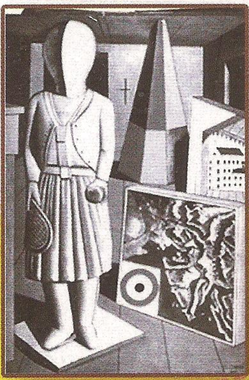
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
مرکز نشر دانشگاهی

ماتریسها و تانسورها در فیزیک

ا. و. جوشی

ترجمهٔ سالار باهر، علی ثامری پور



سال جهانی فیزیک ۲۰۰۵

www.physics2005.org

سال جهانی فیزیک - ایران ۱۳۸۴

WORLD YEAR OF PHYSICS - IRAN 2005

مرکز نشر دانشگاهی

www.iup.ir

کتاب ماتریسها و تانسورها در فیزیک برای بهره‌گیری دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد فیزیک نوشته شده است. با توجه به اینکه برای درک اصول بنیادی مکانیک کوانتومی آشنایی با فضاهای برداری ضروری است؛ کتاب با معرفی فضاهای برداری شروع می‌شود و به‌تدریج در هر فصل خواننده را با سایر مفاهیم مهم در مکانیک کوانتومی، همچون ترکیبهای خطی و وابستگی و استقلال خطی بردارها آشنا می‌کند. پارهٔ اول کتاب عمدتاً انواع ماتریسها، ویژگیها و روابط بین آنها را در برمی‌گیرد و در پارهٔ دوم تانسورها، انواع آنها و کاربردشان در قوانین فیزیکی شرح داده می‌شود.

در تکمیل هر مبحث مسائل طبقه‌بندی‌شده و مثالهای حل‌شدهٔ متنوعی تدارک دیده شده است که به خواننده در یادگیری مطالب کمک می‌کند.

کتاب شامل ۴ پیوست دربارهٔ نمودارهای ون، گزاره‌های شرطی و حاصلضرب نرده‌ای بردارهاست؛ پیوست آخر شامل حل تعدادی از مسائل کتاب است.

این کتاب سالهاست که به‌عنوان متن درسی روشهای ریاضی در فیزیک در دانشگاههای هند تدریس می‌شود.

ماتریسها و تانسورها در فیزیک

ا. و. جوشی

ترجمهٔ سالار باهر، علی ثامری‌پور

مرکز نشر دانشگاهی

فهرست

عنوان	صفحه

نمادهای مربوط به نظریهٔ مجموعه‌ها

$\in$: متعلق است به

$\ni$: به‌طوری که

$\exists$: وجود دارد

$\forall$: به‌ازای هر، به‌ازای همهٔ

$\subset$: مشمول است در

$\supset$: شامل است

$\Longrightarrow$: ایجاب می‌کند که (مستلزم این است که)، تنها اگر

$\Longleftarrow$: ایجاب می‌شود با، اگر، نتیجه می‌شود از

$\Longleftrightarrow$: ایجاب می‌کند و ایجاب می‌شود با، اگر و تنها اگر

$\not\Longrightarrow$: ایجاب نمی‌کند که

$\not\Longleftarrow$: ایجاب نمی‌شود با، نتیجه نمی‌شود از

مثال: عبارت زیر

$$\exists e \in G \ni xe = ex = x \forall x \in G$$

یعنی "وجود دارد یک e متعلق به G، به‌طوری که $xe = ex = x$ به‌ازای همهٔ xهای متعلق به G"

پیشگفتار ویراست سوم

خرسندم که ویراست سوم این کتاب را، یک دهه پس از ویراست دوم، پیش روی خوانندگان قرار می‌دهم. مطالب مناسب و تازهٔ زیادی به این ویراست افزوده‌ایم. این مطالب عبارت‌اند از: نابرابری بسل؛ فضاهای برداری توابع؛ ماتریسهای بهنجار و اثبات سادهٔ این قضیهٔ کلی که، اگر و تنها اگر ماتریسی بهنجار باشد، دارای مجموعهٔ کاملی از ویژه‌بردارهای راست‌هنجار است؛ همچنین بیان قوانین فیزیکی، با بهره‌گیری از ناوردایی در فضاهای سه‌بعدی نیوتونی و چهاربعدی مینکوفسکی؛ مطالب بیشتری دربارهٔ تانسورهای تماماً پاد متقارن، نمود و ویژگیهایشان؛ پیوست ۱، که نمودارهای ون و ارتباط آنها را باگزاره‌های شرطی توضیح می‌دهد؛ پیوستهای جدید ۳ و ۴ در زمینهٔ حاصلضرب نرده‌ای بردارها و رهیافتی به حل مسئله و غیره، همچنین تعدادی تمرینهای جدید و مثالهای حل شده اضافه کرده‌ایم. با استفاده از مجموعه‌ای از مثالها و تمرینهای طبقه‌بندی شده اشاره کرده‌ایم که مسئلهٔ مربوط به ویژه‌مقدار ماتریس متقارن حقیقی را می‌توان به‌جای مسئلهٔ مربوط به ویژه‌مقدار ماتریس هرمیتی از مرتبهٔ دو برابر نشاند.

مثل همیشه، از همهٔ آنهایی که آرا و پیشنهادهایشان را برای بهتر شدن کتاب ابراز کرده‌اند تشکر می‌کنم. امیدوارم دانشجویان و استادان این ویراست را مفید و پرمحتوی بیابند.

ا. و. جوشی

پیون

ژوئیهٔ ۱۹۹۳

پیشگفتار ویراست دوم

خوشحالم که ویراست دوم این کتاب را در برابر خوانندگان قرار می‌دهم. قسمتهای جدیدی به این ویراست افزوده‌ایم. نابرابری شوارتس را به فصل ۱ اضافه کرده‌ایم. بخش "تانسورها در فیزیک نانسبیتی" در پارهٔ ۲ را با افزودن تانسورهای دکارتی و ویژگیهایشان گسترش داده و مجدداً متناسب با آنها نامگذاری کرده‌ایم. بخشهای دیگری در پارهٔ ۲ در زمینهٔ چاربردار در نسبیت خاص و فرمولبندی هموردایی الکترودینامیک گنجانده‌ایم. در سرتاسر کتاب، تغییراتی جزئی داده و مطالبی را افزوده‌ایم.

از افرادی که آرا و پیشنهادهایشان را برای بهتر شدن کتاب عرضه کرده‌اند، قدردانی می‌کنم.

ا. و. جوشی

سیملا

ژوئیهٔ ۱۹۸۳

پیشگفتار ویراست اول

"دلم می‌خواهد بدانم که چگونه می‌شود ازکار این جهان سر درآورد؟" مونداکا اوپانیشاد، ۱ـ۱ـ۳.

در قرن حاضر شاهد پیشرفت فیزیک جدید در دو جهت اصلی بوده‌ایم: نظریهٔ نسبیت و مکانیک کوانتومی. برای درست درک کردن مفاهیم اساسی مکانیک کوانتومی، داشتن پایه‌ای محکم در جبر ماتریسی و فضاهای برداری ضروری است. آنالیز تانسوری و هندسهٔ دیفرانسیل نیز برای نظریهٔ نسبیت مبنایی ریاضی فراهم می‌آورد. از همین روست که در این کتاب جبر ماتریسی و آنالیز تانسوری را مطرح کرده‌ایم.

ماتریسها و تانسورها را عموماً به دانشجویان (فیزیک)کارشناسی وکارشناسی ارشد دانشگاههای هند در درس ریاضی یا روشهای ریاضی در فیزیک تدریس می‌کنند. عموماً ماتریسها را بدون توسل به فضاهای برداری و تبدیلها به‌طور مستقیم به‌کار می‌برند. با وجود این، حلقهٔ ارتباطی ماتریسها و مکانیک کوانتومی فضاهای برداری است و اغلب می‌بینیم که دانشجویان، به‌علت آنکه فضاهای برداری را درست درک نمی‌کنند، اصول بنیادی مکانیک کوانتومی را نمی‌فهمند. فصل اول این کتاب با معرفی فضاهای برداری و تبدیلها آغاز می‌شود و در پی آن ماتریسها می‌آیند. بدین‌ترتیب دورنمای تاریخی درستی ارائه می‌شود. زیرا شروع مطالعهٔ ماتریسها با تبدیلها در فضای برداری ارتباط داشت. در اینجا بر مفاهیم مهمی تأکید می‌کنیم که در مکانیک کوانتومی اساسی‌اند. مانند ترکیبهای خطی، وابستگی و استقلال خطی بردارها و ماتریسها، تعداد پارامترهای مستقل بعضی از ماتریسهای خاص، و کلیترین شکل ماتریسی از نوع معلوم. فصل ۹ شامل برهان مستدلی از این قضیه است که اگر و تنها اگر دو ماتریس با یکدیگر جابه‌جا شوند، می‌توان آنها را به‌طور همزمان قطری کرد. این فصل مباحثی مانند ماتریسهای قطری ناشدنی و توابع ماتریسی را نیز در بر می‌گیرد.

دربارهٔ ماتریسهای نامتناهی (گسسته و پیوسته) نیز در پایان قسمت اول به اختصار بحث می‌کنیم.

فصل دوم به جبر و حساب تانسورهای کلی در فضای Nبعدی ریمانی می‌پردازد. مثالهای فیزیکی فراوانی آورده‌ایم که نیاز به بهره‌گیری از تانسورهای رتبهٔ ۲ و بالاتر را نشان می‌دهد. این مثالها تانسور رسانندگی، تانسور جرم مؤثر، تانسورهای تنش و کرنش، تانسورهای سفتی کشسانی و ثابتهای تن‌دهی، تانسور ضریب کرنش پیزو الکتریکی، تانسور پذیرفتاری دی‌الکتریکی، تانسور گشتاور لختی، تانسور خمیدگی و غیره را در بر می‌گیرد. در این قسمت بر استفادهٔ درست از اندیسهای آزاد و ظاهری در معادلات تانسوری تأکید خواهیم کرد. قرارداد مجموع‌یابی اینشتین را با جزئیات کامل شرح می‌دهیم و به خطاهای متداولی اشاره می‌کنیم که در به‌کارگیری آن ظاهر می‌شود. قواعدی را نیز برای بررسی صحت اندیسها در معادلهٔ تانسوری عرضه می‌کنیم.

گرچه برای درک بهتر کاربرد ماتریسها و مسئلهٔ ویژه‌مقدار داشتن دانش کافی لازم است، موضوع را طوری تنظیم کرده‌ایم که خواننده بتواند بدون عبور از مبحث فضاهای برداری، مستقیماً از ماتریسها شروع کند. یعنی می‌تواند از فصل ۱ بگذرد، بی‌آنکه رشتهٔ مطالب را گم کند. هر چند که ممکن است چنین روشی چندان مناسب به‌نظر نرسد.

درکتاب دو پیوست وجود دارد. پیوست ۱ دربارهٔ منطق عباراتی چون "اگر"، "تنها اگر"، "اگر و تنها اگر" بحث می‌کند. پیوست ۲، این نتیجه را اثبات می‌کند که ماتریس ناتکین متناهی (یعنی ماتریسی که دارای وارونهای چپ و راست است) قطعاً مربعی است.

به‌طورکلی در این کتاب حدود ۱۰۰ مثال حل شده و ۲۰۰ تمرین آورده‌ایم. بسیاری از این تمرینها پیش‌زمینه‌ای است برای مطالب بخشهای بعدی. پاسخ برخی از تمرینها را در پایان کتاب آورده‌ایم و این تمرینها را با ستاره مشخص کرده‌ایم.

این کتاب از دروسی تشکیل شده است که در ۶ سال گذشته به دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد تدریس کرده‌ام. مسائل و سؤالهای دانشجویان در تهیه و ارائهٔ مطالب کمک شایانی کرده است. از همکارانم و دانشجویان ارشد، به‌سبب کمکشان در تهیهٔ نسخهٔ دستنویس نیز سپاسگزارم. از پیشنهادها و آرای خوانندگان استقبال می‌کنم.

ا. و. جوشی

ژوئن، ۱۹۷۵

پارهٔ اول

جبر ماتریسی

فیزیک بیشتر در تقریب خطی پیشرفت کرده است. حتی برای پدیده‌های غیرخطی، پایه را پدیده‌ای خطی فرض می‌کنیم و آن‌را برحسب یک یا چند پارامتر بسط می‌دهیم. بنابراین، تعجبی ندارد که در نمایش ریاضی پدیده‌های فیزیکی، جبر خطی نقش مهمی ایفا کرده است.

در فیزیک ماتریسها بیشتر دو کاربرد دارند: اول در حل معادلات خطی و دوم در حل مسائل ویژه‌مقدار در مکانیک کلاسیک و کوانتومی، هر دو این مسائل، به نوبهٔ خود، از تبدیل بردارها در فضاهای برداری و عمل عملگرهای خطی روی فضاهای برداری به‌وجود می‌آیند. روشهای جبر ماتریسی در برخورد با این مسائل هم مفید و هم ضروری است.

در این قسمت به عملیات مختلفی در زمینهٔ ماتریسها می‌پردازیم و موقعیتهای متفاوتی که در آن کاربرد دارند.

۱

فضاهای برداری

در آغاز بحث به چگونگی ارتباط ماتریسها با فضاهای برداری می‌پردازیم. برای کامل بودن بحث، ضروری است پیش از پرداختن به فضاهای برداری میدان را تعریف کنیم. به‌این منظور، تعریف گروه، به‌نوبهٔ خود، مفید خواهد بود.

۱.۱ گروه

مجموعهٔ $R = \{x : \text{عددی حقیقی است } x\}$ را درنظر بگیرید که شامل تمام اعداد حقیقی است. به اجزای R، قانونی بنام جمع نسبت می‌دهیم که دارای چهار ویژگی زیر است: (الف) به‌ازای هر دو عدد حقیقی x و y متعلق به R، مجموع آنها، $x + y$، نیز متعلق به R است؛ (ب) به‌ازای هر سه جزء x، y و z متعلق به R، قانون شرکت‌پذیری صادق است، یعنی، $x+(y+z) = (x+y)+z$؛ (ج) به‌ازای هر $x \in R$، جزء $\circ$ در R وجود دارد که آن‌را صفر می‌نامند، به‌طوری که داریم $x + \circ = \circ + x = x$؛ (د) به‌ازای هر $x \in R$ جزء یکتای y در R وجود دارد، به‌طوری که داریم $x + y = y + x = \circ$. توجه کنید که از این ویژگی $y = -x$ را نتیجه می‌گیریم.

همین‌طور، مجموعهٔ $U(۱) = \{z : |z| = ۱\}$ را درنظر بگیرید، که شامل همهٔ اعداد مختلط با اندازهٔ واحد است. به اجزای $U(۱)$، قانون ضرب را نسبت می‌دهیم که دارای چهار ویژگی زیر است: (الف) به‌ازای هر دو عدد مختلط x و y با اندازهٔ واحد، حاصلضرب آنها نیز عددی مختلط با اندازهٔ واحد است، بنابراین متعلق به $U(۱)$ است؛ (ب) به‌ازای هر سه جزء x، y و z متعلق به $U(۱)$، قانون شرکت‌پذیری صادق است، یعنی، $x(yz) = (xy)z$؛ (ج) برای هر جزء x متعلق به $U(۱)$ جزء $۱ + ۰i$ (که $i = \sqrt{-۱}$) یا به‌اختصار ۱ وجود دارد، به‌طوری که، داریم $x = ۱x = x۱$؛ (د) به‌ازای هر $x \in U(۱)$، جزء یکتای y در $U(۱)$ وجود دارد، به‌طوری که $xy = yx = ۱$. توجه کنید که با استفاده از این ویژگی می‌توانیم بنویسیم $y = x^*$، که علامت ستاره نشانهٔ مزدوج مختلط است.

می‌بینیم که چهار ویژگی که در دو مجموعهٔ بالا صادق بودند، سرشت یکسانی دارند. در واقع، هر دو مجموعهٔ فوق مثالهایی از یک گروه[1] است.

به‌طور کلی، گروه مجموعه‌ای است، مانند $G = \{x, y, z, \cdots\}$ همراه با قانون ترکیب دوتایی روی اجزاء خود، به‌طوری که دارای چهار ویژگی زیر باشد (با استفاده از نمادگذاری نظریهٔ مجموعه‌ها):

(الف) ویژگی بستار: $xy \in G \;\; \forall\, x, y \in G$

(ب) ویژگی شرکت‌پذیری: $x(yz) = (xy)z \;\; \forall\, x, y, z \in G$ (۱)

(ج) وجود جزء همانی: $\exists\, e \in G \ni ex = x \;\; \forall\, x \in G$

(د) وجود جزء وارون: $\forall\, x \in G\, \exists\, y \in G \ni yx = e$

ویژگیهای فوق به اصول موضوع گروه معروف است. جزء e را که در ویژگی (ج) صدق می‌کند، جزء همانی گروه می‌نامند، اگر $yx = e$ [ویژگی (د)] باشد، y را وارون x می‌نامند و برعکس.

توجه کنید که فقط وجود همانی چپ و وارون چپ در معادلات (۱) لازم است. وجود همانی

---

۱. برای جزئیات بیشتر، ر.ک:

Joshi, A. W, *Elements of Group Theory for Physicists*, 4th edition (Wiley Eastern, New Delhi, 1994).

راست و وارون راست و همچنین یکتایی آنها از معادلات بالا به‌دست می‌آید.

بنابراین، اصول موضوع (ج) و (د) را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم

$$\exists\, e \in G \ni xe = ex = x\; \forall\, x \in G \qquad (ج)$$

$$\forall\, x \in G\; \exists\, y \in G \ni xy = yx = e \qquad (د) \qquad (۲)$$

ضروری نیست قانون ترکیب اجزای گروه جابه‌جایی‌پذیر باشد. در حقیقت، به‌طور کلی، قرار نیست که در یک گروه، مانند G، داشته باشیم $xy \neq yx\; \forall x, y \in G$ اگر، به‌طور خاص، داشته باشیم $xy = yx\; \forall x, y \in G$. دراین‌صورت G را گروه آبلی می‌نامند. هر دو مثالی که در بالا دربارهٔ آنها بحث کردیم، گروههای آبلی‌اند.

۲.۱ میدان

میدان $F = \{a, b, c, \cdots\}$ مجموعه‌ای از اجزاست که این اجزا از دو قانون ترکیب دوتایی بهره‌مندند یکی را با $+$ نشان می‌دهند و آن‌را جمع می‌خوانند، دیگری را ضرب می‌نامند و با علامت $\cdot$ نشان می‌دهند، به‌طوری که دو شرط زیر صادق باشد:

(الف) F، تحت عمل جمع، گروه آبلی با جزء همانی، به‌نام صفر باشد که آن‌را با $\circ$ نشان می‌دهند، و (ب) مجموعهٔ اجزای غیرصفر F تحت عمل ضرب گروه آبلی با جزء همانی، واحد است که آن‌را با ۱ نشان می‌دهند.

$\circ$ را همانی جمعی می‌نامند. در حالی که ۱ را همانی ضربی می‌نامند.

مثالهایی از میدان:

(۱) مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی R با همانی جمعی $\circ$ و همانی ضربی ۱.

(۲) مجموعهٔ تمام اعداد مختلط C با همانی جمعی $\circ + \circ i$ و همانی ضربی $۱ + \circ i$.

(۳) مجموعهٔ $\{\circ, ۱, ۲, ۳, \cdots, p-۱\}$ متشکل از p عدد صحیح، که در آن p عددی است اول و بزرگتر از ۱، با دو عمل دوتایی پیمانهٔ جمع p و پیمانهٔ ضرب p. میدان متناهی را میدان گالوا می‌نامند.

اجزای میدان را نرده‌ای می‌خوانند.

۳.۱ فضای برداری

مجموعهٔ $L = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \cdots\}$ را فضای برداری روی میدان F می‌نامند، چنانچه شرایط زیر صادق باشد:

(الف) عمل جمع با نماد $+$ در L طوری تعریف شود که تحت عمل جمع گروه آبلی باشد. جزء همانی این گروه را با $\circ$ نشان می‌دهند.

(ب) نرده‌ای میدان F و یک جزء از مجموعهٔ L را بتوان با عملی به‌نام ضرب نرده‌ای ترکیب کرد و جزئی از L به‌دست آورد، به‌طوری که به‌ازای هر $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L$ و $a, b \in F$، داشته باشیم

$$a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v} \in L, (a+b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u} \in L$$

$$a(b\mathbf{u}) = (a \cdot b)\mathbf{u}, 1\mathbf{u}, = \mathbf{u}, \circ\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{۳}$$

اجزای فضای برداری را بردار نامند. توجه کنید که $\circ$ جزء (همانی جمعی) F است، در صورتی که $\mathbf{0}$ بردار صفر L است.

عبارتهای فضای برداری خطی و فضای خطی را نیز برای فضای برداری به‌کار می‌برند. از این پس علامت ضرب را برای کمیتهای نرده‌ای حذف می‌کنیم و مثلاً $a \cdot b$ را، تنها به‌صورت ab می‌نویسیم.

فضای سه‌بعدی معمولی بردارهای مکان مثالی است از فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی. اولاً، روشن است که مجموعهٔ تمام بردارهای مکان گروه آبلی است. برای اینکه، اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ دو بردار این فضا باشند، $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$ نیز برداری از این فضاست. جزء همانی بردار صفر، $\mathbf{0}$، است. "وارون" بردار $\mathbf{u}$ بردار $\mathbf{u}-$ است. زیرا $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. علاوه‌براین، قانون جمع برداری شرکت‌پذیر است. این مطلب شرط (الف) را برای فضای برداری ثابت می‌کند. ثانیاً، بردارهای مکان در ویژگیهای فهرست‌شده در معادلات (۳)، به‌ازای تمام a و bهای متعلق به میدان اعداد حقیقی R، صدق می‌کنند. این مطلب شرط (ب) را برای فضای برداری ثابت می‌کند. به مثالهای دیگری از میدانهای برداری در بخشها و تمرینهای آتی می‌پردازیم.

۴.۱ بردارهای مستقل خطی

دو بردار غیرصفر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ از یک فضای برداری را وابستهٔ خطی می‌گویند، چنانچه یکی مضرب دیگری باشد، یعنی، اگر داشته باشیم $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$، که c کمیتی نرده‌ای از این میدان است. به‌عبارت

دیگر، $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را وابستهٔ خطی گویند، در صورتی که بتوان دو کمیت نرده‌ای غیرصفر a و b از میدان یافت، به‌نحوی که $a\mathbf{u}+b\mathbf{v}=0$ باشد. توجه کنید که مطلب فوق معادل این است که بگوییم $\mathbf{u}$ مضربی از $\mathbf{v}$ است و برعکس.

برعکس، دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را مستقل خطی می‌گویند، چنانچه یکی مضرب دیگری نباشد. در این حالت، معادلهٔ $a\mathbf{u}+b\mathbf{v}=0$ صادق نیست، مگر اینکه داشته باشیم $a=b=0$.

مفاهیم وابستگی خطی و استقلال خطی بردارها را می‌توان به بیش از دو بردار تعمیم داد. مجموعهٔ n بردار $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، $\cdots$، $\mathbf{x}_n$ را درنظر بگیرید که در آن n عددی صحیح و مثبت است. بردارهای این مجموعه را وابستهٔ خطی گویند، چنانچه بتوان کمیتهای نرده‌ای a_1، a_2، $\cdots$، a_n را یافت که حداقل یکی از آنها غیرصفر باشد، به‌طوری که

$$a_1\mathbf{x}_1+a_2\mathbf{x}_2+\cdots+a_n\mathbf{x}_n=0 \qquad (۴)$$

فرض کنید ضریب a_i، $1\le i\le n$، صفر نباشد. حال با تقسیم معادلهٔ (۴) بر a_i، داریم

$$\mathbf{x}_i=b_1\mathbf{x}_1+\cdots+b_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}+\mathbf{b}_{i+1}\mathbf{x}_{i+1}+\cdots+b_n\mathbf{x}_n \qquad (۵)$$

که $b_j=-a_j/a_i$، $1\le j\le n$. بنابراین، می‌توانیم بگوییم که n بردار یک مجموعه وابستهٔ خطی‌اند، اگر بتوان، حداقل یکی از آنها را، به‌صورت ترکیب خطی $n-1$ بردار باقیمانده نوشت.

توجه کنید که مجموعه‌ای از بردارها که شامل بردار صفر باشد، مجموعه‌ای از بردارهای وابستهٔ خطی است. این مطلب با تعریف بالا سازگار و در حقیقت پیامد آن است.

برعکس، n بردار یک مجموعه مستقل خطی است، اگر تنها جواب معادلهٔ (۴)، به‌ازای $1\le i\le n$، $a_i=0$ باشد. به‌عبارت دیگر، بردارهای یک مجموعه مستقل خطی هستند، اگر نتوان بردار صفر را به‌صورت ترکیب خطی این بردارها نوشت، مگر در حالتی که همهٔ ضرایب آن صفر باشد.

مثلاً، در فضای سه‌بعدی بردارهای مکان می‌توان مجموعه‌ای از سه بردار، ولی نه بیش از سه بردار، یافت که مستقل خطی باشند. اگر سه بردار مستقل خطی $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، و $\mathbf{x}_3$ را انتخاب کنیم، هر بردار دیگری از این فضا را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی این سه بردار چنین نوشت

$$\mathbf{u}=a_1\mathbf{x}_1+a_2\mathbf{x}_2+a_3\mathbf{x}_3 \qquad (۶)$$

بعد فضا را بیشینهٔ تعداد بردارهای مستقل خطی آن تعریف می‌کنند. به مجموعهٔ n بردار مستقل خطی در فضای برداری n بعدی یک پایه برای آن فضا می‌گویند. هر بردار این فضا را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی n بردار پایهٔ مفروض نوشت. روشن است که پایه یکتا نیست و آن‌را می‌توان به روشهای بیشماری به‌دست آورد.

جوابی از معادلهٔ (۴) را که، به‌ازای $n \geq i \geq ۱$، $a_i = ۰$ شود، جواب بدیهی می‌نامند. به‌جوابی که در آن، حداقل بعضی از a_iها (به‌ازای i دلخواه $a_i \neq ۰$) مخالف صفر باشد، جواب غیرصفر می‌گویند.

توجه کنید که معادلهٔ (۴) معادله‌ای همگن است. بنابراین، همواره دارای جواب بدیهی $a_i = ۰$، $n \geq i \geq ۱$، به‌ازای هر $\mathbf{x}_i$ است. این موضوع را به‌سادگی می‌توان دریافت. $a_i = ۰$ را به‌ازای تمام iها در معادلهٔ (۴) بگذارید، معادله، بدون توجه به $\mathbf{x}_i$ به‌کار رفته، صادق است.

با وجود این، نکتهٔ اساسی این است که آیا معادلهٔ (۴) جواب دیگری دارد، به‌نحوی که معادله به‌ازای ضرایب غیرصفر هم صادق باشد؟ پاسخ این سؤال برمی‌گردد به اینکه این مجموعه بردارها مستقل خطی‌اند یا وابستهٔ خطی. اگر معادلهٔ (۴) دارای جواب غیرصفر باشد، بردارهای $\mathbf{x}_i$ وابستهٔ خطی‌اند، در حالی‌که اگر تنها جواب بدیهی داشته باشد، $\mathbf{x}_i$ها مستقل خطی می‌شوند.

عکس این مطلب نیز درست است. اگر n بردار $\mathbf{x}_i$ وابستهٔ خطی باشند، معادلهٔ (۴)، به‌ازای ضرایب a_i، جوابهای غیرصفر دارد. اگر $\mathbf{x}_i$ها مستقل خطی باشند، دراین‌صورت معادلهٔ (۴) تنها جواب بدیهی دارد.

بر اهمیت واژهٔ تنها در گزاره‌های بالا نمی‌توان بیش از حد تأکید کرد.

دربارهٔ بعضی از نتایج مهم و همچنین جالب مربوط به وابستگی و استقلال خطی بردارها، در بخش ۴.۸ بحث می‌کنیم.

۵.۱ فضای برداری nتایی

هر فضای برداری nبعدی با فضای برداری nتایی یکریخت است. nتایی مجموعه‌ای مرتب از n عدد حقیقی یا مختلط است، مانند $\mathbf{u} = (u_۱, u_۲, \cdots, u_n)$، که در آن u_iها اعدادی دلخواه و همگی از یک نوع‌اند (یعنی، حقیقی یا مختلط). اگر مجموعهٔ تمام اجزائی مانند $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \cdots)$ را درنظر بگیریم، به‌طوری که مؤلفه‌های u_i همهٔ مقدارهای ممکن را بگیرند، فضای برداری nتایی

داریم؛ u_iها را مؤلفه‌های بردار $\mathbf{u}_i$ می‌نامند. فضای برداری را که میدان زیربنای آن میدان اعداد حقیقی باشد، فضای برداری حقیقی می‌نامند. به‌طور کلی، فضای برداری nتایی مختلط را درنظر می‌گیریم.

برداری را که همهٔ مؤلفه‌هایش صفر شد، بردار صفر می‌نامند: $\mathbf{0} = (۰, ۰, \cdots, ۰)$. دو بردار یک فضا با یکدیگر برابرند، اگر و تنها اگر مؤلفه‌های متناظرشان با یکدیگر مساوی باشند. پس

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \Leftrightarrow u_i = v_i \qquad ۱ \le i \le n \tag{۷}$$

جمع دو بردار و ضرب نرده‌ای آنها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} = (u_۱ + v_۱, u_۲ + v_۲, \cdots, u_n + v_n) \tag{۸الف}$$

$$a\mathbf{u} = \mathbf{u}a = (au_۱, au_۲, \cdots, au_n) \tag{۸ب}$$

می‌بینیم که هر دو اجزای فضای برداری‌اند.

مثال ۱. وابسته یا مستقل خطی بودن چهار بردار زیر را معلوم کنید

$$\mathbf{u} = (۱, ۲, ۳), \qquad \mathbf{v} = (۲, ۰, -۱)$$

$$\mathbf{w} = (۱, -۱, ۱), \qquad \mathbf{x} = (۲, ۱, ۰) \tag{۹}$$

حل: معادلهٔ زیر را برای ضرایب مجهول a، b، c، d حل می‌کنیم.

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} + d\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{۱۰}$$

به‌جای بردارها معادلات (۹) را قرار می‌دهیم. با استفاده از قواعد جمع برداری و ضرب نرده‌ای که در معادلات (۸) آوردیم، معادلهٔ (۱۰) چنین می‌شود

$$(a + ۲b + c + ۲d, ۲a - c + d, ۳a - b + c) = (۰, ۰, ۰) \tag{۱۱}$$

از این معادله به دستگاه سه معادله‌ای زیر می‌رسیم:

$$a + ۲b + c + ۲d = ۰ \qquad ۲a - c + d = ۰ \qquad ۳a - b + c = ۰ \tag{۱۲}$$

که دارای جواب زیر است

$$b = ۱۲a/۵, \quad c = -۳a/۵, \quad d = -۱۳a/۵, \qquad \text{دلخواه } a \tag{۱۳}$$

بنابراین معادلهٔ (۱۰)، با ضرایبی غیرصفر صادق است. معادلهٔ (۱۰) را، با استفاده از معادلهٔ (۱۳) و انتخاب $a = ۵$ چنین می‌نویسیم

$$۵\mathbf{u} + ۱۲\mathbf{v} - ۳\mathbf{w} - ۱۳\mathbf{x} = ۰ \tag{۱۴}$$

بنابراین، بردارهای مفروض وابستهٔ خطی‌اند.

مثال ۲. می‌شود نشان داد که حداکثر n بردار مستقل خطی در فضای برداری nتایی یافت می‌شود. به‌راحتی می‌توانیم این n بردار مستقل یا "محورهای مختصات" را چنین برگزینیم

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_۱ &= (۱, ۰, ۰, ۰, \cdots, ۰) \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_i &= (۰, ۰, \cdots, ۱_i, \cdots, ۰) \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (۰, ۰, ۰, \cdots, ۱) \end{aligned} \tag{۱۵}$$

که معنی ۱_i این است که یک در مکان iام قرار دارد. اکنون دو نتیجهٔ زیر را اثبات می‌کنیم.

(الف) n بردار $(\mathbf{e}_۱, \mathbf{e}_۲, \cdots, \mathbf{e}_n)$ مستقل خطی‌اند.

حل: معادلهٔ زیر را درنظر می‌گیریم

$$a_۱\mathbf{e}_۱ + a_۲\mathbf{e}_۲ + \cdots + a_n\mathbf{e}_n = ۰ \tag{۱۶}$$

به‌جای این بردارها معادلات (۱۵) را قرار می‌دهیم، می‌بینیم معادلهٔ (۱۶) می‌شود:

$$(a_۱, a_۲, \cdots, a_n) = (۰, ۰, \cdots, ۰) \tag{۱۷}$$

بنابراین تنها جواب معادلهٔ (۱۶)، به‌ازای $۱ \leq i \leq n$، $a_i = ۰$ می‌شود که نشان می‌دهد این n بردار مستقل خطی‌اند. بنابراین، می‌توان آنها را بردارهای پایهٔ این فضای برداری گرفت.

(ب) هر بردار این فضا (یعنی، هر nتایی) را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت ترکیبی خطی از n بردار $\mathbf{e}_i$ بیان کرد.

حل: بردار $\mathbf{u} = (u_۱, u_۲, \cdots, u_n)$ را درنظر بگیرید. سعی می‌کنیم آن‌را به این صورت درآوریم

$$\mathbf{u} = b_۱\mathbf{e}_۱ + b_۲\mathbf{e}_۲ + \cdots + b_n\mathbf{e}_n \qquad (۱۸)$$

این معادله به‌ازای $۱ \leq i \leq n$ دارای جواب $b_i = u_i$ است، به‌طوری که معادلهٔ (۱۸) چنین می‌شود

$$\mathbf{u} = \sum_{i=۱}^{n} u_i\mathbf{e}_i \qquad (۱۹)$$

۶.۱ فضای ضرب داخلی

از ساده‌ترین کاربردهای جبر نو تا کارهای تجربی علمی، تصوری از مفهوم اندازه، فاصله و زاویهٔ بین دو خط داریم. ضرب داخلی تعمیمی از این مفاهیم معمولی است.

فضای ضرب داخلی، فضای برداری L است، که روی میدان F تعریف شده و F میدان اعداد حقیقی یا مختلط است، اگر به هر زوج از اجزای $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L$، نرده‌ای یکتایی متعلق به میدان F مربوط شود ــ آن‌را با $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ نشان می‌دهند و ضرب داخلی یا ضرب نرده‌ای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ می‌نامند ــ که برای آن ویژگیهای زیر صادق است:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})^*$$

$$(a\mathbf{u}, b\mathbf{v}) = a^* b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \qquad (۲۰)$$

$$(\mathbf{w}, a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

که ستاره نشانهٔ مزدوج مختلط است.

هر فضای برداری nتایی از اعداد حقیقی یا مختلط را می‌توان به‌فضای ضرب داخلی تبدیل کرد، چنانچه ضرب داخلی دو بردار را چنین تعریف کنیم

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=۱}^{n} u_i^* v_i \qquad (۲۱)$$

فضای سه‌بعدی معمولی بردارهای مکان با قاعدهٔ آشنای ضرب نرده‌ای دو بردار نیز فضای ضرب داخلی است.

باید بدانیم سه معادله، معادلات (۲۰)، توأماً ضرب داخلی بردارها را تعریف می‌کنند. هر الگوریتمی را که یک نرده‌ای متناهی میدان F را از ترکیب دو بردار فضای L ایجاد کند و در معادلات (۲۰) صدق کند، می‌شود ضرب داخلی بردارها در آن فضا تلقی کرد. معادلهٔ (۲۱) تنها نمونه‌ای از این الگوریتمهاست، دیگر الگوریتمها برای ضرب داخلی را در معادلهٔ (۷۳)، معادلهٔ (۷۷) در مثال ۷ و تمرین ۲۴ آورده‌ایم.

اگر ضرب داخلی یک بردار را در خودش درنظر بگیریم، از معادلهٔ (۲۱) می‌یابیم:

$$(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2 \geq 0 \qquad (۲۲)$$

جذر این کمیت را هنجار بردار $\mathbf{u}$ تعریف می‌کنیم و با $\|\mathbf{u}\|$ نشان می‌دهیم، به‌طوری که داریم

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u},\mathbf{u})^{1/2} \qquad (۲۳)$$

به‌سادگی در می‌یابیم که این عبارت به زبان معمولی طول یا قدرمطلق بردار است. اگر هنجار برداری یک باشد، آن‌را بردار یکه یا بردار بهنجار می‌نامند. می‌بینیم همهٔ بردارهای $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ که در معادلات (۱۵) تعریف شدند، بردارهایی یکه‌اند.

اگر ضرب نرده‌ای دو بردار صفر باشد، این بردارها را متعامد بر یکدیگر نامند. به‌این ترتیب دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بر یکدیگر متعامدند، اگر و تنها اگر داشته باشیم

$$(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0 \qquad (۲۴)$$

بار دیگر می‌توان متعامد بودن بردارهای مجموعهٔ $\{\mathbf{e}_i\}$ را ثابت کرد. با ترکیب این نتیجه با نتیجهٔ قبلی، داریم

$$(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = \delta_{ij} \qquad (۲۵)$$

که δ_{ij} نماد دلتای کرونکر است.

مجموعه‌ای از بردارها را که هر یک از آنها بر بقیهٔ بردارهای این مجموعه متعامد باشد، مجموعهٔ متعامد می‌نامیم. اگر هر یک از این بردارها بهنجار شود [اندازه‌اش یک شود]، به آن مجموعهٔ

راست‌هنجار گویند. هر بردار غیرصفر را می‌توان با تقسیم کردن بر هنجارش بهنجار کرد. پس اگر $\mathbf{u}$ برداری غیرصفر باشد، $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ برداری بهنجار است که مضربی از $\mathbf{u}$ است.

ضرب داخلی بردار پایهٔ $\mathbf{e}_i$ را در بردار $\mathbf{u}$ از معادلهٔ (۱۹) به‌دست می‌آوریم، داریم

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{u}) = \left(\mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{n} u_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} u_j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = u_i \qquad (۲۶)$$

که در اینجا از معادلهٔ (۲۵) استفاده کرده‌ایم. پس، با جانشین کردن معادلهٔ (۲۶) در معادلهٔ (۱۹)، می‌بینیم که هر بردار $\mathbf{u}$ این فضا را می‌توان چنین بیان کرد

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{e}_i, \mathbf{u}) \mathbf{e}_i \qquad (۲۷)$$

۷.۱ روش متعامدسازی اشمیت

می‌توان مجموعه‌ای از بردارهای متعامد، یا در واقع راست‌هنجار را، برمبنای مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی به‌دست آورد که ممکن است متعامد نباشند. این کار را می‌توان به شیوه‌ای، مشهور به روش متعامدسازی اشمیت، انجام داد که در زیر دربارهٔ آن بحث می‌کنیم.

فرض کنید $\mathbf{u}_1$، $\mathbf{u}_2$، $\cdots$، $\mathbf{u}_n$ مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی باشد که لزوماً بر یکدیگر متعامد نیستند. باید مجموعه‌ای از بردارهای متعامد $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$، $\cdots$، $\mathbf{v}_n$ را، برمبنای مجموعهٔ اصلی بردارها، به‌دست آوریم. روشهای زیر را پیش می‌گیریم:

۱. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ می‌گیریم.

۲. فرض می‌کنیم

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + a_{21} \mathbf{v}_1 \qquad (۲۸)$$

در اینجا a_{21} ثابتی است که آن‌را از شرط تعامد $\mathbf{v}_2$ بر $\mathbf{v}_1$ به‌دست می‌آوریم، یعنی از، $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$. حاصلضرب نرده‌ای $\mathbf{v}_1$ را در $\mathbf{v}_2$ معادلهٔ (۲۸) درنظر می‌گیریم و آن‌را مساوی صفر قرار می‌دهیم، داریم

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2) + a_{21}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = 0 \Rightarrow a_{21} = -(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2)/(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) \qquad (۲۹)$$

به‌این ترتیب دو بردار متعامد $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ داریم.

۳. فرض کنید

$$\mathbf{v}_۳ = \mathbf{u}_۳ + a_{۳۱}\mathbf{v}_۱ + a_{۳۲}\mathbf{v}_۲ \tag{۳۰}$$

که $a_{۳۱}$ و $a_{۳۲}$ ثابتهایی‌اند که از شرط متعامد بودن $\mathbf{v}_۳$ بر $\mathbf{v}_۱$ و $\mathbf{v}_۲$ به‌دست می‌آیند. در نتیجه

$$(\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۳) \equiv ۰ = (\mathbf{v}_۱, \mathbf{u}_۳) + a_{۳۱}(\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۱) \Rightarrow a_{۳۱} = -(\mathbf{v}_۱, \mathbf{u}_۳)/(\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۱)$$

$$(\mathbf{v}_۲, \mathbf{v}_۳) \equiv ۰ = (\mathbf{v}_۲, \mathbf{u}_۳) + a_{۳۲}(\mathbf{v}_۲, \mathbf{v}_۲) \Rightarrow a_{۳۲} = -(\mathbf{v}_۲, \mathbf{u}_۳)/(\mathbf{v}_۲, \mathbf{v}_۲) \tag{۳۱}$$

اکنون سه بردار دوبه‌دو متعامد $\mathbf{v}_۱$، $\mathbf{v}_۲$ و $\mathbf{v}_۳$ داریم.

این روند همین‌طور ادامه می‌یابد. در مرحلهٔ iام، بردار زیر را درنظر می‌گیریم

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i + a_{i۱}\mathbf{v}_۱ + a_{i۲}\mathbf{v}_۲ + \cdots + a_{i,i-۱}\mathbf{v}_{i-۱} \tag{۳۲}$$

و ضرایب $a_{ij}(۱ \le j \le i-۱)$ را طوری تعیین می‌کنیم که $\mathbf{v}_i$ بر همهٔ بردارهای حاصل قبلی $\mathbf{v}_۱$، $\mathbf{v}_۲$، $\cdots$، $\mathbf{v}_{i-۱}$ متعامد باشد. به‌دست می‌آوریم

$$a_{ij} = -(\mathbf{v}_j, \mathbf{u}_i)/(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j) \tag{۳۳}$$

در پایان، همهٔ این بردارها را می‌توان بهنجارکرد و یک مجموعهٔ راست‌هنجار $\{x_i\}$ به‌دست آورد که

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{v}_i / \, \|\mathbf{v}_i\| \tag{۳۴}$$

مثال ۳. از بردارهای زیر، با استفاده از روش اشمیت، مجموعه‌ای شامل چهار بردار راست‌هنجار به‌دست آورید

$$\mathbf{u}_۱ = (۱, ۱, ۰, ۱) \qquad \mathbf{u}_۲ = (۲, ۰, ۰, ۱)$$

$$\mathbf{u}_۳ = (۰, ۲, ۳, -۲) \qquad \mathbf{u}_۴ = (۱, ۱, ۱, -۵) \tag{۳۵}$$

حل: فرض کنید $\mathbf{v}_۱ = \mathbf{u}_۱$ و $\mathbf{v}_۲ = \mathbf{u}_۲ + a_{۲۱}\mathbf{v}_۱$ باشد که $a_{۲۱}$ را از معادلهٔ (۲۹) به‌دست

می‌آوریم، داریم

$$(\mathbf{v}_۱, \mathbf{u}_۲) = ۱ \times ۲ + ۱ \times ۰ + ۰ \times ۰ + ۱ \times ۱ = ۳ \qquad (\text{۳۶الف})$$

$$(\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۱) = ۱ \times ۱ + ۱ \times ۱ + ۰ \times ۰ + ۱ \times ۱ = ۳ \qquad (\text{۳۶ب})$$

بنابراین $a_{۲۱} = -۱$. از اینجا داریم

$$\mathbf{v}_۲ = \mathbf{u}_۲ - \mathbf{v}_۱ = (۲, ۰, ۰, ۱) - (۱, ۱, ۰, ۱) = (۱, -۱, ۰, ۰) \qquad (۳۷)$$

$\mathbf{v}_۳ = \mathbf{u}_۳ + a_{۳۱}\mathbf{v}_۱ + a_{۳۲}\mathbf{v}_۲$ را درنظر می‌گیریم و ضرایب آن‌را از معادلهٔ (۳۱) به‌دست می‌آوریم. داریم

$$(\mathbf{v}_۱, \mathbf{u}_۳) = ۰ \Rightarrow a_{۳۱} = ۰$$

$$(\mathbf{v}_۲, \mathbf{u}_۳) = -۲, (\mathbf{v}_۲, \mathbf{v}_۲) = ۲ \Rightarrow a_{۳۲} = ۱ \qquad (۳۸)$$

از این‌رو

$$\mathbf{v}_۳ = \mathbf{u}_۳ + \mathbf{v}_۲ = (۱, ۱, ۳, -۲) \qquad (۳۹)$$

در پایان، درنظر می‌گیریم $\mathbf{v}_۴ = \mathbf{u}_۴ + a_{۴۱}\mathbf{v}_۱ + a_{۴۲}\mathbf{v}_۲ + a_{۴۳}\mathbf{v}_۳$. داریم

$$a_{۴۱} = -(\mathbf{v}_۱, \mathbf{u}_۴)/\,\|\mathbf{v}_۱\|^۲ = ۱$$

$$a_{۴۲} = -(\mathbf{v}_۲, \mathbf{u}_۴)/\,\|\mathbf{v}_۲\|^۲ = ۰ \qquad (۴۰)$$

$$a_{۴۳} = -(\mathbf{v}_۳, \mathbf{u}_۴)/\,\|\mathbf{v}_۳\|^۲ = -۱$$

بنابراین

$$\mathbf{v}_۴ = \mathbf{u}_۴ + \mathbf{v}_۱ - \mathbf{v}_۳ = (۱, ۱, -۲, -۲) \qquad (۴۱)$$

به‌این ترتیب مجموعهٔ متعامد مطلوب به‌صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{v}_۱ = (۱, ۱, ۰, ۱) \qquad \mathbf{v}_۲ = (۱, -۱, ۰, ۰)$$

$$\mathbf{v}_۳ = (۱, ۱, ۳, -۲) \qquad \mathbf{v}_۴ = (۱, ۱, -۲, -۲) \qquad (۴۲)$$

مجموعهٔ راست‌هنجار متناظر آن عبارت است از

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 0, 1) \qquad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$$
$$\mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 1, 3, -2) \quad \mathbf{x}_4 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 1, -2, -2) \tag{۴۳}$$

در حل این مثال، توجه کنید که مجموعهٔ نهایی بردارهای متعامد به مرتبهٔ بردارهای اصلی بستگی دارد. می‌توان از همان مجموعه بردارهای مستقل خطی به مجموعه‌های مختلفی از بردارهای متعامد رسید، چنانچه آن بردارها را با ترتیب متفاوتی درنظر بگیریم.

۸.۱ نابرابری شوارتس

فرض کنید $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ دو بردار دلخواه در یک فضای برداری باشند. نابرابری شوارتس بیان می‌کند که

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \| \tag{۴۴}$$

به‌عبارتی می‌گوید که مربع قدرمطلق حاصلضرب داخلی دو برابر کمتر یا مساوی حاصلضرب مربع هنجارهایشان است.

برای ثابت کردن این مطلب، ترکیب خطی زیر را درنظر می‌گیریم

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v} \tag{۴۵}$$

که $\lambda = \alpha + i\beta$ پارامتر نرده‌ای مختلط است. با به‌دست آوردن هنجار $\mathbf{w}$ و با استفاده از معادلات (۲۰)، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\| \mathbf{w} \|^2 &= (\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}, \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}) \\ &= \| \mathbf{u} \|^2 + \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda^*(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + |\lambda|^2 \| \mathbf{v} \|^2 \\ &= \| \mathbf{u} \|^2 + (\alpha + i\beta)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\alpha - i\beta)(\mathbf{u}, \mathbf{v})^* + (\alpha^2 + \beta^2) \| \mathbf{v} \|^2 \end{aligned} \tag{۴۶}$$

با مشتق‌گیری از این عبارت نسبت به α و سپس نسبت به β، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\partial \| \mathbf{w} \|^2 / \partial\alpha &= (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v})^* + 2\alpha \| \mathbf{v} \|^2 \\ \partial \| \mathbf{w} \|^2 / \partial\beta &= i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - i(\mathbf{u}, \mathbf{v})^* + 2\beta \| \mathbf{v} \|^2 \end{aligned} \tag{۴۷}$$

به‌این ترتیب، وقتی α و β مقدارهای زیر را می‌گیرند، $\|\mathbf{w}\|^۲$ کمینه می‌شود.

$$\alpha_{\min} = -[(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v})^*]/۲\, \|\mathbf{v}\|^۲$$
$$\beta_{\min} = -i[(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{u}, \mathbf{v})^*]/۲\, \|\mathbf{v}\|^۲ \qquad (۴۸)$$

و این ایجاب می‌کند که

$$\lambda_{\min} = -(\mathbf{u}, \mathbf{v})^*/\, \|\mathbf{v}\|^۲, \lambda^*_{\min} = -(\mathbf{u}, \mathbf{v})/\, \|\mathbf{v}\|^۲$$
$$|\lambda_{\min}|^۲ = \lambda_{\min}\lambda^*_{\min} = |(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^۲/\, \|\mathbf{v}\|^۴ \qquad (۴۹)$$

با گذاشتن این عبارات در معادلات (۴۶)، مقدار کمینهٔ $\|\mathbf{w}\|^۲$ را می‌یابیم که عبارت است از

$$\|\mathbf{w}\|^۲_{\min} = \|\mathbf{u}\|^۲ - |(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^۲/\, \|\mathbf{v}\|^۲ \qquad (۵۰)$$

هنجار یک بردار همواره بزرگتر یا مساوی صفر است، یعنی $\|\mathbf{w}\|_{\min} \geq ۰$. با استفاده از این نتیجه در معادلهٔ (۵۰)، نتیجهٔ مطلوب معادلهٔ (۴۴) به‌دست می‌آید.

علامت برابری در نابرابری شوارتس معتبر است، اگر و تنها اگر دو بردار نسبت به هم وابستهٔ خطی باشند.

۹.۱ نابرابری بسل

مجموعه‌ای از n بردار مستقل خطی در فضای ضرب داخلی nبعدی را مجموعهٔ کامل می‌نامند. پس می‌توان آن‌را یک پایه تلقی کرد، زیرا هر بردار این فضا را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از این بردارهای پایه بیان کرد.

گاهی نمی‌توانیم مجموعه‌ای کامل از بردارهای مستقل خطی بیابیم. به‌خصوص زمانی که با فضای برداری، با بعد نامتناهی کار می‌کنیم. چه بسا مجبور شویم با تعدادی ناکافی از بردارهای مستقل خطی کار کنیم (مجموعه‌ای ناکامل). یا با فضای برداری n بعدی (n متناهی یا نامتناهی) کار عددی (محاسبه‌ای) انجام دهیم. ممکن است، به دلیل محدودیتهای محاسبه‌ای، مجبور شویم که فقط با k بردار مستقل خطی ($k \leq n$) کار کنیم. در هر یک از حالتهای بالا، می‌خواهیم

خطای ناشی از مجموعهٔ ناکامل را تخمین بزنیم. نابرابری بسل امکان می‌دهد تا میزان این تقریب را فرمولبندی کنیم.

بردار $\mathbf{u}$ را در فضای ضرب داخلی nبعدی درنظر بگیرید. فرض کنید $\mathbf{e}_i$، $۱ \leq i \leq k \leq n$ مجموعه‌ای ناکامل ولی راست‌هنجار از بردارها در این فضا باشد. به‌جای معادلهٔ (۱۹)، اکنون برای $\mathbf{u}$ بسطی، تنها با k بردار پایه داریم.

$$\mathbf{u}' = \sum_{i=۱}^{k} u_i \mathbf{e}_i \tag{۵۱}$$

مانند معادلهٔ (۲۶)، داریم $u_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{u})$. روشن است که $\mathbf{u}'$ صورت تقریبی $\mathbf{u}$ است که در بسط خود به جمله‌هایی بیشتر از $\mathbf{u}'$ نیاز دارد. تفاضل آنها $\mathbf{u} - \mathbf{u}'$ است. از اینکه هنجار هر برداری غیرمنفی است، داریم

$$\begin{aligned}
۰ \leq \| \mathbf{u} - \mathbf{u}' \|^۲ &= \left(\mathbf{u} - \sum_{i=۱}^{k} u_i \mathbf{e}_i, \mathbf{u} - \sum_{i=۱}^{k} u_i \mathbf{e}_i \right) \\
&= \| \mathbf{u} \|^۲ - (\mathbf{u}, \sum u_i \mathbf{e}_i) - (\sum u_i \mathbf{e}_i, \mathbf{u}) + (\sum u_i \mathbf{e}_i, \sum u_j \mathbf{e}_j) \\
&= \| \mathbf{u} \|^۲ - \sum u_i (\mathbf{u}, \mathbf{e}_i) - \sum u_i^* (\mathbf{e}_i, \mathbf{u}) + \sum u_i^* u_i \\
&\leq \| \mathbf{u} \|^۲ - \sum_{i=۱}^{k} |u_i|^۲ \qquad (۵۲)
\end{aligned}$$

که از معادلات (۲۶) و (۲۵) استفاده کرده‌ایم و همهٔ مجموعهای مراحل میانی از ۱ تا k را در بر می‌گیرد. این منجر می‌شود به

$$\sum_{i=۱}^{k} |u_i|^۲ \leq \| \mathbf{u} \|^۲ \tag{۵۳الف}$$

$$\sum_{i=۱}^{k} |(\mathbf{e}_i, \mathbf{u})|^۲ \leq (\mathbf{u}, \mathbf{u}) \tag{۵۳ب}$$

که نابرابری بسل است.

در معادلات (۵۳)، اگر و تنها اگر $k = n$ باشد، برابری معتبر است، یعنی مجموعه‌ای کامل از بردارهای پایه داریم. این برابری به برابری پارسوال معروف است. این مطلب به‌این

معناست که: اگر $\mathbf{e}_i$ مجموعه‌ای کامل از بردارهای پایه در یک فضای برداری n بعدی باشد، دراین‌صورت:

$$\sum_{i=1}^{n} |(\mathbf{e}_i, \mathbf{u})|^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) \tag{۵۴}$$

مثال ۴. اگر $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$، $\mathbf{z}$ بردارهای مستقل خطی باشند، تعیین کنید که $\mathbf{x}+\mathbf{y}$، $\mathbf{y}+\mathbf{z}$، و $\mathbf{z}+\mathbf{y}$ وابستهٔ خطی‌اند یا مستقل.

حل: در اینجا $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$، و $\mathbf{z}$ مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی تشکیل می‌دهند. این مطلب به‌این معنی است که معادلهٔ زیر

$$a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + c\mathbf{z} = 0 \tag{۵۵}$$

تنها جواب بدیهی دارد.

$$a = b = c = 0 \tag{۵۶}$$

برای اینکه معلوم کنیم $\mathbf{x}+\mathbf{y}$، $\mathbf{y}+\mathbf{z}$، و $\mathbf{z}+\mathbf{x}$ وابسته یا مستقل خطی‌اند، معادلهٔ زیر را برای ضرایب نرده‌ای p، q، و r حل می‌کنیم

$$p(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + q(\mathbf{y}+\mathbf{z}) + r(\mathbf{z}+\mathbf{x}) = 0 \tag{۵۷}$$

با ترکیب جمله‌های سمت چپ معادلهٔ (۵۷)، داریم

$$(p+r)\mathbf{x} + (p+q)\mathbf{y} + (q+r)\mathbf{z} = 0 \tag{۵۸}$$

این عبارت ترکیبی خطی از $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$، $\mathbf{z}$ با ضرایب نرده‌ای است. اما چون $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$، $\mathbf{z}$ بردارهای مستقل خطی‌اند، تنها جواب بدیهی زیر را دارد

$$p+r = 0, p+q = 0, q+r = 0 \tag{۵۹}$$

با حل این معادلات به جوابهای زیر می‌رسیم

$$p = q = r = 0 \tag{۶۰}$$

چون این تنها جواب معادلهٔ (۵۷) است، نتیجه می‌گیریم بردارهای $\mathbf{x}+\mathbf{y}$، $\mathbf{y}+\mathbf{z}$، و $\mathbf{z}+\mathbf{x}$ مستقل خطی‌اند.

مثال ۵. (الف) نشان دهید که مجموعهٔ همهٔ اعداد مختلط یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی تشکیل می‌دهد.

(ب) بعد این فضای برداری چیست؟

حل: (الف) باید ثابت کنیم شرایط فضای برداری‌ای که در بخش ۳.۱ به آن اشاره کردیم، در این حالت صادق است.

۱. در مجموعهٔ اعداد مختلط C عمل جمع تعریف شده است. بنابراین، مجموع دو عدد مختلط عددی مختلط است. اگر $a+ib$ و $c+id$ دو جزء باشند، دراین‌صورت مجموعشان نیز جزئی از C است:

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d) \tag{۶۱}$$

۲. جمع اعداد مختلط شرکت‌پذیر است:

$$[(a+ib)+(c+id)]+(e+if)=(a+ib)+[(c+id)+(e+if)] \tag{۶۲}$$

۳. جزء $\circ+\circ i$ همانی است، زیرا به‌ازای هر جزء $a+ib$ متعلق به C، داریم

$$(a+ib)+(\circ+\circ i)=a+ib \tag{۶۳}$$

۴. هر جزء $a+ib$ از C، دارای وارون یکتای $-a-ib$ است که آن نیز متعلق به C است، به‌نحوی که

$$(a+ib)+(-a-ib)=\circ+\circ i \tag{۶۴}$$

۵. جمع اعداد مختلط جابه‌جایی‌پذیر است:

$$(a+ib)+(c+id)=(c+id)+(a+ib) \tag{۶۵}$$

می‌بینیم که شرط اول صادق است، بنابراین C تحت عمل جمع یک گروه آبلی است.

حال جزء $x \in R$ (میدان اعداد حقیقی) را می‌توان با جزء $a + ib \in C$ طوری ترکیب کرد که جزء منتج متعلق به C باشد.

$$x(a + ib) = xa + ixb \tag{۶۶}$$

این ضرب نرده‌ای در شرایط معادلات (۳) صادق است، زیرا به‌ازای هر $x, y \in R$، داریم

$$\begin{aligned} x[(a + ib) + (c + id)] &= x(a + ib) + x(c + id) \in C \\ (x + y)(a + ib) &= x(a + ib) + y(a + ib) \in C \\ x[y(a + ib)] &= (xy)(a + ib) \\ ۱(a + ib) = a + ib, &\quad ۰(a + ib) = ۰ + ۰i \end{aligned} \tag{۶۷}$$

و این ثابت می‌کند که C یک فضای برداری روی میدان R است.

(ب) بعد این فضا ۲ است. برای اثبات، دو جزء خاص $۱ + ۰i$ و $۰ + ۱i$ از C را انتخاب و معادلهٔ زیر را برای $x, y \in R$ حل می‌کنیم

$$x(۱ + ۰i) + y(۰ + ۱i) = (۰ + ۰i) \tag{۶۸}$$

معادلهٔ (۶۸) را ساده می‌کنیم، داریم

$$(x + ۰i) + (۰ + yi) = ۰ + ۰i$$

یا

$$x + iy = ۰ + ۰i \Leftrightarrow x = y = ۰ \tag{۶۹}$$

چون تنها جواب معادلهٔ (۶۸) جواب بدیهی است، نتیجه می‌گیریم که دو بردار $۱ + ۰i$ و $۰ + ۱i$ مستقل خطی‌اند. به‌علاوه، هر بردار دیگر $a + ib$ از C را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از این دو بردار به‌صورت زیر نشان داد

$$a + ib = a(۱ + ۰i) + b(۰ + ۱i) \tag{۷۰}$$

با ضرایبی که متعلق به میدان R هستند.

این مطلب نشان می‌دهد که بیشترین تعداد بردارهای مستقل خطی در این فضا، یعنی بعد آن، ۲ است.

۱۰.۱ فضای برداری توابع

اغلب به فضاهای برداری برمی‌خوریم که اجزایشان تابع‌اند. بنابراین، فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ جوابهای یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن معمولی مرتبهٔ n باشد.

$$\mathcal{L}y = 0\,, y \equiv y(x) \tag{۷۱}$$

که $\mathcal{L}$ عملگر دیفرانسیل خطی معمولی مرتبهٔ n نسبت به x است و y تابعی از x است. می‌توان نشان داد که این مجموعه یک فضای برداری است. به‌این ترتیب، اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو جواب معادلهٔ (۷۱) باشند، $f(x)+g(x)$ و نیز $-f(x)$ جوابهایی از این معادله‌اند. جزء همانی تابعی است که عیناً صفر است، $y=0$ که به روشنی متعلق به این مجموعه است، زیرا در معادلهٔ (۷۱) صدق می‌کند. تابع $-f(x)$ وارون جمعی $f(x)$ است. قانون جمع توابع، شرکت‌پذیر و همچنین جابه‌جایی‌پذیر است.

در پایان، به‌ازای هر کمیت نرده‌ای a و b، حقیقی یا مختلط، $af(x)+bg(x)$ نیز جواب معادلهٔ (۷۱) است. این عملیات برای تمام شرایط معادلات (۳) صادق است. این مطلب نشان می‌دهد که S فضای برداری روی میدان R و همچنین روی C است.

آشکار است که معادلهٔ (۷۱) n جواب مستقل خطی دارد که آنها را با $y_i(x)$، $1 \le i \le n$ نشان می‌دهیم. هر جواب دیگر معادلهٔ (۷۱) را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی این جوابها به‌شکل زیر بیان کرد

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i(x) \tag{۷۲}$$

با کمیتهای نرده‌ای a_i که متعلق به R یا Cاند. این نشان می‌دهد که فضای برداری S، nبعدی است. n جواب $y_i(x)$، پایهٔ این فضا را تشکیل می‌دهند.

در ضمن از میان این الگوریتمها می‌توان فضای ضرب داخلی ایجاد کرد. اگر متغیر x برد متناهی $[a,b]$ داشته باشد، می‌توان ضرب داخلی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را به‌صورت زیر نوشت

$$(f,g)=\int_a^b f^*(x)g(x)dx \tag{۷۳}$$

می‌توان اثبات کرد که الگوریتم معادلهٔ (۷۳) در تمام شرایط لازم برای ضرب داخلی، که در معادلات (۲۰) بیان کردیم، صدق می‌کند. تعدادی الگوریتم دیگر در زمینهٔ ضرب داخلی را برای مثال ۷ و تمرین ۲۴ می‌گذاریم.

اگر ضرب داخلی دو تابع در بازهٔ $[a,b]$ صفر شود، این دو تابع را در این بازه، نسبت به هم متعامد می‌نامند.

اگر معادلهٔ (۷۳) را برای تعریف ضرب داخلی انتخاب کنیم، هنجار هر جزء این فضا (در اینجا یک تابع) می‌شود:

$$\| f \|^۲=(f,f)=\int_a^b |f(x)|^۲dx \tag{۷۴}$$

اگر سمت راست معادلهٔ (۷۴) متناهی باشد، تابع $f(x)$ را در بازهٔ $[a,b]$ انتگرال‌پذیر مربعی می‌نامند.

مثال ۶. نشان دهید که سه تابع $x^۲$، $x^۳$، و $\cos\ x$ در بازهٔ $x\in(-\infty,\infty)$ مستقل خطی‌اند.

حل: معادلهٔ زیر را برای ضرایب نرده‌ای حل می‌کنیم

$$ax^۲+bx^۳+c\cos\ x=\circ, x\in(-\infty,\infty) \tag{۷۵}$$

چون این معادله باید برای تمام مقدارهای متناهی x صادق باشد، در معادلهٔ (۷۵)، به‌طور متوالی، x را برابر با ۰، ۱ و ۱− قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آوریم

$$c=\circ, a+b+c\cos\ ۱=\circ, a-b+c\cos\ ۱=\circ \tag{۷۶}$$

تنها جواب معادلات بالا عبارت است از $a=b=c=\circ$، که نشان می‌دهد این سه تابع مستقل خطی‌اند.

مثال ۷. فضایی برداری از چند جمله‌ایهای حقیقی، با متغیر x را در بازهٔ $[\circ, \infty)$ روی میدان اعداد حقیقی درنظر بگیرید. نشان دهید که معادلهٔ زیر

$$(f, g) = \int_{\circ}^{\infty} e^{-x} f(x) g(x) dx \qquad (۷۷)$$

ضرب داخلی ممکن برای دو تابع f و g است.

حل: باید اثبات کنیم که الگوریتم معادلهٔ (۷۷) در تمام شرایط لازم برای ضرب داخلی که در معادلهٔ (۲۰) آوردیم، صدق می‌کند. اینجا مجموعه‌ای از توابع حقیقی روی میدان R داریم؛ از این‌رو عمل مزدوج مختلط در تابعی از این مجموعه یا کمیت نرده‌ای R تغییری ایجاد نمی‌کند.

فرض کنید f، g، و h سه تابع دلخواه از مجموعهٔ یادشده باشند. حال بدیهی است که بنابر الگوریتم معادلهٔ (۷۷)، عمل (f, g) برای هر چندجمله‌ای $f(x)$ و $g(x)$ متناهی می‌شود (یعنی انتگرال سمت راست معادلهٔ (۷۷) وجود دارد). علاوه‌براین، خواهیم داشت

$$(g, f) \equiv \int_{\circ}^{\infty} e^{-x} g(x) f(x) dx = \int_{\circ}^{\infty} e^{-x} f(x) g(x) dx = (f, g) \qquad (۷۸)$$

همچنین برای کمیتهای نرده‌ای $a, b \in R$ خواهیم داشت

$$(af, bg) \equiv \int_{\circ}^{\infty} e^{-x} af(x) bg(x) dx = ab(f, g) \qquad (۷۹)$$

در پایان،

$$\begin{aligned}(h, af + bg) &= \int_{\circ}^{\infty} e^{-x} h(x)[af(x) + bg(x)] dx \\ &= a \int_{\circ}^{\infty} e^{-x} h(x) f(x) dx + b \int_{\circ}^{\infty} e^{-x} h(x) g(x) dx \\ &= a(h, f) + b(h, g)\end{aligned} \qquad (۸۰)$$

معادلات (۷۸)، (۷۹)، و (۸۰) نشان می‌دهند که معادلهٔ (۷۷) را می‌توان ضرب داخلی توابع در فضای مورد نظر به‌حساب آورد.

تابع e^{-x} را در این مثال تابع وزن می‌نامند. اگر ضرب داخلی (f, g) در معادلهٔ (۷۷) صفر شود، $f(x)$ و $g(x)$ را نسبت به تابع وزن e^{-x} متعامد گویند. الگوریتم دیگری برای ضرب داخلی توابع موضوع تمرین ۲۴ است.

۱۱.۱ تبدیلهای خطی

اغلب لازم است تبدیلهای مؤلفه‌های یک بردار را از یک دستگاه مختصات به دستگاه مختصات دیگری درنظر بگیریم. اگر این تبدیل طوری باشد که مبدأ مختصات تغییر نکند، یعنی دستگاه مختصات انتقالی نداشته باشد، آن‌را تبدیل همگن می‌نامند. اگر این تبدیل انتقالی را در دستگاه مختصات در برگیرد، آن‌را تبدیل ناهمگن می‌نامند. با وجود این، چون تغییر مکان موازی دستگاه مختصات و بردار نسبت به یکدیگر مؤلفه‌های بردار را در فضای اقلیدسی تغییر نمی‌دهد، هر تغییر مکان مبداء را نادیده می‌گیریم و بررسی خود را تنها به تبدیلهای همگن محدود می‌کنیم. ساده‌ترین این تبدیلها، تبدیلهای خطی است که در آنها مؤلفه‌های جدید یک بردار توابعی خطی از مؤلفه‌های قدیمی آن است. بنابراین اگر x_iها مؤلفه‌های برداری در یک دستگاه مختصات باشند و y_iها مؤلفه‌های آن، بعد از تبدیل خطی در دستگاه مختصات دیگر، داریم

$$y_i = b_{i۱}x_۱ + b_{i۲}x_۲ + \cdots + b_{in}x_n = \sum_{k=۱}^{n} b_{ik}x_k, \ ۱ \le i \le n \qquad (۸۱)$$

حال تبدیل خطی دیگری از دستگاه مختصات را درنظر می‌گیریم که در آن همان بردار مؤلفه‌های z_i دارد که با معادلهٔ زیر با مؤلفه‌های y_i ارتباط خطی دارند

$$z_i = \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}y_k, \ ۱ \le i \le n \qquad (۸۲)$$

می‌توان دستگاه مختصات میانی را حذف کرد و مستقیماً تبدیلی از مؤلفه‌های x_i به مؤلفه‌های z_i به‌دست آورد.

با گذاشتن معادلهٔ (۸۱) در معادلهٔ (۸۲)، داریم

$$z_i = \sum_{i=۱}^{n}\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{kj}x_j, \ ۱ \le i \le n \qquad (۸۳)$$

که می‌توان آن‌را به‌صورت تبدیل خطی همگن زیر نوشت

$$z_i = \sum_{j=۱}^{n} c_{ij}x_j, \ ۱ \le i \le n \qquad (۸۴)$$

که

$$c_{ij} = \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{kj}, \ ۱ \le i,j \le n \qquad (۸۵)$$

در پرداختن به این تبدیلها آشنایی با مفهوم ماتریس مفید است. در واقع، با مطالعهٔ این تبدیلهای خطی متوالی، شاخهٔ جبر ماتریسی به مرور زمان گسترش یافت.

در فصلهای بعد می‌پردازیم به: مطالعهٔ قواعد اصلی جبر ماتریسی، انواع گوناگون ماتریسهای خاص و چگونگی به‌کارگیری آنها در تبدیلهای خطی فضای برداری.

تمرین

۱.۱ در هر یک از حالتهای زیر، هنجار بردار را پیدا کنید و آن‌را به‌صورت بهنجار بنویسید:
(الف)* $(۲, ۱, ۳, -۱)$؛ (ب) $(۱, ۰, -۲, ۳, ۵)$؛ (ج)* $(۱, i)$؛ (د) $(۱+i, -۲+۳i, ۳, ۴i)$؛
(ه) $(۲+i, ۱-i, ۰, ۳+۳i)$

۲.۱ معلوم کنید که مجموعه بردارهای زیر مستقل خطی است یا وابسته خطی:
(الف)* $(۱, ۲, -۱), (۰, ۵, -۳), (-۴, ۱, ۳)$
(ب) $(۱, -۲, ۳, ۱), (۲, ۰, -۲, ۲), (۶, ۲, ۱, -۵), (-۳, ۲, ۰, ۱)$
(ج)* $(۱, ۲, ۰, -۲, -۱), (۳, -۱, ۴, ۱, -۲), (۰, ۲, -۳, ۴, ۱), (۳, ۳, ۳, ۴, ۱),$
$(-۱, ۰, ۲, ۱, ۳)$

۳.۱ نشان دهید که سه بردار $(۱, ۱, ۱)$، $(۱, ۰, -۱)$، و $(۱, -۲, ۱)$ مجموعه‌ای از سه بردار مستقل خطی است. همچنین اثبات کنید که بردارهایی متعامدند. هر یک از بردارهای (الف) $(۱, ۰, ۰)$، (ب) $(۲, -۱, ۳)$ را به‌صورت ترکیبی خطی از سه بردار مفروض بنویسید.

۴.۱ اگر $\mathbf{x}_i$ $(۱ \le i \le n)$ مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی باشد و اگر داشته باشیم

$$\sum_{i=۱}^{n} a_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=۱}^{n} b_i \mathbf{x}_i$$

که در آن a_i و b_i کمیتهای نرده‌ای‌اند، نشان دهید که به‌ازای $۱ \le i \le n$، $a_۱ = b_۱$.

۵.۱ در هر یک از حالتهای زیر، مقدارهایی از x را بیابید که به‌ازای آنها مجموعه بردارهای مفروض وابستهٔ خطی باشند:
(الف)* $(۱, ۲, ۳), (۴, ۵, ۶), (x, ۸, ۹)$
(ب) $(۱, ۱, ۰), (x, ۲, -۱), (۰, ۰, ۱)$

(ج)* $(1, 2, x)$، $(0, 1, 6)$، $(0, -1, 2)$

(د) $(1, -1, 1, -1)$، $(0, 1, 2, x)$، $(1, 1, 1, 1)$، $(2, 3, 1, 4)$

۱.۶ هر یک از بردارهای تمرینهای ۱ (الف)، ۱(د) و ۱(هـ) را به‌صورت ترکیبی خطی از چهار بردار تمرین ۲(ب) بنویسید.

۱.۷* با ذکر دلیل، صادق یا کاذب بودن هر یک ازگزاره‌های زیر را بیان کنید.

(الف) اگر بردارهای مجموعه‌ای دو به دو متعامد باشند، نتیجه می‌گیریم که لزوماً یک مجموعهٔ متعامد است.

(ب) اگر بردارهای مجموعه‌ای دو به دو مستقل خطی باشند، نتیجه می‌گیریم که لزوماً مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی است.

۱.۸ اگر $\mathbf{u}_i$، $1 \le i \le n$، مجموعه‌ای از n بردار باشد، دترمینان گرام اشمیت، یا صرفاً دترمینان گرام آنها را به‌صورت دترمینان $n \times n$یی تعریف می‌کنیم که اجزای آن، حاصلضرب نرده‌ای بردارها در یکدیگر است، یعنی

$$D = \begin{vmatrix} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) & (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \cdots (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_n) \\ (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) & (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) \cdots (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_n) \\ (\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_1) & (\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_2) \cdots (\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) \end{vmatrix}$$

ثابت کنید که مجموعهٔ این بردارها وابستهٔ خطی است، اگر و فقط اگر، $D = 0$ باشد.

۱.۹* نشان دهید که بردارهای مجموعهٔ زیر وابستهٔ خطی‌اند.

$$(1, 2, 3, 4), (1, 0, 2, 1), (2, -1, 4, 1), (-1, 3, 0, 4)$$

شرطی را بیابید که بردارکلی (x, y, z, w) را بتوان به‌صورت ترکیب خطی سه برداراول بالا بیان کرد.

۱.۱۰* تبدیل $\mathbf{A}$ روی بردار $\mathbf{r}$ دارای اثر $\mathbf{Ar} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$ است، که $\mathbf{a}$ برداری معلوم است و $\times$ نشانهٔ حاصلضرب برداری دو بردار است. نشان دهید که $\mathbf{A}^3 + a^2\mathbf{A} = 0$، عملگر صفر، است که $a = \|\mathbf{a}\|$ است.

۱.۱۱ فرض کنید $P(\boldsymbol{\theta})$ بیانگر عمل چرخش به‌اندازهٔ زاویهٔ θ حول محوری موازی با بردار $\boldsymbol{\theta}$

---

* تمرینهایی که جوابهای آنها را در آخر کتاب آورده‌ایم با ستاره مشخص شده‌اند.

است که ازمبدأ مختصات می‌گذرد. در اینجا θ بزرگی بردار $\boldsymbol{\theta}$ است. نشان دهید که اثر تبدیل $P(\boldsymbol{\theta})$ برای مقدارهای بینهایت کوچک θ برابر است با

$$P(\boldsymbol{\theta})\mathbf{r} = \mathbf{r} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}$$

۱.۱۲ نشان دهید که دو بردار $\mathbf{u} = (۱ + i, ۲ - i, -۳)$ و $\mathbf{v} = (۳i, -۱ + ۲i, ۲ + i)$ در نابرابری شوارتس صدق می‌کنند.

۱.۱۳ چرا در برهان نابرابری شوارتس λ را باید پارامتری مختلط بگیریم؟ [راهنمایی: در معادلهٔ (۴۵) λ را پارامتری حقیقی بگیرید، در حالی که $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهای مختلط‌اند]. نشان دهید که از شرط $\parallel \mathbf{w} \parallel_{\min} \geq ۰$ به معادلهٔ $\parallel \mathbf{u} \parallel\parallel \mathbf{v} \parallel \geq [Re(\mathbf{u}, \mathbf{v})]$ می‌رسیم که $Re(z)$ به‌معنی قسمت حقیقی z است. [این شرطی ضعیفتر از نابرابری شوارتس است (چرا؟) اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهای حقیقی باشند، کافی است که λ را حقیقی درنظر بگیرید. ولی دراین‌صورت، نابرابری شوارتس را تنها برای بردارهای حقیقی ثابت کرده‌اید.]

۱.۱۴ تعبیر معمول نابرابری شوارتس را در فضای دوبعدی حقیقی پیدا کنید.

۱.۱۵ برهانی از نابرابری شوارتس را با دنبال کردن مراحل زیر به‌دست آورید. بردارها را در یک فضای nبعدی می‌توان به‌صورت nتایی مرتب نمایش داد. دو بردار $\mathbf{u} = (u_۱, u_۲, \cdots, u_n)$ و $\mathbf{v} = (v_۱, v_۲, \cdots, v_n)$ را درنظر بگیرید. از نابرابری زیر شروع کنید

$$۰ \leq \sum_{ij} (u_i^* v_j^* - u_j^* v_i^*)(u_i v_j - u_j v_i)$$

که برمبنای این واقعیت صادق است که هر جمله در سمت راست حقیقی و غیرمنفی است. با استفاده از معادلهٔ (۲۱) برای حاصلضرب داخلی دو بردار و معادلهٔ (۲۲) برای هنجار یک بردار، سمت راست نابرابری را حل کنید و نشان دهید که به‌معادلهٔ (۴۴) می‌انجامد.

۱.۱۶ فرض کنید $\mathbf{e}_i$، k بردار راست‌هنجار در یک فضای ضرب داخلی nبعدی $(k < n)$ باشد. فرض کنید $\mathbf{u}$ برداری از این فضای nبعدی است و فرض کنید $u_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{u})$. حال $\mathbf{u}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{u}' = \sum_{i=۱}^{k} a_i \mathbf{e}_i$$

که a_iها کمیتهای نرده‌ای مختلط دلخواه‌اند. با دنبال کردن مراحلی نظیر معادلهٔ (۵۲)، هنجار $\mathbf{u}-\mathbf{u}'$ را به‌دست آورید. نشان دهید که $\|\mathbf{u}-\mathbf{u}'\|$ وقتی که $a_i = u_i$ است، کمینه است.

۱.۱۷* اگر بردارهای مجموعه‌ای بر یکدیگر متعامد باشند، ثابت کنید که آن مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی است.

۱.۱۸ از بردارهای تمرین ۹ شروع کنید و مجموعه‌ای از بردارهای راست‌هنجار با روش اشمیت به‌دست آورید.

۱.۱۹ نشان دهید که بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، و $\mathbf{c}$ در فضای سه‌بعدی حقیقی مستقل خطی‌اند، اگر و تنها اگر داشته باشیم $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \neq 0$ [در اینجا نقطه نشانهٔ حاصلضرب نرده‌ای (داخلی) و ضرب نشانهٔ حاصلضرب برداری دو بردار است.]

۱.۲۰ (الف) نشان دهید که مجموعهٔ تمام توابع تناوبی با دورهٔ تناوب L و متغیر x به‌نحوی که $f(x+L) = f(x)$ باشد، فضای برداری است، چنانچه هر یک از آنها، حداکثر تعدادی متناهی از ناپیوستگیهای متناهی در بازهٔ $[0, L]$ داشته باشد. (ب) نشان دهید که توابع ۱، $\cos\frac{2\pi n}{L}x$ و $\sin\frac{2\pi n}{L}x$ که $n = 1, 2, 3, \ldots$ در بازهٔ $[0, L]$ بر یکدیگر متعامدند و در نتیجه در بازهٔ $[a, a+L]$ نیز به‌ازای هر عدد حقیقی دلخواه a چنین‌اند. (ج) نشان دهید که هر تابع تناوبی $f(x)$ با دورهٔ تناوب L را که تعداد ناپیوستگیهای متناهی آن در یک دورهٔ تناوب محدود است، می‌توان، برحسب مجموعهٔ متعامد توابع قسمت (ب) بسط داد. [توجه کنید: این بسط همان سری فوریهٔ تابع تناوبی است.]

۱.۲۱ مجموعهٔ تمام چندجمله‌ایهای حقیقی x با درجهٔ کمتر یا مساوی n را درنظر بگیرید. (الف) نشان دهید که این مجموعه یک فضای برداری روی میدان R است. (ب) پایهٔ مناسبی را در این فضا انتخاب کنید. (ج) جزء کلی فضای برداری را به‌صورت ترکیب خطی توابع پایه بنویسید. (د) بعد این فضا چیست؟

۱.۲۲ مجموعهٔ تمام چندجمله‌ایهای همگن حقیقی درجهٔ ۳ با دو متغیر x و y را درنظر بگیرید. [یک جزء کلی این مجموعه عبارت است از $f(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$؛ $a, b, c, d \in R$]. نشان دهید که این مجموعه فضای برداری است. بعد آن چیست؟

۱.۲۳ $f_0(x) = 1$ را برگزینید و فرض کنید که x متعلق به بازهٔ $[-1, 1]$ باشد. فرض کنید $f_i(x)$ یک چندجمله‌ای حقیقی درجهٔ i باشد که در همان بازه تعریف شده است. $f_1(x)$ را که

در $[-۱,۱]$ بر $f_۰(x)$ متعامد است، پیدا کنید. $f_۲(x)$ را که بر $f_۰$ و $f_۱$ متعامد است، پیدا کنید. این روند را ادامه دهید و $f_n(x)$ را بیابید که بر تمام چندجملهایهای $f_i(x)$، $۱ \leq i \leq n-۱$، پیشین متعامد است. [توجه کنید: اینها، بجز عاملهای ثابت، چندجملهایهای لژاندرند.]

۱. ۲۴ فرض کنید $u(t)$ و $v(t)$ اجزای فضای برداری چندجملهایهای حقیقی باشند که در بازهٔ $(-\infty,\infty)$ تعریف شدهاند. نشان دهید که عبارت زیر

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^۲)u(t)v(t)dt$$

در تمام ویژگیهای لازم برای ضرب داخلی $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ صدق می‌کند.

۱. ۲۵ فرض کنید $f_i(x)$ چندجملهای حقیقی از x، از درجهٔ i در بازهٔ $[۰,\infty)$ باشد. ضرب داخلی آنها را با معادلهٔ (۷۷) تعریف کردهایم. با شروع از $f_۰(x) = ۱$، اولین چندجملهایهای متعامد (با تابع وزن e^{-x}) را در بازهٔ $[۰,\infty)$ پیدا کنید. [توجه: اینها، بجز عاملهای ثابت، چندجملهایهای لاگرند.]

۱. ۲۶ این تمرین شبیه تمرین ۱.۲۳ و ۱.۲۵ است، ولی با تابع وزن $e^{-x^۲}$ و در بازهٔ $(-\infty,\infty)$. با شروع از $f_۰(x) = ۱$ و تعریف ضرب داخلی همانند تمرین ۲۴ بالا، اولین چندجملهایهای متعامد را پیدا کنید [توجه: این چندجملهایها، بهغیر از عاملهای ثابت، چندجملهایهای هرمیتاند.]

۲

ماتریسها- عملیات جبری بنیادی

دراین فصل ماتریس را تعریف می‌کنیم و دربارهٔ چند عمل سادهٔ ترکیب دو یا چند بردار بحث می‌کنیم.

۱.۲ تعریف و نمادگذاری

به آرایه‌ای مستطیلی از اعداد (حقیقی یا مختلط) ماتریس می‌گویند. این آرایه معمولاً بین کروشه‌های مربعی یا خمیده قرار می‌گیرد. از این‌رو، آرایه‌های مستطیلی زیر

$$\begin{bmatrix} ۱+۲i & ۳-۴i \\ ۵+id & x+iy \\ s+۴it & u+۷i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ j & k & l \\ r & s & t \\ x & y & z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۳ & -۵ & ۹ \\ ۸ & ۶ & -۲ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۵ & ۷ \end{bmatrix} \quad (۱)$$

مثالهایی از ماتریس‌اند. اعضای این آرایه را اجزای ماتریس می‌نامند. اگرچه در اینجا ماتریس را برحسب اعداد تعریف کرده‌ایم، به‌سادگی می‌توانیم این تعریف را به ماتریسی تعمیم دهیم که اجزای

آن توابع هستند. مثالی از چنین ماتریسی عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} f_۱(x) & f_۲(x) & f_۳(x) \\ f_۴(x) & f_۵(x) & f_۶(x) \end{bmatrix} \tag{۲}$$

که $f_i(x)$ها توابعی از xاند.

مناسب است که هر جزء ماتریس را متعلق به سطر یا ستون معینی از آن درنظر بگیریم. بنابراین، با اشاره به ماتریس سوم در (۱) به $(a\ b\ c)$ اولین سطر ماتریس می‌گوییم، به $(j\ k\ l)$ دومین سطر، $(r\ s\ t)$ سومین سطر و $(x\ y\ z)$ چهارمین سطر. همین‌طور، این ماتریس سه‌ستون دارد که عبارت‌اند از

$$\begin{bmatrix} a \\ j \\ r \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ k \\ s \\ y \end{bmatrix} \quad و \quad \begin{bmatrix} c \\ l \\ t \\ z \end{bmatrix} \tag{۳}$$

به‌این ترتیب روشن است که هر جزء ماتریس را می‌توان به‌طور یکتا با یک اندیس سطری یا ستونی مشخص کرد. مثلاً، جزء s به‌سطر سوم و ستون دوم تعلق دارد و جزء z متعلق به سطر چهارم و ستون سوم است و غیره.

اگر ماتریسی m سطر و n ستون داشته باشد، می‌گوییم که این ماتریس از مرتبهٔ $m \times n$ است ("m در n"). شکل کلی ماتریس مرتبهٔ $m \times n$ را می‌توان به سادگی چنین نوشت

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m۱} & a_{m۲} & a_{m۳} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{۴}$$

که این اجزا می‌شود اعداد حقیقی یا مختلط یا توابع باشند. ماتریس فوق را می‌توان به‌طور فشرده با نماد زیر بیان کرد

$$\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]_{m\times n} \tag{۵الف}$$

یعنی $\mathbf{A}$ ماتریسی $m \times n$ است که جزء ijام[۱] آن، a_{ij} است. روشن است که $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ است. اگر نیازی به ذکر مرتبهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ به‌طور صریح نباشد، می‌توان آن‌را به‌صورت زیر نیز نوشت

$$(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} \tag{۵ب}$$

که صرفاً بیان می‌کند که جزء ijام ماتریس $\mathbf{A}$، a_{ij} است.

۲.۲ ماتریس صفر

ماتریس $\mathbf{A}$ از مرتبهٔ دلخواه را ماتریس صفر می‌نامند، اگر و تنها اگر هر جزء آن برابر صفر باشد. ماتریس صفر را با $\mathbf{0}$ نشان می‌دهیم (آن را با جزء صفر فضای برداری که آن نیز دارای همین علامت است، اشتباه نگیرید). از این‌رو، اگر ماتریس $\mathbf{A}$ از مرتبهٔ $m \times n$ باشد، دراین‌صورت داریم

$$\mathbf{A} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{A})_{ij} = 0 \qquad 1 \leq i \leq m \qquad 1 \leq j \leq n \tag{۶}$$

اگر تعیین مرتبهٔ ماتریس صفر لازم باشد، می‌توان آن‌را به‌صورت $\mathbf{0}_{m\times n}$ نوشت. روشن است که برای هر ماتریس دلخواه $\mathbf{A}$ می‌توان نوشت

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0} \tag{۷}$$

۳.۲ تساوی ماتریسها

قبل از اینکه به ترکیب ماتریسها و اتحادهای مختلف و روابط ماتریسها بپردازیم، اولین مرحلهٔ منطقی این است که تساوی دو ماتریس را تعریف کنیم.

برای اینکه دو ماتریس $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ با یکدیگر مساوی باشند، لازم است، اگرچه کافی نیست، که آن دو ماتریس مرتبهٔ یکسانی داشته باشند. فرض می‌کنیم که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ مرتبهٔ یکسانی داشته باشند، مثلاً $m \times n$، $\mathbf{A}$ مساوی $\mathbf{B}$ است، اگر و تنها اگر، هر جزء $\mathbf{A}$ با جزء متناظر آن در $\mathbf{B}$ برابر باشد.

---

۱. جزء سطر iام و ستون jام ماتریس را جزء ijام می‌نامند.

بنابراین، اگر $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]_{m\times n}$ و $\mathbf{B} \equiv [b_{ij}]_{m\times n}$ باشد، داریم

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad ۱ \leq i \leq m \quad ۱ \leq j \leq n \tag{۸}$$

این مجموعهٔ متشکل از mn شرط مفهوم تساوی اعداد را به تساوی ماتریسها تعمیم می‌دهد.

۴.۲ جمع ماتریسی

اکنون می‌توان جمع یا تفریق دو ماتریس را تعریف کرد که بار دیگر لازم است دو ماتریس هم‌مرتبه باشند. اگر $\mathbf{A}$ ماتریسی باشد که قبلاً تعریف کردیم و $\mathbf{C} \equiv [c_{ij}]_{m\times n}$ باشد، مجموع $\mathbf{A}$ و $\mathbf{C}$ ماتریسی است با همان مرتبه که جزء ijام آن برابر با مجموع اجزای ijام $\mathbf{A}$ و $\mathbf{C}$ است. بنابراین،

$$\mathbf{A} + \mathbf{C} \equiv [a_{ij} + c_{ij}]_{m\times n} \quad \text{یا} \quad (\mathbf{A} + \mathbf{C})_{ij} = a_{ij} + c_{ij} \tag{۹}$$

به‌همین ترتیب تفریق دو ماتریس $\mathbf{A}$ و $\mathbf{C}$ را به‌صورت ماتریسی با همان مرتبه و با اجزای زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{A} - \mathbf{C} \equiv [a_{ij} - c_{ij}]_{m\times n} = -(\mathbf{C} - \mathbf{A}) \tag{۱۰الف}$$

یا

$$(\mathbf{A} - \mathbf{C})_{ij} = -(\mathbf{C} - \mathbf{A})_{ij} = a_{ij} - c_{ij} \tag{۱۰ب}$$

چون جمع ماتریس تعمیم ساده‌ای از مفهوم جمع اعداد است، قانون جمع ماتریسی جابه‌جایی‌پذیر است. یعنی همان‌طور که برای هر دو کمیت نرده‌ای ویژگی $a + c = c + a$ صادق است. برای هر دو ماتریس، که بتوان مجموع آنها را تعریف کرد (یعنی، هم‌مرتبه باشند)، داریم

$$\mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{C} + \mathbf{A} \tag{۱۱}$$

مثال ۱. مجموع دو ماتریس زیر را به‌دست آورید

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۰ & ۷ \\ -۱ & ۶ & ۲ & ۴ \\ ۳ & -۴ & ۸ & -۲ \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۳ & -۳ \\ ۲ & ۲ & -۲ & ۵ \\ -۳ & ۵ & ۶ & ۴ \end{bmatrix}$$

حل: هر دو ماتریس ۴ × ۳ هستند، بنابراین مجموع آنها را می‌توان تعریف کرد و به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$$\mathbf{A}+\mathbf{C}=\begin{bmatrix} ۲-۱ & ۵+۰ & ۰+۳ & ۷-۳ \\ -۱+۲ & ۶+۲ & ۲-۲ & ۴+۵ \\ ۳-۳ & -۴+۵ & ۸+۶ & -۲+۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۸ & ۰ & ۹ \\ ۰ & ۱ & ۱۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

مفهوم فوق را می‌توان آشکارا به بیش از دو ماتریس نیز تعمیم داد. بنابراین، برای هر تعداد ماتریس هم‌مرتبهٔ $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، $\mathbf{C}$، $\mathbf{D}$، ...، داریم

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}+\mathbf{D}+\cdots)_{ij}=(\mathbf{A})_{ij}+(\mathbf{B})_{ij}+(\mathbf{C})_{ij}+(\mathbf{D})_{ij}+\cdots \qquad (۱۲)$$

علاوه بر این، در جمع سه‌تایی $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$ به‌سادگی درمی‌یابیم که می‌توان ابتدا $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را با هم جمع کرد و سپس نتیجه را با $\mathbf{C}$ جمع کرد، یا ابتدا $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ را با هم جمع کرد و سپس ماتریس نتیجه را با $\mathbf{A}$ جمع کرد. براساس نمادگذاری ریاضی، داریم

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \qquad (۱۳)$$

می‌گوییم: قانون جمع ماتریسی شرکت‌پذیر است.

شاید مطلب فوق کمی بدیهی به‌نظر آید، ولی ویژگی مهمی است که فقط برای قوانین خاصی از جبر عالی صادق است. مثالی ساده می‌زنیم، به‌آسانی می‌شود دید که قانون تفریق ماتریسی شرکت‌پذیر نیست. از این‌رو، داریم

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})-\mathbf{C}\neq\mathbf{A}-(\mathbf{B}-\mathbf{C}) \qquad (۱۴)$$

۵.۲ ضرب ماتریسی

ضرب یا حاصلضرب دو ماتریس تعمیم ساده‌ای از مفهوم ضرب اعداد نیست. حاصلضرب دو ماتریس که در اینجا تعریف می‌کنیم، برآمده از نظریهٔ تبدیلهای خطی متوالی است که در پایان فصل قبل دربارهٔ آن به‌اختصار بحث کردیم.

شرط لازم برای تعریف حاصلضرب دو ماتریس، مثلاً $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$، آن است که تعداد ستونهای $\mathbf{A}$ برابر با تعداد سطرهای $\mathbf{B}$ باشد. فوراً درمی‌یابیم که حاصلضرب ماتریسی به مرتبهٔ ماتریسها در حاصلضرب بستگی دارد. مثلاً، اگر $\mathbf{A}$ مرتبهٔ $m \times n$ و $\mathbf{B}$ مرتبهٔ $n \times p$ داشته باشد، دراین‌صورت حاصلضرب ماتریسی $\mathbf{AB}$ تعریف می‌شود، ولی حاصلضرب $\mathbf{B}$ در $\mathbf{A}$ را با این مرتبه نمی‌توان تعریف کرد، مگر آنکه $m = p$ باشد. اجزای ماتریس حاصلضرب $\mathbf{AB}$ با روش زیر به‌دست می‌آیند. فرض کنید $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]_{m\times n}$ و $\mathbf{B} \equiv [b_{ij}]_{n\times p}$ باشد. جزء ijام حاصلضرب $\mathbf{AB}$ عبارت است از مجموع حاصلضربهای اجزای متناظر سطر iام $\mathbf{A}$ و ستون jام $\mathbf{B}$. برای گسترش نمادگذاری ریاضی، سطر iام $\mathbf{A}$ و ستون jام $\mathbf{B}$ را می‌نویسیم:

$$\text{سطر } i\text{ام } \mathbf{A} = [a_{i1} a_{i2} \cdots a_{in}] \tag{۱۵الف}$$

$$\text{ستون } j\text{ام } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} \tag{۱۵ب}$$

بنابر قاعدهٔ بالا، با جمع کردن حاصلضربهای اجزای متناظر، می‌یابیم

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad 1 \le i \le m \qquad 1 \le j \le p \end{aligned} \tag{۱۶}$$

به‌روشنی می‌بینیم که ماتریس حاصلضرب $\mathbf{AB}$، m سطر و p ستون دارد. توجه کنید که این نتیجه مشابه معادلهٔ (۱.۸۵) است و در واقع، برای $m = p = n$ با آن برابر است.

مثال ۲. حاصلضرب ماتریسی $\mathbf{AB}$ و $\mathbf{BA}$ را، در صورت تعریف شدن، بیابید.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \\ 8 & -6 & 1 \\ 5 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \tag{۱۷}$$

حل: $\mathbf{A}$ از مرتبهٔ ۳ × ۴ و $\mathbf{B}$ از مرتبهٔ ۲ × ۳ است. بنابراین، حاصلضرب ماتریسی $\mathbf{BA}$ ممکن نیست. حاصلضرب $\mathbf{AB}$ برابر است با

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -۲\times ۲+۳\times ۵+۵(-۱) & -۲\times ۳+۳(-۷)+۵\times ۳ \\ ۰\times ۲+(-۱)۵+۶(-۱) & ۰\times ۳+(-۱)(-۷)+۶\times ۳ \\ ۸\times ۲+(-۶)۵+۱(-۱) & ۸\times ۳+(-۶)(-۷)+۱\times ۳ \\ ۵\times ۲+۴\times ۵+(-۳)(-۱) & ۵\times ۳+۴(-۷)+(-۳)۳ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۶ & -۱۲ \\ -۱۱ & ۲۵ \\ -۱۵ & ۶۹ \\ ۳۳ & -۲۲ \end{bmatrix} \tag{۱۸}$$

که ماتریسی ۲ × ۴ است.

۶.۲ بردارهای ستونی و سطری

با معرفی بردارهای سطری و ستونی به نمادگذاری پیشرفته‌تری برای حاصلضرب ماتریسی دست می‌یابیم. سطر iام ماتریس $\mathbf{A}$ را درنظر بگیرید که در معادلهٔ (۱۵الف) نوشتیم. این سطر را به‌تنهایی می‌توان ماتریسی $n \times ۱$ گرفت. زیرا تنها یک سطر و n ستون دارد. این ماتریس را بردار سطری با بعد n می‌نامند. این بردار سطری خاص را چنین نشان می‌دهیم

$$\mathbf{a}'_i = [a_{i۱} \;\; a_{i۲} \cdots a_{in}] \tag{۱۹}$$

همین‌طور، ستون jام ماتریس $\mathbf{B}$ [معادلهٔ (۱۵ب)] n سطر و یک ستون دارد. ماتریسی را که n سطر و تنها یک ستون دارد، بردار ستونی با بعد n می‌نامند. فرض کنید بردار ستونی خاص معادلهٔ (۱۵ب) را چنین نشان دهیم[۱]

$$\mathbf{b}_j = \begin{bmatrix} b_{۱j} \\ b_{۲j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} \tag{۲۰الف}$$

---

۱. بردارهای ستونی و بردارهای سطری را با حروف سیاه کوچک نشان می‌دهند.

برای صرفه‌جویی در فضا، اغلب بردار ستونی را با استفاده از آکولاد می‌نویسند:

$$\mathbf{b}_j = \{b_{1j}\ b_{2j} \cdots b_{nj}\} \qquad (\text{۲۰ب})$$

اکنون برای دو ماتریس $\mathbf{a}'_i$ و $\mathbf{b}_j$ از معادلات (۱۹) و (۲۰)، شرط حاصلضرب ماتریسی صدق می‌کند، یعنی تعداد ستونهای $\mathbf{a}'_i$ برابر تعداد سطرهای $\mathbf{b}_j$ است. بنابراین، حاصلضرب ماتریسی $\mathbf{a}'_i\mathbf{b}_j$ آنها ماتریسی 1×1 می‌شود، که کمیتی نرده‌ای است و عبارت است از

$$\mathbf{a}'_i\mathbf{b}_j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \qquad (۲۱)$$

که همان جزء ijام $\mathbf{AB}$ است که در معادلهٔ (۱۶) آوردیم. بنابراین، می‌توان حاصلضرب ماتریسی $\mathbf{AB}$ را به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}'_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}'_1\mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{a}'_1\mathbf{b}_p \\ \mathbf{a}'_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}'_2\mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{a}'_2\mathbf{b}_p \\ \vdots & \\ \mathbf{a}'_m\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}'_m\mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{a}'_m\mathbf{b}_p \end{bmatrix} \qquad (۲۲)$$

پیش از این گفتیم که اگر حاصلضرب ماتریسی $\mathbf{AB}$ تعریف شود، لزوماً حاصلضرب $\mathbf{B}$ در $\mathbf{A}$ تعریف نمی‌شود. برای دو ماتریس مفروض $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$، هم حاصلضرب ماتریسی $\mathbf{AB}$ و هم $\mathbf{BA}$ تعریف شدنی است، اگر، مثلاً $\mathbf{A}$ از مرتبهٔ $m \times n$ و $\mathbf{B}$ از مرتبهٔ $n \times m$ باشد. دراین‌صورت $\mathbf{AB}$ از مرتبهٔ $m \times m$ و $\mathbf{BA}$ از مرتبهٔ $n \times n$ می‌شود. چون $\mathbf{AB}$ و $\mathbf{BA}$ مرتبه‌های متفاوتی دارند، برابری آنها را نمی‌توان تعریف کرد. روشن است که حاصلضرب $\mathbf{AB}$ و $\mathbf{BA}$ مرتبهٔ یکسانی خواهند داشت، اگر و تنها اگر $m = n$ باشد، که در این حالت چهار ماتریس $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، $\mathbf{AB}$ و $\mathbf{BA}$ از مرتبهٔ $n \times n$ می‌شوند. همان‌طور که در مثال زیر می‌بینیم، حتی در این حالت، لزومی ندارد که $\mathbf{AB}$ با $\mathbf{BA}$ برابر باشد.

مثال ۳. نشان دهید که $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ است، در صورتی‌که

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -8 & 1 & 7 \end{bmatrix} \qquad (۲۳)$$

حل: داریم

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} ۳ & ۷ & -۹ \\ ۱ & -۲ & ۳ \\ ۵ & ۰ & -۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۶ & ۹ & -۳ \\ ۲ & ۰ & ۵ \\ -۸ & ۱ & ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰۴ & ۱۸ & -۳۷ \\ -۲۲ & ۱۲ & ۸ \\ ۷۸ & ۳۹ & -۵۷ \end{bmatrix}$$

در حالی‌که

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} ۶ & ۹ & -۳ \\ ۲ & ۰ & ۵ \\ -۸ & ۱ & ۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۷ & -۹ \\ ۱ & -۲ & ۳ \\ ۵ & ۰ & -۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۲ & ۲۴ & -۹ \\ ۳۱ & ۱۴ & -۴۸ \\ ۱۲ & -۵۸ & ۳۳ \end{bmatrix}$$

بدیهی است که

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

۷.۲ جابه‌جاگر

تفاضل دو ماتریس $\mathbf{AB}$ و $\mathbf{BA}$ را جابه‌جاگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ می‌نامند و آن‌را به‌صورت زیر نشان می‌دهند

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} \qquad \text{(۲۴الف)}$$

روشن است که

$$[\mathbf{B}, \mathbf{A}] = -[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \qquad \text{(۲۴ب)}$$

در حالت خاص، اگر $\mathbf{AB}$ با $\mathbf{BA}$ برابر باشد، می‌توان گفت که دو ماتریس $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند. دو ماتریس $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ معادلات (۲۳) با یکدیگر جابه‌جا نمی‌شوند، ولی دو ماتریس زیر می‌شوند

$$\begin{bmatrix} ۱۳ & -۲ & -۵ \\ -۲ & ۱۰ & -۲ \\ -۵ & -۲ & ۱۳ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

که به‌سادگی می‌توان آن‌را ثابت کرد.

اگر $\mathbf{A}$ با $\mathbf{B}$ جابه‌جا شود و $\mathbf{B}$ با $\mathbf{C}$ جابه‌جا شود، لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $\mathbf{A}$ با $\mathbf{C}$ جابه‌جا می‌شود (تمرین ۶).

بنابراین، دیدیم که قانون ضرب ماتریسی جابه‌جایی‌پذیر نیست. اما، مانند قانون جمع ماتریسی، شرکت‌پذیر است، و بدین معنی است که اگر $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$ سه ماتریس دلخواه باشند، به‌طوری که حاصلضرب ماتریسی $\mathbf{AB}$ و $\mathbf{BC}$ تعریف شده باشد، ویژگی زیر صادق است.

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \tag{۲۵}$$

از طرف دیگر، تقسیم مانند تفریق شرکت‌پذیر نیست. اگر a، b، و c سه عدد غیرصفر باشند، داریم

$$(a/b)/c \neq a/(b/c) \tag{۲۶}$$

درستی معادلهٔ (۲۵) را به‌سادگی می‌توان ثابت کرد، با نشان دادن اینکه اجزای ماتریسهای دو طرف معادلهٔ (۲۵) یک به‌یک برابرند. در پایان، فرض کنید

$$\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]_{m\times n}, \mathbf{B} \equiv [b_{ij}]_{n\times p}, \mathbf{C} \equiv [c_{ij}]_{p\times q} \tag{۲۷}$$

دراین‌صورت، جزء ijام طرف چپ معادلهٔ (۲۵) چنین می‌شود

$$\begin{aligned}[(\mathbf{AB})\mathbf{C}]_{ij} &= \sum_{k=۱}^{p}(\mathbf{AB})_{ik}(\mathbf{C})_{kj}\\ &= \sum_{k=۱}^{p}\sum_{l=۱}^{n}(\mathbf{A})_{il}(\mathbf{B})_{lk}(\mathbf{C}_{kj}\\ &= \sum_{k=۱}^{p}\sum_{l=۱}^{n}a_{il}b_{lk}c_{kj}\end{aligned} \tag{۲۸}$$

در حالی‌که جزء ijام طرف راست معادلهٔ (۲۵) برابر است با

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}(\mathbf{BC})]_{ij} &= \sum_{l=۱}^{n}(\mathbf{A})_{il}(\mathbf{BC})_{lj}\\ &= \sum_{l=۱}^{n}(\mathbf{A})_{il}\sum_{k=۱}^{p}(\mathbf{B})_{lk}(\mathbf{C})_{kj}\\ &= \sum_{l=۱}^{n}\sum_{k=۱}^{p}a_{il}b_{lk}c_{kj}\end{aligned} \tag{۲۹}$$

از معادلات (۲۸) و (۲۹)، روشن است که

$$[(\mathbf{AB})\mathbf{C}]_{ij} = [\mathbf{A}(\mathbf{BC})]_{ij} \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le q \tag{۳۰}$$

بنابراین، از تعریف برابری دو ماتریس، فوراً معادلهٔ (۲۵) را نتیجه می‌گیریم.

در قانون ضرب ماتریسی یک ویژگی مهم دیگر صدق می‌کند، که در مثال بعدی دربارهٔ آن بحث می‌کنیم.

مثال ۴. اگر $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$ ماتریسهای دلخواهی باشند، به‌طوری که جمع $\mathbf{B}+\mathbf{C}$ و حاصلضرب $\mathbf{AB}$ و $\mathbf{AC}$ را بشود تعریف کرد، نشان دهید که

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \tag{۳۱}$$

این ویژگی را چنین بیان می‌کنند: ضرب ماتریسی نسبت به جمع ماتریسی توزیع‌پذیر است.

حل: برای اثبات، فرض کنید

$$\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]_{m\times n}, \quad \mathbf{B} \equiv [b_{ij}]_{n\times p}, \quad \mathbf{C} \equiv [c_{ij}]_{n\times p} \tag{۳۲}$$

به‌طوری که مطابق فرض، جمع $\mathbf{B}+\mathbf{C}$ و حاصلضربهای $\mathbf{AB}$ و $\mathbf{AC}$ تعریف شود. حال جزء ijام طرف چپ معادلهٔ (۳۱) را درنظر بگیرید، داریم

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{A})_{ik}(\mathbf{B}+\mathbf{C})_{kj} && [\text{از معادلهٔ (۱۶)}] \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{A})_{ik}[(\mathbf{B})_{kj} + (\mathbf{C})_{kj}] && [\text{از معادلهٔ (۹)}] \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) && (۳۳)
\end{aligned}$$

جزء ijام طرف راست معادلهٔ (۳۱) برابر است با

$$\begin{aligned}[\mathbf{AB}+\mathbf{AC}]_{ij} &= (\mathbf{AB})_{ij}+(\mathbf{AC})_{ij} && \text{[از معادلهٔ (۹)]}\\ &= \sum_{k=۱}^{n}(\mathbf{A})_{ik}(\mathbf{B})_{kj}+\sum_{k=۱}^{n}(\mathbf{A})_{ik}(\mathbf{C})_{kj} && \text{[از معادلهٔ (۱۶)]}\\ &= \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) && (۳۴)\end{aligned}$$

چون جزء فوق در معادلهٔ (۳۳) همان جزء معادلهٔ (۳۴) است، می‌توان به درستی معادلهٔ (۳۱) پی برد.

۸.۲ ضرب نرده‌ای

یک ماتریس از مرتبهٔ دلخواه و یک کمیت نرده‌ای را می‌توان با یکدیگر با قانون ضرب نرده‌ای ترکیب کرد. اگر $\mathbf{A}$ ماتریسی از مرتبهٔ $m \times n$ و c کمیتی نرده‌ای باشد، $c\mathbf{A}$ را ماتریسی با همان مرتبهٔ $\mathbf{A}$ تعریف می‌کنند. علاوه بر این، هر جزء $c\mathbf{A}$، c برابر جزء متناظر $\mathbf{A}$ است. بنابراین، اگر $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij}$ باشد، داریم

$$(c\mathbf{A})_{ij} = c(\mathbf{A})_{ij} = ca_{ij} \qquad (۳۵)$$

کمیت نرده‌ای با ماتریس جابه‌جا می‌شود، یعنی

$$c\mathbf{A} = \mathbf{A}c \qquad (۳۶)$$

مثال ۵. $۴\mathbf{A}$ و $-۳\mathbf{A}$ را پیدا کنید، چنانچه

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & -۶ & ۵ \end{bmatrix}$$

حل: ماتریسهای مطلوب عبارت‌اند از:

$$۴\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۴ & ۸ & ۱۲ \\ ۱۲ & -۲۴ & ۲۰ \end{bmatrix}, -۳\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -۳ & -۶ & -۹ \\ -۹ & ۱۸ & -۱۵ \end{bmatrix}$$

حال سه عمل مقدماتی را تعریف می‌کنیم که می‌توان روی ماتریسها انجام داد، تا از یک ماتریس مفروض ماتریسهای جدیدی به‌دست آورد. این ماتریسها به ماتریسهای مشتق‌شده معروف‌اند.

۹.۲ مزدوج مختلط

اگر $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]_{m\times n}$ ماتریسی دلخواه باشد، با اجزائی که ممکن است مختلط باشند، ماتریس مزدوج مختلط حاصل که آن‌را با $\mathbf{A}^*$ نشان می‌دهند نیز ماتریسی $m \times n$ است که هر جزء آن مزدوج مختلط جزء متناظر در $\mathbf{A}$ است، یعنی

$$(\mathbf{A}^*)_{ij} = (\mathbf{A})^*_{ij} = a^*_{ij} \tag{۳۷}$$

روشن است که اگر c جزء نرده‌ای باشد، داریم

$$(c\mathbf{A})^* = c^*\mathbf{A}^* \tag{۳۸}$$

۱۰.۲ ترانهش

اگر سطرها و ستونهای ماتریسی را با هم عوض کنیم، ماتریس حاصل را ماتریس ترانهاده می‌نامند. ماتریس ترانهاده را با $\tilde{\mathbf{A}}$ ($\mathbf{A}$ تیلده می‌خوانند) یا $\mathbf{A}^T$ نشان می‌دهیم.[۱] بنابراین، اگر $\mathbf{A}$ ماتریس $m \times n$ معادلهٔ (۴) باشد، ماتریس ترانهادهٔ آن عبارت است از

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۲۱} & \cdots & a_{m۱} \\ a_{۱۲} & a_{۲۲} & \cdots & a_{m۲} \\ \vdots & & & \\ a_{۱n} & a_{۲n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{۳۹}$$

که به‌روشنی ماتریس $n \times m$ است. برحسب اجزاء، داریم

$$(\tilde{\mathbf{A}})_{ij} = (\mathbf{A})_{ji} \qquad ۱ \le i \le n, \qquad ۱ \le j \le m \tag{۴۰}$$

روشن است که ماتریس ترانهادهٔ یک بردار ستونی برداری سطری می‌شود و برعکس.

---

۱. برای راحتی، ترانهاد تک ماتریس را با استفاده از تیلده و ترانهاد حاصلضرب تعدادی ماتریس را، با به‌کار بردن اندیس بالای T نشان می‌دهیم.

۱۱.۲ مزدوج هرمیتی

چنانچه مزدوج مختلط و ترانهش ماتریسی را یکی پس از دیگری به‌دست آوریم، ماتریس حاصل را مزدوج هرمیتی ماتریس اصلی می‌نامند[۱] و با $\mathbf{A}^\dagger$ ($\mathbf{A}$ دَگِر می‌خوانند) نشان می‌دهند. همان‌طور که در زیر می‌بینیم، ترتیب این دو عمل مهم نیست:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \rightarrow & \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{2n}^* \\ \vdots & & & \\ a_{m1}^* & a_{m2}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{bmatrix} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \rightarrow & \mathbf{A}^\dagger = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \cdots & a_{m1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{m2}^* \\ \vdots & & & \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{bmatrix} \end{array} \tag{۴۱}$$

با توجه به‌مطلب فوق، روشن است که

$$\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^*)^T = (\tilde{\mathbf{A}})^* \tag{۴۲}$$

برحسب اجزای آن، داریم

$$(\mathbf{A}^\dagger)_{ij} = a_{ij}^* \qquad 1 \leq i \leq n,\ \ 1 \leq j \leq m \tag{۴۳}$$

می‌بینیم که $\mathbf{A}^\dagger$ مانند $\tilde{\mathbf{A}}$، ماتریسی $n \times m$ است، چنانچه $\mathbf{A}$ از مرتبهٔ $m \times n$ باشد.

---

۱. بعضی از نویسندگان، به‌ویژه ریاضی‌دانان، مزدوج مختلط ($\mathbf{A}^*$) را با $\overline{\mathbf{A}}$ و مزدوج هرمیتی ($\mathbf{A}^\dagger$) را با $\mathbf{A}^*$ نشان می‌دهند. همچنین ریاضی‌دانان $\mathbf{A}^\dagger$ را نشانهٔ ماتریس الحاقی می‌دانند. با وجود این، منظور از الحاقی را در بخش ۱.۵ با تعریف ماتریس معکوس بیان می‌کنیم.

مثال ۶. برای ماتریس $\mathbf{A}$ی زیر، $\mathbf{A}^*$، $\tilde{\mathbf{A}}$ و $\mathbf{A}^\dagger$ را بنویسید.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۲+۳i & ۱-i & ۵i & -۳ \\ ۱+i & ۶-i & ۱+۳i & -۱-۲i \\ ۵-۶i & ۳ & ۰ & -۴ \end{bmatrix} \tag{۴۴الف}$$

حل: داریم

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} ۲-۳i & ۱+i & -۵i & -۳ \\ ۱-i & ۶+i & ۱-۳i & -۱+۲i \\ ۵+۶i & ۳ & ۰ & -۴ \end{bmatrix} \tag{۴۴ب}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} ۲+۳i & ۱+i & ۵-۶i \\ ۱-i & ۶-i & ۳ \\ ۵i & ۱+۳i & ۰ \\ -۳ & -۱-۲i & -۴ \end{bmatrix} \tag{۴۴ج}$$

و

$$\mathbf{A}^\dagger = \begin{bmatrix} ۲-۳i & ۱-i & ۵+۶i \\ ۱+i & ۶+i & ۳ \\ -۵i & ۱-۳i & ۰ \\ -۳ & -۱+۲i & -۴ \end{bmatrix} \tag{۴۴د}$$

مثال ۷. یک نتیجهٔ بسیار مهم در جبر ماتریسی عبارت است از[۱]

$$(\mathbf{AB})^T = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}} \tag{۴۵}$$

---

۱. از این پس، هرگاه می‌نویسیم $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ یا $\mathbf{AB}$، به‌طور ضمنی فرض می‌کنیم که مرتبهٔ ماتریسها طوری است که جمع یا حاصلضرب آنها تعریف می‌شود. بنابراین، چنین عبارتهای صریحی را به‌کار نمی‌بریم: "فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو ماتریس باشند که جمع (یا حاصلضرب) آنها تعریف شده است". توجه کنید که اگر حاصلضرب ماتریسی $\mathbf{AB}$ را بتوان تعریف کرد، حاصلضرب $\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}}$ را نیز می‌توان تعریف کرد. علاوه بر این، ماتریسهای $(\mathbf{AB})^T$ و $\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}}$ هم‌مرتبه‌اند، بنابراین تساوی آنها تعریف می‌شود. سعی کنید به‌صورت یک تمرین ساده، این مطلب را ثابت کنید.

که می‌گوید: ترانهاد حاصلضرب دو ماتریس برابر است با حاصلضرب ماتریسهای ترانهاده، با ترتیب معکوس.

حل: در ابتدا، مانند معمول، برای ثابت کردن تساوی فوق، باید نشان دهیم که هر جزء طرف چپ با جزء متناظر طرف راست برابر است. جزء ijام طرف چپ معادلهٔ (۴۵) می‌شود

$$\begin{aligned}[(\mathbf{AB})^T]_{ij} &= (\mathbf{AB})_{ji} && [\text{از معادلهٔ (۴۰)}] \\ &= \sum_k (\mathbf{A})_{jk}(\mathbf{B})_{ki} && [\text{از معادلهٔ (۱۶)}] \end{aligned} \tag{۴۶}$$

جزء ijام طرف راست معادلهٔ (۴۵) عبارت است از

$$\begin{aligned}(\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}})_{ij} &= \sum_k (\tilde{\mathbf{B}})_{ik}(\tilde{\mathbf{A}})_{kj} && [\text{از معادلهٔ (۱۶)}] \\ &= \sum_k (\mathbf{B})_{ki}(\mathbf{A})_{jk} && [\text{از معادلهٔ (۴۰)}] \\ &= \sum_k (\mathbf{A})_{jk}(\mathbf{B})_{ki} \end{aligned} \tag{۴۷}$$

که، در مرحلهٔ آخر، $(\mathbf{A})_{jk}$ و $(\mathbf{B})_{ki}$ را جابه‌جا کرده‌ایم، زیرا صرفاً دو عددند. برابری این دو جزء در معادلات (۴۶) و (۴۷) فوراً به نتیجهٔ معادلهٔ (۴۵) می‌انجامد.

۱۲.۲ تبدیل خطی و ماتریسها

هر تبدیل خطی را به‌اختصار می‌توان با نماد ماتریسی بیان کرد. بنابراین، تبدیل معادلهٔ (۸۱.۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{y} = \mathbf{Bx} \tag{۴۸}$$

که $\mathbf{y}$ و $\mathbf{x}$ بردارهای ستونی‌اند.

$$\mathbf{y} = \{y_۱, y_۲, \ldots, y_n\}, \qquad \mathbf{x} = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\} \tag{۴۹}$$

و $\mathbf{B} \equiv [b_{ij}]$ ماتریس $n \times n$ ضرایب است که به ماتریس تبدیل معروف است. همین‌طور، معادلهٔ (۸۲.۱) را می‌توان به‌شکل زیر فشرده کرد

$$\mathbf{z} = \mathbf{Ay} \tag{۵۰}$$

که $\mathbf{z} \equiv \{z_i\}$ بردار ستونی $n \times ۱$ و $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ ماتریس ضرایب $n \times n$ است. $\mathbf{y}$ را از معادلهٔ (۴۸) در معادلهٔ (۵۰) می‌گذاریم، به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{z} = \mathbf{ABx} = \mathbf{Cx} \tag{۵۱}$$

که $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ ماتریس حاصلضربی است که اجزای آن را با معادلهٔ (۸۵.۱) داده‌ایم.

می‌توان تبدیلی خطی از یک مجموعه از متغیرها به مجموعه‌ای دیگر درنظر گرفت که تعداد اجزای این دو مجموعه متفاوت باشد. بنابراین، فرض کنید $\mathbf{x} = \{x_۱, x_۲, \dots, x_p\}$ و $\mathbf{y} = \{y_۱, y_۲, \dots, y_n\}$ دو بردار ستونی باشند که مؤلفه‌هایشان به‌ترتیب p متغیر x_i و n متغیر y_i است. تبدیل خطی از مجموعه‌ای به مجموعهٔ دیگر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$y_i = \sum_{k=۱}^{p} b_{ik} x_k \qquad ۱ \leq i \leq n \tag{۵۲}$$

یا مانند $\mathbf{y} = \mathbf{Bx}$، که دراین‌صورت $\mathbf{B} \equiv [b_{ik}]$ ماتریسی $n \times p$ است. اگر متغیرهای y_i نیز با تبدیلی خطی به m متغیر z_i به‌صورت زیر مربوط شوند

$$z_i = \sum_{k=۱}^{n} a_{ik} y_k \qquad ۱ \leq i \leq m \tag{۵۳}$$

که آن‌را با نماد ماتریسی $\mathbf{z} = \mathbf{Ay}$ نیز می‌توان نوشت که $\mathbf{z} \equiv \{z_i\}$ برداری ستونی از مرتبهٔ $m \times ۱$ و $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ ماتریسی $m \times n$ است، این تبدیل ترکیبی را می‌توان به‌صورت معادلهٔ (۵۱) نوشت، با این تفاوت که تمام این ماتریسها مستطیلی‌اند. ماتریس حاصلضرب $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ از مرتبهٔ $m \times p$ خواهد شد که اجزای آن از معادلهٔ (۱۶) به‌دست می‌آیند. مطلب فوق نشان می‌دهد که چرا ضرب ماتریسی را به این روش خاص تعریف کردیم.

اگر بردارها را به‌صورت ماتریسهای ستونی درنظر بگیریم، حاصلضرب داخلی آنها را که در معادلهٔ (۲۱.۱) تعریف کردیم، می‌شود به‌طور مختصر با نماد ماتریسی نوشت. اگر $\mathbf{u} = \{u_۱, u_۲, \dots, u_n\}$ و $\mathbf{v} = \{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$ دو بردار ستونی باشند، داریم $\mathbf{u}^\dagger = [u_۱^*, u_۲^*, \dots, u_n^*]$ و

$$\mathbf{u}^\dagger \mathbf{v} = [u_۱^*, u_۲^*, \dots, u_n^*]\{v_۱, v_۲, \dots, v_n\} = \sum_{i=۱}^{n} u_i^* v_i \tag{۵۴}$$

که همان عبارت معادلهٔ (۲۱.۱) است. به‌این ترتیب، حاصلضرب داخلی را می‌توان چنین بیان کرد[۱]

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{v} \tag{۵۵}$$

براساس این نمادگذاری، شرط تعامد معادلهٔ (۲۴.۱) برای دو بردار می‌شود

$$\mathbf{u}^\dagger \mathbf{v} = ۰ \tag{۵۶}$$

اگر مؤلفه‌های این بردارها حقیقی باشند، حاصلضرب داخلی و شرط تعامد به‌ترتیب به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\tilde{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \sum_{i=۱}^{n} u_i v_i \tag{۵۷}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}\mathbf{v} = ۰ \tag{۵۸}$$

تمرین

۱.۲ $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ را، در هر یک از حالتهای زیر به‌دست آورید

(الف)
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۳ & -۹ \\ ۲ & -۷ \\ ۵ & -۶ \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ -۳ & ۰ \\ ۸ & -۱۱ \end{bmatrix}$$

(ب)
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a^۲ & b^۲ \\ ۲a & ac \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b^۲ & bc \\ ac & c^۲ \end{bmatrix}$$

(ج)*
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۱/۳ & ۱/۵ & ۳/۵ & ۲/۷ \\ ۳/۸ & ۱/۶ & ۵/۶ & ۹/۴ \\ ۱/۱۱ & ۲/۷ & ۳/۱۱ & ۱/۴ \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱/۳ & ۹ & ۵ \\ -۳ & ۱/۶ & -۱/۶ & ۱۱ \\ ۰ & ۳/۷ & ۶/۱۱ & -۳/۴ \end{bmatrix}$$

---

۱. نمادهای دیگری مانند $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ و $\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle$ نیز برای ضرب داخلی به‌کار می‌روند. چون در این قسمت بیشتر با ماتریسها سروکار داریم، از نماد ماتریسی $\mathbf{u}^\dagger\mathbf{v}$ برای حاصلضرب داخلی دو بردار در قسمت باقیماندهٔ کتاب استفاده خواهیم کرد.

۲.۲ در هر یک از حالتهای زیر، حاصلضرب $\mathbf{AB}$ را در صورت تعریف شدن بیابید.

(الف) $$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۳ & ۹ \\ -۱ & ۷ \end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix} -۲ & ۷ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

(ب)* $$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۹ \\ ۱ & -۲ & ۳ \\ -۵ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix} ۷ \\ ۱ \\ -۳ \end{bmatrix}$$

(ج) $$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & -۶ \\ ۲ & ۰ & ۳ \\ ۵ & -۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

(د) $$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۳ & -۷ & ۲ \end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۵ \\ -۷ \end{bmatrix}$$

(ه)* $$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۴ \end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix} -۳ & ۷ & ۴ \end{bmatrix}$$

(و) ماتریسهای تمرین ۱(الف)

(ز) ماتریسهای تمرین ۱ (ب)

۳.۲ دو ماتریس زیر مفروض است

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۴ \\ ۶ & ۱ & ۲ \\ ۸ & ۴ & -۲ \end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix} -۵ & ۵ & ۱۰ \\ ۱۴ & -۱۴ & -۲۸ \\ ۸ & -۸ & -۱۶ \end{bmatrix}$$

نشان دهید که $\mathbf{AB}$ مساوی ماتریس صفر است، ولی $\mathbf{BA}$ چنین نیست (این ویژگی خاص ضرب ماتریسی است که می‌شود حاصلضرب دو ماتریس، ماتریس صفر باشد، در حالی‌که هیچ‌یک از آنها صفر نیست.)

۴.۲ در هر یک از حالتهای زیر، $\mathbf{AB}$ و $\mathbf{BA}$ را پیدا کنید و برابری $\mathbf{AB}$ با $\mathbf{BA}$ را بررسی کنید.

(الف)* $$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix} -۴ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

(ب) $$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۲ \\ ۵ & ۹ & ۰ \\ -۳ & ۶ & ۱ \end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۳ \\ ۷ & -۱ & ۳ \\ -۴ & ۶ & ۲ \end{bmatrix}$$

(ج) ماتریسهای تمرین ۲(الف)

(د)* ماتریسهای تمرین ۲(د)

(ه) ماتریسهای تمرین ۲(ه)

۵.۲* اگر داشته باشیم

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & -۴ & ۶ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

دراین‌صورت پیدا کنید

$$\mathbf{A}^۲=\mathbf{AA},\quad \mathbf{A}^۳=\mathbf{AAA} \text{ و } \mathbf{A}^۴=\mathbf{AAAA}$$

۶.۲ فرض کنید

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \mathbf{C}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

نشان دهید که $\mathbf{A}$ با $\mathbf{B}$ و $\mathbf{B}$ با $\mathbf{C}$ را می‌توان جابه‌جا کرد، اما $\mathbf{A}$ با $\mathbf{C}$ جابه‌جا نمی‌شود.

۷.۲ نشان دهید که

(الف) $$[\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]]+[\mathbf{B},[\mathbf{C},\mathbf{A}]]+[\mathbf{C},[\mathbf{A},\mathbf{B}]]=۰$$

(ب) $$[\mathbf{A},\{\mathbf{B},\mathbf{C}\}]=\{[\mathbf{A},\mathbf{B}],\mathbf{C}\}+\{[\mathbf{A},\mathbf{C}],\mathbf{B}\}$$

که $\mathbf{\{A,B\}} = \mathbf{AB}+\mathbf{BA}$ را پاد جابه‌جاگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ می‌نامند.

۲.۸* فرض کنید p_i مجموعه‌ای از n عدد $(1 \leq i \leq n)$ باشد، که همگی صفر نیستند، و فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریسی است $n\times n$ با اجزای $(\mathbf{A})_{ij} = p_ip_j$. شرطی برای اجزای p_i بیابید که $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ باشد.

۲.۹ نشان دهید که

(الف) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{A}^*\mathbf{B}^*$ (ب) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^* = \mathbf{A}^*+\mathbf{B}^*$

۲.۱۰ نشان دهید که

(الف) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \tilde{\mathbf{A}}+\tilde{\mathbf{B}}$ (ب) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\dagger = \mathbf{A}^\dagger+\mathbf{B}^\dagger$

۲.۱۱ نشان دهید که

$$(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger$$

۲.۱۲ نشان دهید که

(الف) $(\mathbf{ACB})^T = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}}$ (ب) $(\mathbf{ACB})^\dagger = \mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger$

۲.۱۳ * نتایج تمرین ۱۲ را به حاصلضرب تعدادی دلخواه، اما متناهی از ماتریسها تعمیم دهید.

۲.۱۴ نشان دهید که

$(c\mathbf{A})^\dagger = c^*\mathbf{A}^\dagger$ که c کمیت نرده‌ای دلخواه و $\mathbf{A}$ ماتریسی دلخواه است.

۲.۱۵ فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ماتریسهای معادلهٔ (۱۷) باشند. $\tilde{\mathbf{A}}$، $\tilde{\mathbf{B}}$، $(\mathbf{AB})^T$ و $\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}}$ را به‌دست آورید. به‌دنبال آن نشان دهید که این دو ماتریس در معادلهٔ (۴۵) صدق می‌کنند.

۲.۱۶ * فرض کنید داشته باشیم

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+i & 2i & 3 \\ 3-2i & -1+i & -2-4i \\ -5i & 0 & 6-i \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1+6i & 0 \\ 3+i & i & 5 \\ 7+2i & 6+i & -3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{AB}$، $\mathbf{A}^\dagger$، $\mathbf{B}^\dagger$، $(\mathbf{AB})^\dagger$، و $\mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger$ را به‌دست آورید، سپس نشان دهید که این ماتریسها در تساوی تمرین ۱۱ صدق می‌کنند.

۲.۱۷ اگر $\mathbf{A}$ ماتریسی $m\times n$ باشد، نشان دهید که $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$ ماتریس قطری است، اگر و تنها اگر، ستونهای $\mathbf{A}$ بر یکدیگر متعامد باشند و $\mathbf{AA}^\dagger$ قطری است، اگر و تنها اگر، سطرهای $\mathbf{A}$ بر یکدیگر متعامد باشند.

۳

ماتریسهای خاص (۱)

دراین بخش، تعدادی از ماتریسهای خاص را تعریف می‌کنیم که نامشان را از ویژگی اجزایشان می‌گیرند.

۱.۳ ماتریسهای مربعی، قطری و ثابت

اگر تعداد سطرهای یک ماتریس با تعداد ستونهای آن برابر باشد (یعنی، $m = n$)، آن‌را ماتریس مربعی می‌نامند. با انواع گوناگونی از این ماتریسها غالباً در فیزیک روبه‌رو می‌شویم. اگر $\mathbf{A}$ ماتریس مربعی $n \times n$ باشد، آن‌را تنها از مرتبهٔ n می‌خوانیم.

فرض کنید $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]_n$ ماتریس مربعی مرتبهٔ n، به‌ازای $۱ \leq i, j \leq n$ باشد. قطری را که از گوشهٔ بالایی سمت چپ آغاز و به گوشهٔ پایینی سمت راست این ماتریس مربعی منتهی می‌شود و شامل اجزای $a_{۱۱}$، $a_{۲۲}$، ...، a_{nn} است، قطر اصلی این ماتریس می‌نامند. اجزای $a_{ii}(۱ \leq i \leq n)$ را اجزای قطری ماتریس می‌نامند. به اجزای باقیماندهٔ a_{ij}، به‌ازای $i \neq j$، اجزای خارج از قطر یا اجزای غیرقطری می‌گویند.

ماتریس مربعی را که تنها اجزای روی قطر اصلی آن صفر نیست و سایر اجزای آن صفر است، ماتریس قطری می‌نامند. بنابراین ماتریس قطری را به‌صورت زیر می‌نویسند

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & a_{۲۲} & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & & & & \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{۱الف}$$

که از آن داریم

$$(\mathbf{A})_{ij} = a_{ii}\delta_{ij} \tag{۱ب}$$

اگر همهٔ اجزای غیرصفر یک ماتریس قطری با یکدیگر مساوی باشند، آن‌را ماتریس ثابت می‌نامند. بنابراین، اجزای ماتریس ثابت از این قرارند

$$(\mathbf{A})_{ij} = a\delta_{ij} \tag{۲}$$

که a کمیتی نرده‌ای است.

اگر یک مرحله جلوتر برویم و هر جزء غیرصفر ماتریس ثابت را مساوی یک بگیریم [یعنی، در معادلهٔ (۲)، $a = ۱$ قرار دهیم]، دراین‌صورت ماتریس یکه داریم. ماتریس یکه را عموماً با علامت $\mathbf{I}$ نشان می‌دهند و برای اینکه مرتبهٔ ماتریس یکه را مشخص کنیم، آن‌را به‌صورت $\mathbf{I}_\mathrm{n}$ می‌نویسیم. بنابراین

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & & & & \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{bmatrix} \tag{۳}$$

اگر $\mathbf{A}$ ماتریس ثابتی باشد که در معادلهٔ (۲) تعریف کردیم، داریم

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & a & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & & & & \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & & & & \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{bmatrix} \tag{۴الف}$$

یا

$$\mathbf{A} = a\mathbf{I} \tag{۴ب}$$

که نشان می‌دهد که هر ماتریس ثابت مضرب ثابتی از ماتریس یکه است. به‌این علت ماتریسی را که به‌صورت معادلهٔ (۴الف) باشد، ماتریس ثابت می‌نامند.

دو نتیجهٔ جالب دربارهٔ جابه‌جایی‌پذیری ماتریسهای قطری و ثابت با ماتریسهای دیگر وجود دارد، که در مثالهای زیر به آنها می‌پردازیم.

مثال ۱. اگر ماتریس $\mathbf{B}$ با ماتریسی قطری که هیچ‌یک از دو جزء قطری آن برابر نیستند جابه‌جا شود، نشان دهید که دراین‌صورت $\mathbf{B}$ ماتریس قطری است.

حل: فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریسی قطری از مرتبهٔ n با اجزای زیر باشد

$$(\mathbf{A})_{ij} = a_i\delta_{ij} \tag{۵}$$

که a_iها کمیتهای نرده‌ای‌اند، به‌نحوی که، داریم

$$a_i \neq a_j \quad i \neq j \quad \text{و} \quad ۱ \leq i, j \leq n$$

فرض کنید جزء ij ماتریس $\mathbf{B}$ برابر با b_{ij} باشد. داریم

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} \tag{۶}$$

جزء ijام دو طرف معادلهٔ (۶) را درنظر می‌گیریم، داریم

$$\sum_{p=۱}^{n}(\mathbf{A})_{ip}(\mathbf{B})_{pj} = \sum_{p=۱}^{n}(\mathbf{B})_{ip}(\mathbf{A})_{pj} \tag{۷}$$

با استفاده از معادلهٔ (۵) نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{p=۱}^{n} a_i\delta_{ip}b_{pj} = \sum_{p=۱}^{n} b_{ip}a_j\delta_{pj}$$

یا

$$a_ib_{ij} = b_{ij}a_j \Rightarrow (a_i - a_j)b_{ij} = ۰ \tag{۸}$$

معادلهٔ فوق نشان می‌دهد که اگر $i \neq j$ باشد، داریم $b_{ij} = 0$. تنها اجزای $\mathbf{B}$ که احتمال دارد غیرصفر باشند، اجزای قطری b_{ii} به‌ازای $1 \leq i \leq n$ هستند که این ثابت می‌کند ماتریس $\mathbf{B}$ قطری است.

مثال ۲. فرض کنید $\mathbf{E}_{kl}(1 \leq k, l \leq n)$ ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد که تنها جزء غیرصفر آن جزء kl باشد که برابر با واحد است، یعنی

$$(\mathbf{E}_{kl})_{ij} = \delta_{ik}\delta_{jl} \tag{۹}$$

(آشکارا تعداد n^2 از این نوع ماتریس وجود دارد.) اگر ماتریسی از مرتبهٔ n با n ماتریس $\mathbf{E}_{kl}$، به‌ازای $1 \leq k \leq n$ و l ثابت جابه‌جا شود، دراین‌صورت نشان دهید که این ماتریس ثابت است.

حل: فرض کنید $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ ماتریسی باشد که با $\mathbf{E}_{kl}$ جابه‌جا می‌شود، یعنی

$$\mathbf{B}\mathbf{E}_{kl} = \mathbf{E}_{kl}\mathbf{B} \quad 1 \leq k \leq n, \quad \text{ثابت } l \tag{۱۰}$$

با مساوی قرار دادن اجزای ij در دو طرف، داریم

$$\sum_{p=1}^{n} b_{ip}(\mathbf{E}_{kl})_{pj} = \sum_{p=1}^{n} (\mathbf{E}_{kl})_{ip} b_{pj}$$

یا

$$\sum_{p=1}^{n} b_{ip}\delta_{kp}\delta_{lj} = \sum_{p=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{lp} b_{pj}$$

یا

$$b_{ik}\delta_{lj} = \delta_{ik} b_{lj} \tag{۱۱}$$

اگر در حالت خاص، فرض کنیم $j = l$، به‌دست می‌آوریم

$$b_{ik} = b_{ll}\delta_{ik} \quad 1 \leq i, k \leq n \tag{۱۲}$$

از معادلهٔ بالا دو نتیجه می‌گیریم، اول اینکه، به‌ازای $i \neq k$ همهٔ اجزای غیرقطری $\mathbf{B}$ صفر می‌شوند. ثانیاً، اگر $i = k$، به‌ازای $1 \leq i \leq n$ و l ثابت، جزء قطری b_{ii} مساوی b_{ll} می‌شود و این نشان می‌دهد که $\mathbf{B}$ ماتریسی ثابت است.

۲.۳ ماتریسهای حقیقی، متقارن و هرمیتی

در فصل قبل سه عمل ماتریسی را تعریف کردیم، که از ماتریس $\mathbf{A}$ ماتریسهای $\mathbf{A}^*$، $\tilde{\mathbf{A}}$، و $\mathbf{A}^\dagger$ را به‌دست می‌داد. از این ماتریسها، $\mathbf{A}$ و $\mathbf{A}^*$ از یک مرتبه‌اند، مثلاً $m \times n$ که دراین‌صورت $\tilde{\mathbf{A}}$ و $\mathbf{A}^\dagger$ از مرتبهٔ $n \times m$ خواهند شد. شش ماتریس خاص زیر را، با برقرار کردن روابط گوناگون بین هر دو ماتریس دلخواه از این چهار ماتریس، به‌دست می‌آوریم.

اگر داشته باشیم

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} \tag{۱۳الف}$$

با مساوی قرار دادن جزء ijام هر دو طرف، به‌روشنی داریم

$$a_{ij}^* = a_{ij} \quad ۱ \le i \le m, \quad ۱ \le j \le n \tag{۱۳ب}$$

این رابطه نشان می‌دهد که هر جزء ماتریس $\mathbf{A}$ حقیقی است. ماتریسی را که در معادلهٔ (۱۳الف) یا در معادلهٔ (۱۳ب) صدق می‌کند، ماتریس حقیقی می‌نامند.

اگر داشته باشیم

$$\mathbf{A}^* = -\mathbf{A} \text{ یا } a_{ij}^* = -a_{ij} \quad ۱ \le i \le m, \quad ۱ \le j \le n \tag{۱۴}$$

بدیهی است که هر جزء ماتریس $\mathbf{A}$ باید یا صفر باشد یا موهومی محض. ماتریسی را که از معادلهٔ (۱۴) پیروی می‌کند، اگر صفر نباشد، ماتریس موهومی محض می‌نامند.

حال تساوی $\mathbf{A}$ با $\tilde{\mathbf{A}}$ یا $\mathbf{A}^\dagger$ را درنظر می‌گیریم. تساوی $\mathbf{A}$ با $\tilde{\mathbf{A}}$ یا $\mathbf{A}$ با $\mathbf{A}^\dagger$ را تنها در صورتی می‌توان تعریف کرد که $\mathbf{A}$ یک ماتریس مربعی، m مساوی n، باشد، به‌این ترتیب چهار ماتریس خاص زیر را به‌دست می‌آوریم.

ماتریس را متقارن می‌خوانند، اگر

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \text{ یا } a_{ij} = a_{ji} \quad ۱ \le i, j \le n \tag{۱۵}$$

ماتریس را پادمتقارن (یا متقارن چاوله) می‌نامند، در صورتی که

$$\tilde{\mathbf{A}} = -\mathbf{A} \text{ یا } a_{ij} = -a_{ji} \quad ۱ \le i, j \le n \tag{۱۶}$$

به ماتریسی هرمیتی می‌گویند، که

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A} \text{ یا } a^*_{ij} = a_{ji} \quad ۱ \leq i,j \leq n \tag{۱۷}$$

در پایان، ماتریس را پادهرمیتی (یا هرمیتی چاوله) می‌نامند، اگر

$$\mathbf{A}^\dagger = -\mathbf{A} \text{ یا } a^*_{ij} = -a_{ji} \quad ۱ \leq i,j \leq n \tag{۱۸}$$

توجه کنید که در هر یک از شش حالت بالا شرطی خاص را برای ماتریس، یا برای اجزای آن می‌توان وضع کرد. البته این دو معادل یکدیگرند.

مثال ۳. نشان دهید که هر ماتریس مربعی را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت مجموع یک ماتریس هرمیتی و یک ماتریس پادهرمیتی نوشت.

حل: این مثال را به دو روش ثابت می‌کنیم

برهان اول: فرض کنید $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ ماتریس مربعی مرتبهٔ n باشد. فرض کنید $\mathbf{A}$ را بتوان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C} \tag{۱۹}$$

که $\mathbf{B}$ یک ماتریس هرمیتی و $\mathbf{C}$ یک ماتریس پادهرمیتی است و هر دوی آنها از مرتبهٔ n هستند. حال، اگر بتوانیم اجزای $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ را، برحسب اجزای $\mathbf{A}$ به‌دست آوریم، اثبات کامل خواهد شد.

فرض کنید $(\mathbf{B})_{ij} = b_{ij}$ و $(\mathbf{C})_{ij} = c_{ij}$ باشد. با مساوی قرار دادن جزء ijام هر دو طرف معادلهٔ (۱۹)، به‌دست می‌آوریم

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \tag{۲۰}$$

مزدوج هرمیتی معادلهٔ (۱۹) را درنظر می‌گیریم و با استفاده از معادلات (۱۷)، (۱۸) و نتیجهٔ تمرین ۲.۱۰(ب)، داریم

$$\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{B} + \mathbf{C})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger + \mathbf{C}^\dagger = \mathbf{B} - \mathbf{C} \tag{۲۱}$$

با مساوی قرار دادن جزء ijام هر دو طرف معادلهٔ بالا، نتیجه می‌گیریم

$$a^*_{ji} = b_{ij} - c_{ij} \tag{۲۲}$$

در پایان، با جمع و تفریق کردن معادلات (۲۰) و (۲۲)، می‌یابیم

$$b_{ij} = (a_{ij} + a^*_{ji})/۲ \qquad c_{ij} = (a_{ij} - a^*_{ji})/۲ \tag{۲۳}$$

که به‌طور یکتا اجزای $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ را، برحسب اجزای $\mathbf{A}$ معین می‌کند. با یک بررسی می‌توان ثابت کرد که $\mathbf{B}$ هرمیتی و $\mathbf{C}$ پادهرمیتی است. بنابراین، از معادلات (۲۳)، داریم

$$b^*_{ij} = (a^*_{ij} + a_{ji})/۲ = b_{ji} \tag{۲۴الف}$$

$$c^*_{ij} = (a^*_{ij} - a_{ji})/۲ = -(a_{ji} - a^*_{ij})/۲ = -c_{ji} \tag{۲۴ب}$$

برهان دوم: مانند حالت قبل، فرض می‌کنیم $\mathbf{A}$ را بتوان به‌صورت معادلهٔ (۱۹) بیان کرد. با درنظر گرفتن مزدوج هرمیتی دو طرف معادلهٔ (۱۹)، به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{B} - \mathbf{C} \tag{۲۵}$$

با جمع و تفریق معادلات (۱۹) و (۲۵)، می‌یابیم

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\dagger)/۲,\ \mathbf{C} = (\mathbf{A} - \mathbf{A}^\dagger)/۲ \tag{۲۶}$$

با درنظر گرفتن مزدوج هرمیتی معادلات (۲۶)، به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{B}^\dagger = (\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{A})/۲ = \mathbf{B}, \mathbf{C}^\dagger = (\mathbf{A}^\dagger - \mathbf{A})/۲ = -\mathbf{C} \tag{۲۷}$$

نتیجهٔ بالا را با معادلات (۱۷) و (۱۸) مقایسه می‌کنیم، به‌روشنی می‌بینیم که $\mathbf{B}$ هرمیتی و $\mathbf{C}$ پادهرمیتی است.

از مثال بالا درمی‌یابیم که به‌طور کلی دو روش برای حل مسائل مربوط به اتحادها در جبر ماتریسی وجود دارد. در روش اول، می‌شود اجزای دو طرف یک معادلهٔ ماتریسی را درنظر گرفت و از تعریف بنیادی برابری ماتریسها بهره گرفت، بدین معنی که دو ماتریس مساوی هستند، اگر و تنها اگر اجزای متناظرشان با هم برابر باشد. در روش دوم، می‌توان از عملیات ماتریسی گوناگون استفاده کرد و بدون پرداختن به اجزای ماتریس، به همان نتیجه دست یافت. روش دوم، آشکارا کوتاهتر و مناسبتر از روش اول است. در اینجا شاید ذکر یک مثال دیگر مفید باشد.

مثال ۴. اگر $\mathbf{A}$ ماتریسی پادمتقارن از مرتبهٔ n و $\mathbf{x}$ برداری ستونی از بعد n باشد، نشان دهید که

$$\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} = ۰$$

حل: بار دیگر، این مثال را به دو روش ثابت می‌کنیم.

برهان اول: فرض کنید $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ ماتریسی پادمتقارن باشد، به نحوی که $a_{ji} = -a_{ij}$ و فرض کنید $\mathbf{x} = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ برداری ستونی است. بدیهی است که حاصلضرب سه‌تایی ماتریس $\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ ماتریسی از مرتبهٔ ۱×۱ است، یعنی عدد است. بنابر تعریف ضرب ماتریسی، داریم

$$\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} = [\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x}]_{۱۱} = \sum_{i,j=۱}^{n} [\tilde{\mathbf{x}}]_{۱i}[\mathbf{A}]_{ij}[\mathbf{x}]_{j۱} \qquad (۲۸)$$

حال، $x_j = (\mathbf{x})_{j۱}$، بنابراین $x_i = (\tilde{\mathbf{x}})_{۱i}$ می‌شود و معادلهٔ بالا به‌صورت زیر در می‌آید

$$(\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x})_{۱۱} = \sum_{i,j=۱}^{n} a_{ij}x_ix_j \qquad (۲۹)$$

i و j هر دو اندیسهای مجموع‌یابی ظاهری‌اند؛ با جابه‌جایی i با j در معادلهٔ بالا، به‌دست می‌آوریم

$$(\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x})_{۱۱} = \sum_{i,j=۱}^{n} a_{ji}x_jx_i = -\sum_{i,j=۱}^{n} a_{ij}x_ix_j = -(\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x})_{۱۱} \qquad (۳۰)$$

که نشان می‌دهد

$$(\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x})_{۱۱} = \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} = ۰ \qquad (۳۱)$$

برهان دوم: با توجه به اینکه $\mathbf{A}$ پادمتقارن است، داریم $\tilde{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}$. با درنظرگرفتن ترانهاد ماتریس $\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x}$، می‌یابیم

$$(\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x})^T = \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = -\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} \qquad (۳۲)$$

ولی ماتریس $\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ دقیقاً یک سطر و یک ستون دارد. از این‌رو، ترانهاد آن حتماً با خودش برابر است، یعنی

$$(\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x})^T = \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} \qquad (۳۳)$$

با مقایسهٔ معادلات (۳۲) و (۳۳)، داریم

$$(\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x}) = -\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} = ۰ \qquad (۳۴)$$

۳.۳ ماتریس بهنجار

به ماتریسی که با مزدوج هرمیتی خود جابه‌جا شود، ماتریس بهنجار می‌گویند. بنابراین $\mathbf{A}$ ماتریس بهنجار است، اگر

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} \quad \text{یا} \quad [\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger] = ۰ \qquad (۳۵)$$

به‌سادگی می‌بینیم که ماتریسهای متقارن، پادمتقارن، هرمیتی و پادهرمیتی نیز ماتریسهای بهنجاراند. به‌همین دلیل است که بیشتر در فیزیک با آنها روبه‌رو می‌شویم.

مثال ۵. نشان دهید که ماتریس هرمیتی ماتریسی بهنجار نیز است.

حل: فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریسی هرمیتی باشد، بنابراین

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A} \qquad (۳۶)$$

دو طرف این معادله را از سمت راست در $\mathbf{A}$ ضرب می‌کنیم، داریم

$$\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A} \qquad (۳۷)$$

اکنون از معادلهٔ (۳۶) استفاده می‌کنیم، تا $\mathbf{A}^\dagger$ را جانشین ماتریس آخری $\mathbf{A}$ در طرف راست معادلهٔ (۳۷) کنیم، بنابراین می‌رسیم به

$$\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger \qquad (۳۸)$$

به‌این ترتیب نتیجه به اثبات می‌رسد.

به‌سادگی از معادلهٔ (۳۵) می‌توان ویژگیهای جالب زیر را برای ماتریس بهنجار ثابت کرد:
(الف) حاصلضرب داخلی سطرهای iام و jام ماتریس بهنجار با حاصلضرب داخلی ستونهای

iام و jام آن برابر است. (ب) هنجار سطر iام ماتریس بهنجار با هنجار ستون iام آن برابر است. در واقع، ویژگی (ب) حالت خاصی از ویژگی (الف) است.

به قضیهٔ مهمی دربارهٔ ماتریسهای بهنجار در بخش ۴.۱۰ خواهیم پرداخت.

۴.۳ ماتریس مثلثی

ماتریس مربعی را مثلثی می‌نامند، اگر همهٔ اجزای یک طرف قطر اصلی آن صفر باشند، یعنی $(\mathbf{A})_{ij} = ۰$، به‌ازای $i < j$ یا $i > j$. بنابراین، دو ماتریس زیر

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۵ \\ ۰ & ۰ & -۶ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & -۲ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۳ & ۰ \\ ۴ & ۶ & -۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

نمونه‌هایی از ماتریس مثلثی‌اند. بدیهی است که دو نوع ماتریس مثلثی وجود دارد. به ماتریسی که، به‌ازای $i > j$، $(\mathbf{A})_{ij} = ۰$ باشد، ماتریس راست مثلثی می‌گویند (در بالا، ماتریس $\mathbf{A}$)، در صورتی‌که به ماتریسی که به‌ازای $i < j$، $(\mathbf{A})_{ij} = ۰$ باشد، ماتریس چپ مثلثی می‌گویند (ماتریس $\mathbf{B}$ در بالا). ماتریسهای بالا را به‌ترتیب ماتریسهای بالا مثلثی و پایین مثلثی نیز می‌نامند.

۵.۳ تعداد پارامترهای مستقل

به‌طور کلی ماتریسی $m \times n$ با اجزائی که ممکن است مختلط باشد، آشکارا $۲mn$ پارامتر حقیقی مستقل دارد. ماتریس مربعی مرتبهٔ n در حالت کلی $۲n^۲$ پارامتر حقیقی مستقل دارد.

با وجود این، اگر این ماتریس یکی از انواع خاص باشد، بین اجزای آن روابط خاصی صادق است، که از تعداد پارامترهای مستقل لازم برای مشخص کردن کامل ماتریس می‌کاهد. مثلاً، اگر ماتریسی $m \times n$ حقیقی یا موهومی محض باشد، می‌توان آن‌را به‌طور کامل تنها با mn پارامتر مستقل حقیقی مشخص کرد. زیرا بین اجزای این ماتریس mn رابطه برقرار است [معادلهٔ (۱۳) یا معادلهٔ (۱۴)]، در نتیجه تعداد پارامترهای مستقل آن کاهش می‌یابد. به‌آسانی درمی‌یابیم که عموماً، تعداد پارامترهای مستقلی که برای مشخص کردن کامل یک ماتریس لازم است، برابر است با $۲mn$

پارامتر منهای تعداد شرطهای مستقل حاکم بر اجزای یک ماتریس.

ماتریسهای خاص مختلفی را درنظر بگیرید که دربارهٔ آنها در این بخش بحث کردیم. مثلاً، یک ماتریس متقارن را در حالت کلی درنظر بگیرید که اجزای آن در معادلهٔ (۱۵) صدق می‌کنند. تعداد پارامترهای مستقل ماتریس متقارن را در حالت کلی به دو روش تعیین می‌کنیم؛ ابتدا به‌طور مستقیم و سپس با تعیین تعداد شرایط حاکم بر اجزای ماتریس و تفریق آن از $2n^2$ (زیرا برای ماتریس متقارن $m = n$ است).

در ماتریس متقارن $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]_n$، تنها باید اجزای یک طرف قطر را بدانیم (شامل اجزای قطری)، یعنی اجزائی که برای آنها، مثلاً $j \leq i$ باشد. سایر اجزا، که برای آنها $i > j$ است، به‌اجزای یادشده وابسته‌اند. تعداد اجزائی که برای آنها $j \leq i$ است، عبارت است از $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2$. بنابراین، تعداد کل پارامترهای حقیقی مستقل برابر است با $n(n+1)$، زیرا هر جزء ممکن است مختلط باشد.

برای تعیین تعداد شرطهای مستقل، دقت می‌کنیم که داریم $a_{ij} = a_{ji}$، برای همهٔ i و jهای بین ۱ و n. از میان اینها معادلات مستقل تنها برای $1 \leq i < j \leq n$ به‌دست می‌آید، که تعداد آنها برابر است با $1 + 2 + \cdots + (n-1) = n(n-1)/2$. چون هر معادلهٔ مختلط با دو شرط حقیقی هم‌ارز است، مجموعه‌ای از $n(n-1)$ شرط حقیقی برای اجزای ماتریس متقارن داریم. بنابراین، تعداد پارامترهای مستقل حقیقی می‌شود: $2n^2 - n(n-1) = n(n+1)$، که با محاسبات قبلی سازگاری دارد.

ماتریس پادمتقارن مرتبهٔ n دارای $n(n-1)$ پارامتر مستقل حقیقی است. تعداد پارامترهای مستقل حقیقی ماتریس هرمیتی یا پادهرمیتی مرتبهٔ n برابر با n^2 می‌شود. تحقیق این مطلب به‌عهدهٔ خواننده است.

مثال ۶. کلیترین شکل ماتریس متقارن و ماتریس هرمیتی مرتبهٔ ۲ را بنویسید.

حل: کلیترین شکل ماتریس متقارن مرتبهٔ ۲، عبارت است از

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} a+ib & e+if \\ e+if & c+id \end{bmatrix} \tag{۳۹}$$

که شش پارامتر مستقل حقیقی دارد. کلیترین شکل ماتریس هرمیتی مرتبهٔ ۲ را می‌توان، برحسب

چهار پارامتر مستقل حقیقی به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{A}_{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} a & c+id \\ c-id & b \end{bmatrix} \qquad (۴۰)$$

۶.۳ ماتریسهای مستقل و ترکیبهای خطی

اگر دو ماتریس $\mathbf{A}_۱$ و $\mathbf{A}_۲$ مرتبهٔ یکسان $m \times n$ داشته باشند و هیچ‌یک از آن‌دو ماتریس صفر و یا مضربی از دیگری نباشد، دراین‌صورت $\mathbf{A}_۱$ و $\mathbf{A}_۲$ را مستقل خطی از یکدیگر می‌نامند.[۱] به‌عبارت دیگر، $\mathbf{A}_۱$ و $\mathbf{A}_۲$ ماتریسهای مستقل خطی‌اند، اگر و تنها اگر ثابت c که به‌ازای آن $\mathbf{A}_۱ = c\mathbf{A}_۲$ است وجود نداشته باشد.

این مفهوم را می‌توانیم به بیش از دو ماتریس نیز تعمیم دهیم. به مجموعه‌ای از ماتریسهای $\mathbf{A}_۱$، $\mathbf{A}_۲$، ...، $\mathbf{A}_p$، که همگی از مرتبهٔ یکسان $m \times n$ هستند، مستقل خطی می‌گویند، اگر از معادلهٔ زیر

$$\sum_{i=۱}^{p} c_i \mathbf{A}_i = ۰ \qquad (۴۱)$$

با وجود c_iهای نرده‌ای، برآید

$$c_i = ۰ \qquad ۱ \le i \le p \qquad (۴۲)$$

از سوی دیگر، ماتریسهای این مجموعه وابستهٔ خطی‌اند، اگر بتوان کمیتهای نرده‌ای c_iیی یافت که حداقل یکی از آنها غیرصفر باشد، به‌طوری که معادلهٔ (۴۱) صادق باشد. فرض کنید ضریب خاص c_k غیرصفر باشد. با انتقال این جمله به‌سمت دیگر معادله و تقسیم آن بر c_k، داریم

$$\mathbf{A}_k = -\sum_{i \neq k} (c_i/c_k)\mathbf{A}_i \qquad (۴۳)$$

معادلهٔ فوق نشان می‌دهد که ماتریس $\mathbf{A}_k$ را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از $p-۱$ ماتریس باقیمانده بیان کرد که ماتریسهای این مجموعه را وابستهٔ خطی می‌خوانند. برعکس، ماتریسهای

---

۱. آن‌را با وابستگی و استقلال خطی بردارها مقایسه کنید؛ فصل ۱.

یک مجموعه مستقل خطی‌اند، اگر هیچ‌یک از آنها را نتوان به‌صورت ترکیب خطی سایر ماتریسها بیان کرد.

به‌ازای $p = ۲$، معادلهٔ (۴۱) به $c_۱\mathbf{A}_۱ + c_۲\mathbf{A}_۲ = ۰$ تبدیل می‌شود، به‌طوری که اگر $c_۱$ و $c_۲$ غیرصفر باشند، داریم

$$\mathbf{A}_۱ = -(c_۲/c_۱)\mathbf{A}_۲ \qquad (۴۴)$$

که نشان می‌دهد $\mathbf{A}_۱$ مضرب ثابتی از $\mathbf{A}_۲$ است، همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم.

مفاهیمی را که در اینجا پروراندیم به مفاهیم برداری فصل ۱ مربوط می‌شوند. تعداد بیشینهٔ ماتریسهای مستقل خطی مرتبهٔ $m \times n$ برابر با mn است (با این فرض که در ترکیبهای خطی ضرایب مختلط نیز مجاز است). هر ماتریس دیگری (از همین مرتبه) را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی با ضرایب مختلط از مجموعه‌ای با mn ماتریس مستقل خطی نوشت. اگر با مجموعه‌ای از ماتریسهای خاص سروکار داشته باشیم، تعداد بیشینهٔ ماتریسهای مستقل خطی (از نوع یادشده) با تعداد پارامترهای مستقلشان برابر است، در صورتی که تنها ضرایب حقیقی مجاز باشد و اگر ضرایب مختلط مجاز باشد، با نصف پارامترهای مستقلشان برابر می‌شود. بنابراین، تعداد بیشینهٔ ماتریسهای مستقل خطی حقیقی مرتبهٔ $m \times n$ برابر با mn است، تعداد بیشینهٔ ماتریسهای متقارن مستقل خطی مرتبهٔ n برابر با $n(n+۱)/۲$ است، تعداد بیشینهٔ ماتریسهای هرمیتی یا پادهرمیتی مستقل خطی مرتبهٔ n برابر با $n^۲$ است، و . . . .

مثال ۷. (الف) مجموعه‌ای از mn ماتریس مستقل خطی مرتبهٔ $m \times n$ بنویسید و (ب) نشان دهید که هر ماتریس $m \times n$ را می‌توان به‌صورت یک ترکیب خطی از این mn ماتریس بیان کرد.

حل: (الف) ماتریس $\mathbf{E}_{kl}$ مرتبهٔ $m \times n$ را طوری تعریف می‌کنیم که در مکان kl برابر با یک و در جاهای دیگر صفر باشد. این تعمیمی از ماتریسهایی است که در مثال ۲ تعریف کردیم. بدیهی است که در اینجا تعداد این ماتریسها mn است و نشان می‌دهیم که مستقل خطی هستند.

فرض کنید a_{kl} مجموعه‌ای از mn ثابت باشد (که در حالت کلی ممکن است مختلط باشند). معادلهٔ ماتریسی زیر را درنظر بگیرید

$$\sum_{k=۱}^{m}\sum_{l=۱}^{n} a_{kl}\mathbf{E}_{kl} = ۰ \qquad (۴۵\text{الف})$$

جزء ijام ماتریس سمت چپ معادلهٔ (۴۵الف) را درنظر بگیرید. چون تنها ماتریس $\mathbf{E}_{ij}$ در مکان ijام مقدار یک دارد، روشن است که این جزء برابر با a_{ij} است. در واقع با نوشتن سمت چپ معادلهٔ (۴۵الف) آشکارا، داریم

$$a_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + a_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_{mn}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \text{(۴۵ب)}$$

با مقایسهٔ این معادله با سمت راست معادلهٔ (۴۵الف)، می‌بینیم که برای صادق بودن این معادله، باید داشته باشیم

$$a_{ij} = 0 \qquad 1 \le i \le m, \;\; 1 \le j \le n \qquad \text{(۴۶)}$$

چون این تنها جواب معادلهٔ (۴۵الف) است، نتیجه می‌گیریم که ماتریسهای $\mathbf{E}_{kl}$ مستقل خطی‌اند.

البته این مجموعه از ماتریسهای مستقل خطی یکتا نیست و چنین مجموعه‌ای را می‌توان از راههای متعددی انتخاب کرد.

(ب) فرض کنید $\mathbf{B} \equiv [b_{ij}]_{m\times n}$ ماتریسی دلخواه باشد که اجزای آن ممکن است مختلط باشند. روشن است که می‌توانیم آن‌را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{kl}\mathbf{E}_{kl} \qquad \text{(۴۷)}$$

که ثابت می‌کند هر ماتریس $m \times n$ را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی mn ماتریس $\mathbf{E}_{kl}$ نوشت؛ بنابراین، mn تعداد بیشینهٔ ماتریسهای مستقل خطی است، یعنی ماتریس دیگری از مرتبهٔ $m \times n$ وجود ندارد که از مجموعهٔ بالا مستقل خطی باشد.

مثال ۸. مجموعه‌ای از چهار ماتریس هرمیتی مرتبهٔ ۲ پیدا کنید که مستقل خطی باشد.

حل: مجموعهٔ چهار ماتریس هرمیتی زیر را امتحان می‌کنیم

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \tag{48}$$

برای اینکه نشان دهیم این ماتریسها مستقل خطی‌اند، بار دیگر معادلهٔ زیر را برای ضرایب a_i حل می‌کنیم.

$$\sum_{i=1}^{4} a_i \mathbf{A}_i = 0 \tag{49}$$

معادلات (۴۸) را در معادلهٔ (۴۹) می‌گذاریم، می‌شود

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 - ia_4 \\ a_3 + ia_4 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{50}$$

اجزای متناظر معادلهٔ بالا را مساوی هم قرار می‌دهیم، می‌بینیم که تنها جواب به‌ازای $1 \leq i \leq 4$، $a_i = 0$ است که نشان می‌دهد چهار ماتریس $\mathbf{A}_1$، $\mathbf{A}_2$، $\mathbf{A}_3$، و $\mathbf{A}_4$ مستقل خطی‌اند.

دگر بار می‌بینیم که این مجموعه یکتا نیست و هر چهار ترکیب خطی مستقل را می‌توان برگزید. گزینهٔ معمول درنظرگرفتن مجموع و تفاضل $\mathbf{A}_1$ و $\mathbf{A}_2$ است، در نتیجه چهار ماتریس زیر به‌دست می‌آید.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \tag{51}$$

اولین ماتریس از چهار ماتریس بالا ماتریس یکهٔ مرتبهٔ ۲ است و سه ماتریس آخر به ماتریسهای اسپین پاؤلی برای ذره‌ای با اسپین ۱/۲– در مکانیک کوانتومی مشهورند.

۷.۳ ماتریس با اجزای چندجمله‌ای

ماتریس $m \times n$ زیر را درنظر بگیرید

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & & & \\ f_{m1}(x) & f_{m2}(x) & \cdots & f_{mn}(x) \end{bmatrix} \tag{۵۲}$$

که اجزای $f_{ij}(x)$ آن چندجمله‌ایهایی برحسب x و از درجهٔ کمتر یا مساوی p است، پس می‌توان آن‌را به‌صورت یکتای زیر نوشت

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 x + \mathbf{B}_2 x^2 + \cdots + \mathbf{B}_p x^p \tag{۵۳}$$

که $\mathbf{B}_k(0 \le k \le p)$ ماتریسهایی از مرتبهٔ $m \times n$اند که اجزایشان مستقل از x است.

به‌این منظور، فرض می‌کنیم تابع $f_{ij}(x)$ یک چندجمله‌ای به‌صورت زیر باشد

$$f_{ij}(x) = \sum_{k=0}^{p} a_{ij}(k) x^k \tag{۵۴}$$

که ضرایب $a_{ij}(k)$ مستقل از x هستند. سپس ادعا می‌کنیم که ماتریسهای $\mathbf{B}_k$ چنین اجزائی دارند:

$$(\mathbf{B}_k)_{ij} = a_{ij}(k) \tag{۵۵}$$

برای اثبات درستی این ادعا، جزء ijام سمت راست معادلهٔ (۳۵) را درنظر بگیرید که با استفاده از معادلهٔ (۵۵)، چنین می‌شود

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 x + \mathbf{B}_2 x^2 + \cdots + \mathbf{B}_p x^p)_{ij} \\ = (\mathbf{B}_0)_{ij} + (\mathbf{B}_1)_{ij} x + \cdots + (\mathbf{B}_p)_{ij} x^p \\ = a_{ij}(0) + a_{ij}(1) x + \cdots + a_{ij}(p) x^p \end{aligned} \tag{۵۶}$$

که همان جزء ijام $\mathbf{A}$ است. چون ضرایب $a_{ij}(k)$ی چندجمله‌ای یکتا و مستقل از x هستند، ماتریسهای $\mathbf{B}_k$ نیز یکتا و مستقل از xاند.

مثال ۹. ماتریس زیر را به‌صورت یک چندجمله‌ای از x با ضرایب ماتریسی نشان دهید

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۳x^۳+۲x-۱ & ۵x^۲-۳x+۲ & -۲x^۳+۳x^۲-۵x+۱ \\ ۹x^۳-۳ & ۶x+۴ & ۷x^۲-۴x \\ ۲x^۲-۳x-۱۰ & x^۳+۶x^۲+x & ۶x^۳-۴x^۲+۸ \end{bmatrix}$$

حل: به‌سادگی می‌بینیم که

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۱ \\ -۳ & ۴ & ۰ \\ -۱۰ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ ۰ & ۶ & -۴ \\ -۳ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}x$$
$$+\begin{bmatrix} ۰ & ۵ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۷ \\ ۲ & ۶ & -۴ \end{bmatrix}x^۲+\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & -۲ \\ ۹ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}x^۳ \qquad (۵۷)$$

۸.۳ رد ماتریس

رد ماتریس مربعی $\mathbf{A}\equiv[a_{ij}]$ را به‌صورت مجموع اجزای قطری آن تعریف می‌کنند و آن‌را اثر یا مجموع قطری نیز می‌نامند و با $\mathrm{Tr}\mathbf{A}$ یا $\mathrm{Sp}\mathbf{A}$ نشان می‌دهند. پس

$$\mathrm{Tr}\mathbf{A}=\sum_{i=۱}^{n}a_{ii} \qquad (۵۸)$$

مثال ۱۰. نشان دهید که رد حاصلضرب تعدادی متناهی از ماتریسها نسبت به هر جایگشت دوری از ماتریسها ناورداست.

حل: ابتدا این قضیه را برای دو ماتریس اثبات می‌کنیم. فرض کنید $\mathbf{A}\equiv[a_{ij}]_{m\times n}$ و $\mathbf{B}\equiv[b_{ij}]_{n\times m}$. بنابراین

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{AB})=\sum_{i=۱}^{m}(\mathbf{AB})_{ii}=\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n}a_{ij}b_{ji} \qquad (\text{۵۹الف})$$

همچنین

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{BA}) = \sum_{j=1}^{n}(\mathbf{BA})_{jj} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ji}a_{ij} \qquad (\text{۵۹ب})$$

با توجه به اینکه a_{ij} و b_{ij} کمیتهای نرده‌ای‌اند، بدیهی است که

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{BA}) \qquad (۶۰)$$

حال، $\mathbf{A}_1$، $\mathbf{A}_2$، ...، $\mathbf{A}_k$ را k ماتریس بگیرید، به‌طوری که حاصلضربهای $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$، $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3$، ...، $\mathbf{A}_k\mathbf{A}_l$ تعریف بشود. فرض کنید داشته باشیم

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_r, \qquad \mathbf{D} = \mathbf{A}_{r+1},\ldots\mathbf{A}_k \qquad 1 \le r \le k-1 \qquad (۶۱)$$

به‌این ترتیب، از معادلهٔ (۶۰) داریم $\mathrm{Tr}(\mathbf{DC}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{CD})$. به‌جای $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ از معادلهٔ (۶۱) قرار می‌دهیم، داریم

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_k) = \mathrm{Tr}(\mathbf{A}_{r+1}\ldots\mathbf{A}_k\mathbf{A}_1\ldots\mathbf{A}_r) \quad 1 \le r \le k-1 \qquad (۶۲)$$

به‌این ترتیب نتیجه اثبات می‌شود.

باید توجه کرد که رد حاصلضرب تعدادی ماتریس نسبت به هر جایگشتی ناوردا نیست، بلکه تنها نسبت به جایگشت دوری ماتریسها ناورداست.

تمرین

۱.۳ ماتریس زیر

$$\begin{bmatrix} 3+2i & 1-i & 5 \\ -2+7i & 6i & -1+4i \\ 4-3i & 2+2i & 6+i \end{bmatrix}$$

را به‌صورت (الف)* مجموع یک ماتریس حقیقی و یک ماتریس موهومی محض، (ب) * مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن، (ج) مجموع یک ماتریس هرمیتی و یک ماتریس پادهرمیتی بنویسید.

۳. ۲ (الف) نشان دهید که هر ماتریسی را می‌توان به‌طور یکتا، به‌صورت مجموع یک ماتریس حقیقی و یک ماتریس موهومی محض بیان کرد. (ب) نشان دهید که هر ماتریس مربعی را می‌توان به‌طور یکتا، به‌صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن نوشت.

۳. ۳ اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ هر دو متقارن یا هر دو پادمتقارن باشند، نشان دهید که $\mathbf{BA}$ ترانهاد $\mathbf{AB}$ است.

۳. ۴ * (الف) نشان دهید که مجموع دو ماتریس هرمیتی ماتریسی هرمیتی است. (ب) نشان دهید که حاصلضرب دو ماتریس هرمیتی هرمیتی است، اگر و تنها اگر دو ماتریس با یکدیگر جابه‌جا شوند.

۳. ۵ (الف) اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ماتریسهای هرمیتی باشند، شرطی را پیدا کنید که هر ترکیب خطی به‌شکل $a\mathbf{A}+b\mathbf{B}$ هرمیتی باشد، a و b کمیتهای نرده‌ای دلخواه‌اند. (ب) اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ماتریسهای پادهرمیتی باشند، شرطی را پیدا کنید که هر ترکیب خطی $a\mathbf{A}+b\mathbf{B}$، با ضرایب نرده‌ای، پادهرمیتی باشد.

۳. ۶ اگر $\mathbf{H}_۱$ هرمیتی و $\mathbf{H}_۲$ پادهرمیتی باشد، نشان دهید که $\mathbf{H}_۱+i\mathbf{H}_۲$ و $\mathbf{H}_۱-i\mathbf{H}_۲$ هرمیتی‌اند.

۳. ۷ * کمیتهای نرده‌ای a و b را طوری بیابید که به‌ازای آنها $\mathbf{I}+a\mathbf{A}+b\mathbf{A}^۲=۰$ باشد، داریم $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$.

۳. ۸ اگر $\mathbf{E}_{kl}$ها $n^۲$ ماتریسی باشند که در معادلهٔ (۹) تعریف کرده‌ایم، نشان دهید که (الف) $\mathbf{E}_{kl}\mathbf{E}_{pq}=\mathbf{E}_{kq}\delta_{lp}$ (ب) $\mathbf{E}_{kl}^۲=\mathbf{E}_{kl}\delta_{kl}$.

۳. ۹ ماتریسهای زیر مفروض‌اند

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix},\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} -۱ & \sqrt{۳} \\ \sqrt{۳} & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} -۱ & -\sqrt{۳} \\ -\sqrt{۳} & ۱ \end{bmatrix},\ \mathbf{D}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} -۱ & \sqrt{۳} \\ -\sqrt{۳} & -۱ \end{bmatrix},\ \mathbf{F}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} -۱ & -\sqrt{۳} \\ \sqrt{۳} & -۱ \end{bmatrix}$$

نشان دهید که (الف) $\mathbf{A}^۲=\mathbf{B}^۲=\mathbf{C}^۲=\mathbf{I}$، (ب) $\mathbf{AB}=\mathbf{D}$، (ج) $\mathbf{AC}=\mathbf{BA}=\mathbf{F}$.

۳. ۱۰ فرض کنید

$$\mathbf{M}_x = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}, \mathbf{M}_y = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} ۰ & -i & ۰ \\ i & ۰ & -i \\ ۰ & i & ۰ \end{bmatrix}, \mathbf{M}_z = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

[در مکانیک کوانتومی این ماتریسها نمایشهای ذره‌ای با اسپین ۱− هستند.] ماتریسهای $\mathbf{M}^{\pm} = \mathbf{M}_x \pm i\mathbf{M}_y$ را بیابید و نشان دهید که

(الف) $[\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y] = i\mathbf{M}_z, [\mathbf{M}_y, \mathbf{M}_z] = i\mathbf{M}_x, [\mathbf{M}_z, \mathbf{M}_x] = i\mathbf{M}_y$

(ب) $\mathbf{M}^۲ \equiv \mathbf{M}_x^۲ + \mathbf{M}_y^۲ + \mathbf{M}_z^۲ = ۲\mathbf{I}$

(ج) $[\mathbf{M}^۲, \mathbf{M}_i] = ۰, i = x, y, z$

(د) $[\mathbf{M}_z, \mathbf{M}^{\pm}] = \pm\mathbf{M}^{\pm}$

(ه) $[\mathbf{M}^+, \mathbf{M}^-] = ۲\mathbf{M}_z$

(و) $(\mathbf{M}^+)^\dagger = \mathbf{M}^-, (\mathbf{M}^-)^\dagger = \mathbf{M}^+$

(ز) ماتریسهای $\mathbf{M}_x$، $\mathbf{M}_y$ و $\mathbf{M}_z$ هرمیتی‌اند.

۳. ۱۱ نشان دهید که هر توان زوجی از ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ a & b & -۱ \end{bmatrix}$$

با وجود کمیتهای نرده‌ای دلخواه a و b با ماتریس یکه برابر است و هر توان فرد آن برابر با خودش است.

۳. ۱۲ نشان دهید که حاصلضرب دو ماتریس مثلثی از یک نوع (یعنی، هر دو چپ یا هر دو راست مثلثی) ماتریسی مثلثی از همان نوع است. بنابراین نشان دهید که همهٔ توانهای ماتریس مثلثی نیز ماتریسهایی مثلثی از همان نوع‌اند.

۳. ۱۳ نشان دهید که هر ماتریس هرمیتی مرتبهٔ ۲ را می‌توان به‌طور یکتا، به‌صورت ترکیب خطی چهار ماتریس معادلهٔ (۵۱) بیان کرد.

۳. ۱۴ (الف) نشان دهید که تعداد بیشینهٔ ماتریسهای هرمیتی مستقل خطی مرتبهٔ ۳ برابر ۹ است. (ب) مجموعه‌ای از ۹ ماتریس هرمیتی مستقل خطی مرتبهٔ ۳ تشکیل دهید. (ج) کلیترین شکل ماتریس هرمیتی مرتبهٔ ۳ را بنویسید و نشان دهید که شامل ۹ پارامتر مستقل حقیقی است. (د) نشان دهید که ماتریس کلی (ج) را می‌توان به‌طور یکتا، به‌صورت ترکیب خطی ۹ ماتریسی نوشت که در (ب) تشکیل دادیم.

۳. ۱۵ * کلیهٔ ماتریسهایی را پیدا کنید که مربع آنها برابر با ماتریس زیر باشد

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

۳. ۱۶ * بیشترین تعداد ماتریسهای پادمتقارن مستقل خطی مرتبهٔ n چیست؟ مجموعه‌ای از ماتریسهای پادمتقارن مستقل مرتبهٔ ۳ بنویسید. کلیترین شکل ماتریس پادمتقارن مرتبهٔ ۳ را بنویسید و آن‌را به‌صورت ترکیب خطی ماتریسهایی بیان کنید که در بالا تشکیل دادیم (با ضرایب مختلط).

۳. ۱۷ نشان دهید که رد مجموع تعدادی ماتریس برابر با مجموع ردهای آنهاست، یعنی

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}+\cdots) = \mathrm{Tr}\mathbf{A} + +\mathrm{Tr}\mathbf{B} + \mathrm{Tr}\mathbf{C} + \cdots$$

۳. ۱۸ اگر $\mathbf{T}$ ماتریسی مثلثی باشد که اجزای قطری آن t_{ii} باشند، نشان دهید که اجزای قطری $\mathbf{T}^k$، که k عدد صحیح مثبت است، برابر با t_{ii}^k است.

۳. ۱۹ نشان دهید که $\mathrm{Tr}[(\mathbf{AB})^k] = \mathrm{Tr}[(\mathbf{BA})^k]$.

۳. ۲۰ فرض کنید $\mathbf{P}$ ماتریسی هرمیتی با ویژگی $\mathbf{P}^۲ = \mathbf{P}$ باشد. نشان دهید که برای هر بردار $\mathbf{x}$، بردارهای $\mathbf{Px}$ و $(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{x}$ بر یکدیگر متعامدند.

۳. ۲۱ فرض کنید دو ماتریس $\mathbf{S}$ و $\mathbf{A}$ به‌ترتیب از قسمتهای حقیقی و موهومی ماتریس هرمیتی $\mathbf{H}$ به‌دست آمده‌اند، یعنی $\mathbf{H} = \mathbf{S} + i\mathbf{A}$، که $\mathbf{S}$ و $\mathbf{A}$ هر دو حقیقی‌اند. نشان دهید که $\mathbf{S}$ ماتریسی متقارن و $\mathbf{A}$ پادمتقارن است.

۳. ۲۲ اگر ماتریس $\mathbf{A}$ هم هرمیتی و هم مثلثی باشد، نشان دهید که $\mathbf{A}$ قطری است.

۳. ۲۳ تعداد قیدهای اجزای یک ماتریس نرمال مرتبهٔ n را تعیین کنید. سپس، تعداد پارامترهای مستقل لازم برای مشخص کردن یک ماتریس نرمال را پیدا کنید.

۳. ۲۴ (الف) نشان دهید که مجموعهٔ تمام ماتریسهای هرمیتی مرتبهٔ n یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی R است. (ب) بعد این فضا چیست؟ (ج) پایه‌ای برای این فضا بنویسید، به‌نحوی که هر ماتریس هرمیتی مرتبهٔ n را بتوان به‌صورت ترکیبی خطی از ماتریسهای پایه بیان کرد. (د) آیا این مجموعه یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط C است؟

۴

دترمینان

انتظار می‌رود که خواننده اطلاعات مقدماتی دربارهٔ دترمینانها، روش محاسبه و ویژگیهای گوناگون آنها داشته باشد. با وجود این، به منظور تکمیل آن، این فصل را به بعضی از تعریفهای اساسی و ویژگیهای مهم دترمینانها اختصاص می‌دهیم که در بقیهٔ کتاب به‌آن نیاز داریم.

اگر $\mathbf{A}$ ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد، دترمینان آن‌را با $\det(\mathbf{A})$ یا $\det\mathbf{A}$ یا $|\mathbf{A}|$ نشان می‌دهیم؛ که موجودی است از همان نوع اجزای $\mathbf{A}$، یعنی عددی حقیقی یا مختلط یا یک تابع.

فرض کنید $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد، ماتریسی مربعی از مرتبهٔ $n - ۱$ را درنظر بگیرید که از حذف سطر iام و ستون jام $\mathbf{A}$ به‌دست آمده باشد. دترمینان این ماتریس مرتبهٔ $n - ۱$ را کهاد جزء a_{ij} در $\det\mathbf{A}$ می‌نامند. هم‌عامل a_{ij} را با A^{ij} نمایش می‌دهند و آن‌را به‌صورت $(-۱)^{i+j}$ در کهاد a_{ij} تعریف می‌کنند. پس دترمینان $\mathbf{A}$ برابر است با

$$\det\mathbf{A} = \sum_{k=۱}^{n} a_{ik} A^{ik}, \qquad \det\mathbf{A} = \sum_{j=۱}^{n} a_{ji} A^{ji} \qquad ۱ \leq i \leq n \qquad (۱)$$

اولین معادله از معادلات (۱) به بسط دترمینان روی سطر iام و دومی به بسط آن روی ستون jام مشهور است. مقدار دترمینان ماتریس مربعی یکتاست.

می‌بینیم که اگر دترمینان را به‌طور صریح تعریف کنیم، شامل $n!$ جمله است. هر جمله شامل n عامل است، زیرا یک و تنها یک جزء از هر سطر و هر ستون وجود دارد. در واقع، $\det\mathbf{A}$ را می‌توان با نماد مختصر زیر نوشت:

$$\det\mathbf{A} = \sum_{\mathrm{P}(i_۱ i_۲ \cdots i_n)} k a_{۱i_۱} a_{۲i_۲} \cdots a_{ni_n} \qquad (۲)$$

که هر اندیس $i_۱$، $i_۲$، ...، i_n مقدارهایی از ۱ تا n می‌گیرد، به‌طوری که هیچ دو اندیسی مقداری یکسان ندارند، مجموع‌یابی روی $n!$ جایگشت انجام می‌شود، و برحسب آنکه $(i_۱ \ i_۲ \ldots i_n)$ جایگشت زوج یا فرد $(۱ \ ۲ \ldots n)$ باشد، k برابر با ۱+ یا ۱− می‌شود.

عباراتی را که در زیر تعریف شده‌اند، درنظر بگیرید

$$S = \sum_{k=۱}^{n} a_{ik} A^{jk}, \qquad P = \sum_{k=۱}^{n} a_{ki} A^{kj} \qquad (۳)$$

می‌بینیم که عبارت $S(P)$ نشان‌دهندهٔ دترمینان ماتریسی است که از جابه‌جایی سطر (ستون) jام $\mathbf{A}$ با سطر (ستون) iام آن به‌دست می‌آید. با توجه به اینکه دترمینان یک ماتریس با دو سطر یا ستون یکسان صفر است، داریم

$$\sum_{k=۱}^{n} a_{ik} A^{jk} = \sum_{k=۱}^{n} a_{ki} A^{kj} = ۰ \qquad i \neq j \qquad (۴)$$

از ترکیب معادلهٔ بالا با معادلات (۱)، داریم

$$\sum_{k=۱}^{n} a_{ik} A^{jk} = \sum_{k=۱}^{n} a_{ki} A^{kj} = (\det\mathbf{A})\delta_{ij} \qquad ۱ \leq i, j \leq n \qquad (۵)$$

گاهی به تعریف مشتق دترمینان نیاز داریم. فرض کنید اجزای a_{ij} از ماتریس $\mathbf{A}$ توابعی از پارامتر s باشند. $d|\mathbf{A}|/ds$ چیست؟

از معادلهٔ (۲) به‌روشنی می‌بینیم که اگر $\det\mathbf{A}$ را به‌طور صریح بسط دهیم، هر جزء، مثلاً a_{ij} دقیقاً در $(n-۱)!$ جمله در سمت راست معادلهٔ (۲) ظاهر خواهد شد. در واقع، ضریب

a_{ij} در $\det\mathbf{A}$ همان هم‌عامل a_{ij} است. اگر از این عبارت نسبت به s مشتق بگیریم، به فرمول زیر می‌رسیم

$$d(\det\mathbf{A})/ds = \sum_{i,j=1}^{n} A^{ij}(da_{ij}/ds) \qquad (6)$$

تمرین

۱.۴ دترمینانهای زیر را حساب کنید

(الف)* $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & c^2+a^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$، (ب) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

(ج)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$، (د) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

(هـ) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$

۲.۴ نشان دهید که دترمینان ماتریس یکه از هر مرتبه‌ای برابر با یک است.

۳.۴ اگر $\mathbf{A}$ ماتریس مربعی و c کمیتی نرده‌ای باشد، نشان دهید که $\det(c\mathbf{A}) = c^n\det(\mathbf{A})$، که n مرتبهٔ $\mathbf{A}$ است. از اینجا نشان دهید که دترمینان $-\mathbf{A}$ برابر $\pm\det\mathbf{A}$ است که به زوج یا فرد بودن n بستگی دارد.

۴.۴ نشان دهید که دترمینان ماتریس مثلثی برابر با حاصلضرب اجزای قطری آن است.

۵.۴ نشان دهید که (الف)* $\det(\mathbf{A}^*) = (\det\mathbf{A})^*$ ، (ب) $\det(\tilde{\mathbf{A}}) = \det\mathbf{A}$، (ج)* $\det\mathbf{A}^\dagger = (\det\mathbf{A})^*$.

۴. ۶* نشان دهید که دترمینان ماتریس هرمیتی حقیقی است.

۴. ۷ نشان دهید که دترمینان ماتریس پادمتقارن مرتبهٔ فرد صفر است، در حالی‌که دترمینان ماتریس پادهرمیتی مرتبهٔ فرد موهومی محض یا صفر است.

۴. ۸ همهٔ هم‌عاملهای دترمینانهای زیر را بیابید

(الف) $D = \begin{vmatrix} ۱ & x & x^۲ \\ x & x^۲ & ۱ \\ x^۲ & ۱ & x \end{vmatrix}$، (ب) $D = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & e^{-x} \\ \cos x & -\sin x & -e^{-x} \\ -\sin x & -\cos x & e^{-x} \end{vmatrix}$

و سپس، با استفاده از معادلهٔ (۶)، dD/dx را بیابید. همچنین دترمینانها را بسط دهید و dD/dx را به‌طور صریح محاسبه کنید. ثابت کنید که همان نتیجه را به‌دست می‌آورید.

۵

ماتریسهای خاص (۲)

دراین فصل، به تعداد بیشتری از ماتریسهای خاصی می‌پردازیم که اغلب در فیزیک با آنها روبه‌رو می‌شویم. قبل از آن، بهتر است که وارون ماتریس را تعریف کنیم.

۱.۵ ماتریس وارون

ماتریس $\mathbf{A}$ را ناتکین (وارون‌پذیر) می‌نامند، اگر ماتریس $\mathbf{B}$ای وجود داشته باشد که

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n, \qquad \mathbf{BA} = \mathbf{I}_m \tag{۱}$$

که $\mathbf{I}_n$ و $\mathbf{I}_m$ ماتریسهای یکه‌اند و لزوماً مرتبهٔ یکسانی ندارند. دراین‌صورت $\mathbf{A}$ را وارون $\mathbf{B}$ می‌نامند و برعکس. برای ماتریس معلوم $\mathbf{A}$، اگر ماتریس $\mathbf{B}$ای وجود نداشته باشد که در معادلات (۱) صدق کند، دراین‌صورت $\mathbf{A}$ وارون ندارد و $\mathbf{A}$ را تکین می‌نامند.

رابطهٔ $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ وارونی است، به‌طوری که اگر $\mathbf{B}$ وارون $\mathbf{A}$ باشد، $\mathbf{A}$ نیز وارون $\mathbf{B}$ است. ماتریس

وارون را با نماد $\mathbf{A}^{-۱}$ نشان می‌دهند، به‌طوری که، اگر معادلات (۱) برقرار باشند، داریم

$$\mathbf{A}^{-۱} \equiv \mathbf{B}, \qquad \mathbf{B}^{-۱} \equiv \mathbf{A} \tag{۲}$$

در پیوست II نشان می‌دهیم که ماتریس ناتکین با مرتبهٔ متناهی باید مربعی باشد، بنابراین وارون آن نیز مربعی است و $\mathbf{I}_n$ و $\mathbf{I}_m$ در معادلات (۱) هم‌مرتبه‌اند. علاوه‌براین، در این حالت، اولین معادلهٔ (۱) حاکی از معادلهٔ دوم است و برعکس، یعنی $\mathbf{AB} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{BA} = \mathbf{I}$، به‌طوری که هر یک از آنها برای تعریف ماتریس وارون کافی است. در این بخش، تنها به ماتریسهای متناهی می‌پردازیم.[1] حال دترمینان دو طرف معادلات (۱) را درنظر می‌گیریم، داریم

$$(\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B}) = ۱ \tag{۳}$$

اگر دترمینان هر یک از این ماتریسها صفر باشد، معادلهٔ (۳) نشان می‌دهد که دترمینان دیگری حتماً نامتناهی است، یعنی ماتریس دیگر وجود ندارد، در نتیجه ماتریس اولی تکین است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که دترمینان ماتریس تکین متناهی صفر است.

اگر $\mathbf{A}$ ماتریسی ناتکین باشد، می‌شود ماتریس $\mathbf{B}$ای را یافت که در معادلات (۱) صدق کند. مراحل یافتن وارون ماتریس ناتکین از این قرار است:

(الف) هم‌عامل هر جزء ماتریس $\mathbf{A}$ را به‌دست آورید و ماتریس هم‌عاملها را به‌صورت زیر بنویسید

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} A^{۱۱} & A^{۱۲} & \cdots & A^{۱n} \\ A^{۲۱} & A^{۲۲} & \cdots & A^{۲n} \\ \vdots & & & \\ A^{n۱} & A^{n۲} & \cdots & A^{nn} \end{bmatrix} \tag{۴}$$

---

۱. برای کسب آگاهی بیشتر از ماتریس نامتناهی، فصل ۱۴ را ببینید.

(ب) ترانهاد ماتریس هم‌عاملها را به‌دست آورید:

$$\tilde{\mathbf{A}}_c = \begin{bmatrix} A^{۱۱} & A^{۲۱} & \cdots & A^{n۱} \\ A^{۱۲} & A^{۲۲} & \cdots & A^{n۲} \\ \vdots & & & \\ A^{۱n} & A^{۲n} & \cdots & A^{nn} \end{bmatrix} \qquad (۵)$$

ماتریس بالا را الحاقی $\mathbf{A}$ می‌نامند.

(ج) برای به‌دست آوردن وارون $\mathbf{A}$، آن‌را بر دترمینان $\mathbf{A}$ تقسیم کنید:

$$\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}^{-۱} = \frac{\tilde{\mathbf{A}}_c}{\det \mathbf{A}} = \frac{۱}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A^{۱۱} & A^{۲۱} & \cdots & A^{n۱} \\ A^{۱۲} & A^{۲۲} & \cdots & A^{n۲} \\ \vdots & & & \\ A^{۱n} & A^{۲n} & \cdots & A^{nn} \end{bmatrix} \qquad (\text{۶الف})$$

و یا اینکه

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}_c = (\det \mathbf{A})\mathbf{I} \qquad (\text{۶ب})$$

حال ثابت می‌کنیم که ماتریس $\mathbf{B}$ای که از معادلهٔ (۶الف) به‌دست آمد، در رابطهٔ $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ صدق می‌کند. به‌این منظور، جزء ijام حاصلضرب $\mathbf{AB}$ را، با استفاده از معادلهٔ (۶الف) درنظر بگیرید، داریم

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})_{ij} &= \sum_{k=۱}^{n} (\mathbf{A})_{ik}(\mathbf{B})_{kj} = \frac{۱}{\det \mathbf{A}} \sum_{k=۱}^{n} a_{ik} A^{jk} \\ &= \delta_{ij} \quad ۱ \leq i,j \leq n \end{aligned} \qquad (۷)$$

که در مرحلهٔ آخر از نتیجهٔ معادلهٔ (۴۵) استفاده کرده‌ایم. معادلهٔ (۷) نشان می‌دهد که $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.

مثال ۱. وارون ماتریس زیر را، در صورت وجود، بیابید:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -۳ & ۱ & -۱ \\ ۱۵ & -۶ & ۵ \\ -۵ & ۲ & -۲ \end{bmatrix} \qquad (۸)$$

حل: دترمینان ماتریس فوق ۱− است. بنابراین ناتکین و دارای وارون است. ماتریس هم‌عاملها چنین یافت می‌شود

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \tag{۹}$$

برای به‌دست آوردن وارون $\mathbf{A}$، ترانهاد $\mathbf{A}_c$ را پیدا و حاصل را بر ۱− تقسیم می‌کنیم، می‌یابیم

$$\mathbf{A}^{-۱} = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۱ \\ -۵ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۳ \end{bmatrix} \tag{۱۰}$$

درستی نتیجهٔ بالا را می‌توان به‌طور صریح با ضرب ماتریسی اثبات کرد:

$$\mathbf{AA}^{-۱} = \mathbf{A}^{-۱}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \tag{۱۱}$$

با استفاده از معادلهٔ (۶الف) برای $\mathbf{B}$، همچنین می‌توان نشان داد که $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$. سپس، همراه با معادلات (۱)، داریم

$$\mathbf{AA}^{-۱} = \mathbf{A}^{-۱}\mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{۱۲}$$

بنابراین، هر ماتریسی با وارون خود جابه‌جا می‌شود.

وارون ماتریس، در صورت وجود، یکتاست. برای اثبات، فرض کنید برای ماتریس مفروض $\mathbf{A}$، دو ماتریس $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ وجود داشته باشند که در روابط زیر صدق کنند

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}, \mathbf{AC} = \mathbf{I} \tag{۱۳}$$

اگر $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ باشد، دیدیم که $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$. با ضرب کردن دومین معادلهٔ (۱۳) از سمت چپ در $\mathbf{B}$، داریم

$$\mathbf{BAC} = \mathbf{BI} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{B} \tag{۱۴}$$

که ادعای ما را ثابت می‌کند.

یک نتیجهٔ بسیار مهم را در مثال زیر ثابت می‌کنیم.

مثال ۲. نشان دهید که وارون حاصلضرب تعدادی ماتریس (همه مربعی و هم‌مرتبه)، که هیچ‌یک از آنها تکین نیست، برابر با حاصلضرب وارونهای آنها با ترتیب معکوس است.

حل: حالت خاصی از سه ماتریس ناتکین $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ را درنظر بگیرید. حال باید نشان دهیم که

$$(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \tag{۱۵}$$

اگر حاصلضرب دو ماتریس مربعی ماتریس یکه باشد، دو ماتریس را وارون یکدیگر می‌نامند. حاصلضرب ماتریس $\mathbf{ABC}$ را در ماتریس $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ به‌دست می‌آوریم، با استفاده از روابط $\mathbf{CC}^{-1} = \mathbf{I}$ و غیره، داریم

$$\mathbf{ABCC}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{ABB}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} \tag{۱۶}$$

که نشان می‌دهد $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ وارون $\mathbf{ABC}$ است. این روش را می‌توان به‌طور صریح به‌حاصلضرب تعدادی متناهی از ماتریسهای ناتکین تعمیم داد. به‌این ترتیب، داریم

$$(\mathbf{ABC}\ldots\mathbf{X})^{-1} = \mathbf{X}^{-1}\ldots\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \tag{۱۷}$$

مثال ۳. فرض کنید سه ماتریس $\mathbf{A}$، $\mathbf{I}-\mathbf{A}$، و $\mathbf{I}-\mathbf{A}^{-1}$ ناتکین باشند. نشان دهید که

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} + (\mathbf{I}-\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{I} \tag{۱۸}$$

حل: می‌توانیم بنویسیم $(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}-\mathbf{I})$ و به‌این ترتیب،

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{-1})^{-1} = [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}-\mathbf{I})]^{-1} = (\mathbf{A}-\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = -(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A} \tag{۱۹}$$

بنابراین

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-۱}+(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{-۱})^{-۱}=(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-۱}-(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-۱}\mathbf{A}$$
$$=(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-۱}(\mathbf{I}-\mathbf{A})=\mathbf{I} \qquad (۲۰)$$

۲.۵ تبدیل وارون

تبدیل خطی بردار $\mathbf{x}$ به $\mathbf{y}$ را، که هر دو هم‌بعدند، به‌صورت زیر درنظر بگیرید

$$y_i=\sum_{j=۱}^{n}a_{ij}x_j \qquad ۱\leq i\leq n \qquad (۲۱)$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x} \qquad (۲۲)$$

اگر ماتریس تبدیل $\mathbf{A}$ ناتکین باشد، می‌توان تبدیل بالا را وارون کرد و x_i را برحسب y_i بیان کرد.
اگر $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-۱}$ باشد، معادلهٔ (۲۲) را از سمت چپ در $\mathbf{B}$ ضرب می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{B}\mathbf{y}=\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{x} \qquad (۲۳)$$

اگر معادلهٔ بالا را برحسب مؤلفه‌ها بنویسیم، می‌شود

$$x_i=\sum_{j=۱}^{n}b_{ij}y_j \qquad ۱\leq i\leq n \qquad (۲۴)$$

که این نیز تبدیلی خطی است.

مثال ۴. وارون تبدیل خطی زیر را با یافتن وارون ماتریس تبدیل بیابید.

$$\begin{aligned}u&=-۲x-۲y+۷z\\ \nu&=۴x+۳y-۱۲z\\ w&=-x+۲z\end{aligned} \qquad (۲۵)$$

حل: معادلات (۲۵) را می‌توان با نماد ماتریسی به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{bmatrix}u\\ \nu\\ w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲&-۲&۷\\ ۴&۳&-۱۲\\ -۱&۰&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} \qquad (۲۶)$$

دترمینان ماتریس تبدیل بالا برابر با ۱ است و بنابراین تبدیل وارون وجود دارد. وارون ماتریس تبدیل بالا چنین یافت می‌شود

$$\begin{bmatrix} ۶ & ۴ & ۳ \\ ۴ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

در نتیجه، تبدیل وارون می‌شود

$$\begin{bmatrix} ۶ & ۴ & ۳ \\ ۴ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \nu \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad (۲۷)$$

یا

$$\begin{aligned} x &= ۶u + ۴\nu + ۳w \\ y &= ۴u + ۳\nu + ۴w \qquad (۲۸) \\ z &= ۳u + ۲\nu + ۲w \end{aligned}$$

۳.۵ ماتریس متعامد

به ماتریس $\mathbf{A}$یی که در روابط زیر صدق کند، ماتریس متعامد می‌گویند

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{I}_n \qquad (\text{۲۹الف})$$

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{I}_m \qquad (\text{۲۹ب})$$

بار دیگر می‌توان نشان داد که اگر $\mathbf{A}$ ماتریسی متناهی باشد که در هر دو معادلهٔ (۲۹) صدق کند، $\mathbf{A}$ حتماً مربعی است[1] و $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

فرض کنید $\det\mathbf{A} = d$ باشد. دترمینانهای دو طرف معادلهٔ (۲۹الف) را درنظر می‌گیریم، داریم $d^۲ = ۱ \Rightarrow d = \pm ۱$. این نشان می‌دهد که دترمینان ماتریس متعامد تنها برابر با ۱+ یا ۱− می‌شود.

---

۱. اگر $\mathbf{A}$ ماتریسی نامتناهی باشد، معادلات (۲۹الف) و (۲۹ب) مستقل از یکدیگرند و $\mathbf{A}$ متعامد است، اگر و تنها اگر هر دو معادلهٔ (۲۹) همزمان برقرار باشند.

ضمناً، نشان می‌دهد که $\mathbf{A}$ ناتکین است. پس $\mathbf{A}^{-1}$ وجود دارد. با ضرب کردن معادلهٔ (۲۹الف) از سمت راست در $\mathbf{A}^{-1}$، داریم

$$\mathbf{A}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}} \tag{۳۰}$$

این راه دیگری برای تعریف ماتریس متعامد است.

با مساوی قرار دادن جزء ijام دو طرف معادلهٔ (۲۹الف) می‌یابیم که

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij} \qquad 1 \leq i,j \leq n \tag{۳۱الف}$$

که n مرتبهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ و a_{ik} جزء ikام آن است. به همین ترتیب با مساوی قرار دادن جزء ijام دو طرف معادلهٔ (۲۹ب)، به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} \qquad 1 \leq i,j \leq n \tag{۳۱ب}$$

شرایط بالا برای اجزای هر ماتریس متعامدی صادق است. با وجود این، دو شرط معادلهٔ (۳۱الف) و (۳۱ب) برای ماتریس متناهی، ازیکدیگر مستقل نیستند، زیرا معادلات (۲۹الف) و (۲۹ب) خودشان از یکدیگر مستقل نیستند. اگر هریک از معادلات (۲۹الف) و (۲۹ب) معتبر باشد، دیگری نیز چنین است.

مثال ۵. نشان دهید که ماتریس زیر

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{۳۲}$$

متعامد است و وارون آن‌را به‌دست آورید.

حل: ترانهاد ماتریس مفروض می‌شود

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{۳۳}$$

با ضرب کردن این دو در یکدیگر، می‌یابیم:

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \tag{۳۴}$$

که ماتریسی یکه است و نشان می‌دهد $\mathbf{A}$ متعامد است. اکنون چون وارون هر ماتریس متعامد با ترانهاد آن برابر است، $\mathbf{A}^{-۱}$ از معادلهٔ (۳۳) به‌دست می‌آید.

اجزای ماتریس متعامد ممکن است حقیقی یا موهومی باشند. مثلاً براساس تعریف معادلات (۲۹)، $\begin{bmatrix} i & -\sqrt{۲} \\ \sqrt{۲} & i \end{bmatrix}$ ماتریسی متعامد است. با اینهمه، عملاً همیشه به ماتریسهای متعامد حقیقی می‌پردازیم و در این کتاب قرار می‌گذاریم که اصطلاح "ماتریس متعامد" به‌معنی ماتریس متعامد حقیقی است، مگر آنکه خلافش بیان شود.

با نگاهی به معادلهٔ (۳۱الف) می‌بینیم که به‌ازای i ثابت و $۱ \leq k \leq n$، a_{ik}ها اجزای سطر iام ماتریس $\mathbf{A}$یند. همین‌طور، به‌ازای j ثابت و $۱ \leq k \leq n$، a_{jk}ها اجزای سطر jام ماتریس $\mathbf{A}$ هستند. به‌عبارتی، معادلهٔ (۳۱الف) بدین معنی است که مجموع حاصلضربهای اجزای متناظر دو سطر متمایز یک ماتریس متعامد صفر است، در حالی‌که مجموع مربعات اجزای هر سطر برابر با واحد است. اگر n سطر ماتریسی را به‌صورت n بردار حقیقی درنظر بگیریم، بدین‌معنی است که این n بردار سطری متعامد و بهنجارند. به‌همین ترتیب، معادلهٔ (۳۱ب) نشان می‌دهد که ستونهای ماتریس متعامد مجموعه‌ای راست‌هنجار تشکیل می‌دهند.

۴.۵ اجزای مستقل ماتریس متعامد

به‌ازای $۱ \leq i, j \leq n$ معادلهٔ (۳۱الف) نمایندهٔ مجموعهٔ $n^۲$ معادله است، اما این $n^۲$ معادله مستقل از یکدیگر نیستند، زیرا اگر جای i و j را در معادلهٔ (۳۱الف) با یکدیگر عوض کنیم، به‌همان معادله می‌رسیم. بنابراین معادلات مستقل، از میان معادلهٔ (۳۱الف)، برای i و jهایی به‌دست می‌آید که در $۱ \leq i \leq j \leq n$ صدق کنند. تعداد این معادلات عبارت است از

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = n(n + ۱)/۲$$

پس $n^۲$ جزء ماتریس متعامد حقیقی به $n(n+۱)/۲$ شرط مقید می‌شوند. بنابراین، تعداد پارامترهای مستقل ماتریس متعامد $n^۲ - n(n+۱)/۲ = n(n-۱)/۲$ است. به‌عبارت دیگر، هر ماتریس متعامد حقیقی مرتبهٔ n را می‌توان با $n(n-۱)/۲$ پارامتر حقیقی مستقل کاملاً مشخص کرد.

به‌ازای $n = ۲$، تعداد پارامترهای مستقل یک می‌شود. مثال زیر به روشن شدن این مفاهیم کمک می‌کند.

مثال ۶. کلیترین شکل ماتریس متعامد مرتبهٔ ۲ را به‌دست آورید.

حل: با ماتریس دلخواه مرتبهٔ ۲ی زیر شروع می‌کنیم

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad (۳۵)$$

که a، b، c، d کمیتهای نرده‌ای حقیقی یا موهومی‌اند. برای اینکه این ماتریس متعامد باشد، اجزای آن باید در شرایط معادلهٔ (۳۱الف) صدق کنند، که نتیجه می‌دهد

$$a^۲ + b^۲ = ۱ \qquad (\text{۳۶الف})$$

$$c^۲ + d^۲ = ۱ \qquad (\text{۳۶ب})$$

$$ac + bd = ۰ \qquad (\text{۳۶ج})$$

جواب کلی معادلهٔ (۳۶الف) عبارت است از $a = \cos\theta$، $b = \sin\theta$ که θ حقیقی یا موهومی است. همین‌طور، اگر $c = \cos\phi$ و $d = \sin\phi$ برگزینیم، که ϕ کمیتی نرده‌ای است، دراین‌صورت معادلهٔ (۳۶ب) برقرار می‌شود. برای اینکه معادلهٔ (۳۶ج) صادق باشد، θ و ϕ باید با رابطهٔ زیر به یکدیگر مربوط شوند.

$$\cos(\theta - \phi) = ۰ \Rightarrow \theta\phi = \pm\frac{\pi}{۲} \qquad (۳۷)$$

در نتیجه، کلیترین شکل ماتریس متعامد مرتبهٔ ۲ می‌شود

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \mp\sin\theta & \pm\cos\theta \end{bmatrix} \qquad (۳۸)$$

با انتخاب علامتهای بالایی، کلیترین شکل ماتریس متعامد مرتبهٔ ۲ را با دترمینان ۱+ به‌دست می‌آوریم، در حالی‌که با انتخاب علامتهای پایینی کلیترین شکل ماتریس مرتبهٔ ۲ متعامد با دترمینان ۱− به‌دست می‌آید. همان‌طور که در بالا بحث شد، این ماتریس تنها یک پارامتر مستقل دارد. هر ماتریس متعامد مرتبهٔ ۲ را می‌توان به‌صورت معادلهٔ (۳۸) با یک مقدار دلخواه θ بیان کرد.

۵.۵ ماتریس یکانی

به‌ماتریس $\mathbf{U}$ای که در روابط زیر صدق کند، ماتریس یکانی می‌گویند.

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{I}_n \qquad \text{(۳۹الف)}$$

$$\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{I}_m \qquad \text{(۳۹ب)}$$

اگر $\mathbf{U}$ ماتریسی متناهی باشد که در هر دو معادلهٔ (۳۹) صدق کند، در نتیجه $\mathbf{U}$ حتماً مربعی است[۱] و داریم $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{I}$. اجزای ماتریس یکانی ممکن است موهومی باشند. در واقع، از معادلات (۳۹) روشن است که ماتریس یکانی حقیقی متعامد است.

فرض کنید $\det\mathbf{U} = d$ باشد، با درنظر گرفتن دترمینان دو سمت معادلهٔ (۳۹الف) و با توجه به اینکه $\det\mathbf{U}^\dagger = d^*$ است، داریم

$$dd^* = 1 \Rightarrow |d| = 1 \qquad \text{(۴۰)}$$

این نشان می‌دهد که دترمینان ماتریس یکانی ممکن است عددی مختلط با مقدار یک باشد، یعنی عددی به‌صورت $e^{i\theta}$، که θ عددی حقیقی است. همچنین، نشان می‌دهد که ماتریس یکانی ناتکین و دارای وارون است. با ضرب کردن معادلهٔ (۳۹الف) از سمت چپ در $\mathbf{U}^{-1}$، داریم

$$\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1} \qquad \text{(۴۱)}$$

با مساوی قرار دادن جزء ijام دو سمت معادلهٔ (۳۹الف) و از معادلهٔ (۳۹ب)، داریم

$$\sum_{k=1}^{n} u_{ik}u_{jk}^* = \delta_{ij}, \qquad \sum_{k=1}^{n} u_{ki}u_{kj}^* = \delta_{ij} \qquad 1 \le i,j \le n \qquad \text{(۴۲)}$$

---

۱. اما، اگر $\mathbf{U}$ ماتریسی نامتناهی باشد، معادلات (۳۹الف) و (۳۹ب) از یکدیگر نتیجه نمی‌شوند، در این حالت، $\mathbf{U}$ یکانی خواهد شد، اگر و تنها اگر دو معادلهٔ (۳۹) همزمان صادق باشند.

که u_{ik} جزء ikام $\mathbf{U}$ و n مرتبهٔ آن است. اینها شرایطی‌اند که اجزای ماتریس یکانی در آنها صدق می‌کنند. مانند ماتریس متعامد، مجموعه شرایط معادلات (۴۲) برای ماتریس متناهی مستقل از یکدیگر نیستند.

۶.۵ اجزای مستقل ماتریس یکانی

برای به‌دست آوردن تعداد پارامترهای مستقل حقیقی ماتریس یکانی، ابتدا توجه می‌کنیم که تعداد کل پارامترهای حقیقی $۲n^۲$ است، که n مرتبهٔ ماتریس است. علت ظاهر شدن عامل ۲ این است که هر جزء ممکن است مختلط باشد. با اینهمه، این پارامترها با معادلات (۴۲) به یکدیگر مربوط می‌شوند. بنابراین، باید تعداد شرطهای مستقل حقیقی را تعیین کنیم.

مانند قبل، جابه‌جایی i با j در معادلات (۴۲) بی‌تأثیر است. بنابراین، شرایط مستقل برای مقدارهایی از i و j به‌دست می‌آید که با $۱ \leq i \leq j \leq n$ داده شده‌اند. دو حالت $i = j$ و $i \neq j$ را جداگانه درنظر می‌گیریم و اولین معادله از معادلات (۴۲) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\sum_{k=۱}^{n} |u_{ik}|^۲ = ۱ \qquad ۱ \leq i \leq n \tag{۴۳الف}$$

$$\sum_{k=۱}^{n} u_{ik}u_{jk}^* = ۰ \qquad ۱ \leq i < j \leq n \tag{۴۳ب}$$

معادلهٔ (۴۳الف) معادله‌ای است که تنها اعداد حقیقی را در برمی‌گیرد و به‌ازای مقدارهای ۱ تا n برای i، دارای n شرط حقیقی است. از طرف دیگر، سمت چپ معادلهٔ (۴۳ب) کمیتهای مختلط را دربرمی‌گیرد و بنابراین، هر معادله هم‌ارز با دو شرط حقیقی است. تعداد معادلات در معادلهٔ (۴۳ب) برابر با $۱+۲+\cdots+(n-۱) = n(n-۱)/۲$ است. بنابراین معادلهٔ (۴۳ب) هم‌ارز با $n(n-۱)$ شرط حقیقی است. در نتیجه تعداد کل شرطهای حقیقی $n + n(n-۱) = n^۲$ می‌شود.

ماتریس یکانی مرتبهٔ n شامل $۲n^۲ - n^۲ = n^۲$ پارامتر مستقل حقیقی است.

مثال ۷. کلیترین شکل ماتریس یکانی مرتبهٔ ۲ را بیابید.

حل: ماتریس دلخواه مرتبهٔ ۲ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{۴۴}$$

که ممکن است a، b، c، و d کمیتهای نرده‌ای مختلط باشند. برای اینکه این ماتریس یکانی باشد، باید در شرط معادلهٔ (۳۹الف) صدق کند. یعنی

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa^* + bb^* & ac^* + bd^* \\ ca^* + db^* & cc^* + dd^* \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad (۴۵)$$

که به شرطهای زیر می‌انجامد

$$|a|^۲ + |b|^۲ = ۱, \quad |c|^۲ + |d|^۲ = ۱, \quad ac^* + bd^* = ۰ \qquad (۴۶)$$

همان‌طور که انتظار می‌رود، این معادلات با چهار شرط حقیقی هم‌ارزند. از اولین معادلهٔ (۴۶) می‌توان a و b را به‌صورت زیر برگزید

$$a = \cos\theta\ e^{i\alpha}, b = \sin\theta\ e^{i\gamma} \qquad (۴۷)$$

که θ، α، و γ اعداد حقیقی‌اند. با به‌کار بردن روابط فوق در سومین معادلهٔ (۴۶)، به‌دست می‌آوریم

$$c^*/d^* = -\sin\theta\ e^{i\gamma}/(\cos\theta e^{i\alpha}) \qquad (۴۸)$$

برای اینکه دومین معادلهٔ (۴۶) و معادلهٔ (۴۸) صادق باشد، می‌توانیم c و d را به‌صورت زیر انتخاب کنیم

$$c = -\sin\theta\ e^{i(\beta-\gamma)}, \quad d = \cos\theta\ e^{i(\beta-\alpha)} \quad \beta \text{ حقیقی} \qquad (۴۹)$$

به‌این ترتیب، کلیترین شکل ماتریس یکانی مرتبهٔ ۲ می‌شود

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos\theta\ e^{i\alpha} & \sin\theta\ e^{i\gamma} \\ -\sin\theta\ e^{i(\beta-\gamma)} & \cos\theta\ e^{i(\beta-\alpha)} \end{bmatrix} \qquad (۵۰)$$

که شامل چهار پارامتر مستقل حقیقی α، β، γ و θ است. دترمینان این ماتریس $e^{i\beta}$ می‌شود که عددی مختلط با قدرمطلق یک است.

این حکم که ماتریس بالا کلیترین شکل ماتریس یکانی مرتبهٔ ۲ است. بدین‌معنی است که (الف) برای هر مقدار حقیقی α، β، γ و θ ماتریس معادلهٔ (۵۰) یکانی است و برعکس، (ب) هر ماتریس یکانی مرتبهٔ ۲ را می‌توان با بعضی از مقدارهای حقیقی α، β، γ، و θ به‌صورت معادلهٔ (۵۰) بیان کرد.

۷.۵ تبدیلهای متعامد و یکانی

تبدیلی خطی را درنظر بگیرید که در آن ماتریس تبدیل مربعی باشد، به‌طوری که در معادلهٔ

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{۵۱}$$

$\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ بردارهای ستونی مرتبهٔ $n \times ۱$ هستند و $\mathbf{A}$ از مرتبهٔ $n \times n$ است. اگر ماتریس تبدیل $\mathbf{A}$ یکانی باشد، آن‌را تبدیل یکانی می‌نامند. با استفاده از معادلهٔ (۳۹ب) برای ماتریس یکانی و از معادلهٔ (۵۱)، داریم

$$\mathbf{y}^\dagger\mathbf{y} = \mathbf{x}^\dagger\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\dagger\mathbf{x} \tag{۵۲الف}$$

یا

$$\sum_{i=۱}^{n} y_i^* y_i = \sum_{i=۱}^{n} x_i^* x_i \tag{۵۲ب}$$

که نشان می‌دهد هنجار یک بردار تحت تبدیل یکانی ناورداست. از سوی دیگر، فرض کنید $\mathbf{A}$ تبدیلی خطی است که هنجار بردارهای فضای برداری را تغییر نمی‌دهد، یعنی

$$||\mathbf{x}|| = ||\mathbf{A}\mathbf{x}||$$

یا

$$\mathbf{x}^\dagger\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\dagger\mathbf{x} \tag{۵۳}$$

چون این رابطه باید برای هر بردار $\mathbf{x}$ متعلق به فضای برداری صادق باشد، نتیجه می‌گیریم $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{I}$ که نشان می‌دهد $\mathbf{A}$ یکانی است. بنابراین، یک تبدیل خطی (یا ماتریس) که روی فضای برداری عمل می‌کند یکانی است، اگر و تنها اگر هنجار هیچ برداری را در فضای برداری تغییر ندهد.

علاوه‌براین، اگر ماتریس تبدیل $\mathbf{A}$ حقیقی باشد، آن‌را تبدیل متعامد حقیقی می‌نامند. در این حالت، معادلات (۵۲) به‌صورت زیر خلاصه می‌شوند

$$\tilde{\mathbf{y}}\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{x} \qquad \text{(۵۴الف)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad \text{(۵۴ب)}$$

۸.۵ تبدیل بردارها و ماتریسها

پایهٔ $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ را در فضای برداری n بعدی درنظر بگیرید. بردارهای مجموعهٔ $\mathbf{e}$، لزوماً راست‌هنجار نیستند. اما مستقل خطی‌اند تا پایه‌ای برای فضای برداری باشند. فرض کنید $\mathbf{e}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ پایهٔ دیگری (یعنی، مجموعهٔ دیگری از n بردار مستقل خطی) در همان فضای برداری باشد. هر بردار مجموعهٔ $\mathbf{e}'$ را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از مجموعهٔ $\mathbf{e}$، این‌گونه بیان کرد

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\mathbf{e}_j \qquad 1 \leq i \leq n \qquad \text{(۵۵الف)}$$

که p_{ij}ها ضریب‌اند. معادلهٔ بالا را می‌توان به‌صورت ماتریسی زیر نوشت

$$\mathbf{e}' = \mathbf{P}\mathbf{e} \qquad \text{(۵۵ب)}$$

که $\mathbf{P}$ ماتریس مربعی مرتبهٔ n است که جزء ijام آن p_{ij} است. دراین‌صورت می‌گوییم $\mathbf{P}$ ماتریس تبدیل از پایهٔ $\mathbf{e}$ به‌پایهٔ $\mathbf{e}'$ است.

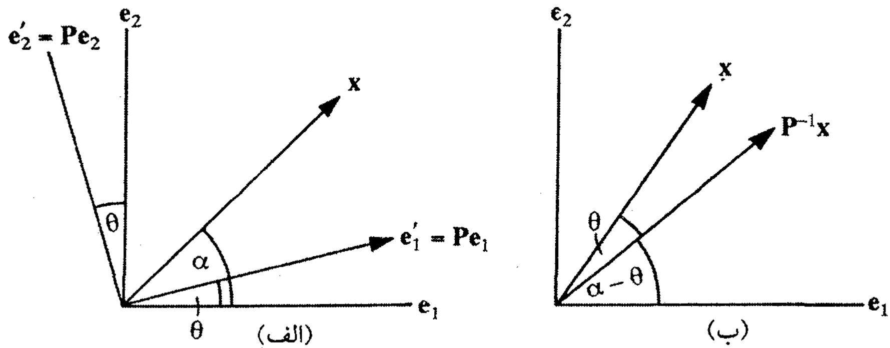
چون $\mathbf{e}'$ نیز پایه‌ای برای این فضای برداری است، بردارهای مجموعهٔ $\mathbf{e}$ را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی بردارهای مجموعهٔ $\mathbf{e}'$ بیان کرد. داریم

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}\mathbf{e}'_j \qquad 1 \leq i \leq n \qquad \text{(۵۶الف)}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{Q}\mathbf{e}' \qquad \text{(۵۶ب)}$$

با قرار دادن معادلهٔ (۵۵ب) در معادلهٔ (۵۶ب)، داریم

$$\mathbf{e} = \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{e} \qquad \text{(۵۷)}$$



شکل ۱.۵ تبدیل $\mathbf{P}$ روی بردارهای پایه در (الف) معادل است با تبدیل وارون $\mathbf{P}^{-1}$ روی بردار $\mathbf{x}$ و در (ب) $\mathbf{P}$ نمایانگر چرخش پادساعتگرد با زاویهٔ θ است، پس $\mathbf{P}^{-1}$ چرخش ساعتگرد با زاویهٔ θ می‌شود.

چون این رابطه باید برای هر پایهٔ $\mathbf{e}$ صادق باشد، داریم

$$\mathbf{QP} = \mathbf{I}, \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} \tag{۵۸}$$

که نشان می‌دهد وارون ماتریس $\mathbf{P}$ وجود دارد. از این مطلب نتیجه می‌گیریم که ماتریسی که یک مجموعه از بردارهای مستقل خطی را به مجموعهٔ دیگری از بردارهای مستقل خطی تبدیل کند (در همان فضای برداری) حتماً ناتکین است. به جزئیات بیشتر و اثبات دقیقتر آن در مثال ۶.۸ می‌پردازیم.

در شکل ۱.۵، اثر تبدیل را روی بردارها نشان داده‌ایم. در شکل ۱.۵(الف)، بردار یکسانی نسبت به پایهٔ $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ با $\mathbf{x}$ و نسبت به پایهٔ $\mathbf{e}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ با $\mathbf{x}'$ نشاندار شده است. شکل ۱.۵(ب) بردار $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$ را نسبت به پایهٔ $\mathbf{e}$ نشان می‌دهد، که $\mathbf{P}$ تبدیل $\mathbf{e}$ به $\mathbf{e}'$ است؛ معادلهٔ (۵۵ب). از این شکل روشن است که مؤلفه‌های بردار $\mathbf{x}'$ نسبت به $\mathbf{e}'$ مانند مؤلفه‌های بردار $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$ نسبت به $\mathbf{e}$ است. از این‌رو، داریم

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}' \tag{۵۹}$$

دو بردار $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ را نسبت به پایهٔ $\mathbf{e}$ درنظر بگیرید. فرض کنید همان بردارها را نسبت به پایهٔ $\mathbf{e}'$، به‌ترتیب با $\mathbf{x}'$ و $\mathbf{y}'$ نشان دهیم، به‌طوری که

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}' \qquad \mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{y}' \tag{۶۰}$$

فرض کنید خود $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ با تبدیل $\mathbf{A}$ در دستگاه مختصات $\mathbf{e}$ به یکدیگر مربوط شوند، به‌طوری که

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{۶۱}$$

می‌خواهیم ماتریس تبدیل بین بردارهای $\mathbf{x}'$ و $\mathbf{y}'$ را در دستگاه مختصات $\mathbf{e}'$ بیابیم. از معادلات (۶۰) و (۶۱)، داریم

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y}' \equiv \mathbf{B}\mathbf{y}' \tag{۶۲}$$

که ماتریس $\mathbf{B}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کند

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \tag{۶۳الف}$$

که نشان می‌دهد اگر $\mathbf{A}$ ماتریس تبدیل $\mathbf{y}$ به $\mathbf{x}$ در دستگاه مختصات $\mathbf{e}$ باشد، ماتریس تبدیل برای همان دو بردار در دستگاه مختصات $\mathbf{e}' = \mathbf{P}\mathbf{e}$ می‌شود $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

ماتریسهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ی معادلهٔ (۶۳الف) با تبدیل تشابهی به‌هم مربوط می‌شوند. این ماتریسها کار یکسانی را در فضای برداری یکسان روی بردارهایی از دستگاههای مختصات مختلف انجام می‌دهند. تبدیل وارون معادلهٔ (۶۳الف) عبارت است از

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1} \tag{۶۳ب}$$

که خود نیز تبدیلی تشابهی است.

معادلهٔ ماتریسی در قالب تبدیل تشابهی تغییر شکل نمی‌دهد. بنابراین معادله‌ای به‌صورت زیر را درنظر می‌گیریم

$$\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{E} = \mathbf{F} \tag{۶۴}$$

با ضرب کردن هر جمله از چپ در $\mathbf{P}^{-1}$ و از راست در $\mathbf{P}$، که $\mathbf{P}$ هر ماتریس ناتکین مناسب دلخواهی است، داریم

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{P} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{E}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{P} \tag{۶۵الف}$$

$$\mathbf{P}^{-۱}\mathbf{APP}^{-۱}\mathbf{BPP}^{-۱}\mathbf{CP} + \mathbf{P}^{-۱}\mathbf{DPP}^{-۱}\mathbf{EP} = \mathbf{P}^{-۱}\mathbf{FP} \qquad \text{(۶۵ب)}$$

این رابطه می‌شود

$$\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{C}' + \mathbf{D}'\mathbf{E}' = \mathbf{F}' \qquad \text{(۶۶)}$$

که هر ماتریس پریم‌دار با تبدیل تشابهی $\mathbf{P}$ به ماتریس بدون پریم متناظر مربوط می‌شود. روشن است که معادلهٔ (۶۶) همان صورت معادلهٔ (۶۴) را دارد. مزیت این شیوه این است که معادلهٔ ماتریسی مفروضی را می‌توان با تبدیل تشابهی به‌صورت ساده‌ای درآورد.

در حالت خاص، اگر ماتریس $\mathbf{P}$ که با آن تبدیل تشابهی انجام شد، یکانی باشد، آن‌را تبدیل یکانی می‌نامند. علاوه‌براین، اگر $\mathbf{P}$ ماتریس متعامد حقیقی باشد، به‌آن تبدیل متعامد می‌گویند. داریم

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-۱}\mathbf{AP}, \mathbf{P}^{-۱} = \mathbf{P}^{\dagger} : \text{تبدیل یکانی} \qquad \text{(۶۷الف)}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-۱}\mathbf{AP}, \mathbf{P}^{-۱} = \tilde{\mathbf{P}} : \text{تبدیل متعامد} \qquad \text{(۶۷ب)}$$

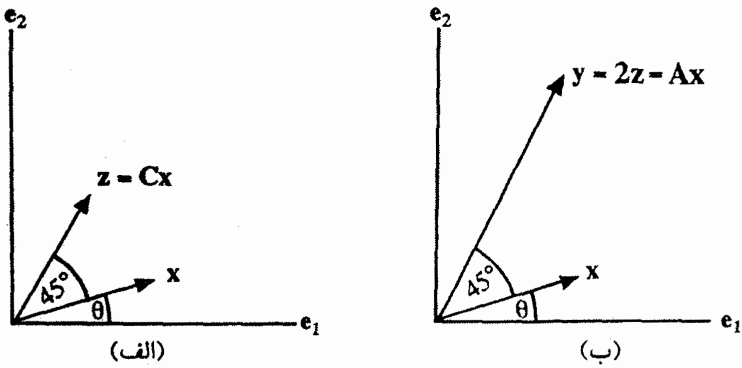
مثال ۸. ماتریس تبدیل $\mathbf{A}$ روی بردارهای دوبعدی را بیابید که آنها را ۴۵° بچرخاند و طولشان را دو برابر کند. نشان دهید که $\mathbf{A}^۴ = -۱۶\mathbf{I}$.

حل: دستگاه مختصات دکارتی دوبعدی انتخاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم $\mathbf{x} = \{x_۱, x_۲\}$ یک بردار باشد. $\mathbf{y} = \{y_۱, y_۲\}$ را برداری می‌گیریم که با $\mathbf{x}$ زاویهٔ ۴۵° می‌سازد و طول آن دو برابر طول $\mathbf{x}$ است. این تبدیل را در دو مرحله انجام می‌دهیم: ابتدا بردار را به اندازهٔ ۴۵° می‌چرخانیم و سپس طول آن‌را دو برابر می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\mathbf{C}$ نشانهٔ اولین عمل و $\mathbf{z} = \{z_۱, z_۲\} = \mathbf{Cx}$ باشد. فرض می‌کنیم $\mathbf{x}$ با بردار پایهٔ $\mathbf{e}_۱$ زاویهٔ θ بسازد (شکل ۲.۵). همچنین، $l = ||\mathbf{x}|| = ||\mathbf{z}||$ می‌گیریم. در نتیجه از شکل ۲.۵(الف)، داریم

$$x_۱ = l\cos\theta, \qquad x_۲ = l\sin\theta \qquad \text{(۶۸)}$$

$$z_۱ = l\cos(\theta + ۴۵^\circ) = (l\cos\theta - l\sin\theta)/\sqrt{۲} = (x_۱ - x_۲)/\sqrt{۲}$$

$$z_۲ = l\sin(\theta + ۴۵^\circ) = (l\sin\theta + l\cos\theta)/\sqrt{۲} = (x_۱ + x_۲)/\sqrt{۲} \qquad \text{(۶۹)}$$



شکل۲.۵ (الف) تبدیل $\mathbf{C}$ بردار $\mathbf{x}$ را به‌اندازهٔ $۴۵°$ می‌چرخاند که به $\mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ می‌انجامد. (ب) تبدیل $\mathbf{A}$، $\mathbf{x}$ را به‌اندازهٔ $۴۵°$ می‌چرخاند و طولش را دو برابر می‌کند و $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ را نتیجه می‌دهد.

بنابراین به‌صورت ماتریسی، داریم

$$\begin{bmatrix} z_۱ \\ z_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/\sqrt{۲} & -۱/\sqrt{۲} \\ ۱/\sqrt{۲} & ۱/\sqrt{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} \tag{۷۰}$$

پس

$$\mathbf{C} = (۱/\sqrt{۲}) \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \tag{۷۱}$$

تنها ماتریسی که طول یک بردار را دو برابر می‌کند $۲\mathbf{I}$ است. از این‌رو، ماتریس مطلوب عبارت است از

$$\mathbf{A} = ۲\mathbf{I}\mathbf{C} = \sqrt{۲} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \tag{۷۲}$$

می‌توان ثابت کرد که

$$\mathbf{A}^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & -۴ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^۴ = \begin{bmatrix} -۱۶ & ۰ \\ ۰ & -۱۶ \end{bmatrix} = -۱۶\mathbf{I} \tag{۷۳}$$

مثال ۹. فرض کنید V فضای برداری همهٔ چندجمله‌ایهای حقیقی از درجهٔ کمتر یا مساوی ۳ از یک متغیر باشد. [رک: تمرین ۱.۲۱، تا ببینید این به‌راستی یک فضای برداری است.] تبدیل خطی را با یک ماتریس نمایش دهید که به هر چندجمله‌ای $P(x)$ (الف) چندجمله‌ای $P(x+1)$ و (ب) مشتق آن $P'(x)$ را مربوط می‌کند.

حل: جزء کلی V را، با ضرایب متعلق به میدان R، می‌توان چنین نوشت

$$P(x) = a + bx + cx^{۲} + dx^{۳} \tag{۷۴}$$

همچنین می‌توان آن‌را با برداری ستونی با چهار مؤلفه به‌صورت زیر نشان داد

$$P(x) \equiv \{a \quad b \quad c \quad d\} \tag{۷۵}$$

(الف) چندجمله‌ای $P(x+۱)$ را این‌گونه می‌یابیم

$$\begin{aligned} P(x+۱) &= a + b(x+۱) + c(x+۱)^{۲} + d(x+۱)^{۳} \\ &= (a+b+c+d) + (b+۲c+۳d)x + (c+۳d)x^{۲} + dx^{۳} \\ &\equiv \{a+b+c+d \quad b+۲c+۳d \quad c+۳d \quad d\} \end{aligned} \tag{۷۶}$$

ماتریس تبدیل $P(x)$ به $P(x+۱)$ عبارت است از

$$\begin{bmatrix} a+b+c+d \\ b+۲c+۳d \\ c+۳d \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \tag{۷۷}$$

بنابراین، ماتریس تبدیل T در $P(x+۱) = TP(x)$ می‌شود:

$$T = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \tag{۷۸}$$

(ب) چون مشتق $P(x)$ معادلهٔ (۷۴) چنین یافت می‌شود

$$P'(x) = b + ۲cx + ۳dx^۲ \equiv \{b \quad ۲c \quad ۳d \quad ۰\} \qquad (۷۹)$$

ماتریس تبدیل S در $P'(x) = SP(x)$ می‌شود

$$S = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad (۸۰)$$

تمرین

۱.۵ وارون ماتریس $\mathbf{A}$ی معادلهٔ (۳۲) را به‌طور صریح پیدا کنید و ثابت کنید که همان نتیجهٔ معادلهٔ (۳۳) را به‌دست می‌آورید.

۲.۵ وارون هر یک از ماتریسهای زیر را پیدا کنید:

(الف) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۵ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$، *(ب) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۲ & -۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} ۹ & ۸ & ۷ \\ ۶ & ۵ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$، *(د) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۶ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

۳.۵ اگر $\mathbf{A}$ ماتریسی ناتکین باشد، نشان دهید که $\det(\mathbf{A}^{-۱}) = ۱/\det\mathbf{A}$.

۴.۵* اگر $\mathbf{AB} = ۰$ باشد، نشان دهید که یا $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ هر دو تکین‌اند یا یکی از آنها ماتریس صفر است.

۵.۵ وارون ماتریس زیر را بیابید.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{bmatrix}$$

و نشان دهید که برای همهٔ مقدارهای صحیح n (مثبت یا منفی)، داریم

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \cosh nx & \sinh nx \\ \sinh nx & \cosh nx \end{bmatrix}$$

۶.۵ اگر $\mathbf{AXB} = \mathbf{I}$ باشد، که مرتبهٔ هر چهار ماتریس n است. نشان دهید که سه ماتریس $\mathbf{A}$، $\mathbf{X}$، و $\mathbf{B}$ ناتکین‌اند و داریم $\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{BA}$.

۷.۵ نشان دهید که $[\mathbf{A}, \mathbf{B}^{-1}] = -\mathbf{B}^{-1}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{B}^{-1}$.

۸.۵ * شرطی را بیابید که با آن ماتریس زیر ناتکین باشد

$$\begin{bmatrix} q & p & p \\ p & q & p \\ p & p & q \end{bmatrix}$$

که در آن p و q دو عددند. نشان دهید که وارون این ماتریس، اگر وجود داشته باشد، ماتریسی به‌همین شکل است.

۹.۵ * اگر $\mathbf{P}$ ماتریسی ناتکین و $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ و $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP}$ قطری باشد، ثابت کنید که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند.

۱۰.۵ ثابت کنید که

(الف) $(\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1}$، (ب) $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\tilde{\mathbf{A}})^{-1}$، (ج) $(\mathbf{A}^{-1})^\dagger = (\mathbf{A}^\dagger)^{-1}$.

۱۱.۵ * اگر $\mathbf{A}$ با $\mathbf{B}$ جابه‌جا شود، نشان دهید که $\mathbf{A}$ با $\mathbf{B}^{-1}$ نیز جابه‌جا می‌شود.

۱۲.۵ نشان دهید که ماتریس زیر متعامد است

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta \end{bmatrix}$$

[این کلیترین شکل ماتریس متعامد مرتبهٔ ۳ با دترمینان ۱+ است؛ رک: معادلهٔ (۱۴.۱۰).]

۵.۱۳ * شرطی برای کمیتهای نرده‌ای حقیقی a و b بیابید که به‌ازای آن ماتریس زیر متعامد باشد:

$$\begin{bmatrix} a+b & b-a \\ a-b & a+b \end{bmatrix}$$

۵.۱۴ * اگر $\mathbf{x}$ بردار ستونی حقیقی غیرصفر باشد، نشان دهید که ماتریس $\mathbf{I} - (۲/\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{x})\mathbf{x}\tilde{\mathbf{x}}$ متعامد و متقارن است.

۵.۱۵ نشان دهید که ۶ ماتریس تمرین ۳.۹ متعامدند. وارون هر یک را به‌دست آورید و ثابت کنید که $\mathbf{D}^{-۱} = \mathbf{B}^{-۱}\mathbf{A}^{-۱}$

۵.۱۶ نشان دهید که هر ماتریس مثلثی یکانی قطعاً قطری است.

۵.۱۷ نشان دهید که هر ماتریس یکانی با مزدوج هرمیتی خود جابه‌جا می‌شود.

۵.۱۸ * اگر $\mathbf{H}$ ماتریسی هرمیتی باشد، نشان دهید که $\mathbf{U} = (\mathbf{H}-i\mathbf{I})(\mathbf{H}+i\mathbf{I})^{-۱}$ یکانی است.

۶

افراز ماتریس

به‌منظور جمع و ضرب ماتریسها، اغلب بهتر است که آنها را به بلوکهایی تقسیم کنیم، یا آنها را افراز کنیم. همان‌طور که در زیر می‌بینیم، این شیوه همچنین یافتن وارون ماتریسهای بزرگ را تسهیل می‌کند.

۱.۶ افراز ماتریس

ماتریس $\mathbf{A}$ از مرتبهٔ $m \times n$ با اجزای $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij}$ را درنظر بگیرید. این ماتریس را به چهار بلوک به‌صورت زیر افراز می‌کنیم

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_۱ & \mathbf{A}_۲ \\ \hline \mathbf{A}_۳ & \mathbf{A}_۴ \end{array}\right] \qquad (۱)$$

که $\mathbf{A}_۱$، $\mathbf{A}_۲$، $\mathbf{A}_۳$، و $\mathbf{A}_۴$ ماتریسهای مستطیلی‌اند و عبارت‌اند از:

$$\mathbf{A}_۱ = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & \cdots & a_{۱l} \\ \vdots & & \\ a_{k۱} & \cdots & a_{kl} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_۲ = \begin{bmatrix} a_{۱,l+۱} & \cdots & a_{۱n} \\ \vdots & & \\ a_{k,l+۱} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_۳ = \begin{bmatrix} a_{k+۱,۱} & \cdots & a_{k+۱,l} \\ \vdots & & \\ a_{m۱} & \cdots & a_{ml} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_۴ = \begin{bmatrix} a_{k+۱,l+۱} & \cdots & a_{k+۱,n} \\ \vdots & & \\ a_{m,l+۱} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{۲}$$

در اینجا، k و l اعداد صحیح دلخواهی‌اند، به‌نحوی که $۱ \leq k \leq m$ و $۱ \leq l \leq n$ است. حال فرض کنید $\mathbf{B}$ ماتریسی $m \times n$ با اجزای $(\mathbf{B})_{ij} = b_{ij}$ باشد و فرض کنید $\mathbf{B}$ را نیز همانند $\mathbf{A}$ به بلوکهایی تقسیم کنیم، یعنی

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_۱ & \mathbf{B}_۲ \\ \hdashline \mathbf{B}_۳ & \mathbf{B}_۴ \end{array}\right] \tag{۳}$$

که $\mathbf{B}_۱$ از مرتبهٔ $k \times l$، $\mathbf{B}_۲$ از مرتبهٔ $k \times (n-l)$، $\mathbf{B}_۳$ از مرتبهٔ $(m-k) \times l$ و $\mathbf{B}_۴$ از مرتبهٔ $(m-k) \times (n-l)$ است. می‌گوییم $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ یکسان افراز شده‌اند.

حال، به‌سادگی می‌بینیم که

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_۱+\mathbf{B}_۱ & \mathbf{A}_۲+\mathbf{B}_۲ \\ \hdashline \mathbf{A}_۳+\mathbf{B}_۳ & \mathbf{A}_۴+\mathbf{B}_۴ \end{array}\right] \tag{۴}$$

در حالت جمع ماتریسی، این روش نسبتاً ساده و تقریباً بدیهی است. علاوه‌براین، در اینجا افراز ماتریسها هیچ ساده‌سازی صورت نمی‌دهد. ولی خواهیم دید که این روش مسائلی را که دربرگیرندهٔ ضرب و وارون ماتریس است ساده می‌کند.

ماتریس $\mathbf{A}$ از مرتبهٔ $m \times n$ و $\mathbf{B}$ از مرتبهٔ $n \times p$ را درنظر بگیرید. فرض کنید هر دو ماتریس

را به بلوکهای مناسبی تقسیم کنیم. بنابراین، حاصلضربشان را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{AB}=\begin{matrix} k\{ \\ m-k\{ \end{matrix}\left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\mathbf{A}_1}^{l} & \overbrace{\mathbf{A}_2}^{n-l} \\ \hline \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\mathbf{B}_1}^{t} & \overbrace{\mathbf{B}_2}^{p-t} \\ \hline \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{array}\right]\begin{matrix} \}l \\ \}n-l \end{matrix}$$

$$=\begin{matrix} k\{ \\ m-k\{ \end{matrix}\left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_2\mathbf{B}_3}^{t} & \overbrace{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2+\mathbf{A}_2\mathbf{B}_4}^{p-t} \\ \hline \mathbf{A}_3\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_4\mathbf{B}_3 & \mathbf{A}_3\mathbf{B}_2+\mathbf{A}_4\mathbf{B}_4 \end{array}\right] \tag{۵}$$

لازم نیست ماتریس را تنها به چهار بلوک تقسیم کنیم؛ می‌توان آن‌را به هر تعداد بلوک تقسیم کرد. چند مثال از ضرب ماتریسی، با استفاده از افراز را در زیر آورده‌ایم.

(الف) فرض کنید $\mathbf{A}$ از مرتبهٔ $m \times n$ و $\mathbf{B}$ از مرتبه $n \times p$ باشد. بنابراین

$$\mathbf{AB}=\begin{matrix} r\{ \\ s\{ \\ t\{ \end{matrix}\left[\begin{array}{c} \overbrace{\mathbf{A}_1}^{n} \\ \hline \mathbf{A}_2 \\ \hline \mathbf{A}_3 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c|c} \overbrace{\mathbf{B}_1}^{q} & \overbrace{\mathbf{B}_2}^{l} & \overbrace{\mathbf{B}_3}^{i} \end{array}\right]$$

$$=\begin{matrix} r\{ \\ s\{ \\ t\{ \end{matrix}\left[\begin{array}{c|c|c} \overbrace{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1}^{q} & \overbrace{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2}^{l} & \overbrace{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_3}^{i} \\ \hline \mathbf{A}_2\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_3 \\ \hline \mathbf{A}_3\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_3\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 \end{array}\right] \tag{۶}$$

که $r+s+t=m$ و $q+l+i=p$ است.

(ب) همچنین برای ماتریس $\mathbf{AB}$، می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{AB}=\begin{array}{l}r\{\\ s\{\\ t\{\end{array}\left[\begin{array}{c}\overbrace{\mathbf{A}_1}^{n}\\ \hline \mathbf{A}_2\\ \hline \mathbf{A}_3\end{array}\right][\,\overbrace{\mathbf{B}_1}^{l}\quad\overbrace{\mathbf{B}_2}^{i}\,]=\begin{array}{l}r\{\\ s\{\\ t\{\end{array}\left[\begin{array}{c:c}\overbrace{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1}^{l} & \overbrace{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2}^{i}\\ \hdashline \mathbf{A}_2\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\\ \hdashline \mathbf{A}_3\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_3\mathbf{B}_2\end{array}\right] \qquad (۷)$$

که $r+s+t=m$ و $l+i=p$ است.

(ج) همچنین برای این ماتریس، می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{AB}=m\{[\,\overbrace{\mathbf{A}_1}^{r}\;\vdots\;\overbrace{\mathbf{A}_2}^{s}\;\vdots\;\overbrace{\mathbf{A}_3}^{t}\,]\left[\begin{array}{c}\mathbf{B}_1\\ \hdashline \mathbf{B}_2\\ \hdashline \mathbf{B}_3\end{array}\right]\begin{array}{l}\}r\\ \}s\\ \}t\end{array}=[\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2+\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3]_{m\times p} \qquad (۸)$$

که $r+s+t=n$ است.

سرانجام، کاربرد روش افراز ماتریسی را در یافتن وارون ماتریس مثال زیر بررسی می‌کنیم.

مثال ۱. فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریسی از مرتبهٔ $m\times m$، $\mathbf{B}$ از مرتبهٔ $m\times n$، $\mathbf{C}$ از مرتبهٔ $n\times m$ و $\mathbf{D}$ از مرتبهٔ $n\times n$ باشد. هر جا لازم است ماتریسها را ناتکین بگیرید، نشان دهید که

$$\left[\begin{array}{c:c}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \hdashline \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{c:c}(\mathbf{A}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})^{-1} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}-\mathbf{D})^{-1}\\ \hdashline \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C}-\mathbf{A})^{-1} & (\mathbf{D}-\mathbf{CA}^{-1}B)^{-1}\end{array}\right] \qquad (۹)$$

حل: برای اثبات، دقت می‌کنیم که ماتریس مفروض از مرتبهٔ $(m+n)\times(m+n)$ است.

فرض می‌کنیم که ماتریس وارون خواسته شده عبارت است از

$$\mathbf{Z}=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{P} & \mathbf{Q}\\ \hline \mathbf{R} & \mathbf{S}\end{array}\right] \qquad (۱۰)$$

که ماتریسی مربعی از مرتبهٔ $m+n$ است و همانند ماتریس مفروض افراز شده است. بنابراین، داریم

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{P} & \mathbf{Q}\\ \hline \mathbf{R} & \mathbf{S}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{I} & 0\\ \hline 0 & \mathbf{I}\end{array}\right]$$

یا

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{AP}+\mathbf{BR} & \mathbf{AQ}+\mathbf{BS}\\ \hline \mathbf{CP}+\mathbf{DR} & \mathbf{CQ}+\mathbf{DS}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{I} & 0\\ \hline 0 & \mathbf{I}\end{array}\right] \qquad (۱۱)$$

که به چهار معادلهٔ ماتریسی زیر می‌انجامد.

$$\mathbf{AP}+\mathbf{BR}=\mathbf{I}_m,\ \mathbf{CP}+\mathbf{DR}=0,\ \mathbf{AQ}+\mathbf{BS}=0,\ \mathbf{CQ}+\mathbf{DS}=\mathbf{I}_n \qquad (۱۲)$$

در حل این معادلات، برای یافتن ماتریسهای مجهول $\mathbf{P}$، $\mathbf{Q}$، $\mathbf{R}$، و $\mathbf{S}$، باید به‌یاد آوریم که $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ ماتریسهای مستطیلی‌اند و از این‌رو، وارون آنها تعریف نمی‌شود. از معادلهٔ دوم (۱۲)، داریم

$$\mathbf{R}=-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{CP} \qquad (۱۳)$$

با به‌کار بردن این نتیجه در اولین معادلهٔ (۱۲)، به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{AP}=\mathbf{I}_m-\mathbf{BR}=\mathbf{I}_m+\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{CP}\Rightarrow(\mathbf{A}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})\mathbf{P}=\mathbf{I}_m$$

بنابراین

$$\mathbf{P}=(\mathbf{A}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})^{-1} \qquad (۱۴\text{الف})$$

معادلهٔ فوق را در معادلهٔ (۱۳) قرار می‌دهیم، داریم

$$\mathbf{R} = -\mathbf{D}^{-۱}\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-۱}\mathbf{C})^{-۱} \qquad (\text{۱۴ب})$$

همین‌طور، سومین و چهارمین معادلهٔ (۱۲) را می‌توان برای یافتن $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{S}$ حل کرد:

$$\mathbf{S} = (\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-۱}\mathbf{B})^{-۱}, \mathbf{Q} = -\mathbf{A}^{-۱}\mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-۱}\mathbf{B})^{-۱} \qquad (\text{۱۴ج})$$

با به‌کار بردن اینها در معادلهٔ (۱۰)، به نتیجهٔ مطلوب معادلهٔ (۹) می‌رسیم. بنابراین، می‌بینیم که وارون یک ماتریس بزرگ را می‌توان از وارون ماتریسهای کوچکتر به‌دست آورد.

۲.۶ زیرماتریسها و رتبه

فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریسی $m \times n$ باشد. هر ماتریسی را که از حذف بعضی از سطرها یا ستونهای $\mathbf{A}$ به‌دست بیاید زیر ماتریس $\mathbf{A}$ می‌نامند. بنابراین، اگر

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۹ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ & ۳ \\ -۳ & -۶ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \qquad (۱۵)$$

باشد، بعضی از زیرماتریسهای آن از این قرارند:

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۹ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ -۳ & -۶ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳ & ۹ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ -۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۵ & ۹ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۳ \\ -۶ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ -۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳ & ۹ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۱ \\ ۰ & ۳ \\ -۶ & ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ -۳ \end{bmatrix}, [۳ \ \ ۵ \ \ ۱], \quad [۰ \ \ ۳], \quad [۹], \quad [-۶], \cdots$$

چنانچه ماتریسی را به تعدادی بلوک افراز کنیم، هر بلوک زیرماتریسی از ماتریس اصلی است.

اگر ماتریس $\mathbf{A}$ حداقل یک زیرماتریس ناتکین مربعی مرتبهٔ r داشته باشد، اما همهٔ زیرماتریسهای مربعی مرتبهٔ بزرگتر از r آن تکین باشد، r را رتبهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ می‌نامند. رتبهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ در معادلهٔ (۱۵) می‌شود ۳. زیرا زیرماتریسهای مربعی ناتکین مرتبهٔ ۳ دارد، اما بیشتر از ۳ ندارد.

مثال ۲. رتبهٔ ماتریس زیر را به‌دست آورید

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & -۴ \\ ۳ & -۱ & ۱ & ۲ \\ ۵ & -۱ & ۵ & -۶ \\ ۴ & -۱ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}$$

حل: ملاحظه می‌کنیم که دترمینان ماتریس مفروض صفر است، بنابراین رتبهٔ آن کمتر از ۴ است. حال، کلیهٔ زیرماتریسهای ممکن مرتبهٔ ۳ (۱۶ زیرماتریس) را درنظر می‌گیریم و مشاهده می‌کنیم که همهٔ آنها تکین نیز هستند. بنابراین، رتبه کمتر از ۳ است. در پایان، می‌بینیم که ماتریس مفروض زیرماتریسهای مرتبهٔ ۲ی ناتکین دارد. در نتیجه رتبهٔ آن ۲ است.

بدیهی است که شیوهٔ فوق طولانی و خسته‌کننده است. در مثال بالا، دترمینان ماتریس مرتبهٔ ۴ و ۱۶ ماتریس مرتبهٔ ۳ را پیدا کنیم، پیش از آنکه رتبه را به‌دست آوریم. دربارهٔ روشی ساده‌تر و بهتر در مثال ۷.۸ بحث می‌کنیم.

چون دترمینان ماتریس بر اثر ترانهش تغییر نمی‌کند، نتیجه می‌گیریم که رتبهٔ ترانهاد یک ماتریس همان رتبهٔ ماتریس اصلی است.

تمرین

۶.۱ * وارون ماتریس زیر را، که به بلوکهایی که می‌بینید افرازکرده‌ایم، با استفاده از نتیجهٔ معادلهٔ (۹) به‌دست آورید

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ \hline ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \end{array}\right]$$

۶.۲ اگر $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، $\mathbf{C}$، و $\mathbf{D}$ ماتریسهای مربعی ناتکین مرتبهٔ n باشند، نشان دهید که

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{D}^{-۱}\mathbf{C})^{-۱} & (\mathbf{C}-\mathbf{D}\mathbf{B}^{-۱}\mathbf{A})^{-۱} \\ (\mathbf{B}-\mathbf{A}\mathbf{C}^{-۱}\mathbf{D})^{-۱} & (\mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-۱}\mathbf{B})^{-۱} \end{bmatrix}$$

با فرض اینکه ماتریس بزرگ نیز ناتکین است.

۶.۳ اگر $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ ماتریسهای یکانی مرتبهٔ n باشند که با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند، نشان دهید که

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} \mathbf{U} & -\mathbf{V} \\ \mathbf{V}^\dagger & \mathbf{U}^\dagger \end{bmatrix}$$

ماتریسی یکانی است.

۶.۴ ماتریسی را به‌صورت زیر افراز کرده‌ایم

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

مزدوج مختلط، ترانهاد و مزدوج هرمیتی آن‌را بنویسید.

۶.۵ فرض کنید

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{۰} \\ \mathbf{X} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

که $\mathbf{A}$ از مرتبهٔ $m \times m$، $\mathbf{B}$ از مرتبهٔ $n \times n$، $\mathbf{X}$ از مرتبهٔ $n \times m$ و $\mathbf{۰}$ ماتریس صفر از مرتبهٔ $m \times n$ است. اگر $\mathbf{M}$ یکانی باشد، نشان دهید که $\mathbf{X}$ ماتریس صفر است و $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ یکانی‌اند.

۶.۶ رتبهٔ هر یک از ماتریسهای زیر را بیابید:

(الف)* $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۴ \\ ۳ & ۶ & -۱ \end{bmatrix}$؛ (ب) $\begin{bmatrix} ۶ & ۴ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۳ \\ ۸ & -۸ & ۰ \\ ۳ & -۳ & ۲ \end{bmatrix}$؛ (ج)* $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۳ & ۱ \\ ۵ & ۳ & ۲ & -۱ \\ ۹ & ۴ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}$

۷.۶ هر ماتریس هرمیتی را می‌توان به‌صورت مجموع یک ماتریس متقارن حقیقی $\mathbf{S}$ و i برابر یک ماتریس پادمتقارن $\mathbf{A}$ نوشت. یعنی، $\mathbf{H} = \mathbf{S} + i\mathbf{A}$ (تمرین ۲۱.۳). ماتریس

$$\mathbf{R} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{S} & -\mathbf{A} \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{S} \end{array}\right]$$

را با اندازه‌ای دو برابر $\mathbf{H}$ تشکیل دهید. نشان دهید که $\mathbf{R}$ ماتریسی متقارن است.

۷

دستگاه معادلات خطی ـ حالتهای خاص

ثابت می‌کنیم که روشهای جبر ماتریسی در حل دستگاه معادلات خطی چندمجهولی بسیار مفید است. فرض کنید x_1، x_2، . . .، x_n مجموعه‌ای از n متغیر یا پارامتر باشد. معادله‌ای را که شامل توان بیشتر از یک x_i یا حاصلضرب x_iها در یکدیگر نیست و ضرایب ثابت (یعنی، مستقل از x_i) دارد، معادلهٔ خطی با متغیر x_i می‌نامیم. هدف ما مطالعهٔ کلیترین شکل دستگاه m معادلهٔ خطی n مجهولی است که آن‌را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
\qquad (1)
$$

در اینجا ضرایب a_{ij} و جملات b_i سمت راست را ثابتهای معلوم فرض می‌کنیم. x_iها متغیرهای مجهول‌اند و می‌خواهیم تعداد جوابهای آنها را که در معادلات (۱) صدق می‌کنند، تعیین کنیم. این

مسئلهٔ کلی را در فصل بعد دنبال می‌کنیم. این فصل شامل بحثی مقدماتی است که به این مسئلهٔ کلی می‌انجامد و نیز چند تعریف پایه‌ای و تعدادی مثال.

بدیهی است که معادلات (۱) را می‌توانیم به‌صورت ماتریسی زیر بنویسیم

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{۲}$$

که $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]_{m\times n}$، $\mathbf{x} \equiv [x_i]_{n\times 1}$ و $\mathbf{b} \equiv [b_i]_{m\times 1}$ است. توجه کنید که $\mathbf{x}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار ستونی به‌ترتیب از مرتبهٔ n و mاند. حال، اگر $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ باشد (یعنی، به‌ازای $1 \leq i \leq m$، $b_i = 0$)، این معادلات را مجموعه معادلات همگن می‌نامند. اگر $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ باشد (حالتی است که در آن حتی یک b_i غیرصفر وجود دارد)، آن‌را مجموعه معادلات ناهمگن می‌نامند. روشن است که اگر $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ باشد، دستگاه یک جواب $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ دارد (یعنی، $1 \leq i \leq n$، $x_i = 0$) که به جواب بدیهی معروف است. معادلهٔ زیر را معادلهٔ همگن وابسته می‌نامند.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \tag{۳}$$

۱.۷ معادلات خطی یک‌مجهولی

ابتدا، ساده‌ترین حالت، یعنی یک معادلهٔ یک‌مجهولی را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم

$$ax = b \tag{۴}$$

حال می‌پرسیم: جواب احتمالی این معادله چیست؟ یک جواب مقدماتی مدرسه‌ای عبارت است از $x = b/a$. اما، کسی که این کتاب را می‌خواند، آنقدر هم مبتدی نیست، زیرا بدیهی است که اگر $a = 0$ باشد، جواب ساده رد می‌شود. دربارهٔ جواب کامل در زیر بحث می‌کنیم.

حالت (۱): $a \neq 0$. با تقسیم معادلهٔ (۴) بر a، داریم $x = b/a$. دو حالت فرعی داریم؛ حالت (۱الف): $b = 0$، $x = 0$ که این جواب بدیهی است؛ حالت (۱ب): $b \neq 0$، $x = b/a \neq 0$.

حالت (۲): $a = 0$. بار دیگر دو حالت فرعی داریم، حالت (۲الف): $b \neq 0$، x جواب ندارد. حالت (۲ب): $b = 0$، x هر مقدار متناهی می‌تواند بگیرد، یعنی تعداد جوابهای x نامتناهی است که جواب بدیهی $x = 0$ نیز یکی از آنهاست.

از مثال سادهٔ بالا نتایج مهم زیر را به‌دست می‌آوریم:

۱ـ در حالت (۱)، جواب یکتاست.

۲ـ در حالت (۱الف)، تنها جواب، جواب بدیهی $x = ۰$ است.

۳ـ در حالت (۲الف)، جوابی وجود ندارد. در حالی‌که در حالت (۲ب) تعداد جوابها نامتناهی است.

۴ـ در حالتی که معادله همگن است [$b = ۰$؛ حالتهای (۱الف) و (۲ب)]، یک جواب غیرصفر وجود دارد، اگر و تنها اگر $a = ۰$ باشد.

حال، دستگاهی را درنظر بگیرید که شامل چند معادلهٔ یک مجهولی به‌صورت زیر باشد

$$a_۱x = b_۱, a_۲x = b_۲, \ldots , a_m x = b_m \tag{۵}$$

اگر تنها یک a_i صفر باشد و b_i متناظرش غیرصفر باشد، نتیجه می‌گیریم که دستگاه جواب ندارد. بنابراین، فرض کنید که $۱ \le i \le m$ ،$a_i \neq ۰$ باشد. آنگاه دستگاه معادلات (۵) جواب دارد، اگر و تنها اگر $b_۱/a_۱ = b_۲/a_۲ = \cdots = b_m/a_m$. به‌عبارت دیگر، یکی از معادلات دستگاه را حل می‌کنیم. اگر این جواب در معادلات دیگر دستگاه صدق کند، دستگاه جواب دارد. در غیر این‌صورت جواب ندارد.

۲.۷ معادلات خطی دومجهولی

دو معادلهٔ خطی دومجهولی زیر را درنظر بگیرید

$$\begin{aligned} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ &= b_۱ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ &= b_۲ \end{aligned} \tag{۶}$$

چند حالت داریم:

حالت (۱): $$\det\mathbf{A} \equiv \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix} = a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}a_{۲۱} \neq ۰$$

داریم

$$\mathbf{A}^{-۱} = (۱/\det\mathbf{A}) \begin{bmatrix} a_{۲۲} & -a_{۱۲} \\ -a_{۲۱} & a_{۱۱} \end{bmatrix}$$

بنابراین جواب یکتا می‌شود $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$، یا

$$x_1 = (b_1 a_{22} - b_2 a_{12})/\det\mathbf{A}$$
$$x_2 = (-b_1 a_{21} + b_2 a_{11})/\det\mathbf{A} \qquad (8)$$

به دو حالت فرعی می‌رسیم:

حالت (۱الف): $\mathbf{b} = 0$ (یعنی، $b_1 = b_2 = 0$)؛ معادلات همگن. تنها جواب، جواب بدیهی $x_1 = x_2 = 0$ است.

حالت (۱ب): $\mathbf{b} \neq 0$ (یعنی، حداقل یکی از دو عدد b_1 و b_2 غیرصفر است)؛ معادلات ناهمگن. دستگاه جواب یکتای غیرصفر دارد که با معادلات (۸) داده شده است.

حالت (۲): $\det\mathbf{A} = 0$، یا

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \qquad (9)$$

اولین معادلهٔ (۶) را برای پیدا کردن x_2، با فرض[1] $a_{12} \neq 0$، حل می‌کنیم، نتیجه می‌گیریم

$$x_2 = (b_1 - a_{11}x_1)/a_{12} \qquad (10)$$

با استفاده از این معادله، و بنابر معادلهٔ (۹)، سمت چپ دومین معادلهٔ (۶) می‌شود

$$a_{21}x_1 + a_{22}(b_1 - a_{11}x_1)/a_{12} = a_{22}b_1/a_{12} \qquad (11)$$

بنابراین، برای اینکه دریابیم معادلات (۶) جواب دارند یا خیر، باید ببینیم که $a_{22}b_1/a_{12}$ برابر b_2 است یا خیر. اکنون به سه حالت فرعی می‌رسیم:

حالت (۲الف): $\mathbf{b} \neq 0$ و داریم $b_2 = a_{22}b_1/a_{12}$. این نتیجه به همراه معادلهٔ (۹) نشان می‌دهد

$$a_{21}/a_{11} = a_{22}/a_{12} = b_2/b_1 \qquad (12)$$

---

۱. اگر $a_{12} = 0$ باشد، معادلهٔ (۹) نشان می‌دهد که یا $a_{11} = 0$ است یا $a_{22} = 0$. در حالت اول، اولین معادلهٔ (۶) می‌شود $0x_1 + 0x_2 = b_1$ که اگر $b_1 = 0$ باشد، x_1 و x_2 جوابهای دلخواه دارند و اگر $b_1 \neq 0$ باشد، جواب ندارد. در حالت دوم، معادلات (۶) تنها شامل یک مجهول است، نه دو مجهول.

که نشان می‌دهد دومین معادلهٔ (۶) تنها مضربی از اولین معادله است و بنابراین اگر یکی از آنها صادق باشد، دیگری نیز صادق است. از این‌رو کافی است که یکی از آنها را حل کنیم، مثلاً از حل معادلهٔ اول، داریم

$$x_۲ = (b_۱ - a_{۱۱}x_۱)/a_{۱۲} \qquad x_۱ \text{ دلخواه} \tag{۱۳}$$

پس تعداد جوابهای آن نامتناهی است.

حالت (۲ب): $\mathbf{b} \neq ۰$ و داریم $a_{۲۲}b_۱/a_{۱۲} \neq b_۲$. در این حالت، معادلات (۶) جواب ندارند.

حالت (۲ج): $b = ۰$. در این حالت، معادلهٔ $a_{۲۲}b_۱/a_{۱۲} = b_۲$ عیناً صادق است و از این‌رو، دگر بار تعداد جوابهای معادلات (۶) نامتناهی است که عبارت‌اند از:

$$x_۲ = -a_{۱۱}x_۱/a_{۱۲} \qquad x_۱ \text{ دلخواه} \tag{۱۴}$$

۳.۷ تعبیر هندسی

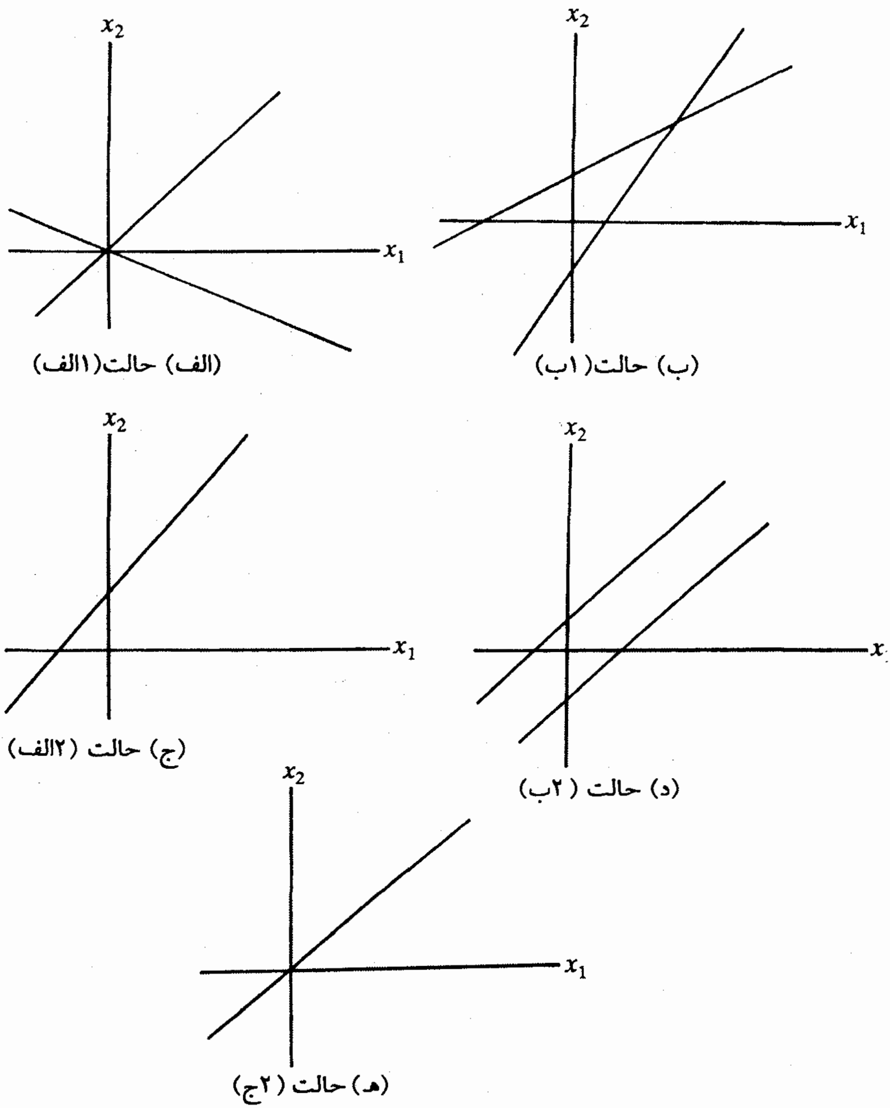
آنچه تاکنون انجام داده‌ایم، تعبیری ساده و ظریف در هندسهٔ تحلیلی دارد. اگر $x_۱$ و $x_۲$ را مختصات دکارتی صفحه‌ای دوبعدی درنظر بگیریم، معادلهٔ خطی شامل $x_۱$ و $x_۲$ نمایانگر خط راستی در صفحه است. بنابراین مسئلهٔ حل معادلات (۶) هم‌ارز با یافتن نقطه (نقاط) تقاطع دو خط است. ملاحظه می‌کنیم که شیب این خط را نسبت ضرایب $x_۱$ و $x_۲$ تعیین می‌کند و نقطهٔ تقاطع آن‌را با محور $x_۲$ نسبت جملهٔ ناهمگن b_i به ضریب $x_۲$ تعیین می‌کند.

دو خط معادلات (۶) موازی خواهند شد، اگر

$$a_{۱۱}/a_{۱۲} = a_{۲۱}/a_{۲۲} \Rightarrow a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}a_{۲۱} \equiv \det\mathbf{A} = ۰ \tag{۱۵}$$

برعکس، اگر $\det\mathbf{A} = ۰$ باشد، این دو خط موازی می‌شوند. اگر $a_{۲۲}/a_{۱۲} \neq b_۲/b_۱$ باشد، این دو خط موازی متمایز می‌شوند، در این حالت هیچ نقطهٔ اشتراکی وجود ندارد، یعنی دستگاه جواب ندارد. اگر $a_{۲۲}/a_{۱۲} = b_۲/b_۱$ باشد، دو خط موازی یکی می‌شوند، در این حالت تعداد نقاط مشترک دو خط، یعنی تعداد جوابها نامتناهی است. از طرف دیگر، اگر $\det\mathbf{A} \neq ۰$ باشد، دو خط شیبهای متفاوت و در نتیجه یک و تنها یک نقطهٔ تقاطع دارند، یعنی جواب یکتاست. توجه کنید که

اگر بخش ناهمگن معادله‌ای صفر باشد، خط متناظر آن از مبدأ عبور می‌کند. پنج حالت فرعی احتمالی را که پیشتر دربارهٔ آن بحث کردیم، به‌صورت هندسی در شکل ۱.۷ نشان داده‌ایم.



شکل۱.۷ جوابهای معادلات (۶)، در (الف) و (ب) تنها یک جواب وجود دارد. در (ج) و (هـ) تعداد جوابها نامتناهی است و در (د) جواب وجود ندارد.

اکنون، سه معادلهٔ خطی دومجهولی، یعنی دستگاه زیر را درنظر می‌گیریم

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &= b_3
\end{aligned}
\tag{16}
$$

برای سادگی، همزمان هر دو تعبیر جبری و هندسی را ارائه می‌کنیم. دستگاه مفروض یک جواب دارد، اگر و تنها اگر سه خط معادلهٔ (۱۶) یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند. حال، معلوم است که دترمینان زیر

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \tag{17}
$$

متناسب است با مساحت مثلثی که این سه خط ایجاد می‌کنند، به‌شرط اینکه هیچ دوخطی از این سه خط موازی نباشد. در این حالت هر سه خط یکدیگر را در نقطهٔ مشترکی قطع می‌کنند، اگر و تنها اگر $D = 0$ باشد. از عکس نتیجهٔ ۲ی مثال ۶.۸ در بخش ۴.۸، نتیجه می‌گیریم که اگر $D = 0$ باشد، حداقل یکی از سطرها را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی دو سطر باقیمانده بیان کرد. این بدین معنی است که مثلاً ضرایب سومین معادلهٔ (۱۶) را می‌توانیم به‌صورت ترکیبی خطی از دو معادلهٔ اول، این‌گونه بیان کنیم

$$
a_{31} = ca_{11} + da_{21}, a_{32} = ca_{12} + da_{22}, b_3 = cb_1 + db_2 \tag{18}
$$

که c و d کمیتهای نرده‌ای‌اند. مفهوم وابستگی خطی را از بردارها می‌گیریم، می‌گوییم در این حالت، سه معادله وابستهٔ خطی‌اند. اگر هر دو معادلهٔ دلخواهی صادق باشد، سومی هم عیناً صادق است.

صفر شدن دترمینان D به تنهایی دلیل وجود جواب نیست. علاوه‌برآن، لازم است که هیچ دوخطی با یکدیگر موازی نباشد. مثلاً حالتی را درنظر بگیرید که معادلات (۱۶) نمایانگر سه خط راست موازی باشند. در این حالت، ستون دوم D مضربی از اولی است و داریم $D = 0$. اما سه خط موازی هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند و از این‌رو، جوابی وجود نخواهد داشت. اما، عکس این

حکم را می‌توان با اطمینان بیان کرد که اگر $D \neq ۰$ باشد، جوابی وجود ندارد. حالت نهایی این است که سه معادلهٔ (۱۶) مضربی از یکدیگر باشند. در این حالت، هر سه معادله نمایانگر یک خط راست است و تعداد جوابها نامتناهی است. بعضی از حالاتی را که از سه معادلهٔ دومجهولی ناشی می‌شوند، در شکل ۲.۷ به‌طور هندسی نشان داده‌ایم. این نتایج را به‌صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

۱ـ اگر $D \neq ۰$ باشد، دستگاه جواب ندارد.

۲ـ اگر سه معادله نمایانگر یک خط باشد، داریم $D = ۰$ و تعداد جوابها نامتناهی است.

۳ـ اگر $D = ۰$ باشد و هر سه معادله نمایانگر یک خط راست نباشد، یک و تنها یک جواب وجود دارد، مشروط بر اینکه هیچ دوخطی از آنها موازی نباشد و اگر هر دو خطی از آنها موازی باشد، جوابی وجود ندارد.

بدیهی است که این روش را می‌توان به هر تعداد معادلهٔ دومجهولی تعمیم داد.

۴.۷ معادلات خطی سه‌مجهولی

حال که تجربهٔ کافی دربارهٔ معادلات یک و دومجهولی پیدا کرده‌ایم، تعبیر هندسی معادلات خطی سه‌مجهولی را به اختصار بیان می‌کنیم و جزئیات عملیات جبری آن‌را در حالت کلی در فصل بعد دنبال می‌کنیم.

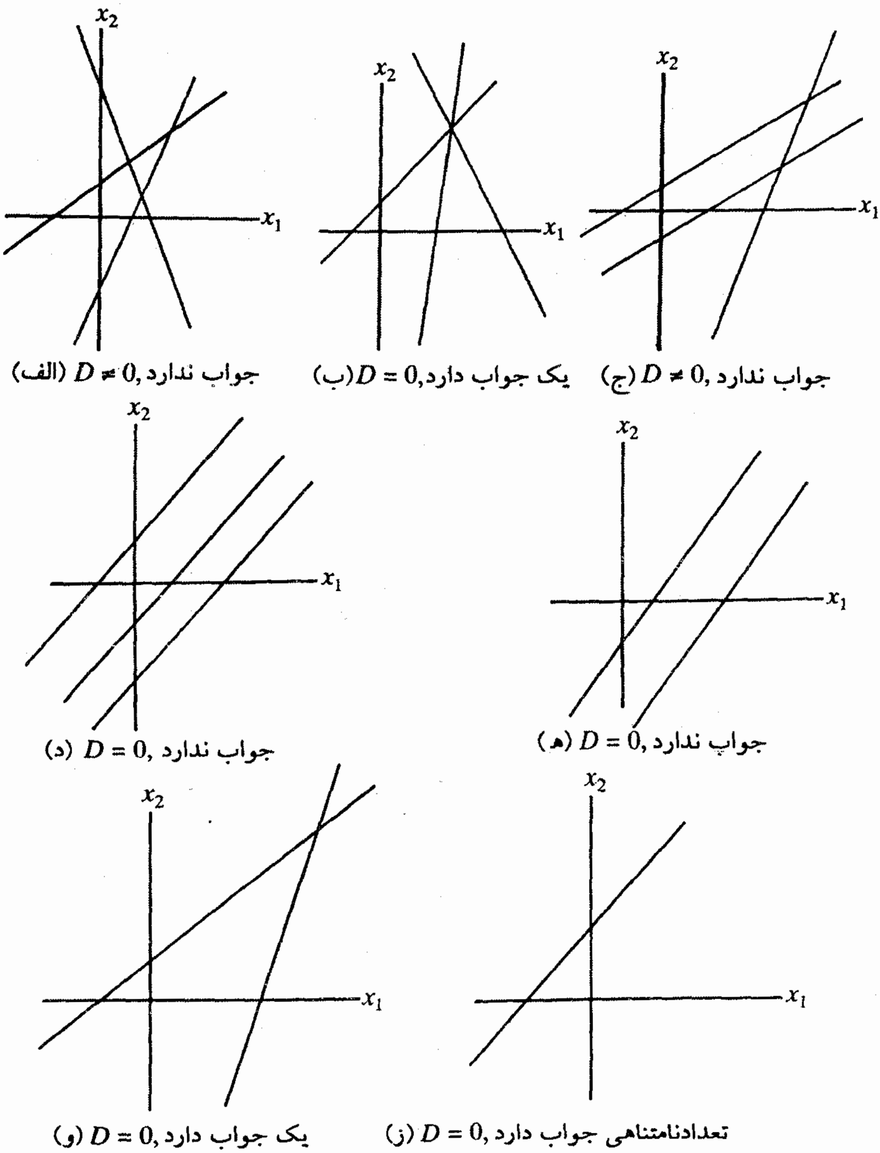
معادلات خطی سه‌متغیره را درنظر بگیرید. اگر $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ را مختصات دکارتی در فضای برداری سه‌بعدی بگیریم، هر معادلهٔ خطی به‌صورت

$$a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + a_{۱۳}x_۳ = b_۱ \qquad (۱۹)$$

یک صفحه (یا یک زیرفضای دوبعدی) را نشان می‌دهد. اگر بخش ناهمگن $b_۱$ صفر باشد، صفحه از مبدأ مختصات می‌گذرد. اگر بخواهیم تک‌معادله‌ای مانند بالا را حل کنیم، تعداد جوابها نامتناهی می‌شود، زیرا مختصات هر نقطهٔ صفحه در معادله صدق می‌کند. جواب را به‌طور جبری می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$x_۳ = (b_۱ - a_{۱۱}x_۱ - a_{۱۲}x_۲)/a_{۱۳} \qquad a_{۱۳} \neq ۰ \text{ و } x_۱\text{، } x_۲ \text{ دلخواه} \qquad (۲۰)$$

بنابراین جوابی با اختیار دوگانه وجود دارد.



شکل۲.۷ جواب سه معادلهٔ دومجهولی: (الف) سه خط دلخواه، هیچ دوتایی از آنها موازی نیست؛ (ب) سه خط همرس؛ (ج) دو خط موازی، سومی آنها را قطع می‌کند؛ (د) سه خط موازی؛ (هـ) دو معادله نمایانگر یک خط است، خط سوم با آن موازی است؛ (و) دو معادله نمایانگر یک خط است، خط سوم آن‌را قطع می‌کند؛ (ز) هر سه معادله نمایانگر یک خط راست است.

اکنون دو معادلهٔ سه‌متغیرهٔ زیر را درنظر بگیرید

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \end{aligned} \tag{۲۱}$$

هر یک از این دو معادله نمایانگر یک صفحه است و این دو صفحه یکدیگر را در خط راستی قطع می‌کنند، مگر اینکه با هم موازی باشند. بنابراین به حالتهای زیر می‌رسیم:

حالت (۱): صفحه‌ها موازی نیستند و بنابراین یکدیگر را در خط راستی قطع می‌کنند. تعداد جوابها نامتناهی است، زیرا مختصات هر نقطه‌ای روی خط تقاطع در هر دو معادله صدق خواهد کرد. جواب با اختیار یگانه وجود دارد.

حالت (۲): صفحه‌ها موازی‌اند، اگر و تنها اگر ضرایب بخشهای همگن دو معادله به‌ترتیب با یکدیگر متناسب باشند، یعنی

$$a_{21}/a_{11} = a_{22}/a_{12} = a_{23}/a_{13} \neq b_2/b_1 \tag{۲۲}$$

در این حالت، جوابی وجود ندارد.

حالت (۳): در حالت (۲)، پیش می‌آید که نسبت بخشهای ناهمگن به یکدیگر همان نسبت ضرایب بخشهای همگن باشد، یعنی

$$a_{21}/a_{11} = a_{22}/a_{12} = a_{23}/a_{13} = b_2/b_1 \tag{۲۳}$$

در این حالت، هر دو معادله یک صفحه را نمایش می‌دهد و تعداد جوابها، با اختیاری دوگانه نامتناهی می‌شود.

دو ماتریس زیر را درنظر بگیرید

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \end{bmatrix} \tag{۲۴}$$

اولی تنها شامل ضرایب بخشهای همگن است، در حالی‌که دومی دارای یک ستون بیشتر است که بخش ناهمگن معادله است. $\mathbf{A}$ به ماتریس ضرایب و $\mathbf{B}$ به ماتریس فزوده معروف است. سعی

می‌کنیم رتبه‌های این دو ماتریس را در سه حالتی که در بالا بحث کردیم، مطالعه کنیم. به‌سادگی می‌توان دید که نتایج زیر به‌دست می‌آیند:

حالت (۱): ۲ = رتبهٔ **A**، ۲ = رتبهٔ **B**

حالت (۲): ۱ = رتبهٔ **A**، ۲ = رتبهٔ **B**

حالت (۳): ۱ = رتبهٔ **A**، ۱ = رتبهٔ **B**

بنابراین بدیهی است که با تعیین رتبه‌های **A** و **B**، تعداد جوابهای دستگاه را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که رتبهٔ **B** تعداد معادلات مستقل را می‌دهد. در حالت (۳)، تنها یک معادلهٔ مستقل وجود دارد؛ جواب دیگر تنها مضربی از اولی است. رتبهٔ **A** تعداد معادلات همگن وابستهٔ مستقل از هم را می‌دهد که از مساوی قرار دادن بخشهای ناهمگن با صفر به‌دست می‌آید.

اگر سه معادلهٔ سه‌متغیره داشته باشیم، حالت سه صفحه‌ای داریم که هر سه صفحه ممکن است یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند که مختصات آن جواب یکتای دستگاه است. صفحه‌ها ممکن است از یک خط راست عبور کنند که در این حالت تعداد جوابها، با یک پارامتر اختیاری، نامتناهی است. سرانجام، هر سه صفحه ممکن است یکی باشد که این بار تعداد جوابها، با دو پارامتر اختیاری، نامتناهی است. در سایر حالتها جوابی وجود ندارد.[1]

اگر بیش از سه معادلهٔ سه‌مجهولی داشته باشیم، بهتر است که ابتدا سه معادلهٔ دلخواه از این معادلات را حل کنیم و تحقیق کنیم که این جواب در سایر معادلات نیز صدق می‌کند یا خیر.

۵.۷ قاعدهٔ کرامر

دستگاه سه معادله سه‌مجهولی زیر را درنظر بگیرید

$$\begin{aligned} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + a_{۱۳}x_۳ &= b_۱ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + a_{۲۳}x_۳ &= b_۲ \\ a_{۳۱}x_۱ + a_{۳۲}x_۲ + a_{۳۳}x_۳ &= b_۳ \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

فرض کنید $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ ماتریس ضرایب باشد و A^{ij} نمایانگر هم‌عامل a_{ij} در $\det\mathbf{A}$ باشد. برای حل کردن دستگاه بالا، اولین معادلهٔ (۲۵) را در $A^{۱k}$، دومی را در $A^{۲k}$ و سومی را در

۱. توجه کنید که دستگاه ممکن است جوابی نداشته باشد، حتی در صورتی‌که هیچ دوصفحه‌ای از سه صفحه موازی نباشد. این حالت متناظر با سه خط راست در یک صفحه است؛ شکل ۴(الف).

$A^{۳k}$ $(۱ \le k \le ۳)$ ضرب می‌کنیم، سپس آنها را جمع می‌کنیم و جملات سمت چپ را مرتب می‌کنیم تا به‌دست آوریم

$$\begin{aligned} & x_۱(a_{۱۱}A^{۱k} + a_{۲۱}A^{۲k} + a_{۳۱}A^{۳k}) + x_۲(a_{۱۲}A^{۱k} + a_{۲۲}A^{۲k} + a_{۳۲}A^{۳k}) \\ & + x_۳(a_{۱۳}A^{۱k} + a_{۲۳}A^{۲k} + a_{۳۳}A^{۳k}) = b_۱A^{۱k} + b_۲A^{۲k} + b_۳A^{۳k} \end{aligned} \quad (۲۶)$$

از معادلهٔ (۵.۴) نتیجه می‌گیریم که در سمت چپ معادلهٔ (۲۶)، تنها ضریب x_k باقی می‌ماند و مساوی $\det\mathbf{A}$ می‌شود. در حالی‌که دو ضریب دیگر صفر می‌شوند، به نتیجهٔ زیر می‌رسیم

$$x_k \det\mathbf{A} = b_۱A^{۱k} + b_۲A^{۲k} + b_۳A^{۳k} \quad (۲۷)$$

یا، اگر $\det\mathbf{A} \neq ۰$ باشد،

$$x_k = (b_۱A^{۱k} + b_۲A^{۲k} + b_۳A^{۳k})/\det\mathbf{A} \qquad k = ۱, ۲, ۳ \quad (۲۸)$$

بنابراین، اگر $\det\mathbf{A} \neq ۰$ باشد، دستگاه معادلات (۲۵) یک جواب یکتا دارد که از معادلهٔ (۲۸) به‌دست می‌آید.

می‌بینیم که عبارت سمت راست معادلهٔ (۲۷) دترمینان ماتریس است که از قرار دادن اجزای $b_۱$، $b_۲$، و $b_۳$ به‌جای ستون kام $\mathbf{A}$ به‌دست می‌آید. فرض کنید این دترمینانها را به‌صورت زیر نمایش دهیم

$$D_۱ = \begin{vmatrix} b_۱ & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ b_۲ & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ b_۳ & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}, \; D_۲ = \begin{vmatrix} a_{۱۱} & b_۱ & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & b_۲ & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & b_۳ & a_{۳۳} \end{vmatrix}, \; D_۳ = \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & b_۱ \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & b_۲ \\ a_{۳۱} & b_{۳۲} & b_۳ \end{vmatrix} \quad (۲۹)$$

بنابراین جواب معادلهٔ (۲۸) را می‌توان چنین نوشت

$$x_۱ = D_۱/\det\mathbf{A}, \qquad x_۲ = D_۲/\det\mathbf{A}, \qquad x_۳ = D_۳/\det\mathbf{A} \quad (۳۰)$$

این شیوه به قاعدهٔ کرامر معروف است که پایهٔ آن قضیهٔ کرامر است که به‌طور کلی، بیان می‌کند که اگر دترمینان ماتریس $\mathbf{A}$ی ضرایب دستگاهی با n معادلهٔ خطی و همان تعداد مجهول صفر نباشد،

دستگاه دقیقاً یک جواب دارد که عبارت است از:

$$x_k = D_k/\det\mathbf{A} \qquad ۱ \leq k \leq n \tag{۳۱}$$

که D_k دترمینانی است که آن‌را از جانشین کردن جملات ناهمگن به‌جای ستون kام $\mathbf{A}$ به‌دست آوردیم.

عملیات بالا به دو نتیجهٔ فرعی زیر می‌انجامد:

(الف) اگر $\det\mathbf{A} = ۰$ باشد، اما $D_k \neq ۰$، حداقل به‌ازای یک مقدار k، $۱ \leq k \leq n$، دستگاه جوابی ندارد.

(ب) اگر $\det\mathbf{A} \neq ۰$ باشد و دستگاه همگن باشد $[b_i = ۰, ۱ \leq i \leq n]$، دستگاه تنها جواب بدیهی $x_۱ = x_۲ = \cdots = x_n = ۰$ دارد.

مثال ۱. دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} ۴a + ۲b + \ \ c &= -۸ \\ ۳a - b + ۲c &= \ \ ۴ \\ -a - b - c &= \ \ ۲ \end{aligned} \tag{۳۲}$$

حل: دترمینان این دستگاه عبارت است از

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} ۴ & ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ -۱ & -۱ & -۱ \end{vmatrix} = ۱۰ \tag{۳۳}$$

D_k چنین یافت می‌شود

$$D_۱ = \begin{vmatrix} -۸ & ۲ & ۱ \\ ۴ & -۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ & -۱ \end{vmatrix} = -۱۰, \quad D_۲ = \begin{vmatrix} ۴ & -۸ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۲ \\ -۱ & ۲ & -۱ \end{vmatrix} = -۳۰,$$

$$D_۳ = \begin{vmatrix} ۴ & ۲ & -۸ \\ ۳ & -۱ & ۴ \\ -۱ & -۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۲۰ \tag{۳۴}$$

بنابر قاعدهٔ کرامر، جواب می‌شود

$$a = D_۱/\det\mathbf{A} = -۱, b = D_۲/\det\mathbf{A} = -۳, c = D_۳/\det\mathbf{A} = ۲ \quad (۳۵)$$

تمرین

۷. ۱ * با یافتن وارون ماتریس ضرایب، تبدیل زیر را وارون کنید

$$\begin{aligned} u &= ۱۹x + ۲y - ۹z \\ \nu &= -۴x - y + ۲z \\ w &= -۲x + z \end{aligned}$$

۷. ۲ معادلات زیر را حل کنید (الف) * $\mathbf{Ax} = ۲\mathbf{x}$، (ب) $\mathbf{Ax} = -\mathbf{x}$، (ج) * $\mathbf{Ax} = ۳\mathbf{x}$ که داریم

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix}$$

۷. ۳ * دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید:

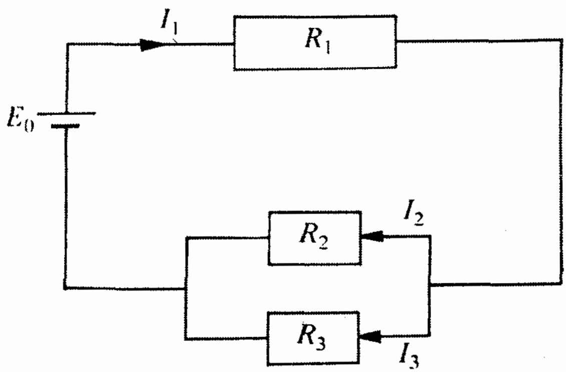
(الف)
$$\begin{aligned} ۲x + y &= ۳ \\ -x + ۴y &= ۰ \\ x + ۳y &= -۱ \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} x + y + ۳z &= ۶ \\ ۲x + ۳y - ۴z &= ۶ \\ ۳x + ۲y + ۷z &= ۰ \end{aligned}$$

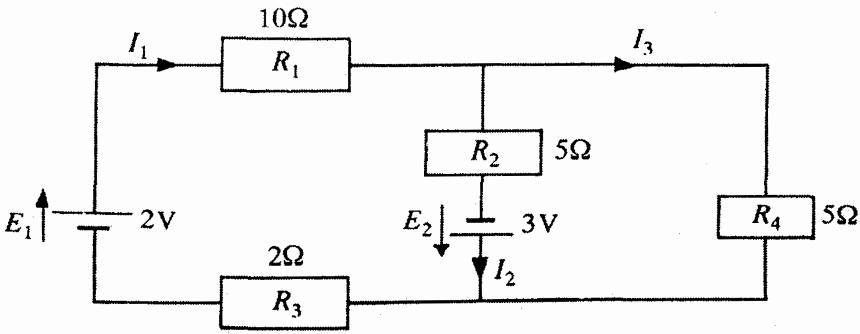
۷. ۴ با استفاده از قوانین کیرشهوف، نشان دهید که جریانهای شبکهٔ الکتریکی شکل ۷.۳ عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} I_۱ - I_۲ - I_۳ &= ۰ \\ R_۲I_۲ - R_۳\boldsymbol{I}_۳ &= ۰ \\ R_۱I_۱ + R_۲\boldsymbol{I}_۲ &= E_۰ \end{aligned}$$

سپس جریانهای مجهول $I_۱$، $I_۲$، و $I_۳$ را برحسب $R_۱$، $R_۲$، و $R_۳$ و $E_۰$ حل کنید.



شکل۳.۷ شبکهٔ الکتریکی تمرین ۴.۷.



شکل۴.۷ شبکهٔ الکتریکی تمرین ۵.۷.

۵.۷ * با استفاده از قوانین کیرشهوف، جریانهای شبکهٔ شکل ۴.۷ را به‌دست آورید.

۶.۷ * ماتریس زیر مفروض است

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

ماتریس کلی $\mathbf{B}$ای را پیدا کنید که در معادلهٔ $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ صدق می‌کند، $\mathbf{I}$ ماتریس یکه است. نشان دهید که $\mathbf{B}$ شامل دو پارامتر اختیاری است. نشان دهید که هیچ ماتریس $\mathbf{B}$ای که در معادلهٔ $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ صدق کند وجود ندارد (ماتریسهای یکهٔ دو معادلهٔ فوق ممکن است مرتبه‌های متفاوتی داشته باشند.) [رک: بحثهای مربوط به وارون ماتریس در فصل ۵ و پیوست ب.]

۸

دستگاه معادلات خطی ـ حالت کلی

اکنون به‌حالت کلی حل دستگاه m معادلهٔ خطی n مجهولی، نظیر معادلات (۱.۷)، می‌پردازیم. n متغیر $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n را بردارهای پایهٔ فضای برداری nبعدی بگیرید. تک معادلهٔ خطی زیر را درنظر بگیرید

$$a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + \cdots + a_{۱n}x_n = b_۱ \qquad (۱)$$

که شامل n متغیر است. مجموعهٔ تمام بردارهای nبعدی تابع معادلهٔ (۱)، یک زیرفضای $(n - ۱)$ بعدی از تمام فضا تشکیل می‌دهد. اگر دو معادلهٔ خطی با n متغیر داشته باشیم، بردارهای ممکن تابع این دو معادله در یک فضای برداری $(n - ۲)$ بعدی قرار می‌گیرند. به‌طورکلی، با چند استثنای خاص که در زیر به آنها می‌پردازیم، اگر n متغیر تابع m قید $(m < n)$ باشند، جوابهای ممکن در یک زیرفضای $(n - m)$ بعدی قرار می‌گیرند. اگر تعداد قیدها با تعداد متغیرها برابر باشد، به‌طور کلی، یک جواب یکتا وجود خواهد داشت، در حالی‌که اگر تعداد شرطها از تعداد متغیرها بیشتر باشد، در حالت کلی، جوابی وجود ندارد. دربارهٔ این سه حالت جداگانه بحث می‌کنیم.

۱.۸ m معادلهٔ n مجهولی، $m < n$

به‌طور کلی، تعداد جوابهای یک دستگاه m معادلهٔ خطی n مجهولی $(m < n)$ با $(n - m)$ اختیار نامتناهی است. اما، استثنایی وجود دارد که با وجود اینکه تعداد قیدها از تعداد متغیرها کمتر است، دستگاه جوابی ندارد.

دستگاه معادلات (۱.۷) را درنظر بگیرید و ماتریس $\mathbf{A}$ی مرتبهٔ $m \times n$ را با معادلهٔ (۲.۷) تعریف کنید. در ضمن، ماتریس فزودهٔ این دستگاه عبارت است از

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} & b_۱ \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} & b_۲ \\ \vdots & & & & \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{۲}$$

که ستون آخر آن شامل قسمت ناهمگن معادلات (۱.۷) است و بنابراین از مرتبهٔ $m \times (n + ۱)$ است. فرض کنید:

$$\text{رتبهٔ } \mathbf{A} = r \qquad \text{رتبهٔ } \mathbf{B} = s \tag{۳}$$

برای حالت $m < n$، آشکارا $r \leq m$ و $s \leq m$ است؛ s تعداد معادلات مستقل خطی را از میان دستگاه m معادله‌ای به‌دست می‌دهد، در حالی که r نمایانگر تعداد معادلات مستقل خطی از میان دستگاه m معادلهٔ همگن وابسته است. به‌علاوه، بدیهی است که $r + ۱$ یا $s = r$ است.

اکنون نتایج زیر را بدون اثبات بیان می‌کنیم:

(الف) اگر $s = r$ باشد، تعداد جوابهای دستگاه با $(n - r)$ اختیار نامتناهی است.

(ب) اگر $s > r$ باشد، دستگاه جواب ندارد. در این حالت می‌گوییم که معادلات ناسازگارند.

مثال ۱. (الف) دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned} x + ۲y + ۲z - ۳w &= ۵ \\ ۲x - y + z + ۲w &= ۱ \\ ۳x + y + ۳z - w &= ۶ \end{aligned} \tag{۴}$$

حل: ماتریس ضرایب و ماتریس فزودهٔ دستگاه فوق چنین می‌شود

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ & -۳ \\ ۲ & -۱ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۳ & -۱ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ & -۳ & ۵ \\ ۲ & -۱ & ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۳ & -۱ & ۶ \end{bmatrix} \qquad (۵)$$

با محاسبهٔ رتبه‌های این دو ماتریس، می‌بینیم که

$$r = \mathbf{A}\ \text{رتبهٔ} = ۲, \qquad s = \mathbf{B}\ \text{رتبهٔ} = ۲ \qquad (۶)$$

چون $r = s$ است، تعداد جوابهای دستگاه با $۲ = (۲ - ۴)$ اختیار نامتناهی است. بدیهی است که این سه معادله وابستهٔ خطی‌اند؛ در واقع معادلهٔ سوم مجموع دو معادلهٔ اول است. جواب دستگاه می‌شود

$$x = (۷ - ۴z - w)/۵, \quad y = (۹ - ۳z + ۸w)/۵ \qquad z\text{، } w\ \text{دلخواه} \qquad (۷)$$

(ب) دستگاه معادلات (۴) را با قراردادن ۷ به‌جای قسمت ناهمگن معادلهٔ سوم حل کنید، یعنی، دستگاه زیر:

$$\begin{aligned} x + ۲y + ۲z - ۳w &= ۵ \\ ۲x - y + z + ۲w &= ۱ \\ ۳x + y + ۳z - w &= ۷ \end{aligned} \qquad (۸)$$

حل: بدیهی است که با این تغییر سه معادلهٔ فوق دیگر وابسته نیستند، اگرچه قسمتهای همگن آنها وابسته باشد. حال داریم

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ & -۳ & ۵ \\ ۲ & -۱ & ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۳ & -۱ & ۷ \end{bmatrix} \qquad (۹)$$

بنابراین

$$r = ۲, \qquad s = ۳ \qquad (۱۰)$$

چون $r < s$ است، به‌روشنی می‌توان نشان داد که دستگاه جوابی ندارد. جواب دو معادلهٔ اول را در معادلات (۷) آورده‌ایم. با قرار دادن آن در سمت چپ معادلهٔ سوم، به‌دست می‌آوریم

$$۳x + y + ۳z - w = ۶ \neq ۷ \qquad (۱۱)$$

بنابراین، معادلات (۸) ناسازگارند و هیچ مقداری از x، y، z و w که همزمان در این سه معادله صدق کند، وجود ندارد.

۲.۸ n معادلهٔ n مجهولی

حالت دوم وقتی پیش می‌آید که $m = n$ باشد. در این حالت، ماتریس $\mathbf{A}$ تبدیل به ماتریس مربعیِ مرتبهٔ n می‌شود. با توجه به اینکه ماتریس مربعی، بجز زمانی که دترمینان آن صفر باشد، وارون دارد. این بحث همان مسیر حالت یک معادلهٔ یک‌مجهولی، معادلهٔ (۴.۷) را دنبال می‌کند. اکنون به حالتهای زیر می‌رسیم:

حالت (۱): $\det\mathbf{A} \neq ۰$. اگر رتبهٔ $\mathbf{A}$ $= r$ باشد، دراین‌صورت $r = n$ است، $\mathbf{A}^{-۱}$ وجود دارد و چنانچه معادلهٔ زیر را از سمت چپ در $\mathbf{A}^{-۱}$ ضرب کنیم

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad (۱۲)$$

داریم

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-۱}\mathbf{b} \qquad (۱۳)$$

که جواب یکتای دستگاهِ مفروض است. اگر $\mathbf{b} = ۰$ باشد [حالت (۱الف)]، جواب بدیهی است، در حالی‌که اگر $\mathbf{b} \neq ۰$ باشد [حالت (۱ب)]، دستگاه جواب غیرصفر دارد.

حالت (۲): $\det\mathbf{A} = ۰$. اکنون $\mathbf{A}$ رتبهٔ $r < n$ دارد. فرض کنید s رتبهٔ ماتریس فزودهٔ $\mathbf{B}$ باشد. به این دو حالت فرعی می‌رسیم:

حالت (۲الف): $\mathbf{b} \neq ۰$. در این حالت داریم $r = s$ یا $r < s$ اگر $r = s$ باشد، تعداد جوابهای دستگاه با $(n - r)$ اختیار نامتناهی است. اگر $r < s$ باشد، دستگاه جوابی ندارد.

حالت (۲ب): $\mathbf{b} = ۰$. در این حالت، داریم $r = s$، و بنابراین تعداد جوابهای دستگاه با اختیار $(n - r)$ گانه نامتناهی است.

به‌عنوان نتیجه‌ای فرعی، دقت می‌کنیم که اگر $\mathbf{b} = ۰$ باشد، حالت n معادلهٔ خطی همگن n متغیره [حالتهای (۱الف) و (۲ب)]، دستگاه جواب غیرصفر دارد، اگر و تنها اگر $\det\mathbf{A} = ۰$ باشد. به‌عبارت دیگر، شرط لازم و کافی برای اینکه دستگاه n معادلهٔ خطی همگن n متغیره جواب غیرصفر داشته باشد، این است که دترمینان ماتریس ضرایب آن صفر شود.

مثال ۲. دستگاه معادلات زیر را حل کنید

$$\begin{aligned} x - y + ۲z + w &= a \\ x + z - w &= b \\ -۲x + y + z &= c \\ x + w &= d \end{aligned} \tag{۱۴}$$

حل: ماتریس ضرایب می‌شود

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & -۱ \\ -۲ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \tag{۱۵}$$

می‌بینیم که $\det\mathbf{A} = ۸$ می‌شود. پس $\mathbf{A}$ ناتکین است. ماتریس وارون آن می‌شود

$$\mathbf{A}^{-۱} = \frac{۱}{۸} \begin{bmatrix} -۱ & ۳ & -۱ & ۴ \\ -۴ & ۴ & ۴ & ۸ \\ ۲ & ۲ & ۲ & ۰ \\ ۱ & -۳ & ۱ & ۴ \end{bmatrix} \tag{۱۶}$$

دستگاه معادلات (۱۴) را به‌صورت ماتریسی می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & -۱ \\ -۲ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \tag{۱۷}$$

آن‌را از سمت چپ در $\mathbf{A}^{-۱}$ ضرب می‌کنیم، به جواب زیر می‌رسیم

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \frac{۱}{۸} \begin{bmatrix} -۱ & ۳ & -۱ & ۴ \\ -۴ & ۴ & ۴ & ۸ \\ ۲ & ۲ & ۲ & ۰ \\ ۱ & -۳ & ۱ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \qquad \text{(۱۸الف)}$$

یا

$$x = (-a + ۳b - c + ۴d)/۸ \qquad y = (-a + b + c + ۲d)/۲$$

$$z = (a + b + c)/۴ \qquad w = (a - ۳b + c + ۴d)/۸ \qquad \text{(۱۸ب)}$$

توجه کنید که اگر دستگاه معادلات همگن باشد، یعنی $a = b = c = d = ۰$ باشد، تنها جواب، جواب بدیهی $x = y = z = w = ۰$ است.

مثال ۳. دستگاه معادلات زیر، به‌ازای چه مقدار k جواب غیرصفر دارد؟ آن جواب را پیدا کنید.

$$\begin{aligned} x - y + ۲z &= ۰ \\ ۳x + ۲y + z &= ۰ \\ x + ۲y + kz &= ۰ \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

حل: می‌بینیم که دستگاه معادلات فوق همگن است. اگر قرار دهیم $x = y = z = ۰$ معادلات (۱۹)، با هر مقداری که k بگیرد، عیناً صادق است. با وجود این، برای به‌دست آوردن جواب غیرصفر، باید شرط صفر بودن دترمینان ماتریس ضرایب را اعمال کنیم. داریم

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ & k \end{vmatrix} = ۵k + ۵ \qquad (۲۰)$$

بنابراین اگر $k = -۱$ باشد، $\det\mathbf{A} = ۰$ است. پس دستگاه جواب غیرصفر دارد، اگر و تنها اگر $k = -۱$ باشد.

با صفر شدن $\det\mathbf{A}$ سه معادله دیگر مستقل نیستند. در واقع، می‌توان دید که با $k = -۱$، سطر سوم $\det\mathbf{A}$ برابر می‌شود با ۳/۵ سطر دوم منهای ۴/۵ سطر اول. بنابراین، فقط دو معادله مستقل‌اند، رتبهٔ $\mathbf{A}$ برابر با ۲ می‌شود و جواب مطلوب عبارت است از

$$x = -z, y = z \quad \text{دلخواه } z \tag{۲۱}$$

۳.۸ m معادلهٔ n مجهولی، $m > n$

اگر تعداد معادلات از تعداد متغیرها بیشتر باشد، دستگاههای همگن و غیرهمگن را جداگانه درنظر می‌گیریم.

در حالت معادلات همگن، ماتریس ضرایب با رتبهٔ r را درنظر بگیرید. بدیهی است که $r \leq n$ است. اگر $r = n$ باشد، دستگاه با هر مقدار m، دارای یک و تنها یک جواب بدیهی $x_i = ۰$، به‌ازای $۱ \leq i \leq n$ است. اگر $r < n$ باشد، تعداد جوابهای دستگاه با هر مقدار m، با اختیار $(n - r)$ گانه نامتناهی می‌شود (یکی از آنها جواب بدیهی است).

در حالت معادلات ناهمگن، ماتریس فزودهٔ $\mathbf{B}$ با مرتبهٔ $m \times (n + ۱)$ و رتبهٔ s را درنظر می‌گیریم. این بار هم آشکارا $s \leq n + ۱$ است. اگر $s = n + ۱$ باشد، یعنی که $n + ۱$ قید مستقل برای n متغیر وجود دارد و به این ترتیب، دستگاه جوابی ندارد. اگر $s \leq n$ باشد، بدین معنی است که تعداد معادلات مستقل کمتر یا مساوی تعداد متغیرهاست. بنابراین، می‌توانیم s معادلهٔ مستقل را از دستگاه مفروض جدا کنیم و آنها را با روشهایی که قبلاً در این بخش درباره‌شان بحث کردیم، حل کنیم.

راه دیگر در حالت معادلات ناهمگن عبارت است از جدا کردن هر n معادلهٔ دلخواهی و حل کردن آن و قرار دادن جواب در $m - n$ معادلهٔ باقی‌مانده. اگر جواب در آنها نیز عیناً صدق کند، معادلات سازگارند و این جواب نهایی است؛ در غیر این‌صورت، دستگاه فاقد جواب است.

مثال ۴. جواب دستگاه معادلات زیر را بیابید

$$\begin{aligned} ۷x + ۴y &= ۳ \\ -۲x + ۳y &= ۴ \\ ۲x + y &= -۲ \end{aligned} \tag{۲۲}$$

حل: در اینجا سه معادلهٔ ناهمگن دومجهولی داریم. بنابراین، ماتریس فزودهٔ زیر را درنظر می‌گیریم

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} ۷ & ۴ & ۳ \\ -۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ & -۲ \end{bmatrix} \qquad (۲۳)$$

رتبهٔ آن سه می‌شود. پس سه معادلهٔ مستقل دومتغیره وجود دارد، بنابراین دستگاه جوابی ندارد.

مثال ۵. دستگاه معادلات زیر را حل کنید

$$\begin{aligned} ۲x + y + ۳z &= ۷ \\ ۳x - ۲y + ۸z &= ۷ \\ x - ۲y + ۴z &= ۱ \\ -۲x + y - ۴z &= -۳ \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

حل: در اینجا چهار معادلهٔ ناهمگن سه‌مجهولی داریم. فرض کنید که سه معادلهٔ دلخواه از آن‌را جدا و حل کنیم. سه معادلهٔ اول دارای جواب زیرند

$$x = ۳ - ۲z, \qquad y = z + ۱ \qquad \text{دلخواه } z \qquad (۲۵)$$

با گذاشتن این جواب در معادلهٔ چهارم، $z = ۲$ می‌شود. پس جواب نهایی عبارت است از

$$x = -۱, \qquad y = ۳, \qquad z = ۲ \qquad (۲۶)$$

به‌اختصار، می‌توان گفت که دستگاه m معادلهٔ خطی n مجهولی دارای هیچ، یک یا نامتناهی جواب است. در حالت معادلات ناهمگن، اگر رتبهٔ ماتریس فزوده بیشتر از ماتریس ضرایب باشد، جوابی وجود ندارد و اگر دو ماتریس هم‌رتبه باشند، یک جواب یا بیشتر وجود دارد. در مورد معادلات همگن، ماتریس فزوده و ماتریس ضرایب رتبهٔ یکسانی دارند، بنابراین حداقل یک جواب وجود دارد. در هر حالت، اگر جوابی وجود داشته باشد، چندگانگی (اختیار) جوابها $n - r$ است که n تعداد مجهولات و r رتبهٔ ماتریس ضرایب است.

۴.۸ تعداد بردارهای مستقل

پیشتر دربارهٔ روش تعیین وابستگی یا استقلال خطی مجموعه‌ای مفروض از بردارها بحث کرده‌ایم. چنانچه مجموعه وابستهٔ خطی باشد، چگونه تعداد بردارهای مستقل خطی آن‌را تعیین کنیم؟

فرض کنید n بردار $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ داریم که بعد هر یک m است (یعنی، m مؤلفه دارد). برای تعیین تعداد بردارهای مستقل خطی این مجموعه، معادلهٔ زیر را برای یافتن a_iها حل می‌کنیم.

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n = 0 \tag{۲۷}$$

اگر جواب شامل k ثابت اختیاری باشد، تعداد بردارهای مستقل $n-k$ است.

مثالهای زیر چند نتیجهٔ مهم دربارهٔ وابستگی و استقلال خطی بردارها را در بردارد.

مثال ۶. فرض کنید $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$، n بردار ستونی با بعد m باشند، بردار iام را با $\mathbf{x}_i \equiv \{x_{1i}\ x_{2i}\ \ldots\ x_{mi}\}$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $\mathbf{P}$ ماتریسی است که ستونهای آن بردارهای ستونی $\mathbf{x}_i$ باشد، یعنی

$$\mathbf{P} \equiv [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \ldots\ \mathbf{x}_n] = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2i} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & & \\ x_{m1} & \cdots & x_{mi} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \tag{۲۸}$$

حال ثابت کنید که این n بردار مستقل خطی‌اند، اگر و تنها اگر ماتریس $\mathbf{P}$ رتبهٔ n داشته باشد.

حل: معادلهٔ (۲۷) را درنظر بگیرید که می‌شود

$$a_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + a_n \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۲۹}$$

چنانچه این معادلات را جداگانه بنویسیم، به‌صورت زیر در می‌آیند

$$\begin{aligned} x_{11}a_1 + x_{12}a_2 + \cdots + x_{1n}a_n &= 0 \\ x_{21}a_1 + x_{22}a_2 + \cdots + x_{2n}a_n &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_{m1}a_1 + x_{m2}a_2 + \cdots + x_{mn}a_n &= 0 \end{aligned} \tag{30}$$

این مجموعه‌ای از m معادلهٔ خطی همگن با n مجهول a_1، a_2، ...، a_n و ضرایب x_{ij} است. m نسبت به n هر مقداری داشته باشد، اگر رتبهٔ ماتریس ضرایب n باشد، تنها جواب معادلات (۳۰) به‌ازای $1 \leq i \leq n$ جواب بدیهی $a_i = 0$ می‌شود که نشان می‌دهد بردارهای $\mathbf{x}_i$ مستقل خطی‌اند. عکس آن هم درست است: اگر این بردارها مستقل خطی باشند، تنها جواب معادلات (۳۰) $a_i = 0$، $1 \leq i \leq n$ است که تنها زمانی ممکن است که رتبهٔ ماتریس ضرایب در معادلات (۳۰) n شود. به‌این ترتیب نتیجهٔ دلخواه به‌دست می‌آید.

نتیجهٔ بالا دارای دو نتیجهٔ فرعی زیر است که می‌توان آنها را حالتهای خاص تلقی کرد.

نتیجهٔ فرعی ۱: اگر $n > m$ باشد، رتبهٔ ماتریس ضرایب معادلات (۳۰) با n برابر نمی‌شود و معادلات جوابهای غیرصفر خواهند داشت که نشان می‌دهد بردارهای $\mathbf{x}_i$ وابستهٔ خطی‌اند. از اینجا نتیجه می‌گیریم که چنانچه n بردار بعد کمتر از n داشته باشند وابستهٔ خطی‌اند.

نتیجهٔ فرعی ۲: اگر $n = m$ باشد، ماتریس ضرایب مربعی است و اگر بردارها مستقل خطی باشند، رتبهٔ ماتریس ضرایب با n، یعنی مرتبهٔ ماتریس، برابر می‌شود، بنابراین دترمینان ماتریس صفر نمی‌شود. پس نتیجه می‌گیریم که ماتریسی که ستونهایش از n بردار مستقل خطی با بعد n تشکیل شود، ناتکین است.

مثال ۷. نشان دهید که رتبهٔ یک ماتریس با تعداد بیشینهٔ بردارهای مستقل خطی سطری یا ستونی آن برابر است.

حل: این یک نتیجهٔ قضیه‌ای است که در مثال ۶ ثابت شد. n بردار ستونی با بعد m (یعنی، از مرتبهٔ $m \times 1$) را درنظر بگیرید. فرض کنید k بردار آن مستقل خطی باشد؛ دراین‌صورت $k \leq \min(n, m)$، که $\min(n, m)$ به معنی عدد صحیح کوچکتر میان n و

m است. k بردار مستقل خطی را از n بردار مفروض جدا کنید و آنها را به‌طور ستونی مرتب کنید تا ماتریسی از مرتبهٔ $m \times k$ به‌دست آورید. چون ستونها مستقل‌اند، رتبهٔ این ماتریس، بنابر قضیهٔ مثال ۶، برابر با k می‌شود. حال، $n - k$ بردار باقی‌مانده به این k بردار وابسته‌اند و اگر این $n - k$ بردار را به‌صورت ستونهایی اضافی قرار دهیم تا ماتریسی بزرگتر از مرتبهٔ $m \times n$ به‌دست آوریم، رتبهٔ ماتریس حاصل این بار هم k می‌شود که با تعداد بردارهای مستقل خطی ستونی برابر است (رتبهٔ یک ماتریس با جابه‌جایی سطرها یا ستونهای آن تغییر نمی‌کند.)

در پایان، با توجه به اینکه ترانهش رتبهٔ یک ماتریس را تغییر نمی‌دهد، تعداد سطرهای مستقل خطی ماتریس باید با تعداد ستونهای مستقل خطی آن یکسان باشد. بنابراین نتیجه به‌دست می‌آید.

تمرین

۱.۸ مقدارهای ممکن λ را بیابید که به‌ازای آنها دستگاه معادلات همگن زیر جواب غیرصفر داشته باشد. جوابهای متناظر را به‌دست آورید.

(الف)*
$$(۲ - \lambda)x + ۴y = ۰$$
$$x + (۳ + \lambda)y = ۰$$

(ب)
$$(۱ - \lambda)x + ۲y = ۰$$
$$۲x + (۱ - \lambda)y + z = ۰$$
$$۵y + (۱ - \lambda)z = ۰$$

۲.۸ با استفاده از روش مثال ۷، رتبهٔ ماتریسهای زیر را بیابید:

(الف)
$$\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۲ & ۲ \\ -۵ & ۲ & ۸ & -۲ \\ ۹ & ۴ & ۱۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

(ب)*
$$\begin{bmatrix} ۱ & ۹ & ۵ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۳ & ۱ \\ ۴ & ۰ & ۲ & -۳ \\ -۱ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

۸. ۳* دستگاه معادلات زیر را حل کنید

$$\begin{aligned} u+v+w+x &= ۱ \\ u+v+w-x &= ۲ \\ u+v-w-x &= ۳ \\ u-v-w-x &= ۴ \end{aligned}$$

۸. ۴ نشان دهید که اگر برای همهٔ بردارهای n بعدی $\mathbf{x}$ داشته باشیم $\mathbf{Ax} = ۰$، دراین‌صورت $\mathbf{A}$ ماتریس صفر است.

۸. ۵ (الف) نشان دهید که معادلهٔ $\mathbf{Ax} = ۰$ که در آن

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۰ & c & -b \\ -c & ۰ & a \\ b & -a & ۰ \end{bmatrix}$$

دارای جواب $x = \{at \quad bt \quad ct\}$ است که t اختیاری است.

(ب) اگر

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a^۲ & ab & ac \\ ab & b^۲ & bc \\ ac & bc & c^۲ \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \end{bmatrix}$$

نشان دهید که $\mathbf{By}$ برداری از نوع $\mathbf{x}$ قسمت (الف) است.

(ج) بنابراین، بدون محاسبهٔ حاصلضرب، نشان دهید که $\mathbf{AB} = ۰$ است.

۸. ۶* جوابهای غیرصفر دستگاههای زیر را به‌صورت پارامتری بیابید:

(الف)

$$\begin{aligned} ۴x+۲y+z+۵t &= ۰ \\ x-۷y+۴z+۵t &= ۰ \\ ۶x+۱۲y-۳z+۳t &= ۰ \\ ۳x+۷y-۲z+t &= ۰ \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵ &= ۰ \\ x_۱+۲x_۲+۳x_۳+۴x_۴+۵x_۵ &= ۰ \\ ۵x_۱+۴x_۲+۳x_۳+۲x_۴+x_۵ &= ۰ \\ x_۱-x_۲+x_۳-x_۴+x_۵ &= ۰ \end{aligned}$$

۹

مسئلهٔ ویژه‌مقدار (۱)

فرض کنید $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ ماتریس مربعی مرتبهٔ n باشد. فرض کنید بردار ستونی nبعدی غیرصفر $\mathbf{x}$ وجود دارد، به‌طوری که عمل $\mathbf{A}$ روی $\mathbf{x}$ (یعنی، حاصلضرب ماتریسی $\mathbf{Ax}$) برداری می‌شود که صرفاً مضربی از $\mathbf{x}$ است، یعنی

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \tag{۱}$$

که λ کمیتی نرده‌ای است. به‌عبارت دیگر، تبدیلی که آن‌را با ماتریس $\mathbf{A}$ نشان می‌دهیم، تنها بردار $\mathbf{x}$ را در نرده‌ای λ ضرب می‌کند. بنابراین بردار $\mathbf{x}$ را یک ویژه‌بردار[۱] ماتریس $\mathbf{A}$ و λ را ویژه‌مقدار $\mathbf{A}$ متناظر با ویژه‌بردار $\mathbf{x}$ می‌نامند. مسئلهٔ یافتن ویژه‌بردارها و ویژه‌مقدارهای یک ماتریس را مسئلهٔ ویژه‌مقدار می‌نامند.

این مسئله را می‌توان به‌صورت زیر نیز بیان کرد. λ هر مقداری که باشد، اگر $\mathbf{x} = \circ$، یعنی بردار صفر باشد، معادلهٔ (۱) صادق است. اما هدف مسئله یافتن مقدارهایی از λ است

۱. "$Eigen$" واژه‌ای آلمانی به‌معنی سره یا مشخصه است. ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارها، به‌ترتیب به مقدارهای مشخصه و بردارهای مشخصه نیز معروف‌اند.

که به‌ازای آن معادلهٔ (۱) با بردار غیرصفر نیز صادق باشد. این مقدارهای λ ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ هستند.

۱.۹ تعیین ویژه‌مقدارها

دستگاه معادلهٔ (۱) را به‌صورت صریح آن می‌نویسیم. اگر بردار ستونی $\mathbf{x}$ را با $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ نشان دهیم، معادلهٔ (۱) می‌شود

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{۲}$$

یا، چنانچه این معادلات را جداگانه بنویسیم، داریم

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n &= 0 \end{aligned} \tag{۳الف}$$

که می‌توان آن‌را به‌صورت ماتریسی زیر نیز نوشت[1]

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0 \tag{۳ب}$$

می‌بینیم که دستگاه فوق شامل n معادلهٔ همگن خطی با n پارامتر x_i است و همواره جواب بدیهی $x_i = 0$، $1 \leq i \leq n$ دارد. با وجود این، دستگاه جوابهای غیرصفر نیز دارد. اگر و تنها

---

۱. لازم است هنگام نوشتن $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ ماتریس یکهٔ $\mathbf{I}$ را معرفی کنیم. نوشتن $\mathbf{A} - \lambda$ اشتباه است، زیرا $\mathbf{A}$ از مرتبهٔ $n \times n$ است. در حالی که مرتبهٔ λ، 1×1 است.

اگر دترمینان ماتریس ضرایب صفر شود، یعنی، اگر و تنها اگر

$$D(\lambda) \equiv \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (۴)$$

بدیهی است که دترمینان $D(\lambda)$ چندجمله‌ای درجهٔ nام λ است، که آن‌را چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ می‌نامند. آن‌را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$D(\lambda) = c_0 \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n \quad (۵)$$

که ضرایب c_i توابعی از اجزای $\mathbf{A}$یند. بعضی از آنها را به‌آسانی می‌توان تعیین کرد؛ در واقع، با بررسی معادلهٔ (۴) می‌توان نشان داد که

$$c_0 = (-1)^n, c_1 = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$$
$$c_n = D(0) = \det\mathbf{A} \quad (۶)$$

پس معادلهٔ دترمینانی (۴) به معادلهٔ چندجمله‌ای زیر تبدیل می‌شود

$$c_0 \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0 \quad (۷)$$

معادلهٔ (۴) یا معادلهٔ (۷) به معادلهٔ مشخصهٔ $\mathbf{A}$ معروف است. از نظریهٔ چندجمله‌ایها، می‌دانیم که یک چندجمله‌ای درجهٔ n دقیقاً n ریشه دارد که چندجمله‌ای را صفر می‌کنند. ریشه‌های معادلهٔ (۷) را با λ_1، λ_2، ...، λ_n نمایش می‌دهیم. اینها مقدارهایی از λیند که به‌ازای آنها $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ صفر می‌شود و در نتیجه معادلهٔ (۳ب) دارای جوابهای غیرصفر می‌شود. به‌عبارت دیگر، نتیجه می‌گیریم که تعداد ویژه‌مقدارهای هر ماتریس مربعی دقیقاً برابر با مرتبهٔ آن است و این ویژه‌مقدارها ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه‌اند.

آشکارا، چندجمله‌ای مشخصه را می‌توان چنین نوشت

$$c_0 \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \cdots + c_n = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda) \quad (۸)$$

در نتیجه

$$c_۱ = (-۱)^{n-۱}(\lambda_۱ + \lambda_۲ + \cdots + \lambda_n),\ c_n = \lambda_۱\lambda_۲\cdots\lambda_n \qquad (۹)$$

پس از مقایسهٔ معادلات فوق با معادلات (۶)، به دو نتیجهٔ مهم زیر دربارهٔ ویژه‌مقدار ماتریس می‌رسیم.

۱ـ مجموع ویژه‌مقدارها با رد ماتریس برابر است، یعنی

$$\lambda_۱ + \lambda_۲ + \cdots + \lambda_n = a_{۱۱} + a_{۲۲} + \cdots + a_{nn} \equiv \mathrm{Tr}\mathbf{A} \qquad (\text{۱۰الف})$$

۲ـ حاصلضرب ویژه‌مقدارها با دترمینان ماتریس برابر است، یعنی

$$\lambda_۱\lambda_۲\cdots\lambda_n = \det\mathbf{A} \qquad (\text{۱۰ب})$$

مجموعهٔ ویژه‌مقدارهای یک ماتریس را طیف ویژه‌مقدار می‌نامند.

مثال ۱. ویژه‌مقدارهای ماتریس زیر را بیابید

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \qquad (۱۱)$$

حل: چندجمله‌ای مشخصه عبارت است از

$$D(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} ۲-\lambda & -۲ & ۳ \\ ۲ & -۱-\lambda & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۱-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^۳ + ۲\lambda^۲ - ۶\lambda + ۵ = (۱-\lambda)(\lambda^۲ - \lambda + ۵)$$

بنابراین، ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ که جوابهای معادلهٔ $D(\lambda) = ۰$اند، می‌شوند: ۱، $(۱ + i\sqrt{۱۹})/۲$، $(۱ - i\sqrt{۱۹})/۲$. اثبات معادلات (۱۰) را در این حالت به خواننده واگذار می‌کنیم.

مثال ۲. اگر $\mathbf{A}$ ناتکین باشد، نشان دهید که ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}^{-۱}$ معکوس ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ است و هر ویژه‌بردار $\mathbf{A}$ ویژه‌بردار $\mathbf{A}^{-۱}$ نیز است.

حل: فرض کنید λ ویژه‌مقدار $\mathbf{A}$ متناظر با ویژه‌بردار $\mathbf{x}$ باشد، بنابراین

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \tag{۱۲}$$

با توجه به اینکه $\mathbf{A}^{-۱}$ وجود دارد، معادلهٔ (۱۲) را از سمت چپ در $\mathbf{A}^{-۱}$ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{A}^{-۱}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-۱}\lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}^{-۱}\mathbf{x} \tag{۱۳}$$

چون $\mathbf{A}$ ناتکین است، تمرین ۲ نشان می‌دهد که λ باید غیرصفر باشد. بنابراین، با تقسیم معادلهٔ (۱۳) بر λ، در آخر داریم

$$\mathbf{A}^{-۱}\mathbf{x} = (۱/\lambda)\mathbf{x} \tag{۱۴}$$

چون این معادله باید برای هر ویژه‌مقدار $\mathbf{A}$ صادق باشد، نتیجه به‌دست می‌آید.

مثال ۳. نشان دهید که قدرمطلق همهٔ ویژه‌مقدارهای ماتریس یکانی یک است.

حل: فرض کنید $\mathbf{U}$ ماتریسی یکانی باشد و $\mathbf{x}$ یک ویژه‌بردار $\mathbf{U}$ با ویژه‌مقدار λ باشد، داریم

$$\mathbf{Ux} = \lambda\mathbf{x} \tag{۱۵}$$

مزدوج هرمیتی دو طرف تساوی را به‌دست می‌آوریم، داریم

$$\mathbf{x}^\dagger\mathbf{U}^\dagger = \lambda^*\mathbf{x}^\dagger \tag{۱۶}$$

معادلهٔ (۱۵) را از سمت چپ در معادلهٔ (۱۶) ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{x}^\dagger\mathbf{U}^\dagger\mathbf{Ux} = \lambda\lambda^*\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x} \tag{۱۷}$$

چون $\mathbf{U}$ یکانی است، $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{I}$، پس معادلهٔ (۱۷) به $\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x}(|\lambda|^۲ - ۱) = ۰$ تبدیل می‌شود. حال، با توجه به اینکه $\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x}$ توان دوم هنجار $\mathbf{x}$ است، صفر نمی‌شود، مگر اینکه $\mathbf{x}$ بردار صفر باشد.

چون به بردارهای غیرصفر $\mathbf{x}$ی علاقه‌مندیم که در معادلهٔ (۱۵) صدق می‌کنند، داریم $|\lambda|^2 = 1$، یا $|\lambda| = 1$، به این ترتیب به نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم.

۲.۹ ویژه‌بردارها و ویژگیهای آنها

اگرچه هر ماتریس مرتبهٔ n دقیقاً n ویژه‌مقدار دارد، لزوماً n ویژه‌بردار مستقل خطی ندارد. در این فصل، تنها به ماتریسهایی می‌پردازیم که n ویژه‌بردار مستقل خطی دارند.[1] به دلایلی که در صفحات بعدی معلوم می‌شود، از این ماتریسها با نام ماتریسهای قطری شدنی یاد می‌کنیم.

اگر $\mathbf{x}$ یک ویژه‌بردار $\mathbf{A}$ باشد، به‌سادگی می‌توان دید که هر مضربی از $\mathbf{x}$ نیز ویژه‌بردار $\mathbf{A}$ است. با ضرب معادلهٔ (۱) در ثابت دلخواه c این مطلب ثابت می‌شود، به‌طوری که $c\mathbf{A}\mathbf{x} = c\lambda\mathbf{x}$. حال، چون ماتریس با کمیت نرده‌ای جابه‌جا می‌شود، داریم $c\mathbf{A} = \mathbf{A}c$، در نتیجه $\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = \lambda(c\mathbf{x})$، که نشان می‌دهد $c\mathbf{x}$ نیز یک ویژه‌بردار $\mathbf{A}$ با همان ویژه‌مقدار λ است.

با وجود این، $c\mathbf{x}$ نسبت به $\mathbf{x}$ وابستهٔ خطی است و اگر بخواهیم تمام این ویژه‌بردارها را یکی‌یکی بشماریم، به‌روشنی می‌بینیم تعدادشان نامتناهی می‌شود، زیرا می‌توانیم $\mathbf{x}$ را در هر ثابت دلخواهی ضرب کنیم و یک ویژه‌بردار جدید به‌دست آوریم. بنابراین، این ویژه‌بردارها را نمی‌توان تک‌تک به‌حساب آورد.

ممکن است همهٔ ویژه‌مقدارهای یک ماتریس از یکدیگر متمایز نباشند. بعضی از آنها ممکن است بیش از یکبار تکرار شوند. این زمانی اتفاق می‌افتد که چندجمله‌ای مشخصه دو یا چند ریشهٔ یکسان داشته باشد. اگر ویژه‌مقداری k بار تکرار شود، آن ماتریس حداکثر k ویژه‌بردار مستقل خطی دارد که همگی با ویژه‌مقدار یکسانی متناظرند. بنابراین، k را چندگانگی ویژه‌مقدار می‌نامند.

اگر λ را با یکی از ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$، مثلاً λ_i، برابر بگیریم، دراین‌صورت $\det(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}) = 0$ می‌شود. بنابراین، روشن است که s، یعنی رتبهٔ $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})$ از n کوچکتر است. از دستگاه معادلات (۳الف) تنها s معادلهٔ آن مستقل خطی می‌شود و این دستگاه جوابی با اختیار $(n-s)$گانه خواهد داشت. یا به‌عبارت دیگر، این دستگاه $n - s$ جواب مستقل خطی خواهد داشت.

اکنون اگر ویژه‌مقدار λ_i دارای چندگانگی k باشد، رتبهٔ ماتریس $\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}$ برابر با $s = n - k$ می‌شود، بنابراین، دستگاه معادلات (۳الف) دقیقاً $n - s = k$ جواب مستقل خطی خواهد داشت.

---

۱. در فصل ۱۰ دربارهٔ ماتریسهایی که n ویژه‌بردار مستقل خطی ندارند، بحث می‌کنیم.

یعنی، ویژه‌مقدار با چندگانگی kی ماتریس قطری شدنی $\mathbf{A}$ به k ویژه‌بردار مستقل خطی آن وابسته است. این ویژه‌بردارهای مستقل خطی را که ویژه‌مقدار یکسانی دارند، ویژه‌بردارهای واگن می‌نامند.

با تعیین ویژه‌مقدارها، ویژه‌بردارها را به‌سادگی می‌توان پیدا کرد. یکی از ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ را به‌جای λ در معادلات (۳الف) قرار می‌دهیم و آن‌را برای $x_۱$، $x_۲$، . . .، x_n حل می‌کنیم؛ اینها همان مؤلفه‌های ویژه‌بردار خواسته شده‌اند. این شیوه را می‌توان برای هر ویژه‌مقدار متمایز $\mathbf{A}$ تکرار کرد.

مثال ۴. ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای ماتریس زیر را بیابید

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} q & p & p \\ p & q & p \\ p & p & q \end{bmatrix} \qquad (۱۸)$$

در حالی که p و q کمیتهای نرده‌ای‌اند و $p \neq ۰$ است.

حل: چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس فوق عبارت است از

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} q-\lambda & p & p \\ p & q-\lambda & p \\ p & p & q-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (q-p-\lambda)[\lambda^۲ - (۲q+p)\lambda + (q^۲ + qp - ۲p^۲)]$$

$$= (q-p-\lambda)^۲(q+۲p-\lambda) \qquad (۱۹)$$

بنابراین، ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ عبارت‌اند از

$$\lambda_۱ = q-p, \qquad \lambda_۲ = q-p, \qquad \lambda_۳ = q+۲p \qquad (۲۰)$$

می‌بینیم که ویژه‌مقدار $q-p$ چندگانگی ۲ دارد، در حالی که چندگانگی ویژه‌مقدار $q+۲p$ برابر با ۱ است.

برای به‌دست آوردن ویژه‌بردارها، ابتدا $\lambda = \lambda_۳ = q + ۲p$ قرار می‌دهیم و معادلهٔ

$(\mathbf{A}-\lambda_{۳}\mathbf{I})\mathbf{x}=\circ$ را حل می‌کنیم. داریم

$$\begin{bmatrix} -۲p & p & p \\ p & -۲p & p \\ p & p & -۲p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{۱} \\ x_{۲} \\ x_{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix} \qquad \text{(۲۱الف)}$$

یا

$$\begin{aligned} -۲px_{۱}+px_{۲}+px_{۳}&=\circ \\ px_{۱}-۲px_{۲}+px_{۳}&=\circ \\ px_{۱}+px_{۲}-۲px_{۳}&=\circ \end{aligned} \qquad \text{(۲۱ب)}$$

رتبهٔ ماتریس معادلهٔ (۲۱الف)، ۲ می‌شود، بنابراین تنها دو معادله از معادلات (۲۱ب) مستقل است. معادلهٔ سوم قید دیگری اضافه نمی‌کند. با حل کردن هر دو معادلهٔ دلخواهی از (۲۱ب)، به‌دست می‌آوریم

$$x_{۳}=x_{۲}=x_{۱} \qquad x_{۱}\ \text{اختیاری} \qquad \text{(۲۲)}$$

با فرض $x_{۱}=a$، ویژه‌بردار متناظر با ویژه‌مقدار $\lambda_{۳}=q+۲p$ می‌شود

$$\mathbf{x}'_{۳}=\{a \quad a \quad a\} \qquad \text{(۲۳الف)}$$

یا، با انتخاب $a=۱$، داریم

$$\mathbf{x}_{۳}=\{۱ \quad ۱ \quad ۱\} \qquad \text{(۲۳ب)}$$

سپس $\lambda=q-p$ می‌گیریم و معادلهٔ $[\mathbf{A}-(q-p)\mathbf{I}]\mathbf{x}=\circ$ را حل می‌کنیم. داریم

$$\begin{bmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{۱} \\ x_{۲} \\ x_{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix} \qquad \text{(۲۴)}$$

به‌سادگی می‌بینیم که رتبهٔ ماتریس معادلهٔ (۲۴) برابر با ۱ است که با این واقعیت که ویژه‌مقدار $q-p$ چندگانگی ۲ دارد، سازگار است. پس تنها یک معادلهٔ مستقل وجود دارد و نوشتن هر سه

معادله تأثیری ندارد. معادله‌ای که باید حل کنیم، عبارت است از

$$px_۱ + px_۲ + px_۳ = ۰ \qquad \text{(۲۵الف)}$$

با توجه به اینکه $p \neq ۰$ است، جواب آن می‌شود

$$x_۳ = -x_۱ - x_۲ \qquad x_۱ \text{ و } x_۲ \text{ اختیاری} \qquad \text{(۲۵ب)}$$

که شامل اختیاری دوگانه است. $x_۱$ و $x_۲$ بنابر انتخاب ما ممکن است هر مقداری بگیرد. ابتدا، برای یافتن ویژه‌بردار اول، $x_۱ = ۱$ و $x_۲ = ۰$ می‌گیریم، داریم

$$\mathbf{x}_۱ = \{۱ \quad ۰ \quad -۱\} \qquad (۲۶)$$

برای به‌دست آوردن دومین ویژه‌بردار، می‌توانیم $x_۱ = ۰$ و $x_۲ = ۱$ بگیریم، بنابراین، $x_۳ = -۱$ می‌شود که ویژه‌بردار زیر را نتیجه می‌دهد

$$\mathbf{x}_۲ = \{۰ \quad ۱ \quad -۱\} \qquad (۲۷)$$

توجه کنید که کلیترین ویژه‌بردار با ویژه‌مقدار $q - p$ عبارت است از $\{a \quad b \quad -a-b\}$ که a و b هر مقدار دلخواهی می‌گیرند. با وجود این، ویژه‌بردار فوق نسبت به $\mathbf{x}_۱$ و $\mathbf{x}_۲$ وابستگی خطی دارد؛ در واقع، می‌بینیم که

$$\{a \quad b \quad -a-b\} = a\mathbf{x}_۱ + b\mathbf{x}_۲ \qquad (۲۸)$$

بنابراین، در پایان جواب می‌شود

(الف) ویژه‌مقدار $q + ۲p$، ویژه‌بردار $\{۱ \quad ۱ \quad ۱\}$

(ب) ویژه‌مقدار $q - p$ با چندگانگی ۲؛ مجموعه‌ای از دو ویژه‌بردار مستقل خطی:

$$\{۰ \quad ۱ \quad -۱\}, \{۱ \quad ۰ \quad -۱\}$$

اگر ویژه‌بردارهای بهنجار را بخواهیم، ویژه‌بردارهای بالا را می‌توانیم به‌صورت زیر بهنجار کنیم

$$\mathbf{x}_۱ = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\{۱ \; ۰ \; -۱\}, \; \mathbf{x}_۲ = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\{۰ \; ۱ \; -۱\}, \; \mathbf{x}_۳ = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\{۱ \; ۱ \; ۱\} \qquad (۲۹)$$

به‌روشنی می‌توان اثبات کرد که عمل ماتریس $\mathbf{A}$ی معادلهٔ (۱۸) بر هر یک از ویژه‌بردارهایش مضرب ثابتی از همان ویژه‌بردار می‌شود. بنابراین

$$\begin{bmatrix} q & p & p \\ p & q & p \\ p & p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (q+۲p)a \\ (q+۲p)a \\ (q+۲p)a \end{bmatrix} = (q+۲p) \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix} \qquad (\text{۳۰الف})$$

$$\begin{bmatrix} q & p & p \\ p & q & p \\ p & p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (q-p)a \\ (q-p)b \\ (p-q)(a+b) \end{bmatrix} = (q-p) \begin{bmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{bmatrix} \qquad (\text{۳۰ب})$$

مثال ۵. نشان دهید که (الف) تمام ویژه‌مقدارهای ماتریس هرمیتی حقیقی است و (ب) ویژه‌بردارهای متناظر با ویژه‌مقدارهای متمایز متعامدند.

حل: (الف) فرض کنید $\mathbf{H}$ ماتریسی هرمیتی است و $\mathbf{x}$ یک ویژه‌بردار آن با ویژه‌مقدار λ است، بنابراین

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \qquad (\text{۳۱الف})$$

مزدوج هرمیتی این معادله را درنظر می‌گیریم، با توجه به اینکه $\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}$ است، داریم

$$\mathbf{x}^\dagger\mathbf{H} = \lambda^*\mathbf{x}^\dagger \qquad (\text{۳۱ب})$$

معادلهٔ (۳۱الف) را از سمت چپ در $\mathbf{x}^\dagger$ و معادلهٔ (۳۱ب) را از سمت راست در $\mathbf{x}$ ضرب می‌کنیم با تفریق یکی از دیگری، داریم

$$(\lambda - \lambda^*)\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x} = ۰ \qquad (۳۲)$$

اکنون چون $\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x}$ صفر نمی‌شود، داریم

$$\lambda^* = \lambda \qquad (۳۳)$$

که نشان می‌دهد ویژه‌مقدار λ حقیقی است.

(ب) فرض کنید $\mathbf{x}_۱$ و $\mathbf{x}_۲$ دو ویژه‌بردار $\mathbf{H}$ است که به‌ترتیب با دو ویژه‌مقدار متمایز $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ متناظر است، به‌طوری که

$$\mathbf{H}\mathbf{x}_۱ = \lambda_۱\mathbf{x}_۱ \tag{۳۴الف}$$

$$\mathbf{H}\mathbf{x}_۲ = \lambda_۲\mathbf{x}_۲ \tag{۳۴ب}$$

مزدوج هرمیتی معادلهٔ (۳۴ب) عبارت است از

$$\mathbf{x}_۲^\dagger\mathbf{H} = \lambda_۲\mathbf{x}_۲^\dagger \tag{۳۵}$$

که از حقیقی بودن $\lambda_۲$ استفاده کرده‌ایم. معادلهٔ (۳۴الف) را از سمت چپ در $\mathbf{x}_۲^\dagger$ و معادلهٔ (۳۵) را از سمت راست در $\mathbf{x}_۱$ ضرب می‌کنیم و آنها را از هم کم می‌کنیم، داریم

$$(\lambda_۱ - \lambda_۲)\mathbf{x}_۲^\dagger\mathbf{x}_۱ = ۰ \tag{۳۶}$$

چون $\lambda_۲ \neq \lambda_۱$ است، داریم $\mathbf{x}_۲^\dagger\mathbf{x}_۱ = ۰$، که نشان می‌دهد بردارهای $\mathbf{x}_۱$ و $\mathbf{x}_۲$ نسبت به یکدیگر متعامدند.

۳.۹ قطری کردن ماتریس

فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریس مربعی مرتبهٔ n با اجزای a_{ij} است و n ویژه‌بردار مستقل خطی دارد که آنها را با $\mathbf{x}_i$ نشان می‌دهیم. فرض کنید λ_i ویژه‌مقدارهای متناظرشان باشد، بنابراین $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$. اگر ویژه‌بردارهای $\mathbf{x}_i$ را با بردارهای ستونی به‌صورت $\mathbf{x}_i = \{x_{۱i} \;\; x_{۲i} \cdots x_{ni}\}$ نشان دهیم، دراین‌صورت معادلهٔ ویژه‌مقدار را می‌توان به‌صورت ماتریسی زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & & & \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{۱i} \\ x_{۲i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} x_{۱i} \\ x_{۲i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix} \tag{۳۷الف}$$

jامین معادلهٔ بالا را به‌صورت صریح می‌نویسیم، داریم

$$\sum_{k=۱}^{n} a_{jk}x_{ki} = \lambda_i x_{ji} \tag{۳۷ب}$$

حال ماتریس $\mathbf{P}$ از مرتبهٔ $n \times n$ را طوری تشکیل دهید که ستونهای آن بردارهای $\mathbf{x}_i$ باشند، یعنی

$$\mathbf{P} = [\mathbf{x}_۱ \ \ \mathbf{x}_۲ \cdots \mathbf{x}_n] = \begin{bmatrix} x_{۱۱} & \cdots & x_{۱i} \cdots x_{۱n} \\ x_{۲۱} & \cdots & x_{۲i} \cdots x_{۲n} \\ \vdots & & \\ x_{n۱} & \cdots & x_{ni} \cdots x_{nn} \end{bmatrix} ; (\mathbf{P})_{ji} = x_{ji} \qquad (۳۸)$$

چون بردارهای $\mathbf{x}_i$ مستقل خطی‌اند، ماتریس $\mathbf{P}$، بنابر نتیجهٔ فرعی ۲ از مثال ۶.۸ ناتکین می‌شود؛ بنابراین $\mathbf{P}^{-۱}$ وجود دارد. اکنون ادعا می‌کنیم که ماتریس $\mathbf{P}^{-۱}\mathbf{AP}$ قطری است و اجزای قطری آن ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$یند.

برای اثبات، ماتریس قطری $\mathbf{\Lambda}$ را با اجزای قطری λ_i تعریف می‌کنیم، یعنی

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & & & & \\ & \lambda_۲ & & & ۰ \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & ۰ & & & \cdot \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (۳۹)$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\mathbf{P}^{-۱}\mathbf{AP} = \mathbf{\Lambda} \qquad (۴۰\text{الف})$$

یا، با ضرب کردن این معادله از سمت چپ در $\mathbf{P}$

$$\mathbf{AP} = \mathbf{P\Lambda} \qquad (۴۰\text{ب})$$

جزء jiام سمت چپ معادلهٔ بالا را درنظر می‌گیریم، داریم

$$(\mathbf{AP})_{ji} = \sum_{k=۱}^{n} (\mathbf{A})_{jk}(\mathbf{P})_{ki} = \sum_{k=۱}^{n} a_{jk} x_{ki} = \lambda_i x_{ji} \qquad (۴۱\text{الف})$$

در اینجا از معادلهٔ (۳۷ب) استفاده کرده‌ایم. اکنون جزء jiام سمت راست معادلهٔ (۴۰ب) را درنظر می‌گیریم که می‌شود

$$(\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda})_{ji} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{P})_{jk}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{k=1}^{n} x_{jk}\lambda_i\delta_{ki} = \lambda_i x_{ji} \qquad \text{(۴۱ب)}$$

معادلات (۴۱الف) و (۴۱ب) به‌روشنی درستی معادلات (۴۰) را ثابت می‌کنند. به‌این ترتیب ادعای ما ثابت می‌شود.

این فرایند را قطری کردن ماتریس می‌نامند.

مثال ۶. ماتریس معادلهٔ (۱۸) را قطری کنید.

حل: اکنون، ماتریسی تشکیل می‌دهیم که ستونهایش ویژه‌بردارهای ماتریس مفروض $\mathbf{A}$ی معادلهٔ (۱۸) باشد. از معادلات (۲۳ب)، (۲۶) و (۲۷)، داریم

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۴۲)$$

وارون آن می‌شود

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۴۳)$$

پس، داریم

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q & p & p \\ p & q & p \\ p & p & q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q-p & 0 & 0 \\ 0 & q-p & 0 \\ 0 & 0 & q+2p \end{bmatrix} \qquad (۴۴)$$

توجه کنید که $\mathbf{P}^{-۱}\mathbf{AP}$ ماتریسی قطری است که اجزای قطری آن همان ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ یند.

بنابراین، می‌توانیم قضیهٔ زیر را مطرح کنیم:

اگر ماتریسی از مرتبهٔ n دارای n ویژه‌بردار مستقل خطی باشد، دراین‌صورت از طریق یک تبدیل تشابهی به ماتریسی قطری مربوط می‌شود که اجزای قطریش ویژه‌مقدارهای آن ماتریس‌اند.

باید دقت کنید که ماتریس $\mathbf{P}$ای که بتواند ماتریس معلومی را قطری کند، یکتا نیست. زیرا در تشکیل $\mathbf{P}$ ویژه‌بردارهای $\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$، ...، $\mathbf{x}_n$ را می‌توانیم به هر ترتیبی قرار دهیم. در مثال ۶، برای نمونه، می‌توانستیم به‌جای $\mathbf{P} = [\mathbf{x}_۱ \ \ \mathbf{x}_۲ \ \ \mathbf{x}_۳]$، ماتریس زیر را انتخاب کنیم

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{x}_۳ \ \ \mathbf{x}_۱ \ \ \mathbf{x}_۲] = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix} \qquad (۴۵)$$

دراین‌صورت، می‌رسیدیم به

$$\mathbf{Q}^{-۱}\mathbf{AQ} = \begin{bmatrix} q+۲p & ۰ & ۰ \\ ۰ & q-p & ۰ \\ ۰ & ۰ & q-p \end{bmatrix} \qquad (۴۶)$$

که این هم ماتریسی قطری است که اجزای قطری آن ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ یند. می‌بینیم که ترتیب ویژه‌مقدارها در دو معادلهٔ (۴۶) و (۴۴) متفاوت است و اینکه، در هر حالت، ترتیب ویژه‌مقدارها متناظر با ترتیب ویژه‌بردارها در ساختار ماتریس قطری‌کننده است. بنابراین، می‌توانیم این قاعدهٔ کلی را بیان کنیم که در فرایند قطری کردن $\mathbf{P}^{-۱}\mathbf{AP} = \mathbf{\Lambda}$، ترتیب ویژه‌مقدارها در $\mathbf{\Lambda}$ متناظر با ترتیب ویژه‌بردارهای $\mathbf{A}$ است که در $\mathbf{P}$ تشکیل داده‌ایم.

۴.۹ ویژه‌بردارهای ماتریسهای جابه‌جایی‌پذیر

حال قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم که هم در جبر ماتریسی و هم در مکانیک کوانتومی اهمیت زیادی دارد. این قضیه به شرح زیر است.[۱]

می‌شود مجموعهٔ مشترکی از ویژه‌بردارها برای دو ماتریس جابه‌جایی‌پذیر یافت.

فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو ماتریس مربعی مرتبهٔ n باشند، که با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند، به‌طوری که

$$\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0 \tag{۴۷}$$

ابتدا، فرض کنید λ یک ویژه‌مقدار $\mathbf{A}$ با چندگانگی ۱، متناظر با ویژه‌بردار $\mathbf{x}$ باشد. معادلهٔ ویژه‌مقدار زیر را درنظر بگیرید

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{۴۸}$$

و هر دو طرف آن‌را از سمت چپ در $\mathbf{B}$ ضرب کنید. با استفاده از معادلهٔ (۴۷)، معادلهٔ بالا می‌شود

$$\mathbf{BA}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{B}\mathbf{x}) \tag{۴۹}$$

در اینجا $\mathbf{B}$ یک ماتریس $n \times n$ و $\mathbf{x}$ برداری $n \times 1$ است؛ بنابراین، $\mathbf{B}\mathbf{x}$ نیز برداری $n \times 1$ است. معادلهٔ (۴۹) نشان می‌دهد که $\mathbf{B}\mathbf{x}$ هم ویژه‌بردار $\mathbf{A}$ با همان ویژه‌مقدار λ است. اما با توجه به اینکه $\mathbf{x}$ ویژه‌بردار ناتباهیدهٔ $\mathbf{A}$ است، هر بردار دیگری که ویژه‌بردار $\mathbf{A}$ با همان ویژه‌مقدار $\mathbf{x}$ باشد، مضربی از $\mathbf{x}$ است، یعنی

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \mu\mathbf{x} \tag{۵۰}$$

که μ کمیتی نرده‌ای است. این نشان می‌دهد که $\mathbf{x}$ همچنین ویژه‌بردار $\mathbf{B}$ با ویژه‌مقدار μ است. بنابراین در این قسمت، ابتدا ثابت کردیم که اگر دو ماتریس با یکدیگر جابه‌جا شوند، هر ویژه‌بردار ناتباهیدهٔ یکی ویژه‌بردار دیگری نیز است و برعکس.

---

۱. این قضیه در مکانیک کوانتومی نیز با تبدیل واژهٔ "ماتریس" به "عملگر" معتبر است. اثبات آن نیز با تغییراتی مناسب معتبر است.

سپس، فرض کنید λ یک ویژه‌مقدار $\mathbf{A}$ با چندگانگی k باشد. این بدین معنی است که $\mathbf{A}$، k ویژه‌بردار مستقل خطی، مثلاً $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، …، $\mathbf{x}_k$ دارد، که هر یک از آنها متناظر با ویژه‌مقدار λ است؛ یا

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda \mathbf{x}_i, \qquad 1 \leq i \leq k \tag{۵۱}$$

این بار، معادلهٔ (۵۱) را از چپ در $\mathbf{B}$ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}_i) = \lambda(\mathbf{B}\mathbf{x}_i) \tag{۵۲}$$

که نشان می‌دهد $\mathbf{B}\mathbf{x}_i$ نیز ویژه‌بردار $\mathbf{A}$ با همان ویژه‌مقدار λ است. حال کلیترین ویژه‌بردار $\mathbf{A}$ با ویژه‌مقدار λ باید ترکیبی خطی از ویژه‌بردارهای تباهیدهٔ $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، …، $\mathbf{x}_k$ باشد، به‌طوری که

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ij}\mathbf{x}_j \qquad 1 \leq i \leq k \tag{۵۳}$$

که c_{ij}ها ضرایب نرده‌ای معینی‌اند. ماتریس $\mathbf{C} \equiv [c_{ij}]$ از مرتبهٔ k را تعریف کنید و فرض کنید این ماتریس به‌صورت زیر قطری شود

$$\mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & & \\ & \mu_2 & & & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & 0 & & & \cdot \\ & & & & \mu_k \end{bmatrix} \tag{۵۴}$$

که $\mathbf{Q}$ را ماتریسی قطری با اجزای قطری μ_i تعریف می‌کند.

جزء ijام $\mathbf{D}$ را، d_{ij} را، بگیرید؛ سپس جزء ijام دو طرف معادلهٔ (۵۴) را مساوی قرار دهید، داریم $(\mathbf{DC})_{ij} = (\mathbf{QD})_{ij}$، یا

$$\sum_{l=1}^{k} d_{il}c_{lj} = \sum_{l=1}^{k} \mu_i \delta_{il} d_{lj} = \mu_i d_{ij} \tag{۵۵}$$

بردارهای جدید $\mathbf{y}_i$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{y}_i = \sum_{l=1}^{k} d_{il}\mathbf{x}_l \qquad 1 \leq i \leq k \tag{۵۶}$$

که ترکیب خطی $\mathbf{x}_i$هایند. با توجه به اینکه ماتریس $\mathbf{D}$ ناتکین است، k بردار $\mathbf{y}_i$ مستقل خطی می‌شوند. به‌علاوه، چون اینها ترکیب خطی ویژه‌بردارهای تباهیده‌اند، هر $\mathbf{y}_i$ ویژه‌بردار $\mathbf{A}$ با همان ویژه‌مقدار λ نیز می‌شود. حال عمل $\mathbf{B}$ را روی $\mathbf{y}_i$ درنظر بگیرید

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}\mathbf{y}_i &= \sum_{l=1}^{k} d_{il}\mathbf{B}\mathbf{x}_l \\
&= \sum_{l,j=1}^{k} d_{il}c_{lj}\mathbf{x}_j && [\text{از معادلهٔ (۵۳)}] \\
&= \sum_{j=1}^{k} \mu_i d_{ij}\mathbf{x}_j && [\text{از معادلهٔ (۵۵)}] \\
&= \mu_i\mathbf{y}_i \qquad 1 \leq i \leq k && [\text{از معادلهٔ (۵۶)}]
\end{aligned} \tag{۵۷}$$

که نشان می‌دهد $\mathbf{y}_i$ها $(1 \leq i \leq k)$ ویژه‌بردارهای $\mathbf{B}$ نیز هستند که به‌ترتیب به ویژه‌مقدارهای μ_i وابسته‌اند. بنابراین، k بردار $\mathbf{y}_i$ ویژه‌بردارهای مشترک $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$اند.

تاکنون ثابت کرده‌ایم که اگر $\mathbf{A}$ دارای k ویژه‌بردار تباهیدهٔ $\mathbf{x}_i$ باشد، دراین‌صورت می‌توان مجموعه‌ای از k ترکیب مستقل خطی از $\mathbf{x}_i$ها یافت که ویژه‌بردارهای $\mathbf{B}$ نیز باشد.

چنانچه این فرایند را برای هر ویژه‌مقدار متمایز $\mathbf{A}$ ادامه دهیم، می‌بینیم که در نهایت می‌توان مجموعهٔ مشترکی از ویژه‌بردارها را برای دو ماتریس جابه‌جایی‌پذیر پیدا کرد. به‌این ترتیب قضیه ثابت می‌شود. توجه کنید که تمرین ۹.۵ عکس این قضیه است.

این قضیه را آشکارا می‌توان به هر تعداد ماتریس که دوبه‌دو با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند، تعمیم داد. یعنی، مجموعه‌ای از ماتریسها که هر یک از آنها با دیگری جابه‌جا می‌شود. بنابراین، به‌این قضیهٔ تعمیم‌یافته می‌رسیم که برای هر تعداد ماتریسی که دوبه‌دو با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند، می‌توان مجموعهٔ مشترکی ویژه‌بردار یافت. و یا می‌توانیم بگوییم که همهٔ ماتریسهایی را که دوبه‌دو با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند، می‌توان همزمان قطری کرد.

مثال ۷. مجموعهٔ مشترکی از ویژه‌بردارها را برای دو ماتریس زیر بیابید.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -۱ & \sqrt{۶} & \sqrt{۲} \\ \sqrt{۶} & ۰ & \sqrt{۳} \\ \sqrt{۲} & \sqrt{۳} & -۲ \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} ۱۰ & \sqrt{۶} & -\sqrt{۲} \\ \sqrt{۶} & ۹ & \sqrt{۳} \\ -\sqrt{۲} & \sqrt{۳} & ۱۱ \end{bmatrix} \tag{۵۸}$$

حل: به‌سادگی اثبات می‌شود که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند؛ در واقع

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\begin{bmatrix} -۶ & ۹\sqrt{۶} & ۱۵\sqrt{۲} \\ ۹\sqrt{۶} & ۹ & ۹\sqrt{۳} \\ ۱۵\sqrt{۲} & ۹\sqrt{۳} & -۱۱ \end{bmatrix} \tag{۵۹}$$

ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ عبارت‌اند از ۳، ۳−، ۳−. ویژه‌مقدار ۳ چندگانگی ۱ دارد، در حالی‌که ویژه‌مقدار ۳− چندگانگی ۲ دارد.

ویژه‌بردار متناظر با $\lambda = ۳$ عبارت است از

$$\mathbf{x}_۱=\{\sqrt{۲} \quad \sqrt{۳} \quad ۱\} \tag{۶۰}$$

چون $\mathbf{x}_۱$ ویژه‌بردار ناتباهیدهٔ $\mathbf{A}$ است، ویژه‌بردار $\mathbf{B}$ نیز باید باشد که به‌سادگی اثبات می‌شود:

$$\begin{bmatrix} ۱۰ & \sqrt{۶} & -\sqrt{۲} \\ \sqrt{۶} & ۹ & \sqrt{۳} \\ -\sqrt{۲} & \sqrt{۳} & ۱۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{۲} \\ \sqrt{۳} \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۲\sqrt{۲} \\ ۱۲\sqrt{۳} \\ ۱۲ \end{bmatrix}=۱۲\begin{bmatrix} \sqrt{۲} \\ \sqrt{۳} \\ ۱ \end{bmatrix} \tag{۶۱}$$

بنابراین، ۱۲ یکی از ویژه‌مقدارهای $\mathbf{B}$ وابسته به ویژه‌بردار $\mathbf{x}_۱$ است.

برای ویژه‌مقدار تباهیدهٔ دوگانهٔ $\lambda = -۳$، مسیری را دنبال می‌کنیم که کمی از روش اثبات قضیه متفاوت است. کلیترین ویژه‌بردار $\mathbf{A}$ با ویژه‌مقدار $\lambda = -۳$ می‌شود

$$\mathbf{x}=\{a \quad b \quad -\sqrt{۲}a-\sqrt{۳}b\} \tag{۶۲}$$

که شامل دو ثابت اختیاری است. می‌خواهیم دو ویژه‌بردار مستقل خطی به‌صورت معادلهٔ (۶۲) به‌دست بیاوریم که ویژه‌بردار $\mathbf{B}$ نیز باشند. بنابراین، شرطهایی را برای a و b پیدا می‌کنیم که به‌ازای

آنها $\mathbf{x}$ ویژه‌بردار $\mathbf{B}$ باشد. داریم

$$\mathbf{Bx} = \begin{bmatrix} 10 & \sqrt{6} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 9 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ -\sqrt{2}a - \sqrt{3}b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12a + 2\sqrt{6}b \\ 6b \\ -12\sqrt{2}a - 10\sqrt{3}b \end{bmatrix} \tag{63}$$

برای اینکه $\mathbf{x}$ ویژه‌بردار $\mathbf{B}$ باشد، باید داشته باشیم

$$\begin{aligned} 12a + 2\sqrt{6}b &= \mu a \\ 6b &= \mu b \\ 12\sqrt{2}a + 10\sqrt{3}b &= \mu(\sqrt{2}a + \sqrt{3}b) \end{aligned} \tag{64}$$

از دومین معادله از سه معادلهٔ بالا نتیجه می‌گیریم که یا $\mu = 6$ یا $b = 0$. اگر $b = 0$ بگیریم، می‌بینیم که چنانچه $\mu = 12$ باشد، معادلات اول و سوم صادق‌اند. ویژه‌بردار متناظر با $a = 1$، عبارت است از

$$\mathbf{x}_2 = \{1 \quad 0 \quad -\sqrt{2}\} \tag{65}$$

اگر $\mu = 6$ بگیریم، چنانچه $b = -\sqrt{3}a/\sqrt{2}$ باشد، اولین و سومین معادله از معادلات (۶۴) برقرار می‌شوند. با انتخاب $a = \sqrt{2}$، ویژه‌بردار متناظر می‌شود

$$\mathbf{x}_3 = \{\sqrt{2} \quad -\sqrt{3} \quad 1\} \tag{66}$$

سه ویژه‌بردار $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، و $\mathbf{x}_3$ که به‌ترتیب با معادلات (۶۰)، (۶۵)، و (۶۶) داده شده‌اند، مجموعهٔ مشترکی از ویژه‌بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ اند. ویژه‌مقدارهایشان نسبت به $\mathbf{A}$ به‌ترتیب عبارت است از ۳، ۳−، ۳−، در حالی‌که نسبت به $\mathbf{B}$، به‌ترتیب ۱۲، ۱۲، ۶ است. توجه کنید که هر ترکیب خطی $\mathbf{x}_2$ و $\mathbf{x}_3$ ویژه‌بردار $\mathbf{A}$ می‌شود نه $\mathbf{B}$. همین‌طور، هر ترکیب خطی $\mathbf{x}_1$ و $\mathbf{x}_2$ ویژه‌بردار $\mathbf{B}$ می‌شود و نه $\mathbf{A}$.

۵.۹ تحویل معادلات دیفرانسیل جفت‌شده به‌مسئلهٔ ویژه‌مقدار

اغلب، با جانشینی ساده‌ای، می‌شود دستگاهی از معادلات دیفرانسیل جفت‌شده را به مسئلهٔ ویژه‌مقدار تلخیص کرد و سپس آن‌را حل کرد. اگر این دستگاه دارای شرایط مرزی باشد، آنها را می‌توان در جواب آخر گنجاند. به‌جای بسط نظریه‌ای کلی، این مطلب را با چند مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۸. معادلات دیفرانسیل جفت‌شدهٔ زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned} \dot{y}_۱ &= -۱۱y_۱ - ۱۰y_۲ + ۵y_۳ \\ \dot{y}_۲ &= ۵y_۱ + ۴y_۲ - ۵y_۳ \\ \dot{y}_۳ &= -۲۰y_۱ - ۲۰y_۲ + ۴y_۳ \end{aligned} \tag{۶۷}$$

که y_iها توابعی از پارامتر tاند و نقطه نشان‌دهندهٔ مشتق‌گیری نسبت به t است.

حل: بردار ستونی $\mathbf{y}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{y}(t) = \{y_۱(t) \quad y_۲(t) \quad y_۳(t)\} \tag{۶۸}$$

سپس معادلهٔ (۶۷) را به‌صورت ماتریسی زیر می‌نویسیم

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ay}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -۱۱ & -۱۰ & ۵ \\ ۵ & ۴ & -۵ \\ -۲۰ & -۲۰ & ۴ \end{bmatrix} \tag{۶۹}$$

جواب $\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{wt}$ را امتحان می‌کنیم که $\mathbf{x} = \{x_۱ \; x_۲ \; x_۳\}$، در صورتی که $\mathbf{x}$ و w مستقل از t باشند، داریم $d\mathbf{y}/dt = w\mathbf{x}e^{wt}$ و معادلهٔ (۶۹) می‌شود

$$w\mathbf{x}e^{wt} = \mathbf{Ay} = \mathbf{Ax}e^{wt} \Rightarrow \mathbf{Ax} = w\mathbf{x} \tag{۷۰}$$

که یک معادلهٔ ویژه‌مقدار است. بنابراین، مقدارهای ممکن w ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ هستند و ویژه‌بردارهای متناظر جوابهای $\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{wt}$ را به‌دست می‌دهد.

می‌بینیم که ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ عبارت‌اند از $w = ۴, -۶, -۱$ و ویژه‌بردارهای متناظر به‌ترتیب می‌شوند

$$\mathbf{x}_۱ = \{۱ \quad -۱ \quad ۱\}, \qquad \mathbf{x}_۲ = \{۰ \quad ۱ \quad ۲\}, \qquad \mathbf{x}_۳ = \{۱ \quad -۱ \quad ۰\} \qquad (۷۱)$$

بنابراین، جواب عمومی $\mathbf{y}$ عبارت است از

$$\mathbf{y} = a\mathbf{x}_۱ e^{۴t} + b\mathbf{x}_۲ e^{-۶t} + c\mathbf{x}_۳ e^{-t} \qquad (\text{الف}۷۲)$$

که نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} y_۱(t) &= ae^{۴t} + ce^{-t} \\ y_۲(t) &= -ae^{۴t} + be^{-۶t} - ce^{-t} \\ y_۳(t) &= ae^{۴t} + ۲be^{-۶t} \end{aligned} \qquad (\text{ب}۷۲)$$

همان‌طور که انتظار داریم جواب شامل سه ثابت اختیاری است، زیرا سه معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول داریم. با جانشین کردن معادلات (۷۲ب)، به‌روشنی می‌توانیم ثابت کنیم که معادلات (۶۷) صادق‌اند.

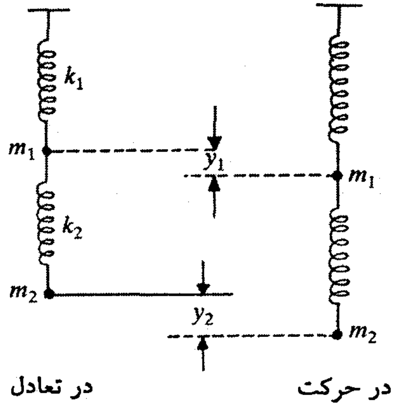
فرض کنید جوابی از دستگاه مفروض می‌خواهیم که شرایط اولیهٔ $y_۱(۰) = ۵$، $y_۲(۰) = -۴$، و $y_۳(۰) = ۴$ در آن صادق باشد. با قرار دادن $t = ۰$ در معادلات (۷۲ب) و با به‌کار بردن مقدارهای اولیه، به‌دست می‌آوریم

$$a + c = ۵, \qquad -a + b - c = -۴, \qquad a + ۲b = ۴ \qquad (۷۳)$$

که می‌دهد $a = ۲$، $b = ۱$، $c = ۳$. بنابراین، جواب مطلوب می‌شود

$$y_۱(t) = ۲e^{۴t} + ۳e^{-t},\ y_۲(t) = -۲e^{۴t} + e^{-۶t} - ۳e^{-t},\ y_۳(t) = ۲e^{۴t} + ۲e^{-۶t} \qquad (۷۴)$$

مثال ۹. دربارهٔ ارتعاشات دو فنر جفت‌شدهٔ شکل ۱.۹ بحث کنید. این دو فنر بدون جرم‌اند و به‌ترتیب ثابت فنری $k_۱ = ۱۸$، $k_۲ = ۶$ دارند. دو جرم $m_۱ = ۳$، $m_۲ = ۲$ به نقاط انتهایی این فنرها وصل شده‌اند.



شکل۱.۹ ارتعاشات سیستمی از دو فنر جفت‌شده.

حل: مانند شکل، $y_۱$ و $y_۲$ را به‌ترتیب تغییر مکان دو جرم بگیرید که رو به پایین مثبت سنجیده می‌شود. کشیدگی فنر اول $y_۱$ است، در حالی‌که کشیدگی فنر دوم $y_۲ - y_۱$ است. جرم $m_۱$ تحت تأثیر دو نیرو قرار دارد: نیروی ناشی از فنر اول در خلاف جهت $y_۱$ و نیروی ناشی از فنر دوم هم‌جهت $y_۲ - y_۱$ است، نیروی رو به پایین نیز مثبت سنجیده می‌شود. جرم $m_۲$ تحت تأثیر یک نیروست که آن هم ناشی از فنر دوم است که در خلاف جهت $y_۲ - y_۱$ وارد می‌شود. نیروی بازگرداننده برابر است با حاصلضرب ثابت فنر در کشیدگی آن. بنابراین معادلات حرکت برای دو جرم عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} m_۱\ddot{y}_۱ &= -k_۱y_۱ + k_۲(y_۲ - y_۱) \\ m_۲\ddot{y}_۲ &= -k_۲(y_۲ - y_۱) \end{aligned} \tag{۷۵}$$

که نقطه نشانهٔ مشتق زمانی است.

در اینجا دستگاهی از دو معادلهٔ دیفرانسیل جفت‌شدهٔ مرتبهٔ دوم داریم. با تعریف

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(k_۱ + k_۲)/m_۱ & k_۲/m_۱ \\ k_۲/m_۲ & -k_۲/m_۲ \end{bmatrix} \tag{۷۶}$$

معادلات (۷۵) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{۷۷}$$

فرض کنید یکی از جوابها این‌گونه باشد

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{wt} \qquad (۷۸)$$

بنابراین، معادلهٔ (۷۷) تبدیل می‌شود به

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = w^{۲}\mathbf{x} \qquad (۷۹)$$

پس مقدارهای ممکن w جذر ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$یند، با جوابهای متناظری که ویژه‌بردارهای $\mathbf{A}$ می‌شوند.

با مقدارهای خاص $m_۱$، $m_۲$، $k_۱$، و $k_۲$ی مفروض این مسئله، ماتریس $\mathbf{A}$ می‌شود

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -۸ & ۲ \\ ۳ & -۳ \end{bmatrix} \qquad (۸۰)$$

ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای این ماتریس می‌شوند

$$w^{۲} = -۹, \quad \mathbf{x}_۱ = \{۲ \quad -۱\}; \quad w^{۲} = -۲, \ \ \mathbf{x}_۲ = \{۱ \quad ۳\} \qquad (۸۱)$$

بنابراین، جواب عمومی این دستگاه عبارت است از

$$\mathbf{y}(t) = b_۱\mathbf{x}_۱e^{۳it} + b_۲\mathbf{x}_۱e^{-۳it} + b_۳\mathbf{x}_۲e^{\sqrt{۲}it} + b_۴\mathbf{x}_۲e^{-\sqrt{۲}it} \qquad (۸۲\text{الف})$$

یا

$$\mathbf{y}(t) = a_۱\mathbf{x}_۱\cos ۳t + a_۲\mathbf{x}_۱\sin ۳t + a_۳\mathbf{x}_۲\cos\sqrt{۲}t + a_۴\mathbf{x}_۲\sin\sqrt{۲}t \qquad (۸۲\text{ب})$$

که b_i و a_i($۱ \leq i \leq ۴$) دو ثابت اختیاری‌اند. جواب عمومی شامل چهار ثابت اختیاری است و با این واقعیت که دو معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ ۲ داریم سازگار است. مؤلفه‌های $\mathbf{y}(t)$ از معادلهٔ (۸۲ب) را جداگانه می‌نویسیم، داریم

$$\begin{aligned} y_۱(t) &= ۲a_۱\cos ۳t + ۲a_۲\sin ۳t + a_۳\cos\sqrt{۲}t + a_۴\sin\sqrt{۲}t \\ y_۲(t) &= -a_۱\cos ۳t - a_۲\sin ۳t + ۳a_۳\cos\sqrt{۲}t + ۳a_۴\sin\sqrt{۲}t \end{aligned} \qquad (۸۳)$$

با جانشین کردن مستقیم این نتایج در معادلات (۷۵) می‌توان درستی آنها را تحقیق کرد.

برای تعیین ثابتهای اختیاری، به‌سادگی می‌توان شرایط اولیه را در جواب عمومی وارد کرد. فرض کنید در $t = ۰$، جرم پایینتر به‌فاصلهٔ مشخص d پایین کشیده شود و سپس رها شود. سرعتهای اولیهٔ دو جرم صفر است. پس $\dot{y}_۱(۰) = ۰$، $\dot{y}_۲(۰) = ۰$. علاوه‌براین، $y_۲(۰) = d$ است. برای تعیین $y_۱(۰)$، فرض می‌کنیم جرم $m_۱$ در $t = ۰$ در حالت تعادل باشد که می‌دهد

$$k_۱ y_۱(۰) = k_۲[y_۲(۰) - y_۱(۰)] \Rightarrow y_۱(۰) = [k_۲/(k_۱ + k_۲)]y_۲(۰) \qquad (۸۴)$$

با انتخاب $d = ۴$ و با به‌کار بردن مقدارهای مشخص $k_۱$ و $k_۲$، داریم $y_۱(۰) = ۱$، $y_۲(۰) = ۴$. این چهار شرط اولیه را در معادلات (۸۳) قرار می‌دهیم، داریم

$$۲a_۱ + a_۳ = ۱, -a_۱ + ۳a_۳ = ۴, ۶a_۲ + \sqrt{۲}a_۴ = ۰, -۳a_۲ + ۳\sqrt{۲}a_۴ = ۰ \quad (۸۵)$$

که دارای جوابهای زیر است

$$a_۱ = -۱/۷, a_۳ = ۹/۷, a_۲ = a_۴ = ۰ \qquad (۸۶)$$

بنابراین، تغییر مکانهای دو جرم در شرایط مفروض می‌شود

$$y_۱(t) = (۹ \cos \sqrt{۲}t - ۲ \cos ۳t)/۷$$
$$y_۲(t) = (۲۷ \cos \sqrt{۲}t + \cos ۳t)/۷ \qquad (۸۷)$$

این فصل را با مثالی به پایان می‌رسانیم که مسئلهٔ ویژه‌مقدار ماتریس هرمیتی را به ویژه‌مقدار ماتریس متقارن ربط می‌دهد.

مثال ۱۰. فرض کنید ماتریس هرمیتی $\mathbf{H}$ از مرتبهٔ n به‌صورت $\mathbf{S} + i\mathbf{A}$ نوشته شود که $\mathbf{S}$ و $\mathbf{A}$ ماتریسهای حقیقی‌اند و فرض کنید ماتریس $\mathbf{R}$ را با اندازهٔ دو برابر به‌صورت زیر تشکیل دهیم

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & -\mathbf{A} \\ \mathbf{A} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \qquad (۸۸)$$

(تمرینهای ۲۱.۳ و ۷.۶) نشان دهید که ویژه‌مقدارهای $\mathbf{R}$ همان ویژه‌مقدارهای $\mathbf{H}$ است که در آن هر ویژه‌مقدار $\mathbf{H}$ دوبار ظاهر می‌شود و ویژه‌بردارهای $\mathbf{R}$ از قسمتهای حقیقی و موهومی ویژه‌بردارهای $\mathbf{H}$ تشکیل می‌شود.

حل: فرض کنید λ یک ویژه‌مقدار $\mathbf{H}$ با ویژه‌بردار $\mathbf{x}$ باشد، به‌طوری که

$$\mathbf{Hx} = \lambda\mathbf{x} \tag{۸۹}$$

فرض کنید $\mathbf{x}$ را نیز به قسمتهای حقیقی و موهومی آن تجزیه کنیم، $\mathbf{x} = \mathbf{y} + i\mathbf{z}$ که $\mathbf{y}$ و $\mathbf{z}$ بردارهای حقیقی nبعدی‌اند. توجه کنید که ویژه‌مقدار λی ماتریس هرمیتی حقیقی است، معادلهٔ (۸۹) می‌شود

$$(\mathbf{S} + i\mathbf{A})(\mathbf{y} + i\mathbf{z}) = \lambda(\mathbf{y} + i\mathbf{z}) \tag{۹۰}$$

یا

$$\begin{aligned} \mathbf{Sy} - \mathbf{Az} &= \lambda\mathbf{y} \\ \mathbf{Ay} + \mathbf{Sz} &= \lambda\mathbf{z} \end{aligned} \tag{۹۱}$$

معادلات (۹۱) را می‌توان به‌صورت ماتریسی به دو روش زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} & -\mathbf{A} \\ \mathbf{A} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \tag{۹۲الف}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} & -\mathbf{A} \\ \mathbf{A} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ -\mathbf{y} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ -\mathbf{y} \end{bmatrix} \tag{۹۲ب}$$

ماتریس سمت چپ معادلات (۹۲) ماتریس $\mathbf{R}$ معادلهٔ (۸۸) است.

این نشان می‌دهد که بردارهای ستونی $2n$بعدی $\{\mathbf{y} \quad \mathbf{z}\}$ و $\{\mathbf{z} \quad -\mathbf{y}\}$ ویژه‌بردارهای تباهیدهٔ $\mathbf{R}$ با ویژه‌مقدار λ هستند و هر ویژه‌مقدار $\mathbf{H}$ دوبار بین ویژه‌مقدارهای $\mathbf{R}$ ظاهر می‌شود.

به‌صورت بردارهای حقیقی $2n$بعدی، $\{\mathbf{y} \quad \mathbf{z}\}$ و $\{\mathbf{z} \quad -\mathbf{y}\}$ نسبت به یکدیگر مستقل خطی‌اند. اما به‌صورت بردارهای مختلط nبعدی داریم

$$\mathbf{y} + i\mathbf{z} = \mathbf{x}, \qquad \mathbf{z} - i\mathbf{y} = -i\mathbf{x} \tag{۹۳}$$

می‌بینیم که $\mathbf{x}$ و $-i\mathbf{x}$ دو بردار مختلط nبعدی وابستهٔ خطی‌اند. بنابراین، هر ویژه‌بردار $\mathbf{H}$ (که ممکن است مختلط باشد) شامل دو ویژه‌بردار تباهیدهٔ حقیقی $\mathbf{R}$ است.

این نتیجه در قطری کردن ماتریسهای هرمیتی با کامپیوتر بسیار مهم است. در اصل، با یک الگوریتم، ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای ماتریس هرمیتی را می‌توانیم به‌دست بیاوریم، تا یک ماتریس متقارن حقیقی را، گرچه با اندازهٔ دو برابر، قطری کنیم.

تمرین

۹. ۱ * نشان دهید که ویژه‌مقدارهای ماتریس مثلثی اجزای قطری آن است.

۹. ۲ نشان دهید که یک ماتریس تکین است، اگر و تنها اگر حداقل یکی از ویژه‌مقدارهایش صفر باشد.

۹. ۳ نتیجهٔ مثال ۳ را، با استفاده از نتیجهٔ مثال ۲ ثابت کنید و توجه کنید که برای ماتریس یکانی $\mathbf{U}^{-۱} = \mathbf{U}^{\dagger}$ است.

۹. ۴ * ویژه‌مقدارهای ممکن ماتریس متعامد چیست؟

۹. ۵ فرض کنید $\mathbf{H}$ و $\mathbf{U}$ دو ماتریسی‌اند که در تمرین ۱۸.۵ تعریف شده‌اند. با فرض اینکه ویژه‌مقدار $\mathbf{U}$ یک نباشد، معادله را برای $\mathbf{H}$ حل کنید و نشان دهید که $\mathbf{H} = i(\mathbf{I}+\mathbf{U})(\mathbf{I}-\mathbf{U})^{-۱}$
[این به تبدیل کیلی معروف است که ماتریس یکانی و هرمیتی را به یکدیگر مربوط می‌کند.]

۹. ۶ ثابت کنید که یک ماتریس متقارن حقیقی متعامد است، اگر و تنها اگر تمام ویژه‌مقدارهایش ± ۱ باشد.

۹. ۷ * نشان دهید که ویژه‌مقدارهای ماتریس حقیقی یا حقیقی است، یا به‌صورت زوج مزدوج مختلط ظاهر می‌شود. نتیجه بگیرید که اگر مرتبهٔ ماتریس حقیقی فرد باشد، حداقل یک ویژه‌مقدار حقیقی دارد.

۹. ۸ * اگر دو ماتریس $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ با تبدیل تشابهی $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-۱}\mathbf{A}\mathbf{P}$ به هم مربوط شوند، نشان دهید که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ چندجمله‌ای مشخصهٔ یکسان، و در نتیجه طیف ویژه‌مقداری یکسانی دارند.

۹. ۹ نشان دهید که ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}^k$، k یک عدد صحیح مثبت است، عبارت‌اند از توانهای kام ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$. اگر $\mathbf{A}$ ناتکین باشد، نشان دهید که این نتیجه برای kی صحیح منفی نیز معتبر است.

۹. ۱۰ اگر λ یک ویژه‌مقدار $\mathbf{A}$ باشد، نشان دهید که یکی از ویژه‌مقدارهای چندجمله‌ای ماتریسی زیر

$$f(\mathbf{A}) = a_۰\mathbf{I} + a_۱\mathbf{A} + a_۲\mathbf{A}^۲ + \cdots + a_k\mathbf{A}^k$$

عبارت است از $f(\lambda) = a_۰ + a_۱\lambda + a_۲\lambda^۲ + \cdots + a_k\lambda^k$.

۹. ۱۱ نشان دهید که هر بردار ستونی nبعدی یک ویژه‌بردار ماتریس ثابت مرتبهٔ n است.

۹. ۱۲ ماتریس $\mathbf{A}$ مفروض است، نشان دهید که می‌شود بردار غیرصفر $\mathbf{x}$ را یافت، به‌طوری که بردار $\mathbf{Ax}$ صفر شود اگر و تنها اگر $\mathbf{A}$ تکین باشد.

۹. ۱۳ * ویژه‌مقدارهای ماتریس زیر را پیدا کنید

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۲ \\ ۴ & ۳ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

سپس $\mathbf{A}^{-۱}$ را به‌دست آورید، ویژه‌مقدارهایش را بیابید و ثابت کنید که معکوس ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ هستند. همچنین نشان دهید که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{A}^{-۱}$ ویژه‌مقدارهای یکسان دارند.

۹. ۱۴ ویژه‌بردارهای ماتریس معادلهٔ (۱۱) را بیابید.

۹. ۱۵ ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای ماتریسهای زیر را بیابید:

(الف)* $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} q & p & p & p \\ p & q & p & p \\ p & p & q & p \\ p & p & p & q \end{bmatrix}$ ، $P \neq ۰$

۹. ۱۶ * فرض کنید $\mathbf{x}$ یک ویژه‌بردار ماتریس هرمیتی $\mathbf{H}$ باشد. اگر $\mathbf{y}$ هر بردار دلخواه متعامد بر $\mathbf{x}$ باشد، نشان دهید که $\mathbf{Hy}$ نیز بر $\mathbf{x}$ متعامد است.

۹. ۱۷ ثابت کنید که ویژه‌بردارهای متناظر با ویژه‌مقدارهای متمایز ماتریس یکانی بر یکدیگر متعامدند.

۹. ۱۸ اگر ماتریس $\mathbf{P}$ ماتریس $\mathbf{A}$ را قطری کند (یعنی، $\mathbf{P}^{-۱}\mathbf{AP}$ قطری است)، ثابت کنید که ستونهای $\mathbf{P}$ ویژه‌بردارهای $\mathbf{A}$یند. [این عکس چیزی است که در معادلات (۴۰) ثابت شد.]

۹. ۱۹ مجموعهٔ مشترکی از ویژه‌بردارها را برای ماتریسهای جابه‌جایی‌پذیر زیر بیابید.

(الف)
$$\begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۶ \\ ۱ & ۵ & -۲ \\ ۲ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} ۸ & -۴ & -۴ \\ -۲ & -۲ & ۴ \\ -۳ & -۹ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

(ب)
$$\begin{bmatrix} ۲۶ & -۳۶ & ۰ \\ ۱۸ & -۲۵ & ۰ \\ -۳۰ & ۴۴ & ۳ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲۴ & -۳۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

۹. ۲۰ * جواب معادلهٔ زیر را بیابید

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

که مقدار آن در $t = ۰$، $\mathbf{x}(۰) = \{۱ \;\; ۱\}$ است.

۹. ۲۱ نشان دهید که ماتریسهای معادلات (۵۸) در رابطهٔ $(\mathbf{A} + ۳\mathbf{I})(\mathbf{B} - ۱۲\mathbf{I}) = ۰$ صدق می‌کنند. سپس نشان دهید که (الف) اگر $\mathbf{x}$ هر برداری بجز ویژه‌بردار $\mathbf{B}$ با ویژه‌مقدار ۱۲ باشد، دراین‌صورت $(\mathbf{B} - ۱۲\mathbf{I})\mathbf{x}$ یک ویژه‌بردار $\mathbf{A}$ است؛ (ب) اگر $\mathbf{y}$ هر برداری بجز ویژه‌بردار $\mathbf{A}$ با ویژه‌مقدار ۳− باشد، دراین‌صورت $(\mathbf{A} + ۳\mathbf{I})\mathbf{y}$ یک ویژه‌بردار $\mathbf{B}$ است.

۹. ۲۲ دربارهٔ نوسانات دو فنر جفت‌شدهٔ شکل ۱.۹ با مجموعه مقدارهای زیر بحث کنید:

(الف) $m_۱ = ۲, m_۲ = ۳, k_۱ = ۸, k_۲ = ۶, y_۲(۰) = ۷, \dot{y}_۱(۰) = \dot{y}_۲(۰) = ۰$

(ب) $m_۱ = ۴, m_۲ = ۲, k_۱ = ۳۶, k_۲ = ۸, y_۲(۰) = ۱۱, \dot{y}_۱(۰) = \dot{y}_۲(۰) = ۰$

۹.۲۳ * ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای ماتریس $n \times n$ زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} q & p & p & \cdots & p \\ p & q & p & \cdots & p \\ p & p & q & \cdots & p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p & p & p & \cdots & q \end{bmatrix}$$

که p و q کمیتهای نرده‌ای حقیقی‌اند، $p \neq ۰$. [این تعمیمی از مثال (۴) است.]

۹.۲۴ اگر λ_i، $n \geq i \geq ۱$، ویژه‌مقدارهای ماتریس $\mathbf{A}$ با مرتبهٔ n باشد، نشان دهید که

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}^k) = \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i^k$$

۹.۲۵ رد یک ماتریس ۲ × ۲، t و دترمینان آن d است. ویژه‌مقدارهای آن‌را بیابید.

۱۰

مسئلهٔ ویژه‌مقدار (۲)

در این فصل[۱]، به بعضی از موضوعهای پیشرفته دربارهٔ مسئلهٔ ویژه‌مقدار می‌پردازیم. همچون شرایط قطری شدن، ماتریسهای قطری‌ناشدنی، قضیهٔ کیلی‌ـهامیلتون، قطری کردن ماتریس بهنجار و غیره.

۱.۱۰ قضیهٔ کیلی‌ـهامیلتون

در فصل ۳ دیدیم که حداکثر $n^۲$ ماتریس مستقل خطی مرتبهٔ $n \times n$ وجود دارد. بنابراین، اگر $\mathbf{A}$ ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد، مجموعهٔ $n^۲ + ۱$ ماتریس $\mathbf{I}$، $\mathbf{A}$، $\mathbf{A}^۲$، $\mathbf{A}^۳$، ...، $\mathbf{A}^{n^۲}$ وابستهٔ خطی می‌شود. به عبارت دیگر، برای هر ماتریس مربعی $\mathbf{A}$، می‌توان معادلهٔ زیر را

$$c_۰ \mathbf{I} + c_۱ \mathbf{A} + c_۲ \mathbf{A}^۲ + \cdots + c_N \mathbf{A}^N = ۰ \qquad (۱)$$

با حداقل چند ضریب غیرصفر c_i صادق دانست که برای سهولت اندیس $N = n^۲$ را به‌کار

۱. از این فصل می‌شود بدون از دست دادن پیوستگی مطالب گذشت.

برده‌ایم. بنابراین، می‌بینیم که چندجمله‌ای ماتریسی حداکثر از مرتبهٔ n^2یی وجود دارد که عیناً با ماتریس صفر برابر است.

با وجود این، اهمیت قضیهٔ کیلی-هامیلتون این است که در واقع، برای هر ماتریس مربعی مرتبهٔ n، چندجمله‌ای ماتریسی از درجهٔ کمتر یا مساوی n وجود دارد که با ماتریس صفر برابر است. اگر $\mathbf{A}$ ماتریسی مربعی با چندجمله‌ای مشخصهٔ زیر باشد

$$D(\lambda) = c_0 \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n \qquad (۵\text{-}۹)$$

بنابر قضیهٔ کیلی-هامیلتون، داریم $D(\mathbf{A}) = 0$، یا

$$c_0 \mathbf{A}^n + c_1\mathbf{A}^{n-1} + c_2\mathbf{A}^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\mathbf{A} + c_n\mathbf{I} = 0 \qquad (۲)$$

معمولاً آن‌را به‌این‌صورت بیان می‌کنیم که هر ماتریس مربعی در معادلهٔ مشخصهٔ خود صدق می‌کند. به اختصار، اگر $D(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ باشد، دراین‌صورت $D(\mathbf{A}) = 0$ است.

ماتریس $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ را درنظر بگیرید، فرض می‌کنیم $\mathbf{B}(\lambda)$ ماتریس هم‌عاملهای $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ باشد. پس، از معادلهٔ (۵۶ب) نتیجه می‌گیریم که

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\widetilde{\mathbf{B}}(\lambda) = D(\lambda)\mathbf{I}$$

چون $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ ماتریس مرتبهٔ n است، هر جزء $\mathbf{B}(\lambda)$ که هم‌عامل هر جزء $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ باشد، چندجمله‌ای λیی از درجهٔ کمتر یا مساوی $n - 1$ خواهد شد. بنابراین، $\widetilde{\mathbf{B}}(\lambda)$ را می‌توان به‌صورت چندجمله‌ای λیی از درجهٔ $n - 1$ نوشت [معادلهٔ (۵۳.۳)]، یعنی

$$\widetilde{\mathbf{B}}(\lambda) = \lambda^{n-1}\mathbf{B}_0 + \lambda^{n-2}\mathbf{B}_1 + \cdots + \lambda\mathbf{B}_{n-2} + \mathbf{B}_{n-1} \qquad (۴)$$

که هر $\mathbf{B}_i$ ماتریسی $n \times n$ است. بنابراین، سمت چپ معادلهٔ (۳) می‌شود

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\widetilde{\mathbf{B}}(\lambda) &= (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})(\lambda^{n-1}\mathbf{B}_0 + \lambda^{n-2}\mathbf{B}_1 + \cdots + \mathbf{B}_{n-1}) \\ &= -[\lambda^n\mathbf{B}_0 + \lambda^{n-1}(\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}\mathbf{B}_0) + \lambda^{n-2}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{A}\mathbf{B}_1) + \\ &\quad \cdots + \lambda(\mathbf{B}_{n-1} - \mathbf{A}\mathbf{B}_{n-2}) - \mathbf{A}\mathbf{B}_{n-1}] \qquad (۵)\end{aligned}$$

در حالی که سمت راست معادلهٔ (۳) چنین می‌شود

$$D(\lambda)\mathbf{I} = c_{۰}\lambda^{n}\mathbf{I} + c_{۱}\lambda^{n-۱}\mathbf{I} + \cdots + c_{n-۱}\lambda\mathbf{I} + c_{n}\mathbf{I} \qquad (۶)$$

با توجه به اینکه بسط چندجمله‌ای دو معادلهٔ (۵) و (۶) باید با هم برابر باشد، ضرایب توانهای مشابه λ باید یکسان باشند، بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} -\mathbf{B}_{۰} &= c_{۰}\mathbf{I} \\ \mathbf{A}\mathbf{B}_{۰} - \mathbf{B}_{۱} &= c_{۱}\mathbf{I} \\ \mathbf{A}\mathbf{B}_{۱} - \mathbf{B}_{۲} &= c_{۲}\mathbf{I} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{A}\mathbf{B}_{n-۲} - \mathbf{B}_{n-۱} &= c_{n-۱}\mathbf{I} \\ \mathbf{A}\mathbf{B}_{n-۱} &= c_{n}\mathbf{I} \end{aligned} \qquad (۷)$$

اولین معادله از معادلات (۷) را از سمت چپ در $\mathbf{A}^{n}$ ضرب می‌کنیم، دومی را در $\mathbf{A}^{n-۱}$، . . .، تا یکی مانده به آخر که آن‌را در $\mathbf{A}$ ضرب می‌کنیم، سپس آنها را با هم جمع می‌کنیم، داریم

$$۰ = c_{۰}\mathbf{A}^{n} + c_{۱}\mathbf{A}^{n-۱} + c_{۲}\mathbf{A}^{n-۲} + \cdots + c_{n-۱}\mathbf{A} + c_{n}\mathbf{I} \qquad (۲)$$

که نتیجهٔ مطلوب است. اگر λ_iها ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ باشند، معادلهٔ (۲) را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت

$$(\mathbf{A} - \lambda_{۱}\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_{۲}\mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_{n}\mathbf{I}) = ۰ \qquad (۸)$$

مثال ۱. ماتریس $\mathbf{A}$ی معادلهٔ (۶۹.۹) را درنظر بگیرید:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -۱۱ & -۱۰ & ۵ \\ ۵ & ۴ & -۵ \\ -۲۰ & -۲۰ & ۴ \end{bmatrix} \qquad (۹)$$

نشان دهید که این ماتریس در قضیهٔ کیلی‌ـهامیلتون صدق می‌کند.

حل: ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ عبارت‌اند از ۴، ۶−، ۱−. بنابراین، داریم

$$(\mathbf{A}-۴\mathbf{I})(\mathbf{A}+۶\mathbf{I})(\mathbf{A}+\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -۱۵ & -۱۰ & ۵ \\ ۵ & ۰ & -۵ \\ -۲۰ & -۲۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۵ & -۱۰ & ۵ \\ ۵ & ۱۰ & -۵ \\ -۲۰ & -۲۰ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} -۱۰ & -۱۰ & ۵ \\ ۵ & ۵ & -۵ \\ -۲۰ & -۲۰ & ۵ \end{bmatrix} = ۰ \qquad (۱۰)$$

۲.۱۰ چندجمله‌ای مینیمال

ثابت می‌شود در موردی که ماتریسها ویژه‌مقدارهایی با چندگانگی بیشتر از یک دارند، ممکن است چندجمله‌ایهایی با درجهٔ کمتر از n وجود داشته باشند که با ماتریس صفر برابر باشند. این مطلب با مثال زیر روشن می‌شود.

مثال ۲. اگر $\mathbf{A}$ ماتریس معادلهٔ (۱۸.۹) باشد، نشان دهید که

$$[\mathbf{A}-(q+۲p)\mathbf{I}][\mathbf{A}-(q-p)\mathbf{I}] = ۰$$

حل: ویژه‌مقدارهای این ماتریس عبارت‌اند از $q+۲p$ با چندگانگی واحد و $q-p$ با چندگانگی دو. بنابر قضیهٔ کیلی-هامیلتون، داریم

$$[\mathbf{A}-(q+۲p)\mathbf{I}][\mathbf{A}-(q-p)\mathbf{I}]^۲ = ۰ \qquad (۱۱)$$

چندجمله‌ای ماتریسی مفروض را درنظر بگیرید:

$$[\mathbf{A}-(q+۲p)\mathbf{I}][\mathbf{A}-(q-p)\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} -۲p & p & p \\ p & -۲p & p \\ p & p & -۲p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad (۱۲)$$

این نشان می‌دهد که برای ماتریس یادشده، چندجمله‌ای درجهٔ ۲یی وجود دارد که صفر می‌شود و عبارت است از

$$\mathbf{A}^{۲} - (۲q + p)\mathbf{A} + (q^{۲} + pq - ۲p^{۲})\mathbf{I} = ۰ \qquad (۱۳)$$

فرض کنید λ_μ، $۱ \le \mu \le l$، نشان دهندهٔ l ویژه‌مقدار متمایز ماتریس $\mathbf{A}$ی مرتبهٔ n باشد. فرض کنید d_μ چندگانگی ویژه‌مقدار λ_μ باشد، به‌نحوی که

$$\sum_{\mu=۱}^{l} d_\mu = n \qquad (۱۴)$$

بنابراین، چندجمله‌ای مشخصهٔ $\mathbf{A}$ را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد

$$D(\lambda) = (\lambda_۱ - \lambda)^{d_۱}(\lambda_۲ - \lambda)^{d_۲} \cdots (\lambda_l - \lambda)^{d_l} \qquad (۱۵)$$

قضیهٔ کیلی-هامیلتون بیان می‌کند:

$$D(\mathbf{A}) = (\lambda_۱\mathbf{I} - \mathbf{A})^{d_۱}(\lambda_۲\mathbf{I} - A)^{d_۲} \cdots (\lambda_l\mathbf{I} - \mathbf{A})^{d_l} = ۰ \qquad (۱۶)$$

اما همان‌طور که در مثال ۲ دیدیم، ممکن است یک چندجمله‌ای ماتریسی با درجهٔ کمتر از n وجود داشته باشد که مساوی ماتریس صفر باشد. اگر $r_۱$، $r_۲$، ...، r_l کوچکترین اعداد صحیح مثبتی باشند که به‌ازای آنها داشته باشیم

$$p(\mathbf{A}) \equiv (\lambda_۱\mathbf{I} - \mathbf{A})^{r_۱}(\lambda_۲\mathbf{I} - \mathbf{A})^{r_۲} \cdots (\lambda_l\mathbf{I} - \mathbf{A})^{r_l} = ۰ \qquad (۱۷)$$

که $r_\mu \le d_\mu$ $(۱ \le \mu \le l)$، دراین‌صورت عبارت زیر را

$$p(\lambda) = (\lambda_۱ - \lambda)^{r_۱}(\lambda_۲ - \lambda)^{r_۲} \cdots (\lambda_l - \lambda)^{r_l} \qquad (۱۸)$$

چندجمله‌ای مینیمال ماتریس می‌نامند. بدیهی است که بالاترین درجهٔ چندجمله‌ای مینیمال n است و همان‌طورکه در مثال ۱ دیدیم، این زمانی پیش می‌آید که چندجمله‌ای مینیمال با چندجمله‌ای مشخصه برابر باشد. این نیز روشن است که چندجمله‌ای مشخصه بر چندجمله‌ای مینیمال تقسیم‌پذیر است.

اکنون بدون اثبات، می‌گوییم که هر عامل در چندجمله‌ای مینیمال حداقل یک‌بار ظاهر می‌شود، یعنی $r_\mu > ۰$، $۱ \le \mu \le l$. فوراً به این نتیجه می‌رسیم که اگر تمام ویژه‌مقدارهای ماتریسی متمایز باشند، دراین‌صورت چندجمله‌ای مینیمال آن با چندجمله‌ای مشخصه‌اش برابر می‌شود.

۳.۱۰ شرط قطری شدن

شرط قطری شدن ماتریس را به روشهای مختلف زیر می‌توان بیان کرد. بار دیگر، آن‌را بدون اثبات، صرفاً بیان می‌کنیم. یک ماتریس مرتبهٔ n قطری شدنی است (یا مجموعه‌ای از n ویژه‌بردار مستقل خطی دارد) اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال آن به‌صورت زیر باشد

$$p(\lambda) = (\lambda_۱ - \lambda)(\lambda_۲ - \lambda)\cdots(\lambda_l - \lambda)$$

که λ_μ ویژه‌مقدارهای متمایز این ماتریس‌اند. به‌عبارت دیگر، ماتریس قطری‌شدنی است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال آن ریشه‌های متمایز داشته باشد. در مثال زیر، در مورد ماتریس قطری ناشدنی بحث می‌کنیم.

مثال ۳. بررسی کنید که آیا ماتریس زیر قطری شدنی است

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \qquad (۱۹)$$

حل: چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس بالا چنین می‌شود

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} ۳-\lambda & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲-\lambda & -۱ \\ ۲ & ۲ & -\lambda \end{bmatrix} = (۱-\lambda)(۲-\lambda)^۲ \qquad (۲۰)$$

بنابراین، ویژه‌مقدارهای آن عبارت‌اند از ۱، ۲، ۲. برای پیدا کردن چندجمله‌ای مینیمال فرض کنید

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}-۲\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۴ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

که ماتریس صفر نیست. از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ کیلی‌ـهامیلتون، انتظار داریم که عبارت $(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}-۲\mathbf{I})^۲$ ماتریس صفر باشد. بنابراین، چندجمله‌ای مینیمال می‌شود $(\lambda-۱)(\lambda-۲)^۲$ که یک ریشهٔ چندگانه دارد و در نتیجه، ماتریس قطری شدنی نیست.

حال ببینیم در تعیین ویژه‌بردارهای $\mathbf{A}$ چه اتفاقی می‌افتد. ویژه‌بردار متناظر با ریشهٔ سادهٔ $\lambda = ۱$، به‌سادگی می‌شود

$$\mathbf{x}_۱ = \{۱ \quad ۰ \quad ۲\} \tag{۲۲}$$

به‌ازای ریشهٔ مضاعف $\lambda = ۲$، داریم

$$(\mathbf{A}-۲\mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۲ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \tag{۲۳}$$

در رابطهٔ فوق ویژگی خاصی می‌یابیم. چون ویژه‌مقدار ۲ چندگانگی ۲ دارد، بنابر تجربهٔ قبلیمان، انتظار داریم که ماتریس $\mathbf{A}-۲\mathbf{I}$ رتبهٔ $۱ = ۲ - ۳$ داشته باشد. ولی در اینجا رتبهٔ ۲ دارد، به‌طوری که معادلهٔ (۲۳) تنها یک جواب مستقل خطی خواهد داشت. این جواب عبارت است از $a = b$، $c = ۲a$ که به دومین ویژه‌بردار می‌انجامد:

$$\mathbf{x}_۲ = \{۱ \quad ۱ \quad ۲\} \tag{۲۴}$$

بنابراین، فقط یک ویژه‌بردار وابسته به ویژه‌مقدار $\lambda = ۲$، با چندگانگی ۲ وجود دارد.

بردار دلخواه $\mathbf{u}$ی مستقل خطی از $\mathbf{x}_۱$ و $\mathbf{x}_۲$ را درنظر می‌گیریم. می‌توانستیم $\mathbf{u}$ را برداری ساده، مانند $\mathbf{u} = \{۰ \;۰\; ۱\}$ بگیریم. ماتریس $\mathbf{P} = [\mathbf{x}_۱ \;\; \mathbf{x}_۲ \;\; \mathbf{u}]$ را تعریف کنید و تبدیل تشابهی زیر را درنظر بگیرید

$$\mathbf{P}^{-۱}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \qquad (۲۵)$$

بنابراین، تبدیل تشابهی $\mathbf{P}$ تنها $\mathbf{A}$ را به‌صورت مثلثی تبدیل می‌کند نه قطری. هر مؤلفه‌ای برای بردار $\mathbf{u}$ انتخاب کنیم (مستقل خطی از $\mathbf{x}_1$ و $\mathbf{x}_2$)، ماتریس $\mathbf{P}$ تنها $\mathbf{A}$ را به‌صورت مثلثی درمی‌آورد. هیچ ماتریس $\mathbf{P}$ای که با آن $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ قطری شود وجود ندارد. یا، $\mathbf{A}$ مشابه هیچ ماتریس قطری نیست.

از بحث فوق در این بخش می‌توانیم نتیجه بگیریم که چنانچه ماتریسی مشابه ماتریسی مثلثی باشد، طوری که حداقل دو جزء قطری آن، مثلاً iام و jام، با هم برابر و جزء ij یا ji آن غیر صفر باشد، قطری شدنی نیست.

۴.۱۰ قطری کردن ماتریس بهنجار

ماتریسهای هرمیتی و یکانی از جایگاه بسیار مهمی در فیزیک برخوردارند. به این علت که هر ماتریس هرمیتی یا یکانی شامل مجموعهٔ کاملی از ویژه‌بردارهای متعامد (علاوه بر مستقل خطی) است. نخست برهان ساده‌ای بر این ادعا برای ماتریسهای هرمیتی می‌آوریم و سپس حالت کلی ماتریسهای بهنجار را درنظر می‌گیریم.

توجه کنید که نتایج مثال ۵.۹ (قسمت ب) و تمرین ۱۷.۹ نشان می‌دهند که ویژه‌بردارهای ماتریس هرمیتی و یکانی نسبت به یکدیگر متعامدند. اما نمی‌شود نتیجه گرفت که این ویژه‌بردارها مجموعهٔ کاملی را تشکیل می‌دهند. یعنی، ماتریس هرمیتی یا یکانی مرتبهٔ n دارای n ویژه‌بردار است.

مثال ۴. ثابت کنید که ماتریس هرمیتی را می‌توان به‌وسیلهٔ ماتریس یکانی قطری کرد.

حل: در این فصل دیدیم که هر ماتریس را می‌توان با تبدیلی تشابهی به‌صورت مثلثی درآورد. فرض کنید $\mathbf{H}$ ماتریس هرمیتی مرتبهٔ n باشد و فرض کنید که تنها k ویژه‌بردار مستقل خطی داشته باشد، $k \le n$. اگر این ویژه‌بردارها متناظر با ویژه‌مقدارهای متمایز $\mathbf{H}$ باشند، بنابر مثال ۵.۹ بر یکدیگر متعامدند. در حالتی که تعدادی از ویژه‌بردارها متناظر با یک ویژه‌مقدار باشند، می‌توان آنها را با فرایند اشمیت طوری انتخاب کرد که متعامد شوند. به‌علاوه، این ویژه‌بردارها را می‌توان برای به‌دست آوردن

مجموعه‌ای از k ویژه‌بردار راست‌هنجار $\mathbf{H}$ بهنجار کرد. اکنون می‌توانیم مجموعهٔ مناسبی از $n-k$ بردار راست‌هنجار انتخاب کنیم که هر یک از آنها بر k ویژه‌بردار متعامد باشد، به‌طوری که ماتریس $\mathbf{u}$ای که این n بردار بردارهای ستونیش را تشکیل می‌دهند، $\mathbf{H}$ را به صورتی مثلثی، مثلاً $\mathbf{T}$، درآورد. با توجه به اینکه ستونهای $\mathbf{U}$ بردارهای راست‌هنجارند، $\mathbf{U}$ قطعاً ماتریسی یکانی است. داریم

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{T} \qquad (۲۶)$$

مزدوج هرمیتی معادلهٔ (۲۶) را درنظر می‌گیریم، به‌سادگی می‌بینیم که $\mathbf{T}^{\dagger} = \mathbf{T}$، بنابراین، $\mathbf{T}$ نیز هرمیتی است. اما $\mathbf{T}$ مثلثی نیز است و تنها ماتریسی همزمان مثلثی و هرمیتی است که با اجزائی حقیقی قطری باشد. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که ماتریس هرمیتی را می‌توان به‌وسیلهٔ ماتریس یکانی قطری کرد. همهٔ بردارهای ستونی $\mathbf{U}$ ویژه‌بردارهای $\mathbf{H}$ می‌شوند.

توجه کنید که بنابر مثالهای ۱۷.۹ و ۱۶.۵، این قضیه برای ماتریسهای یکانی نیز به‌کار می‌رود. چون ماتریس متقارن حقیقی هرمیتی نیز است و هر ماتریس یکانی حقیقی متعامد است، به‌صورت یک حالت خاص از قضیهٔ بالا، نتیجه می‌گیریم که هر ماتریس متقارن حقیقی را می‌توان با ماتریسی متعامد قطری کرد.

در بالا حالت ماتریسهای هرمیتی، یکانی و متقارن حقیقی را جداگانه بررسی کردیم. اینها تنها انواع ماتریسهایی نیستند که چنین ویژگیهایی دارند. می‌خواهیم کلیترین شکل ماتریسی را پیدا کنیم که مجموعهٔ کاملی از ویژه‌بردارهای متعامد داشته باشد.

ثابت می‌شود کلیترین ماتریسی که این ویژگی را داراست، ماتریس بهنجار است که آن‌را در بخش ۳.۳ معرفی کردیم. ردهٔ ماتریسهای بهنجار، شامل چندین نوع ماتریس، مانند هرمیتی، یکانی، پادهرمیتی، متقارن حقیقی، پادمتقارن، ... است. قضیهٔ زیر به اهمیت آنها می‌افزاید:

> هر ماتریس را می‌توان با تبدیل یکانی قطری کرد اگر و تنها اگر ماتریسی بهنجار باشد، یا یک ماتریس شامل مجموعهٔ کاملی از ویژه‌بردارهای راست‌هنجار است اگر و تنها اگر بهنجار باشد.

به عبارت "اگر و تنها اگر" در قضیهٔ بالا توجه کنید. قسمت اول، اگر، بیان می‌کند که ماتریس بهنجار شامل مجموعهٔ کاملی از ویژه‌بردارهای متعامد است. قسمت دوم، تنها اگر، تأکید می‌کند

که این ماتریس کلیترین نوع ماتریسی است که دارای این ویژگی است، یعنی هیچ ماتریسی بجز ماتریس بهنجار مجموعهٔ کاملی از ویژه‌بردارهای متعامد ندارد.

اکنون به اثبات این قضیه می‌پردازیم.[۱]

فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریس بهنجار مرتبهٔ n باشد، یعنی

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} \tag{۲۷}$$

هر ماتریسی حداقل یک ویژه‌بردار غیرصفر دارد. فرض کنید $\mathbf{x}_۱$ ویژه‌بردار $\mathbf{A}$ با ویژه‌مقدار $\lambda_۱$ باشد، به‌طوری که

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_۱ = \lambda_۱\mathbf{x}_۱ \tag{۲۸}$$

$n-۱$ بردار $\mathbf{x}_۲$، $\mathbf{x}_۳$، ...، $\mathbf{x}_n$ را طوری انتخاب می‌کنیم که n بردار $\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$، ...، $\mathbf{x}_n$ مجموعه‌ای از بردارهای راست‌هنجار در فضای nبعدی تشکیل دهند، یعنی

$$\mathbf{x}_i^{\dagger}\mathbf{x}_j = \delta_{ij} \tag{۲۹}$$

توجه کنید که $\mathbf{x}_i$ به‌ازای $۲ \le i \le n$ ممکن است ویژه‌بردار $\mathbf{A}$ نباشد.

ماتریس $\mathbf{P}$ را با ستونهای $\mathbf{x}_i$، $۱ \le i \le n$، تشکیل دهید، به‌طوری که $\mathbf{P}$ ماتریسی یکانی باشد. تبدیل تشابهی $\mathbf{A}$ به‌وسیلهٔ $\mathbf{P}$ را درنظر بگیرید:

$$\mathbf{P}^{-۱}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_۱^{\dagger} \\ \mathbf{x}_۲^{\dagger} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{\dagger} \end{bmatrix} \mathbf{A}[\mathbf{x}_۱ \;\; \mathbf{x}_۲ \;\; \cdots \;\; \mathbf{x}_n]$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_۱^{\dagger} \\ \mathbf{x}_۲^{\dagger} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{\dagger} \end{bmatrix} [\mathbf{A}\mathbf{x}_۱ \;\; \mathbf{A}\mathbf{x}_۲ \;\; \cdots \;\; \mathbf{A}\mathbf{x}_n]$$

۱. اثبات ارائه شده برمبنای مقالهٔ زیر است:

Macklin, P. A, "Normal Matrices for physicists", *Am. J. Phys.* **52**, 513 (1984).

اکنون

$$\mathbf{x}_i^\dagger \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_i^\dagger \lambda_1 \mathbf{x}_1 = \lambda_1 \delta_{i1} \tag{۳۱}$$

به‌نحوی که معادلهٔ (۳۰) می‌شود

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{x}_1^\dagger \mathbf{A}\mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_1^\dagger \mathbf{A}\mathbf{x}_n \\ 0 & \mathbf{x}_2^\dagger \mathbf{A}\mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_2^\dagger \mathbf{A}\mathbf{x}_n \\ \vdots & & & \\ 0 & \mathbf{x}_n^\dagger \mathbf{A}\mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n^\dagger \mathbf{A}\mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{B} \\ 0 & \mathbf{C} \end{bmatrix} \tag{۳۲}$$

که $\mathbf{B}$ بردار سطری $(n-1)\times 1$، 0 بردار ستونی $1 \times (n-1)$ و $\mathbf{C}$ ماتریس $(n-1)\times(n-1)$ است.

جابه‌جاگر $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ را با $(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^\dagger$ درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned}[\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}, (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^\dagger] &= [\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}, \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{P}] \\ &= [\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}] \\ &= \mathbf{P}^{-1}[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger]\mathbf{P} = 0 \end{aligned} \tag{۳۳}$$

از این نکته سود جسته‌ایم که $\mathbf{P}$ یکانی و $\mathbf{A}$ بهنجار است. معادلهٔ (۳۳) نشان می‌دهد که ماتریس بهنجار تحت تبدیل یکانی ویژگی بهنجار خود را حفظ می‌کند.

با استفاده از صورت افرازشدهٔ $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ مانند معادلهٔ (۳۲)، معادلهٔ (۳۳) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= [\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}, (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^\dagger] \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{B} \\ 0 & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^* & 0 \\ \mathbf{B}^\dagger & \mathbf{C}^\dagger \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1^* & 0 \\ \mathbf{B}^\dagger & \mathbf{C}^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{B} \\ 0 & \mathbf{C} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{B}^\dagger & \mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger - \lambda_1^*\mathbf{B} \\ \mathbf{C}\mathbf{B}^\dagger - \mathbf{B}^\dagger\lambda_1 & \mathbf{C}\mathbf{C}^\dagger - \mathbf{C}^\dagger\mathbf{C} - \mathbf{B}^\dagger\mathbf{B} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۳۴}$$

اما $\mathbf{BB}^\dagger$ مجموع قدرمطلق مربعات اجزای بردار سطری $(n-۱)$بعدی $\mathbf{B}$ است. بنابراین از $\mathbf{BB}^\dagger = ۰$ نتیجه می‌گیریم که $\mathbf{B} = ۰$. پس افراز سمت راست پایینی معادلهٔ (۳۴) به $[\mathbf{C}, \mathbf{C}^\dagger] = ۰$ تبدیل می‌شود که نشان می‌دهد $\mathbf{C}$ بهنجار است. معادلهٔ (۳۲) در آخر تبدیل می‌شود به

$$\mathbf{P}^{-۱}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & ۰ \\ ۰ & \mathbf{C} \end{bmatrix} \tag{۳۵}$$

که $\mathbf{C}$ ماتریس بهنجار مرتبهٔ $n - ۱$ است.

ویژه‌مقدارهای یک ماتریس تحت تبدیل تشابهی ناوردا می‌مانند، بنابراین معادلهٔ (۳۵) نشان می‌دهد که ویژه‌مقدارهای $\mathbf{C}$ و ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$، بجز در مورد حذف $\lambda_۱$، یکسان‌اند.

بار دیگر، $\mathbf{C}$ باید حداقل یک ویژه‌بردار غیرصفر داشته باشد. فرض کنید $\mathbf{y}_۲$ این ویژه‌بردار باشد، بنابراین

$$\mathbf{Cy}_۲ = \lambda_۲\mathbf{y}_۲ \tag{۳۶}$$

مجموعه‌ای از $n - ۱$ بردار راست‌هنجار $\mathbf{y}_۲$، $\mathbf{y}_۳$، ...، $\mathbf{y}_n$ را در فضای برداری $n - ۱$بعدی کامل کنید و ماتریسهای زیر را تعریف کنید

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_۲, \mathbf{y}_۳, \dots, \mathbf{y}_n], \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \tag{۳۷}$$

هر دو ماتریس یکانی و به‌ترتیب از مرتبهٔ $n - ۱$ و n است. بنابراین، داریم

$$\begin{aligned}(\mathbf{PQ})^{-۱}\mathbf{A}(\mathbf{PQ}) &= \mathbf{Q}^{-۱}\mathbf{P}^{-۱}\mathbf{APQ} \\ &= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \mathbf{Y}^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_۱ & ۰ \\ ۰ & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_۱ & ۰ \\ ۰ & \mathbf{Y}^{-۱}\mathbf{CY} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{۳۸}$$

دقیقاً همان استدلالهایی که به معادلهٔ (۳۵) انجامید، حال ثابت می‌کند که می‌توان $\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{Y}$ را به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{bmatrix} \tag{۳۹}$$

در نتیجه $\mathbf{D}$ نیز ماتریس بهنجار مرتبهٔ $n-2$ می‌شود. با به‌کار بردن معادلهٔ (۳۹) در معادلهٔ (۳۸)، داریم

$$(\mathbf{PQ})^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{PQ}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 & \\ 0 & & \lambda_2 & 0 \\ & 0 & & \mathbf{D} \end{bmatrix} \tag{۴۰}$$

به‌روشنی می‌توانیم همین روند را ادامه دهیم. در پایان به این نتیجه می‌رسیم که تبدیل یکانی $\mathbf{U}$ وجود دارد که ماتریس بهنجار $\mathbf{A}$ را به ماتریس قطری $\mathbf{\Lambda}$ که شامل ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ است، تبدیل می‌کند:

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda} \tag{۴۱}$$

بنابراین ثابت کردیم که ماتریس بهنجار را می‌توان با تبدیلی یکانی قطری کرد، یا ماتریس بهنجار شامل مجموعه‌ای کامل از ویژه‌بردارهای راست‌هنجار است.

حال باید عکس این مطلب را ثابت کنیم، یعنی تنها ماتریسی را که می‌توان به‌وسیلهٔ ماتریس یکانی قطری کرد، ماتریس بهنجار است.

فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریسی دلخواه است که به‌وسیلهٔ ماتریس یکانی $\mathbf{U}$ قطری می‌شود، به‌طوری که

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1} \tag{۴۲}$$

دراین‌صورت، جابه‌جاگر $\mathbf{A}$ با مزدوج هرمیتی‌اش می‌شود

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger] &= [\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}, (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1})^\dagger] \\
&= [\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}, \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^\dagger\mathbf{U}^{-1}] \\
&= \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^\dagger\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^\dagger\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1} \\
&= \mathbf{U}[\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Lambda}^\dagger]\mathbf{U}^{-1} = 0
\end{aligned} \tag{۴۳}$$

زیرا هر دوی $\mathbf{\Lambda}$ و $\mathbf{\Lambda}^\dagger$ ماتریسهای قطری‌اند و با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند. این برهان را کامل می‌کند.

۵.۱۰ چندجمله‌ایهای ماتریسی

عبارت زیر را

$$f(\mathbf{A}) = a_k\mathbf{A}^k + a_{k-۱}\mathbf{A}^{k-۱} + \cdots + a_۱\mathbf{A} + a_۰\mathbf{I} \qquad (۴۴)$$

که در آن a_iها ضرایب نرده‌ای‌اند، چندجمله‌ای ماتریسی $\mathbf{A}$ی درجهٔ k می‌نامند. وجود چندجمله‌ای مینیمال برای هر ماتریس ارزیابی چندجمله‌ایهای ماتریسی را بسیار ساده می‌کند. در واقع، اگر m درجهٔ چندجمله‌ای مینیمال یک ماتریس باشد، می‌توان نشان داد که هر چندجمله‌ای ماتریسی از درجهٔ بیشتر از $m - ۱$ با چندجمله‌ای درجهٔ $m - ۱$ عیناً برابر است. با مثال زیر این مطلب را بهتر می‌فهمیم.

مثال ۵. اگر $\mathbf{A}$ ماتریس معادلهٔ (۱۹) باشد، نشان دهید که

$$۲\mathbf{A}^۵ + ۴\mathbf{A}^۴ - ۶\mathbf{A}^۳ + \mathbf{A}^۲ - ۳\mathbf{A} - ۳\mathbf{I} = ۱۳۷\mathbf{A}^۲ - ۳۳۱\mathbf{A} + ۱۸۹\mathbf{I} \qquad (۴۵)$$

حل: در مثال ۳ دیدیم که

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - ۲\mathbf{I})^۲ = \mathbf{A}^۳ - ۵\mathbf{A}^۲ + ۸\mathbf{A} - ۴\mathbf{I} = ۰ \qquad (۴۶)$$

با ضرب معادلهٔ (۴۶) در $۲\mathbf{A}^۲$، داریم

$$۲\mathbf{A}^۵ - ۱۰\mathbf{A}^۴ + ۱۶\mathbf{A}^۳ - ۸\mathbf{A}^۲ = ۰ \qquad (۴۷)$$

چندجمله‌ای مفروض را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم

$$f(\mathbf{A}) = ۲\mathbf{A}^۵ + ۴\mathbf{A}^۴ - ۶\mathbf{A}^۳ + \mathbf{A}^۲ - ۳\mathbf{A} - ۳\mathbf{I} \qquad (۴۸)$$

که، با استفاده از معادلهٔ (۴۷)، تبدیل می‌شود به

$$f(\mathbf{A}) = ۱۴\mathbf{A}^۴ - ۲۲\mathbf{A}^۳ + ۹\mathbf{A}^۲ - ۳\mathbf{A} - ۳\mathbf{I} \qquad (۴۹)$$

بار دیگر، با ضرب کردن معادلهٔ (۴۶) در $۱۴\mathbf{A}$ و تفریق آن از معادلهٔ (۴۹)، داریم

$$f(\mathbf{A}) = ۴۸\mathbf{A}^۳ - ۱۰۳\mathbf{A}^۲ + ۵۳\mathbf{A} - ۳\mathbf{I} \qquad (۵۰)$$

در پایان، با ضرب کردن معادلهٔ (۴۶) در ۴۸ و تفریق آن از معادلهٔ (۵۰)، داریم

$$f(\mathbf{A}) = ۱۳۷\mathbf{A}^۲ - ۳۳۱\mathbf{A} + ۱۸۹\mathbf{I} \qquad (۵۱)$$

که نتیجهٔ مطلوب را اثبات می‌کند.

تمرین

۱.۱۰ چندجمله‌ای مشخصه و چندجمله‌ای مینیمال هر یک از ماتریسهای زیر را تعیین کنید. بررسی کنید کدام‌یک از آنها قطری‌شدنی است. در هر حالت، مجموعه‌ای از ویژه‌بردارهای مستقل خطی بیابید. هر ماتریس را به‌صورت قطری یا مثلثی تبدیل کنید.

(الف) $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۵ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ ، (ب)* $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۱ \\ ۲ & ۴ & ۱ \\ ۰ & -۲ & ۲ \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۱ \\ -۱۰ & -۱۲ & -۲ \end{bmatrix}$ ، (د) $\begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۱ \\ ۵ & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۲ \end{bmatrix}$

۲.۱۰ نشان دهید که ماتریس $\mathbf{A} = \mathbf{HU}$، که $\mathbf{H}$ هرمیتی و $\mathbf{U}$ یکانی است، بهنجار است اگر و تنها اگر $\mathbf{H}^۲$ با $\mathbf{U}$ جابه‌جا شود.

۳.۱۰ فرض‌کنید $\mathbf{A}$ ماتریس معادلهٔ (۹) باشد. چندجمله‌ای $۲\mathbf{A}^۴+۵\mathbf{A}^۳-۴۷\mathbf{A}^۲-۲۸\mathbf{A}+۲۱\mathbf{I}$ را به چندجمله‌ای حداکثر درجهٔ ۲ تبدیل کنید.

۴.۱۰ * ماتریس کلی مرتبهٔ ۲ی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را با اجزای حقیقی درنظر بگیرید که قطری نیست (یعنی، حداقل یکی از دو جزء b و c غیرصفر است). نشان دهید که این ماتریس قطری‌ناشدنی است، اگر و تنها اگر $(a-d)^۲ + ۴bc = ۰$ باشد.

۵.۱۰ * اگر $\mathbf{A}$ ماتریس معادلهٔ (۱۸.۹) باشد، $\mathbf{A}^۳$ و $\mathbf{A}^{-۱}$ را به‌صورت ترکیب خطی $\mathbf{A}$ و $\mathbf{I}$ بیان کنید. نتایج را با محاسبهٔ صریح ثابت کنید.

۶.۱۰ فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریس معادلهٔ (۹) باشد، ماتریسهای زیر را تشکیل دهید

$$\mathbf{P}_۱ = (\mathbf{A} + ۶\mathbf{I})(\mathbf{A} + \mathbf{I})/۵۰$$
$$\mathbf{P}_۲ = (\mathbf{A} - ۴\mathbf{I})(\mathbf{A} + \mathbf{I})/۵۰$$
$$\mathbf{P}_۳ = -(\mathbf{A} - ۴\mathbf{I})(\mathbf{A} + ۶\mathbf{I})/۲۵$$

نشان دهید که این ماتریسها در معادلات زیر صدق می‌کنند

(الف) $\mathbf{P}_۱ + \mathbf{P}_۲ + \mathbf{P}_۳ = \mathbf{I}$ (ب) $۴\mathbf{P}_۱ - ۶\mathbf{P}_۲ - \mathbf{P}_۳ = \mathbf{A}$

(ج) $۱۶\mathbf{P}_۱ + ۳۶\mathbf{P}_۲ + \mathbf{P}_۳ = \mathbf{A}^۲$ (د) $\mathbf{P}_i^۲ = \mathbf{P}_i, i = ۱, ۲, ۳$

۷.۱۰ * این مسئله تعمیمی از تمرین ۶ است. فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریسی دلخواه از مرتبهٔ ۳ با ویژه‌مقدارهای متمایز $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، $\lambda_۳$ باشد. فرض کنید

$$\mathbf{P}_۱ = (\mathbf{A} - \lambda_۲\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_۳\mathbf{I})/[(\lambda_۱ - \lambda_۲)(\lambda_۱ - \lambda_۳)]$$
$$\mathbf{P}_۲ = (\mathbf{A} - \lambda_۱\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_۳\mathbf{I})/[(\lambda_۲ - \lambda_۱)(\lambda_۲ - \lambda_۳)]$$
$$\mathbf{P}_۳ = (\mathbf{A} - \lambda_۱\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_۲\mathbf{I})/[(\lambda_۳ - \lambda_۱)(\lambda_۳ - \lambda_۲)]$$

(الف) نشان دهید که اینها در معادلات زیر صدق می‌کنند

(۱) $\mathbf{P}_۱ + \mathbf{P}_۲ + \mathbf{P}_۳ = \mathbf{I}$ (۲) $\lambda_۱\mathbf{P}_۱ + \lambda_۲\mathbf{P}_۲ + \lambda_۳\mathbf{P}_۳ = \mathbf{A}$

(۳) $\lambda_۱^۲\mathbf{P}_۱ + \lambda_۲^۲\mathbf{P}_۲ + \lambda_۳^۲\mathbf{P}_۳ = \mathbf{A}^۲$ (۴) $\mathbf{P}_i^۲ = \mathbf{P}_i,\ ۱ \leq i \leq ۳$

(ب) $\mathbf{A}^۳$ را به‌صورت ترکیبی خطی از $\mathbf{P}_۱$، $\mathbf{P}_۲$ و $\mathbf{P}_۳$ بنویسید.

۱۱

صورتهای دوخطی و درجهٔ دوم

۱.۱۱ تعریف و ویژگیها

اگر $x_۱$، $x_۲$، . . .، x_n و $y_۱$، $y_۲$، . . .، y_n مجموعه‌ای $۲n$ متغیره، حقیقی یا مختلط باشد، عبارت زیر را

$$B = \sum_{i,j=۱}^{n} a_{ij} x_i^* y_j \qquad (۱)$$

که در آن a_{ij}ها ضرایب نرده‌ای‌اند، صورت دوخطی $۲n$ متغیره می‌نامند. اگر بردارهای ستونی $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ و ماتریس $\mathbf{A}$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$\mathbf{x} \equiv \{x_i\}, \qquad \boldsymbol{y} \equiv \{y_i\}, \qquad \mathbf{A} \equiv [a_{ij}] \qquad (۲)$$

بنابراین، به‌سادگی می‌بینیم که صورت دوخطی $\mathbf{B}$ می‌شود

$$\boldsymbol{B} = \mathbf{x}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{y} \qquad (۳)$$

اگر به‌جای $\mathbf{y}$ در عبارت بالا $\mathbf{x}$ بگذاریم، عبارت حاصل را

$$Q = \mathbf{x}^\dagger \mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i,j=۱}^{n} a_{ij} x_i^* x_j \qquad (۴)$$

صورت درجهٔ دوم n متغیرهٔ x_i می‌نامند. مقدار صورت دوخطی یا درجهٔ دوم عدد است.

مثال ۱. صورت دوخطی $\mathbf{x}^\dagger \mathbf{A}\mathbf{y}$ و درجهٔ دوم $\mathbf{x}^\dagger \mathbf{A}\mathbf{x}$ را به‌دست آورید، اگر

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} ۱+i \\ ۳ \\ ۲i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} ۲-i \\ ۰ \\ ۲+۲i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۳+i & ۰ & ۹ \\ ۶i & ۲+۳i & ۰ \\ -i & ۲i & ۱-i \end{bmatrix}$$

حل: داریم

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \mathbf{x}^\dagger \mathbf{A}\mathbf{y} \\ &= [۱-i \quad ۳ \quad -۲i] \begin{bmatrix} ۳+i & ۰ & ۹ \\ ۶i & ۲+۳i & ۰ \\ -i & ۲i & ۱-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲-i \\ ۰ \\ ۲+۲i \end{bmatrix} \\ &= ۵۶ + ۲۲i \end{aligned} \qquad (۵\text{الف})$$

و

$$\begin{aligned} Q &= \mathbf{x}^\dagger \mathbf{A}\mathbf{x} \\ &= [۱-i \quad ۳ \quad -۲i] \begin{bmatrix} ۳+i & ۰ & ۹ \\ ۶i & ۲+۳i & ۰ \\ -i & ۲i & ۱-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱+i \\ ۳ \\ ۲i \end{bmatrix} \\ &= ۳۸ + ۵۹i \end{aligned} \qquad (۵\text{ب})$$

اگر $\mathbf{x}$ برداری حقیقی و $\mathbf{A}$ ماتریس حقیقی دلخواهی باشد، صورت درجهٔ دوم $\mathbf{x}^\dagger \mathbf{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ را همیشه می‌توان به‌صورت $\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{S}\mathbf{x}$ نوشت. که $\mathbf{S}$ ماتریس متقارن حقیقی است. چون صورت

درجهٔ دوم تنها یک عدد است، در نتیجه با ترانهاد خودش برابر می‌شود، به‌این ترتیب، داریم

$$(\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x})^T = \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} \qquad (۶)$$

بنابراین، داریم

$$\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \frac{۱}{۲}(\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}) = \frac{۱}{۲}\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{A} + \tilde{\mathbf{A}})\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{S}\mathbf{x} \qquad (۷)$$

که

$$\mathbf{S} = \frac{۱}{۲}(\mathbf{A} + \tilde{\mathbf{A}}) \qquad (۸)$$

که آشکارا ماتریس متقارن است.

مثال ۲. صورت درجهٔ دوم $\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ را به‌صورت $\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{S}\mathbf{x}$ بیان کنید، چنانچه

$$\mathbf{x} = \{x_۱ \;\; x_۲ \;\; x_۳\}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۵ \\ ۴ & ۲ & -۶ \\ ۹ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

که $\mathbf{S}$ ماتریسی متقارن است.

حل: صورت درجهٔ دوم به‌طور صریح می‌شود

$$\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} = ۳x_۱^۲ + ۲x_۲^۲ + ۴x_۳^۲ + ۳x_۱x_۲ - ۴x_۲x_۳ + ۱۴x_۳x_۱ \qquad (۹)$$

ماتریس $\mathbf{S}$ را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم

$$\mathbf{S} = \frac{۱}{۲}(\mathbf{A} + \tilde{\mathbf{A}}) = \begin{bmatrix} ۳ & ۳/۲ & ۷ \\ ۳/۲ & ۲ & -۲ \\ ۷ & -۲ & ۴ \end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

بنابراین

$$\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{S}\mathbf{x} = ۳x_۱^۲ + ۲x_۲^۲ + ۴x_۳^۲ + ۳x_۱x_۲ - ۴x_۲x_۳ + ۱۴x_۳x_۱ \qquad (۱۱)$$

که با معادلهٔ (۹) یکسان است.

۲.۱۱ صورت هرمیتی

اگر $\mathbf{H}$ ماتریسی هرمیتی باشد، صورت درجهٔ دوم $\mathbf{x}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{x}$ ($\mathbf{x}$ حقیقی یا مختلط) را صورت هرمیتی می‌نامند. یک قضیهٔ مفید را در زمینهٔ صورتهای هرمیتی در مثال زیر ثابت می‌کنیم.

مثال ۳. نشان دهید که برای هر بردار حقیقی یا مختلط $\mathbf{x}$، مقدار صورت هرمیتی همیشه حقیقی است.

حل: فرض کنید $\mathbf{H}$ ماتریسی هرمیتی باشد و فرض کنید

$$Q = \mathbf{x}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{x} \tag{۱۲}$$

چون Q نرده‌ای است،

$$Q^\dagger = Q^* \tag{۱۳}$$

حال، از معادلهٔ (۱۲)، داریم

$$Q^\dagger = (\mathbf{x}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{x})^\dagger = \mathbf{x}^\dagger\mathbf{H}^\dagger\mathbf{x} = \mathbf{x}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{x} = Q \tag{۱۴}$$

معادلهٔ فوق همراه با معادلهٔ (۱۳)، نشان می‌دهد که $Q^* = Q$ ثابت می‌کند Q حقیقی است.

مثال ۴. صورت هرمیتی $\mathbf{x}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{x}$ را محاسبه کنید، چنانچه

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} a & p-iq & r-is \\ p+iq & b & u-iv \\ r+is & u+iv & c \end{bmatrix} \tag{۱۵}$$

که a، b، c، p، q، r، s، u، v اعداد حقیقی‌اند.

حل: صورت هرمیتی خواسته شده عبارت است از

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{x} =&[x_۱^* \quad x_۲^* \quad x_۳^*]\begin{bmatrix} a & p-iq & r-is \\ p+iq & b & u-iv \\ r+is & u+iv & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} \\ =&a|x_۱|^۲ + b|x_۲|^۲ + c|x_۳|^۲ + ۲\mathrm{Re}[(p-iq)x_۱^*x_۲ \\ &+ (u-iv)x_۲^*x_۳ + (r-is)x_۱^*x_۳]\end{aligned} \tag{۱۶}$$

که به‌ازای هر مقدار حقیقی یا مختلط $x_۱$، $x_۲$، و $x_۳$ عددی حقیقی است.

۳.۱۱ تبدیل محور اصلی

$\mathbf{x}$ و $\mathbf{A}$ را به‌صورت زیر درنظر بگیرید

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix} \tag{۱۷}$$

که a، b، h ثابتهای حقیقی و $x_۱$ و $x_۲$ متغیرهای حقیقی‌اند. معادلهٔ زیر را

$$\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} = c \tag{۱۸}$$

به‌طور صریح به‌شکل معادلهٔ درجهٔ دوم می‌نویسیم

$$ax_۱^۲ + ۲hx_۱x_۲ + bx_۲^۲ = c \tag{۱۹}$$

که نشان‌دهندهٔ مقطعی مخروطی در فضای دوبعدی $(x_۱, x_۲)$ است. برای اینکه ببینیم این مقطع مخروطی چیست، تبدیل مختصاتی زیر را به‌کار می‌بریم.

چون $\mathbf{A}$ ماتریس متقارن حقیقی است، آن‌را می‌توان با یک ماتریس متعامد، مانند $\mathbf{P}$، قطری کرد، به‌طوری که

$$\mathbf{P}^{-۱}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & ۰ \\ ۰ & \lambda_۲ \end{bmatrix} \equiv \mathbf{\Lambda} \tag{۲۰}$$

که $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ هستند. پس معادلهٔ (۱۸) می‌شود

$$\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-۱}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-۱}\mathbf{x} = c \Rightarrow (\mathbf{P}^{-۱}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda}(\mathbf{P}^{-۱}\mathbf{x}) = c \qquad (۲۱)$$

اگر مختصات جدید را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$\mathbf{y} \equiv \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-۱}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-۱}\mathbf{x} \qquad (۲۲)$$

بنابراین، معادلهٔ (۲۱) چنین می‌شود

$$\tilde{\mathbf{y}}\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} = c \Rightarrow \lambda_۱ y_۱^۲ + \lambda_۲ y_۲^۲ = c \qquad (\text{۲۳الف})$$

که می‌شود آن‌را به‌صورت آشنای زیر نوشت

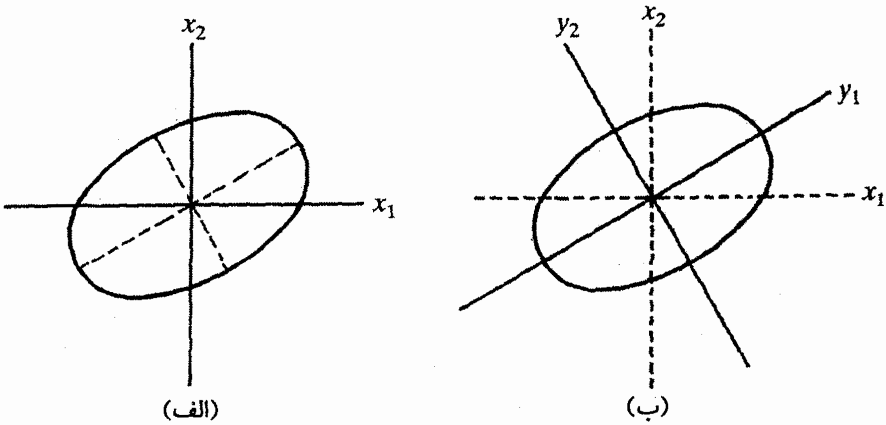
$$\frac{y_۱^۲}{c/\lambda_۱} + \frac{y_۲^۲}{c/\lambda_۲} = ۱ \qquad (\text{۲۳ب})$$

بدیهی است که معادلهٔ بالا نشان‌دهندهٔ (الف) یک بیضی است اگر c، $\lambda_۱$، و $\lambda_۲$ همعلامت باشند، (ب) هذلولی است اگر $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ علامتهای مخالف داشته باشند، (ج) خمی موهومی است اگر $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ هم‌علامت، اما c دارای علامت مخالف باشد و (د) یک زوج خط مستقیم، یک خط مستقیم، یک نقطه یا هر خم غیرحقیقی دلخواهی است اگر حداقل یکی از $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، c صفر باشد.

از میان حالاتی که در بالا نام بردیم، دو حالت اول اهمیت بیشتری دارند. اگر معادلهٔ (۲۳ب) نشان‌دهندهٔ بیضی باشد، بدیهی است که $(c/\lambda_۱)^{۱/۲}$ و $(c/\lambda_۲)^{۱/۲}$، به‌ترتیب نیم‌قطر بزرگ و نیم‌قطر کوچک آن‌اند. علاوه‌براین، محورهای اصلی مقطع مخروطی در امتداد محورهای مختصات جدید $y_۱$ و $y_۲$ است. وجود جملهٔ ضرب $x_۱x_۲$ در معادلهٔ (۱۹) نشان می‌دهد که محورهای مختصات با محورهای اصلی مقطع مخروطی موازی نیستند. با اعمال تبدیلی متعامد از $(x_۱, x_۲)$ به $(y_۱, y_۲)$، معادلهٔ مقطع مخروطی به‌صورت استاندارد درمی‌آید و امکان می‌دهد تا طول و امتداد محورهای اصلی را تعیین کنیم. این فرایند را تبدیل محور اصلی می‌نامند که آن‌را در شکل ۱.۱۱ نشان داده‌ایم.

مثال ۵. نشان دهید که معادلهٔ زیر

$$۸x^۲ + ۲\sqrt{۲}xy + ۷y^۲ = ۳ \qquad (۲۴)$$



شکل۱.۱۱ (الف) یک بیضی که محورهای اصلی آن بر محورهای مختصات منطبق نیست. (ب) یک بیضی که محورهای اصلی آن بر محورهای مختصات منطبق است.

نشان‌دهندهٔ یک بیضی است. طول قطرهای اصلی و امتدادشان را بیابید.

حل: معادلهٔ مفروض را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} = ۳ \tag{۲۵}$$

که

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۸ & \sqrt{۲} \\ \sqrt{۲} & ۷ \end{bmatrix} \tag{۲۶}$$

ویژه‌مقدارها و ویژه‌مقدارهای بهنجار $\mathbf{A}$ به‌شرح زیرند

$$\text{(الف)} \quad ۹, \{\sqrt{۲/۳} \;\; ۱/\sqrt{۳}\} \qquad \text{(ب)} \quad ۶, \{۱/\sqrt{۳} \;\; -\sqrt{۲/۳}\} \tag{۲۷}$$

بنابراین، ماتریس قطری‌کننده عبارت است از

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{۲/۳} & ۱/\sqrt{۳} \\ ۱/\sqrt{۳} & -\sqrt{۲/۳} \end{bmatrix} \tag{۲۸}$$

و اگر مختصات جدید را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$\mathbf{y} \equiv \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-۱}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{۲/۳} & ۱/\sqrt{۳} \\ ۱/\sqrt{۳} & -\sqrt{۲/۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (۲۹)$$

معادلهٔ مفروض می‌شود

$$۹x'^{۲} + ۶y'^{۲} = ۳ \Rightarrow ۳x'^{۲} + ۲y'^{۲} = ۱ \qquad (۳۰)$$

بنابراین، بدیهی است که معادلهٔ بالا نشان‌دهندهٔ بیضی است و طول نیم‌قطر بزرگ $۱/\sqrt{۲}$ و نیم‌قطر کوچک $۱/\sqrt{۳}$ است و محور اصلی در امتداد y' قرار می‌گیرد. از معادلهٔ (۲۹)، داریم $y' = x/\sqrt{۳} - \sqrt{۲/۳}y$، از آن نتیجه می‌گیریم که محور اصلی با محور x زاویهٔ $\tan^{-۱}(-\sqrt{۲})$ می‌سازد.

اکنون اگر $\mathbf{x} \equiv \{x_۱ \;\; x_۲ \;\; x_۳\}$ بردار سه‌بعدی حقیقی باشد، معادلهٔ زیر

$$\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} = c \qquad (۳۱)$$

که در آن $\mathbf{A}$ ماتریس متقارن حقیقی مرتبهٔ سه است، نشان‌دهندهٔ یک مکان هندسی در فضای سه‌بعدی است. اگر $\mathbf{U}$ ماتریس متعامدی باشد که $\mathbf{A}$ را قطری می‌کند، تبدیل زیر را تعریف کنید

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}^{-۱}\mathbf{x} \equiv \{y_۱ \;\; y_۲ \;\; y_۳\} \qquad (۳۲)$$

به‌این ترتیب معادلهٔ (۳۱) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\tilde{\mathbf{y}}\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} = c \qquad (۳۳)$$

$\mathbf{\Lambda}$ ماتریسی قطری شامل ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ است که اگر آنها را با $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، و $\lambda_۳$ نشان دهیم، معادلهٔ (۳۳) می‌شود

$$\frac{y_۱^۲}{c/\lambda_۱} + \frac{y_۲^۲}{c/\lambda_۲} + \frac{y_۳^۲}{c/\lambda_۳} = ۱ \qquad (۳۴)$$

اگر هر سه مخرج کسرهای بالا مثبت باشند، معادلهٔ (۳۴) نشان‌دهندهٔ بیضیوار است؛ اگر یکی از آنها منفی باشد، نشان‌دهندهٔ هذلولیوار یکپارچه است و اگر دو تا منفی باشد، هذلولیوار دوپارچه

است. در سایر حالتها، معادلهٔ (۳۴) یک سطح، یک خم، یک نقطه یا مکان هندسی غیر حقیقی را نشان می‌دهد. در سه حالت اول، محورهای اصلی در امتداد $y_۱$، $y_۲$، و $y_۳$اند. اگر معادله بیانگر بیضیوار باشد، طول قطرهای اصلی آن عبارت است از $۲(c/\lambda_i)^{۱/۲}$، که $i = ۱, ۲, ۳$.

مثال ۶. ثابت کنید معادلهٔ زیر نشان‌دهندهٔ هذلولیوار یکپارچه است.

$$۳x^۲ + ۳y^۲ - ۴z^۲ - ۱۸xy + ۱۲ = ۰ \tag{۳۵}$$

و کسینوسهای هادی محورهای اصلی آن‌را به‌دست آورید.

حل: معادلهٔ مفروض را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} = ۱۲ \tag{۳۶}$$

که

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -۳ & ۹ & ۰ \\ ۹ & -۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \tag{۳۷}$$

ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای بهنجار $\mathbf{A}$ می‌شوند

$$\begin{matrix} ۴, \{۰ \;\; ۰ \;\; ۱\} & (۲) & ۶, \{۱/\sqrt{۲} \;\; ۱/\sqrt{۲} \;\; ۰\} & (۱) \\ & & -۱۲, \{۱/\sqrt{۲} \;\; -۱/\sqrt{۲} \;\; ۰\} & (۳) \end{matrix} \tag{۳۸}$$

بنابراین، ماتریس قطری‌کننده عبارت است از

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} ۱/\sqrt{۲} & ۰ & ۱/\sqrt{۲} \\ ۱/\sqrt{۲} & ۰ & -۱/\sqrt{۲} \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \tag{۳۹}$$

اگر مختصات جدید را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$\mathbf{y} \equiv \{x' \;\; y' \;\; z'\} = \mathbf{P}^{-۱}\{x \;\; y \;\; z\} \tag{۴۰}$$

معادلهٔ (۳۵) می‌شود

$$\frac{x'^{۲}}{۲}+\frac{y'^{۲}}{۳}-\frac{z'^{۲}}{۱}=۱ \qquad (۴۱)$$

که به‌روشنی نشان می‌دهد معادلهٔ بالا نمایانگر هذلولیوار یکپارچه‌ای است که محورهای اصلی آن در امتداد x'، y'، و z' است و کسینوسهای هادی آن، همان‌طور که در زیر می‌بینیم، همان مؤلفه‌های ویژه‌بردارهای $\mathbf{A}$ است:

$$\begin{aligned} x' \text{ کسینوسهای هادی } &= \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \frac{۱}{\sqrt{۲}}, ۰\right) \\ y' \text{ کسینوسهای هادی } &= (۰, ۰, ۱) \\ z' \text{ کسینوسهای هادی } &= \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}, -\frac{۱}{\sqrt{۲}}, ۰\right) \end{aligned} \qquad (۴۲)$$

تمرین

۱.۱۱ برای هر ماتریس مربعی $\mathbf{A}$ و بردار $\mathbf{x}$، نشان دهید $\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}$.

۱۱. ۲ * صورت درجهٔ دوم $(a_۱x_۱ + a_۲x_۲ + \cdots + a_nx_n)^۲$ را به‌صورت $\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x}$، با $\mathbf{A}$ی متقارن، بنویسید. رتبهٔ $\mathbf{A}$ چیست؟

۱۱. ۳ فرض کنید $\mathbf{u}_۱$، $\mathbf{u}_۲$، ...، $\mathbf{u}_k$ و $\mathbf{x}$ بردارهای nبعدی باشند. نشان دهید که صورت درجهٔ دوم $(\tilde{\mathbf{u}}_۱\mathbf{x})^۲ + (\tilde{\mathbf{u}}_۲\mathbf{x})^۲ + \cdots + (\tilde{\mathbf{u}}_k\mathbf{x})^۲$ را می‌توان به‌صورت $\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{U}\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{x}$ نوشت که $\mathbf{U}$ ماتریس مرتبهٔ $n \times k$ است که ستون iام آن بردار $\mathbf{U}_i$ است.

۱۱. ۴ اگر $\mathbf{A}$ ماتریس متقارن حقیقی باشد و $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$، $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$ که $\lambda \neq \mu$ است، نشان دهید که $\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{y} = ۰$ است و $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ بر یکدیگر متعامدند.

۱۱. ۵ اگر $\mathbf{x}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{x}$، به‌ازای هر انتخاب بردار $\mathbf{x}$ حقیقی باشد، نشان دهید که $\mathbf{H}$ هرمیتی است. [این عکس چیزی است که در مثال ۳ ثابت کردیم.]

۱۱. ۶* نشان دهید که اگر همهٔ ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ مثبت باشند، صورت درجهٔ دوم $\mathbf{x}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{x}$، به‌ازای هر انتخاب بردار $\mathbf{x}$، مثبت می‌شود. نشان دهید که عکس این مطلب لزوماً درست نیست.

۱۱. ۷ اگر $\mathbf{A}$ ماتریس پادهرمیتی باشد، نشان دهید که مقدار $\mathbf{x}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{x}$، به‌ازای هر انتخاب $\mathbf{x}$، یا موهومی محض است یا صفر.

۱۱ . ۸ معادلهٔ $\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} = c$ را تعبیر هندسی کنید، اگر $\mathbf{x} = \{x\ y\ z\}$ باشد و

(الف)
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}, c = ۴$$

(ب)
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۲٫۶ & -۰٫۲ & ۰٫۲ \\ ۰٫۲ & ۲٫۱ & ۰٫۴ \\ ۰٫۴ & ۰٫۲ & ۲٫۸ \end{bmatrix}, c = ۱۵$$

۱۱ . ۹ * پتانسیل ذره‌ای در سیستم مکانیکی خاصی عبارت است از

$$V(\mathbf{r}) = (x-y)^{۲} + (y-z)^{۲} + (z-x)^{۲}$$

نشان دهید خطی هست که در امتداد آن انرژی پتانسیل ذره ثابت است. همچنین نشان دهید که انرژی پتانسیل ذره با دور شدن آن از خط افزایش می‌یابد.

۱۲

توابعی از ماتریس

همان‌طورکه توابع گوناگونی از یک متغیر را در جبر تعریف و مطالعه می‌کنیم، توابعی از ماتریس را نیز می‌توانیم تعریف و محاسبه کنیم. این توابع از ماتریس را در این فصل مطالعه می‌کنیم: توانهای صحیح (مثبت و منفی)، توانهای کسری (ریشه‌ها)، نمایی، لگاریتمی، مثلثاتی و هذلولی.

تابع ماتریسی را به دو روش می‌توان محاسبه کرد. اولی روش نسبتاً ساده‌ای است که اساس آن قطری کردن ماتریس است و بنابراین، تنها برای ماتریسهای قطری‌شدنی به‌کار می‌رود. روش دوم بر وجود چندجمله‌ای مینیمال استوار است و آن‌را می‌توان برای سنجش توابع هر نوع ماتریسی به‌کار برد.

۱.۱۲ توابع ماتریس قطری‌شدنی

فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریسی قطری‌شدنی و $\mathbf{P}$ ماتریس قطری‌کنندهٔ آن باشد، به‌نحوی که

$$\mathbf{P}^{-۱}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}, \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-۱} \qquad (۱)$$

که $\mathbf{\Lambda}$ ماتریسی قطری شامل ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ است. اکنون، f هر تابعی از ماتریس که باشد، داریم

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{P}f(\mathbf{\Lambda})\mathbf{P}^{-۱} \qquad (۲)$$

بنابراین، اگر بتوانیم تابعی از ماتریس قطری را تعریف کنیم، تابع هر ماتریس قطری‌شدنی را می‌توانیم تعریف و محاسبه کنیم. بحث این فصل به‌روشنی تنها برای ماتریسهای مربعی به‌کار می‌رود.

۲.۱۲ توانهای ماتریس

در واقع، از توانهای ماتریس در موقعیتهای بسیاری در این کتاب استفاده کرده‌ایم. بنابراین، مربع ماتریس را با $\mathbf{A}^۲ = \mathbf{AA}$ و مکعب آن‌را با $\mathbf{A}^۳ = \mathbf{AAA}$ و ... تعریف می‌کنیم. عموماً، اگر k عدد صحیح مثبت باشد، توان kام $\mathbf{A}$ را ماتریسی تعریف می‌کنیم که با k بار ضرب کردن $\mathbf{A}$ در خودش به‌دست می‌آید، یعنی

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{AAA}\cdots\mathbf{A} \qquad (k \text{ بار}) \qquad (۳)$$

اگر $\mathbf{A}$ ناتکین باشد، وارون آن $\mathbf{A}^{-۱}$ را ماتریسی تعریف کردیم که حاصلضرب آن در $\mathbf{A}$ ماتریس یکه می‌شود. توانهای منفی $\mathbf{A}$ را به همین ترتیب تعریف می‌کنیم. اگر m عدد صحیح منفی باشد، فرض کنید $k = -m$ است، بنابراین، داریم

$$\mathbf{A}^m = (\mathbf{A}^{-۱})^k = \mathbf{A}^{-۱}\mathbf{A}^{-۱}\mathbf{A}^{-۱}\cdots\mathbf{A}^{-۱} \qquad (k \text{ بار}) \qquad (۴)$$

در نهایت، همانند توابعی از یک متغیر، تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{A}^{۰} = \mathbf{I} \qquad (۵)$$

به‌این ترتیب، همهٔ توانهای صحیح $\mathbf{A}$ را به‌طور سرراستی بیان کردیم، اما چه بسا محاسبهٔ واقعی برای مقدارهای بزرگ k خسته‌کننده باشد. قطری‌شدنی بودن $\mathbf{A}$ محاسبه را بسیار ساده می‌کند. با درنظر گرفتن توان kام $\mathbf{A}$ و با استفاده از دومین معادلهٔ (۱)، داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^k &= (\mathbf{P\Lambda P}^{-۱})(\mathbf{P\Lambda P}^{-۱})\cdots(\mathbf{P\Lambda P}^{-۱}) \qquad (k \text{ بار})\\ &= \mathbf{P\Lambda}^k\mathbf{P}^{-۱} \qquad (۶)\end{aligned}$$

همین‌طور، اگر $m=-k$ عدد صحیح منفی باشد و $\mathbf{A}$ ناتکین باشد، دراین‌صورت

$$\mathbf{A}^m = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^m\mathbf{P}^{-۱} = \mathbf{P}(\mathbf{\Lambda}^{-۱})^k\mathbf{P}^{-۱} \tag{۷}$$

مثال ۱. $\mathbf{A}^k$ را به‌دست آورید، چنانچه k عددی صحیح، مثبت یا منفی باشد

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۴/۳ & \sqrt{۲}/۳ \\ \sqrt{۲}/۳ & ۵/۳ \end{bmatrix} \tag{۸}$$

حل: ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای $\mathbf{A}$ چنین یافت می‌شوند

$$(۱)۱, \{\sqrt{۲} \quad -۱\} \qquad\qquad (۲)۲, \{۱ \quad \sqrt{۲}\} \tag{۹}$$

بنابراین، داریم

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{۲} & ۱ \\ -۱ & \sqrt{۲} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}^{-۱}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \equiv \mathbf{\Lambda} \tag{۱۰}$$

می‌بینیم ماتریس $\mathbf{A}$ ناتکین است. بنابراین، برای هر kی صحیحی، داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{P}^{-۱} &= \begin{bmatrix} \sqrt{۲} & ۱ \\ -۱ & \sqrt{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{۲}/۳ & -۱/۳ \\ ۱/۳ & \sqrt{۲}/۳ \end{bmatrix} \\ &= \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۲^k + ۲ & (۲^k - ۱)\sqrt{۲} \\ (۲^k - ۱)\sqrt{۲} & ۲^{k+۱} + ۱ \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۱۱}$$

به‌ویژه، توجه کنید که $\mathbf{A}^{۰} = \mathbf{I}$ است. همچنین، داریم

$$\mathbf{A}^{۵۰} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۲^{۵۰} + ۲ & (۲^{۵۰} - ۱)\sqrt{۲} \\ (۲^{۵۰} - ۱)\sqrt{۲} & ۲^{۵۱} + ۱ \end{bmatrix} \tag{۱۲}$$

$$\mathbf{A}^{-۱۰} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۲^{-۱۰} + ۲ & (۲^{-۱۰} - ۱)\sqrt{۲} \\ (۲^{-۱۰} - ۱)\sqrt{۲} & ۲^{-۹} + ۱ \end{bmatrix} \tag{۱۳}$$

۳.۱۲ ریشه‌های ماتریس

در جبر مقدماتی، اگر $y^k = x$ باشد، می‌گوییم y ریشهٔ kام x است. همین‌طور، می‌گوییم ماتریس $\mathbf{B}$ ریشهٔ kام ماتریس $\mathbf{A}$ است اگر $\mathbf{B}^k = \mathbf{A}$ باشد. هدف یافتن همهٔ ماتریسهای $\mathbf{B}$ای است که به‌ازای ماتریس مفروض $\mathbf{A}$ در رابطهٔ بالا صدق می‌کنند.

برای شروع، ماتریس قطری $\mathbf{\Lambda}$ را درنظر بگیرید که اجزایش با رابطهٔ $(\mathbf{\Lambda})_{ij} = d_i\delta_{ij}$ داده شده‌اند. بدیهی است که $\mathbf{\Lambda}^k$ نیز ماتریسی قطری با اجزای قطری d_i^k است، یعنی $(\mathbf{\Lambda}^k)_{ij} = d_i^k\delta_{ij}$. اکنون فرض کنید $p = ۱/k$ باشد و ماتریس قطری $\mathbf{D}$ را درنظر بگیرید که اجزای آن با $(\mathbf{D})_{ij} = d_i^p\delta_{ij}$ داده شده‌اند. آشکارا، توان kام $\mathbf{D}$ برابر $\mathbf{\Lambda}$ می‌شود، یعنی $\mathbf{D}^k = \mathbf{\Lambda}$. سپس ماتریس $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-۱} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^p\mathbf{P}^{-۱}$ را درنظر بگیرید. توان kام $\mathbf{B}$ را به‌دست می‌آوریم، می‌بینیم

$$\mathbf{B}^k = (\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^p\mathbf{P}^{-۱})(\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^p\mathbf{P}^{-۱})\cdots(\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^p\mathbf{P}^{-۱})\ (\text{مرتبه } k) = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-۱} = \mathbf{A} \qquad (۱۴)$$

پس، $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^p\mathbf{P}^{-۱}$ یک ریشهٔ kام $\mathbf{A}$ است. نتیجهٔ مشابهی برای هر توان کسری معتبر است. پس، q هر کسری که باشد، داریم

$$\mathbf{A}^q = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^q\mathbf{P}^{-۱} \qquad (۱۵)$$

مثال ۲. $\mathbf{A}^{۳/۷}$ را به‌دست آورید اگر $\mathbf{A}$ ماتریس معادلهٔ (۸) باشد.

حل: در این حالت، ماتریس قطری $\mathbf{\Lambda}$ با معادلهٔ (۱۰) داده می‌شود. بنابراین، داریم

$$\mathbf{\Lambda}^{۳/۷} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲^{۳/۷} \end{bmatrix} \qquad (۱۶)$$

در نتیجه، داریم

$$\mathbf{A}^{۳/۷} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{۳/۷}\mathbf{P}^{-۱} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۲^{۳/۷}+۲ & (۲^{۳/۷}-۱)\sqrt{۲} \\ (۲^{۳/۷}-۱)\sqrt{۲} & ۲^{۱۰/۷}+۱ \end{bmatrix} \qquad (۱۷)$$

باید بدانیم که ریشهٔ kام عدد یکتا نیست. در واقع، هر عددی بجز صفر دقیقاً k ریشهٔ kام

دارد. همین‌طور، ریشهٔ kام ماتریس یکتا نیست. اگر ماتریس $\mathbf{A}$، m ویژه‌مقدار غیرصفر داشته باشد، k^m ماتریس هست که توان kام آنها $\mathbf{A}$ می‌شود.

مثال ۳. کلیهٔ ریشه‌های دوم ماتریس زیر را به‌دست آورید

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۳/۲ & ۱/۲ \\ ۱/۲ & ۳/۲ \end{bmatrix} \tag{۱۸}$$

حل: ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای ماتریس فوق می‌شوند

$$(۱)۲, \{۱ \quad ۱\} \qquad (۲)۱, \{۱ \quad -۱\} \tag{۱۹}$$

بنابراین، داریم

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \tag{۲۰}$$

ریشه‌های دوم $\mathbf{\Lambda}$ عبارت‌اند از

$$\mathbf{\Lambda}^{۱/۲} = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & \pm ۱ \end{bmatrix} \tag{۲۱}$$

هر یک از چهار ماتریس $\mathbf{\Lambda}^{۱/۲}$ را می‌توانیم برای به‌دست آوردن $\mathbf{A}^{۱/۲}$ انتخاب کنیم. با استفاده از رابطهٔ

$$\mathbf{A}^{۱/۲} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{۱/۲}\mathbf{P}^{-۱} \tag{۲۲}$$

می‌بینیم $\mathbf{A}$ چهار ریشهٔ دوم دارد که با $\pm\mathbf{B}$ و $\pm\mathbf{C}$ داده شده‌اند، به‌طوری که

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (\sqrt{۲}+۱)/۲ & (\sqrt{۲}-۱)/۲ \\ (\sqrt{۲}-۱)/۲ & (\sqrt{۲}+۱)/۲ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (\sqrt{۲}-۱)/۲ & (\sqrt{۲}+۱)/۲ \\ (\sqrt{۲}+۱)/۲ & (\sqrt{۲}-۱)/۲ \end{bmatrix} \tag{۲۳}$$

۴.۱۲ سری

سری زیر

$$\mathbf{S} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{A}^k \tag{۲۴}$$

از ماتریس $\mathbf{A}$ را، که a_kها ضرایب نرده‌ای‌اند، همگرا می‌گویند اگر و تنها اگر هر جزء سمت راست همگرا شود. در این حالت، سری معادلهٔ (۲۴) با ماتریس $f(\mathbf{A})$، از همان مرتبهٔ $\mathbf{A}$، برابر می‌شود که اجزای آن عبارت‌اند از

$$[f(\mathbf{A})]_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\mathbf{A}^k)_{ij} \tag{۲۵}$$

این نتیجه را بدون اثبات بیان می‌کنیم که سری $f(\mathbf{A})$ از ماتریس $\mathbf{A}$ همگرا می‌شود، اگر و تنها اگر سری جبری متناظر آن $f(\lambda)$، به‌ازای هر ویژه‌مقدار، λ_iی $\mathbf{A}$، همگرا باشد. بنابراین، اگر به‌ازای $|\lambda| < R$ عبارت زیر وجود داشته باشد

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k \tag{۲۶}$$

دراین‌صورت

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{A}^k \tag{۲۷}$$

وجود دارد، اگر و تنها اگر هر ویژه‌مقدار λ_iی $\mathbf{A}$ در $|\lambda_i| < R$ صدق کند. R را شعاع همگرایی سری می‌نامند.

۵.۱۲ تابع نمایی یک ماتریس

سری نمایی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k / k! \tag{۲۸}$$

که به‌ازای هر مقدار متناهی λ همگراست. نظیر آن، می‌توانیم تابع نمایی ماتریس $\mathbf{A}$ را تعریف کنیم:

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k/k! \tag{۲۹}$$

که ماتریسی از همان مرتبهٔ $\mathbf{A}$ می‌شود و برای هر ماتریس مربعی متناهی $\mathbf{A}$ وجود دارد، زیرا همهٔ اجزایش (و بنابراین، ویژه‌مقدارهایش) متناهی‌اند.

برای شروع، تابع نمایی ماتریس قطری را به‌دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم $\mathbf{\Lambda}$ ماتریسی قطری با اجزای $(\mathbf{\Lambda})_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$ باشد، پس

$$\exp(\mathbf{\Lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{\Lambda}^k/k! \tag{۳۰}$$

جزء ijام $\exp(\mathbf{\Lambda})$ چنین به‌دست می‌آید

$$[\exp(\mathbf{\Lambda})]_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{\Lambda}^k)_{ij}/k! = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_i^k \delta_{ij}/k! = \exp(\lambda_i)\delta_{ij} \tag{۳۱}$$

بنابراین، بدیهی است که چنانچه

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{۳۲}$$

دراین‌صورت، داریم

$$\exp(\mathbf{\Lambda}) = \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1) & & & 0 \\ & \exp(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \exp(\lambda_n) \end{bmatrix} \tag{۳۳}$$

اکنون سری زیر را درنظر بگیرید

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k}{k!} + \cdots \tag{۳۴}$$

فرض کنید $\mathbf{P}$ ماتریسی باشد که $\mathbf{A}$ را به‌صورت قطری $\mathbf{\Lambda}$ در می‌آورد. معادلهٔ (۳۴) را از سمت چپ در $\mathbf{P}^{-1}$ و از راست در $\mathbf{P}$ ضرب می‌کنیم، با یادآوری اینکه $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}^k$ است، داریم

$$\mathbf{P}^{-1}(\exp(\mathbf{A}))\mathbf{P} = \mathbf{I} + \mathbf{\Lambda} + \frac{\mathbf{\Lambda}^2}{2!} + \frac{\mathbf{\Lambda}^3}{3!} + \cdots + \frac{\mathbf{\Lambda}^k}{k!} + \cdots = \exp(\mathbf{\Lambda}) \quad (۳۵)$$

بی‌درنگ، نتیجه می‌گیریم که

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathbf{P}(\exp(\mathbf{\Lambda}))\mathbf{P}^{-1} \quad (۳۶)$$

با تعریف تابع نمایی، می‌توان نمای ماتریسی هر عددی را تعریف کرد. در جبر مقدماتی، داریم $a^x = \exp(x \ln a)$ که $\ln$ نشان‌دهندهٔ لگاریتم طبیعی است. همانند آن، تعریف می‌کنیم

$$a^{\mathbf{A}} = \exp(\mathbf{A} \ln a) = \mathbf{P}\exp(\mathbf{\Lambda} \ln a)\mathbf{P}^{-1} \quad (۳۷)$$

که

$$\exp(\mathbf{\Lambda} \ln a) \equiv a^{\mathbf{\Lambda}} = \begin{bmatrix} a^{\lambda_1} & & & & \\ & a^{\lambda_2} & & & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & 0 & & \cdot & \\ & & & & a^{\lambda_n} \end{bmatrix} \quad (۳۸)$$

مثال ۴. اگر $\mathbf{A}$ ماتریس معادلهٔ (۱۸) باشد، $e^{\mathbf{A}}$ و $4^{\mathbf{A}}$ را به‌دست آورید.

حل: ماتریسهای $\mathbf{P}$ و $\mathbf{\Lambda}$ با معادلات (۲۰) داده شده‌اند. داریم

$$e^{\mathbf{\Lambda}} = \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}, \; 4^{\mathbf{\Lambda}} = \begin{bmatrix} 4^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (۳۹)$$

پس

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^2 + e & e^2 - e \\ e^2 - e & e^2 + e \end{bmatrix} \qquad (\text{الف}40)$$

$$4^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}4^{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \qquad (\text{ب}40)$$

۶.۱۲ لگاریتم ماتریس

اگر $y = e^x$ باشد، x را لگاریتم طبیعی y می‌نامیم و آن‌را به‌صورت $x = \ln y$ می‌نویسیم. نظیر آن، برای ماتریس مفروض $\mathbf{A}$، می‌گوییم ماتریس $\mathbf{B}$ لگاریتم طبیعی $\mathbf{A}$ است، اگر $e^{\mathbf{B}} = \mathbf{A}$ باشد. بنابراین، بنابه تعریف، داریم

$$\mathbf{B} = \ln \mathbf{A} \Leftrightarrow \exp(\mathbf{B}) = \mathbf{A} \qquad (41)$$

ابتدا لگاریتم ماتریس قطری را به‌دست می‌آوریم. اگر $\mathbf{\Lambda} \equiv [\lambda_i \delta_{ij}]$ ماتریسی قطری باشد، لگاریتم طبیعی آن ماتریسی قطری از همان مرتبه است که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\mathbf{D} = \ln \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \ln \lambda_1 & & & & \\ & \ln \lambda_2 & & & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & 0 & & & \cdot \\ & & & & \ln \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (42)$$

برای اثبات، $\exp(\mathbf{D})$ را درنظر بگیرید. با یادآوری اینکه $\exp(\ln x) = x$ و با استفاده از معادلهٔ (۳۳)، به‌سادگی می‌بینیم که

$$\exp(\mathbf{D}) = \exp(\ln \mathbf{\Lambda}) = \mathbf{\Lambda} \qquad (43)$$

بنابراین، از تعریف برمی‌آید که $\mathbf{D}$ لگاریتم طبیعی $\mathbf{\Lambda}$ است.

فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریس قطری‌شدنی معادلات (۱) باشد. حال می‌گوییم

$$\mathbf{B} \equiv \ln \mathbf{A} = \mathbf{P}(\ln \mathbf{\Lambda})\mathbf{P}^{-۱} = \mathbf{PDP}^{-۱} \tag{۴۴}$$

برای اثبات، بار دیگر، باید نشان دهیم که $\exp(\mathbf{B}) = \mathbf{A}$. داریم

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{B}} &= \mathbf{I} + \mathbf{B} + \frac{\mathbf{B}^۲}{۲!} + \cdots + \frac{\mathbf{B}^k}{k!} + \cdots \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{PDP}^{-۱} + \frac{(\mathbf{PDP}^{-۱})^۲}{۲!} + \cdots + \frac{(\mathbf{PDP}^{-۱})^k}{k!} + \cdots \\ &= \mathbf{P}\left[\mathbf{I} + \mathbf{D} + \frac{\mathbf{D}^۲}{۲!} + \cdots + \frac{\mathbf{D}^k}{k!} + \cdots\right]\mathbf{P}^{-۱} \\ &= \mathbf{P}e^{\mathbf{D}}\mathbf{P}^{-۱} = \mathbf{P\Lambda P}^{-۱} = \mathbf{A} \end{aligned} \tag{۴۵}$$

مثال ۵. لگاریتم ماتریس زیر را بیابید

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۳۹ & -۵۰ & -۲۰ \\ ۱۵ & -۱۶ & -۱۰ \\ ۳۰ & -۵۰ & -۱۱ \end{bmatrix} \tag{۴۶}$$

حل: برای ماتریس مفروض $\mathbf{A}$، ماتریسهای $\mathbf{P}$، $\mathbf{\Lambda}$، و $\mathbf{P}^{-۱}$ چنین یافت می‌شوند

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}, \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} ۹ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۶ \end{bmatrix}, \mathbf{P}^{-۱} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & -۱ \\ ۰ & ۲ & -۱ \\ -۳ & ۵ & ۲ \end{bmatrix} \tag{۴۷}$$

داریم

$$\ln\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \ln۹ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \ln۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \ln۶ + i\pi \end{bmatrix} \tag{۴۸}$$

بنابراین، $\ln\mathbf{A}$ می‌شود

$$\ln\mathbf{A} = \mathbf{P}(\ln \mathbf{\Lambda})\mathbf{P}^{-۱} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۹a - ۶b & ۱۰(b-a) & ۴(b-a) \\ ۳(a-b) & ۵b - ۲a & ۲(b-a) \\ ۶(a-b) & ۱۰(b-a) & ۴b - a \end{bmatrix} \qquad (\text{۴۹الف})$$

که

$$a = \ln ۹, b = \ln(-۶) = \ln ۶ + i\pi \qquad (\text{۴۹ب})$$

۷.۱۲ توابع هذلولوی و مثلثاتی

از تابع نمایی به توابع هذلولوی و مثلثاتی ماتریس نیز می‌رسیم. بنابراین، برای هر ماتریس مربعی دلخواه $\mathbf{A}$، توابع هذلولوی را چنین تعریف می‌کنیم

$$\sinh\mathbf{A} = \frac{۱}{۲}(e^{\mathbf{A}} - e^{-\mathbf{A}}) = \sum_{k=۰}^{\infty} \mathbf{A}^{۲k+۱}/(۲k+۱)! \qquad (\text{۵۰الف})$$

$$\cosh\mathbf{A} = \frac{۱}{۲}(e^{\mathbf{A}} + e^{-\mathbf{A}}) = \sum_{k=۰}^{\infty} \mathbf{A}^{۲k}/(۲k)! \qquad (\text{۵۰ب})$$

که برای هر ماتریس $\mathbf{A}$یی با اجزای متناهی وجود دارند. نظیر آن، توابع مثلثاتی را چنین تعریف می‌کنیم

$$\sin\mathbf{A} = \frac{۱}{۲!}(e^{i\mathbf{A}} - e^{-i\mathbf{A}}) = \sum_{k=۰}^{\infty} (-۱)^k \mathbf{A}^{۲k+۱}/(۲k+۱)! \qquad (\text{۵۱الف})$$

$$\cos\mathbf{A} = \frac{۱}{۲}(e^{i\mathbf{A}} + e^{-i\mathbf{A}}) = \sum_{k=۰}^{\infty} (-۱)^k \mathbf{A}^{۲k}/(۲k)! \qquad (\text{۵۱ب})$$

که برای هر ماتریسی مانند $\mathbf{A}$ با اجزای متناهی وجود دارند.

مثال ۶. $\sin\pi\mathbf{A}$ و $\cos\pi\mathbf{A}$ را بیابید، چنانچه

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -۴۷/۲ & ۵۳ & ۳۰ \\ -۱۲ & ۵۳/۲ & ۱۵ \\ ۲ & -۷/۲ & -۲ \end{bmatrix} \qquad (۵۲)$$

حل: ماتریسهای $\mathbf{P}$، $\mathbf{\Lambda}$، و $\mathbf{P}^{-1}$ وابسته به ماتریس مفروض $\mathbf{A}$ را به‌صورت زیر می‌یابیم

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}5 & 8 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 4 & 3 & -1\end{bmatrix},\ \mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix},\ \mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}5 & -11 & -6\\ -4 & 9 & 5\\ 8 & -17 & -10\end{bmatrix} \quad (53)$$

بنابراین، داریم

$$\sin\pi\mathbf{\Lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\pi\mathbf{\Lambda})^{2k+1}/(2k+1)!$$
$$=\begin{bmatrix}\sin\ \pi/2 & 0 & 0\\ 0 & \sin\ \pi & 0\\ 0 & 0 & -\sin\ \pi/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \quad (54)$$

بنابراین

$$\sin\ \pi\mathbf{A}=\mathbf{P}\sin(\pi\mathbf{\Lambda})\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}17 & -38 & -20\\ -8 & 17 & 10\\ 28 & -61 & -34\end{bmatrix} \quad (55)$$

همین‌طور

$$\cos\ \pi\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad (56)$$

به‌طوری که

$$\cos\ \pi\mathbf{A}=\mathbf{P}\cos(\pi\mathbf{\Lambda})\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}32 & -72 & -40\\ 8 & -18 & -10\\ 12 & -27 & -15\end{bmatrix} \quad (57)$$

۸.۱۲ محاسبهٔ توابع با استفاده از قضیهٔ کیلی‌ـهامیلتون

روشی که تاکنون برای محاسبهٔ توابع مختلف ماتریسی بررسی کردیم، بر این اصل استوار است که اگر $\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}$ باشد، $\mathbf{\Lambda}$ ماتریسی قطری است، دراین‌صورت $f(\mathbf{A})=\mathbf{P}f(\mathbf{\Lambda})\mathbf{P}^{-1}$

است. با وجود این، اشکال عمده آن این است که تنها برای ماتریسهای قطری‌شدنی به‌کار می‌رود. روش دیگری[۱] برای محاسبهٔ توابع ماتریسی، برمبنای استفاده از قضیهٔ کیلی-هامیلتون هست که می‌توان آن‌را برای هر ماتریسی به‌کار برد.

در فصل ۱۰، نشان دادیم که هر چندجمله‌ای ماتریسی با هر درجه‌ای با چندجمله‌ای از درجهٔ کمتر یا مساوی $m-1$ برابر است که m درجهٔ چندجمله‌ای مینیمال است. درواقع، این نتیجه هم برای چندجمله‌ایها و هم برای هر تابع دلخواه ماتریسی معتبر است، به‌شرط اینکه این تابع کاملاً مشتق‌پذیر باشد. بنابراین، اگر چندجمله‌ای مینیمال ماتریس $\mathbf{A}$ درجهٔ m داشته باشد، هر تابع $f(\mathbf{A})$یی را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی m ماتریس مستقل خطی $\mathbf{I}$، $\mathbf{A}$، $\mathbf{A}^2$، $\cdots$، $\mathbf{A}^{m-1}$ بیان کرد، یعنی

$$f(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}) \tag{۵۸}$$

که

$$r(\mathbf{A}) = \alpha_{m-1}\mathbf{A}^{m-1} + \alpha_{m-2}\mathbf{A}^{m-2} + \cdots + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I} \tag{۵۹}$$

کمیتهای نرده‌ای α_i را به‌ترتیب زیر تعیین می‌کنیم: اگر λ_i یک ویژه‌مقدار $\mathbf{A}$ با k درجهٔ واگنی باشد، توابع جبری $f(\lambda)$ و $r(\lambda)$ در k معادلهٔ زیر صدق می‌کنند

$$\begin{aligned}
f(\lambda_i) &= r(\lambda_i)\\
\frac{df(\lambda_i)}{d\lambda} &= \frac{dr(\lambda_i)}{d\lambda}\\
\frac{d^2f(\lambda_i)}{d\lambda^2} &= \frac{d^2r(\lambda_i)}{d\lambda^2}\\
&\vdots\\
\frac{d^{k-1}f(\lambda_i)}{d\lambda^{k-1}} &= \frac{d^{k-1}r(\lambda_i)}{d\lambda^{k-1}}
\end{aligned} \tag{۶۰}$$

در اینجا نماد $d^lf(\lambda_i)/d\lambda^l$ نشان‌دهندهٔ مشتق lام $f(\lambda)$ در $\lambda = \lambda_i$ است. اکنون می‌خواهیم از این روش برای حل بعضی از مسائلی استفاده کنیم که قبلاً در این فصل مطرح کردیم و همچنین آن‌را برای ماتریسهای قطری‌ناشدنی به‌کار بریم.

---

۱. بقیهٔ این فصل، بجز مثالهای ۱۲(الف) و ۱۳، برای خواننده‌ای که فصل ۱۰ را رها کرده، مناسب نیست.

مثال ۷. $\mathbf{A}^p$ را به‌دست آورید، p عددی دلخواه است و $\mathbf{A}$ ماتریس معادلهٔ (۸) است.

حل: ماتریس $\mathbf{A}$ مرتبهٔ ۲ و ویژه‌مقدارهای متمایز $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 2$ دارد. بنابراین، درجهٔ چندجمله‌ای مینیمال $m = 2$ می‌شود. داریم $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^p$ و در نتیجه $f(\lambda) = \lambda^p$. فرض کنید $r(\mathbf{A}) = \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_0 \mathbf{I}$ باشد، پس $r(\lambda) = \alpha_1 \lambda + \alpha_0$ است. چون هر دو ویژه‌مقدار ناواگن‌اند، دو شرط زیر برقرارند

$$f(\lambda_1) = r(\lambda_1), f(\lambda_2) = r(\lambda_2) \tag{۶۱}$$

در نتیجه

$$1 = \alpha_1 + \alpha_0 \,, 2^p = 2\alpha_1 + \alpha_0 \tag{۶۲}$$

جواب چنین به‌دست می‌آید

$$\alpha_1 = 2^p - 1, \ \alpha_0 = 2 - 2^p \tag{۶۳}$$

با قرار دادن این دو مقدار در $r(\mathbf{A})$، داریم

$$f(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}) = \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_0 \mathbf{I}$$

یا

$$\mathbf{A}^p = (2^p - 1) \begin{bmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 5/3 \end{bmatrix} + (2 - 2^p) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2^p + 2 & (2^p - 1)\sqrt{2} \\ (2^p - 1)\sqrt{2} & 2^{p+1} + 1 \end{bmatrix} \tag{۶۴}$$

که با معادلهٔ (۱۱) سازگار است. اگر p غیرصحیح باشد، این تنها ماتریسی نیست که با $\mathbf{A}^p$ برابر می‌شود.

مثال ۸. کلیهٔ ریشه‌های دوم ماتریس معادلهٔ (۱۸) را بیابید.

حل: $\mathbf{A}$ ماتریس مرتبهٔ دو با ویژه‌مقدارهای متمایز $\lambda_1 = ۲$ و $\lambda_2 = ۱$ است؛ بنابراین $m = ۲$ است. داریم $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{1/2}$ و $f(\lambda) = \lambda^{1/2}$؛ فرض کنید $r(\mathbf{A}) = \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I}$ باشد، بنابراین $r(\lambda) = \alpha_1\lambda + \alpha_0$. ضرایب α_1 و α_0 در شرایط زیر صدق می‌کنند

$$f(\lambda_1) = r(\lambda_1), f(\lambda_2) = r(\lambda_2) \tag{۶۵}$$

یا

$$\pm\sqrt{2} = 2\alpha_1 + \alpha_0, \quad \pm 1 = \alpha_1 + \alpha_0 \tag{۶۶}$$

که هر ترکیبی از چهار علامت معتبر است. از روابط فوق به چهار مجموعه جواب زیر می‌رسیم

$$\alpha_1 = \pm(\sqrt{2} - 1), \alpha_0 = \pm(2 - \sqrt{2}) \tag{۶۷الف}$$

$$\alpha_1 = \pm(\sqrt{2} + 1), \alpha_0 = \mp(2 + \sqrt{2}) \tag{۶۷ب}$$

که علامتهای بالایی یا پایینی را در هر زوج درنظر می‌گیریم. با به‌کار بردن این جوابها در معادلهٔ $\mathbf{A}^{1/2} = \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I}$، چهار ریشهٔ درجهٔ دوم $\pm\mathbf{B}$ و $\pm\mathbf{C}$ را به‌دست می‌آوریم که $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ با معادلات (۲۳) داده شده‌اند.

مثال ۹. $۴^{\mathbf{A}}$ و $\ln\mathbf{A}$ را تعیین کنید، چنانچه $\mathbf{A}$ ماتریس معادلهٔ (۱۸) باشد.

حل: داریم $\lambda_1 = ۲$، $\lambda_2 = ۱$، و $m = ۲$.

(الف) در اینجا $f(\mathbf{A}) = ۴^{\mathbf{A}}$ است، بنابراین $f(\lambda) = ۴^{\lambda}$. فرض کنید $r(\mathbf{A}) = \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I}$ باشد، پس $r(\lambda) = \alpha_1\lambda + \alpha_0$ می‌شود. شرایط زیر برقرارند

$$f(1) = r(1), f(2) = r(2) \Rightarrow 4 = \alpha_1 + \alpha_0, 16 = 2\alpha_1 + \alpha_0$$

جواب عبارت است از $\alpha_1 = ۱۲$ و $\alpha_0 = -۸$. بنابراین

$$4^{\mathbf{A}} = 12\begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \tag{۶۸}$$

که با معادلهٔ (۴۰ب) مطابقت دارد.

(ب) در اینجا $f(\mathbf{A}) = \ln\mathbf{A}$ و $f(\lambda) = \ln\lambda$. فرض کنید $r(\mathbf{A}) = \alpha_۱\mathbf{A} + \alpha_۰\mathbf{I}$ باشد، در نتیجه $r(\lambda) = \alpha_۱\lambda + \alpha_۰$ می‌شود. شرایط $\alpha_۱$ و $\alpha_۰$ عبارت‌اند از

$$\ln ۱ \equiv ۰ = \alpha_۱ + \alpha_۰\,,\ \ln ۲ = ۲\alpha_۱ + \alpha_۰ \Rightarrow \alpha_۱ = \ln ۲,\ \alpha_۰ = -\ln ۲$$

پس

$$\begin{aligned}\ln\mathbf{A} &= \ln ۲ \begin{bmatrix} ۳/۲ & ۱/۲ \\ ۱/۲ & ۳/۲ \end{bmatrix} - \ln ۲ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\ &= (\ln \sqrt{۲}) \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\end{aligned} \qquad (۶۹)$$

مثال ۱۰. $e^{۳\mathbf{A}}$، $e^{-\mathbf{A}}$، و $\cosh(\mathbf{A}t)$ را بیابید که $\mathbf{A}$ ماتریس قطری ناشدنی معادلهٔ (۱۹.۱۰) است.

حل: ماتریس مفروض دارای ویژه‌مقدارهای $\lambda_۱ = ۱$ با چندگانگی ۱ و $\lambda_۲ = ۲$ با چندگانگی ۲ است. بهتر است تابع $f(\mathbf{A}) = \exp(\mathbf{A}t)$ را به‌دست آوریم که t پارامتر است. بنابراین، $f(\lambda) = \exp(\lambda t)$ می‌گیریم. همچنین، فرض کنید

$$r(\mathbf{A}) = \alpha_۲\mathbf{A}^۲ + \alpha_۱\mathbf{A} + \alpha_۰\mathbf{I} \qquad (\text{۷۰الف})$$

$$r(\lambda) = \alpha_۲\lambda^۲ + \alpha_۱\lambda + \alpha_۰ \qquad (\text{۷۰ب})$$

ضرایب $\alpha_۰$، $\alpha_۱$، و $\alpha_۲$ را از شرایط زیر تعیین می‌کنیم

$$f(۱) = r(۱),\ f(۲) = r(۲),\ f'(\lambda)|_{\lambda=۲} = r'(\lambda)|_{\lambda=۲} \qquad (۷۱)$$

نتیجه می‌گیریم

$$e^t = \alpha_۲ + \alpha_۱ + \alpha_۰$$

$$e^{۲t} = ۴\alpha_۲ + ۲\alpha_۱ + \alpha_۰$$

$$te^{۲t} = ۴\alpha_۲ + \alpha_۱$$

که جوابهای آن عبارت‌اند از:

$$\alpha_2=(t-1)e^{2t}+e^t,\ \alpha_1=(4-3t)e^{2t}-4e^t,\ \alpha_0=(2t-3)e^{2t}+4e^t \qquad (۷۲)$$

بنابراین، ماتریس $\exp(\mathbf{A}t)$ چنین به‌دست می‌آید

$$e^{\mathbf{A}t}=\alpha_2\begin{bmatrix} 9 & 3 & -4 \\ 8 & 4 & -4 \\ 10 & 6 & -4 \end{bmatrix}+\alpha_1\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}+\alpha_0\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2te^{2t}+e^t & e^{2t}-e^t & -te^{2t} \\ 2te^{2t} & e^{2t} & -te^{2t} \\ (4t-2)e^{2t}+2e^t & 2e^{2t}-2e^t & (1-2t)e^{2t} \end{bmatrix} \qquad (۷۳)$$

از رابطهٔ بالا، داریم

$$e^{3\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} 6e^6+e^3 & e^6-e^3 & -3e^6 \\ 6e^6 & e^6 & -3e^6 \\ 10e^6+2e^3 & 2e^6-2e^3 & -5e^6 \end{bmatrix} \qquad (۷۴\text{الف})$$

$$e^{-\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} -2e^{-2}+e^{-1} & e^{-2}-e^{-1} & e^{-2} \\ -2e^{-2} & e^{-2} & e^{-2} \\ -6e^{-2}+2e^{-1} & 2e^{-2}-2e^{-1} & 3e^{-2} \end{bmatrix} \qquad (۷۴\text{ب})$$

تابع $\cosh\mathbf{A}t$ را می‌توان مستقیماً با درنظر گرفتن $f(\lambda)=\cosh(\lambda t)$ و دنبال کردن همین شیوه به‌دست آورد. یا اینکه $e^{-\mathbf{A}t}$ را پیدا کنیم [به‌جای t در معادلهٔ (۷۳) $-t$ بگذاریم] و از رابطهٔ $\cosh\mathbf{A}t=(e^{\mathbf{A}t}+e^{-\mathbf{A}t})/2$ استفاده کنیم. نتیجه چنین می‌شود

$$\cosh\mathbf{A}t=\begin{bmatrix} 2t\sinh 2t+\cosh t & \cosh 2t-\cosh t & -t\sinh 2t \\ 2t\sinh 2t & \cosh 2t & -t\sinh 2t \\ 2t\sinh 2t+\cosh t-2\cosh 2t & 2\cosh 2t-2\cosh t & \cosh 2t-2t\sinh 2t \end{bmatrix}$$

(۷۵)

مثال ۱۱. $\ln\mathbf{A}$ را بیابید، چنانچه

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & -۳ & ۲ \end{bmatrix} \tag{۷۶}$$

حل: ماتریس بالا تنها یک ویژه‌مقدار متمایز $\lambda = ۲$، با چندگانگی ۳ دارد. داریم

$$f(\mathbf{A})=\ln\mathbf{A},\ \ f(\lambda)=\ln\lambda$$

$$r(\mathbf{A})=\alpha_۲\mathbf{A}^۲+\alpha_۱\mathbf{A}+\alpha_۰\mathbf{I},\ \ r(\lambda)=\alpha_۲\lambda^۲+\alpha_۱\lambda+\alpha_۰ \tag{۷۷}$$

ضرایب از شرایط زیر تعیین می‌شوند

$$f(۲)=r(۲), f'(۲)=r'(۲), f''(۲)=r''(۲) \tag{۷۸}$$

که به دستگاه معادلات زیر می‌انجامد

$$\ln ۲=۴\alpha_۲+۲\alpha_۱+\alpha_۰,\ \frac{۱}{۲}=۴\alpha_۲+\alpha_۱,\ \ -\frac{۱}{۴}=۲\alpha_۲ \tag{۷۹}$$

جواب عبارت است از

$$\alpha_۰=\ln ۲-۳/۲, \alpha_۱=۱, \alpha_۲=-۱/۸ \tag{۸۰}$$

بنابراین

$$\ln\mathbf{A}=-\frac{۱}{۸}\begin{bmatrix} ۴ & -۸ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۴ & -۱۴ & ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & -۳ & ۲ \end{bmatrix}+(\ln ۲-۳/۲)\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \ln ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & \ln ۲ & ۰ \\ ۱/۲ & -۵/۴ & \ln ۲ \end{bmatrix} \tag{۸۱}$$

مثال ۱۲. برای هر ماتریس مربعی مانند $\mathbf{A}$، نشان دهید که

$$\det(\exp\mathbf{A}) = \exp(\mathrm{Tr}\ \mathbf{A}) \tag{۸۲}$$

حل: این نتیجه را می‌خواهیم به دو روش ثابت کنیم. روش اول تنها برای ماتریسهای قطری‌شدنی به‌کار می‌رود، در حالی‌که روش دوم کلی است.

(الف) اگر $\mathbf{A}$ ماتریسی قطری‌شدنی باشد، داریم

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} \tag{۸۳}$$

که $\mathbf{\Lambda}$ ماتریسی قطری شامل ویژه‌مقدارهای λ_iی $\mathbf{A}$ است. از دومین معادلهٔ (۸۳)، نتیجه می‌گیریم که

$$\exp\ \mathbf{A} = \mathbf{P}(\exp\ \mathbf{\Lambda})\mathbf{P}^{-1} \tag{۸۴}$$

بنابراین

$$\det(\exp\ \mathbf{A}) = (\det\ \mathbf{P})\det(\exp\ \mathbf{\Lambda})\det(\mathbf{P}^{-1}) = \det(\exp\ \mathbf{\Lambda}) \tag{۸۵}$$

اکنون، $\exp\mathbf{\Lambda}$ ماتریسی قطری با اجزای قطری $\exp\lambda_i$ است. بنابراین، با استفاده از معادلهٔ (۹.۱۰الف)، بدیهی است که

$$\begin{aligned}\det(\exp\ \mathbf{A}) &= (\exp\ \lambda_1)(\exp\ \lambda_2)\cdots(\exp\ \lambda_n)\\ &= \exp(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) = \exp(\mathrm{Tr}\ \mathbf{A})\end{aligned} \tag{۸۶}$$

به‌این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

(ب) حال می‌خواهیم، بدون فرض اینکه $\mathbf{A}$ قطری‌شدنی است، اثباتی برای این قضیه ارائه دهیم. هر ماتریس مربعی را می‌توان با تبدیلی تشابهی به شکل مثلثی درآورد. بنابراین، فرض کنید داشته باشیم

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{T}, \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{P}^{-1} \tag{۸۷}$$

$\mathbf{T}$ ماتریسی مثلثی است که اجزای قطری آن $(\mathbf{T})_{ii} = \lambda_i$، یعنی ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$یند. از معادلهٔ (۸۷)، داریم

$$\exp \mathbf{A} = \sum_{k=۰}^{\infty} \mathbf{A}^k/k! = \mathbf{P}\left[\sum_{k=۰}^{\infty} \mathbf{T}^k/k!\right]\mathbf{P}^{-۱} = \mathbf{P}(\exp \mathbf{T})\mathbf{P}^{-۱} \qquad (۸۸)$$

چون $\mathbf{T}$ مثلثی است، اجزای قطری توان kام آن عبارت‌اند از λ_i^k که k یک عدد صحیح مثبت است. بنابراین، با درنظر گرفتن سری نمایی، روشن است که اجزای قطری $\exp\mathbf{T}$ عبارت‌اند از $\exp\lambda_i$. با توجه به اینکه دترمینان ماتریس مثلثی با حاصلضرب اجزای قطری‌اش برابر است، داریم

$$\det(\exp \mathbf{T}) = \exp(\lambda_۱ + \lambda_۲ + \cdots + \lambda_n) = \exp(\mathrm{Tr}\ \mathbf{A}) \qquad (۸۹)$$

از معادلهٔ (۸۸)، داریم

$$\det(\exp \mathbf{A}) = \det(\exp \mathbf{T}) \qquad (۹۰)$$

که همراه با معادلهٔ (۸۹) نتیجه را ثابت می‌کند.

مثال ۱۳. فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو ماتریس مربعی هم مرتبه‌اند و فرض کنید $\mathbf{C} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ باشد. اگر داشته باشیم $[\mathbf{C}, \mathbf{A}] = [\mathbf{C}, \mathbf{B}] = ۰$، ثابت کنید که

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}+۱/۲\mathbf{C}} \qquad (۹۱)$$

حل: فرض کنید λ یک پارامتر باشد و داشته باشیم

$$f(\lambda) = e^{\lambda\mathbf{A}}e^{\lambda\mathbf{B}}e^{-\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})} \qquad (۹۲)$$

نسبت به λ مشتق می‌گیریم، داریم

$$\frac{df}{d\lambda} = \left[e^{\lambda\mathbf{A}}\mathbf{A}e^{\lambda\mathbf{B}} + e^{\lambda\mathbf{A}}e^{\lambda\mathbf{B}}\mathbf{B} - e^{\lambda\mathbf{A}}e^{\lambda\mathbf{B}}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\right]e^{-\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})} \qquad (۹۳)$$

به دلیل اینکه $[[\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{A}] = ۰$، نتیجهٔ تمرین ۱۰ در این حالت خاص تبدیل می‌شود به

$$e^{\lambda\mathbf{A}}\mathbf{B}e^{-\lambda\mathbf{A}} = \mathbf{B} + \lambda[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \qquad (۹۴)$$

عبارت فوق را از سمت چپ در $e^{-\mathbf{A}\lambda}$ ضرب می‌کنیم، داریم

$$\mathbf{B}e^{-\lambda\mathbf{A}} = e^{-\lambda\mathbf{A}}\mathbf{B} + \lambda[\mathbf{A},\mathbf{B}]e^{-\lambda\mathbf{A}} \tag{۹۵}$$

جای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را با یکدیگر عوض می‌کنیم و λ را به‌جای $-\lambda$ در معادلهٔ (۹۵) قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{A}e^{\lambda\mathbf{B}} = e^{\lambda\mathbf{B}}\mathbf{A} + \lambda[\mathbf{A},\mathbf{B}]e^{\lambda\mathbf{B}} = e^{\lambda\mathbf{B}}\mathbf{A} + \lambda\mathbf{C}e^{\lambda\mathbf{B}} \tag{۹۶}$$

آن‌را در جملهٔ اول سمت راست معادلهٔ ۹۳ می‌گذاریم، می‌بینیم

$$\frac{df}{d\lambda} = \left[e^{\lambda\mathbf{A}}e^{\lambda\mathbf{B}}\mathbf{A} + \lambda\mathbf{C}e^{\lambda\mathbf{A}}e^{\lambda\mathbf{B}} + e^{\lambda\mathbf{A}}e^{\lambda\mathbf{B}}\mathbf{B} - e^{\lambda\mathbf{A}}e^{\lambda\mathbf{B}}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\right]e^{-\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})}$$

$$= \lambda\mathbf{C}e^{\lambda\mathbf{A}}e^{\lambda\mathbf{B}}e^{-\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})} = \lambda\mathbf{C}f(\lambda) \tag{۹۷}$$

یا

$$\frac{df}{f} = \mathbf{C}\lambda d\lambda \tag{۹۸}$$

نظر به اینکه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ مستقل از λ هستند، می‌توانیم از معادلهٔ (۹۸) انتگرال بگیریم که با استفاده از مقدار اولیهٔ $f(\circ) = \mathbf{I}$، می‌شود

$$f(\lambda) = \exp(\mathbf{C}\lambda^{۲}/۲) \tag{۹۹الف}$$

یا

$$e^{\lambda\mathbf{A}}e^{\lambda\mathbf{B}}e^{-\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})} = e^{\mathbf{C}\lambda^{۲}/۲} \tag{۹۹ب}$$

چون $\mathbf{C}$ با $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ جابه‌جا می‌شود، $e^{\mathbf{C}}$ با $e^{\mathbf{A}}$، $e^{\mathbf{B}}$، و $e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})}$ جابه‌جا می‌شود. معادلهٔ (۹۹ب) را از سمت راست در $e^{\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})}$ ضرب می‌کنیم، به‌علت ویژگی جابه‌جایی‌پذیری که بالا اشاره کردیم، داریم

$$e^{\lambda\mathbf{A}}e^{\lambda\mathbf{B}} = e^{\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})}e^{\mathbf{C}\lambda^{۲}/۲} = e^{\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}\lambda^{۲}/۲} \tag{۱۰۰}$$

سرانجام، با قرار دادن $\lambda = ۱$، نتیجهٔ مطلوب معادلهٔ (۹۱) را به‌دست می‌آوریم.

این نتیجه نشان می‌دهد که قانون نماها $e^a e^b = e^{a+b}$، که برای اعداد معتبر است، در حالت ماتریسهای جابه‌جایی‌ناپذیر صادق نیست.

تمرین

۱.۱۲ نشان دهید که اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ با یکدیگر جابه‌جا شوند، $f(\mathbf{A})$ و $g(\mathbf{B})$ نیز با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند، که f و g توابعی دلخواه‌اند که می‌توان آنها را به‌صورت سری توانی بیان کرد.

۲.۱۲ * ثابت کنید که $e^{\mathbf{A}}$ ناتکین است، حتی اگر $\mathbf{A}$ تکین باشد. همچنین نشان دهید که وارون $e^{\mathbf{A}}$ برابر با $e^{-\mathbf{A}}$ است.

۳.۱۲ نشان دهید که $a^{\circ} = \mathbf{I}$ است، a کمیت نرده‌ای غیرصفر دلخواه است و ۰ ماتریس صفر است.

۴.۱۲ فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریس معادلهٔ (۱۹.۱۰) باشد. تقریبهای $\exp \mathbf{A}$ و $\cosh \mathbf{A}$ را با نگه‌داشتن جملات تا $\mathbf{A}^{۵}$ در بسط سری آنها به‌دست آورید. نتیجه را با جواب دقیقی که در مثال (۱۰) به‌دست آوردیم، مقایسه کنید.

۵.۱۲ * $\ln(\mathbf{I}+\mathbf{A})$ را، با یکی از روشهایی که در این فصل مطرح شد، به‌دست آورید. ماتریس $\mathbf{A}$ عبارت است از

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۳/۸ & ۱/۸ & ۱/۸ \\ ۰ & ۱/۳ & ۰ \\ ۱/۸ & ۱/۲۴ & ۳/۸ \end{bmatrix}$$

سپس عبارت زیر را محاسبه کنید و آن‌را با $\ln(\mathbf{I}+\mathbf{A})$ مقایسه کنید.

$$\mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^{۲}}{۲} + \frac{\mathbf{A}^{۳}}{۳} - \frac{\mathbf{A}^{۴}}{۴}$$

[این عبارت تعمیمی از سری لگاریتمی زیر

$$\ln(۱+z) = \sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n+۱} z^n/n \qquad |z| \leq ۱, z \neq -۱$$

به ماتریسهاست. ملاحظه می‌کنید که همهٔ ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ کمتر از واحدند.]

۱۲. ۶ $\exp(-\mathbf{A}t)$ را برای ماتریس معادلهٔ (۱۹.۱۰) به‌دست آورید. [معادلهٔ (۷۳).] به‌طور صریح نشان دهید که $\exp(-\mathbf{A}t)\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{I}$.

۱۲. ۷ فرض کنید $\mathbf{B}$ ماتریس معادلهٔ (۸۱) باشد. نشان دهید که $\exp\mathbf{B} = \mathbf{A}$ که $\mathbf{A}$ ماتریس معادلهٔ (۷۶) است، به این ترتیب، نتیجهٔ مثال (۱۱) بازبینی می‌شود.

۱۲. ۸* $\mathbf{A}^k$، $e^{\mathbf{A}}$، و $\ln\mathbf{A}$ را بیابید، چنانچه

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مجموع سری

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k/k!$$

را دقیقاً بیابید و ثابت کنید که نتیجه با محاسبهٔ مستقیم $e^{\mathbf{A}}$ سازگار است.

۱۲. ۹ ماتریس $\mathbf{A}^{-k}$ را به‌دست آورید، $\mathbf{A}$ ماتریس معادلهٔ (۸) است. به‌طور صریح نشان دهید که $\mathbf{A}^k\mathbf{A}^{-k} = \mathbf{I}$.

۱۲. ۱۰* اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو ماتریس مربعی دلخواه با مرتبهٔ یکسان باشند و λ پارامتر باشد، نشان دهید که

$$e^{\lambda\mathbf{A}}\mathbf{B}e^{-\lambda\mathbf{A}} = \mathbf{B} + \lambda[\mathbf{A},\mathbf{B}] + \frac{\lambda^2}{2!}[\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] + \frac{\lambda^3}{3!}[\mathbf{A},[\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{B}]]] + \cdots$$

[اگر $\mathbf{B}$ هامیلتونی باشد، این تبدیل در مکانیک کوانتومی به بازبهنجارش هامیلتونی معروف است.]

۱۳

مجموع و حاصلضرب کرونکر ماتریسها

در بیشتر مسائل مکانیک کوانتومی عموماً به ماتریسهایی برمی‌خوریم که به‌صورت مجموع کرونکر یا حاصلضرب کرونکر (به‌ترتیب، به مجموع مستقیم و حاصلضرب مستقیم نیز معروف‌اند) دو یا چند ماتریس‌اند. به این دو عمل در این فصل می‌پردازیم.

۱.۱۳ مجموع کرونکر ماتریسها

مجموع کرونکر، یا مستقیم، دو ماتریس مربعی $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ از مرتبهٔ m و $\mathbf{B} \equiv [b_{ij}]$ از مرتبهٔ n ماتریس مربعی $\mathbf{C}$ از مرتبهٔ $m+n$ است که بنابه تعریف عبارت است از

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B} \equiv \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & ۰_۱ \\ \hline ۰_۲ & \mathbf{B} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1m} & & & \\ \vdots & & & & 0_1 & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & & & \\ \hline & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & 0_2 & & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right] \tag{1}$$

که 0_1 و 0_2 دو ماتریس صفر، به‌ترتیب از مرتبهٔ $m \times n$ و $n \times m$ هستند. در اینجا نماد $\oplus$ نشانهٔ مجموع کرونکر است. این ایده را به‌سادگی می‌توان به بیش از دو ماتریس تعمیم داد.

مثال ۱. مجموع کرونکر سه ماتریس زیر را بیابید

$$\mathbf{A} = a, \ \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b & c \\ d & e \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} f & g & h \\ i & j & k \\ x & y & z \end{bmatrix} \tag{2}$$

حل: مجموع مستقیم ماتریسهای فوق ماتریسی از مرتبهٔ $6 = 3 + 2 + 1$ است که عبارت است از

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B} \oplus \mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|cc|ccc} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & e & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & f & g & h \\ 0 & 0 & 0 & i & j & k \\ 0 & 0 & 0 & x & y & z \end{array}\right] \tag{3}$$

به چنین ماتریسی که اجزای آن در بلوکهای مربعی در امتداد قطر اصلی غیرصفر و در جاهای دیگر صفر است، صورت قطری‌شدهٔ بلوکی می‌گویند. به‌سادگی می‌بینیم که اگر ماتریس $\mathbf{M}$ مجموع مستقیم چند ماتریس زیر باشد

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}_k \tag{4}$$

دراین‌صورت معادلات زیر صادق‌اند:

$$\det \mathbf{M} = (\det \mathbf{A}_1)(\det \mathbf{A}_2)\cdots(\det \mathbf{A}_k) \qquad \text{(۵الف)}$$

$$\mathrm{Tr}\ \mathbf{M} = \mathrm{Tr}\ \mathbf{A}_1 + \mathrm{Tr}\ \mathbf{A}_2 + \cdots + \mathrm{Tr}\ \mathbf{A}_k \qquad \text{(۵ب)}$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{A}_1^{-1} \oplus \mathbf{A}_2^{-1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}_k^{-1} \qquad \text{(۵ج)}$$

بنابراین، (الف) دترمینان ماتریس مجموع مستقیم با حاصلضرب دترمینان ماتریسهای تشکیل‌دهندهٔ آن برابر است، (ب) رد ماتریس مجموع مستقیم با مجموع رد ماتریسهای تشکیل‌دهندهٔ آن برابر است و (ج) وارون ماتریس مجموع مستقیم با مجموع مستقیم وارون ماتریسهای تشکیل‌دهندهٔ آن برابر است، با فرض اینکه ماتریس ناتکین باشد.

مثال ۲. اگر $\mathbf{A}_1$ و $\mathbf{A}_2$ دو ماتریس مربعی از مرتبه‌ای یکسان، مانند m، و $\mathbf{B}_1$ و $\mathbf{B}_2$ دو ماتریس مربعی از مرتبه‌ای یکسان، مانند n، باشند، دراین‌صورت ثابت کنید که

$$(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{B}_1)(\mathbf{A}_2 \oplus \mathbf{B}_2) = (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) \oplus (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2) \qquad (۶)$$

حل: برای اثبات، سمت چپ معادلهٔ (۶) را، بنابه تعریف معادلهٔ (۱)، چنین می‌نویسیم

$$(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{B}_1)(\mathbf{A}_2 \oplus \mathbf{B}_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \qquad (۷)$$

توجه کنید که ابعاد دو ماتریس افرازشدهٔ سمت راست برای ضرب با روشهای فصل ۶ مناسب است. با استفاده از معادلهٔ (۵.۶) در سمت راست معادلهٔ بالا، داریم

$$(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{B}_1)(\mathbf{A}_2 \oplus \mathbf{B}_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) \oplus (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2) \qquad (۸)$$

که نتیجهٔ مطلوب را ثابت می‌کند.

۲.۱۳ حاصلضرب کرونکر ماتریسها

حاصلضرب کرونکر، یا مستقیم، (به حاصلضرب خارجی نیز معروف است) دو ماتریس $\mathbf{A} \equiv [a_{lm}]$ از مرتبهٔ $L \times M$ و $\mathbf{B} \equiv [b_{pq}]$ از مرتبهٔ $P \times Q$ ماتریسی از مرتبهٔ $I \times J$ است، که $I = LP$

و $J = MQ$ است، یعنی

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1M}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2M}\mathbf{B} \\ \vdots & & & \\ a_{L1}\mathbf{B} & a_{L2}\mathbf{B} & \cdots & a_{LM}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{۹}$$

که "جزء" $a_{lm}\mathbf{B}$ نشانهٔ ماتریسی بلوکی از مرتبهٔ $P \times Q$ است، داریم

$$a_{lm}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{lm}b_{11} & a_{lm}b_{12} & \cdots & a_{lm}b_{1Q} \\ a_{lm}b_{21} & a_{lm}b_{22} & \cdots & a_{lm}b_{2Q} \\ \vdots & & & \\ a_{lm}b_{P1} & a_{lm}b_{P2} & \cdots & a_{lm}b_{PQ} \end{bmatrix} \tag{۱۰}$$

برای اینکه یک جزء $\mathbf{C}$ را برحسب اجزای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به‌دست آوریم، نماد $\mathbf{C} \equiv [c_{lp,mq}]$ را به‌کار می‌بریم که سطر $\mathbf{C}$ را با نماد دوگان (lp) و ستون آن‌را با نماد دوگان (mq) نشان می‌دهد، به‌نحوی که

$$c_{lp,mq} = a_{lm}b_{pq} \tag{۱۱}$$

سطرها و ستونهای $\mathbf{C}$ را اکنون می‌شود با دو اندیس جدید i و j $(1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J)$ نشاندار کرد، به‌طوری که

$$\mathbf{C} \equiv [c_{ij}] \equiv [c_{lp,mq}] \tag{۱۲}$$

توجه کنید که ضرب ماتریس درکمیت نرده‌ای، همان‌طورکه در معادلهٔ (۳۵.۲) تعریف شد، حالت خاصی از حاصلضرب مستقیم است. چنانچه مرتبهٔ یکی از دو ماتریس ۱ × ۱ باشد، حاصلضرب مستقیم به ضرب درکمیتی نرده‌ای تبدیل می‌شود. مثال زیر نمادگذاری نسبتاً پیچیدهٔ فوق را روشن می‌کند.

مثال ۳. حاصلضرب مستقیم دو ماتریس زیر را به‌دست آورید

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ (۱) \\ (۲) \\ (۳) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (۱) & (۲) \end{array} \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \\ (۱) \\ (۲) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (۱) & (۲) & (۳) \end{array} \\ \begin{bmatrix} r & s & t \\ x & y & z \end{bmatrix} \end{array} \qquad (۱۳)$$

که شماره‌گذاری سطرها و ستونهای دو ماتریس به‌روشنی نشان داده شده است.

حل: ماتریس $\mathbf{A}$ از مرتبهٔ ۲ × ۳ و $\mathbf{B}$ از مرتبهٔ ۳ × ۲ است. بنابه تعریف معادلهٔ (۹)، حاصلضرب مستقیم این دو ماتریس ماتریسی ۶ × ۶ می‌شود، داریم

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a\begin{bmatrix} r & s & t \\ x & y & z \end{bmatrix} & b\begin{bmatrix} r & s & t \\ x & y & z \end{bmatrix} \\ c\begin{bmatrix} r & s & t \\ x & y & z \end{bmatrix} & d\begin{bmatrix} r & s & t \\ x & y & z \end{bmatrix} \\ e\begin{bmatrix} r & s & t \\ x & y & z \end{bmatrix} & f\begin{bmatrix} r & s & t \\ x & y & z \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \\ (۱۱) \\ (۱۲) \\ (۲۱) \\ (۲۲) \\ (۳۱) \\ (۳۲) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} (۱۱) & (۱۲) & (۱۳) & (۲۱) & (۲۲) & (۲۳) \end{array} \\ \begin{bmatrix} ar & as & at & br & bs & bt \\ ax & ay & az & bx & by & bz \\ cr & cs & ct & dr & ds & dt \\ cx & cy & cz & dx & dy & dz \\ er & es & et & fr & fs & ft \\ ex & ey & ez & fx & fy & fz \end{bmatrix} \end{array} \qquad (۱۴)$$

پس، مثلاً یک جزء $\mathbf{C}$ چنین می‌شود

$$(\mathbf{C})_{۳۱,۲۲} = fs = (\mathbf{A})_{۳۲}(\mathbf{B})_{۱۲} \qquad (۱۵)$$

که با معادلهٔ (۱۱) سازگار است. مهم است دقت کنیم که سطرها و ستونهای ماتریس حاصلضرب مستقیم را، در نمادگذاری نماد دوگان، به‌صورتهای متفاوتی نشاندار می‌کنند. مثلاً سومین سطر ماتریس $\mathbf{C}$ی بالا را به‌صورت سطر (۲۱) نشاندار می‌کنند، در حالی‌که ستون سوم آن‌را به‌صورت ستون (۱۳) نشاندار می‌کنند. اجزای سطر (۲۱) ماتریس $\mathbf{C}$ با ضرب هر جزء سطر دوم $\mathbf{A}$ در هر یک از اجزای سطر اول $\mathbf{B}$ به‌دست می‌آید. همین‌طور، اجزای ستون (۱۳) ماتریس $\mathbf{C}$ با ضرب هر جزء ستون اول $\mathbf{A}$ در هر یک از اجزای ستون سوم $\mathbf{B}$ به‌دست می‌آید.

سطرها و ستونهای ماتریس حاصلضرب مستقیم را می‌شود مطابق روش آشنای معمول نشاندار کرد. به‌این ترتیب که هر نماد دوگان را به یک اندیس مربوط می‌کنیم. این کار را با انتخاب زیر انجام می‌دهیم

$$i = (l-۱)P + p, j = (m-۱)Q + q \tag{۱۶}$$

در نتیجه

$$(\mathbf{C})_{lp,mq} \equiv (\mathbf{C})_{ij} = (\mathbf{C})_{(l-۱)P+p,(m-۱)Q+q} \tag{۱۷}$$

مثلاً، به جزء معادلهٔ (۱۵) اشاره می‌کنیم، داریم $l = ۳$، $p = ۱$، $m = q = ۲$، بنابراین $i = ۵$ و $j = ۵$ می‌شود. بدیهی است که fs در واقع جزء (۵،۵) ماتریس حاصلضرب مستقیم $\mathbf{C}$ی معادلهٔ (۱۴) است.

این مفهوم را به‌سادگی می‌توان به حاصلضرب مستقیم هر تعداد ماتریسی تعمیم داد. هیچ محدودیتی در مرتبهٔ ماتریسهایی که می‌خواهیم حاصلضرب مستقیمشان را به‌دست آوریم وجود ندارد. در حالت بیش از دو ماتریس، عمل حاصلضرب مستقیم شرکت‌پذیر است، یعنی

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) \equiv \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} \tag{۱۸}$$

این عمل نسبت به جمع ماتریسی توزیع‌پذیر نیز است. بنابراین

$$\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} \tag{۱۹}$$

مثال ۴. اگر $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، $\mathbf{C}$، و $\mathbf{D}$ ماتریسهایی دلخواه با ابعادی باشند که حاصلضرب ماتریسی معمولی $\mathbf{AC}$ و $\mathbf{BD}$ برایشان تعریف شده باشد، دراین‌صورت نشان دهید که

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D}) = (\mathbf{AC})\otimes(\mathbf{BD}) \tag{۲۰}$$

حل: فرض کنید ماتریسهای $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، $\mathbf{C}$، و $\mathbf{D}$ عبارت‌اند از

$$\mathbf{A}\equiv[a_{ij}]_{L\times M} \qquad \mathbf{B}\equiv[b_{ij}]_{P\times Q} \qquad \mathbf{C}\equiv[c_{ij}]_{M\times N} \qquad \mathbf{D}\equiv[d_{ij}]_{Q\times R} \tag{۲۱}$$

مرتبهٔ ماتریسها را طوری انتخاب کرده‌ایم که حاصلضرب ماتریسی معمولی $\mathbf{AC}$ و $\mathbf{BD}$ تعریف شده باشد؛ ماتریسها در سایر حالتها دلخواه‌اند. حاصلضرب مستقیم $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}\otimes\mathbf{D}$ را می‌توان به‌صورت افرازشدهٔ زیر بیان کرد

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\equiv\begin{bmatrix} a_{۱۱}\mathbf{B} & a_{۱۲}\mathbf{B} & \cdots & a_{۱M}\mathbf{B} \\ \vdots & & & \\ a_{i۱}\mathbf{B} & a_{i۲}\mathbf{B} & \cdots & a_{iM}\mathbf{B} \\ \vdots & & & \\ a_{L۱}\mathbf{B} & a_{L۲}\mathbf{B} & \cdots & a_{LM}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}\otimes\mathbf{D}\equiv\begin{bmatrix} c_{۱۱}\mathbf{D} & \cdots & c_{۱j}\mathbf{D} & \cdots & c_{۱N}\mathbf{D} \\ c_{۲۱}\mathbf{D} & \cdots & c_{۲j}\mathbf{D} & \cdots & c_{۲N}\mathbf{D} \\ \vdots & & & & \\ c_{M۱}\mathbf{D} & \cdots & c_{Mj}\mathbf{D} & \cdots & c_{MN}\mathbf{D} \end{bmatrix} \tag{۲۲}$$

همان‌طورکه می‌بینیم، افراز ماتریسهای $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}\otimes\mathbf{D}$ به‌نحوی است که می‌توانیم حاصلضرب ماتریسی معمولی آنها را به‌دست آوریم. بنابراین، جزء ijام حاصلضرب $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})$ چنین می‌شود

$$\begin{aligned}[(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})]_{ij} &= a_{i۱}c_{۱j}\mathbf{BD}+a_{i۲}c_{۲j}\mathbf{BD}+\cdots+a_{iM}c_{Mj}\mathbf{BD} \\ &= (\mathbf{AC})_{ij}\mathbf{BD} \end{aligned} \tag{۲۳}$$

بنابراین، بنابر تعریف معادلهٔ (۹) از حاصلضرب مستقیم، ماتریس کامل را چنین می‌نویسیم

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})=\begin{bmatrix}(\mathbf{AC})_{۱۱}\mathbf{BD} & (\mathbf{AC})_{۱۲}\mathbf{BD} & \cdots & (\mathbf{AC})_{۱N}\mathbf{BD}\\ (\mathbf{AC})_{۲۱}\mathbf{BD} & (\mathbf{AC})_{۲۲}\mathbf{BD} & \cdots & (\mathbf{AC})_{۲N}\mathbf{BD}\\ \vdots & & & \\ (\mathbf{AC})_{L۱}\mathbf{BD} & (\mathbf{AC})_{L۲}\mathbf{BD} & \cdots & (\mathbf{AC})_{LN}\mathbf{BD}\end{bmatrix}$$

$$=(\mathbf{AC})\otimes(\mathbf{BD}) \qquad (۲۴)$$

می‌بینیم که مرتبهٔ ماتریس $(\mathbf{AC})\otimes(\mathbf{BD})$ می‌شود $LP\times NR$.

مثال ۵. فرض کنید k بار حاصلضرب مستقیم ماتریس $\mathbf{A}$ در خودش را با نماد $\mathbf{A}^{[k]}$ نشان دهیم، یعنی

$$\mathbf{A}^{[k]}=\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\otimes\cdots\otimes\mathbf{A} \qquad (\text{مرتبه } k) \qquad (۲۵)$$

که اگر $\mathbf{A}$ از مرتبهٔ $m\times n$ باشد، مرتبهٔ ماتریس بالا $m^k\times n^k$ خواهد شد. فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو ماتریس‌اند که حاصلضرب ماتریسی معمولیشان را می‌توان به‌دست آورد. دراین‌صورت نشان دهید که

$$(\mathbf{AB})^{[k]}=(\mathbf{A})^{[k]}(\mathbf{B})^{[k]} \qquad (۲۶)$$

حل: $\mathbf{A}$ را به‌جای $\mathbf{B}$ و $\mathbf{B}$ را به‌جای $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ در معادلهٔ (۲۰) می‌گذاریم، داریم

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})(\mathbf{B}\otimes\mathbf{B})=(\mathbf{AB})\otimes(\mathbf{AB})$$

یا

$$\mathbf{A}^{[۲]}\mathbf{B}^{[۲]}=(\mathbf{AB})^{[۲]} \qquad (۲۷)$$

اکنون حاصلضرب مستقیم سه‌تایی زیر را درنظر بگیرید

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^{[۳]}&=(\mathbf{AB})\otimes(\mathbf{AB})\otimes(\mathbf{AB})\\ &=[(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})(\mathbf{B}\otimes\mathbf{B})]\otimes(\mathbf{AB})\\ &=(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})(\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}\otimes\mathbf{B})=\mathbf{A}^{[۳]}\mathbf{B}^{[۳]} \qquad (۲۸)\end{aligned}$$

بنابراین، می‌بینیم که معادلهٔ (۲۶) به‌ازای $k = ۲$ و $k = ۳$ معتبر است. فرض کنید برای اندیس $k - ۱$ نیز معتبر باشد، یعنی

$$(\mathbf{AB})^{[k-۱]} = (\mathbf{A})^{[k-۱]}(\mathbf{B})^{[k-۱]} \tag{۲۹}$$

حاصلضرب مستقیم هر دو سمت معادلهٔ (۲۹) را در $\mathbf{AB}$ درنظر می‌گیریم و از معادلهٔ (۲۰) در سمت راست آن استفاده می‌کنیم، داریم

$$(\mathbf{AB})^{[k-۱]} \otimes (\mathbf{AB}) = [(\mathbf{A})^{[k-۱]}(\mathbf{B})^{[k-۱]}] \otimes (\mathbf{AB})$$

یا

$$(\mathbf{AB})^{[k]} = [(\mathbf{A})^{[k-۱]} \otimes \mathbf{A}][(\mathbf{B})^{[k-۱]} \otimes \mathbf{B}] = (\mathbf{A})^{[k]}(\mathbf{B})^{[k]}$$

که نشان می‌دهد اگر نتیجهٔ فوق برای $k - ۱$ معتبر باشد، برای k نیز معتبر است. چون قبلاً درستی این را برای $k = ۲$ ثابت کردیم، نتیجه می‌گیریم که معادلهٔ (۲۶) برای هر مقدار صحیح مثبت k صادق است.

به نتیجه‌ای مهم، در زمینهٔ حاصلضرب مستقیم ماتریسها، از نظر مسئلهٔ ویژه‌مقدار در مثال زیر می‌پردازیم.

مثال ۶. فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریس مربعی مرتبهٔ M با ویژه‌مقدارهای $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، $\ldots$، λ_M و ویژه‌بردارهای متناظر $\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$، $\ldots$، $\mathbf{x}_M$ باشد. فرض کنید $\mathbf{B}$ ماتریس مربعی مرتبهٔ N با ویژه‌مقدارهای $\mu_۱$، $\mu_۲$، $\ldots$، μ_N و ویژه‌بردارهای متناظر $\mathbf{y}_۱$، $\mathbf{y}_۲$، $\ldots$، $\mathbf{y}_N$ باشد. حال نشان دهید که ماتریس حاصلضرب مستقیم $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ دارای MN ویژه‌مقدار $\lambda_i\mu_j$ با ویژه‌بردارهای متناظر $\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j$، $۱ \leq i \leq M, ۱ \leq j \leq N$ است.

حل: داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax}_i &= \lambda_i \mathbf{x}_i \qquad ۱ \leq i \leq M \\ \mathbf{By}_j &= \mu_j \mathbf{y}_j \qquad ۱ \leq j \leq N \end{aligned} \tag{۳۰}$$

حاصلضرب مستقیم طرفهای متناظر دو معادلهٔ بالا را به‌دست می‌آوریم، می‌بینیم

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}_i) \otimes (\mathbf{B}\mathbf{y}_j) = \lambda_i \mu_j (\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j) \qquad (۳۱)$$

چون λ_i و μ_j کمیتهای نرده‌ای‌اند، می‌توان آنها را از حاصلضرب مستقیم خارج کرد. با استفاده از معادلهٔ (۲۰)، داریم

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}_i) \otimes (\mathbf{B}\mathbf{y}_j) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j) \qquad (۳۲)$$

این معادله، همراه با معادلهٔ (۳۱)، می‌دهد

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j) = \lambda_i \mu_j (\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j) \qquad (۳۳)$$

که نشان می‌دهد $\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j$ یک ویژه‌بردار $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ با ویژه‌مقدار $\lambda_i \mu_j$، به‌ازای $1 \le i \le M$ و $1 \le j \le N$ است.

تمرین

۱.۱۳ مجموع مستقیم ماتریسهای زیر را بیابید:

(الف)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

(ب)*

$$\begin{bmatrix} c-a & b^2 \\ b^2 & a-c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ bc & c^2 \end{bmatrix}$$

(ج)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & -7 & 8 \\ 9 & -10 & 11 & 12 \\ -13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 4 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

۲.۱۳ معادلات (۵) را ثابت کنید.

۳.۱۳ فرض کنید داشته باشیم

$$\mathbf{A}_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_۲ = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ & -۶ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & ۰ & -۴ \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_۲ = \begin{bmatrix} ۴ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

ثابت کنید که این ماتریسها در معادلهٔ (۶) صدق می‌کنند.

۴.۱۳ حاصلضرب مستقیم ماتریسهای زیر را به‌دست آورید:

(الف) $$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۲ \\ ۲ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

(ب) $$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۲ \\ ۲ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

(ج)* $$\begin{bmatrix} a^۲ & ab \\ bc & c^۲ \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} b^۲ & bd \\ cd & c^۲ \end{bmatrix}$$

۵.۱۳ ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای ماتریس زیر را به‌دست آورید

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۰ & ۳/۲ & ۰ & ۱/۲ \\ ۳/۲ & ۰ & ۱/۲ & ۰ \\ ۰ & ۱/۲ & ۰ & ۳/۲ \\ ۱/۲ & ۰ & ۳/۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

سپس نشان دهید که $\mathbf{A}$ حاصلضرب مستقیم

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} ۳/۲ & ۱/۲ \\ ۱/۲ & ۳/۲ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

است. ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ را بیابید و نتیجهٔ مثال ۶ را برای این ماتریسها تحقیق کنید.

۱۳. ۶ ماتریس $\mathbf{C} \otimes \mathbf{B}$ را برای ماتریسهای $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ی تمرین ۵ بیابید و آن‌را با ماتریس $\mathbf{A} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}$ مقایسه کنید.

۱۴

ماتریسها در مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی

سرانجام در این فصل، به بعضی از کاربردهای جبر ماتریسی در فیزیک می‌پردازیم. به‌ندرت می‌توان حالتهای بسیاری را که ماتریسها در فیزیک ظاهر می‌شوند، برشمرد و بنابراین تنها چند حالت را برای نمونه درنظر می‌گیریم.

۱.۱۴ ماتریس چرخش

فرض کنید x، y، z دستگاه مختصاتی دکارتی در فضای سه‌بعدی باشد و فرض کنید $\mathbf{u} = \{u_۱ \ \ u_۲\}$ برداری در صفحهٔ xy باشد. چرخش این دستگاه مختصات را حول محور z به‌اندازهٔ زاویهٔ θ در جهت پادساعتگرد درنظر می‌گیریم و محورهای مختصات جدید را با x'، y'، و z' نمایش می‌دهیم. اگر همان بردار $\mathbf{u}$ دارای مؤلفه‌های $u'_۱$ و $u'_۲$ نسبت به دستگاه جدید باشد، بدیهی

است که

$$u'_1 = u_1 \cos\theta + u_2 \sin\theta$$
$$u'_2 = -u_1 \sin\theta + u_2 \cos\theta \qquad (1)$$

که می‌توانیم آن‌را با نماد ماتریسی زیر بیان کنیم

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

اگر عملگر چرخش را با $R_z(\theta)$ نشان دهیم، می‌توانیم تبدیل بردار $\mathbf{u}$ به $\mathbf{u}' = \{u'_1 \ \ u'_2\}$ را به‌صورت نمادین زیر بنویسیم

$$\mathbf{u} \to \mathbf{u}' = R_z(\theta)\mathbf{u} \qquad (3)$$

با مقایسهٔ معادلات (۲) و (۳)، می‌بینیم که اثر عملگر $R_z(\theta)$ این است که بردار ستونی $\{u_1 \ \ u_2\}$ را در ماتریس ۲ × ۲ای ضرب می‌کند که در سمت راست معادلهٔ (۲) نمایان شد. می‌گوییم این ماتریس نشان‌دهندهٔ عملگر $R_z(\theta)$ در زیرفضای دوبعدی (x, y) است. آن‌را اغلب با گذاشتن علامت تساوی به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad (4)$$

که ماتریسی متعامد است.

باید بدانیم که نمایش عملگر به انتخاب دستگاه مختصات بستگی دارد. اکنون بردار $\mathbf{u} = \{u_1 \ \ u_2 \ \ u_3\}$ را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که همان چرخش $R_z(\theta)$ را برای این دستگاه به‌کار ببریم، به‌نحوی که بردار مفروض به $\mathbf{u}' = \{u'_1 \ \ u'_2 \ \ u'_3\}$ تغییر کند. چون چرخش حول محور z است، مؤلفهٔ z این بردار تغییر نمی‌کند. مؤلفه‌های جدید را، برحسب مؤلفه‌های قدیم، با معادلات زیر ارائه می‌دهیم

$$u'_1 = u_1 \cos\theta + u_2 \sin\theta$$
$$u'_2 = -u_1 \sin\theta + u_2 \cos\theta \qquad (5)$$
$$u'_3 = u_3$$

بر اساس آن، عملگر $R_z(\theta)$ را در فضای سه‌بعدی (x, y, z) با ماتریس زیر نمایش می‌دهند

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & ۰ \\ -\sin\theta & \cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad (۶)$$

اکنون یک چرخش حول هر محور دلخواهی درنظر می‌گیریم که از مبدأ مختصات می‌گذرد. پیداست که به‌طور کلی هر چرخش را می‌توان از سه چرخش متوالی به‌دست آورد، که هر یک حول یکی از محورهای مختصات صورت می‌گیرد. در روش اویلر، یک چرخش، به‌طور کلی نتیجهٔ سه چرخش متوالی زیر است: (۱) یک چرخش حول محور z به‌اندازهٔ α، در پی آن (۲) چرخشی به‌اندازهٔ β حول محور y جدید، به دنبال آن (۳) چرخشی به‌اندازهٔ γ حول محور z جدید. زاویه‌های α، β، و γ را زاویه‌های اویلر می‌نامند و چرخش را می‌شود با عملگر $R(\alpha, \beta, \gamma)$ نشان داد. اگر $\mathbf{u} = \{u_۱ \quad u_۲ \quad u_۳\}$ بردار اصلی و $\mathbf{u}' = \{u'_۱ \quad u'_۲ \quad u'_۳\}$ بردار تبدیل باشد، دراین‌صورت، داریم $\mathbf{u}' = R(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{u}$. نمایش ماتریسی $R(\alpha, \beta, \gamma)$ به‌شرح زیر است.

بنابه تعریف بالا، ابتدا عملگر $R_z(\alpha)$ روی $\mathbf{u}$ عمل می‌کند که به بردار $R_z(\alpha)\mathbf{u}$ می‌انجامد، $R_z(\alpha)$ شامل ماتریسی مشابه ماتریس معادلهٔ (۶) است. $R_y(\beta)$ بر این بردار عمل می‌کند و بردار $R_y(\beta)R_z(\alpha)\mathbf{u}$ را نتیجه می‌دهد. چون $R_y(\beta)$ چرخش حول محور y است، نمایش ماتریسی آن‌را می‌توان همانند روش بالا به‌دست آورد:

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & ۰ & \sin\beta \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -\sin\beta & ۰ & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (۷)$$

سرانجام، $R_z(\gamma)$ بر بردار جدید عمل می‌کند که پیامد آن بردار نهایی زیر است

$$\mathbf{u}' = R(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{u} = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha)\mathbf{u} \quad (۸)$$

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{9}$$

حاصلضرب ماتریسی فوق را پیدا می‌کنیم، می‌بینیم[1]

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma\cos\alpha - \sin\gamma\cos\beta\sin\alpha & \cos\gamma\sin\alpha + \sin\gamma\cos\beta\cos\alpha & \sin\gamma\sin\beta \\ -\sin\gamma\cos\alpha - \cos\gamma\cos\beta\sin\alpha & -\sin\gamma\sin\alpha + \cos\gamma\cos\beta\cos\alpha & \cos\gamma\sin\beta \\ \sin\beta\sin\alpha & -\sin\beta\cos\alpha & \cos\beta \end{bmatrix} \tag{10}$$

این نتیجه به ماتریس چرخش سه‌بعدی معروف است. ماتریس بالا کلیترین ماتریس متعامد مرتبهٔ ۳ با دترمینان ۱+ است.

۲.۱۴ ماتریسهای اسپین پاؤلی

در مسئلهٔ تکانهٔ زاویه‌ای ذاتی اسپین الکترون در مکانیک کوانتومی به عملگر تکانهٔ زاویه‌ای اسپین s برمی‌خوریم که می‌توان آن‌را چنین نوشت

$$s_x = \frac{1}{2}\hbar\sigma_x, s_y = \frac{1}{2}\hbar\sigma_y, s_z = \frac{1}{2}\hbar\sigma_z \tag{11}$$

---

۱. رک:

Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969, Section 4.4; Messiah, A., *Qiantum Mechanics*, Vol II, North-Holland, Amsterdam, 1965, Section C. 10.

که $\hbar = h/2\pi$ و h ثابت پلانک است و σ_x، σ_y، و σ_z موجوداتی‌اند که باید مشخص شوند. s_x، s_y، s_z و σ_x، σ_y، σ_z هرمیتی‌اند و روشن است که در روابط زیر صدق می‌کنند

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1 \tag{۱۲الف}$$

$$\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = 0 \qquad \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y = 0 \qquad \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_z = 0 \tag{۱۲ب}$$

می‌خواهیم این معادلات را برای به‌دست آوردن σ_x، σ_y، و σ_z حل کنیم. معادلات (۱۲ب) نشان می‌دهند که σها با یکدیگر پادجابه‌جا می‌شوند. بنابراین اعداد معمولی نیستند. روشن است که بعضی از ماتریسها با یکدیگر پادجابه‌جا می‌شوند. بنابراین σها را ماتریسهای 2×2 می‌گیریم. در نتیجه سمت راست معادلات (۱۲الف) به‌صورت ماتریس واحد 2×2ی $\mathbf{I}$ درمی‌آید.

چون $\boldsymbol{\sigma}_x$، $\boldsymbol{\sigma}_y$، و $\boldsymbol{\sigma}_z$ هرمیتی‌اند، می‌شود نمایشی را انتخاب کرد که بعضی از آنها، و نه همگی، قطری باشند. در واقع، هر بار تنها یکی از آنها را می‌توان قطری کرد، زیرا با یکدیگر جابه‌جا نمی‌شوند، در حالی‌که ماتریسهای قطری حتماً با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند. $\boldsymbol{\sigma}_z$ را برای نمایش به‌صورت ماتریس قطری برمی‌گزینیم.

حال از اینکه $\boldsymbol{\sigma}_z$ ماتریسی قطری و $\boldsymbol{\sigma}_z^2 = \mathbf{I}$ است، برمی‌آید که همهٔ اجزای قطری $\boldsymbol{\sigma}_z$ برابر $+1$ یا -1 باشد. نمی‌شود دو جزء علامت یکسانی داشته باشند، زیرا دراین‌صورت، $\boldsymbol{\sigma}_z$ ماتریس ثابت می‌شود و با $\boldsymbol{\sigma}_x$ و $\boldsymbol{\sigma}_y$ پادجابه‌جا نمی‌شود؛ در واقع، ماتریس ثابت با هر ماتریس دیگری جابه‌جایی‌پذیر است. بنابراین، می‌شود $\boldsymbol{\sigma}_z$ به‌صورت $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ یا $\left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ باشد. انتخاب هر یک از این دو ماتریس فرقی نمی‌کند، زیرا همان‌طور که در فصل ۹ دیدیم، ترتیب اجزای قطری را می‌توان به دلخواه هر بار با آرایش مناسبی از بردارهای پایه تغییر داد [بخش ۳.۹]. بنابراین، با انتخاب اولین ماتریس، در نهایت داریم

$$\boldsymbol{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{۱۳}$$

اکنون می‌خواهیم $\boldsymbol{\sigma}_x$ و $\boldsymbol{\sigma}_y$ را به‌دست آوریم. فرض کنید $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ ماتریسی باشد که با $\boldsymbol{\sigma}_z$

پادجابه‌جا می‌شود، پس

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2d \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

در نتیجه $a = d = 0$. بنابراین، ماتریسی که با $\boldsymbol{\sigma}_z$ پادجابه‌جا می‌شود، به $\left[\begin{smallmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right]$ تبدیل می‌شود. در ضمن، برای اینکه مربع آن با ماتریس واحد برابر باشد، باید داشته باشیم

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow bc = 1 \quad (15)$$

بنابراین، $\boldsymbol{\sigma}_x$ و $\boldsymbol{\sigma}_y$ به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

با

$$pq = 1, \qquad rs = 1 \quad (17)$$

ولی $\boldsymbol{\sigma}_x$ و $\boldsymbol{\sigma}_y$ باید با یکدیگر پادجابه‌جا هم بشوند:

$$\boldsymbol{\sigma}_x\boldsymbol{\sigma}_y + \boldsymbol{\sigma}_y\boldsymbol{\sigma}_x = 0 \Rightarrow ps + qr = 0 \quad (18)$$

بنابراین، سه معادله برای تعیین p، q، r، و s وجود دارد. به‌دلخواه $p = 1$ می‌گیریم، از معادلات (۱۷) و (۱۸) نتیجه می‌گیریم که $q = 1$ و $r = -s$ و $r^2 = s^2 = -1$ است. در نتیجه، می‌توانیم $s = i$ و $r = -i$ بگیریم. به‌این ترتیب ماتریسهای اسپین پاؤلی را، با نمایشی که در آن $\boldsymbol{\sigma}_z$ قطری است، به‌دست می‌آوریم:

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

۳.۱۴ ماتریسهای دیراک

در فرمولبندی نسبیتی معادلهٔ موج ذرهٔ آزاد دیراک، هامیلتونی را به‌صورت زیر می‌نویسند

$$H = c(\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z) + \beta mc^۲ \qquad (۲۰)$$

که c سرعت نور است، (p_x, p_y, p_z) بردار تکانهٔ خطی این ذره به جرم m است و α_x، α_y، α_z، و β کمیتهایی هستند که باید تعیین شوند. می‌بینیم که این موجودات در روابط زیر صدق می‌کنند

$$\alpha_x^۲ = \alpha_y^۲ = \alpha_z^۲ = \beta^۲ = ۱ \qquad (\text{۲۱الف})$$

$$\{\alpha_x, \alpha_y\} = \{\alpha_y, \alpha_z\} = \{\alpha_z, \alpha_x\} = \{\alpha_x, \beta\} = \{\alpha_y, \beta\} = \{\alpha_z, \beta\} = ۰ \qquad (\text{۲۱ب})$$

معادلات (۲۱ب) نشان می‌دهند که هر یک از چهار موجود α_x، α_y، α_z، و β با سه‌تای دیگر پادجابه‌جا می‌شود. بنابراین، این بار هم آنها اعدادی معمولی نیستند و حتماً ماتریس‌اند. در ضمن، تمرین ۱ نشان می‌دهد که چهار ماتریس مرتبهٔ دویی نمی‌توان یافت که دوبه‌دو پادجابه‌جا شوند؛ در نتیجه مرتبهٔ ماتریسهای α_i و β باید بیش از ۲ باشد.

همچنین، مانند قبل، هر بار تنها یکی از چهار ماتریس را می‌توان قطری کرد. β را ماتریسی قطری با اجزای قطری ± ۱ می‌گیریم، با توجه به اینکه همهٔ آنها علامت یکسانی ندارند، فرض کنید صورت افرازشدهٔ β دارای ساختار زیر باشد

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & ۰ \\ ۰ & -\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \qquad (۲۲)$$

که، درست همان‌طور که در بالا نشان دادیم، $m + n$ بیشتر از ۲ است. فرض کنید $\boldsymbol{\alpha}_i$، همانند $\boldsymbol{\beta}$ افراز شود، داریم

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \qquad (۲۳)$$

پادجابه‌جایی α_i و β نشان می‌دهد که $\mathbf{A} = \mathbf{D} = ۰$، در حالی که رابطهٔ $\alpha_i^۲ = \mathbf{I}$ ثابت می‌کند که

$$\mathbf{BC} = \mathbf{I}, \mathbf{CB} = \mathbf{I} \qquad (۲۴)$$

توجه کنید که $\mathbf{B}$ از مرتبهٔ $n \times m$ و $\mathbf{C}$ از مرتبهٔ $m \times n$ است. اما بحث پیوست ۲ نشان می‌دهد شرط اینکه $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ در معادلات (۲۴) صدق کنند، این است که مربعی باشند. بنابراین، $n = m$، و ۲ $= m$ می‌گیریم که کمترین مقدار ممکن مرتبهٔ ماتریسهایی است که در ویژگیهای خواسته شده صدق می‌کنند. بنابراین، ماتریس β می‌شود

$$\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{۲۵}$$

از تجربه‌مان در زمینهٔ ماتریسهای اسپین پاؤلی برمی‌آید که در α_x می‌توانیم $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \boldsymbol{\sigma}_x$ انتخاب کنیم و α_y و α_z را همانند آن تشکیل دهیم. در نتیجه، داریم

$$\alpha_x = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_x \\ \boldsymbol{\sigma}_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۲۶الف}$$

$$\alpha_y = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_y \\ \boldsymbol{\sigma}_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۲۶ب}$$

$$\alpha_z = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_z \\ \boldsymbol{\sigma}_z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۲۶ج}$$

این چهار ماتریس به ماتریسهای دیراک معروف‌اند.

۴.۱۴ ماتریسهای نامتناهی

اگر تعداد سطرها یا ستونهای ماتریسی نامتناهی باشد، می‌گویند این ماتریس از مرتبهٔ نامتناهی یا ماتریس نامتناهی[1] است. تعداد سطرها و ستونهای ماتریس نامتناهی ممکن است شمارای نامتناهی یا ناشمارای نامتناهی باشد. در ضمن، شاید تعداد سطرها شمارای نامتناهی و تعداد ستونها ناشمارای نامتناهی باشد یا برعکس. در بقیهٔ این فصل، حروف i، j، k را برای نمایش اعداد صحیح $(1 \leq i, j, k < \infty)$ و x، y، و z را برای اعداد حقیقی به‌کار می‌بریم.

مثلاً، ماتریس $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ با $1 \leq i, j < \infty$ ماتریسی نامتناهی می‌شود، زیرا هم تعداد سطرها و هم ستونهای آن شمارای نامتناهی است. ماتریس $\mathbf{A} \equiv [a_{ix}]$، که $1 \leq i < \infty$ و x در بازهٔ متناهی $[c, d]$ یا در بازه‌ای نامتناهی تغییر می‌کند، ماتریسی نامتناهی است، زیرا تعداد سطرها شمارای نامتناهی و تعداد ستونها ناشمارای نامتناهی است. در پایان، $\mathbf{A} \equiv [a_{xy}]$، که x و y در بازه‌های یکسان یا متفاوت، متناهی یا نامتناهی تغییر می‌کنند، ماتریسی نامتناهی است، زیرا هم تعداد سطرها و هم ستونهای آن ناشمارای نامتناهی است.

اگر $\mathbf{r}$ نمایانگر یک سه‌تایی از مؤلفه‌های x، y، و z باشد، می‌شود ماتریسی نامتناهی با اجزای a_{ir} یا $a_{rr'}$ تشکیل داد که $\mathbf{r}'$ نشان‌دهندهٔ سه‌تایی x'، y'، z' و غیره است. در مکانیک کوانتومی به دفعات به ماتریسها برمی‌خوریم.

ماتریس نامتناهی را مربعی گویند، چنانچه سطرها و ستونهای آن با یک طرح نشاندار شوند، در غیر این‌صورت مستطیلی است. بنابراین، ماتریس با اجزای $a_{ij}(1 \leq i, j < \infty)$ مربعی است؛ ماتریس با اجزای a_{xy} مربعی است اگر x و y در یک بازه تغییر کنند؛ ماتریس با اجزای $a_{rr'}$ مربعی است چنانچه x و x' و همچنین y، y' و z، z' در یک بازه تغییر کنند. به‌عبارت دیگر، ماتریسهایی با اجزای a_{ix} یا a_{xy}، که x و y در بازه‌های متفاوتی تغییر می‌کنند، مستطیلی‌اند.

جمع دو ماتریس نامتناهی در صورتی تعریف می‌شود که مرتبهٔ یکسانی داشته باشند، یعنی، سطرها و ستونهایشان با یک طرح نشاندار شوند. برای اینکه حاصلضرب دو ماتریس نامتناهی تعریف شود، ضروری است که همهٔ مجموعها یا انتگرالهایی که در اجزای ماتریس حاصلضرب ظاهر می‌شوند، متناهی باشند.

---

[1] . ماتریس نامتناهی به معنای ماتریسی با اجزای نامتناهی نیست. اگر هر یک از اجزای ماتریسی نامتناهی باشد، می‌گوییم که این ماتریس وجود ندارد.

بنابراین، فرض کنید $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ و $\mathbf{B} \equiv [b_{ij}]$ ماتریسهای نامتناهی گسسته باشند. ماتریس حاصلضرب آنها $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ دارای اجزای زیر است

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj} \quad 1 \leq i, j < \infty \tag{۲۷}$$

به‌شرط اینکه سری سمت راست معادلهٔ (۲۷) به‌ازای هر مقدار i و j متناهی باشد. در حالتی‌که سطرها یا ستونها را با متغیری پیوسته نمایش می‌دهند، باید جای مجموع‌یابی را با انتگرال‌گیری عوض کرد. بنابراین، فرض کنید $\mathbf{B} \equiv [b_{xy}](x \in [c, d],\ y \in [p, q])$ و $\mathbf{A} \equiv [a_{ix}](1 \leq i < \infty, x \in [c, d])$ دو ماتریس نامتناهی باشند، حاصلضرب آنها ماتریس $\mathbf{C}$ با اجزای زیر است

$$c_{iy} = \int_{c}^{d} a_{ix} b_{xy} dx \qquad 1 \leq i < \infty, y \in [p, q] \tag{۲۸}$$

به‌شرط اینکه به‌ازای هر مقدار i و y در بازه‌های مربوط به آنها انتگرال معادلهٔ (۲۸) متناهی باشد.

در بررسی ماتریس نامتناهی کلی، برای اینکه دریابیم سطرها و ستونهای آن شمارا یا ناشمارای نامتناهی است، از اندیسهای یونانی استفاده می‌کنیم تا اجزا را نشاندار کنیم. اندیس یونانی ممکن است مقدارهای گسسته یا پیوسته یا قسمتی گسسته و قسمتی پیوسته بگیرد. نماد $\int_\mu$ برای نمایش مجموع‌یابی مقدارهای گسسته و انتگرال‌گیری مقدارهای پیوستهٔ μ به‌کار می‌رود.

به‌سادگی می‌توان نشان داد که ماتریس هرمیتی نامتناهی حتماً مربعی است. زیرا اگر $\mathbf{A} \equiv [a_{\mu\nu}]$ ماتریسی هرمیتی باشد، نتیجه می‌گیریم که $\forall \mu\nu$ $a^*_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$. که ایجاب می‌کند μ و ν هر دو مجموعهٔ مقداری یکسان بگیرند. بنابراین $\mathbf{A}$ مربعی است.

ماتریس یکهٔ گسستهٔ نامتناهی $\mathbf{I}$ را طوری تعریف می‌کنیم که دارای اجزای $(\mathbf{I})_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ باشد، که μ و ν متغیرهای گسسته‌اند. همین‌طور ماتریس یکهٔ پیوسته را به‌نحوی تعریف می‌کنیم که دارای اجزای $(\mathbf{I})_{\mu\nu} = \delta(\mu - \nu)$ باشد، که μ و ν متغیرهای پیوسته‌اند و $\delta(\mu - \nu)$ تابع دلتای دیراک است. بنابراین، نمی‌توان گفت که اجزای قطری ماتریس یکهٔ پیوسته برابر یک هستند، هر چند اجزای خارج از قطر آن صفر باشند.

فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریسی نامتناهی باشد. اگر ماتریس $\mathbf{B}$ در معادلهٔ زیر صدق کند

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} \tag{۲۹}$$

B را وارون راست **A** می‌نامند. اگر ماتریس **C** در رابطهٔ زیر صدق کند

$$\mathbf{CA} = \mathbf{I} \qquad (۳۰)$$

C را وارون چپ **A** می‌نامند.

اگر وارون راست و چپ ماتریس **A** با یکدیگر برابر شوند، **A** را ناتکین می‌نامند و به ماتریس **B**یی که در رابطهٔ زیر صدق کند

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I} \qquad (۳۱)$$

وارون **A** می‌گویند، وارون ماتریس ناتکین یکتاست.

در پیوست ب نشان داده می‌شود که ماتریس ناتکین متناهی قطعاً مربعی است. با وجود این، ماتریس ناتکین نامتناهی ممکن است مستطیلی باشد.[1] وارون ماتریس متناهی را در بخش ۱.۵ بررسی کردیم.

۵.۱۴ نمایش ماتریسی یک عملگر

مسئلهٔ اساسی در مکانیک کوانتومی حل کردن معادلهٔ ویژه‌مقدار است:

$$P\Psi = \lambda\Psi \qquad (۳۲)$$

که P عملگری متناظر با یک مشاهده‌پذیر دستگاه مورد نظر است و بنابراین عملگری هرمیتی است. λ و Ψ، به‌ترتیب ویژه‌مقدار و ویژه‌بردار P هستند. معادلهٔ (۳۲) ممکن است جوابهای زیادی داشته باشد و بنابراین می‌شود آن‌را به‌صورت زیر نوشت

$$P\Psi_\mu = \lambda_\mu \Psi_\mu \qquad (۳۳)$$

در واقع، برای دستگاه فیزیکی واقعی معادلهٔ (۳۳) تعداد نامتناهی جواب متناظر با تعداد نامتناهی ویژه‌مقدار و ویژه‌تابع از این عملگر دارد. بنابراین، تعداد مقدارهایی که متغیر μ در معادلهٔ (۳۳)

---

۱. برای آگاهی از جزئیات بیشتر، رک:

von, Neumann, J. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1955.

می‌گیرد نامتناهی است، که این مقدارها ممکن است گسسته یا پیوسته یا اینکه قسمتی گسسته و قسمتی پیوسته باشند. مجموعهٔ همهٔ ترکیبهای خطی این تعداد نامتناهی ویژه‌تابعهای Ψ_μ فضای هیلبرت است که P روی آن عمل می‌کند، و ویژه‌تابعهای Ψ_μ به‌صورت پایهٔ این فضا عمل می‌کنند، که ممکن است به‌صورت راست‌هنجار انتخاب شوند، زیرا P هرمیتی است.

اگر ϕ برداری دلخواه (با بعد نامتناهی) در فضای هیلبرت P باشد، می‌شود آن‌را به‌صورت ترکیبی خطی از تابعهای پایه این‌گونه بیان کرد

$$\phi = \int_\mu a_\mu \Psi_\mu \tag{۳۴}$$

بردار ϕ را باید ستونی فرض کرد.

نکتهٔ اساسی این است که ویژه‌مقدارها و ویژه‌تابعهای عملگر P از قبل معلوم نیستند. با وجود این، فضای هیلبرت آن مشخص است. بنابراین، مجموعهٔ مناسب دلخواه $\{\phi_\mu\}$ از تابعهای پایه در فضای هیلبرت را انتخاب می‌کنیم و حاصلضرب نرده‌ایشان را به‌دست می‌آوریم

$$P_{\mu\nu} = (\phi_\mu, P\phi_\nu) \tag{۳۵}$$

اگر آنها را به‌صورت ماتریسی مرتب کنیم، نمایش ماتریسی عملگر یا ماتریس عملگر زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{P} \equiv [P_{\mu\nu}] \tag{۳۶}$$

که مرتبهٔ آن نامتناهی است. جزء $P_{\mu\nu}$ به‌جزء ماتریسی عملگر بین تابعهای پایهٔ μام و νام معروف است. اگر بتوانیم این ماتریس را به‌وسیلهٔ تبدیل یکانی مناسبی قطری کنیم، ویژه‌مقدارهای مطلوب و همین‌طور ویژه‌تابعها را به‌دست می‌آوریم.

اگر خود ویژه‌تابعها را پایه بگیریم، نمایش P به‌صورت ماتریس قطری درمی‌آید که نتیجهٔ واقعیت زیر است

$$(\Psi_\mu, P\Psi_\nu) = (\Psi_\mu, \lambda_\nu \Psi_\nu) = \lambda_\nu (\Psi_\mu, \Psi_\nu) = \begin{cases} \lambda_\mu \sigma_{\mu\nu} \\ \lambda_\mu \delta(\mu - \nu) \end{cases} \tag{۳۷}$$

که از راست‌هنجاری ویژه‌تابعها استفاده کرده‌ایم. به‌عبارت دیگر، تابعهای پایه‌ای که عملگری را قطری می‌کنند، ویژه‌تابعهای آن عملگرند.

تمرین

۱.۱۴ نشان دهید که ماتریس ۲ × ۲ غیرصفری وجود ندارد که با هر سه ماتریس اسپین پاؤلی پادجابه‌جا شود.

۲.۱۴ تحقیق کنید که ماتریسهای اسپین پاؤلی معادلات (۱۹) در معادلات (۱۲) صدق می‌کنند. همین‌طور نشان دهید که

(الف) $[\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y] = ۲i\boldsymbol{\sigma}_z, [\boldsymbol{\sigma}_y, \boldsymbol{\sigma}_z] = ۲i\boldsymbol{\sigma}_x, [\boldsymbol{\sigma}_z, \boldsymbol{\sigma}_x] = ۲i\boldsymbol{\sigma}_y$

(ب) $\boldsymbol{\sigma}^۲ \equiv \boldsymbol{\sigma}_x^۲ + \boldsymbol{\sigma}_y^۲ + \boldsymbol{\sigma}_z^۲ = ۳\mathbf{I}$

(ج) $[\boldsymbol{\sigma}^۲, \boldsymbol{\sigma}_i] = ۰, i = x, y, z$

(د) با توجه به $\boldsymbol{\sigma}^{\pm} = \boldsymbol{\sigma}_x \pm i\boldsymbol{\sigma}_y$، $[\boldsymbol{\sigma}_z, \boldsymbol{\sigma}^{\pm}] = \pm ۲\boldsymbol{\sigma}^{\pm}$

(ه) $[\boldsymbol{\sigma}^+, \boldsymbol{\sigma}^-] = ۴\boldsymbol{\sigma}_z$

۳.۱۴ * یک ماتریس تبدیل تشابهی بیابید که $\boldsymbol{\sigma}_x$ را به‌صورت قطری درآورد. در نمایش جدید، ماتریسهای $\boldsymbol{\sigma}_x$، $\boldsymbol{\sigma}_y$، و $\boldsymbol{\sigma}_z$ را بیابید.

۴.۱۴ مانند بالا عمل کنید و $\boldsymbol{\sigma}_x$، $\boldsymbol{\sigma}_y$، و $\boldsymbol{\sigma}_z$ را در نمایشی بیابید که $\boldsymbol{\sigma}_y$ قطری باشد.

۵.۱۴ نشان دهید که ماتریسهای $\boldsymbol{\sigma}_x$، $\boldsymbol{\sigma}_y$، $\boldsymbol{\sigma}_z$، و β در معادلات (۲۱) صدق می‌کنند.

۶.۱۴ اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو عملگر برداری باشند که با سه‌تایی ماتریسهای اسپین پاؤلی $\boldsymbol{\sigma}$ جابه‌جا شوند، اما لزوماً با یکدیگر جابه‌جا نشوند، نشان دهید که

$$(\sigma \cdot \mathbf{A})(\sigma \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\sigma \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

مراجع

ARFKEN, G., *Mathematical Methods for physicists*, Chapter 4, New York: Academic Press (1968).

AYRES, FRANK, Jr, *Matrices*, New York: McGraw-Hill (1982).

BELLMAN, R., *Introduction to Matrix Analysis*, 2nd ed., New York: McGraw-Hill (1970).

BRONSON, R., *Matrix Methods*, New York; Academic Press (1989).

EISELE, J. A., and R. M. MASON, *Applied Matrix and Tensor Analysis*, New York: Wiley (1970).

FINKBEINER, D. T., *Introduction to Matrices and Linear Transformations*, 2nd ed., San Francisco: W. H. Freeman (1966).

GANTMACHER, F. R., *Application of the Theory of Matrices*, New York: Wiley (1959).

GERE, J. M., and W. WEAVER, *Matrix Algebra for Engineers*, New York: Van Nostrand (1965).

HERNSTEIN, I. N., and D. J. WINTER, *Matrix Theory and Linear Algebra*, New York: Macmillan (1988).

HOFFMAN, K., and R. KUNZE, *Linear Algebra*, Englewood Cliffs: Prentice Hall (1961).

HOHN, F. E., *Elementary Matrix Algebra*, New York: Macmillan (1964).

HORN, R. A., *Matrix Analysis*, Cambridge: Cambridge University Press (1990).

KAPUR, J. N., and M. K. SINGAL, *Matrices*, New Delhi: R. Chand (1969).

KREYSZIG, E., *Advanced Engineering Mathematics*, 3rd ed., New York: Wiley (1972).

LANCASTER, P., *Theory of Martices*, New York: Academic Press (1969).

MARCUS, M., and H. MINC, Elementary Linear Algebra, New York: Macmillian (1968).

MARGENAU, H., and G. M. MURPHY, *Mathematics for Physics and Chemistry*, New Delhi: Affiliated East-West Press (1966).

MILLS, G., *Introduction to Linear Algebra for Social Scientists*, London: George Allen and Unwin (1969).

PETTOFREZZO, A. J., *Matrices and Transformations*, Englewood Cliffs: Prentice Hall (1966).

PIPES, L. A., *Applied Mathematics for Engineers and Physicists*, Chapter 4, New York: McGraw-Hill (1958).

RAGHAVARAO, D., *Matrix Theory*, New Delhi: Oxford & IBH (1972).

REINER, I., *Introduction to Matrix Theory and Linear Algebra*, New York: Holt, Rinehart and Winston (1971).

SCHNEIDER, H., and G. P. BARKER, *Matrices and Linear Algebra*, New York: Holt, Rinehart and Winston (1973).

SEARLE, S. R., *Matrix Algebra for the Biological Sciences*, New York: Wiley (1966).

SHANTI NARAYAN, *A Textbook of Matrices*, 5th ed., Delhi: S. Chand (1967).

YAARI, M. E., *Linear Algebra for Social Sciences*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall (1971).

پارهٔ دوم

آنالیز تانسوری

تانسورها تعمیم طبیعی و منطقی بردارهایند. می‌دانیم که استفاده از بردارها برای مطالعهٔ ریاضی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی کاملاً ضروری است. به‌همین ترتیب، آنالیز تانسوری در شاخه‌های مختلف فیزیک کاربردهایی یافته است. این کاربردها را عموماً می‌توان به دو مقوله تقسیم کرد: (الف) کاربردها در فیزیک نانسبیتی (ب) کاربردها در نظریهٔ نسبیت. در این فصل، تعریف کلی تانسور را ارائه می‌کنیم، در پی آن به بحث دربارهٔ جبر تانسورها، محاسبات مربوط به تانسورها و چند وضعیت فیزیکی که بهتر است از تانسورها استفاده کنیم می‌پردازیم. به کاربرد تانسورها در فیزیک کلاسیک، نسبیت‌خاص و نسبیت‌عام اشاره می‌کنیم. دربارهٔ تانسورهای کلی و همچنین دکارتی بحث می‌کنیم.

۱۵

مقدمه

در این فصل می‌خواهیم به شیوه‌ای بسیار ابتدایی به موقعیتهایی بپردازیم که روشهای جبر تانسوری برای آنها مفید است. سپس، تعریف تانسور و قانون تبدیل آنها را ارائه می‌کنیم. در پایان این بخش، دربارهٔ اینکه چرا تانسورها در فرمولبندی ریاضی قوانین فیزیکی ضروری‌اند، بحث می‌کنیم.

۱.۱۵ پیدایش تانسورها در فیزیک

با قوانین اولیهٔ فیزیکی آشناییم، مانند اینکه شتاب هر جسم با نیروی وارد بر آن متناسب است یا اینکه جریان الکتریکی در هر محیط با میدان الکتریکی اعمال شده متناسب است، که می‌توان آنها را به‌صورت ریاضی زیر بیان کرد.

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m \qquad \text{(۱الف)}$$

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} \qquad \text{(۱ب)}$$

که $\mathbf{a}$ شتاب، $\mathbf{F}$ نیرو، m جرم جسم، $\mathbf{j}$ جریان الکتریکی، $\mathbf{E}$ میدان الکتریکی و σ رسانندگی الکتریکی است. با وجود این، باید بدانیم که این قوانین حالاتی خاص‌اند و تنها برای محیطهای همسانگرد[1] یا با تقارن بالا به‌کار می‌روند. در حقیقت، بسیاری از محیطها ناهمسانگردند و در نتیجه، شتاب لزوماً با نیروی اعمال شده موازی نیست، یا جریان در جهتی متفاوت با میدان الکتریکی شارش می‌کند و غیره. در چنین وضعیتی، مثلاً معادلهٔ (۱ب) را می‌توان به‌صورت زیر تعمیم داد

$$\begin{aligned} j_x &= \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y + \sigma_{xz}E_z \\ j_y &= \sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y + \sigma_{yz}E_z \\ j_z &= \sigma_{zx}E_x + \sigma_{zy}E_y + \sigma_{zz}E_z \end{aligned} \tag{۲}$$

که j_x، j_y، j_z و E_x، E_y، E_z به‌ترتیب مؤلفه‌های دکارتی $\mathbf{j}$ و $\mathbf{E}$ هستند و $\sigma_{ij}(i,j=x,y,z)$ را مؤلفه‌های تانسور رسانندگی محیط می‌نامند. معادلهٔ (۱الف) را می‌توان به‌همین ترتیب تعمیم داد، با $(1/m)_{ij}$ که نشان‌دهندهٔ مؤلفه‌های تانسور جرم (در واقع وارون تانسور جرم) ذره‌ای در این محیط است. چنین وضعیتی در مطالعهٔ حرکت الکترون در جامد بلورین ظاهر می‌شود، جایی که از تانسور جرم مؤثر الکترون صحبت می‌کنیم. به بعضی دیگر از تانسورهایی که در فیزیک کاربرد دارند، در فصل ۱۸ می‌پردازیم.

در فیزیک نسبیتی، بار دیگر از تانسورها به‌طور گسترده‌ای در نظریهٔ نسبیت خاص و بیشتر از آن در نظریهٔ نسبیت عام استفاده می‌شود. به این کاربردها در فصلهای ۲۰، ۲۱، ۲۳، و ۲۴ می‌پردازیم.

۲.۱۵ نمادگذاری و قراردادها

فضایی Nبعدی را درنظر بگیرید و فرض کنید که x^1، x^2، ...، x^N مجموعه مختصاتی دلخواه در این فضا باشد. در نوشتن x^i باید توجه کنیم که i صرفاً اندیس بالایی x است و نشان‌دهندهٔ توان iام x نیست. چنانچه موقعیتی پدید آید که بخواهیم اندیس بالایی و توان را توأم به‌کار ببریم، آن‌را به‌صورت $(x^i)^2$، ... می‌نویسیم. فضای Nبعدی یاد شده را با V_N نمایش می‌دهیم.

نمادگذاری به‌صورت $f \equiv f(t)$ بدین معنی است که f تابعی از t است.

---

۱. به محیطی که ویژگیهای آن در همهٔ جهتها یکسان باشد، همسانگرد می‌گویند.

فرض کنید $\overline{x}^\alpha (1 \le \alpha \le N)$ مجموعه[۱] مختصات دیگری در همان فضای V_N باشد. روشن است که هر یک از مختصات x^i تابعی از N مختصات $\overline{x}^\alpha$ می‌شود و برعکس. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$x^i \equiv x^i(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^N) \qquad 1 \le i \le N \tag{۳الف}$$

$$\overline{x}^\alpha \equiv \overline{x}^\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^N) \qquad 1 \le \alpha \le N \tag{۳ب}$$

مثال ۱. مختصات دکارتی و قطبی کروی را به‌صورت تابعهایی از یکدیگر بیان کنید.

حل: فرض کنید x، y، z نمایش مختصات دکارتی و r، θ، ϕ نمایش مختصات قطبی کروی در یک فضای سه‌بعدی باشند. مختصات x، y، z از یکدیگر مستقل‌اند؛ همین‌طور r، θ، ϕ از یکدیگر مستقل‌اند. اما مختصات یک مجموعه تابع مختصات دیگری است. مختصات دکارتی با روابط زیر به مختصات قطبی کروی مربوط می‌شوند

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\theta \tag{۴}$$

تبدیل وارون آن عبارت است از

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \theta = \tan^{-1}[(x^2 + y^2)^{1/2}/z], \quad \phi = \tan^{-1}(y/x) \tag{۵}$$

با مشتق‌گیری از معادلات (۳) درمی‌یابیم که

$$dx^i = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^\alpha} d\overline{x}^\alpha \qquad 1 \le i \le N \tag{۶الف}$$

$$d\overline{x}^\alpha = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i} dx^i \qquad 1 \le \alpha \le N \tag{۶ب}$$

قرارداد مجموع‌یابی منسوب به اینشتین نمادگذاری سمت راست معادلات بالا را ساده می‌کند. بنابر این قرارداد، اگر اندیسی (بجز N) در جمله‌ای تکرار شود، مجموع‌یابی روی آن از ۱ تا N

---

۱. از حروف لاتین برای نمایش مختصات بدون خط استفاده می‌شود، در حالی که حروف یونانی را برای نمایش مختصات خط‌دار به‌کار می‌برند. از این قرارداد در سرتاسر این بخش از کتاب استفاده می‌شود.

انجام می‌شود. بنابراین، معادلات (۶) را می‌توان به‌سادگی چنین نوشت

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^\alpha} d\overline{x}^\alpha \qquad ۱ \leq i \leq N \qquad \text{(۷الف)}$$

$$d\overline{x}^\alpha = \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i} dx^i \qquad ۱ \leq \alpha \leq N \qquad \text{(۷ب)}$$

اندیس α دوبار در سمت راست معادلهٔ (۷الف) ظاهر می‌شود، در حالی‌که اندیس i دوبار در سمت راست معادلهٔ (۷ب) ظاهر می‌شود. در نتیجه، مجموع‌یابی روی این دو از ۱ تا N در معادلات متناظرشان انجام می‌شود. از این قرارداد در سرتاسر این بخش استفاده می‌کنیم.

اگر اندیسی تنها یک بار در جمله‌اي ظاهر شود، مقداری متناهی دارد-هر مقداری بین ۱ تا N. چنین اندیسی را اندیس آزاد می‌نامند. بنابراین، در معادلات (۳)، i، α اندیسهای آزادند. در معادلات (۶الف) و (۷الف)، i اندیسی آزاد است. در صورتی که در معادلات (۶ب) و (۷ب)، α اندیس آزاد است. از این پس، مشخصه‌ای چون "$۱ \leq i \leq N$" حذف می‌شود و مثلاً، معادلهٔ (۷الف) را می‌توان خلاصه‌تر کرد:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{d\overline{x}^\alpha} d\overline{x}^\alpha \qquad \text{(۸)}$$

در واقع، معادلهٔ (۸) نمایندهٔ مجموعهٔ N معادله است، که به‌ازای هر یک از مقدارهای i، بین ۱ تا N یک معادله وجود دارد.

اندیسی که تکرار می‌شود و مجموع‌یابی روی آن انجام می‌شود را اندیس ظاهری می‌نامند. آشکار است که به جای اندیس ظاهری می‌توان هر اندیس دیگری را قرار داد که در همان جمله ظاهر نمی‌شود. مثال زیر این قراردادها را روشن می‌کند.

مثال ۲. فرض کنید a_i، b_i، c_i، d_i، $۱ \leq i \leq N$، چهار مجموعه، هر یک با N کمیت باشند. دراین‌صورت، بنابر قرارداد مجموع‌یابی اینشتین، داریم

$$a_i b_i \equiv a_۱ b_۱ + a_۲ b_۲ + \cdots + a_N b_N \qquad \text{(۹)}$$

همین‌طور

$$a_i b_j c_j \equiv a_i b_۱ c_۱ + a_i b_۲ c_۲ + \cdots + a_i b_N c_N \qquad \text{(۱۰)}$$

که i اندیس آزاد است و مقدار ثابتی بین ۱ و N دارد. در ضمن، روشن است که

$$a_i b_i = a_j b_j = a_k b_k, \cdots \qquad (۱۱)$$

همچنین

$$a_i b_j c_j = a_i b_k c_k = a_i b_l c_l, \cdots \qquad (۱۲)$$

اما در معادلات (۱۲)، به‌جای اندیس ظاهری j نمی‌توان i گذاشت، زیرا i هم‌اکنون در همین جمله ظاهر شده است. بنابراین،

$$a_i b_j c_j \neq a_i b_i c_i \qquad (۱۳)$$

این را می‌توان به‌سادگی تحقیق کرد، زیرا با توجه به اینکه سمت چپ معادلهٔ (۱۳) به‌طور صریح با معادلهٔ (۱۰) داده شده است، سمت راست آن چنین می‌شود

$$a_i b_i c_i \equiv a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \cdots + a_N b_N c_N \qquad (۱۴)$$

که آشکارا با $a_i b_j c_j$ تفاوت دارد.

در نهایت، عبارات $a_i b_i c_i d_i$ و $a_i b_i c_j d_j$ را درنظر بگیرید. این عبارات به‌طور صریح چنین یافت می‌شوند

$$a_i b_i c_i d_i \equiv a_1 b_1 c_1 d_1 + a_2 b_2 c_2 d_2 + \cdots + a_N b_N c_N d_N \qquad (۱۵\text{الف})$$

$$a_i b_i c_j d_j \equiv \left(\sum_{i=1}^{N} a_i b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N} c_j d_j\right)$$
$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_N b_N)(c_1 d_1 + c_2 d_2 + \cdots + c_N d_N)$$
(۱۵ب)

بنابراین، معادلهٔ (۱۵الف) شامل جملات ضربی که در معادلهٔ (۱۵ب) ظاهر می‌شود، نیست. از این‌رو، بدیهی است که

$$a_i b_i c_i d_i \neq a_i b_i c_j d_j \qquad (۱۶)$$

همچنین

$$a_i b_i c_j d_j = a_i b_i c_k d_k = a_l b_l c_i d_i, \cdots \tag{۱۷}$$

چون مختصه‌های x^i از یکدیگر مستقل‌اند، بدیهی است که

$$\frac{dx^i}{dx^j} = \begin{cases} ۱ & i = j \\ ۰ & i \neq j \end{cases} \tag{۱۸}$$

نماد دلتای کرونکر را چنین تعریف می‌کنیم

$$\delta^i_j = \begin{cases} ۱ & i = j \\ ۰ & i \neq j \end{cases} \tag{۱۹}$$

بنابراین، معادلهٔ (۱۸) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{dx^i}{dx^j} = \delta^i_j \tag{۲۰}$$

همین‌طور، مختصه‌های $\overline{x}^\alpha$ نیز از یکدیگر مستقل‌اند، بنابراین

$$\frac{d\overline{x}^\alpha}{d\overline{x}^\beta} = \delta^\alpha_\beta \tag{۲۱}$$

اگر x^iها، مانند معادلهٔ (۳الف)، توابعی از $\overline{x}^\alpha$ باشند، با مشتق‌گیری جزئی، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{dx^i}{dx^j} = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^\alpha} \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^j} \tag{۲۲}$$

مانند قرارداد قبلی، مجموع‌یابی روی α انجام می‌شود. از مقایسهٔ معادلهٔ (۲۲) با معادلهٔ (۲۰)، داریم

$$\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^\alpha} \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^j} = \delta^i_j \tag{۲۳الف}$$

همین‌طور،

$$\frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^k} = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^\beta} = \delta^\alpha_\beta \tag{۲۳ب}$$

۳.۱۵ بردار پادوردا

تانسورها را ویژگیهای تبدیلیشان در تبدیلهای مختصاتی تعریف می‌کند. بردارها حالت خاصی از تانسورهایند.

فرض کنید موجودی فیزیکی را در دستگاه مختصات x^i با N تابع A^i مشخص کنیم. فرض کنید که همان موجود را در دستگاه مختصات $\overline{x}^\alpha$ با مؤلفه‌های $\overline{A}^\alpha$ مشخص کنیم. دراین‌صورت به A^i مؤلفه‌های بردار پادوردا می‌گویند، چنانچه در تبدیلهای مختصاتی مطابق رابطهٔ زیر تبدیل شود

$$\overline{A}^\alpha = \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^j} A^j \tag{۲۴}$$

این رابطه را به‌سادگی می‌توانیم وارون کنیم تا A^i را برحسب $\overline{A}^\alpha$ بیان کنیم. معادلهٔ (۲۴) را در $\partial x^k/\partial \overline{x}^\alpha$ ضرب می‌کنیم و روی α جمع می‌بندیم، داریم

$$\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^\alpha} \overline{A}^\alpha = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^\alpha} \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^j} A^j \tag{۲۵}$$

با استفاده از معادلهٔ (۲۳الف)، معادلهٔ بالا می‌شود

$$\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^\alpha} \overline{A}^\alpha = \delta^k_j A^j = A^k \tag{۲۶}$$

i را به‌جای k قرار می‌دهیم، می‌شود

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^\alpha} \overline{A}^\alpha \tag{۲۷}$$

۴.۱۵ بردار هموردا

به مجموعه‌ای از N کمیت A_i که توابعی از N مختصهٔ x^i باشند، مؤلفه‌های بردار هموردا می‌گویند، چنانچه برمبنای رابطهٔ زیر

$$\overline{A}_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^\alpha} A_i \tag{۲۸}$$

در تغییر مختصات از x^i به $\overline{x}^\alpha$ تبدیل شوند که در آن $\overline{A}_\alpha$ مؤلفه‌های این بردار در دستگاه مختصات خط‌دار است. تبدیل وارون آن می‌شود

$$A_i = \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i} \overline{A}_\alpha \tag{۲۹}$$

مثال ۳. نشان دهید که سرعت و شتاب بردارهای پادوردا هستند و گرادیان میدان نرده‌ای برداری همورداست.

حل: (الف) اگر t نمایش زمان باشد، با تقسیم معادلهٔ (۷ب) بر dt به‌دست می‌آوریم

$$\frac{d\overline{x}^\alpha}{dt} = \frac{\partial\overline{x}^\alpha}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} \tag{۳۰}$$

اگر مؤلفه‌های سرعت را در دستگاه مختصات خط‌دار و بدون خط، به‌ترتیب با دو معادلهٔ زیر تعریف کنیم

$$\overline{v}^\alpha = \frac{d\overline{x}^\alpha}{dt}, v^i = \frac{dx^i}{dt} \tag{۳۱}$$

معادلهٔ (۳۰) می‌شود

$$\overline{v}^\alpha = \frac{\partial\overline{x}^\alpha}{\partial x^i}v^i \tag{۳۲}$$

از تعریف معادلهٔ (۲۴) برمی‌آید که سرعت v^i برداری پادورداست. بار دیگر، با مشتق‌گیری نسبت به زمان، نتیجه می‌گیریم که شتاب نیز برداری پادورداست،[1] و به این ترتیب نتیجهٔ مطلوب ثابت می‌شود.

(ب) فرض کنید $\phi = \phi(x^i)$ میدانی نرده‌ای باشد. نرده‌ای بودن آن ایجاب می‌کند که صورت تابعی‌اش در تبدیلهای مختصاتی تغییر نکند. به‌نحوی که

$$\phi(x^i) = \overline{\phi}(\overline{x}^\alpha) = \phi(\overline{x}^\alpha) \tag{۳۳}$$

گرادیان میدان نرده‌ای برداری می‌شود که مؤلفه‌هایش را می‌توان چنین تعریف کرد

$$A_i = \partial\phi/\partial x^i, \overline{A}_\alpha = \partial\overline{\phi}/\partial\overline{x}^\alpha = \partial\phi/\partial\overline{x}^\alpha \tag{۳۴}$$

با استفاده از مشتقهای جزئی، بدیهی است که می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^i} = \frac{\partial\phi}{\partial\overline{x}^\alpha}\frac{\partial\overline{x}^\alpha}{\partial x^i} \tag{۳۵}$$

---

۱. ضرایب $d\overline{x}^\alpha/dx^j$ برای دستگاههای مختصات ثابت مستقل از زمان است. در اینجا تمایزی ظریف وجود دارد. مؤلفه‌های dx^j/dt در x^j مختصات، مثلاً ذره‌ای در حرکت است، در حالی‌که ضرایب $d\overline{x}^\alpha/dx^j$ فقط رابطهٔ میان دو دستگاه مختصات را نشان می‌دهد و مستقل از زمان است.

یا

$$A_i = \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i}\overline{A}_\alpha \tag{۳۶}$$

بنابر تعریف معادلهٔ (۲۹)، روشن است که گرادیان میدان نرده‌ای برداری همورداست.

۵.۱۵ تانسورهای رتبهٔ دوم

مجموعه‌ای از N^2 تابع A^{ij} را مؤلفه‌های تانسور پادوردای رتبهٔ دوم می‌نامند چنانچه مطابق رابطهٔ زیر

$$\overline{A}^{\alpha\beta} = \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i}\ \frac{\partial \overline{x}^\beta}{\partial x^j}A^{ij} \tag{۳۷}$$

در تبدیلهای مختصاتی تبدیل شوند، که $\overline{A}^{\alpha\beta}$ مؤلفه‌های تانسور در دستگاه مختصات خط‌دار است.

مجموعه‌ای از N^2 تابع A_{ij} را مؤلفه‌های تانسور هموردای رتبهٔ دو گویند اگر در تبدیلهای مختصاتی به‌صورت زیر تبدیل شوند

$$\overline{A}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^\alpha}\ \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^\beta}A_{ij} \tag{۳۸}$$

سرانجام، مجموعه‌ای از N^2 تابع A^i_j را مؤلفه‌های تانسور پادوردای رتبهٔ یک و هموردای رتبهٔ یک (یا به‌سادگی تانسور آمیختهٔ رتبهٔ دو می‌نامند چنانچه در تبدیلهای مختصاتی مطابق رابطهٔ زیر تبدیل شوند

$$\overline{A}^\alpha_\beta = \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i}\ \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^\beta}A^i_j \tag{۳۹}$$

تانسور رتبهٔ دو را می‌توان به‌صورت ماتریس مربعی مرتبهٔ N نوشت، دقیقاً همان‌طورکه تانسور رتبهٔ یک را می‌توان برداری N مؤلفه‌ای فرض کرد. بنابراین، تانسور هموردای رتبهٔ دو را می‌توان چنین نوشت

$$A_{ij} \equiv \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & & & \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \tag{۴۰}$$

با وجود این، عکس آن صحیح نیست، اجزای ماتریس مربعی دلخواه مؤلفه‌های تانسور رتبهٔ دو را تشکیل نمی‌دهند.

۶.۱۵ تعریف کلی

تعاریف بالا را به‌سادگی می‌توان به تانسوری از مرتبهٔ دلخواه تعمیم داد. بنابراین، به مجموعه‌ای از N^{p+q} تابع $A^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$ مؤلفه‌های تانسور پادوردای رتبهٔ p و هموردای رتبهٔ q (رتبهٔ کلی $p+q$) گویند، اگر در تبدیلهای مختصاتی چنین تبدیل شوند

$$\overline{A}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_q} = \frac{\partial \overline{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{\alpha_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial \overline{x}^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{l_q}}{\partial \overline{x}^{\beta_q}} A^{i_1 i_2 \dots i_p}_{l_1 l_2 \dots l_q} \qquad (۴۱)$$

در اینجا $\alpha_r (1 \leq r \leq p)$ و $\beta_s (1 \leq s \leq q)$ اندیسهای آزادند که هر یک هر مقدار دلخواهی از ۱ تا N می‌گیرد و i_r و l_s اندیسهای ظاهری‌اند که مجموع‌یابی روی هر یک از آنها از ۱ تا N ضمنی است. چون هر یک از اندیسهای α_r و β_s، N مقدار می‌گیرد، این تانسور N^{p+q} مؤلفه دارد.

از این مطلب روشن است که کمیت نرده‌ای و بردار حالتهای خاصی از یک تانسورند. بردار تانسوری رتبهٔ یک است و از این‌رو N مؤلفه در فضای Nبعدی دارد. کمیت نرده‌ای تانسوری رتبهٔ صفر است و بنابراین، $N^\circ = 1$ مؤلفه دارد. اگر A کمیتی نرده‌ای باشد، معادلهٔ (۴۱) با $p = q = 0$ به $\overline{A} = A$ تبدیل می‌شود که نشان می‌دهد کمیت نرده‌ای در هر تبدیل مختصاتی ناورداست. طول، جرم، انرژی، حجم و غیره، مثالهای فیزیکی روشنی ازکمیت نرده‌ای در مکانیک نیوتونی‌اند، که از انتخاب دستگاه مختصات مستقل‌اند.

باید به تفاوت اساسی میان تانسور پادوردا و هموردا دقت کنیم. در حالت پادوردا، تانسور را با مؤلفه‌هایی در جهت افزایش مختصات نمایش می‌دهند، در صورتی که تانسور هموردا را با مؤلفه‌هایی در جهت متعامد بر سطوح مختصاتی ثابت نشان می‌دهند. مثالهای فیزیکی که در مثال ۳ بررسی کردیم، به روشن شدن این نکته کمک می‌کند. بردارهای سرعت و شتاب را برحسب مؤلفه‌هایی در جهت افزایش مختصات نمایش می‌دهند، در حالی که بردار گرادیان را برحسب مؤلفه‌هایی در جهت متعامد بر سطوح مختصاتی ثابت نشان می‌دهند. در دستگاه مختصات دکارتی، جهت مختصاتی x^i برجهت متعامد بر سطوح ثابت x^i منطبق می‌شود، بنابراین، تمایز میان تانسورهای هموردا و پادوردا از بین می‌رود (مثال ۷.۱۸).

از معادلات (۶) معلوم است که مختصات دیفرانسیلی dx^i مؤلفه‌های تانسور پادوردای رتبهٔ یک است-بردار تغییر مکان بی‌نهایت کوچک. باید توجه کنیم که مختصات x^i علی‌رغم نمادگذاری آن مؤلفه‌های تانسور نیست.

مثال ۴. مؤلفه‌های دکارتی بردار شتاب عبارت‌اند از

$$a_x = \frac{d^۲x}{dt^۲}, \qquad a_y = \frac{d^۲y}{dt^۲}, \qquad a_z = \frac{d^۲z}{dt^۲} \tag{۴۲}$$

مؤلفه‌های بردار شتاب را در مختصات قطبی کروی بیابید.

حل: چون شتاب برداری پادورداست، مؤلفه‌های آن بنابر معادلهٔ (۲۴) تبدیل می‌شوند که می‌توان آن‌را چنین نوشت

$$\overline{a}^\alpha = \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i} a^i \tag{۴۳}$$

فرض می‌کنیم که $x^۱$، $x^۲$، $x^۳$ مختصات دکارتی x، y، z و $\overline{x}^۱$، $\overline{x}^۲$، $\overline{x}^۳$ مختصات قطبی کروی r، θ، ϕ باشند. همین‌طور، a^i را مؤلفه‌های دکارتی شتاب می‌گیریم، یعنی، $a^۱ \equiv a_x$، $a^۲ \equiv a_y$، $a^۳ \equiv a_z$ که در معادلات (۴۲) داده شده‌اند و $\overline{a}^\alpha$ را مؤلفه‌های قطبی آن، یعنی، $\overline{a}^۱ \equiv a_r$، $\overline{a}^۲ \equiv a_\theta$، $\overline{a}^۳ \equiv a_\phi$، که اگر معادلهٔ (۴۳) را با معادلهای فوق به‌صورت ضمنی بنویسیم، می‌شود

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{d^۲x}{dt^۲} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{d^۲y}{dt^۲} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{d^۲z}{dt^۲} \\ a_\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{d^۲x}{dt^۲} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{d^۲y}{dt^۲} + \frac{\partial \theta}{\partial z}\frac{d^۲z}{dt^۲} \\ a_\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{d^۲x}{dt^۲} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{d^۲y}{dt^۲} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{d^۲z}{dt^۲} \end{aligned} \tag{۴۴}$$

بنابراین، به نه مشتق جزئی r، θ، ϕ نسبت به x، y، z نیاز داریم. آنها را از معادلات (۵) به‌دست می‌آوریم و بعد از اینکه کلیهٔ مختصات دکارتی را، با استفاده از معادلات (۴)، به مختصات قطبی کروی تبدیل کردیم، داریم[۱]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial x} = \sin\theta\cos\phi, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta\sin\phi, \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \cos\theta \\ &\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta\sin\phi}{r}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\sin\theta}{r} \\ &\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z} = ۰ \end{aligned} \tag{۴۵}$$

---

۱. باید به یاد آوریم که در حالت مشتقهای جزئی، برای نمونه، داریم $\partial r/\partial x \neq ۱/(\partial x/\partial r)$.

دراین‌صورت، برای نمونه، اولین معادله از معادلات (۴۴) می‌شود

$$a_r = \sin\theta\cos\phi\ d^2(r\sin\theta\cos\phi)/dt^2 + \sin\theta\sin\phi\ d^2(r\sin\theta\sin\phi)/dt^2 + \cos\theta\ d^2(r\cos\theta)/dt^2 \qquad (۴۶)$$

اولین جملهٔ سمت راست معادلهٔ بالا به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. داریم

$$\frac{d}{dt}(r\sin\theta\cos\phi) = \dot{r}\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\cos\phi\ \dot{\theta} - r\sin\theta\sin\phi\ \dot{\phi} \qquad (۴۷)$$

و از این‌رو

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}(r\sin\theta\cos\phi) =& \ddot{r}\sin\theta\cos\phi + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - 2\sin\theta\sin\phi\ \dot{r}\dot{\phi}\\ &- r\sin\theta\cos\phi\ \dot{\theta}^2 - 2r\cos\theta\sin\phi\ \dot{\theta}\dot{\phi} + r\cos\theta\cos\phi\ \ddot{\theta}\\ &- r\sin\theta\cos\phi\ \dot{\phi}^2 - r\sin\theta\sin\phi\ \dot{\phi}\end{aligned} \qquad (۴۸)$$

همین‌طور، با حل کردن جملات دیگر، سرانجام به‌دست می‌آوریم

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\ \dot{\phi}^2 \qquad (۴۹)$$

مؤلفه‌های دیگر را می‌توان به‌همین روش تعیین کرد و نتیجه چنین می‌شود

$$\begin{aligned}\overline{a}^1 &\equiv a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\ \dot{\phi}^2\\ \overline{a}^2 &\equiv a_\theta = \ddot{\theta} - \sin\theta\cos\phi\ \dot{\phi}^2\\ \overline{a}^3 &\equiv a_\phi = \ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} + 2\cot\theta\ \dot{\theta}\dot{\phi}^2\end{aligned} \qquad (۵۰)$$

باید توجه کنیم که تنها مؤلفهٔ a_r ابعاد شتاب دارد، در صورتی که a_θ و a_ϕ ابعاد $^{-2}$(زمان) دارند. این موضوع عجیب نیست، زیرا خود مختصه‌های قطبی کروی ابعاد یکسانی ندارند.

با انتخاب $\theta = \pi/2$ و قرار دادن ρ به‌جای r، معادلات بالا را می‌توان به‌صفحهٔ دوبعدی (x, y) تبدیل کرد. برای مؤلفه‌های شتاب در مختصات قطبی ρ و ϕ، داریم

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2, \qquad a_\phi = \ddot{\phi} + \frac{2}{\rho}\dot{\rho}\dot{\phi} \qquad (۵۱)$$

مثال ۵. $\text{div} A^i$، $\text{div} A_i$، و $\nabla^2 I$ را در مختصات قطبی استوانه‌ای بیابید که در آن A^i و A_i بردارند و I کمیتی نرده‌ای است.

حل: (الف) در مختصات دکارتی، داریم

$$\text{div}\ A^i = \frac{\partial A^x}{\partial x} + \frac{\partial A^y}{\partial y} + \frac{\partial A^z}{\partial z} \tag{۵۲}$$

مختصات استوانه‌ای ρ، ϕ، z با روابط زیر به مختصات دکارتی مربوط می‌شوند

$$x = \rho\ \cos\ \phi, y = \rho\ \sin\ \phi, z = z \tag{۵۳}$$

اگر مؤلفه‌های A^i را در مختصات استوانه‌ای با A^ρ، A^ϕ، و A^z نشان دهیم، داریم

$$A^x = \frac{\partial x}{\partial \rho}A^\rho + \frac{\partial x}{\partial \phi}A^\phi + \frac{\partial x}{\partial z}A^z = \cos\phi A^\rho - \rho\sin\phi A^\phi \tag{۵۴الف}$$

$$A^y = \frac{\partial y}{\partial \rho}A^\rho + \frac{\partial y}{\partial \phi}A^\phi + \frac{\partial y}{\partial z}A^z = \sin\phi A^\rho + \rho\cos\phi A^\phi \tag{۵۴ب}$$

$$A^z = A^z \tag{۵۴ج}$$

بنابراین

$$\frac{\partial A^x}{\partial x} = \frac{\partial A^x}{\partial \rho}\ \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial A^x}{\partial \phi}\ \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial A^x}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial x} = \cos\phi\ \frac{\partial A^x}{\partial \rho} - \frac{\sin\phi}{\rho}\ \frac{\partial A^x}{\partial \phi} \tag{۵۵الف}$$

$$\frac{\partial A^y}{\partial y} = \frac{\partial A^y}{\partial \rho}\ \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial A^y}{\partial \phi}\ \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial A^y}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial y} = \sin\phi\ \frac{\partial A^y}{\partial \rho} + \frac{\cos\phi}{\rho}\ \frac{\partial A^y}{\partial \phi} \tag{۵۵ب}$$

در حالی که $\partial A^z/\partial z$ به همان صورت می‌ماند. با به‌کارگیری معادلات (۵۴) در معادلات (۵۵)، داریم

$$\frac{\partial A^x}{\partial x} = \cos^2\phi\ \frac{\partial A^\rho}{\partial \rho} - \frac{\sin\phi\cos\phi}{\rho}\ \frac{\partial A^\rho}{\partial \phi} - \rho\sin\phi\cos\phi\ \frac{\partial A^\phi}{\partial \rho} + \sin^2\phi\ \frac{\partial A^\phi}{\partial \phi} + \frac{\sin^2\phi}{\rho}A^\rho \tag{۵۶الف}$$

$$\frac{\partial A^y}{\partial y} = \sin^2\phi\ \frac{\partial A^\rho}{\partial \rho} + \frac{\sin\phi\cos\phi}{\rho}\ \frac{\partial A^\rho}{\partial \phi} + \rho\sin\phi\cos\phi\frac{\partial A^\phi}{\partial \rho} + \cos^2\phi\ \frac{\partial A^\phi}{\partial \phi} + \frac{\cos^2\phi}{\rho}A^\rho \tag{۵۶ب}$$

از جمع کردن معادلات فوق و $\partial A^z/\partial z$، داریم

$$\mathrm{div} A^i = \frac{\partial A^\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial A^\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A^z}{\partial z} + \frac{A^\rho}{\rho} \tag{۵۷}$$

(ب) برای بردار هموردای A_i، داریم[۱]

$$\mathrm{div} A_i = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{۵۸}$$

برحسب مؤلفه‌های استوانه‌ای A_ρ، A_ϕ، و A_z جملات فوق به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{\partial \rho}{\partial x} A_\rho + \frac{\partial \phi}{\partial x} A_\phi = \cos\phi A_\rho - \frac{\sin\phi}{\rho} A_\phi \\ A_y &= \frac{\partial \rho}{\partial y} A_\rho + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_\phi = \sin\phi A_\rho + \frac{\cos\phi}{\rho} A_\phi \\ A_z &= A_z \end{aligned} \tag{۵۹}$$

چنانچه همان شیوهٔ قسمت (الف) را دنبال کنیم؛ در نهایت به چنین نتیجه‌ای می‌رسیم

$$\mathrm{div} A_i = \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{۱}{\rho^۲} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{A_\rho}{\rho} \tag{۶۰}$$

(ج) چون I میدانی نرده‌ای است، در قالب هر تبدیل مختصاتی ناوردا می‌ماند. داریم

$$\nabla^۲ I = \frac{\partial^۲ I}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ I}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ I}{\partial z^۲} \tag{۶۱}$$

حال

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{\partial I}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\phi \frac{\partial I}{\partial \rho} - \frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial I}{\partial \phi} \tag{۶۲}$$

بنابراین

$$\frac{\partial^۲ I}{\partial x^۲} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{۶۳}$$

معادلهٔ (۶۲) را در معادلهٔ بالا قرار می‌دهیم و آن‌را ساده می‌کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial^۲ I}{\partial x^۲} = \cos^۲\phi \frac{\partial^۲ I}{\partial \rho^۲} + \frac{\sin ۲\phi}{\rho}\left(\frac{\partial I}{\rho \partial \phi} - \frac{\partial^۲ I}{\partial \rho \partial \phi}\right) + \frac{\sin^۲\phi}{\rho}\left(\frac{\partial I}{\partial \rho} + \frac{\partial^۲ I}{\rho \partial \phi^۲}\right)$$

(۶۴الف)

---

۱. در مثال ۷.۱۸ می‌بینیم که در دستگاه مختصات دکارتی، داریم $A^i = A_i$.

به‌همین روش، داریم

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = \sin^2\phi\,\frac{\partial^2 I}{\partial\rho^2} - \frac{\sin 2\phi}{\rho}\left(\frac{\partial I}{\rho\partial\phi} - \frac{\partial^2 I}{\partial\rho\partial\phi}\right) + \frac{\cos^2\phi}{\rho}\left(\frac{\partial I}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 I}{\rho\partial\phi^2}\right) \quad (\text{۶۴ب})$$

با جمع کردن معادلات (۶۴) و $\partial^2 I/\partial z^2$، سرانجام به‌دست می‌آوریم

$$\nabla^2 I = \frac{\partial^2 I}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial I}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 I}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} \quad (\text{۶۵})$$

۷.۱۵ چرا تانسورها؟

فرض کنید آزمایشی فیزیکی در آزمایشگاهی صورت می‌گیرد. مانند بررسی حرکت یک پرتابه که در آن بیشینهٔ ارتفاعی که پرتابه به آن می‌رسد و انرژی جنبشی آن‌را در نقاط مختلف (کمیتهای نرده‌ای) اندازه‌گیری می‌کنیم، یا اندازه‌گیری میدانهای الکتریکی و مغناطیسی (کمیتهای برداری) که باری مشخص و توزیع جریان ایجاد می‌کند. فرض کنید ده دانشمند در آزمایشگاههایی در مکانهای مختلف، هر یک با وسائل خود، کمیتهای بالا را اندازه‌گیری می‌کنند. هر دانشمند دستگاه مرجعی مستقل از دیگران انتخاب کرده است، در واقع، هر دانشمندی یک دستگاه مختصات دکارتی را انتخاب کرده است و هیچ‌یک از آنها از جهت محورهای x، y، و z سایرین اطلاعی ندارد. حال اگر یک دانشمند بیشینهٔ ارتفاع پرتابه را ۲m اندازه‌گیری کند، آیا ممکن است که سایرین آن‌را ۵m، ۱m، ۱۰m، ... بیابند؟ یا اگر یک دانشمند میدان مغناطیسی را در نقطه‌ای مشخص ۵۰۰ گاؤس و در جهت شرق بیابد، احتمال دارد که دیگری آن‌را ۱۰۰۰ گاؤس و در جهت جنوب بیابد، و سومی ۱۰ گاؤس و در جهت بالا اندازه‌گیری کند؟ سرانجام، اگر دانشمندی تصمیم بگیرد که دستگاه مختصات متفاوتی انتخاب کند، آیا ارتفاع پرتابه و اندازهٔ میدان مغناطیسی تغییر می‌کند؟ آزمایش نشان می‌دهد که غیرممکن است و اندازه‌گیریهای دانشمندان مختلف نباید متفاوت باشند (بیش از حد خطاهای تجربی). دانشمندان بیش از سه قرن گذشته این مفهوم را دریافتند و به‌طور تجربی اصل ناوردایی گالیله را فرمولبندی کردند: پدیده‌های فیزیکی برای همهٔ ناظرانی که نسبت به یکدیگر ساکن‌اند یکسان است، مستقل از مکان هر ناظر (انتقال دستگاه مختصات) و جهت دستگاه مرجع او (چرخش دستگاه مختصات).

بر این اساس، در فرمولبندی ریاضی قوانین فیزیکی، تنها آن کمیتهایی که چنین ویژگیهای ناوردایی دارند، ظاهر می‌شوند. این کمیتها عبارت‌اند از: کمیتهای نرده‌ای، بردارها و به‌طور کلی تانسورها. هر کمیت دیگری که چنین ویژگیهای ناوردایی نداشته باشد، در نمایش ریاضی قوانین فیزیکی ظاهر نمی‌شود.

باید تأکید کرد که تانسور موجودی مستقل از دستگاه مختصاتی است که مؤلفه‌هایش به آن نسبت داده می‌شوند. تنها مؤلفه‌های آن هستند که از یک دستگاه به دستگاه مختصات دیگری تبدیل می‌شوند. اشکال نمادگذاری تانسوری که از اندیسهای بالا و پایین استفاده می‌کند، این است که بر این جنبهٔ خیلی مهم تأکید نمی‌کند. اما، این برتری را دارد که رتبهٔ تانسور و اندیسهای آزاد و ظاهری‌اش فوراً آشکار می‌شود. این موضوع در برخورد با بردارها روشن می‌شود که تانسورهایی از رتبهٔ واحدند و در این حالت از دو نمادگذاری به‌طور مشترک استفاده می‌شود. بنابراین، می‌شود برداری را با **u** یا u_i نمایش دهیم. مؤلفه‌های u_i به دستگاه مختصات انتخابی بستگی دارد، در حالی‌که چنین برداری (یعنی **u**) یک کمیت ناوردای مستقل از دستگاه مختصات است.

مقایسهٔ روشی که کمیتهای نرده‌ای، بردارها و تانسورها در کتابهای درسی مقدماتی فیزیک معرفی می‌شوند نیز جالب است. کمیتهای نرده‌ای به‌طور کلی کمیتهایی فیزیکی‌اند که می‌توان آنها را تنها با یک عدد مشخص کرد و بردارها کمیتهایی فیزیکی‌اند که هم اندازه و هم جهت دارند. حال به تعریف جمع، تفریق، ضرب نرده‌ای بردارها، ... می‌پردازیم. با دقت تمام، کمیت نرده‌ای فیزیکی در قالب همهٔ تبدیلهای مختصاتی ناورداست. همین‌طور، راه دقیق تعریف بردار این است که ابتدا فضای برداری را تعریف کنیم و سپس اجزای آن‌را بردار بخوانیم (فصل ۱). سپس می‌توان تبدیلهای بردارها را در فضای برداری معرفی کرد. تعریف فضای برداری، جمع برداری را دربر می‌گیرد. بنابراین، قانون متوازی‌الاضلاع بردارها، که صورت آشنای جمع برداری در فضای سه‌بعدی است، ویژگی بردارها نیست، اما تعریف‌کنندهٔ مشخصهٔ آنهاست. مکان کمیتی نرده‌ای، مانند نقطه‌ای روی خط مستقیم یا صفحهٔ مختلط، و جهت و اندازهٔ بردار تنها نمایش هندسی یا نموداری آنهاست که ما را در فهم بعضی از عملیات و اینکه چرا آنها را به‌کار می‌بریم، یاری می‌دهد.

در حالت تانسورها، ایجاد تصویر هندسی ممکن نیست (یا حداقل ساده نیست) و بنابراین تانسورها را باید از طریق تبدیلهایشان در قالب تغییرهای دستگاه مختصات معرفی کرد. هر چند این موضوع درک مفهوم تانسورها را برای دانشجو قدری مشکل می‌کند، این قابلیت و برتری را دارد که

ما را از هر سردرگمی می‌رهاند و مانع می‌شود که ایده‌های ابلهانه به ذهنمان راه پیدا کند. علاوه‌براین، حتی در مکانیک کوانتومی، تصویرهای فیزیکی مدارهای الکترونی اتم یا تکانهٔ زاویه‌ای اسپینی بی‌معنی شده است و باید با عملگرهای مجرد، معادلات ویژه‌مقدار و احتمالات گذار کار کنیم.

تأکید می‌کنیم که مفهوم ناوردایی در فیزیک بسیار مهم است. می‌توان مثالهای نقضی از کمیتهایی یافت که اندازه و جهت دارند، اما کمیتهای نرده‌ای یا بردار نیستند. بنابراین، مؤلفه‌های بردار عددند، اما کمیتهای نرده‌ای نیستند، زیرا برای ناظران مختلف ناوردا نمی‌مانند. چرخشی را به‌اندازهٔ θ حول محوری که از مبدأ می‌گذرد، درنظر بگیرید. این کمیت دارای اندازه (زاویهٔ θی چرخش) و جهت (جهت محور چرخش) است، اما بردار نیست، زیرا دو چرخشی از این دست، مانند بردارها جمع نمی‌شوند و جمع آنها جابه‌جایی‌پذیر نیست (مگر اینکه زاویهٔ چرخش بینهایت کوچک باشد).[۱]

کاربرد اصل ناوردایی را در قوانین فیزیکی با چند مثال زیر توضیح می‌دهیم.[۲]

مثال ۶. کاری که نیروی وارد بر شیء هنگام جابه‌جایی آن انجام می‌دهد: آزمایشها نشان می‌دهد که چنانچه نیرویی بر شیئی اثر کند و آن‌را جابه‌جا کند، افزایش انرژی شیء با اندازهٔ نیروی $\mathbf{F}$ و همچنین جابه‌جایی s متناسب است، به‌شرطی که جهت $\mathbf{F}$ و s در این آزمایش تغییر نکند. بنابراین، کار W تابعی خطی از $\mathbf{F}$ و s است و توانهای بالاتر آنها را در بر نمی‌گیرد. پارامتر دیگری که W به آن وابسته باشد وجود ندارد. می‌دانیم که کار کمیتی نرده‌ای است. تنها کمیت نرده‌ای که از $\mathbf{F}$ و s حاصل می‌شود و نسبت به هر دوی آنها خطی است $\mathbf{F}\cdot\mathrm{s}$ است. بنابراین، داریم

$$W = k\mathbf{F}\cdot\mathrm{s} \qquad (۶۶)$$

که k ثابت است. نکتهٔ مهم این است که وابستگی W به زاویهٔ بین $\mathbf{F}$ و s نتیجهٔ منطقی

---

۱. رک:

Joshi, A. W., "Misconeceptions concerning vectors", *Bull. Ind. Assoc. Phys. Teachers* **3**, 129 (1986).

۲. مثالها بر این مقاله استوارند:

Joshi, A. W., "Why Physics needs scalars, vectors, and tensors", *Bull. Ind. Assoc. Phys. Teachers* **3**, 217 (1986).

ناوردایی است. البته، اگر W، $\mathbf{F}$ و $\mathbf{s}$ کمیتهای فیزیکی باشند، آزمایش باید با آن سازگاری داشته باشد.

مثال ۷. نیروی وارد بر باری الکتریکی در میدان الکتریکی: آزمایشها نشان می‌دهد که نیروی $\mathbf{F}$ وارد بر بار الکتریکی q با بار q و اندازهٔ میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ متناسب است. این نیرو از هر پارامتر دیگری، مثل سرعت یا جرم ذرهٔ باردار مستقل است. نیرو کمیت برداری است. برداری که از کمیت نرده‌ای q و بردار $\mathbf{E}$ به‌طور خطی تشکیل می‌شود $q\mathbf{E}$ است. بنابراین، فرمول زیر را نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{F} = kq\mathbf{E} \tag{۶۷}$$

که k ثابت است.

مثال ۸. نیروی وارد بر بار متحرک در میدان مغناطیسی: آزمایشها نشان می‌دهند که نیروی $\mathbf{F}$، ناشی از میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ وارد بر بار q متناسب است با بار q و اندازهٔ $\mathbf{B}$. علاوه‌براین، با اندازهٔ سرعت $\mathbf{v}$ی ذرهٔ باردار برای مجموعهٔ مفروضی از جهتهای $\mathbf{B}$ و $\mathbf{v}$ متناسب است. این نیرو به جرم ذره و هیچ پارامتر دیگری بستگی ندارد. تنها برداری که از q (کمیت نرده‌ای) و $\mathbf{v}$ و $\mathbf{B}$ (بردار) به‌طور خطی ساخته می‌شود، عبارت است از $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ و بنابراین، داریم

$$\mathbf{F} = kq\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{۶۸}$$

که k ثابت است. وابستگی $\mathbf{F}$ به سینوس زاویهٔ بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{B}$ نتیجهٔ منطقی ناوردایی همراه با مشاهدات تجربی است و آزمایشهای بیشتر این وابستگی را تأیید می‌کنند.

دراینجا دربارهٔ ناوردایی گالیله دریک فضای سه‌بعدی اقلیدسی صحبت کردیم. در فصلهای ۲۰ و ۲۱، این مفهوم را به ناوردایی لورنتس در فضا_زمان چهاربعدی نسبیت خاص تعمیم می‌دهیم.

تمرین

۱.۱۵ تبدیلهای وارون معادلات (۳۷)، (۳۸)، (۳۹) و (۴۰) را به‌دست آورید.

۲.۱۵ * مقدار δ^i_i در فضای Nبعدی چیست؟ همچنین $\delta^i_j\delta^j_i$ و $\delta^i_j\delta^j_k\delta^k_i$ را محاسبه کنید.

۳.۱۵ نشان دهید که (الف) $\delta^i_j A_{ik} = A_{jk}$؛ (ب) $\delta^p_i\delta^j_q A^i_j = A^p_q$.

۱۵. ۴ مؤلفه‌های دکارتی سرعت عبارت است از dx/dt، dy/dt، dz/dt. ثابت کنید که این مؤلفه‌ها در مختصات قطبی کروی dr/dt، $d\theta/dt$، $d\phi/dt$ می‌شوند.

۱۵. ۵ * مؤلفه‌های شتاب را در مختصات استوانه‌ای ρ، z، ϕ بیابید که با $x = \rho\cos\phi$، $y = \rho\sin\phi$، $z = z$ به مختصات دکارتی مربوط می‌شوند. این نتیجه را با آنچه برای مختصات قطبی در یک صفحهٔ دوبعدی در پایان مثال ۴ به‌دست آوردیم، مقایسه کنید.

۱۵. ۶* مؤلفه‌های گرادیان میدان نرده‌ای را برحسب مختصات قطبی در فضای دوبعدی به‌دست آورید. مؤلفه‌های گرادیان میدان نرده‌ای را برجسب مختصات قطبی کروی نیز در فضای سه‌بعدی به‌دست آورید.

۱۵. ۷* نشان دهید که مشتقهای دوم میدان نرده‌ای f، یعنی، $A_{ij} = \partial^۲ f/\partial x^i \partial x^j$، مؤلفه‌های تانسور رتبهٔ دو نیست.

۱۵. ۸ نشان دهید که در مختصات قطبی کروی r، θ، ϕ، داریم

(الف)
$$\mathrm{div}A^i = \frac{\partial A^r}{\partial r} + \frac{\partial A^\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A^\phi}{\partial\phi} + \frac{۲A^r}{r} + A^\theta \cot\theta$$

(ب)
$$\mathrm{div}A_i = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{۱}{r^۲}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{۱}{r^۲\sin^۲\theta}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{۲A_r}{r} + \frac{\cot\theta}{r^۲}A_\theta$$

(ج)
$$\nabla I = \frac{\partial^۲ I}{\partial r^۲} + \frac{۱}{r^۲}\,\frac{\partial^۲ I}{\partial\theta^۲} + \frac{۱}{r^۲\sin^۲\theta}\,\frac{\partial^۲ I}{\partial\phi^۲} + \frac{۲}{r}\,\frac{\partial I}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r^۲}\,\frac{\partial I}{\partial\theta}$$

۱۵. ۹ * مؤلفه‌های دکارتی بردار سرعت سیالی در حال حرکت در صفحه‌ای دوبعدی عبارت است از $v_x = x^۲$، $v_y = y^۲$. مؤلفه‌های قطبی بردار سرعت را برحسب مختصات قطبی ρ، ϕ بیابید.

۱۶

جبر تانسورها

پس از تعریف تانسور، گام منطقی بعدی عبارت است از برابری تانسورها، تانسور صفر، جمع، تفریق و ضرب تانسورها و قواعد گوناگونی که به این عملیات مربوط است.

۱.۱۶ برابری و تانسور صفر

دو تانسور $A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ و $B^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ را برابر گویند، اگر و تنها اگر رتبهٔ پادوردای یکسان و رتبهٔ هموردای یکسان داشته باشند و هر مؤلفهٔ یکی برابر با مؤلفهٔ متناظر دیگری باشد، یعنی

$$A^{i_1 i_2\cdots i_p}_{j_1 j_2\cdots j_q} = B^{i_1 i_2\cdots i_p}_{j_1 j_2\cdots j_q} \tag{1}$$

اگر همهٔ N^r مؤلفهٔ تانسوری از رتبهٔ کلی r عیناً صفر شوند، آن‌را تانسور صفر گویند. از معادلهٔ (۱۴.۱۵) روشن است که اگر همهٔ مؤلفه‌های تانسوری در دستگاه مختصاتی دلخواه صفر شوند، در همهٔ دستگاههای مختصات صفر می‌شوند.

اگر دو تانسور رتبهٔ پادوردای یکسان و رتبهٔ هموردای یکسان داشته باشند، می‌توانیم بگوییم از یک نوع‌اند.

۲.۱۶ جمع و تفریق

جمع یا تفریق دو تانسور در صورتی ممکن است که از یک نوع باشند. بنابراین، فرض کنید $A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ و $B^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ دو تانسور هر یک با رتبهٔ پادوردای p و هموردای q باشند. مجموع این دو تانسور را تانسور $C^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ تعریف می‌کنند، از همان رتبهٔ تانسورهای اصلی که مؤلفه‌هایش به‌ترتیب با مجموع مؤلفه‌های متناظر دو تانسور برابر است، یعنی

$$C^{i_1 i_2\cdots i_p}_{j_1 j_2\cdots j_q} = A^{i_1 i_2\cdots i_p}_{j_1 j_2\cdots j_q} + B^{i_1 i_2\cdots i_p}_{j_1 j_2\cdots j_q} \tag{۲}$$

برای اثبات اینکه مجموع دو تانسور از یک نوع نیز تانسور است، تبدیل مؤلفه‌های $B^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ را به‌صورتی شبیه به معادلهٔ (۴۱.۱۵) می‌نویسیم. در نتیجه داریم

$$\overline{B}^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\beta_q} = \frac{\partial\overline{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial\overline{x}^{\alpha_p}}{\partial x^{i_p}}\;\frac{\partial x^{l_1}}{\partial\overline{x}^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_q}}{\partial\overline{x}^{\beta_q}}B^{i_1\cdots i_p}_{l_1\cdots l_q} \tag{۳}$$

با جمع کردن طرفهای متناظر معادلهٔ (۳) و معادلهٔ (۴۱.۱۵)، داریم

$$\overline{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\beta_q} + \overline{B}^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\beta_q} = \frac{\partial\overline{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial\overline{x}^{\alpha_p}}{\partial x^{i_p}}\;\frac{\partial x^{l_1}}{\partial\overline{x}^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_q}}{\partial\overline{x}^{\beta_q}}(A^{i_1\cdots i_p}_{l_1\cdots l_q} + B^{i_1\cdots i_p}_{l_1\cdots l_q}) \tag{۴}$$

اگر مجموع مؤلفه‌های این دو تانسور را در دستگاه مختصات خط‌دار بنویسیم:

$$\overline{C}^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\beta_q} = \overline{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\beta_q} + \overline{B}^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\beta_q} \tag{۵}$$

معادلهٔ (۴) می‌شود

$$\overline{C}^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\beta_q} = \frac{\partial\overline{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial\overline{x}^{\alpha_p}}{\partial x^{i_p}}\;\frac{\partial x^{l_1}}{\partial\overline{x}^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_q}}{\partial\overline{x}^{\beta_q}}C^{i_1\cdots i_p}_{l_1\cdots l_q} \tag{۶}$$

که نشان می‌دهد $C^{i_1\cdots i_p}_{l_1\cdots l_q}$ نیز تانسوری است از رتبهٔ پادوردای P و هموردای q.

با روش مشابهی، می‌توانیم تفریق دو تانسور را تعریف کنیم. اگر دو تانسور از یک نوع باشند، تفاضلشان تانسوری است که هر مؤلفهٔ آن عبارت است از تفاضل مؤلفه‌های متناظر دو تانسور، یعنی

$$A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} - B^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = D^{i_1\cdots j_p}_{j_1\cdots j_q} \tag{۷}$$

که به‌سادگی می‌توان نشان داد تانسور است.

۳.۱۶ ضرب خارجی تانسورها

دو تانسور، مثلاً A_k^{ij} و B_q^p را درنظر بگیرید. A_k^{ij} رتبهٔ کلی سه دارد و بنابراین $N^۳$ مؤلفه دارد، در حالی‌که B_q^p رتبهٔ کلی دو و در نتیجه $N^۲$ مؤلفه دارد. اگر هر مؤلفهٔ یکی از تانسورها در هر یک از مؤلفه‌های دیگری ضرب شود، مجموعهٔ کمیتهای حاصل تانسوری است که رتبهٔ آن مجموع رتبه‌های دو تانسور اصلی است. این موضوع را برای دو تانسور بالا ثابت می‌کنیم.

تانسورهای A_k^{ij} و B_q^p، بنابر معادلات زیر تبدیل می‌شوند

$$\overline{A}_\gamma^{\alpha\beta} = \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i}\ \frac{\partial \overline{x}^\beta}{\partial x^j}\ \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial \overline{x}^\gamma} A_k^{ij} \qquad \text{(۸الف)}$$

$$\overline{B}_\sigma^\rho = \frac{\partial \overline{x}^\rho}{\partial x^p}\ \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^\sigma} B_q^p \qquad \text{(۸ب)}$$

با ضرب کردن مؤلفه‌های متناظر هر دو طرف معادلات بالا و مرتب کردن مجدد جملات، داریم

$$\overline{A}_\gamma^{\alpha\beta}\overline{B}_\sigma^\rho = \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i}\ \frac{\partial \overline{x}^\beta}{\partial x^j}\ \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^\gamma}\ \frac{\partial \overline{x}^\rho}{\partial x^p}\ \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^\sigma} A_k^{ij} B_q^p \qquad \text{(۹)}$$

عباراتی که در معادلهٔ (۹) ظاهر می‌شوند، عبارت‌اند از حاصلضرب مؤلفه‌های تانسورهای A_k^{ij} و B_q^p در دستگاه مختصات خط‌دار و بدون خط. با تعریف

$$C_{kq}^{ijp} = A_k^{ij} B_q^p,\ \overline{C}_{\gamma\sigma}^{\alpha\beta\rho} = \overline{A}_\gamma^{\alpha\beta}\overline{B}_\sigma^\rho \qquad \text{(۱۰)}$$

معادلهٔ (۹) تبدیل می‌شود به

$$\overline{C}_{\gamma\sigma}^{\alpha\beta\rho} = \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i}\ \frac{\partial \overline{x}^\beta}{\partial x^j}\ \frac{\partial x^\rho}{\partial x^p}\ \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^\gamma}\ \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^\alpha} C_{kq}^{ijp} \qquad \text{(۱۱)}$$

که ثابت می‌کند C_{kq}^{ijp} تانسوری است از رتبهٔ پادوردای ۳، رتبهٔ هموردای ۲ و رتبهٔ کلی ۵. بنابراین $N^۵$ مؤلفه دارد که هر یک حاصلضرب یکی از مؤلفه‌های A_k^{ij} در یک مؤلفهٔ B_q^p است.

این عبارت به حاصلضرب خارجی یا حاصلضرب کرونکر دو تانسور معروف است. تانسور C_{kq}^{ijp} را در حالت بالا حاصلضرب خارجی تانسورهای A_k^{ij} و B_q^p می‌نامند. به‌طور کلی، رتبهٔ پادوردای تانسور حاصلضرب خارجی مجموع رتبه‌های پادوردا و رتبهٔ هموردای آن مجموع رتبه‌های هموردای تانسورهایی است که این تانسور حاصلضرب خارجی آنهاست.

مفهوم حاصلضرب خارجی تانسورها را به‌سادگی می‌توان به بیش از دو تانسور تعمیم داد.

مثال ۱. حاصلضرب خارجی سه تانسور A^i_j، B_k، و C^{lm}_{np} را بیابید.

حل: حاصلضرب خارجی آنها عبارت است از

$$D^{ilm}_{jknp} = A^i_j B_k C^{lm}_{np} \tag{۱۲}$$

که تانسوری از رتبهٔ کلی ۷ با رتبهٔ پادوردای ۳ و رتبهٔ هموردای ۴ است.

در به‌دست آوردن حاصلضرب خارجی هر تعداد از تانسورها، باید دقت کنیم که اندیسهای متمایز به‌کار ببریم. مثلاً، نوشتن حاصلضرب خارجی A^i_j، B_k، و C^{lm}_{np} به‌صورت $A^i_j B_k C^{lm}_{kp}$ اشتباه است، زیرا اندیس k تکرار شده است.

۴.۱۶ ضرب داخلی تانسورها

دو تانسور A^{ij}_k و B^p_q را که در بخش ۳.۱۶ معرفی کردیم درنظر بگیرید. مجموعه توابع $A^{ij}_k B^k_q$ را درنظر بگیرید که i، j، و q اندیسهای آزادند، اما بنابر قرارداد، مجموع‌یابی روی k از ۱ تا N صورت می‌گیرد. چون تنها سه اندیس آزاد وجود دارد، تعداد چنین توابعی N^3 می‌شود. نشان می‌دهیم که این N^3 تابع مؤلفه‌های تانسور از مرتبهٔ کلی ۳ هستند.

بدین منظور، در معادلهٔ (۹) $\rho = \gamma$ قرار می‌دهیم و روی γ جمع می‌بندیم، که می‌شود

$$\overline{A}^{\alpha\beta}_{\gamma}\overline{B}^{\gamma}_{\sigma} = \frac{\partial\overline{x}^\alpha}{\partial x^i}\,\frac{\partial\overline{x}^\beta}{\partial x^j}\,\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^\gamma}\,\frac{\partial\overline{x}^\gamma}{\partial x^p}\,\frac{\partial x^q}{\partial\overline{x}^\sigma}A^{ij}_k B^p_q \tag{۱۳}$$

مجموع‌یابی روی γ در سمت راست، به‌سادگی، با استفاده از معادلهٔ (۲۳.۱۵الف) انجام می‌شود. که دراین‌صورت، داریم

$$\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^\gamma}\,\frac{\partial\overline{x}^\gamma}{\partial x^p} = \delta^k_p \tag{۱۴}$$

این نتیجه معادلهٔ (۱۳) را به‌معادلهٔ زیر تبدیل می‌کند

$$\overline{A}^{\alpha\beta}_{\gamma}\overline{B}^{\gamma}_{\sigma} = \frac{\partial\overline{x}^\alpha}{\partial x^i}\,\frac{\partial\overline{x}^\beta}{\partial x^j}\,\frac{\partial x^q}{\partial\overline{x}^\sigma}\delta^k_p A^{ij}_k B^p_q \tag{۱۵}$$

اکنون p اندیسی ظاهری است و مجموع‌یابی را روی آن در سمت راست می‌توان انجام داد. در معادلهٔ بالا، به‌سبب نمایان شدن نماد دلتا، روشن است که در مجموع‌یابی روی p از ۱ تا N، تنها

جمله‌ای می‌ماند که به‌ازای آن $p=k$ باشد. نتیجه می‌گیریم

$$\overline{A}^{\alpha\beta}_{\gamma}\overline{B}^{\gamma}_{\sigma}=\frac{\partial\overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{i}}\ \frac{\partial\overline{x}^{\beta}}{\partial x^{j}}\ \frac{\partial x^{q}}{\partial\overline{x}^{\sigma}}A^{ij}_{k}B^{k}_{q} \tag{۱۶}$$

این معادله نشان می‌دهد که N^3 موجود $A^{ij}_{k}B^{k}_{q}$ مانند مؤلفه‌های تانسوری با رتبهٔ پادوردای ۲ و رتبهٔ هموردای ۱ تبدیل می‌شوند. مؤلفه‌های تانسور جدید را در دستگاه مختصات خط‌دار و بدون خط می‌توانیم چنین نمایش دهیم

$$\overline{C}^{\alpha\beta}_{\sigma}=\overline{A}^{\alpha\beta}_{\gamma}\overline{B}^{\gamma}_{\sigma},\qquad C^{ij}_{q}=A^{ij}_{k}B^{k}_{q} \tag{۱۷}$$

تانسور C^{ij}_{q} را حاصلضرب داخلی دو تانسور A^{ij}_{k} و B^{p}_{q} می‌نامند. حاصلضرب داخلی دو تانسور را می‌توان به روشهای گوناگون به‌دست آورد. بنابراین $A^{ij}_{k}B^{p}_{i}$ و $A^{ij}_{k}B^{p}_{j}$ مثالهایی از حاصلضرب داخلی دو تانسور A^{ij}_{k} و B^{p}_{q} است. همچنین می‌توانیم دو مجموعه اندیس را با هم مساوی قرار دهیم. از این‌رو، مجموعه توابع $A^{ij}_{k}B^{k}_{i}$ و $A^{ij}_{k}B^{k}_{j}$ نیز تانسورهایی هر یک از رتبهٔ پادوردای ۱ هستند، زیرا تنها یک اندیس پادوردای آزاد در هر حالت وجود دارد.

برای به‌دست آوردن حاصلضرب داخلی دو تانسور، مهم است که یک اندیس پادوردای یک تانسور با یک اندیس هموردای تانسور دیگر برابر باشد. هیچ اندیسی نباید بیش از دو بار ظاهر شود. مثلاً، نوشتن ضرب داخلی به‌صورت $A^{ij}_{k}B^{i}_{q}$ اشتباه است. زیرا دو اندیس پادوردا مساوی شده‌اند (مثال زیر)، یا مانند $A^{ik}_{k}B^{k}_{k}$، زیرا k چهار بار تکرار شده است (تمرین ۳).

مثال ۲. اگر A^{ij}_{k} و B^{p}_{q} تانسور باشند، نشان دهید که $A^{ij}_{k}B^{i}_{q}$ تانسور نیست.

حل: می‌توان نشان داد که در به‌دست آوردن حاصلضرب داخلی دو تانسور، اگر یک اندیس تانسوری با اندیس مشابه تانسور دیگر برابر شود، مجموعه توابع حاصل تانسور نیست. از این‌رو، مجموعه موجودات $A^{ij}_{k}B^{i}_{q}$ را درنظر بگیرید. در اینجا بار دیگر N^3 تابع داریم، زیرا سه اندیس آزاد j، k، و q وجود دارد. اما، اینها مانند مؤلفه‌های تانسور رتبهٔ ۳ تبدیل نمی‌شوند.

برای دریافتن این مطلب، ρ را با α در معادلهٔ (۹) برابر می‌گیریم، می‌یابیم

$$\overline{A}^{\alpha\beta}_{\gamma}\overline{B}^{\alpha}_{\sigma}=\frac{\partial\overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{i}}\ \frac{\partial\overline{x}^{\beta}}{\partial x^{j}}\ \frac{\partial x^{k}}{\partial\overline{x}^{\gamma}}\ \frac{\partial\overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{p}}\ \frac{\partial x^{q}}{\partial\overline{x}^{\sigma}}A^{ij}_{k}B^{p}_{q} \tag{۱۸}$$

عامل دربرگیرندهٔ α در سمت راست معادلهٔ بالا عبارت است از

$$\frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{i}} \frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{p}}$$

روش کلی برای ارزیابی این مجموع‌یابی وجود ندارد و معادلهٔ (۱۸) نشان می‌دهد که این تبدیل سرشت تانسوری ندارد.

۵.۱۶ ادغام تانسور

تانسور A^{ijk}_{lm} از رتبهٔ پادوردای ۳ و رتبهٔ هموردای ۲ را درنظر بگیرید، که N^5 مؤلفه دارد. فرض کنید هر یک از اندیسهای پادوردا با هر یک از اندیسهای هموردا برابر باشد (و البته، مجموع‌یابی از ۱ تا N صورت گرفته است). به‌عبارت دیگر، مجموع توابعی، مانند A^{ijk}_{im} را درنظر بگیرید. در اینجا i اندیسی ظاهری است، در حالی‌که j، k، و m اندیسهای آزادند. با این قرارداد، داریم

$$A^{ijk}_{im} = A^{1jk}_{1m} + A^{2jk}_{2m} + \cdots + A^{Njk}_{Nm} \tag{۱۹}$$

موجود A^{ijk}_{im} آشکارا N^3 مؤلفه دارد. حال نشان می‌دهیم که تانسوری از رتبهٔ کلی ۳ است. بدین منظور، تبدیل تانسور A^{ijk}_{lm} را چنین می‌نویسیم:

$$\overline{A}^{\alpha\beta\gamma}_{\rho\sigma} = \frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{i}} \frac{\partial \overline{x}^{\beta}}{\partial x^{j}} \frac{\partial \overline{x}^{\gamma}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{l}}{\partial \overline{x}^{\rho}} \frac{\partial x^{m}}{\partial \overline{x}^{\sigma}} A^{ijk}_{lm} \tag{۲۰}$$

در معادلهٔ بالا $\rho = \alpha$ قرار می‌دهیم و روی α از ۱ تا N جمع می‌بندیم، داریم

$$\begin{aligned}\overline{A}^{\alpha\beta\gamma}_{\alpha\sigma} &= \frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{i}} \frac{\partial \overline{x}^{\beta}}{\partial x^{j}} \frac{\partial \overline{x}^{\gamma}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{l}}{\partial \overline{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{m}}{\partial \overline{x}^{\sigma}} A^{ijk}_{lm} \\ &= \frac{\partial \overline{x}^{\beta}}{\partial x^{j}} \frac{\partial \overline{x}^{\gamma}}{\partial x^{k}} \frac{\partial \overline{x}^{m}}{\partial \overline{x}^{\sigma}} \delta^{l}_{i} A^{ijk}_{lm} = \frac{\partial \overline{x}^{\beta}}{\partial x^{j}} \frac{\partial \overline{x}^{\gamma}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{m}}{\partial \overline{x}^{\sigma}} A^{ijk}_{im}\end{aligned} \tag{۲۱}$$

این نشان می‌دهد که A^{ijk}_{im} تانسوری از رتبهٔ پادوردای ۲ و رتبهٔ هموردای ۱ است.

این فرایند به ادغام تانسور معروف است. به‌طور کلی، چنانچه تانسوری با برابر شدن یکی از اندیسهای پادوردایش با یکی از اندیسهای هموردای آن ادغام شود، موجود حاصل تانسوری است که رتبه‌های پادوردا و هموردای آن هر یک یکی کاهش می‌یابد. بنابراین، از رتبهٔ کلی آن دو تا کم می‌شود.

روشن است که تانسور را می‌توان با روشهای گوناگونی ادغام کرد. بنابراین، A^{ijk}_{li}، A^{ijk}_{jm}، A^{ijk}_{lk} و غیره صورتهای گوناگون ادغام شدهٔ تانسور A^{ijk}_{lm} هستند.

تانسور را می‌توان بارها ادغام کرد. از این‌رو، تانسور A^{ijk}_{lm} از رتبهٔ کلی ۵، پس از ادغام، تانسور A^{ijk}_{im} از رتبهٔ کلی ۳ را می‌دهد که می‌توان آن‌را بار دیگر ادغام کرد و تانسور A^{ijk}_{ij} یا A^{ijk}_{ik} را با رتبهٔ پادوردای ۱ به‌دست آورد.

بدیهی است که ضرب داخلی تانسورها را می‌توان همچون ضرب خارجی آنها پنداشت که ادغام شده باشد. پس برای به‌دست آوردن حاصلضرب داخلی $A^{ij}_{k}B^{k}_{q} = C^{ij}_{q}$ [معادلهٔ (۱۷)]، ابتدا می‌توان حاصلضرب خارجی $A^{ij}_{k}B^{p}_{q} = D^{ijp}_{kq}$ را به‌دست آورد، سپس با برابر قرار دادن اندیسهای p و k، آن‌را ادغام کرد و در پایان C^{ij}_{q} را با D^{ijp}_{pq} برابر گرفت.

سرانجام، باید دریابیم که اگر دو اندیس مشابه تانسوری برابر شوند، موجود حاصل تانسور نیست. بنابراین، اگر D^{ijp}_{kq} تانسور باشد، D^{ijp}_{kq} و D^{ijp}_{kk} تانسور نیستند [تمرین ۴].

۶.۱۶ تانسورهای متقارن و پادمتقارن

اگر اجزای تانسور پادوردای A^{ij} از رتبهٔ ۲ در معادلات زیر صدق کنند

$$A^{ij} = A^{ji} \tag{۲۲}$$

(که باید ببینیم برای همهٔ مقدارهای i و j بین ۱ تا N طبق قرارداد درست باشد)، A^{ij} را تانسور متقارن از رتبهٔ پادوردای ۲ می‌نامند. همین‌طور به تانسور هموردای A_{ij} از رتبهٔ ۲ متقارن می‌گویند اگر داشته باشیم

$$A_{ij} = A_{ji} \tag{۲۳}$$

تانسور A^{ij} یا A_{ij} را پادمتقارن می‌نامند، اگر اجزایشان در معادلهٔ زیر صدق کنند

$$A^{ij} = -A^{ji}, A_{ij} = -A_{ji} \tag{۲۴}$$

مثال ۳. اگر تانسور پادوردای رتبهٔ دو در یک دستگاه مختصات متقارن باشد، ثابت کنید که در هر دستگاه مختصاتی متقارن است.

حل: فرض کنید A^{ij} مؤلفه‌های تانسوری از رتبهٔ دو در دستگاه مختصات x^i باشد، که این تانسور در آن متقارن است، یعنی $A^{ij} = A^{ji}$ است. تبدیل مؤلفه‌های A^{ij} را به دستگاه مختصات دیگری، مثلاً $\overline{x}^\alpha$ درنظر بگیرید. داریم

$$\overline{A}^{\alpha\beta} = \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \overline{x}^\beta}{\partial x^j} A^{ij} \tag{۲۵}$$

مؤلفهٔ $\overline{A}^{\beta\alpha}$ با تعویض α و β در معادلهٔ بالا به‌دست می‌آید، که عبارت است از

$$\overline{A}^{\beta\alpha} = \frac{\partial \overline{x}^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^j} A^{ij} \tag{۲۶}$$

با تعویض اندیسهای ظاهری i و j و با یادآوری اینکه $A^{ij} = A^{ji}$ است، داریم

$$\overline{A}^{\beta\alpha} = \frac{\partial \overline{x}^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i} A^{ji} = \frac{\partial \overline{x}^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i} A^{ij} \tag{۲۷}$$

طرفهای راست معادلات (۲۵) و (۲۷) یکسان‌اند و بنابراین به‌دست می‌آوریم

$$\overline{A}^{\alpha\beta} = \overline{A}^{\beta\alpha} \tag{۲۸}$$

که نشان می‌دهد $\overline{A}^{\alpha\beta}$ در دستگاه مختصات $\overline{x}^\alpha$ تانسوری متقارن است. بنابراین، ویژگی تقارن ویژگی ذاتی تانسور است و از انتخاب دستگاه مختصات مستقل است. چنین نتیجه‌ای برای ویژگی پادتقارن نیز معتبر است.

برای تانسور کلی از رتبهٔ دلخواه، تقارن و پادتقارن را تنها برای زوج اندیسهای متشابه می‌توان تعریف کرد. بنابراین، مثلاً، تانسور A^{ijk}_{lmp} را نسبت به دو اندیس پادوردای اول متقارن گویند اگر

$$A^{ijk}_{lmp} = A^{jik}_{lmp} \tag{۲۹}$$

یا نسبت به اندیسهای هموردای اول و سوم متقارن گویند، اگر

$$A^{ijk}_{lmp} = A^{ijk}_{pml} \tag{۳۰}$$

و غیره. مهم است که مکان اندیسها را مشخص کنیم تا خود آنها را. بنابراین، گفتن اینکه A^{ijk}_{lmp} نسبت به i و j متقارن است، بی‌معنی است، زیرا می‌توانیم این تانسور را به‌صورت A^{lmi}_{kjp} نیز نمایش دهیم.

به‌همین ترتیب، پادمتقارن بودن تانسوری دلخواه را می‌توان برای هر زوج اندیس متشابهی تعریف کرد.

قبلاً یادآوری کردیم که تقارن و پادتقارن را تنها می‌توان برای اندیسهای متشابه تعریف کرد، نه اینکه یکی از اندیسها هموردا و دیگری پادوردا باشد. این مطلب را در مثال زیر ثابت می‌کنیم.

مثال ۴. اگر تانسور آمیختهٔ A^i_j در دستگاه مختصات x^i متقارن باشد، تحقیق کنید که در دستگاه مختصات دلخواه دیگری نیز متقارن است یا خیر.

حل: در دستگاه مختصات x^i داریم $A^i_j = A^j_i$. فرض کنید $\overline{x}^\alpha$ دستگاه مختصات دیگری باشد. مؤلفه‌های A^i_j بنابر رابطهٔ زیر تبدیل می‌شوند

$$\overline{A}^\alpha_\beta = \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i}\ \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^\beta} A^i_j \tag{۳۱}$$

با تعویض α و β و همین‌طور i و j در معادلهٔ بالا، داریم

$$\overline{A}^\beta_\alpha = \frac{\partial \overline{x}^\beta}{\partial x^j}\ \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^\alpha} A^j_i = \frac{\partial \overline{x}^\beta}{\partial x^j}\ \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^\alpha} A^i_j \tag{۳۲}$$

بدیهی است که طرفهای راست معادلات (۳۱) و (۳۲) به‌طور کلی برابر نیستند، و بنابراین، داریم $\overline{A}^\alpha_\beta \neq \overline{A}^\beta_\alpha$.

بنابراین، به‌طور کلی می‌توانیم بگوییم که ویژگی تقارن یا پادتقارن یک تانسور بین یک زوج اندیس متشابه، در قالب هر تبدیل مختصاتی ناورداست و از این‌رو، ویژگی ذاتی تانسور است، اما ویژگی تقارن یا پادتقارن یک تانسور بین یک زوج اندیس نامتشابه، در هر تبدیل مختصاتی ناوردا نیست و بنابراین، ویژگی ذاتی تانسور نیست، بلکه تنها یک ویژگی اتفاقی در یک دستگاه مختصات است.

۷.۱۶ دلتای کرونکر

در این فصل و فصلهای قبلی، از نماد دلتای کرونکر δ^i_j [معادلهٔ ۱۹.۱۵] به‌صورت تانسور آمیختهٔ رتبهٔ دو استفاده کرده‌ایم. در زیر می‌بینیم که این تانسور به‌راستی دارای سرشت یاد شده است.

فرض کنید نماد دلتای کرونکر را در دستگاه مختصات خط‌دار با $\overline{\delta}^\alpha_\beta$ نمایش دهیم؛ داریم

$$\overline{\delta}^\alpha_\beta = \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial \overline{x}^\beta} = \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i}\ \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^\beta} = \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i}\ \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^\beta} \delta^i_j \tag{۳۳}$$

که نشان می‌دهد دلتای کرونکر، مانند تانسور آمیختهٔ رتبهٔ دو تبدیل می‌شود. چون تنها مقدارهایی که نماد دلتا می‌گیرد، ۱ و ۰ است، درمی‌یابیم که این تانسور همسانگرد است. یعنی، در هر دستگاه مختصاتی مؤلفه‌های یکسانی دارد. اگر، برای یک لحظه، اندیسهای لاتین را برای دستگاه مختصات خط‌دار به‌کار ببریم، داریم

$$\overline{\delta}^i_j = \delta^i_j \tag{۳۴}$$

۸.۱۶ تانسور تماماً پادمتقارن

اغلب بهتر است که تانسور $\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N}$ از رتبهٔ N را در فضای Nبعدی به روش زیر تعریف کنیم. چون هر یک از اندیسهای i_k، N مقدار ($1 \leq i_k \leq N$) می‌گیرد، این تانسور N^N مؤلفه دارد. این تانسور نسبت به هر دو اندیس دلخواه خود پادمتقارن است. در ضمن، بنابر اینکه $(i_1 i_2 \cdots i_N)$ جایگشت زوج یا فردی از $(1\ 2 \cdots N)$ باشد، داریم $\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N} = +1$ یا -1. از پادمتقارن بودن کامل این تانسور نتیجه می‌شود که اگر هر دو اندیس دلخواهی با یکدیگر برابر باشند، مؤلفهٔ متناظر آن صفر می‌شود. این تانسور تنها $N!$ مؤلفهٔ غیرصفر دارد. این تانسور را تانسور تماماً پادمتقارن رتبهٔ N می‌نامند.

به‌ویژه، اگر مختصات دکارتی x، y، z را در فضای سه‌بعدی انتخاب کنیم، تنها مؤلفه‌های غیرصفر تانسور تماماً پادمتقارن رتبهٔ سه می‌شوند

$$\varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{yzx} = \varepsilon_{zxy} = 1, \varepsilon_{yxz} = \varepsilon_{xzy} = \varepsilon_{zyx} = -1 \tag{۳۵}$$

در حالی‌که همهٔ مؤلفه‌های دیگر آن، مانند ε_{xxz}، ε_{xxx} و غیره صفرند. به‌عبارت دیگر، اگر $(i\ \ j\ \ k)$ یک جایگشت زوج $(x\ y\ z)$ باشد، ε_{ijk} برابر $+1$ می‌شود و اگر جایگشت فردی از $(x\ \ y\ \ z)$ باشد، برابر -1 می‌شود و در حالتهای دیگر صفر است.

تانسور تماماً پادمتقارن رتبهٔ سه‌ای را که در بالا تعریف کردیم، به‌راحتی می‌توان برای خلاصه کردن بسیاری از معادلات مشهور ریاضی به‌کار برد. در زیر به دو نمونهٔ آن می‌پردازیم.

مثال ۵. (الف) ضرب برداری دو بردار را به‌دست آورید و (ب) با استفاده از تانسور تماماً پادمتقارن

رتبهٔ سه، روابط جابه‌جایی میان مؤلفه‌های تکانهٔ زاویه‌ای را در مکانیک کوانتومی بیان کنید.

حل:

(الف) ضرب برداری دو بردار: فرض کنید $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ و $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ دو بردار سه‌بعدی باشند. حاصلضرب برداری آنها برداری با مؤلفه‌های زیر است

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_x &= u_y v_z - u_z v_y\\ (\mathbf{u}\times\mathbf{v})_y &= u_z v_x - u_x v_z\\ (\mathbf{u}\times\mathbf{v})_z &= u_x v_y - u_y v_x\end{aligned} \qquad (۳۶)$$

معادلات بالا را می‌توان به‌صورت معادله‌ای واحد نوشت[1]

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k \qquad (۳۷)$$

که در اینجا i نمایندهٔ هر یک از سه اندیس x، y، z است و مجموع‌یابی روی j و k، روی سه اندیس x، y، z است.

(ب) روابط جابه‌جایی میان مؤلفه‌های تکانهٔ زاویه‌ای: برخلاف مکانیک کلاسیک، تکانهٔ زاویه‌ای در مکانیک کوانتومی عملگری است که مؤلفه‌هایش با یکدیگر جابه‌جا نمی‌شوند. در واقع، اگر $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$ عملگر تکانهٔ زاویه‌ای مکانیک‌کوانتومی باشد، مؤلفه‌هایش در روابط جابه‌جایی زیر صدق می‌کنند[2]

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, [L_y, L_z] = i\hbar L_x, [L_z, L_x] = i\hbar L_y \qquad (۳۸)$$

که $\hbar = h/۲\pi$ و h ثابت پلانک است. این معادلات را می‌توان در تک معادلهٔ زیر خلاصه کرد

$$(L_i, L_j) = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k \qquad (۳۹)$$

که این بار هم i، j، k نمایندهٔ هر یک از x، y، z است.

---

۱. به‌نظر می‌رسد که اندیسهای معادلهٔ (۳۷) و به دنبال آن معادلهٔ (۳۹) در مکان درستی قرار نگرفته‌اند، چرا که همهٔ اندیسها را هموردا نشان داده‌ایم. با اینهمه، بعداً در مثال ۷.۱۸ و تمرین ۷.۱۸ نشان می‌دهیم که چنانچه دستگاه مختصات دکارتی را به‌کار ببریم، تمایز میان اندیسهای هموردا و پادوردا از بین می‌رود.

۲. مثلاً، رک:

Merzbacher, E., *Quantum Mechanics* (Wiley, New York, 1961), Eqs. (9.5).

مثال ۶. (الف) نشان دهید که دترمینان ماتریس مربعی $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ از مرتبهٔ N را می‌توان، با استفاده از تانسور تماماً پادمتقارن رتبهٔ N به‌صورت زیر بیان کرد

$$\det \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk\cdots p} a_{۱i} a_{۲j} a_{۳k} \cdots a_{Np} \tag{۴۰}$$

که $(i\ j\ k \cdots p)$ مجموعه‌ای از N اندیس است. (ب) سپس نشان دهید که

$$\varepsilon_{ijk\cdots p} a_{ri} a_{sj} a_{tk} \cdots a_{zp} = (\det \mathbf{A}) \varepsilon_{rst\cdots z} \tag{۴۱}$$

که $(r\ s\ t \cdots z)$ مجموعهٔ دیگری از N اندیس است.

حل: (الف) برای سادگی، بار دیگر معادلهٔ (۲.۴) را برای دترمینان ماتریس مربعی، با استفاده از مجموعهٔ متفاوتی از اندیسها می‌نویسیم

$$\det \mathbf{A} = \sum_{P(ijk\cdots p)} k a_{۱i} a_{۲j} a_{۳k} \cdots a_{Np} \tag{۴۲}$$

توجه کنید که در توضیحی که به دنبال معادلهٔ (۲.۴) آوردیم، یادآوری کردیم که هر اندیس $i, j, k, \cdots, p$ مقدارهایی از ۱ تا N می‌گیرد، به‌نحوی که هیچ دو اندیسی مقدار یکسانی ندارند. به‌علاوه، مجموع‌یابی در معادلهٔ (۴۲) روی $N!$ جایگشت این اندیسها انجام می‌شود و k برابر ۱+ یا ۱− است، برحسب اینکه $(i\ j\ k \cdots p)$ جایگشت زوج یا فردی از $(۱\ ۲\ ۳ \cdots N)$ باشد.

تانسور تماماً پادمتقارن رتبهٔ N دقیقاً همهٔ این نقشها را ایفا می‌کند. بنابراین، می‌توانیم $\varepsilon_{ijk\cdots p}$ را به‌جای k قرار دهیم و مجموع نامحدودی روی هر اندیس از ۱ تا N داشته باشیم که به ما امکان می‌دهد معادلهٔ (۴۲) را (با قرار داد مجموع‌یابی) به‌صورت معادلهٔ (۴۰) بنویسیم.

(ب) اگر مقدارهای $(۱\ ۲\ ۳ \cdots N) = (r\ s\ t \cdots z)$ را در معادلهٔ (۴۱) قرار دهیم، به معادلهٔ (۴۰) می‌رسیم. اگر جایگشت زوجی از سطرها یا ستونهای یک دترمینان را درنظر بگیریم، مقدار آن تغییر نمی‌کند، اما، در حالت جایگشت فرد آن مضرب ۱− می‌گیرد. چنین چیزی را دقیقاً سمت راست معادلهٔ (۴۱) بیان می‌کند، که سمت چپ آن، برحسب اینکه $(r\ s\ t \cdots z)$ جایگشت زوج یا فردی از $(۱\ ۲\ ۳ \cdots N)$ باشد، برابر با $\det\mathbf{A}$ یا $-\det\mathbf{A}$ می‌شود و این معادلهٔ (۴۱) را ثابت می‌کند.

روابط جالبی میان تانسور تماماً پادمتقارن و دلتای کرونکر وجود دارد. فرض کنید $(i\ j\ k \cdots p)$

و $(r\ s\ t \cdots z)$ دو مجموعه از N اندیس باشند که هر یک از آنها مقدارهایی از ۱ تا N می‌گیرد. فرض کنید یک دترمینان مرتبهٔ N را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$\Delta(ijk\cdots p|rst\cdots z) = \begin{vmatrix} \delta_i^r & \delta_i^s & \delta_i^t & \cdots & \delta_i^z \\ \delta_j^r & \delta_j^s & \delta_j^t & \cdots & \delta_j^z \\ \vdots & & & & \\ \delta_p^r & \delta_p^s & \delta_p^t & \cdots & \delta_p^z \end{vmatrix} \tag{۴۳}$$

عبارت بالا دترمینانی از نمادهای دلتای کرونکر است که سطرهای آن با اندیسهای $i, j, k, \cdots, p$ و ستونهایش با $r, s, t, \cdots, z$ نشاندار شده‌اند. بنابراین، در یک فضای Nبعدی، رابطهٔ زیر معتبر است

$$\varepsilon_{ijk\cdots p}\varepsilon^{rst\cdots z} = \Delta(ijk\cdots p|rst\cdots z) \tag{۴۴}$$

که با دلایل زیر ثابت می‌شود.

ابتدا توجه می‌کنیم که اگر دو اندیس دلخواه مجموعهٔ $(i, j, k, \cdots, p)$ برابر باشند، سطرهای متناظرشان در دترمینان یکسان می‌شوند، بنابراین، دترمینان صفر می‌شود. چون همهٔ مؤلفه‌های تانسور تماماً پادمتقارن که دو یا چند اندیس برابر دارد صفر می‌شود، در نتیجه سمت چپ معادلهٔ (۴۴) نیز در این حالت صفر می‌شود. استدلال مشابهی برای اندیسهای $r, s, t, \cdots, z$ معتبر است که ستونهای این دترمینان را نشاندار می‌کنند.

بنابراین، همهٔ اندیسهای مجموعهٔ $(i, j, k, \cdots, p)$ باید متمایز باشند. مقدار یکی از آنها ۱+ است و دیگری ۲ و به همین ترتیب تا N. برای اندیسهای $(r, s, t, \cdots, z)$ نیز چنین امری درست است. تنها دراین‌صورت هر دو سمت معادلهٔ (۴۴) غیرصفر می‌شود.

فرض کنید که شرط بالا در بحث زیر صادق باشد.

سپس، فرض کنید همهٔ اندیسهای $i, j, k, \cdots, p$ به‌ترتیب با $r, s, t, \cdots, z$ برابر باشند. حال Δی معادلهٔ (۴۳) به دترمینان ماتریس واحد مرتبهٔ N تبدیل می‌شود، یعنی $\Delta = ۱$ می‌شود. مؤلفه‌های هر دو تانسور سمت چپ معادلهٔ (۴۴) با ۱+ یا ۱− برابر می‌شود، برحسب اینکه $(i, j, k, \cdots, p)$ یا $(r, s, t, \cdots, z)$ جایگشت زوج یا فردی از $(۱, ۲, ۳, \cdots, N)$ باشد. در هر حالت، حاصلضرب ۱+ می‌شود و معادلهٔ (۴۴) معتبر است.

امکان دیگر این است که $(i,j,k,\cdots,p)$ جایگشتی از $(r,s,t,\cdots,z)$ باشد. در این حالت همان‌طور که در بالا بحث شد، سمت چپ معادلهٔ (۴۴) با ۱+ یا ۱− برابر می‌شود. در دترمینان Δ، ۱+ تنها یکجا در هر سطر و هر ستون ظاهر می‌شود. توجه کنید که اگر r و s جابه‌جا شوند، دو ستون اول Δ با یکدیگر عوض می‌شوند. بنابراین، مضرب ۱− می‌گیرد. این دقیقاً آن چیزی است که در سمت چپ معادلهٔ (۴۴) اتفاق می‌افتد.

این مطلب صحت معادلهٔ (۴۴) را ثابت می‌کند. این نتیجه را چنین خلاصه می‌کنیم: اگر دو اندیس دلخواهی از میان $(i,j,k,\cdots,p)$ یا $(r,s,t,\cdots,z)$ مقدار یکسانی داشته باشند، هر دو سمت معادلهٔ (۴۴) صفر می‌شوند. اگر $(r,s,t,\cdots,z)$ جایگشت زوجی (فردی) از $(i,j,k,\cdots,p)$ باشد، هر دو عبارت برابر ۱ + (۱−) می‌شوند.

حالت خاصی از معادلهٔ (۴۴) را برای یک فضای سه‌بعدی $(N=۳)$ درنظر بگیرید. در این حالت معادله چنین می‌شود

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{rst} = \begin{vmatrix} \delta_i^r & \delta_i^s & \delta_i^t \\ \delta_j^r & \delta_j^s & \delta_j^t \\ \delta_k^r & \delta_k^s & \delta_k^t \end{vmatrix} = \Delta(ijk|rst) \qquad (۴۵)$$

با فرض $r=i$ در معادلهٔ (۴۵)، ضرب داخلی بالا را به‌دست آورید و $\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ist}$ را درنظر بگیرید. جزء (۱, ۱) در Δ می‌شود $\delta_i^i = N = ۳$. داریم

$$\Delta(ijk|ist) = \begin{vmatrix} ۳ & \delta_i^s & \delta_i^t \\ \delta_j^i & \delta_j^s & \delta_j^t \\ \delta_k^i & \delta_k^s & \delta_k^t \end{vmatrix}$$

$$= ۳(\delta_j^s\delta_k^t - \delta_j^t\delta_k^s) - \delta_i^s(\delta_j^i\delta_k^t - \delta_k^i\delta_j^t) + \delta_i^t(\delta_j^i\delta_k^s - \delta_k^i\delta_j^s)$$

$$= ۳(\delta_j^s\delta_k^t - \delta_j^t\delta_k^s) - (\delta_j^s\delta_k^t - \delta_k^s\delta_j^t) + (\delta_j^t\delta_k^s - \delta_k^t\delta_j^s)$$

$$= \delta_j^s\delta_k^t - \delta_j^t\delta_k^s \qquad (۴۶)$$

بنابراین

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ist} = \begin{vmatrix} \delta_j^s & \delta_j^t \\ \delta_k^s & \delta_k^t \end{vmatrix} \tag{۴۷}$$

به‌علاوه در معادلهٔ (۴۷)، با مساوی قرار دادن $s = j$، به‌دست می‌آوریم

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijt} = \begin{vmatrix} ۳ & \delta_j^t \\ \delta_k^j & \delta_k^t \end{vmatrix}$$

$$= ۳\delta_k^t - \delta_k^j\delta_j^t = ۲\delta_k^t \tag{۴۸}$$

سرانجام

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk} = ۲\delta_k^k = ۲ \times ۳ = ۳! \tag{۴۹}$$

به‌طور کلی، در یک فضای Nبعدی، اگر حاصلضربهای داخلی متوالی را در معادلات (۴۳) و (۴۴) درنظر بگیریم، خواهیم داشت

$$\varepsilon_{ijk\cdots p}\varepsilon^{ist\cdots z} = \Delta(ijk\cdots p|ist\cdots z)$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_j^s & \delta_j^t & \cdots & \delta_j^z \\ \vdots & & & \\ \delta_p^s & \delta_p^t & \cdots & \delta_p^z \end{vmatrix} \tag{۵۰}$$

$$\varepsilon_{ijk\cdots p}\varepsilon^{ijt\cdots z} = ۲\begin{vmatrix} \delta_k^t & \cdots & \delta_k^z \\ \vdots & & \\ \delta_p^t & \cdots & \delta_p^z \end{vmatrix} \tag{۵۱}$$

$$\varepsilon_{ijkl\cdots p}\varepsilon^{ijku\cdots z} = (۳!)\begin{vmatrix} \delta_l^u & \cdots & \delta_l^z \\ & & \\ \delta_p^u & \cdots & \delta_p^z \end{vmatrix} \tag{۵۲}$$

و در نهایت

$$\varepsilon_{ijk\cdots p}\varepsilon^{ijk\cdots p} = \Delta(ijk\cdots p|ijk\cdots p) = N! \tag{۵۳}$$

چند قاعدهٔ ساده برای بررسی صحت اندیسها در معادلهٔ تانسوری وجود دارد. این قواعد به‌شرح زیرند:

۱ـ اندیس آزاد باید در تمام جملات سراسر معادله تطبیق کند. این به آن معنی است که اگر اندیس آزادی به‌صورت اندیس پادوردا (هموردا) در یک جمله ظاهر شود، باید در همهٔ جمله‌های آن معادله به‌همین صورت بیاید.

۲ـ اندیس ظاهری باید در هر جملهٔ معادله به‌طور جداگانه تطبیق کند. اندیس ظاهری ممکن است تنها در بعضی از جملات معادله‌ای ظاهر شود. چنانچه این اندیس در جمله‌ای بیاید. باید دوبار ظاهر شود، یکبار در مکان پادوردا و یکبار هموردا.

۳ـ هیچ اندیسی نباید بیش از دو بار در جمله‌ای ظاهر شود.

۴ـ اگر یک دیفرانسیل مختصه‌ای مانند ∂x^i در جمله‌ای ظاهر شود، چنانچه در صورت کسر واقع شود i را اندیس پادوردا و اگر ∂x^i در مخرج کسر قرار گیرد، اندیس هموردا درنظر می‌گیریم. بنابراین، در عبارتی مثل $\partial x^i/\partial \overline{x}^\alpha$، i اندیس پادوردا است در حالی‌که α اندیسی همورداست.

تمرین

۱.۱۶ اگر A^i_j تانسور آمیختهٔ رتبهٔ دو باشد، نشان دهید که A^i_i نیز تانسور است.

۲.۱۶* در فضای Nبعدی $A^{ip}_j B^k_{ir} C^{rt}_{sk}$ نمایانگر چند عبارت متفاوت است؟ چنانچه هر عبارتی را به‌صورت صریح بنویسیم، چند جمله را در برمی‌گیرد؟

۳.۱۶ اگر A^{ij}_k و B^{pq}_r تانسور باشند، نشان دهید که $A^{ij}_i B^{pi}_i$ تانسور نیست.

۴.۱۶ اگر A^{ij}_{kl} تانسور باشد، نشان دهید که A^{ii}_{kl} و A^{ij}_{kk} تانسور نیستند.

۵.۱۶ اگر A^{ijk}_{lm} تانسور باشد، نشان دهید که A^{ijk}_{jk}، A^{ijk}_{kj}، A^{ljm}_{lm}، و A^{lmk}_{lm} بردارهای پادوردا هستند.

۶.۱۶ * نشان دهید که هر تانسور هموردا یا پادوردای رتبهٔ دو را می‌توان به‌صورت مجموع یک تانسور متقارن و یک تانسور پادمتقارن از همان رتبه و نوع نوشت.

۷.۱۶ اگر A^{ij} تانسوری پادمتقارن و B_i بردار باشد، نشان دهید که $A^{ij}B_iB_j = 0$. (این را با مثال ۴.۳ مقایسه کنید.)

۸.۱۶ اگر $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، و $\mathbf{c}$ بردارهای سه‌بعدی باشند، نشان دهید که ضرب نرده‌ای سه‌تایی آنها را می‌توان به‌صورت $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k$ نوشت که a_i، b_i، c_i به‌ترتیب مؤلفه‌های دکارتی $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{c}$ هستند و از قرارداد مجموع‌یابی استفاده می‌شود.

۹.۱۶ اگر a_i برداری دلخواه باشد، نشان دهید که $\varepsilon_{ijk}a_ja_k = 0$.

۱۷

قانون خارج‌قسمت

اغلب باید دریابیم که توابع مجموعه‌ای مفروض مؤلفه‌های تانسورند یا خیر. البته در روش مستقیم، باید ببینیم که آیا توابع مانند مؤلفه‌های تانسور در تبدیلهای مختصات تبدیل می‌شوند. ولی در عمل این روش احتمالاً طاقت‌فرسا و پردردسر است. قانون خارج‌قسمت راه ساده‌تری را پیش روی ما قرار می‌دهد.

قانون خارج‌قسمت بیان می‌کند که اگر حاصلضرب داخلی موجودی در یک تانسور دلخواه[۱] تانسور باشد، آن موجود تانسور است.

۱.۱۷ مثالهایی از قانون خارج‌قسمت

کافی است که قانون خارج‌قسمت را برای یک حالت خاص ثابت کنیم. فرض کنید می‌خواهیم بدانیم که N^3 تابع $A(i,j,k)$ از مجموعه‌ای مفروض مؤلفه‌های تانسورند یا خیر. فرض کنید می‌دانیم که حاصلضرب داخلی $A(i,j,k)$ در تانسور دلخواه B^{pq} تانسور پادوردایی از رتبهٔ یک

---

۱. تانسور دلخواه تانسوری است که برای اجزای آن هیچ‌گونه شرطی وجود نداشته باشد و از یکدیگر مستقل باشند.

است، یعنی

$$A(i,j,k)B^{ik} = C^i \tag{۱}$$

تانسور است، به‌طوری که مجموع‌یابی روی j و k در سمت چپ صورت می‌گیرد. فرض کنید $\overline{A}(\alpha,\beta,\gamma)$، N^3 تابع در دستگاه مختصات خط‌دار باشند، که در رابطه‌ای مشابه معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند، یعنی

$$\overline{A}(\alpha,\beta,\gamma)\overline{B}^{\beta\gamma} = \overline{C}^{\alpha} \tag{۲}$$

$\overline{B}^{\beta\gamma}$ و $\overline{C}^{\alpha}$ را برحسب مؤلفه‌های غیرخط‌دار به‌دست می‌آوریم، معادلهٔ بالا می‌شود

$$\begin{aligned}\overline{A}(\alpha,\beta,\gamma)\frac{\partial\overline{x}^{\beta}}{\partial x^{j}}\,\frac{\partial\overline{x}^{\gamma}}{\partial x^{k}}B^{jk} &= \frac{\partial\overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{i}}C^{i}\\ &= \frac{\partial\overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{i}}A(i,j,k)B^{jk}\end{aligned} \tag{۳}$$

که از معادلهٔ (۱) در سمت راست به‌جای c^i استفاده کرده‌ایم. به‌علاوه، معادلهٔ (۳) را می‌توان چنین نوشت

$$\left[\overline{A}(\alpha,\beta,\gamma)\frac{\partial\overline{x}^{\beta}}{\partial x^{j}}\,\frac{\partial\overline{x}^{\gamma}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial\overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{i}}A(i,j,k)\right]B^{jk} = 0 \tag{۴}$$

چون این معادله برای هر تانسور دلخواه B^{jk} درست است، در نتیجه عبارت داخل کروشه باید صفر شود، بنابراین

$$\overline{A}(\alpha,\beta,\gamma)\frac{\partial\overline{x}^{\beta}}{\partial x^{j}}\,\frac{\partial\overline{x}^{\gamma}}{\partial x^{k}} = \frac{\partial\overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{i}}A(i,j,k) \tag{۵}$$

ضرب داخلی هر دو طرف معادلهٔ بالا را در $(\partial x^j/\partial\overline{x}^{\rho})(\partial x^k/\partial\overline{x}^{\sigma})$ به‌دست می‌آوریم، می‌شود

$$\overline{A}(\alpha,\rho,\sigma) = \frac{\partial\overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{i}}\,\frac{\partial x^{j}}{\partial\overline{x}^{\rho}}\,\frac{\partial x^{k}}{\partial\overline{x}^{\sigma}}A(i,j,k) \tag{۶}$$

که نشان می‌دهد $A(i,j,k)$ تانسور پادوردای رتبهٔ یک و هموردای رتبهٔ دو است، که می‌توان آن‌را به‌صورت A^i_{jk} نوشت، بنابراین معادلهٔ (۶) را می‌توان با نماد تانسوری چنین نوشت

$$\overline{A}^{\alpha}_{\rho\sigma} = \frac{\partial\overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{i}}\,\frac{\partial x^{j}}{\partial\overline{x}^{\rho}}\,\frac{\partial x^{k}}{\partial\overline{x}^{\sigma}}A^{i}_{jk} \tag{۷}$$

در استفاده از قانون خارج‌قسمت باید تانسوری که ضرب داخلی را در آن درنظر می‌گیریم تانسوری دلخواه باشد. برای دریافتن این مطلب، مثال زیر را درنظر بگیرید که کمی با اثبات قانون خارج‌قسمت که در بالا توضیح دادیم، تفاوت دارد.

مثال ۱. فرض کنید $A(i,j,k)$ مجموعه‌ای از N^3 تابع باشد که حاصلضرب داخلی آن در تانسور متقارن B^{jk} تانسور C^i را نتیجه دهد. دربارهٔ $A(i,j,k)$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل: مانند قبل، این بار هم می‌توانیم به معادلهٔ (۴) برسیم. با وجود این، دیگر نمی‌توانیم از معادلهٔ (۴) معادلهٔ (۵) را به‌دست آوریم، زیرا B^{jk} تانسوری دلخواه نیست. برای فهمیدن این مطلب، معادلهٔ (۴) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$D(\alpha,j,k)B^{jk}=0 \tag{۸}$$

که $D(\alpha,j,k)$ بیانگر عبارت داخل کروشهٔ معادلهٔ (۴) است. چون مجموع‌یابی روی j و k در معادلهٔ (۸) ضمنی است، برای هر جمله از نوع $D(\alpha,j,k)B^{jk}$ (مجموع‌یابی روی j و k صورت نمی‌گیرد)، جمله‌ای به‌صورت $D(\alpha,k,j)B^{kj}=D(\alpha,k,j)B^{jk}$ وجود دارد (مجموع‌یابی روی j و k صورت نمی‌گیرد). بنابراین، نتیجه‌ای که می‌توان گرفت عبارت است از $D(\alpha,j,k)+D(\alpha,k,j)=0$. که در حالت فعلی، می‌انجامد به

$$\begin{aligned}\overline{A}(\alpha,\beta,\gamma)\frac{\partial\overline{x}^\beta}{\partial x^j}\ \frac{\partial\overline{x}^\gamma}{\partial x^k}+\overline{A}(\alpha,\beta,\gamma)\frac{\partial\overline{x}^\beta}{\partial x^k}\ \frac{\partial\overline{x}^\gamma}{\partial x^j}\\ =\frac{\partial\overline{x}^\alpha}{\partial x^i}A(i,j,k)+\frac{\partial\overline{x}^\alpha}{\partial x^i}A(i,k,j)\end{aligned} \tag{۹}$$

یا، با تعویض β و γ در دومین جملهٔ سمت چپ معادلهٔ بالا، داریم

$$[\overline{A}(\alpha,\beta,\gamma)+\overline{A}(\alpha,\gamma,\beta)]\frac{\partial\overline{x}^\beta}{\partial x^j}\ \frac{\partial\overline{x}^\gamma}{\partial x^k}=\frac{\partial\overline{x}^\alpha}{\partial x^i}[A(i,j,k)+A(i,k,j)] \tag{۱۰}$$

مثل قبل، با درنظرگرفتن حاصلضرب داخلی معادلهٔ بالا در $(\partial x^j/\partial\overline{x}^\rho)(\partial x^k/\partial\overline{x}^\sigma)$ به این نتیجه می‌رسیم که $A^i_{jk}\equiv A(i,j,k)+A(i,k,j)$، ولی لزوماً $A(i,j,k)$ تانسور نیست. علاوه‌براین، بدیهی است که در این حالت تانسور A^i_{jk} نسبت به اندیسهای هموردایش متقارن است.

۲.۱۷ تانسورهای مزدوج متقارن رتبهٔ دو

فرض کنید A_{ij} تانسور متقارن هموردای رتبهٔ دو باشد، به‌نحوی که چنانچه A_{ij} را به‌صورت ماتریس بیان کنیم $\det(A_{ij}) \neq 0$ شود. فرض کنید B^{ij} نشان‌دهندهٔ هم‌عامل جزء A_{ij} در ماتریس (A_{ij}) باشد که بر دترمینان (A_{ij}) تقسیم شده است، یعنی

$$B^{ij} = (\text{هم‌عامل } A_{ij})/\det(A_{ij}) \qquad (۱۱)$$

اکنون نشان می‌دهیم که B^{ij}ها مؤلفه‌های تانسور پادوردای متقارن هستند.

با نمادگذاری تانسوری فعلی، نتیجهٔ معادلهٔ (۵.۴) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$A_{ij}B^{ik} = \delta_j^k \qquad (۱۲)$$

قانون خارج‌قسمت را نمی‌توانیم مستقیماً برای معادلهٔ بالا به‌کار ببریم، زیرا A_{ij} تانسور متقارن است نه دلخواه. پس فرض کنید C^i یک بردار پادوردای دلخواه باشد. معادلهٔ زیر را

$$D_i = A_{ij}C^j \qquad (۱۳)$$

همچون یک دستگاه N معادلهٔ خطی N مجهولی (N مؤلفهٔ C^j) فرض کنید. این فرض نشان می‌دهد که معادلهٔ (۱۳) برای C^j جوابهای یکتایی برحسب D_i دارد (زیرا $\det(A_{ij}) \neq 0$). در نتیجه، D_i یک بردار هموردای دلخواه است. با درنظرگرفتن حاصلضرب داخلی D_i در B^{ik}، داریم

$$D_iB^{ik} = A_{ij}B^{ik}C^j = \delta_j^kC^j = C^k \qquad (۱۴)$$

اکنون می‌توانیم خارج‌قسمت را برای معادلهٔ فوق به‌کار ببریم. ضرب داخلی B^{ik} در بردار دلخواه D_i بردار C^k را نتیجه می‌دهد. بنابراین، B^{ik} تانسور است. علاوه‌براین، چون در ماتریس متقارن A_{ij}، هم‌عامل A_{ij}، همان هم‌عامل A_{ji} است، تعریف معادلهٔ (۱۱) نشان می‌دهد که B^{ij} نیز متقارن است.

اگر این روند را برای B^{ij} هم دنبال کنیم، یعنی $E_{ij} = (\text{هم‌عامل } B^{ij})/\det(B^{ij})$ تعریف کنیم، می‌توانیم نشان دهیم (تمرین ۲) که E_{ij} همان A_{ij} است.

دو تانسور A_{ij} و B^{ij} که با معادلهٔ (۱۲) به یکدیگر مربوط می‌شوند، به تانسورهای مزدوج معروف‌اند. روشن است که چنانچه A_{ij} را ماتریس تلقی کنیم، اجزای B^{ij}ی تانسور مزدوج اجزای ماتریس وارون A_{ij} می‌شوند. همچنین این مطلب روشن می‌کند که تانسور متقارن رتبهٔ دو یک تانسور مزدوج دارد، اگر و فقط اگر دترمینان آن غیرصفر باشد.

تمرین

۱.۱۷ فاصلهٔ بین دو نقطه با مختصات x^i و $x^i + dx^i$ در فضای Nبعدی را می‌توان به‌صورت $ds^۲ = g_{ij}dx^i dx^j$ بیان کرد. به‌خاطر آورید که $ds^۲$ ناورداست و dx^iها مؤلفه‌های بردار تغییر مکان پادوردا هستند. نشان دهید که $g_{ij} + g_{ji}$ تانسور متقارن هموردای رتبهٔ ۲ است.

۲.۱۷ * همان‌طور که در متن اشاره کردیم، فرض کنید A_{ij} تانسور هموردای متقارن باشد و فرض کنید $B^{ij} = (A_{ij}$ هم‌عامل $)/\det(A_{ij})$. به‌علاوه $E_{ij} = (B^{ij}$ هم‌عامل $)/\det(B^{ij})$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که $E_{ij} = A_{ij}$ است.

۳.۱۷ اگر B^k تانسوری دلخواه باشد و $A_{ij}B^k$ تانسور باشد، نشان دهید که A_{ij} تانسور است.

۴.۱۷ با فرض اینکه هر موجودی که در معادلات زیر با حرف بزرگ نشان داده‌ایم تانسور باشد، این معادلات را به‌صورت تانسوری درست بازنویسی کنید.

(الف)* $A(i,j,k)B^j_k + C(r,i)D_r = E(r,s,t)F^{ri}_{st}$

(ب) $A(i,j,k)B^l_{ij} - C(r,s,k,t)D_{rs}E^{lt} = F(l,i,j)G^j_{ki}$

(ج) $A(i,l,k,p)B^p_{ij} + C(j,k,l,m)D^{im}_l + E(i,j)F_k = 0$

۱۸

تانسور اصلی

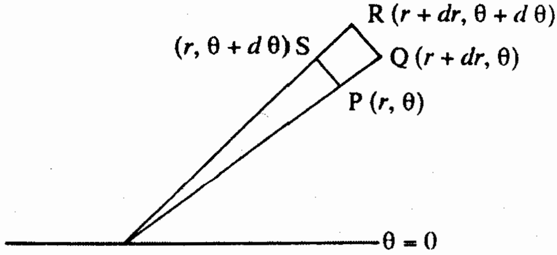
اکنون در این فصل مفهوم متریک (یا فاصله) را در فضای Nبعدی معرفی می‌کنیم. فرض کنید x^i و $x^i + dx^i$ مختصات دو نقطهٔ مجاور در فضایی Nبعدی نسبت به یک دستگاه مختصات باشند. فرض‌کنید ds فاصلهٔ بین این دو نقطه را نشان دهد. اگر مربع فاصله، $ds^۲$ را بتوان به‌صورت درجهٔ دوم[۱] برحسب کمیت بینهایت کوچک dx^i بیان کرد، یعنی

$$ds^۲ = g_{ij} dx^i dx^j \qquad (۱)$$

که ضرایب g_{ij} ممکن است توابع x^i باشند، تنها با این محدودیت که دترمینان ماتریس ضرایب ناتکین باشد [یعنی، $g \equiv \det(g_{ij}) \neq ۰$]، دراین‌صورت، به این فضا فضای ریمانی می‌گویند. این مطلب را با چند مثال زیر توضیح می‌دهیم. در حالت خاص، اگر همهٔ ضرایب g_{ij} مستقل از x^i باشند، این فضا، فضای اقلیدسی می‌شود.

---

۱. رک: فصل ۱۱، برای تعریف صورت درجهٔ دوم.



شکل۱.۱۸ فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $\mathrm{P} = (r, \theta)$ و $\mathrm{R} = (r + dr, \theta + d\theta)$ با $\mathrm{PR}^۲ = \mathrm{PQ}^۲ + \mathrm{QR}^۲$ داده می‌شود. ولی $\mathrm{PQ} = dr$ است، که با چشمپوشی ازکمیتهای مرتبهٔ دوم، داریم $\mathrm{QR} = (r + dr)d\theta \simeq r d\theta$.

۱.۱۸ تانسور متریک

مثال ۱. متریک را برحسب مختصات دکارتی برای صفحه‌ای دوبعدی به‌دست آورید.

حل: در صفحهٔ دوبعدی با مختصات دکارتی x، y فاصلهٔ بین دو نقطهٔ (x, y) و $(x + dx, y + dy)$ را می‌توان چنین نوشت

$$ds^۲ = dx^۲ + dy^۲ \tag{۲}$$

این معادله به شکل معادلهٔ (۱) است با

$$g_{۱۱} = g_{۲۲} = ۱, g_{۱۲} = g_{۲۱} = ۰ \tag{۳}$$

بنابراین

$$g \equiv \det(g_{ij}) = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۱ \tag{۴}$$

مثال ۲. متریک را برای صفحه‌ای دوبعدی، برحسب مختصات قطبی به‌دست آورید.

حل: اگر مختصات قطبی r، θ را در همان صفحهٔ دوبعدی انتخاب کنیم، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ (r, θ) و $(r + dr, \theta + d\theta)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت (شکل ۱.۱۸)

$$ds^۲ = dr^۲ + r^۲ d\theta^۲ \tag{۵}$$

این بار نیز معادلهٔ بالا به شکل معادلهٔ (۱) است با

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0 \tag{۶}$$

بنابراین

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix} = r^2 \tag{۷}$$

مثال ۳. متریک را برای (الف) فضای سه‌بعدی اقلیدسی، (ب) سطح کره‌ای با شعاع ثابت a، برحسب مختصات قطبی کروی به‌دست آورید.

حل: (الف) در فضای سه‌بعدی با انتخاب مختصات قطبی کروی r، θ، ϕ، فاصلهٔ ds بین دو نقطهٔ (r, θ, ϕ) و $(r+dr, \theta+d\theta, \phi+d\phi)$ را می‌توان چنین نوشت

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{۸}$$

با مقایسهٔ این معادله با معادلهٔ (۱)، در این حالت، داریم

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2\theta, \quad g_{ij} = 0 \quad i \neq j \tag{۹}$$

دترمینان ماتریس ضریب می‌شود

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} = r^4 \sin^2\theta \tag{۱۰}$$

(ب) در حالت خاص، اگر r ثابت باشد، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ (θ, ϕ) و $(\theta+d\theta, \phi+d\phi)$ را روی سطح کره‌ای با شعاع ثابت $r = a$ چنین به‌دست می‌آوریم

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{۱۱}$$

با

$$g_{11} = a^2, g_{22} = a^2 \sin^2\theta, g_{12} = g_{21} = 0 \tag{۱۲}$$

و

$$g=\begin{vmatrix} a^۲ & ۰ \\ ۰ & a^۲\sin^۲\theta \end{vmatrix} = a^۴\sin^۲\theta \qquad (۱۳)$$

مثال ۴. دستگاه مختصات (u,v,w) را که با روابط زیر به مختصات دکارتی مربوط می‌شود، درنظر بگیرید

$$x=vw, \qquad y=uw, \qquad z=uv \qquad (۱۴)$$

متریک را برحسب u، v، w به‌دست آورید.

حل: جزء فاصله چنین یافت می‌شود

$$\begin{aligned} ds^۲ = dx^۲+dy^۲+dz^۲ =& (v^۲+w^۲)du^۲+(w^۲+u^۲)dv^۲+(u^۲+v^۲)dw^۲ \\ &+ ۲uv\;du\;dv + ۲vw\;dv\;dw + ۲uw\;du\;dw \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

که به‌شکل معادلهٔ (۱) است با

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} v^۲+w^۲ & uv & uw \\ uv & u^۲+w^۲ & vw \\ uw & vw & u^۲+v^۲ \end{bmatrix} \qquad (\text{۱۶الف})$$

با

$$g = ۴u^۲v^۲w^۲ \qquad (\text{۱۶ب})$$

با توجه به تمرین ۱.۱۷ می‌بینیم که $g_{ij}+g_{ji}$ تانسور هموردای متقارن رتبهٔ دو است. اکنون، از صورت درجهٔ دوم معادلهٔ (۱) روشن است که بدون از دست دادن کلیت مسئله، می‌توانیم انتخاب کنیم

(۱۷)

یعنی، $[g_{ij}]$ را ماتریس متقارن برگزینیم، در نتیجه، g_{ij} تانسور هموردای متقارن رتبهٔ دو می‌شود. آن را تانسور اصلی یا تانسور متریک می‌نامند.

در فضای Nبعدی، دستگاه مختصاتی را که در آن، به‌ازای $i \neq j$، $g_{ij} = ۰$ باشد، دستگاه مختصات متعامد می‌نامند. به‌علاوه، دستگاهی را که در آن، به‌ازای $۱ \leq i \leq N$، داریم $g_{ii} = ۱$ (مجموع‌یابی روی i انجام نمی‌شود) و به‌ازای $i \neq j$، داریم $g_{ij} = ۰$ دستگاه مختصات دکارتی می‌نامند.

۲.۱۸ تانسور متریک پادوردا

در فصل قبلی تانسورهای متقارن مزدوج را تعریف کردیم و دیدیم که برای تانسور متقارن هموردای مفروض A_{ij}، با دترمینان غیرصفر، می‌توان تانسور پادوردا و همچنین متقارن B^{ij}یی یافت که ضرب داخلی این دو تانسور در معادلهٔ (۱۲.۱۷) صدق کند. این تانسور پادوردا را مزدوج g_{ij} تعریف می‌کنیم و آن‌را با g^{ij} نشان می‌دهیم، به‌طوری که بنابر تعریف معادلهٔ (۱۱.۱۷)، در این حالت داریم

$$g^{ij} = g^{ji} = (\text{هم‌عامل } g_{ij})/g \qquad (۱۸)$$

و معادلهٔ (۱۲.۱۷) به‌معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \qquad (۱۹)$$

بهتر است که g_{ij} و g^{ij} را دو تانسور متمایز درنظر نگیریم، بلکه به‌ترتیب مؤلفه‌های هموردا و پادوردای یک تانسور، یعنی تانسور متریک به‌شمار آوریم. توجه کنید که ماتریس $[g^{ij}]$ فقط وارون ماتریس $[g_{ij}]$ است.

مثال ۵. مؤلفه‌های پادوردای تانسور متریک را در فضای سه‌بعدی، برحسب مختصات قطبی کروی به‌دست آورید.

حل: از مثال ۳ و معادلهٔ (۱۸)، مؤلفه‌های یادشده را به‌سادگی چنین پیدا می‌کنیم

$$g^{۱۱} = ۱, g^{۲۲} = ۱/r^۲, g^{۳۳} = ۱/(r^۲ \sin^۲ \theta), g^{ij} = ۰ \quad i \neq j \qquad (۲۰)$$

۳.۱۸ تانسورهای وابسته

فرض کنید A^i بردار پادوردای دلخواهی باشد. حاصلضرب داخلی A^i در تانسور متریک هموردای g_{ij} برداری هموردا می‌شود. این ضرب داخلی را چنین نشان می‌دهیم

$$A^i g_{ij} = A_j \tag{۲۱}$$

و A^i و A_j به‌ترتیب مؤلفه‌های پادوردا و هموردای یک بردار تلقی می‌شوند. این مطلب با تعبیری که برای مؤلفه‌های پادوردا و هموردا در بخش ۶.۱۵ آوردیم، سازگار است. بار دیگر، ضرب داخلی دو طرف معادلهٔ بالا را در تانسور متریک پادوردای g^{jk} درنظر می‌گیریم، با استفاده از معادلهٔ (۱۹)، می‌یابیم

$$A_j g^{jk} = A^i g_{ij} g^{jk} = A^i \delta_i^k = A^k \tag{۲۲}$$

که نشان می‌دهد رابطهٔ بین A_j و A^i رابطهٔ معکوس است. تانسورهای A^i و A_i را تانسورهای وابسته می‌نامند.

۴.۱۸ بالا بردن و پایین آوردن اندیسها

شیوهٔ بالا روش تغییر اندیسهای هموردای یک تانسور را به اندیسهای پادوردا و برعکس ارائه می‌کند.

بنابراین، فرض کنید A^{ij} یک تانسور پادوردای رتبهٔ دو باشد. با درنظرگرفتن ضرب نرده‌ای A^{ij} در تانسور متریک g_{ij} به‌طور متوالی، می‌توانیم تانسورهای زیر را تعریف کنیم:

$$A^{ij} g_{jk} = A^i_{.k} \tag{۲۳الف}$$

$$A^{ij} g_{ik} = A_{k.}^{\ j} \tag{۲۳ب}$$

$$A^i_{.k} g_{il} = A_{l.}^{\ j} g_{jk} = A^{ij} g_{il} g_{jk} = A_{lk} \tag{۲۳ج}$$

که برای پرهیز از اشتباه، از یک نقطه در جای خالی زیر اندیس پادوردای تانسور آمیخته استفاده کرده‌ایم. بنابراین، چهار تانسور A^{ij}، $A^i_{.j}$، $A_{j.}^{\ i}$، و A_{ij} داریم که هر یک به دیگری وابسته است. A^{ij}ها مؤلفه‌های پادوردا، A_{ij} مؤلفه‌های هموردا و $A^i_{.j}$ و $A_{j.}^{\ i}$ دو نوع مؤلفهٔ آمیختهٔ یک تانسورند.

یکسان نبودن $A^{i}_{.j}$ و $A_{j.}^{\ i}$ را به‌سادگی نشان می‌دهیم. داریم

$$A^{i}_{.j} = A^{ik} g_{kj}, \qquad A_{j.}^{\ i} = A^{ki} g_{kj} \tag{۲۴}$$

که به‌سادگی نشان می‌دهد

$$A^{i}_{.j} \neq A_{j.}^{\ i} \tag{۲۵}$$

مگر آنکه $A^{ik} = A^{ki}$ باشد، یعنی، درصورتی که A^{ik} تانسوری متقارن باشد.

این فرایند را پایین آوردن اندیس می‌نامند. چنانچه ضرب داخلی تانسوری را (که حداقل یک اندیس پادوردا دارد) در g_{ij} درنظر بگیریم، یک اندیس پادوردای آن تانسور پایین می‌آید و در مکان هموردا قرار می‌گیرد.

در فرایند وارون که شامل ضرب داخلی تانسوری در تانسور متریک پادوردای g_{ij} است، اندیس هموردا به مکان پادوردا می‌رود، بنابراین به بالابردن اندیس معروف است.

شایان ذکر است که در معادلهٔ (۲۳الف) اندیس دوم تانسور A^{ij} پایین می‌آید و تانسور $A^{i}_{.k}$ را می‌دهد، در حالی‌که در معادلهٔ (۲۳ب) اندیس اول A^{ij} پایین می‌آید تا $A_{k.}^{\ j}$ را به‌دست دهد.

رابطهٔ وارون را می‌توان با ضرب داخلی در g^{ij}، از دو معادلهٔ (۲۴) به‌دست آورد. برای تمرین آن‌را ثابت کنید:

$$A^{i}_{.k} g^{kj} = A^{ij}, \qquad A_{k.}^{\ i} g^{kj} = A^{ji}, \qquad A_{ij} g^{ik} g^{jl} = A^{kl} \tag{۲۶}$$

در حالت خاص، اگر معادلهٔ (۱۹) را بالا بردن یک اندیس g_{ij} یا پایین آوردن یک اندیس g^{ij} تلقی کنیم و بر این اساس تانسور متریک آمیخته را تعریف کنیم، می‌شود

$$g_{i.}^{\ k} = g^{k}_{.i} = \delta^{k}_{.i} \tag{۲۷}$$

۵.۱۸ ترتیب اندیسها

به‌سادگی می‌بینیم که ترتیب اندیسهای پادوردای یک تانسور دلخواه مهم است، همین‌طور است، ترتیب اندیسهای هموردای آن. با وجود این، بحث بالا نشان می‌دهد که ترتیب اندیسهای هموردا و پادوردا نسبت به یکدیگر نیز اهمیت دارد. تاکنون، بدون درنظر گرفتن ترتیب اندیسها، تانسورهای

آمیختهٔ دلخواه را به‌صورت، مثلاً A^{ij}_{kl} نشان داده‌ایم. با اینهمه، تحلیلی ساده نشان می‌دهد که ترتیب چهار اندیس i، j، k، l اهمیت دارد، صرف‌نظر از اینکه اندیس بالا یا پایین باشند.

بنابراین، فرض کنید A^{ijkl} تانسور پادوردای رتبهٔ چهار باشد. فرض کنید اولین، دومین، سومین و چهارمین اندیس تانسور را به‌توالی پایین آوریم تا مؤلفه‌های آمیختهٔ آن به‌صورت زیر به‌دست آیند

$$A_{i...}^{\ jkl} = A^{pjkl} g_{pi} \tag{۲۸الف}$$

$$A^{i\ kl}_{.j..} = A^{ipkl} g_{pj} \tag{۲۸ب}$$

$$A^{ij\ l}_{..k.} = A^{ijpl} g_{pk} \tag{۲۸ج}$$

$$A^{ijk}_{...l} = A^{ijkp} g_{pl} \tag{۲۸د}$$

با تعویض i و j در معادلهٔ (۲۸ب)، داریم

$$A^{j\ kl}_{.i..} = A^{jpkl} g_{pi} \tag{۲۹}$$

از مقایسهٔ معادلات (۲۹) و (۲۸الف) درمی‌یابیم که

$$A_{i...}^{\ ikl} \neq A^{j\ kl}_{.i..} \tag{۳۰}$$

مگر آنکه A^{jpkl} نسبت به دو اندیس اولش متقارن باشد. نامعادلهٔ (۳۰) به‌روشنی نشان می‌دهد که تفاوت هست در اینکه ابتدا اندیس بالا ظاهر شود یا پایینی.

یک اندیس دیگر را پایین می‌آوریم، به‌دست می‌آوریم

$$A_{ij..}^{\ \ kl} = A^{pqkl} g_{pi} g_{qj} \tag{۳۱الف}$$

$$A_{i.k.}^{\ j\ l} = A^{piql} g_{pi} g_{qk} \tag{۳۱ب}$$

$$A_{i..l}^{\ jk} = A^{pjkq} g_{pi} g_{ql} \tag{۳۱ج}$$

$$A^{i\ k}_{.j.l} = A^{ipkq} g_{pj} g_{ql} \tag{۳۱د}$$

و غیره، که انواع مختلف مؤلفه‌ها، هر یک از رتبهٔ پادوردای دو و هموردای دو هستند. اگر هر چهار اندیس را پایین بیاوریم، تانسور هموردای رتبهٔ چهار را به‌دست می‌آوریم که عبارت است از

$$A_{ijkl} = A^{pqrs} g_{pi} g_{qj} g_{rk} g_{sl} \tag{۳۲}$$

که، بی‌تردید یکتاست.

مثال ۶. هرگاه A^{ij} و B^{ij} دو تانسور باشند، نشان دهید که

$$A^{ij}B_{ij} = A_{ij}B^{ij} \tag{۳۳}$$

حل: می‌توانیم بنویسیم

$$A^{ij} = A_{kl}g^{ki}g^{lj}$$

$$B_{ij} = B^{mn}g_{mi}g_{nj} \tag{۳۴}$$

ضرب داخلی طرفهای متناظر معادلات (۳۴) را درنظر می‌گیریم، داریم

$$\begin{aligned} A^{ij}B_{ij} &= A_{kl}B^{mn}g^{ki}g_{mi}g^{lj}g_{nj} \\ &= A_{kl}B^{mn}\delta^{k}_{.m}\delta^{l}_{.n} \qquad [\text{از معادلهٔ (۱۹)}] \\ &= A_{kl}B^{kl} = A_{ij}B^{ij} \end{aligned}$$

که نتیجهٔ مطلوب است.

مثال ۷. نشان دهید که در دستگاه مختصات دکارتی مؤلفه‌های پادوردا و هموردای یک بردار معادل‌اند.

حل: فرض کنید A^i و A_i به‌ترتیب مؤلفه‌های پادوردا و هموردای یک بردار نسبت به دستگاه مختصات دکارتی باشند. این مؤلفه‌ها با رابطهٔ زیر به هم مربوط می‌شوند

$$A_i = A^j g_{ji} \tag{۳۵}$$

برای دستگاه مختصات دکارتی، $g_{ii} = ۱$ است (مجموع‌یابی روی i انجام نمی‌شود) و به‌ازای $i \neq j$، $g_{ij} = ۰$ است. در نتیجه معادلهٔ (۳۵) به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned} A_i &= A^i g_{ii} \quad (\text{مجموع‌یابی روی } i \text{ انجام نمی‌شود}) \\ &= A^i \end{aligned} \tag{۳۶}$$

و نشان می‌دهد که تمایزی میان مؤلفه‌های هموردا و پادوردا وجود ندارد.

تعمیم این نتیجه به تانسورهای دلخواه را برای تمرین ۷ گذاشتیم.

پیش از بستن این فصل، به تعریف اندازهٔ Aی بردار A_i توجه می‌کنیم:

$$A^{2} = A_iA^i = g_{ij}A^iA^j = g^{ij}A_iA_j \qquad (۳۷)$$

همین‌طور، زاویهٔ θی بین دو بردار A_i و B_i را چنین تعریف می‌کنیم

$$AB\ \cos\ \theta = A_iB^i = g_{ij}A^iB^j = g^{ij}A_iB_j \qquad (۳۸)$$

که A و B به‌ترتیب اندازهٔ A_i و B_i است، یا داریم

$$\cos\theta = A_iB^i/[A_jA^jB_kB^k]^{1/2} \qquad (۳۹)$$

تمرین

۱.۱۸ معادلات (۲۶) را از معادلات (۲۴) به‌دست آورید.

۲.۱۸ با توجه به تمرین ۴.۱۵، نشان دهید که مؤلفه‌های هموردای سرعت در مختصات قطبی کروی عبارت‌اند از

$$\frac{dr}{dt}, r^{2}\frac{d\theta}{dt},\ r^{2}\sin^{2}\theta\frac{d\phi}{dt}$$

۳.۱۸ * با استفاده از مؤلفه‌های هموردای گرادیان میدان نرده‌ای در مختصات قطبی کروی که در تمرین ۶.۱۵ به‌دست آمد، مؤلفه‌های پادوردا را در همان دستگاه مختصات پیدا کنید.

۴.۱۸ * فرض کنید z^1 و z^2 مختصات مایل صفحه‌ای باشند که α زاویهٔ بین دو محور آن است. برای این مختصات g^{ij} و g_{ij} را به‌دست آورید.

۵.۱۸ نشان دهید که در حالت دستگاه مختصات متعامد، مؤلفهٔ هموردای تانسور فقط به مؤلفهٔ پادوردای متناظر آن تانسور مربوط می‌شود.

۶.۱۸ مؤلفه‌های پادوردای بردار شتاب در مختصات قطبی کروی با معادلات (۵۰.۱۵) داده شده‌اند. مؤلفه‌های هموردای بردار شتاب را در همان دستگاه مختصات به‌دست آورید.

۷.۱۸ نشان دهید که در دستگاه مختصات دکارتی، تمایز میان مؤلفه‌های تانسور پادوردا، هموردا و آمیخته از بین می‌رود.

۸.۱۸* با پایین آوردن اندیس پادوردای دلتای کرونکر آمیختهٔ $\delta^{i}_{.j}$، تانسور هموردای δ_{jk} را تعریف کنید. در فضای سه‌بعدی، مؤلفه‌های δ_{jk} را در (الف) مختصات دکارتی، (ب) مختصات قطبی کروی و (ج) مختصاتی که در مثال ۴ تعریف کردیم، به‌دست آورید [بنابراین، توجه کنید که گرچه δ_{jk} در دستگاه مختصات دکارتی دلتای کرونکر است، در هر دستگاه مختصات دیگری دلتای کرونکر نیست.]

۹.۱۸ نشان دهید که

$$A_{ijk}B^{jlk} = A_{i.k}^{\ j}B_{j..}^{\ lk} = A_{i..}^{\ jk}B_{j.k}^{\ l} = A_{ij.}^{\ \ k}B_{..k}^{jl}$$

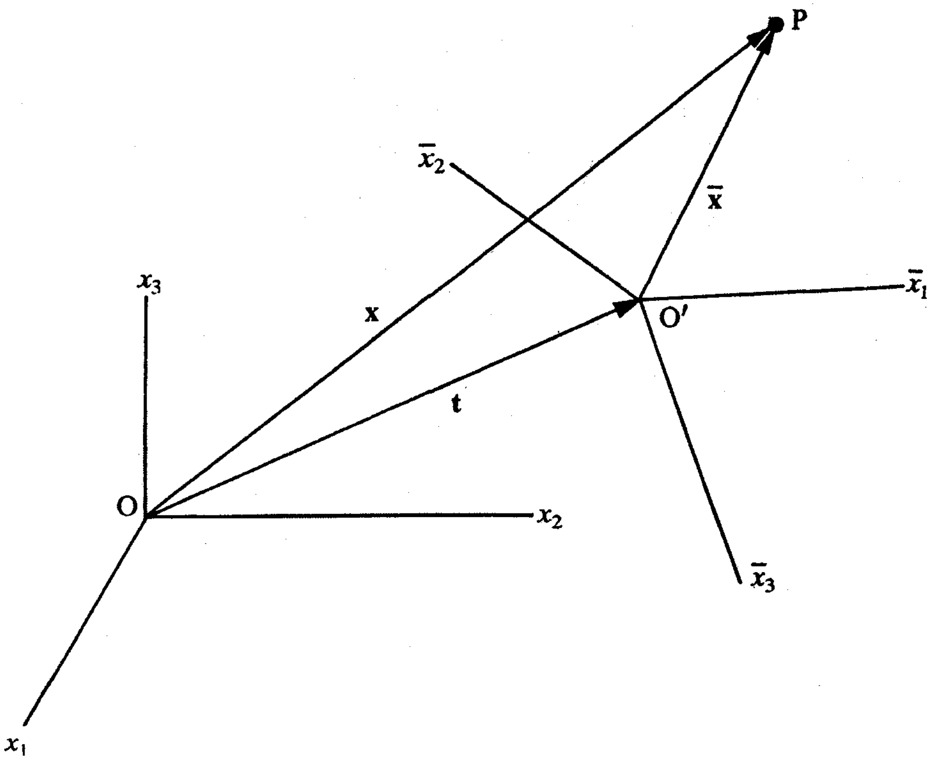
۱۹

تانسورهای دکارتی

برای بسیاری ازکاربردهای ساده، فقط با دستگاه مختصات دکارتی کار داریم و لازم نیست دربارهٔ تبدیلهای کلی مختصات نگران باشیم. بنابراین، بهتر است که ردهٔ خاصی از تانسورها، معروف به تانسورهای دکارتی، را تعریف کنیم که مؤلفه‌هایشان فقط در قالب تبدیلهای متعامد دستگاه مختصات دکارتی و نه لزوماً تبدیلهای کلی مختصاتی، در معادلهٔ (۴۱.۱۵) صدق می‌کنند.

۱.۱۹ چرخش و انتقال

فرض کنید $(O; x_1, x_2, x_3)$ و $(O'; \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ دو دستگاه مختصات دکارتی راستگرد در فضای سه‌بعدی باشند، به‌طوری که $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{t}$ باشد. روشن است که تبدیل کلی دستگاه مختصات بدون خط به دستگاه مختصات خط‌دار، شامل چرخشی است حول محوری که از O می‌گذرد و انتقالی به‌اندازهٔ بردار $\mathbf{t}$. اگر $\mathbf{x}$ و $\overline{\mathbf{x}}$ بردارهای مکان نقطه‌ای، مثل P، نسبت به دو دستگاه مختصات باشد، از شکل ۱.۱۹، می‌بینیم که

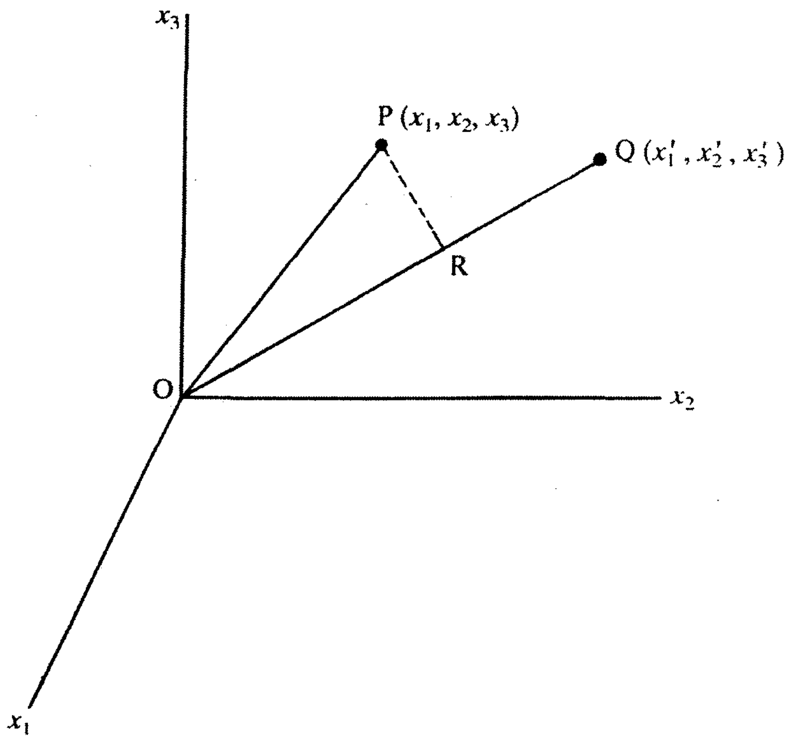


شکل۱.۱۹ تبدیل کلی یک دستگاه مختصات دکارتی راستگرد به دیگری.

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{t} \tag{۱}$$

اکنون می‌خواهیم رابطهٔ میان مؤلفه‌های $\overline{x}_i$ بردار $\overline{\mathbf{x}}$ در دستگاه مختصات خط‌دار و مؤلفه‌های x_i بردار $\mathbf{x}$ دستگاه مختصات بدون خط را بیابیم. این چرخش یک دستگاه مختصات به دستگاه مختصات دیگر را نشان می‌دهد. دومین جملهٔ معادلهٔ (۱) نشان‌دهندهٔ انتقال است. این دو عمل (چرخش و انتقال) با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند.

در پایان این بخش، همان‌طور که در شکل ۲.۱۹ نشان داده‌ایم، ابتدا یک دستگاه مختصات دکارتی و دو نقطهٔ P و Q را با مختصات، به‌ترتیب x_i و x'_i درنظر می‌گیریم. فرض کنید $(l_۱, l_۲, l_۳)$ کسینوسهای هادی OP و $(l'_۱, l'_۲, l'_۳)$ کسینوسهای هادی OQ نسبت به این دستگاه مختصات باشد. بنابراین، l_i کسینوس زاویهٔ بین OP و Ox_i و l'_i کسینوس زاویهٔ بین OQ و Ox'_i است.



شکل۲.۱۹ کسینوسهای هادی در دو جهت.

حال از هندسهٔ تحلیلی مقدماتی در سه بعد، می‌دانیم که[۱]

$$l_۱^۲ + l_۲^۲ + l_۳^۲ = ۱ \tag{۲}$$

یا

$$l_i l_i = ۱ \tag{۳}$$

که بر قرارداد مجموع‌یابی دلالت می‌کند. همین‌طور، داریم

$$l_i' l_i' = ۱ \tag{۴}$$

۱. در واقع، با توجه به اینکه l_iها مؤلفه‌های دکارتی بردار واحد در امتداد OPاند، بی‌درنگ به این نتیجه می‌رسیم.

همچنین، داریم

$$\mathrm{OP}^2 = x_i x_i, \qquad \mathrm{OQ}^2 = x'_i x'_i \tag{۵}$$

سرانجام، اگر θ زاویهٔ بین دو جهت OP و OQ باشد، داریم

$$\cos\theta = l_i l'_i \tag{۶}$$

اگر این دو جهت بر یکدیگر عمود باشند، از شرط تعامد، داریم

$$l_i l'_i = 0 \tag{۷}$$

اکنون فرض کنید PR عمودی از P بر OQ باشد. می‌خواهیم تصویر OR مربوط به OP را بر OQ، برحسب مختصات x_i نقطهٔ P و کسینوسهای هادی l'_i خط OQ بیان کنیم. با استفاده از سه‌تایی واحد متعامد $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$، به‌ترتیب در امتداد $\mathrm{O}x_1$، $\mathrm{O}x_2$، و $\mathrm{O}x_3$، داریم

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \equiv \mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \tag{۸}$$

اگر $\mathbf{n}$ بردار یکه‌ای در امتداد OQ باشد، داریم

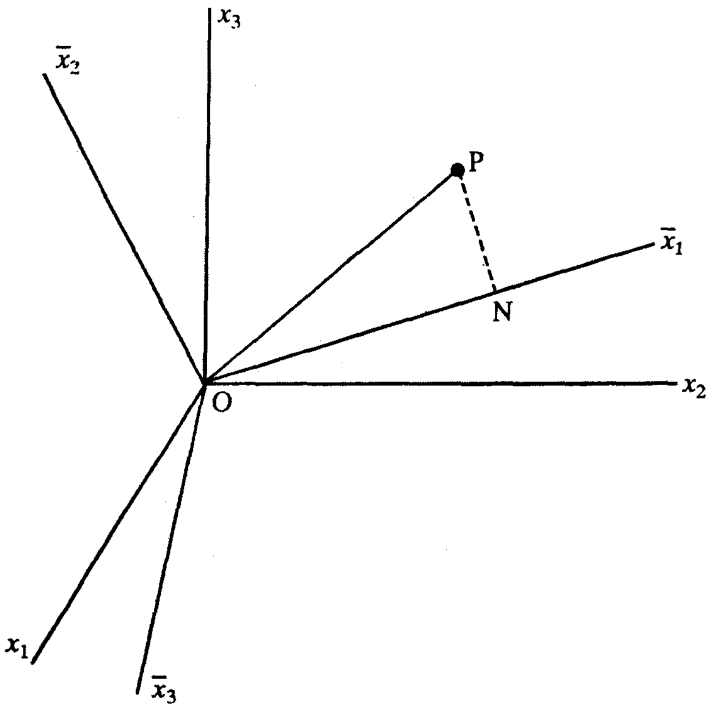
$$\mathbf{n} = l'_i\mathbf{i} + l'_2\mathbf{j} + l'_3\mathbf{k} \tag{۹}$$

بنابراین، تصویر OR از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\mathrm{OR} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \mathbf{n} = l'_1 x_1 + l'_2 x_2 + l'_3 x_3 = l'_i x_i \tag{۱۰}$$

۲.۱۹ تبدیلهای متعامد

دستگاه مختصات دکارتی راستگرد $(\mathrm{O}; x_1, x_2, x_3)$ را درنظر بگیرید. همان‌طورکه در شکل ۳.۱۹ نشان داده‌ایم، چرخش حول محوری که از O می‌گذرد، آن‌را به‌دستگاه مختصات دکارتی راستگرد دیگری، مثلاً $(\mathrm{O}; \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ تبدیل می‌کند. فرض کنید کسینوسهای هادی $\mathrm{O}\overline{x}_i (i = 1, 2, 3)$، نسبت به دستگاه مختصات بدون خط، a_{i1}، a_{i2}، a_{i3} باشند. بنابراین، a_{ij} کسینوس زاویهٔ بین $\mathrm{O}\overline{x}_i$ و $\mathrm{O}x_j$ است.



شکل۳.۱۹ چرخش یک دستگاه مختصات دکارتی راستگرد به دیگری.

فرض کنید نقطهٔ P، به‌ترتیب دارای مختصات $(x_۱, x_۲, x_۳)$ و $(\overline{x}_۱, \overline{x}_۲, \overline{x}_۳)$ در این دو دستگاه مختصات باشد. فرض کنید همان‌طور که در شکل ۳.۱۹ می‌بینیم، PN عمودی از P بر $O\overline{x}_۱$ باشد. دراین‌صورت $\overline{x}_۱ = ON$ تصویر OP بر محور $O\overline{x}_۱$ می‌شود. حال با استفاده از معادلهٔ (۱۰)، داریم

$$\overline{x}_۱ = a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + a_{۱۳}x_۳ = a_{۱j}x_j \tag{۱۱}$$

روابط مشابهی برای $\overline{x}_۲$ و $\overline{x}_۳$ به‌دست می‌آید، به‌گونه‌ای که می‌توانیم تبدیلهای فوق را چنین بنویسیم

$$\overline{x}_i = a_{ij}x_j \tag{۱۲}$$

این نه کسینوس هادی a_{ij} را می‌توان به‌صورت ماتریس مربعی زیر نوشت

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} \tag{۱۳}$$

بنابر ویژگی اصلی کسینوسهای هادی [معادلهٔ (۲)]، داریم

$$a_{i۱}^۲ + a_{i۲}^۲ + a_{i۳}^۲ = ۱, i = ۱, ۲, ۳ \tag{۱۴}$$

که نشان می‌دهد سطرهای $\mathbf{A}$ بهنجار می‌شوند. علاوه‌براین، چون محورهای $O\overline{x}_۱$، $O\overline{x}_۲$، $O\overline{x}_۳$ بر یکدیگر عمودند، معادلهٔ (۷) اقتضا می‌کند که

$$a_{ij}a_{kj} = ۰ \qquad i \neq k \tag{۱۵}$$

یعنی سطرهای $\mathbf{A}$ بر یکدیگر عمودند. این مطلب به این نتیجه منتهی می‌شود که $\mathbf{A}$ ماتریسی متعامد است و می‌توانیم معادلات (۱۴) و (۱۵) را با هم ترکیب کنیم و به معادلهٔ واحدی دست یابیم:

$$a_{ij}a_{kj} = \delta_{ik} \tag{۱۶}$$

در بخش ۳.۵ اشاره کردیم که اگر سطرهای ماتریس مربعی متناهی راست‌هنجار باشند، ستونهای آن نیز راست‌هنجار می‌شوند، که نتیجه می‌دهد

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk} \tag{۱۷}$$

با ضرب کردن معادلهٔ (۱۲) در a_{ik} و مجموع‌یابی روی i، به‌دست می‌آوریم

$$a_{ik}\,\overline{x}_i = a_{ik}\,a_{ij}\,x_j = \delta_{jk}\,x_j = x_k \tag{۱۸}$$

یا

$$x_i = a_{ji}\overline{x}_j \tag{۱۹}$$

که تبدیل وارون را از دستگاه مختصات بدون خط به دستگاه مختصات خط‌دار به‌دست می‌دهد.

در بخش ۳.۵ دیدیم که چنین تبدیلی را تبدیل متعامد می‌نامند. معادلهٔ (۱۹) نیز نشان می‌دهد که $a_{ji}(j = ۱, ۲, ۳)$ کسینوسهای هادی $\mathrm{O}x_i$ نسبت به محورهای مختصات خط‌دار است. بنابراین، در حالی که سطرهای $\mathbf{A}$ کسینوسهای هادی محورهای مختصات خط‌دار نسبت به محورهای مختصات بدون خط است، ستونهای آن کسینوسهای هادی محورهای مختصات بدون خط نسبت به محورهای خط‌دار است.

چون دستگاه مختصات خط‌دار با چرخشی ساده به دستگاه بدون خط مربوط می‌شود، روشن است که $\det\mathbf{A} = ۱$ است. اکنون می‌توانیم یک گام جلوتر برویم و تبدیل را کمی بیشتر تعمیم دهیم. بنابراین، همچنان $\mathbf{A}$ باید ماتریس متعامد باشد، ولی می‌شود دترمینان آن ۱+ یا ۱− باشد. پیش از این، حالت $\det\mathbf{A} = ۱$ را بررسی کردیم. اگر $\det\mathbf{A} = -۱$ باشد، تنها تفاوت آن است که چنانچه دستگاه مختصات اصلی راستگرد باشد، دستگاه نهایی چپگرد می‌شود و برعکس. چنین تبدیلی از ترکیب یک چرخش با بازتاب یا وارون نتیجه می‌شود و آن‌را چرخش ناسره می‌شمارند.

تبدیل کلی یک دستگاه مختصات دکارتی به دستگاه مختصات دکارتی دیگر را از ترکیب معادلهٔ (۱) با معادلهٔ (۲) به‌دست می‌آوریم که عبارت است از

$$\overline{x}_i = a_{ij}(x_j - t_j) \tag{۲۰الف}$$

که t_jها مؤلفه‌های دکارتی $\mathbf{t}$ و $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ ماتریس متعامد دلخواه است. همان‌طور که تبدیل وارون معادلهٔ (۱۹) را به‌دست آوردیم، در این حالت، داریم

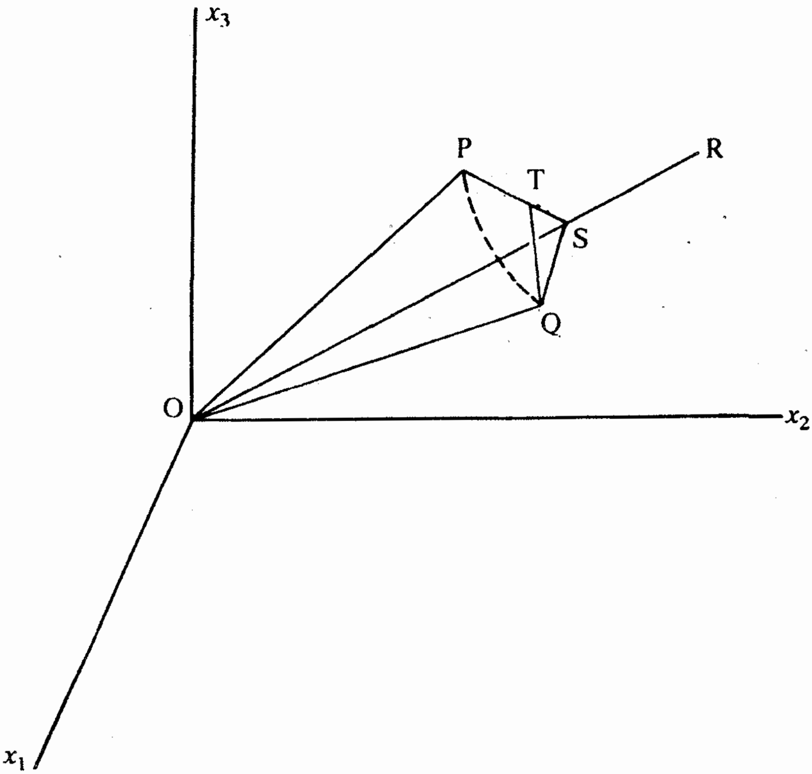
$$x_i = a_{ji}\overline{x}_j + t_i \tag{۲۰ب}$$

مثال ۱. ماتریس تبدیل متناظر با چرخش راستگرد دستگاه مختصات دکارتی را بیابید، به‌اندازهٔ زاویهٔ θ حول خط مستقیمی که از مبدأ می‌گذرد و کسینوس هادی λ_i دارد.

حل: فرض کنید $(\mathrm{O}; x_۱, x_۲, x_۳)$ دستگاه مختصات دکارتی راستگرد باشد و فرض کنید همان‌طوری که در شکل ۴.۱۹ نشان داده‌ایم، OR جهتی با کسینوس هادی λ_i باشد. فرض کنید $\mathrm{P} = (x_۱, x_۲, x_۳)$ نقطه‌ای باشد که پس از چرخش راستگرد[1] حول OR به‌اندازهٔ زاویهٔ θ به

---

۱. منظور از چرخش راستگرد پیچ راستگردی است که در جهت مثبت OR پیش برود.



شکل۴.۱۹ چرخش OP به OQ حول OR.

OQ برود. فرض کنید PS و QS عمودهایی، به‌ترتیب از P و Q بر OR باشند، به‌طوری که زاویهٔ چرخش $\mathrm{PSQ} = \theta$ باشد. فرض کنید QT عمودی از Q بر PS باشد. می‌خواهیم کسینوسهای هادی OR و θ یعنی $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overline{x}_i$ را برحسب $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x_i$ بیابیم، داریم

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PT}} + \overrightarrow{\mathrm{TQ}} \tag{۲۱الف}$$

یا

$$\overline{x}_i = x_i + \overrightarrow{\mathrm{PT}} + \overrightarrow{\mathrm{TQ}} \tag{۲۱ب}$$

برای پیدا کردن $\overrightarrow{\mathrm{PT}}$، ابتدا $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ را تعیین کنید. جهت $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ را کسینوسهای هادی λ_i مشخص می‌کنند و اندازهٔ آن با توجه به اینکه OS تصویر OP روی OR است، از معادلهٔ (۱۰) به‌دست می‌آید، در

نتیجه داریم

$$\mathrm{OS} = \lambda_j x_j \qquad \text{(۲۲الف)}$$

به‌نحوی که

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \lambda_j x_j \lambda_i \qquad \text{(۲۲ب)}$$

بنابراین

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \lambda_j x_j \lambda_i - x_i \qquad (۲۳)$$

اکنون مثلث QTS مثلث قائم‌الزاویه‌ای است با $\mathrm{TS} = \mathrm{QS}\cos\theta = \mathrm{PS}\cos\theta$. بنابراین، $\mathrm{PT} = \mathrm{PS} - \mathrm{TS} = (۱ - \cos\theta)\mathrm{PS}$ است. با وارد کردن مشخصهٔ برداری، داریم

$$\overrightarrow{\mathrm{PT}} = (۱ - \cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{PS}} = (۱ - \cos\theta)(\lambda_j x_j \lambda_i - x_i) \qquad (۲۴)$$

سرانجام، $\overrightarrow{\mathrm{TQ}}$ را تعیین می‌کنیم. برای این کار، دقت می‌کنیم که TQ در صفحهٔ PSQ واقع است، که بر بردار λ_i عمود است. بنابراین، $\overrightarrow{\mathrm{TQ}}$ هم بر $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ و هم بر λ_i عمود است، به‌طوری که $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$، λ_i و $\overrightarrow{\mathrm{TQ}}$ سه‌گانهٔ راستگردی تشکیل می‌دهند. بنابراین، با درنظر گرفتن حاصلضرب برداری $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ در λ_i و با استفاده از معادلهٔ (۳۷.۱۶) ملاحظه می‌کنیم که بردار یکه در امتداد $\overrightarrow{\mathrm{TQ}}$ چنین به‌دست می‌آید

$$\overrightarrow{\mathrm{TQ}}/\mathrm{TQ} = \varepsilon_{ijk}(\overrightarrow{\mathrm{PS}})_j \lambda_k/\mathrm{PS} = \varepsilon_{ijk}(\lambda_m x_m \lambda_j - x_j)\lambda_k/\mathrm{PS} \qquad (۲۵)$$

با توجه به تمرین (۹.۱۶)، اولین جملهٔ سمت راست صفر می‌شود، به‌نحوی که، داریم

$$\overrightarrow{\mathrm{TQ}} = -\varepsilon_{ijk} x_j \lambda_k \mathrm{TQ}/\mathrm{PS} = -\varepsilon_{ijk} x_j \lambda_k \sin\theta \qquad (۲۶)$$

با جابه‌جایی اندیسهای ظاهری j و k، رابطهٔ فوق را می‌توان در پایان چنین نوشت

$$\overrightarrow{\mathrm{TQ}} = \varepsilon_{ijk} x_k \lambda_j \sin\theta \qquad (۲۷)$$

با به‌کار بردن معادلات (۲۴) و (۲۷) در معادلهٔ (۲۱ب)، داریم

$$\overline{x}_i = x_i + (۱ - \cos\theta)(\lambda_j x_j \lambda_i - x_i) + \varepsilon_{ijk}\lambda_j x_k \sin\theta \qquad (۲۸)$$

با نوشتن رابطهٔ بالا به‌صورت استاندارد $\overline{x}_i = a_{ij}x_j$، اجزای ماتریس تبدیل را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{ij} = \cos\theta\delta_{ij} + (1 - \cos\theta)\lambda_i\lambda_j + \varepsilon_{ilj}\lambda_l \sin\theta \tag{۲۹}$$

۳.۱۹ تانسورهای دکارتی

اکنون تانسور دکارتی را تعریف می‌کنیم. تانسور دکارتی رتبهٔ r در فضای سه‌بعدی اقلیدسی، مجموعه‌ای از 3^r مؤلفه است که فقط در قالب تبدیلهای مختصاتی متعامد، مطابق معادلهٔ (۴۱.۱۵) تبدیل می‌شوند. این تعریف از شرطی که برای تانسور کلی گذاشتیم، ضعیفتر است. چون تانسور کلی برای همهٔ تبدیلهای مختصاتی در معادلهٔ (۴۱.۱۵) صدق می‌کند، روشن است که تانسور کلی، تانسوری دکارتی نیز است، ولی تانسور دکارتی لزوماً تانسور کلی نیست.

از معادلهٔ (۲۰)، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial \overline{x}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_i} = a_{ij} \tag{۳۰}$$

که نشان می‌دهد تمایز میان پادوردایی و هموردایی از بین می‌رود. بنابراین، می‌توانیم همهٔ اندیسها را به‌صورت اندیس پایین به‌کار ببریم. همان‌طوری که در واقع تاکنون در این فصل انجام داده‌ایم و خود را به تبدیلهای مختصاتی متعامد از نوع معادلهٔ (۱۲) محدود کرده‌ایم. بنابراین، قانون تبدیل برای تانسور دکارتی تبدیل می‌شود به

$$\overline{A}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r} = a_{\alpha_1 i_1}a_{\alpha_2 i_2}\cdots a_{\alpha_r i_r}A_{i_1 i_2\cdots i_r} \tag{۳۱}$$

معادلهٔ (۱۲) بیان می‌کند که x_i بردار دکارتی نیز است، گرچه برداری کلی نیست. به‌خواننده یادآوری می‌کنیم که بنابر معادلهٔ (۷.۱۵ب)، دیفرانسیل مختصاتی dx_i از برداری کلی و در نتیجه، برداری دکارتی نیز تشکیل شده است.

دلتای کرونکر δ_{ij} و تانسور تماماً پادمتقارن ε_{ijk} تانسورهای دکارتی نیز هستند که همهٔ اندیسهایشان را می‌توان به‌صورت اندیسهای هموردا نوشت. این مطلب را از واقعیت زیر نتیجه می‌گیریم

$$\overline{\delta}_{\alpha\beta} = a_{\alpha i}a_{\beta j}\delta_{ij} = a_{\alpha i}a_{\beta i} = \delta_{\alpha\beta} \tag{۳۲}$$

که از معادلهٔ (۱۶) استفاده کرده‌ایم. ممکن است خواننده این معادله را با معادلهٔ (۳۳.۱۶) مقایسه کند که در آن نشان دادیم δ^i_j تانسوری کلی[1] است.

سرانجام، می‌بینیم قانون خارج‌قسمت که در فصل (۱۷) به آن پرداختیم، برای تانسورهای دکارتی نیز معتبر است.

۴.۱۹ تانسورهای همسانگرد

به تانسوری دکارتی که مؤلفه‌های آن تحت چرخش محورها بدون تغییر می‌ماند، تانسور همسانگرد می‌گویند، تانسور همسانگرد تحت تبدیلهای متعامد به خودش تبدیل می‌شود.

کمیت نرده‌ای، تانسور همسانگرد رتبهٔ صفر است، زیرا در همهٔ دستگاههای مختصات مقدار یکسانی دارد.

تنها تانسور همسانگرد رتبهٔ یک بردار صفر است. اثبات این مطلب را در زیر می‌بینیم.

فرض کنید $\mathbf{u} = (u_۱, u_۲, u_۳)$ یک بردار و $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ تبدیل متعامد دلخواه باشد. فرض کنید $\overline{\mathbf{u}} = (\overline{u}_۱, \overline{u}_۲, \overline{u}_۳)$ بردار تبدیل شده باشد. در این‌صورت، برحسب نمادگذاری معادلهٔ (۵۱.۵)، داریم

$$\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u} \qquad (۳۳)$$

اما اگر $\mathbf{u}$ برداری همسانگرد باشد، دراین‌صورت، $\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ می‌شود (یعنی $\overline{u}_i = u_i$، به‌ازای $i = ۱, ۲, ۳$). بنابراین، معادلهٔ (۳۳) می‌شود

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{u} \Rightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{u} = ۰ \qquad (۳۴)$$

اگر این معادله برای هر ماتریس متعامد $\mathbf{A}$ درست باشد، روشن است که تنها جواب معادلهٔ (۳۴) $\mathbf{u} = ۰$ است، که نتیجهٔ مطلوب است.

مثال ۲. نشان دهید که تنها تانسور همسانگرد رتبهٔ دو در فضای سه‌بعدی اقلیدسی مضرب ثابتی از دلتای کرونکر است.

---

۱. همچنین خواننده را به تمرین (۸.۱۸) هدایت می‌کنیم که تمایز میان تانسور کلی δ_{ij} و تانسور دکارتی δ_{ij} را روشن می‌کند.

حل: فرض کنید A_{ij} تانسور رتبهٔ دو باشد. اگر این تانسور همسانگرد باشد، در قالب هر تبدیل متعامدی در شرط $\overline{A}_{ij} = A_{ij}$ صدق می‌کند.

ماتریس پادمتقارن زیر را درنظر می‌گیریم

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ -c_{12} & 0 & c_{23} \\ -c_{13} & -c_{23} & 0 \end{bmatrix} \tag{۳۵}$$

به‌ازای $j \neq i$، $|c_{ij}| \ll 1$ است. بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} c_{ii} &= 0 \quad \text{(مجموع‌یابی انجام نمی‌شود)} \\ c_{ij} &= -c_{ji} \qquad i \neq j \end{aligned} \tag{۳۶}$$

تبدیلی با اجزای زیر را تعریف می‌کنیم

$$a_{ij} = \delta_{ij} - c_{ij} \tag{۳۷}$$

دقت می‌کنیم که داریم

$$\begin{aligned} a_{ij}a_{ik} &= (\delta_{ij} - c_{ij})(\delta_{ik} - c_{ik}) \\ &\simeq \delta_{ij}\delta_{ik} - \delta_{ij}c_{ik} - \delta_{ik}c_{ij} \\ &= \delta_{jk} - c_{jk} - c_{kj} = \delta_{jk} \end{aligned} \tag{۳۸}$$

که در اینجا از جملات مرتبهٔ دوم، مثل $c_{ij}c_{ik}$، چشمپوشی کرده‌ایم. بنابراین، می‌بینیم که تبدیلی را که با ضرایب a_{ij} تعریف کردیم، تا مرتبهٔ اول برحسب c_{ij} تبدیلی متعامد است.

در قالب این تبدیل، تانسور رتبهٔ دوم A_{ij} به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned} A_{ij} \equiv \overline{A}_{ij} &= a_{ik}a_{jl}A_{kl} \\ &= (\delta_{ik} - c_{ik})(\delta_{jl} - c_{jl})A_{kl} \\ &= (\delta_{ik} - c_{ik})(A_{kj} - c_{jl}A_{kl}) \\ &\simeq A_{ij} - c_{jl}A_{il} - c_{ik}A_{kj} \end{aligned} \tag{۳۹}$$

که بار دیگر از جملات مرتبهٔ دوم چشمپوشی کرده‌ایم. در نتیجه داریم

$$c_{jl}A_{il} + c_{ik}A_{kj} = 0 \tag{۴۰}$$

اکنون حالت $i \neq j$ را درنظر بگیرید. با انتخاب ۲ $= i$ و ۲ $= j$ و با استفاده از معادلات (۳۶)، معادلهٔ (۴۰) به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$c_{12}(A_{22} - A_{11}) + c_{13}A_{32} + c_{23}A_{13} = 0 \tag{۴۱}$$

چون c_{12}، c_{13}، c_{23} دلخواه و از یکدیگر مستقل‌اند، بنابراین معادلهٔ بالا صادق است، اگر و تنها اگر داشته باشیم

$$A_{11} = A_{22},\ A_{32} = A_{13} = 0 \tag{۴۲}$$

همین‌طور، با انتخاب ۲ $= i$، ۳ $= j$ و سپس ۳ $= i$، ۱ $= j$، به‌دست می‌آوریم

$$A_{11} = A_{22} = A_{33}, \qquad A_{ij} = 0\ i \neq j \tag{۴۳}$$

در حالت دوم، چنانچه $i = j$ باشد، معادلهٔ (۴۰) تبدیل می‌شود به

$$c_{il}A_{il} + c_{ik}A_{ki} = 0 \qquad \text{مجموع‌یابی روی } i \text{ انجام نمی‌شود} \tag{۴۴}$$

با توجه به معادلات (۳۶) و (۴۳)، این معادله به‌صورت اتحاد صادق است. صورت نهایی تانسور A_{ij} را بنابر معادلات (۴۳) داریم که می‌توان آن‌را به‌صورت زیر نوشت

$$A_{ij} = \lambda\delta_{ij} \tag{۴۵}$$

که $A_{11} = \lambda$ است. به این ترتیب، نتیجهٔ دلخواه ثابت می‌شود.

به‌صورت مشابهی می‌بینیم که تنها تانسور همسانگرد رتبهٔ سه، در فضای اقلیدسی سه‌بعدی مضرب ثابتی از تانسور تماماً پادمتقارن ε_{ijk} است. برای تانسورهای رتبهٔ ۴، سه تانسور مستقل همسانگرد وجود دارد که عبارت‌اند از $\delta_{ij}\delta_{kl}$، $\delta_{ik}\delta_{jl}$، $\delta_{il}\delta_{jk}$. بنابراین، کلیترین تانسور همسانگرد رتبهٔ ۴، ترکیبی خطی از این سه تانسور است و آن‌را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$A_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk} \tag{۴۶}$$

که a، b، c کمیتهای نرده‌ای دلخواه‌اند.

مثال ۳. فرض کنید $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای سه‌بعدی دکارتی به‌ترتیب با مؤلفه‌های a_i و b_i باشند که با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند. فرض کنید $\boldsymbol{\nabla}$ عملگر مشتق با مؤلفه‌های دکارتی ∂_i باشد. با استفاده از تانسور رتبهٔ سه تماماً پادمتقارن، نشان دهید که داریم

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{a} + \mathbf{a}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{b}) - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{b} \quad (۴۷)$$

حل: از معادلهٔ (۳۷.۱۶)، داریم

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad (۴۸)$$

با استفاده از همان معادله، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})]_r &= \varepsilon_{rst}\partial_s(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_t \\
&= \varepsilon_{rst}\partial_s(\varepsilon_{tij}a_i b_j) \\
&= \varepsilon_{trs}\varepsilon_{tij}\partial_s(a_i b_j) \\
&= (\delta_{ri}\delta_{sj} - \delta_{rj}\delta_{si})[(\partial_s a_i)b_j + a_i(\partial_s b_j)] \quad [\text{از معادلهٔ (۴۷.۱۶)}] \\
&= (\partial_j a_r)b_j + a_r(\partial_j b_j) - (\partial_s a_s)b_r - a_s(\partial_s b_r) \\
&= (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\nabla})a_r + a_r(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{b}) - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a})b_r - (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nabla})b_r \quad (۴۹)
\end{aligned}$$

چون این نتیجه برای هر مقدار r صادق است، پس معادلهٔ (۴۷) ثابت می‌شود.

مثال ۴. فرض کنید B_i و $\overline{B}_\alpha$ مؤلفه‌های دکارتی برداری نسبت به دو دستگاه مختصات متعامد باشد، به‌طوری که داشته باشیم

$$\overline{B}_\alpha = a_{\alpha i} B_i \quad (۵۰)$$

علاوه‌براین، فرض کنید $\boldsymbol{\nabla}$ و $\overline{\boldsymbol{\nabla}}$ عملگرهای دیفرانسیلی برداری با مؤلفه‌های زیر باشد.

$$\boldsymbol{\nabla}_i = \partial/\partial x^i, \qquad \overline{\boldsymbol{\nabla}}_\alpha = \partial/\partial \overline{x}^\alpha \quad (۵۱)$$

نشان دهید که (الف) $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}$ نرده‌ای است، (ب) $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}$ بردار است. [در اینجا $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}$ و $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}$ را به‌ترتیب حاصلضربهای نرده‌ای و برداری معمول $\boldsymbol{\nabla}$ و $\mathbf{B}$ می‌دانیم.]

حل: (الف) کمیت زیر را درنظر بگیرید

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{\mathbf{B}} \equiv \frac{\partial}{\partial \overline{x}^\alpha} \overline{B}_\alpha = \frac{\partial}{\partial \overline{x}^\alpha} a_{\alpha i} B_i \tag{۵۲}$$

عملگر برداری $\overline{\nabla}$، بنابر معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial \overline{x}^\alpha} = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^j} = a_{\alpha j} \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{۵۳}$$

با استفاده از معادلهٔ بالا، معادلهٔ (۵۲) می‌شود

$$\begin{aligned} \overline{\nabla} \cdot \overline{\mathbf{B}} &= a_{\alpha j} a_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x^j} B_i = \delta_{ji} \frac{\partial B_i}{\partial x^j} \qquad [\text{از معادلهٔ (۱۷)}] \\ &= \frac{\partial B_j}{\partial x^j} = \nabla \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \tag{۵۴}$$

چون $\nabla \cdot \mathbf{B}$ در قالب تبدیلهای مختصاتی ناورداست، پس نرده‌ای است.

(ب) مؤلفهٔ αی $\overline{\nabla} \times \overline{\mathbf{B}}$ را در دستگاه مختصات خط‌دار درنظر بگیرید، داریم

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla} \times \overline{\mathbf{B}})_\alpha &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} (\overline{\nabla})_\beta (\overline{\mathbf{B}})_\gamma = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial \overline{B}_\gamma / \partial \overline{x}^\beta \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a_{\gamma i} a_{\beta j} \partial B_i / \partial x^j \end{aligned} \tag{۵۵}$$

برای دترمینان $\mathbf{A}$ی مرتبهٔ ۳ × ۳ با اجزای a_{ij}، معادلهٔ (۴۱.۱۶) می‌شود

$$\varepsilon_{ijk} a_{ir} a_{js} a_{kt} = (\det \mathbf{A}) \varepsilon_{rst} \tag{۵۶}$$

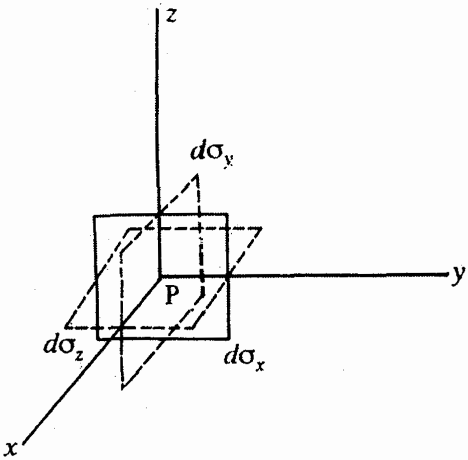
دقت می‌کنیم که $\mathbf{A}$ ماتریس متعامد تبدیلهاست، به‌گونه‌ای که $\det \mathbf{A} = ۱$ است. علاوه‌براین، با ضرب کردن هر دو طرف معادلهٔ بالا در $a_{pr} a_{qs}$ و با استفاده از معادلات (۱۶) و (۱۷)، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{ijk} \delta_{ip} \delta_{jq} a_{kt} = \varepsilon_{rst} a_{pr} a_{qs} \\ \Rightarrow \qquad &\varepsilon_{pqk} a_{kt} = \varepsilon_{rst} a_{pr} a_{qs} \end{aligned} \tag{۵۷}$$

با به‌کار بردن این نتیجه در سمت راست معادلهٔ (۵۵)، به‌دست می‌آوریم

$$(\overline{\nabla} \times \overline{\mathbf{B}})_\alpha = \varepsilon_{ijk} a_{k\alpha} \partial B_i / \partial x^j = a_{k\alpha} (\overline{\nabla} \times \overline{\mathbf{B}})_k \tag{۵۸}$$

که نشان می‌دهد $\nabla \times \mathbf{B}$ مانند بردار تبدیل می‌شود.



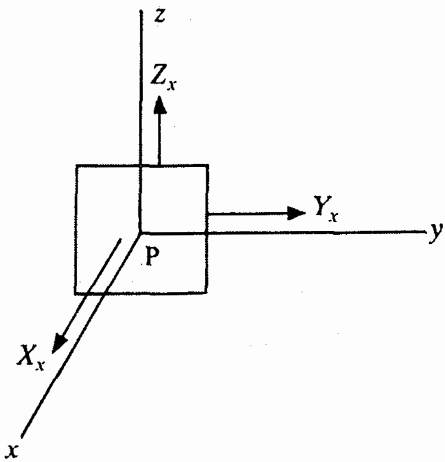
شکل۵.۱۹ سه جزء دوبه‌دو متعامد سطحی در نقطهٔ P.

۵.۱۹ تنش، کرنش و قانون هوک

تنش را نیروی وارد بر واحد سطح جامد تعریف می‌کنند. روشن است که تنش در نقطهٔ معلومی در جامد، به‌جهت جزء سطحی در آن نقطه بستگی دارد. بنابراین، برای اینکه تنش را در نقطه‌ای از جامد دقیقاً مشخص کنیم، باید تنشهای وارد بر سه جزء سطحی دوبه‌دو متعامد را در آن نقطه تعیین کنیم.

فرض کنید P نقطه‌ای از جامد باشد که می‌خواهیم تنش را در آن به‌دست آوریم. محورهای مختصات دکارتی x، y، z را در جسم با مبدأ مختصات واقع در نقطهٔ P انتخاب کنید و سه جزء سطحی $d\sigma_x$، $d\sigma_y$، $d\sigma_z$ را، به‌ترتیب در صفحات yz، zx، و xy درنظر بگیرید که هر یک نقطهٔ P را دربر می‌گیرد (شکل ۵.۱۹). اکنون تنش خالص در نقطهٔ P را با نیروی $\mathbf{F}_1$ وارد بر سطح $d\sigma_x$، نیروی $\mathbf{F}_2$ وارد بر $d\sigma_y$ و نیروی $\mathbf{F}_3$ وارد بر $d\sigma_z$ مشخص می‌کنیم. هر یک از این نیروها را می‌توان بار دیگر به مؤلفه‌های دکارتی‌اش تجزیه کرد. مثلاً، F_{1x} عبارت است از نیروی وارد بر $d\sigma_x$ در جهت x، یعنی، عمود بر سطح $d\sigma_x$، در حالی‌که F_{1y} و F_{1z} نیروهای وارد بر $d\sigma_x$، به‌ترتیب در جهتهای y و z است. چون تنش نیروی وارد بر واحد سطح است، مؤلفه‌های تنش متناظر با روابط زیر تعریف می‌شوند.

$$X_x = F_{1x}/d\sigma_x, \qquad Y_x = F_{1y}/d\sigma_x, \qquad Z_x = F_{1z}/d\sigma_x \qquad (۵۹)$$



شکل۶.۱۹ سه مؤلفهٔ تنش X_x، Y_x، Z_x وارد بر جزء سطحی $d\sigma_x$.

این سه مؤلفهٔ تنش وارد بر جزء سطحی $d\sigma_x$ را در شکل ۶.۱۹ نشان داده‌ایم.

به‌همین روش، می‌توانیم مؤلفه‌های تنش X_y، Y_y، Z_y را تعریف کنیم که بیانگر نیروی وارد بر واحد سطح $d\sigma_y$ است و سه مؤلفهٔ تنش دیگر، X_z، Y_z، Z_z که نیروی وارد بر واحد سطح $d\sigma_z$ را نشان می‌دهد. اینها نه مؤلفهٔ دکارتی تانسور تنش‌اند که تانسوری رتبهٔ دو است.

در واقع، می‌توانستیم مستقیماً از تعریف تنش که نیروی وارد بر واحد سطح است، به‌این نتیجه برسیم. نیرو بردار است و جزء سطح هم بردار است و نیرو لزوماً بر سطح عمود نیست؛ در نتیجه تنش تانسوری رتبهٔ دو می‌شود.

مؤلفه‌های دکارتی تانسور تنش را با X_{ij} نشان می‌دهیم که $i, j = ۱, ۲, ۳$ است. x، y، z را با ۱، ۲، ۳ برابر می‌گیریم، می‌بینیم که، مثلاً $X_{۱۱}$ نمایندهٔ X_x است، $X_{۱۲}$ نمایانگر X_y، $X_{۳۱}$ نمایندهٔ Z_x، . . . .

تنش در جسم باعث کرنش یا تغییر شکل جسم می‌شود. کرنش در هر نقطهٔ جسم را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد.

دستگاه مختصات راست‌هنجار $\hat{\mathbf{x}}$، $\hat{\mathbf{y}}$، $\hat{\mathbf{z}}$ را در نقطهٔ Pی یاد شده در جسمی کرنش‌نیافته تصور کنید. پس از تغییر شکل، جهت و طول محورها تغییر می‌کند. فرض کنید محورهای جدید را با $\mathbf{x}'$، $\mathbf{y}'$، $\mathbf{z}'$ نمایش دهیم. اگر تنش و کرنش حاصل کوچک باشد، می‌شود فرض کرد که انحراف

$\mathbf{x}'$ از $\hat{\mathbf{x}}$، $\mathbf{y}'$ از $\hat{\mathbf{y}}$ و $\mathbf{z}'$ از $\hat{\mathbf{z}}$ کوچک است، حال بردارهای جدید را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از بردارهای پایهٔ اصلی چنین نوشت

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= (1+\varepsilon_{xx})\hat{\mathbf{x}} + \varepsilon_{xy}\hat{\mathbf{y}} + \varepsilon_{xz}\hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{y}' &= \varepsilon_{yx}\hat{\mathbf{x}} + (1+\varepsilon_{yy})\hat{\mathbf{y}} + \varepsilon_{yz}\hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{z}' &= \varepsilon_{zx}\hat{\mathbf{x}} + \varepsilon_{zy}\hat{\mathbf{y}} + (1+\varepsilon_{zz})\hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \tag{۶۰}$$

کمیتهای بی‌بعد ε_{ij} این تغییر شکل را تعریف می‌کنند. فرض کوچک بودن کرنش به این معنی است که $\varepsilon_{ij} \ll 1$ است.

طول بردار تغییر شکل‌یافتهٔ $\mathbf{x}'$ تا مرتبهٔ اول ε_{ij} از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' \simeq 1 + 2\varepsilon_{xx} \Rightarrow |\mathbf{x}'| \simeq 1 + \varepsilon_{xx} \tag{۶۱}$$

معادلات مشابهی را می‌توان برای طول $\mathbf{y}'$ و $\mathbf{z}'$ به‌دست آورد. بنابراین ε_{xx}، ε_{yy}، ε_{zz} نشان‌دهندهٔ تغییرات کسری طولهای سه بردار مختصاتی است.

افزایش کسری حجم وابسته به تغییر شکل را اتساع می‌نامند. مکعب واحد تشکیل شده از بردارهای $\hat{\mathbf{x}}$، $\hat{\mathbf{y}}$، $\hat{\mathbf{z}}$ در جسم تغییر شکل‌نیافته به متوازی‌السطوحی با بردارهای مجاور $\mathbf{x}'$، $\mathbf{y}'$، $\mathbf{z}'$ تغییر شکل می‌یابد. حجم این متوازی‌السطوح تا مرتبهٔ اول ε_{ij} می‌شود

$$V' = \mathbf{x}' \cdot (\mathbf{y}' \times \mathbf{z}') \simeq 1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \tag{۶۲}$$

بنابراین، با یادآوری اینکه $V = 1$ است، اتساع چنین می‌شود

$$\delta = (V' - V)/V = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \tag{۶۳}$$

اگر $\Delta\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}' - \hat{\mathbf{x}}$، $\Delta\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}' - \hat{\mathbf{y}}$، و $\Delta\mathbf{x}_3 = \mathbf{z}' - \hat{\mathbf{z}}$ تعریف کنیم و $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ را با $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ نمایش دهیم، معادلات (۶۰) می‌شود

$$\Delta\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij}\mathbf{x}_j \tag{۶۴}$$

تانسور کرنش e_{ij} رتبهٔ دوم با روابط زیر تعریف می‌شود

$$e_{xx} = \varepsilon_{xx}, \quad e_{yy} = \varepsilon_{yy}, \quad e_{zz} = \varepsilon_{zz}$$

$$e_{xy} = e_{yx} = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx}, \quad e_{yz} = e_{zy} = \varepsilon_{yz} + \varepsilon_{zy}, \quad e_{zx} = e_{xz} = \varepsilon_{zx} + \varepsilon_{xz} \tag{۶۵}$$

برای تنشها و کرنشهای کوچک، طبق قانون هوک، تنش "متناسب" با کرنش است؛ به‌بیان دقیقتر، مؤلفه‌های تنش به‌طور خطی به مؤلفه‌های کرنش مربوط می‌شوند. در نمادگذاری تانسوری، این رابطه را می‌توان چنین نوشت

$$X_{ij} = C_{ijkl}\, e_{kl} \tag{۶۶}$$

که مجموع‌یابی روی اندیسهای تکراری صورت می‌گیرد. به ۸۱ = ۳^{۴} ضریب C_{ijkl} ثابتهای سفتی کشسانی یا مدول کشسانی می‌گویند که به‌روشنی مؤلفه‌های تانسور رتبهٔ چهارم‌اند. وارون رابطه‌ای را که در معادلهٔ (۶۶) آوردیم، به‌دست می‌آوریم تا مؤلفه‌های کرنش را به‌صورت توابع خطی از مؤلفه‌های تنش بیان کنیم، در نتیجه، داریم

$$e_{ij} = S_{ijkl} X_{kl} \tag{۶۷}$$

مؤلفه‌های S_{ijkl} را ثابتهای تن‌دهی کشسانی یا به‌سادگی ثابتهای کشسانی می‌نامند. با جانشین کردن معادلهٔ (۶۶) در معادلهٔ (۶۷) می‌بینیم که تانسورهای C_{ijkl} و S_{ijkl} با رابطهٔ زیر به‌یکدیگر مربوط می‌شوند

$$C_{ijkl} S_{klmn} = \delta_{im}\delta_{jn} \tag{۶۸}$$

یعنی، این دو تانسور وارون یکدیگرند.[۱]

به‌سادگی، می‌توان نشان داد که تانسور کرنش و تانسور تنش متقارن‌اند، بنابراین، می‌رسیم به

$$X_{ij} = X_{ji} \qquad e_{ij} = e_{ji} \tag{۶۹}$$

رابطهٔ بالا تعداد اجزای مستقل هر تانسور را به شش کاهش می‌دهد. همین‌طور تعداد اجزای مستقل تانسور سفتی کشسانی C_{ijkl} یا تانسور تن‌دهی کشسانی S_{ijkl} برابر با ۳۶ = ۶^{۲} می‌شود. در ضمن،

۱. این را با تانسورهای مزدوجی مقایسه کنید که در فصل ۱۷ تعریف کردیم.

می‌توان نشان داد که این تانسورها نسبت به جابه‌جایی دو اندیس اول با دو اندیس آخر متقارن‌اند، یعنی،

$$C_{ijkl} = C_{klij} \qquad S_{ijkl} = S_{klij} \tag{۷۰}$$

در نتیجه، تعداد ثابتهای کشسانی مستقل برای هر جامدی به $۲۱ = ۲/(۱ + ۶)۶$ کاهش می‌یابد. اگر جسم جامد دارای نوعی تقارن درونی باشد، تعداد ثابتهای کشسانی مستقل باز هم کاهش می‌یابد. مثلاً، بلور مکعبی تنها سه ثابت کشسانی مستقل دارد که، بنابر قرارداد، چنین انتخاب می‌شوند[1]

$$C_{۱۱} \equiv C_{xxxx}, \quad C_{۱۲} \equiv C_{xxyy}, \quad C_{۴۴} \equiv C_{yzyz} \tag{۷۱}$$

هر یک از مؤلفه‌های باقیمانده یا با یکی از سه مؤلفهٔ بالا مساوی است یا عیناً صفر می‌شود.

۶.۱۹ پیزو الکتریسیته و پذیرفتاری دی‌الکتریکی

چنانچه میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را در بلوری برقرار کنیم، در دو طرف آن قطبش الکتریکی[2] $\mathbf{P}$ ایجاد می‌شود. اگر قطبش $\mathbf{P}$ همواره در همان جهت میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ باشد، همچنان‌که در محیط همسانگرد داریم، نسبت $P/E = \chi$ را پذیرفتاری دی‌الکتریکی محیط می‌نامند. با وجود این، در جامدات ناهمسانگرد، قطبش الکتریکی ایجاد شده همیشه موازی میدان الکتریکی نیست. برای میدانهای کوچک، مؤلفه‌های قطبش به‌طور خطی به مؤلفه‌های میدان الکتریکی مربوط می‌شود، به‌نحوی که رابطهٔ تعدیل‌یافته چنین می‌شود

$$P_i = \chi_{ij} E_j \tag{۷۲}$$

ضرایب χ_{ij} مؤلفه‌های تانسور رتبهٔ دومی‌اند که به تانسور پذیرفتاری دی‌الکتریکی محیط[3] معروف است.

---

۱. مثلاً، ر.ک:

Joshi, A. W., *Elements of Group Theory for Physicists*, 4th edition (Wiley Eastern, New Delhi, 1994), Appendix A

۲. قطبش الکتریکی را گشتاور دوقطبی الکتریکی بر واحد حجم تعریف می‌کنند.

۳. مثلاً، ر.ک:

Fatuzzo, E and W.J., Merz, *Ferroelectricity* (North-Holland, Amsterdam, 1967), p. 44; Joshi, A. W., *Elements of Group Theory for Physicists*, 4th edition (Wiley Eastern, New Delhi, 1994), Appendix B.

بلورهای خاصی وجود دارند که در آنها تحت تنش مکانیکی خارجی (حتی در غیاب میدان الکتریکی خارجی) قطبش الکتریکی به‌وجود می‌آید. چنین بلورهایی را بلورهای پیزوالکتریک می‌نامند و کوارتز مثالی عالی از آنهاست. برای تنشهای کوچک، مؤلفه‌های قطبش الکتریکی توابعی خطی از تانسور تنش‌اند، به‌طوری که رابطهٔ آن‌را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$P_i = d_{ijk} X_{jk} \tag{۷۳}$$

ضرایب d_{ijk} مؤلفه‌های تانسور رتبهٔ سه، معروف به تانسور ضریب کرنش پیزوالکتریکی، هستند. چون تانسور X_{ij} فقط شش جزء مستقل دارد، تانسور d_{ijk}، به‌جای $۲۷ = ۳^۳$ تنها $۱۸ = ۶ \times ۳$ مؤلفهٔ مستقل برای محیطی دلخواه دارد. برای محیطی با تقارنهای درونی، تعداد مؤلفه‌های مستقل خیلی کمتر است.

اگر بلوری پیزوالکتریک همزمان در معرض میدان الکتریکی خارجی و تنش مکانیکی خارجی قرار گیرد، هر دو منبع در قطبش الکتریکی منتج سهمی دارند. برای میدانها و تنشهای کوچک، می‌توان فرض کرد که برهم‌کنش میان دو عامل ناچیز است، به‌نحوی که سهم قطبش الکتریکی را می‌شود اضافه کرد. دراین‌صورت، قطبش الکتریکی کل چنین می‌شود

$$P_i = d_{ijk} X_{jk} + \chi_{ij} E_j \tag{۷۴}$$

۷.۱۹ تانسور گشتاور لختی

چنانچه سیستمی شامل تعدادی جرم نقطه‌ای در حرکت چرخشی باشد، تکانهٔ زاویه‌ای کل‌اش می‌شود[1]

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) \tag{۷۵}$$

که m_i جرم نقطه‌ای iام، $\mathbf{r}_i$ بردار مکان آن نسبت به یک مبدأ و $\mathbf{v}_i$ سرعت خطی آن است. اگر $\boldsymbol{\omega}$ بردار سرعت زاویه‌ای جسم باشد، سرعت خطی جرم نقطه‌ای iام از رابطهٔ $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$

۱. ر.ک.:
Goldstein, H., *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968), Chap. 5.

به‌دست می‌آید. با به‌کار بردن آن در معادلهٔ (۷۵)، تکانهٔ زاویه‌ای می‌شود

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i[\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)] = \sum_i m_i[\boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})] \qquad (۷۶)$$

که از اتحاد برداری $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ استفاده کرده‌ایم.

فرض کنید مؤلفه‌های دکارتی بردارهای مختلفی را که در معادلهٔ (۷۶) ظاهر می‌شود، به‌صورت $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$، $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ و $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ بنویسیم، در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned}$$

با

$$I_{xx} = \sum_i m_i(r_i^2 - x_i^2), \qquad I_{yy} = \sum_i m_i(r_i^2 - y_i^2), \qquad I_{zz} = \sum_i m_i(r_i^2 - z_i^2)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i, \qquad I_{yz} = I_{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i \qquad (۷۸)$$

$$I_{zx} = I_{xz} = -\sum_i m_i z_i x_i$$

معادلات (۷۷) نشان می‌دهند که تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$ لزوماً با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ موازی نیست. معادلات (۷۷) را می‌توان به اختصار با نماد تانسوری زیر بیان کرد

$$L_i = I_{ij}\omega_j \qquad (۷۹)$$

چون L_i و ω_i بردارند، از قانون خارج‌قسمت نتیجه می‌گیریم که I_{ij} تانسور رتبهٔ دو است. این تانسور متقارن را، با مؤلفه‌هایی که در معادلات (۷۸) آوردیم، تانسور گشتاور لختی جسم می‌نامند.

تمرین

۱.۱۹ * فرض کنید کسینوسهای هادی $O\bar{x}_1$، $O\bar{x}_2$، و $O\bar{x}_3$ نسبت به محورهای دکارتی Ox_1، Ox_2، Ox_3، عبارت‌اند از $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$، $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$، $(0, 0, 1)$. ثابت کنید

که دستگاه مختصات خط‌دار دستگاه مختصاتی دکارتی است. اگر مؤلفه‌های تانسور رتبهٔ دو در دستگاه مختصات بدون خط چنین باشند

$$A_{۱۱} = ۱, \quad A_{۲۲} = -۱, \quad A_{۳۳} = ۳$$
$$A_{۱۲} = A_{۲۱} = \frac{۱}{۲}, \quad A_{۲۳} = A_{۳۲} = -۱, \quad A_{۱۳} = A_{۳۱} = -\frac{۱}{۲}$$

مؤلفه‌های آن‌را در دستگاه مختصات خط‌دار پیدا کنید.

۲.۱۹ فرض کنید کسینوسهای هادی دستگاه مختصات دکارتی خط‌دار نسبت به دستگاه بدون خط $(۱, ۱, ۱)/\sqrt{۳}$، $(۱, -۲, ۱)/\sqrt{۶}$، $(۱-, ۰, ۱)/\sqrt{۲}$ باشند. سه بردار $A_i = (۱, ۱, ۱)$، $B_i = (۱, ۱, ۰)$، $C_i = (۱, ۰, ۱)$ مفروض است، A_iB_i، $A_iB_jC_j$، $\overline{A}_i\overline{B}_i$، $\overline{A}_i\overline{B}_j\overline{C}_j$ را پیدا کنید.

۳.۱۹ ماتریس تبدیل a_{ij}ی معادلهٔ (۲۹) را به‌دست آورید، برای (الف) دورانی به‌اندازهٔ $\pi/۲$ حول محور $x_۳$، (ب)* دورانی به‌اندازهٔ $۲\pi/۳$ حول خطی که دارای کسینوسهای هادی $(۱, ۱, ۱)/\sqrt{۳}$ باشد.

۲۰

چار بردارها در نسبیت خاص

در پایان فصل ۱۵ دیدیم که تنها کمیتهای تانسوری در فرمولبندی ریاضی قوانین فیزیکی ظاهر می‌شوند. در فیزیک کلاسیک، به کمیتهای فیزیکی می‌پردازیم که نسبت به تبدیلهای گالیله ناوردایند که براساس آن، کلیهٔ پدیده‌های فیزیکی برای همهٔ ناظرانی که نسبت به‌یکدیگر ساکن‌اند، یکسان به‌نظر می‌رسند. اکنون تبدیلهای لورنتس را درنظر می‌گیریم.

۱.۲۰ کمیتهای نرده‌ای و بردارها در فضازمان ۴بعدی

از زمان پیدایش نظریهٔ نسبیت خاص، آشکارا می‌دانیم که پدیده‌های فیزیکی برای ناظرانی که نسبت به یکدیگر حرکت نسبی دارند، یکسان ظاهر نمی‌شوند، گرچه قوانین فیزیکی باید برای همهٔ ناظران یکسان باشد. چنانچه دو ناظر نسبت به‌یکدیگر در حرکت باشند، بازه‌های زمانی و مکانی بین دو رویداد (مانند تولد کودکی در مکان و زمانی معین و انفجار یک ستاره در مکان و زمان دیگر) که یکی از آن دو اندازه می‌گیرد، ممکن است با آنچه ناظر دیگر اندازه‌گیری می‌کند، متفاوت

باشد. اگر این بازه‌ها را، به‌ترتیب با $d\mathbf{x}$ (با مؤلفه‌های دکارتی $dx^۱$، $dx^۲$، $dx^۳$) و dt نمایش دهیم، دراین‌صورت $[(dx^۱)^۲+(dx^۲)^۲+(dx^۳)^۲]^{۱/۲}$ و dt به‌طور جداگانه ناوردا نیستند، بلکه عبارت زیر ناورداست

$$(ds)^۲ = c^۲(dt)^۲ - [(dx^۱)^۲ + (dx^۲)^۲ + (dx^۳)^۲] \qquad (۱)$$

که c ثابتی جهانی است (سرعت تابش الکترومغناطیسی در خلأ). تبدیلهایی‌که مختصات $x^۱$، $x^۲$، $x^۳$، و t ی یک ناظر را به‌مختصات ناظر دیگری مربوط می‌کنند، که نسبت به اولی حرکت یکنواخت نسبی دارد، به تبدیلهای لورنتس معروف‌اند و علاوه‌بر انتقال و چرخش شامل حرکت یکنواخت نسبی‌اند.

بنابراین، باید براین اساس تصورمان را ازکمیتهای نرده‌ای و بردارها تغییر دهیم. بعد ازاین، همان‌طور که قبلاً، در توصیف ریاضی پدیده‌های فیزیکی تأکید کردیم، نمی‌توانیم کمیتهایی را به‌کار ببریم که ویژگیهای ناوردایی لازم را ندارند. اگر مجموعهٔ تبدیلها را ازگالیله‌ای به لورنتس گسترش دهیم، تا همهٔ دستگاههای مرجع اینرسی را دربرگیرد، می‌بینیم که همهٔ آن کمیتهای برداری که در فیزیک نیوتونی با آنها سروکار داریم (مانند بردار مکان، سرعت، تکانهٔ خطی، تکانهٔ زاویه‌ای، میدان الکتریکی، القای مغناطیسی و غیره.) مقدار و جهت ناوردا ندارند. تعداد زیادی ازکمیتهای نرده‌ای نیز همین‌طورند.

بنابراین، برای اینکه با نظریهٔ نسبیت سازگار شویم، ناگزیریم مجموعه‌های ۴^r مؤلفه‌ای بیابیم که در قالب تبدیلهای لورنتس، براساس قوانین خاص تانسوری، تبدیل می‌شوند. به‌خصوص، مجموعه‌های مرتب از چهار جزء راکه بنابر قوانین برداری تبدیل می‌شوند، چاربردار (یا جهان بردار) می‌نامند، یعنی اینها علاوه‌بر اینکه بردارهای چهاربعدی‌اند، بردارهای فضای مینکوفسکی هستند (یعنی، بردارهایی که در قالب تبدیلهای لورنتس ویژگیهای ناوردا دارند). در زیر به تعدادی از این جهان بردارها اشاره می‌کنیم.

(الف) بازهٔ چاربردار- اگر x^i بردار مکان گالیله و t زمان باشد، بازهٔ چاربردار (ct, x^i) است که به‌صورت بازهٔ ناوردای ds درمی‌آید که در معادلهٔ (۱) تعریف کردیم. بهتر است $x^۰ = ct$ تعریف کنیم، به این ترتیب به‌سادگی می‌توانیم چاربردار را به‌صورت x^i با $i = ۰, ۱, ۲, ۳$ نشان دهیم.

(ب) چارسرعت. سرعت چاربردار، که به‌اختصار به چارسرعت معروف است، دارای مؤلفه‌های $(\gamma c, \gamma \mathbf{v})$ است، که $\mathbf{v}$ سرعت کلاسیکی است

$$\gamma = (۱ - v^۲/c^۲)^{-۱/۲} \qquad (۲)$$

و v مقدار (کلاسیکی) $\mathbf{v}$ است. چارسرعت را به‌صورت U^i نمایش می‌دهند با

$$U^\circ = \gamma c, \mathbf{U} = \gamma \mathbf{v} \tag{۳}$$

که $\mathbf{U} = (U^۱, U^۲, U^۳)$ است، کمیت ناوردا می‌شود

$$(U^\circ)^۲ - U^۲ = \gamma^۲ c^۲ - \gamma^۲ v^۲ = c^۲ \tag{۴}$$

که $U = |\mathbf{U}|$ است.

(ج) چارتکانه. تکانهٔ چاربردار مؤلفه‌های $(E/c, \mathbf{p})$ دارد که E انرژی و $\mathbf{p}$ تکانهٔ کلاسیکی است. با تعریف $p^\circ = E/c$ چارتکانه را می‌توان به‌صورت p^i با $i = \circ, ۱, ۲, ۳$ نشان داد. مقدار ناوردای مربوط به آن می‌شود $(p^\circ)^۲ - p^۲$ که $p = |\mathbf{p}|$ است. برای ذره‌ای با جرم سکون $m_\circ$ که با سرعت v در حرکت است، داریم

$$E = \gamma m_\circ c^۲, \mathbf{p} = \gamma m_\circ \mathbf{v} \tag{۵}$$

بنابراین

$$(p^\circ)^۲ - p^۲ = m_\circ^۲ c^۲ \tag{۶}$$

که به‌راستی ناورداست.

(د) جریان چاربردار. به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$J^i = (c\rho, \mathbf{J}) \tag{۷}$$

که ρ چگالی بار الکتریکی و $\mathbf{J}$ چگالی جریان الکتریکی است.

(ه) پتانسیل چاربردار. چنین تعریف می‌شود

$$A^i = (\Phi, \mathbf{A}) \tag{۸}$$

که Φ و $\mathbf{A}$ به‌ترتیب پتانسیل الکترودینامیکی کلاسیکی نرده‌ای و برداری است.

(و) بردار چارموج. عبارت است از

$$k^i = (\omega/c, \mathbf{k}) \tag{۹}$$

که ω بسامد زاویه‌ای و $\mathbf{K}$ بردار موج کلاسیکی یک موج است.

در نظریهٔ نسبیت خاص، اصطلاحاتی مانند "جهان نقطه"، "جهان خط" و "جهان بردار" کاملاً متداول است. همین‌طور، مناسب است اصطلاحاتی مانند نرده‌ای گالیله، بردار گالیله و جهان نرده‌ای را با معانی روشن معرفی کنیم، حال می‌توانیم ببینیم که هر جهان بردار از یک نرده‌ای گالیله و یک بردار گالیله ساخته می‌شود که به ترتیب مؤلفه‌های زمانی و مکانی جهان‌بردار را تشکیل می‌دهد. به‌عبارت دیگر، مؤلفهٔ زمانی چاربردار یک ناوردای گالیله و مؤلفهٔ مکانی آن یک بردار گالیله است.

جرم، انرژی، طول، بازهٔ زمانی و حجم نرده‌ایهای گالیله‌اند، اما جهان نرده‌ای نیستند. جالب است ببینیم کدام‌یک از کمیتهای فیزیکی جهان نرده‌ای‌اند. سرعت c تابش الکترومغناطیسی جهان‌نرده‌ای است، برای همهٔ ناظران یکسان است، بار الکتریکی نیز چنین است. باوجود این، چگالی بار الکتریکی ρ جهان نرده‌ای نیست، زیرا تعریف آن حجم را دربرمی‌گیرد. جرم سکون $m_\circ$ جسم (جرم جسم که ناظر ساکن نسبت به آن اندازه می‌گیرد) نیز جهان نرده‌ای است. بازهٔ ویژه‌زمان[1] جهان نرده‌ای مهمی است که چنین تعریف می‌شود

$$d\tau = dt/\gamma \qquad (۱۰)$$

که γ را در معادلهٔ (۲) تعریف کردیم. توجه کنید که این دقیقاً نتیجهٔ معادلهٔ (۱) است.

۲.۲۰ تبدیل لورنتس مختصات

فرض کنید چارچوب مرجع لخت $\mathbf{S}'$ نسبت به چارچوب مرجع لخت S با سرعت یکنواخت $\mathbf{v}$ حرکت کند. فرض کنید مختصات فضا_زمان نقطه‌ای در دو چارچوب $\mathbf{S}$ و $\mathbf{S}'$ نسبت به محورهای مختصات فضایی که در این دو چارچوب به‌ترتیب با یکدیگر موازی‌اند، به‌ترتیب x^i و $\overline{x}^i$ باشد، برای شروع، فرض می‌کنیم که سرعت نسبی با x^1 موازی باشد. دراین‌صورت تبدیل معروف لورنتس بین

---

۱. رک:

Goldstein, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed. (Narosa Publishing House, New Delhi, 1988), Section 7.5; K. C. Gupta, *Classical Mechanics of Particles and Rigid Bodies* (Wiley Eastern, New Delhi, 1988), Section 11.2; L. D. Landau and Lifshitz, E. M., *The Classical Theory of Fields* (Pergamon Press, Oxford, 1980), Section 3

دو چارچوب می‌شود

$$\begin{aligned} \overline{x}^{0} &= \gamma(x^{0} - \beta x^{1}) \\ \overline{x}^{1} &= \gamma(x^{1} - \beta x^{0}) \\ \overline{x}^{2} &= x^{2} \\ \overline{x}^{3} &= x^{3} \end{aligned} \tag{۱۱}$$

که

$$\beta = v/c, \qquad 0 \leq \beta < 1 \tag{۱۲}$$

سرعت نسبی کسری است. تبدیل وارون می‌شود

$$\begin{aligned} x^{0} &= \gamma(\overline{x}^{0} + \beta \overline{x}^{1}) \\ x^{1} &= \gamma(\overline{x}^{1} + \beta \overline{x}^{0}) \\ x^{2} &= \overline{x}^{2}, \qquad x^{3} = \overline{x}^{3} \end{aligned} \tag{۱۳}$$

که از تعویض مختصات خط‌دار و بدون خط و نشاندن $-\beta$ به‌جای β در معادلات (۱۱) به‌دست می‌آید.

اگر سرعت نسبی $\mathbf{v}$ی $\mathbf{S}'$ نسبت به $\mathbf{S}$ در جهتی دلخواه باشد، باید تبدیلهای معادلات (۱۱) را تعمیم دهیم. به‌این منظور بردار سرعت نسبی کسری را تعریف می‌کنیم.

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c \tag{۱۴}$$

که $\mathbf{v}$ در جهتی دلخواه است. باز هم محورهای مختصات را در دو چارچوب لخت موازی یکدیگر فرض می‌کنیم.

بر اولین معادله از معادلات (۱۱) تمرکز می‌کنیم که مختصهٔ زمان را در دستگاه $\mathbf{S}'$ می‌دهد. این معادله نشان می‌دهد که مختصهٔ زمان در $\mathbf{S}'$ در مقایسه با مختصهٔ زمان $\mathbf{S}$ تحت تأثیر اتساعی به‌اندازهٔ عامل γ قرار می‌گیرد و در دستگاه $\mathbf{S}$ نیز در نقطهٔ (x^{1}, x^{2}, x^{3}) دستخوش تأخیر $\gamma\beta x^{1}$ می‌شود. این اتساع زمانی از مکان در فضا و همچنین جهت سرعت نسبی مستقل است، اما از طریق γ تنها به مقدار سرعت نسبی بستگی دارد. بنابراین، اگر $\boldsymbol{\beta}$ در جهتی دلخواه باشد، بدون تغییر می‌ماند.

اما در عبارت تأخیر زمانی، یعنی $\gamma\beta x^1$، اشاره کردیم که $\boldsymbol{\beta}$ در امتداد x^1 است. در نتیجه، تأخیر زمانی تنها به x^1 بستگی دارد و از x^2 و x^3 مستقل است. اگر $\boldsymbol{\beta}$ با مؤلفه‌های β_1، β_2، β_3 جهتی دلخواه داشته باشد، آشکارا عبارت تأخیر زمانی برابر $\gamma(\beta_1 x^1 + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3) = \gamma\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x}$ می‌شود. این تنها عبارتی است که با حالتهای ویژه‌ای که $\boldsymbol{\beta}$ با هر یک از سه محور فضایی x^1، x^2 یا x^3 موازی است، سازگار است. بنابراین، تعمیم اولین معادله از معادلات (۱۱) برای $\boldsymbol{\beta}$ی دلخواه می‌شود

$$\overline{x}^0 = \gamma(x^0 - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x}) \qquad (۱۵)$$

به تبدیل مختصات فضایی می‌پردازیم، با دقت در سه معادلهٔ آخر معادلات (۱۱)، ملاحظه می‌کنیم که مختصات فضایی عمود بر سرعت نسبی تغییر نمی‌کند، در حالی‌که در تبدیل مختصهٔ موازی با آن دو عامل نقش دارد. در حالت $\boldsymbol{\beta}$ی دلخواه، قسمت اول به‌سادگی تعمیم پیدا می‌کند، با بیان اینکه مؤلفهٔ عمود بر $\boldsymbol{\beta}$ی بردار مکان $\mathbf{x}$ از S به S' تغییر نمی‌کند.

در شکل ۱.۲۰، مختصات فضایی S را نشان داده‌ایم. فرض کنید $\mathrm{OO'}$ جهت سرعت نسبی $\mathbf{v}$ بین S و S' باشد. فرض کنید رویدادی در نقطهٔ A با مختصات (t, x^1, x^2, x^3) در چارچوب S اتفاق افتد. بردار سه‌بعدی $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ می‌شود $\mathbf{x}$. فرض کنید AP عمودی از A بر امتداد سرعت نسبی باشد. حال $\mathbf{x}$ را می‌توان به دو مؤلفهٔ موازی با و متعامد بر $\mathbf{v}$ تجزیه کرد. به‌نحوی که

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \mathbf{x}_\parallel, \qquad \overrightarrow{\mathrm{PA}} = \mathbf{x}_\perp \qquad (\text{۱۶الف})$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_\parallel + \mathbf{x}_\perp \qquad (\text{۱۶ب})$$

همین‌طور $\overline{\mathbf{x}}$، بردار فضایی از $\mathrm{O'}$ به A که در $\mathrm{S'}$ اندازه‌گیری کردیم، به مؤلفه‌های زیر تجزیه می‌شود

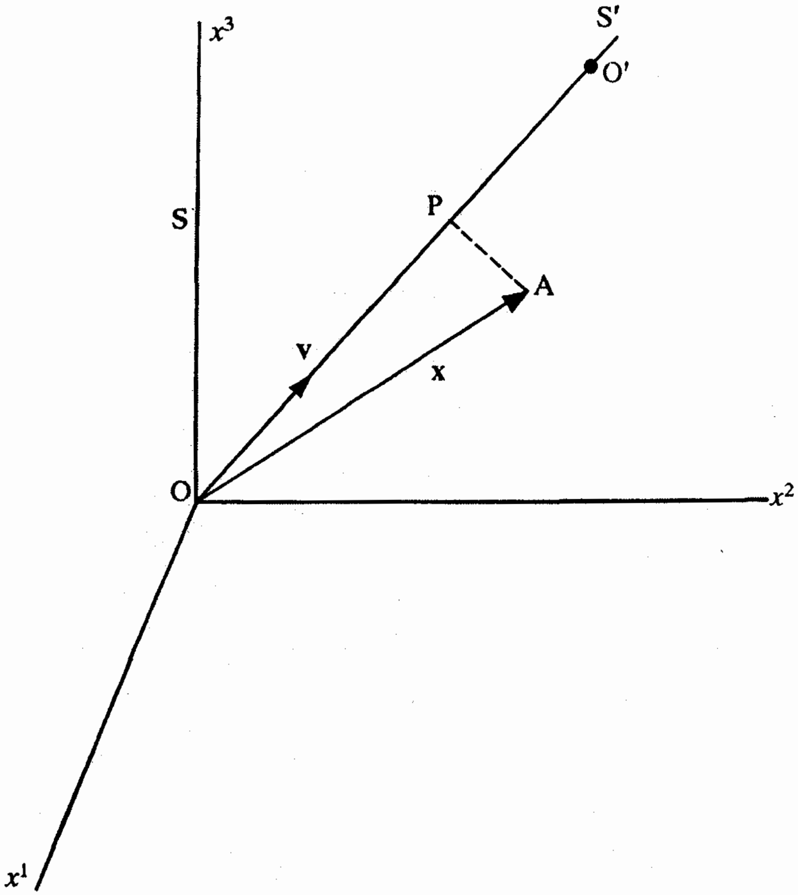
$$\overrightarrow{\mathbf{O'P}} = \overline{\mathbf{x}}_\parallel, \qquad \overrightarrow{\mathbf{PA}} = \overline{\mathbf{x}}_\perp \qquad (۱۷)$$

بنابراین، می‌بینیم که مؤلفهٔ فضایی عمود بر $\mathbf{v}$ ناوردا می‌ماند و داریم

$$\overline{\mathbf{x}}_\perp = \mathbf{x}_\perp \qquad (۱۸)$$

مؤلفهٔ موازی تبدیلی را در برمی‌گیرد که شامل عامل مقیاس‌بندی γ و تأخیری است، که با دومین معادلهٔ (۱۱) داده می‌شود، آن‌را می‌توان چنین نوشت

$$\overline{\mathbf{x}}_\parallel = \gamma(\mathbf{x}_\parallel - \boldsymbol{\beta} x^0) \qquad (۱۹)$$



شکل۱.۲۰ دستگاه S' با مبدأ O' با سرعت نسبی $\mathbf{v}$ در جهتی دلخواه نسبت به S در حرکت است.

با جمع کردن طرفهای متناظر معادلات (۱۸) و (۱۹)، داریم

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}_{\parallel} + \overline{\mathbf{x}}_{\perp} &= \gamma \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp} - \gamma \boldsymbol{\beta} x^{\circ} \\ &= \gamma \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel} - \gamma \boldsymbol{\beta} x^{\circ} \\ &= \mathbf{x} + (\gamma - ۱)\mathbf{x}_{\parallel} - \gamma \boldsymbol{\beta} x^{\circ} \qquad (۲۰)\end{aligned}$$

سرانجام، باید $\mathbf{x}_{\parallel}$ را برحسب $\mathbf{x}$ و $\boldsymbol{\beta}$ بیان کنیم. اگر $\mathbf{n}$ بردار یکه در امتداد $\mathbf{v}$ باشد، داریم

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}/v = \boldsymbol{\beta}/\beta \qquad (۲۱)$$

بنابراین

$$\mathbf{x}_{\parallel} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} = (\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}/\beta^{۲} \qquad (۲۲)$$

معادلهٔ (۲۰) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \frac{\gamma - ۱}{\beta^{۲}}(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}x^{\circ} \qquad (۲۳)$$

با ترکیب این معادله با معادلهٔ (۱۵)، می‌بینیم که تبدیل کامل مختصات فضازمان از S به S'، زمانی که سرعت نسبی در جهتی دلخواه است، با معادلات زیر داده می‌شود

$$\overline{x}^{\circ} = \gamma(x^{\circ} - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x})$$

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + [(\gamma - ۱)/\beta^{۲}](\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}x^{\circ} \qquad (۲۴)$$

۳.۲۰ تبدیل چاربردار

در مکانیک نیوتونی کلیهٔ بردارها، همچون بردار مکان، تحت تأثیر تبدیل یکسانی در قالب تبدیلهای گالیله قرار می‌گیرند. به همین ترتیب، در سینماتیک نسبیت خاص، همهٔ چاربردارها، همانند چاربردار فضا_زمان، در تبدیلهای لورنتس تحت تأثیر تبدیل مشابهی قرار می‌گیرند.

فرض کنید $(A^{\circ}, A^{۱}, A^{۲}, A^{۳})$ چاربرداری دلخواه، نسبت به چارچوب S باشد، به‌نحوی که A° نرده‌ای گالیله و $A^{۱}$، $A^{۲}$، $A^{۳}$ مؤلفه‌های بردار گالیلهٔ $\mathbf{A}$ باشند. فرض کنید $(\overline{A}^{\circ}, \overline{A}^{۱}, \overline{A}^{۲}, \overline{A}^{۳})$ نسبت به چارچوب S' چاربردار مشابهی را نشان دهد. اگر $\mathbf{A}_{\parallel}$ و $\mathbf{A}_{\perp}$، مؤلفه‌های $\mathbf{A}$، به‌ترتیب، موازی با و عمود بر سرعت نسبی β باشند، دراین‌صورت مؤلفه‌های این چاربردار، بنابر معادلات زیر تبدیل می‌شوند

$$\overline{A}^{\circ} = \gamma(A^{\circ} - \beta\cdot\mathbf{A}) \qquad (۲۵\text{الف})$$

$$\overline{\mathbf{A}}_{\parallel} = \gamma(\mathbf{A}_{\parallel} - \beta A^{\circ}) \qquad (۲۵\text{ب})$$

$$\overline{\mathbf{A}}_{\perp} = \mathbf{A}_{\perp} \qquad (۲۵\text{ج})$$

یا با ترکیب دو معادلهٔ آخر، همانند معادلهٔ (۲۳)، داریم

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + [(\gamma - ۱)/\beta^{۲}](\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}A^{\circ} \qquad (۲۵\text{د})$$

علاوه‌براین، اگر $(A^\circ, \mathbf{A})$ و $(B^\circ, \mathbf{B})$ دو چاربردار باشند، حاصلضرب نرده‌ای یا داخلی آنها چنین تعریف می‌شود $A^\circ B^\circ - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$.

مثال ۱. ثابت کنید که حاصلضرب نرده‌ای دو چاربردار یک ناوردای لورنتس است.

حل: فرض کنید $(A^\circ, \mathbf{A})$ و $(B^\circ, \mathbf{B})$ در چارچوب S دو چاربردار با مؤلفه‌های متناظر خط‌دار در چارچوب S' باشند. حال باید ثابت کنیم که

$$\overline{A}^\circ \overline{B}^\circ - \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}} = A^\circ B^\circ - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \tag{۲۶}$$

با استفاده از معادلات (۲۵) در سمت چپ معادلهٔ بالا، داریم

$$\begin{aligned}\overline{A}^\circ \overline{B}^\circ - \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}} &= \overline{A}^\circ \overline{B}^\circ - \overline{\mathbf{A}}_\parallel\cdot\overline{\mathbf{B}}_\parallel - \overline{\mathbf{A}}_\perp\cdot\overline{\mathbf{B}}_\perp \\ &= \gamma^۲(A^\circ - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{A})(B^\circ - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{B}) \\ &\quad - \gamma^۲(\mathbf{A}_\parallel - \boldsymbol{\beta}A^\circ)\cdot(\mathbf{B}_\parallel - \boldsymbol{\beta}B^\circ) - \mathbf{A}_\perp\cdot\mathbf{B}_\perp\end{aligned} \tag{۲۷}$$

با توجه به اینکه $\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{A} = \beta A_\parallel$، ...، داریم

$$\overline{A}^\circ \overline{B}^\circ - \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}} = \gamma^۲(۱-\beta^۲)A^\circ B^\circ - \gamma^۲(۱-\beta^۲)\mathbf{A}_\parallel\cdot\mathbf{B}_\parallel - \mathbf{A}_\perp\cdot\mathbf{B}_\perp \tag{۲۸}$$

سرانجام، با توجه به معادلهٔ (۲) و معادلهٔ (۱۲)، داریم

$$\gamma^۲(۱-\beta^۲) = ۱ \tag{۲۹}$$

بنابراین، داریم

$$\begin{aligned}\overline{A}^\circ \overline{B}^\circ - \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}} &= A^\circ B^\circ - \mathbf{A}_\parallel\cdot\mathbf{B}_\parallel - \mathbf{A}_\perp\cdot\mathbf{B}_\perp \\ &= A^\circ B^\circ - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\end{aligned} \tag{۳۰}$$

که نتیجهٔ مطلوب را ثابت می‌کند.

به‌خصوص "اندازهٔ" ناوردای چاربردار از معادلهٔ (۳۰)، به‌عنوان حالت ویژه، به‌دست می‌آید و می‌بینیم که $|\overline{\mathbf{A}}|^۲ - {}^۲(\overline{A}^\circ)$ می‌شود، بنابراین به‌شرط ناوردایی زیر می‌رسیم

$$(\overline{A}^\circ)^۲ - |\overline{\mathbf{A}}|^۲ = (A^\circ)^۲ - |\mathbf{A}|^۲ \tag{۳۱}$$

۴.۲۰ ویژگیهای ریاضی دیگر

متریک در فضای مینکوفسکی از معادلهٔ (۱) به‌دست می‌آید. مقایسهٔ معادلهٔ (۱) با معادلهٔ (۱.۱۸) نشان می‌دهد که تانسور متریک این فضا با دستگاه مختصات انتخابی می‌شود

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} ۱ & & & \circ \\ & -۱ & & \\ & & -۱ & \\ \circ & & & -۱ \end{bmatrix} \qquad \text{(۳۲الف)}$$

یا

$$g_{\circ\circ} = ۱, \quad g_{۱۱} = g_{۲۲} = g_{۳۳} = -۱, \quad g_{ij} = \circ \quad i \neq j \qquad \text{(۳۲ب)}$$

از معادلهٔ (۱۸.۱۸) و مطالبی که به دنبال آن آمد، تانسور متریک پادوردا را چنین می‌یابیم

$$g^{ij} = g_{ij} \qquad (۳۳)$$

بنابراین، چاربردار پادوردا از دستگاه مختصات x^i به دستگاه مختصات دیگر $\overline{x}^\alpha$، بنابر معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$\overline{A}^\alpha = \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i} A^i \qquad (۳۴)$$

اگر $(A^\circ, A^۱, A^۲, A^۳)$ مؤلفه‌های پادوردای A^i باشند، مؤلفه‌های هموردای A_i از معادلهٔ (۲۱.۱۸)، با پایین آوردن اندیس به‌دست می‌آید. با استفاده از تانسور متریک معادلات (۳۲)، می‌بینیم که

$$A_\circ = A^\circ, \quad A_۱ = -A^۱, \quad A_۲ = -A^۲, \quad A_۳ = -A^۳ \qquad (۳۵)$$

با توجه به اینکه $A^۱$، $A^۲$، $A^۳$ مؤلفه‌های بردار گالیلهٔ $\mathbf{A}$ هستند و A° نرده‌ای گالیله است؛ مؤلفه‌های پادوردا و هموردای چاربردار را دقیقاً می‌توانیم چنین بنویسیم

$$A^i = (A^\circ, \mathbf{A}), \quad A_i = (A^\circ, -\mathbf{A}) \qquad (۳۶)$$

حاصلضرب نرده‌ای دو چاربردار A^i و B_i می‌شود

$$A \cdot B \equiv A^i B_i = A^{\circ} B^{\circ} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \tag{۳۷}$$

اکنون باید عملگر دیفرانسیل را در فضازمان چهاربعدی درنظر بگیریم. با استفاده از قاعدهٔ زنجیری مشتق‌گیری جزئی، داریم

$$\frac{\partial}{\partial \overline{x}^{\alpha}} = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{۳۸}$$

مقایسهٔ این معادله با معادلهٔ (۲۸.۱۵) نشان می‌دهد که $\partial/\partial x^i$ عملگر برداری همورداست. مؤلفه‌های این عملگر عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^i} &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^{\circ}}, \frac{\partial}{\partial x^{۱}}, \frac{\partial}{\partial x^{۲}}, \frac{\partial}{\partial x^{۳}}\right)\\ &= \left(\frac{۱}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^{۱}}, \frac{\partial}{\partial x^{۲}}, \frac{\partial}{\partial x^{۳}}\right)\end{aligned} \tag{۳۹}$$

با توجه به اینکه سه مؤلفهٔ آخر دقیقاً عملگرگرادیان گالیلهٔ ∇ را تشکیل می‌دهند، می‌توانیم بنویسیم

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\circ}}, \nabla\right) \tag{۴۰الف}$$

سپس با استفاده از معادلهٔ (۳۶)، عملگر برداری پادوردا را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$\partial^i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\circ}}, -\nabla\right) \tag{۴۰ب}$$

که، داریم

$$x_i = g_{ij} x^j \tag{۴۱}$$

بنابراین، به‌ازای $i = ۱, ۲, ۳$، $x_{\circ}$ مساوی x° و x_i مساوی $-x^i$ می‌شود.

چارگرادیان میدان نرده‌ای ϕ به‌سادگی می‌شود $\partial_i \phi$ یا $\partial^i \phi$، بسته به حالتی که وجود دارد. چار واگرایی چاربردار می‌شود

$$\partial^i A_i = \partial_i A^i = \frac{\partial A^{\circ}}{\partial x^{\circ}} + \nabla \cdot \mathbf{A} \tag{۴۲}$$

که نرده‌ای است (یعنی، ناوردای لورنتس). سرانجام، عملگر لاپلاسی چهاربعدی چنین تعریف می‌شود

$$\Box = \partial_i \partial^i = \left(\frac{\partial}{\partial x^\circ}\right)^۲ - \nabla^۲ \qquad (۴۳)$$

که عملگری است که در معادلهٔ موج ظاهر می‌شود و به عملگر دالامبری معروف است.

۵.۲۰ ناوردایی لورنتس و قوانین فیزیکی

در بخش (۷.۱۵) دربارهٔ منطقی که در پس اصل ناوردایی گالیله وجود دارد، بحث کردیم. آنجا ساختار اساسی چند قانون فیزیکی را در حوزهٔ کلاسیکی غیرنسبیتی با چند مثال به‌دست آوردیم. در اینجا چند مثال را درنظر می‌گیریم که ناگزیریم از چاربردار و ناوردایی لورنتس[۱] استفاده کنیم.

در مثالهای زیر، صورت لاگرانژی را به‌دست می‌آوریم، برای (الف) ذرهٔ آزاد متحرک، و (ب) ذره‌ای باردار در میدان الکترومغناطیسی. کنش کلی A بین دو نقطه برای ذره‌ای که در امتداد یک مسیر حرکت می‌کند، با انتگرال کنش زیر داده می‌شود

$$A = \int_{\tau_۱}^{\tau_۲} \gamma L \, d\tau \qquad (۴۴)$$

که L لاگرانژی و τ ویژه‌زمان با دو مقدار خاص $\tau_۱$ و $\tau_۲$ در دو نقطهٔ مسیر است. مسیر ذره بین دو نقطه با این شرط تعیین می‌شود که انتگرال کنش فرین باشد، با وجود این، فعلاً به این جنبهٔ آن توجهی نداریم. می‌خواهیم شکل لاگرانژی را به‌دست آوریم.

هم انتگرال کنش A و هم ویژه‌زمان τ ناورداهای لورنتس‌اند. بنابراین، از معادلهٔ (۴۴) برمی‌آید که حاصلضرب γL جهان نرده‌ای باشد.

مثال ۲. لاگرانژی ذرهٔ آزاد: لاگرانژی به کدام‌یک از پارامترهای موجود بستگی دارد؟ ذره در غیاب نیروهای خارجی حرکت خطی یکنواخت دارد. لاگرانژی چنین ذره‌ای به‌جرم و سرعت آن بستگی دارد و از مختصات فضازمان آن مستقل است. جرم ذره جهان نرده‌ای نیست، هر چند جرم

---

۱. سه مثال یادشده براساس مقالهٔ زیرند:

Joshi, A. W., Scalars and vectors in four-dimensional spacetime, "*Bull. Ind. Assoc. Phys. Teachers* 4, 211 (1987).

سکون آن چنین است. تنها کمیت ناوردا که از چارسرعت U^i آن تشکیل می‌شود، عبارت است از $U^iU_i = c^2$ (معادلهٔ ۴).

چون لاگرانژی ابعاد انرژی دارد، جرم سکون تنها به‌صورت خطی در ترکیب با c^2 ظاهر می‌شود تا ابعاد صحیح را به‌دست دهد. بنابراین، بجز عوامل ثابت، صورت یکتایی برای لاگرانژی به‌دست می‌آوریم، که می‌شود

$$\gamma L_{\mathrm{f}} = km_\circ U^iU_i \Rightarrow L_{\mathrm{f}} = km_\circ c^2(1-\beta^2)^{1/2} \qquad (۴۵)$$

که k ثابت است (بنابر قرارداد، $k = -1$ است) و L_{f} نمایانگر لاگرانژی[1] ذره‌ای آزاد است.

مثال ۳. لاگرانژی ذره‌ای آزاد در میدانهای الکترومغناطیسی: میدان الکترومغناطیسی که آن‌را با پتانسیل چاربردار A^i توصیف کردیم (معادلهٔ ۸)، صرفاً جملهٔ L_{em} را، به علت برهم‌کنش میدان با ذره ایجاد می‌کند که با لاگرانژی ذرهٔ آزاد معادلهٔ (۴۵) جمع می‌شود، به‌نحوی که داریم

$$L = L_{\mathrm{f}} + L_{\mathrm{em}} \qquad (۴۶)$$

زیرا، با ضعیف شدن میدان الکترومغناطیسی لاگرانژی کامل L باید به L_{f} کاهش یابد. بنابراین، کار ما به‌دست آوردن شکل L_{em} است.

به‌حالت حدی دیگری نیاز داریم، که مربوط به ذرهٔ باردار با سرعت کم در حضور پتانسیل A^i است (حد غیرنسبیتی). همچنان‌که سرعت بار q به صفر میل می‌کند، برهم‌کنش آن با میدان مغناطیسی (و در نتیجه، پتانسیل برداری $\mathbf{A}$) کاهش می‌یابد و برهم‌کنش تحت تأثیر میدان الکتریکی (یا پتانسیل نرده‌ای Φ) قرار می‌گیرد. بنابراین، در حالت حدی، L_{em} فقط $-q\Phi$ می‌شود (علامت منفی ناشی از این واقعیت است که لاگرانژی $T - V$ است، که T انرژی جنبشی و $V = q\Phi$ انرژی پتانسیل است). پس، L_{em} نسبیتی، با توجه به اینکه سرعت vی ذره به صفر میل می‌کند، $-q\Phi$ می‌شود.

---

۱. ر.ک:

Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, 2nd ed (Wiley Eastern, New Delhi, 1978), Section 12.1; K. C. Gupta, *Classical Mechanics of particles and Rigid Bodies* (Wiley Eastern, New Delhi, 1988), Section 12.3; H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd ed. (Narosa Publishing, New Delhi, 1988), Section 7.8.

همچنین ملاحظه می‌کنیم که L_{em} به چاربردار سرعت U^i و پتانسیل چاربردار A^i بستگی دارد. تنها ناوردای لورنتس که از اینها تشکیل می‌شود، U^iA_i است. بنابراین، نیاز داریم که γL_{em} با q و U^iA_i متناسب باشد، که می‌دهد

$$\gamma L_{\text{em}} = kqU^iA_i = kq(U^\circ A^\circ - \mathbf{U}\cdot\mathbf{A}) = kq\gamma(c\Phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) \qquad (۴۷)$$

که k ثابت است. در نتیجه

$$L_{\text{em}} = kq(c\Phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) \qquad (۴۸)$$

حالت حدی $v \to \circ$ با نتیجهٔ پیش‌بینی شده سازگار است، چنانچه k برابر $-۱/c$ انتخاب شود. در نتیجه داریم

$$L_{\text{em}} = -q\Phi + (q/c)\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} \qquad (۴۹)$$

بنابراین لاگرانژی کامل می‌شود

$$L = -m_\circ c^۲(۱-\beta^۲)^{۱/۲} - q\Phi + (q/c)\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} \qquad (۵۰)$$

در نمادگذاری فضازمان چهاربعدی، داریم

$$\gamma L = -m_\circ U^iU_i - (q/c)U^iA_i \qquad (۵۱)$$

مثال ۴. معادلهٔ دیراک برای یک الکترون: معادلهٔ شرودینگر در قالب تبدیلهای گالیله ناورداست، اما در قالب تبدیلهای لورنتس چنین نیست. بنابراین، نتایجی که از معادلهٔ شرودینگر به‌دست می‌آید در چارچوبهای مرجع متفاوت معتبر نیست. نسبیت خاص در حوزهٔ سرعتهای زیاد از مکانیک کلاسیک جدا می‌شود و مکانیک کوانتومی در حوزهٔ اجسام میکروسکوپی از مکانیک کلاسیک فاصله می‌گیرد.

دیراک این دو جنبه را ادغام کرد و معادله‌ای به‌دست آورد که الکترون میکروسکوپی را توصیف می‌کرد و همزمان در قالب تبدیلهای لورنتس ناوردا بود. او دقیقاً منطق بالا را به‌کار گرفت و ضروری دانست که هامیلتونی الکترون، نرده‌ای لورنتسی باشد. در اینجا نیازی نیست که به جزئیات بیشتر

بپردازیم. با وجود این، می‌شود گفت، به‌علت این تفاوت (بین ناوردایی لورنتسی و گالیله) معادلهٔ دیژاک هم مطرحتر است و هم از نظر مفهومی و زیبایی از معادلهٔ شرودینگر زیباتر و قانع‌کننده‌تر است.

تمرین

۱.۲۰ تبدیل زیر را از مختصات (r,θ,ϕ,ψ) به (x^0,x^1,x^2,x^3) در فضای مینکوفسکی درنظر بگیرید

$$
\begin{aligned}
x^0 &= r\cosh\psi \\
x^1 &= r\ \sin\theta\ \cos\phi\sinh\psi \\
x^2 &= r\ \sin\theta\ \sin\phi\sinh\psi \\
x^3 &= r\ \cos\theta\sinh\psi
\end{aligned}
$$

(الف)* با استفاده از متریک معادلهٔ (۱)، متریک را برحسب (r,θ,ϕ,ψ) بیابید. (ب) تبدیل وارون را بیابید که (r,θ,ϕ,ψ) را برحسب (x^0,x^1,x^2,x^3) به‌دست می‌دهد.

۲.۲۰ (الف) تبدیل نسبیتی مختصات فضازمان دو دستگاه لختی که سرعت نسبیشان موازی محور x^1 است، عبارت است از

$$
\begin{aligned}
&\overline{x}^0 = \gamma_1(x^0-\beta_1 x^1), \qquad \overline{x}^1 = \gamma_1(x^1-\beta_1 x^0) \\
&\overline{x}^2 = x^2, \overline{x}^3 = x^3
\end{aligned}
$$

که $\beta_1 = v_1/c$ و $\gamma_1 = (1-\beta_1^2)^{-1/2}$ و v_1 سرعت نسبی دو چارچوب است (معادلات (۱۱)). اگر چاربردار مختصات را به‌صورت بردارهای ستونی بیان کنیم، داریم

$$\mathbf{x} = \{x^0,x^1,x^2,x^3\}, \overline{\mathbf{x}} = \{\overline{x}^0,\overline{x}^1,\overline{x}^2,\overline{x}^3\}$$

این تبدیل را از طریق معادلهٔ ماتریسی به‌صورت زیر بنویسید

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1\mathbf{x}$$

و $\mathbf{A}_1$ را به‌دست آورید.

(ب) فرض کنید دستگاه لختی سومی نسبت به دومی سرعت نسبی $v_۲$، در همان جهت $v_۱$ داشته باشد. تبدیل مختصاتی را می‌شود چنین نوشت

$$\bar{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_۲\bar{\mathbf{x}}$$

تبدیل از دستگاه اول به سوم را به‌دست آورید

$$\bar{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_۳\mathbf{x}$$

(ج) حال، قانون جمع نسبیتی سرعتها را به‌دست آورید.
[راهنمایی: با انتخاب $\gamma_۱ = \cosh\theta_۱$، $\mathbf{A}_۱$ را برحسب $\theta_۱$؛ همین‌طور $\mathbf{A}_۲$ را برحسب $\theta_۲$ بیان کنید. این انتخاب حاصلضرب ماتریسی را ساده می‌کند.]

۲۱

فرمولبندی هموردای الکترودینامیک

در فصل قبل، دیدیم که مجموعه‌های مرتب چهار کمیتی می‌توان یافت که مانند تانسورهای رتبهٔ ۱ در قالب تبدیلهای لورنتس تبدیل شوند. هر یک از این چاربردارها از یک نرده‌ای گالیله و یک بردار گالیله ساخته می‌شود.

میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ و میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ نیز بردارهای گالیله‌اند. اما نمی‌توان نرده‌ای گالیله‌ای یافت که همراه با $\mathbf{E}$ یا $\mathbf{B}$ چاربردار تشکیل بدهد. در واقع می‌بینیم که خود $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ در قالب تبدیلهای لورنتس با یکدیگر می‌آمیزند.

در زمینهٔ فیزیکی، این مطلب را می‌توان به‌صورت زیر دریافت. فرض کنید چند بار الکتریکی ساکن در چارچوب S وجود دارد. دراین‌صورت برای ناظری ساکن در S، میدان الکتریکی هست، اما میدان مغناطیسی وجود ندارد. اما در چارچوب S' که نسبت به S با سرعت یکنواخت در حرکت است، به‌نظر می‌رسد که بارها در حرکت باشند و هم در ایجاد $\mathbf{E}$ و هم $\mathbf{B}$ سهیم باشند. بنابراین، $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$، همچون توصیف کلاسیکی الکترودینامیک، در معادلات نظریهٔ نسبیت خاص به‌طور جداگانه ظاهر نمی‌شوند.

ثابت می‌شود که می‌توان هر یک از سه مؤلفهٔ $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ را با یکدیگر ترکیب کرد تا تانسور رتبهٔ دومی در فضازمان چهاربعدی تشکیل داد. سپس می‌توان کل الکترودینامیک را، شامل معادلات ماکسول، برحسب این تانسور رتبهٔ دو فرمولبندی کرد، به‌نحوی که این معادلات، به‌طور صریح، در قالب تبدیلهای لورنتس ناوردا باشند. این کار به فرمولبندی هموردای الکترودینامیک معروف است.

۱.۲۱ پیمانهٔ لورنتس

چنانچه Φ و $\mathbf{A}$ به‌ترتیب، پتانسیلهای نرده‌ای و برداری باشد، شرط پیمانهٔ لورنتس چنین می‌شود

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{۱}$$

$(\Phi, \mathbf{A})$ را پتانسیل چاربردار A^i می‌گیریم، با توجه به اینکه $ct = x^0$ است و با دقت در معادلهٔ (۲۰.۴۰الف)، درمی‌یابیم که شرط لورنتس را می‌توان به‌صورت هموردای زیر نوشت

$$\partial_i A^i = 0 \tag{۲}$$

معادلهٔ پیوستگی برای چگالی بار الکتریکی $\rho(\mathbf{x}, t)$ و چگالی جریان الکتریکی $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ را که عبارت است از

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{۳}$$

می‌توان برحسب جریان چاربردار J^i به‌صورت هموردای زیر نوشت

$$\partial_i J^i = 0 \tag{۴}$$

در پیمانهٔ لورنتس، پتانسیلهای نرده‌ای و برداری در معادلات موج صدق می‌کنند:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \tag{۵الف}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = 4\pi\rho \tag{۵ب}$$

با استفاده از معادلهٔ (۲۰.۴۳)، معادلات بالا را می‌توان به‌صورت تک معادلهٔ هموردای زیر ترکیب کرد

$$\Box A^i = \frac{4\pi}{c} J^i \tag{۶}$$

معادلات (۲)، (۴) و (۶) معادلات پایهٔ پیمانهٔ لورنتس‌اند.

۲.۲۱ تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی

در پیمانهٔ لورنتس، معادلات مربوط به میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، برحسب پتانسیلهای نرده‌ای و برداری عبارت‌اند از

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\Phi \qquad \text{(۷الف)}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \text{(۷ب)}$$

مؤلفه‌های x معادلات بالا را می‌توانیم با استفاده از معادلهٔ(۲۰.۴۰ب) چنین بنویسیم[1]

$$E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0) \qquad \text{(۸الف)}$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) \qquad \text{(۸ب)}$$

این شکل از E_x و B_x ایجاب می‌کند که تانسور رتبهٔ دویی تعریف کنیم:

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i \qquad (۹)$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد F^{ij} تانسوری پادمتقارن است،

$$F^{ij} = -F^{ji} \qquad (۱۰)$$

بنابراین، اجزای قطری F^{ij} صفر می‌شوند. در معادلهٔ (۹)، اگر $j = 0$ و $i = 1, 2, 3$ انتخاب شود، از معادلهٔ (۸الف) می‌بینیم که

$$F^{10} = E_x, \qquad F^{20} = E_y, \qquad F^{30} = E_z \qquad (۱۱)$$

علاوه‌براین، اگر مقدارهای زوج اندیس (i, j) را $(1, 2)$، $(2, 3)$، $(3, 1)$ برگزینیم، از معادلهٔ (۸ب) می‌بینیم که

$$F^{12} = -B_z, \qquad F^{23} = -B_x, \qquad F^{31} = -B_y \qquad (۱۲)$$

---

۱. مؤلفه‌های $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ را با E_x، E_y، E_z، ... نشان می‌دهیم، نه با E^1، E^2، E^3، ...، زیرا $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ بخشهایی از چاربردار نیستند.

بنابراین، تانسور F^{ij} می‌شود[1]

$$F^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱۳)$$

که به تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی معروف است. معادلهٔ (۱۳) F^{ij} را به‌طور صریح، برحسب $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ به‌دست می‌دهد، درحالی‌که معادلهٔ (۹) F^{ij} را، برحسب پتانسیلهای نرده‌ای و برداری Φ و $\mathbf{A}$ می‌دهد.

تانسور هموردای شدت میدان را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$F_{ij} = g_{ik}g_{jl}F^{kl} \qquad (۱۴)$$

با یادآوری اینکه g_{ij} از معادلات (۳۲.۲۰) به‌دست می‌آید و قطری است، داریم

$$F_{ij} = g_{ii}g_{jj}F^{ij} \quad \text{(مجموع‌یابی انجام نمی‌شود)} \qquad (۱۵)$$

معادلهٔ بالا می‌دهد

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱۶)$$

اغلب به تانسور دوگان شدت میدان $\mathcal{F}^{ij}$ نیز نیاز داریم که چنین تعریف می‌شود

$$\mathcal{F}^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijkl}F_{kl} \qquad (۱۷)$$

که ε^{ijkl} تانسور تماماً پادمتقارن رتبهٔ چهار است. با دادن مقدارهای متوالی ۰، ۱، ۲، ۳ به i و j،

---

۱. توجه کنید که در اینجا سطرها و ستونهای F^{ij} با ۰، ۱، ۲ و ۳ شمارش می‌شوند.

مؤلفه‌های این تانسور به‌سادگی یافت می‌شوند، داریم

$$\mathcal{F}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱۸)$$

توجه کنید که اجزای $\mathcal{F}^{ij}$ با گذاشتن $\mathbf{B}$ به‌جای $\mathbf{E}$ و $-\mathbf{E}$ به‌جای $\mathbf{B}$ در F^{ij} به‌دست می‌آیند.

۳.۲۱ معادلات ماکسول

چهار معادلهٔ ماکسول، برحسب $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ (با یکاهای گاؤسی) عبارت‌اند از

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad (۱۹\text{الف})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \qquad (۱۹\text{ب})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (۱۹\text{ج})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \qquad (۱۹\text{د})$$

دو معادلهٔ اول بالا، معادلات ناهمگن‌اند و در طرف راست، شامل مؤلفه‌های چاربردار J^i می‌شوند. دو معادلهٔ آخر همگن‌اند.

ابتدا معادلات ناهمگن را درنظر می‌گیریم. چنانچه آنها را به‌صورت صریح بنویسیم، معادلهٔ (۱۹الف) می‌شود

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho \qquad (۲۰)$$

با استفاده از معادلات (۱۳) و (۲۰.۴۰الف)، معادلهٔ بالا را می‌توان چنین نوشت

$$\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{4\pi}{c}J^0$$

یا

$$\partial_i F^{i0} = \frac{4\pi}{c}J^0 \qquad (۲۱)$$

از این واقعیت بهره برده‌ایم که $F^{\circ\circ} = \circ$ است. مؤلفهٔ x معادلهٔ (۱۹ب) را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{۱}{c}\,\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{۴\pi}{c}J_x \tag{۲۲}$$

بار دیگر، برحسب عملگر دیفرانسیلی هموردای ∂_i و تانسور F^{ij}، آن‌را چنین می‌نویسیم

$$\partial_۲ F^{۲۱} + \partial_۳ F^{۳۱} + \partial_\circ F^{\circ ۱} = \frac{۴\pi}{c}J^۱$$

یا

$$\partial_i F^{i۱} = \frac{۴\pi}{c}J^۱ \tag{۲۳}$$

زیرا $F^{۱۱} = \circ$ است. مؤلفه‌های y و z معادلهٔ (۱۹ب) مشابه معادلهٔ (۲۳) یافت می‌شوند، به‌طوری که به‌جای اندیس بالایی ۱ به‌ترتیب ۲ و ۳ می‌نشینند. بنابراین، همراه با معادلهٔ (۲۱) می‌بینیم که معادلات ناهمگن ماکسول را می‌توان به‌صورت تک‌معادله‌ای تانسوری درآورد

$$\partial_i F^{ij} = \frac{۴\pi}{c}J^j \tag{۲۴}$$

که نمایندهٔ مجموعه‌ای از چهار معادلهٔ بالاست، زیرا اندیس آزاد j مقدارهای ۰، ۱، ۲، ۳ را می‌گیرد.

به معادلات همگن می‌رسیم، می‌بینیم که معادلهٔ (۱۹ج) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \circ \tag{۲۵}$$

آن‌را برحسب تانسورهای F^{ij} یا $\mathcal{F}^{ij}$ می‌توان چنین نوشت

$$\partial_۱ F^{۳۲} + \partial_۲ F^{۱۳} + \partial_۳ F^{۲۱} = \circ \tag{۲۶}$$

و

$$\partial_۱ \mathcal{F}^{۱\circ} + \partial_۲ \mathcal{F}^{۲\circ} + \partial_۳ \mathcal{F}^{۳\circ} = \circ \tag{۲۷الف}$$

یا

$$\partial_i \mathcal{F}^{i\circ} = \circ \tag{۲۷ب}$$

مؤلفهٔ x معادلهٔ (۱۹د) می‌شود

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \tag{۲۸}$$

که برحسب تانسورهای میدان، به‌صورت زیر در می‌آید

$$\partial_2 F^{30} + \partial_3 F^{02} + \partial_0\, F^{32} = 0 \tag{۲۹}$$

و

$$\partial_i \mathcal{F}^{i1} = 0 \tag{۳۰}$$

تعمیم آن، برحسب تانسور دوگان شدت میدان بی‌درنگ به‌دست می‌آید و نتیجه می‌دهد

$$\partial_i \mathcal{F}^{ij} = 0 \tag{۳۱}$$

که با معادلات (۱۹ج) و (۱۹د) هم‌ارز است.

درحالی‌که در معادلهٔ (۲۶) اندیسهای ۱، ۲، ۳ به‌صورت چرخه‌ای در سه جمله ظاهر می‌شوند، می‌بینیم که اندیسهای ۰، ۲، ۳ در معادلهٔ (۲۹) به‌صورت چرخه‌ای ظاهر نمی‌شوند، که علت آن جملهٔ سوم است.

برای تصحیح آن، عملگر مشتق‌گیری پادوردا را به‌جای عملگر هموردا انتخاب می‌کنیم، به‌نحوی که معادلهٔ (۲۹) می‌شود

$$\partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} + \partial^0\, F^{23} = 0 \tag{۳۲}$$

که اندیسهای ۰، ۲، ۳ در سه جمله به‌صورت چرخه‌ای ظاهر می‌شوند. این تغییر بر معادلهٔ (۲۶) تأثیر نمی‌گذارد، زیرا که در آن همهٔ جملات در ۱− ضرب می‌شوند. بنابراین معادلهٔ (۲۶) می‌شود

$$\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0 \tag{۳۳}$$

معادلات (۳۲) و (۳۳) تعمیم زیر را ایجاب می‌کند

$$\partial^i F^{jk} + \partial^i F^{ki} + \partial^k F^{ij} = 0 \tag{۳۴}$$

که i، j، k هر یک از مقدارهای ممکن ۰، ۱، ۲، ۳ را می‌گیرد. همچنین می‌توان دید که معادلهٔ (۳۴) نشان‌دهندهٔ مؤلفه‌های y و z معادلهٔ (۱۹د) است.

به‌این ترتیب، برای اختصار، معادلات ماکسول را می‌توان به‌صورت هموردای زیر نوشت

$$\begin{aligned} \partial_i F^{ij} &= \frac{۴\pi}{c} J^j \\ \partial_i \mathcal{F}^{ij} &= ۰ \end{aligned} \tag{۳۵}$$

یا

$$\begin{aligned} \partial_i F^{ij} &= \frac{۴\pi}{c} J^j \\ \partial^i F^{jk} + \partial^j F^{ki} + \partial^k F^{ij} &= ۰ \end{aligned} \tag{۳۶}$$

۴.۲۱ تبدیل میدانهای الکترومغناطیسی

تانسور رتبهٔ دو شدت میدان الکترومغناطیسی در قالب تبدیلهای لورنتس به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\overline{F}^{\alpha\beta} = \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \overline{x}^\beta}{\partial x^j} F^{ij} \tag{۳۷}$$

در آغاز، فرض می‌کنیم که سرعت نسبی موازی محور $x^۱$ باشد. بنابراین، تبدیل مختصاتی با معادلات (۱۱.۲۰) داده می‌شود. اگر مشتقهای مختصاتی را به‌صورت ماتریس $\mathbf{A}$ با اجزای زیر

$$a_{\alpha i} = \partial \overline{x}^\alpha / \partial x^i \tag{۳۸}$$

نشان دهیم، با توجه به معادلات (۱۱.۲۰) می‌بینیم که

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & ۰ & ۰ \\ -\gamma\beta & \gamma & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \tag{۳۹}$$

که ماتریسی متقارن است. همچنین فرض کنید F^{ij} و $\overline{F}^{\alpha\beta}$ را به‌ترتیب با ماتریسهای $\mathbf{F}$ و $\overline{\mathbf{F}}$ نشان دهیم؛ حال معادلهٔ (۳۷) را می‌توان به‌صورت

$$(\overline{\mathbf{F}})_{\alpha\beta} = (\mathbf{A})_{\alpha i}(\mathbf{F})_{ij}(\mathbf{A})_{\beta j}$$

یا

$$\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{A}\mathbf{F}\widetilde{\mathbf{A}} \tag{۴۰}$$

نوشت که سمت راست حاصلضرب سه ماتریس است. با استفاده از $\mathbf{A}$ی معادلهٔ (۳۹) و $\mathbf{F}$ معادلهٔ (۱۳) و با پیدا کردن حاصلضرب ماتریسی، داریم

$$\overline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -\gamma(E_y-\beta B_z) & -\gamma(E_z+\beta B_y) \\ E_x & 0 & -\gamma(B_z-\beta E_y) & \gamma(B_y+\beta E_z) \\ \gamma(E_y-\beta B_z) & \gamma(B_z-\beta E_y) & 0 & -B_x \\ \gamma(E_z+\beta B_y) & -\gamma(B_y+\beta E_z) & B_x & 0 \end{bmatrix} \tag{۴۱}$$

که همان‌طور که انتظار داریم، ماتریسی متقارن است. ولی $\overline{\mathbf{F}} \equiv [\overline{\mathbf{F}}^{\alpha\beta}]$ باید به‌همان صورت F^{ij}ی معادلهٔ (۱۳) باشد، یعنی

$$\overline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 & -\overline{E}_x & -\overline{E}_y & -\overline{E}_z \\ \overline{E}_x & 0 & -\overline{B}_z & \overline{B}_y \\ \overline{E}_y & \overline{B}_z & 0 & -\overline{B}_x \\ \overline{E}_z & -\overline{B}_y & \overline{B}_x & 0 \end{bmatrix} \tag{۴۲}$$

مقایسهٔ معادلات (۴۱) و (۴۲) تبدیل زیر را نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} \overline{E}_x &= E_x & \overline{B}_x &= B_x \\ \overline{E}_y &= \gamma(E_y - \beta B_z) & \overline{B}_y &= \gamma(B_y + \beta E_z) \\ \overline{E}_z &= \gamma(E_z + \beta B_z) & \overline{B}_z &= \gamma(B_z - \beta E_y) \end{aligned} \tag{۴۳الف}$$

تبدیل وارون با جابه‌جایی کمیتهای خط‌دار و بدون خط و گذاشتن $-\beta$ به‌جای β به‌دست می‌آید و چنین یافت می‌شود

$$\begin{aligned} E_x &= \overline{E}_x & B_x &= \overline{B}_x \\ E_y &= \gamma(\overline{E}_y + \beta \overline{B}_z) & B_y &= \gamma(\overline{B}_y - \beta \overline{E}_z) \\ E_z &= \gamma(\overline{E}_z - \beta \overline{B}_y) & B_z &= \gamma(\overline{B}_z + \beta \overline{E}_y) \end{aligned} \tag{۴۳ب}$$

اکنون حالت کلی را درنظر می‌گیریم که β در جهتی دلخواه است. از معادلات (۴۳) می‌بینیم که آن مؤلفه‌هایی از $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ که با سرعت نسبی موازی باشد، تغییر نمی‌کند. بنابراین، همان‌طور که در معادلات (۲۴.۲۰) به‌دست آوردیم، $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ را به موازی با و عمود بر β تجزیه می‌کنیم. ابتدا فقط $\mathbf{E}$ را درنظر می‌گیریم.

فرض کنید $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$ سه‌گانهٔ متعامد واحد در دستگاه S باشد. پس، در حالت خاصی که β موازی $\mathbf{i}$ است، داریم

$$\mathbf{E}_{\parallel} = E_x \mathbf{i}, \mathbf{E}_{\perp} = E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} \tag{۴۴}$$

همین‌طور، میدان الکتریکی $\overline{\mathbf{E}}$ در S' را می‌توان چنین نوشت

$$\overline{\mathbf{E}}_{\parallel} = \overline{E}_x \mathbf{i}, \qquad \overline{\mathbf{E}}_{\perp} = \overline{E}_y \mathbf{j} + \overline{E}_z \mathbf{k} \tag{۴۵}$$

برای مؤلفهٔ موازی، معادلهٔ زیر را داریم

$$\overline{\mathbf{E}}_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \tag{۴۶}$$

با استفاده از تبدیل معادلات (۴۳الف)، مؤلفهٔ عمودی می‌شود

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{E}}_{\perp} &= \gamma(E_y - \beta B_z)\mathbf{j} + \gamma(E_z + \beta E_y)\mathbf{k} \\ &= \gamma[\mathbf{E}_{\perp} + \beta(B_y \mathbf{k} - B_z \mathbf{j})] \end{aligned} \tag{۴۷}$$

می‌بینیم که

$$\mathbf{i} \times \mathbf{B} = \mathbf{i} \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) = B_y \mathbf{k} - B_z \mathbf{j} \tag{۴۸}$$

با به‌کار بردن این معادله در معادلهٔ (۴۷)، داریم

$$\overline{\mathbf{E}}_\perp = \gamma(\mathbf{E}_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \qquad (۴۹)$$

که از $\beta\mathbf{i} = \boldsymbol{\beta}$ استفاده کرده‌ایم.

می‌شود آنچه را که در معادلات (۴۶) و (۴۹) ظاهر شد، برای $\boldsymbol{\beta}$ی دلخواه تعمیم داد. در واقع، این دو معادله معتبرند، زیرا نمایانگر هر جهتی از $\boldsymbol{\beta}$ اند. می‌توانیم این دو مؤلفه را با هم ترکیب کنیم تا نتیجه دهد

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{E}} = \overline{\mathbf{E}}_\parallel + \overline{\mathbf{E}}_\perp &= \mathbf{E}_\parallel + \gamma[(\mathbf{E} - \mathbf{E}_\parallel) + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}] \\ &= \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - (\gamma - ۱)\mathbf{E}_\parallel \qquad (۵۰)\end{aligned}$$

بار دیگر، مانند معادلهٔ (۲۲.۲۰)، داریم

$$\mathbf{E}_\parallel = (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}/\beta^۲ \qquad (۵۱)$$

بنابراین

$$\overline{\mathbf{E}} = \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - (\gamma - ۱)(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}/\beta^۲ \qquad (۵۲)$$

با توجه به اینکه

$$\beta^۲\gamma^۲ = \gamma^۲ - ۱ \qquad (۵۳)$$

معادلهٔ (۵۲) را می‌توان به‌صورتی دیگر نوشت:

$$\overline{\mathbf{E}} = \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - [\gamma^۲/(\gamma + ۱)]\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \qquad (\text{۵۴الف})$$

به همین ترتیب، برای میدان مغناطیسی نیز می‌توان چنین معادله‌ای به‌دست آورد. یا می‌توان آن‌را از معادلهٔ (۵۴الف) با گذاشتن $\mathbf{B}$ به‌جای $\mathbf{E}$ و $-\mathbf{E}$ به‌جای $\mathbf{B}$ به‌دست آورد. نتیجه چنین یافت می‌شود

$$\overline{\mathbf{B}} = \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - [\gamma^۲/(\gamma + ۱)]\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \qquad (\text{۵۴ب})$$

چنانچه سرعت نسبی به صفر میل کند، $\beta \to 0$ و $\gamma \to 1$، در حد، داریم $\overline{\mathbf{E}} = \mathbf{E}$ و $\mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}}$ که نشان می‌دهد $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ تنها برای ناظرانی ناورداست که نسبت به یکدیگر ساکن‌اند.

مثال ۱. نشان دهید که (الف) $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ و (ب) $E^2 - B^2$ در قالب تبدیلهای لورنتس ناوردایند.

حل: این نتایج را می‌توان با دو روش ثابت کرد.

برهان اول: فرض کنید S و S′ دو چارچوب مرجع‌اند که S′ با سرعت $\mathbf{v}$ نسبت به S در حرکت است. بدون از دست دادن کلیت مسئله، می‌توانیم محورهای فضایی را در دو چارچوب طوری انتخاب کنیم که به‌ترتیب با یکدیگر موازی باشند و x^1 موازی $\mathbf{v}$ باشد. دراین‌صورت، میدانهای الکترومغناطیسی از S به S′ برمبنای معادلات (۴۳الف) تبدیل می‌شوند. از آنجا به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{B}} =& \overline{E}_x\overline{B}_x + \overline{E}_y\overline{B}_y + \overline{E}_z\overline{B}_z = E_xB_x + \gamma^2[E_yB_y + \beta(E_yE_z - B_zB_y)\\ &- \beta^2E_zB_z] + \gamma^2[E_zB_z + \beta(B_yB_z - E_yE_z) - \beta^2E_yB_y]\\ =& E_xB_x + E_yB_y + E_zB_z = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\end{aligned} \tag{۵۵}$$

این معادله نشان می‌دهد که $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ در قالب تبدیلهای لورنتس ناورداست، که بخش اول نتیجهٔ خواسته‌شده است. همین را می‌توانیم برای $\overline{E}^2 = \overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{E}}$ به‌دست آوریم. سپس، با گذاشتن $\mathbf{B}$ به‌جای $\mathbf{E}$ و $-\mathbf{E}$ به‌جای $\mathbf{B}$ می‌توانیم $\overline{B}^2$ را از $\overline{E}^2$ به‌دست آوریم. در پایان، با تفریق یکی از دیگری، به‌دست می‌آوریم

$$\overline{E}^2 - \overline{B}^2 = E^2 - B^2 \tag{۵۶}$$

که بخش دوم نتیجهٔ خواسته‌شده است.

برهان دوم: با استفاده از تانسورهای شدت میدان F^{ij}، F_{ij} و تانسور دوگان شدت میدان $\mathcal{F}^{ij}$، با ادغام، می‌توانیم ناورداهای گوناگونی تشکیل دهیم.

بنابراین، عبارت نرده‌ای $F^{ij}F_{ij}$ را درنظر بگیرید. با به‌کار بردن تانسورهایی که در معادلات (۱۳) و (۱۶) به‌صورت ماتریسی داده شدند، می‌بینیم $F^{ij}F_{ij}$، که مجموع حاصلضربهای اجزای متناظر

دو تانسور است، با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$F^{ij}F_{ij} = ۲(B^۲ - E^۲) \qquad (۵۷)$$

که نشان می‌دهد $B^۲ - E^۲$ (یا $E^۲ - B^۲$) یک ناوردای لورنتس است. سپس، با درنظر گرفتن ادغام F^{ij} با $\mathcal{F}^{ij}$ و با استفاده از معادلات (۱۶) و (۱۸)، به‌دست می‌آوریم

$$F_{ij}\mathcal{F}^{ij} = -۴\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} \qquad (۵۸)$$

که نشان می‌دهد $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ نیز ناوردای لورنتس است.

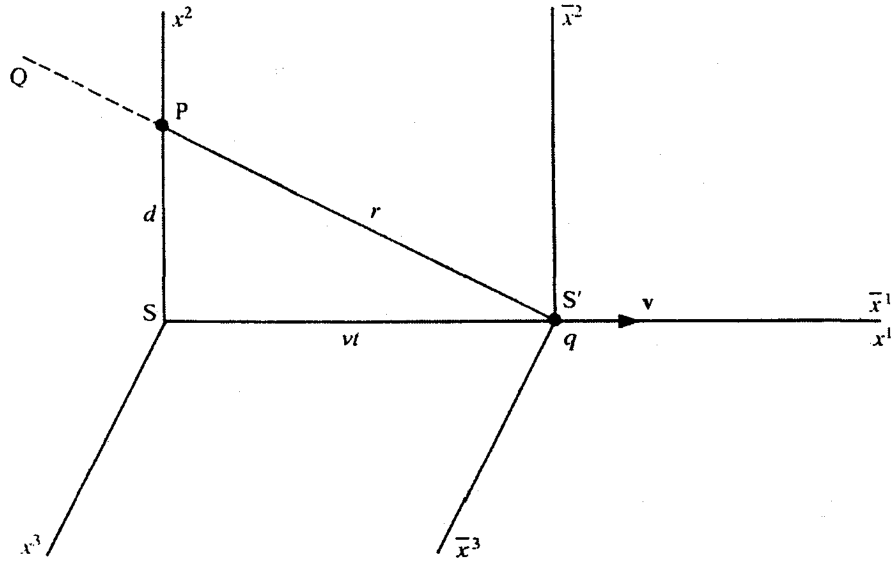
۵.۲۱ میدانهای ناشی از باری که به‌طور یکنواخت حرکت می‌کند

اکنون تک‌بار q را درنظر می‌گیریم که در چارچوب مرجع S با سرعت یکنواخت $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند. می‌خواهیم میدانهای الکترومغناطیسی ناشی از این بار را در S به‌دست آوریم.

با توجه به اینکه بار حرکت می‌کند، این مسئله وابسته به زمان است و میدانهای الکترومغناطیسی در هر نقطه با زمان تغییر می‌کنند. این میدانها بدون توجه به نظریهٔ نسبیت خاص با روشهای کلاسیکی تعیین می‌شوند. با اینهمه، این روش تنها برای سرعتهای پایین بار در مقایسه با c معتبر است. در اینجا از تبدیل نسبیتی میدانهای فوق استفاده می‌کنیم. این روش دقیق است و نتیجه‌ای می‌دهد که اعتبار بیشتری دارد.

بنابراین، چارچوب مرجع دیگری، S'، را درنظر می‌گیریم که با همان سرعت یکنواخت $\mathbf{v}$ نسبت به S حرکت می‌کند. دراین‌صورت بار q در S' ساکن به‌نظر می‌آید. بنابراین q در S' فقط میدان الکتریکی $\overline{\mathbf{E}}$ دارد و فاقد میدان مغناطیسی است $(\overline{\mathbf{B}} = ۰)$.

چون محورهای مختصات را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد، جهت $x^۱$ را در S، خط حرکت بار و $x^۲$ و $x^۳$ را عمود بر آن می‌گیریم. علاوه‌براین، همان‌طورکه در شکل ۱.۲۱ نشان داده‌ایم، محور $x^۲$ را طوری انتخاب می‌کنیم که از نقطهٔ Pای بگذرد که می‌خواهیم میدانها را در آنجا به‌دست آوریم. محورهای مختصات $\overline{x}^۱$، $\overline{x}^۲$، $\overline{x}^۳$ را در S' موازی با محورهای متناظرشان در S می‌گیریم. فرض کنید d نزدیکترین فاصلهٔ رسیدن بار q به نقطهٔ مشاهدهٔ P باشد. به‌علاوه، مختصات زمانی $t = \overline{t} = ۰$ را لحظه‌ای می‌گیریم که مبدأهای دو دستگاه برهم منطبق‌اند و q در نزدیکترین فاصله‌اش از P قرار دارد.



شکل۱.۲۱ تعیین میدانهای الکترومغناطیسی در نقطهٔ P در S، ناشی از بار q که به‌طور یکنواخت حرکت می‌کند.

در دستگاه S′، بار q در مبدأ آن ساکن است، به‌نحوی که میدان الکتریکی $\overline{\mathbf{E}}$ در P در جهت $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ است. مختصات P در S′ عبارت است از

$$\overline{x}^1 = -v\bar{t}, \qquad \overline{x}^2 = d, \qquad \overline{x}^3 = 0 \tag{59}$$

و فاصلهٔ آن از بار می‌شود.

$$\overline{r} = [d^2 + v^2\bar{t}^2]^{1/2} \tag{60}$$

اکنون باید $\overline{r}$ را برحسب مختصات چارچوب S بیان کنیم. اولین معادلهٔ (۱۱.۲۰) را می‌توان چنین نوشت

$$c\bar{t} = \gamma\left(ct - \frac{vx^1}{c}\right) \Rightarrow \bar{t} = \gamma\left(t - \frac{vx^1}{c^2}\right) \tag{61}$$

در P، $x^1 = 0$ است، بنابراین $\bar{t} = \gamma t$ می‌شود و نتیجه می‌دهد

$$\overline{r} = (d^2 + v^2\gamma^2t^2)^{1/2} \tag{62}$$

در چارچوب S'، $\overline{\mathbf{B}} = 0$ و $\overline{\mathbf{E}}$ در جهت $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ است و مقدار $q/\overline{r}^2$ دارد. بنابراین، مؤلفه‌های میدان الکترومغناطیسی در S' را می‌توان چنین نوشت

$$\begin{aligned} \overline{E}_x &= (q/\overline{r}^2)(-v\overline{t}/\overline{r}) = qv\overline{t}/\overline{r}^3 \\ \overline{E}_y &= (q/\overline{r}^2)(d/\overline{r}) = qd/\overline{r}^3 \\ \overline{E}_z &= \overline{B}_x = \overline{B}_y = \overline{B}_z = 0 \end{aligned} \tag{۶۳}$$

با تغییر $\overline{t}$ و $\overline{r}$، برحسب مختصات بدون خط، مؤلفه‌های غیر صفر میدان می‌شوند

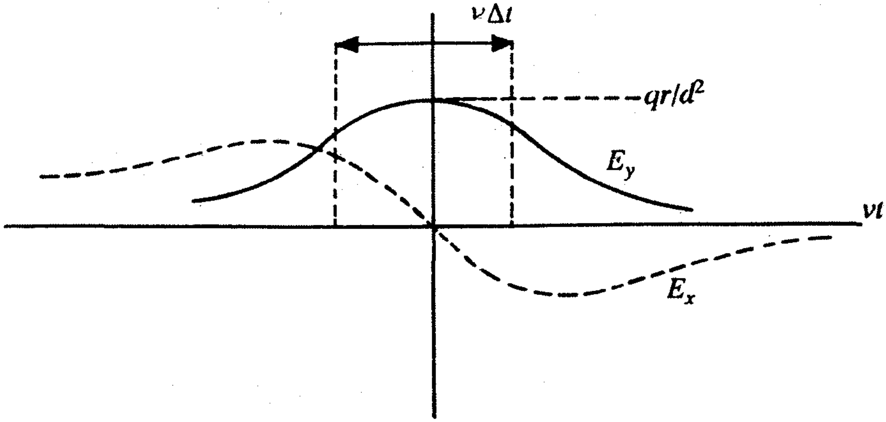
$$\begin{aligned} \overline{E}_x &= -q\gamma vt/(d^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2} \\ \overline{E}_y &= qd/(d^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2} \end{aligned} \tag{۶۴}$$

با به‌کار بردن اینها در تبدیل وارونی که در معادلات (۴۳ب) آوردیم، داریم

$$\begin{aligned} E_x &= \overline{E}_x = -q\gamma vt/(d^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2} \\ E_y &= \gamma\overline{E}_y = \gamma qd/(d^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2} \\ B_z &= \gamma\beta\overline{E}_y = \beta E_y, \qquad E_z = B_x = B_y = 0 \end{aligned} \tag{۶۵}$$

مطالعهٔ تغییر مؤلفه‌های میدان با زمان t (یا فاصلهٔ $x^1 = vt$ بار از مبدأ S) جالب است. در $t = 0$ که بار از مبدأ S می‌گذرد، معادلات (۶۵) نشان می‌دهند که $E_x = 0$ و $E_y = \gamma q/d^2$ است. بار ساکن در مبدأ S، میدان الکتریکی q/d^2 را در P ایجاد می‌کند. این نشان می‌دهد که مقدار بیشینهٔ میدان الکتریکی در P با حرکت بار با یک عامل γ زیاد می‌شود. همچنین بار متحرک در P شار مغناطیسی B_z ایجاد می‌کند که با E_y متناسب است و با این واقعیت سازگار است که بار متحرک در S جریان الکتریکی به‌وجود می‌آورد.

تغییر E_x و E_y با $x^1 = vt$ را در شکل ۲.۲۱ نشان داده‌ایم. از معادلات (۶۵) می‌بینیم که E_x تابعی فرد و E_y تابعی زوج از t است. می‌توانیم بازهٔ زمانی Δt را تعریف کنیم که در آن مؤلفه‌های میدان در P مقدار چشمگیری دارند، چنانچه $|t| > 1/2\Delta t$ باشد، مؤلفه‌های میدان



شکل۲.۲۱ مؤلفه‌های E_x و E_y میدان ناشی از باری متحرک.

به‌سرعت کاهش می‌یابند. با توجه به مخرجها در معادلات (۶۵)، می‌توانیم بازهٔ نوعی را برابر مقدار زیر بگیریم

$$\Delta t = d/\gamma v \qquad (۶۶)$$

در واقع، $\pm\Delta t/\sqrt{۲}$ مقدارهایی از tاند. که به‌ازای آن E_x مقدار فرین دارد. با افزایش سرعت، γ نیز زیاد می‌شود و با افزایش مقدار قلهٔ میدان در P، زمانی که به‌ازای آن میدانها در P چشمگیرند، کمتر و کمتر می‌شود.

مثال ۲. خازنی صفحه‌ـموازی با صفحات مستطیلی به ابعاد ۲۵ سانتیمتر و ۲۰ سانتیمتر درنظر بگیرید که ۲ سانتیمتر از یکدیگر فاصله دارند. اختلاف پتانسیل ۱۰۰۰ ولت بین دو صفحه اعمال می‌شود. معین کنید (الف) تعداد الکترونهای اضافی روی صفحهٔ منفی، و (ب) میدان الکتریکی Eی بین صفحات. چارچوب مرجع دیگری با سرعت یکنواخت $v = ۰٫۶c$ موازی یکی از اضلاع صفحات حرکت می‌کند. برای ناظری در چارچوب متحرک، تعیین کنید (ج) ظرفیت خازن، (د) تعداد الکترونهای اضافی روی صفحهٔ منفی و (هـ) میدان الکتریکی بین صفحات. از تصحیح نهایی چشمپوشی کنید.

حل: ظرفیت خازن صفحه‌ـموازی (با یکاهای گاؤسی) عبارت است از $C = A/۴\pi d$ که

A سطح هر صفحه و d فاصلهٔ بین آنهاست. اگر اضلاع هر صفحه را با $L_۱$ و $L_۲$ نشان دهیم، داریم $A = L_۱L_۲ = ۲۵ \times ۲۰\text{cm}^۲$، $d = ۲\text{cm}$، بنابراین

$$C = ۵۰۰/۸\pi = ۱۹٫۸۹\text{cm} \tag{۶۷}$$

مقدار بار اضافی روی هر صفحه می‌شود $Q = CV$. با ایستاولت ۳٫۳۳ = ولت $V = ۱۰۰۰$ داریم،

$$Q = ۶۶٫۲۷ \ \text{esu} \tag{۶۸}$$

(الف) اگر n تعداد الکترونهای اضافی روی صفحهٔ منفی و q مقدار بار هر الکترون ($q = |e|$) باشد، داریم $Q = nq$. با $q = ۴٫۸ \times ۱۰^{-۱۰}\text{esu}$، به‌دست می‌آوریم

$$n = ۱٫۳۸ \times ۱۰^{۱۱} \tag{۶۹}$$

(ب) میدان الکتریکی می‌شود $E = V/d = ۳٫۳۳/۲ = ۱٫۶۷ \ \text{esu}$ و در امتداد عمود بر صفحات است و جهت آن از مثبت به منفی است.

چارچوب دوم با سرعت $v = ۰٫۶c$ نسبت به خازن حرکت می‌کند، که $\beta = ۰٫۶$ را به‌دست می‌دهد و در نتیجه، داریم

$$\gamma = ۱/(۱-\beta^۲)^{۱/۲} = ۱٫۲۵ \tag{۷۰}$$

فرض کنید چارچوب مرجع دوم موازی با $L_۱$ حرکت کند، دراین‌صورت، داریم

$$\overline{L}_۱ = L_۱/\gamma = ۲۵/۱٫۲۵ = ۲۰\text{cm}$$

$$\overline{L}_۲ = L_۲ = ۲۰\text{cm}, \overline{d} = d = ۲\text{cm}$$

(ج) ظرفیت می‌شود

$$\overline{C} = \overline{A}/۴\pi\overline{d} = ۴۰۰/۸\pi = ۱۵٫۹۲\text{cm}$$

در واقع، داریم

$$\overline{C} = C/\gamma \tag{۷۱}$$

(د) تعداد الکترونهای اضافی و بارکل تغییر نمی‌کند، با توجه به اینکه اینها کمیتهای ناوردای لورنتس‌اند. بنابراین

$$\overline{Q} = Q, \quad \overline{n} = n \tag{۷۲}$$

(هـ) مؤلفه‌ای از $\mathbf{E}$ که با $\mathbf{v}$ موازی است، تغییر نمی‌کند، در حالی‌که مؤلفهٔ عمودی برمبنای معادلهٔ (۴۷) تبدیل می‌شود. در این مورد، هیچ مؤلفه‌ای موازی با $\mathbf{v}$ وجود ندارد و کل میدان الکتریکی بر $\mathbf{v}$ عمود است. همچنین، میدان مغناطیسی برای ناظری که نسبت به خازن ساکن است، وجود ندارد. بنابراین، معادلهٔ (۴۷) را می‌توان به‌صورت سادهٔ زیر نوشت

$$\overline{E} = \gamma E \tag{۷۳}$$

نتیجه می‌دهد

$$\overline{E} = ۱٫۲۵ \times ۱٫۶۷ = ۲٫۰۹ \ \text{esu} \tag{۷۴}$$

جهت $\overline{E}$ همان جهت $\mathbf{E}$ است.

در واقع، معادلهٔ $\overline{Q} = \overline{C}\,\overline{V}$ را می‌توانیم برای ناظر متحرک بنویسیم. سپس با استفاده از معادلات (۷۱) و (۷۲)، به‌دست می‌آوریم

$$\overline{V} = \gamma V \tag{۷۵}$$

در پایان، با نوشتن $\overline{E} = \overline{V}/\overline{d}$ و با توجه به اینکه $\overline{d} = d$ است، به‌دست می‌آوریم $\overline{E} = \gamma E$ که همان معادلهٔ (۷۳) است.

تمرین

۱.۲۱ * در چارچوب مرجعی خاص، میدان الکتریکی یکنواخت ایستای $\mathbf{E}$ موازی با محور x^1 و میدان مغناطیسی یکنواخت ایستای $\mathbf{B}$ با مقدار $B = ۲E$ (esu_گاؤسی) در صفحهٔ $x^1 - x^2$ وجود دارد که با محور x^1 زاویهٔ θ می‌سازد. چارچوب مرجع دیگری در جهتی خاص نسبت به اولی در حرکت است، به‌طوری که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در این چارچوب موازی

یکدیگر ظاهر می‌شوند، (الف) با اطلاعات موجود، اندازه‌های $\overline{E}$ و $\overline{B}$ را برحسب E و θ به‌دست آورید. (ب) سرعت نسبی کسری β را به‌دست آورید، چنانچه سرعت نسبی در جهت x^3 باشد.

۲.۲۱ در مثال ۲، اگر سرعت نسبی چارچوب مرجع دوم $v = ۰٫۶c$ در جهتی عمود بر سطح صفحات باشد، به قسمتهای (ج)، (د) و (ه) پاسخ دهید.

۳.۲۱ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ در چارچوب مرجعی خاص به‌نحوی هستند که $E > B$ است (esu_گاؤسی). آیا چارچوب مرجع دیگری وجود دارد که در آن (الف) فقط میدان الکتریکی وجود داشته باشد و میدان مغناطیسی نباشد، (ب) فقط میدان مغناطیسی وجود داشته باشد و الکتریکی نباشد؟

۲۲

حساب تانسوری

در مثال (۳.۱۵ب) نشان دادیم که مشتقهای جزئی میدان نرده‌ای نسبت به مختصات، مؤلفه‌های یک بردار هموورداست. با وجود این، عموماً نتیجهٔ مشتق‌گیری از تانسور (بجز تانسور رتبهٔ صفر) نسبت به مختصات تانسور نیست. با اینهمه، می‌شود عباراتی ساخت، شامل مشتقهای جزئی تانسور و تانسور متریک که مانند تانسور تبدیل می‌شوند. در این بخش چنین عباراتی را تعریف و دربارهٔ آنها بحث می‌کنیم.

معرفی نمادگذاری زیر برای مشتقهای جزئی مختصات بدون خط نسبت به مختصات خط‌دار و برعکس مناسب است:[1]

$$x^i_{,\alpha} \equiv \partial x^i / \partial \overline{x}^\alpha, \qquad \overline{x}^\alpha_{,i} \equiv \partial \overline{x}^\alpha / \partial x^i \tag{۱}$$

---

۱. توجه کنید که $x^i_{,\alpha}$ و $\overline{x}^\alpha_{,i}$ تانسور نیستند. در استفاده از این نمادگذاری باید به‌یاد آوریم که حروف لاتین مختصات بدون خط و حروف یونانی مختصات خط‌دار را نشان می‌دهند.

برحسب این نمادگذاری، معادلات (۲۳.۱۵) می‌شوند

$$x^i_{,\alpha}\overline{x}^\alpha_{,j} = \delta^i_{.j};\ \overline{x}^\alpha_{,i}x^i_{,\beta} = \delta^\alpha_{.\beta} \tag{۲}$$

به‌علاوه، مشتقهای جزئی دوم را به‌روش مشابهی با رابطهٔ زیر نشان می‌دهیم

$$x^i_{,\alpha\beta} = \partial^2 x^i/\partial\overline{x}^\alpha\partial\overline{x}^\beta \tag{۳}$$

و غیره. روشن است که ترتیب اندیسهای سمت راست ویرگول اهمیتی ندارد. سرانجام، مشتقهای مختصاتی نرده‌ای ϕ و تانسوری، مانند $A^{ij}_{..k}$، را چنین نشان می‌دهیم

$$\phi_{,i} = \partial\phi/\partial x^i, \qquad \phi_{,ij} = \partial^2\phi/\partial x^i\partial x^j, \qquad A^{ij}_{..k,l} = \partial A^{ij}_{..k}/\partial x^l, \cdots \tag{۴}$$

این نمادگذاری را در بقیهٔ کتاب به‌کار می‌بریم.

۱.۲۲ مشتق‌گیری از تانسور

اگر $\phi(x^i)$ میدانی نرده‌ای باشد، مشتقهای آن نسبت به مختصات، $A_i = \phi_{,i}$، مانند مؤلفه‌های برداری هموردا تبدیل می‌شوند، یعنی

$$\overline{A}_\alpha = x^i_{,\alpha}A_i \tag{۵}$$

که تبدیل وارون معادلهٔ (۳۶.۱۵) است. با مشتق‌گیری از هر دو طرف معادلهٔ بالا نسبت به $\overline{x}^\beta$، می‌یابیم

$$\begin{aligned}\overline{A}_{\alpha\beta} &= x^i_{,\alpha\beta}A_i + x^i_{,\alpha}A_{i,\beta}\\ &= x^i_{,\alpha\beta}A_i + x^i_{,\alpha}x^j_{,\beta}A_{i,j}\end{aligned} \tag{۶}$$

دومین جملهٔ سمت راست معادلهٔ بالا مشخصهٔ تانسوری دارد، ولی ظاهر جملهٔ اول نشان می‌دهد که توابع $A_{i,j}$ مانند مؤلفه‌های تانسور رتبهٔ دو تبدیل نمی‌شوند.

به همین ترتیب، می‌توان دید که مشتقهای مختصاتی هر تانسوری (به‌استثنای نرده‌ای) مانند مؤلفه‌های تانسور تبدیل نمی‌شوند.

برای یافتن "مشتقی" که تانسور باشد، ابتدا ناگزیریم نمادهای جدیدی تعریف کنیم که دربرگیرندهٔ مشتقهای تانسور متریک باشند.

۲.۲۲ نمادهای کریستوفل

نمادهای سه اندیسی کریستوفل یا صرفاً نمادهای کریستوفل، نوع اول و دوم، به‌ترتیب چنین تعریف می‌شوند[۱]

$$[ij,k] = \frac{۱}{۲}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}) \qquad \text{(۷الف)}$$

$$\Gamma^k_{ij} = g^{km}[ij,m] = \frac{۱}{۲}g^{km}(g_{im,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m}) \qquad \text{(۷ب)}$$

چون تانسور متریک متقارن است، از معادلات بالا روشن است که نمادهای کریستوفل دارای تقارن زیرند:

$$[ji,k] = [ij,k], \qquad \Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij} \qquad (۸)$$

مثال ۱. برابری زیر را ثابت کنید

$$g_{ij,k} = [ik,j] + [jk,i] \qquad (۹)$$

حل: از تعریف نمادهای کریستوفل نوع اول، داریم

$$[ik,j] = \frac{۱}{۲}(g_{ij,k} + g_{kj,i} - g_{ik,j}) \qquad \text{(۱۰الف)}$$

$$[jk,i] = \frac{۱}{۲}(g_{ji,k} + g_{ki,j} - g_{jk,i}) \qquad \text{(۱۰ب)}$$

با افزودن طرفهای متناظر دو معادلهٔ بالا و با توجه به اینکه g_{ij} تانسوری متقارن است، نتیجهٔ مطلوب بی‌درنگ حاصل می‌شود.

نمادهای کریستوفل تانسور نیستند. این مطلب را در مثال زیر نشان داده‌ایم.

مثال ۲. تبدیلهای مختصات نمادهای کریستوفل نوع اول و دوم چگونه اتفاق می‌افتد؟

حل: برای به‌دست آوردن تبدیل نمادهای کریستوفل، از معادلات معرف (۷) و تبدیل تانسور متریک استفاده می‌کنیم.

تانسور متریک بنابر رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$\overline{g}_{\alpha\beta} = x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} g_{ij} \qquad (۱۱)$$

---

۱. نماد کریستوفل نوع دوم را نیز با $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ نشان می‌دهند.

با مشتق‌گیری از این معادله نسبت به $\overline{x}^\gamma$، به‌دست می‌آوریم

$$\overline{g}_{\alpha\beta,\gamma} = [x^i_{,\alpha\gamma} x^j_{,\beta} + x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta\gamma}] g_{ij} + x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} g_{ij,\gamma}$$

$$= [x^i_{,\alpha\gamma} x^j_{,\beta} + x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta\gamma}] g_{ij} + x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} x^k_{,\gamma} g_{ij,k} \tag{۱۲}$$

جایگشت چرخه‌ای سه اندیس α، β و γ در معادلهٔ (۱۲) دو معادلهٔ مشابه دیگر به‌دست می‌دهد

$$\overline{g}_{\beta\gamma,\alpha} = [x^i_{,\beta\alpha} x^j_{,\gamma} + x^i_{,\beta} x^j_{,\gamma\alpha}] g_{ij} + x^i_{,\beta} x^j_{,\gamma} x^k_{,\alpha} g_{ij,k} \tag{۱۳}$$

$$\overline{g}_{\gamma\alpha,\beta} = [x^i_{,\gamma\beta} x^j_{,\alpha} + x^i_{,\gamma} x^j_{,\alpha\beta}] g_{ij} + x^i_{,\gamma} x^j_{,\alpha} x^k_{,\beta} g_{ij,k} \tag{۱۴}$$

حال، دو معادلهٔ (۱۳) و (۱۴) را با هم جمع، معادلهٔ (۱۲) را از آنها کم و حاصل را بر ۲ تقسیم کنید. طرف چپ نماد کریستوفل نوع اول را در دستگاه مختصات خط‌دار نتیجه می‌دهد:

$$\frac{۱}{۲}(\overline{g}_{\beta\gamma,\alpha} + \overline{g}_{\gamma\alpha,\beta} - \overline{g}_{\alpha\beta,\gamma}) = \overline{[\alpha\beta,\gamma]} \tag{۱۵}$$

چون g_{ij} تانسوری متقارن است، می‌شود اندیسهای i و j را در ضریب g_{ij}، در سمت راست معادلهٔ (۱۲) با یکدیگر جابه‌جا کرد. در نتیجه این جمله می‌شود

$$[x^j_{,\alpha\gamma} x^i_{,\beta} + x^j_{,\alpha} x^i_{,\beta\gamma}] g_{ij}$$

در جمله‌های آخر سمت راست معادلات (۱۳) و (۱۴) به‌ترتیب اندیسها را به‌صورت $i \to j \to k \to i$ و $i \to k \to j \to i$ تغییر می‌دهیم. در پایان، با انجام عملی که پیشتر اشاره کردیم، به نتیجهٔ زیر می‌رسیم

$$\overline{[\alpha\beta,\gamma]} = x^i_{,\alpha\beta} x^j_{,\gamma} g_{ij} + x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} x^k_{,\gamma} [ij,k] \tag{۱۶}$$

این قانون تبدیل نمادهای کریستوفل نوع اول از یک دستگاه مختصات به دیگری است. وجود اولین جملهٔ طرف راست معادلهٔ بالا نشان می‌دهد که نماد کریستوفل نوع اول تانسور نیست.

تبدیل نماد کریستوفل نوع دوم را می‌توان از حاصلضرب داخلی معادلهٔ (۱۶) در $\overline{g}^{\gamma\rho}$ به‌دست آورد، که نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\beta} \equiv \overline{g}^{\gamma\rho}\overline{[\alpha\beta,\gamma]} &= x^i_{,\alpha\beta}x^j_{,\gamma}\overline{g}^{\gamma\rho}g_{ij} + x^i_{,\alpha}x^j_{,\beta}x^k_{,\gamma}\overline{g}^{\gamma\rho}[ij,k] \\ &= x^i_{,\alpha\beta}x^j_{,\gamma}\overline{x}^{\gamma}_{,k}\overline{x}^{\rho}_{,l}g^{kl}g_{ij} + x^i_{,\alpha}x^j_{,\beta}x^k_{,\gamma}\overline{x}^{\gamma}_{,m}\overline{x}^{\rho}_{,n}g^{mn}[ij,k] \\ &= x^i_{,\alpha\beta}\overline{x}^{\rho}_{,l}\delta^j_{,k}g^{kl}g_{ij} + x^i_{,\alpha}x^j_{,\beta}\overline{x}^{\rho}_{,n}\delta^k_{,m}g^{mn}[ij,k] \qquad (۱۷)\end{aligned}$$

یا

$$\overline{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\beta} = x^i_{,\alpha\beta}\overline{x}^{\rho}_{,i} + x^i_{,\alpha}x^j_{,\beta}\overline{x}^{\rho}_{,n}\Gamma^n_{ij} \qquad (۱۸)$$

معادلهٔ فوق قانون تبدیل نمادهای کریستوفل نوع دوم را به‌دست می‌دهد. به‌سبب وجود جملهٔ اول سمت راست، این نیز مشخصهٔ تانسوری ندارد.

با وجود این، نوع جملهٔ دوم سمت راست معادلات (۱۶) و (۱۸) بیانگر این است که اندیسهای i، j، k، m، n در دو نوع نماد کریستوفل $[ij,k]$ و Γ^r_{mn} به‌عنوان اندیسهای هموردا ظاهر می‌شوند و حال آنکه تنها r به‌عنوان اندیس پادوردا ظاهر می‌شود. این قاعده در بررسی صحت اندیسها در معادله‌ای که هر دو نوع نماد کریستوفل را در بردارد، بسیار مفید است.

۳.۲۲ مشتق هموردا

با به‌دست آوردن حاصلضرب داخلی معادلهٔ (۱۸) در $x^k_{,\rho}$ و بازآرایی جملات، داریم

$$x^k_{,\alpha\beta} = x^k_{,\rho}\overline{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\beta} - x^i_{,\alpha}x^j_{,\beta}\Gamma^k_{ij} \qquad (۱۹)$$

این معادله مشتقهای جزئی دوم x^k را نسبت به $\overline{x}^{\alpha}$، برحسب مشتقهای جزئی اول و نمادهای کریستوفل نوع دوم آن به‌دست می‌دهد.

به معادلهٔ (۱۶) برمی‌گردیم، به‌جای اولین جملهٔ سمت راست آن از معادلهٔ (۱۹) قرار می‌دهیم (البته، با تغییرات مناسب اندیسها). نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}\overline{A}_{\alpha,\beta} &= x^i_{,\rho}A_i\overline{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\beta} - x^i_{,\alpha}x^j_{,\beta}A_k\Gamma^k_{ij} + x^i_{,\alpha}x^j_{,\beta}A_{i,j} \\ &= \overline{A}_{\rho}\overline{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\beta} + x^i_{,\alpha}x^j_{,\beta}(A_{i,j} - A_k\Gamma^k_{ij}) \qquad (۲۰)\end{aligned}$$

یا

$$(\overline{A}_{\alpha,\beta} - \overline{A}_{\rho}\overline{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\beta}) = x^{i}_{,\alpha}x^{j}_{,\beta}(A_{i,j} - A_{k}\Gamma^{k}_{ij}) \tag{۲۱}$$

اگر تعریف کنیم

$$A_{i;j} \equiv A_{i,j} - A_{k}\Gamma^{k}_{ij} \tag{۲۲الف}$$

به‌طوری که

$$\overline{A}_{\alpha;\beta} = \overline{A}_{\alpha,\beta} - \overline{A}_{\rho}\overline{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\beta} \tag{۲۲ب}$$

معادلهٔ (۲۱) می‌شود

$$\overline{A}_{\alpha;\beta} = x^{i}_{,\alpha}x^{j}_{,\beta}A_{i;j} \tag{۲۳}$$

معادلهٔ فوق نشان می‌دهد که در پایان N^2 تابع به‌دست آورده‌ایم که با معادلات (۲۲) تعریف شده‌اند و شامل مشتقهای جزئی بردار هموردا و نمادهای کریستوفل نوع دوم‌اند، که مانند مؤلفه‌های تانسور هموردای رتبهٔ دو تبدیل می‌شوند. به تابع[1] $A_{i;j}$ مشتق هموردای jام بردار A_i می‌گویند.

می‌توان با بردار پادوردای A^i شروع کرد و همان مراحل بالا را دنبال کرد و به نتیجهٔ زیر رسید

$$(\overline{A}^{\alpha}_{,\beta} + \overline{A}^{\rho}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\rho}) = \overline{x}^{\alpha}_{,i}x^{j}_{,\beta}(A^{i}_{,j} + A^{k}\Gamma^{i}_{jk}) \tag{۲۴}$$

که نشان می‌دهد تانسور آمیختهٔ رتبهٔ دوی زیر

$$A^{i}_{\cdot;j} \equiv A^{i}_{,j} + A^{k}\Gamma^{i}_{jk} \tag{۲۵}$$

را می‌توان همچون مشتق هموردای بردار پادوردای A^i فرض کرد.

مشتق هموردای تانسور رتبهٔ صفر (نرده‌ای) با مشتق معمولی آن یکی است. بنابراین، اگر ϕ تابعی نرده‌ای باشد، داریم

$$\phi_{;j} = \phi_{,j} \equiv \partial\phi/\partial x^{j} \tag{۲۶}$$

---

۱. باید بین نمادهای $A_{i,j}$ و $A_{i;j}$ تمایز گذاشت. اولی مشتق معمولی A_i را نسبت به x^j نشان می‌دهد، در حالی‌که دومی نمایندهٔ مشتق هموردای jام A_i است. دومی تانسور است در حالی‌که قبلی نیست. در این زمینه نمادگذاریهای مختلفی در کتابهای متفاوت رایج است.

سرانجام، مشتق هموردای تانسوری با رتبهٔ دلخواه را می‌توان چنین تعریف کرد

$$A^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q;k} \equiv A^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q,k} + \sum_{r=1}^{p} A^{i_1 \cdots i_{r-1} \mu i_{r+1} \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} \Gamma^{i}_{\mu k}$$

$$- \sum_{s=1}^{q} A^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_{s-1} \mu j_{s+1} \cdots j_q} \Gamma^{\mu}_{j_s k} \qquad (۲۷)$$

که می‌توان ثابت کرد، تانسوری با همان رتبهٔ پادوردایی تانسور اصلی است و رتبهٔ هموردایی آن به‌اندازهٔ یک واحد افزایش می‌یابد.

مثال ۳. مشتقهای هموردای تانسورهای A_{ij}، A^{ij} و $A^{i}_{.j}$ را بنویسید.

حل: به‌صورت حالتهای خاص معادلهٔ (۲۷)، داریم

$$A_{ij;k} = A_{ij,k} - A_{pj}\Gamma^{p}_{ik} - A_{ip}\Gamma^{p}_{jk} \qquad (\text{۲۸الف})$$

$$A^{ij}_{..;k} = A^{ij}_{..,k} + A^{pj}\Gamma^{i}_{pk} + A^{ip}\Gamma^{j}_{pk} \qquad (\text{۲۸ب})$$

$$A^{i}_{.j;k} = A^{i}_{.j,k} + A^{p}_{.j}\Gamma^{i}_{pk} - A^{i}_{.p}\Gamma^{p}_{jk} \qquad (\text{۲۸ج})$$

مثال ۴. نشان دهید که مشتق هموردای (الف) تانسور متریک و (ب) دلتای کرونکر عیناً صفر است.

حل: (الف) مشتق هموردای تانسور هموردای رتبهٔ دو را در معادلهٔ (۲۸الف) داده‌ایم. g_{ij} را در آن معادله به‌جای A_{ij} بگذارید، می‌یابیم

$$g_{ij;k} = g_{ij,k} - g_{pj}\Gamma^{p}_{ik} - g_{ip}\Gamma^{p}_{jk} \qquad (۲۹)$$

با استفاده از قسمت اول معادلهٔ (۷ب) می‌توان نشان داد که

$$g_{pj}\Gamma^{p}_{ik} = [ik, j], \qquad g_{ip}\Gamma^{p}_{jk} = [jk, i] \qquad (۳۰)$$

این، معادلهٔ (۲۹) را به معادلهٔ زیر تبدیل می‌کند

$$g_{ij;k} = g_{ij,k} - [ik, j] - [jk, i] = 0 \qquad (۳۱)$$

که از نتیجهٔ معادلهٔ (۹) استفاده کرده‌ایم.

برای تانسور متریک پادوردا، g^{ij} را به‌جای A^{ij} در معادلهٔ (۲۸ب) می‌گذاریم که ببینیم مشتق هموردای تانسور متریک پادوردا چنین می‌شود

$$\begin{aligned} g^{ij}_{..;k} &= g^{ij}_{..,k} + g^{pj}\Gamma^i_{pk} + g^{ip}\Gamma^j_{pk} \\ &= g^{ij}_{..,k} + g^{pj}g^{qi}[pk,q] + g^{ip}g^{jq}[pk,q] \\ &= g^{ij}_{..,k} + g^{pj}g^{qi}\{[pk,q] + [qk,p]\} \\ &= g^{ij}_{..,k} + g^{pj}g^{qi}g_{pq,k} \qquad [\text{با استفاده از معادلهٔ (۹)}] \end{aligned} \tag{۳۲}$$

اکنون عبارت زیر را درنظر بگیرید

$$\begin{aligned} (g^{pj}g^{qi}g_{pq})_k &= g^{qi}g_{pq}g^{pj}_{.k} + g^{pj}g_{pq}g^{qi}_{,k} + g^{pj}g^{qi}g_{pq,k} \\ &= \delta^i_{.p}g^{pj}_{..,k} + \delta^j_{.q}g^{qi}_{..,k} + g^{pj}g^{qi}g_{pq,k} \\ &= ۲g^{ij}_{..,k} + g^{pj}g^{qi}g_{pq,k} \end{aligned} \tag{۳۳}$$

به‌عبارت دیگر، داریم

$$g^{pj}g^{qi}g_{pq} = g^{pj}\delta^i_{\ p} = g^{ij} \tag{۳۴}$$

بنابراین

$$(g^{pj}g^{qi}g_{pq})_{,k} = g^{ij}_{..,k} \tag{۳۵}$$

با مقایسهٔ معادلات (۳۳) و (۳۵)، می‌بینیم که سمت راست معادلهٔ (۳۲) عیناً صفر می‌شود، که ثابت می‌کند

$$g^{ij}_{..;k} = ۰ \tag{۳۶}$$

نتایج معادلات (۳۱) و (۳۶) به ریچی‌لم معروف است. (ب) در معادلهٔ (۲۸ج)، با گذاشتن $\delta^i_{.j}$ به‌جای $A^i_{.j}$، می‌بینیم که

$$\begin{aligned} \delta^i_{.j;k} &= \delta^i_{.j,k} + \delta^p_{.j}\Gamma^i_{pk} - \delta^i_{.p}\Gamma^p_{jk} \\ &= \delta^i_{.j,k} + \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} \end{aligned} \tag{۳۷}$$

با توجه به اینکه مؤلفه‌های تانسور دلتای کرونکر مستقل از مختصات است، یعنی $\delta^i_{.j,k} = ۰$ است، به نتیجهٔ مطلوب زیر می‌رسیم که

$$\delta^i_{.j;k} = ۰ \tag{۳۸}$$

مثال ۵. نمادهای کریستوفل نوع اول و دوم را در فضای دوبعدی سطح یک کره برحسب مختصات قطبی بیابید.

حل: قرارداد مجموع‌یابی در حل این مثال حذف می‌شود. نماد کریستوفل نوع اول چنین می‌شود

$$[ij, k] = \frac{۱}{۲}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}) \tag{۳۹}$$

مختصات قطبی را به‌صورت $x^۱ \equiv \theta$ و $x^۲ = \phi$ انتخاب می‌کنیم. مؤلفه‌های تانسور متریک هموردای g_{ij} را برای فضای مذکور در معادلات (۱۲.۱۸) داده‌ایم.

اندیسهای i، j، k فقط دو مقدار ۱ و ۲ می‌گیرند. بنابراین، سه رسته نماد کریستوفل زیر را داریم

رستهٔ ۱: به‌ازای $i = j = k$، معادلهٔ (۳۹) تبدیل می‌شود به

$$[ii, i] = \frac{۱}{۲}g_{ii,i} = \frac{۱}{۲}\partial g_{ii}/\partial x^i \tag{۴۰}$$

از معادلات (۱۲.۱۸) می‌بینیم که

$$\partial g_{۱۱}/\partial\theta = ۰ \qquad \partial g_{۲۲}/\partial\phi = ۰ \tag{۴۱}$$

بنابراین

$$[ii, i] = ۰ \qquad\qquad i = ۱, ۲ \tag{۴۲}$$

رستهٔ ۲: به‌ازای $i = k \neq j$؛ معادلهٔ (۳۹) تبدیل می‌شود به

$$[ij, i] = \frac{۱}{۲}g_{ii,j} = \frac{۱}{۲}\partial g_{ii}/\partial x^j \tag{۴۳}$$

زیرا، به‌ازای $i \neq j$، $g_{ij} = ۰$ است. از معادلات (۱۲.۱۸)، داریم

$$\partial g_{۱۱}/\partial\phi = ۰\ , \quad \partial g_{۲۲}/\partial\theta = ۲a^۲ \sin\theta\cos\theta \tag{۴۴}$$

که a شعاع کره است، نتیجه می‌گیریم

$$[۱۲,۱]=[۲۱,۱]=۰ \qquad [۱۲,۲]=[۲۱,۲]=a^۲\sin\theta\cos\theta \tag{۴۵}$$

رستهٔ ۳: به‌ازای $i=j\neq k$؛ معادلهٔ (۳۹)، در این حالت به معادلهٔ زیر

$$[ii,k]=-\frac{۱}{۲}g_{ii,k}=-\frac{۱}{۲}\partial g_{ii}/\partial x^k \tag{۴۶}$$

تبدیل می‌شود، به‌طوری که، داریم

$$[۱۱,۲]=۰ \qquad [۲۲,۱]=-a^۲\sin\theta\cos\theta \tag{۴۷}$$

با ترکیب نتایج بالا، هشت نماد کریستوفل نوع اول را چنین به‌دست می‌آوریم

$$[ii,i]=۰ \qquad i=۱,۲ \tag{۴۸الف}$$

$$[۱۲,۱]=[۲۱,۱]=۰ \tag{۴۸ب}$$

$$[۱۲,۲]=[۲۱,۲]=a^۲\sin\theta\cos\theta \tag{۴۸ج}$$

$$[۱۱,۲]=۰ \tag{۴۸د}$$

$$[۲۲,۱]=-a^۲\sin\theta\cos\theta \tag{۴۸ه}$$

نمادهای کریستوفل نوع دوم را در معادلهٔ (۷ب) تعریف کرده‌ایم. اگر تانسور متریک قطری باشد، مثل حالت فعلی، این معادله به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$\Gamma^k_{ij}=g^{kk}[ij,k] \tag{۴۹}$$

که k اندیسی آزاد است. مؤلفه‌های پادوردای تانسور متریک از معادلهٔ (۲۰.۱۸) به‌دست می‌آیند و چنین یافت می‌شوند

$$g^{۱۱}=۱/a^۲, \qquad g^{۲۲}=۱/(a^۲\sin^۲\theta), \qquad g^{۱۲}=g^{۲۱}=۰ \tag{۵۰}$$

با به‌کار بردن اینها و معادلات (۴۸) در معادلهٔ (۴۹)، نمادهای کریستوفل نوع دوم را چنین می‌یابیم

$$\Gamma^{i}_{ii} = ۰ \qquad i = ۱, ۲ \tag{۵۱الف}$$

$$\Gamma^{۱}_{۱۲} = \Gamma^{۱}_{۲۱} = ۰ \tag{۵۱ب}$$

$$\Gamma^{۲}_{۱۲} = \Gamma^{۲}_{۲۱} = \cot\theta \tag{۵۱ج}$$

$$\Gamma^{۲}_{۱۱} = ۰ \tag{۵۱د}$$

$$\Gamma^{۱}_{۲۲} = -\sin\theta\cos\theta \tag{۵۱ه}$$

می‌بینیم که نمادهای کریستوفل نوع دوم از شعاع کره مستقل‌اند. همچنین تنها سه نماد از این هشت نماد غیرصفر است.

مثال ۶. معادلهٔ زیر را ثابت کنید

$$\Gamma^{i}_{ij} = (\ln\sqrt{g})_{,j} = \partial(\ln\sqrt{g})/\partial x^{j} \tag{۵۲}$$

حل: از رابطهٔ زیر

$$\Gamma^{i}_{kj} = g^{ih}[kj, h] \tag{۵۳}$$

داریم

$$\Gamma^{i}_{ij} = g^{ih}[ij, h] = \frac{۱}{۲} g^{ih}(g_{ih,j} + g_{jh,i} - g_{ij,h}) \tag{۵۴}$$

چون هم اندیس i و هم h در معادلهٔ بالا اندیسهای ظاهری‌اند و $g^{ih} = g^{hi}$ است، می‌توانیم i و h را در آخرین عامل داخل پرانتز سمت راست معادلهٔ (۵۴) جابه‌جا کنیم. در نتیجه، معادله تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned} \Gamma^{i}_{ij} &= \frac{۱}{۲} g^{ih} g_{ih,j} \\ &= (۱/۲\mathrm{g}) \sum_{i,h} (g_{ij}\ \text{هم‌عامل})\,(\partial g_{ih}/\partial x^{j}) \end{aligned} \tag{۵۵}$$

در اینجا از این واقعیت بهره برده‌ایم که g^{ih} عبارت است از هم‌عامل g_{ih} تقسیم بر g و مجموع‌یابی روی i و h به‌طور صریح نوشته شده است. از مقایسهٔ این با معادلهٔ (۴۶)، به‌دست می‌آوریم

$$\Gamma^i_{ij} = (1/2\mathrm{g})\partial g/\partial x^j = \frac{1}{2}\partial(\ln g)/\partial x^j = \partial(\ln\sqrt{g})/\partial x^j \qquad (۵۶)$$

۴.۲۲ مشتق ذاتی

فرض کنید C خم خاصی است که در فضای ریمانی با معادلات پارامتری $x^k \equiv x^k(\tau)$ توصیف می‌شود. فرض کنید $A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ میدانی تانسوری باشد که در نقاط C تعریف شده است، یعنی مؤلفه‌های آن توابع پیوسته‌ای از پارامتر τ در امتداد C باشند:

$$A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} \equiv A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x^k) \equiv A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(\tau) \qquad (۵۷)$$

دراین‌صورت، مشتق ذاتی[1] این تانسور در امتداد C چنین تعریف می‌شود

$$\frac{DA^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}}{D\tau} = A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q;k}\frac{dx^k}{d\tau} \qquad (۵۸)$$

چون $A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q;k}$ تانسور است و dx^k تانسور است (و بنابراین، $dx^k/d\tau$ تانسور است)، از قانون خارج‌قسمت برمی‌آید که مشتق ذاتی که با معادلهٔ (۵۸) تعریف شد، تانسوری از همان رتبه و نوع تانسور اصلی باشد.

مشتق ذاتی عبارتهای واقعاً ساده‌ای برای نرده‌ای و بردار درنظر می‌گیرد. اگر $\phi(x^i)$ میدانی نرده‌ای باشد، به‌نحوی که در امتداد خم C، $\phi \equiv \phi(\tau)$ باشد، دراین‌صورت، مشتق ذاتی ϕ در امتداد C می‌شود

$$\frac{D\phi}{D\tau} = \phi_{;k}\frac{dx^k}{d\tau} = \frac{\partial\phi}{\partial x^k}\,\frac{dx^k}{d\tau} = \frac{d\phi}{d\tau} \qquad (۵۹)$$

که از معادلهٔ (۲۶) استفاده کرده‌ایم. این نشان می‌دهد که مشتق ذاتی میدان نرده‌ای همان مشتق معمولی آن در امتداد خم است. همین‌طور، اگر A^i برداری پادوردا باشد، با استفاده از معادلات (۵۸)

---

۱. به مشتق مطلق نیز معروف است.

و (۲۵)، در می‌یابیم که مشتق ذاتی A^i در امتداد C چنین می‌شود

$$\begin{aligned}\frac{DA^i}{D\tau} &= A^i_{;k}\frac{dx^k}{d\tau} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k}\,\frac{dx^k}{d\tau} + A^j\Gamma^i_{kj}\frac{dx^k}{d\tau}\\ &= \frac{dA^i}{d\tau} + \Gamma^i_{kj}A^j\frac{dx^k}{d\tau}\end{aligned} \tag{۶۰}$$

در پایان، مشتق ذاتی بردار هموردا می‌شود

$$\frac{DA_i}{D\tau} = \frac{dA_i}{d\tau} - \Gamma^j_{ik}A_j\frac{dx^k}{d\tau} \tag{۶۱}$$

گاهی نیز معادلات بالا را به‌صورت دیفرانسیلی زیر می‌نویسند

$$DA^i = dA^i + \Gamma^i_{kj}A^j dx^k \tag{۶۲الف}$$

$$DA_i = dA_i - \Gamma^j_{ik}A_j dx^k \tag{۶۲ب}$$

برای تانسوری از رتبهٔ بالاتر، مثلاً $A^{ij}_{..kl}$، مشتق ذاتی را می‌توان چنین نوشت

$$\begin{aligned}\frac{DA^{ij}_{..kl}}{D\tau} &= A^{ij}_{..kl;m}\frac{dx^m}{d\tau}\\ &= \frac{dA^{ij}_{..kl}}{d\tau} + [\Gamma^i_{pm}A^{pj}_{..kl} + \Gamma^j_{pm}A^{ip}_{..kl} - \Gamma^p_{km}A^{ij}_{..pl} - \Gamma^p_{lm}A^{ij}_{..kp}]\frac{dx^m}{d\tau}\end{aligned} \tag{۶۳}$$

از معادلات (۳۱)، (۳۶) و (۳۸)، داریم

$$Dg_{ij}/D\tau = g_{ij;k}dx^k/d\tau = 0 \tag{۶۴الف}$$

$$Dg^{ij}/D\tau = g^{ij}_{..;k}dx^k/d\tau = 0 \tag{۶۴ب}$$

$$D\delta^i_{.j}/D\tau = \delta^i_{.j;k}dx^k/d\tau = 0 \tag{۶۴ج}$$

یعنی، مشتق ذاتی تانسور متریک و دلتای کرونکر در امتداد هر خم عیناً صفر می‌شود.

مثال ۷. میدان برداری سرعت سیالی که در صفحه‌ای در حرکت است، در مختصات دکارتی می‌شود

$$v^i = (x^2, y^2) \tag{۶۵}$$

مشتق هموردای میدان برداری را در مختصات قطبی بیابید.

حل: مختصات قطبی معمولی r، θ را انتخاب می‌کنیم و بردار سرعت را در مختصات قطبی با u^i نمایش می‌دهیم. تبدیل ساده‌ای از مؤلفه‌های دکارتی v^i به مؤلفه‌های قطبی u^i برمبنای معادلهٔ (۲۴.۱۵) می‌دهد

$$u^{۱} = r^{۲}(\cos^{۳}\theta + \sin^{۳}\theta), \quad u^{۲} = r\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta) \qquad (۶۶)$$

مشتق هموردا چنین می‌شود

$$u^{i}_{.;j} = \partial u^i/\partial x^j + u^k\Gamma^i_{jk} \qquad (۶۷)$$

که $x^{۱} = r$ و $x^{۲} = \theta$ است. نمادهای کریستوفل نوع دوم در مختصات قطبی عبارت‌اند از

$$\Gamma^{۱}_{۱۱} = \Gamma^{۲}_{۲۲} = \Gamma^{۲}_{۱۱} = \Gamma^{۱}_{۱۲} = \Gamma^{۱}_{۲۱} = ۰$$

$$\Gamma^{۱}_{۲۲} = -r, \Gamma^{۲}_{۱۲} = \Gamma^{۲}_{۲۱} = ۱/r \qquad (۶۸)$$

با به‌کار بردن اینها در معادلهٔ (۶۷)، مؤلفه‌های مشتق هموردا در مختصات قطبی چنین یافت می‌شوند

$$u^{r}_{.;r} = \partial u^{۱}/\partial r + u^k\Gamma^{۱}_{۱k} = \partial u^{۱}/\partial r$$

$$= ۲r(\cos^{۳}\theta + \sin^{۳}\theta) \qquad (۶۹)$$

$$u^{r}_{.;\theta} = \partial u^{۱}/\partial\theta + u^k\Gamma^{۱}_{۲k} = \partial u^{۱}/\partial\theta + u^{۲}\Gamma^{۱}_{۲۲}$$

$$= ۲r^{۲}\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta) \qquad (۷۰)$$

$$u^{\theta}_{.;r} = \partial u^{۲}/\partial r + u^k\Gamma^{۲}_{۱k} = \partial u^{۲}/\partial r + u^{۲}\Gamma^{۲}_{۱۲}$$

$$= ۲\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta) \qquad (۷۱)$$

$$u^{\theta}_{.;\theta} = \partial u^{۲}/\partial\theta + u^k\Gamma^{۲}_{۲k} = \partial u^{۲}/\partial\theta + u^{۱}\Gamma^{۲}_{۲۱}$$ و

$$= ۲r\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta) \qquad (۷۲)$$

مشتق‌گیری معمولی حاصلضرب دو تابع در قانون توزیع‌پذیری صدق می‌کند. مثلاً، $(uv)' = uv' + u'v$، که u و v توابعی از یک متغیرند و پریمها نمایانگر مشتق‌گیری نسبت به آن

متغیر است. می‌توان نشان داد که مشتق‌گیری هموردای حاصلضرب دو یا چند تانسور نیز در همان قانون توزیع‌پذیری صدق می‌کند. در مثال زیر، این کار را انجام می‌دهیم.

مثال ۸. نشان دهید که

$$(A^i_{.j}B^{kl})_{;q} = A^i_{.j;q}B^{kl} + A^i_{.j}B^{kl}_{..;q} \tag{۷۳}$$

حل: تانسور حاصلضرب خارجی را با $C^{i\,kl}_{.j..} = A^i_{.j}B^{kl}$ نشان می‌دهیم. پس، داریم

$$\begin{aligned}
C^{i\,kl}_{.j..;q} =& C^{i\,kl}_{.j..,q} + C^{m\,kl}_{.j..}\Gamma^i_{mq} + C^{i\,ml}_{.j..}\Gamma^k_{mq} + C^{i\,km}_{.j..}\Gamma^l_{mq} - C^{i\,kl}_{.m..}\Gamma^m_{jq} \\
=&(A^i_{.j}B^{kl})_{,q} + A^m_{.j}B^{kl}\Gamma^i_{mq} + A^i_{.j}B^{ml}\Gamma^k_{mq} + A^i_{.j}B^{km}\Gamma^l_{mq} - A^i_{.m}B^{kl}\Gamma^m_{jq} \\
=&A^i_{.j,q}B^{kl} + A^i_{.j}B^{kl}_{..,q} + A^m_{.j}B^{kl}\Gamma^i_{mq} + A^i_{.j}B^{ml}\Gamma^k_{mq} \\
&+ A^i_{.j}B^{km}\Gamma^l_{mq} - A^i_{.m}B^{kl}\Gamma^m_{jq} \\
=&[A^i_{.j,q} + A^m_{.j}\Gamma^i_{mq} - A^i_{.m}\Gamma^m_{jq}]B^{kl} \\
&+ A^i_{.j}[B^{kl}_{..,q} + B^{ml}\Gamma^k_{mq} + B^{km}\Gamma^l_{mq}] \\
=&A^i_{.j;q}B^{kl} + A^i_{.j}B^{kl}_{..;q}
\end{aligned} \tag{۷۴}$$

که نتیجهٔ مطلوب را ثابت می‌کند.

تمرین

۱.۲۲ مشتق هموردای تانسورهای (الف) $A^i_{.jk}$، (ب) $A^{ij}_{..kl}$، (ج)* $A^{ijk}_{...l}$ و (د) $A^{ij}_{..klm}$ را نسبت به x^q به‌دست آورید.

۲.۲۲ مشتق ذاتی تانسورهای یادشده در تمرین ۱.۲۲ را در امتداد خم $x^i \equiv x^i(\tau)$ نسبت به τ بنویسید.

۳.۲۲ * اگر A_i برداری هموردا باشد، نشان دهید که $A_{i,j} - A_{j,i}$ تانسور است.

۴.۲۲ * اگر A_{ij} تانسوری متقارن باشد، نشان دهید که $A_{ij,k} + A_{jk,i} + A_{ki,j}$ تانسوری است که نسبت به هر زوج اندیسی، پادمتقارن است.

۵.۲۲ نمادهای کریستوفل نوع اول و دوم را، برحسب مختصات قطبی r و θ در یک صفحه به‌دست آورید.

۶.۲۲ نمادهای کریستوفل غیرصفر را در فضای سه‌بعدی اقلیدسی، برحسب مختصات استوانه‌ای و قطبی کروی محاسبه کنید.

۷.۲۲ همهٔ نمادهای کریستوفل را برای فضایی که جزء خطی آن با رابطهٔ زیر داده می‌شود، به‌دست آورید

$$ds^2 = -e^{\lambda}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 + e^{\mu}dt^2$$

۸.۲۲ میدان برداری سرعت سیالی در حرکت در صفحه‌ای در مختصات دکارتی $v^i = (x, 2y)$ است. مشتق هموردای آن‌را در مختصات قطبی بیابید.

۹.۲۲ مشتق ذاتی میدان برداری تمرین ۸ را درامتداد مارپیچ $r = a\theta + b$، $a > 0$، $0 < b$ بیابید.

۱۰.۲۲ * هر دو نوع نمادهای کریستوفل را برای فضایی با متریک $ds^2 = f(u,v)du^2 + h(u,v)dv^2$ به‌دست آورید.

۱۱.۲۲ * هر دو نوع نمادهای کریستوفل را برای فضایی با متریک زیر به‌دست آورید، $ds^2 = Rdu^2 + 2Sdudv + Tdv^2$ که R، S، T توابعی از u و vاند و $RT - S^2$ عیناً صفر نمی‌شود.

۱۲.۲۲ اتحادهای زیر را ثابت کنید

(الف) $$(A_{ij}B^k_{.lm})_{;q} = A_{ij;q}B^k_{.lm} + A_{ij}B^k_{.lm;q}$$

(ب) $$(A_{i.}^{\ j}B^{ik})_{;q} = A_{i.;q}^{\ j}B^{ik} + A_{i.}^{\ j}B^{ik}_{..;q}$$

(ج) $$(A_iB^jC_k)_{;q} = A_{i;q}B^jC_k + A_iB^j_{.;q}C_k + A_iB^jC_{k;q}$$

۱۳.۲۲ * ثابت کنید که به‌طورکلی مشتق‌گیری ذاتی حاصلضرب دو یا چند تانسور در قانون توزیع‌پذیری صدق می‌کند.

۱۴.۲۲ اگر $\mathbf{u}$ برداری سه‌بعدی باشد، نشان دهید که نسبت به مختصات دکارتی، داریم

$$(\text{curl }\mathbf{u})_i = \varepsilon_{ijk}u_{k,j}$$

۲۳

سینماتیک در فضای ریمانی

۱.۲۳ ژئودزیک

کوتاهترین مسیر بین هر دو نقطه‌ای در فضای اقلیدسی خط مستقیمی است که این دو نقطه را به‌هم متصل می‌کند. با وجود این، کوتاهترین مسیر بین دو نقطه در فضای ریمانی، چه بسا مسیری خمیده باشد. مثلاً، روی سطح یک کره، کوتاهترین مسیری که دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند، عبارت است از کمان کوچکتر دایرهٔ عظیمه‌ای که از این دو نقطه می‌گذرد. مادامی که با نواحی کوچک فضا سروکار داریم، تقریبهای هندسهٔ اقلیدسی کاملاً معتبر است. اما، فرض کنید می‌خواهیم کوتاهترین مسیر زمین تا یک ستاره را بیابیم. کدام‌یک از روشهای فوق را باید به‌کار ببریم. می‌توانیم پرتو نوری به این ستاره بفرستیم، یا اینکه پرتو نوری از این ستاره در زمین دریافت کنیم و بگوییم که مسیر پرتو نور کوتاهترین مسیر است. اما می‌دانیم که حتی یک پرتو نور در میدان گرانشی مسیری خمیده را دنبال می‌کند ــ در واقع، این یکی از آثار مهمی بود که صحت نظریهٔ نسبیت عام اینشتین را تأیید کرد. بنابراین، ناگزیریم که مفهوم خط مستقیم را حذف کنیم و ژئودزیک را بپذیریم.

دو نقطهٔ P و Q را در فضای Nبعدی ریمانی درنظر بگیرید. مسیرهای بیشماری وجود دارد

شکل۱.۲۳ فاصلهٔ بین P و Q در امتداد خم A.

که P را به Q وصل می‌کند. فرض کنید، همان‌طورکه در شکل ۱.۲۳ نشان داده‌ایم، A یکی از آنها باشد. چون A خمی یک‌بعدی است، مختصات هر نقطه‌ای روی آن‌را می‌توان، برحسب تک‌پارامتر پیوسته‌ای، مانند τ، مشخص کرد. به‌عبارت دیگر، معادلهٔ خم A را می‌توان به‌طور نمادین زیر نوشت

$$x^i \equiv x^i(\tau) \tag{۱}$$

فرض کنید که نقاط انتهایی P و Qی این مسیر به‌ترتیب متناظر با پارامترهای $\tau_۱$ و $\tau_۲$ باشد.

دو نقطهٔ نزدیک به‌هم را با مختصات x^i و $x^i + dx^i$ روی مسیر A درنظر بگیرید. فرض کنید که τ و $\tau + d\tau$ به‌ترتیب مقدار پارامترهای متناظر با این دو نقطه باشند. فاصلهٔ ds بین این دو نقطه چنین می‌شود

$$ds^۲ = g_{ij}dx^i dx^j = g_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\ \frac{dx^j}{d\tau}d\tau^۲ \tag{۲}$$

بنابراین، فاصلهٔ کلی بین P و Q در امتداد مسیر A می‌شود

$$\mathrm{S_{PQ}} = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \left[g_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\ \frac{dx^j}{d\tau}\right]^{۱/۲} d\tau \tag{۳}$$

با استفاده از اصل وردش اویلر_لاگرانژ، می‌شود معادلات دیفرانسیل مسیری را یافت که در امتداد آن فاصلهٔ بین P و Q فرین است. به مسیری که در امتداد آن فاصلهٔ بین دو نقطه در فضای ریمانی فرین است، می‌گویند ژئودزیکی که دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند. بدون ذکر جزئیات ریاضی، تنها اشاره می‌کنیم که وردش معادلهٔ (۳) به معادلات زیر می‌انجامد

$$\frac{d^۲x^i}{ds^۲} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\ \frac{dx^k}{ds} = ۰ \tag{۴}$$

که خود s را پارامتر می‌گیریم. البته، این مجموعه‌ای از N معادلهٔ دیفرانسیل جفت‌شده را نمایش می‌دهد. معادلهٔ (۴) به معادلهٔ ژئودزیک معروف است.

مثال ۱. نشان دهید که در فضای اقلیدسی، ژئودزیکها خطوطی مستقیم‌اند.

حل: در فضای اقلیدسی، g_{ij}ها از مختصات x^i مستقل‌اند، به‌نحوی که نمادهای کریستوفل عیناً صفر می‌شوند و معادلهٔ (۴) به‌معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$d^۲x^i/ds^۲ = ۰ \tag{۵}$$

با جواب زیر

$$x^i = a_i s + b_i \tag{۶}$$

که a_i و b_i ثابتهای مستقل از sاند و در نتیجه مستقل از x^iاند. معادلهٔ (۶) آشکارا خطی مستقیم را نشان می‌دهد.

مثال ۲. نشان دهید که همهٔ دایره‌های عظیمه روی سطح کره ژئودزیک‌اند، اما، هیچ دایرهٔ دیگری ژئودزیک نیست.

حل: مؤلفه‌های تانسور متریک روی سطح کره‌ای به‌شعاع a در معادلهٔ (۱۲.۱۸) داده شده است و حال آنکه نمادهای کریستوفل نوع دوم در معادلات (۵۱.۲۲) داده شده است. با توجه به اینکه تنها نمادهای غیرصفر عبارت‌اند از

$$\Gamma^۲_{۱۲} = \Gamma^۲_{۲۱} = \cot\theta, \qquad \Gamma^۱_{۲۲} = -\sin\theta\cos\theta \tag{۷}$$

معادلهٔ ژئودزیک (با $\theta = x^۱$ و $\phi = x^۲$) تبدیل می‌شود به

$$\begin{gathered}\frac{d^۲\theta}{ds^۲} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^۲ = ۰\\ \frac{d^۲\phi}{ds^۲} + ۲\cot\theta\frac{d\theta}{ds}\,\frac{d\phi}{ds} = ۰\end{gathered} \tag{۸}$$

(الف) دایرهٔ عظیمه‌ای را روی کره درنظر بگیرید و محور z($\theta = ۰$) را عمود بر صفحهٔ این دایره انتخاب کنید، بنابراین، دایرهٔ عظیمه خط استوا می‌شود. معادلهٔ پارامتری دایرهٔ عظیمه عبارت است از

$$\theta = \pi/۲, \phi = cs + d, c \neq ۰ \tag{۹}$$

که c و d از s، θ و ϕ مستقل است. بدیهی است که معادلات (۹) در معادلات (۸) صدق می‌کنند، بنابراین دایرهٔ عظیمه ژئودزیک است. چون انتخاب محور قطبی $\theta = ۰$ اختیاری است، نتیجه می‌گیریم که هر دایرهٔ عظیمه‌ای ژئودزیک است.

(ب) دایره‌ای روی این کره درنظر بگیرید، به‌نحوی که صفحهٔ دایره از مرکز کره عبور نکند. بار دیگر، جهت $\theta = ۰$ را عمود بر صفحهٔ دایره انتخاب کنید. بنابراین، معادلهٔ پارامتری دایره می‌شود

$$\theta = \theta_۰, \quad \phi = ps + q \quad ۰ < \theta_۰ < \pi, \quad \theta_۰ \neq \pi/۲, \quad p \neq ۰ \qquad (۱۰)$$

که p و q از s، θ و ϕ مستقل است. با جانشین‌سازی، می‌بینیم که دومین معادله از معادلات (۸) صادق است، اما اولی به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود.

$$p^۲ \sin\theta_۰ \cos\theta_۰ = ۰ \qquad (۱۱)$$

شرایط $\theta_۰$ و p [معادلات (۱۰)] نشان می‌دهد که این معادله صادق نیست و ثابت می‌کند که این دایره ژئودزیک نیست.

در فضای ریمانی یک و تنها یک ژئودزیک هست که از دو نقطهٔ معلوم می‌گذرد، مگر زمانی که بتوان دستگاه مختصاتی یافت که در هر دو نقطهٔ آن $g = ۰$ شود. مثلاً، اگر روی سطح کره‌ای دو نقطه‌ای برگزینیم که به‌طور قطری مقابل یکدیگر باشند، سپس، محور قطبی را طوری انتخاب کنیم که از این دو نقطه بگذرد، درنتیجه، در هر دوی آنها $g = ۰$ می‌شود. [معادلهٔ (۱۳.۱۸)]. در این حالت، تعداد ژئودزیکهایی که از این دو نقطه می‌گذرد، نامتناهی است.

۲.۲۳ قانون اینشتین

قانون اول حرکت نیوتون بیان می‌کند که چنانچه جسمی در حالت سکون یا حرکت یکنواخت راستخط باشد، تا زمانی که نیروی خارجی به آن وارد نشود، در همان حالت باقی می‌ماند. هر چند که این قانون برای دو قرن معتبر بود، کمی تأمل نشان می‌دهد که استدلال مبتنی بر آن دوری است. زیرا، چنانچه بپرسیم که این نیرو چیست، ناگزیریم بگوییم این نیرو در حوزهٔ مکانیک نیوتونی، موجودی است که تغییر می‌کند یا بر آن است که حالت سکون یا حرکت یکنواخت جسمی را تغییر دهد. وقتی سنگی را پرتاب می‌کنیم، مسیر خمیده‌ای را دنبال می‌کند؛ بنابراین، به نیروی گرانش

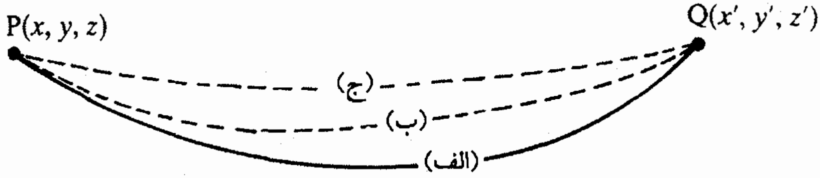
استناد می‌کنیم. اگر شیئی را روی صفحه‌ای بغلتانیم سرعت آن کم می‌شود و بعد از طی فاصلهٔ معینی می‌ایستد؛ با استناد به نیروی اصطکاک بین شیٔ و صفحه این پدیده را توضیح می‌دهیم.

قانون دوم نیوتون نیز یک نقص دارد. زمانی که حرکت سیاره‌ای را حول خورشید مطالعه می‌کنیم، در محاسبهٔ جاذبهٔ گرانش بر آن باید جرم سکون سیاره را درنظر بگیریم، یا جرم نسبیتی آن‌را؟ فاصلهٔ بین آنها را آن‌چیزی بگیریم که ناظری اندازه می‌گیرد که نسبت به خورشید ساکن است، یا نسبت به سیاره یا نسبت به جسمی دیگر؟ چنانچه نیروی جاذبهٔ خورشید را بر سیاره‌ای محاسبه می‌کنیم، ناگزیریم از فاصلهٔ لحظه‌ای دو شیء در لحظهٔ خاصی استفاده کنیم. اما فرض کنید که اثر گرانشی با سرعت نور حرکت می‌کرد، پس زمانی متناهی طول می‌کشید تا به سیاره برسد (در مورد زمین ۸٫۳ دقیقه و در مورد پلوتون پنج‌ونیم ساعت). تا آن زمان، سیاره به مکان دیگری می‌رفت و فاصلهٔ خورشید- سیاره تغییر می‌کرد. این مسائل ساده نشان می‌دهند که در توصیف کلاسیکی قوانین کپلر و نیوتون نوعی ابهام و تضاد وجود دارد.

برای برخورد با این مشکلات، اینشتین پیشنهاد کرد که مفهوم میدان گرانشی را که از طریق آن یک جسم از فاصله‌ای بر جسم دیگر اثر می‌کند، کنار بگذاریم و به‌جای آن، مفهوم فضازمان خمیده را ارائه کنیم. او فرض کرد که حضور ماده هندسهٔ پیوستار فضازمان را، با خم کردن آن تغییر می‌دهد و اینکه جسم در چنین فضای خمیدهٔ ریمانی در مسیری خمیده حرکت می‌کند که برای آن فضا ژئودزیک است. بنابراین، قوانین حرکت نیوتون جای خود را به قانون اینشتین داد که بیان می‌کند که هر جسمی در پیوستار فضازمان چهاربعدی در امتداد یک ژئودزیک حرکت می‌کند، مشروط بر اینکه با جسم دیگری برخورد نکند و به آن نیروهای الکترومغناطیسی وارد نشود. بنابراین، حضور ماده با میدان گرانشی همراه آن‌را به‌سادگی می‌توان با هندسهٔ جدیدی توصیف کرد. این فرضیهٔ اساسی به اصل هم‌ارزی معروف است که برمبنای آن حضور میدانهای گرانشی را کاملاً می‌توان با تانسور متریک $g_{ij}(x^k)$ توصیف کرد.

توجه کنید که نیروهای الکترومغناطیسی را باید از قانون اینشتین مستثنی کرد. به‌این علت که تاکنون توصیف اثر میدانهای الکترومغناطیسی بر ذرات باردار با روش هندسی معادل ممکن نشده است. خود اینشتین بعداً در زندگیش سالهای زیادی را صرف پرداختن به نظریهٔ وحدت میدانها کرد که هم میدان گرانشی و هم الکترومغناطیسی را با یک هندسهٔ جدید توضیح دهد.

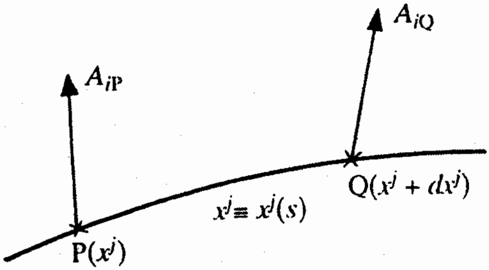
بنابراین اهمیت ژئودزیک در نظریهٔ نسبیت عام روشن می‌شود. علت اینکه سیاره‌ای حول



شکل۲.۲۳ مسیرهای زمین (الف)، موشک (ب)، پرتو نور (ج) بین دو نقطهٔ (x, y, z) و (x', y', z')، نزدیک خورشیدی پرجرم (نشان نداده‌ایم).

خورشید در مداری خاص می‌گردد، این نیست که به‌سوی خورشید جذب می‌شود، بلکه این است که این مسیر در حضور خورشید در پیوستار فضازمان ژئودزیک است، یعنی مسیری با فاصلهٔ فرین بین هر دو نقطه‌ای در امتداد آن. چه سیاره‌ای باشد که به دور خورشید در حرکت است، چه موشکی که از زمین به مشتری می‌رود یا پرتو نور، هر شیئی صرفاً در امتداد ژئودزیک در حرکت است که سرشت آن‌را توزیع جرم در فضازمان تعیین می‌کند.

احتمالاً پارادوکسی ظاهر می‌شود. مسیر زمین را به‌دور خورشید درنظر بگیرید و فرض کنید $P = (x, y, z)$ و $Q = (x', y', z')$ دو نقطه روی این مسیر باشند. اگر زمین در نقطهٔ P باشد، فرض می‌کنیم پرتو نور و موشک به طریقی شروع به حرکت کنند که هر دو در لحظهٔ مناسب بعدی از نقطهٔ Q بگذرند. چون سرعت زمین از هر دوی اینها کمتر است، خمیده‌ترین مسیر را دارد و حال آنکه، همان‌طور که در شکل ۲.۲۳ نشان داده‌ایم، مسیر پرتو نور کمترین خمیدگی را دارد. چون هر یک از سه شیء باید در امتداد یک ژئودزیک حرکت کند، آشکارا به‌نظر می‌رسد که سه (یا، در واقع تعداد نامتناهی) ژئودزیک هست که P را به Q وصل می‌کند، که خلاف این واقعیت است که یک و تنها یک ژئودزیک بین هر دو نقطهٔ دلخواه در فضای ریمانی وجود دارد. با اینهمه، پارادوکس فوق از این واقعیت ناشی می‌شود که در واقع، تنها بر تصویر فضایی سه‌بعدی حرکت چهاربعدی اشیاء تمرکز کرده‌ایم. بنابراین، اگرچه زمین، موشک و پرتو نور همزمان (t) از نقطهٔ $P = (x, y, z)$ شروع می‌کنند، در زمانهای متفاوتی، مثلاً، به‌ترتیب t_1، t_2 و t_3 به $Q = (x', y', z')$ می‌رسند. ژئودزیک یکتایی بین دو نقطهٔ فضازمانی (x, y, z, t) و (x', y', z', t_1) وجود دارد که مسیر زمین در پیوستار فضازمان است، ژئودزیک یکتایی برای موشک بین (x, y, z, t) و (x', y', z', t_2) و سرانجام ژئودزیک یکتایی برای پرتو نوری هست که از نقطهٔ (x, y, z, t) به نقطهٔ (x', y', z', t_3) می‌رود، . . .



شکل۳.۲۳ بردار $A_{i\mathrm{P}}$ در نقطهٔ $\mathrm{P} \equiv (x^j)$ با بردار $A_{i\mathrm{Q}} = A_{i\mathrm{P}} + dA_{i\mathrm{P}}$ در $\mathrm{Q} \equiv (x^j + dx^j)$ موازی است، اگر در امتداد خم $x^j = x^j(s)$، $DA_{i\mathrm{P}}/Ds = ۰$ باشد.

۳.۲۳ تغییر مکان موازی

در فضای اقلیدسی، به میدان برداری $A_i(x^j)$ میدانی از بردارهای موازی می‌گویند، اگر مؤلفه‌های A_i ثابت باشند، یعنی $A_{i,j} = ۰$ باشد. یا، فرض کنید بردار A_i که در نقطهٔ x^j تعریف شده است، جابه‌جایی dx^j به نقطهٔ $x^j + dx^j$ پیدا کند، که در آنجا بردار $A_i + \partial A_i$ می‌شود. اگر $\partial A_i/\partial x^j = ۰$ باشد، می‌گوییم A_i تغییر مکان موازی پیدا کرده است. مثلاً، میدان الکتریکی یکنواخت، میدانی از بردارهای موازی است؛ میدان گرانشی زمین در ناحیه‌ای خیلی کوچک در فضا میدانی از بردارهای موازی است.

هدف ما تعمیم مفهوم تغییر مکان موازی بردارها و تانسورها در فضاهای ریمانی است. در بخش قبل نشان دادیم که اگر A_i بردار باشد، مشتق مختصاتی $\partial A_i/\partial x^j$ آن تانسور نیست، ولی مشتق ذاتی DA_i/Ds آن در امتداد خم $x^j \equiv x^j(s)$ تانسور است. (البته، باید به‌یاد آوریم که مشتق ذاتی تنها در امتداد خم تعریف می‌شود.) بنابراین، برای حفظ مشخصهٔ تانسوری، باید تغییر مکان موازی تانسور را در فضای ریمانی با روش متفاوتی تعریف کنیم. بنابراین، به تانسوری که مشتق ذاتی آن در امتداد خم $x^i = x^i(s)$ صفر شود، می‌گویند تانسوری که در امتداد این خم به‌طور موازی تغییر مکان پیدا می‌کند [شکل ۳.۲۳].

برای شروع، فعلاً فقط به حالت بردارها می‌پردازیم. به میدان برداری $A_i(x^j)$ در امتداد خم $x^i \equiv x^i(s)$ میدانی از بردارهای موازی می‌گویند، چنانچه در امتداد خم، داشته باشیم

$$DA_i/Ds = ۰ \qquad (۱۲)$$

که با برگشت به معادلهٔ (۶۱.۲۲)، به این معنی است که اگر در امتداد خم داشته باشیم.

$$\frac{dA_i}{ds} = \Gamma^{j}_{ik} A_j \frac{dx^k}{ds} \qquad \text{(۱۳الف)}$$

یا

$$dA_i = \Gamma^j_{ik} A_j dx \qquad \text{(۱۳ب)}$$

میدانی از بردارهای موازی داریم

همین‌طور، در امتداد خم $x^j \equiv x^j(s)$ میدانی از بردارهای پادوردای موازی A^i داریم، اگر داشته باشیم

$$DA^i/Ds = 0 \qquad (۱۴)$$

یا

$$\frac{dA^i}{ds} = -\Gamma^i_{jk} A^j \frac{dx^k}{ds} \qquad \text{(۱۵الف)}$$

در امتداد خم، یا

$$dA^i = -\Gamma^i_{jk} A^j dx^k \qquad \text{(۱۵ب)}$$

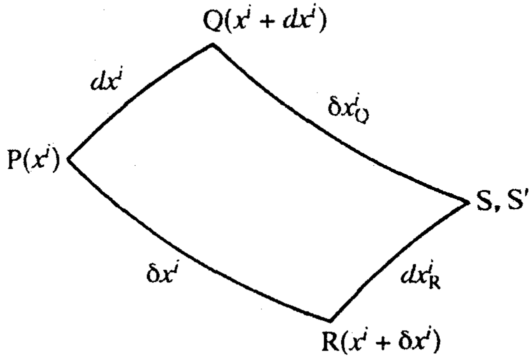
مثال ۳. نشان دهید که اندازهٔ یک بردار و زاویهٔ بین دو بردار در قالب تغییر مکان موازی ناوردا می‌ماند.

حل: (الف) بنابر معادلات (۳۷.۱۸)، اندازهٔ یک بردار می‌شود

$$A^2 = g_{ij} A^i A^j \qquad (۱۶)$$

از هر دو طرف معادلهٔ بالا نسبت به پارامتر τ مشتق می‌گیریم و با توجه به اینکه مشتق ذاتی نرده‌ای با مشتق عادی آن برابر است [معادلهٔ (۵۹.۲۲)]، داریم

$$\begin{aligned} 2A\frac{dA}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau}(g_{ij}A^iA^j) = \frac{D}{D\tau}(g_{ij}A^iA^j) \\ &= A^iA^jDg_{ij}/D\tau + g_{ij}(A^jDA^i/D\tau + A^iDA^j/D\tau) \\ &= A^iA^jDg_{ij}/D\tau + 2g_{ij}A^iDA^j/D\tau \end{aligned} \qquad (۱۷)$$



شکل۴.۲۳ تغییر مکان موازی پاره‌خط δx^i در امتداد PQ و dx^i در امتداد PR به یک نقطهٔ انتهایی $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$ می‌رسد.

در تغییر مکان موازی، مشتق ذاتی A^j و همچنین g_{ij} صفر می‌شود [معادلهٔ (۶۴.۲۲الف)] که می‌دهد $dA/d\tau = ۰$ یا ثابت $= A$ که نتیجه را ثابت می‌کند.

(ب) زاویهٔ θ بین دو بردار A_i و B_i عبارت است از [معادلات (۳۸.۱۸)]

$$AB\cos\theta = g_{ij}A^iB^j \qquad (۱۸)$$

همان‌طور که در قسمت (الف) نشان دادیم، اندازه‌های A و B در تغییر مکان موازی، ثابت می‌مانند، از هر دو طرف معادلهٔ بالا نسبت به τ مشتق می‌گیریم، روشی مشابه بالا نشان می‌دهد که $d(\cos\theta)/d\tau = ۰$ است، که نتیجهٔ مطلوب θ مساوی ثابت را به‌دست می‌دهد.

اکنون نقطهٔ $\mathrm{P} \equiv (x^i)$ و دو تغییر مکان dx^i و δx^i از P را درنظر بگیرید که به‌ترتیب به دو نقطهٔ $\mathrm{Q} \equiv (x^i + dx^i)$ و $\mathrm{R} \equiv (x^i + \delta x^i)$ منتهی می‌شود، همان‌طور که در شکل ۴.۲۳ نشان داده‌ایم. فرض کنید پاره‌خط $\mathrm{PR} = \delta x^i$ به‌طور موازی تغییر مکان یابد، به‌نحوی که نقطهٔ انتهایی P به Q و نقطهٔ انتهایی R به S رود. تغییر مکان QS چنین می‌شود

$$\mathrm{QS} \equiv \delta x^i_{\mathrm{Q}} = \delta x^i + d(\delta x^i) \qquad (۱۹)$$

که مختصات نقطهٔ S را ایجاد می‌کند

$$\mathrm{S} \equiv [x^i + dx^i + \delta x^i_{\mathrm{Q}}] \equiv [x^i + dx^i + \delta x^i + d(\delta x^i)] \qquad (۲۰)$$

با استفاده از معادلهٔ (۱۵ب)، داریم

$$d(\delta x^i) = -\Gamma^i_{jk\mathrm{P}}\delta x^j dx^k \tag{۲۱}$$

اندیس پایین P در نماد کریستوفل، یعنی این نماد را باید در P محاسبه کرد. همین‌طور، تصور کنید که پاره‌خط $\mathrm{PQ} = dx^i$ به‌طور موازی تغییر مکان یابد، به‌نحوی که با انتقال نقطهٔ انتهایی P به R، نقطهٔ انتهایی Q به S′ برود. تغییر مکان RS′ می‌شود

$$\mathrm{RS} \equiv dx^i_{\mathrm{R}} = dx^i + \delta(dx^i) \tag{۲۲}$$

که مختصات نقطهٔ S′ را چنین به‌دست می‌دهد

$$\mathrm{S}' \equiv [x^i + \delta x^i + dx^i_{\mathrm{R}}] \equiv [x^i + \delta x^i + dx^i + \delta(dx^i)] \tag{۲۳}$$

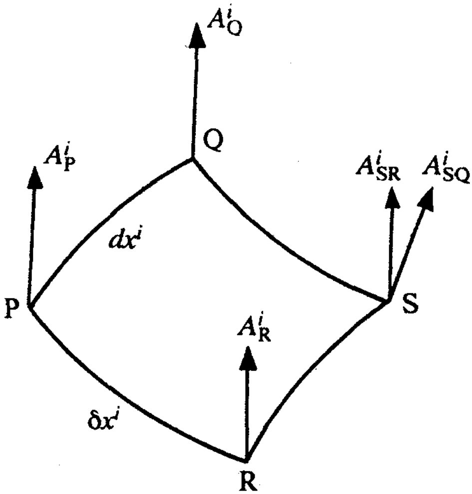
که، داریم

$$\delta(dx^i) = -\Gamma^i_{jk\mathrm{P}} dx^j \delta x^k = -\Gamma^i_{jk\mathrm{P}} dx^k \delta x^j \tag{۲۴}$$

که با استفاده از ویژگی تقارن نماد کریستوفل و تعویض j و k به‌دست می‌آید. معادلات (۲۱) و (۲۴) نشان می‌دهند که $d(\delta x^i) = \delta(dx^i)$ است، که بیانگر این است که نقطهٔ S′ بر S منطبق می‌شود. شکل بستهٔ PQRS را می‌توان متوازی‌الاضلاع بینهایت کوچک تعمیم‌یافته با اضلاع روبه‌روی موازی یکدیگر در فضای ریمانی فرض کرد.

۴.۲۳ خمیدگی فضای ریمانی

همان‌طور که در بالا توصیف کردیم، متوازی‌الاضلاع بینهایت کوچک PQRS را با اضلاع مجاور $\mathrm{PQ} = dx^i$ و $\mathrm{PR} = \delta x^i$ درنظر بگیرید. فرض کنید بردار پادوردای A^i_{P} که در نقطهٔ P تعریف شد، با دو روش زیر به‌طور موازی تغییر مکان پیدا کند: (الف) تغییر مکان موازی A^i_{P} از P به Q که به A^i_{Q} می‌انجامد و سپس تغییر مکان موازی A^i_{Q} از Q به S که بردار A^i_{SQ} را نتیجه می‌دهد. (ب) تغییر مکان موازی A^i_{P} از P به R که A^i_{R} را نتیجه می‌دهد و سپس تغییر مکان موازی A^i_{R} از R به S که به بردار A^i_{SR} می‌انجامد. این تغییر مکان را در شکل ۵.۲۳ نشان داده‌ایم. آیا دو



شکل۵.۲۳ تغییر مکان موازی بردار $A^i_{\rm P}$ در P از P به S در امتداد دو مسیر مختلف به دو بردار مختلف می‌انجامد.

بردار $A^i_{\rm SQ}$ و $A^i_{\rm SR}$ در S برابر می‌شوند. اگر چنین نیست تفاوت آن دو به چه چیزی بستگی دارد؟

روشی ساده نشان می‌دهد که دو بردار $A^i_{\rm SR}$ و $A^i_{\rm SQ}$ با یکدیگر متفاوت‌اند. بردار $A^i_{\rm Q}$ که از تغییر مکان موازی $A^i_{\rm P}$ به‌دست آمد، عبارت است از

$$A^i_{\rm Q} = A^i_{\rm P} + dA^i_{\rm P} \tag{۲۵}$$

که

$$dA^i_{\rm P} = -\Gamma^i_{jk{\rm P}} A^j_{\rm P} dx^k \tag{۲۶}$$

بنابراین

$$A^i_{\rm Q} = A^i_{\rm P} - \Gamma^i_{jk{\rm P}} A^j_{\rm P} dx^k \tag{۲۷}$$

این بردار از Q به S به‌طور موازی تغییر مکان می‌یابد و به بردار $A^i_{\rm SQ}$ می‌انجامد که چنین است

$$A^i_{\rm SQ} = A^i_{\rm Q} + \delta A^i_{\rm Q} = A^i_{\rm Q} - \Gamma^i_{lh{\rm Q}} A^l_{\rm Q} \delta x^h \tag{۲۸}$$

نماد کریستوفل به تانسور متریک بستگی دارد که به‌نوبهٔ خود تابعی از مختصات است. بنابراین، برای تغییر مکان کوچک $\mathrm{PQ} = dx^i$، می‌توانیم بنویسیم

$$\Gamma^i_{lh\mathrm{Q}} = \Gamma^i_{lh\mathrm{P}} + \Gamma^i_{lh\mathrm{P},m} dx^m \tag{۲۹}$$

که در نقطهٔ P، $\Gamma^i_{lh\mathrm{P},m} = \partial\Gamma^i_{lh}/\partial x^m$ است. با به‌کاربردن معادلات (۲۹) و (۲۷) در معادلهٔ (۲۸)، داریم

$$\begin{aligned} A^i_{\mathrm{SQ}} =& A^i_{\mathrm{P}} - \Gamma^i_{jk\mathrm{P}} A^j_{\mathrm{P}} dx^k \\ & - [\Gamma^i_{lh\mathrm{P}} + \Gamma^i_{lh\mathrm{P},m} dx^m][A^l_{\mathrm{P}} - \Gamma^l_{jk\mathrm{P}} A^j_{\mathrm{P}} dx^k]\delta x^h \\ =& A^i - \Gamma^i_{jk} A^j dx^k - \Gamma^i_{lh} A^l \delta x^h - \Gamma^i_{lh,m} A^l dx^m \delta x^h \\ & + \Gamma^i_{lh}\Gamma^l_{jk} A^j dx^k \delta x^h + \mathrm{O}[(dx^k)^۳] \end{aligned} \tag{۳۰}$$

که اندیس پایین P را از سمت راست عبارت نهایی حذف کرده‌ایم، زیرا همهٔ کمیتها در P محاسبه می‌شوند.

بردار A^i_{SR} که از جابه‌جایی موازی در امتداد مسیر PRS به‌دست آمد، صرفاً با تعویض dx^i و δx^i در عبارت A^i_{SQ} به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} A^i_{\mathrm{SR}} =& A^i - \Gamma^i_{jk} A^j \delta x^k - \Gamma^i_{lh} A^l dx^h \\ & - \Gamma^i_{lh,m} A^l \delta x^m dx^h + \Gamma^i_{lh}\Gamma^l_{jk} A^j \delta x^k dx^h + \mathrm{O}[(dx^k)^۳] \end{aligned} \tag{۳۱}$$

با تفریق یکی از دیگری می‌بینیم که سه جملهٔ اول سمت راست معادلات (۳۰) و (۳۱) حذف می‌شوند و عبارتی از مرتبهٔ دوم dx^k را نتیجه می‌دهند

$$\begin{aligned} A^i_{\mathrm{SR}} - A^i_{\mathrm{SQ}} =& \Gamma^i_{lh,m} A^l dx^m \delta x^h - \Gamma^i_{lh,m} A^l \delta x^m dx^h \\ & + \Gamma^i_{lh}\Gamma^l_{jk} A^j \delta x^k dx^h - \Gamma^i_{lh}\Gamma^l_{jk} A^j dx^k \delta x^h \end{aligned} \tag{۳۲}$$

j را به‌جای l و k را به‌جای m در دو جملهٔ اول سمت راست می‌گذاریم و سپس با جابه‌جایی k با h در جمله‌های دوم و سوم، معادلهٔ بالا را چنین می‌نویسیم

$$A^i_{\mathrm{SR}} - A^i_{\mathrm{SQ}} = R_{j.hk}^{\ i} A^j dx^k \delta x^h \tag{۳۳}$$

که[۱]

$$R_{j.hk}^{\ i} = \Gamma^i_{jh,k} - \Gamma^i_{jk,h} + \Gamma^i_{lk}\Gamma^l_{jh} - \Gamma^i_{lh}\Gamma^l_{jk} \tag{۳۴}$$

که A^i، dx^k، و δx^h بردارهای دلخواه‌اند، از قانون خارج‌قسمت نتیجه می‌گیریم که $R_{j.kh}^{\ i}$ تانسور رتبهٔ چهار است. این تانسور به تانسور خمیدگی ریمان-کریستوفل معروف است. از بردار A^i مستقل است و تنها به تانسور متریک و مشتقهای اول و دوم آن بستگی دارد.

در فضای اقلیدسی، می‌شود یک دستگاه مختصات دکارتی انتخاب کنیم که در آن تمام نمادهای کریستوفل عیناً صفر شوند. بنابراین، می‌بینیم که برای فضای اقلیدسی، تانسور خمیدگی ریمان-کریستوفل عیناً صفر می‌شود.

اگر به‌جای بردار پادوردا با بردار هموردای A_i شروع کنیم، با روشی مشابه می‌توان نشان داد که تغییر مکان موازی آن در امتداد دو مسیر مختلف به نتیجهٔ زیر می‌رسد

$$A_{i\mathrm{SR}} - A_{i\mathrm{SQ}} = -R_{i.hk}^{\ j} A_j dx^k \delta x^h \tag{۳۵}$$

این نشان می‌دهد که نتیجهٔ تغییر مکان موازی بردار (و، به‌طور کلی تانسور) از یک نقطه به نقطهٔ دیگر در فضای ریمانی به مسیر انتخاب شده بستگی دارد. در نتیجه، اگر تانسوری در امتداد خم بسته‌ای به‌طور موازی تغییر مکان یابد، تا به نقطهٔ شروع آن برسد، بردار منتج در فضای نااقلیدسی لزوماً همان بردار اصلی نیست.

مثال ۴. نشان دهید که میدان بردارهای مماس بر ژئودزیک، میدانی از بردارهای موازی است.

حل: فرض کنید $x^i \equiv x^i(s)$ یک ژئودزیک در فضای ریمانی باشد. دراین‌صورت، مختصات نقاط روی ژئودزیک در معادلهٔ ژئودزیک صدق می‌کند

$$\frac{d^۲x^i}{ds^۲} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\,\frac{dx^k}{ds} = ۰ \tag{۳۶}$$

اگر A^i برداری مماس بر این ژئودزیک باشد، مؤلفه‌های A^i به‌صورت زیر داده می‌شوند

$$A^i = dx^i/ds \tag{۳۷}$$

---

۱. نویسندگان مختلف، عبارت سمت راست معادلهٔ (۳۴) را به روشهای مختلفی مثل $R^i_{.jhk}$، $R_{hkj.}^{\ \ \ i}$ و غیره نشان می‌دهند. این اهمیت چندانی ندارد؛ اما، آنچه مهم است این است که تعریفی را که یکبار پذیرفتیم، باید پیوسته به‌کار بریم.

در نتیجه، معادلهٔ (۳۶) در امتداد این ژئودزیک تبدیل می‌شود به

$$\frac{dA^i}{ds}+\Gamma^i_{jk}A^j\frac{dx^k}{ds}=\circ \qquad \text{(۳۸الف)}$$

یا

$$DA^i/DS=\circ \qquad \text{(۳۸ب)}$$

بنابراین، از تعریف تغییر مکان موازی نتیجه می‌گیریم که میدان بردارهای مماس بر ژئودزیک، میدانی از بردارهای موازی است.

مثال ۵. نشان دهید که تغییر مکان موازی یک بردار پیرامون دایره‌ای روی سطح یک کره همان بردار قبلی را نتیجه نمی‌دهد، مگر اینکه دایرهٔ مذکور دایرهٔ عظیمه باشد، یعنی یک ژئودزیک.

حل: مختصات قطبی کروی $x^{۱}=\theta$ و $x^{۲}=\phi$ را روی سطح یک کره انتخاب کنید، به‌طوری که تنها نمادهای غیرصفر کریستوفل با معادلات (۵۱.۲۲ج) و (۵۱.۲۲هـ) داده شده باشند. دایره‌ای کوچک قائم بر محور قطبی انتخاب کنید، به‌نحوی که معادلهٔ پارامتری آن $\theta=\alpha$، $\phi=ps+q$، $p\neq\circ$ باشد، با $d\theta/ds=\circ$. بردار $A^i=(A^{۱},A^{۲})$ را در نقطه‌ای روی این دایره درنظر بگیرید که فرض می‌کنیم $\phi=\circ$ باشد. چنانچه این بردار در امتداد دایره به‌طور موازی تغییر مکان یابد، مؤلفه‌های آن بنابر معادلهٔ (۱۵الف)، چنین تغییر می‌کند

$$\begin{aligned}\frac{dA^{۱}}{ds}&=-\Gamma^{۱}_{jk}A^j\frac{dx^k}{ds}=A^{۲}\sin\alpha\cos\alpha\frac{d\phi}{ds}\\ \frac{dA^{۲}}{ds}&=-\Gamma^{۲}_{jk}A^j\frac{dx^k}{ds}=-A^{۱}\cot\alpha\frac{d\phi}{ds}\end{aligned} \qquad (۳۹)$$

اکنون، برای هر تابع f از θ و ϕ از s، داریم

$$\frac{df}{ds}=\frac{\partial f}{\partial\theta}\,\frac{d\theta}{ds}+\frac{\partial f}{\partial\phi}\,\frac{d\phi}{ds}=\frac{\partial f}{\partial\phi}\,\frac{d\phi}{ds} \qquad (۴\circ)$$

که معادلات (۳۹) را به معادلات زیر تبدیل می‌کند

$$\partial A^{۱}/\partial\phi=A^{۲}\sin\alpha\cos\alpha,\qquad \partial A^{۲}/\partial\phi=-A^{۱}\cot\alpha \qquad (۴۱)$$

بار دیگر، با مشتق‌گیری نسبت به ϕ و جانشین کردن یکی به‌جای دیگری، معادلات (۴۱) به معادلات

واجفتیدهٔ زیر منتهی می‌شود

$$\partial^2 A^1/\partial\phi^2 = -A^1 \cos^2\alpha, \qquad \partial^2 A^2/\partial\phi^2 = -A^2 \cos^2\alpha \qquad (۴۲)$$

جوابی از آن که با معادلات (۴۱) سازگار باشد، عبارت است از

$$A^1 = \sin\alpha[c\cos(\phi\cos\alpha) + d\sin(\phi\cos\alpha)]$$

$$A^2 = d\cos(\phi\cos\alpha) - c\sin(\phi\cos\alpha) \qquad (۴۳)$$

در $\phi = 0$، مؤلفه‌های بردار می‌شوند

$$A^1(\phi = 0) = c\sin\alpha, \qquad A^2(\phi = 0) = d \qquad (۴۴)$$

در حالی که مؤلفه‌ها، بعد از یک بار تغییر مکان موازی حول دایره، می‌شوند

$$A^1(\phi = 2\pi) = \sin\alpha[c\cos(2\pi\cos\alpha) + d\sin(2\pi\cos\alpha)]$$

$$A^2(\phi = 2\pi) = d\cos(2\pi\cos\alpha) - c\sin(2\pi\cos\alpha) \qquad (۴۵)$$

که با آنچه در معادلات (۴۴) آوردیم، متفاوت است، مگر اینکه $\alpha = \pi/2$ باشد، یعنی تغییر مکان در امتداد ژئودزیک باشد.

تمرین

۱.۲۳ یک دایرهٔ عظیمه روی سطح کره‌ای درنظر بگیرید و محور قطبی را طوری انتخاب کنید که در صفحهٔ دایرهٔ عظیمه قرار گیرد، به‌نحوی که دایره نصف‌النهار باشد. با این انتخاب مختصات، نشان دهید که هر نصف‌النهاری روی کره ژئودزیک است.

۲.۲۳ نشان دهید که تغییر مکان موازی یک بردار در امتداد هر خم بسته‌ای در فضای اقلیدسی به بردار اصلی آن منتهی می‌شود.

۳.۲۳ معادلات ژئودزیک را در مختصات استوانه‌ای و قطبی کروی برای فضای اقلیدسی سه‌بعدی به‌دست آورید.

۴.۲۳ * معادلات ژئودزیک را برای یک فضای دوبعدی با متریک $ds^2 = f\,du\,dv$ به‌دست آورید، که f تابعی از u و v است.

۲۴

تانسور خمیدگی ریمان-کریستوفل

فضا اقلیدسی (یا تخت) است، چنانچه در هر جای آن بشود دستگاه مختصاتی دکارتی یافت؛ در غیر این‌صورت، نااقلیدسی (یا خمیده) است. متریک $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ی فضایی برحسب دستگاه مختصات خاص x^i مفروض است، چگونه می‌شود فهمید که این فضا تخت است یا نه؟ بررسی کلیهٔ تبدیلهای ممکن مختصاتی برای اینکه ببینیم آیا می‌توان متریک را به‌صورت دکارتی $ds^2 = \sum(dx^i)^2$ درآورد، ممکن نیست. مثلاً، متریک $ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2$ را درنظر بگیرید. آزمودن تبدیلهای گوناگون به منظور اینکه این متریک را به‌صورت دکارتی درآوریم خسته‌کننده خواهد بود. با وجود این، با نگاهی گذرا به این حالت خاص، می‌شود گفت که این دقیقاً متریک برحسب مختصات قطبی $x^1 = r$، $x^2 = \theta$ از یک فضای تخت دوبعدی است. در حالت کلی، مطلوب یافتن معیاری ساده برای تعیین تخت یا خمیده بودن فضاست. تانسور خمیدگی ریمان-کریستوفل چنین معیاری به‌دست می‌دهد. بدون اثبات،[1] می‌گوییم که فضا تخت است، اگر و تنها اگر تانسور خمیدگی ریمان-کریستوفل در هر نقطهٔ آن، بدون توجه به دستگاه

---

۱. برای اثبات، خواننده می‌تواند به هر کتابی در زمینهٔ نظریهٔ نسبیت عام مراجعه کند. مثلاً،

مختصات انتخابی عیناً صفر شود. اهمیت تانسور خمیدگی[1] در نظریهٔ نسبیت عام ناشی از چنین حقیقتی است.

۱.۲۴ قانون جابه‌جایی مشتق‌گیری هموردا

در بخش قبل، تانسور خمیدگی را با درنظر گرفتن تغییر مکان موازی بردار در امتداد دو مسیر مختلف معرفی کردیم. تانسور خمیدگی به یک صورت دیگر نیز ظاهر می‌شود.

مشتق‌گیری معمولی نسبت به مختصات جابه‌جایی‌پذیر است. مثلاً، اگر موجود A تابعی از مختصات x^i باشد، دراین‌صورت $\partial^2 A/\partial x^j \partial x^i = \partial^2 A/\partial x^i \partial x^j$ است، زیرا x^i و $x^j (j \neq i)$ از یکدیگر مستقل‌اند. با اینهمه، می‌بینیم که مشتق‌گیری همورداى تانسورها در حالت کلی، جابه‌جایی‌پذیر نیست.

فرض کنید A_i برداری هموردا باشد. مشتق همورداى آن بنابر [معادلهٔ (۲۲.۲۲الف)] می‌شود

$$A_{i;j} = A_{i,j} - \Gamma^l_{ij} A_l \tag{۱}$$

که تانسور همورداى رتبهٔ دو است. با یک‌بار دیگر مشتق‌گیری همورداى آن نسبت به x^k و با استفاده از معادلهٔ (۲۸.۲۲الف) نتیجه می‌گیریم

$$A_{i;jk} \equiv (A_{i;j})_{;k} = (A_{i;j})_{,k} - \Gamma^h_{ik} A_{h;j} - \Gamma^h_{jk} A_{i;h} \tag{۲}$$

با جانشین کردن معادلهٔ (۱) در معادلهٔ (۲)، داریم

$$\begin{aligned} A_{i;jk} =& A_{i,kj} - \Gamma^l_{ij,k} A_l - \Gamma^l_{ij} A_{l,k} \\ & - \Gamma^h_{ik}(A_{h,j} - \Gamma^l_{hj} A_l) - \Gamma^h_{jk}(A_{i,h} - \Gamma^l_{ih} A_l) \\ =& A_{i,kj} - \Gamma^l_{ij} A_{l,k} - \Gamma^h_{ik} A_{h,j} - \Gamma^h_{jk} A_{i,h} \\ & - \Gamma^l_{ij,k} A_l + \Gamma^h_{ik}\Gamma^l_{hj} A_l + \Gamma^h_{jk}\Gamma^l_{ih} A_l \end{aligned} \tag{۳}$$

Mollar, C., *The Theory of Relativity* (Oxford University Press, London, 1966); J. L. Synge, *Relativity: TheGeneral Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1960).

۱. از این به بعد، تانسور خمیدگی ریمان-کریستوفل را تنها، تانسور خمیدگی می‌خوانیم.

عبارت بالا را با جابه‌جایی j و k می‌نویسیم، می‌یابیم

$$A_{i;kj} = A_{i,jk} - \Gamma^l_{ik} A_{l,j} - \Gamma^h_{ij} A_{h,k} - \Gamma^h_{kj} A_{i,h} - \Gamma^l_{ik,j} A_l + \Gamma^h_{ij} \Gamma^l_{hk} A_l + \Gamma^h_{kj} \Gamma^l_{ih} A_l \tag{۴}$$

با تفریق یکی از دیگری، داریم

$$A_{i;jk} - A_{i;kj} = -R_{i.jk}^{\ l} A_l \tag{۵}$$

که

$$R_{i.jk}^{\ l} = \Gamma^l_{ij,k} - \Gamma^l_{ik,j} + \Gamma^h_{ij} \Gamma^l_{hk} - \Gamma^h_{ik} \Gamma^l_{hj} \tag{۶}$$

تانسور خمیدگی است و با آنچه که در معادلهٔ (۳۴.۲۳) به‌دست آوردیم، یکسان است.

از بردار پادوردای A^i، به‌جای بردار هموردا، شروع می‌کنیم، به معادلهٔ زیر می‌رسیم

$$A^i_{.;jk} - A^i_{.;kj} = R_{l.jk}^{\ i} A^l \tag{۷}$$

برای تانسوری با رتبهٔ دلخواه، نتیجه چنین می‌شود

$$A^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s;kh} - A^{i_1, \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s;hk} = \sum_{\mu=1}^{r} R^{i_\mu}_{l.kh} A^{i_1 \cdots i_{\mu-1} l i_{\mu+1} \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} - \sum_{\mu=1}^{s} R_{j_\mu \cdot kh}^{\ \ l} A^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_{\mu-1} l j_{\mu+1} \cdots j_s} \tag{۸}$$

از معادلهٔ بالا در می‌یابیم که مشتق‌گیری هموردا، در فضای نااقلیدسی جابه‌جایی‌پذیر نیست.

۲.۲۴ تانسور خمیدگی هموردا

تانسور خمیدگی هموردای کامل R_{injk} را با پایین آوردن اندیس پادوردا در معادلهٔ (۶) تعریف می‌کنند، یعنی

$$R_{injk} = g_{\ln} R_{i.jk}^{\ l} \tag{۹}$$

برای به‌دست آوردن عبارتی برای تانسور خمیدگی هموردا، به رابطهٔ زیر توجه می‌کنیم

$$[ij,n]_{,k} = (g_{nl}\Gamma^l_{ij})_{,k} = g_{nl,k}\Gamma^l_{ij} + g_{nl}\Gamma^l_{ij,k} \qquad (۱۰)$$

با به‌کار بردن معادلات (۶) و (۱۰) در معادلهٔ (۹)، داریم

$$\begin{aligned} R_{injk} =& [ij,n]_{,k} - g_{nl,k}\Gamma^l_{ij} - [ik,n]_{,j} + g_{nl,j}\Gamma^l_{ik} \\ & + g_{ln}(\Gamma^h_{ij}\Gamma^l_{hk} - \Gamma^h_{ik}\Gamma^l_{hj}) \\ =& [ij,n]_{,k} - [ik,n]_{,j} + \Gamma^h_{ik}(g_{nh,j} - [hj,n]) \\ & - \Gamma^h_{ij}(g_{nh,k} - [hk,n]) \\ =& [ij,n]_{,k} - [ik,n]_{,j} + \Gamma^h_{ik}[nj,h] - \Gamma^h_{ij}[nk,h] \end{aligned} \qquad (\text{۱۱الف})$$

یا

$$R_{injk} = [ij,n]_{,k} - [ik,n]_j + g^{lh}\{[ik,l][nj,h] - [ij,l][nk,h]\} \qquad (\text{۱۱ب})$$

۳.۲۴ تقارنهای تانسور خمیدگی

از هر دو تعریف $R^{\ l}_{i.jk}$، معادلهٔ (۶) و R_{injk} معادلهٔ (۱۱)، بدیهی است که تانسور خمیدگی در جابه‌جایی اندیسهای سوم و چهارم پادمتقارن است، یعنی

$$R^{\ l}_{i.jk} = -R^{\ l}_{i.kj}, \qquad R_{injk} = -R_{inkj} \qquad (۱۲)\ (\text{الف})$$

می‌توان نشان داد که تانسور خمیدگی هموردا در جابه‌جایی دو اندیس اول نیز نامتقارن است. برای اثبات این ادعا، مناسب است دو جملهٔ اول معادلهٔ (۱۱ب) را به‌طور صریح بنویسیم. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} [ij,n]_{,k} - & [ik,n]_{,j} \\ &= \frac{۱}{۲}(g_{in,kj} + g_{jn,ki} - g_{ij,kn}) - \frac{۱}{۲}(g_{in,jk} + g_{kn,ji} - g_{ik,jn}) \\ &= \frac{۱}{۲}(g_{jn,ki} + g_{ik,jn} - g_{ij,kn} - g_{kn,ij}) \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

با جابه‌جایی i و n، به‌روشنی داریم

$$[nj, i]_{,k} - [nk, i]_{,j} = -\{[ij, n]_{,k} - [ik, n]_{,j}\} \tag{۱۴}$$

طبق این معادله دو جملهٔ اول سمت راست معادلهٔ (۱۱ب) در تعویض i و n نامتقارن است. تعویض i و n در قسمت باقیماندهٔ معادلهٔ (۱۱ب) نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} g^{lh}\{[nk, l][ij, h] - [nj, l][ik, h]\} \\ = g^{hl}\{[nk, h][ij, l] - [nj, h][ik, l]\} \\ = -g^{lh}\{[ik, l][nj, h] - [ij, l][nk, h]\} \end{aligned} \tag{۱۵}$$

در نهایت همهٔ اینها به نتیجهٔ مطلوب زیر می‌رسد

$$R_{injk} = -R_{nijk} \tag{۱۶ (ب)}$$

از این روابط پادمتقارن، درمی‌یابیم که مؤلفه‌های تانسور خمیدگی که به‌صورت R_{iijk}، R_{injj}، R_{iijj}، و R_{iiii} باشند (مجموع‌یابی انجام نمی‌شود) عیناً صفر می‌شوند.

اگر از نتایج معادلهٔ (۳۱.۲۲) و معادلهٔ (۸) استفاده کنیم، اثبات نتیجهٔ بالا (ب) ساده‌تر می‌شود. با نوشتن معادلهٔ (۸) برای تانسور هموردای رتبهٔ دو، داریم

$$A_{ij;kh} - A_{ij;hk} = -R_{i.kh}^{\ l} A_{lj} - R_{j.kh}^{\ l} A_{il} \tag{۱۷}$$

به‌جای A_{ij} تانسور متریک g_{ij} را می‌گذاریم و با یادآوری اینکه مشتق هموردای آن صفر می‌شود، معادلهٔ (۱۷) تبدیل می‌شود به

$$\circ = R_{i.kh}^{\ l} g_{lj} + R_{j.kh}^{\ l} g_{il} = R_{ijkh} + R_{jikh} \tag{۱۸}$$

که از معادلهٔ (۹) استفاده کرده‌ایم. معادلهٔ (۱۸) نتیجهٔ مطلوب را به‌دست می‌دهد.

سپس، می‌توان نشان داد که تانسور خمیدگی هموردا در تعویض دو زوج اندیس متقارن است. یعنی، در قالب تعویض $(in) \leftrightarrow (jk)$. در معادلهٔ (۱۳) در تعویض $j \leftrightarrow i$ و $k \leftrightarrow n$، به‌سادگی می‌بینیم که عبارت بدون تغییر می‌ماند، یعنی

$$[ji, k]_{,n} - [jn, k]_{,i} = [ij, n]_{,k} - [ik, n]_{,j} \tag{۱۹}$$

همین‌طور، با این جابه‌جاییها در نیمهٔ دوم عبارت سمت راست معادلهٔ (۱۱ب)، می‌بینیم که

$$g^{lh}\{[jn,l][ki,h]-[ji,l][kn,h]\}=g^{lh}\{[ik,l][nj,h]-[ij,l][nk,h]\} \quad (۲۰)$$

با یادآوری اینکه $g^{hl}=g^{lh}$ و $[ki,l]=[ik,l]$ است. با ترکیب معادلات (۱۹) و (۲۰)، داریم

$$R_{injk}=R_{jkin} \quad (۲۱)\ (ج)$$

در پایان، ویژگی چرخه‌ای تانسور خمیدگی را داریم: اگر هر اندیسی از این تانسور را ثابت نگه داریم، در حالی‌که سه اندیس دیگر به‌طور چرخه‌ای جایگشت پیدا کنند و مؤلفه‌ها را با هم جمع کنیم، نتیجه صفر می‌شود، یعنی

$$R_{injk}+R_{ijkn}+R_{iknj}=0 \quad (۲۲)\ (د)$$

که اولین اندیس را ثابت نگه داشته‌ایم. برای اثبات، بار دیگر عبارتهای صریحی برای سه مؤلفه‌ای که در معادلهٔ (۲۲) ظاهر شد، می‌نویسیم و آنها را با هم جمع می‌کنیم. با به‌کار بردن معادلهٔ (۱۳) در معادلهٔ (۱۱ب)، داریم

$$\begin{aligned}R_{injk}=&\frac{1}{2}(g_{jn,ki}+g_{ik,jn}-g_{ij,kn}-g_{kn,ij})\\&+g^{lh}\{[ik,l][nj,h]-[ij,l][nk,h]\}\end{aligned} \quad (۲۳)$$

با دو بار جایگشت چرخه‌ای $n\to k\to j\to n$، داریم

$$\begin{aligned}R_{ijkn}=&\frac{1}{2}(g_{kj,ni}+g_{in,kj}-g_{ik,nj}-g_{nj,ik})\\&+g^{lh}\{[in,l][jk,h]-[ik,l][jn,h]\}\end{aligned} \quad (۲۴)$$

$$\begin{aligned}r_{iknj}=&\frac{1}{2}(g_{nk,ji}+g_{ij,nk}-g_{in,jk}-g_{jk,in})\\&+g^{lh}\{[ij,l][kn,h]-[in,l][kj,h]\}\end{aligned} \quad (۲۵)$$

با جمع سه معادلهٔ بالا، فوراً معادلهٔ (۲۲) نتیجه می‌شود.

مناسب است که این روابط را میان مؤلفه‌های تانسور خمیدگی بنویسیم:

$$R_{injk}=-R_{nijk}=-R_{inkj}=R_{jkin} \quad (۲۶الف)$$

$$R_{injk}+R_{ijkn}+R_{iknj}=0 \quad (۲۶ب)$$

روابط فوق، چهار رابطهٔ مستقل بین مؤلفه‌های تانسور خمیدگی‌اند، با ترکیب این روابط با یکدیگر، روابط گوناگون دیگری به شرح زیر به‌دست می‌آیند:

$$(۱)\ R_{injk} = -R_{kjin} = -R_{jkni} = R_{kjni}$$

$$(۲)\ R_{injk} + R_{jnki} + R_{knji} = 0 \quad \text{(اندیس دوم ثابت است)}$$

$$(۳)\ R_{injk} + R_{nkji} + R_{kijn} = 0 \quad \text{(اندیس سوم ثابت است)} \qquad (۲۷)$$

$$(۴)\ R_{injk} + R_{njik} + R_{jink} = 0 \quad \text{(اندیس چهارم ثابت است)}$$

۴.۲۴ تعداد مؤلفه‌های مستقل

تانسور خمیدگی رتبهٔ چهار، در فضای Nبعدی، در کل N^4 مؤلفه دارد. با وجود این، دیده‌ایم که بسیاری از این مؤلفه‌ها عیناً صفر می‌شوند و بقیه به‌صورتهای مختلفی به یکدیگر مربوط می‌شوند. در نتیجه، تعداد مؤلفه‌های مستقل تانسور خمیدگی به‌طور چشمگیری کاهش می‌یابد.

برای محاسبهٔ این تعداد، اولاً توجه می‌کنیم که به‌این منظور، می‌توانیم مؤلفه‌های غیرصفر تانسور خمیدگی را به سه رسته تقسیم کنیم (در بخش فعلی، قرارداد مجموع‌یابی حذف می‌شود): (۱) مؤلفه‌هایی با دو اندیس متمایز، همچون $R_{inin}(i \neq n)$ و سایر مؤلفه‌هایی که به آن مربوط می‌شوند، مانند R_{inni}، R_{nini} و غیره؛ (۲) مؤلفه‌هایی با سه اندیس متمایز، به‌صورت $R_{injі}$؛ و (۳) مؤلفه‌هایی با چهار اندیس متمایز، مثل R_{injk}. ثانیاً، می‌بینیم مگر در حالتی که هر چهار اندیس متمایز باشند، رابطهٔ تقارن چرخه‌ای معادلهٔ (۲۲)، به یکی از سه رابطهٔ قبلی تبدیل می‌شود، که با مساوی قرار دادن هر دو اندیسی در معادلهٔ (۲۲)، آن‌را به‌سادگی می‌شود دید. مثلاً، با قرار دادن $i = n$ در آن، داریم

$$R_{iijk} + R_{ijki} + R_{ikij} = 0 \qquad (۲۸)$$

از رابطهٔ (ب)، معادلهٔ (۱۶)، داریم $R_{iijk} = 0$ و از رابطهٔ (ج) معادلهٔ (۲۱)، داریم $R_{ikij} = R_{ijik}$. در نتیجه معادلهٔ (۲۸) به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$R_{ijki} = -R_{ijik} \qquad (۲۹)$$

که به‌صورت رابطهٔ (الف)، معادلهٔ (۱۲) است. بنابراین، چنانچه دو اندیس از چهار اندیس مساوی باشند، رابطهٔ (د) با استفاده از روابط (ب) و (ج) به رابطهٔ (الف) تبدیل می‌شود. به‌عبارت دیگر، رابطهٔ (د) از روابط (الف)، (ب) و (ج) مستقل نیست، مگر اینکه هر چهار اندیس متمایز باشند.

اکنون آمادگی داریم که تعداد مؤلفه‌های مستقل سه رسته‌ای را که در بالا فهرست کردیم محاسبه کنیم.

(۱) دو اندیس متمایز، R_{inin}: اندیس اول را می‌توان به N راه و اندیس دوم را به $N-۱$ راه انتخاب کرد. با وجود این، چون $R_{inin}=R_{nini}$ است، ترتیب دو اندیس مهم نیست و باید تعداد کل راهها را به عامل دو تقسیم کنیم. در نتیجه تعداد مؤلفه‌های مستقل رستهٔ اول را به‌دست می‌آوریم [که دقیقاً تعداد زوج اندیسهای متمایز (i,n) با $i\neq n$ است]. یعنی

$$N_{\mathrm{I}}=\frac{۱}{۲}N(N-۱) \tag{۳۰}$$

روابط دیگری که این عدد را کمتر کند، وجود ندارد.

(۲) سه اندیس متمایز، R_{injn}: زوج اندیس اول را می‌توان به $۱/۲N(N-۱)$ راه انتخاب کرد، همان‌طور که در (i) محاسبه شد. با انتخاب دو اندیس، اندیس متمایز سوم را می‌توان به $N-۲$ راه انتخاب کرد. بنابراین، تعداد مؤلفه‌های متمایز رستهٔ دوم می‌شود

$$N_{\mathrm{II}}=\frac{۱}{۲}N(N-۱)(N-۲) \tag{۳۱}$$

روابط دیگری که این عدد را کمتر کند، وجود ندارد.

(۳) چهار اندیس متمایز، R_{injk}: زوج اندیس اول را می‌توان به $۱/۲N(N-۱)$ راه انتخاب کرد. با انتخاب زوج اندیس اول، زوج دوم را می‌توان به $۱/۲(N-۲)(N-۳)$ راه انتخاب کرد. ولی، چون بنابر رابطهٔ (ج)، معادلهٔ (۲۱)، زوج اندیسها را می‌توان با یکدیگر جابه‌جا کرد، باید این عدد را به عامل ۲ تقسیم کنیم. این ایجاب می‌کند که تعداد راههای انتخاب دو زوج اندیس متمایز $N(N-۱)(N-۲)(N-۳)/۸$ شود. با وجود این، اکنون که هر چهار اندیس متمایزند، رابطهٔ چرخه‌ای (د) مؤثر می‌شود و نشان می‌دهد که تنها دو سوم این مؤلفه‌ها مستقل‌اند. سرانجام، تعداد مؤلفه‌های مستقل این رسته می‌شود

$$N_{\mathrm{III}}=N(N-۱)(N-۲)(N-۳)/۱۲ \tag{۳۲}$$

با جمع کردن سه سهم فوق، تعداد مؤلفه‌های، به‌لحاظ جبری مستقل تانسور خمیدگی را چنین به‌دست می‌آوریم

$$N_{\mathrm{I}} + N_{\mathrm{II}} + N_{\mathrm{III}} = N^۲(N^۲ - ۱)/۱۲ \qquad (۳۳)$$

تعداد مؤلفه‌های مستقل تانسور خمیدگی را، به‌ازای چند مقدار کوچک N در زیر فهرست کرده‌ایم:

بعد فضا:	۵	۴	۳	۲	۱
تعداد مؤلفه‌های مستقل:	۵۰	۲۰	۶	۱	۰

این واقعیت که در فضای یک‌بعدی تعداد مؤلفه‌های مستقل R_{injk} صفر می‌شود، به این معنی است که فضای یک‌بعدی، به‌صورتی که در نظریهٔ نسبیت عام وجود دارد، یعنی، به‌مفهوم نااقلیدسی بودن فضا، "خمیده" نیست. به‌عبارت دیگر، هر فضای یک‌بعدی فضایی اقلیدسی است. مطلب فوق مستقیماً از این واقعیت ناشی می‌شود که در فضای یک‌بعدی (با مختصهٔ x) کلیترین متریک به‌صورت $ds^۲ = f(x)dx^۲$ است که با تبدیل مختصاتی $f^{۱/۲}(x)dx = du$ به‌صورت دکارتی $ds^۲ = du^۲$ در می‌آید.

در فضای دوبعدی، اندیسهای i، n، j، k تنها دو مقدار ۱ و ۲ می‌گیرند. از کل ۱۶ مؤلفه، تنها مؤلفه‌های غیرصفر تانسور خمیدگی عبارت‌اند از $R_{۱۲۱۲}$، $R_{۱۲۲۱}$، $R_{۲۱۱۲}$ و $R_{۲۱۲۱}$ که همهٔ آنها با روابط (الف)، (ب) و (ج) به یکدیگر مربوط می‌شوند. تنها یک مؤلفهٔ به‌لحاظ جبری مستقل هست که بنابر قرارداد $R_{۱۲۱۲}$ انتخاب می‌شود.

مثال ۱. مؤلفه‌های تانسور خمیدگی را در فضای دوبعدی سطح کره بیابید.

حل: همان‌طور که در بالا بحث کردیم، روی سطح کره‌ای به‌شعاع a، تنها چهار مؤلفهٔ غیرصفر تانسور خمیدگی وجود دارد. این مؤلفه‌ها به‌صورت زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند

$$R_{۱۲۱۲} = R_{۲۱۲۱} = -R_{۱۲۲۱} = -R_{۲۱۱۲} \qquad (۳۴)$$

با به‌کار بردن معادلات (۴۸.۲۲) و معادلهٔ (۱۱)، داریم

$$\begin{aligned} R_{۱۲۱۲} &= \partial[۱۱,۲]/\partial\phi - \partial[۱۲,۲]/\partial\theta + g^{lh}\{[۱۲,l][۱۲,h] - [۱۱,l][۲۲,h]\} \\ &= -\partial(a^۲ \sin\theta\cos\theta)/\partial\theta + a^۴ \sin^۲\theta\cos^۲\theta/(a^۲\sin^۲\theta) \\ &= a^۲\sin^۲\theta \end{aligned} \quad (۳۵)$$

همین‌طور، از معادلات (۵۱.۲۲) و معادلهٔ (۶)، داریم

$$\begin{aligned} R_{۱.۱۲}^{\;۲} &= \partial\Gamma^۲_{۱۱}/\partial\phi - \partial\Gamma^۲_{۱۲}/\partial\theta + \Gamma^h_{۱۱}\Gamma^۲_{h۲} - \Gamma^h_{۱۲}\Gamma^۲_{h۱} \\ &= \operatorname{cosec}^۲\theta - \cot^۲\theta = ۱ \end{aligned} \quad (۳۶)$$

تمرین

۱.۲۴ با استفاده از معادلهٔ (۲۶)، روابط میان مؤلفه‌های تانسور خمیدگی را که در معادلات (۲۷) ارائه کردیم، به‌دست آورید.

۲.۲۴ تعداد مؤلفه‌های غیرصفر تانسور خمیدگی را برای $N = ۳$ و $N = ۴$ بیابید. مجموعه‌ای مناسب از $N^۲(N^۲ - ۱)/۱۲$ مؤلفهٔ به‌لحاظ جبری مستقل، برای حالتهای بالا بنویسید.

۳.۲۴ * فضایی دوبعدی متریک $ds^۲ = f(u,v)du^۲ + h(u,v)dv^۲$ دارد. مؤلفهٔ $R_{۱۲۱۲}$ تانسور خمیدگی را برای این فضا بیابید [تمرین (۱۰.۲۲)]. حالتهای خاص زیر را درنظر بگیرید و تحقیق کنید که این نتایج با نتایج محاسبات مستقیم سازگار است: (الف) $f = ۱$، $h = u^۲$ [مختصات قطبی در فضای تخت دوبعدی]؛ (ب) $f = a^۲$، $h = a^۲\sin^۲ u$ [مختصات قطبی روی سطح یک کره، مثال ۱ و تمرین ۴].

۴.۲۴ نشان دهید که مؤلفهٔ $R_{۱۲۱۲}$ تانسور خمیدگی برای فضای دوبعدی با متریک $ds^۲ = dx^۲ + f(x,y)dy^۲$ برابر است با $-۱/۲\partial^۲ f/\partial x^۲ + (۱/۴f)(\partial f/\partial x)^۲$.

۵.۲۴ * فضایی با متریک $ds^۲ = ۲Sdudv$ را درنظر بگیرید. $R_{۱۲۱۲}$ را برای این فضا بیابید. مؤلفهٔ غیرصفر تانسور خمیدگی آمیختهٔ $R_{i.kl}^{\;j}$ را برای این فضا به‌دست آورید. نشان دهید که اگر S حداقل از یکی از دو مختصهٔ u و v مستقل باشد، فضا تخت است.

۶.۲۴ اتحاد بیانچی را ثابت کنید.

$$R^{\;i}_{j.km;n} + R^{\;i}_{j.mn;k} + R^{\;i}_{j.nk;m} = ۰$$

پیوست الف

گزاره‌های شرطی و منطقی

اغلب به دوگزاره‌ای برمی‌خوریم که با عباراتی مانند "لازم است"، "کافی است"، "اگر"، "تنها اگر"، "اگر و تنها اگر" و غیره به یکدیگر مربوط می‌شوند. باید معنی آنها را به‌روشنی دریابیم و از اشتباه به‌کار بردن آنها بپرهیزیم.

گزاره‌های شرطی زیر را درنظر بگیرید:

(الف) اگر $a > b$ باشد، آنگاه $b < a$؛

(ب) اگر $b < a$ باشد، آنگاه $a > b$.

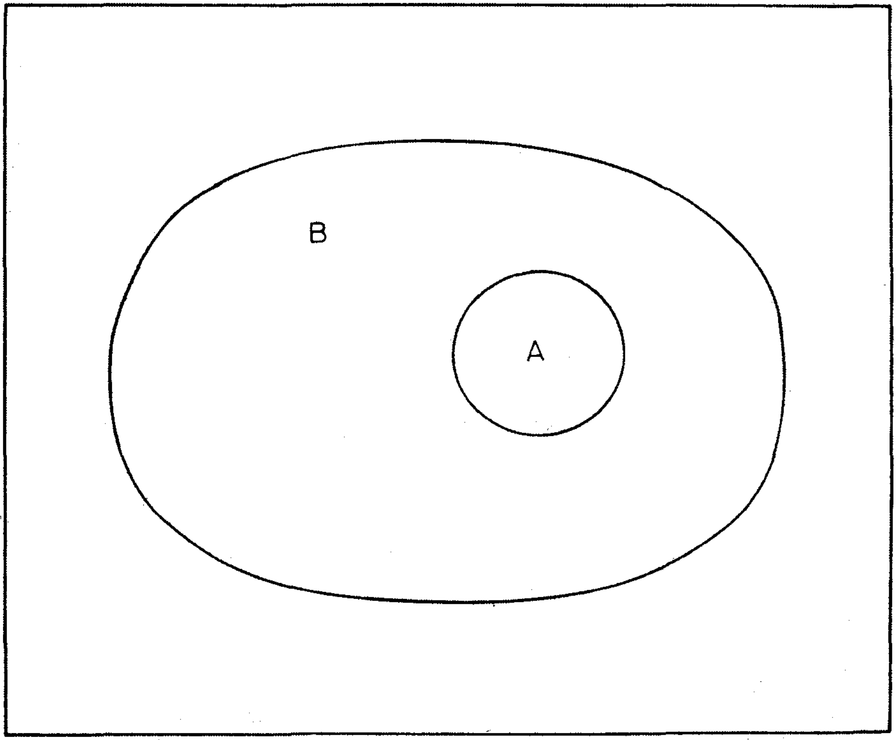
بدیهی است که هر دوگزارهٔ بالا صادق است. بنابراین، می‌توانیم این دوگزاره را با هم ترکیب و آن‌را به‌صورت، "$a > b$، اگر و تنها اگر، $b < a$" بیان کنیم.

به‌صورت یک مثال دیگر، دوگزارهٔ زیر را درنظر بگیرید:

(الف) A : $\mathbf{U}$ ماتریس یکانی است؛

(ب) B : $\det\mathbf{U}$ برابر یک است.

چنانچه این دو جمله را درگزارهٔ شرطی زیر ترکیب کنیم، 'B اگر A' ("$\det\mathbf{U}$ برابر یک است اگر $\mathbf{U}$ ماتریس یکانی باشد")، گزاره‌ای صادق به‌دست می‌آوریم، با وجود این، گزارهٔ شرطی



شکل۱. نمودار ون رابطهٔ میان دو مجموعهٔ زیر را نشان می‌دهد؛ A: مجموعهٔ تمام ماتریسهای یکانی، B: مجموعهٔ تمام ماتریسهایی که دترمینانشان یک است.

‘A اگر B’ (”$\mathbf{U}$ ماتریس یکانی است اگر $\det\mathbf{U}$ یک باشد“) آشکارا گزاره‌ای کاذب است، زیرا دترمینان ماتریس غیریکانی نیز ممکن است یک باشد.

اگر $\mathbf{A}$ را مجموعهٔ تمام ماتریسهای یکانی تلقی کنیم و B را مجموعهٔ کلیهٔ ماتریسهایی بگیریم که دترمینان آنها برابر یک است، دراین‌صورت گزاره‌های شرطی بالا را می‌توان برحسب نظریهٔ مجموعه‌ها و نمودارهای ون به‌دقت تفسیر کرد. در این حالت، این واقعیت که ‘B اگر A’ صادق است، اما ‘A اگر B’ صادق نیست. یعنی که مجموعهٔ B شامل مجموعهٔ A می‌شود [شکل ۱]. ماتریسی که به مجموعهٔ A تعلق دارد، حتماً به مجموعهٔ B نیز متعلق است، ولی عکس آن صادق نیست.

گزاره‌های (الف) و (ب) بالا را نیز می‌توان با به‌کار بردن عبارت ’تنها اگر‘ با بیان ‘A تنها اگر B’ (”$\mathbf{U}$ ماتریسی یکانی است، تنها اگر $\det\mathbf{U}$ برابر یک باشد“)، که صادق است. بنابراین،

می‌بینیم که چنانچه گزارهٔ 'B اگر A' صادق باشد، 'A تنها اگر B' نیز صادق است. به‌عبارت دیگر، 'A اگر B' نتیجهٔ منطقی 'B اگر A' نیست، در واقع، عکس آن است.

روابط بالا را می‌توان به زبان دیگری نوشت. بنابراین، 'B اگر A' مثل این است که بگوییم 'B لازم است (اگرچه کافی نیست) برای A' ("برای اینکه $\mathbf{U}$ ماتریس یکانی باشد، لازم است، اگرچه کافی نیست، که $\det\mathbf{U}$ برابر یک باشد"). برعکس، می‌توانیم گزارهٔ 'A تنها اگر B' را چنین ترجمه کنیم، 'A کافی است (اگرچه لازم نیست) برای B' ("یکانی بودن ماتریس $\mathbf{u}$ کافی است، اگرچه لازم نیست، برای اینکه $\det\mathbf{U}$ برابر یک باشد").

به‌طور نمادین، گزاره‌های بالا را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$A \Rightarrow B$: A مستلزم B است ("یکانی بودن ماتریس $\mathbf{u}$ مستلزم این است که $\det\mathbf{U}$ برابر یک باشد")،

$A \not\Rightarrow B$: B مستلزم A نیست ("اینکه $\det\mathbf{U}$ برابر یک است مستلزم این نیست که $\mathbf{U}$ ماتریس یکانی باشد")؛

$A \Leftarrow B$: B را A ایجاب می‌کند ("این را که $\det\mathbf{U}$ یک است (این واقعیت که) $\mathbf{U}$ ماتریس یکانی است ایجاب می‌کند")؛

$B \not\Leftarrow A$: B را A ایجاب نمی‌کند ("یکانی بودن ماتریس $\mathbf{U}$ را (این واقعیت که) $\det\mathbf{U}$ برابر یک است ایجاب نمی‌کند").

سه روش بیان روابط منطقی را که در بالا به آنها پرداختیم، می‌توان به‌صورت جدول زیر بیان کرد:

اگر، تنها اگر	لازم، کافی	$\Rightarrow$، $\Leftarrow$
(الف) A اگر B	A لازم است برای B یا B کافی است برای A	$B \Rightarrow A$ (A را B ایجاب می‌کند) یا $A \Rightarrow B$ (B مستلزم A است).
(ب) A تنها اگر B	A کافی است برای B یا B لازم است برای A	$B \Rightarrow A$ (A مستلزم B است) یا $A \Leftarrow B$ (B را A ایجاب می‌کند).
(ج) A اگر، و تنها اگر، B	A لازم و کافی است برای B	$B \Leftrightarrow A$ (A مستلزم B است و آن‌را B ایجاب می‌کند).

خوب است به‌یاد آوریم که شش راه زیر برای بیان یک گزارهٔ شرطی با یکدیگر هم‌ارزند. (الف) اگر A آنگاه B (یا B اگر A)؛ (ب) A تنها اگر B؛ (ج) A کافی است برای B؛ (د) B لازم است برای A؛ (ه) $B \Leftarrow A$؛ (و) $A \Rightarrow B$

در بالا، با جابه‌جایی مکانهای A و B، شش راه هم‌ارز برای بیان گزارهٔ شرطی معکوس به‌دست می‌آوریم.

چنانچه هم گزارهٔ شرطی و هم معکوس آن صادق باشد، چنین رابطه‌ای را به راههای هم‌ارز زیر بیان می‌کنند: (الف) A اگر و تنها اگر B؛ (ب) لازم و کافی است برای B؛ (ج) $B \Leftrightarrow A$. بنابر نمودارهای ون، به‌این معنی است که مجموعه‌هایی که با A و B نشان داده‌ایم، یکسان‌اند.

در پایان، خوب است برای پرهیز از خطاها و دشواریهای انجام تمرینهایی که باید هم‌ارزی دو گزارهٔ شرطی را ثابت کنیم، هشدار دهیم. فرض کنید در تمرین باید

ثابت کنیم A اگر و تنها اگر B

(یا به هر صورت دیگر هم‌ارز آن). باید دریابیم که تمرین فوق در واقع به دو تمرین منتهی می‌شود که در آن باید ثابت کنیم (الف) $B \Rightarrow A$ و عکس آن (ب) $B \Leftarrow A$. برای قسمت (الف)، A را فرض می‌گیریم و B را ثابت می‌کنیم، در حالی‌که برای قسمت (ب)، B را فرض می‌گیریم و A را ثابت می‌کنیم.

شیوهٔ زیر همراه با هشداری که اشاره شد، در انجام چنین تمرینهایی مفید خواهد بود:

(۱) هر یک از دو قسمت را می‌شود اول انجام داد. ببینید می‌خواهید ابتدا (الف) $B \Rightarrow A$ را ثابت کنید یا (ب) $A \Rightarrow B$.

(۲) به اثبات قسمت اول بپردازید. هشدار: نتیجهٔ قسمت دوم را در این اثبات نه فرض بگیرید و نه به‌کار ببرید.

(۳) به قسمت دوم بروید. اکنون مجازید از نتیجهٔ قسمت اول که به‌تازگی اثبات کرده‌اید، استفاده کنید.

مثالهای دیگری از این کتاب را، برای روشن شدن بیشتر موضوع، در اینجا ارائه کرده‌ایم.

۱ـ در بخش ۳.۷، دیدیم که اگر برای سه معادلهٔ خطی ناهمگن دو مجهولی جوابی وجود داشته باشد، دترمینان Dی ضرایب صفر می‌شود. فرض کنید A و B نمایانگر گزاره‌های زیر باشند.

A: دستگاه سه معادلهٔ خطی ناهمگن دومجهولی حداقل یک جواب دارد.

B: دترمینان Dی ضرایب صفر است.

دراین‌صورت، گزارهٔ شرطی 'B اگر A' (یا هر یک از گزاره‌های هم‌ارز آن) صادق است، اما عکس آن، 'A اگر B' صادق نیست.

۲ـ در بخش ۲.۸، قضیه‌ای دربارهٔ دستگاه معادلات همگن با تعداد مجهولات یکسان حل کردیم. فرض کنید A و B نمایانگر گزاره‌های زیر باشند:

A: دستگاه n معادلهٔ خطی همگن n مجهولی یک جواب غیرصفر دارد.

B: دترمینان ماتریس ضرایب صفر می‌شود.

در این حالت، داریم $A \Leftrightarrow B$.

۳ـ در بخش ۵.۱۵، بحث کردیم که تانسور رتبهٔ دوم را می‌توان به‌صورت ماتریس مربعی بیان کرد. ولی عکس آن صادق نیست: اجزای ماتریس مربعی دلخواه لزوماً مؤلفه‌های تانسور رتبهٔ دوم نیستند.

پیوست ب

دربارهٔ مرتبهٔ ماتریس ناتکین متناهی

فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو ماتریس متناهی باشند که در معادلات زیر به‌طور همزمان صدق می‌کنند

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_۱, \qquad \mathbf{BA} = \mathbf{I}_۲ \tag{۱}$$

$\mathbf{I}_۱$ و $\mathbf{I}_۲$ ماتریسهای یکه‌اند. هدف این است که نشان دهیم $\mathbf{A}$ و در نتیجه $\mathbf{B}$ ماتریسهای مربعی‌اند.

اثبات از این استدلال پیروی می‌کند که اگر $\mathbf{A}$ ماتریسی مستطیلی باشد، هیچ ماتریس $\mathbf{B}$ای وجود ندارد که به‌طور همزمان در هر دو معادلهٔ (۱) صدق کند.

فرض کنید $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ از مرتبهٔ $n \times m$ و $\mathbf{B} \equiv [b_{ij}]$ از مرتبهٔ $m \times n$ باشد، بنابراین، $\mathbf{I}_۱$ و $\mathbf{I}_۲$ در معادلات (۱) ماتریسهای یکه، به‌ترتیب از مرتبهٔ m و n می‌شوند. ابتدا حالت $m > n$ را درنظر بگیرید. فرض کنید $\mathbf{b}_i = \{b_{۱i} b_{۲i} \cdots b_{ni}\}$ بردار ستونی iام $\mathbf{B}$ باشد و $\mathbf{e}_i = \{۰ \; ۰ \cdots ۱_i \cdots ۰\}$ برداری یکه با مقدار یک در مکان iام باشد. دراین‌صورت اولین معادله از معادلات (۱) با m معادلهٔ زیر هم‌ارز است

$$\mathbf{Ab}_i = \mathbf{e}_i \qquad ۱ \le i \le m \tag{۲}$$

به‌ازای هر مقدار i، این معادله نمایانگر مجموعه‌ای از m معادلهٔ n مجهولی b_{ki}، $1 \leq k \leq n$ است.

فرض کنید r رتبهٔ $\mathbf{A}$ و s رتبهٔ ماتریس فزودهٔ $\mathbf{D}_i = [\mathbf{A} \vdots \mathbf{e}_i]$ باشد. در حالت فعلی، آشکارا داریم $r \leq n$ و $s = r$ یا $r + 1$ که ایجاب می‌کند $\mathbf{A}$ حداقل یک زیرماتریس مربعی مرتبهٔ r داشته باشد که دترمینان آن غیرصفر باشد؛ فرض کنید آن‌را با $\mathbf{P}$ نمایش دهیم. دراین‌صورت روشن است که به‌ازای بعضی از مقدارهای i بین ۱ و m، ماتریس فزودهٔ $\mathbf{D}_i$ وجود دارد که شامل یک زیرماتریس مربعی مرتبهٔ $r + 1$ به‌صورت زیر است

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & 0 \\ \mathbf{X} & 1 \end{bmatrix} \tag{۳}$$

که 0 بردار صفر $r \times 1$ و $\mathbf{X}$ بردار سطری $1 \times r$ است. از معادلهٔ (۳) برمی‌آید که $\det\mathbf{Q} = \det\mathbf{P}$ است، بنابراین $\mathbf{D}_i$ شامل یک زیرماتریس مربعی مرتبهٔ $r + 1$ است که دترمینان آن غیرصفر است، بنابراین $s = r + 1$ است. بحث بخش ۳.۸ نشان می‌دهد که در این حالت، معادلهٔ (۲) هیچ جوابی برای b_i ندارد. بنابراین، اگر مرتبهٔ $\mathbf{A}$، $n \times m$ با $n > m$ باشد، ماتریس $\mathbf{B}$ای که در معادلهٔ $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ صدق کند، وجود ندارد.

در حالت دوم، چنانچه $n < m$ باشد، ترانهاد دومین معادله از معادلات (۱) را درنظر بگیرید

$$\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{B}} = \mathbf{I}_2 \tag{۴}$$

$\widetilde{\mathbf{A}}$ از مرتبهٔ $m \times n$ با $m > n$ است و نتیجهٔ بالا نشان می‌دهد که هیچ ماتریس $\widetilde{\mathbf{B}}$ای وجود ندارد که در معادلهٔ (۴) صدق کند.

با ترکیب این دو نتیجه، می‌بینیم که اگر $\mathbf{A}$ ماتریس مستطیلی باشد، ماتریس $\mathbf{B}$ای وجود ندارد که در هر دو معادلهٔ (۱) همزمان صدق کند. قبلاً در فصل ۵، نشان دادیم که برای ماتریس مربعی $\mathbf{A}$ ماتریس $\mathbf{B}$ای وجود دارد که در معادلات (۱) صدق می‌کند، به‌شرط اینکه $\det\mathbf{A} \neq 0$ باشد و نشان دادیم که چطور آن‌را به‌دست آوریم. همهٔ اینها نشان می‌دهد که ماتریس ناتکین متناهی قطعاً مربعی است.

با استفاده از این نتیجه، همچنین می‌توان نشان داد که ماتریسهای متعامد متناهی و یکانی باید مربعی باشند.

پیوست ج

حاصلضرب نرده‌ای بردارهای سه‌بعدی حقیقی[1]

در جبر برداری مقدماتی که به بردارهای سه‌بعدی حقیقی می‌پردازد، حاصلضرب نرده‌ای دو بردار را به‌صورت حاصلضرب طولهای آن‌دو در کسینوس زاویهٔ بینشان تعریف می‌کنند. بنابراین، با نمادگذاری متداول، حاصلضرب نرده‌ای دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ چنین تعریف می‌شود

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta \qquad (۱)$$

حال یک سه‌گانه از بردارهای یکهٔ متعامد $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$ ارائه می‌کنیم. هر برداری را به‌صورت ترکیب خطی از این بردارهای سه‌گانه با مؤلفه‌های a_i بیان می‌کنیم:

$$\mathbf{a} = a_۱\mathbf{i} + a_۲\mathbf{j} + a_۳\mathbf{k} \qquad (۲)$$

با استفاده از این ویژگیها، نشان می‌دهیم که حاصلضرب نرده‌ای را به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳ \qquad (۳)$$

---

۱. این پیوست براساس مقالهٔ زیر است

Gangal, A. D. and A. W. Joshi, Scalar product of vectors, *Bull. Ind. Assoc. Phys. Teachers* **4**, 147 (1987).

که b_iها مؤلفه‌های $\mathbf{b}$ هستند. بنابراین، از تعریف حاصلضرب نرده‌ای برحسب طول دو بردار و زاویهٔ بینشان [معادلهٔ (۱)] به‌حاصلضرب نرده‌ای برحسب مؤلفه‌های بردارها می‌رسیم [معادلهٔ (۳)].

معادلهٔ (۱) برای بردارهایی با ابعاد بیشتر یا بردارهایی با مؤلفه‌های مختلط مناسب نیست. الگوریتمی برای حاصلضرب داخلی که بشود آن‌را به‌سادگی به چنین حالتهایی تعمیم داد که کار کردن جبری با آن نیز ساده باشد، در واقع همان است که در معادلهٔ (۲۱.۱) آوردیم که برای بردارهای سه‌بعدی حقیقی به معادلهٔ (۳) تبدیل می‌شود. البته، برای سازگاری باید بررسی کنیم که معادلهٔ (۳) در این حالت به معادلهٔ (۱) تبدیل شود.

بنابراین، در مورد بردارهای سه‌بعدی حقیقی، باید بتوانیم از الگوریتم عمومی [معادلهٔ (۳)] به‌تعریف قراردادی [معادلهٔ (۱)] برسیم. این به‌معنای حرکت در جهت معکوس مسیری است که در تدریس قراردادی مقدماتی دنبال کردیم. این همان چیزی است که در این پیوست می‌خواهیم انجام دهیم.

سعی می‌کنیم که تا حد ممکن به حالت عمومی بپردازیم و حالتهای خاص را تنها در آخر درنظر بگیریم.

برای بردارهای nبعدی $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$، نابرابری شوارتس چنین می‌شود

$$|(\mathbf{u},\mathbf{v})| \le uv \tag{۴}$$

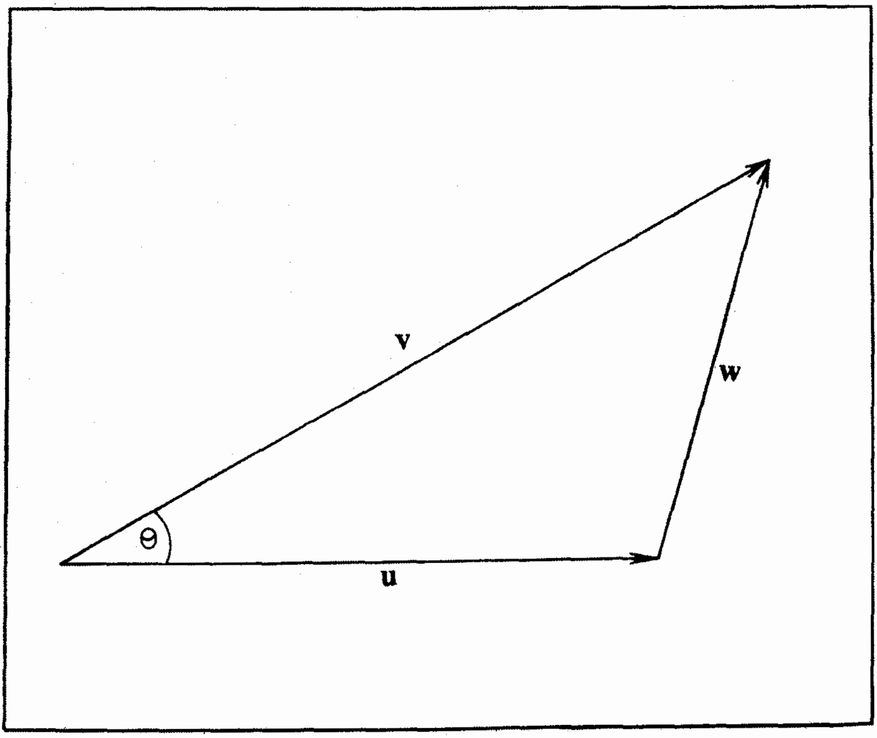
که نماد u را برای $\|\mathbf{u}\|$ (طول بردار) به‌کار برده‌ایم و به‌همین ترتیب v را. توجه کنید که u و v کمیتهای نرده‌ای حقیقی مثبت‌اند (برای بردارهای غیرصفر)، در حالی که $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ چه بسا عددی مختلط باشد.

اگر بررسی خود را به بردارهای nبعدی حقیقی محدود کنیم، دراین‌صورت $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ حقیقی خواهد بود. در این حالت، با برداشتن علامت قدرمطلق از سمت چپ معادلهٔ (۴)، می‌توانیم این نابرابری را چنین بنویسیم

$$-۱ \le (\mathbf{u},\mathbf{v})/uv \le ۱ \tag{۵}$$

رابطهٔ فوق، به‌ازای هر مقدار n برای بردارهای حقیقی صادق است.

اکنون $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ را بردارهای سه‌بعدی می‌گیریم با یادآوری اینکه کسینوس یک زاویه بین ۱− و



شکل۱. یک مثلث با بردارهایی که نمایانگر معادلهٔ (۶) هستند، با زاویهٔ θ بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$.

۱+ قرار دارد، می‌بینیم که $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ را می‌توان کسینوس زاویه‌ای تعبیر کرد که اکنون آن‌را به‌عنوان زاویهٔ بین دو بردار سه‌بعدی حقیقی u و v تعریف می‌کنیم.

برای اینکه ببینیم این زاویه با زاویهٔ قراردادی مطابقت دارد، همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده‌ایم، مثلثی درنظر بگیرید که از $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$، $\mathbf{w}$ ساخته شده باشد، به‌نحوی که داشته باشیم

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} \tag{۶}$$

فرض کنید θ زاویهٔ قراردادی بین بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ باشد، به همان مفهومی که معمولاً در هندسه وجود دارد. دراین‌صورت رابطهٔ معروف زیر را داریم

$$w^2 = v^2 + u^2 - 2uv\ \cos\ \theta \tag{۷}$$

اکنون رابطهٔ برداری زیر را درنظر بگیرید

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u} \tag{۸}$$

حاصلضرب داخلی هر طرف معادلهٔ بالا را در خودش به‌دست می‌آوریم، داریم

$$(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{u}) - ۲(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

$$\Rightarrow w^۲ = v^۲ + u^۲ - ۲(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \tag{۹}$$

با مقایسهٔ معادلهٔ (۷) با معادلهٔ (۹)، در حالت بردارهای سه‌بعدی حقیقی، درمی‌یابیم که چرا حاصلضرب داخلی چنین می‌شود

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv \ \cos\ \theta \tag{۱۰}$$

توجه کنید که این رابطه با نابرابری (۵) سازگار است.

پیوست د

رهیافتی به حل مسئله[۱]

بر نقش حل مسائل و تمرینها هم در ریاضیات و هم در فیزیک نمی‌توان بیش از حد تأکید کرد. کارشناسان آموزش و پرورش ناتوانی دانشجویان را در حل مسئله اغلب از زوایای گوناگونی تحلیل می‌کنند.

گذشته از سایر موانع حل مسئله، تجربهٔ ما نشان داده است که یکی از مهمترین علتها این است که دانشجویان مسئله را نمی‌فهمند. یک مسئله حاوی دو قسمت است، (الف) اطلاعات مفروض (داده‌ها، ویژگیها، فرضها) و (ب) سؤال یا خواست مسئله دربارهٔ آنچه باید ثابت کنیم/نشان دهیم/نتیجه بگیریم.

پس از خواندن مسئله، ابتدا باید این دو قسمت را به‌روشنی فهمید. به‌این منظور، دانشجو باید مسئله‌ای را که به یک زبان متعارف (مثلاً انگلیسی) نوشته شده است، به‌صورت ریاضی، نمادی برگرداند/تبدیل کند/ترجمه کند. بنابراین، قبل از هر کوششی برای حل مسئله، باید هر قسمت آن‌را تبدیل کرد.

---

۱. براساس مقاله‌ای (با همین عنوان)،

Joshi, A. W., *Mathematical Education* **4**, 27 (1987).

این مطلب را با چند مثال زیر توضیح می‌دهیم. در هر حالت، یک تمرین را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه اطلاعات مفروض و خواست مسئله را می‌توان به اختصار، به‌صورت ریاضی، نمادی نوشت.

تمرین ۱ (جبر برداری): اگر طول قطرهای یک متوازی‌الاضلاع با یکدیگر برابر باشد، ثابت کنید که آن یک مستطیل است.

اطلاعات مفروض: بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ اضلاع مجاور متوازی‌الاضلاع را نشان می‌دهند؛ $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ (شاید نمودار مفید باشد.)

آنچه باید ثابت کنیم: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ۰$

تمرین ۲ (ماتریسها و فضاهای برداری): اگر سطرهای ماتریس $\mathbf{A}$ از مرتبهٔ $m\times n$ بر یکدیگر متعامد باشند، نشان دهید که $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger$ ماتریسی قطری است.

اطلاعات مفروض: اگر $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]_{m\times n}$ باشد، دراین‌صورت داریم

$$\sum_{k=۱}^{n} a^*_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} \qquad i \neq j$$

آنچه باید ثابت کنیم: $(\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger)_{ij} = \delta_{ij} \qquad i\neq j$

تمرین ۳ (مسئلهٔ ویژه‌مقدار): تمرین ۱۸.۹ این کتاب.

اطلاعات مفروض: $(\mathbf{P}^{-۱}\mathbf{A}\mathbf{P})_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$

آنچه باید ثابت کنیم: $\mathbf{A}\mathbf{X}_i = \lambda_i \mathbf{X}_i$ که $\mathbf{X}_i$ها بردارهای ستونی $\mathbf{P}$اند.

نیازی نیست بر تعداد این مثالها بیفزاییم. خواننده خواهد دید که با این روش، حتی قبل از اینکه به چگونگی حل مسئله بیندیشد، نیمی از مبارزه را برده است. اهمیت این مرحله در حل مسئله بدیهی است. مسیری که از اطلاعات مفروض تا خواست مسئله (حکم) وجود دارد، روشن می‌شود. علاوه‌براین، اگر دانشجویان نفهمند چه اطلاعاتی برای آنها موجود است، با دنبال کردن صحیح مراحل نمی‌توانند به یافتن نتیجه امیدوار باشند. اغلب دانشجو جزئی از اطلاعات مفروض ضروری را از دست می‌دهد و یک جایی از خود راضی می‌شود. اگر دانشجو خواست مسئله را درک نکند، هدف را گم می‌کند.

جواب تمرینهای انتخابی (ستاره‌دار)

فصل ۱

۱. (الف) ۱۵، $1/\sqrt{15}(2,1,3,-1)$؛ (ج) ۲، $(1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2})$.

۲. (الف) مستقل خطی؛ (ج) وابستهٔ خطی

۵. (الف) ۷؛ (ج) به‌ازای هیچ مقداری از x (به‌ازای هر مقدار x، سه بردار مستقل خطی هستند).

۷. (الف) صادق است؛ (ب) کاذب است: می‌شود مجموعه‌ای از n بردار یافت که هر دوتای آن از یکدیگر مستقل خطی باشند، اما به‌صورت یک مجموعهٔ وابستهٔ خطی باشد.

۹. $x + w = y + z$.

۱۰. با استفاده از اتحاد برداری $\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d}$، داریم

$$\mathbf{A}^2\mathbf{r} = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = \mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{a} - a^2\mathbf{r}$$

دگربار، به‌کارگیری عملگر $\mathbf{A}$، نتیجه می‌دهد

$$\mathbf{A}^3\mathbf{r} = \mathbf{a}\times[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{a} - a^2\mathbf{r}] = -a^2(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = -a^2\mathbf{A}\mathbf{r}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^3\mathbf{r} + a^2\mathbf{A}\mathbf{r} = 0\,\forall\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{A}^3 + a^2\mathbf{A} = 0$$

۱۷. به‌ازای $i \neq j$، مجموعه بردارهای مفروض $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 0$ و $\{\mathbf{x}_i\}$ است. معادلهٔ $\sum a_i\mathbf{x}_i = 0$

را برای جوابها امتحان کنید. با درنظر گرفتن حاصلضرب داخلی در $\mathbf{x}_j$، می‌بینیم که $a_j = ۰ \ \forall j$.

فصل ۲

۱. (ج)

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} ۷/۳ & ۸/۱۵ & ۴۸/۵ & ۳۷/۷ \\ -۲۱/۸ & ۱/۳ & ۲/۳ & ۵۳/۴ \\ ۱/۱۱ & ۵/۷ & ۹/۱۱ & -۱/۲ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -۵/۳ & -۲/۱۵ & -۴۲/۵ & -۳۳/۷ \\ ۲۷/۸ & ۰ & ۱ & -۳۵/۴ \\ ۱/۱۱ & -۱/۷ & -۳/۱۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

۲. (الف) $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۴ \\ -۴۱ \end{bmatrix}$ (هـ) $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -۶ & ۱۴ & ۸ \\ ۳ & -۷ & -۴ \\ -۱۲ & ۲۸ & ۱۶ \end{bmatrix}$

۴. (الف) $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -۸ & ۲۱ \\ ۱۶ & -۶ \end{bmatrix}$؛ $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -۲۹ & -۱۸ \\ ۷ & ۱۴ \end{bmatrix}$؛ $\mathbf{BA} \neq \mathbf{AB}$

(د) $\mathbf{AB} = -۴۶$؛ $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} ۳ & -۷ & ۲ \\ ۱۵ & -۳۵ & ۱۰ \\ -۲۱ & ۴۹ & -۱۴ \end{bmatrix}$؛ $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

۵.

$$\mathbf{A}^۳ = \begin{bmatrix} -۴۴ & ۴۲ & -۱۶ \\ ۴۰ & -۱۲۴ & ۶۴ \\ -۴ & ۶ & -۳۲ \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & -۹ & ۲۸ \\ -۱۲ & ۲۲ & -۸ \\ -۲ & -۳ & -۴ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^۴ = \begin{bmatrix} ۵۶ & -۳۰۰ & ۱۶ \\ -۲۷۲ & ۶۱۶ & -۴۸۰ \\ ۴۰ & -۳۶ & -۱۶ \end{bmatrix}$$

.۸
$$(\mathbf{A}^{۲})_{ij} = (\mathbf{A})_{ij} \Rightarrow \sum_{k=۱}^{n} (\mathbf{A})_{ik}(\mathbf{A})_{kj} = (\mathbf{A})_{ij} \Rightarrow p_i p_j \sum_{k=۱}^{n} p_k^{۲}$$
$$= p_i p_j \ \forall i, j \Rightarrow \sum_{k=۱}^{n} p_k^{۲} = ۱$$

۱۳. فرض کنید $\mathbf{A}_۱$، $\mathbf{A}_۲$، ...، $\mathbf{A}_n$ ماتریسهایی باشند که حاصلضرب ماتریسی دو ماتریس متوالیشان، یعنی $\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i+۱}$، به‌ازای $۱ - n \leq i \leq i$ تعریف شده باشد. فرض کنید داریم

$$(\mathbf{A}_۱\mathbf{A}_۲\cdots\mathbf{A}_{n-۱})^T = \widetilde{\mathbf{A}}_{n-۱}\cdots\widetilde{\mathbf{A}}_۲\widetilde{\mathbf{A}}_۱ \qquad (ت.۱)$$

حال، با استفاده از معادلۀ (۲.۴۵) و معادله (A.۱) داریم

$$(\mathbf{A}_۱\mathbf{A}_۲\cdots\mathbf{A}_n)^{\mathrm{T}} = [(\mathbf{A}_۱\mathbf{A}_۲\cdots\mathbf{A}_{n-۱})(\mathbf{A}_n)]^{\mathrm{T}} = \widetilde{\mathbf{A}}_n\widetilde{\mathbf{A}}_{n-۱}\cdots\widetilde{\mathbf{A}}_۲\widetilde{\mathbf{A}}_۱ \qquad (ت.۲)$$

این معادله همان شکل معادلۀ (A.۱) را دارد که n را به‌جای $۱ - n$ نشانده‌ایم. بنابراین، با استفاده از استقرای ریاضی، به معادلۀ (A.۲) می‌رسیم که نتیجۀ مطلوب است. به روش مشابهی، این نتیجه را می‌توانیم برای مزدوج هرمیتی به‌دست آوریم.

.۱۶
$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} ۲۱ + ۱۴i & ۹ + ۸i & -۹ + ۱۰i \\ -۴ - ۳۴i & -۷i & ۱ + ۱۷i \\ ۴۴ - ۵i & ۶۷ + ۵i & -۱۸ + ۳i \end{bmatrix}$$

فصل ۳

۱. اگر ماتریس مفروض را با $\mathbf{A}$ نشان دهیم، دراین‌صورت، داریم

(الف)
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۵ \\ -۲ & ۶ & -۱ \\ ۴ & ۲ & ۶ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲i & -i & ۰ \\ ۷i & ۶i & ۴i \\ -۳i & ۲i & i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۶+۴i & -۱+۶i & ۹-۳i \\ -۱+۶i & ۱۲i & ۱+۶i \\ ۹-۳i & ۱+۶i & ۱۲+۲i \end{bmatrix}+\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۰ & ۳-۸i & ۱+۳i \\ -۳+۸i & ۰ & -۳+۲i \\ -۱-۳i & ۳-۲i & ۰ \end{bmatrix}$$

(ب)

۴. (ب) فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو ماتریس هرمیتی باشند، به‌نحوی که $\mathbf{A}^\dagger=\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}^\dagger=\mathbf{B}$ باشد. از این‌رو، داریم

$$(\mathbf{AB})^\dagger=\mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger=\mathbf{BA} \qquad \text{(ت.۳)}$$

اولاً، فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ با یکدیگر جابه‌جا شوند. دراین‌صورت معادلهٔ (A.۳) که به $(\mathbf{AB})^\dagger=\mathbf{AB}$ تبدیل می‌شود، نشان می‌دهد $\mathbf{AB}$ ماتریسی هرمیتی است. ثانیاً، فرض کنید $\mathbf{AB}$ ماتریسی هرمیتی باشد، بنابراین $(\mathbf{AB})^\dagger=\mathbf{AB}$ است. با مقایسهٔ این نتیجه با معادلهٔ (A.۳)، داریم $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ که نشان می‌دهد $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند. بنابراین نتیجه اثبات می‌شود.

۷. $a=-۳/۱۷, b=۱/۱۷$.

۱۵. فرض کنید $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right]$ ماتریسی باشد که مربع آن با ماتریس مفروض برابر باشد. بنابراین، داریم

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^۲+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

که منجر می‌شود به

$$a^۲+bc=۲, b(a+d)=۱, c(a+d)=۰, bc+d^۲=۲ \qquad \text{(ت.۴)}$$

داریم

$$a+d=۰ \quad \text{یا} \quad c=۰$$

اما، اگر $a+d=۰$ باشد، b وجود ندارد؛ از این‌رو، داریم $a\neq -d$ و $c=۰$ که منجر می‌شود به $a=\pm\sqrt{۲}$؛ $d=\pm\sqrt{۲}$. این نتیجه به دو ماتریس مطلوب زیر می‌انجامد

$$\begin{bmatrix} \pm\sqrt{۲} & \pm\frac{۱}{۲\sqrt{۲}} \\ ۰ & \pm\sqrt{۲} \end{bmatrix}$$

که یا باید همهٔ علائم بالایی را درنظر بگیریم یا همهٔ علائم پایینی را.

۱۶. کلیترین شکل ماتریس پادمتقارن مرتبهٔ ۳ عبارت است از

$$\begin{bmatrix} ۰ & a & b \\ -a & ۰ & c \\ -b & -c & ۰ \end{bmatrix}$$

مجموعه‌ای از سه ماتریس پادمتقارن مستقل خطی مرتبهٔ سه می‌شود

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

فصل ۴

۱. (الف) $۴a^۲b^۲c^۲$؛ (ج) $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

۶. $\mathbf{H}$ هرمیتی است، در نتیجه داریم $\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H} \Rightarrow \det\mathbf{H}^\dagger = \det\mathbf{H}$. اما $\det\mathbf{H}^\dagger = (\det\mathbf{H})^*$ است، بنابراین، داریم $(\det\mathbf{H})^* = \det\mathbf{H}$ پس، $\det\mathbf{H}$ حقیقی است.

فصل ۵

۲. (ب) $\dfrac{۱}{۱۲}\begin{bmatrix} ۴ & ۴ & -۴ \\ -۶ & -۳ & ۱۲ \\ ۲ & -۱ & ۴ \end{bmatrix}$، (د) $\dfrac{۱}{۴}\begin{bmatrix} -۱۶ & ۴ & ۴ & ۰ \\ -۳۱ & ۸ & ۶ & ۱ \\ ۳۴ & -۸ & -۸ & ۲ \\ -۱۴ & ۴ & ۴ & -۲ \end{bmatrix}$

۴. اگر یکی از ماتریسهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ناتکین باشد، وارون آن وجود دارد، و با ضرب کردن مناسب در وارون آن (از سمت چپ یا راست، بنابر حالتی که ممکن است پیش آید)، نتیجه می‌گیریم که ماتریس دیگر باید صفر باشد. به‌این ترتیب، به‌جواب می‌رسیم.

۸. $q \neq p$، $q \neq -۲p$، چنانچه هر دو شرط صادق باشد، وارون می‌شود

$$\frac{۱}{D}\begin{bmatrix} q+p & -p & -p \\ -p & q+p & -p \\ -p & -p & q+p \end{bmatrix}$$

که، داریم $D = (q-p)(q+۲p)$

ماتریس وارون به‌همان صورت ماتریس مفروض است، یعنی ماتریسی که همهٔ اجزای قطری آن با هم و همهٔ اجزای غیرقطری آن نیز با هم برابرند.

۹. چون دو ماتریس قطری با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند، داریم

$$\mathbf{P}^{-۱}\mathbf{APP}^{-۱}\mathbf{BP} = \mathbf{P}^{-۱}\mathbf{BPP}^{-۱}\mathbf{AP} \Rightarrow \mathbf{P}^{-۱}\mathbf{ABP} = \mathbf{P}^{-۱}\mathbf{BAP} \Rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{BA}$$

۱۱. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ مفروض است. با ضرب کردن از سمت چپ و همچنین راست در $\mathbf{B}^{-۱}$، داریم $\mathbf{B}^{-۱}\mathbf{A} = \mathbf{AB}^{-۱}$

۱۳. $۲(a^۲ + b^۲) = ۱$

۱۴. اگر داشته باشیم

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - (۲/\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{x})\mathbf{x}\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{I} - (۲/\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{x})(\mathbf{x}\tilde{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{I} - (۲/\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{x})\mathbf{x}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}$$

پس $\mathbf{A}$ متقارن است. در ضمن، داریم

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^۲ = [\mathbf{I} - (۲/\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{x})\mathbf{x}\tilde{\mathbf{x}}]^۲ = \mathbf{I} - (۴/\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{x})\mathbf{x}\tilde{\mathbf{x}} + (۲/\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{x})^۲\mathbf{x}\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{x}\tilde{\mathbf{x}}$$

$$= \mathbf{I} - (۴/\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{x})\mathbf{x}\tilde{\mathbf{x}} + (۴/\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{x})\mathbf{x}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{I}$$

پس $\mathbf{A}$ متعامد است.

۱۸.

$$\mathbf{U}^\dagger = [(\mathbf{H}+i\mathbf{I})^{-۱}]^\dagger(\mathbf{H}-i\mathbf{I})^\dagger = [(\mathbf{H}+i\mathbf{I})^\dagger]^{-۱}(\mathbf{H}+i\mathbf{I}) = (\mathbf{H}-i\mathbf{I})^{-۱}(\mathbf{H}+i\mathbf{I})$$

$$\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = (\mathbf{H}-i\mathbf{I})^{-۱}(\mathbf{H}+i\mathbf{I})(\mathbf{H}-i\mathbf{I})(\mathbf{H}+i\mathbf{I})^{-۱}$$

$$= (\mathbf{H}-i\mathbf{I})^{-۱}(\mathbf{H}-i\mathbf{I})(\mathbf{H}+i\mathbf{I})(\mathbf{H}+i\mathbf{I})^{-۱}$$

چون $\mathbf{H} - i\mathbf{I}$ با $\mathbf{H} + i\mathbf{I}$ جابه‌جا می‌شود. نتیجه می‌گیریم $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{I}$ است.

فصل ۶

۱. $(\mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(ت.۵)

وارون ماتریس مذکور می‌شود

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۴. اگر ماتریس مذکور را با $\mathbf{P}$ نشان دهیم، دراین‌صورت داریم

(ت.۶) $$\widetilde{\mathbf{P}}^{\dagger} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\dagger} & \mathbf{D}^{\dagger} \\ \mathbf{B}^{\dagger} & \mathbf{E}^{\dagger} \\ \mathbf{C}^{\dagger} & \mathbf{F}^{\dagger} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{A}} & \widetilde{\mathbf{D}} \\ \widetilde{\mathbf{B}} & \widetilde{\mathbf{E}} \\ \widetilde{\mathbf{C}} & \widetilde{\mathbf{F}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{B}^* & \mathbf{C}^* \\ \mathbf{D}^* & \mathbf{E}^* & \mathbf{F}^* \end{bmatrix}$$

۶. (الف) ۲؛ (ج) ۳.

فصل ۷

۱. $x = u + 2v + 5w$؛ $y = -v + 2w$؛ $z = 2u + 4v + 11w$.

۲. (الف) $x_1 = x_2 = x_3$، x_3 دلخواه؛ (ج) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

۳. (الف) جواب ندارد؛ (ب) $x = -14$، $y = 14$، $z = 2$.

۵. سه معادلهٔ مربوط به سه جریان عبارت‌اند از

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$I_3 R_4 - I_2 R_2 = -E_2$$

$$I_1(R_1 + R_3) + I_3 R_4 = E_1 \qquad \text{(ت.۷)}$$

جواب می‌شود

$$I_۱ = [E_۱(R_۲ + R_۴) + E_۲R_۴]/D$$
$$I_۲ = [E_۱R_۴ + E_۲(R_۱ + R_۳ + R_۴)]/D$$
$$I_۳ = [E_۱R_۲ - E_۲(R_۱ + R_۳)]/D$$
$$D = R_۲(R_۱ + R_۳ + R_۴) + R_۴(R_۱ + R_۳)$$

که با مقدارهای مفروض، می‌شود

$$I_۱ = ۷/۲۹\text{A} \qquad I_۲ = ۶۱/۱۴۵\text{A} \qquad I_۳ = -۲۶/۱۴۵\text{A} \qquad (\text{ت}.۸)$$

۶. اگر $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ بگیریم، $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ چهار معادلهٔ زیر را نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} a + ۲c + ۳e &= ۱ \qquad & b + ۲d + ۳f &= ۰ \\ ۴a + ۵c + ۶e &= ۰ \qquad & ۴b + ۵d + ۶f &= ۱ \end{aligned} \qquad (\text{ت}.۹)$$

در نتیجه، داریم

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ -۲ - ۲a & ۱ - ۲b \\ (۵ + ۳a)/۳ & (۳b - ۲)/۳ \end{bmatrix}$$

که شامل دو پارامتر دلخواه a و b است.
سپس، اگر $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x & r \\ y & s \\ z & t \end{bmatrix}$ بگیریم، $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ به نُه معادلهٔ زیر می‌انجامد

$$\begin{aligned} x + ۴r &= ۱ \qquad & y + ۴s &= ۰ \qquad & z + ۴t &= ۰ \\ ۲x + ۵r &= ۰ \qquad & ۲y + ۵s &= ۱ \qquad & ۲z + ۵t &= ۰ \\ ۳x + ۶r &= ۰ \qquad & ۳y + ۶s &= ۰ \qquad & ۳z + ۶t &= ۱ \end{aligned} \qquad (\text{ت}.۱۰)$$

که جواب ندارند.

فصل ۸

۱. (الف) $(i)\ \lambda = ۱$، $x = -۴y$، y دلخواه؛ $(ii)\ \lambda = -۲$، $x = -y$، y دلخواه.

۲. (ب) ۴.

۳. $u = \frac{۵}{۲}, v = -\frac{۱}{۲}, w = -\frac{۱}{۲}, x = -\frac{۱}{۲}$.

۶. (الف) $z = x + ۳y$، $t = -x - y$، x و y دلخواه؛ (ب) $x_۳ = -۲x_۱ - x_۲$، $x_۴ = -x_۲$، $x_۵ = x_۱ + x_۲$؛ $x_۱$ و $x_۲$ دلخواه.

فصل ۹

اگر $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ ماتریس مثلثی مرتبهٔ n باشد، چندجمله‌ای مشخصهٔ آن می‌شود $(a_{۱۱} - \lambda)(a_{۲۲} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda)$ که ریشه‌های آن می‌شوند a_{ii}، $۱ \leq i \leq n$ که نتیجهٔ مطلوب را ثابت می‌کند.

۴. فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریس متعامد حقیقی باشد و فرض کنید

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ($\mathbf{x}$ و λ ممکن است مختلط باشند)

$$\Rightarrow \mathbf{x}^\dagger\widetilde{\mathbf{A}} = \lambda^*\mathbf{x}^\dagger \Rightarrow \mathbf{x}^\dagger\widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}\mathbf{x} = |\lambda|^۲\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}^\dagger\mathbf{x}(۱ - |\lambda|^۲) = ۰ \Rightarrow |\lambda| = ۱ \quad (\text{ت.۱۱})$$

بنابراین، همهٔ ویژه‌مقدارهای ماتریس متعامد مقدار واحد دارند. ویژه‌مقدارهای ماتریس متعامد مختلط هیچ قیدی ندارند. توجه کنید که اگر ترانهاد معادلهٔ (ت.۱۱) را بگیریم، رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\widetilde{\mathbf{x}}\widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda^۲\widetilde{\mathbf{x}}\mathbf{x} \Rightarrow \widetilde{\mathbf{x}}\mathbf{x}(۱ - \lambda^۲) = ۰$$

از معادلهٔ بالا نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که $\lambda = \pm ۱$ است، زیرا ممکن است $\widetilde{\mathbf{x}}\mathbf{x}$ صفر شود، هر چند که $\mathbf{x} \neq ۰$ باشد، تمرین ۱۵(الف) زیر را ببینید.

۷. چندجمله‌ای مشخصهٔ یک ماتریس حقیقی ضرایب حقیقی دارد. اکنون، آشکار است که ریشه‌های چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی یا باید حقیقی باشند یا به‌صورت زوجهایی از مزدوجهای مختلط ظاهر شوند، به این ترتیب قسمت اول تمرین ثابت می‌شود. حال قسمت دوم ساده است.

۸. چندجمله‌ای مشخصهٔ $\mathbf{B}$ می‌شود

$$\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})=\det(\mathbf{P}^{-۱}\mathbf{AP}-\lambda\mathbf{I})=\det[\mathbf{P}^{-۱}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{P}]$$
$$=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) \;=\; \mathbf{A}\ \text{چندجمله‌ای مشخصهٔ}$$

۱۳. ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ عبارت‌اند از ۱، $۳\pm۲\sqrt{۲}$؛ $\mathbf{A}^{-۱}=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ & -۱۲ \\ -۴ & ۳ & ۱۷ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$.

۱۵. (الف) $\lambda_۱=e^{i\theta}$، $\mathbf{x}_۱=\{۱ \quad i\}$؛ $\lambda_۲=e^{-i\theta}$، $\mathbf{x}_۲=\{۱ \quad -i\}$.

۱۶. $\mathbf{x}^\dagger\mathbf{y}=۰$ مفروض است. فرض کنید داشته باشیم

$$\mathbf{Hx}=\lambda\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{x}^\dagger\mathbf{H}=\lambda^*\mathbf{x}^\dagger\Rightarrow\mathbf{x}^\dagger(\mathbf{Hy})=\lambda^*\mathbf{x}^\dagger\mathbf{y}=۰$$

که نشان می‌دهد $\mathbf{x}$ بر $\mathbf{Hy}$ متعامد است.

۲۰. جواب عمومی: $\mathbf{x}=a\{۱ \quad -۱\}e^t+b\{۱ \quad ۱\}e^{۵t}$

جواب با شرط مرزی مفروض: $\mathbf{x}=\{۱ \quad ۱\}e^{۵t}$

۲۳. فرض کنید $\mathbf{A}$ نشان‌دهندهٔ ماتریس مفروض باشد

$$\mathrm{Tr}\mathbf{A}=nq=\sum\lambda_i$$

توجه می‌کنیم که اگر p جانشین q شود، رتبهٔ ماتریس منتج ۱ می‌شود، یعنی، رتبهٔ $[\mathbf{A}-(q-p)\mathbf{I}]$ مساوی یک می‌شود، بنابراین $q-p$ یک ویژه‌مقدار $\mathbf{A}$ با چندگانگی $n-۱$ است. ویژه‌مقدار دیگر عبارت است از $nq-(n-۱)(q-p)=q+(n-۱)p$

ویژه‌بردار مربوط به $\lambda=q+(n-۱)p$ می‌شود $\mathbf{x}=\{۱ \quad ۱\cdots۱\}$؛ $(n-۱)$ ویژه‌بردار مربوط به $\lambda=q-p$، به‌صورت $\mathbf{x}=\{x_۱ \; x_۲ \; \ldots x_n\}$ در می‌آید که $\sum x_i=۰$ است.

فصل ۱۰

۱. (الف) چندجمله‌ای مشخصه عبارت است از: $(۲-\lambda)^۳=۸+۱۲\lambda-۶\lambda^۲+\lambda^۳-$ چندجمله‌ای می‌نیمال عبارت است از $(\lambda-۲)^۳$. چون چندجمله‌ای مینیمال ریشهٔ چندگانه دارد، ماتریس قطری شدنی نیست؛ تنها ویژه‌بردار $\{۱ \quad ۰ \quad -۲\}$ است. این ماتریس از طریق تبدیل

تشابهی ماتریس $\mathbf{P}$، مشابه ماتریس مثلثی $\mathbf{T}$ می‌شود. که داریم

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۰٫۶ \\ ۰ & ۲ & ۰٫۴ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} ۱ & -۴ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۱ \\ -۲ & -۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

۴. ویژه‌مقدارهای ماتریس چنین یافت می‌شوند

$$\lambda = \frac{۱}{۲}(a+d) \pm \frac{۱}{۲}[(a-d)^{۲} + ۴bc]^{۱/۲}$$

ماتریس قطری‌نشدنی است، تنها اگر ویژه‌مقدارها برابر باشند، یعنی تنها اگر $(a-d)^{۲} + ۴bc$ برابر صفر باشد. حال، اگر این شرط صادق باشد، تنها ویژه‌مقدار متمایز ماتریس $۱/۲(a+d)$ است. اگر ماتریس مفروض را با $\mathbf{A}$ نشان دهیم، می‌یابیم $[\mathbf{A} - \frac{۱}{۲}(a+d)\mathbf{I}] \neq ۰$، ولی $[\mathbf{A} - \frac{۱}{۲}(a+d)\mathbf{I}]^{۲} = ۰$ است، بنابراین، چندجمله‌ای مینیمال یک ریشهٔ دوگانه دارد و ماتریس قطری نشدنی است.

۵.

$$\mathbf{A}^{۳} = ۳(p^{۲} + pq + q^{۲})\mathbf{A} + (۲p^{۳} + ۳p^{۲}q - ۳pq^{۲} - ۲q^{۳})\mathbf{I}$$

$$\mathbf{A}^{-۱} = [\mathbf{A} - (۲q+p)\mathbf{I}]/[(p-q)(۲p+q)],\ q \neq p,\ q \neq -۲p$$

این نتیجه را با تمرین ۸.۵ مقایسه کنید.

۷. (الف) قسمتهای (۱)، (۲)، و (۳) با جانشینی مستقیم $\mathbf{P}_۱$، $\mathbf{P}_۲$، و $\mathbf{P}_۳$ ثابت می‌شوند. برای قسمت (۴) می‌بینیم که $\mathbf{P}_i^۲$ یک چندجمله‌ای درجهٔ ۴ از $\mathbf{A}$ می‌شود، که با استفاده از نتیجهٔ قضیهٔ کیلی-هامیلتون به یک چندجمله‌ای درجهٔ ۲ تبدیل می‌شود:

$$(\mathbf{A} - \lambda_۱\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_۲\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_۳\mathbf{I}) = ۰$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^{۳} - (\lambda_۱ + \lambda_۲ + \lambda_۳)\mathbf{A}^{۲} + (\lambda_۲\lambda_۳ + \lambda_۳\lambda_۱ + \lambda_۱\lambda_۲)\mathbf{A} - \lambda_۱\lambda_۲\lambda_۳\mathbf{I} = ۰$$

(ت.۱۲)

(ب) $\mathbf{A}^{۳} = \lambda_۱^۳\mathbf{P}_۱ + \lambda_۲^۳\mathbf{P}_۲ + \lambda_۳^۳\mathbf{P}_۳$

فصل ۱۱

۲. ماتریس $\mathbf{A}$ دارای اجزای $(\mathbf{A})_{ij} = a_i a_j$ است. اگر $a_۱$ را از سطر اول، $a_۲$ را از سطر دوم و ...فاکتور بگیریم، دراین‌صورت داریم

$$\det\mathbf{A} = a_۱ a_۲ \cdots a_n \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & \cdots & a_n \\ a_۱ & a_۲ & \cdots & a_n \\ \vdots & & & \\ a_۱ & a_۲ & \cdots & n_n \end{vmatrix}$$

از اینجا بدیهی است که رتبهٔ $\mathbf{A}$ برابر ۱ است.

۶. $\mathbf{x}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{x}$ را می‌توان به‌صورت $\mathbf{y}^\dagger \Lambda \mathbf{y}$ بیان کرد، به‌طوری که $\mathbf{y} = \mathbf{P}^{-۱}\mathbf{x}$ باشد. حال، داریم

$$\mathbf{y}^\dagger \mathbf{\Lambda} \mathbf{y} = \sum_i \lambda_i |y_i|^۲ \qquad (\text{ت.}۱۳)$$

که λ_iها ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ هستند. اگر همهٔ λ_iها مثبت باشند، به وضوح عبارت بالا مثبت است. از طرف دیگر ممکن است عبارت بالا مثبت باشد، حتی اگر بعضی از λ_iها منفی باشند. اما عکس این مطلب صادق نیست.

۹. پتانسیل می‌شود $V(\mathbf{r}) = \widetilde{\mathbf{r}}\mathbf{A}\mathbf{r}$ که $\mathbf{r} = (x\ y\ z)$ است و داریم

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۱ \\ -۱ & ۲ & -۱ \\ -۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

این پتانسیل را می‌توان به‌صورت $V = \widetilde{\mathbf{r}}'\mathbf{\Lambda}\mathbf{r}'$ بیان کرد که $\mathbf{\Lambda}$ اجزای قطری ۳، ۳، ۰ دارد و داریم

$$\mathbf{r}' = \{x' \ \ y' \ \ z'\} = \mathbf{P}^{-۱}\mathbf{r}$$

با

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} ۱/\sqrt{۳} & ۱/\sqrt{۲} & ۱/\sqrt{۶} \\ ۱/\sqrt{۳} & ۰ & -۲/\sqrt{۶} \\ ۱/\sqrt{۳} & -۱\sqrt{۲} & ۱/\sqrt{۶} \end{bmatrix}$$

برحسب مختصات جدید (که متعامد و نیز دکارتی است)، $V = ۳(x'^{۲} + y'^{۲})$ است. روشن است که پتانسیل در امتداد محور z' ثابت است (و کمینه) و با افزایش فاصله از محور z' (یعنی، $(x'^{۲} + y'^{۲})^{۱/۲}$) افزایش می‌یابد. داریم

$$z' = (x + y + z)/\sqrt{۳}$$

فصل ۱۲

۲. اگر $\mathbf{A}$ دارای ویژه‌مقدارهای λ_i باشد، $e^{\mathbf{A}}$ دارای ویژه‌مقدارهای $\exp\lambda_i$ است، که به‌ازای هیچ λ_iیی صفر نمی‌شود. بنابراین از نتیجهٔ تمرین ۲.۹ درمی‌یابیم که $e^{\mathbf{A}}$ ناتکین است. در ضمن، چون $\mathbf{A}$ و $\mathbf{A}-$ با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند، داریم $e^{\mathbf{A}}e^{-\mathbf{A}} = e^{\circ} = \mathbf{I}$.

۵. ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A}$ عبارت‌اند از ۱/۲، ۱/۳، ۱/۴ و ماتریس قطری‌کنندهٔ آن می‌شود

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} ۱ & \circ & -۱ \\ \circ & ۱ & \circ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

از اتحاد $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = [(\mathbf{A} + \mathbf{I}) - (\lambda + ۱)\mathbf{I}]$ برمی‌آید که ویژه‌مقدارهای $\mathbf{A} + \mathbf{I}$ شامل ۳/۲، ۴/۳، ۵/۴ باشند و $\mathbf{P}$، $\mathbf{A} + \mathbf{I}$ را نیز قطری کند. بنابراین، داریم

$$\ln(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \ln\frac{۳}{۲} & \circ & \circ \\ \circ & \ln\frac{۴}{۳} & \circ \\ \circ & \circ & \ln\frac{۵}{۴} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} \ln\frac{۱۵}{۸} & \ln\frac{۶}{۵} & \circ \\ \circ & \ln\frac{۱۶}{۹} & \circ \\ \ln\frac{۶}{۵} & \ln\frac{۱۳۵}{۱۲۸} & \ln\frac{۱۵}{۸} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \circ/۳۱۴۳ & \circ/\circ۹۱۲ & \circ/\circ۹۱۲ \\ \circ & \circ/۲۸۷۷ & \circ \\ \circ/\circ۹۱۲ & \circ/\circ۲۶۷ & \circ/۳۱۴۳ \end{bmatrix} \qquad (\text{ت.۱۴})$$

در ضمن، داریم

$$\mathbf{A}^2/2 = (1/576)\begin{bmatrix} 45 & 27 & 27 \\ 0 & 32 & 0 \\ 27 & 13 & 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0781 & 0.0469 & 0.0469 \\ 0 & 0.0556 & 0 \\ 0.0469 & 0.0226 & 0.0781 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3/3 = \begin{bmatrix} 0.0234 & 0.0182 & 0.0182 \\ 0 & 0.0123 & 0 \\ 0.0182 & 0.0111 & 0.0234 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^4/4 = \begin{bmatrix} 0.0083 & 0.0073 & 0.0073 \\ 0 & 0.0031 & 0 \\ 0.0073 & 0.0052 & 0.0083 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^2}{2} + \frac{\mathbf{A}^3}{3} - \frac{\mathbf{A}^4}{4} = \begin{bmatrix} 0.3120 & 0.0890 & 0.0890 \\ 0 & 0.2869 & 0 \\ 0.0890 & 0.0304 & 0.3120 \end{bmatrix} \qquad \text{(ت.۱۵)}$$

که به‌خوبی با ماتریس $\ln(\mathbf{I}+\mathbf{A})$ی معادلهٔ (ت.۱۴) مطابقت دارد

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} 1 & k & (k^2+k)/2 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e & e & 3e/2 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$$

$$\ln\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(ت.۱۶)}$$

فرض کنید $\mathbf{S} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k/k!$ باشد. از نتیجهٔ بالا، داریم

$$(\mathbf{S})_{11} = \sum_{k=0}^{\infty}[(\mathbf{A})^k]_{11}/k! = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k! = e$$

$$(\mathbf{S})_{12} = \sum_{k=0}^{\infty}[(\mathbf{A})^k]_{12}/k! = \sum_{k=0}^{\infty} k/k! = \sum_{k=1}^{\infty} 1/(k-1)! = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = e$$

$$(\mathbf{S})_{13} = \sum_{k=0}^{\infty}(k^2+k)/2k! = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)/(k-1)!$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)/n! = 3e/2 \qquad (\text{ت.۱۷})$$

روشن است که این نتیجه با $e^{\mathbf{A}}$ بالا مطابقت دارد.

۱۰. $e^{\lambda\mathbf{A}}$ و $e^{-\lambda\mathbf{A}}$ را، برحسب توانهای λ بسط دهید و ضرایب توانهای متوالی λ را جدا کنید.

فصل ۱۳

۱. (ب)

$$\begin{bmatrix} a^2 & ab & 0 & 0 \\ bc & c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-a & b^2 \\ 0 & 0 & b^2 & a-c \end{bmatrix}$$

۴. (ج)

$$\begin{bmatrix} a^2b^2 & a^2bd & ab^3 & ab^2d \\ a^2cd & a^2c^2 & abcd & abc^2 \\ b^3c & b^2cd & bc^2d & bc^3 \\ b^2c^2 & bc^2d & c^3d & c^4 \end{bmatrix}$$

فصل ۱۴

۳. ماتریس تبدیل:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_x\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_y\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_z\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

فصل ۱۵

۴. $\delta^i_i = N; \delta^i_j\delta^j_k\delta^k_i = \delta^i_i = N$.

۵. a_ρ و a_ϕ همانند معادلات (۵۱) و $a_z = \ddot{z}$ است.

۶. مختصات قطبی: $\partial f/\partial\rho$، $\partial f/\partial\phi$؛ مختصات قطبی کروی: $\partial f/\partial r$، $\partial f/\partial\theta$، $\partial f/\partial\phi$، که f میدان نرده‌ای است.

۷. معادلهٔ (۶.۲۲) ابتدای فصل ۲۲ را ببینید.

۹. $v^\rho = \rho^2(\cos^3\phi + \sin^3\phi); v^\phi = \rho\sin\phi\cos\phi(\sin\phi - \cos\phi)$

فصل ۱۶

تانسور مفروض چهار اندیس آزاد (p, t, j, s) و سه اندیس ظاهری (i, k, r) دارد. بنابراین نماد $A^{ip}_j B^k_{ir} C^{rt}_{sk}$ نشان‌دهندهٔ N^4 عبارت متفاوت است. هر عبارتی شامل N^3 جمله است.

۶.اثبات مشابه اثباتی است که در حالت ماتریسها داشتیم: تمرین ۳.۳ را ببینید.

فصل ۱۷

۲. می‌توان نشان داد که $B^{ij}E_{ik} = \delta^j_k$ است. معادلهٔ (۱۲) را در E_{ks} ضرب کنید، نتیجه می‌دهد

$$A_{ij}B^{ik}E_{ks} = \delta^k_j E_{ks} \Rightarrow A_{ij}\delta^i_s = \delta^k_j E_{ks} \Rightarrow A_{sj} = E_{js} = E_{sj}$$

زیرا E_{sj} متقارن است.

۴. (الف) $A^{ik}_j B^j_k + C^{ri}D_r = E^{st}_r F^{ri}_{st}$

فصل ۱۸

۳. $\partial f/\partial r, (۱/r^۲)\partial f/\partial\theta, (۱/r^۲\sin^۲\theta)\partial f/\partial\phi$

۴. داریم $ds^۲ = (dz^۱)^۲ + (dz^۲)^۲ + ۲dz^۱dz^۲\cos\alpha$ نتیجه می‌گیریم

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} ۱ & \cos\alpha \\ \cos\alpha & ۱ \end{bmatrix}, \qquad [g^{ij}] = \mathrm{cosec}^۲\alpha \begin{bmatrix} ۱ & -\cos\alpha \\ -\cos\alpha & ۱ \end{bmatrix}$$

۸. در واقع، داریم $\delta_{jk} = \delta^i_{.k}g_{ij} = g_{kj} = g_{jk}$

فصل ۱۹

۱. $A_{۱۱} = -A_{۲۲} = \frac{۱}{۲}, A_{۳۳} = ۳, A_{۱۲} = A_{۲۱} = -۱, A_{۱۳} = A_{۳۱} = -۳/۲\sqrt{۲}$

$A_{۲۳} = A_{۳۲} = -۱/۲\sqrt{۲}$

۳. (ب) تنها مؤلفه‌های غیرصفر عبارت‌اند از

$$a_{۱۳} = a_{۲۱} = a_{۳۲} = ۱$$

فصل ۲۰

۱. (الف) $ds^۲ = dr^۲ - r^۲(d\theta^۲ + \sin^۲\theta d\phi^۲)\sinh^۲\Psi - r^۲d\Psi^۲$

فصل ۲۱

۱. (الف) $\overline{E} = ۲\sqrt{۲}E\cos\theta/(۳+\alpha)^{۱/۲}, \overline{B} = (۳+\alpha)^{۱/۲}E/\sqrt{۲}$

فصل ۲۲

۱. (ج) $A^{ijk}_{\dots l;q} = A^{ijk}_{\dots l,q} + A^{pjk}_{\dots l}\Gamma^i_{pq} + A^{ipk}_{\dots l}\Gamma^j_{pq} + A^{ijp}_{\dots l}\Gamma^k_{pq} - A^{ijk}_{\dots p}\Gamma^p_{lq}$

۳. داریم

$$A_{i;j} = A_{i,j} - A_p\Gamma^p_{ij}, \qquad A_{j;i} = A_{j,i} - A_p\Gamma^p_{ij} \Rightarrow A_{i;j} - A_{j;i} = A_{i,j} - A_{j,i}$$

چون سمت چپ تانسور است، سمت راست نیز چنین است.

۴. داریم $A_{ij;k} = A_{ij,k} - A_{pj}\Gamma^p_{ik} - A_{ip}\Gamma^p_{jk}$

با دوبار جایگشت چرخه‌ای i، j، k و جمع کردن سه معادله (با توجه به اینکه $A_{ij} = -A_{ji}$ است)، به‌دست می‌آوریم

$$A_{ij;k} + A_{jk;i} + A_{ki;j} = A_{ij,k} + A_{jk,i} + A_{ki,j}$$

چون طرف چپ تانسور است، سمت راست نیز تانسور است. علاوه‌براین، با قرار دادن $B_{ijk} \equiv A_{ij,k} + A_{jk,i} + A_{ki,j}$، به‌سادگی می‌بینیم که

$$B_{jik} = A_{ji,k} + A_{ik,j} + A_{kj,i} = -B_{ijk}$$

و به‌همین ترتیب به نتیجه می‌رسیم.

۱۰. نمادهای کریستوفل نوع اول عبارت‌اند از:

$$[۱۱,۱] = \frac{۱}{۲}\partial f/\partial u, \qquad [۲۲,۲] = \frac{۱}{۲}\partial h/\partial v$$
$$[۱۲,۱] = [۲۱,۱] = -[۱۱,۲] = \frac{۱}{۲}\partial f/\partial v$$
$$[۱۲,۲] = [۲۱,۲] = -[۲۲,۱] = \frac{۱}{۲}\partial h/\partial u$$

۱۱. نمادهای کریستوفل نوع اول عبارت‌اند از:

$$[۱۱,۱] = \frac{۱}{۲}\partial R/\partial u, \qquad [۲۲,۲] = \frac{۱}{۲}\partial T/\partial v$$
$$[۱۲,۱] = [۲۱,۱] = \frac{۱}{۲}\partial R/\partial v \qquad [۱۲,۲] = [۲۱,۲] = \frac{۱}{۲}\partial T/\partial u$$
$$[۱۱,۲] = \partial S/\partial u - \frac{۱}{۲}\partial R/\partial v \qquad [۲۲,۲] = \partial S/\partial v - \frac{۱}{۲}\partial T/\partial u$$

نمادهای کریستوفل نوع دوم (با $D = RT - S^۲$):

$$\Gamma^۱_{۱۱} = (T\partial R/\partial u - ۲S\partial S/\partial u + S\partial R/\partial v)/۲D,\ \Gamma^۲_{۲۲} = (R\partial T/\partial v - ۲S\partial S/\partial v + S\partial T/\partial u)/۲D$$
$$\Gamma^۱_{۱۲} = (T\partial R/\partial v - S\partial T/\partial u)/۲D \qquad \Gamma^۲_{۱۲} = \Gamma^۲_{۲۱} = (R\partial T/\partial u - S\partial R/\partial v)/۲D$$
$$\Gamma^۱_{۲۲} = (۲T\partial S/\partial v - T\partial T/\partial u - S\partial T/\partial v)/۲D,\ \Gamma^۲_{۱۱} = (۲R\partial S/\partial u - R\partial R/\partial v - S\partial R/\partial u)/۲D$$

⋮

۱۳. از معادلهٔ (۵۸) و این واقعیت استفاده کنید که مشتق‌گیری هموردا در قانون توزیع‌پذیری صدق می‌کند.

فصل ۲۳

۴. $$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{1}{f}\,\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = 0,\ \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{1}{f}\,\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0$$

فصل ۲۴

۳.

$$R_{1212} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial u}{\partial h} + \frac{1}{4f}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial h}{\partial u}\right] + \frac{1}{4h}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial h}{\partial v}\right]$$

۵.

$$R_{1212} = \frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} - \frac{1}{S}\,\frac{\partial S}{\partial u}\,\frac{\partial S}{\partial v}, \qquad R^{1}_{1.12} = R_{1212}/S$$

نمایه