۱}{۴}}\mathrm{e}^{-(k-k_\circ)^۲a^۲} \qquad \text{(۶ـ۳۵ب)}$$

رابطهٔ (۶ـ۳۵ب) از به‌کاربستن (۱ـ۱۸)، یعنی رابطهٔ زیر، حاصل می‌شود،

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{-ax^۲}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\frac{k^۲}{۴a}} \qquad \text{(۱ـ۱۸)}$$

با استفاده از (۶ـ۳۵ب) به‌جای $A(k)$، می‌توانیم از (۶ـ۳۳الف) که در بخش قبل آمد، استفاده کنیم و میانگین تکانه را به‌صورت زیر به‌دست آوریم

$$\bar{p}_x(\circ)=\hbar\int_{-\infty}^{\infty}k|A(k)|^۲dk \qquad \text{(۶ـ۳۶الف)}$$

اکنون، خواننده می‌تواند با استفاده (۱ـ۱۸) به آسانی تحقیق کند که $\int_{-\infty}^{\infty}|A(k)|^۲dk$ برابر واحد است. در واقع از (۶ـ۲۳ب) و (۶ـ۲۷ب) به‌ازای $t=\circ$، می‌دانیم که این انتگرال مساوی با یک است. بنابراین، بلافاصله داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty}k|A(k)|^۲dk=\int_{-\infty}^{\infty}(k-k_\circ)|A(k)|^۲dk+k_\circ\int_{-\infty}^{\infty}|A(k)|^۲dk$$
$$=k_\circ$$

زیرا انتگرال اول سمت راست، دارای انتگرالده فرد و در نتیجه صفر است.

بنابراین، با استفاده از (۶ـ۳۶ الف) داریم

$$\bar{p}(\circ) = \hbar k_\circ \qquad \text{(۶ـ۳۶ب)}$$

که در اینجا، و از این به بعد، شاخص x را دیگر به‌کار نمی‌بریم.

رابطهٔ (۶ـ۳۶ب) ضریب $\mathrm{e}^{ik_\circ x}$ را در شرط اولیهٔ منتخب تبیین می‌کند. بدون وجود این جمله، میانگین تکانه صفر می‌شد و در نتیجه ذره‌ای می‌داشتیم که به‌طور میانگین هیچ حرکتی نمی‌داشت.

با استفاده از (۶ـ۳۵ب) برای $A(k)$ می‌توانیم پاشیدگی تکانه، Δp، راکه مطابق (۶ـ۲۴الف و ب) تعریف شد، به دست آوریم. در بخش مسائل به‌دست می‌آوریم که

$$\Delta p(\circ) = \frac{\hbar}{۲a} \qquad \text{(۶ـ۳۷)}$$

به همراه آن، در مسئله ۶ـ۶ در می‌یابیم که پاشیدگی x، یعنی Δx، که به شرط اولیهٔ (۶ـ۳۴ب) برای $\psi(x, \circ)$ مربوط می‌شود، چنین است

$$\Delta x(\circ) = a \qquad \text{(۶ـ۳۸)}$$

این نتیجهٔ محاسبه شده برای Δx غیر منتظره نیست. توزیع احتمالی اولیه با استفاده از (۶ـ۳۴ب) چنین است:

$$\psi^*(x, \circ)\psi(x, \circ) = (۲\pi a^۲)^{-\frac{۱}{۲}} \mathrm{e}^{-\frac{x^۲}{۲a^۲}} \qquad \text{(۶ـ۳۹)}$$

همان‌طورکه مشاهد می‌شود مکان ذره تقریباً درگسترهٔ $\Delta x \sim a$ توزیع شده است. به‌علاوه، اگر $۱/n$ را به‌جای $۲a^۲$ بگذاریم، به‌طور صوری تابع زیر را با استفاده از (۶ـ۳۹) برای $|\psi(x, \circ)|^۲$ می‌یابیم

$$g_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \mathrm{e}^{-nx^۲} \qquad \text{(۱ـ۲۰)}$$

که در فصل ۱ به‌عنوان عضوی از دنبالهٔ تعریف‌کنندهٔ $\delta(x)$، داده شد. بدین‌ترتیب، شرایط اولیهٔ مربوط به جایگزیدگی به شکل $\delta(x)$ در (۶ـ۳۴الف) مستتر است. کافی است حد $a \to \circ$ را به‌دست آوریم. در قبال آن با مشکلی مواجه می‌شویم، زیرا طبق (۶ـ۳۷) خواهیم داشت $\Delta p \to \infty$. چطور است تابع دیگری غیر از تابع گاؤسی را انتخاب کنیم؟ در مثال ۱ـ۱ هم دیدیم که این ویژگی نمایش فوریه است که برای حاصلضرب پاشیدگی در فضای بردار موج، Δk، و در فضای حقیقی، Δx داریم

$$\Delta k \Delta x \simeq ۱ \qquad \text{(۶ـ۴۰ الف)}$$

به‌علاوه، می‌توان نشان داد که در میان همهٔ توابع، این تابع گاؤسی است که کمترین مقدار را برای این حاصلضرب به‌دست می‌دهد، یعنی

$$\Delta k \Delta x = \frac{۱}{۲} \qquad \text{(۶ـ۴۰ب)}$$

بدیهی است که این واقعیتهای ذاتی مکانیک موجی، پیامدهای گسترده‌ای دارند. اما بهتر است بررسی جزئیات آن را به هنگامی موکول کنیم که مسئله را حل کرده‌ایم، یعنی $\psi(x,t)$ را به‌ازای $t > ۰$ یافته‌ایم.

اگر به معادله مستقل از زمان شرودینگر برای ذره آزاد، یعنی (۶ـ۱۲) بازگردیم، مشاهده می‌کنیم که توابع

$$u_k(x) = \frac{\mathrm{e}^{ikx}}{\sqrt{۲\pi}}, \qquad \infty > k > -\infty \qquad \text{(۶ـ۱۸)}$$

مجموعهٔ کاملی از جوابها را برای ذرهٔ آزاد که نیاز به شرایط مرزی ندارد فراهم می‌کنند. ویژه تابعهای عملگر مستقل از زمان انرژی کل، $\boldsymbol{H}$، ویژه توابع عملگر تکانه، $\bar{\boldsymbol{p}}$ نیز هستند، نگاه کنید به (۶ـ۱۷). اینکه دقیقاً در چه شرایطی دو یا چند عملگر ویژه تابعهای مشترک دارند از حوزهٔ این بحث خارج است، با وجود این، خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به مسئله (۶ـ۷) مراجعه کند.

مانند رابطهٔ (۶ـ۲۹)، جواب وابسته به زمان معادلهٔ شرودینگر که از $u_k(x)$ به‌دست می‌آید، $u_k(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_k t/\hbar}$ است. و یا، مطابق با (۶ـ۲۵ب) کلی‌ترین جواب $\psi(x,t)$ ترکیب خطی همهٔ جوابهای ممکن خواهد بود. بنابراین برای ذرهٔ آزاد داریم

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) u_k(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_k \frac{t}{\hbar}} dk \qquad \text{(۶ـ۴۱)}$$

ضرایب $A(k)$، مانند حالت مدهای بهنجار در فیزیک کلاسیک، دامنه‌هایی هستند که از روی شرایط اولیه به‌دست می‌آیند. در واقع، اگر به نحوهٔ به‌دست آوردن $A(k)$ در (۶ـ۳۵) توجه کنیم، می‌بینیم که این ضرایب را برای $\psi(x,۰)$ به‌دست آورده‌ایم. بنابراین، آنچه باقی می‌ماند، انتگرال‌گیری روی k است، که $\psi(x,t)$ را می‌دهد. با قرار دادن (۶ـ۳۵) به‌جای $A(k)$ و (۶ـ۱۸) به‌جای $u_k(x)$، در عبارت کلی (۶ـ۴۱)، داریم

$$\psi(x,t) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \left(\frac{۲a^۲}{\pi}\right)^{\frac{۱}{۴}} \int \mathrm{e}^{ikx} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t} \mathrm{e}^{-(k-k_۰)^۲ a^۲} dk \qquad \text{(۶ـ۴۲الف)}$$

با استفاده از (۶ـ۱۵الف) برای بسامد زاویه‌ای $\omega_k = (E_k/\hbar)$ رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^{۲}}{۲m} \qquad \text{(۶ـ۴۲ب)}$$

در مکانیک کلاسیک مثلاً، در مورد امواج روی تار کشیده، عادت داشتیم رابطه‌ای خطی را بین عدد موج k و بسامد زاویه‌ای ω در نظر بگیریم. اما، با شرایط پاشنده نیز مواجه بودیم، که در آن سرعت فاز نور، ω/k، در یک محیط به k بستگی داشت، و در نتیجه «توان پاشندگی» به منشوری می‌بخشید (فصل ۵). بدیهی است که پدیدهٔ پاشندگی در مکانیک موجی بسیار بارز است.

انتگرال (۶ـ۴۲الف) را با «کامل کردن توان دوم» انجام می‌دهیم. برای کاهش عملیات جبری، کمیتی مختلط برای ضریب $k^{۲}$ در توان جملهٔ نمایی و یک «زمان» T را به‌صورت زیر وارد می‌کنیم.

$$\Lambda^{۲} = a^{۲} + \mathrm{i}T \qquad \text{(۶ـ۴۲ج)}$$

$$T = \frac{\hbar t}{۲m} \qquad \text{(۶ـ۴۲د)}$$

با این نمادگذاری، $\psi(x,t)$ در (۶ـ۴۲الف) چنین خواهد شد

$$\psi(x,t) = \left(\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\right)\left(\frac{۲a^{۲}}{\pi}\right)^{\frac{۱}{۴}} \mathrm{e}^{k_\circ^{۲}\frac{a^{۴}}{\Lambda^{۲}}}\mathrm{e}^{-k_\circ^{۲}a^{۲}} I$$

و یا

$$\psi(x,t) = \left(\frac{a^{۲}}{۲\pi^{۳}}\right)^{\frac{۱}{۴}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\circ^{۲}a^{۲}\frac{T}{\Lambda^{۲}}} I \qquad \text{(۶ـ۴۲ه)}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(k\Lambda - k_\circ a^{۲}/\Lambda)^{۲} + \mathrm{i}kx} dk \qquad \text{(۶ـ۴۲و)}$$

در اینجا، ضرایب $\mathrm{e}^{k_\circ^{۲}a^{۴}/\Lambda^{۲}}$ و $\mathrm{e}^{-k_\circ^{۲}a^{۴}/\Lambda^{۲}}$ به ترتیب در (۶ـ۴۲ه) و (۶ـ۴۲و) آمده‌اند. اگر در رابطهٔ (۱ـ۱۸) برای تبدیل فوریهٔ تابع گاؤسی، جای x و k را عوض می‌کنیم و به‌جای a، کمیت Λ را قرار دهیم داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{-k^{۲}\Lambda^{۲}} dk = \frac{\sqrt{\pi}}{\Lambda}\mathrm{e}^{-\frac{x^{۲}}{۴}\Lambda^{۲}} \qquad \text{(۶ـ۴۲ز)}$$

در اینجا، مهم است، توجه کنیم که قسمت حقیقی $\Lambda^{۲}$، یعنی $a^{۲}$، همیشه مثبت است. همان‌طور که در فصل ۱ آمد، در این شرایط می‌توان (۱ـ۱۸) را به مقادیر مختلط پارامتر Λ تعمیم داد.

به‌علاوه، می‌توان جابه‌جایی محدود $k_\circ a^{۲}/\Lambda^{۲}$ در k را وقتی محدودهٔ انتگرال‌گیری از $-$ بینهایت تا $+$ بینهایت است، نادیده گرفت. بدین‌ترتیب، اگر در (۶ـ۴۲و) k را به $(k - k_\circ a^{۲}/\Lambda^{۲})$ تغییر دهیم، با استفاده از (۶ـ۴۲ز)، داریم

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{\Lambda} \mathrm{e}^{-\frac{x^{۲}}{۴\Lambda^{۲}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\circ \frac{a^{۲}}{\Lambda^{۲}})x} \qquad \text{(۶ـ۴۲ح)}$$

روابط (۶ـ۴۲هـ) و (۶ـ۴۲ح) جواب تحلیلی تابع موج ذرهٔ آزاد، $\psi(x.t)$، راکه به دنبالش بودیم، به‌دست می‌دهند.

پیش از برخورد پیچیدگیهای $\psi(x, t)$، می‌توانیم برخی از اطلاعات مورد نیاز را به‌دست آوریم. این بار با معکوس کردن امور ذکر می‌کنیم که ویژه تابعهای عملگر تکانه، یعنی توابع $u_k(x)$، ویژه تابعهای عملگر انرژی $\boldsymbol{H}$ نیز هستند و در نتیجه ضرایب بسط $\psi(x, t)$ برحسب ویژه تابعهای تکانه، یعنی $B_k(t)$ در (۶ـ۲۵ب) به‌صورت $A_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_k/\hbar)t}$ است:

$$\psi(x, t) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B_k(t) u_k(x) dk \qquad \text{(۶ـ۲۵ب)}$$

که در آن $|B_k(t)|^{۲}$ مستقل از زمان است. با مستقل از زمان بودن $|B_k(t)|^{۲}$، $\bar{\boldsymbol{p}}(t)$، $\Delta p(t)$ هم مستقل از زمان می‌شوند. بنابراین داریم،

$$\bar{\boldsymbol{p}}(t) = \bar{\boldsymbol{p}}(\circ) = \hbar k_\circ \qquad \text{(۴۳-۶)}$$

$$\Delta p(t) = \Delta p(\circ) = \frac{\pi}{۲a} \qquad \text{(۴۴-۶)}$$

بر مبنای فیزیک کلاسیک این نتیجه برای ذره آزاد به هیچ وجه غیر منتظره نیست. به این نکته باز خواهیم گشت.

اما $\bar{x}(t)$ و $\Delta x(t)$ به شدت وابسته به زمان هستند. برای محاسبهٔ وابستگی زمانی آنها، به جزئیات $\psi(x, t)$ نیاز نداریم، اگرچه، علی‌الاصول، برای یافتن جزئیات توزیع تکانه به عبارت دقیق $\psi(x, t)$ نیازمندیم. در اینجا کافی است $\psi^*(x, t)\psi(x, t)$ یعنی توزیع احتمالی مکان ذره را بدانیم. با توجه به (۶ـ۴۲د) و (۶ـ۴۲ز) به عبارتهای زیر نیاز خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{\Lambda^{۲}} + \frac{۱}{(\Lambda^{۲})^*}\right) = \frac{a^{۲}}{\Delta} \qquad \text{(۶ـ۴۵الف)}$$

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{\Lambda^{۲}} - \frac{۱}{(\Lambda^{۲})^*}\right) = \frac{-\mathrm{i}T}{\Delta} \qquad \text{(۶ـ۴۵ب)}$$

$$(\Lambda\Lambda^*)^{-۱} = (\Delta)^{-\frac{۱}{۲}} \qquad \text{(۶ـ۴۵ج)}$$

که در آن

$$\Delta \equiv a^4 + T^2 \qquad \text{(۶ـ۴۵د)}$$

با این نتایج، توان دوم کامل را در نما می‌یابیم، یعنی

$$\psi^*(x,t)\psi(x,t) = \left(\frac{a}{\sqrt{2\pi\Delta}}\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{a^2}{2\Delta}\right)\left(x-\frac{\hbar k_\circ t}{m}\right)^2} \qquad \text{(۶ـ۴۵هـ)}$$

رابطهٔ (۶ـ۴۵هـ) نتیجهٔ نهایی برای توزیع احتمال ذرهٔ آزاد در زمان t است. می‌توان به راحتی بررسی کرد که توزیع احتمال برحسب زمان بهنجار باقی می‌ماند، یعنی (۶ـ۲۳ب) برقرار است که پیامد ویژگی یکانی معادلهٔ شرودینگر است. محاسبه‌ای که برای $\psi^*\psi$ انجام شد را می‌توان به‌سادگی به سه‌بُعد تعمیم داد، این نکته برای مباحثی که در زیر می‌آید نیز صادق است.

اکنون می‌توانیم، با استفاده از (۶ـ۴۵هـ) هر دوی $\bar{x}(t)$ و $\Delta x(t)$ را به‌طور نسبتاً سر راست به دست آوریم. به همان روش که $\bar{p}(\circ)$ را در (۶ـ۳۶ب) به‌دست آوریم، بلافاصله مشاهده می‌کنیم که

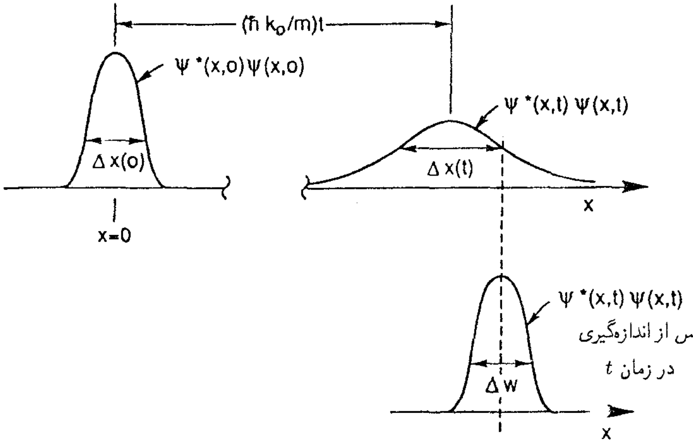
$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)\psi(x,t)x\,dx \\ &= \frac{\hbar k_\circ}{m} t \qquad \text{(۶ـ۴۶الف)}\end{aligned}$$

همچنین، اگر به خاطر آوریم که برای توزیع بهنجار شده‌ای که به‌صورت $\mathrm{e}^{-x^2/2a^2}$ باشد، $\Delta x(\circ)$ طبق (۶ـ۳۸) برابر با a است، در اینجا، برای حالت کلی‌تر پاشیدگی، $\Delta x(t)$، داریم:

$$\begin{aligned}\Delta x(t) &= \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \qquad \text{(۶ـ۴۶ب)} \\ &= \sqrt{a^2 \left(\frac{\Delta p}{m}\right)^2 t^2} \qquad \text{(۶ـ۴۶ج)}\end{aligned}$$

که در آن به‌جای Δ از (۶ـ۴۵د) و به‌جای T از (۶ـ۴۲د) قرار داده‌ایم و از (۶ـ۴۴) که a را به Δp مربوط می‌کند، استفاده کرده‌ایم.

نتایج محاسبات را به‌طور خلاصه در شکل ۶ـ۲ و جدول زیر آورده‌ایم، که در آن مقادیر اولیه و بعدی با هم مقایسه شده‌اند.



شکل ۶ـ۲ توزیع احتمال $\psi^*\psi$ در $t = \circ$ و $t > \circ$. پاشیدگی بیشتر در زمانهای متناهی t، نمایانگر سرشت آماری مکانیک موجی است. همچنین، $\psi^*\psi$ پس از یک اندازه‌گیری در زمان t نشان داده شده است. تابع موج «رمبیده» است.

$t = \circ$	$t > \circ$
$\bar{x} = \circ$	$\bar{x} = \left(\frac{\bar{p}}{m}\right) t$
$\Delta x = a$	$\Delta x = \sqrt{a^۲ + \left(\frac{\Delta p}{m}\right)^۲ t^۲}$
$\bar{p} = \hbar k_\circ$	$\bar{p} = \hbar k_\circ$
$\Delta p = \frac{\hbar}{۲a}$	$\Delta p = \frac{\hbar}{۲a}$
$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{۲}$	$\Delta x \Delta p > \frac{\hbar}{۲}$

در نظر اول، آنچه به وقوع پیوسته به‌قدر کافی ساده است. ذره از نقطه $x = \circ$ به راه افتاده است. این را تنها راه ممکن در مکانیک موجی، یعنی برهم‌نهی خطی امواج با بردار موج، k، متغیر نشان دادیم. تابع دلتای دیراک $\delta(x)$ و موج تخت $u_k(k)$، دو حالت جدی ممکن برای توصیف وضعیت هستند و همان‌طور که در فصل ۱ اشاره شد، این دو حالت درست متضاد یکدیگرند. $\delta(x)$ نشان‌دهندهٔ جایگزیدگی مطلق است، اما Δpی مربوط به آن بینهایت است، زیرا تمام مؤلفه‌های فوریه به‌طورّ یکسان در تابع دلتا حضور دارند. یک موج هماهنگ، $u_k(x)$، نشان‌دهنده

عدم جایگزیدگی مطلق، $\Delta x \rightarrow \infty$، همراه، با تکانهٔ کاملاً مشخص است، یعنی $\Delta p \rightarrow ۰$. به‌طور کلی‌تر، از برهم‌نهی امواج به‌نام بستهٔ موج استفاده کرده‌ایم. با استفاده از بسته موج دریافتیم که، بدون توجه به اینکه پارامترها چگونه تنظیم شوند، همواره داریم

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{۲} \qquad (۴۷\_۶)$$

اکنون دیگر این محدودیتها به‌صورت جنبهٔ شناخته شده‌ای از فرمولبندی موجی در آمده‌اند، که ریشه در تحلیل فوریه دارند. در فصل ۵ نیز به محدودیت مشابهی برخوردیم:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{۲} \qquad (۵\_۵)$$

حرکت بعدی ذرهٔ آزاد با مکانیک کلاسیک کاملاً سازگار است. میانگین تکانه ذره، $\bar{p} = \hbar k_۰$، ثابت باقی می‌ماند، یعنی توزیع تکانه در فضای k حول $k_۰$ گسترده است و با گذشت زمان ثابت باقی می‌ماند. این همان چیزی است که برای ذرهٔ آزاد، یعنی وقتی پتانسیل $V(x)$ گرادیانی ندارد، یا نیرویی وجود ندارد انتظار داریم.

در زمان t، قلهٔ توزیع احتمال به‌قدر $(\bar{p}/m)t$ به پیش می‌رود. سرعت ذره، v، که با $\hbar k_۰ /m$ یا معادل آن $\bar{p}/m$ داده می‌شود، در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$\bar{x} = vt \qquad (۴۸\_۶)$$

اما Δx که با $\sqrt{a^۲ + (\Delta p/m)^۲ t^۲}$ مشخص می‌شود با زمان تغییر می‌کند. پاشیدگی اولیهٔ در تکانه در زمانهای لبه به‌صورت پاشیدگی در مکان ظاهر می‌شود.

بنابه اصل عدم قطعیت هایزنبرگ مکان یک ذره و تکانه‌اش را نمی‌توان همزمان تا دقتی بیشتر از آنچه در (۶_۴۷) آمده است اندازه گرفت. به همین ترتیب، انرژی ذره و زمانی را که در خلال آن ذره دارای آن انرژی است نمی‌توان با دقتی بیش از آنچه در (۵_۵) آمده است مشخص کرد. تا اینجا مشاهده کرده‌ایم که (۶_۴۷) نتیجهٔ مستقیم رابطهٔ اصلی دوبروی یعنی (۶_۱) و تحلیل فوریه است. آنچه اصل هایزنبرگ بیان می‌کند این است که در سطح بسیار دقیق اندازه‌گیری که (۶_۴۷) مصداق دارد، وسیلهٔ اندازه‌گیری همواره چنان بر سیستم تأثیر می‌گذارد که دقت افزون بر $\Delta x \Delta p = \hbar/۲$ غیر قابل حصول است. در مثال ۶_۳ نشان خواهیم داد که چگونه اندازه‌گیری مکان با نور (در سطح کوانتومی، از طریق برخورد فوتون با ذرهٔ تحت بررسی) ذره را آشفته می‌کند. در بدو فرمولبندی فیزیک کوانتومی، فیزیکدانها آزمایشهای فرضی بسیاری را بر آزمودن اصل هایزنبرگ پیشنهاد کردند، اما هیچ آزمایشی پیدا نشده است که این اصل را بی‌اعتبار کند.

محدودیت اندازه‌گیری که هایزنبرگ فرمولبندی کرد در نهایت شرط لازم برای اعتبار مکانیک موجی است. اگر می‌توانستیم آزمایشهایی انجام دهیم که داده‌های آنها فراتر از محدودیتهای (۵ـ۵) و (۶ـ۴۷) باشد، آن وقت می‌شد این اطلاعات و تحول ناشی از آنها را مطالعه کرد. چنین دانشی خارج از حیطهٔ مکانیک موجی است که فقط در چارچوب این محدودیتها می‌تواند پدیده‌ها را توضیح دهد. این، به نوبهٔ خود، اعتبار نظریه را از بین نمی‌برد، بلکه وجود فرمولبندی اساسی‌تر و به همراه آن راههای تازه‌تر درک طبیعت را نشان می‌داد. در عوض، می‌بینیم که مکانیک کوانتومی دارای سازگاری درونی است، یعنی گسترهٔ شگفت‌آوری از پدیده‌های فیزیکی را در سطح اتمی و زیر اتمی، در محدوده‌ای که مکانیک نیوتونی دیگر معتبر نیست، به درستی پیش‌بینی کرده است که در این سطح جایگزین مسلم مکانیک نیوتونی شده است.

اکنون اگر ذرهٔ آزاد را در زمان t در نظر بگیریم، که در آن $\Delta x \Delta p_x$ قطعاً بزرگتر از $\hbar/۲$ است، آن‌وقت اندازه‌گیریها، ارزیابی همزمان متغیرهای دینامیکی را حتی تا $\hbar/۲$، که دقیق‌تر از مقداری است که محاسبات ما قادر به پیشگویی آن بود امکان‌پذیر می‌سازد. بدین‌ترتیب، ممکن است بیش از یک نتیجه از اندازه‌گیری حاصل می‌شود و $\psi^*(x,t)\psi(x,t)$ نشان‌دهندهٔ توزیع آماری نتایج است. مثلاً، می‌توانیم شمارگر گایگر (که تک‌تک ذرات را می‌شمارد) را با گشودگی دریچهٔ Δw که بسیار کوچکتر از $\Delta x(t)$ تنظیم شده است، در نظر بگیریم و توزیع احتمال را در زمان t جارو کنیم. در این صورت خواهیم یافت که به‌طور متوسط، با چندین بار تکرار آزمایش، تعداد کل شمارش (به‌ازای هر ذره) مطابق با تابع $\psi^*(x,t)\psi(x,t)$ توزیع شده است؛ $\psi^*(x,t)\psi(x,t)\Delta w$ احتمال یافتن ذره در مکان x واقع در محدودهٔ گشودگی دریچه Δw است.

پس از اندازه‌گیریها، نامعین بودن تابع موج ممکن است به همان وضعیت که در $t = ۰$ بود برگشته باشد؛ کافی است Δw را برابر با $\Delta x(۰)$ قرار دهیم. این را گاهی اوقات «رمبش» تابع موج (شکل ۶ـ۲) گویند؛ به چنین تغییری در تابع موج باز هم اشاره خواهیم کرد.

سرانجام، متوجه می‌شویم که محاسبات انجام شده در مورد انتشار ذرهٔ آزاد، اگرچه نتایجی را در برداشت که پیوندی قوی با نتایج مکانیک ذره کلاسیک دارد، اما در واقع از طریق مکانیک موجی انجام شد، یعنی حرکت ذره با حرکت بستهٔ موج نشان داده شد. این دوگانگی موج ـ ذره را می‌توان به روشنی در وضعیت فیزیکی متفاوتی که در بخش بعد توصیف می‌شود، نشان داد.

۶ـ۴ دوگانگی موج ـ ذره و از دست رفتن علّیت

آزمایش پراش دو شکافی فصل قبل را می‌توان با ذرات نیز انجام داد. باریکه‌ای از ذرات، مثلاً الکترونها، از دو شکاف افقی موجود در یک پرده، می‌گذرند. نقشهٔ توزیع عمودی الکترونهایی

که به پرده می‌رسند را می‌توان به کمک شمارگر گایگر به‌دست آورد، همان‌طور که در بخش قبل نیز توزیع ذرات آزاد را به کمک شمارگر گایگر مشخص کردیم. توزیع شدت باریکهٔ الکترونی پراشیده درست مانند طرحی است که در شکل ۵ـ۱۱ برای نور پراشیده به‌دست آوردیم. اما، شمارگر گایگر ابزاری است که ورود ذرات را ثبت می‌کند، این دستگاه یا تق می‌کند یا تق نمی‌کند، وجود نیم‌تق ممکن نیست. اگر دسته‌ای از ذرات سنگین، مثلاً، ساچمه‌هایی را به شکافها هدایت کنیم، امکان ندارد توزیع آنها در امتداد عمودی برروی پرده همانند طرح پیچیده‌ای باشد که برای پراش به‌دست می‌آید. در عوض، ساچمه‌ها چنانکه مکانیک کلاسیک پیش‌بینی می‌کند در امتداد دو خط کاملاً متمایز و مشخص به‌طرف پرده می‌روند. انحراف از این توزیع، یعنی طرح پراش پیچیده را می‌توان حاکی از این نکته دانست که الکترون به هنگام عبور از شکاف می‌داند که شکاف دیگر نیز وجود دارد!ـ این بارزترین تجلی دوگانگی موج ـ ذره است.

اینجاست که کنجکاو می‌شویم بدانیم که اگر شمارگر گایگر، با تمامی پیچیدگی‌اش، رسماً جزئی از مسئله به شمار آید، چه می‌شود، به عبارت دیگر، اگر سازوکار شمارگر گایگر را جزئی از پتانسیل V در معادلهٔ موج شرودینگر به حساب آوریم، نتیجه چیست. در آن صورت فیزیک را به‌صورت معمولِ قطعی انجام می‌دهیم، یعنی معادلهٔ موج را (که دیگر ساده نیست!)، حل می‌کردیم، درست همان‌طور که در فیزیک کلاسیک حل می‌کردیم. دوگانگی موج ـ ذره، عدم قطعیت، و «رمبش» تابع موج، در محاسبات ناپدید می‌شود. اما آیا آنها به کلی از میان می‌روند؟ پاسخ آن است که آنها به سطحی دیگری از مشاهده رانده می‌شوند. در نهایت، به گفتهٔ هایزنبرگ درکتاب اصول فیزیکی نظریهٔ کوانتومی (نگاه کنید به کتابهای مرجع فصل ۶) «مثلاً مجبور می‌شویم که چشمان خود را نیز جزئی از دستگاه به حساب آوریم و غیره، زنجیرهٔ علت و معلول را فقط در صورتی می‌توان ثابت کرد که تمام عالم را به‌صورت یک سیستم در نظر بگیریم ـ اما در آن صورت دیگر فیزیک از میان می‌رود، صرفاً یک طرح ریاضی باقی می‌ماند. تقسیم عالم به سیستم مشاهده‌کننده و سیستم مشاهده‌شونده، مانع از فرمولبندی دقیق قانون علت و معلول می‌شود. (لزومی ندارد که همیشه انسان سیستم مشاهده‌کننده باشد؛ ابزار بی‌جان نیز، مانند فیلم عکاسی، ممکن است چنین سیستمی را تشکیل دهد.)»

در عمل، به خاطر دشواریِ حل معادلهٔ شرودینگر، فقط مسائل ساده را می‌توان تجزیه و تحلیل کرد. بقیهٔ کار تعبیر آزمایشها، به همان میزان که علم است، هنر نیز هست. با وجود این، فیزیکدانها موفق شده‌اند اطلاعات فراوانی را در سطح کوانتومی به‌صورت کمی بفهمند. این نکته را در بخش بعد یعنی آخرین بخش این فصل نشان خواهیم داد.

مکانیک موجی در ابتدا با ناباوری بسیاری از فیزیکدانها مواجه شد. تابع موجی که از یک طرف حاوی اطلاعات صرفاً آماری بود، از طرف دیگر به‌صورت تمام و کمال در محاسبات شرکت می‌کرد (مثلاً، در آزمایش دوشکافی)، و تازه با هر اندازه‌گیری فرو می‌ریخت. خود شرودینگر بود که پارادوکس معروف گربه (گربهٔ شرودینگر) را مطرح کرد. گربه‌ای که همراه اندکی مادهٔ پرتوزا در جعبه‌ای محبوس شده است. به‌طوری که در هر ساعت احتمال واپاشی پرتوزا ۵۰ درصد است. اگر واپاشی رخ دهد، دستگاهی به‌کار می‌افتد که گاز مرگباری را آزاد می‌کند. تابع موج ψ این سیستم در پایان این یک ساعت، وضعیت را به‌صورت ترکیب خطی، مؤلفه‌های حیوان زنده و حیوان مرده با ضرایب یکسان توصیف می‌کند. آیا واقعاً، گربه تا وقتی که مشاهده‌کننده‌ای به داخل اتاق نگاه نکرده است، نه زنده است و نه مرده؟ پرسش دیگری که اگرچه متفاوت ولی به موضوع مربوط است چنین مطرح می‌شود: آیا با گشودن جعبه، رفتار عجیب مربوط به تابع موج مرکب را می‌توان مانند تابع موج مرکب الکترون پراشیده از دو شکاف مشاهده کرد؟

امروزه، بیشتر فیزیکدانها دیگر نگران چنین مسائلی نیستند. به ویژه، حیوان یا مغز بشر (یا حتی یک ترانزیستور) پیچیده هستند؛ تعداد فرایندهای عصبی دخیل در تصمیم‌گیری وابسته به زندگی فرد، یا تاریخ ثبت شده به‌قدری زیاد است که هرگونه تأثیر افت‌وخیزهای کوانتومی مطمئناً از میان می‌رود. در مورد گربهٔ شرودینگر، تابع موج حاوی پیامدهای ممکن بسیار زیادی خواهد بود، که تقریباً تمام آنها به یکی از دو پیامد بزرگ مقیاس می‌انجامد، و فقط تعداد اندکی از آنها منجر به چیزی عجیب می‌شود.

مثال ساده‌تری را در نظر می‌گیریم. فرض کنید مکان و تکانهٔ ماه را، به‌طور همزمان با عدم قطعیت اجتناب ناپذیر هایزنبرگ اندازه می‌گیریم. در بخش مسائل، به تعیین زمانی که لازم است تا مسیر ماه به میزان یک کیلومتر تغییر کند برمی‌خوریم. در مدت زمان کافی (هزاران سال)، عدم قطعیت کوانتومی اولیه ممکن است به چنین اثری بینجامد. اما، اگر هم چنین شود، تعجبی ندارد زیرا به هر حال هراز گاهی به ماه نگاه می‌کنیم. مانند هر فرایند آماری دیگر، دیدبانی، پاشیدگی آماری پیش‌بینی نتایج را محدود می‌کند. در عین حال، هیچ مدرکی برای اثبات این نکته وجود ندارد که رمبش تابع موج به نوبهٔ خود بر نتیجه‌های آتی تأثیر می‌گذارد. این اندازه‌گیرهای منجر به فروافت تابع موج هستند که تأثیرگذارند. (مثال ۶ـ۳).

به‌طور خلاصه، وقتی با اجزاء تشکیل‌دهندهٔ طبیعت، یعنی ذرات سبک یا فوتونها سروکار داریم، باید برخی مفاهیم برمبنای مشاهدهٔ مستقیم را کنار بگذاریم. اینجاست که تجسم ذرات به‌صورت ملموس، که در مکانیک نیوتونی بسیار مفید است را باید به تصورات دوگانگی موج ذره تغییر دهیم. ماکس فون لاوهٔ (۱۸۷۹ـ۱۹۶۰) فیزیکدان آلمانی پیشنهاد کرد که، به هنگام نگریستن به آیندهٔ جسم کوانتوم مکانیکی را به‌صورت موج، و در نگرش به گذشته، آن را ذره در نظر بگیریم! یا به‌صورتی دیگر، در پاسخ به کجا، موج داریم و در پاسخ به

چگونه، ذره. اما به رغم پیش‌بینی‌ناپذیری که با تقسیم عالم به شیئی و جوهر در مکانیک کوانتومی پدید می‌آید، می‌توانیم نتایج کوانتومی را در تصویری که از عالم منظم داریم، بگنجانیم. اغلب «سخت‌افزارها» به‌قدری بزرگ یا پیچیده (به پر از اجزاء متعدد) هستند که افت و خیزهای کوانتوم هیچ تأثیر ملموسی ندارد. نیلس‌بور در «اصل همخوانی» معروفش بر این نکته تأکید کرد که، وقتی شرایط فیزیکی به حد غیرکوانتومی می‌گرایند که تعداد زیادی کوانتوم انرژی یا تکانه زاویه‌ای وجود دارد، در این صورت نتایج نظریهٔ کوانتومی باید به نتایج فیزیک کلاسیک میل کند. این موضوع هم در نظریهٔ کوانتومی، و هم در آزمایش رخ می‌دهد.

۶ـ۵ حیطهٔ مکانیک کوانتومی

پیدایش مکانیک کوانتومی به درک گسترهٔ وسیعتری از پدیده‌های فیزیکی انجامیده است. در بخش ۶ـ۱ گفتیم که چگونه شرودینگر گسترهٔ کامل حالت‌های کوانتومی مقید، $۱s, ۲s, ۲p, ۳s, ۳p, ۳d$ و غیره را برای اتم هیدرژن به‌عنوان ویژه حالت‌های (مدهای بهنجار)، معادلهٔ مستقل از زمان خود به‌دست آورد. چون ساختار عناصر جدول تناوبی ، برونیابی مستقیم این حالت‌هاست، کم‌کم می‌بینیم که درک ساختار ماده در سطح شیمیایی یکی از پیامدهای مکانیک موجی است. علاوه بر ساختار الکترونی خود اتمها، مکانیک کوانتومی، سرشت پیوندهای شیمیایی در مولکولها و جامدات را نیز توضیح می‌دهد. فیزیک مادهٔ چگال بسیاری از خواص ماده، از جمله ساختار بلوری، رسانش الکتریکی فلزات و نیمرساناها، مغناطیس، ابرشارگی هلیم مایع II و سازوکار تحول یابندهٔ ابررسانایی را توصیف می‌کند.

با مراجعه به فیزیک اتمی در می‌یابیم که ترازهای انرژی در هیدروژن نه‌تنها تحت تأثیر جزئیات توزیع بار $\psi^*\psi$ هستند که با «شعاع مدار» الکترون (عدد کوانتومی اصلی n) نشان داده می‌شود، بلکه مستقیماً به تکانهٔ زاویه‌ای الکترون (عدد کوانتومی l) نیز بستگی دارند. هر الکترون دارای گشتاور مغناطیسی ذاتی به خاطر «اسپین» ذاتی یا چرخش حول محورش، است (نگاه کنید به مطالب زیر). اتفاقی که رخ می‌دهد این است که، با توجه به پیش‌بینی نسبیت خاص، الکترون در هنگام حرکت در میدان کولنی هسته، یک میدان مغناطیسی هم می‌بیند. این میدان می‌خواهد گشتاور مغناطیسی ذاتی الکترون را با خود همسو کند که باعث تغییر وابستگی ترازهای انرژی به عدد کوانتومی l می‌شود. این تغییرات به نوبهٔ خود بسامد خطوط گسیلی را تغییر می‌دهند و به ساختار ریز می‌انجامد. تلاش برای به حساب آوردن ساختار ریز توسط معادلهٔ شرودینگر با شکست روبه‌رو می‌شود.

خواننده ممکن است نظریهٔ نسبیت خاص اینشتین را مطالعه کرده باشد، بنابه این نظریهٔ قوانین فیزیک باید در تمام چارچوبهای مرجع که با سرعت یکنواخت نسبت به یکدیگر حرکت می‌کنند یکسان باشد، این یعنی ناوردایی نسبیتی. از ابتدا معلوم بود که معادلهٔ شرودینگر فاقد این ناوردایی است. ساده‌ترین راه منظورکردن نسبیت خاص در مکانیک موجی مستلزم آن است که به جای تابع موج $\psi(x,t)$ معادلهٔ شرودینگر یک ماتریس ستونی با چهار درایهٔ $\psi_۱, \psi_۲, \psi_۳, \psi_۴$ بگذاریم که معادله‌ای ماتریسی به نام معادلهٔ دیراک را می‌دهد. جوابهای این معادله نشان می‌دهد که الکترون دارای حرکتی چرخشی، یعنی همان اسپین ذاتی است. این حرکت، با انتخاب محوری مشخص، دارای دو جهت چرخش، اما یک مقدار نرده‌ای تکانهٔ زاویه‌ای در هر دو است. $\psi_۱$ و $\psi_۲$ احتمال نسبی هریک از دو «اسپین» ممکن را نشان می‌دهند. $\psi_۳$ و $\psi_۴$ اصلاً ربطی به الکترون ندارند، بلکه مربوط به ذره‌ای با همان جرم اما دارای بار الکتریکی مثبت، یعنی پوزیترون است، که آن هم دو امکان برای اسپین دارد. کشف پوزیترون در ۱۹۳۲ نظریهٔ دیراک را تأیید کرد و در نتیجه دیراک به دریافت جایزهٔ نوبل فیزیک در ۱۹۳۳ نایل آمد.

مکانیک کوانتومی، با این تعدیل، نه‌تنها قادر به توصیف ساختار ریز است، بلکه ساختار فوق ریز را هم کاملاً توضیح می‌دهد. اثر اخیر، تغییر یا جابه‌جایی مختصری (حدود ۰٫۵Å یا کمتر در ناحیه مرئی) است، که به خاطر برهم‌کنش گشتاور مغناطیسی هسته با میدان مغناطیسی ناشی از تکانهٔ زاویه‌ای مداری و اسپینی الکترون، به‌وجود می‌آید. همهٔ این موفقیتها و موفقیتهای دیگر در فیزیک اتمی، فیزیک مادهٔ چگال و فیزیک هسته‌ای، مکانیک کوانتومی را به‌عنوان نظریه‌ای معتبر در گسترهٔ پهناوری از پدیده‌ها، تثبیت کرده است.

اکنون به مسئله‌ای اساسی می‌پردازیم. ابتدا نوسانگر هماهنگ فصل ۲ را در نظر بگیرید، مثلاً، فنری با پتانسیل $V(x)$ به‌صورت $(۱/۲)kx^۲$، که k ثابت فنر است. محاسبه نشان می‌دهد که ویژه مقدارهای انرژی معادلهٔ مستقل از زمان شرودینگر چنین است $E_n = n\hbar\omega$ و $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، بسامد ω از فرمول کلاسیک $\sqrt{k/m}$ به‌دست می‌آید، که در آن m جرم نوسانگر است. یک سری ترازهای انرژی با فاصله‌های یکسان داریم. حال، به جای آنکه بگوییم نوسانگر در تراز nام است، بد نیست بگوییم که n کوانتوم ارتعاش داریم. تبدیل صوری از دیدگاه قدیمی به این دیدگاه جدید با روشی به نام کوانتش دوم صورت می‌گیرد، خود معادلهٔ شرودینگر نمایانگر «کوانتش اول» است. در این تبدیل، خود تابع موج $\psi(x,t)$، از تابعی عددی به عملگر میدانی تغییر می‌یابد، این رهیافت آنچه را که نظریهٔ میدان کوانتومی معروف است می‌دهد. اکنون، نه‌تنها می‌توان کوانتش (دوم) معادلهٔ شرودینگر را به‌دست آورد، بلکه می‌توان معادله‌های ماکسول را هم کوانتیده کرد. بدین‌ترتیب، معادله‌های اخیر در همان سطح معادلهٔ شرودینگر قرار می‌گیرند، یعنی بنیادی‌تر از مکانیک کلاسیک

نیوتونی. کوانتومهای انرژی الکترومغناطیسی، البته همان فوتونها هستند و این بار دوگانگی موج ـ ذره را برای نور به‌دست می‌آوریم.

نظریهٔ میدان کوانتومی شناخت برهم‌کنش ماده و نور را امکان‌پذیر می‌سازد. این شناخت نه‌تنها در پدیده‌های انرژی بالا مثلاً، نابودی الکترون ـ پوزیترون کاربرد دارد، بلکه در کاربرد روزمرهٔ ماکروسکوپی نظریهٔ کوانتومی، یعنی لیزر، نیز مهم است. خوانندهٔ علاقه‌مند در بخش مسائل به «جابه‌جایی لمب» برمی‌خورد که در زمان خود آزمون مهمی که برای اعتبار الکترودینامیک کوانتومی محسوب می‌شد.

نسبیت عام اینشتین قائل به هم‌ارزی قوانین فیزیک بدون توجه به حرکت نسبی چارچوبهای مرجع است. این نظریه، نیروی گرانشی را برحسب خمیدگی فضا زمان چهاربُعدی توضیح می‌دهد. نیروهای طبیعت را می‌توان به شکل نیروهای الکترومغناطیسی، نیروهای ضعیف (که به رادیواکتیویته می‌انجامد)، نیروهای قوی که ذرات درون‌هسته اتم را به هم پیوند می‌دهد و نیروهای گرانشی مشخص کرد. اگرچه وحدت بخشیدن به سه نیروی اول به خوبی پیشرفت کرده است، مسئلهٔ ملحق کردن نسبیت عام به نظریهٔ میدان کوانتومی هنوز حل نشده است. تلاشهای کنونی در راستای نمایش اجزاء طبیعت به‌صورت «ریسمان»هایی است که احتمالاً در فضا زمان بیست و شش بُعدی قرار دارند. اگر این نظریه معتبر باشد، توسعهٔ فیزیک موج دورکاملی را پیموده است، زیرا دینامیک این ریسمانهای بنیادی از دینامیک تارهای کشیده شدهٔ کلاسیک فصل ۳ گرفته می‌شود.

مثال ۶ـ۱

نشان دهید که مقدار انتظاری عملگر تکانهٔ $\overline{p}$ برای جوابهای حالت ساکنِ ذرهٔ محبوس در جعبهٔ شکل ۶ـ۱، صفر است.

حل: با استفاده از (۶ـ۳۰)، حالت مانا به‌صورت زیر است،

$$\psi(x,t) = u_m(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_m\frac{t}{\hbar}} \qquad (۶ـ۳۰)$$

با استفاده از رابطهٔ زیر، $\overline{p}$ مستقیماً از اصل موضوع (۳) به‌دست می‌آید

$$\overline{p}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)\boldsymbol{p}\psi(x,t)dx \qquad (۶ـ۲۳ \text{ الف})$$

اگر p را از جدول عملگرها بیابیم و از (۶ـ۳۰) نیز استفاده کنیم، داریم.

$$\bar{p}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}E_m \frac{t}{\hbar}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_m \frac{t}{\hbar}} u_m^*(x) \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial u_m(x)}{\partial x\, dx}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u_m^*(x) \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial u_m(x)}{\partial x\, dx}$$

با استفاده از (۶ـ۱۴) می‌نویسیم

$$u_m(x) = \sqrt{\frac{۲}{L}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \qquad (۱۴\text{ـ}۶)$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۲L}} \frac{۱}{\mathrm{i}} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_m x})$$

که در آن $k_m = m\pi/L$.

بنابراین،

$$\bar{p}(t) = \frac{L}{۲} \int_{\circ}^{L} (\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_m x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_m x})^* \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x}\right) (\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}l_m x}) dx$$

توجه کنید که

$$\int_{\circ}^{L} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x})^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_m x} dx = \left[\frac{\mathrm{i}}{۲k_m}\right] (\mathrm{e}^{-۲\mathrm{i}k_m L} - ۱)$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{(۲k_m)} (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}۲\pi m} - ۱) = \circ$$

(دو تابع متعامدند).

به همین ترتیب،

$$\int_{\circ}^{L} (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_m x})^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x} dx = \circ$$

آنچه باقی می‌ماند چنین است،

$$\bar{p}(t) = -\frac{L}{۲} \int_{\circ}^{L} [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_m x} \hbar k_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x} (-\hbar k_m) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_m x}] dx$$

$$= \circ \qquad ■$$

مثال ۶ـ۲

ویژه حالت‌ها و انرژیهای ذره‌ای را که در چاه پتانسیلی به شکل تابع دلتا مقید است به‌دست آورید

$$V(x) = -V_{\circ}\,\delta(x)$$

در اینجا $V_{\circ}$ ثابتی مثبت است (که ابعادش انرژی ضرب در طول است). از توابع دلتا، در مکانیک کوانتومی، اغلب به‌عنوان مدل استفاده می‌شود. از این مثال در فصل ۷ دربارهٔ امواج غیرخطی ـ سولیتونها، استفاده خواهد شد.

حل: باید معالهٔ شرودینگر مستقل از زمان زیر را حل کنیم،

$$\left[-\left(\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\frac{d^{۲}}{dx^{۲}} + V(x)\right)\right] u(x) = Eu(x) \qquad (۶ـ۳ج)$$

که در آن $V(x) = -V_{\circ}\,\delta(x)$. می‌توان (۶ـ۳ج) را به شکل ساده‌تر زیر نوشت،

$$\frac{d^{۲}u}{dx^{۲}} + [\lambda + W\delta(x)]u(x) = \circ$$

که در آن $W = (۲m/\hbar^{۲})V_{\circ} > \circ$ و $\lambda = (۲m/\hbar^{۲})E$ است. به‌علاوه، چون ذره مقیّد است، یعنی در حوالی $x = \circ$ محبوس است، انتظار داریم که هر مقدار انرژی را که اختیار کند، انرژی کل، E، و در نتیجه λ منفی باشد، $\lambda < \circ$. خارج از $x = \circ$، یعنی بیرون از چاه پتانسیل، $u(x)$ در رابطهٔ ساده‌تر زیر صدق می‌کند

$$\frac{d^{۲}u}{dx^{۲}} + \lambda u(x) = \circ, \qquad \lambda < \circ$$

تنها جوابهای ممکن عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} u(x) &= c_{۱}\mathrm{e}^{-Kx} && x > \circ \\ u(x) &= c_{۲}\mathrm{e}^{Kx} && x < \circ \\ K^{۲} &= -\lambda && K > \circ \end{aligned}$$

با توابع نمایی حقیقی سروکار داریم. برای اینکه بهنجارش تابع موج امکان‌پذیر باشد، توابعی را که در حد $x \to \pm\infty$ به صفر می‌گرایند انتخاب می‌کنیم. به‌علاوه، پیوستگی تابع موج ایجاب می‌کند که $c_{۱} = c_{۲} \equiv c$. با انتگرال‌گیری از معادلهٔ شرودینگر در پهنای چاه پتانسیل دلتا داریم (مسئله ۶ـ۱۱ را هم ببینید)،

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{\circ^{+}} - \left.\frac{du}{dx}\right|_{\circ^{-}} = -Wu(\circ) = -Wc$$

در اینجا، دقت می‌کنیم که پهنای چاه پتانسیل از $+\circ$ تا $-\circ$، صفر است، بنابراین انتگرال جملهٔ $\lambda u(x)$ در این پهنا، صفر می‌شود. از معادلهٔ بالا، با قرار دادن جوابهایی که برای $u(x)$ به‌دست آوریم، داریم

$$-Kc - Kc = -Wc, \qquad k = \frac{W}{۲}$$

بنابراین به‌دست می‌آوریم

$$u(x) = c\mathrm{e}^{\frac{-Wx}{۲}} \quad x > \circ$$
$$u(x) = c\mathrm{e}^{\frac{Wx}{۲}} \quad x < \circ$$

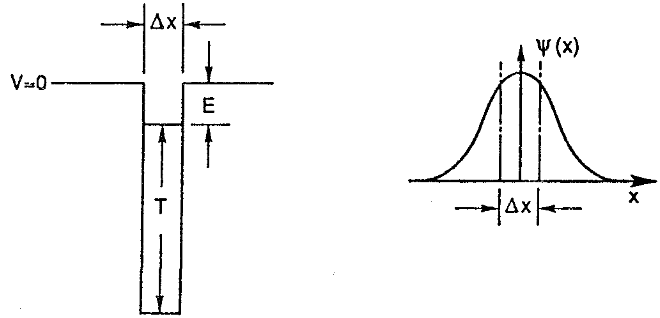
و $E = \hbar^{۲}W^{۲}/۸m$. از بهنجار کردن تابع موج،

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^*(x)u(x)dx = ۲|c|^{۲}\int_{\circ}^{\infty} \mathrm{e}^{-Wx}dx = ۱$$

نتیجه می‌گیریم $|c| = \sqrt{W/۲}$.

مشاهده می‌کنیم که جواب یکتاست. پتانسیل تابع دلتا در یک‌بُعد همیشه فقط یک حالت مقید را می‌دهد. در سه بُعد، حتی برای وجود همین یک حالت مقید، باید عرض چاه پتانسیل از مقدار مشخصی کمتر نباشد، در این خصوص به کتاب شیف که در فهرست کتابهای کمکی آمده است رجوع کنید.

بنابه فیزیک کلاسیک، ذره در داخل چاه محبوس است؛ انرژی جنبشی آن کمتر از $V_\circ$ است، زیرا کل E منفی اختیار شده است. این بدان‌معنی است که ذره برای عبور از سدهای موجود در دو طرف چاه پتانسیل، انرژی لازم را ندارد. اما در مکانیک کوانتومی برای یافتن ذره در خارج از چاه پتانسیل هم احتمالی وجود دارد. در واقع، برای پتانسیل تابع دلتا، ذره همیشه خارج از چاه است، اما به خاطر اینکه انرژی کل آن منفی است، نمی‌تواند از چاه جدا و آزاد شود، یعنی، جواب‌نمایی مختلط e^{ik_x} را داشته باشد. اگر ذره در داخل چاه محبوس می‌بود، Δx به صفر می‌گرایید که در نتیجه $\Delta k \to \infty$، که انرژی جنبشی بینهایت را ایجاب می‌کرد (شکل ۶ـ۳). جوابهای با فروافت نمایی در مکانیک کوانتومی متداول‌اند، ذرات از به اصطلاح سدهای پتانسیل به بیرون «تونل می‌زنند»، یعنی به نواحی با انرژی جنبشی منفی که در مکانیک کلاسیک ممنوع است، راه می‌یابند. واپاشی پرتوزای هسته‌های اتمها، که در طبیعت متداول است، از طریق چنین فرایندهای تونل‌زنی رخ می‌دهد. به همین ترتیب، در پیوندگاههای جوزفسون



شکل ۶ـ۳ مثال ۶ـ۲: در طرف چپ، چاه پتانسیلی تقریباً به شکل δ نشان داده شده است که ذره‌ای در آن محبوس است. در داخل چاه، انرژی جنبشی $T > 0$. خارج از چاه، انرژی جنبشی با انرژی کل برابر می‌شود و منفی است، $T < 0$. در طرف راست، تابع موج ذره نشان داده شده است.

که از دو ابررسانا تشکیل شده است، تونل‌زنی الکترونها از یک ابر رسانا به ابررسانای دیگر رخ می‌دهد. ■

مثال ۶ـ۳

نشان دهید که با نگاه کردن به ذره، نمی‌توان مکان و تکانهٔ آن را به‌طور همزمان با دقتی بهتر از

$$\Delta x \Delta p \sim h$$

به‌دست آورد.

راهنمایی: اثر پراش را روی توان تفکیک به یاد آورید.

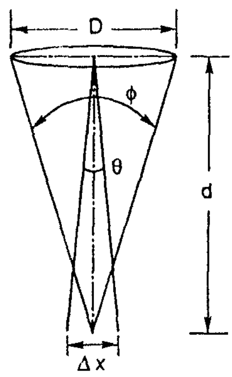
حل: از فصل ۵ می‌دانیم که زاویهٔ تفکیک θ_{R} از رابطهٔ تقریبی زیر به‌دست می‌آید

$$\theta_{\mathrm{R}} \simeq \frac{\lambda}{D}$$

که در آن D، قطر عدسی است (شکل ۶ـ۴). بنابراین، پراش توانایی ما را در تعیین مکان ذره به میزان زیر محدود می‌کند،

$$\begin{aligned} \Delta x &\gtrsim \theta_{\mathrm{R}} d \\ &\gtrsim \frac{\lambda d}{D} \end{aligned}$$

که در آن d فاصلهٔ بین ذره و عدسی است: مکان ذره از طریق فوتونهایی معین می‌شود که



شکل ۶ـ۴ مثال ۶ـ۳. تفکیک متناهی عدسی به عدم قطعیت Δx در مکان می‌انجامد. فوتون بازتابنده از ذره، ممکن است هر مسیری را در داخل مخروطی که زاویه ϕ را در بر می‌گیرد، اختیارکند.

پس از برخورد با آن به ما می‌رسند. تکانهٔ هر فوتون، p، عبارت است از

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

نمی‌دانیم فوتون چه مسیری را در زاویهٔ ϕ دنبال می‌کند. اما متوجه می‌شویم که ذره پس‌زده می‌شود و عدم قطعیت Δp در تکانهٔ آن به‌وجود می‌آید،

$$\Delta p \gtrsim \frac{h}{\lambda}\phi \gtrsim \frac{h}{\lambda}\frac{D}{d}$$

بنابراین، با ترکیب نتایج بالا برای Δx و Δp داریم،

$$\Delta x \Delta p \gtrsim h$$ ■

مثال ۶ـ۴

سیستمی یک‌بُعدی دارای دو ویژه حالت انرژی واگن مستقلِ (راست هنجار) $\psi_\circ(x,t)$ و $\psi_1(x,t)$ است. (واگن یعنی ویژه مقدارهای انرژی آنها یکسان است.) فرض کنید در زمان $t = \circ$ که سیستم در حالت $\psi_\circ$ است، عاملی خارجی اختلالی در سیستم به‌وجود آورد، که آن را با افزودن عملگر $W(x)$ به هامیلتونی نشان می‌دهیم (نگاه کنید به مسئلهٔ ۶ـ۱۴). تابع موج جدید $\psi(x,t)$ را پس از این اختلال بیابید و وضعیت جدید را توضیح دهید.

حل: معادلهٔ شرودینگر برای تابع موج مطلوب $\psi(x,t)$ چنین است:

$$(H + W)\psi = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

و دو حالت اولیهٔ ψ_0 و ψ_1 هم در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند

$$H\psi_0 = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi_0}{\partial t}$$
$$H\psi_1 = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t}$$

اگر فرض کنیم $\psi_0(x,t) = u_0(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}$ و $\psi_1(x,t) = u_1(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}$، هر دو حالت دارای انرژی یکسان E هستند، آنگاه

$$H(x)u_0(x) = Eu_0(x)$$

و

$$H(x)u_1(x) = Eu_1(x)$$

با استفاده از مسئلهٔ مدهای طبیعی (۳ـ۹) که دو نوسانگر جفت شده را توصیف می‌کند، جوابهای ممکن را به‌صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$\phi(x,t) = [a_0 u_0(x) + a_1 u_1(x)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}$$

که در آن $\hbar\Omega$ (همانند بسامد مد طبیعی) انرژی حالت مانای جدید را می‌دهد. اگر این ϕ را در معادلهٔ موج قرار دهیم، داریم،

$$a_0 Eu_0(x) + a_0 W(x)u_0(x) + a_1 Eu_1(x) + a_1 W(x)u_1(x)$$
$$= \hbar\Omega a_0 u_0(x) + \hbar\Omega a_1 u_1(x)$$

که در آن عامل مشترک $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}$ را حذف کرده‌ایم. برای پیشرفت کار از شگرد معمول استفاده می‌کنیم، یعنی طرفین را به نوبت در هر یک از دو ویژه حالت $u_0(x)$ و $u_1(x)$ ضرب می‌کنیم و با انتگرال‌گیری روی گستره‌ای مناسب از فضا از خاصیت راست هنجاری ویژه حالت‌ها استفاده می‌کنیم.

پرسشی که مطرح می‌شود این است که بسط $\phi(x,t)$ برحسب ویژه حالت‌های $u_0(x)$ و $u_1(x)$، تا چه حد جواب کاملی برای معادلهٔ موج فراهم می‌آورد. در عمل گاهی فقط دو تابع مجموعهٔ کاملی را تشکیل می‌دهند، مثلاً، در مسائلی که به اسپین (یا تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی) الکترون مربوط می‌شود. از طرف دیگر، مسائلی هم وجود دارند، مثل وضعیت مسئلهٔ (۶ـ۱۴) در مورد

اثر میدان الکتریکی که دو حالت مجموعه کاملی را تشکیل نمی‌دهند، اما ویژه حالت‌های دیگر انرژی از نظر انرژی آن‌قدر با این دو فاصله دارند که به‌سادگی می‌توان نشان داد که افزودن آنها به بسط تأثیری ناچیز خواهد داشت ـ سیستم استفادهٔ بسیار محدودی از این حالت‌ها می‌کند.

بنابراین، با ادامهٔ برنامه یافتن $a_{۰}$، $a_{۱}$ و Ω، دو معادلهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم

$$(-\hbar\Omega + E)a_{۰} + W_{۰۱}a_{۱} = ۰$$
$$W_{۱۰}a_{۰} + (-\hbar\Omega + E)a_{۱} = ۰$$

که معادلهٔ اول با ضرب کردن در $u_{۰}^*(x)$ و انتگرال‌گیری و معادلهٔ دوم با ضرب کردن در $u_{۱}^*(x)$ و انتگرال‌گیری به‌دست آمد.

اجزاء $W_{۰۱}$ و $W_{۱۰}$ با معادلهٔ کلی زیر تعریف می‌شوند:

$$Wij = \int_{-\frac{L}{۲}}^{+\frac{L}{۲}} u_i^*(x)W(x)u_j(x)dx \qquad i = ۱, ۲ \qquad j = ۱, ۲$$

که در آن x مسئله می‌تواند هرکجا بین $-L/۲$ و $+L/۲$ باشد. به‌علاوه، همان‌طور که معمولاً در عمل اتفاق می‌افتد، فرض کرده‌ایم که $W_{۰۰} = W_{۱۱} = ۰$، یعنی اجزای قطری صفرند. سرانجام، به واسطهٔ تعریف عملگرهای هرمیتی x در مکانیک کوانتومی داریم، $W_{۰۱} = W_{۱۰}^*$.

اکنون بسامد Ω، مانند مسئلهٔ کلاسیک یافتن مدهای بهنجار، با صفر قرار دادن دترمینان ضرایب به‌دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} -\hbar\Omega + E & W_{۰۱} \\ W_{۰۱}^* & -\hbar\Omega + E \end{vmatrix} = ۰$$

که نتیجه می‌شود:

$$\hbar\Omega = E \pm W, \qquad W \equiv |W_{۰۱}| = |W_{۱۰}|$$

در نتیجه، دو حالت مانای زیر به‌دست می‌آیند:

$$\phi_{۱}(x,t) = \frac{[u_{۰}(x) + u_{۱}(x)]}{\sqrt{۲}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E+W)\frac{t}{\hbar}} \qquad (a_{۰} = a_{۱})$$
$$\phi_{۲}(x,t) = \frac{[u_{۰}(x) - u_{۱}(x)]}{\sqrt{۲}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E-W)\frac{t}{\hbar}} \qquad (a_{۰} = a_{۱})$$

$(1/\sqrt{۲})[u_{\circ}(x) \pm u_{۱}(x)]$ ویژه حالت‌های (بهنجار شدهٔ) جدید H هستند.

اکنون، جواب مطلوب $\psi(x,t)$ را می‌توانیم به‌صورت کلی زیر بنویسیم:

$$\psi(x,t) = \alpha_{۱}\phi_{۱}(x,t) + \alpha_{۲}\phi_{۲}(x,t)$$

که در آن $\alpha_{۱}$ و $\alpha_{۲}$ ثابتهایی هستند که با استفاده از شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

متوجه می‌شویم که جزئیات برقرار کردن شرایط اولیه در فیزیک کوانتومی با آنچه در فیزیک کلاسیک دیدیم متفاوت است. در فیزیک کلاسیک دو شرط اولیه، مکان اولیه و سرعت اولیه، متناظر با هر درجهٔ آزادی وجود دارد. در اینجا معادلهٔ موج فقط به لحاظ مشتق‌گیری نسبت به t از مرتبهٔ اول است، فقط یک شرط وجود دارد، اما هر دو قسمت حقیقی و موهومی تابع موج، حائز اهمیت هستند.

شرط اولیهٔ مربوط به مسئلهٔ فعلی چنین است

$$\psi(x,\circ) = u_{\circ}(x)$$

که هم برای قسمت حقیقی و هم قسمت موهومی صادق است. از آنچه گذشت داریم:

$$\psi(x,\circ) = (\alpha_{۱} + \alpha_{۲})u_{\circ}\frac{(x)}{\sqrt{۲}} + (\alpha_{۱} - \alpha_{۲})u_{۱}\frac{(x)}{\sqrt{۲}}$$

بنابراین، جواب یکتا برای $\alpha_{۱}$ و $\alpha_{۲}$ چنین است:

$$\alpha_{۱} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \alpha_{۲}$$

و هر دو ضریب حقیقی‌اند.

در نتیجه، سرانجام داریم،

$$\psi(x,t) = A_{\circ}(t)u_{\circ}(x) + A_{۱}(t)u_{۱}(x)$$
$$A_{\circ}(t) = \frac{۱}{۲}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E+W)\frac{t}{\hbar}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E-W)\frac{t}{\hbar}}\right)$$
$$A_{۱}(t) = \frac{۱}{۲}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E-W)\frac{t}{\hbar}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E-W)\frac{t}{\hbar}}\right)$$

اینک به بحث می‌پردازیم. مسئله مورد نظر ما این است که پس از ورود اختلال در $t = \circ$، احتمال اینکه سیستم در حالت‌های $u_{\circ}(x)$ و $u_{۱}(x)$ یافت شوند، یعنی $|A_{\circ}(t)|^{۲}$ و $|A_{۱}(t)|^{۲}$،

چقدر است. داریم:

$$|A_0(t)|^2 = 1 - \sin^2\left(\frac{Wt}{\hbar}\right)$$
$$|A_1(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{Wt}{\hbar}\right)$$

سیستم (وقتی $E \gg W$) بین دو حالت با دورهٔ $T = (\pi\hbar/W)$ پس و پیش می‌رود. سرانجام، متوجه می‌شویم که تحت تأثیر معادلهٔ موج وابسته به زمان خاصیت یکانی حفظ شده است؛ $\psi(x,t)$ بهنجار باقی می‌ماند، زیرا واضح است که $|A_0(t)|^2 + |A_1(t)|^2$ برابر با یک باقی می‌ماند.

رفتاری که ذکر شد، بسیار شبیه انتقال انرژی از یک نوسانگر به نوسانگر دیگری است که به‌صورت ضعیف با آن جفت شده باشد و در مسئله فیزیک کلاسیک ۳ـ۹ مطرح شده است. در واقع، محاسبه، کلاسیک می‌تواند مدلی برای محاسبه اخیر باشد و مراحل گوناگون ریاضی این دو نیز تقریباً کاملاً متناظرند.

به‌طور خلاصه، همانند محاسبهٔ کلاسیک مسئله ۳ـ۹ که مدهای بهنجار را داد، در مسئله کنونی دو حالت مانای $\phi_1(x,t)$ و $\phi_2(x,t)$ را به‌عنوان جواب به‌دست آوردیم. در حالی‌که در مسئله مشابه کلاسیک انرژی اولیه فقط محدود به یک فنر است و در نتیجه به برانگیختگی هر دو مد طبیعی مربوط می‌شود، در اینجا نیز محدود شدن به حالت ψ_0 بدین‌معنی است که هر دو حالت مانا در زمان $t = 0$ دارای احتمال اشغال شدن هستند. در هر دو مورد، حرکت بعدی شامل هر دو مد بهنجار یا هر دو ویژه حالت است.

اگر، همان‌طور که در عمل مشاهده می‌شود، اثر میرایی وجود داشته باشد، این دو فرمولبندی اندکی با یکدیگر متفاوت می‌شوند. در مسئله کلاسیک همان‌طور که در فصل ۳ دیدیم مدهای با بسامد زیاد ابتدا میرا می‌شوند، اما سرانجام سیستم کاملاً متوقف می‌شود. در مکانیک موجی، میرایی باعث می‌شود تا هر سیستم به پایین‌ترین حالت انرژی مانای خود بازگردد، در اینجا، با توجه به محدودیتهای اعمال شده توسط اصل عدم قطعیت هایزنبرگ، سیستم هنوز هم دارای مقداری انرژی جنبشی و پتانسیل است. آزمایش، مثلاً ارتعاشهای اتمی شبکهٔ بلوری در دمای صفر (نوسانهای نقطهٔ صفر)، تصویر کوانتوم مکانیکی را تأیید می‌کنند.

در مسئلهٔ ۶ـ۱۴ خواننده با مشکل توصیف جفت شدگی دو ویژه حالت سیستم وابسته به زمان روبه‌رو است در این صورت کل سیستم پایستار نیست به این معنی که انرژی از خارج جذب می‌شود. دوباره به وضعیت واداشته برگشته‌ایم که با حالت طبیعی تفاوت دارد، اگر چه معادلهٔ موج

هنوز همگن است. در واقع تمام ارتباطات بین دو نوع حرکت را که در فصلهای پیشین دربارهٔ فیزیک کلاسیک دیدیم، در اینجا هم می‌یابیم. در مسئله ۶ـ۱۴ عامل خارجی میدان الکتریکی متناوب است و پذیرفتاری الکتریکی به‌دست آمده در حالت تشدید همان ویژگیهایی دارد که در نمایش اتم به‌صورت فنر کلاسیک در مسئله ۲ـ۱۰ به‌دست آوردیم. به‌جای بسامد طبیعی فنر داریم $\Delta E/\hbar$ که در آن ΔE اختلاف انرژی دو حالت ماناست. اما، باید توجه کنیم که تفاوتهایی هم با حالت کلاسیک وجود دارد، زیرا به‌جای تابع موج ψ، مقادیر انتظاری کمیتهای فیزیکی است که در بسامد محرک پاسخ می‌دهند. مروری بر مسئله ۶ـ۱۳ در به‌دست آوردن بینش بهتری از اینکه چگونه $\psi^*\psi$ و نه ψ به پدیده‌های مشاهده شده در فیزیک کلاسیک مربوط می‌شوند، کمک می‌کند.

این وضعیت که شکافتگی انرژی دو حالت به دلیل برهم‌کنش تکانه زاویه‌ای پروتون یا نوترون و میدان مغناطیسی DC اعمال شده به‌وجود می‌آیند زیربنای روشهای تصویر برداری مغناطیسی در پزشکی است. اگر میدان مغناطیسی دیگری با بسامد ω به‌صورت تپی اعمال شود و اگر $\hbar\omega$ با اختلاف انرژی دو حالت، ΔE، برابر باشد، شرط تشدید به سرعت به اشغال مساوی هر دو حالت مانا می‌انجامد. زمانهای لازم برای بازگشت به تعادل پس از سپری شدن تپ خروجی القا شده را تعیین می‌کند. این زمانهای واهلش به میدانهای مغناطیسی در مجاورت میکروسکوپی هر هستهٔ تشدیدی بستگی دارد و میدانهای متفاوت خروجیهای مختلف خواهند داشت.

به‌طور خلاصه، دیدیم که شباهت بسیاری بین پاسخهای مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی وجود دارد. در وهلهٔ اول نوسانگرها با ویژه حالت‌های انرژی متناظر می‌شوند، همان‌طور که نوسانگرها با مدهای بهنجار متناظر بودند؛ در دو مورد برخورد با نوسانگر به‌صورت موازی ولی نه یکسان انجام می‌گیرد. ■

مسائل

۶ـ۱ الف) یک الکترون و یک فوتون، هر یک دارای طول‌موج $2{,}0\,\text{Å}$ هستند:

۱) تکانهٔ آنها چقدر است؟

۲) انرژی هر یک چیست؟

ب) توان تفکیک میکروسکوپ الکترونی $10\,\text{keV}$ را با توان تفکیک میکروسکوپ معمولی که با نور مرئی کار می‌کند، مقایسه کنید. فرض کنید قطر عدسیهای آنها یکسان است.

۶ـ۲ ثابت کنید روش جداسازی متغیرها، یعنی جواب آزمایشی به‌صورت

$$\psi(x,t) = u(x)v(t)$$

به حل معادلهٔ شرودینگر (۶ـ۴) می‌انجامد که در آن $u(x)$ در (۶ـ۳) صدق می‌کند و $v(t)$ در (۶ـ۲ الف) و (۶ـ۶) صادق است.

۶ـ۳ الف) با استفاده از نظریهٔ نیمهٔ کلاسیک بور، شعاع بور a، و انرژی کل E_1، را برای الکترون حالت پایهٔ اتم هیدروژن محاسبه کنید.

راهنمایی: برای یافتن شعاع a، نیروی جانب به مرکز mv^2/a را مساوی با $\mathrm{e}^2/(4\pi\varepsilon_0 a^2)$ قرار دهید و تکانهٔ زاویه‌ای الکترون mva را مساوی با $n\hbar$ بگیرید که در آن $n = 1$. سپس نشان دهید که انرژی کل E_1 از $-\mathrm{e}^2/(8\pi\varepsilon_0 a)$ به‌دست می‌آید و آن را در رابطه‌ای که a را به‌دست می‌دهد قرار دهید.

ب) تابع موج مستقل از زمان برای حالت پایهٔ ($1s$) چنین است

$$u_1(r) = (\pi a^3)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{r}{a}}$$

از معادلهٔ شرودینگر مستقل از زمان استفاده کنید:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r})\right] u(\boldsymbol{r}) = Eu(\boldsymbol{r})$$

و نشان دهید که a و E_1 منحصراً از همان عبارتهای ساده داده می‌شوند که از نظریهٔ نیمه کلاسیک بور در بالا به‌دست می‌آید

راهنمایی: برای حل $u_1(r)$ که دارای تقارن کروی است، معادلهٔ شرودینگر به این صورت در می‌آید

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2\partial}{\partial r} - \frac{\mathrm{e}^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\right] u_1(r) = E_1 u_1(r)$$

این معادله به‌ازای تمام مقادیر r باید برقرار باشد.

۶ـ۴ الف) با استفاده از تعریف $\overline{(Q-\bar{Q})^2}$، روش به‌دست آوردن (۶ـ۲۴ب) را تحقیق کنید.

ب) Δp را برای ذره‌ای که کاملاً در داخل چاه پتانسیل، $L > x > 0$، مقید است و در حالت $u_n(x)$، $n = 3$ قرار دارد، محاسبه کنید (شکل ۶ـ۱).

ج) برای ویژه حالت ب)، $\bar{x}$ و Δx را محاسبه کنید.

۶ـ۵ شرایط مرزی دوره‌ای. چاه پتانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{array}{ll} V = 0 & L > x > 0 \\ V = \infty & x > L, \quad x < 0 \end{array}$$

اگر در مسئله‌ای، L در مقایسه با ناحیهٔ مورد نظر بزرگ باشد، می‌توانیم شرایط مرزی دوره‌ای را به‌کار بریم

$$\psi(x+L) = \psi(x)$$

با این شرایط مرزی، بازهٔ خط راست $x = ۰$ تا $x = L$ به دایره‌ای به محیط L تبدیل می‌شود. چون فرض کردیم مرزها نقشی ندارند، این مدل فیزیکی هم ساده است و هم قابل قبول.

الف) تمام جوابهای مستقل از زمان ممکن را در داخل چاه بنویسید. این جوابها را بهنجار کنید.

ب) نشان دهید که جوابهای حاصل ویژه حالت‌های هر دو عملگر هامیلتونی کل و عملگر تکانه هستند.

ج) نشان دهید که برای هر ویژه مقدار انرژی کمتر یا برابر با ویژه مقدارهای E_n تعداد جوابهای موج ایستاده، $u(L) = u(۰) = ۰$ با جوابهای دوره‌ای برابر است.

۶ـ۶ الف) با داشتن توزیع عدد موج (۶ـ۳۵ب) برای ذره آزاد، نشان دهید که $\Delta p(۰) = (\hbar/۲a)$.

راهنمایی: از فرمولهای کلی (۶ـ۲۴ب و ۲۸ب) و روش به‌دست آمدن (۶ـ۳۳ الف) برای $\bar{p}$، استفاده کنید.

ب) به همین ترتیب، با استفاده از (۶ـ۳۹)، نشان دهید که برای همان حالت اولیه $\Delta x(۰) = a$.

۶ـ۷ عملگرهای جابه‌جاپذیر. جابه‌جاگر دو عملگر A و B که با $[A,B]$ نشان داده می‌شود، طبق رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$[A,B] = AB - BA$$

الف) نشان دهید که عملگرهای جابه‌جاشونده دارای ویژه تابعهای یکسان‌اند.

ب) جابه‌جاگرهای زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{llll}
۱) & [\boldsymbol{p}, x] & \boldsymbol{p} = \dfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\dfrac{\partial}{\partial x} & \\
۲) & [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{H}] & \boldsymbol{H} = V(x) + T & V(x) \neq ۰ \\
۳) & [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{T}] & \boldsymbol{T} = -\dfrac{\hbar^۲}{۲m}\dfrac{\partial^۲}{\partial x^۲} &
\end{array}$$

ج) براساس بخشهای (الف) و (ب) نشان دهید که چرا اندازه‌گیری همزمان تکانه و انرژی ذره آزاد بدون خطا امکان‌پذیر است، در حالی‌که اصل عدم قطعیت هایزنبرگ اندازه‌گیری همزمان، مثلاً، تکانه و مکان را محدود می‌کند.

۶ـ۸ تلسکوپی این امکان را فراهم می‌آورد که ناظر محل ماه را با دقت ۵×۱۰^{-۷} رادیان تعیین کند. چند ثانیه طول می‌کشد تا ماه با احتمالی معقول به‌اندازهٔ ۱ کیلومتر از محتملترین مسیر حرکتش منحرف شود؟ از مدل ذرهٔ آزاد استفاده کنید.

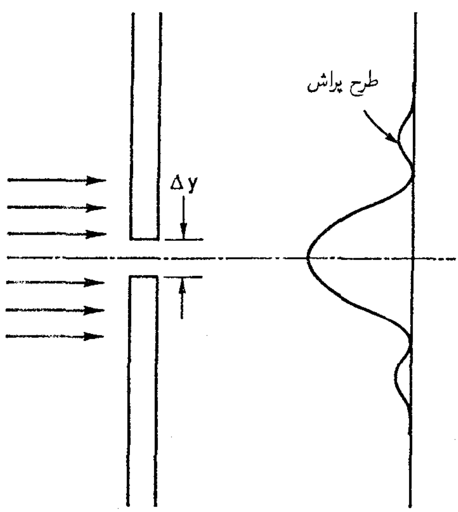
۶ـ۹ الف) چاه پتانسیل مربعی یک‌بعدی را که بین $x = -a$ تا $x = a$ قرار دارد با پتانسیل ثابت منفی $-V_\circ$ در نظر بگیرید:

$$V(x) = -V_\circ \quad V_\circ > \circ \quad a > x > -a$$
$$V(x) = \circ \quad x < -a \quad x > a$$

نشان دهید $V_\circ a^2$ هر چقدر کوچک باشد، همواره حداقل یک حالت مقید با $E < \circ$ موجود است. تابع موج مستقل از زمان برای این حالت، $u_1(x)$، چیست؟
راهنمایی: به شکل ۶ـ۳ نگاه کنید.

ب) عملگر بازتاب $\boldsymbol{R}$، تابع $u(x)$ را به $u(-x)$ و عملگر $\boldsymbol{Q}(x)$ را به $\boldsymbol{Q}(-x)$ تبدیل می‌کند. نشان دهید که برای هامیلتونی مسئله (۶ـ۹الف)، $\boldsymbol{H}$ و $\boldsymbol{R}$ جابه‌جا پذیرند (مسئله ۶ـ۷). این بدان‌معنی است که جوابهای (الف) دارای تقارن معین حول $x = \circ$ هستند، توضیح دهید. جواب $u_1(x)$ که در قسمت (الف) یافتید، دارای چه تقارنی است؟

۶ـ۱۰ نشان دهید که اگر از شکافی افقی در یک پرده برای مشخص کردن مکان ذره‌ای که از پرده می‌گذرد، استفاده کنیم (شکل ۶ـ۵)، Δy و دقت اندازه‌گیری p_y همزمان با آن، در اصل عدم قطعیت هایزنبرگ صدق می‌کنند.



شکل ۶ـ۵ پراش باریکهٔ الکترونی از تک‌شکاف، مسئله ۶ـ۱۰.

۶ـ۱۱ جدولی را به‌صورت زیر تنظیم و جاهای خالی را شماره‌گذاری کنید و سپس عملیات لازم را انجام دهید

نشان دهید که احتمال تراگسیل T از ناپیوستگی ناگهانی در سیم دراز (شکل ۶ـ۶الف) چنین است	نشان دهید که احتمال تراگسیل T از پتانسیل ناگهانی (شکل ۶ـ۶ب) چنین است
$$T=\left(\frac{۲\sqrt{\varrho_۱}}{(\sqrt{\varrho_۱}+\sqrt{\varrho_۲})}\right)^۲\sqrt{\frac{\varrho_۱}{\varrho_۲}}$$	$$T=\left(\frac{۲\sqrt{E}}{(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_\circ})}\right)^۲\sqrt{\frac{E-V_\circ}{E}}$$
در اینجا، $\varrho_۱$ چگالی در طرف راست ناپیوستگی و $\varrho_۲$ چگالی در طرف چپ آن است. T چنین تعریف می‌شود	در اینجا E انرژی کل ذرات است، $V_\circ$ «ارتفاع» سد است. T چنین تعریف می‌شود
$$T\equiv\left(\frac{C}{A}\right)^۲\frac{v^۲}{v^۱}$$	$$T\equiv\left(\frac{C}{A}\right)^۲\frac{v^۲}{v^۱}$$ $$\left(v\equiv\frac{\hbar k}{m}\right)$$
(دستورالعملها)	(دستورالعملها)
الف) معادلهٔ موج وابسته به زمان را برای جابه‌جایی $y_۱(x,t)$ به‌ازای $x<\circ$ بنویسید.	الف) معادلهٔ موج وابسته به زمان را برای تابع موج $\psi(x,t)$ به‌ازای $x<\circ$ بنویسید.
ب) برای $y_۱(x,t)$ چنین جایگزین کنید: $$y_۱(x,t)=\mathrm{Re}\{u_۱(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\}$$ برای $x<\circ$، و معادلهٔ موج مستقل از زمان را برای $u_۱(x)$ به‌دست آورید.	ب) برای $\psi(x,t)$ چنین جایگزین کنید: $$\psi_۱(x,t)=u_۱(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t}$$ $$\equiv u_۱(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\quad x<\circ$$ و معادلهٔ موج مستقل از زمان را برای $u_۱(x)$ به‌دست آورید.
ج) (الف) و (ب) را با $$y_۲(x,t)=\mathrm{Re}\{u_۲(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t}\}$$ $x>\circ$، تکرار کنید.	ج) (الف) و (ب) را با $$\psi_۲(x,t)=u_۲(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{E'}{\hbar}\right)t}$$ $$\equiv u_۲(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t}\quad x>\circ$$ تکرار کنید.
د) فرض کنید $u_۱(x)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_۱x}+B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_۱x}$ و $u_۲(x)=C\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_۲x}$ بحث کنید. $k_۱$ و $k_۲$ را برحسب ω و ω' بیابید.	د) فرض کنید $u_۱(x)B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_۱x}$ و $u_۲(x)C\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_۲x}$ بحث کنید. $k_۱$ و $k_۲$ را برحسب E و E' بیابید.

هـ) با استدلالهای فیزیکی نشان دهید

$$\lim_{x\to ۰_-} y_{۱}(x,t) = \lim_{x\to ۰_+} y_{۲}(x,t)$$

و) از هـ) استفاده کنید (و) رابطه‌ای بین ω و ω' پیدا کنید.

ز) از قانون دوم نیوتون استفاده کنید و نشان دهید که $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ در $x = ۰$ پیوسته است، مگر اینکه $\varrho = \infty$.
راهنمایی: به روش به‌دست آوردن معادلهٔ موج در فصل ۳ بازگردید.

ک) با استفاده از (د تا ز) نشان دهید که

$$\left(\frac{C}{A}\right)^{۲} = \left(\frac{۲k_{۱}}{k_{۱}+k_{۲}}\right)^{۲}$$

تعریف T را که در آغاز آمد توجیه و صحت جوابها را بررسی کنید.

هـ) پیوستگی ψ یکی از اصول موضوع مکانیک کوانتومی است. نشان دهید که

$$\lim_{x\to o_-}\psi_{۱}(x,t)\lim_{x\to o_+}\psi_{۲}(x,t)$$

و) ω و ω' را برحسب E و E' بنویسید.

۱) از (هـ) برای یافتن رابطهٔ بین ω و ω' استفاده کنید.
۲) رابطهٔ بین E و E' چیست؟ آیا آن را باور دارید؟

ز) از صورت کلی معادلهٔ وابسته به زمان (ب) استفاده کنید و نشان دهید که $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ در $x = ۰$ پیوسته است و اینکه همواره چنین است مگر اینکه $V = \infty$.

ک) با استفاده از (د) تا (ز) نشان دهید که

$$\left(\frac{C}{A}\right)^{۲}\left(\frac{۲k_{۱}}{k_{۱}+k_{۲}}\right)^{۲}$$

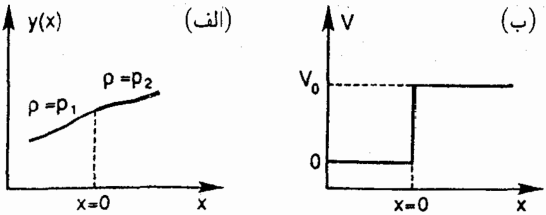
تعریف T را که در آغاز آمد توجیه و صحت جوابها را بررسی کنید.

۱۲ـ۶ ذره‌ای با انرژی کل E، از $x_{\circ}$ به x_{f}، در سد پتانسیل $V(x)$ تونل می‌زند؛ $E < V(x)$، $x_{\circ} < x < x_{\mathrm{f}}$. نشان دهید که اگر به‌ازای طول‌موج مشخصی، تغییر نسبی انرژی پتانسیل در مقایسه با انرژی جنبشی کوچک باشد، یعنی

$$\frac{\left|\dfrac{dV(x)}{dx}\right|\lambda\left(=\dfrac{۲\pi\hbar}{\sqrt{۲m(V-E)}}\right)}{(V-E)} \ll ۱$$

آنگاه احتمال اینکه ذره از سد عبور کند چنین است

$$\exp\left\{-\left(\frac{۲^{\frac{۳}{۲}}m^{\frac{۱}{۲}}}{\hbar}\right)\int_{x_{\circ}}^{x_f}[V(x)-E]^{\frac{۱}{۲}}\,dx\right\}$$



شکل ۶ـ۶ الف) تار کشیده شده با ناپیوستگی در جرم بر واحد طول در $x = ۰$. ب) ناپیوستگی متناظر با آن در پتانسیل $V(x)$، مسئله ۶ـ۱۱.

۶ـ۱۳ الف) بردار $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t)$ را طبق رابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{۲im}[\psi^* \nabla\psi - (\nabla\psi)^*\psi]$$

با استفاده از معادلهٔ شرودینگر وابسته به زمان و انتگرال‌گیری جزء به جزء نشان دهید که

$$\frac{\partial}{\partial t}[\psi^*(r,t)\psi(r,t)] + \nabla \cdot \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t) = ۰$$

ب) برای تعبیر $N\boldsymbol{S}$ به عنوان چگالی جریان دلیل بیاورید. N تعداد ذرات موجود در واحد حجم است.

ج) در یک بُعد کار کنید و نشان دهید که رابطهٔ زیر برقرار است:

$$m\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\hbar}{۲\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\psi^*\frac{\partial\psi^*}{\partial x} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi\right)dx$$

نشان دهید برای اینکه سرعت ذره $v(\equiv (d\bar{x}/dt))$ در گسترهٔ ذره ثابت باشد، باید در رابطهٔ $S_x(x,t) = v\psi^*(x,t)\psi(x,t)$ صدق کند. از قسمت‌های (الف) و (ج) برای اثبات این رابطه استفاده کنید. همچنین چون $\bar{\boldsymbol{p}}_x$ همواره حقیقی است، نشان دهید که

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{۱}{m}\bar{\boldsymbol{p}}_x$$

د) بازهم با انتگرال‌گیری جزء به جزء در دو مرحله، از معادلهٔ شرودینگر برای اثبات رابطهٔ زیر استفاده کنید.

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{p}}_x}{dt} = -\frac{\partial\bar{V}}{\partial x} = -\int\psi^*\frac{\partial V}{\partial x}\psi dx$$

با استفاده از (ج) نشان دهید که اگر $-\partial V/\partial x$، یعنی نیرو، درگسترهٔ بسته موجی که ذره را تعریف می‌کند تغییرات ناچیزی داشته باشد، قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آید (قضیهٔ اهرنفست).

۶ـ۱۴ پاسخ سیستمی دو ترازی که با میدان الکتریکی متناوب برانگیخته شده است چنین است $E(t) = E_\circ \cos\omega t = E_\circ/۲(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})$. اگر فاصلهٔ دو تراز انرژی در یک اتم به‌صورت زیر باشد

$$E_۲ - E_۱ \equiv \hbar\omega_\circ \qquad \omega_\circ > \circ$$

که $\omega_\circ$ به بسامد محرک ω نزدیک باشد، می‌توان از بقیهٔ ترازهای اتمی صرف‌نظر کرد. تابع موج وابسته به زمان را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = c_۱(t)u_۱(\boldsymbol{r}) + c_۲(t)u_۲(\boldsymbol{r})$$

که در آن $u_۱(\boldsymbol{r})$ و $u_۲(\boldsymbol{r})$ جوابهای مستقل از زمان برای این دو ترازند. بنابراین، اگر H_{a} هامیلتونی اتم بدون میدان الکتریکی اعمال شده باشد، داریم

$$H_{\mathrm{a}}u_۱(\boldsymbol{r}) = E_۱u_۱(\boldsymbol{r})$$
$$H_{\mathrm{a}}u_۲(\boldsymbol{r}) = E_۲u_۲(\boldsymbol{r})$$

اما، با فرض اینکه میدان الکتریکی در جهت t باشد، هامیلتونی واقعی چنین است

$$H = H_{\mathrm{a}} - ezE(t)$$

گشتاور دوقطبی اتمی را می‌توانیم این‌طور تعریف کنیم

$$\mu = \int u_۱^*(\boldsymbol{r})ezu_۲(\boldsymbol{r})d^۳r$$
$$= \int u_۲^*(\boldsymbol{r})ezu_۱(\boldsymbol{r})d^۳r$$

توجه کنید که

$$\int |u_۱(\boldsymbol{r})|^۲ zd^۳r = \int |u_۲(\boldsymbol{r})|^۲ zd^۳r = \circ$$

(تقارن $u_۱$ نسبت به $z = \circ$ برخلاف تقارن $u_۲$ نسبت به $z = \circ$ است. بنابراین، گشتاور دو قطبی μ که دو حالت را به هم جفت می‌کند، غیر صفر است.)

الف) از معادلهٔ وابسته به زمان شرودینگر استفاده کنید و نشان دهید که

$$\frac{d\varrho_{۲۱}}{dt} = -\mathrm{i}\omega_\circ\varrho_{۲۱} + \frac{\mathrm{i}\mu}{\hbar}E(t)(\varrho_{۱۱} - \varrho_{۲۲})$$
$$\frac{d\varrho_{۲۲}}{dt} = \frac{-\mathrm{i}\mu}{\hbar}E(t)(\varrho_{۲۱} - \varrho_{۲۱}^*)$$

و چون $\varrho_{۱۱} + \varrho_{۲۲} = ۱$،

$$\frac{d}{dt}(\varrho_{۱۱} - \varrho_{۲۲}) = \frac{۲\mathrm{i}\mu}{\hbar}E(t)(\varrho_{۲۱} - \varrho^*_{۲۱})$$

در اینجا،

$$\varrho_{۱۱} = c^*_۱ c_۱ \qquad \varrho_{۲۲} = c^*_۲ c_۲$$

$$\varrho_{۲۱} = c^*_۱ c_۲ \qquad \varrho_{۱۲} = c^*_۲ c_۱$$

ب) در عمل، هر اتمی که مورد بررسی باشد با اتمهای دیگر برخورد می‌کند. اینجا، مانند آنچه در عمل انجام می‌شود، پاسخ سیستم را با در نظر داشتن این‌گونه برخوردها محاسبه می‌کنیم. در نبود میدان الکتریکی محرک $E(t)$، برخورد اتمها باعث می‌شود تا $\varrho_{۱۱}$ و $\varrho_{۲۲}$ به مقادیر تعادلی خود $(\varrho_{۱۱})_۰$ و $(\varrho_{۲۲})_۰$ میل کنند. بنابراین رابطهٔ دوم در قسمت (الف) دارای جملهٔ دیگری نیز مانند زیر می‌شود.

$$\frac{d}{dt}(\varrho_{۱۱} - \varrho_{۲۲}) = \frac{۲\mathrm{i}\mu}{\hbar}E(t)(\varrho_{۲۱} - \varrho^*_{۲۱}) - \frac{(\varrho_{۱۱} - \varrho_{۲۲}) - (\varrho_{۱۱} - \varrho_{۲۲})_۰}{\tau}$$

از طرف دیگر، بر اثر برخورد با اتمهای دیگر، $\varrho_{۱۲}$ و $\varrho_{۲۱}$ دارای فاز مخصوص هر تراز اتمی می‌شوند. در نبود میدان محرک، وجود فازها موجب می‌شود تا مقادیر میانگین $\varrho_{۱۲}$،$\varrho_{۲۱}$ با گذشت زمان صفر شود. برای سادگی فرض می‌کنیم زمان واهلش برای هر دو τ است، که برای رابطهٔ اول قسمت (الف) نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{d\varrho_{۲۱}}{dt} = -\mathrm{i}\omega_۰ \varrho_{۲۱} + \frac{\mathrm{i}\mu}{\hbar}E(t)(\varrho_{۱۱} - \varrho_{۲۲}) - \frac{\varrho_{۲۱}}{\tau}$$

نشان دهید که به‌طور متوسط، این معادله‌ها دارای جوابهای مانای زیر هستند:

$$\varrho_{۲۱}(t) = \sigma_{۲۱}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$\varrho_{۱۲}(t) = \sigma_{۱۲}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \varrho^*_{۲۱}$$

راهنمایی: معادله‌های زیر را به‌دست آورید

$$\frac{d\sigma_{۲۱}}{dt} = \mathrm{i}(\omega - \omega_۰)\sigma_{۲۱} + \frac{\mathrm{i}\mu E_۰}{۲\hbar}(\varrho_{۱۱} - \varrho_{۲۲}) - \frac{\sigma_{۲۱}}{\tau}$$

$$\frac{d}{dt}(\varrho_{۱۱} - \varrho_{۲۲}) = \frac{\mathrm{i}\mu E_۰}{\hbar}(\sigma_{۲۱} - \sigma^*_{۲۱}) - \frac{(\varrho_{۱۱} - \varrho_{۲۲}) - (\varrho_{۱۱} - \varrho_{۲۲})_۰}{\tau}$$

در اینجا، فقط جملات دارای بستگی زمانی $e^{-i\omega t}$ در معادلهٔ اول نگه داشته شده‌اند و در معادلهٔ دوم جملات نمایی وابسته به زمان در نظر گرفته نشده‌اند. این جمله‌های چرخه‌ای در میانگین‌گیری صفر می‌شوند. حال، طرف چپ معادله‌ها را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا حالت مانا را بیابیم و نشان دهیم که این معادله‌ها حل شدنی هستند، یعنی جوابهای ثابت را برای τ_{21} مختلط و $(\varrho_{22}-\varrho_{11})$ مختلط در معادله‌های ناهمگن بالا به‌دست آوریم.

ج) مانند مسئلهٔ ۲ـ۱۰ پذیرفتاری الکتریکی مختلط را طبق زیر تعریف می‌کنیم

$$P(\omega)=\varepsilon_0\chi(\omega)E(\omega)$$

و یا

$$\begin{aligned}P(t)&=\mathrm{Re}\{\varepsilon_0\chi E_0 e^{i\omega t}\}\\&=E_0(\varepsilon_0\chi_1\cos\omega t-\varepsilon_0\chi_2\sin\omega t)\\\chi(\omega)&=\chi_1(\omega)+i\chi_2(\omega)\end{aligned}$$

درضمن، مانند قبل داریم

$$P(\omega)=Ne\bar{z}(\omega)$$

که N تعداد اتمها در واحد حجم است. از قسمت (ب) برای محاسبهٔ $\chi_1(\omega)$ و $\chi_2(\omega)$ استفاده کنید و نتایج را با نتایج مسئلهٔ ۲ـ۱۰ که در آن نوسانگر هماهنگ میرا مدلی برای اتم در نظرگرفته شده بود، مقایسه کنید.

۶ـ۱۵ یک آزمایش مهم که نظریهٔ کوانتومی را تأیید کرد، اندازه‌گیری «جابه‌جایی لمب» بود. این جابه‌جایی در انرژی تراز $2s$ هیدروژن در مقایسه با تراز $2p$ است، هنگامی که هر دو تراز با تکانهٔ زاویه‌ای کلِ یکسانی برای الکترون مشخص شوند. (منشأ فیزیکی این جابه‌جایی برهم‌کنش الکترون با میدان الکترومغناطیسی است. درست همان‌طور که الکترون با یونهای باردار بلور میزبان، حتی اگر این یونها ارتعاش نکنند، برهم‌کنش دارد، با میدان EM نیز برهم‌کنش انجام می‌دهد، حتی اگر فوتونهایی وجود نداشته باشد.) این جابه‌جایی را لمب و را در فورد مستقیماً به میزان ۱۰۵۷٫۵MHZ اندازه‌گیری کردند، که می‌باید با مقدار محاسبه شدهٔ ۱۰۵۷٫۱۹MHZ مقایسه شود. خطای نسبی این اختلاف را در خط طیفی واقعی $2p\rightarrow 1s$ محاسبه کنید.

برای مطالعهٔ بیشتر

H. A. Medicus: *Fifty Years of Matter Waves*, Physics Today (Feb. 1974).

W. Heisenberg: *The Physical Principles of the Quantum Theory* (Dover, New york 1930).

بیانیه‌ای مختصر و معتبر دربارهٔ این نظریه.

L. I. Schiff: *Quantum Mechanics* (McGraw - Hill, New York, 1968).

این کتاب یکی از کتابهای کلاسیک دربارهٔ مکانیک کوانتومی است. کتابهای خوب دیگری نیز موجودند.

Aff. Yariv: *Quantum Electronics*, Third Edition (John Wiley & Sons, New York 1987).

محل خوبی برای یافتن کاربردهای مکانیک کوانتومی در رشته‌ای کاملاً کاربردی.

۷

امواج غیرخطی در سطح آب ـ سولیتونها

مقدمه

یکی از انواع موجها را که در مقدمهٔ فصل ۱ ذکر شد، تاکنون مخصوصاً نادیده گرفته‌ایم ـ و آن امواج در سطح آب است. این امواج باید در بین اولین نمونه‌های ثبت شدهٔ رفتار غیرخطی باشند، رفتاری که فقط در دامنه‌های بسیار کم نقض می‌شود. در فصلهای قبل، معادله‌های حرکت خطی بودند. البته واقف بودیم که معادله‌های خطی شرایط ایده‌آل را نشان می‌دهند. هر چقدر هم که جابه‌جایی یک فنر کوچک باشد، در صورت متناهی بودن، همان‌طور که اربر و همکارانش در مراجع نشان داده‌اند، حد کشسانی فنر حتماً به نوعی شکسته می‌شود. ایده‌آل‌سازی به معنای آن است که اگر چه برای سادگی، چیزهایی در نظر گرفته نشده‌اند، اما مدل ایده‌آل جنبه‌های اساسی وضعیت فیزیکی را در بردارد. اما امواج آب متفاوت‌اند. نتایجی که با خطی کردن، یعنی با کنار گذاشتن جمله‌های غیرخطی، به‌دست می‌آیند، اغلب آن‌قدر از واقعیت به‌دورند که مفید نیستند. مخصوصاً اینکه، خطی کردن، پدیده‌ای اساسی، یعنی سولیتونها را در نظر نمی‌گیرد. سولیتونها امواج یا تپهای منفردی هستند که هویت خود را به‌طور نامحدود حفظ می‌کنند، در حالی که انتظار داریم آنها به دلیل اثرات پاشندگی بسرعت از بین بروند به علاوه، امواج آب مدل بسیاری از پدیده‌های فیزیکی غیرخطی هستند، که با پیشرفت فنّاوری اهمیت روزافزونی یافته‌اند.

پیدایش تپهای منظم و پایدار بر اثر غیرخطی بودن از پدیده‌های شگفت‌انگیز علم بوده است. همچنین تعجب‌آور است که نتیجهٔ شهودی‌تر غیرخطی بودن، یعنی آشوب، را می‌توان به صورت سازنده تحلیل کرد تا گذار از آشوب به نظم ساختاری را نیز در برگیرد، به طور کلی می‌توانیم بگوییم که، فصل ۲ تا فصل ۵ با پدیده‌هایی سروکار داشت که در ۱۹۰۰ کاملاً شناخته شده بودند، فصل ۶ ما را تا سال ۱۹۳۰ به پیش برد. پیشرفت در دینامیک غیرخطی از حدود سال ۱۹۶۰ گامهای اساسی برداشته است. در این فصل به امواج غیرخطی و سولیتونها می‌پردازیم. غیرخطی بودن و آشوب موضوع بحث مقاله‌های فصل ۸ هستند.

چکیده

بررسی نظریهٔ امواج سطح آب را با امواج خطی آغاز می‌کنیم، سپس به اثر غیرخطی بودن می‌پردازیم، و بالاخره به موجودیت و توصیف سولیتونها خواهیم پرداخت. در بخش آخر، طرح کلی روش پراکندگی معکوس را در به‌دست آوردن جوابهای چند سولیتونی، خواهیم آورد. بدین‌ترتیب، در بخش ۷ـ۱، نظریهٔ امواج گرانی در شاره‌های تراکم‌ناپذیر را در نبود جمله‌های غیرخطی ارائه می‌دهیم. تصویری که حاصل می‌شود این است که درکانالهای عمیق اجزاء شاره دستخوش حرکت دایره‌ای می‌شوند. که شعاع آن با حرکت عمودی از سطح به عمق، کاهش می‌یابد. در عین حال معلوم می‌شود که مخصوصاً در آبهای عمیق، پاشندگی، یعنی تغییر سرعت فاز با عدد موج، اهمیت دارد. بخش ۷ـ۲ به بررسی پیامدهای پاشندگی، به همراه بحثی پیرامون مقایسهٔ سرعت فاز و سرعت گروه، اختصاص دارد. رفتار غیرخطی برای اولین بار در بخش ۷ـ۳ بررسی می‌شود. این بخش با توصیفی از نظریهٔ مشخصه‌ها که دربارهٔ جواب معادله‌های دیفرانسیل جزئی غیرخطی درجهٔ اول به‌کار بسته می‌شود، آغاز می‌شود. پس از آن، کاربرد مستقیم روش مشخصه‌ها برای معادله‌های دیفرانسیل جزئی در مورد امواج آب، به درک تغییر شکل امواج آب با زمان می‌انجامد. بخش ۷ـ۴ به معرفی سولیتونها می‌پردازد. ابتدا، نشان داده می‌شود که ترکیب توأم پاشندگی و غیرخطی بودن، به معادله دیفرانسیل جزئی معروف کورتِوگ دِوْریز[1] (KdV) می‌انجامد. سپس عبارت صریح جواب تک‌سولیتونی معادلهٔ KdV معرفی می‌شود و به دنبال آن عبارت به مراتب پیچیده‌تر چند سولیتونی می‌آید. در بخش آخر، ۷ـ۵، نشان می‌دهیم که چگونه جوابهای پیچیدهٔ معادلهٔ KdV که متناظر با تعداد زیادی سولیتون است را می‌توان با روش پراکندگی معکوس به صورت منظم تولید کرد. در این روش جواب مطلوب معادلهٔ KdV به عنوان پتانسیل مسئلهٔ پراکندگی در نظر گرفته می‌شود. پتانسیلی که باعث پراکندگی می‌شود فقط پس از تعیین صوری تابع پراکنده شده که تحول

1. Korteweg de Vries

زمانی‌اش را معادلهٔ KdV به صورت غیرمستقیم کنترل می‌کند، بازسازی می‌شود. محاسبه نشان می‌دهد که هر سولیتون را می‌توان به یک ویژه حالت مقید پتانسیل پراکننده اولیه، یعنی اختلال موجی در زمان اولیه، نسبت داد.

۷ـ۱ امواج خطی در سطح آب

امواجی که در سطح آب، مثلاً، روی سطح آب برکه، مشاهده می‌شوند سرشتی متفاوت از امواج صوتی در مادهٔ جامد کشسان یا در گاز دارند و تحلیل آنها نیز متفاوت است. وجود امواج کشسان به نیروهای واکنش در تراکم و انبساط بستگی دارد. مایعی مانند آب دارای تراکم‌پذیری نسبتاً کم است و در تحلیل مسئله آن را کاملاً نادیده می‌گیریم. شاره‌های حامل امواج سطحی تراکم‌ناپذیر فرض خواهند شد. پیدایش حرکت امواج سطحی ترکیبی است از انعطاف‌پذیری در مقابل تغییر شکل که طبق تعریف شاره داراست و عمل نیروهای گرانشی که وقتی وارد کار می‌شوند که شاره از حالت استاتیک با کمترین انرژی خارج شود و امواج سطحی به وجود آید.

تحلیل مسئله را به شاره‌ها غیرچسبنده (ایده‌آل) محدود می‌کنیم. به علاوه، از تلاطمها و گردابها نیز که در شاره غیرچسبنده بدون فرو افت باقی می‌مانند، صرف‌نظر می‌کنیم. تاو سرعت هر جزء شاره، $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$، صفر است. در نتیجه، همان‌طور که از فصل ۴ می‌دانیم، $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ را می‌توان به صورت گرادیان میدان نرده‌ای $\phi(\boldsymbol{r},t)$ که معرف پتانسیل سرعت است، نشان داد:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r},t) \qquad (۷\text{ـ}۱)$$

همچنین از فصل ۴ می‌دانیم که اگر $\varrho(\boldsymbol{r},t)$ چگالی شاره باشد، معادلهٔ پیوستگی چنین می‌شود

$$\varrho\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \frac{\partial\varrho}{\partial t} = \circ$$

که در آن $\varrho\boldsymbol{u}$ چگالی جریان برحسب جرم در واحد سطح در واحد زمان است. اما هم اکنون گفتیم که ϱ ثابت فرض می‌شود، $\partial\varrho/\partial t = \circ$. شاره تراکم‌ناپذیر در رابطهٔ زیر صدق می‌کند،

$$\Delta\cdot\boldsymbol{u} = \circ \qquad (۷\text{ـ}۲)$$

بدیهی است که از ترکیب (۷ـ۱) و (۷ـ۲) معادلهٔ لاپلاس حاصل می‌شود (که در الکتروستاتیک، پتانسیل ناحیه‌ای خالی از بار الکتریکی در آن صدق می‌کند):

$$\nabla^{۲}\phi = \circ \qquad (۷\text{ـ}۳)$$

در مسئله مورد نظر ما، آب در کانالی با عرض ثابت و دیواره‌های عمودی هموار و کف افقی هموار قرار دارد. در حالت تعادل عمق آب h است. کشش سطحی را که باعث اختلاف فشار در هر مرز خمیده می‌شود، در نظر نمی‌گیریم. بالاخره، فعلاً دامنهٔ امواج را همچنان کوچک می‌گیریم. هنوز فقط با امواج سطحی خطی کار داریم. (پنج اثر را نادیده گرفته‌ایم! تراکم‌پذیری، گردابها، چسبندگی، کشش سطحی، و غیرخطی بودن.)

به امواجی علاقه‌مندیم که در طول کانال، x، حرکت می‌کنند، z را عمود بر سطح می‌گیریم. بدین‌ترتیب، پتانسیل سرعت تابعی از x، z و t به صورت $\phi(x,z,t)$ خواهد بود که مشخصه امواج «تخت» است، یعنی در جهت عرضی y تغییری صورت نمی‌گیرد.

$\phi(x,z,t)$ می‌باید در شرایط مرزی که در کف $z=0$ و بالای کانال $z=d$ وجود دارد صدق کند. بهتر است برای راحتی $h(x,t)$ را ارتفاع سطح موج نسبت به حالت تعادل سطح در $z=d$ بگیریم، که در اینجا d (میانگین) عمق است. شرط مرزی در $z=0$ به اندازه کافی ساده است، سرعت عمودی u_t در کف صفر می‌شود

$$u_z(x,z,t) = -\frac{\partial \phi(x,z,t)}{\partial z} = 0, \qquad z=0 \tag{۴_۷}$$

اما در $z=d$، فشار اضافی p وجود دارد. فشار هیدروستاتیک p_0، یعنی فشار وقتی که آب در حال تعادل اولیه است، در ارتفاع z از کف کانال، عبارت است از

$$p_0 = p_a + \varrho g(d-z) \tag{۵_۷ الف}$$

و فشار اضافی p چنین تعریف می‌شود

$$p \equiv p_{\text{tot}} - p_0 \tag{۵_۷ ب}$$

که در آن p_a فشار جوّ و p_{tot} فشار کل است. این فشار اضافی که در سطح $z=d$ وجود دارد. یعنی $p(x,d,t)$ را می‌توان به جابه‌جایی عمودی دینامیک سطح $h(x,t)$ نسبت داد

$$p(x,d,t) = h(x,t)\varrho g \tag{۶_۷}$$

که در آن g ثابت گرانشی است.

فشار اضافی باعث شتاب اجزاء شاره می‌شود. در این بخش فقط به نظریهٔ خطی می‌پردازیم که در آن تغییرات زمانی سرعت شاره $u(x,z,t)$ به دلیل تغییرات متناظری در محل جزء حجم

را می‌توان نادیده گرفت. داریم

$$\varrho \frac{\partial \boldsymbol{u}(x,z,t)}{\partial t} = -\nabla p(x,z,t) \qquad (۷\_۷)$$

و یا

$$\varrho \nabla \frac{\partial \phi(x,z,t)}{\partial t} = -\nabla\, p(x,z,t)$$

بنابراین،

$$p = -\varrho \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad (۸\_۷)$$

از ترکیب (۷ـ۶) و (۷ـ۸) داریم

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t}\right]_{z=d} = -h(x,t)g \qquad (۹\_۷)$$

در نظریهٔ خطی سرعت عمودی شاره در سطح، $u_z(x,d,t)$ را می‌توان با $\partial h(x,t)/\partial t$، سرعت عمودی سطح، برابر دانست. اگر از دو طرف (۷ـ۹) نسبت به زمان مشتق بگیریم، به کمک (۷ـ۱) برای شرط مرزی دوم به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial^۲ \phi}{\partial t^۲} = -g\frac{\partial \phi}{\partial z}, \qquad z = d \qquad (۱۰\_۷)$$

بنابراین مسئله حل معادلهٔ لاپلاس (۷ـ۳)،

$$\frac{\partial^۲ \phi(x,z,t)}{\partial t^۲} + \frac{\partial^۲ \phi(x,z,t)}{\partial z^۲} = ۰ \qquad (۱۱\_۷)$$

با شرایط مرزی موجود در بالا و کف کانال، رابطه‌های (۷ـ۴ و ۱۰) است. جواب را می‌توان با روش جداکردن متغیرها، که به‌طور کامل در فصل ۳ برای تحلیل امواج تارکشیده توصیف شد، به راحتی حل کرد. برای امواجی که در جهت جلو منتشر می‌شوند، جواب به صورت زیر است

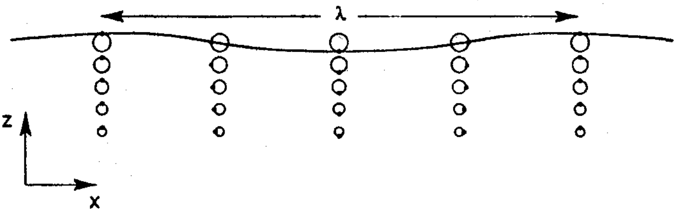
$$\phi(x,z,t) = A\cos \mathrm{h}kz \cos[kx - \omega(k)t] \qquad (۱۲\_۷\ \text{الف})$$

که در آن

$$\omega^۲(k) = gk\tanh kd \qquad (۱۲\_۷\ \text{ب})$$

و A دامنهٔ موج است. خواننده می‌تواند جزئیات را با حل مسئلهٔ ۷ـ۱ به‌دست آورد.

تصویر فیزیکی متناظر با جواب (۷ـ۷) را می‌توان به بهترین نحو برای آب عمیق، یعنی حالتی که عمق d بسیار بزرگتر از یک طول‌موج، $۲\pi/k$، باشد توصیف کرد. در این مورد می‌توان به‌جای



شکل ۷ـ۱ جزءهای شارهٔ آب عمیق که دستخوش حرکت دایره‌ای می‌شوند که فاز آنها به x وابسته است و به امواج آشنای سطح آب می‌انجامد. این شکل درکتاب امواج در شاره‌ها نوشتهٔ لایت‌هیل آمده است.

$\sin \mathrm{h}kz$ و $\cos \mathrm{h}kz$، در نزدیکی سطح آب، $z = d$، مقدار $\mathrm{e}^{kz}/۲$ را قرار داد. مؤلفه‌های سرعت، u_x و u_z چنین می‌شوند

$$u_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{kA}{۲}\mathrm{e}^{kz}\sin(kx - \omega t), \qquad \text{(۷ـ۱۳ الف)}$$

$$u_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{kA}{۲}\mathrm{e}^{kz}\cos(kx - \omega t), \qquad \text{(۷ـ۱۳ب)}$$

مشاهده می‌کنیم که جزء شاره دستخوش حرکت دایره‌ای (در جهت عقربه‌های ساعت، زیرا فاز u_z جلوتر است) با شعاع ثابت می‌شود و فاز فقط به x بستگی دارد. با افزایش عمق (z کمتر از $z = d$)، شعاع کاهش می‌یابد. در شکل ۷ـ۱ تصویر کاملی از طرز کار موج سطحی آمده است.

۷ـ۲ پاشندگی. سرعت گروه

اگر معادلهٔ دیفرانسیل حاکم بر سیستم خطی باشد، می‌توان جوابها را به‌صورت نمایش فوریهٔ توابع هماهنگ در چهار بُعد (فضا و زمان) نوشت:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \quad \text{یا} \quad \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t), \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$$

معادلهٔ حاصل که ω و k را به هم مرتبط می‌سازد رابطهٔ پاشندگی سیستم نام دارد. ساده‌ترین شکل رابطهٔ پاشندگی، رابطه‌ای خطی است. سیستمهای دارای این رابطهٔ غیرپاشنده نامیده می‌شوند. اولین سیستمهایی که بررسی کردیم، یعنی امواج ایده‌آل روی تارکشیده در فصل ۳، امواج الکترومغناطیس در خلأ فصل ۴، غیرپاشنده بودند. اما، سه نمونه از سیستمهای پاشنده را نیز مشاهده کرده‌ایم، امواج EM که در محیط منتشر می‌شوند، فصل ۵، امواج مادی فصل ۶، و امواج آب این فصل، که برای امواج آب ω و k با رابطهٔ (۷ـ۱۲ب) به یکدیگر مربوط می‌شوند.

همان‌طور که در فصل ۳ دیدیم، هرگاه جواب هماهنگی موجود باشد، سرعت موج مثلاً در

نقطهٔ شکم با رابطهٔ زیر داده می‌شود.

$$s_{\mathrm{ph}} = \frac{\omega}{k} \tag{۱۴ـ۷}$$

سرعتی که طبق (۷ـ۱۴) تعریف می‌شود سرعت فاز نام دارد، و برای سیستمهای غیرپاشنده ثابت و مستقل از k و ω است. در واقع در فیزیک به‌ندرت فرستادن اختلالات هماهنگ مورد نظر است، بلکه به گسیل سیگنالهای فیزیکی مشخص علاقه‌مندیم. همان‌طور که در بخش ۶ـ۳ دیدیم، نشان دادن این سیگنالها با انتگرالهای فوریهٔ مربوطه (بسته موجها)، کارایی فراوان دارد. بدیهی است چون رابطهٔ پاشندگی خطی است، همهٔ مؤلفه‌های موج با یک سرعت (سرعت فاز) حرکت می‌کنند و سیگنال شکل اولیه‌اش را حفظ می‌کند؛ به معنای متعارف، مؤلفه‌ها «پاشیده» نمی‌شوند. (فرهنگ عمید، «پاشیدن» را چنین معنی می‌کند: افشاندن، ریختن و پراکنده کردن هر چیز پاشیدنی.) از طرف دیگر، در مواقعی که رابطهٔ پاشندگی غیرخطی است، مؤلفه‌های هماهنگ مختلف با سرعتهای (فاز) مختلف حرکت می‌کنند، و سیگنال پاشیده می‌شود؛ انرژی سیگنال هم پاشیده می‌شود، سیستم پاشنده است!

اکنون طبیعی است که بپرسیم، اگر سیگنال هنوز کاملاً پاشیده نشده باشد، آیا می‌توان سرعتی واحد به آن نسبت داد و آن را سرعت سیگنال یا بسته موج نامید. در یک بعد بسته موج مناسب را می‌توان با انتگرال فوریه نمایش داد

$$h(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}[kx-\omega(k)t]} dk \tag{۱۵ـ۷}$$

می‌توان استدلال کرد که سهم اصلی این انتگرال برای هر مقدار x و t از ناحیه‌ای در مجاورت مقدار $k_{\circ}(x,t)$ ناشی می‌شود که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید،

$$\frac{d}{dk}[kx-\omega(k)t]\bigg|_{k=k_{\circ}} = 0 \tag{۱۶ـ۷ الف}$$

یا

$$\frac{d\omega(k)}{dk}\bigg|_{k=k_{\circ}(x,t)} = \frac{x}{t} \tag{۱۶ـ۷ ب}$$

فقط در مجاورت این مقدار است که فازها به‌طور سازنده با یکدیگر جمع می‌شوند (روش فاز ثابت). معادلهٔ (۷ـ۱۶ب) هنگامی که سیگنالهای مورد نظر را بتوان با بسته موجهای فشرده که حول بردار موج ثابت $k_{\circ}$ قرار دارند، نشان داد، ارزشمند است. در این صورت می‌توان معادلهٔ (۷ـ۱۶ب) را

پس و پیش و چنین استدلال کرد که محل سیگنال، x، با زمان t با رابطهٔ زیر مرتبط است

$$\frac{x}{t} \equiv s_g = \left.\frac{d\omega(k)}{dk}\right|_{k=k_\circ} \qquad (۷-۱۷)$$

که در آن سرعت گروه $s_{\rm g}$ سرعت واقعی سیگنال است.

اکنون وضعیتی را در نظر بگیرید که در آن سنگی را در برکهٔ «عمیقی» می‌اندازیم. رابطهٔ پاشندگی برای امواج آب در حالت کلی چنین است

$$\omega(k) = [gk \tanh kd]^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۷\text{ـ}۱۲\text{ب})$$

منظور از عمیق این است که $kd \gg ۱$، یعنی عمق آب متناظر با چندین طول‌موج است. در اینجا داریم،

$$\tanh kd \equiv \frac{(\mathrm{e}^{kd} - \mathrm{e}^{-kd})}{(\mathrm{e}^{kd} + \mathrm{e}^{-kd})} \approx ۱$$

$$\omega(k) \approx (gk)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$s_g(k) = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{g}{k}\right)^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۷\text{ـ}۱۸\text{ الف})$$

$$s_{\rm ph}(k) = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{g}{k}\right)^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۷\text{ـ}۱۸\text{ب})$$

بنابراین، اگر امواجی را مشاهده کنیم که طول‌موجهای آنها حول طول‌موج خاصی توزیع شده است، در می‌یابیم که آنها با سرعت فاز منتشر نمی‌شوند، بلکه با نصف سرعت فاز انتشار می‌یابند! بدیهی است که تفاوت سرعت فاز $s_{\rm ph}$ و سرعت گروه $s_{\rm g}$ اهمیت دارد.

مفهوم سرعت گروه در تفسیر انتشار بسته‌های موج در مکانیک کوانتومی، مثل بخش ۶ـ۳، (مسئلهٔ ۷ـ۲)، مفید است. در بررسی‌های پیشرفته‌تر پدیده‌های موجی کلاسیک، سرعت گروه به راستی نقش مهمی دارد (به قسمت برای مطالعه بیشتر در انتهای فصل مراجعه کنید).

برخلاف مورد (۷ـ۱۸)، برای آب کم‌عمق (امواج بلند، $kd \ll ۱$)، داریم،

$$s_{\rm g} \equiv s_\circ = \frac{\partial \omega}{\partial k} = (gd)^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۷-۱۹)$$

و انتشار موج بدون پاشندگی صورت می‌گیرد (مسئله ۷ـ۳).

برای امواج تا اندازه‌ای کوتاهتر («امواج نسبتاً بلند»)، (۷ـ۱۲ب) را برحسب kd بسط می‌دهیم. و دو جملهٔ اول را نگه می‌داریم (مسئله ۷ـ۴)، داریم

$$s_{\rm ph} = \frac{\omega}{k} = s_\circ\left(۱ - \frac{۱}{۶}k^۲d^۲\right) \qquad (۷-۲۰)$$

۷ـ۳ امواج غیرخطی

شتاب $a(r,t)$ جزئی از شاره در مختصات دکارتی در واقع با سه معادله داده می‌شود، برای مؤلفهٔ x داریم،

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad (۷ـ۲۱)$$

اولین جملهٔ طرف راست آهنگ زمانی تغییر در نقطه‌ای ثابت را نشان می‌دهد، در حالی که جملهٔ دوم تغییر مکان این جزء را منظور می‌کند. این جملهٔ دوم است که در دو بخش قبلی حذف شد تا فرمولی خطی داشته باشیم. هدف این بخش بررسی پیامدهای جملهٔ غیرخطی است. برای سادگی، جنبه‌های دیگر را که قبلاً در نظر گرفتیم، یعنی دوبعدی بودن امواج در کانال باز و پاشندگی را در اینجا حذف می‌کنیم.

امواج کم‌عمق را در نظر می‌گیریم که برای آنها چنانکه دیدیم اثرات پاشندگی ناچیز است. هنگام بررسی امواج آب عمیق، دریافتیم که اجزاء نزدیک سطح حرکتی دایره‌ای دارند. حال فرض کنید که عمق آب در مقایسه با طول‌موج $2\pi/k$ کم باشد. با مراجعه به (۷ـ۱۲ الف) برای پتانسیل سرعت $\phi(x,z,t)$، مشاهده می‌کنیم که دو مؤلفهٔ سرعت u_x، u_z که در (۷ـ۱۳ الف) و (۷ـ۱۳ ب) تابع e^{kz} هستند، در واقع به ترتیب با $\cos \mathrm{h}kz$ و $\sin \mathrm{h}kz$ داده می‌شوند. یعنی اینکه برای امواج کم‌عمق $kd \ll 1$، نزدیک سطح $z = d$، u_x بسیار بیشتر از u_z است. در نتیجه، انتشار را می‌توان یک‌بُعدی فرض کرد، و بدون متوسل شدن به پتانسیل سرعت، جواب را مستقیماً به‌دست آورد. اما، مساحت سطح مقطع کانال $A(p)$ را باید بگذاریم مانند قبل برحسب فشار تغییر کند. چنین داشتیم.

$$p(x,t) = \varrho g h(x,t) \qquad (۷ـ۶)$$

و

$$A(x,t) = b[d + h(x,t)] = bd + p(x,t)\frac{b}{\varrho g} \qquad (۷ـ۲۲\ \text{الف})$$

یا

$$A(p) = bd + \frac{pb}{\varrho g} \qquad (۷ـ۲۲\ \text{ب})$$

که در آن d عمق آب کانال در حال تعادل، و b عرض ثابت است.

مانند معادلهٔ (۷ـ۷) گرادیان فشار اضافی به اجزاء شاره شتاب می‌دهد. با توجه به (۷ـ۲۱) در یک‌بُعد داریم

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (۷ـ۲۳)$$

که در آن ϱ چگالی ثابت شاره است. معادلهٔ مهم دیگر باز هم رابطهٔ پیوستگی است، که برای شارهٔ تراکم‌ناپذیر درکانالی با سطح مقطع متغیر A چنین است

$$\varrho\frac{\partial A}{\partial t}+\varrho\frac{\partial(Au)}{\partial x}=0 \qquad (۷\_۲۴)$$

از زمان ریاضیدان فرانسوی، آگوستین کوشی (۱۷۸۹ـ۱۸۵۷)، می‌دانستیم که برخی مسائل مقدار اولیه‌ای که با معادله‌های دیفرانسیل جزئی، حتی غیرخطی، توصیف می‌شوند را می‌توان با یافتن به اصطلاح مشخصه‌ها حل کرد. برای اهداف ما کافی است روش حل مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای را برای تابع مجهول $w(x,t)$ که در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی زیر صدق می‌کند، در نظر بگیریم

$$a(x,t,w)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}+b(x,t,w)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}=0 \qquad (۷\_۲۵)$$

$w(x,0)$ را می‌دانیم. چون ممکن است a و b به w بستگی داشته باشند، این معادله غیرخطی است. یک مشخصه برای معادلهٔ دیفرانسیل جزئی (۷ـ۲۵) ، تابعی $x(t)$ است که از حل معادلهٔ دیفرانسیل معمولی زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{dx}{dt}=\frac{a(x,t,w)}{b(x,t,w)} \qquad (۷\_۲۶)$$

که در آن w به عنوان پارامتر ثابتی در نظر گرفته می‌شود ($x(0)$ می‌باید در محدوده‌ای باشد که $w(x,0)$ برایش تعیین شده است). اکنون مشاهده می‌کنیم که روی مشخصه داریم.

$$dw=\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}dx+\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}dt$$

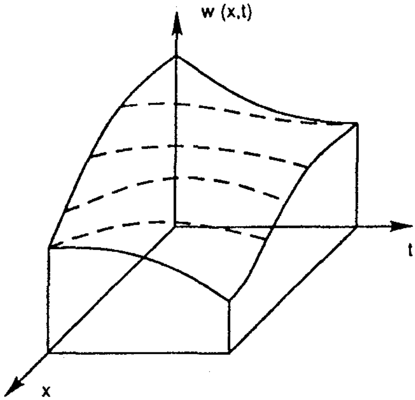
با

$$\frac{dx}{a(x,t,w)}=\frac{dt}{b(x,t,w)}\equiv dl$$

$$dw=\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}a(x,t,w)+\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}b(x,t,w)\right]dl$$

بنابراین، اگر $w(x,t)$ جواب معادلهٔ اصلی (۷ـ۲۵) باشد، dw صفر است، یعنی w روی منحنی مشخصه $x(t)$ ثابت است.

پس برای معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مانند (۷ـ۲۵) مشخصه‌ها را می‌توان به صورت مسیرهای w ثابت تعریف کرد (شکل ۷ـ۲). به علاوه، اگر مشخصه‌ها یکدیگر را قطع نکنند، در حالت کلی



شکل ۷ـ۲ جواب $w(x,t)$ سطح نشان داده شده را درست می‌کند. مشخصه‌ها، یا مسیرهای عابرانی که برروی سطح حرکت می‌کنند اما نمی‌خواهند «بالاروند» با خط‌چین نشان داده شده است. به‌طور صحیح‌تر باید بگوییم که توابع $x(t)$ تصاویر مشخصه‌ها روی صفحهٔ xt هستند، نه خود مشخصه‌ها.

اگر معادلهٔ دیفرانسیل معمولی (۷ـ۲۶) را بتوانیم حل کنیم، مسئله را حل کرده‌ایم. زیرا اگر بخواهیم $w(x_\circ, t_\circ)$ را در نقطهٔ $x_\circ, t_\circ$ بدانیم، رد مشخصه‌ای را که از این نقطه می‌گذرد می‌گیریم تا به نقطهٔ $x(\circ)$ در $t = \circ$ برسیم، یعنی $w(x_\circ, t_\circ) = w[x(\circ), \circ]$. این نکات احتمالاً خواننده را به یاد فصل ۳ می‌اندازد، که در آنجا دیدیم که جواب معادلهٔ موج همگن (۳ـ۳) با سرعت اولیه صفر هر تابعی از $x \pm st$، یعنی در امتداد این خطوط ثابت بود؛ $x = \pm st$ مشخصه‌های (۳ـ۳) هستند، نگاه کنید به مسئلهٔ (۷ـ۷).

اکنون می‌خواهیم (۷ـ۲۲) و (۷ـ۲۳) و (۷ـ۲۴) را ترکیب کنیم تا معادله‌های دیفرانسیل جزئی درجه اول به‌دست آوریم، که هرکدام برحسب فقط یک تابع مجهول باشد که بتوان آن را با روش مشخصه‌ها حل کرد. برخی توابع کمکی $s(p)$ و $P(p)$ را نیز تعریف می‌کنیم که دارای ابعاد سرعت u هستند. ابتدا، توجه می‌کنیم که اگر (۷ـ۲۴) را خطی کنیم، انتظار داریم همان سرعت فازی را بیابیم که برای امواج بلند در بخش ۷ـ۲ یافتیم (مسئله ۷ـ۸)

$$s_\circ = (gd)^{\frac{1}{2}} \qquad (۷ـ۱۹)$$

محاسبه نشان می‌دهد که $s_\circ$ را می‌توان کلیت بخشید

$$s(p)^{-2} \equiv \left[\frac{\varrho}{A(p)}\right] \frac{dA(p)}{dp} \qquad (۷ـ۲۷\ \text{الف})$$

با استفاده از (۷ـ۱۹)

$$s^{-2} = \frac{b}{Ag} \approx s_\circ^{-2} \qquad (۷ـ۲۷\ \text{ب})$$

اهمیت فیزیکی s به‌زودی معلوم می‌شود. سپس، انتگرال $P(p)$ را چنین تعریف می‌کنیم،

$$P(p) \equiv \frac{1}{\varrho}\int_{0}^{p} \frac{1}{s(p')}dp' \qquad (۷\_۲۸)$$

که در آن $s(p)$ طبق (۷ـ۲۲) و (۷ـ۲۷) تعریف می‌شود.

حال اگر به معادلهٔ حرکت (۷ـ۲۳) بازگردیم، ابتدا مشاهده می‌کنیم که با استفاده از (۷ـ۲۸) داریم

$$\varrho\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{s(p)}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \varrho\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{s(p)}\frac{\partial p}{\partial t}$$

که پس از تقسیم بر ϱ می‌دهد

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + s\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad (۷\_۲۹\text{ الف})$$

اگر رابطهٔ پیوستگی (۷ـ۲۴) را به $\varrho A/s$ تقسیم کنیم داریم

$$\frac{s}{A}\frac{\partial A}{\partial t} + s\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{s}{A}u\frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

همچنین با توجه به اینکه

$$\varrho\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{s(p)}\frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{dA}{dp}\frac{\partial p}{\partial t}, \quad \text{و} \quad \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{dA}{dp}\frac{\partial p}{\partial x}$$

و با استفاده از تعریف s^{-2} در (۷ـ۲۷)، می‌توانیم رابطهٔ پیوستگی را چنین بنویسیم

$$\frac{\partial P}{\partial t} + s\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad (۷\_۲۹\text{ ب})$$

از مجموع (۷ـ۲۹ الف) و (۷ـ۲۹ب) داریم

$$\frac{\partial(u+P)}{\partial t} + (u+s)\frac{\partial(u+P)}{\partial x} = 0 \qquad (۷\_۳۰\text{ الف})$$

و از تفاضل آنها، داریم

$$\frac{\partial(u-P)}{\partial t} + (u-s)\frac{\partial(u-P)}{\partial x} = 0 \qquad (۷\_۳۰\text{ ب})$$

معادله‌های (۷ـ۳۰ الف و ب) معادله‌های دیفرانسیل جزئی درجه اول غیرخطی مطلوب را که بر حرکت موج حاکم‌اند به‌دست می‌دهند.

در بقیهٔ این بخش، از معلومات حاصل از نظریهٔ مشخصه‌ها استفاده می‌کنیم تا بدون حل تحلیلی مسئله‌ای خاص، شناختی از انتشار امواج غیرخطی به‌دست آوریم. فرض کنید، مشخصه‌های مربوط به (۷ـ۳۰ الف) را C^+ بنامیم. برروی این مشخصه‌ها، $u+P$ ثابت است و با استفاده از (۷ـ۲۶) داریم

$$\frac{dx}{dt}=u(x,t)+s(x,t) \quad \text{روی } C^+ \qquad \text{(۷ـ۳۱ الف)}$$

با استفاده از (۷ـ۳۰ب)، به‌طور مشابه داریم

$$\frac{dx}{dt}=u(x,t)-s(x,t) \quad \text{روی } C^- \qquad \text{(۷ـ۳۱ب)}$$

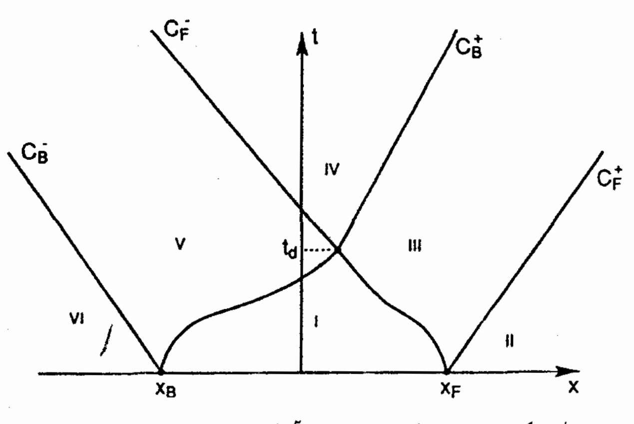
که در آن C^- مشخصه‌های مربوط به (۷ـ۳۰ب) را نشان می‌دهد که برروی آنها $u-P$ ثابت است.

مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای را در نظر بگیرید که در زمان $t=\circ$ همهٔ شارهٔ موجود در کانال بجز در بازهٔ $x_{\rm F}>x>x_{\rm B}$، در حالت سکون است:

$$u(x,\circ),\ p(x,\circ),\ P(p=\circ)=\circ \qquad x>x_{\rm F},\quad x<x_{\rm B} \qquad \text{(۷ـ۳۲ الف)}$$

$$u(x,\circ),\ p(x,\circ),\ P(p=\circ)\neq\circ \qquad x_{\rm F}\geq x\geq x_{\rm B} \qquad \text{(۷ـ۳۲ب)}$$

مشخصه‌های C^+ و C^- که به ترتیب از $x_{\rm F}$ و $x_{\rm B}$ شروع می‌شوند، صفحهٔ xt را به شش منطقه تقسیم می‌کنند، شکل ۷ـ۳. مناطق II، IV و VI در این شکل متناظر با هیچ نوع



شکل ۷ـ۳ مشخصه‌هایی که به ترتیب از $x_{\rm F}$ و $x_{\rm B}$ آغاز می‌شوند، صفحهٔ xt را به شش ناحیه تقسیم می‌کنند. آب در نواحی II، IV، VI آشفته نمی‌شود. ناحیهٔ I در t_d تخلیه می‌شود، در این هنگام آشفتگی اولیه به صورت «امواج ساده‌ای» که در III و V وجود دارند از هم باز می‌شود. در اینجا مشخصه‌ها خطهای راست هستند اما در حالت کلی با هم موازی نیستند. این شکل از کتاب لایت‌هیل با عنوان امواج شاره‌ها اقتباس شده است.

آشفتگی نیستند، یعنی $u(x,t)$ در این نواحی صفر است. ناحیهٔ II آزاد است زیرا جلوترین قسمت آشفتگی را C_{F}^{+} مقید می‌کند؛ $u+P$ که روی C^+ ثابت است، با توجه به (۷ـ۳۲ الف) روی همهٔ مشخصه‌های جلوتر C^+ صفر است. آشفتگی هنوز به نقاط فضا زمان ناحیهٔ II نرسیده است. این مطلب دربارهٔ ناحیهٔ VI نیز صادق است و می‌توان آن را با معکوس کردن جهتها نشان داد. به علاوه، آشفتگی پیچیده‌ای که در I وجود دارد به دو آشفتگی تقسیم می‌شود که در جهتهای مخالف در دو ناحیهٔ III و V حرکت می‌کنند و به تدریج ناحیهٔ اولیهٔ $x_{\mathrm{B}} > x > x_{\mathrm{F}}$ و ادامهٔ آن ناحیه IV را که عاری از موج است، ترک می‌کنند، مسئلهٔ ۷ـ۹. آشفتگیهای ناحیه‌های III و V را امواج ساده می‌نامند، که اکنون به بررسی آنها می‌پردازیم.

می‌توانیم تصور کنیم که ناحیهٔ III را مشخصه‌های C^- می‌پوشانند که از $x > x_{\mathrm{F}}$ آغاز می‌شوند، در آن u و P جداگانه صفر می‌شوند. بنابراین، چون روی C^- تابع $u-P$ ثابت است، داریم

$$u(x,t) = P(x,t) \quad \text{در } \mathrm{III} \qquad \text{(۷ـ۳۳ الف)}$$

چنانکه

$$u(x,t) + P(x,t) = 2u(x,t) \quad \text{در } \mathrm{III} \quad \text{در امتداد } C^+ \qquad \text{(۷ـ۳۳ب)}$$

با استفاده از تعاریف (۷ـ۲۷) و (۷ـ۲۸) به‌ترتیب برای s و P و (۷ـ۲۲ب) برای $A(p)$ بازهم مشاهده می‌کنیم که s و p فقط توابعی از P هستند، بدین‌ترتیب، با در نظر داشتن (۷ـ۳۳ب) نتیجه می‌گیریم که $u(x,t)$، $P(x,t)$، $s(p)$ و p همگی در امتداد هر مشخصهٔ C^+ در III ثابت هستند؛ طبق (۷ـ۳۱ الف) این مشخصه‌ها خطهای راست هستند. این موضوع انگیزه‌ای است که امواج ناحیهٔ III را «امواج ساده» بنامیم. به‌همین ترتیب، در ناحیه V مشخصه‌های C^- هم خطهای راست هستند و در آنجا هم امواج ساده داریم.

مشخصه‌ها در نواحی III و V مانند مورد امواج خطی با هم موازی نیستند (مسئلهٔ ۷ـ۹). با استفاده از (۷ـ۲۸) برای $P(p)$ و (۷ـ۲۷ب) برای s، برای امواج بلند کانال (و همین‌طور، با تغییراتی جزئی، برای بسیاری پدیده‌های دیگر، از جمله جریان خون در سرخرگهای انبساط‌پذیر) داریم،

$$P(p) = \frac{1}{\varrho}\int_0^p \frac{dp}{s(p)} = \frac{1}{\varrho}\sqrt{\frac{b}{g}}\int_0^p \frac{dp}{A^{\frac{1}{2}}}$$

با استفاده از (۷ـ۲۲ب) برای $A(p)$ این رابطه به رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$P(p) = \sqrt{g/b} \int_{A(\circ)}^{A(p)} A^{-\frac{1}{2}} dA$$

یا

$$P(p) = 2[s(p) - s_\circ] \qquad (\text{۷ـ۳۴الف})$$

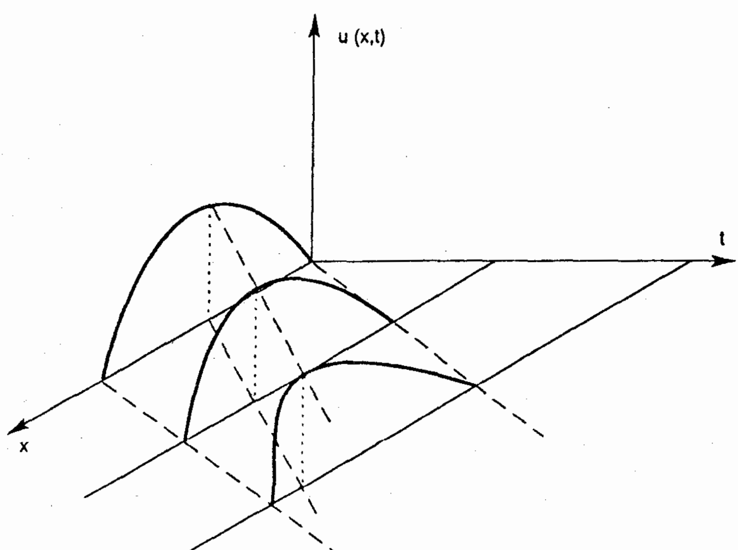
این نتیجه با ترکیب با (۷ـ۳۳الف) و (۷ـ۳۴الف) چنین به‌دست می‌دهد

$$s = s_\circ + \frac{u}{2} \quad \text{یا} \quad u + s - s_\circ = \frac{3}{2}u \qquad (\text{۷ـ۳۴ب})$$

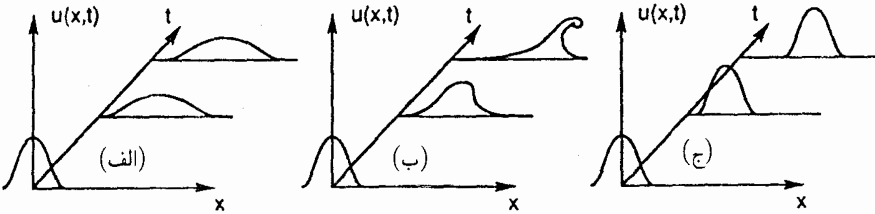
در نتیجه، شیب هر مشخصهٔ C^+ در III، با استفاده از (۷ـ۳۱الف) چنین می‌شود

$$\frac{dx}{dt} = s_\circ + \frac{3}{2}u(x,t) \quad \text{در III} \qquad (\text{۷ـ۳۵})$$

هر چه u بزرگتر باشد، انتشار هر نقطه (یا هر مقدار خاص u) روی موج سریعتر خواهد بود. به خاطر شیب متفاوت مشخصه‌ها، امواج غیرخطی در حین انتشار تغییر شکل می‌دهند، چنانکه در شکل ۷ـ۴ آمده است. عاقبت موج می‌شکنند، شکل ۷ـ۵ب.



شکل ۷ـ۴ انتشار امواج غیرخطی «ساده». مشخصه‌ها که به صورت خط‌چین نشان داده شده‌اند، با هم موازی نیستند، و به شکل‌گیری لبهٔ تیزتری برای جبههٔ موج می‌انجامد. بالاخره موج می‌شکنند.



شکل ۷ـ۵ (الف) امواج آب در هر مورد به غیر از کانالهای بسیار کم عمق، پاشیده می‌شوند. (ب) اثرات غیرخطی به تیزشدن لبهٔ جلویی موج می‌انجامد، که در نهایت باعث شکسته شدن موج می‌شود. (ج) هنگامی که پاشندگی مورد (الف) درست با تمرکز در (ب) متوازن شود، سولیتون پایدار به‌دست می‌آید.

۷ـ۴ سولیتونها

فیزیک امواج در سطح آب که در بخشهای پیشین این فصل خواندیم در شکلهای ۷ـ۵ الف و ب نشان داده شده است و به‌طور تحلیلی می‌توان آن را در معادله‌ای موسوم به معادلهٔ کورتِوِگ دی وْریز خلاصه کرد. مطابق (۷ـ۳۱ الف)، می‌توانیم $(u+s)$ را به عنوان سرعت «سیگنال» تعبیر کنیم و s را سرعت سیگنال نسبت به حرکت شاره، که با u داده می‌شود، در نظر بگیریم. سرعتی را که موج با آن تغییر شکل می‌دهد $u(x,t)$ می‌نامیم:

$$v(x,t) \equiv u(x,t) + s(x,t) - s_{\circ} = \frac{۳}{۲}u(x,t) \qquad (۷\text{ـ}۳۶)$$

که در آن $s_{\circ}$ سرعت خطی، یعنی حد s است هنگامی که u به صفر میل می‌کند، (۷ـ۳۴ب). به همراه آن، در بخش قبل دیدیم که $u + p = ۲u$، بنابراین

$$u(x,t) + P(x,t) = \frac{۴}{۳}v(x,t)$$

در نتیجه، (۷ـ۳۰ الف) به صورت مناسب زیر در می‌آید

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + [v(x,t) + s_{\circ}]\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = \circ \qquad (۷\text{ـ}۳۷)$$

در بخش ۷ـ۲ دیدیم که برای امواج آب عمیق، پاشندگی رخ می‌دهد، و سرعت فاز چنین است

$$s = s_{\circ}\left(۱ - \frac{۱}{۶}k^{۲}d^{۲}\right) \qquad (۷\text{ـ}۱۴)$$

برای منظورکردن این پاشندگی، می‌توان جملهٔ خطی $\sigma\partial^{۳}v(x,t)/\partial x^{۳}$ را به (۷ـ۳۷) افزود:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (s_{\circ} + v)\frac{\partial v}{\partial x} + \sigma\frac{\partial^{۳} v}{\partial x^{۳}} = \circ \qquad (۷\text{ـ}۳۸\ \text{الف})$$

$$\sigma = \frac{۱}{۶}s_{\circ}d^{۲} \qquad (۷\text{ـ}۳۸\text{ب})$$

معادلهٔ (۷ـ۳۷ب) معادلهٔ کورتِوگ دی وِریز است که در بقیهٔ فصل آن را بررسی می‌کنیم. اما بهتر است، شکل (۷ـ۳۷ب) را کمی تغییر دهیم تا با شکل کاربردی آن در ریاضیات مطابقت داشته باشد، و دسترسی خوانندهٔ علاقه‌مند را به تحقیقات فعلی آسان کند. سه دستکاری ریاضی مختصر ضروری است. اول، باید به دستگاه مختصاتی برویم که خود با سرعت $s_\circ$ در حرکت است. بنابراین

$$x_{\text{جدید}} = x_{\text{قدیم}} - s_\circ t_{\text{قدیم}} \tag{۷ـ۳۹ الف}$$

$$t_{\text{جدید}} = t_{\text{قدیم}} \tag{۷ـ۳۹ب}$$

دوم، v جدید را جانشین کنیم،

$$v_{\text{جدید}} = -v_{\text{قدیم}} \tag{۷ـ۳۹ج}$$

سوم، مقیاس را طوری تغییر دهیم که در (۷ـ۳۸ الف)، σ به واحد تبدیل شود. با توجه به اینکه

$$\frac{\partial}{\partial t_{\text{قدیم}}} = \frac{\partial}{\partial t_{\text{جدید}}}\frac{\partial t_{\text{جدید}}}{\partial t_{\text{قدیم}}} + \frac{\partial}{\partial x_{\text{جدید}}}\frac{\partial x_{\text{جدید}}}{\partial t_{\text{قدیم}}} = \frac{\partial}{\partial t} - s_\circ\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{\text{قدیم}}} = \frac{\partial}{\partial t_{\text{جدید}}}\frac{\partial t_{\text{جدید}}}{\partial x_{\text{قدیم}}} + \frac{\partial}{\partial x_{\text{جدید}}}\frac{\partial x_{\text{جدید}}}{\partial x_{\text{قدیم}}} = \frac{\partial}{\partial x}$$

که شاخصها را از طرف راست معادله‌ها و آنچه در زیر می‌آید انداخته‌ایم. بدین‌ترتیب (۷ـ۳۸ الف) به صورت زیر که معادلهٔ کورتِوگ دی وریز در متداولترین شکل خود است، در می‌آید،

$$\boxed{\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - ۶v(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^۳ v(x,t)}{\partial x^۳} = \circ} \tag{۷ـ۴۰}$$

امواج نسبتاً بلند در سطح آب واقعاً از (۷ـ۴۰) پیروی می‌کنند.

در ابتدا ممکن است فکر کنیم که نمی‌توان چیز جدیدی را از این معادله آموخت، اثرات پاشندگی و غیرخطی بودن قبلاً بررسی شده‌اند. در واقع با وجود آشفتگی اولیه، $v(x,\circ)$، رابطهٔ (۷ـ۴۰) به‌طور کلی دارای جوابهای $v(x,t)$ است که به صورت پاشنده‌ای برحسب زمان از بین می‌روند. اما، محاسبه نشان می‌دهد که می‌توان یک برانگیختگی به‌وجود آورد که پایدار باشد و انرژی خود را برحسب زمان از دست ندهد ـ یعنی یک سولیتون.

وقوع سولیتون را اولین بار اسکات راسل، مهندس راه و ساختمان انگلیسی در ۱۹۳۴ گزارش داد. توصیف او که اکنون معروف است چنین بود: «قایقی را نگاه می‌کردم که دو اسب آن را در کانال باریکی به سرعت می‌کشیدند که ناگهان قایق متوقف شد ـ اما توده آبی که قایق در کانال به

حرکت در آورده بود متوقف نشد؛ بلکه در حالتی متلاطم اطراف دماغهٔ قایق انباشته شد، سپس قایق را پشت سرگذاشت و با سرعت زیادی جلو رفت، و به شکل یک برآمدگی بزرگ منفرد درآمد و به شکل تودهای مشخص، گرد و هموار از آب به راه خود در کانال ادامه داد، بدون اینکه شکل یا سرعت خود را از دست دهد. سوار بر اسب، آن را دنبال کردم، و از آن که هنوز با سرعتی حدود هشت یا نه مایل به پیش می‌رفت و شکل اولیه‌اش را به طول سی فوت و ارتفاع یک یا یک‌ونیم فوت حفظ کرده بود، جلو زدم. ارتفاع آن به تدریج کم می‌شد، و پس از یک یا دو مایل تعقیب، آن را در یک پیچ‌وخم کانال گم کردم».

سولیتونها منحصر به امواج آب کم عمق نیستند. همهٔ پدیده‌های فیزیکی، در دامنه‌های به اندازه کافی بزرگ غیرخطی می‌شوند. فیزیکدانان نظری، احتمالاً برای مدتی طولانی، از مسائلی که غیرخطی بودن به همراه می‌آورد اجتناب می‌کردند. روشهایی که در فصلهای قبل در مورد سیستمهای خطی آموختیم، از جمله تحلیل فوریه یا برهم نهی مدها، در مسائل غیرخطی به‌کار نمی‌روند و همان‌طورکه بیش از پیش روشن شده است، غیرخطی بودن اغلب به رفتار آشوبناک می‌انجامد. با این حال، پیامدهای منظمی مثل سولیتون هم امکان‌پذیر است. انواع مختلف سولیتون وجود دارد، از جمله سولیتونهای موج یون ـ پلاسما، سولیتونهای ضربتی شدید، سولیتونهای رسانش عصبی. سولیتونها عملاً در هر شاخه از فیزیک مشاهده شده‌اند. در فیزیک هسته‌ای برای به‌دست آوردن معادله‌های سولیتونی و جوابهای آن از مسئلهٔ ویژهٔ مقداری شرودینگر، از روشهای معکوس استفاده می‌شود. در فیزیک ماده چگال آنچه به سولیتونهای توپولوژیکی مرسوم است و عبور آن باعث تغییر حالت می‌شود، متداول‌اند، در اِبررسانایی، گردابهای مغناطیسی حامل شار واحد $h/2e$، سولیتون هستند، فصل مشترک بین فازهای ساختاری مختلف در بلورها، دیواره‌های منطقه‌ای در مغناطیس و برخی در رفتگیها سولیتون هستند. در هنگام نگاشتن این کتاب، یک طرح چند بیلیون دلاری برای کابل فیبر نوری که سیگنالها را به صورت سولیتونهای فیبرنوری از یک سر اقیانوس آرام بسر دیگر ببرد، در دست اجراست.

پایداری سولیتونها را می‌توان به دلیل ترکیب اثرات پاشندگی و غیرخطی تا حدودی درک کرد. در بخش ۷ـ۲، اثر پاشندگی را بررسی کردیم. دریافتیم که برای امواج آب، مؤلفه‌های موج بلند سریعتر از مؤلفه‌های موج کوتاه حرکت می‌کنند، که مطابق شکل ۷ـ۵الف به از بین رفتن تدریجی تپ می‌انجامد. همزمان با آن، در بخش ۷ـ۳ دیدیم که اثرات غیرخطی مانند شکل ۷ـ۵ب به تمرکز تپ در قسمت جلوی موج می‌انجامد. وجود موج منفرد[1] پایدار (سولیتون)، را می‌توان در نتیجهٔ توازن مناسب دو اثر دانست، که در شکل ۷ـ۵ج به صورت یک تپ نشان داده شده است.

۱. soliton از solitary به معنای منفرد گرفته شده است.ـم.

جواب تحلیلی معادلهٔ KdV (کورتِوِگ دی ؤریز)، که فقط به یک سولیتون مربوط می‌شود را می‌توان به شکل سودمند زیر نوشت (مسئلهٔ ۷ـ۱۰)،

$$v(x,t) = -\frac{\alpha^{۲}}{۲}\text{sech}^{۲}\left[\frac{\alpha}{۲}(x-\alpha^{۲}t-x_{۱})\right] \qquad (۷\text{ـ}۴۱)$$

همین‌طور بد نیست که $f(x,t)$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$f(x,t) \equiv \mathrm{e}^{-\alpha(x-x_{۱})+\alpha^{۳}t} \qquad (۷\text{ـ}۴۲\text{الف})$$

که در آن صورت

$$v(x,t) = \frac{-۲\alpha^{۲}f(x,t)}{[۱+f(x,t)]^{۲}} \qquad (۷\text{ـ}۴۲\text{ب})$$

بیشینهٔ قدرمطلق دامنهٔ $v(x,t)$ برابر است با $\alpha^{۲}/۲$ که به‌ازای $f=۱$ یعنی در $x=\alpha^{۲}t+x_{۱}$ رخ می‌دهد، که $x_{۱}$ تغییر فاز است. سرعت سولیتون $\alpha^{۲}$ یعنی دوبرابر دامنه آن است که نتیجه‌ای بسیار غیرخطی است. (البته باید به‌خاطر داشت که برای به‌دست آوردن سرعت واقعی تپ، مانند آنچه در شکل ۷ـ۵ج آمده است، $s_{\circ}$ را نیز باید به آن اضافه کنیم.) چنانکه در بخش بعد خواهیم دید شرایط اولیه هم α و هم $x_{۱}$ را مشخص می‌کند.

تا اینجا بر پایداری یک سولیتون تأکید کردیم؛ یعنی مانع از اثرات پاشندگی شدیم. بازهم آشفتگی غیرخطی است و دامنه سرعت را تعیین می‌کند. اما از فصل ۲ به یاد داریم که نشانهٔ بارز خطی بودن، برهم نهی است: اگر یک جواب همگن (بدون محرک) را به دست آوریم، و سپس جواب دیگری نیز به‌دست آوریم، مجموع دو جواب هم یک جواب است. دو جواب تأثیری برهم ندارند. با توجه به معادلهٔ KdV، (۷ـ۴۰)، و بدیهی است که این برهم نهی را نداریم. حال اگر دو سولیتون با دامنه‌های مختلف داشته باشیم، سرعت آنها نیز متفاوت خواهد بود و به آسانی می‌توانیم ترتیبی دهیم که سولیتون بزرگتر به سولیتون کوچک برسد و با آن برخورد کند. نکتهٔ بسیار قابل توجه آن است که هر دو سولیتون از این برخورد دست نخورده بیرون می‌آیند، سولیتون بزرگتر از سولیتون کوچکتر می‌گذرد و تنها تأثیر باقی‌مانده، تغییر فاز هر یک از سولیتونهاست. بدین‌ترتیب، سولیتون از جنبه‌هایی همتای آشفتگی خطی برای معادلهٔ KdV است. چگونه می‌توانیم پایداری سولیتونها را نسبت به برخورد، که در واقع به تعداد سولیتونهایی که با هم برخورد می‌کنند بستگی ندارد، به صورت تحلیلی ثابت کنیم؟ حل تحلیلی با دو سولیتون برحسب پارامترهای $\alpha_{۱}$ و $\alpha_{۲}$ که به ترتیب

f_1 و f_2 را تعریف می‌کنند چنین است

$$v(x,t)=\frac{\alpha_1^2 f_1+\alpha_2^2 f_2+2(\alpha_2-\alpha_1)f_1 f_2+\Lambda(\alpha_2^2 f_1^2 f_2+\alpha_1^2 f_1 f_2^2)}{(1+f_1+f_2+\Lambda f_1 f_2)^2} \qquad \text{(۷ـ۴۳ الف)}$$

$$\Lambda\equiv\frac{(\alpha_2-\alpha_1)^2}{(\alpha_2+\alpha_1)^2} \qquad \text{(۷ـ۴۳ب)}$$

که در آن f_1 و f_2 از رابطهٔ (۷ـ۴۲ الف) به‌دست می‌آیند و هر f دارای پارامترهای α و x مخصوص به خود است. موضوع مسئلهٔ ۷ـ۱۱ این است که نشان دهید $v(x,t)$ در (۷ـ۴۳) مربوط به برخوردهای دو سولیتونی است که باعث تغییر شکل نمی‌شوند. نکته‌ای که باید متذکر شد این است که (۷ـ۴۳) با همهٔ پیچیدگی‌اش حل دقیقی از معادلهٔ KdV، (۷ـ۴۰) است. برای N سولیتون این عبارت چگونه است؟ چگونه ممکن است چنین جوابهای پیچیده‌ای را بیابیم؟ آیا می‌توان شناخت عمیقتری به‌دست آورد؟ این شناخت عمیقتر است که موضوع آخرین بخش این فصل، یعنی مبحث بعدی را تشکیل می‌دهد.

۷ـ۵ پراکندگی معکوس

پراکندگی معکوس روشی است که برای حل برخی معادله‌های دیفرانسیل جزئی غیرخطی، از جمله معادلهٔ کورتِوگ دی ؤریز، به‌کار می‌رود. جواب مطلوب این معادلهٔ دیفرانسیل جزئی به عنوان پتانسیل در مسئلهٔ ساختگی پراکندگی در نظر گرفته می‌شود، این مسئله در ابتدا حل می‌شود. تحول زمانی پاسخ مسئلهٔ پراکندگی از تحول زمانی پتانسیل به‌دست می‌آید و بدین‌ترتیب پیامد غیرمستقیم معادلهٔ دیفرانسیل جزئی اولیه است. سپس، پتانسیل، یعنی جواب معادلهٔ دیفرانسیل جزئی با روش بازسازی از جواب مسئلهٔ پراکندگی به‌دست می‌آید. اینکه چنین روشی را می‌توان به‌کار برد گاردنر، گرین، کروزکال و میورا در ۱۹۶۷ در آزمایشگاه فیزیک پلاسمای دانشگاه پرینستون، ضمن تحقیق دربارهٔ معادلهٔ KdV، کشف کردند. این گشایش بلافاصله پس از کشف عددی جوابهای پایدار (سولیتونها) توسط زابوسکی و کروزکال در ضمن محاسبات رایانه‌ای به‌وجود آمد. نکته آن است که بدون حل کردن خود معادلهٔ دیفرانسیل جزئی، می‌توان بستگی زمانی جوابهای مسئلهٔ پراکندگی را به‌دست آورد. این روش گرچه سر راست نیست. اما هیچ روش شناخته شدهٔ دیگری برای حل این معادله‌های دیفرانسیل جزئی غیرخطی وجود ندارد. با وجود این، معادله‌هایی که حل آنها با این روش امکان‌پذیر است، در فیزیک بسیارند. همان‌طور که گفتیم، سولیتونها در پدیده‌های گوناگون فیزیکی یافت می‌شوند. مبحث زیر محدود به معادلهٔ دیفرانسیل جزئی کورتِوگ دی ؤریز است.

در این روش، فرایند پراکندگی را با معادلهٔ زیر نشان می‌دهند:

$$\boxed{\frac{\partial^{۲}\phi(x,\tau;t)}{\partial x^{۲}} - v(x,t)\phi(x,\tau;t) = \frac{\partial^{۲}\phi(x,\tau;t)}{\partial\tau^{۲}}} \qquad (۴۴\text{ـ}۷)$$

که در آن $v(x,t)$ جواب مطلوب معادلهٔ KdV است. $\phi(x,\tau;t)$ را «تابع موج ذرهٔ پراکنده شده» نامند، و به خاطر تشابهی که با معادلهٔ شرودینگر وجود دارد $v(x,t)$ را پتانسیل پراکندگی می‌نامیم. به علاوه، τ را «زمان» در نظر می‌گیریم، و زمان فیزیکی، t، را که در طول آن $v(x,t)$ تحول می‌یابد، پارامتر ثابتی در فرایند پراکندگی فرض می‌کنیم.

معادلهٔ (۷ـ۴۴) را با روش معمول جداسازی متغیرها می‌توان حل کرد. اگر تابع زیر را تابع آزمون در نظر بگیریم،

$$\text{تابع آزمون} = u[x,\omega(t);t]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t)\tau} \qquad (۴۵\text{ـ}۷)$$

که در آن u مستقل از τ است، معادلهٔ ویژه مقداری زیر را می‌یابیم،

$$\boxed{\frac{\partial^{۲}u[x,\omega(t);t]}{\partial x^{۲}} + [\omega^{۲}(t) - v(x,t)]u[x,\omega(t);t] = ۰} \qquad (۴۶\text{ـ}۷)$$

پایداری سولیتون این انگیزه را به وجود می‌آورد که به دنبال شرایط اولیه‌ای برای $v(x,t)$ باشیم که ویژه مقدارهای (۷ـ۴۶)، یعنی $\omega^{۲}(t)$ را، مستقل از زمان می‌کند. متوجه می‌شویم که، شرط کافی برای مستقل از زمان بودن $\omega^{۲}(t)$های حالت‌های مقید این است که $v(x,t)$ در معادلهٔ KdV صدق کند (مسئلهٔ ۷ـ۱۵). محاسبه نشان می‌دهد که در معادلهٔ KdV می‌توان ترتیبی اتخاذ کرد که ویژه مقدار حالت‌های آزاد (۷ـ۴۶) هم ثابت باشند. بنابراین، حال که می‌دانیم می‌توان مستقل از زمان بودن $\omega(t)$ را ثابت کرد، از این به بعد آن را به صورت مستقل از زمان می‌نویسیم.

در اینجا روش پراکندگی معکوس بالانیس را با جزئیات آن می‌آوریم. ذرهٔ فرودی به‌ازای هر مقدار ثابت پارامتر t با تپی به شکل تابع دلتای $\delta(x+\tau)$ توصیف می‌شود. ذره با سرعت واحد به طرف چپ در حرکت است (که متناظر با (۷ـ۴۴) است، آنجا هم سرعت را واحد اختیار کردیم). بدین‌ترتیب، می‌گوییم در حد مجانبی به‌ازای هر t داریم

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\phi(x,\tau;t) \equiv \phi_{\infty}(x,\tau;t) = \delta(x+\tau) + B(x-\tau;t)} \qquad (۴۷\text{ـ}۷)$$

که در آن $B(x-\tau;t)$ سیگنال بازتابیده است، یعنی موج پراکنده شده از $v(x,t)$؛ (۷ـ۴۷) جواب مسئلهٔ پراکندگی (۷ـ۴۴) در حد $x \to \infty$ است.

طبقه‌بندی ویژه تابعهای (۷ـ۴۶) برحسب فرم مجانبی‌شان سودمند است. پراکندگی مستلزم آن است که $v(x,t)$ فقط در ناحیه‌ای متناهی، $L > x > -L$ گسترده باشد و خارج از این ناحیه $v(x,t)$ صفر شود. فرمهای مجانبی u و ϕ (ϕ_∞)، فرمهای این توابع در خارج از این ناحیه‌اند. همان‌طور که قبلاً هم به‌طور تلویحی گفتیم، باید هم ویژه حالت‌های مقید را در نظر بگیریم و هم آزاد؛ به ویژه حالت‌های آزاد را حالت‌های پراکنده می‌گویند.

حالت‌های مقید در ناحیهٔ مجانبی به صورت نمایی فرو می‌افتند:

$$u(x,\omega;t) \equiv u_n(x;t) \to \gamma_n(t)\mathrm{e}^{-K_n x} \qquad x \to \infty \quad \text{در حد} \tag{۷ـ۴۸ الف}$$

$$\omega = \mp \mathrm{i} K_n, \quad K_n > \circ \tag{۷ـ۴۸ب}$$

به عبارت دیگر، «انرژی کل»، $\omega^۲$، منفی است. هر دو علامت برای ω امکان‌پذیر است (نگاه کنید به آنچه در زیر می‌آید). «ثابتهای» $\gamma_n(t)$ را بهنجارش ویژه تابعهای تحلیلی $u_n(x;t)$ تعیین می‌کند. این حالت‌ها را می‌توان حقیقی و راست هنجار فرض کرد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n(x;t) u_m(x;t) dx = \delta_{nm} \tag{۷ـ۴۸ج}$$

برای ویژه حالت‌های آزاد انتظار داریم که

$$\text{در حد } x \to \infty\text{، حالت } \longleftarrow \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$$

در واقع، هر موج فرودی دارای موج پراکندهٔ متناظری است که از پتانسیل پراکندگی خارج می‌شود (مسئله ۶ـ۱۱)، و در ناحیه $x \to -\infty$، موج عبوری $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ ظاهر می‌شود. بنابراین،

$$\begin{aligned} u(x,\omega;t) \equiv u(x,k;t) &\longrightarrow \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + \beta(k;t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}] \qquad x \to \infty, k > \circ \\ &\longrightarrow \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\alpha(k;t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \qquad x \to \infty, \quad k < \circ \\ &\longrightarrow \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\alpha(k;t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \qquad x \to -\infty, \quad k > \circ \\ &\longrightarrow \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + \beta(k;t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}] \end{aligned} \tag{۷ـ۴۹ الف}$$

$$x \to -\infty, k < \circ \tag{۷ـ۴۹ب}$$

$$\omega = \pm k \tag{۷ـ۴۹ج}$$

در اینجا، برخلاف حالت‌های مقید، ω پیوستاری را تشکیل می‌دهد. کلی‌ترین جواب، به‌ازای هر k یا K_n معین شامل ترکیبی از بسامدهای مثبت و منفی در توابعی نمایی است. همان‌طور که گفتیم، می‌توان جوابهای $\phi(x, \tau; t)$ را با استفاده از حالت‌های پراکندگی $u(x, k; t)$ و به‌ازای k مستقل از t، پیدا کرد. بدین‌ترتیب، فرم مجانبی حالت‌های پراکندگی امواج تخت است که باز هم طبق (۷ـ۴۹ج) دارای سرعتهای فاز $(\pm\omega/k)$ برابر واحد هستند. شرط راست هنجاری را، اگر بخواهیم می‌توانیم با استفاده از فرمولبندی دقیق (۱ـ۳۲ب) چنین بنویسیم

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u^*(x, k; t)u(x, k'; t)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4n}}dx = \lim_{n\to\infty} g_n(k-k') \qquad (\text{۷ـ۴۹د})$$

که در آن، سهم انتگرال از ناحیهٔ پراکندگی $L > x > -L$ را می‌توان صفر فرض کرد. پارامترهای α و β در (۷ـ۴۹ الف و ب) ضرایب پراکندگی نام دارند. از فصل ۶ می‌دانیم که به‌ازای هر t، پایستگی ذره ایجاب می‌کند که

$$|\alpha(k; t)|^2 + |\beta(k; t)|^2 = 1 \qquad (\text{۷-۵۰})$$

که به راست هنجارش (۷ـ۴۹د) می‌انجامد، نگاه کنید به مسئله ۷ـ۱۴.

اکنون می‌توانیم مسئله پراکندگی را حل کنیم. در جستجوی جواب $\phi(x, \tau; t)$ برای (۷ـ۴۴)، تحت شرط اولیه زیر (که برحسب τ است) هستیم،

$$\phi(x, \xi; t) = \delta(x+\xi), \qquad |\xi| > L, \xi < 0 \qquad (\text{۷-۵۱})$$

رابطهٔ بالا که به‌ازای مقدار اولیهٔ $\xi = \tau$ نوشته شده است، به‌ازای هر t باید صادق باشد. در زمانی دور (τ) درگذشته، ذره‌ای که از $x = \infty$ می‌آید به‌طرف پتانسیل که در حوالی $x = 0$ واقع است حرکت می‌کند.

از ترکیب تابع آزمون (۷ـ۴۵) با بسامدهای (۷ـ۴۸ب و ۴۹ج)، می‌توانیم به‌ازای $x > 0$، $\phi(x, \tau; t)$ را به‌صورت سودمند زیر بسط دهیم

$$\phi(x, \tau; t) = \sum_n [A_n(t)\mathrm{e}^{-K_n\tau} + B_n(t)\mathrm{e}^{K_n\tau}]u_n(x; t)$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} [A(k; t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k\tau} + B(k; t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k\tau}]u(x, k; t)dk \qquad (\text{۷-۵۲})$$

که در آن، A_n، B_n، A و B ضرایب بسط هستند. به‌خاطر راست هنجار بودن حالت‌های گسسته همین‌طور راست هنجار بودن بر حالت‌های پراکندگی، از (۷ـ۵۱ و ۵۲) چنین به‌دست می‌آوریم:

$$A_n(t)\mathrm{e}^{-K_n\xi} + B_n(t)\mathrm{e}^{K_n\xi} = u_n(-\xi;t) \tag{۷ـ۵۳الف}$$

همین‌طور، داریم

$$A(k,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k\xi} + B(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k\xi} = u^*(-\xi,k;t) \qquad \omega_k > 0 \tag{۷ـ۵۳ب}$$

معادلهٔ (۷ـ۴۴)، مانند معادلهٔ کلاسیک موج، نسبت به τ از درجه دوم است. در نتیجه، نه تنها مقدار اولیه $\phi(x,\xi;t)$، بلکه مشتق اولیهٔ $\partial\phi(x,\tau;t)/\partial\tau$ نیز باید در شرایط اولیهٔ در $\tau = \xi$ صدق کند. بدین‌ترتیب، معادله‌هایی برای یافتن A و A_n و B و B_n، که ضرایب بسط هستند، به‌دست می‌آید (مسئله ۷ـ۱۲). نتیجه اینکه به‌ازای $x \to \infty$، مقدار ϕ، ϕ_∞، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\phi_\infty(x,\tau;t) = \sum_n \gamma_n^2(t)\mathrm{e}^{-K_n(x-\tau)} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + \beta(k;t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\tau}dk \tag{۷ـ۵۴}$$

(صورت ساده شدهٔ مسئله ۷ـ۱۳ ممکن است مفید واقع شود.)

اکنون یادآور می‌شویم که طبق (۷ـ۴۷):

$$\phi_\infty(x,\tau;t) = \delta(x+\tau) + B(x-\tau;t) \tag{۴۷-۷}$$

که در آن، B سیگنال برگشتی است. اگر $\delta(x+\tau)$ را طبق معمول به صورت زیر بسط دهیم

$$\delta(x+\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x+\tau)}dk \tag{۲۵ـ۱}$$

از رابطهٔ (۷ـ۵۴) چنین می‌یابیم

$$B(x-\tau;t) = \sum_n \gamma_n^2(t)\mathrm{e}^{-K_n(x-\tau)} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\beta(k;t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-\tau)}dk \tag{۷ـ۵۵}$$

گام بعدی به‌دست آوردن بستگی زمانی برای γ_n و β است. در مسئله ۷ـ۱۵، از معادله موج (۷ـ۴۶) و معادلهٔ KdV استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم که به‌ازای هر ویژه حالت گسستهٔ

$u_n(x;t)$، داریم

$$R_n \equiv u_{nt} + v_x u_n - ۲(v - ۲K_n^۲)u_{nx} = ۰ \qquad \text{(۷ـ۵۶ الف)}$$

که در آن شاخصهای x و t مشتق جزئی نسبت به متغیرهای مزبور را نشان می‌دهد.

در ناحیهٔ مجانبی $x \to \infty$ و $v \to ۰$، با استفاده از (۷ـ۵۶ الف) رابطهٔ زیر را برای $\gamma_n(t)$ می‌یابیم (نگاه کنید به (۷ـ۴۸ الف))،

$$\gamma_n(t) = \gamma_n(۰)\mathrm{e}^{۴K_n^۳ t} \qquad \text{(۷ـ۵۷ الف)}$$

برای حالت‌های پیوستاری u در همان ناحیهٔ مجانبی، در می‌یابیم (مسئله ۷ـ۱۵) که اگر قرار باشد k در رابطهٔ (۷ـ۴۹) مستقل از t باشد، آنگاه می‌باید داشته باشیم

$$R = c(t)u(x,\omega;t) \qquad \text{(۷ـ۵۶ب)}$$

در اینجا، R همان R_n در رابطهٔ (۷ـ۵۶ الف) است، با u به‌جای u_n و $-k^۲$ به‌جای $K_n^۲$. در (۷ـ۵۶ب)، c ممکن است هر تابعی از t باشد، اما تابع x نیست. حال اگر قرار باشد، جملهٔ اول در (۷ـ۴۹ الف) برای u در حد $x \to \infty$، یعنی e^{-ikx}، جواب مجانبی (۷ـ۵۶ب) باشد، باید داشته باشیم

$$c = ۴\mathrm{i}k^۳ \qquad \text{(۷ـ۵۸)}$$

که صورت صحیح u در حد $x \to -\infty$، (۷ـ۴۹ب)، را نیز به‌دست می‌دهد. با چنین مقداری برای c، مشاهده می‌کنیم که برای اینکه جملهٔ دوم، $\beta(k;t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$، جواب (۷ـ۵۶ب) باشد، باید داشته باشیم،

$$\beta(k;t) = \mathrm{e}^{۸\mathrm{i}k^۳ t} \qquad \text{(۷ـ۵۷ب)}$$

بالاخره، با قرار دادن (۷ـ۵۷ الف و ب) در (۷ـ۵۵) خواهیم داشت،

$$B(x-\tau;t) = \sum_n \gamma_n^۲ \mathrm{e}^{-K_n(x-\tau)+۸K_n^۳ t} + \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \beta(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-\tau)+۸\mathrm{i}k^۳ t}dk \qquad \text{(۷ـ۵۹)}$$

که در آن γ_n و $\beta(k)$ مقادیر خود در $t = ۰$ را اختیار می‌کنند. این مقادیر را می‌توان با محاسبهٔ مستقیم حالت‌های مقید و حالت‌های پراکندگی وابسته با $v(x,۰)$ معین، پیدا کرد؛ برای روشن‌تر

شدن مطلب به مثال ۷ـ۱ و مسئله ۷ـ۲۰ رجوع کنید. مشاهده می‌کنیم که $B(x-\tau;t)$ که با توجه به (۷ـ۴۷) و (۷ـ۵۱) در حد $\tau \to -\infty$ به صفر میل می‌کند، در واقع کاملاً متشکل از امواجی است که طبق آنچه برای بخش پراکنده ϕ انتظار داریم در زمان τ به سمت راست حرکت می‌کنند.

برای بازسازی $v(x,t)$ از $\phi(x,\tau;t)$، از نمایش ϕ به‌صورت معادله خطی انتگرالی فردهولم، آغاز می‌کنیم:

$$\phi(x,\tau;t) = \phi_\infty(x,\tau;t) + \int_x^\infty K(x,\xi;t)\phi_\infty(\xi,\tau;t)d\xi \qquad (۷ـ۶۰)$$

که در آن $K(x,\xi;t)$ هستهٔ معادله است. با قرار دادن این فرم ϕ در معادلهٔ موج اولیه (۷ـ۴۴)، در مسئله ۷ـ۱۶ در می‌یابیم K که (۷ـ۶۰) را حل می‌کند، در رابطهٔ زیر نیز صادق است،

$$K_{\xi\xi}(x,\xi;t) - K_{xx}(x,\xi;t) + v(x,t)K(x,\xi;t) = 0 \qquad \xi > x \qquad (۷ـ۶۱\text{الف})$$

$$-2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x;t) = v(x,t) \qquad (۷ـ۶۱\text{ب})$$

$$K, K_\xi \to 0 \quad \text{وقتی} \quad \xi \to \infty \qquad (۷ـ۶۱\text{ج})$$

که در آن، شاخصها باز هم نشان‌دهندهٔ مشتقها هستند. شروط (۷ـ۶۱)، جوابی یکتا برای تابع $K(x,\xi;t)$ به‌دست می‌دهند.

به علاوه، با بازگشت به مسئله پراکندگی، روشن است که هیچ آشفتگی که از $x = -\tau$ شروع شود و در جهت منفی x با سرعت واحد حرکت کند، حتی پس از پراکندگی، وارد ناحیهٔ $(x+\tau) < 0$ نخواهد شد. چون ϕ در این ناحیه صفر است، (۷ـ۶۰) را می‌توانیم به صورت زیر (شرط علّیت) بنویسیم

$$\phi_\infty(x,\tau;t) + \int_x^\infty K(x,\xi;t)\phi_\infty(\xi,\tau;t)d\xi = 0 \qquad x+\tau < 0$$

با استفاده از عبارت (۷ـ۴۷) که سیگنال بازتابیدهٔ B را برحسب ϕ_∞ بیان می‌کند، داریم

$$B(x-\tau;t) + K(x,-\tau;t)\int_x^\infty K(x,\xi;t)B(\xi-\tau)d\xi = 0 \qquad x+\tau < 0$$

با قرار دادن $-y$ به جای τ، که مرسوم است، و با قرار دادن z به جای ξ، داریم

$$\boxed{K(x,y;t) + B(x+y;t) + \int_x^\infty K(x,z;t)B(z+y;t)dz = 0 \qquad y > x} \qquad (۷ـ۶۲)$$

معادلهٔ (۷ـ۶۲) به نام به‌وجود آورندگان آن به معادلهٔ گلفاند ـ لویتن ـ مارچنکو[1] معروف است. همان‌طور که خواهیم دید، نکته اینجاست که وقتی B را داشته باشیم، به آسانی می‌توانیم (۷ـ۶۲) را حل کنیم، در حالی که چنانکه گفتیم، هیچ روش مستقیمی برای حل معادله KdV وجود ندارد. با حل معادلهٔ انتگرالی (۷ـ۶۲)، $v(x,t)$ از (۷ـ۶۱ب) به‌دست می‌آید.

توجه شما را به این واقعیت جلب می‌کنیم که B در رابطهٔ (۷ـ۵۹) از دو قسمت تشکیل شده است، منشأ یکی در حالت‌های مقید است و دیگری در حالت‌های پیوستاری. در مسئله ۷ـ۱۷، نشان می‌دهیم که چگونه اثرات در قسمت مذکور را می‌توان به هنگام حل (۷ـ۶۲) برای K، از هم جدا کرد. در هر صورت، با توجه به پاشندگی موجود در معادله KdV شگفت‌انگیز نیست که اثرات جملهٔ دوم با گذشت زمان به سرعت از بین می‌رود (بستگی زمانی $t^{-۱/۳}$ است، مسائل ۷ـ۱۸ و ۷ـ۲۰)، و فقط اثرات جملهٔ اول، یعنی سولیتونها، باقی می‌ماند.

با نگرش مجدد به (۷ـ۵۹) و نادیده گرفتن سهم پیوستاری، می‌توان نوشت (با یادآوری $y=-\tau$)

$$B(x+y;t)=\sum_n g_n(x)h_n(y) \qquad (۷\text{ـ}۶۳\,\text{الف})$$

به همراه

$$g_n(x;t)\equiv \gamma_n^{۲}\mathrm{e}^{-K_n x+۸K_n^{۳}t} \qquad (۷\text{ـ}۶۳\,\text{ب})$$

$$h_n(y)\equiv \mathrm{e}^{-K_n y} \qquad (۷\text{ـ}۶۳\,\text{ج})$$

به همین ترتیب، تابعی آزمون برای $K(x,y;t)$، به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$K(x,y;t)=\sum_n \omega_n(x;t)h_n(y) \qquad (۷\text{ـ}۶۳\,\text{د})$$

که در آن $\omega_n(x;t)$ توابعی هستند که باید مشخص شوند. با قرار دادن (۷ـ۶۳) در (۷ـ۶۲) داریم،

$$\sum_n h_n(y)\left[\omega_n(x;t)+g_n(x;t)+\sum_m \omega_m(x;t)\int_x^\infty h_m(z)g_n(z;t)dz\right]=۰$$

بنابراین برای هر n باید داشته باشیم.

$$\omega_n(x;t)+g_n(x;t)+\sum_m \omega_m(x;t)\int_x^\infty h_m(z)g_n(z;t)dz=۰ \qquad (۷\text{ـ}۶۴)$$

1. Gelfand-Levitan-Marchenko

اگر N حالت مقید وجود داشته باشد، (۷ـ۶۴) نمایانگر مجموعه‌ای از N معادلهٔ غیرهمگن خطی برای ω_m، $m = ۱, ۲, \ldots, N$ است. در نمایش ماتریسی این مجموعه معادله‌ها را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{W} = -\boldsymbol{G}$$

که در آن $\boldsymbol{W}$ و $\boldsymbol{G}$ ماتریسهای ستونی هستند که اجزاءشان به ترتیب ω_n و g_n است و

$$P_{mn}(x;t) = \delta_{mn} + \int_x^\infty g_m(z;t)h_n(z)dz \qquad (۶۵\text{-}۷)$$

جواب، چنین است

$$\boldsymbol{W} = -\boldsymbol{P}^{-۱}\boldsymbol{G}$$

و

$$\begin{aligned} K(x,x;t) &= \boldsymbol{H}^T(x)\boldsymbol{W}(x;t) = -\boldsymbol{H}^T(x)\boldsymbol{P}^{-۱}(x;t)\boldsymbol{G}(x;t) \\ &= -\sum_{m,n} h_m(x)P^{-۱}_{mn}g_n(x;t) \end{aligned}$$

که در آن $\boldsymbol{H}^T(x)$ ماتریسی سطری با اجزاء $h_n(x)$ است چون

$$\frac{\partial}{\partial x}P_{mn}(x;t) = -g_m(x;t)h_n(x;t)$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned} K &= \mathrm{Tr}\{\boldsymbol{P}^{-۱}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial x}\} \qquad (\text{جمع اجزاء قطری}) \\ &= \sum_n\sum_m \frac{P'_{mn}}{|P|}\frac{\partial P_{mn}}{\partial x} \\ &= |\boldsymbol{P}|^{-۱}\frac{\partial|\boldsymbol{P}|}{\partial x} \qquad (۶۶\text{-}۷) \end{aligned}$$

که در آن $|\boldsymbol{P}|$ دترمینان ماتریس $\boldsymbol{P}$ است و P'_{mn} همعامل P_{mn} است.

با استفاده از (۷ـ۶۳ب و ج) که g_n و h_n را تعریف می‌کنند، می‌توان $P_{mn}(x;t)$ را در (۷ـ۶۵) به‌دست آورد.

$$\boxed{P_{mn}(x,t) = \delta_{mn} + \frac{\gamma_m^۲ \mathrm{e}^{-(K_m+K_n)x+۸K_m^۳t}}{Km+Kn}} \qquad (۶۷\text{-}۷)$$

سرانجام، با استفاده از (۷ـ۶۱ب) که v را به K مربوط می‌کند، داریم

$$\boxed{v(x;t) = -۲\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}\log|\boldsymbol{P}(x;t)|} \qquad (۷\text{ـ}۶۸)$$

برای نشان دادن کاربرد (۷ـ۶۷) و (۷ـ۶۸)، در مثال ۷ـ۱، تحول زمانی سولیتونی را که بر اثر موج دلتا حاصل می‌شود، به‌دست می‌آوریم. از فصل ۶ به‌خاطر دارید که تابع دلتا فقط یک حالت مقید دارد که به یک سولیتون می‌انجامد. اینکه چگونه شرط اولیه $v(x, ۰)$ تحول سولیتون را مشخص می‌کند، نکتهٔ جالبی است. چنانکه در بخش ۷ـ۴ دیدیم، دامنهٔ سولیتون با سرعت آن رابطهٔ مستقیم دارد، که نتیجه‌ای غیرخطی است؛ سولیتون به صورت بسته‌ای کاملاً مشخص و بدون دامنهٔ قابل تنظیم ظاهر می‌شود. قابل توجه است که تعداد و سرشت سولیتونها را به‌ترتیب با تعداد ویژه حالت‌های مقید در شرط اولیهٔ $v(x, ۰)$ و پارامترهای γ_n، K_n تعیین می‌کنند که مشخصهٔ رفتار مجانبی این حالت‌هاست. هرگونه کمبود $v(x, ۰)$، یعنی عدم تطابق سولیتونها با v در زمان اولیه را سهم مربوط به حضور حالت‌های پیوستاری در B، جبران می‌کند؛ این آشفتگی اضافی به تدریج از بین می‌رود. در مسئله ۷ـ۱۹ با استفاده از (۷ـ۶۷ و ۶۸)، $v(x, t)$ را برای دو سولیتون به‌دست می‌آوریم. بدین‌ترتیب، رابطهٔ فوق‌العادهٔ (۷ـ۴۳) را که جواب دقیق معادلهٔ KdV است، به‌دست می‌آوریم. در واقع، (۷ـ۶۷ و ۶۸) به آسانی بخش دقیق پایدار و جواب معادلهٔ KdV را، بدون توجه به تعداد سولیتونهای موجود، به‌دست می‌دهند.

مثال ۷ـ۱

با داشتن شرط اولیه $v(x, ۰) = -W\delta(x)$ در $t = ۰$، جواب سولیتونی $v_{\mathrm{D}}(x, t)$ را به‌دست آورید (D نمایانگر «گسسته»[1] است).

حل: در مثال ۶ـ۲ دیدیم که تنها حالت مقید در مسئله ویژه مقداری زیر

$$\frac{d^۲u}{dx^۲} + [\lambda + W\delta(x)]u(x) = ۰$$

که در آن u حقیقی است، از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید

$$u(x) = \sqrt{\frac{W}{۲}}\mathrm{e}^{-Kx} \qquad x > ۰$$

1. discrete

$$= \sqrt{\frac{W}{۲}}\mathrm{e}^{Kx} \qquad x < ۰$$

$$\lambda = -K^۲, \text{ و } K = \frac{W}{۲}$$

معادلهٔ ویژه مقداری (۷ـ۴۶) نشان می‌دهد که λ در فصل ۶ متناظر با $\omega^۲$ در اینجاست. با به‌خاطرآوردن (۷ـ۴۸ب) داریم،

$$\omega \equiv -\mathrm{i}K_n \equiv -\mathrm{i}K$$

که جواب یاد شده برای u را می‌دهد.

با استفاده از (۷ـ۴۸الف) برای γ و (۷ـ۶۷) برای P_{mn}، با داشتن $\gamma^۲ = W/۲ = K$ به‌دست می‌آوریم

$$|P| = P_{۱۱} = P = ۱ + K\frac{\mathrm{e}^{-۲Kx+۸K^۳t}}{۲K}$$
$$= ۱ + \mathrm{e}^{-۲K(x-x_۱)+۸K^۳t}$$

که در آن جابه‌جایی فاز $x_۱$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\mathrm{e}^{۲Kx_۱} = \frac{۱}{۲} \text{ یا } x_۱ = \frac{۱}{۲K}\ln\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

اگر فرض کنیم

$$P(x;t) = ۱ + \mathrm{e}^{-a(x,t)}, \quad a = ۲K(x - x_۱) - ۸K^۳t$$

آنگاه

$$\frac{\partial \ln P}{\partial x} = P^{-۱}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^۲ \ln P}{\partial x^۲} = \frac{-۱}{P^۲}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^۲ - P\frac{\partial^۲ P}{\partial x^۲}\right] = \frac{-۴K^۲[\mathrm{e}^{-۲a} - (۱+\mathrm{e}^{-a})\mathrm{e}^{-a}]}{(۱+\mathrm{e}^{-a})^۲}$$
$$= ۴K^۲\left[\mathrm{e}^{\frac{a}{۲}} + \mathrm{e}^{-\frac{a}{۲}}\right]^{-۲}$$

بالاخره، با استفاده از (۷ـ۶۸) که v را به P مربوط می‌کند داریم،

$$\boxed{v_{\mathrm{D}}(x,t) = -۲K^۲\mathrm{sech}^۲[K(x-x_۱) - ۴K^۳t]}$$

یک بخش پیوستاری، به صورت $v_{\mathrm{C}}(x,t)$ هم وجود دارد، نگاه کنید به مسئلهٔ ۷ـ۱۹. ■

مسائل

۱ـ۷ از روش جداسازی متغیرها استفاده کنید و نشان دهید که (۷ـ۱۲ الف و ب) جواب مطلوب معادلهٔ لاپلاس (۷ـ۱۱) در مورد امواج آب، با شرایط مرزی (۷ـ۴) و (۷ـ۱۰) است.

راهنمایی: فرض کنید $\phi(x,z,t) = U(x)V(z)W(t)$ و $W(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$. نشان دهید که جوابهای فیزیکی (۷ـ۱۱) دارای شکل کلی $U(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$، برای امواجی است که در جهت مثبت x حرکت می‌کنند، و $V(z) = C\mathrm{e}^{kz} + D\mathrm{e}^{-kz}$ با k حقیقی است. برای صادق بودن در رابطه (۷ـ۴)، چه رابطه‌ای باید بین C و D برقرار باشد؟ بالاخره، (۷ـ۱۲ب) را به‌دست آورید.

۲ـ۷ با استفاده از (۷ـ۱۷) سرعتهای گروه برای بسته موجی که انتشار ذره آزاد را مطابق با مکانیک موج توصیف می‌کند به‌دست آورید. نتایج حاصل را مثلاً براساس رابطهٔ دوبروی، تعبیر کنید. با مراجعه به بخش ۶ـ۳ انتخابی مناسب برای «$k_{\circ}$» موجود در (۷ـ۱۷) بیابید و نقش s_g حاصل را در انتشار، حتی در حالت پاشنده، تبیین کنید.

۳ـ۷ نشان دهید که در آب کم عمق امواج گرانی اصلاً پاشنده نیستند.

۴ـ۷ رابطهٔ (۷ـ۲۰) را برای s_{ph} با بسط دادن (۷ـ۱۲ب) ثابت کنید.

۵ـ۷ با استفاده از جواب آزمون $v_x = v_{x\circ}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$، رابطهٔ (۷ـ۳۸) را ثابت کنید.

۶ـ۷ معادلهٔ برنولی برای شاره تراکم‌ناپذیر بدون چرخش چنین است

$$\frac{p(l,t)}{\varrho} + gy + \frac{۱}{۲}u^{۲}(l,t) = \frac{\partial\phi(l,t)}{\partial t} + c(t)$$

که در آن $\phi(y,t)$ پتانسیل سرعت، $p(l,t)$ فشار کل، و $c(t)$ فقط تابع t است. نیروی وارد بر جزء شاره Δm در امتداد لوله

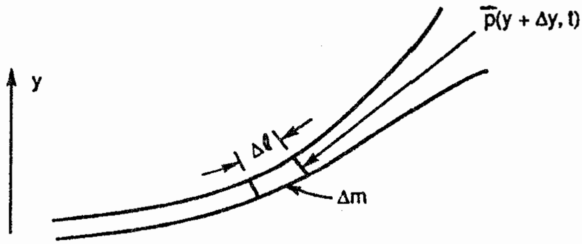
$$A[p(l+\Delta l,t) - p(l,t)]$$

همراه با اثر گرانی است.

الف) با استفاده از قانون نیوتون و در نظر گرفتن غیرخطی بودن کامل معادله را به‌دست آورید.

ب) در حالت مانا، معادله چه شکلی خواهد داشت؟

۷ـ۷ الف) نشان دهید که معادلهٔ موج (۳ـ۳) برای امواج روی تار کشیده را می‌توان چنان فاکتور



شکل ۷ـ۶ مسئله ۷ـ۶ شاره‌ای غیرچسبنده در لوله‌ای بدون اصطکاک. محور y جهت عمودی را مشخص می‌کند.

گرفت که دو معادلهٔ درجه اول مستقل Pde زیر به‌دست آید

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+s\frac{\partial}{\partial x}\right)y_۱(x,t)=۰$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-s\frac{\partial}{\partial x}\right)y_۲(x,t)=۰$$

ب) ویژگیهای این دو معادلهٔ درجه اول pde را به‌دست آورید.

ج) ۱) اگر $y(x,۰)$، شرط اولیه برای کل‌موج $y(x,t)$ که در (۳ـ۳) صدق می‌کند، داده شده باشد، آیا $y_۱(x,t)$ و $y_۲(x,t)$ کاملاً معین‌اند؟

۲) چگونه می‌توان یک شرط اولیه دوم، یعنی $dy(x,t)/dt|_{t=۰}=۰$ را به‌ازای هر x، $۰<x<L$ منظور کرد؟

۳) اگر $u(x,۰)$ را به‌ازای هر x، $x_F>x>x_B$، در بخش ۷ـ۳ بدانیم، آیا می‌توانیم $u(x,t)$ را در تمام زمانهای بعد بیابیم؟ بحث کنید.

د) با استفاده از ویژگیهایی که در ب) به‌دست آمد صفحهٔ xt را چنانکه در بخش ۷ـ۳ آمده است به شش ناحیه تقسیم کنید. با توجه به شرایط زیر، بگویید که در هر ناحیه چه اتفاقی می‌افتد

$$y(x,۰)=\text{تابع داده شده}\quad x_F\geq x\geq x_B$$

$$=۰\qquad x>x_F,x<x_B$$

$$\frac{\partial_y(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=۰}=۰\qquad \text{به‌ازای هر}\ x$$

۷ـ۸ الف) (۷ـ۲۳ و ۲۴) را خطی کنید و نشان دهید که حاصل $s_۰^۲=gd$ یعنی رابطهٔ (۷ـ۱۹) است.

ب) با توجه به اینکه (۷ـ۶) فشار اضافی را برحسب از جابه‌جایی سطحی $h(x,t)$ می‌دهد، از معادله‌های (الف) استفاده کنید و نشان دهید که

۱) $h=du/s_۰$.

۲) برای امواج کم عمق، $\partial h/\partial t$ در مقایسه با u واقعاً کوچک است، و بدین‌ترتیب باز هم بررسی یک‌بُعدی بخش ۷ـ۳ را توجیه می‌کند. البته، اگر نیازمند h باشیم، می‌توانیم تقریباً آن را از (۱) به‌دست آوریم.

۷ـ۹ نشان دهید که در ناحیهٔ IV از شکل ۷ـ۳، هم $u(x,t) = P(x,t)$ و هم $u(x,t) = -P(x,t)$. چه نتیجه‌ای از آن به‌دست می‌آورید؟

۷ـ۱۰ نشان دهید که $v(x,t)$ چنانکه در (۷ـ۴۱) داده شده است؟

$$v(x,t) = -\frac{\alpha^{۲}}{۲}\text{sech}^{۲}\left[\frac{\alpha}{۲}(x - \alpha^{۲}t - x_{۱})\right]$$

جواب معادلهٔ KdV، (۷ـ۴۰)، است.

۷ـ۱۱ الف) نشان دهید که رابطهٔ (۷ـ۴۳) برای دو سولیتون به‌ازای $f_{۲} = ۰$ به معادلهٔ تک‌سولیتونی (۷ـ۴۱) تبدیل می‌شود.

ب) نشان دهید که در ناحیه‌هایی از x و t که در آنها $f_{۱} \simeq ۱$ و $f_{۲}$ یا بزرگ یا کوچک است، $v(x,t)$ با تقریب نسبتاً خوب با تک‌سولیتون $\alpha_{۱}$ داده می‌شود. آیا این با توجه به $f_{۱}$ و $f_{۲}$، رابطه‌ای دوجانبه را نشان می‌دهد؟ اگر چنین است، از کجا می‌دانید؟

ج) نشان دهید که برای $t \to -\infty$ وقتی $f_{۱} \simeq ۱$ داریم $f_{۲} \gg ۱$ و هنگامی که $f_{۲} \simeq ۱$، داریم $f_{۱} \ll ۱$. فرض کنید $\alpha_{۲}^{۲} \gg \alpha_{۱}^{۲}$، وقتی $t \to -\infty$ کدام موج جلوتر است؟

د) حال نشان دهید که در حالت $t \to \infty$ وقتی $f_{۱} \simeq ۱$، داریم $f_{۲} \ll ۱$، و وقتی $f_{۲} \simeq ۱$، داریم $f_{۱} \gg ۱$.

هـ) نکات بالا چگونه این تصویر را که دو سولیتون بدون اینکه شکلشان تغییر کند از هم می‌گذرد. تأیید می‌کنند؟ نشان دهید که برای سولیتون ۲ نتیجهٔ برخورد جابه‌جایی روبه جلو در فضا به میزان $(۲/\alpha_{۲})\log[(\alpha_{۲}+\alpha_{۱})/(\alpha_{۲}-\alpha_{۱})]$ است و برای سولیتون ۱، جابه‌جایی روبه عقب به اندازهٔ $(۲/\alpha_{۱})\log[(\alpha_{۲}+\alpha_{۱})/(\alpha_{۲}-\alpha_{۲})]$ است.

۷ـ۱۲ نشان دهید که با برازش $\partial\delta(x+\tau)/\partial\tau|_{\tau=\xi}$ با $\partial\phi(x,\tau;t)/\partial\tau|_{\tau=\xi}$ به همراه (۷ـ۵۳ب)، می‌توان $A_n(t)$، $B_n(t)$، $A(k;t)$، $B(k;t)$ را تعیین کرد. این ضرایب را به‌دست آورید؛ $A(k;t)$ و $B(k;t)$ را به‌ازای مقادیر مثبت و منفی k به‌دست آورید.

۱۳ـ۷ نشان دهید که در حالت $x \to \infty$، با استفاده از (۷ـ۵۰) و اینکه $\beta^*(k) = \beta(-k)$ داریم،

$$\int_{۰}^{\infty} [e^{-ikx} + \beta(k)e^{ikx}][e^{-i\tau k} + \beta^*(k)e^{i\tau k}]dk + |\alpha(k)|^{۲} \int_{-\infty}^{۰} e^{-ikx}e^{-i\tau k}dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-ikx} + \beta(k)e^{ikx}]e^{-ik\tau}dk$$

این تساوی آخر از ناوردایی نظریهٔ نسبت به استفادهٔ i یا i− به‌دست می‌آید، زیرا معادلهٔ پراکندگی (۷ـ۴۴) نسبت به ϕ خطی و دارای ضرایب حقیقی است. با استفاده از نتیجه این مسئله و نتایج مسئله ۷ـ۱۲، بسط ϕ_∞، (۷ـ۵۴)، را از (۷ـ۵۲) به‌دست آورید.

۱۴ـ۷ تحقیق کنید که برای $n \to \infty$ داریم

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{\infty} e^{-\frac{x^{۲}}{۴n}}[e^{-ikx} + \beta(k)e^{ikx}][e^{ikx} + \beta^*(k)e^{-ikx}]dx$$

$$+ \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{۰} e^{-\frac{x^{۲}}{۴n}}[\alpha(-k)e^{-ikx}][\alpha^*(-k)e^{ikx}]dx = g_n(۰)$$

و اهمیت این محاسبه را توضیح دهید. اگر از ویژه حالت‌های اصلی $u(x,k;t)$ به‌جای فرم مجانبی آنها استفاده کنیم، سهم انتگرال از ناحیهٔ $-L < x < L$ که در آن $v(x,t) \neq ۰$، چه می‌شود؟ اگر $n/L \to \infty$ چه می‌شود؟

۱۵ـ۷ الف) با مشتق‌گیری از معادلهٔ ویژه مقداری (۷ـ۴۶) نسبت به x و t و استفاده از معادلهٔ KdV برای $v(x,t)$ نشان دهید که

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_x R - uR_x) = \frac{\partial \omega^{۲}}{\partial t}u^{۲} \qquad (۶۹\text{ـ}۷)$$

که در آن $u_x = \partial u(x, \omega(t); t)/\partial x$ و R_x مشتق مشابهی از R است که طبق زیر تعریف می‌شود،

$$R \equiv u_t + v_x u - ۲(v + ۲\omega^{۲})u_x$$

ب) با انتگرال‌گیری از طرفین (۷ـ۶۹) نسبت به x از $-\infty$ تا ∞، نشان دهید که $\partial\omega^{۲}/\partial t$ برای حالت‌های مقید که برای $x \to \pm\infty$ به صفر میل می‌کنند، صفر است و ویژه مقدارها به t بستگی ندارد.

ج) با استفاده از نتایج (الف) و (ب) نشان دهید که به‌ازای $u = u_n$

$$R \equiv R_n, \qquad R_n = ۰ \tag{۷ـ۵۶الف}$$

راهنمایی: دوبار نسبت به x از $-\infty$ تا x انتگرال بگیرید.

د) نشان دهید که برای حالت‌های آزاد $u(x,\omega;t)$، یک نتیجهٔ (۷ـ۶۹) این است که اگر ویژه مقدارهای $k^۲(t)$ قرار است مستقل از t باشند، آنگاه

$$R = c(t)u(x,\omega;t) \tag{۷ـ۵۶ب}$$

که در آن c تابع t ولی مستقل از x است.

۱۶ـ۷ نشان دهید که $\phi(x,\tau;t)$، یا حذف موقت t، $\phi(x,\tau)$ جواب معادلهٔ موج (۷ـ۴۴) است،

$$\phi_{xx} - \phi_{\tau\tau} - v_{\phi} = ۰ \tag{۷ـ۴۴}$$

به‌شرطی که K، که در رابطهٔ زیر آمده است،

$$\phi(x,\tau) = \phi_{\infty}(x,\tau) + \int_{x}^{\infty} K(x,\xi)\phi_{\infty}(\xi,\tau)d\xi \tag{۷-۶۰}$$

در روابط زیر صدق کند

$$K_{\xi\xi} - K_{xx} + v(x)K = ۰ \qquad \xi > x \tag{۷ـ۶۱الف}$$

$$v(x) = -۲\frac{\partial}{\partial x}K(x,x) \tag{۷ـ۶۱ب}$$

$$K, K_{\xi} \to ۰ \qquad \xi \to \infty$$

شاخصهای پایین نشانهٔ مشتقها هستند.

راهنمایی: با توجه به اینکه اگر $x \to \infty$ آنگاه $v(x) \to \infty$، معادلهٔ دیفرانسیلی که ϕ_{∞} در آن صدق می‌کند، کدام است؟ وقتی $\phi(x,\tau)$ را در معادلهٔ موج قرار می‌دهید، با انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء متوالی $\phi_{\tau\tau}$ را محاسبه کنید.

۱۷ـ۷ نشان دهید که معادلهٔ انتگرالی (۷ـ۶۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$(۱ + \boldsymbol{b}_{\mathrm{D}})K + \boldsymbol{b}_{\mathrm{C}}K = -(B_{\mathrm{D}} + B_{\mathrm{C}})$$

که در آن، $B(x-\tau)$ در (۷ـ۵۹) را به «قسمت گسسته» آن $B_{\rm D}$ و «قسمت پیوسته‌اش» $B_{\rm C}$ تقسیم کرده‌ایم، و عملگر $\boldsymbol{b}_{\rm D}$ چنین تعریف می‌شود

$$\boldsymbol{b}_{\rm D}K \equiv \int_x^{\infty} K(x,z)B_{\rm D}(z+y)dz$$

همچنین نشان دهید که اگر K را به صورت زیر تجزیه کنیم

$$K \equiv K_{\rm C} + K_{\rm D}$$

آنگاه،

$$(۱ + b_{\rm D})K_{\rm D} = -B_{\rm D}$$
$$(۱ + b_{\rm C})K_{\rm C} = -B_{\rm C}$$

به این شرط که جملات مخلوط $\boldsymbol{b}_{\rm D}K_{\rm C}$ و $\boldsymbol{b}_{\rm C}K_{\rm D}$ را بتوان حذف کرد. این تقریب در حالت $t \to \infty$ بهتر و بهتر می‌شود، و جداسازی $v(x,t)$ را به سولیتونهایی ناشی از $K_{\rm D}$ و آشفتگی موجی حاصل از پیوستار که برحسب زمان تضعیف می‌شود، میسر می‌سازد.

۷ـ۱۸ بجز برای سولیتونها (که برای آنها روش مورد بحث کنونی همگرا نیست) معادلهٔ KdV را می‌توان مستقیماً با روشی تکراری حل کرد.

الف) نشان دهید که معادلهٔ KdV، (۷ـ۴۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$Lv = ۳\frac{\partial v^۲}{\partial x}$$

که در آن

$$Lv = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^۳ v}{\partial x^۳}$$

ب) نشان دهید که بسط

$$v = v_۱ + v_۲ + \dots$$

به طرح تکراری زیر می‌انجامد

$$Lv_۱ = ۰$$
$$Lv_۲ = -۳\frac{\partial}{\partial x}v_۱^۲$$
$$\dots$$
$$Lv_n = -۳\sum_{j=۱}^{n-۱}\frac{\partial}{\partial_x l}(v_j v_{n-j})$$

که دارای جواب زیر است

$$f(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x')h(x-x',t)dx'+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\circ}^{t}\varrho(x',t')h(x-x',t-t')dx'dt'$$

راهنمایی: با مراجعه به مسئله (۱ـ۱۷) و $h(x-x',t)$ را بیابید.
د) یک انتگرال معروف به رابطهٔ زیر می‌انجامد

$$h(x,t)=(\text{۳}t)^{-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}A_i\left[x(\text{۳}t)^{-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}\right]$$

با این فرض که تابع ایری[1]، A_i مقید است و برای شناسهٔ متناهی به سرعت فرو می‌افتد، براساس دو مسئله قبل (۷ـ۱۷ و ۱۸الف، ب، ج)، ادعای متن را مبنی بر اینکه قسمت غیر سولیتونی v به‌ازای هر x به صورت $t^{-\text{۱}/\text{۳}}$ فرو می‌افتد توجیه کنید. شناخت بهتری از این مبحث را می‌توان با مراجعه به مقالهٔ سیگور در مجلهٔ فلویید مکانیک، جلد ۵۹، شمارهٔ ۴، صفحه ۷۲۱ سال ۱۹۷۳، به‌دست آورد.

۷ـ۱۹ الف) با استفاده از (۷ـ۶۷) نشان دهید که برای دو سولیتون داریم

$$|\boldsymbol{P}|=\text{۱}+f_\text{۱}+f_\text{۲}+\Lambda f_\text{۱}f_\text{۲}$$

که در آن $f_\text{۱}$ و $f_\text{۲}$ با رابطهٔ (۷ـ۴۲الف) تعریف می‌شود و همچنین می‌دانیم، $\alpha_\text{۱}=\text{۲}K_\text{۱}$، $\alpha_\text{۲}=\text{۲}K_\text{۲}$، $\gamma_\text{۱}^\text{۲}=\alpha_\text{۱}e^{\alpha_\text{۱}x_\text{۱}}$، $\gamma_\text{۲}^\text{۲}=\alpha_\text{۲}e^{\alpha_\text{۲}x_\text{۲}}$ و $\Lambda=(\alpha_\text{۱}-\alpha_\text{۲})^\text{۲}/(\alpha_\text{۱}+\alpha_\text{۲})^\text{۲}$.

ب) از (۷ـ۶۸) که $v(x;t)$ را برحسب دترمینان $|\boldsymbol{P}(x;t)|$ می‌دهد استفاده کنید و (۷ـ۴۳) را به‌دست آورید، (۷ـ۴۳) آشفتگی حاصل که از برهم‌کنش دو سولیتون است. آیا این نتیجه، حل دقیق معادله KdV، (۷ـ۴۰) است؟

۷ـ۲۰ الف) حالت‌های پراکندگی را برای آشفتگی اولیه‌ای که در مثال ۷ـ۱ در نظرگرفته شد،

$$v(x,\circ)=-W\delta(x)$$

به‌دست آورید.

ب) سهم این حالت‌ها را در $B(x,t)$ محاسبه کنید.

---
1. Airy function

برای مطالعهٔ بیشتر

T. Erber, K. A. McGreer, E. R. Nowak, J. D. Wan, H. Weinstock: "Onset of hysteresis measured by scanning tunneling microscopy", J. Appl. Physics. **68**, 1370 (1990).

J. Lighthill: *Waves in Fluids* (Cambridge University Press 1978).

بررسی کاملی از امواج خطی و غیرخطی، روی سطح آب را می‌توان در این رساله به‌دست آورد.

J. A. Krumhansl: "*Unity in the Science of Physics*", Physics Today, **33**, March 1991.

در این مقاله خواننده مروری مفید بر اهمیت روزافزون سولیتونها را در فیزیک می‌یابد.

G. B. Whitham: *Linear and Nonlinear Waves* (wiley, New York, 1974).

در بخشهایی از کتاب که به سولیتونها می‌پردازد، روش پراکندگی معکوس بالانیس در رسالهٔ جامع و کامل ویتمن توصیف شده است. (ویتمن استاد بالانیس بود.)

P. G. Drazin, R. S. Johnson: *Solitons: an Introduction* (Cambridge University Press, 1989).

برای خواننده‌ای که می‌خواهد معلومات بیشتری دربارهٔ جنبه‌های گوناگون نظریهٔ سولیتونها به‌دست آورد، این کتاب مرجعی خوب در سطحی متوسط است. جه

۸

پدیده‌های غیرخطی ـ آشوب

پیشگفتار

فصلهای ۱ـ۶ با رفتار خطی سروکار داشت، رفتاری که هستهٔ اصلی فیزیک نظری سنتی را تشکیل می‌دهد. دو فصل آخر، فصلهای ۸ و ۷، خواننده را به‌طور گذرا با گسترش این قلمرو سنتی ـ به حوزهٔ فعال رفتار غیرخطی ـ آشنا کرد. در این فصل، دو مقاله از فیزیکدانهای برجسته به نظم و آشوب می‌پردازد، مقالاتی که مکمل مبحث فصل ۷ هستند، مبحثی که نظم و پایداریهای غیرمنتظره را آشکار می‌سازد.

مؤلفان مقالهٔ اول، آندره و. گاپونوف ـ گرخوف[1] و میخاییل‌ای. رابینوویچ[2] چند دهه است که در انستیتو فیزیک کاربردیِ فرهنگستان علوم روسیه در نیژنی نووگورود (گورکی) دربارهٔ مسائل موجود در علوم غیرخطی به تحقیق مشغول‌اند. گورکی، تبعیدگاه ا.د. ساخارف[3] فقید، تا همین چندی پیش به‌روی خارجیان بسته بود؛ کارهای علمی انجام‌شده در این انستیتو پس از مدت زمانی بسیار طولانی به‌دست جامعهٔ بین‌المللی دانشمندان رسیده است. پروفسور گاپونوف ـ گرخوف و پروفسور رابینوویچ از اعضای فرهنگستان علوم روسیه هستند.

مقالهٔ گاپونوف ـ گرخوف و رابینوویچ نسخهٔ کوتاه‌شدهٔ فصل ۶ کتاب درسی آنها به‌نام پدیده‌های

1. Andrei V. Goponov-Grekhov
2. Mikhail I. Rabinovich
3. A. D. Sakhorov

غیرخطی در عمل است که اشپرینگرـ فرلاگ آن را در سال ۱۹۹۲ منتشر کرد. این نسخهٔ کوتاه‌شده را دکتر ارنست ف. هفتر (اشپرینگرـ فرلاگ) برای کتاب حاضر خلاصه کرده است. در نسخهٔ اصلی، تصویرهای رنگی، زیبایی غیرمنتظرهٔ حاصل از تأثیر متقابل آشوب و نظم را نشان می‌دهد.

مقالهٔ دوم را مارتین. س. گوتزویلر[1] تهیه کرده است. این مقاله اساساً بازچاپی از مقالهٔ مروری او آشوب کوانتومی است که آن هم با تصویرهای رنگی زیبا، در شمارهٔ ژانویهٔ ۱۹۹۲ مجلهٔ ساینتیفیک امریکن به‌چاپ رسید. گوتزویلر، که عضو فرهنگستان ملی علوم امریکاست، از محققان آزمایشگاه تحقیقاتی آی بی ام در یورکتاون هایتز، نیویورک و همچنین استاد دانشگاه کلمبیاست. او مؤلف کتابی در سطح کارشناسی ارشد است که «آشوب در مکانیک کلاسیک و کوانتومی» نام دارد. این کتاب را اخیراً اشپرینگرـ فرلاگ منتشر کرده است.

۸ـ۱ فیزیک غیرخطی ـ آشوب و نظم[2]

نوشته: آندره و. گاپونوف ـ گرخوف و میخاییل ای. رابینوویچ

کجا و چگونه

در علم، مانند زندگی روزمره، به پرسشهایی برمی‌خوریم که دارای پاسخ چنان پیچیده و غیرمشخصی هستند که منطقی است دیدگاه اکثریت (یا عرف) را اختیار کنیم، و یا با آنها نه به‌صورت مسائل علمی، بلکه به‌صورت مسائل اعتقادی رفتار کنیم. دو پرسش زیر که احتمالاً از قدیمیترین آنها هستند عبارت‌اند از «کاتورگی از کجا پیدا می‌شود؟» و «نظم چگونه پدیدار می‌شود»؟ هر کس که دربارهٔ اصول اساسی نهفته در نهاد طبیعت تأمل کرده باشد، حتماً به این پرسشها برخورده است. از زندگی روزمره و همین‌طور آموزش سنتی به این برداشت تقریباً بدیهی عادت کرده‌ایم که رفتار پیچیده، بی‌نظم و غامض فقط در سیستمهای بسیار پیچیده امکان‌پذیر است. برای مثال، تعداد عظیم مولکولهای موجود در بادکنکی پر از گاز، و یا جمعیتی هیجان‌زده از طرفداران فوتبال درست پس از اعلام اینکه مهمترین مسابقهٔ فوتبال فصل لغو شده است.

در این سیستمهای پیچیده، معمولاً قادر به شناسایی بدون ابهام ارتباط علت و معلولی برای تک‌تک رخدادها نیستیم. به‌عبارت دیگر، در وضعیتی نیستیم که جزئیات رفتار سیستم را پیش‌بینی کنیم، و بنابراین فرض می‌کنیم که رفتار سیستم شانسی است.

---

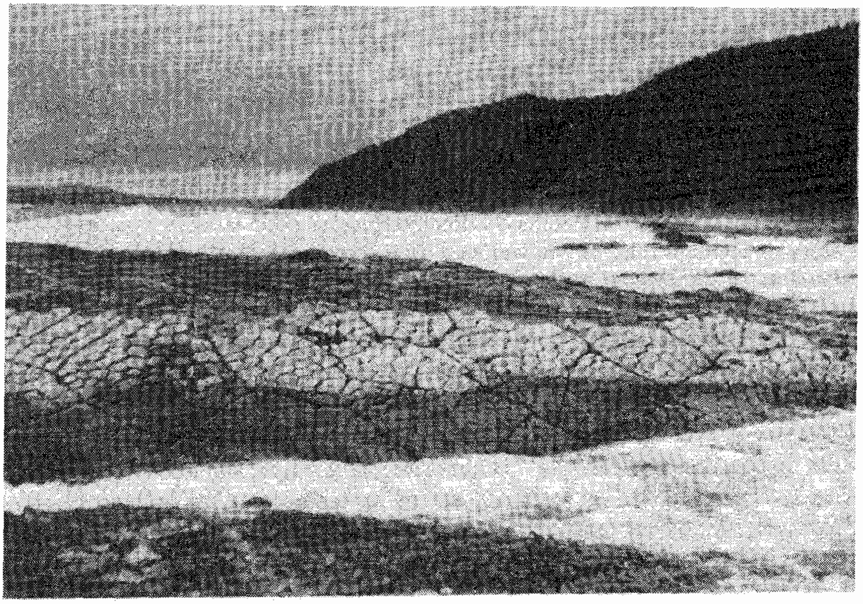
1. Martin C. Gutzwiller

۲. مقالهٔ مفصل به‌صورت فصل ۶ کتاب «پدیده‌های غیرخطی در عمل» از همین مؤلفان است (اشپرینگر ۱۹۹۲).

دانشمندان همواره امیدوار بوده‌اند که این تغییر مبتنی بر رفتار کاتوره‌ای و عدم توانایی ما در پیش‌بینی آیندهٔ سیستم، با معلومات کاملتری از جزئیات سیستم، از میان برداشته شود. برای مدتی مدید، این دیدگاه پذیرفته شده بود که اگر معلومات دقیق‌تری از جزئیات برهم‌کنش میان همهٔ اجزاء یک سیستم پیچیده به‌دست آید، و اطلاعات دقیق‌تری از شرایط اولیهٔ آنها جمع‌آوری شود، آنگاه قادر خواهیم بود رفتار آن را در دوره‌های طولانی پیش‌بینی کنیم و با افزایش دانش ما، کاتورگی «کمتر و کمتر خواهد شد».

این ایده هم طبیعی به‌نظر می‌رسد که حتماً باید یک «آغاز سازماندهی» یا «خالق» در ورای هر ساختار سازمان‌یافتهٔ پیچیده که به‌صورت پایدار وجود دارد، و یا از زمینهٔ نوفه یا بی‌نظمی بیرون آمده است وجود داشته باشد. درست به همین دلایل است که ساختارهای بسیار منظم ابرها و یا شش‌ضلعیهای با منشأ آتشفشانی که در شکل ۸ـ۱ نشان داده شده‌اند، چنین غامض و یا حتی اسرارآمیز به‌نظر می‌رسند.

در این گذر کوتاه، سعی می‌کنیم شمه‌ای از جذاب‌ترین وجه دینامیک غیرخطی نوین، یعنی بی‌نظمی در مقابل ساختارهای منظم، را به‌دست دهیم. آشوب و نظم نه‌تنها به‌صورت توأم در طبیعت وجود دارند، بلکه ناشی از اصول، قوانین یا شرایط کلی یکسانی هستند که بحث آنها را به‌موازات یکدیگر موّجه می‌سازد.



شکل ۸ـ۱ ساختارهای آتشفشانی شش‌ضلعی (جزیرهٔ کوریل).

در چند دهۀ اخیر، دو کشف برجسته درک ما را از سرشت کاتورگی و نظم کاملاً تغییر داده است. از قضا سیستمهای بسیار ساده می‌توانند رفتار کاتوره‌ای از خود نشان دهند. این سیستمها طبق قواعد بسیار ساده‌ای تحول می‌یابند یا زندگی می‌کنند (و یا دارای اجزاء یا درجات آزادی اندکی هستند). کاتورگی از خواص ذاتی چنین سیستمی است و به‌وسیلۀ محیط یا از طریق نیروهای خارجی بر آن تحمیل نمی‌شود. از بین بردن این خصلت از طریق بررسی‌های هر چه دقیق‌تر سیستم امکان‌پذیر نیست. این کاتورگی ناشی از سیستمهای عادی ساده را آشوب دینامیکی می‌نامیم.

کشف دیگر به آگاهی و تأیید تجربی این واقعیت مربوط می‌شود که از بی‌نظمی ساده و یا پیچیدۀ اولیه ممکن است ساختارهای بسیار سازمان‌یافته به‌طور خودبه‌خود پدیدار شوند که پیوسته شکل می‌گیرند و متحول می‌شوند. این فرایند به خودسازمان‌یافتگی موسوم است.

کاتورگی شکل‌گرفته از ناکاتورگی

از آشوب آغاز می‌کنیم. مشکل اصلی که باید بر آن فائق آییم روان‌شناختی است. معمولاً فکر می‌کنیم که سیستمهای ساده (مثل تاب یا تیلۀ روی سطح شیب‌دار و غیره) رفتاری بسیار ساده از خود نشان می‌دهند. با دانستن قواعدی که این سیستم ساده از آن پیروی می‌کند و شرایط اولیه‌اش، می‌توانیم رفتار سیستم را در طول هر دورۀ زمانی دلخواه پیش‌بینی کنیم. برای مثال، با استفاده از قوانین نیوتون می‌توانیم زمان کسوفهای آتی را نه‌تنها در چند سال آینده، بلکه حتی در چند هزارۀ آینده تعیین کنیم! برای محاسبۀ آنها به زمان کمی نیاز داریم، بنابراین، این در واقع یک پیش‌بینی حقیقی است.

با این حساب، چه چیز در درون سیستمهای ساده مشابه ـ سیستمهایی که برطبق قواعد ساده کار می‌کنند ـ وجود دارد که موجب پیش‌بینی‌ناپذیری، بی‌نظمی و کاتورگی می‌شود؟ برای اینکه شناختی از این خصلتهای عجیب به‌دست آوریم، کار را با مثالی شروع می‌کنیم.

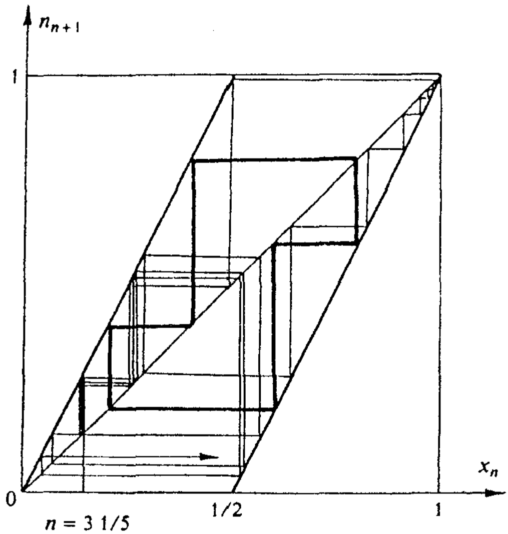
احتمالاً همۀ ما در دوران مدرسه به دنباله‌هایی از اعداد مانند سری حسابی، $x_{n+1} = x_n + a$ و سری هندسی $x_{n+1} = bx_n$ برخورد کرده‌ایم. این سریها را سیستمهایی به‌شمار می‌آوریم. در این تعبیر، نشانه یا شمارۀ هر عضو یا جزء سری را به‌صورت زمان در نظر می‌گیریم (که با یکاهای گسسته اندازه‌گیری می‌شود) و x_n را حالت سیستم در لحظۀ n می‌نامیم. رفتار این سیستمهای ساده واقعاً بسیار ساده است، زیرا حالت‌های آنها تا هر زمان دلخوه کاملاً قابل پیش‌بینی است. برای n دلخواه، که ممکن است خیلی بزرگ باشد، به‌ترتیب، داریم $x_{n+1} = x_1 + na$ و $x_{n+1} = b^n x_1$. بدین‌ترتیب، شناخت ما از سیستم درجه $n \to \infty$ مستلزم این نیست که تمام حالت‌های سیستم را در تمام لحظات «زندگی» آنها تا آن موقع بدانیم. کافی است x_{n+1} را محاسبه کنیم. آیا این نکته همواره صادق است؟

حال یک‌سری را در نظر بگیرید که تقریباً به‌همان اندازه ساده است و طبق قاعدهٔ $x_{n+۱} = \{۲x_n\}$ تعریف می‌شود، که در آن $\{\ldots\}$ نشان می‌دهد که فقط قسمت کسریِ عدد باید در داخل آکولاد قرار گیرد. بدیهی است که x_n مجموعهٔ نقاطی را در بر می‌گیرد که در گسترهٔ (۱ و ۰) یعنی از صفر تا یک برروی محور اعداد قرار دارند. برای مثال، فرض کنید $x_۱ = ۱/۵$. بنابراین $x_۲ = ۲/۵$، $x_۳ = ۴/۵$، $x_۴ = ۳/۵$، $x_۵ = ۱/۵$. به‌راستی همه‌چیز بسیار ساده است. حرکتی کاملاً منظم را مشاهده می‌کنیم و به‌ازای $x_۱ = ۱/۵$، قادریم حالت سری را پس از «هر زمان» طولانی دلخواه، یعنی برای n بزرگ، پیش‌بینی کنیم.

عددی دیگر را امتحان می‌کنیم. این دفعه فرض می‌کنیم عدد اولیه بخش کسریِ عدد π است. به‌کمک ماشین‌حساب، می‌توانید به‌راحتی تحقیق کنید که $x_۱ = \{\pi - ۳\}$ و زنجیرهٔ $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، ...، x_n هرگز بسته نمی‌شود و دنبالهٔ حاصل مانند دنبالهٔ اعداد کاتوره‌ای است. دیگر قادر به پیش‌بینی حالت سیستم نیستیم. حتی برای چند قدم جلوتر هم چنین کاری ممکن نیست. در این حال، غیرممکن است که از حالت‌های میانی بپریم بدون اینکه قابلیت پیش‌بینی «آینده» را از دست بدهیم. برای اینکه مقدار دقیق $x_{n+۱}$ به‌دست آوریم، لازم است تمام مقادیر x_n را تا گام $(n+۱)$ ام محاسبه کنیم. چون زمان محاسبه از همان مرتبهٔ فاصلهٔ زمانی لحظه‌ای است که می‌خواهیم حالت سیستم را در آن هنگام پیش‌بینی کنیم، سخن از پیش‌بینی‌ناپذیری (آشوب) به‌میان می‌آوریم که خاصیت این سری کاتوره‌ای است. این نکته برای هر سری دیگر که جزء اولش $x_۱$ عددی اصم باشد، صادق است. و اکثریت قاطع اعداد در گسترهٔ از صفر تا یک، اعداد اصم هستند.

همان‌طور که در شکل ۸ـ۲ نشان داده شده است، حرکت سیستم سادهٔ ما را می‌توان از راه ترسیم نیز نمایش داد. دو محور مختصات نمایانگر x_n و $x_{n+۱}$ هستند. مساحت بین دو خط $x_{n+۱} = ۲x_n$ و $x_{n+۱} = ۲x_n + ۱$ در بازهٔ (۱ و ۰) نمایش ترسیمی این قاعده است: اولین عدد را دو قسمت کنید و قسمت صحیح را کنار بگذارید با بازتاب مسیر از روی نیمساز، نتیجهٔ نهایی گام قبلی به‌مقدار اولیه گام بعدی تبدیل می‌شود. مسیرهای بسته (خطهای پررنگ) متناظر با حرکتهای دوره‌ای سیستم است. مسیرهایی که هرگز بسته نمی‌شوند (خطوط نازک)، مثالهایی از حرکتهای پیچیده و آشوبناک هستند.

برای محاسبات کامپیوتری، راحت‌تر است که اعداد x_n را در سیستم دوتایی نشان دهیم. در این صورت هر مقدار بعدی سری با حرکت رقم شماره یک به چپ (که متناظر با ضرب در دو است) و کنارگذاشتن عدد صحیح به‌دست می‌آید. مثلاً، اگر $x_۱ = ۰/۰۱۰۱۱۰۰۰۱۰۱۱۱\ldots$، آنگاه داریم $x_۲ = ۰/۰۱۱۰۰۰۱۰۱۱۱\ldots$، $x_۳ = ۰/۱۱۰۰۰۱۰۱۱۱\ldots$، و غیره. دنباله‌های دوره‌ای متناظر با اعداد گویا هستند و سریهای کاتوره‌ای با اعداد اصم. (به‌یاد آورید که اعداد اصم



شکل ۸ـ۲ مسیرهای دوره‌ای (خطوط پررنگ) و کاتوره‌ای (خطوط نازک) در سیستم ساده‌ای که با $x_{n+1} = \{x_n\}$ تعریف می‌شود.

در اکثریت‌اند که ایجاب می‌کند همهٔ دنباله‌های حسابی کاتوره‌ای باشند، اما معمولاً به این نکته توجهی نداریم زیرا معمولاً از اعداد گویا استفاده می‌کنیم.)

از این مثالها دیدیم که سیستمهای سادهٔ کاملاً قطعی ممکن است باعث «آشوب» شوند.

مسیر ناپایدار و حرکت پایا ـ آیا این دو ناسازگارند؟

نقاط x_n، x_{n+1}، . . .، به‌صورت کاتوره‌ای درگسترهٔ (۱ و ۰)، از صفر تا یک، پرسه می‌زنند. اما، این آشوب، نظم مخصوص خود را داراست. برای اینکه تصویری از آن در ذهن داشته باشیم، از سری اعداد حقیقی به یک سری از اعداد مختلط می‌رویم. برای مثال، سری $x_{n+1} = x_n^2 + C$ را در نظر می‌گیریم، که در آن C عددی مختلط است. اکثر نقاط حاصل دیگر درگسترهٔ (۱ و ۰) نیستند بلکه در صفحه‌ای قرار دارند که با بخشهای حقیقی و موهومی یعنی x_n، یعنی $\mathrm{Re}x_n$ و $\mathrm{Im}x_n$ مشخص شود. به‌ازای $n \sim 10^6$ و $C = 0{,}32 + i\,0{,}43$، داریم $\mathrm{Re}x = (-2{,}0 \ldots +2{,}0)$ و $\mathrm{Im}x = (-1{,}8 \ldots +1{,}8)$ و تصاویری با زیبایی استثنایی شکل می‌گیرد (نگاه کنید به کتاب پاتیگن و ریشتر و به کتاب مؤلفان این مقاله).

هر یک از نقاط این سری با مختصات $\mathrm{Re}x_1$، $\mathrm{Re}x_2$، . . .، $\mathrm{Re}x_n$، . . . و $\mathrm{Im}x_1$، $\mathrm{Im}x_2$، . . .، $\mathrm{Im}x_n$، . . . کاتوره‌ای است. اما درست نیست که به این خمینه کاتوره‌ای بگوییم. مثلاً، این شکل شباهت دوری با شکل کاتوره‌ای که از ریختن مشتی شن بر زمین حاصل می‌شود، دارد. زیبایی

غیرمنتظره‌ای که در شکل $x_{n+1} = x_n^2 + C$ وجود دارد، در واقع، پیامد این نکته است که سری کاتوره‌ای در این مورد ناشی از سیستمی قطعی بود. این سیستم نظم مخصوص خود را داراست، به عبارت دیگر آشوب دینامیکی به‌گونه‌ای خاص «سازمان‌یافته» است. این پدیده‌ای جالب‌توجه است که بحث دقیق‌تری را می‌طلبد. اما ابتدا به پرسشی که بی‌جواب ماند پاسخ گوییم: در میان خمینهٔ سری مورد نظرمان که اغلب آن کاتوره‌ای است، نمونه‌های دوره‌ای نیز یافت می‌شود؛ آیا اینها تنها مواردی هستند که در واقع مشاهده می‌شوند؟

خیر. آنها ناپایدار هستند، به این معنی که به‌ازای عدم قطعیتهای کوچک و یا تغییراتی در x_1 معین، یک سری کاملاً متفاوت خواهیم داشت، شکل ۸ـ۲. در اینجا، تجلی جنبهٔ دیگری از آشوب دینامیکی را ملاحظه می‌کنیم که حساسیت فوق‌العاده شدید به تغییرات شرایط اولیه است. بنابراین، با وجود اینکه سریهای دوره‌ای بسیاری وجود دارند، حتی تعداد آنها بینهایت است، (هنوز تعداد سریهای غیردوره‌ای بسیار بسیار بیشتر است)، مشاهده آنها عملاً غیرممکن است. اما، مسیرهای غیردوره‌ای هم ناپایدار هستند. اما چطور می‌توان آنها را مشاهده کرد؟ نکته اینجاست که خمینهٔ سریهای غیردوره‌ای تقریباً پیوسته است و نمی‌توان آنها را از یکدیگر تمیز داد. در واقع، فرض کنید که به‌خاطر اختلالی جزئی در x_1 (یا عدم قطعیت در x_1 معین) سری «صحیح» را به‌دست نیاورده‌ایم، با وجود این، سری به‌دست آمده باز هم به همان خمینهٔ مسیرهای ناپایدار تعلق دارد. بنابراین، همواره یکی از این‌گونه مسیرها را مشاهده می‌کنیم. بنابراین، نتیجهٔ قابل ملاحظه‌ای به‌دست می‌آوریم: اگرچه یک‌یک مسیرهای خمینهٔ تصادفی ناپایدارند و بنابراین قابل مشاهده نیستند (تحقق نمی‌پذیرند)، اما خودِ خمینه پایدار است، و لااقل یکی از چندین مسیر موجود در آن (که تقریباً تمام خمینه را می‌پوشاند) مشاهده‌پذیر است!

آیا شانس حاکم بر جهان است؟

چرا زودتر متوجه رفتار کاتوره‌ای سیستمهای غیرکاتوره‌ای نشدیم؟ شاید، فقط مثالهایی ساختگی را در نظر می‌گرفتیم؟ شاید، در زندگی واقعی اوضاع متفاوت است و سیستمهای واقعیِ آشوبی با معادله‌های دیگری توصیف می‌شوند؟ مثلاً، شاید معادله‌های نیوتن فقط متضمن رفتار عادی و منظم سیستمهای مکانیکی است؟

سیستم بسیار سادهٔ تاب را در نظر می‌گیریم. البته، این سیستم با معادله‌های سادهٔ مکانیک که با برخی از آنها در مدرسه آشنا شده‌ایم، توصیف می‌شود. اما ظاهراً این مثال خوبی نیست: همان‌طور که می‌دانیم، تاب به‌صورت دوره‌ای نوسان می‌کند؛ البته دورهٔ آن را هم شخصی که تاب می‌خورد، با خم و راست شدن تعیین می‌کند. بدین‌صورت، طول مؤثر تاب را می‌توان تغییر و به آن شتاب داد (یا اگر بی‌موقع بلند شویم) آن را کُند کرد. حال فرض کنید اختیار را از شخصی را که

بر تاب سوار است سلب کنیم. فرض کنید، یک روبات سوار بر تاب است و به‌طور دوره‌ای «خم و راست» می‌شود. چه اتفاقی می‌افتد؟ ـ تاب به‌صورت کاملاً کاتوره‌ای نوسان می‌کند، بدون اینکه هیچ‌گونه نیروی کاتوره‌ای بر آن وارد شده باشد! عملِ دوره‌ای کار «بلند کردن» یا «کوتاه کردن» طول تاب را به‌طور خارج از فاز (بی‌موقع) انجام می‌دهد، و در نتیجه افزودن یا کاستن انرژی تاب (یا آونگ) هم به همین صورت خواهد بود. کاتورگی مشاهده شده به این خاطر است که سرعت تاب تابع زاویهٔ انحراف آن از امتداد قائم است. مثلاً، در وضعیتی نزدیک به حالت «پشتک‌زدن» تاب به‌قدر قابل ملاحظه‌ای کُند می‌شود و کمی بعد در نقطهٔ بازگشتی کاملاً می‌ایستد. بنابراین می‌بینیم که حتی سیستمهای مکانیکی که از قوانین نیوتون پیروی می‌کنند، رفتاری آشوبناک دارند. به عبارت دیگر، آنها مولّد کاتورگی هستند! پس چرا آن را قبلاً مشاهده نکردیم؟ خوب است که بگوییم، «آن را دیدیم، اما نمی‌دانستیم که چه می‌بینیم». تفکر سنتی نمی‌گذاشت که آزمایشهایی را که نمایانگر آشوب در سیستمهای ساده بودند (و در نتیجه در چارچوب نظریه‌های جاافتاده نمی‌گنجیدند)، جدی بگیریم. این آزمایشها بالاخره به‌طریقی، برحسب افت و خیزهای طبیعی و یا متوسل شدن به تأثیر مفید نوفه که وارد کردن آن در محاسبات امکان‌پذیر نبود، «توجیه می‌شدند».

حساسیت به شرایط اولیه که از خصلتهای آشوب است، به‌خاطر ناپایداری حرکت است که به‌صورتی مصوّر و مستقیم در تحولات تاریخی بازتاب می‌یابد.

اگر کاتورگی نقشی در تحولات تاریخی نداشت، تاریخ ویژگی اسرارآمیزی می‌یافت. اما، در دوره‌های مختلف تحول جامعه و در کشورهای مختلف، این کاتورگی به صور گوناگون ظاهر شده است. دوره‌های تحول پایدار، کاتورگی (مثل مرگ یا کشته شدن رهبر سیاسی، فاجعه‌های طبیعی، غیره)، تحول جامعه را فقط از یک مسیر به مسیری که درست در مجاور آن بوده است منتقل کرده است: شرایط رفاهی مردم دستخوش تغییرات اندک شده است، طرحهای ساختمانی تغییر داده شده‌اند، سیاستهای داخلی یا خارجی شدیدتر یا میانه‌روتر شده‌اند. تصویر دیگری که از نظر کیفی متفاوت است در دوره‌های تحول ناپایدار مشاهده می‌شود (درست قبل از آغاز جنگها یا انقلابها، در دوره‌های تشنج و بی‌نظمی اجتماعی): انحرافات کاتوره‌ای اندک، مسیرهای کاملاً متفاوتی را در تحولات بعدی جامعه رقم زده‌اند. در این دوره‌ها، چنین به‌نظر می‌رسد که «شانس بر جهان حاکم است». اما در چنین مواردی معمولاً فراموش می‌شود که این نتایج مهمِ ناشی از عمل کاتورگی، در واقع فقط از این‌رو ممکن شده‌اند که «جریان زندگی» ناپایدار را کاتورگی ناچیزی کاملاً عوض کرده است، و این کاتورگی صرفاً ماشه راکشیده است. این شعر کودکانه، وضعیت را به‌خوبی نشان می‌دهد،

میخ نبود، نعل افتاد.

نعل نبود، اسب لنگ شد.

اسب نبود، پیام دیر رسید.

اعلام خطر نشد، شهر از دست رفت.

این مثالی گویاست از حرکتی که در هر نقطه ناپایدار است: اگر میخ موجود بود، نعل‌اسب محکم می‌شد؛ اگر نعل‌اسب محکم بود، اسب لنگ نمی‌شد؛ اگر اسب لنگ نبود (یا اگر اسب دیگری وجود داشت) پیغام به‌موقع می‌رسید؛ اگر پیغام به‌موقع رسیده بود، شهر از دست نرفته بود.

ماهیت طبیعت یکپارچه است یا فراکتالی؟

تصویرهای مربوط به خمینه‌های فراکتالی که در صفحهٔ دنباله‌های کاتوره‌ای حاصل از سیستمهای قطعی رسم شده‌اند به‌طور قابل ملاحظه‌ای منظم هستند، نگاه کنید به کتاب مؤلفان این مقاله و یا کتاب پاتیگن و ریشترکه شامل تعداد زیادی از این خمینه‌ها با ساختار ریز آنهاست. به گفتهٔ روئل این تصویرها «جذابیتی زیباشناختی» دارند. این منظومهٔ منحنی‌ها و ابرهای متشکل از نقطه‌ها، گاهی شبیه توده‌های کهکشانی وگاهی شبیه بیشه‌های عجیب و اسرارآمیز هستند. این حوزه‌ای از تحقیقات است که در آن هماهنگیهای نوینی کشف خواهد شد. این خمینه‌های با ساختارهای رقیق‌شوندهٔ «شناور» (که برحسب قاعده چنانکه خواهیم گفت دارای ابعاد غیرصحیح هستند) فراکتال نام دارند.

مثالی از فراکتالها، تحول پیچیدهٔ سیستم شکارچی ـ شکار و یا مشابه گسستهٔ آن است که با معادله‌های لوتکا ـ ولترا[1] مدل‌سازی می‌شود.

$$\begin{pmatrix} x_{n+۱} \\ y_{n+۱} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \frac{h}{۲} \begin{pmatrix} f(x_n, y_n) + \varrho f[x_n + \varrho f(x_n, y_n) y_n + \varrho g(x_n, y_n)] \\ g(x_n, y_n) + g[x_n + \varrho f(x_n, y_n) + \varrho g(x_n, y_n)] \end{pmatrix}$$

مثال دیگر، خمینهٔ تصادفی نوسانهای سیستم ناخودگردانی مانند

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x + x^۳ = F_۰ \sin(\omega t)$$

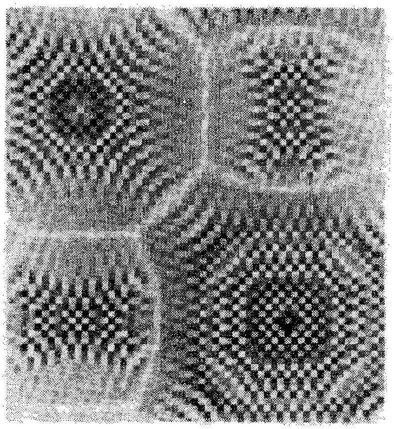
است.

شبکه گسسته‌ای که با معادلهٔ

$$\begin{aligned} \frac{du_j l}{dt} =& u_{jl} - (۱ + i\beta)|u_{jl}|^۲ u_j l \\ &+ \kappa(۱ - ic)(u_{j,l+۱} + u_{j,l-۱} + u_{j+۱,l} + u_{j-۱,l} - ۴u_{jl}) \end{aligned}$$

توصیف می‌شود که در آن $j, l = ۱, ۲, \ldots, N$ و $N \gg ۱$ برای فوق بحرانیت بزرگ، یعنی به‌ازای مقادیر $r = ۱/\kappa \geq ۰$، به آشوب فضا زمانی می‌انجامد. در این فرایند، برانگیختگیهای

1. Lotka-Volterra



شکل ۸ـ۳ مدوله شدن امواج و نوسانهای πـπ در مدل شبکه گسسته

طول‌موج کوتاه مهمترین نقش را دارند. در حالت فرین، سیستم دارای رفتار موسوم به نوسانهای πـπ است که متناظر با نوسانهای فاز مقابل در اجزای شبکه‌های مجاور است. ساختار آشوبناک حاصل بسیار جالب است ـ همانند تصویرهای کلایدسکوپی است که هرگز برحسب زمان تکرار نمی‌شوند. پیچیدگی ساختار فضایی آن را تعداد اجزاء شبکه تعیین می‌کند، شکل ۸ـ۳.

اگرچه واژهٔ فراکتال را بنوا مندل بروت[1] اخیراً وارد علم کرده است، مدتی است که صور فراکتالی موضوع مباحث تحقیقاتی هستند. از روی کثرت فراکتالها می‌توان قضاوت کرد که طبیعت صور فراکتالی را بسیار «دوست دارد». کلوییدها، تخلیه‌های الکتریکی، حالت‌های جامد متخلخل، خطوط ساحلی، ساختار جریانهای متلاطم (که اغلب مسیرهای آنها نقاطی هستند که به‌وسیلهٔ سیستمهای قطعی با رفتار آشوبی به‌دست می‌آیند) و مثالهای بسیار دیگر، از جمله گونه‌های فراکتالی هستند. بدون شک، زیبایی فراکتالها با ویژگی خود ـ همانندی آنها در ارتباط است که به‌صورت طرحهای تکراری در مقیاسهای مختلف بروز می‌کند، نگاه کنید به تصویرهای کتاب پاتگین و ریشتر.

اگر سطح کوچک دلخواهی از یک خمینهٔ فراکتالی (یا تصادفی) را زیر میکروسکوپ بزرگ کنیم، یعنی، اگر قدرت تفکیک را بسیار زیاد کنیم، باز هم تصویر بسیار پیچیده‌ای با جزئیات گوناگون خواهیم داشت و همین‌طور می‌توان تا بینهایت این کار را تکرار کرد! ـ نکته‌ای که واقعاً خارق‌العاده است. واقعاً تا بینهایت؟ برای این زنجیرهٔ کوچک کردن و جزئی‌نگریهای متوالی، چه‌چیز حد آستانه را مشخص می‌کند؟ پیش از اینکه به این سؤال پاسخ دهیم، ببینیم چه‌چیز ممکن است این فرایند را مختل سازد. بگذارید قاعدهٔ زیربنایی را به‌خاطر آوریم: هر چقدر که دو مسیر اولیه به یکدیگر نزدیک باشند باید بتوان بین هر دو مسیر دلخواه (مثلاً، در رباینده‌های عجیب)، هر تعداد از مسیر دیگر را یافت (!) ـ بدیهی است که لازمهٔ آن، پیوسته بودن فضایی است که مسیرها در آن قرار دارند!

1. Benoit Mandelbrot

این گسسته بودن فضا (وقتی متناظر با مسئلهٔ معینی باشد) است که عامل محدود کردن جزئیات بُعدی ساختار فراکتالی می‌شود. و در مورد آشوب دینامیکی، همین گسستگی عامل ایجاد آشوب است. این نکته را بیشتر بررسی می‌کنیم.

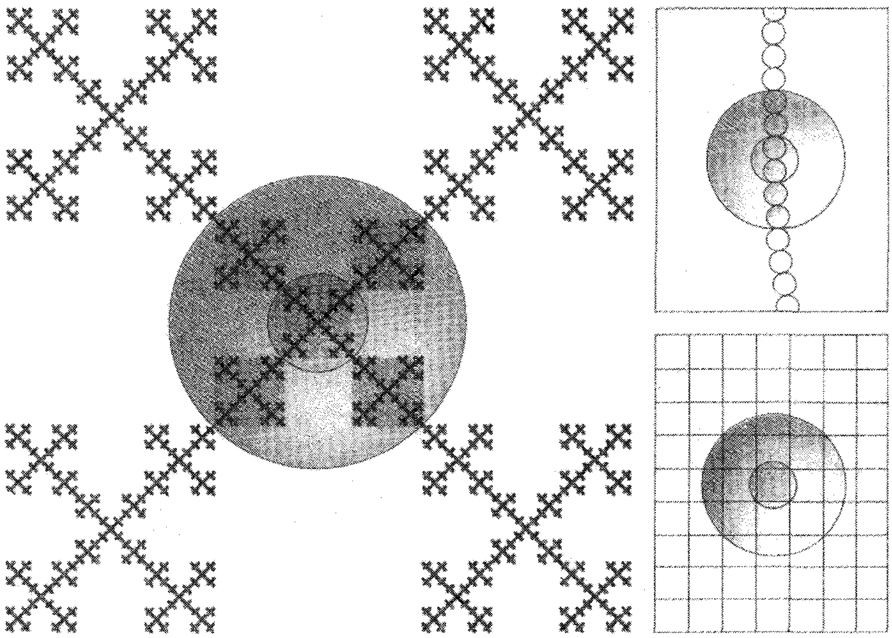
فرض کنید که فضا گسسته است (حال ممکن است فضای حقیقی باشد که در آن ذرات مایع حرکت می‌کنند و یا فضایی مجرد مثل فضای حالت یا فضای فاز). گسستگی ممکن است به دلایل مختلف به‌وجود آید. در مورد جریان مایع، طبعاً بدان‌سبب است که فرض بینهایت کوچک بودن خط مسیر یک ذره مایع، فرضی ناممکن است. در این صورت هر ذره در مسیری بسته حرکت خواهد کرد و آشوب ازمیان می‌رود.

گسسته بودن فضا ممکن است دلایل عمیقتری داشته باشد. در وهلهٔ اول ممکن است به گسسته بودن اجزایی که جریان مایع یا گاز را در فضای حقیقی تشکیل می‌دهند (مثلاً، مولکولهای آنها) مربوط شود. همچنین، گسسته بودن فضا ممکن است مربوط به سرشت کوانتومی اجزای تحت بررسی باشد، زیرا در این مورد شرط کوانتیدگی باعث گسسته بودن فضای فاز می‌شود.

رشته‌های فراکتالی

ضمن بحث گفتیم که ساختارهای فراکتالی ابعاد غیرصحیح دارند. معنای این حرف چیست؟ شاید ابعاد غیرصحیح نتیجهٔ تقریبها باشند؟ موضوع کاملاً عکس آن است. وقتی با چشم خود ابعاد شیئی را برآورد می‌کنیم، طبق عادت، عدد صحیح به‌دست می‌آوریم. واقعاً، بُعد یک گلوله کاموا چیست؟ اگر از دور به آن نگاه کنیم، جسمی نقطه‌ای می‌بینیم که نشان می‌دهد بُعد جسم صفر است. اگر نزدیکتر برویم، آن وقت بُعد آن سه می‌شود. اگر این جسم را به‌دقت بررسی و تک‌تک رشته‌های کاموا را دنبال کنیم، آن وقت بُعد آن ظاهراً یک می‌شود اما چرا بُعد جسم به‌صورت پرشی تغییر می‌کند؟ خب، برای اینکه ذهن ما چنین عادت کرده است و در نتیجه «ظاهراً» به‌نظر می‌رسد که چنین باشد. برای به‌دست آوردن پاسخ درست در تحلیل اشیاء عجیبی مثل فراکتالها (که مثال گلولهٔ کاموا هم تا حدی از آن جمله است)، باید واژهٔ بُعد را دقیق‌تر تعریف کنیم.

یک راه انجام این کار شمارش تعداد اجزاء تشکیل‌دهندهٔ مورد نظر در داخل کره‌ای به‌شعاع r است که مرکزش درون جسم قرار دارد، شکل ۸ـ۴. تعداد اجزاء موجود، N، در داخل چنین کره‌ای، با توان D ام شعاع کره متناسب خواهد بود، که در اینجا D همان بُعد سیستم است. به عبارت دیگر، اگر ضریب تناسب را واحد بگیریم، $N = r^D$ یا $D = \ln N/\ln r$. برای جسمی که به‌شکل خط راست است، تعداد اجزای تشکیل‌دهندهٔ جسم درون چنین کره‌ای، با سه برابر شدن شعاع کره، سه برابر می‌شود، یعنی $D = ۱$. اگر جسم متشکل از اجزای پکیده در یک صفحه باشد، سه برابر کردن



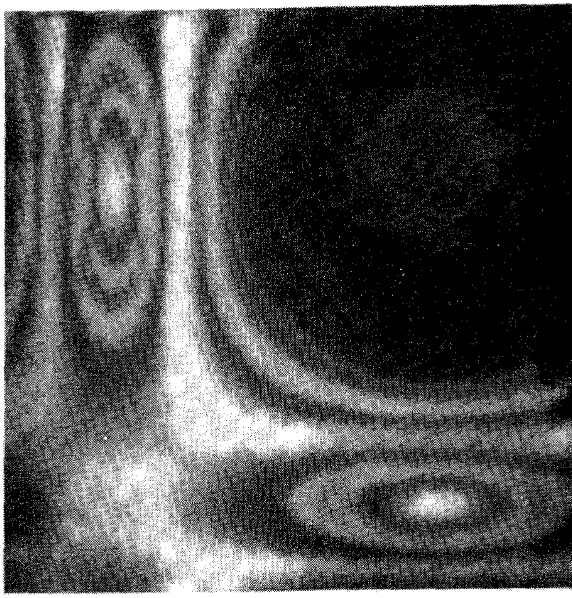
شکل ۸ـ۴ «دانهٔ برف» فراکتالی (با تشکر از تی ویچک از انستیتو تحقیقاتی فیزیک فنیِ فرهنگستان علوم مجارستان در بوداپست و ل. م. سندر ساینتیفیک امریکن **۲۵۶**، ۸۲ (۱۹۸۷)).

r باعث می‌شود تا N نُه برابر شود. در نتیجه بُعد جسم $D = ۲$ خواهد بود. تا اینجا، تعریف دقیق بُعد، نتایج متعارف و بدیهی را که انتظار داریم، به‌دست می‌دهد. اما اکنون حالتی را در نظر بگیرید که در شکل ۸ـ۴ نشان داده شده است، این حالت دیگر بدیهی نیست. در این ساختار سه‌برابر کردن شعاع کره، r، به پنج‌برابر شدن تعداد اجزایی که درون کره قرار می‌گیرد می‌انجامد، یعنی تعداد اجزا سریعتر از حالت جسم یک‌بُعدی و کُندتر از هنگامی که جسم دوبُعدی است، رشد می‌کند. این بدان‌سبب است که ساختار مورد نظر همه‌جا «متخلخل»، «سوراخدار» یا فراکتالی است، به‌طوری که بُعد آن عددی غیرصحیح می‌شود؛ در واقع بُعد این ساختار $D = ۱٫۴۶$ است.

ساختارهای خودسازمان‌یافته

اکنون می‌خواهیم به بخش دوم سیاحت در فیزیک غیرخطی ـ آشوب و نظم بپردازیم، یعنی به مسئلهٔ نظم ناشی از بی‌نظمی، یعنی به مسئلهٔ خودزایی یا خود ـ تولیدی ساختارها.

شکل ۸ـ۵ تولد ساختاری منظم را از سیستمی که در ابتدا بی‌نظم است نشان می‌دهد و از شبیه‌سازی رایانه‌ای محیط دوبُعدی با مدل شبکه‌ای به‌دست آمده است که در شکل ۸ـ۳

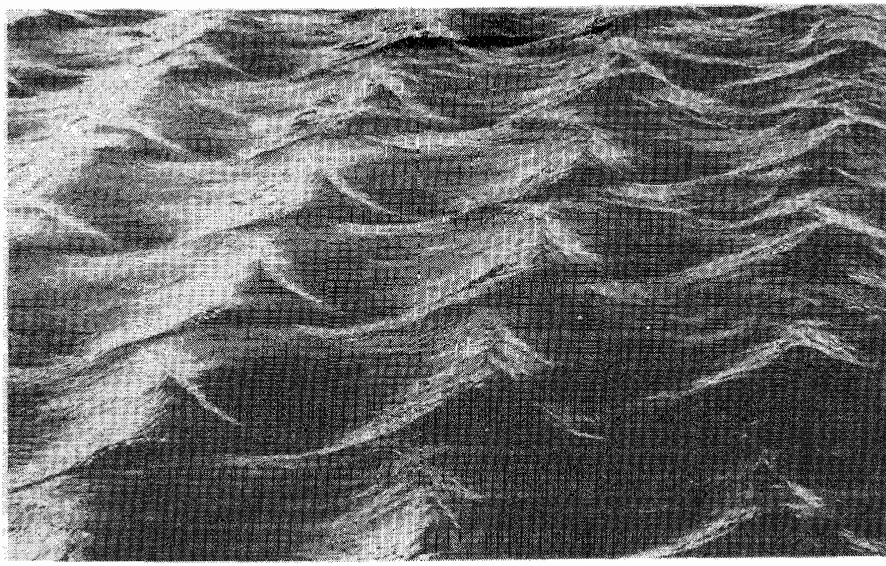


شکل ۸ـ۵ توزیع فضایی میدان شبکه غیرخطی.

به آن اشاره کردیم. مشاهده می‌کنیم که از بی‌نظمی، نظم پدید می‌آید ـ ولی این شاید فقط در شبیه‌سازیهای رایانه‌ای رخ می‌دهد؟ شاید حضور همیشگی نوفه و افت و خیزهایی که در دنیای واقعی وجود دارند مانع از تشکیل چنین خودسازمان‌یافتگی در طبیعت می‌شود؟

مثال خوبی که در دنیای واقعی می‌شناسیم، خود ـ تولیدی معروف شبکهٔ شش‌ضلعی منظم از مایعی است که در ابتدا مخلوطی ناهمگن را تشکیل می‌دهد (نگاه کنید به کتاب نویسندگان حاضر و یا کتاب هاکن). این شبکهٔ (ریلی ـ بنارد) نتیجهٔ جریانهای همرفتی در لایه‌ای افقی از مایع (در این مورد روغن سیلیکون) هنگامی است که از زیر به‌طوریکنواخت گرم شود. در این فرایند، سطح بالایی آزاد است و کشش سطحی نقش مهمی بازی می‌کند. با افزودن پودر آلومینیم به مایع تجسم آن آسانتر می‌شود.

شبکهٔ شش‌گوش همرفتی فقط هنگامی به‌وجود می‌آید که اختلاف دمای لایهٔ گرم شدهٔ زیرین مایع و سطح سرد بالایی از یک مقدار بحرانی مشخص بیشتر شود. فقط در این مورد است که تبادل گرمای مولکولی (در نبود حرکت ماکروسکوپی در آن لایه از مایع) قادر به انجام «وظیفهٔ» خود که انتقال دما باشد، نیست و به ناپایداریهای همرفتی در درون لایه منجر می‌شود. این ناپایداریها از افت و خیزها (یعنی همان «بی‌نظمی»!) شروع می‌شود و به حرکت گردابی با مقیاس مشخصه‌ای که به ضخامت لایه بستگی دارد، می‌انجامد. (علت این ناپایداری آن است که قسمت گرم شده و سبکتر مایع با پیروی از قانون ارشمیدس به بالا حرکت می‌کند و قسمت‌های سرد و سنگینتر مایع را



شکل ۸ـ۶ ساختارهای موجی سه‌بُعدی [از آلبوم حرکت شارهٔ مین ـ ین ـ سو و م.ون لایک، ویراستاران. (پارابولیک‌پرس، استانفورد ۱۹۸۲، شکل ۱۹۴].

به پایین می‌راند.) بدین‌ترتیب باز هم ناپایداری داریم. اما این دفعه در جهت عکس: این ناپایداری به آشوب نمی‌انجامد، بلکه نظم و ساختارهای منظم را ایجاد می‌کند! ناپایداری حالت آرام و تعادلی مایع، رشد حرکت در مقیاسهای مشخص خاصی را ترجیح می‌دهد و این رشد را در مقیاسهای دیگر سرکوب می‌کند، و در نهایت به جریانهایی با ساختار منظم می‌انجامد.

در طبیعت، اغلب به این جریانهای با ساختار منظم برمی‌خوریم. در میان آنها می‌توان مثلاً از گردبادهای بزرگ در جوّ زمین، و همچنین از ساختارهای منظم «گردشارهای توپولوژیکی» که در شکل ۸ـ۱ دیده‌ایم نام برد. این گردشارهای توپولوژیکیِ مواد آتشفشانی بر اثر نمایهٔ خاص پوستهٔ توده‌های آتشفشانی شکل گرفته‌اند.

اما با این حال، هنگامی که دربارهٔ خودسازمان‌یافتگی و خودتولیدی ساختارها صحبت و تحول آنها را به‌سوی تکامل دنبال می‌کنیم (احتمالاً به‌طور ناخودآگاه) چیزی مهمتر و به‌مراتب بنیادی‌تر و غیرمعمول‌تری از پدیدآمدن صرف ساختارهای منظم مشابه با ساختار موجی موجود در شکل ۸ـ۶ را در نظر داریم. این شکل ساختار منظم سه‌بُعدی امواج را برروی سطح مایع نشان می‌دهد. این امواج، ناشی از ناپایداری، از رشتهٔ همگنی از امواج استوکس تخت و با شیب زیاد حاصل می‌شوند.

بی‌نظمی و ساختارها

مفهوم تلاطم را به‌عنوان آشوب فضا زمانی ساختارها به‌خوبی می‌شناسیم. کافی است به تحول

حلقه‌های دود سیگار بیندیشید! این مفهوم را می‌توان در محیطهای ناهمسانگرد و خصوصاً برای جریانهای برشی نیز به‌کار برد. ساختارها ناشی از تحول ناپایداریهای برشی هستند. دینامیک و مشخصهٔ برهم‌کنش آنها در امتداد جریان هرچه پیچیده‌تر می‌شود و بالاخره (کمی دورتر) شاهد تولد تلاطم می‌شویم.

برای تعیین قوانین کلی دینامیک غیرخطی این ساختارها، بهتر است از سیستمهای غیرتعادلی مصنوعی در آزمایشگاه و یا حتی در خانه استفاده کنیم. این سیستمها امکان بررسی‌های دقیق را فراهم می‌سازند و همچنین شناخت خوبی از جهان‌شمول بودن توپولوژی ساختارهای مذکور و تبدیلهای آنها در برهم‌کنشهایشان با یکدیگر، به‌دست می‌دهد. یکی از این ابزارها یا «رسانه‌های» مصنوعی را می‌توان در خانه، به‌کمک دوربین ویدیو و تلویزیون برپا کرد: دوربین را به‌طرف تلویزیون بگیرید و پیغام آن را به ورودی ویدیوی تلویزیون بفرستید. این «دوربین + تلویزیون + فیدبک» سیستمی است که اگر به‌قدر کافی تقویت شود، خود برانگیخته است. طبعاً، ضریب تقویت باید نه‌تنها از نظر زمانی بلکه از نظر مکانی هم از مقدار مشخصهٔ بحرانی بیشتر باشد (این کار را می‌توانید با نزدیکتر شدن به صفحهٔ تلویزیون و در نتیجهٔ بزرگ کردن تصویر انجام دهید).

در نتیجهٔ این خودبرانگیختگیها، تصاویر ویدیویی را برروی صفحهٔ تلویزیون مشاهده خواهید کرد. به‌صورت مستقیم، این تصاویر ربطی به آنچه دوربین ویدیویی شما «می‌بیند»، ندارد. اگر آزمایش را در اتاقی تاریک انجام دهیم، درمی‌یابیم که این سیستم با برانگیختگی «سخت» مشخص می‌شود. در تاریکی، «روشن کردن» صفحهٔ تلویزیون، به تولید یک تپ نوری نیاز دارد. می‌توانید با نزدیک آوردن شعلهٔ یک کبریت به عدسی دوربین، پخش شدن آن را برروی صفحهٔ تلویزیون (برطبق قوانین پخش غیرخطی) تماشا کنید. تصاویری که بدین‌ترتیب به‌دست می‌آوریم بیشتر شبیه ساختارهای فراکتالی است که پیشتر دیدیم. مارپیچها، «رشته‌های چسبنده» و بسیاری دیگر را برروی صفحهٔ تلویزیون مشاهده می‌کنیم، نگاه کنید به کتاب گاپونوف ـ گرخوف و رابینوویچ.

دینامیک ساختارهای حاصل در آزمایش خانگی با رسانه‌های ناپایدار دارای تنوع خیره‌کننده‌ای هستند. این دینامیک ممکن است برحسب شرایط خاص حاکم، آشوبی یا منظم باشد. به‌کمک یک دوربین دیگر که به سمت صفحهٔ تلویزیون گرفته شده است، می‌توانیم تصاویری را به‌دست آوریم که خود ـ نوسانهای سیستم «دوربین + تلویزیون + فیدبک» را نشان می‌دهد یعنی ساختارهای ویدیویی با گذشت زمان به‌صورت دوره‌ای جانشین یکدیگر می‌شوند.

پایداری چندجانبه و حافظه

از سیستم «دوربین + تلویزیون + فیدبک» می‌توان برای اهداف کاملاً غیرمنتظره استفاده کرد، مثلاً، برای به‌دست آوردن اطلاعات موازی وارونه. بگذارید اندکی در این مورد فکر کنیم.

سه دهۀ پیش معلوم شد که تعداد زیادی از فرایندهایی که به دید قورباغه مربوط می‌شود (از جمله تمام محاسبات مربوط به تشخیص اشیاء ساده مثل حشرات) در شبکیۀ چشم قورباغه رخ می‌دهد. به‌زبان دنیای رایانه‌ای کنونی، شبکیه صرفاً مجموعه‌ای از پردازشگرهای موازی است که تقریباً هیچ زمانی را صرف برقراری ارتباط با یکدیگر نمی‌کنند. چرا با یکدیگر ارتباط برقرار نمی‌کنند؟ ـ در مورد شبکه‌ای متشکل از فقط دوازده پردازشگر مرتبط با یکدیگر، تقریباً تمام زمان صرف ردوبدل کردن اطلاعات می‌شود، چنانکه اساساً، برای ارزیابی عملی اطلاعات، یعنی برای تشخیص جسم، زمانی باقی نمی‌ماند.

ساده‌ترین طرح رایانه‌ای با پردازشگرهای اطلاعاتی موازی برای تصاویر با ماتریسی مستطیلی از پردازشگرها مشخص می‌شود، به‌طوری که هر پردازشگر فقط با همسایه‌هایش اطلاعات ردوبدل می‌کند. می‌توانیم تصویری را که می‌خواهیم ارزیابی کنیم، به‌کمک دوربین ویدیو برروی این ماتریس بیندازیم. ابزارهایی از این دست را پردازشگرهای تصویر منطقی یاخته‌ای یا اتوماتا می‌نامند. اگر فرض کنیم که هر جزء ماتریس فقط قادر به انجام عملیات معدودی است، تعداد حالت‌هایی که می‌تواند برحسب دامنۀ پیغام فرودی دریافت کند نیز اندک خواهد بود. فرض کنید می‌خواهیم صفحۀ تلویزیون رنگی در سیستم تلویزیون با فیدبک را به‌عنوان این پردازشگر یاخته‌ای به‌کار بریم. به‌کمک شبکه‌ای از «جعبه‌های باز» که در مقابل صفحه قرار داده شده‌اند، مساحت آن را به یاخته‌های کوچک تقسیم می‌کنیم (ابعاد این یاخته‌ها، طبعاً نباید کوچکتر از کوچکترین نقطه‌هایی باشند که تلویزیون قادر است به‌طور پایدار بازسازی کند). حال، هر یک از یاخته‌ها ممکن است در یکی از چهار حالت مستقل باشد (حالت پایۀ برانگیخته نشده در مقابل سه حالت برانگیخته که با قرمز، آبی و سبز نشان داده می‌شوند). بنابراین تعداد تصاویر موجود پایدار (رباینده‌ها) در سیستم «دوربین + تلویزیون + فیدبک»، می‌تواند به‌قدرکافی زیاد باشد. سیستم ممکن است به‌طور چندگانه پایدار باشد. پایداری تصاویر از طرفی باعث می‌شود تا آنها را به‌خاطر بسپاریم، و از طرف دیگر قادر باشیم تصاویر مختلف را از یکدیگر تمیز دهیم. تصاویر زیبایی از پدیدۀ پایداری چندجانبه در سیستم تلویزیونی، درکتاب ما آمده است.

دینامیک غیرخطی در جامعه

باید اضافه کرد که خود مدلها و روشهای دینامیک غیرخطی، بی‌وقفه گسترش می‌یابند. فقط به ذکر یکی از جنبه‌های نسبتاً جدید این توسعه، یعنی مدل‌سازی دینامیک غیرخطی سیستمهای گسترده به کمک اتوماتای یاخته‌ای اکتفا می‌کنیم. در این مورد، «محیط» را مجموعه‌ای از یاخته‌های گسسته در نظر می‌گیریم که با قواعد مشخصی با یکدیگر برهم‌کنش می‌کنند، و در زمان گسسته

تحول می‌یابند. این مدلها برای مسائل سنتی فیزیک و مخصوصاً برای مسائل مربوط به مدل‌سازی فرایندهای تکاملی و همین‌طور خودآموزی (شبکه‌های عصبی)، بسیار کارامد هستند.

همان‌طور که در کتابمان آمده است، برای قوانین برهم‌کنشی فوق‌العاده ساده بین یاخته‌ها هم، اتوماتای یاخته‌ای ممکن است رفتاری بسیار پیچیده و حتی آشوبناک داشته باشد. با تجربه‌ای که تاکنون از این سیستمهای غیرخطی اندوخته‌ایم، دیگر نباید از این نتایج تعجب کنیم. اگر تحول زمانی ساختارهای فضایی پیچیدهٔ غیرتکراری را در اتوماتای یاخته‌ای دنبال کنیم، مشاهده می‌کنیم که یاخته‌های همسایه، یکدیگر را می‌انگیزند درحالی که آنهایی که خیلی به‌هم نزدیک نیستند فرایند را کُند می‌کنند. رنگ نمایانگر شدت برانگیختگی است، سیاه نشان می‌دهد که هیچ‌گونه برانگیختگی وجود ندارد.

با وجود اینکه تجربهٔ خوبی در پیشگویی نداریم، به‌جرات اعلام می‌کنیم که در دههٔ آینده، روشهای فیزیک غیرخطی و دینامیک غیرخطی نه‌تنها برای پزشکان و متخصصان محیط‌زیست، بلکه برای اقتصاددانان، جامعه‌شناسان و جغرافیدانان نیز به‌صورت ابزار رایج درخواهد آمد.

در واقع، همان‌طور که اخیراً معلوم شده است، رشد شهرها و تحول شبکهٔ حمل‌ونقل درون‌شهری و بین‌شهری به‌شدت شبیه رشد خوشه‌های فراکتالی در مدلهایی با پخش «محدود»، است.

امروزه، اغلب متخصصان بر این باورند که ایدهٔ تعادل دینامیکی، که از مبانی مدلهای اقتصادی سنتی است، رضایتبخش نیست، اکنون دریافته‌ایم که ساختن مدلهای دینامیکی غیرخطی الزاماً اجتناب‌ناپذیر است. یک رهیافت پیشنهادی بَک، تنگ و ویزنفلد[1]، بحرانیت خودسازمان‌یافته است. هنگامی که سیستم مدل‌سازی شده به یک حالت بحرانی می‌رسد، دستخوش خودباز سازمان‌یافتگی می‌شود، و شکلی جدید اختیار می‌کند که می‌توان آن را با احتمال نسبتاً خوبی پیش‌بینی کرد. نوع مشابهی از پیش‌بینی ـ که البته در مورد گذشته به‌کار می‌رود! ـ مثلاً، به‌کمک روش دینامیک بحرانی در مدلهای مسابقات تسلیحاتی بین کشورها بود که در نهایت به جنگ میان آنها می‌انجامید. نگاه کنید به مقالهٔ ا. سوپرشتاین. در واقع روشهای دینامیک بحرانی جهان‌شمول هستند. این جهان‌شمولی، در ماهیت تغییرات مشاهده شده در دینامیک فرایندهای کاملاً متفاوت بروز می‌کند، که خود ناشی از تغییرات پارامترهایی است که تحول این فرایندها را تعیین می‌کند. بنابراین، همان تغییرات (دوشاخه‌شدگی) که در مدلهای یاد شدهٔ مسابقات تسلیحاتی رخ می‌داد، در نوسانهای مشاهده شده در آزمایشهای مولدهای ریزموجی نیز دوشاخه‌شدگی دو برابر شدن (دوره) و بالاخره گذار به آشوب به‌وقوع می‌پیوندند.

1. Bak, Tang and Wiesenfeld

برای مطالعهٔ بیشتر

A. Superstein: Nature **309**, 303 (1984).

P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld: Self-Organized Criticality, Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987).

A. V. Gaponov-Grekhov, M. I. Rabinovich: *Nonlinearities in Action* (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1922).

H. Haken: *Synergetics* (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1978).

M. V. Nezlin, E. N. Snezhkin: *Rossby Vortices, Spiral Structures, Solitons* (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1992).

H-O. Peitgen, P. H. Richter: *The Beauty of Fractals* (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1992).

۸ـ۲ آشوب کوانتومی[۱]

نوشتهٔ: مارتین سی. گوتزویلر[۲]

آیا آشوب در دنیای کوانتومی هموار و موج‌گونه نهفته است؟ کارهای اخیر نشان می‌دهد که پاسخ مثبت است ـ علائم آشوب حتی در طرحهای موجی مربوط به ترازهای انرژی اتمی نیز وارد می‌شوند.

آلبرت اینشتین در ۱۹۱۷ مقاله‌ای نوشت که به‌مدت چهل سال کاملاً نادیده گرفته شد. او در آنجا پرسشی را مطرح کرد که فیزیکدانها فقط اخیراً به آن پرداخته‌اند: آشوب کلاسیک که در همه جای جهان نهفته است، بر مکانیک کوانتومی، نظریه‌ای که دنیای اتمی و زیراتمی را توصیف می‌کند، چه

۱. اصل این مقاله در ژانویهٔ ۱۹۹۲ در مجلهٔ ساینتیفیک امریکن به‌چاپ رسید. اجازهٔ چاپ مجدد آن گرفته شده است.

۲. مارتین سی. گوتزویلر عضو فرهنگستان ملی علوم امریکاست. او در مرکز تحقیقاتی توماس. جی. واستون IBM در یورکتاون هاتیز، نیویورک کار می‌کند و همزمان استاد متالورژی دانشکدهٔ مهندسی دانشگاه کلمبیا نیز هست. او که متولد سوئیس است، تحصیلات خود را در مدارس دولتی سوئیس و در انستیتو فدرال فناوری در زوریخ انجام داد و در نهایت از این انستیتو مدرک خود را در سال ۱۹۵۰ در فیزیک و ریاضی دریافت کرد. دکترای او در فیزیک از دانشگاه کانزاس در سال ۱۹۵۳ است. گوتزویلر پس از اینکه به‌مدت هفت سال در آزمایشگاه تحقیقاتی اکتشاف و تولید کمپانی نفتی شل کار کرد، در سال ۱۹۶۰، به IBM پیوست. در ابتدای کارش در IBM به تحقیق دربارهٔ برهم‌کنش الکترونها در فلزات پرداخت و اکنون تحقیقات او دربارهٔ رابطهٔ بین مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی است. او همچنین به مکانیک سماوی و تاریخ فیزیک و نجوم علاقه دارد. به‌علاوه، او موسیقیدانی آماتور، گردآورندهٔ کتابهای قدیمی علمی و کوهنورد است.

تأثیری می‌گذارد؟ البته، اثرات آشوب کلاسیک مدتهاست که مشاهده شده‌اند ـ کپلر از حرکت نامنظم ماه به دور زمین آگاه، و نیوتون به‌شدت از این پدیده دلخور بود. جورج ویلیام هیل، منجم امریکایی، در پایان قرن نوزدهم نشان داد که این بی‌نظمی به‌طور کامل ناشی از کشش گرانشی خورشید است. اندکی بعد، هانری پوانکاره، ریاضیدان، فیزیکدان و منجم بزرگ فرانسوی، حدس زد که حرکت ماه فقط یک مورد خفیف از بیماری مادرزادی است که تقریباً در همه اشیاء تأثیر دارد. در نهایت، پوانکاره متوجه شد که بیشتر سیستمهای دینامیکی هیچ طرح منظم یا تکراری قابل تشخیص ندارند. رفتار حتی یک سیستم ساده هم ممکن است چنان به شرایط اولیه حساس باشد که نتیجهٔ نهایی نامشخص شود.

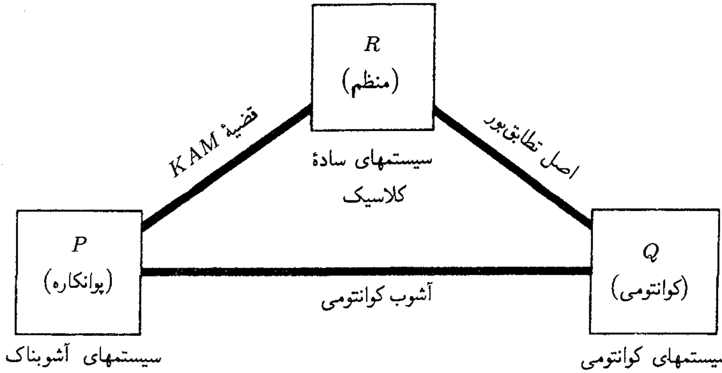
تقریباً همزمان با کار عظیم پوانکاره دربارهٔ آشوب کلاسیک، ماکس پلانک انقلاب دیگری را آغاز کرد، که به نظریهٔ جدید مکانیک کوانتومی انجامید. سیستمهای ساده‌ای که نیوتون بررسی کرده بود، دوباره در مقیاس اتمی مطالعه شدند. مشابه کوانتومی آونگ ساده، لیزر است؛ پرتابه‌های دنیای اتمی، باریکهٔ الکترونها و پروتونها هستند و چرخ دوّار، الکترون چرخنده است (اساس نوارهای مغناطیسی). حتی خود منظومهٔ شمسی هم در هر یک از اتمهای جدول تناوبی عناصر بازتاب یافته است.

شاید بارزترین خصلت دنیای کوانتومی، سرشت هموار و موج‌گونه آن باشد. این خصلت این پرسش را مطرح می‌سازد که آشوب چگونه خود را هنگام عبور از دنیای کلاسیک به دنیای کوانتومی نشان می‌دهد. چگونه می‌توان ماهیت بسیار بی‌نظم آشوب کلاسیک را با سرشت هموار و موج‌گونهٔ پدیده‌ها در مقیاس اتمی آشتی داد؟ آیا آشوب در دنیای کوانتومی نیز وجود دارد؟

از کارهای مقدماتی چنین برمی‌آید که آشوب در دنیای کوانتومی هم موجود است. آشوب در توزیع ترازهای انرژی برخی سیستمهای اتمی یافت می‌شود؛ حتی به‌نظر می‌رسد که در طرحهای موجی مربوط به این ترازها نیز رخنه می‌کند. آشوب را در پراکندگی الکترونها از مولکولهای کوچک نیز می‌توان یافت. اما باید تأکید کرد که اصطلاح «آشوب کوانتومی» بیشتر برای توصیف معمایی بغرنج به‌کار می‌رود، تا برای مشخص کردن مسئله‌ای خوش‌تعریف.

برای به‌دست آوردن شناختی بهتر از آشوب کوانتومی، در نظر داشتن تفسیر زیر از وضعیت کلی موضوع می‌تواند سودمند باشد. تمام بحثهای نظری مکانیک را، شاید به‌طور مصنوعی، بتوان به سه بخش تقسیم کرد نگاه کنید (به شکل ۸ـ۷)، اگرچه طبیعت این تقسیم‌بندیی را به‌رسمیت نمی‌شناسد.

مکانیک کلاسیک مقدماتی در بخش اول قرار می‌گیرد. این بخش شامل همهٔ سیستمهای خوب و تمیز است که رفتار ساده و منظمی از خود نشان می‌دهند، و به همین دلیل آن را



شکل ۸ـ۷ مکانیک به‌طور سنتی (و مصنوعی) به سه بخشی که در اینجا نشان داده شده است تقسیم می‌شود، این بخشها با خطوط ارتباطی متعدد به‌هم متصل‌اند. موضوع آشوب کوانتومی برقراری ارتباط بین قلمروهای P و Q است.

R یعنی منظم می‌نامیم. بخش R شامل ابزار ریاضی ساخته و پرداخته شده‌ای به‌نام نظریهٔ اختلال نیز هست که از آن برای محاسبهٔ اثرات برهم‌کنشهای کوچک و آشفتگیهای خارجی مثل خورشید بر حرکت ماه به‌دور زمین استفاده می‌شود. اکنون به‌کمک نظریهٔ اختلال، بخش بزرگی از فیزیک را به‌صورت تغییرات جزئی بر رفتار سیستمهای منظم در نظر می‌گیرند. اما واقعیت بسیار پیچیده‌تر است؛ سیستمهای آشوبناک خارج از گسترهٔ نظریهٔ اختلال قرار دارند و بخش دوم را می‌سازند.

چون اولین بررسی‌های تحلیلی دقیق بر سیستمهای بخش دوم به دست پوانکاره انجام گرفت، این بخش را به‌افتخار او P نام می‌دهم. این بخش پر است از سیستمهای دینامیکی آشوبناک که در هر گوشه‌ای از علم وجود دارند (نگاه کنید به کراچفیلد[1] و همکاران، در مجموعهٔ مقالاتی که فهرست آنها در پایان این مقاله آمده است). تمام مسائل بنیادی مکانیک که شامل حداقل سه جسم برهم‌کنش کننده می‌شود، در این بخش قرار می‌گیرند، مانند زمین، ماه و خورشید یا سه اتم موجود در مولکول آب و یا سه کوارکی که در پروتون هستند.

مکانیک کوانتومی که مدت ۹۰ سال است که به‌کار می‌رود، متعلق به بخش سوم، به‌نام Q است. پس از کار پیشگامانهٔ پلانک، اینشتین و نیلس بور، در مدت کوتاه چهار سال از ۱۹۲۴، به‌بعد این نظریه شکل گرفت. کارهای تعیین کنندهٔ لویی دوبروی، ورنر هایزنبرگ، اروین شرودینگر، ماکس بورن، ولفگانگ پاؤلی و پل دیراک بدون هیچ خطایی از بوتهٔ آزمایش با موفقیت گذشتند. این نظریه، به‌طور معجزه‌آسایی، چارچوبی ریاضی برای فیزیک فراهم می‌آورد که به‌گفتهٔ دیراک،

---
1. Crutchfied

شناخت عمیقی از «اغلب مباحث فیزیک و همهٔ مباحث شیمی» به‌دست داده است. اما، اگرچه اغلب فیزیکدانها و شیمیدانها آموخته‌اند که چگونه مسائل بخصوصی را در مکانیک کوانتومی حل کنند، هنوز با ظرافتهای بی‌نظیر و شگفت‌انگیز این نظریه کنار نیامده‌اند. این ظرافتها کامل جدای از مفاهیم دشوار مربوط به تفسیر مکانیک کوانتومی است.

سه قلمروی R (سیستمهای سادهٔ کلاسیک)، P (سیستمهای آشوبناک کلاسیک) و Q (سیستمهای کوانتومی)، به‌وسیلهٔ خطوط ارتباطی متعدد به یکدیگر متصل‌اند. ارتباط بین Q و R به اصل تطابق بور معروف است. اصل تطابق به‌صورت کاملاً منطقی، بیان می‌کند که مکانیک کلاسیک حد مکانیک کوانتومی در حالتی است که در آن اشیاً بسیار بزرگتر از اندازهٔ اتمها باشند. ارتباط اصلی بین R و P قضیهٔ کولموگروف ـ آرنولد ـ موزر[1] (KAM) است. قضیهٔ KAM ابزار توانمندی است برای محاسبهٔ اینکه چقدر از ساختار یک سیستم منظم با ورود اختلالی کوچک جان سالم به‌در می‌برد، بدین‌ترتیب این قضیه قادر است اختلالهایی را که موجب رفتار آشوبی در سیستم منظم می‌شود، شناسایی کند.

موضوع آشوب کوانتومی برقرار ساختن ارتباط بین قلمرو P (سیستمهای آشوبناک) و Q (سیستمهای کوانتومی) است. برای برقرار ساختن این ارتباط، معرفی مفهومی به‌نام فضای فاز مفید است. شگفت‌آور اینکه مفهومی که اکنون در میان متخصصان رشتهٔ سیستمهای دینامیکی متداول است، به زمان نیوتون برمی‌گردد.

مفهوم فضای فاز را می‌توان در اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی، که در ۱۶۸۷ به‌چاپ رسید، یافت. در دومین تعریف اولین فصل، با عنوان «تعاریف»، نیوتون اظهار می‌دارد (برطبق ترجمهٔ سال ۱۷۲۹ از متن اصلی لاتین) «اندازهٔ حرکت معیاری است که از سرعت و مقدار ماده مشترکاً حاصل می‌شود.» به زبان امروزی، یعنی در هر جسمی کمیتی به نام تکانه وجود دارد که حاصلضرب سرعت و جرم جسم است.

نیوتون در فصل دوم با عنوان «اصول یا قوانین حرکت» قوانین خود را ارائه می‌کند. بنابر قانون دوم، تغییر حرکت با نیروی اعمال شده متناسب است. نیوتون نیرو را به تغییر تکانه مربوط می‌کند (برخلاف غالب کتابهای درسی که نیرو را به شتاب مربوط می‌کنند).

تکانه در واقع یکی از دو کمیتی است که وقتی با هم در نظر گرفته شوند، اطلاعات کاملی دربارهٔ سیستم دینامیکی در هر لحظه فراهم می‌کنند. کمیت دیگر، مکان است، که شدت و جهت نیرو را مشخص می‌کند. بصیرت نیوتون دربارهٔ سرشت دوگانهٔ تکانه و مکان را ۱۵۰ سال بعد دو ریاضیدان به نامهای ویلیام راون هامیلتون و کارل گوستا و ژاکوبی استحکام بیشتری بخشیدند.

1. Kolmogorov-Arnold-Moser

تزویج تکانه و مکان دیگر در فضای آشنای اقلیدسی با سه بُعد در نظر گرفته نمی‌شود، بلکه در فضای فاز شش‌بُعدی که دارای سه بُعد مکان و سه بُعد تکانه است منظور می‌شود.

به لحاظ ریاضی، معرفی فضای فازگامی پرثمر بود، اما از نظر شهودی برای انسان مشکلی جدی می‌آفرید. آخر چه کسی می‌تواند شش بُعد را مجسم کند؟ خوشبختانه، در برخی موارد، این امکان وجود دارد که فضای فاز به سه، یا حتی بهتر از آن، به دو بُعد تقلیل یابد.

این کاهش ابعاد در مطالعهٔ رفتار اتم هیدروژن در میدان مغناطیسی قوی امکان‌پذیر است. اتم هیدروژن مدتهاست که به‌خاطر سادگی مورد توجه بوده است، یک الکترون تنها که به دور یک پروتون تنها می‌گردد. با این همه، حرکت کلاسیک الکترون در حضور میدان مغناطیسی آشوبناک است. چطور می‌توانیم ادعا کنیم که فیزیک را می‌فهمیم اگر نتوانیم این مسئله مقدماتی را توضیح دهیم؟

در شرایط عادی، الکترون اتم هیدروژن کاملاً به پروتون وابسته است. مکانیک کوانتومی حاکم بر رفتار اتم است. اتم نمی‌تواند هر انرژی دلخواهی را داشته باشد؛ بلکه فقط می‌تواند مقادیر گسسته یا کوانتیده‌ای از انرژی را اختیار کند. در انرژیهای کم، فاصله‌های مجاز از یکدیگر نسبتاً زیاد است. اتم با افزایش انرژی بزرگتر می‌شود، زیرا الکترون از پروتون فاصله می‌گیرد و انرژیهای مجاز به هم نزدیکتر می‌شوند. در انرژیهای به‌اندازهٔ کافی زیاد (ولی نه خیلی زیاد، زیرا در آن صورت ممکن است الکترون از اتم کنده شود!)، انرژیهای مجاز بسیار به هم نزدیک می‌شوند و طیفی که عملاً پیوسته است می‌سازند، و در این حال می‌توان قواعد مکانیک کلاسیک را به‌کار گرفت.

این اتم بسیار برانگیخته را، اتم ریدبرگ می‌نامند [نگاه کنید به کلپنر و همکاران]. اتمهای ریدبرگ حد فاصل دنیای کوانتومی و دنیای کلاسیک و در نتیجه نامزدهای ایده‌آلی برای کاوش در اصل تطابق بور هستند که بخش Q (پدیده‌های کوانتومی) را به بخش R (پدیده‌های کلاسیک) متصل می‌کند. اگر بشود کاری کرد که اتم ریدبرگ به‌معنای کلاسیک دارای رفتار آشوبناک شود، می‌توان سرنخی از سرشت آشوب کوانتومی به‌دست آورد، و در نتیجه راه ارتباطی بخشهای Q و P (که متعلق به پدیده‌های آشوبی است) را روشن کرد.

اتم ریدبرگ در میدان مغناطیسی قوی دارای رفتار آشوبناک است، اما برای مشاهدهٔ این رفتار باید بُعد فضای فاز را کم کرد. اولین گام توجه به این نکته است که میدان مغناطیسی اعمال شده محور تقارن درون اتم را تعریف می‌کند. حرکت الکترون عملاً در صفحهٔ دوبُعدی صورت می‌گیرد و می‌توان حرکت به دور محور را جدا کرد؛ فقط فاصله در امتداد محور و از محور مهم است. تقارن حرکت ابعاد فضای فاز را از شش به چهار تقلیل می‌دهد.

نکتهٔ کمکی بعدی این است که هیچ نیروی خارجی کاری روی الکترون انجام نمی‌دهد. در نتیجه، انرژی کل با گذشت زمان تغییر نمی‌کند. اگر توجه خود را به مقدار خاصی از انرژی معطوف کنیم،

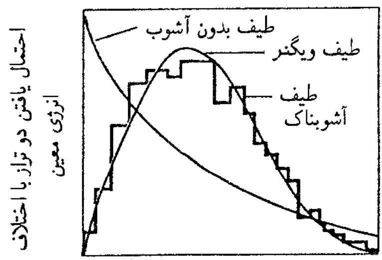
می‌توانیم برشی سه‌بُعدی ـ به نام پوستهٔ انرژی ـ را از فضای فاز چهاربُعدی جدا کنیم. پوستهٔ انرژی امکان مشاهدهٔ پیچ‌وتابها و چرخشهای الکترون را فراهم می‌سازد، که چیزی شبیه به مجسمه‌ای از سیمهای درهم پیچیده است. به کمک ایده‌ای که به‌نظر پوانکاره رسید، شکل حاصل را می‌توان ساده‌تر هم کرد. پوانکاره پیشنهاد کرد که صفحه‌ای دوبُعدی و ثابت (به‌نام مقطع پوانکاره یا سطح مقطع) را از پوستهٔ انرژی بگذرانیم و به نقطه‌هایی که مسیر حرکت این صفحه را قطع می‌کند نگاه کنیم. مقطع پوانکاره مجسمهٔ ساخته از سیمهای درهم پیچیده را به دنباله‌ای از نقاط در صفحهٔ معمولی تبدیل می‌کند.

برای اتم هیدروژن بسیار برانگیخته که در میدان مغناطیسی قوی قرار دارد، مقطع پوانکاره ناحیه‌هایی از فضای فاز را نشان می‌دهد که در آن نقاط کاملاً پراکنده‌اند و نمایانگر رفتار آشوبناک است. این پراکندگی از عوارض مسلم آشوب کلاسیک است، و موجب می‌شود تا بتوان سیستمها را به بخش P یا بخش R تقسیم کرد.

اتم ریدبرگ چه چیزی را دربارهٔ ارتباط بین بخشهای P و Q آشکار می‌کند؟ گفتیم که یکی از مشخصات بارز سیستمهای کوانتوم مکانیکی ترازهای انرژی کوانتیدهٔ آن است، و در واقع ترازهای انرژی اولین جایی است که باید به‌دنبال آشوب کوانتومی باشیم. اثر آشوب برروی تک‌تک ترازها را نمی‌توان مشاهده کرد، بلکه حضور آن در طیف یا توزیع ترازها مشاهده می‌شود. شگفت اینکه، در سیستم کوانتومی غیرآشوبناک ترازهای انرژی به‌صورت کاتوره‌ای و بدون همبستگی توزیع شده‌اند، درحالی که ترازهای انرژی سیستم کوانتومی آشوبناک دارای همبستگی شدیدی هستند، شکل ۸ـ۸. ترازهای سیستم منظم اغلب نزدیک یکدیگرند، زیرا سیستم منظم از زیرسیستمهای کوچکتر تشکیل شده است که کاملاً به یکدیگر جفت نشده‌اند. اما به‌نظر می‌رسد که ترازهای انرژی سیستم آشوبناک از وجود یکدیگر آگاه‌اند و می‌کوشند فاصلهٔ ایمنی نسبت به‌هم داشته باشند. سیستم آشوبناک را نمی‌توان تجزیه کرد؛ حرکت در امتداد یک محور مختصات همواره به آنچه در امتداد محورهای دیگر رخ می‌دهد وابسته است.

یوجین ویگنر، از استادان پیشگام در مکانیک کوانتومی، طیف سیستم کوانتومی آشوبناک را برای نخستین بار مطرح کرد. ویگنر، مانند بسیاری دیگر، مشاهده کرد که فیزیک هسته‌ای مبنای محکمی چون فیزیک اتمی و مولکولی ندارد؛ منشأ نیروی هسته‌ای هنوز هم به‌خوبی شناخته نشده است. بنابراین او این پرسش را مطرح کرد که آیا خواص آماری طیفهای هسته‌ای را می‌توان با فرض اینکه پارامترهای گوناگون مسئله مقادیر معین اما مجهولی دارند، به‌دست آورد. این نقطهٔ شروع نسبتاً مبهم، او را قادر ساخت تا محتملترین فرمول را برای توزیع آنها به‌دست آورد. اوریول بوهیگاس[1] وَ ماری ـ جویا جیانونی[2] از انستیتو فیزیک هسته‌ای در اورسی فرانسه، برای نخستین

1. Oriol Bohigas 2. Marie-Joya Giannoni



شکل ۸ـ۸ طیف انرژی، یا توزیع ترازهای انرژی، برای سیستمهای کوانتومی آشوبناک و غیرآشوبناک تفاوت قابل ملاحظه‌ای دارد. برای سیستمی غیرآشوبناک مانند یون مولکولی هیدروژن (H_2^+) احتمال یافتن دو تراز انرژی نزدیک هم بسیار زیاد است. در مورد سیستمی آشوبناک مانند اتم ریدبرگ در میدان مغناطیسی قوی، این احتمال کم است. طیف آشوبناک با طیف عادی هسته‌ای که سالها قبل توسط یوجین ویگنر به‌دست آمد، همخوانی نزدیکی دارد.

بار اعلام کردند که توزیع ویگنر دقیقاً همان توزیعی است که برای طیف سیستم دینامیکی آشوبناک به‌دست می‌آید.

اما، به‌نظر نمی‌رسد که آشوب محدود به توزیع ترازهای کوانتومی انرژی باشد بلکه حتی به سرشت موج‌گونه جهان کوانتومی نیز راه می‌یابد. مکان الکترون در اتم هیدروژن با طرح موجی توصیف می‌شود. مکان دقیق الکترون را در فضا نمی‌توان مشخص کرد، بلکه شبیه ابری است که در نزدیکی پروتون گسترده شده باشد. متناظر با هر تراز انرژی مجاز، حالت مانایی وجود دارد که طرحی موجی است که با زمان تغییر نمی‌کند. حالت مانا بسیار شبیه طرح ارتعاشی غشایی است که مانند طبل روی چارچوب صلبی کشیده شده باشد.

حالت‌های مانای سیستم آشوبناک ساختار جالب و غیرمنتظره‌ای دارند. این ساختار را اریک هلر[1] از دانشگاه واشینگتن در اوایل دههٔ ۱۹۸۰ نشان داد. او و دانشجویانش دسته‌ای از حالت‌های مانا را برای کاواکی دوبُعدی به‌شکل استادیوم ورزشی، محاسبه کردند. مسئلهٔ متناظر با آن در مکانیک کلاسیک، آشوبناک است، زیرا یک مسیر حرکت عادی، بسرعت بیشتر فضای موجود را به‌طور یکنواخت پر می‌کند. از چنین رفتاری برمی‌آید که حالت‌های مانا هم احتمالاً کاتوره‌ای به‌نظر آیند، انگار که بدون منطق یا نظمی طراحی شده‌اند. اما هلر کشف کرد که بیشتر حالت‌های مانا حول کانالهای باریکی که شکلهای ساده‌ای را درون استادیوم می‌ساختند، متمرکزند، او این نوع کانال را «داغ» نامید. در حالت‌های مانای اتم هیدروژن در میدان مغناطیسی قوی نیز ساختار مشابهی وجود دارد. در نسخهٔ اصلی مقالهٔ کنونی که در مجلهٔ ساینتیفیک امریکن به‌چاپ رسیده است.

1. Eric Heller

در این نقطه از بحث، شکل زیبایی را که هلر تهیه کرده است به‌همراه شکل رنگی با شکوهی از حالت‌های مانا یا طرحهای موجی مربوط به ترازهای انرژی اتم ریدبرگ (اتمی با برانگیختگی بسیار زیاد) در میدان مغناطیسی قوی را ملاحظه می‌کنید که می‌تواند خواص آشوبناک از خود نشان دهد. هموازی شکلهای موجی کوانتومی نقطه‌به‌نقطه حفظ شده است، اما هنگامی که به تمام تصویر توجه می‌شود، اثر انگشت آشوب پدیدار می‌شود.

علامت مشخصهٔ آشوب را که در طیف انرژی وجود دارد می‌توان به مکانیک کلاسیک معمولی مرتبط ساخت. مقالهٔ ۱۹۱۷ اینشتین سرنخی به این رهنمود است. اینشتین فضای فاز سیستم منظمی را در بخش R بررسی کرد و آن را از نظر هندسی پر از سطوحی به شکل دونات توصیف کرد، به‌طوری که حرکت سیستم با مسیر حرکت نقطه‌ای روی سطوح دونات خاصی متناظر می‌شود. مسیر حرکت روی سطح دونات پیچ می‌خورد، اما الزاماً مسیر بسته‌ای را به‌وجود نمی‌آورد.

در تصویری که اینشتین به‌دست می‌دهد، به‌کار بستن تطابق بور برای یافتن ترازهای انرژی سیستم کوانتوم مکانیکی نظیر آن ساده است. تنها مسیرهایی که ممکن است در طبیعت به‌وقوع بپیوندند آنهایی هستند که در سطح مقطع دونات مساحتی برابر با مضرب صحیحی از ثابت پلانک، h، را دربرگیرد (h برابر با 2π ضرب درکوانتوم بنیادی تکانه زاویه‌ای است، که دارای ابعاد تکانه ضربدر طول است). محاسبه نشان می‌دهد که آن مضرب صحیح دقیقاً عددی است که تراز انرژی متناظر را در سیستم کوانتومی مشخص می‌کند.

متأسفانه، همان‌طور که اینشتین نیز می‌دانست روش او را برای سیستمهای آشوبناک نمی‌توان به‌کار بست، زیرا مسیر برروی دونات قرار نمی‌گیرد و سطحی طبیعی برای دربرگرفتن مضرب صحیحی از ثابت پلانک را نمی‌توان تشخیص داد. رهیافت جدیدی را باید جست که توزیع ترازهای انرژی کوانتوم مکانیکی را برحسب مدارهای آشوبناک مکانیک کلاسیک توصیف کند.

کدام ویژگیهای مسیر در مکانیک کلاسیک در درک آشوب کوانتومی راهگشاست؟ بحث هیل دربارهٔ مدار نامنظم ماه به‌خاطر وجود خورشید، سرنخی به‌دست می‌دهد. کار او اولین موردی است که در آن مدار دوره‌ای خاص، هستهٔ اصلی مسئله مکانیک دشواری را تشکیل می‌دهد. (مدار دوره‌ای شبیه مسیر بستهٔ دومیدانی است، تعداد مسیرها زیاد است، اگرچه آنها منزوی و ناپایدارند.) پوانکاره که بر اهمیت کلی مدارهای دوره‌ای تأکید داشت، می‌تواند الهام‌بخش باشد. پوانکاره در آغاز اثر سه‌جلدی خود به‌نام روش جدید مکانیک سماوی که در ۱۸۹۲ به‌چاپ رسید، عقیده‌اش را دربارهٔ مدارهای دوره‌ای چنین بیان می‌کند، «این مدارها تنها راهی هستند که از آن ممکن است به دژی که به تسخیرناپذیری شهرت دارد، رخنه کنیم.» فضای فاز سیستم آشوبناک را، حداقل به صورت نسبی، می‌توان دور مدارهای دوره‌ای سازمان داد، اگر چه یافتن آنها گاهی بسیار دشوار است.

در سال ۱۹۷۰ روشی بسیار کلی کشف کردم که توسط آن می‌توان با شمارش کامل مدارهای دوره‌ای کلاسیک، اطلاعاتی دربارهٔ طیف کوانتوم مکانیکی به‌دست آورد. ریاضیات این رهیافت سخت‌تر از آن است که در اینجا به آن بپردازیم، اما نتیجهٔ اصلی رابطه‌ای نسبتاً ساده‌ای است که فرمول ردّ نام دارد. از این رهیافت بسیاری از محققان استفاده کرده‌اند، از جمله مایکل بری از دانشگاه بریستول، که با استفاده از این فرمول خواص آماری طیف را به‌دست آورده است.

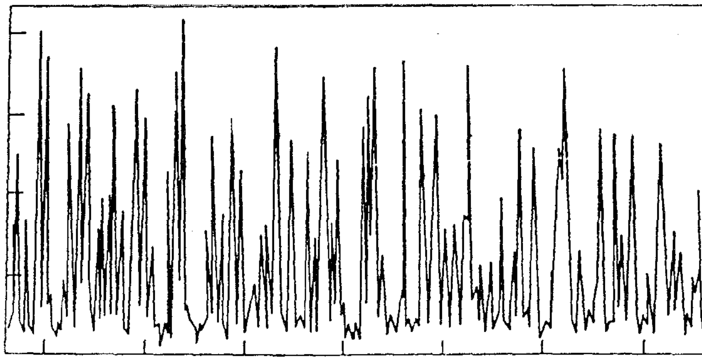
فرمول ردّ را برای محاسبهٔ یک دوجین از ترازهای انرژی یک الکترون در شبکهٔ نیمرسانا در نزدیکی ناخالصی به‌دقت کنترل شده‌ای به‌کار برده‌ام. (البته، نیمرسانا مبنای ابزارهای سودمند برای زندگی جدید است؛ به‌خاطر ناخالصی‌هایش رسانندگی الکتریکی آن بین رسانندگی یک عایق، مثل پلاستیک و یک رسانا، مثل مس است.) مسیر الکترون را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت رشته‌ای از نمادها که تعبیر سرراستی دارند، مشخص کرد. این رشته را می‌توان با تعریف محوری درون نیمرسانا و اینکه چه مواقعی مسیر این محور را قطع می‌کند. تولید کرد. عبور به‌طرف «مثبت» محور را با نماد + و عبور به‌طرف «منفی» را با نماد − نشان می‌دهیم.

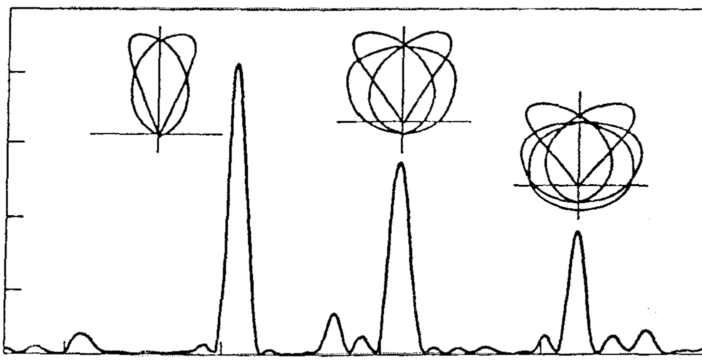
بدین‌ترتیب، مسیر دقیقاً مانند سابقهٔ شیر یا خطهایی است که از پرتاب متوالی سکه حاصل می‌شود. حتی اگر گذشته را با تمام جزئیاتش هم بدانیم ـ یعنی اگر تمام عبورها به طرف مثبت و منفی را ثبت کرده باشیم ـ آینده هنوز کاملاً نامشخص است. دنباله‌ای از این نمادها را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد. مداری دوره‌ای از دنباله‌ای دودویی تشکیل شده است که تکرار نمی‌شود؛ ساده‌ترین دنباله از این نوع (+−) است، بعد از آن (+ + −)، و غیره. (دو عبور متوالی با یک علامت به این معنی است که الکترون موقتاً به‌دام افتاده است.) بنابراین، مجموعهٔ تمام مدارهای دوره‌ای به‌دست می‌آید، و به کمک فرمول ردّ می‌توان طیف تقریبی را محاسبه کرد. به‌عبارت دیگر، ترازهای انرژی کوانتوم مکانیکی در تقریبی حاصل آمده‌اند که به کمیتهایی که فقط از مکانیک کلاسیک آمده‌اند متکی است.

مدارهای دوره‌ای کلاسیک و طیف کوانتوم مکانیکی با یکدیگر ارتباط نزدیک دارند، این ارتباط تنگاتنگ از طریق فرایندی ریاضی به‌نام تحلیل فوریه است (نگاه کنید به بریسول). نظم پنهانی در یک مجموعه و بسامد ظهور این نظم دقیقاً به‌وسیلهٔ مجموعهٔ دیگر داده می‌شود. جان بی. دلوس[1] از کالج ویلیام و مری و دیتر وینتگن[2] از انستیتو ماکس پلانک در فیزیک هسته‌ای در هایدگبرگ، از این ایده برای تعبیر طیف اتم هیدروژن در میدان مغناطیسی قوی، استفاده کردند.

تحقیقات آزمایشگاهی روی این طیف را کارل ولج[3] و همکارانش در دانشگاه بیلفلد انجام داده‌اند. آنها اتمهای هیدروژن را تا حد یونش برانگیخته کردند، یعنی تا آستانه‌ای که الکترون خود

1. John B. Delos   2. Dieter Wintgen   3. Karl Welge





شکل ۸ـ۹ جذب نور به‌وسیلهٔ اتم هیدروژن در میدان مغناطیسی قوی به ظاهر تغییراتی کاتوره‌ای برحسب انرژی دارد (بالا)، اما وقتی داده‌ها طبق روشی ریاضی به‌نام تحلیل فوریه بررسی می‌شوند، الگویی مشخص پدیدار می‌شود (پایین). هر قله در شکل پایینی، با مدار دوره‌ای کلاسیک خاصی متناظر است (شکلهایی که در کنار قله‌ها رسم شده‌اند).

را از قید پروتون آزاد می‌کند. انرژیهایی که در آنها اتم تابش جذب می‌کند کاملاً کاتوره‌ای به‌نظر می‌آیند (به قسمت بالای شکل ۸ـ۹ نگاه کنید)، اما تحلیل فوریه، قله‌های درهم را به مجموعه‌ای که اجزایش کاملاً از یکدیگر متمایزند تبدیل می‌کند (به قسمت پایین شکل ۸ـ۹ نگاه کنید). خصوصیت مهم در اینجا آن است که هر یک از قله‌های متمایز دقیقاً متناظر با یکی از چندین مدار دوره‌ای کلاسیک استاندارد است. اکنون تأکید پوانکاره بر اهمیت مدارهای دوره‌ای معنی تازه‌ای به خود می‌گیرد. نه‌تنها سازمان‌یافتگی کلاسیک فضای فاز به‌شدت به مدارهای دوره‌ای کلاسیک بستگی دارد، بلکه درک طیف کوانتومی آشوبناک نیز تابع آن است.

تاکنون فقط دربارهٔ سیستمهای کوانتومی که در آنها الکترونی به دام افتاده یا به لحاظ فضایی محدود شده است، صحبت کرده‌ام. اثرات آشوبناک در سیستمهای اتمی که در آن الکترون به

آزادی، مثل الکترونی که از اتمهای یک مولکول پراکنده شده است پرسه می‌زند نیز موجودند. در اینجا انرژی دیگر کوانتیده نیست و الکترون هر مقداری را ممکن است اختیار کند، اما مؤثر بودن پراکندگی تابع انرژی است.

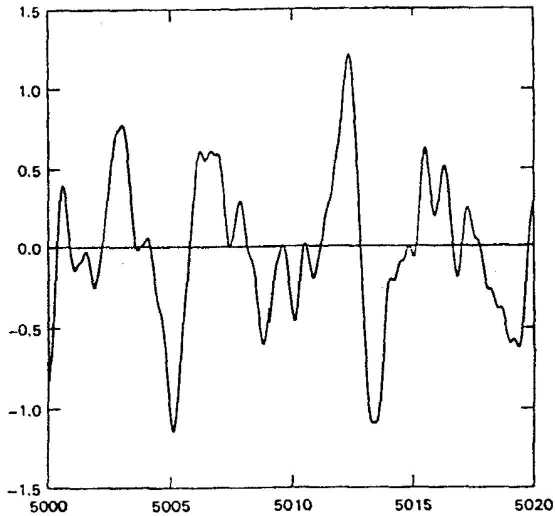
آشوب در پراکندگی کوانتومی به‌صورت تغییر مدت زمانی که الکترون موقتاً به‌هنگام فرایند پراکندگی در داخل مولکول می‌ماند، بروز می‌کند. برای سادگی، مسئله را می‌توان در دو بُعد بررسی کرد. از نظر الکترون، مولکولی با چهار اتم یک هزار توی کوچک به‌نظر می‌رسد. وقتی الکترون به یکی از اتمها نزدیک می‌شود، دو راه دارد: می‌تواند به چپ یا راست بپیچد. هر یک از مسیرهای ممکن الکترون در مولکول را می‌توان به‌صورت دنباله‌ای از گردش به چپ یا راست به‌حول اتمها ثبت کرد: حتی تغییری جزئی در انرژی یا جهت اولیهٔ نزدیک شدن، باعث تغییری بزرگ در جهتی می‌شود که الکترون بالاخره مولکول را ترک می‌کند.

آشوب در فرایند پراکندگی ناشی از آن است که تعداد مسیرهای ممکن با طول مسیر بسرعت افزایش می‌یابد. فقط تعبیری که براساس دیدگاه کوانتوم مکانیکی است نتایج معقول به‌دست می‌دهد؛ محاسبات کاملاً کلاسیک به نتایج بی‌معنی می‌انجامد. در مکانیک کوانتومی، هر یک از مسیرهای کلاسیک الکترون برای تعریف موجک کوچکی به‌کار می‌رود که راه خود را در مولکول می‌یابد. نتیجهٔ کوانتوم مکانیکی صرفاً با جمع کردن همهٔ این موجکها به‌دست می‌آید.

اخیراً محاسبه‌ای از فرایند پراکندگی برای مورد خاصی که جمع موجکها دقیق است، انجام داده‌ام. الکترونی که دارای تکانهٔ مشخصی است به مولکولی برخورد می‌کند و با همان تکانه بیرون می‌آید. زمان ورود الکترون به ایستگاه ثابتی که رسیدن آن را ثبت می‌کند برحسب تکانه تغییر می‌کند، و نحوهٔ تغییرات آن چیزی است که در این مسئله بسیار جالب توجه است. زمان ورود درگستره‌هایی که تغییر تکانه کم است نوسانهایی هموار دارد، اما درگستره‌هایی که تغییرات زیاد است، نقشی آشوبناک پدیدار می‌شود که هرگز به‌صورت ساده‌ای درنمی‌آید (نگاه کنید به‌طرف راست شکل ۸ـ۱۰).

جنبهٔ بخصوص وسوسه‌انگیز فرایند پراکندگی آشوبناک است که می‌تواند اسرار آشوب کوانتومی را به اسرار نظریهٔ اعداد مرتبط کند. محاسبهٔ تأخیر زمانی مستقیماً به آنچه احتمالاً اسرارآمیزترین موجود در ریاضیات است، یعنی تابع زتای ریمان، می‌انجامد. این تابع را در واقع برای اولین بار لئونارد اویلر دراواسط قرن هیجدهم برای نشان‌دادن بینهایت بودن تعداد اعداد اول به‌کار برد (اعداد اول یعنی اعدادی که بر هیچ عدد کوچکتری از خود غیر از یک بخش‌پذیر نباشند). حدود یک قرن بعد از آن، برنهارد ریمان، از بنیانگذاران ریاضیات جدید، این تابع را به‌کار برد تا به توزیع اعداد اول پی برد. وی در تنها مقاله‌ای که در این‌باره نوشت، این تابع را با حرف یونانی زتا نمایش داد.

تابع زتا، تابعی است از دو متغیر x و y (که در صفحهٔ مختلط وجود دارند). برای درک توزیع



شکل ۸ـ۱۰ تغییرات آشوبناک در زمانی که طول می‌کشد تا الکترونی با تکانهٔ معین به ایستگاه ثابتی که ورود آن را ثبت می‌کند برسد (این الکترون در عبور از مولکول پراکنده می‌شود و این زمان مشخصه‌ای است از زمان عبور از مولکول). زمان ورود به ایستگاه برحسب تکانهٔ الکترون تغییر می‌کند. این تغییرات، هنگامی که تغییر تکانه اندک باشد، هموار هستند، اما به‌ازای تغییرات زیاد طرح پیچیدهٔ آشوبناکی دارند. کمیت اختلال فاز که در محور عمودی نشان داده شده است، معیاری از تأخیر زمانی است.

اعداد اول، ریمان باید می‌دانست که تابع زتا چه موقع صفر می‌شود. او بدون اینکه استدلال معتبری ارائه دهد، گفت که تابع وقتی صفر می‌شود که x مساوی ۱/۲ باشد. محاسبات گسترده نشان داده است که به‌ازای یک بیلیون صفر اول، بدون استثنا حق با اوست، اما هنوز هیچ ریاضیدانی حتی به‌ارائه اثبات نزدیک هم نشده است. اگر حدس ریمان صحیح باشد، انواع و اقسام خواص جالب اعداد اول را می‌توان ثابت کرد.

مقادیر y که به‌ازای آنها تابع زتا صفر است، مجموعه‌ای از اعداد را تشکیل می‌دهند که به طیف انرژیهای اتم شباهت بسیار دارد. درست همان‌طور که توزیع ترازهای انرژی در یک طیف قابل بررسی است، توزیع صفرهای تابع زتا هم قابل مطالعه است. در اینجا، اعداد اول همان نقشی مدارهای بستهٔ کلاسیک اتم هیدروژن را در میدان مغناطیسی دارند، اعداد اول برخی از همبستگی‌های پنهان میان صفرهای تابع زتا را نشان می‌دهند.

در مسئلهٔ پراکندگی، صفرهای تابع زتا مقادیری از تکانه می‌دهند که به‌ازای آنها تأخیر زمانی به‌شدت تغییر می‌کند. آشوب در تابع زتای ریمان در قضیه‌ای که اخیراً اثبات شده است نمایان می‌شود: تابع زتا به‌طور موضعی بر هر تابع هموار برازش می‌یابد. این قضیه نشان می‌دهد که تابع

تمام رفتار آشوبناک سیستم کوانتومی را می‌تواند به‌نمایش بگذارد. اگر ریاضیات مکانیک کوانتومی را بتوان با مهارت بیشتری به‌کار برد، مثالهای بسیاری از پدیده‌هایی را که به‌طور موضعی هموار، ولی به‌طور کلی آشوبناک هستند، می‌توان یافت شود.

برای مطالعهٔ بیشتر

M. V. Berry, I. C. Percival, N. O. Weiss (Eds.): Dynamical Chaos in *Proc. Royal Soc. (London)*, **A413** No. 1844, pp. 1-199; September 8, 1987.

R . N. Bracewell: "The Fourier Transform" in Scientific American, June 1989.

J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, N. H. Packard, R. S. Shaw: "Chaos" in Scientific American, December 1986.

H. Friedrich, D. Wintgen: The Hydrogen Atom in a Uniform Magnetic Field: An Example of Chaos. Physics Reports **183**, No. 2, pp. 37-79; November 1989.

M. C. Gutzwiller: Chaos in Classical and Quantum Mechanics. (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1990).

D. Kleppner, M. G. Littman, M. L. Zimmerman:"Highly Excited Atoms" in Scientific American, May 1981.

T. Uzer, D. Farrelly, J. A. Milligen, P. E. Raines, J. P. Skelton: "Celestial Mechanics on a Microscopic Scale". Science, **253**, pp. 42-48; July 5, 1991.

A. Voros, M. J. Giannoni, J. Zinn-Justin (Eds.): *Chaos and Quantum Physics.* (Elsevier, Amsterdam 1991).

راهنمایی برای حل مسائل

فصل ۱

۱ـ۱ $[(2n)!2^n a^n]/(2n-1) \times \ldots \times 5 \times 3 \times 1$ که به‌صورت ساده شده هم می‌توان آن را نوشت.

۱ـ۲ به کلمهٔ «بعضی» توجه کنید. این روش تعداد توابع مناسب را به مراتب افزایش می‌دهد.

۱ـ۳ از $(a-\mathrm{i}b)$ که همیوغ مختلط $(a+\mathrm{i}b)$ است استفاده کنید.

۱ـ۵ $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

۱ـ۶ الف) $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n'(x)F(x)dx = -\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)F'(x)dx$

ب) با استفاده از (۱ـ۲۱الف) جواب ۱− است.

۱ـ۷ مقادیر مثبت و منفی $|k|$ را با هم در نظر بگیرید.

۱ـ۸

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A_\omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}d\omega$$
$$= \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(f)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} f t}df$$

اگر موج رادیو در $100\,\mathrm{MHz}$ تنظیم شده باشد $10^8 + 75\times10^3 \tilde{>} f \tilde{>} 10^8 - 75\times10^3\,\mathrm{Hz}$

۱ـ۹ الف) $A(k) = A^*(-k)$

ب) $|A_k|\cos(\theta_k + k_n) = |A_k|(\cos\theta_k\cos kx - \sin\theta_k\sin kx)$

ج) به‌ازای هر $k > 0$ چهار پارامتر موجودند.

۱ـ۱۰ الف) $f_e(x) = f(x) + f(-x)/۲$.

ب) $C(k) = [A(k) + A(-k)]/\sqrt{۲}$.

ج) به (۱ـ۱۶) و (۱ـ۳۲) مراجعه کنید.

د) آیا $۱/(۲\sqrt{\pi}) \sin kx$, $۱/(۲\sqrt{\pi}) \cos kx$ مجموعهٔ راست هنجار کاملی تشکیل می‌دهند؟

۱ـ۱۱ الف) $A(k) = (۱/\sqrt{۲\pi})۱/(a + \mathrm{i}k)$.

ب) $F(x)$ نامتقارن اما حقیقی است.

۱ـ۱۲ ب) از رابطهٔ دوجانبگی استفاده کنید که بر طبق آن اگر $A(k)$، تبدیل فوریهٔ $F(x)$ باشد، (۱ـ۲۶)، آنگاه $F(k)$ تبدیل فوریهٔ $A(-x)$ است، (۱ـ۳۳)[با $x \to k$ و $k' \to -x$].

ج) موجهای مربعی «پخش» را در نظر بگیرید (چرا؟) و به (الف) و (ب) توجه کنید.

د) $\sqrt{n/\pi}\mathrm{e}^{-nx^۲}, (\sin nx)/(\pi x)$.

۱ـ۱۳ الف) تبدیل فوریهٔ $(۱/\sqrt{۲\pi})\mathrm{e}^{-|x|/n}$ برابر است با $۱/(\pi n)(n^{-۲} + k^۲)^{-۱}$.

ب) نگاه کنید به مسئلهٔ ۱ـ۳.

ج) $F(x)$ را به حول $x = ۰$ بسط تیلور دهید.

د) در اینجا $a_n(k)$ توابع مناسبی هستند که در $k = ۰$ مشتق‌پذیرند و با تابع تعیم‌یافتهٔ ۱ برابرند (چرا؟) برای یافتن $a_n(k)$، از تبدیل مطلوب فقط در صورت نسبت به $۱/n^۲$ مشتق بگیرید! حاصل را به دو جمله با ضرایب انتگرال‌گیری $[۱/۲ + kn^۲/۴]$ و $[۱/۲ - k/(۴/n^۲)]$ دسته‌بندی کنید.

۱ـ۱۴ هر دو طرف را می‌توان به صورت انتگرال دوگانهٔ زیر نوشت

$$\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_۱(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} F_۲(x) dk dx$$

۱ـ۱۵ الف) نگاه کنید به مسئلهٔ ۱ـ۱۴.

ب) $F(x) = ۱/۲\pi \int_{-\infty}^{\infty} [G(k)/B(k)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} dk$

۱ـ۱۶ نگاه کنید به مسئلهٔ ۱ـ۹الف.

۱ـ۱۷ الف) اگر $\varrho(۰, x) = g_n(x - x_۰)$، آنگاه $A(k) = ۱/\sqrt{۲\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_۰}$ یا

$A(k) = ۱/\sqrt{۲\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_۰ - n(x - x_۰)^۲}$

ب) روی k انتگرال بگیرید. به ۱ـ۱۸ مراجعه کنید.

۱ـ۱۸ ج) این ضریب تضمین می‌کند که $f_n(x)$ در بینهایت «تابع مناسبی» است. به مراجع کمکی، مرجع *Lighthill*، صفحهٔ ۳۰، برای اثبات برقراری (۱ـ۲۲) رجوع کنید.

۱ـ۱۹ $f_n(k)$ را دنباله‌ای که تابع تعمیم‌یافتهٔ واحد را تعریف می‌کند، مثلاً، $f_n(k) = \mathrm{e}^{-k^{۲}/۴n}$، بگیرید و حد زیر را در نظر بگیرید،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) f_n(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} dx$$

که در آن

$$A(k) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx'} dx'$$

۱ـ۲۰ ۳) با فرض $u_i(x)$ حقیقی داریم

$$\widetilde{A}_i \cong \int_{\frac{-N\Delta}{۲}}^{\frac{N\Delta}{۲}} u_i(x) F_A(x) dx$$

فصل ۲

۲ـ۴ الف) $V_c = -IR$.

ب) آیا می‌توانید نشان دهید که تا مرتبهٔ اول از α، در نقطهٔ عطف $q(t)$ داریم،

$$\frac{q_\circ}{C} \mathrm{e}^{-\alpha t} \cos \omega_f t = \omega_f R q_\circ \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin \omega_f t$$

۲ـ۵ این یک مسئلهٔ کلی مقدار اولیه‌ای است. با این دید آن را حل کنید. و یا نشان دهید که به‌ازای جریان داده شده $Q = Q_\circ + \int_\circ^t I dt$.

۲ـ۶ الف) $(\alpha^{۲} - \omega_\circ^{۲})^{۱/۲} \simeq \alpha - \omega_\circ^{۲}/۲\alpha$

ب) $\phi \to -\pi/۲,\ |x| \to F_\circ/k$.

۲ـ۷ ب) ~ ۱۰۶

۲ـ۸ الف) $۱/T \int_\circ^T \sin(\omega t)\cos(\omega t) dt = \circ$

۲ـ۹ جواب باید در معادلهٔ حرکت و در شرایط اولیهٔ مکان و سرعت صدق کند. چه ضربهٔ مکانیکی در $t = t_\circ$ توسط نیروی تابع دلتای به جرم وارد می‌شود؟

ج) با برهم نهی خطی اثر نیروها داریم

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} F(t_\circ) G(t - t_\circ) dt_\circ$$

۲ـ۱۰ رابطهٔ زیر مؤلفهٔ همفاز سرعت را اندازه می‌گیرد

$$\chi_{۲}(\omega) = \left(\frac{۲\alpha\omega}{\sqrt{۲\pi} m}\right) \frac{۱}{(\omega^{۲} - \omega_\circ^{۲})^{۲} + (۲\alpha\omega)^{۲}}$$

فصل ۳

۳ـ۱ $y(x,t) = ۱/۲ \left[y_{\circ}(x-st) + y_{\circ}(x+st) + (۱/s)\int_{x-st}^{x+st} v_{\circ}(x')dx'\right]$

۳ـ۶ ب) به‌ازای هر $۱ \gg \delta$ داریم $(۱+\delta)^{۱/۲} \approx ۱ + \delta/۲$.

۳ـ۷ به روش به‌دست آوردن معادلهٔ موج برای نیروی عرضی رجوع کنید.

۳ـ۹ برای جوابهای غیرصفر، دترمینان زیر می‌باید صفر شود،

$$\begin{bmatrix} \omega^۲ - \alpha & \beta \\ \beta & \omega^۲ - \alpha \end{bmatrix} \qquad \alpha = \frac{(k_۱ + k_۲)}{m} \qquad \beta = \frac{k_۲}{m}$$

مدهای بهنجار به قرار زیر هستند

$$X_I = \sqrt{\frac{۲}{۳}} \sin\left(\frac{\pi I}{۳}\right) \cos(t\sqrt{\alpha - \beta}) \qquad I = ۱, ۲$$

$$X_I = \sqrt{\frac{۲}{۳}} \sin\left(\frac{۲\pi I}{۳}\right) \cos(t\sqrt{\alpha + \beta}) \qquad I = ۱, ۲$$

یعنی، دو جرم با هم حرکت می‌کنند (مد بسامد پایین)، یا در مخالف جهت هم حرکت می‌کنند (مد بسامد بالا).

۳ـ۱۲ ب) انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{۱}{L}\int_{\frac{-L}{۲}}^{\frac{+L}{۲}} \exp\left[\left(\frac{۲\pi \mathrm{i}}{L}\right)(n-m)x\right] dx$$

ج) نتیجه، تبدیل فوریهٔ انتگرالی (و نه سری فوریه) است که در فصل ۱ برای توابع دارای نمایش فوریه داشتیم.

۳ـ۱۳ روی سطح مقطع واحد در $x + \Delta x$ نیرو چنین است، $p(x + \Delta x, t)$.

ب) از بررسی حالت $L = \lambda/۴$ شروع کنید.

۳ـ۱۴ هـ) $\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \to \frac{F_{\circ} s}{T} \cos(\omega_{\circ} t - \omega_{\circ} x/s)$

و) نتیجهٔ تحلیلی متناظر با تپی به پهنای $s\sqrt{n} \sim$ به مرکز st است. منشأ نتیجهٔ حاصل را از نظر فیزیکی بیان کنید. آیا راهی است که نتیجهٔ ایده‌آل قسمت (هـ) را از نتیجه‌ای که در اینجا حاصل آمد، به‌دست آورد؟

۳ـ۱۵ الف) می‌توانید از نتیجهٔ بخش ۳ـ۴ استفاده کنید. ابتدا نگاه کنید به مسئلهٔ (۲ـ۹ج).

$$z(x,t) = A\sum_n u_n(x)\frac{\omega_{\circ}^۲}{\omega_n^۲ - \omega_{\circ}^۲}\left(\frac{L}{n\pi}\right)\cos \omega_{\circ} t$$

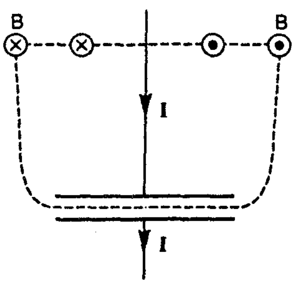
ب) $$-A\cos\omega_\circ t\frac{\sin[\omega_\circ(x-L)/s]}{\sin(\omega_\circ L/s)}$$

هم جواب است.

فصل ۴

۴ـ۱ $E \approx ۲۵\mathrm{V/m}$.

۴ـ۳ ب) برای خازن صفحه موازی $C = (A\varepsilon_\circ/d)$. فرض کنید که سطحی که انتگرال خطی B در (۴ـ۴) را دور آن محاسبه می‌کنیم، به‌جای اینکه صفحه‌ای عمود بر سیم جریان باشد که سیم آن را قطع می‌کند، تغییر شکل دهد تا از میان صفحه‌های موازی خازن بگذرد، به‌طوری که هیچ جریان فیزیکی آن را قطع نکند (شکل ۴ـ۱۰).



شکل ۴ـ۱۰ مسئلهٔ ۴ـ۳.

۴ـ۴ ب) به اتحادهای برداری در متن کتاب، نگاه کنید.

۴ـ۶ الف) بردار $\boldsymbol{V}(t)$ را از مبدأ تا صفحه رسم کنید

ب) میدان برداری‌ای که تاو آن صفر است، دارای مؤلفه‌های فوریه به صورت امواج هماهنگ است که در جهت انتشارند.

۴ـ۷ الف) نگاه کنید به (۴ـ۱۳)، (۴ـ۱۵).

۴ـ۹ $E_\circ \sim ۱۰^۳\mathrm{V/m}$.

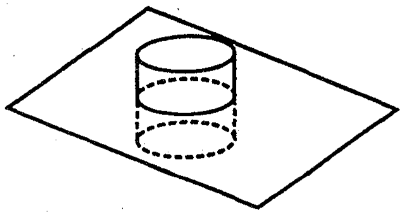
۴ـ۱۰ نگاه کنید به شکل ۴ـ۱۱. (شکل ۴ـ۱۱)

۴ـ۱۱ به‌ازای هر $\boldsymbol{k}$، دو جهت قطبش موجود است.

۴ـ۱۲ ب) $\boldsymbol{J} = (\mathrm{i}e^{-i\omega t})/(\mu_\circ\omega)(k_۱k_۲/k)(\sin\pi x/a)\boldsymbol{j}$

آن را با شکل ۴ـ۵ بررسی کنید.

۴ـ۱۳ الف) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) - \nabla^۲\boldsymbol{E}$.



شکل ۴ـ۱۱ مسئلهٔ ۴ـ۱۰.

۴ـ۱۴ ج) $u(r) \equiv a/r$.

۴ـ۱۵ الف) «چگالی بار» جدید چنین می‌شود،

$$\frac{\varrho + \varepsilon_0 \partial}{\partial t \nabla^2 \chi}$$

و پتانسیل نرده‌ای جدید چنین است.

$$\phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

۴ـ۱۵ ب) $\nabla^2 \chi = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}$.

۴ـ۱۸ الف) فرض کنید $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') = I\delta(\boldsymbol{r}')/2\pi r'$ چنانکه داشته باشیم،

$$\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{dS} = \int \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') r' dr' d\phi = ?$$

ب) $\boldsymbol{A}$ به کدام‌یک از متغیرهای r، ϕ، z وابسته است؟

ج) $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, 0, \phi) = (\mu_0 I/2\pi r)(L/\sqrt{L^2 + 4r^2})\boldsymbol{a}_\phi$.

۴ـ۲۱ الف) معادلهٔ موج تحریک شده برای $\boldsymbol{A}$ را می‌توان با همان روش معادلهٔ موج تحریک شده برای y که در فصل ۳ آمد، حل کرد. توجه کنید که

$$\int_0^d \int_0^b \int_0^a \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{TE}_{102}} \cdot \boldsymbol{u}_s dxdydz = \frac{V k_1^2}{4k^2} \delta_{\mathrm{TE}_{102}, S}$$

که در آن $V = abd$ حجم کاواک است.

ب) برای تشدید در سیستمهای گسترده به فصل ۳ مراجعه کنید.

ج) $V = -\int_0^b E_y dy$.

د) $C = \varepsilon_0 V/2b^2 \equiv \varepsilon_0 A/2b$ $LC = 1/c^2 k_{102}^2 \equiv 1/\omega_{102}^2$ (که در آن c سرعت نور است.)

$A_۱(r,t) = \frac{-\mu_\circ p_\circ}{۴\pi r}\omega \sin(\omega t - kr) a_z$ ۲۲ـ۴
به ازای ۱ $kr \gg$، $k = \frac{۲\pi\omega}{c}$ داریم،

$$B(r,t) \approx \frac{\mu_\circ p_\circ}{۴\pi r}\omega k \cos(\omega t - kr) \sin\theta a_\phi$$
$$\nabla \times B(r,t) \approx \frac{\mu_\circ p_\circ}{۴\pi r}\omega k^۲ \sin(\omega t - kr) \sin\theta a_\theta$$

۴ـالفـ۱ برخی خطوط در محل بارهای موجود در جعبه خاتمه می‌یابند.

فصل ۵

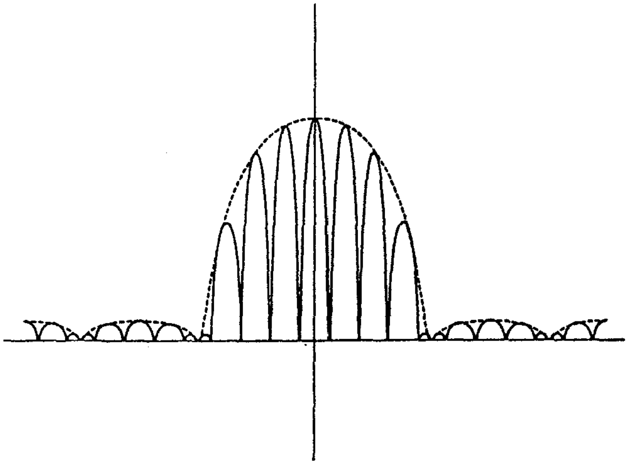
۵ـ۲ ب) $۶ \sim$.

۵ـ۶ $a \ll \lambda$؛ دو نیم صفحهٔ نامتناهی.

۵ـ۷ آیا می‌توان انتگرال ضریب فاز را به صورت حاصلضرب دو انتگرال مستقل از هم نوشت؟ وقتی به حالت شکاف افقی دراز می‌رویم، طرح پراش چگونه تغییر می‌کند؟

۵ـ۹ ب) $d \simeq ۰٫۱۱\text{mm}$ پهنای کل $\simeq ۳٫۶\text{cm}$.

۵ـ۱۰ ب) شکل ۵ـ۱۱.



شکل ۵ـ۱۱ مسئلهٔ (۵ـ۱۰ب). فریزهای تداخلی که با پرش پراشی مدوله شده‌اند؛ $d \approx (۹/۲)a$.

۵ـ۱۷ ج) $\delta = ۶٫۷ \times ۱۰^{-۴}\text{mm}$.
د) $\nabla \times B = \mu_\circ \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \varepsilon_\circ \frac{\partial E}{\partial t}\right]$،

اگر همهٔ جریان را جریان قطبشی در نظر بگیریم. در صورتی که مغناطش $\boldsymbol{M}$ وجود داشته باشد، می‌توان در معادلهٔ ماکسول به‌جای $\boldsymbol{B}$ چنین قرار داد، $\boldsymbol{B} = \mu_\circ \boldsymbol{H} + \mu_\circ \boldsymbol{M}$.

فصل ۶

۶ـ۷ ج) اگر A و B جابه‌جاپذیر نباشند، ذره حداکثر می‌تواند در ویژه حالت یکی از عملگرها باشد، و پراکندگی آماری کمیت مشاهده‌پذیر متعلق به عملگری دیگر است. اگر عملگرها جابه‌جاپذیر باشند. این امکان وجود دارد که برای هر دو مشاهده‌پذیر مقدار دقیقی به‌دست آورد، به‌عبارت دیگر، در چارچوب مکانیک موجی می‌توان وضعیتی را توصیف کرد که پراکندگی هر دو متغیر همزمان صفر است. عجیب نیست که در این مورد اندازه‌گیری هر دو کمیت را بتوان به‌طور همزمان انجام داد بدون اینکه حالت ذره مختل شود؛ اندازه‌گیریها را سازگار می‌خوانند.

۶ـ۸ فاصلهٔ زمین تا ماه $۳٫۸۲ \times ۱۰^۸\mathrm{m}$ است. جرم زمین $۷٫۳۶ \times ۱۰^{۲۲}$ کیلوگرم است.

۶ـ۹ الف) به مثال ۶ـ۳ به‌ازای $x > a$ و $x < -a$ نگاه کنید. برای شرایط مرزی به مسئلهٔ ۶ـ۱۱ نگاه کنید.

ب) $R^۲ u_n(x) = u_n(x)$ این حاکی از چه نکته‌ای دربارهٔ ویژه مقادیر عملگر R است؟

۶ـ۱۲ با توجه به معادلهٔ مستقل از زمان شرودینگر، $\sqrt{P}$ را در نظر بگیرید.

۶ـ۱۴

$$I_m \sigma_{۲۱} = \frac{\left(\frac{\mu E_\circ}{۲\hbar}\right)\tau\left(\frac{\Delta N_\circ}{N}\right)}{۱ + (\omega - \omega_\circ)^۲\tau^۲ + \left(\frac{\mu E_\circ \tau}{\hbar}\right)^۲}$$

$$\chi_۲(\omega) = \frac{\mu^۲\tau(\Delta N)_\circ}{\varepsilon_\circ \hbar}\frac{۱}{۱ + (\omega - \omega_\circ)^۲\tau^۲}$$

$$\chi_۱(\omega) = \frac{\mu^۲\tau(\Delta N)_\circ}{\varepsilon_\circ \hbar}\frac{(\omega - \omega_\circ)\tau}{۱ + (\omega - \omega_\circ)^۲\tau^۲}$$

که در آن $(\mu_\circ \varepsilon_\circ/\hbar)^۲\tau^۲ \ll ۱$ و $(\Delta N)_\circ = N(\varrho_{۱۱} - \varrho_{۲۲})_\circ$.

$\chi_۱(\omega)$ و $\chi_۲(\omega)$ را برحسب ω رسم کنید و به تشدید در $\omega = \omega_\circ$ توجه کنید. برای مثال، دما باعث می‌شود تا $(\varrho_{۲۲})_\circ \neq ۰$. برای بحث مفصل‌تر نگاه کنید به فصل ۸ کتاب امنان یاریف، که در فهرست مراجع کمکی آمده است.

۶ـ۱۵ یک قسمت در 5×10^{9}. هرتزبرگ این نتیجه را در آزمایشی که خط طیفی واقعی را اندازه می‌گرفت تا دقت ۱ قسمت در 10^{6} تأیید کرد.

فصل ۷

۷ـ۶ الف) $\Delta m = \varrho A \Delta l$؛ روی Δl انتگرال بگیرید.

ب) $p(l)/\varrho + gy + 1/2u^{2}(l) = c$.

۷ـ۷ ج) ۲) اگر شکل تابع y_1 برحسب متغیرش مانند شکل تابع y_2 برحسب متغیرش باشد، دربارهٔ $\partial[y_1(x,t) + y_2(x,t)]/\partial t|_{t=0}$ چه می‌توان گفت؟ همچنین نگاه کنید به مسئلهٔ ۳ـ۱.

ج) ۳) برای یافتن $P(x,0)$ لازم است $p(x,0)$ را در این بازه بدانیم. در نتیجه می‌توانیم $p(x,t)$ را برحسب $u(x,t)$، $u(x,0)$، $P(x,0)$ در امتداد مشخصه بیابیم. دو مشخصهٔ متقاطع همیشه $p(x,t)$ و $u(x,t)$ را به‌دست می‌دهند.

۷ـ۱۱ ب) اگر f_2 بزرگ باشد، $v(x,t)$ تابعی از Λf_1 می‌شود. به صورت متقارن $v(x,t)$ در (۷ـ۴۳) توجه کنید.

ج و د) $|t|$ را می‌توان به دلخواه بزرگ در نظر گرفت.

و) به‌ازای $t \to -\infty$ سولیتون۱ جلوتر است، برای $t \to +\infty$ سولیتون۲ جلوتر است. سولتیون۲ که سرعت آن α_2^2، بزرگتر است، از سولتیون۱ جلو زده است. اما، شکلهای دو سولتیون با وجود وابستگی تابعی ثابت $v(x,t)$ به x و t به‌ازای هر سولتیون j، $j = 1, 2$، تغییر نکرده است: $f_j/(1 + f_j)^2$. تغییر فاز را برای هر یک از سولتیونها می‌توان تشخیص داد.

۷ـ۱۲ نگاه کنید به مسئلهٔ ۱ـ۶الف.

$$A_n = 0 \qquad B_n = \gamma_n(t) \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad B(k) = \frac{\beta^*(k)}{\sqrt{2\pi}} \qquad k > 0$$

$$A(k) = 0 \qquad B(k) = \frac{\alpha^*(k)}{\sqrt{2\pi}} \qquad k < 0$$

که در آن به‌ازای هر مقدار k داریم، $\omega_k > 0$.

۷ـ۱۴ $$\mathrm{Im}\{\beta\} \int_0^\infty e^{\frac{-x^2}{4n}} \sin(2kx)dx = -\mathrm{Im}\{\beta\} \int_{-\infty}^0 e^{\frac{-x^2}{4n}} \sin(-2kx)dx$$

$$\int_{\circ}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{-x^{۲}}{۴n}} \beta^*(k) \mathrm{e}^{-۲ikx} dx = \int_{-\infty}^{\circ} \mathrm{e}^{\frac{-x^{۲}}{۴n}} \beta(k) \mathrm{e}^{۲ikx} dx$$

که بهنجار بودن حالت پراکنده است.

۱۵ـ۷ الف) $\frac{\partial}{\partial x}(u_x R - uR_x) = u_{xx}(u_t - ۲vu_x - ۴\omega^۲ u_x) - u(v_{xxx}u - ۴v_x u_{xx})$

$$- u(vu_t - \omega^۲ u_t - \omega_t^۲ u + v_t u)$$

$$+ u(۲v + ۴\omega^۲)(v_x u - \omega^۲ u_x + vu_x)$$

که با استفاده از (۷ـ۴۶) ساده‌تر هم می‌شود، یا به صفحهٔ ۶۸ کتاب درازین و جانسون مراجعه کنید.

۱۸ـ۷ ج) $h(x,t) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}k^۳ t + \mathrm{i}\, kx)} dk$

۱۹ـ۷ ب) بله، اما جانشین‌سازی مستقیم در معادلهٔ KdV به منظور تحقیق صحت آن را، توصیه نمی‌کنیم.

۲۰ـ۷ ب) $B(x,t) = \frac{-۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[\mathrm{i}(kx + ۸k^۳ t)]}{۱ + \mathrm{i}k/K} dk$

اگر فرض کنیم $k = y(x,t)^{۱/۲}$، آنگاه

$$B = \frac{-۲K}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{x^۳}{t}\right)^{\frac{۱}{۲}} (y + ۸y^۳)\right] dy}{۲K\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{۱}{۲}} + ۲\mathrm{i}y}$$

که محاسبه نشان می‌دهد که به موج پاشندهٔ نوسانی به طرف چپ می‌انجامد، که در حد $t \to \infty$ به صورت $t^{-۱/۳}$ فرو می‌افتد.

نمایه