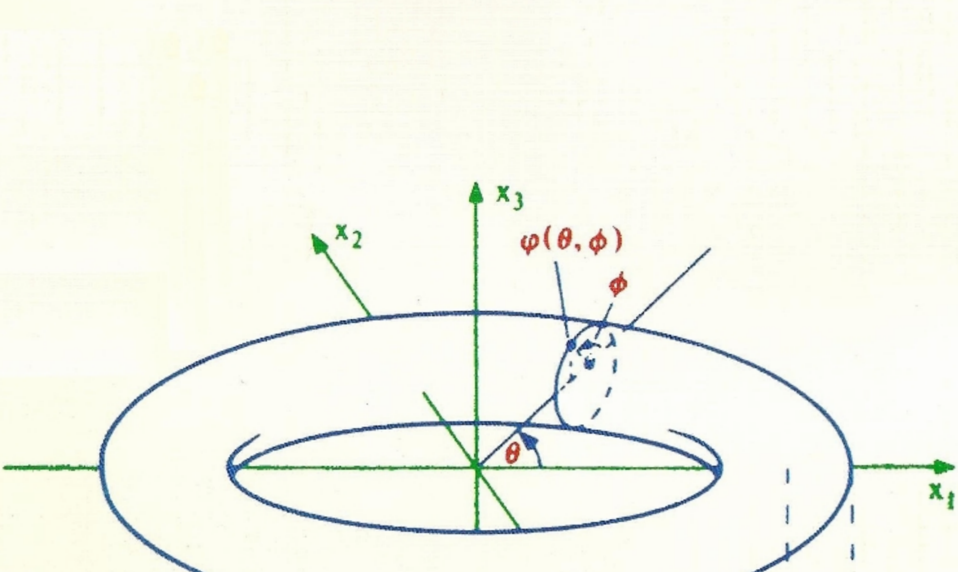
۴۷۲

مباحثی از هندسهٔ دیفرانسیل

جان ا. تورپه



ترجمه: دکتر جعفر زعفرانی

مباحثی از هندسهٔ دیفرانسیل

جان ا. تورپه

ترجمهٔ جعفر زعفرانی

مقدمهٔ مؤلف

در دهساله گذشته تغییرات قابل ملاحظه‌ای در ریز دروس در بیشتر مدارس عالی انجام شده است. این امر با ارائه درس مقدمه‌ای از جبر خطی در دروس دو سال اول کارشناسی آغاز شده است. برتری استفاده از جبر خطی در تدریس معادلات دیفرانسیل و همچنین در تدریس ریاضیات عمومی چند متغیره بخوبی شناخته شده‌است و در چندین کتاب درسی که مورد استفاده هستند این نقطه‌نظر پذیرفته شده است. امروزه دانشجویانی که سال اول کارشناسی را بپایان می‌رسانند، درک مقدماتی از فضاهای چندبعدی دارند.

واضح است که دروس دوساله آخر کارشناسی باید مفاهیم و مهارتهایی که دانشجو در دوسال اول کارشناسی یادگرفته است تقویت نمایند. متأسفانه حداقل درکتابهای هندسه دیفرانسیل تاکنون این چنین نبوده است. کتابهای درسی معمول در این سطح توجه خود را بیشتر به رویه‌های ۲- بعدی و ۳- بعدی معطوف می‌داشته‌اند (تا اینکه به رویه‌های با بعد دلخواه بپردازند.)

اگرچه اخیراً بیشتر کتابهااز جبر خطی استفاده می‌کنند ولی تنها به جبر $\mathbf{R}^3$ محدود می‌شوند و درک مقدماتی دانشجو از بعدهای بالاتر بخوبی پرورش داده نشده‌است.

در این کتاب هندسهٔ فضاهای n- بعدی در (n+۱)- فضا گسترش می‌یابد. مطالب این کتاب برای یک درس هندسه دیفرانسیل یک نیمسالی در سال آخر کارشناسی تدوین شده‌است. دروس پیش‌نیاز آن شامل اطلاعات دانشجو از جبر خطی، ریاضیات عمومی چند متغیره و معادلات دیفرانسیل می‌باشد، که بالطبع درک دانشجو را از این موضوعات تقویت می‌نماید. در واقع یکی از دلایلی که درس هندسه دیفرانسیل در این سطح مفید است اینست که دانشجو درک همه‌جانبه‌ای از ریاضیات عمومی چند متغیره پیدا می‌کند.

دلیل دیگری که هندسه دیفرانسیل دانشجویان را به‌خود جذب می‌کند اینست که نه‌تنها هندسه دیفرانسیل شامل ایده‌هایی است که به‌خودی خود زیبا هستند بلکه برای ریاضیات پیشرفته و فیزیک نظری اساسی می‌باشند.

تجربه مؤلف حاکی از اینست که دانشجویانی که این درس را انتخاب می‌کنند غالباً گرایش اصلی آنها ریاضی و فیزیک می‌باشد. خط‌مشی که در این کتاب مورد قبول واقع شده‌است بیان رویه‌ها به صورت جواب معادلات می‌باشد که بویژه برای فیزیکدانان جاذبه خاصی دارد.

در این کتاب از آغاز به هندسه فوق رویه‌های سوپذیر در $\mathbf{R}^{n+1}$ به صورت تصاویر وارون مقادیر عادی از توابع هموار می‌پردازیم. تنها با درنظرگرفتن چنین فوق رویه‌ها در نیمهٔ اول کتاب می‌توانیم به سرعت به نکات جالب هندسهٔ سرتاسری بدون درگیری با توسعهٔ پیچیدگی‌های ماشینی دست یابیم.

درنتیجه برای مثال نقشه‌ها (تکه‌های مختصی) تا اینکه مباحث اولیهٔ ژئودزیها، خاصیت توازی، خمیدگی، و تحدب ارائه شوند به تعویق می‌افتد. در واقع وقتی که نقشه‌ها ارائه می‌گردند به عنوان یک ابزار محاسباتی است.

با اینحال نقشه‌ها ما را سپس به تعمیم طبیعی مطالعهٔ نقاط کانونی و رویه‌های با متمم بعد دلخواه هدایت می‌کنند.

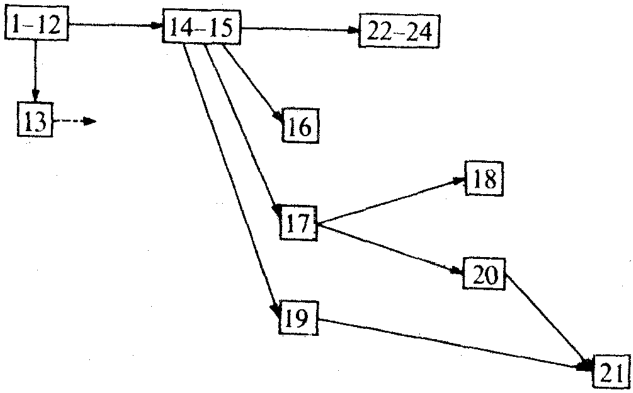
یکی از برتریهای این نحوه برخورد با هندسهٔ n- بعدی از آغاز اینست که می‌توان برای روشنگری هر مفهوم به طور همزمان از بعدهای پائین‌تر استفاده کرد. در نتیجه برای مثال امکان مطالعه مثالهای ۱- بعدی به درک دانشجو از نگاشت گاوس و تصویر (کروی) آن، که در این حالت زیر مجموعه‌ای از یک دایرهٔ یکه می‌شود کمک می‌کند.

ابزار اصلی در توسعهٔ نظریهٔ حساب میدانهای برداریست که به‌نظر می‌رسد طبیعی‌ترین وسیله برای مطالعه هندسه‌دیفرانسیل و همچنین یکی از آشناترین مفاهیم برای دانشجویان دورهٔ کارشناسی ریاضی و فیزیک است. فرمهای دیفرانسیل‌پذیر تقریباً در اواخر کتاب ذکر شده‌اند و سپس برای استفاده در امنگرالگیری به‌کار رفته‌اند.

دانشجویانی که یک سری درس دوساله مناسب از ریاضیات عمومی همره با جبرخطی و معادلات دیفرانسیل گرفته‌اند به اندازهٔ کافی برای درک مطالب کتاب آمادگی کامل دارند. گاه (برای مثال در فصل ۱۳ در مورد تحدب) آگاهی از مطالبی از آنالیز ریاضی در درک بهتر مطالب می‌تواند کمک نماید ولی ضروری نیست.

مطالب این کتاب احتمالاً بیشتر از آنست که در یک نیمسال بتوان تمام آن را تدریس کرد مگر آنکه دانشجویان از زمینهٔ بسیار قوی برخوردار باشند. فصلهای ۱ تا ۱۲ و ۱۴،۱۵،۲۲،۲۳ شامل قسمت‌های اساسی این کتاب است که باید در یک درس ارائه شوند. بیشتر مدرسین احتمالاً مایلند که حداقل قسمتهایی از فصلهای ۱۷،۱۹،۲۴ را نیز تدریس نمایند.

وابستگی بین فصلها به صورت زیر است



چند مفهوم از اوائل فصل ۱۳ در فصلهای بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند ولی کسانی که فصل ۱۳ را لازم نمی‌دانند می‌توانند این مفاهیم را جداگانه مطالعه نمایند.

مانند مؤلف هر کتابی من نیز مدیون محققین، نویسندگان کتب درسی که بر من مقدم بوده‌اند و همچنین به مدرسین، همکاران و دانشجویانی که تحت تأثیر آنها بوده‌ام می‌باشم. اگرچه در اینجا نمی‌توانم از تمام آنها به‌تفصیل تشکر نمایم، ولی حداقل لازم می‌دانم از م ـ دوکارمو[1] و ای.لیما[2] که مقاله آنها تحت عنوان «غوطه‌وریهای ایزومتریک با فرمهای درجهٔ دوم نیم معین» که در مجله Arch . Math . 20 (1969) , 173-175 به چاپ رسیده است الا مگر نحوهٔ برخورد ما با رویه‌های محدب در فصل ۱۳ و همچنین از س.س.چرن[3] که مقاله‌اش تحت عنوان» اثبات ساده‌ای از فرمول گاوس ـ بنه برای خمینه‌های ریمانی بسته» که در جمله Ann.gMath.(2)45(1944)747-752 به چاپ رسیده است که الهامگر فصل ۲۱ ماده می‌باشد تشکر نمایم. علاوه براین از ولنگانگ میر[4] بخاطر اظهار نظرهای متعددش روی نسخه دستنویس که وامگامطید بودند سپاسگزاری می‌نمایم.

جان ا. تورپه

1 - M.do canmo 2 - E.Lima 3 - S.S.chern 4 - Wolfgang Meyr

مقدمهٔ مترجم

اغلب دانشجویانی که در کارشناسی ریاضی فارغ التحصیل می‌شدند، ریاضیات را به طور اعم به دو قسمت آنالیز و جبر تقسیم می‌کردند و کمتر از زمینه‌های هندسی ریاضی آگاهی داشتند. خوشبختانه با تمهیداتی که اخیراً از طرف کمیته ریاضی شورایعالی برنامه‌ای بعمل آمده است تا حدی به دروس هندسه توجه بیشتری شده است. ترجمه این کتاب نیز در واقع در راستای پاسخگویی به این نیاز جامعه ریاضی کشور بوده است.

به نظر اینجانب کتاب حاضر علاوه بر آشناسازی دانشجویان با شگردهای هندسی به طور اعم، برای آن دسته از دانشجویانی که علاقه‌مند ادامهٔ تحصیل در زمینه ریاضی می‌باشند زمینه لازم را برای یادگیری سریع دروس پیشرفته هندسی از جمله هندسهٔ خمینه و توپولوژی دیفرانسیل فراهم می‌سازد. در ضمن برای دانشجویان فیزیکی که در زمینه‌های فیزیک نظری علاقه‌مند به یادگیری مقدماتی از هندسه دیفرانسیل می‌باشند می‌تواند تا حدی مفید باشد.

لازم می‌دانم از کلیه دانشجویان و همکاران عزیزی که مشوق اینجانب در ترجمه این کتاب بودند تشکر نمایم. همچنین از اعضای محترم شورای انتشارات دانشگاه اصفهان، مؤسسه نشر غزل که تایپ کامپیوتری این کتاب را از طرف دانشگاه عهده‌دار بوده و بالاخره کارکنان چاپخانه دانشگاه اصفهان سپاسگزاری نمایم.

فهرست

عنوان	صفحه

۱ـ نمودارها و مجموعه‌های تراز

به هر تابع حقیقی چند متغیره دسته‌ای از مجموعه‌ها موسوم به مجموعه‌های تراز نظیر می‌کنیم که در مطالعهٔ خواص کیفی تابع مفید می‌باشند. برای یک تابع مفروض $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ که در آن $U \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$، **مجموعه‌های *تراز*** عبارت از مجموعه‌های $f^{-1}(c)$ می‌باشند که برای هر عدد حقیقی c به صورت

$$f^{-1}(c) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in U : f(x_1, \dots, x_{n+1}) = c\}$$

تعریف می‌شوند. عدد c را ***ارتفاع*** مجموعهٔ تراز می‌نامند، و $f^{-1}(c)$ را مجموعهٔ تراز ***به ارتفاع*** c می‌گویند. چون $f^{-1}(c)$ در واقع مجموعهٔ جواب معادلهٔ $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = c$ می‌باشد، بنابراین مجموعهٔ تراز $f^{-1}(c)$ را اغلب به صورت "مجموعهٔ $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = c$" بیان می‌کنند. مفاهیم "مجموعهٔ تراز" و "ارتفاع" ناشی از رابطهٔ بین مجموعه‌های تراز یک تابع و نمودارش می‌باشد. ***نمودار*** یک تابع $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ زیر مجموعهٔ $\mathbf{R}^{n+2}$ به صورت زیر است

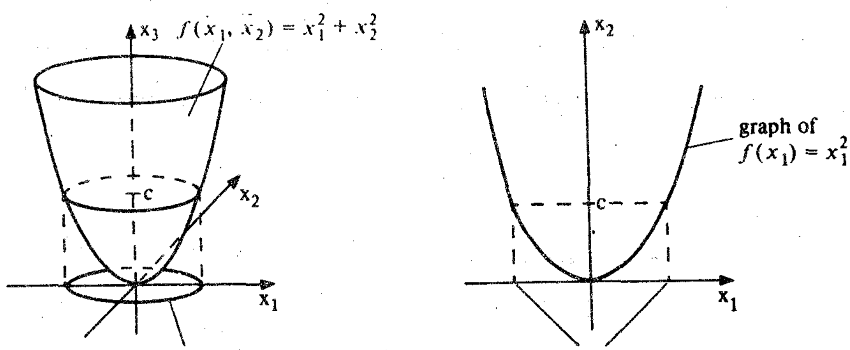
$$\text{graph}\ (f) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}) \in \mathbf{R}^{n+2} : (x_1, \dots, x_{n+1}) \in U \text{ و } x_{n+2} = f(x_1, \dots, x_{n+1})\}$$

برای $c > 0$، مجموعهٔ تراز f به ارتفاع c دقیقاً مجموعهٔ تمام نقاط در دامنه f می‌باشد که در فاصلهٔ c از نموداراند. (ر.ک. شکل ۱-۱). برای $c < 0$، مجموعه تراز f در ارتفاع c دقیقاً مجموعهٔ تمام نقاطی از دامنه f است که در فاصلهٔ c- از نموداراند.

برای مثال، مجموعهٔ تراز $f^{-1}(c)$ تابع $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$ برای $c < 0$ تهی

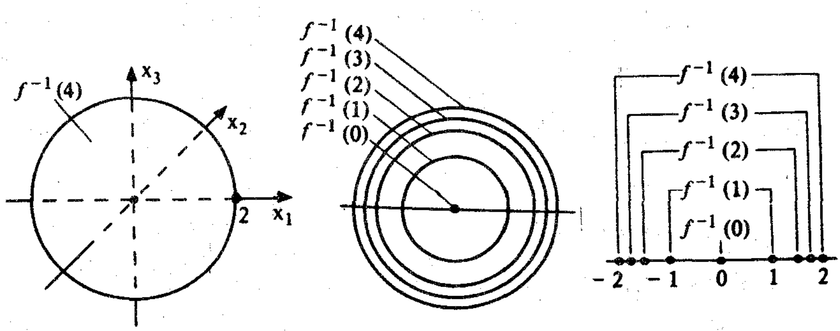
می‌باشد، و اگر $c = ۰$، تنها شامل یک نقطه (مبدأ) است، و برای حالتی که $c > ۰$، اگر $n = ۰$، شامل دو نقطه است، اگر $n = ۱$ دوایر به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{c}$ می‌باشند، اگر $n = ۲$، کره‌ها به مرکز مبدأ با شعاع $\sqrt{c}$ می‌باشند و به همین ترتیب برای ابعاد بالاتر. (ر.ک. شکل ۱-۱ و ۱-۲).

برای $n = ۱$، مجموعه‌های تراز (حداقل برای توابع غیر ثابت مشتق پذیر) معمولاً خمها در $\mathbf{R}^۲$ می‌باشند، این خمها همان نقشهایی را ایفا می‌کنند که خطوط مرزی یک نقشه انجام می‌دهند. اگر ما نمودار یک تابع را به عنوان قطعه زمینی در نظر بگیریم که ماکزیممهای موضعی، نشان دهندهٔ قلل کوهها و مینیممهای موضعی، نشانگر عمق دره‌ها باشند آنگاه می‌توانیم نقشه‌ای از این قطعه زمین را



$f^{-1}(c)\ [x_۱^۲ + x_۲^۲ = c]$ $n = ۱$:(ب) $f^{-1}(c)\ [x_۱^۲ = c]$ $n = ۰$:(الف)

شکل ۱-۱ : مجموعه‌های تراز $f^{-1}(c)$ $(c > ۰)$ برای تابع $f(x_۱, \dots, x_{n+۱}) = x_۱^۲ + \dots + x_{n+۱}^۲$.

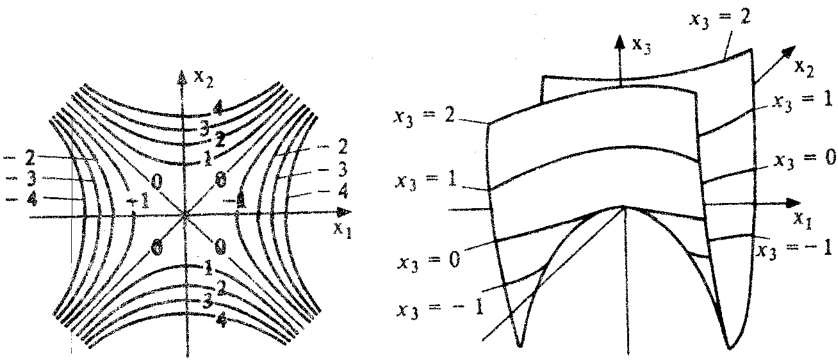


$n = ۲$:(ب) $n = ۱$:(ب) $n = ۰$:(الف)

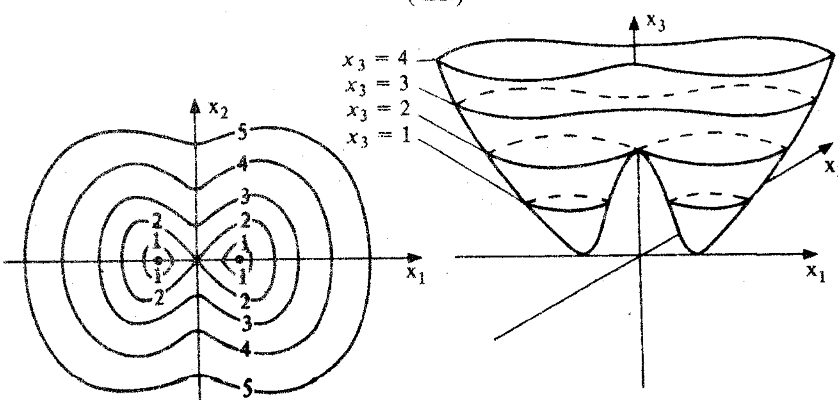
شکل ۱-۲ : مجموعه‌های تراز برای تابع $f(x_۱, \dots, x_{n+۱}) = x_۱^۲ + \dots + x_{n+۱}^۲$

با تصویر متعامد روی $\mathbf{R}^2$ بسازیم. بنابراین تمام نقاط یک خم تراز مفروض $f^{-1}(c)$ نظیر نقاطی از این قطعه زمین است که دارای ارتفاع c «از سطح دریا» $(x_3 = 0)$ است.

درست مانند نقشه‌های مرزی که تصویر دقیقی از نقشه‌بردای یک قطعه زمین را بدست می‌دهند، آگاهی از مجموعه‌های تراز و ارتفاع‌هایش دقیقاً تصویری از نمودار یک تابع را مشخص می‌کند. برای توابع $f:\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ مطالعه خمهای تراز رسم نمودار f را می‌تواند ساده‌تر کند. برای توابع $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ نمودار در $\mathbf{R}^4$ واقع است که رسم آن امکان پذیر نیست بنابراین مجموعه‌های تراز بهترین وسیله برای مطالعه رفتار چنین توابعی است.



(الف)



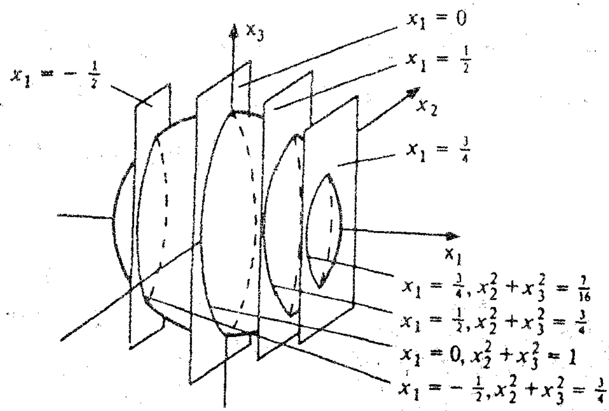
(ب)

شکل ۱-۳: مجموعه‌های تراز و نمودارها و توابع، $f:\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$، ارقام روی هر مجموعه تراز نشان دهنده ارتفاع آن است.

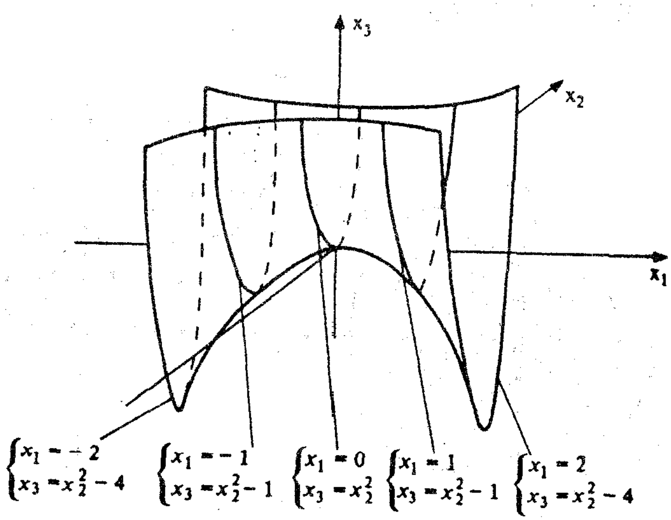
(الف) $f(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2^2$

(ب) یک تابع با دو می‌نیمم موضعی

یکی از طرق تجسم نمودار یک تابع مفروض $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$ ،$U\subseteq\mathbf{R}^2$، مجموعه‌های ترازش بشرح زیر است. صفحه‌ای به موازات صفحهٔ x_1Ox_2 که بطور عمودی حرکت می‌کند در نظر بگیرید. وقتی که این صفحه به *ارتفاع* c رسید، $x_3 = c$ این صفحه نمودار f را در (ر.ک. شکل ۱-۴).



(الف)



(ب)

شکل ۱-۴ : مجموعه‌های تراز در $\mathbf{R}^3$ که توسط تقاطع با صفحات ثابت = x_1 بوجود آمده‌اند.
(الف) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ (ب) $x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0$

مجموعهٔ تراز $f^{-1}(c)$ قطع می‌کند. وقتی‌که صفحه به حرکت خود ادامه می‌دهد این مجموعه‌ها نمودار f را تولید می‌کنند. (ر.ک. شکل ۱-۳).
همین اصل را می‌توان در جهت کمک به تجسم مجموعه‌های تراز توابع، $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$ که در آن $U \subseteq \mathbf{R}^3$، بکار برد، هر صفحهٔ ثابت = x_i مجموعه تراز $f^{-1}(c)$ (c ثابت) در مجموعه‌ای قطع می‌کند که معمولاً یک خم می‌باشد. با حرکت صفحه و تغییر مقدار ثابت x_i، این زیر مجموعه‌ها مجموعهٔ تراز $f^{-1}(c)$ را تولید می‌کند.

تمرین

در تمرینهای ۱-۱ الی ۱-۴ خمهای تراز و نمودار هر یک از توابع را مشخص کنید.

۱-۱. $f(x_1, x_2) = x_1$.

۱-۲. $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.

۱-۳. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$.

۱-۴. $f(x_1, x_2) = 3r^8 - 8r^6 + 6r^4$ که در آن $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ [راهنمایی: نقاط بحرانی f را به عنوان تابعی از r بیابید].

در تمرینهای ۱-۵ الی ۱-۹ مجموعه‌های تراز $f^{-1}(c)$ را به ازای ۲ و ۱ و ۰ = n و در مورد هر یک از توابع زیر به ارتفاعهای مشخص شده بیابید.

۱-۵. ۲ و ۱ و ۰ و ۱- = c؛ $f(x_1 x_2, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$.

۱-۶. ۴ و ۱ و ۰ = c؛ $f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2$.

۱-۷. ۲ و ۱ و ۰ و ۱- = c؛ $f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = x_1 - x_2^2 \dots - x_{n+1}^2$.

۱-۸. ۱ و ۰ و ۱- = c; $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 - x_2^2, \ldots, x_{n+1}^2$.

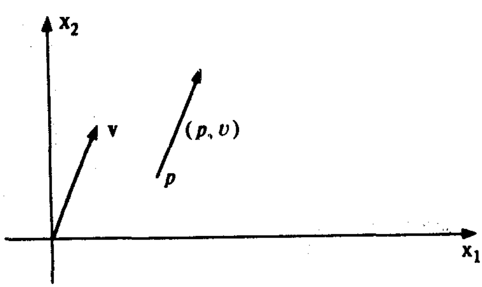
۱-۹. $c = 1$; $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \ldots + \frac{x_{n+1}^2}{(n+1)^2}$.

۱-۱۰. نشان دهید که نمودار هر تابع $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$، f مجموعه ترازی برای یک تابع $F: \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ می‌باشد.

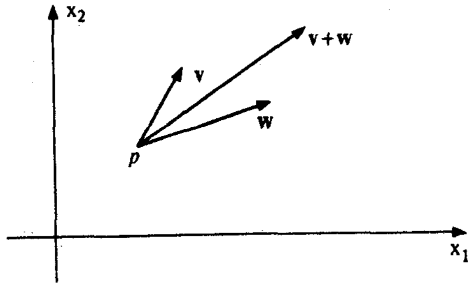
۲ـ میدانهای برداری

ابزاری که به ما امکان مطالعهٔ هندسهٔ مجموعه‌های تراز را می‌دهد حساب میدانهای برداری است. در این فصل ما برخی از ایده‌های اساسی را گسترش می‌دهیم.

یک ***بردار در یک نقطهٔ*** $p \in \mathbf{R}^{n+1}$ یک جفت $\mathbf{v} = (p, v)$ می‌باشد که در آن $v \in \mathbf{R}^{n+1}$ از نقطه نظر هندسی $\mathbf{v}$ را می‌توان به عنوان انتقال یافتهٔ بردار v در نقطهٔ p به جای مبدأ در نظر گرفت (شکل ۲-۱). بردارهای در p تشکیل یک فضای برداری $\mathbf{R}^{n+1}_p$ به بعد $n+1$ می‌دهند، که در آن جمع بصورت $(p, v) + (p, w) = (p, v + w)$ ، (شکل ۲-۲) و ضرب اسکالر بصورت $c(p, v) = (p, cv)$ تعریف شده است. مجموعهٔ $\{(p, v_1), \dots, (p, v_{n+1})\}$ که در آن $\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$ یک پایه دلخواه برای $\mathbf{R}^{n+1}$ است، تشکیل یک پایه برای $\mathbf{R}^{n+1}_p$ می‌دهد. مجموعهٔ تمام بردارها در تمام نقاط $\mathbf{R}^{n+1}$ را می‌توان (به صورت مجموعه‌ای) با حاصلضرب دکارتی $\mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1} = \mathrm{R}^{n+1}$ یکی گرفت. با این حال توجه کنید که قانون جمع به ما اجازه جمع بردارها در نقاط متفاوت $\mathbf{R}^{n+1}$ را نمی‌دهد.



شکل ۲-۱ یک بردار در p،



شکل ۲-۲ جمع بردارها در p.

برای دو بردار مفروض (p, v) و (p, w) در نقطهٔ p، ***حاصلضرب داخلی*** آنها با استفاده از حاصلضرب داخلی معمول در $\mathbf{R}^{n+1}$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$(p, v).(p, w) = (v . w).$$

هرگاه (p, v) و (p, w) متعلق به $\mathbf{R}^3_p$ باشند، $p \in \mathbf{R}^3$، ***حاصلضرب خارجی*** نیز توسط حاصلضرب خارجی معمولی در $\mathbf{R}^3$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$(p, v) \times (p, w) = (p, v \times w).$$

با استفاده از ضرب داخلی ***طول*** یک بردار $\mathbf{v} = (p, v)$ در نقطهٔ p یعنی $\|\mathbf{v}\|$ زاویه θ بین دو بردار $\mathbf{v} = (p, v)$ و $\mathbf{w} = (p, w)$ بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} . \mathbf{v})^{1/2}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}.\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \;\; \|\mathbf{w}\|}.$$

یک ***میدان برداری*** $\mathbf{X}$ روی $U \subset \mathbf{R}^{n+1}$ تابعی است که در هر نقطهٔ U یک بردار در آن نقطه نظیر می‌کند. در نتیجه

$$\mathbf{X}(p) = (p, X(p)).$$

برای یک تابع $X : U \to \mathbf{R}^{n+1}$. میدانهای برداری روی $\mathbf{R}^{n+1}$ اغلب با مشخص کردن تابع نظیر X آن بسهولت بیان می‌شود. سه مثال خاص از میدانهای برداری روی $\mathbf{R}^2$ در شکل ۲-۳ نشان داده شده‌اند.

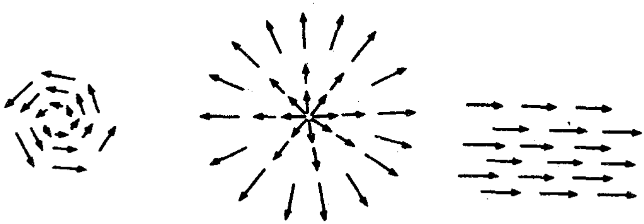
ما در این کتاب بیشتر با توابع و میدانهای برداری که هموارند سر و کار داریم. یک تابع $f: U \to \mathbf{R}$ (U یک زیر مجموعه باز $\mathbf{R}^{n+1}$ است)*[1] را هموار گوییم اگر کلیهٔ مشتقات جزیی از تمام مراتب موجود و پیوسته باشند. یک تابع $f : U \to \mathbf{R}^k$ هموار است اگر هر یک از توابع مؤلفه‌ای $f_i: U \to \mathbf{R}$ $f(p) = (f_1(p), \dots, f_k(p))$ (برای $p \in U$) هموار باشند. یک میدان برداری $\mathbf{X}$ روی $\mathbf{U}$ هموار است اگر تابع نظیر آن $X : U \to \mathbf{R}^{n+1}$ هموار باشد.

نظیر به هر تابع هموار $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ (U باز $\mathbf{R}^{n+1}$) یک میدان برداری هموار روی U موسوم به ***گرادیان*** f یعنی ∇f بصورت

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(p) \right)$$

تعریف می‌کنیم. ملاحظه خواهیم کرد که این میدان برداری نقش بسیار مهمی در مطالعه مجموعه‌های تراز f ایفا می‌کند.

میدانهای برداری اغلب در فیزیک بصورت میدانهای سرعت یا جریانهای سیال ظاهر می‌شوند. به هر چنین جریانی، خانواده‌ای از خمهای پارامتری موسوم به خطوط جریان نظیر می‌شود. این



(الف): $X(p) = (0, 1)$ (ب): $X(p) = p$ (پ): $X(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$

شکل ۲-۳ میدانهای برداری روی $\mathbf{R}^2$ $\mathbf{X}(p) = (p, \mathbf{X}(p))$

---

۱ - یادآوری می‌کنیم مجموعهٔ $U \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ باز است اگر به ازای هر $p \in U$ عدد مثبتی مانند ε موجود باشد به قسمتی که تمام $q \in U$ های با شرط $\|p - q\| < \varepsilon$ در U واقع باشد.

«خطوط جریان» در واقع به هر میدان برداری هموار نظیر می‌شود و در هندسه نیز همانند فیزیک مهم می‌باشند. در هندسه این خطوط جریان موسوم به «خمهای انتگرال» می‌باشند.

یک ***خم پارامتری*** در $\mathbf{R}^{n+1}$ تابع هموار مانند $\alpha: I \to \mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد که در آن I یک بازهٔ باز $\mathbf{R}$ است. هموار بودن چنین تابعی بدین معنی است که اگر α بصورت $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_{n+1}(t))$ باشد آنگاه هر یک از x_iها توابع حقیقی هموار در I باشند.

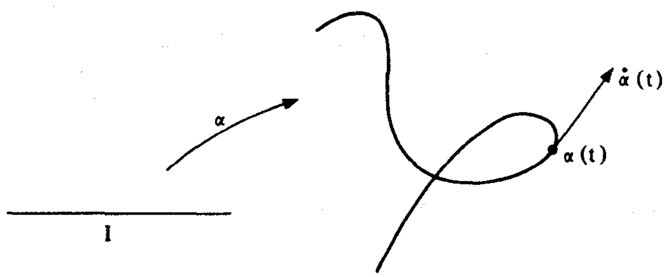
یک ***بردار سرعت*** در زمان t ($t \in I$) از خم پارامتری $\alpha: I \to \mathbf{R}^{n+1}$، بردار در نقطهٔ $\alpha(t)$ تعریف شده بصورت زیر

$$\dot{\alpha}(t) = (\alpha(t), \frac{d\alpha(t)}{dt}) = (\alpha(t), \frac{d x_1(t)}{dt}, \dots, \frac{d x_{n+1}(t)}{d(t)})$$

می‌باشد. این بردار برخم α در نقطهٔ $\alpha(t)$ مماس است. (ر.ک. شکل ۲-۴)

اگر $\alpha(t)$ به ازای هر t موقعیت یک جسم متحرک در $\mathbf{R}^{n+1}$ در زمان t باشد، آنگاه $\dot{\alpha}(t)$ نمایشگر سرعت این جسم در زمان t است.

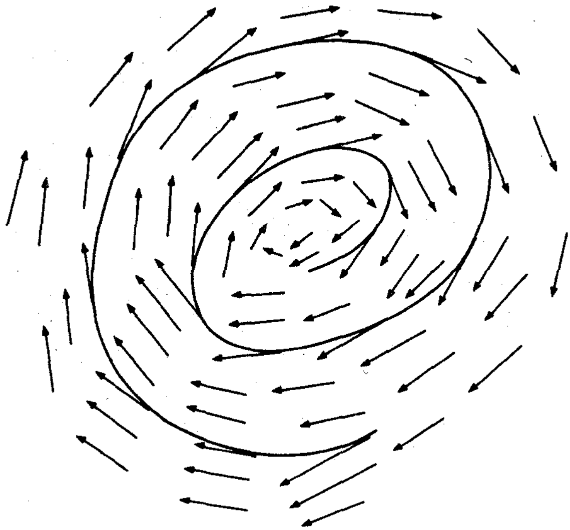
یک خم پارامتری $\alpha: I \to \mathbf{R}^{n+1}$ یک ***خم انتگرال*** میدان برداری $\mathbf{X}$ روی مجموعهٔ باز U در $\mathbf{R}^{n+1}$ گوییم هرگاه $\alpha(t) \in U$ و $\dot{\alpha}(t) = \mathbf{X}(\alpha(t))$ برای هر $t \in I$. در نتیجه α دارای این خاصیت است که



شکل ۲-۴ بردار سرعت بر یک خم پارامتری $\mathbf{R}^2$

بردار سرعت آن درهر نقطهٔ این خم برمقدار میدان برداری دراین نقطه منطبق است (ر.ک.شکل ۲-۵).

● **قضیه.** ***فرض کنید $\mathbf{X}$ یک میدان برداری هموار روی یک مجموعه باز $U \subset \mathbf{R}^{n+1}$ باشد و $p \in U$. آنگاه یک بازهٔ باز I شامل صفر و یک خم انتگرال مانند $\alpha: I \to U$ برای $\mathbf{X}$ وجود دارد به قسمی که***



شکل ۲-۵ یک خم انتگرال یک میدان برداری

(یک) $\alpha(0) = p$

(دو) *اگر* $\beta : \bar{I} \to U$ ***هر خم انتگرال دیگری برای X باشد با شرط اینکه*** $\beta(0) = p$ ***آنگاه*** $\bar{I} \subset I$ **و** $\beta(t) = \alpha(t)$ ***برای هر*** $t \in \bar{I}$.

تذکر. خم انتگرال α موسوم به ***خم انتگرال بیشین*** $\mathbf{X}$ گذرنده از نقطه p است، یا به عبارت ساده‌تر خم انتگرال $\mathbf{X}$ گذرنده از نقطه p است

برهان. این قضیه در واقع یک قانونمندی مجددی از قضیهٔ بنیادی وجود و یکتایی جوابها برای حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول است. چون $\mathbf{X}$ یک میدان برداری هموار روی U بصورت

$$\mathbf{X}(p) = (p, X_1(p), \dots, X_{n+1}(p))$$

می‌باشد که در آن $X_i : U \to \mathbf{R}$ توابع هموار روی U هستند. یک خم پارامتری $\alpha : I \to \mathbf{R}^{n+1}$ بصورت

$$\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_{n+1}(t))$$

می‌باشد که در آن $x_i : I \to \mathbf{R}$ توابع هموار روی I می‌باشند. سرعت α بصورت

$$\dot{\alpha}(t) = (\alpha(t), \frac{dx_1}{dt}(t), \ldots, \frac{dx_{n+1}}{dt}(t))$$

می‌باشد. شرط اینکه α یک خم انتگرال $\mathbf{X}$ باشد ایجاب می‌کند که $\dot{\alpha}(t) = \mathbf{X}(\alpha(t))$ و یا

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) = X_1(x_1(t), \ldots, x_{n+1}(t)) \\ \vdots \\ \frac{dX_{n+1}}{d(t)}(t) = X_{n+1}(x_1(t), \ldots, x_{n+1}(t)) . \end{cases}$$

این دستگاه از $n+1$ معادله دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول از $n+1$ مجهول است. بنابراین بنابر قضیه وجود برای حل اینچنین معادلاتی یک بازهٔ باز I_1 در حول صفر و مجموعه‌ای از توابع هموار $x_i : I_1 \to \mathbf{R}$ وجود دارند به قسمی که در شرایط اولیه $x_i(0) = p_i$ برای $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ صدق می‌کنند که در آن $p = (p_1, \ldots, p_{n+1})$. اگر $\beta_1(t) = (x_1(t), \ldots, x_{n+1}(t))$ قرار دهیم، یک خم انتگرال $\beta_1 : I \to U$ برای $\mathbf{X}$ با شرط $\beta_1(0) = p$ بدست می‌آوریم.

بنابر قضیه یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول اگر $\tilde{x}_i : I_2 \to \mathbf{R}$ یک مجموعهٔ دیگری از توابع باشند که در دستگاه (E) با شرایط اولیه $\tilde{x}_i(0) = p_i$ صدق کند، آنگاه $x_i(t) = \tilde{x}_i(t)$ برای تمام $t \in I_1 \cap I_2$. به عبارت دیگر، اگر $\beta_2 : I_2 \to U$ خم انتگرال دیگری از $\mathbf{X}$ با شرط $\beta_2(0) = p$ باشد، آنگاه $\beta_1(t) = \beta_2(t)$ برای تمام $t \in I_1 \cap I_2$. در نتیجه یک خم انتگرال یکتای بیشین مانند α برای $\mathbf{X}$ با شرط $\alpha(0) = p$ وجود دارد. (دامنه‌اش اجتماع دامنه‌های تمام خمهای انتگرال x می‌باشد که صفر را به p می‌نگارد) و علاوه براین اگر $\beta : \tilde{I} \to U$ خم انتگرال دیگری از X با شرط $\beta(0) = p$ باشد، آنگاه β در واقع تحدید α به بازهٔ کوچکتر $\tilde{I}$ می‌باشد.□

مثال. فرض‌کنید $\mathbf{X}$ میدان‌برداری $\mathbf{X}(P) = (p, X(p))$ باشدکه درآن $X(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ (ر.ک. شکل ۲-۳ (پ)). یک خم پارامتری $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t))$ یک خم انتگرال $\mathbf{X}$ است اگر و فقط اگر توابع $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در معادلات دیفرانسیل زیر صدق کنند.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 . \end{cases}$$

جواب عمومی این چنین معادلات به صورت زیر است

$$\begin{cases} x_۱(t) = C_۱ \cos t + C_۲ \sin t \\ x_۲(t) = C_۱ \sin t - C_۲ \cos t\,. \end{cases}$$

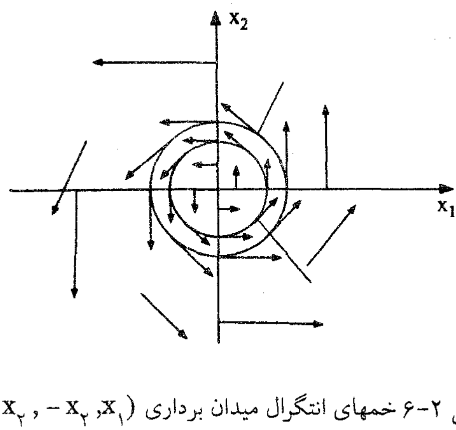
در نتیجه خم انتگرال $\mathbf{X}$ که از نقطه (۰ و ۱) (با شرط $x_۱(۰) = ۱$, $x_۲(۰) = ۰$) می‌گذرد عبارتست از

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$$

و خم انتگرالی که از یک نقطه دلخواه (a, b) (با شرط $x_۱(۰) = a$ و $x_۲(۰) = b$) می‌گذرد عبارت است از

$$\beta(t) = (a \cos t - b \sin t, a \sin t + b \cos t)$$

(ر.ک. شکل ۲-۶).



شکل ۲-۶ خمهای انتگرال میدان برداری $\mathbf{X}(x_۱, x_۲) = (x_۱, x_۲, -x_۲, x_۱)$

تمرین

۲-۱. میدانهای برداری زیر را در $\mathbf{R}^۲$ مشخص کنید: $\mathbf{X}(p) = (p, X(p))$ که در آن

(الف) $X(p) = (۰, ۱)$ (ب) $X(p) = -p$

(پ) $X(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$ (ت) $X(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$

(ث) $X(x_1, x_2) = (-2x_2, \frac{1}{2}x_1)$

۲-۲. میدان گرادیان هر یک از توابع زیر را یافته و رسم کنید

(الف) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

(ب) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

(پ) $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2$

(ت) $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2)/4$

۲-۳. دیورژانس یک میدان برداری هموار $\mathbf{X}$ روی $U \subset R^{n+1}$ که در آن

$$\mathbf{X}(p) = (p, X_1(p), \dots, X_{n+1}(p)) \text{، } p \in U$$

عبارت است از تابع $\mathrm{div}\mathbf{X} : U \to \mathbf{R}$ که بصورت $\mathrm{div}\,\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n+1} (\partial X_i / \partial x_i)$ تعریف شده است. دیورژانس هر یک از میدانهای برداری تمرینهای ۲-۱ و ۲-۲ را بیابید.

۲-۴. توضیح دهید که چرا خم انتگرال یک میدان برداری مانند خم پارامتری شکل ۲-۴ نمی‌تواند از خود عبور کند؟

۲-۵. خم انتگرال هر یک از میدانهای برداری تمرین ۲-۱ را بیابید که از نقطهٔ $p = (1 \text{ و } 1)$ بگذرد

۲-۶. خم انتگرال هر یک از میدانهای برداری تمرین ۲-۱ را بیابید که از نقطهٔ $p = (a, b)$ بگذرد.

۲-۷. یک میدان برداری هموار $\mathbf{X}$ روی یک مجموعه باز U از $\mathbf{R}^{n+1}$ را کامل گوییم هرگاه برای هر $p \in U$ خم انتگرال بیشین $\mathbf{X}$ گذرنده از نقطهٔ p دارای دامنه‌ای برابر $\mathbf{R}$ باشد. تعیین کنید کدامیک از میدانهای برداری زیر کاملند:

(الف) $U = R^2$ و $\mathbf{X}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 1, 0)$

(ب) $\mathbf{X}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 1, 0),\ U = \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$

(پ) $\mathbf{X}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, -x_2, x_1),\ U = \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$

(ت) $\mathbf{X}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 1 + x_1^2, 0)$, $U = \mathbf{R}^2$.

۲-۸. فرض کنید U یک زیر مجموعهٔ باز $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد، $p \in V$ و $\mathbf{X}$ یک میدان برداری هموار روی U باشد. با فرض اینکه $\alpha : I \to \mathbf{R}$ یک خم انتگرال بیشین $\mathbf{X}$ گذرنده از نقطهٔ p باشد، نشان دهید که اگر $\beta : \bar{I} \to U$ یک خم انتگرال $\mathbf{X}$ با شرط $\beta(t_\circ) = p$ برای یک $t_\circ \in \bar{I}$ باشد، در اینصورت $\beta(t) = \alpha(t - t_\circ)$ برای $t \in \bar{I}$. [راهنمایی: تحقیق کنید که اگر β به صورت $\beta(t) = B(t + t_\circ)$ تعریف شده باشد آنگاه β یک خم انتگرال $\mathbf{X}$ با شرط $\beta(\circ) = p$ می‌باشد.]

۲-۹. فرض کنید که U یک مجموعه باز در $\mathbf{R}^{n+1}$ و $\mathbf{X}$ یک میدان برداری هموار روی U باشد. اگر $\alpha : I \to U$ یک خم انتگرال $\mathbf{X}$ با شرط $\alpha(\circ) = \alpha(t_\circ)$ باشد برای $t_\circ \in I$، $t_\circ \neq \circ$. نشان دهید که α دوره‌ای است، یعنی نشان دهید که $\alpha(t + t_\circ) = \alpha(t)$ برای تمام tهایی که هم t و هم $t + t_\circ$ متعلق به I باشند. [راهنمایی: به تمرین ۲-۸ ملاحظه کنید.]

۲-۱۰. فرض کنید که میدان برداری $\mathbf{X}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 1, \circ)$ روی $\mathbf{R}^2$ تعریف شده باشد. برای $t \in \mathbf{R}$ و $p \in \mathbf{R}^2$ قرار می‌دهیم $\varphi_t(p) = \alpha_p(t)$ که در آن α_p خم انتگرال بیشین $\mathbf{X}$ گذرنده از نقطهٔ p است

(الف) نشان دهید که برای هر t، φ_t یک تبدیل یک به یک و پوشا از $\mathbf{R}^2$ به روی خودش است. از نقطه نظر هندسی این تبدیل چکار می‌کند؟

(ب) نشان دهید که

$$\varphi_\circ = \text{همانی}$$
$$\varphi_{t_1 + t_2} = \varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} \quad ; \quad t_1, t_2 \in \mathbf{R}$$
$$\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1} \quad , \quad t \in \mathbf{R}$$

[در نتیجه $t \to \varphi_t$ یک همریختی از گروه جمعی اعداد حقیقی در گروه تبدیلات یک به یک صفحه است.]

۲-۱۱. تمرین ۲ - ۱۰ را در مورد میدانهای برداری زیر تکرار کنید

(الف) $\mathbf{X}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, -x_2, x_1)$

(ب) $\mathbf{X}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1, x_2)$

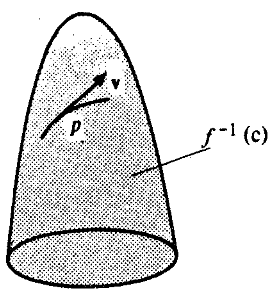
(پ) $\mathbf{X}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_2, x_1)$.

۲-۱۲. فرض کنید $\mathbf{X}$ یک میدان برداری هموار روی U باشد که در آن U یک زیر مجموعه باز $\mathbf{R}^{n+1}$ است. اگر $\varphi_t(p) = \alpha_p(t)$ که در آن α_p خم انتگرال بیشین $\mathbf{X}$ گذرنده از نقطهٔ p باشد، با استفاده از یکتایی خمهای انتگرال نشان دهید که

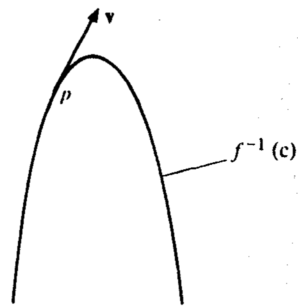
$\varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(p)) = \varphi_{t_1 + t_2}(p)$ و $\varphi_{-t}(p) = \varphi_t^{-1}(p)$ برای تمام t و t_1 و t_2 که برای آنها این عبارات تعریف شده باشند. [φ_t را **گروه ۱ - پارامتری موضعی نظیر به** $\mathbf{X}$ گویند.]

۳ـ فضای مماس

فرض کنید $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار باشد، که در آن $U \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ یک مجموعه باز است، فرض کنید $c \in \mathbf{R}$ به قسمی باشد که $f^{-1}(c)$ غیر تهی باشد و بالاخره $p \in f^{-1}(c)$ یک بردار در p را ***مماس بر مجموعهٔ تراز*** $f^{-1}(c)$ گوییم اگر یک بردار مماس بر یک خم پارامتری در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد که تصویرش در $f^{-1}(c)$ واقع است. (ر.ک. شکل ۳ ـ ۱)



ب: $n = ۲$



الف: $n = ۱$

شکل ۳ - ۱ بردارهای مماس بر مجموعه‌های تراز

● **لم**. ***گرادیان f در $p \in f^{-1}(c)$ عمود بر تمام بردارهای مماس بر $f^{-1}(c)$ در نقطهٔ p است.***

برهان. هر بردار مماس بر $f^{-1}(c)$ در نقطهٔ p به صورت $\dot{\alpha}(t_0)$ برای یک خم پارامتری $\alpha: I \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد با شرط آنکه $\alpha(t_0) = p$ و تصویر α در $f^{-1}(c)$ واقع است. ولی چونکه تصویر α در $f^{-1}(c)$

واقع است، لذا $f[\alpha(t)] = c$ برای تمام $t \in I$، و در نتیجه بر اساس قاعدهٔ زنجیری داریم

$$o = \frac{d}{dt}(fo\alpha)(t_\circ) = \nabla f[\alpha(t_\circ)].\dot{\alpha}(t_\circ) = \nabla f(p).\dot{\alpha}(t_\circ). \blacksquare$$

اگر $\nabla f(p) = \circ$ ، این لم چیزی ارائه نمی‌دهد. ولی اگر $\nabla f(p) \neq \circ$، این لم گویای این است که مجموعهٔ تمام بردارهای مماس بر $f^{-1}(c)$ در نقطهٔ p در زیر فضای برداری n- بعدی $[\nabla f(p)]^\perp$ از $\mathbf{R}_p^{n+1}$ متشکل از تمام بردارهای عمود بر $\nabla f(p)$ واقع است. یک نقطهٔ $p \in \mathbf{R}^{n+1}$ به قسمی که $\nabla f(p) \neq \circ$ را ***یک نقطهٔ عادی*** f گوییم.

● **قضیه.** ***فرض کنید U یک مجموعهٔ باز در $\mathbf{R}^{n+1}$ و $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$ هموار باشد. فرض کنید $p \in U$ یک نقطهٔ عادی f باشد، و $c = f(p)$. در این صورت مجموعهٔ تمام بردارهای مماس بر $f^{-1}(c)$ در نقطهٔ p برابر $[\nabla f(p)]^\perp$ می‌باشد.***

برهان. اینکه هر بردار مماس بر $f^{-1}(c)$ در نقطهٔ p در $[\nabla f(p)]^\perp$ واقع است در لم بالا ثابت شده است. در نتیجه کافی است نشان دهیم که اگر $\mathbf{v} = (p, v) \in [\nabla f(p)]^\perp$، آنگاه $\mathbf{v} = \dot{\alpha}(\circ)$ برای یک خم پارامتری α که تصویرش در $f^{-1}(c)$ واقع است. برای ساختن α میدان برداری $\mathbf{X}$ روی U را به صورت $\mathbf{X}(q) = (q, v)$ تعریف می‌کنیم. از $\mathbf{X}$ یک میدان برداری دیگر $\mathbf{Y}$ می‌سازیم که از کسر مؤلفهٔ $\mathbf{X}$ در امتداد ∇f از $\mathbf{X}$ حاصل می‌شود:

$$\mathbf{Y}(q) = \mathbf{X}(q) - \frac{\mathbf{X}(q).\nabla f(q)}{\|\nabla f(q)\|^2}\nabla f(q)$$

میدان برداری $\mathbf{Y}$ زیر مجموعه‌ای باز از U را که در آن $\nabla f \neq \circ$، به عنوان دامنه دارد. چون p یک نقطهٔ عادی f است، p در دامنهٔ $\mathbf{Y}$ است. علاوه بر این چون $\mathbf{X}(p) = \mathbf{V} \in [\nabla f(p)]^\perp$ ، بنابراین $\mathbf{Y}(p) = \mathbf{X}(p)$. در نتیجه یک میدان برداری هموار $\mathbf{Y}$ به دست آورده‌ایم به قسمی که $\mathbf{Y}(q) \perp \nabla f(p)$ برای تمام qهای متعلق به دامنه $\mathbf{Y}$، و $\mathbf{Y}(p) = \mathbf{V}$.

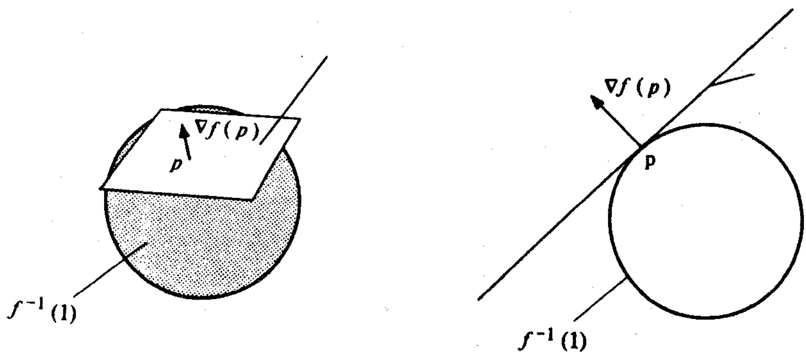
اکنون α را خم انتگرال $\mathbf{Y}$ از نقطهٔ p می‌گیریم. در این صورت $\alpha(\circ) = P$

$\dot{\alpha}(0) = \mathbf{Y}(\alpha(0) = \mathbf{Y}(p) = \mathbf{X}(p) = \mathbf{v}$ و

$$\frac{d}{dt} f(\alpha(t)) \underset{\text{قاعدهٔ زنجیری}}{\overset{\downarrow}{=}} \nabla f(\alpha(t)).\, \alpha(t) \underset{\text{چون } \alpha \text{ خم انتگرال } \mathbf{Y} \text{ است}}{\overset{\downarrow}{=}} \nabla f(\alpha(t).\, \mathbf{Y}(\alpha(t) \underset{\text{چون } \mathbf{Y} \perp \nabla f}{\overset{\downarrow}{=}} 0$$

برای تمام tهای در دامنه α، ثابت = $f(\alpha(t))$ چون $f(\alpha(0) = f(p) = c$، در نتیجه تصویر α در $f^{-1}(c)$ واقع است و این همان چیزی است که لازم بود نشان داده شود.■

بدین ترتیب دیدیم که در هر نقطهٔ عادی p بر روی یک مجموعهٔ تراز $f^{-1}(c)$ از یک تابع هموار یک **فضای مماس** خوش تعریف وجود دارد و متشکل از تمام بردارهای سرعت در نقطهٔ p از تمام خمهای پارامتری واقع در $f^{-1}(c)$ است که از نقطهٔ p می‌گذرد، و این فضای مماس دقیقاً همان $[\nabla f(p)]^{\perp}$ است. (ر.ک. شکل ۳ ـ ۲)



الف : n = ۱   ب : n = ۲

شکل ۳ـ۲: فضای مماس در یک نقطهٔ دلخواه از مجموعهٔ تراز $f^{-1}(c)$ برای:

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$$

تمرین

۳ـ۱. مجموعه‌های تراز $f^{-1}(-1)$، $f^{-1}(0)$ و $f^{-1}(1)$ را در مورد تابع

$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2$ برای $n = 1$ و ۲ معین کنید. در کدامین نقاط p از این

مجموعه‌های تراز فضاهای مماس برابر با $[\nabla f(p)]^{\perp}$ نیست؟

۳ـ۲. با مثال نشان دهید که:

(الف) مجموعهٔ بردارهای مماس در یک نقطهٔ p از یک مجموعهٔ تراز در حالت کلی یک زیر فضای برداری $\mathbf{R}_p^{n+1}$ نیست.

(ب) مجموعهٔ بردارهای مماس در یک نقطهٔ p بر یک مجموعهٔ تراز ممکن است تمام $\mathbf{R}_p^{n+1}$ باشد.

۳ـ۳. مجموعهٔ تراز $f^{-1}(0)$ و مقادیر $\nabla f(p)$ را در مورد میدان برداری ∇f برای $p \in f^{-1}(0)$ مشخص نمائید:

(الف) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ (ب) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 1$

(پ) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2$

۳ـ۴. فرض کنید $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$ تابع هموار باشد، که در آن $U \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ یک مجموعهٔ باز و $\alpha: I \longrightarrow U$ یک خم پارامتری باشد. نشان دهید که $f o\alpha$ ثابت است. (یعنی تصویر α در یک مجموعهٔ تراز f است) اگر و فقط اگر، α در همه جا بر گرادیان f عمود باشد (یعنی اگر و فقط اگر $\dot{\alpha}(t) \perp \nabla f(\alpha(t))$ به ازاء هر $t \in I$).

۳ـ۵. فرض کنید $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار و $\alpha: I \longrightarrow U$ خم انتگرالی از ∇f باشد.

(الف) نشان دهید که $\frac{d}{dt}(fo\alpha)(t) = \| \nabla f(\alpha(t)) \|^2$ به ازای هر $t \in I$.

(ب) نشان دهید که به ازای هر $t_\circ \in I$، تابع f در طول α در نقطهٔ $\alpha(t_\circ)$ سریعتر از هر خم دیگری که از نقطهٔ $\alpha(t_\circ)$ با تندی برابر می‌گذرد افزایش می‌یابد. (یعنی، نشان دهید که هر گاه $\beta : I \longrightarrow U$ به قسمی باشد که $\beta(s_\circ)=\alpha(t_\circ)$ برای یک $s_\circ \in I$ و $\| \dot{\alpha}(t_\circ) \| = \| \dot{\beta}(s_\circ) \|$، آنگاه $(d/dt)(fo\alpha)(t_o) \geq (d/dt)(f\circ\beta)(s_\circ)$).

٤ـ رویه‌ها

یک **رویه با بعد n یا یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$** یک زیر مجموعهٔ غیر تهی S از $\mathbf{R}^{n+1}$ به صورت $S = f^{-1}(c)$ می‌باشد که در آن U باز در $\mathbf{R}^{n+1}$ و $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$ تابع هموار با این خاصیت است که $\nabla f(p) \neq 0$ به ازای هر $p \in S$. یک ۱ـ رویه در $\mathbf{R}^2$ را یک **خم مسطح** نیز نامند. یک ۲ـ رویه در $\mathbf{R}^3$ را معمولاً یک **رویه** گویند. یک n ـ رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ را بویژه وقتی که $n > 2$ یک **فوق رویه** می‌نامند.

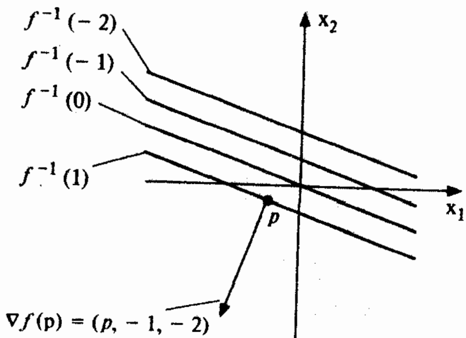
بنابر قضیهٔ فصل قبل، هر n ـ رویه S در هر نقطهٔ $p \in S$ یک **فضای مماس** دارد که یک زیر فضای برداری n ـ بعدی از فضای $\mathbf{R}^{n+1}_p$ است. این فضای مماس را به S_p نشان می‌دهیم. ذکر این نکته ضروری است که فضای مماس S_p فقط بستگی به مجموعهٔ S دارد و مستقل از تابع f می‌باشد که جهت تعریف S بکار برده شده است. در حقیقت، S_p به صورت مجموعهٔ تمام بردارهای در p می‌باشد. که از بردارهای سرعت آن خمهای پارامتری در $\mathbf{R}^{n+1}$ که تصاویرشان تماماً در S واقع است حاصل شده است. اگر f هر تابع هموار باشد به قسمی که $S = f^{-1}(c)$ برای یک $c \in \mathbf{R}$ و $\nabla f(p) \neq 0$ برای هر $p \in S$ (بنابر تعریف n ـ رویه، یک چنین تابعی باید وجود داشته باشد، در واقع از اینگونه توابع برای هر n ـ رویه S بسیار وجود دارند)، آنگاه S_p را می‌توان به عنوان $[\nabla f(p)]^{\perp}$ نیز بیان کرد.

مثال ۱. n ـ کرهٔ یکه $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ مجموعهٔ تراز $f^{-1}(c)$ می‌باشد که در آن $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$ (شکل ۳ ـ ۲). این یک n ـ رویه است چرا که $\nabla f(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{n+1}, 2x_1, \dots, 2x_{n+1})$ صفر نیست مگر آنکه $(x_1, \dots, x_{n+1}) = (0, \dots, 0)$، لذا $\nabla f(p) \neq 0$ برای $p \in f^{-1}(1)$. [هشدار! توجه داشته باشید برای

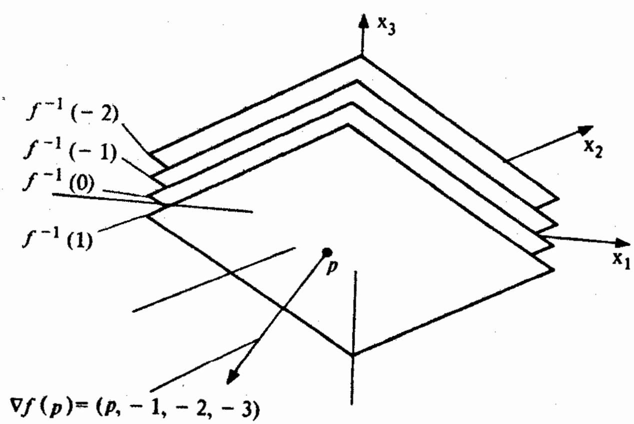
آنکه یک $(p, v) \in \mathbf{R}_p^{n+1}$ صفر باشد تنها لازم است که $v = 0$ در نتیجه $(x_1, \dots, x_{n+1}, 2x_1, \dots, 2x_{n+1}) = 0$ ایجاب می‌کند که $2x_1 = \dots = 2x_{n+1} = 0$ بنابراین $(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$.] وقتی که $n = 1$، n-کره‌یکه همان **دایره‌یکه** است.

مثال ۲. برای $0 \neq (a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ و $b \in \mathbf{R}$، n-صفحهٔ $a_1x_1 + \dots + a_{n+1}x_{n+1} = b$ مجموعهٔ تراز $f^{-1}(b)$ است که در آن $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = a_1x_1 + \dots + a_{n+1}x_{n+1}$، این یک n-رویه به ازای هر $b \in \mathbf{R}$ می‌باشد زیرا: $\nabla f(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{n+1}, a_1, \dots, a_{n+1})$ هرگز صفر نیست.

یک ۱-صفحه را معمولاً یک **خط** در $\mathbf{R}^2$ نامند، یک ۲-صفحه را معمولاً **یک صفحه** در $\mathbf{R}^3$



$n = 1$: (الف)



$n = 2$: (ب)

شکل ۴-۱: n- صفحه‌های موازی، $f^{-1}(b)$، که در آن $b = -2, -1, 0, 1$

$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - \dots - (n+1)x_{n+1}$.

گویند، و گاه برای $n > 2$ یک nـ صفحه را یک **فوق صفحه** در $\mathbf{R}^{n+1}$ نامند. دو مقدار مختلف b با مقدار یکسان $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ nـ صفحه‌های ***موازی*** را تعریف می‌کنند (ر.ک. شکل ۴ ـ ۱)

مثال ۳. فرض کنید $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار روی U باشد که در آن U باز در $\mathbf{R}^n$ است، نمودار f

$$\operatorname{graph}(f) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} : x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

در $\mathbf{R}^{n+1}$ یک ـ رویه است زیرا $\operatorname{graph}(f) = g^{-1}(0)$ که در آن

$$g(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_{n+1} - f(x_1, \ldots, x_n),$$

و $\nabla g(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_{n+1}, \frac{-\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{-\partial f}{\partial x_n}$ و $1)$ هرگز صفر نیست.

مثال ۴. فرض کنید S یک $(n-1)$ ـ رویه در $\mathbf{R}^n$ به صورت $S = f^{-1}(c)$ باشد که در آن $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$ (U باز در $\mathbf{R}^n$) به قسمی که به ازای هر $p \in f^{-1}(c)$، $\nabla f(p) \neq 0$. فرض کنید

$U_1 = U \times \mathbf{R} = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} : (x_1, \ldots, x_n) \in U\}$ و $g: U_1 \longrightarrow \mathbf{R}$ به صورت

$$g(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

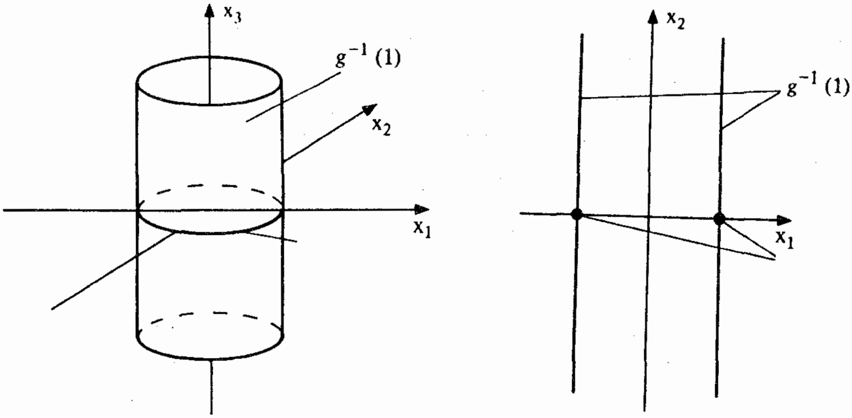
تعریف شده باشد. در این صورت $g^{-1}(c)$ یک n رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ است زیرا

$$\nabla g(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, x, \ldots, x_{n+1}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, 0)$$

و $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ با هم صفر نمی‌شوند که در آن $c = g(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f(x_1, \ldots, x_n)$، زیرا که $(x_1, \ldots, x_n) \in f^{-1}(c)$ داریم $\nabla f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ n ـ رویهٔ $g^{-1}(c)$ را یک ***استوانه*** روی S نامند (ر.ک. شکل ۴ ـ ۲)

مثال ۵. فرض کنید C خمی در $\mathbf{R}^2$ باشد که در بالای محور x_1ها قرار دارد. در نتیجه $C = f^{-1}(c)$ برای یک $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$ با شرط $\nabla f(p) \neq 0$ به ازای هر $p \in C$، و U در نیم صفحهٔ بالایی $x_2 > 0$ واقع است. $S = g^{-1}(c)$ تعریف می‌کنیم که در آن $g: U \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ به صورت

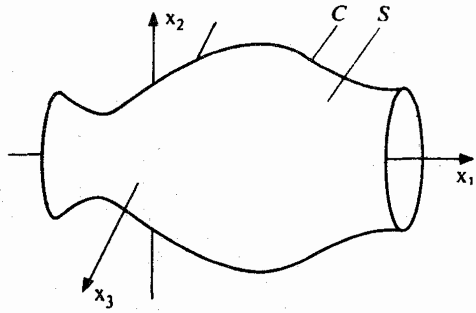
$$g(x_1, x_2, x_3)\, f(x_1, (x_2^2 + x_3^2)^{1/2})$$



(ب): $n = ۱$ (الف): $n = ۰$

شکل ۴ـ۲. استوانهٔ $g^{-1}(۱)$ روی nـکره: $g(x_1, \dots, x_{n+1})\ x_1^2 + \dots + x_n^2$

تعریف شده است. در این صورت S یک ۲ـ رویه است (تمرین ۴ ـ ۷). هر نقطهٔ $p = (a, b) \in c$ دایره‌ای از نقاط S را تولید می‌کند، یعنی دایره در صفحهٔ $x_1 = a$ شامل آن دسته از نقاط $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ می‌باشد که $x_2^2 + x_3^2 = b$ و $x_1 = a$. S را رویهٔ دوار حاصل از دوران خم C در طول محور xها گویند. (ر.ک. شکل ۴ ـ ۳)



شکل ۴ـ۳ رویه دوار S حاصل از دوران خم C در حول محور x_1ها

● **قضیه.** فرض کنید S یک nـ رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد، $S = f^{-1}(c)$ که در آن $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$ به

قسمی که است $\nabla f(q) \neq 0$ ***برای*** $q \in S$***. فرض کنید*** $g: U \longrightarrow \mathbf{R}$ ***یک تابع هموار و*** $p \in S$ ***یک نقطهٔ فرین*** g ***روی*** S ***باشد، یعنی یا برای تمام*** $q \in S$ ، $g(q) \leq g(p)$ ***یا برای تمام*** $q \in S$، $g(q) \geq g(p)$.

در این صورت عددی حقیقی مانند λ ***وجود دارد به قسمی که*** $\nabla g(p) = \lambda \nabla f(p)$ ***(عدد*** λ ***را مضرب لاگرانژ نامند).***

برهان. فضای مماس بر S در نقطهٔ p عبارت است از $S_p = [\nabla f(p)]^{\perp}$، بنابراین $S_p^{\perp}$ زیر فضای ۱-بعدی $\mathbf{R}_p^{n+1}$ تولید شده توسط $\nabla f(p)$ است. از آن نتیجه می‌شود که $\nabla g(p) = \lambda \nabla f(p)$ برای یک $\lambda \in \mathbf{R}$ اگر (و فقط اگر) $\nabla g(p) \in S_p^{\perp}$. یعنی اگر (و فقط اگر) به ازای تمام $\mathbf{V} \in S_p$، $g\nabla(p). \mathbf{V} = 0$.

لیکن هر $\mathbf{V} \in S_p$ به صورت $\mathbf{V} = \dot{\alpha}(t_0)$ برای یک خم پارامتری $\alpha: I \longrightarrow S$ با شرط $t_0 \in I$ و $\alpha(t_0) = p$ می‌باشد. چون $p = \alpha(t_0)$ یک نقطهٔ فرین g روی S است لذا t_0 یک نقطهٔ فرین $go\alpha$ روی I می‌باشد بنابراین

$$0 = (go\alpha)'(t_0) = \nabla g(\alpha(t_0)) . \dot{\alpha}(t_0) = \nabla g(p). \mathbf{v}$$

به ازای هر $\mathbf{V} \in S_p$ و در نتیجه $\nabla g(p) = \lambda \nabla f(p)$ برای یک λ و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.■

تذکر. اگر S فشرده (بسته و کراندار)[1] باشد، آنگاه هر تابع هموار $g: U \longrightarrow \mathbf{R}$ ماکزیمم و مینیمم خود را در S می‌گیرد. قضیهٔ بالا را می‌توان جهت موضع یابی نامزدهایی برای این نقاط فرین بکار برد. اگر S فشرده نباشد، ممکن است نقطهٔ فرین وجود نداشته باشد.

مثال. فرض کنید S دایره‌یکهٔ $x_1^2 + x_2^2 = 1$ و تابع $g: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ را به صورت $g(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1 x_2 + cx_2^2$ تعریف می‌کنیم که در آن $c \in \mathbf{R}$ و b و a (ر.ک. شکل ۴ - ۴).
آنگاه می‌توان $S = f^{-1}(1)$ را در نظر گرفت که در آن $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$،

$$\nabla f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 2x_1, 2x_2)$$

$$\nabla g(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 2ax_1 + 2bx_2, 2bx_1 + 2cx_2)$$

بنابراین $\nabla g(p) = \lambda \nabla f(p)$ برای $p = (x_1, x_2) \in S$ اگر و فقط اگر

---

۱ - S بسته است اگر $\mathbf{R}^{n+1} - S$ باز باشد، S کراندار است اگر $M \in \mathbf{R}$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $p \in S$، $\| p \| < M$.

$$\begin{cases} 2ax_1 + 2bx_2 = 2\lambda x_1 \\ 2bx_1 + 2cx_2 = 2\lambda x_2 \end{cases}$$

یا

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

در نتیجه نقاط فرین g در S بردارهای ویژه ماتریس متقارن $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ توجه داشته باشید که اگر:

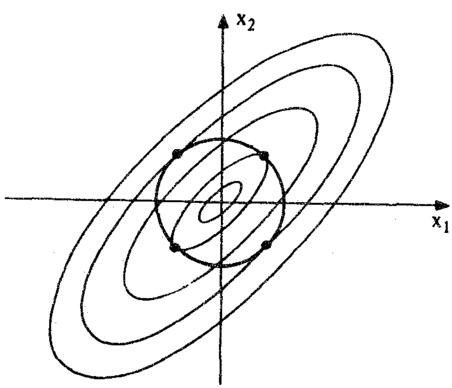
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

یک برداری ویژه $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ باشد، آنگاه

$$ax_1^2 + 2\,bx_1\,x_2 + cx_2^2 = (x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1\,, x_2)\,\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\,(x_1^2 + x_2^2) = \lambda\,.$$

بنابراین مقدار ویژه λ دقیقاً $g(p)$ می‌باشد، که در آن $p = (x_1\,, x_2)$. چون یک ماتریس 2×2 دارای دو مقدار ویژه است، این مقادیر ویژه مقادیر ماکزیمم و مینیمم g روی مجموعهٔ فشردهٔ S است.



شکل ۴-۴ : خمهای تراز تابع $g(x_1\,, x_2) = ax_1^2 + 2\,bx_1x_2 + cx_2^2$ $(ac - b^2 > 0)$ چهار نقطه که در آنها خمها مماس بر دایره‌یکه S می‌باشند نقاط فرین g روی S هستند.

تمرین

۴-۱. برای چه مقادیری از c مجموعهٔ تراز یک n - رویه است؛ که در آن:

(الف) $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$

(ب) $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2$

(پ) $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1 x_2 \dots x_{n+1} + 1$

۴-۲. نشان دهید که استوانهٔ $x_1^2 + x_2^2 = 1$ در $\mathbf{R}^3$ را می‌توان به صورت مجموعهٔ تراز هر یک از توابع زیر گرفت:

(الف) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$

(ب) $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2$

(پ) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + \sin(x_1^2 + x_2^2)$.

۴-۳. نشان دهید که هرگاه یک n - رویه S هم به صورت $f^{-1}(c)$ و هم به صورت $g^{-1}(d)$ نمایش داده شود که در آن $\nabla f(p) \neq 0$ و $\nabla g(p) \neq 0$ برای تمام $p \in S$، آنگاه به ازای هر $p \in S$، $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$ برای یک عدد حقیقی $\lambda \neq 0$

۴-۴. نمایش نمودار تابع $f: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ که بصورت $f(x_1, x_2) = x_2^3 - 3x_1^2 x_2$ داده شده است را رسم کنید. [**راهنمایی**: در آغاز مجموعهٔ تراز $f^{-1}(0)$ را بیابید. درکدام ناحیه از صفحه $f>0$؟ درکجا $f<0$؟]. ۲-رویه نمودار (f) را یک **زین میمونی** نامند. (چرا؟)

۴-۵. استوانه‌های $f^{-1}(0)$ را مشخص کنید که در آن:

(الف) $f(x_1, x_2) = x_1$

(ب) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2^2$

(پ) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2/4 + x_2^2/9 - 1$.

۴-۶. استوانهٔ روی نمودار $f(x) = \sin x$ را مشخص کنید.

۴-۷. یک رویه دوار (مثال ۵) یک ۲- رویه است.

۴-۸. رویه دوار حاصل از دوران خم C در حول محور x_1 ها که در آن خم C به صورت زیر داده شده است مشخص کنید:

(الف) $x_2 = 1$ (استوانه)

(ب) $-x_1^2 + x_2^2 = 1$ ، $x_2 > 0$ (هذلولوی یک پارچه)

(پ) $x_1^2 + (x_2 - 2)^2 = 1.$ (چنبره)

۴-۹. نشان دهید که مجموعه S متشکل از تمام بردارهای یکه در تمام نقاط $\mathbf{R}^2$ یک ۲ـ رویه در $\mathbf{R}^4$ می‌باشد. (**راهنمایی:** $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S$ اگر و فقط اگر $x_3^2 + x_4^2 = 1$).

۴-۱۰. فرض کنید $S = f^{-1}(c)$ یک ۲ـ رویه در $\mathbf{R}^3$ باشد که در نیم فضای $x_3 > 0$ واقع است. یک تابع $g: U \longrightarrow \mathbf{R}$ (U باز در $\mathbf{R}^4$) را بیابید به قسمی که $g^{-1}(c)$، ۳ـ رویهٔ حاصل از دوران ۲ـ رویهٔ S در حول صفحهٔ (x_1, x_2) باشد.

۴-۱۱. فرض کنید $c \in \mathbf{R}$ و b و a به قسمی باشند که $ac - b^2 > 0$. نشان دهید که مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ روی بیضی $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = 1$ به صورت $1/\lambda_1$ و $1/\lambda_2$ می‌باشند که در آن λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه ماتریس $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ هستند.

۴-۱۲. نشان دهید که مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $g(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j$ روی n- کرهٔ یکهٔ $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ مقادیر ویژه ماتریس متقارن $n \times n$ (a_{ij}) می‌باشند.

۴-۱۳. نشان دهید که هرگاه S یک n- رویهٔ در $\mathbf{R}^{n+1}$، $g: R^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار، و $p \in S$ یک نقطه فرین g روی S باشد، آنگاه فضای مماس بر مجموعهٔ تراز g که نقطهٔ p می‌گذرد برابر با S_p یعنی فضای مماس بر S در نقطهٔ p است به شرط آنکه $\nabla g(p) \neq 0$ (ر.ک شکل ۴-۴).

۴-۱۴. فرض کنید S یک n - رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد و $p_\circ \in \mathbf{R}^{n+1}$، $p_\circ \notin S$. نشان دهید که کوتاهترین قطعه خط از $p_\circ$ تا S (اگر وجود داشته باشد) عمود بر S است، یعنی نشان دهید که اگر $p \in S$ به قسمی باشد که $|p_\circ - p|^۲ \leq |p_\circ - q|^۲$ برای هر $q \in S$، آنگاه $(p, p_\circ - p) \perp S_p$. **[راهنمایی:** قضیه مضرب لاگرانژ را به کار برید]. نشان دهید که نتیجهٔ مشابه‌ای برای بزرگترین قطعه خط از $p_\circ$ تا S (در صورت وجود داشتن) نیز برقرار است.

۴-۱۵. $\mathbf{R}^۴$ را همچنین می‌توان به صورت مجموعهٔ تمام ماتریس‌های ۲ × ۲ با درایه‌های حقیقی که از یکی کردن ۴ تایی $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴)$ با ماتریس

$$\begin{pmatrix} x_۱ & x_۲ \\ x_۳ & x_۴ \end{pmatrix}$$

به دست می‌آید در نظر گرفت. زیر مجموعه‌ای که شامل آن ماتریس‌ها با دترمینان برابر ۱ است تشکیل یک گروه تحت ضرب ماتریس‌ها می‌دهد که به گروه خطی خاص SL(۲) موسوم است. نشان دهید که SL(۲) یک ۳ـ رویه در $\mathbf{R}^۴$ است.

۴-۱۶. (الف) نشان دهید که فضای مماس $SL(۲)_p$ بر SL(۲) (تمرین ۴-۱۵) در نقطهٔ $p = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ را می‌توان با مجموعهٔ تمام ماتریس‌های ۲×۲ با اثر صفر یکی گرفت، یعنی

$$SL(۲)_p = \left\{ \left(p, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) : a + d = ۰ \right\}$$

[راهنمایی: در آغاز نشان دهید که هرگاه

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} x_۱(t) & x_۲(t) \\ x_۳(t) & x_۴(t) \end{pmatrix}$$

یک خم پارامتری در SL(۲) با شرط $\alpha(t_\circ) = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ باشد، آنگاه

$$(dx_۱/dt)(t_\circ) + (dx_۴/dt)(t_\circ) = ۰$$

در این صورت یک استدلال بُعدی به کار برید.]

(ب) فضای مماس بر $SL(۲)$ در نقطهٔ $q = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ چیست؟

۱۷-۴. (الف) نشان دهید که مجموعهٔ $SL(۳)$ متشکل از تمام ماتریس‌های حقیقی ۳×۳ با دترمینان ۱ یک ۸-رویه در $\mathbf{R}^۹$ است.

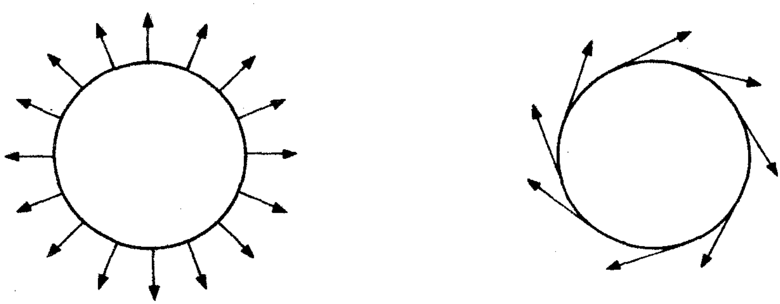
(ب) فضای مماس بر $SL(۳)$ در نقطهٔ

$$p = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

چیست؟

۵ـ میدانهای برداری روی رویه‌ها

یک ***میدان برداری X روی یک n ـ رویهٔ*** $S \subseteq R^{n+1}$ تابعی است که به هر نقطهٔ p در S یک بردار $\mathbf{X}(p) \in \mathbf{R}^{n+1}_p$ را در نقطهٔ p نظیر کند. اگر $\mathbf{X}(p)$ بر S مماس باشد (یعنی $\mathbf{X}(p) \in S_p$) به ازای هر $p \in S$ ؛ $\mathbf{X}$ را یک ***میدان برداری مماس بر S*** گویند. اگر $\mathbf{X}(p)$ عمود بر S باشد (یعنی $\mathbf{X}(p) \in S_p^{\perp}$) به ازای هر $p \in S$ ، $\mathbf{X}$ را یک ***میدان برداری قائم بر S*** گویند. (ر.ک. شکل ۵-۱)



شکل ۵-۱ : میدانهای بردای روی ۱ـکره : (الف) یک میدان برداری مماس؛ (ب) یک میدان‌برداری قائم

مثل همیشه، ما منحصراً با توابع و بردارهای ***هموار*** کار می‌کنیم. یک تابع $g: S \longrightarrow \mathbf{R}^k$ که در آن S یک n ـ رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ است هموار گویند اگر g تحدید به S از یک تابع هموار $\tilde{g}: V \longrightarrow \mathbf{R}^k$ مفروض روی یک مجموعهٔ باز V در $\mathbf{R}^{n+1}$ شامل S باشد. به طریق مشابه، یک میدان‌برداری $\mathbf{X}$ روی S را هموار گوییم اگر $\mathbf{X}$ تحدید به S از یک میدان‌برداری هموار روی یک مجموعهٔ بازشامل S باشد. در نتیجه، $\mathbf{X}$ هموار است اگر و فقط اگر $X: S \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ هموار باشد، که در آن

$\mathbf{X}(p) = (p, X(p))$ برای تمام $p \in S$.

قضیه زیر، قضیهٔ فصل دوم را در مورد وجود و یکتایی خمهای انتگرال به n ـ رویه‌ها گسترش می‌دهد.

● قضیهٔ ۱. ***فرض کنید S یک n - رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$، $\mathbf{X}$ یک میدان‌برداری مماس هموار بر S باشد و $p \in S$. آنگاه بازهٔ بازی مانند I شامل ۰ و یک خم پارامتری $\alpha: I \longrightarrow S$ وجود دارد به قسمی که***

(یک) $\alpha(0) = p$

(دو) $\dot{\alpha}(t) = \mathbf{X}(\alpha(t))$ ***برای تمام*** $t \in I$

(سه) اگر $\beta: \tilde{I} \longrightarrow S$ ***هر خم پارامتری دیگر در S باشد که در شرایط (یک) و (دو) صدق کند آنگاه*** $\tilde{I} \subset I$ ***و*** $\beta(t) = \alpha(t)$ ***برای تمام*** $t \in \tilde{I}$.

یک خم پارامتری $\alpha: I \longrightarrow S$ که در شرایط (دو) صدق نماید **یک *خم انتگرال میدان برداری مماس*** $\mathbf{X}$ نامیده می‌شود. خم یکتای α که در شرایط (یک) تا (سه) صدق کند به ***خم انتگرال بیشین*** $\mathbf{X}$ که از نقطهٔ $p \in S$ می‌گذرد موسوم است.

برهان. چون $\mathbf{X}$ هموار است، مجموعهٔ بازی مانند V شامل S و یک میدان‌برداری هموار $\tilde{\mathbf{X}}$ روی V وجود دارد به قسمی که $\tilde{\mathbf{X}}(q) = \mathbf{X}(q)$ برای تمام $q \in S$. فرض کنید $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$ و $c \in \mathbf{R}$ به قسمی باشد که $S = f^{-1}(c)$ و برای تمام $q \in S$، $\nabla f(q) \neq 0$. فرض کنید

$$W = \{q \in U \cap V : \nabla f(q) \neq 0\}$$

در این صورت W یک مجموعهٔ باز شامل S است و هم $\tilde{\mathbf{X}}$ و هم f روی W تعریف شده‌اند. فرض کنید $\mathbf{Y}$ میدان‌برداری روی W که در هر نقطهٔ مماس بر مجموعه‌های تراز f است و تعریف شده به صورت

$$\mathbf{Y}(q) = \tilde{\mathbf{X}}(q) - (\tilde{\mathbf{X}}(q) . \nabla f(q) / \|\nabla f(q)\|^2) \nabla f(q)$$

باشد. توجه داشته باشید که $\mathbf{Y}(q) = \mathbf{X}(q)$ برای تمام $q \in S$، فرض کنید $\alpha: I \longrightarrow W$ خم انتگرال بیشین $\mathbf{Y}$ گذرنده از نقطهٔ p باشد. آنگاه α در واقع I را در S می‌نگارد، چرا که

$$(f\circ \alpha)'(t) = \nabla f(\alpha(t)) \,.\, \dot{\alpha}(t) = \nabla f(\alpha(t)) \,.\, \mathbf{Y}(\alpha(t)) = 0$$

و $f\circ\alpha(0) = f(p) = c$ ؛ بنابراین $f\circ\alpha(t) = c$ برای تمام $t \in I$. شرایط (یک) و (دو) بوضوح صادق‌اند، و شرط (سه) نیز برقرار است زیرا هر خم $\beta : \tilde{I} \longrightarrow S$ که در شرایط (یک) و (دو) صدق نماید نیز یک خم انتگرال میدان‌برداری $\mathbf{Y}$ روی W است، بنابراین می‌توان قضیهٔ فصل ۲ را بکار برد.□

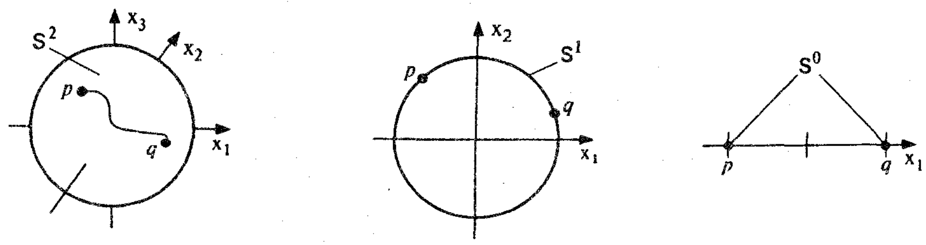
● **نتیجه.** ***فرض کنید*** $S = f^{-1}(c)$ ***یک*** n - ***رویه در*** $\mathbf{R}^{n+1}$ ***باشد، که در آن*** $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$ ***به قسمی است که*** $\nabla f(q) \neq 0$ ***برای هر*** $q\in S$ ***و فرض کنید*** $\mathbf{X}$ ***یک میدان‌برداری هموار روی*** U ***باشد که تحدیدش به*** S ***یک میدان‌برداری مماس بر*** S ***باشد. اگر*** $\alpha : I \longrightarrow U$ ***یک خم انتگرال*** $\mathbf{X}$ ***باشد به قسمی که*** $\alpha(t_0) \in S$ ***برای یک*** $t_0 \in I$ ***، آنگاه*** $\alpha(t) \in S$ ***برای هر*** $t \in I$.

برهان. فرض کنید $\alpha(t) \notin S$ برای یک $t \in I$ ، $t > t_0$. بزرگترین کران پایین مجموعهٔ

$$\{t \in I : t > t_0 \,,\, \alpha(t) \notin S\}$$

را t_1 می‌گیریم. آنگاه $f(\alpha(t)) = c$ برای $t_0 \le t < t_1$ ، بنابراین، براساس پیوستگی $f(\alpha(t_1)) = c$ ، یعنی $\alpha(t_1) \in S$. فرض کنید $\beta : \tilde{I} \longrightarrow S$ یک خم انتگرال تحدید $\mathbf{X}$ به S گذرنده از نقطهٔ $\alpha(t_1)$ باشد. در این صورت β یک خم انتگرال $\mathbf{X}$ است که به ازای $t = 0$ از $\alpha(t_1)$ می‌گذرد، همانطور که خم $\tilde{\alpha}$ تعریف شده به صورت $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t + t_1)$ این کار را انجام می‌دهد. بنابر یکتایی خمهای انتگرال $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t - t_1) = \beta(t - t_1) \in S$ برای تمام t هایی که $t - t_1$ در دامنهٔ مشترک $\tilde{\alpha}$ و β است. ولی این تناقض با این مطلب است که برای مقادیر t به دلخواه نزدیک به t_1 ، $\alpha(t) \notin S$. بنابراین برای تمام $t \in I$ با شرط $t > t_0$ داریم $\alpha(t) \in S$. اثبات در مورد $t < t_0$ مشابه است.□

یک زیر مجموعهٔ $S \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ را **همبند** گویند هرگاه به ازای هر جفت نقطهٔ p و q در S یک نگاشت پیوسته از یک بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ به S مانند $\alpha: [a , b] \longrightarrow S$ وجود داشته باشد به قسمی که $\alpha(a) = p$ و $\alpha(b) = q$. در نتیجه S همبند است اگر هر جفت نقاط در S را بتوان توسط یک خم پیوسته و نه الزاماً هموار که تماماً در S واقع است بهم متصل کرد. توجه داشته باشید که برای مثال n -کره (شکل ۵-۲) همبند است اگر و فقط اگر $n \ge 1$ (تمرین ۵-۱).



(الف) : $n = 0$ (ب) : $n = 1$ (پ) $n = 2$

شکل ۵-۲ : n ـ کره $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ همبند است اگر و فقط اگر $n \geq 1$

در این کتاب ما تقریباً منحصراً با n ـ رویه‌های همبند سروکار داریم. همچنین همانطور که در فصل ۱۵ خواهیم دید (تمرین ۱۵-۱۳ را ملاحظه کنید)، برای هر n - رویه S مفروض و $p \in S$، زیرمجموعهٔ S متشکل از تمام نقاط S که توسط یک خم پیوسته در S به p وصل نمود خود یک n - رویه است که همبند می‌باشد بنابراین می‌توان S را با مطالعهٔ جداگانهٔ هر یک از این "مؤلفه‌های همبندش" مورد بررسی قرار داد.

● **قضیهٔ ۲.** ***فرض کنید*** $S \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ **یک** n **- رویهٔ همبند در** $\mathbf{R}^{n+1}$ **رویهٔ همبند در** $\mathbf{R}^{n+1}$ **باشد.** ***آنگاه روی*** S ***دقیقاً دو میدان برداری قائم یکهٔ هموار*** N_1 **و** N_2 ***وجود دارند و*** $N_2(p) = -N_1(p)$ ***برای تمام*** $p \in S$.

برهان. فرض کنید $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$ و $c \in \mathbf{R}$ به قسمی باشد که $S = f^{-1}(c)$ و $\nabla f(p) = 0$ برای تمام $p \in S$. در این صورت میدان‌برداری N_1 روی S که به صورت

$$N_1(p) = \frac{\nabla f(p)}{\| \nabla f(p) \|} \quad , \quad p \in S$$

تعریف شده است بوضوح خواص لازم را داراست. میدان‌برداری N_2 تعریف شده به صورت $N_2(p) = -N_1(p)$ برای هر $p \in S$ نیز این چنین است. برای نشان دادن اینکه تنها همین دو میدان‌برداری وجود دارد، فرض کنید N_3 میدان‌برداری دیگری باشد. در این صورت، به ازای هر

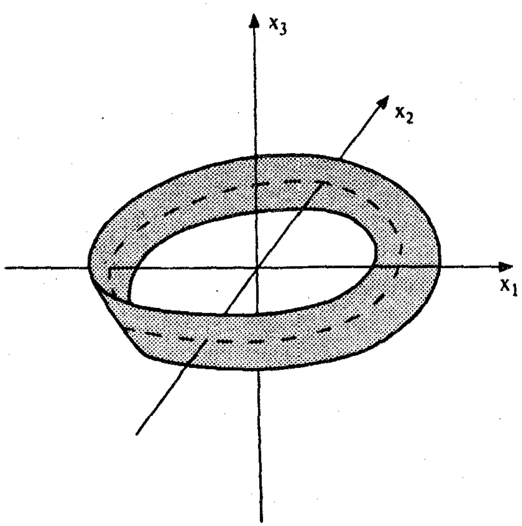
$p\in S$ ، $\mathbf{N}_۲(p)$ باید مضربی از $\mathbf{N}_۱(p)$ باشد چون هر دو در زیر فضای ۱- بعدی $S_p^{\perp} \subseteq \mathbf{R}^{n+۱}$ قرار دارند. در نتیجه

$$\mathbf{N}_۲(p) = g(p)\,\mathbf{N}_۱(p)$$

که در آن $g : S \longrightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار روی S است. (برای $p\in S$ ، $g(p) = \mathbf{N}_۲(p) \cdot \mathbf{N}_۱(p)$). چون $\mathbf{N}_۱(p)$ و $\mathbf{N}_۲(p)$ هر دو بردارهای یکه هستند $g(p) = \pm ۱$ به ازای هر $p\in S$. بالاخره چون g هموار و S همبند است، g باید روی S ثابت باشد (ر.ک. تمرین ۵-۲). لذا یا $\mathbf{N}_۳ = \mathbf{N}_۱$ و یا $\mathbf{N}_۳ = \mathbf{N}_۲$. □

یک میدان‌برداری قائم یکهٔ هموار روی یک n - رویهٔ S در $\mathbf{R}^{n+۱}$ را **یک سو** روی S نامند. برطبق قضیه‌ای که هم اکنون ثابت شد، هر n - رویهٔ همبند در $\mathbf{R}^{n+۱}$ دقیقاً دو سو دارد. یک n - رویه به همراه یک انتخاب، از سو را یک ***n - رویهٔ سودار*** نامند.

تذکر. زیر مجموعه‌هایی از $\mathbf{R}^{n+۱}$ وجود دارند که اغلب مردم معتقدند که باید یک n - رویه باشند ولی روی آنها هیچ سویی وجود ندارد. یک مثال نوار موبیوس B است. رویه‌اش در $\mathbf{R}^۳$ از چرخاندن یکی از دو سر یک نوار کاغذی مستطیل شکل به اندازه °۱۸۰ و سپس چسباندن دو سر آن به یکدیگر بدست می‌آید (ر.ک. شکل ۵-۳). اینکه هیچ میدان برداری قائم یکهٔ هموار روی B وجود ندارد را می‌توان بدین ترتیب ملاحظه



شکل ۵-۳ : نوار موبیوس

کرد که یک بردار قائم یکه در یک نقطهٔ دایره مرکزی انتخاب نمود و کوشش کرد که به طور پیوسته به یک میدان‌برداری قائم یکه در طول این دایره گسترش داد. بعد از یکبار پیمودن این دایره بردار قائم با جهت مخالف به نقطهٔ مذکور می‌رسد! چون هیچ میدان برداری قائم یکهٔ هموار روی B وجود ندارد، B را نمی‌توان به صورت یک مجموعهٔ تراز $f^{-1}(c)$ یک تابع هموار $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$ با شرط $\nabla f(p) \neq 0$ برای تمام $p \in S$ نوشت؛ و بنابراین B یک ۲ـ رویه طبق تعریف ما نیست. B مثالی از یک "۲ـ رویهٔ سوناپذیر" است. تا فصل ۱۴ ما تنها n - رویه‌های "سوپذیر" در $\mathbf{R}^{n+1}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

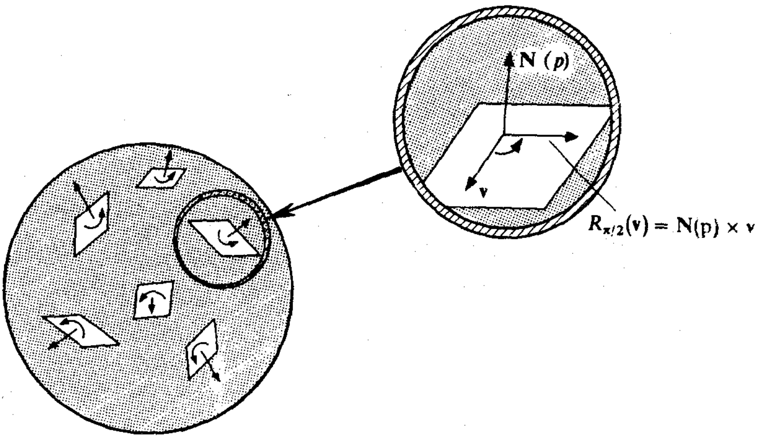
یک بردار که در $\mathbf{R}_p^{n+1}$ ($p \in \mathbf{R}^{n+1}$) را یک **جهت** در p گویند. در نتیجه یک سو روی یک n - رویهٔ S در $\mathbf{R}^{n+1}$ بنا به تعریف انتخابی هموار از جهت قائم در هر نقطهٔ S است.

رویک یک خم مسطح، یک سو را می‌توان برای تعریف یک جهت مماس در هر نقطهٔ هم بکار برد. **جهت مماس مثبت** در نقطهٔ p خم مسطح سودار C جهتی است که از دوران جهت قائم سو در p به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ ــ به دست می‌آید، که در آن جهت دوران مثبت خلاف عقربه‌های ساعت می‌باشد (ر.ک. شکل ۵-۴).

(ب) (الف)

شکل ۵-۴ سو روی یک خم مسطح : (الف)) جهت قائم انتخاب شده در هر نقطهٔ معین (ب) انتخابی از جهت مماس در هر نقطه.

روی یک ۲ـ رویه در $\mathbf{R}^3$، یک سو را می‌توان برای تعریف یک جهت دوران در فضای مماس در هر نقطهٔ رویه به کار برد. برای $\theta \in \mathbf{R}$ مفروض، θ - **دوران مثبت** در نقطهٔ p یک ۲ـ رویهٔ سودار S تبدیل خطی $R_\theta : S_p \longrightarrow S_p$ است که به صورت $R_\theta(\mathbf{v}) = \cos\theta\ \mathbf{v} + \sin\theta\ \mathbf{N}(p) \times \mathbf{v}$ تعریف شده است و در آن $\mathbf{N}(p)$ جهت سوی قائم در p است. R_θ معمولاً به صورت "دوران راستگرد در حول $\mathbf{N}(p)$ به اندازهٔ θ" نامیده می‌شود (ر.ک. شکل ۵-۵).



شکل ۵-۵ سو در ۲ـ کره: در هر نقطهٔ جهت قائم انتخاب شده یک جهت دوران مثبت در فضای مماس را مشخص می‌کند. این شکل ماهواره‌ای یک دید گسترده‌ای ازیک فضای مماس است.

روی یک ۳ـ رویه در $\mathbf{R}^4$، یک سو را می‌توان برای تعریف یک جهت "راستگرد" در فضای مماس در هر نقطهٔ رویه بکار برد. برای یک ۳ـ رویه سودار مفروض S و یک نقطهٔ $p \in S$، یک پایهٔ متعامدیکه جهتدار $\{e_1, e_2, e_3\}$ برای فضای مماس S_p به S در نقطهٔ p را ***راستگرد*** گویند اگر دترمینان

$$\det \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ N(p) \end{pmatrix}$$

مثبت باشد که در آن $N(p) = (p, N(p))$ جهت قایم سو در p می‌باشد و $\mathbf{e}_i = (p, e_i)$ برای $i \in \{1,2,3\}$. یک پایه را **چپگرد** گویند اگر دترمینان منفی باشد.

روی یک n ـ رویهٔ در $\mathbf{R}^{n+1}$ (n دلخواه)، یک سو را می‌توان برای افراز دسته تمام پایه‌های جهتدار در فضای مماس به دو زیر مجموعه بکار برد، یکی آن دسته که باسو سازگارند و دیگر آن دسته‌ای که باسوناسازگارند. یک پایهٔ جهت‌دار $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ (که الزاماً متعامدیکه نیست) در فضای مماس S_p در نقطهٔ p از n ـ رویهٔ سودار S را ***سازگار*** با سوی N روی S گویند اگر دترمینان

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ N(p) \end{pmatrix}$$

مثبت باشد. پایه را **ناسازگار** با $\mathbf{N}$ گویند اگر دترمینان منفی باشد. در اینجا مانند معمول

$$\mathbf{v}_i = (p, v_i) \quad \text{و} \quad \mathbf{N}(p) = (p, N(p))$$

تمرین

۵-۱. نشان دهید که n - کرهٔ $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ برای $n \geq 1$ همبند است.

۵-۲. اگر S یک رویهٔ همبند در $\mathbf{R}^{n+1}$ و $g: S \longrightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار باشد که تنها مقادیر ۱+ و ۱- را اختیار می‌کند، در این صورت نشان دهید که g ثابت است. [**راهنمایی**: فرض کنید $p \in S$. برای $q \in S$ خم $\alpha: [a, b] \longrightarrow S$ پیوسته را در نظر بگیرید به قسمی که $\alpha(a) = p$ و $\alpha(b) = q$. سپس قضیه مقدار بینی را در مورد ترکیب $g o \alpha$ به کار برید.]

۵-۳. با ذکر مثالی نشان دهید که اگر S همبند نباشد آنگاه قضیه ۲ این بخش درست نیست.

۵-۴. نشان دهید که دوسو روی n - کرهٔ $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2$ به شعاع $r > 0$ به صورت $N_1(p) = (p, p/r)$ و $N_2(p) = (p, -p/r)$ داده شده‌اند.

۵-۵. $\mathbf{R}^n$ را می‌توان به عنوان n - رویه x_{n+1} در $\mathbf{R}^{n+1}$ در نظر گرفت. فرض کنید $\mathbf{N}$ سوی روی $\mathbf{R}^n$ در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد که به صورت $\mathbf{N}(p) = (p, 0, 0, \dots, 1)$ به ازای هر $p \in \mathbf{R}^n$ تعریف شده باشد. (این $\mathbf{N}$ را **سوی طبیعی** روی $\mathbf{R}^n$ نامند.) نشان دهید که برای این سوی مفروض به ازای هر n، (الف) جهت مماس مثبت در $p \in \mathbf{R}^1$ جهت $(p, 1, 0)$ است.

(ب) θ - دوران مثبت در $\mathbf{R}_p^2$ برای $p \in \mathbf{R}^2$ دوران به اندازه زاویهٔ θ در خلاف عقربه‌های ساعت است و (پ) پایه متعامدیکه جهت‌دار $\{(p,1,0,0),(p,0,1,0),(p,0,0,1)\}$ برای $\mathbf{R}_p^3$، $p \in \mathbf{R}^3$ راستگرد است.

۵-۶. فرض کنید C یک خم مسطح سودار و $\mathbf{v}$ یک بردار مماس غیر صفر بر c در نقطهٔ $p\in C$ باشد. نشان دهید که پایهٔ $\{\mathbf{v}\}$ برای C_p سازگار با سوی روی C است اگر و فقط اگر جهت مماس مثبت در p برابر با $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ باشد. [**راهنمایی**: فرض کنید θ نشانگر اندازهٔ زاویه از $(p,1,0)$ در جهت سوی $\mathbf{N}(p)$ باشد، بنابراین $\mathbf{N}(p) = (p\,,\cos\theta\,,\sin\theta)$. بردار $\mathbf{v}$ و جهت مماس مثبت در نقطهٔ p را برحسب θ پیدا کنید].

۵-۷. به خاطر دارید که *حاصلضرب برداری* $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ دو بردار $\mathbf{v} = (p,v_1,v_2,v_3)$ و $\mathbf{w} = (p,w_1,w_2,w_3)$ در $\mathbf{R}^3_p$ (برای $p\in\mathbf{R}^3$) به صورت زیر است

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = (p_1\,, v_2w_3 - v_3w_2\,, v_3w_1 - v_1w_3\,, v_1w_2 - v_2w_1\,)\,.$$

(الف) نشان دهید که $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ هم بر $\mathbf{v}$ و هم بر $\mathbf{w}$ عمود است و $\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|\ \|\mathbf{w}\|\ \sin\theta$ که در آن $(\theta = \cos^{-1}(v\,.\,w/\|v\|\ \|w\|)$ زاویه بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ است.

(ب) نشان دهید که اگر $\mathbf{u} = (p\,,u_1\,,u_2\,,u_3)$، آنگاه

$$\mathbf{u}.\,(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{v}.\,(\mathbf{w}\times\mathbf{u}) = \mathbf{w}.\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

(پ). نشان دهید که تنها بردار $\mathbf{x}$ ایکه $\mathbf{u.x}$ برابر با دترمینان بالا (قسمت (ب)) برای تمام $\mathbf{u}\in\mathbf{R}^3_p$ می‌باشد عبارت است از $\mathbf{x} = \mathbf{v}\times\mathbf{w}$.

۵-۸. فرض کنید S یک ۲-رویه سودار در $\mathbf{R}^3$ باشد و $\{\mathbf{v,w}\}$ یک پایه جهت‌دار برای فضای مماس S_p بر S در نقطهٔ $p\in S$ باشد. نشان دهید که سازگاری $\{\mathbf{v,w}\}$ با سوی $\mathbf{N}$ از S هم ارز با هر یک از شرایط زیر می‌باشد:

(الف) $\mathbf{N}(p)\,.\,(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) > 0$

(ب) $\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = R_\theta(\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|)$ برای یک θ با شرط $0 < \theta < \pi$، که در آن R_θ، θ - دوران مثبت

در S_p می‌باشد.

۵-۹. فرض کنید S یک ۳ـ رویه سودار در $\mathbf{R}^4$ باشد و $p \in S$.

(الف) . نشان دهید که برای بردارهای مفروض $\mathbf{v} = (p,v)$ و $\mathbf{w} = (p,w)$ در S_p یک بردار یکتای $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \in S_p$ موجود می‌باشد به قسمی که

$$\mathbf{u}.(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ N(p) \end{pmatrix}$$

برای تمام $\mathbf{u} = (p, u) \in S_p$، که در آن $\mathbf{N}(p) = (p, N(p))$ جهت سوی در نقطهٔ p می‌باشد. این بردار $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ را ***حاصلضرب برداری*** $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ می‌گویند.

(ب) حاصلضرب برداری S_p دارای خواص زیر است:

(یک) $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times \mathbf{x} = \mathbf{v} \times \mathbf{x} + \mathbf{w} \times \mathbf{x}$

(دو) $\mathbf{v} \times (\mathbf{w} + \mathbf{x}) = \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{x}$

(سه) $(c\,\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = c\,(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

(چهار) $\mathbf{v} \times (c\,\mathbf{w}) = c\,(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

(پنج) $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\,\mathbf{w} \times \mathbf{v}$

(شش) $\mathbf{u}.\,(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v}.\,(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w}.\,(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

(هفت) $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ هم بر $\mathbf{v}$ و هم بر $\mathbf{w}$ عمودند

(هشت) $\mathbf{u}.\,(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$ اگر و فقط اگر $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ وابستگی خطی داشته باشند.

(نه) یک پایه متعامدیکه جهت‌دار $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ در S_p راستگرد است اگر و فقط اگر $\mathbf{e}_3 . (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) > 0$.

۵-۱۰. فرض کنید S یک n ـ رویه سودار در $\mathbf{R}^{n+1}$ با سوی $\mathbf{N}$ باشد و $p \in S$.

(الف) نشان دهید که یک پایه جهت‌دار S_p با $\mathbf{N}$ ناسازگار است اگر و فقط اگر سازگار با $\mathbf{N}$ - باشد.

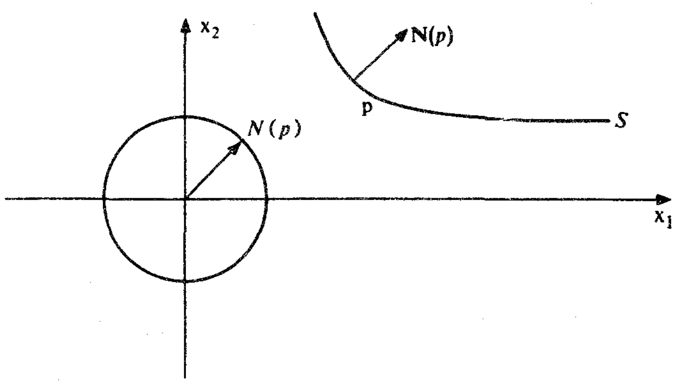
(ب) فرض کنید $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ پایه‌ای جهت‌دار برای S_p سازگار با $\mathbf{N}$ باشد و فرض کنید

{ $\mathbf{w}_n$, ... , $\mathbf{w}_1$} یک پایه جهت‌دار دیگر برای S_p باشد. نشان دهید که { $\mathbf{w}_n$, ... , $\mathbf{w}_1$} نیز با $\mathbf{N}$ سازگار است. اگر و فقط اگر ماتریس (a_{ij}) که در آن $\mathbf{w}_i = \sum_{j=1} a_{ij}\mathbf{v}_j$ دارای دترمینان مثبت باشد.

[**راهنمایی:** هر پایه را با افزودن $\mathbf{N}(p)$ به آن به پایه‌ای از $\mathbf{R}_p^{n+1}$ تبدیل کنید. چه رابطه‌ای بین (a_{ij}) و دو ماتریسی که سازگاری پایه‌های داده شده را با $\mathbf{N}$ معین می‌کند برقرار است؟] .

۶ـ نگاشت گاوس

یک n ـ رویهٔ سودار در $\mathbf{R}^{n+1}$ در واقع بیش از یک n ـ رویهٔ S باشد، در واقع یک n ـ رویـهٔ S همراه با یک میدان برداری قائم یکه هموار $\mathbf{N}$ روی S است. تابع $N: S \longrightarrow R^{n+1}$ وابسته به میدان برداری $\mathbf{N}$ به صورت $\mathbf{N}(p) = (p, N(p))$، $p \in S$ است. در واقع S را در n ـ کرهٔ یکه $S^n \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ می‌نگارد، چراکه $\| \mathbf{N}(p) \| = ۱$ برای تمام $p \in S$. بدین ترتیب است که به هر n ـ رویه سودار S، یک نگاشت هموار $N: S \longrightarrow S^n$ موسوم به ***نگاشت گاوس*** نظیر می‌نامیم. N را می‌توان به عنوان نگاشتی در نظرگرفت که به هر نقطهٔ $p \in S$ نقطه‌ای در $\mathbf{R}^{n+1}$ که از ''انتقال'' بردار قایم یکه $N(p)$ به مبدأ حاصل می‌شود نظیر کند (ر.ک. شکل ۶-۱).

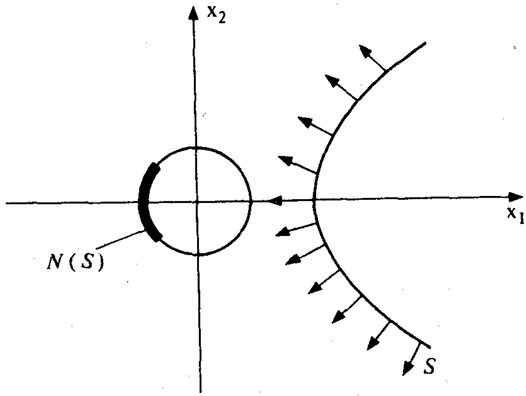


شکل ۶-۱ نگاشت گاوس یک ۱ ـ رویه در $\mathbf{R}^2$

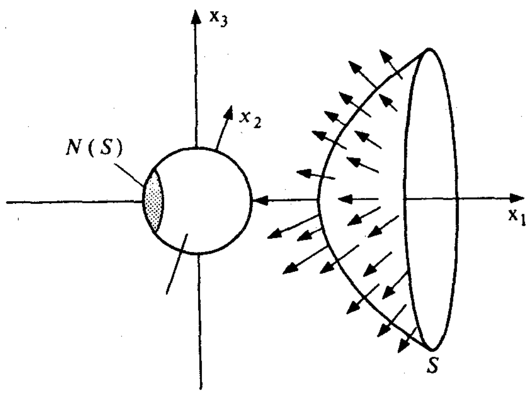
تصویر نگاشت گاوس

$$N(S) = \{q \in S^n : q = N(p) \text{ ، } p \in S \text{ برای یک}\}$$

را **تصویر کروی** n ـ رویه نمودار S گویند، (ر.ک. شکل ۶-۲).



(الف) : $n = 1$



(ب) : $n = 2$

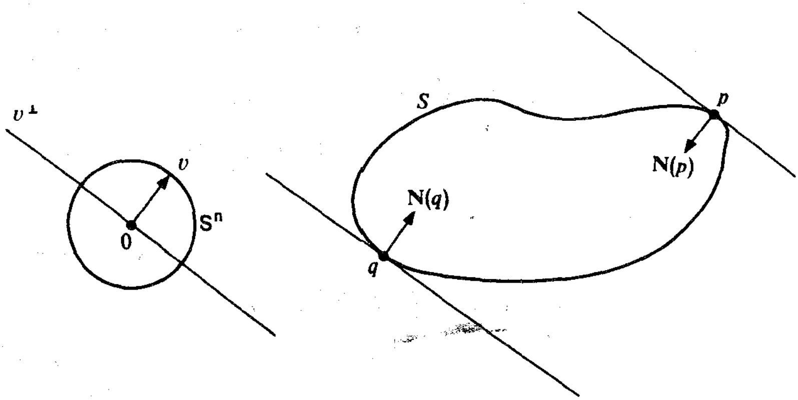
شکل ۶-۲ : تصویر کروی از یک پارچه از هذلولوی ۲ـ پارچه $x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{n+1}^2 = 4$ ؛ برای $x_1 > 0$ سودار شده توسط $\mathbf{N} = -\nabla f / \|\nabla f\|$ که $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 - x_2^2 \dots - x_{n+1}^2$.

تصویر کروی یک n ـ رویه سودار S مجموعهٔ تمام جهت‌هایی راکه به صورت جهت‌های قایم بر S ظاهر می‌شوند ثبت می‌نماید. بنابراین این تصویر میزان خمش (پیچش) رویه را در $\mathbf{R}^{n+1}$ اندازه می‌گیرد. برای یک n ـ صفحهٔ، که اصلاً هیچ گونه خمشی (پیچشی) ندارد این تصویر کروی یک نقطه است. اگر یک n ـ رویه فشرده (بسته و کراندار) باشد، آنگاه این رویه در تمام جهت‌ها خمش

(پیچش) دارد: در این حالت تصویر کروی تمام S^n خواهد بود. اگرچه ما در اینجا امکان اثبات این قضیه را با تمام کلیت آن نداریم، لیکن ما می‌توانیم یک حالت خاص مهم این قضیه را در حالتی که S یک مجموعهٔ تراز تابعی هموار معین در تمام $\mathbf{R}^{n+1}$ است، ثابت کنیم.

● **قضیه.** ***فرض کنید S یک n ـ رویه سودار همبند فشرده در $\mathbf{R}^{n+1}$ توسط یک مجموعهٔ تراز $f^{-1}(c)$ از تابعی هموار مانند $f: \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}$ با شرط $\nabla f(p) \neq 0$ برای تمام $p \in S$ باشد. در این صورت نگاشت گاوس S روی کرهٔ یکهٔ S^n پوشاست.***

برهان. ایدهٔ اثبات به شرح زیر است. برای $v \in S^n$ مفروض، n ـ صفحهٔ $v^\perp$ را در نظر می‌گیریم. از حرکت این n ـ صفحه به اندازه کافی در جهت v، با S مقطع تهی خواهد داشت. با برگرداندن به عقب این صفحه تا اینکه در یک نقطهٔ p رویه S را لمس کند، که در این نقطه مماس می‌شود (ر.ک. شکل ۶-۳). بنابراین در این نقطه $N(p) = \pm v$.



شکل ۶-۳: نگاشت گاوس یک n ـ رویه فشردهٔ سودار پوشاست

اگر $N(p) = -v$، آنگاه $N(q) = v$ که q بطور مشابه با حرکت n ـ صفحه در جهت مخالف به دست می‌آید.

به عبارت دقیقتر، تابع $g: \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}$ که به صورت $g(p) = p.v$ تعریف شده است، یعنی $g(x_1, \dots, x_{n+1}) = a_1 x_1 + \dots + a_{n+1} x_{n+1}$ را در نظر می‌گیریم که در آن

$$v = (a_1, \dots, a_{n+1}) .$$

مجموعه‌های تراز g، nـ صفحه‌های موازی با $v^{\perp}$ می‌باشند. چون S فشرده است، تحدید تابع g به S ماکزیمم و می‌نیمم خود را می‌گیرد، که به ترتیب آنها را به p و q نشان می‌دهیم. بنابر قضیه مضرب لاگرانژ (فصل ۴)

$$(p, v) = \nabla g(p) = \lambda \nabla f(p) = \lambda \, \| \nabla f(p) \| \, \mathbf{N}(p)$$

برای یک $\lambda \in \mathbf{R}$. بنابراین v و $\mathbf{N}(p)$ مضرب یکدیگرند. چون هر دو طول یکه دارند، بنابراین نتیجه می‌شود که $\mathbf{N}(p) = \pm v$. به طور مشابه $\mathbf{N}(q) = \pm v$.

تنها چیزی که باقی می‌ماند اینست که $\mathbf{N}(q) \neq \mathbf{N}(p)$. برای این منظور، کافی است تابعی پیوسته مانند $\alpha: [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ ساخت که مشتق‌پذیر در a و b باشند و به قسمی که

(یک) $\alpha(a) = p$ ، $\alpha(b) = q$ ، $\dot\alpha(a) = (p, v)$ ، $\dot\alpha(b) = (q, v)$ و

(دو) $\alpha(t) \notin S$ برای $a < t < b$.

بدین لحاظ بنابر (یک) اگر $\mathbf{N} = \nabla f / \| \nabla f \|$

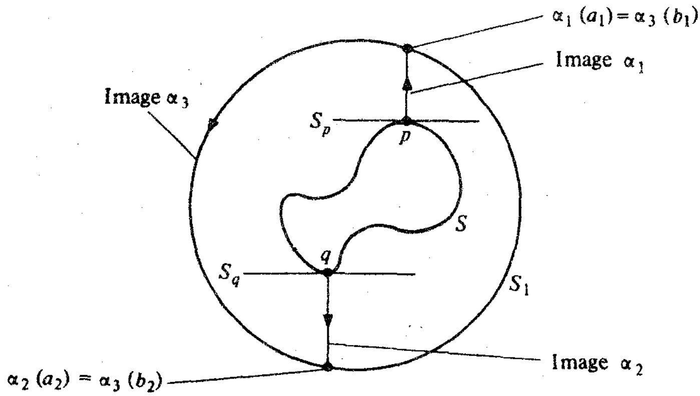
$$\begin{aligned}(f \circ \alpha)'(a) &= \nabla f(\alpha(a)) \cdot \dot\alpha(a) \\ &= \| \nabla f(p) \| \, \mathbf{N}(p) \cdot (p, v) = \| \nabla f(p) \| \, \mathbf{N}(p) v\end{aligned}$$

و به طور مشابه:

$$(f \circ \alpha)'(b) = \| \nabla f(q) \| \, \mathbf{N}(q) \cdot v.$$

بنابراین مشتق $(f \circ \alpha)'$ دارای علامت یکسان در دوسر انتهایی است. اگر $\mathbf{N} = -\nabla f / \| \nabla f \|$؛ نتیجه مشابهی برقرار است. در نتیجه، هرگاه $\mathbf{N}(p)$ برابر با $\mathbf{N}(q)$ ($= \pm v$) باشد، آنگاه $f \circ \alpha$ در دو سر انتهایی یا صعودی و یا نزولی است. چون $f \circ \alpha(a) = f \circ \alpha(b) = c$، ایجاب می‌کند که نقاط t_1 و t_2 بین a و b وجود دارند به قسمی که $f \circ \alpha(t_1) > c$ و $f \circ \alpha(t_2) < c$. اما بنا بر قضیه بینی، t_3ای بین t_1 و t_2 وجود دارد به قسمی که $f \circ \alpha(t_3) = c$، که متناقض با (دو) است.

برای ساختن α، S را می‌توان در درون یک کرهٔ بزرگ S_1 قرار داد. این امر ممکن است زیرا S فشرده است. برای $0 \le t \le a_1$، $\alpha_1(t) = p + tv$ قرار می‌دهیم (شکل ۶-۴ را ملاحظه کنید).



شکل ۴-۶ $N(q)=-N(p)$

که در آن a_1 به قسمی است که $\alpha_1(a_1)\in S_1$ و همچنین برای $0\le t\le a_2$، $\alpha_2(t)=q-tv$ قرار می‌دهیم که در آن a_2 به قسمی است که $\alpha_2(a_2)\in S_1$. خم $\alpha_3:[b_1,b_2]\longrightarrow S_1$ را به قسمی می‌گیریم که $\alpha_3(b_1)=\alpha_1(a_1)$ و $\alpha_3(b_2)=\alpha_2(a_2)$. این چنین α_3ای وجود دارد زیرا که n-کرهٔ S_1 برای $n\ge 1$ همبند است. سپس تابع α که توسط

$$\alpha(t)=\begin{cases}\alpha_1(t) & 0\le t\le a_1\\ \alpha_3(t+b_1-a_1), & a_1\le t\le a_1+b_2-b_1\\ \alpha_2(a_1+a_2+b_2-b_1-t) & a_1+b_2-b_1\le t\le a_1+a_2+b_2-b_1.\end{cases}$$

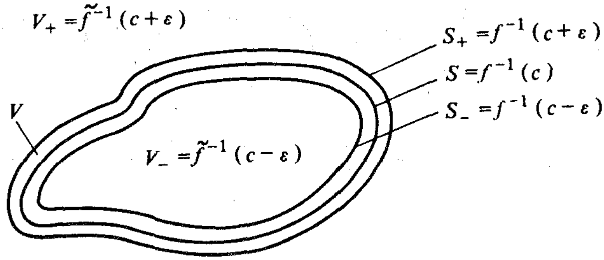
تعریف شده است خواص لازم را دارد، که در آن $a=0$ و $b=a_1+a_2+b_2-b_1$. پیوستگی و شرط (یک) را بسهولت می‌توان تحقیق کرد، وشرط (دو) برقرار است زیرا

(۱) برای $t>0$، $\alpha_1(t)\notin S$ زیراکه $(g\circ\alpha_1)'(t)=\nabla g(\alpha_1(t)).\dot{\alpha}_1(t)=\mathbf{v}.\mathbf{v}>0$. بنابراین g در طول α_1 صعودی است، و ماکزیمم مقدار g روی S در نقطهٔ $p=\alpha_1(0)$ اختیار می‌شود.

(۲) برای $t>0$، $\alpha_2(t)\notin S$، زیراکه $(g\circ\alpha_2)'(t)=\mathbf{v}.(-\mathbf{v})<0$ بنابراین g در طول α_2 نزولی است، و می‌نیمم مقدار g روی S در نقطه $q=\alpha_2(0)$ اختیار می‌شود و

(۳) برای $t\in[b_1,b_2]$، $\alpha_3(t)\notin S$ زیراکه $\alpha_3(t)\in S_1$ و $S_1\cap S=\varnothing$. □

تذکر. با یک نگرش، حالت کلی این قضیه را می‌توان با استدلال شهودی زیر به دست آورد. فرض کنید S فشرده و همبند باشد. آنگاه $\mathbf{R}^{n+1}$ توسط S به دو قسمت تقسیم می‌شود، یک قسمت داخل S و دیگری خارج S است. فرض کنید $S = f^{-1}(c)$ که در آن $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$. آنگاه برای $\varepsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک، مجموعه تراز $f^{-1}(c+\varepsilon)$ یک n ـ رویه S_+ می‌باشد که از فشار دادن هر نقطه S به اندازه کمی در طول ∇f به دست می‌آید (ر.ک. شکل ۶-۵).



شکل ۶-۵: برای یک n ـ رویه همبند فشرده $S = f^{-1}(c)$ مفروض، مجموعه‌های تراز $f^{-1}(c-\varepsilon)$ و $f^{-1}(c+\varepsilon)$ اندکی داخل و خارج S می‌باشند.

(احتمالاً ممکن است، $f^{-1}(c+\varepsilon)$ همچنین شامل نقاطی بسیار دور از S باشد ولی ما در استدلال حاضر از اینگونه نقاط می‌توانیم چشم پوشی کنیم) به طریق مشابه، برای $\varepsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک، مجموعهٔ تراز $f^{-1}(c-\varepsilon)$ یک n ـ رویهٔ S_- در طرف دیگر S است، که از فشار دادن هر نقطهٔ S به اندازه کمی در طول $-\nabla f$ به دست می‌آید. مجموعهٔ نقاط بین S_- و S_+ را با V نشان می‌دهیم، V_+ را مجموعهٔ نقاط در $\mathbf{R}^{n+1} - V$ که در همان طرف از S که S_+ قرار دارد می‌گیریم، و بالاخره V_- را مجموعه‌نقاط در $\mathbf{R}^{n+1} - V$ می‌گیریم که درطرف‌دیگر S واقع‌است، می‌توان $\tilde{f}: \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}$ راتوسط

$$\tilde{f}(p) = \begin{cases} f(p) & \text{برای } p \in V \\ c+\varepsilon & \text{برای } p \in V_+ \\ c-\varepsilon & \text{برای } p \in V_- \end{cases}$$

تعریف کرد. در این صورت $\tilde{f}$ روی $\mathbf{R}^{n+1}$ پیوسته، هموار روی مجموعهٔ باز V در حول S است و $S = \tilde{f}^{-1}(c)$. اینک اثبات بالا را می‌توان با جایگزین کردن $\tilde{f}$ در همه جا به جای f بکار برد و نشان داد که نگاشت گاوس پوشاست.

تمرین

در تمرینهای ۶-۱ الی ۶-۵، تصویر کروی n ـ رویه سودار توسط $\nabla f/\|\nabla f\|$ که در آن f تابع تعریف شده در طرف چپ هر معادله است برای ۱ = n و ۲ = n معین کنید.

۶-۱. استوانه $x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$.

۶-۲. مخروط $-x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 0$ ، $x_1 > 0$.

۶-۳. کره $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2$ ، $r > 0$.

۶-۴. سهموی $-x_1 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 0$.

۶-۵. هذلولوی یک پارچه $(-x_1^2/a^2) + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ $(a > 0)$. در تصویر کروی چه اتفاق می‌افتد اگر $a \longrightarrow \infty$؟ وقتی که $a \longrightarrow 0$؟

۶-۶. نشان دهید که تصویر کروی یک n ـ رویهٔ با سوی **N** انعکاس نسبت مبداء و تصویر کروی همان n ـ رویه با سوی **N** - است.

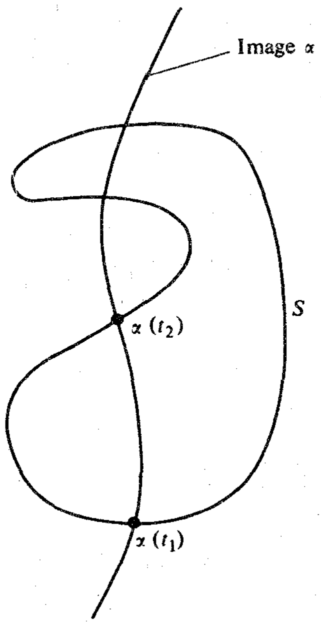
۶-۷. فرض کنید $a = (a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$، $a \neq 0$. نشان دهید که تصویر کروی یک n ـ رویهٔ S در n ـ صفحهٔ $a_1 x_1 + \dots + a_{n+1} x_{n+1} = 0$ قرار دارد اگر و فقط اگر برای هر $p \in S$ یک بازهٔ باز I در حول ۰ موجود باشد به قسمی که $p + ta \in S$ برای تمام $t \in I$. [**راهنمایی**: برای قسمت "فقط اگر" نتیجهٔ قضیهٔ ۱ ، فصل ۵ را در مورد میدان برداری ثابت $\mathbf{X}(q) = (q,a)$ بکار برید.]

۶-۸. نشان دهید که هرگاه تصویر کروی یک n ـ رویه همبند S یک نقطه باشد، آنگاه S قسمتی یا تمام n ـ صفحه است. [**راهنمایی**: در آغاز با به بکار بردن نتیجهٔ قضیهٔ ۱، فصل ۵ را در مورد میدان برداری ثابت $\mathbf{W}(q) = (q,w)$ که در آن $w \perp v$ ، $N(s) = \{v\}$ نشان دهید که اگر B یک گوی باز در U باشدو $p \in S \cap B$ ، آنگاه $H \cap B \subset S$ که در آن H ، n ـ صفحهٔ $\{x \in \mathbf{R}^{n+1} : x \cdot v = p \cdot v\}$ است.

سپس نشان دهید که هرگاه $\alpha : [a,b] \longrightarrow S$ پیوسته باشد و $\alpha(t) \in B$ برای $t_1 \leq t \leq t_2$، آنگاه $\alpha(t_1).v = \alpha(t_2).v$، با نشان دادن اینکه اگر برای مثال $\alpha(t_1).v < \alpha(t_2).v$، آنگاه S شامل مجموعهٔ باز $\{x \in B : \alpha(t_1).v < x.v < \alpha(t_2).v\}$ می‌باشد که غیر ممکن است. چرا؟].

۶-۹. فرض کنید $S = f^{-1}(c)$ که در آن $f : \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار است به قسمی که $\nabla f(p) \neq 0$ برای هر $p \in S$. فرض کنید $\alpha : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ یک خم پارامتری باشد که در هیچ‌کجا بر S مماس نباشد (یعنی $\nabla f(\alpha(t)).\dot{\alpha}(t) \neq 0$ برای تمام t هایی که $\dot{\alpha}(t) \in S$)، ر.ک. شکل ۶-۶).

(الف) نشان دهید که در هر جفت متوالی عبور S توسط α، جهت سوی $\nabla f / \|\nabla f\|$ روی S نسبت به جهت α وارونه می‌شود. [یعنی، نشان دهید که هرگاه $\alpha(t_1) \in S$ و $\alpha(t_2) \in S$، که در آن $t_1 < t_2$ و $\alpha(t) \notin S$ برای



شکل ۶-۶: خم α، n ـ رویه فشرده S را در تنها تعداد زوج بار عبور می‌کند

$t_1 < t < t_2$ در این صورت $\nabla f(\alpha(t_1)).\dot{\alpha}(t_1) > 0$ اگر و فقط اگر $\nabla f(\alpha(t_2)).\dot{\alpha}(t_2) < 0$.]

(ب) نشان دهید که اگر S فشرده و α در دو جهت به ∞ رود

[یعنی: $\lim_{t\to -\infty} \| \alpha(t) \| = \lim_{t\to +\infty} \| \alpha(t) \| = \infty$] آنگاه α تعداد زوج بار از S عبور می‌کند.

۶-۱۰. فرض کنید S یک n ـ رویهٔ فشرده در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد. یک نقطهٔ $p \in \mathbf{R}^{n+1} - S$ **خارج** S است اگر نگاشت پیوسته‌ای مانند $\alpha : [0, \infty] \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1} - S$ وجود داشته باشد به قسمی که $\alpha(0) = p$ و $\lim_{t\to \infty} \| \alpha(t) \| = \infty$. فرض کنید $\mathcal{O}(s)$ نشانگر مجموعهٔ تمام نقاط خارج S باشد.

(الف) نشان دهید که هرگاه $\beta : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1} - S$ پیوسته باشد و $\beta(a) \in \mathcal{O}(s)$، آنگاه $\beta(t) \in \mathcal{O}(s)$ برای هر $t \in [a,b]$

(ب) نشان دهید که $\mathcal{O}(s)$ یک زیر مجموعهٔ باز همبند $\mathbf{R}^{n+1}$ است.

۷ـ ژئودزی‌ها

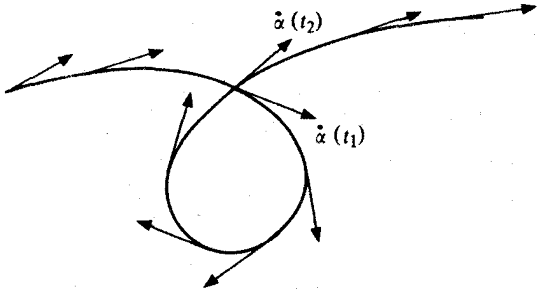
ژئودزیها خمهایی در n ـ رویه‌ها می‌باشند که همان نقش خطوط مستقیم در $\mathbf{R}^2$ را ایفا می‌کنند. قبل از بیان یک تعریف دقیق، باید روش مشتق‌گیری از میدانهای برداری و توابع تعریف شده در طول خمهای پارامتری را معرفی کنیم. برای اینکه مجاز باشیم این چنین میدانهای برداری و توابع مقادیر مختلف را در نقطه‌ای که یک خم پارامترهای از خودش عبور می‌کند، بگیرد بهتر است این میدانها و توابع در بازهٔ پارامتر تعریف شوند تا اینکه روی تصویر خم.

یک ***میدان برداری*** $\mathbf{X}$ در ***طول خم پارامتری*** $\alpha : I \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ تابعی است که به هر $t \in I$ یک بردار $\mathbf{X}(t)$ در نقطه $\alpha(t)$ نظیر نماید؛ یعنی $\mathbf{X}(t) \in \mathbf{R}^{n+1}_{\alpha(t)}$ برای هر $t \in I$. یک ***تابع f در طول*** α صرفاً یک تابع $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ می‌باشد. در نتیجه برای مثال α سرعت خم پارامتری $\alpha : I \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ یک میدان‌برداری در طول α می‌باشد (شکل ۷-۱). طول سرعت $\|\dot{\alpha}\| : I \longrightarrow \mathbf{R}$ که توسط $\|\dot{\alpha}\|(t) = \|\dot{\alpha}(t)\|$ برای هر $t \in I$ تعریف شده است یک تابع در طول α است. $\|\dot{\alpha}\|$ را ***تندی*** α گویند.

میدان‌های برداری و توابع در طول خمهای پارامتری اغلب به صورت محدودیتهای جلوه‌گر می‌شوند. در نتیجه هرگاه $\mathbf{X}$ یک میدان برداری روی U باشد، که در آن U زیر مجموعهٔ بازی در $\mathbf{R}^{n+1}$ شامل تصویر α باشد، آنگاه $\mathbf{X} \circ \alpha$ یک میدان برداری در طول α می‌باشد. به روش مشابه $f \circ \alpha$ یک تابع در طول α می‌باشد که در آن $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ و U شامل تصویر α است.

هر میدان برداری $\mathbf{X}$ در طول α به صورت زیر است:

$$\mathbf{X}(t) = (\alpha(t), X_1(t), \ldots, X_{n+1}(t))$$

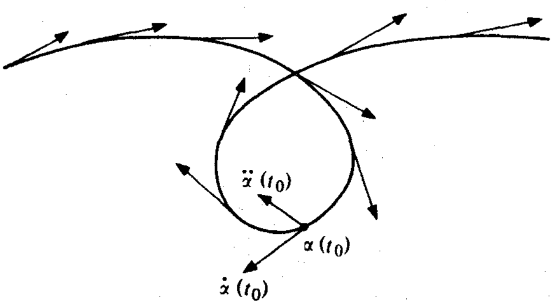


شکل ۷-۱ : میدان سرعت در طول خم پارامتری α. توجه داشته باشید که $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ ایجاب نمی‌کند که $\dot{\alpha}(t_1) = \dot{\alpha}(t_2)$.

که هر مؤلفهٔ X_i یک تابع در طول α است. $\mathbf{X}$ ***هموار*** است اگر هر یک از $X_i : I \longrightarrow \mathbf{R}$ ها هموار باشد. **مشتق** یک میدان برداری هموار $\mathbf{X}$ در طول α، میدان برداری $\dot{\mathbf{X}}$ درطول α تعریف شده به صورت

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\alpha(t), \frac{dX_1}{dt}(t), \dots, \frac{dX_{n+1}}{dt}(t))$$

می‌باشد. $\dot{\mathbf{X}}(t)$ میزان تغییرات قسمت برداری $(X_1(t), \dots, X_{n+1}(t))$ از $\mathbf{X}(t)$ را در طول α اندازه می‌گیرد. در نتیجه برای مثال $\ddot{\alpha}$ ***شتاب*** یک خم پارامتری α، میدان برداری در طول α است که از مشتق‌گیری میدان برداری سرعت $\dot{\alpha}$ به دست می‌آید $[\ddot{\alpha} = (\dot{\alpha})^{\cdot}]$ (ر.ک شکل ۷-۲).



شکل ۷-۲ : شتاب $\ddot{\alpha}(t_0)$ مشتق در t_0 میدان‌برداری سرعت $\dot{\alpha}$

به سهولت می‌توان تحقیق کرد (تمرین ۷-۴) که مشتق‌گیری میدانهای برداری در طول خم پارامتری α دارای خواص زیر است. برای $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ میدانهای برداری در طول خم $\alpha : I \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ و f یک تابع هموار در طول α،

(یک) $$(\mathbf{X} \dot{+} \mathbf{Y}) = \dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{Y}}$$

(دو) $$(\dot{f\mathbf{X}}) = f' \mathbf{X} + f \dot{\mathbf{X}}$$

(سه) $$(\mathbf{X} \,.\, \mathbf{Y})' = \dot{\mathbf{X}} \,.\, \mathbf{Y} + \mathbf{X} \,.\, \dot{\mathbf{Y}}$$

که در آن $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$، $f\mathbf{X}$ و $\mathbf{X} \,.\, \mathbf{Y}$ در طول α به صورت

$$(\mathbf{X} + \mathbf{Y})(t) = \mathbf{X}(t) + \mathbf{Y}(t)$$
$$(f\mathbf{X})(t) = f(t)\, \mathbf{X}(t)$$
$$(\mathbf{X} \,.\, \mathbf{Y})(t) = \mathbf{X}(t) \,.\, \mathbf{Y}(t)$$

برای تما $t \in I$ تعریف شده‌اند.

یک **ژئودزی** در n ـ رویهٔ $S \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ یک خم پارامتری $\alpha : I \longrightarrow S$ می‌باشد که شتابش همواره بر S عمود باشد، یعنی به ازای هر $t \in I$ $\ddot{\alpha}(t) \in S^{\perp}_{\alpha(t)}$. در نتیجه یک ژئودزی خمی در S است که همواره در رویه "مستقیم جلو" می‌رود. شتابش تنها باعث می‌شود که خم را در رویه نگه دارد. این خم هیچ مؤلفهٔ شتابی مماس بر رویه ندارد.

توجه دارید که ژئودزیها دارای تندی ثابت هستند، چراکه $\dot{\alpha}(t) \in S_{\alpha(t)}$ و $\ddot{\alpha}(t) \in S^{\perp}_{\alpha(t)}$ برای تمام $t \in I$ در نتیجه

$$\frac{d}{dt} \| \dot{\alpha}(t) \|^{۲} = \frac{d}{dt} (\dot{\alpha}(t) \,.\, \dot{\alpha}(t)) = ۲\, \dot{\alpha}(t) \,.\, \ddot{\alpha}(t) = ۰ \,.$$

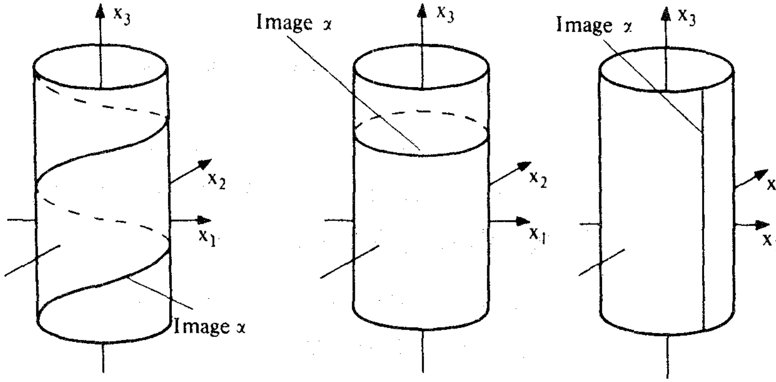
مثال ۱. هرگاه n ـ رویه شامل یک خط مستقیم $\alpha(t) = p + tv \; (t \in I)$ باشد، آنگاه این قطعه خط یک ژئودزی در S است. در واقع $\ddot{\alpha}(t) = ۰$ برای تمام $t \in I$ و در حالت خاص برای تمام $t \in I$، $\ddot{\alpha}(t) \perp S_{\alpha(t)}$.

مثال ۲. به ازای $a,b,c,d \in \mathbf{R}$، خم پارامتری $\alpha(t) = (\cos(at + b) \;,\; \sin(at + b) \,,\, ct + d)$ یک

ژئودزی در استوانهٔ $x_1^2 + x_2^2 = 1$ در $\mathbf{R}^3$ می‌باشد، زیرا

$$\alpha''(t) = (\alpha(t)\ ,\ -a^2 \cos(at+b)\ ,\ -a^2 \sin(at+b)\ ,\ 0) = \pm a^2 \mathbf{N}(\alpha(t))$$

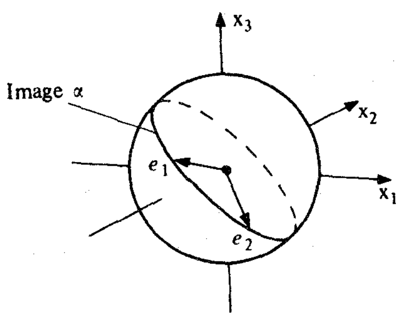
برای هر $t \in \mathbf{R}$ (ر.ک. شکل ۷-۳).



شکل ۷-۳: ژئودزی $\alpha(t) = (\cos(at+b)\ ,\ \sin(at+b)\ ,\ ct+d)$ در استوانه $x_1^2 + x_2^2 = 1$

(الف) $a = 0$ (ب) $c = 0$ (پ) $c \neq 0$ و $a \neq 0$

مثال ۳. به ازای هر جفت بردارهای یک متعامد $\{e_1\ ,\ e_2\}$ در $\mathbf{R}^3$ و هر $a \in \mathbf{R}$، دایره عظیمه (یا نقطه اگر $a = 0$) $\alpha(t) = (\cos at)e_1 + (\sin at)e_2$ یک ژئودزی در ۲-کره $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ در $\mathbf{R}^3$ است. زیرا $\alpha''(t) = (\alpha(t)\ ,\ -a^2 \alpha(t)) = \pm a^2 \mathbf{N}(\alpha(t))$ برای هر $t \in \mathbf{R}$ (ر.ک. شکل ۷-۴).



شکل ۷-۴ دایره‌های عظیمه در ۲ -کره ژئودزیها هستند.

به طور شهودی، واضح بنظر می‌رسد. که برای هر نقطهٔ مفروض p در یک n ـ رویه S و برای هر سرعت اولیه $\mathbf{v}$ در نقطهٔ p ($\mathbf{v} \in S_p$) یک ژئودزی در S گذرنده از نقطهٔ p با سرعت اولیه $\mathbf{v}$ **وجود** دارد. بعد از همه اینها، یک اتوموبیل مسابقه اتومبیل رانی که S را می‌پیماید و از نقطه p **با سرعت** $\mathbf{v}$ می‌گذرد باید قادر باشد به سفر خود در خط مستقیم روی S با تندی ثابت $\|v\|$ ادامه دهد، در نتیجه یک ژئودزی را در S می‌پیماید. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که در واقع این امر امکان دارد و چنین ژئودزی با این خواص الزاماً یکتاست.

● **قضیه.** ***فرض کنید*** S ***یک*** n ***ـ رویه در*** $\mathbf{R}^{n+1}$ ***باشد و*** $p \in S$ ***و*** $\mathbf{v} \in S_p$. ***در این صورت بازهٔ بازی مانند*** I ***شامل*** ۰ ***و یک ژئودزی*** $\alpha : I \longrightarrow S$ ***وجود دارد به قسمی که***

(یک) $\alpha(\circ) = p$ ***و*** $\dot\alpha(\circ) = \mathbf{v}$

(دو) هرگاه $\beta : \tilde I \longrightarrow S$ ***ژئودزی دیگری در*** S ***با شرط*** $\beta(\circ) = p$ ***و*** $\dot\beta(\circ) = \mathbf{v}$ ***باشد. آنگاه*** $\tilde I \subseteq I$ ***و برای تمام*** $t \in \tilde I$ ، $\beta(t) = \alpha(t)$.

تذکر. ژئودزی α را ***ژئودزی بیشین*** در S گذرندهٔ از نقطهٔ p با سرعت آغازی $\mathbf{v}$ گویند.

برهان. $S = f^{-1}(c)$ برای یک $c \in \mathbf{R}$ و یک تابع هموار $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ (U باز در $\mathbf{R}^{n+1}$) با شرط $\nabla f(p) \neq \circ$ برای تمام $p \in S$. چون $\nabla f(p) \neq \circ$ برای تمام p هائیکه در یک مجموعه بازشامل S است، بنابراین می‌توانیم فرض کنیم (درصورت لزوم با کوچکتر کردن U) برای تمام $p \in \mathbf{U}$ ، $\nabla f(p) \neq \circ$. قرار می‌دهیم $\mathbf{N} = \nabla f / \|\nabla f\|$ ، بنا بر تعریف، یک خم پارامتری $\alpha : I \longrightarrow S$ یک رئودزی روی S است اگر و فقط اگر شتاب آن همواره عمود بر S باشد، یعنی اگر و فقط اگر $\ddot\alpha(t)$ مضربی از $\mathbf{N}(\alpha(t))$ برای تمام $t \in I$ باشد، لذا

$$\ddot\alpha(t) = g(t)\,\mathbf{N}(\alpha(t))$$

برای تمام $t \in I$، که در آن $g : I \longrightarrow \mathbf{R}$. طرفین این معادله را در $\mathbf{N}(\alpha(t))$ ضرب داخلی می‌کنیم، که در این صورت

$$g = \ddot\alpha \cdot \mathbf{N}\circ\alpha = (\dot\alpha \cdot \mathbf{N}\circ\alpha)^{\cdot} - \dot\alpha \cdot \dot{\mathbf{N}}\circ\alpha$$
$$= -\dot\alpha \cdot \dot{\mathbf{N}}\circ\alpha$$

زیرا $\dot\alpha \cdot \mathbf{N}\circ\alpha = \circ$. در نتیجه $\alpha : I \longrightarrow S$ یک ژئودزی است اگر و فقط اگر در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\alpha^{\cdot\cdot} + (\alpha^{\cdot} . \mathbf{N}^{\cdot} \circ \alpha)(\mathbf{N} \circ \alpha) = 0 \qquad (G)$$

صدق کند.

این یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه دوم در α است. (اگر بنویسیم $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_{n+1}(t))$، این معادله دیفرانسیل برداری دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^{n+1} N_i(x_1, \dots, x_{n+1}) \frac{\partial N_j}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_{n+1}) \frac{dx_j}{dt} . \frac{dx_k}{dt} = 0$$

می‌باشد که در آن $(\{1, \dots, n+1\} \ni j)$ و N_j ها مؤلفه‌های $\mathbf{N}$ هستند.) بنابر قضیه وجود برای جوابهای این چنین معادلاتی، بازهٔ بازی مانند I_1 در حول ۰ و جوابی از آن به صورت $\beta_1 : I_1 \longrightarrow U$ از این معادله دیفرانسیل وجود دارد که در شرایط آغازی $\beta_1(0) = p$ و $\beta_1^{\cdot}(0) = \mathbf{v}$ صدق می‌کند (یعنی $x_i(0) = p_i$ و $(\frac{dx_i}{dt})(0) = v_i$ برای $i \in \{1, \dots, n+1\}$ که در آن $p = (p_1, \dots, p_{n+1})$ و $(\mathbf{v} = (p, v_1, \dots, v_{n+1})$). علاوه بر این، این جواب به این مفهوم یکتاست که هرگاه $\beta_2 : I \longrightarrow U$ جواب دیگری از (G) با شرایط $\beta_2(0) = p$ و $\beta_2^{\cdot}(0) = \mathbf{v}$ باشد، آنگاه $\beta_1(t) = \beta_2(t)$ برای تمام $t \in I_1 \cap I_2$. از آن نتیجه می‌شود که یک بازهٔ بازبیشین I (I اجتماع دامنه‌های تمام جوابهای (G) است که ۰ را به p می‌نگارند و دارای سرعت آغازی $\mathbf{v}$ می‌باشند.) و جواب یکتای $\alpha : I \longrightarrow U$ از (G) وجود دارد که در شرایط $\alpha(0) = p$ و $\alpha^{\cdot}(0) = \mathbf{v}$ صدق می‌کند. علاوه بر این، هرگاه $\beta : \bar{I} \longrightarrow U$ هر جواب دلخواهی از (G) با شرایط $\beta(0) = p$ و $\beta^{\cdot}(0) = \mathbf{v}$ باشد، آنگاه $\bar{I} \subset I$ و β تحدید α به $\bar{I}$ می‌باشد.

برای کامل شدن اثبات، تنها کافی است نشان دهیم که جواب α معادله (G) در واقع یک خم در S است. زیرا اگر چنین باشد، باید یک ژئودزی باشد زیرا که در معادلهٔ ژئودزی (G) صدق می‌کند، و بقیهٔ قضیه از بحث یکتایی فوق نتیجه می‌شود.

برای ملاحظه اینکه α در واقع خمی در S می‌باشد، در آغاز به این نکته توجه داریم که برای هر جواب $\alpha : I \longrightarrow U$ از (G)، $\alpha^{\cdot} . \mathbf{N} \circ \alpha = 0$. در حقیقت بنابر (G) داریم

$$(\alpha^{\cdot} . \mathbf{N} \circ \alpha)' = \alpha^{\cdot\cdot} \mathbf{N} \circ \alpha + \alpha^{\cdot} . \mathbf{N}^{\cdot} \alpha = 0$$

بنابراین $\alpha^{\cdot} . \mathbf{N} \circ \alpha$ در طول α ثابت می‌باشد و

$$(\alpha^{\cdot} . \mathbf{N} \circ \alpha)(\circ) = \mathbf{v} . \mathbf{N}(p) = \circ$$

چرا که $\mathbf{v} \in S_p$ و $\mathbf{N}(p) \perp S$. از آن نتیجه می‌گردد که

$$(f \circ \alpha)'(t) = \nabla f(\alpha(t)) . \alpha(t) = \| \nabla f(\alpha(t)) \| \ \mathbf{N}(\alpha(t)) . \alpha(t) = \circ$$

برای هر $t \in I$. بنابراین $f \circ \alpha$ ثابت است و اما چون $f(\alpha(\circ)) = f(p) = c$، در نتیجه برای تمام $t \in I$، $f(\alpha(t)) = c$ یعنی تصویر α در $S = f^{-1}(c)$ واقع است. □

از قضیه که هم اکنون ثابت شد نتیجه می‌گردد که هر ژئودزی بیشین روی ۲ـکرهٔ یکه در $\mathbf{R}^۳$ (مثال ۳) یا دایره عظیمه (پارامتری شده توسط یک پارامتری سازی با تندی ثابت) و یا خم ثابت ($\alpha(t) = p$ برای هر t به ازای یک نقطه ثابت p) است زیرا که چنین خمی را می‌توان یافت که از هر نقطه p با سرعت آغازی مفروض بگذرد. به طریق مشابه، هر ژئودزی بیشین روی استوانه $x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۱$ در $\mathbf{R}^۳$ (مثال ۲) یا یک خط قائم، یا یک دایره افقی، یا یک مارپیچ، و یا یک خم ثابت است.

تمرین

۷–۱. سرعت، شتاب، و تندی هر یک از خمهای پارامتری زیر را بیابید:

(الف) $\alpha(t) = (t, t^۲)$

(ب) $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$

(پ) $\alpha(t) = (\cos ۳t, \sin ۳t)$

(ت) $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$

(ث) $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, ۲\cos t, ۲\sin t)$.

۷–۲. نشان دهید که هرگاه $\alpha : I \longrightarrow \mathbf{R}^{n+۱}$ یک خم پارامتری با تندی ثابت باشد، آنگاه $\alpha^{\cdot\cdot}(t) \perp \alpha^{\cdot}(t)$ برای هر $t \in I$.

۷–۳. فرض کنید $\alpha : I \longrightarrow \mathbf{R}$ یک خم پارامتری با شرط، $\alpha^{\cdot}(t) \neq \circ$ برای تمام $t \in I$ باشد. نشان دهید که یک پارامترسازی مجدد α مانند β با تندی یکه وجود دارد. یعنی، نشان دهید که یک فاصله J

و یک تابع هموار $h : J \longrightarrow I$ (پوشا) وجود دارد به قسمی که $h' > 0$ و $\beta = \alpha \circ h$ دارای تندی یکه است. [راهنمایی: قرار دهید $h = s^{-1}$ که در آن $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|\, dt$ برای یک $t_0 \in I$.]

۷-۴. فرض کنید $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ میدانهای برداری هموار در طول خم پارامتری $\alpha : I \longrightarrow \mathbf{R}$ باشند و $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ را تابعی هموار در طول α بگیرید. تحقیق کنید که

(الف) $(\dot{\mathbf{X} + \mathbf{Y}}) = \dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{Y}}$.

(ب) $(\dot{f\mathbf{X}}) = f' \mathbf{X} + f \dot{\mathbf{X}}$.

(پ) $(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})' = \dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{Y}}$.

۷-۵. فرض کنید S استوانهٔ $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ با شعاع $r > 0$ در $\mathbf{R}^3$ باشد. نشان دهید که α ژئودزیک S است اگر و فقط اگر α به صورت $\alpha(t) = (r\cos(at+b), r\sin(at+b), ct+d)$ برای $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ باشد.

۷-۶. نشان دهید که خم پارامتری α در n ـ کرهٔ یکه $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ ژئودزی است اگر و فقط اگر به شکل

$$\alpha(t) = (\cos at)e_1 + (\sin at)\, e_2$$

باشد که در آن $\{e_1, e_2\}$ یک جفت بردار متعامدیکه در $\mathbf{R}^{n+1}$ است و $a \in \mathbf{R}$ (برای $a \neq 0$ این خم‌ها "دوایر عظیمه" روی n ـ کره هستند).

۷-۷. نشان دهید که هرگاه $\alpha : I \longrightarrow S$ یک ژئودزی n ـ رویه S باشد و هرگاه $\beta = \alpha \circ h$ یک پارامتری‌سازی مجدد α باشد (که در آن $h : \bar{I} \longrightarrow I$) آنگاه β ژئودزی در S است اگر و فقط اگر اعداد $a,b \in \mathbf{R}$ با شرط $a > 0$ موجود باشد که به قسمی که $h(t) = at + b$ برای تمام $t \in \bar{I}$.

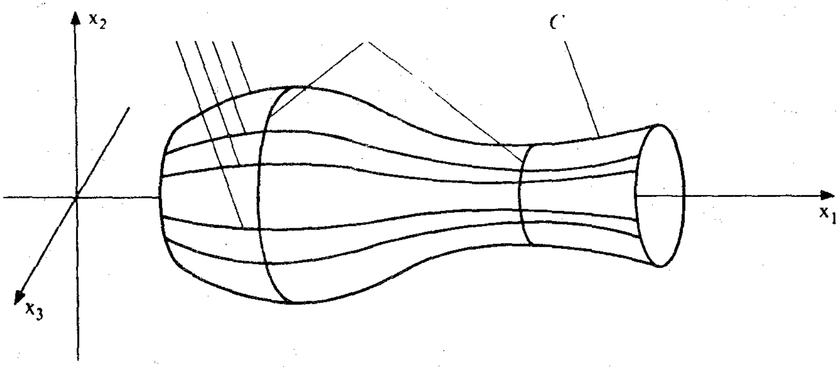
۷-۸. فرض کنید C یک خم مسطح در نیم صفحهٔ بالای $x_2 > 0$ باشد و فرض کنید S رویه دوار حاصل از دوران C در حول محور x_1ها باشد (ر.ک. مثال ۵ از فصل ۴). فرض کنید $\alpha : I \longrightarrow C$، $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t))$، یک خم پارامتری با تندی ثابت C باشد. به ازای $\theta \in \mathbf{R}$ خم $\alpha_\theta : I \longrightarrow S$ را به صورت

$$\alpha_\theta(t) = (x_1(t), x_2(t)\cos\theta, x_2(t)\sin\theta)$$

تعریف می‌کنیم و به ازای هر $t \in I$ خم $\beta_t : \mathbf{R} \longrightarrow S$ را بهمان صورت

$$\beta_t(\theta) = (x_1(t), x_2(t)\cos\theta, x_2(t)\sin\theta)$$

تعریف می‌کنیم. خمهای α_θ را ***نصف النهارات*** S و دوایر β_t را ***مدارات*** S می‌گوییم (ر.ک. شکل ۷-۵).



شکل ۷-۵: ژئودزیهای یک رویه‌دوار: تمام نصف‌النهارات ژئودزی هستند، یک مدار ژئودزی است اگر "خم مولد C" را در یک نقطه که شیب C صفر است قطع نماید.

(الف). نشان دهید که نصف‌النهارات و مدارت همیشه یکدیگر را متعامداً قطع می‌نمایند یعنی:

$$\alpha'_\theta(t) \cdot \beta'_t(\theta) = 0 \text{ برای هر } t \in I \text{، } \theta \in \mathbf{R}.$$

(ب). نشان دهید که نصف‌النهار α_θ ژئودزی S است. **[راهنمایی:** توجه کنید که $\{\alpha'_\theta(t), \beta'_t(\theta)\}$

فضای S_p را تولید می‌کند، که در آن $p=\alpha_\theta(t)$. بنابراین کافی است تحقیق کنید که $\ddot{\alpha}_\theta(t)$ عمود بر $\dot{\alpha}_\theta(t)$ و $\dot{\beta}_t(\theta)$ می‌باشد.]

(پ). نشان دهید که یک مدار β_t ژئودزی است اگر و فقط اگر شیب $x_2'(t)/x_1'(t)$ خط مماس بر C در نقطه $\alpha(t)$ صفر باشد.

۷-۹ فرض کنید S یک n ـ رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد، $p\in S$، و $v\in S_p$. فرض کنید $\alpha: I\longrightarrow S$ ژئودزی بیشین S با سرعت آغازی v باشد. نشان دهید که β ژئودزی بیشین S با سرعت آغازی cv $(c\in\mathbf{R})$ با دستور $\beta(t)=\alpha(ct)$ ارائه می‌شود.

۷-۱۰. فرض کنید S یک n ـ رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد، $p\in S$، و $v\in S_p$. فرض کنید $\alpha: I\longrightarrow S$ ژئودزی بیشین S گذرنده از نقطها p با سرعت آغازی v باشد. نشان دهید که هرگاه $\beta: \tilde{I}\longrightarrow S$ هر ژئودزی S با شرط $\beta(t_\circ)=p$ و $\dot{\beta}(t_\circ)=v$ به ازای یک $t_\circ\in\tilde{I}$، آنگاه $\beta(t)=\alpha(t-t_\circ)$ برای هر $t\in\tilde{I}$.

۷-۱۱. فرض کنید S یک n ـ رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ و $\beta: I\longrightarrow S$ یک ژئودزی در S باشد با شرط $\beta(t_\circ)=\beta(\circ)$ و $\dot{\beta}(t_\circ)=\dot{\beta}(\circ)$ برای یک $t_\circ\in I$، $t_\circ\neq\circ$. با نشان دادن اینکه $\beta(t+t_\circ)=\beta(t)$ برای تمام t هایی که هم t و هم $t+t_\circ\in I$، نشان دهید که β دوره‌ای است **[راهنمایی:** تمرین ۷-۱۰ را بکار برید].

۷-۱۲. یک n ـ رویه S در $\mathbf{R}^{n+1}$ را کامل ژئودزیکی گوییم هرگاه هر ژئودزی بیشین S با دامنه $\mathbf{R}$ باشد. کدام یک از n ـ رویه‌های زیر کامل ژئودزیکی‌اند؟

(الف) n ـ کره: $x_1^2+\dots+x_{n+1}^2=1$.

(ب) n ـ کره با قطب شمال سوده: $x_1^2+\dots+x_{n+1}^2=1$ و $x_{n+1}\neq 1$.

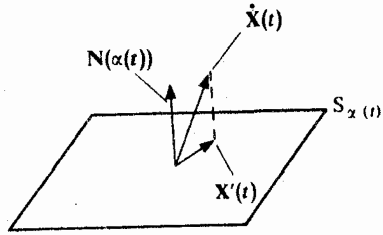
(پ) مخروط $x_1^2+x_2^2-x_3^2=\circ$ $x_3>\circ$ در $\mathbf{R}^3$.

(ت) استوانهٔ $x_1^2+x_2^2=1$ در $\mathbf{R}^3$.

(ث) استوانه در $\mathbf{R}^3$ با یک خط مستقیم سوده: $x_1^2+x_2^2=1$ و $x_1\neq 1$.

۸ـ ترابری موازی

یک میدان برداری $\mathbf{X}$ در طول یک خم پارامتری $\alpha : I \longrightarrow S$ در یک nـ رویه S را **مماس** بر S **در طول** α گوییم اگر $\mathbf{X}(t) \in S_{\alpha(t)}$ برای هر $t \in I$. با این حال $\dot{\mathbf{X}}$، مشتق این چنین میدان‌برداری در حالت کلی مماس بر S نیست. ولی می‌توان از تصویر قائم $\dot{\mathbf{X}}(t)$ بر $S_{\alpha(t)}$ به ازای هر $t \in I$ یک میدان برداری مماس بر S پیداکرد (ر.ک. شکل ۸-۱). این فرآیند مشتق‌گیری و سپس تصویر کردن بر روی فضای مماس بر S عملی را با خواص مشابه مشتق‌گیری تعریف می‌کند، به جز اینکه در این حالت مشتق‌گیری میدانهای برداری مماس بر S میدانهای برداری مماس بر S را به دست می‌دهند. این عمل را **مشتق‌گیری هموْرد (کواریانت)** گویند.



شکل ۸-۱ مشتق هموْرد $\mathbf{X}'(t)$ تصویر قائم مشتق معمولی $\dot{\mathbf{X}}(t)$ بر فضای مماس است.

فرض کنید S یک nـ رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ و $\alpha : I \longrightarrow S$ یک خم پارامتری در S باشد و فرض کنید $\mathbf{X}$ یک میدان برداری هموار در طول α مماس بر S باشد. **مشتق هموْرد** $\mathbf{X}$، میدان‌برداری $\mathbf{X}'$ در طول α مماس بر S به صورت

$$\mathbf{X}'(t) = \dot{\mathbf{X}}(t) - [\dot{\mathbf{X}}(t) \cdot \mathbf{N}(\alpha(t))]\, \mathbf{N}(\alpha(t))$$

تعریف می‌شود که در آن $\mathbf{N}$ یک سو روی S است. توجه داشته باشید که $\mathbf{X}'(t)$ مستقل از انتخاب $\mathbf{N}$ است. زیرا که تعویض $\mathbf{N}$ با $\mathbf{N}-$ در فرمول بالا هیچ تأثیری ندارد.

به سهولت می‌توان تحقیق کرد که مشتق‌گیری همورد دارای خواص زیر است. برای $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ میدانهای برداری هموار در طول یک خم پارامتری $\alpha : I \longrightarrow S$ مماس بر S و f یک تابع هموار درطول α، داریم

(یک) $(\mathbf{X}+\mathbf{Y})' = \mathbf{X}' + \mathbf{Y}'$

(دو) $(f\mathbf{X})' = f'\mathbf{X} + f\mathbf{X}'$

(سه) $(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})' = \mathbf{X}' \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}'$.

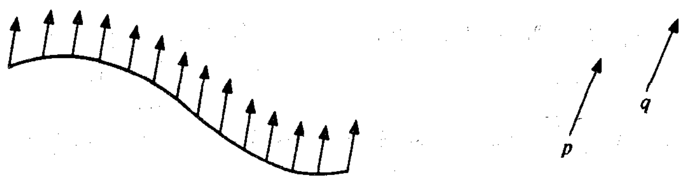
این خواص بلافاصله از خواص متناظر مشتق‌گیری معمولی نتیجه می‌شود. برای مثال، **محاسبه** زیر خاصیت (سه) را ثابت می‌کند.

$$\begin{aligned}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})' &= \dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{Y}} = [\mathbf{X}' + (\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{N}\circ\alpha)\, \mathbf{N}\circ\alpha] \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{X} \cdot [\mathbf{Y}' + (\dot{\mathbf{Y}} \cdot \mathbf{N}\circ\alpha)\, \mathbf{N}\circ\alpha] \\ &= \mathbf{X}' \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}'\end{aligned}$$

زیرا $\mathbf{N}$ بر S عمود و $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ مماس بر S می‌باشند.

به طور شهودی، $\mathbf{X}'$، مشتق هموردِ میزان تغییرات $\mathbf{X}$ را در طول خم α ***وقتی که از رویه S رویت شود*** (یعنی با چشم پوشی مؤلفهٔ قائم $\mathbf{X}$ بر S) را اندازه می‌گیرد. توجه دارید که خم $\alpha : I \longrightarrow S$ ژئودزی S است اگر و فقط اگر $(\dot{\alpha})'$، ***شتاب هموردش*** در طول α صفر باشد.

مشتق هموردِ به مفهوم توازی روی n- رویه منجر می‌شود. در $\mathbf{R}^{n+1}$، بردارهای $\mathbf{v} = (p, v) \in \mathbf{R}^{n+1}_p$ و $\mathbf{w} = (q, \omega) \in \mathbf{R}^{n+1}_q$ ***موازی اقلیدسی*** می‌باشند هرگاه $v = \omega$ (ر.ک. شکل ۸-۲ الف).



(ب) (الف)

شکل ۸-۲ توازی اقلیدسی در $\mathbf{R}^2$: (الف) بردارهای موازی (ب) یک میدان برداری موازی

یک میدان برداری $\mathbf{X}$ در طول یک خم $\alpha : I \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ موازی اقلیدسی است اگر برای هر $t_1 , t_2 \in I$ ، $X(t_1) = X(t_2)$، که در آن: $\mathbf{X}(t) = (\alpha(t) , X(t))$ برای $t \in I$ (ر.ک. شکل ۸-۲ ب). در نتیجه $\mathbf{X}$ موازی اقلیدسی در طول α است اگر و فقط اگر $\dot{\mathbf{X}} = 0$.

برای یک n ـ رویه S در $\mathbf{R}^{n+1}$ مفروض و یک خم پارامتری $\alpha : I \longrightarrow S$، یک میدان برداری $\mathbf{X}$ که در طول α مماس بر S است ***موازی لوی ـ سیوتیا*** یا صرفاً ***موازی*** گویند اگر $\mathbf{X}' = 0$. به طور شهودی، $\mathbf{X}$ موازی درطول α است اگر یک میدان برداری ثابت درطول α باشد وقتی که از S رؤیت شود.

توجه داشته باشید که توازی لوی ـ سیوتیا دارای خواص زیر می‌باشد:

(یک) هرگاه $\mathbf{X}$ موازی در طول α باشد، آنگاه $\mathbf{X}$ دارای طول ثابت است، زیرا که

$$\frac{d}{dt} \| \mathbf{X} \|^2 = \frac{d}{dt} (\mathbf{X} . \mathbf{X}) = 2\,\mathbf{X}' . \mathbf{X} = 0 \ .$$

(دو) هرگاه $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ دو میدان برداری موازی در طول α باشند، آنگاه $\mathbf{X.Y}$ در طول α ثابت است، زیرا که

$$(\mathbf{X.Y})' = \mathbf{X}'.\mathbf{Y} + \mathbf{X}.\mathbf{Y}' = 0 \ .$$

(سه) هرگاه $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ دو میدان برداری موازی درطول α باشند، آنگاه زاویه بین $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ در طول α یعنی $\cos^{-1}(\mathbf{X.Y} / \| \mathbf{X} \| \ \| \mathbf{Y} \|)$ ثابت است زیرا که $\mathbf{X.Y}$ ، $\| \mathbf{X} \|$ و $\| \mathbf{Y} \|$ هر یک در طول α ثابتند.

(چهار) هرگاه $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ در طول α موازی باشند آنگاه $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ و $c\mathbf{X}$ برای هر $c \in \mathbf{R}$ نیز موازیند.

(پنج) میدان برداری سرعت در طول یک خم α در S موازی است اگر و فقط اگر α ژئودزی باشد.

● **قضیهٔ ۱.** ***فرض کنید S یک n ـ رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ و $\alpha : I \longrightarrow S$ یک خم پارامتری در S باشد و فرض کنید $t_0 \in I$ و $v \in S_{\alpha(t_0)}$. آنگاه یک میدان برداری یکتای $\mathbf{V}$ مماس بر S در طول وجود دارد به قسمی که موازی است و $\mathbf{V}(t_0) = v$.***

برهان. لازم است میدان برداری $\mathbf{V}$ در طول α مماس بر S باشد و در شرط $\mathbf{V}' = 0$ صدق کند. ولی

$$\begin{aligned} \mathbf{V}' &= \dot{\mathbf{V}} - (\dot{\mathbf{V}} . \mathbf{N}\circ\alpha)\, \mathbf{N}\circ\alpha = \dot{\mathbf{V}} - [(\mathbf{V} . \mathbf{N}\circ\alpha)' - \mathbf{V} . \dot{\mathbf{N}}\circ\alpha]\, \mathbf{N}\circ\alpha \\ &= \dot{\mathbf{V}} + (\mathbf{V} . \dot{\mathbf{N}}\circ\alpha)\, \mathbf{N}\circ\alpha \ . \end{aligned}$$

بنابراین $\mathbf{V}' = 0$ اگر و فقط اگر $\mathbf{V}$ در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\dot{\mathbf{V}} + (\mathbf{V} . \mathbf{N} \circ \alpha)\, \dot{\mathbf{N}} \circ \alpha = 0 \qquad (P)$$

صدق کند. این یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه اول از $\mathbf{V}$ است. (اگر بنویسیم $\mathbf{V}(t) = (\alpha(t), V_1(t), \ldots, V_{n+1}(t))$ این معادله دیفرانسیل برداری دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول

$$\frac{dV_i}{dt} + \sum_{j=1}^{n+1} (N_i \circ \alpha)\, (N_j \circ \alpha)'\, V_j = 0$$

می‌باشد که در آن ($j \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ و N_j ها مؤلفه‌های $\mathbf{N}$ هستند).

بنابر قضیهٔ وجود و قضیهٔ یکتایی جوابهای معادلات دیفرانسیل مرتبه اول میدان برداری یکتایی مانند $\mathbf{V}$ در طول α وجود دارد که در معادله (P) با شرط آغازی $\mathbf{V}(t_0) = \mathbf{v}$ صدق می‌کند (یعنی $V_i(t_0) = v_i$ برای $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ که در آن $\mathbf{v} = (\alpha(t_0), v_1, \ldots, v_{n+1})$). قضیهٔ وجود و قضیهٔ یکتایی با این حال تضمینی برای مماس بودن $\mathbf{V}$ در طول α بر S ندارد. برای ملاحظه اینکه $\mathbf{V}$ در واقع مماس بر S است باید توجه کرد که بنابر (P)

$$(\mathbf{V} . \mathbf{N} \circ \alpha)' = \dot{\mathbf{V}} . \mathbf{N} \circ \alpha + \mathbf{V} . \dot{\mathbf{N}} \circ \alpha$$

$$= [-(\mathbf{V} . \dot{\mathbf{N}} \circ \alpha)\, \mathbf{N} \circ \alpha] . \mathbf{N} \circ \alpha + \mathbf{V} . \dot{\mathbf{N}} \circ \alpha$$

$$= -\mathbf{V} . \dot{\mathbf{N}} \circ \alpha + \mathbf{V} . \mathbf{N} \circ \alpha = 0 ,$$

و در نتیجه $\mathbf{V}.\mathbf{N} \circ \alpha$ در طول α ثابت است و چون $(\mathbf{V}.\mathbf{N} \circ \alpha)(t_0) = \mathbf{V}.\mathbf{N}(\alpha(t_0)) = 0$، این ثابت باید صفر باشد. بالاخره، میدان برداری $\mathbf{V}$ در طول α بر S مماس است، موازی است چراکه در معادله (P) صدق می‌کند. □

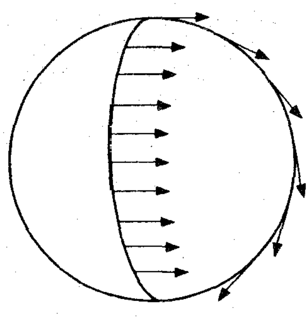
تذکر. در اثبات بالا ما به طور ضمنی فرض کردیم که جواب $\mathbf{V}$ از معادلهٔ (P) که در شرط $\mathbf{V}(t_0) = \mathbf{v}$ صدق می‌کند در واقع در تمام بازهٔ I تعریف شده و نه در یک بازهٔ کوچکتر آن شامل t_0. این مطلب را می‌توان در واقع از استدلال زیر نتیجه گرفت. فرض کنید $\bar{I} \subset I$ بازهٔ بیشینی باشد که در آن یک جواب $\mathbf{V}$ از معادلهٔ (P) با شرط $\mathbf{V}(t_0) = \mathbf{v}$ وجود داشته باشد اگر $\bar{I} \neq I$ یک نقطه انتهایی b از $\bar{I}$ با شرط $b \in I$ وجود دارد. فرض کنید $\{t_i\}$ دنباله‌ای در $\bar{I}$ باشد به قسمی که $\lim_{i \to \infty} t_i = b$. چون $\|\mathbf{V}\|$ در $\bar{I}$ ثابت

است، برای هر i $\|\mathbf{V}(t_i)\| = \|\mathbf{v}\|$ ، بنابراین دنبالهٔ $\{V(t_i)\}$ از قسمتهای برداری $\{\mathbf{V}(t_i)\}$ مقادیر خود را دریک مجموعهٔ فشرده که همان کره به شعاع $\|\mathbf{v}\|$ در حول مرکز در $\mathbf{R}^{n+1}$ است، اختیار می‌کند. از آن نتیجه می‌شود که $\{V(t_i)\}$ باید یک زیر دنبالهٔ همگرا مانند $\{V(t_{i_k})\}$ داشته باشد. فرض کنید $w = \lim_{k\to\infty} V(t_{i_k})$ و فرض کنیدَ $\mathbf{W}$ جوابی از (P) در یک بازهٔ J شامل b باشد به قسمی که $\mathbf{W}(b) = (\alpha(b), w)$. در این صورت $\mathbf{W} - \mathbf{V}$ نیز جوابی از (P) در $\bar{I}\cap J$ می‌باشد و در حالت خاص $\|\mathbf{W} - \mathbf{V}\|$ در $\bar{I}\cap J$ ثابت است. ولی

$$\lim_{k\to\infty} \|W(t_{i_k}) - V(t_{i_k})\| = \|w - w\| = 0$$

بنابراین $\|\mathbf{W} - \mathbf{V}\| = 0$ در $J\cap\bar{I}$ ؛ یعنی $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ در $J\cap\bar{I}$. در نتیجه میدان برداری در $\bar{I}\cup J$ که در $\bar{I}$ برابر $\mathbf{V}$، در J برابر $\mathbf{W}$ باشد $\mathbf{V}$ را به جوابی از (P) بر روی بازه‌ای بزرگتر از $\bar{I}$ گسترش می‌دهد که با بیشین بودن $\bar{I}$ متناقض است. بنابراین همانطور که ادعا شده بود $\bar{I} = I$.

● **نتیجه** . *فرض کنید S یک ۲ـ رویه در $\mathbf{R}^3$ و $\alpha : I \longrightarrow S$ **یک ژئودزی S با شرط** $\alpha' \neq 0$ **باشد. در این صورت یک میدان برداری X مماس بر S در طول** α **موازی است اگر و فقط اگر هم** $\|X\|$ **و هم زاویه بین X و** $\dot\alpha$ **در طول** α **ثابت باشند** (ر.ک. شکل ۸-۳).*



شکل ۸-۳ میدانهای برداری موازی لوی ـ سیویتا در طول ژئودزی‌های ۲ـ کره.

برهان. شرط لازم نتیجه‌ای فوری از خواص (یک) و (سه) بالاست. بنابراین فرض کنید که هم $\|\mathbf{X}\|$ و هم زاویه θ بین $\mathbf{X}$ و $\dot\alpha$ در طول α ثابت باشند. فرض کنید $t_0 \in I$ و $\mathbf{v} \in S_{\alpha(t_0)}$ یک برداریکه عمود بر $\dot\alpha(t_0)$ باشد. اگر $\mathbf{V}$ میدان برداری موازی یکتا در طول α باشد به قسمی که $\mathbf{V}(t_0) = \mathbf{v}$، آنگاه

$\|\mathbf{V}\| = 1$ و $\mathbf{V}.\alpha^{\cdot} = 0$ در طول α، لذا $\{\alpha^{\cdot}(t),\mathbf{V}(t)\}$ یک پایهٔ متعامد $S_{\alpha(t)}$ به ازای هر $t\in I$ می‌باشد. به ویژه توابع هموار $g : I \longrightarrow \mathbf{R}$ و f وجود دارند به قسمی که $\mathbf{X} = f\alpha^{\cdot} + g\mathbf{V}$. چون

$$\cos\theta = \mathbf{X}.\alpha^{\cdot} / \|\mathbf{X}\| \ \|\alpha^{\cdot}\| = f\|\alpha^{\cdot}\| / \|\mathbf{X}\|$$

و

$$\|\mathbf{X}\|^2 = f^2 \ \|\alpha^{\cdot}\|^2 + g^2.$$

بنابراین از ثابت بودن θ، $\|\mathbf{X}\|$ و $\|\alpha^{\cdot}\|$ در طول α ایجاب می‌شود که f و g در طول α ثابت می‌باشند. بنابراین $\mathbf{X}$ بنابرخاصیت (چهار) بالا در طول α موازی است. □

توازی را می‌توان جهت ترابری بردارهای مماس از یک نقطهٔ n ـ رویه به نقطه دیگری بکار برد. دو نقطه p و q در یک n ـ رویهٔ S مفروض است، یک ***خم پارامتری در S از p و q*** یک نگاشت هموار از یک بازهٔ بسته $[a,b]$ به S به صورت $\alpha : [a,b] \longrightarrow S$ می‌باشد به قسمی که $\alpha(a) = p$ و $q = \alpha(b)$. منظور از ***هموار بودن*** یک نگاشت α در یک بازهٔ بسته این است که α تحدید یک نگاشت هموار از یک بازهٔ باز شامل $[a,b]$ در S باشد. هر خم پارامتری $\alpha:[a,b] \longrightarrow S$ از p و q یک نگاشت $p_\alpha : S_p \longrightarrow S_q$ به صورت

$$p_\alpha(\mathbf{v}) = \mathbf{V}(b)$$

معین می‌کند که در آن $\mathbf{v} \in S_p$ و $\mathbf{V}$ میدان برداری موازی یکتا در طول α با شرط $\mathbf{V}(a) = \mathbf{v}$ می‌باشد. $p_\alpha(\mathbf{v})$ را ***ترابری موازی*** (یا ***انتقال موازی***) $\mathbf{v}$ در طول α به q گویند.

مثال. برای $\theta \in \mathbf{R}$، $\alpha_\theta : [0 , \pi] \longrightarrow S^2$ را خم پارامتری در ۲ـکرهٔ یکه S^2 می‌گیریم که قطب شمال $p = (0 , 0 , 1)$ به قطب جنوب $q = (0 , 0 , -1)$ که به صورت زیر باشد

$$\alpha_\theta(t) = (\cos\theta \sin t , \sin\theta \sin t , \cos t) .$$

در نتیجه به ازای هر θ، α_θ نیمی از یک دایره عظیمه در S^2 است (ر.ک. شکل ۸-۴). فرض کنید $\mathbf{v} = (p,1,0,0) \in S^2_p$. چون α_θ در S^2 ژئودزی است یک میدان برداری مماس بر S^2 در طول α_θ موازی خواهد بود اگر و فقط اگر دارای طول ثابت باشد و همواره زاویه ثابتی با $\alpha^{\cdot}_\theta$ داشته باشد. میدان

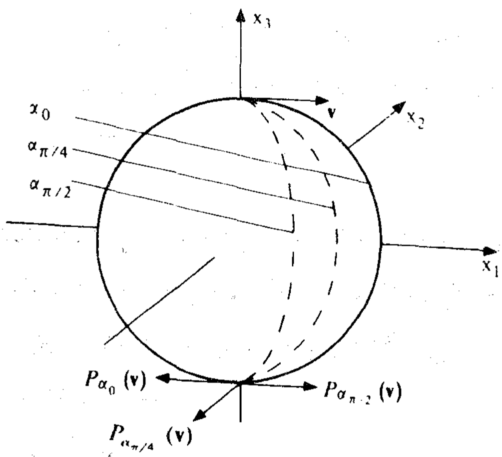
برداری موازی با مقدار آغازی $\mathbf{v}$ عبارت است از

$$\mathbf{V}_\theta(t) = (\cos\theta)\, \alpha'_\theta(t) - (\sin\theta)\mathbf{N}(\alpha_\theta(t)) \times \alpha'_\theta(t)$$

که در آن $\mathbf{N}$ سوی خارجی در S^2 می‌باشد. بنابراین

$$P_{\alpha_\theta}(\mathbf{v}) = \mathbf{V}_\theta(\pi) = (\cos\theta)\,(q, -\cos\theta, -\sin\theta, 0) - (\sin\theta)\,(q, -\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

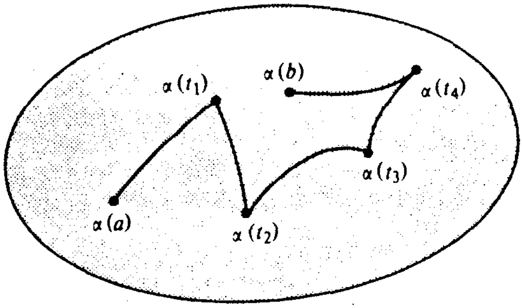
$$= -(q, \cos 2\theta, \sin 2\theta, 0).$$



شکل ۸-۴ : ترابری موازی در طول ژئودزی ۲-کره

توجه دارید که ترابری موازی از نقطه p به q وابسته به مسیر است: یعنی هرگاه α و β دو خم پارامتری در S از p به q باشند و $\mathbf{v} \in S_p$ برای $p \in S$، آنگاه در حالت کلی $p_\alpha(\mathbf{v}) \neq p_\beta(\mathbf{v})$.

بردارهای مماس $\mathbf{v} \in S_p$ برای $p \in S$ را همچنین می‌توان در طول خمهای تکه‌ای هموار S انتقال داد. یک ***خم پارامتری تکه‌ای هموار*** α در S یک نگاشت پیوسته $\alpha : [a,b] \longrightarrow S$ می‌باشد به قسمی که تحدید α به $[t_i, t_{i+1}]$ به ازای $i = \{0, 1, \dots, k\}$ که در آن $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = b$ هموار است. (ر.ک.شکل ۸-۵).



شکل ۸-۵ : یک خم تکه‌ای هموار α در یک ۲ـ رویه

ترابری موازی $\mathbf{v} \in S_{\alpha(a)}$ در طول α به $\alpha(b)$ را می‌توان با انتقال $\mathbf{v}$ در طول α به $\alpha(t_1)$ به دست آورد تا اینکه $\mathbf{v}_1 \in S_{\alpha(t_1)}$ حاصل شود، آنگاه $\mathbf{v}_1$ را در طول α به $\alpha(t_2)$ انتقال می‌دهیم تا اینکه $\mathbf{v}_2 \in S_{\alpha(t_2)}$ حاصل شود و بهمین ترتیب عمل را ادامه دهیم، بالاخره $p_\alpha(\mathbf{v})$ را با انتقال $\mathbf{v}_k \in S_{\alpha(t_k)}$ در طول α به $\alpha(b)$ به دست می‌آوریم.

● **قضیهٔ ۲.** ***فرض کنید S یک n - رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد، $p, q \in S$ و α یک خم پارامتری تکه‌ای هموار از p باشد. در این صورت ترابری توازی $P_\alpha : S_p \longrightarrow S_q$ در طول α یکریختی فضای برداری است که ضرب داخلی را حفظ می‌کند، یعنی***

(یک) P_α یک نگاشت خطی است

(دو) P_α یک به یک و پوشاست

(سه) $P_\alpha(\mathbf{v}) . P_\alpha(\mathbf{w}) = \mathbf{v} . \mathbf{w}$ برای تمام $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in S_p$.

برهان. خاصیت (یک) نتیجه‌ای فوری از این حقیقت است که هرگاه $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ میدانهای برداری موازی در طول یک خم پارامتری S باشد، آنگاه $\mathbf{V}+\mathbf{W}$ و $c\mathbf{V}$ برای هر $c \in \mathbf{R}$ نیز این چنین هستند. به طور مشابه خاصیت (سه) از این حقیقت نتیجه می‌شود که هرگاه $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ موازی باشند، آنگاه $\mathbf{V}.\mathbf{W}$ ثابت است. بالاخره هستهٔ (فضای پوچ) P_α صفر است زیرا که $\| P_\alpha(\mathbf{v}) \| = 0$ و بر خاصیت (سه) ایجاب می‌کند که $\| \mathbf{v} \| = 0$ ، بنابراین P_α یک نگاشت خطی یک به یک از یک فضای برداری n ـ بعدی به یک فضای n - بعدی دیگر است ولی چنین نگاشتهایی پوشا هستند. □

تمرین

۸-۱. فرض کنید S یک n ـ رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد، $\alpha : I \longrightarrow S$ را یک خم پارامتری و $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ را میدانهای برداری مماس بر S در طول α بگیرید. تحقیق کنید که

(الف) $(\mathbf{X}+\mathbf{Y})' = \mathbf{X}' + \mathbf{Y}'$

(ب) $(f\mathbf{X})' = f'\mathbf{X} + f\mathbf{X}'$

برای تمام توابع هموار f در طول α

۸-۲. فرض‌کنید S یک n ـ صفحه $a_1 x_1 + \dots + a_{n+1} x_{n+1} = b$ در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد، $q \in S$ و p و $(p,v) = \mathbf{v}$. نشان دهید که هرگاه α یک خم پارامتری S از p به q باشد، آنگاه $P_\alpha(\mathbf{v}) = (q,v)$. نتیجه بگیرید که در یک n ـ صفحه ترابری موازی مستقل از مسیر است.

۸-۳. فرض کنید $\alpha : [0 , \pi] \longrightarrow S^2$ دایره عظیمه در S^2 باشد که از قطب شمال $p = (0,0,1)$ به قطب جنوب $q = (0,0,-1)$ عبور می‌کند و به صورت $\alpha(t) = (\sin t , 0 , \cos t)$ تعریف شده باشد نشان دهید که برای $\mathbf{v} = (p , v_1 , v_2 , 0) \in S_p^2$، $P_\alpha(\mathbf{v}) = (q , v_1 , v_2 , 0)$. **[راهنمایی:** این مطلب را در آغاز برای $\mathbf{v} = (p,1,0,0)$ و $\mathbf{v} = (p,0,1,0)$ تحقیق کنید، سپس از خطی بودن P_α استفاده کنید.]

۸-۴. فرض کنید P یک نقطه در ۲ـکرهٔ S^2 باشد و $\mathbf{w} \in S_p^2$ و $\mathbf{v}$ به قسمی باشند که $\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|$. نشان دهید که یک خم پارامتری تکه‌ای هموار $\alpha : [a , b] \longrightarrow S^2$ با شرط $p = \alpha(a) = \alpha(b)$ وجود دارد به قسمی که $P_\alpha(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. **[راهنمایی:** خم بسته α با شرط $\dot\alpha(a) = \mathbf{v}$، متشکل از مثلثهای ژئودزیک با شرط $\alpha(t) \perp p$ برای t های در ״قطعه میانی״ [a,b] را در نظر بگیرید.]

۸-۵. فرض کنید $\alpha : I \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ یک خم پارامتری با شرط $\alpha(t) \in S_1 \cap S_2$ برای همه $t \in I$ باشد، که در آن S_1 و S_2 دو n ـ رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ است. فرض کنید $\mathbf{X}$ یک میدان برداری در طول α باشد که هم بر S_1 و هم بر S_2 مماس باشد.

(الف) با مثال نشان دهید که $\mathbf{X}$ می‌تواند در طول α به عنوان خمی از S_1 موازی باشد ولی در طول α

به عنوان خمی از S_2 موازی نباشد.

(ب) نشان دهید که هرگاه S_1 و S_2 در طول α بر هم مماس باشند (یعنی $(S_1)_{\alpha(t)} = (S_2)_{\alpha(t)}$ برای هر $t \in I$)، آنگاه $\mathbf{X}$ در طول α موازی در S_1 است اگر و فقط اگر در طول α در S_2 موازی باشد.

(پ) نشان دهید که هرگاه S_1 و S_2 در طول خم $\alpha : I \longrightarrow S_1 \cap S_2$ بر هم مماس باشند، آنگاه α ژئودزی S_1 است اگر وفقط اگر α ژئودزی S_2 باشد.

۸-۶. فرض کنید S یک n ـ رویه و $\alpha : I \longrightarrow S$ یک خم پارامتری S باشد. فرض کنید $\beta : \bar{I} \longrightarrow S$ به صورت $\beta = \alpha \circ h$ تعریف شده باشد که در آن $h : \bar{I} \longrightarrow I$ یک تابع هموار با شرط $h'(t) \neq 0$ برای تمام $t \in \bar{I}$ باشد، نشان دهید که یک میدان برداری $\mathbf{X}$ مماس بر S در طول α موازی است اگر و فقط اگر $\mathbf{X} \circ h$ در طول β موازی باشد. از آن نتیجه بگیرید که ترابری توازی از $p \in S$ به $q \in S$ در طول یک خم پارامتری α در S با ترابری توازی از p به q در طول هر پارامتر سازی مجدد α یکسان است، و ترابری توازی از p به q درطول $\alpha \circ h$ برای $h(t) = -t$ وارون ترابری توازی از p به q در طول α است.

۸-۷. فرض کنید S یک n ـ رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد، $p \in S$ و G_p نشانگر گروه تبدیلات خطی غیر منفرد از S_p به خودش باشد. قرار دهید

$H_p = \{T \in G_p : T = P_\alpha$ ، $\alpha(a) = \alpha(b) = p$ با شرایط $\alpha : [a, b] \longrightarrow S$ برای یک خم تکه‌ای هموار$\}$

به ترتیب زیر نشان دهید که H_p زیر گروهی از G_p است.

(یک) به ازای هر جفت خم تکه‌ای هموار α و β در S از p به q خم تکه‌ای هموار مانند γ از p به q وجود دارد به قسمی که

$$P_\gamma = P_\beta \circ P_\alpha ,$$

(دو) به ازای هر α در S از p به q یک β در S از p به p وجود دارد به قسمی که $P_\beta = p_\alpha^{-1}$.

(زیر گروه H_p را ***گروه هلونومی (تمام اسم)*** S در p گویند).

۸-۸. فرض کنید $\alpha : I \longrightarrow S$ خمی با تندی یکه در n ـ رویه S باشد و $\mathbf{X}$ یک میدان برداری هموار

مماس بر S در طول α باشد به قسمی که همیشه عمود بر α باشد (یعنی : $(\mathbf{X}(t)) \cdot \alpha'(t) = 0$) برای هر $t\in I$) $\mathbf{X}'$ ***مشتق فِرمی*** $\mathbf{X}$ را به صورت

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{X}'(t) - [\mathbf{X}' \cdot \alpha'(t)]\, \alpha'(t)$$

تعریف می‌کنیم.

(الف) نشان دهید که هرگاه $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ میدانهای برداری هموار درطول α باشند که بر S مماس و بر α عمود باشند، آنگاه

(یک) $(\mathbf{X}+\mathbf{Y})' = \mathbf{X}' + \mathbf{Y}'$

(دو) $(f\mathbf{X})' = f'\mathbf{X} + f\mathbf{X}'$ برای هر تابع هموار f در طول α، و

(سه) $(\mathbf{X}.\mathbf{Y})' = \mathbf{X}'.\mathbf{Y} + \mathbf{X}.\mathbf{Y}'$.

(ب) نشان دهید که هرگاه $a \in I$ و $\mathbf{v}\in S_{\alpha(a)}$ عمود بر $\alpha'(a)$ باشد، آنگاه میدان برداری یکتای $\mathbf{V}$ مماس بر S در طول α و عمود بر α وجود دارد به قسمی که $\mathbf{V}' = 0$ و $\mathbf{V}(a) = \mathbf{v}$ ($\mathbf{V}$ را ***توازی فِرمی*** در طول α گویند).

(پ) برای $\alpha : [a,b] \longrightarrow S$ یک خم پارامتری S و $\mathbf{v}\in S_{\alpha(a)}$ با شرط $\mathbf{v}\perp\alpha'(0)$، $F_\alpha(\mathbf{v}) = \mathbf{V}(b)$ بگیرید که در آن $\mathbf{V}$ مانند قسمت (ب) است. نشان دهید که F_α یک یکریختی برداری از $\alpha'(a)^\perp$ روی $\alpha'(b)^\perp$ می‌باشد، که در آن $\alpha'(t)^\perp$ متمم متعامد $\alpha'(t)$ در $S_{\alpha(t)}$ می‌باشد. همچنین نشان دهید که F_α ضرب داخلی را حفظ می‌کند. ($F_\alpha(\mathbf{v})$ ***ترابری فِرمی*** $\mathbf{v}$ در طول α به $\alpha(b)$ است.)

۹- نگاشت وینگارتن

اینک رفتار موضعی خمیدگی (انحنای) یک n - رویه را مورد بررسی قرارمی‌دهیم. نحوه‌ای که یک n - رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ در جهات مختلف خمیده می‌شود توسط تغییرات جهت قائم وقتی که از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر رویه حرکت می‌کنیم اندازه‌گیری می‌شود. برای اینکه میزان تغییر جهت قائم را اندازه‌گیری کنیم احتیاج به مشتق‌گیری میدانهای برداری روی n - رویه‌ها داریم.

یادآوری می‌کنیم که اگر f یک تابع هموار روی یک مجموعه باز U در $\mathbf{R}^{n+1}$ و یک بردار $\mathbf{v}\in\mathbf{R}_p^{n+1}$ ، $p \in U$ مفروض باشد، در این صورت **مشتق** f نسبت به $\mathbf{v}$ عدد حقیقی

$$\nabla_{\mathbf{v}} f = (f\circ\alpha)'(t_\circ)$$

می‌باشد که در آن $\alpha: I \longrightarrow U$ یک خم پارامتری در U با شرط $\dot{\alpha}(t_\circ) = \mathbf{v}$ می‌باشد. توجه دارید که اگر چه خم α در فرمول تعریف $\nabla_{\mathbf{v}} f$ ظاهر شده است، لیکن مقدار مشتق بستگی به انتخاب α ندارد. در واقع بنا بر قاعدهٔ زنجیری

$$\nabla_{\mathbf{v}} f = (f\circ\alpha)'(t_\circ) = \nabla f(\alpha(t_\circ)) \,.\, \dot{\alpha}(t_\circ) = \nabla f(p) \,.\, \mathbf{v}.$$

این فرمول که $\nabla_{\mathbf{v}} f$ را برحسب گرادیان f بیان می‌کند، نشان می‌دهد که مقدار $\nabla_{\mathbf{v}} f$ مستقل از انتخاب خم α است که از نقطهٔ p با سرعت $\mathbf{v}$ می‌گذرد. اغلب این مفیدترین فرمول جهت استفاده در محاسبات است. این فرمول همچنین نشان می‌دهد که تابعی که $\mathbf{v}$ را به $\nabla_{\mathbf{v}} f$ می‌برد یک نگاشت خطی از $\mathbf{R}_p^{n+1}$ به $\mathbf{R}$ است، یعنی

$$\nabla_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} f = \nabla_{\mathbf{v}} f + \nabla_{\mathbf{w}} f$$

$$\nabla_{c\mathbf{v}} f = c\, \nabla_{\mathbf{v}} f$$

برای هر $\mathbf{w} \in \mathbf{R}_p^{n+1}$ و $\mathbf{v}$ و هر $c \in \mathbf{R}$.

توجه دارید که $\nabla_{\mathbf{v}} f$ هم به طول $\mathbf{v}$ و همچنین به جهت $\mathbf{v}$ وابسته است. فرمول $\nabla_{2\mathbf{v}} f = 2\, \nabla_{\mathbf{v}} f$ برای مثال این حقیقت را نشان می‌دهد که اگر دوبار سریعتر از نقطه p بگذریم، میزان تغییر مورد بررسی f دو برابر می‌شود.

وقتی که $\|\mathbf{v}\| = 1$، مشتق $\nabla_{\mathbf{v}} f$ را **مشتق جهتی** f در نقطهٔ p در جهت ϖ گویند. برای یک n - رویه S مفروض در $\mathbf{R}^{n+1}$ و یک تابع هموار $f:S \longrightarrow \mathbf{R}$، **مشتق** آن نسبت به یک بردار $\mathbf{v}$ مماس بر S به طور مشابه به صورت

$$\nabla_{\mathbf{v}} f = (f \circ \alpha)'(t_0)$$

تعریف می‌شود که در آن $\alpha: I \longrightarrow S$ یک خم پارامتری در S با شرط $\alpha'(t_0) = \mathbf{v}$ می‌باشد. توجه دارید که مقدار $\nabla_{\mathbf{v}} f$ مستقل از خم α در S که از نقطه p با سرعت $\mathbf{v}$ می‌گذرد می‌باشد، زیرا که

$$\nabla_{\mathbf{v}} f = (f \circ \alpha)'(t_0) = \nabla f(\alpha(t_0)) \,.\, \alpha'(t_0) = \nabla f(p) \,.\, \mathbf{v}$$

که در آن $f:U \longrightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار تعریف شده روی یک مجموعه باز U شامل S می‌باشد که تحدیدش به S، f است. از این فرمول آخر نتیجه می‌شود که تابعی که $\mathbf{v}$ را به $\nabla_{\mathbf{v}} f$ می‌برد یک نگاشت خطی از S_p به $\mathbf{R}$ است.

مشتق یک میدان برداری هموار $\mathbf{X}$ روی یک مجموعهٔ باز U در R^{n+1} نسبت به یک بردار $\mathbf{v} \in \mathbf{R}_p^{n+1}$، $p \in U$ به صورت

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{X} = (\mathbf{X} \circ \alpha)'(t_0)$$

تعریف می‌شود که دران $\alpha: I \longrightarrow U$ یک خم پارامتری در U است به قسمی که $\alpha'(t_0) = \mathbf{v}$. در حالتی که $\mathbf{X}$ یک میدان برداری هموار روی یک n - رویه S در $\mathbf{R}^{n+1}$ و $\mathbf{v}$ یک بردار مماس بر S در نقطهٔ p باشد، مشتق $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{X}$ با فرمول یکسانی تعریف می‌شود، که در این صورت α لازم است یک خم

پارامتری S با شرط $\mathbf{v} = \dot{\alpha}(t_\circ)$ باشد. توجه دارید که در هر دو حالت $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{X} \in \mathbf{R}p^{n+1}$ و

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X} = (\alpha(t_\circ), (X_1 \circ \alpha)'(t_\circ), \dots, (X_{n+1} \circ \alpha)'(t_\circ))$$

$$= (p, \nabla_{\mathbf{v}} X_1, \dots, \nabla_{\mathbf{v}} X_{n+1})$$

که در آن X_i مؤلفه‌های $\mathbf{X}$ است. در حالت خاص، مقدار $\nabla_{\mathbf{v}} X$ بستگی به انتخاب α ندارد.

به سهولت می‌توان تحقیق کرد (تمرین ۹-۴) که مشتق‌گیری میدانهای برداری دارای خواص زیر می‌باشد:

(یک) $$\nabla_{\mathbf{v}} (\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{X} + \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{Y}$$

(دو) $$\nabla_{\mathbf{v}} (f\mathbf{X}) = (\nabla_{\mathbf{v}} f)\, \mathbf{X}(p) + f(p)\, (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{X})$$

(سه) $$\nabla_{\mathbf{v}} (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) = (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{X}) \cdot \mathbf{Y}(p) + \mathbf{X}(p) \cdot (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{Y})$$

که در آن $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ میدانهای برداری روی U (یاروی S) و تابع $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$ (یا $f:S \longrightarrow \mathbf{R}$) هموار می‌باشند. در اینجا منظور از $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ از دو میدان برداری $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ میدان برداری است که به صورت $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})(q) = \mathbf{X}(q) + \mathbf{Y}(q)$ تعریف شده است، حاصلضرب یک تابع f و یک میدان برداری $\mathbf{X}$ میدان برداری است که به صورت $(f\,\mathbf{X})(q) = f(q) \cdot \mathbf{X}(q)$ تعریف شده است، و ضرب داخلی میدانهای $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ تابعی است که به صورت $(\mathbf{X}.\mathbf{Y})\,(q) = \mathbf{X}(q) \cdot \mathbf{Y}(q)$ برای هر $q \in U$ (یا برای هر $q \in S$) تعریف شده است. علاوه بر این، برای هر میدان برداری هموار $\mathbf{X}$، تابعی که $\mathbf{v}$ را به $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{X}$ می‌برد یک نگاشت خطی از $\mathbf{R}^{n+1}_p$ به $\mathbf{R}^{n+1}_p$ است اگر $\mathbf{X}$ یک میدان برداری روی یک مجموعهٔ باز U باشد، و از S_p به $\mathbf{R}^{n+1}_p$ است اگر $\mathbf{X}$ یک میدان برداری روی یک n ـ رویهٔ S باشد.

توجه دارید که مشتق $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{X}$ از یک میدان برداری $\mathbf{X}$ روی یک n ـ رویه S نسبت به یک بردار مماس $\mathbf{v}$ بر S در $p \in S$ عموماً بر S مماس نیست. در فصلهای آخر ما بررسی $D_{\mathbf{v}}\mathbf{X}$ مؤلفهٔ مماسی $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{X}$ یعنی:

$$D_{\mathbf{v}} \mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{X} - (\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X} \cdot \mathbf{N}(p))\, \mathbf{N}(p)$$

که در آن $\mathbf{N}$ یک سو روی S است، مفید می‌یابیم. $D_{\mathbf{v}} \mathbf{X}$ را **مشتق همورد** میدان برداری $\mathbf{X}$ نسبت به

$\mathbf{v}\in S_p$ گویند. توجه دارید $D_{\mathbf{v}}(\mathbf{X}) = (\mathbf{X}\circ\alpha)'(t_\circ)$، که در آن $\alpha: I \longrightarrow S$ یک خم پارامتری S با شرط $\dot{\alpha}(t_\circ) = \mathbf{v}$ می‌باشد. مشتق همورد دارای خواص مشابه (یک) تا (سه) بالا دارد (که در آن ∇ را با D جایگزین کنیم). (ر.ک. تمرین ۹-۵). علاوه بر این، به ازای هر میدان برداری مماس $\mathbf{X}$ بر S، تابعی که $\mathbf{v}$ را به $D_{\mathbf{v}}\mathbf{X}$ می‌برد یک نگاشت خطی از S_p به S_p است.

اینک ما آماده برای مطالعهٔ میزان تغییرات $\mathbf{N}$ ـ جهت قائم روی یک n ـ رویه سودار S در $\mathbf{R}^{n+1}$ ـ می‌باشیم. توجه دارید که برای $p\in S$ و $\mathbf{v}\in S_p$، $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N}$ مماس بر S (یعنی $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N} \perp \mathbf{N}(p)$)، زیرا که

$$\begin{aligned} \circ = \nabla_{\mathbf{v}}(1) = \nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{N}\,.\,\mathbf{N}) &= (\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N})\,.\,\mathbf{N}(p) + \mathbf{N}(p)\,.\,(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N}) \\ &= 2\,(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N})\,.\,\mathbf{N}(p)\,. \end{aligned}$$

نگاشت خطی $L_p : S_p \longrightarrow S_p$ که به صورت

$$L_p(\mathbf{v}) = -\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N}$$

تعریف می‌شود به ***نگاشت وینگارتن*** S در p موسوم است. تعبیر هندسی L_p را می‌توان از فرمول

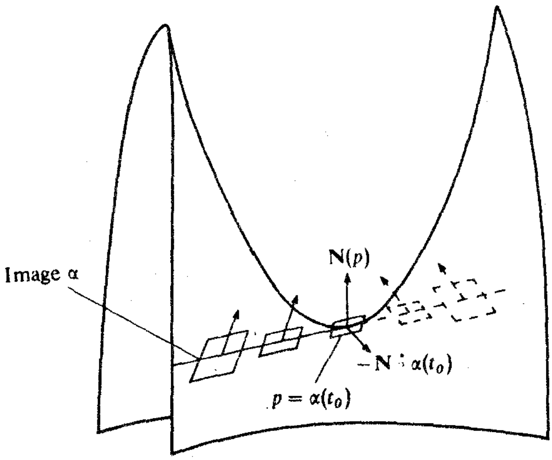
$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N} = -(\mathbf{N}\dot{\circ}\alpha)(t_\circ)$$

ملاحظه کرد، که در آن $\alpha: I \longrightarrow S$ یک خم پارامتری در S با شرط $\dot{\alpha}(t_\circ) = \mathbf{v}$ می‌باشد: $L_p(\mathbf{v})$ (با تقریب یک علامت) میزان تغییرات $\mathbf{N}$ (یعنی چرخش $\mathbf{N}$ چون $\mathbf{N}$ دارای طول ثابت است) وقتی که از نقطهٔ p در طول این چنین خم α ای عبور کنیم تعبیر کرد (ر.ک. شکل ۹-۱). در نتیجه L_p شامل اطلاعاتی در مورد شکل S است، بهمین دلیل L_p را گاه **عمگر شکلی** S در p گویند.

برای اهداف محاسباتی، توجه به این نکته ضروری است که $L_p(\mathbf{v})$ را می‌توان از فرمول

$$\begin{aligned} L_p(\mathbf{v}) = -\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N} &= -(p\,,\,\nabla_{\mathbf{v}}N_1\,,\,\dots\,,\,\nabla_{\mathbf{v}}N_{n+1}) \\ &= -(p\,,\,\nabla\tilde{N}_1(p)\,.\,\mathbf{v}\,,\,\dots\,,\,\nabla\tilde{N}_{n+1}(p)\,.\,\mathbf{v}) \end{aligned}$$

به دست آورد که در آن $\tilde{\mathbf{N}}$ یک میدان برداری هموار تعریف شده روی مجموعهٔ باز U شامل S است با شرط $\tilde{\mathbf{N}}(q) = \mathbf{N}(q)$ برای هر $q\in S$. توجه دارید که $\tilde{\mathbf{N}}(q)$ برای $q\notin S$ لازم نیست یکه باشد. وقتی $f: U \to \mathbf{R}$ به‌قسمی است که $S = f^{-1}(c)$ برای یک $c\in\mathbf{R}$ و $\tilde{\mathbf{N}}(q) = \nabla f(q)/\|\nabla f(q)\|$ برای $q\in S$، طبیعی آنست که $\tilde{\mathbf{N}} = \nabla f/\|\nabla f\|$ بگیریم. با این حال گاه انتخابهای دیگری از $\tilde{\mathbf{N}}$ همان‌طور که مثال زیر نشان می‌دهد مناسب‌تر است.



شکل ۹-۱: نگاشت وینگارتن $L_p(\mathbf{v}) = -(\mathbf{N}\circ\alpha)'(t_\circ)$. چرخش قائم را اندازه می‌گیرد و در نتیجه چرخش فضای مماس که از نقطهٔ p طول خم α را می‌پیماید اندازه می‌گیرد.

مثال. فرض کنید S ـ n ـکره $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2$ به شعاع $r > 0$ باشد که توسط $\mathbf{N}$ میدان برداری قائم یکهٔ داخلی سودار شده است:

$$\mathbf{N}(q) = (q, -q/\|q\|) = (q, -q/r)$$

برای $q\in S$. قرار می‌دهیم $\bar{\mathbf{N}}(q) = (q, -q/r)$ برای $q\in\mathbf{R}^{n+1}$. یعنی:

$$\bar{\mathbf{N}}(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{n+1}, -\frac{x_1}{r}, \dots, -\frac{x_{n+1}}{r}),$$

برای $p\in S$ و $\mathbf{v}\in S_p$ داریم

$$L_p(\mathbf{v}) = -\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N} = -(p, \nabla_{\mathbf{v}}\bar{N}, \dots, \nabla_{\mathbf{v}}\bar{N}_{n+1})$$

$$= -(p, \nabla_{\mathbf{v}}(-\frac{x_1}{r}), \dots, \nabla_{\mathbf{v}}(\frac{-x_{n+1}}{r}))$$

$$= \frac{1}{r}(p, \nabla_{\mathbf{v}}(x_1), \dots, \nabla_{\mathbf{v}}(x_{n+1})).$$

ولی به ازای $i \in \{ ۱ , \ldots , n + ۱\}$

و $\nabla_{\mathbf{v}} x_i = \nabla x_i (p) \cdot \mathbf{v} = (p , ۰ , \ldots , ۱ , \ldots , ۰) = (p , v_۱ , \ldots , v_{n+۱}) = \mathbf{v}$

بنابراین

$$L_p (\mathbf{v}) = \frac{۱}{r} (p , v_۱ , \ldots , v_{n+۱}) = \frac{۱}{r} \mathbf{v}.$$

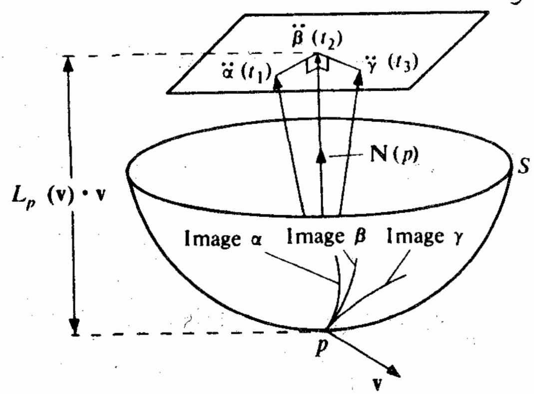
در نتیجه نگاشت وینگارتن nـکره صرفاً ضرب در $\frac{۱}{r}$ است. با اینحال به وابستگی انتخاب سو توجه کنید: اگر S توسط $\mathbf{N}$ـ قائم خارجی سودار شده باشد، نگاشت وینگارتن ضرب در $-\frac{۱}{r}$ خواهد بود.

دو قضیه زیر خواص مهم نگاشت وینگارتن را نشان می‌دهد.

● **قضیهٔ ۱.** *فرض کنید S یک n ـ رویه در $\mathbf{R}^{n+۱}$ سودار توسط میدان برداری قائم یکهٔ $\mathbf{N}$ باشد. در این صورت برای هر خم پارامتری $\alpha: I \longrightarrow S$ با شرط $\dot\alpha (t_۰) = \mathbf{v}$ برای $t_۰ \in I$، داریم*

$$\ddot{\alpha}(t_۰) \cdot \mathbf{N}(p) = L_p (\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}.$$

این قضیه بیانگر این مطلب است که $\ddot{\alpha}(t_۰) \cdot \mathbf{N}(p)$، مؤلفهٔ قائم شتاب برای تمام خمهای α در S که از نقطهٔ p با سرعت $\mathbf{v}$ می‌گذرد یکسان است. در حالت خاصی که مؤلفهٔ قائم شتاب برای یک خم α با شرط $\dot\alpha(t_۰) = \mathbf{v}$ مخالف صفر باشد، آنگاه این مؤلفه برای تمام خمهای S که از نقطه p با همین سرعت می‌گذرند مخالف صفر است (ر.ک. شکل ۹-۲). این مؤلفه شتاب به هر چنین خمی در S توسط شکل S در p تحمیل می‌شود و برطبق فرمول بالا مستقیماً توسط مقدار نگاشت وینگارتن L_p در $\mathbf{v}$ محاسبه می‌شود.



شکل ۹-۲ تمام خمهای پارامتری S که از نقطه p با سرعت یکسان می‌گذرند لزوماً در نقطه p دارای مؤلفه شتاب قائم یکسانی هستند. در شکل $\mathbf{v} = \dot\alpha (t_۱) = \dot\beta(t_۲) = \dot\alpha(t_۳)$، β یک ژئوذری است.

توجه دارید که وقتی α یک ژئودزی است، تنها مؤلفهٔ شتاب، قائم بر رویه است و این شتاب توسط شکل رویه به α تحمیل می‌شود.

در مورد n ـ کرهٔ S به شعاع r، محاسبهٔ بالا نشان می‌دهد که هر خم α با تندی یکه در S دارای مؤلفه قائم شتابی به طرف داخل با طول $\frac{1}{r}$ است.

برهان قضیه ۱. چون α یک خم پارامتری S است، $\alpha^{\cdot}(t) \in S_{\alpha(t)} = [\mathbf{N}(\alpha(t))]^{\perp}$ برای هر $t\in I$ یعنی $\alpha^{\cdot} . (\mathbf{N}\circ\alpha) = 0$ در طول خم α. بنابراین

$$0 = [\dot{\alpha} . (\mathbf{N}\circ\alpha)]'(t_0)$$
$$= \alpha^{\cdot\cdot}(t_0) . (\mathbf{N}\circ\alpha)(t_0) + \alpha^{\cdot}(t_0) . (\mathbf{N}\dot{\circ}\alpha)(t_0)$$
$$= \alpha^{\cdot\cdot}(t_0) . \mathbf{N}(\alpha(t_0)) + \mathbf{v} . \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N}$$
$$= \alpha^{\cdot\cdot}(t_0) . \mathbf{N}(p) - \mathbf{v} . L_p(\mathbf{v})$$

بنابراین همان طور که ادعا شده بود

$$\alpha^{\cdot\cdot}(t_0) . \mathbf{N}(p) = L_p(\mathbf{v}) . \mathbf{v} . \square$$

● **قضیهٔ ۲.** ***نگاشت وینگارتن L_p خودالحاق است، یعنی***

$$L_p(\mathbf{v}) . \mathbf{w} = \mathbf{v} . L_p(\mathbf{w})$$

برای هر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w} \in S_p$.

برهان. فرض کنید $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$ (U باز در $\mathbf{R}^{n+1}$) به قسمی باشد که $S = f^{-1}(c)$ برای یک $c\in\mathbf{R}$ و $\mathbf{N}(p) = \nabla(p) / \|\nabla f(p)\|$ برای تمام $p\in S$. در این صورت

$$L_p(\mathbf{v}) . \mathbf{w} = (-\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N}) . \mathbf{w} = -\nabla_{\mathbf{v}}\left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\right) . \mathbf{w}$$
$$= -\left[\nabla_{\mathbf{v}}\left(\frac{1}{\|\nabla f\|}\right)\nabla f(p) + \frac{1}{\|\nabla f(p)\|}\nabla_{\mathbf{v}}(\nabla f)\right] . \mathbf{w}$$
$$= -\nabla_{\mathbf{v}}\left(\frac{1}{\|\nabla f\|}\right)\nabla f(p) . \mathbf{w} - \frac{1}{\|\nabla f(p)\|}[\nabla_{\mathbf{v}}(\nabla f)] . \mathbf{w} .$$

چون $\nabla f(p) . \mathbf{w} = 0$، جملهٔ اول حذف می‌شود، در نتیجه

$$L_p(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = -\frac{1}{\|\nabla f(p)\|}[\nabla_{\mathbf{v}}(\nabla f)] \cdot \mathbf{w}$$

$$= -\frac{1}{\|\nabla f(p)\|}\left(p, \nabla_{\mathbf{v}}\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \nabla_{\mathbf{v}}\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}\right) \cdot \mathbf{w}$$

$$= -\frac{1}{\|\nabla f(p)\|}\left(p, \nabla\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(p) \cdot v_i, \dots, \nabla\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}\right)(p) \cdot v\right) \cdot \mathbf{w}$$

$$= -\frac{1}{\|\nabla f(p)\|}\left(p, \sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(p)\, v_i, \dots, \sum_{i+1}^{n+1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{n+1}}(p)\, v_i\right) \cdot \mathbf{w}$$

$$= -\frac{1}{\|\nabla f(p)\|}\sum_{i,j=1}^{n+1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\, v_i w_j$$

که در آن $\mathbf{v} = (p, v_1, \dots, v_{n+1})$ و $\mathbf{w} = (p, w_1, \dots, w_{n+1})$.

محاسبه‌ای مشابه با تعویض $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ نشان می‌دهد که

$$L_p(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\|\nabla f(p)\|}\sum_{i,j=1}^{n+1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\, w_i v_j .$$

چون $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ برای هر (i,j)، بالاخره می‌توان نتیجه گرفت که

$$L_p(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = -\frac{1}{\|\nabla f(p)\|}\sum_{i,j=1}^{n+1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\, v_i w_j$$

$$= -\frac{1}{\|\nabla f(p)\|}\sum_{i,j=1}^{n+1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)\, v_i w_j$$

$$= -\frac{1}{\|\nabla f(p)\|}\sum_{i,j=1}^{n+1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(p)\, w_j v_i = L_p(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}. \ \square$$

تمرین

۹-۱. برای هر یک از توابع $f: \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}$، بردارهای $\mathbf{v} \in \mathbf{R}_p^{n+1}$، و نقاط $p \in \mathbf{R}^{n+1}$ مفروض

زیر $\nabla_{\mathbf{v}} f$ را حساب کنید:

(الف) $\mathbf{v} = (1, 0, 2, 1)$ ، $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2$ $(n = 1)$

(ب) $\mathbf{v} = (1, 1, \cos\theta, \sin\theta)$ ، $f(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2$ $(n = 1)$

(پ) $\mathbf{v} = (1, 1, 1, a, b, c)$ ، $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3^2$ $(n = 2)$

(ت) $\mathbf{v} = (p, v)$ ، $f(q) = q \cdot q.$ (n دلخواه)

۹-۲. فرض کنید U یک مجموعه باز در $\mathbf{R}^{n+1}$ و $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار باشد. نشان دهید که هرگاه $\mathbf{e}_i = (p, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ که در آن $p \in U$ و ۱ در $(i+1)$اُم نقطه (iام نقطه بعد از p) قرار دارد، آنگاه $\nabla \mathbf{e}_i f = (\partial f / \partial x_n)(p)$.

۹-۳. برای هر یک از میدانهای برداری $\mathbf{X}$، $\mathbf{v} \in \mathbf{R}_p^{n+1}$، و نقاط $p \in \mathbf{R}^{n+1}$ مفروض زیر مقدار $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{X}$ را حساب کنید:

(الف) $\mathbf{X}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 x_2, x_2^2)$ ، $\mathbf{v} = (1, 0, 0, 1)$ $(n = 1)$

(ب) $\mathbf{X}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, -x_2, x_1)$ ، $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta, -\sin\theta, \cos\theta)$ $(n = 1)$

(پ) $\mathbf{X} = (q, 2q).$ ، $\mathbf{v} = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ (nدلخواه)

۹-۴. تحقیق کنید که مشتق‌گیری از میدانهای برداری دارای خواص (یک) تا (سه) بیان شده در صفحهٔ ۶۹ می‌باشد.

۹-۵. نشان دهید که مشتق‌گیری همورد میدانهای برداری دارای خواص زیر است، $p \in S$ و $\mathbf{v} \in S_p$

(یک) $D_v(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) = D_v\mathbf{X} + D_v\mathbf{Y}$

(دو) $D_v(f\mathbf{X}) = (\nabla_v f)\mathbf{X}(p) + f(p)\, D_v\mathbf{X}$

(سه) $D_v(\mathbf{X}.\mathbf{Y}) = (D_v\mathbf{X}).\mathbf{Y}(p) + \mathbf{X}(p).(D_v\mathbf{Y}).$

برای تمام میدانهای برداری مماس هموار $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ روی S و تمام توابع هموار $f{:}S \longrightarrow \mathbf{R}$.

۹-۶. فرض کنید $\mathbf{X}$ یک میدان برداری یکهٔ هموار روی یک n ـ رویه S در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد، یعنی $\|\mathbf{X}(q)\| = 1$ برای هر $q\in S$. نشان دهید که $\nabla_v\mathbf{X} \perp \mathbf{X}(p)$ برای هر $v\in S_p$. $p\in S$. علاوه بر این اگر $\mathbf{X}$ یک میدان برداری مماس یکه در S باشد، آنگاه $D_v\mathbf{X} \perp \mathbf{X}(p)$.

۹-۷. یک میدان برداری مماس هموار $\mathbf{X}$ روی یک n ـ رویه S را ***میدان برداری ژئودزی یا جریان ژئودزی*** گویند اگر تمام خمهای انتگرال $\mathbf{X}$ ژئودزیهای S باشند.

(الف) نشان دهید که یک میدان برداری مماس هموار $\mathbf{X}$ روی S میدان ژئودزی است اگر و فقط اگر $D_{\mathbf{X}(p)}\mathbf{X} = 0$ برای تمام $p\in S$.

(ب) یک ***جریان ژئودزی*** روی یک ۲ـ رویه دوار در $\mathbf{R}^3$ بیان کنید.

۹-۸. نگاشت وینگارتن را در موارد زیر حساب کنید:

(الف) فوق صفحهٔ $a_1x_1 + \dots + a_{n+1}x_{n+1} = b$ $[(a_1,\dots,a_{n+1}) \neq (0,\dots,0)]$

(ب) استوانهٔ دوار $x_2^2 + x_3^2 = a^2$ در $\mathbf{R}^3$ $(a \neq 0)$ (سوها را خود انتخاب کنید).

۹-۹. نشان دهید که هرگاه S یک n ـ رویه و $\mathbf{N}$ یک میدان براری قایم یکه بر S باشد، آنگاه نگاشت وینگارتن S سودار شده توسط $\mathbf{N}$ - منفی نگاشت وینگارتن S سودار شده توسط $\mathbf{N}$ می‌باشد.

۹-۱۰. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد با پایان مجهز به ضرب داخلی باشد. فرض کنید $L{:}V \longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد.

(الف) نشان دهید که یک نگاشت خطی یکتای $L^*:V \longrightarrow V$ وجود دارد به قسمی که $L^*(v).w = v.L(w)$ برای تمام $w \in V$ و v. [**راهنمایی:** یک پایه متعامدیکه $\{e_1, ..., e_n\}$ برای V انتخاب کنید و به ازای هر i، $L^*(e_i)$ را محاسبه نمائید.] (L^* را ***الحاقی*** L گویند)

(ب) نشان دهید که ماتریس L^* نسبت به یک پایه متعامد یکه V ترانهاده ماتریس L نسبت به این پایه است. نتیجه بگیرید که L خود الحاق است ($L^* = L$) اگر و فقط اگر ماتریس L نسبت به هر پایهٔ متعامد یکهٔ V متقارن باشد.

۹-۱۱. فرض کنید $S = f^{-1}(c)$ یک n - رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد که توسط $\nabla f / \|\nabla f\|$ سودار شده است. فرض کنید $p \in S$ به قسمی باشد که $\nabla f(p) / \|\nabla f(p)\| = \mathbf{e}_{n+1}$ که در آن $(p, 0, ..., 1, ..., 0) = \mathbf{e}_i$ با ۱ در $(i+1)$ ام نقطه (i نقطه بعد از p) برای $i \in \{1, ..., n+1\}$. نشان دهید که ماتریس L_p نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ برای S_p عبارتست از

$$\left(- \frac{1}{\|\nabla f(p)\|} \; \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(p) \right).$$

۹-۱۲. فرض کنید S یک n - رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد که توسط میدان برداری قائم یکه $\mathbf{N}$ سودار شده باشد. با فرض آنکه $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ میدانهای برداری هموار مماس بر S باشند.

(الف) نشان دهید که $(\nabla_{\mathbf{x}(p)} \mathbf{Y}) . \mathbf{N}(p) = (\nabla_{\mathbf{y}(p)} \mathbf{X}) . \mathbf{N}(p)$ برای هر $p \in S$. [**راهنمایی:** نشان دهید که هر دو طرف برابر با $L_p(\mathbf{X}(p)) . \mathbf{Y}(p)$ می‌باشد.]

(ب) نتیجه بگیرید که میدان برداری $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ تعریف شده روی S توسط $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](p) = \nabla_{\mathbf{X}(p)} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}(p)} \mathbf{X}$ همواره بر S مماس است. [$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ را ***کروشه‌لی*** میدانهای برداری $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ گویند]

۹-۱۳. مشتق در نقطه $p \in U$ (U باز $\mathbf{R}^{n+1}$) یک نگاشت هموار $F: U \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ تبدیل خطی $F'(p): \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ است به قسمی که برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد که

$$\|F(p+v) - F(p) - F'(p)(v)\| / \|v\| < \varepsilon$$

وقتی که $\|v\| < \delta$

نشان دهید که هرگاه $X: U \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ هموار و $\mathbf{X}$ میدان برداری روی U به صورت $\mathbf{X}(q) = (q, X(q))$ برای هر $q \in U$ باشد، آنگاه مشتق $\mathbf{X}$ را نسبت به یک بردار $\mathbf{v} = (p, v) \in \mathbf{R}^{n+1}$، که در آن $p \in U$

می‌توان توسط فرمول

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{X} = (p\,, [X'(p)]\,(v)\,)$$

محاسبه کرد.

۹-۱۴. با نشان دادن اینکه $L_p(p\,,v) = (p\,,[\tilde{N}'(p)]\,(v))$ برای $(p,v)\in S_p$، که در آن $\tilde{N}:U \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ یک تابع هموار تعریف شده روی یک مجموعهٔ باز U شامل S است که تحدیدش به S، N نگاشت گاوس S باشد، نشان دهید که نگاشت وینگارتن در یک نقطه p از n رویه S در $\mathbf{R}^{n+1}$ اساساً برابر با منفی مشتق نگاشت گاوس S در نقطهٔ p است [برای تعریف مشتق به تمرین ۹-۱۳ رجوع کنید].

۹-۱۵. فرض کنید $f:U \longrightarrow \mathbf{R}$، $S = f^{-1}(c)$ و $N = \nabla f / \| \nabla f \|$ مانند قضیهٔ فصل ۷ باشد. فرض کنید $\mathbf{X}$ میدان برداری روی $U \times \mathbf{R}^{n+1}$ تعریف شده به صورت

$$\mathbf{X}(\mathbf{w}) = \mathbf{X}(q\,,w) = (\,q\,,w\,,w\,,-(\mathbf{w}\,.\,\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{N})\,N(q))$$

باشد که در آن $N(q)$ قسمت برداری $\mathbf{N}(q)$ است، $(\mathbf{N}(q) = (q,N(q)))$. به ازای هر خم پارامتری $\alpha:I \longrightarrow U$، $\tilde{\alpha}$ ***بالا برطبیعی*** α، خم پارامتری $\tilde{\alpha}:I \longrightarrow U \times \mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد به قسمی که $\tilde{\alpha}(t) = \alpha^{\cdot}(t)$.

(الف) فرض کنید $\alpha:I \longrightarrow S$. نشان دهید که α یک ژئودزی S است اگر و فقط اگر بالا بر طبیعی‌اش $\tilde{\alpha}$ یک خم انتگرال $\mathbf{X}$ باشد. [**راهنمایی**: نشان دهید که $\tilde{\alpha}(t) = \mathbf{X}(\tilde{\alpha}(t))$ برای هر $t\in I$ اگر و فقط اگر α در معادلهٔ ژئودزی (G) صدق کند.] نتیجه بگیرید که هرگاه $\alpha:I \longrightarrow S$ و $\beta:\tilde{I} \longrightarrow S$ در S ژئودزی باشند با شرایط $\alpha(\circ) = \beta(\circ)$ و $\alpha^{\cdot}(\circ) = \beta^{\cdot}(\circ)$، آنگاه $\alpha(t) = \beta(t)$ برای هر $t \in I\cap\tilde{I}$.

(ب) برای $\mathbf{v} = (p\,,v) \in U \times \mathbf{R}^{n+1}$ فرض کنید $\beta: I \longrightarrow U \times \mathbf{R}$ خم انتگرال $\mathbf{X}$ گذرنده از $\mathbf{v}$ باشد. در این صورت $\beta(t)$ به شکل $\beta(t) = (\beta_1(t)\,,\beta_2(t))$ می‌باشد که در آن $\beta_1:I \longrightarrow U$، $\beta_2:I \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$. نشان دهید که هرگاه $p\in S$ و $v\in S_p$، آنگاه β_1 یک ژئودزی S می‌باشد که از نقطهٔ p با سرعت آغازی $\mathbf{v}$ می‌گذرد. [**راهنمایی**: در آغاز تحقیق کنید که β_1 در معادلهٔ ژئودزی (G) صدق می‌کند، سپس مانند برهان قضیهٔ فصل ۷ ثابت کنید که β_1 در واقع I را در S می‌نگارد.]

تذکر. تمرین ۹-۱۵ وجود ویکتایی یک ژئودزی بیشین α در S را با شرایط آغازی $\alpha(\circ) = p$ و

$\mathrm{v}=(\circ)\alpha'$ تنها با استفاده از وجود ویکتایی خمهای انتگرال برای میدانهای برداری ثابت می‌کند. معرفی بالا بر طبیعی $\tilde{\alpha}$ یک خم α مشابه هندسی جایگزینی $u_i = \frac{d x_i}{d t}$ می‌باشد که دستگاه دیفرانسیلی مرتبه دوم

$$\frac{d^۲ x_i}{d t^۲} + \sum N_i \frac{\partial N_j}{\partial x_k} \frac{d x_j}{d t} \frac{d x_k}{d t} = \circ$$

(از ۱ + n متغیر x_i) را به دستگاه دیفرانسیلی مرتبه اول

$$\begin{cases} \frac{d x_i}{d t} = u_i \\ \frac{d u_i}{d t} = - \sum N_i \frac{d N_j}{d x_k} u_j u_k \end{cases}$$

(از ۲ + ۲n متغیر x_i و u_i) تبدیل می‌کند. دستگاه مرتبه اول معادلات دیفرانسیل دقیقاً معادله دیفرانسیل خمهای انتگرال $\mathbf{X}$ در $U \times \mathbf{R}^{n+1} \subseteq \mathbf{R}^{۲n+۲}$ می‌باشد. میدان برداری $\mathbf{X}$ را ***افشانهٔ ژئودزی*** می‌گویند.

۱۰ـ خمیدگی خمهای مسطح

فرض کنید $C = f^{-1}(c)$، که در آن $f:U \longrightarrow \mathbf{R}$، یک خم مسطح در مجموعهٔ باز $U \subseteq \mathbf{R}^2$ باشد که توسط $\mathbf{N} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ سودار شده باشد. در این صورت به ازای هر $p \in C$، نگاشت وینگارتن L_p یک تبدیل خطی روی فضای ۱ـ بعدی C_p است. چون هر تبدیل خطی از یک فضای ۱ـ بعدی به خودش به صورت ضرب در یک عدد حقیقی است، لذا به ازای هر $p \in C$ عدد حقیقی مانند $k(p)$ وجود دارد. به قسمی که

$$L_p(\mathbf{v}) = k(p)\,\mathbf{v} \qquad \text{، هر } \mathbf{v} \in C_p$$

$k(p)$ را **خمیدگی** C در p گویند.

هرگاه $\mathbf{v}$ یک بردار مماس غیر صفر بر خم مسطح C در نقطهٔ $p \in C$ باشد، آنگاه

$$L_p(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = k(p)\ \|\mathbf{v}\|^2 .$$

بنابراین خمیدگی C در p توسط فرمول

$$k(p) = L_p(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} / \ \|\mathbf{v}\|^2$$

محاسبه می‌شود. در حالت خاص، هرگاه $\alpha : I \longrightarrow C$ یک خم پارامتری در C با شرط $\dot{\alpha}(t) \neq 0$ برای هر $t \in I$ باشد، آنگاه بنا بر قضیهٔ ۱ فصل ۹

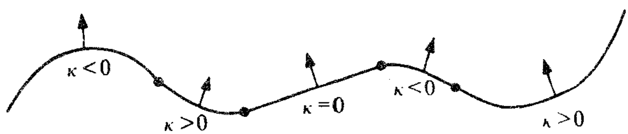
$$k(\alpha(t)) = \frac{L_p(\alpha^{\cdot}(t)) \cdot \alpha^{\cdot}(t)}{\| \alpha^{\cdot}(t) \|^2} = \frac{\alpha^{\cdot\cdot}(t) \cdot \mathbf{N}(\alpha(t))}{\| \alpha^{\cdot}(t) \|^2} .$$

اگر α یک خم پارامتری با تندی یکه در C باشد، در این صورت فرمول به صورت

$$k(\alpha(t)) = \alpha^{\cdot\cdot}(t) \cdot \mathbf{N}(\alpha(t))$$

در می‌آید. در نتیجه خمیدگی C در نقطهٔ $p \in C$ مؤلفه قائم شتاب هر خم پارامتری در C با تندی یکه است که از نقطه p می‌گذرد.

به معنی علامت $k(p)$ باید توجه ویژه‌ای کرد: هرگاه $k(p) > 0$، آنگاه خم p به طرف قائمش $\mathbf{N}(p)$ می‌چرخد و اگر $k(p) < 0$، خم از قائمش $\mathbf{N}(p)$ دور می‌شود (ر.ک.شکل ۱۰-۱).



شکل ۱۰-۱ : خمیدگی C در نقاطی که C به طرف قائمش خم می‌شود مثبت و در نقاطی که از قائمش دور می‌شود منفی است.

یکی از روشهای محاسبه خمیدگی یک خم مسطح استفاده از فرمول $k \circ \alpha = (\alpha^{\cdot\cdot} . \mathbf{N} \circ \alpha) / \| \alpha^{\cdot} \|^2$ (یا فرمول هم ارز آن در تمرین ۱۰-۱) می‌باشد، که در آن α یک خم پارامتری در C می‌باشد که سرعت آن در هیچ جا صفر نمی‌شود. اگر چنین α ای سودار سازگار با سوی C وجود باشد، در این صورت آن را یک پارامتر سازی موضعی C گویند.

برای یک خم مسطح سودار C مفروض و یک نقطهٔ $p \in C$، یک ***پارامتر سازی یک قطعهٔ C شامل p*** عبارتست از یک خم پارامتری $\alpha : I \longrightarrow C$ به قسمی که

(یک) عادی باشد، یعنی برای هر $t \in I$ $\alpha^{\cdot}(t) \neq 0$

(دو) سودار سازگار با سوی C باشد، یعنی به قسمی است که به ازای $t \in I$ پایه $\{\alpha^{\cdot}(t)\}$ برای $C_{\alpha(t)}$ سازگار با سوی $\mathbf{N}$ از C باشد و بالاخره

(سه) **p به تصویر α متعلق باشد.**

اگر α پوشا باشد، یعنی اگر $\alpha(I) = C$، α را یک ***پارامتر سازی سرتاسری*** C گویند. در حالت کلی، α را یک ***پارامتر سازی موضعی*** C گویند.

پارامتر سازیهای موضعی خمهای مسطح را اصولاً به سادگی می‌توان به دست آورد. هرگاه $C = f^{-1}(c)$ توسط $N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ سودار شده باشد، آنگاه $\nabla f(q) = (q, \frac{\partial f}{\partial x_1}(q), \frac{\partial f}{\partial x_2}(q))$ به ازای هر $q \in C$ عمود بر C_q است و میدان برداری $\mathbf{X}$ به صورت $\mathbf{X}(q) = (q, -\frac{\partial f}{\partial x_2}(q), \frac{\partial f}{\partial x_1}(q))$ همواره عمود بر $\nabla f(q)$ می‌باشد که از دوران $\nabla f(q)$ به اندازه $-\frac{\pi}{2}$ حاصل شده است، بنابراین $\mathbf{X}$ یک میدان برداری مماس بر C است. علاوه بر این، $\mathbf{X}(q) \neq 0$ برای $q \in C$ و $\{\mathbf{X}(q)\}$ با سوی $\mathbf{N}$ سازگار است. بنابراین، برای هر نقطهٔ $p \in C$ مفروض، خم انتگرال بیشین $\alpha: I \longrightarrow C$ میدان برداری $\mathbf{X}$ که از نقطه p می‌گذرد یک پارامترسازی قطعه‌ای از C شامل p است.

توجه دارید که هرگاه در این ساختار میدان برداری $\mathbf{N} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ را جایگزین میدان برداری ∇f کنیم، آنگاه α یک پارامتر سازی با تندی یک قطعه‌ای از C شامل p به دست می‌آید، زیرا

$$\|\alpha'(t)\| = \|\mathbf{X}(\alpha(t))\| = \|\mathbf{N}(\alpha(t))\| = 1$$

برای هر $t \in I$.

پارامتر سازیهای موضعی خمهای مسطح با تقریب یک پارامتر سازی مجدد یکتا می‌باشند: برای هر پارامتر سازی $\beta: \bar{I} \longrightarrow C$ قطعه‌ای از C شامل p، یک تابع هموار $h: \bar{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ با شرط $h'(t) > 0$ برای هر $t \in \bar{I}$ وجود دارد به قسمی که $\beta(t) = \alpha(h(t))$ برای هر $t \in \bar{I}$، که در آن α پارامترسازی موضعی با تندی یکه می‌باشد که در بالا ساخته شد. در واقع چون $\{\mathbf{X}(\beta(t))\}$ یک پایه برای فضای برداری ۱ـ بعدی $C_{\beta(t)}$ است، $\beta'(t)$ الزاماً مضربی از $\mathbf{X}(\beta(t))$ می‌باشد. در حقیقت $\beta'(t) = \|\beta'(t)\| \mathbf{X}(\beta(t))$ چون $\|\mathbf{X}\| = 1$ و $\{\beta'(t)\}$ و $\{\mathbf{X}(\beta(t))\}$ هر دو با $\mathbf{N}$، سوی C سازگار می‌باشند. با قرار دادن

$$h(t) = \int_{t_0}^{t} \|\beta'(t)\| \, dt$$

که در آن $t_\circ$ به قسمی است که $\beta(t_\circ) = p$، یک تابع هموار یکنوای صعودی $h:\bar{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ (برای هر $t\in\bar{I}$، $h'(t) = \|\beta^{\cdot}(t)\| > \circ$) به دست می‌آوریم که $t_\circ$ را به ۰ می‌برد. خم پارامتری $\beta\circ h^{-1}$ دارای سرعت

$$(\beta^{\cdot}\circ h^{-1})(t) = \beta^{\cdot}(h^{-1}(t))(h^{-1})'(t)$$

$$= \beta^{\cdot}(h^{-1}(t)) / h'(h^{-1}(t))$$

$$= \beta^{\cdot}(h^{-1}(t)) / \|\beta^{\cdot}(h^{-1}(t))\|$$

$$= \mathbf{X}(\beta(h^{-1}(t)))$$

می‌باشد و بنابراین یک خم انتگرال میدان برداری $\mathbf{X}$ است با شرط $\beta\circ h^{-1}(\circ) = p = \alpha(\circ)$. بنا بر یکتایی خمهای انتگرال، دامنهٔ $\beta\circ h^{-1}$ در I واقع است و $\beta\circ h^{-1}(t) = \alpha(t)$ برای هر t متعلق به دامنه $\beta\circ h^{-1}$. به عبارت دیگر همانطور که ادعا شده بود، $\beta(t) = \alpha(h(t))$ برای هر $t\in\bar{I}$. بویژه توجه دارید که هرگاه $\beta:\bar{I} \longrightarrow C$ یک پارامترسازی موضعی با تندی یکه C با شرط $\beta(t_\circ) = p$ باشد، آنگاه $h(t) = t - t_\circ$ و $\beta(t) = \alpha(t - t_\circ)$ برای هر $t\in\bar{I}$.

مثال. فرض کنید C دایرهٔ $f^{-1}(r^2)$ باشد که در آن $f(x_1, x_2) = (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2$ و توسط قائم خارجی $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ سودار شده باشد. چون $\nabla f(p) = (p, 2(x_1 - a), 2(x_2 - b))$ برای $p = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$، خمهای انتگرال $\mathbf{X}(p) = (p, 2(x_2 - b), -2(x_1 - a))$ پارامتر سازیهای موضعی C خواهند بود. خم انتگرال که از نقطه $(a + r, b)$ می‌گذرد یک پارامترسازی همه جایی $\alpha(t) = (a + r\cos 2t, b - r\sin 2t)$ می‌باشد. بنابراین

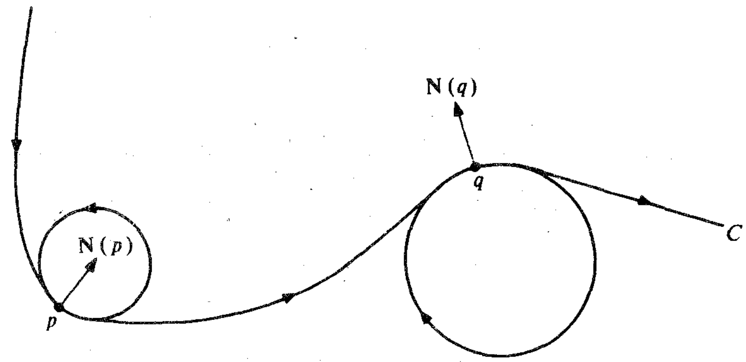
$$k(\alpha(t)) = \frac{\alpha^{\cdot\cdot}(t) \cdot \mathbf{N}(\alpha(t))}{\|\alpha^{\cdot}(t)\|^2} = \frac{\alpha^{\cdot\cdot}(t)}{\|\alpha^{\cdot}(t)\|^2} \cdot \frac{\nabla f(\alpha(t))}{\|\nabla f(\alpha(t))\|}$$

$$= \frac{(-4r\cos 2t, 4r\sin 2t) \cdot (2r\cos 2t, -2r\sin 2t)}{\|(-2r\sin 2t, -2r\cos 2t)\|^2 \, \|(2r\cos 2t, -2r\sin 2t)\|}$$

$$= \frac{-8r^2}{(4r^2)(2r)} = -\frac{1}{r}.$$

اگر C توسط قایم داخلی سودار شده باشد، خمیدگی در هر نقطه $+\frac{1}{r}$ خواهد بود.

برای یک خم مسطح سودار دلخواه C و $p\in C$ به قسمی که $k(p) \neq 0$، یک دایرهٔ سودار یکتا مانند O موسوم به **دایرهٔ خمیدگی** C در p وجود دارد (ر.ک. شکل ۱۰-۲) به قسمی که



شکل ۱۰-۲ دایره خمیدگی در دو نقطهٔ یک خم مسطح سودار C

(یک) مماس بر C در p باشد (یعنی $C_p = O_p$)

(دو) سودار و سازگار با سوی C باشد، (یعنی $N(p) = N_1(p)$، که در آن N و N_1 به ترتیب قائمهای سوئی C و O باشند.

(سه) قائمش در نقطه p به همان میزانی می‌چرخد که قائم بر C می‌چرخد (یعنی $\nabla_v N = \nabla_v N_1$ برای هر $v\in C_p = O_p$).

دایرهٔ خمیدگی دایره ایست که در بین تمام دوایری که شامل p می‌باشند نزدیکترین به خم C است (ر.ک. تمرینهای ۱۰-۸ و ۱۰-۹). شرط (یک) گویای این مطلب است که مرکز O روی خط قائم بر C در نقطهٔ p قرار دارد، شرط (سه) می‌گوید که شعاعش r در معادلهٔ $|k(p)| = \frac{1}{r}$ صدق می‌کند، که در آن k(p) خمیدگی C در نقطه p است، و شرط (دو) این مطلب را نقل می‌کند که N(p) به طرف مرکز O است اگر $k(p) > 0$ و در جهت مخالف است اگر $k(p) < 0$. شعاع $r = 1/\|k(p)\|$ از دایره خمیدگی **شعاع خمیدگی** C در p و مرکز این دایره را **مرکز خمیدگی** C در p گویند.

تمرین

۱۰-۱. فرض کنید $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ (برای $t\in I$) یک پارامترسازی موضعی خم مسطح سودار C باشد. نشان دهید که

$$k\circ\alpha = (x' y'' - y' x'') / (x'^{۲} + y'^{۲})^{۳/۲}$$

۱۰-۲. فرض کنید $g:I \longrightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار و C نمایشگر نمودار g باشد. نشان دهید که خمیدگی C در نقطهٔ $(t,g(t))$، با انتخاب مناسبی برای سو برابر با $g''(t) / (۱ + (g'(t))^{۲})^{۳/۲}$ می‌باشد.

۱۰-۳. پارامترسازی همه جایی هر یک از خمهای سطح زیر که توسط $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ سودار شده‌اند پیدا کنید که در آن تابع f به صورت طرف چپ هر یک از معادلات تعریف شده است:

(الف) $ax_{۱} + bx_{۲} = c$ ، $(a, b) \neq (۰,۰)$

(ب) $\frac{x_{۱}^{۲}}{a^{۲}} + \frac{x_{۲}^{۲}}{b^{۲}} = ۱$ ، $a \neq ۰,\ b \neq ۰$

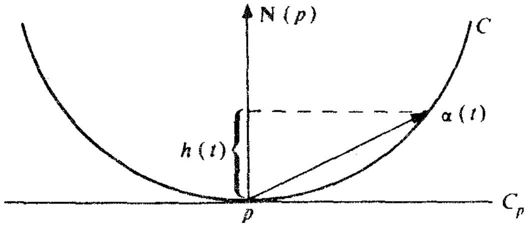
(پ) $x_{۲} - ax_{۱}^{۲} = c$ ، $a \neq ۰$

(ت) $x_{۱}^{۲} - x_{۲}^{۲} = ۱$ ، $x_{۱} > ۰$.

۱۰-۴. خمیدگی k هر یک از خم‌های مسطح سودار تمرین ۱۰-۳ را پیدا کنید.

۱۰-۵. فرض کنید C یک خم مسطح سودار باشد. اگر $p\in C$ و $\mathbf{N}(p) = (p, N(p))$ نمایشگر سوی بردار قائم یکه در p باشد. نشان دهید که هرگاه $\alpha:I \longrightarrow C$ یک پارامترسازی موضعی با تندی یکه C با شرط $\alpha(t_{۰}) = p$ باشد و $h(t) = (\alpha(t) - p) . N(p)$ (ر.ک. شکل ۱۰-۳)، آنگاه $h(t_{۰}) = h'(t_{۰}) = ۰$ و $h''(t_{۰}) = k(p)$.

۱۰-۶. فرض کنید C یک خم سطح سودار توسط میدان برداری قائم یکه $\mathbf{N}$ باشد. فرض کنید $\alpha{:}I \longrightarrow C$ یک پارامترسازی موضعی با تندی یکهٔ C باشد. برای $t\in I$، قرار دهید $\mathbf{T}(t) = \alpha'(t)$. نشان دهید که



شکل ۱۰-۳ : $h(t)$ تصویر $\alpha(t) - p$ روی $N(p)$ است. $h(t)$ را می‌توان به عنوان "ارتفاع $\alpha(t)$ بالای خط مماس بر S در p" در نظر گرفت.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{T}} = k\,\mathbf{N} \\ \dot{\mathbf{N}} = -k\,\mathbf{T} \end{cases}$$

و به عبارت دقیقتر

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{T}} = (k\circ\alpha)\,(\mathbf{N}\circ\alpha) \\ (\mathbf{N}\circ\alpha) = -(k\circ\alpha)\,\mathbf{T}. \end{cases}$$

این فرمولها را ***فرمولهای فرنه*** برای یک خم مسطح گویند.

۱۰-۷. فرض کنید $\alpha{:}I \longrightarrow \mathbf{R}^3$ یک خم پارامتری با تندی یکه در $\mathbf{R}^3$ باشد به قسمی که $\alpha'(t)\times\alpha''(t) \neq 0$ برای هر $t\in I$. فرض کنید $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$، و $\mathbf{B}$ نمایشگر میدانهای برداری در طول خم α باشند که به صورت $\mathbf{T}(t) = \alpha'(t)$، $\mathbf{N}(t) = \dfrac{\alpha''(t)}{|\alpha''(t)|}$ و $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t)\times\mathbf{N}(t)$ برای هر $t\in I$ تعریف شده باشند.

(الف) نشان دهید که $\{\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t)\}$ برای هر $t\in I$ متعامد یکه می‌باشند.

(ب) نشان دهید که توابع هموار $k{:}I \longrightarrow \mathbf{R}$ و $\tau{:}I \longrightarrow \mathbf{R}$ وجود دارند به قسمی که

$$\dot{\mathbf{T}} = k\mathbf{N}$$

$$\dot{\mathbf{N}} = -k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$$

$$\dot{\mathbf{B}} = -\tau \mathbf{N}.$$

این فرمولها را ***فرمولهای فرنه*** خمهای پارامتری در $\mathbf{R}^3$ گویند. میدانهای برداری $\mathbf{N}$ و $\mathbf{B}$ را به ترتیب میدانهای برداری قائم اصلی وقایم دوم درطول α گویند. توابع k و τ را ***خمیدگی وتاب*** α گویند.

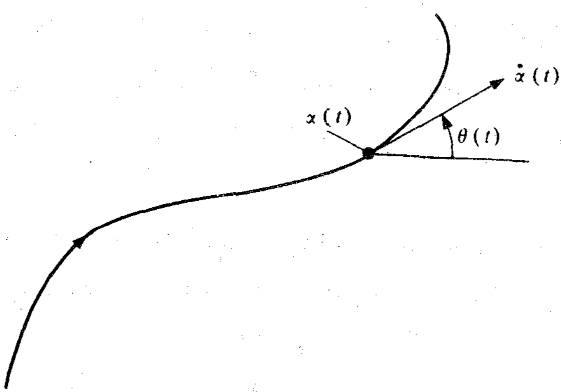
۱۰-۸. نشان دهید که دایرهٔ خمیدگی O در یک نقطه p یک خم مسطح سودار C که در آن $k(p) \neq 0$، مماس مرتبه دوم با خم C در نقطهٔ p دارد، یعنی نشان دهید که هرگاه α و β بترتیب پارامترسازیهای موضعی C و O با تندی یکه با شرایط $\alpha(0) = \beta(0) = p$ باشند، آنگاه $\dot\alpha(0) = \dot\beta(0)$ و $\ddot\alpha(0) = \ddot\beta(0)$.

۱۰-۹. فرض کنید C یک خم مسطح سودار باشد. فرض کنید $p \in C$ و $\alpha: I \longrightarrow C$ یک پارامترسازی موضعی C با تندی یکه باشد که $\alpha(0) = p$ و $k(p) \neq 0$. برای $q \in \mathbf{R}^2$ و $r > 0$ تابع $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ را به صورت $f(t) = |\alpha(t) - q|^2 - r^2$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که q مرکز خمیدگی و r شعاع خمیدگی C در نقطهٔ p است اگر و فقط اگر $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$.

۱۰-۱۰. فرض کنید $\alpha: I \longrightarrow C$ یک پارامترسازی موضعی با تندی یکه خم مسطح سودار C باشد. با فرض آنکه $\theta: I \longrightarrow \mathbf{R}$ هموار باشد به قسمی که

$$\dot\alpha(t) = (\alpha(t), \cos\theta(t), \sin\theta(t))$$

برای هر $t \in I$ (ر.ک. شکل ۱۰-۴). (در فصل بعد ما قادر خواهیم بود که ثابت کنیم این چنین تابع θای وجود دارد، ر.ک. تعریف ۱۱-۱۵). نشان دهید که $\dfrac{d\theta}{dt} = k \circ \alpha$



شکل ۱۰-۴ : زاویه میل یک خم در $\mathbf{R}^2$ با تندی یکه

۱۱ـ طول کمان و انتگرالهای منحنی‌الخط

ما تجزیه و تحلیل نگاشت وینگارتن در مورد n ـ رویه ها $(n>1)$ را بتعویق می‌اندازیم تا ببینیم که چگونه پارامتر سازی‌های خم‌های مسطح را می‌توان جهت محاسبهٔ انتگرال‌های روی خم‌ها بکار برد. $l(\alpha)$، ***طول*** یک خم پارامتری $\alpha: I \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ را به صورت انتگرال تندی α

$$l(\alpha) = \int_a^b \| \alpha^{\cdot}(t) \| \; dt$$

تعریف می‌کنیم، که در آن a و b نقاط انتهایی I (احتمالاً $\pm\infty$) می‌باشند. توجه دارید که $l(\alpha)$ می‌تواند $\pm\infty$ باشد. همچنین توجه دارید که طول یک خم پارامتری مجموع "فاصله پیموده شده" است. وقتی که α خود را مجدداً به پیماید در این صورت قسمتی از تصویر که بیش از یک بار پوشیده شود بیش از یکبار به حساب آمده است.

توجه دارید که هرگاه $\beta: \bar{I} \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ یک پارامتر سازی مجدد α باشد. آنگاه $l(\alpha) = l(\beta)$. در واقع هرگاه $\beta = \alpha \circ h$ که در آن $h: \bar{I} \longrightarrow I$ به قسمی باشد که $h'(t) > 0$ برای هر $t \in \bar{I}$، آنگاه

$$l(\beta) = \int_c^d \| \beta^{\cdot}(t) \| \, dt = \int_c^d \| \alpha^{\cdot}(h(t)) \| \; h'(t) dt$$

$$= \int_a^b \| \alpha^{\cdot}(u) \| \; du = l(\alpha)$$

که در آن c و d نقاط انتهایی $\bar{I}$ می‌باشند.

هرگاه α یک خم با تندی یکه باشد، آنگاه برای t_1 و $t_2 \in I$ با شرط $t_1 < t_2$،

$$\int_{t_1}^{t_2} \| \alpha'(t) \| \, dt = \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1 ,$$

بنابراین طول هر قطعه α دقیقاً طول قطعه نظیر آن از بازهٔ پارامتر می‌باشد. به این دلیل، خم‌های با تندی یکه را اغلب ***پارامتری شده توسط طول کمان*** گویند.

برای به کار بردن مفهوم یک خم پارامتری برای تعریف طول یک خم مسطح سودار، ما به دو نتیجه مقدماتی احتیاج داریم.

● **قضیهٔ ۱.** ***فرض کنید C یک خم مسطح سودار باشد. آنگاه یک پارامتری سازی سرتاسری C وجود دارد اگر و فقط اگر C همبند باشد.***

برهان. از تعریف همبندی بالافاصله نتیجه می‌شودکه هر خم مسطح سودار که یک پارامتر سازی سرتاسری داشته باشد باید همبند باشد.

بعکس، فرض کنید C همبند باشد. $p \in C$ و $\alpha: I \longrightarrow C$ را پارامترسازی موضعی C که در فصل قبل به سمت آمده بگیرید. به خاطر دارید که α خم انتگرال بیشین گذرنده از نقطهٔ p میدان برداری $\mathbf{X}$ است که از دوران میدان برداری ∇f به اندازه $\frac{\pi}{2}$ــ به دست آمده است، که در آن $C = f^{-1}(c)$ و $\mathbf{N} = \frac{\nabla f}{\| \nabla f \|}$. فرض کنید $p_1 \in C$. نشان خواهیم داد که p_1 به تصویر α متعلق است، بنابراین α یک پارامترسازی سرتاسری C می‌باشد.

چون C همبند است، بنابراین یک نگاشت پیوسته مانند $\beta: [a, b] \longrightarrow C$ با شرایط $\beta(a) = p$ و $\beta(b) = p_1$ وجود دارد. برای کامل شدن اثبات کافی است نشان دهیم که برای هر $t \in [a,b]$، $\beta(t)$ متعلق به تصویر α است. به این منظور، فرض کنید t_0 کوچکترین کران بالای مجموعهٔ $\{t \in [a,b] : \beta([a,t]) \in (\alpha \text{ تصویر})\}$ و γ یک خم انتگرال $\mathbf{X}$ با شرط $\gamma(0) = \beta(t_0)$ باشد. یک مستطیل باز B در حول $p_0 = \beta(t_0)$ با این خاصیت که $C \cap B \subset (\gamma \text{ تصویر})$ می‌سازیم. در حال حاضر فرض می‌کنیم این چنین B ای وجود دارد. آنگاه، بنابر پیوستگی β، عددی مانند $\delta > 0$ وجود دارد به قسمی که $\beta(t) \in B$ (و بنابراین $\beta(t) \in C \cap B \subset (\gamma \text{ تصویر})$) برای هر $t \in [a,b]$ با شرط $|t - t_0| < \delta$. چون $\beta(t) \in (\alpha \text{ تصویر})$ برای $a \leq t < t_0$ (و برای $t = t_0$ اگر $t_0 = a$)، بنابراین $\beta(t) \in (\gamma \text{ تصویر}) \cap (\alpha \text{ تصویر})$ برای $t \in [a,b]$ (با شرط $t \leq t_0$). بنابراین γ و α خمهای انتگرال $\mathbf{X}$ هستند که از یک نقطه مشترک می‌گذرند. چون α بیشین است، لذا نتیجه می‌شود که $(\gamma \text{ تصویر}) \subset (\alpha \text{ تصویر})$. (و در واقع عددی مانند $\tau \in \mathbf{R}$ وجود دارد به قسمی که $\gamma(t) = \alpha(t - \tau)$

برای هر t در دامنهٔ γ) بنابراین (تصویر α) $\subset$ (تصویر γ) $\subset$ $\beta(t) \in C \cap B$ برای هر $t \in [a,b]$ با شرط $|t - t_\circ| < \delta$. اما این امر فقط در صورتی رخ می‌دهد که $t_\circ = b$ و (تصویر α) $\beta(t_\circ) \in$، بنابراین (تصویر α) $\beta(t) \in$ برای هر $t \in [a,b]$ همان طور که ادعا شده بود.

اینک برای کامل شدن اثبات تنها احتیاج به ساختن B داریم. برای این منظور، فرض کنید $u = (\frac{\partial f}{\partial x_\text{۲}}(p_o), -\frac{\partial f}{\partial x_\text{۱}}(p_o))$ و $v = (\frac{\partial f}{\partial x_\text{۱}}(p_o), -\frac{\partial f}{\partial x_\text{۲}}(p_o))$ و در نتیجه $(p_o, u) \in C_{p_\circ}$ ، $(p_o, v) \perp C_{p_\circ}$. فرض کنید A نشانگر مستطیل

$$A = \{p_o + ru + sv : |r| < \varepsilon_\text{۱}, |s| < \varepsilon_\text{۲}\}$$

باشد که در آن $\circ < \varepsilon_\text{۱}$ و $\circ < \varepsilon_\text{۲}$ به قدر کافی کوچک انتخاب شده باشند که A در دامنهٔ f واقع باشد و برای تمام $q \in A$ $\nabla f(q) \cdot (q,v) > \circ$ (ر.ک.شکل ۱۱-۱).

اینکه شرط آخری صادق باشد نتیجه‌ای از پیوستگی $(\frac{\partial f}{\partial x_\text{۱}}, \frac{\partial f}{\partial x_\text{۲}})$ و این حقیقت است که $((\frac{\partial f}{\partial x_\text{۱}}, \frac{\partial f}{\partial x_\text{۲}}) \cdot v)(p_\circ) = (\frac{\partial f}{\partial x_\text{۱}}(p_o))^\text{۲} + (\frac{\partial f}{\partial x_\text{۲}}(p_o))^\text{۲} > \circ$. شرط $\nabla f(q) \cdot (q,v) > \circ$ برای هر $q \in A$ تضمین می‌کند که برای $|r| < \varepsilon_\text{۱}$ تابع

$$g_r(s) = f(p_o + ru + sv)$$

روی بازهٔ $-\varepsilon_\text{۲} < s < \varepsilon_\text{۲}$ $(g'_r(s) > \circ)$ اکیداً صعودی است و بنابراین به ازای هر r با شرط $|r| < \varepsilon_\text{۱}$ ، حداکثر یک s با شرط $|s| < \varepsilon_\text{۲}$ وجود دارد به قسمی که $g_r(s) = f(p_o + ru + sv) = c$ ، یا به عبارت دیگر، برای هر r با شرط $|r| < \varepsilon_\text{۱}$ ، حداکثر یک $|s| < \varepsilon_\text{۲}$ وجود دارد به قسمی که $p_o + ru + sv \in C$. اینک $\gamma(t) = p_o + h_\text{۱}(t)u + h_\text{۲}(t)v$ که در آن $h_\text{۱}(t) = (\gamma(t) - p_o) \cdot u / \| u \|^\text{۲}$ و $h_\text{۲}(t) = (\gamma(t) - p_o) \cdot v / \| v \|^\text{۲}$ توابعی هموار از t می‌باشند به قسمی که $h_\text{۱}(\circ) = h_\text{۲}(\circ) = \circ$. با استفاده از پیوستگی γ و $h'_\text{۱}$ و این حقیقت که

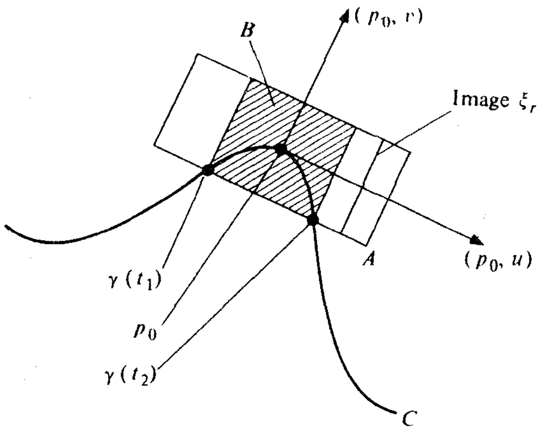
$$h'_\text{۱}(\circ) = \dot\gamma(\circ) \cdot (p_o, u / \| u \|^\text{۲}) = \mathbf{X}(p_o) \cdot \mathbf{X}(p_o) / \| \mathbf{X}(p_o) \|^\text{۲} = \text{۱}$$

می‌توان $\circ > t_\text{۱}$ و $\circ < t_\text{۲}$ در دامنه γ انتخاب کرد به قسمی که هم $\gamma(t) \in A$ و $h'_\text{۱}(t) > \circ$ برای هر $t \in (t_\text{۱}, t_\text{۲})$ (شکل ۱۱-۱). با قرار دادن $r_\text{۱} = h_\text{۱}(t_\text{۱})$ و $r_\text{۲} = h_\text{۱}(t_\text{۲})$ نتیجه می‌گردد که به ازای هر $r \in (r_\text{۱}, r_\text{۲})$ دقیقاً یک $t \in (t_\text{۱}, t_\text{۲})$ وجود دارد به قسمی که $h_\text{۱}(t) = r$ (چون $h_\text{۱}(t)$ پیوسته و اکیداً

صعودی است) و $s = h_2(t)$. برای این t یک s وجود دارد (و بنابراین، این s یکتاست) به قسمی که $|s| < \varepsilon_2$ و در نتیجه $p_0 + ru + sv \in C$. به عبارت دیگر، هرگاه مستطیل

$$B = \{p_0 + ru + sv : r_1 < r < \varepsilon_2 , |s| < \varepsilon_2\}$$

درنظرگیریم، آنگاه $p_0 + ru + sv \in B \cap C$ اگر و فقط اگر $r = h_1(t)$ و $s = h_2(t)$ برای یک $t \in (t_1, t_2)$، یعنی اگر و فقط اگر (تصویر γ) $p_0 + ru + sv \in$. در نتیجه (تصویر γ) $C \cap B \subset$، که همان چیزی است که لازم بود ثابت شود □ .



شکل ۱۱-۱ : مستطیل A در حول p_0 به قسمی انتخاب شده است که هر قطعه خط $\xi_r(s) = (p_0 + ru) + sv$ (r ثابت، $-\varepsilon_1 < r < \varepsilon_2$) C را حداکثر یکبار قطعه می‌کند. در مستطیل هاشورزده B چنین قطعه خطی دقیقاً C را یکبار قطع می‌کند.

اگر در اثبات قضیهٔ ۱ در همه جا به جای **X** میدان برداری یکه $\mathbf{X}/\|\mathbf{X}\|$ را قرار دهیم وجود یک پارامترسازی سرتاسری با **تندی یکه** برای هر خم مسطح سودار همبند را نیز نشان می‌دهد.

● قضیهٔ ۲. ***فرض کنید C یک خم مسطح سودار همبند و $\beta: I \longrightarrow C$ یک پارامترسازی سرتاسری C با تندی یکه باشد. در این صورت β یک به یک و یا دوره‌ای است. علاوه براین، β دوره‌ای است اگر و فقط اگر C فشرده باشد.***

برهان. فرض کنید $\beta(t_1) = \beta(t_2)$ برای t_1 و $t_2 \in I$ با شرط $t_1 \neq t_2$. فرض کنید **X** همان میدان

برداری مماس یکه بر C باشد که در فصل قبل ساخته شده است و α خم انتگرال بیشین $\mathbf{X}$ با شرط $\alpha(\circ) = \beta(t_1) = \beta(t_2)$ باشد. آنگاه ، چون β نیز یک خم انتگرال $\mathbf{X}$ است، یکتایی خمهای انتگرال ایجاب می‌کند که

$$\beta(t) = \alpha(t - t_1)$$

و همزمان با آن

$$\beta(t) = \alpha(t - t_2)$$

برای هر $t \in I$. با قرار دادن $\tau = t_2 - t_1$، داریم

$$\beta(t) = \alpha(t - t_1) = \alpha((t + \tau) - t_2) = \beta(t + \tau)$$

برای هر t ای که هم t و هم $t + \tau$ به I متعلق باشند، در نتیجه هرگاه β یک به یک نباشد، آنگاه β دوره‌ای است.

هرگاه β دوره‌ای باشد، آنگاه C باید فشرده باشد زیرا که C تصویر بازهٔ بستهٔ $[t_\circ , t_\circ + \tau]$ تحت نگاشت پیوسته β می‌باشد. از طرف دیگر، هرگاه β دوره‌ای نباشد، آنگاه β باید یک به یک باشد و در نتیجه C فشرده نیست زیرا که تابع $\beta^{-1}: C \longrightarrow \mathbf{R}$ روی C پیوسته است ولی مقدار ماکزیمم خود را نمی‌گیرد. پیوستگی β^{-1} را می‌توان به صورت زیر تحقیق کرد:

برای $t_\circ \in I$ و $\varepsilon > \circ$، برای t هایی که $|t| < \varepsilon$ و $t + t_\circ \in I$ قرار می‌دهیم $\gamma(t) = \beta(t + t_\circ)$ و مستطیل باز B را در حول $p_0 = \beta(t_\circ) = \gamma(\circ)$ مانند اثبات قضیه ۱ در نظر می‌گیریم، آنگاه (تصویر α) $C \cap B \subset$ بنابراین $|\beta^{-1}(p) - t_\circ| = |\gamma^{-1}(p)| < \varepsilon$ وقتی که $p \in C \cap B$، چیزی که برای پیوستگی لازم بود. □

بخاطر دارید که **دورهٔ** یک تابع دوره‌ای β کوچکترین τ ای است به قسمی که برای تمام t هایی یکه هم t و هم $t + \tau$ در دامنهٔ β قرار دارد $\beta(t + \tau) = \beta(t)$. هرگاه τ دورهٔ β باشد، آنگاه هر زیر مجموعهٔ دامنهٔ β به صورت $[t_\circ , t_\circ + \tau)$ را یک ***دامنهٔ بنیادی*** β نامند. توجه دارید که تحدید هر پارامترسازی سرتاسری دوره‌ای β در مورد یک خم مسطح فشرده به دامنهٔ بنیادی، دامنهٔ بنیادی را به طور یک به یک روی تصویر β می‌نگارد. بنابراین، هرگاه ما ***مجاز باشیم که بازه‌های نیمه باز را همانند بازه‌های باز به عنوان دامنه‌های خم‌های پارامتری در نظر بگیریم، هر خم مسطح سودار همبند یک پارامترسازی سرتاسری با تندی یکه قبول می‌کند.*** علاوه بر این، هر دو

چنین پارامترسازی $\alpha:I \longrightarrow C$ و $\beta:\bar{I} \longrightarrow C$ دارای بازه‌های پارامتر I و $\bar{I}$ با طول یکسانی هستند. در واقع α و β توسط رابطهٔ $\beta(t) = \alpha(t - t_0)$ برای یک $t_0 \in \mathbf{R}$ بهم مربوط می‌شوند، بنابراین $\bar{I}$ صرفاً یک انتقال I می‌باشد. بنابراین می‌توان ***طول*** یک خم مسطح سودار همبند C را طول بازهٔ I بگیریم که در آن $\alpha:I \longrightarrow C$ یک پارامترسازی یک به یک سرتاسری C با تندی یکه است.

چون طول β با طول هر پارامترسازی مجدد آن مانند α یکسان است، بنابراین طول یک خم مسطح سودار همبند را می‌توان توسط دستور

$$l(C) = l(\alpha) = \int_a^b \| \alpha^{\cdot}(t) \| \; dt$$

محاسبه کرد که در آن $\alpha:I \longrightarrow C$ هر پارامترسازی سرتاسری یک به یک C است و a و b نقاط انتهایی I می‌باشند.

مثال. فرض کنید C نمایشگر دایرهٔ $(x_1 - a)^2 + (x_1 - b)^2 = r^2$ سودار توسط قائم خارجی باشد. دراین صورت $\alpha:I \longrightarrow C$ تعریف شده به صورت $\alpha(t) = (a + r\cos 2t, b - r\sin 2t)$ همانطور که در فصل قبل دیدیم یک پارامترسازی همه جایی C است. α دوره‌ای با دورهٔ π است و در نتیجه تحدید α به بازهٔ $[0,\pi]$ یک پارامترسازی سرتاسری یک به یک C است. بنابراین

$$l(C) = \int_0^{\pi} \| \alpha^{\cdot}(t) \| \; dt = \int_0^{\pi} \| (-2r\sin 2t, -2r\cos 2t) \| \; dt = 2\pi r.$$

باقی مانده این فصل به بحث در مورد ۱ـ فرمهای دیفرانسیل پذیر و انتگرال هایش اختصاص داده شده است. یک ***۱ـفرم دیفرانسیل پذیر***، که معمولاً آنرا یک ***۱ـفرم*** نامند، در یک مجموعهٔ باز $U \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ تابعی مانند $\omega: U \times \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}$ می‌باشد به قسمی که به ازای هر $p \in U$، تحدید ω به $\mathbf{R}_p^{n+1} \subseteq U \times \mathbf{R}^{n+1}$ خطی است.

مثال ۱. فرض کنید $\mathbf{X}$ یک میدان برداری روی U و $\omega_{\mathbf{X}}:U \times \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}$ به صورت

$$\omega_{\mathbf{X}}(p,v) = \mathbf{X}(p) \cdot (p,v)$$

تعریف شده باشد. آنگاه $\omega_{\mathbf{X}}$ یک ۱ـ فرم در U موسوم به ۱ـ فرم ***دوگان*** $\mathbf{X}$ است.

مثال ۲. برای $f:U \longrightarrow \mathbf{R}$ یک ***تابع هموار***، $df: U \times \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}$ را به صورت:

$$df(\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}} f = \nabla f(p) \cdot \mathbf{v} \ (\mathbf{v} = (p, v) \in \mathbf{R}_p^{n+1}, p \in U)$$

تعریف می‌کنیم، آنگاه df یک ۱ـ فرم روی U می‌باشد که موسوم به ***دیفرانسیل*** f است.

مثال ۳. به ازای هر $i \in \{1, \dots, n+1\}$، فرض کنید $x_i : U \longrightarrow \mathbf{R}$ ($U \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$) توسط

$$x_i(a_1, \dots, a_{n+1}) = a_i$$

تعریف شده باشد، تابع x_i را i امین ***تابع مختص دکارتی*** در U گویند. ۱ـ فرم dx_i. در واقع i امین مؤلفه هر بردار دامنه‌اش را انتخاب می‌کند.

$$dx_i(\mathbf{v}) = \nabla x_i(p) \cdot \mathbf{v} = (p, 0, \dots, 1, \dots, 0) \cdot \mathbf{v} = v_i$$

برای $\mathbf{v} = (p, v_1, \dots, v_{n+1}) \in \mathbf{R}_p^{n+1}$ ، $p \in U$.

تذکر. مانند روش معمول در ریاضیات، ما یک نماد را در موقعیت‌های مختلف برای نمایش کمیت‌های مختلف به کار می‌بریم. ما نماد x_i را برای نشان دادن عددی حقیقی وقتی که یک نقطهٔ $(x_1, \dots, x_{n+1})$ در $\mathbf{R}^{n+1}$ را بیان می‌کندبکار برده‌ایم، ما x_i را برای نشان دادن تابعی با دامنه در یک بازه وقتی که یک خم پارامتری $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_{n+1}(t))$ در $\mathbf{R}^{n+1}$ را بیان می‌کند به کار برده‌ایم، و اینک x_i را برای نشان دادن تابعی که دامنه‌اش مجموعهٔ بازی در $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد بکار می‌بریم. این استفاده‌های گوناگون از نماد x_i همگی معمول هستند. البته ما می‌توانستیم نماد دیگری را برای جلوگیری از به کار بستن بیش از حد یک نماد داده شده معرفی کنیم ولی تنها به قیمت گسترش بی‌رویهٔ نمادگذاری و عدم انطباق با استفاده معمول می‌باشد. ما استفاده از نماد x_i را در هر یک از این موقعیت‌ها ادامه می‌دهیم، معنی این نماد در هر یک از موقعیت‌ها معمولاً از متن مستفاد می‌شود.

یک ۱ـ فرم ω روی $U \subset \mathbf{R}^{n+1}$ هموار است اگر به عنوان تابعی از $\omega : U \times \mathbf{R}^{n+1} \subseteq \mathbf{R}^{2n+2} \longrightarrow \mathbf{R}$ هموار باشد. توجه دارید که هرگاه $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار روی U باشد، آنگاه دیفرانسیل آن یعنی df یک ۱ـ فرم هموار روی U است.

مجموع دو ۱ـ فرم ω_1 و ω_2 روی یک مجموعهٔ باز $U \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ عبارتست از ۱ـ فرم $\omega_1 + \omega_2$ که به صورت

$$(\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{v}) = \omega_1(\mathbf{v}) + \omega_2(\mathbf{v})$$

تعریف می‌شود. **حاصل‌ضرب** یک تابع $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$ و یک ۱-فرم ω روی U عبارتست از ۱-فرم $f\omega$ که روی U به صورت

$$(f\omega)(p, v) = f(p)\,\omega(p, v)$$

تعریف می‌شود. توجه دارید که مجموع دو ۱-فرم هموار، هموار است و همچنین حاصل‌ضرب یک تابع هموار و یک ۱-فرم هموار نیز هموار می‌باشد.

برای یک ۱-فرم مفروض ω و یک میدان برداری $\mathbf{X}$ روی $U \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$، می‌توان یک تابع $\omega(\mathbf{X}): U \longrightarrow \mathbf{R}$ را به صورت

$$(\omega(\mathbf{X}))(p) = \omega(\mathbf{X}(p))$$

تعریف کرد. توجه دارید که هرگاه ω و $\mathbf{X}$ هر دو هموار باشند، آنگاه $\omega(\mathbf{X})$ نیز این چنین است.

● **گزاره.** ***به ازای هر ۱-فرم ω روی U (U باز $\mathbf{R}^{n+1}$) توابع یکتایی مانند $f_i: U \longrightarrow \mathbf{R}$ (برای $i \in \{1, \ldots, n+1\}$) وجود دارند به قسمی که***

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} f_i dx_i .$$

علاوه بر این، ω هموار است اگر و فقط اگر هر یک از f_i ها هموار باشند.

برهان. به ازای هر $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ فرض کنید $\mathbf{X}_i$ نشانگر میدان برداری هموار روی U باشد که به صورت زیر تعریف شده است:

$$dx_i(\mathbf{X}_j) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j. \end{cases}$$

در نتیجه هرگاه $\omega = \sum_{i=1}^{n+1} f_i\, dx_i$ آنگاه به ازای هر $j \in \{1, \ldots, n+1\}$

$$f_j = \Big(\sum_{i=1}^{n+1} f_i\, dx_i\Big)(\mathbf{X}_j) = \omega(\mathbf{X}_j).$$

این فرمول نشان می‌دهد که توابع f_j در صورت وجود یکتا می‌باشند و همچنین هموارند اگر ω هموار باشد. از طرف دیگر، اگر توابع f_j را به توسط فرمول بالا تعریف کنیم، آنگاه ۱ـ فرم ω و $\sum_{i=1}^{n+1} f_i dx_i$ دارای مقدار مشترک روی هر یک از بردارهای پایه $\mathbf{X}_i(p)$ برای $\mathbf{R}_p^{n+1}$ می‌باشد و بنا بر خطی بودن آنها روی تمام بردارهای $\mathbf{R}_p^{n+1}$ برای $p\in U$ دارای مقدار برابر می‌باشند. بنابراین $\omega = \sum_{i=1}^{n+1} f_i\, dx_i$.

مسلماً ω هموار است اگر هر یک از f_i ها هموار باشند. □

● **نتیجه.** فرض کنید $f:U \longrightarrow \mathbf{R}$ (U باز $\mathbf{R}^{n+1}$) یک تابع هموار باشد. در این صورت

$$df = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

برهان. $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \nabla f \cdot \mathbf{X}_j = df(\mathbf{X}_j)$. □

اکنون ω را یک ۱ـ فرم هموار روی مجموعهٔ باز $U\subseteq\mathbf{R}^{n+1}$ بگیرید و $\alpha : [a,b] \longrightarrow U$ یک خم پارامتری در U باشد. انتگرال ω روی α عدد حقیقی

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b \omega(\dot\alpha(t))\, dt$$

می‌باشد. اینگونه انتگرال‌ها را ***انتگرال‌های منحنی الخط*** گویند.

توجه کنید که هرگاه $\beta : [c,b] \longrightarrow U$ هر پارامترسازی مجدد α باشد، $\beta = \alpha\circ h$ که در آن $h:[c,d]\longrightarrow [a,b]$ در هر نقطه دارای مشتق مثبت است، آنگاه

$$\int_\beta \omega = \int_c^d \omega(\dot\beta(t))dt = \int_c^d \omega(\dot\alpha(h(t))h'(t))dt = \int_c^d \omega(\dot\alpha(h(t))h'(t))\, dt$$

$$= \int_a^b \omega(\dot\alpha(u))\, du = \int_\alpha \omega.$$

در حالت خاص هرگاه U یک مجموعهٔ بازو $\mathbf{R}^2$ و C یک خم مسطح سودار همبند در U باشد، آنگاه می‌توان ***انتگرال*** ω ***روی*** C را به صورت

$$\int_C \omega = \int_\alpha \omega$$

تعریف کرد، که در آن $\alpha : [a,b] \longrightarrow C$ یک خم پارامتری می‌باشد که تحدیدش به $[a,b)$ یک پارامترسازی سرتاسری یک به یک C است، نتیجه حاصل مستقل از انتخاب α است.
همچنین توجه دارید که انتگرال منحنی‌الخط $\int_\alpha \omega$ را می‌توان برای یک خم پارامتری تکه‌ای هموار α نیز تعریف کرد. هرگاه $\alpha:[a,b]U \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ پیوسته باشد و به قسمی باشد که تحدید α به $[t_i,t_{i+1}]$ برای هر $i\in\{0,1,...,k\}$ هموار باشد، که در آن $a = t_0 < t_1 < ... < t_{k+1} = b$، آنگاه انتگرال ۱ـ فرم هموار ω، در U روی α برابر

$$\int_\alpha \omega = \sum_{i=0}^{k} \int_{\alpha_i} \omega$$

می‌باشد که در آن α_i تحدید α به $[t_i , t_{i+1}]$ می‌باشد.
تذکر. در تعریف انتگرالهای منحنی‌الخط $\int_\alpha \omega$ و $\int_C \omega$ ما تأکید داشتیم که خم پارامتری α دارای دامنه‌ای به صورت یک بازه بسته و خم مسطح C فشرده باشد. اینعمل صرفاً بخاطر اطمینان از وجود انتگرالها انجام شده است. توجه داشته باشید که لزومی به گرفتن این مفروضات در تعریف انتگرال منحنی‌الخط نیست زیرا که تابع انتگرال‌گیر غیرمنفی است. بنابراین این انتگرال همیشه یا وجود دارد و یا واگرا به سمت $+\infty$ می‌باشد.
مثال ۱. فرض کنید U در $\mathbf{R}^{n+1}$ باز و $f:U \longrightarrow \mathbf{R}$ هموار باشد، آنگاه، برای هر خم پارامتری $\alpha:[a,b]\longrightarrow U$ در U

$$\int_\alpha df = \int_a^b df(\dot{\alpha}(t))dt = \int_a^b (f\circ\alpha)'(t)dt = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

در حالت خاص هرگاه $\alpha(b) = \alpha(a)$، آنگاه $\int_\alpha df = 0$.

یک ۱ـ فرمی که دیفرانسیل یک تابع هموار باشد، **دقیق** (یا **کامل**) گویند. یک خم پارامتری $\alpha:[a,b]\longrightarrow \mathbf{R}$ با شرط $\alpha(a)=\alpha(b)$ را **بسته** گویند. محاسبهٔ بالا نشان می‌دهد که انتگرال یک ۱ـ فرم دقیق روی یک خم بسته همیشه صفر استا. در حالت خاص، ***انتگرال یک ۱ـ فرم دقیق روی یک خم مسطح سودار همبند فشرده هموار صفر است.***

مثال ۲. فرض کنید η نشانگر یک ۱ـ فرم روی $\mathbf{R}^2/\{0\}$ تعریف شده توسط

$$\eta = \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}\,dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\,dx_2$$

باشد و C بیضی $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$ باشد، که توسط قائم داخلی‌اش سودار شده باشد. خم پارامتری $\alpha:[0,2\pi]\longrightarrow C$ تعریف شده به صورت $\alpha(t)=(a\cos t\,,\, b\sin t)$ محدود شده به بازه $[0,2\pi)$ یک پارامترسازی همه جایی یک به یک C را مشخص می‌کند. بنابراین

$$\int_C \eta = \int_\alpha \eta = \int_0^{2\pi} \eta\,(\alpha^{\cdot}(t))dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}(\alpha(t))dx_1(\alpha^{\cdot}(t)) + \frac{x_1}{x_1^2+x_1^2}(\alpha(t))dx_2(\alpha^{\cdot}(t))\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{-b\sin t}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}(-a\sin t)+\frac{a\cos t}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}(b\cos t\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{ab}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}dt = 4\int_0^{\pi/2}\frac{(b/a)\sec^2 t}{1+(b/a)^2 tg^2 t}dt = 4\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^2}=2\pi\,.$$

چون انتگرالش روی خم فشرده C صفر نیست، لذا ۱ـ فرم η مثال ۲ نمی‌تواند دقیق باشد. با این حال تحدیدش به V (یا به عبارت دقیقتر $V\times\mathbf{R}^2$)، که در آن V متمم در $\mathbf{R}^2$ هر پرتو گذرنده از مرکز است دقیق می‌باشد. در واقع، برای v یک برداریکه در $\mathbf{R}^2$ و

$$V=\mathbf{R}^2-\{rv : r\geq 0\}$$

$\eta = d\theta_V$، که در آن $\theta_V : V\longrightarrow \mathbf{R}$ به صورت زیر تعریف شده است. فرض کنید θ_V عدد حقیقی یکتایی با شرط $0\leq\theta_v<2\pi$ را نمایش دهد به قسمی که $v=(\cos\theta_v\,,\,\sin\theta_v)$. آنگاه به ازای

$(x,y)\in V$ ، $\theta_V(x,y)$ را عدد حقیقی یکتایی با شرط $\theta_v < \theta_V(x,y) < \theta_v + ۲\pi$ تعریف می‌کنیم به قسمی که

$$\left(\frac{x}{(x^۲+y^۲)^{۱/۲}}, \frac{y}{(x^۲+y^۲)^{۱/۲}}\right) = (\cos\theta_V(x,y), \sin\theta_V(x,y))$$

(ر.ک.شکل ۱۱-۲). برای اینکه ثابت کنیم $d\theta_V = \eta\,|_V$ کافی است توجه داشته باشیم که $t_g\,\theta_V(x,y) = y/x$ و $\theta_V(x,y) = x/y$، بنابراین در هر مجموعه باز به اندازه کافی کوچک می‌توان از یکی از این دو معادله θ_V را به دست آورد و در نتیجه:

$$d\theta_V = \frac{\partial\theta_V}{\partial x_۱}dx_۱ + \frac{\partial\theta_V}{\partial x_۲}dx_۲ = -\frac{x_۲}{x_۱^۲+x_۲^۲}dx_۱ + \frac{x_۱}{x_۱^۲+x_۲^۲}dx_۲$$

● **قضیهٔ ۳** *فرض کنید η، ۱ـفرم روی $\mathbf{R}^۲/\{۰\}$ تعریف شده به صورت*

$$\eta = -\frac{x_۲}{x_۱^۲+x_۲^۲}dx_۱ + \frac{x_۱}{x_۱^۲+x_۲^۲}dx_۲$$

باشد. در این صورت برای هر خم پارامتری تکه‌ای هموار $\alpha:[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^۲/\{۰\}$ در $\mathbf{R}^۲/\{۰\}$

$$\int_\alpha \eta = ۲k\pi$$

برای یک عدد صحیح k.

برهان. تابع $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ را به صورت:

$$\varphi(t) = \varphi(a) + \int_{\alpha_t} \varphi$$

تعریف می‌کنیم که در آن α_t تحدید α به فاصلهٔ $[a,t]$ می‌باشد و $\varphi(a)$ به قسمی انتخاب شده است که

$$\alpha(a)/\|\alpha(a)\| = (\cos\varphi(a), \sin\varphi(a)).$$

ادعا می‌کنیم که

$$\alpha(t)/\|\alpha(t)\| = (\cos\varphi(t), \sin\varphi(t)) \qquad (*)$$

برای هر $t\in[a,b]$. در واقع، فرض کنید $t_\circ$ کوچکترین کران بالای مجموعهٔ

$\{\tau\in[a,b]:$ برای $a\le t\le\tau$ صادق است $(*)\}$

باشد، بنا بر پیوستگی، $(*)$ باید به ازای $t=t_\circ$ نیز برقرار باشد با قراردادن $V=\dfrac{-\alpha(t_\circ)}{\|\alpha(t_\circ)\|}$ و تعریف θ_V مانند بالا نتیجه می‌شود که

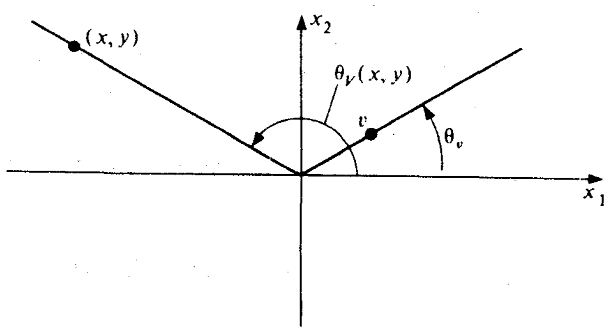
$$(\cos\theta_V(\alpha(t_\circ)), \sin\theta_V(\alpha(t_\circ))) = \frac{\alpha(t_\circ)}{\|\alpha(t_\circ)\|} = (\cos\varphi(t_\circ), \sin\varphi(t_\circ)).$$

بنابراین $\varphi(t_\circ)-\theta_V(\alpha(t_\circ)) < ۲m\pi$ برای یک عدد صحیح m. با انتخاب $\delta>\circ$ به قسمی که $\alpha(t)\in V$ برای هر $t\in[a,b]$ با شرط $|t-t_\circ|<\delta$ در می‌یابیم که برای $t\in[a,b]$، $|t-t_\circ|<\delta$ و $t\ne t_i$ (t_i نقطه‌ای است که α در آن نقطه هموار نیست.)

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t)-\theta_V(\alpha(t))) = \eta(\alpha'(t)) - d\,\theta_V(\alpha'(t)) = \circ,$$

لذا $\varphi(t)-\theta_V(\alpha(t)) = ۲m\pi$ برای هر $t\in[a,b]$ با شرط $|t-t_\circ|<\delta$. اما در این صورت

$$(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t)) = (\cos\theta_V(\alpha(t)), \sin\theta_V(\alpha(t))) = \frac{\alpha(t)}{\|\alpha(t)\|}$$



شکل ۱۱-۲. $\theta_V(x,y)$ زاویه شیب قطعه خط از مبداء تا (x,y)، $\theta_v<\theta_V<\theta_v+۲\pi$

برای هر چنین t ای، که فقط در صورتی ممکن است که $t_\circ = b$. در نتیجه $t_\circ = b$ و (*) برای تمام $t \in [a,b]$ برقرار است. همان طور که ادعا شده بود.
بالاخره چون $\alpha(a) = \alpha(b)$، (*) ایجاب می‌کند که

$$(\cos\varphi(a), \sin\varphi(a)) = (\cos\varphi(b), \sin\varphi(b))$$

بنابراین $\varphi(b) - \varphi(a) = ۲k\pi$ برای یک عدد صحیح k و

$$\int_\alpha \eta = \int_a^b \eta(\dot\alpha(t))\, dt = \varphi(b) - \varphi(a) = ۲k\pi. \square$$

عدد صحیح $k(\alpha) = \frac{۱}{۲\pi}\int_\alpha \eta$ را **عدد گشت** α نامند زیرا که تعداد دفعاتی را که خم بسته α در حول مبدأ می‌چرخد می‌شمارد.

تمرین

در تمرینهای ۱۱-۱ الی ۱۱-۴، مقدار طول خم‌های پارامتری مفروض $\alpha: I \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ را پیدا کنید.

۱۱-۱. $\alpha(t) = (t^۲, t^۳)$، $I = [\circ, ۲]$، $n = ۱$.

۱۱-۲. $\alpha(t) = (\cos ۳t, \sin ۳t, ۴t)$، $I = [-۱, ۱]$، $n = ۲$.

۱۱-۳. $\alpha(t) = (\sqrt{۲}\cos t, \sin ۲t, \sin ۲t)$ $I = [\circ, ۲\pi]$، $n = ۲$.

۱۱-۴. $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \cos t, \sin t)$ $I = [\circ, ۲\pi]$، $n = ۳$.

در تمرینهای ۱۱-۵ الی ۱۱-۸، طول خم مسطح سودار همبند $f^{-۱}(c)$، سودار توسط $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ را بیابید که در آن $f: U \longrightarrow \mathbf{R}$ و c داده شده‌اند.

۱۱-۵. $f(x_1, x_2) = 5x_1 + 12x_2$، $U = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 169\}$، $c = 0$.

۱۱-۶. $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 1)^2$، $U = \mathbf{R}^2$، $c = 2$

۱۱-۷. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$، $U = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 2\}$، $c = 1$ [انتگرال را محاسبه نکنید].

۱۱-۸. $f(x_1, x_2) = -9x_1^2 + 4x_2^3$، $U = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, 0 < x_2 < 3\}$، $c = 0$
[**راهنمایی**: توجه کنید که یک پارامترسازی $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t))$ از $f^{-1}(0)$ با شرط $x_2(t) = t$ وجود دارد].

۱۱-۹. نشان دهید که هرگاه C یک خم مسطح سودار همبند باشد و $\bar{C}$ همان خم با سوی مخالف باشد، آنگاه $l(\bar{C}) = l(C)$.

۱۱-۱۰. فرض کنید C یک خم مسطح سودار همبند باشد و $\alpha: I \longrightarrow C$ یک پارامترسازی یک به یک C با تندی یکه باشد، اگر $k: C \longrightarrow \mathbf{R}$ نشانگر خمیدگی C باشد.

(الف) نشان دهید که $\int_a^b |k \circ \alpha(t)| \, dt$ مستقل از α، پارامترسازی یک به یک C با تندی یکه می‌باشد که در آن a و b نقاط انتهایی I می‌باشند.

(ب) نشان دهید که $\int_a^b |k \circ \alpha(t)| \, dt = l(N \circ \alpha)$، که در آن $N: C \longrightarrow \mathbf{R}^2$ نگاشت گاوس C است.

[$\int_a^b |k \circ \alpha(t)| \, dt$ را **جمع کل خمیدگی** C نامند].

۱۱-۱۱. فرض کنید f و g توابع هموار روی مجموعهٔ باز $U \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ باشند، نشان دهید که

(الف) $d(f + g) = df + dg$.

(ب) $d(fg) = g\,df + f\,dg$.

(پ) هرگاه $h:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ هموار باشد، آنگاه $d(h\circ f)=(h'\circ f)\,df$

۱۱-۱۲. انتگرالهای منحنی الخط زیر را حساب کنید.

(الف) $\int_\alpha (x_2\,dx_1 - x_1\,dx_2)$ که در آن $\alpha(t)=(2\cos t\,,\,2\sin t)$ $\quad 0\le t\le 2\pi$

(ب) $\int_C (-x_2\,dx_1 + x_1\,dx_2)$ که در آن C بیضی $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$ سودار شده توسط قائم داخلی است.

(پ) $\int_\alpha \sum_{i=1}^{n+1} x_i\,dx_i$ که در آن $\alpha:[0\,,\,1]\longrightarrow\mathbf{R}^{n+1}$ به قسمی است که $\alpha(0)=(0,\dots,0)$ و $\alpha(1)=(1,1,\dots,1)$ **[راهنمایی:** تابع $f:\mathbf{R}^{n+1}\longrightarrow\mathbf{R}$ را چنان بیابید که $df=\sum_{i=1}^{n+1} x_i dx_i$.]

۱۱-۱۳. فرض کنید $\omega=\sum_{i=1}^{n+1} f_i\,dx_i$ یک ۱-فرم هموار روی $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد و $\alpha(t)=(x_1(t),\dots,x_{n+1}(t))$ که در آن x_iها توابعی حقیقی هموار روی بازهٔ $[a,b]$ هستند. نشان دهید که

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^{n+1} (f_i\circ\alpha)\,\frac{dx_i}{dt}\,dt.$$

۱۱-۱۴. فرض کنید $C=f^{-1}(c)$ یک خم مسطح فشرده سودار توسط $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ باشد و $\mathbf{X}$ میدان برداری یکه روی (دامنهٔ f) $=U$ باشد که از دوران $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ به اندازه زاویه $\frac{\pi}{2}$ به دست آمده است. در صورتی که ω_X یک ۱-فرم روی U دوگان به $\mathbf{X}$ باشد، نشان دهید که $\int_C \omega_X = l(C)$.

۱۱-۱۵. فرض کنید $\alpha:I\longrightarrow\mathbf{R}^2$ یک خم با تندی یکه باشد، $t_0\in I$ و $\theta_0\in\mathbf{R}$ به قسمی باشد که $\alpha'(t_0)=(\alpha(t_0),\cos\theta_0\,,\sin\theta_0)$. نشان دهید که یک تابع هموار یکتا مانند $\theta:I\longrightarrow\mathbf{R}$ با شرط $\theta(t_0)=\theta_0$ وجود دارد به قسمی که $\alpha'(t)=(\alpha(t)\,,\cos\theta(t)\,,\sin\theta(t))$ برای هر $t\in I$.

[**راهنمایی:** $\theta(t) = \theta_\circ + \int_{t_\circ}^{t} \eta(\dot{\beta}(\tau))\, d\tau$ بگیرید که در آن η ۱ـ فرم قضیهٔ ۳ می‌باشد و $\beta = \frac{d\alpha}{dt}$.]

۱۱-۱۶. فرض کنید $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^۲ / \{\circ\}$ یک خم پارامتری تکه‌ای هموار بسته باشد. نشان دهید که عدد گشت α با عدد گشت $f\alpha$ که در آن $f:[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ یک تابع تکه‌ای هموار در طول α می‌باشد با شرط $f(a) = f(b)$ و $f(t) > \circ$ برای هر $t \in [a,b]$ برابر است. نتیجه بگیرید که α و $\alpha / \| \alpha \|$ دارای عدد گشت یکسانند.

۱۱-۱۷. فرض کنید $a = t_\circ < t_۱ < \dots < t_{k+1} = b$ و $\varphi:[a,b] \times [\circ , ۱] \longrightarrow \mathbf{R}^۲ / \{\circ\}$ یک نگاشت پیوسته باشد به قسمی که به ازای هر $u \in [\circ, ۱]$، نگاشت $\varphi_u:[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^۲$ تعریف شده به صورت $\varphi_u(t) = \varphi(t,u)$ روی هر یک از بازه‌های $[t_i , t_{i+1}]$ هموار باشد. فرض کنید $\varphi_u(a) = \varphi_u(b)$ برای هر $u \in [\circ,۱]$. نشان دهید که عدد گشت $k(\varphi_u)$ تابع پیوسته‌ای از u می‌باشد و بنابراین $k(\varphi_u)$ ثابت است و در حالت خاص $k(\varphi_\circ) = k(\varphi_۱)$. [نگاشت φ را **هموتوپی (همشنی)** بین $\varphi_\circ$ و $\varphi_۱$ گویند.]

۱۱-۱۸. عدد گشت $\frac{d\alpha}{dt}$ (که بنابر تمرین ۱۱-۱۶ برابر با عدد گشت $\dfrac{\frac{d\alpha}{dt}}{\| \frac{d\alpha}{dt} \|}$ می‌باشد)، که در آن $\alpha:[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^۲$ یک خم پارامتری عادی (برای هر t، $\alpha^{\cdot}(t) \neq \circ$) با شرط $\alpha^{\cdot}(a) = \alpha^{\cdot}(b)$ می‌باشد را ***اندیس دوران*** α نامند.

(الف). با مثالی نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح k خمی مانند α با اندیس دوران k وجود دارد.

(ب) نشان دهید که هرگاه α تحدید یک خم پارامتری عادی دوره‌ای با دورهٔ $\tau = b - a$ به $[a,b]$ باشد و α روی $[a,b)$ یک به یک باشد آنگاه اندیس دوران α برابر با ± ۱ می‌باشد. [**راهنمایی:** ر.ک. شکل ۱۱-۳. فرض کنید $u \in \mathbf{R}^۲$، $u \neq \circ$ و $t_\circ$ را به قسمی انتخاب کنید که $h(t) = \alpha(t).u$ دارای یک می‌نیمم مطلق در $t_\circ$ باشد. برای $t_\circ \leq t_۱ \leq t_۲ \leq t_\circ + \tau$، در این صورت

$$\psi(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt}(t_1) \Big/ \left\| \frac{d\alpha}{dt}(t_1) \right\| & \text{هرگاه } t_1 = t_2 \\ -\frac{d\alpha}{dt}(t_0) \Big/ \left\| \frac{d\alpha}{dt}(t_0) \right\| & \text{هرگاه } t_2 = t_0 + \tau, t_1 = t_0 \\ (\alpha(t_2) - \alpha(t_1)) \Big/ \left\| \alpha(t_2) - \alpha(t_1) \right\| & \text{و در غیر اینصورت .} \end{cases}$$

یک هموتوپی $\varphi : [t_0, t_0 + \tau] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}^2 / \{0\}$ را به صورت $\varphi = \psi \circ \phi$ تعریف کنید که در آن

$$\phi(t, u) = \begin{cases} (t_0, t_0) + (t - t_0)(1 - u, 1 + u) & \text{هرگاه } t_0 \le t \le t_0 + \frac{\tau}{2} \\ (t_0 + \tau, t_0 + \tau) - (t_0 + \tau - t)(1 + u, 1 - u) & \text{هرگاه } t_0 + \frac{\tau}{2} \le t \le t_0 + \tau \text{ .} \end{cases}$$

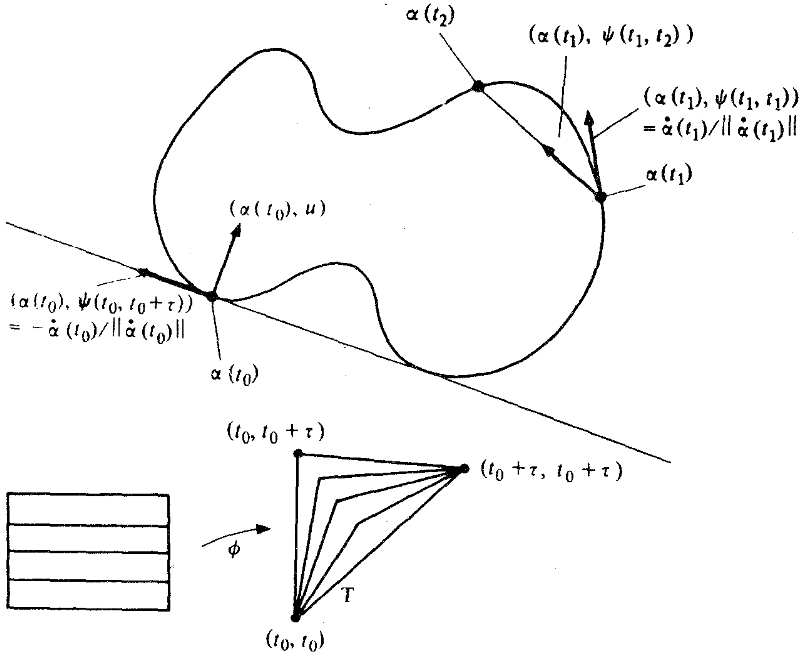
آنگاه عدد گشت φ_1 را محاسبه کنید و تمرین ۱۱-۱۷ را بکار برید. در محاسبهٔ عدد گشت φ_1 توجه دارید که تصاویر $\varphi_1 \mid (t_0, t_0 + \tau/2)$ و $\varphi_1 \mid (t_0 + \tau/2, t_0 + \tau)$ هر کدام در ناحیه‌ای قرار دادند که ۱ـ فرم η دقیق است].

۱۱-۱۹. فرض کنید C یک خم مسطح سودار همبند فشرده با خمیدگی k باشد که در همه جا مثبت است، و فرض کنید $\alpha: \mathbf{R} \longrightarrow C$ یک پارامترسازی سرتاسری با تندی یکه C باشد.

(الف) نشان دهید که هرگاه $u \in S^1$ و $h: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ به صورت $h(t) = \alpha(t).u$ تعریف شده باشد، آنگاه $h'(t_0) = 0$ اگر و فقط اگر $\mathbf{N}(\alpha(t_0)) = \pm u$ و $h''(t_0) = k(\alpha(t_0))u \,.\, \mathbf{N}(\alpha(t_0))$ برای تمام چنین t_0 هایی. نتیجه بگیرید که نگاشت گاوس $\mathbf{N}$ خم C پوشاست.

(ب) نشان دهید که هرگاه $[t_0, t_0 + \tau]$ یک دامنهٔ بنیادی α باشد آنگاه اندیس دوران (تمرین ۱۱-۱۸) $\alpha \mid (t_0, t_0 + \tau)$ برابر با $\frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0+\tau} (k \circ \alpha)(t) dt$ می‌باشد [**راهنمایی**: تمرینهای ۱۱-۱۵ و ۱۰-۱۰ را بکار برید].

(پ) نشان دهید که هرگاه $c \in (t_0, t_0 + \tau]$ به قسمی باشد که $\mathbf{N}(c) = \mathbf{N}(t_0)$ و $\mathbf{N}(t) \neq \mathbf{N}(t_0)$ برای $t_0 < t < c$، آنگاه $\int_{t_0}^{c} (k \circ \alpha)(t) dt = 2\pi$. [تمرین ۱۰-۱۰ را بکار برید] نتیجهٔ بگیرید که $c = t_0 + \tau$ و نگاشت گاوس C یک به یک است. [تمرین ۱۱-۱۸ (ب) را بکار برید].



شکل ۱۱-۳ برای نشان دادن اینکه اندیس دوران α برابر ± 1 می‌باشد، t_0 به قسمی انتخاب می‌شود که تصویر α کاملاً در یک طرف خم مماس در $\alpha(t_0)$ واقع شود، ψ نگاشت یکه شده $\psi(t_1,t_2) = \dfrac{\alpha(t_2)-\alpha(t_1)}{\|\alpha(t_2)-\alpha(t_1)\|}$ می‌باشد که به طور پیوسته به مثلث بسته T گسترش داده شده است، و $\phi:[t_0,t_0+\tau]\times[0\ ,\ 1] \longrightarrow T$ هموتوپی‌است‌که‌قطعه‌خطهای‌افقی را به خمهای تکه‌ای هموار در T ، همان طور که‌نشان‌داده‌شده‌است‌می‌نگارد.

۱۱-۲۰. یک تابع $f{:}\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$ = {اعداد مختلط}) را می‌توان تابعی از $\mathbf{R}^2$ به $\mathbf{R}^2$ در نظر گرفت که هر عدد مختلط $a+bi$ را با نقطهٔ $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ یکی می‌سازد. بویژه، می‌توان هر تابع چند جمله‌ای $f(z)=a_nz^n+\ldots+a_1z+a_0$ $(a_0,\ldots,a_n\in\mathbf{C})$ را به صورت یک نگاشت هموار از $\mathbf{R}^2$ به خودش در نظر گرفت. برای این چنین چند جملهٔ f ، فرض کنید $\alpha_f:[0\ ,\ 2\pi]\longrightarrow\mathbf{R}^2$ به صورت

$$\alpha_f(t) = f(\cos t\,,\ \sin t) = f(\cos t + i\sin t)$$

تعریف شده باشد و $k(f)$ نشانگر عدد گشت α_f باشد.

(الف) نشان دهید که هرگاه $f(z)=a_0\neq 0$ برای هر z ، آنگاه $k(f)=0$.

(ب) نشان دهید که هرگاه $f(z) = a_n z^n$ با شرط $a_n \neq ۰$. آنگاه $k(f) = n$.

(پ) نشان دهید که هرگاه f یک چند جمله‌ای با شرط $f(z) \neq ۰$ برای هر $z \in \mathbf{C}$ با شرط $|z| \leq ۱$ باشد، آنگاه $k(f)=۰$. [تمرین ۱۱-۱۷ را در مورد $\varphi : [۰ , ۲\pi] \times [۰ , ۱] \longrightarrow \mathbf{R}^۲ - \{۰\}$ که در آن $\varphi(t,u)=f(u(\cos t+i\sin t))$ به کار برید.]

(ت) نشان دهید که هرگاه f یک چند جمله‌ای با شرط $f(z) \neq ۰$ برای هر $z\in\mathbf{C}$ با شرط $|z| \geq ۱$ باشد، آنگاه $k(f) = n$. [تمرین ۱۱-۱۷ را در مورد $\varphi : [۰ , ۲\pi] \times [۰ , ۱] \longrightarrow \mathbf{R}^۲ - \{۰\}$ که در آن

$$\varphi (t , u) = \begin{cases} u^n f\left(\frac{1}{u}(\cos t + i \sin t)\right) & \text{هرگاه } u \neq ۰ \\ a_n (\cos t + i \sin t)^n & \text{هرگاه } u = ۰ \end{cases}$$

به کار برید که در آن a_n ضریب پیشروی $f(z)$ است.]

(ث) نتیجه بگیرید که هرگاه f یک چند جمله‌ای با شرط $f(z) \neq ۰$ برای هر $z\in C$ باشد، آنگاه درجه f باید صفر باشد. [این تمرین **قضیهٔ بنیادی جبر** را ثابت می‌کند: هر چند جمله‌ای غیرثابت با ضرایب مختلط باید دارای یک ریشه در $\mathbf{C}$ باشد.]

۱۱-۲۱. فرض کنید $\alpha:[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^۲ / \{۰\}$ هموار باشد به قسمی که $\alpha (a) = \alpha (b)$، با فرض آنکه α قسمت مثبت محور $x_۱$ ها را تنها در تعداد باپایانی دفعه قطع کند. نشان دهید که $k(\alpha)$ عدد گشت آن برابر با عدد جبری تعداد عبور از قسمت مثبت محور $x_۱$ها توسط α می‌باشد که هر عبور از طرف بالای محور مثبت و هر عبور از طرف پایین محور منفی بحساب آمده است. [**راهنمایی:** فرض کنید $t_۱ < t_۲ < ... < t_m$ مجموعهٔ تمام $t\in[a,b]$ باشد به قسمی که در آن $\alpha(t)$ روی قسمت مثبت محور $x_۱$ ها باشد. فرض کنید V و θ_V مانند بحث ما در مورد عدد گشت باشد به قسمی که $V=(۱,۰)$. در این صورت

$$k(\alpha) = \sum_{i=0}^{m} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{t_i+\varepsilon}^{t_{i+1}-\varepsilon} d\,\theta_V (\alpha^{\cdot} (t))\, dt$$

که در آن $t_۰ = a$ و $t_{m+1} = b$، (اگر $t_۱ = a$، مجموع فقط از ۱ تا $m-1$ تغییر خواهد کرد.).]

۱۱-۲۲. فرض کنید $\alpha: I \longrightarrow \mathbf{R}^2$ یک خم پارامتری بسته تکه‌ای هموار باشد. برای (تصویر α) / $p=(a,b) \in \mathbf{R}^2$ تعریف کنید:

$$k_p(\alpha) = \int_\alpha \frac{-(x_2-b)dx_1 + (x_1-a)\,dx_2}{(x_1-a)^2 + (x_2-b)^2}.$$

(الف) نشان دهید که $k_p(\alpha)$ یک عدد صحیح است. [**راهنمایی:** نشان دهید که $k_p(\alpha)$ عدد گشت $\beta: I \longrightarrow \mathbf{R}^2/\{0\}$ می‌باشد که در آن $\beta(t) = \alpha(t) - p$.]

(ب) نشان دهید که هرگاه (تصویر α) / $q \in \mathbf{R}^2$ و p را بتوان توسط یک خم پیوسته در (تصویر α) $\mathbf{R}^2 \setminus$ به هم وصل کرد، آنگاه $k_p(\alpha) = k_q(\alpha)$. (عدد $k_p(\alpha)$ را **عدد گشت** α **در طول** p نامند.)

۱۲- خمیدگی رویه‌ها

فرض کنید S یک n ـ رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$، سودار توسط میدان برداری قایم یکه $\mathbf{N}$ باشد و $p \in S$. نگاشت وینگارتن $L_p : S_p \longrightarrow S_p$ تعریف شده توسط $L_p(\mathbf{v}) = -\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{N}$ برای $\mathbf{v} \in S_p$، میزان چرخش قائم را وقتی که در S از نقطهٔ p با سرعت‌های متفاوت $\mathbf{v}$ حرکت می‌کنیم اندازه می‌گیرد. در نتیجه L_p نحوه‌ای که S در $\mathbf{R}^{n+1}$ در نقطهٔ p خم می‌شود اندازه‌گیری می‌کند. برای $n = ۱$، دیده‌ایم که L_p دقیقاً برابر با ضرب توسط یک عدد $k(p)$ است که همان خمیدگی S در p می‌باشد. اکنون می‌خواهیم L_p را برای $n > ۱$ تجزیه و تحلیل کنیم.

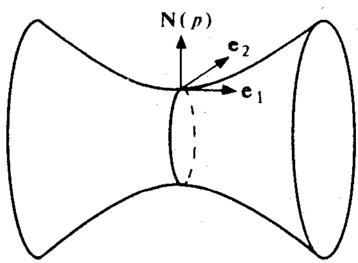
به خاطر داریم که، برای $\mathbf{v} \in S_p$، $L_p(\mathbf{v}).\mathbf{v}$ برابر با مؤلفهٔ قائم شتاب در نقطهٔ p هر خم پارامتری α در S است که از نقطهٔ p با سرعت $\mathbf{v}$ می‌گذرد. این مؤلفهٔ شتاب به α توسط خمیدگی S در $\mathbf{R}^{n+1}$ تحمیل می‌شود. وقتی که $\|\mathbf{v}\| = ۱$، این عدد یعنی

$$k(\mathbf{v}) = L_p(\mathbf{v}) . \mathbf{v}$$

را ***خمیدگی قائم*** S در p در جهت $\mathbf{v}$ گویند. توجه دارید که هرگاه $k(\mathbf{v}) > ۰$، آنگاه رویه S در جهت $\mathbf{v}$ به طرف $\mathbf{N}$ خم می‌شود، و هرگاه $k(\mathbf{v}) < ۰$، رویه در جهت $\mathbf{v}$ از $\mathbf{N}$ دور می‌شود. (ر.ک.شکل ۱۲-۱.) وقتی که $n = ۱$، $k(\mathbf{v}) = k(p)$، برای هر برداریکه $\mathbf{v} \in S_p$.

مثال ۱. فرض کنید S کرهٔ $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2$ به شعاع r باشد که توسط قائم داخلی $\mathbf{N}(p) = (p, -p/\|p\|)$ سودار شده باشد. در این صورت همان طور که در فصل ۹ دیدیم، L_p فقط ضرب توسط $\frac{1}{r}$ است. بنابراین $k(\mathbf{v}) = \frac{1}{r}$ و در نتیجه برای تمام جهت‌های مماس $\mathbf{v}$ و در تمام نقاط $p \in S$ مقدار یکسانی دارد.

مثال ۲. فرض کنید S هذلولوی $-x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ در $\mathbf{R}^3$ باشد که توسط میدان برداری قائم یکه $\mathbf{N}(p)=(p,\frac{-x_1}{\|p\|},\frac{x_2}{\|p\|},\frac{x_3}{\|p\|})$ برای $p=(x_1,x_2,x_3)\in S$ سودار شده باشد. (ر.ک. شکل ۱۲-۱.) در این صورت برای $p=(1,0,0)$، هر برداریکه $\mathbf{v}\in S_p$ به صورت $(p,v_1,v_2,0)$ می‌باشد که در آن $v_1^2+v_2^2=1$، $L_p(\mathbf{v})=-\nabla_v\mathbf{N}=(p,v_1,\ldots v_2,0)$ و $k(\mathbf{v})=v_1^2-v_2^2$. در حالت خاصی که $\mathbf{v}=(p,1,0,0)$، $k(\mathbf{v})=1$ و وقتی که $\mathbf{v}=(p,0,1,0)$، $k(\mathbf{v})=-1$. علاوه بر این $k(\mathbf{v})=0$ وقتی که $\mathbf{v}=\pm(p,\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0)$ و وقتی که $\mathbf{v}=\pm(p,\frac{1}{\sqrt2},\frac{-1}{\sqrt2},0)$. که تعجب انگیز نمی‌باشد زیرا که خطوط $\alpha(t)=(1,\frac{t}{\sqrt2},\frac{t}{\sqrt2})$ و $\beta(t)=(1,\frac{-t}{\sqrt2},\frac{t}{\sqrt2})$ هر دو کاملاً در S واقعند. و بنابراین S هیچ گونه شتابی را روی خمهای پارامتری در این جهات در نقطهٔ p تحمیل نمی‌کند (ر.ک.شکل ۹-۱).



شکل ۱۲-۱ خمیدگی قائم در $p=(1,0,0)$ در جهت $\mathbf{e}_1=(p,1,0,0)$ مثبت و در جهت $\mathbf{e}_2=(p,0,1,0)$ منفی است.

ملاحظه بهتر مفهوم خمیدگی قائم را می‌توان توسط مقاطع قائم به دست آورد. برای یک n ـ رویه مفروض $S=f^{-1}(c)$ در $\mathbf{R}^{n+1}$ که توسط میدان برداری قائم یکه $\mathbf{N}$ سودار شده است. ***مقطع قائم*** معین شده توسط برداریکهٔ $\mathbf{v}=(p,v)\in S_p$ در نقطهٔ $p\in S$ زیرمجموعهٔ $\mathscr{N}(\mathbf{v})$ از $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد که به صورت

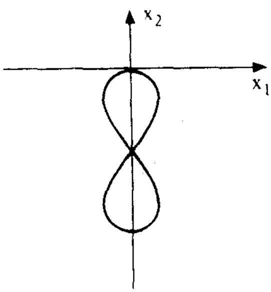
$$\mathscr{N}(\mathbf{v})=\{q\in\mathbf{R}^{n+1}: q=p+x\,v+y\,\mathbf{N}(p) \text{ ،} (x,y)\in\mathbf{R}^2 \text{ برای هر }\}.$$

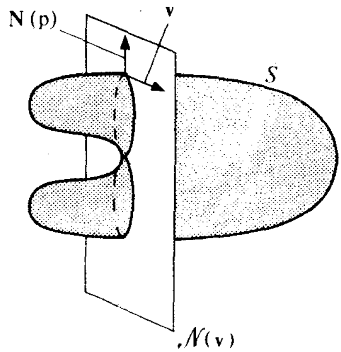
تعریف شده است و در آن $\mathscr{N}$ نگاشت گاوس $[\mathbf{N}(p)=(p,N(p))]$ است. (ر.ک. شکل ۱۲-۲).

$\mathcal{N}(\mathbf{v})$ در واقع نسخه‌ای از $\mathbf{R}^۲$ می‌باشد که p متناظر به مبدأ، $p+v$ متناظر به (۰ , ۱) و $p+N(p)$ نظیر به (۱ , ۰) می‌باشد، بنابراین می‌توان $\mathcal{N}(\mathbf{v})$ را با $\mathbf{R}^۲$ یکی گرفت و مقطع $S \cap \mathcal{N}(\mathbf{v})$ را به صورت زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{R}^۲$ در نظر گرفت. به عبارت دقیقتر هرگاه $i:\mathbf{R}^۲ \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ را به صورت $i(x,y)=p+xv+yN(p)$ تعریف کنیم، آنگاه $\mathcal{N}(\mathbf{v})=i(\mathbf{R}^۲)$. بنابراین

$$i(x,y)\in S\cap\mathcal{N}(\mathbf{v}) \Leftrightarrow i(x,y)\in S \Leftrightarrow f\circ i\,(x,y)=c$$

در نتیجه تحت i مجموعهٔ تراز $(f\circ i)^{-1}(c)$ با $S\cap\mathcal{N}(\mathbf{v})$ یکی می‌شود. $(f\circ i)^{-1}(c)$ الزاماً یک خم مسطح (ساده) نیست، همان‌طور که شکل ۱۲-۲(ب) نشان می‌دهد. ولی این چنین است اگر نقاطی که ∇f عمود بر $\mathcal{N}(\mathbf{v})$ می‌باشد حذف کنیم.





شکل ۱۲-۲ (الف) مقطع قائم $\mathcal{N}(\mathbf{v})$، $\mathbf{v}\in S_p$، $p\in S$، (ب) $S\cap\mathcal{N}(\mathbf{v})$ به عنوان زیر مجموعه‌ای از $\mathbf{R}^۲$

● **قضیهٔ ۱.** ***فرض کنید S یک n-رویه سودار در $\mathbf{R}^{n+1}$ و v یک برداریکه در S_p باشد، $p\in S$. آنگاه یک مجموعهٔ باز $V\subseteq\mathbf{R}^{n+1}$ شامل p وجود دارد به قسمی‌که $S\cap\mathcal{N}(\mathbf{v})\cap V$ یک خم مسطح است. علاوه براین، خمیدگی این خم در نقطهٔ p (که به طور مناسب سودار شده است) برابر با خمیدگی قائم $k(\mathbf{v})$ می‌باشد.***

برهان. فرض کنید $f:U\longrightarrow\mathbf{R}$ به قسمی باشد که $S=f^{-1}(c)$ و برای تمام $q\in S$، $\nabla f(q)\neq 0$. برای $\mathbf{v}=(p,v)\in S_p$، $p\in S$ مفروض، تابع $i:\mathbf{R}^۲\longrightarrow\mathbf{R}^{n+1}$ را مانند بالا می‌گیریم و قرار می‌دهیم

$$V = \{q \in U : \bar{\nabla} f(q) \cdot N(p) \neq 0 \text{ یا } \bar{\nabla} f(q) \cdot v \neq 0\}$$

که در آن $\bar{\nabla} f(q)$ قسمت برداری $\nabla f(q)$ است. $(\nabla f(q) = (q, \bar{\nabla} f(q)))$. در این صوت $p \in V$ و

$$\nabla (f \circ i)(x,y) = (x,y, \bar{\nabla} f(i(x,y)) \cdot v \text{ و } \bar{\nabla} f(i(x,y)) \cdot N(p))$$

برای $(x,y) \in i^{-1}(V)$ هرگز صفر نیست، بنابراین

$$C = i^{-1}(S \cap \mathcal{N}(\mathbf{v}) \cap V) = (f \circ i)^{-1}(c) \cap i^{-1}(V)$$

یک خم مسطح است (یعنی $S \cap N(\mathbf{v}) \cap V$ یک خم مسطح است)، همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

علاوه بر این هرگاه $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ یک خم با تندی یکه در C با شرط $\dot{\alpha}(t_0) = (0, 0, 1, 0)$ باشد (این بردار مماس بر C است زیراکه عمود بر $\nabla(f \circ i)(0, 0)$ می‌باشد)، آنگاه $i \circ \alpha$ یک خم با تندی یکه در $S \cap N(\mathbf{v})$ می‌باشد، زیراکه

$$\| (i \circ \dot{\alpha})(t) \|^2 = \| (i \circ \alpha(t), x'(t) v + y'(t) N(p)) \|^2$$

$$= (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \| \dot{\alpha}(t) \|^2 = 1$$

و $(i \dot{\circ} \alpha)(t_0) = \mathbf{v}$. اکنون هرگاه C را سودار کنیم به قسمی که سوی قائم در $(0, 0)$ برابر با $(0,0,0,1)$ باشد، آنگاه خمیدگی C در $(0,0)$ برابر با

$$k(\alpha(t_0)) = \ddot{\alpha}(t_0) \cdot (\alpha(t_0), 0, 1) = y''(t_0)$$

می‌شود و خمیدگی قائم S در جهت $\mathbf{v}$ عبارت است از

$$k(\mathbf{v}) = (i \ddot{\circ} \alpha)(t_0) \cdot \mathbf{N}(p) = (p, x''(t_0) v + y''(t_0) N(p)) \cdot (p, N(p)) = y''(t_0)$$

که در نتیجه $\mathbf{k(v)} = \mathbf{k}(\alpha(t_0))$، همان طور که باید نشان داده می‌شد. □

برای یک نقطهٔ p از n ـ رویهٔ S سودار، خمیدگی قائم $k(\mathbf{v})$ به ازای هر بردار یکهٔ $\mathbf{v}$ در فضای مماس بر S در نقطهٔ p یعنی S_p است. در نتیجه خمیدگی قائم در P تابعی حقیقی با دامنهٔ کرهٔ یکه در S_p می‌باشد. چون k پیوسته و کره فشرده است، این تابع ماکزیمم و می‌نیمم خود را می‌گیرد. لم زیر نشان می‌دهد که این نقاط فرین مقادیر ویژه نگاشت وینگارتن L_p است.

● **لم.** ***فرض کنید V یک فضای برداری بعد با پایان با ضرب داخلی باشد و فرض کنید $L:V \longrightarrow V$ یک تبدیل خطی خودالحاق روی V باشد، در صورتی که $S=\{v\in V: v.v=1\}$ و تابع $f:S\longrightarrow \mathbf{R}$ را به صوت $f(v)=L(v).v$ تعریف کنیم. با فرض آنکه f در $v_0 \in S$ ایستا باشد (یعنی فرض کنید $(f\circ\alpha)'(t_0)=0$ برای تمام خم‌های پارامتری $\alpha:I\longrightarrow S$ با شرط $\alpha(t_0)=v_0$)، آنگاه $L(v_0)=(v_0)v_0$ (یعنی v°، یک بردار ویژه L با مقدار ویژه $f(v_0)$ است).***

برهان چون f در v_0 ایستاست، $(f\circ\alpha)'(0)=0$ برای تمام خم‌های پارامتری α در S با شرط $\alpha(0)=v_0$. برای هر برداریکه v با شرط $v.v_0=0$، فرض کنید $\alpha(t)=(\cos t)v_0+(\sin t)v$. در این صورت

$$0=(f\circ\alpha)'(0)=\frac{d}{dt}\Big|_0 L(\alpha(t)).\alpha(t)$$

$$=\frac{d}{dt}V_0\,[(\cos^2 t)L(v_0).v_0+2\sin t\cos t\,L(v_0).v_0+(\sin^2 t)L(v).v]$$

$$=2L(v_0).v_0$$

در نتیجه $L(v_0)\perp v$ برای هر برداریکه $v\in v_0^{\perp}$. از آن نتیجه می‌شود که $L(v_0)\perp v_0^{\perp}$، یعنی $L(v_0)=\lambda v_0$ برای یک $\lambda\in\mathbf{R}$. لذا v_0 یک بردار ویژه L است. مقدار ویژه λ به صورت:

$$\lambda=\lambda v_0.v_0=L(v_0).v_0=f(v_0)$$

می‌باشد. □

تذکر. در این لم ما مفهوم یک خم پارامتری (هموار) $\alpha:I\longrightarrow V$ را که در آن V یک فضای برداری بعد با پایان با ضرب داخلی است بکار برده‌ایم. در این گونه فضاها هموار بودن با معنی است چراکه حد و مشتق را می‌توان به روش معمول تعریف کرد. $\lim_{t\to t_0}\alpha(t)=v$ به این معنی است که برای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به قسمی که $\|\alpha(t)-v\|<\varepsilon$ وقتی‌که $0<|t-t_0|<\delta$ و

$\frac{d\alpha}{dt}(t_\circ) = \lim_{t\to t_\circ} \frac{\alpha(t) - \alpha(t_\circ)}{t_1 - t_\circ}$ وقتی که این حد وجود دارد. در واقع، تمام هندسه‌ای راکه ما در اینجا گسترش می‌دهیم می‌توان مانند در $\mathbf{R}^{n+1}$ آن را در V نیز انجام داد.

عکس لم بالا نیز درست است: هرگاه $v_\circ$ یک بردار ویژه L باشد آنگاه $f(v) = L(v) . v$ در $v_\circ \in S$ نیز ایستاست. زیرا هرگاه $\alpha : I \longrightarrow S$، آنگاه $\alpha(t) . \alpha(t) = 1$ و بنابراین $\alpha(t) . \frac{d\alpha}{dt}(t) = \circ$ به ازای هر $t \in I$ و اگر $\alpha(t_\circ) = v_\circ$، آنگاه

$$(f\circ\alpha)'(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t_\circ} [L(\alpha(t) . \alpha(t))]$$

$$= L\left(\frac{d\alpha}{dt}(t_\circ)\right) . \alpha(t_\circ) + L(\alpha(t_\circ)) . \frac{d\alpha}{dt}(t_\circ)$$

$$= 2 L(\alpha(t_\circ)) . \frac{d\alpha}{dt}(t_\circ) = 2\lambda\, \alpha(t_\circ) . \frac{d\alpha}{dt}(t_\circ) = \circ$$

● **قضیهٔ ۲.** ***فرض کنید V یک فضای برداری بعد با پایان با ضرب داخلی باشد و فرض کنید $L:V \longrightarrow V$ یک تبدیل خودالحاق در V باشد، آنگاه یک پایهٔ متعامد یکه‌برداری V متشکل از بردارهای ویژه L وجود دارد.***

برهان. با استقراء روی بعد n از V عمل می‌کنیم. برای $n = 1$، قضیه بوضوح درست است. فرض کنید که برای $n = k$ درست است. حال اگر $n = k + 1$، بنابر لم برداریکه‌ای مانند v_1 در V که یک بردار ویژه L است وجود دارد (برای مثال v_1 را به قسمی انتخاب می‌کنیم‌که $L(v_1) . v_1 \geq L(v) . v$ برای هر برداریکه $v \in V$). فرض کنید $W = v_1^{\perp}$. در این صورت

$$L(w) . v_1 = w . L(v_1) = w . \lambda_1 v_1 = \lambda_1 (w . v_1) = \circ$$

برای هر $w \in W$، که در آن λ_1 مقدار ویژه نظیر به v_1 است. در نتیجه $L\big|_W$، تحدید L به W مجموعه W را در W می‌نگارد. آشکار است که $L\big|_W$ خودالحاق است. ولی چون $\dim(W) = \dim V - 1 = k$، لذا فرض استقرا ایجاب می‌کند که یک پایه متعامدیکه W به صورت $\{v_2, \dots, v_{k+1}\}$ متشکل از بردارهای ویژه $L\big|_W$ وجود دارد. اما هر بردار ویژه $L\big|_W$ نیز یک بردار

ویژه L می‌باشد، بنابراین $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ یک پایه متعامدیکه برای V متشکل از بردارهای ویژه L است. □

توجه داشته باشید که یک تبدیل خطی خود الحاق L روی یک فضای براری n ـ بعدی حداکثر دارای n مقدار ویژه دارد، زیر که هر مقدار ویژه ریشه‌ای از چند جمله‌ای مشخصه $\det(L - \lambda I)$ می‌باشد که یک چند جمله‌ای از λ از درجهٔ n است. در اینجا I تبدیل همانی در V می‌باشد. این که λ ریشهٔ این چند جمله‌ای است از این مطلب نتیجه می‌شودکه $L(v) = \lambda v$ اگر و فقط اگر $(L - \lambda I)(v) = 0$، بنابراین $L - \lambda I$ باید منفرد باشد لذا با شمارش تکرار ریشه‌های L دقیقاً n بردار بردار ویژه دارد. همچنین توجه دارید که جهتهای ویژه v_i تبدیل خطی L به صورت یکتایی (با تقریب علامت) معین شده‌اند اگر و فقط اگر n بردارهای ویژه L متمایز باشند.

برای یک n ـ رویه سودار S در $\mathbf{R}^{n+1}$ و $p \in S$، مقادیر ویژه $k_1(p), \dots, k_n(p)$ نگاشت وینگارتن $L_p : S_p \longrightarrow S_p$ به ***خمیدگیهای اصلی*** S در نقطهٔ p موسوم‌اند و بردارهای ویژه یکهٔ L_p ***جهت‌های خمیدگی اصلی*** نامیده می‌شود. اگر خمیدگی‌های اصلی مرتب شده باشند به طوری که $k_1(p) \le k_2(p) \le \dots \le k_n(p)$، بحث بالا نشان می‌دهد که $k_n(p)$ مقدار ماکزیمم خمیدگی قائم یعنی $k(\mathbf{v})$ برای $\mathbf{v} \in S_p$ با شرط $\|\mathbf{v}\| = 1$ می‌باشد، $k_{n-1}(p)$ مقدار ماکزیمم $k(\mathbf{v})$ برای $\mathbf{v} \in S_p$ با شرایط $\|\mathbf{v}\| = 1$ و $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_n$ می‌باشد که $\mathbf{v}_n$ جهت خمیدگی اصلی نظیر به $k_n(p)$ می‌باشد،

$$k_{n-2}(p) = \max \{k(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in S_p \quad \text{و} \quad \|\mathbf{v}\| = 1 \quad \text{و} \quad \mathbf{v} \perp \{\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n-1}\}\} \quad \text{و} \quad \dots$$

علاوه بر این، تمام خمیدگی‌های اصلی $k_n(p)$ مقادیر ایستای خمیدگی قائم می‌باشند و $k_1(p)$ مقدار می‌نیمم $k(\mathbf{v})$ برای $\mathbf{v} \in S_p$ با شرط $\|\mathbf{v}\| = 1$ می‌باشد.

مثال. فرض کنید که هذلولوی $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ در $\mathbf{R}^3$ باشد که توسط $\mathbf{N}(p) = (p, \frac{-x_1}{|p|}, \frac{+x_2}{|p|}, \frac{x_3}{|p|})$، $p \in S$ سودار شده است در اینصورت همانطورکه در این فصل قبلاً دیده‌ایم، برای $p = (0, 0, 1)$، $S_p = \{(p, v_1, v_2, 0) : v_1, v_2 \in \mathbf{R}\}$ و برای $\|\mathbf{v}\| = 1$، $k(\mathbf{v}) = v_1^2 - v_2^2$ در نتیجه $k(\mathbf{v})$ مقدار ماکزیمم خودش را (برای $\|\mathbf{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 = 1$) در $\mathbf{v} = (p, \pm 1, 0, 0)$ می‌گیرد و مقدار می‌نیمم‌اش را در $\mathbf{v} = (p, 0, \pm 1, 0)$ می‌گیرد، بنابراین خمیدگی‌های اصلی در p برابر $k_1(p) = -1$ و $k_2(p) = 1$ می‌باشند.

● **قضیهٔ ۳.** ***فرض کنید S یک n ـ رویه سودار در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد، $p \in S$ و فرض کنید***

خمیدگی‌های اصلی S در p متناظر با جهت‌های خمیدگی اصلی $\{k_1(p),...,k_n(p)\}$ ***متعامد*** $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ ***باشند در این صورت خمیدگی قائم*** $k(\mathbf{v})$ ***در جهت*** $\mathbf{v}\in S_p$ ***(***$\|\mathbf{v}\| = 1$***) به صورت***

$$k(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} k_i(p)(\mathbf{v}.\mathbf{v}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i(p)\cos^2\theta_i$$

داده می‌شود که در آن $\theta_i = \cos^{-1}(\mathbf{v}.\mathbf{v}_i)$ ***زاویه بین*** $\mathbf{v}$ ***و*** $\mathbf{v}_i$ ***می‌باشد.***

برهان. چون $\mathbf{v}$ را می‌توان به عنوان ترکیب خطی پایهٔ متعامد یکه $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ به صورت $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{v}.\mathbf{v}_i)\mathbf{V}_i = \sum_{i=1}^{n}(\cos\theta_i)\mathbf{v}_i$ نوشت، لذا

$$k(\mathbf{v}) = L_p(\mathbf{v}).\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n}(\cos\theta_i) L_p(\mathbf{v}_i).\mathbf{v}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\cos\theta_i) k_i(p)\mathbf{v}_i.\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i(p)\cos^2\theta_i. \square$$

اعداد $\cos\theta_i = \mathbf{v}.\mathbf{v}_i$ به قسمی که $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n}(\cos\theta_i)\mathbf{v}_i$، موسوم به ***کسینوس‌های هادی*** $\mathbf{v}$ نسبت به پایهٔ متعامد $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ می‌باشد.

نظیر به هر تبدیل خطی خود الحاق $L: V \longrightarrow V$ که در آن V یک فضای برداری با ضرب داخلی است، یک تابع حقیقی $\mathscr{Q}: V \longrightarrow \mathbf{R}$ به صورت $\mathscr{Q}(v) = L(v).v$ تعریف می‌کنیم. این تابع $\mathscr{Q}$، **صورت درجهٔ دوم** نظیر به L است. صورت درجهٔ دوم نظیر به نگاشت وینگارتن L_p در یک نقطه p یک nـ رویه سودار $S \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ را ***دومین صورت بنیادی*** (اساسی) S در p گویند و آن را به صورت $\mathscr{S}_p$ نمایش می‌دهند. در نتیجه

$$\mathscr{S}_p(\mathbf{v}) = L_p(\mathbf{v}).\mathbf{v} = \alpha''(t_0).\mathbf{N}(p)$$

که در آن $\alpha : I \longrightarrow S$ یک خم پارامتری در S با شرایط $\alpha(t_\circ) = p$ و $\alpha^{\cdot}(t_\circ) = \mathbf{v}$ می‌باشد. در حالت خاص، وقتی که $\|\mathbf{v}\| = ۱$ ، $\mathscr{S}_p(\mathbf{v})$ برابر با خمیدگی قائم S در p در جهت $\mathbf{v}$ می‌باشد.

اولین صورت بنیادی (اساسی) S در p صورت درجه دوم $\mathscr{I}_p$ نظیر به تبدیل همانی در S_p است. در نتیجه $\mathscr{I}_p(\mathbf{v}) \mathbf{v} . \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^۲$ برای هر $\mathbf{v} \in S_p$.

توجه دارید که صورت درجه دوم نظیر به یک تبدیل خطی خود الحاق L دقیقاً شامل همان اطلاعات L می‌باشد، زیرا که L را می‌توان به توسط دستور زیر توسط $\mathscr{Q}$ به دست آورد.

$$L(v) . w = \frac{۱}{۲}[\mathscr{Q}(v + w) - \mathscr{Q}(v) - \mathscr{Q}(w)],$$

که بری تمام v و w ها در V معتبر است.

یک صورت درجه دوم $\mathscr{Q}$ را

معین مثبت گوییم اگر $\mathscr{Q}(v) > ۰$ برای هر $v \neq ۰$،

معین منفی گوییم اگر $\mathscr{Q}(v) < ۰$ برای هر $v \neq ۰$،

معین گوییم اگر یا معین مثبت و یا معین منفی باشد.

نامعین گوییم اگر نه معین مثبت و نه معین منفی باشد.

نیم معین مثبت گوییم اگر $\mathscr{Q}(v) \geq ۰$ برای هر v

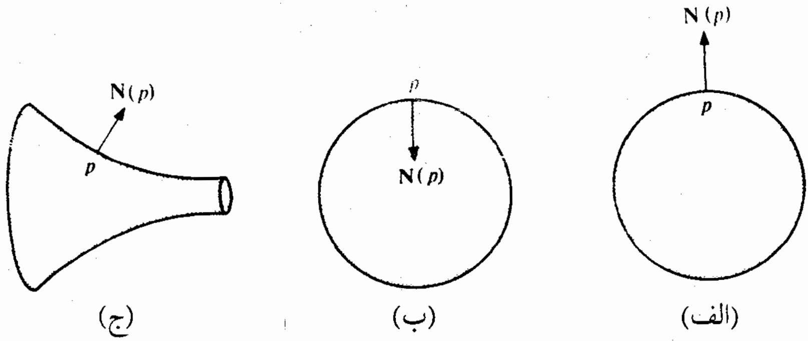
نیم معین منفی گوییم اگر $\mathscr{Q}(v) \leq ۰$ برای هر v، و

نیم معین گوییم اگر یا نیم معین مثبت و یا نیم معین منفی باشد.

در نتیجه، اولین صورت بنیادی (= اساسی) $\mathscr{I}_p$ یک n ـ رویه سودار $S \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ همواره معین مثبت است. دومین صورت بنیادی $\mathscr{S}_p$ معین مثبت است اگر و فقط اگر خمیدگی قائم $k(\mathbf{v}) = \mathscr{S}_p(\mathbf{v})$ برای هر جهت $\mathbf{v}$ در p مثبت باشد. بنابر قضیهٔ قبل، این در حالتی است که اگر و فقط اگر تمام خمیدگی‌های اصلی $k_i(p)$ رویه S در p مثبت باشند. به طریق مشابه، $\mathscr{S}_p$ معین منفی است اگر و فقط اگر تمام خمیدگی‌های اصلی S در p منفی باشند. وقتی که $\mathscr{S}_p$ معین مثبت است، رویهٔ S به طرف قائم یکهٔ $\mathbf{N}(p)$ در هر جهت مماس $\mathbf{v}$ در p تمایل دارد، به همین ترتیب اگر $\mathscr{S}_p$ معین منفی باشد، S در تمام جهات از $\mathbf{N}(p)$ دور می‌شود (ر.ک. شکل ۱۲-۳)

● **قضیهٔ ۴.** ***روی هر n ـ رویه سودار فشرده S در $\mathbf{R}^{n+1}$ نقطه‌ای مانند p وجود دارد به قسمی که دومین صورت بنیادی در p معین است.***

برهان. ایدهٔ اثبات این است که S را در یک کرهٔ بزرگ قرار دهیم و سپس این کره را آنقدر کوچک سازیم تا اینکه بر S مماس شود (ر.ک. شکل ۱۲-۴). در نقطهٔ تماس، خمیدگی قائم S توسط



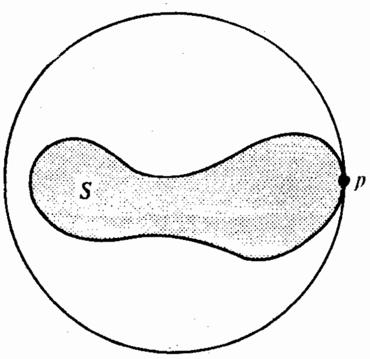
شکل ۱۲-۳: نگاشت وینگارتن در p برای (الف) معین منفی، برای (ب) معین مثب و برای (ج) نامعین است.

سازیم تا اینکه بر S مماس شود (ر.ک. شکل ۱۲-۴). در نقطهٔ تماس، خمیدگی قائم S توسط خمیدگی قائم کره از طرف پایین کراندار است.

به عبارت دقیقتر، تابع $g : \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}$ را به صورت $g(x_1 , \dots , x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$ تعریف می‌کنیم. چون S فشرده است، نقطه‌ای مانند $p \in S$ وجود دارد به قسمی که $g(p) \geq g(q)$ برای تمام $q \in S$. بنابر قضیه لاگرانژ، عددی مانند $\lambda \in \mathbf{R}$ وجود دارد به قسمی که $\nabla g(p) = \lambda \nabla f(p) = \mu \mathbf{N}(p)$ که در آن $S = f^{-1}(c)$ و $\mu = \pm \| \nabla f(p) \|$. علامت μ بستگی به سوی S دارد، فرض کنید مثلاً $\mu < 0$ (یعنی S توسط قائم "داخلی" سودار شده است) آنگاه

$\| p \| = -2 \| p \| = - \| \nabla g(p) \| = - \| \mu \mathbf{N}(p) \| = - \| \mu \|$ ،$\mu =$ لذا $\mathbf{N}(p) = \frac{1}{\mu} \nabla g(p) = - \frac{1}{\| p \|} (p,p)$

اینک برای $\mathbf{v} \in S_p$ ، $\| \mathbf{v} \| = 1$ ، فرض کنید $\alpha : I \longrightarrow S$ به قسمی باشد که $\alpha'(t_0) = \mathbf{v}$. در این صورت برای تمام $t \in I$ ، $g \circ \alpha(t_0) \geq g \circ \alpha(t)$ ، بنابراین



شکل ۱۲-۴: $|k(\mathbf{v})| \geq 1/r$ برای تمام جهات $\mathbf{v}$ در $\mathbf{p}$ ، که در آن $\mathbf{r}$ شعاع کرهٔ پوش می‌باشد.

$$\circ \geq \frac{d^{۲}}{dt^{۲}}\Big|_{t_\circ}(g\circ\alpha) = \frac{d}{dt}\Big|_{t_\circ}\nabla g(\alpha(t))\,.\,\alpha'(t)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t_\circ} ۲\,\alpha(t)\,.\,\frac{d\alpha}{dt}$$

$$= ۲\,[\,\|\alpha'\|^{۲} + (\alpha(t_\circ), \alpha(t_\circ))\,.\,\alpha''(t_\circ))]$$

$$= ۲\,[۱ - \|p\|\,\mathbf{N}(p)\,.\,\alpha''(t_\circ)\,]$$

$$= ۲\,[۱ - \|p\|\,k(\mathbf{v})]\,.$$

در نتیجه $k(\mathbf{v}) \geq \frac{۱}{p}$ برای هر جهت $\mathbf{v} \in S_p$.

هرگاه S سودار شده باشد به قسمی که $\mu = \nabla g(p)\,.\,\mathbf{N}(p) > \circ$، آنگاه خمیدگی قائم تغییر علامت می‌دهد و در نتیجه $k(\mathbf{v}) \leq \frac{-۱}{\|p\|}$ برای تمام جهت $\mathbf{v}$ در p. □

دترمینان و اثر نگاشت وینگارتن از اهمیت ویژه‌ای در هندسه دیفرانسیل برخوردارند. دترمینان $K(p) = \det L_p$ را ***خمیدگی گاوس ـ کرونوکر*** S در p گویند. این دترمینان برابر با حاصلضرب خمیدگی‌های اصلی در p می‌باشد. وقتی که $n = ۲$، $K(p) = k_۱(p)\,,\,k_۲(p)$ رافقط ***خمیدگی گاوس*** در p نامند. $\frac{۱}{n}$ اثر L_p را H_p، ***خمیدگی متوسط*** S در p گویند. در نتیجه $H(p) = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} k_i(p)$، میانگین خمیدگی‌های اصلی در p می‌باشد. قضیهٔ زیر در محاسبه خمیدگی گاوس ـ کرونوکر مفید است.

● **قضیهٔ ۵.** ***فرض کنید S یک n ـ رویهٔ سودار در $\mathbf{R}^{n+۱}$ باشد و $p\in S$. فرض کنید $\mathbf{Z}$ یک میدان‌برداری قائم مخالف صفر در S باشد به قسمی که $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{Z}}{\|\mathbf{Z}\|}$ و $\{\mathbf{v}_۱, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ یک پایه برای S_p باشد. در اینصورت***

$$K(p) = (-۱)^n \det\begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{v}_۱}\mathbf{Z} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \nabla_{\mathbf{v}_n}\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}(p) \end{pmatrix} \Bigg/ \|\mathbf{Z}(p)\|^n \det\begin{pmatrix} \mathbf{v}_۱ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{v}_n \\ \mathbf{Z}(p) \end{pmatrix}$$

که در آن، برای $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n+1} \in \mathbf{R}^{n+1}_p$، $\mathbf{w}_i = (p, w_{i,1}, \dots, w_{i,n+1})$

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{w}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} w_{1,1}, \dots, w_{1,n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{n+1,1} \dots w_{n+1,n+1} \end{vmatrix}$$

برهان. چون $\mathbf{Z} = \|\mathbf{Z}\|\,\mathbf{N}$،

$$\det \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{v}_1}\mathbf{Z} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \nabla_{\mathbf{v}_n}\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}(p) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} (\nabla_{\mathbf{v}_1}\|\mathbf{Z}\|)\,\mathbf{N}(p) + \|\mathbf{Z}(p)\|\,\nabla_{\mathbf{v}_1}\mathbf{N} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\nabla_{\mathbf{v}_n}\|\mathbf{Z}\|\,\mathbf{N}(p) + \|\mathbf{Z}(p)\|\,\nabla_{\mathbf{v}_n}\mathbf{N} \\ \|\mathbf{Z}(p)\|\,\mathbf{N}(p) \end{pmatrix}$$

$$= \|\mathbf{Z}(p)\|^n \det \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{v}_1}\mathbf{N} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \nabla_{\mathbf{v}_n}\mathbf{N} \\ \mathbf{N}(p)\,\|\mathbf{Z}(p)\| \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n \|\mathbf{Z}(p)\|^n \det \begin{pmatrix} L_p(\mathbf{v}_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L_p(\mathbf{v}_n) \\ \mathbf{Z}(p) \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n \ \| \mathbf{Z}(p) \|^n \det \left[\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & \cdot \\ & A^t & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{v}_n \\ \mathbf{Z}(p) \end{pmatrix} \right]$$

$$=(-1)^n \| \mathbf{Z}(p) \|^n (\det A) \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{v}_n \\ \\ \mathbf{Z}(p) \end{pmatrix}$$

$$=(-1)^n \| \mathbf{Z}(p) \|^n K(p) \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{v}_n \\ \\ \mathbf{Z}(p) \end{pmatrix}$$

که در آن A ماتریس L_p نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ برای S_p است و A نمایشگر ترا نهادهٔ A است. حال تنها کافی است $K(p)$ را به دست آوریم. □

مثال فرض کنید S بیضوی $1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2}$ (a و b و c همگی مخالف صفرند) باشد که توسط قائم خارجی سودار شده است. ($\mathbf{Z}(p) = \frac{1}{2} \nabla f(p) = (p, \frac{x_1}{a_2}, \frac{x_2}{b^2}, \frac{x_3}{c^2})$ برای $p = (x_1, x_2, x_3) \in S$ بگیرید. یک پایه برای S_p متشکل از هر جفت بردارهای مستقل عمود بر $\mathbf{Z}(p)$ است. برای $x_1 \neq 0$، می‌توانیم $\mathbf{v}_1 = (p, \frac{x_2}{b^2}, \frac{-x_1}{a^2}, 0)$ و $\mathbf{v}_2 = (p, \frac{x_3}{c^2}, 0, \frac{-x_1}{a^2})$ بگیریم. در این صورت

$$\det\begin{pmatrix} \nabla_{v_1} Z \\ \nabla_{v_2} Z \\ Z(p) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x_2}{a^2b^2} & -\frac{x_1}{a^2b^2} & 0 \\ \frac{x_3}{a^2c^2} & 0 & \frac{-x_1}{a^2x^2} \\ \frac{x_1}{a^2} & \frac{x_2}{b^2} & \frac{x_3}{c^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x_1}{a^4b^2c^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}\right) = \frac{x_1}{a^2b^2c^2}$$

$$\det\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ Z(p) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x_2}{b^2} & \frac{-x_1}{a^2} & 0 \\ \frac{x_3}{c^2} & 0 & \frac{-x_1}{a^2} \\ \frac{x_1}{a^2} & \frac{x_2}{b^2} & \frac{x_3}{c^2} \end{vmatrix} = \frac{x_1}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{x_2^2}{b^4}+\frac{x_3^2}{c^4}\right)$$

و

$$= \| Z(p) \| = \left(\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{x_2^2}{b^4}+\frac{x_3^2}{c^4}\right)^{1/2}$$

بنابراین خمیدگی گاوس بیضوی عبارتست از

$$K(p) = \frac{1}{a^2b^2c^2\left(\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{x_2^2}{b^4}+\frac{x_3^2}{c^4}\right)^2}.$$

توجه دارید که اگر چه این دستور برای k تحت فرض $x_1 \neq 0$ به دست آمده است، لیکن بنابر پیوستگی برای هر $p \in S$ معتبر است.

قضیه ۴ این فصل مثالی از یک قضیهٔ سرتاسری در هندسه دیفرانسیل است. خاصیتی از nـ رویهٔ S را یک ***خاصیت سرتاسری*** گوییم اگر مبین واقعیتی در مورد کل رویهٔ S باشد (مانند اینکه، nـ رویهٔ S فشرده است، یا nـ رویه S همبند است، یا ۱ـ رویه C دارای طول کمان با پایان است). از

رویهٔ S فشرده است، یا n ـ رویه S همبند است، یا ۱ـ رویه C دارای طول کمان با پایان است). از طرف دیگر، خاصیتی از S را **خاصیت موضعی** گویند اگر مبین واقعیتی در حول نقطهٔ خاصی از رویه باشد، واقعیی که توسط محاسبات در یک مجموعهٔ باز دلخواه شامل آن نقطه بتوان آن را تحقیق کرد. (برای مثال، دومین صورت بنیادی $\mathscr{S}_p$ رویه S در p معین است، یا خمیدی گاوس کرونوکر S در p مثبت است). یک **قضیهٔ سرتاسری** قضیه‌ایست که در آن یک خاصیت سرتاسری در میان فرض های ضروری و یا در بین حکم‌های آن باشد. قضیه‌ای که در آن تمام فرض‌های ضروری و حکم‌های آن خواص موضعی باشند **قضیه موضعی** گویند. در نتیجه برای مثال قضایای ۳ و ۵ این فصل قضایای موضعی هستند (فرض اینکه S سودار است، اگرچه یک فرض همه جایی است ولی در واقع غیرضروری است، این قضایا مستقل از سوی انتخاب شده است و در واقع آنچه برای معتبر بودن این قضایا لازم است انتخاب یک میدان برداری قائم یکه $\mathbf{N}$ در حول نقطه p است). در عوض، قضیهٔ ۴ این فصل یک قضیه سرتاسری است، معتبربودن آن بستگی به فرض فشرده بودن S دارد. قضیهٔ فصل ۶ مثال دیگری از یک قضیه سرتاسری است. قضیهٔ بعدی ما گونهٔ جالب ویژه‌ای از قضیهٔ سرتاسری است. این قضیه گویای هم ارزی دو خاصیت موضعی در هر نقطهٔ یک n ـ رویه S در حضور یک فرض سرتاسری است. توجه داشته باشید که قضیهٔ در صورتی که فرض فشرده بودن را حذف کنیم دیگر درست نیست. (یک هذلولوی یک پارچه را در $\mathbf{R}^3$ در نظر بگیرید).

● **قضیه ۶.** ***فرض کنید S یک n ـ رویه سودار همبند فشرده در R^{n+1} باشد. در این صورت خمیدگی گاوس ـ کرونوکر K(p) رویه S در p برای هر $p \in S$ غیر صفر است اگر و فقط اگر دومین صورت بنیادی $\mathscr{S}_p$ در p برای هر $p \in S$ معین باشد.***

برهان. هرگاه $\mathscr{S}_p$ برای هر $p \in S$ معین باشد، آنگاه خمیدگی قائم $\mathscr{S}_p(\mathbf{v}) = k(p)$ برای هر جفت $\mathbf{v} \in S_p$ غیرصفر می‌باشد، بنابراین در حالت خاص تمام خمیدگی‌های اصلی در p غیرصفرند و بنابراین حاصلضرب آنها $\mathbf{K}(p)$ نیز این چنین است.

بعکس، بنا بر قضیهٔ ۴ نقطه‌ای مانند $p_0 \in S$ وجود دارد که به قسمی که $\mathscr{S}_{p_0}$ معین است. فرض کنید $\mathscr{S}_{p_0}$ در واقع معین مثبت باشد. در اینصورت خمیدگی می‌نیمم k_1 رویه S در p_0 مثبت است. چون $k_1 : S \longrightarrow \mathbf{R}$ پیوسته است، S همبند است و k_1 غیر صفر است (زیرا، بنا بر فرض K غیر صفر است) k_1 باید در همه جا مثبت باشد. بنابراین کلیه خمیدگی‌های اصلی در همه جا مثبت هستند و $\mathscr{S}_p$ برای هر $p \in S$ معین مثبت است. در صوری که $\mathscr{S}_{p_0}$ معین منفی باشند، با استدلالی مشابه با جایگزینی k_n خمیدگی اصلی ماکزیمم بجای k_1، نشان خواهیم داد که $\mathscr{S}_p$ معین منفی برای هر

$p\in S$ می‌باشد. □

تذکر. فرض همبندی در قضیهٔ ۶ در واقع ضروری نیست، زیراکه می‌توان نشان داد که هر n ـ رویه فشرده در $\mathbf{R}^{n+1}$ اجتماع با پایانی از n ـ رویه‌های همبند است و قضیهٔ ۶ را می‌وان در مورد هر یک از آنان بکار برد.

تمرین

۱۲-۱. فرض کنید $S=f^{-1}(c)$ یک n ـ رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ سودار توسط $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ باشد. نشان دهید که، برای $\mathbf{v}=(p, v_1, \dots, v_{n+1})$ یک بردار مماس S در $p\in S$، مقدار دومین صورت بنیادی S در p روی $\mathbf{v}$ به شکل

$$\mathscr{S}_p(\mathbf{v}) = -(1/\|\nabla f(p)\|)\sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(p)\, v_i v_j$$

داده شده است. (که در آن $\|\mathbf{v}\| = 1$)، این دستور یک روش مستقیم محاسبهٔ خمیدگی قائم $k(\mathbf{v})=\mathscr{S}_p(\mathbf{v})$ در جهت $\mathbf{v}$ به دست می‌دهد).

در هر یک از تمرینهای ۱۲-۲ الی ۱۲-۶، خمیدگی قائم $k(\mathbf{v})$ را برای هر جهت مماس $\mathbf{v}$، خمیدگی‌های اصلی و جهت‌های خمیدگی اصلی، و خمیدگی‌های گاوس ـ کرونوکر و متوسط را در یک نقطهٔ p مفروض از n ـ رویه $f(x_1,\dots,x_{n+1})$ سودار شده توسط $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ بیابید.

۱۲-۲. $x_1+x_2+\dots+x_{n+1}=1$ ، $p=(1,0,\dots,0)$

۱۲-۳. $x_2^2+x_3^2+\dots+x_{n+1}^2=r^2$ ، $r>0$ ، $p=(0,\dots,0,r)$

۱۲-۴. $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1$ ، $p=(a,0,0)$ در $\mathbf{R}^3$

۱۲-۵. $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1$ ، $p=(a,0,0)$ در $\mathbf{R}^3$.

۱۲-۶. $x_1^2+(\sqrt{x_2^2+x_3^2}-2)^2=1$ (چنبره در $\mathbf{R}^3$) در نقاط (الف) $p=(0,3,0)$ و (ب) $p=(0,1,0)$.

۱۲-۷. نشان دهید که هرگاه S و $\bar{S}$ n ـ رویهٔ یکسانی در $\mathbf{R}^{n+1}$ ولی با سوی‌های مخالف باشند، آنگاه $\bar{K} = (-1)^n K$ که در آن K و $\bar{K}$ به ترتیب خمیدگی‌های گاوس ـ کرونوکر S و $\bar{S}$ هستند (در حالت خاص، خمیدگی گاوس ـ کرونوکر مستقل از انتخاب سو است اگر n زوج باشد).

در تمرینهای ۱۲-۸ الی ۱۲-۱۱ ، خمیدگی گاوس $K:S \longrightarrow \mathbf{R}$ را بیابید که در آن S رویه مفروض است.

۱۲-۸. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ ، $x_3 > 0$ (مخروط)

۱۲-۹. $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ (هذلولوی)

۱۲-۱۰. $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - x_3 = 0$ (سهموی بیضی گون)

۱۲-۱۱. $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - x_3 = 0$ (سهموی هذلولیگون).

۱۲-۱۲. (الف) خمیدگی گاوس یک استوانه روی یک خم مسطح را بیابید.

(ب) خمیدگی گاوس ـ کرونوکر یک استوانه روی یک n ـ رویه را بیابید.

۱۲-۱۳. فرض کنید $g : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار باشد. نشان دهید که خمیدگی گاوس ـ کرونوکر $\mathbf{K}$ نمودار g توسط دستور:

$$K = \det\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right) / \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)^2\right)^{n/2+1}$$

داده شده است، که در آن سوی $\mathbf{N}$ به قسمی انتخاب شده است که $\mathbf{N}(p).(p,0,\ldots,0,1) > 0$ برای هر p در نمودار.

۱۲-۱۴. فرض کنید S یک ۲ـ رویه سودار در $\mathbf{R}^3$ باشد و $p \in S$. نشان دهید که به ازای هر $\mathbf{v},\mathbf{w} \in S_p$ ،

$$L_p(\mathbf{v}) \times L_p(\mathbf{w}) = K(p)\, \mathbf{v} \times \mathbf{w}\,.$$

۱۲-۱۵. نشان دهید که برای ۲ـ رویه سودار S در $\mathbf{R}^3$ داریم

$$K(p) = \mathbf{Z}(p) \cdot \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{Z} \times \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{Z} \,/\, \| \mathbf{Z}(p) \|^4$$

که در آن $\mathbf{Z}$ هر میدان برداری قائم هیچ جا صفر روی S و $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ هر دو بردار در S_p می‌باشند، به قسمی که $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{Z}(p)$.

۱۲-۱۶. نشان دهید که خمیدگی متوسط در یک نقطه p از n ـ رویه سودر S را می‌توان توسط مقادیر خمیدگی قائم هر پایهٔ متعامد یکهٔ S_p مانند $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ توسط دستور

$$H(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k(\mathbf{v}_i)$$

به دست آورد.

۱۲-۱۷. فرض کنید S یک ۲ـ رویهٔ سودار در $\mathbf{R}^3$ و $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ یک پایه متعامد یکهٔ S_p متشکل از بردارهای ویژه L_p باشد. فرض کنید $k_i = k(\mathbf{v}_i)$.

(الف) نشان دهید که برای $\mathbf{v}(\theta) = (\cos\theta)\, \mathbf{v}_1 + (\sin\theta)\, \mathbf{v}_2 \in S_p$

$$k(\mathbf{v}(\theta)) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta\,.$$

(ب) نشان دهید که خمیدگی متوسط در نقطهٔ p توسط دستور

$$H(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\mathbf{v}(\theta))\, d\theta$$

داده می‌شود.

۱۲-۱۸. فرض کنید $S = f^{-1}(c)$ یک n ـ رویه سودار شده توسط $\mathbf{N} = \dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ باشد. نشان دهید که $H(p) = \frac{1}{n} \operatorname{div} \mathbf{N}$. [**راهنمایی**: در آغاز توجه دارید که (اثر $\{\mathbf{v} \longrightarrow \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N}\}$) $= \operatorname{div}\mathbf{N}$ و سپس این اثر را با استفاده از پایه $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{N}(p)\}$ که در آن $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ یک پایهٔ متعامد یکهٔ S_p متشکل از بردارهای ویژه L_p است حساب کنید.]

۱۲-۱۹. فرض کنید $S = f^{-1}(c)$ یک n ـ رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد. برای $a > 0$ مفروض، فرض کنید $\tilde{S} = g^{-1}(c)$ که در آن $g(p) = f(p/a)$ برای هر p به قسمی که p/a در دامنهٔ f است.

(الف) نشان دهید که $\tilde{S}$ یک n ـ رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ است و $p \in S$ اگر و فقط اگر $ap \in \tilde{S}$

(ب) فرض کنید S توسط $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ و $\tilde{S}$ توسط $\frac{\nabla g}{|\nabla g|}$ سودار شده باشد، نشان دهید که تصاویر کروی S و $\tilde{S}$ یکسان هستند.

(پ) نشان دهید که خمیدگی‌های متوسط H و $\tilde{H}$ رویه‌های S و $\tilde{S}$ توسط $\tilde{H}(ap) = \frac{1}{a} H(p)$ بهم مربوط می‌شوند.

(ت) نشان دهید که خمیدگی‌های گاوس ـ کرونوکر K و $\tilde{K}$ رویه‌های S و $\tilde{S}$ توسط $\tilde{K}(ap) = (\frac{1}{a^n})\, K(p)$ بهم مربوط می‌شوند.

۱۳ـ رویه‌های محدب

یک n- رویه سودار S در $\mathbf{R}^{n+1}$ **محدب** (یا ***سرتاسری محدب***) است. هرگاه، برای هر $p\in S$، S در یکی از دونیم فضای بسته $H_p^- = \{q\in \mathbf{R}^{n+1} : (q-p).N(p)\leq 0\}$ یا $H_p^+ = \{q\in \mathbf{R}^{n+1} : (q-p).N(p)\geq 0\}$ قرار گرفته باشد، که در آن N، نگاشت گاوس S می‌باشد (ر.ک. شکل ۱۳-۱).

یک n- رویه S سودار در نقطهٔ $p \in S$ ***محدب*** است هرگاه مجموعه‌بازی مانند $V \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ شامل p چنان وجود داشته باشد که $S \cap V$ در H_p^+ یا H_p^- واقع باشد. بنابراین یک n- رویه محدب الزاماً در هر یک از نقاطش محدب است لازم نیست یک n- رویه محدب باشد (ر.ک. شکل ۱۳-۲).

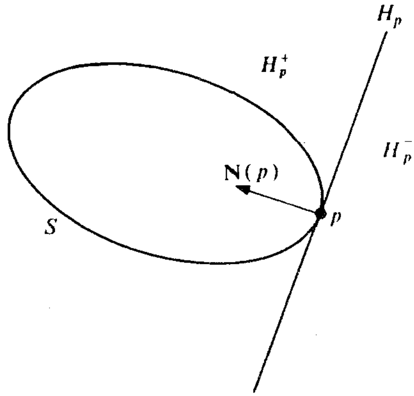
هرگاه S محدب و $S \cap H_p = \{p\}$ به‌ازای هر $p \in S$ که در آن $H_p = \{q \in \mathbf{R}^{n+1} : (q-p).N(p)=0\}$ آنگاه S ***اکیداً محدب*** گفته می‌شود.

به طور مشابه، اگر S محدب در p برای یک $p \in S$ و برای یک مجموعه باز V شامل p داشته باشیم $S \cap V \cap H_p = \{p\}$، آنگاه S اکیداً محدب در p گفته می‌شود.

هدف از این فصل ارتباط بین خمیدگی و محدب بودن است. اولین قضیه زیر یکی از ساده‌ترین آنهاست.

● **قضیهٔ ۱.** ***فرض کنید یک n- رویه سودار S در $\mathbf{R}^{n+1}$ محدب در $p \in S$ باشد. در این صورت $\mathscr{S}_p$ دومین صورت بنیادی S در p نیم‌معین است.***

برهان. فرض کنید برای یک مجموعه باز V در $\mathbf{R}^{n+1}$ شامل p داشته باشیم $S \cap V \subseteq H_p^+$. برای $\mathbf{v} \in S_p$، فرض کنید $\alpha : I \longrightarrow S \cap V$ چنان باشد که $\alpha(t_\circ) = p$ ، $\dot\alpha(t_\circ) = \mathbf{v}$. تابع $h:I \longrightarrow \mathbf{R}$ را به صورت $h(t) = (\alpha(t) - p).N(p)$ تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت برای هر t، $h(t) \geq 0$ بنابراین h، چرا که $\alpha(t) \in H_p^+$ برای هر t و $h(t_\circ) = 0$، بنابراین h می‌نیمم مطلق خود را در $t_\circ$ اختیار می‌کند.



شکل ۱۳-۱ S محدب است اگر به‌ازای هر $p \in S$ ، S در یکی از دو نیم فضای $H_p^{\pm}$ قرار داشته باشد. مرز مشترک این دو نیم - فضا، n - صفحهٔ مماس بر S $\{ q \in \mathbf{R}^{n+1} : q.N(p) = 0 \} = H_p$ در نقطهٔ p است.

بنابراین

$$\mathscr{S}_p(\mathbf{V}) = \alpha^{\cdot\cdot}(t_\circ).N\left(\alpha(t_\circ)\right) = h''(t_\circ) \geq 0$$

اگر $S \subset H_p^-$ ، نابرابری برای تمام $\mathbf{v} \in S_p$ وارون می‌شود. □

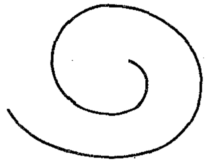
عکس قضیهٔ ۱ نادرست است، برای مثال ۲- رویه $x_3 = x_1^2 - x_2^4$ در $\mathbf{R}^3$ دارای $\mathscr{S}_\circ$ نیم‌معین است ولی در صفر محدب نیست. بااین‌حال می‌توان ثابت کرد (قضیهٔ ۲) که اگر $\mathscr{S}_p$ معین باشد، آنگاه S محدب (در واقع اکیداً محدب) در p است.

کلید اصلی در مطالعه تحدب این است که S در $p \in S$ محدب است اگر و تنها اگر «تابع ارتفاع» $h:S \longrightarrow \mathbf{R}$ که به صورت $h(q) = q.N(P)$ تعریف شده است، در نقطهٔ p می‌نیمم موضعی یا ماکزیمم موضعی خود را اختیار می‌کند. برای روشن شدن بیشتر این مطلب احتیاج به گسترش بیشتری از حساب توابع هموار روی n- رویه‌ها می‌باشد.

فرض کنید $h:S \longrightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار روی n- رویه $S \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ باشد. ***میدان برداری گرادیان*** h ، میدان برداری مماس هموار grad h روی S است که به صورت

$$(\text{grad } h)\ (p) = \nabla\bar{h}(p) - (\nabla\bar{h}(p)\ .N(P)\ N(P)$$

تعریف شده است.



شکل ۱۳-۲ یک خم مسطح نامحدب که در هر نقطه‌اش محدب است.

که در آن $\bar{h}$، یک گسترش دلخواه هموار h روی یک مجموعه باز شامل S و N یک سو روی S است، بنابراین grad h مولفه مماسی $\nabla\bar{h}$ است. گرادیان $h:S \longrightarrow R$ دارای خواص زیر است:

(یک) برای هر $\nabla_{\mathbf{v}}h = (\text{grad } h)\ (p).\mathbf{v}\,, p \in S\,, \mathbf{v} \in S_p$.

(دو) برای هر $(h \circ \alpha)'\ (t) = (\text{grad } h)\ (\alpha(t)).\dot{\alpha}(t)\,, t \in I$ که در آن $\alpha:I \longrightarrow S$ یک خم پارامتری دلخواه در S است.

(سه) $(\text{grad } h)\ (p) = \sum_{t=1}^{n} (\nabla_{\mathbf{v}_i}h)\ \mathbf{v}_i$، که در آن $\{\mathbf{v}_1\,, \mathbf{v}_2\,, \ldots\,, \mathbf{v}_n\}$ یک پایه متعامد یکهٔ دلخواه برای S در نقطه $p \in S$ است.

(چهار) $(\text{grad } h)\ (p) = 0$ اگر و فقط اگر h در نقطه $p \in S$ ایستا باشد.

در حالت خاص، بنا بر (سه)، grad h مستقل از انتخاب گسترش $\bar{h}$ می‌باشد. خاصیت (دو) صورتی از قاعدهٔ زنجیره‌ای است.

خاصیت (یک) درست است چرا که $\nabla_{\mathbf{v}}h = \nabla_{\mathbf{v}}\bar{h}(p).\mathbf{v} = (\text{grad } h)\ (p).\mathbf{v}$.

(دو) از (یک) نتیجه می‌شود، زیرا که $(h \circ \alpha)'\ (t) = \nabla_{\dot{\alpha}(t)}h$. برای بررسی (سه) طرفین رابطه بالا را در $\mathbf{v}_j (j \in \{1, \ldots, n\})$ ضرب داخلی می‌کنیم و (یک) را به کار می‌بریم. سرانجام، (یک) و (سه) با هم ایجاب می‌کند که $(\text{grad } h)\ (p) = 0$ اگر و تنها اگر،

$$\nabla_{\mathbf{v}}h = 0 \quad ، \quad \mathbf{v} \in S_p$$

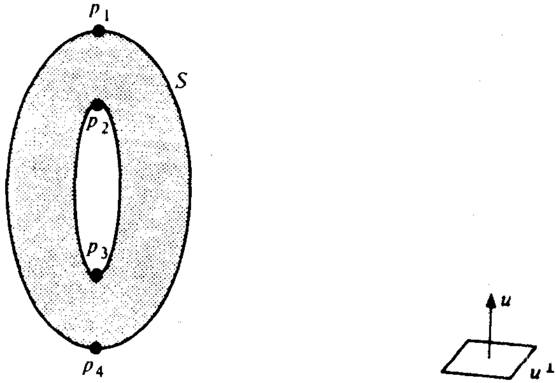
که بدین ترتیب (چهار) برقرار می‌گردد. (به خاطر دارید که تابع $h:S \longrightarrow \mathbf{R}$ در $p \in S$ ***ایستا*** است هرگاه برای هر $\mathbf{v} \in S_p$ ، $\nabla_{\mathbf{v}}\, h = 0$ یعنی، اگر برای هر خم پارامتری α در S با شرط $\alpha(t_0) = p$ داشته باشیم $(h \circ \alpha)'\ (t_0) = 0$.)

نقطهٔ $p \in S$ که در آن $h:S \longrightarrow \mathbf{R}$ ایستا است ***نقطهٔ بحرانی*** h نامیده می‌شود. نقاط بحرانی تابع هموار $h:S \longrightarrow \mathbf{R}$ سه‌گونه‌اند، نقاط می‌نیمم موضعی، نقاط ماکزیمم موضعی و نقاط زینی

(شکل ۱۳-۳)

$h:S\longrightarrow \mathbf{R}$ در نقطه $p\in S$ دارای **می‌نیمم موضعی** است هرگاه مجموعهٔ بازی مانند V شامل p در S وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $q\in V$,$h(q)\geq h(p)$ ($V\subset S$ یک مجموعهٔ باز در S است هرگاه برای یک مجموعهٔ باز W در $\mathbf{R}^{n+1}$ داشته باشیم $V=W\cap S$.)

$h:S\longrightarrow \mathbf{R}$ در نقطه $p\in S$ دارای **ماکزیمم موضعی** است هرگاه مجموعهٔ بازی مانند V شامل p در S وجود داشته باشد، به قسمی که برای هر $q\in V$,$h(q)\leq h(p)$.



شکل ۱۳-۳ نقاط بحرانی تابع ارتفاع $h:S\longrightarrow \mathbf{R}$، $h(q)=q.u$ که در آن u برداریکه در $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد. h ارتفاع بالای n- صفحهٔ $u^\perp$ را اندازه‌گیری می‌کند. h یک ماکزیمم موضعی در p_1 و یک می‌نیمم موضعی خود را در p_4 اختیار می‌کند و p_2 , p_3 نقاط زینی هستند.

نقطه $p\in S$ یک نقطه زینی $h:S\longrightarrow \mathbf{R}$ است هرگاه h در p ایستا باشد ولی h نه دارای ماکزیمم موضعی و نه می‌نیمم موضعی در p باشد.

اگر در تعاریف می‌نیمم موضعی و ماکزیمم موضعی، نابرابری‌ها اکید شود آنگاه می‌گوییم h دارای می‌نیمم موضعی اکید در p است (برای هر $q\in V$, $q\neq p$, $h(q)>h(p)$).

شرط $(\text{grad } h)(p)=0$، «آزمون مشتق اول» برای یک نقطهٔ بحرانی تابع $h:S\longrightarrow \mathbf{R}$ می‌باشد. «آموزن مشتق دوم» را برای تمایز بین انواع نقاط بحرانی احتیاج داریم.

فرض کنید $p\in S$ یک نقطهٔ بحرانی $h:S\longrightarrow \mathbf{R}$ باشد. ***هسیان*** h در p صورت درجهٔ دوم $\mathscr{H}_p:S\longrightarrow \mathbf{R}$ تعریف شده به صورت

$$\mathscr{H}_p(\mathbf{v})=\nabla_{\mathbf{v}}(\text{grad } h).\mathbf{v}$$

می‌باشد. بنابراین $\mathscr{H}_p$ صورت درجهٔ دوم نظیر به تبدیل خطی خود الحاقی روی S است که $\mathbf{v}$ را به $\nabla_{\mathbf{v}}$ (grad h) می‌برد. توجه داشته باشیم که $\nabla_{\mathbf{v}}$(grad h) برای هر $\mathbf{v} \in S_p$ در S_p قرار می‌گیرد زیرا که

$$\nabla_{\mathbf{v}}\ (\text{grad h}).N(P) = \nabla_{\mathbf{v}}\ \big((\text{grad h}).N\big) - (\text{grad h})\ (p).\nabla_{\mathbf{v}}N$$
$$\nabla_{\mathbf{v}}(\circ) - \circ\ .\nabla_{\mathbf{v}}N = \circ\ .$$

● **قضیهٔ ۲.** ***(آزمون مشتق دوم برای می‌نیمم و ماکزیمم موضعی). فرض کنیم S یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد، $h:S \longrightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار که در نقطه $p \in S$ ایستاست و $\mathscr{H}_p$ نشانگر هسیان h در p باشد در این صورت***

(یک) اگر h دارای یک می‌نیمم موضعی در p باشد، آنگاه $\mathscr{H}_p$ نیم‌معین مثبت است.
اگر h دارای یک ماکزیمم موضعی در p باشد، آنگاه $\mathscr{H}_p$ نیم‌معین منفی است.

(دو) اگر $\mathscr{H}_p$ معین مثبت باشد، آنگاه h دارای یک می‌نیمم موضعی اکید در p است.
اگر $\mathscr{H}_p$ معین منفی باشد، آنگاه h دارای یک ماکزیمم موضعی اکید در p است.

برهان. فرض کنید h دارای یک می‌نیمم موضعی در p باشد. برای $\mathbf{v} \in S_p$، فرض کنید $\alpha:I \longrightarrow S$ طوری باشد که $\dot{\alpha}(t_\circ) = \mathbf{v}$. در این صورت

$$(h \circ \alpha)'\ (t) = (\text{grad h})\ \big(\alpha(t)\big).\dot{\alpha}(t) \qquad \text{برای هر}\ \ t \in I$$

$$0 \le (h \circ \alpha)''\ (t_\circ) = \nabla_{\mathbf{v}}\ (\text{grad h}).\dot{\alpha}(t_\circ) + (\text{grad h})\ \big(\alpha(t_\circ)\big)\ .\ \ddot{\alpha}(t_\circ)$$
$$= \mathscr{H}_p(\mathbf{v})$$

چرا که $(\text{grad h})\ (p) = \circ$. بنابراین $\mathscr{H}_p$ نیم‌معین مثبت است. اثبات برای حالت ماکزیمم موضعی به طریق مشابه است.

(دو) برای اثبات اولین قسمت (دو) کافی است نشان دهیم که اگر h دارای می‌نیمم موضعی اکید نباشد، آنگاه $\mathscr{H}_p$ نمی‌تواند معین مثبت باشد. بنابراین فرض می‌کنیم که h دارای می‌نیمم موضعی اکید در p نباشد، در این صورت باید یک دنبالهٔ $\{p_k\}$ در $S - \{p\}$ با شرط $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = p$ وجود داشته باشد به قسمی که $h(p_k) \le h(p)$ برای هر k. برای هر k، $\mathbf{v}_k = (p_k - p) / \|p_k - p\|$ قرار می‌دهیم. در این صورت $\{\mathbf{v}_k\}$ یک دنباله در کره‌یکه S^n می‌باشد. چون S^n فشرده است، لذا

دنبالهٔ $\{v_k\}$ دارای یک زیر دنباله همگرا می‌باشد که می‌توانیم فرض کنیم آن زیردنباله خـود $\{v_k\}$ باشد، $\lim_{k\to\infty} v_k = v$. نشان می‌دهیم که $\mathbf{v} = (p,v) \in S_p$, $\mathscr{H}_p(\mathbf{v}) \leq ۰$.

فرض کنیم W یک گوی باز در $\mathbf{R}^{n+۱}$ شامل p باشد به قسمی که هم $\bar{h}$، یک گسترش هموار h و هم تابع هموار f که S به توسط $f^{-۱}(c)$ معین شده است روی W تعریف شده باشد. در این صورت برای k به‌اندازه‌کافی‌بزرگ، $p_k \in W$. بابکارگیری قضیهٔ مقدارمیانگین درموردتابع $g(t) = f(p + tv_k)$ به‌ازای یک $t_k \in (0, \|p_k - p\|)$ داریم

$$0 = \frac{f(p_k) - f(p)}{\|p_k - p\|} = \frac{g(\|p_k - p\| - g(0)}{\|p_k - p\| - 0}$$

$$= g'(t_k) = \nabla f(p + t_k. v_k).\mathbf{v}_k$$

که در آن $\mathbf{v}_k = (p + t_k v_k , v_k)$. از حدگیری از طرفین بالا وقتی که $k\to\infty$ حاصل می‌شود کـه $0 = \nabla f(p). \mathbf{v}$ (چون که $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$) لذا $\mathbf{v} \in S_p$.

برای مشاهده اینکه $\mathscr{H}_p(\mathbf{v}) \geq 0$، توجه داریم که برای یک $\lambda \in \mathbf{R}$، $\nabla\bar{h}(p) = \lambda\nabla f(p)$ زیراکه

$$(\text{grad } h)(p) = 0 , \lambda = \nabla\bar{h}(p).\nabla f(p) / \|\nabla f(p)\|^{۲} .$$

می‌توان قضیهٔ تیلور را برای

$g_k(t) = (\bar{h} - \lambda f)(\alpha_k(t))$ که در آن $\alpha_k(t) = p + tv_k$ به کار برد. چون

$$g_k'(t) = \nabla(\bar{h} - \lambda f).(\alpha_k(t)). \dot{\alpha}_k(t) = (\nabla\bar{h} - \lambda\nabla f)(\alpha_k(t)).(\alpha_k(t), v_k)$$

$$g_k''(t) = \left(\nabla_{\dot{\alpha}_k(t)}(\nabla\bar{h} - \lambda \nabla f)\right) . \left(\alpha_k(t), v_k\right)$$

به ازای یک t_k بین 0 و $\|p_k - p\|$ داریم

$$\begin{aligned} g_k(\|p_k - p\|) &= g_k(0) + g_k'(0) \|p_k - p\| + \frac{۱}{۲} g_k''(t_k) \|p_k - p\|^{۲} \\ &= g_k(0) + \left((\nabla\bar{h} - \lambda \nabla f)(p) . (p, v_k)\right) \|p_k - p\| \\ &+ \frac{۱}{۲} \left(\Delta_{\dot{\alpha}_k(t_k)}(\lambda\bar{h} - \lambda \nabla f)\right) . (\alpha_k(t_k), v_k) \|p_k - p\|^{۲}. \end{aligned}$$

چون $\nabla\bar{h}(p) = \lambda \nabla f(p)$ لذا جمله میانی صفر است. بنابراین

$$0 \geq \frac{h(p_k) - h(p)}{\| p_k - p \|^2} = \frac{\bar{h}(p_k) - \bar{h}(p)}{\| p_k - p \|^2}$$

$$= \frac{(\bar{h} - \lambda f)(p_k) - (\bar{h} - \lambda f)(p)}{\| p_k - p \|^2} \quad (\text{چون } f(p_k) = f(p) = c)$$

$$= \frac{g_k(\| p_k - p \|) - g_k(0)}{\| p_k - p \|^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\nabla_{\dot{\alpha}_k(t_k)} (\nabla\bar{h} - \lambda \nabla f)\right) . \left(\alpha_k(t_k),\ v_k\right) .$$

با گرفتن حد وقتی $k \to \infty$ داریم

$$0 \geq \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{v}}(\nabla\bar{h} - \lambda \nabla f). \mathbf{v}$$

اما عبارت اخیر دقیقاً $\frac{1}{2}\mathscr{H}_p(\mathbf{v})$ است، زیرا

$$\mathscr{H}_p(\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}}(\text{grad } h). \mathbf{v}$$

$$= \nabla_{\mathbf{v}}\left(\nabla\bar{h} - (\nabla\bar{h}.N)\, N\right). \mathbf{v}$$

$$= \nabla_{\mathbf{v}} \left(\nabla\bar{h} - \frac{\nabla\bar{h}.\nabla f}{\| \nabla f \|^2} \nabla f \right) . \mathbf{v}$$

$$= \nabla_{\mathbf{v}}(\nabla\bar{h}). \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}} \left(\frac{\nabla\bar{h}.\nabla f}{\| \nabla f \|^2}\right) \nabla f(p). \mathbf{v} - \left(\frac{\nabla\bar{h}.\nabla f}{\| \nabla f \|^2}\right) (p)\ \nabla_{\mathbf{v}}(\nabla f). \mathbf{v}$$

$$= \nabla_{\mathbf{v}}(\nabla\bar{h}). \mathbf{v} - \lambda\, \nabla_{\mathbf{v}}(\nabla f). \mathbf{v}$$

$$= \nabla_{\mathbf{v}}(\nabla\bar{h} - \lambda \nabla f). \mathbf{v}$$

لذا $\mathscr{H}_p(\mathbf{v}) \leq 0$ همان چیزی که لازم بود.

بنابراین نشان دادیم که اگر h دارای می‌نیمم موضعی اکید در یک نقطه بحرانی $p \in S$ نباشد، آنگاه $\mathscr{H}_p$ نمی‌تواند معین مثبت باشد. بطور مشابه می‌توان ثابت کرد که اگر h دارای مـاکـزیمم موضعی اکید در یک نقطه $p \in S$ نباشد آنگاه $\mathscr{H}_p$ نمی‌تواند معین منفی باشد. □

وقتی که S به صورت مجموعهٔ تراز $S = f^{-1}(c)$ ($f:U \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ به قسمی که برای هر $p \in S$ $(\nabla f(p) \neq 0$ نمایش داده می‌شود و h تحدید تابع $\bar{h}:U \longrightarrow \mathbf{R}$ به S باشد پیدا کردن ماکزیمم و می‌نیمم موضعی با استفاده از واقعیات زیر بسیار ساده‌تر است که از اثبات قضیهٔ بالا آشکار می‌گردد. نقاط بحرانی $h = \bar{h}|_S$ آن نقاط $p \in S$ هستند که برای یک $\lambda \in \mathbf{R}$ ، $\nabla \bar{h}(p) = \lambda \nabla f(p)$ (λ **ضریب لاگرانژ** در p از جفت توابع $f, \bar{h}$ می‌باشد). در این صورت یک شرط کافی برای اینکه $h = \bar{h}|_S$ در نقطهٔ بحرانی p دارای مینیمم موضعی باشد این است که صورت درجه دوم

$$\mathscr{H}_p(\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}}(\nabla \bar{h} - \lambda \nabla f) \cdot \mathbf{v} \text{ ، } \mathbf{v} \in S_p$$

معین مثبت باشد و یک شرط کافی برای اینکه $h = \bar{h}|_S$ در نقطه p ماکزیمم موضعی داشته باشد این است که این صورت درجه دوم معین منفی باشد.

نظریهٔ نقطهٔ بحرانی مخصوصاً وقتی $h:S \longrightarrow \mathbf{R}$ تابع ارتفاع $h_u(q) = q.u$ ، باشد ساده می‌شود، که در آن u بردار یکه‌ای در $\mathbf{R}^{n+1}$ است (شکل ۱۳-۳). بنابراین $h_u = \bar{h}_u|S$ که در آن

$$\bar{h}_u(q) = q.u$$
$$\nabla \bar{h}_u(q) = (q,u)$$
$$\nabla_{\mathbf{v}}(\nabla \bar{h}_u) = 0$$

برای هر $q \in \mathbf{R}^{n+1}$ و هر $\mathbf{v} \in \mathbf{R}_q^{n+1}$. در نتیجه $p \in S$ یک نقطهٔ بحرانی $\bar{h}_u = \bar{h}_u|S$ می‌باشد. اگر و فقط اگر $(p , u) = \lambda \nabla f(p)$ برای یک $\lambda \in \mathbf{R}$. چون u یک بردار یکه است $|\lambda|$ باید برابر $1 / \|f(p)\|$ شود، لذا p یک نقطهٔ بحرانی است اگر و فقط اگر $(p,u) = \pm N(p)$. علاوه بر این اگر p یک نقطهٔ بحرانی h_u باشد و $\mathbf{v} \in S_p$ ، در این صورت

$$\mathscr{H}_p(\mathbf{V}) = \nabla_{\mathbf{v}}(\bar{\nabla} h_u - (\bar{\nabla} h_u.N)\, N).\ \mathbf{v}$$
$$= (\bar{\nabla} h_u.N)\ (p)\ (-\nabla_{\mathbf{v}} N.\mathbf{v})$$
$$= \big(u.N(p)\big)\ \mathscr{S}_p(\mathbf{v})$$
$$= \pm\ \mathscr{S}_p(\mathbf{v}).$$

که در آن $\mathscr{S}_p$ دومین صورت بنیادی S در p است. در خاتمه بدین‌صورت نتیجه می‌گیریم که $p \in S$ یک نقطهٔ بحرانی تابع ارتفاع $h_u(q) = q.u\ ,\ h_u{:}S \longrightarrow \mathbf{R}$ می‌باشد که در آن u یک برداریکه در $\mathbf{R}^{n+1}$ است اگر و فقط اگر $N(p) = \pm\ u$ و در یک نقطهٔ بحرانی p از h هسیان برابر ± دومین صورت بنیادی S در p می‌باشد و علامت آن هم علامت با $N(p).u$ می‌باشد.

● **قضیهٔ ۳.** ***فرض کنیم S یک n- رویه سودار در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد. اگر $p \in S$ چنان باشد که دومین صورت بنیادی $\mathscr{S}_p$ در p معین باشد، در این صورت S در p اکیداً محدب است.***

برهان. S در p اکیداً محدب است اگر و تنها اگر تابع ارتفاع $h_{N(p)} : S \longrightarrow \mathbf{R}$ دارای یک می‌نیمم موضعی اکید یا یک ماکزیمم موضعی اکید در p باشد. اما این امر ممکن است، چراکه $h_{N(p)}$ در p ایستا و $\mathscr{H}_p = \pm\ \mathscr{S}_p$ معین است. □

با ترکیب کردن قضیهٔ ۳ با قضیهٔ ۶ از فصل ۱۲ درمی‌یابیم که اگر S یک n- رویه سودار همبند فشرده در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد که خمیدگی گاوس -کرونوکر آن هیچ جا صفر نباشد آنگاه S در هر نقطه اکیداً محدب است. باقیماندهٔ این فصل اختصاص به اثبات (قضیهٔ ۵) این امر دارد که چنین S ای محدب سرتاسری است. برای اینکار، ما باید نشان دهیم که اگر $u = N(p)$ برای یک $p \in S$، آنگاه تابع ارتفاع h_u نه‌اینکه یک می‌نیمم موضعی یا یک ماکزیمم موضعی در p اختیار می‌کند بلکه در نقطه p در واقع به یک می‌نیمم و یا ماکزیمم سرتاسری خود می‌رسد. نحوه اثبات بدین‌ترتیب است که نشان دهیم هر h_u تنها می‌تواند دارای دو نقطه بحرانی باشد که عبارتند از نقطه‌ای که در آن h_u به ماکزیمم سرتاسری خودش می‌رسد و نقطهٔ دیگری که در آن h_u می‌نیمم سرتاسری خودش را انتخاب می‌کند. این اثبات احتیاج به مطالبی از معادلات دیفرانسیل دارد.

می‌دانیم که، برای یک میدان برداری هموار داده شده X روی یک مجموعه باز $U \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ و

نقطه $q \in U$ یک‌بازهٔ I_q شامل 0 و یک خم انتگرال یکتا $\alpha_q : I_q \longrightarrow U$ از X وجود دارد به قسمی که $\alpha_q(0) = q$. قضیه ۴ گویای این مطلب است که حداقل برای t های کوچک $\alpha_q(t)$ تابع همواری از q است.

● **قضیهٔ ۴** *فرض کنیم X یک میدان برداری هموار روی یک مجموعه باز $U \subset R^{n+1}$ باشد و $p \in U$، در این صورت یک مجموعهٔ باز V در R^{n+1} با شرط $p \in V \subset U$ و یک $\varepsilon > 0$ وجود دارد به قسمی که یک برای هر $q \in V$ یک خم انتگرال $\alpha_q : (-\varepsilon , \varepsilon) V$ برای X با شرط $\alpha_q(0) = q$ وجود دارد. علاوه بر این، برای هر چنین V , ε، نگاشت $\Psi : V_x (-\varepsilon , \varepsilon) \longrightarrow U$ که بصورت $\Psi(q,t) = \alpha_q(t)$ تعریف شده است هموار می‌باشد.*

برای اثبات قضیهٔ ۴ به صفحات ۲۹-۲۸ کتاب **درسهایی از معادلات دیفرانسیل معمولی** نوشتهٔ هورویتز مراجعه شود.

نتیجه. *فرض کنیم X یک میدان برداری هموار روی یک n- رویهٔ فشرده $S \subseteq R^{n+1}$ باشد. در این صورت X کامل است بدین معنی که هر خم انتگرال بیشین X دامنه‌اش تمام محور حقیقی است. علاوه براین، برای هر $t \in R$، نگاشت $\Psi_t : S \longrightarrow S$ تعریف شده به صورت $\Psi_t(q) = \alpha_q(t)$ هموار است که در آن α_q خم انتگرال بیشین X گذرنده از q است.*

برهان. X را به یک میدان برداری هموار $\tilde{X}$ روی یک مجموعهٔ باز $U \subset R^{n+1}$ شامل S گسترش می‌دهیم. ابتدا نشان خواهیم داد که یک $\bar{\varepsilon} > 0$ (یک $\bar{\varepsilon}$ یکنواخت) وجود دارد به قسمی که برای هر p در S، مجموعه بازی مانند V_p در R^{n+1} با شرط $p \in V_p \subset U$ وجود دارد به قسمی که نتیجهٔ قضیهٔ ۴ برای $\tilde{X}$، این مجموعه باز V_p و این ε صادق است: فرض کنید چنین $\bar{\varepsilon}$ ای وجود نداشته باشد، در این صورت برای هر عدد صحیح مثبت k یک نقطهٔ p_k در S وجود دارد به قسمی که برای هر مجموعهٔ باز V شامل p_k دامنهٔ خم انتگرال بیشین α_q گذرنده از q شامل بازهٔ $(-1/k \ , \ 1/k)$ برای یک $q \in V$ نیست. چون S فشرده است لذا دنبالهٔ $\{p_k\}$ دارای یک زیر دنبالهٔ همگرا به یک نقطه $p \in S$ است. اکنون برای این p و $X = \tilde{X}$ فرض کنید V , ε همانند آنچه که در قضیه ۴ آمده است، باشند. در این صورت برای هر $q \in V$ خم انتگرال بیشین X گذرنده از q دارای دامنه‌ای شامل بازهٔ $(-\varepsilon \ ، \ \varepsilon)$ است، اما برای مقادیر k به اندازه کافی بزرگ ودرحالت خاص برای یک k باشرط $1/k < \varepsilon$، $p_k \in V$

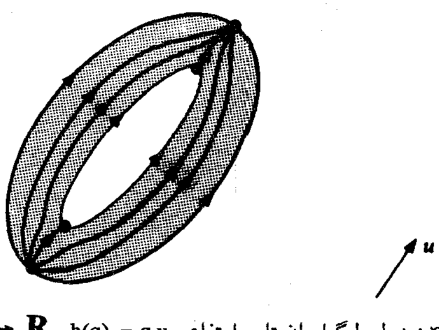
این امر متناقض با وجود $\{p_k\}$ می‌باشد و وجود یک $\bar{\varepsilon}$ به طور یکنواخت ایجاب می‌شود.

از این نتیجه می‌شود که دامنهٔ I از هر خم انتگرال بیشین α از $\mathbf{X}$ تمام محور حقیقی است زیرا فرض کنید $b \in \mathbf{R}$ نقطه انتهایی بازهٔ باز I باشد. نقطهٔ $t_\circ \in I$ را به قسمی انتخاب می‌کنیم که $\bar{\varepsilon} > |t_\circ - b|$، فرض کنید β خم انتگرال بیشین $\mathbf{X}$ گذرنده از $\alpha(t_\circ)$ باشد، در این صورت $\alpha(t)$ و $\beta(t - t_\circ)$ خمهای انتگرال $\mathbf{X}$ هستند که در $t_\circ$ برابرند و بنابراین برای هر t در دامنهٔ مشترکشان است برابر می‌باشند. بنابراین خم پارامتری شده که t را به $\alpha(t)$ برای $t \in I$ و t را به $\beta(t - t_\circ)$ برای $\bar{\varepsilon} > |t - t_\circ|$ می‌برد یک خم انتگرال $\mathbf{X}$ است که α را به آن طرف b گسترش می‌دهد و این تناقض با بیشین بودن α است. بنابراین $I = R$ و ادعای ما تحقق می‌یابد.

بنابراین برای هر $t \in \mathbf{R}$ نگاشت $\Psi_t: S \longrightarrow S$ به صورت $\Psi_t(q) = \alpha_q(t)$ تعریف می‌شود: توجه کنید که بنا بر یکتایی خمهای انتگرال $\Psi_t o \Psi_s = \Psi_{t+s}$ برای هر $s, t \in \mathbf{R}$ در واقع برای هر $s \in \mathbf{R}$ و $q \in S$، $\Psi_t(\Psi_s(q))$ و $\Psi_{s+t}(q)$ هر دو خم انتگرال بیشین یکتا $\mathbf{X}$ گذرنده از $\Psi_s(q)$ را مشخص می‌کنند. لذا $\Psi_t = \Psi_{t/k} o \Psi_{t/k} o \dots o \Psi_{t/k}$ (k مرتبه ترکیب)، که در آن عدد صحیح مثبت k به قسمی که $\bar{\varepsilon} > |1/k|$. ولی بنابر قضیهٔ ۴، نگاشت $\Psi_{t/k}$ هموار است، بنابراین Ψ_t نیز هموار است. ■

تذکر. علاوه بر این می‌توان نشان داد که نگاشت $\Psi : S \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ تعریف شده بصورت $\Psi(q,t) = \Psi_t(q) = \alpha_q(t)$ نیز هموار است، ولی در واقع ما احتیاجی به آن نداریم.

حال میدان برداری مماس هموار grad h را که در آن $h:S \longrightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار روی n- رویه $S \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد در نظر می‌گیریم. خم‌های انتگرال grad h ***خطوط گرادیان*** h نامیده می‌شوند (ر.ک. شکل ۱۳-۴). اگر $p \in S$ یک نقطهٔ بحرانی h باشد، آنگاه $(\text{grad } h)(p) = 0$، بنابراین هر خط گرادیان $\alpha:I \longrightarrow S$ از h که از نقطهٔ p می‌گذرد خم ثابت $\alpha(t) = p$ برای هر $t \in I$ خواهد بود. h در طول هر خط گرادیان دیگر اکیداً صعودی است.



شکل ۱۳-۴ : خطوط گرادیان تابع ارتفاع. $h:S \longrightarrow \mathbf{R}$, $h(q) = q.u$

در واقع اگر $\alpha: I \longrightarrow S$ هر خط گرادیان h باشد که از یک نقطهٔ بحرانی h نمی‌گذرد، در این صورت

$$(h \circ \alpha)'(t) = (\text{grad } h)\big(\alpha(t)\big) \cdot \dot{\alpha}(t) = \|(\text{grad } h)\big(\alpha(t)\big)\|^{۲} > 0$$

برای هر $t \in I$. خطوط گرادیان h خم‌های در S هستند که در طول آنها h سریعتر از هر خم S با تندی یکسان افزایش می‌یابد (به تمرین ۱۳-۴ مراجعه کنید).

یک نقطهٔ بحرانی p از یک تابع هموار $h:S \longrightarrow \mathbf{R}$ ناتبهگون است هرگاه برای هر $\mathbf{v} \in S_p$، با شرط $\mathbf{v} \neq \circ$، $\nabla_{\mathbf{v}}(\text{grad } h) \neq \circ$. توجه کنید که نقاط بحرانی ناتبهگون بدین معنی ***تنها*** هستند که برای هر یک از این چنین نقاط بحرانی مانند p یک مجموعه باز در S حول p وجود دارد به قسمی که V شامل هیچ نقطه بحرانی دیگری از h نیست. در غیراینصورت یک دنبالهٔ $\{p_k\}$ از نقاط بحرانی h که به p همگراست و یک زیردنباله $\{p_{k_i}\}$ به قسمی که $(p_{k_i} - p) / \|p_{k_i} - p\|$ به یک نقطه v در کرهٔ یکهٔ S^n همگراست وجود خواهند داشت. با قرار دادن $\mathbf{v} = (P , v)$ و همانند با اثبات قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شود که $\nabla_{\mathbf{w}}(\text{grad } h) = \circ , \mathbf{v} \in S_p$ (چراکه $(\text{grad } h)(p_{k_i}) = \circ$ برای هر k) که این امر متناقض با ناتبهگونی است.

لم ۱. ***فرض کنید S یک n- رویه فشرده و $h:S \longrightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار باشد که همهٔ نقاط بحرانی آن ناتبهگون است. در اینصورت خطوط گرادیان h از یک نقطهٔ بحرانی h به نقطهٔ بحرانی دیگر عبور می‌کنند، بدین معنی که اگر $\alpha:\mathbf{R} \longrightarrow S$ یک خط گرادیان بیشین h باشد، آنگاه نقاط بحرانی p , q از h وجود دارند به قسمی که*** $\lim\limits_{t \to -\infty} \alpha(t) = q$, $\lim\limits_{t \to \infty} \alpha(t) = p$ (ر.ک. شکل ۱۳-۴).

برهان. فرض کنید $\alpha:\mathbf{R} \to S$ یک خط گرادیان بیشین h باشد. چون S فشرده است، لذا دنباله $\{\alpha(k) : k = ۱ , ۲ , ...\}$ دارای یک زیردنبالهٔ همگرا مانند $\{\alpha(t_k)\}$ می‌باشد. فرض کنید $p = \lim\limits_{k \to \infty} \alpha(t_k)$ در اینصورت

$$h(p) - h\big(\alpha(\circ)\big) = \lim_{k \to \infty} \left[h(\alpha(t_k)) - h(\alpha(\circ))\right]$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int_{\circ}^{t_k} (h \circ \alpha)'(t)\, dt$$

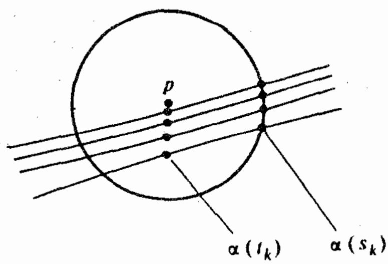
$$= \int_{\circ}^{\infty} \|(\text{grad } h)\big((\alpha(t)\big)\|^{۲}\, dt .$$

بنابراین انتگرال $\int_{0}^{\infty} \|(\mathrm{grad}\ h)(\alpha(t))\|^{2} dt$ تنهاوقتی همگراست که $\lim_{t\to\infty} \|(\mathrm{grad}\ h)(\alpha(t))\|^{2} = 0$.
در حالت خاص

$$\|(\mathrm{grad}\ h)\ (p)\| = \lim_{k\to\infty} \|(\mathrm{grad}\ h)\ (\alpha(t_k))\| = 0$$

و بنابراین p یک نقطهٔ بحرانی h است.

مااکنون باید بررسی کنیم که $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = p$. امااگراینطور نباشد، یک $\varepsilon > 0$ وجود خواهد داشت به قسمی که برای هر k، $\|\alpha(s_k) - p\| \geq \varepsilon$ برای یک $s_k > t_k$. چون برای k به‌اندازه کافی بزرگ داریم $\|\alpha(t_k) - p\| < \varepsilon$، این مطلب گویای آنست که $\alpha(t)$ وقتی که $t \to \infty$ به طور مکرر وارد و خارج ازگوی $\{q \in \mathbf{R}^{n+1} : \|q - p\| < \varepsilon\}$ می‌شود (ر.ک. شکل ۱۳-۵). چون $\|\alpha(t) - p\|$ باید به‌ازای یک t بین t_k و s_k برابر ε شود ما می‌توانیم در واقع s_k را چنان انتخاب کنیم که $\|\alpha(s_k) - p\| = \varepsilon$. چون $\{q \in S : \|q - p\| = \varepsilon\}$ فشرده است. لذا دنبالهٔ $\{\alpha(s_k)\}$ دارای یک



شکل ۱۳-۵: اگر $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) \neq p$ باشدآنگاه α بایدبه‌طورمکرر وارد وخارج ε-گوی در حول $p = \lim_{k\to\infty} \alpha(t_k)$ شود.

زیردنبالهٔ همگرا به یک نقطه $p_1 \in S$ با شرط $\|p_1 - p\| = \varepsilon$ می‌باشد. چون $\lim_{k\to\infty} s_k = \infty$، با استدلال مشابهی که نشان داده شد p یک نقطهٔ بحرانی h است می‌توان نشان داد که p_1 نیز یک نقطهٔ بحرانی h می‌باشد. تکرار این ساختار و جایگزین کردن ε/m به جای ε منجر به یک نقطهٔ بحرانی $p_m \in S$ از h با شرط $\|p_m - p\| = \varepsilon$ برای هر عدد صحیح مثبت m می‌شود. اما این امر متناقض بااین‌است که نقطهٔ بحرانی p از h ناتبهگون و بنابراین تنها است. لذا در واقع $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = p$.
با در نظرگرفتن دنبالهٔ $\{\alpha(-k) : k = 1, 2, \ldots\}$ و به کارگیری روش قبل یک نقطهٔ بحرانی q از

h بدست می‌آوریم به قسمی که $\lim_{t\to-\infty} \alpha(t) = q$. □

● **قضیهٔ ۵.** ***فرض‌کنید S یک n- رویهٔ سودار همبند فشرده در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد به قسمی که خمیدگی گاوس -کرونوکر آن هیچ جا صفر نباشد در اینصورت***

(یک) نگاشت گاوس $N:S \to S^n$ یک به یک و پوشاست.

(دو) S اکیداً محدب است.

برهان. (یک) بنابر قضیهٔ ۶ از فصل ۱۲، دومین صورت بنیادی $\mathscr{S}_p$ از S در p برای هر $p \in S$، معین است. $\mathscr{S}_p$ برای تمام p ها معین مثبت و یا برای تمام p ها معین منفی است زیرا که می‌نیمم و ماکزیمم خمیدگیهای قائم k_n, k_1 توابعی پیوسته هیچ جا صفر روی n- رویهٔ همبند S می‌باشند و نمی‌توانند تغییر علامت دهند. با برعکس کردن سو روی S اگر لازم باشد، می‌توانیم فرض کنیم $\mathscr{S}_p$ برای تمام $p \in S$ معین منفی است.

اکنون فرض کنید $u \in S^n$. بنابر بحثی که قبل از قضیه ۳ آمد $p \in S$ یک نقطه بحرانی تابع ارتفاع $h_u: S \to \mathbf{R}$ تعریف شده به صورت $h_u(q) = q.u$ است اگر و فقط اگر $N(p) = \pm u$. علاوه بر آن چون $\mathscr{S}_p = u.N(p) \mathscr{H}_p$ لذا، $N(p) = +u$ اگر و فقط اگر h_u دارای یک ماکزیمم موضعی در p باشد. در حالت خاص، همهٔ نقاط بحرانی h_u ناتبهگون و لذا تنها هستند و h_u یا به یک ماکزیمم موضعی اکید یا به یک می‌نیمم موضعی اکید در هر یک از آنها می‌رسد.

حال پوشا بودن N واضح است: برای $u \in S^n$ درمی‌یابیم که $N(p) = u$ که در آن p هر نقطه‌ای است که h_u در آن ماکزیمم است.

برای مشاهدهٔ اینکه N یک به یک است، فرض کنید p نقطه‌ای در S با شرط $N(p) = u$ باشد. دراینصورت، تابع ارتفاع h_u بایستی دارای یک ماکزیمم موضعی اکید در p باشد. نشان خواهیم داد که مجموعهٔ

$$U_p = \{q \in S : \lim_{t\to\infty} \alpha_q(t) = p\}$$

که در آن $\alpha_q : \mathbf{R} \to S$ خط گرادیان بیشین h_u با شرط $\alpha_q(0) = q$ است، در S باز است.

ابتدا توجه داریم که یک مجموعهٔ باز V_p در S حول p وجود دارد به قسمی که همهٔ خطوط گرادیان h_u که وارد V_p می‌شوند الزاماً از p عبور می‌کنند. در حقیقت $\varepsilon > 0$ را به اندازه کافی کوچک انتخاب کنید تا اینکه

(۱) p تنها نقطهٔ بحرانی h_u در $A_\varepsilon = \{q \in S : \|q - p\| \le \varepsilon\}$ باشد.

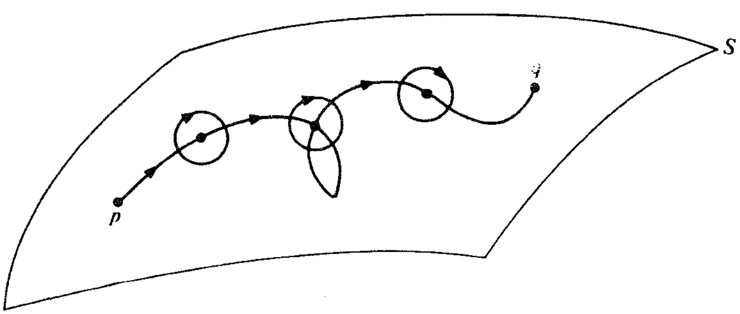
(۲) $h_u(p) > h_u(q)$ برای هر $q \neq p\,,\, q \in A_\varepsilon$ و

(۳) $B_\varepsilon = \{q \in S : \|q - p\| = \varepsilon\}$ غیرتهی باشد.

فرض کنید M_ε مقدار ماکزیمم h_u روی مجموعهٔ فشردهٔ B_ε باشد و قرار می‌دهیم $V_p = \{q \in S : \|q - p\| < \varepsilon\,,\, h(q) > M\varepsilon\}$. در اینصورت یک خط گرادیان α از h با شرط $\alpha(t_\circ) \in V_p$ برای یک $t_\circ \in \mathbf{R}$ نمی‌تواند تعلق $\alpha(t) \in B_\varepsilon$ را به‌ازای هر $t \geq t_\circ$ داشته باشد (چون h در طول α افزایش می‌یابد) و بنابراین $\alpha(t)$ باید به‌ازای هر $t \geq t_\circ$ در A_ε بماند. در نتیجه α باید از یک نقطهٔ بحرانی در A_ε عبور کند ولی p تنها نقطه ممکن در آنست.

از نتیجهٔ قضیهٔ ۴ بازبودن U_p حاصل می‌شود. بدین منظور برای هر $q_\circ \in U_p$ یک $t_\circ \in \mathbf{R}$ وجود خواهد داشت به قسمی که $\alpha_{q_\circ}(t_\circ) \in V_p$. بنابر پیوستگی $\Psi_{t_\circ}$، $\alpha_q(t_\circ) = \Psi_{t_\circ}(q) \in V_p$ و بنابراین برای هر q به اندازه کافی نزدیک به $q_\circ$، خم α_q از p عبور می‌کند. بنابراین U_p در S باز است.

بالاخره، فرض کنید $\{p_1\,,\, p_2\,,\, \ldots\,,\, p_k\}$ مجموعه نقاطی از S باشد که h_u در آنها دارای یک ماکزیمم موضعی است (یعنی در آنها $N(p_i) = u$) و $\{q_1\,,\, \ldots\,,\, q_l\}$ مجموعهٔ نقاطی از S باشد که h_u در آنها می‌نیمم موضعی باشد. چون نقاط بحرانی h_u تنها و S فشرده است، لذا این مجموعه‌ها متناهی‌اند. بنابر لم $S - \{q_1\,,\, \ldots\,,\, q_l\}$ اتحاد مجموعه‌های باز جدا از هم $U_{p_1}\,,\, \ldots\,,\, U_{p_k}$ می‌باشد. ولی چون S همبند است لذا $S - \{q_1\,,\, \ldots\,,\, q_l\}$ نیز همبند است (ر.ک. شکل ۱۳-۶) به شرط اینکه



شکل ۱۳-۶: حذف تعداد با پایانی از نقاط از یک n- رویه ($n > 1$) همبند، در همبندی آن تأثیری ندارد. در حول هر یک از این نقاط یک گوی کوچک در نظر می‌گیریم و مسیر خم پیوسته از p به q را با استفاده از تغییر مسیر در مرز این گوی‌ها در نظر می‌گیریم. این مطلب که مقاطع گوی‌ها به اندازه کافی کوچک با S همبند می‌باشند از به کاربردن دقیق قضیه تابع وارونی نتیجه می‌گردد (ر.ک. فصل ۱۵).

$n > 1$، همچنین این امر تنها در صورتی ممکن است که فقط یک p_i وجود داشته باشد یعنی تنها وقتی که N یک به یک باشد. هرگاه $n = 1$ باشد استدلال بالا درست نیست ولی در تمرین ۱۱-۱۹ این حالت خاص مورد بررسی قرار گرفته است.

(دو) دیدیم که به‌ازای هر $u \in S^n$ تنها یک نقطه $p_1 \in S$ وجود دارد که در آن تابع ارتفاع h_u دارای یک ماکزیمم موضعی است. با به کار بردن استدلال مشابه در مورد $-h_u$، نشان می‌دهیم تنها یک نقطه $q_1 \in S$ وجود دارد که در آن h_u دارای می‌نیمم موضعی است. علاوه بر این، این دو نقطه تنها نقاط بحرانی h_u هستند. بنابراین به‌ازای هر $p \in S$ تابع ارتفاع h_u که در آن $u = N(p)$ در نقطهٔ بحرانی p باید دارای یا ماکزیمم سرتاسری اکید یا می‌نیمم سرتاسری اکید داشته باشد. این امر بیانگر اینست که S اکیداً محدب است. □

تمرین

۱۳-۱. نشان دهید که هرگاه n زوج و خمیدگی گاوس -کرونکر یک n- رویهٔ $S \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ منفی باشد، آنگاه S در p محدب نیست.

۱۳-۲. فرض کنید S یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد و $h:S \to \mathbf{R}$ هموار و $p \in S$ یک نقطه بحرانی h باشد، نشان دهید تبدیل خطی از S_p به خودش که $\mathbf{v}$ را به $\nabla_{\mathbf{v}}(\text{grad } h)$ می‌برد خودالحاق است.

۱۳-۳. فرض کنید V یک فضای برداری با ضرب داخلی و $L:V \to V$ (یک) تبدیل خطی خودالحاق و ($\mathscr{Q}$) صورت درجه دوم وابسته به L باشد.

(الف) نشان دهید ($\mathscr{Q}$) معین مثبت است اگر و فقط اگر تمام مقادیر ویژهٔ L مثبت باشند.

(ب) نشان دهید هرگاه بعد V برابر با ۲ باشد، آنگاه $\mathscr{Q}$ معین مثبت است اگر و فقط اگر (یک) $\mathscr{Q}(v) > 0$ برای یک $v \in V$ و (دو) $\det L > 0$.

(پ) $\mathscr{Q}$ ***ناتبهگون*** است هرگاه، L غیرمنفرد باشد. نشان دهید که $\mathscr{Q}$ ناتبهگون است اگر و فقط اگر تمام مقادیر ویژه L غیرصفر باشند. (**تذکر**. توجه کنید که یک نقطهٔ بحرانی p از یک تابع هموار $h:S \to \mathbf{R}$ ناتبهگون است اگر و فقط اگر هسیان $\mathscr{H}_p$ از h در p صورت درجهٔ دوم ناتبهگون باشد.)

۱۳-۴. فرض کنید S یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ و $h:S \to \mathbf{R}$ هموار باشد. نشان دهید که خمهای در

S که در طول آنها h سریعتر افزایش می‌یابند خطوط گرادیان h هستند. برای این منظور نشان دهید که اگر $\alpha : [a,b] \to S$ یک خم انتگرال $\operatorname{grad} h$ ، $\beta : [a,b] \to S$ هر خم دیگری با همان تندی

($\|\dot{\alpha}(t)\| = \|\dot{\beta}(t)\|$ به‌ازای هر $t \in [a,b]$) باشد با شرط آنکه $\beta(a) = \alpha(a)$، آنگاه $h(\alpha((b)) \geq h(\beta(b))$. علاوه بر این نشان دهید که $h(\alpha(a)) = h(\beta(b))$ اگر و فقط اگر $\beta = \alpha$.

۱۳-۵. فرض کنید S یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ ، $h:S \to \mathbf{R}$ هموار باشد. نشان دهید که خطوط گرادیان h همه جا عمود بر مجموعه‌های تراز h هستند. یعنی نشان دهید هرگاه α یک خط گرادیان h و β هر خم پارامتری شده در S باشد به قسمی که $h \circ \beta$ ثابت است. آنگاه $\dot{\beta}(t_1) \cdot \dot{\alpha}(t_0) = 0$ وقتی که $\beta(t_1) = \alpha(t_0)$.

۱۴ـ رویه‌های پارامتری

دیده‌ایم که هر خم مسطح سودار همبند C دارای یک پارامترسازی سرتاسری است و با استفاده از آن می‌توان (یک) دستور مفیدی برای خمیدگی یافت ($k \circ \alpha = \ddot{\alpha} \cdot N \circ \alpha / \|\alpha\|^{2}$) و (دو) انتگرال‌های مختلفی را روی C تعریف کرد. اکنون می‌خواهیم برنامه مشابهی را در مورد n- رویه‌ها ($n > 1$) اجرا کنیم. نتیجه خواهد شد که n- رویه‌ها (حتی در حالتی که همبندند) در حالت کلی تنها پارامترسازی‌های موضعی را می‌پذیرند، که برای احتیاجات ما کفایت می‌کند.

اولین خاصیتی که یک پارامترسازی باید داشته باشد عادی بودن است. برای تعریف عادی بودن دراین حالت احتیاج به دیفرانسیل یک نگاشت داریم. فرض کنید U مجموعهٔ بازی در $\mathbf{R}^n$ و $\varphi: U \to \mathbf{R}^m$ یک نگاشت هموار باشد. ***دیفرانسیل*** φ نگاشت هموار $d\varphi : U \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$ تعریف شده به صورت زیر است: یک نقطهٔ $\mathbf{v} \in U \times \mathbf{R}^n$ بردار $\mathbf{v} = (p , v)$ در یک نقطهٔ $p \in U$ است. برای $\mathbf{v}$ مفروض، فرض کنید $\alpha : I \to U$ یک خم پارامتری در U با شرط $\mathbf{v} = \dot{\alpha}(t_\circ)$ باشد. در این صورت $d\varphi(\mathbf{v})$ برداری است در $\varphi(p)$ ($d\varphi(\mathbf{v}) \in \mathbf{R}^m_{\varphi(p)} \subset \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$) تعریف شده به صورت

$$d\varphi(\mathbf{v}) = \dot{\overline{\varphi \circ \alpha}}(t_\circ)$$

می‌باشد (ر.ک. شکل ۱۴-۱). توجه کنید که مقدا $d\varphi(\mathbf{v})$ به انتخاب خم پارامتری α بستگی ندارد، زیرا

$$\dot{\overline{\varphi \circ \alpha}}(t_\circ) = \left(\varphi \circ \alpha (t_\circ) , (\varphi_1 \circ \alpha)' (t_\circ) , \dots , (\varphi_m \circ \alpha)' (t_\circ)\right)$$

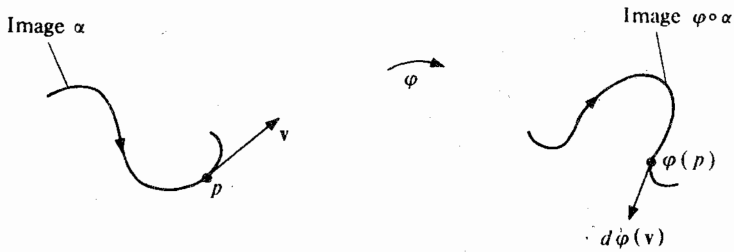
$$= \left(\varphi(p) , \nabla \varphi_1 (\alpha(t_\circ)) \cdot \dot{\alpha}(t_\circ) , \dots , \nabla \varphi_m (\alpha(t_\circ) \cdot \dot{\alpha}(t_\circ))\right)$$

$$= \left(\varphi(p) , \nabla \varphi_1(p) \cdot \mathbf{v} , \dots , \nabla \varphi_m(p) \cdot \mathbf{v}\right) ,$$

که در آن φ_i توابع مختصی φ هستند $\varphi(q) = (\varphi_1(q) \; \dots \; , \varphi_m(q))$ برای هر $q \in U$) بنابراین

$$d\varphi(\mathbf{v}) = (\varphi(p) \, , \nabla_{\mathbf{v}} \varphi_1 \, , \dots , \nabla_{\mathbf{v}} \varphi_m) \, .$$

این دستور برای $d\varphi(\mathbf{v})$ نه تنها عدم وابستگی به α را نشان می‌دهد بلکه یک روش مستقیم برای محاسبه $d\varphi$ را نیز بدست می‌دهد. همواری $d\varphi$ نیز اینک آشکار است.



شکل ۱۴-۱ : دیفرانسیل یک نگاشت

از دستور بالا بلافاصله نتیجه می‌شود که $d\varphi_p$ تحدید $d\varphi$ به $\mathbf{R}^n_p$ یک نگاشت خطی $d\varphi_p : \mathbf{R}^n_p \to \mathbf{R}^m_{\varphi(p)}$ می‌باشد. ماتریس آن نسبت به پایه‌های متعارف $\mathbf{R}^n_p$, $\mathbf{R}^m_{\varphi(p)}$ دقیقاً $((\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j})(p))$ ماتریس ژاکوبی φ در p می‌باشد. در واقع هرگاه $\mathbf{e}_j = (p \, , 0 \, , \dots , 1 \, , \dots , 0)$ و $\mathbf{e}_i' = (\varphi(p) \, , 0 \, , \dots , 1 \, , \dots , 0)$ که بترتیب ۱ هادر $(j + 1)$ امین و $(i + 1)$ امین نقاط قرار دارند، در این صورت ماتریس (a_{ij}) برای $d\varphi_p$ به صورت

$$d\varphi_p(e_j) = \sum a_{ij} \, \mathbf{e}_i' \; (j \in \{1 \, , \dots , n\})$$

تعریف شده است و

$$a_{ij} = d\varphi_p(\mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}'_i = (\varphi(p) \, , \nabla_{e_j} \varphi_1 \, , \dots , \nabla_{e_j} \varphi_m) \cdot \mathbf{e}_i'$$

$$= (\varphi_i p) \, , \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(p) \, , \dots , \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}(p)) \; \mathbf{e}_i' = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p).$$

مجموعهٔ $\cup_{p \in U} \mathbf{R}^n_p = U \times \mathbf{R}^n$ را **کلاف مماس** مجموعهٔ باز U در $\mathbf{R}^n$ گویند و آن را به $T(U)$ نمایش می‌دهند. در نتیجه دیفرانسیل نگاشت هموار $\varphi : U \to \mathbf{R}^m$ مجموعهٔ $T(U)$ را در $T(\mathbf{R}^m)$ می‌نگارد. به‌طریق‌مشابه، اگر S یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد مجموعهٔ $T(S) = \cup_{p \in U} S_p \subset S \times \mathbf{R}^{n+1}$ **کلاف مماسش** می‌باشد. برای یک نگاشت هموار مفروض $\varphi : S \to \mathbf{R}^m$، ***دیفرانسیل اش***

نگاشت $d\varphi : T(S) \to T(\mathbf{R}^m)$ تعریف شده به صورت:

$$d\varphi(\mathbf{v}) = (\varphi\circ\alpha)^{\cdot}(t_0)$$

می‌باشد که در آن $\alpha : I \to S$ یک خم پارامتری در S با شرط $\mathbf{v} = \dot{\alpha}(t_0)$ است. توجه دارید که $d\varphi$ در واقع تحدید دیفرانسیل $d\tilde{\varphi}$ به T(S) است که در آن $\tilde{\varphi}$ یک گسترش φ به یک مجموعهٔ باز در $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد و بنابراین در حالت خاص $d\varphi(\mathbf{v})$ مستقل از انتخاب α است. از این نتیجه می‌شود که $d\varphi_p$، تحدید $d\varphi$ به S_p (برای $p \in S$) یک نگاشت خطی $d\varphi_p : S_p \to \mathbf{R}^m_{\varphi(p)}$ است.

تذکر. برای $\varphi : I \to \mathbf{R}$، I یک بازهٔ باز $\mathbf{R}$، نماد $d\varphi$ دارای دو معنی است. از یک طرف در فصل ۱۱ $d\varphi$ را تعریف کردیم که اکنون آن را $(d\varphi)^{(1)}$ می‌نامیم که یک ۱ - فرم روی I است. بنابراین $(d\varphi)^{(1)}$ یک نگاشت هموار از $I \times \mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ است. اینک $d\varphi$ را تعریف می‌کنیم و آن را $(d\varphi)^{(2)}$ می‌نامیم و آن نگاشتی است از $I \times \mathbf{R}$ به $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. این دو نگاشت توسط دستور

$$(d\varphi)^{(2)}(t\,,\,u) = \big(\varphi(t)\,,\,(d\varphi)^{(1)}(t\,,\,u)\big)$$

بهم مربوط می‌شوند و بنابراین هر کدام از دیگری مستقیماً بدست می‌آید. ما به استفاده کردن از هر دو نماد ادامه می‌دهیم؛ و اینکه منظور ما کدام یک از این دو نماد است بوضوح از متن آشکار است.

یک n- ***رویهٔ پارامتری*** در $\mathbf{R}^{n+k}$ $(k \geq 0)$ یک نگاشت هموار $\varphi : U \to \mathbf{R}^{n+k}$ می‌باشد که در آن U یک مجموعهٔ باز همبند در $\mathbf{R}^n$ است و φ ***عادی*** است؛ یعنی به قسمی است که $d\varphi_p$ برای هر $p \in U$ غیرمنفرد (دارای رتبهٔ n) است. شرط عادی بودن تضمین می‌کند که تصویر $d\varphi_p$ به‌ازای هر $p \in U$ یک زیر فضای n بعدی $\mathbf{R}_{\varphi(p)}^{n+k}$ می‌باشد. تصویر $d\varphi_p$ ***فضای مماس*** بر φ نظیر به نقطهٔ $p \in U$ است. توجه دارید که φ لازم نیست که یک به یک باشد و اینکه $\varphi(p) = \varphi(q)$ برای $p \neq q$ الزاماً ایجاب نمی‌کند که (تصویر $d\varphi_p$) = (تصویر $d\varphi_q$).

مثال ۱. یک ۱- رویهٔ پارامتری در واقع یک خم پارامتری عادی است.

مثال ۲. یک n- رویهٔ پارامتری در $\mathbf{R}^n$ در واقع یک نگاشت هموار عادی از یک مجموعهٔ باز U در $\mathbf{R}^n$ روی دیگری است.

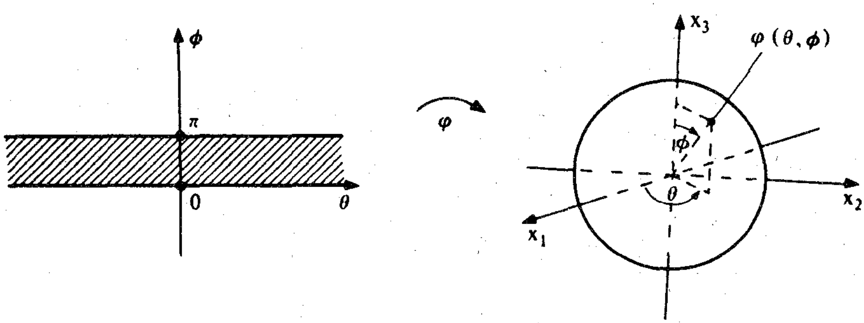
مثال ۳. فرض کنید $f:U \to \mathbf{R}$ (U باز $\mathbf{R}^n$) یک تابع هموار باشد. تابع $\varphi:U \to \mathbf{R}^{n+1}$ را به صورت $\varphi(p) = (p\,,\,f(p))$ تعریف کنید. آنگاه φ یک n- رویهٔ پارامتری در $\mathbf{R}^{n+1}$ است که

تصویرش نمودار f می‌باشد.

مثال ۴. فرض کنید $\varphi:U \to \mathbf{R}^3$ توسط

$$\varphi(\theta , \phi) = (r \cos \theta \sin \phi , r \sin \theta \sin \phi , r \cos \phi)$$

داده شده باشد که در آن $U = \{(\theta , \phi) \in \mathbf{R}^2 : 0 < \varphi < \pi\}$ و $r > 0$. در اینصورت φ یک ۲-رویهٔ پارامتری است که تصویرش ۲-کرهٔ به شعاع r در $\mathbf{R}^3$ می‌باشد که قطب‌های شمال و جنوب آن حذف شده‌اند. (ر.ک. شکل ۱۴-۲) توجه دارید که φ یک به یک نیست، در واقع φ نوار U در $\mathbf{R}^2$ را بی‌نهایت‌بار دور کره می‌پیچد. قطب‌های شمال و جنوب از تصویر φ حذف شده‌اند زیراکه $d\varphi_p$ در طول یال‌های $\phi = 0$ و $\phi = \pi$ از نوار U منفرد است. وقتی که $-\pi < \theta \leq \pi$ اعداد θ و ϕ را ***مختصات کروی*** نقطهٔ $\varphi(\theta , \phi)$ کره گویند.



شکل ۱۴-۲ : مختصات کروی

مثال ۵. فرض‌کنید $L:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n+k}$ $(k \geq 1)$ یک‌نگاشت خطی غیرمنفرد باشد و $w \in \mathbf{R}^{n+k}$. نگاشت $\varphi:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n+k}$ تعریف شده به صورت

$$\varphi(p) = L(p) + w$$

یک n- ***صفحهٔ پارامتری*** گذرنده از w در $\mathbf{R}^{n+k}$ می‌باشد. توجه دارید که

$$d\varphi_p(p,v) = (\varphi(p) , L(v))$$

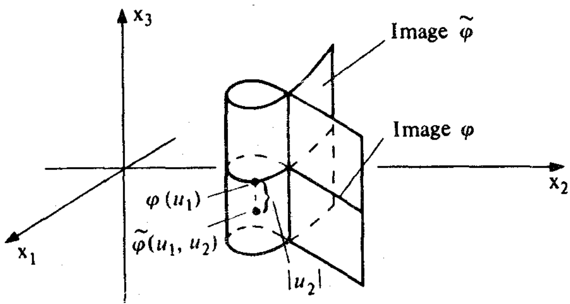
برای هر $(p,v) \in \mathbf{R}^n_p$، $p \in \mathbf{R}^n$، زیراکه هرگاه $\alpha(t) = p + tv$، آنگاه $\dot\alpha(0) = (p,v)$ و

$$(\varphi\circ\dot\alpha)(\circ) = \left(\varphi\circ\alpha(\circ)\,,\ \frac{d}{dt}\Big|_{\circ}(L(p+tv)+w)\right)$$
$$= \left(\varphi(p)\,,\ \frac{d}{dt}\Big|_{\circ}(L(p)+tL(v)+w)\right)$$
$$= \left(\varphi(p)\,,\ L(v)\right).$$

مثال ۶. فرض کنید $\varphi:U\to\mathbf{R}^{n+k}$ $(U\subseteq\mathbf{R}^n)$ یک n- رویهٔ پارامتری در $\mathbf{R}^{n+k}$ باشد. ***استوانهٔ*** روی φ، $(n+1)$ - رویهٔ پارامتری $\tilde\varphi:U\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^{n+k+1}$ می‌باشد که به صورت

$$\tilde\varphi(u_1\,,\dots,u_{n+1}) = \left(\varphi(u_1\,,\dots,u_n)\,,u_{n+1}\right)\quad،\quad (u_1\,,\dots,u_n)\in U,\ u_{n+1}\in\mathbf{R}\ ،$$

تعریف می‌شود (ر.ک. شکل ۱۴-۳).



شکل ۱۴-۳ استوانه روی یک خم پارامتری φ

مثال ۷. فرض کنید $\alpha:I\to\mathbf{R}^2$ یک خم پارامتری عادی در $\mathbf{R}^2$ باشد، I در $\mathbf{R}$ باز، که تصویرش در بالای محور x_1 ها باشد، یعنی $y(t)>\circ$ برای هر $t\in I$ که در آن $\alpha(t)=\left(x(t)\,,\,y(t)\right)$. تابع $\varphi:I\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$ را به صورت

$$\varphi(t\,,\theta) = \left(x(t)\,,\,y(t)\cos\theta\,,\,y(t)\sin\theta\right)$$

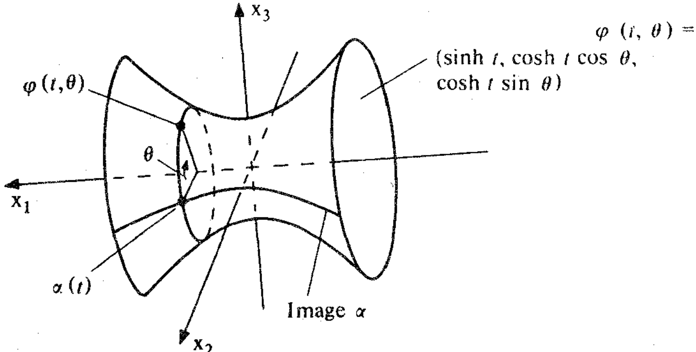
تعریف کنید. φ ***رویهٔ پارامتری دوّار*** حاصل از دوران α در حول محور x_1 هاست (ر.ک. شکل ۱۴-۴). توجه کنید که φ نوار $I\times\mathbf{R}$ در حول تصویر φ بی‌نهایت بار می‌پیچد.

مثال ۸. فرض کنید $a>b>\circ$ و $\varphi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ را به صورت

$$\varphi(\theta\,,\phi) = \left((a+b\cos\phi)\cos\theta\,,\,(a+b\cos\phi)\sin\theta\,,\,b\sin\phi\right)$$

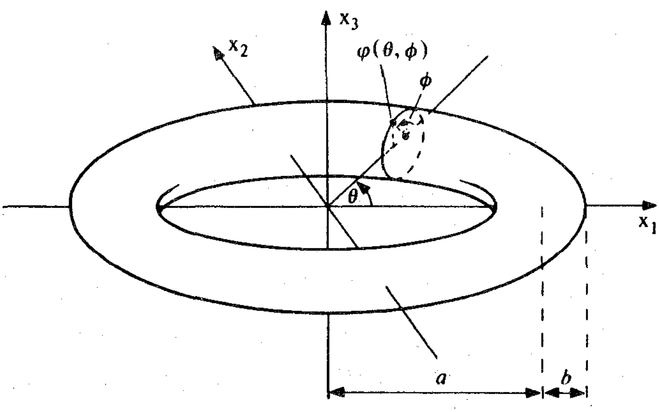
تعریف شود. مقایسه‌ای با مثال ۷ و تعویض محورها ($x_3 \to x_1$ ،$x_1 \to x_2$ ،$x_2 \to x_3$) نشان می‌دهد که φ رویهٔ پارامتری دوار حاصل از دوران دایره پارامتری

$$\alpha(\phi) = (a + b \cos \phi \ , \ b \sin \phi)$$



شکل ۱۴-۴. هذلولوی پارامتری دوار حاصل از دوران خم پارامتری $\alpha(t)$ $(\sinh t, \cosh t)$ درحول محور x_1 ها.

در صفحهٔ (x_1 , x_3) در حول محور x_3 هاست. φ یک ***چنبرهٔ پارامتری*** در $\mathbf{R}^3$ می‌باشد (ر.ک. شکل ۱۴-۵). توجه داشته باشید که چنبرهٔ پارامتری دودوره‌ای است. درواقع $\varphi(\theta,\phi + 2k\pi) = (\theta\ \varphi + 2k\pi,\phi)$ $(\theta,\phi)\varphi$ برای هر $(\theta \ , \phi) \in \mathbf{R}^2$ و $k \in \mathbf{Z}$. بنابراین هر نقطهٔ تصویر φ نظیر به یک نقطهٔ یکتای $(\theta \ , \phi) \in \mathbf{R}^2$ با شرایط $0 \leq \theta < 2\pi$ و $0 \leq \phi < 2\pi$ می‌باشد. تصویر φ را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:



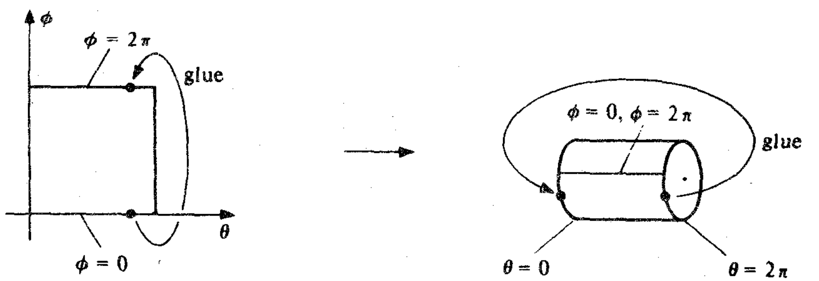
شکل ۱۴-۵ یک چنبره پارامتری در $\mathbf{R}^3$

در آغاز از چسباندن نقطهٔ $(\theta , ۰)$ به نقطهٔ $(\theta , ۲\pi)$ مربع $\{(\theta , \phi) \in \mathbf{R}^۲ : ۰ < \theta , \phi \leq ۲\pi\}$ به‌ازای هر $\theta \in [۰ , ۲\pi]$ یک استوانه به دست می‌آید و سپس با بهم چسبانیدن قاعده‌های استوانه که از چسبانیدن نقطهٔ $(۰ , \phi)$ به نقطهٔ $(۲\pi , \phi)$ به‌ازای هر $\phi \in [۰ , ۲\pi]$ حاصل می‌شود، رویه مورد نظر به دست می‌آید. (ر.ک. شکل ۱۴-۶).

مثال ۹. فرض کنید $\varphi:\mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}^۴$ به صورت $\varphi(\theta , \phi) = (\cos\theta , \sin\theta , \cos\phi , \sin\phi)$ تعریف شده باشد. این مثال مشابه با مثال ۸ است که در آن φ دو دوره‌ایست و تصویر φ را می‌توان به عنوان مربعی که یال‌های روبرو را با هم یکی کرده تجسم کرد. روش دیگری برای تجسم φ اینست که تحقیق کنیم که

تصویر φ = $\{(p , q) \in \mathbf{R}^۲ \times \mathbf{R}^۲ : p=(\cos\theta,\sin\theta)$ برای یک θ، و $q=(\cos\phi,\sin\phi)$ برای یک $\phi\}$

در نتیجه تصویر φ حاصلضرب دکارتی دو دایره، دایره یکه در صفحهٔ $(x_۱ , x_۲)$ و دایره یکه در صفحهٔ $(x_۳ , x_۴)$ در $\mathbf{R}^۴$ است. φ را ***چنبرهٔ پارامتری*** در $\mathbf{R}^۴$ نامند.



شکل ۱۴-۶ چنبره حاصل از چسبانیدن یک مربع

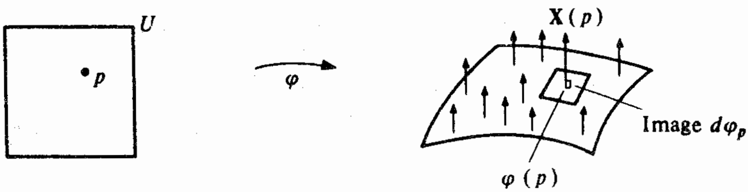
مثال ۱۰. فرض کنید $\varphi:I \times \mathbf{R}^۳$ به صورت

$$\varphi(t , \theta) = \left(\left(۱ + t\cos\frac{\theta}{۲}\right)\cos\theta , \left(۱ + t\cos\frac{\theta}{۲}\right)\sin\theta , t\sin\frac{\theta}{۲}\right)$$

تعریف شده باشد که در آن $I = \{t \in \mathbf{R} : -\frac{۱}{۴} < t < \frac{۱}{۴}\}$. در این صورت تصویر φ نوار موبیوس است (ر.ک. شکل ۵-۳). توجه دارید که خم‌های $t \to \varphi(t , \theta)$ (θ ثابت) قطعه‌هایی از خطوط مستقیمی است روی دایره یکه در $\mathbf{R}^۲$ است که با صفحهٔ $x_۱ox_۲$ زاویه $\frac{\theta}{۲}$ می‌سازد. خم‌های $\theta \to \varphi(t,\theta)$

(t ثابت) دوره‌ای با دورهٔ 2π است اگر $t = 0$ و با دورهٔ 4π است اگر $t \neq 0$.

اکنون فرض کنید $\varphi: U \to \mathbf{R}^{n+k}$ یک نگاشت هموار و U مجموعهٔ باز در $\mathbf{R}^n$ باشد. یک ***میدان‌برداری در طول*** φ یک نگاشت $\mathbf{X}$ است که به هر نقطهٔ $p \in U$ یک بردار $\mathbf{X}(p) \in \mathbf{R}^{n+k}_{\varphi(p)}$ رانظیرمی‌کند. $\mathbf{X}$ ***هموار*** است‌اگربه عنوان یک نگاشت $\mathbf{X}: U \to \mathbf{R}^{2(n+k)}$ هموار باشد، یعنی اگر هر $X_i: U \to \mathbf{R}$ روی U هموارباشدکه درآن $\mathbf{X}(p) = (\varphi(p)\ ,\ X_1(p)\ ,\ \dots,\ X_{n+k}^{(p)})$ برای $p \in U$. میدان‌برداری $\mathbf{X}$ ***مماس*** بر φ است‌اگربه‌صورت $\mathbf{X}(p) = d\varphi_p(\mathbf{Y}(p))$ برای یک میدان برداری $\mathbf{Y}$ روی U؛ $\mathbf{X}$ ***قائم*** بر φ است‌اگر $\mathbf{X}(p) \perp$ (تصویر $d\varphi_p$) برای‌هر $p \in U$ (ر.ک.شکل ۱۴-۷).



شکل ۱۴-۷ یک میدان برداری قائم در طول یک ۲- رویهٔ پارامتری در $\mathbf{R}^3$

برای یک خم پارامتری φ، میدان سرعت $\dot\varphi$ یک میدان برداری مماس در طول φ است، زیرا که $\dot\varphi(t) = d\varphi_t(t,1)$ برای هر t. میدان سرعت به صورت زیر تعمیم می‌یابد. برای $\varphi: U \to \mathbf{R}^{n+k}$ یک نگاشت هموار، U باز در $\mathbf{R}^n$، فرض کنید $\mathbf{E}_i$ $(i \in \{1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n\})$ نشانگر میدان‌های برداری مماس در طول φ تعریف شده به صورت

$$\mathbf{E}_i(p) = d\varphi_p(p\ ,\ 0\ ,\ \dots\ ,\ 1\ ,\ \dots\ ,\ 0)$$

باشد که در آن ۱ در $(i+1)$ امین نقطه (i نقطه بعد از p) قرار دارد. توجه کنید که مؤلفه‌های $\mathbf{E}_i$ دقیقاً درآیه‌های ستون i ام ماتریس ژاکوبی φ در p می‌باشد.

$$\mathbf{E}_i(p) = \left(\varphi(p)\ ,\ \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}(p)\right) = \left(\varphi(p)\ ,\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_i}(p)\ ,\ \dots\ ,\ \frac{\partial\varphi_{n+k}}{\partial u_i}(p)\right)$$

که در آن $\varphi(p) = (\varphi_1(p)\ ,\ \dots\ ,\ \varphi_{n+k}(p))$ برای $p \in U$. $\mathbf{E}_i$ را ***میدان‌های برداری مختصی*** در طول φ گویند. توجه دارید که $\mathbf{E}_i(p)$ در واقع سرعت در نقطهٔ p ***خم مختصی*** $u_i \to \varphi(u_1\ ,\ \dots,\ u_n)$

(همه u_j ها ثابت‌اند بجز u_i) می‌باشد که از نقطهٔ $\varphi(p)$ می‌گذرد. (ر.ک. شکل ۱۴-۸). وقتی که φ یک n- رویهٔ پارامتری باشد (یعنی وقتی که φ عادی باشد)، این میدان‌های برداری در هر نقطهٔ $p \in U$ استقلال خطی دارند، زیرا که $d\varphi_p$ غیرمنفرد است، بنابراین تشکیل یک پایه برای (تصویر $d\varphi_p$) برای هر $p \in U$ می‌دهند.

برای $\varphi: U \to \mathbf{R}^{n+k}$ یک نگاشت هموار، U باز در $\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{X}$ یک میدان برداری هموار در طول φ، **مشتق** $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n+k}_{\varphi(p)}$ نسبت به $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n_p$ ، $p \in U$ به صورت

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{X} = \left(\varphi(p) \, , \, \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} (X \circ \alpha)\right)$$

$$= \left(\varphi(p) \, , \, \nabla_{\mathbf{v}} X_1 \, , \, \dots \, , \, \nabla_{\mathbf{v}} X_{n+k}\right)$$

تعریف می‌شود که در آن X قسمت برداری $\mathbf{X}$، $(\mathbf{X}(q) = (\varphi(q) \, , \, X(q)) \, , \, q \in U)$، α هر خم پارامتری در U با شرط $\dot\alpha(t_0) = \mathbf{v}$ و $X_i: U \to \mathbf{R}$ مؤلفه‌های $\mathbf{X}$ هستند.

(برای $\mathbf{X}(q) = (\varphi(q) \, , \, X_1(q) \, , \, \dots \, , \, X_{n+1}(q) \quad q \in U$). توجه داشته باشید که وقتی $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i = (p \, , \, 0 \, , \, \dots \, , \, 0)$، داریم

$$\nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{X} = \left(\varphi(p) \, , \frac{\partial X}{\partial u_i} (p)\right) = \left(\varphi(p) \, , \, \frac{\partial X_1}{\partial u_i} (p) \, , \, \dots \, , \, \frac{\partial X_{n+k}}{\partial u_i} (p)\right).$$

فرض کنید که اکنون $\varphi: U \to \mathbf{R}^{n+1}$ یک n- رویهٔ پارامتری در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد، آنگاه فرض کنید که به‌ازای هر $p \in U$، $\mathbf{N}(p)$ نمایشگر بردار یکهٔ یکتا در $\varphi(p)$ باشد به‌قسمی‌که (تصویر $\mathbf{N}(p) \perp (d\varphi_p$ و

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1(p) \\ \vdots \\ \mathbf{E}_n(p) \\ \mathbf{N}(p) \end{bmatrix} > 0$$

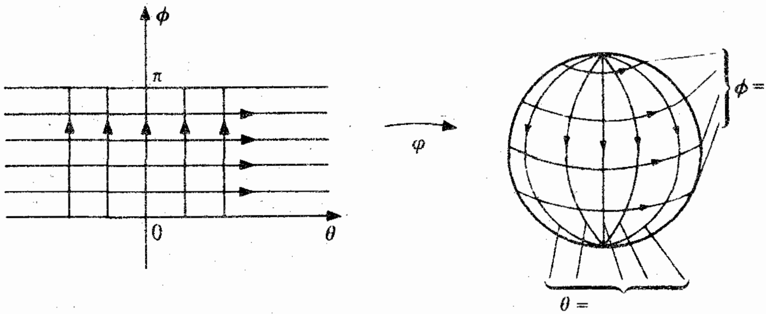
که در آن تابع det مانند قضیهٔ ۵ فصل ۱۲ تعریف شده است. در این صورت $\mathbf{N}$ یک میدان برداری قائم یکهٔ هموار در طول φ است (تمرینهای ۱۴-۸ و ۱۴-۹). $\mathbf{N}$ را ***میدان برداری سو*** در طول φ گویند. نگاشت خطی

$$L_p:(d\varphi_p \text{ تصویر}) \to (d\varphi_p \text{ تصویر})$$

تعریف شده به صورت

$$L_p\big(d\varphi(\mathbf{v})\big) = -\nabla_{\mathbf{v}}\, \mathbf{N}$$

نگاشت وینگارتن n- رویهٔ پارامتری $\varphi:U \to \mathbf{R}^{n+1}$ در $p \in U$ است. (توجه داشته باشید که L_p خوش تعریف است، چرا که $d\varphi_p$ یک به یک می‌باشد) L_p خودالحاق است (تمرین ۱۴-۱۱). مقادیر ویژه‌اش و بردارهای ویژهٔ یکه‌اش را به ترتیب **خمیدگیهای اصلی** و **جهت‌های خمیدگی اصلی** φ در p گویند. دترمینانش **خمیدگی گاوس - کرونوکر** φ در p (**خمیدگی گاوس** در حالت $n=2$) و $\frac{1}{n}$ اثر آن **خمیدگی متوسط** φ در p است.



شکل ۱۴-۸ خمهای مختلفی روی ۲- کرهٔ پارامتری (قطب شمال و جنوب حذف شده‌اند)
$\varphi(\theta, \phi) = (\cos\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$.

مثال. فرض کنید φ چنبرهٔ پارامتری در $\mathbf{R}^3$ باشد

$$\varphi(\theta, \varphi) = \big((a + b\cos\phi)\cos\theta, (a + b\cos\phi)\sin\theta, b\sin\phi\big)$$

(ر.ک. شکل ۱۴-۵). میدانهای برداری مختصی در طول φ دارای قسمت‌های برداری

$$E_1(\theta, \phi) = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = (a + b\cos\phi)(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

و

$$E_2(\theta, \phi) = \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} = b(-\sin\phi\cos\theta, -\sin\phi\sin\theta, \cos\phi).$$

$\mathbf{N}$، میدان برداری سو در طول φ دارای قسمت برداری

$$N(\theta, \phi) = \frac{E_1(\theta, \phi) \times E_2(\theta, \phi)}{\| E_1(\theta, \phi) \times E_2(\theta, \phi) \|}$$

$$= (\cos\theta\cos\phi\ ,\ \sin\theta\cos\phi\ ,\ \sin\phi)$$

می‌باشد. بنابراین، برای $p = (\theta\ ,\ \phi) \in \mathbf{R}^2$

$$L_p(\mathbf{E}_1(p)) = L_p(d\varphi_p(p\ ,\ 1\ ,\ 0)) = -\nabla_{(p,1,0)}\ \mathbf{N} = -\left(\varphi(p)\ ,\ \frac{\partial N}{\partial\theta}\right)$$

$$= -(\phi(p)\ ,\ -\sin\theta\cos\phi\ ,\ \cos\theta\cos\phi\ ,\ 0)$$

$$= \frac{-\cos\phi}{a + b\cos\phi}\ \mathbf{E}_1(p)$$

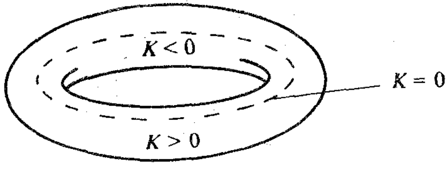
و

$$L_p(\mathbf{E}_2(p)) = -\left(\varphi(p)\ ,\ \frac{\partial N}{\partial\phi}\right)$$

$$= -(\varphi(p)\ ,\ -\cos\theta\cos\phi\ ,\ -\sin\theta\sin\phi\ ,\ \cos\phi)$$

$$= -\frac{1}{b}\ \mathbf{E}_2(p)\ .$$

بنابراین $\mathbf{E}_1(p)$ و $\mathbf{E}_2(p)$ بردارهای ویژه L_p می‌باشند. خمیدگی‌های اصلی عبارتند از $\frac{-1}{b}$ و $\frac{\cos\phi}{a + b\cos\phi}$ خمیدگی گاوس عبارتست از $K(\theta\ ,\ \phi) = \frac{\cos\phi}{b\ (a + b\cos\phi)}$. توجه دارید که $K > 0$ در "خارج" چنبره $(-\pi/2 < \phi < \pi/2)$، $K < 0$ در "داخل" آن $(\pi/2 < \phi < 3\pi/2)$ و $K = 0$ در "بالا" $(\phi = \pi/2)$ و در "پایین" $(\theta = -\pi/2)$ (ر.ک. شکل ۱۴-۹).



شکل ۱۴-۹. خمیدگی گاوس چنبره

تمرین

۱۴-۱. فرض کنید S_1 یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ و S_2 یک m- رویه در $\mathbf{R}^{m+1}$ باشد. فرض کنید که $\varphi: S_1 \to \mathbf{R}^{m+1}$ یک نگاشت هموار باشد به قسمی که $\varphi(S_1) \subset S_2$. نشان دهید که $d\varphi: T(S_1) \to T(S_2)$.

۱۴-۲. فرض کنید $\varphi: U_1 \to U_2$ و $\psi: U_2 \to \mathbf{R}^k$ هموار باشند، که درآن $U_1 \subseteq \mathbf{R}^n$ و $U_2 \subseteq \mathbf{R}^m$. ***قاعدهٔ زنجیری*** $d(\psi \circ \varphi) = d\psi \circ d\varphi$ را تحقیق کنید.

۱۴-۳. تحقیق کنید که هر یک از مثال‌های ۳ الی ۱۰ در شرط لازم غیرمنفرد بودن $d\varphi_p$ به‌ازای هر (دامنه φ) $p \in$ صادق‌اند.

۱۴-۴. دستور کلی بیان رویهٔ پارامتری حاصل از دوران یک خم پارامتری در صفحه $(x_1 \circ x_2)$ در حول محور x_1 ها را به دست آورید. تحقیق کنید که رویه‌های پارامتری مثال‌های ۴ و ۸ بالا از اینگونه‌اند.

۱۴-۵. نگاشت $\varphi: U \to \mathbf{R}^4$ که درآن $U = \{(\phi, \theta, \psi) : \phi \in \mathbf{R}, 0 < \theta < \pi, 0 < \psi < \pi\}$ به صورت $\varphi(\phi, \theta, \psi) = (\sin\phi \sin\theta \sin\psi, \cos\phi \sin\theta \sin\psi, \cos\theta \sin\psi, \cos\psi)$ تعریف کنید.

(الف) تحقیق کنید که φ یک ۳- رویه پارامتری در $\mathbf{R}^4$ است.

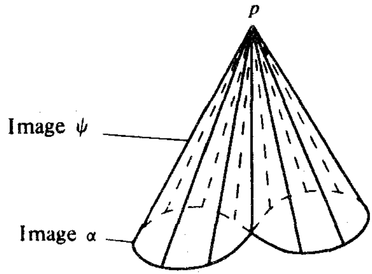
(ب) نشان دهید که تصویر φ در یک ۳-کره در $\mathbf{R}^4$ قرار دارد.

(ϕ, θ, ψ مختصات کروی در S^3 هستند).

۱۴-۶. فرض‌کنید $\varphi: U \to \mathbf{R}^{n+1}$ یک n- رویه‌پارامتری‌در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشدو $p = (a_1, \ldots, a_{n+2}) \in \mathbf{R}^{n+2}$ که در آن $a_{n+2} \neq 0$. تعریف کنید $\psi: U \times I \to \mathbf{R}^{n+2}$ که در آن $I = \{t \in \mathbf{R} : 0 < t < 1\}$، به‌صورت

$$\psi(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) = (1 - t_{n+1})\, p + t_{n+1}\, (\varphi(t_1, \ldots, t_n), 0)$$

(ر.ک. شکل ۱۴-۱۰). نشان دهید که ψ یک $(n+1)$ - رویه پارامتری در $\mathbf{R}^{n+1}$ است. (ψ **مخروط روی φ به رأس p** است).



شکل ۱۴-۱۰ یک مخروط روی یک خم پارامتری α

۱۴-۷. فرض کنید $\mathbf{X}$ یک میدان برداری هموار در $\mathbf{R}^{n+k}$، $\varphi: U \to \mathbf{R}^{n+k}$ یک نگاشت هموار و U باز در $\mathbf{R}^n$ باشد. نشان دهید که

$$\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{X}\circ\varphi) = \nabla_{d\varphi(\mathbf{v})}\,\mathbf{X}$$

برای هر $\mathbf{v} \in T(U)$

۱۴-۸. فرض کنید φ یک ۲- رویهٔ پارامتری در $\mathbf{R}^3$ باشد.

(الف) نشان دهید که $\mathbf{N}$، میدان برداری سو در طول φ به صورت

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2}{\|\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2\|}$$

داده شده است، که در آن $\mathbf{E}_1$ و $\mathbf{E}_2$ میدان‌های برداری مختصی در طول φ است.

(ب) نتیجه بگیرید که $\mathbf{N}$ هموار است.

۱۴-۹. فرض کنید $\varphi: U \to \mathbf{R}^{n+1}$ یک n- رویه پارامتری در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد. با فرض آنکه $\mathbf{X}$ میدان برداری در طول φ باشد که i امین مؤلفه‌اش برابر با $(-1)^{n+1+i}$ دترمینان ماتریسی می‌باشد که پس از حذف i امین ستون ماتریس

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_n \end{pmatrix},$$

بدست می‌آید، که در آن $\mathbf{E}_i$ میدان‌های برداری مختصی φ هستند. (توجه دارید که این ماتریس ترانهادهٔ ماتریس ژاکوبی φ است.)

(الف) نشان دهید که $\mathbf{X}(p) \neq 0$ برای هر $p \in U$.

(ب) نشان دهید که $\mathbf{X}$ یک میدان برداری قائم در طول φ است.

(پ) نشان دهید که $\mathbf{N} = \dfrac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|}$ میدان برداری سو در طول φ است.

(ت) نتیجه بگیرید که $\mathbf{N}$ هموار است.

۱۴-۱۰. فرض کنید $g:U \to \mathbf{R}$ یک تابع هموار روی یک مجموعهٔ باز U در $\mathbf{R}^n$ و $\varphi:U \to \mathbf{R}^{n+1}$ به صورت $\varphi(u_1, \ldots, u_n) = (u_1, \ldots, u_n, g(u_1, \ldots, u_n))$ تعریف شده باشد. نشان دهید که میدان برداری سو در طول φ به صورت

$$\mathbf{N}(p) = \left(\phi(p), -\frac{\partial g}{\partial u_1}(p), \ldots, -\frac{\partial g}{\partial u_n}(p), 1\right) \Big/ \left[1 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial u_i}(p)^2\right)\right]^{1/2}$$

داده شده است.

۱۴-۱۱. نشان دهید که نگاشت وینگارتن در هر نقطهٔ یک n- رویه پارامتری در $\mathbf{R}^{n+1}$ خودالحاق است.

۱۴-۱۲. فرض کنید $\varphi:U \to \mathbf{R}^{n+k}$ یک n- رویهٔ پارامتری در $\mathbf{R}^{n+k}$ باشد. نشان دهید که $d\varphi : U \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n+k} \times \mathbf{R}^{n+k}$ یک $2n$- رویه در $\mathbf{R}^{2n+2k}$ می‌باشد.

۱۴-۱۳. فرض کنید $\varphi:U \to \mathbf{R}^{n+k}$ یک n- رویه پارامتری در $\mathbf{R}^{n+k}$ باشد. فرض کنید $\mathbf{E}_i$ نمایشگر میدان‌های برداری مختصی در طول φ باشد و $\mathbf{e}_i = (p, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ برای $p \in U$. نشان دهید که برای هر i و j داریم

$$\nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{E}_j = \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{E}_i$$

۱۴-۱۴. فرض کنید φ یک n- رویه پارامتری در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد. نشان دهید که خمیدگی گاوس - کرونوکر φ توسط دستور

$$K(p) = \frac{\det\left[L_p\left(\mathbf{E}_i(p) \cdot \mathbf{E}_j(p)\right]\right.}{\det\left[\mathbf{E}_i(p) \cdot \mathbf{E}_j(p)\right]} = \frac{\det\left[(\nabla_{e_i} \mathbf{E}_j) \cdot \mathbf{N}(p)\right]}{\det\left[\mathbf{E}_i(p) \cdot \mathbf{E}_j(p)\right]}$$

داده شده است که درآن $\mathbf{E}_i$ میدان‌های برداری مختصی در طول φ است و $\mathbf{e}_i = (p, ٠, \ldots, ١, ٠, \ldots, ٠)$.

در تمرینهای ۱۴-۱۵ تا ۱۴-۱۸ خمیدگی گاوس ۲- رویه‌های پارامتری φ مفروض را بیابید.

۱۴-۱۵. $\varphi(\theta, \phi) = (a \cos\theta \sin\phi, a \sin\theta, a \cos\phi)$ (کره).

۱۴-۱۶. $\varphi(t, \theta) = (\cos\theta, \sin\theta, t)$ (استوانه دوار قائم).

۱۴-۱۷. $\varphi(t, \theta) = (t \cos\theta, t \sin\theta, \theta)$ (مار پیچوار).

۱۴-۱۸. $\varphi(t, \theta) = (\sinh t, \cosh t \cos\theta, \cosh t \sin\theta)$ (هذلولوی).

۱۴-۱۹. خمیدگی گاوس کرونوکر ۳- رویهٔ پارامتری φ را که در آن $\varphi(x, y, z) = (x, y, z, x^۲ + y^۲ + z^۲)$ (۳- سهموی در $\mathbf{R}^۴$) بیابید.

۱۴-۲۰. فرض کنید $\varphi: I \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^۳$ رویه پارامتری دوار حاصل از دوران خم پارامتری $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ (برای هر $t \in I$، $y(t) > ٠$) در حول محور $x_۱$ ها باشد. در نتیجه

$$\varphi(t, \theta) = \left(x(t), y(t) \cos\theta, y(t) \sin\theta\right)$$

برای $t \in I$ و $\theta \in \mathbf{R}$.

(الف) نشان دهید که خمیدگی گاوس φ توسط دستور

$$K = \frac{x' \left(x''y' - x'y''\right)}{y \left(x'^۲ + y'^۲\right)^۲}$$

به دست می‌آید.

(ب) نشان دهید که اگر α دارای تندی یکه باشد، این دستور به صورت $K = \frac{-y''}{y}$ درمی‌آید.

۲۱-۱۴. فرض کنید $\alpha(t) = \big(x(t)\ ,\ y(t)\big)$ که در آن

$$x(t) = \int_{\circ}^{t} \sqrt{1 - e^{-2t}}\, dt \qquad (t > \circ)$$

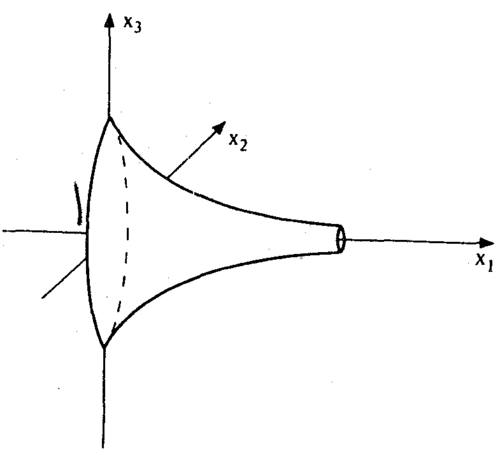
$$y(t) = e^{-t} \qquad (t > \circ)$$

و φ رویه پارامتری دوار حاصل از دوران α در حول محور x_1 ها باشد.

(الف) نشان دهید که α دارای تندی یکه است.

(ب) نشان دهید که α دارای این خاصیت است که به‌ازاء هر $t > \circ$ قطعه بین $\alpha(t)$ و محور x_1 ها از خط مماس بر α در نقطهٔ $\alpha(t)$ دارای طول ثابت ۱ است.

(پ) نشان دهید که φ دارای خمیدگی گاوس ثابت است. $K = -1$ (φ موسوم به یک **شبه‌کره** پارامتری در $\mathbf{R}^3$ است. ر.ک. شکل ۱۴-۱۱).



شکل ۱۴-۱۱ شبه کره

۱۵ـ هم‌ارزی موضعی رویه‌ها و رویه‌های پارامتری

در این فصل دو قضیه را ثابت می‌کنیم که نشان می‌دهند، n- رویه‌ها و n- رویه‌های پارامتری موضعاً یکی هستند، برای انجام آن ما نیاز به قضیه زیر از حساب دیفرانسیل و انتگرال چندمتغیره داریم.

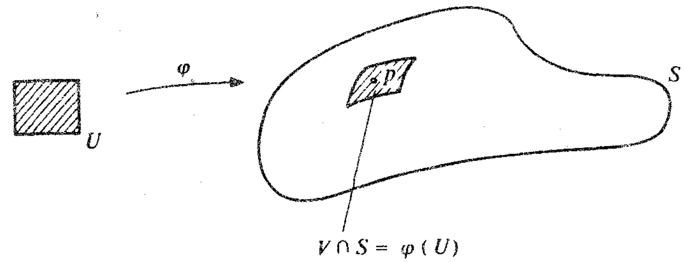
● **قضیهٔ تابع وارون.** ***فرض کنید U یک مجموعهٔ باز در $\mathbf{R}^{n+1}$، $\psi:\mathbf{U} \to \mathbf{R}^{n+1}$ یک تابع هموار باشد و $\mathbf{p} \in \mathbf{U}$ به قسمی است که $d\psi_p$ غیرمنفرد است. در این صورت یک مجموعهٔ باز $\mathbf{V} \subset \mathbf{U}$ در حول p وجود دارد به قسمی که $\psi/_V$ تحدید ψ به V، V را به طور یک به یک روی مجموعهٔ باز W در $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌نگارد و علاوه بر این نگاشت وارون $(\psi/_V)^{-1}: \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ هموار است.***

اثباتی از این قضیه را می‌توان درکتاب ***توابع چند متغیره فلمینگ*** یافت. توجه دارید که چون ماتریس $d\psi_p$ نسبت به پایه‌های متعارف $\mathbf{R}_p^{n+1}$ و $\mathbf{R}_{\psi(p)}^{n+1}$ ماتریس ژاکوبی ψ در p یعنی $J_\psi(p)$ است، شرط اینکه $d\psi_p$ غیرمنفرد است چیزی بجز مخالف صفر بودن $\det J_\psi(p)$ نیست.

● **قضیهٔ ۱.** ***فرض کنید S یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد و $p \in S$. در اینصورت مجموعهٔ بازی مانند V در حول p در $\mathbf{R}^{n+1}$ و یک n- رویه پارامتری $\varphi:U \to \mathbf{R}^{n+1}$ وجود دارد به قسمی که φ یک نگاشت یک به یک از U روی $V \cap S$ است. (ر.ک. شکل ۱۵ - ۱)***

برهان. فرض کنید $f:U_1 \to \mathbf{R}$ (U_1 باز در $\mathbf{R}^{n+1}$) یک تابع هموار باشد به قسمی که $S = f^{-1}(c)$ برای یک $c \in \mathbf{R}$ و $\nabla f(q) \neq 0$ برای هر $q \in S$. $i \in \{1, \dots, n+1\}$ را به قسمی انتخاب کنید که $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \neq 0$. چنین i ای وجود دارد زیرا که $\nabla f(p) \neq 0$. نگاشت $\psi:U_1 \to \mathbf{R}^{n+1}$ را به صورت

$\psi(x_1 , ... , x_{n+1}) = (x_1 , ... , x_{i-1}, f(x_1 , ... , x_{n+1}) , x_{i+1} , ... , x_{n+1})$ تعریف می‌کنیم. در نتیجه ψ مجموعه‌های تراز f را به فوق صفحه‌های $x_i = cte$ می‌نگارد و بویژه ψ رویه S را به فوق صفحهٔ $x_i = c$ می‌نگارد (ر.ک. شکل ۱۵-۲).

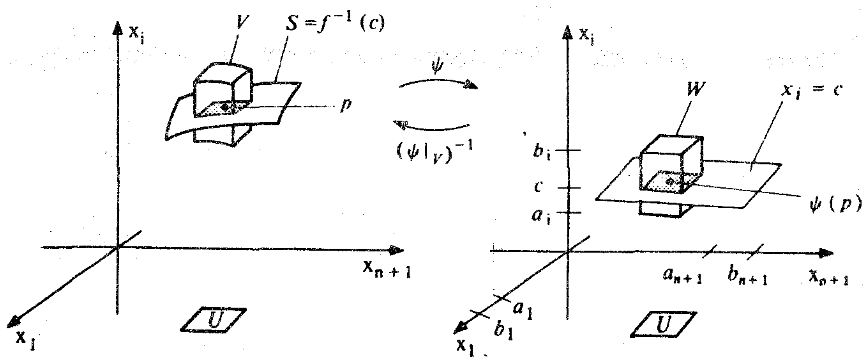


شکل ۱۵-۱ یک پارامترسازی از قسمتی از یک n- رویه

ماتریس ژاکوبی $J_\psi(p)$ دقیقاً ماتریس همانی است که در ستون i ام ان مؤلفه‌های $\nabla f(p)$ جایگزین شده است. بنابراین $\det J_\psi(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \neq 0$. همچنین، بنابر قضیهٔ تابع وارونی، مجموعه بازی مانند $V_1 \subset U_1$ در حول p وجود دارد به قسمی که ψ مجموعه V_1 را به صورت یک به یک روی یک مجموعهٔ باز W_1 در حول $\psi(p)$ می‌نگارد و $(\psi|_{V_1})^{-1}:W_1 \to V_1$ هموار است. به‌ازای هر $j \in \{1 , ..., n + 1\}$، $a_j , b_j \in \mathbb{R}$ با شرط $a_j < b_j$ انتخاب می‌کنیم به قسمی که

$$W = \{(x_1 , ... , x_{n+1}) : a_j < x_j < b_j \text{ ، برای هر } j\}$$

زیرمجموعه‌ای از W_1 باشد و $\psi(p) \in W$. بالاخره فرض کنید $V = (\psi|_{V_1})^{-1}(W)$، قرار دهید



شکل ۱۵-۲ نگاشت $\psi|_V$ مجموعهٔ تراز $V \cap f^{-1}(c)$ را روی مقطع W با فوق صفحهٔ $x_i = c$ می‌نگارد.

$$U = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n : a_j < u_j < b_j , j < i , a_{j+1} < u_j < b_{j+1} , j \geq i\}$$

و تابع $\varphi : U \to \mathbf{R}^{n+1}$ را به صورت

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = (\varphi|_V)^{-1} (u_1, \dots, u_{i-1}, c, u_i, \dots, u_n)$$

تعریف کنید. (ر.ک. شکل ۱۵-۲). φ در واقع n- رویه پارامتری مورد نظر است. □

تذکر. توجه دارید که رویه پارامتری φ قضیهٔ ۱ را می‌توان چنان انتخاب کرد که میدان‌های برداری سوی $\mathbf{N}^\varphi$ از φ و $\mathbf{N}^s$ از S با هم یکی باشند، یعنی $\mathbf{N}^\varphi(q) = \mathbf{N}^s(\varphi(q))$ برای هر $q \in U$. درواقع، $S_{\varphi(q)} \subset$ (تصویر $d\varphi_q$) برای هر $q \in U$، زیراکه $S \subset$ (تصویر φ)، لذا $\mathbf{N}^s(\varphi(q)) \perp$ (تصویر $d\varphi_q$) برای هر $q \in U$. علاوه براین، تابع $g : U \to \mathbf{R}$ تعریف شده به صورت

$$g(q) = \det \begin{pmatrix} E_1(q) \\ \vdots \\ E_n(q) \\ \mathbf{N}^s(\varphi(q)) \end{pmatrix}$$

پیوسته است و هیچ جا صفر نیست. چون U همبند است، g یا همه جا مثبت و یا همه جا منفی است. هرگاه $g(q) > 0$ برای هر $q \in U$، آنگاه $\mathbf{N}^\varphi = \mathbf{N}^s \circ \varphi$. هرگاه $g(q) < 0$ برای هر $q \in U$ آنگاه $\mathbf{N}^\varphi = -\mathbf{N}^s \circ \varphi$، بنابراین اگر n- رویهٔ پارامتری $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \mathbf{R}^{n+1}$ که به صورت

$$\tilde{\varphi}(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) = \varphi(u_2, u_1, u_3, \dots, u_n) .$$

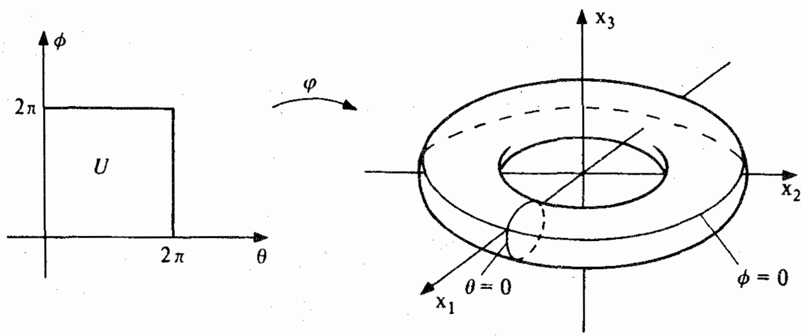
تعریف شده جایگزین φ نماییم داریم $\mathbf{N}^{\tilde{\varphi}} = \mathbf{N}^s \circ \tilde{\varphi}$. در اینجا

$$\tilde{U} = \{(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n : (u_2, u_1, u_3, \dots, u_n) \in U\} .$$

یک n- رویه پارامتری $\varphi : U \to \mathbf{R}^{n+1}$ که تصویرش یک زیر مجموعهٔ باز n- رویه سودار S باشد و میدان برداری سویش بر میدان برداری سوی S منطبق باشد (یعنی $\mathbf{N}^\varphi = \mathbf{N}^s$) یک **پارامترسازی موضعی** S گویند. قضیهٔ ۱ تضمینی برای وجود یک پارامترسازی موضعی یک‌به‌یک S می‌باشد که تصویرش یک مجموعهٔ باز (نسبی) در S در حول یک نقطهٔ مفروض S است. وارون این چنین پارامترسازی $\varphi : U \to S$ یعنی φ^{-1} را اغلب یک **نقشه** گویند زیرا که توسط φ^{-1} ناحیه S (تصویر φ) از S در $U \subseteq \mathbf{R}^n$ «منقوش» می‌شود، درست مانند ناحیه‌ای از زمین که روی یک نقشه سیاسی یا نقشه طبیعی منقوش شده است. φ^{-1} را گاه نیز یک **دستگاه مختصی** گویند زیرا که φ^{-1} هر **نقطه** (تصویر φ) $p \in$ را نظیر به یک n- تایی از اعداد حقیقی می‌کند که

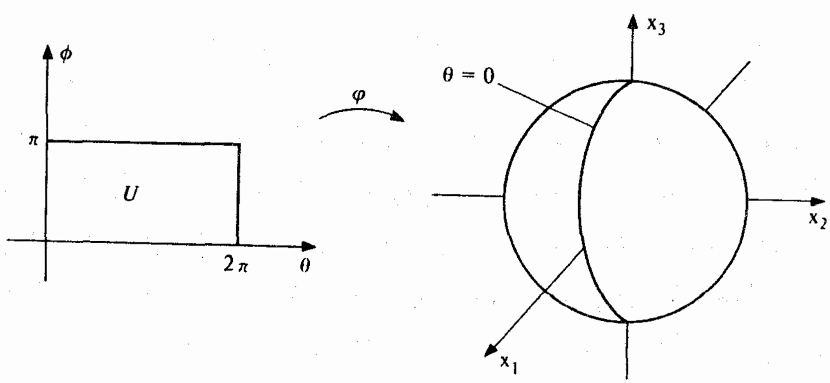
مختصات p است.

مثال ۱. فرض کنید φ نگاشتی از مربع باز $2\pi > \theta > 0$ ، $2\pi > \phi > 0$ در $\mathbf{R}^3$ تعریف شده برای $a > b > 0$ به‌صورت $\varphi(\theta, \phi) = ((a + b\cos\phi)\cos\theta, (a + b\cos\phi)\sin\theta , b\sin\phi)$ باشد. در این صورت φ^{-1} یک نقشه روی چنبره $(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a)^2 + x_3^2 = b^2$ ، با دو دایره حذف شده است (ر.ک. شکل ۱۵-۳).



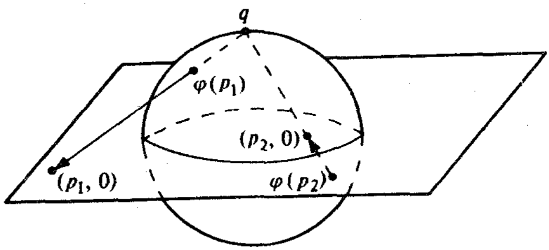
شکل ۱۵-۳ : φ^{-1} یک نقشه روی قسمت چنبره حاصل از دو دایره ($\phi = 0$ و $\theta = 0$) است.

مثال ۲. فرض کنید φ نگاشتی از مستطیل باز $2\pi > \theta > 0$ ، $\pi > \phi > 0$ در $\mathbf{R}^3$ به صورت $\varphi(\theta, \phi) = (\cos\theta\sin\phi , \sin\theta , \cos\phi)$ باشد. آنگاه φ^{-1} یک نقشه روی کرهٔ یکه S^2 با یک نیم‌کره حذف شده است (ر.ک. شکل ۱۵-۴).



شکل ۱۵-۴ مختصات کروی یک نقشه روی قسمت کره S^2 حاصل از حذف نیم‌دایره $\theta = 0$ ، $0 \le \phi \le \pi$ تعریف می‌کند.

مثال ۳. یک نقشه که دامنه‌اش کرهٔ یکه با فقط یک نقطه حذف شده باشد و به آسانی برای هر کره با هر بعد دلخواه می‌توان بیان کرد توسط تصویر استروگرافیک داده می‌شود. فرض کنید S^n نمایشگر n- کره‌یکه در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد و $q = (۰ , ... , ۰ , ۱)$ نشانگر «قطب شمال» S^n باشد. فرض کنید $\varphi: \mathbf{R}^n \to S^n$ نگاشتی باشد که هر نقطهٔ $p \in \mathbf{R}^n$ را به نقطهٔ متفاوت از q، که محل تلاقی قطعه خط واصل بین $(p , ۰) \in \mathbf{R}^{n+1}$ و q و کره S^n است می‌برد (ر.ک. شکل ۱۵-۵).



شکل ۱۵-۵ تصویر استروگرافیک (کنج‌نگاری)

چون $\alpha(t) = t(p , ۰) + (۱ - t)\, q = (tp , ۱ - t)$ یک پارامترسازی از خط گذرنده از $(p,۰)$ و q می‌باشد و چون $\|\alpha(t)\| = ۱$ اگر و فقط اگر $t = ۰$ یا $t = \dfrac{۲}{\|p\|^۲ + ۱}$، نگاشت φ توسط دستور

$$\varphi(x_۱ , ... , x_n) = (۲x_۱ , ... , ۲x_n , x_۱^۲ + ... + x_n^۲ - ۱) \,/\, (x_۱^۲ + ... + x_n^۲ + ۱)$$

داده شده باشد. نگاشت φ یک رویه پارامتری است که $\mathbf{R}^n$ را به طور یک به یک روی $S^n - \{q\}$ می‌نگارد. نقشه $\varphi^{-۱}$ را ***تصویر استروگرافیک*** از $S^n - \{q\}$ روی فوق صفحه استوایی است. توجه دارید که φ، $(n - ۱)$ -کره استوایی را ثابت نگه می‌دارد، گویی که $\{(x_۱, ...,x_n)\in\mathbf{R}^n : x_۱^۲ + ... + x_n^۲ < ۱\}$ را روی «نیمکره‌جنوبی» $\{(x_۱ , ... , x_{n+۱})\, S^n, x_{n+۱} < ۰\}$ می‌نگارد و خارج (= برون) گوی‌یکه یعنی $\{(x_۱ , ... , x_n) \in \mathbf{R}^n : x_۱^۲ + ... + x_n^۲ > ۱\}$ روی «نیمکره شمالی»، $\{(x_۱ , ... , x_{n+۱}) \in S^n : x_{n+۱} > ۰\}$ که قطب شمال آن حذف شده است می‌نگارد.

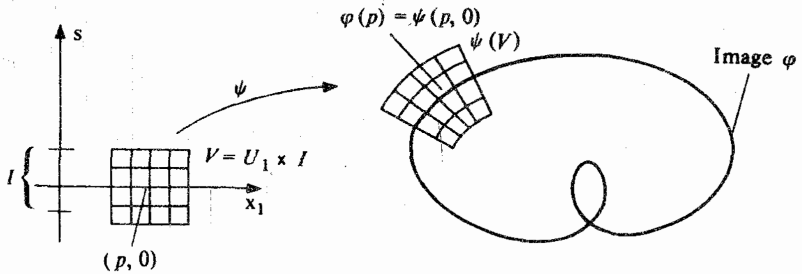
● **قضیهٔ ۲.** ***فرض کنید*** $\varphi: U \to \mathbf{R}^{n+۱}$ ***یک*** n- ***رویه پارامتری در*** $\mathbf{R}^{n+۱}$ ***باشد و*** $p \in U$. ***آنگاه مجموعه بازی مانند*** $U_۱ \subset U$ ***در حول*** p ***وجود دارد به قسمی که*** $\varphi(U_۱)$ ***یک*** n-

رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ است.

برهان. نگاشت $\psi:U \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n+1}$ را به صورت $\psi(q , s) = \varphi(q) + sN(q)$ تعریف می‌کنیم که در آن $N(q)$ قسمت برداری میدان‌برداری سودر طول φ در نقطه q است. در این صورت

$$J_\psi(p , \circ) = \begin{pmatrix} J_\varphi(p) & \vdots \\ & N(p) \\ & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & \vdots \\ E_1(p) & \dots & E_n(p) & N(p) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

ماتریسی است که ستونهایش قسمت‌های برداری میدان‌های برداری مختصی $\mathbf{E}_i$ در نقطه p و میدان برداری قائم $\mathbf{N}$ می‌باشند. بنابراین‌ستون‌های $J_\psi(p , \circ)$ استقلال خطی دارند و $\det J_\psi(p , \circ) \neq \circ$. بنابر قضیه تابع وارونی، مجموعهٔ بازی مانند $V \subset U \times \mathbf{R}$ در حول $(p , \circ)$ وجود دارد به قسمی که $\psi|_V$، تحدید ψ به V، V را به طور یک به یک روی مجموعهٔ باز $\psi(V)$ می‌نگارد و $(\psi|_V)^{-1}$ هموار است. با کوچک کردن V در صورت لزوم، می‌توانیم فرض کنیم که $V = U_1 \times I$ برای یک مجموعه باز $U_1 \subset U$ شامل p و یک بازهٔ باز $I \subseteq \mathbf{R}$ شامل $\circ$. (ر.ک. شکل ۱۵-۶). اینک تابع $f:(\psi|_V \text{ تصویر}) \to \mathbf{R}$ را به صورت $f(\psi(q , s))$ فاصله عمودی $\psi(q , s)$ از تصویر φ است.



شکل ۱۵-۶ قضیهٔ تابع وارون که در مورد یک ۱- رویه پارامتری φ بکار رفته است. خطوط مستقیم در $\psi(V)$ خطوط $\beta_q(S) = \varphi(q) + sN(q)$ (q ثابت) می‌باشند. ۱- رویه‌های مورب تصاویرنگاشت‌های $\varphi_s:U_1 \to \mathbf{R}^2$ می‌باشند که توسط $\varphi_s(q) = \varphi(q) + sN(q)$ (s ثابت) داده شده‌اند.

f خوش‌تعریف و هموار است زیراکه f ترکیب نگاشت هموار $(\psi|_V)^{-1}$ با نگاشت تصویری $I \to I \times U_1$ می‌باشد. مجموعهٔ تراز $f^{-1}(\circ)$ دقیقاً $\varphi(U_1)$ است، زیراکه

$$f^{-1}(\circ) = \{\psi(q , s) : q \in U_1 , s = \circ\} = \{\varphi(q) : q \in U_1\}$$

بالاخره $\nabla f(z) \neq \circ$ برای $z = \psi(q,\circ) \in f^{-1}(\circ)$، زیراکه‌باقراردادن $\alpha(s) = \psi(q,s) = \varphi(q)+sN(q)$ داریم

$$\nabla f(z)\ .\ \mathbf{N}(q) = \nabla f(\alpha(\circ))\ .\ \dot{\alpha}(\circ) = (f\circ\alpha)'\ (\circ) = ۱ \neq \circ$$

در نتیجه $\varphi(U_1) = f^{-1}(\circ)$ یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد. □

قضیهٔ ۱ می‌گوید که در حول هر نقطه p از یک n- رویهٔ S در $\mathbf{R}^{n+1}$ یک مجموعه باز V وجود دارد به قسمی که $S \cap V$ تصویر یک n- رویهٔ پارامتری یک به یک است. قضیهٔ ۲ می‌گوید که در حول هر نقطهٔ p در دامنه یک n- رویه پارامتری φ در $\mathbf{R}^{n+1}$ یک مجموعه باز V وجود دارد به قسمی که (تصویر $\varphi|_V$) یک n- رویه است. وقتی یک زیرمجموعه S در $\mathbf{R}^{n+1}$ را هم به صورت یک n- رویهٔ $S = f^{-1}(c)$ و هم به صورت تصویر یک n- رویهٔ پارامتری $\varphi: U \to \mathbf{R}^{n+1}$ با شرط $\mathbf{N}^{\varphi}(p) = \mathbf{N}^{s}(\varphi(p))$ برای هر $p \in U$ نوشت، آنگاه φ و S در هر نقطه دارای هندسه یکسانی هستند:

(یک) نگاشت وینگارتن L_p^{φ} از φ در $p \in U$ با نگاشت وینگارتن $L^{s}_{\varphi(p)}$ از S یکسانند، زیراکه برای $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n_p$

$$L_p^{\varphi}(d\varphi(\mathbf{v})) = -\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N}^{\varphi} = -\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{N}^{s}\circ\varphi)$$

$$= -\ (\mathbf{N}^{s}\circ\varphi\dot{\circ}\alpha)\ (t_\circ) = -\nabla_{\varphi\circ\dot{\alpha}(t)}\ \mathbf{N}^{s} = -\nabla_{d\varphi(\mathbf{v})}\ \mathbf{N}^{s} = L^{s}_{\varphi(p)}(d\varphi(\mathbf{v}))$$

که در آن $\alpha: I \to U$ به قسمی است که $\dot{\alpha}(t_\circ) = \mathbf{v}$

(دو) خمیدگی‌های اصلی، خمیدگی گاوس -کرونوکر و خمیدگی متوسط φ در $p \in U$ برابر با کمیت‌های نظیر برای S در $\varphi(p)$ هستند، چرا که همگی مستقیماً از نگاشت وینگارتن محاسبه می‌شوند.

تذکر. قضیهٔ ۲ نشان می‌دهد که اگر φ یک n- رویهٔ پارامتری در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد، آنگاه موضعاً تصویر φ یک n رویه است، یعنی یک مجموعه تراز یک تابع حقیقی f با گرادیان غیر صفر است. یک سؤال طبیعی اینست که آیا یک گزاره مشابه می‌توان در مورد (تصویر φ) که در آن φ یک n- رویهٔ پارامتری در $\mathbf{R}^{n+k}$ است بیان کرد جواب مثبت است. بیان آن یکسان با n- رویه در $\mathbf{R}^{n+k}$ است که در زیر تعریف شده است.

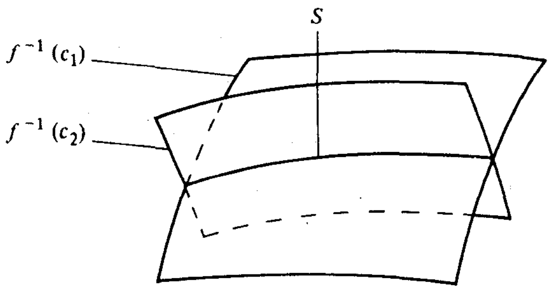
یک **رویهٔ n- بعدی** یا **n- رویه** در $\mathbf{R}^{n+k}$ $(k \geq ۱)$ یک زیرمجموعهٔ غیرتهی S در $\mathbf{R}^{n+k}$ به صورت $S = f^{-1}(c)$ $(c \in \mathbf{R}^k)$ است که در آن $f: U \to \mathbf{R}^k$ (U باز در $\mathbf{R}^{n+k}$) تابعی هموار با این خاصیت است که df_p برای هر $p \in S$ دارای رتبه k است. چون ماتریس df_p نسبت به پایه‌های

$\mathbf{R}_p^{n+k}$ و $\mathbf{R}_{\varphi(p)}^k$ دقیقاً ماتریس ژاکوبی f است که ستون‌هایش قسمت‌های برداری، بردارهای گرادیان $\nabla f_i(p)$ می‌باشد که در آن $f(q) = (f_1(q)\ ,\ \dots\ ,\ f_k(q))$، $q \in U$، این تعریف را می‌توان به صورت زیر نوشت: یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+k}$ یک زیر مجموعهٔ غیرتهی از $\mathbf{R}^{n+k}$ به صورت

$$S = f_1^{-1}(c_1) \cap \dots \cap f_k^{-1}(c_k) = \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(c_i)$$

می‌باشد که در آن $f_i : U \to \mathbf{R}$ها (U باز در $\mathbf{R}^{n+k}$) توابع هموار هستند به‌قسمی که $\{\nabla f_1(p)\ ,\ \dots\ ,\ \nabla f_k(p)\}$ به‌ازای هر $p \in S$ استقلال خطی دارند (ر.ک. شکل ۱۵-۷). در نتیجه یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+k}$ مقطع k تا $(n + k - 1)$- رویه است که به طور «مناسبی» یکدیگر را قطع می‌کنند، بدین‌معنی که سوی‌های قائم در هر نقطه از مقطع استقلال خطی دارند.

فضای مماس S_p در S به $p \in S$ یک n- رویه $S = \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(c_i)$ در $\mathbf{R}^{n+k}$ مجموعهٔ تمام



شکل ۱۵-۷ یک ۱- رویه S در $\mathbf{R}^3$ مقطع دو ۲- رویهٔ $f^{-1}(c_1) \cap f^{-1}(c_2)$ می‌باشد.

بردارهایی در $\mathbf{R}_p^{n+k}$ به صورت $\dot\alpha(t_0)$ است که در آن α هر خم پارامتری در S با شرط $\alpha(t_0) = p$ می‌باشد. در نتیجه

$$S_p = [f_1^{-1}(c_1)]_p \cap \dots \cap [f_k^{-1}(c_k)]_p$$

$$= \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}_p^{n+k} : \nabla f_i(p) \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{برای } i \in \{1\ ,\ \dots\ ,\ n\}\}.$$

زیر فضای k- بعدی $S_p^\perp$ از $\mathbf{R}_p^{n+k}$ که توسط بردارهای $\{\nabla f_1(p)\ ,\ \dots\ ,\ \nabla f_k(p)\}$ تولید می‌شود ***فضای قائم*** بر S در نقطهٔ p است (ر.ک. شکل ۱۵-۸).

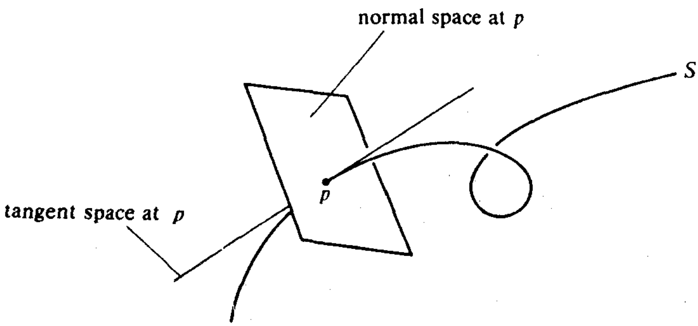
مثال ۱. یک ۱- رویه در $\mathbf{R}^3$ را معمولاً یک *خم فضایی* گویند (ر.ک شکل ۱۵-۸).

مثال ۲. فرض کنید $f_i : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ $(i \in \{1, 2\})$ به صورت

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3^2 + x_4^2$$

تعریف شده است. در این صورت $S = f_1^{-1}(1) \cap f_2^{-1}(1)$ یک ۲- رویه در $\mathbf{R}^4$ (چنبره) است. توجه دارید که S حاصلضرب دکارتی یک دایره یکه در صفحهٔ (x_1, x_2) و یک دایرهٔ یکه در صفحه (x_3, x_4) است. (تصویر φ) = S، که در آن φ چنبرهٔ پارامتری مثال ۹ فصل قبل است.



شکل ۱۵-۸ فضای مماس و فضای قائم در یک نقطه p یک ۱- رویه (خم فضایی) در $\mathbf{R}^3$

تذکر. درست مانند مفهوم n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ که در فصل چهارم تعریف شده و به قدر کافی کلی نبود که شامل رویه‌هایی مانند نوار موبیوس شود؛ تعریف n- رویه در $\mathbf{R}^{n+k}$ که در این فصل داده شده است به قدر کافی کلی نیست که شامل همه زیر مجموعه‌های $\mathbf{R}^{n+k}$ شود که ممکن است آنها را n- رویه نامید. رویه‌های فصل چهارم رویه‌های «سودار» بودند، زیراکه چنین رویه‌ای می‌تواند با انتخاب یک میدان برداری سودار شود. n- رویه‌ها در $\mathbf{R}^{n+k}$ این فصل n- رویه‌های «قائماً کنج‌پذیرند»، زیرا که چنین رویه‌هایی را می‌توان با انتخابی از k میدان برداری قائم که در هر نقطه S یک پایه برای فضای قائم تشکیل می‌دهند قائماً کنج‌پذیر کرد. در این کتاب ما، رویه‌های کلی‌تر را مورد نظر قرار نمی‌دهیم.

تذکر. یک نگاشت از یک n- رویهٔ $S \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ در $\mathbf{R}^k$ را ***هموار*** گوییم اگر تحدید یک تابع هموار به S تعریف شده روی یک مجموعه باز در $\mathbf{R}^{n+1}$ شامل S باشد. با استفاده از پارامترسازی موضعی می‌توانیم مشخصهٔ دیگری از هموار بودن ارائه کرد.

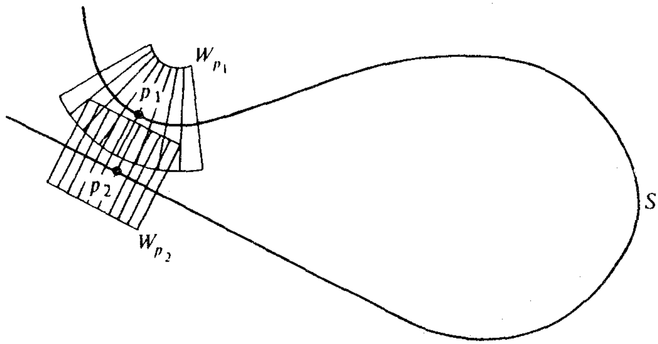
قضیهٔ ۳. ***فرض کنید S یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد و $f:S \to \mathbf{R}^k$. در این صورت f هموار است اگر و فقط اگر $f\circ\varphi:U \to \mathbf{R}^k$ برای هر پارامترسازی موضعی $\varphi:U \to S$ هموار باشد.***

برهان. هرگاه f هموار باشد، آنگاه $f\circ\varphi$ به‌ازای هر φ هموار است زیرا که ترکیبی از توابع هموار است. به عکس، فرض کنید $f\circ\varphi$ برای هر پارامترسازی موضعی φ از S هموار باشد، ما باید یک گسترش هموار f مانند $\tilde{f}$ به یک مجموعه باز V در $\mathbf{R}^{n+1}$ که شامل S است بسازیم. به ازای هر $p \in S$، فرض کنید $\varphi_p:U_p \to S$ یک پارامترسازی موضعی S باشدکه تصویرش شامل p است و $\psi_p:U_p\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n+1}$ به صورت $\psi_p(q\,,\,s) = \varphi_p(q) + sN(\varphi_p(q))$ تعریف شده باشد، که در آن $\mathbf{N}$ یک سو روی S است. در این صورت مانند اثبات قضیهٔ ۲، می‌توان یک مجموعهٔ باز مانند V_p در حول $(\varphi_p^{-1}(p)\,,\,\circ)$ در $U_p \times \mathbf{R}$ یافت به قسمی که $\psi_p|_{V_p}$ مجموعهٔ V_p را به طور یک به یک روی یک مجموعهٔ باز W_p در $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌نگارد، $(\psi_p|_{V_p})^{-1} : W_p \to V_p$ هموار است. علاوه بر این، با کوچک کردن V_p در صورت لزوم می‌توانیم فرض کنیم که $\psi_p(q\,,\,s) \in S$ برای $(q\,,\,s) \in V_p$ اگر و فقط اگر $s = \circ$. اکنون اگر ما $\tilde{f}_p:W_p \to \mathbf{R}^k$ را به صورت $\tilde{f}_p(\varphi_p(q) + sN\,(\varphi_p(q))) = f(\varphi_p(q))$ تعریف کنیم، ما یک گسترش از $f|_{W_p \cap S}$ به مجموعهٔ باز W_p در $\mathbf{R}^{n+1}$ به صورت $\tilde{f}_p = (f\circ\varphi_p) \circ \pi \circ (\psi_p|_{V_p})^{-1}$ ساخته‌ایم. در اینجا $\pi(q\,,\,s) = q$. اکنون ما می‌خواهیم این گسترش‌ها را با هم جمع کنیم تا یک گسترش هموار f تعریف شده روی مجموعهٔ باز $\bigcup_{p\in S} W_p$ به دست آوریم. ما می‌توانیم این کار را انجام دهیم به شرط آنکه $\tilde{f}_{p_1} = \tilde{f}_{p_2}$ روی $W_{p_1} \cap W_{p_2}$ برای هر $p_1\,,\,p_2 \in S$. اما این ممکن است درست نباشد (ر.ک. شکل ۱۵-۹). هرگاه، با این حال، به ازای هر $p \in S$، $\varepsilon_p > \circ$ را به قسمی انتخاب می‌کنیم که گوی به شعاع $2\varepsilon_p$ در حول p در W_p واقع باشد و B_p را برابر با گوی باز به شعاع ε_p و به مرکز p قرار دهیم، آنگاه

$$\varphi_{p_1}(q_1) + s_1N(\varphi_{p_1}(q_1)) = \varphi_{p_2}(q_2) + s_2N(\varphi_{p_2}(q_2))$$

فقط برای $(q_1\,,\,s_1) \in (\psi_{p_1}|_{V_{p_1}})^{-1}(B_{p_1})$ و $(q_2\,,\,s_2) \in (\psi_{p_2}|_{V_{p_2}})^{-1}(B_{p_2})$ وقتی می‌تواند

برقرار باشد که $\varphi_{p_1}(q_1) = \varphi_{p_2}(q_2)$ و $s_2 = s_1$. از آن نتیجه می‌شود که تابع $\bar{f}: \bigcup_{p\in S} B_p \to \mathbf{R}^k$ را می‌توان به صورت $\bar{f}(\varphi_p(q) + sN(\varphi_p(q))) = f(\varphi_p(q))$ تعریف کرد و این تابع یک گسترش هموار f است. □



شکل ۱۵-۹ ساختن یک گسترش هموار

برای $f:S \to \mathbf{R}^l$ یک تابع تعریف شده روی یک n- رویه S در $\mathbf{R}^{n+k}$ ***هموار بودن*** f را یا بدین‌صورت تحقیق نمود که f تحدید به S یک تابع هموار تعریف شده روی یک مجموعهٔ باز $\mathbf{R}^{n+k}$ شامل S است و یا اینکه به‌ازای هر پارامترسازی موضعی φ رویهٔ S، $f\circ\varphi$ هموار باشد. این دو شرط روی f با استدلالی مشابه با اثبات قضیهٔ ۳ هم‌ارزند.

یک نگاشت هموار f با وارون هموار را یک **دیفئومرفیسم (وابردریختی)** گویند. درنتیجه، برای مثال، پارامترسازی موضعی $\varphi:U \to S$ که در اثبات قضیهٔ ۱ ساخته شد، یک دیفیومرفیسم از مجموعه باز $U \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ روی مجموعهٔ باز $S \cap V$ در حول p از S می‌باشد.

● **قضیهٔ ۴.** ***(قضیهٔ تابع وارون برای n- رویه‌ها). فرض کنید S و $\tilde{S}$ n- رویه‌ها باشند و فرض کنید $\psi:S \to \tilde{S}$ یک نگاشت هموار باشد و $p \in S$ به قسمی باشد که $d\psi_p:S_p \to \tilde{S}_{\psi(p)}$ غیرمنفرد باشد. در این صورت نشان دهید که یک مجموعه باز V در حول p از S و یک مجموعه باز W در حول $\psi(p)$ از $\tilde{S}$ وجود دارد به قسمی که $\psi_{|V}$ یک دیفیومرفیسم از V روی W است.***

برهان. فرض کنید $\varphi_1:U_1 \to S$ و $\varphi_2:U_2 \to \tilde{S}$ پارامترسازی‌های موضعی یک به یک S و $\tilde{S}$ باشند با

شرایط $p \in \varphi_1(U_1)$, $\psi(p) \in \varphi_2(U_2)$ که در اثبات قضیهٔ ۱ ساخته شده‌اند. در این صورت $\varphi_2^{-1} \circ \psi \circ \varphi_1 : U_1 \to U_2$ هموار و $d(\varphi_2^{-1} \circ \psi \circ \varphi_{1|V_1}{}^{-1}(p) \circ d\psi_p \circ (d\varphi_1)^{-1}_{\varphi_1(p)}$ غیرمنفرد است. بنابراین، بنابر قضیهٔ تابع وارونی برای $\mathbf{R}^n$، مجموعهٔ بازی مانند $V_1 \subset U_1$ شامل $\varphi_1^{-1}(p)$ وجود دارد به قسمی که $\varphi_2^{-1} \circ \psi \circ \varphi_1|_{V_1}$ یک دیفئومرفیسم از V_1 روی یک مجموعهٔ باز $W_1 \subset U_2$ شامل $\varphi_2^{-1} \circ \psi(p)$ است. قرار دهید $V = \varphi_1(V_1)$ و $W = \varphi_2(W_1)$. در این صورت $\psi|_V = \varphi_2 \circ (\varphi_2^{-1} \circ \psi \circ \varphi_1) \circ \psi_1) \circ \varphi_1^{-1}|_V$ یک دیفئومرفیسم از V_1 روی W است. □

● **نتیجه.** ***فرض کنید S یک n- رویه سودار همبند فشرده در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد که خمیدگی گاوس کرونوکرش در هیچ جا صفر نشود. آنگاه نگاشت گاوس $N:S \to S^n$ یک دیفئومرفیسم است.***

برهان. بنابر قضیهٔ ۵ فصل ۱۳، N یک به یک و پوشاست، بنابراین ما احتیاج داریم که تحقیق کنیم N^{-1} هموار است. ولی به‌ازای هر $p \in S$، $\mathbf{v} \in S_p$ و $dN(\mathbf{v})$ دارای همان قسمت برداری $\nabla_{\mathbf{v}}N = -L_p(\mathbf{v})$ می‌باشد و این می‌تواند صفر باشد وقتی که $\mathbf{v} = 0$ است، زیرا، بنابر قضیهٔ ۶ فصل ۱۲، دومین صورت بنیادی $\mathscr{S}_p$ رویه S در p معین است. با بکار بردن قضیهٔ ۴ نتیجه می‌گیریم که N^{-1} هموار روی یک مجموعهٔ باز در حول هر نقطه S^n است و بنابر قضیهٔ ۳، این کافی است. □

تمرین

۱۵-۱. فرض کنید $q(0, \dots, 0)$ نمایشگر ”قطب جنوب“ n- کره S^n باشد. دستوری برای یک n- رویه پارامتری $\varphi:\mathbf{R}^n \to S^n - \{q\}$ بیابید که تصویر وارون کنج‌نگاری از $S^n - \{q\}$ روی فوق صفحه استوایی $x_{n+1} = 0$ باشد.

۱۵-۲. دستوری برای n- رویه پارامتری $\varphi:\mathbf{R}^n \to S^n - \{q\}$ بیابید که در آن $q = (0, \dots, 0, 1)$ قطب شمال n- کرهٔ S^n و φ^{-1} تصویر کنج‌نگاری از $S^n - \{q\}$ روی فوق صفحهٔ مماس $x_{n+1} = -1$ در قطب جنوب $(0, \dots, 0, -1)$ می‌باشد. [در نتیجه، برای $p \in \mathbf{R}^n$، $\varphi(p)$ نقطهٔ دیگری از S^n بجز q است که روی خط واصل بین q و $(p, -1) \in \mathbf{R}^{n+1}$ قرار دارد.]

۱۵-۳. فرض کنید $\varphi:U \to \mathbf{R}^{n+1}$ یک n- رویه پارامتری در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد، $\psi:U \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n+1}$ به صورت $\psi(q, s) = \varphi(q) + sN(q)$ تعریف شده است، $V = U_1 \times I$ به قسمی باشد که $\psi|_V$ دارای

یک وارون هموار باشد و بالاخره مانند قضیهٔ ۲ قرار می‌دهیم $s = f(\psi(q,s))$.
(الف) نشان دهید که مجموعه‌های تراز $f^{-1}(c)$ $(c \in I)$ در همه جا عمود بر خطهای $\beta_q(s) = \varphi(q) + sN(q)$ ($q \in U_1$ ثابت) می‌باشند [راهنمایی : توجه داشته باشید که هر خم پارامتری در $f^{-1}(c)$ به صورت $\psi \circ \alpha + cN \circ \alpha$ است که در آن α یک خم پارامتری در U_1 است.]
(ب) نشان دهید که $\nabla f(z) = (z, N(q))$ برای $z = \psi(q, s) \in \psi(U_1 \times I)$.

۱۵-۴. نشان دهید که در قضیهٔ ۲ کافی نیست که فقط دامنهٔ φ را تحدید به یک زیرمجموعهٔ باز U_1 از U نماییم که روی آن φ یک به یک باشد تا اینکه اطمینان داشته باشیم که تصویر φ یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد؛ یک ۱- رویهٔ پارامتری یک به یک در $\mathbf{R}^2$ مثال بزنید که تصویرش یک ۱- رویه نباشد.

۱۵-۵. فرض کنید S یک n- رویه سودار در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد و $T(S) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}_p^{n+1} \subset \mathbf{R}^{2(n+1)} : p \in S , \mathbf{v}.\mathbf{N}(p) = 0\}$. نشان دهید که $T(S)$ یک $2n$- رویه در $\mathbf{R}^{2n+2}$ می‌باشد ($T(S)$ را **کلاف مماس** S گویند).

۱۵-۶. فرض کنید S یک n- رویه سودار در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد و $T_1(S) = (\mathbf{v} \in \mathbf{R}_p^{n+1} \subset \mathbf{R}^{2(n+1)} : p \in S , \mathbf{v}.\mathbf{N}(p) = 0 ، \|\mathbf{v}\| = 1)$. نشان دهید که $T_1(S)$ یک $(2n - 1)$- رویه در $\mathbf{R}^{2n+2}$ است. ($T_1(S)$ را **کلاف کره یکه** S گویند).

۱۵-۷. (الف) $\mathbf{R}^4$ را به عنوان مجموعهٔ تمام ماتریسهای ۲×۲ با درآیه‌های حقیقی توسط یکی‌گرفتن ۴- تایی $(x_1, \dots, x_4)$ با ماتریس

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

در نظر می‌گیریم. نشان دهید که مجموعهٔ $O(2)$ از ماتریس‌های متعامد ۲×۲ یک ۱- رویه در $\mathbf{R}^4$ است. [به خاطر دارید که ماتریس A متعامد است اگر A^{-1} ترانهادهٔ A باشد. این مطلب هم‌ارز با این شرط است که سطرهای A تشکیل یک مجموعهٔ متعامد یکه بدهند].

(ب) نشان دهید که فضای مماس $O(2)_p$ بر $O(2)$ در نقطهٔ $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ را می‌توان با مجموعهٔ تمام ماتریس‌های متقارن چپ ۲×۲ یکی گرفت، یعنی

$$O(2)_p = \left\{\left(p, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) : a = d = 0 , c = -b\right\}$$

[راهنمایی : $(\alpha_i \cdot \alpha_j)'(t_0)$ را محاسبه کنید، که در آن

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix}$$

یک خم پارامتری دلخواه در $O(2)$ با شرط $\alpha(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ می‌باشد.]

۱۵-۸. (الف) نشان دهید که مجموعه $O(n)$ از ماتریس‌های متعامد $n \times n$ یک $\frac{n(n-1)}{2}$ - رویه در $\mathbf{R}^{n^2}$ است.

(ب) فضای مماس بر $O(n)$ در نقطهٔ ماتریس همانی = p چیست؟

۱۵-۹. نشان دهید که اگر $S = f^{-1}(c)$ یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+k}$ باشد و $p \in S$، آنگاه S_p فضای مماس بر S در p برابر با هسته df_p است.

۱۵-۱۰. قضیهٔ ۱ را با جایگزینی کردن $n + k$ به جای $n + 1$ ثابت کنید.

۱۵-۱۱. قضیهٔ ۲ راباجایگزین‌کردن $n+k$ بجای $n+1$ ثابت‌کنید. [ازنگاشت $\psi: U \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^{n+k}$ که به صورت $\psi(q, t_1, \ldots, t_k) = \varphi(q) + \sum_{i=1}^{k} t_i N_i(q)$ تعریف می‌شود استفاده کنید، که در آن $N_i (i \in \{1, \ldots, k\})$ میدانهای برداری در طول φ هستند که $(\text{تصویر } d\varphi_p)^\perp$، یعنی فضای قائم را به‌ازای $q \in U$ تولید می‌کنند].

۱۵-۱۲. فرض کنید $\varphi: \mathbf{R}^n \to S^n$ نشانگر وارون تصویر کنج‌نگاری از $S^n - \{(0, \ldots, 0, 1)\}$ روی فوق صفحهٔ استوایی $x_{n+1} = 0$ باشد.

(الف) نشان دهید که به‌ازای هر $p \in \mathbf{R}^n$، عددی حقیقی مانند $\lambda(p) > \circ$ وجود دارد به‌قسمی که $\| d\varphi(\mathbf{v}) \| = \lambda(p) \| \mathbf{v} \|$ برای هر $\mathbf{v} \in \mathbf{R}_p^n$. [راهنمایی: توجه داشته باشید که قسمت برداری $d\varphi(\mathbf{v})$ دقیقاً $\left. \frac{d}{dt} \right|_\circ \varphi(p + tv)$ می‌باشد، که در آن $\mathbf{v} = (p , v)$.]

(ب) با استفاده از این خاصیت که $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{4} (\| \mathbf{v} + \mathbf{w} \|^2 - \| \mathbf{v} - \mathbf{w} \|^2)$ نتیجه بگیرید که $d\varphi(\mathbf{v}) \cdot d\varphi(\mathbf{w}) = \lambda^2(p) \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ برای هر $\mathbf{v} , \mathbf{w} \in \mathbf{R}_p^n$ و بنابراین $d\varphi$ زاویه بین بردارها را حفظ می‌کند. [این تمرین نشان می‌دهد که تصویر کنج‌نگاری یک نگاشت همدیس (حافظ زاویه) است.]

۱۵-۱۳. فرض کنید S یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد و $p \in S$. نشان دهید که زیرمجموعهٔ S شامل تمام نقاط $q \in S$ که به p توسط یک خم پیوسته در S متصل شود یک n- رویه همبند است.

۱۵-۱۴. فرض کنید $C = f_1^{-1}(c_1) \cap f_2^{-1}(c_2)$ یک ۱- رویه در $\mathbf{R}^3$ باشد و $\mathbf{X} = \nabla f_1 \times \nabla f_2$. نشان دهید که تحدید $\mathbf{X}$ به C یک میدان برداری مماس روی C است و خم انتگرال بیشین $\mathbf{X}$ که از نقطهٔ $p \in C$ می‌گذرد یک نگاشت یک به یک یا دوره‌ای $\alpha : I \to C$ می‌باشد. چه موقع I را روی C می‌نگارد؟

۱۶ـ نقاط کانونی

ساختار اثبات قضیهٔ ۲ از فصل گذشته بدین صورت بود که n- رویه پارامتری $\varphi:U \to \mathbf{R}^{n+1}$ را با یک خانواده از نگاشتهای هموار $\varphi_s:U \to \mathbf{R}^{n+1}$ $(s \in \mathbf{R})$ به صورت

$$\varphi_s(q) = \psi(q , s) = \varphi(q) + sN^{\varphi}(q)$$

احاطه می‌کند (شکل ۱۵-۶). وقتی $s = ٠$، $\varphi_s = \varphi$ یک n- رویه پارامتری در $\mathbf{R}^{n+1}$ است. برای $s \neq ٠$ با این حال ممکن است φ_s یک n- رویه پارامتری نشود، زیرا ممکن است نقاط $p \in U$ وجود داشته باشند که در آن نقاط φ_s عادی نباشد. در هر کدام از این نقاط یک جهت مانند $\mathbf{v} \in \mathbf{R}_p^n$ $(\|\mathbf{v}\| = ١)$ وجود خواهد داشت به قسمی که $d\varphi_s(\mathbf{v}) = ٠$. اگر α یک خم پارامتری در U با شرط $\mathbf{v} = \dot{\alpha}(t_0)$ باشد، نتیجه می‌شود که

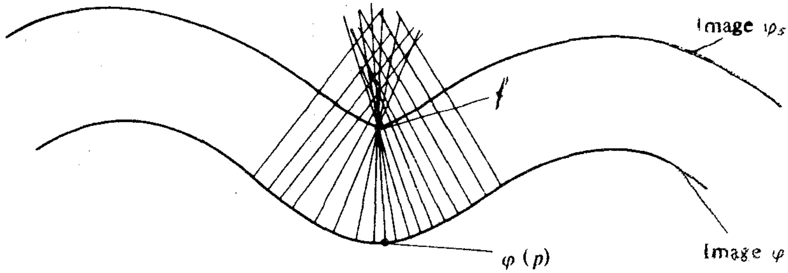
$$\varphi_s \circ \dot{\alpha}(t_0) = d\varphi_s(\dot{\alpha}(t_0)) = ٠$$

یعنی خم

$$\varphi_s \circ \alpha(t) = \varphi(\alpha(t)) + sN^{\varphi}(\alpha(t))$$

(s ثابت) در نقطه $t = t_0$ متوقف می‌شود (دارای بردار سرعت صفر است)، به طریق هندسی این امر گویای این مطلب است که خطوط قائمی که در طول خم $\varphi \circ \alpha$ از نزدیکی نقطهٔ $\varphi(p) = \varphi(\alpha(t_0))$ شروع می‌شوند متمرکز در نقطه $\mathscr{f} = \varphi_s(\alpha(t_0)) = \varphi_s(p)$ می‌شوند (ر.ک. شکل ۱۶-۱). این چنین نقاط $\mathscr{f}$، نقاط کانونی φ نامیده می‌شوند. توجه کنید لزومی ندارد که خطوط قائم در طول خم α در یک نقطهٔ کانونی همدیگر را قطع کنند.

n- رویه پارامتری $\varphi:U \to \mathbf{R}^{n+1}$ و نقطه $p \in U$ را در نظر بگیرید، فرض کنید $\beta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n+1}$ به صورت $\beta(s) = \varphi(p) + sN^{\varphi}(p)$ تعریف شده باشد. در نتیجه β یک پارامترسازی با تندی یکهٔ خط قائم بر تصویر φ در نقطهٔ p است. نقطهٔ $\mathscr{f} \in$ (تصویر β) را یک ***نقطهٔ کانونی*** φ در طول β نامیده می‌شود هرگاه $\mathscr{f} = \beta(s_0)$ که در آن s_0 به قسمی است که نگاشت $\varphi_{s_0}:U \to \mathbf{R}^{n+1}$ تعریف شده به



شکل ۱۶-۱ ℓ یک نقطه کانونی از ۱- رویه پارامتری در R^2 می‌باشد.

صورت $\varphi_{s_\circ}(q) = \varphi(q) + s_\circ N^\varphi(q)$ در نقطهٔ p منفرد باشد (یا به عبارت دیگر عادی نباشد).

● **قضیهٔ ۱.** ***فرض کنید $\varphi:U \to R^{n+1}$ یک n- رویه پارامتری باشد، $p \in U$ و همچنین فرض کنید $\beta : R \to R^{n+1}$ خط قائم داده شده به توسط $\beta(s) = \varphi(p) + sN^\varphi(p)$ باشد. در این صورت نقاط کانونی φ در طول β نقاط $\beta(1/k_i(p))$ می‌باشند که در آن $k_i(p)$ خمیدگیهای اصلی غیرصفر φ در p هستند. در حالت خاص حداکثر n نقطهٔ کانونی از φ در طول β وجود دارد.***

برهان. $\beta(s) = \varphi_s(p) = \ell$ یک نقطهٔ کانونی φ در طول β است اگر و فقط اگر برای $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n_p$، $\mathbf{v} \neq \circ$ داشته باشیم $d\varphi_s(\mathbf{v}) = \circ$. فرض کنید $\alpha:I \to U$ به قسمی باشد که $\dot\alpha(t_\circ) = \mathbf{v}$، قسمت برداری $d\varphi_s(\mathbf{v})$ عبارتست از:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t_\circ} (\varphi_s \circ \alpha) = \frac{d}{dt}\Big|_{t_\circ} (\varphi \circ \alpha + sN^\varphi \circ \alpha) \qquad (\text{s ثابت})$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t_\circ} (\varphi \circ \alpha) + s\,\frac{d}{dt}\Big|_{t_\circ} (N^\varphi \circ \alpha).$$

چون عبارت اخیر قسمت برداری $\varphi \dot{\circ} \alpha(t_\circ) + s\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{N}^\varphi$ می‌باشد، نتیجه می‌شود که $d\varphi_s(\mathbf{v}) = \circ$ اگر و فقط اگر

$$\circ = \varphi \dot{\circ} \alpha(t_\circ) + s\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{N}^\varphi$$
$$= d\varphi(\mathbf{v}) - sL_p(d\varphi(\mathbf{v})).$$

در نتیجه $d\varphi_s(\mathbf{v}) = \circ$ اگر و فقط اگر

$$L_p(d\varphi(\mathbf{v})) = \frac{1}{s}\,(d\varphi(\mathbf{v})).$$

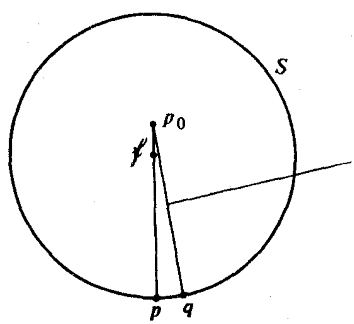
توجه کنید که s نمی‌تواند صفر باشد چراکه $d\varphi(\mathbf{v}) \neq \circ$. در نتیجه ℓ یک نقطهٔ کانونی φ در طول β

می‌باشد اگر و فقط اگر $1/s$ مقدار ویژه L_p باشد و یا به عبارت دیگر اگر و فقط اگر $1/s$ یک خمیدگی اصلی φ در نقطهٔ p باشد. □

اگر S، یک n- رویه سودار در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد، نقطهٔ $f \in \mathbf{R}^{n+1}$ را ***نقطهٔ کانونی*** **S** در طول خط قائم می‌باشد هرگاه f یک نقطهٔ کانونی φ در طول $\beta(s) = p + sN^S(p)$ باشد که در آن φ یک پارامترسازی از یک مجموعه باز شامل p در S با شرط $N^\varphi = N^S \circ \varphi$ است. بنابراین f نقطه‌ای است که خطوط قائم در طول یک خم گذرنده از p در S متمرکز می‌شوند. بنابر قضیهٔ قبل، نقاط کانونی S در طول β، نقاط $\beta(1/k_i(p))$ می‌باشند که در آن $k_i(p)$ ها خمیدگیهای اصلی غیرصفر S در نقطهٔ p می‌باشند. توجه کنید که مکان نقاط کانونی بستگی به انتخاب سورروی S ندارد زیرا وارون کردن سوی $\mathbf{N}^S$ باعث تغییرعلامت درخمیدگیهای‌اصلی $k_i(p)$ می‌شود،بنابراین‌نقاط کانونی $p + (1/k_i(p))\,\mathbf{N}^S(p)$ بدون تغییر مانند! به علاوه آن خطوط قائمی که در $p + (1/k_i(p))\,\mathbf{N}^S(p)$ میل به تمرکز دارند، خطوطی هستندکه‌درطول‌خمی در S گذرندهٔ از نقطهٔ p که در جهت خمیدگی اصلی i ام است، شروع می‌شوند.

در قضیهٔ بعد مهمترین خاصیت از نقاط کانونی توصیف شده است، بدین‌معنی که فاصله از یک n- رویه موضعاً در طول خطوط قائم تنها با تقریب اولین نقطه کانونی می‌نیمم می‌گردد، ما این قضیه را بیان و برای سطوح سودارثابت خواهیم کرد که البته این مطلب برای سطوح پارامتری نیز برقراراست.

● **قضیهٔ ۲.** فرض کنید S یک n- رویه سودار در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد و همچنین فرض کنید $p \in S$ روی **خط قائم بر S گذرنده از نقطه p قرار داشته باشد. اگر $h: S \to \mathbf{R}$ به صورت $h(q) = \|q - p_0\|^2$ تعریف شود، در این صورت h دارای یک می‌نیمم موضعی در p است اگر و فقط اگر هیچ نقطه کانونی S بین p و p_0 در طول خط قائم گذرنده از p وجود نداشته باشد** (ر.ک. شکل ۱۶-۲).



شکل ۱۶-۲ فاصله با S در طول خط قائم که اولین نقطه کانونی f قرار دارد می‌نیمم نمی‌شود.

برهان. چون $p_\circ$ روی خط قائم‌بر S درنقطهٔ p قرار دارد وبنابراین $p_\circ = p + sN(p)$ برای یک $s \in \mathbf{R}$. فرض می‌کنیم که $s > \circ$، در غیر این صورت علامت s را با وارون کردن سو روی S می‌توان تغییر داد. $\bar{h}:\mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ را به صورت

$$\bar{h}(q) = \|q - p_\circ\|^{۲} = (q - p_\circ) \cdot (q - p_\circ)$$

تعریف می‌کنیم، بنابراین h تحدید $\bar{h}$ به S می‌باشد. در این صورت

$$\nabla\bar{h}(q) = ۲(q\,,\, q - p_\circ)$$

در حالت خاص
$$\nabla h(q) = ۲(p\,,\, p - p_\circ) = -۲s\mathbf{N}(p)$$

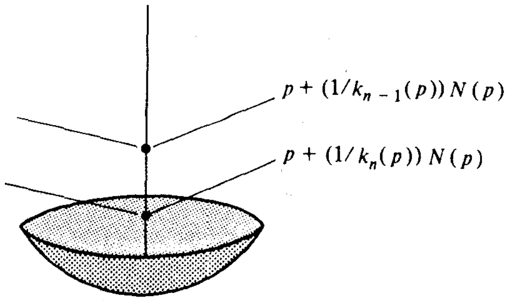
بنابراین h در p ایستا است $(\text{grad } h(p) = \circ)$. هسیان h در p روی $\mathbf{v} \in S_p$ $(\mathbf{v} \neq \circ)$ به صورت زیر می‌باشد (ر.ک. فصل ۱۳).

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_p(\mathbf{v}) &= [\nabla_{\mathbf{v}}\,(\nabla\bar{h} - ((\nabla\bar{h}) \,.\, \mathbf{N})\ \mathbf{N})] \,.\, \mathbf{v} \\ &= [\nabla_{\mathbf{v}}(\nabla\bar{h}) + ((\nabla\bar{h}) \,.\, \mathbf{N})(p)\ L_p(\mathbf{v})] \,.\, \mathbf{v} \\ &= [۲\mathbf{v} - ۲sL_p(\mathbf{v})] \,.\, \mathbf{v} = ۲\|\mathbf{v}\|^{۲}\ (۱ - \ sk\ (\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|))\end{aligned}$$

که در آن $k(\mathbf{v} / \|\mathbf{v}\|)$ خمیدگی قائم S در جهت $\mathbf{v} / \|\mathbf{v}\|$ می‌باشد. بنابراین

$$\mathscr{H}_p(\mathbf{v}) \geq ۲\|\mathbf{v}\|^{۲}\ (۱ - sk_n(p))$$

که در آن $k_n(p)$ مقدار ماکزیمم خمیدگی قائم در p می‌باشد، یعنی $k_n(p)$ بزرگترین خمیدگی اصلی از S در p می‌باشد. نتیجه می‌شود که اگر $k_n(p) < \circ$ یا اگر $k_n(p) > \circ$ و $s < ۱/k_n(p)$، آنگاه $\mathscr{H}_p$ معین مثبت است، پس h یک می‌نیمم موضعی خود را در p اختیار می‌کند. بنا بر پیوستگی، h نیز یک می‌نیمم موضعی خود را در p وقتی $k_n(p) > \circ$ و $s = ۱/k_n(p)$ نیز باید اختیار کند. بنابراین h یک می‌نیمم موضعی خود را در p وقتی که $k_n(p) < \circ$ یا $k_n(p) > \circ$ و $s \leq \dfrac{۱}{k_n(p)}$ به دست می‌آورد. یعنی به هر حال هیچ نقطه کانونی بین p و $p_\circ = p + sN(p)$ در طول خط قائم در S گذرنده از نقطه p وجود ندارد (ر.ک. شکل ۱۶-۳).



شکل ۱۶-۳ برای $k_n(p) > ۰$، اولین نقطه کانونی در $p + (۱/k_n(p))N(p)$ می‌باشد.

بعکس، اگر $۰ < ۱/k_n(p) < s$ آنگاه

$$\mathscr{H}_p(\mathbf{v}_n) = ۲(۱ - sk(\mathbf{v}_n)) = ۲(۱ - sk_n(p)) < ۰$$

که در آن $\mathbf{v}_n$ جهت خمیدگی اصلی در p متناظر با خمیدگی اصلی k_n می‌باشد، بنابراین $\mathscr{H}_p$ نیم معین مثبت نمی‌باشد و h یک می‌نیمم موضعی خود را در p اختیار نمی‌کند. در واقع اگر α هر خم پارامتری در S با شرط $\dot\alpha(t_۰) = \mathbf{v}_n$ باشد آنگاه

$$(h\circ\alpha)'(t_۰) = (\text{grad } h) \,.\, \dot\alpha(t_۰) = ۰$$

و

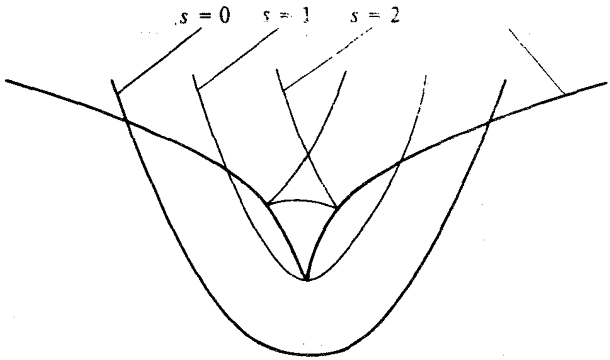
$$(h\circ\alpha)''(t_۰) = \nabla_{\mathbf{v}_n}(\text{grad } h) : \dot\alpha(t_۰) = \mathscr{H}_p(\mathbf{v}_n) < ۰$$

بنابراین فاصله از $p_۰$ هرگاه در جهت $\mathbf{v}_n$ از نقطه p در S دور شویم کاهش می‌یابد. □

مجموعهٔ تمام‌نقاط کانونی در طول تمام خطوط قائم بر یک n- رویه S در $\mathbf{R}^{n+۱}$ ***مکان هندسی کانونی*** S می‌نامند. این مجموعه را می‌توان به صورت زیر تجسم کرد. برای هر $s \in \mathbf{R}$ مجموعه

$$S_s = \{q \in \mathbf{R}^{n+۱} : q = p + s\mathbf{N}(p)\,,\ p \in S \quad \text{برای یک}\}$$

متشکل از نقاطی که به فاصله s در طول قائمها از رویه S قرار دارند مانند یک n- رویه با نقاط منفرد (نقاطی که در فضای مماس هستند و بعدشان اکیداً کمتر از n) می‌باشند که آن نقاط، نقاط کانونی S هستند. این نقاط منفرد معمولاً به صورت نقاط عطف یا نقاط برگشت ظاهر می‌شوند. مجموعهٔ S_s را می‌توان به عنوان وضعیت یک جبهه موج پیشرو در زمان s/c (c برابر با سرعت نور) که از یک فلاش نورانی در طول S در زمان $s = ۰$ حاصل می‌شود در نظر گرفت. با مشاهدهٔ این جبهه امواج می‌توان اثر نقاط منفرد را به عنوان مکان هندسی کانونی دید (ر.ک. شکل ۱۶-۴).



شکل ۱۶-۴ مکان هندسی کانونی یک سهمی به عنوان مجموعه نقاط منفرد از یک جبهه موج پیشرو.

تمرین

.۱۶-۱. فرض کنید $\varphi:\mathbf{R} \to \mathbf{R}^۲$ بیضی $\varphi(t) = (a \cos t , b \sin t)$ $(a , b > ۰)$ باشد.

(الف) نشان دهید که مکان هندسی کانونی φ تصویر خم پارامتری زیر می‌باشد

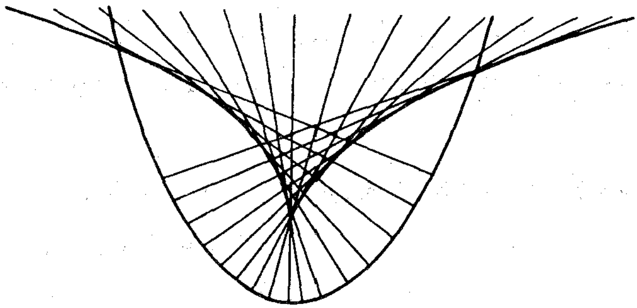
$$\alpha(t) = \left(\frac{a^۲ - b^۲}{a} \cos^۳ t , \frac{b^۲ - a^۲}{b} \sin^۳ t\right)$$

(ب) مکان هندسی کانونی را رسم کنید.

.۱۶-۲. فرض کنید C یک خم مسطح سودار باشد و $p \in C$ به قسمی که $k(p)$، خمیدگی C در p غیرصفر باشد.

(الف) نشان دهید که برای $q \in C$ به اندازه کافی نزدیک به p، خطوط قائم به C در نقطه p و نقطهٔ q در یک نقطه $h(q) \in \mathbf{R}^۲$ یکدیگر را قطع می‌کنند.

(ب) نشان دهید که همانطور که در طول C، q به p نزدیک می‌شود، نقطه $h(q)$ به نقطهٔ کانونی C در طول خط قائم گذرنده از p نزدیک می‌شود [این چنین مکان هندسی C پوش خانواده خطوط قائم C می‌باشد (ر.ک. شکل ۱۶-۵)] .



شکل ۱۶-۵ مکان هندسی کانونی یک سهمی به عنوان پوش خطوط قائم

۱۶-۳. فرض کنید $\varphi: I \to \mathbf{R}^2$ یک خم پارامتری عادی در $\mathbf{R}^2$ با خمیدگی k مخالف صفر باشد. برای $t \in I$ فرض کنید

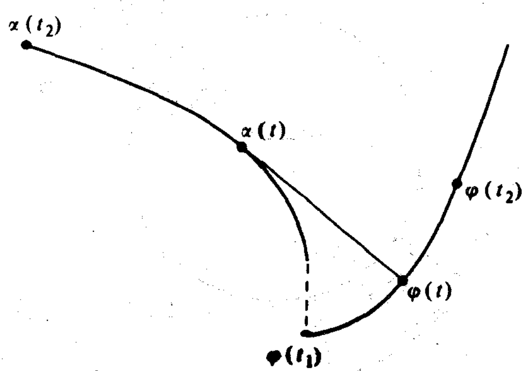
$$\alpha(t) = \varphi(t) + \left(\frac{1}{k(t)}\right) N^{\varphi}(t)$$

بطوریکه α یک پارامترسازی از مکان هندسی کانون φ می‌باشد.

(الف) نشان دهید که α در $t \in I$ عادی است ($\dot{\alpha}(t) \neq 0$) اگر و فقط اگر $k'(t) \neq 0$.

(ب) نشان دهید برای هر $t \in I$ با شرط $k'(t) \neq 0$، خط قائم بر تصویر φ در نقطه $\varphi(t)$ مماس بر $\alpha(t)$ در مکان هندسی کانونی φ است (شکل ۱۶-۵).

(پ) نشان دهید که در هر زیر بازهٔ $[t_1, t_2] \subset I$ با شرط $k'(t) \neq 0$ برای $t_1 < t < t_2$، طول یک پاره خط از $\varphi(t)$ به $\alpha(t)$ به علاوه طول کمان α از $\alpha(t)$ تا $\alpha(t_2)$ به عنوان تابعی از t ثابت است (ر.ک. شکل ۱۶-۶).



شکل ۱۶-۶- : نیمی از سهمی به عنوان گستردهٔ مکان هندسی کانونی

۱۶-۴. فرض کنید $\varphi: I \to \mathbf{R}^2$ یک خم پارامتری عادی در $\mathbf{R}^2$ باشد و $t_0 \in I$. برای هر $s \in \mathbf{R}$، تابع $\varphi_s: I \to \mathbf{R}^2$ را بوسیله $\varphi_s(t) = \varphi(t) + sN^{\varphi}(t)$ تعریف می‌کنیم. فرض کنید I_s نشانگر بزرگترین بازه در حول t_0 باشد که روی آن φ_s عادی است و فرض کنید $k_s: I_s \to \mathbf{R}$ نشانگر خمیدگی تحدید φ_s به I_s باشد.

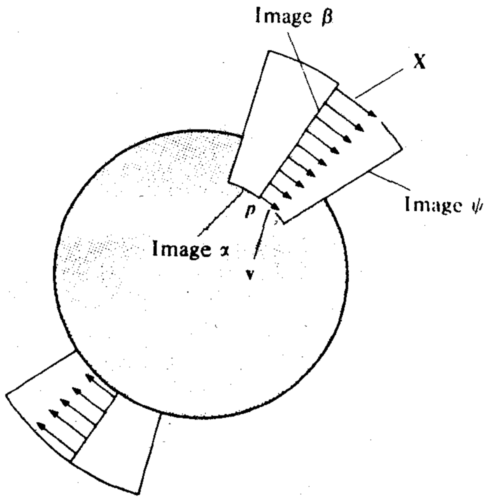
(الف) نشان دهید که I_s یک بازهٔ باز حول t_0 است برای هر $s < 1/k(t_0)$ که در آن k خمیدگی φ است.

(ب) نشان دهید که برای $s < 1/k(t_0)$

$$k_s(t_0) = \frac{1}{\frac{1}{k(t_0)} - s}$$

و نتیجه بگیرید که $\lim_{s \to 1/k(t_0)} |k_s(t_0)| = \infty$ [راهنمایی: برای راحتی محاسبه می‌توانید فرض کنید که φ یک خم با تندی یکه است.]

۱۶-۵. فرض کنید S یک n- رویه سودار در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد. برای $p \in S$، $\mathbf{v} \in S_p$ $(\mathbf{v} \neq 0)$ فرض کنید $\alpha: I \to S$ یک خم پارامتری در S باشد به قسمی که $\dot{\alpha}(t_0) = \mathbf{v}$ و $\psi: \mathbf{R} \times I \to \mathbf{R}^{n+1}$ را به صورت $\psi(s, t) = \alpha(t) + sN^s(\alpha(t))$ تعریف می‌کنیم. فرض کنید $\mathbf{X}$ نشانگر یک میدان برداری در طول خط β قائم بر S در p $\left(\beta(s) = p + s\mathbf{N}^s(p)\right)$ باشد و $\mathbf{X}(s) = d\psi(s, 0, 0, 1)$ تعریف می‌کنیم (ر.ک. شکل ۱۶-۷).



شکل ۱۶-۷ میدان ژاکوبی

(الف) نشان دهید که $\mathbf{v} = \mathbf{X}(\circ)$ و $\dot{\mathbf{X}}(\circ) = -L_p(\mathbf{v})$ [راهنمایی : قسمت برداری $\dot{\mathbf{X}}$ برابر $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$ می‌باشد] .

(ب) نشان دهید که $\ddot{\mathbf{X}} = \circ$ و نتیجه بگیرید که $\mathbf{X}(s) = (\beta(s), v + s\mathbf{w})$ که در آن v, $\mathbf{w}$ به ترتیب قسمتهای برداری $\mathbf{v}$, $-L_p(\mathbf{v})$ می‌باشند.

(پ) نشان دهید که $\mathbf{X}(s) = \circ$ اگر و فقط اگر $\beta(s)$ یک نقطه کانونی S در طول β و $\mathbf{v}$ در جهت یک خمیدگی اصلی متناظر با خمیدگی اصلی $1/s$ باشد.

تذکر. از قسمت (ب) نتیجه می‌شود که میدان برداری $\mathbf{X}$ به انتخاب خم پارامتری α با سرعت اولیه $\mathbf{v}$ بستگی ندراد. $\mathbf{X}$ به ***میدان ژاکوبی*** تولید شده توسط $\mathbf{v}$ در طول β موسوم است.

۱۷ـ مساحت و حجم رویه

ما ابتدا چگونگی پیدا کردن حجم (مساحت وقتی $n = 2$) یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ را در نظر می‌گیریم. درست مانند محاسبه طول یک خم مسطح این مطلب در دو مرحله انجام می‌پذیرد. ابتدا حجم یک n- رویه پارامتری را تعریف می‌کنیم و سپس حجم یک n- رویه را برحسب پارامترسازیهای موضعی بیان می‌کنیم.

به خاطر می‌آوریم که طول کمان یک خم پارامتری $\alpha: I \to \mathbf{R}^2$ توسط فرمول

$$l(\alpha) = \int_I \|\dot{\alpha}\| = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| \, dt$$

که در آن a و b نقاط انتهایی I می‌باشند، به دست می‌آید. به زبان رویه‌های پارامتری اگر α عادی باشد، آنگاه میدان برداری سرعت $\dot{\alpha}$ درست میدان برداری مختصی $\mathbf{E}_1$ در طول ۱- رویهٔ پارامتری α در $\mathbf{R}^2$ می‌باشد و

$$\|\dot{\alpha}(t)\| = \|\mathbf{E}_1(t)\| = \|\mathbf{E}_1(t)\| \det\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1(t) / \|\mathbf{E}_1(t)\| \\ \mathbf{N}(t) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1(t) \\ \mathbf{N}(t) \end{pmatrix}$$

که در آن $\mathbf{N}$ میدان برداری سو در طول α می‌باشد. معادلهٔ دوم در اینجا نتیجه‌ای از این واقعیت است که بردارهای $\mathbf{E}_1(t) / \|\mathbf{E}_1(t)\|$ و $\mathbf{N}(t)$ تشکیل یک پایه متعامد یکه برای $\mathbf{R}^2_{\alpha(t)}$ می‌دهند. بنابراین

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1(t) / \|\mathbf{E}_1(t)\| \\ \mathbf{N}(t) \end{pmatrix}$$

دترمینان یک ماتریس متعامد است که در نتیجه برابر با ± 1 است. علامت مثبت است وقتی که پایهٔ $\mathbf{E}_1(t) / \|\mathbf{E}_1(t)\|$ سازگار با سوی $\mathbf{N}$ باشد. فرمول محاسبهٔ طول α را می‌توان به صورت زیر

نوشت:

$$l(\alpha) = \int_I \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}$$

این انتگرال به وضوح حالت خاصی از انتگرال تعریف شده برای n- رویه‌های پارامتری می‌باشد.

حجم یک n- رویهٔ پارامتری $\varphi: U \to \mathbf{R}^{n+1}$ توسط انتگرال زیر تعریف می‌شود.

$$V(\varphi) = \int_U \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_n \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = \int_U \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1(u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ \mathbf{E}_n(u_1, \dots, u_n) \\ \mathbf{N}(u_1, \dots, u_n) \end{pmatrix} du_1 \dots du_n$$

که در آن $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n$ میدان‌های برداری مختصی در طول φ هستند و $\mathbf{N}$ میدان برداری سو در طول φ می‌باشد. وقتی $n = 1$، حجم φ معمولاً ***طول*** φ نامیده می‌شود و با $l(\varphi)$ نشان داده می‌شود. وقتی $n = 2$، حجم φ را معمولاً ***مساحت*** φ می‌نامند و با $A(\varphi)$ نمایش می‌دهند، توجه کنید که تابع زیرعلامت انتگرال حجم یعنی

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_n \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}$$

همواره مثبت می‌باشد، لذا $V(\varphi) > 0$. ممکن است $V(\varphi)$ برابر با ∞ نیز شود.

یک توصیف شهودی از اینکه چرا این انتگرال خاص باید اندازه حجم باشد این است که تابع زیرعلامت انتگرال در طول φ «بزرگنمایی حجم» را اندازه می‌گیرد (ر.ک. شکل ۱۷-۱).

داشتن دستوری برای یافتن حجم بدون آنکه میدان برداری سوی $\mathbf{N}$ را محاسبه کنیم مناسب است.

● قضیهٔ ۱. *فرض کنید $\varphi: U \to \mathbf{R}^{n+1}$ یک n- رویه پارامتری باشد. در اینصورت*

$$V(\varphi) = \int_U (\det(\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j))^{1/2}$$

برهان.

$$\left[\det\begin{pmatrix}\mathbf{E}_1\\ \vdots\\ \mathbf{E}_n\\ \mathbf{N}\end{pmatrix}\right]^2 = \det\begin{pmatrix}E_1\\ \vdots\\ E_n\\ N\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}E_1\\ \vdots\\ E_n\\ N\end{pmatrix}^t$$

$$= \det\left[\begin{pmatrix}E_1\\ \vdots\\ E_n\\ N\end{pmatrix}(E_1^t \dots E_n^t\, N^t)\right]$$

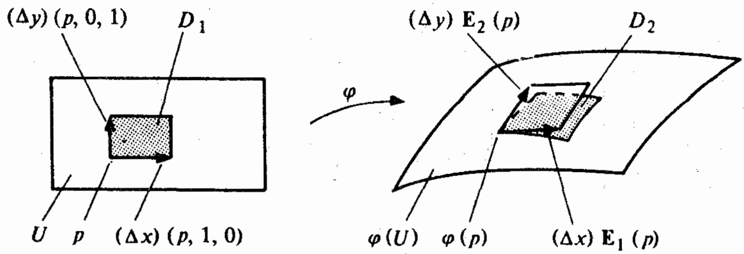
$$= \det\begin{pmatrix}E_1 \cdot E_1 & \dots & E_1 \cdot E_n & E_1 \cdot N\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ E_n \cdot E_1 & \dots & E_n \cdot E_n & E_n \cdot N\\ N \cdot E_1 & \dots & N \cdot E_n & N \cdot N\end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix}\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 & \dots & \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_n & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{E}_1 & \dots & \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{E}_n & 0\\ 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \det(\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j)$$

از طرفین جذر گرفته و سپس روی U انتگرال می‌گیریم و فرمول حاصل می‌شود. □

تذکر. توابع $g_{ij} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j : U \to \mathbf{R}$ ***ضرایب متریک*** در طول φ نامیده می‌شوند. در هندسه دیفرانسیل معمولاً $\det(g_{ij})$ به g نشان داده می‌شود. دراین صورت انتگرال حجم به شکل $V(\varphi) = \int_U \sqrt{g}$ می‌شود.



شکل ۱۷-۱: بزرگنمایی مساحت در طول یک ۲- رویه پارامتری φ در $\mathbf{R}^3$. مستطیل کوچک سایه‌زدهٔ D_1 در U بامساحت $(\nabla y)\ (\Delta x)$ توسط φ به‌ناحیهٔ‌سایه‌زدهٔ D_2 در $\varphi(U)$ نگاشته‌می‌شود. مساحت D_2 بوسیلهٔ‌مساحت متوازی الاضلاع در $\mathbf{R}^3_{\varphi(p)}$ که توسط $d\varphi((\Delta x)\ (p\ ,\ 1\ ,\ 0)) = (\Delta x)\ \mathbf{E}_1(p)$ و $d\varphi((\Delta y)\ (p\ ,\ 1\ ,\ 0)) = (\Delta y)\ \mathbf{E}_2(p)$ تولید می‌شود تقریب می‌گردد و مساحت این متوازی‌الاضلاع اخیر برابر است با

$$\|(\Delta x)\ \mathbf{E}_1(p) \times (\Delta y)\ \mathbf{E}_2(p)\| = (\Delta x)\ (\Delta y)\ \mathbf{E}_1(p) \times \mathbf{E}_2(p)\ .\ \mathbf{N}(p)$$

$$= (\Delta x)\ (\Delta y)\ \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1(p) \\ \mathbf{E}_2(p) \\ \mathbf{N}(p) \end{pmatrix}.$$

نسبت مساحتهای دو ناحیه سایه‌زده برابر است با

$$\frac{A(D_2)}{A(D_1)} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1(p) \\ \mathbf{E}_2(p) \\ \mathbf{N}(p) \end{pmatrix} + \varepsilon(p\ ,\ \Delta x\ ,\ \Delta y)$$

که در آن $\lim\limits_{(\Delta x\ ,\ \Delta y) \to 0} \varepsilon(p\ ,\ \Delta x\ ,\ \Delta y) = 0$. حد نسبت مقدار مساحت‌ها یعنی

$$\lim_{(\Delta x\ ,\ \Delta y) \to 0} \frac{A(D_2)}{A(D_1)} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1(p) \\ \mathbf{E}_2(p) \\ \mathbf{N}(p) \end{pmatrix} + \varepsilon(p\ ,\ \Delta x\ ,\ \Delta y)$$

بزرگنمایی مساحت در p تحت φ را محاسبه می‌کند؛ که انتگرال آن روی U مساحت φ را می‌دهد.

مثال. فرض کنید $\varphi: U \to \mathbf{R}^3$ توسط

$$\varphi(\theta\ ,\ \phi) = (r \cos\theta \sin\phi\ ,\ r \sin\theta \sin\phi\ ,\ r \cos\phi)$$

تعریف شده باشد که در $U = \{(\theta\ ,\phi) \in \mathbf{R}^2 : -\pi < \theta < \pi\ ،\ 0 < \phi < \pi\}$. بنابراین φ پارامترسازی مختصات کروی کره‌ای به شعاع r در $\mathbf{R}^3$ می‌باشد که یک نیم‌دایرهٔ عظیمهٔ آن حذف

شده است. مساحت آن توسط فرمول بالا به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$A(\varphi) = \int_U \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{vmatrix} -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & 0 \\ r\cos\theta\cos\phi & r\sin\theta\cos\phi & -r\sin\phi \\ -\cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\sin\phi & -\cos\phi \end{vmatrix} d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r^2 \sin\phi\, d\theta\, d\phi = 4\pi r^2$$

و یا اینکه

$$A(\varphi) = \int_U (\det(\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j))^{1/2} = \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{vmatrix} r^2\sin^2\phi & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix}^{1/2} d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r^2 \sin\phi\, d\theta\, d\phi = 4\pi r^2.$$

فرمول قضیهٔ ۱ به ما اجازه می‌دهد که حجم را برای n- رویه‌های پارامتری در $\mathbf{R}^{n+k}$ به‌ازای هر $k \geq 0$ تعریف کنیم. یا حتی کلی‌تر از آن، به ما اجازه می‌دهد که یک حجم n- بعدی به هر نگاشت هموار $\varphi: U \to \mathbf{R}^{n+k}$ که در آن U در $\mathbf{R}^n$ باز است، نظیر کنیم. یک نگاشت هموار $\varphi: U \to \mathbf{R}^{n+k}$ که در آن U در $\mathbf{R}^n$ باز است یک رویه n- رویه منفرد در $\mathbf{R}^{n+k}$ می‌نامیم. صفت منفرد بودن از این نظر قابل تأکید است که لازم نیست φ عادی باشد. یعنی $d\varphi_p$ ممکن است برای یک $p \in U$ (و یا حتی، برای همهٔ آنها) منفرد باشد. توجه کنید که هر n- رویه پارامتری یک n- رویه منفرد می‌باشد ولی هر n- رویه منفرد در حالت کلی لازم نیست یک n- رویه پارامتری باشد. **حجم** $V(\varphi)$ یک n- رویه منفرد $\varphi: U \to \mathbf{R}^{n+k}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

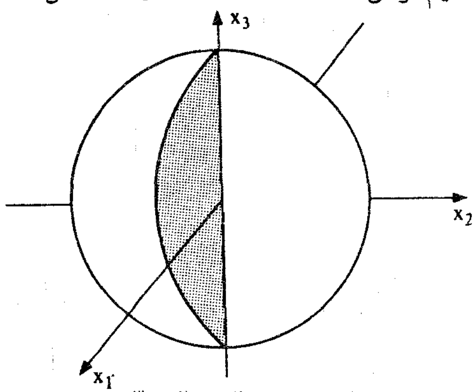
$$V(\varphi) = \int_U (\det(\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j))^{1/2}$$

که در آن مانند معمول $\mathbf{E}_i$ ها میدان‌های برداری مختصی در طول φ می‌باشند.

مثال. فرض کنید $\varphi: U \to \mathbf{R}^3$ یک ۳- رویه پارامتری باشد که به صورت زیر

$$\varphi(r , \theta , \phi) = (r \cos \theta \sin \phi , r \sin \theta \sin \phi , r \cos \phi)$$

تعریف شده باشد، که در آن $U = \{(r , \theta , \phi): 0 < r < a , 0 < \theta < 2\pi , 0 < \phi < \pi\}$. در نتیجه φ مجموعهٔ U را به طور یک به یک و پوشا به گوی باز به شعاع a در حول مبدأ در $\mathbf{R}^3$ می‌نگارد به قسمی که نیم قرص آن حذف شده است (ر.ک. شکل ۱۷-۲).



شکل ۱۷-۲- گوی باز $B = \{(x_1 , x_2 , x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < a^2\}$ که نیم‌قرص $\{(x_1 , x_2 , x_3) \in B : x_1 \geq 0 , x_2 = 0\}$ آن حذف شده است.

برای $p = (r , \theta , \phi) \in U$ داریم

$$\mathbf{E}_1(p) = \left(p , \frac{\partial\varphi}{\partial r} (p)\right) = (p , \cos \theta \sin \phi , \sin \theta \sin \phi , \cos \phi)$$

$$\mathbf{E}_2(p) = \left(p , \frac{\partial\varphi}{\partial \theta} (p)\right) = (p , -r \sin \theta \sin \phi , r \cos \theta \sin \phi , 0)$$

$$\mathbf{E}_3(p) = \left(p , \frac{\partial\varphi}{\partial \phi} (p)\right) = (p , r \cos \theta \cos \phi , r \sin \theta \cos \phi , -r \sin \phi)$$

بنابراین

$$V(\varphi) = \int_U (\det (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j))^{1/2}$$

$$= \int_{۰}^{\pi}\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{a} \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & r^۲ \sin^۲\phi & ۰ \\ ۰ & ۰ & r^۲ \end{vmatrix}^{۱/۲} dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_{۰}^{\pi}\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{a} r^۲ \sin\phi \; dr\, d\theta\, d\phi = \frac{۴}{۳}\pi a^۳ .$$

● **قضیهٔ ۲.** *فرض کنید* $\varphi: U \to \mathbf{R}^{n+1}$ *یک* $\mathbf{n}$- *رویه پارامتری باشد و* $N: U \to S^n$ *نگاشت گاوس (($\mathbf{N}(p) = (\varphi(p), N(p))$ برای هر $p \in U$ که در آن $\mathbf{N}$ یک میدان برداری سو در طول φ است.) باشد. در این صورت*

$$V(\mathbf{N}) = \int_U |K| \det (\mathbf{E}_i^{\varphi} \cdot \mathbf{E}_j^{\varphi})^{۱/۲}$$

که در آن $K: U \to \mathbf{R}$ *خمیدگی گاوس -کرونکر φ و $\mathbf{E}_j^{\varphi}$ ها میدانهای برداری مختص در طول φ می‌باشند.*

برهان. میدان برداری مختص $\mathbf{E}_i^N$ از n- رویه منفرد N دارای قسمت برداری در $p \in U$ برابر با $\partial N/\partial x_i(p)$ می‌باشد که همان قسمت برداری

$$\nabla_{e_i} \mathbf{N} = -L_p\,(d\varphi_p(e_i)) = -L_p(\mathbf{E}_i^{\varphi}(p)) = -\sum_{k=۱}^{n} a_{ki}(p)\; \mathbf{E}_k^{\varphi}(p)$$

می‌باشد که در آن $\mathbf{e}_i = (p, ۰, \dots, ۱, \dots, ۰)$ (۱ در (i + ۱) امین نقطه قرار دارد)، L_p نگاشت وینگارتن φ در p است و $(a_{ij}(p))$ نمایش ماتریسی L_p مربوط به پایه $\{\mathbf{E}_i^{\varphi}(p)\}$ برای فضای مماس (تصویر $d\varphi_p$) است. بنابراین

$$\begin{aligned} \det (\mathbf{E}_i^N \cdot \mathbf{E}_j^N) &= \det \left(\sum_k a_{ki}\, \mathbf{E}_k^{\varphi} \cdot \sum_l a_{lj}\, \mathbf{E}_l^{\varphi} \right) \\ &= \det \left(\sum_{k,l} a_{ki}\, a_{lj}\, \mathbf{E}_k^{\varphi} \cdot \mathbf{E}_l^{\varphi} \right) \\ &= \left(\det (a_{ij})\right)^۲ \det (\mathbf{E}_i^{\varphi} \cdot \mathbf{E}_j^{\varphi}) \\ &= K^۲ \det (\mathbf{E}_j^{\varphi} \cdot \mathbf{E}_j^{\varphi}). \end{aligned}$$

از طرفین رابطه ریشه دوم و سپس انتگرال می‌گیریم. در این صورت

$$V(N) = \int_U \left(\det\left(\mathbf{E}_i^N \cdot \mathbf{E}_j^N\right)\right)^{1/2} = \int_U |K| \det\left(\mathbf{E}_i^\varphi \cdot \mathbf{E}_j^\varphi\right)^{1/2} \qquad \square$$

نتیجه. خمیدگی گاوس - کرونکر در $p \in U$ از n- رویه پارامتری $\varphi: U \to \mathbf{R}^{n+1}$ دارای قدر مطلقی برابر با

$$|K(p)| = \lim_{\varepsilon \to 0} V(N|_{B_\varepsilon}) / V(\varphi|_{B_\varepsilon})$$

می‌باشد که در آن $B_\varepsilon = \{q \in U: \|q - p\| < \varepsilon\}$.

برهان. توسط قضیهٔ ۲ و قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها داریم

$$\frac{V(N|_{B\varepsilon})}{V(\varphi|_{B\varepsilon})} = \frac{|K(p_1)| \det\left(\mathbf{E}_i^\varphi(p_1) \cdot \mathbf{E}_j^\varphi(p_1)\right)^{1/2} \int_{B\varepsilon} 1}{\left(\det\left(\mathbf{E}_i^\varphi(p_2) \cdot \mathbf{E}_j^\varphi(p_2)\right)\right)^{1/2} \int_{B\varepsilon} 1}$$

به‌ازای نقاطی مانند $p_1, p_2 \in B_\varepsilon$. با حدگیری وقتی که $\varepsilon \to 0$، اثبات کامل می‌شود. □

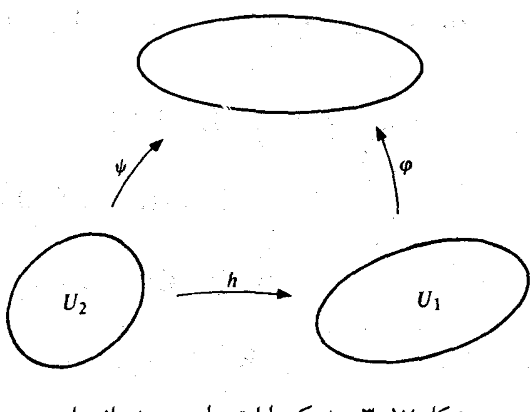
تذکر. این نتیجه تعبیر هندسی از بزرگی K خمیدگی گاوس - کرونکر از یک n- رویه سودار $S \subset \mathbf{R}^{n+1}$ برحسب بزرگنمایی حجم تحت نگاشت گاوس N را بدست می‌دهد. معنی علامت K به شرح زیر است. در قضیهٔ ۵ بخش ۱۲ از قرار دادن $\mathbf{Z} = \mathbf{N}$ و با استفاده از این حقیقت که $dN(\mathbf{v})$ و $\nabla_\mathbf{v} \mathbf{N}$ دارای قسمت برداری یکسان برای هر $\mathbf{v} \in S_p$، $p \in S$ می‌باشند. نتیجه می‌گیریم که

$$K(p) = (-1)^n \det \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{v}_1} \mathbf{N} \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{v}_n} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}(p) \end{pmatrix} \Big/ \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \\ \mathbf{N}(p) \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} dN(\mathbf{v}_1) \\ \vdots \\ dN(\mathbf{v}_n) \\ \mathbf{N}^{S^n}(\mathbf{N}(p)) \end{pmatrix} \Big/ \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \\ \mathbf{N}(p) \end{pmatrix}$$

که در آن $\mathbf{v}_n$, ... , $\mathbf{v}_1$ یک پایهٔ دلخواه برای S_p می‌باشد و $\mathbf{N}^{S^n}$ ***سوی استاندارد*** روی S^n است که به صورت $\left(q , (-1)^n q\right)$ = $\mathbf{N}^{S^n}(q)$ تعریف می‌شود. بنابراین $K(p) > 0$ اگر و فقط اگر dN هر پایه برای S_p سازگار با سوی S را به یک پایه برای $S_{N(p)}{}^n$ سازگار با سوی استاندارد روی S^n بنگارد. هر نگاشت هموار $f{:}S \to \tilde{S}$ مفروض از یک n- رویه سودار در $\mathbf{R}^{n+1}$ به دیگری و هر $p \in S$ با شرط آنکه $df_p{:}S_p \to \tilde{S}_{f(p)}$ غیرمنفرد باشد را ***حافظ سو*** در p نامیده می‌شود اگر df پایه‌های برای S_p سازگار با سوی روی S را به پایه‌های برای $\tilde{S}_{f(p)}$ سازگار با سوی روی $\tilde{S}$ بنگارد. در غیر اینصورت f را ***وارونگر سو*** در p نامند. بنابراین K(p) یعنی ***خمیدگی گاوس - کرونکر*** در یک نقطه p از یک n- رویه سودار $S \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ مثبت است اگر و فقط اگر نگاشت گاوس $N{:}S \to \mathbf{S}^n$ حافظ سو در p باشد و K(p) منفی است اگر و فقط اگر N وارونگر سو در p باشد.

همانطوری که طول یک خم پارامتری تحت یک پارامترسازی مجدد تغییرناپذیر است، حجم n- رویه منفرد نیز تحت پارامترسازی مجدد تغییرناپذیر است. یک ***پارامترسازی مجدد*** از یک n- رویه منفرد $\varphi{:}U_1 \to \mathbf{R}^{n+k}$ یک n- رویه منفرد $\psi{:}U_2 \to \mathbf{R}^{n+k}$ به شکل $\psi = \varphi \circ h$ است که در آن $h{:}U_2 \to U_1$ یک نگاشت هموار با وارون هموار و با دترمینان ژاکوبی همه جا مثبت باشد (ر.ک شکل ۱۷-۳). توجه کنید که هر زوج از چنین n- رویه‌های منفرد همیشه دارای تصویرهای یکسان می‌باشند. به علاوه اگر φ یک n- رویه پارامتری و ψ یک پارامترسازی مجدد آن باشد، در اینصورت ψ یک n- رویه پارامتری می‌باشد و اگر $k = 1$ باشد میدان‌های برداری سوی $\mathbf{N}^\varphi$ در طول φ و $\mathbf{N}^\psi$ در طول ψ توسط $\mathbf{N}^\psi(p) = \mathbf{N}^\varphi\left(h(p)\right)$ به ازای هر $p \in U_2$ به هم مربوط می‌شوند (تمرین ۱۷-۱۱).



شکل ۱۷-۳- ψ یک پارامترسازی مجدد از φ است.

● **قضیهٔ ۳.** فرض کنید $\varphi:U_1 \to \mathbb{R}^{n+k}$ یک n- رویه منفرد باشد و فرض کنید $\psi = \varphi o h : U_2 \to \mathbb{R}^{n+k}$ یک پارامتری‌سازی مجدد φ باشد. در اینصورت $V(\psi) = V(\varphi)$.

برهان. فرض کنید E_i^φ , E_i^ψ به ترتیب نشانگر میدان‌های برداری مختصی در طول φ و در طول ψ باشد. در اینصورت فرض کنید X_i نشانگر میدان برداری روی $\mathbb{R}^n$ تعریف شده بصورت $X_i(p) = (p, 0, \dots, 0, 1, \dots, 0)$ باشد که در آن ۱ در $(i+1)$ امین نقطه است، برای $p \in U_2$ داریم

$$E_i^\psi(p) = d\psi\big(X_i(p)\big) = d(\varphi \circ h)\ \big(X_i(p)\big) = d\varphi\big(dh\ (X_i(p))\big)$$
$$= d\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} h_{ki}(p)\ X_k(p)\ (h(p))\right) = \sum_{k=1}^{n} h_{ki}(p)\ d\varphi\ \big(X_k(h(p))\big)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} h_{ki}(p)\ E_k^\varphi(h(p))$$

که در آن $h_{ij} = \dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}$ درآیه‌های ماتریس ژاکوبی برای h است، بنابراین

$$E_i^\psi \cdot E_j^\psi = \sum_{k,l=1}^{n} h_{ki}\, h_{lj}\ E_k^\varphi \circ h \cdot E_l^\varphi \circ h$$

و

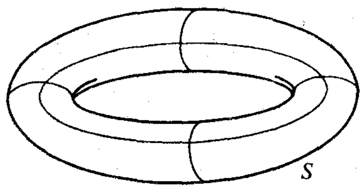
$$\det\,(E_i^\psi \cdot E_j^\psi) = \big(\det\,(h_{ij})\big)^2 \det\,(E_i^\varphi \circ h \cdot E_j^\varphi \circ h) = J_h^{\,2} \det\,(E_i^\psi \circ h \cdot E_j^\psi \circ h)$$

که در آن J_h دترمینان ژاکوبین h است. با استفاده از قضیه تغییر متغیر برای انتگرال چندگانه داریم

$$V(\psi) = \int_{U_2} \big(\det\,(E_i^\psi \cdot E_j^\psi)\big)^{1/2}$$
$$= \int_{h^{-1}(U_1)} \big(\det\,(E_i^\varphi \circ h \cdot E_j^\varphi \circ h)\big)^{1/2} J_h$$
$$= \int_{U_1} \det\,(E_i^\varphi \cdot E_j^\varphi)^{1/2} = V(\varphi).$$ □

اکنون ما به n- رویه‌های سودار در $\mathbb{R}^{n+1}$ می‌پردازیم، حجم S را بوسیله جمع کردن زیرمجموعه‌هایی که تصاویر یک به یک از n- رویه‌های منفرد می‌باشند، بدست خواهیم آورد.

هرچند که، معمولاً S را نمی‌توان به صورت اجتماع چنین مجموعه‌های جدا از هم بیان کرد ولی ممکن است که S را به صورت اجتماع تصاویر مستطیل‌های بسته‌ای که تنها در طول مرزشان تقاطع دارند، بیان کرد (ر.ک. شکل ۱۷-۳). مجموعهٔ نقاط مرزی تأثیری در انتگرال حجم نخواهند داشت و حجم S را می‌توان به صورت مجموع حجم این "مستطیل‌های منفرد" دانست. گرچه این روند به طور شهودی کاملاً جذاب است ولی اجرای محاسبات دقیق آن مشکل می‌باشد. لذا ما خط مشئ دیگری را اتخاذ می‌کنیم.



شکل ۱۷-۱۴ رویه S را می‌توان به صورت اجتماع نواحی مستطیلی بیان کرد که تقاطع آنها فقط در طول مرزهای مستطیل‌ها می‌باشد.

تابع زیر علامت انتگرال حجم

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_n \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}$$

از یک پارامترسازی موضعی یک به یک $\varphi: U \to S$ را در نظر می‌گیریم. اگر φ را با پارامترسازی مجدد $\psi = \varphi \circ h : U_2 \to S$ جایگزین کنیم، تابع زیر انتگرال حجم به قسمتی تغییر می‌کند که میدانهای برداری مختص φ جایگزین میدانهای برداری مختص ψ می‌شوند، اما انتگرال حجم عوض نمی‌شود. این امر پیشنهاد می‌کند که قسمت اصلی تابع زیر علامت انتگرال حجم در $p \in S$ تابع ζ است که به هر مجموعه مرتب $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ از n بردار در S_p عدد

$$\zeta(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \\ \mathbf{N}(p) \end{pmatrix}$$

را نظیر می‌کند. ξ را **فرم حجم** روی S نامیده می‌شود. ملاحظه خواهیم کرد که از فرم حجم می‌توان روی یک n- رویِ سودار فشرده S در $\mathbf{R}^{n+1}$ انتگرال گرفت که انتگرال آن حجم S خواهد بود. ξ مثالی از یک n- فرم دیفرانسیلی است.

یک **k- *فرم دیفرانسیل*** روی یک n- رویه S که به طور ساده یک k- فرم نامیده می‌شود یک تابع ω است که به هر مجموعه مرتب $\{\mathbf{v}_1 , \dots , \mathbf{v}_k\}$ از k بردار در S_p، $p \in S$ یک عدد حقیقی $\omega(\mathbf{v}_1 , \dots , \mathbf{v}_k)$ نظیر می‌کند به قسمی که

(یک) برای هر $i \in \{1, \dots , k\}$، $\mathbf{v}_1 , \dots , \mathbf{v}_{i-1}$، $\mathbf{v}_{i+1} , \dots , \mathbf{v}_k \in S_p$، $p\in S$، تابعی که $\mathbf{v} \in S_p$ را به $\omega(\mathbf{v}_1 , \dots , \mathbf{v}_{i-1} , \mathbf{v} , \mathbf{v}_{i+1} , \dots , \mathbf{v}_k) \in \mathbf{R}$ می‌نگارد خطی باشد و

(دو) برای هر $\mathbf{v}_1 , \dots , \mathbf{v}_k \in S_p$ و هر جایگشت σ از اعداد صحیح $\{1 , \dots , k\}$

$$\omega(\mathbf{v}_{\sigma(1)} , \dots , \mathbf{v}_{\sigma(k)}) = (\text{sign}\ \sigma)\ \omega(\mathbf{v}_1 , \dots , \mathbf{v}_k).$$

توجه کنید که شرایط (یک) و (دو) به سادگی بیانگر خواص دترمینان می‌باشند وقتی که $k = n$ و ω فرم حجم ξ می‌باشد. خاصیت (یک) **چند خطی بودن** نامیده می‌شود و خاصیت (دو) را ***متقارن چپ*** نامند.

k فرم ω و میدانهای برداری مماس $\mathbf{X}_1 , \dots , \mathbf{X}_k$ روی S را در نظر بگیرید، می‌توان اندازه تابع حقیقی $\omega(\mathbf{X}_1 , \dots , \mathbf{X}_k)$ روی S را بصورت زیر تعریف کرد

$$\left[\omega\ (\mathbf{X}_1 , \dots , \mathbf{X}_k)\right]\ (p) = \omega\ \left(\mathbf{X}_1(p) , \dots , \mathbf{X}_k(p)\right) .$$

k- فرم ω ***هموار*** نامیده می‌شود اگر نگاشت $\omega\ (\mathbf{X}_1 , \dots , \mathbf{X}_k) : S \to \mathbf{R}$ وقتی که میدانهای برداری $\mathbf{X}_1 , \dots , \mathbf{X}_k$ هموار هستند، هموار باشد.

مثال ۱. یک ۱- فرم روی S به طور ساده یک تابع $\omega{:}T(S) = \bigcup_{p\in S} S_p \to \mathbf{R}$ می‌باشد به‌قسمی‌که تحدید ω به S_p برای هر $p \in S$ خطی باشد. بنابراین برای مثال اگر $\mathbf{X}$ یک میدان برداری مماس روی S باشد در اینصورت تابع $\omega_{\mathbf{X}}{:}T(S) \longrightarrow \mathbf{R}$ تعریف شده به صورت

$$\omega_{\mathbf{X}}(\mathbf{v}) = \mathbf{X}(p)\ .\ \mathbf{v} \qquad\qquad (\mathbf{v} \in S_p\ , p \in S)$$

یک ۱- فرم روی S است. $\omega_{\mathbf{X}}$ به ۱- ***فرم دوگان*** روی $\mathbf{X}$ موسوم است.

مثال ۲. فرض کنیم ω_1 , ω_2 **۱- فرمهایی روی S باشند، در اینصورت تابع $\omega_1 \wedge \omega_2$ که به** صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \omega_1(\mathbf{v}_1)\,\omega_2(\mathbf{v}_2) - \omega_1(\mathbf{v}_2)\,\omega(\mathbf{v}_1)$$

یک ۲- فرم روی S است. $\omega_1 \wedge \omega_2$ **ضرب خارجی** ω_1, ω_2 است.

مثال ۳. فرم حجم ξ روی یک n- رویه سودار S در $\mathbf{R}^{n+1}$ یک n- فرم هموار روی S است.

مثال ۴. فرض کنیم ω یک k- فرم $(k > 1)$ روی S باشد و فرض کنیم $\mathbf{X}$ یک میدان برداری مماس روی S باشد در اینصورت تابع $\mathbf{X} \lrcorner \omega$ تعریف شده به صورت

$$(\mathbf{X} \lrcorner \omega)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \omega\left(\mathbf{X}(p), \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\right)$$

که $(k-1)$ فرم روی S است. $\mathbf{X} \lrcorner \omega$ **ضرب درونی** $\mathbf{X}$, ω گوییم.

مثال ۵. فرض کنید ω یک k- فرم روی یک m- رویه $\tilde{S}$ باشد و $f:S \to \tilde{S}$ یک نگاشت هموار از n- رویه S در $\tilde{S}$ باشد، در اینصورت نگاشت $f^*\omega$ تعریف شده به صورت

$$(f^*\omega)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \omega\left(df(\mathbf{v}_1), \dots df(\mathbf{v}_k)\right)$$

یک k- فرم روی S است. $f^*\omega$ را **برگردان** ω تحت f نامند.

مجموع دو k- فرم ω_1, ω_2 روی یک n- رویه S یک k- فرم $\omega_1 + \omega_2$ تعریف شده به صورت

$$(\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \omega_1(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) + \omega_2(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$$

می‌باشد. ***حاصلضرب*** یک تابع $f:S \to \mathbf{R}$ و یک k- فرم ω روی S، k فرم $f\omega$ روی S تعریف شده به صورت

$$(f\omega)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = f(p)\,\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$$

می‌باشد که در آن $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ ، $p \in S$. توجه کنید که مجموع دو k- فرم هموار، هموار و ضرب یک تابع هموار و یک k- فرم هموار، هموار است.

برای یک k- فرم هموار ω روی یک n- رویه S و φ یک k- رویهٔ منفرد در S (یعنی φ تصویر $\subset S$) ***انتگرال ω روی φ*** به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\int_\varphi \omega = \int_U \omega(\mathbf{E}_1^\varphi, \dots, \mathbf{E}_k^\varphi)$$

به شرط آنکه این انتگرال اخیر موجود باشد. میدان‌های برداری $\mathbf{E}_i^\varphi$ البته میدان‌های برداری مختص در طول φ می‌باشند. انتگرال در حالت خاصی که تابع $\omega(\mathbf{E}_1^\varphi, \dots, \mathbf{E}_k^\varphi)$ خارج از یک زیرمجموعهٔ

فشردهٔ U صفر شود وجود خواهد داشت.

مثال. برای φ یک پارامترسازی موضعی S و ξ یک فرم حجم روی S داریم

$$\int_{\varphi} \xi = V(\varphi) .$$

توجه کنید که اگر ψ یک پارامترسازی مجدد از یک k- رویه منفرد φ در S باشد و ω یک k- فرم هموار روی S باشد به قسمی که $\int_{\varphi} \omega$ وجود داشته باشد، آنگاه $\int_{\psi} \omega$ موجود و برابر با $\int_{\psi} \omega = \int_{\varphi} \omega$ می‌باشد.درواقع اگر $\varphi : U_{۱} \to S$ و $\psi = \varphi \circ h : U_{۲} \to S$، آنگاه مانند اثبات قضیه ۳، $E_i^{\psi} = \sum_{j=۱}^{k} h_{ij} \, E_j^{\psi} \circ h$

بنابراین

$$\int_{\psi} \omega = \int_{U_{۲}} \omega \, (E_{۱}^{\psi} , \dots , E_k^{\psi})$$

$$= \int_{U_{۲}} \omega \left(\sum_{j_{۱}=۱}^{k} h_{j_{۱}۱} \, E_{j_{۱}}^{\varphi} \circ h , \dots \sum_{j_k=۱}^{k} \; h_{j_k k} \, E_{j_k}^{\varphi} \circ h \right)$$

$$= \int_{U_{۲}} \sum_{j_{۱} \dots j_k} \; h_{j_{۱}۱} \dots h_{j_k k} \omega \, (E_{j_{۱}}^{\varphi} \circ h , \dots , E_{j_k}^{\varphi} \circ h)$$

که برابری اخیر نتیجه‌ای از چند خطی بودن ω می‌باشد. بنابر متقارن چپ بودن ω، $\omega(E_{j_{۱}}^{\varphi} \circ h , \dots , E_{j_k}^{\varphi} \circ h)$ صفر است هرگاه دو (یا بیشتر) از j_i ها با هم برابر باشند و بالاخره $\omega(E_{j_{۱}}^{\varphi} , \dots , E_{j_k}^{\varphi}) = (\text{sign}\, \sigma) \, \omega(E_i^{\varphi} , \dots , E_k^{\varphi})$ که در آن $j_{۱} = \sigma(۱) , \dots , j_k = \sigma(k)$ برای یک جایگشت σ از $\{۱ , \dots , k\}$. بنابراین

$$\int_{\psi} \omega = \int_{U_{۲}} \sum_{\sigma} (\text{sign}\, \sigma) \, h_{\sigma(۱)۱} \dots h_{\sigma(k)k} \, \omega(E_{۱}^{\varphi} \circ h , \dots , E_k^{\varphi} \circ h)$$

$$= \int_{h^{-۱}(U_{۱})} \left(\omega(E_{۱}^{\varphi} , \dots , E_k^{\varphi}) \circ h \right) J_h$$

$$= \int_{U_{۱}} \omega(E_{۱}^{\varphi} , \dots , E_k^{\varphi}) = \int_{\varphi} \omega ,$$

همانطور که ادعا شده بود.

اکنون ما به تعریف انتگرال برای یک n- فرم ω روی یک n- رویه سودار فشرده S می‌پردازیم و این امر با بیان n- فرم به صورت مجموع n- فرمهای ω_i که هر کدام از آنها خارج از تصویر یک

پارامترسازی موضعی یک‌به‌یک φ_i صفر می‌باشد، انجام‌می‌شود. دراینصورت $\int_S \omega = \sum_i \int_{\varphi_i} \omega_i$ تعریف می‌شود. n- فرمهای ω_i از ضرب ω با توابع f_i با این خاصیت که $\sum_i f_i = ۱$، بدست می‌آید.

یک ***افراز یکانی*** روی یک n- رویه S گردآیهٔ با پایان‌ازتوابع هموار $f_i: S \to \mathbf{R}$ $(i \in \{۱,...,m\})$ می‌باشد به قسمی که

(یک) $f_i(q) \geq ۰$ به‌ازای هر $i \in \{۱ , ... , m\}$ و هر $q \in S$

(دو) برای هر $i \in \{۱ , ... , m\}$ یک پارامترسازی موضعی یک به یک $\varphi_i: U \to S$ وجود دارد به قسمی که f_i ها خارج از تصویر یک مجموعهٔ فشرده U_i تحت φ_i صفر باشد و

(سه) $\sum_{i=۱}^{m} f_i(q) = ۱$ برای هر $q \in S$.

اگر $\{\varphi_i\}$ گردآیه‌ای دلخواه از پارامترسازی‌های موضعی یک به یک با خاصیت (دو) باشد، افراز یکانی $\{f_i\}$ ***مادون*** به $\{\varphi_i\}$ نامیده می‌شود.

تذکر. شرط با پایان بودن گردآیهٔ توابع $\{f_i\}$ را می‌توان با شرطی با محدودیت کمتر بنام موضعاً باپایان بودن جایگزین کرد اما در اینجا افراز یکانی با پایان برای ما کافی خواهد بود.

● **قضیهٔ ۴.** ***فرض کنید S یک n- رویه فشرده در $\mathbf{R}^{n+۱}$ باشد، در اینصورت یک افراز یکانی روی S وجود دارد.***

برهان. ابتدا برای هر $p \in S$ یک تابع کوهانی $g_p: S \to \mathbf{R}$ می‌سازیم. برای $p \in S$ مفروض، فرض کنید $\varphi_p: U_p \to S$ یک پارامترسازی موضعی یک به یک S باشد که تصویرش یک مجموعه باز حول p در S است، همانند ساختار اثبات قضیهٔ ۱ از فصل ۱۵ یک $r_p > ۰$ را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$B_p = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \| x - \varphi_p^{-۱}(p) \| \leq r_p\} \subset U_p$$

و تابع کوهانی $g_p: S \to \mathbf{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g_p(q) = \begin{cases} e^{-۱/(r_p^{۲} - \|\varphi_p^{-۱}(q) - \varphi_p^{-۱}(q)\|^{۲})} & q \in V_p \text{ برای} \\ ۰ & q \notin V_p \text{ برای} \end{cases}$$

که در آن

$$V_p = \{q \in \varphi_p(U_p) : \|\varphi_p^{-۱}(q) - \varphi_p^{-۱}(p)\| < r_p\}$$

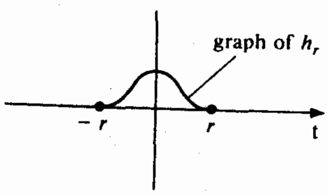
(ر.ک. شکل ۱۷-۵). تابع g_p هموار است (تمرین ۱۷-۱۷) و g_p خارج از تصویر مجموعه فشرده $B_p \subset U_p$ تحت φ_p صفر می‌باشد و برای هر q در مجموعه باز V_p حول p در S، داریم $g_p(q) > ۰$.

فرض کنید که در حال حاضر بتوانیم گردآیهٔ با پایان $\{p_1 , \ldots , p_m\}$ از نقاط در S را بیابیم به‌قسمی که $\bigcup_{i=1}^{m} V_{p_i} = S$ ، می‌توانیم $f_i : S \to \mathbf{R}$ را برای هر $i \in \{1 , \ldots , m\}$ به صورت

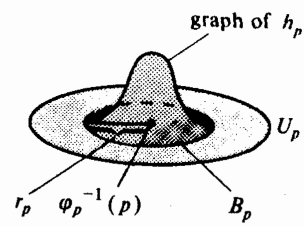
$$f_i(q) = g_{p_i}(q) \Big/ \sum_{j=1}^{m} g_{p_j}(q)$$

تعریف کنیم. توجه کنید که مخرج کسر، $\sum_{j=1}^{m} g_{p_j}(q)$ هیچ جا صفر نیست، چون هر $g_{p_j}(q) \geq 0$ و $g_{p_j}(q) > 0$ وقتی j به‌قسمی است که $q \in V_{p_j}$. در اینصورت $\{f_i\}$ یک افراز یکانی روی S، مادون به $\{\varphi_{p_i}\}$ می‌باشد.

سرانجام، اینکه یک مجموعه متناهی $\{p_1 , \ldots , p_m\}$ از نقاط در S وجود دارد به‌قسمی که $\bigcup_{i=1}^{m} V_{p_i} = S$ نتیجه‌ای از قضیهٔ هاینه - بورل می‌باشد. زیرا که $\{ V_p : p \in S \}$ یک پوشش باز زیرا که $\{V_p : p \in S\}$ یک پوشش باز S است $(\bigcup_{p\in S} V_p = S)$، و بنابر قضیهٔ هاینه - بورل هر پوشش باز از مجموعهٔ فشرده S دارای یک زیرپوشش باپایان است، لذا یک گردآیهٔ باپایان $\{V_{p_1} , \ldots , V_{p_m}\}$



(a)



(b)

شکل ۱۷-۵ ساختار یک تابع کوهانی

(الف) تابع $h_r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ داده شده توسط

$$h_r(t) = \begin{cases} e^{-1/(r^2-t^2)} & \text{if}\,|t| < r \\ 0 & \text{if}\,|t| \geq r \end{cases}$$

هموار است.

(ب) تابع کوهانی $g_p : S \to \mathbf{R}$ به‌قسمی‌که g_p در خارج‌از تصویر پارامترسازی موضعی $\varphi_p : U_p \to S$ صفر است و $g_p \circ \varphi_p = h_p$ که در آن $h_p(x) = h_{r_p}\left(\|x - \varphi_p^{-1}(p)\|\right)$ برای هر $x \in U_p$.

از این مجموعه‌ها با شرط $\bigcup_{i=1}^{m} V_{p_i} = S$ وجود دارد.

انتگرال یک n- فرم هموار ω روی یک n- رویه سودار فشرده $S \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ به صورت عدد حقیقی

$$\int_S \omega = \sum_i \int_{\varphi_i} (f_i \omega)$$

تعریف می‌شود که در آن $\{f_i\}$ یک افراز یکانی روی S مادون به یک گردآیهٔ $\{\varphi_i\}$ از پارامترسازی‌های موضعی یک به یک S می‌باشد. توجه کنید که $\int_S \omega$ بستگی به انتخاب افراز یکانی ندارد. زیرا اگر $\{\bar{f}_i\}$ یک افراز یکانی دیگری، مادون به پارامترسازیهای موضعی $\{\bar{\varphi}_j\}$ باشد، در اینصورت

$$\sum_j \int_{\bar{\varphi}_j} (\bar{f}_j \omega) = \sum_j \int_{\bar{\varphi}_j} \left(\sum_i f_i\right) \bar{f}_j \omega = \sum_j \sum_i \int_{\bar{\varphi}_j} (f_i \bar{f}_j \omega)$$

$$\overset{(1)}{=} \sum_{i,j} \int_{\bar{\varphi}_{ji}} (f_i \bar{f}_j\, \omega) \overset{(2)}{=} \sum_{i,j} \int_{\varphi_{ij}} (\bar{f}_j f_i\, \omega)$$

$$\overset{(3)}{=} \sum_i \sum_j \int_{\varphi_i} (\bar{f}_j f_i\, \omega) = \sum_i \int_{\varphi_i} \left(\sum_j \bar{f}_j \right) f_i \omega = \sum_i \int_{\varphi_i} (f_i \omega)$$

که $\bar{\varphi}_{ji}$ تحدید $\bar{\varphi}_j$ به مجموعه باز $\bar{\varphi}_j^{-1}(V_{ij})$، $V_{ij} = (\text{تصویر } \varphi_i) \cap (\text{تصویر } \bar{\varphi}_j)$ و φ_{ij} تحدید φ_i به $\varphi_i^{-1}(V_{ij})$ می‌باشد. برابریهای (۱) و (۳) به خاطراینکه $f_i \bar{f}_j$ خارج از V_{ij} صفر است، برقرارند. برابری (۲) به‌خاطراینکه φ_{ij} یک پارامترسازی مجدد از $\bar{\varphi}_{ji}$ می‌باشد برقرار می‌گردد (تمرین ۱۷-۱۸).

با استفاده از انتگرال فرمها، می‌توان **حجم** یک n- رویه سودار فشرده $S \subset \mathbf{R}^{n+1}$ را انتگرال روی S از فرم حجم ζ آن یعنی $V(S) = \int_S \zeta$ تعریف کرد. همچنین می‌توانیم ***انتگرال*** روی S از هر تابع هموار $f: S \to \mathbf{R}$ را به صورت

$$\int_S f = \int_S f \zeta$$

تعریف کرد.

تمرین

۱۷-۱. مساحت استوانهٔ پارامتری شده در $\mathbf{R}^3$ به صورت زیر که از آن یک خط برداشته شده است بیابید.

$$\varphi(\theta , t) = (r \cos\theta , r \sin\theta , t) \quad 0 < \theta < 2\pi , 0 < t < h .$$

۱۷-۲. مساحت مخروط پارامتری شده در $\mathbf{R}^3$ به صورت زیر که از آن یک خط برداشته شده است بیابید.

$$\varphi(\theta , t) = \big(tr \cos\theta , tr \sin\theta , (1 - t) h\big) \quad 0 < \theta < 2\pi , 0 < t < 1 .$$

۱۷-۳. مساحت چنبرهٔ پارامتری شده در $\mathbf{R}^3$ به صورت زیر که از آن دو دایره برداشته شده است بیابید.

$$\varphi(\theta ,\phi) = \big((a + b \cos\phi) \cos\theta , (a + b \cos\phi) \sin\theta , b \sin\phi\big), \quad 0 < \theta < 2\pi , 0<\phi<2\pi .$$

۱۷-۴. مساحت چنبرهٔ پارامتری شده در $\mathbf{R}^4$ به صورت زیر که از آن دو دایره برداشته شده است بیابید.

$$\varphi(\theta , \phi) = (a \cos\theta , a \sin\theta , b \cos\phi , b \sin\phi) \quad 0 < \theta < 2\pi , \quad 0 < \phi < 2\pi .$$

۱۷-۵. حجم ۳-کره یکهٔ پارامتری شده در $\mathbf{R}^4$ به صورت زیر که از آن قسمتی از یک ۲-کره برداشته شده است بیابید.

$$\varphi(\phi , \theta , \psi) = (\sin\phi \sin\theta \sin\psi , \cos\phi \sin\theta \sin\psi , \cos\theta \sin\psi , \cos\psi) ,$$
$$0 < \phi < 2\pi , 0 < \theta < \pi , \quad 0 < \psi < \pi .$$

۱۷-۶. نشان‌دهیدکه‌مساحت رویه پارامتری‌شده دوّار $\varphi(t,\theta) = \big(x(t), y(t) \cos\theta, y(t) \sin\theta\big)$ $a < t < b$، $0 < \theta < 2\pi$ که در آن $y(t) > 0$ برای $a < t < b$ توسط فرمول زیر بدست می‌آید.

$$A(\varphi) = \int_a^b 2\pi y(t) \ \big((x'(t))^2 \ (y'(t)^2)\big)^{1/2} \, dt$$

۱۷-۷. فرض کنید $g:U \to \mathbf{R}$ یک تابع هموار روی مجموعه باز $U \subset \mathbf{R}^n$ باشد. اگر

$\varphi:U \to \mathbf{R}^{n+1}$ بوسیله $\varphi(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_n, g(u_1, \dots, u_n))$ تعریف شود، نشان دهید که

$$V(\varphi) = \int_U (1 + \sum (\partial g/\partial u_i))^{1/2}.$$

۸-۱۷. فرض کنید $\varphi_n:U \to \mathbf{R}^{n+1}$ به صورت

$$\varphi_n(\theta_1, \dots, \theta_n) = (\sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_n, \cos\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_n, \cos\theta_2 \sin\theta_3 \dots \sin\theta_n, \dots, \cos\theta_{n-1} \sin\theta_n, \cos\theta_n).$$

تعریف شود که در آن

$$U = \{(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbf{R}^n, 0 < \theta_1 < 2\pi, 0 < \theta_i < \pi \quad \text{برای} \quad 2 \le i \le n\}.$$

(الف) نشان دهید که φ_n یک n- رویه پارامتری است.

(ب) نشان دهید که φ_n، U را به صورت یک به یک روی یک زیرمجموعه از n-کره یکه در S^n می‌نگارد

(پ) نشان دهید که «$S^n \setminus$ (تصویر φ_n)» در $(n-1)$کرهٔ $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_1 = 0\}$ قرار دارد (این امر نتیجه می‌دهد که $V(\varphi_n) = V(S^n)$، چراکه «$S^n \setminus$ (تصویر φ_n)» دارای حجم n- بعدی صفر می‌باشد.

(ت) فرمولی برای بیان حجم φ_n به صورت مضربی از حجم φ_{n-1} پیدا کنید [راهنمایی: با اضافه‌کردن مضرب مناسبی از سطر ماقبل آخر به سطر آخر یک صفر در درآیهٔ گوشهٔ ماتریس

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \\ N \end{pmatrix}$$

بدست آورید. سپس دترمینان را برحسب ستون آخر بسط دهید. آنگاه عاملهای $\sin\theta_n$ را بیرون کشیده و نسبت به θ_n انتگرال بگیرید.]

(ث) $V(\varphi_n)$ را بیابید.

۱۷-۹. فرض کنید $\varphi: U \to \mathbf{R}^3$ یک ۲- رویه پارامتری در $\mathbf{R}^3$ باشد. نشان دهید که مساحت φ توسط فرمول $A(\varphi) = \int_u \| \partial\varphi / \partial u_1 \times \partial\varphi / \partial u_2 \|$ بدست می‌آید.

۱۷-۱۰. فرض کنید $\varphi: U \to \mathbf{R}^{n+1}$ یک n- رویه پارامتری در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد. اگر $\mathbf{W}$ میدان برداری در طول φ باشد که i امین مؤلفه آن در $p \in U$، $(-1)^{n+i-1}$ برابر دترمینان ماتریس بدست آمده از حذف i امین سطر ماتریس ژاکوبی φ در p باشد (یا i امین ستون از ماتریس

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_n(p) \end{pmatrix}$$

باشد).

(الف) نشان دهید که $\mathbf{W}$ یک میدان برداری قائم در طول φ می‌باشد و $\mathbf{W} / \|\mathbf{W}\|$ میدان برداری سو در طول φ است.

(ب) نشان دهید که $V(\varphi) = \int_u \|\mathbf{W}\|$.

۱۷-۱۱. فرض کنید $\varphi: U_1 \to \mathbf{R}^{n+1}$ یک n- رویه پارامتری باشد و $\psi = \varphi \circ h : U_2 \to \mathbf{R}^{n+1}$ یک پارامترسازی مجدد φ باشد. نشان دهید که $\mathbf{N}^\varphi$, $\mathbf{N}^\psi$ به ترتیب میدانهای برداری سو در طول φ و ψ می‌باشند [راهنمایی : نشان دهید که

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1^\psi \\ \vdots \\ \mathbf{E}_n^\psi \\ \mathbf{N}^\psi \end{pmatrix} = J_h \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1^\varphi \circ h \\ \vdots \\ \mathbf{E}_n^\varphi \circ h \\ \mathbf{N}^\psi \circ h \end{pmatrix}$$

که در آن J_h دترمینان ژاکوبی h است.]

۱۷-۱۲. فرض کنید ω یک k- فرم روی n- رویهٔ S باشد.

(الف) نشان‌دهید که اگر $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ یک‌مجموعهٔ‌وابستهٔ خطی‌ازبردارهایی در S_p باشد، $p \in S$،

آنگاه $\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = 0$.

(ب) نشان دهید که اگر $k > n$، آنگاه ω همواره صفر است.

۱۷-۱۳. فرض کنید S یک n- رویهٔ سودار در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد و فرض کنید ζ فرم حجم روی S باشد.

الف) نشان دهید که اگر $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ یک پایهٔ متعامد یکه برای S_p باشد و $p \in S$، در اینصورت $\zeta(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \pm 1$ و $\zeta(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = +1$ اگر و تنها اگر پایه $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ سازگار با سوی $\mathbf{N}$ روی S باشد.

(ب) نشان دهید که اگر ω یک n- فرم روی S باشد، آنگاه یک تابع $f: S \to \mathbf{R}$ وجود دارد بهقسمی‌که $\omega = f\zeta$. [راهنمایی: $f(p) = \omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ که در آن $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای S_p سازگار با سوی $\mathbf{N}$ روی S می‌باشد را در نظر بگیرید در اینصورت مقدارهای ω، $f\zeta$ را روی $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ که در آن $\mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{v}_i$ محاسبه کنید.]

۱۷-۱۴. فرض کنید ω_1 یک k- فرم و ω_2 یک l- فرم روی n- رویه سودار $S \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ باشند، ***ضرب برونی*** $\omega_1 \wedge \omega_2$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum (\operatorname{sign}\sigma)\, \omega_1(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(k)})\, \omega_2(\mathbf{v}_{\sigma(k+1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(k+l)})$$

برای $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+l} \in S_p$ که در آن مجموع روی همهٔ جایگشت‌های σ از $\{1, \dots, k+l\}$ است.

(الف) نشان دهید که $\omega_1 \wedge \omega_2$ یک $(k+l)$- فرم روی S می‌باشد.

(ب) نشان دهید که $\omega_2 \wedge \omega_1 = (-1)^{kl}\, \omega_1 \wedge \omega_2$.

(پ) نشان دهید که اگر ω_3 یک l- فرم دیگری روی S باشد در اینصورت

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3) = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3 .$$

(ت) نشان دهید که اگر ω_3 یک m- فرم روی S باشد در اینصورت

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) .$$

(ث) نشان دهیدکه‌اگر $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{n+1}$ میدان‌های برداری مماس روی S باشندبه‌قسمی‌که برای‌هر $p \in S$ و $\{\mathbf{X}_1(p), \dots, \mathbf{X}_{n+1}(p)\}$ یک پایه متعامد یکه برای S_p سازگار با سوی S باشد

و اگر به‌ازای هر i، ω_i ۱- فرم روی S دوگان به $\mathbf{X}_i$ باشد، در اینصورت

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_n = \xi$$

که در آن ξ فرم حجم روی S می‌باشد [راهنمایی: با استفاده از استقراء ریاضی ثابت کنید که برای $1 \leq k \leq n$، $(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k)\,(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_k) = 1$ و $\mathbf{X}_i \lrcorner\ (\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k) = 0$ برای همهٔ $i > k$ سپس تمرین ۱۷-۱۳ را بکار برید.]

۱۷-۱۵. فرض کنید S، n- رویه سودار در $\mathbf{R}^{n+1}$ و $\tilde{S}$ یک m- رویه سودار در $\mathbf{R}^{m+1}$ باشد. اگر $f:S \to \tilde{S}$ یک نگاشت هموار و ω یک k- فرم هموار روی $\tilde{S}$ باشد آنگاه

(الف) نشان دهید که $f^*\omega$ یک k- فرم هموار روی S می‌باشد.

(ب) نشان دهید که اگر φ یک k- رویه منفرد در S باشد آنگاه

$$\int_\varphi f^*\omega = \int_{f\circ\varphi} \omega .$$

(پ) نشان دهید که اگر $m = n$ و اگر f یک دیفئومورفیسم حافظ سو باشد، آنگاه

$$\int_S f^*\omega = \int_{\tilde{S}} \omega .$$

۱۷-۱۶. نشان دهید که نگاشت متقاطر $f:S^n \to S^n$ روی n- کره S^n تعریف شده به صورت $f(p) = -p$، حافظ سو است اگر و تنها اگر n فرد باشد.

۱۷-۱۷. (الف) نشان دهید که تابع $h:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ تعریف شده به صورت

$$h(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

هموار است.

(ب) نتیجه بگیرید که برای هر $r > 0$، تابع $h_r:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ داده شده به صورت

$$h_r(t) = \begin{cases} e^{-1/(r^2-t^2)} & |t| < r \\ 0 & |t| \geq r \end{cases}$$

هموار است و تابع کوهانی g_p تعریف شده در اثبات قضیه ۴ نیز هموار است.

۱۷-۱۸. فرض کنید S یک n- رویه سودار در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد و $\varphi:U \to S$ و $\psi:V \to S$

پارامترسازیهای موضعی یک‌به‌یک‌از S باشند. نشان‌دهیدکه‌اگر $W = \varphi(U) \cap \psi(V) \neq \varnothing$ آنگاه $h = \varphi^{-1} \circ \psi|_{\psi^{-1}(W)}$ یک دیفئومورنیسم حافظ سو از $\psi^{-1}(W)$ به $\varphi^{-1}(W)$ می‌باشد. نتیجه بگیرید که $\psi|_{\psi^{-1}(W)}$ یک پارامترسازی مجدد $\varphi|_{\varphi^{-1}(W)}$ می‌باشد.

۱۷-۱۹. فرض کنید $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ میدانهای برداری روی $\mathbf{R}^3$ و $\omega_{\mathbf{X}}$ و $\omega_{\mathbf{Y}}$ ۱- فرمهای دوگان آنها باشد. نشان دهید که، برای هر $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{w}$ در $\mathbf{R}^3_p$ ، $p \in \mathbf{R}^3$

$$(\omega_{\mathbf{X}} \wedge \omega_{\mathbf{Y}})(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{X} \times \mathbf{Y})(p) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) .$$

[راهنمایی: با استفاده از چند خطی بودن، کافی است این معادله وقتی که $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بردارهای پایه استاندارد هستند برقرار باشد.]

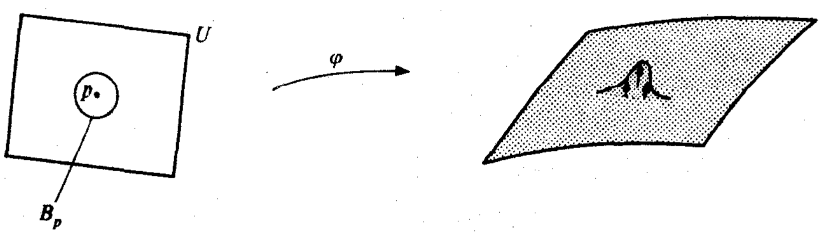
۱۸ـ رویه های می نیمال

فرض کنید $\varphi:U \to \mathbf{R}^{n+1}$ یک n- رویهٔ پارامتری در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد. یک ***تغییر*** φ یک تابع هموار مانند $\psi:U \times (-\varepsilon , \varepsilon) \to \mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد به‌قسمی که برای هر $p \in U$، $\psi(p , 0) = \varphi(p)$. بنابراین یک تغییر n- رویه φ را توسط یک خانواده از n- رویه‌های منفرد $(-\varepsilon < s < \varepsilon)$ $\varphi_s:U \to \mathbf{R}^{n+1}$ که به صورت $\varphi_s(p) = \psi(p , s)$ تعریف شده، احاطه می‌کند.

یک تغییر ψ به صورت

$$\psi(p , s) = \psi(p) + s\ f(p)\ \mathbf{N}(p)$$

که در آن f یک تابع هموار در طول φ و N نگاشت گاوس φ است، یک ***تغییر قائم*** φ نامیده می‌شود. اگر f تابع ثابت ۱ باشد، این تغییر ψ از نوع در نظر گرفته شده در بخش ۱۶ می‌باشد، که برای هر s، φ را به طرف بیرون به اندازهٔ s در طول خط نرمال انتقال می‌دهد. اگر f یک نگاشت کوهانی باشد شبیه آنچه در شکل ۱۷-۵ (ب) آمده است، در آن صورت تغییر ψ یک کوهان در φ از فشار دادن φ به طرف خارج در طول خط قائم فقط در یک گوی B_p حول نقطهٔ $p \in U$ ایجاد می‌نماید (ر.ک. شکل ۱۸-۱). اگر φ قبل از این یک کوهان در p داشته باشد در اینصورت تغییر نرمال ψ ممکن است به برداشتن این کوهان منجر شود.



شکل ۱۸-۱ تغییر قائم

یک تغییر ψ با این خاصیت که $\psi(p , s) = \psi(p , ۰)$ برای $-\varepsilon < s < \varepsilon$ که در آن p در خارج از یک زیرمجموعهٔ فشرده C از U قرار دارد با **محمل فشرده** نامیم. توجه کنید که اگر $\psi:U \times (-\varepsilon , \varepsilon) \to \mathbf{R}^{n+۱}$ یک تغییر با محمل فشرده از φ باشد در اینصورت $\varepsilon_۱ > ۰$ وجود دارد که برای هر $|s| < \varepsilon_۱$، φ_s یک n- رویه پارامتری می‌باشد. برای مشاهدهٔ این امر، تابع $\delta:U \times (-\varepsilon , \varepsilon) \to \mathbf{R}^{n+۱}$ تعریف شده به صورت

$$\delta(p , s) = \det \begin{pmatrix} E_۱^s \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E_n^s(p) \\ N(p) \end{pmatrix}$$

که در آن E_i^s ها قسمتهای برداری میدان‌های برداری مختصی $\mathbf{E}_i^s$ در طول φ_s و N نگاشت گاوس در طول φ می‌باشند، یک تابع پیوسته است. بنابراین مجموعهٔ

$$C_۱ = \{(p , s) \in \mathbf{R}^{n+۱}: p \in C , |s| \leq \varepsilon/۲ , \delta (p , s) = ۰\}$$

فشرده می‌باشد. اگر $C_۱$ تهی باشد، فرض کنید $\varepsilon_۱ = \varepsilon/۲$؛ در غیر اینصورت $\varepsilon_۱$ را مقدار می‌نیمم g روی $C_۱$ در نظر می‌گیریم که در آن $g:\mathbf{R}^{n+۱} \to \mathbf{R}$ به صورت $g(p , s) = |s|$ می‌باشد. در اینصورت

(یک) $\varepsilon_۱ \neq ۰$ زیرا به‌ازای هر $p \in U$، $\delta(p , ۰) \neq ۰$،

(دو) به‌ازای هر $p \in C$ با شرط $|s| < \varepsilon_۱$ داریم $\delta(p , s) \neq ۰$ و

(سه) به‌ازای تمام s های $(|s| < \varepsilon)$ با شرط $p \notin C$، $\delta (p , s) \neq ۰$ (زیرا که در اینصورت $\mathbf{E}_i^s$ ها همان میدان‌های برداری مختصی $\mathbf{E}_i$ ها در طول φ می‌باشند).

بنابراین برای هر $p \in U$ و $|s| < \varepsilon_۱$ داریم $\delta (p , s) \neq ۰$، لذا میدان‌های برداری $\mathbf{E}_i^s$ از φ_s مستقل خطی‌اند؛ یعنی φ_s عادی است و این همان چیزی که لازم بود.

اکنون به تحلیل اثری که تغییرات قائم با محمل فشرده روی حجم دارد می‌پردازیم. فرض کنید $\varphi:U \to \mathbf{R}^{n+۱}$ یک n- رویهٔ پارامتری با حجم با پایان باشد و فرض کنید $\psi:U \times (-\varepsilon , \varepsilon) \to \mathbf{R}^{n+۱}$ یک تغییر نرمال با محمل فشرده از φ باشد،

$$\psi (p , s) = \varphi(p) + s\, f(p)\, N (p) .$$

در اینصورت میدان برداری مختصی $\mathbf{E}_i^s$ از φ_s دارای قسمت برداری

$$E_i^s = \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}_i} + s\,\frac{\partial f}{\partial u_i}\,N + s\,f\,\frac{\partial N}{\partial u_i}$$

می‌باشد. امّا به‌ازای هر $p \in U$، $\frac{\partial N}{\partial u_i}(p)$، قسمت برداری

$$\nabla_{\mathbf{E}_i(p)}\mathbf{N} = -L_p\,(\mathbf{E}_i(p)) = -\sum_{j=1}^{n} c_{ji}(p)\;\mathbf{E}_i(p)$$

می‌باشد که در آن L_p نگاشت وینگارتن φ در p است، $\mathbf{E}_i$ ها میدان‌های برداری مختصی در طول φ می‌باشند و $(c_{ij}(p))$ نمایش ماتریس L_p نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{E}_i(p)\}$ از فضای مماس (تصویر $d\,\varphi_p$) است. بنابراین

$$E_i^s = E_i + s\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\,N - f\,\sum_{j=1}^{n} c_{ji}E_j\right)$$

حجم φ_s به صورت

$$V(\varphi_s) = \int_U \det\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1^s \\ \vdots \\ \mathbf{E}_n^s \\ \mathbf{N}^s \end{pmatrix}$$

می‌باشد که در آن $\mathbf{N}^s$ میدان برداری سو در طول φ_s می‌باشد. مشتق آن در $s = 0$ برابر با

$$\frac{d}{ds}\Big|_0 V(\varphi_s) = \int_U \frac{\partial}{\partial s}\Big|_0 \det\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1^s \\ \vdots \\ \mathbf{E}_n^s \\ \mathbf{N}^s \end{pmatrix}$$

می‌باشد، امّا چون $\mathbf{E}_i^0 = \mathbf{E}_i$ ، $\mathbf{N}^0 = \mathbf{N}$، لذا داریم

$$\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{\circ} \det\begin{pmatrix} E_1^s \\ \vdots \\ E_n^s \\ N^s \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \det\begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial E_i^s}{\partial s}\bigg|_{s=\circ} \\ \vdots \\ E_n \\ N \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \\ \dfrac{\partial N^s}{\partial s}\bigg|_{s=\circ} \end{pmatrix}$$

$$\overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} \det\begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial u_i} N - f \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{ji} E_j \\ \vdots \\ E_n \\ N \end{pmatrix} = -f \sum_{i,j=1}^{n} c_{ji} \det\begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_j \\ \vdots \\ E_n \\ N \end{pmatrix}$$

i امین سطر

$$\overset{(2)}{=} -f \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \det\begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \\ N \end{pmatrix}$$

برای بدست آوردن برابری (۱) از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که $(\partial N/\partial s)\big|_{s=\circ}$ بر $N = N^\circ$ عمود است و به صورت ترکیب خطی $\{E_1, \ldots, E_n\}$ می‌باشد، بدین طریق دترمینان ماتریس با این $n + 1$ بردار بعنوان سطرها باید برابر صفر گردد. در بدست آوردن برابری (۲) از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که وقتی $j \neq i$، ضریب c_{ji} دترمینان یک ماتریس با دو سطر برابر است و بنابراین صفر است. ما در این صورت نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{\circ} V(\varphi_s) = -n \int_U f\, \mathbf{H} \det\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_n \\ \mathbf{N}^s \end{pmatrix}$$

که در آن $H(p) = \left(\frac{1}{n}\right) \operatorname{tra}(L_p)$ که خمیدگی متوسط φ، در نقطه $p \in U$ می‌باشد.

تذکر. می‌توان نشان داد (تمرین ۱۸-۷) که این فرمول برای هر تغییر با محمل فشردهٔ ψ از φ (و نه فقط تنها برای نوع قائم آن) برقرار است، که در آن تابع $f: U \to \mathbf{R}$ به صورت $f = \mathbf{X} \cdot \mathbf{N}$ تعریف می‌شود، $\mathbf{X}$ ***میدان برداری تغییر*** در طول φ تعریف شده به صورت $\mathbf{X}(p) = \mathbf{E}^{\psi}_{n+1}(p, 0)$ می‌باشد و $\mathbf{E}^{\psi}_{n+1}$، $(n+1)$ امین میدان برداری مختصی در طول ψ است. همچنین این فرمول برای هر تغییر قائم (و نه الزاماً با محمل فشرده) همین که تمام انتگرال‌های مورد لزوم تعریف شده باشند و همچنین جابجایی $\left.(d/ds)\right|_0$ و $\int_U$ را بتوان توجیه کرد نیز برقرار است.

انتگرال حجم در n- رویهٔ پارامتری $\varphi: U \to \mathbf{R}^{n+1}$ ***ایستا*** گوییم هرگاه $V(\varphi) < \infty$ و برای هر تغییر قائم با محمل فشرده ψ از φ داشته باشیم $\left.(d/ds)\right|_0 V(\varphi_s) = 0$. برای مثال این در حالتی است که حجم φ کمتر از حجم هر n- رویهٔ پارامتری φ_s است که توسط یک تغییر قائم کوچک با محمل فشرده از φ بدست آمده است.

● **قضیه.** *فرض کنید $\varphi: U \to \mathbf{R}^{n+1}$ یک n- رویهٔ پارامتری با حجم با پایان در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد. در اینصورت انتگرال حجم در φ نسبت به هر تغییر قائم با محمل فشرده ایستا است اگر و فقط اگر خمیدگی متوسط S همواره صفر شود.*

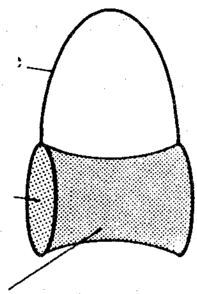
برهان. بوضوح اگر $H = 0$، آنگاه برای هر تغییر قائم با محمل فشردهٔ ψ از φ داریم

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_0 V(\varphi_s) = -n \int_U h\, H \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_n \\ \mathbf{N}^s \end{pmatrix} = 0 .$$

برعکس، اگر برای یک $p \in U$، $H(p) \neq 0$ آنگاه $\varepsilon > 0$ را چنان انتخاب می‌کنیم که گوی بسته در حول p به شعاع ε در U قرار گیرد، فرض کنید $h: U \to \mathbf{R}$ یک نگاشت کوهانی هموار با شرایط $h(p) = 1$، برای هر $q \in U$، $h(q) \geq 0$ و برای هر q که $\|q - p\| \geq \varepsilon$، $h(q) = 0$ و فرض کنید ψ تغییر قائم φ توسط تابع $f = hH$ باشد. در اینصورت ψ دارای محمل فشرده است و $fH = hH^2$ روی U غیرمنفی و در p مثبت است، بنابراین

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{\circ} V(\varphi_s) = -n \int_U h \; H^{2} \det \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \\ N^s \end{pmatrix} < \circ \qquad \blacksquare$$

یک n- رویهٔ سودار پارامتری در $\mathbf{R}^{n+1}$ با خمیدگی متوسط همواره صفر، یک ***رویه می‌نیمال*** نامیده می‌شود. در اینجا صفت می‌نیمال بکار برده شده است. زیرا یک رویهٔ می‌نیمال معمولاً به عنوان یک رویه که حجم آن از حجم همهٔ رویه‌های سوداری که توسط تغییرات قائم کوچک حاصل می‌شوند کمتر است ظاهر می‌شود. ۲- رویه‌های می‌نیمال $\mathbf{R}^3$ در طبیعت مانند حباب‌های صابون هستند: اگر یک حباب صابون، شکل یک رویه‌ای که بوسیلهٔ چهارچوب سیمی تولید شده است را بگیرد (فشار هوا را در دو طرف حباب یکسان می‌گیریم) برای اینکه چنین رویه‌ای پایدار باشد بایستی سطح آن نسبت به تمام رویه‌هایی که بوسیله این چهارچوب بوجود می‌آید کمتر باشد (شکل ۱۸-۲ را ملاحظه کنید.)



شکل ۱۸-۲ رویه‌های می‌نیمال (کمین) را می‌توان از فرو بردن یک چهارچوب سیمی در یک محلول صابون بدست آورد. (برای بهترین نتیجه، فاصله بین دوایر موازی را کوچک انتخاب می‌کنیم).

بوضوح یک n- صفحهٔ $a_1x_1 + \dots + a_{n+1}\, x_{n+1} = b$ یک رویهٔ می‌نیمال در $\mathbf{R}^{n+1}$ است زیرا همهٔ خمیدگی‌های اصلی در نتیجهٔ خمیدگی متوسط، صفرند. از طرف دیگر هیچ رویهٔ می‌نیمال فشرده در $\mathbf{R}^{n+1}$ وجود ندارد زیرا، بنابر قضیهٔ ۴ از فصل ۱۲، هر n- رویهٔ فشرده در $\mathbf{R}^{n+1}$ باید شامل یک نقطه باشد که در آن همهٔ خمیدگی‌های اصلی در آن غیرصفر و هم علامت باشند.

ما همهٔ ۲- رویه‌های دوّار در $\mathbf{R}^۳$ که می‌نیمال هستند را به دست می‌آوریم. ابتدا فرض کنید که $\alpha{:}I \to \mathbf{R}^۲$ یک خم پارامتری به صورت $\alpha(t) = (t , y(t))$ باشد که در آن y یک تابع هموار $y{:}I \to \mathbf{R}$ می‌باشد با شرط $y(t) > ۰$ برای هر $t \in I$. ۲- رویهٔ حاصل از دوران α حول محور $x_۱$ ها به صورت زیر می‌باشد:

$$\varphi(t , \theta) = (t , y(t) \cos\theta , y(t) \sin\theta) .$$

یک محاسبهٔ مستقیم (تمرین ۱۸-۱) نشان می‌دهد که خمیدگی‌های اصلی φ عبارتند از:

$$k_۱(t , \theta) = -y''(t) / (۱ + (y'(t)^۲)^{۳/۲}$$
$$k_۲(t , \theta) = ۱ / y(t) \ (۱ + (y'(t)^۲)^{۱/۲} .$$

بنابراین خمیدگی متوسط φ صفر خواهد بود اگر و فقط اگر $y(t)$ در معادله دیفرانسیل زیر صدق کند

$$\frac{y''(t)}{(۱ + y'^۲)^{۳/۲}} = \frac{۱}{y\ (۱ + y'^۲)^{۱/۲}} .$$

با ضرب کردن طرفین معادلهٔ بالا در $y'(۱ + y'^۲)^{۱/۲}$ داریم

$$\frac{y'y''}{۱ + y'^۲} = \frac{y'}{y}$$

که با انتگرال گرفتن نتیجه می‌شود که

$$\frac{۱}{۲} \log (۱ + y'^۲) = \log y + \log c = \log (cy)$$

یا

$$۱ + y'^۲ = (cy)^۲$$

که در آن $c > ۰$ یک ثابت انتگرال‌گیری است. که پس از حل نسبت به y' داریم

$$y' = \pm ((cy)^۲ - ۱)^{۱/۲} \qquad \text{یا} \qquad y'/((cy)^۲ - ۱)^{۱/۲} = \pm ۱ .$$

و با انتگرال‌گیری مجدد داریم

$$\left(\frac{۱}{c}\right) (\cosh^{-۱} (cy) - c_۲) = \pm t$$

یا

$$y = (۱/|c_۱|) \cosh (c_۱ t + c_۲)$$

که در آن $c_۱ = \pm c$ و $c_۲$ ثابت دیگر انتگرال‌گیری می‌باشد.

یک خم بصورت $x_۲ = (۱/|c_۱|) \cosh (c_۱ x_۱ + c_۲)$ در $\mathbf{R}^۲$ یک خم *زنجیری* نامیده می‌شود.

یک رویهٔ دوّار بدست آمده توسط دوران این خم حول محور x_1ها **زنجیروار** نامیده می‌شود (ر.ک. شکل ۱۸-۲). استدلال بالا نشان می‌دهد که هر رویه می‌نیمال در $\mathbf{R}^3$ که توسط دوران نمودار یک تابع هموار حول محور x_1ها بدست آمده قسمتی از یک زنجیروار است.

اگر شرط آنکه خم پارامتری α تصویر نمودار یک تابع باشد حذف کنیم علاوه بر زنجیروار تنها قسمت‌هایی از صفحات به دست می‌آید. در واقع اگر $\alpha(t) = (x(t), y(t))$، در اینصورت روی هر بازه‌ای که $x' \neq 0$، یک پارامترسازی مجدد β از α به صورت $\beta(t) = (t, y \circ x^{-1}(t))$ وجود دارد، بنابراین روی آن بازه تصویر α به شکل نمودار یک تابع است. روی هر بازه که x' همواره صفر است، α بایستی به صورت $\alpha(t) = (c, y(t))$ باشد برای یک مقدار $c \in \mathbf{R}$، بنابراین رویهٔ دوار بدست آمده توسط دوران این قسمت α حول محور x_1ها در صفحه $x_1 = c$ قرار دارد. چون دو زنجیروار تعریف شد با دو انتخاب متفاوت از c_1 , c_2 به طور هموار به یکدیگر نمی‌برازند و یک قسمت از زنجیروار را نمی‌توان به طور هموار به یک قسمت از یک صفحه چسبانید. نتیجه می‌گیریم که ***تنها رویه‌های می‌نیمال همبند دوار در $\mathbf{R}^3$ قسمتهایی از زنجیروار و قسمتهایی از صفحه هستند.***

تمرین

۱۸-۱. خمیدگی‌های اصلی رویهٔ پارامتری که از دوران خم پارامتری $\alpha(t) = (t, y(t))$ که در آن $y(t) > 0$ به‌ازای هر $t \in I$، در حول محور x_1ها بدست می‌آید، را پیدا کنید.

۱۸-۲. نشان دهید مارپیچ پارامتری $\varphi: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ که به‌صورت $\varphi(t, \theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta, \theta)$ تعریف شده است یک رویهٔ می‌نیمال می‌باشد.

۱۸-۳. فرض کنید S یک ۱- رویهٔ می‌نیمال همبند در $\mathbf{R}^2$ باشد نشان دهید که S یک قطعه از یک خط است.

۱۸-۴. نشان دهید که خمیدگی گاوس یک ۲- رویهٔ می‌نیمال در $\mathbf{R}^3$ همواره نامثبت است.

۱۸-۵. نشان دهید که یک ۲- رویهٔ می‌نیمال S در $\mathbf{R}^3$ یک رویهٔ می‌نیمال است اگر و فقط اگر

برای هر $p \in S$ جهت‌های متعامد $\mathbf{v}$، $\mathbf{w}$ در S_p وجود داشته باشند که در آنها خمیدگی قائم S صفر باشد (جهت‌های $\mathbf{v} \in S_p$ که برای آنها خمیدگی قائم $k(\mathbf{v})$ صفر است به ***جهت‌های مجانبی*** موسومند.)

۱۸-۶. نشان دهید که اگر نگاشت گاوس یک ۲- رویهٔ می‌نیمال S در $\mathbf{R}^3$ عادی باشد آنگاه آن همدیس است یعنی نشان دهید که اگر $dN_p : S_p \to S^2_{N(p)}$ غیرمنفرد باشد $(p \in S)$، آنگاه $\lambda(p) > 0$ وجود دارد به‌قسمی که به‌ازای هر $\mathbf{v} \in S_p$، $\| dN_p(\mathbf{v}) \| = \lambda(p) \, \|\mathbf{v}\|$.

۱۸-۷. فرض کنید $\alpha : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ یک خم‌پارامتری باتندی یکه باشد و $\psi : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{R}^2$ یک تغییر از α باشد. نشان دهید که

$$\frac{d}{ds}\Big|_0 l(\alpha_s) = (\mathbf{X} \cdot \dot{\alpha})\Big|_a^b - \int_a^b (\mathbf{X} \cdot \mathbf{N})(t)\, k(t)\, d(t)$$

که در آن $\alpha_s(t) = \psi(t, s)$ و $\mathbf{X}(t) = \mathbf{E}_2^{\psi}(t, 0)$، $\mathbf{N}$ میدان برداری سو در طول α، k خمیدگی در طول α است. نتیجه بگیرید که اگر به‌ازای هر s $\psi(a, s) = \alpha(a)$ و $\psi(b, s) = \alpha(b)$، آنگاه

$$\frac{d}{ds}\Big|_0 l(\alpha_s) = -\int_a^b (\mathbf{X} \cdot \mathbf{N})(t)\, k(t)\, dt .$$

[راهنمایی: تحقیق کنید که $(\partial/\partial s)\Big|_0 \|\dot{\alpha}_s\| = \left(\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t\, \partial s}\right) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\right)\Big|_{s=0}$ و سپس انتگرال جزء‌به‌جزء بگیرید.]

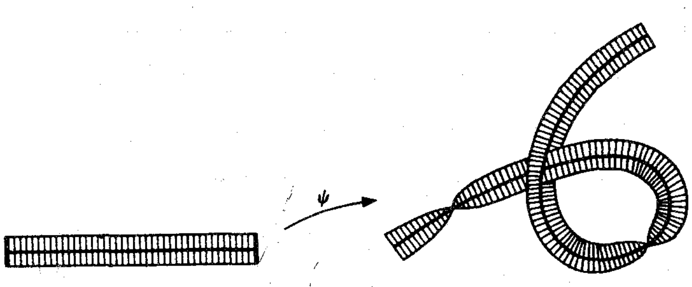
۱۹ـ نگاشت نمایی

در بخش ۷ ژئودزی‌ها را به عنوان مستقیم‌ترین خم‌ها در یک n- رویه تعریف کردیم. در این بخش نقش ژئودزی‌ها را به عنوان کوتاه‌ترین خم‌ها بررسی خواهیم کرد. با استفاده از روش حساب تغییرات و مشابه با آنچه که در بخش ۱۸ برای مطالعهٔ رویه‌های می‌نیمال به‌کار برده شد، شروع می‌کنیم. ولی، بااینحال در اینجا ما خم‌های پارامتری را به جای رویه‌های پارامتری تغییر می‌دهیم.

فرض کنید $\alpha:[a\ ,\ b] \to S$ یک خم پارامتری در یک n- رویهٔ $S \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ باشد یک ***تغییر*** α یک نگاشت هموار $\psi:[a,b] \times (-\varepsilon\ ,\ \varepsilon) \to S$ $(\varepsilon > ۰)$ است به‌قسمی که $\psi(t\ ,\ ۰) = \alpha(t)$ برای هر $t \in I$ (شکل ۱۹-۱). دو میدان برداری مختصی $\mathbf{E}_۱\ ,\ \mathbf{E}_۲$ که در طول ψ به صورت

$$\mathbf{E}_۱(t\ ,\ s) = d\psi\ (t\ ,\ s\ ,\ ۱\ ,\ ۰)$$
$$\mathbf{E}_۲\ (t\ ,\ s) = d\psi\ (t\ ,\ s\ ,\ ۰\ ,\ ۱)\ ,$$

تعریف شده‌اند بر S مماسند. توجه کنید که به‌ازای هر $t \in I$، $\mathbf{E}_۱\ (t\ ,\ ۰) = \dot{\alpha}(t)$. میدان برداری $\mathbf{X}$ در طول α که به صورت $\mathbf{X}(t)\ =\ \mathbf{E}_۲(t\ ,\ ۰)$ تعریف شده است، ***میدان برداری تغییر*** در طول α وابسته به تغییر ψ نامیده می‌شود.



شکل ۱۹-۱ تغییر از یک خم پارامتری

یک تغییر ψ از یک خم پارامتری α به صورت خانواده‌ای از خم‌های پارامتری $\alpha_s : [a,b] \to S$ می‌باشد که در آن $\alpha_s(t) = \psi(t\ ,\ s)$ تعریف می‌شود. طول α_s توسط انتگرال

$$l(\alpha_s) = \int_a^b \|\dot{\alpha}_s(t)\|\ dt = \int_a^b \|\mathbf{E}_1(t\ ,\ s)\|\ dt$$

محاسبه می‌شود. مشتق این تابع نسبت به s، به صورت زیر است

$$\frac{d}{ds}\, l(\alpha_s) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\,(\mathbf{E}_1\ .\ \mathbf{E}_1)^{1/2}\, dt$$

$$= \int_a^b \left[\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) \Big/ \|\mathbf{E}_1\|\right] dt$$

$$= \int_a^b \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) \Big/ \|\mathbf{E}_1\|\right] dt\ .$$

اکنون اگر فرض کنیم α یک خم با تندی یکه باشد، آنگاه $1 = \|\dot{\alpha}\| = \|\mathbf{E}_1\|_{s=0}$ ، بنابراین

$$\frac{d}{ds}\Big|_0 l(\alpha_s) = \int_a^b \mathbf{X}\ .\ \dot{\alpha}\ dt$$

$$= \int_a^b \left[(\mathbf{X}\ .\ \dot{\alpha})' - \mathbf{X}\ .\ \ddot{\alpha}\right] dt$$

یا

$$\boxed{\frac{d}{ds}\Big|_0\ l(\alpha_s) = (\mathbf{X}\ .\ \dot{\alpha})\ (b) - (\mathbf{X}\ .\ \dot{\alpha})\ (a) - \int_a^b (\mathbf{X}\ .\ \ddot{\alpha})\ dt\ .}$$

فرمول در مستطیل بالا ***اولین فرمول تغییر*** برای انتگرال طول نامیده می‌شود. فرمول فوق برای هر تغییر ψ از یک خم با تندی یکه مانند α در S معتبر است. توجه کنید که سمت راست برابری فوق تنها وابسته به میدان برداری تغییر $\mathbf{X}$ است؛ برای هر دو تغییر از α با میدان برداری تغییر یکسان، مقدار $\frac{d}{ds}\Big|_0 \left(l(\alpha_s)\right)$ یکسان می‌باشد.

یک تغییر $\psi:[a,b] \times (-\varepsilon\ ,\varepsilon) \to S$ یک ***تغییر با نقطهٔ ثابت انتهایی*** $\alpha(t) = \psi(t\ ,\ 0)$ نامیده

می‌شود. اگر برای هر $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$، $\psi(a, s) = \alpha(a)$ و $\psi(b,s) = \alpha(b)$. تغییر ψ یک **تغییر قائم** نامیده می‌شود هرگاه میدان برداری تغییر $\mathbf{X}$ همه جا بر α عمود باشد (به‌ازای هر $t \in [a, b]$، $\mathbf{X}(t) \perp \dot{\alpha}(t)$). در حالت خاص، اولین فرمول تغییر برای این موقعیت نتیجه زیررابه دست می‌دهد.

● **قضیهٔ ۱.** *فرض‌کنید $\alpha:[a,b] \to S$ یک خم با تندی یکه در یک n- رویهٔ $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ باشد. در اینصورت سه شرط زیر هم‌ارزند:*

(یک) ***انتگرال طول در α نسبت به تغییرات با نقطهٔ ثابت انتهایی ایستاست.***

(دو) ***انتگرال طول در α نسبت به تغییرات قائم ایستاست.***

(سه) ***α یک ژئودزی در S است.***

در حالت خاص اگر α کوتاه‌ترین خم در S باشد که دو نقطه از S را به هم وصل می‌کند، در این صورت α یک ژئودزی است.

برهان. اگر $\psi : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ یک تغییر با نقطهٔ ثابت انتهایی α باشد، در این صورت برای $|s| < \varepsilon$، $\psi(a,s) = \alpha(a)$، بنابراین $\mathbf{X}(a) = \big(\alpha(a), (\partial\psi/\partial s)(a, 0)\big) = 0$ و به طریق مشابه $\mathbf{X}(b) = 0$. اگر ψ یک تغییرقائم α باشد، دراین‌صورت $\mathbf{X}(a) \cdot \dot{\alpha}(a) = 0$ و $\mathbf{X}(b) \cdot \dot{\alpha}(b) = 0$ و در هریک از حالات اولین فرمول تغییر به صورت

$$\frac{d}{ds}\Big|_{0} l(\alpha_s) = -\int_a^b (\mathbf{X} \cdot \ddot{\alpha})\, dt$$

تبدیل می‌گردد. اگر α یک ژئودزی در S باشد در اینصورت به‌ازای هر $t \in [a,b]$، $\ddot{\alpha}(t) \perp S_{\alpha(t)}$ بنابراین در طول α داریم $\mathbf{X} \cdot \ddot{\alpha} = 0$ و بنابراین‌برای هرتغییر قائم وياهر تغییرقائم‌بانقطهٔ‌ثابت انتهایی ψ از α داریم $\frac{d}{ds}\Big|_{0} l(\alpha_s) = 0$، لذا (سه) $\Leftarrow$ (یک) و (سه) $\Leftarrow$ (دو).

از طرف دیگر، اگر α ژئودزی نباشد، در اینصورت نقطه‌ای مانند $t_0 \in [a,b]$ وجود دارد به‌قسمی‌که $\ddot{\alpha}(t_0) \notin S^{\perp}_{\alpha(t_0)}$، یعنی که مؤلفهٔ مماسی $\ddot{\alpha}'(t_0)$ از $\ddot{\alpha}(t_0)$ صفرنباشد. (ازبخش ۸ به خاطر آورید که $\dot{\alpha}'$ شتاب هموردِ α می‌باشد.) ما یک تغییر قائم با نقطهٔ ثابت انتهایی مانند ψ از α می‌سازیم که میدان برداری تغییرش در طول α، $f\dot{\alpha}'$ باشد، که در آن f یک تابع هموار غیرمنفی در طول α با شرایط $f(a) = f(b) = 0$ و $f(t_0) > 0$ می‌باشد. این یک تغییر قائم از α خواهد بود، زیرا $\dot{\alpha}'$ یک میدان

برداری یکه در طول α است، $\dot\alpha \perp \ddot\alpha$. اولین فرمول تغییر برای این تغییر به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d}{ds}\Big|\, l(\alpha_s) = -\int_a^b f\,\dot\alpha'\,.\,\ddot\alpha = -\int_a^b f\|\dot\alpha'\|^۲ < ۰$$

ثابت می‌شود که (یک) ⇐ (سه) و (دو) ⇐ (سه).

برای ساختن تغییر ψ، فرض کنید $\varphi:U \to S$ یک n- رویه پارامتری یک به یک باشد که تصویرش یک مجموعهٔ باز در S شامل $\alpha(t_۰)$ باشد. $a_۱$ و $b_۱$ را چنان اختیارکنید که $a < a_۱ < b_۱ < b$ به قسمی که (تصویر φ) $\alpha([a_۱ , b_۱]) \subset$. $\beta:[a_۱ , b_۱] \to U$ را به صورت $\beta(t) = \varphi^{-۱}\circ\alpha(t)$ تعریف می‌کنیم، فرض کنید $f:[a , b] \to \mathbf{R}$ یک تابع کوهانی هموار با شرط این که $f(t_۰) > ۰$ و به ازای هر $t \notin [a_۱ , b_۱]$، $f(t) = ۰$ و فرض کنید $\mathbf{Y}$ یک میدان برداری هموار در طول β تعریف شده به صورت $\mathbf{Y}(t) = f(t)\,(d\varphi^{-۱}_{\beta(t)}\,(\dot\alpha'(t))$ باشد (شکل ۱۹-۲). اکنون $\psi:[a,b] \times (-\varepsilon , \varepsilon) \to S$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

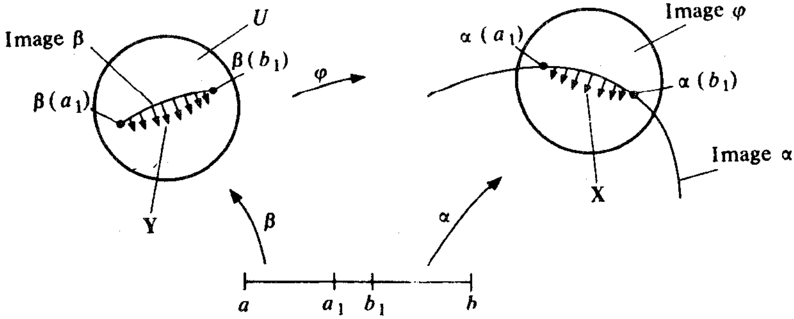
$$\psi(t , s) = \begin{cases} \varphi\;(\beta(t) + s\,Y(t)) & \text{برای} \quad t \in [a_۱ , b_۱]\,,\, s \in (-\varepsilon,\varepsilon) \\ \varphi\circ\beta(t) = \alpha(t) & \text{برای} \quad t \notin [a_۱ , b_۱]\,,\, s \in (-\varepsilon , \varepsilon) \end{cases}$$

که درآن $\varepsilon > ۰$ به‌اندازه کافی کوچک انتخاب شده به‌قسمی‌که به‌ازای هر $(t,s) \in [a_۱ , b_۱] \times (-\varepsilon,\varepsilon)$، $\beta(t) + sY(t) \in U$. در اینصورت ψ یک تغییر با نقطه ثابت انتهایی از α با میدان برداری تغییر

$$\mathbf{X}(t) = d\psi(t , ۰ , ۰ ,۱) = \begin{cases} d\varphi(\mathbf{Y}(t)) & \text{برای} \quad t \in [a_۱ , b_۱] \\ ۰ & \text{برای} \quad t \notin [a_۱ , b_۱] \end{cases}$$

$$= f(t)\,\dot\alpha'(t)$$

می‌باشد و این همان چیزی که لازم بود.



شکل ۱۹-۲ ساختاری از تغییر نزولی طول در طول یک خم غیر ژئودوزی

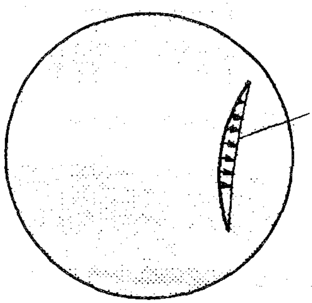
سرانجام، اگر α کوتاهترین خم در میان همهٔ خمهایی در S باشد که $\alpha(a)$, $\alpha(b)$ را به هم وصل می‌کند در اینصورت $l(\alpha_s)$ در $s = 0$ برای هر تغییر با نقطهٔ ثابت انتهایی از α می‌نیمم است، همچنین انتگرال طول در α ایستا است و α باید یک ژئودوزی در S باشد. □

تذکر ۱. اثبات بالا نه تنها نشان می‌دهد که اگر α یک ژئودزی نباشد آنگاه α دارای کمترین طول نیست، امّا در واقع نحوهٔ به دست آوردن کوتاهترین خم از $\alpha(a)$ به $\alpha(b)$ را بیان می‌کند: به طور ساده α را در راستای مولفهٔ مماسی $\dot{\alpha}'$ از شتاب α تغییر شکل می‌دهیم و نقاطی انتهایی را ثابت نگه می‌داریم (ر.ک. شکل ۱۹-۳).

تذکر ۲. مروری به اثبات قضیهٔ ۱ نشان می‌دهد که اگر فرض اینکه α یک خم با تندی یکه در S را با فرض اینکه α یک خم با تندی ثابت در S باشد جانشین کنیم در درستی قضیه تغییری بوجود نمی‌آید، اگر چه در فرمول تغییر اول اندک تغییری بوجود خواهد آمد.

تذکر ۳. فرمول تغییر اول را می‌توان برحسب $\dot{\alpha}'$ شتاب همورد α به صورت زیر بازنویسی کرد:

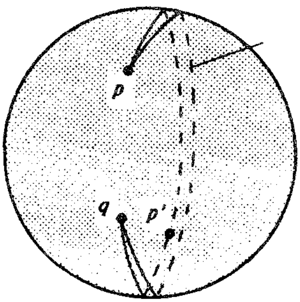
$$\frac{d}{ds}\bigg|_0 l(\alpha_s) = (\mathbf{X} \cdot \dot{\alpha})\,(b) - (\mathbf{X} \cdot \dot{\alpha})\,(a) - \int_a^b (\mathbf{X} \cdot \dot{\alpha}')\,dt$$



شکل ۱۹-۳ تنزل یافتن طولهای خمها در S^2

قضیهٔ ۱ استدلال می‌کند که کوتاهترین خم با تندی یکه بین دو نقطهٔ q , p در یک n- رویهٔ

$S \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ باید یک ژئودزی باشد. این قضیه نشان نمی‌دهد که یک کوتاهترین خم بین دو نقطه وجود دارد (در واقع، ممکن است چنین خمی وجود نداشته باشد: یک ۲- صفحه در $\mathbf{R}^3$ با حذف یک نقطه را در نظر بگیرید) و همچنین نشان نمی‌دهد که یک ژئودزی $\alpha:[a,b] \to S$ یک کوتاهترین خم (حتی به صورت موضعی) بین دو نقطهٔ $\alpha(a)$, $\alpha(b)$ باشد (در واقع ممکن است این امر نیز درست نباشد ر.ک. شکل ۱۹-۴). اما نشان خواهیم داد که اگر $p , q \in S$ به اندازه کافی به هم نزدیک باشند، یک ژئودزی واصل بین p , q وجود دارد که در واقع میان همهٔ خمهایی که در S، p را به q وصل می‌کنند کوتاهترین است. برای اثبات این حقایق ما از نگاشت نمایی یک n- رویه استفاده خواهیم کرد.



شکل ۱۹-۴ ژئودزی‌ها (دوایر عظیمه) روی کره، حتی به صورت موضعی خارج از نقطهٔ مزدوج (متقاطر) p' انتگرال طول را می‌نیمم نمی‌سازند.

برای $\mathbf{v} \in T(S) = \bigcup_{p\in S} S_p$، فرض کنید $\alpha_\mathbf{v}$ نمایشگر ژئودزی بیشین یکتا در S با شرط $\dot{\alpha}_\mathbf{v}(0)=\mathbf{v}$ باشد. فرض کنید

$$U = \{\mathbf{v} \in T(S) : 1 \in (\alpha_\mathbf{v} \text{ دامنه})\}$$

و فرض کنید $\exp:U \to S$ به صورت $\exp(\mathbf{v}) = \alpha_\mathbf{v}(1)$ تعریف شده باشد. exp ***نگاشت نمایی*** S نامیده می‌شود.

توجه کنید که برای هر $p \in S$ بردار صفر S_p در U است و تصویر آن تحت exp برابر p می‌باشد.

مثال. **ژئودزی ماکزیمال در دایرهٔ یکهٔ $S^1 \subset \mathbf{R}^2$ با سرعت اولیه $\mathbf{v} = (1 , 0 , 0 , \theta)$ پارامترسازی سرتاسری با تندی ثابت $\alpha_\mathbf{v}(t) = (\cos\theta t , \sin\theta t)$ از S^1 است. بنابراین**

$$\exp(1, 0, 0, \theta) = \alpha_{\mathbf{v}}(1) = (\cos\theta, \sin\theta).$$

هرگاه $\mathbf{R}^2$ را به عنوان مجموعهٔ $\mathbf{C}$ از اعداد مختلط را با یکی‌سازی زوجهای مرتب (a,b) با $a + ib$ در نظر بگیریم این فرمول را می‌توان بـه صـورت $\exp(1, 0, 0, \theta) = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ بازنویسی کرد.

● **قضیهٔ ۲.** ***نگاشت نمایی $\exp: U \to S$ یک n-رویهٔ S در $\mathbf{R}^{n+1}$ با خواص زیر است:***

(یک) ***دامنهٔ U از $\exp$ یک مجموعهٔ باز در $T(S)$ است.***

(دو) ***اگر $\mathbf{v} \in U$ باشد، آنگاه به‌ازای هر $0 \le t \le 1$، $t\mathbf{v} \in U$.***

(سه) ***$\exp$ یک نگاشت هموار است.***

(چهار) ***برای هر $p \in S$ یک مجموعهٔ U_p که در S_p باز و شامل $0 \in S_p$ است وجود دارد به قسمی که $U_p \subset U$ و $\exp|_{U_p}$ یک دیفئومرفیسم از U_p روی یک زیرمجموعهٔ باز S شامل نقطهٔ p است.***

(پنج) ***برای هر $p \in S$، $\mathbf{v} \in S_p$، ژئودزی بیشین $\alpha_{\mathbf{v}}$ با شرط $\dot\alpha_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}$ توسط فرمول زیر داده شده است***

$$\alpha_{\mathbf{v}}(t) = \exp(t\mathbf{v}).$$

برهان. (پنج) بلافاصله از این حقیقت نتیجه می‌شود که بـرای هـر $t \in \mathbf{R}$ خـم پـارامتری شـدهٔ $\alpha(s) = \alpha_{\mathbf{v}}(ts)$ تعریف شده روی بازهٔ $\{s \in \mathbf{R} : ts \in I\}$ که در آن I دامنه $\alpha_{\mathbf{v}}$ است، یک ژئودزی با شرط $\dot\alpha(0) = t\dot\alpha_{\mathbf{v}}(0) = t\mathbf{v}$ می‌باشد. بـنابر یکـتایی ژئـودزی‌ها، بـرای هـر s بـا شـرط $ts \in I$، $\alpha_{t\mathbf{v}}(s) = \alpha(s) = \alpha_{\mathbf{v}}(ts)$.

(دو) از (پنج) نتیجه می‌شود زیرا که $\mathbf{v} \in U$ آنگاه در دامنه $\alpha_{\mathbf{v}}$ است بنابراین $\alpha_{\mathbf{v}}(t) = \exp(t\mathbf{v})$ برای $0 \le t \le 1$ تعریف شده است.

(یک) می‌دانیم (تمرین ۱۵-۵) که $T(S)$ یک $2n$- رویه در $\mathbf{R}^{2n+2}$ است. میدان برداری هموار $\mathbf{X}$ روی $T(S)$ که به صورت زیر تعریف شده در نظر بگیرید

$$\mathbf{X}(\mathbf{v}) = \big(p, v, v, -(\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N})\, \mathbf{N}(p)\big)$$

برای $\mathbf{v} = (p, v) \in T(S)$. $\mathbf{X}$ افشانده ژئودزی روی $T(S)$ نامیده می‌شود. خمهای انتگرال $\mathbf{X}$ را به ژئودزی‌های S مربوط خواهیم کرد.

برای هر خم پارامتری $\alpha{:}I \to S$ در S ***بالا بر طبیعی*** α به T(S) خم پارامتری $\bar{\alpha}{:}I \to T(S)$ است که به صورت زیر داده شده است:

$$\bar{\alpha}(t) = \dot{\alpha}(t) = \left(\alpha(t)\ ,\ \frac{d\alpha}{dt}(t)\right).$$

سرعت $\bar{\alpha}(t)$ به صورت

$$\dot{\bar{\alpha}}(t) = \left(\alpha(t)\ ,\ \frac{d\alpha}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\alpha}{dt}(t)\ ,\ \frac{d^{۲}\alpha}{dt^{۲}}(t)\right)$$

می‌باشد بنابراین $\bar{\alpha}$ یک خم انتگرال **X** است اگر و فقط اگر

$$\frac{d^{۲}\alpha}{dt^{۲}} = -\,(\dot{\alpha}\ .\ \nabla_{\dot{\alpha}}\ \mathbf{N})\ \mathbf{N}\circ\alpha.$$

امّا این دقیقاً معادله دیفرانسیل (G) (فصل ۷) از ژئودزی در S می‌باشد. بنابراین $\alpha{:}I \to S$ ***یک ژئودزی در S است اگر و فقط اگر $\bar{\alpha}$، بالا بر طبیعی آن به T(S) یک خم انتگرال از افشاندهٔ ژئودزی X باشد.*** بعلاوه، برای هر $\mathbf{v} \in T(S)$، ژئودزی بیشین $\alpha_{\mathbf{v}}$ با سرعت اولیه **v** دارای بالا بر طبیعی $\bar{\alpha}_{\mathbf{v}}$ با این شرط است که $\mathbf{v} = \dot{\alpha}_{\mathbf{v}}(\circ)$ و $\mathbf{X}(\mathbf{v}) = \alpha(\circ)$، بنابراین **X** یک میدان برداری مماس روی T(S) است که خم انتگرال بیشین آن گذرنده‌از $\mathbf{v} \in T(S)$، خم $\bar{\alpha}_{\mathbf{v}}$ است.

نتیجه می‌شود که برای هر $\mathbf{v} \in T(S)$، ***ژئودزی بیشین*** $\alpha_{\mathbf{v}}$ در S با شرط $\mathbf{v} = \dot{\alpha}_{\mathbf{v}}(\circ)$ ***توسط فرمول*** $\alpha_{\mathbf{v}} = \pi\circ\beta_{\mathbf{v}}$ ***به دست می‌آید*** که در آن $\beta_{\mathbf{v}}$ خم انتگرال بیشین **x** با شرط $\mathbf{v} = \beta_{\mathbf{v}}(\circ)$ می‌باشد که $\pi{:}T(S) \to S$ به صورت $\pi(p\ ,\ v) = p$ تعریف شده است.

حال اگر $\mathbf{v} \in T(S)$ در دامنهٔ U از نگاشت نمایی باشد، آنگاه ژئودزی $\alpha_{\mathbf{v}}$ دارای دامنه‌ای شامل بازه [۱ , ۰] است و بنابراین خم انتگرال بیشین $\beta_{\mathbf{v}} = \bar{\alpha}_{\mathbf{v}}$ از **X** گذرنده از نقطهٔ **v** دارای دامنه‌ای شامل [۱ , ۰] است. همانند در اثبات نتیجهٔ قضیهٔ ۴ از فصل ۱۳، می‌توانیم $\bar{\varepsilon} > \circ$ را چنان اختیار کنیم به قسمی که به‌ازای هر t در مجموعهٔ فشردهٔ [۱ , ۰] مجموعهٔ باز V_t در T(S) شامل $\beta_{\mathbf{v}}(t)$ وجود داشته باشد به قسمی که خم انتگرال **X** گذرنده از هر نقطه V_t دارای دامنه‌ای شامل بازه $(-\bar{\varepsilon}\ ,\ \bar{\varepsilon})$ باشد. با قرار دادن $V = \bigcup_{t\in[\circ,۱]} V_t$ یک مجموعهٔ باز V در T(S) شامل $\beta_{\mathbf{v}}([\circ\ ,\ ۱])$ به دست می‌آوریم، به قسمی که از هر نقطهٔ $\mathbf{w} \in V$ یک خم انتگرال $\beta_{\mathbf{w}}$ از **X** با خاصیت $\mathbf{w} = \dot{\beta}_{\mathbf{w}}(\circ)$ بگذرد به قسمی که دامنهٔ $\beta_{\mathbf{w}}$ شامل $(-\bar{\varepsilon}\ ,\ \bar{\varepsilon})$ باشد. بنابر قضیهٔ ۴ از فصل ۱۳، نگاشت $\psi{:}(-\bar{\varepsilon}\ ,\ \bar{\varepsilon}) \times V \to T(S)$

تعریف شده به صورت $\psi(\mathbf{t}\ ,\ \mathbf{w}) = \beta_{\mathbf{w}}(\mathbf{t})$ هموار است. علاوه بر این، بنابر یکتایی خمهای انتگرال $\beta_{\beta_{\mathbf{w}(t)}}(s) = \beta_{\mathbf{w}}(t + s)$ برای هر $t\ ,\ s$ به قسمی که $t\ ,\ s \in (-\bar{\varepsilon}\ ,\ \bar{\varepsilon})$ و $\beta_{\mathbf{w}}(t) \in V$. عدد صحیح و مثبت k را چنان انتخاب می‌کنیم به قسمی که $1/k < \bar{\varepsilon}$ و $\psi_{1/k}: V \to T(S)$ را به صورت $\psi_{1/k}(\mathbf{w}) = \psi\ (1/k\ ,\ \mathbf{w}) = \beta_{\mathbf{w}}(1/k)$ تعریف می‌کنیم. از آن نتیجه می‌گردد که

$$(\psi_{1/k} \circ \psi_{1/k})\ (\mathbf{w}) = \beta_{\beta_{\mathbf{w}(1/k)}}(1/k) = \beta_{\mathbf{w}}(2/k)$$

برای هر $\mathbf{w} \in V$ به قسمی که $\psi_{1/k}(\mathbf{w}) = \beta_{\mathbf{w}}(1/k) \in V$، که بعد از k مرتبه تکرار کردن نتیجه می‌گردد

$$(\psi_{1/k} \circ\ \dots\ \circ\ \psi_{1/k})\ (\mathbf{w}) = \beta_{\mathbf{w}}(k/k) = \beta_{\mathbf{w}}(1)$$

برای هر $\mathbf{w}$ در مجموعهٔ باز

$$W = \{\mathbf{w} \in V : \psi_{1/k}(\mathbf{w}) \in V\ ,\ \psi_{1/k} \circ \psi_{1/k}(\mathbf{w}) \in V\ ,\ \dots,$$
$$(\psi_{1/k} \circ\ \dots\ \circ\ \psi_{1/k})\ (\mathbf{w}) \in V\ (\text{بار } k-1)\}\ .$$

در نتیجه برای هر $\mathbf{w} \in W$، $1 \in D(\beta_{\mathbf{w}}) = D\ (\pi \circ \beta_{\mathbf{w}}) = D(\alpha_{\mathbf{w}})$ که در آن D نشانگر دامنه است. از طرف دیگر $W \subset U$. چون $\mathbf{v} \in W$ بدین ترتیب این مطلب که به‌ازای هر $\mathbf{v} \in U$ یک مجموعهٔ باز W در $T(S)$ بیابیم به قسمی که $\mathbf{v} \in W \subset U$ انجام شده است. بنابراین U یک مجموعهٔ باز در $T(S)$ است.

(سه) چون در نمادگذاری‌های پاراگراف قبل

$$\exp\ (\mathbf{w}) = \alpha_{\mathbf{w}}(1) = \pi \circ \beta_{\mathbf{w}}(1) = (\pi \circ \psi_{1/k} \circ\ \dots\ \circ\ \psi_{1/k})\ (\mathbf{w})$$

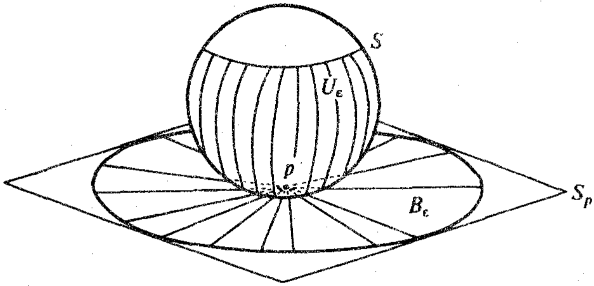
برای هر $\mathbf{w} \in W$، لذا $\exp$ هموار است.

(چهار) تنها کافی است تحقیق کنیم که $(d\ \exp)_{\circ} : (S_p)_{\circ} \to S_p$ غیرمنفرد است، زیرا در اینصورت قضیهٔ تابع وارونی را به کار می‌بریم. امّا هر عنصر از $(S_p)_{\circ}$ به شکل $\dot{\alpha}(\circ)$ می‌باشد که در آن $\alpha(t) = t\mathbf{v}$ برای یک $\mathbf{v} \in S_p$ و بنابر (پنج) داریم

$$(d\ \exp)\ \left(\dot{\alpha}(\circ)\right) = (\exp \dot{\circ}\ \alpha)\ (\circ) = \dot{\alpha}_{\mathbf{v}}(\circ) = \mathbf{v}$$

لذا $(d\ \exp)\ (\alpha'(0)) = 0$ فقط اگر $\alpha'(0) = 0$. این امر نشان می‌دهد که $(d\ \exp)_0$ غیرمنفرد است. ■

بنابر قضیه ۲، ژئودزی‌های در S گذرنده از نقطهٔ p می‌توانند به صورت تصاویر پرتوهای $\sigma(t) = tv$ در S_p تحت نگاشت $\exp$ باشند (ر.ک. شکل ۱۹-۵).



شکل ۱۹-۵ ژئودزی‌ها در S گذرنده از نقطه p تصاویر پرتوهای گذرنده از ۰ در S_p تحت نگاشت نمایی هستند. علاوه بر این $\exp$ به‌ازای $\varepsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک، ε-گوی B_ε در حول ۰ را به طور دیفئومرفیک بر روی یک مجموعهٔ باز U_ε می‌نگارد.

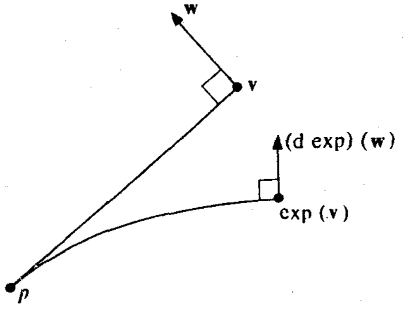
بعلاوه برای $\varepsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک، $\exp$، ε-گوی $B_\varepsilon = \{v \in S_p : \|v\| < \varepsilon\}$ را به طور دیفئومرفیک بر روی یک مجموعهٔ باز U_ε در S می‌نگارد. برای $q \in U_\varepsilon$، نتیجه می‌شود که یک ژئودزی در U_ε که p, q را به هم وصل می‌کند وجود دارد. در واقع این ژئودزی $\alpha_v(t) = \exp\ (tv)$، $0 \le t \le 1$ می‌باشد که در آن $v \in B_\varepsilon$ به قسمی است که $\exp(v) = q$. علاوه بر این ژئودزی (با تقریب یک پارامترسازی مجدد) تنها ژئودزی در U_ε است به قسمی که p را به q وصل می‌کند. نشان خواهیم داد که در واقع این ژئودزی دارای طولی کمتر یا برابر با هر خم پارامتری در S واصل بین p, q می‌باشد. اثبات این امر به دو خصوصیت در مورد مشتق‌پذیری نگاشت‌نمایی بستگی دارد.

لم. ***فرض کنید S یک n- در $\mathbb{R}^{n+1}$ باشد و $U \subset T(S)$ دامنهٔ نگاشت نمایی S باشد. برای $p \in S$، $v \in S_p \cap U$، $d\ \exp$ دارای خواص زیر روی بردارهای مماس بر S_p در v است.***

(یک) ***اگر $w \in (S_p)_v$ مماس در v به پرتو $\alpha(t) = tv$ گذرنده از v باشد (یعنی اگر w مضربی از $\dot\alpha(1)$ باشد) آنگاه $\|w\| = \|(d\ \exp)\ (w)\|$.***

(دو) **اگر** $\mathbf{w} \in (S_p)_{\mathbf{v}}$ **عمود بر پرتو** $\alpha(t) = t\mathbf{v}$ **گذرنده از v باشد (یعنی اگر** $\mathbf{w} \cdot \dot\alpha(1) = 0$**) آنگاه** $(d\exp)(\mathbf{w})$ **عمود بر ژئودزی** $(\exp \circ \alpha)(t) = \exp(t\mathbf{v})$ **است.**

تذکر. عبارت (دو) معمولاً **لم گاوس** نامیده می‌شود (ر.ک. شکل ۱۹-۶).



شکل ۱۹-۶ لم گاوس : d exp تعامد ژئودزیهای پرتوی را حفظ می‌کند.

برهان. (یک) $(\exp \circ \alpha)(t) = \exp(t\mathbf{v})$ ژئودزی بیشین در S با سرعت اولیه **v** می‌باشد. چون ژئودزیها تندی ثابت دارند

$$\|(d\exp)(\dot\alpha(1))\| = \|(\exp \circ \alpha)^{\cdot}(1)\| = \|(\exp \circ \alpha)^{\cdot}(0)\| = \|\mathbf{v}\| = \|\dot\alpha(1)\|$$

چون d exp روی $T(S)_{\mathbf{v}}$ که در آن $T(S)_{\mathbf{v}} \supset (S_p)_{\mathbf{v}}$ خطی است، از آن نتیجه می‌گردد که اگر به‌ازای یک مقدار $c \in \mathbf{R}$، $\mathbf{w} = c\dot\alpha(1)$، آنگاه

$$\|(d\exp)(\mathbf{w})\| = |c|\ \|(d\exp)(\dot\alpha(1))\| = |c|\ \|\dot\alpha(1)\| = \|\mathbf{w}\|\ .$$

(دو) هر $\mathbf{w} \in (S_p)_{\mathbf{v}}$ به صورت $\mathbf{w} = \dot\beta(0)$ است که در آن به‌ازای یک $\mathbf{x} \in S_p$، $\beta(s) = \mathbf{v} + s\mathbf{x}$.

چون

$$\dot\alpha(1) \cdot \mathbf{w} = \dot\alpha(1) \cdot \dot\beta(0) = \frac{d\alpha}{dt}(1) \cdot \frac{d\beta}{dt}(0) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$$

از اینکه **w** بر پرتو α عمود است نتیجه می‌شود که $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$.

ما باید نشان دهیم که $(\exp \circ \alpha)^{\cdot}(1) \cdot (d\exp)(\mathbf{w}) = 0$. امّا

$$(d\exp)(\mathbf{w}) = (d\exp)(\dot\beta(0)) = (\exp \circ \beta)^{\cdot}(0)$$

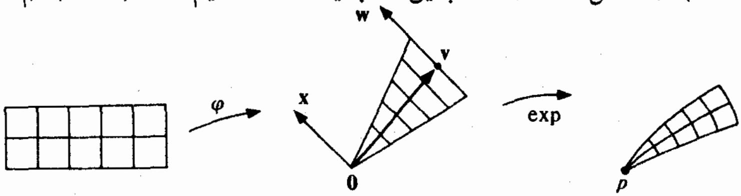
بنابراین

$$(\exp \circ \alpha)\dot{}\ (۱) \,.\, (d\exp)(\mathbf{W}) = (\exp \circ \alpha)\dot{}\ (۱) \,.\, (\exp \circ \beta)\dot{}\ (۰)$$
$$= \mathbf{E}_۱ (۱ \,,\, ۰) \,.\, \mathbf{E}_۲ (۱ \,,\, ۰)$$

که در آن $\mathbf{E}_۱$ و $\mathbf{E}_۲$ میدانهای برداری مختصی در طول نگاشت $\psi : [۰,۱] \times (-\varepsilon \,,\, \varepsilon) \to S$ تعریف شده به صورت

$$\psi (t \,,\, s) = \exp \big(t(\mathbf{v} + s\mathbf{x})\big)$$

می‌باشند، $\varepsilon > ۰$ به اندازه کافی کوچک انتخاب شده که برای $۰ \le t \le ۱$ و $|s| < \varepsilon$ داشته باشیم $t(\mathbf{v} + s\mathbf{x}) \in U$ (شکل ۱۹-۷). همچنین ما باید نشان دهیم که $(\mathbf{E}_۱ \,.\, \mathbf{E}_۲)\ (۱ \,,\, ۰) =$



شکل ۱۹-۷ $\varphi(t \,,\, s) = t(\mathbf{V} + s\mathbf{X})$، مجموعه $[۰ \,,\, ۱] \times (-\varepsilon \,,\, \varepsilon)$ را به یک مثلث در S_p می‌نگارد. نگاشت $\psi = \exp \circ \varphi$ یک تغییر از ژئودزی α است.

$۰ = (۱,۰)\mathbf{E}_۲ \,.\, (۱,۰)\mathbf{E}_۱$. این امر را ما با توجه به اینکه برای هر $t\in[۰,۱]$، $(\mathbf{E}_۱ . \mathbf{E}_۲)\ (t,۰) = ۰$ نشان خواهیم داد. چون $(\mathbf{E}_۱ \,.\, \mathbf{E}_۲)\ \ (۰ \,,\, ۰) = ۰$ (زیرا که $\mathbf{E}_۲\ (۰ \,,\, ۰) = ۰$)، کافی است نشان دهیم که $(\mathbf{E}_۱ \,.\, \mathbf{E}_۲)\ (t \,,\, ۰)$ ثابت است.

ابتدا توجه کنید که به ازای هر $s \in (-\varepsilon \,,\, \varepsilon)$ خم مختصی $\alpha_s:[۰ \,,\, ۱] \to S$ تعریف شده به صورت

$$\alpha_s(t) = \exp\big(t(\mathbf{v} + s\mathbf{x})\big)$$

یک ژئودزی در S با سرعت اولیه $\mathbf{v} + s\mathbf{x}$ می‌باشد. چون ژئودزیها دارای تندی ثابت هستند و $\mathbf{v} \,.\, \mathbf{x} = ۰$، لذا برای هر $(t \,,\, s) \in [۰ \,,\, ۱] \times (-\varepsilon \,,\, \varepsilon)$ داریم

$$\| \mathbf{E}_۱(s \,,\, t) \|^۲ = \| \dot{\alpha}_s(t) \|^۲ = \| \dot{\alpha}_s(۰) \|^۲ = \| \mathbf{v} \|^۲ + s^۲ \| \mathbf{x} \|^۲.$$

حال

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}_۱ \,.\, \mathbf{E}_۲) = (\nabla_{\mathbf{E}_۱} \mathbf{E}_۱) \,.\, \mathbf{E}_۲ + \mathbf{E}_۱ \,.\, (\nabla_{\mathbf{E}_۱} \mathbf{E}_۲)$$

که در آن برای $j \in \{۱ \,,\, ۲\}$، $(\nabla_{\mathbf{E}_۱} \mathbf{E}_۱)\ (t \,,\, s) = \nabla_{(t,s,۱,۰)}\mathbf{E}_j$. چون هر خم مختصی α_s یک ژئودزی است، لذا $(\nabla_{\mathbf{E}_۱} \mathbf{E}_۱)(t \,,\, s)= \alpha_s(t)$ بر S عمود است و بنابراین $(\nabla_{\mathbf{E}_۱} \mathbf{E}_۱) \,.\, \mathbf{E}_۲ = ۰$. چون، علاوه بر این

$$(\nabla_{\mathbf{E}_۱} \mathbf{E}_۲)\ (t \,,\, s) = \Big(\psi(t \,,\, s) \,,\, \frac{\partial^۲\psi}{\partial t \partial s} (t \,,\, s)\Big)$$

$$= \left(\psi(t\,,s)\,,\frac{\partial^۲\psi}{\partial s\partial t}(t\,,s)\right) = (\nabla_{E_۲}\mathbf{E}_۱)\,(t\,,s)\,,$$

لذا

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}_۱\cdot\mathbf{E}_۲) = \mathbf{E}_۱\cdot(\nabla_{E_۲}\mathbf{E}_۱) = \frac{۱}{۲}\frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{E}_۱\cdot\mathbf{E}_۱)$$

$$= \frac{۱}{۲}\frac{\partial}{\partial s}(\|\mathbf{v}\|^۲ + s^۲\|\mathbf{x}\|^۲) = s\|\mathbf{x}\|^۲$$

در نتیجه

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}_۱\cdot\mathbf{E}_۲)\Big|_{s=۰} = ۰$$

و بنابراین $(\mathbf{E}_۱\cdot\mathbf{E}_۲)\,(t\,,۰)$ مقداری ثابت است. ■

● **قضیهٔ ۳.** ***فرض کنید S یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+۱}$ باشد، $p \in S$ و فرض کنید $\varepsilon > ۰$ به قسمی باشد که نگاشت نمایی S گوی $B_\varepsilon = \{\mathbf{v}\in S_p : \|\mathbf{v}\| < \varepsilon\}$ را به طور دیفئومرفیک بر روی یک مجموعهٔ باز U_ε در S بنگارد. در اینصورت، برای هر $q \in U_\varepsilon$، خم پارامتری $\alpha(t) = \exp(t\mathbf{v})$، $۰ \le t \le ۱$، که در آن $\mathbf{v}\in B_\varepsilon$ به قسمی است که $\exp(\mathbf{v}) = q$، یک ژئودزی در S است که p را به q وصل می‌کند، و اگر $\beta:[a,b]\to S$ هر خم پارامتری دیگری در S باشد که p را به q وصل کند آنگاه $l(\beta) \ge l(\alpha)$.***

برهان. فرض کنید $r:S_p \to \mathbf{R}$ به صورت $r(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ تعریف شده باشد. ما از مطالب زیر دربارهٔ
۱- فرم dr روی $S_p - \{۰\}$ استفاده خواهیم کرد.

الف - اگر $\mathbf{w}\in(S_p)_\mathbf{v}$ مماس به پرتو در S_p گذرنده از $\mathbf{v}\in S_p$ باشد آنگاه $\|dr(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{w}\|$.

ب - اگر $\mathbf{w}\in(S_p)_\mathbf{v}$ عمود بر پرتو در S_p گذرنده از $\mathbf{v}\in S_p$ باشد آنگاه $dr(\mathbf{w}) = ۰$.

برای بررسی درستی مطالب، توجه کنید که هر $\mathbf{w}\in(S_p)_\mathbf{v}$ به‌صورت $\mathbf{w} = \dot\gamma(۰)$ می‌باشد که در آن $\gamma(s) = \mathbf{v} + s\mathbf{x}$ برای یک $\mathbf{x}\in S_p$. اگر $\mathbf{w}$ مماس به پرتو گذرنده از $\mathbf{v}$ باشد آنگاه به‌ازای یک $\lambda\in\mathbf{R}$ داریم $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{v}$ و بنابراین $\gamma(s) = (۱+\lambda s)\,\mathbf{v}$ و

$$|dr(\mathbf{w})| = |dr(\dot\gamma(۰))| = |(r\circ\gamma)'(۰)|$$

$$= \left|\frac{d}{ds}\Big|_۰ \|(۱+\lambda s)\,\mathbf{v}\|\right| = |\lambda|\,\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{w}\|\,.$$

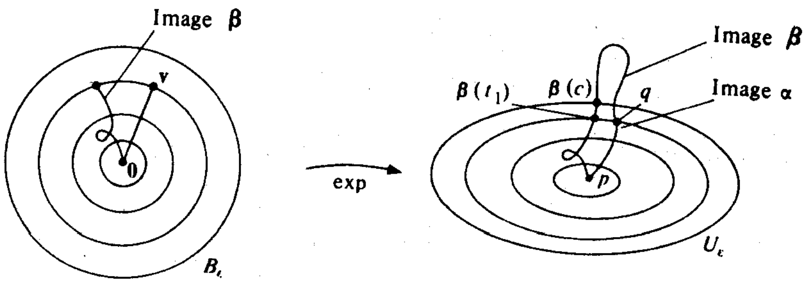
اگر $\mathbf{w}$ عمود بر پرتوگذرنده از $\mathbf{v}$ باشد آنگاه $\mathbf{x}\perp\mathbf{v}$، $r\circ\gamma(s) = \|\mathbf{v}+s\mathbf{x}\| = (\|\mathbf{v}\|^۲ + s^۲\|\mathbf{x}\|^۲)^{۱/۲}$

و $\circ = (\circ)' (r \circ \gamma) = \big(\dot\gamma(\circ)\big) dr = dr(\mathbf{w})$.

این مطلب که $\alpha(t) = \exp(t\mathbf{v})$ یک ژئودزی است که p را به q وصل می‌کند از قضیه ۲ براحتی حاصل می‌شود. بنابراین فرض کنید $\beta:[a,b] \to S$ با شرایط $\beta(a) = p$ و $\beta(b) = q$ باشد، اگر c کوچکترین کران بالای مجموعهٔ

$$\{t \in [a,b] : \beta[a,t] \subset U_\varepsilon\}$$

باشد. بنابراین $\beta(I) \subset U_\varepsilon$ که در آن $I = [a\,,\,b]$ وقتی که $c = b$ و در غیر این صورت $I = [a\,,\,c]$. فرض کنید $\bar r : U_\varepsilon \to \mathbf{R}$ به صورت $\bar r = r \circ (\exp|_{B_\varepsilon})^{-1}$ تعریف شده باشد (ر.ک. شکل ۱۹-۸).



شکل ۱۹-۸ کره‌های هم مرکز در گوی B_ε مجموعه‌های تراز $r : S_p \to \mathbf{R}$ می‌باشند. تصاویر این مجموعه‌ها تحت exp مجموعه‌های تراز $\bar r : U_\varepsilon \to \mathbf{R}$ هستند.

می‌بینیم که

$\circ = \bar r(p) = \bar r\big(\beta(a)\big)$ و $\bar r(q) < \varepsilon = \lim_{t\to c} \bar r\big(\beta(t)\big)$ اگر $c \neq b$ و $\bar r\big(\beta(b)\big) = \bar r(q)$ هرگاه $c = b$. در هر یک از این حالات با استفاده از قضیهٔ مقداربینی برای یک مقدار $t \in I$ داریم $\bar r\big(\beta(t)\big) = \bar r(q)$، فرض کنید t_1 کوچکترین t با این خاصیت باشد. اگر $\tilde\beta:[a\,,\,t_1] \to B_\varepsilon$ به صورت $\tilde\beta(t) = (\exp|_{B_\varepsilon})^{-1}\big(\beta(t)\big)$ تعریف شده باشد. در این صورت $\dot{\tilde\beta}(t) = \dot{\tilde\beta}_T(t) + \dot{\tilde\beta}_\perp(t)$ که در آن $\dot{\tilde\beta}_T(t)$ مماس بر پرتوی در S_p گذرنده از $\tilde\beta(t)$ و $\dot{\tilde\beta}_\perp(t)$ عمود بر این پرتو می‌باشد. با به‌کارگیری مطالب بالا در مورد dr داریم

$$1(\alpha) = \int_{\circ}^{1} \|\dot{\alpha}\| = \int_{\circ}^{1} \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\| = r(\mathbf{v}) = \bar{r}(q) = \bar{r}(\beta(t_1)) - \bar{r}(\beta(a))$$

$$= \int_{\circ}^{t_1} (\bar{r}\circ\beta)' = \int_{a}^{t_1} (r\circ\beta)' = \int_{a}^{t_1} dr(\dot{\beta}) = \int_{a}^{t_1} dr(\dot{\beta}_T)$$

$$\leq \int_{a}^{t_1} |dr\ (\dot{\beta}_T)| = \int_{a}^{t_1} \|\dot{\beta}_T\| \overset{(1)}{=} \int_{a}^{t_1} \|(d\ \exp)\ (\dot{\beta}_T)\|$$

$$\overset{(2)}{\leq} \int_{\circ}^{t_1} \|(d\ \exp)\ (\dot{\beta}_T) + (d\ \exp)\ (\dot{\beta}\perp)\|$$

$$= \int_{a}^{t_1} (d\ \exp)\ (\dot{\beta}) = \int_{a}^{t_1} \|\exp \dot{\circ}\ \beta\| = \int_{a}^{t_1} \|\dot{\beta}\| \leq \int_{a}^{b} \|\dot{\beta}\| = 1(\beta)$$

که برابری (۱) و نابرابری (۲) طبق لم برقرارند. ■

تذکر ۱. $1(\beta)$ می‌تواند با $1(\alpha)$ برابر باشد فقط وقتی که سه نابرابری بالا تبدیل به برابری شود. این امر تنها در صورتی امکان دارد که

(یک) برای هر $t \geq t_1$، $\beta(t) = \beta(t_1)$

(دو) برای هر $t \leq t_1$، $\dot{\beta}(t)$ دارای هیچ مولفه عمودی بر پرتو در S_p گذرنده از $\beta(t)$ نباشد و

(سه) $r\circ\beta$ روی $[a\ ,\ t_1]$ یکنوا باشد.

این سه شرط ایجاب می‌کند که ***تحت فرضهای قضیه***، اگر $1(\alpha) = 1(\beta)$، آنگاه $\beta = \alpha\circ h$ که در آن $h:[a,b] \to [\circ\ ,\ \|\mathbf{v}\|]$ ***یکنوا است؛ در حالت خاص α و β دارای تصاویر یکسانی هستند.***

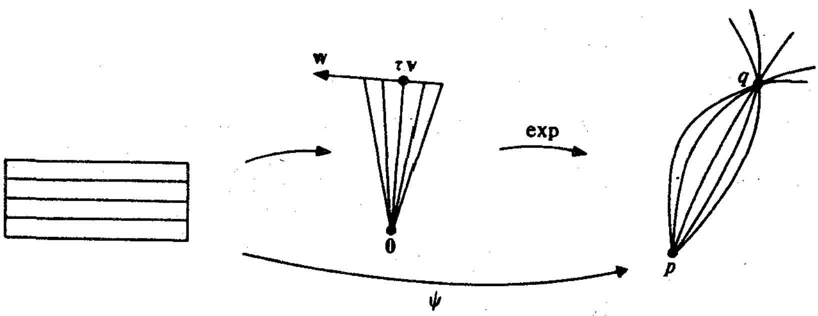
تذکر ۲. از بررسی اثبات قضیه ۳ نتیجه می‌شود که اگر V هر مجموعهٔ باز در $U \cap S_p$ (U دامنهٔ نگاشت نمایی) باشد به قسمی که exp، مجموعه V را به طور دیفئومرفیک به روی مجموعهٔ باز W در S بنگارد و اگر برای $\circ \leq t \leq t_\circ$ داشته باشیم $\exp\ (t\mathbf{v}) \in W$، آنگاه $\alpha_\mathbf{v}(t) = \exp\ (t\mathbf{v})$ $(\circ \leq t \leq t_\circ)$ در میان همهٔ خمهای پارامتری در W که p را به $\exp\ (t_\circ\mathbf{v})$ وصل می‌کنند کوتاهترین است. با این حال لازم نیست برای $\circ \leq t \leq t_\circ$ ، $\alpha_\mathbf{v}(t) = \exp(t\mathbf{v})$ در میان همهٔ خم‌هایی در S که p را

به $\exp(t_\circ \mathbf{v})$ وصل می‌کنند کوتاهترین باشد (ر.ک. شکل ۱۹-۴).

تذکر ۳. نقطهٔ $q = \alpha_{\mathbf{v}}(\tau)$ **مزدوج** $p = \alpha_{\mathbf{v}}(\circ)$ در طول ژئودزی $\alpha_{\mathbf{v}}(t) = \exp(t\mathbf{v})$ گوییم هرگاه به‌ازای یک مقدار غیرصفر $\mathbf{w} \in (S_p)_{\tau\mathbf{v}}$ داشته باشیم $(d\ \exp)\ (\mathbf{w}) = \circ$. بنابر لم این فصل، هر $\mathbf{w} \in (S\pi)_{\tau\mathbf{v}}$ به قسمی که $(d\ \exp)\ (\mathbf{w}) = \circ$ باید بر پرتو $\alpha(t) = t\mathbf{v}$ در S_p عمود باشند، بنابراین $\mathbf{w} = \beta(\circ)$ که در آن $\beta(s) = \mathbf{v} + s\mathbf{x}$ به‌ازای یک مقدار $\mathbf{x} \in S_p$ با شرط $\mathbf{x} \perp \mathbf{v}$. $\psi : [\circ , \tau] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to S$ (ε به اندازه کافی کوچک) را به صورت

$$\psi(t\ ,\ s) = \exp\ \big(t(\mathbf{v} + s\mathbf{x})\big)$$

تعریف می‌کنیم. یک تغییر از ژئودزی $\alpha_{\mathbf{v}}\Big|_{[\circ,\tau]}$ طوری بدست می‌آوریم که هریک از خمهای مختصی $\alpha_s(t) = \psi(t\ ,\ s)$ یک ژئودزی با نقطهٔ ابتدایی p باشد و این ژئودزیها به نقطهٔ کانونی q میل کنند (ر.ک. شکل ۱۹-۹). بنابراین نقاط مزدوج در طول ژئودزیها از p شبیه به نقاط کانونی در طول خطوط قائم یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ هستند، این شباهت با این مشاهده کامل‌تر می‌شود که ژئودزیهایی در S که از p پرتو می‌گیرند همانند ژئودزیهایی قائم به $\exp\ \{\mathbf{v} \in S_p : \|\mathbf{v}\| = \delta\}$، $\circ < \delta$ می‌باشند که در آن δ به اندازه کافی کوچک انتخاب می‌شود به قسمی که exp یک دیفئومرفیسم روی یک گوی B_ε در حول مبداء در S_p به شعاع $\delta < \varepsilon$ باشد.

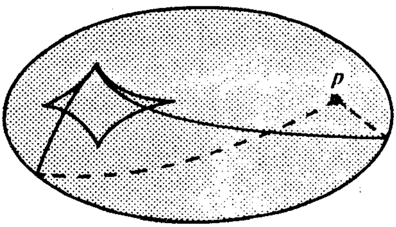


شکل ۱۹-۹ یک خانواده ۱- پارامتری از ژئودزی‌های گذرنده از نقطه p که به کانون در نقطهٔ مزدوج q میل می‌کند وجود دارد.

با اندک اصلاحی در اثبات قضیهٔ ۳ می‌توان نشان داد که با تقریب نقطهٔ مزدوج اول ژئودزی $\alpha_{\mathbf{v}}$ موضعاً انتگرال طول را به مفهوم زیر می‌نیمم می‌سازد:

اگر χ هر تغییر با نقطه ثابت انتهایی از $\alpha_v \Big|_{[0,t_1]}$ باشد و اگر هیچ نقطهٔ مزدوجی مانند $\alpha_v(\tau)$ برای $0 < t < t_1$ وجود نداشته باشد، آنگاه $l(\gamma_s) \geq l(\alpha_v \Big|_{[0,t_1]})$ برای تمام sهای به اندازه کافی کوچک، که در آن $\gamma_s(t) = \chi(t\ ,\ s)$. می‌توان نشان داد که α_v انتگرال طول را حتی به طور موضعی خارج از نقطهٔ مزدوج اول می‌نیمم نمی‌سازد (ر.ک. شکل ۱۹-۴).

مجموعهٔ نقاط $q \in S$ به قسمی که q مزدوج p در طول یک ژئودزی گذرنده از p باشد **مکان هندسی مزدوج** p در S نامیده می‌شود (ر.ک. شکل ۱۹-۱۰).



شکل ۱۹-۱۰ مکان هندسی مزدوج یک نقطهٔ p روی یک بیضوی . دو ژئودزی گذرنده از p نیز نشان داده شده‌اند.

تمرین

۱۹-۱. فرض کنید S یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد. برای خم پارامتری $\alpha:[a,b] \to S$ در S، *انرژی* α را با انتگرال $\int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\|^2\, dt$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید α یک ژئودزی در S است اگر و فقط اگر انتگرال انرژی در α نسبت به تغییرات با نقاط ثابت انتهایی ایستا باشد.

۱۹-۲. (الف) نشان دهید که هر بردار مماس به دایره یکه $S^1 \subseteq \mathbf{R}^2$ به صورت زیر می‌باشد.

$$\mathbf{v}(\varphi\ ,\ \theta) = (\cos\varphi\ ,\ \sin\varphi\ ,\ -\theta\sin\varphi\ ,\ \theta\cos\varphi)$$

برای $\varphi\ ,\ \theta \in \mathbf{R}$.

(ب) نشان دهید نگاشت نمایی روی S^1 بوسیله

$$\exp\big(\mathbf{v}(\varphi\ ,\ \theta)\big) = e^{i(\varphi+\theta)}$$

که در آن $\mathbf{R}^2$ به صورت مجموعهٔ اعداد مختلط که از یکی سازی $(a\ ,\ b)$، $a + ib$ حاصل می‌شود در

نظر گرفته شده است.

۱۹-۳. فرض کنید S یک n- رویه سودار در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد، فرض کنید

$$\mathbf{v} = (p , v) \in T(S) \quad , \quad T(S) = \bigcup_{p \in S} S_p \subset \mathbf{R}^{2(n+1)}.$$

(الف) نشان دهید که فضای مماس $\big(T(S)\big)_{\mathbf{v}}$ بر $T(S)$ در $\mathbf{v}$ عبارتست از:

$$\big(T(S)\big)_{\mathbf{v}} = \{(x_1 , x_2 , x_3 , x_4) \in \mathbf{R}^{4(n+1)} :$$
$$x_1 = p , x_2 = v , (p , x_3) \in S_p , (p , x_3) . L_p(\mathbf{v}) = (p , x_4) . \mathbf{N}(p)\}$$

که در آن L_p نگاشت وینگارتن S در p است.

(ب) نشان دهید که فضای مماس $(S_p)_{\mathbf{v}}$ بر S_p در $\mathbf{v}$ عبارتست از:

$$(S_p)_{\mathbf{v}} = \{(p , v , 0 , x) : (p , x) \in S_p\}$$

(پ) نشان دهید که $(p , v , 0 , x) \in (S_p)_{\mathbf{v}}$ بر پرتو $\alpha(t) = t\mathbf{v}$ در S_p مماس است اگر و فقط اگر برای یک $\lambda \in \mathbf{R}$، $x = \lambda v$ و $(p , v , 0 , x)$ عمود بر این پرتو است اگر و فقط اگر $v . x = 0$ (تعامد در $(S_p)_{\mathbf{v}}$ می‌باشد!).

۱۹-۴. فرض کنید S استوانه $x_1^2 + x_2^2 = 1$ در $\mathbf{R}^3$ باشد و $p = (1 , 0 , 0) \in S$.

(الف) نشان دهید که $S_p = \{(p , 0 , a , b) : a , b \in \mathbf{R}\}$.

(ب) به‌ازای هر $\mathbf{v} = (p , 0 , a , b) \in S_p$، $\exp(\mathbf{v})$ را محاسبه کنید.

(پ) نشان دهید مکان هندسی مزدوج p در S تهی است.

(ت) نشان دهید که یک مجموعهٔ باز در S_p شامل پرتو $\alpha(t) = t\mathbf{v}$ با شرط $\mathbf{v} = (p, 0, 1, 1)$ وجود دارد که به طور دیفمؤرفیسم توسط exp به داخل یک مجموعهٔ باز در S شامل ژئودزی $\alpha_{\mathbf{v}}(t) = \exp(t\mathbf{v})$ نگاشته می‌شود.

(ث) نشان دهید با این حال یک نقطهٔ $t_0 \in \mathbf{R}$ وجود دارد به قسمی که $\alpha_{\mathbf{v}}(t) = \exp(t\mathbf{v})$ برای $0 \le t \le t_0$ یک کوتاهترین خم در S که p را به $\exp(t_0\mathbf{v})$ وصل می‌کند نمی‌باشد.

۱۹-۵. فرض کنید S^2، ۲-کرهٔ یکه در $\mathbf{R}^3$ باشد و $p = (0 , 0 , 1) \in S^2$.

(الف) نشان دهید که $S_p^2 = \{(p , a , b , 0) \;، a , b \in \mathbf{R}\}$.

(ب) برای $\mathbf{v} = (p , a , b , 0) \in S_p^2$ ، $\exp(\mathbf{v})$ را محاسبه کنید.

(پ) نشان دهید که مکان هندسی مزدوج p تنها نقطهٔ $q = (0 , 0 , -1)$ است.

(ت) نشان دهید که exp گوی $\{\mathbf{v} \in S_p^2 : \|\mathbf{v}\| < \pi\}$ به طور دیفئومرفیک بروی $S^2 - \{q\}$ می‌نگارد.

۱۹-۶. فرض کنید S یک n- رویه همبند در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد. برای $p_1,p_2 \in S$ ***فاصلهٔ ذاتی*** $d(p_1,p_2)$ از p_1,p_2 را برابر بزرگترین کران پایین مجموعهٔ زیر در نظر می‌گیریم

$\{l(\alpha)$: خم پارامتری تکه‌ای هموار در S بین p_1 و p_2 است $\alpha\}$.

نشان دهید که برای $p_1,p_2 \in S$ داریم

(الف) $d(p_1 , p_2) = d(p_2 , p_1)$

(ب) $d(p_1 , p_2) + d(p_2 , p_3) \geq d(p_1 , p_3)$

(پ) $d(p_1 , p_2) \geq 0$ و $d(p_1 , p_2) = 0$ اگر و فقط اگر $p_1 = p_2$.

[راهنمایی: برای (پ)، $p = p_1$ بگیرید و ε را مانند قضیهٔ ۳ به اندازه کافی کوچک انتخاب کنید تا $p_2 \notin U_\varepsilon$. سپس نشان دهید که $d(p_1 , p_2) \geq \varepsilon$.]

۱۹-۷. فرض کنید S یک n- رویه‌در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشدو $T_1(S)$ کرهٔ یکه کلاف S باشد.(تمرین ۱۵-۶)

(الف) نشان دهید که تحدید افشانده ژئودزی به $T_1(S)$ یک میدان برداری مماس روی $T_1(S)$ است.

(ب) با استفاده از این واقعیت که $T_1(S)$ فشرده است اگر S فشرده باشد، نشان دهید که هر n- رویه فشرده در $\mathbf{R}^{n+1}$ از نظر ژئودزی کامل است.

(پ) نتیجه بگیرید که اگر S فشرده باشد، آنگاه دامنهٔ نگاشت نمایی S تمام $T(S)$ است.

۲۰ـ رویه های مرزدار

در این فصل به گسترش روشهایی خواهیم پرداخت که در فصل بعد برای اثبات یکی از مشهورترین قضایا در هندسه دیفرانسیل، قضیهٔ گاوس ـ بونه، احتیاج داریم. ما در ابتدا به n-رویه‌های مرزدار می‌پردازیم، سپس مقدار کمی محاسبهٔ دیفرانسیل فرمها را توسعه می‌دهیم.

یک n ـ **رویهٔ مرزدار** در $\mathbf{R}^{n+1}$ یک زیرمجموعهٔ غیرتهی S از $\mathbf{R}^{n+1}$ به صورت

$$S = f^{-1}(c) \cap g_1^{-1}((-\infty, c_1]) \cap \dots \cap g_k^{-1}((-\infty, c_k])$$
$$= \{ p \in U : f_{(p)} = c , g_1(p) \leq c_1 , \dots , g_k(p) \leq c_k \}$$

می‌باشد که در آن k یک عدد صحیح مثبت است و $\{ c , c_1, \dots , c_k \} \subset \mathbf{R}$ ، $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ و $g_i : U_i \longrightarrow \mathbf{R}$ برای $i \in \{1 , \dots , k\}$ توابع هموار تعریف شده روی زیرمجموعه‌های باز $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشند که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

(یک) $\nabla f(p) \neq 0$ برای هر $p \in S$

(دو) $g_i^{-1}(c_i) \cap g_j^{-1}(c_j) \cap S$ تهی است برای $i \neq j$

(سه) برای هر $i \in \{1 , \dots , k\}$ به ازای هر $p \in g_i^{-1}(c_i) \cap S$ ، $\{ \nabla f(p) , \nabla g_i(p)\}$ مستقل خطی است.

مرز ∂S از S مجموعهٔ

$$\partial S = \{p \in S : g_i(p) = c_i \text{ برای بعضی } i \text{ ها} \} = \bigcup_{i=1}^{k} g_i^{-1}(c_i) \cap S$$

می‌باشد. **درون** S مجموعهٔ $S - \partial S$ می‌باشد.

شرط (یک) تضمین می‌کند که درون S یک N- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد و در حقیقت S خودش قسمتی از یک n- رویه $(f^{-1}(c))$ در $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد. شرط (دو) تضمین می‌کند که قسمتهایی از مرز ∂S که با توابع متعدد g_i تعریف می‌شوند، از هم جدا می‌باشند. شرط (سه) تضمین می‌کند که ∂S یک $(n-1)$ رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد.

تذکر. به طور هم ارز یک n- رویه مرزدار در $\mathbf{R}^{n+1}$ عبارتست از

$$S = \{ p \in \tilde{S} : g_1(p) \le c_1 , \dots , g_k(p) \le c_k \}$$

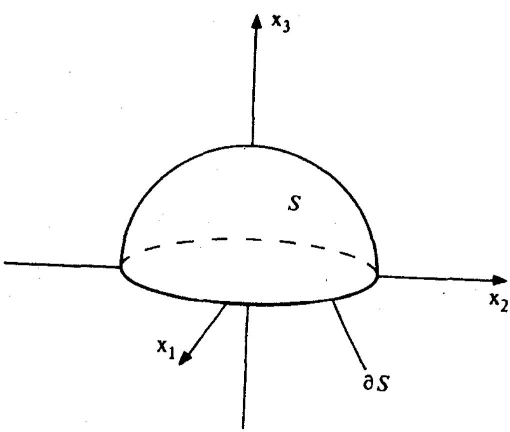
که در آن $\tilde{S}$ یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد و $g_1 , \dots , g_k : \tilde{S} \longrightarrow \mathbf{R}$ توابع هموار روی $\tilde{S}$ هستند به قسمی که $g_i^{-1}(c_i) \cap g_i^{-1}(c_j)$ تهی است وقتی که $i \neq j$ و به قسمی که $(\text{grad } g_i)(p) \neq 0$ برای $p \in g_i^{-1}(c_i)$.

مثال ۱. نیم‌کره

$$S = \{(x_1 , x_2 , x_3)\} \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 : = 1 , x_3 \ge 0 \}$$

یک ۲- رویه با مرز در $\mathbf{R}^3$ می‌باشد. ($f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ و $c = 1$ و $g(x_1 , x_2 , x_3) = -x_3$, $c_1 = 0$ بگیرید). مرز آن استوا است (ر.ک. شکل ۲۰-۱)

$$\partial S = \{ (x_1 , x_2 , x_3) \in S ; x_3 = 0\}$$

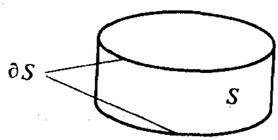


شکل ۲۰-۱ نیم کره $x_3 \ge 0 , x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

مثال ۲- برای $S = f^{-1}(c)$ یک $(n-1)$ رویه (بدون مرز) در $\mathbf{R}^n$، مجموعه

$$S \times I = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} : f(x_1, \dots, x_n) = c, 0 \le x_{n+1} \le 1\}$$

را در نظر بگیرید. بنابراین $S \times I$ یک قسمتی از استوانه روی S می‌باشد (شکل ۲۰-۲). $S \times I$ یک n- رویه با مرز در $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد. مرز آن شامل دو نسخه از S است: $g_1^{-1}(0)$ که در آن $g_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = -x_{n+1}$ و $g_2^{-1}(1)$ که در آن $g_2(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$.



شکل ۲۰-۲ استوانه با مرز $S^1 \times I = S$

فضای مماس در نقطهٔ $p \in S$، $S = f^{-1}(c) \cap \bigcap_{i=1}^{k} g_i^{-1}([-\infty, c_i])$ به **یک** n- ***رویه مرزدار*** $\mathbf{R}^{n+1}$، فضای برداری n- بعدی زیر است:

$$S_p = \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}_p^{n+1} : \mathbf{v} \cdot \nabla f(p) = 0\}$$

یک بردار $\mathbf{v} \in S_p$، $p \in \partial S$ ($p \in g_i^{-1}(c_i)$ برای یک i) (شکل ۲۰-۳) عبارتست از

(یک) ***برونگرای نقطه‌ای*** است اگر $\mathbf{v} \cdot \nabla g_i(p) > 0$

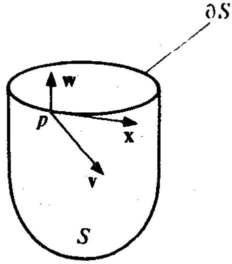
(دو) ***درونگرای نقطه‌ای*** است اگر $\mathbf{v} \cdot \nabla g_i(p) < 0$

(سه) ***مماس به مرز*** است اگر $\mathbf{v} \cdot \nabla g_i(p) = 0$

(چهار) ***قائم بر مرز*** است اگر $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ برای تمام $\mathbf{w} \in S_p$ که مماس بر مرز می‌باشند.

توجه کنید که برای هر $p \in \partial S$، مجموعهٔ $(\partial S)_p$ متشکل از تمام بردارهایی در S_p می‌باشند که مماس به مرز هستند تشکیل یک زیر فضای $(n-1)$ بعدی از S_p می‌دهد و دقیقاً یک برداریکه برونگرای نقطه‌ای در S_p وجود دارد که عمود به مرز می‌باشد.

همچنین توجه کنید که همهٔ شرایط بالا را می‌توان مجدداً فرمول‌بندی کرد بدون اینکه به توابع f ، $g_1, \dots, g_k$ ارجاع کرد و بنابراین تنها به خود رویه بستگی دارد نه به توابعی که رویه بر حسب



شکل ۲۰-۳ سه بردار در فضای مماس S_p، $p \in \partial S$، $\mathbf{v}$ درونگرای نقطه‌ای، $\mathbf{w}$ برونگرای نقطه‌ای و قائم بر مرز، و $\mathbf{x}$ مماس بر مرز است.

آنها تعریف می‌شود. بنابراین برای $p \in S$، فضای مماس S_p را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از همهٔ بردارهای $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^{n+1}_p$ به صورت $\mathbf{v} = \dot{\alpha}(t_\circ)$ بیان کرد که در آن $\alpha : I \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ (I یک بازه باز است) یک خم پارامتری است به قسمی که $\alpha(t_\circ) = p$ برای یک $t_\circ \in I$ و یا $\alpha(t) \in S$ برای هر $t \in I$ با شرط $t \le t_\circ$، یا $\alpha(t) \in S$ برای $t \in I$ با شرط $t \ge t_\circ$، یا هر دوی آنها. یک بردار $\mathbf{v} \in S_p$، $p \in \partial S$، مماس بر ∂S است اگر $\mathbf{v} = \dot{\alpha}(t_\circ)$ برای یک $\alpha : I \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ با شرط $\alpha(t) \in \partial S$ برای هر $t \in I$. یک بردار $\mathbf{v} \in S_p$، $p \in \partial S$ که مماس به ∂S نیست برونگرای نقطه‌ای است اگر $\mathbf{v} = \dot{\alpha}(t_\circ)$ برای یک $\alpha : I \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ با شرط $\alpha(t) \in S$ برای هر $t \in I$، با شرط $t \le t_\circ$، و $\mathbf{v}$ درونگرای نقطه‌ای است اگر $\mathbf{v} = \dot{\alpha}(t_\circ)$ برای یک α به قسمی که $\alpha(t) \in S$ برای هر $t \in I$ با شرط $t \ge t_\circ$.

یک **سو** روی S یک انتخاب میدان برداری یکه هموار $\mathbf{N}$ روی S با شرط $\mathbf{N}(p) \perp S_p$ برای هر $p \in S$ می‌باشد، که همواری آن عیناً همانند n- رویه‌های بدون مرز تعریف می‌شود. توجه کنید که هر سوی $\mathbf{N}$ روی S یک فرم حجمی روی S تعریف می‌کند، یعنی یک n- فرم هموار ζ روی S با شرط اینکه برای هر پایهٔ متعامدیکه $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ برای S_p داشته باشیم $\zeta(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \pm 1$ و

$$\zeta(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \\ \mathbf{N}(p) \end{pmatrix}$$

بر عکس، هر فرم حجمی ξ روی S منحصراً یک سو $\mathbf{N}$ روی S را مشخص می‌کند با شرط آنکه $\mathbf{N}(p)$ برای $p \in S$ بردار یکهٔ یکتا در $S_p{}^{\perp}$ باشد به قسمی که

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \\ \mathbf{N}(p) \end{pmatrix} = \xi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$

برای هر پایهٔ متعامدیکه $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ برای S_p. بنابراین یک سو روی S با انتخاب یک فرم حجمی روی S مشخص می‌شود، در اینصورت ما می‌توانیم یک سو روی S را با انتخاب یک فرم حجمی **تعریف** کنیم. این تعریف برای n- رویه‌ها در $\mathbf{R}^{n+m}$ $(m \geq 0)$ نیز با معنی خواهد بود بنابراین ما مجدداً مفهوم سو را در این فرم کلی‌تر دستوربندی خواهیم کرد.

فرض کنید S یا یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+m}$ و یا یک n- رویه با مرز در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد. یک **فرم حجمی** روی S یک n- فرم هموار ξ روی S می‌باشد به قسمی که $\xi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \pm 1$ وقتی که $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ یک پایهٔ متعامدیکه برای S_p است برای $p \in S$. یک **سو** روی S یک انتخاب از فرم حجمی ξ روی S می‌باشد. پایهٔ مرتب $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ (لزومی ندارد که متعامدیکه باشد) برای S_p، $p \in S$، ***سازگار با*** سوی ξ است اگر (و فقط اگر) $\xi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) > 0$. S ***سودار*** نامیده می‌شود اگر یک سوی ξ روی S وجود داشته باشد.

تذکر. این تعاریف بوضوح به n- رویه‌های با مرز در $\mathbf{R}^{n+m}$ قابل تعمیم است. ما این مطلب یعنی قانونمندی تعریف در مورد یک n- رویه مرزدار در $\mathbf{R}^{n+m}$ را به عهدهٔ خوانندهٔ علاقه‌مند می‌گذاریم. برای n- رویه‌های مرزدار در $\mathbf{R}^{n+1}$ ما هر جا که مناسب باشد یک سو را به عنوان انتخابی از یک میدان برداری قائم یکه هموار در نظر می‌گیریم.

برای S یک n- رویه مرزدار در $\mathbf{R}^{n+1}$، یک سوی ξ روی S یک سوی $\xi_{\partial S}$ روی $(n-1)$- رویه ∂S توسط فرمول $\xi_{\partial S} = \mathbf{V} \lrcorner\, \xi$ تعریف می‌نماید که در آن $\mathbf{V}$ میدان برداری هموار روی ∂S تعریف شده به صورت $\mathbf{V}(p) =$ بردار یکه برونگرای نقطه‌ای در S_p قائم بر مرز، می‌باشد. این سو $\xi_{\partial S}$ ***سوی القا شده*** روی ∂S نامیده می‌شود.

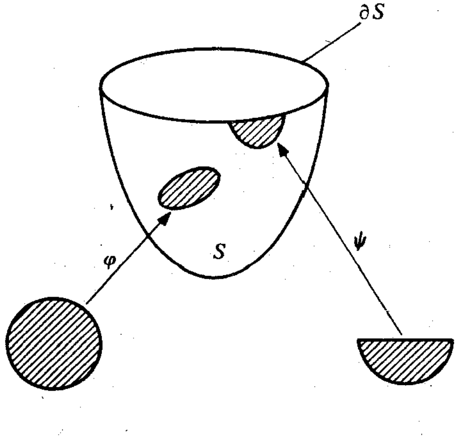
انتگرال‌گیری n- فرمهای دیفرانسیل‌پذیر روی n- رویه‌های سودار فشرده در $\mathbf{R}^{n+m}$ یا روی n-

رویه‌های سودار با مرز فشرده در $\mathbf{R}^{n+1}$ را درست مانند n- رویه‌ها در $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌توان تعریف نمود. ما ابتدا ***پارامترسازی موضعی*** را تعریف می‌کنیم. برای S یک n- رویه سودار در $\mathbf{R}^{n+m}$، یک پارامترسازی موضعی S یک n- رویه پارامتری $\varphi: U \longrightarrow \mathbf{R}^{n+m}$ می‌باشد به قسمی که $\varphi(U) \subset S$ و به قسمی که φ ***سازگار با سو*** ξ روی S باشد. بدین معنی که $\xi(E_n, \ldots, E_n) > 0$ که در آن $E_1, \ldots, E_n$ میدانهای برداری مختصی در طول φ می‌باشند. برای S یک n- رویه سودار مرزدار در $\mathbf{R}^{n+1}$، یک پارامترسازی موضعی، نگاشت هموار φ از یکی از دو نوع زیر می‌باشد:

(یک) $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ n- رویه پارامتری است به قسمی که $\varphi(U)$ یک مجموعهٔ باز در S باشد (یعنی که $\varphi(U)$ مقطع S با یک مجموعه باز در $\mathbf{R}^{n+1}$ است) و به قسمی که φ سازگار با سوی ξ به مفهوم بالا باشد (اینها پارامترسازی موضعی هستند که تصویرشان در درون S می‌باشند).

(دو) $\varphi: U \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ تحدید یک n- رویه پارامتری $\tilde{\varphi} = V \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ به $U = V \cap \mathbf{R}^n_-$ می‌باشد که در آن $\mathbf{R}^n_- = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n ; x_n \leq 0\}$ به قسمی است که $\varphi(U)$ یک مجموعهٔ باز در S و φ سازگار با سو ξ روی S به مفهوم بالا باشد (این‌ها پارامترسازیهای موضعی هستند که تصویرشان شامل نقاطی از ∂S می‌باشند، شکل ۲۰-۴ را ملاحظه کنید).

وجود پارامترسازیهای موضعی یک به یک که تصویرشان n- رویه (یا n- رویه مرزدار) مفروض را بپوشاند توسط قضیه ۱ فصل ۱۵ تضمین می‌شود و همچنین برای تعمیم آن تمرینهای ۱۵-۱۰ و ۲۰-۱ را ملاحظه کنید. می‌توانیم حتی به این امر که هر یک از مجموعه‌های U یا یک گوی باز در $\mathbf{R}^n$ و یا مقطع $\mathbf{R}^n_-$ با یک گوی باز که مرکز آن در (n-۱) - صفحه $x_n = 0$ قرار دارد تأکید نمائیم (ر.ک. شکل ۲۰-۴).



شکل ۲۰-۴ پارامترسازیهای موضعی از یک ۲- رویه مرزدار.

برای یک n- فرم ω روی n- رویه سودار فشرده $S \subset \mathbf{R}^{n+m}$ یا روی n- رویهٔ سودار فشردهٔ مرزدار $S \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$، ***انتگرال*** $\int_S \omega$ عدد حقیقی

$$\int_S \omega = \sum_i \int_{\varphi_i} (f_i \omega)$$

می‌باشد که در آن $\{f_i\}$ یک افراز یکانی روی S مادون به گرد آیهٔ با پایان $\{\varphi_i\}$ از پارامترسازیهای موضعی یک به یک S می‌باشد. وجود یک افراز یکانی روی S و این حقیقت که $\int_S \omega$ مستقل از انتخاب افراز یکانی می‌باشد، دقیقاً همانند n- رویه‌های سودار در $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد (فصل ۱۷).

اکنون که انتگرال یک n- فرم هموار دلخواه روی S را تعریف کردیم می‌توانیم **حجم** یک n- رویه سودار فشرده S در $\mathbf{R}^{n+m}$ یا یک n- رویه S سودار مرزدار فشرده S در $\mathbf{R}^{n+1}$ یا به صورت انتگرال روی S از فرم حجمی سو تعریف کرد:

$$V(S) = \int_S \zeta$$

و همچنین ***انتگرال*** هر ***تابع هموار*** $f : S \longrightarrow \mathbf{R}$ روی یک چنین S ای بوسیله فرمول زیر تعریف می‌شود

$$\int_S f = \int_S f \zeta.$$

ساختار بالا قسمتی از حساب انتگرال فرمها می‌باشد. ما به بعضی از حساب دیفرانسیل فرمها نیز احتیاج خواهیم داشت.

فرض کنید S یک n- رویه یا یک n- رویه مرزدار در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد. دیفرانسیل یک تابع هموار $f:S \longrightarrow \mathbf{R}$ یک ۱- فرم هموار df تعریف شده به صورت $df(\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}} f$ برای $\mathbf{v} \in S_p$، $p \in S$ می‌باشد. ***مشتق برونی*** یک ۱- فرم هموار ω روی S ۲- فرم هموار $d\omega$ روی S تعریف شده به صورت

$$d\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \nabla_{\mathbf{v}_1} \omega(\mathbf{V}_2) - \nabla_{\mathbf{v}_2} \omega(\mathbf{V}) - \omega\left([\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2](p)\right)$$

می‌باشد که در آن برای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in S$، $p \in S$، $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ انتخاب دلخواهی از میدانهای برداری مماس هموار تعریف شده روی یک مجموعهٔ باز U از S شامل p می‌باشد به قسمی که $\mathbf{V}_1(p) = \mathbf{v}_1$، $\mathbf{V}_2(p) = \mathbf{v}_2$ و $[\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2]$ کروشه لی میدانهای برداری $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$، میدان برداری مماس هموار روی S تعریف شده به صورت

$$[\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2](q) = \nabla_{\mathbf{v}_1(q)} \mathbf{V}_2 - \nabla_{\mathbf{v}_2(q)} \mathbf{V}_1$$

می‌باشد (تمرین ۹-۱۲). تحقیق اینکه طرف راست تعریف فرمول $d\omega$ مستقل از انتخاب میدانهای برداری V_1 , V_2 می‌باشد را به عنوان تمرین باقی می‌گذاریم (تمرین ۲۰-۲). توجه کنید که چند خطی بودن، متقارن چپ بودن و هموار بودن $d\omega$ با استفاده از تعریف واضح است.

تذکر. در فرمول تعریف $d\omega$ اغلب در متون با یک عامل $\frac{1}{2}$ روی طرف راست ظاهر می‌گردد که این امر برای جبران کردن عامل $\frac{1}{2}$ ای است که در این منابع در تعریف ضرب خارجی ۱- فرمها ارائه می‌شود.

لم ۱. ***فرض کنید $f:S \longrightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار روی S باشد و فرض کنید ω یک ۱- فرم هموار روی S باشد. در اینصورت***

$$d\big(d(f) = 0\big) \quad \text{(یک)}$$

$$d(f\,\omega) = df \wedge \omega + fd\omega\,. \quad \text{(دو)}$$

برهان. (یک) چون $d(df)$ دو خطی است، کافی است تحقیق کنیم که $d(df)\ (\mathbf{v}_i\ ,\ \mathbf{v}_j) = 0$ برای هر $i\ ,\ j \in \{1\ ,\ \dots\ ,\ n\}$ که در آن $\{\mathbf{v}_1\ ,\ \dots\ ,\ \mathbf{v}_n\}$ هر پایهٔ دلخواه برای S_p باشد ($p \in S$ دلخواه). می‌توان $\mathbf{v}_i = \mathbf{E}_i(q)$ گرفت که در آن $\mathbf{E}_i$ ها میدانهای برداری مختصی از یک پارامترسازی موضعی یک به یک $\varphi : U \longrightarrow S$ با شرط $\varphi(q) = p$ می‌باشند. با قرار دادن $\mathbf{V}_j = \mathbf{E}_i \circ \varphi^{-1}$ ملاحظه می‌کنیم که $\mathbf{V}_i$ دارای قسمت برداری $(\partial\varphi / \partial x_j) \circ \varphi^{-1}$ می‌باشد، بنابراین

$$.\ \nabla_{\mathbf{v}_i(p)}\ ,\ \mathbf{V}_j = \nabla_{\mathbf{E}_i(q)}\ ,\ \mathbf{V}_j$$

دارای قسمت برداری

$$\partial^2\varphi /_{\partial x_i\, \partial x_j}\ (q)$$

برای هر j می‌باشد و

$$[\mathbf{V}_i\ ,\ \mathbf{V}_j]_{(p)} = \nabla_{\mathbf{V}_{i(p)}}\ ,\ \mathbf{V}_j - \nabla_{\mathbf{V}_{j(p)}}\ \mathbf{V}_i\ .$$

چون $\mathbf{v}_i = \mathbf{E}_i(q) = \mathbf{V}_i(p)$ برای تمام i ها نتیجه می‌شود که

$$d(df)\ (\mathbf{v}_i\ ,\ \mathbf{v}_j) = \nabla_{\mathbf{E}_i(q)}\ df\ (\mathbf{V}_j) - \nabla_{\mathbf{E}_j(q)}\ df\ (\mathbf{V}_i)$$

$$= \nabla_{\mathbf{E}_i(q)}\ \nabla_{\mathbf{E}_j \circ \varphi^{-1}}\ f - \nabla_{\mathbf{E}_j \circ q}\ \nabla_{\mathbf{E}_i \circ \varphi^{-1}}\ f$$

$$= \nabla_{\mathbf{E}_i(q)}\ \nabla_{\mathbf{E}_j}\ (f \circ \varphi) - \nabla_{\mathbf{E}_j(q)}\ \nabla_{\mathbf{E}_i}\ (f \circ \varphi)$$

$$= \frac{\partial^{۲} (f \circ \varphi)}{\partial x_i \, \partial x_j} (q) - \frac{\partial^{۲} (f \circ \varphi)}{\partial x_j \, \partial x_i} (q) = ۰$$

(دو) با قبول همان نمادگزاری که در تعریف $d\omega$ به کار رفت، داریم

$$d (f\omega) (\mathbf{v}_{۱} , \mathbf{v}_{۲}) = \nabla_{\mathbf{v}۱} (f\omega (\mathbf{V}_{۲})) - \nabla_{\mathbf{v}۲} (f\omega (\mathbf{V}_{۱})) - f\omega \left([\mathbf{V}_{۱} , \mathbf{V}_{۲}] (p)\right)$$

$$= (\nabla_{\mathbf{v}۱} f) \, \omega (\mathbf{V}_{۲} (p)) + f(p) \nabla_{\mathbf{V}_{۱}} \omega (\mathbf{V}_{۲})$$

$$- (\nabla_{\mathbf{V}_{۲}} f) \, \omega (\mathbf{V}_{۱} (p)) - f (p) \nabla_{\mathbf{V}_{۲}} \omega (\mathbf{V}_{۱}) - f (p) \, \omega ([\mathbf{V}_{۱} , \mathbf{V}_{۲}] (p))$$
$$= df (\mathbf{v}_{۱}) \, \omega (\mathbf{v}_{۲}) - df (\mathbf{v}_{۲}) \, \omega (\mathbf{v}_{۱}) + f (p) \, d\omega (\mathbf{v}_{۱} , \mathbf{v}_{۲})$$

$$= (df \wedge \omega) (\mathbf{v}_{۱} , \mathbf{v}_{۲}) + (f \, d\omega) (\mathbf{v}_{۱} , \mathbf{v}_{۲}) . \blacksquare$$

لم ۲. ***فرض کنید ω یک ۱ - فرم هموار روی S باشد و فرض کنید $\varphi : U \longrightarrow S$ یک ۲- رویه منفرد در S باشند. در اینصورت***

$$d\omega (\mathbf{E}_{۱} , \mathbf{E}_{۲}) = \frac{\partial \, \omega_{۲}}{\partial \, x_{۱}} - \frac{\partial \, \omega_{۱}}{\partial x_{۲}}$$

که در آن $\mathbf{E}_{۱}$, $\mathbf{E}_{۲}$ میدانهای برداری مختصی در طول φ می‌باشند و ω_i برای $i \in \{۱ , ۲\}$ تابع هموار در طول φ تعریف شده به صورت $\omega_i = \omega (\mathbf{E}_i)$ می‌باشد.

برهان. ابتدا توجه کنید که اگر $\psi : V \longrightarrow S$ یک پارامترسازی موضعی یک به یک از S و ω یک ۱- فرم هموار دلخواه روی $\psi (V)$ باشد، در اینصورت $\omega = \sum_{i=۱}^{n} f_i \, dg_i$ برای انتخابی از توابع هموار f_i و g_i روی $\psi(V)$. در واقع، اگر ما $f_i = \omega (\mathbf{E}_i^{\varphi} \circ \psi^{-۱})$ و $g_i = x_i \circ \psi^{-۱}$ تعریف کنیم که در آن $x_{۱} , \ldots , x_n$ توابع مختصی روی $\mathbf{R}^n$ هستند $(x_i (a_{۱} , \ldots , a_n) = a_i)$، در اینصورت برای هر $p \in V$ و $j \in \{۱ , \ldots , n\}$ داریم

$$(\sum f_i \, dg_i) \, (\mathbf{E}_j^{\psi} (p)) = \sum f_i (\psi (p)) \, \nabla_{\mathbf{E}_j} \psi (p) \, g_i = \sum f_i (\psi(p)) \frac{\partial}{\partial x_j} g_i \circ \psi$$

$$= f_j (\psi(p)) = \omega (\mathbf{E}_j^{\psi}) \, (p)$$

بنابراین توابع خطی $\omega_{\psi(p)}$ و $(\sum f_i \, dg_i)_{\psi(p)}$ روی یک پایهٔ $S_{\psi(p)}$ با هم برابر می‌باشند و بنابراین برای هر $p \in V$ برابرند.

پس برای ω یک ۱- فرم روی S و $S \longrightarrow U$: φ یک ۲- رویه منفرد، می‌توانیم در مجموعهٔ باز W حول هر نقطه داده شده از تصویر φ، ω را به صورت $\omega = \sum f_i dg_i$ بیان کنیم. در اینصورت روی $\varphi^{-1}(W)$ بنابر لم ۱ داریم

$$d\omega \, (\mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2) = \sum df_i \wedge dg_i \, (\mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2)$$

$$= \sum (df_i \, (\mathbf{E}_1) \, dg_i \, (\mathbf{E}_2) - df_i \, (\mathbf{E}_2) \, dg_i \, (\mathbf{E}_1))$$

$$= \sum \left(\frac{\partial f_i \circ \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial g_i \circ \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial f_i \circ \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial g_i \circ \varphi}{\partial x_1} \right)$$

از طرف دیگر

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \omega \, (\mathbf{E}_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \sum (f_i \circ \varphi) \, dg_i \, (\mathbf{E}_2)$$

$$= \sum \left(\frac{\partial f_i \circ \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial g_i \circ \varphi}{\partial x_2} + (f_i \circ \varphi) \frac{\partial^2 g_i \circ \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right)$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \omega \, (\mathbf{E}_1) = \frac{\partial}{\partial x_2} \sum (f_i \circ \varphi) \, dg_i \, (\mathbf{E}_1)$$

$$= \sum \left(\frac{\partial f_i \circ \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial g_i \circ \varphi}{\partial x_1} + (f_i \circ \varphi) \frac{\partial^2 g_i \circ \varphi}{\partial x_2 \partial x_1} \right)$$

بنابراین $d\omega \, (\mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2) = (\partial\omega_2 / \partial x_1) - (\partial\omega_1 / \partial\omega_2)$. ■

ما به یک فرمولی (فرمولی استوکس) احتیاج داریم که مشتق (دیفرانسیل) گیری را به انتگرال‌گیری برای فرمهای روی ۲- رویه‌ها مربوطه کند. این فرمول تعمیم طبیعی قضیهٔ اساسی حساب انتگرال است که در مورد انتگرال‌های منحنی الخط به ۲- رویه‌ها اعمال می‌شود $(\int_\alpha df = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)))$. در آغاز ما به حالت خاص ۲- رویه‌های منفرد مرزدار می‌پردازیم.

فرض کنید S یک n- رویه یا یک n- رویه مرزدار در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد.

یک **قـــرص مـــنفرد** در S یک نگـاشت هـموار $\varphi : D \xrightarrow{\sigma} S$ مـی‌باشد کـه در آن $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. هموار بودن در اینجا بدین معنی است (همانند قبل) که φ می‌تواند به یک نگاشت هموار تعریف شده روی مجموعهٔ بازی شامل D گسترش داده شود. مرز قرص منفرد $\varphi : D \longrightarrow S$ خم پارامتری $\partial\varphi = \varphi \circ \alpha$ می‌باشد که در آن $\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow D$ تعریف شده به صورت $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ می‌باشد (ر.ک. شکل ۲۰-۵).

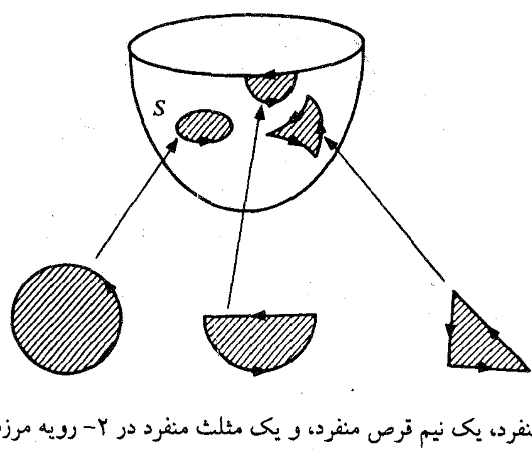
یک **نیم قرص منفرد** در S یک نگـاشت هـموار $\varphi : D \cap \mathbf{R}^2_- \longrightarrow S$ مـی‌باشد کـه در آن $\mathbf{R}^2_- = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2 \leq 0\}$، **مرزش** قسمتی از خم پارامتری تکه‌ای هموار $\partial\varphi = \varphi \circ \alpha$ می‌باشد که در آن $\alpha : [0, 2+\pi] \longrightarrow S$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\alpha(t) = \begin{cases} (1-t, 0) & 0 \leq t \leq 2 \\ \cos(t-2+\pi), \sin(t-2+\pi)) & 2 \leq t \leq \pi + 2 \end{cases}$$

(شکل ۲۰-۵).

یک **مثلث منفرد** در S یک نگاشت $\varphi : \Delta \longrightarrow S$ می‌باشد که در آن

$$\Delta = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$$



شکل ۲۰-۵ یک قرص منفرد، یک نیم قرص منفرد، و یک مثلث منفرد در ۲- رویه مرزدار S.

مرزش قسمتی از خم پارامتری تکه‌ای هموار $\partial\varphi = \varphi \circ \alpha$ می‌باشد که در آن $\alpha : [0, 3] \longrightarrow \Delta$ به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t , \circ) & \circ \leq t \leq ۱ \\ (۲-t , t-۱) & ۱ \leq t \leq ۲ \\ (\circ , ۳-t) & ۲ \leq t \leq ۳ \end{cases}$$

(ر.ک.شکل ۲۰-۵).

انتگرال یک ۲- فرم هموار ω روی S در مورد هر یک از این ۲- رویه‌های مرزدار منفرد φ همانند انتگرال ω روی یک ۲- رویه منفرد تعریف می‌شود:

$$\int_{\varphi} \omega = \int_{\mathscr{D}(\varphi)} \omega\,(\mathbf{E}_۱ , \mathbf{E}_۲)$$

که در آن $\mathscr{D}(\varphi) \subset \mathbf{R}^۲$ دامنه φ می‌باشد و $\mathbf{E}_۱$, $\mathbf{E}_۲$ میدانهای برداری مختصی در طول φ می‌باشند.

● **قضیهٔ ۱.** ***(قضیهٔ استوکس موضعی). فرض‌کنید $S \subset \mathbf{R}^{n+1}$ یک n- رویه یا یک n- رویه مرزدار باشد و ω یک ۱- فرم هموار روی S باشد و φ یا یک قرص منفرد و یا نیم قرص منفرد و یا مثلث منفرد ،در S باشد. در این صورت***

$$\int_{\varphi} d\omega = \int_{\partial\varphi} \omega$$

برهان. با استفاده از لم ۲،

$$d\omega\,(\mathbf{E}_۱ , \mathbf{E}_۲) = \frac{\partial \omega_۲}{\partial x_۱} - \frac{\partial \omega_۱}{\partial x_۲}$$

که در آن ($\omega_۱ = \omega\,(\mathbf{E}_۱)$, $\omega_۲ = \omega\,(\mathbf{E}_۲)$ توابع هموار در طول φ می‌باشند. بنابر قضیهٔ گرین (تمرین ۲۰-۵) داریم.

$$\int_{D(\varphi)} \left(\frac{\partial \omega_۲}{\partial x_۱} - \frac{\partial \omega_۱}{\partial x_۲} \right) = \int_{\alpha} (\omega_۱\, dx_۱ + \omega_۲\, dx_۲)$$

که در آن α خم پارامتری تکه‌ای هموار استفاده شده در تعریف $\partial\varphi$ می‌باشد و $x_۱ , x_۲ : \mathbf{R}^۲ \longrightarrow \mathbf{R}$ توابع مختصی روی $\mathbf{R}^۲$ می‌باشند ($x_i\,(a_۱ , a_۲) = a_i$).بنابراین فرض کنید $[a , b]$ بیانگر دامنه α و $\alpha_۱ , \alpha_۲$ بیانگر توابع مختصی α برای $t \in [a , b]$ باشند در اینصورت

$$\int_{\varphi} d\omega = \int_{\mathscr{D}(\varphi)} d\omega\,(\mathbf{E}_۱ , \mathbf{E}_۲) = \int_{\mathscr{D}(\varphi)} \left(\frac{\partial \omega_۲}{\partial x_۱} - \frac{\partial \omega_۱}{\partial x_۲} \right) = \int_{\alpha} (\omega_۱\, dx_۱ + \omega_۲\, dx_۲)$$

$$= \int_a^b ((\omega_۱ \circ \alpha)\, dx_۱(\dot{\alpha}) + (\omega_۲ \circ \alpha)\, dx_۲(\dot{\alpha}))$$

$$= \int_a^b (\omega(\mathbf{E}_1 \circ \alpha) \frac{d\alpha_1}{dt} + \omega(\mathbf{E}_2 \circ \alpha) \frac{d\alpha_2}{dt})$$

$$= \int_a^b \omega (\frac{d\alpha_1}{dt} \mathbf{E}_1 \circ \alpha + \frac{d\alpha_2}{dt} \mathbf{E}_2 \circ \alpha)$$

$$= \int_a^b \omega(d\varphi(\dot{\alpha})) = \int_a^b \omega(\varphi \circ \alpha) = \int_{\varphi \circ \alpha} \omega = \int_{\partial \varphi} \omega . \blacksquare$$

● **قضیهٔ ۲.** *(قضیهٔ استوکس سرتاسری) (یک) فرض کنید S یک ۲- رویهٔ فشردهٔ سودار مرزدار در $\mathbf{R}^3$ باشد و مرز آن ∂S به وسیلهٔ سوی القایی آن سودار شده باشد و ω یک ۱- فرم هموار روی S باشد در اینصورت*

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega .$$

(دو) فرض کنید S یک ۲- رویهٔ فشرده سودار (بی‌مرز) در $\mathbf{R}^3$ باشد و فرض کنید ω یک ۱- فرم هموار در S باشد، در اینصورت

$$\int_S d\omega = 0 .$$

برهان. برای هر $p \in S$، یک پارامترسازی موضعی یک به یک φ_p از S پیدا می‌کنیم به قسمی که $p \in (\varphi_p$ تصویر$)$. فرض می‌کنیم که دامنهٔ هر φ_p، برای p در درون S، یک گوی باز است و در واقع با ترکیب یک دیفمئومرفسم از $\mathbf{R}^2$ در صورت لزوم، می‌توان دامنه φ_p را گوی به شعاع ۲ به مرکز مبدأ در نظر گرفت. برای $p \in \partial S$ به طور مشابه می‌توانیم فرض کنیم که دامنه φ_p برابر با مقطع $\mathbf{R}^2_-$ و گوی به شعاع ۲ به مرکز مبدأ در $\mathbf{R}^2$ گرفت به قسمی که $\varphi_p \circ \beta$ با شرط $\beta(t) = (0 , 1 - t)$ برای $-1 \le t \le 3$، یک پارامترسازی موضعی از ∂S باشد (تمرین ۲۰-۱). توجه کنید که ۱- رویه پارامتری $\varphi_p \circ \beta$ سازگار با سوی ∂S می‌باشد، در واقع سوی القا شده روی ∂S دقیقاً طوری ساخته شده است که این امر درست باشد. مانند اثبات قضیهٔ ۴ فصل ۱۷ می‌توانیم افـزاریکـانی $\{f_i\}$ را مادون به یک گردآیهٔ با پایان $\{\varphi_i = \varphi_{p_i}\}$ از این پارامترسازیهای موضعی بسازیم و در واقع به قسمی است که هر f_i خارج از $(D \cap \mathscr{D}(\varphi_i))\varphi_i$ متحد باصفر می‌باشد، که درآن $D = D \cap \mathscr{D}(\varphi_i)$ هرگاه $p_i \in S - \partial S$ و $D \cap \mathscr{D}(\varphi_i) = D \cap \mathbf{R}^2_-$ هرگاه $p_i \in \partial S$ (در ساختار افرازیکانی $r_p = 1$ بگیرید) در اینصورت بنابر لم ۱

$$d\omega = \sum f_i \wedge d\omega = \sum (d(f_i \omega) - df_i \wedge \omega)$$

چون

$$\sum df_i \wedge \omega = d(\sum f_i) \wedge \omega = d(1) \wedge \omega = 0$$

بنابراین داریم

$$d\omega = \sum d(f_i \omega)$$

و بنابراین

$$\int_S d\omega = \sum \int_{S_i} d(f_i \omega) = \sum \int_{\varphi_i} d(f_i \omega)$$

که آخرین برابری چون که $f_i \omega$ و در نتیجه $d(f_i \omega)$ خارج از $\varphi_i(D \cap \mathscr{D}(\varphi_i))$ متحد با صفر می‌باشد، برقرار است (تمرین ۲۰-۶). فرض می‌کنیم $\psi_i = \varphi_i |_{D\cap\mathscr{D}(\varphi_i)}$ خواهیم دید که

$$\int_S d\omega = \sum \int_{\psi_i} d(f_i\omega) = \sum \int_{\partial\psi_i} f_i\omega$$

که آخرین برابری نتیجه‌ای از قضیه ۱ می‌باشد. فرض می‌کنیم $\mathscr{I} = \{i : p_i \in \partial S\}$ در این صورت برای $i \notin \mathscr{I}$ و $f_i \circ \varphi_i$ خارج از D صفر است بنابراین روی مرز D نیز چنین است و در نتیجه داریم $f_i \circ \varphi\psi_i = 0$ که ایجاب می‌کند که $\int_{\partial\psi_i} f_i\omega = 0$. از آن نتیجه می‌شود که اگر S بدون مرز باشد، آنگاه $\int_S d\omega = 0$. از طرف دیگر اگر S مرزدار باشد آنگاه $\{f_i |_{\partial S} : i \in \mathscr{I}\}$ یک افراز یکانی روی ∂S مادون به پارامترسازی موضعی $\{\varphi_i \circ \beta : i \in \mathscr{I}\}$ می‌باشد و $f_i \circ \partial\psi_i = 0$ برای $2 \leq t \leq \pi + 2$، بنابراین برای $i \in \mathscr{I}$، $\int_{\partial\psi_i} f_i\,\omega = \int_{\varphi_i \circ \beta} f_i\,\omega$ (برای $t \geq 2$ و $t \geq 0$، $f_i \circ \varphi_i \circ \beta = 0$) و

$$\int_S d\omega = \sum \int_{\partial\psi_i} f_i\,\omega = \sum_{i\in\mathscr{I}} \int_{\varphi_i \circ \beta} f_i\,\omega = \int_{\partial S} \omega \qquad \blacksquare$$

تمرین

۲۰-۱. فرض کنید $S = f^{-1}(c) \cap g_1^{-1}((-\infty, c_1]) \cap \dots \cap g_k^{-1}((-\infty, c_k])$ یک n- رویه مرزدار در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد و فرض کنید $p \in g_i^{-1}(c_i)$. نشان دهید که یک n- رویه پارامتری

$\varphi : B_\varepsilon \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ وجود دارد که در آن B_ε گوی باز به شعاع ε به مرکز ۰ در $\mathbf{R}^n$ می‌باشد، به قسمی که $p = \varphi(0)$ و $\varphi|_{B_\varepsilon \cap \mathbf{R}^n_-}$ مجموعهٔ $B_\varepsilon \cap \mathbf{R}^n_-$ را به صورت یک به یک بر روی یک مجموعهٔ باز W حول p در S می‌نگارد. [راهنمایی: ابتدا یک پارامترسازی موضعی $\varphi : U \longrightarrow f^{-1}(c)$ که تصویرش شامل p باشد بیابید. سپس قضیه تابع وارونی را برای نگاشت $\phi : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ تعریف شده به صورت

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n, g_i(\psi(x_1, \ldots, x_n)) - c_i)$$

به کار ببرید که در آن j به قسمی است که $(\partial / \partial x_j)(g_i \circ \psi)\left(\psi^{-1}(p)\right) \neq 0$.]

۲۰-۲. فرض کنید S یک n- رویه یا یک n- رویه مرزدار در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد و W یک ۱- فرم هموار روی S باشد. برای $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ دو میدان‌برداری مماس هموار روی یک‌مجموعهٔ باز $U \subset S$ نگاشت $\mu(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) : U \longrightarrow \mathbf{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\left(\mu(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)\right)(p) = \nabla_{\mathbf{V}_1(p)} \omega(\mathbf{V}_2) - \nabla_{\mathbf{V}_2(p)} \omega(\mathbf{V}_1) - \omega\left([\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2](p)\right).$$

(الف) نشان دهید که

$$\mu(f\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = f\mu(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = \mu(\mathbf{V}_1, f\mathbf{V}_2)$$

برای همهٔ توابع هموار $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$.

(ب) نشان دهید که اگر $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ میدانهای برداری مماس هموار روی U باشند به قسمی که $\mathbf{W}_1(p) = \mathbf{V}_{1(p)}, \mathbf{W}_2(p) = \mathbf{V}_{2(p)}$ برای‌یک $p \in U$، آنگاه $\mu(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)(p) = \mu(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)(p)$ [راهنمایی: میدانهای برداری مماس هموار $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ را بگیرید به طوریکه روی یک مجموعه باز $V \subset U$ با شرط $p \in V$ تعریف شده باشند و $\{\mathbf{X}_1(q), \ldots, \mathbf{x}_n(q)\}$ یک پایه برای S_q برای $q \in V$ باشد. میدانهای برداری داده شده را به صورت ترکیب خطی $\mathbf{x}_i$ها بنویسید و قسمت الف را به کار برید.]

(پ) نتیجه بگیرید که مقدار طرف راست فرمول به کار رفته در تعریف $d\omega$ در این فصل مستقل از انتخاب میدانهای برداری $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ می‌باشند.

۲۰-۳. فرض کنید S یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد، $\tilde{S}$ یک m- رویه در $\mathbf{R}^{m+1}$ و $f : S \longrightarrow \tilde{S}$ یک نگاشت هموار باشد.

(الف) نشان دهید که اگر ω_1, ω_2 ۱- فرمهای روی $\tilde{S}$ باشند آنگاه

$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*\omega_1 \wedge f^*\omega_2.$$

(ب) نشان دهید که اگر $g : \bar{S} \longrightarrow \mathbf{R}$ هموار باشد آنگاه $f^*(dg) = d\,(g\circ f)$

(پ) نشان دهید که اگر ω یک ۱- فرم هموار روی $\bar{S}$ باشد، آنگاه

$$f^*\,(d\omega) = d\,(f^*\omega).$$

[راهنمایی: از این واقعیت استفاده کنید که برای U یک مجموعه باز کوچک مناسب در $\bar{S}$، $\omega\,|_U = \sum_{i=1}^{n} f_i\, dg_i$ که درآن $f_i\,,\,g_i : U \longrightarrow \mathbf{R}$ توابع هموار هستند (اثبات لم ۲ را ببینید)].

۲۰-۴. فرض کنید S یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ و ω یک ۲- فرم هموار روی S باشد. نشان دهید که اگر $\varphi : U \longrightarrow S$ یک پارامترسازی موضعی یک به یک روی S باشد، آنگاه توابع حقیقی هموار f_{ij} $(1\leq i,j\leq n)$ ، g_i $(1\leq i\leq n)$ روی $\varphi(U)$ وجود دارند به قسمی که $\omega\,\Big|_{\varphi(U)} = \sum_{1\leq i,j\leq n} f_{ij}\, dg_i \wedge dg_j$

[راهنمایی: اثبات لم ۲ را ببینید].

۲۰-۵. فرض کنید U یک مجموعهٔ باز در $\mathbf{R}^2$ شامل $\mathscr{D}$ باشد که‌درآن $\mathscr{D}$ برابر Δ ، D و یا $D \cap \mathbf{R}^2$ می‌باشد و فرض کنید ω_1 ، ω_2 توابع حقیقی هموار روی U باشند.

قضیهٔ گرین را ثابت کنید:

$$\int_{\mathscr{D}} \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\,\omega_1}{\partial x_2}\right) = \int_{\alpha} (\omega_1\, dx_1 + \omega_2\, dx_2)$$

که در آن α پارامترسازی تکه‌ای هموار مرز $\mathscr{D}$ بیان شده در این فصل است. [راهنمایی: طرف چپ را به صورت تفاضل دو انتگرال بنویسید، آنها را بوسیله انتگرال مکرر محاسبه کنید و خمی که در حاصل انتگرال منحنی‌الخط ظاهر می‌شود مجدداً پارامتری کنید.]

۲۰-۶. فرض کنید S یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ و ω یک n- فرم هموار روی S باشد. فرض کنید ω در خارج از $\varphi(C)$ متحد با صفر باشد که در آن $\varphi: U \longrightarrow S$ یک پارامترسازی موضعی از S است و C یک زیرمجموعهٔ فشرده از U می‌باشد. نشان دهید که $\int_{\varphi} \omega = \int_{S} \omega$. [راهنمایی: افراز یکانی $\{f_i\}$ روی S را با این خاصیت بسازید که برای هر i یا (یک) f_i خارج از $\varphi(U)$ متحد با صفر شود یا (دو) f_i روی $\varphi(C)$ متحد با صفر شود.]

۲۰-۷. فرض‌کنید ω یک k- فرم‌هموارروی‌یک n-رویه S باشدبرای $p\in S$ و $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+1} \in S_p$.
فرض کنید

$$d\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+1}) = \sum_{1\le i\le k+1} (-1)^{i-1} \nabla_{\mathbf{v}_i}\omega(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{i-1}, \mathbf{V}_{i+1}, \dots, \mathbf{V}_{k+1})$$
$$+ \sum_{1\le i\le j<k+1} (-1)^{i+j}\, \omega([\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j], \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{i-1}, \mathbf{V}_{i+1}, \dots,$$
$$\mathbf{V}_{j-1}, \mathbf{V}_{j+1}, \dots, \mathbf{V}_{k+1})(p)$$

که در آن $\mathbf{V}_{k+1}, \dots, \mathbf{V}_1$ میدانهای برداری مماس هموار تعریف شده روی یک مجموعهٔ باز در S هستند به قسمی که $\mathbf{V}_i(p) = \mathbf{v}_i$ به ازای هر i. نشان دهید که مقدار طرف راست این فرمول مستقل از انتخاب میدانهای برداری $\mathbf{V}_{k+1}, \dots, \mathbf{V}_1$ است و $d\omega$ یک (k+1) فرم هموار روی S است.
[راهنمایی: تمرین ۲۰-۲ را ببینید.] $d\omega$ **مشتق برونی** k- فرم ω می‌باشد.

۲۰-۸. نشان دهید که مشتق برونی k- فرمهای هموار (تمرین ۲۰-۷) دارای خواص زیر می‌باشد:

(الف) اگر ω, η ، k- فرمهای هموار روی S باشند. آنگاه

$$d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$$

(ب) اگر $f : S \longrightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار و ω یک k- فرم هموار روی S باشد، آنگاه

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$$

(پ) اگر ω یک k- فرم هموار روی S ، η یک l- فرم هموار روی S باشد، آنگاه
$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.

(ت) $d^2 = 0$.

۲۰-۹. فرض کنید X یک میدان برداری هموار روی یک n- رویه S باشد $\omega_{\mathbf{X}}$ ۱- فرم دوگان باشد

(الف) نشان دهید که برای $p \in S$ ، $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in S_p$

$$d\omega_{\mathbf{X}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X}) \cdot \mathbf{w} - (\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{X}) \cdot \mathbf{v}$$

(ب) نشان دهید که اگر $S = \mathbf{R}^3$، آنگاه

$$d\omega_{\mathbf{X}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\text{curl } \mathbf{X})(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

که در آن

$$(\text{curl } \mathbf{X})(p) = \left(p, \frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}, \frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}, \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right)\Big|_p$$

X_1 , X_2 , X_3 مولفه‌های $\mathbf{X}$ می‌باشند.

۲۰-۱۰. فرض کنید S یک ۲- رویه فشردهٔ سودار با مرز در $\mathbf{R}^3$ باشد و $\mathbf{X}$ یک میدان برداری هموار تعریف شده روی یک مجموعهٔ باز U در $\mathbf{R}^3$ شامل S باشد. ***فرمول کلاسیک استوکس*** را ثابت کنید

$$\int_S (\text{curl } \mathbf{X}) \cdot \mathbf{N} = \int_{\partial S} \mathbf{X} \cdot \mathbf{T}$$

که در آن $\text{curl } \mathbf{X}$ مانند تمرین ۲۰-۹، $\mathbf{N}$ میدان برداری سو روی S و $T(p)$ برای هر $p \in \partial S$ بردار مماس یکه یکتا بر ∂S در p می‌باشد به قسمی که $\{T(p)\}$ با سوی القا شده روی ∂S سازگار باشد. [راهنمایی: قضیهٔ ۲ را در مورد ۱- فرم $i^*\omega_{\mathbf{X}}$ که در آن $i : S \longrightarrow \mathbf{R}^3$ تعریف شده به صورت $i(q) = q$ برای هر $q \in S$ به‌کار برید].

۲۱- قضیه گاوس - بنه

در این فصل انتگرال $\int_S K$ از خمیدگی گاوس را روی یک ۲- رویه سودار فشرده S مورد مطالعه قرار می‌دهیم. خواهیم دید که $(1/2\pi)\int_S K$ همواره یک عدد صحیح است که موسوم به مشخصهٔ اویلر S نامیده می‌شود. در واقع این نتیجه، حالت ۲- بعدی از قضیهٔ گاوس - بنه است. نتیجه مشابهی برای تمام بعدهای زوج بالاتر نیز برقرار است ولی محاسبه آن کمتر واضح است، بنابراین ما در انتهای این فصل تنها به توضیحاتی در مورد این حالت کلی اکتفا می‌کنیم.

قضیهٔ گاوس - بنه از به کار بردن قضیهٔ استوکس در مورد یک ۱- فرم ساخته شده توسط یک میدان برداری مماس یکه به دست می‌آید. فرض کنید S یک ۲- رویه سودار یا یک ۲- رویه مرزدار در $\mathbf{R}^3$ باشد. فرض کنید $\mathbf{X}$ یک میدان برداری مماس یکه معین روی یک مجموعه باز U از S باشد. ما میدان برداری $\mathbf{X}$ را جهت ساختن یک ۱- فرم ω روی U به شرح زیر به کار می‌بریم. برای هر $p \in S$ ، $\mathbf{v} \in S_p$ فرض کنید $J\mathbf{v} \in S_p$ برداری باشد که از دوران $\mathbf{v}$ در جهت مثبت به اندازهٔ $\pi/2$ در فضای S_p به دست آمده است. در نتیجه $J\mathbf{v} = \mathbf{N}(p) \times \mathbf{v}$ که در آن $\mathbf{N}$ میدان برداری سو روی S می‌باشد. توجه کنید که $\{\mathbf{v}, J\mathbf{v}\}$ یک پایه متعامد یکه مرتّب S_p سازگار با سوی S می‌باشد. اینک ۱- فرم ω روی U را به صورت

$$\omega(\mathbf{v}) = (D_{\mathbf{v}}\mathbf{X}) \cdot J\,\mathbf{X}(p) = (\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X}) \cdot J\,\mathbf{X}(p)$$

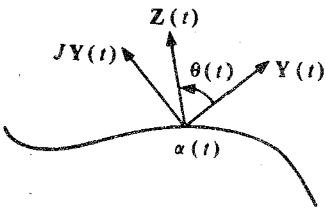
تعریف می‌کنیم که در آن D نشانگر مشتق همورد است ($D_{\mathbf{v}}\mathbf{X}$ مؤلفه مماسی $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X}$ می‌باشد.) این ۱- فرم ω به *فرم ارتباط* روی U نظیر به $\mathbf{X}$ موسوم است. توجه کنید $J\mathbf{X}$ تعریف شده به صورت $(J\mathbf{X})(p) = (J\mathbf{X})(p)$ یک میدان‌برداری یکهٔ هموار روی U است که همه جا بر $\mathbf{X}$ متعامد است و

$$\boxed{\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}\mathbf{X} &= \omega(\mathbf{v})\, J\mathbf{X}(p) \\ D_{\mathbf{v}}(J\mathbf{X}) &= -\,\omega(\mathbf{v})\, \mathbf{X}(p) \end{aligned}}$$

در واقع $\mathbf{X}$ ، یک میدان برداری یکه روی S است که دارای مشتق $D_v\mathbf{X}$ عمود بر $\mathbf{X}(p)$ می‌باشد. بنابراین $D_v\mathbf{X} = a\, J\mathbf{X}\,(p)$ برای یک $a \in \mathbf{R}$ و $a = D_v\mathbf{X}\,.\,J\mathbf{X}\,(p) = \omega\,(v)$ ، به طریق مشابه $D_v(J\mathbf{X}) = b\mathbf{X}(p)$ که در آن.

$$b = D_v\,(J\mathbf{X})\ \mathbf{X}(p) = \nabla_v\,(J\mathbf{X}\,.\,\mathbf{X}) - J(\mathbf{X})\,(p) - D_v(\mathbf{X}) = -\omega(v)$$

فرم ارتباط ω (با تقریب علامت) میزان دوران میدانهای برداری موازی در طول خمهای پارامتری در U را نسبت به $\mathbf{X}$ اندازه می‌گیرد. برای ملاحظه این مطلب، در آغاز باید دقیقاً مفهوم «میزان دوران» را



شکل ۲۱-۱ $\theta(t)$ زاویهٔ دوران $\mathbf{Y}(t)$ به $\mathbf{Z}(t)$ را اندازه می‌گیرد.

یک فرمول صریح برای چنین تابع θ را می‌توان به صورت زیر به دست آورد. فرض کنید $\beta : I \longrightarrow \mathbf{R}^2$ به صورت

$$\beta(t) = (\ \mathbf{Z}(t).\ \mathbf{Y}(t)\ ,\ J\mathbf{Y}(t)\ )$$

تعریف شده باشد. آنگاه $\|\ \beta\ (t)\| = 1$ برای هر $t \in I$ ، بنابراین در حالت خاص می‌توان یک $\theta_\circ \in \mathbf{R}$ را به قسمتی یافت که $\beta(a) = (\cos\theta_\circ\ ,\ \sin\theta_\circ)$. قرار می‌دهیم $\theta(t) = \theta_\circ + \int_{\beta_t}\eta$ که در آن β_t تحدید β به فاصله $[a\ ,\ t]$ می‌باشد و η ۱- فرم روی $\mathbf{R}^2$ تعریف شده به صورت

$$\eta = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}\,dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\,dx_2$$

می‌باشد. در اینصورت $\beta(t) = (\cos\theta(t)\ ,\ \sin\theta(t)\ )$ برای هر $t \in I$ همانطور که لازم بود (اثبات قضیهٔ ۳ از فصل ۱۱ را ملاحظه کنید).

بیان کرد. فرض کنید $\alpha : [a\ ,\ b] \longrightarrow S$ یک خم پارامتری در S , $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ میدانهای برداری هموار مماس بر S در طول α باشند. آنگاه

$$\mathbf{Z}(t) = \cos\theta(t)\ \mathbf{Y}(t) + \sin\theta(t)\ J\mathbf{Y}(t)$$

برای یک تابع هموار $\theta : [a\ ,\ b] \longrightarrow \mathbf{R}$ (شکل ۲۱-۱ را ملاحظه کنید.)

تابع θ زاویهٔ دوران $\mathbf{Y}$ نسبت به $\mathbf{Z}$ در طول α را اندازه می‌گیرد. این تابع به طور یکتا تعریف نشده است ولی هر دو چنین تابعی در مضربی از 2π با یکدیگر اختلاف دارند. بنابراین، مشتق آن یعنی $\theta'(t)$ به طور یکتا تعریف شده است. θ' **میزان دوران $\mathbf{Z}$ نسبت به $\mathbf{Y}$** در طول α نامیده می‌شود. عدد حقیقی $\theta(b) - \theta(a)$ نیز به طور یکتا تعریف شده است، و موسوم به **زاویهٔ کلی دوران $\mathbf{Z}$** نسبت به $\mathbf{Y}$ در طول α است.

لم ۱. ***فرض‌کنید S یک ۲- رویهٔ سودار در $\mathbf{R}^3$ باشد، $\mathbf{X}$ یک میدان برداری هموار یکهٔ مماس روی یک مجموعه باز U در S، و ω فرم ارتباط روی U نظیر به $\mathbf{X}$ باشد. فرض کنید $\alpha : [a\ ,\ b] \longrightarrow U$ یک خم پارامتری در U باشد و $\mathbf{Z}$ یک میدان برداری یکهٔ موازی در طول α باشد، آنگاه***

(یک) $\omega\ (\dot{\alpha})$ ***برابر با منفی میزان دوران $\mathbf{Z}$ نسبت به $\mathbf{X}$ (یا به عبارت دقیقتر نسبت به $\mathbf{X}\circ\alpha$) در طول α می‌باشد.***

(دو) $\int_\alpha \omega$ ***برابر با منفی زاویهٔ کلی دوران $\mathbf{X}$ نسبت به $\mathbf{X}$ در طول α است.***

برهان. (یک) فرض کنید $\theta : [a\ ,\ b] \longrightarrow \mathbf{R}$ زاویهٔ دوران $\mathbf{X}$ به $\mathbf{Z}$ را در طول α اندازه‌گیری کند. چون $\mathbf{Z}$ در طول α موازیست، لذا

$$\begin{aligned}
0 = \mathbf{Z}' &= (\cos\theta\ .\ \mathbf{X}\circ\alpha + \sin\theta\ J\mathbf{X}\circ\alpha)' \\
&= -\theta'\sin\theta\ \mathbf{X}\circ\alpha + \theta'\cos\theta\ J\ \mathbf{X}\circ\alpha + \cos\theta\ D_{\dot{\alpha}}\ \mathbf{X} + \sin\theta\ D_{\dot{\alpha}} J\mathbf{X} \\
&= \left(\theta' + \omega\ (\dot{\alpha})\right)\ (-\sin\theta\ \mathbf{X}\circ\alpha + \cos\theta\ J\mathbf{X}\circ\alpha)
\end{aligned}$$

(در اینجا ما از دو فرمول قبل که در کادر نوشته شده‌اند استفاده کردیم) و بنابراین $\theta' + \omega\ (\dot{\alpha}) = 0$ یعنی $\omega\ (\dot{\alpha}) = -\theta'$.

(دو) $$\int_\alpha \omega = \int_a^b \omega\ (\dot{\alpha}) = -\int_a^b \theta' = -(\theta\ (b)\ ) - (\theta\ (a)\ )\ \blacksquare$$

اگر $\alpha : [a\ ,\ b] \longrightarrow U$ یک ژئودزی با تندی یکه در S باشد، آنگاه میدان برداری سرعت $\dot{\alpha}$ در طول α موازیست و می‌توان آن را به عنوان میدان برداری $\mathbf{Z}$ در لم ۱ استفاده کرد. در این صورت لم ۱

گویای این مطلب است که $\int_\alpha \omega$ برابر با منفی زاویهٔ کلی دوران $\dot{\alpha}$ نسبت به میدان برداری $\mathbf{X}$ است.

۱- فرم ω را می‌توان جهت اندازه‌گیری زاویهٔ دوران $\dot{\alpha}$ نسبت به میدان برداری $\mathbf{X}$ برای هر خم هموار با تندی یکه در U به کار برد. فرمول مربوط به آن نیز **خمیدگی ژئودزی** $\kappa_g : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ از α را در بردارد که به صورت زیر تعریف شود

$$\kappa_g = (\dot{\alpha})'. J\dot{\alpha}.$$

خمیدگی ژئودزی میزان انحراف α را از اینکه یک ژئودزی باشد می‌سنجد. طول $|\kappa_g|$ برابر با، $\|\dot{\alpha}'\|$، طول شتاب هموردِ $\dot{\alpha}'$ از α می‌باشد، چراکه $\dot{\alpha}$ میدان برداری یکه در طول α است و مشتق هموردِ آن بر خودش عمود است و در نتیجهٔ مضربی از $J\dot{\alpha}$ می‌باشد. توجه داشته باشید که α یک ژئودزی است اگر و فقط اگر κ_g متحد با صفر باشد.

لم ۲. ***فرض کنید*** S، $\mathbf{X}$، U و ω ***همانند لم ۱ باشند و فرض کنید*** $\alpha : [a, b] \longrightarrow S$ ***یک خم هموار با تندی یکه در*** U ***باشد. آنگاه زاویهٔ کلی دوران*** $\dot{\alpha}$ ***نسبت به میدان برداری*** $\mathbf{X}$ ***برابر با*** $\int_a^b \kappa_g - \int_\alpha \omega$ ***است.***

برهان. فرض کنید $\mathbf{Z}$ یک میدان برداری یکه موازی در طول α باشد، اگر $\theta : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ زاویهٔ دوران $\mathbf{X}$ نسبت به $\mathbf{Z}$ را درطول α اندازه بگیردواگر $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ زاویهٔ دوران از $\mathbf{X}$ نسبت‌به $\dot{\alpha}$ را اندازه‌گیری نماید، آنگاه $\varphi - \theta$ زاویهٔ دوران $\mathbf{Z}$ به $\dot{\alpha}$ را اندازه‌گیری می‌کند، یعنی

$$\dot{\alpha} = \cos(\varphi - \theta)\, \mathbf{Z} + \sin(\varphi - \theta)\, J\, \mathbf{Z}$$

و

$$J\dot{\alpha} = -\sin(\varphi - \theta)\, \mathbf{Z} + \cos(\varphi - \theta)\, J\, \mathbf{Z}.$$

با مشتق‌گیری هموردِ از $\dot{\alpha}$ و با استفاده از این واقعیت که $\mathbf{Z}$ و $J\mathbf{Z}$ هر دو در طول α موازیند ($J\mathbf{Z}$ موازیست زیرا که بنابر قضیهٔ یکتایی و وجود میدانهای برداری موازی یک میدان برداری یکتای موازی در طول α با مقدار اولیهٔ $J\mathbf{Z}(a)$ وجود دارد، این میدان برداری باید هموار، با طول یکه و متعامد به $\mathbf{Z}$ در طول α باشد، و $J\mathbf{Z}$ تنها چنین میدان برداریست). بنابراین

$$\dot{\alpha}' = (\varphi' - \theta')\,(-\sin(\varphi - \theta)\, \mathbf{Z} + \cos(\varphi - \theta)\, J\mathbf{Z})$$

بنابراین

$$\kappa_g = \alpha' \,.\, J\alpha^{\cdot} = \phi' - \theta' \,.$$

در نتیجه زاویهٔ کلی دوران $\dot{\alpha}$ نسبت به $\mathbf{X}$ برابر است با

$$\int_a^b \varphi' = \int_a^b \kappa_g + \int_a^b \theta' = \int_a^b \kappa_g - \int_\alpha \omega \,. \quad ■$$

رابطهٔ بین ۱- فرم ω و خمیدگی گاوس به صورت زیر است:

لم ۳. ***فرض کنید*** S , U , $\mathbf{X}$, ω ***همانند لم ۱ باشند، در این صورت روی*** U

$$d\,\omega = -K\zeta$$

که در آن K ***خمیدگی گاوس*** S ***و*** ζ ***عنصر حجم روی*** S ***است.***

برهان. بنابر تمرین ۷-۱۳، $d\omega = f\zeta$ برای یک تابع $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$. برای یافتن $f(p)$ (برای $p \in U$) کافی است $d\,\omega$ و ζ را روی یک پایهٔ از S_p محاسبه کرد. پایه‌ای که ما به کار می‌بریم پایهٔ مختصی $\{\mathbf{E}_1(p)\ \mathbf{E}_2(p)\}$ وابسته به یک پارامترسازی موضعی φ از S می‌باشد که تصویرش شامل p است و در U قرار دارد. آنگاه بنابر لم ۲ از فصل ۲۰ داریم

$$d\omega\,(\mathbf{E}_1\,,\,\mathbf{E}_2) = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\,\omega\,(\mathbf{E}_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}\,\omega\,(\mathbf{E}_1)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\,(\nabla_{\mathbf{E}_2}\mathbf{X} \,.\, J\mathbf{X}\circ\varphi) - \frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla_{\mathbf{E}_1}\mathbf{X} \,.\, J\mathbf{X}\circ\varphi)$$

$$= (\nabla_{\mathbf{E}_1}\nabla_{\mathbf{E}_2}\mathbf{X} - \nabla_{\mathbf{E}_2}\nabla_{\mathbf{E}_1}\mathbf{X}) \,.\, J\mathbf{X}\circ\varphi$$

$$+ \nabla_{\mathbf{E}_2}\mathbf{X} \,.\, \nabla_{\mathbf{E}_1}J\mathbf{X} - \nabla_{\mathbf{E}_1}\mathbf{X} \,.\, \nabla_{\mathbf{E}_2}J\mathbf{X}$$

که در آن $\nabla_{\mathbf{E}_i}\mathbf{Z}$ برای $\mathbf{Z}$ یک میدان برداری هموار روی U در طول φ تعریف شده به صورت $(\nabla_{\mathbf{E}_i}\mathbf{Z})\,(p) = \nabla_{\mathbf{E}_i(p)}\mathbf{Z}$ است، $\nabla_{\mathbf{E}_i}\mathbf{Z}$ برای $\mathbf{Z}$ یک میدان برداری هموار در طول φ تعریف شده به صورت $(\nabla_{\mathbf{E}_i}\mathbf{Z})\,(p) = \nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{Z}$ می‌باشد. در اینجا $\mathbf{e}_1 = (p \text{ و } 1 \text{ و } 0)$ و $\mathbf{e}_2 = (p \text{ و } 0 \text{ و } 1)$. جمله اول در عبارت بالا بنابر برابری مشتقات جزئی آمیخته صفر است. علاوه بر آن

$$\nabla_{\mathbf{E}_i}\mathbf{X} = D_{\mathbf{E}_i}\mathbf{X} + \left((\nabla_{\mathbf{E}_i}\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{N}\circ\varphi) \right) \mathbf{N}\circ\varphi$$
$$= D_{\mathbf{E}_i}\mathbf{X} + (L(\mathbf{E}_i) \cdot \mathbf{x}\circ\varphi)\, \mathbf{N}\circ\varphi$$

که در آن $L(\mathbf{E}_i)$ میدان برداری در طول φ تعریف شده به صورت $L(\mathbf{E}_i)\,(p) = L_p\big(\mathbf{E}_i\,(p)\big) = -\nabla_{\mathbf{E}_i}\mathbf{N}$ و L_p نگاشت وینگارتن φ در نقطهٔ p می‌باشد. با استفاده از این موضوع و فرمول نظیر برای $\nabla_{\mathbf{E}_i}J\mathbf{X}$ داریم

$$\begin{aligned} d\omega\,(\mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2) &= D_{\mathbf{E}_2}\mathbf{X} \cdot D_{\mathbf{E}_1}J\mathbf{X} - D_{\mathbf{E}_1}\mathbf{X} \cdot D_{\mathbf{E}_2}J\mathbf{X} \\ &+ \big(L(\mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{X}\circ\varphi\big)\ \big(L(\mathbf{E}_1) \cdot J\mathbf{X}\circ\varphi\big) \\ &- \big(L\,(\mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{X}\circ\varphi\big)\ \big(L(\mathbf{E}_2) \cdot J\mathbf{X}\circ\varphi\big) \end{aligned}$$

دو جمله اول طرف راست این فرمول اخیر صفر است چراکه به ازای هر i و j، مشتق $D_{\mathbf{E}_i}\mathbf{X}$ از میدان برداری یکه $\mathbf{X}$ باید عمود بر $\mathbf{X}$ باشد، بنابراین مضربی از $J\mathbf{X}$ است ودرنتیجه عمودبر $D_{\mathbf{E}_i}J\mathbf{X}$ می‌باشد. با به کار بردن اتحاد برداری

$$(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_4) = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3)\,(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_4) - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_4) \cdot (\mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3)$$

در مورد دو جمله باقیمانده داریم

$$\begin{aligned} d\omega\,(\mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2) &= \big(L(\mathbf{E}_2) \times L(\mathbf{E}_1)\big) \cdot (\mathbf{X}\circ\varphi \times J\mathbf{X}\circ\varphi) \\ &= -L(\mathbf{E}_1) \times L\,(\mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{N}\circ\varphi = -(\det L)\ \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{N}\circ\varphi \\ &= -(K\circ\varphi)\ \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{N}\circ\varphi \end{pmatrix} \\ &= -(K\circ\varphi)\ \xi\ (\mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2) \\ &= -(K\xi)\ (\mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2) \end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌گیریم که $d\omega = -K\xi$.

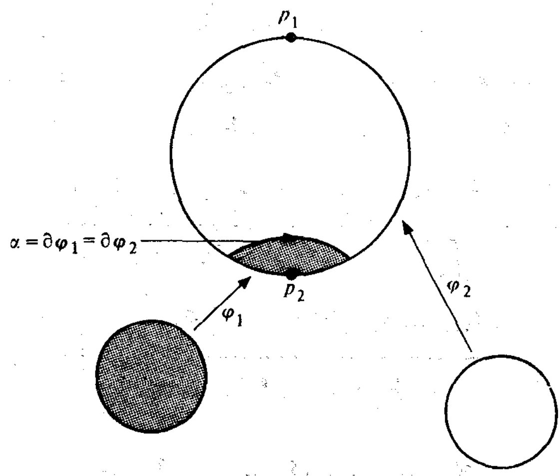
● **قضیهٔ ۱.** ***فرض کنید S یک ۲- رویه سودار در $\mathbf{R}^3$ باشد و فرض کنید U یک زیرمجموعهٔ باز S باشد که بر روی آن یک میدان برداری مماس یکهٔ هموار $\mathbf{X}$ تعریف شده است. در این صورت برای $\varphi : D \longrightarrow U$ هر قرص منفرد در U و $\mathbf{Z}$ هر میدان برداری موازی در طول $\partial\varphi$، $\int_\varphi K\xi$ برابر با زاویه کلی دوران $\mathbf{Z}$ نسبت به $\mathbf{X}$ در طول $\partial\varphi$ می‌باشد.***

برهان. فرض کنید ω فرم ارتباط نظیر به $\mathbf{X}$ باشد. بنابر لم ۳ و قضیهٔ استوکس داریم

$$\int_{\varphi} K\xi = -\int_{\varphi} d\omega = -\int_{\partial\varphi} \omega$$

که بنابر لم ۱ برابر با زاویهٔ کلی دوران $\mathbf{Z}$ نسبت به $\mathbf{X}$ در طول $\partial\varphi$ می‌باشد. ■

تذکر. قضیهٔ ۱ در حالت خاص نشان می‌دهد که زاویهٔ کلی دوران $\mathbf{Z}$ نسبت به $\mathbf{X}$ در طول $\partial\varphi$ مستقل از هر دو میدان برداری $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Z}$ می‌باشد و در واقع تنها وابسته به φ است، این زاویه به ***زاویهٔ هولونومی*** φ موسوم است. توجه دارید که این زاویه نه فقط به $\partial\varphi$ بستگی دارد بلکه به φ نیز وابسته است. (شکل ۲۱-۲ را ببینید).



شکل ۲۱-۲ زاویه کلی دوران یک میدان برداری یکهٔ $\mathbf{Z}$ موازی در طول $\alpha = \partial\varphi_1 = \partial\varphi_2$ نسبت به یک میدان برداری یکهٔ مماس $\mathbf{X}_1$ روی $U_1 = S^2 \setminus \{p_1\}$ به طور قابل ملاحظه‌ای از زاویهٔ کلی دوران $\mathbf{Z}$ در طول α نسبت به یک میدان برداری مماس یکه $\mathbf{X}_2$ روی $U_2 = S^2 \setminus \{p_2\}$ متفاوت است.

قضیهٔ ۱ نیز یک تعبیر جالب از خمیدگی گاوس را به دست می‌دهد. $K(p)$ برای $p \in S$ برابر با حد نسبت زاویهٔ هولونومی φ به مساحت φ است وقتی که φ به‌عنوان یک قرص حول p به سمت صفر میل می‌کند. به عبارت دقیقتر داریم:

نتیجه. فرض کنید S ***یک ۲- رویهٔ نمودار در*** $\mathbf{R}^2$ ***باشد،*** $p \in S$، $\varphi : D \longrightarrow S$ ***یک قرص منفرد در*** S ***با شرط*** $\varphi(0) = p$ ***باشد و*** $d\varphi_0 : \mathbf{R}^2_0 \longrightarrow S_p$ ***غیر منفرد باشد، آنگاه***

$$K(p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \theta(\varphi_\varepsilon) / A(\varphi_\varepsilon)$$

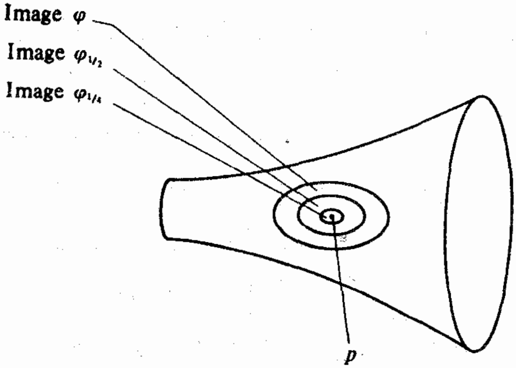
که در آن $\varphi_\varepsilon : D \longrightarrow S$ به صورت $\varphi_\varepsilon(q) = \varphi(\varepsilon q)$ تعریف شده است، $\theta(\varphi_\varepsilon)$ زاویهٔ هونولومی φ_ε ، $A(\varphi_\varepsilon)$ مساحت φ_ε می‌باشد (شکل ۲۱-۳ را ببینید).

برهان. برای ε به اندازهٔ کافی کوچک، تصویر φ_ε در تصویر یک پارامترسازی یک به یک موضعی S قرار داد و بنابراین یک میدان برداری یکهٔ هموار $\mathbf{X}$ (برای مثال، یک میدان برداری مختصی یکه) روی یک مجموعهٔ باز شامل (تصویر φ_ε) وجود دارد. عادی بودن φ در ۰ تضمین کننده این امر است که $A(\varphi_\varepsilon) \neq 0$ برای هر $\varepsilon > 0$. با استفاده از قضیهٔ ۱، قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها و این واقعیت که میدان‌های برداری مختصی $\mathbf{E}_i^\varepsilon$ در طول φ_ε به میدانهای برداری $\mathbf{E}_i$ در طول φ توسط رابطه $\mathbf{E}_i^\varepsilon(q) = \varepsilon \mathbf{E}_i(\varepsilon q)$ به هم مرتبط می‌شوند، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\theta(\varphi_\varepsilon)}{A(\varphi_\varepsilon)} = \frac{\int_{\varphi_\varepsilon} \mathbf{K}\zeta}{\int_{\varphi_\varepsilon} \zeta} = \frac{\int_D (\mathbf{K}\circ\varphi_\varepsilon)\, \zeta(\mathbf{E}_1^\varepsilon, \mathbf{E}_2^\varepsilon)}{\int_D \zeta(\mathbf{E}_1^\varepsilon, \mathbf{E}_2^\varepsilon)}$$

$$= \frac{\mathbf{K}(\varphi_\varepsilon(q_1))\zeta(\mathbf{E}_1^\varepsilon(q_1)_1, \mathbf{E}_2^\varepsilon(q, 1)) \int_D 1}{\zeta(\mathbf{E}_1^\varepsilon(\varepsilon q_2), \mathbf{E}_2^\varepsilon(q_2)) \int_D 1}$$

$$= \frac{\mathbf{K}(\varphi(\varepsilon q_1))\, \zeta(\mathbf{E}_1(\varepsilon q_1), \mathbf{E}_2(\varepsilon q_1))}{\zeta(\mathbf{E}_1(\varepsilon q_2), \mathbf{E}_2(\varepsilon q_2))}.$$



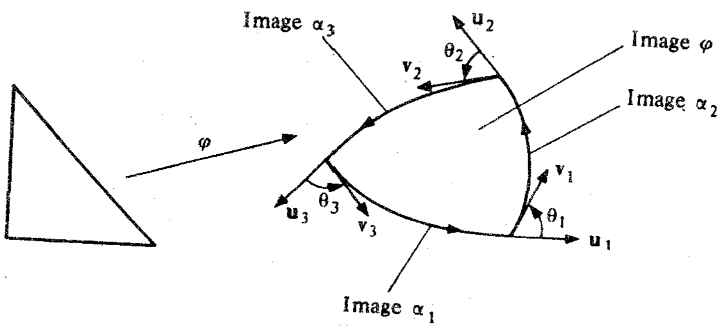
شکل ۲۱-۳ خمیدگی گاوس $K(p)$ برابر باحدنسبت‌زاویهٔ‌هولونومی φ_ε به‌مساحت φ_ε می‌باشدوقتی‌که $\varepsilon \to 0$.

برای $q_1 , q_2 \in D$ (وابسته به ε). با حدگیری وقتی که $\varepsilon \longrightarrow 0$، اثبات کامل می‌شود. ■

قضیهٔ گاوس ـ بنه به صورت موضعی آن انتگرال خمیدگی گاوس را روی یک مثلث عادی به انتگرال خمیدگی ژئودزی روی مرزش مرتبط می‌سازد. منظور از یک مثلث عادی در یک ۲- رویه سودار S یک مثلث منفرد $\varphi : \Delta \longrightarrow S$ می‌باشد که از تحدید یک پارامترسازی موضعی یک به یک S که بر روی هر مجموعهٔ باز $\mathbf{R}^2$ شامل Δ تعریف شده است به Δ حاصل می‌شود. مرز $\partial\varphi : [0 , 3] \longrightarrow S$ در این صورت یک خم تکه‌ای هموار در S با این خاصیت است که $\alpha_i = \partial\varphi \mid_{[i-1 , i]}$ یک خم پارامتری عادی است ($\alpha_i \neq 0$) برای $i \in \{1 , 2 , 3\}$. ***زوایای برونی*** یک مثلث منظم φ اعداد حقیقی یکتای $\theta_1 , \theta_2 , \theta_3 \in [-\pi , \pi]$ می‌باشند به قسمی که

$$\mathbf{v}_i = (\cos\theta_i)\,\mathbf{u}_i + (\sin\theta_i)\,J\mathbf{u}_i$$

که در آن $\mathbf{u}_i = \dot{\alpha}_i(i) \big/ \|\dot{\alpha}_i(i)\|$ برای $i \in \{1 , 2 , 3\}$، $\mathbf{v}_i = \dot{\alpha}_{i+1}(i) / \|\dot{\alpha}_{i+1}(i)\|$ برای $i \in \{1 , 2\}$ و $\mathbf{v}_3 = \dot{\alpha}_1(0) / \|\dot{\alpha}_1(0)\|$ (شکل ۲۱-۴ را ببینید). در واقع $0 < \theta_i < \pi$ به ازای هر i، چرا که φ حافظ سو می‌باشد.



شکل ۲۱-۴ زوایای خارجی یک مثلث عادی

● **قضیهٔ ۲.** ***(قضیهٔ گاوس ـ بنه موضعی) فرض کنید S یک ۲- رویهٔ سودار در $\mathbf{R}^3$ باشد، و $\varphi : \Delta \longrightarrow S$ یک مثلث عادی در S باشد. در این صورت***

$$\int_{\varphi} K\zeta + \int_{a}^{b} \kappa_g = ۲\pi - \sum_{i=۱}^{۳} \theta_i$$

که در آن K خمیدگی گاوس S , ζ فرم حجمی S ، S ⟵ [a , b] : β یک پارامترسازی مجدد با تندی یکه از $\partial\varphi$ ، κ_g خمیدگی ژئودزی β و $\theta_۱$ و $\theta_۲$ و $\theta_۳$ زوایای بیرونی φ می‌باشند.

برهان. چون φ تحدید یک پارامترسازی موضعی یک به یک $\bar{\varphi}$ بـه Δ مـی‌باشد، لذا یک میدان برداری مماس یکهٔ هموار $\mathbf{X}$ تعریف شده روی یکِ مجموعهٔ باز U در S شامل تصویر φ وجود دارد. در واقع، می‌توانیم ($\bar{\varphi}$ تصویر) = U و $\| \mathbf{E}_۱ \circ \bar{\varphi}^{-۱} \| / {}^{۱-}\mathbf{X} = \mathbf{E}_۱ \circ \bar{\varphi}$ بگیریم، که در آن $\mathbf{E}_۱$ اولین میدان برداری مختص $\bar{\varphi}$ است. فرض کنید ω فرم ارتباطی روی U نظیر به $\mathbf{X}$ باشد. در این صورت بنابر لم ۳ و صورت موضعی قضیهٔ استوکس داریم

$$\int_{\varphi} K\zeta = -\int_{\varphi} d\omega = -\int_{\partial\varphi} \omega = -\int_{\beta} \omega = -\int_{\beta۱} \omega - \int_{\beta۲} \omega - \int_{\beta۳} \omega$$

که در آن S ⟵ [a_i , b_i] = β_i سه قطعه هموار β هستند. بنابر لم ۲،

$$\int_{\beta_i} \omega = \int_{a_i}^{b_i} \kappa_g - \phi_i$$

که در آن ϕ_i زاویهٔ کلی دوران β°_i نسبت به $\mathbf{X}$ می‌باشد. اما، با انتخاب $\theta_{\circ}$ به قسمی که

$$\dot{\beta_۱}(a_۱) = \cos\theta_{\circ}\, \mathbf{X}(\beta(a_۱)) + \sin\theta_{\circ} J\mathbf{X}\big(\beta(a_۱)\big),$$

ملاحظه می‌کنیم که (شکل ۲۱-۵ را ببینید)

$$\dot{\beta_۱}(b_۱) = \cos(\theta_{\circ} + \phi_۱)\, \mathbf{X}(\beta(a_۲)) + \sin(\theta_{\circ} + \phi_۱)\, J\,\mathbf{X}\big(\beta(a_۲)\big)$$

$$\dot{\beta_۲}(a_۲) = \cos(\theta_{\circ} + \phi_۱ + \phi_۱)\, \mathbf{X}(\beta(a_۲)) + \sin(\theta_{\circ} + \phi_۱ + \phi_۱)\, J\,\mathbf{X}\big(\beta(a_۲)\big)$$

$$\dot{\beta_۲}(b_۲) = \cos(\theta_{\circ} + \phi_۱ + \phi_۱ + \phi_۲)\, \mathbf{X}(\beta(a_۳)) + \sin(\theta_{\circ} + \phi_۱ + \phi_۲ + \phi_۲)\, J\,\mathbf{X}\big(\beta(a_۳)\big)$$

$$\vdots$$

$$\beta_۱(\dot{a}_۱) = \cos\left(\theta_{\circ} + \sum \phi_i + \sum \theta_i\right) \mathbf{X}\big(\beta(a_۱)\big) + \sin\left(\theta_{\circ} + \sum \phi_i + \sum \theta_i\right) J\mathbf{X}\big(\beta(a_۱)\big).$$

با مقایسهٔ دو فرمول بالا برای $\dot{\beta}_۱(a_۱)$ داریم

برای یک عدد صحیح k ،.

$$\sum \varphi_i + \sum \theta_i = ۲\pi k$$

بنابراین

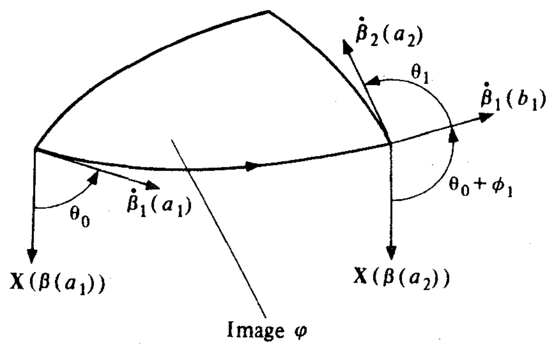
$$\int_\varphi K\,\zeta = -\sum \int_{a_i}^{b_i} \kappa_g + \sum \varphi_i$$

$$= -\int_a^b \kappa_g = + ۲\pi k - \sum \theta_i$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۲\pi}\left(\int_\varphi K\,\zeta + \int_a^b \kappa_g + \sum \theta_i\right) = k$$

برای یک عدد صحیح k.



شکل ۲۱-۵ زاویهٔ دوران β نسبت به $\mathbf{X}$ در طول β_i به اندازهٔ ϕ_i و در رأس i ام φ به اندازهٔ θ_i افزایش می‌یابد.

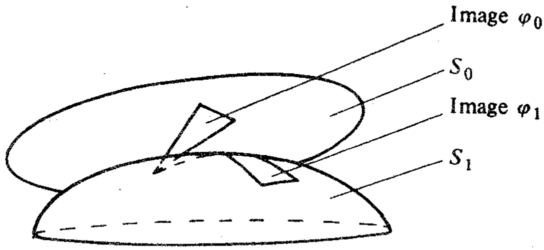
برای نشان دادن اینکه $k = ۱$، مثلث منفرد $\varphi_t : \Delta \to \mathbf{R}^۳$ را برای $t \in [۰ , ۱]$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\varphi_t(x_۱ , x_۲) = \begin{cases} \varphi(۰ , ۰) + \dfrac{\varphi(t x_۱ , t x_۲) - \varphi(۰ , ۰)}{t} & ۰ < t \leq ۱ \\ \varphi(۰ , ۰) + x_۱ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_۱}(۰ , ۰) + x_۲ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_۲}(۰ , ۰) & t = ۰ \quad \text{اگر} \end{cases}$$

در این صورت φ_t در واقع یک مثلث عادی در ۲- رویه سودار (تصویر $\bar\varphi_t$) $= S_t$ می‌باشد که در آن $\bar\varphi_t : W \longrightarrow \mathbf{R}^۳$ ۲- رویهٔ پارامتری است که از جایگزین کردن φ در فرمول بالا توسط یک پارامترسازی موضعی $\bar\varphi : W \longrightarrow S$ از S با شرط $\bar\varphi \mid_\Delta = \varphi$ حاصل می‌شود، که در آن $\mathbf{W}$ چنان

مجموعهٔ بازی است که $tp \in W$ برای $p \in W$ و $\circ \le t \le ۱$. ۲- رویه‌های S_t ($\circ \le t \le ۱$) یک دگردیسی پیوسته از ۲- رویه (تصویر $\bar{\varphi}$) $= S_۱$ روی ۲- رویهٔ $S_\circ$ است که قسمتی از یک ۲- صفحه می‌باشد. (شکل ۲۱-۶ را ببینید). با قرار دادن K^t و ξ^t به ترتیب به عنوان خمیدگی گاوس و فرم حجمی S_t و $\mathbf{R} \longrightarrow [a_t , b_t] : \kappa_g^t$ و θ_i^t به ترتیب جهت نمایش خمیدگی ژئودزی و زوایای بیرونی نظیر به مثلث عادی φ_t، استدلال بالا نشان می‌دهد که

$$\frac{۱}{۲\pi}\left(\int_{\varphi_t} K^t \xi^t + \int_{a_t}^{b_t} \kappa_g^t + \sum \theta_i^t \right) = k^t$$



شکل ۲۱-۶ دگردیسی φ_t مثلث عادی φ را به مثلث مسطح $\varphi_\circ$ تبدیل می‌کند

که در آن k^t یک عدد صحیح است. طرف چپ این معادله به طور پیوسته برحسب t تغییر می‌کند، بنابراین طرف راست این معادله نیز چنین است. چون k^t همواره یک عدد صحیح است لذا k^t برای تمام مقادیر $t \in [\circ , ۱]$ باید دارای یک مقدار باشد. ولی وقتی که $t = \circ$، مثلث منظم φ_t دقیقاً یک مثلث مسطح معمولی محدود شده توسط قطعه خطهاست، بنابراین $K^\circ = \circ$ و $\kappa_g^\circ = \circ$ ، $\sum \theta_i^\circ = ۲\pi$ و بنابراین $k = k^۱ = k^\circ = ۱$. ■

تذکر. فرمول این قضیه را می‌توان برحسب ***زوایای درونی*** $\delta_i = \pi - \theta_i$ و φ به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\int_\varphi K\xi + \int_a^b \kappa_g = \left(\sum_{i=۱}^{۳} \delta_i \right) - \pi .$$

این فرمول یک تعبیر جالب برای مثلثهای ژئودزی دارد. یک ***مثلث ژئودزی*** در S یک مثلث عادی $\varphi : \Delta \longrightarrow S$ می‌باشد به قسمی که هر قطعهٔ هموار $\partial\varphi$ یک پارامترسازی مجدد از یک

ژئودزی است. برای چنین مثلث‌هایی، $\int_a^b \kappa_g = ۰$ بنابراین فرمول موضعی گاوس ـ بنه به صورت زیر در می‌آید.

$$\int_{\varphi} K\zeta = \left(\sum_{i=۱}^{۳} \delta_i \right) - \pi \,.$$

چون $(\sum \delta_i) - \pi = ۰$ وقتی که S یک ۲- صفحه است (و در واقع وقتی که $K = ۰$)، این فرمول گویای این مطلب است که $\int_{\varphi} K\zeta$ ***افزایش زاویه‌ای*** (در مقایسه با مثلثهای ژئودزی هندسهٔ مسطح) مجموع‌زوایای ***مثلث‌ژئودزی*** φ رااندازه‌می‌گیرد. درحالت خاص، هرگاه $K>۰$ درهمه‌جا،آنگاه مثلثهای ژئودزی در S دارای مجموع زوایای بزرگتر از π و اگر $K < ۰$ در همه جا، آنگاه مثلثهای ژئودزیک در S دارای مجموع زوایای کمتر از π می‌باشند.

صورت سرتاسری قضیه گاوس ـ بنه گویای این مطلب است که انتگرال $\int_S K$ از خمیدگی گاوس روی یک ۲- رویهٔ سودار فشرده S برابر است با ۲π ضربدر عدد صحیح معینی که نظیر به S است. اگر یک میدان برداری مماس همه جا مخالف صفر هموار روی S وجود داشته باشد، این عدد صحیح باید صفر باشد.

● قضیهٔ ۳. ***فرض کنید S یک ۲- رویهٔ سودار فشرده در $\mathbf{R}^۳$ باشد. فرض کنید یک میدان برداری مماس هیچ جا صفر هموار روی S موجود باشد. در این صورت***

$$\int_S K = ۰$$

برهان. اگر $\mathbf{X}$ چنین میدان برداری باشد، آنگاه $\mathbf{X} / \|\mathbf{X}\|$ یک میدان برداری مماس یکهٔ هموار روی S است. اگر ω فرم ارتباط نظیر به $\mathbf{X} / \|\mathbf{X}\|$ باشد، بنابر لم ۳ و صورت سرتاسری قضیهٔ استوکس داریم

$$\int_S K = \int_S K\,\zeta = -\int_S d\,\omega = ۰ \,. \qquad \blacksquare$$

نتیجه. ***فرض کنید S یک ۲- رویهٔ سودار فشرده در $\mathbf{R}^۳$ باشد که خمیدگی گاوس آن همواره بزرگتر و یا برابر با صفر باشد. دراین صورت هیچ میدان برداری مماسی هیچ جا صفر همواره نمی‌تواند روی S وجود داشته باشد. در حالت خاص، هیچ میدان***

برداری مماس هیچ جا صفر هموار روی S^2 وجود ندارد.

برهان. بنابر قضیهٔ ۴ از فصل ۱۲ نقطه‌ای مانند $p \in S$ با شرط $K(p) > 0$ وجود دارد. K بنابراین باید در یک مجموعهٔ باز در S در حول p اکیداً بزرگتر از صفر باشد و چونکه $K \geq 0$ همه جا، لذا $\int_S K > 0$. ■

برای روشن شدن وقتی که هیچ میدان برداری یکه برداری هموار وجود ندارد حالتی است که S کرهٔ S^2 سودار با قائم برونی آن است در نظر می‌گیریم. اگر چه چنین میدان برداری مماس یکه هموار روی S^2 وجود ندارد، ولی چنین میدان برداری روی $S^2 / \{p\}$ که در آن $p = (0, 0, -1)$ و همچنین یک میدان برداری دیگر از این نوع روی $S^2 / \{q\}$ که در آن برای مثال، می‌توان $\mathbf{X}_1$ را روی $S^2 / \{p\}$ به صورت $\mathbf{X}_1 = \mathbf{E}_1^{\varphi_1} \circ \varphi_1^{-1} / \| \mathbf{E}_1^{\varphi_1} \circ \varphi_1^{-1} \|$ تعریف کرد که در آن $\varphi_1 : \mathbf{R}^2 \to S^2 / \{p\}$ وارون تصویر کنجنگاری از قطب جنوب p از S^2 ، $\mathbf{E}_1{}^{\varphi_1}$ اولین میدان برداری مختصی آنست و به طور مشابه می‌توان $\mathbf{X}_2$ را روی $S^2 / \{q\}$ به صورت $\mathbf{X}_2 = \mathbf{E}_2^{\varphi_2} \circ \varphi_2^{-1} / \| \mathbf{E}_1^{\varphi_2} \circ \varphi_2^{-1} \|$ تعریف کرد که در آن $\varphi_2 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow S^2 / \{q\}$ وارون تصویر کنجنگاری از قطب شمال q است. فرض‌کنید ω_1, ω_2 به‌ترتیب فرم‌های ارتباطی نظیر به $\mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2$ باشند و قرار می‌دهیم

$$S_+{}^2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_3 \geq 0 \} , \; S_-^2 = \{ x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_3 \leq 0 \}$$

ملاحظه خواهیم کرد که S_+^2 , S_-^2، ۲- رویه‌های با مرز هستند که اجتماع آنها S^2 و مقطع آنها استوا در S^2 می‌باشد. علاوه بر این، ω_1 روی S_+^2 و ω_2 روی S^2 تعریف شده‌اند. با به کار بردن لم ۳ و صورت سرتاسری قضیه استوکس نتیجه می‌گیریم که

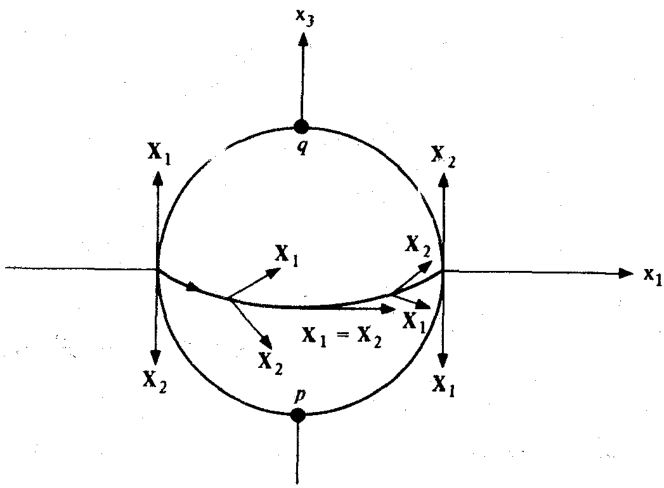
$$\begin{aligned}\int_{S^2} K &= \int_{S^2} K\zeta = \int_{S_+^2} K\zeta + \int_{S_-^2} K\zeta = -\int_{S_+^2} d\,\omega_1 - \int_{S_-^2} d\,\omega \\ &= -\int_{\partial S_+^2} \omega_1 - \int_{\partial S_-^2} \omega_2 = -\int_{\partial S_+^2} \omega_1 + \int_{\partial S_+^2} \omega_3\end{aligned}$$

که در آن برابری آخری مربوط به این واقعیت است که ∂S_-^2 و ∂S_+^2، ۱- رویهٔ یکسان در $\mathbf{R}^2$ می‌باشند ولی مجهز به سویهای مخالف هستند. اگر $\alpha(t) = (\cos t , \sin t , 0)$ برای $0 \leq t \leq 2\pi$ ، ملاحظه می‌کنیم که $\alpha \mid_{(0, 2\pi)}$ یک پارامترسازی موضعی از ∂S_+^2 می‌باشد که تصویرش تنها یک

نقطه از ∂S_+^2 را در بر نمی‌گیرد و بنابراین

$$\int_{S^2} K = -\int_{\partial S_+^2} \omega_1 + \int_{\partial S_+^2} \omega_2 = -\int_\alpha \omega_1 + \int_\alpha \omega_2.$$

امابنابرلم ۱، $\int_\alpha \omega_1$ - برابر با زاویهٔ کلی دوارن $\mathbf{Z}$ نسبت به $\mathbf{X}_1$ در طول α است که در آن $\mathbf{Z}$ یک میدان برداری موازی در طول α است (می‌توان $\dot\alpha = \mathbf{Z}$ گرفت)، و $\int_\alpha \omega_2$ برابر با زاویهٔ کلی دوران $\mathbf{X}_2$ نسبت به $\mathbf{Z}$ در طول α است، یعنی $\int_{S^2} K = -\int_\alpha \omega_1 + \int_\alpha \omega_2$ برابر با زاویهٔ کلی دوران $\mathbf{X}_2$ نسبت به $\mathbf{X}_1$ در طول α است. چون $\mathbf{X}_1(\alpha(2\pi)) = \mathbf{X}_1(\alpha(0))$ و $\mathbf{X}_2(\alpha(2\pi)) = \mathbf{X}_2(\alpha(0))$، این زاویه کلی دوران باید مضرب صحیحی از 2π باشد، یعنی $\frac{1}{2\pi}\int_{S^2} K$ باید یک عدد صحیح باشد. از شکل ۲۱-۷ به سهولت درمی‌یابیم که این عدد صحیح ۲ است (همانطور که انتظار می‌رود، چرا که $\int_{S^2} K = \int_{S^2} 1 = V(S^2) = 4\pi$).



شکل ۲۱-۷ زاویهٔ دوران $\mathbf{X}_2$ نسبت به $\mathbf{X}_1$ در طول هر نیم استوا به اندازه 2π افزایش می‌یابد.

صورت سرتاسری قضیهٔ گاوس ـ بنه از تعمیم ساختار بالا به یک ۲- رویهٔ سودار فشردهٔ دلخواه $S \subseteq \mathbf{R}^3$ به دست می‌آید. در آغاز فرمول انتگرالی برای زاویهٔ کلی دوران در طول یک خم پارامتری از یک میدان برداری مماس یکه نسبت به دیگری را به دست می‌آوریم. سپس این زاویهٔ کلی دوران را در طول خم‌های بسته‌ای که «نقاط منفرد» یکی از میدان‌های برداری را در بر می‌گیرد مورد مطالعه

قرار می‌دهیم.

لم ۴. *فرض کنید $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ میدانهای برداری مماس یکهٔ هموار روی یک مجموعهٔ باز U از یک ۲- رویهٔ سودار S تعریف شده باشند. فرض کنید $\omega_{\mathbf{XY}}$ یک ۱- فرم هموار تعریف شده روی U به صورت*

$$\omega_{\mathbf{XY}} = \mathrm{fdg} - \mathrm{gdf}$$

باشد، که در آن $\mathrm{f} = \mathbf{X} . \mathbf{Y}$، $\mathrm{g} = \mathbf{X}\, \mathrm{J}\, \mathbf{Y}$. در اینصورت

(یک) $d\,\omega_{\mathbf{XY}} = 0$

(دو) *$\int_\alpha \omega_{\mathbf{XY}}$ که در آن α یک خم پارامتری دلخواه در U است برابر با زاویهٔ کلی دوران $\mathbf{X}$ نسبت به $\mathbf{Y}$ در طول α است.*

تذکر. جلوه‌ای از اینکه چرا این لم صحیح است از بررسی اینکه $\omega_{\mathbf{XY}} = d \tan^{-1} (g / f)$ که در آن f غیر صفر است، روشن می‌شود.

برهان لم ۴. (یک) بنابر لم ۱ از فصل ۲۰ داریم

$$d\omega_{\mathbf{XY}} = df \wedge dg - dg \wedge df = 2df \wedge dg.$$

ولی $1 = f^2 + g^2$ و بنابراین

$$0 = d(f^2 + g^2) = 2fdf + 2gdg.$$

از ضرب برونی این معادله با dg و با df نتیجه می‌گردد که

$$0 = 2fdf \wedge dg \quad , \quad 0 = 2gdf \wedge dg.$$

چون f , g با هم به طور همزمان هرگز صفر نمی‌شوند، این امر ایجاب می‌کند که

$$0 = 2df \wedge dg = d\,\omega_{\mathbf{XY}}.$$

(دو) فرض کنید $\theta : [a , b] \longrightarrow \mathbf{R}$ زاویهٔ دوران از $\mathbf{Y}$ به $\mathbf{X}$ را در طول α اندازه‌گیری کند، بنابراین

$$\mathbf{X}\circ\alpha = \cos\theta\, \mathbf{Y}\circ\alpha + \sin\theta\, \mathrm{J}\, \mathbf{Y}\circ\alpha$$

در این صورت $f\circ\alpha = \cos\theta$ و $g\circ\alpha = \sin\theta$ و بنابراین

$$\omega_{\mathbf{XY}}(\dot\alpha) = (f\circ\alpha)\, dg(\dot\alpha) - (g\circ\alpha)\, df(\dot\alpha)$$
$$= (f\circ\alpha)(g\circ\alpha)' - (g\circ\alpha)(f\circ\alpha)' = \theta'.$$

که پس از انتگرالگیری نتیجه می‌شود که

$$\int_\alpha \omega_{XY} = \int_a^b \omega_{XY}(\dot{\alpha}) = \int_a^b \theta' = \theta(b) - \theta(a). \quad \blacksquare$$

فرض کنید $\mathbf{X}$ یک میدان برداری مماس یکهٔ هموار تعریف شده روی یک مجموعهٔ باز U از یک ۲- رویه سودار S باشد. یک «*نقطه منفرد تنها*» از $\mathbf{X}$ نقطه‌ای از $p \in S$ است به قسمی که $p \notin U$ ولی $V \setminus \{p\} \subset U$ برای یک مجموعه باز V در S شامل p. برای یک نقطهٔ منفرد تنهای p از $\mathbf{X}$ می‌توان نوشت

(یک) $\varepsilon > 0$ را به قسمی انتخاب نمود که نگاشت نمایی exp از S گوی باز B_ε به شعاع ε در حول ۰ از S_p را به طور دیفمئومرفیک بروی یک مجموعهٔ باز $U_\varepsilon \subset U \cup \{p\}$ بنگارد.

(دو) $\mathbf{u} \in S_p$ با شرط $\|\mathbf{u}\| = 1$،

(سه) $r \in \mathbf{R}$ با شرط $0 < r < \varepsilon$، و

(چهار) $\mathbf{Y}$ یک میدان برداری مماس یکهٔ هموار روی U_ε می‌باشد.

وجود چنین εای از قضیهٔ ۲ از فصل ۱۹ تضمین می‌شود، میدان برداری $\mathbf{Y}$ را می‌توان برای مثال از به کار بردن d exp به هر میدان برداری غیر صفر هموار روی B_ε و یکه سازی آن به دست آورد. با انتخاب ε، $\mathbf{u}$ و r و $\mathbf{Y}$ می‌توان *اندیس* $i(\mathbf{X}, p)$ از $\mathbf{X}$ را در نقطه منفرد تنهای p برابر با $\frac{1}{2\pi}$ زاویهٔ کلی دوران $\mathbf{X}$ نسبت به $\mathbf{Y}$ در طول خم بسته α_r است تعریف کرد، که درآن $\alpha_r : [0, 2\pi] \longrightarrow U_\varepsilon$ به‌صورت

$$\alpha_r(t) = \exp(r \cos t\mathbf{u} + r \sin t J \mathbf{u})$$

تعریف شده است (شکل ۲۱-۸ را ببینید).

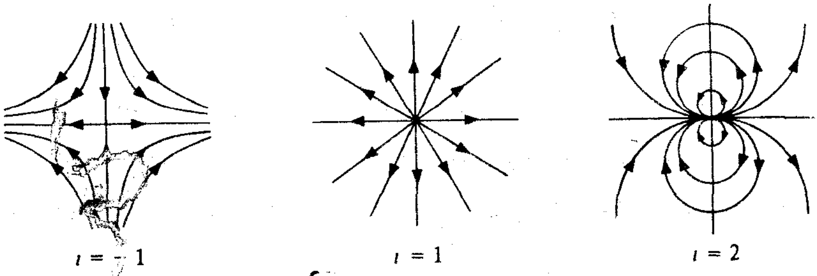
لم ۵. ***اندیس*** $i(\mathbf{X}, p)$ ***عدد صحیحی است که تنها به*** $\mathbf{X}$ ***و*** p ***بستگی دارد (و نه به انتخاب‌های*** ε, $\mathbf{u}$, r ***و*** $\mathbf{Y}$***).***

برهان. $i(\mathbf{X}, p)$ یک عدد صحیح است زیرا که اگر $\theta_r : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{R}$ زاویهٔ دوران $\mathbf{Y}$ نسبت به $\mathbf{X}$ را در طول α_r اندازه بگیرد، آنگاه معادلهٔ $\mathbf{X}\circ\alpha_r(2\pi) = \mathbf{X}\circ\alpha_r(0)$ ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned}\cos\theta_r(2\pi)\, \mathbf{Y}\circ\alpha_r(2\pi) + \sin\theta_r(2\pi)\, J\, \mathbf{Y}\circ\alpha_r(2\pi) \\ = \mathbf{X}\circ\alpha_r(2\pi) - \mathbf{X}\circ\alpha_r(0) \\ = \cos\theta_r(0)\, \mathbf{Y}\circ\alpha_r(0) + \sin\theta_r(0)\, J\, \mathbf{Y}\circ\alpha_r(0)\end{aligned}$$

و چون $\mathbf{Y}\circ\alpha_r(2\pi) = \mathbf{Y}\circ\alpha_r(0)$، این امر تنهای وقتی می‌تواند اتفاق افتد که

$\theta_r(2\pi) - \theta_r(0)$ مضربی صحیحی از 2π باشد.



شکل ۲۱-۸ نقاط تنهای میدان‌های برداری. در هر حالت خم‌های انتگرال نشان داده شده‌اند و اندیس آنها مشخص شده است.

ناوابستگی به Y: فرض کنید $\mathbf{Z}$ میدان برداری مماس یکهٔ هموار دیگری روی U_ε باشد. باید نشان داد که زاویه کلی دوران $\mathbf{X}$ نسبت به $\mathbf{Z}$ در طول α_r برابر با زاویه کلی دوران $\mathbf{X}$ نسبت به $\mathbf{Y}$ در طول α_r است. تفاوت این زوایا دقیقاً زاویهٔ کلی دوران $\mathbf{Y}$ نسبت به $\mathbf{Z}$ است که بنابر لم ۴ برابر با $\int_{\alpha_r} \omega_{YZ}$ می‌باشد، بنابراین باید نشان دهیم که $\int_{\alpha_r} \omega_{YZ} = 0$. اما چونکه ω_{YZ} روی تمام U_ε تعریف‌شده است، و α_r مرز قرض منفرد $\varphi_r : D \to U_\varepsilon$ تعریف شده به صورت $\varphi_r(x_1, x_2) = \exp\left((r_1\, \mathbf{u} + x_2\, J\mathbf{u})\right)$ می‌باشد، قضیهٔ استوکس و لم ۴ ایجاب می‌کند که

$$\int_{\alpha_r} \omega_{ZY} = \int_{\partial\varphi_r} \omega_{YZ} = \int_{\varphi_r} d\omega_{YZ} = 0$$

و این همان چیزی بود که لازم بود اثبات شود.

ناوابستگی به r: فرض کنید ω_{YZ} ۱- فرم روی $U_\varepsilon \setminus \{p\}$ تعریف شده در لم ۴ باشد. آنگاه $i(\mathbf{X}, p) = (1/2\pi) \int_{\alpha_r} \omega_{XY}$. این فرمول نشان می‌دهد که $i(\mathbf{X}, p)$ نسبت به $\mathbf{r}$ به طور پیوسته تغییر می‌کند. اما چونکه $i(\mathbf{X}, p)$ همواره یک عدد صحیح است، این امر تنها وقتی رخ می‌دهد که $i(\mathbf{X}, p)$ به عنوان تابعی از $\mathbf{r}$ ثابت باشد یعنی $i(\mathbf{X}, p)$ مستقل از $\mathbf{r}$ می‌باشد.

ناوابستگی به u: برای $\varepsilon > r > 0$، فرض کنید

$$S_r = \{\, q \in U_\varepsilon \,;\, \|\, (\exp|_{B_\varepsilon})^{-1}(q)\, \|^2 \le r^2 \,\}.$$

در اینصورت S_r یک ۲- رویهٔ سودار مرزدار می‌باشد که توسط تحدید سوی S به S_r سودار شده است. علاوه بر این $\alpha_r : (\circ\ ,\ 2\pi) \longrightarrow \partial\ S_r$ یک پارامترسازی موضعی از ∂S_r است که تصویرش دقیقاً یک نقطه از ∂S_r را در بر نمی‌گیرد. از آن نتیجه می‌شود که

$$i\ (\mathbf{X}\ ,\ p) = \int_{\alpha_r} \omega_{\mathbf{XY}} = \int_{\partial s_r} \omega_{\mathbf{XY}}$$

این انتگرال اخیر بستگی به انتخاب **u** ندارد.

ناوابستگی به ε: اگر exp هر دوگوی $B_{\varepsilon_1}\ ,\ B_{\varepsilon_2}$ را به طور دیفمئومرفیک روی مجموعه‌های باز در $U \cup \{\ p\ \}$ بنگارد، در اینصورت می‌توان r را کمتر از ε_1 و ε_2 انتخاب کرد و با استفاده از این مقدار r اندیس $i\ (\mathbf{X}\ ,\ r)$ را محاسبه کرد، انتخاب $\varepsilon \in \{\varepsilon_1\ ,\ \varepsilon_2\}$ بوضوح نامربوط است.

● **قضیهٔ ۴.** ***(قضیهٔ گاوس ـ بنه سرتاسری) فرض کنید S یک ۲- رویهٔ سودار فشرده در $\mathbf{R}^3$ باشد و X یک میدان برداری مماس یکهٔ هموار به جز در نقاط منفرد تنها $\{\ p_1\ ,\ \dots\ ,\ p_k\ \}$ تعریف شده روی S باشد. در اینصورت***

$$\frac{1}{2\pi} \int_S K = \sum_{i=1}^{k}\ i\ (\mathbf{x}\ ,\ p_i)$$

در حالت خاص $\frac{1}{2\pi} \int_S K$ همواره عدد صحیحی است.

تذکرات. این قضیه را می‌توان به دو صورت زیر خواند. از یک طرف گویای این مطلب است که $1/2\pi \int_s K$ همیشه یک عدد صحیح است که یک نتیجه قابل ملاحظه است. از طرف دیگر، این قضیه گویای این مطلب است که ***مجموع اندیس‌های هر میدان برداری مماس یکهٔ هموار که روی S به جز در نقاط منفرد تنها تعریف شده است برابر با مجموع اندیس هر چنین میدان برداریست،*** که این امر یک نتیجه قابل ملاحظهٔ دیگر است. این عدد صحیح مشترک به ***مشخصهٔ اویلر*** χ از S موسوم است. می‌توان نشان داد که χ برابر با $2-2g$ است، که در آن g گونای S («تعداد حفره‌ها») است (شکل ۲۱-۹ را ببینید).

$g = 1$ $\qquad$ $g = 2$ $\qquad$ $g = 3$

شکل ۲۱-۹ ۲- رویه‌های با گونای $g \in \{1\ ,\ 2\ ,\ 3\}$.

قضیه‌ایکه $\int_S K = \chi\ 1/2\pi$ درواقع قضیهٔ گاوس ـ بنه است وقضیه‌ایکه $\sum i(X, p_i) = \chi$ به قضیهٔ **پوانکاره ـ هاف** موسوم است). برای تعبیر دیگری از χ تمرین ۲۱-۴ را ببینید.

ما در اینجا به طور ضمنی فرض کرده‌ایم که حداقل یک میدان برداری مماس یکهٔ هموار تعریف شده روی S به جزء در نقاط منفرد تنها وجود دارد. این موضوع به عنوان یک تمرین (تمرین ۲۱-۵) واگذار شده است. توجه دارید که فشردگی S تضمین کننده این مطلب است که تنها تعداد با پایانی نقاط منفرد تنها برای هر میدان برداری مفروض وجود دارد.

برهان قضیهٔ ۴. برای هر $i \in \{1, \dots, K\}$، $\varepsilon_i > 0$ چنان انتخاب می‌کنیم که نگاشت نمایی exp گوی B_{ε_i} به شعاع ε_i در حول ۰ از S_p را به‌طور دیفمئومرنیک روی یک‌مجموعهٔ باز U_i در حول p_i از S می‌نگارد. می‌توان تأکیدکردکه ε_i راچنان کوچک انتخاب‌نمود که $U_i \cap U_j$ برای $i \neq j$ تهی باشد.

اینک $r > 0$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $r < \varepsilon_i$ برای هر i.

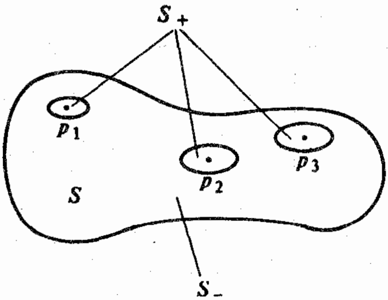
فرض کنید

$$S_+ = \bigcup_{i=1}^{k} S_i\ ,\ S_i = \{\, q \in U_i : \| (\exp|_{B_{\varepsilon_i}})^{-1}(q) \| \leq \varepsilon \}$$

و فرض کنید

$$S_- = \{\, q \in S : \| (\exp)|_{B\varepsilon_i})^{-1}(q) \| \geq r \text{ ، } i \text{ برای یک } q \in V_i \text{ که در آن } \}$$

(شکل ۲۱-۱۰ را ملاحظه کنید). در اینصورت S_+ , S_-، ۲- رویه‌های فشردهٔ سودار با مرز در $\mathbf{R}^3$



شکل ۲۱-۱۰ S اجتماع دو ۲- رویه با مرز می‌باشد، یکی (S_+) اجتماعی از قرصها در حول نقاط منفرد **X** می‌باشد و دیگری (S_-) شامل متمم درون‌های این قرص‌ها می‌باشد

می‌باشند که از تحدید سوی S به آنها سودار شده‌اند و $\partial S_+ = \partial S_- = S_+ \cap S_-$. توجه دارید که با اینحال سوی القایی روی ∂S_+ مخالف سوی القایی روی ∂S_- می‌باشد.

اکنون اگر $\mathbf{Y}$ میدان برداری مماس یکهٔ هموار روی $\bigcup_{i=1}^{k} U_i$ باشد ($\mathbf{Y}$ را می‌توان برای مثال از به‌کار بردن $d\ \exp$ روی میدان‌های برداری غیر صفر هموار روی هر یک از B_{ε_i} ها و سپس یکه نمودن حاصل به دست آورد.) در صورتی‌که ω_1 فرم ارتباطی نظیر به $\mathbf{Y}$ و ω_2 فرم ارتباطی نظیر به $\mathbf{X}$ باشد، لم ۳ و قضیهٔ استوکس ایجاب می‌کند که

$$\int_S K = \int_S K\zeta = \int_{S_+} K\zeta + \int_{S_-} K\zeta = -\int_{S_+} d\omega_1 - \int_{S_-} d\omega_2$$

$$= -\int_{\partial S_+} \omega_1 - \int_{\partial S_-} \omega_2 = -\int_{\partial S_+} \omega_1 + \int_{\partial S_+} \omega_2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(-\int_{\partial S_i} \omega_1 + \int_{\partial S_i} \omega_2 \right) = \sum_{i=1}^{k} \left(-\int_{\alpha_i} \omega_2 + \int_{\alpha_i} \omega_2 \right)$$

که در آن $\alpha_i : [\,0\,,\,2\pi\,] \longrightarrow \partial S_i$ به صورت $\alpha_i(t) = \exp(r \cos t\, \mathbf{u}_i + r \sin t\, J\, \mathbf{u}_i)$ تعریف شده است، و $\mathbf{u}_i$ یک برداریکه در S_p می‌باشد. ولی اگر $\mathbf{Z}_i$ هر میدان برداری یکه موازی در طول α_i باشد؛ آنگاه بنابر لم ۱، $-\int_{\alpha_i} \omega_1 + \int_{\alpha_i} \omega_2$، برابر با زاویهٔ کلی دوران $\mathbf{Z}$ نسبت به $\mathbf{Y}$ در طول α_i به علاوه زاویهٔ کلی دوران $\mathbf{X}$ نسبت به $\mathbf{Z}$ در طول α_i می‌باشد که در واقع برابر با زاویهٔ کلی دوران $\mathbf{X}$ نسبت به $\mathbf{Y}$ در طول α_i می‌باشد. این زاویه اخیر دقیقاً برابر با اندیس $\mathbf{X}$ در p_i می‌باشد، بنابراین

$$\int_S K = \sum_{i=1}^{k} i\,(\,\mathbf{X}\,,\,p\,) \qquad \blacksquare$$

فرمول گاوس ـ بنه به n − رویه‌های سودار فشردهٔ S برای هر بعد زوج به صورت زیر تعمیم داده می‌شود: $\int_S K = \chi\ (2\ /\ V\,(\,S^n\,))$، که در آن $V\,(\,S^n\,)$ حجم کرهٔ یکه S^n، K خمیدگی گاوس ـ کرونکر S، و χ مشخصهٔ اویلر S (که یک عدد صحیح است) می‌باشد. یک اثبات از آن (توسط س. س. چرن، تحت عنوان برهان سادهٔ ذاتی از فرمول گاوس ـ بنه برای خمینه‌های ریمانی

بسته در مجلهٔ (Annals of Mathematics) شماره ۴۵ (۱۹۴۴) صفحات ۷۴۷ - ۷۵۲ یافت می‌شود) که بر اساس استدلال تعمیم یافته مستقیمی از اثبات قضیه ۴ بنا نهاده شده است. اثبات دیگری از آن بر اساس واقعیت زیر است .

لم ۶. ***فرض کنید S یک n - رویهٔ سودار S در $\mathbf{R}^{n+1}$، ζ فرم حجم روی S , ξ عنصر حجم روی کرهٔ یکه S^n با سوی استاندارد آن باشد. در این صورت***

$$N^* \xi = K \zeta$$

که در آن $N : S \longrightarrow S^n$ نگاشت گاوس و K خمیدگی گاوس ـ کرونکر S می‌باشد.

برهان. برای $p \in S$ ، $\mathbf{v}_1 , \ldots , \mathbf{v}_n \in S_p$، با استفاده از قضیهٔ ۵ از فصل ۱۲ همراه با این واقعیت که $dN(\mathbf{v})$ و $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{N}$ برای هر $\mathbf{v} \in S_p$ دارای قسمت برداری یکسانی هستند نتیجه می‌شود که

$$(N^* \xi)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \xi(dN(\mathbf{v}_1), \ldots, dN(\mathbf{v}_n))$$

$$= \det \begin{pmatrix} dN(\mathbf{V}_1) \\ \vdots \\ dN(\mathbf{V}_n) \\ \mathbf{N}^{S^n}(\mathbf{N}(p)) \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{v}_1} \mathbf{N} \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{v}_n} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}(p) \end{pmatrix} = K(p) \det \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_n \\ \mathbf{N}(p) \end{pmatrix}$$

$$= K(p)\, \zeta(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

■

برای یک n- رویهٔ سودار فشرده $S \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ با شرط $K > 0$ برای تمام نقاط، این واقعیت که $(\int_S K)(2 / V(S^n))$ یک عدد صحیح است نتیجه می‌شود چراکه دراین حالت N یک دیفمئومرفیم حافظ سواست، و بنابراین با استفاده از تمرین ۱۷-۱۵ داریم

$$\int_S K = \int_S K\zeta = \int_S N^* \xi = \int_{S^n} \xi = V(S^n) ,$$

بنابراین $\int_S K = 2 \,(2 / V(S^n))$. در حالت کلی، اگر $p \in S$ به قسمی باشد $K(p) \neq 0$، آنگاه dN_p غیر منفرد خواهد بود، در نتیجه مجموعه بازی مانند U_p در حول p وجود دارد به قسمی که به

طور دیفمئومرفیک توسط N روی مجموعهٔ بازی از S^n نگاشته می‌شود. هرگاه $K(p) > ۰$، این دیفمئومرفسیم حافظ سو خواهد بود، بنابراین

$$\int_{U_p} K = \int_{U_p} N^* \xi = \int_{N(U_p)} \xi = -V(N(U_p)).$$

هرگاه $K(p) < ۰$، در این صورت دیفمئومرفسیم $N|_{U_p}$ وارون‌کننده سو می‌باشد، بنابراین

$$\int_{U_p} K = \int_{U_p} N^* \xi = \int_{N(\omega_p)} \xi = -V(N(U_p)).$$

می‌توان نشان داد که (به ترجمه کتاب توپولوژی از دیدگاه دیفرانسیلی نوشتهٔ ج. میلنور چاپ انتشارات دانشگاه صنعتی شریف مراجعه شود) بیشترین نقاط q از S^n مقادیر عادی N هستند که در آنها dN_p غیرمنفرد می‌باشد ($K(p) \neq ۰$) برای هر $p \in N^{-۱}(q)$ و علاوه بر این، عدد صحیح

$$d = \#\{p \in N^{-۱}(q) : K(p) > ۰\} - \#\{p \in N^{-۱}(q) : K(p) < ۰\}$$

مستقل از مقدار عادی q می‌باشد، که در آن $\{-\}\#$ نمایشگر تعداد نقاط در مجموعهٔ (با پایان) می‌باشد. عدد d به **درجهٔ** نگاشت گاوس $N : S \longrightarrow S^n$ موسوم می‌باشد. برای یک مجموعهٔ باز به اندازهٔ کافی کوچک U در حول مقدار عادی q از N نتیجه می‌شود که $N^{-۱}(U)$ مشتمل بر $\#\{N^{-۱}(q)\}$ مجموعه‌های باز جدا در S می‌باشد، که هر کدام به طور دیفمئومرفسیم توسط N بروی U نگاشته می‌شود، و علاوه بر این

$$\int_{N^{-۱}(U)} K = \int_{N^{-۱}(U)} N^* \xi = d \int_U \xi = d\, V(U).$$

چون نواحی که در آن نقاط $K = ۰$ در انتگرال سهمی ندارند، انتخاب دقیقی از افزار یکانی به رابطهٔ $\int_S K = d\, V(S^n)$ و یا $\int_S K = d\,(۱/V(S^n))$ منجر می‌شود. برای n هازوج، $d = \chi/۲$ که‌درآن χ مشخصهٔ اویلر S می‌باشد.

تمرین

۲۱-۱. فرض کنید S یک ۲- رویهٔ سودار در $\mathbf{R}^۳$ باشد. با فرض آنکه $\varphi : D \longrightarrow S$ و $\psi : D \longrightarrow S$ قرصهای منظم در S باشند به قسمی که $\partial\varphi = \partial\psi$. نشان دهید که زاویهٔ هولونومی φ با زاویهٔ هولونومی ψ در مضرب صحیحی از ۲π متفاوت است.

۲۱-۲. یک ***مستطیل منفرد*** در یک ۲- رویهٔ سودار S یک نگاشت هموار $\varphi : \square \longrightarrow S$ می‌باشد که در آن

$$\square = \{ (x_۱ , x_۲) \in \mathbf{R}^۲ : ۰ \leq x_۱ \leq ۱ \leq , ۰ \leq x_۲ \leq ۱ \} .$$

مرز آن خم پارامتری تکه‌ای هموار $\alpha : [۰ , ۴] \longrightarrow \mathbf{R}^۲$ تعریف شده به صورت زیر است

$$\alpha (t) = \begin{cases} (t , ۰) & ۰ \leq t \leq ۱ \\ (۱ , t - ۱) & ۱ \leq t \leq ۲ \\ (۳ - t , ۱) & ۲ \leq t \leq ۳ \\ (۰ , ۴ - t) & ۳ \leq t \leq ۴. \end{cases}$$

φ ***عادی*** است اگر تحدیدش به $\square$ یک پارامترسازی موضعی یک به یک S باشد. قضیهٔ گاوس ـ بنه را برای مستطیل‌های عادی ثابت کنید

$$\int_\varphi K \zeta + \int_a^b \kappa_g = ۲\pi - \sum_{i=۱}^{۴} \theta_i$$

که در آن $\kappa_g : [a , b] \longrightarrow \mathbf{R}$ و θ_i $(i \in \{ ۱،۲،۳،۴ \})$ درست مانند مثلثهای عادی تعریف شده‌اند (ر.ک.قضیهٔ ۲).

۲۱-۳. فرض کنید $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ میدان‌های برداری مماس یکهٔ هموار روی یک مجموعه باز U از ۲- رویهٔ سودار S باشد و فرض کنید $h : U \longrightarrow \mathbf{R}^۲$ توسط $h (p) = (\mathbf{X}(p) . \mathbf{Y}(p) , \mathbf{X}(p) . \mathbf{JY}(p))$ تعریف شده باشد. نشان دهید که $\omega_{\mathbf{XY}}$ که در آن $\omega_{\mathbf{XY}}$ ۱- فرم تعریف شده در لم ۴ روی U می‌باشد و η ۱- فرم تعریف شده در قضیهٔ ۳ از فصل ۱۱ روی $\mathbf{R}^۲ \setminus \{۰\}$ می‌باشد.

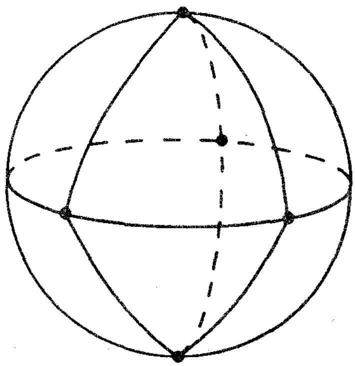
۲۱-۴. فرض کنید S یک ۲- رویهٔ سودار فشرده در $\mathbf{R}^۳$ باشد. با فرض آنکه گردآیهٔ با پایان از مثلث‌های عادی $\varphi_i : \Delta \longrightarrow S$ $(i \in \{۱ , ... , m\})$ وجود داشته باشند به قسمی که

(یک) $\bigcup_{i=1}^{m}$ (تصویر φ_i) $= S$

(دو) اگر $p \in S$ در تصویر دقیقاً دو φ_i باشد، آنگاه مقطع تصاویر این φ_iها برابر با تصویر یک قطعهٔ هموار از مرز هرکدام است.

(سه) اگر $p \in S$ در تصویر بیش از دو φ_i باشد، آنگاه p برای هر چنین i ای، تصویر تحت φ_i از یک رأس Δ است.

این چنین گردآیه $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ به یک ***مثلث سازی*** T از S موسوم است (شکل ۲۱-۱۱ را ملاحظه کنید). نقاط از نوع (سه) به ***رئوس*** T موسومند و زیرمجموعه‌هایی به صورت (تصویر φ_i) $\cap$ (تصویر φ_j) که در (دو) هستند به ***یال*** T موسومند. φ_iها نیز به ***وجوه*** T موسومند.



شکل ۲۱-۱۱ یک مثلث‌بندی از ۲-کره

نشان دهید که

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_S K = v - e + f$$

که در آن v تعداد رئوس، e تعداد یال‌ها و f تعداد وجوه T می‌باشند [راهنمایی، قضیهٔ موضعی گاوس ـ بنه را در مورد هر مثلث φ_i به کار برید.]

۲۱-۵. فرض کنید S یک n - رویه سودار در $\mathbb{R}^{n+1}$ باشد. برای هر $q \in S$، فرض کنید $f_q : S \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع هموار تعریف شده به صورت $f_q(p) = \|q - p\|^2$ باشد.

(الف) نشان دهید که $p \in S$ یک نقطهٔ بحرانی f_q است اگر و فقط اگر $q - p = \lambda N(p)$ برای یک $\lambda \in \mathbf{R}$، که در آن N نگاشت گاوس S می‌باشد.

(ب) نشان دهید که اگر $p \in S$ یک نقطهٔ بحرانی f_q باشد، $\mathbf{v} \in S_p$ و $\mathbf{v} \neq 0$، در اینصورت $\nabla_{\mathbf{v}}\, \mathrm{grad}\, f_q = 0$ اگر و فقط اگر $L_p(\mathbf{v}) = (1/\lambda)\,\mathbf{v}$، که در آن L_p نگاشت وینگارتن S در p می‌باشد. و λ مانند قسمت (الف) است.

(پ) نتیجه بگیرید که اگر q در مکان هندسی کانونی S قرار نداشته باشد، آنگاه تمام نقاط بحرانی f_q نابتهگون هستند وبنابراین‌تنها می‌باشند. (از آن نتیجه بگیرید که $\mathrm{grad}\, f_q / \| \mathrm{grad}\, f_q \|$ یک میدان برداری مماس یکه هموار تعریف شده روی S به جز در نقاط منفرد تنها می‌باشد).

۶-۲۱. فرض کنید S یک ۲- رویهٔ سودار در $\mathbf{R}^3$ باشد و فرض کنید $\mathbf{X}$ یک میدان برداری مماس یکه هموار تعریف شده روی یک مجموعهٔ باز U در S باشد. اگر θ_1، ۱- فرم دوگان $\mathbf{X}$ روی U باشد و θ_2 ۱- فرم دوگان $J\mathbf{X}$ روی U باشد و بالاخره ω ۱- فرم ارتباطی نظیر به $\mathbf{X}$ روی U باشد. در اینصورت نشان دهید که

$$d\theta_1 = \omega \wedge \theta_2$$
$$d\theta_2 = -\,\omega \wedge \theta_1$$
$$d\omega = -\,K\,\theta_1 \wedge \theta_2$$

که در آن K خمیدگی گاوس S است.

(این معادلات به ***معادلات ساختاری کارتان*** موسوم‌اند.)

۲۲- حرکت های جسم صلب و همنهشتی ها

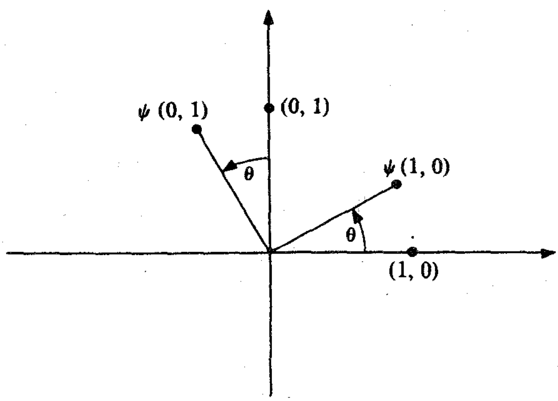
یک **حرکت جسم صلب** $\mathbf{R}^{n+1}$ نگاشتی مانند $\psi : \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد به قسمی که $\|\psi(p) - \psi(q)\| = \|p - q\|$ برای هر یک $p, q \in \mathbf{R}^{n+1}$. در نتیجه یک حرکت جسم صلب نگاشتی است که فواصل بین نقاط را حفظ می‌کند.

مثال ۱. برای $a \in \mathbf{R}^{n+1}$، نگاشت $\psi : \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ را به صورت $\psi(p) = p + a$ تعریف می‌کنیم. بدینصورت ψ یک حرکت جسم صلب موسوم به ***انتقال توسط*** a است.

مثال ۲. برای $\theta \in \mathbf{R}$، نگاشت $\psi : \mathbf{R}^{2} \longrightarrow \mathbf{R}^{2}$ را به صورت

$$\psi(x_1, x_2) = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)$$

تعریف می‌کنیم. ψ یک حرکت جسم صلب $\mathbf{R}^2$ موسوم به ***دوران*** به اندازه زاویهٔ θ است. (ر.ک. شکل ۲۲-۱.)

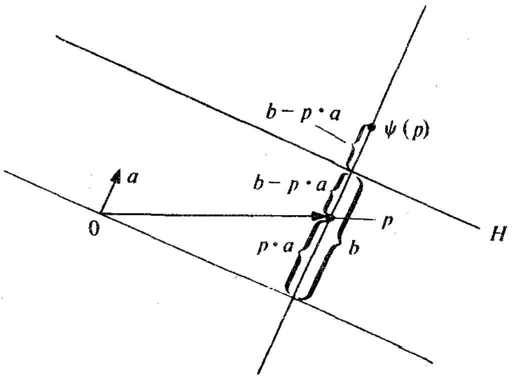


شکل ۲۲-۱ دوران در $\mathbf{R}^2$ به اندازه زاویهٔ θ

مثال ۳. برای $a \in \mathbf{R}^{n+1}$ با شرط $\|a\| = ۱$ و $b \in \mathbf{R}$، نگاشت $\psi : \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ را به صورت

$$\psi(p) = p + ۲(b - p.a)$$

تعریف می‌کنیم (ر.ک. شکل ۲۲-۲.) در اینصورت ψ یک حرکت جسم صلب $\mathbf{R}^{n+1}$ موسوم به ***انعکاس*** نسبت به n - صفحهٔ $H = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : a . x = b\}$ می‌باشد.



شکل ۲۲-۲ انعکاس نسبت به n - صفحهٔ H.

مثال ۴. فرض کنید $\psi : \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ یک تبدیل خطی باشد به قسمی که $\|\psi(v)\| = \|v\|$ برای هر $v \in \mathbf{R}^{n+1}$ در این صورت ψ یک حرکت جسم صلب است چرا که $\|\psi(p) - \psi(q)\| = \|p - q\|$ برای هر p و $q \in \mathbf{R}^{n+1}$. ψ موسوم به ***تبدیل متعامد*** $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد. توجه دارید که یک تبدیل خطی $\mathbf{R}^{n+1}$ یک حرکت جسم صلب است اگر و فقط اگر یک تبدیل متعامد باشد.

ترکیب $\psi_۲ \circ \psi_۱$ از دو حرکت جسم صلب $\mathbf{R}^{n+1}$ یک حرکت جسم صلب است. در حالت خاص ترکیب یک تبدیل متعامد با یک انتقال یک حرکت جسم صلب است. ولی در واقع هر حرکت جسم صلب را می‌توان چنین بدست آورد.

● **قضیهٔ ۱.** ***فرض کنید ψ یک حرکت جسم صلب $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد، آنگاه یک تبدیل متعامد یکتا مانند $\psi_۱$ و یک انتقال یکتا مانند $\psi_۲$ وجود دارد به قسمی که***

$$\psi = \psi_۲ \circ \psi_۱$$

برهان. فرض کنید $\psi(\circ) = a$، ψ_2 انتقال توسط a باشد و $\psi_1 = \psi_2^{-1} \circ \psi$. نشان خواهیم داد که ψ_1 یک تبدیل متعامد است. بوضوح ψ_1 یک حرکت جسم صلب است به قسمی که $\psi_1(\circ) = \circ$. ψ_1 حافظ نرم است زیرا که

$$\|\psi_1(v)\| = \|\psi_1(v) - \psi_1(\circ)\| = \|v - \circ\| = \|v\|$$

برای هر $v \in \mathbf{R}^{n+1}$ در نتیجه کافی است نشان دهیم که ψ_1 خطی است. در آغاز تحقیق می‌کنیم که ψ_1 ضرب داخلی را حفظ می‌کند:

$$\psi_1(v) \circ \psi_1(w) = \frac{1}{2}(\|\psi_1(v)\|^2 + \|\psi_1(w)\|^2 - \|\psi_1(v) - \psi_1(w)\|^2$$

$$= \frac{1}{2}(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v - w\|^2)$$

برای تمام $v, \omega \in \mathbf{R}^{n+1}$. بالاخره خاصیت خطی آن را نشان می‌دهیم. باید نشان دهیم که

$$\psi_1(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 \psi_1(v_1) + c_2 \psi_1(v_2)$$

یا به طور هم‌ارز

$$\psi_1(c_1 v_1 + c_2 v_2) - c_1 \psi_1(v_1) - c_2 \psi_1(v_2) = \circ$$

برای تمام $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^{n+1}$ و $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. بدین منظور کافی است نشان دهیم که بردار $\psi_1(c_1 v_1 + c_2 v_2) - c_1 \psi_1(v_1) - c_2 \psi_1(v_2)$ عمود بر هر بردار از یک پایهٔ $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد. ولی اگر $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ یک پایهٔ متعامدیکه $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد، آنگاه $\{\psi(e_1), \ldots, \psi(e_{n+1})\}$ نیز یک پایه متعامدیکه $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد، چون ψ_1 ضرب داخلی را حفظ می‌کند، و

$$[\psi_1(c_1 v_1 + c_2 v_2) - c_1 \psi_1(v_1) - c_2 \psi_1(v_2)] \cdot \psi_1(e_i) =$$
$$= (c_1 v_1 + c_2 v_2) \cdot e_i - c_1 (v_1 \cdot e_i) - c_2 (v_2 \cdot e_i) = \circ$$

برای $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ در نتیجه ψ_1 خطی است.

یکتایی ψ_1 و ψ_2 از این شرایط به دست می‌آید که انتقال ψ_2 باید در شرط $\psi_2(\circ) = \psi_2 \circ \psi(\circ) = \psi(\circ)$ صدق کند و ψ_1 باید برابر $\psi_2^{-1} \circ \psi$ باشد.□

نتیجه. فرض کنید $\psi : \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ یک حرکت جسم صلب باشد، آنگاه

(یک) ψ هموار است

(دو) ψ فضای $\mathbf{R}^{n+1}$ را روی $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌نگارد، و

(سه) $d\psi(\mathbf{v}) \cdot d\psi(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ برای هر $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}_p^{n+1}$، $p \in \mathbf{R}^{n+1}$.

برهان. (یک) تبدیلات خطی و انتقالات هموار می‌باشند، و بنابراین حرکات جسم صلب نیز این چنین‌اند.

(دو) انتقالات و همچنین هر تبدیل متعامد $\mathbf{R}^{n+1}$ پوشا می‌باشند (هسته‌های آن‌ها صفراند، چرا که حافظ نرم می‌باشند). بنابراین حرکات جسم صلب پوشا می‌باشند.

(سه) در آغاز توجه داریم که هرگاه $\psi = \psi_2 \circ \psi_1$ تجزیه حرکت جسم صلب ψ باشد که در آن ψ_1 یک تبدیل متعامد و ψ_2 یک انتقال است، آنگاه

$$d\psi(p, v) = (\psi(p), \psi_1(v))$$

برای تمام $(p, v) \in \mathbf{R}_p^{n+1}$، $p \in \mathbf{R}^{n+1}$. در واقع، با قرار دادن $\alpha(t) = p + tv$، داریم $\dot{\alpha}(0) = (p, v)$، بنابراین

$$\begin{aligned} d\psi(p, v) = \psi \circ \alpha(0) &= \left(\psi(p), \frac{d}{dt}\Big|_0 \psi(p + tv)\right) \\ &= \left(\psi(p), \frac{d}{dt}\Big|_0 \psi_2 \circ \psi_1(p + tv)\right) \\ &= \left(\psi(p), \frac{d}{dt}\Big|_0 (\psi_1(p) + t\psi_1(v) + a)\right) \\ &= (\psi(p), \psi_1(v)) \end{aligned}$$

(که در آن ψ_2 انتقال توسط a است). بنابراین برای $\mathbf{v} = (p, v)$ و $\mathbf{w} = (p, w)$ متعلق به $\mathbf{R}_p^{n+1}$ داریم

$$\begin{aligned} d\psi(\mathbf{v}) \cdot d\psi(\mathbf{w}) &= (\psi(p), \psi_1(v)) \cdot (\psi(p), \psi_1(w)) \\ &= \psi_1(v) \cdot \psi_1(w) = v \cdot w = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}. \end{aligned}$$ ■

دو n - رویه S و $\tilde{S}$ در $\mathbf{R}^{n+1}$ **همنهشت** می‌باشند هرگاه یک حرکت جسم صلب

$\psi: \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ وجود داشته باشد به قسمی که $\bar{S} = \psi(S)$. دیفرانسیل چنین حرکت جسم صلبی، یعنی $d\psi$ فضای مماس بر S در هر نقطهٔ $p \in S$، یعنی S_p را روی فضای مماس بر $\bar{S}$ در نقطهٔ $\psi(p)$ یعنی $\bar{S}_{\psi(p)}$ می‌نگارد، بنابراین چون که $d\psi$ ضرب داخلی را حفظ می‌کند $d\psi(\mathbf{N}(p)) = \pm \bar{\mathbf{N}}(\psi(p))$ که در آن $\mathbf{N}$ و $\bar{\mathbf{N}}$ به ترتیب میدان‌های برداری سوی مفروض روی S و $\bar{S}$ می‌باشند. توجه دارید که یک سوی $\bar{\mathbf{N}}$ روی $\bar{S}$ هموار را می‌توان چنان انتخاب نمود که برای هر $p \in S$، $d\psi(\mathbf{N}(p)) = \pm \bar{\mathbf{N}}(\psi(p))$ (یعنی $d\psi \circ \mathbf{N} = \bar{\mathbf{N}} \circ \psi$).

● **قضیهٔ ۲.** ***فرض کنید S , $\bar{S}$ دو n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$، $\psi: \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ یک حرکت جسم صلب باشد به قسمی که $\bar{S} = \psi(S)$، و بالاخره فرض کنید که S و $\bar{S}$ به قسمی سودار شده باشند که $d\psi \circ \mathbf{N} = \bar{\mathbf{N}} \circ \psi$. در این صورت***

(یک) $d\psi(\mathbf{v}) \cdot d\psi(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ ***برای تمام*** $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in S_p$، $p \in S$ و

(دو) دوّمین صورت‌های بنیادی رویه S در نقطهٔ $p \in S$ و رویهٔ $\bar{S}$ در نقطهٔ $\psi(p)$ یعنی به ترتیب $\mathscr{S}_p$ و $\bar{\mathscr{S}}_{\psi(p)}$ توسط رابطهٔ $\mathscr{S}_p = \bar{\mathscr{S}}_{\psi(p)} \circ d\psi$ بهم مربوط می‌شوند.

برهان. (یک) از نتیجهٔ بالا به دست می‌آید.

(دو) فرض کنید ψ_1 قسمت متعامد ψ در قضیهٔ ۱ باشد. برای $p \in S$ و $\mathbf{v} \in S_p$ مفروض، خم $\alpha: I \longrightarrow S$ را به قسمی می‌گیریم که $\dot{\alpha}(t_0) = \mathbf{v}$. در این صورت $d\psi(\mathbf{v}) = \psi_1 \circ \alpha\,(t_0)$ و بنابراین مقدار نگاشت و ینگارتن رویهٔ $\bar{S}$ در نقطهٔ $\psi(p)$ روی $d\psi(\mathbf{v})$ برابر است با

$$
\begin{aligned}
\bar{L}_{\psi(p)}(d\psi(\mathbf{v})) &= -\nabla_{d\psi(\mathbf{v})} \bar{\mathbf{N}} \\
&= -(\bar{\mathbf{N}} \circ \dot{\psi} \circ \alpha)(t_0) \\
&= -(d\psi \circ \dot{\mathbf{N}} \circ \alpha)(t_0) \\
&= -(\psi(p), (\psi_1 \circ \mathbf{N} \circ \alpha)'(t_0)) && \text{(توسط معادله (*) بالا)} \\
&= -(\psi(p), \psi_1((\mathbf{N} \circ \alpha)'(t_0))) && \text{(با توجه به خطی بودن } \psi_1\text{)} \\
&= -d\psi(p, (\mathbf{N} \circ \alpha)'(t_0)) && \text{(باز توسط معادله (*))} \\
&= -d\psi(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{N}) \\
&= d\psi(L_p(\mathbf{v})),
\end{aligned}
$$

که در آن L_p نگاشت و ینگارتن $\bar{S}$ در نقطهٔ p است. در نتیجه

$$\bar{\mathscr{S}}_{\psi(p)}\,(d\psi\,(v)) = \bar{L}_{\psi(p)}\,(d\psi\,(v))\,.\,d\psi\,(v)$$
$$= d\psi\,(L_p\,(v))\,.\,d\psi\,(v) = L_p\,(v)\,.\,v = \mathscr{S}_p\,(v). \qquad \blacksquare$$

نتیجه. *فرض کنید S و $\bar{S}$ دو n- رویهٔ سودار همنهشت در R^{n+1} باشند. در این صورت S و $\bar{S}$ دارای هندسه یکسانی می‌باشند که در آن هر گاه ψ یک حرکت جسم صلب S روی $\bar{S}$ با شرط $\bar{N}\circ\psi = d\psi \circ N$ باشد و ψ_1 قسمت متعامد آن باشد، آنگاه*

(یک) طول $\alpha : I \longrightarrow S$ برابر با طول $\psi \circ \alpha : I \longrightarrow \bar{S}$ می‌باشد.

(دو) نگاشت گاوس N از رویه S به نگاشت گاوس $\bar{N}$ از رویهٔ $\bar{S}$ توسط $\bar{N}\circ\psi = \psi_1\circ N$ بهم مرتبط می‌شوند و در حالت خاص تصویر کروی $\bar{S}$ تصویر کروی S تحت ψ_1 می‌باشد.

(سه) $\alpha : I \longrightarrow S$ یک ژئودزی در S است اگر و فقط اگر $\psi\circ S$ در $\bar{S}$ یک ژئودزی باشد.

(چهار) یک میدان برداری X در طول خم $\alpha : I \longrightarrow S$ موازی است اگر و فقط اگر $d\psi\circ X$ در طول $\psi\circ\alpha$ موازی باشد.

(پنج) نگاشت‌های وینگارتن S در نقطهٔ $p \in S$ و $\bar{S}$ در نقطهٔ $\psi(p)$ یعنی به ترتیب Lp و $\bar{L}_{\psi(p)}$ توسط رابطهٔ

$$\bar{L}_{\psi(p)} \circ d\psi_p = d\psi_p \circ Lp$$

بهم مربوطه می‌شوند.

(شش) خمیدگی‌های قایم S و $\bar{S}$ یعنی به ترتیب k و $\bar{k}$ توسط $k = \bar{k} \circ d\psi$ بهم مربوط می‌شوند و در حالت خاص خمیدگی‌های اصلی S در نقطهٔ $p \in S$ برابر با خمیدگی‌های اصلی $\bar{S}$ در نقطهٔ $\psi(p)$ می‌باشند.

(هفت) خمیدگی‌های گاوس ـ کر و نوکر و متوسط S در نقطهٔ $p \in S$ به ترتیب برابر خمیدگی‌های گاوس ـ کر و نوکر و متوسط $\bar{S}$ در نقطهٔ $\psi(p)$ می‌باشند.

(هشت) S در نقطهٔ $p \in S$ محدب است اگر و فقط اگر $\bar{S}$ در $\psi(p)$ محدب باشد.

(نه) مکان کانونی $\bar{S}$ تصویر مکان کانونی S تحت ψ می‌باشد.

(ده) حجم S و $\bar{S}$ با هم برابرند.

(یازده) S یک رویه می‌نیمال است اگر و فقط اگر $\bar{S}$ یک رویهٔ می‌نیمال باشد و بالاخره

(دوازده) مکان مزدوج $\psi(p)$ در $\bar{S}$ تصویر مکان مزدوج p در S تحت ψ می‌باشد.

برهان. (یک) $l(\psi\circ\alpha) = \int_I \|\psi\circ\dot{\alpha}\| = \int_I \|d\psi\circ\dot{\alpha}\| = \int_I \|\dot{\alpha}\| = l(\alpha)$

(دو) از معادلهٔ $\bar{N}\circ\alpha = d\psi\circ\alpha$ بلافاصله نتیجه می‌شود.

(سه) از (چهار) نتیجه می‌شود زیراکه α ژئودزی است اگر و فقط اگر $\dot{\alpha}$ موازی باشد.

(چهار) $\bar{N}(\psi(\alpha(t))) = d\psi(N(\alpha(t)))$ مضربی از $(d\psi\circ\dot{X})(t) = d\psi(\dot{X}(t))$ می‌باشد اگر و فقط اگر $X(t)$ مضربی از $N(\alpha(t))$ باشد.

(پنج) این مطلب در اثبات قضیه ۲ می‌باشد.

(شش) $\bar{k}(d\psi(v)) = \mathscr{S}_{\psi(p)}(d\psi(v)) = \mathscr{S}_p(v) = k(v)$. اینکه خمیدگی‌های اصلی برابرند از این مطلب نتیجه می‌شود و یا از (پنج)، چراکه $\bar{L}_p = d_{\psi p}\circ L_p\circ d\psi_p^{-1}$, L_p دارای مقادیر ویژه یکسانی هستند.

(هفت) از (شش نتیجه می‌شود).

(هشت). $(\psi(q) - \psi(p)).\bar{N}(\psi(p)) = (\psi_1(q) - (\psi_1(q)) . \psi_1(N(p)) = (q - p) . N(p)$

(نه)$\psi(p + (\frac{1}{k_i(p)}) N(p)) = \psi_2(\psi_1(p) + \frac{1}{k_i(p)}\psi_1(N(p)))$

$$= \psi_1(p) + \frac{1}{k_i(p)}\psi_1(N(p)) + a$$

$$= \psi(p) + \frac{1}{k_i(p)}\bar{N}(\psi(p)) .$$

(ده) برای هر پارامترسازی موضعی φ از S، $\psi\circ\varphi$ یک پارامترسازی موضعی S است و

$$\det(E_i^{\psi\circ\varphi} . E_j^{\psi\circ\varphi}) = \det(d\psi(E_i^{\varphi}) . d\psi(E_j^{\varphi})) = \det(E_i^{\varphi} . E_j^{\varphi})$$

بنابراین انتگرالهای حجم با هم برابرند.

(یازده) از (هفت) نتیجه می‌شود.

(دوازده) $\psi\circ\exp = \bar{\exp}\circ d\psi$ که در آن $\exp$ و $\bar{\exp}$ به ترتیب نگاشت‌های نمایی S و $\bar{S}$ می‌باشند، زیراکه بنابر (سه)، ψ ژئودزی‌ها را به ژئودزی‌ها می‌نگارد. بنابراین ψ نقاط مزدوج را در طول ژئودزی

$\exp(t\mathbf{v})$ از $\bar{S}$ می‌نگارد. ■

عکس قضیهٔ ۲ نیز صحیح است.

● **قضیهٔ ۳.** ***فرض کنید*** S ***و*** $\bar{S}$ ***–n رویه‌های سودار همبند در*** $\mathbf{R}^{n+1}$ ***باشند. با فرض آنکه یک نگاشت هموار مانند*** ψ ***از*** S ***روی*** $\bar{S}$ ***وجود داشته باشد به قسمی که***

(یک) $d\psi(\mathbf{v}) \cdot d\psi(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{W}$ ***برای تمام*** $\mathbf{w} \in S_p$ ***و*** $\mathbf{v}$ ، $p \in S$ ***و***

(دو) ***دومین صورت‌های بنیادی*** S ***در نقطهٔ*** p ***و*** $\bar{S}$ ***در نقطهٔ*** $\psi(P)$ ***یعنی به ترتیب*** $\mathscr{S}_p$ ***و*** $\bar{\mathscr{S}}_{\psi(p)}$ ***توسط*** $\mathscr{S}_p = \bar{\mathscr{S}}_{\psi(p)} \circ d\psi$ ***برای تمام*** $p \in S$ ***بهم ربط داده شوند.***

آنگاه S ***و*** $\bar{S}$ ***همنهشت‌اند و در واقع*** ψ ***تحدید به*** S ***از یک حرکت جسم صلب است***

برهان. فرض کنید $p_\circ \in S$ و یک حرکت جسم صلب مانند $\bar{\psi}$ از $\mathbf{R}^{n+1}$ توسط $\bar{\psi} = \psi_2 \circ \psi_1$ تعریف می‌کنیم که در آن ψ_1 تبدیل متعامد یکتای $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد به قسمی که

(الف) $\psi_1(N(p_\circ)) = \bar{N}(\psi(p_\circ))$

(ب) $(p_\circ, \psi_1(v)) = d\psi(p_\circ, v)$ برای تمام $v \in \mathbf{R}^{n+1}$ به‌قسمی‌که $v \perp N(p_\circ)$ (یعنی $((p_\circ, v) \in S_{p_\circ})$

و ψ_2 انتقال در $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد که نقطهٔ $\psi_1(p_\circ)$ را به نقطهٔ $\psi(p_\circ)$ می‌برد. نشان می‌دهیم که $(\bar{\psi}^{-1} \circ \psi(p))$ برای تمام $p \in S$ که بدین ترتیب $\psi = \bar{\psi}\big|_S$.

فرض کنید $\varphi = \bar{\psi}^{-1} \circ \psi$. در این صورت φ رویهٔ S را روی n– رویهٔ $S = \bar{\psi}^{-1}(\bar{S})$ می‌نگارد، و

(یک) $d\varphi(\mathbf{v}) \cdot d\varphi(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ برای تمام $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in S$ ، $p \in S$،

(دو) $\mathscr{S}_p = \bar{\mathscr{S}}_{\varphi(p)} \circ d\varphi$ برای‌تمام $p \in S$. (دومین‌صورت‌بنیادی $\bar{S}$ در $\varphi(p)$ می‌باشد $= \bar{\mathscr{S}}_{\varphi(p)}$)

(سه) $\varphi(p_\circ) = p_\circ$،

(چهار) $d\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ برای تمام $\mathbf{v} \in S_{p_\circ}$.

از (یک) و (دو) نتیجه می‌گیریم که نگاشت‌های وینگارتن L_p رویهٔ S و $L_{\varphi(p)}$ رویهٔ S توسط رابطهٔ $\bar{L}_{\varphi(p)} \circ d\varphi = d\varphi \circ L_p$ برای تمام $p \in S$ بهم مربوط می‌شوند. در واقع

$$\bar{L}_{\varphi(p)}(d\varphi(\mathbf{v})) . d\varphi(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\left(\bar{\mathscr{S}}_{\varphi(p)}(d\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w})) - \bar{\mathscr{S}}_{\varphi(p)}(d\varphi(\mathbf{v})) - \bar{\mathscr{S}}_{\varphi(p)}(d\varphi(\mathbf{w})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathscr{S}_p(\mathbf{v}+\mathbf{w}) - \mathscr{S}_p(\mathbf{v}) - \mathscr{S}_p(\mathbf{w})\right)$$

$$= \bar{L}_p(\mathbf{v}) . \mathbf{w} = d\varphi(L_p(\mathbf{v})) . d\varphi(\mathbf{w})$$

برای تمام $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in S_p$، و چونکه نگاشت $d\varphi$ فضای S_p را روی فضای $\bar{\mathscr{S}}_{\varphi(p)}$ برای تمام $p \in S$ می‌نگارد ($d\varphi$ پایه‌های متعامدیکه S_p را روی پایه‌های متعامدیکه $\bar{\mathscr{S}}_{\varphi(p)}$ می‌نگارد)، بنابر (یک) این امر ایجاب می‌کند که $\bar{L}_{\varphi(p)}\, d\varphi(\mathbf{v}) = d\varphi(L_p(\mathbf{v}))$ برای هر $\mathbf{v} \in S_p$.

نشان خواهیم داد که اگر $\alpha : I \longrightarrow S$ یک خم پارامتری در S باشد به قسمی که برای یک $t_\circ \in I$ $\varphi(\alpha(t_\circ)) = \alpha(t_\circ)$ و همانی $= d\varphi(\alpha(t_\circ))$ (این مثلاً در حالتی خواهد بود که $\alpha(t_\circ) = p_\circ$) در این صورت $\varphi(\alpha(t)) = \alpha(t)$ و همانی $= d\varphi_{\alpha(t)}$ برای هر $t \in I$. فرض کنید که $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ میدان‌های برداری هموار موازی در طول خم α باشند به قسمی که $\{\mathbf{X}_1(t), \dots, \mathbf{X}_{n+1}(t)\}$ یک پایه متعامدیکه برای $S_{\alpha(t)}$ برای هر $t \in I$ باشد. چنین میدانهای برداری را می‌توان با انتخاب یک پایهٔ متعامدیکه $\{\mathbf{X}_1(t), \dots, \mathbf{X}_n\}$ برای $S_{\alpha(t_\circ)}$ به دست آورد. و سپس $\mathbf{X}_i$ را می‌توان به صورت میدان برداری یکتا موازی در طول α با شرط $\mathbf{X}_i(t_\circ) = \mathbf{x}_i$ تعریف کرد. اگر $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$ میدان‌های برداری در طول $\varphi\circ\alpha$ باشند که به صورت $\mathbf{Y}_i(t) = d\varphi(\mathbf{X}_i(t))$ برای $t \in I$ تعریف شده باشند، در این صورت $\{\mathbf{Y}_1(t), \dots, \mathbf{Y}_n(t)\}$ یک پایه متعامدیکه برای $\bar{S}_{\varphi\circ\alpha(t)}$ به ازای هر $t \in I$ می‌باشد (بنابر (یک)، $\mathbf{Y}_i(t_\circ) = \mathbf{X}_i(t_\circ)$ به ازای هر i (چراکه همانی $= d\varphi_{\alpha(t_\circ)}$)) و

$$\dot{\varphi\circ\alpha} = \sum_{i=1}^{n} (\dot{\varphi\circ\alpha} \circ \mathbf{Y}_i)\, \mathbf{Y}_i = \sum_{i=1}^{n} (d\varphi(\dot{\alpha}) \,.\, d\varphi(\mathbf{X}_i))\, \mathbf{Y}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\dot{\alpha} \circ \mathbf{X}_i)\, \mathbf{Y}_i \,.$$

اگر بتوانیم نشان دهیم که $Y_i = X_i$ که در آن $Y_i : I \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ قسمت برداری $\mathbf{Y}_i$ است و $X_i : I \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ قسمت برداری $\mathbf{X}_i$ می‌باشد، داریم

$$\frac{d}{dt}(\varphi\circ\alpha) = \sum_{i=1}^{n} (\dot{\alpha} \,.\, \mathbf{X})\, Y_i = \sum_{i=1}^{n} (\dot{\alpha} \,.\, \mathbf{X}_i)\, X_i = \frac{d\alpha}{dt}$$

که بنابراین $\varphi\circ\alpha$ و α حداکثر در یک ثابت متفاوتند. چون $(\varphi\circ\alpha)(t_\circ) = \alpha(t_\circ)$، در نتیجه می‌توانیم نتیجه بگیریم که $(\varphi\circ\alpha)(t) = \alpha(t)$ برای هر $t \in I$، و علاوه بر این

$$d\varphi(\mathbf{X}_i(t)) = \mathbf{Y}_i(t) = (\varphi(\alpha(t)), Y_i(t)) = (\alpha(t), X_i(t)) = \mathbf{X}_i(t)$$

به ازای هر i، در نتیجه همانی = $d\varphi_{(\alpha(t))}$ برای هر $t \in I$ که همان چیزی است که لازم داشتیم.
بنابراین نشان خواهیم داد که $X_i = Y_i$ برای $i \in \{1, \ldots, n\}$. بدین منظور $X_{n+1} = N\circ\alpha$ و $Y_{n+1} = N\circ\varphi\circ\alpha$ قرار می‌دهیم، که به این ترتیب $\{X_1(t), \ldots, X_{n+1}(t)\}$ یک پایه متعامدیکه برای $R^{n+1}_{\alpha(t)}$ می‌باشد و $\{Y_1(t), \ldots, Y_{n+1}(t)\}$ یک پایه متعامدیکه برای $R^{n+1}_{\varphi\circ\alpha(t)}$ به ازای هر $t \in I$ می‌باشد. در این صورت

$$\dot{X}_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \,.\, X_j \quad \text{و} \quad \dot{Y}_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_{ij} Y_j$$

که در آن $a_{ij} = \dot{X} \,.\, X_j$ و $b_{ij} = \dot{Y}_i \,.\, Y_j$ توابع حقیقی روی I می‌باشند. در آغاز نشان خواهیم داد که $a_{ij} = b_i$ برای تمام i و j ها. چون

$$0 = \frac{d}{dt}(X_i \,.\, X_j) = \dot{X}_i \,.\, X_j + X_i \,.\, \dot{X}_j = a_{ij} + a_{ji}$$

لذا $a_{ji} = -a_{ij}$ برای هر i و j و به طور مشابه $b_{ji} = -b_{ij}$ برای هر i و j، بنابراین کافی است تحقیق کنیم که $a_{ij} = b_{ij}$ برای $i < j$، اما میدان‌های برداری $Y_i = d\varphi\, X_i$ برای $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ در طول $\varphi\circ\alpha$ (از $\bar{S}$) موازیند. این مطلب از (یک) و از این حقیقت که میدان‌های برداری X_i در طول α موازیند حاصل می‌شود، ولی با این حال اثبات این مطلب را تا فصل آینده (نتیجه ۲ از قضیهٔ ۱ فصل بیست و سوم) به تأخیر می‌اندازیم. با این فرض موضوع $\dot{Y}_i$ قائم بر $\bar{S}$ می‌باشد، درست مثل آنکه $\dot{X}_i$ قائم بر S برای $i \le n$ می‌باشد، و لذا

$$b_{ij} = \dot{Y}_i \,.\, Y_j = 0 = \dot{X}_i \,.\, X_j = a_{ij}$$

برای $1 \le i, j \le n$. علاوه بر این برای $i < n$

$$b_{i,n+1} = \dot{Y}_i \,.\, Y_{n+1} = \dot{Y}_i \,.\, \bar{N}\circ\varphi\circ\alpha = -Y_i \,.\, \bar{N}\circ\dot{\varphi}\circ\alpha$$

$$= Y_i \,.\, \bar{L}(\varphi\dot{\circ}\alpha) = Y_i\, \bar{L}(d\varphi(\dot{\alpha})) = d\varphi.(X_i) \,.\, d\varphi(L(\dot{\alpha}))$$

$$= X_i \,.\, L(\dot{\alpha}) = -X_i \,.\, N\dot{\circ}\alpha = \dot{X}_i \,.\, N\circ\alpha = \dot{X}_i \,.\, X_{n+1} = a_{i,n+1},$$

که در آن $L(\dot{\alpha})$ میدان برداری در طول α تعریف شده به صورت $(L(\dot{\alpha}))(t) = L_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t))$ و $\bar{L}(\varphi\dot{\circ}\alpha)$ به طور مشابه تعریف شده است، از آن نتیجه می‌گیریم که $a_{ij} = b_{ij}$ برای

$1 \leq i < j < n+1$ و بنابراین $a_{ij} = b_{ij}$ برای تمام i و j ها.

اینک می‌توانیم این اثبات را کامل کنیم که $X_i = Y_i$ برای تمام $i \in \{1, \dots, n+1\}$ زیرا که $Y_i = \sum_{j=1}^{n+1} c_i X_{ji}$ که در آن $C_{ij} = Y_i \cdot X_j : I \longrightarrow \mathbf{R}$، $(C_{ij}(t_0))$ ماتریس همانی است و

$$\frac{dC_{ij}}{dt} = \frac{dY_i}{dt} \cdot X_j + Y_i \cdot \frac{dX_j}{dt}$$

$$= \left(\sum_{K=1}^{n+1} a_{ik} Y_k \right) \cdot X_j + Y_i \cdot \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_{jk} X_k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} (a_{ik} c_{kj} + a_{jk} c_{ik}).$$

این دستگاه مرتبه اول معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه

$$C_{ij}(t_0) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

توسط توابع

$$C_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

برآورده می‌شود، چون $a_{ij} + a_{ji} = 0$، بنابر یکتایی جواب‌های دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول، $(C_{ij}(t))$ برای تمام $t \in I$ ماتریس همانی است. به عبارت دیگر $Y_i(t) = X_i(t)$ برای هر $i \in \{1, \dots, n+1\}$ و هر $t \in I$.

بالاخره باید نشان دهیم که $\varphi(p) = p$ برای هر $p \in S$. فرض کنید که

$$U = \{p \in S : \varphi(p) = p \text{ و } d\varphi_p = \text{همانی}\}.$$

در این صورت U در S باز است، چراکه هر نقطهٔ $p \in U$ در یک مجموعهٔ باز به صورت $\phi(V)$ قرار دارد، که در آن ϕ پارامترسازی موضعی S و V یک گوی باز در $\mathbf{R}^n$ می‌باشد، و p را می‌توان به هر نقطهٔ $\phi(V)$ توسط یک خم پارامتری در $\phi(V)$ وصل کرد. بنابر آنچه که گفته شد $\phi(V) \subset U$. از طرف دیگر، متمم U در S یعنی $S - U$ در S باز است چراکه φ و $d\varphi$ هر دو پیوسته می‌باشند. ولی

چونکه S همبند است این امر فقط در صورتی رخ می‌دهد که یا U و یا S − U تهی باشد (اگر $\alpha : [a\ ,\ b] \longrightarrow S$ یک نگاشت پیوسته با شرایط $\alpha\ (a) \in U$ و $\alpha\ (b) \longrightarrow S - U$ باشد آنگاه $\alpha\ (t_\circ)$ نه به U و نه به S − U تعلق دارد که در آن $t_\circ$ کوچکترین کران بالای مجموعهٔ $\{t \in [a\ ,\ b] : \alpha\ (t) \in U\}$ می‌باشد. چون $p_\circ \in S$، S − U تهی است و در حالت خاص $\varphi\ (p) = p$ برای هر $p \in S$ ■

تمرین

۲۲-۱. تحقیق کنید که هر یک از نگاشت‌های بیان شده در مثالهای ۱ و ۲ و ۳ در این فصل در واقع حرکت‌های جسم صلب‌اند.

۲۲-۲. نشان دهید که هر گاه ψ_1 یک تبدیل متعامد $\mathbf{R}^{n+1}$ و ψ_2 انتقال توسط a ($a \in \mathbf{R}^{n+1}$) باشد، آنگاه $\psi_1 \circ \psi_2 = \tilde{\psi}_2 \circ \psi_1$، که در آن $\tilde{\psi}_2$ انتقال توسط $\psi_1\ (a)$ می‌باشد.

۲۲-۳. نشان دهید که هر یک از گزاره‌های زیر با این گزاره که تبدیل خطی $\psi: \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ یک تبدیل متعامد است هم‌ارز می‌باشد:

(الف) $\psi\ (v)\ .\ \psi\ (\omega) = v\ .\ \omega$ برای هر $v\ ,\ \omega \in \mathbf{R}^{n+1}$.

(ب) ψ پایه‌های متعامدیکه را روی پایه‌های متعامدیکه می‌نگارد، یعنی هر گاه $\{e_1\ ,\ \dots\ ,\ e_{n+1}\}$ یک پایهٔ متعامدیکه $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد آنگاه $\{\psi\ (e_1)\ ,\ \dots\ ,\ \psi\ (e_{n+1})\}$ نیز یک پایه متعامدیکه است.

(پ) ماتریس نمایش ψ نسبت به هر پایه متعامدیکه $\mathbf{R}^{n+1}$ یک ماتریس متعامد است (یعنی ترانهادش وارونش می‌باشد).

۲۲-۴. یک ***دوران*** در $\mathbf{R}^{n+1}$ یک تبدیل خطی متعامد بادترمینان ۱+ می‌باشد.

(الف) نشان دهید که یک تبدیل خطی $\psi : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ دوران است اگر وفقط اگر عددی حقیقی مانند θ وجود داشته باشد به قسمی که ماتریس ψ نسبت به پایهٔ متعارف $\mathbf{R}^2$ به صورت زیر باشد:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(ب) نشان دهید که هر دوران ψ از $\mathbf{R}^3$ یک جهت را ثابت نگه می‌دارد (یعنی ψ دارای یک بردار ویژه‌یکه با مقدار ویژه ۱+ می‌باشد).

(پ) نشان دهید که اگر ψ یک دوران در $\mathbf{R}^3$ باشد، e_1 یک بردار یکه با شرط $\psi(e_1) = e_1$ و e_2 یک بردار یکه عمود بر e_1 باشد، آنگاه ماتریس نمایش ψ نسبت به پایهٔ متعامدیکه $\{e_1, e_2, e_1 \times e_2\}$ در R^3 به صورت

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

برای یک $\theta \in \mathbf{R}$ می‌باشد.

۲۲-۵. نشان دهید که هذلولیهای $x_1 x_2 = 1$ و $x_1^2 - x_2^2 = 2$ در $\mathbf{R}^2$ همنهشت‌اند.

۲۲-۶. فرض کنید ψ یک حرکت جسم صلب در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد و F مجموعهٔ تمام نقاط ثابت ψ باشد، یعنی

$$F = \{q \in \mathbf{R}^{n+1} : \psi(q) = q\}$$

برای $p \notin F$، مجموعه

$$H_p = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : \|x - \psi(p)\| = \|x - p\|\}$$

را در نظر بگیرید

(الف) نشان دهید که H_p یک n- صفحه در $\mathbf{R}^{n+1}$ می‌باشد

(ب) نشان دهید که $F \subset H_p$

(پ) اگر ψ_p انعکاس نسبت به H_p باشد، نشان دهید که مجموعهٔ تمام نقاط ثابت $\psi_p \circ \psi$ شامل $\{p\} \cup F$ می‌باشد.

(ت) نشان دهید که اگر $0 \in F$، آنگاه $\sum_{i=1}^{k} c_i p_i \in F$ که در آن $p_1, \dots, p_k \in F$ و $c_1, \dots, c_k \in \mathbf{R}$.

(ث) نشان دهید که یک $k \le n+2$ و انعکاسهای $\psi_1, \dots, \psi_k$ از $\mathbf{R}^{n+1}$ وجود دارند به قسمی که $\psi = \psi_1 \circ \dots \circ \psi_k$.

۲۲-۷. یک حرکت جسم صلب ψ از $\mathbf{R}^{n+1}$ که n- رویهٔ S را بروی خودش بنگارد یک ***تقارن*** S گوییم.

(الف) نشان دهید که مجموعه تمام حرکتهای جسم صلب $\mathbf{R}^{n+1}$ تحت قانون ترکیب تشکیل یک گروه می‌دهد و تقارنهای S یک زیرگروه آن می‌باشد.

(ب) نشان دهید که گروه تقارنی n- کرهٔ یکه S^n گروه تمام تبدیلات متعامد $\mathbf{R}^{n+1}$ است.

(ج) گروه تقارنی استوانهٔ $x_1^2 + x_2^2 = a^2$ در $\mathbf{R}^3$ را بیابید.

(د) گروه تقارنی بیضوی

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

در $\mathbf{R}^3$ را بیابید. (یک) وقتی که $b = c \neq a$ و (دو) وقتی که a و b و c متمایزند.

۲۳ـ ایزومتری

به عنوان ساکنین زمین (حداقل تا آن موقعی که وسایل نقلیه فضایی اختراع نشده بود) ما مجبوریم که هندسهٔ زمین را با اندازه‌گیریهایی روی زمین به دست آوریم. ما می‌توانیم فاصله در طول خم‌ها را محاسبه کنیم و با مشتق‌گیری نسبت به زمان می‌توان سرعت و تندی را بدست آوریم. هندسه‌ای که از این گونه اندازه‌گیریها به دست می‌آید به ***هندسهٔ ذاتی*** موسوم است.

اطلاعات اولیه مورد نیازی که به ما توانایی محاسبه فاصله در طول خمهای یک n- رویهٔ S را می‌دهد ضرب داخلی بردارهای مماس است. در حقیقت، با دادن یک ضرب داخلی روی هر فضای مماس S_p، $p \in S$، طول یک خم پارامتری $\alpha : [a\ ,\ b] \longrightarrow S$ یعنی $\ell(\alpha)$ قابل محاسبه بوسیلهٔ فرمول زیر می‌باشد.

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\|\ dt = \int_a^b (\dot{\alpha}(t)\ .\ \dot{\alpha}(t))^{1/2}\ dt$$

بالعکس، اگر ما قادر باشیم که طول هر خم هموار دلخواه در S را محاسبه کنیم، آنگاه ما می‌توانیم نرم بردارها را در S_p را حساب کنیم. (برای $\mathbf{v} \in S_p$، فرض کنید $\alpha : [a\ ,\ b] \longrightarrow S$ خمی با شرط $\dot{\alpha}(t_\circ) = \mathbf{v}$ و $s(t)$ برابر با طول α از a تا t باشد، آنگاه $\|\mathbf{v}\| = \|\dot{\alpha}(t)\| = (ds / dt)(t_\circ)$.

توسط نرم‌ها نیز می‌توانیم ضرب‌های داخلی را محاسبه کنیم؛ برای مثال توسط اتحاد

$$\mathbf{v}\ .\ \mathbf{w} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2).$$

بنابراین هندسهٔ ذاتی n- رویهٔ S هندسه‌ای است که بتواند از اندازه‌گیریهای طول در طول خمهای S به دست آید و این همان قسمت از هندسهٔ S است که از آگاهی در مورد ضرب داخلی روی فضای

مماس در هر نقطه از S به دست می‌آید.

یک نگاشت هموار ψ از یک n- رویه $S \subset \mathbf{R}^{n+k}$ به یک n- رویه دیگر $\bar{S} \subset \mathbf{R}^{n+l}$ را یک ***ایزومتری موضعی*** گوییم هرگاه ضرب‌های داخلی روی بردارهای مماس را حفظ کند، یعنی برای هر $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in S_p$ و $p \in S$ داشته باشیم

$$d\psi\,(\mathbf{v})\,.\,d\psi\,(\mathbf{w})\ \mathbf{v}\,.\,\mathbf{w}.$$

دیفرانسیل $d\psi_p : S_p \longrightarrow \bar{S}_p$ چنین نگاشتی بدین صورت الزاماً برای هر $p \in S$ غیر منفرد است. بنابراین بر طبق قضیه وارونی، ψ باید یک مجموعهٔ باز در حول هر نقطه p از S را بطور یک به یک و پوشا روی یک مجموعهٔ باز در حول ψ (p) از $\bar{S}$ بنگارد. از اینجا نتیجه می‌شود که ψ (S) یک زیرمجموعهٔ باز $\bar{S}$ است. اما لازم نیست که ψ (S) تمام $\bar{S}$ باشد و همچنین ضرورتی ندارد که $\psi : S \longrightarrow \psi\,(S)$ یک به یک باشد. یک ایزومتری موضعی که n- رویه S را بطور یک به یک و پوشا روی n- رویه $\bar{S}$ می‌نگارد را یک ***ایزومتری*** S به روی $\bar{S}$ می‌نامند. چون بنابر تعریف ایزومتری یک نگاشت یک به یک $\psi : S \longrightarrow \bar{S}$ است که ضرب داخلی بردارهای مماس را حفظ می‌کند. نتیجه می‌شود که تمام هندسه ذاتی رویه را حفظ می‌کند.

در نتیجه برای مثال اگر $\alpha : [a\,,\,b] \longrightarrow S$ یک خم پارامتری در S باشد، آنگاه خم متناظر با آن یعنی $\psi \circ \alpha$ در $\bar{S}$ دارای طولی مساوی با α می‌باشد.

$$\ell\,(\psi \circ \alpha) = \int_a^b \| (\psi \circ \alpha)\dot{}\,(t) \|\ dt$$

$$= \int_a^b \|\ d\psi\,(\dot{\alpha}\,(t))\ \|\ dt = \int_a^b \|\ \dot{\alpha}\,(t)\ \|\ dt = \ell\,(\alpha).$$

در حقیقت هندسه ذاتی را می‌توان بعنوان آن قسمت از هندسه رویه‌ها که تحت ایزومتری حفظ می‌شود توصیف کرد. دو رویه S و $\bar{S}$ که برای آنها یک ایزومتری $\psi : S \longrightarrow \bar{S}$ وجود دارد را ***ایزومتریک*** می‌گویند، که الزاماً دارای هندسه ذاتی یکسان می‌باشند.

مثال ۱. فرض کنید $\psi : \mathbf{R}^{n+k} \longrightarrow \mathbf{R}^{n+k}$ یک حرکت جسم صلب و S یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+k}$ باشد. آنگاه $\psi\big|_S$ یک ایزومتری از S روی ψ (S) است.

مثال ۲. فرض کنید $\psi : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ بوسیلهٔ $\psi\,(\theta\,,\,u) = (\cos\theta\,,\,\sin\theta\,,\,u)$ تعریف شود.

آنگاه ψ صفحه را به دور (و دور) استوانه $x_1^2 + x_2^2 = 1$ در $\mathbf{R}^3$ (ر.ک. شکل ۲۳-۱) می‌نگارد. ψ یک ایزومتری موضعی است زیرا برای هر (θ , u)، $d\psi$ پایه متعامدیکه $\{(\theta , u , 1 , 0) , (\theta , u , 0 , 1)\}$ برای $\mathbf{R}^2_{(\theta , u)}$ را به پایه متعامدیکه

$$\{\mathbf{E}_1 (\theta , u) , \mathbf{E}_2 (\theta , u)\} = \{\psi (\theta , u) - \sin \theta , \cos \theta , 0) , (\psi (\theta , u) , 0 , 0 , 1)\}$$

از تصویر $d\psi (\theta , u)$ می‌نگارد، بنابراین $d\psi (\theta , u)$ باید ضرب داخلی را حفظ کند. با تحدید کردن ψ به مجموعهٔ باز $U = \{(\theta , u) \in \mathbf{R}^2 : - \pi < \theta < \pi\}$، یک ایزومتری $\psi\big|_U$ از نوار بیکران U در $\mathbf{R}^2$ روی استوانه‌ای که یک خط آن برداشته شده بدست می‌آوریم.

مثال ۳. نگاشت φ از صفحه به چنبرهٔ $((x_1^2 + x_2^2)^{1/2} - a)^2 + x_3^2 = b^2 \ (a>b>0)$ که بوسیله

$$\varphi (\phi , \theta) = ((a + b \cos \phi) \cos \theta , (a + b \cos \phi) \sin \theta , b \sin \phi)$$

داده شده است یک ایزومتری موضعی نیست زیرا برای مثال:

$$\|d \varphi (\phi ,\theta , 0 , 1)\| = \|\varphi (\phi ,\theta) , - (a + b \cos\phi) \sin \theta , (a + b \cos\phi) \sin \theta , 0)\|$$
$$= a + b \cos \phi$$

که با $\|(\phi ,\theta) , 0 , 1)\| = 1$ برای تمام $(\phi , \theta) \in \mathbf{R}^2$ برابر نیست. از طرف دیگر نگاشت ψ که صفحه را روی چنبرهٔ

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2 = 1 \\ x_3^2+x_4^2 = 1 \end{cases}$$

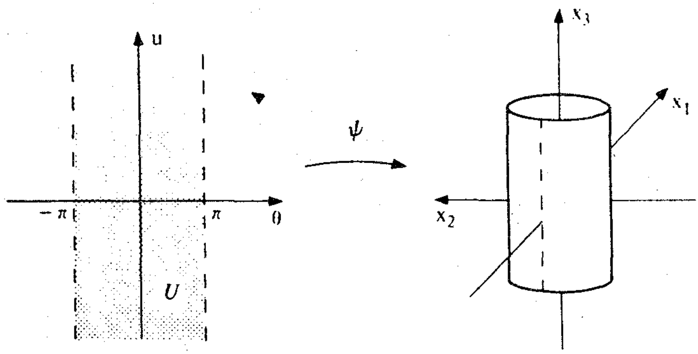
در $\mathbf{R}^4$ بوسیله $\psi (\phi ,\theta) = (\cos\phi , \sin\phi , \cos\theta , \sin\theta)$ می‌نگارد یک ایزومتری موضعی است. زیرا برای هر $(\phi , \theta) \in \mathbf{R}^2$، بردارهای

$$d\psi (\phi ,\theta , 1 , 0) = (\psi (\phi ,\theta) , - \sin \phi , \cos \phi , 0 , 0)$$
$$d\psi (\phi ,\theta , 0 , 1) = (\psi (\phi ,\theta) , 0 , 0 , - \sin \theta , \cos \theta)$$

یک پایهٔ متعامدیکه برای تصویر $d\psi (\phi , \theta)$ تشکیل می‌دهند. با تحدید کردن ψ به مجموعهٔ باز

$$U = \{(\phi , \theta) \in \mathbf{R}^2 : -\pi < \phi < \pi , - \pi < \theta < \pi\}$$

یک ایزومتری $\psi\big|_U$ از مربع U در $\mathbf{R}^{۲}$ روی چنبرهٔ در $\mathbf{R}^{۴}$ که دو دایره آن حذف شده به دست می‌آوریم.



شکل ۲۳-۱ $\psi\ (\theta\ ,\ u)\ =\ (\cos\theta\ ,\ \sin\theta\ ,\ u)$ یک ایزومتری موضعی از $\mathbf{R}^{۲}$ روی استوانهٔ $x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۱$ در $\mathbf{R}^{۳}$ است. تحدید ψ به نوار بیکران U یک ایزومتری از U روی استوانه که یک خط آن حذف شده است، می‌باشد.

مثال ۴. فرض‌کنید S صفحهٔ‌سودهٔ $\mathbf{R}^{۲}-\{(۰\ ,\ ۰)\}$ و $\bar{S}$ مخروط $x_۳>۰$ و $۳x_۱^۲ + ۳x_۲^۲ - x_۳^۲ = ۰$ در $\mathbf{R}^{۳}$ باشد. $\psi : S \longrightarrow \bar{S}$ را بوسیله

$$\psi\ (r/۲\ \cos ۲\theta\ ,\ r/۲\ \sin ۲\theta\ ,\ \frac{\sqrt{۳}}{۲}\, r)$$

تعریف می‌کنیم، که در آن $(r\ ,\theta)$ $r\ >\ ۰$ مختصات قطبی در $\mathbf{R}^{۲}\ -\ \{(۰\ ,\ ۰)\}$ هستند. آنگاه ψ یک ایزومتری موضعی است. زیرا اگر $U = \{(r\ ,\theta) \in\ \mathbf{R}\ : r>۰\ \}$، آنگاه نگاشت‌های $\varphi : U \longrightarrow S\ ,\ \bar{\varphi} : U \longrightarrow \bar{S}$ که توسط

$$\varphi\ (r\ ,\theta) = (r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)\ ,\ \bar{\varphi}\ (r\ ,\theta)\ =\ (r/۲\ \cos ۲\,\theta\ ,\ r/۲\ \sin ۲\,\theta\ ,\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} r)$$

تعریف می‌شوند ۲- رویه‌های پارامتری هستند که U را بترتیب روی S و $\bar{S}$ می‌نگارند و همچنین $\bar{\varphi}\ =\ \psi\circ\varphi$ (ر.ک. شکل ۲۳-۲). میدان‌های بردار مختصی $\mathbf{E}_i$ در طول φ و $\bar{\mathbf{E}}_i$ در طول $\bar{\varphi}$ بوسیله

فرمولهای زیر داده می‌شوند:

$$\mathbf{E}_۱ (r , \theta) = (\varphi (r , \theta) , \frac{\partial\varphi}{\partial r} (r , \theta)) = (\varphi (r , \theta) , \cos\theta , \sin\theta)$$

$$\mathbf{E}_۲ (r , \theta) = (\varphi (r , \theta) , \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} (r , \theta)) = (\varphi (r , \theta) , - r\sin\theta , r\cos\theta)$$

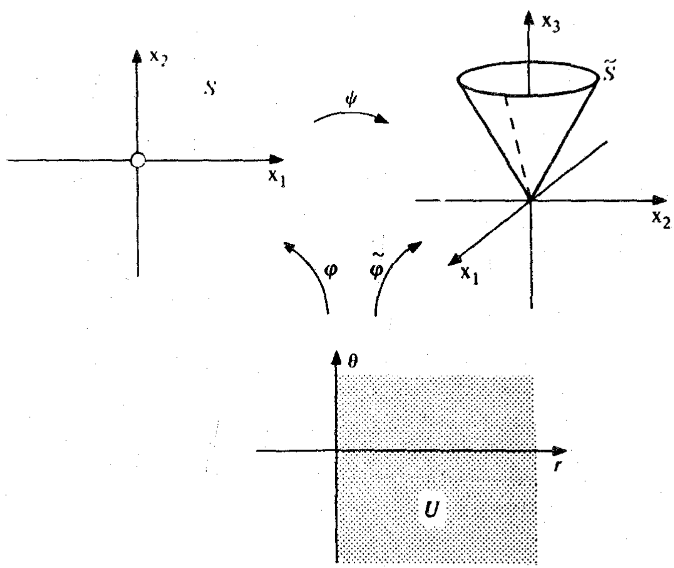
$$\tilde{\mathbf{E}}_۱ (r ,\theta) = (\tilde{\varphi} (r,\theta) , \frac{\partial\varphi}{\partial r} (r ,\theta)) = (\tilde{\varphi} (r ,\theta) , \frac{۱}{۲}\cos ۲\theta , \frac{۱}{۲}\sin ۲\theta , \frac{\sqrt{۳}}{۲})$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_۲ (r ,\theta) = (\tilde{\varphi} (r ,\theta) , \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\theta} (r ,\theta)) = (\tilde{\varphi} (r ,\theta) , - r\sin ۲\theta , \cos ۲\theta , ۰).$$

بعلاوه، برای هر $p \in U$

$d\psi (\mathbf{E}_i (p)) = \tilde{\mathbf{E}}_i (p)$ برای $i \in \{۱ , ۲\}$، زیرا

$$d\psi (\mathbf{E}_i (p)) = d\psi (d\varphi (\mathbf{e}_i)) = d (\psi\circ\varphi) (\mathbf{e}_i) = d\tilde{\varphi} (\mathbf{e}_i) = \tilde{\mathbf{E}}_i (p)$$



شکل ۲۳-۲ ψ یک ایزومتری موضعی از صفحهٔ سودهٔ S روی مخروط $\tilde{S}$ است. تحدید ψ به نیم صفحهٔ فوقانی $x_۲ > ۰$ یک ایزومتری پوشا روی مخروط که یک خط آن حذف شده می‌باشد.

که در آن $(\circ\ ,\ ۱\ ,\ p) = \mathbf{e}_۱$ و $(۱\ ,\ \circ\ ,\ p) = \mathbf{e}_۲$. بالاخره ضرب داخلی بردارهای مماس توسط ψ حفظ می‌شود زیرا ضرب داخلی بردارهای پایه حفظ می‌شوند

$$d\psi\,(\mathbf{E}_i\,(p))\,.\,d\psi\,(\mathbf{E}_j\,(p)) = \tilde{\mathbf{E}}_i\,(p).\,\tilde{\mathbf{E}}_j\,(p) \begin{cases} ۱ & \text{اگر } i = j = ۱ \\ \circ & \text{اگر } (i,j) = (۱و۲) \text{ یا } (i,j) = (۲و۱) \\ r^۲ & \text{اگر } i = j = ۲ \end{cases}$$

$$= \mathbf{E}_i\,(p)\,.\,\mathbf{E}_j\,(p)$$

برای تمام $p = (r\ ,\ \theta) \in U$

تذکر ۱. مثال ۲ یک نمونه از یک ردهٔ خاص از ایزومتری‌ها موسوم به ***خمش‌ها*** است. در واقع، یک استوانه که یک خط آن حذف شده از خم کردن نوار

$\{(x_۱\ ,\ x_۲\ ,\ x_۳) \in \mathbf{R}^۳\ ,\ -\pi < x_۱ < \pi\ ,\ x_۳ = \circ\}$ بدون کش آوردن، پاره کردن، یا چسبانیدن به شکل یک استوانه درمی‌آید. این فرآیند به وضوح اندازه‌گیری درازا را در طول خم‌های رویه تغییر نمی‌دهد یعنی دو رویه که یکی حاصل خم کردن دیگری است، ایزومتری هستند. تعریف دقیق خمش به صورت زیر است: یک n- رویه $\tilde{S}$ در $\mathbf{R}^{n+k}$ توسط **خمش** از یک n- رویه در S $\mathbf{R}^{n+k}$ ***حاصل*** می‌شود اگر یک نگاشت هموار $\psi : [a\ ,\ b] \times S \longrightarrow \mathbf{R}^{n+k}$ وجود داشته باشد به قسمی که:

(یک) برای هر $t \in [a\ ,\ b]$، نگاشت $\psi_t : S \to \mathbf{R}^{n+k}$ که توسط $\psi_t\,(p) = \psi\,(t\ ,\ p)$ تعریف می‌شود یک ایزومتری می‌باشد.

(دو) $\psi_a\,(p) = p$ برای تمام $p \in S$، یعنی ψ_a نگاشت همانی روی S باشد و

(سه) ψ_b یک ایزومتری از S روی $\tilde{S}$ باشد.

۲- چنبرهٔ در $\mathbf{R}^۴$ که دو دایره آن حذف شده و مخروط در $\mathbf{R}^۳$ که یک خط آن حذف شده (مثالهای ۳و۴) نیز توسط خمش قسمت‌هایی از ۲- صفحه‌ها ساخته می‌شوند.

تذکر ۲. مثال ۴ یک شگرد مفید را برای بررسی این که یک نگاشت $\psi : S \longrightarrow \tilde{S}$ بین n- رویه‌ها یک ایزومتری موضعی است شرح می‌دهد. برای $p \in S$، فرض کنید $\varphi : U \longrightarrow S$ یک پارامترسازی موضعی یک مجموعه باز S در حول p باشد. اگر ψ یک ایزومتری موضعی باشد آنگاه $\tilde{\varphi} = \psi \circ \varphi$ یک n- رویه پارامتری با شرط $\tilde{S} \supset$ (تصویر φ) خواهد بود، و میدان‌های برداری مختصی $\mathbf{E}_i$ در طول φ و $\tilde{\mathbf{E}}_i$ در طول $\tilde{\varphi}$ به قسمی خواهند بود که $\mathbf{E}_i\,.\,\mathbf{E}_j = \tilde{\mathbf{E}}_i\,.\,\tilde{\mathbf{E}}_j$. به عکس، اگر برای هر

$p \in S$ یک چنین $\varphi : U \longrightarrow S$ با شرط $p \in$ (تصویر φ) موجود باشد، آنگاه ψ یک ایزومتری موضعی است.

جنبه‌هائی از هندسهٔ یک n- رویه S که قسمت‌هایی از هندسهٔ ذاتی S هستند (یعنی که می‌توان آنها را از اندازه‌گیری‌های روی رویه‌های معین کرد. آن‌هایی هستند که تحت ایزومتری‌ها حفظ می‌شوند و یا **پایا** هستند. قبلاً دیده‌ایم که طول خم‌های تحت ایزومتری‌ها پایا است. از آن نتیجه می‌شود که ژئودزی‌ها تحت ایزومتری‌ها پایا هستند، زیرا یک خم پارامتری α یک ژئودزی است اگر و فقط اگر تندی ثابت داشته باشد و به قسمی باشد که انتگرال طول نسبت به تغییرات با نقطهٔ انتهایی ثابت در α ایستا باشد. حجم نیز تحت ایزومتری پایا است. زیرا انتگرال حجم $V(\varphi) = \int_U \det (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j)^{1/2}$ یک n- رویه پارامتری φ فقط به حاصلضرب داخلی میدان‌های بردار مختصی بستگی دارد. از طرف دیگر تصویر کروی، خمیدگی‌های اصلی، خمیدگی متوسط، مکان هندسی کانونی و خاصیت می‌نیمال بودن یک رویهٔ در $\mathbf{R}^{n+1}$ تحت ایزومتری‌ها پایا نیستند زیرا، برای مثال هیچکدام از این جنبه‌ها تحت ایزومتری $\psi(x_1 , x_2 , 0) = (\cos x_1 , \sin x_1 , x_2)$ که نوار $x_3 = 0$ و $-\pi < x_1 < \pi$- را روی استوانهٔ $x_1^2 + x_2^2 = 1$ که یک خط آن حذف شده می‌نگارد، حفظ نمی‌شود (ر.ک. شکل ۲۳-۱). ما ملاحظه خواهیم کرد که بر خلاف انتظار، خمیدگی گاوس - کرونوکر K یک n- رویه در $\mathbf{R}^{n+1}$ وقتی که n زوج است یک پایای ایزومتری می‌باشد. بنابراین، با این که خمیدگی‌های اصلی تحت ایزومتری‌ها پایا نیستند اما حاصلضرب آنها در صورتی که n زوج باشد پایا است. این قضیه آنچنان گاوس را خوشنود کرد (گاوس این قضیه را برای $n = 2$ کشف کرد) که آنرا «قسیه اگرگیوم»* (یا عالیترین قضیه) نامید. همچنین ملاحظه خواهیم کرد که انتقال توازی تحت ایزومتری‌ها پایا است. کلید تمام این حقایق بررسی این مطلب است که مشتق‌گیری هموردذاتی است.

در آغاز مفهوم **مشتق‌گیری هموردد** را بخاطر می‌آوریم و آن را به n- رویه‌ها در $\mathbf{R}^{n+k}$ گسترش می‌دهیم. n- رویهٔ S در $\mathbf{R}^{n+k}$ و یک میدان برداری هموار مماس $\mathbf{X}$ بر S در طول خم پارامتری $\alpha : I \longrightarrow S$ مفروض است دراین‌صورت مشتق هموردد $\mathbf{X}$ درطول α میدان برداری $\mathbf{X}'$ مماس‌به S در طول α است که توسط تصویر قائم $\dot{\mathbf{X}}(t)$ روی فضای مماس $S_{\alpha(t)}$ به دست می‌آید. برای یک میدان

---

* Egergium

برداری مماس هموار $\mathbf{X}$ روی n- رویه $S \subseteq \mathbf{R}^{n+k}$ و $\mathbf{v} \in S_p$ ، $p \in S$ ، مشتق همورد $\mathbf{X}$ نسبت به $\mathbf{v}$ یعنی $D_v\mathbf{X}$ مؤلفهٔ مماسی مشتق $\nabla_v\mathbf{X}$ می‌باشد. به همین ترتیب برای یک میدان برداری مماس $\mathbf{X}$ در طول یک n- رویهٔ پارامتری $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}$ مشتق همورد $\mathbf{X}$ نسبت به $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n{}_p$ ، $p \in U$ یعنی $D_v\mathbf{X}$ مؤلفهٔ مماسی $\nabla_v\mathbf{X}$ است، در نتیجه $D_v\mathbf{X}$ تصویر قایم $\nabla_v\mathbf{X}$ روی فضای مماس (تصویر $d\varphi_p$) می‌باشد. این اعمال مشتق‌گیری‌های همورد بطریق زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند.

اگر $\mathbf{X}$ یک میدان برداری هموار روی n- رویهٔ $S \subseteq \mathbf{R}^{n+k}$ و α یک خم پارامتری در S باشد، یا اگر $\mathbf{X}$ یک میدان برداری مماس هموار در طول n- رویه پارامتری $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}^{n+k}$ و α یک خم پارامتری در آن باشد، آنگاه

$$D_{\dot\alpha(t)}\,\mathbf{X} = (\mathbf{X} \circ \alpha)'\,(t)$$

برای تمام t ها در دامنهٔ α

اگر $\mathbf{X}$ یک میدان برداری مماس هموار روی n- رویه $S \subset \mathbf{R}^{n+k}$ باشد و $\varphi : U \longrightarrow S$ یک n- رویه پارامتری در $\mathbf{R}^{n+k}$ باشد که تصویرش در S قرار دارد، آنگاه

$$D_{\dot\alpha(t)}\,\mathbf{X} = (\mathbf{X} \circ \alpha)'\,(t)$$

برای تمام $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n_p$ و $p \in U$.

دو میدان برداری مماس هموار $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ روی یک n- رویه $S \subset \mathbf{R}^{n+k}$ مفروض است، مشتق همورد $\mathbf{Y}$ نسبت به $\mathbf{X}$ ، میدان برداری مماس $D^{\mathbf{Y}}_{\mathbf{X}}$ روی S است که برای هر $p \in S$ توسط $(D^{\mathbf{Y}}_{\mathbf{X}})(p) = D^{\mathbf{Y}}_{\mathbf{X}(p)}$ تعریف شود. به طریق مشابه میدانهای برداری هموار مماس $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ را در طول یک n- رویه پارامتری $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}^{n+k}$ مفروض است، آنگاه مشتق همورد $D^{\mathbf{Y}}_{\mathbf{X}}$ میدان برداری مماس در طول φ است که بوسیلهٔ $D^{\mathbf{Y}}_{\mathbf{X}}(p) = D_{d\varphi_p^{-1}(\mathbf{X}(p))}$ تعریف می‌شود.

مشتق همورد یک میدان برداری مماس هموار نسبت به یک میدان برداری مماس هموار دیگر یک میدان برداری مماس هموار است. بعلاوه مشتق همورد دارای خواص آشنای زیر است:

(یک) $$D_{(\mathbf{X}+\mathbf{Y})}\,\mathbf{Z} = D_{\mathbf{X}}\,\mathbf{Z} + D_{\mathbf{Y}}\,\mathbf{Z}$$

(دو) $$D_{f\mathbf{X}}\,\mathbf{Y} = f\,D_{\mathbf{X}}\,\mathbf{Y}$$

(سه) $$D_{\mathbf{X}}\,(\mathbf{Y} + \mathbf{Z}) = D_{\mathbf{X}}\,\mathbf{Y} + D_{\mathbf{X}}\,\mathbf{Z}$$

(چهار) $$D_{\mathbf{X}}\,(f\,\mathbf{Y}) = (\nabla_{\mathbf{X}} f\,)\,\mathbf{Y} + f\,D_{\mathbf{X}}\,\mathbf{Y}$$

(پنج) $$D_{\mathbf{X}}\,(\mathbf{Y}\,.\,\mathbf{Z}) = (D_{\mathbf{X}}\,\mathbf{Y})\,.\,\mathbf{Z} + \mathbf{Y}(D_{\mathbf{X}}\,\mathbf{Z})$$

برای تمام میدان‌های برداری مماس هموار $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ و $\mathbf{Z}$ روی S (یا در طول φ) و تمام توابع هموار f روی S (یا در طول φ) . در (پنج)، مشتق $\nabla_{\mathbf{X}}h$ از تابع هموار $h = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Z}$ که روی S به صورت $(\nabla_{\mathbf{X}}h)(p) = \nabla_{\mathbf{X}(p)}h$ تعریف شده است ارائه می‌شود (یا در طول φ توسط $(\nabla_{\mathbf{X}}h)(p) = \nabla_{d\varphi_p^{-1}(\mathbf{X}(p))}h$ ارائه می‌شود). اثبات این خواص مشتق‌گیری هموورد به عنوان یک تمرین گذاشته می‌شود.

● قضیهٔ ۱. *فرض کنید* $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}^{n+k}$ *یک* n*- رویه پارامتری و* $\mathbf{E}_i$، $i \in \{1, \dots, n\}$ *میدان‌های برداری مختصی در طول* φ *باشند. آنگاه برای* $p \in U$ *و* $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ *داریم:*

$$(D_{\mathbf{E}_i}\mathbf{E}_j) \cdot \mathbf{E}_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right)$$

که در آن $g_{ij} : U \longrightarrow \mathbf{R}$ **توسط** $g_{ij} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j$ **تعریف می‌شود.**

برهان. در آغاز توجه کنید که $D_{\mathbf{E}_i}\mathbf{E}_j = \mathbf{D}_{\mathbf{E}_j}\mathbf{E}_i$ برای تمام i و j ها، در حقیقت برای هر $p \in U$

$$\mathbf{E}_j(p) = \left(\varphi(p), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(p)\right)$$

و

$$(\nabla_{\mathbf{E}_i}\mathbf{E}_j)(p) = \left(\varphi(p), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right).$$

بر اساس تقارن مشتقات دوّم، داریم $(\nabla_{\mathbf{E}_i}\mathbf{E}_j)(p) = (\nabla_{\mathbf{E}_j}\mathbf{E}_i)(p)$. از تصویر کردن قائم روی (تصویر $d\varphi_p$) ثابت می‌شود که $(D_{\mathbf{E}_i}\mathbf{E}_j = D_{\mathbf{E}_j}\mathbf{E}_i)$.
با استفاده از این تقارن، مشتقات جزیی g_{ik} را محاسبه می‌کنیم

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = \nabla_{\mathbf{E}_j}(\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_k) = (D_{\mathbf{E}_j}\mathbf{E}_i) \cdot \mathbf{E}_k + \mathbf{E}_i \cdot (D_{\mathbf{E}_j}\mathbf{E}_k)$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} = \nabla_{\mathbf{E}_i}(\mathbf{E}_j \cdot \mathbf{E}_k) = (D_{\mathbf{E}_i}\mathbf{E}_j) \cdot \mathbf{E}_k + \mathbf{E}_j \cdot (D_{\mathbf{E}_i}\mathbf{E}_k)$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = \nabla_{\mathbf{E}_k}(\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j) = (D_{\mathbf{E}_k}\mathbf{E}_i) \cdot \mathbf{E}_j + \mathbf{E}_i \cdot (D_{\mathbf{E}_k}\mathbf{E}_j).$$

بنابراین

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = (D_{E_j}E_i) \cdot E_k + (D_{E_i}E_j) \cdot E_k = ۲\ (D_{E_i}E_j)\ E_k. \quad \blacksquare$$

نتیجه . ***مشتق هموورد ذاتی است.***

برهان . کافی است این مطلب را در طول یک n- رویه پارامتری $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}^{n+k}$ تحقیق کنیم. میدان برداری هموار $\mathbf{X}$ را در طول φ مفروض است. می‌توان $\mathbf{X}$ را بصورت ترکیب خطی میدان‌های برداری مختصی $\mathbf{E}_i$ نوشت:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=۱}^{n} f_i \mathbf{E}_i$$

که در آن $f_i : U \longrightarrow \mathbf{R}$ برای $i \in \{۱ , ... , n\}$. بنابراین برای $\mathbf{v} \in \mathbf{R}_p^{\ n}$، $p \in U$ داریم:

$$D_v\mathbf{X} = D_v (\sum_{i=۱}^{n} f_i\mathbf{E}_i) = \sum_{i=۱}^{n} ((\nabla_v f_i)\ \mathbf{E}_i\ (p) + f_i\ (p)\ D_v\mathbf{E}_i) = \sum_{i=۱}^{n} ((\nabla_v\ f_i)\ \mathbf{E}_i\ (p)$$

$$+ f_i\ (p) \sum_{j=۱}^{n} v_j\ D_{\mathbf{E}_j(p)}\ \mathbf{E}_i)$$

که در آن $\mathbf{v} = (p , v_۱ , ... , v_n)$. چون تمام مقادیر در این عبارت اخیر را می‌توان توسط اطلاعات ذاتی درطول φ محاسبه‌کرد ($D_{\mathbf{E}_j(p)}\ \mathbf{E}_i$ رامی‌توان‌ازمجموعهٔ‌ضربهای‌داخلی $\{(D_{\mathbf{E}_j(p)}\mathbf{E}_i) \cdot \mathbf{E}_k\}$ که قابل محاسبه از فرمول قضیهٔ ۱ هستند، معین کرد)، لذا $D_v\mathbf{X}$ ذاتی است. ■

نتیجهٔ ۲ . ***انتقال توازی ذاتی است.***

برهان . از نتیجهٔ ۱ بلافاصله حاصل می‌شود چراکه $\mathbf{X}$ در طول φ موازی است اگر و فقط اگر $\mathbf{X}' = ۰$. ■

● **قضیهٔ ۲.** ***خمیدگی گاوس ـ کرونوکر n- رویهٔ سودار S در $\mathbf{R}^{n+۱}$ وقتی که n زوج است ذاتی می‌باشد.***

برهان. کافی است در مورد یک n- رویه پارامتری $\varphi : U \longrightarrow S$ کار کنیم. برای $\mathbf{E}_i$ میدان‌های برداری مختصی در طول φ و $\mathbf{Z}$ یک میدان برداری مماس هموار دلخواه در طول φ داریم

$$(\nabla_{\mathbf{E}_i} \nabla_{\mathbf{E}_j} \mathbf{Z})(p) = (\varphi(p), \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial x_i \partial x_j}(p)) = (\nabla_{\mathbf{E}_j} \nabla_{\mathbf{E}_i} \mathbf{Z})(p),$$

بنابراین
$$\nabla_{\mathbf{E}_i} \nabla_{\mathbf{E}_j} \mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{E}_j} \nabla_{\mathbf{E}_i} \mathbf{Z} = 0$$
برای تمام i و j ها. مؤلفه‌های مماسی طرف چپ این معادله را حساب می‌کنیم. قضیه از این مطلب که مؤلفه مماسی صفر باشد نتیجه می‌شود. چون

$$\nabla_{\mathbf{E}_i} \nabla_{\mathbf{E}_j} \mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{E}_i} (D_{\mathbf{E}_j} \mathbf{Z} + ((\nabla_{\mathbf{E}_j} \mathbf{Z}) \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N})$$

$$= D_{\mathbf{E}_i} D_{\mathbf{E}_j} \mathbf{Z} + ((\nabla_{\mathbf{E}_j} \mathbf{Z}) \cdot \mathbf{N}) \nabla_{\mathbf{E}_i} \mathbf{N} + (\text{مضربی از } \mathbf{N})$$

$$= D_{\mathbf{E}_i} D_{\mathbf{E}_j} \mathbf{Z} - (\mathbf{Z} \cdot \nabla_{\mathbf{E}_j} \mathbf{N}) \nabla_{\mathbf{E}_i} \mathbf{N} + (\text{مضربی از } \mathbf{N})$$

لذا نتیجه می‌گیریم که برای $p \in U$،

$$(\nabla_{\mathbf{E}_i} \nabla_{\mathbf{E}_j} \mathbf{Z})(p) = (D_{\mathbf{E}_i} D_{\mathbf{E}_j} \mathbf{Z})(p) - (L_p(\mathbf{E}_j(p)) \cdot \mathbf{Z}(p)) L_p(\mathbf{E}_i(p)) + (\text{مضربی از} \mathbf{N}(p))$$

با تعویض i و j، تفریق و استفاده از این حقیقت که مؤلفه مماسی حاصل باید صفر باشد معادلهٔ زیر را بدست می‌آوریم:

$$(D_{\mathbf{E}_i} D_{\mathbf{E}_j} \mathbf{Z} - D_{\mathbf{E}_j} D_{\mathbf{E}_i} \mathbf{Z})(p) = (L_p(\mathbf{E}_i(p)) \cdot \mathbf{Z}(p)) L_p(\mathbf{E}_i(p))$$

$$- (L_p(\mathbf{E}_i(p)) \cdot \mathbf{Z}(p)) L_p(\mathbf{E}_i(p)).$$

چون طرف چپ این معادله ذاتی است، بنابراین طرف راست آن هم برای تمام i و j ها ذاتی است. با استفاده از خاصیت خطی بودن L_p، می‌بینیم که برای هرسه بردار مفروض $p \in S$, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in S_p$، بردار $R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in S_p$ را نظر می‌شود که به صورت

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = [L_p(\mathbf{y}) . \mathbf{z}] L_p(\mathbf{x}) - [L_p(\mathbf{x}) . \mathbf{z}] L_p(\mathbf{y})$$

تعریف می‌شود ذاتی است. نگاشت R که به هر سه بردار $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ در S_p برای، $p \in S$، بردار $R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ را در S_p نظیر می‌کند به ***تانسور ریمان*** S موسوم است و متعلق به هندسه ذاتی S است.

اکنون اگر $n = ۲$ و $\{\mathbf{e}_۱, \mathbf{e}_۲\}$ یک پایه متعامدیکهٔ S_p باشد $p \in S$، آنگاه خمیدگی گاوس K در p بوسیلهٔ فرمول زیر داده می‌شود:

$$K(p) = \det L_p = [L_p(\mathbf{e}_۱) . \mathbf{e}_۱][L_p(\mathbf{e}_۲) . \mathbf{e}_۲] - [L_p(\mathbf{e}_۲) . \mathbf{e}_۱][L_p(\mathbf{e}_۱) . \mathbf{e}_۲]$$
$$= R(\mathbf{e}_۲, \mathbf{e}_۱, \mathbf{e}_۱) . \mathbf{e}_۲$$

بنابراین همانگونه که انتظار می‌رفت K ذاتی است. اگر $n > ۲$ ولی زوج باشد، و $\{\mathbf{e}_۱, \dots, \mathbf{e}_n\}$ یک پایه متعامدیکه برای S_p باشد، آنگاه با بسط دترمینان داریم:

$$K(p) = \det L_p = \det [L_p(\mathbf{e}_j) . \mathbf{e}_i]$$

که بر حسب ماتریسهای کوچک ۲×۲ آن داریم؛

$$K(p) = ((-۱)^{n/۲} / ۲^{n/۲} n!) \sum_{\sigma,\tau} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\tau) [R(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(۲)}, e_{\tau(۲)}) . e_{\tau(۲)}] \dots$$
$$\dots [R(e_{\sigma(n-۱)}, e_{\sigma(n)}, e_{\tau(n-۱)} . e_{\tau(n)}]$$

که در آن مجموع روی تمام جایگشت‌های σ و τ از $\{۱, \dots, n\}$ می‌باشد و $\varepsilon(\sigma)$ علامت جایگشت σ را نمایش می‌دهد. بنابراین K برای n های زوج ذاتی می‌باشد. ■

تمرین

۲۳-۱. نشان دهید که هرگاه $\psi : S \longrightarrow \tilde{S}$ یک ایزومتری باشد، آنگاه $\psi^{-۱} : \tilde{S} \longrightarrow S$ نیز چنین است.

۲۳-۲. کدامیک از نگاشت‌های زیر ایزومتری‌های موضعی هستند؟

(الف) نگاشت ψ تعریف شده به صورت $\psi(p) = ۲p$ که n-کرهٔ $x_۱^۲ + ... + x_{n+۱}^۲ = ۱$ روی n-کره $x_۱^۲ + ... + x_{n+۱}^۲ = ۴$ می‌نگارد.

(ب) نگاشت ψ تعریف شده به صورت $\psi(p) = -p$، n کرهٔ $x_۱^۲ + ... + x_{n+۱}^۲ = ۱$ را روی خودش می‌نگارد.

(پ) نگاشت تعریف شده به صورت

$$\psi(\cos\theta , \sin\theta , u) = ((a + b\cos u)\cos\theta , (a + b\cos u)\sin\theta , b\sin u)$$

استوانهٔ $x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۱$ در $\mathbf{R}^۳$ را روی چنبرهٔ

$$((x_۱^۲ + x_۲^۲)^{۱/۲} - a)^۲ + x_۳^۲ = b^۲$$

در $\mathbf{R}^۳$ ($a > b > ۰$) می‌نگارد.

(ت) نگاشت ψ تعریف شده به صورت

$$\psi(\cos\theta , \sin\theta , u) = (\cos\theta , \sin\theta , \cos u , \sin u)$$

استوانهٔ $x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۱$ در $\mathbf{R}^۳$ روی چنبرهٔ

$$\begin{cases} x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۱ \\ x_۳^۲ + x_۴^۲ = ۱ \end{cases}$$

در $\mathbf{R}^۴$ می‌نگارد.

۲۳-۳. نشان دهید که استوانه‌های $x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۱$ و $x_۱^۲ + x^۲ = ۴$ در $\mathbf{R}^۳$ ایزومتریک نیستند ولی نگاشت ψ تعریف شده به صورت $\psi(۲\cos\theta , ۲\sin\theta , ۱) = (\cos ۲\theta , \sin ۲\theta , ۱)$ یک ایزومتری موضعی از استوانهٔ اولی روی استوانهٔ دوّمی است.

۲۳-۴. نشان دهید که اگر $V = \{(x_۱ , x_۲) \in \mathbf{R}^۲ : x_۲ > ۰\}$، آنگاه $\psi|_V$ تحدید نگاشت ψ مثال ۴ به V یک ایزومتری از نیم‌صفحه فوقانی روی مخروط $۳x_۱^۲ + ۳x_۲^۲ - x_۳^۲ = ۰$، $x_۳ > ۰$ در $\mathbf{R}^۳$ است که یک خط آن برداشته شده می‌باشد.

۲۳-۵. تصاویر ۲-رویه‌های پارامتری ψ و $\tilde{\psi}$ در $\mathbf{R}^۳$ که به صورت

$$\psi(\theta , \phi) = (\sinh\theta\cos\phi , \sinh\theta\sin\phi , \phi)$$ (مارپیچوار)

و

$$\tilde{\psi}(\phi , \theta) = (\cosh\theta\cos\phi , \cosh\theta\sin\phi , \theta)$$ (زنجیروار)

تعریف شده‌اند رسم کنید. نشان دهید که نگاشتی که نقطهٔ $(\theta, \phi)\psi$ را به $(\theta, \phi)\tilde{\psi}$ از رویه اولی به روی رویه دوّمی می‌برد یک ایزومتری موضعی است.

۶-۲۳. (الف) نشان دهید که برای هر خم مسطح همبند C، یک ایزومتری موضعی $\psi : I \longrightarrow C$ برای یک بازه باز $I \subseteq \mathbf{R}$ وجود دارد.
(ب) نشان دهید که دو خم مسطح همبند سودار فشرده ایزومتر یک است اگر و فقط اگر دارای طول یکسانی باشند.

۷-۲۳. فرض کنید $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} f_i\ \mathbf{E}_i$ یک میدان برداری مماس در طول یک n- رویه پارامتری $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ باشد و $\alpha : I \longrightarrow U$. نشان دهید که

$$(\mathbf{X} \circ \alpha)' = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}(f_k \circ \alpha) + \sum_{i,j=1}^{n} (\Gamma_{ij}^{k} \circ \alpha)(f_i \circ \alpha)\frac{dx_{xj}}{dt}\right] \mathbf{E}_k \circ \alpha$$

که در آن $\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ و $\Gamma_{ij}^{k} : U \longrightarrow \mathbf{R}$ چنان هستند که $D_{\mathbf{E}_j} \mathbf{E}_i = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \mathbf{E}_k$ (Γ_{ij}^{k} موسوم به ***نمادهای کریستوفل*** در طول α می‌باشند.)

۸-۲۳. نشان دهید که هر گاه $h : S \longrightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار روی n- رویه $S \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ باشد، آنگاه میدان برداری گرادیان h و هسیان آن یعنی $\mathscr{H}_p$ در یک نقطهٔ بحرانی p از h هر دو جزء هندسه ذاتی S هستند.

۹-۲۳. نشان دهید که خمیدگی گاوس کرونوکر یک ۱- رویه سودار در $\mathbf{R}^2$ ذاتی نیست.

۱۰-۲۳. فرض کنید S یک n- رویه سودار در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد. برای میدان‌های برداری مماس هموار $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ روی S، فرض کنید $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ نشانگر کروشه‌لی تعریف شده به صورت

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbf{Y}} - \nabla_{\mathbf{Y}}^{\mathbf{X}}$$

باشد (ر.ک. تمرین ۹-۱۲) ، نشان دهید که $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ نیز توسط فرمول زیر نیز داده شده است:

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = D_{\mathbf{X}}^{\mathbf{Y}} - D_{\mathbf{Y}}^{\mathbf{X}}$$

و بنابراین کروشه‌لی جز هندسه ذاتی رویه S است.

۲۳-۱۱. نشان دهید که R تانسوریمان یک n- رویه سودار $S \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ دارای خواص زیر می‌باشند:

(الف) $R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{w} = R(\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}$

(ب) $R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{w} = -R(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{w} = -R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}) \cdot \mathbf{z}$

(پ) $R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + R(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}) + R(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$

برای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in S_p$ و $p \in S$

۲۳-۱۲. فرض کنید S یک n- رویه سودار در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد و $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in S_p$، $p \in S$. نشان دهید که مقدار R تانسوریمان S در نقطه p روی $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ توسط دستور ذاتی

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = D_{\mathbf{X}} D_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z} - D_{\mathbf{Y}} D_{\mathbf{X}} \mathbf{Z} - D_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z}$$

داده شده است، که در آن $\mathbf{X}$ ، $\mathbf{Y}$ و $\mathbf{Z}$ میدان‌های برداری مماس هموار روی S می‌باشند به قسمی که $\mathbf{Z}(p) = \mathbf{z}$ و $\mathbf{Y}(p) = \mathbf{y}$ و $\mathbf{X}(p) = \mathbf{x}$ و $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ کروشه‌لی $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ می‌باشند(تمرین(۲۳-۱۰).
[راهنمایی : یک پارامترسازی موضعی φ از S با شرط $p \in U =$ (تصویر φ) انتخاب کنید، آنگاه تحدیدهای $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ و $\mathbf{Z}$ به U را به صورت ترکیب‌های خطی (با ضریب هموار) میدان‌های برداری مختصی $\mathbf{E}_i$ از φ بیان کنید و سپس محاسبه کنید] .

۲۳-۱۳. فرض کنید S یک n- رویهٔ سودار در $\mathbf{R}^{n+1}$ $(n > 1)$ باشد، $p \in S$ و P یک زیرفضای دو بعدی S_p باشد.

(الف) نشان دهید که عدد حقیقی $\sigma(p)$ که به صورت

$$\sigma(p) = R(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_1$$

تعریف می‌شود که در آن $\{\mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2\}$ یک پایه متعامد یکه P است مستقل از انتخاب پایهٔ متعامد یکه می‌باشد. [راهنمایی: تمرین ۲۳-۱۱ را بکار برید و نشان دهید که اگر $\{\bar{\mathbf{e}}_1 , \bar{\mathbf{e}}_2\}$ یک پایه دیگر P باشد، آنگاه

$$R(\bar{\mathbf{e}}_1 , \bar{\mathbf{e}}_2 , \bar{\mathbf{e}}_2) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 = (\det \alpha_{ij})^2 R(\mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_1$$

که در آن (α_{ij}) ماتریس تغییر پایه است.]

(ب) نشان دهید که هرگاه $n = 2$ ، آنگاه $\sigma(S_p)$ برابر با خمیدگی گاوس S در نقطهٔ p است. عدد $\sigma(P)$ به **خمیدگی ریمانی** یا **خمیدگی برشی** S روی P موسوم است.

۲۴ـ متریک های ریمانی

جنبه‌های هندسهٔ ذاتی یک n- رویه S تنها وابسته به ضرب داخلی بر بردارهای مماس بر S و مشتقات توابع در طول خمهای پارامتری S که به صورت ضرب‌های داخلی میدان‌های مماس بر S در طول این خمها تعریف شده‌اند می‌باشند. به عبارت دیگر، اگر ضرب داخلی روی هر فضای مماس S_p، $p \in S$ داده شده باشد، هندسهٔ ذاتی S را می‌توان بدون ارجاع به نحوهٔ قرار گرفتن S در $\mathbf{R}^{n+1}$ مورد مطالعه قرار داد. برای مثال می‌توان طول خمهای در S، حجم S، ژئودزیها در S، انتقال توازی در طول خمها در S و خمیدگی گاوس ـ کرونوکر S (اگر n زوج باشد) را بدون اینکه از نحوهٔ پیچش S در $\mathbf{R}^{n+1}$ آگاهی چندانی داشته باشیم محاسبه کرد. در واقع، هر گاه ضرب داخلی داده شده روی هر فضای مماس S_p متفاوت از ضرب داخلی القایی از $\mathbf{R}_p^{n+1}$ باشد، باز هم می‌توانیم این محاسبات ذاتی را انجام دهیم ولی البته نتایج محاسبات ما وابستگی به ضرب‌های داخلی مورد استفاده دارند و هندسه‌ای که ما در حالت کلی بدست می‌آوریم از هندسه‌ای که ما با آن آشنا هستیم کاملاً متفاوت می‌باشد. هندسهٔ حاصل از چنین ضرب‌های داخلی به ***هندسهٔ ریمانی*** موسوم است. گردآیهٔ ضرب‌های داخلی روی فضاهای مماس S_p که از آنها هندسه حاصل شده است یک ***متریک ریمانی*** نامیده می‌شود.

یک ***متریک ریمانی*** روی یک n- رویهٔ S تابعی مانند g است که به هر جفت $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ از بردارهای در S_p، $p \in S$ عدد حقیقی $g(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ را نظیر می‌کند به قسمی که برای هر $\mathbf{v}$، $\mathbf{w}$ و $\mathbf{x} \in S_p$، $p \in S$ و $\lambda \in \mathbf{R}$ داریم:

(یک) $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g(\mathbf{w}, \mathbf{v})$

(دو) $g(\mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{x}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + g(\mathbf{v}, \mathbf{x})$ و

$g(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{x}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{x}) + g(\mathbf{w}, \mathbf{x})$

(سه) $g(\lambda \mathbf{v}, \mathbf{w}) = g(\mathbf{v}, \lambda \mathbf{w}) = \lambda g(\mathbf{v}, \mathbf{w})$

(چهار) $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$ و $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ اگر و فقط اگر $\mathbf{v} = 0$

و همچنین به قسمی است که برای هر جفت $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$ از میدانهای برداری مماس هموار تعریف شده روی یک مجموعهٔ باز U از S، تابع $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : U \longrightarrow \mathbf{R}$ تعریف شده به صورت $[g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})](p) = g(\mathbf{X}(p), \mathbf{Y}(p))$ هموار است.

خواص (یک) تا (چهار) خواص آشنای ضرب داخلی هستند و در واقع برای g داده شده می‌توان یک ضرب داخلی روی هر S_p توسط $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = g(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ تعریف کرد. خاصیت هموار بودن g متضمن این امر است که می‌توان محاسبات دیفرانسیلی لازم را برای بررسی هندسه (S, g) انجام داد.

مثال ۱. فرض کنید S یک n- رویهٔ در $\mathbf{R}^{n+k}$ باشد. برای $p \in S$ و $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in S_p$ مقدار $g(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ را به صورت $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ تعریف می‌کنیم (در واقع از ضرب داخلی معمول در $\mathbf{R}_p^{n+k}$ استفاده می‌کنیم). در اینصورت g یک متریک ریمانی روی S است. این g به **متریک معمول** روی S موسوم است.

مثال ۲. فرض کنید n نمایشگر تصویر استروگرافیک (کنجنگاری) قطب شمال $\{q\}$ از n-کرهٔ یکه $S^n \subseteq R^{n+1}$ باشد. متریک ریمانی روی $S^n / \{q\}$ به صورت

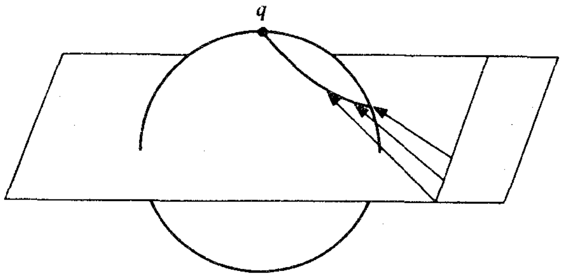
$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = d\psi(\mathbf{v}) \cdot d\psi(\mathbf{w}), \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w} \in S_p^n, \; p \in S^n - \{q\})$$

تعریف می‌شود که در آن ضرب داخلی در طرف راست همان ضرب داخلی معمول در $R^n_{\psi(p)}$ می‌باشد. در نتیجه متریک g دقیقاً به قسمی تعریف شده است که ψ یک ایزومتری ($d\psi$ ضربهای داخلی را حفظ می‌کند) از $S^n / \{q\}$ با متریک g به $\mathbf{R}^n$ با متریک معمول آنست. از این واقعیت که ψ یک ایزومتری است و بنابراین تمام جنبه‌های هندسی رویه را حفظ می‌کند، مطالب زیر را در مورد هندسهٔ $(S^n / \{q\})$ نتیجه می‌گیریم:

(یک) ژئودزی‌های $(S^n / \{q\}, g)$ تصاویر ژئودزی‌های $\mathbf{R}^n$ تحت ایزومتری $\varphi = \psi^{-1}$ می‌باشند (شکل ۲۴-۱ را ملاحظه کنید). بنابراین خانوادهٔ ژئودزی‌های بیشین در $(S^n / \{q\}, g)$ خانوادهٔ دوایر در S^n (که به طور مناسب پارامتری شده‌اند) و گذرنده از نقطهٔ q می‌باشند که از آنها نقطه q برداشته شده است.

(دو) طول هر یک از خمهای پارامتری $\alpha : (a\ ,\ b) \longrightarrow S^n / \{q\}$ با شرط $\lim_{t\to b} \alpha\ (t) = q$ بی‌پایان است چراکه $l\ (\psi \circ \alpha) = \infty$ برای تمام چنین α هایی.

(سه) برای n های زوج، خمیدگی گاوس ـ کرونکر K از $(S^n / \{q\}\ ,\ g)$ متحد با صفر است.



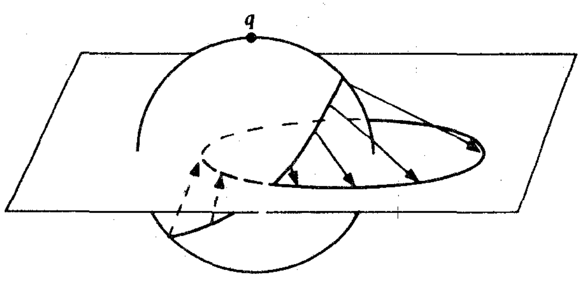
شکل ۲۴-۱ یک ژئودزی نوعی روی ۲-کرهٔ S^2 (قطب شمال حذف شده) با متریک استروگرافیک آن.

مثال ۳. فرض کنید φ وارون تصویر استروگرافیک قطب شمال q از n-کرهٔ یکه S^n به فوق صفحه استوائی باشد. یک متریک g را روی $\mathbf{R}^n$ به صورت

$$g\ (\mathbf{v}\ ,\ \mathbf{w}) = d\,\varphi\ (\mathbf{v})\ .\ d\,\varphi\ (\mathbf{w}) \qquad (\mathbf{v}\ ,\ \mathbf{w} \in \mathbf{R}^n_p \quad ,\ p \in \mathbf{R}^n)$$

تعریف می‌کنیم که در آن ضرب نقطه‌ای در طرف راست ضرب داخلی معمول در $S^n_{\varphi(p)} \subseteq \mathbf{R}^{n+1}_{\varphi(p)}$ می‌باشد در نتیجه φ یک ایزومتری از $(\mathbf{R}^n\ ,\ g)$ به $S^n / \{q\}$ با متریک معمول آنست. از این واقعیت که φ یک ایزومتری است می‌توان نتیجه گرفت که

(یک) ژئودزی‌های $(\mathbf{R}^n\ ,\ g)$ تصاویر ژئودزی‌های S^n تحت ایزومتری $\psi = \varphi^{-1}$ می‌باشند (شکل ۲۴-۲ را ملاحظه کنید). ژئودزی‌های بیشین که از مبدأ عبور می‌کنند خطوط مستقیم در $\mathbf{R}^n$ خواهندبود، که در صورتی که به طور مناسب پارامتری شوند هر یک از ژئودزی دارای طول (2π)



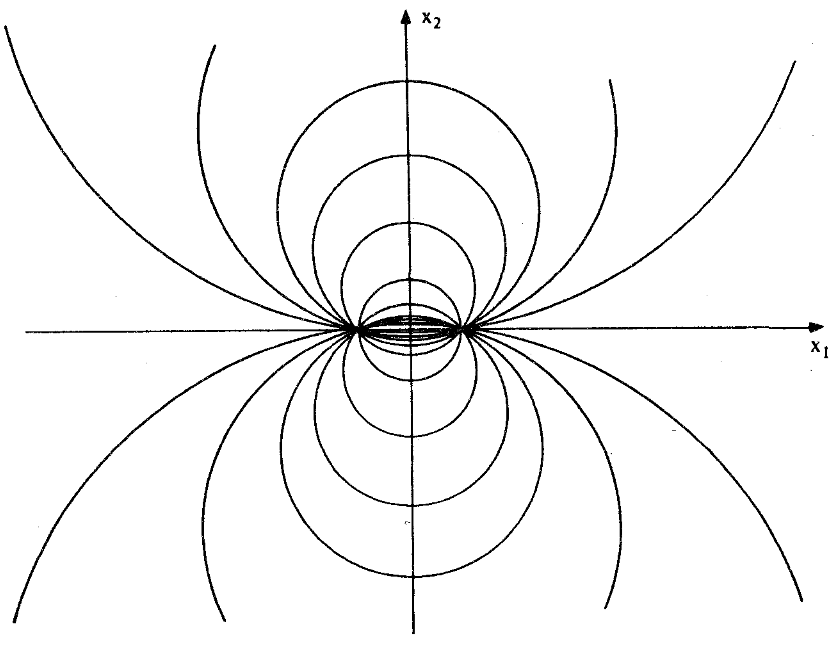
شکل ۲۴-۲ یک ژئودزی نوعی در صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ با متریک استروگرافیک آن

نسبت به متریک g هستند. تمام ژئودزی‌های بیشین دیگر دوایر R^n است که در صورتی که به طور مناسب پارامتری شوند (شکل ۲۴-۳ و تمرین ۲۴-۱ را ملاحظه کنید) هر یک از این ژئودزی‌ها دارای دورهٔ تناوب 2π می‌باشند.

(دو) برای n های زوج، خمیدگی گاوس ـ کرونکر K از $(\mathbf{R}^n , g)$ ثابت و برابر با ۱ می‌باشد.

جالب‌ترین متریک‌های ریمانی آنهایی هستند که توسط ایزومتریها به «متریک‌های معمول» مربوط نمی‌شوند. اینک یکی از مهمترین این متریک‌ها، متریک هذلولوی روی قرص یکه در $\mathbf{R}^2$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این متریک توسط متریک‌های استروگرافیک $\mathbf{R}^n$ پیشنهاد می‌گردد.

فرض کنید S، n-کرهٔ $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2$ به شعاع r در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد. درست مانند n-کرهٔ یکه S^n، می‌توانیم از متریک معمول روی n-کرهٔ S همراه با تصویر استروگرافیک آن به منظور تعریف یک متریک ریمانی روی $\mathbf{R}^n$ استفاده کنیم. اینک به بیان فرمول صریحی از این متریک می‌پردازیم. برای $p \in \mathbf{R}^n$، خط گذرنده از $(p , 0)$ و قطب شمال $q = (0 , 0 , \dots , r)$ در S به صورت $\alpha(t) = (tp, (1 - t)r)$ می‌باشد. این خط S را در نقطه‌ای که $\| \alpha(t) \|^2 = r^2$ قطع می‌کند، یعنی وقتی که $t = 2r^2 / (\| p \|^2 + r^2)$، بنابراین نگاشت $\varphi : \mathbf{R}^2 \longrightarrow S$ وارون تصویر



شکل ۲۴-۳ ژئودزی‌های گذرنده از (۰ , ۱) در صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ با متریک استروگرافیک آن

استروگرافیک روی فوق صفحه $x_{n+1} = ٠$ به صورت زیر است.

$$\varphi(p) = (٢ r^٢ p , r(\| p \|^٢ - r^٢))/(\| p \|^٢ + r^٢) .$$

برای $p \in \mathbf{R}^n$ ، $\mathbf{v} = (p , v) \in \mathbf{R}_p{}^n$ ، داریم

$$d\varphi(\mathbf{v}) = (\varphi(p) , \frac{d}{dt}|_٠ \varphi(p + tv))$$
$$= (٢ r^٢ / (\| p \| + r^٢)^٢)(\varphi(p) , (\| p \|^٢ + r^٢) v - ٢ (p . v) p , ٢r (p . v))$$

بنابراین برای $\mathbf{v} , \mathbf{w} \in \mathbf{R}_p^n$ داریم

$$d\varphi(\mathbf{v}) . d\varphi(\mathbf{w}) = \frac{۴}{(١ + (\| p \|^٢ / r^٢))^٢} \mathbf{v} . \mathbf{w}$$

در نتیجه متریک ریمانی g روی $\mathbf{R}^n$ که از متریک معمول روی کرهٔ S به شعاع r تحت تصویر استروگرافیک به فوق صفحه استوائی حاصل می‌شود به صورت

$$g(\mathbf{v} , \mathbf{w}) = \frac{۴}{(١ + (\| p \|^٢ / r^٢))^٢} \mathbf{v} . \mathbf{w} \qquad (\mathbf{v} . \mathbf{w} \in \mathbf{R}_p^n , p \in \mathbf{R}^n)$$

می‌باشد که ضرب داخلی در طرف راست آن ضرب داخلی معمول در $\mathbf{R}_p^n$ می‌باشد. وقتی که $n = ٢$، این فرمول را می‌توان مجدداً به صورت

$$g(\mathbf{v} . \mathbf{w}) = \frac{۴}{(١ + K \| p \|^٢)^٢} \mathbf{v} . \mathbf{w} \qquad (\mathbf{v} , \mathbf{w} \in \mathbf{R}_p{}^٢ , p \in \mathbf{R}^n)$$

نوشت که در آن $K = ١ / r^٢$ خمیدگی گاوس $(\mathbf{R}^٢ , g)$ می‌باشد (چون $١ / r^٢$ خمیدگی S و φ یک ایزومتری است).

بحث بالا نشان می‌دهد که یک متریک ریمانی g روی $\mathbf{R}^٢$ با خمیدگی ثابت $K > ٠$ را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود

$$g(\mathbf{v} , \mathbf{w}) = \frac{۴}{(١ + K \| p \|^٢)^٢} \mathbf{v} . \mathbf{w} \qquad (\mathbf{v} , \mathbf{w} \in \mathbf{R}_p^٢ , p \in \mathbf{R}^٢).$$

اگر در این فرمول $K = ٠$ بگیریم یک مضرب ثابتی از متریک معمول روی $\mathbf{R}^٢$ را به دست می‌آوریم و به سهولت می‌توان تحقیق کرد که $(\mathbf{R}^٢ , g)$ برای این g دارای خمیدگی گاوس متحد با صفر است. می‌توان امیدوار بود که اگر K را ثابتی اکیداً منفی در این فرمول بگیریم، در اینصورت درمی‌یابیم که ،

$(\mathbf{R}^۲\ g)$ دارای خمیدگی گاوس منفی ثابت است. در واقع این در حالتی است که این فرمول یک متریک ریمانی تنها روی قرص $\{(x_۱, x_۲) \in \mathbf{R}^۲ : x_۱^۲ + x_۲^۲ < ۱/\ |K|\}$ و نه روی $\mathbf{R}^۲$ تعریف می‌نماید.

● **قضیهٔ ۱.** ***برای*** $K \in \mathbf{R}$ ***با شرط*** $K < ۰$***، فرض کنید*** $U = \{(x_۱ , x_۲) \in \mathbf{R}^۲ : x_۱^۲, x_۲^۲ < ۱ / |K|\}$ ***و*** g ***متریک ریمانی تعریف شده روی*** U ***به صورت***

$$g (\mathbf{v} , \mathbf{w}) = \frac{۴}{(۱ + K \|p\|^۲)^۲}\ \mathbf{v} , \mathbf{w}\ (\mathbf{v} , \mathbf{w} \in \mathbf{R}_p^۲ , p \in U)$$

باشد که در آن ضرب داخلی در طرف راست ضرب داخلی معمول در $\mathbf{R}_p{}^۲$ ***می‌باشد. در اینصورت*** (U , g) ***دارای خمیدگی گاوسی ثابت*** $K < ۰$ ***می‌باشد.***

برهان. فرض کنید $h : U \longrightarrow \mathbf{R}$ به صورت $h (p) = ۱/۲\ (۱ + K \|p\|^۲)$ تعریف شده باشد به قسمی که $g (\mathbf{v} , \mathbf{w}) = (۱ / (h (p))^۲)\ \mathbf{v} , \mathbf{w}$ برای هر $\mathbf{v} , \mathbf{w} \in \mathbf{R}_p^۲$، $p \in U$. با استفاده از فرمول‌های ذاتی فصل ۲۳ یک فرمول برای خمیدگی گاوس (U , g) بر حسب تابع h و مشتقاتش به دست می‌آوریم. توجه کنید که نگاشت همانی از U در خودش یک پارامترسازی سرتاسری U با میدان‌های برداری مختصی به صورت $\mathbf{E}_۱ (p) = (p , ۱ , ۰)$ و $\mathbf{E}_۲ (p) = (p , ۰ , ۱)$ برای $p \in U$ می‌باشد. ضرایب متریک $g_{ij} : U \longrightarrow \mathbf{R}$ از g به صورت

$$g_{۱۱} = g (\mathbf{E}_۱ , \mathbf{E}_۱) = ۱ / h^۲ \qquad g_{۱۲} = g (\mathbf{E}_۱ , \mathbf{E}_۲) = ۰$$
$$g_{۲۱} = g (\mathbf{E}_۲ , \mathbf{E}_۱) = ۰ \qquad g_{۲۲} = g (\mathbf{E}_۲ , \mathbf{E}_۲) = ۱ / h^۲$$

داده شده‌اند، بنابراین با استفاده از فرمول قضیه ۱ از فصل ۲۳ داریم

$$g ((D_{\mathbf{E}_۱}\ \mathbf{E}_۱) , \mathbf{E}_۱) = -\frac{۱}{h^۳}\frac{\partial h}{\partial x_۱} \qquad g ((D_{\mathbf{E}_۱}\ \mathbf{E}_۱) , \mathbf{E}_۲) = \frac{۱}{h^۳}\frac{\partial h}{\partial x_۲}$$

$$g ((D_{\mathbf{E}_۱}\ \mathbf{E}_۲) , \mathbf{E}_۱) = \frac{-۱}{h^۳}\frac{\partial h}{\partial x_۲} \qquad g ((D_{\mathbf{E}_۱}\ \mathbf{E}_۲) , \mathbf{E}_۲) = -\frac{۱}{h^۳}\frac{\partial h}{\partial x_۱}$$

$$g((D_{\mathbf{E}_2}\mathbf{E}_1), \mathbf{E}_1) = \frac{-1}{h^3}\frac{\partial h}{\partial x_2} \qquad g((D_{\mathbf{E}_2}\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) = -\frac{1}{h^3}\frac{\partial h}{\partial x_1}$$

$$g((D_{\mathbf{E}_2}\mathbf{E}_2), \mathbf{E}_1) = \frac{1}{h^3}\frac{\partial h}{\partial x_1} \qquad g((D_{\mathbf{E}_2}\mathbf{E}_2), \mathbf{E}_2) = -\frac{1}{h^3}\frac{\partial h}{\partial x_2}.$$

چون $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\}$ متعامد (ولی نه‌متعامدیکه !) نسبت‌به متریک g می‌باشند ($g_{12} = g(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) = 0$)، هر میدان برداری $\mathbf{X}$ روی U را می‌توان به صورت $\mathbf{X} = f_1\mathbf{E}_1 + f_2\mathbf{E}_2$ نوشت کـه در آن $f_1 = \frac{1}{g_{11}} g(\mathbf{X}, \mathbf{E}_1)$ و $f_2 = \frac{1}{g_{22}} g(\mathbf{X}, \mathbf{E}_2)$. در حالت خاص

$$D_{\mathbf{E}_1}\mathbf{E}_1 = -\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_1}\mathbf{E}_1 + \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_2}\mathbf{E}_2$$

$$D_{\mathbf{E}_1}\mathbf{E}_2 = D_{\mathbf{E}_2}\mathbf{E}_1 = -\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_2}\mathbf{E}_1 - \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_1}\mathbf{E}_2$$

$$D_{\mathbf{E}_2}\mathbf{E}_2 = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_1}\mathbf{E}_1 - \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_2}\mathbf{E}_2.$$

بنابراین خمیدگی گاوس (U, g) طبق فرمول ذاتی خمیدگی گاوس که در فصل ۲۳ به دست آمده است برابر است با

$$g(R(\mathbf{E}_2/\|\mathbf{E}_2\|, \mathbf{E}_1/\|\mathbf{E}_1\|, \mathbf{E}_1/\|\mathbf{E}_1\|), \mathbf{E}_2/\|\mathbf{E}_2\|)$$

$$= (1/\|\mathbf{E}_1\|^2\|\mathbf{E}_2\|^2)\, g(R(\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1), \mathbf{E}_2)$$

$$= (1/g_{11}g_{22})\, g(D_{\mathbf{E}_2}D_{\mathbf{E}_1}\mathbf{E}_1 - D_{\mathbf{E}_1}D_{\mathbf{E}_2}\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)$$

$$= (1/g_{11}g_{22})\, g(D_{\mathbf{E}_2}(-\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_1}\mathbf{E}_1 + \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_2}\mathbf{E}_2)$$

$$- D_{\mathbf{E}_1}(-\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_2}\mathbf{E}_1 - \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_1}\mathbf{E}_2), \mathbf{E}_2)$$

$$= h\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}\right) - \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2\right).$$

بالاخره چون $h(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(1 + K(x_1^2 + x_2^2))$، خمیدگی گاوس (U, g) دقیقاً برابر با K است. ■

وقتی که $K = -1$، قضیهٔ ۱ متریک ریمانی g با خمیدگی گاوس ثابت -1 روی قرص یکهٔ $x_1^2 + x_2^2 < 1$ در $\mathbf{R}^2$ به صورت $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 4\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} / (1 - \|p\|^2)^2$ بیان کرد. این متریک به ***متریک هذلولوی*** موسوم است. برای اینکه جلوه‌ای از هندسه این متریک را به دست آوریم، مناسبتر است، اگر چه الزامی نیست ایده‌هایی از نظریهٔ مقدماتی توابع یک متغیره مختلط را به کار بریم. پیش از اینکه این مطالب را در اینجا انجام دهیم (با اینحال تمرینهای ۲۴-۵ و ۲۴-۶ را ملاحظه کنید) متریک مربوط را روی نیم صفحه بالایی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

برای $p = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ با شرط $y > 0$، $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}_p^2$ متریک $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} / y^2$ را تعریف می‌کنیم که در آن ضرب داخلی در طرف راست ضرب داخلی معمول روی $\mathbf{R}^2$ می‌باشد. در این صورت g یک متریک ریمانی روی نیم صفحه بالایی $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$ می‌باشد. متریک g به ***متریک پوانکاره*** روی U موسوم است. توجه دارید که (U, g) دارای خمیدگی گاوس ثابت -1 است چراکه باقراردادن $h(x_1, x_2) = x_2$ داریم $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{h(p)^2}\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ برای $p \in U$، $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}_p^2$، و بنابراین درست مانند اثبات قضیهٔ ۱، خمیدگی گاوس به صورت زیر ارائه می‌شود

$$K = h\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}\right) - \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2\right) = -1\,.$$

هر یک از نگاشت‌های زیر $\psi : U \longrightarrow U$ یک ایزومتری از نیم‌صفحه بالایی U با متریک پوانکاره‌اش به خودش می‌باشد:

(یک) $\psi(x, y) = (x + \lambda, y)$ که در آن λ یک عدد حقیقی است،

(دو) $\psi(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ که در آن λ هر عدد حقیقی مثبت است،

(سه) $\psi(x, y) = (-x, y)$ و

(چهار) $\psi(x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$.

در واقع فرض کنید $p \in U$، $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}_p^2$. در مورد ψ تعریف شده به صورت (یک) و یا (سه) داریم

$$g(d\psi(\mathbf{v}), d\psi(\mathbf{w})) = d\psi(\mathbf{v}) \cdot d\psi(\mathbf{w}) / y^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} / y^2 = g(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

و برای ψ تعریف شده به صورت (دو) داریم

$$g\,(d\psi\,(\mathbf{v})\,,\,d\psi\,(\mathbf{w}))=d\psi\,(\mathbf{v})\,.\,d\psi\,(\mathbf{w})\,/\,(\lambda\,y)^{۲}$$
$$=\lambda\,\mathbf{v}\,.\,\lambda\,\mathbf{w}\,/\,\lambda^{۲}\,y^{۲}=\mathbf{v}\,.\,\mathbf{w}\,/\,y^{۲}=g\,(\mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}),$$

که این امر ایزومتری بودن آن را نشان می‌دهد. برای ψ تعریف شده به صورت (چهار) که در آن $\mathbf{E}_{۱}\,(x\,,\,y)=(x\,,\,y\,,\,۱\,,\,۰)$ و $\mathbf{E}_{۲}\,(x\,,\,y)=(x\,,\,y\,,\,۰\,,\,۱)$

$$d\psi\,(\mathbf{E}_{۱}\,(x\,,\,y))=(\psi\,(x\,,\,y)\,,\,\frac{y^{۲}-x^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}\,,\,\frac{-۲xy}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}})$$

$$d\psi\,(\mathbf{E}_{۲}\,(x\,,\,y))=(\psi\,(x\,,\,y)\,,\,\frac{-۲xy}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}\,,\,\frac{x^{۲}-y^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}})$$

بنابراین

$$g\,(d\psi\,(\mathbf{E}_{i}\,(x\,,\,y))\,,\,d\psi\,(\mathbf{E}_{i}\,(x\,,\,y)))=\frac{۱}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}\bigg/\left(\frac{y}{x^{۲}+y^{۲}}\right)^{۲}=\frac{۱}{y^{۲}}$$
$$=g\,(\mathbf{E}_{i}\,(x\,,\,y)\,,\,\mathbf{E}_{i}\,(x\,,\,y))$$

برای $i=۱\,,\,۲$

$$g\,(d\psi\,(\mathbf{E}_{۱}\,(x\,,\,y))\,,\,d\psi\,(\mathbf{E}_{۲}\,(x\,,\,y)))=۰=g\,(\mathbf{E}_{۱}\,(x\,,\,y)\,,\,\mathbf{E}_{۲}\,(x\,,\,y))\,;$$

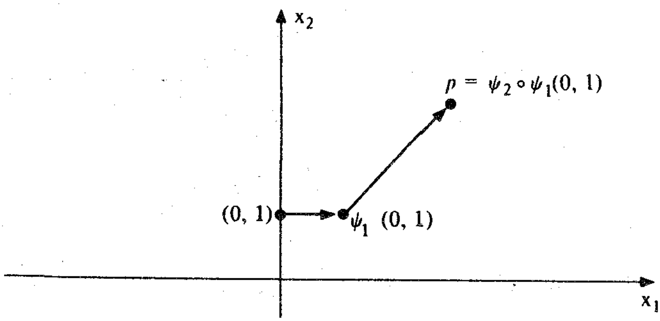
در نتیجه $d\psi$ ضرب‌های داخلی بردارهای پایه‌ای و بنابراین تمام جفت‌های از بردارهای مماس را حفظ می‌کند و لذا ψ یک ایزومتری است.

یکی از نتایج این واقعیت که نگاشت‌های (یک) و (دو) ایزومتری هستند اینست که هندسهٔ S^n از هر نقطهٔ S^n که رؤیت شود مانند آنست که از قطب شمال $(۱\,,\,۰\,,\,۰)$ دیده می‌شود، در مورد هندسهٔ U با متریک پوانکاره‌اش و نقطه $(۱\,,\,۰)\in U$ این چنین است. این بدان علّت است که برای هر نقطه داده شده $p\in U$ یک ایزومتری $\psi_{۲}\circ\psi_{۱}$ از U وجود دارد که در آن $\psi_{۱}$ یک ایزومتری از نوع (یک) است و $\psi_{۲}$ از نوع (دو) می‌باشد که نقطه $(۱\,,\,۰)$ را به p می‌برد (شکل ۲۴-۴ را ملاحظه کنید). در حالت خاص تمام نقاط U باید دارای فاصله (ذاتی) یکسانی از لبهٔ U (محور $x_{۱}$ها) باشد. شاید این واقعیت شگفت‌انگیز از این امر نتیجه می‌شود که در هندسهٔ متریک g این فواصل بی‌پایان هستند. در نتیجه برای مثال اگر ما طول خم $\alpha:[۰\,,\,۱]\longrightarrow U$ تعریف شده به صورت $\alpha\,(t)=(۰\,,\,۱-t)$ را نسبت به متریک پوانکاره محاسبه کنیم داریم

$$\ell(\alpha) = \int_{0}^{1} \|\dot\alpha(t)\|\ dt = \int_{0}^{1} (g(\dot\alpha(t), \dot\alpha(t)))^{1/2}\ dt = \int_{0}^{1} \frac{1}{1-t}\ dt = \infty.$$

از این واقعیت که نگاشت‌های (یک) تا (چهار) بالا ایزومتری هستند می‌توان به منظور یکی سازی ژئودزی‌های در U نسبت به متریک پوانکاره استفاده کرد.

● **قضیه.** ***فرض کنید U یک مجموعهٔ باز در $\mathbf{R}^2$، g متریک ریمانی روی U، و $\psi : U \longrightarrow U$ یک ایزومتری از (U, g) باشد. در صورتی که مجموعهٔ نقاط ثابت ψ یعنی $F = \{p \in U : \psi(p) = p\}$ یک خم مسطح همبند باشد. آنگاه F (تصویر) یک ژئودزی از (U, q) می‌باشد.***



شکل ۲۴-۴ برای هر نقطهٔ p در نیم‌صفحهٔ بالایی U یک ایزومتری از U با متریک پوانکاره بروی خودش می‌باشد که (۱ , ۰) را به p می‌برد.

برهان. فرض کنید $\alpha : I \longrightarrow F$ یک پارامترسازی سرتاسری با تندی یکه ($g(\dot\alpha, \dot\alpha) = 1$) از F همانندفصل ۱۱ باشد. نشان خواهیم داد که α یک ژئودزی است که بدین ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

کافی است نشان دهیم که به ازای هر $t_0 \in I$ تحدید α به بازه‌ای در حول t_0 یک ژئودزی است.

بنابراین فرض کنید $t_0 \in I$، $\dot\alpha(t_0) = \mathbf{v}$ و $\alpha_{\mathbf{v}}$ نشانگر ژئودزی بیشین (U, g) با سرعت اولیه $\mathbf{v}$ باشد. نشان خواهیم داد که به ازای هر $t \in I$. $\alpha(t) = \alpha_{\mathbf{v}}(t - t_0)$ برای هر $t \in I$ به قسمی که $t - t_0$ در دامنهٔ $\alpha_{\mathbf{v}}$ باشد.

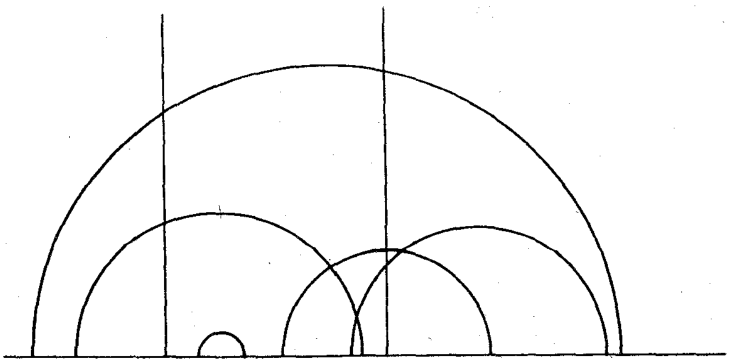
در آغاز توجه داشته باشید که $F \subset (\alpha_{\mathbf{v}}$ تصویر$)$. این بدین خاطر است که $\psi \circ \alpha_{\mathbf{v}}$ یک ژئودزی

است (چراکه ψ ایزومتری است) و سرعت اولیه آن $\mathbf{v}$ می‌باشد (چراکه $\psi|_F$ نگاشت همانی است و بنابراین $d\psi|_{f_p}$ نگاشت همانی است، لذا $\mathbf{v} = d\psi(\mathbf{v}) = d\psi(\dot\alpha(0)) = (\psi \circ \alpha(0))$ بنابراین $\psi \circ \alpha_{\mathbf{v}}$ و $\alpha_{\mathbf{v}}$ ژئودزی‌های با سرعت آغازی یکسان می‌باشند. بنابر یکتایی ژئودزی‌ها $\psi \circ \alpha_{\mathbf{v}} = \alpha_{\mathbf{v}}$ و بنابراین $F \subset$ (تصویر $\alpha_{\mathbf{v}}$).

اکنون که α و $\alpha_{\mathbf{v}}$ خمهایی با تندی یکه در F با شرط $\dot\alpha(t_0) = \dot\alpha_{\mathbf{v}}(0)$ می‌باشند، خم‌های انتگرال میدان برداری مماس یکه یکسانی روی F هستند. بنابر یکتایی خم انتگرال برای تمام t ها در بازهٔ $\{t \in I : t - t_0 \in (\alpha_{\mathbf{v}}$ دامنهٔ$)\}$ در حول t_0 داریم $\alpha(t) = \alpha_{\mathbf{v}}(t - t_0)$. از آن نتیجه می‌گردد که تحدید α به این بازه یک ژئودزیست و چون $t_0 \in I$ دلخواه بود نتیجه می‌گیریم که α یک ژئودزیست. ■

تذکر. در این اثبات ما به طور ضمنی از این واقعیت استفاده کردیم که قضیهٔ وجود و یکتایی ژئودزی‌ها برای رویه‌های با متریک‌های ریمانی دلخواه برقرار است. اگر چه اثبات ما از این قضیه در فصل ۷ تنها برای متریک معمول روی n- رویه‌ها برقرار است، می‌توان آن را برای هر متریک ریمانی دلخواه اصلاح نمود. نکتهٔ اصلی در اینجا این است که معادله ژئودزی ذاتی $\alpha' = 0$ بازیک معادله معمولی دیفرانسیلی از مرتبهٔ دوم است.

نتیجه. ***ژئودزی‌ها در نیم‌صفحهٔ بالایی U نسبت به متریک پوانکاره عبارتند از (یک) خطوط قائم و (دو) نیم دایره‌هایی که مرکز آنها روی محور x_1 هاست و به طور مناسب پارامتری شده‌اند (شکل ۲۴-۵ را ملاحظه کنید).***



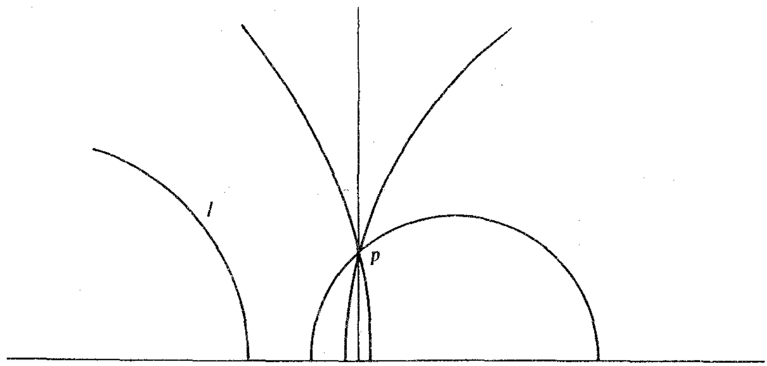
شکل ۲۴-۵ ژئودزی‌های نوعی در نیم‌صفحهٔ بالایی با متریک پوانکاره آن

برهان. با به کار بردن قضیه در مورد ایزومتری $\psi(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$ ملاحظه می‌کنیم که خط $x_1 = 0$، $x_2 > 0$ که به طور مناسب پارامتری شده است یک ژئودزی می‌باشد. به طریق مشابه برای ایزومتری $\psi(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right)$ ملاحظه می‌شود که نیم‌دایرهٔ $x_1^2 + x_2^2 = 1$، $x_2 > 0$ که به طور مناسب پارامتری شده باشد یک ژئودزی است،. چون‌که هر خط قائم در U تصویر خط $x_1 = 0$، $x_2 > 0$ تحت ایزومتری $\psi(x_1, x_2) = (x_1 + \lambda, x_2)$ می‌باشد، در نتیجه هر خط قائم در U یک ژئودزی است. به طریق مشابه، هر نیم دایره به مرکز مبدأ تصویر نیم‌دایرهٔ $x_1^2 + x_2^2 = 1$، $x_2 > 0$ تحت ایزومتری $\psi(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$, $\lambda > 0$ می‌باشد، این نیم دایره‌ها ژئوزدی هستند. بالاخره هر نیم ـ دایره در U که مرکز آن روی محور x_1هاست تصویر یک نیم ـ دایره در U به مرکز مبدأ تحت ایزومتری $\psi(x_1, x_2) = (x_1 + \lambda, x_2)$ می‌باشد، بنابراین آنها ژئودزی‌ها هستند.

توجه کنید که هر ژئودزی در U نسبت به متریک پوانکاره باید متعلق به این خانواده باشد، چرا که برای هر نقطه داده شدهٔ p از U و هر جهت مماسی **v** در p یک ژئودزی در این خانواده گذرنده از نقطه p در جهت **v** وجود دارد. ■

تذکر ۱. فوق صفحه بالایی U با متریک پوانکاره‌اش کامل ژئودزیک است؛ یعنی هر ژئودزی بیشین در U دارای دامنه متشکل از تمام محور حقیقی است، مثال ۲۴-۴ را ملاحظه کنید.

تذکر ۲. نیم صفحه بالایی U با متریک پوانکاره‌اش g مثالی از یک هندسه است که در آن اصل توازی اقلیدسی درست نیست. ***اصل توازی*** بیانگر این مطلب است که برای هر خط مستقیم l و هر نقطه p که روی l نباشد یک خط مستقیم یکتا گذرنده از نقطه p وجود دارد که l را قطع نمی‌کند. اگر خطوط مستقیم (U , g) را تصاویر ژئودزی‌ها بیشین تعریف کنیم، در این صورت تمام اصول اقلیدسی برای هندسه به جز اصل توازی در مورد (U , g) برقرار است. اما برای هر خط l در (U , g) و نقطهٔ p که روی l واقع نیست در واقع تعداد بی‌نهایت خط مستقیم از (U , g) گذرنده از نقطه p وجود دارند که l را قطع نمی‌کنند. (شکل ۲۴-۶ را ملاحظه کنید).



شکل ۲۴-۶ اصل توازی اقلیدس در نیم صفحهٔ بالایی با متریک پوانکاره‌اش برقرار نیست.

تمرین

۲۴-۱. فرض کنید $\psi : S^2 / \{q\} \longrightarrow \mathbf{R}$ نشانگر تصویر استروگرافیک از قطب شمال q از ۲-کره S^2 روی صفحهٔ استوایی باشد.

(الف) نشان دهید که برای هر $(x , y , z) \in S^2 / \{q\}$ داریم

$$\psi (x , y , z) = (x / (1 - z) , y (1 - z)) .$$

(ب) فرض کنید $e_1 = (0 , 0 , 1)$ ، $e_2 = (0 , \cos\varphi , \sin\varphi)$ که در آن $- \pi / 4 < \varphi < \pi / 2$ و فرض کنید $\alpha : \mathbf{R} \longrightarrow S^2$ ژئودزی در S^2 باشد که به صورت $\alpha (t) = (\cos t)e_1 + (\sin t) e_2$ تعریف شده است. نشان دهید که تصویر این خم پارامتری $\psi \circ \alpha : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ دایرهٔ زیر می‌باشد

$$x_1^2 + (x_2 - \mathrm{tg}\, \varphi)^2 = \sec^2 \varphi.$$

(پ) با استفاده از تقارن S^2، نشان دهید که هر دایرهٔ عظیمه در S^2 که از نقطهٔ q نمی‌گذرد و توسط ψ به یک دایره در $\mathbf{R}^2$ که از دوران یکی از دوایر بیان شده در (ب) در حول مبدأ به دست می‌آید نگاشته می‌شود. نتیجه بگیرید که ژئودزی‌های در $\mathbf{R}^2$ نسبت به متریک استروگرافیک مثال ۳ مانند شکل ۲۴-۳ می‌باشند.

۲۴-۲. طول دایرهٔ $\alpha_r(t) = (r \cos t , r \sin t)$ برای $۰ \leq t \leq ۲\pi$ را نسبت به متریک استروگرافیک

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{۴}{(۱ + \|p\|^۲)^۲} \mathbf{v} . \mathbf{w} \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^۳_p ,\ p \in \mathbf{R}^۲)$$

در $\mathbf{R}^۲$ پیدا کنید و نشان دهید که $\lim_{r \to \infty} l(\alpha_r) = ۰$

۲۴-۳. فرض کنید S، ۲-کرهٔ $x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ = r$ به شعاع $r > ۰$ در $\mathbf{R}^۳$ باشد و فرض کنید $\varphi : \mathbf{R}^۲ \longrightarrow S / \{q\}$ وارون تصویر استروگرافیک قطب شمال $q = (۰ , ۰ , r)$ از S روی فضای مماس $x_۳ = -r$ در قطب جنوب $(۰ , ۰ , r)$ بر S باشد (در نتیجه برای $p \in \mathbf{R}^۲$، $\varphi(p)$ نقطه‌ای از S متفاوت از q است که روی خط بین q و $(p , -r)$ در $\mathbf{R}^۳$ واقع است). نشان دهید که متریک ریمانی روی $\mathbf{R}^۲$ به صورت $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = d\varphi(\mathbf{v}) . d\varphi(\mathbf{w})$ برای $p \in \mathbf{R}^۲, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^۲_p$ که در آن ضرب داخلی طرف راست همان ضرب معمولی در $S_{\varphi(p)} \subseteq \mathbf{R}^۳_\varphi(p)$ می‌باشد که صریحاً به صورت فرمول زیر بیان می‌شود:

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{۱}{(۱ + \frac{K}{۴}\|p\|^۲)^۲} \mathbf{v} . \mathbf{w} \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}_p{}^۲ ,\ p \in \mathbf{R})$$

که در آن K خمیدگی گاوس S است.

۲۴-۴. فرض کنید U نیم صفحهٔ بالایی و $\alpha : [۰ , ۱] \longrightarrow U$ و $\beta : [۰ , \pi/۲] \longrightarrow U$ به صورت $\alpha(t) = (۰ , ۱ - t)$ و $\beta(t) = (\sin t , \cos t)$ تعریف شده باشند. نشان دهید که α و β دارای طول بی‌پایان نسبت به متریک پوانکاره روی U است و با استفاده از این حقیقت نشان دهید که نیم‌صفحهٔ بالایی با متریک پوانکاره‌اش به طور ژئودزیکی کامل است.

۲۴-۵. نشان دهید که هر یک از نگاشت‌های زیر یک ایزومتری از قرص یکهٔ $x_۱^۲ + x_۲^۲ < ۱$ با متریک هذلولوی‌اش بروی خودش می‌باشد.

(یک) $\psi(x , y) = (x \cos \phi - y \sin \phi , x \sin \phi + y \cos \phi) , (\phi \in \mathbf{R})$

(دو) $\psi(x , y) = (x , - y)$.

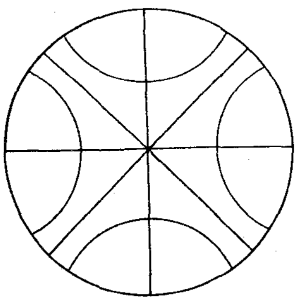
۲۴-۶. (الف) مجموعهٔ $\mathbf{R}^2$ را به عنوان مجموعهٔ اعداد مختلط $\mathbf{C}$ از یکی سازی (a, b) با $a + bi$ در نظر بگیرید، نشان دهید که برای هر $\lambda \in \mathbf{R}$ با شرط $-1 < \lambda < 1$ تابع

$$\psi(z) = \frac{z + \lambda}{1 + \lambda z}$$

یک ایزومتری از قرص یکهٔ U با متریک هذلولوی بروی خودش است.

(ب) نشان دهید که تصویر خط پرتوی $x_1 = 0$ در U تحت ψ برابر با مقطع U با یک دایره که مرکز آن روی محور x_1 هاست و از نقطه $(0, \lambda)$ می‌گذرد می‌باشد و دایرهٔ یکهٔ $x_1^2 + x_2^2 = 1$ را به طور متعامد قطع می‌کند.

(پ) از ترکیب (ب) با نتیجهٔ تمرین ۲۴-۵، نشان دهید که ژئودزی‌ها در قرص یکه U نسبت به متریک هذلولوی عبارتند از تقاطع U با (یک) خطوط مستقیم پرتوی و (دو) دوایری که دایرهٔ $x_1^2 + x_2^2 = 1$ را به طور متعادر قطع می‌کنند (شکل ۲۴-۷ را ملاحظه کنید).



شکل ۲۴-۷ ژئودزی‌های نوعی در قرص یکهٔ با متریک هذلولوی آن

۲۴-۷. مجموعهٔ $\mathbf{R}^2$ را به عنوان مجموعه اعداد مختلط $\mathbf{C}$ از یکی سازی (a, b) با $a + bi$ در نظر بگیرید. نشان دهید که تابع

$$\psi(z) = \frac{z + i}{iz + 1}$$

یک ایزومتری از قرص یکه با متریک هذلولوی آن بر روی نیم‌صفحه بالایی با متریک پوانکاره‌اش است.

۲۴-۸. فرض کنید g یک متریک ریمانی روی یک مجموعهٔ باز U از $\mathbf{R}^n$ باشد با فرض آنکه

$\psi : U \longrightarrow U$ یک ایزومتری از $(U\ ,\ g)$ باشد به قسمی که مجموعهٔ نقاط ثابت آن $F = \{p \in U\ ;\ \psi(p) = p\}$ یک $(n-۱)$ رویهٔ در $\mathbf{R}^n$ باشد. نشان دهید که F در U **کلاً ژئودزیک** است، یعنی نشان دهید که اگر $\alpha : I \longrightarrow U$ هر ژئودزی در $(U\ ,\ g)$ با شرط $\alpha(t_۰) \in F$ و $\alpha'(t_۰) \in F_{\alpha(t)}$ برای یک $t_۰ \in I$ باشد، در این صورت برای تمام $t \in I$ داریم $\alpha(t) \in F$.

۲۴-۹. **متریک پوانکاره** روی نیم صفحهٔ $U = \{(x_۱\ ,\ \ldots\ ,\ x_n) \in \mathbf{R}^n : x_n > ۰\}$ به صورت

$$g(\mathbf{v}\ ,\ \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} / x_n^{۲}$$

برای $\mathbf{v}\ ,\ \mathbf{w} \in \mathbf{R}_p^{\ n}$ و $p = (x_۱\ ,\ \ldots\ ,\ x_n) \in U$ تعریف شده است، که در آن ضرب داخلی طرف راست همان ضرب داخلی معمول در $\mathbf{R}_p^{\ n}$ می‌باشد.

(الف) نشان دهید که هر یک از نگاشت‌های زیر یک ایزومتری از $(U\ ,\ g)$ می‌باشد:

(یک) $\psi(x_۱\ ,\ \ldots\ ,\ x_n) = (\varphi(x_۱\ ,\ \ldots\ ,\ x_{n-۱}), x_n)$ که در آن φ یک حرکت جسم صلب از $\mathbf{R}^{n-۱}$ است،

(دو) $\psi(p) = \lambda p$ که λ یک عدد حقیقی مثبت است،

(سه) $\psi(x_۱\ ,\ \ldots\ ,\ x_n) = (x_۱\ ,\ \ldots\ ,\ -x_j\ ,\ \ldots\ ,\ x_n)$ که در آن $j \in \{۱\ ,\ \ldots\ ,\ n-۱\}$،

(چهار) $\psi(p) = p / \|p\|^{۲}$.

(ب) با استفاده از تمرین ۲۴-۸ نشان دهید که اگر $F_۱\ ,\ \ldots\ ,\ F_k$ مجموعه‌های نقاط ثابت ایزومتری‌های $\psi_۱\ ,\ \ldots\ ,\ \psi_k$ از U از انواع (سه) و (چهار) بالا باشند و اگر $\alpha : I \longrightarrow U$ یک ژئودزی از $(U\ ,\ g)$ باشد به قسمی که $\alpha(t_۰) \in F_j$ و $\dot\alpha(t_۰) \in (F_j)_{\alpha(t_۰)}$ برای هر $j \in \{۱\ ,\ \ldots\ ,\ k\}$، دراین‌صورت $\alpha(t) \in \bigcap_{j=۱}^{k} F_j$ برای هر $t \in I$.

(پ) نتیجه بگیرید که ژئودزی‌های بیشین نیم فضای بالای U با متریک پوانکاره‌شان عبارتند از

(یک) خطوط قائم مستقیم در U (یعنی موازی با محور x_n ها)، و

(دو) نیم دایره‌هایی که به مرکز و عمود بر $(n-۱)$ صفحه $x_n = ۰$ می‌باشد.

[راهنمایی : در آغاز نشان می‌دهیم که پارامترسازی‌هایی با تندی یکه از خم‌های مسطح

$$\begin{cases} x_۱ = \ldots = x_{n-۱} = ۰ \\ x_n > ۰ \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} x_۱ = \ldots = x_{n-۲} = ۰ \\ x_{n-۱}^۲ + x_n^۲ = ۱ \\ x_n > ۰ \end{cases}$$

ژئودزی‌های (U , g) هستند و تصاویر این ژئودزی‌ها تحت ایزومتری‌های از نوع (یک) و (دو) قسمت (الف) را در نظر بگیرید.]

۲۴-۱۰. فرض کنید S یک n- کرهٔ $x_۱^۲ + \ldots + x_{n+۱}^۲ = r^۲$ به شعاع $r > ۰$ در $\mathbf{R}^{n+۱}$ با متریک معمولش باشد.

(الف) نشان دهید که تانسور ریمانی R از S به صورت

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{۱}{r^۲}((\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y})$$

تعریف شده است.

(ب) نشان دهید که خمیدگی برش ریمانی (تمرین ۲۳-۱۳) S ثابت است یعنی برای هر زیر فضای ۲- بعدی P از S_p، $p \in S$ داریم $\sigma(P) = \frac{۱}{r^۲}$.

(پ) نشان دهید که متریک در $\mathbf{R}^n$ که از متریک معمول در S تحت تصویر استروگرافیک روی فوق صفحه استوایی حاصل می‌شود دارای خمیدگی برشی ثابت $K = ۱/r^۲$ می‌باشد و علاوه بر این، این متریک به صورت

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{۴}{(۱ + K\|p\|^۲)^۲}\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \qquad (\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}_p^n,\ p \in \mathbf{R}^n)$$

می‌باشد که ضرب داخلی در طرف راست ضرب داخلی معمولی در $\mathbf{R}_p{}^n$ می‌باشد (**تذکر**، این فرمول با $K < ۰$ یک متریک g با خمیدگی برشی ثابت منفی روی n ـ قرص $x_۱^۲ + \ldots + x_n^۲ < ۱/|K|$ تعریف می‌کند. وقتی که $K = -۱$، این متریک به **متریک هذلولوی** در n- قرص یکهٔ $x_۱^۲ + \ldots + x_n^۲ < ۱$ موسوم است.)

۲۴-۱۱. فرض کنید S هذلولی‌وار $-x^۲ - y^۲ + z^۲ = ۱$، $z > ۰$ در $\mathbf{R}^۳$ باشد. یک متریک ریمانی

روی S به صورت

$$g\left(\left(p, a, b, c\right), \left(p', a', b', c'\right)\right) = aa' + bb' - cc'$$

تعریف می‌کنیم.

(الف) نشان دهید که g یک متریک ریمانی روی S است.

(ب) نشان دهید که S با این متریک دارای $K = -1$ است.

(پ) نشان دهید که نگاشت f که قرص یکه در $\mathbf{R}^2$ (که به صورت صفحهٔ $x_3 = 0$ در نظر گرفته می‌شود) به طور استروگرافیک از نقطه $(0, 0, 1)$ روی S تصویر می‌کند یک ایزومتری از D با متریک هذلولوی آن روی S می‌باشد.

مراجع

مراجع این کتاب محدود به انتخاب چند مرجع است که برای دانشجویانی که مایل به مطالعه مطالب جنبی دیگری هستند مفید می‌باشند. خوانندگانی که نیاز به فهرست جامعتری از مراجع در هندسه دیفرانسیل دارند، می‌توانند به فهرست منابع جلد پنجم از کتاب اسپیواک که در ذیل آمده است مراجعه نمایند:

Advanced Calculus

Fleming, W. 1977. *Functions of Several Variables*. New - York Heidelberg - Berlin: Springer - Verlag.

Differential Equations

Hurewicz, W. 1958. *Lectures on Ordinary Differential Equations*. Cambridge, Mass.: M.I.T. Press.

Linear Algebra

Hoffman, K., Kunze, R. 1961. *Linear Algebra*. Englewood Cliffs, N.J.:Prentice

Differential Geometry

do Carmo, M.1976. *Differential Geometry Of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs,N.J.: Prentice Hall.

Millman, R., Parker, G.1977. *Elements Of Differential Geometry* , Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall.

O ´Neill,B. 1966. *Elementarary Differential Geometry*, New York: Academic Press.

Singer, I.,Thorpe, J. 1976. *Lecture Notes On Elementary Topology and Geometry* New York- Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag.

Spivak, M. 1970 1975. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* Vols. I-V. Boston:Publish.

(در تمام مراجع فوق بجز کتاب اسپیواک، ۲- رویه مورد بحث قرار گرفته‌اند. از بین کتابهای فوق محتوای کتاب دوکارمو به محتوای این کتاب نزدیکتر است، البته شامل بسیاری از مطالب دیگر نیز می‌باشد که در این کتاب نیامده‌اند.
در کتاب انیل، فرمهای دیفرانسیلی را به عنوان ابزار اولیه استفاده شده است و بالاخره کتاب میلمن پارکر به طور اخص به محاسبات با مختصات موضعی مربوط می‌شود. قسمت هنه سه کتاب سینگروتورپه بیشتر به هندسه ذاتی با استفاده از فرمهای دیفرانسیلی روی کلاف کره‌یکه می‌پردازد. کتاب اسپیواک واقعاً یک کتاب در سطح کارشناسی ارشد می‌باشد ولی با اینحال بسیاری از مطالب آن برای خواننده در دسترس می‌باشد. بدین منظور بویژه به جلدهای دوم و سوم مراجعه فرمایید.)

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Acceleration	شتاب
Adjoint	الحاقی
Angle	زاویه
- of rotation	زاویهٔ دوران
Area	مساحت
Asymptotic direction	جهت مجانبی
Bending	خمش
Binormal	قائم دوم
Boundary	مرز
- of a singular disc	مرز یک قرص منفرد
- of a singular triangle	مرز یک مثلث منفرد
Bounded	کراندار
Cartan structural equations	معادلات ساختاری کارتان
Cartesian cooradinate function	تابع مختصی دکارتی
Catenary	خم زنجیری
Catenoid	خم زنجیردار
Center of curvature	مرکز خمیدگی
Chart	نقشه
Christoffel symbols	نمادهای کریستوفل
Circle of curvature	دایره خمیدگی
Closed set	مجموعهٔ بسته
-1-form	۱ - فرم بسته
Compact	فشرده

Compactly supported variation	تغییر با محمل فشرده
Complete vector field	میدان برداری کامل
Cone	مخروط
Conform	همدیس
Congruent	همنهشت
Conjugate	مزدوج
- locus	مکان هندسی مزدوج
- point	نقطهٔ مزدوج
Connected	همبند
Connection form	فرم ارتباط
Consistency	سازگاری
Convex	محدب
Coordinate system	دستگاه مختص
Coordinate vector field	میدان برداری مختص
Coordinates	مختصات
Covariant	همورد
- acceleration	شتاب همورد
- derivative	مشتق همورد
Critical point	نقطهٔ بحرانی
Cross product	حاصلضرب خارجی
Curl	کرل
Curvature	خمیدگی
- of a curve in R^3	خمیدگی خم در R^3
Mean curvature	خمیدگی متوسط
Curvature of a plane curve	خمیدگی خم مسطح
Riemannian sectional	برشهای ریمانی
- coordinate	خم مختصی
Cylinder	استوانه

Definite quadratic form	صورت درجه دوم معین
Degree of the Gauss map	درجهٔ نگاشت گاوس
Derivative	مشتق
Derivative of a smooth map	مشتق تابع هموار
Differential	دیفرانسیل
Diffeomorphism	دیفئومرفیسم
Dot product	ضرب داخلی
Energy	انرژی
Euclidean Parallel	توازی اقلیدسی
Euler characteristic	مشخصهٔ اویلر
Evolute	پوش
Exact 1-form	۱ - فرم دقیق
Exponential map	نگاشت نمایی
Exterior angle	زاویهٔ برونی
Exterior derivative	مشتق برونی
Exterior product	ضرب برونی
Fermi derivative	مشتق فِرمی
Fermi transport	ترابری فِرمی
First variation formula	اولین فرمول تغییر
Fixed endpoint variantion	تغییر با نقطه ثابت انتهایی
Focal locus	مکان هندسی کانونی
Focal point	نقطهٔ کانونی
Frenet formulas	فرمول‌های فرنه
Function along a parametrized curve	توابع در طول خم پارامتری
Fundamental domain	دامنهٔ بنیادی
Fundamental form	صورت بنیادی
Fundamental theorem of algebra	قضیهٔ بنیادی جبر
Gaussian curvature	خمیدگی گاوس

Gauss - Kronecker curvature	خمیدگی گاوس ـ کرونوکر
Gauss lemma	لم گاوس
Gauss map	نگاشت گاوس
Geodesic	ژئودزی
- curvature	خمیدگی ژئودزی
- flow	جریان ژئودزی
- spray	افشانهٔ ژئودزی
- triangle	مثلث ژئودزی
- vector field	میدان برداری ژئودزی
Global	سرتاسری
- Gausss - Bonnet theorem	قضیهٔ گاوس ـ بنه سرتاسری
- parametrization of a plane curve	پارامترسازی سرتاسری خم سطح
- Stokes' theorem	قضیهٔ استوکس سرتاسری
Globally convex	سرتاسری محدب
Gradient line	خط گرادیان
- vector field	میدان برداری گرادیان
Graph	نمودار
Green's theorem	قضیهٔ گرین
Height	ارتفاع
Height function	تابع ارتفاع
Hessian	هسیان
Holonomy	هولونومی
Holonomy angle	زاویه هولونومی
Holonomy group	گروه هولونومی
Homotopy	هموتوپی
Hyperbolic metric	متریک هذلولی
Hyperplane	فوق صفحه
Hypersurface	فوق رویه

Indefinite	نامعین
Induced orientation	سوی القاشده
Integral curve	خم انتگرال
- of a k-form	انتگرال k ـ فرم
- of a 1-form	انتگرال ۱ ـ فرم
Interior	درون
- angle	زاویهٔ درونی
- product	حاصلضرب درونی
Intrinsic	ذاتی
- distance	فاصلهٔ ذاتی
- geometry	هندسهٔ ذاتی
Invariant	پایا
Inverse function theorem	قضیهٔ تابع وارون
Involute	گسترده
Inward pointing	درونگرای نقطه‌ای
Isolated	تنها
- critical point	نقطهٔ بحرانی تنها
Isometric	ایزومتریک
Isometry	ایزومتری
Jacobi field	میدان ژاکوبی
k-form	k ـ فرم
Lagrange multiplier	ضریب لاگرانژ
Left-handed basis	پایهٔ چپگرد
Lenght	طول خم
- of a parametrized curve	طول خم پارامتری
- of a plane curve	طول خم مسطح
Levi-Civita parallel	موازی لوی ـ سیلونیا
Lie bracket	کروشه لی

Line integral	انتگرال منحنی‌الخط
Local	موضعی
- Gauss - Bonnet theorem	قضیهٔ گاوس ـ نیمه موضعی
- isometry	ایزومتری موضعی
- maximum	ماکزیمم موضعی
- stric maximum	ماکزیمم موضعی اکید
- minimum	می‌نیمم موضعی
- strict minimum	می‌نیمم موضعی اکید
-1- parameter group	گروه ۱ - پارامتری موضعی
- Stokes' theorem	قضیهٔ استوکس موضعی
Local parametrization	پارامترسازی موضعی
- - of a plane curve	پارامترسازی موضعی خم مسطح
- - of a surface	پارامترسازی موضعی رویه
- - of a surface-with-boundary	پارامترسازی موضعی رویه مرزدار
Maximal	بیشین
- geodesic	ژئودزی بیشین
- integral curve	خم انتگرال بیشین
Mean curvature	خمیدگی متوسط
Meridian	نصف النهار
Metric coefficients	ضرایب متریک
Minimal surface	رویه می‌نیمال
Möbius band	نوار موبیوس
Monkey saddle	زین میمونی
Multilinearity	چند خطی
Natural lift	بالابر طبیعی
ıtural orientation on R^n	سوی طبیعی R^n
ɔt-degenerate	ناتبهگون
critical point	نقطه بحرانی ناتبهگون

- quadratic form	صورت درجه دوم ناتبهگون
Normal	قائم
- curvature	خمیدگی قائم
- section	مقطع قائم
- space	فضای قائم
- to the boundary	قائم بر مرز
- variation	تغییر قائم
- vector field	میدان برداری قائم
One-form	۱ ـ فرم
Open set	مجموعهٔ باز
Orientation	سو
- preserving	حافظ سو
- reversing	وارونگر سو
- vector field	میدان برداری سو
Oriented n-surface	n ـ رویهٔ سودار
Orthogonal transformation	تبدیل متعامد
Outward-pointing	برونگرای نقطه‌ای
Parallel	موازی
- on a surface of revolution	مدار در رویه دوار
- translate	انتقال توازی
- transport	ترابری توازی
- vector field	میدان برداری موازی
Parametrization	پارامترسازی
- by arc length	پارامترسازی توسط طول کمان
Parametrized	پارامتری شده
- curve	خم پارامتری
- surface	رویهٔ پارامتری
Partition of unity	افراز یگانی

Period	دوره
Piecewise smooth	تکه‌ای هموار
Plane	صفحه
Plane curve	خم مسطح
Poincaré metric	متریک پوانکاره
Poincaré- Hopf theorem	قضیه پوانکاره هاف
Positive	مثبت
- rotaion	دوران مثبت
- tangent direction	جهت مثبت مماس
Prinicipal	اصلی
- curvatures	خمیدگیهای اصلی
- curvature directions	جهت‌های خمیدگی اصلی
- normal	قائم
Product	حاصلضرب
Pseudosphere	شبه کره
Quadratic form	صورت درجه دوم
Radius of curvature	شعاع خمیدگی
Reflection	انعکاس
Regular	عادی، منظم
- map	نگاشت عادی
- parametrized curve	خم پارامتری عادی
- point	خم پارامتری عادی
- rectangle	مستطیل عادی
- triangle	مثلث عادی
Reparametrization	پارامترسازی مجدد
Restriction	تحدید
Riemannian	ریمانی
- curvature	خمیدگی ریمانی

- geometry	هندسهٔ ریمانی
- metric	متریک ریمانی
Riemann tensor	تانسور ریمان
Right-handed basis	پایهٔ راستگرد
Rigih motion	حرکت جسم صلب
Rotation	دوران
- index	اندیس دوران
- rate	میزان دوران
Saddle point	نقطهٔ زینی
Second fundamental form	دومین صورت بنیادی
Sectional curvature	خمیدگی برشی
Semi-definite	نیم معین
Shape operator	عملگر شکلی
Singular	منفرد
- disc	قرص منفرد
- half - disc	نیم قرص منفرد
- rectangle	مستطیل منفرد
- surface	رویهٔ منفرد
- triangle	مثلث منفرد
Skewsymmentry	پاد متقارنی
Smooth	هموار
- form	فرم هموار
- function	تابع هموار
- parametrized curve	خم پارامتری هموار
Space curve	خم فضایی
Speed	تندی
Sphere bundle	کلاف کره
Spherical	کروی

- coordinates	مختصات کروی
- image	تصویر کروی
Spray	افشانه
Standard orientation	سوی استاندارد
Stationary	ایستا
Stereographic proiection	تصویر استروگرافیک
Stokes' formula	فرمول استوکس
Stokes' theorem	قضیهٔ استوکس
Strictly convex	اکیداً محدب
Structural equations	معادلات ساختاری
Subordinate	مادون
Sum	مجموع
Surface	رویه
- of revolution	رویه دوار
Surface-with-boundary	رویه مرزدار
Symmetry	تقارن
Tangent	مماس
- bundle	کلاف مماس
- to the boundary	مماس بر مرز
- vector	بردار مماس
- vector field	میدان برداری مماس
Tangent space	فضای مماس
- of a parametrized surface	فضای مماس بر رویهٔ پارامتری
- of a surface	فضای مماس بر رویه
Torsion	تاب
Torus	چنبره
Total	کل
- angle of rotation	زاویه کلی دوران

Translation	انتقال
Triangulation	مثلث سازی
Unit circle	دایرهٔ یکه
Unit n-sphere	n ـ کرهٔ یکه
Vector at a point	بردار در یک نقطه
Vector field	میدان برداری
Vector part	قسمت برداری
Velocity	سرعت
Volume	حجم
Volume form	فرم حجم
Weingarten map	نگاشت وینگارتن
Winding number	عدد گشت

واژه نامه فارسی به انگلیسی

Height	ارتفاع
Cylinder	استوانه
Parametrized cylinder	استوانه پارامتری
Partition of unity	افراز یگانی
Prinicipal	اصلی
Spray	افشانه
Geodesic spray	افشانهٔ ژئودزی
Strictly convex	اکیداً محدب
Adjoint	الحاقی
Translation	انتقال
Panallel translate	انتقال توازی
Integral of a k-form	انتگرال k - فرم
Line integral	انتگرال منحنی‌الخط
Rotation index	اندیس دوران
Reflection	انعکاس
Energy	انرژی
First fundamental from	اولین صورت بنیادی
First variation formula	اولین فرمول تغییر
Isometry	ایزومتری
Isometric	ایزومتریک
Local isometry	ایزومتری موضعی
Stationary	ایستا
Natural lift	بالابر طبیعی
Tangent vector	بردار مماس

Vector at a point	بردار در یک نقطه
Riemannian sectional	برشهای ریمانی
Outward-pointing	برونگرای نقطه‌ای
Maximal	بیشین
Skewsymmetry	پاد متقارنی
Parametrization	پارامترسازی
- by arc length	پارامترسازی توسط طول کمان
- of a surface	پارامترسازی رویه
- of a surface-with-boundary	پارامترسازی رویه مرزدار
- of a plane curve	پارامترسازی خم مسطح
Reparametrization	پارامترسازی مجدد
Local parametrization	پارامترسازی موضعی
- of a plane curve	پارامترسازی موضعی خم مسطح
Parametrized	پارامتری شده
Invariant	پایا
Left-handed basis	پایهٔ چپگرد
Right-handed basis	پایه راستگرد
Evolute	پوش
Torsion	تاب
Height function	تابع ارتفاع
Cartesian cooradinate function	تابع مختصی دکارتی
Smooth function	تابع هموار
Riemann tensor	تانسور ریمان
Orthogonal transformation	تبدیل متعامد
Fermi transport	ترابری فِرمی
Parallel transport	ترابری توازی
Stereographic projection	تصویر استروگرافیک
Spherical image	تصویر کروی

تغییر با محمل فشرده	Compactly vector field
تغییر با نقطه ثابت انتهایی	Fixed endpoint variation
تغییر قائم	Normal variation
تقارن	Symmetry
تکه‌ای هموار	Piecewise smooth
تندی	Speed
تنها	Isolated
توابع در طول خم پارامتری	Function along a parametrized curve
توازی اقلیدسی	Euclidean parallel
جریان ژئودزی	Geodesic flow
جهت مثبت مماس	Positive tangent direction
جهت مجانبی	Asymptotic direction
جهت‌های خمیدگی اصلی	Principal curvature directions
چنبره	Torus
چند خطی	Multilinearity
خط قائم	Normal line
خط گرادیان	Gradient line
خم انتگرال	Integral curve
خم انتگرال بیشین	Maximal integral curve
خم پارامتری	Parametriged curve
خم پارامتری هموار	Smooth parametrized curve
خم زنجیردار	Catenoid
خم زنجیری	Catenary
خمش	Bending
خم فضائی	Space curve
خم مختصی	Coordinate curve
خم مسطح	Plane curve
خمیدگی	Curvature

Sectional curvature	خمیدگی برشی
Curvature of a curve in R^3	خمیدگی خم در $R^۳$
Curvature of a plane curve	خمیدگی خم مسطح
Riemannian curvature	خمیدگی ریمانی
Geodesic curvature	خمیدگی ژئودزی
Normal curvature	خمیدگی قائم
Gaussian curvature	خمیدگی گاوس
Gauss-Kronecker curvature	خمیدگی گاوس ـ کرونوکر
Mean curvature	خمیدگی متوسط
Principal curvatures	خمیدگی‌های اصلی
Fundamental domain	دامنهٔ بنیادی
Circle of curvature	دایرهٔ خمیدگی
Unit circle	دایرهٔ یکه
Degree of the Gauss map	درجهٔ نگاشت گاوس
Interior	درون
Inward pointing	درونگرای نقطه‌ای
Coordinate system	دستگاه مختصی
Rotation	دوران
Positive rotation	دوران مثبت
Period	دوره
Second fundamental form	دومین صورت بنیادی
Diffeomorphism	دیفئومرفیسم
Differential	دیفرانسیل
Surface	رویه
Parametrized surface	رویهٔ پارامتری
Surface-with-boundary	رویهٔ مرزدار
Singilar surface	رویهٔ منفرد
Minimal surface	رویهٔ مینی‌مال

Rimannian	ریمانی
Angle	زاویه
Exterior angle	زاویهٔ برونی
Interior angle	زاویهٔ درونی
Angle of rotation	زاویهٔ دوران
Total angle of rotation	زاویهٔ کلی دوران
Monkey saddle	زین میمونی
Holonomy angle	زاویهٔ هولونومی
Geodesic	ژئودزی
Maximal geodesise	ژئودزی بیشین
Consistency	سازگاری
Global	سرتاسری
Globally convex	سرتاسری محدب
Velocity	سرعت
Surface of revolution	سطح دوار
Orientation	سو
Standard orientation	سوی استاندارد
Induced orientation	سوی القاشده
Natural orientation on R^3	سوی طبیعی R^3
Pseudosphere	شبه‌کره
Acceleration	شتاب
Covariant acceleration	شتاب هموَرد
Radius of curvature	شعاع خمیدگی
Plane	صفحه
Fundamental form	صورت بنیادی
Quadratic form	صورت درجه دوم
Definite quadratic form	صورت درجه دوم معین
Non - degenerate quadratic form	صورت درجه دوم ناتبهگون

ضرایب متریک	**Metric coenfficents**
ضرب برونی	**Exterior Product**
ضرب داخلی	**Dot product**
ضریب لاگرانژ	**Lagrange multiplier**
طول	**Lenght**
طول خم پارامتری	**- of a parametrized curve**
عادی، منظم	**Regular**
عدد گشت	**Winding number**
عملگر شکلی	**Shape operator**
فاصلهٔ ذاتی	**Intrinsic distance**
فرم هموار	**Smooth form**
فرمول کلاسیک استوکس	**Stokes' formula**
فرم ارتباط	**Connection form**
فرم حجم	**Volume form**
فرمول‌های فرنه	**Frenet formulas**
فشرده	**Compact**
فضای قائم	**- space**
فضای مماس	**Tangent space**
فضای مماس بر رویه	**- of a surface**
فوق رویه	**Hypersurface**
فوق صفحه	**Hyperplane**
قائم	**Normal**
قائم اصلی	**Principal normal**
قائم بر مرز	**Normal to the boundary**
قائم دوم	**Binormal**
قرص منفرد	**Singular disc**
قضیه استوکس	**Stokes'theorem**
قضیه استوکس سرتاسری	**Global Stokes' theorem**

قضیهٔ استوکس موضعی	Local Stokes' theorem
قضیه بنیادی جبر	Fundamental theorem of algebra
قضیه پوانکاره‌هاف	Poincaré-Hopf theorem
قضیهٔ تابع وارون	Inverse function theorem
قضیه گاوس ـ بنه سرتاسری	Gausss-Bonnet theorem
قضیه گاوس ـ بنه موضعی	Local Gauss - Bonnet theorem
قضیه گرین	Green's theorem
کراندار	Bounded
کرل	Curl
کروشه لی	Lie bracket
کروی	Spherical
کلاف کره	Sphere bundle
کلاف مماس	Tangent bundle
کل خمیدگی	Total curvature
گروه ۱ - پارامتری موضعی	Local 1-parameter group
گروه هولونومی	Holonomy group
گسترده	Involute
مادون	Subordinate
ماکزیمم اکید	Local strict maximum
ماکزیمم موضعی	Local maximum
متریک پوانکاره	Poincaré metric
متریک ریمانی	Riemannian metric
متریک هذلولی	Hyperbolic metric
مثبت	Positive
مثلث ژئودزی	Geodesic triangle
مثلث‌سازی	Trinagulation
مثلث عادی	Regular triangle
مثلث منفرد	Singular triangle

مجموع	Sum
مجموعهٔ باز	Open set
مجموعهٔ تراز	Level set
محدب	Convex
مختصات	Coordinates
مختصات کروی	Coordinates spherical
مدار در رویه دوار	Parallel on a surface of revolution
مخروط	Cone
مرز	Boundary
مرز یک قرص منفرد	- of a singular disc
مرز یک مثلث منفرد	- of a singular trinagle
مرکز خمیدگی	Center of curvature
مساحت	Area
مزدوج	Conjugate
مستطیل منفرد	Singular rectangle
مستطیل عادی	Regular rectangle
مشتق	Derivative
مشتق برونی	Exterior derivative
مشتق تابع هموار	Derivative of a smooth map
مشتق جهتی	Derivative of a smooth map
مشتق فرمی	Fermi derivative
مشتق هموردا	Covariant derivative
مشخصه اویلر	Euler characteristic
معادلات ساختاری	Structural equations
معادلات ساختاری کارتان	Cartan structural equations
مکان هندسی کانونی	Focal locus
مکان هندسی مزدوج	Conjugate locus
مماس	Tangent

مماس بر مرز	- to the boundary
منفرد	Singular
موازی	Parallel
موضعی	Local
میدان برداری	Vector field
میدان برداری ژئودزی	Geodesic vector field
میدان برداری سو	Orientation vector field
میدان برداری قائم	Normal vector field
میدان برداری گرادیان	Gradient vector field
میدان برداری کامل	Complete vector field
میدان برداری مختصی	Coordinate vector field
میدان برداری موازی	Parallel vector field
میدان برداری مماس	Tangent vector field
میدان ژاکوبی	Jacobi field
میدان برداری هموار	Smooth vector field
موازی لوی ـ سیلونیا	Levi-Civita parallel
میزان دوران	Rotation rate
می‌نیمم موضعی	Local minimum
می‌نیمم موضعی اکید	Local strict minimum
ناتبهگون	Non-degenerate
نامعین	Indefinite
نصف‌النهار	Meridian
نقطهٔ بحرانی	Critical point
نقطه بحرانی تنها	Isolated critical point
نقطهٔ بحرانی ناتبهگون	Non - degenerate critical point
نقطه زینی	Saddle point
نقطه عادی	Regular point
نقطه کانونی	Focal point

نقطهٔ مزدوج	**Conjugate point**
نگاشت عادی	**Regular map**
نگاشت نمایی	**Exponential map**
نگاشت گاوس	**Gauss map**
نگاشت وینگارتن	**Weingarten map**
نمادهای کریستوفل	**Christoffel symbols**
نمودار	**Graph**
نوار موبیوس	**Möbius band**
نیم قرص منفرد	**Singular half - disc**
نیم‌معین	**Semi-definite**
هسیان	**Hessian**
همبند	**Connected**
همدیس	**Conform**
همنهشت	**Congruent**
همورد	**Covariant**
هموار	**Smooth**
هموتوپی	**Hyperbolic metric**
هندسه ریمانی	**Riemannian geometry**
هندسه ذاتی	**Intrinsic geometry**
هولونومی	**Holonomy**

فهرست راهنما

لطفاً قبل از مطالعهٔ کتاب اشکالات تایپی زیر را اعمال نمائید.

صفحه	سطر	به شرح زیراصلاح شود
۶	۱	$f(x_۱,\cdots,x_{n+۱}) = x_۱^۲ - x_۲^۲ - \cdots - x_{n+۱}^۲; c = -۱\cdots$
۷	۶	و ضرب اسکالر بصورت $c(p,v) = (p,cv)$
۷	۹	$\mathbb{R}^{n+۱} \times \mathbb{R}^{n+۱} = \mathbb{R}^{۲(n+۱)}$
۸	−۷	... در نقطهٔ p یعنی $\|\mathbf{v}\|$ و زاویهٔ
۹	۷	... هموار باشد. ...
۱۰	۵	... هموار در I می‌باشند.
۱۱	۴	... برای هر $t \in I$.
۱۲	۵	$\frac{dx_{n+۱}}{dt}(t) = X_{n+۱}(x_۱(t),\cdots,x_{n+۱}(t)).$
۱۵	۶	$\beta(t) = \beta(t+t_۰)$ تعریف شده باشد، آنگاه β یک خم ...
۱۷	۲	... که $f^{-۱}(c)$ غیرتهی باشد و $p \in f^{-۱}(c)$. یک بردار ...
۱۷	۳	... گوئیم اگر یک بردار سرعت بر یک خم پارامتری ...
۱۸	−۴	... چون $\mathbb{X}(p) = \mathbf{v} \in [\nabla f(p)]^\perp$
۱۸	−۲	$\mathbb{Y}(q) \perp \nabla f(p)$ برای ... و $\mathbb{Y}(p) = \mathbf{v}$
۱۹	۵	... در دامنه α، بنابراین، ثابت $= f(\alpha(t))$.
۲۵	−۶	برای $(x_۱,\cdots,x_n) \in f^{-۱}(c)$ داریم ...
۲۵	−۱	$g(x_۱,x_۲,x_۳) = f(x_۱,(x_۲^۲ + x_۳)^{۱/۲})$
۲۶	۶	محور $x_۱$ ها گویند.
۲۷	۸	... به ازای تمام $\mathbf{v} \in S_p$ ، $\nabla g(p)\cdot\mathbf{v} = ۰$
۲۸	۶	... متقارن $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ می‌باشد. توجه داشته ...
۳۶	۸	... n- رویهٔ همبند در $\mathbb{R}^{n+۱}$ باشد. آنگاه
۳۸	۱۰	روی یک خم مسطح، یک ...
۴۰	−۷	... به عنوان n- رویه $x_{n+۱} = ۰$ در $\mathbb{R}^{n+۱}$ ...
۴۱	۳	... نشانگر اندازه زاویه برخلاف عقربه‌های ساعت از $(p,۱,۰)$ با جهت ...
۴۲	−۷	هم‌بر $\mathbf{v}$ و هم بر $\mathbf{w}$ عمود است.
۴۳	۲	سازگار است اگر و فقط اگر ...
۴۵	۱	... بیش از یک n- رویهٔ S می‌باشد، ...
۴۶	۱	... n- رویه سودار S گویند.
۴۷	۸	با حرکت دادن این n- صفحه به اندازه کافی دور در جهت v، با S ...
۵۲	۸	...، که در آن $t_۱ < t_۲$ و
۵۳	۴−۷	$\mathcal{O}(S)$

صفحه	سطر	به شرح زیراصلاح شود
۵۷	۱۱	برای تمام $t \in I$ ...
۵۸	۴−	به ازای هر جفت بردارهای یکه متعامد ...
۶۴	۹	... از نقطه p با سرعت ...
۷۰	۱۰	$\alpha(b) = q$
۷۰	۱۳	$P_\alpha : S_p \to S_q$ به صورت
۷۰	۱۴	$P_\alpha(\mathbf{v}) = \mathbb{V}(b)$
۷۰	۱۸	... p را به قطب جنوب $q = (0, 0, -1)$ وصل می نماید:
۷۱	۵−	$P_\alpha(\mathbf{v}) = P_\beta(\mathbf{v}) \ldots$.
۷۳	۷	$\mathbf{v} = (p, v)$
۷۴	۳−	... از p به p یک β در S از p به p...
۷۸	۷	... در جهت $\mathbf{v}$ گویند.
۷۹	۱	... دو حالت $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbb{X} \in \mathbb{R}_p^{n+1}$ و
۸۲	۲	$= (p, 0, \ldots, 1, \ldots, 0) \cdot (p, v_i, \ldots, v_{n+1}) = v_i,$
۸۴	۳	$-\frac{1}{\lVert \nabla f(p) \rVert}(p, \nabla(\frac{\partial f}{\partial x_1})(p) \cdot v, \ldots,$
۸۵	۸	آنگاه $\nabla_{e_i} f = (\partial f / \partial x_i)(p)$
۸۷	۱۳	$\ldots (\nabla_{\mathbb{X}(p)}\mathbb{Y}) \cdot \mathbb{N}(p) = (\nabla_{\mathbb{Y}(p)}\mathbb{X}) \cdot \mathbb{N}(p)$ برای ...
۸۷	۳−	وقتی که $0 < \lVert \mathbf{v} \rVert < \delta$ و ...
۹۶	۸	... از خمهای مسطح زیر که ...
۱۰۰	۸	... همبند بلافاصله نتیجه می‌شود ...
۱۰۹	۳	... همیشه صفر است، در حالت ...
۱۱۰	۵	$tg\theta_{\mathbf{v}}(x, y) = y/x$, $\mathrm{cotg}\theta_{\mathbf{v}}(x, y) = x/y$ ، ...
۱۱۴	۶−	... مسطح فشرده همبند سودار ...
۱۱۸	۴	$\varphi(t, u) = f(u(\cos t + i \sin t))$ به کار ببرید.
۱۱۸	۳−	$v = (0, 1)$. در این صورت
۱۲۱	۶	را برای $n > 1$ تجزیه و ...
۱۲۲	۴	$-\nabla_{\mathbf{v}}\mathbb{N} = (p, v_1, -v_2, 0)$
۱۲۵	۹	...، آنگاه $L(\mathbf{v}_0) = f(\mathbf{v}_0)\mathbf{v}_0$ (یعنی V_0)،...
۱۲۵	۱۵	$= \frac{d}{dt}\rvert_0 (\cos^2 t) L(\mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{v}_0 + 2 \ldots]$
۱۲۷	۳	... روی یک فضای برداری n−بعدی ...
۱۲۷	۷	... دقیقاً n بردار ویژه دارد.
۱۲۷	۱۲	... خمیدگی اصلی نامیده می‌شوند.
۱۲۷	۴	در نتیجه $\mathcal{J}_p(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \lVert \mathbf{v} \rVert^2$ برای ...
۱۳۰	۸	$\mu < 0$
۱۳۰	۹	$\ldots = -\lVert \mu \mathbb{N}(p) \rVert = -\lvert \mu \rvert = \mu$، لذا ...

صفحه	سطر	به شرح زیر اصلاح شود
۱۳۳	−۶	... است و A^t نمایشگر ...
۱۳۴	−۵	... برای k تحت فرض ...
۱۳۵	۳	... باز دلخواه کوچکی شامل ...
۱۳۶	۳	۶ را می‌توان در مورد ...
۱۳۷	−۶	g توسط دستور:
۱۳۸	۴	... میدان برداری قائم ...
۱۴۱	۶	... بنابراین یک n− رویه که در هر یک از ...
۱۴۱	۱۰	... محدب در $p \in S$ و برای یک ...
۱۴۱	−۲	$h(t) = \dots$ تعریف می‌کنیم ... $h(t) \geq 0$ برای هر t
۱۴۲	۶	... ثابت کرد (قضیهٔ ۲) که اگر ...
۱۴۲	۱۰	... را اختیار کند.
۱۴۳	۷	دلخواه برای S_p در نقطهٔ ...
۱۴۴	−۴	«آزمون مشتق دوم»
۱۴۵	۳	$\nabla_v(\mathrm{grad} h) \cdot \mathbb{N}(p = \nabla_v(\dots$
۱۴۶	−۱	$+\frac{1}{2}(\nabla_{\dot{\alpha}_k(t)}(\lambda\tilde{h} - \lambda\nabla f))\dots.$
۱۴۸	۶	... موضعی که از اثبات قضیهٔ بالا نتیجه می‌شود و ساده‌تر است. نقاط ...
۱۴۹	۸	بنیادی در S باشد.
۱۴۹	۶	... نه تنها اینکه یک می‌نیمم موضعی ...
۱۵۰	۶	انتگرال $\alpha_q : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$
۱۵۰	−۷	... برای $\mathbb{X}$ برای این مجموعه ...
۱۵۲	۱۰	... وجود خواهد داشت.
۱۵۲	۱۱	... برای هر k_i) که ...
۱۵۳	۴	ما اکنون به بررسی $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = p$ می‌پردازیم.
۱۶۰	−۵	$= (\varphi, (p), \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}(p), \dots, \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_j}(p)) \cdot e'_i =$
۱۶۱	۳	... با شرط $\overset{\circ}{\alpha}(t_0) = \mathbf{v}$ است.
۱۶۵	−۱	... که با صفحه $x_1 o x_2$ زاویه $\frac{\theta}{2}$ می‌سازد.
۱۸۰	۲	... تعریف $\psi(q, s) = \varphi(q) + sN(q)\dots$
۱۸۰	−۵	... تصویری $U_1 \times I \to I$
۱۹۱	۹	$\varphi_s \dot{\circ} \alpha(t_0) = d\varphi_s(\alpha(t_0)) = 0$
۱۹۴	۵	... بنابراین h تحدید $\tilde{h}$ به S...
۱۹۴	−۳	h می‌نیمم موضعی خود را در p وقتی که

صفحه	سطر	به شرح زیر اصلاح شود
۱۹۵	۷	$\ldots = \nabla_{\mathbf{v}_n}(\text{grad h})\cdot \mathring{\alpha}(t_\circ) = \ldots$
۱۹۵	−۵	(نقاطی که بعد فضای مماسشان اکید کمتر از n است)
۱۹۹	۴	... $\mathbf{v}$ و $L(\mathbf{v})$− می‌باشند
۲۰۴	۳	$d\varphi((\Delta y)(p, ۰, ۱)) = (\Delta y)\ldots$
۲۰۴	−۵	تحت φ اندازه می‌گیرد ...
۲۱۸	−۲	$A(\varphi) = \int_a^b ۲\pi y(t)\left((x'(t)^{۲} + y'(t)^{۲}\right)^{۱/۲} dt$
۲۲۰	۱۳	$\mathbb{V}(\varphi) = \int_U \|\mathbb{W}\| \ldots$
۲۳۰	۹	... که توسط تغییرات کوچک قائم حاصل
۲۳۷	۲	برداری تغییر $\mathbb{X}$ همه جا بر ...
۲۳۷	−۴	... از $\ddot{\alpha}(t_\circ)$ صفر نیست.
۲۴۰	۳	... $\alpha : [a,b] \to S$ کوتاهترین
۲۴۱	−۸	. با قراردادن $s = ۱$، برای هر $t \in I$ داریم $\alpha_{\mathbf{v}}(t) = \alpha_{t\mathbf{v}}(۱) = \exp(t\mathbf{v})$
۲۴۲	۱۴	... انتگرال بیشین $\mathbb{X}$ با شرط ...
۲۴۶	−۳	...، لذا $(\nabla_{E_۱}\mathbb{E}_۱)_{(t,s)} = \ddot{\alpha}_s(t)$ بر ...
۲۴۸	۳	... و $\beta(b) = q$ باشد، اگر c
۲۵۰	۱۲	... همانند ژئودزیهای قائم بر $(n - ۱)$ رویه ...
۲۵۰	−۴	... از نقطه p که به نقطهٔ مزدوج q میل ...
۲۵۲	−۶	... توسط exp بر روی یک مجموعهٔ ...
۲۶۱	−۵	... در آن برای $\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲ \in S_p$، $p \in S$، $\mathbf{v}_۱$ و $\mathbf{v}_۲$ انتخاب
۲۶۹	۳	... موضعی $\psi : U \to f^{-۱}(c)$ که تصویرش
۲۶۹	−۸	... شده باشند و $\{\mathbb{X}_۱(q), \ldots, \mathbb{X}_n(q)\}$ یک پایه ...
۲۶۹	−۷	... ترکیب خطی $\mathbb{X}_i$ ها بنویسید و ...
۲۷۳	۱۰	... فرض کنید $J\mathbf{v} \in S_p$
۲۷۲	۴	$X_۱$، $X_۲$، $X_۳$ مؤلفه‌های توابع X می‌باشند.
۲۷۳	۱۰	... فرض کنید $J\mathbf{v} \in S_p$ برداری باشد. ..
۲۷۳	۱۲	... یک پایه متعامد یکه S_p سازگار با ...
۲۷۴	۲	$a = D_v\mathbb{X} \cdot J\mathbb{X}(p) = \omega(v)$. به طریق مشابه
۲۷۴	۴	$\ldots - D_{\mathbf{v}}(\mathbb{X}) = -\omega(\mathbf{v}).$
۲۷۶	۴	... که به صورت زیر تعریف می‌شود:
۲۷۸	۷	$+(L(\mathbb{E}_۲) \cdot \mathbb{X} \circ \varphi) \cdot (L(\mathbb{E}_۱) \cdot J\mathbb{X} \circ \varphi)$

صفحه	سطر	به شرح زیراصلاح شود
۲۷۸	۸	$-(L(\mathbb{E}_1)\cdot \mathbb{X}\circ\varphi)\cdot(L(\mathbb{E}_2)\cdot J\mathbb{X}\circ\varphi).$
۲۸۳	۳	$= -\int_a^b \kappa_g + 2\pi k - \sum \theta_i$
۲۸۶	۱	... صفر هموار را روی ...
۲۸۶	۱	برداری مماس هیچ جا صفر هموار روی ...
۲۸۶	۵	برای روشن شدن مطلب وقتی که ... ندارد حالتی که S ...
۲۸۶	۸	... که در آن $q=(0,0,1)$ موجود است برای مثال،
۲۹۰	−۳	... مستقل از r باشد.
۲۹۲	۱	(قضیه‌ایکه $\frac{1}{2\pi}\int_S K = \chi$، در واقع ...
۲۹۲	۷	برای هر $i\in\{1,\dots,k\}$، $\varepsilon > 0$ ...
۲۹۴	−۶	... رویهٔ سودار همبند فشرده ...
۲۹۶	۲	$\psi : D \to S$ قرصهای منظم در ...
۲۹۶	−۵	. نشان دهید که $h^*\eta = w_{\mathbb{X}Y}$ که در آن ...
۳۰۱	−۱	$\psi_2(0) = \psi_2\circ\psi_1(0) = \psi(0)$ صدق کند و ...
۳۰۲	۱۱	$d\psi(p,v) = (\psi(p),\psi_1(v)) \quad (*)$
۳۰۶	۱۴	می‌دهیم که $\bar{\psi}^{-1}\circ\psi(p) = p$ برای تمام ...
۳۱۴	۷	مماس S_p، $p\in S$، طول ...
۳۲۸	۷	... ریمانی یا خمیدگی برشی S روی ...
۳۳۴	۱۱	قسمی که $\ldots = (1/(h(p))^2)\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$
۳۴۰	۷	$\psi(x_1,x_2) = \cdots$ برای $\lambda > 0$ می‌باشد،این
۳۴۰	۹	نیز ژئودزی‌ها هستند.
۳۴۲	۶	$\varphi : \mathbb{R}^2 \to S\setminus\{q\}$ وارون
۳۴۲	۷	... در قطب جنوب $(0,0,-r)$ بر S باشد
۳۴۲	۹	برای $p\in\mathbf{R}^2, \mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{R}^2_p$ می‌باشد که در آن
۳۴۲	۱۰	$S_{\varphi(p)} \subseteq \mathbf{R}^3_\varphi(p)$ است که صریحاً به صورت
۳۴۳	۲	$a+ib$ در نظر بگیرید ...
۳۴۳	۱۰	... را به طور متعامد قطع می‌کنند ...
۳۴۴	−۱	در آغاز نشان دهید که ...
۳۴۵	۷	... هستند و سپس تصاویر آن ...
۳۵۱	۵	تابع در طول خم پارامتری
۳۵۵	−۱۰	موازی در رویه دوار
۳۵۶	−۷	نقطه عادی
۳۶۳	۱	میدان برداری با محمل فشرده
۳۶۶	۱۲	فرمول استوکس
۳۶۶	۱۷	فضای فشرده
۳۶۷	۱۹	ماکزیمم اکید موضعی