انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد شمارهٔ ۱۱۰

مباحث بنیادی

تحلیل سازه‌ها

تألیف

نوریس، ویلبر، (اوتکو)

ترجمهٔ

فریدون ایرانی

۱۳۷۲

بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات دانشگاه فردوسی (مشهد) شماره ۱۱۰

مباحث بنیادی

تحلیل سازه‌ها

تألیف

نوریس، ویلبر، اوتکو

ترجمهٔ

فریدون ایرانی

فهرست مطالب

فصل فصل دوم " عکس‌العملها "

فصل پنجم "ایستایی ترسیمی"

فصل ششم "خطوط تأثیر"

فصل هفتم "خرپاهای پلها و سقفها"

فصل هشتم " سازه‌های با دهانه وسیع "

فصل نهم " شبکه‌های سه‌بعدی

فصل دهم "کابلها"

فصل یازدهم "تحلیل تقریبی سازه‌های نامعین"

فصل دوازدهم " تغییر مکان سازه‌ها "

فصل سیزدهم " تحلیل تنش در سازه‌های نامعین "

فصل چهاردهم " خطوط تأثیر سازه‌های نامعین "

ضمائم

پیشگفتار مترجم

خدای را شکر که توفیق ترجمه کتاب حاضر را به‌من عطا فرمود تا بهاین وسیله بتوانم خدمت ناچیزی به‌پویندگان راه استقلال علمی و صنعتی این آب و خاک ارائه دهم. کتاب حاضرکه ترجمه بدون دخل و تصرف‌کتاب "Elementary Structural Analysis" نوشته پرفسور نوریس و پرفسور ویلبر است به‌نحوی تلفیقی از چاپ دوم و سوم آن‌نیزهست. دلیل این تلفیق کامل‌بودن غیر قابل مقایسه چاپ دوم در زمینهٔ "مباحث بنیادی تحلیل سازه‌ها" نسبت به‌چاپ سوم آن بوده است. ولی چون چاپ سوم نیز به‌نوبه خود بیانگرعلم و صنعت جدید عصر حاضر است لذا در موارد لزوم مطالب مختلف کتاب براساس آن چاپ تصحیح گردیده است.

با کمال تأسف امکان تبدیل آحاد انگلیسی به‌آحاد SI به‌دلایل مختلف‌میسرنگردید، گرچه علم نظری نیاز به‌آحاد معینی ندارد با وجود این در ضمیمهٔ این کتاب جدول‌مناسبی جهت تبدیل آحاد ارائه گردیده است.

در فصل اول کتاب که به‌ذکر نکات طراحی و بارگذاری ابنیه پرداخته است و ازضوابط متداول در ممالک متحده امریکا یاد نموده است، به‌منظور غنای بیشترکتاب‌ضوابط متداول در ایران به‌موازات آن آورده شده است.

واژه‌های فنی کلا" به‌انتهای کتاب برده شده است و خواننده می‌تواند با برخورد به‌هر واژهٔ فارسی معادل انگلیسی آن را در واژه‌یاب کتاب بیابد. خوشبختانه چون واژه‌های‌رایج در این‌کتاب قبلا"توسط پیش کسوتان این علم معرفی شده بود سعی شده‌است‌که از واژه‌سازی اجتناب کرده و تنها از واژه‌های متداول فنی استفاده شود.

ویرایش علمی این کتاب توسط همکار ارجمندم آقای دکتر محمدرضایی پژند و ویرایش ادبی آن توسط آقای حمید جاودانی شاهدین انجام گرفته است که از دقت زایدالوصف

نامبردگان به‌این وسیله صمیمانه سپاسگزاری می‌شود .

از خانم عزت شادمهری که تایپ کتاب و آقای مهدی پیوندی که صفحه‌آرائی آن را به‌عهده داشته‌اند و همچنین از سایر دست‌اندرکاران مؤسسه چاپ و انتشارات دانشگاه فردوسی که با امکانات محدود چاپخانه به‌نحوی در چاپ و انتشار این کتاب سهیم بوده‌اند خالصانه تشکر می‌شود .

بدیهی است که این ترجمه خالی از اشتباه نیست ، از همکاران گرامی ،اساتید ارجمند و دانشجویان عزیز انتظار دارم که هرگونه اشتباه و لغزش موجود در آن را به‌اینجانب یادآوری فرمایند .

فریدون ایرانی

بهمن‌ماه ۱۳۶۸

مقدمه مؤلفین

از سال ۱۹۴۸ میلادی که اولین چاپ این کتاب منتشر گردید تا عصرحاضرپیشرفتهای بسیاری در کلیه زمینه‌های مهندسی سازه و مهندسی ساختمان به‌وقوع پیوسته‌است. روشهای پیشرفته‌ای که در صنعت ساخت و اجرا حاصل شده است باعث گشته که از مصالح ساختمانی نظیر فولاد ، بتن و چوب به‌نحو مناسبتری استفاده گردد . درحال حاضرفولادهائی باخواص بسیار عالی و مخصوصا" مخلوط‌های مناسبی از بتن جهت استفاده مهندسین و پیمانکاران تهیه می‌شود . استفاده از آلومینیوم و پلاستیک ساختمانی در قطعات پیش‌ساخته‌سبب شده است که بتوان در موارد موردنیاز از قابلیت باربری بعداز حالت ارتجاعی اجسام استفاده شود . استفاده از ماشینهای حسابگر الکترونیکی در تحلیل سازه‌ها مخصوصا" در این بیست سال اخیر بنحو خارق‌العاده‌ای توسعه یافته است .

به‌دلیل توسعه زایدالوصف کاربرد ماشینهای حسابگر از سال ۱۹۶۰ میلادی که همزمان با انتشار دومین چاپ کتاب حاضر می‌باشد ، لازم بود که در سومین چاپ آن توجه شایانی به‌تحلیل سازه‌ها توسط ماشینهای حسابگر مبذول شود زیرا چنین قابلیتی جهت استفاده از ظرفیت کامل ماشینهای الکترونی در صورت استفاده از آنان در تحلیل سازه‌ها لازم‌خواهد بود .جهت تأمین چنین نیازی ، چندین فصل از چاپ سوم را به‌تحلیل‌ماتریسی سازه‌ها اختصاص داده‌ایم تا بتوان معلومات لازم را به‌خواننده ارائه داد ، لـذا دو مؤلـف اولیه این کتاب از پرفسور چتول اوتکو (Utku) که استاد دانشگاه دوک (Duke)می‌باشند بمنظور همکاری در تألیف این قسمت دعوت بعمل آوردند .

درچاپ اخیر مانند چاپهای دیگر آن بر اصول بنیادی بیشتراز تمرینهای‌حرفه‌ای‌تأکید شده و قصد این بوده است‌که رابطه‌ای بین عملکردهای مختلف‌تحلیل سازه‌ها واصول‌مکانیک جامدات که پایه و اساس تحلیل سازه‌ها می‌باشد برقرار گردد . زمینه فکری حاکم براین‌کتاب بطورمؤکدی بر تحلیل سازه‌هااستواراست وبدین‌جهت بمنظوراستفاده‌کامل ازاین‌کتاب دررشتهٔ مهندسی سازه ، باید مطالعه آن به‌موازات کتابهای مربوط به‌طراحی سازه‌ها انجام گیرد، لذا تأکید می‌شود که وظیفه اساسی مهندس سازه طرح سازه است و نه تحلیل آن و تحلیل سازه

فقط وسیله‌ای جهت به‌اتمام رساندن وظیفه مهندس سازه می‌باشد و نهایت وظیفه او نیست . امروزه‌کتابهای ارزنده‌ای جهت طراحی وجود دارد که مؤلفین درطول این‌کتاب به‌آنهااشاره کرده‌اند .

مؤلفین از همکاری افراد نامبردهٔ زیر در تهیه دوچاپ قبلی این کتاب تشکر فراوان می‌نمایند ،پرفسور دونالد هارل‌من ، پرفسور مایل هولی ، مرحومه خانم گریس پاور و آقای هارولد اسمیت . پرفسورنوریس یکی از مؤلفین کتاب حاضر همواره خودرا مدیون و سپاسگزار همکاری و همراهی زایدالوصف همسرش خانم مارتا نوریس می‌داند که درطی سی‌سال ازهرنوع کمک در تهیه چاپ این کتاب مضایقه نکرده است .

مؤلفین این کتاب (پروفسور نوریس و پروفسور ویلبر) عمیقاً"سپاسگزار مرحوم پروفسور چارلزمیلتون اسپوفرد و مرحوم‌پروفسور چارلزچرچ مور بوده وهمچنین ازهمیاری‌ومساعدتهای دوستانه و بی‌شائبهٔ سالیان دراز همکاران خود در بخش مهندسی سازه M . I . T پروفسور جان بیگ ، پروفسور روبرت هانسون ، پروفسور مایل هولی ، پروفسور ارجی میرابلی و مرحوم والتر فایف و جان میچ تشکر می‌نمایند .

چارلز هد نوریس
جان نلسون ویلبر
چنل‌اوتکو

پیشگفتار

بدون شک قدمت طراحی و ایجاد سازه‌ها ، برابر عمر بشر در این سیاره است زیرا آنچه از ابتدا در این سیاره برای بشر وجود داشته بندرت با نیاز و سلیقه او هماهنگی داشته‌است ، گرچه انسان اولیه به‌منظور پناه‌گیری از عناصر خارجی به‌یک غار طبیعی و یا یک حفرهٔ درخت پناه می‌برده است ولی اغلب چنین مکانی برای ذخیره غذایی و یا آب او مناسب نبوده است لذا بشر جهت رفع نیاز خود اقدام به‌ایجاد سازه‌ای نمود .کسی نمی‌داندکه اولین سازه بشر یک پناهگاه زمخت یا یک پل استخوانی و یا ساخته‌ای از درخت مو بوده است یا نه .

سوابق تاریخی مربوط به‌تکامل مهندسی سازه از بدو پیدایش آن تا حال حاضر نسبت به‌سوابق تاریخی مربوط به‌تکامل معنوی ، فلسفی و ، سیاسی اقتصادی و هنری بشربسیارناچیز است ،کشفیات باستان‌شناسی چندنمونهٔ محدود ازظواهر سازه‌های ابتدایی را بدست آورده است که در مورد آنها نیز هدف از ایجاد چنان ساختمانهایی معلوم نیست و فقط می‌توان به‌صورت حدس و گمان به‌هدف ایجاد آنها پی برد .

احتیاجات اساسی بشر که همان غذا و مکان می‌باشد ،درطول زمان همواره ثابت‌مانده است ولی سطح تأمین این نیاز به‌طور متداومی نسبت به‌درجه تمدن او متفاوت بوده‌است و افزون‌طلبی بشر همواره او را به‌کسب بیشتری در جهت رفع این نیاز وا داشته است. گاهی تفاوت بین این دو چنان فاحش بوده است که بشر بدون این‌که واقعا" معین کندکه‌نیاز چیست و چرا چنین چیزی را طلب می‌کند و با چه فن و روشی باید جهت تأمین آن اقدام کند ، به‌تأمین خواسته خود می‌پردازد . نکات برجسته تاریخ بشری نشان دهنده سخت‌کوشی اوست که زمانی سبب پیشرفتی محسوس و زمانی گویای تنزلی فاحش است .

در طی قرون ، سازندگان ابنیه و مهندسین سازه از ریاضیات به‌طرزی ناقص درفن‌خود استفاده می‌کردند و کاربرد ریاضیات و علوم به‌عنوان وسیله‌ای سازه آنها را در تعیین ابعاد و تناسب بین اعضاء سازه‌ها یاری کرده است و چون در آنزمان معلومات تئوری در حدی که قادر به‌رفع نیاز آنها باشد نبوده است طراحان برطبق تجربه ، آزمایشات در محل و یا در

آزمایشگاه و یا بر طبق احساس خود از طرز عمل سازه‌ها ، اقدام به‌طراحی می‌نمودند . در حقیقت آنچه که یک طراح و سازنده را در کار خود موفق می‌گرداند بستگی به‌چهارعامل زیر دارد ،نیاز و الزامات تمدن آن زمان چه باشد ،خصوصیات‌مصالح موجود چیست ، فنون اجرایی وشرایط‌اقتصادی زمان چه‌بوده و قدرت‌سازندگی که لازمهٔ‌عینیت‌بخشیدن‌به‌معلومات ذوق و تجربه طراح است چه باشد .

درقرون نوزدهم و بیستم علوم ، ریاضیات و پیشرفتهای مربوط به‌مصالح‌درمهندسی سازه‌ها دخالت روزافزونی داشته و در آن دو قرن کلیه معلوماتی که در زمینهٔ مهندسی سازه مورد استفاده قرارگرفته به‌صورت آئین‌نامه‌های ساختمانی وفرمولهای منسجم‌ریاضی‌درجهت طرح و اجرای سازه‌ها طبقه‌بندی شده‌اند . در یک چنین موقعیت حرفه‌ای آثار طراحان و سازندگان مبرزی نظیر مایار Maillart، فرایسینه Freyssinet، تورجا Torroja و نروی Nervi بیشتر تحت تأثیر پیشینیان خود بوده است ، کلیه این مهندسین مشهور دارای قدرت خلاقیت و ابتکار بیش از حد معمول بوده‌اند ولی آنچه که بیشترازهمه‌مورد توجه‌است این‌است‌که درکارهای خود نه تنها از معلومات‌علمی و ریاضی خود ودیگران‌استفاده کرده‌اند بلکه به‌یک سلسله تجارت آزمایشگاهی و در محل نیز اقدام نموده‌اند* .

مطالعه زندگی‌این مهندسین مشهورهمان درسی را می‌دهدکه‌می‌توان‌با بررسی‌تاریخچه مربوط به‌پیشرفت مهندسی سازه مخصوصاً" در زمینه کاربرد مکانیک ، ریاضیات و علوم درطرح سازه‌ها و پدیده‌ها و نظریاتی که در طی قرون به‌صورت ثابتی در طرح و اجرای سازه‌ها به‌کار برده شده است آموخت .

تاریخچـه

قدیمترین ساختمانهایی‌که درموردآنها اطلاعات حقیقی وجوددارد دراعماق‌دریاچه‌ها

---

* جهت آگاهی از آثار این مهندسین مشهور می‌توان به‌کتب زیر مراجعه نمود :

Eduardo Torroja "Philosophy of Structures" University of California Press, Berkeley, 1958;

Eduardo Torroja, "The Structures of Eduardo Torroja," F. W. Dodge Corporation New York, 1958·

Pier Luigi Nervi, "Structures" F. W. Dodge Corporation, New York, 1956

Leonard Michaels, "Contemporary Structure in Architecture," Reinhold Publishing Corporation, New York, 1950.

قرار گرفته است که بعضی از آنها در دریاچه‌های سویس قرار دارد ،این بناها ،خانه‌هایی که بر روی شمع بنا شده‌اند و قدمت آنها به‌دورهٔ پارینه سنگی Paleolithic میرسد . البته آثارقدیمی‌تری دراروپا و آسیا وجوددارد ولی این آثار نمایانگر هنر طراحی‌نیستند .کشفیات باستان‌شناسی آثارقابل ملاحظه‌ای از بناهای مصری ، یونانی و تعداد متنابهی ازچنین‌آثاری را در آسیا و آسیای صغیر کشف نموده است *.

شاید مهمترین و جالبترین اشکال ساختمانی که مورد توجه مهندسین سازه‌های اولیه قرار داشته است به‌شرح زیر باشد : تیروسر طاقهای مربوط به‌معماری کلاسیک یونان که مربوط به‌سالهای ۵۰۰ قبل از میلاد است و ساختمانهای یونانی که شامل قوسها ، طاقها و گنبدها و همچنین خرپاهای چوبی و بتنی بوده است که توسط مهندسین یونانی در حد فاصل سالهای ۵۰۰ و۱۰۰۰ میلادی‌ایجاد شده‌است .طاقهای سرتیز با تکیه‌گاههای‌سنگی‌که توسط سازنده‌های گوتیک Gothic در کلیساهای با شکوه اروپا در قرون وسطی و در حدفاصل سالهای ۱۰۰۰ و ۱۵۰۰ میلادی ایجاد شده است ، حتی در مقایسه با سازه‌های جدید پلهای رومی نظیر پل معروف گار Pond du Gard و یا طاقهای گنبدی کلیسای سانتا صوفیه Santa Sophia استانبول (که در سالهای ۵۴۰ میلادی ساخته شده است) تحسین‌برانگیز می‌باشند. چنین تحسینی وقتی به‌نهایت می‌رسد که در مطالعهٔ آن بناها امکانات هنری زمان مربوط نیز مد نظر باشد .

شکی نیست که مهندسین مصری و سایر مهندسین باستان برای طرح سازه‌های جدید تجربه‌های خود را به‌صورت فرمولی درآورده بوده‌اند ولی معلوم نیست که آنها پایه گذار تئوری سازه‌ها بوده باشند . بعدها یونانیها در پیشرفت هنر ساختمانی قدمهایی برداشتند

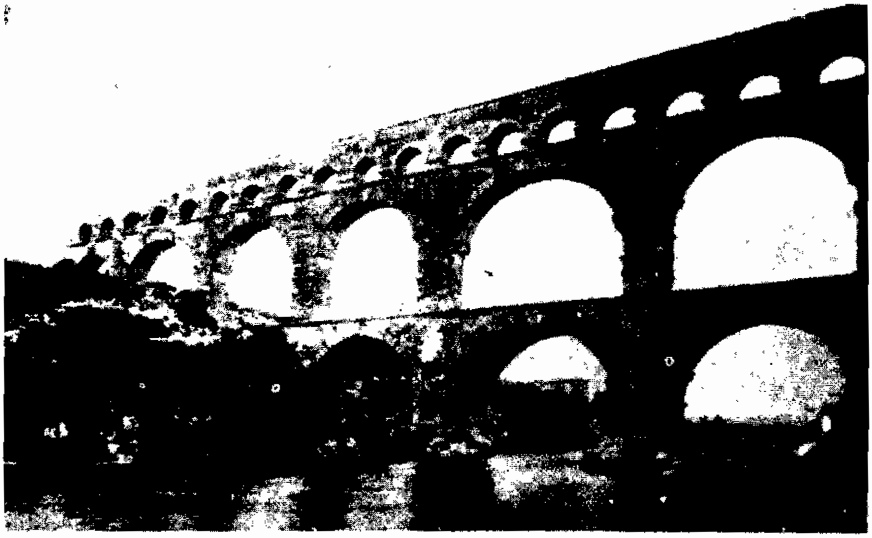
---

* کتب عالی و متعددی در مورد تاریخچه و تکامل مکانیک ساختمان و مهندسی‌سازه‌ها وجود دارد که از آن جمله می‌توان کتب زیر را نام برد :

Stephen P. Timoshenko, "History of Strength of Materials," McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953;

H. M. Westergaard, "Theory of Elasticity and Plasticity," Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1952;

David B. Steinman and Sara Ruth Watson, "Bridges and Their Builders," Dover Publications, Inc., New York, 1957



شکل (پ —۱) پل گار (Pont du Gard)— از آرشیو *Bettmann*

ولی آنچه آنان در مورد تئوری سازه‌ها بنا نهاده‌اند محدود به‌نظریات فلاسفه‌ای نظیر ارسطو Aristotle (۳۲۲–۳۸۴ قبل‌از میلاد) و ارشمیدس Archimedes (۲۱۲–۲۸۷ قبل از میلاد) است که پایه‌گذار مکانیک ساختمان از طریق بیان فرمول برخی از اصول استاتیک هستند. رومیان سازندگان اولین ساختمانهایی هستند که در ایجاد آنها برخی از اشکال ساختمانی پایه‌گذاری شده است ولی واضح است که آنها نیز معلومات ناچیزی‌درمورد تحلیل تنش این‌گونه اشکال ساختمانی‌داشته‌اند. به‌عنوان مثال هرگز نمی‌دانستندکه‌چگونه شکل دقیق طاقهای خودرا ایجاد کنند و همواره از قوسهای بادهانه‌کوچک‌که شامل‌نیم دایره بوده است استفاده می‌کردند.

اکثر معلومات مهندسی سازهٔ یونانیان و رومیان در قرون وسطی مفقود شد و پس‌از رنسانس دوباره کشف گردید. لئونارد داوینچی Leonardo da Vinici (۱۴۵۲–۱۵۱۹) نه تنها یک هنرمند برجسته عصر خود بوده بلکه یک مهندس و عالم‌بزرگ نیز به‌حساب‌می‌آید زیرا ازدفاتر یادداشت او معلوم‌است‌که نامبرده به‌برخی از اصول اساسی عملکرد مصالح ساختمانی کاملا" واقف بوده است. اثر داوینچی به‌وضوح بیانگر تدوین تئوری سازه‌هاست ولی هرگز به‌صورت کتابی بچاپ نرسیده‌است، همچنین گالیله Galileo (۱۵۶۴–۱۶۴۲) نه تنها بنیانگذار علم جدید بشمار می‌رود بلکه پایه‌گذار مکانیک مصالح نیزشمرده می‌شود زیرا که درآخرین اثرخود "دوعلم جدید" که درسال ۱۶۳۶میلادی‌به‌اتمام

رسید و درسال ۱۶۳۸ به‌چاپ رسید ، او اولین کسی است که مقاومت برخی‌از قطعات سازه‌ها ازآن جمله مقاومت نهایی تیر را مورد بررسی قرار داده است .

شکل (پ ــ ۲) گنبد سانتاصوفیه (Santa Sophia)از آرشیو *Bettmann*

گالیله مقاومت نهایی یک تیر تره‌را با بررسی مقطع مجاور دیوار آن مورد بررسی‌قرارداده است ،نامبرده با فرض صلب‌بودن مصالح چنین نتیجه‌گیری کرده‌است که در لحظهٔ گسیختگی تارهای تحتانی مقطع گسیخته شده و تحمل فشار متمرکز را ندارد و تنش کششی درکل ارتفاع مقطع به‌صورت یکنواختی گسترده شده است . چنین فرض گسترش تنش در حیطهٔ عملکرد ارتجاعی مصالحی که از قانون هوک تبعیت می‌نمایند صحیح نیست و فقط در حیطهٔ خمیری مصالح و در تحت بعضی از فرضیات صحیح خواهد بود . در حالی‌که تحلیل گالیله منتهی به‌مقاومت واقعی یک تیر تره نمی‌گردد ولی‌ازاین نظرکه نسبت مقاومت دوتیررا با مقطع مشابه به‌صورت صحیحی‌ارائه می‌کند جالب می‌باشد .بیشتراز هرچیزی برای مااین جالب است که هم گالیله و هم داوینچی بیشترازمقادیرتنش و کرنش قطعهٔ تحت باردرجستجوی مقاومت‌گسیختگی قطعه‌بوده‌اند . اگر کلیه محققینی که در این سه‌قرن گذشته زیسته‌اندبه‌جای این‌که به عملکرد ارتجاعی سازه‌ها بپردازند به‌مقاومت آنها نیز نظر داشتند شاید علم مکانیک ساختمان در حال حاضر توازن بهتری بین مقاومت سازه‌ها و عملکرد ارتجاعی قطعات ارائه می‌نمود .

محققین‌بعدی‌نظیرهوک Hook(۱۷۰۳–۱۶۳۵) ماریوت Mariotte (۱۶۸۴–۱۶۲۰)

ژاکب برنولی Jocob Bernoulli (۱۶۵۴–۱۷۰۵) الر Euler (۱۷۰۷–۱۷۸۳) لاگرانـژ Lagrange (۱۷۳۶–۱۷۴۸) دانیل برنولی Daniel Bernoulli (۱۷۰۰–۱۷۸۲) جان برنولی John Bernoulli (۱۶۶۷–۱۷۴۸) کولومب Coulomb (۱۷۳۶ – ۱۸۰۶) سهم عمده‌ای در تدوین این قسمت از علم داشته‌اند . از بین این افراد سهم کولمب بسیار قابل ملاحظه است و رساله وی که در سال ۱۷۷۳ میلادی نوشته شد گرچه آن‌طوری‌که شایسته عصر خود بود جلب توجه نکرد اما بسیار تعیین کننده بود ، در این مقاله برای اولیـن بار تحلیل کامل ارتجاعی تیرهای خمشی ارائه شده است او همچنین خاطرنشان کرد که تحت برخی‌از شرایط در لحظه گسیختگی محور خنثی از محل ارتجاعی خود تغییرمکان‌خواهد داد و به‌این‌ترتیب عملکردی از حالت خمیری را نشان داد .

در سال ۱۸۲۶میلادی که اولین چاپ کتاب ناویه Navier (۱۷۸۵–۱۸۳۶) در باره مقاومت مصالح چاپ‌گردید و برخی‌از تصورات اشتباه کولمب تصحیح شد ، اساس نظریه‌جدید مکانیک مصالح پایه‌گذاری گردید و لذا می‌باید کولمب و ناویه را دوپایه‌گذار اصلی این رشته مهم که اساس تحلیل سازه‌ها می‌باشد دانست . گرچه پیش‌کسوتانی که در قرن هیجدهم می‌زیستند به‌محاسبه و اندازه‌گیری بارهای نهایی قطعات سازه‌ها می‌پرداختند ، ناویـه در همان ابتدای ارائه نظریاتش اظهار کرد که درک عملکرد ارتجاعی سازه‌ها بسیار مهم است و می‌باید حد نهایی این عملکرد را فهمید و به‌این ترتیب تمرکز مطالعات در حیطه ارتجاعی سازه‌ها پایه‌گذاری شد . او اظهار کرد فرمولهایی که در حیطه ارتجاعی سازه‌ها ارائه می‌شـود بارگذار سازه‌های موجود انطباق‌دارند و ازآنها می‌توان به‌نحو رضایت‌بخشی درتعیین‌تنشهای مطمئن طراحی و محاسبات سازه‌ها استفاده نمود . متأسفانه در این مقالهٔ بسیار مؤثر ومهم ناویه هیچ نوع توجهی به‌عملکرد مصالح بعداز حیطه ارتجاعی و مقاومت نهایی سازه‌هـا ننموده است .

پس از چاپ کتاب ناویه باقیمانده قرن نوزدهم را می‌توان "عصر طلایی" نامید زیـرا درآن عصر علمی‌که در حال‌حاضر نظریه کلاسیک سازه‌ها نامیده می‌شودتدوین گردید .برخی از کسانی‌که در این عصر سهم مهمی در پیشرفت داشته‌اند عبارتنداز لامه Lamé (۱۸۷۰–۱۷۹۵) سن ونان Saint-Venant (۱۷۹۷–۱۸۸۶) کلاپیرون Clapeyron (۱۸۶۴–۱۷۹۹) کلبش Clebsch (۱۸۳۳–۱۸۷۲) رانکین Rankine (۱۸۲۰–۱۸۷۲) اری Airy (۱۸۰۱–۱۸۹۲) ماکسوئل Maxwell (۱۸۳۱–۱۸۷۹) کاستیگلیانو Castigliano (۱۸۴۷–۱۸۸۴) کولمان Culmann (۱۸۲۱–۱۸۸۱) موهر Mohr (۱۸۱۹–۱۹۱۴) فوپـل A.Foppl (۱۸۵۰–۱۹۲۴) یوراوسکی Jouravski (۱۸۲۱–۱۸۹۱) بـوسینگـــــر Bauschinger (۱۸۳۳–۱۸۹۳) فون‌تتمایر (۱۸۵۰–۱۹۰۵) یاسینسکی (۱۸۵۶ –۱۸۹۹)

مولر برسلو Muller-Breslau (۱۸۵۱–۱۹۲۵) انگسر Engesser (۱۸۴۸–۱۹۳۱) و بالاخره‌وهلر Wohler (۱۸۱۹–۱۹۱۴) این مردان و معاصرین آنها در تدوین ،تالیف و ارائه نظریه مکانیک مصالح و تحلیل سازه‌ها به‌نحویکه اساسا"به‌همان‌صورت‌که درحال حاضر ارائه‌می‌شود زحمات فراوانی تحمل نموده‌اند . در مباحث بعدی این کتاب همزمان با ارائه روشهایی که توسط این مردان ارائه شده است نام آنان را در برخی از اثرات مهمشان ذکر خواهیم کرد . یکی از روشهای کلاسیک که به‌نام روش "شیب ــ تغییر مکان " می‌باشد عملا" در اولین سالهای قرن نوزدهم توسط بندیکسن Bendixen ، مانی Maney و استنفلد Ostenfeld که عمده‌ترین مطرح کنندهٔ آن می‌باشند ارائه شده است .

از سال ۱۹۰۰ میلادی دوران مهندسی جدید سازه‌ها توسط پیشرفتهای شگرف زیر مشخص گردیده است :

۱ ــ چاپ تعداد زیادی‌ازکتابهای نفیس درموردتئوریهای‌ارتجاعی،خمیری ،کمانش صفحات و ارتعاشات*.

---

* از بین کتبی که در پیشرفت مکانیک ، تحلیل و طرح سازه‌های ایالات متحدهٔ آمریکا نقش بسیار زیادی ، در پنجاه ساله گذشته داشته‌اند می‌توان کتب زیر را نام برد .

A. E. H. Love, "The Mathematical Theory of Elasticity," Cam bridge University Press, London, 1892, 4th ed., 1927;

A. Föppl and L. Föppl, "Drang und Zwang," R. Oldenburg-Verlag, Munich, 1920, 2d ed., 1928;

H. Lorenz, "Tech nische Elastizitätslehre," R. Oldenburg-Verlag, Munich, 1913;

A. Nádai, "Plas ticity," McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1931;

S. P. Timoshenko, "Theory of Elasticity," McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1934, 2d ed. with J. N. Goodier, 1951;

S. P. Timoshenko, "Theory of Elastic Stability," McGrawHill Book Company, Inc. New York, 1936;

S. Timoshenko, "Theory of Plates and Shells," McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1940, 2d ed. with S. Woinowsky-Krieger, 1960;

R. V. Southwell, "An Introduction to the Theory of Elas ticity for Engineers and

شکل (پ ــ۳) پل آلومینیومی بر فراز رودخانه سگونای (Saguenay) .

۲ ــ توسعه ماشین‌آلات ، وسایل و فنون پیشرفته آزمایش‌مصالح و توسعه‌کاربرد تحلیل تجربی و تحقیقی در سازه‌ها .

۳ ــ کاربرد روش پخش لنگر و استفاده کلی از اندیشهٔ پخش لنگر .

۴ ــ مورد توجه مجدد قراردادن مقاومت نهایی و عملکرد خمیری سازه‌ها و قطعات

Physicists," Oxford University Press, London, 1936;

I. S. Sokolnikoff, "Mathematical Theory of Elasticity," McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1946;

F. Bleich, "Buckling Strength of Metal Structures," McGraw Hill Book Company, Inc., New York, 1952;

W. Flügge, "Statik und Dynamik der Schalen," Springer-Verlag, Berlin, 1934;

K. Girkmann, "Flächentragwerke," Springer Verlag, Berlin, 1946, 4th ed., 1956.

سازه‌ها و استفاده از نتایج حاصل در روشهای طرح سازه‌ها

۵ ــ کاربرد نظریه احتمالات و روشهای آماری در تعیین احتمال خرابی و یا احتمال غیرقابل مصرف‌بودن قطعات و مقایسه نتایج حاصل با ضرایب متعارف اطمینان

۶ ــ ظهور ماشینهای الکترونی و کاربرد روشهای جدید محاسباتی در تحلیل و طرح سازه‌ها . این چنین‌کاربردی بعدازسال ۱۹۵۰ میلادی به‌دنبال چاپ‌کتابها و نشریات متعددی که در بارهٔ روشهای ماتریسی و کاربرد ماشینهای محاسباتی در تحلیل و طرح سازه‌ها ایجاد شد ممکن گردید .

۷ ــ درک پیشرفته عملکرد قطعات بتن مسلح و توسعه کاربرد قطعات پیش‌ساخته و پیش فشرده بتنی در اجرای سازه‌ها

۸ ــ اجرای پوسته‌ها و جدارهای تحت تنش‌که در وهله اول توسط مهندسین صنایع هوایی بکاربرده شد و بعدهابا استفاده از تجارب آنها درطرح و ایجادسازه‌های‌ساختمانهای فلزی و بتنی استفاده گردید .

۹ ــ کاربرد مصالح پیشرفته ساختمانی نظیرفولاد ، آلومینیوم ، پلاستیک بتن، چوبهای آماده شده ، سرامیک و مصالح مسلح آزبست و سیمان در ساخت ابنیه .

۱۰ ــ کاربرد متداوم روشهای جدید اجرای ساختمانها و روشها و فنون جدید ساخت ، حمل ، نصب و نگهداری سازه‌ها .

بدون شک درشصت سال اخیر روش پخش لنگر مهمترین سهم را در نظریه سازه‌ها داشته است این روش‌توسط مرحوم‌پرفسورهاردی‌کراس Hardy Cross ارائه‌گردید و سپس به‌صورت کلی‌توسط پرفسورساوتول P.v.Southwell در روشهای آزادسازی تنش به‌کارگرفته‌شد . چنین روشهای تحلیل سازه‌ها سهم عمده‌ای در درک بهتر عملکرد سازه‌هایی نظیر شبکه‌ها و قابها با استفاده از بیانی ریاضی که به‌طریق همگرایی به‌نتایج مطلوب می‌رسند به‌عهده دارند ، به‌طوری‌که از سالهای ۱۹۳۰و ۱۹۴۰ میلادی چنین روشهایی که به‌تدریج (و با همگرایی اعداد) به‌نتایج دلخواه میل می‌کنند روشهای قدیمی را که همواره منجر به‌حل دستگاه معادلات چند مجهولی می‌گردند تحت‌الشعاع قرار داد .

از اوایل سال ۱۹۵۰ میلادی کاربردماشینهای حسابگر الکترونیکی‌که روزبروز تکامل بیشتری می‌یافتند سبب شد که در مسائل طراحی و محاسبات تحلیلی سازه‌ها که در امور روزمره مهندسی وجودداشت تسریع فوق‌العاده بوجودآید با در نظرگرفتن قدرت محاسباتی این‌نوع ماشینهای حسابگر، مهندسین قادرندکه نظریه کلاسیک سازه‌ها را براحتی‌حتی‌زمانی که این تئوریها منجر به‌دستگاه معادلات چندین و چندمجهولی می‌گردند به‌کار گیرند. این

قدرت محاسباتی خارق‌العاده به‌هیچ‌عنوان سبب رؤیایی‌شدن تئوری سازه‌ها نه ازنظر ابداع اشکال خارجی سازه‌ها و نه از نظر پیشرفت ممکن در مصالح مصرفی سازه‌ها و نه حتی از نظر تئوریهای پیچیده سازه‌ها نشده است بلکه کمک ماشینهای حسابگر به‌تحلیل سازه‌ها احتمالا" یکی از مهمترین پیشرفت ممکن در این ربع قرن اخیر می‌باشد.

همان‌طوری‌که ماشینهای حسابگر بسیار مهم بوده‌اند، یکی از مهمترین تحولات موجود در بخش سازه‌ها که در دههٔ اخیر ایجاد شده است سعی درایجاد توازنی بین ضوابط مربوط به‌تئوری خمیری و ارتجاعی در کاربرد آنها برای طراحی و محاسبه ابنیه می‌باشد.

سعی و کوشش فراوانی جهت بهتر نمودن کیفیت و تنوع فولادهای ساختمانی به‌عمل آمده و به همان نسبت نیز در مرغوب نمودن بتن سعی گردیده است، پیشرفتهای چشمگیری در پیش ساخته کردن و اجرای سازه‌های فولادهای و بتنی حاصل شده است، بدیهی است ساختمانهای ۱۰۰ طبقه "مرکزجان هنکوک John Hancock center ۱۱۰طبقه برج سیرس Sears Tower در شیکاکو و ۱۱۰ طبقه "مرکز تجارت جهانی" World Trade Center در نیویورک بیانگر قدرت ساخت و طرح ساختمانهای فولادی و همچنین ساختمانهای ۳۸طبقه "ساختمان برانسویک Brunswick Building در شیکاکو، ۵۲ طبقه " ساختمان میدان شل " One shell plaza Building در هستون و ۵۰ طبقه " برج میدان شل" One shell Square Building در نیواورلئان هنر ساختمان سازی بتنی را نشان می‌دهد. بدیهی است که در هر گوشهٔ جهان در چند دههٔ اخیر شاهد ایجاد ساختمانهای رویایی متعددی بوده‌ایم.

پروژه‌های مربوط به‌سازه‌های مهندسی

معمولا" مهندس سازه زیر نظر و در خدمت مهندس طراح پروژه که به طور متعارف مدیر و مسوول پروژه مهندس است انجام وظیفه می‌نماید.

در مهندسی راه، مهندس سازه در خدمت مهندس ترابری، مهندس هیدرولیک و یا مهندس تأسیسات انجام خدمت می‌کند تا این که سازه‌های مورد نیاز جهت پروژهٔ آنها را تأمین نماید. در مهندسی ساختمان مهندس سازه یکی از همکاران نزدیک مهندس معمار می‌باشد و به‌همین نحو مهندس سازه می‌باید در طرح ماشین‌آلات سنگین که مورد نیاز مهندسین مکانیک، شیمی و یا برق می‌باشد باآنان

همکاری نماید . امروزه مهندسین سازه باید در ایجاد سازه‌های لازم جهت پرتاب سفینه‌های فضایی و همچنین در طرح سازهٔ خود سفینه‌ها دخالت نمایند . البته برخی اوقات چون سازه پروژه موردنظر اهمیت اولیه پیدا می‌کند ممکن است به‌منظور اجرای پروژه مهندس سازه مدیریت پروژه را عهده‌دار شود از آن جمله می‌توان پروژه‌های مربوط به‌پلهای عظیم یا سدها ، اسکله‌ها و یا سالن کارخانجات را نام برد .

می‌توان پروژه مربوط به‌مهندسی سازه را به‌سه مرحله زیر تقسیم نمود : برنامه‌ریزی ــ طرح ــ اجرا

در مرحله *برنامه ریزی* می‌باید به‌کلیه عواملی که در طرح کلی سازه و ابعاد آن نقش اساسی دارند توجه نموده و از بین چندین طرح اولیه به بهترین انتخابی که منجر به‌طرح نهایی می‌گردد اقدام نمود . اولین بررسی لازم سازه مربوط به‌قابلیت آن در تأمین هدف ساخت آن و قابلیت باربری آن در فضاست .بررسیهای دیگری نیزدردرجه‌دوم اهمیت قرار دارند . از این قبیل عوامل مربوط‌به‌زیبایی ، جامعه‌شناسی ، قانونی و شرعی ، مالی،اقتصادی محیط‌زیست و حفظ منابع می‌باشند . علاوه‌بر عوامل فوق ممکن است برخی از الزامات و محدویتهای سازه‌ای و اجرایی در نوع سازهٔ انتخابی مؤثر باشد .

در مرحله *طرح* کلیه طرحهای اولیه انتخابی (درمرحله‌برنامه‌ریزی)درجزئیات مربوط به‌خصوصیات مصالح ،ابعاد جزئیات قطعات و اتصالات اجرایی مورد بررسی قرار می‌گیرد . معمولا" قبل از این‌که به‌آخرین مرحله بررسیهای مربوط به‌طرحها برسیم طرح نهایی‌انتخاب شده‌است .برخی اوقات انتخاب طرح نهایی بستگی به‌عوامل اقتصادی واجرایی پیدا می‌کند که عملا" تصمیم‌گیری نهایی به‌صورت دقیق ممکن نمی‌شود در این صورت طرحهای متعدد جهت مقایسه مالی و یا مناقصه تهیه می‌گردد .

در مرحله *اجرایی* مسائلی از قبیل تهیه مصالح ، ماشین‌آلات ، پرسنل ، ساخت‌قطعات درکارخانه و نصب اولیه آنها ، حمل قطعات به‌کارگاه و بالاخره ساخت و نصب آنهادرکارگاه مطرح می‌باشد . بدیهی است در این مرحله امکان طرح و محاسبه دو بارهٔ برخی‌از قطعات ضروری است ، زیرا که در اجرا امکان برخورد با مسائل غیرقابل پیش‌بینی در پی‌ها و یا عدم امکان تهیه مصالح موردنظر و یا برخورد با مشکل دیگری وجود دارد .

فلسفه طرح سازه‌ها

همان‌طوری‌که قبلا"ذکرکردیم منظوراز *طرح سازه‌ها* ارائه مناسبترین خصوصیات و ابعاد برای قطعات سازه و طرح جزئیات و اتصالات آنها می‌باشد . بدیهی است که این مرحله از

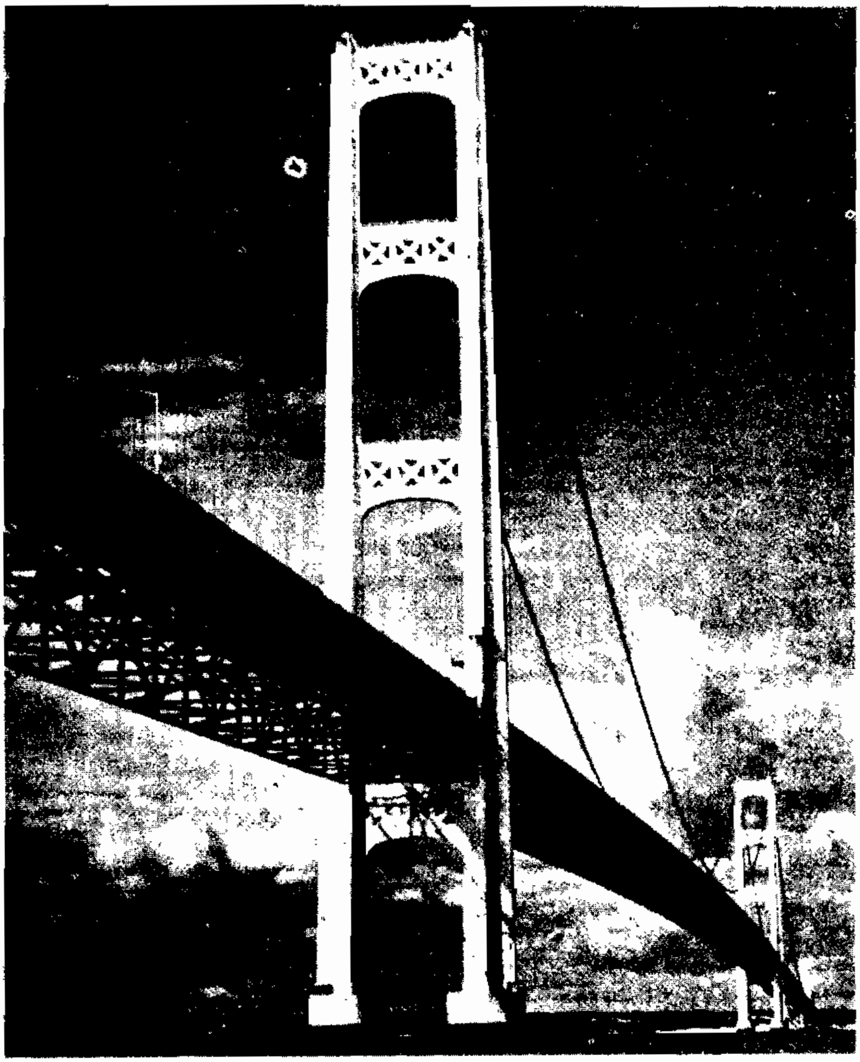
پروژه نظری‌ترین و فنی‌ترین مرحله پروژه است ولی این چنین مرحله‌ای نمی‌تواند بدون هماهنگی کامل با مراحل برنامه‌ریزی و اجرایی سازه‌ها انجام پذیرد . یک طراح موفق همواره ازکلیهٔ تذکرات و نکات برجسته مرحله برنامه‌ریزی آگاه بوده و برمسائل و مشکلات ممکن‌آتی در مرحله اجرایی نیز واقف است .

برای طرح هر سازه‌ای ابتدا می‌باید به‌بارگذاری لازم آن سازه که مقاومت‌سازه‌در برابر آن بارگذاریها در طرح سازه مطرح می‌باشد پرداخت و پس از این مرحله باید به‌تحلیل وتعیین نیروها ولنگرهای‌عمده داخلی (نظیر فشار ، برش ، لنگرهای‌خمشی ولنگرهای پیچشی) ، شدت تنش‌ها ، کرنش‌ها ، تغییر مکانها و دورانها ، عکس‌العمل ناشی از بارگذاریهای خارجی، تغییرات درجه حرارت ، انقباض ، خزش و یا سایر ملزومات محاسباتی اقدام کرد و بالاخره پس از این مرحله می‌باید به‌طراحی قطعات از نظر ابعاد و انتخاب مقاطع و مصالح مصرفی‌و طرح اتصالات مناسب و منطبق بر شرایط محاسباتی اقدام نمود . ضوابطی که جهت داوری در عملکرد واقعی‌قطعات و مقاطع‌انتخابی بکاربرده می‌شود برمجموعه‌ای ازاطلاعات (نظری ، آزمایشات در محل و درآزمایشگاه و تجربه علمی) استوار است . در طراحی و محاسبه اکثر سازه‌های متعارف مهندسی ، نظیر پلها و ساختمانها و غیره . روش محاسباتی که بر اساس مقایسهٔ شدت تنش مجاز با شدت تنش حاصل‌از بارگذاریها و یا سایرشرایط محاسباتی‌استوار می‌باشد از گذشته معمول‌است . این روش سنتی محاسباتی روش *طرح ارتجاعی*نامیده‌می‌شود .

زیرا در این روش شدت تنش مجاز به‌نوعی انتخاب می‌شود که در بدترین شرایط بارگذاری سازه ، مقدار تنش و یا کرنش هرگز به‌مقدار تنش و کرنش جاری‌شدن مصالح نرسد . بدیهی است که تعیین تنش مجاز برحسب شرایط مربوط به‌امکان کمانش ، خستگی و یا تردی مصالح و یا محدودیتهای تغییر مکانی سازه‌ها قابل تغییر خواهد بود .

امکان دارد که برحسب نوع سازه و یا شرایط موجود تنشهای محاسباتی‌سازه‌که براساس روشهای تحلیلی و شرایط فرضی بارگذاری سازه انجام می‌پذیرد هماهنگی و یکسانی کامل با تنش‌های حاصل از شرایط و بارگذاری واقعی سازه نداشته باشد . تا زمانی‌که‌محاسبات سازه‌ها براساس تجربیات قبلی‌است چنین عدم‌تطابقی مهم نیست زیرا با انتخاب بارگذاریهای لازم و شدت تنش مجاز ، همواره طیفی از ضریب اطمینان در برابر خرابی سازه برمحاسبات حاکم می‌باشد . انتخاب مقدار ضریب اطمینان بستگی به‌درجه عدم اطمینان دربرابرتعیین بارگذاری واقعی ، تحلیل و طرح سازه ، کیفیت مصالح مصرفی ، نوع اجرا و بالاخره به میزان جلوگیری ازتخریب‌سازه دارد . به‌عنوان مثال‌اگرتنش مجازکششی‌را برای فولادساختمانی‌برابر با $1400\ Kg/cm^2$ بگیریم در جائی که تنش جاری‌شدن فولاد برابر با $2300\ Kg/cm^2$ باشد ضریب اطمینانی برابر با۱/۶۵که حاصل تقسیم $\frac{2300}{1400}$ است انتخاب کرده‌ایم

روش محاسباتی مبتنی برتنش مجاز دارای یک نارسایی کلی است و آن عــدم توزیــع یکسان تنش مجاز در کلیه قطعات سازه و یا در کلیه انواع سازه‌ها است ، بــه همین دلیل امروزه تمایل روزافزونی بر استفاده هرچه بیشتر محاسبات بر اساس مقاومت نهایی ســازه



شکل (پ ــ ۴) پل مکیناک استرایت (Mackinac Straits) در میشیگان
این پل طویلترین پل معلق است ،فاصله بین دو مهار کابلهای آن ۷۸۷۷متر است دهانهٔ اصلی آن ۳۴۷۴ متر بوده که ازین حیث دارای سومین دهانــه می‌باشد .

موجود است و روش مبتنی بر تنش مجاز به‌عنوان روش مکملی بر این نوع محاسبات تلقی می‌گردد . این روش نوین محاسبات ، در طراحی سازه‌های بتنی به‌نام *طرح براساس مقاومت نهایی* و در طراحی سازه‌های فلزی بنام *طرح خمیری* خوانده می‌شود . در این روش ابتدا بارهای مؤثر بر سازه در اعداد مناسبی که *ضریب بار* خوانده می‌شود و مقدار عددی آنها اساس عدم اطمینانی‌که بر بارگذاری ، امکان تغییر کیفیت بارگذاری درطول عمر بنا ،ترکیب بارگذاریهای مختلف و طول زمان ترکیب چندبارگذاری حاکم‌است تعیین می‌گردد. همچنین در این روش هرگاه‌محاسبه سازه‌های بتنی مطرح باشد مقاومت‌نظری قطعات‌بتنی‌را با انتخاب ضریب مناسبی برای کاهش مقاومت آن که در اثر تغییرات مختصر مصالح مصرفی بتن ، نوع اجرا و ابعاد قطعه بتنی ممکن می‌باشد تا میزان مناسبی کاهش می‌دهند . به‌این ترتیب‌سازهٔ موردنظر تعیین مقطع می‌گردد و برطبق شرایط موجود بارهای ازدیاد یافته ممکن است (۱) سبب گسیختگی ناشی از خستگی ، کمانش و یا تردی مصالح و یا (۲) سبب جاری‌شدن کامل یک مقطع میانی‌سازه (یا جاری‌شدن همزمان‌چندین مقطع)و یا (۳)سبب‌تغییرمکان‌ارتجاعی‌ـ خمیری سازه و یا (۴) سبب قرار گرفتن کل سازه برگسیختگی کامل ، گردد .

طرفداران این روش عقیده دارندکه نتایج حاصل از این طریقه بیان کننده مقاومتی یکسان دربرابربارگذاری پیش‌بینی شده‌است زیراکه دراین محاسبات عملکرد غیر ارتجاعی و غیر خطی که در حیطهٔ عملکرد نهایی سازه وجود دارد منظور می‌گردد .

در سالهای اخیر در بین اغلب مهندسین برجسته این نگرانی روزافزون بوجود آمده است که روش مبتنی بر ضریب اطمینان نه‌تنها نادرست و دوراز واقعیت است بلکه فلسفه طراحی سازه‌ها براساس چنین روشی ، در اغلب حالات منتهی بر طرحی غیر اقتصادی و محافظه‌کارانه مسخره‌ای می‌گردد و حتی در بعضی از حالات بر محاسبه‌ای غیرمحافظه کارانه و با امکان خرابی ختم می‌شود .آنها می‌گویندکه هرگز چیزی به‌عنوان اطمینان کامل‌دربرابر خرابی وجود ندارد بلکه همواره*احتمال خرابی* و یا *احتمال ایمنی* وجودخارجی‌پیدا می‌کند. آنها احساس می‌کنندکه بررسی تغییرات اثرات بارگذاری و تغییرات‌مقاومت‌سازه‌ها می‌باید براساس مطالعات آماری انجام گیرد و براساس‌آن احتمال کارایی و یا برجائی سازه برآورد شود . در حال حاضر امکان ندارد که چنین روشی را در طراحی سازه‌ای به‌کار برد ولی‌امکان این‌که بتوان چنین روشی را بر ضوابط محاسباتی و طراحی سازه‌ها حاکم نمود پیش بینی می‌گردد .سعی فراوانی بر احقاق این آرزو انجام می‌گیرد تا آئین‌نامه‌های ساختمانی به‌طور واضح ضریب و یا احتمال مربوط به‌هرموردی را بیان کنند .

مصالح ساختمانی

بدیهی است که دسترسی بر مصالح مناسب ساختمانی یکی از شرایط محدودکننده یک مهندس سازهٔ مجرب است. سازنده‌های اولیه‌ساختمانها محدود به‌مصالحی نظیر چوب ،سنگ وآجر بودند وگرچه‌کاربرد آهن حداقل‌از زمان بنای‌اهرام مصرمتداول شده‌است ولی استفاده ازآن به‌عنوان یکی از مصالح ساختمانی به‌دلیل عدم امکان ذوب آن در مقیاس وسیع همواره محدود بوده است . پس ازانقلاب صنعتی و نیازمبرم به‌آهن به‌عنوان یکی‌ازمصالح‌ساختمانی قدرت ذوب آن در حد وسیعی ممکن گردید .

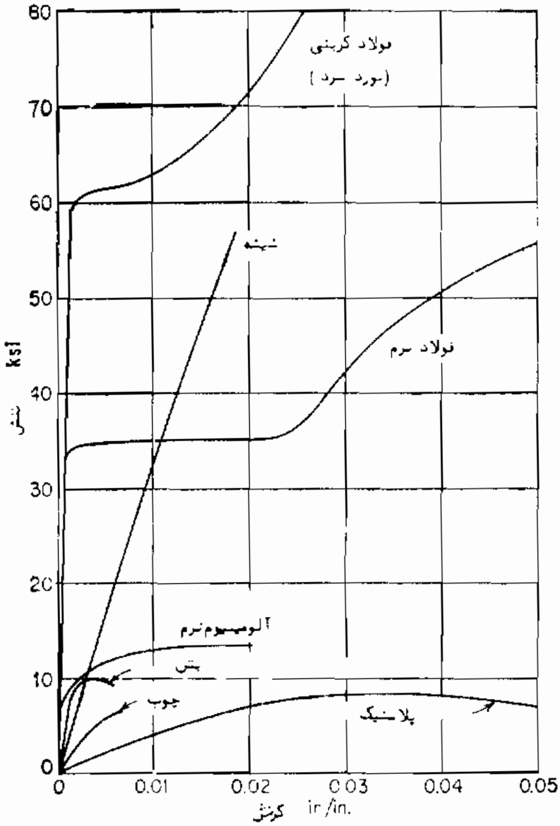
جان اسمیتن John Smeaton اولین‌مهندس انگلیسی‌ساختمان‌است‌که‌برای‌اولین‌بار به‌عنوان یک مهندس سازه در اواسط قرن هیجدهم از چدن استفاده کرد و سپس دومین مهندس انگلیسی آبراهام داربی Abraham Darby اولین پل از چدن را در سالهای ۱۷۷۶–۱۷۷۹ میلادی که یک پل قوسی چدنی با قوسهای نیم‌دایره است احداث نمود . شاهتیرهای چدنی ، غیرقابل انعطاف بودند و در تحت اثر بارهای متحرک در آنها گسیختگی ناشی از خستگی و شکنندگی ایجاد می‌شد ،بعدها آهن انعطاف‌پذیر ساخته شد و به‌طوروسیعی بعداز سالهای ۱۸۴۱ میلادی به‌کار برده شد . شاهتیرهای ساخته‌شده‌ازورقهای آهنی به‌طورمتداول درپلهای با دهانه‌کم به‌کار رفت . ازآنجائی‌که پلهای معلق‌بادهانه‌های وسیع به‌عنوان پل عبوری راه‌آهن دارای خمش‌پذیری زیادی بودند لازم بود که به طرح سازه‌های صلب‌تری برای چنین پلهایی اقدام شود و به‌این جهت از طرح لوله‌ای ساخته شده ازآهن نرم برای احداث پلهای معروف بریتانیا Britannia و کن وی Conway که در سالهای قبل از ۱۸۵۰ میلادی ایجادشدند استفاده گردید .در همین سالها ایجاد خرپاهای آهنی درممالک متحده آمریکا ،انگلستان و اروپا متداول شد . ،ضمنا" اولین پل معلق اززنجیر آهنی در سال ۱۷۴۱ میلادی در انگلستان احداث گردید .

گرچه آهن نرم مزیتهای فراوانی بر چدن داشت ولی بازهم گسیختگیهایی در سازه‌ها دیده می‌شد و نیاز مبرمی به‌مصالحی با انعطاف‌پذیری بیشتر حس می‌گردید . فولاد پاسخی براین نیاز بود . اختراع کوره بسمر Bessemer در سال ۱۸۵۶ میلادی و به‌دنبال آن کوره‌های زیمنس ــ مارتین Siemens-Martin که سبب تولید فولاد با قیمتی مناسب گردید باعث پیشرفتهای شایانی در ایجاد سازه‌های فولادی صدسال اخیر شد .

معمولا" فولاد کربنی تقریبا" یک ماده کامل ساختمانی است . آن‌را می‌توان به صورت مناسب و اقتصادی به‌شکلهای مختلف نوردشده و ابعاد و اندازه‌های دلخواه درآورد .آن را می‌شود با فنون مختلف و روشهای متعدد بدون آن‌که به‌طورمشخصی خصوصیات فیزیکی آن

تغییر کند قبلا" در کارخانه ساخته و سپس در کارگاه نصب نمود . مقاومت فشاری آن برابر با مقاومت کششی آن است و تا حدود ۵۰ درصد مقاومت‌نهایی خود به‌صورت ارتجاعی عمل می‌کند و در این حالت دارای ضریب ارتجاعی بسیار بالایی است . پس از آن که از ایـــن محدوده خارج گردید فولاد با تنشی ثابت کرنشی برابر با ۱/۵ الی ۲ درصد را به صـورت جاری تحمل می‌کند و چنین عملکردی این امکان را به‌وجود می‌آورد که اگر به‌دلیل خطای نصب و یا ساخت، تنشهای بالایی در نقاطی بوجود آمده باشد این تنشها به‌صورت‌یکنواخت متعادل گردد. پس از جاری‌شدن، فولاد قسمتی از سختی اولیه خودرا باز می‌یابدو قبل‌ازآنکه گسیختگی کامل نمونه کششی ایجاد شود ، نمونهٔ مزبور ۱۵ الی ۲۵ درصد طول اولیه خود ازدیاد طول پیدا می‌کند . نمودارهای تنش ــ کرنش مصالح مختلف در شکل (پ ــ ۵)نشان داده شده است .

مهمترین عیب فولاد اکسایش سهل آن است و لذا آن‌را می‌باید توسط رنگ و یا سایر



شکل (پ ــ ۵) نمودار تنش ــ کرنش مصالح مختلف

مواد دیگر پوشانید . اگر فولاد در مکانی که امکان حریق آن وجود داشته باشد به‌کار رود باید آن را با پوششی ضدحریق نظیر مصالح بنایی ، بتن و غیره پوشانید معمولا" قطعات فولادی دچار گسیختگی ناشی از شکنندگی نمی‌شوند مگر این‌که اتفاقا" دارای ترکیب نامناسب شیمیایی بوده و یا در دمای بسیار پائین واقع شده و یا این‌که تحت اثر تنشهای دو و یا سه محوری قرار گیرند (گسیختگی ناشی از تردی فولاد هنوز هم به‌طور کامل حل‌نشده‌است‌گرچه مکانیسم این شکست به‌نحو مطلوبی تحلیل گردیده است) .

آلومینیوم ساختمانی هنوزبه‌صورت وسیعی در سازه‌های‌مربوط به‌مهندسی راه‌وساختمان کاربردی پیدا نکرده است گرچه استفاده از آن روزبروز افزایش می‌یابد . در اثر انتخاب مناسب آلیاژ آلومینیوم و دقت در حرارت‌دهی آن می‌توان انواع مختلف آلومینیوم با مقاومتهای متفاوت به‌دست آورد . برخی از آلیاژهای آن با فولادساختمانی‌دارای مشخصات یکسانی هستند وتنها اختلاف آنها بافولادساختمانی درضریب‌ارتجاعی‌قسمت خطی آنهاست که درحدود یک‌سوم ضریب‌ارتجاعی فولاد می‌باشد .سبکی وزن و مقاومت در برابر اکسایش دو مزیت عمده آلومینیوم را تشکیل می‌دهد و چون خصوصیات آلومینیوم بستگی کامل به‌حرارت‌دهی آن دارد لذا در پرچکاری آن ملاحظات بسیاری لازم است .درسالهای اخیر فنون‌متعددی جهت پیش‌ساخته‌نمودن قطعات آلومینیمی به‌منظورآماده‌نمودن‌آن‌جهت‌نصب توسط پیچ در کارگاه و ایجاد تعداد زیادی از سازه‌های پوسته‌ای زیبا ،ابداع‌شده‌است .به‌نظر می‌رسد این چنین روشی که بر پیش‌ساخته‌نمودن قطعات آلومینیوم در کارخانه و نصب آنها به‌کمک پیچ در محل استواراست‌بهترین روش‌جهت کاربرد آلومینیوم ساختمانی باشد .

بتن‌مسلح و بتن پیش‌تنیده مانند فولاد ساختمانی سهم بسزایی در مصالح ساختمانی مهندسی ساختمان دارند . سیمان طبیعی در طی قرون متمادی در سازه‌ها به‌کار برده شده است .ساختمانهای جدید بتنی‌از اواسط‌قرن نوزدهم همزمان‌با اختراع سیمان پرتلندتوسط آسپدین Aspidin انگلیسی که در حدود سال ۱۸۲۵ میلادی اتفاق افتاد بنا شدند.گرچه ساختمانهای‌متعددی توسط مهندسین مجرب درنیمه دوم قرن‌نوزدهم ازبتن فولادی ساخته شد ولی کاربرد عمدهٔ بتن به‌عنوان یکی از مصالح مهم ساختمانی در دهه‌های قرن اخیر پیشرفت مهم و روزافزونی در طرح ساختمانهای بتنی پیش تنیده بوجود آمده که این مهم عمدتاً مرهون فرایسینه Freyssinet فرانسوی و مانیل Magnel بلژیکی است .

بتن غیرمسلح نه‌تنها یک ماده ناهمگن است بلکه به‌عنوان یکی از مصالح ساختمانی دارای عیبی‌عمده می‌باشد و آن‌عدم قدرت تحمل‌کشش آن است وقدرت کشش آن به‌یکدهم قدرت تحمل فشاری آن محدود می‌گردد . نه‌تنها گسیختگی بتن با فروریختن آن به صورت ناگهانی بوجود می‌آید بلکه گسیختگی فشاری آن نیز بهمین نحو بوده و بدون خبرکردن

قبلی توسط تغییرشکل زیاد حادث می‌شود (بدیهی است که در ساختمانهای بتن فولادی انتخاب و جاگذاری مناسب فولاد در مقاطع بتنی به‌قطعات بتن فولادی عملکرد انعطاف ـ پذیری خواهد داد). حتی اگر در انتخاب دانه‌بندی مصالح و نوع آنها دقت بسیار انجام گیرد و در اختلاط و ریختن بتن ملاحظات کامل انجام پذیرد بازهم یخزدگی بتن می‌تواند خسارات بسیاری بر بتن وارد نماید. بتن تحت اثر بارهای درازمدت خزش پیدا می‌کند و مراعات این خاصیت بتن در تحلیل قطعات بتنی بسیار مهم است. در طی زمان نگهداری مخصوصا" در دوران اولیه عمر آن، بتن به‌مقدار قابل ملاحظه‌ای انقباض می‌یابد که‌مقدارآن را می‌توان تا اندازه‌ای با انتخاب مناسب مخلوط بتن و استفاده از فنون مناسب بتن سازی و بتن ریزی کاهش داد.

با تمام این نارسایی‌های جدی بتن مسلح، مهندسین ساختمان توانسته‌اند در ایجاد ساختمانهای گوناگون زیبا و با دوام و اقتصادی از بتن مسلح موفق باشند. این چنین موفقیتهایی مرهون انتخاب مناسب ابعاد قطعات، قراردادن صحیح فولاد در مقاطع بتن مسلح و پیشرفت‌های عمده درساختن سیمان، انتخاب مخلوط و مصالح مناسب بررسی‌دقیق اختلاط بتن، بتن‌ریزی، نگهداری بتن وهمچنین پیشرفتهای عمده درطرق اجرای‌ساختمانها و در وسایل و ماشین‌آلات ساختمانی است.

روانی‌بتن و امکان تهیه مصالح آن در سطح وسیع به‌اضافه شکل‌گیری بتن سبب شده است که نه‌تنها در تهیه بتن پیش‌ساخته و پیش‌تنیده پیشرفت روزافزونی حاصل شود بلکه سبب شده است که ساختمانهای بتن مسلح سنتی به‌صورت یکی از مهمترین سازه‌های‌درحال توسعه حال و آینده درآید. کاربرد قطعات بتن پیش‌ساخته که تحت بررسیهای جدی در کارخانجات تهیه شده و با استفاده از فنون تنیدن بتن در کارگاه‌نصب می‌شوند به‌صورت بسیار سریعی توسعه می‌یابد دلیل آن نسبت بالای دستمزد کارگر بتن‌کار به‌قیمت‌مصالح آن بتن می‌باشد.

چوب یکی از مصالحی است که ازابتدای امر به‌دلیل استحکام تقریبا" یکسان آن در فشار و کشش مورد استفاده سازندگان ابنیه قرار داشته است. چوب برحسب‌نوع‌آن‌وبه‌دلیل گرههای موجود درآن ماده‌ای ناهمگن است، استحکام آن در امتداد طولی و عرضی‌دارای تفاوت فاحشی بوده و به‌این‌دلیل جسمی ناهمگن‌است. به‌دلیل حساسیت‌زیادی که‌به‌رطوبت و باکتریها و اثرات حشرات مضر دارد دوام زیادی ندارد. استحکام کششی و فشاری این جسم در امتداد موازی با تارهای طولی آن بیشتراز استحکام آن در امتداد عمود بر تارها است و استحکام برش چوب در امتداد عمود بر تارهای طولی بیشتراز استحکام‌آن‌درامتداد موازی با آن تارها است. ازطرف دیگر چوب مقاومت چندانی در برابر بارهای طویل‌المدت

ندارد . این ماده زیر بارها تغییرشکل پیدا کرده و شکم می‌دهد زیرا که ضریب ارتجاعی آن در حدود نصف ضریب ارتجاعی بتن (و در حدود یک دوازدهم ضریب ارتجاعی فولاد) است . گسیختگی حاصل از فشار در چوب ناگهانی نیست ولی گسیختگی حاصل از کشش آن ناگهانی است ــ البته نه به‌صورت گسیختگی در بتن ــ . در طرح سازه‌های چوبی باید ابعاد موردنظر را با درنظرگرفتن تغییر آن در اثر حرارت و رطوبت طرح نمود . واضح است که ظریف‌ترین قسمت طراحی در سازه‌های چوبی مربوط به ارائه اتصالات مناسب و عملی در آنها است .

در حال حاضر به‌دلیل توسعه وسیعی که در اجرای سازه‌های فولادی و بتن‌مسلح‌بوجود آمده است استفاده از چوب به‌طور عمده برای ایجاد داربست‌ها و چوب بست‌ها و یا جهت استفاده در سازه‌های درجه دوم و یا موقتی می‌باشد . صنایع جدید در این‌چهل‌سال اخیر به‌سازه‌های چوبی جانی تازه داده‌است احیای سازه‌های چوبی‌با ارائه انواع اتصالات‌جدید و با استفاده از صنعت برای بالابردن دوام چوبها و به‌صورت چندلایه در آوردن آنها و چسبانیدن‌این لایه‌ها به‌یکدیگربه‌کمک چسبهای بادوام انجام گرفته‌است .استفاده‌ازتخته‌های چندلا به‌دلیل استحکام یکسان آن در کلیه جهات روز به‌روز افزونتر می‌شود و پیشرفت فن اجرای سازه‌های چوبی بااستفاده از این نوع چوبها تا جائی‌است‌که در برخی‌ازانواع‌سازه‌ها این چنین اسکلتها با سازه‌های بتنی و فولادی به‌رقابت پرداخته‌اند .

مصالحی که درآینده به‌عنوان مصالح مهندسی به‌کارخواهند رفت عبارت از پلاستیک و فلزهای خوشنما و آلیاژهائی نظیر بریلیوم ، تنگستن ، تانتالئوم ، تیتانیوم ، مولیبدن ، کرمونیوم ، وانادیم و نیوبیوم است . انواع متفاوتی از مصالح پلاستیکی وجود دارد که مشخصات مکانیکی آن مصالح به‌نحویست که طیف وسیعی را ایجاد می‌نماید . در این طیف می‌توان مقاومت موردنیاز مصالح ساختمانی موردنیاز را یافت و به‌این ترتیب برای یک طرح مخصوص یکنوع پلاستیک مناسبی را انتخاب نمود . تجربه نشان می‌دهد که کاربرد مصالح پلاستیکی در مجاورت هوا محدود است لذا باید به‌این خاصیت مواد پلاستیکی در طرح قطعات اولیه سازه‌ها توجه نمود . یکی از موارد کاربرد مصالح پلاستیکی استفاده از آنها در سازه‌های پوسته‌ای و مشبک است و به‌این جهت در آینده توسعه استفاده از این ماده دراین سازه‌ها پیش‌بینی می‌شود .

یکی دیگراز مصالح پیشرفته ساختمانی ترکیبی از فیبر و یا اجسام‌نظیرفیبر و بتن‌است که سبب مسلح‌شدن بتن می‌گردد ، گرچه از ترکیباتی متشکل از فیبرهای شیشه‌ای و بتن که‌از جنس شیشه و یا پلاستیک می‌باشند استفاده‌می‌شود ،ولی به‌نظر می‌رسد استفاده وسیع از آن در انواع عناصر درجه دوم ساختمانی بیشتراست . بتن مسلح‌شده توسط فیبر یکی دیگر از

ترکیباتی‌است که به‌طورجدی مورد بررسی قرارمی‌گیردتجربیات متعددی بر روی ساخته‌هایی از این ماده تحت شرایط مختلف بارہری مورد آزمایش قرار گرفته است .آزمایشاتی بـر روی ترکیبی از فیبرهای شیشه‌ای و یا آهنی و بتن انجام‌گرفته، بارگذاریهای تجربی برروی‌ترکیب بتن و فیبرآهنی به‌عمل آمده است .

انواع نارساییها و گسیختگیهای سازه‌ها

نامناسب‌بودن سازه ممکن‌است به‌یکی از شکلهای زیر ظاهر شود بدترین حالت‌آن‌حتی زمانی‌که کمترین تلفات جانی را سبب شود گسیختگی سازه خواهد بود . گسیختگی‌سازه‌ممکن است کلی بوده و سبب از هم‌پاشیدن کل سازه شود و یا ممکن است موضعی بوده و محـدود به‌یک قسمت از سازه باشد . اغلب گسیختگیها در زمان ساخت سازه اتفاق می‌افتد و معمولا " به‌دلیل برنامه‌ریزی غلط اجرا و نامناسب‌بودن تکیه‌گاهها ومهارهای سازه‌های ناتمام بوجود می‌آید . گاهی اوقات گسیختگی کامل سازه به‌دلیل سانحه‌های طبیعی ، انفجار ، تصادم و یا حریق کامل اتفاق می‌افتد ولی اغلب گسیختگی‌ها به‌سبب بارگذاریهای معمول به‌سازه‌بوجود می‌آید .

شکل دیگری ازنامناسب‌بودن یک سازه‌که نسبت به‌حالت قبل‌کم‌آسیب‌تر است‌غیرقابل استفاده‌شدن سازه است . چنین حالتی‌که به‌دلیل نقص سازه اتفاق می‌افتد عملا" مـانـنـد حالت قبل تأسف بار نیست ولی می‌تواند خسارت مالی فراوانی به مالک خود وارد نمایـد. به‌عنوان مثال ، غیرقابل استفاده بودن یک سازه ممکن است به‌دلیل عدم صلبیت لازم و خاصیت ارتعاشی نامتعارف آن بوجود آید . در این حالت به‌علت خاصیت ارتجاعـی سازه کارکرد مناسب برخی‌از ماشین‌آلات حساس‌که بر آن سازه تکیه دارندمقدور نبوده و بتدریج ترکهای مویی در روکاری و یا توکاری ساختمان بوجود آمده و بسیاری از مردم ساکـن آن ساختمان در حرکات شدید بنا و تغییرشکلهای محسوس‌آن متوحش خواهند شد . از طـرف دیگر ممکن است خاصیت ارتعاشی سازه به‌دلیل ضعف آن در برابر بارهای دینامیکی مؤثـر برآن اتفاق افتد ، چنین ضعفی سبب خواهد شد که ساختمان در برابر زلزله‌ای ضعیف و یـا در برابر اثرات آئیردینامیکی بادی نسبتا" ضعیف همان‌طوری‌که در مورد پل تاکـومـا Tacoma Narrows Suspension Bridge درسال ۱۹۴۰ میلادی اتفاق افتادواژگون شود .

بی‌توجهی‌های متعددی علاوه بر نامناسب‌بودن عناصر اصلی یک سازه می‌تواند عامل اولیه گسیختگی سازه باشد ، به‌عنوان مثال روش غلط اطفاء حریق می‌تواند باعـث حریقی

خارج از مهار شده و سبب چنان افزایش دمایی گردد که تغییرشکل فوق‌العاده فولاد سازه را ایجاد نماید و به‌این ترتیب سبب نقصان قدرت باربری یک خرپای باربر شده و گسیختگی آن خرپارا سبب شود. نظارت ناصحیح ممکن است باعث گردد که پوشش ضد حریق‌تیرریزی کف یک آزمایشگاه به‌طور ناقصی اجرا شده و سبب گردد که انفجاری موضعی که باعث حریقی موضعی می‌شود سبب خسارت فوق‌العاده‌ای گردد. اجرای نادرست می‌تواند منجر به‌رنگ‌ــ آمیزی ناقص ضد زنگ اتصالات مهم‌شده و لذا باعث زنگ‌زدگی‌آن اتصال گردد که‌خود عامل گسیختگی‌آن اتصال تحت اثربارهای دینامیکی خواهد شد. درحالت دیگری‌اشتباه‌محاسباتی سبب خواهد شد که مثلا" اثر نیرویی در طرح و محاسبه گرهی در نظر گرفته نشده باشد و لذا سبب ریزش سازهٔ نیمه نصب شده گردد. یکی دیگر از اشتباهات‌متعارف طراحی، محاسبه غلط تکیه‌گاههای تیرهای قرار گرفته بر روی دیوارهای آجری است ـــ *طرح و محاسبه گرهها فوق‌العاده مهم می‌باشد*. شاید بهترباشد که مهندسین سازه و ساختمان‌همواره به‌یاد داشته باشندکه بخاطر میخی، کفشی از بین می‌رود و بخاطرنعل اسبی می‌میرد ـ. اغلب‌دراستفاده از سازه‌های کهنه و یا در تبدیل سازه‌های کهنه به‌سازه‌های جدید، قضاوت نادرستی در باربری آنها انجام می‌گیرد به‌طوری که سبب می‌گردد سازه تحت اثر بارهایی که هرگز برای آن محاسبه نشده است قرار گیرد و به‌این ترتیب واژگونی آن حادث گردد. بالاخره واژگونی و گسیختگی یک سازه ممکن است در اثر حرکت و نشست یک پی که به‌طور نادرستی محاسبه شده است بوجود آید.

گسیختگی یک سازه ممکن است در اثر گسیختگی یکی از عناصر آن درحالات‌زیربوجود آید: تغییرشکل خمیری و یا گسیختگی تدریجی مصالح، گسیختگی‌ناگهانی (توأم با شکستگی) مصالح، کمانش و یا خستگی مصالح.

گسیختگی تدریجی سازه که در اثر کش‌آمدن مصالح نرم آن بوجود می‌آید بندرت امکان‌پذیر است زیرا در چنین گسیختگی تغییرشکلهای فوق‌العاده بوجود می‌آیدکه به‌دنبال خود تغییر مکان و افت چشمگیری را سبب می‌شود. تحت اثر بارگذاریهای متعارف در یک چنین حالاتی‌می‌توان با حذف بارگذاری موضعی‌ساختمان ویا با تقویت‌موقت آن‌ازگسیختگی کامل بنا جلوگیری کرد. بدیهی است که در موارد فاجعه‌آمیز نظیر وقوع زلزله، طوفان، سیل آتش‌سوزی و بمباران شانس جلوگیری‌از ریزش حاصل‌از گسیختگی تدریجی سازه وجودنداشته و واژگونی در اثر تغییرشکل فوق‌العاده خمیری سازه اتفاق خواهد افتاد. در اغلب سازه‌های واژگون شده معمولا" تغییرشکل فوق‌العاده‌خمیری در بسیاری از نقاط‌آن دیده می‌شود، ولی به‌طورمتعارف این نوع تغییرشکلها همزمان با واژگونی سازه بوجود می‌آیند و به‌تنهایی‌سبب گسیختگی سازه نمی‌شوند.

گسیختگی حاصل‌از تردی مصالح سازه بیشتراز گسیختگی تدریجی مصالح سبب‌واژگونی سازه‌ها می‌گردد . برخی از فولادها (و شاید بعضی از سایر آلیاژها) برحسب این که ترکیب متالورژیکی آنها چه بوده و بچه نحوی ساخته شوند اغلب در دمای پائین دچار چنین گسیختگی و شکست می‌شوند . مخصوصاً" اگر قطعه به‌نوعی طرح و ساخته شده باشد که محل گسیختگی تحت اثرتنش دو و یا سه‌محوری قرارگرفته باشد و در اثرآن از جاری‌شدن خمیری فولاد درآن نقطه ممانعت شده و سبب برش مقطع درآن گردد . در سازه‌های بتن مسلح شکستگی مقطع زمانی حادث می‌گرددکه سطح مقطع فولاد بالا باشد ولذا قبل از این‌که‌فولاد مقطع به‌حد جاری‌شدن خود برسد بتن تحت اثرفشار موجود گسیخته گردد . در یک چنان حالاتی اگر فولاد فشاری با تنگهای مناسب در مقطع بتنی پیش‌بینی نشده باشدکه بتوانداز گسیختگی سطح تحت فشار جلوگیری کند واژگونی ناگهانی مقطع بوجود خواهد آمد . چنین حالتی زمانی‌که فولاد نامناسب قطری نیز درمقطع وجود داشته باشد امکان وقوع‌پیداخواهد نمود .

در سازه‌های مربوط به‌مهندسی (راه و ساختمان) عمران که در اغلب بارهای وارده به‌آنها به‌صورت استاتیک است ، اغلب واژگونی‌ها در اثر کمانش قطعات است . ممکن است کمانش موضعی به‌تنهایی سبب واژگونی کامل سازه شود . چنین حالتی بال و یا صفحهٔ جان فشاری یک قطعه و یا بال و جان فشاری یک شاهتیر می‌تواند بطور موضعی کمانه کند .قطعات فشاری و یا تیری ازیک سازه ممکن است به‌تنهایی کمانه نموده و یا امکان دارد کل سازه ناپایدار گردد . در سازه‌های مهندسی گاهی اوقات کمانش سازه‌ها یک *کمانش ارتجاعی* است ، که در این صورت اگربار وارده بر سازه حذف شود آن سازه به‌شکل اولیهٔ خود برگشت خواهد نمود . مقاومت در برابر چنین کمانشی بستگی به‌صلبیت خمشی قطعه و طول و گاهی عرض مهار نشدهٔ آن قطعه دارد و چندان ربطی به‌شدت تنش وارده پیدا نمی‌کند . در اغلب اوقات با در نظر گرفتن ضریب لاغریهای متعارف ، کمانش سازه‌ها یک *کمانش غیر ارتجاعی* است ، که در این حالت ، تنش موجود در قطعه بیشتر از تنش حد خطی مصالح است در این‌حالت شدت تنش موجودعامل مؤثر و تعیین‌کننده خواهد بود زیرا دراین‌حیطه از عملکرد مصالح ، کرنش و صلبیت خمشی رابطه مستقیم با شدت تنش پیدا می‌کند . گاهی اوقات در حیطه کمانش ارتجاعی امکان دارد بار قسمتی از قطعه به‌دلیل تغییرشکل حاصل‌از کمانش نقصان یابد ولی گاهی نیز چنین حالتی امکان وجود پیدا نمی‌کند و به‌دلیل اثر بار مداوم ، تغییرشکل کمانشی افزایش یافته و به‌دنبال خود سبب تغییرشکل خمیری در قطعه و در نتیجه باعث خرابی آن می‌گردد .

واژگونی حاصل از خستگی عموماً" در سازه‌های متعارف مهندسی ساختمان

کمتر اتفاق می‌افتد‌ دولی متاسفانه در برخی موارد احتمال چنین واژگونی رو به‌افزایش نهاده است . چنین واژگونیهایی معمولاً" با شکستگی ناگهانی بوجود می‌آید که اغلب تشخیص علت چنین شکستگیهایی غیرممکن است . نمونه عینی چنین واژگونی ، گسیختگی پل معلق پوینت پلزنت (Point Pleasant) می‌باشد که این پل پس از بیش از پنجاه‌سال‌خدمت در ۱۵ دسامبر ۱۹۶۷ میلادی با بیش از بیست کشته واژگون گردید . این پل در ورجینیای غربی قرار داشت . گسیختگی به‌دلیل شکافتگی یکی از حفره‌های عبور میله‌های کششی که در اثر فساد تدریجی‌مصالح اتفاق افتاده بود ایجاد گردیدالبته مهندسین خبره در علت‌ایجاد این خرابی توافق ندارند و برخی‌ازآنان علت شکستگی را خرابی حاصل از تنش می‌دانند و برخی بر خرابی حاصل از خستگی اصرار می‌ورزند . در گزارش رسمی که علت خرابی را باید بیان کند نیز این اختلاف حل نگردید .

هرگاه بارهای دینامیکی قابل ملاحظه و یا این‌که لرزش شدیدی بر سازه اثر کند ، باید امکان شکستگی حاصل از خستگی را در مد نظر داشت . شکستگی حاصل از خستگی ارتجاعی به‌صورت خشک بوجود می‌آید که علت آن را فقط می‌توان با بررسیهای دقیق ، تعیین نمود . البته خستگی خمیری نیز امکان وقوع دارد ولی این نوع خستگی زمانی امکان پیدا می‌کند که مثلاً" سیمی و یا قطعه‌ای به‌حد خمش خمیری در جهت دیگر خم نماید خمش تغییر یابد و بار دیگر آن قطعه و یا آن سیم را تا حد خمیری در جهت دیگر خم‌نماید و این عمل تغییرخمش به‌طور مداوم‌ادامه یابد . چون در سازه‌های مهندسی ساختمان‌چنین امکان تغییرجهت خمشی با مقدار بالاوجود ندارد ،چنین شکستگی ندرتاً" امکان پیدامی‌کند با وجود این باید چنین حالت واژگونی را شناخت و مورد بررسی قرار داد .

بنابراین مهندسین سازه با شناخت کافی از امکانات خرابی و واژگونی سازه‌ها باید سازه را چنان طراحی نمایند که امکان غیرقابل مصرف شدن آن وجود نداشته باشد ، لذا مهندس سازه می‌بایستی کلیه اسکلتهای سازهٔ مورد نظر را تحت اثر بارها و اثرات مؤثر بر آن مورد بررسی قرار دهد و اگر جهت چنین بررسی مباحث نظری موجود نارسا و ناکافی باشد با استفاده از تجربیات خود اقدام به‌مدل‌سازی و یا آزمایشات لازم بنماید .

شکلهای سازه

مهمترین تصمیم طراحی که توسط مهندس سازه گرفته می‌شود انتخاب مناسب‌ترین شکل برای سازه است به‌نوعی که آن سازه قادر به‌پاسخگویی‌به‌کلیه خصوصیات مورد نظر باشد . اغلب اوقات مهندس سازه قادر نیست که به‌طور مطمئن و سریع

بهترین شکل سازه را انتخاب نماید و مجبور است چندین اسکلت مختلف را انتخاب‌کرده و پس از گذشتن از مراحل برنامه‌ریزی و طراحی به‌انتخاب بهترین آنها اقدام کند. بهترین و مناسبترین شکل سازه اسکلتی است که به‌بهترین نحو چه از نظرعملکرد و چه‌ازنظر اقتصادی اجتماعی، زیبایی و سایر ملزومات مهندسی بر سایر راه حلهای طراحی‌ارجحیت‌داشته‌باشد.

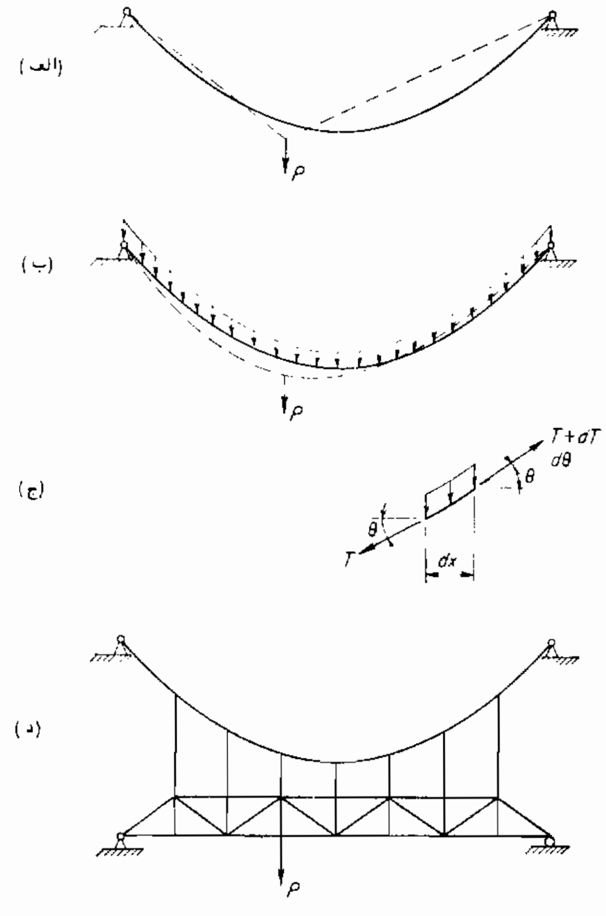
به‌صورت کلی شکلهای سازه را می‌توان برحسب تنش حداکثر موجود در آنها به‌دو نوع زیر تقسیم کرد: اولین نوع *اسکلتهای با تنش یکنواخت* است. در این نوع اسکلتها همواره شدت تنش درعمق جدار مقدار ثابتی‌است به‌عنوان مثال می‌توان کابلها، قطعات خرپا، غشاها و پوسته‌ها را نام برد. دومین نوع، *اسکلتهای با تنش متغیر* است، در ایــن نــوع اسکلتها شدت تنش در عمق مقطع قطعه متغیر است که عموما" این تغییر از مقدار حداکثـر کششی در یکی از سطوح خارجی تا مقدار حداکثر فشاری در سطح دیگر خارجی قطعه تغییـر می‌کند، به‌عنوان مثال می‌توان تیرها، قابهای صلب، دالها و صفحات را ذکر کرد.

بدیهی‌است در اسکلتهای با تنش یکنواخت بهتر از اسکلتهای با تنش متغیراز مصالح مصرفی بهره‌برداری می‌گردد زیرا تحت شرایط‌ارتجاعی، همواره مصالح بین دوجدارخارجی قطعه، تحت اثر تنش قابل ملاحظه‌ای قرار می‌گیرند و به‌این جهت همواره طراحان سازه‌سعی براستفاده ازاسکلتهای با تنش یکنواخت‌دارند ولی واضح است‌که‌گاهی‌به‌دلیل عدم‌مقدورات ساخت و مشکلات ناشی از اجرا، چنین انتخابی مقرون بصرفه نمی‌باشد.

سازه‌های کابلی

سازه‌های حاصل‌از کابلهای فلزی، اسکلتهای مقرون به‌صرفه‌ای‌را ایجاد می‌کنند، کابلها قطعات خمش پذیری هستند به‌این‌معنی‌که مقاومت خمشی‌آنها ناچیز بوده ولذا فقط با تحمل کشش به‌باربری قطعه می‌پردازند، و آنقدر تغییرشکل می‌دهند تا به شکل کثیرالاضلاع تعادل خود درآیند (به‌فصل ۱۰ مراجعه شود). این سازگاری شکل فقط یک تغییرشکل هندسی است و هیچ شباهتی به‌خصوصیات تغییرشکل حاصل در اجسامی که به‌دلیل روابط بین تنش‌وکرنش تغییرشکلی پیدا می‌کنند ندارد. همان‌طوری‌که در شکل (پ ــ ۶ الف) با خطر پرنشان داده شده است. شکل کابل تحت اثر وزن خود به‌صورت معادله زنجیر خواهد بود. حــال اگـر همین کابل‌را تحت‌اثر بارقابل‌ملاحظه‌ای(درمقایسه‌با وزن‌خودکابل)نظیر P قراردهیم شکل‌کابل کاملا" تغییر یافته و به‌صورت واضحی به‌شکلی که با خطوط مستقیم خط‌چین نشان داده شده است درمی‌آید. اگر همین کابل را تحت اثر باری که در مقام مقایسه با وزن خود کابل‌ناچیز باشد قرار دهیم همان‌طوری‌که در شکل (پ‌ــ۶ب) نشان داده شده است تغییرشکل آن‌دراثر

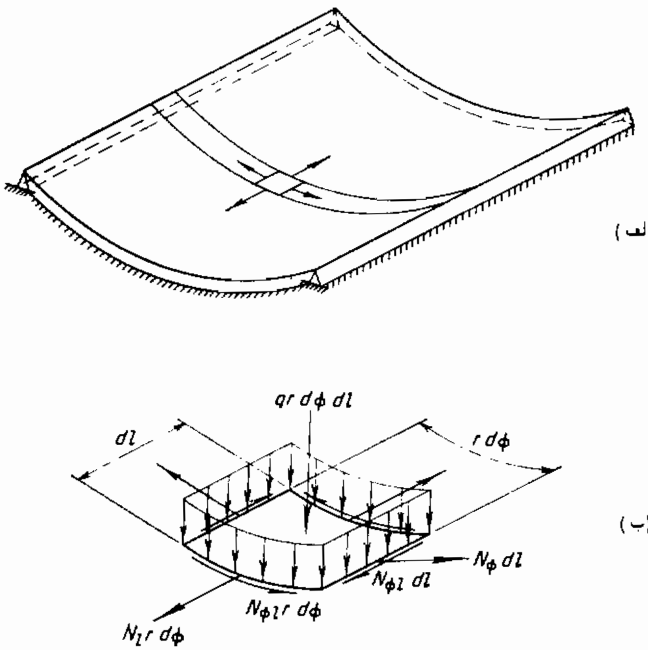
واردشدن این بار ناچیز خواهد بود. اصول حاکم بر تغییرشکل این سازه واضح است زیرا با بررسی تعادل قسمت کوچکی از آن می‌توان دریافت که حفظ تعادل افقی و عمودی یک کابل فقط به‌دو طریق امکان‌پذیر است. (۱) با تغییر کشش کابل (۲) با تغییرشیب آن. به‌بیانی دیگر با قبول تغییرشکل، فقط یک مجهول (کشش کابل) قادر نخواهد بود که در حالت کلی تأمین‌کنندهٔ هردو معادله تعادل باشد ــ دومجهول (کشش کابل وشیب‌آن) جهت این‌برقراری لازم است. ازآن جائی‌که در عمل، تغییرشکل زیاده از حد کابل سبب مزاحمت‌خواهدبود لذا به‌طوری‌که در شکل (پ‌ــ۶ د) نشان داده شده است لازم است که خرپایی جهت پخش بارهای متمرکز وارده بر کابل اضافه گردد.



شکل (پ ــ ۶) ــ سازه‌های کابلی

یک غشاء خمش‌پذیر نظیر آنچه در شکل (پ ــ ۷ الف) نشان داده شده

است در وهلهٔ اول چنان وانمود می‌کند که عملکردی مشابه تعداد زیادی کابل که در کنار یکدیگر قرار گرفته باشند داشته باشد ، در حقیقت هرگاه یک چنین غشایی‌دردوکنار قوسی خود دارای تکیه‌گاه نباشد عملا" چنان حالتی نیز وجود خواهد داشت .ولی‌درحالت کلی تنشهای برشی موجود بین عناصر کابلی مجاور یکدیگر سبب می‌شود که تفاوت فاحشی بین یک غشاء و کابل بوجود آید . این تفاوت را می‌توان با بررسی جزء قطعه‌ای از غشاء به‌طوری‌که در شکل (پ ـ۷ب) نشان داده شده است بررسی نمود . جهت تعادل‌جزیی‌از یک غشاء سه‌شرط باید تأمین گردد ، ـ جمع جبری نیروها درسه‌جهت افقی ، محیطی‌وشعاعی



(الف)

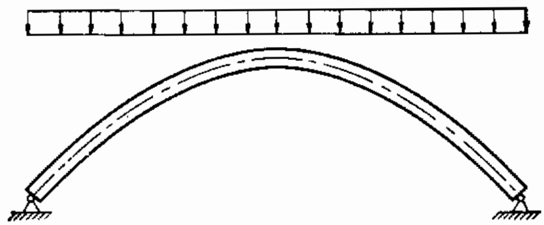
(ب)

شکل (پ ـ ۷) غشاء استوانه‌ای

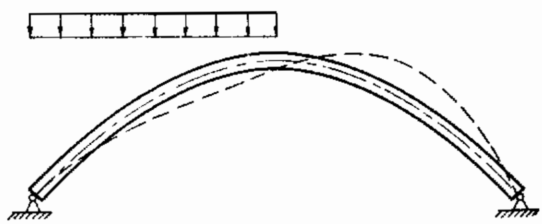
باید برابر با صفر شود ـ بیاد داریم که در تعادل کابل فقط دو شرط موجود بود ، ملاحظه می‌گردد که در هرصورت در مورد یک غشاء ، سه نیروی N_l ، N_ϕ و $N_{\phi l}$ وجود دارد که با تغییر مقادیر آنها می‌توان سه شرط تعادل موردنظر را بدون اینکه تغییرشکل غشاء در حد بیشترازتغییرشکلهای موجود حاصل از روابط بین تنش و کرنش لزوم داشته باشدبرقرارنمود یک چنین خاصیت سه‌بعدی غشاءها سبب می‌شود که از نظر سازه‌ای تفاوت فاحشی‌بین‌غشاء و کابل دوبعدی وجود داشته باشد . این چنین سازه‌ای یک اسکلت باربر با تنش یکنواخت است که بدون این‌که تغییرشکلی خارج از تغییر مکانهای کوچک حاصل از تغییرشکل مصالح

خود داشته باشد ، قادر به‌تحمل بارهای گسترده است . واضح است که اثر یک بار متمرکز قابل ملاحظه بر یک غشاء ــ که سبب انفصال در بارگذاری می‌گردد ــ همان‌طوری‌که‌در کابلها سبب تغییرشکل ناگهانی‌می‌شود در آن نیزیک چنین تغییرشکلی‌را بوجودخواهد آورد .

اگر یک **طاق (یا قوس)** نظیـر آنچه در شکل (پ ــ ۸ الف) نشان داده شده است شکلی منطبق بر کثیرالاضلاع تعادل بار مؤثر بر آن داشته باشد مانند یک کابل وارونه‌عمل خواهد نمود . گرچه طاقها برعکس کابلهای خمش‌پذیر دارای استحکام و سختـی‌خمشی می‌باشند ولی آنها نیز عموما" بارگذاری فوق‌الذکر را با تنش یکنواخت در عمق مقطع خود و بدون خمش تحمل خواهند نمود .حال اگر این طاق را تحت اثربارگذاری دیگری قـرار دهیـم همان‌طوری‌که در شکل (پ ــ۸ ب) نشان داده شده‌است طاق تمایل به‌تغییرشکل پیدا خواهدکرد



(الف)ــ شکل محورطاق به‌نوعی انتخاب شده است که منطبق برشکل کثیرالاضلاع تعادل بـار وارده باشد .



(ب)ــ این طاق همان شکل طاق (الف)را دارد ولی تحت اثر بارمتفاوتی‌قرارگرفته وبه‌این جهت محورطاق‌به‌صورتی‌که با مقیاسی‌خارج‌از اندازه‌توسط خط چین نشان داده شده است خمش پیدا کرده است .

شکل (پ ــ ۸) طاق دو مفصل

درست مانند یک کابل ــ تا بتواند به‌شکل کثیرالاضلاع تعادل بارگذاری جدید در آید ، ولـی چون دارای‌سختی‌خمشی می‌باشد این تغییرشکل بدون‌ایجاد لنگرممکن نخواهد شد درنتیجـه طاق‌مزبورمتحمل لنگرشده و تغییرشکل ناچیزی خواهد داد .ــ این تغییرشکل بمیزانی است کـه تعادل‌طاق توسط تنش‌های حاصل‌از لنگرو نیروی فشاری‌محوری تأمین‌گردد ــ دلیل‌این تغییرشکل

آن است که نیروی فشاری محوری طاق در حالت اخیر قادر نخواهد بود به‌تنهایی و بدون حضور لنگر و برش حاصل‌از آن هردو تعادل افقی و عمودی لازم‌را تأمین نماید. بدیهی‌است در حالتی که طاق همان شکل کثیرالاضلاع تعادل نیروهای‌وارده‌را داشته باشد حضور لنگر در مقاطع طاق بی‌مورد خواهد بود.

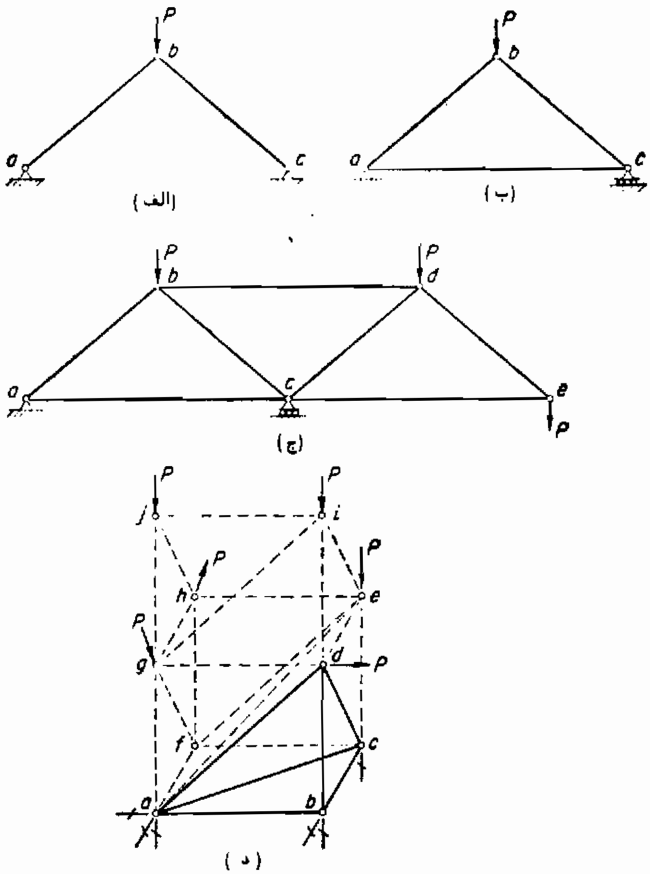
از نظر طراحی و در جهت یافتن یک شکل اقتصادی لازم است‌که‌شکل طاقهارا منطبق بر کثیرالاضلاع تعادل تحت بارگذاری حداکثر طاق، انتخاب نمود، در یک چنین حالتی تحت اثر بارگذاری حداکثر طاق دارای تنش یکنواخت شده و تحت اثر سایر بارگذاریها که عموماً "تعیین کننده نیز نیستند و از نظر شدت بارگذاری نسبت به‌حالت اول در درجه دوم اهمیت قرار دارند به‌طور رضایت‌بخشی عمل خواهد نمود. واضح است که در هریک‌ازحالات اخیر باربری‌طاق باربری مطلوبی نخواهد بود.

تشابه یک پوسته نسبت به یک غشاء مانند تشابه یک طاق نسبت به‌یک کابل می‌باشد. زیرا یک پوسته، غشایی با سختی و مقاومت خمشی‌است، درست به‌همان‌صورتی که طاق درمقایسه با کابل دارای سختی است. اغلب اوقات پوسته‌های مهندسی ساختمان‌دارای شکل وارونه‌ای از آنچه در شکل (پ ـ۷ الف) نشان داده شده است می‌باشند و به‌این‌جهت تنش تعیین کننده در آنها کششی نبوده و بلکه فشاری خواهد بود و به‌این جهت اغلب پوسته‌ها را با بتن مسلح می‌سازند. پوستهٔ وارونهٔ غشاء شکل (پ ـ۷ الف) درست به‌همان دلیلی که در مورداختلاف بین غشاء و کابل ارائه شد با تعدادی‌از طاق که پهلو به‌پهلوقرار گرفته باشند متفاوت خواهد بود.

گرچه یک پوسته دارای مقاومتی بوده و دارای سختی خمشی است ولی در هر صورت معادلات اساسی تعادل آن همان معادلاتی است که در مورد غشاء نظیر آن برقرار خواهد بود. به‌این ترتیب که بدون در نظر گرفتن تنشهای حاصل از خمش، همان سه‌نیروی مؤثر در غشای نظیر آن ـ N_{θ} ، N_{ϕ} ، $N_{\phi\theta}$ ـ باید در سه‌معادله تعادل آن صدق نمایند. درنتیجه اگر براین سازهٔ پوسته‌ای، باری گسترده اثر کند عمده این بار توسط تنشهایی‌نظیر آنچه در غشاء ها ایجاد می‌گردد تحمل خواهد شد، حتی اگر شکل پوسته بر سطح تعادل بارهای‌وارد منطبق نباشد. از آنجائی که سطوح غشایی تمایل اندکی به‌تغییرشکل خود دارند لذادرآنها تنشهای بااهمیت درجه دوم نیز ایجاد خواهد شد. فقط در مجاورت تکیه‌گاههای آنهاچون معمولاً" امکان تأمین دقیق نیروهای تکیه‌گاهی لازم توسط غشاءها مقدور نیست لذا تنشهای خمشی قابل ملاحظه‌ای بوجود می‌آید. بدیهی است اگر به‌پوسته‌ای باری متمرکز و یا باری گسترده با تغییرشدت ناگهانی اثر کند، تنشهای قابل ملاحظه‌ای به‌صورت موضعی درحدود آن بارگذاری بوجود خواهد آمد و یک چنین حالتی شبیه بارگذاری نظیر در غشاءها است.

تنشهای خمشی درمجاورت تغییر ضخامت و با تغییرشکل ناگهانی‌پوسته‌ها نیز بوجودخواهد آمد .

یکی دیگر از سازه‌های با تنش یکنواخت *خرپاهای* مستوی (و یا *شبکه‌های* مستوی) است بدیهی است که یک بار متمرکز P را می‌توان توسط دو عضو طاق مانندی نظیر شکل (پ‌ـ۹ الف) مهار نمود . در یک چنین حالتی محور این دو عضو بر کثیرالاضلاع تعادل چنان‌باری منطبق است .در صورتی‌که شالوده‌های چنان سازه‌ای قادر به‌تحمل عکس‌العمل افقی H حاصل از بارگذاری فوق نباشند آن عکس‌العمل افقی را می‌توان توسط یک عضو کششی که a را به c وصل می‌نماید و قادر به‌تحمل نیروی H است از پی‌ها حذف نمود . در چنین حالتی همان طوری‌که درشکل (پ‌ـ۹ب)نشان داده شده‌است سازهٔ موردبحث تبدیل به‌یک خرپای مثلثی خواهد شد . اگر لازم باشد که بارهای متمرکز دیگری را که بر d و e وارد می‌شوند نیز مهار



شکل (پ ــ ۹) شبکه‌های مستوی و فضایی

نمائیم می‌توان مانند شکل (پ ـ۹ج)و با استفاده ازدومیلهٔ اضافی دیگر هریک ازاین‌گرههای جدید را بر خرپایی که قبلا" بوجود آمده است متصل نمود . واضح است که یک‌چنین‌آرایش میله‌ای این امکان را می‌دهد که اعضای خرپا با تحمل تنشهای یکنواختی در مقاطع خود به‌تحمل بارهای گرهی بپردازند ـ این تنشها در برخی از قطعات به‌صورت فشاری ودربرخی دیگر به‌صورت تنش کششی خواهد بود ـ. حال اگر دستگاه بارهای وارده مستوی نبوده و بلکه سه‌بعدی‌باشد در این حالت لازم است که این دستگاه بارگذاری را توسط یک خرپای فضایی مناسب که با ایجاد یک چهار وجهی اولیه به‌همان نحوی که درشکل (پ ـ ۹ د) با خطوط پر نشان داده شده است تشکیل می‌گردد مهار نمود . برای ایجاد هر گره دیگری اضافه براین چهار وجهی اولیه از سه میله اضافی استفاده خواهد شد .

در شکل (پ ـ۹)گرههای دایره‌ای کوچک نشان‌دهندهٔ گرههای مفصلی بدون‌اصطکاک در خرپاهای مستوی (یا شبکه‌های مستوی) و گرههای گروی بدون اصطکاک در شبکه‌های فضایی می‌باشند . این نوع گرهها تنها لازمهٔ یک چنان سازه‌هایی هستند . عملا" خرپاهای جدید به‌دلایل اقتصادی و سهولت کار ازگرههای صلب که با به‌کاربردن پرچ، پیچ و یاجوش بوجود می‌آیند استفاده می‌شود . بدیهی است اگر اتصالات میله‌ها ، مفصلی‌باشد به‌سبب نیروی محوری میله‌ها طول آنها تغییر نموده و به‌دنبال این تغییر طول زاویهٔ بین اعضاء در گرههای اتصال مختصر تغییری خواهد کرد .حال اگراتصالات خرپا صلب باشد ، تغییرزاویهٔ بین اعضاء غیرمقدور بوده و جهت تأمین تغییر طول اعضاء لازم است‌که دراتصالات موجود خرپا مختصری خمش ایجاد گردد . اگر خرپایی به‌صورت صحیحی طرح و ساخته شده باشد تنشهای حاصل از این خمش در اعضای آن در مقام مقایسه با تنش محوری آن اعضاء ناچیز بوده و لذا یک چنان تنشهایی را ***تنش‌های ثانویه*** می‌گویند .

جالب است بدانیم‌که شبکه‌های باگرههای صلب به‌نوعی‌کاملا" شبیه سازه‌های‌پوسته‌ای هستند ، در اصل این‌نوع سازه‌ها تا حدزیادی در زمرهٔ سازه‌های باتنش یکنواخت می‌باشند و لذا تمایل دارند که مانند شبکه‌های متشکل ازگرههای مفصلی و یا کروی عمل کنند ولی چون دارای گرههای صلب هستند به‌مقدار اندکی تحمل خمش نیز خواهند نمود . اساسا" پوسته‌ها نیز تا حد زیادی تمایل به‌عملکردی نظیر غشاءها دارند ولی چون دارای سختی خمشی بوده و دارای آرایش ویژه تکیه‌گاهی هستند لذا در حدود تکیه‌گاهی قادر نخواهند بود که مانند غشاءها عمل کنند لذا معمولا" خمشی بااهمیت درجه دوم درحدود تکیه‌گاهی خود تحمل خواهند نمود .

باید یادآور شد که شبکه‌ها نمی‌توانند باری بجز در گرههای خود تحمل کنند زیرادر غیر این‌صورت خمشی فوق‌العاده در میله‌ی بار شده و در میله‌های مجاور در انتهای‌آن میله

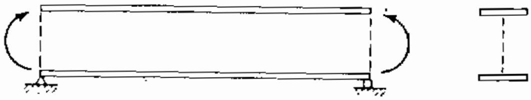
بوجود خواهد آمد. به‌عبارت دیگر باری که برای خرپاها مطلوبست فقط بارهای متمرکزگرهی است و درست برعکس، برای غشاءها و پوسته‌ها باری متمرکز مطلوب نبوده و بار گسترده بهترین نوع بارگذاری خواهد بود.

اغلب اوقات به‌دلایل اجرایی، اقتصادی و یا طراحی مخصوصا" هرگاه طرح پلها و یا ساختمانها موردنظر باشد مجبور خواهیم بود از اسکلتهای باربری با تنش متغیر نظیر تیرها قابها و صفحات و دالها استفاده کنیم. در این صورت می‌توان با انتخاب مقاطع مناسبی برای این سازه‌ها حداکثراستفاده از مصالح مصرفی در این سازه‌ها را به‌عمل آورد. به‌عنوان مثال در حالت فرضی خمش خالص تیر شکل (پ ــ ۱۰الف)، می‌توان کلیه مصالح مقطع تیر را در دوبال آن قرار داد، زیرا به‌دلیل عدم وجود برش تیر نیاز به‌جان نخواهد داشت. بدیهی است که در عمل همواره خمش همراه برش است و همان طوری که در شکل (پ ــ ۱۰الف) دیده می‌شود تیر جان نیز لازم خواهد داشت. سازندگان تیرهای فولادی و آلومینیومی تعدادزیادی مقاطع استاندارد I و ⌶ (بال پهن) برای حالات متفاوت‌اجرایی تهیه کرده‌اند که این مقاطع حداقل در مراحل *تنش‌های بحرانی* به‌صورت کاملا" مناسبی (از نظر اقتصادی) عمل می‌کنند. در سالهای اخیر به‌این واقعیت که قطعات خمشی قادر به‌تحمل بارهائی بیشتر از آنچه تحت اثر آن بارها قرار دارند می‌باشند توجه شده است. این حقیقت حتی در مقاطع قطعاتی که تنش در آن مقاطع به‌حد جاری شدن نیز رسیده باشد صدق می‌کند. به‌این ترتیب می‌توان سازه‌های غیرشکننده‌ای نظیر سازه‌های فولادی و بتن مسلح را تحت اثر بارهای بیشتری قرار داد که در این صورت در نقاطی که تنش به‌حد جاری‌شدن رسیده باشد تغییرشکل خمیری بوجودخواهد آمدویک‌چنین عملی سبب خواهد شد که تنش درسایر مقاطع تا حد قابل ملاحظه‌ای افزایش یابد. استفاده از چنین روشهایی همان‌طوری که قبلا"نیز ذکر شد، طرح خمیری نامیده می‌شود.

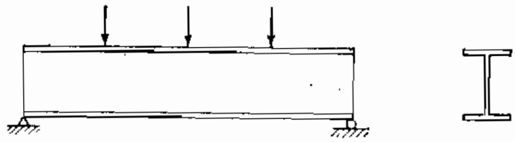
بدیهی است که در تیرهای با دهانه وسیع و با بارگذاری زیاد نمی‌توان از پروفیلهای نوردشده استفاده‌کرد و در این حالات لازم است که از پروفیلهای ساخته‌شده از ورق، نبشی و سایر پروفیلهای‌استانداردکه توسط پرچ، پیچ و یا جوش به‌هم متصل می‌گردند جهت‌تأمین مقاومت خمشی لازم استفاده کرد. امکان دارد جهت چنین قطعاتی از تیرهای بتن مسلح و یاچوبی و غیره‌استفاده نمود. محدودیتهای مکانی، کلیه‌مطالب بالا راا تحت الشعاع خود قرار می‌دهد و بهتر است که خواننده جهت آشنایی از این مقررات و استانداردها به‌کتابهای طرح و محاسبه مراجعه نماید.

گاهی تیرهارا همان‌طوری‌که درشکلهای (پ ــ ۱۰ الف) و (پ ــ ۱۰ ب) نشان داده‌ایم روی دو تکیه‌گاه انتهایی قرار می‌دهند ولی اغلب اوقات‌مخصوصا" درسازه‌های جدید تیرها

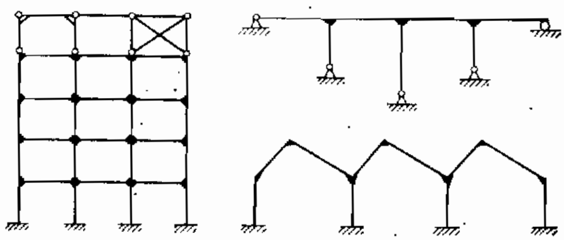
را به‌صورت سرتاسری روی چندین تکیه‌گاه میانی قرار داده و یا به‌صورت قاب به‌یکدیگرمتصل می‌کنند . معمولاً" هرروز نمونه‌های متعددی‌از این قابها را که به‌صورتهای‌مختلف درسازه‌های ساختمانی ساخته می‌شوند می‌بینیم . نمونه‌ای از این قابها در شکل (پ ــ۱۰ ج)نشان داده شده است . عموماً" این قابها به‌صورت سه‌بعدی ساخته می‌شوند که البته اغلب اوقات‌آنها را می‌توان به‌قابهای مستوی تبدیل نموده و به‌طرح و محاسبهٔ‌آنها پرداخت . گاهی اوقات



(الف)



(ب)



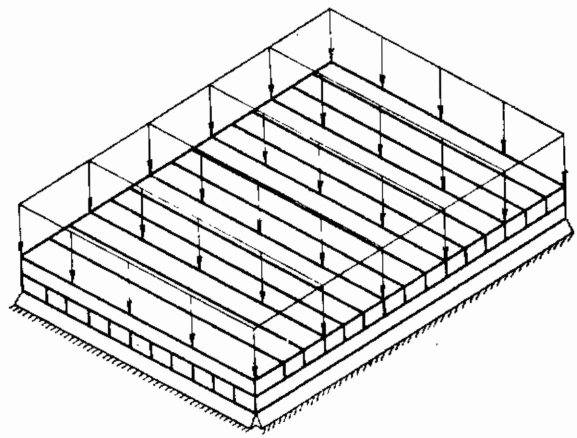
(ج)

شکل (پ ــ۱۰) قطعات خمشی

گرههای این قابها را با اتصالات پرچی ، پیچی و یا جوشی به‌نوعی صلب می‌کنند که نه‌تنها گرهها قادر به‌تغییرمکان‌افقی باشند بلکه بتوانند دورانی را که برای‌کلیه اعضاء مختوم به‌گره یکسان باشد نیز تحمل کنند . برخی اوقات اتصالات این گرهها به‌صورت نیمه‌صلب طرح می‌شود و ندرتاً" به‌شکل گرههای مفصلی طرح می‌گردد ولی گاهی اتصالات پرچی و یا پیچی را بنوعی طرح می‌کنند که گره قادر به‌تحمل مقدار لنگر ناچیزی باشد . دریک چنین حالاتی جهت پایداری سازه همان‌طوری که در طبقه فوقانی سازهٔ (پ ــ۱۰ ج) نشان داده شده است لازم است که از بادبندهای زانویی و یا قطری استفاده شود .

در اصل اعضاء سازه‌های قابی تحت اثر خمش و برش قرار دارند . البته کلیـه اعضاء آنها تحت اثر نیروی محوری نیز می‌باشند ولی مقدار این نیروی محوری بجز در ستونهـای عمودی قاب در سایر اعضاء آن ناچیز خواهد بود .

آخرین سازه با تنش متغیردال یا صفحه است .ازنظررفتار سازه‌ای،یک صفحه‌را می‌توان مانند دولایه از تیرهائی‌که پهلوبه‌پهلوی یکدیگر قرارگرفته‌اند فرض‌کرد .این لایه‌های تیرهـا همان‌طوری که در شکل (پ ـ ۱۱) نشان داده‌ایم به‌صورت عمود بر یکدیگر خواهند بود . اگـر چنین صفحه‌ای تحت اثر بار قائم قرار گیرد در صورتی که صفحه فوق‌الذکر در طول هرچهار لبهٔ خود دارای تکیه‌گاه باشد ،هردو لایهٔ تیرها درباربری این بارمشارکت کرده و بار وارده را به‌تکیه‌گاههای خود منتقل خواهند نمود (باید یادآور شد که جهت ارائهٔ صحیح این نوع رفتار صفحات ، می‌بایستی ضخامت هریک از دولایه را برابر با ضخامت صفحه فرض نمـود) بررسی رفتار یک صفحه طویل توسط دولایه تیر بسیار جالب است . درچنان حالتی لایه‌ای دارای طول زیادی است نسبت به‌لایه دیگر دارای سختی بسیار اندکی خواهد بودودرنتیجه قسمت عمده بار توسط‌تیرهای با دهانهٔ کم تحمل خواهد شد ، در این حالت دیده می‌شود که عملاً" وجود دولایه تیر غیرضروری است . به‌عبارت دیگر برای این‌که صفحه‌ای به‌صـورت دوطرفه عمل کند لازم است که نسبت ابعاد آن ۲ و یا کمتر باشد .



شکل (پ ـ ۱۱) عملکرد سازه‌ای یک صفحه

تحلیل رفتار سازه‌ها

یکی از قابلیتهای مهندس سازه قدرت وی در تحلیل ریاضی عملکرد سازهٔ مورد نظـر

تحت اثر بارهای وارده است هرگاه مهندس سازه به‌نظریه‌ای که با تجربیات آزمایشگاهی ودر محل سازگاری لازم داشته و توسط تجربه و مشاهداتی عینی نیز تائید گردد، دسترسی‌داشته باشد در این صورت او یک وسیله منطقی و اساسی جهت تحلیل و کاربرد معلومات خود در دست دارد. بدیهی است اگر چنان نظریه‌ای موجود نباشد مهندس موفق کسی‌خواهدبودکه با استفاده از ترکیبی از مدل‌سازی و آزمایشات کارگاهی، تجربیات قبلی و مهارت مهندسی بتواند خود را در تحلیل و طرح سازه موفق نماید.

مهندس سازه باید قادر به‌تحلیل سه عملکرد اساسی سازه باشد*:

۱ ـ تعیین مشخصات تنش، کرنش و تغییر مکان حاصل از بارهای ساکن و شبه ساکن و یا حاصل از تغییرشکل سازه‌ها.

۲ ـ تعیین مشخصات ارتعاشی حاصل از بارهای دینامیکی

۳ ـ تعیین مشخصات کمانشی که معمولا" تحت اثر بارهای ساکن و بندرت تحت اثر بارهای دینامیکی اتفاق می‌افتد در هریک از مراحل فوق مهندس سازه باید قدرت باربری نهایی سازه را با هریک از امکانات گسیختگی موجود مقایسه نموده و از آن جهت باربری محاسباتی سازه استفاده نماید.

بدیهی‌است که دسته‌بندی مراحل‌فوق امری اختیاری است ولی در هرصورت بررسیهای مربوط به‌مراحل ۲ و ۳ نسبت به‌مرحلهٔ ۱ احتیاج به‌فنون مخصوص دارد، لذا به‌نظر می‌رسد بهتر است به‌صورت جداگانه‌ای مورد بحث قرار گیرند. علاوه برآن سازه‌های مهندسی را معمولا" باید با عدم احتمال کافی در برابر گسیختگی حاصل از مرحلهٔ ۱ طرح نمود و بدین ترتیب واضح است که آن سازه باید با عدم احتمال بیشتری در برابر گسیختگی حاصل‌از خستگی و یا ارتعاش و کمانش که در مراحل ۲ و ۳ تحلیل می‌گردند طراحی کرد.

تحلیل سازه‌های تحت اثر کمانش و ارتعاش خارج از موضوع این کتاب است. زیرا که این کتاب را به‌تحلیل تنش، کرنش و تغییر مکان حاصل از بارهای ساکن و یا شبه ساکن و یا تغییرشکل سازه‌ها اختصاص داده‌ایم. برای این که چنین مسائلی به‌طور کامل حل شوندباید تنشها و تغییرمکانهای مجهول در کل سازه به‌نوعی معین گردند که در معادلات موجود که بر طبق نیروهای معلوم و تغییر مکانهای محدود به‌شرایط‌حدی تنظیم شده‌اند صدق نمایند این مجهولات را می‌توان‌از طریق برقراری معادلات لازم که به‌یکی از سه‌طریق زیرکه منطبق

---

* تحلیل خصوصیات مربوط به‌تنش،کرنش و تغییر مکان رفتاری را سازه تحلیل سازه‌ای نامیده‌می‌شود. درحالی‌که تحلیل سادهٔ نیروی‌محوری وخصوصیات‌تنش دریک‌سازه‌تحلیل‌تنش گفته می‌شود.

بر رفتار سازه‌ها می‌باشند محاسبه نمود :

۱ ــ شرایط حاکم برتعادل استاتیکی نیروها و لنگرهای داخلی و خارجی مؤثربرسازه.

۲ ــ روابط موجود بین تنش و کرنش مصالح مصرفی

۳ ــ روابط هندسی موجود بین کرنشها و تغییرمکانهای نقاط سازه .

واضح است که به‌سادگی می‌توان از ترکیب دو مرحله ۲ و ۳ بحذف کرنش پرداخته و مستقیما" به‌تعیین رابطه‌ای بین تنش (یا نیروی داخلی) و تغییر مکان اقدام کرد . بنابر این ممکن است برخی از محاسبین چنین نظر دهند که فقط دونوع رابطهٔ اصلی در سازه‌هاوجود دارد .

۱ ــ شرایط حاکم بر تعادل استاتیکی

۲ و ۳ــ روابط موجود بین تنشها (و یا نیروهای داخلی) و تغییر مکانها

درحقیقت دراین دونظرهیچگونه تفاوتی وجود ندارد زیرا هریک‌ازاین‌دوروش اساسی فوق را می‌توان جهت تعیین فرمولهای اساسی حل مسأله قرار داد .

این دو روش اساسی عبارتند از روش نیرو* و روش تغییر مکان . این دوروش‌را می‌توان به‌صورت زیر شرح داد . هریک از این روشها کلی بوده و برای هر عضو سازه نیز کاربرد دارند**.

---

* در اینجا غرض از کلمه نیرو و تغییر مکان برداشت کلی از این کلمات است . کلمهٔ نیرو را می‌توان هم به‌نیرو و هم به‌لنگر تفسیرکرد و به‌همان‌ترتیب کلمه تغییرمکان شامل تغییر مکان خطی و دوران زاویه‌ای خواهد بود .

** در تحلیل سازه‌ها معمولا" می‌توان سازه‌ها را به‌دونوع سازه عضوی و پانلی تقسیم نمود، زیرا بندرت سازه‌ای مرکب از این دو نوع وجود دارد . یک سازه عضوی عبارت از سازه‌ای متشکل از یک یا چند عضو است که به‌نوعی در انتهای خود به‌یکدیگر متصل شده‌اند و کل آنها بر تکیه‌گاهی و یا تکیه‌گاههایی مجزا قرار گرفته است . هریک از قطعات فوق‌الذکر دارای طول قابل ملاحظه‌ای نسبت به‌ابعاد مقطع خود می‌باشد. شرایط حاکم بر تعادل و یا تغییر مکان یک سازه عضوی را می‌توان به‌توسط مقدار مشخصی معادلات جبری‌که بین بارها وعکس‌العملها و مؤلفه‌های مستقل‌نیروی قطعات ــ و یامولفه‌های مستقل تغییرمکان گره‌ها ــ وجود دارد نوشت . یک سازه *پانلی* شامل یک یا چند پانل است که به‌طور یکسره در طول لبه‌ها و یا قسمتی از آنها به‌یکدیگر متصل شده باشند . کل مجموعه می‌تواند بر روی نقاط مشخص ، یا سطوح معلوم و یا در طول خطوطی به‌اندازهٔ قابل ملاحظه قرار گیرد . هریک ازپانلهای چنان سازه‌ای می‌تواند مسطح یا منحنی باشد ولی در هرصورت

۱ ــ روش نیرو

الف : نخست مقدار نیروهای (داخلی و خارجی) مجهول و مستقل تعیین شده‌وتعداد آنها با تعداد معادلات مستقل تعادل استاتیکی ، که امکان برقرارنمودن آنها با این نیروها وجود دارد مقایسه می‌گردد ، اگر تعداد نیروهای مجهول برابر با مقدار معادلات‌تعادل‌باشد مسأله از نظر *استاتیکی معین* می‌باشد ، زیر می‌توان نیروهای مجهول را مستقیما" از طریق این معادلات تعیین نمود . اگر تعداد نیروهای مجهول از مقدار معادلات تعادل‌بیشتر باشد مسأله از نظر *استاتیکی نامعین* خواهد بود و درجه نامعینی برابر با تفاضل این دو تعداد است .در چنین حالتی تعدادی از نیروهای مجهول را که از نظر مقدار برابر با درجه نامعینی سازه می‌باشد و آنهارا *نیروهای اضافی* می‌نامیم ،جهت تحلیل سازه از سازه حذف می‌کنیم تا به‌این ترتیب سازه‌ای معین (و پایدار) که آن را سازهٔ اولیه خواهیم گفت به‌دست آید . برای هریک از نیروهای اضافی می‌توان معادله‌ای که توسط‌آن معادله تغییرمکان نقطه اثرآن نیرو در روی سازهٔ اولیه برحسب نیروهای مجهول اضافی بیان می‌گردد .برقرارنمود. بعدها می‌توان دستگاه معادلاتی را که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید جهت‌تعیین نیروهای اضافی به‌طور همزمان حل نمود .

ب : پس از آن‌که کلیه نیروهای مؤثر بر سازهٔ اولیه معلوم شود می‌توان به‌محاسبات تنش پرداخت سپس تحلیل سازه را با محاسبه کرنشها از طریق روابط‌بین تنش و کرنش و محاسبه تغییر مکانها را با استفاده از روابط‌بین تنش و تغییر مکان به‌اتمام رسانید .

۲ ــ روش تغییر مکان

الف : ابتدا به تعیین تغییر مکانهای مجهول و مستقل موجود در سازه اقدام کرده و آنها را به‌عنوان مجهولات اساسی مسأله تلقی می‌کنند سپس با استفاده از روابط‌بین‌تنش‌ـ تغییرمکان ، نیروهای داخلی سازه را برحسب تغییر مکانهای مجهول بیان می‌کنند . برای هریک از مولفه‌های تغییرمکانهای مجهول یک معادله تعادل برحسب نیروهای خارجی معلوم و نیروهای داخلی مجهول که به‌نوبه خود برحسب تغییرمکانها معین شده‌اند برقرارمی‌گردد،

ضخامت آن نسبت به‌طول لبه‌های آن باید کوچک باشد . شرایط حاکم بر تعادل یاتغییرمکان یک سازهٔ پانلی را می‌توان به‌توسط‌تعداد معینی معادلات دیفرانسیلی که از توابع پیوسته تشکیل شده و شامل تنشهای داخلی و تغییر مکانها در طول سازه است نوشت . حل این معادلات باید با تأمین شرایط معلوم حاکم بر نیروهای خارجی و یا تغییر مکانهای‌حدی‌سازه انجام گیرد . سازه‌های عضوی را سازه‌های مجزا و سازه‌های پانلی را *سازه‌های پیوسته* نیز می‌گویند .

تعداد این معادلات برابر با تعداد تغییر مکانهای مجهول خواهد بود و با حل دستگاه معادلات موجود می‌توان به تعیین تغییر مکانها پرداخت.

ب : پس از تعیین تغییر مکانها می‌توان به محاسبه نیروهای داخلی اقدام کرد، به این ترتیب کلیه نیروها بجز نیروهای خارجی مجهول معین خواهند شد. نیروهای خارجی مجهول را نیز می‌توان به کمک معادلات تعادلی که در تنظیم دستگاه معادلاتی که از طریق آنها به تعیین تغییر مکانهای مجهول پرداخته‌ایم دخالت نداشته‌اند، محاسبه نمود.

اغلب روشهائی که جهت تحلیل سازه‌ها در طی قرون به‌کار برده شده‌اند منطبق بر روش نیرو است. البته روشهای شیب ـ افت و قضیه اول کاستیگلیانو که بعدها در فصول ۱۲ و ۱۳ به‌شرح آنها خواهیم پرداخت منطبق بر روش تغییر مکان می‌باشند.

ارجحیت روش نیرو بر روش تغییر مکان یا برعکس به‌چندین عامل بستگی دارد. تا حال حاضر در زمینهٔ مهندسی راه و ساختمان از روش نیرو به‌دلایل متعددی به‌طور وسیعی استفاده شده است. اولاً" باید توجه نمود که در اغلب اوقات تحلیل کامل تنش یا تغییر مکان کلیه نقاط سازه در مقاصد طراحی امری غیرضروری است و عموماً" تصویر کاملی از تنشها مورد نیاز بوده ولی فقط چند تغییر مکان لازم محاسبه می‌گردد. علاوه بر آن معمولاً" سازه‌های مهندسی ساختمان، سازه‌های معینی (ایزواستاتیکی) هستند و حتی اگر از نظر استاتیکی نامعین باشند درجه نامعینی آنها به‌مراتب کمتر از تعداد مولفه‌های مجهول تغییرمکان می‌باشد. البته چند سازه نظیر بسیاری از قابهای صلب وجود دارد که در آنها مقدار مولفه‌های مجهول تغییرمکان کمتر از درجه نامعینی سازه است.

درمورد تحلیل سازه باید به این مطلب واضح توجه نمود که تحلیل دقیق اغلب سازه‌های ساختمانی که مورد طرح مهندسین سازه می‌باشند مقدور نیست، این مطلب مخصوصاً" درمورد قابهای پیچیده فضایی شبکه‌ها، دالها، دیوارهای برشی و پوسته‌ها صادق است. درچنین حالاتی مدلی مطلوب و ساده از سازهٔ واقعی جهت تحلیل آن سازه در نظر گرفته می‌شود، اگر تجربه‌ای مشابه در مورد سازه‌ای مشابه موجود باشد استفاده از آن تجربه منجر به تحلیل و طرح رضایت‌بخشی خواهد شد که می‌تواند به‌نوبهٔ خود اساس قضاوت و طرح مهندس سازهٔ مجرب دیگری قرار گیرد.

درارزیابی نتایج حاصل از یک چنین تحلیلی هرگز نباید فراموش کرد که نتایج به‌دست آمده می‌بایستی در معادلات تعادل صدق نمایند. اگر سازه‌ای به‌نوعی طرح شود که در تحلیل آن روابط تعادل برقرار بوده ولی روابط تنش ـ کرنش به‌طور تقریبی صادق باشد بندرت یک چنین سازه‌ای در خطر واقعی قرار می‌گیرد زیرا که در محاسبات مربوط به‌تعیین ایمنی در برابر کمانش و ارتعاش، مهندس محاسب ضرایب اطمینان محافظه‌کارانه‌ای به‌کار خواهد برد.

یک چنین سازه‌ای امکان دارد بیش ازآنچه موردنظر است تغییرشکل دهد و حتی ممکن است تحت اثر بارهای کم شدت نیز ترک خورده و یا تغییر شکل خمیری دهد ، ولی در هرصورت اگرآن سازه با مقاومت کافی در برابر تعادل استاتیکی بارهای نهایی خود طرح شده باشد چنین طرحی ، نرمی و ایستایی کافی در برابر کمانش سازه با سازگار نمودن مقاومت در کلیه عناصر آن ایجاد خواهد کرد .

درگیریها و مسئولیتهای حرف مهندسی

در صفحه‌های پیشین این پیش‌گفتار به‌معرفی کلیه زمینه‌های مهندسی سازه به همراه تاریخچهٔ مختصری از آنها پرداختیم اکنون به‌صورت مختصری به‌ذکر درگیریهایی‌که امروزه در مسائل حرفه‌ای وجود دارد می‌پردازیم . این مطلب نه‌تنها شامل مهندس سازه می‌شود بلکه شامل‌کلیه همکاران اجرایی مهندس سازه درسایر زمینه‌های‌حرفه‌ای‌مهندسی نیزمی‌شود . امروزه همه این مهندسین دردنیایی پویا به‌کارمی‌پردازند ،به‌یک معنی مسائل و مسئولیتهای اساسی آنها ارتباط زیادی به‌زمان ندارد . به‌معنایی دیگر به‌دلیل معلومات سریع‌الرشد در کلیه زمینه‌های حرفه‌ای به‌آنان قابلیتی داده می‌شود که به‌حل مسائل به‌پردازندکه‌درگذشته حتی تصور رفع آن مسائل نیز نمی‌شد . علاوه برآن تغییرنیازهای جامعه نیز به‌دنبال خود مسائل جدیدی را ایجاد می‌کند که حل آن مسائل نیاز به‌راه‌حلهای راحت‌تری نسبت به راه حلهای سنتی دارد .شاید خصیصه مشترک اغلب مسائل پیچیده قرن حاضر ، این باشد که مسائل به‌طور همزمان مربوط به‌رشته‌*های مختلف علمی* هستند . حل چنان مسأله‌ای نیاز به‌قابلیت و تجرب کلیه افراد گروه منتخب از آن رشته‌های علمی دارد .

جوامع پیشرفته بامسائل مختلفی‌که همزمان به‌علوم‌گوناگونی نظیر صنعت‌جامعه‌شناسی سیاست ، فلسفه ، اقتصاد و غیره مربوط می‌شود درگیر می‌باشند . عموما" جامعه درگیر رشد سریع جمعیت ،آلودگی محیط‌زیست ،کمبود انرژی ،حیف و میل زیاد ازحد منابع زیرزمینی قابل جبران و غیرقابل جبران می‌باشد . بتدریج جوامع درک می‌کنند که باید دست‌از "افزون‌طلبی" شسته و به "قناعت" روی‌آورند ، چنین تغییر مشی فقط به‌کمک تبدیل کلیه فعالیتهای اجتماعی به‌صورت درست آن امکان‌پذیر می‌باشد که یک چنان عملی نیز به‌نوبهٔ خود بدون تحت تاثیر قراردادن کلیه حرف جامعه مقدور نیست .

به‌منظور تأمین چنین هدفی مشاوره و مشارکت ترکیبی از رشته‌های مختلف مهندسی جهت تعیین برنامهٔ مورد نظر که در جهت پویاتر نمودن جامعه و نجات آن ازرخوت‌گذشته خواهد بود لازم است .

۱

مقدمه

۱ ـ ۱ سازه‌های مهندسی

طرح و محاسبه‌پلها ،ساختمانها ،برجها وسایرسازه‌های‌ثابت‌برای‌مهندسی‌راه‌وساختمان بسیار مهم است . قطعات ، اتصالات و تکیه‌گاههای چنین سازه‌هایی به‌نوعی است که این سازه‌ها قادرند نیروهای مؤثر خارجی را در تعادل استاتیکی حفظ کنند . به‌اضافه این‌که‌این سازه‌ها باید نیروهای ثقل را نیز که نتیجه وزن خود سازه می‌باشد در تعادل نگهدارند .از انواع این سازه‌ها برجهای انتقال نیرو را می‌توان نام برد این برجها تحت اثر وزن خود، اثر باد و بار حاصل از یخ‌زدگی که همگی به‌برج وارد می‌شوند به‌اضافه نیروهائی‌که توسط کابلهای‌متصل بدان به‌آنها اثرمی‌کنند قراردارند . اعضای این برجها باید به‌گونه‌ای طرح و محاسبه شوند که نیروها را در تعادل نگهداشته و اثرات ناشی ازآنها را به‌پی‌های برج منتقل نمایند .

علاوه بر سازه‌های فوق‌الذکر ،سازه‌های متعدددیگری نیزوجود دارند.سدها ، اسکله‌ها ، رویه فرودگاهها و شاهراهها ، سیل‌گیرها ،خطوط‌لوله ، و یا دوکها و مخازن همگی سازه‌های متداول مهندسی هستند .سازه‌ها فقط‌برای مهندس راه و ساختمان مهم‌نیستند ،اسکلتهای قاب یک هواپیما برای مهندسی صنایع هوایی اهمیت دارد و اسکلت یک کشتی مورد توجه مخصوص‌مهندس معمار صنایع دریایی است و به‌همین ترتیب طرح پوسته‌های‌تحت‌فشار، ظروف و سایر اسباب آلات صنعتی مربوط به‌حرفهٔ مهندس شیمی بوده و مهندسین مکانیک نیزباید به‌طرح قطعات ماشین با درنظر گرفتن مقاومت لازم‌آنها بپردازند وبالاخره به‌همین ترتیب وسایل برقی و استقرارآنها در صلاحیت مهندسین برق است .

طرح و محاسبه کلیه این سازه‌ها اساسا" بر یک اصول مشترک استوار است . دراین‌کتاب برای شرح اجرایی این اصول در سطح وسیع ، از سازه‌های مهندسی متداول در رشته راه و ساختمان (عمران) کمک گرفته شده است . واضح است که از روشهای تحلیلی که دراین‌کتاب

شرح داده شده می‌توان در سایر سازه‌های پراهمیت سایر رشته‌های مهندسی نیز کمک گرفت .

۱ ــ ۲ طرح سازه‌ها

یک سازه به‌منظور تأمین هدفی طرح می‌شود و لذا برای این که آن‌چنان هدفی را با رضایت کافی تأمین نماید باید دارای مقاومت و صلبیت کافی باشد ، البته اقتصادی بودن و ظاهرپسند بودن سازه‌ها نیز در طراحی آنها اهمیت فراوانی دارد .

طرح کامل یک سازه تقریبا" باید پنج مرحله زیر را شامل شود :

۱ ــ تعیین اهداف کلی مورد نظر که باید توسط سازه تأمین گردد .

۲ ــ بررسی راه‌حلهای مختلف ممکن جهت تأمین اهداف مورد نظر

۳ ــ طرح سازه‌های اولیه برای هریک از راه‌حلهای ممکن

۴ ــ انتخاب بهترین و مورد پسندترین راه‌حل با مقایسه عوامل اقتصادی ، رفتار و زیبایی راه‌حلهای مختلف ممکن .

۵ ــ طرح و محاسبه کامل بهترین راه حل مورد پسند

طرح سازه‌های اولیه که در مرحله ۳ عنوان شده است و همچنین طرح کامل سازه‌که در مرحله ۵ عنوان شد به‌سه‌بخش وسیع تقسیم می‌گردد ، این سه بخش که عموما" در اجرا باهم ادغام می‌شوند عبارتنداز : نخست تعیین بارهای مؤثر بر سازه ، سپس تعیین وتحلیل تنشهای حداکثر در اعضاء و اتصالات سازه و بالاخره تعیین ابعاد اجرایی کلیه قطعات و اتصالات سازه به‌منظور ساخت آنها .

اثبات این‌که این سه‌بخش عملا" به‌یکدیگرمرتبط هستند دربررسی زیرمشاهده‌می‌گردد : وزن سازه یکی از بارهایی است که سازه مورد بحث باید آن را تحمل نماید ، ولی مقدار بار حاصل از وزن سازه تا زمانی‌که کل سازه طرح نشده است دقیقا" معلوم نیست . در یک سازه تأمین مقدار تنش بستگی به‌مشخصات ارتجاعی قطعات دارد که این مشخصات تا زمانی که قطعات اصلی طرح و محاسبه نشده باشند نامعلوم است‌و به‌این ترتیب معلوم می‌شودکه طرح هرسازه‌ای عملی با تقریبات متوالی است . مثلا" لازم است که برای طرح قطعات ، وزنی‌برای آنها در نظر بگیریم و پس از طرح سازه به‌مقدار واقعی وزن آنها پی خواهیم برد و تا زمانی که وزن واقعی قطعات به‌وزن فرض شده آنها نزدیک نشود محاسبات را باید تکرار نمود .

درطرح یک سازه‌اطمینان از این‌که هرقطعه‌ای از آن مقاومت‌کافی در برابرتنش‌حداکثری که‌انتظار بوجودآمدن آن‌تنش درقطعه ممکن‌است، داردبسیار مهم است . برای محاسبه‌چنین تنشهای حداکثری ،لازم است‌که هم بدانیم چه بارهایی برآن وارد خواهد شد و هم موقعیت

دقیق بارهای وارده‌را نیز که سبب ایجادتنش با حداکثر مقدار خود می‌نمایند تعیین‌کنیم . بهاین ترتیب وقتی قطاری از پلی عبور می‌کند قسمت مشخصی از پل تحت موقعیت دیگری از قطار بهتنش حداکثر خود می‌رسد .

آنچه دراین کتاب شرح آنها مورد توجه قرار دارد ، تحلیل سازه‌هاست به‌منظوراین‌که تحلیل سازه‌ها به‌نحو مطلوبتری شرح داده شود بهتر است که نخست مختصری بارهای‌موثر بر یک سازه و طرح و محاسبه قطعات و اتصالات آنها تشریح گردد .

در پیش‌گفتار ذکرگردیم که اساس قراردادی طرح و محاسبه سازه‌ها ،برطرح ارتجاعی نهاده شده است . بارهای محاسباتی ، تنشهای مجاز و سایر مشخصات لازم برای چنین طرح و محاسبه‌ای درآئین‌نامه‌های متعددی‌که برای طرح و محاسبه ابنیه وجوددارد ذکر شده‌است . در ممالک متحده آمریکا چنین آئین‌نامه‌هایی از طرف سازمانهای مشهور زیر ارائه می‌شود :

انجمن مهندسین راه و حمل و نقل ایالات آمریکا (AASHTO)
انجمن مهندسین راه‌آهن آمریکا (AREA)
موسسهٔ ساختمانهای فولادی آمریکا (AISC)
موسسهٔ بتن آمریکا (ACI)
موسسهٔ آهن و فولاد آمریکا (AISI)
موسسهٔ آزمایش و مصالح آمریکا (ASTM)
دفتر ملی استانداردها (NBS)
دفتر هماهنگی آئین‌نامه‌های ساختمانی (UBC)

برخی‌ازآئین‌نامه‌ها محاسبات برخی‌از قطعات سازه‌هارا براساس طرح خمیری مجازشمرده‌اند*

۱ ـ ۳ بارهای مرده

بار مرده موثر بر یک سازه شامل وزن سازه و هربار غیرمنقولی است‌که همواره به‌صورت ثابت از نظر مقدار ، بر سازه اثر نماید . بهاین ترتیب بار مرده یک پل جاده عبارت از وزن خرپاها و شاهتیرهای حمال ،تیرهای کف و تیرهای طولی کف پل ، دالها ماشین روی پل ،

---

* مؤسسه استاندارد و تحقیقات صنعتی‌ایران "نشریاتی درموردبارگذاری ابنیه و تنشهای مجاز منتشر گرده و "دفتر تحقیقات و استانداردهای فنی" وابسته به‌سازمان برنامه‌و بودجه انتشاراتی در مورد ضوابطی برای ابنیه و اجرای آنها د راختیار علاقمندان قرارداده‌است . مترجم) .

جدولها ، پیاده روها ،حصار و یا نرده‌ها تیرهای روشنایی و سایر وسایل متفرقه خواهدبود .

چون نخست مقدار بار مردهٔ موثر بر یک قطعه را باید قبل از طرح آن قطعه فرض کرد لذا قطعات یک سازه را باید به‌نوعی طرح نمود که تا جائی که امکان دارد وزن هرقطعه‌ای که طرح می‌شود قسمتی از بار مرده قطعه‌ای باشد که بعداز آن طرح خواهد شد .به‌این‌ترتیب در مورد یک پل جاده ابتدا باید دال ماشین روی پل و سپس تیرهای طولی را که بـار دال را به‌تیرهای کف (تیرهای عرضی) منتقل می‌نمایند طرح نمود و پس ازآن به‌طرح تیرهای‌کف‌که بار تیرهای طولی را به‌شاه‌تیرها و یا خرپاها منتقل می‌نمایند پرداخت ، بالاخره به‌طرح شاه‌تیرها و یا خرپاها مبادرت نمود .

در طرح و محاسبه قطعه‌ای نظیر دال ماشین روی پل ، تنشهای ناشی از بارهای مـرده تقریبا" بخش کوچکی ازکل تنش قطعه‌را تشکیل می‌دهند وبه‌این جهت حتی‌اگر مقداربارهای مرده به‌طور واقعی خود تخمین زده نشده باشند ، تنش کل حاصل از اولین محاسبات نیز تا حد بالایی تنش واقعی‌را نشان خواهد داد .ولی درمورد طرح و محاسبه خرپاها و شاه‌تیرها ، بارهای مرده قسمت بزرگی ازکل بار مؤثر برآنها را تشکیل می‌دهند ولذا بایددرتخمین بارهای وزنی مؤثر برآنها از دقت خوبی بهره‌گرفت . اغلب اوقات ازمشخصات بارهای‌مرده سازه‌های مشابه به‌عنوان راهنما استفاده می‌کنند .البته تحقیقات متعددی برای تهیه و ارائه چنان مشخصات معین و سهل‌الاجرایی انجام گرفته است . باید تأکید گرد که در هر صورت تخمین وزن مردهٔ واقعی ازطریق مشخصاتی که مورداستفاده قرارمی‌گیرد جنبهٔ تجربی‌دارد . پس از طرح سازه وزن مردهٔ دقیق آن را می‌توان محاسبه گرد و تحلیل تنش را بر طبق آن بررسی نمود . این چنین عملی از نظر اطمینان و از نظر اقتصادی لازم است .

اگر ابعاد سازه‌ای معلوم باشد بارهای مردهٔ آن را می‌توان براساس وزن واحد حجم مصالح آن به‌دست آورد وزن مخصوص برخی ازمصالح متعارف در سازه‌های مهندسی بسیاری از کتب و کتب راهنما درج شده است (به‌عنوان مثال می‌توان به‌نشریه ۵۱۹ موسسهٔ استاندارد و تحقیقات صنعتی ایران مراجعه نمود .مترجم)

۱ ــ ۴ بارهای زنده ــ کلیات

برخلاف بارهای مرده‌که همواره از حیث مقدار و همچنین ازحیث موقعیت (محل‌تأثیر) ثابت می‌مانند عموما" لازمست بارهای زنده‌ای کـه وضعیت تأثیـر آنها متغیر می‌باشند نیـز در نظرگرفت. گاهی بارهای زنده را از نظر راحتی به‌بارهای منقول و بارهای متحرک تقسیم می‌کنند . بارهای منقول به‌بارهایی گفته می‌شود که امکان جابجایی آنها در یک بنا ممکن

باشد ، نظیر کالای موجود در یک انبار. تأثیر این گونه بارها بر سازه‌ها عموما" به‌صورت تدریجی بوده و بدون ضربه صورت می‌گیرد . بارهای متحرک به‌بارهایی گفته می‌شودکه‌تحت اثر انرژی خود در حرکت باشند ،نظیر قطار راه‌آهن و یا چندین‌کامیون .این گونه بارها به‌سرعت‌وارد شده و لذا اثرضربه‌ای بر سازه خواهند داشت .

وقتی که بارهای زنده اثر می‌کنند باید در محل اثر آنها برروی سازه‌ها دقت شود ، محل تأثیرآنها را به‌نوعی‌برگزید که شدت تنش در قطعه یا اتصال مورد نظر به‌مقدارحداکثر خود برسد . همان‌طوری که منظور ما از تنشهای مرده تنش حاصل از بارهای مرده می‌باشد به‌همان طریق غرض ما از تنش حداکثر زنده تنش حاصل از بارهای زنده خواهد بود .

۱ ــ ۵ *بارهای زنده برای پلهای جاده*

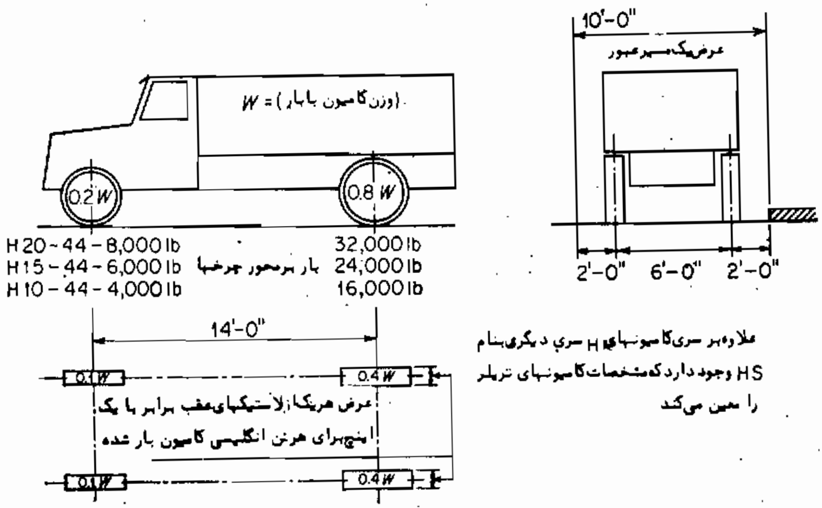
بار زنده پلهای جاده شامل وزن مؤثرحاصل‌از وسائط نقلیهٔ متحرک و بارزنده‌پیاده‌روها است عملا"رفت و آمد وسائط نقلیه برروی یک پل‌جاده شامل انواع‌مختلف آنها خواهد بود اما طراحی و محاسبهٔ پلی براساس زنجیره‌ای از کامیونهای استاندارد انجام می‌پذیرد انتخاب آنها به‌نحویست که اطمینان تحمل پل و صرفه اقتصادی آن تأمین کردد . بارزنده برای هر مسیر عبور جاده شامل زنجیره‌ای از کامیونهای سنگین است که به‌دنبال یکدیگرو با فاصله کم از هم قرار دارند . وزن و وزن گسترده هریک از این کامیونها برحسب آئین‌نامه ورد استفاده‌طراح متفاوت خواهدبود AASHTO زنجیرهٔ کامیونهای مشخصی بنام‌سریهای Hارائه نموده است .

سری کامیونهای H در شکل (۱ــ۱) نشان داده شده است . این نوع بارگذاری با H و عددی‌که نشان‌دهنده وزن ناخالص کامیونهای استاندارد برحسب تن انگلیسی* می‌باشد مشخص شده است انتخاب نوع سریH برای طرح یک سازهٔ معلوم ، بستگی به‌شرایط واهمیت و موقعیت رفت و آمد وسائط‌نقلیه خواهد داشت .

دیده می‌شود که بارگذاری هرمسیر عبور جاده شامل تعدادی از بارهای متمرکز چرخها است ، تحلیل تنش برای تعیین حداکثر تنش زنده که با درنظرگرفتن سری بارهای زنده به‌عمل می‌آید ممکن است بشکل پیچیده درآید . لذا تحت برخی از شرایط جهت تحلیل تنش می‌توان بارهای فوق را با بار معادل گسترده آن که برحسب واحد طول مسیر عبور ذکر شده است و یک بار متمرکز درآن وجود دارد جایگزین نمود . به‌این ترتیب سری بار H-20

* تن انگلیسی برابر با 2000 lb است .

را می‌توان معادل با بار زنده‌ای برابر با بار گسترده‌ای با شدت یکنواخت 640 lb ft (93.5 N/m) بر واحد طول مسیر عبور به‌اضافه بار متمرکزی برابر با 18,000 lb (80100 N) و یا 26,000 lb (115700 N)، برحسب آن که به‌ترتیب به‌محاسبه لنگر زنده و یا برش زنده بپردازیم قرار دهیم. دیده می‌شود که این بار زنده گسترده دقیقاً" معادل سری بارهای متمرکز نیست ولی چنین باری محاسبات تنشهای حداکثر را که باندازه کافی بمقدار محاسباتی حاصل از بارهای واقعی نزدیک باشند برای طرح ساده می‌سازد*.



شکل ۱ ــ ۱ سری کامیونهای H بر طبق AASHO

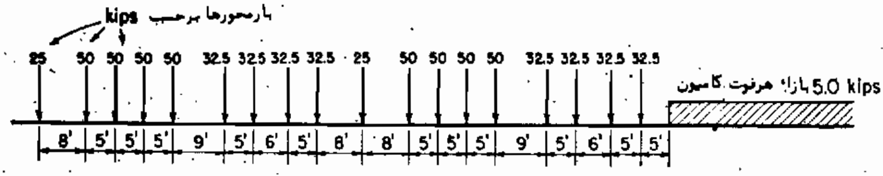
۱ ــ ۶ بارهای زندهٔ پلهای راه‌آهن

بارهای زنده پلهای راه‌آهن شامل بار لوکوموتیوها و واگنهایی می‌شود که توسط لوکوموتیوها کشیده می‌شوند. بار زنده برای هر خط قطار معمولاً" برابر با بار دو لوکوموتیو و بارگسترده با شدت یکنواخت که بیان‌کننده وزن واگنها می‌باشد خواهد بود. برای استاندارد شدن چنین بارگذاری تئودورکوپر Theodore Cooper سری بارگذاریهای E را ابداع کرده‌است. این بارگذاریها با حرف E که به‌دنبال آن عددی آورده می‌شود مشخص می‌گردند

* برای بارگذاری پلها و ساختمانها در ایران می‌توان از جلد اول کتاب " طرح ومحاسبات ایستایی " و نشریه ۵۱۹ مؤسسه استاندارد و تحقیقات صنعتی ایران استفاده نمود. مترجم)

عدد مذکور بیان‌کننده بار وارده بر محور محرک برحسب kips است ، بارهایی‌که توسط سایر محورها وارد می‌شود نسبتشان به‌بار وارده از محور محرک عدد ثابتی است .

بار گسترده یکنواخت به‌دنبال دو لوکومتیو قرار دارد و همواره شدتی برابر با یکدهم بار وارده بر محور محرک بر هر فوت طول ریل دارد . فواصل چرخها در بارگذاریهای کوپر یکسان است . شرحی از بارگذاری E-50 کوپر در شکل (۱–۲) نشان داده شده است . پلهای راه‌آهن جدید حداقل برای بارگذاریهایی‌برابر با E-60 و حتی اغلب برابر با E-72 وگاهی



شکل ۱ ـ ۲ بارگذاری E-50 کوپر

بیشترطرح می‌شوند .البته بایدخاطرنشان کردکه سایربارگذاریهای کوپر را می‌توان‌با استفاده از شکل (۱–۲) و تناسب ساده‌ای به‌دست آورد .

گاهی اوقات از بارگذاریهای معادل ساده‌تری بجای بارگذاری کوپر برای بارهای زنده پلهای راه‌آهن استفاده می‌شود .

۱ ـ ۷ بارهای زندهٔ ساختمانها

عموما" بارهای زنده ساختمانهارا به‌صورت بارهای‌منقول گسترده با شدت ثابت‌درنظر می‌گیرند . شدت ثابت‌بارگذاری کف‌ها بستگی‌به‌نوع ساختمان موردطرح دارد . چنین ارقامی در جدول (۱–۱) درج شده است .

جدول (۱ – ۱)

	حداقل بار زنده lb/ft^2	حداقل بار زنده daN/m^2
ساختمانهای مسکونی و ادارات		
مساکن خصوصی ، خانه‌های آپارتمانی و غیره	40	190
اتاق ادارات ، مدارس و غیره	50	240
راهروها ،اماکن انتظار و غیره در ساختمانهای عمومی	100	480
ساختمانهای صنعتی و تجارتی		
انبارها و مشابه آنها	250	1200
کارخانجات (سبک)	75	360

چاپخانه‌ها		
انبار عمده‌فروشی (کالاهای سبک)	100	480
مراکز ارائه خرده‌فروشی (کالاهای سبک)	75	360
گاراژها		
برای همه‌نوع وسائط نقلیه	100	480
فقط برای ماشینهای مسافری	80	380

پیاده‌روها باری گسترده با شدت $250\,lb\ ft$ ($1200 daN/m^2$) و یا باری متمرکز برابر با $8{,}000\,lb$ ($3560\ daN$) انتخاب می‌گردد و هر یک که لنگر یا برش بیشتر ایجاد کند برگزیده خواهد شد.

بدیهی است در صورتی‌که کف‌های فوق‌الذکر بار زنده‌ای با شدت بیشتر از ارقام پیشنهادی فوق تحمل کنند ارقام بیشتر در محاسبات به‌کار خواهد رفت.

۱ — ۸ ضربه

اگر بار زنده به‌صورت تدریجی وارد نشود تغییرشکل سازه‌ای‌که تحت تأثیر بار زنده می‌باشد بزرگتراز زمانی خواهد بود که بار زنده به‌صورت ساکن برآن اثر کند و چون در این حالت تغییر شکل بزرگتر است لذا تنش حاصل در سازه نیز بیشتر خواهد بود. مقدار اضافی تنش حاصل از بار زنده در این حالت نسبت به‌مقدار این تنش در صورت اثربارزنده به‌صورت تدریجی، تنش ضربه‌ای گفته می‌شود. تنشهای ضربه‌ای عموما" با بارهای متحرک همراه هستند. برای منظور نمودن تنش ضربه‌ای درمحاسبات سازه‌ها تنش حاصل از بارزنده رابه‌میزان رقمی‌که به‌افزایش ضربه معروف است و عموما"به‌طریق‌تجربی‌تعیین‌می‌شود به‌زمان اثر بار زنده، به‌قسمتی از سازه که بار برآن اثر می‌کند و بالاخره به‌مشخصات ارتجاعی و لنگر لختی سازه بستگی کامل دارد.

برای پلهای جاده افزایش ضربه یعنی I در آئین نامه AASHTO به صورت زیر ارائه شده است:

$$I = \frac{50}{L + 125} \leqslant 0.300 \qquad (۱-۱)$$

در این‌رابطه L طول قسمتی‌از دهانه است‌که به‌منظورایجاد تنش حداکثر در قطعه، بارگذاری شده است، مقدارآن برحسب فوت می‌باشد. به‌عنوان مثال فرض کنید که حداکثربرش‌مثبت

در وسط شاه‌تیر طولی پل جاده‌ای برابر با 1,000,000 lb باشد که در اثر بارگذاری نصف دهانه ۱۰۰ فوتی بوجود آمده است ، در این صورت طول بارگذاری شده L برابر با 50 ft بوده و افزایش ضربه برابر است با*

$$I = 50/(50 + 125) = 0.286$$

برش حاصل از ضربه ، از حاصل‌ضرب افزایش ضربه در برش حاصل از بار زنده برابر با مقدار زیر خواهد بود :

$$1{,}000{,}000 \times 0.286 = 286{,}000 \text{ lb.}$$

کل برش حاصل‌از بار زنده یعنی‌برش حاصل از ضربه بار زنده به‌اضافهٔ برش بار زنده‌بدون در نظر گرفتن اثر ضربه‌ای آن برابر خواهد شد با :

$$1{,}000{,}000 \text{ lb} + 286{,}000 \text{ lb} = 1{,}286{,}000 \text{ lb}$$

در آئین‌نامه‌های طرح و اجرای پلهای فلزی راه‌آهن که توسط AREA ارائه شده است ،ضربه را به‌صورت زیر بررسی‌می‌کنند (توجه شودکه درصد ضربه برابربا صدبرابر افزایش ضربه است) .

"به‌حداکثر تنش محاسباتی حاصل از بارهای زنده ساکن برای در نظر گرفتن‌ضربه‌باید مقادیر زیر را اضافه نمود :

۱ ــ اثر حاصل از غلت

برابر با درصدی از تنش حاصل از بار زندهٔ ساکن معادل با $\frac{100}{S}$

S = فاصله مرکز به‌مرکز شاه‌تیرهای طولی ، خرپاها و یا طول تیرهای کف و یا شاهتیرهای عرضی است (برحسب فوت)

۲ ــ اثر مستقیم عمودی

در لوکومتیوهای بخاری (ضربه اهرم بخار ، ناصافی ریل ، ضربه واگنها) برابربا درصدی از تنش حاصل از بار زنده که معادل است با :

الف ــ برای تیرها ، تیرهای طولی ، شاهتیرها و تیرهای کف

در صورتی که L کمتراز 100 ft باشد $60 - \frac{L^2}{500}$

---

* در دستگاه متریک رابطه (۱ــ۱) به‌صورت $I = \frac{15.24}{L+38.1}$ نوشته خواهد شد که در آن مقدار L برحسب متر خواهد بود .مترجم) .

درصورتی که L بیشتر یا برابر با 100 ft باشد $\frac{1,800}{L-40}+10$

ب ــ برای دهانه خرپاها $\frac{4,000}{L+25}+15$

در لوکومتیوهای برقی (ناصافی ریل، ضربه واگنها) برابربا درصدی از تنش حاصل از بار زنده ساکن معادل با:

در صورتی که L کمتراز 80 ft باشد $40-\frac{3L^2}{1,600}$

در صورتی L برابر با بیشتراز 80 ft باشد $\frac{600}{L-30}+16$

L ــ فاصله‌مرکز به‌مرکز تکیه‌گاههای‌تیرهای طولی، شاهتیرهای طولی و خرپاها (میله‌ها و اعضای اصلی خرپا) است (برحسب فوت)

L ــ طول تیرهای کف یا شاهتیرهای عرضی برحسب فوت و همچنین طول قطریهای فرعی خرپاها شاهتیرهای عرضی و تکیه‌گاههای شاهتیرهای عرضی می‌باشد (برحسب فوت)" برای این‌که در مورد ضربه شرحی عملی برای این آئین نامه داده باشیم فرض کنید که شاهتیر طولی که در مثال قبل شرح داده‌ایم یکی از دو شاهتیر پل راه‌آهن برای لوکومتیو بخاری باشد و این دو شاهتیر فاصلهٔ مرکز به‌مرکزی برابر با 18 ft داشته باشند. برای تعیین اثرحاصل از غلت چون $S=18$ است، لذا درصدضربه برابر با $^{100}/_{18}=5.5\%$ خواهد شد. در مورد اثر مستقیم عمودی چون $L=100$ است لذا درصد ضربه برابر با

$$1,800/(100-40)+10=40.0\%$$

می‌شود (توجه شود که در اینجا $L=100$ در نظر گرفته شده است زیرا برابر با دهانه شاهتیر است، در صورتی که درمثال قبل $L=50$ گرفته شد چون طول بارگذاری شاهتیر برابر با 50 ft بود) به‌این ترتیب کل درصد ضربه برابر با

$$5.5+40.0=45.5\%$$

خواهد شد و برش حاصل از ضربه برابر با

$$1,000,000\times 0.455=455,000\text{ lb}$$

می‌شود و بالاخره کل اثر بار زنده یعنی برش‌حاصل ازبار زنده به‌اضافه برش حاصل‌از ضربه‌برابربا

$$1,000,000+455,000=1,455,000\text{ lb.}$$

خواهد شد .

سایر آئین نامه‌ها قواعد دیگری برای تعیین اثر ضربه ارائه می‌دهند ولی‌این‌دو روش شاید مهمترین قواعد متداول باشند .

عموما" در مورد بارهای زنده منقول که بارهای زنده ساختمانها را تشکیل می‌دهند به‌کاربردن تنش حاصل از ضربه موردی پیدا نمی‌کند و به‌علاوه وقتی سازه به‌صورت چوبی طرح می‌شود اغلب ازضربه در آن صرفنظر می‌شود ،دلیل این عمل این است که‌چوب‌ماده‌ای است که در برابر بارهای با مدت اثر کوتاه نسبت به‌بارهای دائمی بسیار قویتر است‌و به‌این جهت از این ذخیرهٔ مقاومت می‌تواند در برابر بارهای ضربه‌ای استفاده کند .

۱ ـ ۹ *بارهای حاصل از برف و یخ*

بارهای حاصل ازبرف اغلب بسیار مهم‌هستند مخصوصا" اگر محاسبه پشت بام‌ها مورد نظر باشد . برف در ردیف بارهای منقول است و به‌این جهت الزاما" تمام سطح پشت بام را نخواهد پوشاند لذا برخی‌از حمالهای سقف ممکن‌است تحت اثر پوشش قسمتی‌از سقف توسط برف ، تنشهای حداکثری را تحمل کنند ، برحسب محل ریزش برف وزن مخصوص‌آن نیز تا حد زیادی تغییر خواهد کرد و همچنین در یک محل معین ارتفاع برفی‌که دریک پشت‌بام جمع خواهد شد بستگی به‌شیب بام و زبری کف پشت‌بام خواهد داشت .در پشت‌ـ بامهای صاف که در معرض ریزش برفهای سنگین قرار دارند ممکن است بار حاصل از برف به 60 حتی به 90 پاوند بر فوت مربع (290 تا $430\ daN/m^2$) نیز برسد .فرض اثرهمزمان بار حاصل از برف و باد در یک پشت بام خود مسأله‌ای بحث انگیز است‌زیرا که یک بادقوی تقریبا" قسمت اعظم برف آن‌را پائین خواهد ریخت .

بارهای حاصل از یخ‌زدگی نیز ممکن است بسیار مهم باشد ، به‌عنوان مثال در طرح برجهایی که ازقطعات نسبة" کوچک ساخته‌شده و درسطح نسبة" وسیعی‌ازآن امکان جمع‌شدن یخ وجود دارد این مسأله حائز اهمیت است ،درچنان سطوحی یخ‌که دارای وزن مخصوصی تقریبا" برابر با آب است می‌تواند ضخامتی برابر با ۵ سانتیمتر یا بیشتر نیز داشته باشد . گرچه امکان رسیدن به‌ضخامت بیشتر نیزموجود است ولی درچنان حالتی در برف شبنم‌جمع شده و وزن مخصوص‌آن را تقلیل می‌دهد . وقتی قطعه‌ای با یخ پوشیده می‌شودشکل‌آن وسطح تصویری آن تغییرمی‌یابدکه باید در محاسبات این مقادیرتغییر یافته در مقابل اثر باد بر قطعه پوشیده شده از یخ به‌حساب آید .

۱ ــ ۱۰ بارهای جانبی ــ کلیات

معمولا" بارهایی که قبلا" ذکر شد به‌صورت عمودی اثر می‌کنند ولی اثر بارهای زنده‌و بارهای ضربه‌ای نظیرآنها فقط در همان جهت اثر نخواهند کرد و لذا علاوه بر بارهای‌قبلی برخی از بارها نیز تقریبا" همواره در جهت افقی وارد می‌شوند و باید اثرآنهارا در طرح و محاسبات اغلب سازه‌ها منظور نمود . این چنین بارها را بارهای جانبی گویند .

بارهای حاصل از باد ، فشار خاک ، فشار آب ساکن ، نیروهای حاصل از زلزله نیروهای گریز از مرکز و نیروهای طولی را عموما" تحت این طبقه‌بندی ذکر می‌کنند .

۱ ــ ۱۱ بارهای حاصل از باد

بارهای حاصل از باد بسیار مهم است مخصوصا" در محاسبه سازه‌های بزرگ نظیر ساختمانهای بلند ، برجهای رادیو ، پلهای با دهانه وسیع و همچنین در سازه‌های نظیر ساختمانهای کارخانجات ،آشیانه‌ها و انبارها که درداخل فضای وسیعی‌دارند وبا دیوارهایی که امکان وجود بازشوهایی بزرگ در آنها وجود دارد پوشیده شده‌اند اهمیت پیدا می‌کند . سرعت باد که در محاسبه یک سازه در نظر گرفته می‌شود بستگی به‌موقعیت جغرافیایی و نمای بادگیر سازه دارد*.

بارهای محاسباتی که برای باد در آئین‌نامه‌های مختلف توصیه می‌شود بمانندبارهای محاسباتی برای بارهای زنده معرف‌کامل بارهای حاصل‌از باد واقعی نمی‌باشند .تجربه‌نشان داده است که به‌کاربردن مقادیر توصیه شده منجر به‌طرحی با استحکام مناسب و همچنین صلبیت مناسب می‌گردد .

آئین نامه AASHTO برای پلهای بزرگ جاده نیروی باد را معادل با باری منقول که به‌صورت افقی به‌شدت 75 lb/ft (350 daN/m^2) برای خرپاها و طاقها به‌شدت 50 lb/ft (235 daN/m^2) برای شاهتیرها و تیرها در نظر می‌گیرد . البته این چنین نیروهایی برای سرعت بادی برابر با 100 mph (161 km/h) است . سطحی که باد بر آن اثر می‌کند مجموع سطوح کلیه قطعات تشکیل دهنده کف سازی و نرده خواهد بود که در

---

* سرعت باد در سطح زمین برای کشور ایران برابر با 125 km/h گرفته شده است. مترجم)

نمای قائم بر محور طولی سازه دیده می‌شود . هرگاه در سازه‌ای بارهای زنده را با بارحاصل از باد جمع کنیم شدت اثر بارحاصل‌از باد ۷۰ درصد کم خواهد شد . برای سازه‌های فرعی، نیروهای حاصل از باد را باید طبق آئین‌نامه با زاویه مایل به‌نحوی‌که هم نیروی طولی و هم نیروی عرضی ایجاد نماید در نظر گرفت .

در مورد ساختمانها برطبق آئین نامه AISC قاب ساختمان باید به‌گونه‌ای طرح گردد که قادربه‌تحمل فشار زیادی حداقل برابر با $20\ lb/ft^2$ ($95\ daN/m^2$) که برکل‌سطح‌تمام شده عمودی سازه اثر می‌کند باشد .

در مورد ساختمانهای با سقف شیب‌دار و یا گروی باید مشخصات دقیقتری‌برای بار حاصل از باد بکاربرد ،گزارشی با عنوان "بادبندی ساختمانهای‌فلزی "برای اطلاع دانشجویان معرفی می‌شود این گزارش ازجهت راحتی بیشتر فشار (یا مکش) سقف‌را با علامت q که فشار مبنا (حاصل از سرعت باد) است نشان داده است که مقدار آن به صورت زیر تعیین می‌شود*:

$$q = \tfrac{1}{2} m V^2 \qquad (۱-۲)$$

در این رابطه m جرم واحد حجم هوا و V سرعت باد در همان دستگاه اندازه‌گیری می‌باشد در شرایط متوسط درصورتی‌که سرعت باد‌را برحسب mph (مایل‌درسرعت) m بیان کنیم فشار مبنا برحسب پاوند بر فوت مربع چنین خواهد شد**:

$$q = 0.002558 V^2 \qquad (۱-۳)$$

(هر مایل برابر با ۱۷۶۰ یارد می‌باشد)

درمورد سقف‌های‌شیب‌داربارگذاریهای زیربرای شیب سمت‌بادگیر توصیه‌می‌شود

---

* *ASCE*, March, 1936, p. 397 توصیه‌هایی که در این گزارش شده است بدون شک سازگاری بیشتری با نیروهای آئیرودینامیکی مؤثر بر سقف با نیروهای دیگری که برای طرح سقفهای بکاربرده می‌شوند دارند درمحاسبات عملی تعیین فشارناشی از باددرسطوحی که عمودی نباشند عموما" از رابطه‌ای نظیر رابطه دوخمین Duchemin که به صورت رابطه $P_n = P\frac{2\sin i}{1+\sin^2 i}$ است استفاده می‌کنند ، در این فرمول P_n شدت فشار عمودی بر سطح مورد نظر و P شدت فشار بر یک سطح عمودی است . i زاویه سطح مورد نظر با افق است چنین محاسبه‌ای مقدار فشار باد را در طرف بادگیر شیب پشت‌بام معین می‌کند ولی برای مقدار مکش باد در طرف پشت بادگیر شیب پشت بام عددی ارائه نمی‌دهد .

** در دستگاه SI رابطه فوق بصورت $q=\frac{V^2}{16.311}$ بیان می‌شود . در این رابطه q برحسب daN/m^2 و V برحسب m/s است) .

۱ ــ برای شیب‌هایی برابر با $20°$ و کمتر مکش (یعنی به‌سمت بالا) برابر با $0.7q$
۲ ــ شیب‌هایی بین 20 و $30°$ مکش برابر با

$$p = (0.07\alpha - 2.10)q \qquad (۴-۱)$$

که در آن α شیب سقف برحسب درجه است.
۳ ــ برای شیبهایی بین 30 و $60°$ فشاری برابر با:

$$p = (0.03\alpha - 0.90)q \qquad (۵-۱)$$

۴ ــ برای شیبهایی تندتر از $60°$ فشاری برابر با $0.90q$ پیشنهاد شده است که برای بارگذاری در اثر باد، برای پشت بادگیر سقف‌های شیب‌دار مکشی برابر با $0.6q$ برای کلیه مقادیر شیب در نظرگرفته شود، البته جهت اثر فشار و مکش در کلیهٔ این‌حالات عمود بر سطوح تحت تأثیر باد خواهد بود.

گزارش انجمن مهندسین عمران آمریکا (ASCE) که به‌عنوان مرجع از آن ~~دراین~~ قسمت استفاده شده‌است بحثی در مورد مقدار و طرز پخش فشار باد بر سقفهای ~~مدور~~ که در پوشش آشیانه‌ها و انبارها به‌کار برده می‌شود نیز به‌عمل آمده است.

در آئین‌نامه AISC بار حاصل از باد بر ساختمانها به‌صورت فشاری مؤثر بر سطح کل عمودی ساختمانها درنظر گرفته شده‌است. چنین طرز عملی برای محاسبات ساختمانهای بلند رضایت‌بخش است، گرچه عملاً" بارهای عرضی حاصل از باد شامل نیرویی فشار در سمت بادگیر و مکش در قسمت مقابل سمت بادگیر می‌شود.

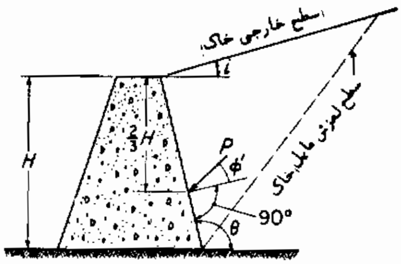
۱ ــ ۱۲ فشار خاک

بارهای مؤثر بر دیوارهای حایل، دیوارهای ساختمانها و سایر سازه‌ها که بر اثر فشار خاک بوجود می‌آیند اغلب اوقات باید توسط مهندس سازه بررسی گردد، فشار جانبی‌خاک بر یک دیوار در اثر جابجایی دیوار تغییر می‌کند و در اثر جا خالی‌کردن دیوار مقدار فشار خاک به‌حداقل خود می‌رسد که به‌این مقدار حداقل فشار عامل خاک می‌گویند. ازطرف دیگر اگر خاک به‌طرف خاکریز فشرده شود فشار بین دیوار و خاکریز پشت آن به‌حداکثر خود که به‌فشار غیرعامل خاک معروف است می‌رسد. تحت شرایط متعارف فشار عامل در هرعمقی‌در حدود $\frac{1}{4}$ فشار عمودی است و فشار غیرعامل در حدود ۴ برابر فشار عمودی است. از آنجائی که در مورد مایعات فشار جانبی برابر با فشار عمودی‌است لذا مقادیر تقریبی $\frac{1}{4}$ و ۴ راگاهی

"نسبت‌های فشاری آب ساکن" به‌ترتیب برای فشار عامل و غیرعامل می‌گویند .

بنابر بحث فوق‌الذکر کلیه دیوارهائی‌که امکان جابجایی مختصری برای آنها تحت اثر فشار خاک ممکن است براساس فشار عامل محاسبه می‌گردند ، گرچه مقدار فشاری که در عمل بر آن دیوار اثر می‌کند عموما" قدری از نظر مقدار بیشتر خواهد بود در محاسبات نحوه گسترش این فشار بر دیوار به‌صورت مثلثی فرض می‌کردد گرچه چنین فرضی نیزکاملا" صحیح نیست .

در مورد خاکهای بدون چسبندگی فشار عامل خاک را می‌توان بر نواری به‌عرض یک فوت (در سیستم متریک یک متر) براساس نظریهٔ کولمب Coulomb که سطح لغزش دو قشر خاک را سطحی شیب‌دار فرض می‌کند محاسبه نمود . با مراجعه به‌شکل (۱—۳) برآیند کل نیرو بر دیوار را با P نشان داده‌ایم که درفاصله دوسوم ارتفاع دیوار از بالای دیوار در جهتی



شکل ۱ — ۳ دیوار حایل

که زاویه‌ای برابر با ϕ' با خط عمود بر سطح دیوار می‌سازد بر دیوار اثر می‌کند. در اینجا ϕ' زاویه اصطکاک بین خاک و مصالح دیوار است . H ارتفاع عمودی خاک از تراز پائین دیوار است . زاویه‌ای که سطح خاک با افق می‌سازد با i نشان داده شده‌است ، شیب‌داخلی دیوار را با زاویه θ نشان داده‌ایم .

نیروی کل P را برحسب پاوند بر طبق تئوری کولمب از رابطه زیر معین می‌کنند :

$$P = \frac{1}{2}\gamma H^2 \left[\frac{\csc\theta \sin(\theta - \phi)}{\sqrt{\sin(\theta + \phi')} + \sqrt{\frac{\sin(\phi + \phi')\sin(\phi - i)}{\sin(\theta - i)}}} \right]^2 \qquad (۶ - ۱)$$

در این رابطه γ وزن واحد حجم خاک برحسب lb/ft^3 (در دستگاه SI برحسب daN/m^2) ، ϕ زاویه اصطکاک داخلی خاک (که مقدار آن را می‌توان به‌سادگی توسط آزمایش برش در آزمایشگاه به‌دست آورد و مقدار متعارف آن بین 30 الی $40°$ است) . ϕ' زاویه اصطکاک بین خاک و مصالح بنایی است که از نظر مقدار برای دیوارهای زبر حدودا" برابر با ϕ بوده‌ولی

در مورد دیوارهای صاف قدری کمتراز ϕ می‌باشد (در سیستم متریک فرمول (۱ـ۶) تغییر نمی‌کند و اگر H را برحسب m در آن ملحوظ کنیم مقدار نیروی کل برحسب daN برای نواری بعرض 1m بدست می‌آید .

اگر $i = 0$ ، $\theta = 90^\circ$ و $\phi = \phi'$ باشد رابطه (۱ـ۶) به‌صورت زیر در می‌آید :

$$P = \frac{1}{2}\gamma H^2\left[\frac{\cos\phi}{(1+\sqrt{2}\sin\phi)^2}\right] \qquad (۷-۱)$$

برای مثال اگر حالت شن را بررسی کنیم که در آن $\phi = \phi' = 30^\circ$ و $\gamma = 100\ \mathrm{lb/ft^3}$ (یا $1630\ \mathrm{daN/m^3}$)می‌باشد و برپشت دیواری‌عمودی به‌ارتفاع 10 ft (یا 3.05m) اثر می‌کند نیروی برآیندی که بر نواری به‌عرض 1 ft (یا 1m)اثر می‌کند از معادله (۱ـ۷) به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد .

$$P = \frac{1}{2}(100)(10)^2\left\{\frac{0.867}{[1+1.414(0.500)]^2}\right\} = 1{,}490\ \mathrm{lb}$$

(در دستگاه SI خواهد شد ،

$$P=\tfrac{1}{2}(1630)(3.05)^2\left\{\frac{0.867}{[1+1.414(0.5)]^2}\right\}=2250$$

این نیروی برآیند در فاصله 3.33 ft (یا 102cm)از تراز پائین دیوار را در جهت دیـوار و به‌طرف پائین با زاویه‌ای برابر با 30° بر آن اثر خواهد کرد .

برای بررسی بیشتر فشار خاک باید به‌کتابهایی در زمینه مکانیک خاک مراجعه نمود .

۱ ــ ۱۳ فشار آب ساکن

سدها مخازن و نظایرآنها تحت تأثیر فشارآب ساکن که به‌سادگی بر طبق قواعدمعمول در اصول مقدماتی هیدرولیک قابل محاسبه می‌باشند قراردارند . فشار آب ساکن‌را باید به‌صورت بارهای منقول در نظر گرفت زیرا الزاما" تنش بحرانی سازه زمانی که ارتفاع آب به‌حداکثر سطح خود برسد اتفاق نخواهد افتاد . در برخی از سازه‌ها وجودبرخی‌ازفشارهای آب ساکن عملا" سبب تقلیل تنش درسازه می‌گردد . به‌این ترتیب یک مخزن زیرزمینی‌بیشتر زمانی امکان گسیختگی در آن وجود دارد که به‌حالت خالی باشد تا پر و یا یک مخزن روی

خاک امکان رسیدن آن به‌حالت تنش بحرانی زمانی است که مخزن نیمه‌پر باشد .

گاهی لازم است که بارهای دینامیکی آب را نیز در محاسبات در نظر بگیریم مثلاً" زمانی که آبی با حداکثر سرعت به‌پایه‌های پل اصابت می‌کند .

۱ ــ ۱۴ نیروهای *حاصل از زلزله*

سازه‌های مهم هرگاه در مناطق شدید زلزله واقع شوند اغلب در مقابل نیروی زلزله محاسبه می‌گردند . خسارات ناشی از اثر زلزله بر یک سازه ناشی از این حقیقت است که پی سازه تحمل شتاب می‌نماید ، چنین شتابی دارای مولفه افقی عمده‌ای است معمولاً" از مؤلفه عمودی آن صرفنظرمی‌شود . میزان شتاب افقی پی‌ها می‌تواند ۵۰ درصد شتاب ثقل الی‌معادل آن گرفته شود یعنی 16 یا $3.2\ ft / sec^2$ (در دستگاه SI مقدار $g=9.81\ m/s^2$) . اگر سازه را مانند جسمی فرض کنیم به‌همان میزان پی‌های خود شتاب پیدا خواهد کرد . یعنی هرقسمتی از سازه تحت تأثیر نیروی جرمی برابر با حاصلضرب جرم آن در شتاب افقی قرار خواهد گرفت و یا به‌عنوان مثال :

(نیروی جانبی) = (جرم) × (شتاب) = $\left(\frac{\text{وزن}}{g}\right) \times 0.5g$ = (50% وزن آن)

سازه‌ها را گاهی براساس مطالب فوق در برابر زلزله محاسبه می‌کنند ، گرچه این روش کاملاً" تقریبی است . زیرا معمولاً" فرض این که کل سازه مانند جسمی صلب شتاب پیدا کند از نظر عملی صحیح نیست ، چون عملاً" سازه تغییرشکل ارتجاعی پیدا می‌کند که همین واقعیت در شتاب قطعات مختلف آن تأثیر می‌گذارد .

شتاب افقی سازه‌هایی نظیر یک سد نه‌تنها به‌سبب جرم خود تولید نیروهای جرمی می‌کند بلکه در اثر حرکت سریع سد به‌طرف آب پشت آن‌سبب ایجاد نیروهای دینامیکی‌آب نیز می‌شود .

۱ ــ ۱۵ نیروهای *گریز از مرکز*

در طرح پلی که دارای مسیر ماشین رو و یا ریلی منحنی می‌باشد وسائط نقلیه‌ای که از آن سازه عبور می‌کنند نیرویی گریزاز مرکز بدان وارد می‌کنند که ممکن است مقدار آن نیرو به‌اندازه‌ای باشد که در نظر گرفتن آن در طرح پل لازم گردد . چنین نیروهای گریزاز مرکزی بارهای جانبی بوده و باید مانند بارهای متحرک در نظر گرفته شوند .

اگر وزنی برابر با W با سرعتی برابر با V یک‌منحنی‌به‌شعاع R را طی کند نیروی گریز

از مرکز C (که بر مرکز ثقل جسم بوزن W اثر می‌کند) برحسب رابطه زیر بیان خواهد شد .

$$C = (\text{جرم}) \times (\text{شتاب خروج از مرکز}) = \frac{W}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \qquad (۱-۸)$$

۱ ــ ۱۶ نیروهای طولی

در مورد یک پل نیروهای افقی که در جهت محور طولی آن اثر می‌کنند یعنی درجهت جاده ماشین روی اثر می‌کنند به نیروهای طولی معروف هستند ، چنان نیروهایی زمانی برآن وارد می‌شوند که وسائط‌نقلیه از آن عبور می‌کنند روی آن تغییر سرعت دهند ، از آنجائی‌که این چنین نیروهایی جرمی هستند و در اثر شتاب مثبت یا منفی وسائط‌نقلیه اثر خواهند کرد . مقدار چنین نیروهایی محدود به‌نیروهای اصطکاکی است که قادرند بین دوسطح‌تماس چرخهای وسایل نقلیه که این‌نیروها را بر جاده یا ریل منتقل می‌نمایند و سطح جاده یاریل بوجود آیند .

برای پلهای راه آهن آئین نامه AREA فرض می‌کند که نیروهای افقی در فاصله 6ft (183cm) بالای ریل اثر می‌کند و تأثیر آن همراه با بارهای زنده فقط‌بر روی یک ریل باشد . برای ریل مورد نظر باید نیروهای طولی را برابر با بزرگترین مقدار از دو مقدار زیر گرفت (۱) در اثر ترمز ۲۵ درصد کل بار زنده بدون در نظر گرفتن اثر ضربه (۲) در اثر کشش ۲۵ درصد وزن وارده بر چرخهای محرک لوکوموتیو بدون در نظر گرفتن اثر ضربه .

برای راههای ماشین‌رو آئین نامه AASHTO درخواست می‌کند که محاسبات برای‌مقابله با نیرویی طولی برابر با ۵ درصد بار زنده مؤثر بر سازه که در فاصله 4ft (122cm) بالای جاده فرض می‌شود انجام گیرد .

۱ ــ ۱۷ نیروهای ناشی از تغییر دما

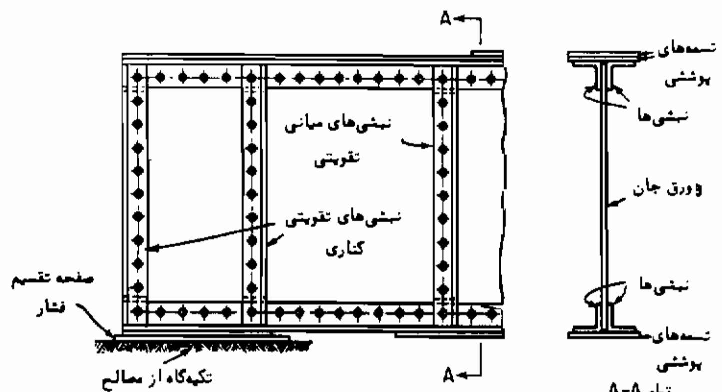
تغییر دما سبب ایجاد کرنش در قطعات یک سازه می‌شود و به‌این جهت باعث تغییر شکل‌کلی سازه می‌گردد . اگر تغییر شکل ناشی از تغییردما با مقاومتی مواجه گردد که اغلب‌در سازه‌های نامعین چنین حالتی وجود دارد ، در سازه مورد بحث تنش بوجود خواهد آمد . نیروهای ناشی از تغییر دما که در سازه‌ها بوجود می‌آید اغلب نیروهای حرارتی خوانده می‌شوند . نه‌تنها باید نیروهای ناشی از تغییر دما را در نظر داشته باشیم بلکه درنظرگرفتن

انبساط و انقباض سازه مخصوصا" در طرح اتصالات تکیه‌گاهی بسیار مهم است .

در آب و هوای معتدل تغییر دما را بین ۰ تا ۱۲۰ درجه فارنهایت (برابربا ۱۷ــتا ۴۹ــ درجه سانتیگراد) و در آب و هوای سرد این حدود تغییرات را ۳۰ـتا ۱۲۰ درجه فارنهایت (معادل با ۳۴ـتا ۴۹ درجه سانتیگراد) می‌گیرند .

۱ ــ ۱۸ ساخت تیر ورقها

در سازه‌هائی‌که از فولاد ساختمانی دراجرای آنها استفاده می‌شود معمولا" برای پوشش دهانه‌ها از نیمرخهای استاندارد I بال پهن جهت تحمل بارها استفاده می‌شود . هرگاه از نیمرخهای نوردشده استفاده شود این عملکرداقتصادی خواهد بود زیرا که‌کار ساخت چنین نیمرخهایی کمتراز تیرورقهاست .ولی در دهانه‌های بزرگ و بارگذاریهای سنگین مقدار لنگر خمشی و نیروی برشی چنان بالاست که تحمل آنها به‌صورت ایمن توسط نیمرخهای نوردشده ممکن نیست و در این صورت بایداز تیرورقها استفاده‌گردد . مهمترین قسمتهای یک تیرورق چنانچه در شکل (۱ــ۴) دیده می‌شود عبارت است از ورق جان بال فوقانی که از دونبشی و تسمه تشکیل شده و بال تحتانی‌که بهمان طریق ساخته شده است .در دوطرف‌صفحه تقسیم فشار نبشی‌های عمودی که بنام تقویت کننده‌های کناری نامیده می‌شوند قرار دارند و در برخی ازنقاط در طول دهانهٔ آن معمولا" قراردادن نبشی‌های عمودی لازم است که به‌آنها تقویت کننده‌های میانی گویند . در شکل (۱ــ۴) اجزاء مختلف تیرورق را توسط پرچ بهم متصل کرده‌اند ،اغلب اوقات بجای پرچ از جوش استفاده می‌شود ، در این حالت جزئیات

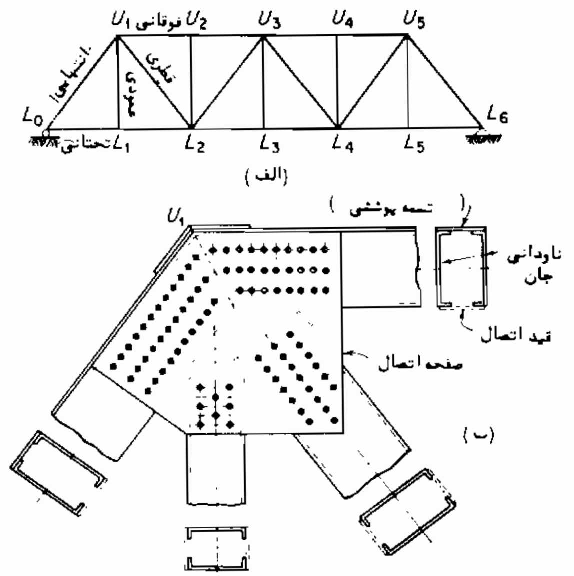


شکل ۱ ــ ۴ اجزاء تشکیل دهنده یک تیر ورق

اجرایی تیرورق کمی تغییر خواهد کرد ولی باید اجزای تشکیل‌دهندهٔ آن که جان ، بالهای فوقانی و تحتانی و تقویت‌کننده‌های جان می‌باشد بازهم تأمین گردند .

۱ ــ ۱۹ ساخت خرپاها

مسائل ناشی از ساخت ، حمل و نصب تیرورقها معمولا" ارتفاع آنها را به‌حدود ۳ متر محدود می‌نماید . وقتی مقدار لنگر خمشی و تلاش برشی به‌حدی بالا باشد که تحمل آنهااز تیرورقی به‌آن ارتفاع خارج گردد استفاده از خرپاها لازم خواهد بود . در شکل (۱ــ۵الف) نمونهٔ یک خرپا نشان داده شده است . به‌اعضای $L_0L_1,$ L_1L_2 و . . . L_5L_6 (میله‌های اصلی‌تحتانی وبه‌اعضای U_1U_2 و . . . , U_4U_5 (میله‌های)اصلی فوقانی ، به‌اعضای U_5L_6 و L_0U_1 اعضای انتهایی گویند که این اعضا اغلب جزءاعضاءاصلی فوقانی به‌حساب می‌آیند به‌اعضای $U_1L_2,$ ، L_2U_3 و . . . , L_4U_5 (میله‌های) قطری و به‌اعضای U_1L_1 ، U_2L_2 و . . . , U_5L_5 (میله‌های) عمودی گفته می‌شود . در شکل (۱ــ۵ ب) نمونه‌ای از جزئیات یک اتصال و اجزای تشکیل دهنده یک خرپای پرچی دیده می‌شود . صفحاتی که کلیه اعضاء خرپا در یک گره بدان متصل می‌شوند صفحه اتصال گویند . در خرپاهای با دهانه‌های وسیع ممکن است اعضای خرپا در گرهی توسط یک میله محوری که از وسط جان کلیه اعضاء عبور

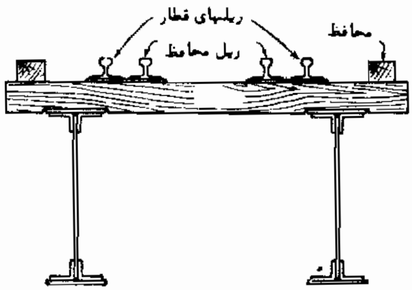


شکل ۱ ــ ۵ اجزای یک خرپا با اتصالات پرچی

می‌کند و یا از اتصالاتی که در آنها برای عبور میله محوری اقدام‌لازم انجام گرفته‌و آنها را به‌اعضاء خرپا وصل کرده‌اند ،بهم متصل شوند ، البته عموما" خرپاها را بهـــم جوش می‌کنند تا پرچ یا پیچ .

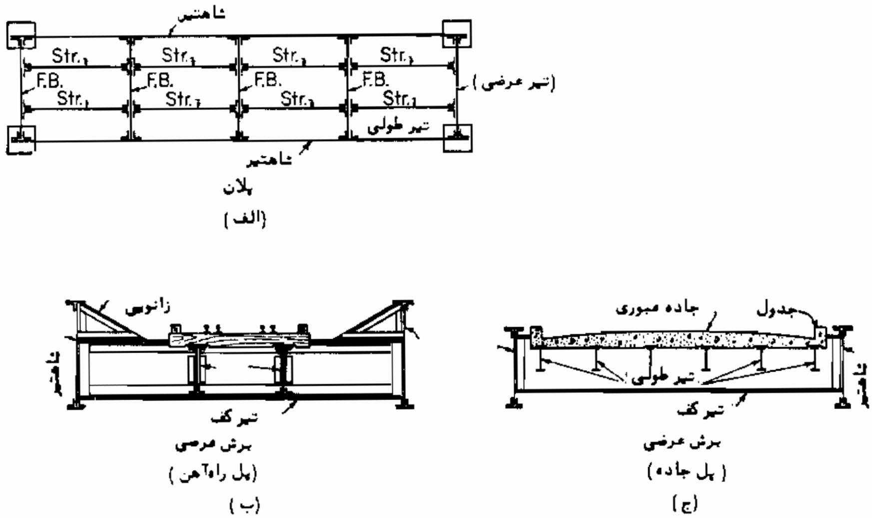
۱ ـ ۲۰ اجرای تیر ریزی کف‌ها

اگـــر در یـک پـل عبـوری قطار ، فاصلــه شاهتیرهـــا از هم زیاد نباشـد و اگر ریلهـــای عبوری در بالای شاهتیرهـا قـــرار گـرفته باشد از نظـر اقتصادی بهتـر است بطوریکـه در شکل (۱ ـ ۶) نشـان داده شـده است تـراورسهـــــا را مستقیمـــا" بـرای روی تسمـــه پـوششی بال فـــوقانـــی شاهتیـــرهـا قـــرار دهنـــــد . چنیـــن پلهایـــی را با عبـــورگـاه فوقانـــی گوینـــد . چنانچـه



شکل ۱ ـ ۶ پل با تیرورق و با عبورگاه فوقانی

فواصل بین شاهتیرها افزایش یابد چنین طرح و اجرایی غیر اقتصادی خواهد شد به‌علاوه در صورتی‌که ریلهای عبور پائین‌تر از سطح فوقانی شاهتیرها واقع شده باشند عملا" چنیـن طرحی غیرممکن می‌گردد .در صورت تحقق هریک‌از حالات فوق‌الذکر طرح و اجرای تیرریزی کف که شامل تیرهای طولی ، تیرهای کف (تیرهای عرضی) مانند شکل (۱ـ۷) باشـد لازم می‌گردد . اگر تیرریزی کف در بالای شاهتیرها و یا خرپاها واقع شده باشد پل را باز هم بـا عبورگاه فوقانی گویند و اگر تیرریزی کف در پائین شاهتیر یا خرپا واقع شده باشد پل را با عبورگاه تحتانی و اگر در وسط شاهتیر یا خرپا واقع شده باشد پل را با عبورگاه میانی‌گویند . شکلهای (۱ـ۷ الف) (۱ـ۷ ب) یک پل راه‌آهن با یک خط عبوری قطار به‌صورت پلـی بـا عبورگاه میانی نشان‌می‌دهد . در این شکل تیرریزی کف نشان داده شده است ، تراورسها مستقیما" برروی تیرهای طولی که به‌موازات شاهتیرهای اصلی قرار دارند واقع شده‌اند ،کلیه



شکل ۱ ــ ۷ مقاطع پل با شاهتیر

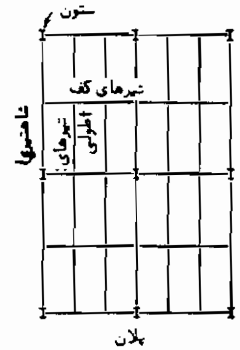
تیرهای طولی به‌قطعاتی که به‌تیرهای کف معروفند و به‌صورت عمودی تیرهای طولی را قطع می‌کنند متصل شده‌اند ، تیرهای عرضی نیز به‌نوبه خود به‌شاهتیرهای اصلی وصل شده‌اند . به‌این ترتیب بار ازطریق ریلها به‌تراورسها می‌رسد و تراورسها باررا به‌تیرهای طولی و تیرهای طولی به‌نوبه‌خود باررا به‌تیرهای‌کف منتقل می‌کنند. تیرهای کف نیز بار را به‌شاهتیرها منتقل می‌کنند که آنها نیز به‌نوبهٔ خود آن را به‌پی‌های سازه منتقل می‌نمایند .

شکل (۱ــ۷ج) یک مقطع عرضی‌از یک پل نمونهٔ جاده‌را که دارای تیرریزی کف می‌باشد نشان می‌دهد چنین تیرریزی‌کف مشابه پل عبوری قطاراست که قبلاً" شرح داده شده ، دراین پل دال کف پل بر روی تیرهای طولی واقع شده که این تیرها به‌تیرهای عرضی (تیرهای‌کف) تکیه دارند و تیرهای عرضی نیز به‌نوبه خود بر شاهیترهای اصلی مهار شده‌اند .

همانطوری که در شکل (۱ــ۸) می‌بینیم تیرریزی مشابهی برای کف ساختمانها به کار برده می‌شود . در چنین حالتی تاوه کف‌برروی تیرهای کف ، شاهتیرها و تیرهای طولی قرار خواهدگرفت ولی بارهائی‌که برقسمتی ازدال که مستقیماً" بر روی‌تیرهای طولی قرارگرفته‌اند وارد می‌شوند از طریق تیرهای طولی به‌تیرهای کف و از طریق تیرهای کف به‌شاهتیرها و از طریق شاهتیرها به‌ستونها و بالاخره به‌پی‌ها منتقل خواهد شد .

در پلهائیکه اعضای اصلی باربر آنها بجای شاهتیرها خرپا می‌باشد ، تیر ریزی کف همیشه به‌کار برده می‌شود ، در این حالت تیرهای‌کف (تیرهای عرضی) در موازات گره‌های میله‌های اصلی قرار گرفته‌اند در این صورت‌اعضای خرپا تحت اثر بارهای عرضی قرارنگرفته

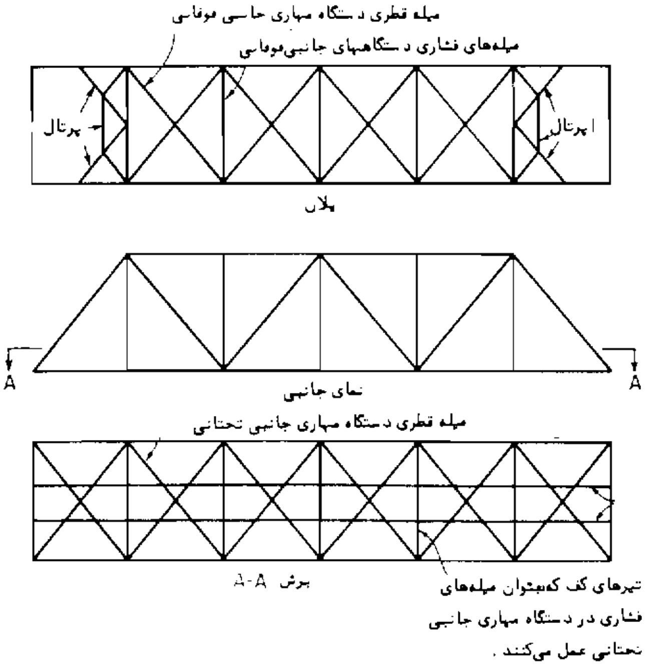
و لذا تحمل خمش اولیه نخواهند کرد .



شکل ۱ ــ ۸ تیرریزی کف ساختمانها

۱ ــ ۲۱ بادبندها و مهاری‌ها

خرپاها ، شاهتیرها ، تیرهای کف (تیرهای عرضی) ، تیرهای طولی ، ستونها و نظایر آنها که اساساً" تحت اثر بارهای قائم محاسبه می‌شوند به‌عنوان قطعات اصلی سازه شمرده می‌شوند علاوه برقطعات اصلی اغلب سازه‌ها به‌سیستم مهاری و بادبند نیز نیازمند می‌باشند که از این سیستم به‌منظورهای متعددی که مهمترین آنها مقاومت در برابر بارهای جانبی و مقاومت در برابر کمانش می‌باشد استفاده می‌شود . مهمترین سیستم بادبند یک پل خرپایی با عبورگاه تحتانی درشکل (۱ــ۹)نشان داده شده‌است .اعضای اصلی سیستم مهاری جانبی فوقانی که در تراز صفحهٔ میله‌های اصلی فوقانی خرپا قرار دارد و این سیستم از میله‌هایی فشاری عمود بر خرپا در کلیه نقاط پانلی و از میله‌های قطری که دو انتهای دومیله فشاری فوق‌الذکر را به‌هم وصل می‌کند ، تشکیل شده است . سیستم مهاری جانبی تحتانی که در تراز صفحهٔ میله‌های اصلی تحتانی خرپا قرار دارد و از تیرهای کف (تیرهای عرضی) که در کلیه نقاط پانلی تحتانی قرار دارند و به‌منزلهٔ میله‌های فشاری تحتانی عمل می‌کنند و از میله‌های قطری که دو انتهای دو تیر کف را به‌هم متصل می‌نماید تشکیل می‌شود . در صفحهٔ اعضای انتهایی خرپا سیستم بادبندی مخصوصی که بدان "پرتال" می‌گویند قرار دارد که اعضای انتهایی را در مقابل تغییر شکل جانبی تقویت می‌نماید .



شکل ۱ ــ ۹ سیستم مهاری (بادبند) جانبی در خرپا با عبورگاه تحتانی

۱ ــ ۲۲ تنش‌های مجاز

هرگاه سازه‌ای براساس روش طرح و *محاسبه ارتجاعی* محاسبه شود تحلیل سازه تحت اثر چندین شرایط مختلف بارگذاری انجام می‌گیرد تا این که لنگرهای خمشی و پیچشی ، نیروهای برشی و محوری در مقاطع مختلف سازه تعیین گردد . پس ازتعیین این‌مقادیرمحاسبه شدت تنشهای عمودی و برشی در آن مقاطع ساده خواهد بود . به‌منظور این که سازه به‌نحو مطلوبی کارایی داشته باشد ، لازم است که مقادیر تنشها که تحت اثر بارهای محاسباتی بوجود می‌آیند از حدود مجازی که برای مصالح مورد مصرف تعیین شده است تجاوز نکنند ، این مقادیر محدود شده که توسط‌آئین نامه‌هائی معین می‌شوند بنام تنش‌های مجاز خوانده می‌شوند .

در مسائل عملی همواره ابهاماتی در مورد تعیین ابعاد مورد استفاد در محاسبات وجود دارد . فرضیات متعددی که در جهت رفع‌این مشکل می‌توان اتخاذ کرد همواره اثر واضحی بر روی مقادیر محاسباتی خواهد گذاشت به‌این جهت آئین نامه‌ها نه‌تنها مقادیر

تنش‌های مجاز را معین می‌کنند بلکه جنبه‌های اساسی قابل رعایت در محاسبات را نیز بیان می‌نمایند تا بتوان تنشهای حاصل از بارهای محاسباتی را با تنشهای مجاز مقایسه نمود . به‌عنوان مثال مقطع عرضی یک قطعه از سازه‌ای با اتصال پرچی را در نظر بگیرید . اگر پرچکاری به‌نحو مطلوبی انجام گرفته باشد ، پرچ کاملا" سوراخ پرچ را پر می‌کند و لذا مرسوم است که در قطعه فشاری فرض شود که قطعه به‌علت سوراخ پرچ ضعیف نشده باشد . سطح‌مقطع را که بدون کسر سوراخ پرچها محاسبه می‌شود " سطح مقطع ناخالص" گویند ولی حتی اگر پرچ‌ها کاملا" سوراخ را پر کرده باشند دیگر نمی‌توان فرض کرد سوراخ پرچها بتوانند تنش کششی منتقل نمایند ، به‌این ترتیب سطح مقطع قطعه را که با کسر سوراخ پرچ در قسمت‌کششی از کل مقطع به‌دست می‌آید "سطح مقطع خالص" می‌گویند ،در تعیین تنش‌های‌مجازلازم‌است معلوم شود که این تنشها به‌کدام یک ازسطوح مقاطع خالص یا ناخالص مربوط‌می‌شوند .

در پرچکاری ، قطر سوراخ پرچ را $1/16$ in (1.5mm) بزرگتر از قطر خود پرچ می‌گیرند و فرض می‌شود که مصالح سوراخ شده نیز $1/16$ in از نظر قطر آسیب دیده باشند و به‌این ترتیب در محاسبه سطح مقطع خالص ،باید قطر مؤثر سوراخ پرچ را $1/8$ in (3mm) بزرگتر از قطر خود پرچ در نظر گرفت .

تنشهای مجاز سازه‌های فولادی که توسط آئین نامه AISC برای ساختمانهای فولادی معین شده است در ذیل نقل می‌شود :

کشش: فولاد ساختمانی ، سطح مقطع خالص	20000 psi	1433 bar
پرچ ، سطح مقطع بر اساس قطر اسمی	20000 psi	1433 bar
پیچ و سایر قطعات حدیده‌شده ،سطح مقطع براساس قطر اسمی در ریشه حدیده	20000 psi	1433 bar

فشار: ستونها ، سطح مقطع ناخالص

برای ستونهابا بارگذاری محوری اگر l/r بیشتراز 120 نباشد

$$17{,}000 - 0.485\frac{l^2}{r^2} \quad \text{psi} \qquad (1218-0.0348\ l^2/r^2 \quad \text{bar})$$

برای ستونها با بارگذاری محوری اگر l/r بیشتر از 120 باشد

$$\frac{18{,}000}{1+(l^2/18{,}000r^2)} \quad \text{psi} \qquad 1290/(1+l^2/18000r^2) \quad \text{bar}$$

در این روابط l طول مهارنشده ستون و r شعاع ژیراسیون مقطع‌آن ستون است ،هردو باید با یک واحد محاسبه شوند .

خمش : (براساس لنگر لختی ناخالص) کشش در تارهای انتهایی نیمرخهای نورد —

شده ، تیر ورقها ،قطعات مرکب 20000 psi 1433 bar فشار در تارهای انتهایی
نیمرخهای نوردشده ، تیرورقها و قطعات مرکب
اگر ld/bt از 600 تجاوز نکند 20000 psi 1433 bar
اگر ld/bt از 600 تجاوز کند
12000000/(ld/bt) psi 860000/(ld/bt) bar

دربن روابط l طول‌مهارنشده‌قطعه، d ارتفاع قطعه، b عرض‌و t ضخامت بال فشاری است .

برش: پرچها	15000 psi	1075 bar
محور مفصل‌ها	15000 〃	1075 〃
پیچهای ناقص	10000 〃	717 〃
جان‌تیرها و تیر ورقها ، با سطح مقطع ناخالص	13000 〃	932 〃

تکیه‌گاهها:	با یک سطح برش		با دوسطح برش	
پرچ‌ها	32000 psi	2293 bar	40000 psi	2867 bar
پیچ‌ها	32000 〃	2293 〃	40000 〃	2867 〃
پیچ‌های سیاه	20000 〃	1433 〃	25000 〃	1792 〃
محور مفصل‌ها	32000 〃	2293 〃	32000 〃	2293 〃

سطوح تماس		
با قیدهای تقویتی کارخانه‌ای	30000 psi	2150 bar
با قیدهای تقویتی‌اجراشده در محل	22000 〃	1935 〃

(کلیه‌ارقام فوق‌برای فولادساختمانی A-7 باحداقل‌تنش تسلیم برابر با 33,000 psi است) .

تنشهای مجاز برای فولاد ساختمانی در پلهای جاده و راه‌آهن قدری با آنچه در بالا گفته شد متفاوت‌است ،برای مقادیر آن‌تنشها دانشجویان‌می‌بایدبه‌آئین‌نامه‌های AASHTO (در مورد پلهای جاده) و به AREA (در مورد پلهای راه‌آهن) مراجعه نمایند .برای‌تعیین تنشهای مجازبتن ،چوب و سایرمصالح ساختمانی‌می‌بایستی به‌آئین‌نامه‌های مربوطه‌وکتابهای راهنما مراجعه نمود*.

---

* (آنچه در این قسمت در مورد مقادیر تنش‌های مجاز ذکر شد مربوط به‌آئین‌نامه قدیم AISC می‌باشد بدیهی است برای مقادیر تنش مجاز در آئین‌نامه‌های جدید باید به‌آخرین چاپ کتابهای راهنمائی مربوطه مراجعه نمود . درایران‌مقادیر تنش مجاز متداول در نشریه ۵۱۹ مؤسسه استاندارد و تحقیقات صنعتی ایران و نشریه ۷۴ دفتر تحقیقات و استانداردهای فنی درج گردیده است .مترجم) .

۱ ـ ۲۳ ضریب *اطمینان*

چنانچه در پیش‌گفتار ذکر شد ،مقادیر تنشهای مجاز که در طرح و محاسبه ارتجاعی به‌کار می‌رود به‌نوعی انتخاب شده‌اند که در برابر نقطه‌تسلیم مصالح مصرفی در ساختمان *ایمنی مناسب* در برابر ازدیاد تنش یا کرنش وجود داشته‌باشد .بدیهی است که انتخاب تنش مجاز ،بارهای محاسباتی و سایر مقررات طرح و محاسبه‌ نسبت به‌ملاحظات مربوط به‌گسیختگی ناشی از خستگی ، کمانش و یا شکستگی ناشی از تردی و یا ملاحظات مربوط به‌تغییر مکان مجاز تغییر خواهد کرد .اگر با مقررات مربوط به‌محاسبات سازه‌ای را برای باربری دقیق تنش مجاز درکشش که برابر با 20,000 psi برای فولاد ساختمانی با تنش تسلیم برابر با 33,000 psi می‌باشد طرح و محاسبه‌ کنیم ،ضریب *اطمینان* در برابر تنش تسلیم در کشش برابر با 1.65 یعنی 33,000/20,000 خواهد بود .

واضح است که عملا" ایجاد ضریب اطمینانی برابر با رقم فوق ممکن‌نیست ،زیرا بارهای افقی مؤثر بر یک‌سازه مخصوصا" برخی از آنهارا نمی‌توان با دقت زیاد تعیین نمود به‌علاوه فرضیات متعددی برای‌ساده‌کردن تحلیل تنش و همچنین برای‌تعیین بارهای‌محاسباتی به‌کار می‌رود .اگرچه دقت بسیاری درساخت و اجرای مصالح‌ساختمانی به‌کارمی‌رود ناهمگونی‌هایی درخصوصیات مصالح‌موجود حتی زمانی‌که این‌مصالح‌تازه‌نیزمی‌باشند موجوداست وباگذشت زمان تجزیه‌های موضعی نیز بوجود می‌آید . با ملاحظات فوق‌الذکر باید همیشه تقریبی در محاسبات مربوط به‌مقدار تنش واقعی در سازه و همچنین درمقدار تنش تسلیم سازه انتظار داشت . به‌این‌ترتیب مطلوب این است‌که به‌طریق آماری بررسی نمود که آیا به‌صورت‌رضایت بخشی و درجهت اطمینان‌تغییرات تنش محاسباتی‌با تغییرات تنش تسلیم حتی با احتمال کمی یکدیگر را پوشش می‌دهند یا نه .

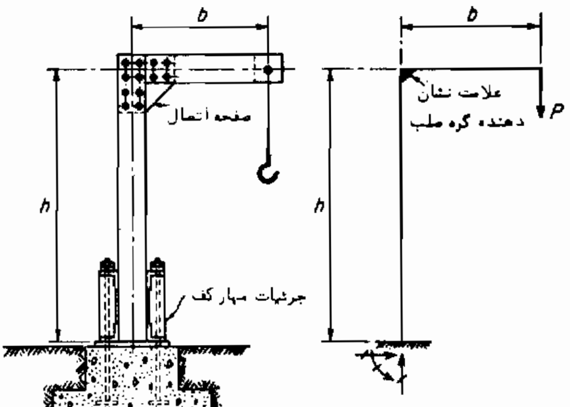
نحوه محاسبه ضریب‌اطمینان را ذکرکردیم ،به‌این ترتیب که ضریب اطمینان در برابر تسلیم نسبت تنش تسلیم مصالح مورد مصرف به‌تنش مجاز محاسباتی می‌باشد . البته واضح است که این یک روش غیر جامع برای بررسی‌چنین مطلبی است ولی باید این نکته رابخاطر بسپاریم که‌ضرایب اطمینانی‌که در آئین‌نامه‌های استاندارد متداول به‌کار برده می‌شود منعکس کننده تجربه سالیان دراز است که درطی آن طرح و محاسبات انجام شده در رابطه‌با باربری واقعی‌سازه‌ها بررسی شده‌است که البته باربری و عملکردسازه‌ها عموما" با محاسبات هماهنگی داشته ولی گاهی هم ناموفق بوده است (به‌فلسفه طرح سازه در پیشگفتار مراجعه شود) .

درتعیین ضریب *بار* که در محاسبات‌مربوط به‌طرح و محاسبه خمیری به‌کاربرده می‌شود نیز کلیه ملاحظات و بررسیهای فوق‌الذکر که برای ضریب اطمینان ذکر شد به‌عمل می‌آید .

۱ ــ ۲۴ سازه‌های واقعی و حقیقی

تطابق یک سازهٔ واقعی با سازه حقیقی آن‌طور که در تحلیل سازه به‌کار می‌رود امری عملا" غیرممکن است ، نه مصالح مصرف شده در ساخت سازه دارای همان خصوصیات فرض شده درتحلیل سازه می‌باشد و نه ابعادآن دقیقا"بر مقادیرنظری ابعاد سازه حقیقی انطباق کامل‌دارد. اتصالات ساختمانی ، نظیرزانویی‌ها و صفحات اتصال‌اثراتی در ساختمان ایجاد می‌کنند که تحلیل آن اثرات واقعا" بسیار پیچیده است ولی به‌دلیل ناچیزبودن اثر واقعی آنها در تحلیل تنش قطعات اصلی از وجود آن اثرات صرف‌نظر می‌شود . همچنین به‌دلیل ضخامت قطعات امکان دارد تفاوت فاحشی بین فاصله بیرون به‌بیرون قطعات و فاصله مرکز به‌مرکز قطعات‌که در محاسبات به‌کاربرده می‌شود وجود داشته‌باشد . ممکن است‌طرح‌جزئیات تکیه‌گاهها تفاوت قابل توجهی با نوع تکیه‌گاه فرض شده در محاسبات داشته و ممکن است قطعه‌ای عملا" منشوری نبوده ولی بخاطر تسهیل در محاسبات آنرا منشوری فرض نمایند .

به‌عنوان مثال سازه واقعی شکل (۱ــ۱۰ الف) را ممکن است براساس سازه حقیقی شکل (۱ــ۱۰ ب) محاسبه نمود که درآن پی‌سازه کاملا" گیردار فرض شده است ، در صورتی که



شکل ۱ــ۱۰ سازه حقیقی یک سازه واقعی

عملا" ممکن است چنین نباشد ، سطح مقطع بزرگ ستون در قسمت اتصالات مربوط‌به قلاب و مصالح صفحات اتصال در گوشه همگی نادیده گرفته شده‌اند ،صفحه اتصال گوشه دقیقا" مانند یک اتصال گیردار فرض شده است در صورتی که عملا" چنین اتصالی‌یک دوران جزیی

بین ستون و شاهتیر افقی را ممکن می‌سازد . ارتفاع مؤثر ستون از سطح فوقانی کف ستون تا خط مرکزی شاهتیر فرض شده و دهانه مؤثر شاهتیر از خط ستون تا مرکز بار مؤثردرنظرگرفته شده است .

برای عملی نمودن محاسبات اجرایی لازم است که یک سازه‌واقعی را به‌سازهٔ حقیقی‌آن تبدیل نمود ، در این تبدیل قضاوت و تجربه و نقش عمده‌ای ایفا می‌کند . در سازه‌های‌مهم که در تعیین فرضیات منطقی برای تبدیل آن به‌سازه حقیقی شک و تردید وجود دارد گاهی بهتر است که محاسبات تنش را براساس بیش از یک سازهٔ انجام داد و سازه را به‌نوعی طرح نمود که در برابر کلیه تحلیل‌های تنش مقاومت داشته باشد .

۱ ــ ۲۵ مسائل

۱ــ۱ شاهتیری به‌دهانه 50 ft برروی‌دوتکیه‌گاه‌ساده قراردارد و بارمرده‌ای‌به‌شدت 500 lb ft و بار زنده‌ای به‌شدت 600 lb ft را تحمل می‌کند . بار مرده در کل دهانه تیراثرکرده و لنگر زنده حداکثری درمقطع میانی شاهتیر براساس اثر بار زنده درکل دهانه تیر اتفاق می‌افتد .

(الف) با فرض این‌که شدت بار مرده مستقیماً با دهانه شاهتیر تغییر کند ولی شدت بار زنده همواره ثابت بماند مقدار لنگر کل حداکثر (بار زنده به‌اضافه بار مرده) تیر را در وسط دهانه آن هرگاه دهانه‌های آن از 20 ft تا 100 ft با اختلافهایی برابر با 10-ft تغییر کند محاسبه کنید .

(ب) هرگاه فرض شود با به‌کاربردن‌آلیاژی سبک (برای شاهتیر)بارمرده‌آن ۴۰درصد تقلیل یابد درصد تقلیل لنگر کل حداکثر وسط‌دهانه تیر را در هریک از حالات ذکرشده‌در قسمت (الف) چقدر خواهد بود .

۲ــ۱ درقسمت (الف)ازمسأله (۱ــ۱) لنگر حاصل از ضربه را بر طبق آئین نامه AASHTO محاسبه کنید .

جواب :

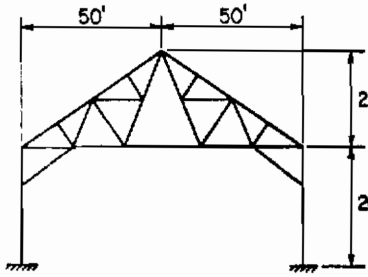
دهانه = 20 ft	M_I = 9.00 kip-ft
30 ft	20.25 kip-ft
40 ft	36.00 kip-ft
50 ft	53.63 kip-ft
60 ft	72.90 kip-ft
70 ft	94.08 kip-ft
80 ft	117.12 kip-ft
90 ft	141.55 kip-ft
100 ft	166.67 kip-ft

۱ـ۳ درشکل (۱ـ۱۱)قاب خرپایی‌ساختمان یک‌کارخانه دیده‌می‌شود . این چنین‌خرپاهایی به‌فاصله مرکز به‌مرکزی برابر با 20 ft ازیکدیگر قراردارند .بارهای حاصل ازباد را برای یکی از قابهای میانی‌محاسبه کنید .اساس محاسبات خود را برای بارگذاری سطوح عمودی آئین نامه AISC قرار داده و برای بارگذاری سطوح مایل توصیه‌های ASCE را که برای سرعت بادی برابر با 100 mph می‌باشد ملاک محاسبات قرار دهید .

جواب :

سطوح عمودی : $P_N = 400$ lb/ft

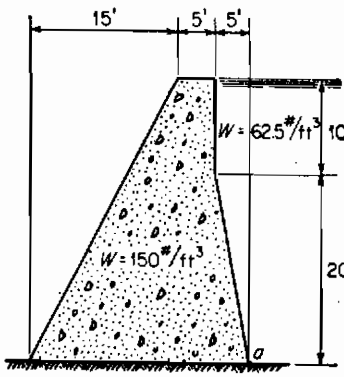
سطوح مایل : $P_N = 292$ lb/ft (برای‌سمت‌بادگیر) $P_N = 308$ lb/ft (برای‌سمت‌پشت‌بادگیر)



شکل ۱ـ۱۱ مسأله ۱ـ۳

۱ـ۴ (الف) با در نظر گرفتن نواری بعرض 1 ft از سد شکل (۱ـ۱۲) مقدار لنگر نسبت به نقطه a حاصل از فشارآب ساکن مؤثر بر سطح سد را محاسبه کنید .

(ب) سد شکل (۱ـ۱۲) تحت تأثیر زلزله‌ای با شتاب افقی برابر $0.1g$ که درپی آن اثر می‌کند واقع شده است با فرض صلب‌بودن سدو خالی‌بودن آن لنگر حول a از نیروهای



شکل ۱ـ۱۲ مسأله ۱ـ۴

جانبی مؤثر بر آن را که بر نواری بعرض 1-ft از آن اثر می‌کند محاسبه کنید.

۱–۵ بال فشاری شاهتیری از دو نبشی بابعاد $6 \times 6 \times \frac{1}{2}''$ و یک ورق $14 \times \frac{1}{2}''$ تشکیل شده است ارتفاع شاهتیر 10 ft بوده ودهانه آن 96 ft می‌باشد اگر بال فوقانی آن در فواصل 16 ft دارای مهارهای جانبی باشد مقدار تنش مجاز برای محاسبه بال فشاری این شاهتیر بر طبق آئین‌نامه AISC چقدر است.

جواب:

تنش مجاز = 7.29 kips sq in

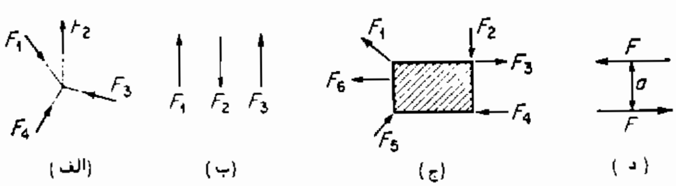
۲
عکس‌العملها

۲ ـ ۱ تعاریف

قسمت اعظم این‌کتاب به‌بحث درباره **سازه‌های مستوی** یعنی سازه‌هائی‌که با کلیه‌خطوط اثر نیروهای مؤثر برآن سازه در یک صفحهٔ قرار گرفته‌اند می‌پردازد . چنین سازه‌هایی متداولترین سازه‌های مورد طرح و محاسبه می‌باشند . محاسبه سازه‌های سه‌بعدی یا **سازه‌های فضایی** مبنای محاسباتی جدیدی را اضافه برآنچه برای سازه‌های مستوی موردنیاز می‌باشد اقتضا نمی‌کند فقط به‌دلیل بعد سوم ، محاسبات عددی پیچیده‌ای ناشی از شکل هندسی سازه را لازم دارد ، به‌این دلیل در مورد سازه‌های مستوی تأکید بیشتری شده و فقط بحث محدودی در قسمت‌های بعدی کتاب به‌سازه‌های فضایی اختصاص یافته است .

ازآنجائی‌که اهم مطالب این کتاب محدود به‌سازه‌های مستوی می‌باشد ، لذا کلیه دستگاه نیروها **دستگاه نیروهای هم‌صفحه** یعنی دستگاههائی‌که خطوط‌اثر نیروهای‌آنها همگی در یک صفحه قرار دارند خواهند بود . برخی از این دستگاهها دارای خصوصیات بخصوصی می‌باشند لذا برای فهم بهتر لازم است که آنها را برحسب خاصیتشان طبقه‌بندی کرده و نام‌گذاری کنیم .

دستگاه نیروی هم‌صفحه متقارب چنانچه‌درشکل (۲ـ۱الف)نشان‌داده‌شده‌است‌دستگاهی است که درآن خطوط‌اثر کلیه نیروها در یک نقطه مشترک تلاقی نمایند .



شکل ۲ـ۱ دستگاه نیروی هم‌صفحه

دستگاه نیروی هم صفحه موازی شامل نیروهایی است‌که خطوط اثرآنها چنانکه‌درشکل (۲-۱ ب) نشان داده شده است با یکدیگر موازی باشند. دستگاه نیروی هم صفحه غیر ــ مشخص دستگاهی است شامل چندین نیرو که خطوط اثر آنها در جهات مختلف بوده و در هیچ نقطهٔ مشترکی یکدیگر را قطع نکنند. نظیر شکل (۲-۱ ج). دستگاه مهم دیگری، زوج نیرو است که در شکل (۲-۱ د) نشان داده شده است. یک زوج نیرو متشکل از دو نیروی مساوی و موازی متقابل است که دارای یک خط اثر نمی‌باشند.

ازآنجائی که در یک سازه مستوی خطوط اثر کلیه نیروها در صفحه سازه قرار دارد، هریک از نیروها را می‌توان به‌دو مولفهٔ F_x و F_y روی محورهای مختصات x و y تجزیه‌نمود. محورهای فوق‌را می‌توان به‌شرطی‌که روی یکدیگرقرارنگیرند در هرجهت دلخواه اختیارنمود. تقریبا"همیشه محورهای x و y را عمود بر یکدیگر انتخاب می‌کنندکه در این صورت به F_x و F_y مولفه‌های قائم نیرو گویند. علاوه براین برای راحتی بیشتر عموما" محور x را افقی و محور y را قائم در نظر می‌گیرند.

۲ ــ ۲ کلیات ــ تکیه‌گاههای قراردادی

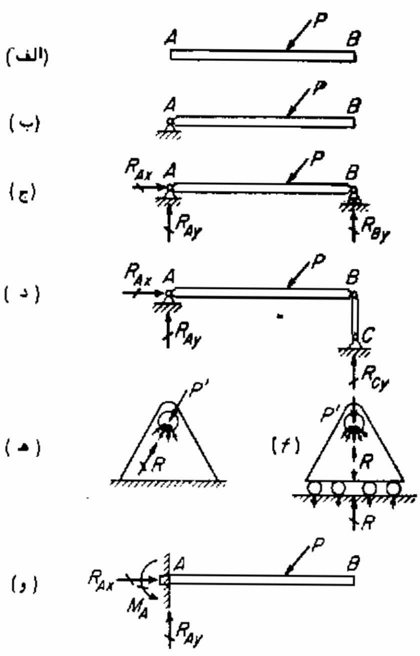
برای این‌که اغلب سازه‌ها به‌صورت‌آزاد درفضا حرکت نکنندکلا" و جزء"مهارمی‌شوند، مهارهایی را که ازحرکت آزاد جسم جلوگیری‌می‌کنند قیود اتصالی گویندکه توسط تکیه گاهها سازه را به‌یک جسم ساکن متصل می‌سازند. به‌عنوان مثال سازه‌ای مستوی نظیر میله AB از شکل (۲-۲) را در نظر بگیرید اگر این میله جسم آزادی باشد تحت اثر نیروی p به صورت آزاد در فضا بحرکتی که مرکب از انتقال و دوران می‌باشد خواهد پرداخت. حال اگرقیدی به‌شکل مفصل میله را به‌یک جسم ثابت در نقطه A وصل کند، در این صورت قسمتی‌ازحرکت آزاد جسم ازآن سلب شده و فقط محدود به‌حرکت دورانی حول آن مفصل خواهد شد، در طی چنین حرکتی نقطه B در طول قوسی به‌مرکز A حرکت خواهد کرد که این حرکت‌به‌صورت لحظه‌ای می‌تواند به‌شکل عمود بر AB و به‌عبارتی دیگر به‌صورت عمودی فرض گردد. حال اگر قید دیگری به‌شکلی‌که از حرکت لحظه‌ای نقطه B در جهت عمود جلوگیری کند به‌آن اضافه گردد دیگر از دوران حول مفصل A جلوگیری شده و حرکت‌آزاد جسم کاملا"مهار خواهدشد. واضح است که چنین قیدی را می‌توان در نقطه B به‌یکی از دوصورت شکلهای (۲-۲ج) و (۲-۲ د) عملی نمود.

تکیه‌گاههای A و B که حرکت آزاد میله را مهار می‌کنند باید در برابر نیرویی که توسط p از طریق میله به‌آنها اعمال می‌شود نیز مقاومت‌نمایند. مقاومتی‌که آنها در برابر

نیروی عامل میله از خود نشان می‌دهند به‌عکس‌العمل معروف است ، به‌این ترتیب می‌توان اثر تکیه‌گاهها را بر روی سازه‌ها با عکس‌العملهای آنها بر سازه جایگزین نمود .

در بحثهای آتی لازم خواهد شد مکررا" از عکس‌العملهایی که انواع مختلف تکیه‌گاهها اعمال می‌کنند صحبت شود ،لذا بهتراست برای‌هریک از انواع‌مختلف آنها علامت‌قراردادی معینی به‌کار بریم . یک‌تکیه‌گاه مفصلی چنانچه درشکل (۲ــ۲هـ)نشان‌داده شده‌است باعلامت معین می‌شود . در چنین تکیه‌گاهی فرض می‌شود که میلهٔ محور مفصل بدون اصطکاک درمحل خود دوران‌کند در چنین حالتی فشاربین میله محور مفصل و سوراخ میله ، به‌صورت عمود بر سطح مدور سوراخ باقی مانده و لذا امتداد آن از مرکز میله محور خواهد گذشت .

عکس‌العمل R که توسط تکیه‌گاه به‌سازه اعمال می‌شود می‌باید کاملا" برابر با نیروی عامل باشد لذا R و P' باید هم‌راستا و از نظر عددی با یکدیگر مساوی بوده ولی در خلاف‌یکدیگر اثرکنند به‌این‌ترتیب واضح می‌شودکه تکیه‌گاه مفصلی نیروی عکس‌العملی از خود بروزمی‌دهد که خط‌اثر آن از مرکز میله‌محور مفصل می‌گذرد ولی مقدار و راستای عمل آن نامشخص است (غرض از کلمه "راستای نیرو" شیب خط‌اثر آن است و منظور از مقدار نه‌تنها مقدارعددی‌آن است بلکه جهت اثر آن نیز موردنظر است ، مثلا" معلوم شود که نیرو به‌سمت جسم‌است و یا ازآن خارج می‌گردد) این‌دو مشخصهٔ عکس‌العمل را می‌توان با دو مقدار نامشخص مولفه‌های



شکل (۲ــ۲)ــ عکس‌العملهای‌تکیه‌گاهی

افقی و عمودی R_x و R_y آن که هردو از مرکز محور مفصل عبور می‌کنند نشان داد.

تکیه‌گاه غلتکی را چنانکه درشکل (۲–۲و) نشان داده‌شده‌است با یکی‌ازعلامت و یا نشان می‌دهیم. به‌همان‌صورت فوق‌الذکرمی‌توان استدلال‌کرد که عکس‌العمل تکیه‌گاه غلتکی نیز باید از مرکز محور مفصل آن عبور کند به‌علاوه این که اگر غلتکهای آن را بدون اصطکاک فرض‌کنیم آن غلتک‌ها فقط نیرویی‌را که عمود برسطح غلت آنها باشد منتقل‌خواهند کرد. به‌این ترتیب تکیه‌گاههای غلتکی عکس‌العملی ایجاد می‌کنند که راستای آنها عمود بر سطح غلت غلتکهای این نوع تکیه‌گاهها بوده و از مرکز محور مفصل آنها نیز می‌گذرد. لذا واضح است که یک تکیه‌گاه غلتکی عکس‌العملی در راستایی معین و مار بر نقطه‌ایی معلوم ولی نامعین از نظر مقدار ایجاد می‌نماید. تکیه‌گاههای غلتکی را عموماً به‌نحوی می‌سازند که بتوانند عکس‌العملی به‌طرف خارج از سطح تکیه‌گاهی ایجاد نمایند.

تکیه‌گاه بنددار BC شکل (۲–۲ د) را ملاحظه نمائید دیده می‌شودکه درصورت‌حرکتهای کوچک این تکیه‌گاه درست مانند تکیه‌گاههای غلتکی نظیر B از شکل (۲–۲ ج) عمل می‌کند. به‌همان نحوی که در قبل دیدیم می‌توان استدلال نمود که در صورت بدون اصطکاک بودن مفصلهای دو انتهای بند این تکیه‌گاهها، نیروئی‌که توسط‌تکیه‌گاه بنددار منتقل می‌گردد باید از مراکز محور مفصلهای دو سر بند بگذرد، پس تکیه‌گاه بنددار نیز عکس‌العملی با راستایی معلوم و نقطه اثری معین ولی با مقداری نامعین ایجاد می‌کند. یک تکیه‌گاه بنددار را نیز با علامت نشان می‌دهند. (دو نوع تکیه‌گاه غلتکی و بنددار را اصطلاحاً" تکیه‌گاه ساده گویند).

نوع متعارف دیگر از تکیه‌گاههای مورد استفاده در سازه‌های مستوی که درشکل (۲–۲و) نشان داده شده است تکیه‌گاه گیردار می‌باشد چنین تکیه‌گاهی به‌نحوی قطعه‌را در برمی‌گیرد که‌امکان انتقال و دوران ازانتهای قطعه سلب می‌گردد. بنابراین تکیه‌گاه گیردار عکس‌العملی ایجاد می‌نماید که از نظر مقدار، نقطه اثر و راستا همگی نامعین است. این سه‌عامل نامعین را می‌توان به‌یک نیرو که به‌نقطهٔ معینی با مقدار و راستای نامعلوم اثر می‌کند و یک زوج‌نیرو با مقدار نامعلوم تبدیل کرد. به‌عنوان مثال این سه‌عامل نامشخص را می‌توان با زوج نیرو و دو نیروی افقی و عمودی که‌از مرکز ثقل انتهای مقطع می‌گذرند نشان داد. تکیه‌گاه گیردار را با علامت نشان می‌دهند.

نیروهای مؤثر خارجی را که به‌یک جسم اثر می‌کنند با دو شکل متمایز معین می‌کنیم— بارهای وارده P را (که با $\rightarrow$ نشان می‌دهیم) و عکس‌العمل R (را با $\nrightarrow$ نشان می‌دهیم) نیروی عکس‌العمل‌را در تکیه‌گاه a با R_a ومولفه‌های x و y آن‌را با R_{ax} و R_{ay} نشان می‌دهیم و لنگر عکس‌العمل را در تکیه‌گاه a با M_a نشان خواهیم داد.

۲ ـ ۳ معادلات تعادل استاتیکی ـ سازه‌های مستوی

اگر تکیه‌گاههای یک سازهٔ مستوی را با عکس‌العملهایی که آن تکیه‌گاه‌ها ایجاد می‌کنند جایگزین کنیم سازهٔ مورد نظر تبدیل به‌سازه‌ای تحت اثر دستگاه نیروی هم‌صفحه غیرمشخص که شامل بارهای معلوم‌مؤثر و عکس‌العملهای نامعین می‌باشد می‌گردد ،در حالت کلی‌برآیند یک دستگاه نیروی هم صفحهٔ غیرمشخص یا یک نیروی برآیندی در راستایی معین ومار بر نقطه‌ای معلوم می‌باشد و یا یک زوج نیروی برآیند است .

جسمی را که ابتدا ساکن بوده و پس‌ازاثر دستگاه نیرویی باز ساکن باقی می‌ماند در ***حالت تعادل استاتیکی*** گویند . ***برای این‌که چنین حالتی وجود داشته باشد لازم است که برآیند اثر حاصل دستگاه نیروها نه یک نیرو باشد نه یک زوج زیرا در غیر این‌صورت جسم شروع به‌حرکت خواهد کرد*** . برای این‌که برآیند اثر حاصل یک دستگاه نیروی غیرمشخص که بر یک سازه مستوی اثرمی‌کند یک نیروی برآیندنباشد لازم‌است‌که جمع جبری کلیه‌مولفه‌های F_x آن دستگاه برابر با صفر بوده و به‌همین ترتیب جمع جبری مولفه‌های F_y نیزبرابربا‌صفر باشد و برای این‌که برآیند اثر حاصل ، معادل یک زوج نباشد لازم است که جمع جبری لنگر کلیه نیروها حول هر محور عمود برصفحهٔ سازه نیز برابر با صفر باشد ، بنابراین در مورد یک سازهٔ مستوی هر سه شرط زیر باید در مورد بارها و عکس‌العملهای سازه تأمین گردد تا این که سازه در حالت تعادل استاتیکی باقی بماند :

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M = 0 \qquad (۲-۱)$$

سه‌معادله فوق را ***معادلات تعادل استاتیکی*** سازه مستوی تحت اثر دستگاه نیروی غیرمشخص گویند .

در حالت خاص که یک سازه مستوی تحت اثر دستگاه بار و عکس‌العمل متقارب قرار دارد ،غیرممکن‌است که برآیند اثر این دستگاه یک زوج‌گردد زیرا که خط‌اثر کلیه نیروهای یک دستگاه متقارب از یک نقطه مشترک می‌گذرد بنابراین در چنان حالتی برای این‌که سازه درتعادل استاتیکی باقی بماند لازم‌است که دوشرط زیر تأمین‌گردد .

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad (۲-۲)$$

این معادلات را معادلات تعادل استاتیکی حالت خاص سازه‌ای مستوی که تحت اثر دستگاه نیروی متقارب قرار دارد گویند .

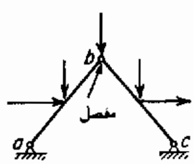
اغلب اوقات درمباحث بعدی قطعات سازه را به‌عنوان ***اجسام صلب*** خطاب می‌کنیم . به‌معنی درست کلمه در یک جسم صلب هیچ‌گونه حرکت نسبی بین دوجزء آن وجود ندارد .

واضح است که کلیه قطعات سازه‌ها هرگز به‌صورت مطلق صلب نیستند زیرا آنها تحت اثر بارهای وارده کمی تغییرشکل می‌دهند ولی چنان تغییرشکلهایی آنقدر کوچک است که‌از تغییر بعد ، جابجایی خط اثر نیروها و غیره هنگام بررسی شرط تعادل جسم صرفنظر می‌شود پس در بسیاری از مسایل مربوط به‌بررسی معادلات تعادل استاتیکی در قطعات سازه‌ها هرگاه مقاصد عملی مطرح باشد سازه‌ها را جسم صلب فرض خواهیم کرد و به‌این‌ترتیب شکل‌هندسی آنها بعداز اثر بارها نیز عملاً" مانند قبل از اثر نیرو فرض خواهد شد .

۲ ـ ۴ معادلات خاص سازه‌ها

بسیاری از سازه‌ها از جسمی صلب ـ یک خرپا ، قاب و یا تیر ـ که توسط چند تکیه‌گاه در فضا مهار شده است تشکیل یافته‌اند ولی گاهی برخی از سازه‌ها از ترکیب چند جسم که به‌نحوی ناقص به‌یکدیگر متصل شده و همگی باهم روی چند تکیه‌گاه سوار شده‌اند تشکیل می‌شود . در هر صورت برای این‌که سازه در حالت سکون باقی بماند ، دستگاه نیروی متشکل از بارگذاریها و عکس‌العملها بایدمعادلات تعادل استاتیکی‌را ارضا نمایند .درمورد سازه‌های نوع دوم اتصالات ناشی از نوع سازه که جهت بهم‌پیوستن اجزاء مختلف به‌کاررفته‌اند قیود بیشتری را بر دستگاه نیروی مؤثر بر سازه تحمیل خواهند کرد و چون دوجزءسازه ممکن‌است توسط مفصل ،یا تکیه‌گاه ساده به‌یکدیگرمتصل شوند لذا هریک ازاین اتصالات قادر به‌انتقال نیرویی با مشخصاتی خاص از قسمتی از سازه به‌قسمت دیگر هستند .

شکل (۲ـ۳) این‌نوع سازه‌را که از دوقطعه‌صلب ab و bc که در نقطه b توسط مفصلی بدون اصطکاک بهم متصل شده‌اند و دارای دو تکیه‌گاه مفصلی در نقاط a و c می‌باشد نشان می‌دهد از آنجائی‌که یک مفصل بدون اصطکاک قادر به‌انتقال زوج نمی‌باشد لذا وجـــودآن ایجاب می‌کندکه اثر یک قسمت از سازه بر قسمت دیگر آن که اتصال آنها توسط مفصل تأمین شده است فقط نیرویی مار بر مرکز محور مفصل مربوطه باشد . بنابراین این جمع جبری لنگر بارها و عکس‌العملهای وارده بر هریک از دوقسمت سازه که حول محور مار بر مرکز محورمفصل تعیین شود برابر با صفر است . چنین شرایطی که حاصل نوع خاص سازه می‌باشد به‌معادلات خاص سازه‌ها موسوم است .



شکل (۲ـ۳)ـ طاق سه مفصل

۵ ـ ۲ پایداری و ناپایداری استاتیکی ـ سازه‌های معین و نامعین بدون در نظر گرفتن معادلات خاص سازه‌ها

سازه‌ای مستوی‌که تحت اثر دستگاه بارگذاری غیرمشخصی قرار دارد و درمورد آن معادله خاصی مورد پیدا نمی‌کند در نظر می‌گیریم اگر تکیه‌گاهها را با عکس‌العملهایی که ایجاد می‌نمایند جایگزین کنیم سازهٔ مورد نظر تحت اثر دستگاه نیرویی نامشخص که شامل بارهای معلوم و عکس‌العملهای نامعلوم است قرار خواهد گرفت ، اگر سازه تحت اثر این نیروها در حالت تعادل استاتیکی باشد ، سه‌معادله تعادل استاتیکی را می‌توان برای بارهای معلوم و اجزای نامعلوم عکس‌العملها نوشت . حل این دستگاه سه‌معادله در برخی از حالات به‌تعیین مقادیراجزای نامعلوم عکس‌العمل‌ها می‌انجامد .چه این معادلات‌کافی‌برای تعیین‌عکس‌العملها باشد و چه نباشد در هرصورت برای سازه‌های در حال تعادل استاتیکی صادق هستند . پس معادلات فوق را می‌توان قسمتی از راه‌حل لازم برای تعیین عکس‌العمل‌های‌کلیه سازه‌های‌در تعادل استاتیکی دانست .

اگر تعداد اجزای مجهول عکس‌العمل مستقل از هم کمتراز سه باشد ، مجهول‌کافی برای تأمین دستگاه سه‌معادله تعادل استاتیکی موجود نیست ، بهاین ترتیب کمتراز سه جزء مجهول عکس‌العمل کافی برای حفظ تعادل سازه‌های مستوی تحت اثر دستگاه نیروهای غیرمشخص نمی‌باشد ، در چنین شرایطی سازه فوق‌الذکر را در حال تعادل ناپایدار استاتیکی گویند .

تحت برخی شرایط مخصوص یک سازه مستوی که دارای کمتراز سه‌جزء مجهول مستقل عکس‌العمل است می‌تواند درتعادل استاتیکی باشد واضح است که اگر دستگاه بارهای وارده بر سازه بخودی خود در تعادل باشد نیازی به‌عکس‌العمل نخواهد داشت و همچنین اگر بارها و عکس‌العمل‌ها مشخصات مشترک بخصوصی داشته باشند کمتراز سه‌جزء عکس‌العمل کافی برای حفظ تعادل خواهد بود . به‌عنوان مثال تیر شکل (۲ـ۲ ب) را در نظر بگیرید هرگاه برآیند بارهای وارده نیرویی باشد که خط اثر آن از مرکز محور مفصل بگذرد نیروهای مؤثر بر سازه متقارب شده و لذا مولفه‌های افقی و عمودی عکس‌العمل درنقطه A قادربحفظ تعادل استاتیکی خواهند شد . علاوه بر آن اگرتیری در دو انتهای A و B خود دارای تکیه‌گاه غلتکی‌روی‌سطح افقی باشد تحت اثر هر دستگاه باری که برآیند اثر آن یک زوج و یا یک نیروی عمودی است عکس‌العملهای ایجاد شده در چنان تکیه‌گاههایی حالت تعادل استاتیکی آن‌را حفظ خواهند کرد . اگرچه چنین سازه‌هایی تحت اثر برخی از انواع بارگذاریها حالت پایدار دارند ولــی تحت حالت کلی بارگذاریها تعادل ناپایدار خواهندداشت و بهاین جهت آنها رادررده

سازه‌های ناپایدار به‌حساب می‌آورند .

از آنجائی که سه مجهول را می‌توان از حل دستگاه سه معادله مستقل به‌دست آورد ، پس عکس‌العملهای یک سازه مستوی پایدار را که دقیقاً" دارای سه‌جزء مجهول عکس‌العمل می‌باشد می‌توان از حل دستگاه سه معادله تعادل استاتیکی به‌دست آورد . در چنین حالتی عکس‌العملهای سازه را معین گویند . اگر سازهٔ مستوی پایدار دارای بیش از سه جزء مجهول و مستقل عکس‌العمل باشد سه معادله تعادل استاتیکی کافی برای تعیین عکس‌العملهای مجهول نخواهند بود واضح است اگر بجز سه‌مجهول ، به‌سایرآنان مقادیردلخواه بدهیم و سه‌مجهول باقی مانده را از حل سه‌معادله‌تعادل استاتیکی‌به‌دست آوریم در چنین حالاتی تعداد بی‌نهایت دسته جواب برای مقادیر عکس‌العمل‌های مجهول که قادربه‌تأمین شرایط تعادل استاتیکی هستند به‌دست خواهد آمد . بنابراین مقادیر صحیح عکس‌العملها را فقط از طریق این معادلات نمی‌توان به‌دست آورد بلکه چنانچه در این‌کتاب‌نیزبحث‌خواهد شد برخی از شرایط مخصوص تغییرشکل سازه نیز باید تأمین گردد . *اگر اجزاء مجهول عکس‌العمل فقط‌ازطریق معادلات تعادل‌استاتیکی قابل‌تعیین نباشندگویند که‌عکس‌العملهای سازه نامعین است . در این صورت سازه به‌میزانی برابر با تعداد مجهولاتی که‌بیش‌از تعداد معادلات استاتیکی است نامعین می‌باشد .*

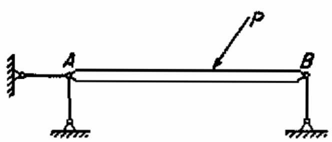
از بحث بالا می‌توان نتیجه گرفت که حداقل سه جزء مستقل عکس‌العمل برای تأمین شرایط تعادل استاتیکی سازه‌های مستوی که تحت اثر دستگاه بارهای غیرمشخص واقعند لازم است ، البته به‌سادگی می‌توان نشان داد که وجود سه یا بیش‌از سه جزء همیشه‌کافی نیست . بنابراین سازه‌ای مستوی‌که دارای سه یا بیش از سه جزءمستقل عکس‌العمل می‌باشد ممکن‌است ناپایدارنیز باشد ، به‌این دلیل‌است که سازه مستوی پایدار را در بحث‌بند قبل‌معین‌نمودیم .

مساله تعدادعکس‌العملهای‌کافی‌برای پایداری (سازه‌ها)را می‌توان با بسط قسمت اولیه بخش (۲ـ۲)به‌بحث گذاشت به‌عنوان مثال تیر شکل (۲ـ۲ ج)و (۲ـ۲ د) تا زمانی‌که توسط مولفه‌های افقی وعمودی عکس‌العمل درانتهای A و توسط عکس العمل‌عمودی در B نگهداری می‌شوند پایدار هستند . این سازه‌ها معادل سازه شکل (۲ـ۴) می‌باشند که در آن مفصل تکیه‌گاه A با دو بند که در مفصل نقطه A مشترک هستند جایگزین شده است . این دو بند را می‌توان‌تا جائی‌که هم‌راستا نباشند درجهتی انتخاب نمود .چنین سازه‌ای تا زمانی‌کامتداد خط‌اثر بند انتهای B نیز از مرکز محور مفصل نقطه A نگذرد پایدار خواهد بود ، حال اگر این خط‌اثر از نقطه A بگذرد سازه فوق‌الذکر به‌صورت کلی مهار نبوده و بنابراین تحت اثر دستگاه بارهای غیرمشخص ناپایدار خواهد بود زیرا هیچ‌چیز از دوران لحظه‌ای سازه حول مفصل نقطه A جلوگیری نخواهد کرد . *در حالاتی‌که تعداد حداقل اجزای کافی عکس‌العمل*

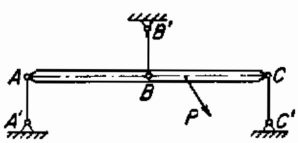
وجود داشته ولی *آرایش هندسی به‌نحوی است که سازه را ناپایدار می‌سازد* گفته می‌شود که *این چنین سازه‌ای ناپایدار هندسی است.*

اکنون حالت دیگری را که وجود سه‌جزء مستقل عکس‌العمل کافی برای پایداری نیست مورد بحث قرار می‌دهیم ، تیر شکل (۲ـ۵) را که توسط سه‌بند موازی با یکدیگر مهار شده است ملاحظه کنید ،واضح است که هیچ قیدی جهت‌جلوگیری از انتقال کوچک سازه فوق‌الذکر در جهت عمود برراستای بندها وجود ندارد .بنابراین اگر برآیند اثربارهای وارده مولفه‌ای درجهت افقی داشته باشد سازه به‌حرکت درمی‌آید و به‌این جهت است که این سازه درزمرهٔ سازه‌های ناپایدار هندسی است . این سازه‌ها و نظایر آنها ما را به‌نتیجه‌گیری زیر می‌رساند :
اگر عکس‌العملهای سازه‌ای مستوی توسط مجموعه‌ای از سه تکیه‌گاه بنددار و یا بیشتر به‌صورتی که خط اثرآنها با یکدیگرموازی یا متقارب باشد تأمین گردد چنین مجموعه‌ای‌کافی برای‌حفظ تعادل استاتیکی آن سازه‌ی مستوی که تحت اثر دستگاه بار غیرمشخص می‌باشد نیست حتی اگر سه جزء مجهول عکس‌العمل و یا بیشتر داشته باشد . به‌عبارت دیگر پایداری یک سازه نه تنها توسط تعداد اجزاء عکس‌العمل آن معین می‌گردد بلکه به‌آرایش هندسی آنها نیز مربوط می‌شود .

باید توجه شود که سازه‌های ناپایداری‌که دارای سه‌جزء مستقل عکس‌العمل یا بیشتر هستند عموما" در زمرهٔ سازه‌های نامعین نیز به‌حساب می‌آیند . سازه شکل (۲ـ۵)را در نظر بگیرید در حالی‌که این سازه تحت اثر بار P شروع به‌حرکت انتقالی در امتداد افقی می‌نماید کاملا" هم رها شده نیست . تیر فوق‌الذکر به‌صورت‌لحظه‌ای‌حرکت انتقالی افقی را با دورانی حول نقطه‌های A'، B' و C' انجام می‌دهد و در طی یک دوران محدود بندهای تکیه‌گاهی نقاط A ، B و C همزمان با حرکت افقی به‌حرکت عمودی نیز خواهند پرداخت . حرکت عمودی این نقاط در اثر خمش تیر AC و کشش بندهای تکیه‌گاهی است ، به‌این‌ترتیب درتعیین وضعیت تعادل نهایی نه‌تنها مشخصات هندسی‌سازه وارد می‌شود بلکه تغییرشکل ارتجاعی جسم که ناشی از تنشهای موجود در تیر و بندهای تکیه‌گاهی است نیز دخیل خواهند بود . در وضعیت نهایی بندهای تکیه‌گاهی دوران محدود خود را زمانی به‌اتمام خواهند رساند که جمع جبری مولفه‌های افقی نیروهای داخلی بندها برابر با مولفه



شکل ۲ ـ ۴ سازهٔ پایدار



شکل ۲ ـ ۵ سازه ناپایدار هندسی

افقی بار وارده‌گردد . ازآنجائی‌که تحلیل وضعیت نهایی این سازه نه‌تنها به‌معادلات‌تعادل استاتیکی بستگی دارد بلکه به‌مشخصات تغییرشکل سازه نیز محتاج است ، لذا این سازه را می‌توان در زمرهٔ سازه‌های نامعین قرار داد . در سازهٔ شکل (۲ــ۴) نیز اگر خط اثر بند تکیه‌گاهی B از مفصل A بگذرد در دسته همان سازه‌ها قرار خواهد گرفت .

اگر بر سازهٔ شکل (۲ــ۵) دستگاه بارهای عمودی وارد شود عاملی برای حرکت دادن افقی سازه وجود نخواهد داشت ، در این صورت سازه فوق‌الذکر در تعادل ناپایدار خواهد بود . باید یادآوری نمودکه در چنین حالتی نیزتعیین عکس‌العمل‌ها ازنظر استاتیکی‌نامعین است .

۲ ــ ۶ پایداری و معین‌بودن سازه‌ها با درنظر گرفتن معادلات خاص آنها

قبلا" بحث ما در مورد سازه‌هایی بود که در آنها شرط خاصی وجود نداشت‌اگردرمورد سازه‌ای‌مستوی معادلات‌خاصی‌نیزصادق باشد این‌معادلات‌به‌تعداد سه‌معادله تعادل استاتیکی اضافه می‌گردند ، بنابراین لازم‌است که بارهای وارده و عکس‌العمل‌های‌موثر برسازه ، دستگاه معادله‌ای از مجموع معادلات تعادل استاتیکی‌و معادلات خاص سازه را تأمین نماید . هرگاه تعداد اجزاء مجهول عکس‌العمل کمتراز تعداد کل معادلات باشد سازه مزبور ناپایداربوده و یا ممکن‌است در برخی از شرایط خاص بارگذاری ،ناپایدار گردد و هرگاه تعداد اجزاء‌مجهول عکس‌العمل بیشتراز تعداد کل معادلات باشد ، سازه موردنظر جزو سازه‌های نامعین خواهد بود ، اگر تعداد اجزاء عکس‌العمل برابر با تعداد معادلات باشد سازه مزبور معین است مگر این‌که آرایش عکس‌العمل‌ها به‌نوعی باشد که ناپایداری هندسی ممکن گردد .

با توجه به‌سازه‌ای نظیر شکل (۲ــ۳) می‌توان امکان چنان ناپایداری را به‌سادگی شرح داد ، در سازهٔ نشان داده شده که البته سازه‌ای پایدار است اگر مفصل b در امتداد خط واصل بین a و c قرار گیرد هیچ عاملی از دوران لحظه‌ای قطعات ab و bc حول نقطه‌های a و c جلوگیری نخواهد کرد ، در این صورت پس از دوران محدود این قطعات نیروهای کششی ایجاد شده در قطعات ab و bc با در نظر گرفتن شیب این قطعات دارای مولفه‌های قائم خواهند شد که همین مولفه‌هانیروی P را به‌حال تعادل در می‌آورند . تعیین وضعیت تعادلی نقطه b و نیروهای کششی ایجاد شده منوط به‌درنظر گرفتن مشخصات تغییرشکل سازه است از این‌رو این سازه نه تنها در اصل ناپایدار نیست بلکه سازه‌ای نامعین است .

هرگاه در سازه‌ای که در اصل پایدار است شرایط خاصی را اعمال کنیم به‌همان‌نحوی‌که لحظه‌ای‌قبل دیدیم‌امکان ناپایداری هندسی‌سازه ممکن می‌گردد ،به‌این‌ترتیب واضح‌می‌گردد

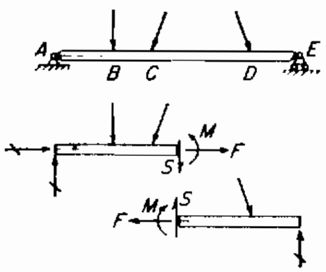
که در کاربرد مفصلهای ساختمانی دقت بسیاری لازم است تا از ایجاد ناپایداری هندسی جلوگیری شود . چنین حالاتی زمانی آشکار می‌گردد که حل مجموع معادلات خاص سازه‌ها و تعادل استاتیکی برای مقادیر اجزاء مجهول عکس‌العمل منجر به‌پاسخهایی ناسازگار، بی‌نهایت و یا نامعلوم گردد .

۲ ــ ۷ نمودار پیکر آزاد

در بحث قبل دیدیم که محاسبه اجزاء مجهول عکس‌العمل سازه‌های پایدار و معین را می‌توان با حل دستگاه‌معادلات تعادل‌استاتیکی و دربرخی از حالات با حل مجموع‌معادلات خاص سازه‌ها به‌عمل آورد ، هریک از این معادلات شامل برخی یا کل نیروهای مؤثر بر سازه اعم از بارهای وارده و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی خواهد بود ، برای این‌که شکل گرفتن این معادلات را بهتر لمس کنیم توصیه می‌شود که نمایش‌آزاد کل سازه و یا قسمتی از آن‌را رسم کنیم ، اهمیت رسم تعداد لازمی از ین گونه نمایش قطعات را باید به‌دانشجویان توصیه کرد رسم چنین نمودارهایی اساس موفقیت در تعیین تنش سازه‌هاست . دانشجویان باید بدانند که مدت زمانی‌که صرف رسم نمودار پیکرآزاد قطعات سازه‌ها می‌گردد هرگز زمان تلف شده تلقی نمی‌شود .

نمایش‌آزاد کل سازه را می‌توان با جداکردن سازه از تکیه‌گاههایش و رسم سازه تحت اثر کلیه بارهای مؤثر برآن و کلیه مولفه‌های عکس‌العملها که امکان اعمال آنها از طریق‌تکیه گاههای سازه وجود دارد به‌دست آورد ، چنین نموداری در شکل (۲ــ۷ ب) نشان داده‌شده است ، به‌همین طریق قسمتی از سازه را می‌توان با رسم خط‌برش از (محل موردنظر) سازه جدا نمود و نمودار آزادی برای این قسمت از سازه به‌صورتی که تحت اثر بارهای وارده، عکس‌العملها و کلیه‌نیروهای ممکن که به‌سطح مقاطع ایجاد شده در قطعه که توسط‌خط برش ایجاد شده‌اند وارد می‌شوند رسم نمود . جهت هر نیرویی مجهول می‌تواند به‌هرسوی‌دلخواه امتداد داشته باشد ، نیرو با جهتی که برایش انتخاب می‌شود در تشکیل معادلات داخل می‌شود پس‌از آن‌که مقدار چنان نیرویی از حل معادلات به‌دست آمد در صورت مثبت‌بودن علامت نیرو جهت نیروهمان جهت انتخابی‌است علامت منفی گویای جهتی برخلاف جهت انتخابی خواهد بود .

بعضی اوقات لازم است که قسمتی یا قسمتهای متعددی از سازه را جدا کرده نمودارآن قسمت‌های جدا شده را رسم کنیم ، در چنین حالاتی لازم است که نیروهای‌داخلی موثر بر سطوح داخلی‌را که توسط‌خط برش ظاهر شده‌اند نیزنشان داد . اگر بخواهیم برای‌دوقسمت



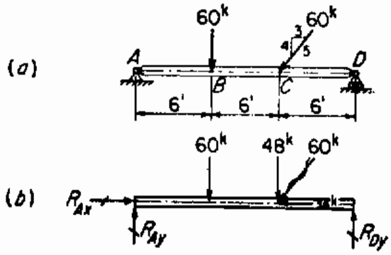
شکل ۲ ـ ۶ نمودار پیکر آزاد

مجاور از سازه نمودار آزاد رسم کنیم و نیروهای داخلی را که بر سطح داخلی یکی از قسمتها اثر می‌کنند در جهتهای دلخواهی انتخاب کنیم نیروهای نظیر مؤثر بر سطح قسمت دیگر سازه‌می‌باید به‌همان‌مقدار ولی‌درجهت‌عکس فرض گردند . البته این مطلب واضح است زیراکه عمل و عکس‌العمل یک جسم بر جسم دیگر باید از نظر عددی با یکدیگر برابر بوده و از نظر جهت در خلاف هم باشند . چنین نمودار آزاد قطعات را در شکل (۲ــ ۶) نشان داده‌ایم ، اگر چنین طریقی دنبال نشود معادلات تعادل‌استاتیکی استخراج شده با یکدیگرسازگارنبوده و تعیین پاسخ صحیح ازآن معادلات غیرممکن خواهد بود .بدیهی است‌اگر برای‌عکس‌العملی در روی یک نمودار آزاد جهت مشخصی فرض گردد در روی سایر نمودارها نیز باید همان جهت نشان داده شود .

۲ ــ ۸ محاسبه عکس‌العملها

اگر در سازه‌ای معین معادله‌ای ناشی شرایط خاص وجود نداشته باشد محاسبه عکس‌العملهای آن باحل مستقیم معادلات‌تعادل استاتیکی‌انجام می‌پذیرد .چنین‌محاسباتی را می‌توان با شرح تیر ساده شکل (۲ــ۷ الف)نشان داد .اجزاء مجهول عکس‌العمل‌رامی‌توان مولفه‌های افقی و عمودی عکس‌العمل نقطه A و مولفهٔ عمودی عکس‌العمل‌نقطه D فرض نموده و جهت اثر آنها را مانند آنچه در نمودار پیکر آزاد شکل (۲ــ۷ ب) نشان داده شده است تصور نمود .

برای این‌که این سه مجهول را تعیین کنیم سه معادله تعادل استاتیکی $\Sigma F_x = 0$ ، $\Sigma F_y = 0$ و $\Sigma M = 0$ را در اختیار داریم ، چون سازه معین است ،لذا می‌توان با نوشتن سه‌معادله تعادل استاتیکی به‌طریق زیر و حل آن دستگاه معادلات ، سه‌مجهول R_{Ax} ، R_{Ay} و R_{Dy} را به‌دست آورد .



شکل ۲ ــ ۷ محاسبه عکس‌العمل‌ها

$$\Sigma F_x = 0, \xrightarrow{+}, R_{Ax} - 36 = 0$$
$$\Sigma F_y = 0, \uparrow+, R_{Ay} + R_{Dy} - 60 - 48 = 0$$
$$\Sigma M_C = 0, +\circlearrowright, 12R_{Ay} - 6R_{Dy} - (60)(6) = 0$$

همیشه چنین راه‌حلی امکان‌پذیر است ولی مبتکرانه نیست و مخصوصاً" هرگاه سازه‌ای تا اندازه‌ای پیچیده باشد چنین راه حلی مناسب نیست. به‌مزایای روشی که ذیلاً" شرح‌آن‌داده می‌شود دقت کنید: با لنگرگیری حول محوری که از نقطه A می‌گذرد تنها یک مجهول R_{Dy} در معادله‌وارد‌شده و پاسخ آن مستقیماً" به‌دست می‌آید:

$$\Sigma M_A = 0, +\circlearrowright, (60)(6) + (48)(12) - (R_{Dy})(18) = 0$$
$$\therefore R_{Dy} = {}^{936}/_{18} = 52 \text{ kips} \updownarrow$$

به‌همان روش مقدار R_{Ay} مستقیماً" از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\Sigma M_D = 0, +\circlearrowright, (R_{Ay})(18) - (60)(12) - (48)(6) = 0$$
$$\therefore R_{Ay} = 1{,}008/18 = 56 \text{ kips} \updownarrow$$

بدیهی است که این مقادیر باید در معادله $\Sigma F_y = 0$ نیز صدق نمایند لذا بررسی زیر بعمل می‌آید:

$$\Sigma F_y = 0, \uparrow+, 56 + 52 - 60 - 48 = 0 \qquad \therefore \text{O.K}$$

از رابطه $\Sigma F_x = 0$ ، R_{Ax} مستقیماً" به‌دست می‌آید.

$$\Sigma F_x = 0, \xrightarrow{+}, R_{Ax} - 36 = 0 \qquad \therefore R_{Ax} = 36 \text{ kips} \leftrightarrow$$

بەاین ترتیب با عملیات مبتکرانه در کاربرد معادلات تعادل استاتیکی تعیین عکس‌العملها ساده می‌گردد.

برای این‌که به‌بحث وسعت بخشیم باید توجه کرد که سه معادله تعادل استاتیکی $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ و $\Sigma M = 0$ را می‌توان همواره با معادلات لنگرهای مستقل از یکدیگر $\Sigma M_A = 0$ $\Sigma M_B = 0$ و $\Sigma M_C = 0$ به‌شرطی که نقاط A ، B و C در روی‌یک‌خط راست واقع نشده باشند جایگزین نمود. صحت مطلب فوق را می‌توان به‌روش زیر تحقیق نمود: اگر دستگاه نیرویی یکی از معادلات لنگر فوق نظیر $\Sigma M_A = 0$ را تأمین نماید، در این صورت برآیند اثردستگاه نمی‌تواند یک زوج بوده‌بلکه باید نیرویی مار بر نقطه A باشد. به‌همین نحو اگر همان دستگاه نیرو معادله $\Sigma M_B = 0$ را نیز تأمین کند برآیند اثرآن بازهم یک نیرو خواهد بود. در چنین صورتی چنان نیرویی می‌تواند در راستای خط‌اتصال بین نقاط A و B اثر نماید. اگر علاوه برآن دستگاه نیروی فوق معادله $\Sigma M_C = 0$ را نیز تأمین کند (در صورتی که نقطه C در امتداد دو نقطه A و B قرار نداشته باشد) دیگر امکان این که برآیند اثر موجود در راستای خط AB اثر نماید وجود ندارد بنابراین اگر دستگاهی هر سه معادله لنگر را تأمین کند برآیند اثرآن نه یک زوج است و نه یک نیروی برآیند، بلکه باید دستگاه در تعادل استاتیکی باشد*.

اغلب کاربرد این اصل در نوشتن معادلات تعادل استاتیکی برتری پیدا می‌کند زیرا عموماً" انتخاب محوری‌که لنگرگیری کل حول آن فقط یک عکس‌العمل مجهول را در بر داشته و در نتیجه به‌محاسبه مستقیم آن یک مجهول بیانجامد امکان‌پذیرمی‌باشد. دانشجویان‌باید مثالهای بخش (۲ـ۱۱)را به‌دنبال همین بند بررسی‌نمایند تا این‌که روشهای ترتیب‌و تنظیم عملیات محاسباتی جهت ساده‌کردن روشهای کلی فوق‌الذکر در خاطرآنان نقش بندد.

---

* سئوالات مهم

۱ ـ اگر دو معادله لنگر یکی توسط $\Sigma M_A = 0$ و دیگری توسط $\Sigma M_B = 0$ ارائه شوند آیا سومین معادله مستقل‌را می‌توان ازتساوی جمع‌تصاویر کلیه نیروها برروی AB با صفر به‌دست آورد؟ چرا؟ آیا جمع‌تصاویر نیروها در هر جهتی موازی با AB منتج به‌تأمین معادله‌ای‌مستقل می‌شود؟

۲ ـ دیدیم که اغلب در مورد سازه‌های مستوی که تحت‌اثر دستگاه نیروی غیرمشخصی می‌باشند یک معادله تعادل نیرویی‌را می‌توان با معادله تعادل لنگرجایگزین نمود. آیامطلب زیر در مورد سازه‌ای که تحت اثر دستگاه‌نیروی متقارب قرار دارد صادق است؟

دو معادله تعادل متعارف $\Sigma F_x = 0$ ، $\Sigma F_y = 0$ را به‌شرطی می‌توان با دومعادله‌لنگر $\Sigma M_A = 0$ و $\Sigma M_B = 0$ جایگزین نمود که‌نقطه تقارب نیروها در روی خط‌و اصل بین نقاط A و B واقع نگردد.

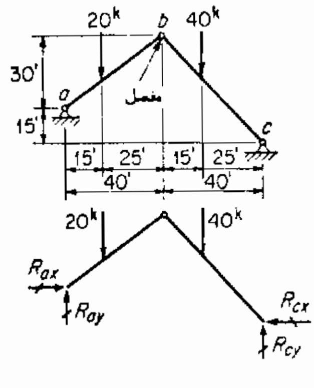
۲ ــ ۹ محاسبه عکس‌العملها ــ با در نظرگرفتن معادلات خاص (یا شرط) سازه‌ها

هرگاه ساختمان سازه‌ای شرایط خاصی را ایجاب نماید محاسبات عکس‌العملها به شکل یکجا معادلات تعادل استاتیکی و معادلات خاص (شرط) سازه را در بر می‌گیرد. حتی زمانی‌که سازه‌ای معین باشد محاسبه عکس‌العملها مشکلتر بوده و ابتکار بیشتری را نسبت به‌حالاتی که معادلات خاصی در بین نباشد لازم دارد.

برای این‌که روش شروع محاسبات را در چنین حالاتی شرح دهیم سازه شکل (۲ــ۸) را در نظر می‌گیریم این سازه از نوعی است که قبلاً در باره‌اش صحبت کرده‌ایم ومی‌توان ثابت نمود سازه‌ای پایدار و معین می‌باشد. در این حالت چهار مولفهٔ مجهول عکس‌العمل وجود دارد و علاوه برسه معادله تعادل استاتیکی یک معادله خاص (شرط) به‌خاطر وجود مفصل بدون اصطکاک b نیز موجوداست. چنانکه قبلاً نیز ذکر شد (بخش ۲ــ۴) چنین مفصلی نه قادر به‌انتقال لنگر از قسمت ab به‌قسمت bc می‌باشد و نه برعکس. بنابراین لازم است‌که جمع جبری لنگر حول محور مار بر نقطه b از کلیه نیروهای موثر بر قسمت ab و یا قسمت bc برابر با صفر باشد، بیان فرمولی مطلب فوق چنین است.

$$\sum^{ab} M_b = 0 \qquad \text{or} \qquad \sum^{bc} M_b = 0$$

درنظر اول از روابط فوق ممکن‌است چنین تصور نمودکه چنان مفصلی دومعادله مستقل خاص (یا شرط) ایجاد می‌نماید، ولی حقیقت غیر از این است، به‌طوری‌که در استدلال زیر می‌بینیم فقط یک‌معادله مستقل‌ایجاد‌می‌شود: یکی ازمعادلات تعادل استاتیکی ایجاب‌می‌کند که جمع کل لنگرگیری نیروهای مؤثر بر سازه حول هر محوری برابر با صفر باشد پس اگرمحور



شکل ۲ ــ ۸ طاق سه‌مفصل

انتخابی b باشد داریم ، $\Sigma M_b = 0$. حال اگر معادله خاص(شرط) سازه را برای قسمت ab بنویسیم یعنی ، $\sum^{ab} M_b = 0$ بلافاصله می‌توان چنین دریافت که جمع جبری لنگرگیری حول b از نیروهائی‌که بر بقیه سازه یعنی bc اثر می‌کنند نیز برابر با صفر است .بنابراین رابطه $\sum^{bc} M_b = 0$ یک رابطه مستقل نیست ــ بلکه فقط مساوی معادله $\Sigma M_b = 0$ منهای معادله $\sum^{ab} M_b = 0$ است دانشجویان باید همواره مطلب فوق را زمانی‌که از معادلات خاص(شرط) سازه‌ها استفاده می‌کنند در خاطر داشته باشند و هرگز تصور نکنند ، معادلات مستقلی‌بیش‌از آنچه حقیقتاً" وجود دارد در اختیار دارند . به‌این طریق دومعادله‌ازسه‌معادله $\Sigma M_b = 0$ ، $\sum^{ab} M_b = 0,\ \sum^{bc} M_b = 0$ را می‌توان به‌صورت مستقل به‌کار برد معادله سوم رابطه مستقلی نیست .

حال اگر به‌حل این مثال بپردازیم با انتخاب مبتکرانه معادلات استاتیک می‌توان عکس‌العملها را به‌سادگی معین نمود .

$$\Sigma M_a = 0,\ \curvearrowright +,\ (20)(15) + (40)(55) - 80R_{cy} + 15R_{cx} = 0$$

$$\therefore\ R_{cy} = 31.25 + \tfrac{3}{16}R_{cx} \qquad \text{(الف)}$$

$$\sum^{bc} M_b = 0,\ \curvearrowright +,\ (40)(15) - 40R_{cy} + 45R_{cx} = 0$$

$$\therefore\ R_{cx} = \tfrac{8}{9}R_{cy} - 13.33 \qquad \text{(ب)}\ *$$

با جایگزین‌نمودن R_{cy} از معادله (a) در معادله (b)

$$R_{cx} = \tfrac{8}{9}(31.25 + \tfrac{3}{16}R_{cx}) - 13.33 \qquad \therefore\ R_{cx} = 17.33 \text{ kips} \leftarrow$$

حال با جایگزینی برعکس قبل در (الف)

$$R_{cy} = 34.5 \text{ kips} \updownarrow$$

به‌همان طریق قبل

$$\Sigma M_c = 0,\ \curvearrowright +,\ 80R_{ay} + 15R_{ax} - (20)(65) - (40)(25) = 0$$

$$\therefore\ R_{ay} = 28.75 - \tfrac{3}{16}R_{ax} \qquad \text{(ج)}$$

---

* اعدادی نظیر . . . 13.333 را اغلب به‌صورت $13.\dot{3}$ می‌نویسند ، نقطه روی رقم آخر نشان دهندهٔ تکرار بی‌نهایت آن رقم می‌باشد .

$$\sum^{ab} M_b = 0,\ \overset{\frown}{+},\ 40R_{ay} - 30R_{ax} - (20)(25) = 0$$
$$\therefore\ R_{ax} = \tfrac{4}{3}R_{ay} - 16.67 \qquad (د)$$

سپس با جایگزین‌نمودن معادله (ج) در معادله (د) .

$$R_{ax} = \tfrac{4}{3}(28.75 - \tfrac{3}{16}R_{ax}) - 16.67 \qquad \therefore\ R_{ax} = 17.33 \text{ kips} \nleftrightarrow$$

و جایگزین‌نمودن برعکس قبل در (ج)

$$R_{ay} = 25.5 \text{ kips} \updownarrow$$

با استفاده از معادلات $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ برای بررسی جوابها داریم .

$$\Sigma F_x = 0,\ \overset{\rightarrow}{+},\ 17.33 - 17.33 = 0 \qquad \therefore \text{O.K.}$$
$$\Sigma F_y = 0,\ \uparrow +,\ 25.5 - 20 - 40 + 34.5 = 0 \qquad \therefore \text{O.K.}$$

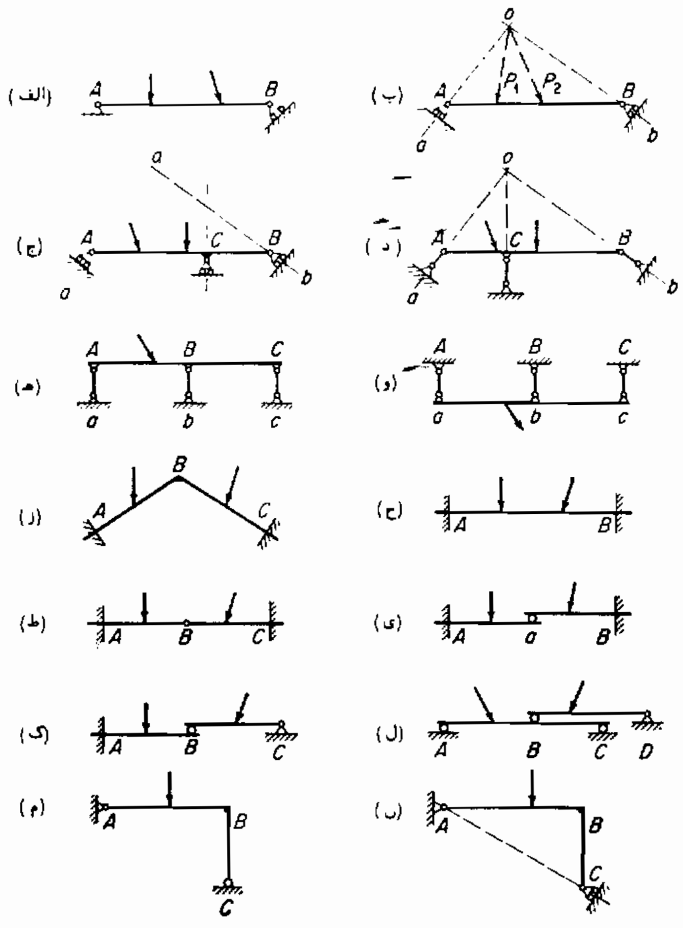
اگر تکیه‌گاههای a و c این سازه در یک تراز بودند واضح است که تعیین عکس‌العملها بسیار ساده‌تر می‌شد زیرا می‌توانستیم پاسخ مستقیم مولفه‌های عمودی عکس‌العملهارا توسط معادلات $\Sigma M_a = 0$ و $\Sigma M_c = 0$ به‌دست‌آوریم .با دقت در برخی ازمثالهای بخش (۲-۱۱) واضح می‌گردد که تعیین عکس‌العملهای سازه‌های پیچیده که در آنها باید معادلات خاصی به‌کار رود در برخی از حالات با جداکردن قسمتهای داخلی ، از سازه به‌عنوان نمودار پیکر آزاد و برقرارنمودن معادلات‌تعادل استاتیکی در موردآن قسمتها تسریع می‌گردد . بار دیگر باید به‌دانشجویان تأکید نمودکه چنان عملی در هرصورت معادله مستقل تازه‌دیگری‌علاوه‌بر مجموع سه‌معادله تعادل استاتیکی برای کل سازه و معادلات خاصی که نتیجه شرایط خاص اجرایی ساختمان می‌باشد ایجادنمی‌نماید .البته معادلاتی‌که به‌کار می‌رود ممکن است‌ظاهرا" به‌صورتهای مختلف به‌کار گرفته شود ولی در هر صورت معادلات جدیدی نیستند .

۲-۱۰ مثالهایی برای دسته‌بندی (سازه‌ها)

در این بخش مثالهایی‌موردبحث قرار گرفته‌اند تا روشهای تعیین پایداری‌وناپایداری سازه‌ها و همچنین‌معین و نامعین بودن سازه‌هارا برحسب چگونگی عکس‌العملهای آنهابررسی کنیم ، دیده می‌شود که‌کلیه تیرها را با خطوط مستقیمی که بر محور مار بر مراکز ثقل آنها منطبق می‌باشد نشان‌داده‌ایم و ازنمایش ارتفاع تیر در کلیه سازه‌های‌شکل (۲-۹) خودداری

کرده‌ایم. از این پس این عمل متداول‌را در بقیه کتاب هرجا که ارتفاع تیر اثر قابل توجهی در پاسخ مسائل نداشته باشد انجام خواهیم داد.

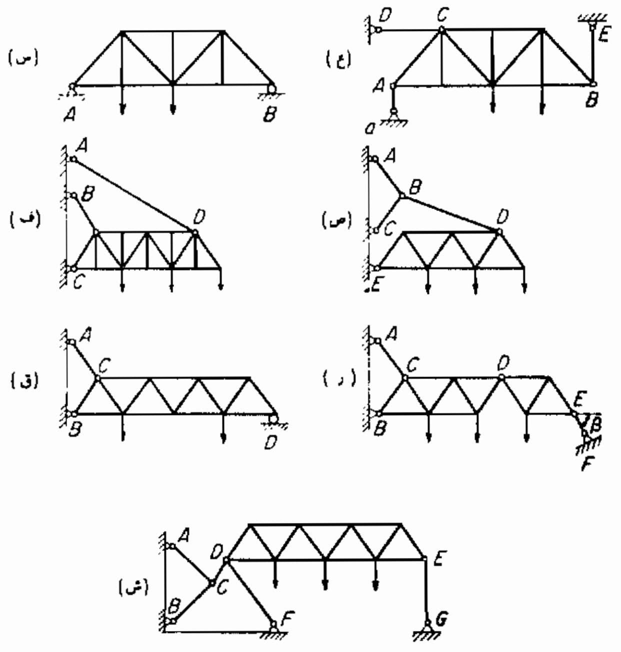
تیر شکل (۲-۹ الف) را در نظر بگیرید، مولفه‌های مستقل و مجهول عکس‌العمل عبارتنداز مقدار و جهت عکس‌العمل و مقدارعکس‌العمل در B و یا در کل مولفه. این مجهولات را همچنین می‌توان مقدار مولفه‌های افقی و عمودی عکس‌العمل در A و یکی از دو مولفه افقی یا عمودی در B فرض نمود. باید توجه داشت که اگرنقطه اثر و جهت عکس‌العملی معلوم باشد عکس‌العمل مجهول را می‌توان مقدار عکس‌العمل برآیند یا مقدار یکی از مولفه‌های عمودی یا افقی آن گرفت زیرا که هریک‌از این مولفه‌هارا می‌توان برحسب دیگری با در نظرگرفتن جهت معلوم عکس‌العمل محاسبه نمود. از آنجائی که عکس‌العمل تکیه‌گاه B از نقطه A نمی‌گذرد لذا



شکل (۲-۹)- مثالهایی برای دسته‌بندی سازه‌ها

این سازه پایدار است. بنابراین سه عکس‌العمل مجهول‌را می‌توان‌با دردست‌داشتن‌سه‌معادله تعادل استاتیکی بدست آورد لذا این سازه معین می‌باشد.

باتوجه‌به‌تیرشکل (۲ـ۹ ب) دیده می‌شود که‌این‌تیرفقط دوعکس‌العمل‌مجهول‌دارد ـ که مقدار عکس‌العملها در A و B می‌باشد، این‌دومجهول‌را می‌توان‌مولفه‌های‌افقی یا عمودی هریک از عکس‌العمل‌ها فرض نمود. از آنجائی که سه معادله تعادل‌استاتیکی نمی‌توانند با این دو مجهول‌مستقل عکس‌العمل به‌طورتوأم سازگارباشد این سازه‌تحت اثردستگاه نیروی‌غیرمشخص از نظر استاتیکی ناپایدار خواهد بود و چون خطوط اثر دوعکس‌العمل در نقطهٔ O تلاقی می‌کنند اگر برآیند اثر نیروهای مؤثر نیرویی باشد که خط اثر آن از نقطهٔ O بگذرد این دو عکس‌العمل قادرخواهند بود چنان دستگاه باری را درتعادل نگهدارند. از آنجائی‌این‌سازه در دسته سازه‌های ناپایدارجای‌داردتحت‌اثراین‌نوع‌بارگذاری‌نیز حالت ناپایدار داشته ولی عکس‌العمل‌های آن‌را می‌توان با استفاده از معادلات تعادل استاتیکی به‌دست آورد.



ادامه شکل (۲ـ۹)ـ مثالهایی برای‌دسته‌بندی سازه‌ها

اگر یک تکیه‌گاه غلتکی به‌نقطه c چنانکه در شکل (۲ـ۹ ج) نشان داده شده‌است‌اضافه کنیم عکس‌العملهای این سازه نظیر سه‌بند تکیه‌گاهی خواهد بود که خطوط اثرآنها نه‌موازی هستند و نه متقارب بنابراین این سازه پایدار و معین خواهد شد. چون عکس‌العمل مجهول

را می‌توان با استفاده از سه معادله تعادل استاتیکی بدست آورد. از طرف دیگر اگر تکیه‌گاهی بند‌دار در نقطه C مانند شکل (۲ـ۹ د) به‌آن اضافه کنیم، سازه از نظر هندسی ناپایدار خواهد شد زیرا خطوط اثر تکیه‌گاههای آن که از سه تکیه‌گاه بند‌دار تشکیل شده است همگی یکدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند. البته این سازه کاملا" آزاد و بدون قید نیست لذا بدیهی است که پس از دوران لحظه‌ای به‌میزان زاویه‌ای محدود حول نقطهٔ O تعادل خود را باز خواهد یافت. از آنجائی‌که وضعیت جدید سازه تابعی از تغییرشکل سازه است عکس‌العملهای مؤثر بر سازه در وضعیت تغییر یافته از نظر استاتیکی نامعین خواهد بود.

واضح است که سازهٔ شکل (۲ـ۹ ز) پایدار بوده و در کل شش عکس‌العمل مجهول ــ مولفه‌های افقی، عمودی و لنگر در هرتکیه‌گاه ــ دارد و چون فقط سه معادله تعادل استاتیکی وجود دارد پس این سازه سه درجه نامعین است. ایجاد مفصل در سازه شکل (۲ـ۹ ط) یک معادله خاص به‌معادلات اضافه می‌کند و سازه را دو درجه نامعین می‌نماید. با اضافه نمودن یک غلتک طبق شکل (۲ـ۹ ی) به‌سازه فقط یک نیروی عمودی از قسمتی از سازه به‌قسمت‌دیگر منتقل می‌گردد این عمل معادل ایجاد دو معادله‌شرط در سازه‌است یکی این‌که جمع لنگرگیری حول a از کلیه نیروهای مؤثر به‌هریک از دو قسمت برابر صفر می‌باشد دیگری این که جمع مولفه‌های افقی نیروهای مؤثر به‌هریک از دوقسمت برابر صفر است. در نتیجه این سازه‌فقط یک درجه نامعین خواهد بود.

در شکلهای p به‌بعد کلیه قسمتهای خرپایی را می‌توان به‌عنوان یک جسم‌صلب درنظر گرفت. نیروی مولفه‌های این خرپاها پس از این‌که عکس‌العمل‌ها معین‌گردید ازنظر استاتیکی معین است. آرایش میله‌های یک خرپا که برای‌پایداری آن لازم است‌با جزئیات‌کافی‌درفصل چهارم شرح داده شده است فقط در این بحث کافی است که قسمتهای خرپایی را به‌مثال جسمی صلب بدانیم به‌سادگی دیده می‌شود که سازه‌های شکل (۲ـ۹ س) و (۲ ـ ۹ ع) تحت اثر هر دستگاه بار غیرمشخصی پایدار و معین هستند. سازهٔ (۲ـ۹ ف) دارای چهار تکیه‌گاهی مجهول است. مقدار عکس‌العمل‌ها در تکیه‌گاههای بند‌دار A، B. مقدار و جهت عکس‌العمل تکیه‌گاه مفصلی C. برای این‌که این چهار مجهول را معین کنیم فقط سه معادله تعادل استاتیکی را دراختیار داریم بنابراین این سازه پایداربوده و یک درجه نامعین‌است.

برای سازه‌هایی نظیر آنچه در شکل (۲ـ۹ص) نشان داده شده است اغلب بهتر است که طریقه دیگری برای تعیین پایداری و معینی آنها به‌کار بریم. زیرا در این سازه‌ها شمارش معادله‌های قابل‌درج ممکن‌است خسته‌کننده ومبهم‌باشد. اگر به‌جای‌آن، سازه‌را به‌قسمت‌های جداگانه تقسیم کنیم و اثر نیروهای اتصال هرقسمت را به‌بقیه سازه موردنظر داشته باشیم، در این حالت اگر مقطع جداکننده‌ای از میان بند BD بگذرانیم و تکیه‌گاه مفصلی E را با دو

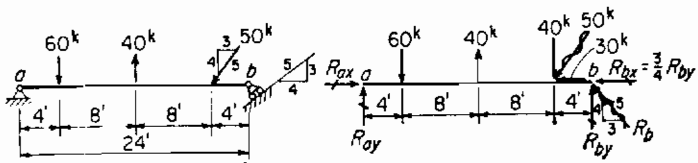
مولفه افقی و عمودی عکس‌العمل آن جایگزین‌کنیم قسمت خرپایی به‌مانند یک پیکر آزاد جدا شده و می‌تواند تحت اثر بارهای وارده و سه نیروی مجهول (نیروی داخلی بند اتصال و دو عکس‌العمل در E)مورد بررسی قرار گیرد . اگر قرار است که این پیکر آزاد در تعادل باشد این سه‌مجهول را می‌توان به‌نحوی تعیین نمود که در سه معادله تعادل استاتیکی صدق‌کنند. با به‌کاربردن $\Sigma M_E = 0$ در مورد پیکر آزاد معادله‌ای برای تعیین نیروی بند اتصال با یک مجهول به‌دست می‌آید .با معلوم شدن نیروی بند‌اتصال BD می‌توانیم نیروهای بندهای اتصال AB و BC را با به‌کاربردن $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ برای مفصل B و با جداکردن‌آن به‌صورت یک پیکر آزاد تعیین کنیم . بنابراین عکس‌العملهای این سازه را می‌توان از طریق معادلات تعادل استاتیکی تعیین نمود . لذا می‌توان گفت که این سازه پایدار و معین است .

۲ ــ ۱۱ مثالهائی عددی برای محاسبه عکس‌العمل‌ها

دانشجویان باید مثالهای زیرین را با دقت تمام‌بررسی نمایند ، کلیه سازه‌های‌مثالهای زیر معین است ، ولی دانشجویان می‌توانند به‌عنوان تمرین آنها را بنحو نامعین نیز مورد مطالعه قرار دهند .

مثال ۲ــ۱ــ عکس‌العملهای تیر ab را تعیین کنید .

روش الف ــ



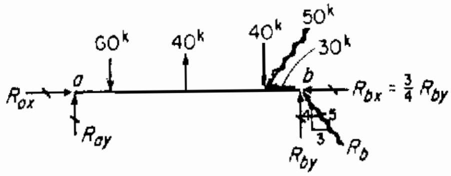
$$\Sigma M_a = 0, \; \curvearrowright +$$
$$(60)(4) - (40)(12) + (40)(20) - (R_{by})(24) = 0 \qquad \therefore R_{by} = {}^{560}/_{24} = \underline{23.\dot{3}^k} \updownarrow$$
$$R_{bx} = {}^{3}/_{4} R_{by} = \underline{17.5^k} \leftrightarrow$$

$$\Sigma M_b = 0, \; \curvearrowright +$$
$$(R_{ay})(24) - (60)(20) + (40)(12) - (40)(4) = 0 \qquad \therefore R_{ay} = {}^{880}/_{24} = \underline{36.\dot{6}^k} \updownarrow$$
$$\Sigma F_x = 0, \; \xrightarrow{+}, \; R_{ax} - 30 - 17.5 = 0 \qquad \therefore R_{ax} = \underline{47.5^k} \leftrightarrow$$

وارسی :

$$\Sigma F_y = 0, \; \uparrow +, \; 36.\dot{6} - 60 + 40 - 40 + 23.\dot{3} = 0$$
$$0 = 0 \qquad \therefore O.K.$$

روش ب :



$$\Sigma M_b = 0, \curvearrowright +$$

$$\begin{array}{lrr} & + & - \\ -(60)(20) = & & 1{,}200 \\ +(40)(12) = & 480 & \\ -(40)(4) = & & 160 \\ & +\ \overline{480} & -\ \overline{1{,}360} \\ & & +\ 480 \\ R_{ay} = \underline{\underline{36.\dot{6}^k}} \Updownarrow = & & -\ \frac{880}{24} \end{array}$$

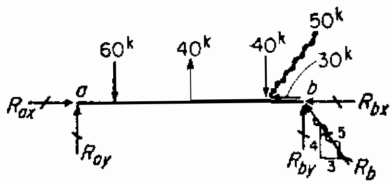
$$R_{ax} = \underline{\underline{47.5^k}} \rightarrow$$

$$\Sigma M_a = 0, \curvearrowright +$$

$$\begin{array}{lrr} & + & - \\ +(60)(4) = & 240 & \\ -(40)(12) = & & 480 \\ +(40)(20) = & 800 & \\ & +\ \overline{1{,}040} & -\ \overline{480} \\ & -\ 480 & \\ R_{by} = & +\ \frac{560}{24} = \underline{\underline{23.\dot{3}^k}} \Updownarrow & \end{array}$$

$$R_{bx} = = 3/4 \times 23.3 = \underline{\underline{17.5^k}} \leftarrow$$

روش ج :



$$\Sigma M_b = 0: R_{ay}$$

$$\begin{array}{lrr} & \uparrow & \downarrow \\ 40 \times 4/24 = & 6.\dot{6} & \\ 40 \times 12/24 = & & 20 \\ 60 \times 20/24 = & 50 & \\ & \overline{56.\dot{6}} & \overline{20} \\ & 20 & \\ R_{ay} = & \overline{\underline{\underline{36.\dot{6}^k}}} \Updownarrow & \\ R_{ax} = & \underline{\underline{47.5^k}} \rightarrow & \end{array}$$

$$\Sigma M_a = 0: R_{by}$$

$$\begin{array}{lrr} & \uparrow & \downarrow \\ 60 \times 4/24 = & 10 & \\ 40 \times 12/24 = & & 20 \\ 40 \times 20/24 = & 33.\dot{3} & \\ & \overline{43.\dot{3}} & \overline{20} \\ & 20 & \\ R_{by} = & \overline{\underline{\underline{23.\dot{3}^k}}} \Updownarrow & \\ R_{bx} = & \underline{\underline{17.5^k}} \leftarrow & \end{array}$$

بحث :

سه‌روشی‌که برای تعیین عکس‌العمل ارائه‌شد اساسا" یکی هستند و فقط درجزئیات‌مربوط به‌نظم محاسبات با یکدیگر اختلاف دارند ، طریقه الف احتمالا" بهترین روش برای محاسبه سازه‌های غیرمعمولی و پیچیده است ، در صورتیکه روش نظام یافته محاسبات به‌طریقه‌های ب و ج در تیرها و خرپاهای متعارف بسیار مفید خواهد بود .

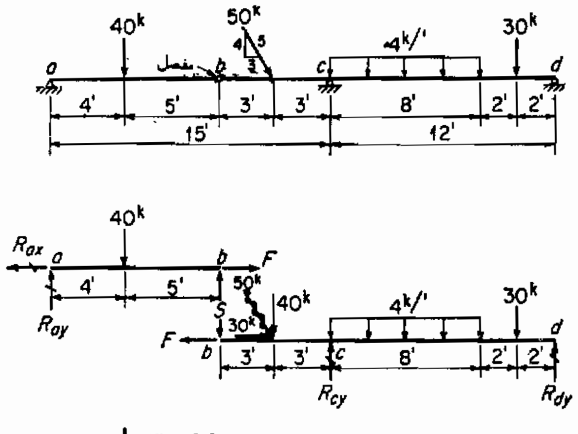
متوجه می‌شوید که جایگزین‌کردن هر نیروی مایل با مولفه‌های افقی و عمود آن در محاسبات و کاربرداین مولفه‌ها به‌جای‌خود نیرو درنوشتن‌معادلات‌تعادل‌استاتیکی ،محاسبات

را عموماً" بسیارساده می‌کند (اگر نیرویی به‌همراه مولفه‌هایش در روی نموداری از پیکر آزاد رسم‌شده باشد خطی موج‌دار بر روی پیکان نمایش نیرو رسم شود تا نشان داده شود که نیرو توسط مولفه‌هایش جایگزین شده‌است) .

محاسب می‌تواند با کشیدن خط زیر این پاسخها آنهارا مشخص‌سازد و همچنین‌واحد و جهت نیروها را مشخص نماید .توجه شود که اگرجوابی به‌صورت مثبت‌به‌دست‌آید جهت نیرو روی نمودار پیکرآزاد صحیح انتخاب شده است و اگر پاسخی به‌صورت منفی بیرون‌آیدجهت اثر نیرو خلاف جهت فرض شده ، خواهد بود .

دیده می‌شود که در این مساله از دومعادله لنگر و یک معادله نیرو استفاده شده است، معادله $\Sigma F_y = 0$ فقط می‌تواند کنترلی بر روی مولفه‌های عمودی عکس‌العملهاباشد ولی مولفه‌های افقی را بررسی نمی‌نماید . اگر معادله $\Sigma M = 0$ را حول محوری که روی خط مار بر نقاط a و b قرار ندارد اعمال کنیم کنترلی برای مقادیر عکس‌العمل‌های افقی به دست خواهد آمد .

مثال ۲ــ۲ = عکس‌العمل‌های این سازه را محاسبه کنید .



به‌تنهایی ab:

$$\Sigma M_b = 0, \quad (9)(R_{ay}) - (40)(5) = 0 \quad \therefore R_{ay} = \underline{22.2}^k \updownarrow$$

به‌تنهایی bd:

$$\Sigma M_d = 0$$

$-(17.8)(18) =$	-320
$-(40)(15) =$	-600
$-(4 \times 8)(8) =$	-256

$$\Sigma M_c = 0$$

	+	−
$-(17.8)(6) =$		106.8
$-(40)(3) =$		120
$+(4 \times 8)(4) =$	128	
$+(30)(10) =$	300	
	+428	−226.8

$$\Sigma M_a = 0, \curvearrowleft +$$
$$(40)(4) - (S)(9) = 0 \qquad -(30)(2) = -60$$
$$S = \underline{17.7^k} \uparrow \qquad R_{cy} = \underline{103^k} \updownarrow = \frac{-1{,}236}{12} \qquad R_{dy} = \frac{\begin{array}{r}-226.6\\ +201.3\end{array}}{12} = \underline{16.7^k} \updownarrow$$
$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_x = 0$$
$$\therefore R_{ax} = \underline{30^k} \leftrightarrow \qquad \therefore F = \underline{30^k} \leftrightarrow$$

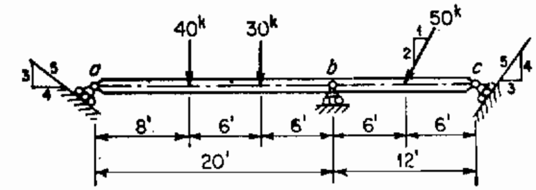
وارسی : برای کل سازه.

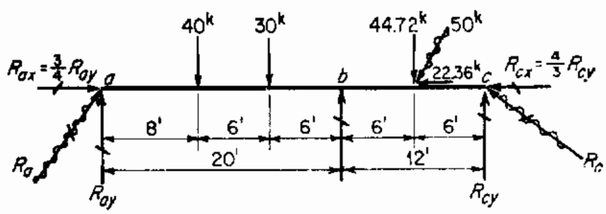
$$\Sigma F_y = 0, \uparrow +, \quad 22.2 - 40 - 40 + 103 - 32 - 30 + 16.7 = 0$$
$$142 - 142 = 0 \qquad \therefore O.K.$$

بحث :

وقتی که دوقسمت ab و bd را از یکدیگر جدا می‌کنید تصور کنید که میله محور مفصل را درآورده‌اید و مفصل می‌تواند نیرویی درجهتی نامشخص که امتدادآن از مرکزمحورمفصل عبور کند انتقال دهد. اگر مولفه‌های افقی و عمودی این نیرو را با F و S روی قسمت ab نشان دهیم باید درروی قسمت bd این مقادیر در خلاف جهت اثر کنند و باید توجه نمود که‌می‌توان وارسی مستقلی ازعکس‌العملهای افقی و عمودی تیر با به‌کارگرفتن $\Sigma M = 0$ حول محوری که از خط واصل بین a و d نگذرد به‌عمل آورد.

مثال ۲ــ۳ عکس‌العملهای این تیر را تعیین کنید.



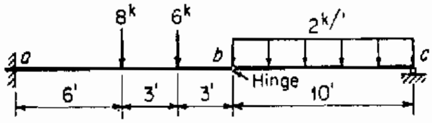


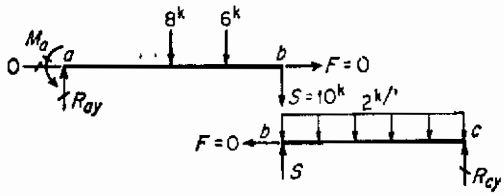
$$\Sigma M_b = 0, \curvearrowright +$$
$$(R_{ay})(20) - (40)(12) - (30)(6) + (44.72)(6) - (R_{cy})(12) = 0$$
$$20R_{ay} = 12R_{cy} + 391.68$$
$$\Sigma F_x = 0, \overrightarrow{+}, \tfrac{3}{4}R_{ay} - 22.36 - \tfrac{4}{3}R_{cy} = 0 \qquad R_{cy} = 0.5625R_{ay} - 16.77$$
$$\therefore 20R_{ay} = 6.75R_{ay} - 201.24 + 391.68 \qquad R_{ay} = +\underline{14.37^k} \updownarrow \qquad R_{ax} = \underline{10.78^k} \leftrightarrow$$
$$R_{cy} = 8.08 - 16.77 = -8.69 \qquad R_{cy} = -\underline{8.69^k} \updownarrow \qquad R_{cx} = -\underline{11.59^k} \leftrightarrow$$
$$\Sigma M_a = 0, \curvearrowright +$$
$$(40)(8) + (30)(14) - (R_{by})(20) + (44.72)(26) + (8.69)(32) = 0$$
$$R_{by} = 109.04^k \updownarrow$$

وارسی :
$$\Sigma F_y = 0, \uparrow +$$
$$14.37 - 40 - 30 + 109.04 - 44.72 - 8.69 = 0$$
$$123.41 - 123.41 = 0 \qquad \therefore O.K.$$

وارسی :
$$\Sigma F_x = 0, \overrightarrow{+}$$
$$10.78 - 22.36 + 11.59 = 0$$
$$-22.36 + 22.37 = 0 \qquad \therefore O.K.$$

مثال ۲ـ۴ عکس‌العملهای این سازه را تعیین کنید .





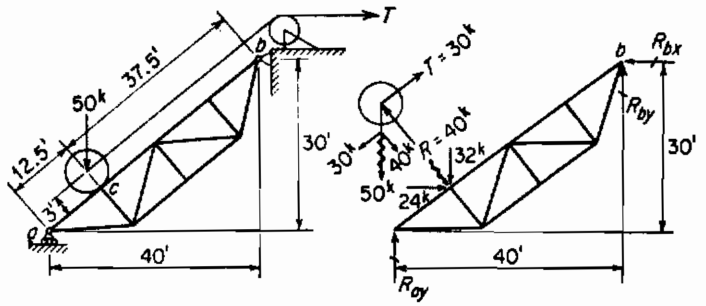
$$\Sigma M_b = 0, \curvearrowright +, (2)(10)(5) - (R_{cy})(10) = 0 \qquad \therefore R_{cy} = \underline{10^k} \updownarrow$$
$$\Sigma M_c = 0, \curvearrowright +, (S)(10) - (2)(10)(5) = 0 \qquad \therefore S = \underline{10^k} \uparrow$$

به‌تنهایی ab:
$$\Sigma M_a = 0, \curvearrowright +, (10)(12) + (6)(9) + (8)(6) - M_a = 0 \qquad \therefore M_a = \underline{222^{k'}}$$
$$\Sigma F_y = 0, \uparrow +, R_{ay} - 8 - 6 - 10 = 0 \qquad R_{ay} = \underline{24^k} \updownarrow$$

وارسی :

در کل تیر $\Sigma F_y = 0, \quad 24 - 8 - 6 - 20 + 10 = 0$
$$\therefore 0 = 0 \qquad \therefore O.K.$$

مثال ۲ــ۵ = عکس‌العملهای این خرپا را تعیین کنید .



$$\Sigma F_x = 0 \qquad R_{bx} = \underline{24}^k \leftarrow$$
$$\Sigma M_b = 0,\ \circlearrowright +,\ (R_{ay})(40) - (40)(37.5) = 0 \qquad R_{ay} = \underline{37.5}^k \uparrow$$
$$\Sigma M_a = 0,\ \circlearrowright +,\ (40)(12.5) - (24)(30) - (R_{by})(40) = 0 \qquad R_{by} = -\underline{5.5}^k \downarrow$$

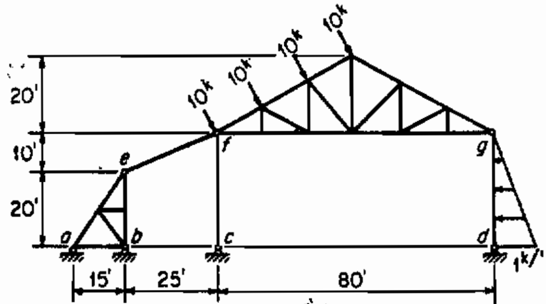
وارسی :

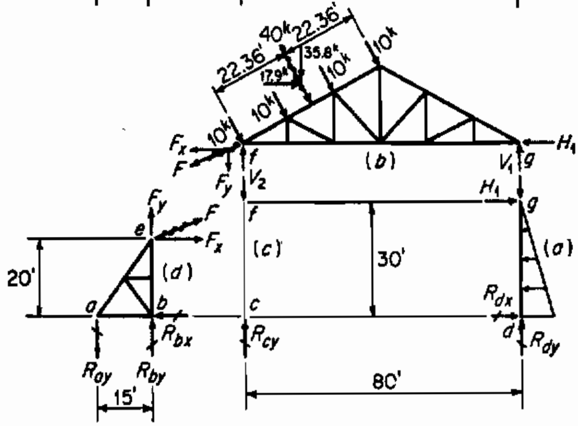
$$\Sigma F_y = 0, \uparrow +,\ 37.5 - 32 - 5.5 = 0 \qquad \therefore O.K.$$

بحث :

در چنین مسائلی ابتدا بارهای مؤثر برسازه را محاسبه کنید ، به‌این منظورباید به‌طور جداگانه تعادل چرخ را تحت اثر وزن آن ، کشش کابل و عکس‌العمل خرپا روی چرخ بررسی نمود . پس ازاین‌که بارهای‌مؤثر بر سازه معلوم‌شد مساله تبدیل به‌محاسبه مستقیم عکس‌العمل می‌شود . توجه شود فرض بر این است که اصطکاکی بین چرخ و خرپا وجود ندارد و بنابراین نیروی مابین این دو ، عمود بر خط ab بوده و خط‌اثر آن از مرکز چرخ می‌گذرد .

مثال ۲ـ۶ = عکس‌العملهای سازه را تعیین کنید .





(پیکرآزاد a)

$$\Sigma M_d = 0,\ \overset{\curvearrowleft}{+},\ (H_1)(30) - \frac{(1)(30)}{2}(10) = 0 \qquad H_1 = 5^k \leftrightarrow$$

$$\Sigma M_g = 0,\ \overset{\curvearrowleft}{+},\ \frac{(1)(30)}{2}(20) - (R_{dx})(30) = 0 \qquad R_{dx} = 10^k \leftrightarrow$$

(پیکرآزاد b)

$$\Sigma M_f = 0,\ \overset{\curvearrowleft}{+},\ (40)(22.36) - (V_1)(80) = 0 \qquad V_1 = 11.18^k \uparrow \qquad \therefore\ R_{dy} = \underline{11.18^k} \updownarrow$$

$$\Sigma F_x = 0,\ \overset{\rightarrow}{+},\ 17.9 - 5 - F_x = 0 \qquad F_x = 12.9 \leftarrow \qquad \therefore\ F_y = \tfrac{2}{5}(12.9) = \overline{5.16^k} \updownarrow$$

$$\Sigma M_g = 0, \overset{\curvearrowleft}{+},\ (17.9)(10) - (35.8)(60) - (5.16)(80) + (V_2)(80) = 0 \qquad V_2 = 29.77 \uparrow$$

$$\therefore\ R_{cy} = \underline{29.77^k} \updownarrow$$

وارسی :

$$\Sigma F_y = 0,\ \uparrow +,\ -5.16 + 29.77 - 35.8 + 11.18 = 0$$

$$\therefore\ -0.01 = 0 \qquad \therefore\ O.K.$$

(پیکرآزاد d)

$$\Sigma M_b = 0,\ \curvearrowright\!+,\ (12.9)(20) - (R_{ay})(15) = 0 \qquad \therefore R_{ay} = \underline{17.2^k} \updownarrow$$
$$\Sigma M_a = 0,\ \curvearrowright\!+,\ (12.9)(20) - (5.16)(15) - (R_{by})(15) = 0 \qquad \therefore R_{by} = \underline{12.04^k} \updownarrow$$
$$\Sigma F_x = 0 \qquad R_{bx} = \underline{12.9^k} \leftrightarrow$$

وارسی عملیات با در نظر گرفتن کل سازه به‌عنوان یک قطعه:

$$\Sigma F_x = 0,\ \overrightarrow{+},\ -12.9 + 17.9 + 10 - \frac{(1)(30)}{2} = 0 \qquad \therefore 0 = 0 \qquad O.K.$$
$$\Sigma F_y = 0,\ \uparrow+,\ -17.2 + 12.04 + 29.77 - 35.8 + 11.18 = 0 \qquad -0.01 = 0 \qquad O.K.$$
$$\Sigma M_a = 0,\ \curvearrowright\!+,\ -(12.04)(15) - (29.77)(40) - (11.18)(120) + (17.9)(40) + (35.8)(60) - \frac{(1)(30)}{2}(10) = 0$$
$$-2{,}863 + 2{,}864 = 0 \qquad O.K.$$

بحث :

در مسائلی از این قبیل سازه به‌قطعات مختلف خود تجزیه می‌شود و برای هر قطعه نمودار پیکرآزاد آن رسم می‌شود نیروهای اثرقطعات برهم‌را می‌توان در هرجهتی‌فرض نمود ولی به‌طور مسلم باید این نیروها روی دوقطعه مجاور در خلاف هم باشند به‌عنوان مثال‌اگر نیروی F را روی پیکرآزاد b به‌طرف پائین و به‌سمت‌چپ‌فرض‌کنیم روی پیکرآزاد d باید به‌سمت راست و بالا اثر نماید . از آنجائی‌که کل سازه در تعادل است هریک از قطعات آن نیز باید در تعادل باشد ، لذا معادلات تعادل استاتیکی برای هرقطعه باید صادق باشد و این می‌تواند اساس تعیین عکس‌العملهای مجهول و نیروهای بین قطعات باشد .

توجه شود که پس از آنکه کلیه عکس‌العملها به‌دست آمد صحت جوابها را می‌توان با اعمال معادلات تعادل استاتیکی برای کل سازه که به‌صورت یک جسم صلب گرفته می‌شود تحقیق نمود .

---

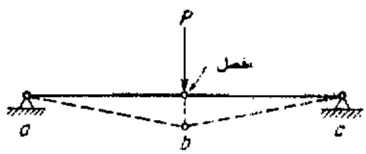
۲ ــ ۱۲ اصل جمع آثار

در اینجا بحث مختصری ازاصل جمع آثار بی‌مناسبت نیست .ازاین اصل به‌طور مستمر در محاسبات سازه‌ها استفاده می‌شود و شاهد براین مدعا به‌کارگرفتن آن در راه حل روش ج مثال (۲ــ۱) است .درآن مثال عکس‌العمل را برای هریک از سه بارگذاری به‌طور جداگانه تعیین نمودیم و دیدیم که جمع جبری این سه عکس‌العمل مقدار کل عکس‌العمل را تحت اثر

همزمان سه‌بار معین می‌کند و به‌عبارت دیگر از جمع آثار اثرات جداگانه هریک به‌جمع اثرات آنها رسیدیم .

چنین عملکردی عموما" جایز است‌ولی در دو حالت مهم اصل جمع آثار صادق نیست ۱ ـ وقتی که شکل هندسی سازه در طول اثر بارها تغییر زیادی پیدا کند ۲ـ هرگاه که در سازه‌ای کرنش تناسب‌مستقیم با تنش نداشته باشد ، هرچند که در آن‌سازه تغییرشکل هندسی قابل اغماض باشد . حالت اخیر زمانی اتفاق می‌افتد که مصالح سازه تنشی بیشتراز حد ارتجاعی تحمل کنــد و یا این‌که اصولا"تغییرات تنش ـ کرنش یا قسمتی از آن از قانون‌هوک تبعیت نکند .

دربخش ۲ـ۳ گفتیم‌که معمولا"تغییرشکل سازه‌ها آنقدرکوچک است‌که به‌ما اجازه می‌دهد که‌آن را جسمی صلب فرض کرده و باآن فرض معادلات تعادل استاتیکی را در موردآن به‌کار گیریم و از اثر تغییر ناچیز هندسی بازوی اهرم نیروها و از شیب مختصری که قطعات‌پیدا می‌کنند و نظایر آن صرفنظر کنیم . سازه شکل (۲ـ۱۰)را درنظر بگیرید درحالت بدون بـار سازه سه مفصل روی یک خط راست قرار می‌گیرد ، لازم است که تغییرهندسی ناشی‌از تغییـر شکل سازه را برای بازوی اهرم ، شیب قطعات مقدار قابل توجهی می‌شود بررسی کنیم ، در نتیجه این بررسی دیده خواهد شد که نیروها و تغییر مکانها در سازه با بار p رابطه مستقیم ندارند حتی اگر مصالح سازه از قانون هوک تبعیت کند . بنابراین این حالت مثال بارزی برای عدم صدق‌اصل جمع آثار (بر طبق حالت اول آن) می‌باشد ، در چنین سازه‌ای‌اثرباری برابر با $2P$ نه دوبرابر اثار بار P است و نه‌این‌که اثر بار $P_1 + P_2$ برابر جمع جبری‌اثر جداگانه بار P_1 و اثر بارجداگانه P_2 می‌باشد .درمکانیک‌حالت‌بسیارمهمی وجوددارد‌که‌درمورد آن‌اصل‌جمع‌آثارصادق‌نیست‌که‌اینجا آن‌راذکرمی‌کنیم‌وآن قطعه فشاری لاغریست که تحت اثر بارمحوری و بارجانبی قرار گرفته باشد .در یک چنین حالتی ، تنش، لنگر ، تغییرمکان وغیره که در اثر بار محوری $P_1 + P_2$ بوجود آمده باشد مساوی جمع جبری مقادیر فوق‌الذکرتحت اثر جداگانهٔ P_1 و P_2 نیست . خوشبختانه بسیاری از این قبیل حالات که در مورد آنهااصل جمع آثار صادق نیست به‌سادگی قابل‌تشخیص هستند .



شکل ۲ ـ ۱۰ سازه غیرخطی

قبلاً" ذکر شد که اصل جمع آثار برای حالاتی که در مورد آنها از اثر تغییر هندسی می‌توان صرفنظر نمود ولی مصالح آن چنان سازه‌ای از قانون هوک تبعیت نمی‌کند نیز صادق نیست . اگر چنین سازه‌هایی معین باشند در مورد مقادیری که توسط تحلیل تنش این سازه‌ها (نظیر عکس‌العملها ، تلاش برشیها ، لنگر خمشیها) معین می‌شود می‌توان اصل جمع آثار را به‌کار برد ولی در مورد شدت تنش و تغییرمکان این‌کار ممکن نیست به‌عنوان مثال در مورد تیری از چدن که روی تکیه‌گاههای ساده قرار دارد عکس‌العملها ، تلاش برشی و لنگر خمشی در مقطع را که ناشی‌از معین‌بودن تیراست می‌توان با جمع‌آثار به‌دست آورد ولی‌در هرصورت شدت تنش و تغییر مکان ناشی از لنگر خمشی حاصل از بار $2P$ برابر با دو برابر حاصل ازبار P نیست و به‌این جهت چنین کمیتهایی جمع پذیر نیستند . حال اگر تیر نامعینی از جنس چدن باشد ، هیچیک از کمیتهای آن را نمی‌شود باهم جمع نمود زیرا تحلیل تنش تابعی از تغییرشکل سازه خواهد بود .

۲ ــ ۱۳ مسائل

۲ ــ ۱ سازه‌های شکلهای (۲ــ۹ هـ، و . . . ن)و (۲ــ۹ق ،ر . .ش) را ازنظر پایداری ،ناپایداری و معین و نامعین بودن دسته‌بندی کنید و برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید .

جواب :

(هـ)ناپایدار (و)ناپایدار (ح)پایدار و نامعین (ط) پایدار و معین

(ل)ناپایدار (م)پایدارومعین (ن)ناپایدار (ق)پایدارکاملاً" معین

(ر)پایدار و معین به‌شرطی‌که‌مقدار β طوری باشدکه EF از D نگذرد (ش)پایدارومعین

۲ ــ ۲ عکس‌العملهای تیرهای شکل (۲ــ۱۱) را محاسبه کنید .

جواب :

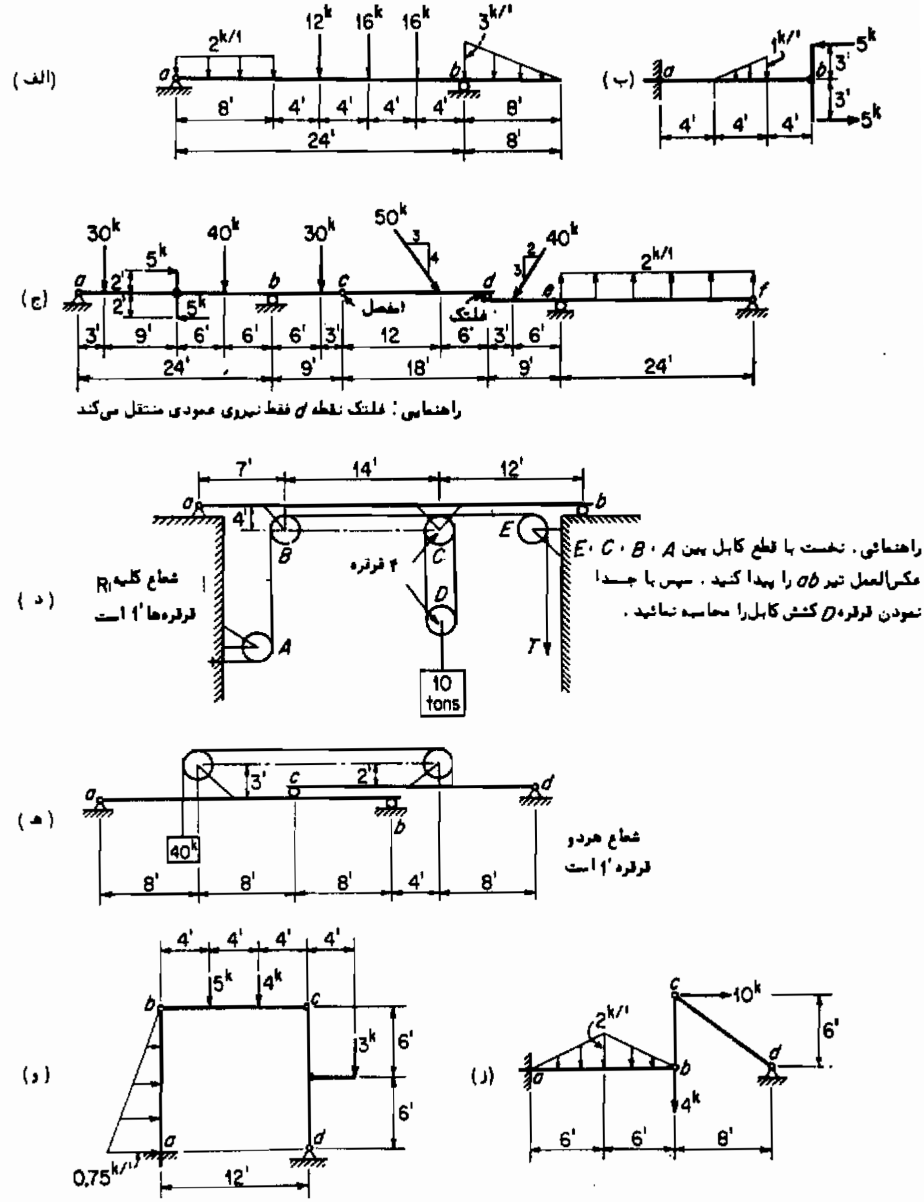
(الف) $R_{ax} = 0, R_{ay} = 26.0$ kips up به‌طرف‌بالا $R_{by} = 46$ kips up به‌طرف بالا

(ب) $R_{ax} = 0, R_{ay} = 2.0$ kips up به‌طرف‌بالا $M_a = 16.6$ kip-ft c.c.

(ج) $R_{ax} = 30.0$ kips به‌سمت چپ $R_{ay} = 22.92$ kips up به‌طرف بالا

$R_{by} = 90.42$ kips به‌طرف بالا $R_{ey} = 54.20$ kips به‌طرف‌بالا

$R_{fx} = 22.19$ kips به‌طرف‌راست $R_{fy} = 42.32$ kips به‌طرف‌پائین



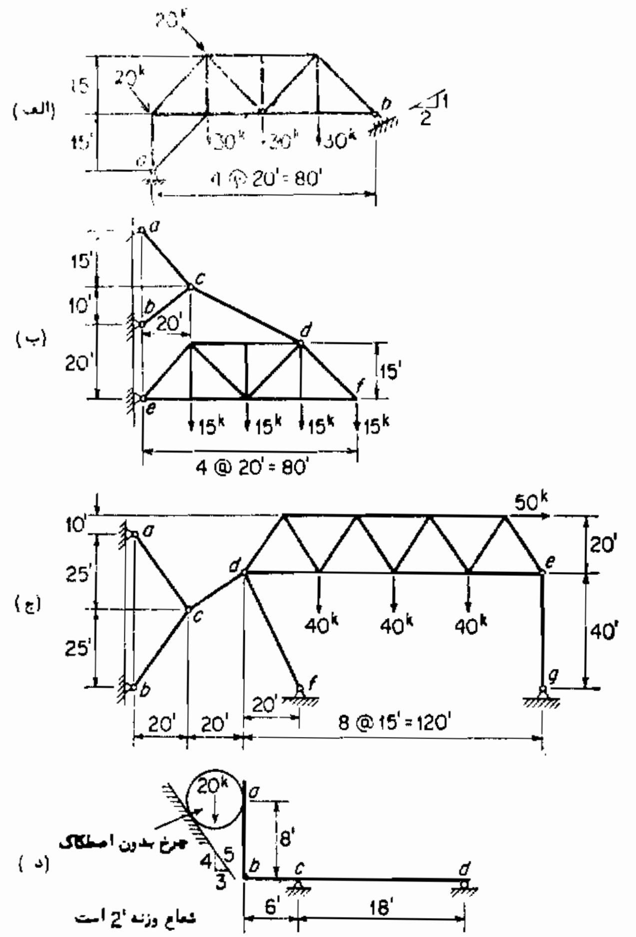
شکل ۲ — ۱۱ مساله ۲—۲

(د)	$R_{ax} = 10.00$ kips	به‌طرف چپ	$R_{ay} = 16.36$ kips	به‌طرف بالا
	$R_{by} = 13.64$ kips	به‌طرف بالا		
(هـ)	$R_{ax} = 40.0$ kips	به‌طرف چپ	$R_{ay} = 23.6$ kips	به‌طرف بالا
	$R_{dx} = 40.0$ kips	به‌طرف راست	$R_{dy} = 6.0$ kips	به‌طرف پائین
	$R_{by} = 22.3$ kips	به‌طرف بالا		
(و)	$R_{ax} = 5.5$ kips	به‌طرف چپ	$R_{ay} = 4.6$ kips	به‌طرف بالا
	$M_a = 30.0$ kip-ft c.c.		$R_{dx} = 1.0$ kips	به‌طرف راست
	$R_{dy} = 7.3$ kips	به‌طرف بالا		
(ز)	$R_{ax} = 0$, $R_{ay} = 8.5$ kips		$M_a = 30.0$ kip-ft c.c.	به‌طرف بالا
	$R_{dx} = 10.0$ kips	به‌طرف چپ	$R_{dy} = 7.5$ kips	به‌طرف بالا

۲ ــ ۳ عکس‌العمل‌های سازه‌های شکل (۲ــ۱۲) را معین کنید .

جواب :

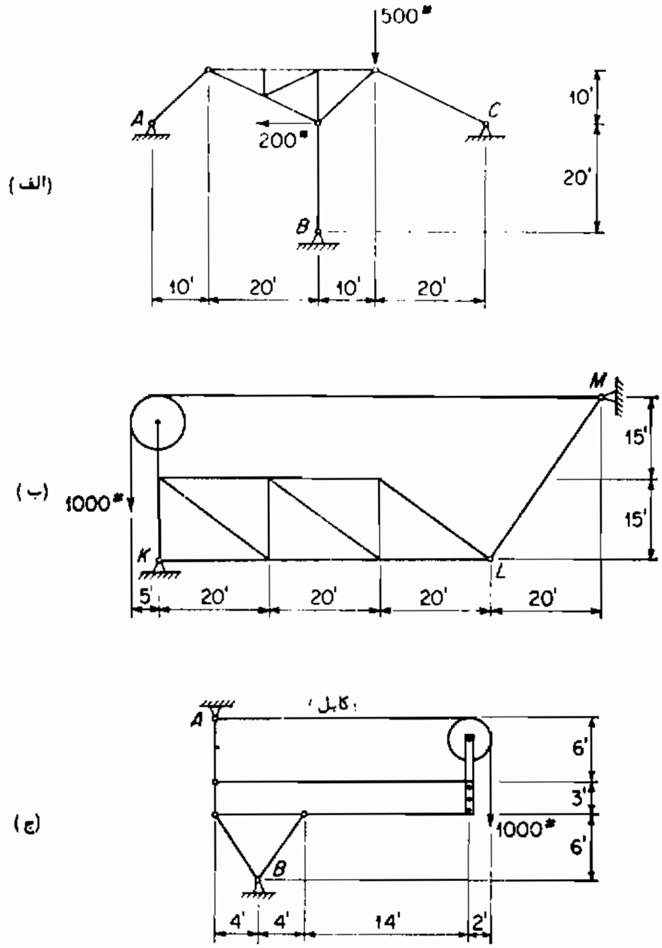
(الف)	$R_{ax} = 1.48$ kips	به‌طرف چپ	$R_{ay} = 71.03$ kips	به‌طرف بالا
	$R_{bx} = 25.48$ kips	به‌طرف چپ	$R_{by} = 50.97$ kips	به‌طرف بالا
(ب)	$R_{ax} = 56.0$ kips	به‌طرف چپ	$R_{ay} = 42.0$ kips	به‌طرف بالا
	$R_{bx} = 24.0$ kips	به‌طرف چپ	$R_{by} = 12.0$ kips	به‌طرف پائین
	$R_{ex} = 80.0$ kips	به‌طرف راست	$R_{ey} = 30.0$ kips	به‌طرف بالا
(ج)	$R_{ax} = 3.51$ kips	به‌طرف چپ	$R_{ay} = 4.39$ kips	به‌طرف بالا
	$R_{bx} = 14.07$ kips	به‌طرف چپ	$R_{by} = 17.59$ kips	به‌طرف پائین
	$R_{fx} = 32.42$ kips	به‌طرف چپ	$R_{fy} = 64.85$ kips	به‌طرف بالا
	$R_{gx} = 0$		$R_{gy} = 68.3$ kips	به‌طرف بالا
(د)	$R_{gx} = 26.6$ kips	به‌طرف چپ	$R_{cy} = 11.85$ kips	به‌طرف پائین
	$R_{dy} = 11.85$ kips	به‌طرف بالا		



شکل ۲ ــ ۱۲ مساله ۲ــ۳

۲ ــ ۴ گاهی قانع‌کردن دانشجویان به‌این‌که فقط تعداد معینی معادله مستقل وجود دارد مشکل است ، برای این‌که چنین مطلبی را نشان دهیم سازهٔ شکل (۲ــ۸) را در نظر بگیرید و برای آن سه پیکر آزاد که یکی کل سازه ، دیگری قسمت ab و سومی قسمت bc باشد نمایش دهید ، سه‌معادله تعادل استاتیکی را برای هر جسم آزاد بنویسید ، این نه معادله را که‌شش مجهول دارد با یکدیگر مقایسه وترکیب‌کند ونشان دهید که فقط چهار معادله مستقل باچهار مجهول وجود دارد .

۲ ــ ۵ عکس‌العملهای سازه‌های شکل (۲–۱۳) را معین کنید .



شکل ۲ ــ ۱۳ مسئله ۲ــ۵

۳

تلاش برشی ولنگر خمشی

۳ ـ ۱ کلیات

هدف نهایی از تحلیل تنش تعیین کارایی سازه برای تحمل بارهائی است که برای آن طرح‌شده است ، چنین هدفی با مقایسه تنشهای ایجادشده توسط بارهای وارده با تنشهای مجاز برای مصالح ساختمانی مورد استفاده تأمین می‌گردد . برای تعیین تنش موجود در هر مقطع دلخواه از سازه می‌توان با گذرانیدن برشی تصوری از آن مقطع ،قسمت مناسبی از سازه را به‌پیکرآزاد تبدیل‌کرد .اگر سایر نیروهای مؤثر براین قسمت از سازه قبلا" محاسبه شده باشند برآیند اثر تنشهای موجود درمقطع موردنظر را می‌توان به‌سادگی با استفاده از معادلات تعادل استاتیکی تعیین نمود .

یکی از متداولترین اجزای سازه‌ها که به‌این ترتیب مورد تحلیل قرار می‌گیرد تیرها می‌باشند ، تیرها قطعاتی هستند که تحت اثر خمش ناشی از بارهای عمود بر محور مار بر مراکز ثقل مقاطع آن و گاهی تحت اثربارهای موازی و عمود بر محور آن قرارمی‌گیرند . بحث زیرین مربوط به‌تیرهای مستقیم است یعنی تیرهائی‌که محور مار بر مراکز ثقل مقاطع آن خط مستقیمی است همچنین شکل مقطع آن به‌صورتی‌است که مرکز برش و مرکزثقل آن برهم‌منطبق است ،علاوه بر این فرض می‌شود که کلیه بارها و عکس‌العملها در صفحهٔ مار بر مراکز ثقل مقاطع قطعه و یکی از محورهای اصلی مقاطع قطعه واقع گردند با این شرایط تیر فقط در صفحهٔ بارگذاری و بدون پیچش خم خواهد شد .

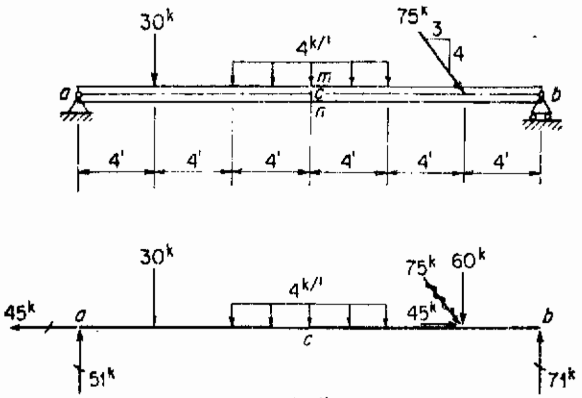
۳ ـ ۲ تعیین تنش در تیرها

فرض کنید که برای تعیین کارایی تیر معین شکل (۳ـ۱) محاسبه تنش در مقطع mn ضروری باشد عکس‌العملهای لازم‌برای حفظ تعادل‌استاتیکی را می‌توان به‌سادگی،طریقی‌که در پیکرآزاد قسمت a می‌بینیم محاسبه نمود و می‌توان تصور کرد که قسمتهای چپ و راست مقطع mn توسط برشی که از این مقطع می‌گذرد از یکدیگر جدا شده باشند در این‌صورت ترسیم پیکرآزاد این دو قسمت تیر با کلیه نیروهای مؤثر بر آنها ممکن می‌گردد .

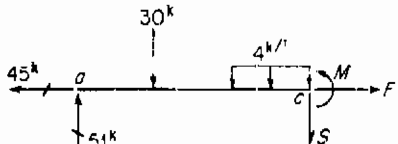
وقتی نیروهای مؤثر خارجی بر یکی از قسمت‌های b و c را مورد توجه قرار می‌دهیم بلافاصله

معلوم می‌شود که این قسمت‌ها نمی‌توانند فقط تحت اثر نیروهای خارجی در تعادل استاتیکی باشند ولی چون کل تیر در تعادل است لذا هرقسمتی از آن نیز باید در تعادل باشد لذا لازم است که نیروهای داخلی و یا تنشهای مؤثر بر سطوح داخلی نمایان شده توسط برش‌های تصوری وجود داشته باشند ، این تنشها باید دارای چنان مقادیری باشند که برآیند اثر آنان نیروهای خارجی مؤثر بر هر یکی از قسمتهای جداشده را در حالت تعادل استاتیکی نگهدارد .

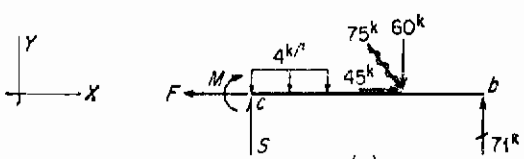
تنشهای مؤثر برمقطع داخلی‌را می‌توان به‌دومولفه تجزیه نمود یک مولفه عمود برسطح‌که بدان **تنشهای عمودی** و دیگری بموازات (مماس بر) سطح که به‌آن **تنشهای برشی** گویند .در پیکرآزاد قسمتهای b و c این تنشها با برآیند اثرشان که نیروهای S و F و لنگر M می‌باشند جایگزین‌شده‌اند ، این نیروها برمرکز ثقل مقطع اثر می‌کنند توجه شود که برآیند اثرهای F ، S و M مربوط به‌تنشهای مؤثر بر قسمت آزاد b از نظر عددی به‌ترتیب برابر با نظیرشان از قسمت آزاد c بوده‌ولی در خلاف جهت آنان خواهند بود .



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۳ــ۱ تنش در تیرها

پیکر آزاد a را که نشان‌دهنده کل تیر تحت اثر کلیه بارهای خارجی و عکس‌العملهاست درنظر بگیرید ، فرض کنید که برآیند اثر کلیه نیروهای مؤثر خارجی بر قسمت چپ برش mn را از نظرمقدار و جهت معین کرده باشیم ، بار دیگر فرض کنید که همین عملیات را برای نیروهای باقیمانده خارجی که بر قسمت راست‌برش mn اثرمی‌کنند نیزانجام داده باشیم ،حال اگر کل تیرتحت اثر کلیه‌نیروهای خارجی در تعادل باشد واضح است‌که برآیند نیروهای مؤثربرقسمت چپ برش mn بایدبا برآیند باقی نیروهای خارجی که برقسمت راست برش mn اثر می‌کنند روی یک خط و از نظر مقدار عددی برابر یکدیگر ولی از حیث جهت در خلاف هم باشند ، پس چنین نتیجه می‌شود که باید برآیند نیروهای خارجی در نمودار b از نظر عددی برابر با برآیند نیروهای خارجی در نمودار c بوده ولی از حیث جهت برخلاف آن باشد ، لذا برآیند اثر تنش باید در نمودارهای b و c همان روابط‌را داشته باشند .

تعیین مشخصات برآیند اثر تنشهای مؤثر بر مقطع قطعه در نمودارهای b و c یعنی F ، S و M امری ساده‌است ، نیروی محوری F که برمرکز ثقل مقطع اثر می‌کند را **نیروی‌مقاوم محوری** نیروی‌جانبی S را **تلاش مقاوم برشی** و لنگر M را **لنگر مقاوم** خواهیم نامید .

اگرقرارباشد سه معادله‌تعادل استاتیکی برای هریک ازقسمتهای تیر درنمودار b یا درنمودار c صدق کند مقدار F ، S و M بایدبه‌نحوی باشدکه با برآیند نیروهای مؤثرخارجی در هریک‌ازقسمتهای موردنظر مقابله نماید ،از جنبه نظری برای هردوقسمت‌موضوع یکی‌است لذا برای ساده‌کردن‌محاسبات عموماً" قسمتی را انتخاب می‌کنند که مقدار نیروهای خارجی آن کمتر باشد . تعادل استاتیکی را با مقادیری‌که به‌نحو زیر محاسبه می‌کنیم برقرار خواهیم کرد ،نیروی مقاوم محوری F و تلاش مقاوم‌برشی S باید به‌ترتیب از نظر عددی برابر با مولفه محوری و جانبی برآیند نیروهای خارجی مؤثربرقسمت موردنظر تیر باشند . با لنگرگیری حول محوری که از مرکز ثقل مقطع یعنی محل تلاقی نیروهای مقاوم F و S می‌گذرد معلوم می‌شود که لنگر مقاوم M باید از نظر عددی برابر با لنگر نیروهای خارجی‌موثر بر قسمت مورد نظر بوده ولی ازحیث جهت در خلاف آن باشد .

پس از آنکه‌نیروی مقاوم محوری و تلاش مقاوم برشی و لنگر مقاوم در هر مقطعی معلوم شد شدت تنش عمودی و تنش برشی در هرنقطه مقطع رامی‌توان بااستفاده ازمعادلات موجود در کتابهای‌درسی متعارف مقاومت مصالح تعیین نمود .

۳ ـ ۳ تعاریف برش و لنگر خمشی ، علامت‌گذاری

ازبحث قبلی معلوم می‌شود که اگر بخواهیم مقدار نیروی مقاوم محوری، تلاش مقاوم برشی‌ولنگر مقاوم مؤثر بر یک مقطع تیر را محاسبه کنیم بهتر است که ابتدا مقدار و موقعیت برآیند نیروهای خارجی مؤثر بر هرقسمت موردنظر از تیر را (که توسط برش مقطعی از یکدیگر جدا شده است)محاسبه نمائیم ، عموماً" ترجیح داده می‌شود که این مقدار را با مولفه‌های محوری ، جانبی (عمود بر محور) و لنگر آن حول محور مار بر مرکز ثقل مقطع مورد نظر نشان دهیم ، این سه از نظر استاتیکی معادل

برآیند موردنظر می‌باشند و به‌ترتیب به‌نامهای زیر خوانده می‌شود : نیروی محوری ، تلاش(یا نیروی) برشی و لنگر خمشی ، تعاریف این سه را می‌توان به‌شرح زیر خلاصه نمود .

نیروی محوری F : نیروی محوری در هرمقطع عرضی یک تیر مستقیم عبارتست ازجمع جبری مولفه‌های موازی محور تیر از کلیه بارها و عکس‌العملهای مؤثر بر یکی از دوقسمت تیر که در یکطرف مقطع مورد نظر واقع شده است .

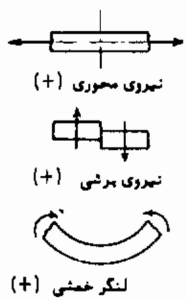
نیروی برشی (برش) S : نیروی برشی در هر مقطع عرضی یک تیر مستقیم عبارتست از جمع جبری مولفه‌های عمود بر محور تیر از کلیه بارها و عکس‌العملهای مؤثر بر یکی از دوقسمت تیر که در یک‌طرف مقطع موردنظر واقع شده‌اند .

لنگر خمشی M : لنگر خمشی در هر مقطع عرضی یک تیر مستقیم عبارتست از جمع جبری‌لنگر حول محور مار بر مرکز ثقل مقطع از کلیه بارها و عکس‌العملهای مؤثر بر یکی از دوقسمت تیر که در یک طرف مقطع موردنظر واقع شده‌اند البته محوری که حول آن لنگرگیری انجام می‌پذیرد عمود بر صفحه بارگذاری می‌باشد .

گرچه قصد مؤلفین یادآوری زیاده‌از حداصول سازه‌ها ، روابط و غیره‌نمی‌باشد ولی این‌تعاریف آنچنان به‌صورت مستمر وجود دارند و برای مهندسین سازه اساسی می‌باشند که مطالعه و فهم آنها باید به‌نحوی باشد که هرگز از ذهن آنان محو نگردد .

با این تعاریف اکنون می‌توان این بحث را چنین خلاصه نمود که نیروی مقاوم محوری که بر مقطع اثرمی‌کند برابر ولی در خلاف جهت نیروی محوری در آن مقطع خواهد بود و نیروی مقاوم برشی برابر ولی در خلاف جهت نیروی برشی(یا برش) و لنگر مقاوم برابر ولی‌درخلاف جهت‌لنگر خمشی در آن مقطع خواهد بود .

در محاسبات بعدی علائم قراردادی زیر برای نیروی محوری ، نیروی برشی و لنگر خمشی‌در مقاطع عرضی تیرها به‌کاربرده خواهد شد . کاربرد علائم قراردادی در مهندسی سازه امری متعارف است این علائم‌که به‌آنها علائم قراردادی تیرها گویند هم‌واضح است و هم کاربرد آنان امری‌ساده است . چنانکه در شکل (۳-۲) دیده می‌شود نیروی محوری زمانی مثبت است‌که‌تمایل به‌دورکردن دو قسمت از یک قطعه (توسط کشش)داشته باشد لذا تمایل بایجاد کشش در مقطع خواهدداشت ، نیروی



شکل (۳-۲) علائم قراردادی تیرها

برشی زمانی مثبت است که قسمت سمت چپ را نسبت به‌قسمت سمت راست به‌سمت بالا براند.لنگر خمشی زمانی مثبت است که تمایل به‌ایجاد کشش در تارهای تحتانی تیر و فشار در تارهای فوقانی داشته باشد به‌عبارتی دیگر قسمت فوقانی تیر را به‌شکل مقعر درآورد . ازآنجائی‌که اکثرتیرهاافقی هستند اجرای چنین علامت‌گذاری مبهم نخواهد بود .اگر قطعه‌ای افقی نباشد یکی از لبه‌های آن‌را به‌عنوان "لبهٔ تحتانی" انتخاب کرده و علائم قراردادی را متناسب با آن اعمال می‌کنیم .

۳ ــ ۴ روش محاسبه برش و لنگر خمشی

روش محاسبه نیروی محوری ، نیروی برشی و لنگر خمشی در مقطعی از تیر روشی ساده است و می‌توان آن‌را به‌سادگی بامساله شکل (۳ــ۳) توضیح داد ، در این مساله می‌خواهیم نیروی محوری ، نیروی برشی و لنگر خمشی را در مقاطع b ، c و d محاسبه کنیم ، محاسبه نیروی محوری ساده بوده و احتیاجی به‌توضیح ندارد و در اغلب تیرها نیز چنین است . اگر فرض کنیم که لنگر مؤثرتوسط دستکی به‌نقطه c در طول مقطع نقطه c اثر کند در این‌صورت تغییری ناگهانی در لنگر خمشی این نقطه وجود خواهد داشت و لذا لازم است که لنگر خمشی را در مقطعی به‌فاصله‌ی بینهایت‌کم‌ازاین نقطه و در طرف چپ نقطه c و سپس در مقطع به‌فاصله بی‌نهایت کم از آن و در طرف‌راست‌نقطه c تعیین کنیم .

بازهم یادآوری می‌کنیم که برش و لنگر خمشی در هر مقطعی را می‌توان با درنظرگرفتن کلیه نیروهای خارجی و عکس‌العملهای مؤثر بر هریک از قسمتهای طرفین مقطع نیز محاسبه نمود ،هر یک از قسمتهای طرفین مقطع تیررا می‌توان انتخاب کرد ولی معمولاً" می‌توان با انتخاب قطعه‌ایکه‌تعداد نیروهای مؤثر برآن کمتراست محاسبات را ساده‌تر نمود پس‌از انتخاب قسمت موردنظر فقط بارها و عکس‌العملهای مؤثر برآن قسمت در تعیین مولفه‌های نیرو یا لنگرها وارد می‌شوند .

قسمت سمت چپ تیر را برای محاسبه برش و لنگر خمشی در مقطع b و در مقاطع طرف‌راست و چپ نقطه c انتخاب کرده‌ایم ، نمایش‌آزاد b ، c و d ترتیب قسمتهای موردنظر در هرحالت را نشان می‌دهد برای این‌که مزایای‌انتخاب یک قسمت به‌جای دیگری‌را شرح دهیم ،برش و لنگرخمشی مقطع d را ابتدا با استفاده از قسمت سمت چپ و سپس با استفاده از قسمت سمت راست بترتیب با پیکر های‌آزاد e و f محاسبه‌کرده‌ایم .توجه شود که تا چه حد محاسبات نمودار(و) نسبت به‌نمودار (هـ) ساده‌تر می‌باشد .

برای این‌که روش متعارف‌محاسبات را توضیح دهیم به‌محاسبات مربوط‌به‌برش و لنگرخمشی‌در مقطع چپ مجاور نقطه c چنانچه‌درنمودار (ج)نشان‌داده شده است توجه کنید . نیروی برشی در این مقطع برابر است با جمع جبری عکس‌العمل برابر با 57-kip . کل بار گسترده برابر با 16 kips و بار متمرکز برابر با 30 kips که درآن عکس‌العمل سبب برش مثبت (قسمت چپ را بطرف بالامی‌راند) می‌شود و دوبار دیگر سبب برش منفی (قسمت چپ را بطرف پائین می‌رانند) می‌شوند . لذا مقدار نیروی برشی خواهد شد :

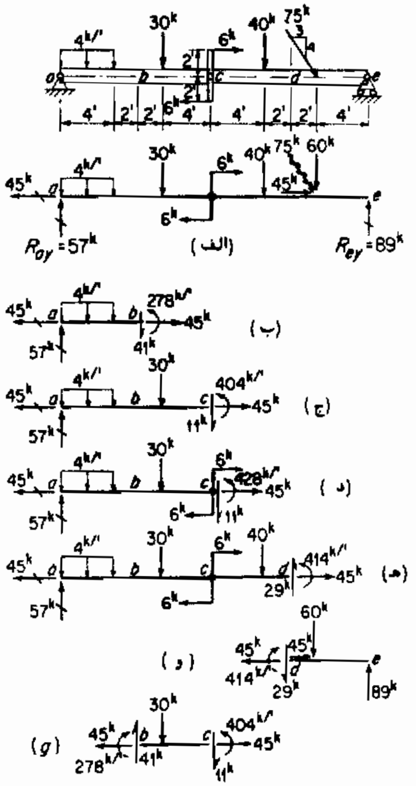
$$S = +57 - 16 - 30 = +11 \text{ kips}$$

چون علامت برآیند مثبت است پس تمایل به‌بالا راندن قسمت چپ نسبت به‌قسمت راست دارد . برای حفظ تعادل واضح است که نیروی مقاوم برشی بایستی دارای مقداری برابر با 11 kips بوده‌و در جهت پایین مقطع مزبور به‌نحوی‌که درنمودار (ج) می‌بینیم اثرکند ،به‌همین نحو لنگرخمشی برابر

نمودار الف :

$$\begin{array}{rcl} \Sigma M_e = 0, \curvearrowright + & & \\ (4 \times 4)(22) & = & -\ 352 \\ (30)(16) & = & -\ 480 \\ (40)(8) & = & -\ 320 \\ (60)(4) & = & -\ 240 \\ & & \overline{-1,392} \\ (6)(4) & = & +\ \ 24 \\ & & \overline{-1,368} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \Sigma M_a = 0, \curvearrowright + & & \\ (4 \times 4)(2) & = & +\ \ 32 \\ (30)(8) & = & 240 \\ (6)(4) & = & 24 \\ (40)(16) & = & 640 \\ (60)(20) & = & 1,200 \\ & & \overline{+2,136} \end{array}$$

$$\therefore R_{ay} = \frac{1,368}{24} = 57^k \Uparrow \qquad \therefore R_{ey} = \frac{2,136}{24} = 89^k \Uparrow$$



شکل ۳ ـ ۳ محاسبه نیروهای محوری نیروی برشی و لنگر خمشی

وارسی :

$$\Sigma F_y = 0, \uparrow +$$
$$57 + 89 - 16 - 30 - 40 - 60 = 0 \quad O.K.$$

نمودار ب :

$$S = 57 - (4)(4) = +41^k$$
$$M = (57)(6) - (16)(4) = +278^{k'}$$

نمودار ج :

طرف چپ نقطه c .

$$S = 57 - 16 - 30 = +11^k$$
$$M = (57)(12) - (16)(10) - (30)(4) = +404^{k'}$$

نمودار د :

طرف راست نقطه c .

$$S = 57 - 16 - 30 = +11^k$$
$$M = (57)(12) - (16)(10) - (30)(4) + 24 = +428^{k'}$$

نمودار هـ:

$$S = 57 - 16 - 30 - 40 = -29^k$$
$$M = (57)(18) - (16)(16) - (30)(10) - (40)(2) + 24 = +414^{k'}$$

نمودار و :

$$S = -89 + 60 = -29^k$$
$$M = (89)(6) - (60)(2) = +414^{k'}$$

نمودار ز:

$$S = 41 - 30 = +11^k$$
$$M = 278 + (41)(6) - (30)(4) = +404^{k'}$$

است با جمع جبری لنگرهای سه‌نیروی فوق‌الذکر حول مرکز ثقل سطح مقطع موردنظر ، از آنجائی‌که عکس‌العمل ایجادتنش کششی در تارتحتانی مقطع و دوبار دیگر ایجادکشش در بار فوقانی می‌نمایند لذا مقدار لنگر خمشی برابر خواهد شد با :

$$M = (57)(12) - (16)(10) - (30)(4) = +404 \text{ kip-ft}$$

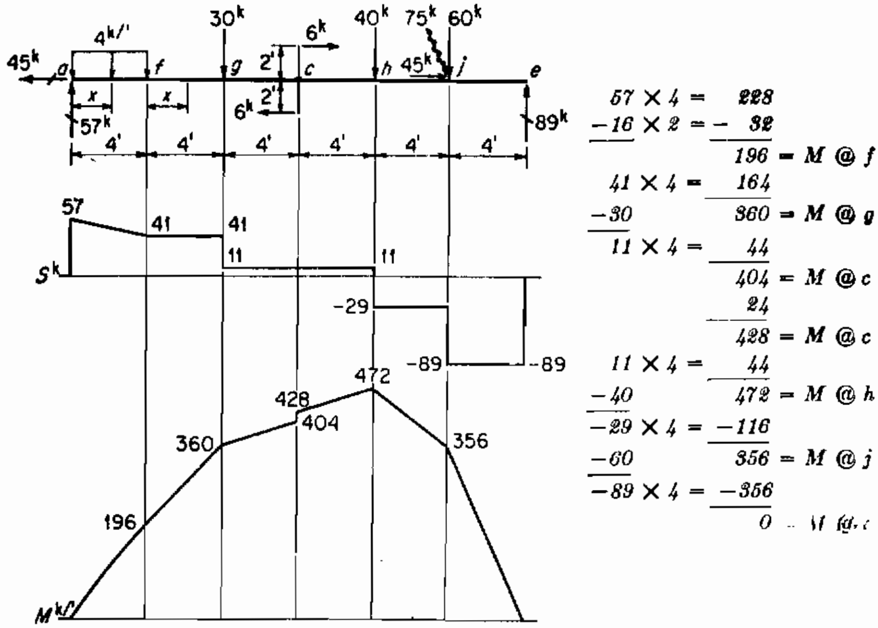
چون جواب مثبت است لذا در تار تحتانی‌ایجاد کشش خواهد شد ،باز نظیرقبل برای این که‌تعادل برقرار باشد لازم است که لنگر مقاوم از نظر مقدار برابر با 404 kip-ft بوده و در جهت مخالف ساعتگرد چنانچه در نمودار (ج) می‌بینیم بر مقطع اثر کند . بقیه محاسبات در خود توضیحات لازم را دارد .

ذکر این نکته مهم است که اگر نیروی محوری ، تلاش و لنگر خمشی در مقطعی‌معلوم شده‌باشند می‌توان مقادیر آنها را در هر مقطع دیگری با استفاده ازمقادیر مشخص آنها در مقطع‌معلوم به‌دست آورد بدون آنکه کلیه نیروهای خارجی مؤثر بر کل قسمتهای تیر در دوطرف مقطع موردنظر در در محاسبات وارد شوند . به‌عنوان مثال نیروی محوری ، برش و لنگر خمشی در مقطع c را می‌توان‌با استفاده‌از مقادیرآنها که قبلاً برای مقطع b محاسبه شده است به‌دست آورد .دلیل چنین‌عملکردی واضح است زیرا که برش ، نیروی محوری و لنگر خمشی در b از نظر استاتیکی معادل برآیندنیروهای خارجی مؤثر برقسمت چپ b می‌باشند ،زیرا که بجای این نیروها درتعیین برآیند اثرکلیه‌نیروهای مؤثر بر قسمت چپ c می‌توان معادل استاتیکی آنها را به‌جای خودشان قرار داد . مزایای چنین جایگزینی وقتی مشهود است که تعداد نیروهای خارجی مؤثر بر قسمت چپ b زیاد باشد ، چنین محاسباتی درنمودار (ز) شکل (۳ــ۳) نشان داده شده است که در آن نیروهای مؤثر برقسمت‌جدا شده bc نیز مشخص شده است .

۳ ــ ۵ نمودارهای برش و لنگر خمشی

وقتی تیری تحت اثر دستگاه بارهای ساکن بررسی می‌شود اگر نمودارهایی داشته باشیم که از طریق آنها بتوانیم مقادیر برش و لنگر خمشی را در کلیه مقاطع به‌راحتی معین کنیم بررسی سهلتر خواهد شد . چنین‌نمودارهایی را می‌توان با رسم خط اصلی آن که نشان‌دهنده محور نیز می‌باشد شروع نمود و سپس با مشخص نمودن عرض نقاط نظیر مقاطع مختلف تیر که در طول این خط تعیین می‌شوند و بیانگر مقداربرش و لنگر خمشی به‌صورت‌عرض نقاط ازخط اصلی به‌طرف بالا و مقادیرمنفی با عرض نقاط به‌طرف پائین آن تعیین می‌شوند . نموداری که انتهای چنین عرض نقاطی را در طول خط اصلی بهم متصل می‌کند نمودارهای برش و یا لنگر خمشی گفته می‌شود . در شکل (۳ــ۴) برای تیر شکل (۳ــ۳)منحنی‌های برش و لنگر خمشی نشان داده شده است .

رسم این نمودارها ساده است ولی نیاز به‌توضیح دارد ، برش در مقطعی به‌فاصله بی‌نهایت‌کم از طرف راست نقطه a برابر 57 kips+ می‌باشد بنابراین در این نقطه مقدار برش از صفر ناگهان



شکل ۳ ــ ۴ نمودار برش و لنگر خمشی

به‌مقدار 57+ می‌رسد در فاصله af مقدار برش در مقطعی به‌فاصله x از نقطه a از رابطه زیر به‌دست می‌آید :

$$S = 57 - 4x$$

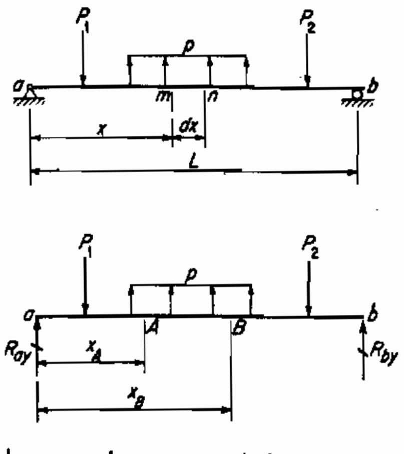
این رابطه نشان می‌دهد که نمودار برش در این فاصله یک خط مستقیم است که مقدار 57+ در a به 41+ در نقطه f به‌تدریج کم می‌شود ، چون در حدفاصل f و g هیچ بار خارجی اضافی اثر نمی‌کند مقدار برش در هر مقطع از این فاصله برابر با 41+ باقی می‌ماند لذا منحنی برش در این فاصله چنانکه دیده می‌شود خطی افقی خواهد بود . درفاصله بی‌نهایت کم از نقطه g به‌طرف چپ مقدار برش 41+ می‌باشد ولی در فاصله بی‌نهایت کمی از نقطه g به‌طرف راست بار 30-kip سبب می‌شود که برش بیشتر از پیش نقصان یافته و به‌مقدار 11+ برسد ، بنابراین در نقطه g یک تغییر ناگهانی در منحنی برش اتفاق می‌افتد و مقدار آن‌را از 41+ به 11+ می‌رساند ، به‌همین ترتیب بقیه نمودار برش‌را به‌سادگی می‌توان بررسی نمود ، باید دقت شود که چون فرض می‌شود ، بار متمرکز بریک نقطه اثر می‌کند لذا در آن نقطه عرض منحنی برش ناگهان به‌میزانی برابر با مقدار بار تغییر می‌کند . از نظر فیزیکی اثر یک بار بر یک نقطهٔ هندسی بدون ایجاد سطح تماسی با فشار بی‌نهایت غیرممکن است به این جهت لازم است چنین بارهایی در سطح بسیار کوچکی گسترده شوند ، در هر صورت در محاسباتی نظیر آنچه برای برش و لنگر خمشی انجام می‌گیرد چنین ناسازگاریهایی نادیده گرفته می‌شود و فرض

می‌شود که از نظر ریاضی امکان اثر بارهای متمرکز بر یک نقطه ممکن باشد .

در فاصله af لنگر خمشی در مقطعی به‌فاصله x از نقطه a برابر است با $M = 57x - 2x^2$ لذا نمودار لنگرخمشی ازمقدار صفر در نقطه a درطول یک منحنی ازدیادیافته تا به‌عرضی برابر با $196+$ در نقطه f برسد ، در قسمت fg مقدار لنگر خمشی در هر مقطی به‌فاصله x از نقطه f برابر است با $M = 196 + 41x$ بنابراین در این حدفاصل منحنی لنگر خمشی خط مستقیمی خواهد بودکه‌ازعرضی برابر با 196 در f بعرضی برابر با 360 در g ترقی خواهد یافت ، به‌همین ترتیب درفاصله gc نمودار لنگر خمشی خط راستی است که به‌مقدار 404 در مقطعی به‌فاصله بی‌نهایت کم از طرف چپ نقطه c افزایش می‌یابد ، در مقطعی به‌فاصله بی‌نهایت کم از طرف راست نقطه c لنگر خمشی‌به‌مقداری‌برابر با 24 افزایش یافته و به 428 می‌رسد . با فرض این‌که لنگر خارجی که برابر 24 kip-ft می‌باشد دقیقاً در مقطع نقطه c اثرکند در این مقطع تغییری ناگهانی در نمودار لنگـر خمشی مانند تغییر ناگهانـی در نمودار برش که در سطور قبل بحث شد اتفاق می‌افتد . به‌طریقی مشابه بقیه نمودار لنگرخمشی را می‌توان به‌سادگی بررسی نمود محاسبات مربوط به‌وارسی عرضهای نمودار در شکل (۳–۴)نشان‌داده شده است .

۳ ـ ۶ روابط موجود بین بار ، برش و لنگر خمشی

در حالاتی که تیری تحت اثر بار عرضی قرار دارد ، رسم نمودارهای برش و لنگر خمشی را می‌توان با شناختن برخی روابط موجود بین بار ، برش و لنگر خمشی تسهیل نمود . به‌عنوان مثال تیرنشان داده شده در شکل (۳–۵)را در نظر بگیرید فرض کنید که برش S و لنگر خمشی M را برای مقطع نقطه m محاسبه کرده‌ایم نقطه m به‌فاصله x واقع شده است که این فاصله از نقطه



شکل ۳ ـ ۵ روابط موجود بین بار ، برش و لنگر

a اندازه گرفته می‌شود و زمانی مثبت است که به‌سمت راست نقطه a باشد ،حال فرض کنید که برش

و لنگر خمشی را برای مقطع نقطه n که به‌فاصله دیفرانسیلی dx در سمت راست m قرارگرفته‌است‌نیز محاسبه شود . فرض نمائید که در حد فاصل بین m و n بارگسترده در جهت بالا وبه‌شدت p برواحد طول تیر اثرکند مقداربرش لنگرخمشی به‌میزانی دیفرانسیلی افزایش‌یافته و به‌ترتیب برابربا $S + dS$ و $M + dM$ خواهد شد .

مقادیرجدیدبرش و لنگرخمشی در نقطه n را می‌توان بااستفاده از مقادیری که قبلا" برای‌نقطه m محاسبه شده است به‌طریقی که در بخش (۳-۴) ذکر شد محاسبه‌نمود . بنابراین خواهیم داشت .

$$S + dS = S + p\,dx \qquad \text{(الف)}$$

$$M + dM = M + S\,dx + p\,dx\,\frac{dx}{2} \qquad \text{(ب)}$$

از رابطه (الف) واضح است که :

$$dS = p\,dx \quad \therefore \quad \frac{dS}{dx} = p \qquad \text{(ج)}$$

و با صرفنظرنمودن از مقادیر دیفرانسیلی درجه دوم از رابطه (ب) می‌توان دریافت که :

$$\frac{dM}{dx} = S \qquad \text{(د)}$$

مخصوصا" باید توجه شودکه علاوه بر علائم قراردادی تیرها که برای برش و لنگرخمشی است ،جهت بار به‌شرطی که به‌طرف بار باشد مثبت فرض شده است و مقدار x از طرف چپ به‌طرف راست افزایش یافته است .

روابطی که به‌صورت معادلات ریاضی (ج) و (د) بیان شد بطرز آشکاری در رسم نمودارهای برش و لنگر خمشی مفید واقع می‌شوند .ابتدا معادله (ج) را درنظر می‌گیریم .این معادله‌بیان می‌کند که میزان تغییر برش در هرنقطه‌ای برابر شدت بار مؤثر بر تیر در آن نقطه است به‌عبارت‌دیگرشیب نمودار برش در هرنقطه‌ای برابر است با شدت بار مؤثر بر تیر در آن نقطه تغییر برش (یعنی) dS بین دو مقطع به‌فاصله دیفرانسیلی dx از یکدیگر خواهد شد :

$$dS = \frac{dS}{dx}\,dx = p\,dx$$

بنابراین تغییر در برش دو مقطع A و B به‌قرار زیر خواهد شد .

$$S_B - S_A = \int_{x_A}^{x_B} p\,dx \quad \therefore \quad S_B = S_A + \int_{x_A}^{x_B} p\,dx$$

به‌این ترتیب اختلاف بین عرض منحنی برش در B و A با کل بار مؤثر بر تیر در فاصله بین این دو

نقطه برابر است .

بر طبق معادله (ج) و قرارداد علامتی که در مشتق‌گیری به‌کار بردیم اگر درنقطه‌ای از تیرباری به‌سمت بالا به‌عبارت دیگر به‌صورت مثبت اثر کند میزان تغییر برش در آن نقطه مثبت خواهد بود . این به‌این معنی است که اگربخواهیم مقدار برش را در مقطعی به‌فاصله بسیار کم در طرف راست‌این نقطه و به‌عبارت دیگر در فاصله‌ای کمی بیشتراز x از تکیه‌گاه سمت چپ محاسبه کنیم مقدار برش نسبت به‌نقطه‌نخست میل به‌ازدیاد مقدار مثبت خود و یا از نظر جبری میل به‌ازدیاد مقدارمی‌نماید. بدیهی است که اگر بار وارده در جهت روبه‌پائین اثر کند عکس مطلب فوق صحت خواهد داشت ، اگر این مطلب را برحسب تعاریف شیب منحنی برش بیان کنیم و در این بیان قراردادعلامت‌گذاری متعارف محاسبات شیب را در نظر بگیریم در صورتی‌که dS/dx مثبت باشد شیب نمودار به‌سمت‌بالای طرف راست خواهد بود ، یعنی با ازدیاد مقدار x مقادیر مثبت S به‌تدریج عرض بیشتری خواهند داشت و اگر dS/dx منفی باشد شیب نمودار به‌سمت پائین و سمت راست خواهد بود .

برای فهم بیشتر اگر به‌قسمتی از یک تیر بارگسترده یکنواختی اثر کند . مقدار p ثابت بوده و بنابراین مقدار برش در آن قسمت از تیر به‌میزان ثابتی تغییر خواهد کرد و لذا نمودار برش خط شیب‌دار مستقیمی خواهد بود ولی اگر بار مؤثر باری گسترده ولی با شدت متغیر باشدنموداربرش به‌صورت منحنی بوده که شیب آن متناسب بار مؤثر تغییر خواهد کرد و اگر در بین دونقطه ازتیری باری اثر نکند میزان تغییر برش صفر بوده و به‌عبارتی دیگر مقدار برش ثابت خواهد ماند و منحنی برش در آن قسمت خط مستقیمی به‌موازات خط‌اصلی تیر خواهد بود . در نقطه‌ای که باری متمرکز بر تیر اثر می‌کند شدت بارگذاری بی‌نهایت‌بوده و لذا شیب نمودار برش نیزبی‌نهایت شده وباعمودی می‌شود . در چنین نقطه‌ای نمودار برش ناپیوسته بوده و اختلاف بین عرضهای منحنی در دو طرف بار متمرکز برابر با مقدار بار متمرکز خواهد بود ، دیده می‌شود که مطالب فوق با آنکه در بند قبل ذکر شد تطابق دارد .

معادله (د) را نیز می‌توان به‌همین طریق بررسی نمود. برحسب این معادله میزان تغییر لنگر خمشی در هرنقطه از تیر برابر با مقدار برش در آن نقطه می‌باشد به‌عبارتی دیگر شیب نمودار لنگر خمشی در هرنقطه‌ای برابر با عرض نمودار برش در آن نقطه می‌شود ، مقدار تغییر لنگر خمشی dM بین دو مقطع به‌فاصله دیفرانسیلی dx از یکدیگر برابر خواهد شد با :

$$dM = \frac{dM}{dx}\, dx = S\, dx$$

لذا اختلاف بین لنگر خمشی دو مقطع A و B برابر با مقدار زیر خواهد شد :

$$\int_{M_A}^{M_B} dM = M_B - M_A = \int_{x_A}^{x_B} S\, dx \qquad \therefore M_B = M_A + \int_{x_A}^{x_B} S\, dx$$

یعنی اختلاف بین عرض‌های نمودار لنگر خمشی در نقاط A و B برابر است با سطح بین دو نقطه در منحنی برش .

از معادله (د) چنین پیداست که اگر برش در نقطه‌ای مثبت باشد میزان تغییرلنگرخمشی

درآن نقطه نیزمثبت است .این‌بدان معنی‌است که اگرمقدار لنگر خمشی را در مقطعی به‌فاصله بسیار نزدیک طرف راست نقطه و یا به‌عبارتی دیگر به‌فاصله‌کمی بیشتراز x از تکیه‌گاه چپ محاسبه کنیم مقدار آن تمایل بازدیاد مقدارمثبت خود و به‌عبارتی ازنظر جبری تمایل به‌ازدیادمقدارنسبت به‌نقطه نخست خواهد داشت . اگر برش منفی باشد عکس مطلب فوق صحیح خواهد بود . برحسب شیب نمودار لنگر خمشی می‌توان گفت که اگرمقدار dM/dx مثبت (یا منفی) باشد شیب نمودار لنگر خمشی در این نقطه به‌طرف بالا (یا به‌طرف پائین) و به‌سمت راست خواهد شد و به‌این ترتیب با افزایش مقدار x در جهت از چپ براست مقدار مثبت M در سمت بالا درج می‌گردد .

اگر مقداربرش در قسمتی‌از تیر ثابت باشد نمودارلنگر خمشی درآن قسمت خط مستقیمی‌خواهد بود . و اگر مقدار برش در حد فاصلی به‌نحوی تغییر کند نمودار لنگر خمشی منحنی شکل خواهدشد. در نقطه‌ای که به‌آن باری متمرکز اثر کند در آن نقطه منحنی برش تغییر ناگهانی کرده و بدان‌جهت در شیب نمودار لنگر خمشی نیز در همان نقطه تغییری ناگهانی اتفاق خواهد افتاد ، در نقطه‌ای که نمودار برش مقدار صفر پیدا می‌کند اگر عرض منحنی در طرف چپ آن نقطه مثبت بوده و در طرف راست منفی باشد شیب نمودار لنگر خمشی از مقدار مثبت در طرف چپ به‌مقدار منفی درطرف‌راست آن نقطه تغییر خواهد یافت . لذا عرض نمودار لنگر خمشی در آن نقطه به‌مقدار حداکثر خودخواهد رسید و از طرف دیگر اگر مقدار برش در نقطه‌ای صفر شود عرض نمودار لنگر خمشی درآن‌نقطه مقدار حداقل پیدا خواهد کرد .

۳ ــ ۷ رسم نمودارهای برش و لنگر خمشی

ازآنچه در بخش (۳ــ۶) گفته شد می‌توان به‌نحو مفیدی در رسم منحنیهای‌برش‌ولنگرخمشی تیرها تحت اثر بارهای عرضی به‌کار برد . برای این منظور می‌توان از روش زیر سود جست :

پس‌از محاسبه عکس‌العملهای تیر ابتدا نمودار بار را رسم کنید نمودار بار عبارتست از یک منحنی که عرض‌آن در هرنقطه نشان‌دهندهٔ شدت بار گسترده درآن نقطه است ، ابتدا علاوه‌برآن بارهای متمرکز را نیز باید نشان داد . بارهای در جهت بالا که بارهای مثبت می‌باشند را باید در بالای خط اصلی نشان داده و بارهای منفی را در پائین آن نشان داد ، سپس می‌توان با به‌کاربردن اصول زیر که چکیده‌ای از مطالب قبل است به‌رسم نمودارهای برش و لنگر خمشی به‌شرط شروع وادامه عملیات از طرف چپ به‌راست پرداخت تا به‌تدریج آن نمودارها شکل گیرند :

۱ ــ شیب نمودار برش در هر نقطه برابر شدت بار گسترده درآن نقطه‌ای باشد .

۲ ــ تغییر ناگهانی در عرض نمودار برش در نقاط اثر بارهای متمرکز اتفاق خواهد افتاد .

۳ ــ شیب نمودار لنگر خمشی در هر نقطه‌ای برابر است با عرض نمودار برش درآن نقطه .

۴ ــ درنقاطی که بارمتمرکز اثرمی‌کنند تغییری ناگهانی درعرض نمودار برش و تغییری‌ناگهانی در شیب نمودار لنگر خمشی اتفاق خواهد افتاد .

معمولا" محاسبه مقدارعددی عرض نمودارهای برش و لنگرخمشی فقط در نقاطی‌که‌شکل‌نمودارها

تغییر پیدا می‌کند و یا در نقاطی که نمودارها به‌مقدار حداکثر یا حداقل خود میرسند لازم می‌شود . چنین مقادیری را عموما" می‌توان به‌سادگی با محاسبه مستقیم ، چنانچه در شکل (۳-۳) نشان داده شده است به‌دست آورد و چنان محاسباتی را می‌توان به‌شرط‌آن‌که یک عرض از نمودار معلوم باشد بر طبق اصول زیر وارسی نمود :

۵ ــ اختلاف بین عرضهای نمودار برش در دونقطه برابر است با جمع کل بارهای مؤثر برتیر در فاصله این دونقطه به‌عبارتی دیگر برابر است با سطح زیر منحنی بار بین این دو نقطه به‌اضافه بارهای متمرکز در این حد فاصل .

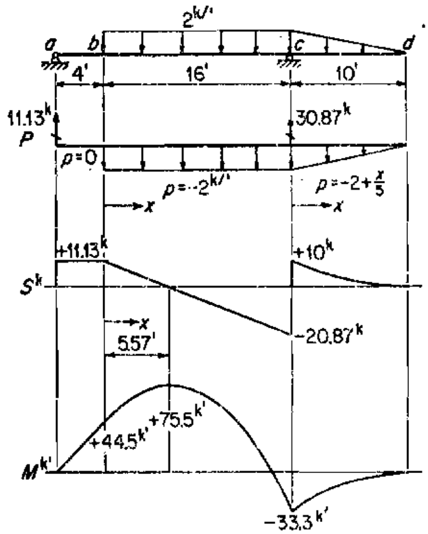
۶ ــ اختلاف بین عرضهای نمودار لنگر خمشی در دو نقطه برابر است با سطح زیر نمودار برش بین این دونقطه . این روش با رسم نمودارهای برش و لنگر خمشی در مثالهای زیرین تشریح خواهد شد .

گرچه‌کلیه این روابط و این بحثها مخصوص حالت‌تیری با بارهای‌عرضی‌است ولی نباید‌چنین استنتاج کردکه آنهارا نمی‌توان درتحلیل تیری تحت شرایط‌بارگذاری کلی به‌کارگرفت ،در مثالهایی که بعدا"آورده می‌شود روش رفتار با چنین حالاتی تشریح خواهد شد . در حالاتی‌که بارگذاری‌تیرها صرفا" محدود به‌بارگذاری عرضی تیر نباشد ، دیده می‌شود که منحنی بار فایده خود را از دست می‌دهد و تبدیل به‌چیزی غیرعملی می‌گردد . در حالی‌که برخی از روابط‌فوق بخاطرمزیتی‌که‌دارند به‌کار برده می‌شوند خواهیم دید که در بسیاری از حالات پیچیده بارگذاری تجدید نظر در آنها الزامی است ، برای روشن‌شدن مطلب چنانکه در مثال (۳-۵) دیده خواهد شد تغییری ناگهانی‌در عرض نمودارهای لنگر خمشی در نقاطی که به‌تیر لنگری خارجی اثر می‌کند ایجاد می‌شود ،بنابراین اختلاف بین عرضهای نمودار لنگر خمشی بین دونقطه برابر خواهد شد با سطح زیر نمودار برش‌در حد فاصل این دو نقطه به‌اضافه یا منهای مقدارلنگر خارجی که در آن قسمت از تیر به‌آن‌اثرمی‌کند. در هرصورت دانشجویان درک خواهند کرد تجربه‌ای‌که بر اثر رسم نمودارهای برش و لنگرخمشی‌در حالات ساده بارگذاری عرضی تیرها به‌دست می‌آورند آنان را قادر می‌سازد که در صورت برخوردبا مسائلی پیچیده‌تر با کمی کوشش از عهده آن برآیند .

۳ ــ ۸ مثالهای عددی ــ تیرهای معین

درمثالهای زیر با استفاده از نظریات و اصول ارائه‌شده به‌رسم نمودارهای برش و لنگر خمشی در تیرهای معین با شرح لازم پرداخته خواهد شد .

مثال ۳ ــ ۱=



$$\Sigma M_c = 0, \curvearrowright +$$

$$-(2)(16)(8) = -256$$

$$+(2)(10/2)(10/3) = \underline{+33.3}$$

$$-222.6$$

$$\therefore R_{ay} = \underline{11.13^k} \uparrow$$

$$\Sigma M_a = 0, \curvearrowright +$$

$$(2)(16)(12) = +384$$

$$(2)(10/2)(23.3) = \underline{+233.3}$$

$$+617.3$$

$$\therefore R_{cy} = \underline{30.87^k} \uparrow$$

$$\Sigma F_y = 0, \uparrow +,$$

$$11.13 + 30.87 - 32 - 10 = 0 \qquad \therefore O.K.$$

برش:

$$S_c(left) = 11.13 - (2)(16) = \underline{-20.87^k}$$

موقعیت نقطه $S = 0$ بین b و c لنگر خمشی:

$$S_x = 11.13 - 2x = 0 \qquad \therefore x = \underline{5.57'}$$

لنگر خمشی:

$$M_b = +(11.13)(4) = \underline{+44.52^{k'}}$$

$$M_c = -\frac{(2)(10)}{2}\left(\frac{10}{3}\right) = \underline{-33.3^{k'}}$$

بین b و c

$$M_{max} = (11.13)(9.57) - \frac{(2)(5.57)^2}{2}$$

$$= \underline{+75.48^{k'}}$$

بحث:

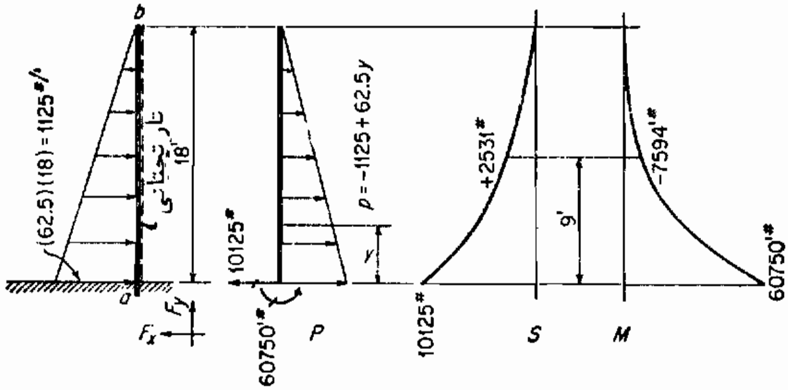
در ایجاد شکل نمودارهای برش و لنگرخمشی مطالب بخش (۳-۷) دنبال می‌شود. اگرازانتهای چپ منحنی برش شروع کنیم، مقدار برش ناگهان به‌مقدار $+11.13$ افزایش می‌یابد از a تا b چون $p = 0$ است نمودار برش افقی است، از b تا c چون $p = -2$ است نمودار برش با شیبی ثابت به‌سمت پائین و راست به‌نحوی‌که مقدار برش درست در طرف چپ نقطه c به‌مقدار -20.87 تغییر می‌کند، در c وجود عکس‌العمل سبب ازدیاد ناگهانی عرض نمودار برش به‌مقدار $+10$ درست‌درطرف راست نقطه c می‌شود، از c تا d چون $p = -2 + (x/5)$ است نمودار برش به‌طرف پائین و راست شیب پیدا می‌کند شیب آن به‌طور خطی از -2 در c تا 0 در d تغییر می‌کند.

به‌همین طریق نمودار لنگرخمشی در a ازمقدار 0 شروع شده و از a تا b با شیبی ثابت‌ازدیاد پیدا می‌کند (به‌طرف پائین و به‌راست). از b به‌بعد شیب منحنی به‌طور خطی از مقداری برابر با $+11.13$ در b به‌مقدار صفر در نقطه لنگر حداکثر و بالاخره به‌مقدار -20.87 در c تقلیل پیدا می‌کند تغییری ناگهانی در مقدار شیب در نقطه c وجود دارد که مقدار آن‌را به $+10$ درست طرف راست c

می‌رساند . بین c و d مقدار شیب از $10+$ تا 0 در d تقلیل پیدا می‌کند .

وارسی عددی مقادیر عرضهای برش و لنگر خمشی را می‌توان با راحتی تمام توسط محاسبات مستقیمی به‌طریق ذکر شده در بخش (۳–۴) انجام داد .

مثال ۳–۲=



$$\Sigma F_x = 0,\ \overset{\leftarrow}{+},\ R_{ax} - (1{,}125)(18/2) = 0 \qquad R_{ax} = \underline{10{,}125^{\#}}$$
$$\Sigma M_a = 0,\ \overset{\curvearrowleft}{+},\ (1{,}125)(18/2)(6) - M_a - 0 \qquad M_a = 60{,}750'^{\#}$$

برش و لنگر خمشی در $y = 9'$

$$p = -1{,}125 + (62.5)(9) = -1{,}125 + 562.5 = -562.2^{\#/'}$$
$$S = +(562.5)(9/2) = +2{,}531.3^{\#}$$
$$M = -(562.5)(9/2)(3) = -7{,}593.8'^{\#}$$

بحث :

پس از محاسبه عکس‌العمل‌ها نمودارهای بار ،برش و لنگر خمشی را می‌توان رسم کرد ، تارکنار راست تیر تره را در تعیین علائم قرادادی به‌عنوان تار تحتانی فرض می‌کنیم ، بنابراین بارگسترده با شدت متغیر یکنواخت را می‌توان در ترسیم منحنی بار به‌سمت پائین یا منفی فرض کرد .

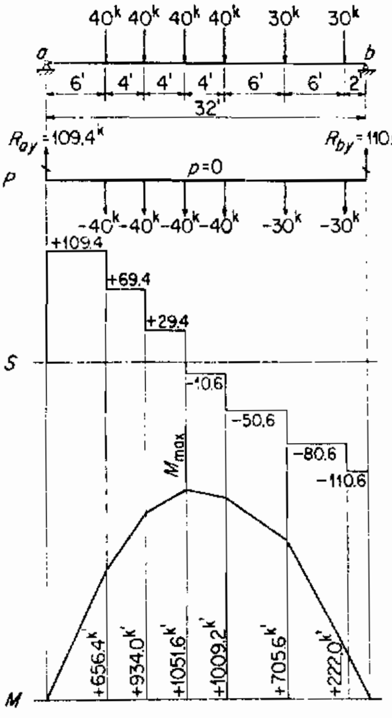
نمودار برش به‌طورناگهانی در a به‌مقدار $+10{,}125$ افزایش می‌یابد . با پیشروی به‌سوی b نمودار برشی با شیبی منفی برابر با $1{,}125$ به‌سمت پائین شروع می‌شود و به‌تدریج به‌شیب صفر و عرض صفر در b تقلیل می‌یابد .

ازطرف دیگرنمودار لنگرخمشی ازعرضی برابربا $-60{,}750$ در a با شیبی مثبت‌برابر با $+10{,}125$ شروع می‌شود با پیشروی به‌سوی b مقدار شیب مثبت باقی می‌ماند ولی به‌طور مداوم‌تا b که هم‌شیب

و هم عرض نمودار لنگر خمشی صفر می‌شود تقلیل می‌یابد .

پس از رسم شکل این نمودارها عرض میانی از نمودار برش یا لنگر خمشی از نظیر نقطه‌ای به $y = 9$ را می‌توان به‌سادگی با محاسبه مستقیم به‌دست آورد . در این محاسبه می‌توان قسمتی از تیر را که بین نقطه موردنظر و b قرار دارد در نظر گرفت .

مثال ۳ـ۳:



$\Sigma M_b = 0,\ \overset{\frown}{+}$

$30 \times 2 = 60$
$30 \times 8 = 240$
$40 \times 14 = 560$
$40 \times 18 = 720$
$40 \times 22 = 880$
$40 \times 26 = \underline{1{,}040}$
$\overline{220} \qquad 3{,}500$

$\therefore\ R_{ay} = \underline{109.37^k} \updownarrow$

$\Sigma M_a = 0,\ \overset{\frown}{+}$

$30 \times 30 = 900$
$30 \times 24 = 720$
$40 \times 18 = 720$
$40 \times 14 = 560$
$40 \times 10 = 400$
$40 \times 6 = \underline{240}$
$3{,}540$

$\therefore\ R_{by} = \underline{110.63^k} \updownarrow$

$\Sigma F_y = 0,\ \underset{+}{\uparrow},\ 109.37 + 110.63 - 220 = 0$

$\therefore$ O.K.

$S = 109.4 \times 6 = \underline{656.4}$
$\quad -40 \qquad 656.4 = M_6$
$S = 69.4 \times 4 = \underline{+277.6}$
$\quad -40 \qquad 934.0 = M_{10}$
$S = 29.4 \times 4 = \underline{+117.6}$
$\quad -40 \qquad 1{,}051.6 = M_{14}$
$S = -10.6 \times 4 = \underline{-42.4}$
$\quad -40 \qquad 1{,}009.2 = M_{18}$
$S = -50.6 \times 6 = \underline{-303.6}$
$\quad -30 \qquad 705.6 = M_{24}$
$S = -80.6 \times 6 = \underline{-483.6}$
$\quad -30 \qquad 222.0 = M_{30}$
$S = -110.6 \times 2 = \underline{-221.2}$
$\quad \underline{+110.6} \qquad \cancel{0.8} = M_{32}$
$\quad 0 \qquad\qquad 0$

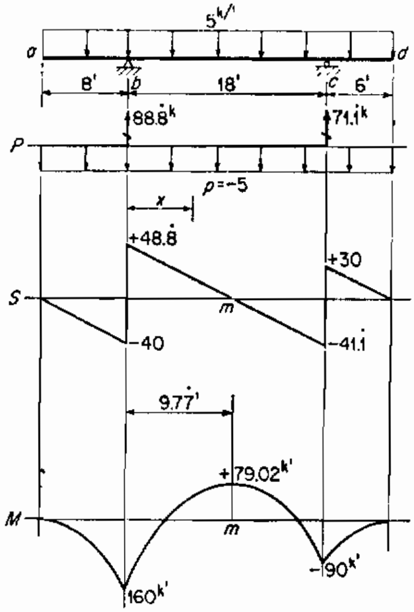
$\therefore$ O.K. $\qquad \therefore$ O.K.

دقت : M_{max} در نقطه‌ای است که برش آن صفر باشد (به‌فاصله $14\ ft$ از a)

بحث :

برای محاسبه عرض نمودار برش و لنگر خمشی در دستگاه بارهای متمرکز بهتر است که‌محاسبات را به‌صورت بالا نظم دهیم . عرضها را به‌ترتیب از طرف چپ به‌راست توسط اصول ۵ و ۶که‌در اواخر بخش(۳–۷) ذکر شده است محاسبه کرده‌ایم برای این که اطمینان یابیم که هردو نمودار بـه‌مقدار صفر خود در نقطه b باز می‌گردند وارسی لازم به‌عمل آمده است .

مثال ۳ – ۴ =



$$\Sigma M_c = 0, \curvearrowleft +$$
$$(R_{by})(18) - (32)(5)(10) = 0$$
$$\therefore R_{by} = \underline{88.\dot{8}^k} \updownarrow$$
$$\Sigma M_b = 0, \curvearrowleft +$$
$$-(R_{cy})(18) + (32)(5)(8) = 0$$
$$\therefore R_{cy} = \underline{71.\dot{1}^k} \updownarrow$$
$$\Sigma F_y = 0, \uparrow +, 88.8 + 71.\dot{1} - 160 = 0$$
$$\therefore O.K.$$
$$M_b = -(5)(8)(4) = \underline{-160^{k'}}$$
$$M_c = -(5)(6)(3) = \underline{-90^{k'}}$$

بین b و c,

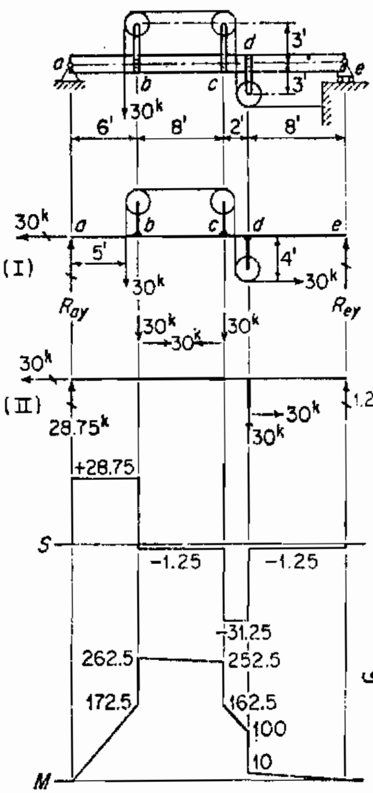
اگر

$$S = 48.\dot{8} - 5x$$
$$S = 0 = 48.\dot{8} - 5x \therefore x = \underline{9.\dot{7}'}$$
$$\therefore M_{max} - M_b = \frac{(48.\dot{8})(9.\dot{7})}{2}$$
$$M_{max} = M_b + 239.02$$
$$= -160 + 239.02$$
$$= +79.02^{k'}$$

بحث :

توجه کنید که مقدار عرض حداکثر نمودار لنگر خمشی بین b و c را به‌سادگی می‌توان با جمع جبری سطح زیر نمودار برشی بین b و m با عرض M_b به‌دست آورد ،در این مثال این عمل به‌سادگی ممکن است زیر سطح زیر نمودار برش یک مثلث است .

مثال ۳ – ۵=



$$\Sigma M_a = 0, \curvearrowright +$$
$$(5)(30) - (4)(30) - (R_{ey})(24) = 0$$
$$\therefore R_{ey} = \underline{1.25^k}$$
$$\Sigma M_e = 0, \curvearrowright +$$
$$(R_{ay})(24) - (30)(19) - (30)(4) = 0$$
$$\therefore R_{ay} = \underline{28.75^k}$$
$$\Sigma F_y = 0, \uparrow +, 28.75 + 1.25 - 30 = 0$$
$$\therefore O.K.$$

لنگرهای خمشی

در b (درست در طرف چپ آن)

$$M_{b_L} = +(28.75)(6) = \underline{+172.5^{k'}}$$

در b (درست در طرف راست آن)

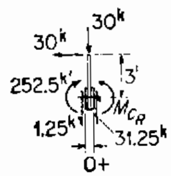
$$M_{b_R} = (28.75)(6) + (30)(3) = \underline{+262.5^{k'}}$$

در c (درست در طرف چپ آن)

$$M_{c_L} = 262.5 - (1.25)(8) = \underline{+252.5^{k'}}$$

در c (درست در طرف راست آن)

جزیی از تیر را بین دو مقطع یکی درست طرف چپ و دیگری درست طرف راست نقطه c جدا کنید این جزء طولی دیفرانسیلی به‌عبارتی برابر با $0+ ft.$ خواهد داشت.



$$\Sigma M_{c_R} = 0, \curvearrowright +$$
$$+252.5 - (30)(3) - (1.25)(0+) - M_{c_R} = 0$$
$$M_{c_R} = 252.5 - 90 - 0 = \underline{+162.5^{k'}}$$

در d (درست در طرف چپ آن)

$$M_{d_L} = (1.25)(8) + (30)(3) = \underline{+100^{k'}}$$

در d (درست در طرف راست آن)

$$M_{d_R} = (1.25)(8) = \underline{+10^{k'}}$$

بحث :

مطابق آنچه در فصل ۲ ارائه شد محاسبه عکس‌العملهای چنین سازه‌ای را می‌توان بدون تعیین نیروهای جداگانه‌ای که هر قرقره به‌تیر وارد می‌کند محاسبه نمود ولی برای رسم نمودارهای برش لنگر خمشی و محاسبات مربوط به‌تنشهای داخلی در تیرها در هرصورت لازم خواهد بود که جزء بارهای وارده توسط قرقره‌ها محاسبه شود ، عکس‌العملها را از نمودار I می‌توان محاسبه‌نمود و پس از تعیین بارهای وارده از طرف قرقره‌ها ، نمودار II را برای نشان‌دادن دقیق بارگذاری سازه می‌توان رسم کرد .

به‌طوری که در قسمت آخر بخش (۳-۷) توضیح دادیم درچنین مسائلی رسم منحنی‌بار عاقلانه نیست ،به‌جای نمودار بار دراینجا پیکرآزاد تیر مانند نمودار II رسم شده‌است ،حال دانشجویان می‌توانند با استفاده‌از تعاریف اساسی و روشهایی‌که با استفاده‌از تجربه از حل مسائل ساده‌ای‌نظیر مثالهای (۳-۱) تا (۳-۴) به‌دست آورده‌اند به‌رسم نمودارهای برش و لنگر خمشی بپردازند ، کلیه محاسبات فوق بدون اشکال قابل فهم است .

مثال ۳ - ۶=

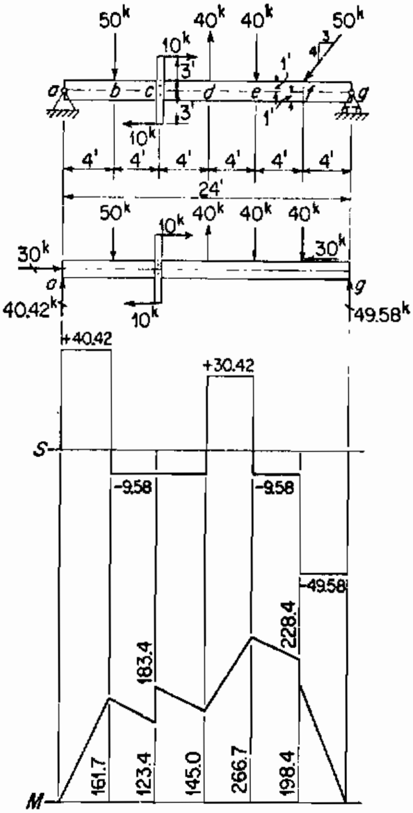
لنگر خمشی :

$$
\begin{aligned}
M_b = 40.42 \times 4 = {}& 161.68 = M_b \\
-9.58 \times 4 = {}& \underline{-38.32} \\
& 123.36 = M_c \text{ چپ} \\
& \underline{+60} \\
& +183.36 = M_c \text{ راست} \\
-9.58 \times 4 = {}& \underline{-38.32} \\
& 145.04 = M_d \\
30.42 \times 4 = {}& \underline{121.68} \\
& +266.72 = M_e \\
-9.58 \times 4 = {}& \underline{-38.32} \\
& +228.40 \\
& = M_f \text{ چپ} \\
& \underline{-30} \\
& +198.40 \\
& = M_f \text{ راست} \\
-49.58 \times 4 = {}& \underline{-198.32} \\
& \cancel{0.08} = M_g \\
& 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \Sigma M_a = 0, \overset{\curvearrowright}{+} \\
& (50)(4) + (10)(6) - (40)(12) \\
& \quad + (40)(16) + (40)(20) - (30)(1) \\
& \qquad - (R_{gy})(24) = 0 \\
& 200 + 60 - 480 + 640 + 800 - 30 \\
& \qquad = 24R_{gy} \\
& \therefore R_{gy} = \underline{49.58^{k}} \updownarrow \\
& \Sigma M_g = 0, \overset{\curvearrowright}{+} \\
& (R_{ay})(24) - (50)(20) + (10)(6) \\
& \quad + (40)(12) - (40)(8) - (40)(4) \\
& \qquad - (30)(1) = 0 \\
& 24R_{ay} = 1{,}000 - 60 - 480 + 320 \\
& \qquad + 160 + 30 \\
& \therefore R_{ay} = \underline{40.42_{k}} \updownarrow \\
& \Sigma F_y = 0, \uparrow +, \\
& 40.42 + 49.58 - 50 + 40 - 40 - 40 \\
& \qquad = 0 \qquad \therefore O.K.
\end{aligned}
$$

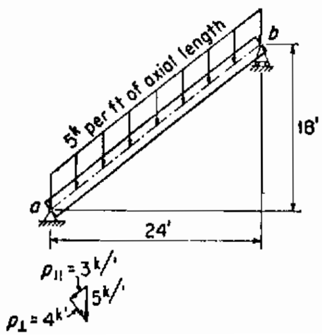
بحث :

این مثال نظیرمثال (۳-۵) است به‌این جهت همان توضیحات برای این مثال نیزصادق‌است



به‌علاوه باید یادآوری‌کرد که گاهی‌بارهای شیب‌دار به‌لبه فوقانی یاتحتانی تیر مانند بار *50-kip* که به‌نقطه *f* اثر می‌کند وارد می‌شوند در چنین حالاتی واضح است که مولفه افقی چنان بارهایی لنگری که سبب تغییری ناگهانی در عرض نمودار لنگر خمشی ایجاد می‌کند وارد می‌نمایند .

=مثال ۷–۳=



$\Sigma M_a = 0$,

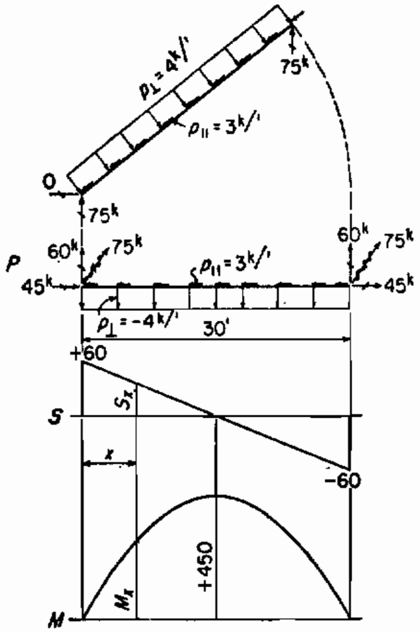
$(5)(30)(12) - (R_{by})(24) = 0$

$\therefore R_{by} = \underline{75^k}$

$\Sigma M_b = 0$,

$-(5)(30)(12) + (R_{ay})(24) = 0$

$\therefore R_{ay} = \underline{75^k}$



برش و لنگر خمشی :

در فاصله x از a

$$S_x = 60 - 4x$$
$$M_x = 60x - 2x^2$$

اگر $x = 15'$ باشد :

$$S_{15} = 60 - 4(15) = 0$$
$$M_{15} = (60)(15) - (2)(15)^2 = \underline{+450^{k'}}$$

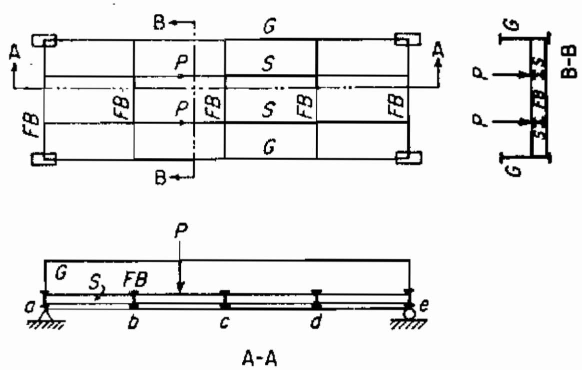
بحث :

هرگاه به‌تیری شیب‌دار باری گسترده‌ٔ یکنواخت به‌طورعمودی بر واحد محور طولی مانند وزن خود تیر اثر کند شدت بار واردهٔ را می‌توان به‌دو مولفه عمود و موازی محور تیر تجزیه نمود . اگر بار وارده بر محور تیر اثر کند فقط مولفه عمود بر محور تیر ایجاد برش و لنگرخمشی می‌نماید مولفه موازی با محورفقط ایجاد نیروی محوری می‌کند ،حال اگر عکس‌العملهارانیز به‌دو مولفه موازی وعمود بر محور (تیر) تجزیه کنیم رسم نمودارهای برش و لنگر خمشی را می‌توان به‌روش متعارف بسه‌سادگی انجام داد . این نمودارها را می‌توان نسبت به‌محوری که به‌موازات قطعه‌ایست و یا با در نظر گرفتن سادگی کار به‌طریقی‌که در فوق شرح داده شده‌است رسم نمود . منحنی بار را به‌دلیل ایجاد‌سهولت عملیات می‌توان در چنین مسائلی به‌کار برد .

۳ ـ ۹ مثالهای عددی ـ شاهتیر با تیرریزی کف

در کلیه مثالهای قبل بارها مستقیما" به‌خود تیر وارد می‌شوند ، در صورتی که اغلب اوقات بارهای وارده به‌شکل غیرمستقیم از طریق تیرریزی کف توسط شاهتیرها تحمل می‌شوند ،نمونه‌ای از چنین کار اجرایی در شکل (۱ـ۷) و همچنین در شکل (۳ـ۶) نشان داده شده است ،در یک چنین سازه‌ای بارهای وارده p ابتدا به‌تیرهای طولی اثر می‌کنند که به‌نوبهٔ خود این قطعات توسط‌قطعات

عرضی یا تیرهای‌کف FB تحمل می‌شوند ،تیرهای‌کف‌نیزبه‌نوبه خودتوسط شاهتیرها تحمل می‌گردند. اگر بارها چه به‌صورت بار گسترده یکنواخت و چه به‌صورت دستگاه بار متمرکز به‌تیرهای طولی اثر کنند در هرصورت اثر آنها بر شاهتیرها به‌صورت بارهای متمرکزی که در نقاط a ، b ، c و غیره از طریق تیرهای کف اثر می‌کند ظاهر می‌شوند .



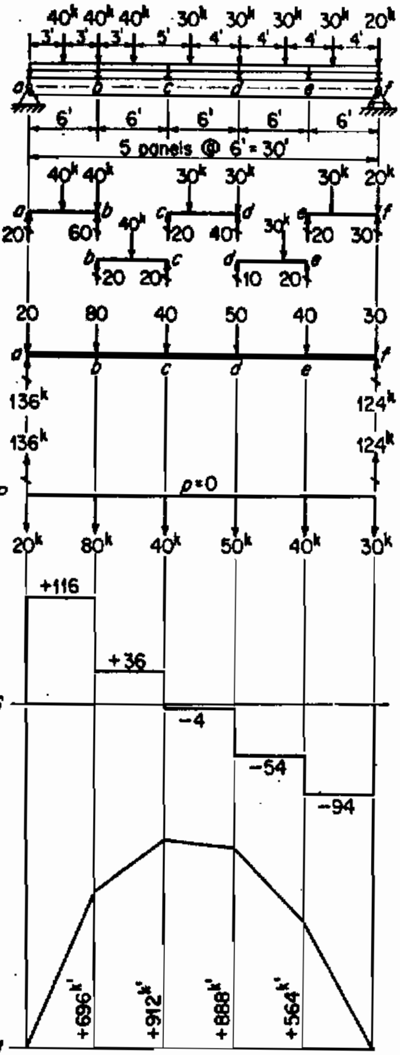
شکل ۳ـ۶ ملحقات شاهتیرها

برای رسم‌منحنیهای برش و لنگرخمشی شاهتیرهایی‌که به‌این طریق بارگذاری‌شده‌اند به مثال (۳ـ۸) توجه کنید . برای سادگی بیشتر فرض می‌شود که بارهای وارده بر تیرهای طولی به‌طرزی که نشان داده شده‌است بر بال فوقانی شاهتیرها تکیه‌کنند و فرض می‌شودکه تیرهای طولی و شاهتیرها در یک صفحه واقع شده باشند هم‌چنین فرض می‌شود که تیرهای طولی مانند تیرهای ساده در یک انتها منتهی به‌تکیه‌گاه مفصلی و در انتهای دیگر به‌یک تکیه‌گاه غلتک‌دار خاتمه یابد . در وهله اول لازم است که عکس‌العملهای تیر طولی و براساس آن نیروهای متمرکز مؤثر بر شاهتیر رامحاسبه‌کنیم ازاین به‌بعد رسم‌نمودارهای برش و لنگرخمشی شاهتیر مانند هرتیر دیگری که توسط دستگاه‌بارهای متمرکز بارگذاری شده باشد انجام خواهد گرفت .

دانشجویان باید درمورد این سازه‌ها به‌سئوالات زیرفکر کنند .فرق بین‌نمودارهای برش و لنگر خمشی در دوحالت با و بدون تیرهای طولی چیست ؟ آیا تشابه قابل‌توجهی در این مقایسه وجود دارد ؟ اگر باری گسترده یکنواخت به‌سازه اثر کند نمودارهای برش و لنگر خمشی درمقایسه‌درحالات با و بدون تیر طولی چگونه خواهد بود ؟ اگر تیرهای طولی به‌صورت تیرهای ساده بر شاهتیرها اثر نکنند پاسخ به‌سئوالات قبل فرق خواهدکرد ؟ مسائل آخراین فصل در تأکید این نکات خواهدبود .

مثال ۳ـ۸=

بررسی شاهتیر تحت اثر عکس‌العملهای تیر طولی . $\Sigma M_a = 0,$



$$
\begin{aligned}
(80)(1P) &= 80P\\
(40)(2P) &= 80P\\
(50)(3P) &= 150P\\
(40)(4P) &= 160P\\
(5P)(R_{fy}) &= 470P\\
\text{Net } R_{fy} &= 94^k \Updownarrow
\end{aligned}
$$
مقدار خالص

$$
\begin{aligned}
& \;\;\underline{30^k}\\
R_{fy} &= 124^k \Updownarrow
\end{aligned}
$$
مقدار ناخالص

$$
\begin{aligned}
\Sigma M_f &= 0, \curvearrowleft +\\
(80)(4P) &= 320P\\
(40)(3P) &= 120P\\
(50)(2P) &= 100P\\
(40)(1P) &= \underline{40P}\\
(5P)(R_{ay}) &= 580P\\
\text{Net } R_{ay} &= 116^k \Updownarrow
\end{aligned}
$$
مقدار خالص

$$
\begin{aligned}
& \;\;\underline{20^k}\\
R_{ay} &= 136^k \Updownarrow
\end{aligned}
$$
مقدار ناخالص

$$
\Sigma F_y = 0, \uparrow +
$$
$$
124 + 136 - (3)(40) - (4)(30) - 20 = 0
$$
$$
260 - 120 - 120 - 20 = 0 \quad \therefore O.K.
$$

مقدار این عکس‌العملها را می‌توان با به‌کاربردن مستقیم بارهای وارده نیز وارسی نمود.

برش و لنگر خمشی در شاهتیر:

$$
\begin{array}{lll}
R_{ay} = & 136^k & \\
 & \underline{-80} & 0 = M_a\\
S_{a-b} = & 116^k \times 6 = & \underline{+696^{k'}}\\
 & & +696^{k'} = M_b\\
 & \underline{-80} & \\
S_{b-c} = & 36 \times 6 = & \underline{+216}\\
 & & +912 = M_c\\
 & \underline{-40} & \\
S_{c-d} = & -4 \times 6 = & \underline{-24}\\
 & & +888 = M_d\\
 & \underline{-50} & \\
S_{d-e} = & -54 \times 6 = & \underline{-324}\\
 & & +564 = M_e\\
 & \underline{-40} & \\
S_{e-f} = & -94 \times 6 = & \underline{-564}\\
 & & 0 = M_f\\
 & \underline{-30} & \\
 & 124 &
\end{array}
$$

بحث:

به‌اصطلاحهای عکس‌العمل "ناخالص" و "خالص" توجه شود، عکس‌العمل ناخالص عبارت‌ازکلیه بارهایی است که‌توسط تکیه‌گاه تحمل می‌شود ازجمله هرباری که مستقیماً" به‌نقطه تکیه‌گاه اثرمی‌کند.

عکس‌العمل خالص عبارتست از عکس‌العمل کلیه بارها بجز باری که مستقیما" به‌تکیه‌گاه وارد می‌شود، توجه کنید که فقط عکس‌العمل خالص در محاسبات برش و لنگر خمشی وارد می‌شود .

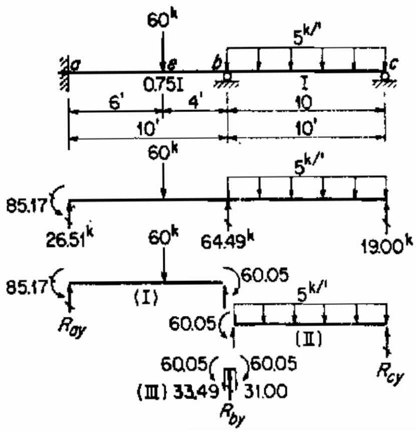
۳ ـ ۱۰ مثالهای عددی ـ تیرهای نامعین

چنانکه در بحث فصل ۲ دیدیم وحال نیز یادآوری می‌کنیم تحلیل تنش در سازه‌های نامعین نه‌تنها تأمین معادلات تعادل استاتیکی را لازم دارد بلکه به‌تأمین برخی از به‌شرایط تغییرشکل نیز نیاز دارد . حل و بررسی چنین سازه‌هایی با شرح کامل بعدها در این کتاب انجام خواهدگرفت‌در آن فصول خواهیم دید بعداز آن‌که برخی از مولفه‌های مجهول تنش (نظیر عکس‌العملها ، برش‌ها و لنگر) توسط تأمین شرایط تغییرشکل تعیین شدند سایرمجهولات را می‌توان با تأمین‌معادلات‌تعادل استاتیکی محاسبه نمود . این بدان معنی است که قسمت باقیمانده مساله از نظر ایستایی معین‌است وآن قسمت را می‌توان به‌توسط فن و روشی که در فصلهای ۲ و ۳ برای سازه‌های معین شرح داده‌شد تعیین نمود .

پس از آن‌که عکس‌العملهای تیرنامعین محاسبه‌شد ،برش و لنگرخمشی را در هرمقطع مورد نظر می‌توان به‌همان طریقی‌که برای تیرهای معین‌گفته شد تعیین نمود ، از همان اصول نیز در رسم نمودارهای برش و لنگر خمشی پیروی خواهیم کرد .

مثال ۳ ـ ۹= تیر سرتاسری نامعین زیر نه‌تنها بارهای نشان داده شده را تحمل می‌کند بلکه تحت اثر نوعی جابجایی تکیه‌گاهی نیز می‌باشد . لنگرهای‌خمشی زیرین با به‌کاربردن روشهایی‌که برای تحلیل سازه‌های نامعین بعدها می‌بینیم محاسبه شده‌اند .

$$M_a = -85.17^{k'} \qquad M_b = -60.05^{k'} \qquad M_c = 0$$



پیکرآزاد I :

$$\Sigma M_b = 0, \curvearrowleft^{+}, (R_{ay})(10) + 60.05 - 85.17 - (60)(4) = 0$$

$$\therefore R_{ay} = \underline{26.51^k} \uparrow$$

$$\therefore S_{b_L} = 26.51 - 60 = \underline{-33.49^k}$$

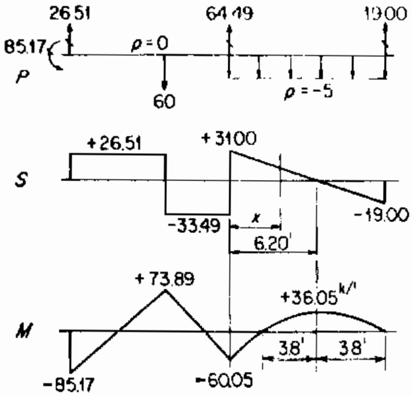
پیکرآزاد II :

$$\Sigma M_b = 0, \curvearrowleft^{+}, (5)(10)(5) - 60.05 - (R_{cy})(10) = 0$$

$$\therefore R_{cy} = \underline{19.00^k} \uparrow$$

$$\therefore S_{b_R} = -19.00 + 50 = \underline{+31.00^k}$$

پیکر آزاد III :



$$\Sigma F_y = 0,\ R_{by} = 33.49 + 31.00 = \underline{64.49^k}$$ ‡

لنگر خمشی :

$$M_c = -85.17 + (26.51)(6) = \underline{+73.89^{k'}}$$

بین b و c لنگر حداکثر M_{max} را تعیین می‌کنیم

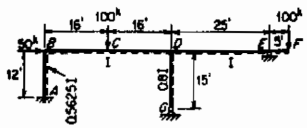
$$S_x = 31.00 - 5x$$

اگر

$$S_x = 0 = 31 - 5x, \quad \therefore x = \underline{6.20'}$$

$$M_{max} = -60.05 + (31.00)\left(\frac{6.20}{2}\right) = \underline{+36.05^{k'}}$$

مثال ۳-۱۰ =



لنگرها خمشی زیرین بتوسط روشهای تحلیل سازه‌های نامعین محاسبه شده است

در انتهای A از نقطه AB : $M = -260.9$

در انتهای B از نقطه AB : $M = -62.0$

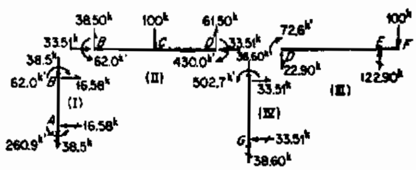
در انتهای B از قطعه BD : $M = -62.0$

در انتهای D از قطعه BD : $M = -430.0$

در انتهای D از قطعه DE : $M = +72.6$

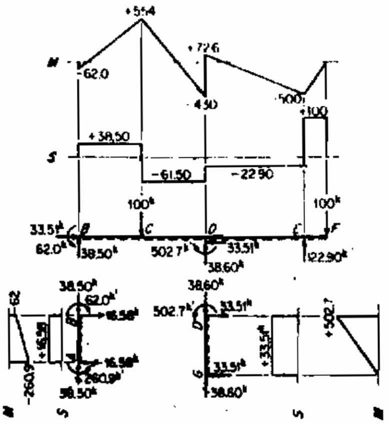
در انتهای D از قطعه DG : $M = +502.7$

" تارهای تحتانی را در لبه قطعه انتخاب کرده و آنرا با خط منفصل نشان داده‌ایم لنگر خمشی (+) در تارهای تحتانی ایجاد کشش می‌کند .



$$\Sigma M_B^{(I)} = 0, \quad \begin{array}{r} 260.9 \\ 62.0 \\ \hline \end{array}$$

$$R_{Ax} = \frac{198.9}{12} = 16.58$$



$$\Sigma M_D^{(II)} = 0, \qquad 100 \times 16 = \begin{array}{r} 1,600 \\ 62 \\ \hline 1,662.0 \\ -430.0 \\ \hline \end{array}$$

$$S_B = 38.5 = \frac{1,232.0}{32}$$

$$\Sigma M_B^{(II)} = 0, \qquad 100 \times 16 = \begin{array}{r} 1,600 \\ 430 \\ \hline 2,030 \\ -62 \\ \hline \end{array}$$

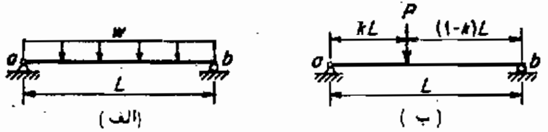
$$S_D = 61.5 = \frac{1,968}{32}$$

$$\Sigma M_D^{(III)} = 0, \qquad 100 \times 30 = \begin{array}{r} 3,000 \\ 72.6 \\ \hline \end{array}$$

$$R_{Ev} = 122.9 = \frac{3,072.6}{25}$$

۳ــ ۱۱ مسائل

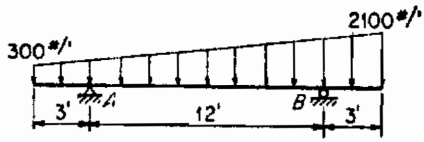
۳ــ ۱ نمودارهای برش و لنگرخمشی را برای بارگذاریهای شکل (۳ــ۷) درمورد تیری روی دوتکیه‌گاه ساده رسم کنید.



شکل ۳ــ۷ مساله (۳ــ۱)

پیشنهاد: مقدار حداکثر لنگر خمشی در هر حالت چیست؟ اگر در قسمت b ، مقدار k برابر 0.5 باشد مقدار حداکثر لنگر چقدر است؟

۳ــ ۲ برای تیر شکل (۳ــ۸) نمودارهای بار، برش و لنگر خمشی را رسم کنید.



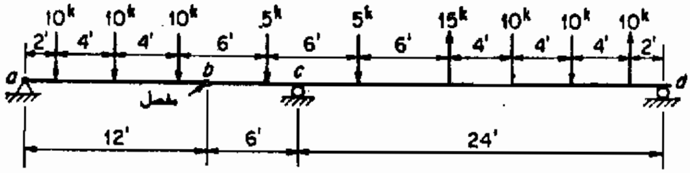
شکل ۳ــ۸ مساله (۳ــ۲)

جواب :

برش برحسب lb : $A = -1,350$ (طرف چپ) $A = +5,400$ (طرف راست) $B = -9,000$ (طرف چپ) $B = +5,850$ (طرف راست)

لنگر برحسب lb-ft : $A = -1,800$ (وسط A و B) $= +10,200$ $B = -9,000$

۳ ــ ۳ برای تیر شکل (۳ــ۹) منحنی‌های برش و لنگر خمشی را رسم کنید .



شکل ۳ــ۹ مساله (۳ــ۳)

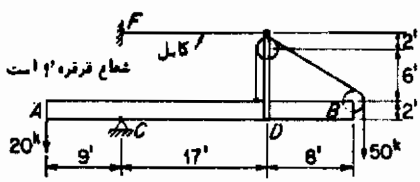
جواب :

برش برحسب kips : $a = +15$ $b = -15$ $c = +5.417$ (طرف راست) $d = +5.417$

لنگر برحسب kip-ft : (وسط a و b) $= +50$ $c = -100$ $c = -75.83$ بفاصله 9 ft طرف راست .

۳ ــ ۴ نمودارهای برش و لنگرخمشی را برای تیرها نشان داده‌شده درمسائل (۲ــ۲ الف) و(۲ــ۲ب) رسم کنید .

۳ ــ ۵ منحنی‌های برش و لنگر خمشی را برای تیر AB از شکل (۳ــ۱۰) رسم کنید .



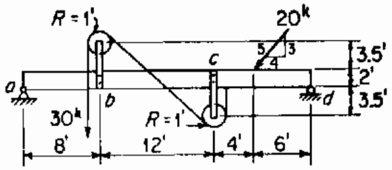
شکل ۳ــ۱۰ مساله (۳ــ۵)

جواب :

برش برحسب kips : $A = -20.0$ $C = +50.0$ (طرف راست) $D = +100.0$ (طرف چپ) $B = +20.0$

لنگر برحسب kip-ft : $C = -180, -292$ $D = +608, -120$ $B = +40$

۳ ـ ۶ نمودارهای برش و لنگر خمشی را برای تیر شکل (۳ــ۱۱) رسم کنید.



شکل ۳ــ۱۱ مساله (۳ــ۶)

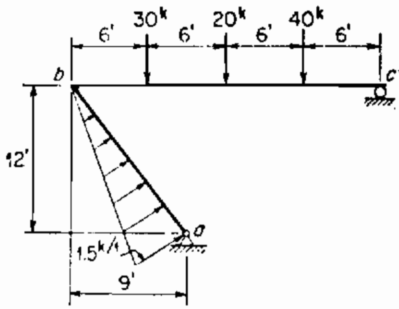
جواب :

برش برحسب kips : $a = +26.46$ ؛ $b = -24.57$ (طرف راست) ؛ $c = +26.46$ (طرف راست)

لنگر برحسب kip-ft : $a = -16.0$ ؛ $b = +195.73, +201.97$ ؛ $c = -2.87, +93.40$ ؛ $d = -15.53$

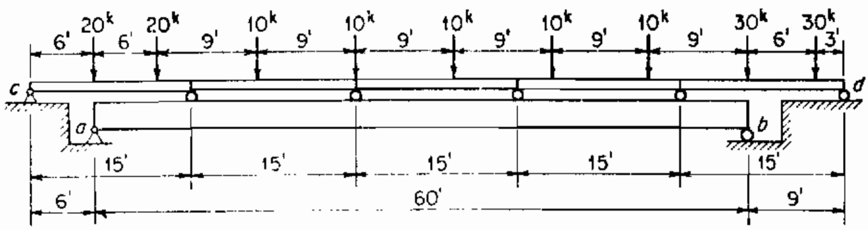
۳ ـ ۷ نمودارهای برش و لنگر خمشی را برای تیر ab از مساله (۲ــ۲ د) و برای تیرهای ab و cd مساله (۲ــ۲ هـ) حل کنید.

۳ ـ ۸ برای قطعات ab ، bc سازه شکل (۳ــ۱۲) نمودارهای برش و لنگر خمشی را رسم کنید.



شکل ۳ــ۱۲ مساله (۳ــ۸)

۳ ـ ۹ برای شاهتیر ab از شکل (۳ــ۱۳) نمودارهای برش و لنگر خمشی را رسم کنید.



شکل ۳ــ۱۳ مساله (۳ــ۹)

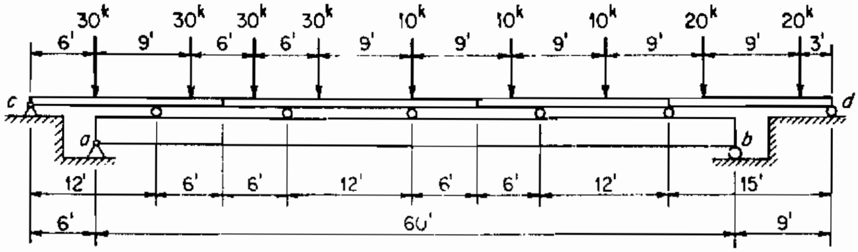
جواب :

برش برحسب kips ؛ $a = +45.3$ $a = +15.3$ (20 فوت طرف راست) $b = -18.7$ (20 فوق طرف چپ)

$b = -52.7$ لنگر برحسب kip-ft ؛ $a = +407.7$ (9 فوت طرف راست) $a = +637.2$

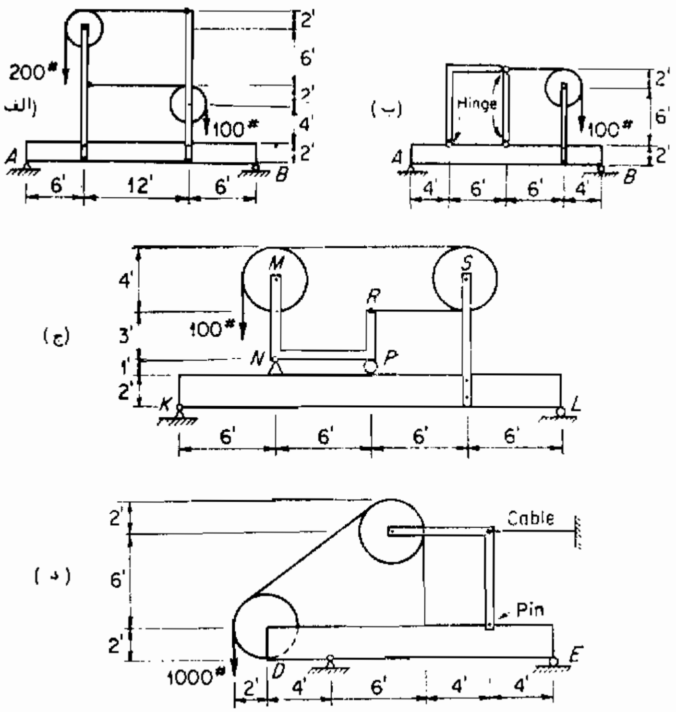
(24 فوت طرف راست) $b = 316.2$ (9 فوت طرف چپ)

۳–۱۰ برای شاهتیر ab شکل (۳–۱۴) منحنیهای برش و لنگر خمشی را رسم کنید .



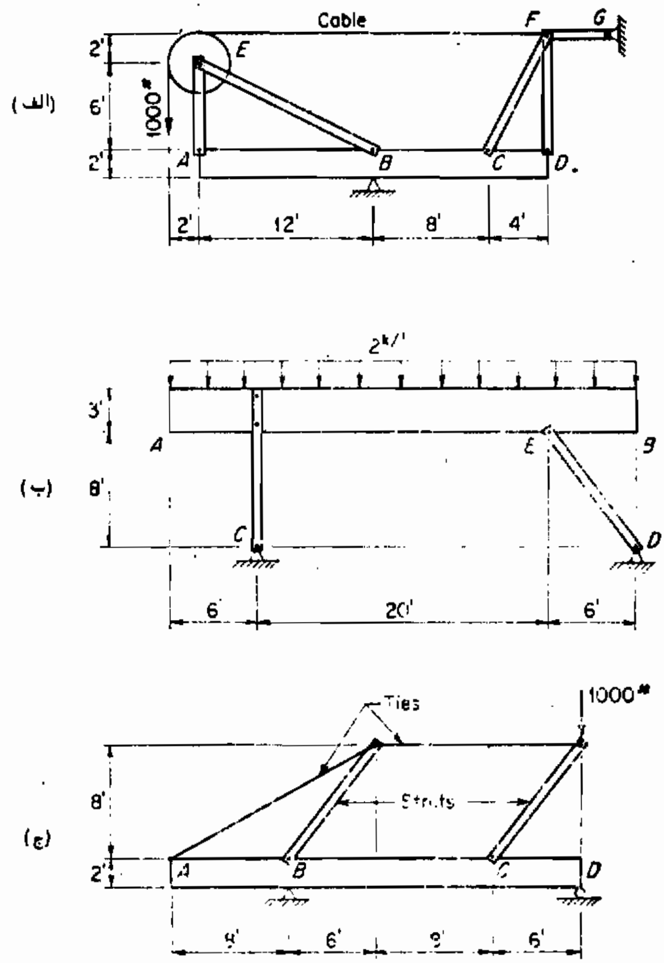
شکل ۳–۱۴ مساله (۳–۱۰)

۳ – ۱۱ برای تیرهای نشان داده شده در شکل (۳–۱۵) نمودارهای برش و لنگر خمشی را رسم کنید .



شکل ۳–۱۵ مساله (۳–۱۱)

۳ – ۱۲ برای تیرهای شکل (۳–۶) نمودارهای برش و لنگر خمشی را رسم کنید.



شکل ۳–۱۶ مساله (۳–۱۲)

۴
خرپاها یا شبکه‌های مستوی

۴ ـ ۱ کلیات ـ تعاریف

درین فصل نظریه کلی تحلیل تنش خرپاها را مورد بحث قرار می‌دهیم ، دراین‌بحث از وضع قرارگیری اعضای یک خرپا به‌منظور ایجاد سازه‌ای پایدار نیز صحبت خواهد شد . در یکی از فصول بعدی از تحلیل تنش در برخی از انواع خرپاهای مهم پلها و پوشش سقفها تحت اثر شرایط بارهای محاسباتی با جزئیات لازم بحث خواهد شد .

خرپا یا شبکه مستوی سازه‌ای است که از تعدادی میله که همگی در یک صفحه واقع شده و به‌یکدیگر در دو انتهای خود توسط مفصل متصل گشته و به‌این صورت تشکیل تیری‌مشبک و صلب را داده‌اند تشکیل شده است . در کلیه بحثی که در این فصل آمده است فرض شده که *شرایط‌زیر موجود باشد : (۱) اعضای خرپا در انتهای خود به‌یکدیگر توسط مفصلی که بدون اصطکاک می‌باشد متصل شده‌اند (۲) بارها و عکس‌العملهای مؤثر بر خرپا فقط در گره‌ها وارد می‌شوند (۳) محور مار بر مراکز ثقل هر عضو خرپا خطی است مستقیم که بر خطی‌که مراکز گره‌های دوسر عضو را بهم متصل می‌سازد منطبق شده است . این خط همچنین در صفحه‌ای که خطوط‌اثر کلیه بارها و عکس‌العملها را در بر دارد واقع شده است* . بدیهی است در یک *خرپای واقعی عملا" تأمین کلیه این شرایط غیر ممکن است و به‌این جهت است خرپائی راکه در مورد آن شرایط فوق فرض شده باشد خرپای ایده‌آل گویند* .

هر عضو یک خرپای ایده‌آل را می‌توان با جدانمودن آن از دو گره انتهائیش به‌صورت آزاد مورد بررسی قرارداد ،ازآنجائی که کلیه نیروهای خارجی و عکس‌العملها فقط به‌گره‌های خرپا واردمی‌شوند و هیچ باری بین دو انتهای اعضاء خرپا به‌آنها اثر نمی‌کند، عضوآزادشده فقط‌تحت اثر دو نیرو در دو انتهایش قرار خواهد داشت که هریک ازین نیروها بیانگر عمل گره انتهای عضو می‌باشد و از آنجائی که کلیه محورهای مرکزی مفصل گره‌ها را بدون‌اصطکاک فرض کرده‌ایم لذا کلیه این نیروها باید دقیقا" از مرکز محور مفصل گره بگذرند . برای‌این‌که

این دونیروسه‌شرط تعادل استاتیکی‌عضو آزاد شده‌یعنی $\Sigma F_x = 0$ ، $\Sigma F_y = 0$ و $\Sigma M = 0$ را تأمین نمایند واضح است که‌این دونیرو باید هم‌راستای خط‌اتصال‌مراکز گره‌های‌دوانتهای میله بوده و از نظر عددی برابر ولی از حیث جهت در خلاف هم باشند. چون محورهای‌مار بر مراکز ثقل اعضای یک خرپای ایده‌آل مستقیم بوده و بر خطوط اتصال گرههای دو انتهای اعضاء منطبق است لذا کلیه مقاطع اعضاء تحت اثر نیروی محوری بوده ولی هیچ‌برش‌ولنگر خمشی تحمل نخواهند کرد. وقتی که نیروی محوری کلیه اعضای یک خرپا محاسبه شده‌باشد قسمت اساسی تحلیل تنش یک خرپای ایده‌آل به‌اتمام رسیده است زیرا شدت تنش درمقاطع اعضاء را می‌توان پس از آن به‌راحتی محاسبه نمود.

نوعی از سازه‌های سه‌بعدی را که توسط تعدادی میله با اتصال مفصلی به‌یکدیگر وصل شده باشند به‌نوعی که جسم مشبک صلب را تشکیل داده باشند شبکه‌های فضایی گویند. چنین سازه‌هایی را با جزئیات لازم در فصل ۹ شرح خواهیم داد.

خرپاهای مستوی و فضایی سازه‌هایی هستند که مخصوص تحمل بار در گره‌های خود می‌باشند. نتیجه اثر بارها به‌گره‌ها این است که اساساً" اعضای این شبکه‌ها نیروی محوری تحمل می‌نمایند و به‌مقدار بسیار کم یا هیچ تحت اثر برش و خمش قرار دارند، اگر بارهای عرضی بین گره‌ها به‌اعضاء آنها وارد شوند یکی از ملزومات عملکرد خرپاها نقض می‌گردد و برش و خمش عمده‌ای به‌وجود می‌آید. اگر گرههـا اساساً" مفصلهای بدون اصطکاک باشنـد (توسط مفصل با محور یا گوی بدون اصطکاک) اثرات خمشی محدود به‌اعضـای تحت اثربار بین گره‌ها می‌شود (مساله ۴ـ۶ چنین حالتی را شرح می‌دهد) ولی اگر گره‌ها صلب باشند سازه به‌مانند یک قاب صلب عمل خواهد کرد (به‌بخش ۴ـ۱۳ مراجعه شود). درچنین‌حالتی اثرات خمشی ناشی از بارگذاری عرضی اعضاء از طریق گرهها به‌سایر اعضاء منتقل شده‌و در کلیه اعضاء سازه امکان بوجودآمدن برش و لنگر قابل ملاحظه وجود خواهد داشت. روشهای حل و بررسی قابهای صلب نامعین در فصول ۱۱ و ۱۳ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۴ ـ ۲ خرپاهای موجود و ایده‌آل

گرچه وجود خرپای ایده‌آل یک فرض است و از نظر فیزیکی چنین خرپایی نمی‌تواند وجودخارجی داشته‌باشد ولی‌تحلیل‌تنش یک خرپای واقعی‌که براساس فرض به‌صورت خرپایی ایده‌آل انجام می‌گیرد عموماً" پاسخ قابل قبولی برای مقادیر نیروهای محوری در اعضای‌یک خرپای واقعی به‌دست می‌دهد. نیروهای محوری در اعضا یا میله‌های یک خرپارا نیروی میله و شدت تنش ناشی‌از نیروی میله‌را که براساس فرض خرپا به‌عنوان‌یک خرپای ایده‌آل‌به‌دست

می‌آید شدت تنش *اولیه* گویند .

مفصلهای یک خرپای مفصلی هیچگاه بدون اصطکاک نیست و علاوه بر آن در خرپاهای جدیدکه‌بااتصال‌پرچ و جوش ساخته می‌شوند امکان تغییر در زوایای بین اعضای آن وجود ندارد (به‌سه پاراگراف اولیه بخش (۴ــ۱۲) با قابلهای صلب مراجعه شود)لذاحتی‌اگربارهای خارجی به‌مرکز گرهها وارد شوند ، عمل گره در انتهای یک عضو مجموعه‌ای از نیروی‌محوری، نیروی عرضی و لنگر خواهد شد و بنابراین مقطع یک عضو تحت اثر نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمش قرار خواهد گرفت و علاوه بر آن وزن مرده اعضاء نیز که در طول آنها گسترده شده است الزاما" سبب ایجاد خمش بیشتر اعضاء خواهد شد .اگر طرح اتصالات کاملا"صحیح باشد به‌نوعی‌که محورهای اصلی (محور مار بر مراکز ثقل عضو) اعضاء بر خط اتصال بین مراکز گرهها منطبق گردد لنگر خمشی ناشی از خروج از مرکز ممکن از این نوع ، را می‌توان تا حد زیادی حذف و یا به‌حداقل رساند .

اگر از هریک‌از شرایطی‌که برای خرپای ایده‌آل لازم است دورشویم نه‌تنها در اعضای خرپای موجود خمش ایجاد می‌شود بلکه ایجاد نیروی میله‌ای متفاوت از آنچه برای خرپای ایده‌آل به‌دست می‌آید نیز می‌نماید . تفاوت بین شدت تنش در اعضای یک خرپای واقعی‌با شدت تنش اولیه که برای خرپای متناظر ایده‌آل آن به‌دست می‌آید شدت تنش ثانویه‌گویند. می‌توان نشان داد که در حالت خرپای متعارف که در آن اتصالات به‌نوعی‌است‌که محورهای اصلی اعضاء ازمراکز گرهها می‌گذرد و اعضاء آن نسبتا" لاغر می‌باشند شدت تنش‌ثانویه‌در یک چنین خرپایی نسبت به‌شدت تنش اولیه کوچک است . به‌این جهت برای مقاصد طرح عملی خرپاها تعیین شدت تنش اولیه آنها که با فرض ایده‌آل بودن آنها به‌دست می‌آید معمولا" رضایت بخش می‌باشد*.

در مباحث بعدی لفظ خرپا را به‌شبکه‌هایی اطلاق خواهیم کرد که مانند خرپا را گرههای مفصلی‌ایده‌آل باشند و یا این‌که عملکرد آنها را بتوان مانند یک خرپای ایده‌آل فرض نمود .

۴ــ۳ ترتیب *اعضای* یک خرپا

در بخش (۴ــ۱) بیان شد که اعضای یک خرپا باید به‌نحوی به‌یکدیگر مفصل شوندکه

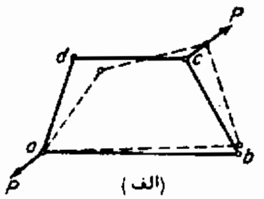
---

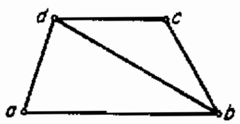
* به‌فصل ۹ کتاب زیر مراجعه شود :

J. I. Parcel and R. B. B. Moorman " تحلیل سازه‌های نامعین "

تشکیل یک شبکه صلب‌را بدهند . لفظ صلب که در اینجا به‌کار می‌رود همان معنای به‌کاررفته در بخش (۲ـ۳) رادارددر به‌این معنی که یک شبکه را زمانی صلب گویند که علاوه بر تغییر شکل کوچک ارتجاعی اعضای آن شبکه ، هیچ نوع حرکت نسبی بین اجزاء آن نباشد . با این هدف می‌توان به‌طرق مختلف با آرایش اعضاء یک شبکهٔ صلب ایجاد نمود . پس از آنکه به‌طریقی معین به‌میله‌های خرپا آرایش موردنظر را دادیم می‌توان کل خرپا را به‌نوعی روی تکیه‌گاه قرارداد و برای تحمل بارها مانند تیرها از آن استفاده نمود .

فرض کنیدکه بخواهیم با نقاط a ، b ، c و d یک خرپا با گرههای مفصلی بسازیم ،اگر مانند شکل (۴ـ۱ الف) توسط چهار میله که دوبدو بهم مفصل شده‌اند شبکه‌ای بسازیم ، چنین شبکه‌ای صلب نخواهد بود و تحت اثر باری نظیر p چنانکه دیده می‌شود متلاشی‌شده و تا زمانی‌که گرههای a ، c و d روی یک خط راست قرار گیرند تغییرشکل ادامه‌خواهدیافت.



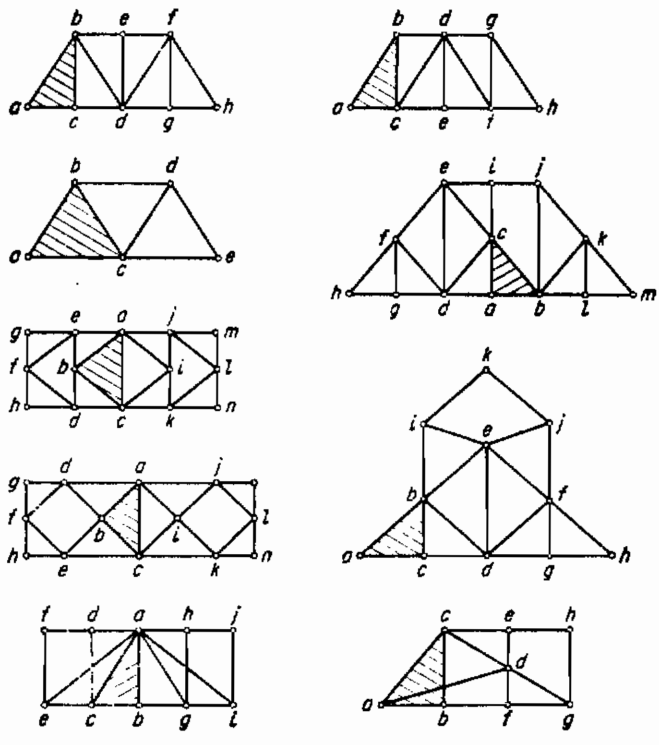


شکل ۴ـ۱ تیر مشبک

پس از کمی تفکر در می‌یابیم که کلیه روشهای این‌چنینی که چهار یا بیشتراز چهار میله را توسط تعداد مشابهی مفصلی در انتهای آنها بهم وصل کند منتهی به‌شبکه‌ای می‌شودکه‌بجز در مورد چندحالت انگشت‌شمار و استثنایی بارگذاری ،تحت سایر بارگذاریها از هم‌متلاشی می‌گردد ، ولی اگر ابتدا نقاط a و b را توسط میله ab بهم متصل کنیم و سپس دومیله دیگر به‌طولهای ad و bd به‌ترتیب در a و b مفصل‌کنیم و سپس نقاط‌انتهایی d این میله‌درنقطهٔ d بهم مفصل شوند با اتصال نقاط a ، b و d یک مثلث صلب به‌دست آورده‌ایم پس‌از آن میله‌هایی به‌طول dc و bc را می‌توان به‌ترتیب‌به‌مفصلهای b و d متصل نمود وسپس‌انتهای c این میله‌ها را می‌توان بهم منطبق کرد ، و در نقطه c به‌یکدیگر مفصل کرد . به‌این‌ترتیب گره c به‌صورت صلب به‌مثلث abd متصل می‌شود لذا شبکه‌ای صلب با پنج میله و نقاط a ،

b ، c و d به‌دست می‌آید . با ترتیبی دیگر نقطه e را می‌توان به‌گرههای a و b توسط میله‌های ae و be و یا به‌گرههای a و d توسط میله‌های ae و de متصل نمود . به‌همین‌ترتیب برای تشکیل مثلث اولیه می‌توان نقاط a ، b ، c و یا a ، d و e و یا این‌که b ، c و d را بهم متصل نمود . با هریک از این ترتیبها می‌توان شبکه‌ای صلب درست کرد که تا زمانی که اعضای آن کمانه نکنند و یا کرنشی بیشتر از نقطهٔ تسلیم مصالح آن نداشته باشند هر نوع دستگاه بارگذاری وارد بر گرهها را تحمل نمایند .

به‌همین‌ترتیب به‌هرمقداری‌که گره‌مفصلی جهت ایجاد شبکه‌ای صلب بخواهیم می‌توانیم با اتصال میله‌ها بوجود آوریم ، شروع عمل با انتخاب سه‌نقطه که روی یک خط مستقیم واقع نشده باشند انجام می‌گیرد و سپس باید این نقاط را توسط سه‌میله جهت‌ایجاد‌یک مثلث‌بهم وصل نموده بعد هرگره دیگری را می‌توان به‌نوبهٔ‌خود با به‌کاربردن دومیله با اتصال‌به‌هردو گره مناسبی که قبلا" ایجاد شده است بوجود آورد . بدیهی است که هیچ گره جدید نباید‌با دو گرهی که به‌آنها متصل می‌شود در یک راستا باشد و کلیه خرپاهای شکل (۴ــ۲) به همین طریق یعنی ابتدا با ایجاد مثلث صلب abc و سپس با به‌کاربردن دومیله برای ایجاد گره



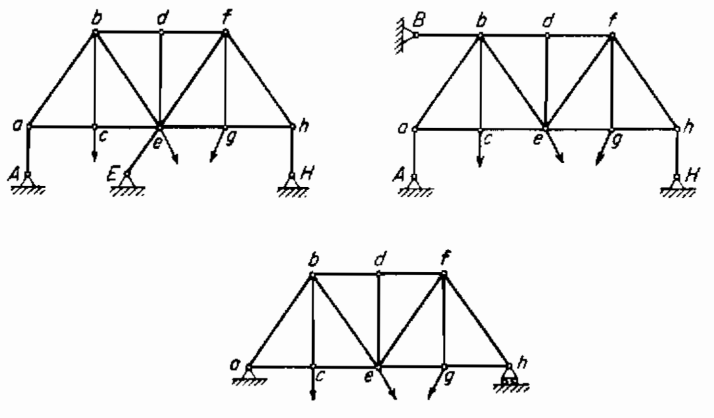
شکل ۴ــ۲ خرپاهای ساده

جدید با ترتیب الفباء ایجاد شده است .

کلیه خرپاهائی را که میله‌های آنها به‌این ترتیب آرایش پیدا می‌کنند خرپاهای ساده گویند زیرا این طریق ساده‌ترین و معمول‌ترین نوع آرایش میله‌ها می‌باشد .

در کلیه نمایش خرپاها نظیر آنچه در شکل (۴–۲) می‌بینیم ،اعضا خرپا را با یک خط و گرههای مفصلی آنها با یک دایره کوچک نشان داده شده است .گاهی ممکن‌است میله‌هایی یکدیگر را قطع کنند (از زیر یا روی یکدیگر بگذرند) ولی آرایش آنها به‌نوعی باشد که در نقطه تلاقی آنها گرهی وجود نداشته باشد .

پس از آن‌که اعضاء خرپایی برای ایجاد خرپایی ساده شکل گرفت کل شبکه را می‌توان درست مانند یک تیر روی تکیه‌گاه قرارداد . برای این‌که به‌شرایط یک خرپای ایده‌آل نزدیک بمانیم تکیـه‌گاهها باید به‌نوعی طرح شوندکه عکس‌العمها به‌گرههای خرپا اثرکنند .با به‌یاد آوردن بحثی که در بخش (۲–۵) کرده‌ایم واضح است که اگر تکیه‌گاههای خرپا به‌نوعی‌باشد که از سه‌تکیه‌گاه بندداری که نه با یکدیگر موازی بوده و نه یکدیگر را در نقطه مشترکی قطع کنند تشکیل شوند سازه پایدار بوده و عکس‌العملهای آن‌را می‌توان تحت اثر حالت کلی بارگذاری به‌کمک‌معادلات تعادل محاسبه‌نمود .حالاتی‌از تکیه‌گاههای پایدار و معین‌خرپاهای ساده رادر شکل (۴–۳) نشان داده‌ایم .



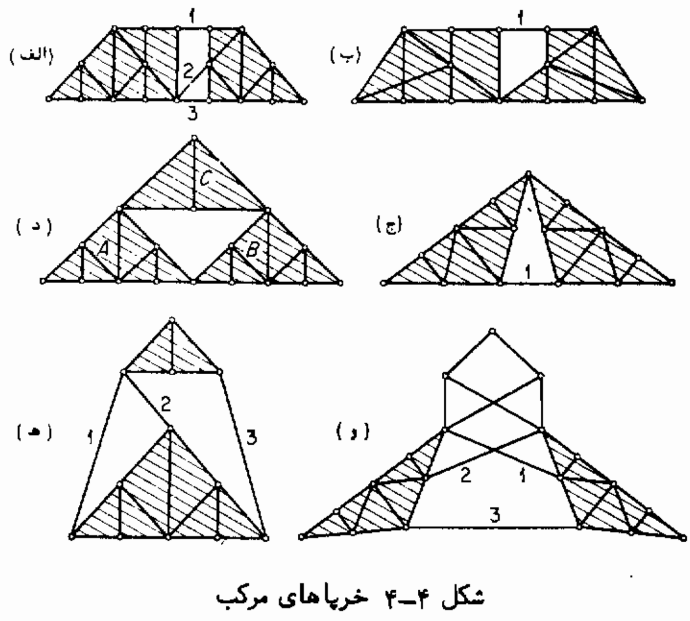
شکل۴ ـ ۳ خرپاهای ساده پایدار و معین

گاهی ترجیح داده می‌شود که دو یا چند خرپای ساده را به‌منظور ایجاد یک‌شبکهٔ صلب بهم وصل کنیم در یک چنین حالتی شبکه‌ای را که به‌این طریق بوجود می‌آید خرپای مرکب گویند یک خرپای ساده را می‌توان به‌خرپای ساده دیگری متصل کرد به‌این ترتیب که آنها را توسط سه‌بند که نه با یکدیگر موازی باشند و نه متقارب و یا توسط هرنوع اتصال معادلی بهم

وصل نمود. اگر دوخرپا به‌این ترتیب بهم متصل شوند تشکیل یک شبکه مرکب کاملا" صلبی را خواهند داد. خرپاهای‌ساده دیگری را نیزبه‌همین طریق‌می‌توان به‌شبکه‌ایجادشده‌به‌منظور تهیه خرپای مرکب عظیم‌تری متصل نمود.

مثالهای متعددی از خرپاهای مرکب را در شکل (۴-۴) نشان داده‌ایم، در کلیه این حالات خرپاهای ساده‌ای را که بهم وصل‌شده‌اند با هاشور مشخص کرده‌ایم، در خرپاهای (الف)، (هـ)، (و)خرپاهای ساده توسط میله‌های ۱، ۲و۳بهم متصل شده‌اند و درحالات (ب)و (ج)خرپاها دریک‌گره‌بهم مفصل شده‌اند ولذافقط یک‌میله‌ٔاتصال برای‌ایجاد شبکه‌ای مرکب لازم دارند، در حالت (د)و به‌جای میله اتصال بین خرپاهای A و B از یک خرپای ساده C استفاده شده است.

پس از آن‌که اعضای مختلف خرپا آرایش لازم را برای تشکیل یک‌خرپای‌مرکب پیداکرد. کل شبکه را می‌توان به‌همان طریق خرپای ساده بر تکیه‌گاههای لازم قرار داد.



شکل ۴-۴ خرپاهای مرکب

۴ ـ ۴ علائم قراردادی در تعیین تنش خرپاها

قبل از این‌که به‌بحث تعیین تنش در خرپاها بپردازیم لازم است که علامت‌گذاری مشخصی را برای نیروی میله‌ها در اعضاء یک خرپا تعیین کنیم.

هر عضوی از یک خرپا را توسط اسامی گرههای انتهایش مشخص خواهیم کرد، حرف F

برای نشان‌دادن نیروی میله در یک عضو به‌کار برده خواهد شد و برای آن زیرنویسی که بیانگر میله باشد قائل خواهیم شد به‌این‌ترتیب F_{ah} نشان‌دهنده نیروی میله درعضو ah می‌باشد. اغلب مقادیرنیروی میله در اعضای یک خرپا را به‌صورت جدول ویا درطول اعضای خرپا که توسط یک خط در نمودار خرپا نشان داده شده است درج کرده‌ایم، به‌این منظور راحت‌تر خواهیم بود اگر *قرارداد* مشخصی *برای تعیین نوع تنش در یک عضو را* *به‌صورتی که* معلوم شود تنش *داخلی*آن *کششی است یا فشاری*معلوم *کنیم*، *راحت‌ترین*قرارداد به‌کاربردن *علامت*مثبت *(+)برای کشش و علامت* منفی *(−)برای فشارمی‌باشد*. به‌این‌ترتیب ۱۰+ به‌معنی کششی به‌مقدار ۱۰ و ۱۰− به‌معنی فشاری برابر با ۱۰ می‌باشد، علت این‌که علامت مثبت را برای نیروی کششی برگزیده‌ایم این‌است که‌چون‌نیروی کششی سبب ازدیاد طول میله می‌شود لذا نیرویی مثبت سبب تغییری مثبت در طول می‌شود و برعکس آن نیروی فشاری میله یا نیروی منفی میله سبب نقصان‌طول میله و یا سبب تغییری منفی در طول میله می‌گردد.

در تعیین تنش خرپاها اغلب کارکردن با دو مولفه قائم نیروی میله به‌مراتب‌راحت‌تراز کارکردن با خود نیروی میله است، به‌این جهت دوجهت عمود برهم x و y را (که معمولاً" به‌ترتیب افقی و قائم گرفته می‌شوند) انتخاب کرده‌ایم و در این صورت دو مولفه‌متناظرمیله ah به‌ترتیب با X_{ah} و Y_{ah} نشان داده‌می‌شوند، برای دانشجویان بسیارمهم‌است‌که به‌روابط بین نیرو ومولفه‌های آن‌کاملاً"تسلط داشته باشند، این‌روابط تا حد زیادی در محاسبه‌خرپاها مهم هستند و لذا دانشجویان باید عملیات با آنها را به‌راحتی انجام دهند، به‌این جهت برخی از این روابط‌را در اینجا یادآوری می‌کنیم، با در نظر داشتن این که نیروی میله در راستای محور عضو عمل می‌کند گفتار زیر بخودی خود صادق خواهد بود.

۱ــ *مولفهٔ افقی (یا قائم)* یک نیروی میله *برابر است با حاصل‌ضرب* نیروی میله در نسبت تصویر *افقی (یا قائم)*آن عضو *بر طول* آن عضو

۲ــ نیروی میله یک عضو *برابر است با حاصل‌ضرب* مولفه *افقی (یا قائم)*آن در نسبت *طول* عضو به‌تصویر *افقی (یا قائم)* آن عضو.

۳ــ مولفه *افقی* یک نیروی میله *برابراست باحاصل‌ضرب* مولفه‌قائم آن درنسبت‌تصویر تصویر *افقی* عضو به‌تصویر *قائم* عضو و برعکس

اصل زیر نیز در محاسبات نیروی میله‌ها مهم و مفید می‌باشد.

۴ــ در نوشتن *معادلات تعادل* یک جسم منفک‌شده *(از یک سازه یا خرپا)*، هر نیرویی *را* می‌توان به‌دو مولفه *قائم* و *افقی* آن به‌طوری که هردوی *این مولفه‌ها از نقطه‌ای‌که روی‌خط اثر* نیرو *قرار داشته* و نقطهٔ مناسبی *برای تسهیل در محاسبات می‌باشد* تجزیه نمود.

۴ ــ ۵ نظریه تحلیل تنش خرپاها

برای تعیین قابلیت یک خرپا در تحمل بارگذاری، ابتدا باید مقدار نیروهای میله را که در اثر بارگذاری در اعضاء خرپا بوجود می‌آید محاسبه نمود. روش اساسی مطالعه تنش داخلی در هر جسمی یکسان است چه آن جسم یک تیر باشد و چه یک خرپا و یا سازه دیگری. برای یک خرپا، این روش شامل گذرانیدن برشی مجازی از چند میله و آزادنمودن قسمت مناسبی از خرپا می‌شود، در این حالت برمقاطع داخلی که توسط برش ظاهرمی‌شوند تنشهای داخلی اثر می‌کنند، در حالتی که عضو برش خورده مربوط به‌یک خرپای ایده‌آل باشد این تنشها فقط یک نیروی محوری است که همان نیروی میله عضو می‌باشد.

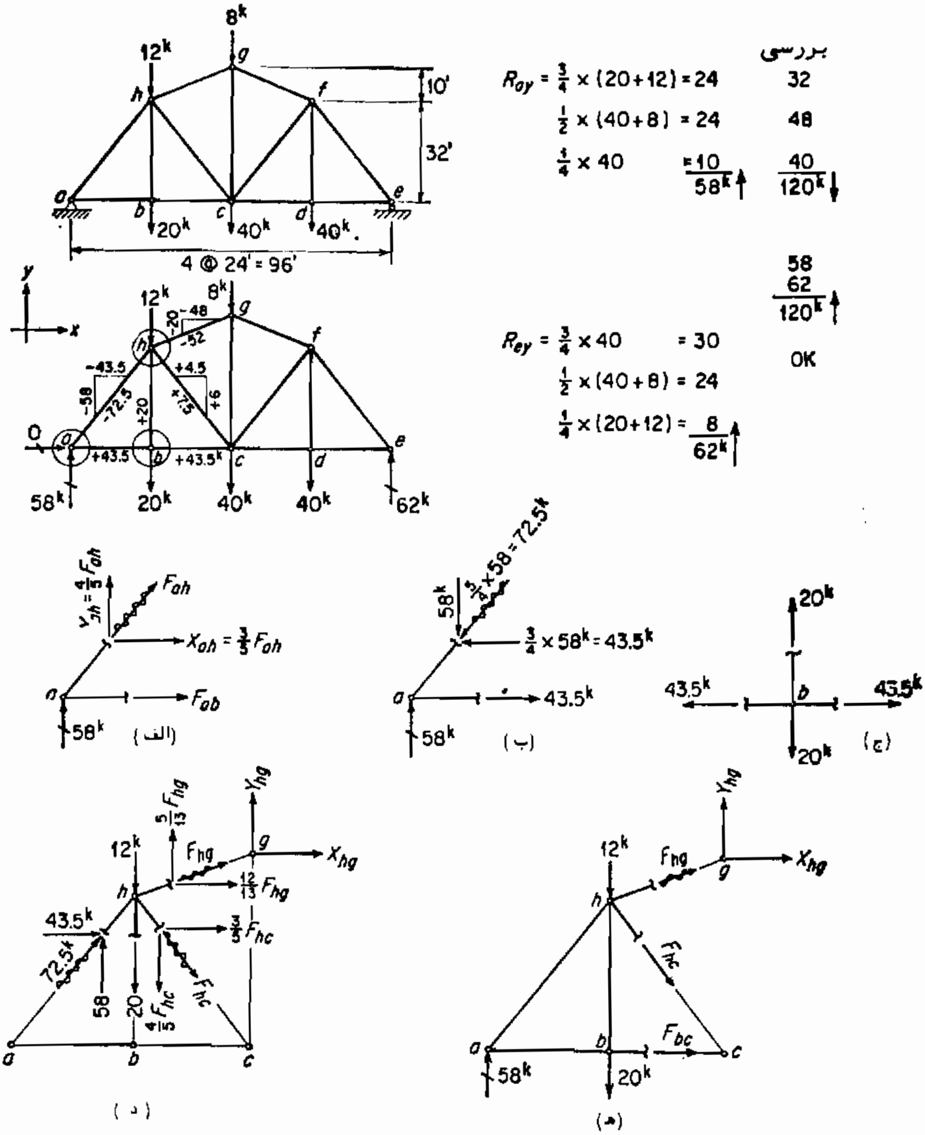
اگر کل خرپا درحالت تعادل استاتیکی باشد به‌ناچار هرقسمت جداشده ازآن نیزباید در تعادل باشد، هر قسمت جداشده از خرپا تحت اثر دستگاه نیرویی که ممکن است شامل چند نیروی خارجی به‌اضافه‌نیروی میله‌ها که برمقاطع برش خورده‌اعضاءاثر می‌کنند می‌باشد، اغلب می‌توان قسمت آزادشده از خرپا را به‌نوعی برید که هرقسمت آزادشده فقط تعداد محدودی نیروی میله نامعلوم‌داشته باشد تا بتوان با تأمین معادلات تعادل استاتیکی به‌تعیین آنها پرداخت.

این عملکرد را می‌توان باملاحظه مثال مشخصی نظیرخرپای سازه‌شکل (۴ــ۵) به‌سادگی توضیح داد، تکیه‌گاههای این خرپا به‌نوعی است که عکس‌العملهای آن چنانکه در شکل می‌بینیم به‌سادگی توسط روابط‌تعادل قابل محاسبه است، حال به‌محاسبه نیروی میله‌های این خرپا می‌پردازیم، برش مجازی اطراف گره a را در نظر می‌گیریم این برش‌میله‌های ah و ab را بریده و به‌این ترتیب گره a را کاملا" از بقیه خرپا به‌نحوی که در پیکرآزاد (a) از شکل (۴ ــ ۵) ــ می‌بینیم جدا می‌کند.

چنین گره آزادشده‌ای یک جسم تحت اثر دستگاه نیروی متقارب خواهد بود زیرا کلیه نیروی میله‌ها مربوط به‌یک خرپای ایده‌آل بوده و کلیه خطوط‌اثر نیروهای خارجی‌از مرکزگره آزاد شده می‌گذرد. چون برآیند یک دستگاه‌نیروی متقارب نمی‌تواند یک‌لنگرباشد بنابراین اگر $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ باشد آن دستگاه نیرو در تعادل خواهد بود. لذا اگر درگره‌مورد نظر فقط دونیروی میله‌مجهول باشد و خطوط‌اثر این‌دو نیرو هم‌راستا نباشند بااین دوشرط تعادل استاتیکی که دو معادله مستقل هستند می‌توان به‌مقدار آن‌دونیروی مجهول‌رسید. اگر در گره بیش از دونیروی میلهٔ مجهول موجود باشد مقادیر مجهول را نمی‌توان توسط‌این‌دو

معادله بلافاصله به‌دست آورد*.

در این حالت، گره آزادشده a تحت اثر عکس‌العمل معلوم و دونیروی میله مجهـول



شکل ۴ـ۵ تحلیل یک خرپای ساده

* سئوال، اگر این دو نیروی میله دارای یک راستا باشند آیا این دو معادله سازگار و مستقل خواهند بود.

F_{ah} و F_{ab} می‌باشد و چون شیب اعضاء معلوم است مانند نمودار a مولفه‌های افقی و قائم دونیروی میله‌ٔ مجهول را می‌توان برحسب نیروی میله چنانکه در شکل می‌بینیم بیان کنیم. با فرض کششی بودن هردوی F_{ah} و F_{ab} دو معادله تعادل استاتیکی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت .

(الف) $$\Sigma F_y = 0,\ +\uparrow,\ 58 + \tfrac{4}{5}F_{ah} = 0$$

(ب) $$\Sigma F_x = 0,\ \overset{\rightarrow}{+},\ \tfrac{3}{5}F_{ah} + F_{ab} = 0$$

از معادله (الف) داریم :

$$F_{ah} = -72.5 \text{ kips}$$ (فشار)

و سپس از معادله (ب) خواهیم داشت :

$$F_{ab} = -\tfrac{3}{5}F_{ah} = -(\tfrac{3}{5})(-72.5) = +43.5 \text{ kips}$$ (کشش)

پس مولفه‌های F_{ah} خواهد شد .

$$X_{ah} = (\tfrac{3}{5})(-72.5) = -43.5 \text{ kips}$$
$$Y_{ah} = (\tfrac{4}{5})(-72.5) = -58 \text{ kips}$$

به‌این‌ترتیب علامت منفی F_{ah} نشان می‌دهد که جهت F_{ab} خلاف آنچه قبلاً فرض شده‌است می‌باشد (یعنی فشاری‌است) و در صورتی‌که علامت مثبت F_{ab} نشان‌دهنده انتخاب درست جهت آن است (یعنی کششی است) دیده می‌شود که علامت نیروها به‌صورت خود به خودی با علائم قراردادی قبول شده برای مشخصات تنشها تطابق پیدا می‌کند . حال این پاسخها را باید در روی نمودار خطی خرپا به‌صورت -72.5 و $+43.5$ درج نمود . علامتهای این اعداد نشان‌دهنده نوع تنشهاست ، مولفه‌های نیروی میله ah را می‌توان به‌صورتی‌که‌در شکل می‌بینیم روی نمودار خطی درج نمود .

چنین سازگاری درعلامت پاسخهای به‌دست‌آمده‌را می‌توان همواره با فرض‌کششی‌بودن نیروی میله‌های مجهول در تشکیل معادلات تعادل برای پیکر آزاد گرهها حفظ نمود . اگر چنین کنیم در صورتی که پاسخ به‌دست‌آمده مثبت باشد نشان می‌دهد که جهت انتخابی صحیح بوده و بنابراین کششی‌است در حالی‌که‌علامت منفی نشان‌دهنده‌نادرست‌بودن جهت انتخابی و لذا فشاری‌بودن آن است و به‌این ترتیب علامت پاسخها به‌صورت خودبخودی با

علائم قراردادی تطابق پیدا می‌کند.

از روش محاسباتی به‌کار رفته می‌توان برای تعیین نیروی میله‌های مجهول درهرگرهی که در آن فقط دو نیروی میلهٔ مجهول وجود داشته باشد استفاده کرد.

در خرپای مورد بحث تعیین سایر نیروی میله‌ها را می‌توان با جداکردن‌به‌نوبت گرهها با انتخابی که در طی آن کلیه نیروی میله‌های اعضای گره بعدی بجز دو عضو (یا کمتر) آن در محاسبات قبلی معلوم شده باشد انجام داد.

بدیهی است که لازم است این دونیروی میله مجهول دارای دو خط اثر متفاوت باشند. فنی که طی آن توسط برشی، یک گره را از بقیه خرپا جدا می‌کنیم بـه روش *گرهها* معروف است.

گاهی مناسبتر این است‌که توسط برشی، قسمتی‌از خرپا را که دارای‌چندین‌گره‌می‌باشد جدا کنیم، چنین فن برش خرپا را روش *مقاطع* گویند. قسمت جداشده که شامل چند گره از خرپا می‌باشد مانند جسمی خواهد بود که تحت اثر دستگاه نیرویی غیـرمتقارب قرار دارد که این نیروها می‌تواند شامل چند نیروی خارجی و هم‌چنین نیروی میله‌ها در اعضاء بـرش خورده باشد، برای حفظ تعادل قطعه‌جداشده می‌بایستی سه‌معادله $\Sigma F_x = 0$ ، $\Sigma F_y = 0$ و $\Sigma M = 0$ توسط کلیه نیروهای مؤثر براین‌قسمت خرپا تأمین گردند. بنابراین اگر در این قسمت فقط سه نیروی میله مجهول داشته باشیم و این سه‌نیرو نه با یکدیگر موازی باشنـد و نه متقارب مقادیر آن سه‌نیروی مجهول را می‌توان توسط این سه‌معادله تعادل به‌دست‌آورد.

نمونه‌ای ازعملکرد به‌طریقهٔ روش مقاطع را در پیکرآزاد(هـ)از شکل (۴ـ۵)نشان‌داده‌ایم در این‌حالت برشی میله‌های hg ، hc و bc را قطع کرده و به‌این طریق قسمت طرف چپ خرپا توسط این برش جداشده است و می‌توان نیروهای مجهول در میله‌های بریده‌شده را با حل سه‌معادله تعادل برای قسمت جداشده به‌دست آورد. در مباحث قبلی که‌از تعیین عکس‌العملها صحبت‌می‌کردیم دیدیم‌که اغلب می‌توان با عمال ابتکاری در نوشتن معادلات تعادل در مورد نیروهای غیرمتقارب حل مساله را ساده‌کرد مثلاً"برای این‌که‌مقدار F_{ag} را پیدا کنیم می‌توان نسبت به‌نقطهٔ c که نقطه مقاطع F_{hc} و F_{bc} می‌باشد لنگـرگیری نمود و F_{hg} را نیز به‌مولفه‌های افقی و عمودی‌اش در نقطهٔ g تجزیه کرد و به‌این‌ترتیب‌فقط X_{hg} در معادله لنگر داخل می‌شود، و

$$\Sigma M_c = 0, \curvearrowright +, (X_{hg})(42) + (58)(48) - (32)(24) = 0$$

از اینجا $X_{hg} = -48$ به‌دست می‌آید و با تناسب‌گیری $Y_{hg} = -20$ و $F_{hg} = -52.$ می‌شود به‌روشی مشابه خواهیم داشت

$$\Sigma M_h = 0, \curvearrowright^{+}, (58)(24) - (F_{bc})(32) = 0$$

ازآنجا $F_{bc} = +43.5$. می‌گردد و سپس یکی از دو معادله $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ رامی‌توان برای تعیین مولفه افقی یا عمودی F_{hc} به‌ترتیب به‌کار برد .

$$\Sigma F_x = 0, \xrightarrow{+}, X_{hc} + 43.5 - 48 = 0$$

بنابراین $X_{hc} = +4.5$ خواهد شد و با تناسب‌گیری $Y_{hg} = +6$ و $F_{hg} = +7.5$ می‌شود . واضح است که با نوشتن هرسه معادله مستقل تعادل می‌توان این سه‌نیروی مجهول را محاسبه نموده البته اگر ابتکارلازم در کاربرد این سه‌معادله انجام نگیردممکن است‌هریک از سه‌معادله دارای سه‌مجهول بوده و حل‌مساله منجر به‌حل دستگاه‌معادله سه‌مجهولی‌گردد ، در صورتی که چنانکه در بالا دیدیم ممکن است این سه معادله را به‌نحوی به‌کاربردکه هریک ازآنها فقط یک مجهول داشته باشد .

۴ ـ ۶ کاربرد روش گرهها و روش مقاطع

در مبحث قبلی از هردو روش گرهها و مقاطع از معادلات موجود به‌صورت نظام یافته استفاده کردیم ، در صورتی که چنین عملکردی اغلب غیرضروری است ،برای مثال گره a را که در مبحث قبلی برای شرح روش گرهها برگزیدیم در نظر بگیرید ، ایـن گره را مانند پیکر آزاد b از شکل (۴ـ۵)درنظر داشته باشید با دقت درآن می‌بینیم‌برای این‌که $\Sigma F_y = 0$ تأمین‌گردد ،مولفه عمودی میله ah باید بانیرویی برابربا نیروی عکس‌العمل‌یعنی 58 kips به‌طرف پائین فشار آورد تا این‌که نیروی عکس‌العمل را متعادل سازد ، بنابراین می‌تـوان با تناسب‌گیری مقادیر مولفه افقی و خود نیروی میله را به‌ترتیب برابربا 43.5 و 72.5 به‌صورت فشاری درجهتهای نشان داده‌شده به‌دست آورد . چون مولفه افقی در ah معلوم شده است واضح است برای این‌که $\Sigma F_x = 0$ تأمین گردد باید نیروی میله ab نیرویی کششی برابر با 43.5 و به‌طرف راست باشد تا بتواند مولفه افقی ah را که بطرف چپ جهت‌دارد متعادل کند .

چون نیروی میله در ab معلوم شده است پیداکردن نیروهای bc و bh با ایجادبرشی جهت جداکردن گره b چنانچه در پیکرآزاد c از شکل (۴ـ۵) می‌بینیم امری ساده خواهد بود ،دوباره با همین روش می‌توان این حالت ساده‌را نیز جهت تعیین دونیروی‌میله‌مجهول F_{bc} و F_{bh} به‌کار برد ، برای تأمین $\Sigma F_x = 0$ واضح است که F_{bc} باید نیرویی‌کششی‌برابر با

43.5- بوده و برای تأمین $\Sigma F_y = 0$ ، F_{bh} باید نیرویی کششی برابر با 20 باشد .

اگر گره h را نیز به‌نحوی که در پیکر آزاد d دیده می‌شود با برشی که چهارمیله که در آن دومیله دارای مقدار نیروی میلهٔ معلوم و دومیلهٔ دیگر مقدار نیروی میله‌نامعلوم دارد جدا کنیم مقدار این دومجهول را می‌توان با تأمین شرایط تعادل $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ برای گره آزادشده محاسبه نمود . با فرض این‌که دونیروی مجهول کششی باشند دو معادله فوق به‌صورت زیر نوشته خواهد شد :

$$\Sigma F_x = 0, \overset{\rightarrow}{+}, \tfrac{12}{13}F_{hg} + \tfrac{3}{5}F_{hc} + 43.5 = 0$$
$$\Sigma F_y = 0, +\uparrow, \tfrac{5}{13}F_{hg} - \tfrac{4}{5}F_{hc} - 12 - 20 + 58 = 0$$

در این حالت متأسفانه هریک از دومعادله دارای دومجهول هستند لذا لازم است که این دستگاه معادلات را به‌طور همزمان جهت تعیین مقادیر آنها حل کنیم ، البته این دومجهول را می‌توان با راحتی کامل به‌روش فوق به‌دست آورد ولی بهتر است به‌مزایای عمل به صورت زیر دقت کنیم :

در بحثی که در باره محاسبه عکس‌العملها در فصل ۲ داشتیم گفتیم که اغلب بهتر است که یک یا هردوی $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ را با یک یا دو معادله لنگرجایگزین کنیم. به‌چنین فن مشابهی نیزدر حالت گره آزاد h نیازمندیم فرض کنید که در پیکر آزاد d موقعیت گرههای a ، c و g مانندشکل نشان داده شده باشد ، دراین حالت $\Sigma M_c = 0$ را می‌توان به‌جای $\Sigma F_y = 0$ و یا $\Sigma F_x = 0$ به‌کار برد . لنگرگیری حول نقطه c نه‌تنها F_{hc} را از معادله‌حذف می‌کند بلکه محاسبه ساده لنگرهای نیروی میله‌های ah و hg را ممکن می‌سازد . نیروی این دومیله‌را می‌توان به‌مولفه‌های عمودی و افقی به‌ترتیب درگرههای a و g تجزیه‌نمود ، به‌این طریق فقط مولفه عمودی F_{ah} و مولفه افقی F_{hg} در معادله لنگر داخل می‌شوند و بازوی اهرم این دو مولفه نیز به‌سادگی محاسبه می‌گردد ، به‌این ترتیب :

$$\Sigma M_c = 0, \overset{\curvearrowleft}{+}, (X_{hg})(42) + (58)(48) - (32)(24) = 0 \qquad \therefore X_{hg} = -48$$

و با تناسب‌گیری $Y_{hg} = -20$ و $F_{hg} = -52$ به‌دست می‌آید .

چون F_{hg} با دو مولفه‌اش معلوم می‌باشد بااستفاده از $\Sigma F_x = 0$ یا $\Sigma F_y = 0$ می‌توان براحتی به‌ترتیب مولفه‌های افقی و یا عمودی نیروی میله hc را مستقیما" به‌دست آورد . برای مثال چون $X_{hg} = -48$ است پس مولفه افقی در hc باید به‌طرف راست بوده ومقداری برابر با 4.5 kips داشته باشدتا مقدار 43.5 kips میله ah را به‌کمک $\Sigma F_x = 0$ متعادل سازد، این بدان معنی است که میله به‌کشش کار می‌کند و پس از آن با نسبت‌گیری به‌ترتیب نیروی

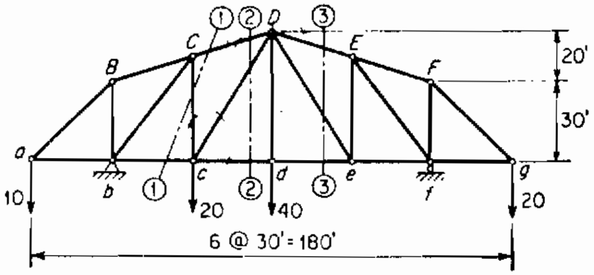
میله و مولفه عمودی آن برابر با ‎+7.5‎ و ‎+6.0‎ به‌دست خواهد آمد . حال صحت کلیه‌این محاسبات را می‌توان با تأمین رابطه $\Sigma F_y = 0$ وارسی نمود .

در مثالهای عددی زیر فن و ابتکار دیگری جهت سرعت بخشیدن به‌کار روش گرهها و مقاطع به‌کار برده شده است ، در چندمثال نخستین در جزئیات کامل پیکر آزاد گرههانشان داده شده است ولی برای این‌که دانشجویان را قادر سازیم تا در موارد ممکن خود به پیکر آزاد گرهها بپردازند در مثالهای بعدی از چنین نمایشی خودداری شده است ،درمواردی‌که محاسبات عددی بدون روش نظام یافته راحتتر است از آن طریق استفاده کرده‌ایم ولی‌اگر دانشجویان چنین روشهای میان بری را مشکل بیابند لازم است که پیکر آزاد لازم را رسم و معادلات اساسی تعادل‌را برای آن برقرارکنند . دانشجویان بایستی درک کنندکه‌منظورعمده بسط قدرت دید در تجسم پیکر آزاد لازم و حل معادلات تعادل به‌طریقه غیرنظام یافته می‌باشد ولی بایدبدانند که حتی افراد مجرب هم در مواردی‌که درمساله‌ای سردرگم می‌شوند و یا این‌که به‌مساله مشکلی برخورد می‌نمایند به‌رسم پیکر آزاد لازم و نوشتن معادلات می‌پردازند .

همچنین دانشجویان باید با دقت تمام به‌فن رسم پیکر آزاد قسمت‌های جدا شده‌از خرپا توجه نمایند کلیه نیروهای میله‌هایی که مقادیر و جهت آنها در محاسبات قبلی معلوم شده است باید در همهٔ نمودارهای بعدی با مقدار و جهت خود رسم شوند .به‌عنوان مثال در رسم پیکرآزاد d از شکل (۴ـ۵) نیروی میله‌های ah و bh قبلا" محاسبه شده‌ومقادیرآن روی نمودارخطی‌خرپا بااعداد ‎−72.5‎ و‎+20‎به‌ترتیب‌درج شده‌است پس درنمایش‌نیروهایی مؤثر بر انتهای این دو میله باید نیروی رسم شده انتهای میله ah را به‌طرف h فشار داده و انتهای میله bh را از گره با کشش دور کند . پس از آن‌که جهت نیروی میله توسط پیکان نشان داده شد مقدار آنها را می‌توان با اعداد ساده یعنی با 72.5 و 20 به‌جای ‎−72.5‎ و ‎+20‎ نمایش داد .به‌طوری‌که در مبحث قبل پیشنهاد شد در پیکر آزاد جسم نیروهای‌مجهول میله‌ها را با فرض کششی‌بودن رسم نموده‌ایم .

پس از آنکه مقدار نیروی میله‌را در روی نمودارخطی خرپا درج کردیم رسم پیکان‌در دو انتهای عضو به‌منظور نشان‌دادن جهت اثر نیروی داخل عضو به‌گره مفید خواهد بود . در این فصل در درج نیروی میله‌ها ما نیز چنین روشی را دنبال خواهیم کرد .

مثال ۴ـ۱= نیروهای میله را در اعضاء Cc ، CD ، cD و DE خرپای زیر که تحت اثر بارهای نشان‌داده شده می‌باشد محاسبه کنید .



$\Sigma M_b = 0, \curvearrowright +$

$20 \times 1 = 20$

$40 \times 2 = 80$

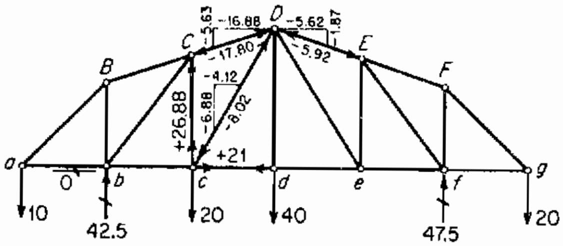
$20 \times 5 = \underline{100}$

200

$-10 \times 1 = \underline{-10}$

190

$R_{fy} = \underline{47.5} \uparrow$



$\Sigma M_f = 0, \curvearrowright +$

$40 \times 2 = -80$

$20 \times 3 = -60$

$10 \times 5 = \underline{-50}$

-190

$20 \times 1 = \underline{20}$

-170

$R_{by} = \underline{42.5} \uparrow$

$\Sigma F_y = 0, \uparrow +$

$47.5 + 42.5 - 10 - 20 - 40 - 20 = 0$

$\Sigma M_m = 0, \curvearrowright +$

$10 \times 2 = +20$

$42.5 \times 3 = \underline{-127.5}$

$-107.5 \curvearrowleft$

$\therefore F_{Cc} = + \frac{107.5}{4} = \underline{+26.88}$

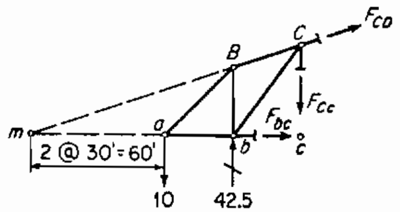
برش ①-① میله Cc CD

$\Sigma M_c = 0, \curvearrowright +$

$42.5 \times 1 = +42.5$

$10 \times 2 = \underline{-20}$

$+22.5 \curvearrowleft$



$\therefore X_{CD} = \frac{-(22.5)(30)}{40} = \underline{-16.88}$

$\therefore F_{CD} = -(16.88)\left(\frac{31.63}{30}\right) = \underline{-17.80}$

برش ②-② میله cd cD

$\Sigma M_m = 0, \curvearrowright +$

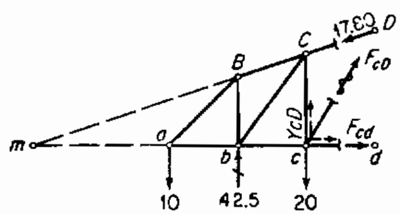
$10 \times 2 = +20$

$20 \times 4 = \underline{80}$

$+100$

$42.5 \times 3 = \underline{-127.5}$

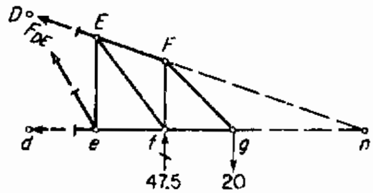
$-27.5 \curvearrowleft$



$\therefore Y_{cD} = \frac{-27.5}{4} = \underline{-6.88}$

$\therefore F_{cD} = -6.88 \times \frac{58.3}{50} = \underline{-8.02}$

Bar DE Section ③ - ③



$$\Sigma M_D = 0, \curvearrowright^{+}$$
$$20 \times 1 = -20$$
$$10 \times 3 = \underline{-30}$$
$$-50$$
$$42.5 \times 2 = \underline{+85}$$
$$+35 \curvearrowright$$
$$\therefore F_{cd} = +35 \times \frac{30}{50} = \underline{\underline{+21}}$$
$$\Sigma M_e = 0, \curvearrowright^{+}$$
$$47.5 \times 1 = -47.5$$
$$20 \times 2 = \underline{+40}$$
$$-\ 7.5 \curvearrowright$$
$$\therefore X_{DE} = -7.5 \times \frac{30}{40} = \underline{\underline{-5.62}}$$
$$\therefore F_{DE} = -5.62 \times \frac{31.6}{30}$$
$$= \underline{\underline{-5.92}}$$

بحث

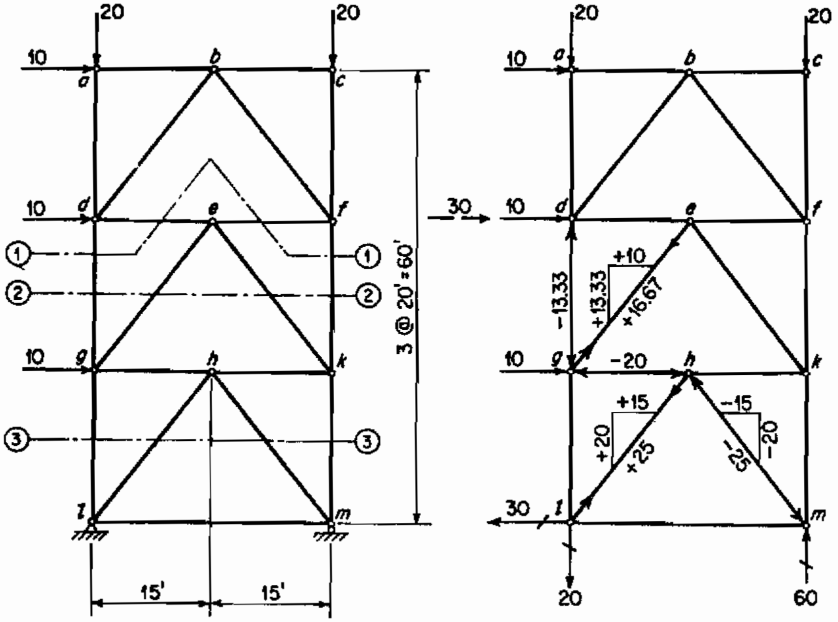
توجه شود که پس از محاسبه نیرو در Cc مولفه عمودی نیرو در cD را می‌تـوان به‌سادگی با جدانمودن گره c محاسبه نمود ، همچنین توجه شود که پس از معلوم شدن نیرو در cD مولفه عمودی در CD را می‌توان از طریق $\Sigma F_y = 0$ بجای $\Sigma M_c = 0$ و با در نظرگرفتن پیکر آزاد با برش 2-2 محاسبه نموده با همان پیکر آزاد پس ازمعلوم شدن نیرو در CD نیروی cd را می‌توان با به‌کاربردن $\Sigma F_x = 0$ محاسبه کرد .

نیرو در عضو DE را می‌توان با جداکردن قسمت راست یا چپ خرپا توسط برش 3-3 به‌دست آورد در اینجا قسمت سمت راست را به‌دلیل کم‌بودن مقدار بارهـای مؤثر خارجی انتخاب کرده‌ایم .

در کلیه این محاسبات لنگرنیروهای عمودی را با تعداد فواصل پانلهـا محاسبه کرده‌ایم و در زمان مقتضی فاصله پانل را که برابر $30\,ft$ می‌باشد در آخر محاسبات منظورکرده‌ایم ،این چنین ابتکاری کارمحاسباتی را به‌مقدارقابل توجهی‌ساده‌می‌سازد.

مثال ۴–۲= نیروی میله را در اعضای Cc ، CD ، cD و DE محاسبه کنید .

$$\Sigma M_1 = 0, \curvearrowright^{+}$$
$$(20)(30) = 600$$
$$(30)(40) = \underline{1{,}200}$$
$$1{,}800 \curvearrowright$$



$$\therefore R_{my} = \underline{60} \uparrow$$

$$\Sigma M_m = 0, \curvearrowright +$$

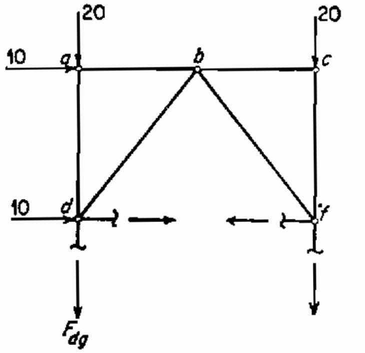
$$\begin{aligned} (30)(40) &= +1{,}200 \\ (20)(30) &= \underline{-\ \ 600} \\ &\quad + \ \ 600 \curvearrowright \end{aligned}$$

$$\therefore R_{ly} = \underline{20} \downarrow$$

وارسی توسط $\Sigma F_y = 0, +\uparrow$

$$-20 - 20 + 60 - 20 = 0$$

برش ①-① میله dg:

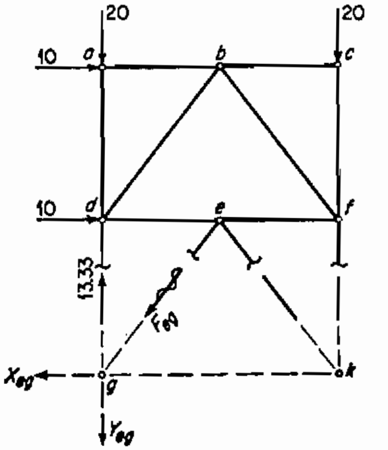


$$\Sigma M_f = 0, \curvearrowright +$$

$$\begin{aligned} (10)(20) &= +200 \\ (20)(30) &= \underline{-600} \\ &\quad -400 \curvearrowright \end{aligned}$$

$$\therefore F_{dg} = -\frac{400}{30} = \underline{-13.33}$$

برش ②-② میله eg:



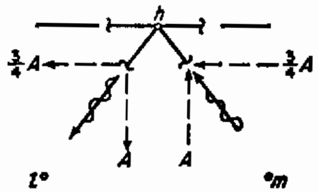
$\Sigma M_k = 0,\ \curvearrowleft +$

$$\begin{array}{lcr} (13.33)(30) & = & +400 \\ (10)(20) & = & +200 \\ (10)(40) & = & \underline{+400} \\ & & +1{,}000 \\ (20)(30) & = & \underline{-600} \\ & & +400 \curvearrowleft \end{array}$$

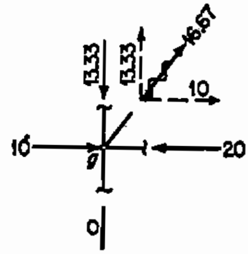
$$\therefore\ Y_{eg} = \frac{400}{30} = \underline{+13.33} \qquad X_{eg} = \underline{+10}$$

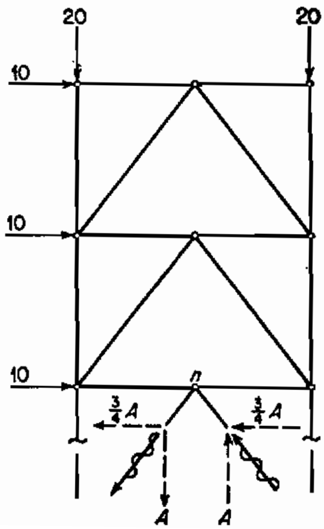
$$F_{eg} = \underline{+16.67}$$

حال قسمتی را که در بالای برش g-g جدا شده است در نظر بگیرید ، از $\Sigma F_y = 0$ مقدار Y_{lh} می‌بایستی برابر ولی در در خلاف جهت Y_{hm} باشد و بدین ترتیب اگر $Y_{lh} = A$ فرض شود $Y_{hm} = -A$ خواهد بود .



گره g میله gh





بدین ترتیب از $\Sigma F_x = 0,\ \overrightarrow{+}$ داریم :

$$10 + 10 + 10 - \tfrac{3}{4}A - \tfrac{3}{4}A = 0 \qquad A = 20$$

$$\therefore\ X_{lh} = +15 \qquad and \qquad X_{hm} = -15$$

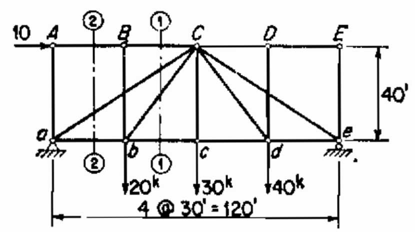
$$Y_{lh} = +20 \qquad Y_{hm} = -20$$

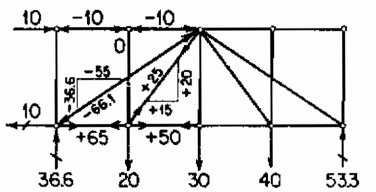
$$F_{lh} = \underline{+25} \qquad F_{hm} = \underline{-25}$$

بحث

اگر بخواهیم کلیه نیروی میله‌ها را در اعضای خرپا محاسبه‌کنیم و در این محاسبه از روش گرهها استفاده شود باید به‌ترتیب به‌آزاد ساختن گرهها با نوبتهای $a, c, b, d, f, e, g, k, h, l, m$ بپردازیم. در این خرپا شاید این مفیدترین روش برای یافتن نیروی میله‌ها باشد، ولی اگرمحاسبه تعداد بخصوصی‌از نیروی میله‌ها موردنیاز باشد محاسبه را می‌توان به‌طریقی که در این مثال شرح داده شده است به‌عمل‌آوریم.

مثال ۳ــ۴= نیروی میله‌ها را در اعضاء bc، BC و bC و aC محاسبه کنید.





$$
\begin{aligned}
&\Sigma M_a = 0, \curvearrowright\!+ \\
&10 \times \tfrac{4}{3}p = +13.\dot{3}p \\
&20 \times 1p = 20\ p \\
&30 \times 2p = 60\ p \\
&40 \times 3p = \underline{120\ p} \\
&\qquad\qquad +213.\dot{3}p \\
&\therefore R_{ey} = \underline{53.\dot{3}} \updownarrow \\
&\Sigma M_e = 0, \curvearrowright\!+ \\
&20 \times 3p = -60p \\
&30 \times 2p = -60p \\
&40 \times 1p = \underline{-40p} \\
&\qquad\qquad -160p \\
&10 \times \tfrac{4}{3}p = \underline{+13.\dot{3}p} \\
&\qquad\qquad -146.\dot{6}p \\
&\therefore R_{ay} = \underline{36.\dot{6}} \updownarrow
\end{aligned}
$$

وارسی

$$\Sigma F_y = 0, \uparrow+, 36.\dot{6} - 20 - 30 - 40 + 53.\dot{3} = 0$$

میله bc : قسمت طرف چپ برش ۱ــ۱

$$
\begin{aligned}
\Sigma M_C = 0, \curvearrowright\!+, 36.\dot{6} \times 2p &= 73.\dot{3}p \\
20 \times 1p &= \underline{-20.0p} \\
&\frac{53.\dot{3}p + 10 \times 40}{40} \\
&= F_{bc} = \underline{+50}
\end{aligned}
$$

میله BC : گره A را آزاد کنید و سپس گره B را $\qquad F_{BC} = \underline{-10}$

میله aC : قسمت طرف چپ برش 2-2 :

$$\Sigma F_y = 0 \quad \therefore Y_{aC} = -36.\dot{6}$$

$$\therefore F_{aC} = \frac{\sqrt{3^2 + 2^2}}{2}(-36.\dot{6}) = \underline{-66.1}$$

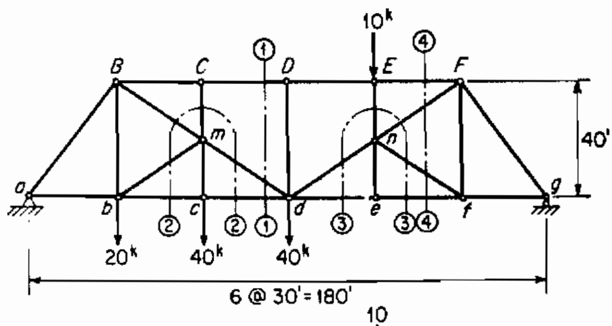
میله bC : قسمت چپ برش ۱ـ۱ : با معلوم بودن تنش در aC از رابطه $\Sigma F_y = 0$ داریم :

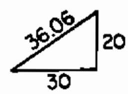
$$\therefore Y_{bC} = \underline{+20}$$

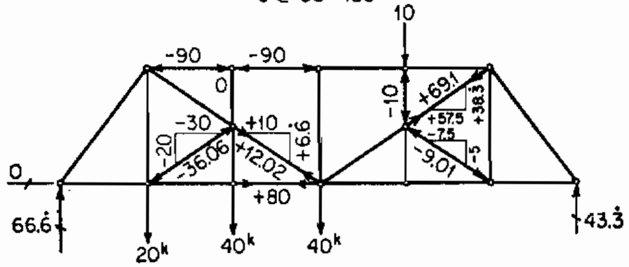
یا از گره B ، $F_{Bb} = 0$ و سپس از گره b با رابطه : $\Sigma F_y = 0$ داریم :

$$\therefore Y_{bC} = \underline{+20}$$

مثال ۴ـ۴ : نیروی میله‌را در اعضاء cd ، BC ، bm ، nf ، nF و md محاسبه کنید .







$$\begin{array}{rcl} \Sigma M_a = 0, & & \\ 20 \times 1 &=& 20 \\ 40 \times 2 &=& 80 \\ 40 \times 3 &=& 120 \\ 10 \times 4 &=& \underline{40} \\ & & 260 \\ R_{gy} &=& 43.\dot{3} \uparrow \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \Sigma M_g = 0, & & \\ 10 \times 2 &=& 20 \\ 40 \times 3 &=& 120 \\ 40 \times 4 &=& 160 \\ 20 \times 5 &=& \underline{100} \\ & & 400 \\ \therefore R_{ay} &=& 66.\dot{6} \uparrow \end{array}$$

میله cd : قسمت طرف چپ برش ۱—۱

$$\Sigma M_B = 0,\ \overset{\frown}{+},\ 66.\dot{6} \times 1p + 40 \times 1p = 106.\dot{6}p$$
$$\therefore F_{cd} = \underline{+80}$$

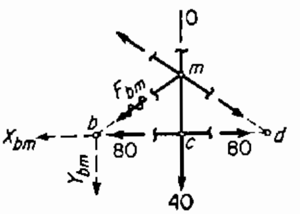
میله BC : همان قسمت

$$\Sigma M_d = 0,\ \overset{\frown}{+},$$
$$66.\dot{6} \times 3p - 40 \times 1p - 20 \times 2p = 120p \qquad \therefore F_{CD} = \underline{-90}$$

گره C را جدا کنید : $\quad$ $F_{BC} = \underline{-90}$,

میله bm : آزادکردن گره C نشان می‌دهد که : $\quad F_{Cm} = 0$

حال قسمت جداشده توسط برش $2\text{-}2$ را در نظر بگیرید :



$$\Sigma M_d = 0,\ \overset{\frown}{+},\ +40 \times 1p = +40p$$
$$\therefore Y_{bm} = \underline{-20}$$
$$\therefore X_{bm} = \underline{-30}$$
$$\therefore F_{bm} = \underline{-36.06}$$

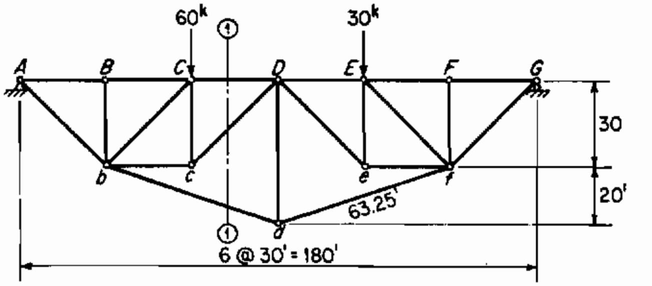
میله nf : آزادساختن گره E نشان می‌دهد که $F_{En} = -10$ با در نظر گرفتن قسمت جدا شده توسط برش $3\text{-}3$:

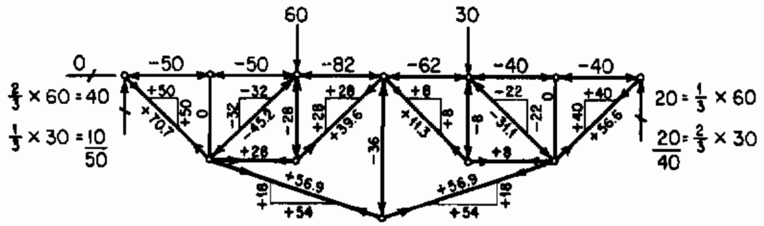
$$\Sigma M_d = 0,\ \overset{\frown}{+},\ 10 \times 1p = 10p \qquad \therefore Y_{nf} = \underline{-5} \qquad X_{nf} = \underline{-7.5} \qquad F_{nf} = \underline{-9.01}$$

میله nF : قسمت طرف راست برش۴—۴ : $\quad \Sigma F_y = 0 \qquad Y_{nF} = \underline{+38.3}$

میله md : قسمت طرف راست برش ۱—۱ : $\quad \Sigma F_y = 0 \qquad \therefore Y_{md} = \underline{+6.6}$

مثال ۴ــ۵ = کلیه نیروهای میله را در اعضای این خرپا محاسبه کنید .





قسمت چپ ۱ــ۱

$$\Sigma M_D = 0$$

$$50 \times 3p = 150p$$

$$60 \times 1p = -60p$$

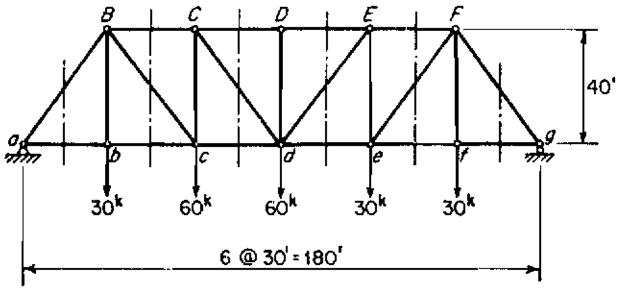
$$\frac{90p}{50} = \frac{90 \times 30}{50} = 54 \qquad \therefore X_{bd} = \underline{+54}$$

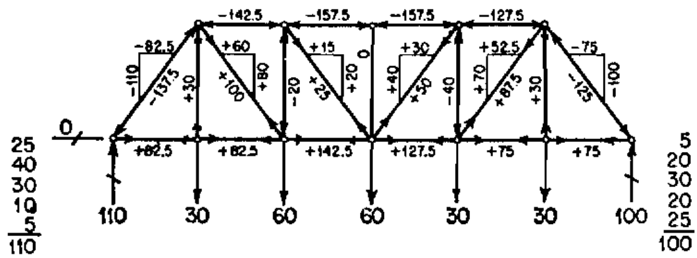
بحث :

در حل این مساله می‌توان با اعمال روش گرهها به‌ترتیب به‌گرههای A, B, G و F حل مساله را شروع نمود . اگر کسی این روش را با یکی از گرههای دیگر شروع کند غیرممکن بودن ادامه آن‌را درخواهد یافت زیرا که هریک از آن‌گرهها بیش‌از دو نیروی میلهٔ مجهول دارند . پس لازم است که از روش مقاطع کمک بگیریم ، در این مساله نیروی میله در عضو bd با درنظرگرفتن قسمت طرف چپ برش ۱ــ۱ محاسبه‌شده‌است، پس از آن می‌توان روش گرهها را به‌گره b و سپس به‌ترتیب به‌سایر گرهها تعمیم داد .

باید دقت کردکه این یک خرپای مرکب‌است در چنین خرپاهایی عموما" محاسبه کلیه‌نیروهای میله فقط به‌کمک روش گرهها غیرممکن‌است و چنانکه در این مساله‌دیدیم عموما" در چنین حالتی اعمال حداقل یکبار روش مقاطع لازم می‌باشد .

مثال ۴ــ۶ = نیروی میله‌ها را در کلیه اعضای این خرپا محاسبه کنید .





بحث :

در حل این مثال می‌توان از یکی از انتهاهای خرپا محاسبات را شروع کرده‌و تا انتهای دیگر خرپا ادامه داد و در این محاسبات می‌توان فقط از روش گرهها برای تعیین نیروی میله‌ها استفاده نمود ، این یک خرپای ساده است و همیشه‌می‌توان پس از تعیین عکس‌العملها به‌همین طریق به‌تعیین نیروی میله‌ها پرداخت .

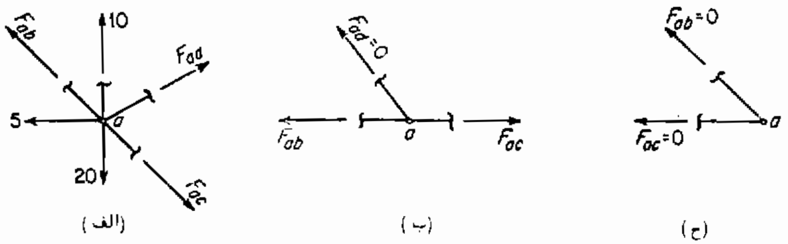
همچنین دقت شود که مولفه عمودی نیروی میله را در قطریها می‌توان با اعمال معادله $\Sigma F_y = 0$ در قسمتهای طرف راست یا چپ برشهایی که از وسط پانلها می‌گذرد ، به‌دست آورد و پس از آن نیرو در عمودیها را می‌شود با اعمال معادله $\Sigma F_y = 0$ در گرههای مربوطه محاسبه نمود و مقدار نیرودر میله‌های اصلی (تحتانی و فوقانی) با به‌کاربردن $\Sigma F_x = 0$ در گرهها از یک انتهای خرپا تا انتهای دیگر آن به‌سادگی قابل تعیین خواهد بود .

۴ ــ ۷ بحث روش گرهها و روش مقاطع

مثالهای مبحث قبلی نشان می‌دهدکه تحلیل تنش در خرپاها پس از جداکردن قسمتی از خرپا نیاز به‌کار برد هردو روش گرهها و مقاطع دارد. تجربه در چنین محاسباتی به‌دانشجویان این قابلیت را خواهد داد که چگونه در جای خود از هریک از این روشها استفاده کنند. هدف این قسمت از بحث جمع بندی و روشنگری نکاتی مهم مربوط به‌این دو روش می‌باشد.

در مبحث قبلی خاطرنشان شد که روش گرهها پس از آنکه گرهی را ازسایرقسمتها جدا کردیم به‌شرطی که تعدادنیروهای میله نامعلوم از دو بیشترنباشد و به‌شرطی که این دومجهول هم راستا نباشند فوراً مقدار آنها را برای ما مشخص می‌سازد. گاهی اتفاق می‌افتدکه پس از جداگردن گره فقط یک نیروی‌میله مجهول وجودداشته باشد درچنین حالتی یکی‌ازدومعادله تعادل را می‌توان برای تعیین نیروی مجهول به‌کاربرده و از معادله دیگر برای وارسی‌مقادیر کلیه نیروهای مؤثر برآن گره استفاده کنیم. حال اگر در یک گره جداشده بیش از دو نیروی مجهول موجود باشد معمولاً تعیین مقداربرای هریک از این نیروها از طریق کاربرددومعادله تعادل قابل استفاده درآن نقطه در همان لحظه ممکن نیست. در چنین حالاتی لازم است که گرههای دیگری را نیز آزاد کنیم و برای هریک دو معادله تعادل برقرار نمائیم و بنابراین گاهی ممکن می‌شود که n معادله مستقل برای n نیروی میله مجهول به‌دست آید و حل این دستگاه n معادله منجر به‌تعیین n مجهول می‌گردد.

حالت مهمی وجود دارد که درآن حالت بیش از دونیروی میله مجهول در گره آزاد شده موجود است ولی ترتیب آنها به‌نوعی است که تعیین بلافاصله یکی از آنها ممکن باشد، به‌این صورت که اگر کلیه‌نیروهای مجهول به‌جز یکی از آنها دارای خط اثر مشترک باشند در این حالت مقدار نیروی مجهول با خط اثر استثنایی بلافاصله قابل محاسبه خواهد بود، چنین حالتی در نمودار (الف) از شکل (۴ــ۶) نشان داده شده‌است. اگر محور x را موازی با خط bac گرفته و محور y را عمود برآن فرض کنیم در این صورت مولفهٔ y نیروی مجهول F_{ad} را می‌توان بلافاصله از طریق معادله $\Sigma F_y = 0$ به‌دست آورد. در چنین‌گرهی بااعمال معادله $\Sigma F_x = 0$ به‌هیچ جواب فوری نمی‌توان دست یافت زیرا که این معادله هردو مجهول F_{ab} و F_{ac} را در برخواهد داشت. نوع مخصوص از این‌حالت درنمودار (ب) از شکل (۴ــ۶) نشان داده شده‌است وآن گرهی است که فقط‌تحت اثر سه‌نیروی میلهٔ مجهول واقع شده است وچون دو نیروی F_{ab} و F_{ac} دارای یک خط اثر می‌باشند در این صورت واضح است که تنها



شکل (۴-۶) حالات خاص

نیروی باقیمانده‌گره یعنی F_{ad} باید برابربا صفرباشد. درنمودار (ج) ازشکل (۴-۶) نیز حالت جالبی نشان داده شده است، این حالت گرهی را نشان می‌دهد که تحت اثر دو نیرو با دو خط اثر متفاوت می‌باشد. در این حالت چون معادلات $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ باید بـرای گره صدق کند پس لازم می‌آید که هردو نیروی F_{ab} و F_{ac} برابر با صفر باشند.

خاطرنشان ساختن این مطلب نیزجالب است که بدانیم پس از آنکه عکس‌العملهای‌یک خرپای ساده محاسبه شد کلیه نیروی میله‌های خرپا را می‌توان فقط با به‌کاربردن روش گرهها بدون این‌که به‌روش مقاطع متوسل شویم محاسبه نمود، حقیقت چنین مطلبی واضح است‌زیرا در آرایش میله‌های خرپاهای ساده همواره موقعیت آخرین گره‌را توسط دو نیروی میله‌مجهول تثبیت می‌کنیم، پس از آن‌که این دو نیروی میله را با آزادساختن آن گره محاسبه کردیم، خواهیم دید که‌گرههای ملحق به‌این‌گره نیز هریک دارای فقط دونیروی میله‌مجهول‌می‌باشند و بدین‌ترتیب با آزادکردن گرهها در جهت عکس یعنی به‌ترتیبی که خرپا شکل گرفته است معلوم می‌شود که می‌توان روش گرهها را برای تعیین کلیه نیروی میله‌ها به‌کار برد و به‌همین دلیل معلوم می‌شود که چرا می‌توان مثال (۴-۶) را به‌این طریق حل نمود. ولی بایدتوجه کرد که در بسیاری از حالات خرپاهای ساده، کاربرد توأم هردو روش گرهها و مقاطع در محاسبات چنانکه در برخی از مثالهای مبحث (۴-۱۱) شرح داده‌شد سرعت قابل توجهی‌را سبب می‌شود.

درکاربرد روش‌مقاطع اگرقسمت جداشده‌ازخرپا، دارای‌سه‌نیروی‌مجهول‌نه‌موازی‌ونه‌متقارب باشد دراین‌صورت هرسه‌نیروی مجهول‌رامی‌توان‌بااستفاده‌از سه‌معادله‌تعادل‌که‌برای آن قسمت وجوددارد محاسبه‌نمود. بایستی‌تأکیدنمودکه‌مقدار عکس‌العملها که‌به‌هریک‌ازقسمتهااثرمی‌کنند قبلاً" بایدمحاسبه‌شده‌باشند، واضح‌است‌که‌اگردراین‌حالت‌فقط یک‌ویا دونیروی مجهـول وجود داشته باشدمقدارآنهارا می‌توان‌باتعداد مشابهی‌ازمعادلات تعادل به‌دست آورد بقیه تعداد معادلات موجود باید توسط دستگاه نیروی مؤثر بر آن قسمت تأمین گردد پس آن معادلات

کنترلی برای محاسبات انجام شده تا آن مرحله می‌باشد .

گاهی ممکن است توسط روش مقاطع برخی از نیروهای مجهول را در حالی که بر قسمت جدا شده بیش از سه نیروی مجهول اثر می‌کند محاسبه کرد . به‌عنوان مثال فرض کنید که خطوط اثر کلیه نیروهای مجهول به‌جز یکی از آنها در نقطهٔ a متقارب باشند ، در این صورت مقدار تنش در تنها میلهٔ مذکور را می‌توان با استفاده از معادله $\Sigma M_a = 0$ یعنی با لنگرگیری از کلیه نیروها حول نقطه a به‌دست آورد . حالت مشابه دیگر وقتی است که کلیه نیروهای میله مجهول به‌جز یکی از آنها با یکدیگر موازی باشند . در این صورت مقدار تنش در تنها میلهٔ باقیمانده را می‌توان با جمع تصاویر کلیه نیروها روی محور عمود بر جهات سایر نیروی میله‌ها به‌دست آورده درهردوحالت فوق تعداد مجهولات موجود در قسمت جداشده همواره بیش از دو معادله باقیمانده تعادل می‌باشد و به‌این جهت پاسخ سریعی برای باقیمانده مجهولات ممکن نیست .

در کاربرد هریک از روشهای گرهها و مقاطع باید متوجه بود که به‌هیچ عنوان تعداد میله‌های بریده‌شده‌که در آنها نیروی میله معلوم می‌باشد مهم نیست بلکه تنها تعداد نیروی میله‌های مجهول مهم می‌باشد .

۴ ـ ۸ پایداری استاتیکی و معین بودن خرپاها

تا کنون همهٔ تأکیدما بر روشهای محاسباتی تعیین نیروی میله‌ها درخرپاها بوده‌است . به‌این خاطر کلیه مثالهای به‌کار رفته هم معین بوده‌اند و هم پایدار . حال با داشتن زمینهٔ فکری می‌توانیم مبحث مربوط به‌چگونگی پایداری و معین بودن خرپاها را از نقطه نظر کلی مطرح سازیم .

در مبحث ترتیب اعضای یک خرپای‌ساده ، نشان دادیم که یک خرپای صلب را با اتصال سه‌گره توسط سه‌میله به‌شکل یک مثلث شروع می‌کنیم و سپس هر گره اضافی دیگر را با دومیله به‌آن متصل می‌نمائیم سپس شبکه موردنظر ایجاد می‌گردد بنابراین برای ایجاد خرپای ساده صلبی با n گره ، لازم است که از سه‌میله اولیه برای ایجاد مثلث به‌اضافه دومیله برای هریک از $(n - 3)$ گره بقیه استفاده‌کنیم و به‌این‌ترتیب‌اگر b تعدادکلی میله‌های لازم باشدخواهیم داشت :

$$b = 3 + 2(n - 3) = 2n - 3$$

این تعداد حداقل میله لازم برای ایجاد یک خرپای سادهٔ صلب می‌باشد به‌کاربردن بیش‌از این مقدار غیرضروری و به‌کاربردن کمتراز آن منجربه‌خرپایی‌ناپایدار می‌شود . اگر خرپایی

ساده که دارای n گره و $(2n-3)$ میله است دارای تکیه‌گاههایی معادل با سه‌تکیه‌گاه بنددار باشد به‌نوعی که این بندها نه با یکدیگر موازی و نه متقارب باشند ، در این صورت آن سازه تحت اثر بارگذاری‌های غیرمشخص پایدار بوده و عکس‌العملهای آن نیز معین خواهد بود .

دربحث قبلی تأکید شدکه پس‌ازتعیین‌عکس‌العملهای‌یک‌خرپای ساده‌تعیین‌کلیه‌نیروهای میله آن توسط روش گرهها ممکن می‌باشد .

به‌این ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که یک خرپای ساده که دارای سه جزء مستقل عکس‌العمل و$(2n-3)$میله است هم از نظر نیروی میله‌ها و هم از نظر عکس‌العملها معین خواهد بود . اگر دارای بیش از سه‌جزء عکس‌العمل باشد سازه از نظر خارجی نامعین خواهد بود و اگر تعداد میله‌های آن بیش از$(2n-3)$بوده ولی فقط سه‌جزء عکس‌العمل داشته باشد سازه فوق از نظر نیروی میله‌ها نامعین خواهد شد و اگر هم میله اضافی و هم عکس‌العمل اضافی داشته باشد در این صورت آن سازه هم از نظر نیروی میله‌ها و هم از نظر عکس‌العملها نامعین خواهد بود .

نظیر همین نتیجه‌گیری برای خرپاهای‌مرکب نیزکاملا" صادق است فرض کنیدکه‌خرپایی مرکب از اتصال دوخرپای ساده توسط سه میله اضافی که نه با یکدیگر موازی و نه متقارب می‌باشند بوجودآمده باشد ، اگر دوخرپای ساده فوق‌الذکر به‌ترتیب‌دارای n_1 و n_2 گره باشند و تعداد کل میله‌های خرپای مرکب b باشد خواهیم داشت :

$$b = (2n_1 - 3) + (2n_2 - 3) + 3 = 2(n_1 + n_2) - 3$$

و اگر n نشان‌دهنده‌تعداد کل گره در خرپای مرکب بوده و به‌عبارتی $n = n_1 + n_2$ باشد داریم :

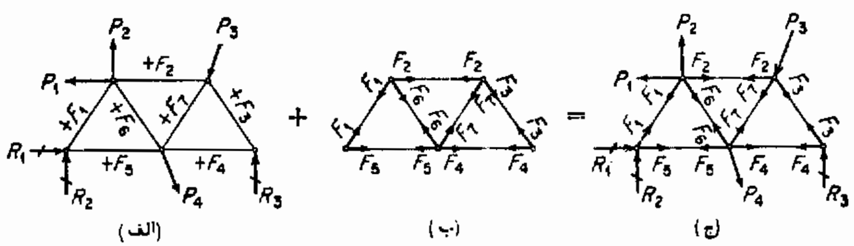
$$b = 2n - 3$$

و بنابراین دیده می‌شود که تعداد حداقل میله به‌کار رفته برای ایجاد یک خرپای‌مرکب‌صلب به‌همان تعداد لازم در یک خرپای ساده است و اگر بقیه بحث قبلی را نیز به‌همان طریق‌در مورد خرپای مرکب ادامه‌دهیم خواهیم دیدکه نتیجه‌گیری در بند قبل در مورد هردوخرپای ساده و مرکب به‌صورت یکسان صادق است .

لازم است که مساله پایداری و معین‌بودن را از نظر کلی بیشتر بررسی کنیم ،فرض‌کنید که خرپایی دارای r جزء مستقل عکس‌العمل ، b میله و n گره باشد ، چون کل خرپا درتعادل است لازم است که هرقسمت جدا شده از آن نیز به‌همان ترتیب در تعادل باشد ، جداکردن تمام یک‌میله‌یا قسمتی‌ازآن تا زمانی‌که‌تعاریف‌به‌کاررفته‌درمورد نیروی میله مراعات شود شرایط تعادل میله‌ها را تغییری نخواهد داد و بدین ترتیب می‌توان هریک از n گره را به‌نوبه‌خود

آزاد کرده و برای هریک از آن گرهها دومعادله مستقل تعادل استاتیکی، $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ را نوشت، به‌این‌ترتیب در کل $2n$ معادله مستقل که شامل r عکس‌العمل و b نیروی میله‌می‌باشند یعنی‌جمعاً" دارای $(b + r)$ مجهول‌است به‌دست خواهد آمد. این‌دستگاه $2n$ معادله‌باید $(b + r)$ مجهول را تأمین نماید، با مقایسه‌تعدادمجهولات باتعدادمعادلات مستقل می‌توان فهمیدکه آیا آن سازهٔ خرپایی پایدار، معین و یا نامعین‌است. استدلال‌به‌کار رفته مشابه استدلالی است که در بخش۲ــ۵ انجام گرفته است: ***اگر $r + b$ کمتر از $2n$ باشد تعداد مجهولات موجود کافی برای تأمین دستگاه $2n$ معادله نمی‌باشد و در این‌صورت سازه‌از نظر استاتیکی ناپایدار است. اگر $r + b$ مساوی $2n$ باشدمجهولات موجودرا می‌توان از حل دستگاه $2n$ معادله به‌دست آورد. در این صورت سازه معین خواهد بود. اگر $r + b$ بزرگتر از $2n$ باشد، در آن صورت تعداد مجهولات بیشتراز تعداد $2n$ معادله می‌باشد و در آن حالت سازه را نامعین گویند. ضابطه فوق منجر به‌تعیین کل درجه نامعینی عکس‌العملها و نیروی میله‌ها (نه تک‌تک آنها) می‌شود، مشروط بر این‌که سازه هم از نظر استاتیکی و هم از نظر هندسی ناپایدار نباشد.*** واضح است که این نتیجه‌گیری با بحثی که در مورد خرپاهای ساده و مرکب انجام گرفت تطابق کامل دارد.

در نگاه‌نخستین ممکن‌است چنین به‌نظرآید که تعدادکل معادلات مستقل تعادل استاتیکی یک سازه خرپایی شامل نه‌تنها $2n$ معادله‌ای است که در بند قبل ذکر شد بلکه شامل سه‌معادله $\Sigma F_x = 0$ ، $\Sigma F_y = 0$ و $\Sigma M = 0$ نیز می‌باشد که به‌کل سازه مانند جسمی آزاد می‌توان اعمال نمود. شرح زیرین ثابت می‌کند که این نظریه ابداً" درست نیست و فقط $2n$ معادله مستقل وجود دارد: خرپایی به‌صورت پیکرآزاد مانند خرپای شکل (۴ــ۷ الف) که تحت عکس‌العملها و بارهای وارده می‌باشد درنظر بگیرید و فرض کنید که دستگاه‌نیروی مذکور در شکل (۴ــ۷ ب) با دستگاه شکل (۴ ــ ۷ الف) جمع گردد، ترکیب این دودستگاه بارگذاری‌را می‌توان به‌صورت دستگاه بارگذاری‌شکل (۴ــ۷ ج) نشان داد. دستگاه بارگذاری شامل چندین جفت نیروی مساوی ودرخلاف



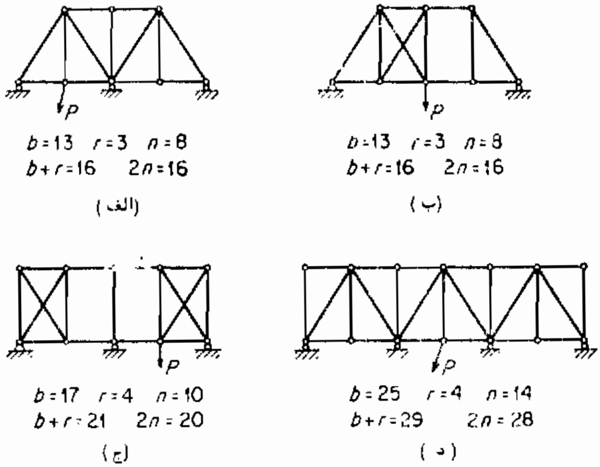
شکل (۴ــ۷)ــ نکات مربوط به‌تعادل

یکدیگر می‌باشد ، به‌صورتی‌که برای هرعضو از خرپا یک جفت نیرو وجود دارد .در هر عضوی یک جفت نیرو درطول آن عضو به‌صورتی‌که یکی از آنها از یک گره انتهای‌عضو و دیگری از گره انتهای دیگر عضو اثر می‌کنند و هریک ازاین نیروهاازنظر عددی‌برابر با نیروی میله حاصل از اثر دستگاه نیروی a بوده و در همان جهت اثر نیروی‌میله‌بر گره اثر می‌کند .واضح است که هرجفت نیرو درتعادل بوده و بنابراین‌کلیه‌جفت‌نیروها نیز دستگاه نیرویی در حال تعادل بوجود می‌آورند .

حال به‌دستگاه ترکیب یافته c توجه کنید ، معلوم می‌شود که نیروهای مؤثر بر هر گره همان‌نیروهایی است که به‌آن گره در صورت اعمال بارگذاری a (اگر آن گره را به‌صورت‌گرهی آزاد درنظر بگیریم)وارد می‌شد ،حال اگرنیروهای وارده ، عکس‌العملها و نیروی میله‌ها دستگاه $2n$ معادله تعادل را که با آزادکردن n گره و نوشتن معادلات $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ برای هر گره به‌دست می‌آید تأمین نماید نیروهای مؤثر بر هر گره در c دستگاه نیروی متقاربی در حال تعادل ایجاد خواهد کرد . چون در هر گره نیروها در تعادل می‌باشند دستگاهی که از همه گرهها در c تشکیل شده است نیز در تعادل بوده و باید کلا" معادلات $\Sigma F_x = 0$ ، $\Sigma F_y = 0$ و $\Sigma M = 0$ در مورد کل خرپا صادق باشد . چون دستگاه ترکیبی در c در تعادل بوده و قسمتی از آن دستگاه که‌در نمودار(ب)نشان داده‌شده نیز به‌خودی خود در تعادل است قسمت باقیمانده دستگاه که‌درنمودار(الف)نشان‌داده شده‌است نیزباید درتعادل بوده ومعادلات $\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ و $\Sigma M = 0$ را برای کل خرپا تأمین نماید . پس می‌توان چنین‌نتیجه گرفت که اگر عکس‌العملها ، نیروی میله‌ها و بارهای وارده $2n$ معادله تعادل را که با آزادـ ساختن گرههای خرپا به‌دست می‌آید تأمین نمایند ، عکس‌العملها و بارهای وارده به‌خودی خودسه‌معادله تعادل‌را برای‌کل خرپا تأمین خواهند کرد و به‌این‌ترتیب در اصل فقط $2n$ معادله تعادل استاتیکی مستقل در یک خرپا وجود دارد .

*باید توجه داشت که مقایسه تعداد مجهولات و معادلات مستقل ضابطه‌ای‌لازم‌است‌ولی همواره کافی برای درک پایداری یک خرپا نمی‌باشد . اگر $b + r$ کمتراز $2n$ باشد این محاسبه کافی است که بفهمیم خرپای مورد بحث از نظر استاتیکی ناپایدار است . ولی اگر $b + r$ برابر یا بزرگتراز $2n$ باشد این به‌آن معنی نیست که خرپا پایدار است .*این مطلب‌را می‌توان با ملاحظه مثالهای مذکور در شکل (۴ــ۸)بررسی نمود . در همه این چهارحالت سازه پایدار است‌با وجودی‌که شمارشها نشان می‌دهدکه(الف)و(ب)معین(ج)و(د) یک درجه‌نامعین‌هستند . (الف)و(د) تحت اثرحالت بارگذاری نامشخص ناپایدار است زیرا در هردوحالت عکس‌العملها معادل تکیه‌گاههای بنددار موازی‌می‌باشند.(ب)و(ج) نه‌بدلیل نوع تکیه‌گاهایشان‌بلکه‌به‌دلیل

آرایش میله‌هایشان ناپایدارند. به‌عنوان مثال در (ب) عکس‌العملها معین ولی خرپا ناپایدار است زیرا که در پانل دوم مقاومتی در برابر برش منتقل شده از انتهای راست وجود ندارد.



شکل ۴ــ۸ سازه‌های ناپایدار

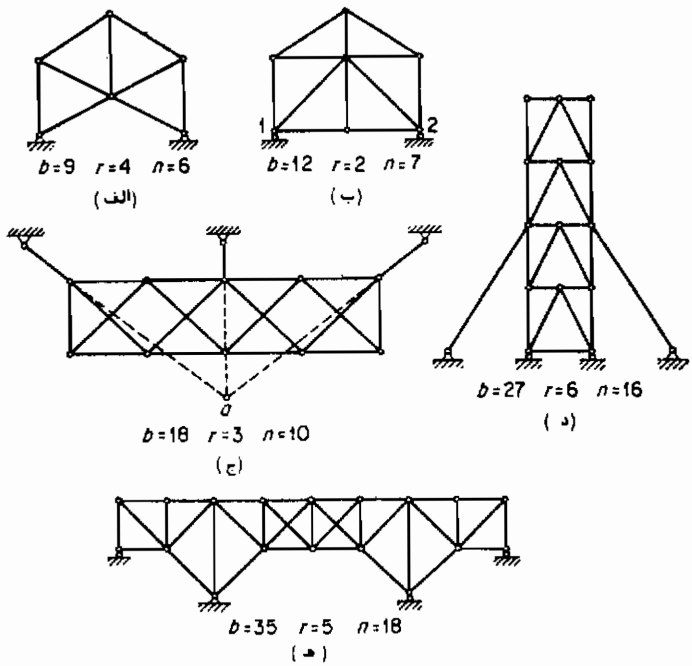
این ملاحظات و نظیر آنها منجر به این نتیجه‌گیری می‌شود که اگرچه روش‌شمارش‌نشان می‌دهد که سازه‌ای معین و یا نامعین است، برای این‌که آن سازه ناپایدار نیز نباشد لازم است شرایط زیر نیز صادق باشد: ۱ــ عکس‌العملها باید معادل سه یا بیشتر از سه تکیه‌گاه بنددار غیرموازی و نامتقارب باشند ۲ــ میله‌های خرپا باید آرایشی به‌نحومناسب داشته باشند. گاهی تعیین مناسب بودن آرایش میله‌ها مشکل است، در چنان حالاتی اگر آرایش بندها نامناسب باشد، بالاخره معلوم خواهد شد زیرا درصورتی که تحلیل تنش انجام‌گیرد پاسخهای به‌دست آمده ناسازگار، بی‌نهایت و یا غیرقابل تعیین خواهند بود.

۴ ــ ۹ مثالهایی در شرح تعیین معینی و پایداری

بررسی پایداری و معینی یک سازه خرپایی که به‌نحوی روی تکیه‌گاه قرار گرفته است امری ساده است خرپای موجود ممکن است فقط یک خرپای ساده یا یک خرپای مرکب و دربعضی‌از حالات خرپایی ساده یا مرکب با چند میلهٔ اضافه باشد. در همهٔ حالات می‌توان میله‌ها و عکس‌العملها و گرهها را شمرد و از ضابطه بحث قبلی دریافت که آن سازه ناپایدار، معین و یا نامعین است، بدیهی است‌که این شمارش فرد را قادر می‌سازد که به‌صورت سرجمع نسبت به‌حالات نیروی میله‌ها و عکس‌العملها سازه‌را طبقه‌بندی نماید. اگرشمارش نشان دهد

که سازه معین و یا نامعین می‌باشد سوال مربوط به‌پایداربودن سازه هنوزمطرح است‌زیرا شمارش اغلب بخودی خود کافی برای تعیین پایداری سازه نیست.

طبقه‌بندی این نوع سازه نسبت به‌عکس‌العملهایش نیز امری ساده‌است ،اگرسازه دارای کمتراز سه جزء مستقل عکس‌العمل باشد تحت اثر حالت کلی بارگذاری بدون این‌که‌به‌آرایش میله‌های خرپا کاری داشته‌باشیم ناپایدارخواهد بود و اگردارای سه یا بیشترازسه‌جزء‌مستقل عکس‌العمل‌که به‌صورتی قرارگرفته باشند که معادل سه یا بیشترازسه‌تکیه‌گاه بنددارغیرمتوازی و یا نامتقارب باشند سازه نسبت به‌عکس‌العملهایش پایدار خواهد بود. در یک سازه پایدار اگر سه جزء عکس‌العمل موجود باشد این اجزاء معین می‌باشند و اگر بیش از سه‌جزء‌عکس‌العمل داشته باشد آن سازه فقط نسبت به‌عکس‌العملهایش نامعین خواهد بود و درجه این نامعینی مساوی مقدار بیشتراز سه‌بودن اجزای عکس‌العمل است ، سازه‌هایی که در این ردیف‌کلی‌قرار دارند در شکل (۴ـ۹) نشان داده شده است.



شکل ۴ـ۹ مثالهایی برای دسته‌بندی

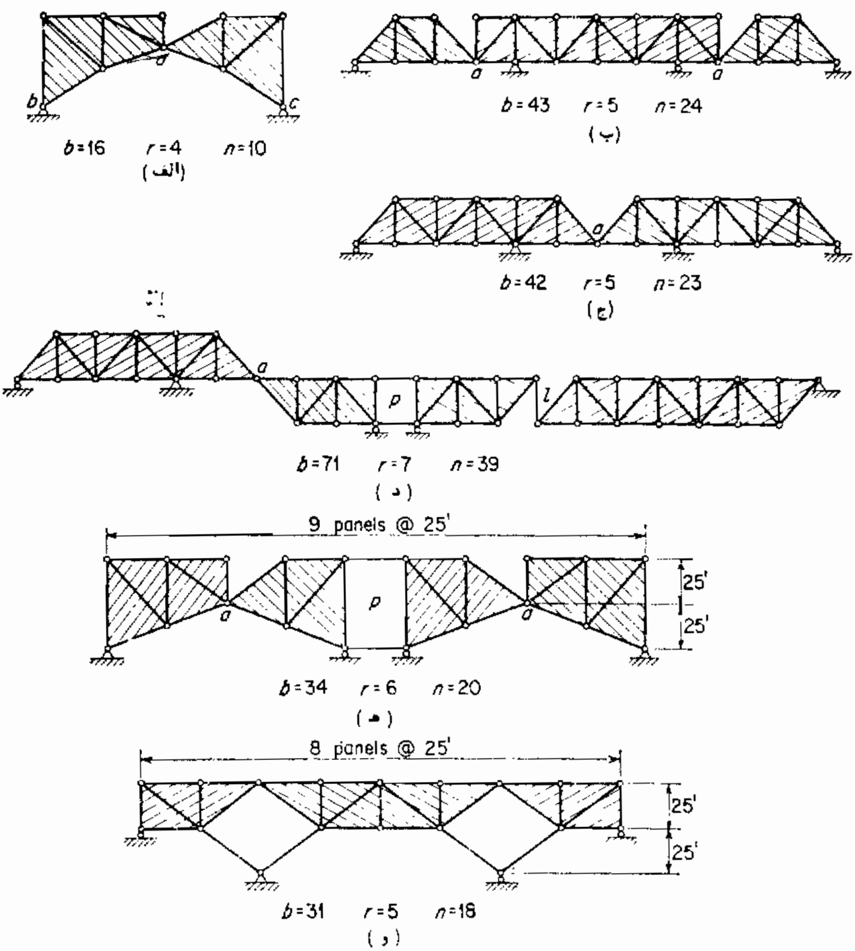
شمارش میله‌ها ، گرهها و اجزای عکس‌العمل در هریک از خرپاهای شکل (۴ـ۹) نشان داده شده است حال فقط به‌عکس‌العملها توجه کنید ،سازه(الف) پایدار و یک درجه نامعین است زیرا $b + r = 13$ و $2n = 12$ است می‌بینیم که به‌این‌ترتیب یک درجه‌نامعین‌است شمارش

سازه(ب) نشان می‌دهد که معین است زیرا که $r + b$ و $2n$ هردو مساوی 14 می‌باشند ولی دقت درعکس‌العملها نشان می‌دهد که این سازه ناپایدار است بههمین‌ترتیب شمارش‌سازه(ج) نشان می‌دهد که‌آن سازه یک درجه نامعین است ولی دقت در عکس‌العملها نشان می‌دهد که آن سازه ناپایدار است ولی شمارش سازه و دقت در عکس‌العملهای‌سازه(د)نشان می‌دهد که آن سازه یک درجه نامعین است .بررسی عکس‌العملهای‌سازه(هـ)نشان‌می‌دهدکه‌آن سازه دو درجه نامعین می‌باشد ولی شمارش‌آن بیانگر این است که عملاً" آن سازه چهار درجه نامعین‌است.

یک نوع دیگر از سازه‌های خرپایی وجود دارد که از بیش‌از یک خرپای صلب تشکیل یافته‌اند . این نوع سازه از چند خرپای صلب که به‌نوعی به‌یکدیگر وصل شده‌اند تشکیل‌شده و کل آن بر روی چند تکیه‌گاه سوار شده است ، در چنین حالاتی معمولاً" تکیه‌گاهها به‌نوعی قرار گرفته‌اند که بیش‌از سه‌جزء عکس‌العمل مستقل ایجاد نمایند ، اتصال بین‌این‌چند خرپا کاملاً" صلب نیست به‌این جهت سبب می‌شود که بتوان چندین معادله خاص به‌منظور تقلیل درجه نامعینی و یا تبدیل عکس‌العملها به‌صورت معین برقرار نمود . این نوع سازه‌ها از نظر تحلیل پایداری و معینی‌ازمشکلترین سازه‌ها می‌باشند .در هرحال برخی‌ازمهمترین سازه‌ها— نظیر پلهای طره‌ای و قوسی با سه مفصل— به‌این گروه تعلق دارند و به‌آن جهت است که یادگیری روش اصلی برای بررسی چنین سازه‌هایی برای دانشجویان بسیار مفید است . در شکل (۴—۱۰) نمونه‌هایی کلی از این سازه‌ها را نشان داده‌ایم .

پایداری و معین بودن سازه‌هایی که در شکل (۴—۱۰) نشان داده شده است به طریق شمارش‌میله‌ها واجزا عکس‌العمل ومقایسه‌آن‌با تعدادگرههای‌آنها امکان‌پذیراست،بابه‌کاربردن این‌ضابطه‌معلوم می‌شودکه سازه‌های(الف)،(ب)،(د)،(هـ)و(و) معین بوده و سازه (ج) یک درجه نامعین است ، در چنین سازه‌هایی تعیین این که سازهٔ موردنظر فقط نسبت به‌عکس‌— العملهایش معین است . یا خیر نیز بسیار مهم است . این مطلب را می‌توان با مقایسه‌تعداد اجزای مجهول عکس‌العمل با تعداد معادلاتی‌که به‌طریق بخش‌های (۲—۵) و (۲—۶)می‌توان برقرار نمود تعیین کرد . در این حالات معادلات موجود شامل سه‌معادله تعادل استاتیکی برای کل سازه به‌اضافه تعدادی معادله خاص که بستگی به‌اتصال این چند خرپای صلب با یکدیگر دارند می‌باشد .

اگر دو خرپا در یک گره مشترک به‌یکدیگر مفصل شوند همان‌طوری که در گره a شکلهای (۴—۱۰ الف) تا (۴—۱۰ هـ) نشان داده شده است یک معادله خاص می‌توان برقرار نمود و این معادله بیانگر این است که حول آن نقطه باید لنگر خمشی برابر با صفر باشد زیراکه‌آن مفصل نمی‌تواند لنگری‌از یک خرپا به‌خرپای دیگرمنتقل نماید .اگر دو خرپا توسط یک‌اتصال بنددار و یا غلتک‌دار نظیر بند t در سازهٔ به‌یکدیگر متصل شوند در این حالت دو معادله



شکل ۴ــ۱۰ مثالهای برای دسته‌بندی

خاص را می‌توان برقرار کرد زیرا که جهت و نقطه اثر نیروی بین آنها معلوم می‌باشد این به‌آن معنی است که ۱ــلنگر خمشی باید حول هریک از دو انتهای بند اتصال برابربا صفر باشد و به‌عبارتی دیگر ۲ــ نیروی مؤثر بین این دو خرپا نمی‌تواند مولفه‌های عمود بر بند اتصال داشته باشد .اگر دو خرپا توسط دومیله موازی نظیرآنچه در پانل p درسازه‌های (د) و(هـ)نشان داده‌ایم بـهم متصل گردند یک معادله خاص برای این اتصال می‌توان برقرار کرد به‌این صورت که عمل و عکس‌العمل بین این دو خرپا نمی‌تواند نیرویی عمود براین دو میلـه داشته باشد ، در حالت سازه‌های (د)و(هـ) این استدلال به‌این معنی‌است که برش باید در پانل p برابر با صفر باشد .

ازاین بحث چنین برمی‌آید که درسازه(الف)می‌توان یک معادله خاص، در سازه (ب) دو، درسازه(ج) یک و در سازهٔ (د)چهار و در سازه(هـ)وسه‌معادله خاص برقرار نمود و همچنین نتیجه‌گیری می‌شود که اگرفقط عکس‌العملها را درنظربگیریم سازه‌های(الف)، (ب)،(د) و (هـ)معین وسازه(ج) یک درجه‌نامعین خواهد بود .سازه(و) نوع مخصوصی‌است‌که درایالات‌متحده امریکا بآن خرپای و یچرت Wichert گویند وآن را می‌توان فقط‌با شمارش میله‌ها ،گرهها و عکس‌العملها ارزیابی نمود*.

در سازه‌های شکل (۴ـ۱۰) هیچ ناپایداری آشکاری وجود ندارد ولی اگر کسی بخواهد عکس‌العملها ونیروی‌میله‌ها را در هریک ازسازه‌های(هـ)یا(و)تعیین کند نتایج به‌دست آمـده ناسازگار ،بی‌نهایت یا نامعین خواهد بود ،پس این سازه‌ها عملا" ناپایدار هستند .درهریک از این دو حالت می‌توان فقط‌با تغییری در شکل هندسی سازه آن‌را به‌یک‌سازه پایدارتبدیل نمود وبه‌این جهت است‌که سازه‌های(هـ)و(و)را ناپایدار هندسی گویند . این نـوع ناپایداری زمانی بوجود می‌آید که به‌علل اتصالات سازه معادله‌ای خاص برقرار کرده باشیم . گاهی ناپایداری معلوم است ولی معمولا" تا کسی به‌محاسبه عکس‌العملها و غیره اقدام نکند آشکار نمی‌شود**.

۴ـ۱۰ خرپاهای متداول پلها و سقفها

اعضای یک خرپا را تقریبا" می‌توان به‌طریقی نامحـدود آرایش داد ولی اکثـر قریب به‌اتفاق خرپاهایی‌که در پلها و بناها به‌کار می‌رود نظیر یکی از انواع متداول‌نشان‌داده‌شده در شکلهای (۴ـ۱۱)و(۴ـ۱۲)خواهد بودچون ازآنها اغلب استفاده می‌شود ، دانشجویان باید با اساس این خرپاهای متعارف آشنا باشند .

خرپاهای(الف)،(ب)،(ج)، (د)،(هـ)ازشکل (۴ـ۱۱)خرپاهای‌ساده‌ای‌هستنـد ، در صورتی‌که‌سایرخرپاها خرپاهای‌مرکب می‌باشند که ازترکیب خرپاهای‌ساده (هاشورخورده)تشکیل یافته‌اند . برای این‌که از نظر اقتصادی طرح پلهای یک دهانه با خرپای فلزی مقرون به‌صرفه باشد لازم است که نسبت ارتفاع خرپا به‌طول دهانه‌آن بین $1/5$ الی $1/10$ بوده و قطریهـای

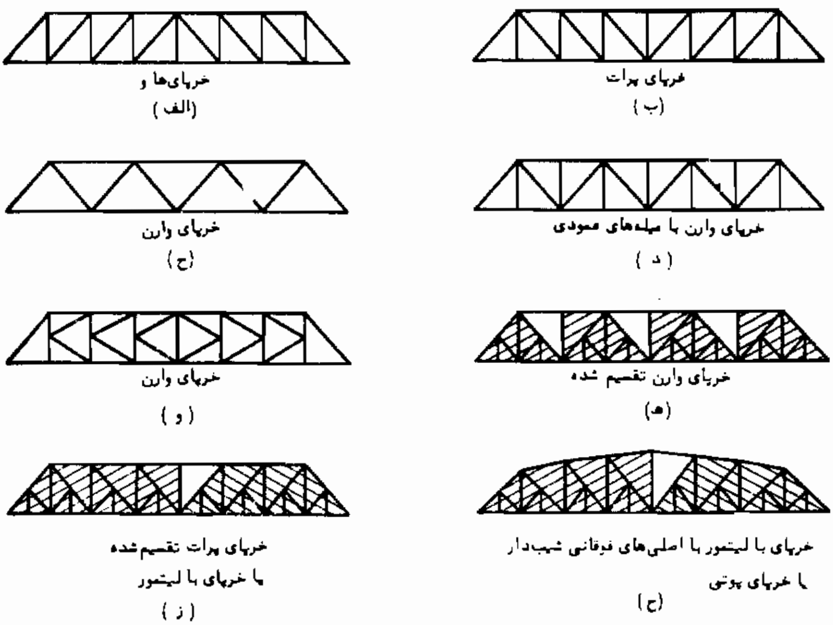
---

* D. B. Steinman, "The Wichert Truss," D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1932.

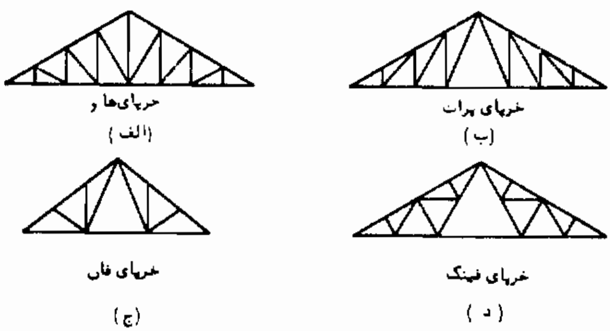
** برای بحثی جامع‌تر به‌کتاب زیر مراجعه شود :

W. M. Fife and J. B. Wilbur, "Theory of Statically Indeterminate Structures," McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1937.

آن شیبی در حدود 45° نسبت به‌افق داشته و دهانه پانلها از 40 الی 30 فوت (یا از 9 الی 12 متر) تجاوز نکند. خرپاهای (الف)، (ب)، (ج)، (د) این شرایط را درصورتی که دهانه آنها وسیع نباشد می‌توانند تأمین نمایند، برای پلهایی با دهانهٔ وسیع در هر صورت لازم است که یکی از انواع تقسیم شده‌ای نظیر (و)، (ز) و (ح) را به‌کار برند.



شکل ۴-۱۱ خرپاهای متعارف پلسازی



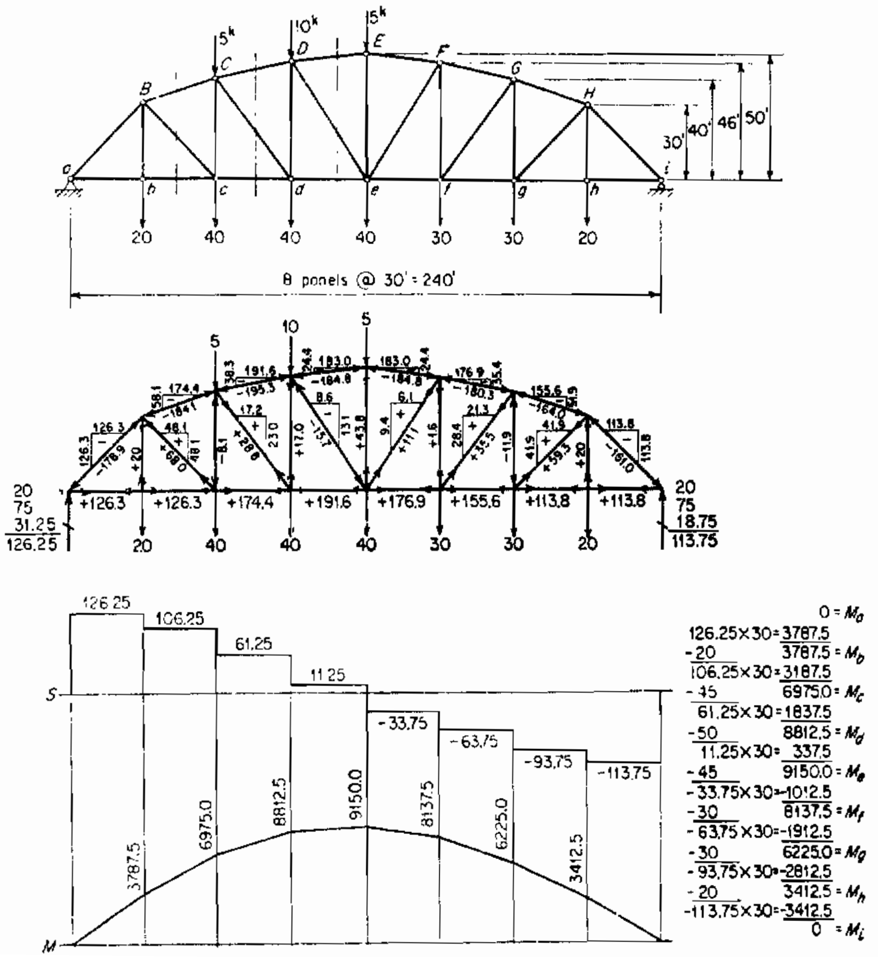
شکل ۴-۱۲ خرپاهای متعارف سقف‌ها

کلیه خرپاهای پوشش سقفها که در شکل (۴-۱۲) نشان داده شده است به‌جز خرپای فینک Fink که یک خرپای مرکب می‌باشد همگی خرپای ساده هستند.

۴ ـ ۱۱ مثالهای عددی برای تحلیل تنش خرپاهای معین

مثالهای زیر شرحی برکاربرد بحثهای قبلی درمورد تحلیل تنش برخی‌از انواع‌متعارف خرپاهاست ، تحلیل چنین خرپاهایی را بعدا" در فصل ۷ خواهیم دید .

مثال ۴ـ۷= نیروی میله را در کلیه اعضای این خرپای پرات که دارای میله‌های اصلی فوقانی منحنی شکل است محاسبه کنید .



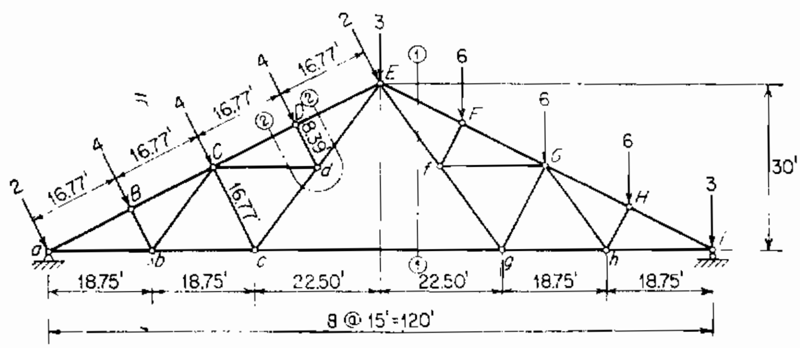
بحث :

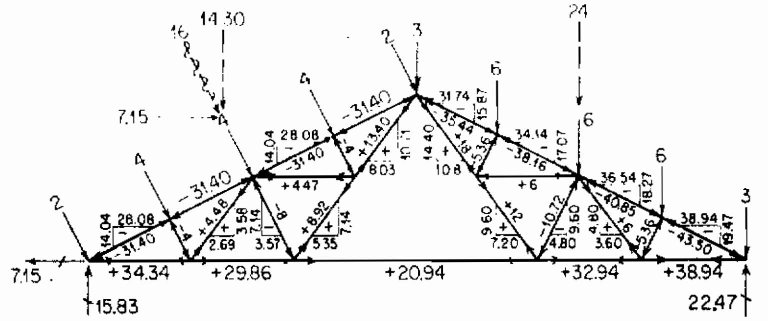
این خرپای پرات خرپایی ساده است و به‌این جهت فقط می‌توان با استفاده از روش گرهها به‌تحلیل آن پرداخت ، البته چنین روشی هرگاه میله‌های فوقانی‌وتحتانی موازی نباشند از نظر عملی مفید نیست ، شاید بهترین طریقه این باشد که امتداد مولفه‌های افقی میله‌های فوقانی منحنی‌شکل را تعیین نمائیم . این عمل را می‌توان‌با گذراندن برشی عمودی از وسط یک پانل و لنگرگیری نسبت به‌نقطه مناسبی‌د رروی میله تحتانی انجام داد ،این محاسبات زمانی‌که مقدار لنگرخمشی در نقاط مختلف‌میله‌های تحتانی معلوم باشد بسیار ساده‌تر خواهد بود .

مقدار لنگر خمشی را درگرههای میله‌های تحتانی می‌توان به‌سادگی با رسم نمودارهای برش و لنگر خمشی چنانکه نشان داده‌ایم محاسبه نمود .دراین حالت اگر کلیه بارها و عکس‌العملها عمودی باشند لنگر خمشی حول هرگرهی‌ازمیله‌های فوقانی برابر با همان مقدار حول گره از میله‌های تحتانی ــ که دقیقا"در زیرآن واقع شده ــ باشد ، بدیهی است که اگر بارهای افقی نیز وجود داشته باشداین مطلب صحیح نخواهد بود .

پس از آن‌که مولفه‌های افقی در میله‌های فوقانی معلوم شد بقیهٔ تحلیل تنش را می‌توان‌از طریق روش گرهها تکمیل نمود .بایدخاطرنشان کرد که محاسبه مولفه‌عمودی میله‌های قطری پس ازآن‌که برش در پانلها ومولفه‌های عمودی‌درمیله‌های فوقانی معلوم شود عملی ساده خواهد بود .

مثال ۴ــ۸= کلیه نیروهای میله را در اعضای این خرپای سقفی فینک محاسبه کنید .





$14.3 \times \frac{82.5}{120} = 9.83$

$24 \times \frac{30}{120} = 6$

$\underline{\underline{15.83}}$

$F_{cg}: 22.47 \times \frac{60}{30} = 44.94$

$-(18\times30+3\times60)\frac{1}{30} = -24$

$F_{cg} = \underline{\underline{+20.94}}$

$16 \times \frac{33.54}{120} = 4.47$

$24 \times \frac{90}{120} = 18$

22.47	24
15.83	14.3
38.30	38.3

OK

بحث :

گرچه این خرپای فینک خرپایی مرکب است ولی آن را می‌توان فقط به‌کمک روش گرهها تحلیل نمود. به‌عنوان مثال پس از آن‌که عکس‌العملها محاسبه شد روش‌گرهها را می‌توان به‌ترتیب بر گرههای i ، H و h اعمال نمود ولی چون در هریک از گرههای g و G بیش از دونیروی میله مجهول وجود دارد لذا این گرهها را نمی‌توان در مرحله‌دوم تحلیل ،بررسی‌کرد ولی می‌توان نیروی میله‌در Ef را باآزادسازی گره F و نیروی میله در fG را با آزادکردن گره f به‌دست آورد و سپس به‌راحتی می‌توان تحلیل تنش‌را با همان روش‌گرهها به‌پایان رساند . این چنین عملی به‌این جهت امکان‌پذیر است زیرا که گرههای E، F و G و به‌همین ترتیب گرههای E ، f و g روی یک خط مستقیم‌واقع می‌باشند .

البته معمولاً"گاهی عمل به‌صورت زیر ارجحیت دارد : پس از آن‌که روش گرهها را در موردگرههای i و H و h به‌کاربردیم نیروی میله‌را در cg می‌توانیم باجداکردن قسمت راست برش ۱ــ۱ و با لنگرگیری حول نقطه E بدست آوریم و سپس بقیه‌تحلیل خرپا توسط روش‌گرهها انجام می‌گیرد .

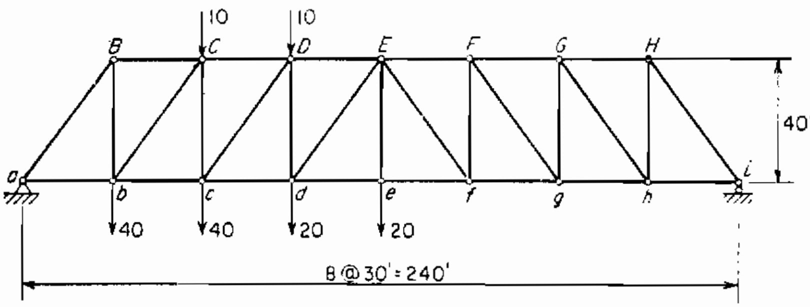
توجه شودکه می‌توان تحلیل تنش را بامحاسبه نیروی میله‌هادر Cd ، Cb ، Gf ، و Gh با استفاده ازبرشهایی نظیر۲ــ۲ و لنگرگیری حول نقاطی نظیر نقطه E درحالت

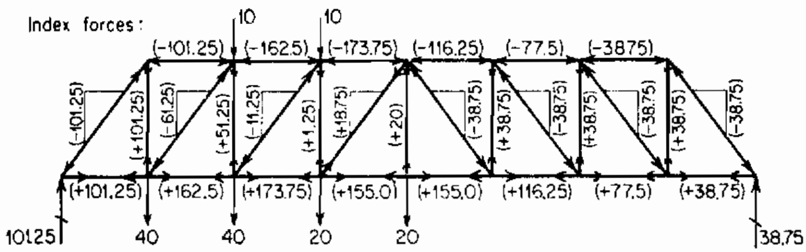
برش ۲ــ۲ تسریع نمود .

نکته اساسی این است که همواره به‌خاطر داشته باشیم که از ترکیب کاربرد دو روش گرهها و مقاطع به‌نحوی استفاده کنیم که به‌محاسبات سرعت لازم داده شود .

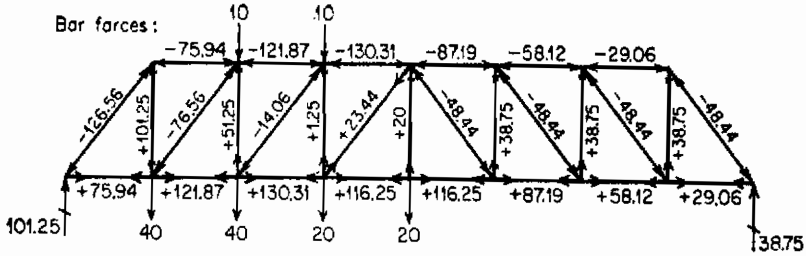
توجه شود که شکل هندسی این خرپا تقریبا" پیچیده است‌که البته چنین‌مطلبی در مورد خرپاهای پوششی مرکب صحت دارد ، در چنین حالاتی اغلب تعیین تنش‌از طریق روش تحلیل ترسیمی ساده‌تر خواهد بود .

مثال ۴ــ۹= کلیه نیروها را در همه اعضای این خرپای‌ها و محاسبه کنید .





$80 \times \frac{6.5}{8} = 65$	$80 \times \frac{1.5}{8} = 15$
$40 \times \frac{4.5}{8} = 22.5$	$40 \times \frac{3.5}{8} = 17.5$
$20 \times \frac{5.5}{8} = 13.75$	$20 \times \frac{2.5}{8} = 6.25$
$101.25 \updownarrow$	$38.75 \updownarrow$
	101.25
	$140.0 \quad \therefore O.K.$



برای عمودیها (میله‌های عمودی) : (نیروی راهنما) $\times\ 1$ = (نیروی میله)

برای قطریها (میله‌های قطری) : (نیروی راهنما) $\times\ {}^{50}\!/_{40}$ = (نیروی میله)

برای اصلیها (میله‌های فوقانی و تحتانی) : (نیروی راهنما) $\times\ {}^{30}\!/_{40}$ = (نیروی میله)

وارسی :

$$F_{ef} = 38.75 \times {}^{120}\!/_{40} = \underline{+116.25}$$

بحث :

پس از آنکه عکس‌العملها محاسبه شود کلیه نیروی میله‌ها را در اعضاء جان خرپا می‌توان با استفاده از یکی از روشهای گرهها یا مقاطع با شروع محاسبات از یک انتهای خرپا به‌طرف انتهای دیگر تعیین نمود ، سپس با محاسبه مولفه افقی اعضاء قطری می‌توان با استفاده از روش گرهها به‌تعیین نیرو در اعضاء فوقانی و تحتانی خرپا پرداخت در این حالت نیرو در اعضاء فوقانی و تحتانی فقط بستگی به‌مولفه افقی اعضای قطری دارد و چون کلیه قطری‌ها دارای یک شیب مشترک می‌باشند لذا نسبت بین مولفه‌های عمودی و افقی در همه آنها یکسان است ــ در این حالت این نسبت برابر 40 به 30 است . بنابراین در استفاده از رابطه $\Sigma F_x = 0$ برای گرههای مختلف به‌منظور تعیین نیرو در اعضاء فوقانی و تحتانی می‌توان بخود اجازه‌داد که به‌جای مولفه افقی قطریها از مقادیر مولفه عمودی آنها به‌طور موقت استفاده نمود . با این عملکرد مقادیری که برای نیروی اصلیهای فوقانی و تحتانی به‌دست می‌آید برابر با مقادیر حقیقی نیروی میله‌ها نمی‌باشد ولی خارج‌قسمت این مقادیر به‌مقادیر حقیقی ثابت بوده و برابر با نسبت بین مولفه‌های عمودی به‌افقی قطریها می‌باشد .

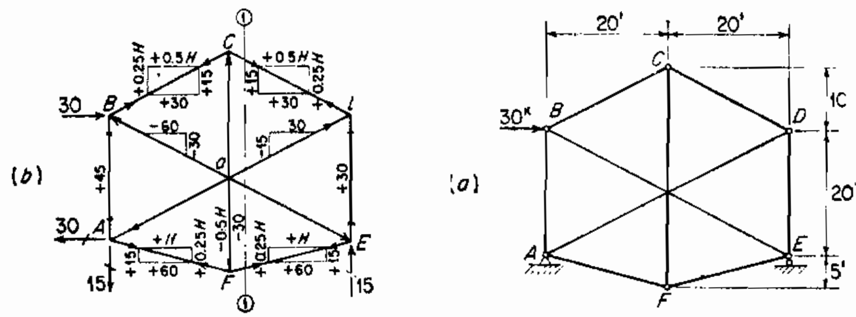
این مقادیر نیروی اعضای اصلی که باید به‌ضریب ثابتی جهت به دست آمدن مقدار واقعی نیروی میله‌ها ضرب شوند نیروی راهنمای اعضا اطلاق کرد . نیروی راهنما را چنانکه در اولین نمودار نیرو توسط اعدادی در داخل هلال نشان داده‌ایم می‌توان

به‌سادگی نوشت وپس از آن می‌توان‌نیروی میله‌های حقیقی‌را چنانکه در دومین‌نمودار نیرو نوشته شده است با ضرب نیروی راهنما در ضرائب لازم به‌دست آورد.

استفاده از نیروهای راهنما درخرپاهایی که دارای اعضای‌اصلی موازی‌با یکدیگر بوده‌و پانلهای آنها نیز با یکدیگر برابر است و تحت اثر بارهای عرضی‌می‌باشند مفید است ، در سایر حالات روش نیروهای راهنما معمولاً" از سایر روشهایی که قبلا"دربارهٔ آنها بحث شد نارساتر می‌باشد.

۴ــ۱۲ حالات استثنایی

گاهــی برخی از خرپاهــا جزو هیچیک از انواع خرپاهای ساده و یا مرکب نمی‌باشند نظیر چنین خرپایی را در شکل (۴ــ۱۳ الف)نشان داده‌ایم ،دراین حالات معمولا"نمی‌توان گفت که این خرپا صلب است و یا این‌که نامعین است ، در این حالت مخصوص شمارش سازه معلوم می‌کند که نه میله و شش گره وجود دارد و لذا معلوم می‌شود که این سازه معین‌است . پایدار و یا ناپایداربودن خرپا واضح نیست ولی یکی از طرق درک آن این است‌که به‌تحلیل تنش بپردازیم و به‌بینیم که آیا پاسخهای دریافتی سازگار است و یا خیر.



شکل ۴ــ۱۲ خرپای پیچیده

پس‌از محاسبه عکس‌العملها معلوم می‌شود که هیچ گرهی وجود نداردکه دونیروی میله مجهول داشته باشد ، لذا به‌کارگرفتن روش گرهها هیچ پاسخ سریعی نظیر کاربرد آن‌درمورد خرپاهای ساده برای نیروی میله‌ها به‌دست نخواهد داد و به‌همین طریق معلوم می‌شود کــه روش مقاطع نیز پاسخ سریعی برای هیچیک از نیروی میله‌ها معلوم نمی‌کند .البته ممکن‌است که از حل دستگاه ۹ معادله که ۹ نیروی‌میله مجهول را در بر دارد و از اعمال ۱۲ معادله ناشی از روش گرهها در ۶ گره از این سازه به‌دست می‌آید به‌مقادیر مجهول نیــروی میله‌ها

پی برد و اگر عکس‌العملها قبلاً" تعیین شده باشد می‌توان از ۳معادله باقیمانده برای نتایج به‌دست آمده برای ۹ نیروی میله مجهول استفاده نمود .

در هر صورت برقرارنمودن این چنین نه معادله برای حل این مساله راه حل ضعیفی است . روشهای دیگری که بسیار بهتراز این روش هستند وجود داردکه یکی ازآنها به‌صورت زیراست : پس‌ازتعیین عکس‌العملها فرض کنید که نیروی میلهٔ FE برابر با نیروی‌کششی به‌مقدار H باشد . از بررسی گره F چنین بر می‌آید که مولفه افقی در FA نیز برابـــر با $+H$ و نیروی میله در FC برابر با $-0.5H$ باشد ،باآزادکردن گره C معلوم می‌شود که مولفه عمودی در هر دومیلهٔ BC و CD به‌ترتیب برابر با $+0.5H$ و $+0.25H$ خواهد شد . پس از این که نیروی میله‌ها در این پنج میله برحسب H معلوم شد حال می‌توان با گذراندن بـــرش ۱ـ۱ از وسط خرپا قسمت طرف راست آنرا جهت بررسی جدا نمود . اگر نسبت به‌نقطه a لنگرگیری کنیم معادله‌ای به‌دست می‌آید که تنها مجهول آن H می‌باشد :

$$\sum^{R} M_a = 0, \circlearrowleft +, 15H - (20)(0.5H) - (15)(20) = 0$$

ازاین رابطه $H=+60$ به‌دست می‌آید . پس از معلوم‌شدن H سایر نیروی میله‌ها را می‌توان با روش‌گرهها چنانکه در شکل (۴ـ۱۳ ب) می‌بینیم به‌دست آورد . چون به‌این طریق تحت هرنوع بارگذاری می‌توان به‌تحلیل سازگاری از تنش در این خرپا دست یافت لـــذا می‌توان نتیجه گرفت که این خرپا پایدار و معین می‌باشد .

خرپاهایی از این نوع را که در ردیف خرپاهای ساده و یا مرکب قرار ندارند می‌توان خرپاهای پیچیده نامید این لغظ‌توسط‌پرفسور س تیموشنکو Timoshenko انتخاب شده است ، نامبرده در بحث غنی خود در باره خرپاهای پیچیده (یا مختلط) روشی کلـــی برای تحلیل خرپاهای پیچیده بنام روش هنبرگ Henneberg را ارائه داده است*.

در حالی‌که دانشجویان باید خرپاهای پیچیده را بشناسند و مطلبی در باره بررسی پایدار و تحلیل تنش آنها بدانند و از طرفی اغلب با این نوع خرپا برخوردی نخواهند داشت لذا در اینجا بیش از این به‌آن نمی‌پردازیم هرگاه مطالب بیشتری در این باره مورد

S. Timoshenko and D. H. Young, "Engineering Mechanics," vol. I, "Statics," McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1956.

روش هنبرگ توسط خود او در کتابش که نام آن در زیر آمده است بسط داده شده است .

"Statik der Starren Systeme," Darmstadt, 1886.

نیاز باشد می‌توانند به‌کتاب تیموشنکو مراجعه نمایند مثالهای متعددی در آخر این‌فصل ذکر شده که نشان می‌دهد که اغلب خرپاهای پیچیده ممکن است دارای آرایشی باشند که به‌ناپایداری هندسی بیانجامد. این چنین حالاتی همواره واضح نیست بلکه فقط زمانی‌معلوم می‌شود که به‌تحلیل تنش بپردازیم و از ناسازگاری پاسخهای به‌دست آمده‌پی‌به‌ناپایداری آن ببریم.

۴ ـ ۱۳ قابهای صلب

قبل از این‌که فصل مربوط به‌سازه‌های خرپایی را خاتمه دهیم جلب توجه دانشجویان به‌اختلاف بین خرپاهای ایده‌آل و "قابهای صلب" بسیار مهم است. معمولا" اعضای‌یک‌قاب صلب توسط گرههایی صلب که قادر به‌تحمل لنگر می‌باشند، بهم متصل می‌گردند. برخلاف آن در خرپاهای ایده‌آل کلیه اعضاء توسط مفصل بهم وصل می‌شوند. پس یک *قاب صلب عبارت‌از سازه‌ای است‌که از تعداد اعضایی‌که همگی در یک صفحه واقع شده و توسط گرههایی صلب‌تشکیل شبکه‌ای صلب‌را داده باشندبه‌نحوی‌که برخی یا همهٔ این‌گرهها برخلاف مفصل، صلب و دارای مقاومت در برابر لنگر باشند تشکیل شده باشد.*

یک‌گره لنگرپذیر (مقاوم دربرابرلنگر) گره‌ای است‌که قادر باشد از عضوی به‌عضو دیگر که‌در آن گره بهم متصل شده‌اند لنگر و نیرو منتقل نماید، چنین گرهی را می‌توان با پرچ یا جوش‌کردن اعضاء مورد بحث به‌ورق اتصال ایجاد نمود، طرح چنین گرهی به‌نوعی است که زاویهٔ بین اعضاء مختلف درگره همواره تحت اثرتغییرشکل قاب نیزبدون تغییر باقی‌می‌ماند. بدین دلیل معمولا" گرههای لنگرپذیر را گرههای صلب گویند.

اگر این تعاریف را در نظر بگیریم، خرپای جدید که دارای گرههای جوشی یا پرچی می‌باشد در زمرهٔ قابهای صلب قرارخواهد گرفت ولی‌چون عموما"با فرض این‌که چنان‌خرپایی مانند یک خرپا با اتصالات مفصلی عمل کند به‌تحلیل تنش رضایت بخشی منتهی می‌شود به‌این خاطر به‌آن نوع سازه‌ها خرپا گویند. و بدین‌ترتیب لفظ‌قاب صلب به‌کلیه سازه‌های مذکور درشکل (۴ ـ۱۴) به‌جزشکل (ب) آن اختصاص یافته‌است. در این اشکال قابهای صلب را با نمودارخطی و گرههای لنگرپذیر را با ماهیچه کمی در گره اتصال قطعات نشان‌داده‌ایم و گرههای مفصلی را مانند معمول مشخص کرده‌ایم.

مساله پایداری و معین بودن قابهای‌صلب را می‌توان‌به‌روشی مشابه‌با آنچه‌برای‌خرپاها به‌کار برده می‌شود بررسی نمود، به‌این منظور می‌توان ضابطه‌ای جهت مقایسه بین مقدار مولفه‌های مجهول‌نیروها و عکس‌العملها باتعداد معادلات مستقل‌تعادل استاتیکی‌موجودبرای

حل آن سازه برقرار نمود ، نظیر حالت خرپاها ، تعداد مجهولات و معادلات را می‌توان بر حسب تعداد قطعات (اعضاء) گرهها و اجزای عکس‌العمل‌بیان نمود .

تعداد کلی مجهولات مستقل برابر با جمع تعداد اجزای مجهول عکس‌العمل و تعداد مولفه‌های مجهول و مستقل نیروی داخلی قطعات می‌باشد . در یک قاب با گرههای صلب ، عمل گره بر روی یک عضو می‌تواند شامل یک لنگر و یک نیرو باشد به‌طوری‌که این نیروبتواند هم دارای مولفه عمودی هم مولفه افقی گردد . بنابراین مقطعی از یک عضو می‌توانـد تحت اثر نیروی محوری ، نیروی برشی و لنگرخمشی باشد و به‌این ترتیب اگر نیروی محوری،نیروی برشی و لنگر خمشی در انتهای یک عضو معلوم گردد همین کمیت‌ها را می‌توان برای سایر مقاطع عضو محاسبه نمود . بنابراین برای هر عضوی از یک قاب فقط سه مولفهٔ مستقل‌نیروی داخلی وجوددارد ــ حال اگر تعداد اجزای عکس‌العمل r باشد و تعداد اعضاء b ،تعدادکل مجهول مستقل یک قاب برابر با $3b + r$ خواهد بود .

اگر گره صلبی را از سازه آزاد کنیم این گره تحت دستگاه نیرو و لنگر واقع خواهدشد، برای این‌که تعادل‌چنان گرهی برقرار باشد این دستگاه باید سه معادله تعادل استاتیکی $\Sigma F_x = 0$ ، $\Sigma F_y = 0$ و $\Sigma M = 0$ را جوابگو باشد .اگر کل قاب در تعادل باشدلازم‌است که کلیه گرههای آن نیز در تعادل بماند و اگر قاب دارای n گره صلب باشد هریک از ایـن گرهها را می‌توان‌آزاد نموده و برای‌کل آنها $3n$ معادله‌تعادل استاتیکی برقرارنمود . مـانند آنچه در بحث خرپاها دیدیم می‌توان ثابت نمود که سه‌معادله تعادل کل سازه‌مستقل ازاین معادلات نیستند و لذا می‌توان نتیجه گرفت که برای کل قاب صلب فقط $3n$ معادله تعـادل استاتیکی می‌توان برقرار نمود .

گاهی مفصل‌هایی و یا وضعیت خاص دیگری در سازه موجود است لذا ***اگر به‌این‌ترتیب تعداد معادلات خاص سازه s باشد تعداد کل معادلات موجود برای تعیین مجهولات برابربا $3n + s$ خواهد بود . ضابطه‌ای برای تعیین پایداری و معین بودن قاب صلب با مقایسه تعداد مجهولات یعنی $3b + r$ با تعدادمعادلات مستقل یعنی $3n + s$ معلوم می‌شود همان‌طوری که قبلاً" دیدیم می‌توان نتیجه گرفت .***

اگر $3n + s > 3b + r$ باشد قاب ناپایدار است .

اگر $3n + s = 3b + r$ باشد قاب معین است .

اگر $3n + s < 3b + r$ باشد قاب نامعین است

اگر ضابطه نشان دهد که قاب مورد بحث معین یا نامعین است باید مانـنـد بحثی کـه در بخش(۴ــ۸) دیدیم به‌یاد آورد که شمارش تنهـا نمی‌تـوانـد پایـداری سـازه‌ای را ثابت نماید و در آن صورت معلوم‌نیست‌که آن سازه‌ازنظراستاتیکی و هندسی ناپدار نباشد .

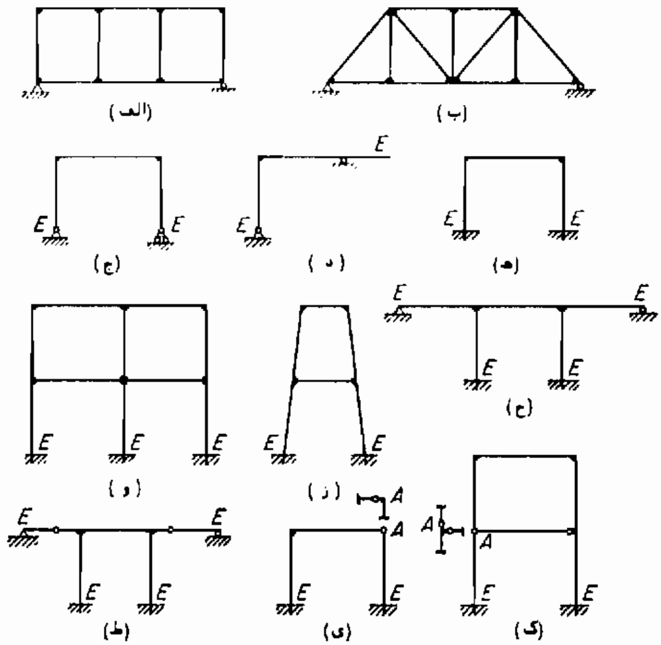
این ضابطه نشان دهندهٔ درجه نامعینی نسبت به‌عکس‌العملها و مولفه‌نیروهای داخلی است و اگر فقط درجه نامعینی عکس‌العملها را لازم داشته باشیم می‌توان به‌همان روشی‌که در بخش (۴-۹) برای سازه‌های خرپایی و همچنین در بندهای (۲-۵) و (۲-۹) بحث شد عمل نمود.

جدول (۴-۱) نتیجهٔ اعمال ضوابط فوق‌الذکر را در مورد قابهای شکل (۴-۱۴) نشان می‌دهد.

جدول (۴-۱)

قاب	n	s	b	r	$3n+s$	$3b+r$	مشخصه قاب
الف	8	0	10	3	24	33	۹ درجه نامعین
ب	8	0	13	3	24	42	۱۸ درجه نامعین
ج	4	0	3	3	12	12	معین
د	4	0	3	3	12	12	معین
هـ	4	0	3	6	12	15	۳ درجه نامعین
و	9	0	10	9	27	39	۱۲ درجه نامعین
ز	6	0	6	6	18	24	۶ درجه نامعین
ح	6	0	5	9	18	24	۶ درجه نامعین
ط	6	2	5	9	20	24	۴ درجه نامعین
ی	4	1	3	6	13	15	۲ درجه نامعین
ک	6	3	6	6	21	24	۳ درجه نامعین

در عمل به‌این ضابطه‌کلیه انتهاهایی نظیر E از قابها را که در شکل (۴-۱۴) نشان داده‌ایم باید مانند یک گره بحساب آورد، اگر چه به‌این نقاط فقط یک عضو منتهی می‌شود. گاهی شمارش s یعنی تعداد معادلات خاص سازه مشکل است. در سازه (ط) از شکل (۴-۱۴) واضح است که ایجاد دومفصل سبب برقراری دومعادله خاص می‌شود در سازه (ی) مفصل گره A سبب یک‌معادله‌خاص‌ولی‌ایجاد مفصل مشابهی‌در سازه‌ای (ک) درگره A سبب ایجاد دو معادله خاص می‌گردد، درکلیه حالات فوق صحت آن شمارش باملاحظه شکلهای‌کمکی‌که در هرحالتی برای گرهها نشان داده‌ایم واضح می‌گردد، این شکلهای‌کمکی در هرحالتی نشان دهنده عملکردی است که در اثر ایجاد مفصل‌ها در انتهای اعضاء بوجود می‌آید با این ترتیب در سازه (ی) یک مفصل و در سازه (ک) دو مفصل در گره A بوجود می‌آید. برای این که مطلب فوق‌الذکر را به‌صورت کلی بیان کنیم باید گفت که تعداد معادلات خاص‌که در اثر ایجاد



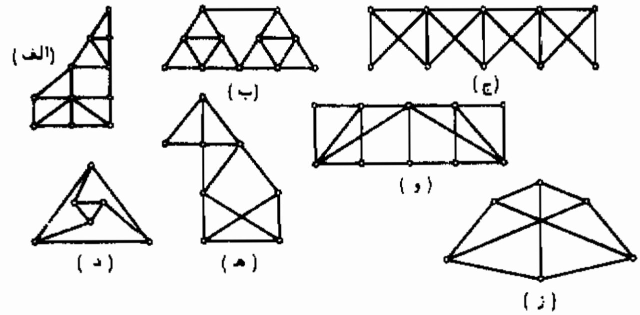
شکل ۴–۱۴ قابهای صلب

گره مفصلی درقابی صلب بوجود می‌آید برابراست با تعداد میله‌های‌مختوم به‌آن گره‌منهای یک . اگرتعداد معادلاتی‌که به‌این‌ترتیب شمرده می‌شود برابر با s باشد این‌ضابطه‌جوابهای صحیح خواهد داد .

پس‌ازخواندن‌پاراگراف‌آخرحقیقت‌این‌بیان برای‌خواننده واضح‌می‌شودکه‌تقریبا" شمارش صحیح سازه‌ای بدون اطلاع از پاسخ‌آن تقریبا" غیرممکن است به‌دلیل مشکلاتی‌که‌درشمارش برخی از سازه‌ها پیش می‌آید مؤلفین این کتاب احساس می‌کنند که‌گرچه ضابطه فوق گاهی بسیار مفید واقع می‌شود ولی محاسبین تنش *باید از طریق اساسی‌تری برای* تعیین درجه *نامعینی یک سازه نامعین* بهره گیرند *اساسی‌ترین روش این‌است که تکیه‌گاهها را* حذف‌کننده *و یا این‌که اعضاء سازه را تا زمانی‌که آن سازه* تبدیل به‌سازه‌ای معین و پایدار می‌شود برش دهند . تعداد قیودی که به‌این *طریق تا* رسیدن به‌این هدف حذف می‌گردد *برابر با* درجه *واقعی نامعینی سازه* خواهد بود .

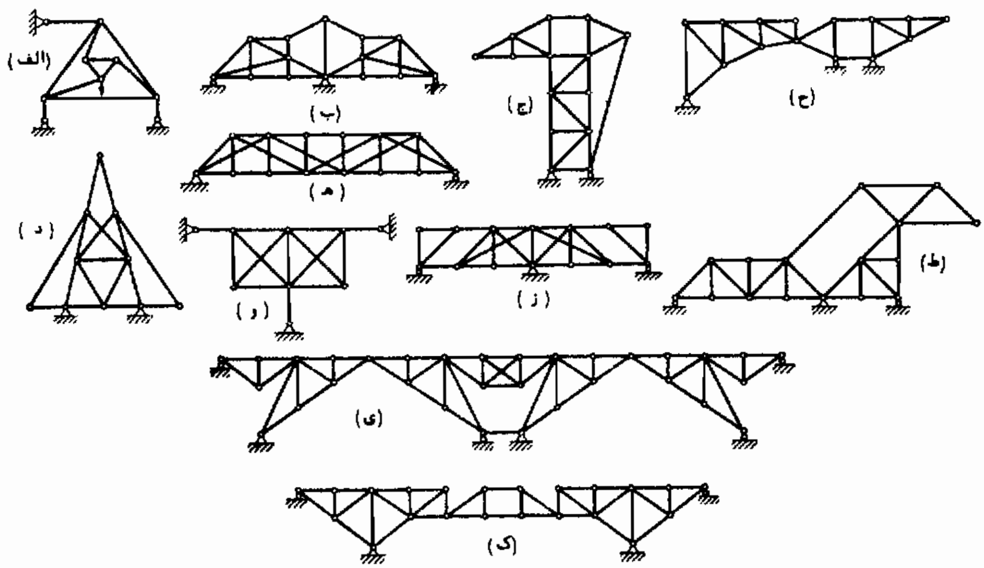
۴ ــ ۱۴ مسائل

۴ ــ ۱ خرپاهای شکل (۴ــ۵) را به‌دسته‌های ساده و مرکب و یا پیچیده (مختلط)تقسیم‌کنید



شکل ۴ ــ۱۵ مساله (۴ــ۱)

۴ ــ ۲ سازه‌های خرپایی‌شکل (۴ــ۱۶)را به‌دسته‌های معین یا نامعین ، پایدار و یا ناپایدار تقسیم کنید ، اگر سازه‌ای نامعین است درجه نامعینی آن‌را نسبت به‌عکس‌العمل و نیروی‌میله و همچنین تنهانسبت به‌عکس‌العملهای آن‌بیان کنید و اگر سازه‌ناپایداراست‌دلیل‌ناپایداری آنرا ذکر کنید .

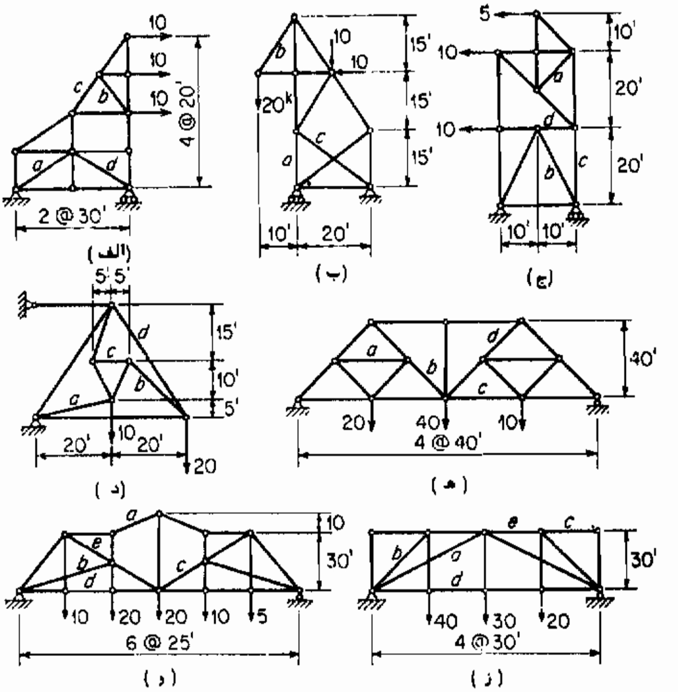


شکل ۴ــ۱۶ مساله ۴ــ۲

جواب :

(الف) پایدار ، معین (ب) پایدار ، عکس‌العملها یک درجه نامعین (ج)پایدار ،معین (د) پایدار عکس‌العملها یک درجه نامعین (هـ) پایدار ، تنش میله‌ها یک درجه نامعین (و) ناپایدار (ز) ناپایدار (ح) پایدار ، معین (ط) پایدار ، معین (ی) پایدار میله‌ها یک‌درجه نامعین (ک) ناپایدار .

۴ ــ ۲ نیروی میله‌ها را در خرپاهای شکل(۴ــ۱۷)در میله‌هائی‌که توسط حروف معین‌شده‌است تحت اثر بارهای وارده محاسبه کنید .



شکل ۴ــ۱۷ مساله ۴ــ۲

جواب :

الف $a = +18.03,\ b = -8.3,\ c = +25.0,\ d = -18.03$

ب $a = -43.75,\ b = +24.04,\ c = +2.083$

ج $a = +3.535,\ b = +29.20,\ c = +17.50,\ d = -15.00$

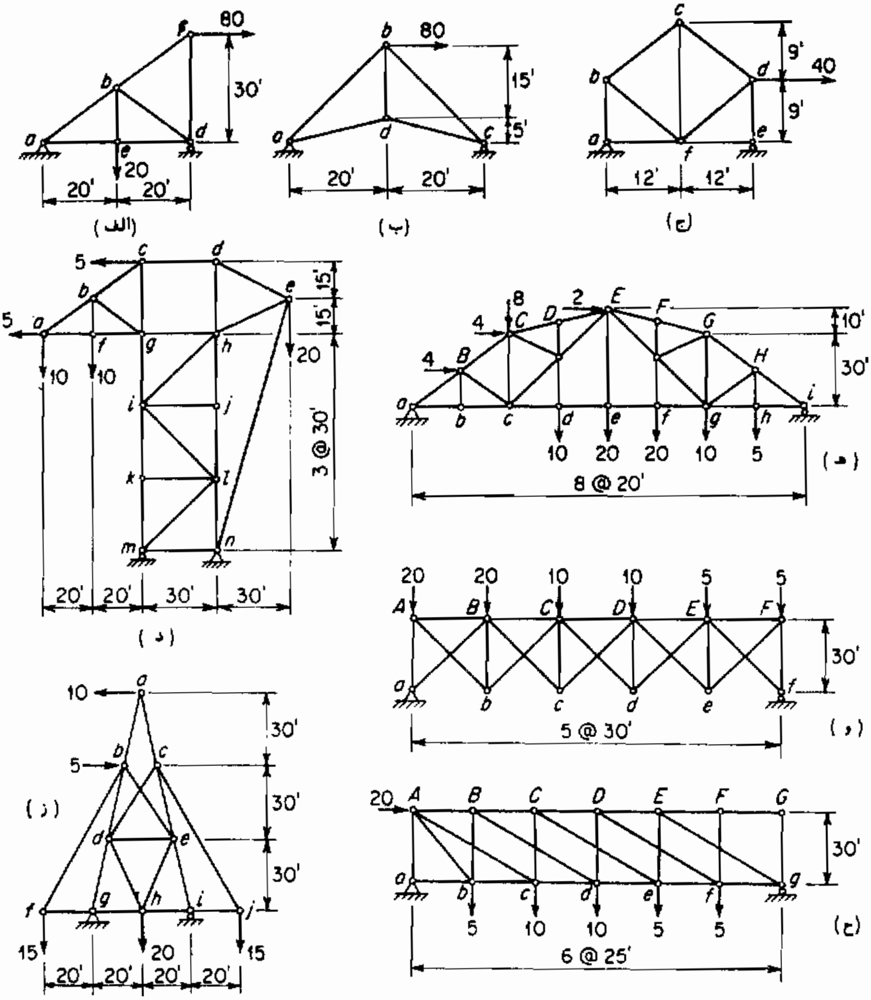
د $a = -1.41,\ b = -5.89,\ c = -5.17,\ d = +28.18$

هـ $a = -20.00,\ b = +24.74,\ c = +32.50,\ d = +38.89$

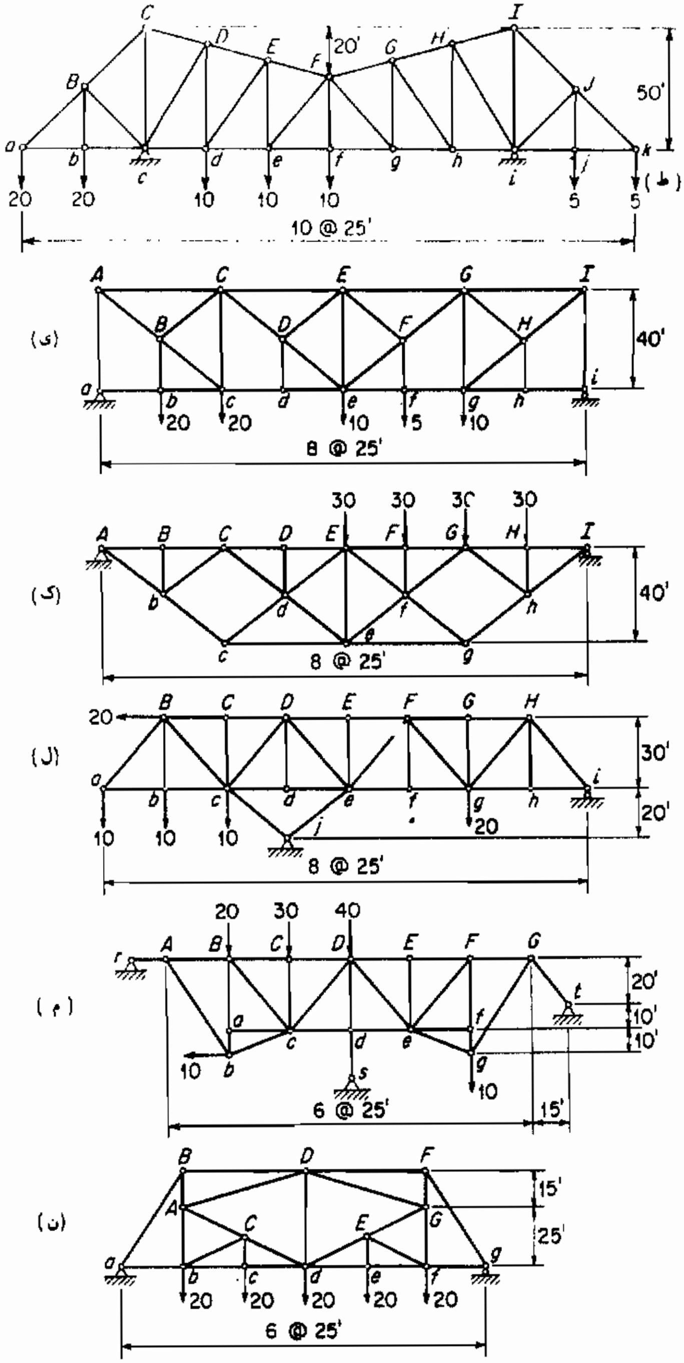
و $a = -45.44,\ b = -41.76,\ c = -5.04,\ d = +59.85,\ e = +26.89$

ز $a = -22.36,\ b = -56.57,\ c = 0.0,\ d = +60.00,\ e = -20.00$

۴ ــ ۴ کلیه نیروی میله‌ها را در خرپاهای شکل (۴ــ۱۸) تحت اثر بارهای نشان داده شده محاسبه کنید.

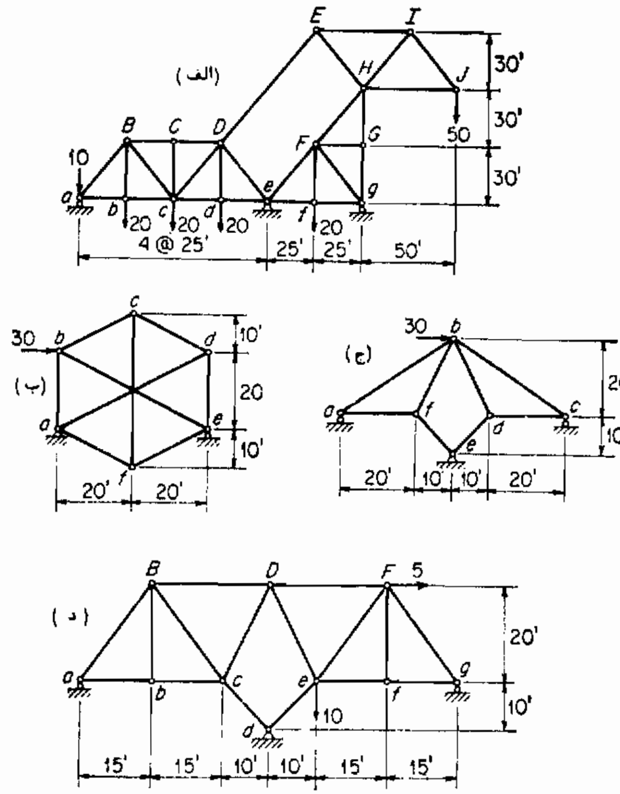


شکل ۴ــ۱۸ مساله ۴ــ۴



دنباله‌شکل (۴-۱۸)

۴ ـ ۵ نیروی‌میله‌ها را در سازه‌های شکل (۴ـ۱۹) محاسبه کنید (تذکر: متوجه باشیدکه‌چنین سازه‌هایی ممکن است ناپایدار هندسی باشند)



شکل ۴ـ۱۹ مساله ۴ـ۵

جواب:

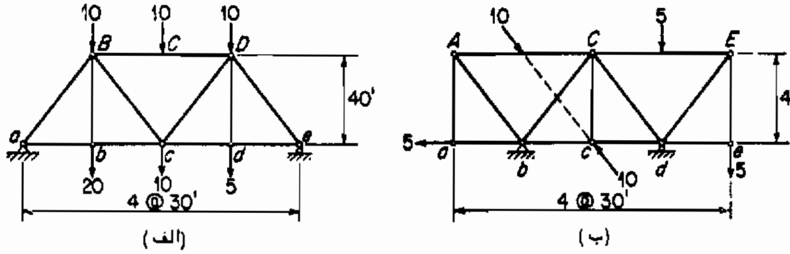
(الف) اعضاء: $HI = -65.086; DE = +65.086; Fg = -13.017; cD = +45.56$

(ب) ناپایدار هندسی

(ج) ناپایدار هندسی

(د) اعضاء: $Bc = -16.406; cd = -24.745; De = +4.841; fg = -5.156$

۴ ـ ۶ نیروی‌میله‌ها را در سازه‌های شکل (۴ـ۲۰) محاسبه کنید. همچنین نمودارهای برش و لنگر خمشی را برای آن اعضاء که چنان تنشهایی را تحمل می‌کنند رسم کنید.



شکل ۴-۲۰ مساله ۴-۶

جواب :

(الف) اعضاء : $BD = -28.125;\ Bc = +1.563;\ ab = +27.188$

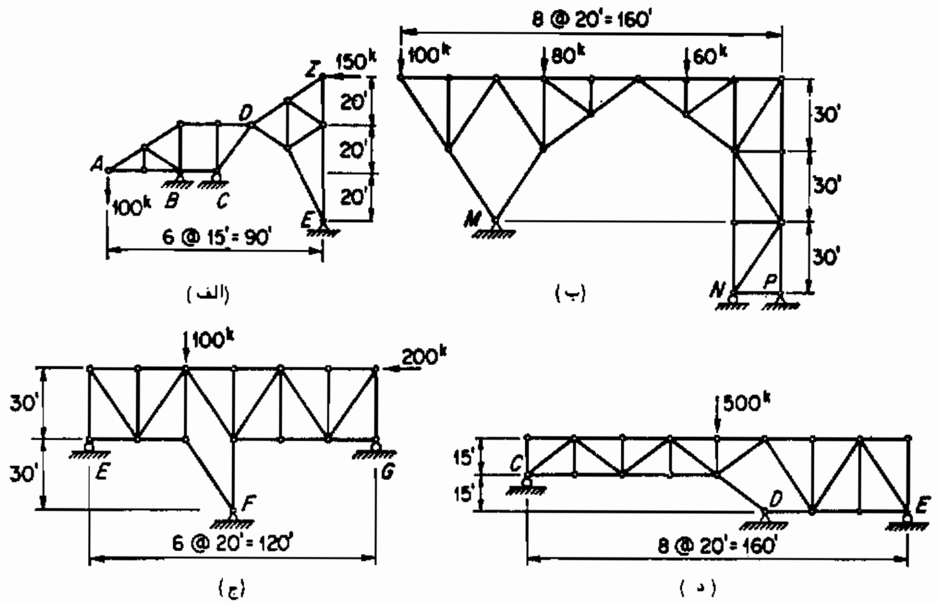
عضو BD : برش در $B = +5.0$ $D = -5.0$ لنگر در $B = 0$ $C = +150$ $D = 0$

(ب) اعضاء : $Ab = -5.0$ $bC = +8.125$ $CE = +5.625$

عضو AC : برش در $A = +4.00$ $C = -4.00$ لنگر در $A = 0$ زیر بار $+120$. $C = 0$

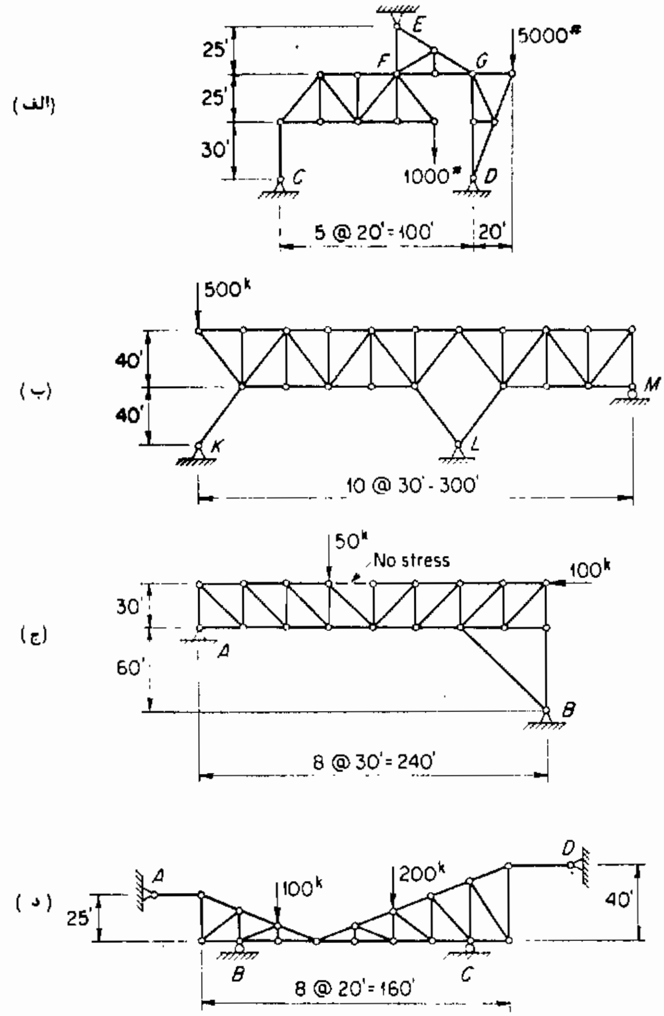
عضو CE : برش در $C = +2.5$ $E = -2.5$ لنگر در $C = 0$ زیر بار $+75$ $E = 0$

۴ ـ ۷ مقدار عکس‌العملها را برای هریک از سازه‌های شکل (۴-۲۱) محاسبه کنید .



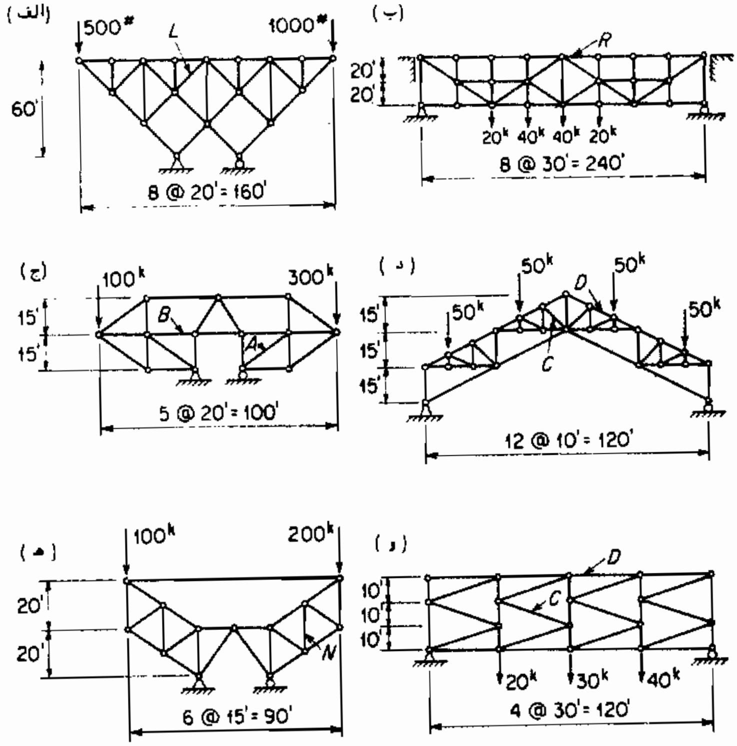
شکل ۴-۲۱ مساله ۴-۷

۴ ـ ۸ مقدار عکس‌العملها را برای هریک از سازه‌های شکل (۴ـ۲۲) محاسبه کنید .



شکل ۴ـ۲۲ مساله ۴ـ۸

۴ ــ ۹ نیروی میله‌را درهریک از میله‌های نشان داده شده درسازه‌های شکل (۴ــ۲۳) محاسبه کنید .



شکل ۴ــ۲۳ مساله ۴ــ۹

۵

ایستایی ترسیمی

۵ ــ ۱ مقدمه

ایستایی‌ترسیمی بخشی از مکانیک است که به‌جای روشهای جبری عمدةً" به‌طریق ترسیمی به‌حل مسائل ایستایی می‌پردازد .اصولا" تمایل شدیدی از طرف دانشجویان و مهندسین به‌روشهای ترسیمی به‌چشم می‌خورد و البته در برخی از مسائل به‌طور مشخص برتری روشهای ترسیمی به‌روشهای تحلیلی کاملا" روشن است ،بدیهی است که درمسایل دیگر نیز دقیقا" عکس مطلب فوق صحت دارد و بین‌این دو حد کاملا" متمایز، انتخاب شخصی و آشنایی قبلی مهندسین در روش محاسباتی نقش عمده‌ای‌ایفا می‌کند .

مسائلی که حل‌آنها به‌طریق ترسیمی برتری دارند عبارتنداز: ۱ــ تعیین نیروی میله‌های‌خرپایی که دارای شکل ظاهری پیچیده بوده و باید برای چندنوع بارگذاری مشخص‌محاسبه‌شود ۲ــ حالاتی که تغییر مکان حقیقی کل برای کلیه گرههای یک خرپا مورد نیاز باشد .

دانشجویان متوجه خواهند شد که دانستن روشهای ترسیمی نه‌تنها در حل مسائلی که قبلاً‌ذکر شد مفید می‌باشد بلکه مطالعه اصول روشهای ترسیمی سبب ایجاد قدرت تشخیص و تجسم‌لازم در حل برخی از مسائل می‌گردد . دانشجویان در خواهند یافت که چنین علمی در مشاهده ذهنــی و تجسم پدیده‌های فیزیکی‌موجود به‌او کمک کرده و او را در جریان تفکر راه‌حلهای جبری برخی از مسائل‌قرار می‌دهد .

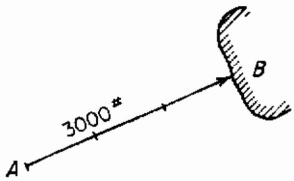
در این کتاب بحث ایستایی ترسیمی محدود به‌حل سازه‌های دوبعدی یا مستوی خواهد بـود ، البته واضح است که روشهای ترسیمی را می‌توان در حالت کلی به‌مسائل سه‌بعدی نیز تعمیم داد ولـی پیچیدگی‌هایی که در این طریق به‌دلیل بعد سوم در روشهای ترسیمی حل مسائل واردمی‌شود‌بیشتر از پیچیدگی‌های روش جبری است .

۵ ــ ۲ تعاریف

قبل از این‌که به‌بحث در مورد اصول مبنای ایستایی ترسیمی بپردازیم لازم است‌که به‌ذکربرخی

از تعاریف و خواص مربوط به‌نیروها و دستگاههای نیرو اشاره شود . نیرو را می‌توان به‌این‌ترتیب تعریف نمود که عبارت از هرنوع عملی است که تمایل به‌تغییر حالت حرکت (یا سکون) جسمی که بدان اثر می‌کند داشته باشد . نیروهای مؤثر بر یک جسم را می‌توان به‌نیروهای خارجی یا نیروهای داخلی (یعنی برآیند اثر تنش‌های مؤثر بر مقاطع داخلی که توسط برشی که برجسم مورد بحث‌اعمال می‌شود ظاهر می‌گردند) تقسیم نمود . نیروهای خارجی را نیز به‌نوبت خود می‌توان به‌بارهای مؤثر بر سازه از خارج (نیروهای عامل) و عکس‌العملها (نیروهای عکس‌العمل یا لنگرها) که نقش متعادل کننده یا مهارکننده اثرات بار را دارند تقسیم نمود .

هر نیرو را می‌توان با مشخصات زیر کاملا" معین نمود ۱ـ نقطه اثرش ۲ـ امتداد نیرو ۳ـ مقدار برداری آن . بر طبق چنین الفاظی غرض از "امتداد یک نیرو" تعیین شیب خط اثر نیرو است و در حالی‌که غرض از "مقدار برداری" نه‌تنها اندازه عددی آن می‌باشد بلکه جهت اثر نیرو نیز مورد نظر است ، به‌این معنی که معین کنیم که نیرو به‌طرف و یا از طرف جسم اثر می‌کند و به‌این ترتیب هرنیرو یک کمیت‌برداری است زیرا که هم دارای مقدار و جهت است و هم دارای امتداد مشخص ،لذا یک‌نیرو را به‌صورت ترسیمی می‌توان توسط خطی که به‌طرف یا از طرف نقطه اثرآن می‌گذرد و دارای طولی که برحسب‌مقیاس معینی نشان‌دهنده‌اندازه عددی‌آن می‌باشد مشخص نمود ،شیب این خط بیانگرامتداد اثرنیرو و جهت‌اثر نیرو توسط پیکانی‌که درروی امتداد نیرواست معین می‌شود .درشکل (۵ـ۱)نیرویی



شکل ۵ـ۱ بردار نیرو

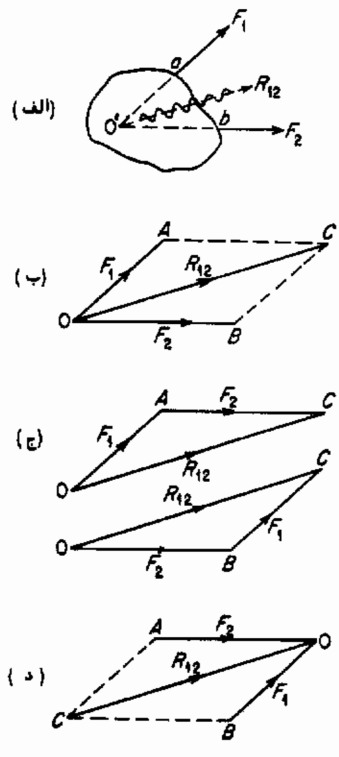
برابر با 3,000-lb توسط بردار $\overline{AB}$ نشان داده شده است . اگر برداری به‌چنین روشی نشان‌داده شود ، ترتیب حروف نشان‌دهنده جهت نیرو است . لذا $\overline{AB}$ مشخص می‌کند که نیرو از طرف A بطرف B اثر می‌کند .

به‌کاربردن لفظ "نقطه اثر" یک نیرو به‌این معنی است که متمرکزنمودن یک‌نیرو دریک‌نقطه‌ممکن می‌باشد ، بدیهی است که از نظر فیزیکی اثر باری معلوم بر یک نقطه غیرممکن است زیرا اگر نیرویی به‌سطح برابر با صفر وارد شود در سطح تماس جسم شدت تنش بی‌نهایت بوجود می‌آید و چون هیچ مصالحی نمی‌تواند چنین تنشی را تحمل نماید لذا در نقطه اثر ، تغییر شکل کوچکی انجام می‌گیرد تا این‌که در اطراف آن سطح تماس کوچکی ایجاد شود تا درآن سطح بار مورد بحث به‌شدت‌معینی‌پخش گردد ، ولی در هر صورت اگر بررسی شرط‌تعادل کلی جسم مورد نظر باشد منطقی این است که بار واقعی را که برسطح کوچکی پخش می‌شود با معادل‌کلی آن به‌صورت باری متمرکز در یک نقطه‌جایگزین کنیم .

چنانکه قبلاً در بخش (۲ـ۳) توضیح دادیم معمولاً هرگاه بخواهیم شرط تعادل سازه‌ای را بررسی کنیم می‌توان آن‌را یک جسم صلب (غیرقابل تغییر شکل) فرض نمائیم لذا در اکثر مسائل ایستاتیک ترسیمی فرض خواهیم کرد که سازه یک جسم صلب است و لذا شکل هندسی آن بعد از اثر بارها عملاً به‌شکل قبل از بارگذاری باقی خواهد ماند.

۵ ـ ۳ ترکیب و تجزیه نیروها

گاهی لازم است که دو نیرو را با نیروئی که همان اثر را در تعادل جسم داشته باشد جایگزین کنیم، این یک نیرو که همان اثر را در ایجاد حرکت بوجود خواهد آورد برآیند آن دو نیرو گویند. می‌توان نشان داد که امتداد و مقدار برداری نیروی برآیند دونیروی متقارب را با رسم قطرمتوازی‌ـ الاضلاعی که دوضلع آن دو نیروی مورد بحث به‌صورت دوبردارمی‌باشند به‌دست آورد. بدین‌ترتیب برای تعیین مقداربرداری و امتداد برآیند دو نیروی F_1 و F_2 که در شکل (۵ـ۲ الف) نشان‌داده‌شده



شکل ۵ـ۲ ترکیب نیروها

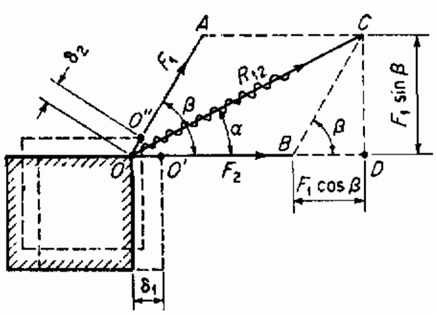
است متوازی‌الاضلاع شکل (۵ـ۲ ب) ایجاد شده است. این متوازی‌الاضلاع براساس دوضلع خود یعنی OA و OB که به‌ترتیب با رسم دوبردار $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ ازنقطه O که معرف نیروهای F_1 و F_2 می‌باشند به‌دست

آمده است. امتداد دو مقدار برداری برآیند R_{12} توسط بردار $\overline{OC}$ که قطر متوازی‌الاضلاع فوق‌الذکر می‌باشد معین می‌شود.

با در نظر گرفتن شکل (۵–۲ د) واضح است که همین نتیجه را می‌توان از طریق ایجاد متوازی‌الاضلاعی با بردارهای $\overline{AO}$ و $\overline{BO}$ که هردو به‌نقطه O وارد می‌شوند به‌جای این‌که از آن نقطه خارج شوند نیز به‌دست آورد و به‌این‌ترتیب از شکل (۵–۲ ج) معلوم می‌شود که همان نتایج را می‌توان با رسم یکی از مثلثهای برداری OAC و یا OBC به‌جای متوازی‌الاضلاع کسب نمود. برای رسم این مثلثها یکی از نیروها را می‌توان ابتدا رسم نموده و نیروی دوم را از انتهای نیروی نخست ترسیم کرد. مقدار برداری و امتداد نیروی برآیند با وصل‌کردن ابتدای بردار اول به‌انتهای بردار دوم توسط بردار سومی به‌دست می‌آید.

پس از آن‌که مقدار برداری و امتداد برآیند R_{12} به‌یکی از این طرق به‌دست آمد نقطه اثر آن را می‌توان هر نقطه‌ای که در روی خط اثر آن گرفته شود فرض نمود. خط اثر برآیند باید از محل تلاقی دو نیروی F_1 و F_2 و یا به‌عبارت دیگر از نقطه O' در شکل (۵–۲ الف) بگذرد، اگر چنین نباشد برآیند مزبور نمی‌تواند همان اثر دو نیرو را که به‌جای آن نشسته است ایجاد نماید زیرا که در این صورت لنگر برآیند حول هر محوری که از نقطه‌ای معلوم از صفحه بگذرد برابر با جمع لنگرهای دو نیرو حول همان محور نخواهد بود. به‌عنوان مثال جمع لنگرهای دو نیروی F_1 و F_2 حول هر محوری که از نقطه O' بگذرد مساوی صفر است، ولی لنگر برآیند R_{12} فقط زمانی صفر خواهد شد که خط اثر R_{12} نیز از نقطه O' بگذرد.

صحت روش ترسیم متوازی‌الاضلاع برای تعیین امتداد و مقدار برداری برآیند دو نیروی متقارب را می‌توان به‌طریق زیر نشان داد: دو نیروی F_1 و F_2 را که برنقطه O از جسم شکل (۵–۳) اثر می‌کنند در نظر بگیرید برآیند R_{12} این نیروها نیز به‌نقطه O که در روی خط اثر برآیند که توسط زاویه مجهول α معلوم می‌شود اثـر می‌کند، مقدار برداری و امتداد این نیروی برآیند را می‌توان به‌طریق زیر معین نمود: اگر این جسم به‌نحوی حرکت کند که به‌نقطه O حرکتی دلخواه برابر با δ بدهد نیروهای F_1 و F_2 مقدار معینی کار انجام خواهند داد، اگر قرار باشد که برآیند R_{12} همان اثر مشابه دو نیروی F_1 و F_2 را داشته باشد پس باید در طول حرکت δ همان مقدار کار را انجام دهد، فرض کنید که



شکل ۵–۳ متوازی‌الاضلاع نیروها

به‌جسم حرکتی دلخواه و انتقالی داده باشیم به‌نحوی‌که نقطه O به‌نقطه O' منتقل شود . با در نظر گرفتن برابری کار F_1 و F_2 با کار انجام شده توسط R_{12} معادله (الف) به‌دست می‌آید :

$$(R_{12}\cos\alpha)(\delta_1) = (F_2)(\delta_1) + (F_1\cos\beta)(\delta_1)$$
$$R_{12} = \frac{F_2 + F_1\cos\beta}{\cos\alpha}$$

به‌همان طریق با حرکت انتقالی‌مشابهی به‌طوری‌که نقطه O به O'' تغییرمکان پیدا کند خواهیم‌داشت :

$$[R_{12}\cos(\beta-\alpha)](\delta_2) = (F_1)(\delta_2) + (F_2\cos\beta)(\delta_2)$$
$$R_{12} = \frac{F_1 + F_2\cos\beta}{\cos(\beta-\alpha)}$$

حال این دو معادله را باید نسبت به R_{12} و α حل کنیم . با مساوی قراردادن‌طرفین سمت راست‌این دو معادله رابطه زیر برای مقدار α به‌دست خواهد آمد :

$$\tan\alpha = \frac{F_1\sin\beta}{F_2 + F_1\cos\beta}$$

بنابراین داریم :

$$\cos\alpha = \frac{F_2 + F_1\cos\beta}{\sqrt{(F_1\sin\beta)^2 + (F_2 + F_1\cos\beta)^2}}$$

با جاگذاری معادله (د) در معادله (الف) خواهیم داشت :

$$R_{12} = \sqrt{(F_1\sin\beta)^2 + (F_2 + F_1\cos\beta)^2}$$

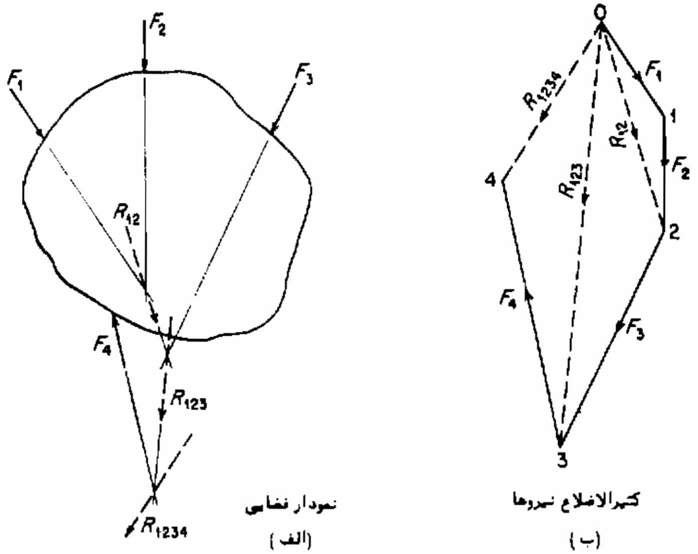
با استفاده از معادله (ج) می‌توان چنانچه در شکل (۵ـ۳) نشان داده شده است زاویه α را ترسیم نمود و مقداربردار R_{12} را نیزمی‌توان ازمعادله (هـ) که طول وترمثلث قائم‌الزاویهODCرانشان می‌دهد به‌دست آورد . بنابراین واضح است که بردار $\overline{OC}$ که نشان دهنده برآیند می‌باشد قطرمتوازی‌الاضلاع نیروهای $OACB$ انتخاب می‌گردد زیرا که بر طبق شرحی که داده شد بر آن مطابقت دارد .

عملی که طی آن نیروهای F_1 و F_2 را توسط تنها نیروی برآیند R_{12} جایگزین می‌کنیم ترکیب نیروهای F_1 و F_2 می‌گویند . عکس عمل فوق را که در طی آن یک نیروی‌واحد R را با دو نیروی معادل (که دو مولفه آن گفته می‌شود) آن F_1 و F_2 جایگزین می‌شود تجزیه نیروی R خوانده می‌شود .در تجزیه نیروها ممکن است‌که امتداد دو مولفه معلوم باشد و سپس مقداربرداری آنهارا از طریق مثلث‌نیروها یا متوازی‌الاضلاع نیروها به‌دست‌آوریم و یا این‌که امتداد ومقداربرداری یکی از مولفه‌ها معلوم باشد و به‌همان طریق امتداد و مقداربرداری مولفه دیگر را معلوم کنیم .پس از آنکه امتداد و مقداربرداری هردو مولفهٔ F_1 و F_2 معین شد هردوی آنها را می‌توان به‌نقطه اثرنیروی R وارد نمود .بدیهی است که می‌توانیم هردو مولفهٔ F_1 و F_2 را به‌هرنقطه‌ای در روی امتدادخط اثر

نیروی R وارد کنیم .

۵ ـ ۴ برآیند چند نیرو در یک صفحه ـ کثیرالاضلاع نیروها

فرض کنیدکه جسمی تحت تأثیر دستگاه‌نیروی مستوی F_1 ، F_2 ، F_3 و F_4 که درشکل (۵ـ۴الف) نشان داده شده است واقع شده باشد . این شکل نشان‌دهندهٔ نموداری با مقیاس است که نقطهٔ اثرو خط‌اثر نیروها را در صفحهٔ آنها (یا در فضای دوبعدی) نشان می‌دهد که به‌آن نمودار فضایی‌گویند ، فرض کنید بخواهیم برآیند این نیروهارا به‌طریق ترسیمی پیدا کنیم . چنانکه درمبحث قبل ذکرکردیم امتداد و مقداربرداری برآیند R_{12} نیروهای F_1 و F_2 را می‌توانیم از مثلث 012 نیروها به‌دست‌آوریم خط‌اثر این برآیند به‌موازات بردار $\overline{02}$ رسم می‌شود که از محل تقاطع خطوط‌اثر نیروهای F_1 و F_2 می‌گذرد . به‌ترتیبی مشابه برآیند R_{123} نیروهای F_1 ، F_2 و F_3 را نیز می‌توان به‌دست آورد و پس ازآن برآیند R_{1234} نیروهای R_{123} و F_4 را تعیین می‌کنیم . بدیهی است که برآیند R_{1234} هرچهار نیروی F_1 ، F_2 ، F_3 و F_4 می‌باشد .



شکل ۵ـ۴ برآیند دستگاه نیروی مستوی

شکلی که از ترکیب مثلثهای نیروی 012 ، 023 ، 034 با حذف خطوط خط‌چین 02 و 03 به‌دست می‌آید کثیرالاضلاع‌نیروهای F_1 ، F_2 ، F_3 و F_4 گویند ،ازطریق این‌کثیرالاضلاع نیروها برآیند R_{1234} کل دستگاه را می‌توان مستقیماً و بدون تکمیل نمودن مثلث‌های نیرو به‌دست آورد . امتداد و مقداربرداری برآیند با برداریکه‌ازنقطه ابتدای‌کثیرالاضلاع نیروها به‌نقطه‌انتهای‌آن وصل می‌شود

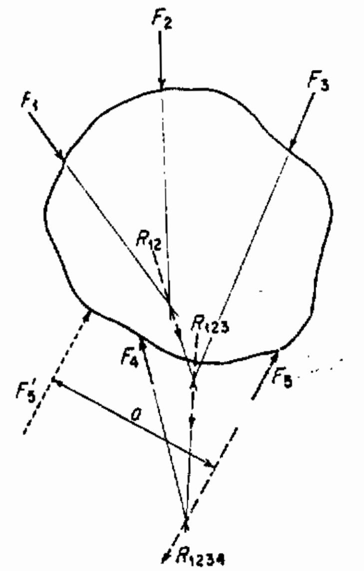
به‌دست می‌آید ــ که در این حالت بخصوص توسط بردار $\overline{04}$ تعیین می‌شود. برای این‌که خط اثر این برآیند را در نمودار فضایی رسم کنیم، خطوط اثر برآیندهای میانی R_{12} و R_{123} را نیز به‌نحوی‌که قبلاً" شرح داده شد باید ترسیم نمائیم.

این روش تعیین امتداد مقداربرداری و خط اثر برآیند تا زمانی که خطوط اثر نیروها با یکدیگر موازی نبوده و یکدیگر را در صفحه ترسیم قطع نمایند قابل استفاده خواهد بود. اگر این روش قابل اجرا نباشد لازم است که طریقه‌ای را که بنام "کثیرالاضلاع (فونیکولر) تعادل" خوانده می‌شود به‌نحوی که در بند (۵ــ۷) شرح داده‌ایم به‌کار بریم.

باید یادآوری نمود که ترتیب رسم نیروها در کثیرالاضلاع نیروها مهم نیست ولی معمولاً" فقط به‌منظور راحتی آنها را در جهت ساعتگرد رسم می‌نمایند.

۵ ــ ۵ شرایط تعادل برای دستگاه نیروهای متقارب و نامتقارب

فرض کنید که نیروی F_5 به‌دستگاه نیروی نامتقارب شکل (۵ــ۴ الف) اضافه گردد. دستگاه‌جدید F_1 ، F_2 ، F_3 ، F_4 و F_5 درشکل (۵ــ۵) نشان داده شده‌است، فرض کنیدکه نیروی F_5 دارای‌همان خط اثر برآیند R_{1234} بوده و به‌علاوه از نظر مقدار عددی مساوی ولی از حیث جهت درخلاف‌برآیند باشد، دراین حالت معلوم می‌شودکه کثیرالاضلاع نیروها برای این پنج نیرو درهمان نقطه شروع اولیه آن یعنی‌نقطه O بسته می‌شود. بسته‌شدن کثیرالاضلاع نیروها نشان می‌دهد که معادلات $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ برای این پنج نیرو صادق بوده و بنابراین برآیند اثر آنها نمی‌تواند یک نیروی برآیند



شکل ۵ــ۵ دستگاه نیروی مستوی معادل با یک لنگر

باشد ، در حقیقت دو نمودار فضایی F_5 و R_{1234} دارای یک خط اثر بوده و از نظر مقدار عددی نیز با یکدیگر برابر بوده ولی از حیث جهت در خلاف هم می‌باشند این خصوصیات به‌این معنی است که F_5 چهارنیروی دیگر را درتعادل نگه می‌دارد در یک چنین حالتی نیروی F_5 را متعادل‌کننده‌چهار نیروی دیگر گویند .

حال فرض کنید که نیروی F_5 به‌جای این که با R_{1234} دارای یک خط اثر باشد همان‌طوری‌که در شکل (۵ـ۵) توسط نیروی F'_5 نشان داده شده است به‌فاصله a از آن قرار گرفته باشد ، دراین‌حالت گرچه F'_5 کثیرالاضلاع نیروها را می‌بندند و به‌این ترتیب معادلات $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ برقرار می‌شود در نمودار فضایی دونیروی F'_5 و R_{1234} با یکدیگرموازی بوده ولی‌خطوط اثرآنها با یکدیگر به‌مقدار a فاصله خواهد داشت ، واضح است که از این صورت برآیند دستگاه‌جدید F_1 ، F_2 ، F_3 ، F_4 و F'_5 لنگری برابر با F'_5a بوده دستگاه به‌علت این که $\Sigma M \neq 0$ است در تعادل نخواهد بود .

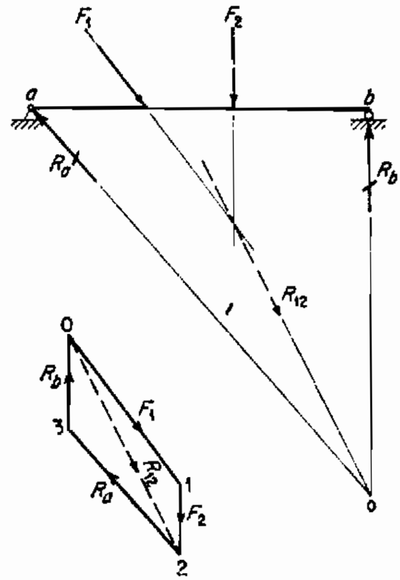
در حالت یک دستگاه نیروی نامتقارب واضح است که بسته‌شدن کثیرالاضلاع نیروها فقط شرط لازم تعادل دستگاه بوده ولی شرط کافی برای آنها نخواهد بود . اضافه براین شرط باید در نمودار فضایی نشان داده شود که دستگاه معادل یک لنگر نمی‌باشد ، به‌این ترتیب که نشان‌داده شود که هرنیرویی دارای‌همان خط اثر برآیند سایر نیروهای دستگاه بوده ولی از حیث جهت درخلاف‌آن می‌باشد .

بدیهی است که اگر دستگاه نیرو یک دستگاه نیروی متقارب باشد به‌طوری که خطوط اثر کلیه نیروها در یک نقطه مشترک یکدیگر را قطع کنند ، برآیند اثر دستگاه هرگز نمی‌تواند لنگر باشد . در یک چنین حالتی بسته‌شدن کثیرالاضلاع نیروها نشان دهنده‌این‌است‌که برآیند‌اثر دستگاه یک نیروی برآیند نیست و همین کافی است که ثابت کند این دستگاه نیروی متقارب در تعادل است .

۵ ـ ۶ تعیین عکس‌العملها به‌روش سه نیرو

اگر فقط سه نیروی غیرموازی بر جسمی اثر کند می‌توانیم به‌سادگی نشان دهیم در صورتی در تعادل خواهند بود که باهم متقارب باشند ، دو نیرو از این سه نیرو را در نظر بگیرید خط اثر برآیند این دو نیرو باید ازمحل تقاطع این دو نیرو بگذرد پس برای اینکه نیروی باقیمانده‌متعادل کننده‌این دو نیرو باشد باید که خط‌اثر نیروی سوم بر برآیند این دونیرو منطبق گردد . از اینجا می‌توان‌چنین نتیجه گرفت که اگر قرار است که دستگاه در تعادل باشد می‌بایستی که این سه‌نیرو از نقطه مشترکی بگذرند . این نتیجه‌گیری اساس و روش سه‌نیرو، را که برای تعیین عکس‌العملهای سازه‌های معین به‌کار می‌رود تشکیل می‌دهد .

به‌عنوان مثال تیر شکل (۵ـ۶) را ملاحظه کنید فرض کنید بخواهیم عکس‌العملهای‌آنرا که برای حفظ‌تعادل استاتیکی این سازه لازم است معین نمائیم . ابتدا خط‌اثر و مقدار برداری برآیند بارهای وارده را با به‌کاربردن کثیرالاضلاع نیروها و نمودار فضایی تعیین کنید ، حال می‌توان سازه را تحت اثر سه‌نیرو فرض نمود ــ برآیند بارهای وارده (دربین حالت $\bar{R}_{12}$) و دو عکس‌العمل (R_a و R_b)



شکل ۵ـ۶ تعیین عکس‌العملها بروش سه نیرو

برای این‌که سازه در تعادل باشد لازم است که این سه نیرو متقارب باشند دراین حالت مقداربرداری دو عکس‌العمل و امتداد R_a مجهول می‌باشند ولی نقطه اثر R_a و خط اثر R_b هردو معلـوم هستند . واضح است‌که خط اثر R_b بایدخط عمودی که از نقطه b می‌گذرد باشد ، بنابراین نقطه o که‌محل‌تلاقی R_{12} و R_b است باید بر نقطه تقارب این سه نیرومنطبق باشد لذا خط اثر R_a می‌بایستی در طول oa واقع شود .حال‌که امتداد هردو عکس‌العمل معلوم‌شد ،مقدار برداری آنهارا با علم بر این‌که‌بردارهای معرف این عکس‌العملها بایدکثیرالاضلاع نیروهارا به‌بندند می‌توان به‌سادگی معین نمود. دراین‌حالت با رسم خطی از نقطه 2 به‌موازات R_a و از نقطه O به‌موازات R_b نقطه تقاطع 3 را که تعیین کننده طول بردارهای $\overline{23}$ و $\overline{30}$ می‌باشد و به‌ترتیب معرف عکس‌العملهای R_a و R_b هستند به‌دست می‌آیـد . البته بسته‌شدن کثیرالاضلاع نیروها به‌این طریق و یا با رسم خطی به‌موازات R_a از نقطـه O و خـط دیگری به‌موازات R_b از نقطه 2 فرقی دراصل مساله نمی‌نماید .

باید توجه داشت که روش سه نیرو روش کلی و کاملی برای تعیین عکس‌العملهای یک سازه معین نمی‌باشد و فقط زمانی می‌توان آنرا به‌کار برد که خط‌اثر برآیند نیروهای وارده خط‌اثر معلوم یکی از عکس‌العملها را قطع نماید .

۵ ـ ۷ کثیرالاضلاع (تعادل) فونیکولر

در بخش (۵ـ۴) روشی ذکر شد که توسط‌آن می‌توانیم برآیند چند نیروی مستوی را معین کنیـم

ولی آن روش در صورتی که نقطه تقاطعی از نمودار فضایی خارج از صفحه کاغذ قرار گیرد و یا این که دستگاه‌نیرو شامل نیروهای موازی‌باشد قابل‌اجرانیست. درهرحال روشی‌کلی بنام‌کثیرالاضلاع (تعادل) فونیکولر وجود دارد که در مورد کلیه دستگاه نیروهای هم‌صفحه قابل اجراست.

فرض کنید بخواهیم برآیند نیروهای F_1 ، F_2 و F_3 را که در شکل (۵ـ۶ الف) نشان داده‌شده است معلوم کنیم. مقداربرداری و امتداد برآیند R_{123} با بردار $\overline{O3}$ از کثیرالاضلاع نیروهای $O123$ معلوم می‌شود. خط اثر این برآیند را روی نمودار فضایی به‌طریق زیر می‌توان معین نمود: فرض کنید که‌توسط مثلث نیروهای $OP1$ نیروی F_1 را درنقطه‌ای ازخط اثرش به‌دو مولفه $P1$ و OP (دلخواه) تجزیه کنیم همچنین فرض کنید که خط اثرمولفه $P1$ را تا جائی‌که خط اثر F_2 را قطع کند ادامه دهیم، دراین‌نقطه F_2 را به‌دو مولفه که یکی از آنها $1P$ است و با $P1$ هم‌راستا (هم‌خط اثر) و برابر بوده ولی از حیث جهت برخلاف آن می‌باشد و دیگری که $P2$ است و از طریق مثلث نیروهای $1P2$ حاصل می‌شود تجزیه کنیم، به‌همین طریق F_3 را چنانکه نشان داده شده به‌دو مولفه $2P$ و $P3$ تجزیه می‌کنیم دراین حالت دستگاه نیروی اصلی F_1 ، F_2 و F_3 با شش مولفه OP و $P1$، $1P$ و $P2$ ، $2P$ و $P3$ جایگزین‌شده‌است، از این شش مولفه، جفتهای $P1$ ، $1P$ و $P2$ ، $2P$ با یکدیگر هم‌راستا (هم‌خط اثر) و مساوی بوده‌ولی از حیث جهت در خلاف هم می‌باشند و بدین جهت هریک از این جفتها در حال تعادل هستند. بنابراین برآیند این شش مولفه که برآیند دستگاه نیروی اصلی است، برآیند دومولفه باقیمانده OP و $P3$ خواهد بود که این برآیند از محل تقاطع آندو نیز می‌گذرد.

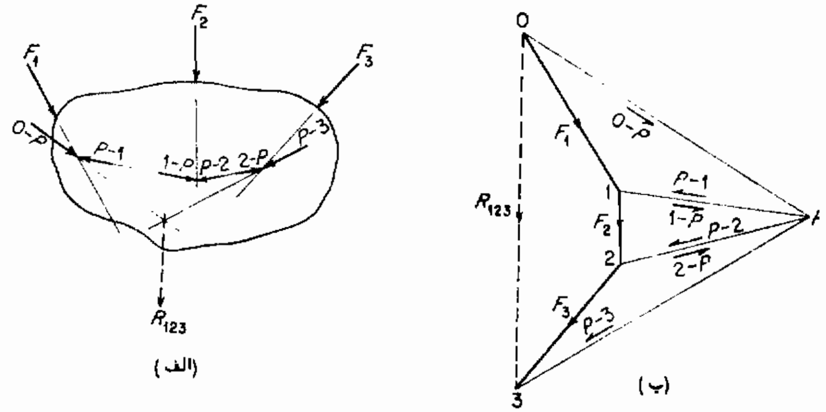
خطی که به‌این طریق بین خطوط اثر نیروهای نمودار فضایی رسم می‌گردد **کثیرالاضلاع‌تعادل یا فونیکولر** خوانده می‌شود. هر ضلع این کثیرالاضلاع را که بین نیروها رسم می‌شود **ریسمان** و **نقطه** p روی کثیرالاضلاع نیروها که کلیه مولفه‌ها از آن نقطه می‌گذرد **قطب** می‌گویند. خطوطی که رؤوس کثیرالاضلاع نیروها را به‌قطب p وصل می‌کند **اشعه** می‌گویند.

در مسائل عملی تعیین موقعیت خط اثر برآیند با روش ترسیم کثیرالاضلاع فونیکولر کمی‌باروشی که در بالا ذکر شد متفاوت‌است. ابتدا یک قطب‌مناسب p انتخاب می‌شود و از این قطب اشعه‌به‌رؤوس کثیرالاضلاع نیروها رسم می‌کنند سپس ریسمانهای‌کثیرالاضلاع فونیکولر را روی‌نمودار فضایی‌به‌موازات اشعه متناظر خود روی کثیرالاضلاع و نیروها ترسیم می‌نمایند، باید توجه شود که هر ریسمانی بین خطوط اثر دونیرویی رسم شود‌که در روی کثیرالاضلاع نیروها مجاوز یکدیگر باشند و به‌علاوه‌به‌موازات شعاعی رسم می‌شود که مستقیما" از محل تلاقی بردارهای این دو نیروی مجاور بگذرد. معمولا" نقطه شروع کثیرالاضلاع فونیکولر را نقطه‌ای برروی خط اثر اولین نیروی کثیرالاضلاع نیروها می‌گیرند و سپس از قطع اولین و آخرین ریسمان کثیرالاضلاع فونیکولر (به‌ترتیب مانند ریسمان بین F_1 و R_{123} و ریسمان بین F_3 و R_{123}) نقطه‌ای از خط اثر برآیند دستگاه که قبلا" مقدار برداری و امتدان آن در کثیرالاضلاع نیروها معین شده‌است به‌دست می‌آید. فرض کنید نیروی چهارمی برابر با F_4 به‌دستگاه شکل (۵ـ۷) اضافه شود و اضافه برآن فرض کنید که F_4 با R_{123} هم‌راستا و مساوی بوده‌ولی‌درخلاف جهت آن باشد، دستگاه جدید به‌مانند شکل (۵ـ۸) خواهد شد.

در یک چنین حالتی‌کثیرالاضلاع نیروها بسته‌شده و $\Sigma F_z = 0$ و $\Sigma F_x = 0$ در موردآن‌صادق

خواهد بود . همچنین وقتی کثیرالاضلاع فونیکولر رسم شد خواهیم دید که اولین و آخرین ریسمان که به‌ترتیب ازنیروهای F_1 و F_4 رسم می‌شوند عملاً برهم منطبق هستند ، بدیهی است که رسم کثیرالاضلاع فونیکولر به‌معنی جایگزین کردن چهار نیرو با هشت مولفه (نشان داده شده) می‌باشد واضح است که این هشت مولفه را می‌توان به‌صورت چهارجفت که هریک از جفت‌ها در تعادل می‌باشند فرض نمود و بنابراین دستگاه نیروی اصلی باید در تعادل باشد .

فرض کنید به‌جای این‌که F_4 با R_{123} هم‌راستا باشد دارای خط اثری با موقعیت (نشان داده‌شده با)خط چین باشد که در این حالت نیز موازی و برابر با R_{123} بوده ولی در خلاف جهت آن اثرمی‌کند در این حالت بازهم کثیرالاضلاع نیروها بسته شده ولی اولین و آخرین ریسمان دیگر برهم منطبق نخواهند شد بلکه باهم موازی بوده و با یکدیگر فاصله‌ای برابر با a خواهند داشت . در این حالت هشت مولفه‌ای که توسط کثیرالاضلاع فونیکولر بوجود می‌آیند شامل سه‌جفت که باهم در تعادل هستند و جفت چهارمی که شامل OP و PO که این‌دو باهم موازی ، مساوی ولی در خلاف جهت هستند لـذا



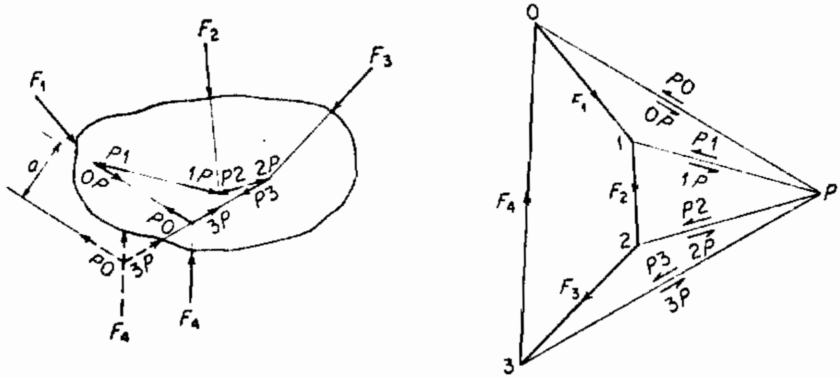
شکل ۵ ــ ۷ تعیین برآیند با استفاده از کثیرالاضلاع فونیکولر

معادل با لنگری برابربا $(OP)(a)$ می‌باشند خواهندبود ،در این‌حالت دستگاه‌نیروی‌اصلی‌معادل لنگری برابر با $(OP)(a)$ شده و دیگر در حال تعادل نخواهند بود .

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت برای این که یک دستگاه نیروی نامتقارب در تعادل باشد لازم است که نه‌تنها کثیرالاضلاع نیرو از نظر شکل بسته شود بلکه کثیرالاضلاع فونیکولر نیز بسته گردد به‌عبارت دیگر اولین و آخرین ریسمان کثیرالاضلاع فونیکولر برهم منطبق شوند و اگرکثیرالاضلاع‌نیرو بسته شود ولی کثیرالاضلاع فونیکولر بسته نشود دستگاه نیرو معادل یک لنگر خواهد شد .

اصل دیگری هم که مربوط به‌کثیرالاضلاع نیروهاست ، وجود دارد که اغلب به‌دلیل مـزیت آن به‌کار برده می‌شود .*ریسمانهای یک‌کثیرالاضلاع فونیکولر را می‌توان با بندهایی که یکدیگررا در رؤوس کثیرالاضلاع فونیکولر توسط مفصل‌های بدون اصطکاک قطع می‌کنند جایگزین نمود . اگر به‌اصول پایه حاکم بررسم کثیرالاضلاع فونیکولر توجه شود واضح است که چنین شکل زنجیری از بندها ، دستگاه*

بارهای وارده بر گرههای آنرا تحمل خواهد کرد. البته درحالتی که کثیرالاضلاع فونیکولر شکل بسته ندارد نیز تعیین عکس‌العملهای زنجیر که در راستای اولین و آخرین ریسمانهای کثیرالاضلاع می‌باشند لازم است. مقدار برداری این دو عکس‌العمل با اندازه‌گیری طول اولین و آخرین اشعه کثیرالاضلاع نیروها امکان‌پذیر است.



شکل ۵ـ۸ بسته شدن کثیرالاضلاعهای نیرو و فونیکولر

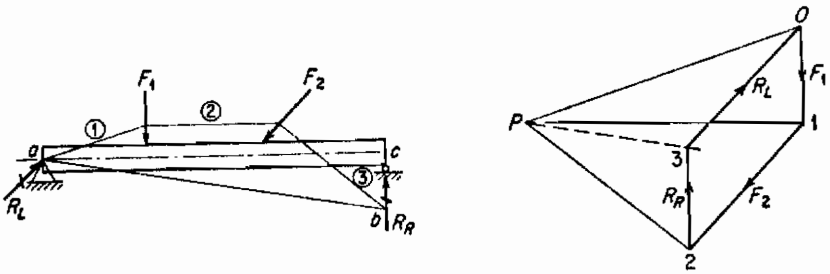
۵ ـ ۸ استفاده از کثیرالاضلاع فونیکولر در تعیین عکس‌العملها

کاربرد کثیرالاضلاع فونیکولر را در تعیین عکس‌العملهای سازه‌های معین، می‌توان با بررسی تیرو بارگذاری شکل (۵ـ۹) توضیح داد. در این حالت نقطه اثر و امتداد عکس‌العمل طرف راست و نقطه اثر عکس‌العمل طرف چپ معلوم می‌باشند و فقط مقدار برداری هردو عکس‌العمل و امتداد عکس‌العمل چپ مجهول است، این سه مجهول را می‌توان با علم بر این‌که شرط تعادل کل دستگاه بارها و عکس‌العملها این است که کثیرالاضلاع فونیکولر باید بسته شود تعیین نمود.

قسمتی از کثیرالاضلاع نیروها را می‌توان بلافاصله رسم کرد، به‌این صورت که بردارهای $\overline{O1}$ و $\overline{12}$ که نشان دهنده بارهای وارده می‌باشند رسم می‌کنیم و سپس به‌انتخاب قطب p می‌پردازیم و اشعه‌ای که از نقطه O، 1 و 2 می‌گذرند رسم می‌کنیم، ریسمانی به‌موازات شعاع PO بین خط اثرمجهول R_L و نیروی F_1 رسم می‌نمائیم، به‌این صورت که اگر امتداد نیروی R_L مجهول است ولی می‌دانیم که نقطه a نقطه‌ای از خط اثر آن می‌باشد، بنابراین این ریسمان را می‌توانیم از نقطه a رسم کنیم تا با F_1 قطع کند*. و سپس به‌ترتیب ریسمانهای بین F_1 و F_2 و پس از آن ریسمان بین F_2 و خط اثر

* چرا کثیرالاضلاع فونیکولر را با رسم ریسمان ۳ به‌موازات $P2$ و از نقطه c شروع نمی‌کنیم تا نیروی F_2 را قطع کند؟

معلوم R_R را رسم می‌کنیم .آخرین ریسمان R_R را در نقطهٔ b قطع می‌کند و بالاخره ریسمانی که کثیرالاضلاع فونیکولر را می‌بندد ریسمان ab خواهد بود . حال می‌توانیم به‌موازات ریسمانی که کثیرالاضلاع فونیکولر را می‌بندد شعاعی در کثیرالاضلاع نیروها رسم‌کنیم . این شعاع باید از رأس محل تقاطع بردارهای (تعیین کننده) R_R و R_L بگذرد ،چون ریسمان 3 بین F_2 و R_R و به‌موازات شعاع $p2$ رسم شده است پس یک انتهای بردارمعرف R_R باید درنقطه 2 از کثیرالاضلاع نیروهاباشد.البته معلوم است که این‌عکس‌العمل عمودی‌است .بنابراین ازنقطه 2 برداری عمودی که معرف R_R است رسم می‌کنیم ، انتهای دیگر این بردار باید روی شعاع موازی با ریسمان آخر باشد لذا بدین‌طریق رأس 3 ازکثیرالاضلاع تعیین‌می‌شود .بردار $\overline{23}$ مقداربرداری R_R را معلوم‌می‌کند و بردار $\overline{3O}$ که کثیرالاضلاع نیروها را می‌بندد امتداد و مقدار برداری R_L را تعیین می‌کند .



شکل ۵-۹ تعیین عکس‌العملها با استفاده از کثیرالاضلاع فونیکولر

طریقه عمل کاملا" ساده و مشخص است ولی گاهی دانشجویان در فهم این‌که بردار مربوط به‌عکس‌العمل با امتداد معلوم را از اولین و یا آخرین رأس نیروها که در این حالت نقطه O یا 2 می‌باشد رسم نمایند دچار اشکال می‌شوند ، در رفع چنین اشکالی اگر بخاطر داشته باشیم‌که‌ریسمانی که بین خطوط اثر دونیرو رسم می‌شود همواره به‌موازات شعاعی‌است که از محل تقاطع بردارهای‌معرف این نیروها در کثیرالاضلاع نیروها ترسیم‌می‌گردد چنین تردیدی رفع می‌شود ،در این حالت ریسمان 1 به‌موازات شعاع POو ریسمان 3 به‌موازات شعاع $P2$ رسم شده است و این بدان معنی است که یک انتهای بردار معرف R_L نقطه O روی کثیرالاضلاع نیروهاست و انتهای دیگر بردار R_R در نقطه 2 می‌باشد .

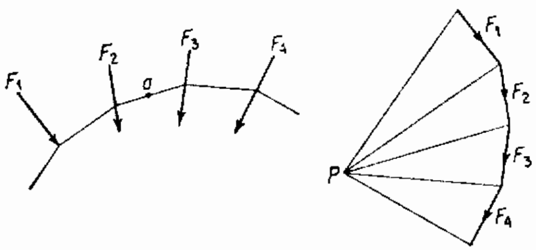
این روش برای تعیین عکس‌العملها کلی است و برعکس روش سه نیرو مختص حالات خاصی نمی‌باشد .

۵ ـ ۹ رسم کثیرالاضلاع فونیکولر از یک ، دو و یا سه نقطهٔ معلوم

وقتی به‌چگونگی رسم یک کثیرالاضلاع فونیکولر که برای دسته مشخصی از نیروها رسم می‌شود دقت کنیم واضح است که امکان رسم تعداد بینهایتی از کثیرالاضلاع فونیکولر برای دسته مشخصی‌از

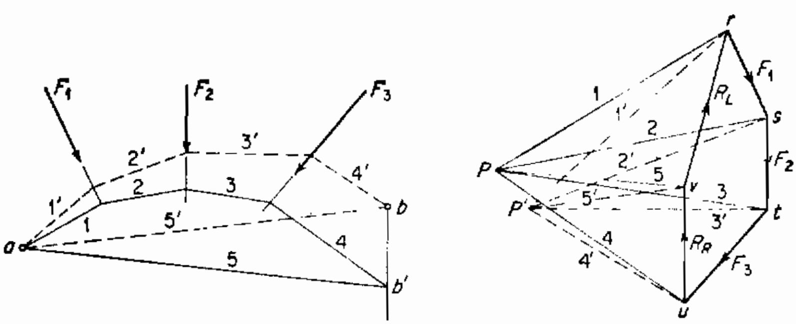
نیروها وجود دارد ، زیرا می‌توان که بی‌نهایت نقطه به‌عنوان قطب کثیرالاضلاع نیروها انتخاب‌نمود ولی گاهی لازم است که کثیرالاضلاع فونیکولر به‌نوعی رسم شود که از نقاط مشخصی در روی نمودار فضایی بگذرد ، در چنین شرایطی لازم است که انتخاب قطب به‌نقاط مشخصی محدود گردد .

ابتدا حالتی را فرض کنید که گذشتن کثیرالاضلاع فونیکولر از یک نقطه مشخص در روی نمودار فضایی نظیرنقطه a ازشکل (۵–۱۰) مورد نظر باشد . این خواسته‌را می‌توان با رسم هرریسمان‌مطلوبی بین نیروهای F_2 و F_3 که از نقطه a نیز بگذرد جامه عمل پوشاند . سپس می‌توان شعاع نظیر به این ریسمان را به‌موازات آن رسم کرد به‌طوری که از محل تلاقی بردارهای F_2 و F_3 در روی کثیرالاضلاع نیروها بگذرد و حال می‌توان قطب P را در هر نقطه‌ای از این شعاع انتخاب‌نمود و بقیه کثیرالاضلاع فونیکولر را چنانکه نشان داده‌ایم کامل کرد . واضح است که به‌این طریق امکان انتخاب بی‌نهایت قطب P وجود دارد و به‌این جهت است که می‌توان بی‌نهایت کثیرالاضلاع رسم نمود که از نقطه a بگذرد .



شکل ۵–۱۰ گذراندن کثیرالاضلاع فونیکولر از یک نقطه معلوم

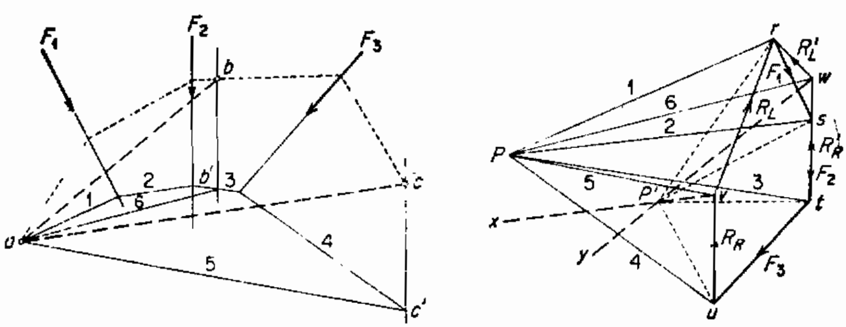
وقتی که لازم باشد ، کثیرالاضلاع فونیکولر از دو نقطه مشخص نظیر نقاط a و b ازشکل (۵–۱۱) بگذرد چگونگی عمل قدری متفاوت است . موقتاً فرض کنید که این‌نیروها بر سازه‌ای که دارای تکیه‌گاهی مفصلی در a و تکیه‌گاهی غلتکی که فقط دارای عکس‌العمل عمودی نقطه b می‌باشد اثر کنند ، به‌روش معمول این دو عکس‌العمل خیالی را می‌توان با ریسمانهای 1 ، 2 ، 3 و 4 و ریسمان ab' که کثیرالاضلاع را می‌بندند به‌دست‌آوریم ،رسم کثیرالاضلاع فونیکولربا استفاده‌از قطب P انجام می‌گیرد، بدیهی است مقادیری که به‌این طریق برای عکس‌العملهای R_R و R_L به‌دست‌می‌آیند مقادیرثابتی‌بوده



شکل ۵–۱۱ گذراندن کثیرالاضلاع فونیکولر از دونقطه مشخص

و ربطی به‌نقطه انتخاب‌شده برای قطب p نخواهند داشت و بنابراین موقعیت رأس v درکثیرالاضلاع نیروها ثابت می‌باشد. اگر قطب p به‌نحو مطلوب انتخاب می‌شد، کثیرالاضلاع فونیکولر منتج‌ازنقاط a و b می‌گذشت و ریسمانی که کثیرالاضلاع را می‌بست برخط ab منطبق می‌شد لذا شعاع نظیر این ریسمان به‌موازات ab بوده و از رأس v در کثیرالاضلاع نیروها نیز می‌گذشت. این شعاع را به‌همین طریق رسم می‌کنیم وآن را $5'$ می‌نامیم. به‌این صورت هرنقطه‌ای که در طول این شعاع مانند قطب p' انتخاب شود کثیرالاضلاع فونیکولری را ایجاد می‌کند که دارای ریسمانهای $1'$، $2'$، $3'$، $4'$ و $5'$ بوده از دو نقطه مشخص a و b در روی نمودار فضایی می‌گذرد. بازهم واضح است که می‌توان به‌این‌طریق تعداد بی‌نهایت قطب نظیر p' انتخاب نمود و لذا مقدار بی‌نهایت کثیرالاضلاع فونیکولر می‌توان رسم کرد که از دو نقطه مشخص a و b بگذرد.

حال با درنظرگرفتن شکل (۵–۱۲) حالتی را بررسی می‌کنیم که کثیرالاضلاع فونیکولرازسه‌نقطه مشخص a و b و c بگذرد. به‌مانند سابق موقتاً" فرض کنیدکه این نیروها بر سازه‌ای که دارای‌تکیه‌گاهی مفصلی در a و تکیه‌گاهی غلتکی (با عکس‌العمل عمودی) در c باشد اثر کنند. مثل قبل عمل کرده و عکس‌العملهای R_L و R_R را با رسم کثیرالاضلاع فونیکولری با ریسمهای 1، 2، 3 و 4 و 5 معین نموده و موقعیت راس v را در کثیرالاضلاع نیروها تعیین کنید. چنانکه در بند قبل ذکر شد قطب کثیرالاضلاع فونیکولری که از نقاط a و c می‌گذرد باید بر نقطه‌ای در طول خط vx که به‌موازات ac، می‌باشد قرار داشته باشد. حال فقط به‌نیروهای بین نقاط a و b توجه کنید و فرض نمائید که این نیروها با تکیه‌گاهی مفصلی در a و تکیه‌گاهی غلتکی (که فقط دارای عکس‌العمل عمودی است) در b، خنثی شوند. این عکس‌العملهای R'_L و R'_R را می‌توان با استفاده از کثیرالاضلاع فونیکولری با ریسمانهای 1، 2، 3 و 6 معین کرد و موقعیت راس w را نیز در کثیرالاضلاع نیروها تعیین نمود. به‌همین ترتیب قطب کثیرالاضلاع فونیکولری که ازنقاط a و b می‌گذرد باید نقطه‌ای در طول خط wy که به‌موازات ab است انتخاب شود. در این حالت فقط یک قطب p' می‌تواند با این خاصیت وجود داشته باشد و لذا فقط یک کثیرالاضلاع فونیکولر می‌تواند از سه نقطه مشخص بگذرد و بنابراین هیچ ***کثیرالاضلاع فونیکولری نمی‌توان رسم کرد که از بیش از سه نقطه مشخص بگذرد.***



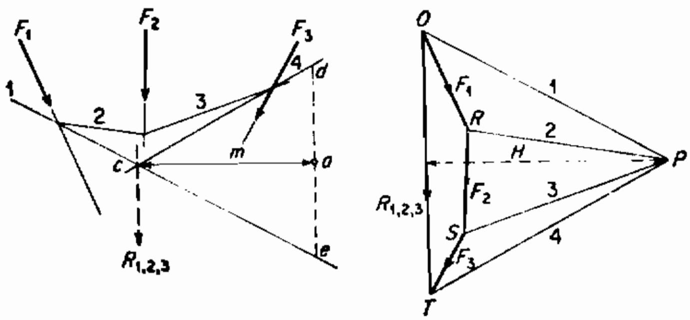
شکل ۵–۱۲ گذراندن کثیرالاضلاع فونیکولر از سه نقطه مشخص

۵ــ ۱۰ تعیین ترسیمی برش و لنگر خمشی

پس از تعیین ترسیمی عکس‌العملهای یک تیر به‌سادگی می‌توان برش و لنگر خمشی آن را نیز به‌روشهای ترسیمی تعیین نمود. برش که عبارتست از مولفه عرضی برآیند نیروهای مؤثر بر طرف چپ یا راست مقطع، به‌سادگی بااستفاده‌از کثیرالاضلاع نیروها تعیین می‌شود ولی تعیین‌ترسیمی لنگرخمشی علاوه بر فنونی که قبلاً ذکر شد به‌توضیحات بیشتری محتاج است.

لنگر خمشی در یک مقطع برابر است با لنگر برآیند نیروهای مؤثر بر سمت چپ یا راست‌آن‌مقطع بدیهی است که مقداربرداری و امتداد چنان برآیندی را می‌توان از طریق کثیرالاضلاع‌نیروها به‌دست آورد که‌نقطه‌ای از خط اثر آن بر محل تقاطع ریسمانهای معینی از کثیرالاضلاع فونیکولر قرار دارد. با استفاده‌از این اطلاعات و اندازه‌گیری بازوی اهرم آن برآیند، می‌توان لنگرمورد نظر را محاسبه نمود. در هر صورت با استفاده از عملکرد مشروح زیر محاسبه فوق‌الذکر ساده‌تر می‌شود.

دستگاه نیروی F_1 ، F_2 و F_3 را که در شکل (۵ــ۱۳) مشخص شده است در نظر بگیرید فرض



شکل ۵ــ۱۳ تعیین ترسیمی لنگر

کنید بخواهیم جمع لنگرهای این نیروهارا حول نقطه a حساب‌کنیم، جمع لنگرهای این سه‌نیرو مساوی با لنگر برآیند آنها حول نقطه a که با M_a مشخص شده است خواهد بود، پس:

$$M_a = (R_{123})(m) = (\overline{OT})(m) \qquad \text{(الف)}$$

در این رابطه $\overline{OT}$ با مقیاس نیروها و m را با مقیاس فاصله اندازه می‌گیریم. اگر خط de را به‌موازات $\overline{OT}$ رسم کنیم مثلثهای OPT و cde مشابه خواهند بود، پس با رسم H عمود بر $\overline{OT}$ داریم:

$$\frac{de}{m} = \frac{\overline{OT}}{H} \quad \text{یا} \quad (H)(de) = (\overline{OT})(m) \qquad \text{(ب)}$$

لذا

$$M_a = (H)(de) \qquad \text{(ج)}$$

در این رابطه de با مقیاس فاصله و H با مقیاس نیرواندازه‌گیری می‌شوند . به H فاصله قطبی گویند.

در حالت کلی تعیین حاصل‌ضرب $(H)(de)$ روش ساده‌ای برای تعیین لنگر برآیند (و یا لنگر سه نیرو) حول نقطه a می‌باشد . شرح زیر خلاصه این روش ترسیمی را برای تعیین لنگر یک دستگاه نیرو حول نقطه معینی مانند a را ارائه می‌دهد :

۱ ــ کثیرالاضلاع نیروهارا برای این دستگاه رسم کنید ،قطب P را انتخاب کرده و کثیرالاضلاع فونیکولر را ترسیم نمائید .

۲ ــ از نقطه a در نمودار فضایی خطی به‌موازات امتداد برآیند این دستگاه نیرو که قبلا" در کثیرالاضلاع نیروها معین شده است رسم کنید .

۳ ــ با مقیاس فاصله ، طول محدود شده این خط را بین ریسمانهای کثیرالاضلاع فونیکولرکه‌محل تقاطع آن ریسمانها روی خط اثر برآیند واقع است اندازه بگیرید .

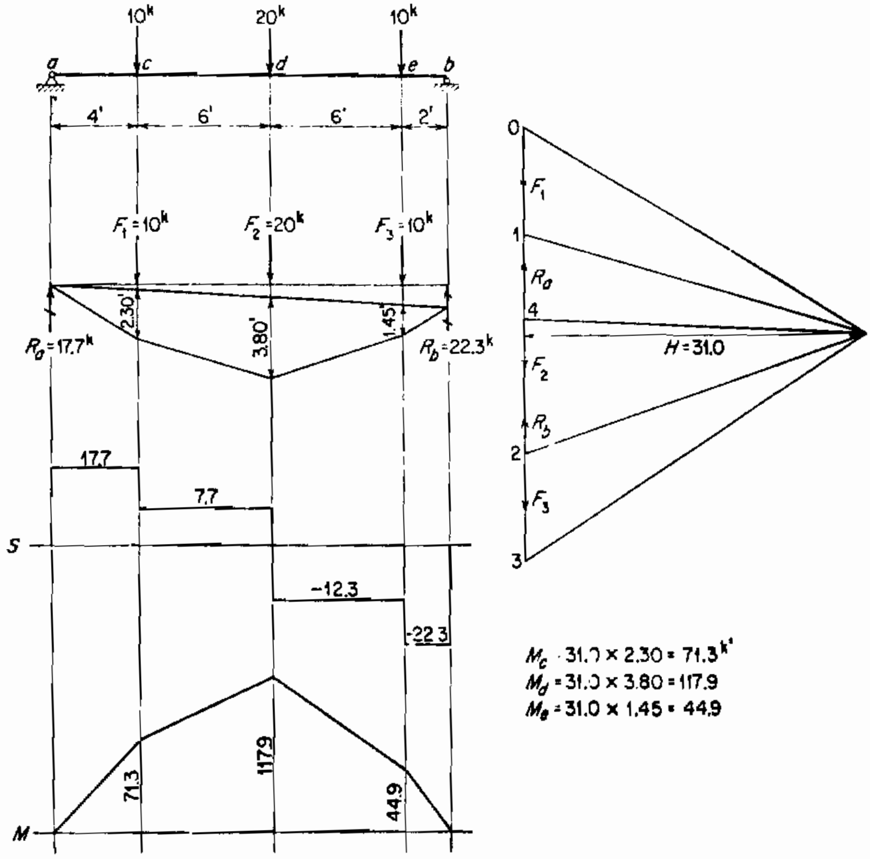
۴ ــ همچنین با مقیاس نیرو فاصله قطبی H را که فاصله عمودی بین قطب P و بردار برآیند در کثیرالاضلاع نیروها می‌باشد اندازه بگیرید .

۵ ــ با این ترتیب لنگر دستگاه نیرو حول نقطه a برابر با حاصل‌ضرب مقدار به‌دست آمده‌از مرحله ۳ در فاصله قطبی به‌دست آمده از مرحله ۴ خواهد بود .

از مثالهای زیرین معلوم می‌شود که به‌چه سادگی می‌توان این فن را در تعیین لنگر خمشی نقاط مختلف تیری به‌کار برد .

اغلب لازم است حالاتی مورد بررسی قرار گیرد که بارگذاری به‌عوض نیروهای متمرکز به صورت گسترده باشد ، در یک چنین حالاتی قسمتی از تیر را که دارای یک چنین بارگذاری می‌باشد بایستی به‌یک سری بخشهای کوتاه تقسیم گردد و پس از آن می‌توان کل بار مؤثر بر هر بخش را با یک نیروی متمرکز که بر مرکز ثقل بارمؤثر بر آن بخش اثر می‌کند جایگزین نمود . از این پس راه حل ترسیمی‌برای تعیین عکس‌العملها ، برش و لنگر خمشی به‌روش متداول با این فرض که بارگسترده را با چنان سری بارگذاری متمرکزی جایگزین‌کرده باشیم اجرا خواهد شد . مقادیر عکس‌العملها که به‌این طریق به‌دست می‌آید خالی از خطاست ولی مقادیر برش و لنگر خمشی فقط در انتهای بخشهای کوتاه که بار گسترده را بدان بخشها تقسیم کرده‌ایم دارای مقادیر دقیقی می‌باشند . عرض نمودارهای برش و لنگرخمشی‌در نقاط میانی تقریبا" عاری از خطاست البته به‌شرطی که طول بخشها به‌طور منطقی کوچک گرفته شود .

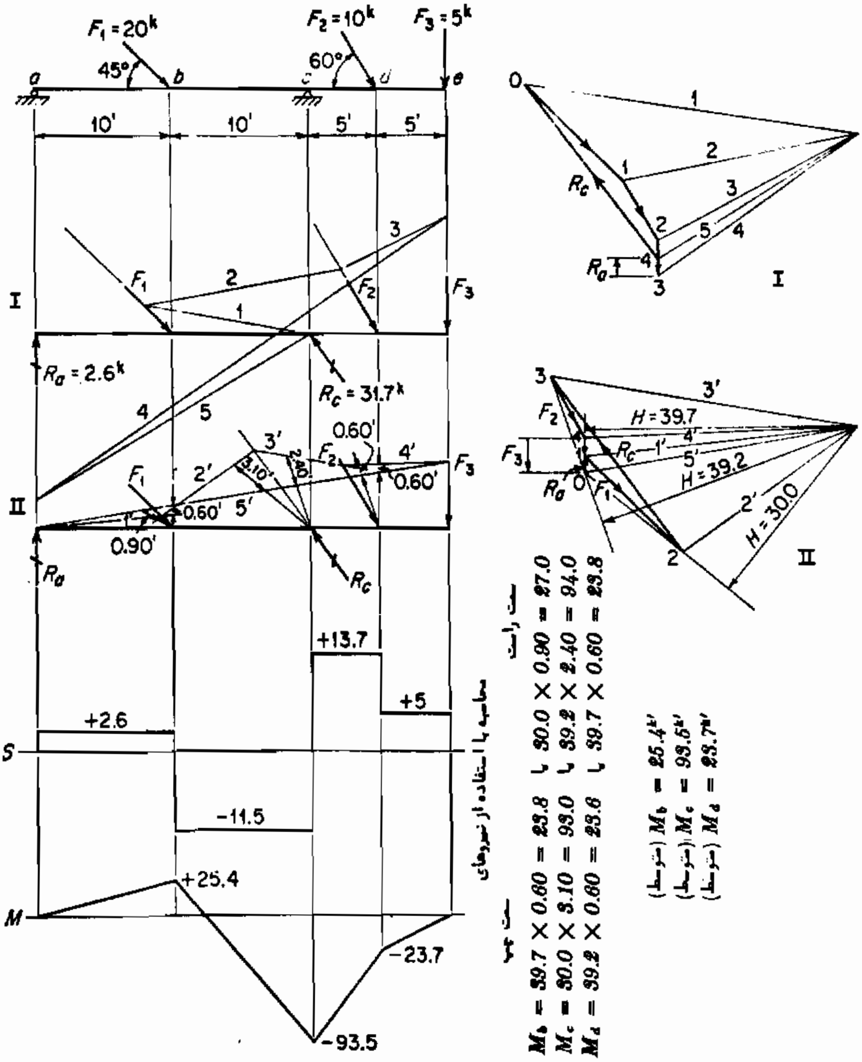
مثال ۵ ـ ۱ = نمودار برش و لنگر خمشی برای این تیر به‌طریق ترسیمی رسم کنید .



بحث :

در این مثال کلیه بارها عمودی می‌باشند و لذا عکس‌العمل عمودی نیز ایجاد می‌کنند و در نتیجه در هر نقطه‌ای در طول تیر برآیند بارها چه در طرف راست مقطع و چه در طرف چپ آن نیرویی عمودی است . بنابراین محاسبه برش و مخصوصاً" لنگر خمشی تا حد قابل توجهی ساده خواهد بود . به‌عنوان مثال برای محاسبه لنگر خمشی در نقاط مختلف مقدار فاصله‌قطبی H برای کلیه نقاط ثابت بوده و طولهای محدود شده بین ریسمانهای متناظر که در کثیرالاضلاع فونیکولر اندازه گرفته می‌شوند همگی خطوط عمودی خواهند بود .

مثال ۵ ـ ۲= برای این تیر نمودارهای برش و لنگر خمشی را به‌طریق ترسیمی رسم کنید .



بحث :

در مسائل ساده‌ای نظیر مثال (۵ـ۱) روش ترسیمی بدون اشکال قابل اجراست ولی به‌محض این که بارها به‌طور مایل اثر کنند و یا تیر دیگر تیر ساده‌ای با دو تکیه‌گاه انتهایی نباشد این روش در حد قابل توجهی پیچیده می‌شود .

دراین حالت پس ازآن‌که بااستفاده‌ازکثیرالاضلاع‌های نیروو فونیکولر I مقادیر عکس‌العملها معین شده لازم است که کثیرالاضلاع نیرو را بار دیگر به‌نحوی‌که در آن نیروها به‌همان‌ترتیب اثر آنها بر قطعه از یک انتها به‌انتهای دیگر قرار دارند ترسیم گردد . پس از آنکه کثیرالاضلاع نیرو II و کثیرالاضلاع فونیکولرمربوط به‌آن به‌این‌طریق رسم گردید محاسبه برش و لنگرخمشی‌درنقاط مختلف در طول تیر ممکن خواهد بود . معمولا" دومین کثیرالاضلاع فونیکولر را می‌توان بر اولین کثیرالاضلاع فونیکولر منطبق کرد ولی در هر صورت دو نمودار فضایی جداگانه به‌منظورجلوگیری از ابهامات غیرضروری ترسیم می‌گردد .

توجه شود که به‌منظور وارسی عملیات لنگرهای خمشی درهردو سوی مقطع محاسبه‌شده است.

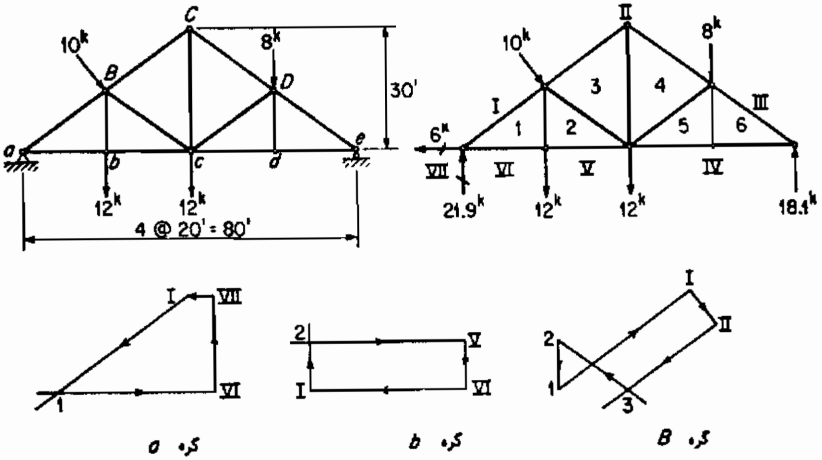
۵ ــ ۱۱ نیروی میله‌ها در خرپاها ــ نمودار ماکسوئل (Maxwell) علائم باو(Baw)

روش ترسیمی گرهها روش ساده‌ای برای تعیین نیروی میله‌ها در برخی از خرپاهای معین‌می‌باشد با فرض این که عکس‌العملها را قبلا" یا با روش ترسیمی و یا با روشهای جبری محاسبه کرده باشیم ،پس از آن می‌توان نیروی میله‌ها را با رسم چندسری کثیرالاضلاع نیرو که هریک برای یک گره رسم می‌شود محاسبه نمود ، به‌منظور تسهیل می‌توان کلیه این کثیرالاضلاعها را در یک شکل مرکب از همه آنها که به‌خاطر مبتکر آن کلارک ماکسول Clerk Maxwell نمودار ماکسول خوانده می‌شود جا دهیم .

در هر گرهی نیروی میله‌ها و نیروهای خارجی تشکیل دستگاه نیرویی متقارب و هم صفحه را می‌دهند و برای این‌که این دستگاه در تعادل باشد بایستی که کثیرالاضلاع نیرو بسته شود،بسته‌شدن کثیرالاضلاع نیرو معادل تأمین دو شرط جبری $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ می‌باشد . چون امتداد کلیه نیروهای مؤثر بر یک نقطه همگی معلوم هست مقادیر برداری دو نیروی میله مجهول‌را می‌توان‌باترسیم کثیرالاضلاع نیرو برای هر گره محاسبه نمود ، لذا می‌توان کلیه نیروی میله‌ها را در یک خرپای ساده با شروع عملیات از گرهی که بیش از دو نیروی میله مجهول نداشته باشد و ادامه آن به‌نوبت در هر گره بعدی به‌نحوی که همواره در هر گرهی بیش از دو مجهول نباشد محاسبه نمود .

در اجرای روش ترسیمی گرهها نیروهای داخلی و خارجی را می‌توان با به‌کاربردن علائم‌باو مشخص نمود . کاربرد این علائم چنین است که فضاهای بین نیروهای خارجی را با اعداد رومی و فضاهای بین میله‌ها را به‌نحوی که در شکل (۵ ــ ۱۴) نشان داده شده است با اعداد عربی مشخص می‌کنند .پس یک نیروی خارجی‌را می‌توان با ذکراعداد طرفین‌آن با ترتیبی‌متناظر با گردش‌عقربه‌های ساعت مشخص نمود ، مثلا" نیروی مؤثر بر گره B را نیروی I-II خواهیم نامید .به‌همین‌ترتیب یک نیروی داخلی را که توسط‌آن‌عضوی بر یک‌گره اثرمی‌کند با ذکر اعداد طرفین‌آن عضو با مراعات‌جهت ساعتگرد حول گره مشخص نمود . به‌عنوان مثال عضو Bc به‌گره B با نیروی 32 اثر می‌کند .

پس از آن‌که نمودار فضایی بر طبق علائم باو نام‌گذاری شد عکس‌العملهای یک خرپا ،نظیر خرپای شکل (۵ــ۱۴) را می‌توان یا با روش ترسیمی و یا با روشهای جبری (هرکدام که راحتتر



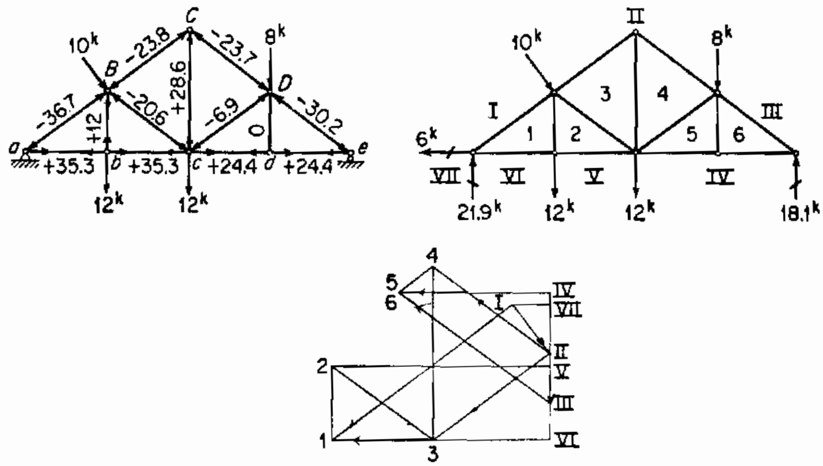
شکل ۵-۱۴ ملائم باو

باشد) محاسبه‌می‌کنند و پس از آن می‌توان گره a را که در آن دو نیروی مجهول وجود دارد جدانموده و این مجهولات را با رسم کثیرالاضلاع نیرو به‌طوری که نشان داده شده است ، محاسبه کرد .بردارهای این کثیرالاضلاع را باید به‌ترتیب جهت ساعتگرد حول آن گره قرار داد ، دو انتهای یک بردار باید به‌همان ترتیب که اعداد در طرفین نیروی نظیر در نمودار فضایی قرار دارند مشخص گردد به‌نحوی‌که اولین عددی‌که با مراعات جهت ساعتگرد ذکر می‌شود در انتهای بردار و سپس دومین عدد در نوک بردار قرار گیرد . اگر چنین عملکردی دنبال شود اعدادی‌که در رؤوس کثیرالاضلاع نیرو قرار دارند به‌همان ترتیب که اعداد حول یک گره در جهت ساعتگرد به‌دنبال هم قرار می‌گیرند . به‌این‌ترتیب از کثیرالاضلاع نیرویی گره a معلوم می‌شود که به‌این گره نیروهایی توسط میله‌های aB و ab که به ترتیب توسط بردارهای $\overline{\text{I-1}}$ و $\overline{\text{I-VI}}$ نشان داده شده‌اند اعمال می‌شود و می‌توان دریافت که نیرو در میله aB فشاری بوده و در میلهٔ ab کششی است .

پس از آن که نیرو در میله ab معین شد می‌توان به‌گره b پرداخت و کثیرالاضلاع نیرو را برای آن گره با معلوم‌بودن نیروها در Bb و bc ترسیم کرد و پس از آن به‌گره B رسید که در آن گره‌فقط دو نیروی مجهول در میله‌های Bc و BC وجود دارد که آنها نیز از طریق ترسیم‌کثیرالاضلاع‌نیرو برای این گره معلوم می‌شوند ، با بررسی به‌نوبت‌گرههای باقیمانده می‌توان تحلیل خرپا را به‌اتمام رساند، به‌جای این‌که برای هر گره یک کثیرالاضلاع نیرو رسم کنیم بهتر است به‌ترسیم یک نمودارماکسوئل‌که عملاً" مجموعه‌ای کلیه کثیرالاضلاع‌های جداگانه گره‌هاست به‌پردازیم .

برای رسم یک نمودار ماکسوئل ابتدا کثیرالاضلاع نیرو را برای کلیه نیروهای خارجی به‌نحوی‌که بردارهای آن نیروها را در جهت گردش عقربه‌های ساعت حول گرداگرد سازه منعکس می‌کند رسم می‌کنیم ،اگرعکس‌العملها را به‌روش ترسیمی محاسبه کرده باشیم و کثیرالاضلاع نیروهابرحسب‌آن‌ترسیم شده باشد لازم است که کثیرالاضلاع جدیدی با آرایش بردارها در اطراف سازه در جهت‌ساعتگرد‌رسم کنیم . رؤوس این کثیرالاضلاع را به‌همان روشی که در بالا برای کثیرالاضلاع نیرو در گرهها ذکر شد

نام‌گذاری می‌کنیم .نمودار ماکسوئلی که برای خرپای شکل (۵-۱۴) به‌این روش ترسیم شده‌است‌درشکل (۵-۱۵) نشان داده شده است . حال گرهی نظیر گره a را که در آن فقط دو نیروی میله مجهول‌وجود دارد در نظربگیرید و به‌اعداد فضاهای اطراف این گره دقت کنید ، در نمودار ماکسوئل کلیه‌این‌فضاها به‌جز یکی ازآنها یعنی فضای 1 قبلاً" به‌شکل رؤوس کثیرالاضلاع مشخص شده‌اند ،حال‌می‌توان موقعیت عدد 1 را نیز با رسم دو خط‌از اعداد نشان دهنده فضاهای مجاور آن یعنی I و VI به‌شکل موازی با میله‌های حایل بین این فضاها و فضای 1 یعنی به‌ترتیب با میله‌های aB و میله ab به‌دست آوریم . حال به‌همان روش به‌گره b بپردازید . در این گره رأس 2 تنها عدد نامعلوم است که آن نیزبا رسم‌دو خط به‌موازات میله‌های bB و bc به‌ترتیب از رؤوس 1 و V به‌دست می‌آید . رؤوس باقیمانده نامعلـوم 3، 4، 5، و 6 را می‌توان به‌نوبت با بررسی گرههای B ، C ، c و d (یا D) معین نمود.ملاحظه مـی‌شود که در طول بررسی هریک از این گرهها فقط یک رأس نامعلوم در بررسی آن گره وجود دارد .



شکل ۵-۱۵ نمودار ماکسوئل

پس از آن‌که نمودار ماکسوئل به‌صورت کامل ترسیم شد تعیین مقدار و جهت اثر نیروی هرمیله‌در یک گره ، معین و ساده خواهد بود . *با در نظرگرفتن جهت ساعتگرد اعداد اطراف یک میله را بخوانید* در این صورت مقدار و جهت اثرنیروی میله برآن گره توسط برداری که مشخصات آن با اندازه‌گیری‌بین ابتدا و انتهای آن که به‌ترتیب با دو عدد خوانده شده مشخص می‌شود ،معلوم می‌گردد . نیروی میله‌ها که در این مثال به‌این طریق تعیین جهت شده‌اند ،تعیین جهت مربوطه روی نمودار فضایی منعکس‌شده است .

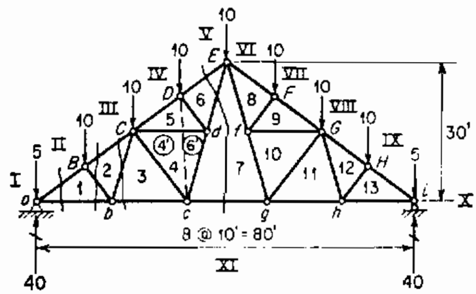
با مقایسه نمودار ماکسوئل با کثیرالاضلاع نیرو که برای هرگره به‌طور جداگانه رسم می‌شود واضح است که این نمودار فقط شکل مرکبی است که در آن کثیرالاضلاعهای گرهها به‌دنبال هم قرار گرفته‌اند. واضح است که انتخاب عکس جهت ساعتگرد یک جهت اختیاری است و کل دستگاه در صورتی که برای

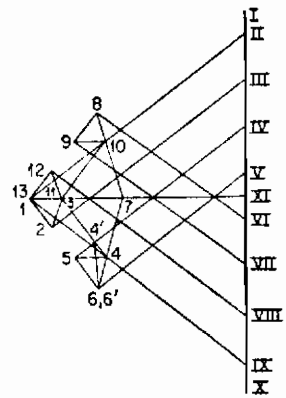
آن جهت گردشی برخلاف جهت ساعتگرد نیز انتخاب گردد عمل خواهد کرد .

۵ــ۱۲ چند حالت مبهم ــ خرپای پوششی فینک(Fink)

نمودار ماکسوئل را که در مبحث قبل‌شرح آن داده شد بدون اشکال برای هر خرپای ساده‌می‌توان ترسیم کرد ،وقتی بخواهیم این نمودار را برای خرپای مرکب رسم کنیم تا یک نقطه مشخص رسم نمودار پیش می‌رود و پس از آن دیده می‌شود که در هریک از گرههای بعدی بیش از دونیروی میلــه مجهــول و بنابراین بیش از یک رأس (در نمودار) نامشخص وجود دارد .

خرپای مرکبی نظیر خرپای پوششی فینک Fink شکل (۵ــ۱۶) را در نظر بگیرید ،پس از تعیین عکس‌العملها می‌توان‌کثیرالاضلاع نیرو را برای کلیه نیروهای خارجی رسم‌کرد نمودار ماکسوئل‌رابه‌طریق معمول ابتدا از گره a شروع کرده و سپس به‌گرههای b، و B پرداخت . حال به‌هریک از گرههای C یا c نگاه کنید در هرکدام از آنها سه‌نیروی میله مجهول وجود دارد . بنابراین در هریک دو رأس نامشخص نیز بوجود می‌آید لذا دیگر ادامه نمودار ماکسوئل غیرممکن می‌گردد . البته می‌توان به‌گره i پرید و نمودار را تا گرههای h و H رسم نمود ولی همین مساله غامض در مورد گرههای G و g نیز وجــود دارد . در ذیل به‌شرح یکی از چندین روش غلبه براین شکل می‌پردازیم :





شکل ۵ــ۱۶ تحلیل خرپای پوششی فینک

فرض‌کنید که میله‌های Cd و dD را با میله Dc به‌نحوی‌که با خط‌چین نشان داده شده است جایگزین‌کنیم ،در این حالت فضای‌محاط‌بین مثلث cDE را با‌عدد $6'$ و فضای محاط‌بین مثلث cCD را با عدد $4'$ نشان خواهیم داد ، چنین جایگزینی مقدار نیروی میله را در میله‌های aB ، ab ، bB ، bc ، bC ، BC ،DE یا cg از خرپای اصلی تغییر نخواهد داد ، صحت این مطلب‌باملاحظه برشهای رسم شده که برای محاسبه نیروی این میله‌ها به‌کار می‌رود واضح می‌گردد . بنابراین روش

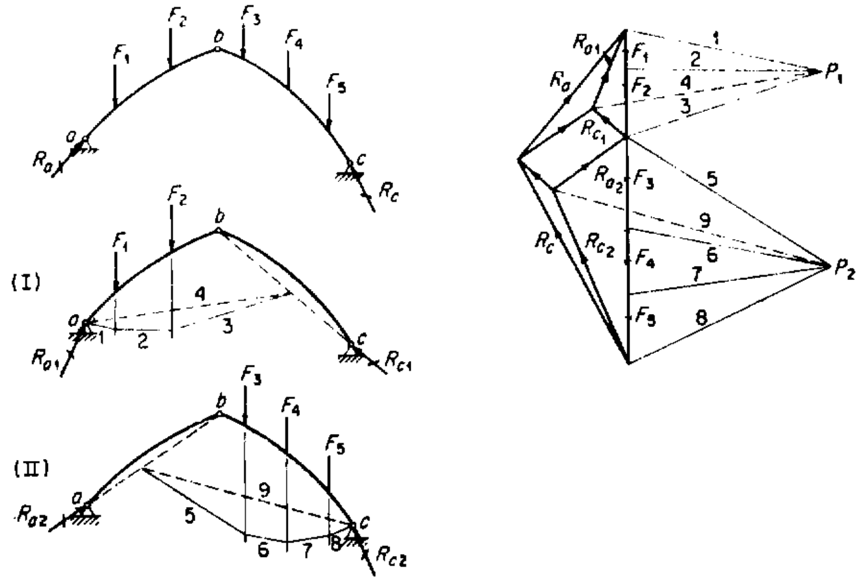
1، 2 و 3 از نمودارماکسوئل در هردوخرپای اصلی و خرپای‌تغییریافته در یک موقعیت باقی خواهد ماند . به‌این ترتیب می‌توان موقعیت رأس $4'$ از خرپای تغییر یافته را با بررسی گره C و سپس با پرداختن به‌گره D موقعیت‌رأس $6'$ را معین نمود . موقعیت رأس $6'$ که‌ازطریق خرپای‌تغییریافته به‌دست می‌آید با موقعیت رأس 6 از خرپای اصلی مطابقت می‌نماید زیرا که در هردو حالت‌نیرو درمیله‌های DE و dE یکی است ، حال می‌توان به‌خرپای اصلی برگشت و موقعیت صحیح رؤوس 5 و 4 را به‌ترتیب با بررسی گرههای D و C به‌دست آورد و به‌این ترتیب می‌توان به‌طریق معمول موقعیتهای بقیه‌رووس یعنی از 7 تا 13 را معین نمود .

۵ ــ ۱۳ عکس‌العملها و نیروی میله‌ها در قوسهای سه مفصل

اگرعکس‌العملهای یک قوس سه مفصل معین شودهیچ مشکلی درتعیین نیروی میله‌های‌آن با رسم نمودار ماکسوئل وجود نخواهد داشت .بدیهی است که تعیین عکس‌العملها هم به‌طریق ترسیمی و هم به‌طریق تحلیلی امکان‌پذیر است ، ولی تعیین عکس‌العملهای یک طاق سه‌مفصل نیاز به‌برخی‌تذکرات اضافی دارد .

یک روش ترسیمی جهت تعیین عکس‌العملها با استفاده‌از خاصیت مهم‌طاق به‌صورت‌زیرمی‌باشد قوس سه مفصل شکل (۵ــ۱۷) را در نظر بگیرید ، عکس‌العملهای این سازه را می‌توان با جمع آثار جداگانه حاصل از (۱) بارهای مؤثر بر نقطه نیمهٔ چپ طاق و (۲) بارهای مؤثر بر نیمه طرف راست طاق به‌دست آورد . تعیین اثرات جداگانه هریک از بارگذاری‌های فوق به‌تنهایی در صورتی که طرف دیگر بدون بارگذاری خارجی باشد ساده است . در چنین حالاتی امتداد عکس‌العمل مؤثر بر نیمه بدون بار باید از مرکز مفصل میانی طاق در نقطه b بگذرد تا اینکه لنگر خمشی حول آن مفصل برابر صفر گردد . بنابراین در هردوحالت I و II حل مساله منجر به‌مانند حالت تیری که در آن مقدار برداری هردو عکس‌العمل و راستای یکی از آنها‌مجهول باشد می‌شود ، عکس‌العملهای طاق را در دو حالت I و II می‌توان چنانچه‌نشان داده شده‌است با انتخاب قطبهای P_1 و P_2 و رسم کثیرالاضلاع فونیکولر به‌دست آورد . اگر دو کثیرالاضلاع نیرو را به‌نحوی که نشان داده شده است توأماً" رسم‌کنیم ، انطباق ترسیمی دوحالت سبب تسهیل در تعیین عکس‌العملهای برآیند R_a و R_c حاصل از دستگاه بارگذاری مجموع خواهد شد .

طریقه ترسیمی‌دیگری برای تعیین عکس‌العملها این‌است که‌کثیرالاضلاع فونیکولر بارهای‌خارجی را از سه‌نقطه a ، b و c عبوردهیم . در بخش(۵ــ۷)گفتیم‌که بارگذاری خارجی‌را می‌توان به‌دستگاه زنجیر قوایی تبدیل کرد در صورتی که آن زنجیر قوی همان شکل کثیرالاضلاع فونیکولر را برای‌آن نیروها داشته باشد ،نیمه‌ای از طاق را به‌طورجداگانه در نظر بگیرید‌بارهای خارجی مؤثر براین‌قسمت را هرگاه کثیرالاضلاع فونیکولر طوری رسم شود که ریسمانهای دو انتهای آن از مفصلهای تکیه‌گاهی ومیانی بگذرد می‌توان با عکس‌العملهایی در راستای این ریسمانها معادل گرفت و چون نیروی عمل نیمهٔ چپ روی نیمهٔ‌راست باید با نیروی عمل نیمهٔ‌راست روی نیمهٔ چپ مساوی ولی در خلاف جهت

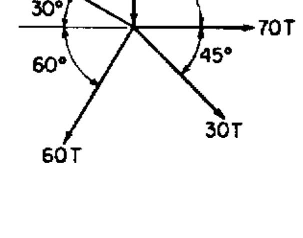


شکل ۵ـ۱۷ طاق سه مفصل

آن باشد لذا دو ریسمان گذرنده از مفصل میانی در دو کثیرالاضلاع فونیکولر باید هم امتداد باشند و این بدان معنی‌است که دو کثیرالاضلاع جداگانه‌را می‌توان به‌کمک کثیرالاضلاع ممتد درکل‌طول طاق به‌شکلی‌که آن کثیرالاضلاع ازسه‌مفصل a ،b و c بگذرد تبدیل نمود. حال اگر قطبی‌را به‌نوعی تعیین کنیم که کثیرالاضلاع فونیکولر کلیه‌نیروهای خارجی از این سه‌نقطه بگذرد می‌توان با اندازه‌گیری شعاعهای اول و آخر روی کثیرالاضلاع نیروها پی به‌مقدار عکس‌العملها در دو سه طاق برد.

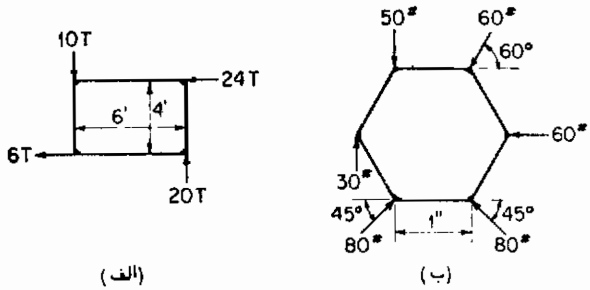
۵ ـ ۱۴ مسائل

۵ ـ ۱ به‌صورت ترسیمی برآیندنیروهای شکل (۵ـ۱۸) را با ذکر مقداربرداری آن معین کنید. راستای آنرا توسط مولفه‌های افقی و عمودی آن مشخص‌نمائید. برای مقیاس 1 in. = 1 ton بگیرید.



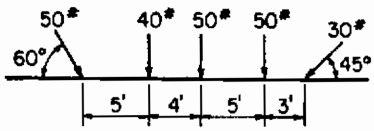
شکل ۵ـ۱۸ مساله ۵ـ۱

۵ ــ ۲ به‌صورت ترسیمی‌نیروهای لازم برای حفظ تعادل هریک از قابهای شکل (۵ــ۱۹) را تعیین‌کنید. مقدار برداری هریک از نیروها به‌انضمام مولفه‌های افقی و عمودی آن‌ها را معین کنید ،موقعیت خط اثر نیروی برآیند را نسبت به‌محورهای‌مختصات افقی و عمودی مار بر مرکز هریک‌از قابهامشخص‌کنید .



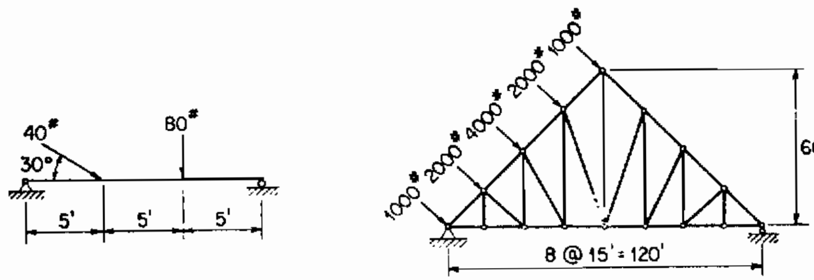
شکل ۵ــ۱۹ مساله ۵ــ۲

۵ ــ ۳ با به‌کاربردن کثیرالاضلاع فونیکولر برآیند نیروهای شکل (۵ــ۲۰) را به‌دست آورید ، مقدار برداری و امتداد آنرا معین کنید و همچنین محل تقاطع امتداد آن‌را با خط اصلی افقی مشخص کنید برای مقیاس $1 \text{ in.} = 5 \text{ ft}$ و $1 \text{ in.} = 50 \text{ lb}$ بگیرید .



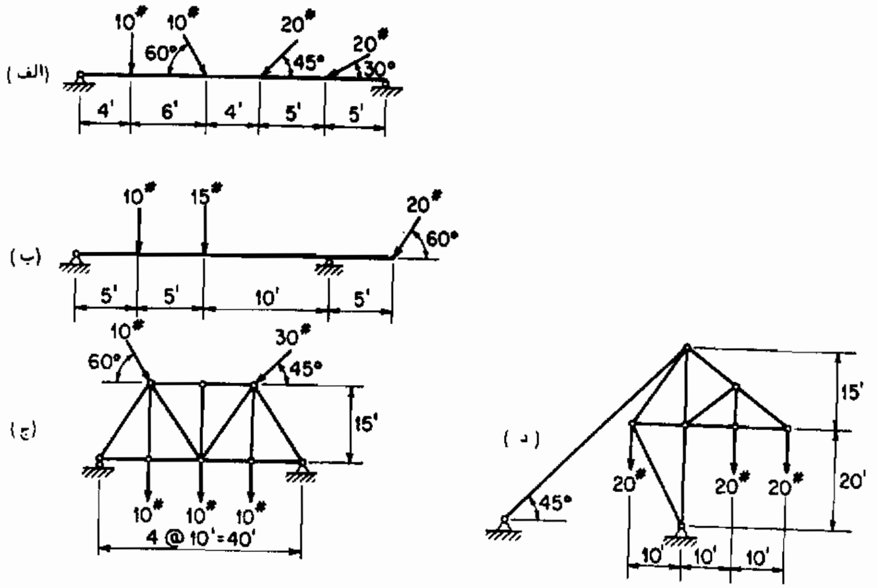
شکل ۵ــ۲۰ مساله ۵ــ۳

۵ ــ ۴ با به‌کاربردن روش سه نیرو مولفه‌های افقی و عمودی عکس‌العملهای سازه‌های شکل (۵ــ۲۱) را تعیین کنید .



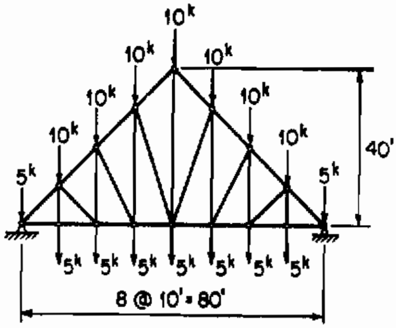
شکل ۵ــ۲۱ مساله ۵ــ۴

۵ ــ ۵ با به‌کاربردن کثیرالاضلاع فونیکولر مولفه‌های افقی و عمودی عکس‌العملهای سازه‌های شکل (۵ــ۲۲) را تعیین کنید .



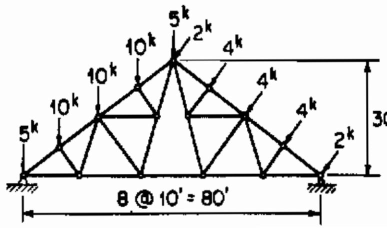
شکل ۵ــ۲۲ مساله ۵ــ۵

۵ ــ ۶ نیروی میله‌ها را دراعضای خرپای سقفی‌از نوع پرات Pratt شکل (۵ــ۲۳) به‌صورت ترسیمی معین کنید .



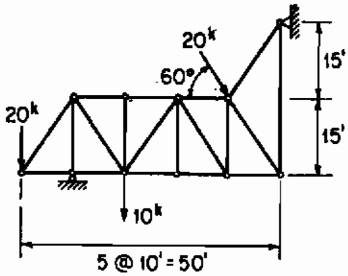
شکل ۵ــ۲۳ مساله ۵ــ۶

۵ ــ ۷ نیروی میله‌ها را در اعضاء خرپای سقفی از نوع فینک Fink شکل (۵ــ۲۴) به‌صورت ترسیمی معین کنید .



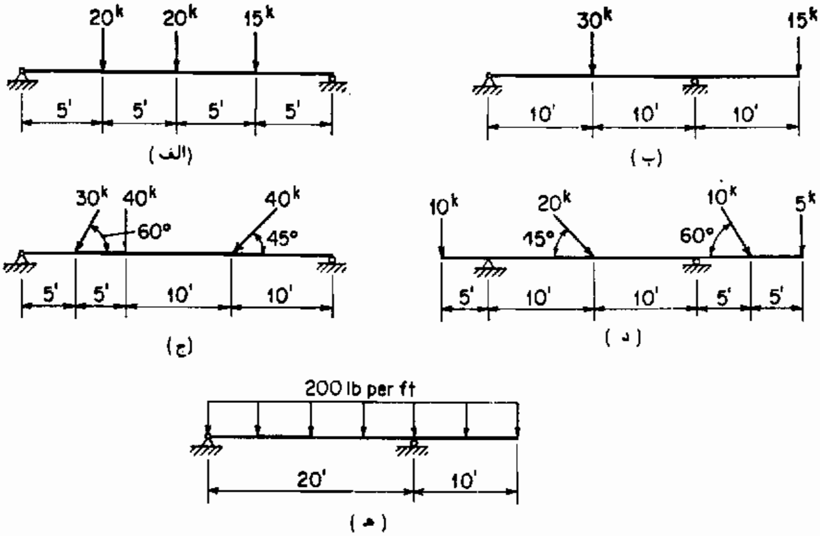
شکل ۵ــ۲۴ مساله ۵ــ۷

۵ ــ ۷ نیروی میله‌ها را در اعضای خرپای شکل (۵ــ۲۵) به‌طریق ترسیمی معین کنید.



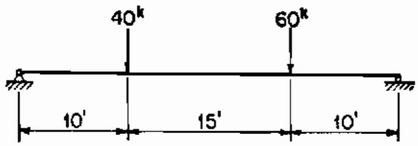
شکل ۵ــ۲۵ مساله ۵ــ۸

۵ ــ ۹ نمودارهای برش لنگر خمشی را برای تیرهای شکل (۵ــ۲۶) به‌طریق ترسیمی معین کنید.



شکل ۵ــ۲۶ مساله ۵ــ۹

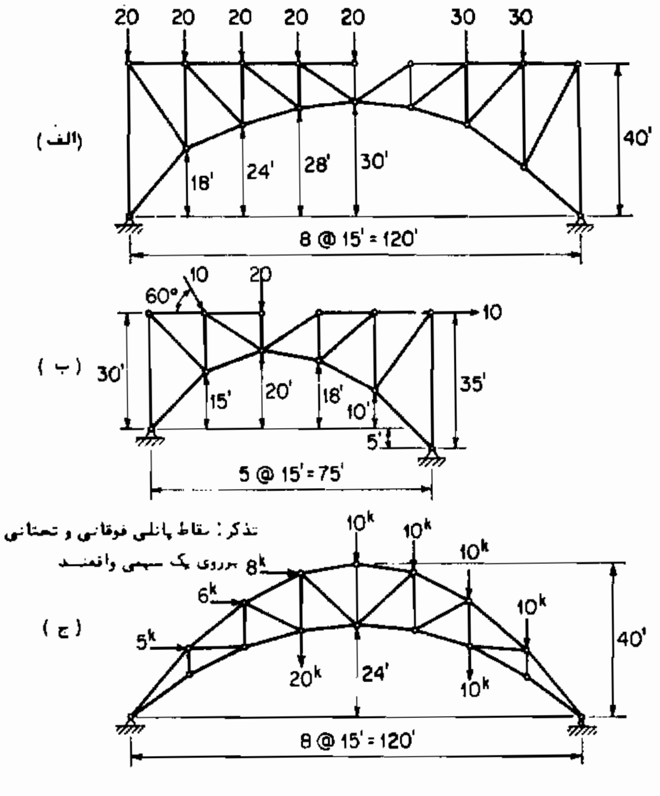
۵ ــ ۱۰ کثیرالاضلاع فونیکولر را برای تیر و بارگذاری شکل (۵ــ۲۷) به‌نوعی رسم کنید که از نقاط تکیه‌گاهی و نقطه‌ای واقع در پائین وسط دهانه آن به‌فاصله 20 ft از آن بگذرد.



شکل ۵ــ۲۷ مساله ۵ــ۱۰

۵ – ۱۱ کابلی بین دو نقطه که در یک تراز بوده و از یکدیگر به‌فاصله 20 ft قراردارند معلق است این کابل نه وزنه 100 lb را که از یکدیگر به‌فاصله 2 ft می‌باشند تحمل می‌کند ، فاصله بین هریک از تکیه‌گاهها و نزدیکترین وزنه به‌آن 2 ft می‌باشد ، پائین ترین نقطه کابل از تراز دو تکیه‌گاه 5 ft است . طول کابل و حداکثر کشش را در کابل تعیین کنید ؟ از روشهای ترسیمی استفاده شود .

۵ – ۱۲ نیروی میله‌ها و عکس‌العملها را در خرپاهای شکل (۵–۲۸) به‌روشهای ترسیمی تعیین کنید .



شکل ۵–۲۸ مساله ۵–۱۲

۵ – ۱۳ با به‌کاربردن روشهای ترسیمی نیروی میله‌ها و عکس‌العملها را در خرپاهای نشان داده شده و مثال (۴ – ۵) معین شود .

٦

خطوط تأثیر

۶ــ ۱ مقدمــه

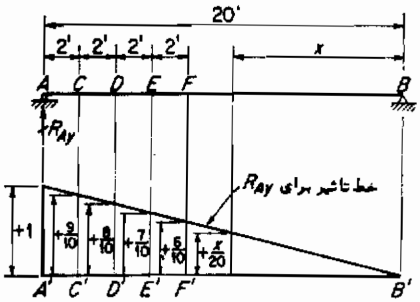
فصول ۲ تا ۵ اختصاص به‌بررسی روشهای اساسی محاسبات عکس‌العملها، برشها، لنگرهای خمشی و نیروی میله‌ها در سازه‌های معین داشت واضح است قبل از این که هریک از عناصر فوق محاسبه گردد باید شرایط بارگذاری مورد نظر تعیین شود، در فصل اول اختلاف بین بارهای مرده نظیر وزن خود یک سازه که همواره ثابت است و بارهای زنده که می‌توانند موقعیتهای مختلف پیدا کنند گفته شد.

وقتی به‌طرح و محاسبه قطعهٔ معلومی از یک سازه می‌پردازیم لازم است که ابعاد مقاطع آن را به‌نوعی انتخاب کنیم که تحت اثر بیشترین تنش در طی عمر کل سازه، مقاومت‌کافی داشته باشد و برای‌این‌که چنین محاسبه‌ای در مورد آن قطعه‌انجام گیرد‌باید مقدار‌بیشترین سهم بار زنده از تنش کلی محاسباتی معین شود و چون تنش حاصل از بار زنده در یک قطعه همواره با موقعیت بار زنده در سازه تغییر می‌کند، لذا همیشه یک موقعیت مخصوص بارزنده وجود دارد که در یک قسمت مخصوص از سازه بیشترین تنش حاصل از بار زنده را ایجاد می‌نماید. این قسمت از سازه و تنش مورد‌بحث می‌تواند عکس‌العمل یک تکیه‌گاه لنگر خمشی نیروی برشی یک مقطع از یک تیر و یا یک شاهتیر، کشش یا فشار قطعه‌ای از یک خرپا و یا بار وارده بر یک پرچ باشد و به‌این ترتیب در حالت کلی، محاسبه قسمتهای مختلف یک سازه بستگی کامل به‌موقعیتهای مختلف بار زنده دارد.

به‌این ترتیب واضح است که درک و آگاهی از روشهای موجود که برای تعیین موقعیت بار زنده که سبب ایجاد بیشترین تنش در یک نقطه معلوم از سازه می‌نماید برای تحلیل‌گر سازه امری الزامی است.

۶ ــ ۲ شرح تغییر تنش برحسب موقعیت بار

فرض کنید که بار واحدی در جهت رو به‌پائین در نقطهٔ A بر تیر AB ازشکل ۶ـ۱ اثر کند ، با لنگرگیری حول نقطهٔ B ، عکس‌العمل R_{Ay} برابر با ۱ و به‌سمت بالا تعیین می‌شود. از نقطه A' که روی‌خط مبنای $A'B'$ واقع است خطی عمود برخط مبنا وبرابر $+1$ رسم می‌کنیم ، حال اگر این بار واحد در نقطه C اثر کند با لنگرگیری حول B مقدار R_{Ay} برابر با $+9/10$ خواهد شد ، این مقدار را در C' روی خط مبنای $A'B'$ که دقیقاً" زیر نقطهٔ اثر بار واحد قرار دارد به‌عرضی برابربا $+9/10$ رسم می‌کنیم و باردیگر فرض کنید که این بار به‌نقطه D منتقل شود ، مقدار R_{Ay} برابر با $+8/10$ خواهد شد حال مقدار $+8/10$ رادر نقطه D' که دقیقاً" زیر D واقع است به‌صورت عمودی رسم می‌کنیم .



شکل ۶ـ۱ خط تأثیر ساده

این عملیات را برای کلیه موقعیتهای اثر بار واحد بین A و B تکرار کنید ، مقادیر عکس‌العمل منتج‌برای هریک ازاین حالات به‌توسط خطی‌عمودی ازخط مبناء $A'B'$ و ازنقطه‌ای دقیقاً" در زیر محل تأثیر بار رسم می‌شود ،انتهای کلیه این خطوط بر یک خط مستقیم واقع می‌باشد . البته این مطلب قبلاً"نیز قابل پیش‌بینی بود زیرا که مقدار R_{Ay} برای باروحدی که در مقطعی به‌فاصله x از $\hat{B}$ اثر می‌کند برابر با $+x/20$ خواهد بود که $+x/20$ عرض نقطه است که از فاصله x از B' درج می‌شود و نمودار $x/20$ برحسب x یک خط مستقیم می‌باشد .

با در نظر گرفتن نحوهٔ رسم منحنی از خط مبنای $A'B'$ نتایج زیر را می‌توان تحصیل نمود .

۱ ــ عرض هر نقطه از این منحنی برابر با مقدار R_{Ay} است اگر بار واحدی درآن‌مقطع اثر کند (متذکرمی‌شویم‌که کلیه عرض نقاط مربوط به‌عکس‌العمل درنقطه A است ونشان‌دهنده

محل تأثیر بار واحد ایجادکنندهٔ آن عکس‌العمل می‌باشد)

۲ ــ به‌همان ترتیب که بار واحد از B به‌طرف A حرکت می‌کند، به‌همان نسبت نیز مقدار (عکس‌العمل در A به‌صورت خطی افزایش می‌یابد مقدار) حداکثر R_{Ay} زمانی است که بار مزبور در نقطه A اثر کند

۳ ــ چون کلیه مقادیر عرض این منحنی مثبت است نتیجه گرفته می‌شود که بار واحدی که بر هرنقطه‌ای از دهانه AB اثر کند ایجاد عکس‌العملی به‌سمت بالا در نقطه A خواهد نمود، بنابراین اگر این سازه تحت اثر باری زنده به‌صورت یکنواخت قرار گرفته باشد این بار زنده باید در کل دهانه AB تیر اثر کند تا این‌که مقدار R_{Ay} به‌حداکثر خود برسد.

۶ ــ ۳ خط تأثیر ــ تعریف

منحنی رسم شده در شکل ۶ــ۱ را منحنی تأثیر می‌گویند زیرا آن منحنی نشان‌دهنده تابعی از بار واحدی است که در طول سازه حرکت می‌کند، در این حالت خاص تابع مورد بحث عکس‌العمل عمودی در A است. واضح است که این تابع می‌تواند هرچیزی که برحسب تغییر مکان بار در طول دهانه تغییر کند باشد، نظیر لنگر یا برش در مقطعی از یک شاه‌تیر یا یک نیرو یا نیروی میله‌ای درعضو معلومی از یک خرپا و با تغییرمکان یک نقطه معلوم از یک سازه.

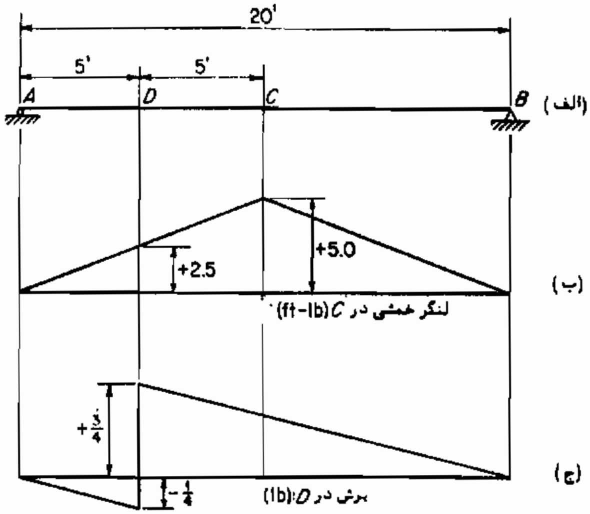
خط تأثیر را می‌توان به‌صورت زیر تعریف نمود: ***خط تأثیر نظیر یک منحنی است که عرض آن منحنی در هرنقطه‌ای برابر با مقدار تابع مشخصی از یک بار واحد (مثلاً" بار 1-lb) باشد که در آن نقطه اثر می‌کند.***

منحنی (ب) از شکل (۶ ــ۲) خط تأثیر لنگر در نقطه C مرکز یک تیر روی دو تکیه‌گاه ساده را نشان می‌دهد، تطابق این منحنی را با تعریف خط تأثیر می‌توان با وارسی عرض نقاط مختلف آن بررسی نمود، مثلاً" اگر باری برابر با 1-lb در D اثر کند لنگر در C برابر با $\frac{1}{4} \times 10 = +2.5$ ft-lb خواهد شد که این مقدار عرض خط تأثیر در نقطه D می‌باشد.

منحنی (ج) از این شکل خط تأثیر برش را در D که به‌فاصله یک چهارم دهانه از سمت چپ واقع شده است نشان می‌دهد، برای این‌که به‌بینیم که آیا این منحنی نیز برتعریف خط تأثیر مطابقت دارد یا نه می‌توان با وارسی عرض نقاط مختلف آن تحقیق نمود. برای مثال اگر بار واحدی درست در سمت راست نقطه D اثر کند برش در D برابر با $+\frac{3}{4}$ lb خواهد شد.

برحسب تعریف خط تأثیر نمایانگر اثر بار واحدی است هرگاه آن بار در طول دهانه تغییرمکان دهد، دیده می‌شود که چنین منحنی مطابقت کامل بر حرکت بار زنده‌ای در طول یک پل دارد، البته استفاده از خطوط تأثیر اختصاص به‌سازه‌هائی از قبیل پل ندارد، زیرا خطوط تأثیر اهمیت کامل در تعیین تنشهای حداکثر در کلیه سازه‌هایی که تحت اثر بارهای

زنده می‌باشند دارند. چنین بارهای زنده‌ای می‌تواند بارهای منقول یک ساختمان اداری و یا بارهای آئرودینامیک مؤثر بر یک بال هواپیما و یا حایلهای فشاری آب ساکن حاصل از جابجایی موج‌ها در روی جدار یک کشتی باشد.



شکل ۶–۲ خطوط تأثیر برای تیر ساده

۶ ــ ۴ خصوصیات خط تأثیر

خطوط تأثیر را می‌توان برای دو عمل مهم به‌کار برد: ۱ ــ برای تعیین موقعیتی از بارهای زنده، که سبب ایجاد مقدارحداکثر تابع معلومی می‌شود که برای آن تابع خط تأثیر رسم شده است ۲ ــ برای محاسبه مقدار آن تابع، تحت بارگذاری در موقعیت حداکثر اثر و به‌عبارت دیگر برای هرنوع بارگذاری.

از آنجائی که عرض یک خط تأثیر اندازه‌گرفته می‌شود لذا دو قضیه زیر را می‌توان‌بیان کرد:

۱ ــ برای این‌که مقدار حداکثر تابع معلومی که به‌دلیل واردشدن بار زندهٔ متمرکزی حاصل می‌شود به‌دست آید باید آن بار در محل عرض حداکثر خط تأثیر آن تابع واردگردد.

این چنین مطلبی واضح است زیرا اگر بخواهیم مقدار حداکثر مثبت تابعی را معین کنیم‌بار وارده باید درنقطه با عرض حداکثرمثبت خط تأثیر اثر کند اگرقرار باشد مقدار حداکثرمنفی

به‌دست آید ، موقعیت بار وارده در نقطه عرض حداکثر منفی خط تأثیر خواهد بود .

۲ ــ *مقدار تابع حاصل از واردشدن بار* زنده منفرد و متمرکز *برابر است با حاصل‌ضرب مقدار آن بار* در*عرض خط تأثیری‌که برای آن تابع* رسم شده‌باشد و عرض مورد بحث در نقطه *اثر بار اندازه‌گرفته شده باشد* . چنین عملی از اصل انطباق حاصل می‌شود . به‌علاوه‌برطبق قضیه ۲ مقدار کل تابعی حاصل از بیش از یک بار متمرکز را می‌توان با جمع اثرات جداگانه هریک از بارهای متمرکز به‌دست آورد .

در تعریفی که فوقاً" در مورد خط تأثیر ارائه شد پیشنهاد شده است‌که خط تأثیر برای باری برابر با 1-lb رسم شود ، در نتیجه عرض خط تأثیردارای واحدهای زیرخواهد بود : نیروهای عکس‌العمل پاوند ، برش و نیروهای محوری پاوند ، لنگرهای‌خمشی‌فوت پاوند و غیره . به‌این ترتیب برای این‌که اثر بار متمرکز دیگری را با استفاده از خط تأثیر پیدا کنیم بایدکه مقدار بدون بعد آن بار را درمحاسبات وارد کنیم (به‌این‌معنی که فقط‌تعداد بارهای یک پاوندی موجود در آن بار را در نظر داشته باشیم). مثلاً" با استفاده از شکل (۶ــ۲ ب) لنگر خمشی در C حاصل از اثر باری برابربا 750 lb که در Dوارد می‌شود چنین خواهد شد .

$$(2.5 \text{ ft-lb})(750) = 1{,}875 \text{ ft-lb}$$

برخی از مهندسین محاسب ترجیح می‌دهند که خطوط تأثیر را بیانگر توابعی که در اثر بار واحد بدون بعدی به‌دست می‌آید در نظر بگیرند با چنین فرضی حاصل ــ ضرب فوق‌الذکر با ضرب عدد بعددار 750 lb به‌دست می‌آید و یا :

$$(2.5 \text{ ft})(750 \text{ lb}) = 1{,}875 \text{ ft-lb}$$

برخی دیگراز مهندسین محاسب ترجیح می‌دهندکه عرض خط تأثیر را نسبت تابع مورد نظر بر بار دارای بعد یک پاوندی که سبب ایجاد آن تابع شده است بگیرند و با این تعریف می‌گویند که عرضهای شکل (۶ــ۲ ب) واحدی برابر با ft lb/lb دارند و در این‌حالت حاصل‌ضرب فوق‌الذکررا می‌توان باضرب عدد بعددار 750 lb به‌دست آورد و یا :

$$(2.5 \text{ ft-lb per lb})(750 \text{ lb}) = 1{,}875 \text{ ft-lb}$$

این چنین برداشتی‌گرچه در این‌مبحث به‌کارنخواهد رفت ولی دارای مزایایی‌می‌باشد

برطبق چنین‌کاربردی عرض‌های‌خطوط تأثیر به‌عنوان ضرایب تأثیر‌به‌کار برده‌می‌شوند .

برای این‌که کاربرد اجرایی این دوقضیه را شرح داده باشیم فرض کنید که بار زنده‌ای برابر با1,000lbبر تیر شکل (۶ـ۴ الف) اثر کند ، اگر خط تأثیر شکل (۶ـ۴ ج) را به‌کار بریم مقدار حداکثر برش مثبت حاصل از اثر این بار در D وقتی است که بار فوق‌الذکر درست در طرف راست D وارد شود که در این صورت مقدار آن برابر با $+7,000\ \text{lb} = 10,000(+7/10)$ خواهد شد و مقدار حداکثر برش منفی در همان مقطع وقتی است که بار درست درطرف چپ D وارد شود که مقدارآن برابر با $-3,000\ \text{lb} = 10,000(-3/10)$خواهد شد ، با در نظرگرفتن شکل (۶ـ۴ هـ) حداکثر لنگر مثبت در D وقتی است که بار در D وارد شود که مقدارآن برابر خواهد شد با :

$$10,000(+21/10) = +21,000\ \text{ft-lb}$$

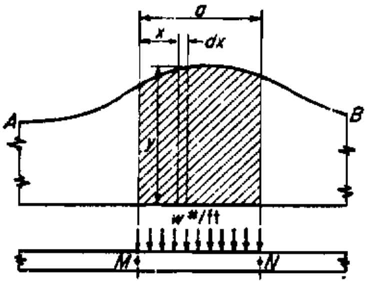
با در نظر گرفتن تعریف خط تأثیر قضیه زیر که در مورد بارهای زنده گسترده با شدت یکنواخت می‌باشد واضح است :

۳ــ برای این‌که مقدارحداکثر تابعی‌را که به‌دلیل واردشدن بار زنده گسترده‌یکنواختی حاصل می‌شود به‌دست آوریم باید که این بار در کلیه قسمتهای سازه که در مورد آن قسمتها عرضهای خط‌تأثیر تابع مورد نظر دارای علامت(مثبت یا منفی) دلخواه می‌باشد واردشود .

برای محاسبه مقدارواقعی تابعی‌که به‌دلیل واردشدن بارزنده‌گسترده و یکنواختی‌حاصل می‌شود با استفاده از خطوط تأثیر قضیه زیر را می‌بایستی به‌کار گرفت .

۴ــ مقدار تابع حاصل از واردشدن هر بار زنده گسترده و یکنواخت برابر است با حاصل‌ضرب شدت آن بار در سطح خالص آن قسمت از خط تأثیر تابع موردنظر که مربوط به‌قسمت بارشده سازه می‌گردد .

برای فهم صحت قضیه فوق می‌توان چنین تحقیق نمود : فرض کنید که AB خط تأثیرتابع مشخص F باشد ، قسمتی از این سازه چنانکه درشکل(۶ـ۳) دیده می‌شود تحت‌اثر



شکل ۶ـ۳ قسمتی از خط تأثیر

بار گسترده و یکنواختی به شدت w lb / ft که در کل طول بین M و N اثر می‌کند واقع شده باشد ، قسمتی از خط تأثیر را که در فاصله dx واقع است می‌توان مانند بار متمرکزی برابر با $w\,dx$ گرفت ، با در نظر گرفتن قضیه ۲ مقدار اثر F حاصل از این بار دیفرانسیلی را می‌توان به‌صورت $dF = w\,dx\,y$ بیان کرد به‌این ترتیب کل مقدار F که در اثر بار بین M و N حاصل می‌شود برابر با انتگرال dF بین $x = 0$ و $x = a$ و یا به‌عبارت دیگر مساوی : (سطح زیر خط تأثیر محدود بین قسمت بارشده سازه)

$$F = \int_0^a wy\,dx = w\int_0^a y\,dx = w$$

برای این که کاربرد عملی قضایای ۳ و ۴ را شرح دهیم فرض کنید که بار زنده و یکنواختی به‌شدت 1,000 lb بر تیر شکل (۶ ــ ۴ الف) اثر کند ، برای این که برش مثبت و حداکثر را در D (شکل ۶ــ۴ ج) به‌دست آوریم بار یکنواخت باید از C تا A و از D تا B بر تیر وارد شود ، در این صورت مقدار این برش حداکثر و مثبت در D خواهد شد :

$$1{,}000[\tfrac{1}{2}(5)(+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(7)(+\tfrac{7}{10})] = +3{,}700 \text{ lb}$$

برای برش حداکثر منفی در D باید سازه را از A تا D بارگذاری نمود که در این حالت برش حاصل در D برابر خواهد شد با :

$$1{,}000[\tfrac{1}{2}(3)(-\tfrac{3}{10})] = -450 \text{ lb}$$

با در نظر گرفتن شکل (۶ــ۴ هـ) جهت محاسبه لنگر حداکثر مثبت در D سازه را باید در حد فاصل A تا B بارگذاری نمائیم ، در این صورت خواهیم داشت :

$$1{,}000[\tfrac{1}{2}(10)(+\tfrac{21}{10})] = +10{,}500 \text{ ft-lb}$$

برای این که مقدار حداکثر تابع حاصل از بار زنده متمرکز و بار زنده گسترده یکنواختی را هرگاه این دو نوع بار به‌صورت همزمان وارد شوند تعیین کنیم باید حداکثر تابع حاصل از هریک از این بارگذاریها را به‌صورت جداگانه به‌روشی که قبلاً ذکر شد محاسبه کرده و نتایج حاصل را با یکدیگر جمع کنیم ، به‌عنوان مثال برای این‌که لنگر منفی حداکثر در A از شکل (۶ــ۴ الف) را تحت اثر بار یکنواختی به‌شدت 1,000 lb/ft و بار متمرکزی منفرد برابر با 10,000 lb را با استفاده از شکل (۶ــ۴ د) پیدا کنیم باید بار یکنواخت از C تا A بر تیر وارد شده و بار متمرکز باید در C اثر کند ، در این حالت لنگر منفی حداکثر در A خواهد شد :

$$1{,}000[\tfrac{1}{2}(5)(-5)] + 10{,}000(-5) = -62{,}500 \text{ ft-lb}$$

فرض کنید که بار یکنواختی به‌شدت 1,000 lb ft در کل طول تیر شکل (۶ـ۴ الف) اثر کند اثرات حاصل را می‌توان با محاسبه جمع جبری سطوحی که کل خط تأثیر ایجاد می‌کنـد تعیین نمود. به‌عنوان مثال لنگرحاصل در D با استفاده از شکل (۶ـ۴ هـ) برابرخواهد شد با:

$$1{,}000[\tfrac{1}{2}(5)(-\tfrac{7}{2}) + \tfrac{1}{2}(10)(+\tfrac{21}{10})] = +1{,}750 \text{ ft-lb}$$

۶ ـ ۵ رسم خطوط تأثیر تیرها

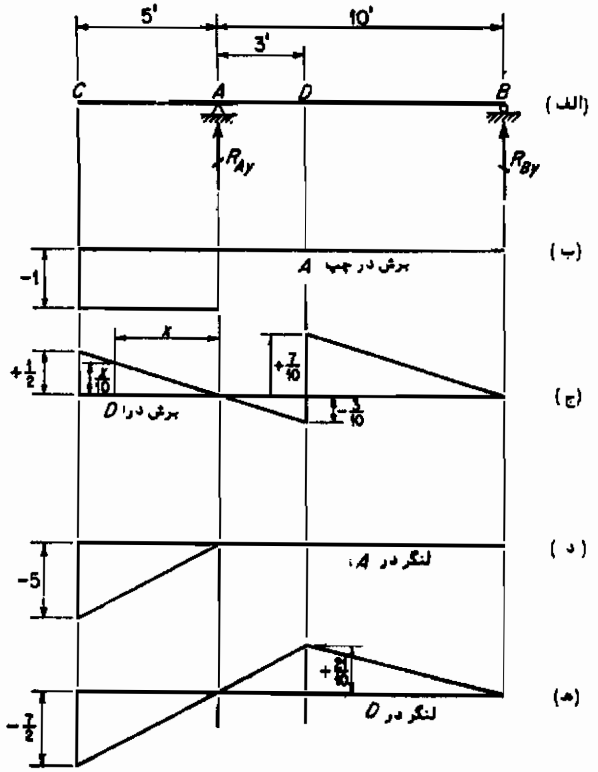
تیرشکل (۶ـ۴ الف) را درنظر بگیرید، برای شرح روش ترسیم خطوط تأثیر، خط تأثیری برای برش نقطه سمت چپ A همان‌طوری که درشکل (۶ـ۴ ب) نشان داده شده است ترسیم می‌گردد، هرگاه بار واحدی بهر مقطعی از سمت چپ این نقطه وارد شود برش در مقطع چپ A برابربا واحد بوده و مقدارمنفی خواهد داشت. به‌این جهت خط تأثیر دارای عرضی‌برابر با $1-$ از C تا A خواهد بود و اگر بار واحدی به‌هرمقطعی واقع در بین A، و B اثر کند، مقدار برش در مقطع چپ A برابر با صفر خواهد شد و به‌این ترتیب عرض خط تأثیربرای‌این قسمت از تیر برابر با صفر خواهد شد.

حال خط تأثیر برش در D را چنانکه در شکل (۶ـ۴ ج) می‌بینیم رسم خواهیم کرد اگر بار واحد در C وارد شود برش در D را می‌توان برابر با عکس‌العمل در B و مساوی‌با $+\tfrac{1}{2}$ بەدست آورد به‌همان ترتیب که بار واحداز C به‌طرف A حرکت می‌کند مقدار عکس‌العمل B و در نتیجه برش در D تا مقدار صفر تقلیل پیدا می‌کند و لذا خط تأثیر برش در D از مقدار $+\tfrac{1}{2}$ در C بمقدار صفر در A تغییر می‌کند. عملا" این تغییرات بین C و A خطی است، بررسی خطی‌بودن تغییرات خط تأثیر بین C و A را می‌توان با دو روش زیر معین نمود.

۱ ـ می‌توان بارواحد را در هرمقطعی واقع‌بین C و A اثرداده و برش در D را محاسبه نمود، زمانی‌که به‌درج این مقادیر به‌طریق ترسیمی درنقاط‌اثر بار می‌پردازیم معلوم خواهد شد که آن نقاط بر روی یک خط مستقیم واقع‌اند.

۲ ـ اگر فاصله بار از A را با x نشان دهیم عکس‌العمل عمودی در B که در جهـت رو به‌پائین اثر خواهد کرد برابر با $x/10$ خواهد شد، رسم $+x/10$ بر حسب x یک‌خط مستقیم است.

به‌همان ترتیب که بار واحد از A تا مقطع سمت چپ D تغییر مکان می‌دهد عکس‌العمل



شکل ۴ـ۶ خطوط تأثیر برای تیر طره‌دار

B از مقدار صفر تا $+\frac{3}{10}$ افزایش می‌یابد لذا برش در D از مقدار صفر تا $-\frac{3}{10}$ تغییر می‌کند و بنابراین عرض خط تأثیر در سمت چپ D برابر با $-\frac{3}{10}$ خواهد شد . به‌همان‌طریقی که خطی‌بودن خط تأثیر بین C و A نتیجه‌گیری شد می‌توان خطی بودن تغییرات آن را از مقدار صفر در A تا مقدار $-\frac{3}{10}$ در D استدلال نمود .

حال فرض کنید که بار واحد در سمت راست D اثر کند ، اگر بخواهیم برش در D را که در اثر نیروهای مؤثر درسمت راست D به‌طوری که قبلاً" شرح داده شده است محاسبه کنیم ، لازم است که دو نیروی عکس‌العمل در B و بار واحد را در محاسبات، وارد کنیم و از طرف دیگر اگر برش در D را که در اثر نیروهای مؤثر بر سمت چپ D حاصل می‌شود را محاسبه کنیم فقط عکس‌العمل در A لازم خواهد بود .

اغلب در محاسبه عرضهای خطوط تأثیر ترجیح داده می‌شود که از نیروهای مؤثر بر مقاطعی که از بار واحد دور می‌باشند استفاده شود . در حالت مورد بحث ما $R_{Ay} = +\frac{7}{10}$

بوده و لذا برش برابر با $+7/10$ می‌شود که این مقدار عرض خط تأثیر در سمت راست D می‌باشد. باید متذکر شد وقتی که بار واحد از D عبور می‌کند یعنی از سمت چپ D به‌سمت راست D می‌گذرد برش در D به‌طورناگهانی ازمقدار $-3/10$ به $+7/10$ افزایش می‌یابد، وقتی که بار واحد از مقطع راست D تا B حرکت می‌کند، عکس‌العمل در A و بنابراین برش در D به‌طور خطی از $+7/10$ تا صفر تقلیل می‌یابد و لذا خط تاثیر به‌صورت خطی مستقیم ازمقدار $+7/10$ در D تا مقدار صفر در A تغییر خواهد کرد.

حال خط تأثیر لنگر در A به‌طوری که در شکل (۶ـ۴ د) نشان داده شده است رسم می‌کنیم، وقتی باری واحد در C قرار می‌گیرد لنگر در A برابر با -5 می‌شود، به‌همان نحو که بار از C تا A حرکت می‌کند لنگر در A به‌طور خطی تا صفر تقلیل می‌یابد. اگر بار در هر مقطعی بین A و B واقع شود لنگر در A برابربا صفر می‌شود، این مطلب را می‌توان‌ازبررسی بارهای واقع در سمت چپ A استنباط نمود.

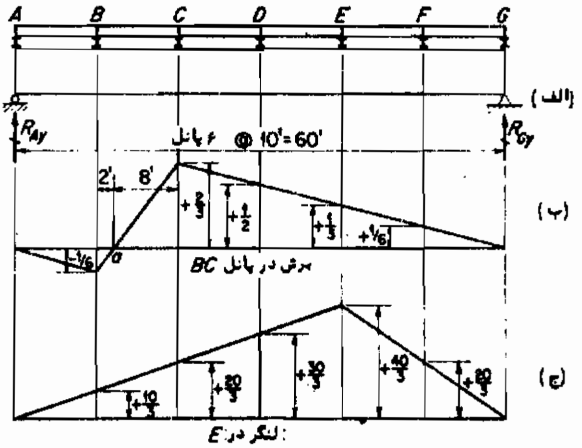
برای رسم خط تأثیر لنگر در D به‌طوری که در شکل (۶ـ۴ هـ) دیده می‌شود می‌توان به‌صورت زیر عمل نمود: در صورت واردشدن بارواحدی در C لنگر در D به‌طوری‌که به‌سادگی می‌توان با محاسبه عکس‌العمل B به‌دست آورد برابر با $-7/2$ خواهد شد، به‌همان‌ترتیب که بار از C به A تغییر مکان می‌دهد لنگر در D به‌طور خطی تا مقدار صفر تقلیل می‌یابد و لذا خط تأثیر خط مستقیمی است که از $-7/2$ در C به‌صفر در A رسم می‌شود، همان‌طور که بارازA به D تغییرمکان می‌دهد عکس‌العمل در B به‌طورخطی از صفرتا $+3/10$ افزایش می‌یابد ولنگر در D که از طریق این عکس‌العمل محاسبه‌می‌شود به‌طورخطی ازصفرتا $+3/10 \times 7 = +21/10$ افزایش می‌یابد و لذا خط تأثیر خط مستقیمی است که از صفر در A به $+21/10$ در D رسم می‌شود. همان‌طور که بار از D تا B تغییر می‌یابد عکس‌العمل در A به‌طور خطی از $+7/10$ تا صفر تقلیل می‌یابد و لنگر در D که از طریق این عکس‌العمل محاسبه می‌شود، به‌طور خطی‌از $+7/10 \times 3 = 21/10$ تا صفر در B تقلیل می‌یابد.

۶ـ۶ خطوط تأثیر شاهتیرها با تیر ریزی کف

محاسبات باربری تیر ریزیهای کف را در بخش۲ـ۹ دیدیم و رسم خطوط تأثیر برای شاهتیرهای با تیرریزی کف را می‌توان با ملاحظه شکل ۶ـ۵ شرح داد. ابتدا چنانکه درشکل (۶ـ۵ ب) می‌بینیم خط تأثیر برای پانل BC را رسم می‌کنیم، از آنجائی‌که بارهای زنده فقط از طریق تیرهای عرضی کف که در نقاط پانلی $A, B, \ldots, G$ واقع شده‌اند امکان انتقال به‌شاهتیر پیدا می‌کنند ملاحظه می‌شود که مقدار برش حاصل از بار زنده در طول یک

پانل از شاهتیر همواره ثابت می‌باشد .

وقتی که بار واحدی در A واقع می‌شود ، $R_{Gy} = 0$ می‌شود . عکس‌العملهای تیرهای کف سمت راست پانل BC که عبارت از نیروهای وارده از طریق تیرهای عرضی کف در نقاط C ، D ، E ، F و G می‌باشد همگی صفرخواهند بود لذا با محاسبه برش در پانل BC بااستفاده از نیروهای مؤثر بر شاهتیرها در سمت راست ، این پانل مقدار برش برابر با صفرخواهدشد وقتی که بار واحد در B قرار گیرد $R_{Gy} = +1/6$ شده و عکس‌العملهای تیرهای کف در $C, D, \ldots, G$ بازهم برابر با صفر خواهد شد و لذا برش در پانل BC برابربا $-1/6$ خواهد شد .



شکل ۶ــ۵ خطوط تأثیر برای شاهتیر

وقتی‌که بار واحد درطول تیر طولی‌از یک نقطه به‌نقطه دیگر پانلی تغییرمکان‌می‌دهد، خط‌تأثیر در آن پانل مورد بحث یک خط مستقیم خواهد بود البته با فرض این‌که تیرهای طولی مانند تیرهای ساده‌ای به‌دهانه فاصله‌بین دو تیرعرضی عمل کنند ، صحت مطلب‌فوق را در اینجا بررسی‌می‌کنیم : وقتی‌که بار واحدی از یک نقطه پانلی به‌نقطه دیگر پانلی‌تغییر مکان می‌دهد عکس‌العملهای تیرهای طولی که همان بارهای مؤثر بر شاهتیر ازطریق تیرهای کف می‌باشند ، به‌طور خطی تغییر خواهند کرد و لذا هر اثری در شاهتیر که تابع تنش باشد نظیر برش در یک پانل نیز همچنان بطور خطی تغییر خواهد کرد بنابراین خط‌تأثیر برش در پانل BC نیز به‌طور خطی از مقدار صفر در A به‌مقدار $-1/6$ در B تغییر خواهد کرد .

وقتی باری‌واحد در C قرارمی‌گیرد $R_{Ay} = +2/3$ خواهدشد در حالیکه عکس‌العملهای کف در A و B برابر با صفر می‌باشد ، پس برش در پانل BC برابر با $+2/3$ خواهد شد و این

مقدار به‌سادگی با درنظر گرفتن نیروهای مؤثر بر سمت چپ پانل قابل محاسبه‌می‌باشد. خط تأثیر خطی مستقیم از B تا C خواهد بود.

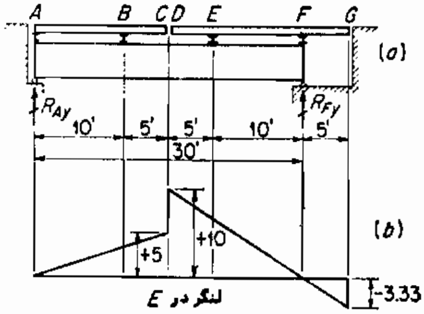
عرضهای خطوط تأثیر در نقاط پانلی D، E، F و G را می‌توان به‌همان روشی که در تعیین عرض خط تأثیر در نقطه C به‌کار برده شد محاسبه نمود. در کلیه این حالات خط تأثیر خط مستقیمی در حد فاصل نقاط پانلی خواهد بود، معلوم می‌شود که خط تأثیر خط مستقیمی از C تا G خواهدبود. البته می‌توان ازاین محاسبات بااستدلال زیرین خودداری نمود: به‌همان نحو که بار از C تا G تغییر مکان می‌یابد، R_{A_y} به‌طور خطی از $+\frac{2}{3}$ تا صفر تقلیل می‌یابد و به‌طوری که‌به‌سادگی از بررسی نیروهای خارجی مؤثر بر سازه دیده می‌شود چون عکس‌العملهای تیرهای کف در A و B صفر باقی می‌ماند، برش در پانل BC به‌طورخطی از $+\frac{2}{3}$ تا صفر تقلیل می‌یابد.

باید خاطرنشان کرد که می‌توان همواره یک خط تأثیر را با محاسبه مقادیر مختلف تابع مورد نظر با در نظر گرفتن موقعیتهای مختلف برای بار واحد ترسیم نمود با توجه به این مطلب که نقاط تغییر شیب خط تأثیر همواره در بین موقعیتهای انتخابی باشند، نقاط پانلی در زمرهٔ این نقاط هستند، ولی همان‌طوری که بعدها خواهیم دید، ممکن است سازه‌ای به‌نحوی آرایش یافته باشد که نقاط دیگری نیز در آن سازه در زمره نقاط تعیین کننده باشند تجربه کافی در رسم خطوط تأثیرمی‌تواند به‌شخص درک کافی برای تشخیص خطی‌بودن خطوط تأثیر در قسمتهای مختلف سازه را بدهد، گرچه چنین تجربه‌ای الزامی نیست ولی می‌تواند از مقدار محاسبات بکاهد.

حال به‌خط تأثیرلنگر در نقطهٔ پانلی E از شاهتیرشکل (۶ــ۵ الف) که درشکل (۶ــ۵ج) نشان داده‌شده است دقت‌کنید. به‌همان ترتیب که بار واحد از A به E تغییرمکان می‌دهد R_{G_y} به‌طورخطی ازصفر به $+\frac{2}{3}$ افزایش می‌تابد این مطلب را می‌توان با بررسی نیروهای‌خارجی‌در حالتی که عکس‌العملهای تیرهای عرضی کف در F و G صفر باشند فهمید. چون لنگردرنقطه پانلی E به‌طورخطی ازمقدارصفر در A به‌مقداری برابربا $+\frac{2}{3} \times 20 = +\frac{40}{3}$ در E افزایش می‌یابد لذا خط تأثیر نیز خطی مستقیم از مقدار صفر در A تا مقدار $+\frac{40}{3}$ در E می‌باشد. وقتی که بار واحد از E به G تغییر مکان می‌یابد، R_{A_y} به‌طور خطی از $+\frac{1}{3}$ تا صفر تقلیل می‌یابد و عکس‌العملهای تیرهای عرضی کف در A، B، C و D صفر خواهند بود لذا خط تأثیر خط مستقیمی از مقدار $+\frac{1}{3} \times 40 = +\frac{40}{3}$ در E به‌مقدار صفر در G خواهد بود.

در هر پانلی لازم نیست که تیرهای طولی به‌صورت یک تیر ساده روی دو تیر عرضی کف در دو انتهای خود قرار گیرند، در شکل (۶ــ۶ الف) حالتی نشان داده شده است که

در آن حالت تیرهای طولی در پانل BE تره شده و تیر طولی انتهایی در پانل EF تانقطه G نیز ترهای شده است . بررسی رسم خط تأثیر برای چنین سازهای با بررسی لنگر در نقطه پانلی E از شاهتیر بهطوریکه در شکل (۶ـ۶ ب)دیده میشود انجام خواهد گرفت .بههمان ترتیب که بارواحد از A تا C را میپیماید بررسینیروهای مؤثر برپیکر آزاد متشکل ازشاهتیر



شکل ۶ـ۶ تأثیر نوع قرارگرفتن تیرهای طولی

و تیر طولیAC نشان میدهد که R_{Fy} بهطور خطی از صفر تا $+\frac{1}{2}$ تغییر میکند . چون عکسالعملهای تیرهای عرضی کف در E و F برابر با صفر است پس لنگر درنقطه E از شاهتیر بهطورخطی از مقدار صفر در A تا مقدار $+5 = +\frac{1}{2} \times 10$ در C تغییرخواهد کرد .اگر بار واحد در D اثر کند ، مقدار $R_{Ay} = +\frac{1}{2}$بوده و عکسالعملهای تیرهای عرضی کف در A و B برابر با صفر خواهند بود و لذا لنگر در E مساوی با $+\frac{1}{2} \times 20 = +10$ خواهد شد ، بههمان ترتیب که بار از D به G تغییر مکان مییابد ، R_{Ay} بهطور خطیاز $+\frac{1}{2}$ تا $-\frac{1}{6}$ تغییر خواهد کرد و چون عکسالعملهای تیر عرضی کف در A و B بهمقدار صفر باقی میمانند لذا لنگر در E بهطور خطی از مقدار $+10$ در D بهمقدار $-\frac{1}{6} \times 20 = -3.33$ در G تغییر خواهد کرد .

۶ ـ ۷ شرح خطوط تأثیر شاهتیرها با تیرریزی کف

چهار قضیه مشروح در مبحث ۶ـ۴ که موارد استفاده خطوط تأثیر را شرح میداد کاملا" کلی بوده و قابل استفاده در خطوط تأثیر شاهتیرها با تیرریزی کف نیز هستند . فرض کنید بارهای زندهای شامل از بار یکنواختی بهشدت 1,000 lb/ft و بار منفرد متمرکزی برابر با 10,000 lb بهسازه شکل (۶ـ۵ الف) وارد شوند . برای اینکه حداکثر برش حاصل از بار زنده را در پانل BC بااستفاده از خط تأثیرشکل (۶ـ۵ ب) بهدست آوریم ابتدا لازم استکهمحل

تقاطع این خط تأثیر را در نقطه a با خط مبناء مشخص کنیم. چنین نقطه‌ای به‌نقطهٔ خنثی مشهور است زیرا اگر باری در این‌نقطه وارد شود هیچ تأثیری در مقدارتابع مورد نظرنخواهد داشت. محل این نقطه‌را با استفاده از تشابه مثلث می‌توان محاسبه نمود که به‌این ترتیب فاصله‌اش از B برابر با 2 ft تعیین می‌شود، حداکثر برش مثبت حاصل از بار زنده در پانل BC وقتی است که باریکنواخت از نقطهٔ خنثی تا نقطه G بر تیر اثر کند و بارمتمرکزدرنقطه C بر آن وارد شود که در این صورت مقدار حاصل چنین خواهد شد:

$$1{,}000[\tfrac{1}{2}(+\tfrac{2}{3})(48)] + 10{,}000(+\tfrac{2}{3}) = 22{,}667 \text{ lb}$$

حداکثر برش منفی حاصل از بار زنده وقتی خواهد بود که بار یکنواخت از A تا نقطهٔ خنثی ادامه داشته و بار متمرکز در B وارد شود، در این صورت مقدار آن خواهد شد:

$$1{,}000[\tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{6})(12)] + 10{,}000(-\tfrac{1}{6}) = -2{,}667 \text{ lb}$$

با استفاده ازشکل (۶ــ۵ ج) حداکثر لنگرحاصل‌از بار زنده در نقطهٔ پانلی E تحت اثرهمان بارهای‌زنده وقتی است‌که بار یکنواخت درکل دهانه وارده شده و بارمتمرکز در E وارد شود، در این صورت مقدار آن برابر خواهد شد با:

$$1{,}000[\tfrac{1}{2}(+\tfrac{40}{3})(60)] + 10{,}000(+\tfrac{40}{3}) = +533{,}333 \text{ ft-lb}$$

روشهایی که برای محاسبه حداکثر لنگر و برش حاصل از بارزنده براساس تعیین محل نقاط خنثی و به‌کاربردن سطوح دقیق زیر خطوط تأثیر به‌کار رفت روشهای دقیق می‌باشند. روش تقریبی زیر دارای اهمیت زیادی است زیراکه اغلب محاسبات کمتری لازم داشته‌و می‌توان آنرا در محاسبات سازه‌های پیچیده نیز به‌کار برد. در روش تقریبی فرض می‌شودکه بار زنده یکنواخت را می‌توان به‌صورت بارهای کامل یک پانل وبه‌شکل‌بارهای متمرکزدر نقاط پانلی با در نظر گرفتن عرض خط‌تأثیر در آن نقاط پانلی که نشان‌دهنده این است که واردشدن بار درنقاط‌پانلی سبب ازدیاد یاتقلیل مقدار تابع مورد نظر می‌باشد وارد نموده و یا از اثر آن خودداری کرد.

بار کامل یک پانل بار حداکثر ممکنی است که از طریق یک تیر عرضی کف می‌تواند بر شاهتیر وارد شود و این زمانی است که تیرهای طولی مجاور یک پانل در کل دهانه خود بار شده باشند و مقدار بار کامل یک پانل (برای پانلهای با طول مساوی) برابر با wl خواهد بود که در این عبارت w شدت بار یکنواخت و l طول پانل می‌باشد.

بار دیگر سازه‌شکل (۶ــ۵ الف) را که توسط‌بارهای زنده شامل از بار یکنواخت‌به‌شدت

ft 1,000 lb و بار منفرد متمرکزی برابر با 10,000 lb بار شده است در نظر بگیرید. برای بار زنده یکنواخت بار کامل پانلی برابر با 10,000 lb = (10)(1,000) خواهد شد، برای این‌که مقدار حداکثر برش حاصل از بار زنده را در پانل BC به‌روش تقریبی محاسبه کنیم این بار کامل پانلی را باید در C ، D ، E و F وارد کنیم، زیرا خط تأثیر شکل (۶ــ۵ ب) در این نقاط پانلی دارای علامت مثبت است. در B بار پانلی وارد نخواهیم کرد، زیرا عرض خط تأثیر در آن منفی می‌باشد. اثر بار متمرکز مانند روش دقیق بوده و در C وارد خواهد شد در این صورت حداکثر برش برآیند حاصل از بار زنده در پانل BC برابر خواهد شد با:

$$10{,}000(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}) + 10{,}000(\tfrac{2}{3}) = 28{,}333 \text{ lb}$$

مقدار متناظر این رقم در روش دقیق مساوی 22,667 lb بود و دیده می‌شود که نتیجه حاصل از روش تقریبی کمی در جهت اطمینان است به‌عبارت دیگر کمی بیشتر از مقدار واقعی می‌باشد: در روش تقریبی فرض می‌شود که بر C بار کامل پانلی وارد شود که این مطلب در صورتی امکان‌پذیر است که تیر طولی BC کلاً" بار شده باشد که در این صورت چنین بار ــ گذاری تیر طولی BC سبب خواهد شد که عکس‌العملی بر تیر عرضی کف در B برابر با نصف بار پانلی ایجاد شود که این بار اخیر خود سبب ایجاد برش منفی در پانل BC می‌شود و چون در محاسبه به‌طریق تقریبی از این برش منفی حاصل‌از بار پانلی جزیی در B صرفنظر شده است لذا الزاماً" برش مثبت حاصل در جهت اطمینان به‌دست آمده است. روش‌تقریبی محاسبه حداکثر مقدارتابع موردنظر هرگز از نظر مقدار رقمی کمتراز آنچه روش دقیق‌به‌دست می‌دهد ارائه نمی‌کند.

برای تعیین لنگر مثبت حداکثر حاصل از بار زنده در E در همان سازه با استفاده از روش بارگذاری تقریبی با در نظر گرفتن خط تأثیر شکل (۶ــ۵ ج) برای بار یکنواخت باید که بار کامل پانلی‌را که برابر با 10,000 lb می‌باشد، بر کلیه نقاط پانلی واردکنیم زیرا که‌کلیه عرضهای خط‌تأثیر مثبت می‌باشد. بار متمرکز را می‌بایستی در E وارد کرد و در این صورت لنگر مثبت حداکثر حاصل از بار زنده برابر خواهد شد با:

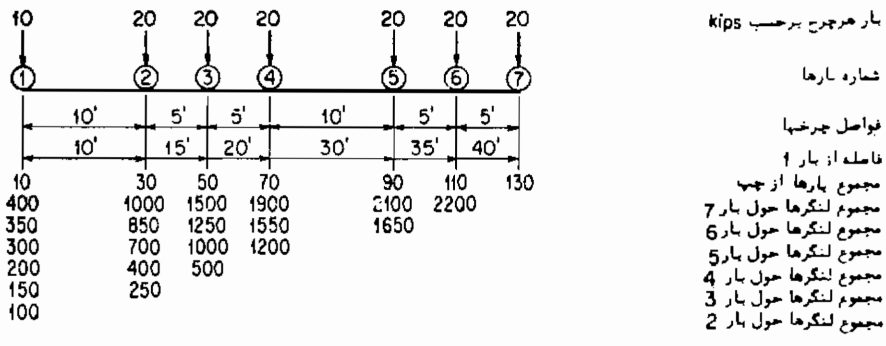
$$10{,}000(+\tfrac{10}{3} + \tfrac{20}{3} + \tfrac{30}{3} + \tfrac{40}{3} + \tfrac{20}{3}) + 10{,}000(+\tfrac{40}{3}) = +533{,}333 \text{ ft-lb}$$

این رقم با آنچه به‌روش دقیق به‌دست آمد برابر است.

۶ ــ ۸ دسته بارهای متمرکز زنده ــ استفاده از نمودار لنگر

چنانکه قبلا" ذکر شد استفاده از خطوط‌تأثیر هم برای بارهای زنده گسترده یکنواخت امکان‌پذیر است و هم برای بارهای منفرد زنده متمرکز، ولی آنها را نمی‌توان مستقیما" برای بارهای زنده متشکل از یک دسته بارهای متمرکز که دارای مقدار و فواصل معینی از یکدیگر باشند نظیر بارهای وارده از چرخهای یک لوکوموتیو و یا چند واگن به‌کار برد . وقتی بیش از یک بار متمرکز وجود داشته باشد عموما" براحتی نمی‌توان گفت که کدام‌یک از نیروهسای متمرکز باید در موقعیت عرض حداکثرخط تأثیر واقع شوند تا این‌که بتوان حداکثر تابع مورد نظر را یافت .

روشی که برای چنان بار زنده‌ای می‌بایستی به‌کار برد عملا" بر سعی و خطا استوار است و برای این‌که بر چنین آزمون و خطای گوناگونی سرعت بخشیم باید ترتیبی اتخاذ شود که درچنان‌تحلیل دقیقی حداقل محاسبات به‌عمل آید ،برای دسته‌بارهای‌متمرکزمزیت دارد که نمودار لنگری نظیر آنچه در شکل (۶ــ۷) دیده می‌شود به‌کار برده شود . این چنین نمودار لنگری برای هفت‌بار متمرکز با فواصل نشان داده‌شده محاسبه شده‌است .این نمودار توضیح لازم را درخود دارد .اعداد مذکور در شش ردیف‌زیرین را می‌توان تنها با یک شرح مختصر توضیح داد : عدد1,900زیر بار 4که در مقابل آن "جمع لنگرها حول بار7" نوشته شده است

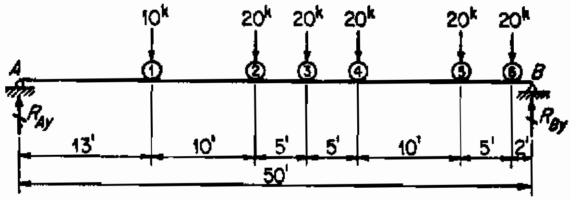


شکل (۶ــ۷) نمودار لنگر

است‌نشان دهنده لنگر بارهای از 1 تا 4 حول‌بار 7 می‌باشد و به‌این‌ترتیب خواهیم داشت :

$$10(40) + 20(30) + 20(25) + 20(20) = 1,900$$

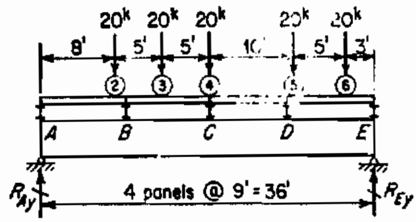
برای این‌که نمودار لنگر را شرح دهیم فرض کنید که بخواهیم لنگر در مقطع بار 3 از تیر شکل ۶ــ۸ را دراثربارگذاری شکل(۶ــ۷)که طبق شکل (۶ــ۸)وارد شده است تعیین کنیم .



شکل (۶–۸) کاربرد دیاگرام ممان

لنگر حول B بارهای وارده برابر است با $1,650$ (لنگر بارهای 1 تا 5 حول بار 6) بهاضافهٔ 110 (جمع بارهای 1 تا 6) ضرب در 2 (فاصلهٔ بار 6 تا نقطهٔ B) که خواهد $1,650 + 110(2) = 1,870$ kip-ft اگر این لنگر را بردهانه تیر تقسیم کنیم R_{Ay} برابر با با $1,870/50 = +37.4$ kips بهدست خواهد آمد و چون لنگر در بار 3 با لنگرگیری ازطرف چپ برابر است با $+37.4(28) - 250 = +798$ kip-ft باید خاطرنشان ساخت‌که لنگر 250 kip-ft که در این رابطه تفریق شده است لنگر بارهای 1 و 2 حول بار 3 میباشد.

بهعنوان دومین مثال، با کاربرد نمودارلنگر، برش در پانل BC از شاهتیرشکل (۶–۹) را برای بارهای نشان داده شده (این بارها قسمتی از بارگذاری نشان دادهشده درشکل (۶–۷)



شکل (۶–۹) کاربرد نمودار لنگر

میباشند) محاسبه میکنیم. اگر بارها بهاین صورت قرار گیرند بار شماره ۱ درمحدوده دهانه واقع نخواهد شد و عکس‌العمل شاهتیر در A برابر خواهد شد با:

$$R_{Ay} = \frac{(1,650 - 350) + (110 - 10)3}{36} = +44.5 \text{ kips}$$

مجموع عکس‌العملهای تیرهای عرضی کف در A و B برابر خواهد شد با:

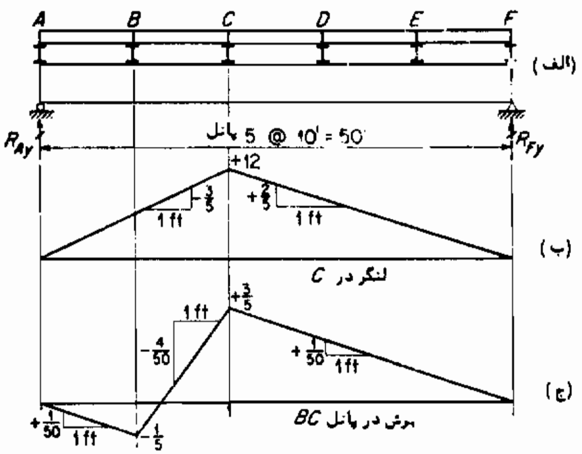
$$20 + \tfrac{5}{9}(20) = 31.1$$

بنابراین برش در پانل BC برابر خواهد شد با : $+44.5 - 31.1 = +13.4$ kips

در کاربرد عملی نمودار لنگر راحت‌ترین راه‌ها این است که آن‌را با مقیاسی معین روی کالک رسم کنیم و سپس آن‌را در محل لازم روی سازه مورد نظر قرار دهیم بدیهی‌است سازه موردنظر باید به‌همان مقیاس رسم شده باشد .

۶ـ ۹ دسته بارهای زنده متمرکز ـ محاسبه لنگر حداکثر

محاسبه لنگر حداکثر در مقطعی از شاهتیر را با شرح محاسبه لنگـر حداکثـر در C از شاهتیر شکل (۶ـ۱۰ الف) که تحت اثر بارهای زنده وابسته به‌نمودار لنگر شکل (۶ـ۷) قرار دارد توضیح می‌دهیم . ابتدا خط تأثیر برای‌لنگر در C چنانچه در شکل (۶ـ۱۰ ب) نشـان داده‌ایم رسم می‌کنیم . حداکثر لنگر در C زمانی خواهد بود که بارهای متمرکـز در C وارد شوند ، لذا اولین مرحله مساله این خواهد بود که تعیین کنیم که کدام‌یک از بارها باید به‌منظور ایجاد لنگر حداکثر در C وارد شوند .



شکل (۶ـ۱۰)خطوط تأثیرشاهتیرها

قبل از انجام‌این آزمون و خطا شیب هرقسمت ازخط تأثیر را به‌ترتیب از راست به‌چپ معین می‌کنیم و به‌عنوان مثال قسمتی ازخـط تأثیری که برای لنگر در C رسم شده است و از F به‌سمت C می‌باشد دارای شیبی برابر با $+{}^{12}\!/_{30} = +{}^{2}\!/_{5}$ است .

با استفاده از نمودار لنگر شکل (۶ـ۷) بار 1 را در C قرار می‌دهیم .این چنین عملی لنگری در C ایجاد می‌کند که در این مرحله ازتحلیل محاسبه نخواهد شد و پس از آن‌که کل

دستگاه بارها را به‌طرف چپ آنقدر حرکت داریم که بار 2 در C قرار گرفت، محاسبات را برای تعیین این‌که لنگر در C پس از این تغییر موقعیت افزایش یافته است و یا کاهش، بعمل خواهیم آورد. برای این‌که ببینیم که آیا لنگر بزرگتر شده‌است و یا کوچکتر، بهتر است بارهای مورد بررسی را به‌سه‌گروه تقسیم کنیم: ۱ــ بارهائی که قبل از حرکت بارها روی‌سازه بودند و پس از حرکت نیز روی سازه باقی می‌مانند ۲ــ بارهائی که قبل از حرکت بارها روی سازه بودند ولی بعداز حرکت بارها روی سازه قرار نمی‌گیرند ۳ــ بارهائی که قبل از حرکت بارها روی سازه بودند ولی بعداز حرکت بارها روی سازه قرار می‌گیرند. برای راحتی، این سه گروه بارها را بترتیب بارهای گروه ۱، بارهای گروه ۲ و بارهای گروه ۳ خواهیم گفت.

محاسبات زیرین برای تعیین ازدیاد یا کاهش لنگر در C می‌باشد، باید توجه داشت که اگر بار P فاصله‌ای برابر با d را بپیماید و شیب خط‌تأثیر m باشد تغییر مربوطه در مقدار لنگر برابر با Pdm خواهد شد.

بار 1 در مقطع اثر می‌کند و سپس جای خود را به‌بار 2 می‌دهد	افزایش لنگر	کاهش لنگر
بارهای گروه ۱ ــ بارهای 1 تا 5	$80(10)(+3/6) = +320$	$10(10)(-3/5) = -60$
بارهای گروه ۲ ــ هیچ	0	0
بارهای گروه ۳ ــ بار 6 و 7	$20(5)(+2/5) = +40$	0
ترکیب کل بارها	$+360$	-60

تغییرخالص درمقدارلنگر برابر با $+360 - 60 = +300$ kip-ft می‌شودو لذا اگر بار 2 در مقطع (یعنی در C) قرار گیرد، لنگر در C نسبت به‌حالت قرارگیری بار 1 در مقطع بیشتر خواهد شد و امکان این هم وجود دارد که با قرارگرفتن بار 3 در مقطع لنگر بیشتری بوجود آید. حال بارها را به‌طرف چپ حرکت می‌دهیم تا این‌که بار 3 در C قرار گیرد و محاسبات را برای تعیین این‌که با این موقعیت جدید لنگر در C افزایش می‌یابد یا کاهش انجام می‌دهیم.

بار 2 در مقطع اثر می‌کند و سپس خود را به‌بار 3 می‌هد	افزایش لنگر	کاهش لنگر
بارهای گروه ۱ ــ کلیه بارها	$100(5)(+2/5) = +200$	$30(5)(-3/5) = -90$
بارهای گروه ۲ ــ هیچ	0	0
بارهای گروه ۳ ــ هیچ	0	0
ترکیب کل بارها	$+200$	-90

چون 200 از 90 بزرگتر است بازهم لنگر افزایش یافته است. حال به‌جستجو ادامه می‌دهیم تا ببینیم که آیا با قرار گرفتن بار 4 در مقطع بازهم لنگر افزایش می‌یابد یا نه.

بار 3 در مقطع اثر می‌کند و سپس جای خود را به‌بار 4 می‌دهد	افزایش لنگر	کاهش لنگر
بارهای گروه ۱ــ کلیه بارها	$80(5)(+2/5) = +160$	$50(5)(-3/5) = -150$
بارهای گروه ۲ــ هیچ	0	0
بارهای گروه ۳ــ هیچ	0	0
ترکیب کل بارها	$+160$	-150

باز هم لنگر افزایش یافته است حال بار 5 را در مقطع وارد می‌کنیم

بار 4 در مقطع اثر می‌کند و سپس جای خود را به‌بار 5 می‌دهد	افزایش لنگر	کاهش لنگر
بارهای گروه ۱ ــ بارهای 2 تا 4	$60(10)(+2/5) = +240$	$60(10)(-3/5) = -360$
بارهای گروه ۲ ــ بار 1	0	0
بارهای گروه ۳ ــ هیچ	0	0
ترکیب کل بارها	$+240$	-360

دقت شود که گرچه بار 1 وقتی که بار 4 در مقطع اثر می‌کند روی سازه قرار دارد ولی لنگری در C ایجاد نمی‌کند، لذا پس از حرکت و بیرون افتادن آن از سازه نیز تغییری انجام

نمی‌پذیرد . چون 240 از 360 کمتراست . پس با قرار گرفتن بار 5 در مقطع ، لنگر در C تقلیل می‌یابد . با کمی تجربه در حرکت بارها می‌توان پیش‌بینی نمود که لنگر حداکثر در C با قرار گرفتن بار 1 در مقطع ، همچنین احتمالا" با قرار گرفتن بار 2 در مقطع بوجود نخواهد آمد لذا در آن صورت می‌توان از این قسمت از محاسبات خودداری نمود .

پس از آن‌که موقعیت بارها ــ که سبب ایجاد لنگر حداکثر در C را می‌نماید ــ معلوم شد مقدار لنگر حداکثر را می‌توان به‌یکی از روشهای استفاده مستقیم از عرضهای خط تأثیر و یا استفاده از نمودار لنگر محاسبه نمود ، اگر روش دوم را به‌کار بریم خواهیم داشت :

$$R_{Ay} = \frac{2{,}200 + 130(10)}{50} = +70 \text{ kips}$$

لنگر عکس‌العملهای تیرهای عرضی در A و B حول C برابر با لنگر بارهای 1 ، 2 و 3 حول 4 می‌شودکه ازنظرمقدار برابر با 500 kip-ft. که می‌باشد ، بنابراین حداکثر لنگرمثبت در C برابر خواهد شد با :

$$+70(20) - 500 = +900 \text{ kip-ft}$$

۶ ــ ۱۰ دسته بارهای زنده متمرکز ــ محاسبه برش حداکثر

روش جابجائی نیروها که قبلا" ذکر شد و با استفاده از خط تأثیر انجام می‌پذیرفت حالت کاملا"کلی دارد و آن را می‌توان برای هرخط تأثیری به‌کار برد . به‌عنوان شرح دیگری از کاربرد آن ، حداکثر برش مثبت را در پانل BC از سازه شکل (۶ــ۱۰ الف) تحت اثر بارگذاری شکل(۶ــ۷)محاسبه می‌نمائیم . محاسبه را می‌توانیم با قراردادن بار 1 در C (نقطه حداکثر عرض مثبت خط تأثیر) شروع کنیم و سپس با حرکت دادن آن بار 2 در آن مقطع به‌منظور دریافت این‌که آیا برش در پانل BC افزایش می‌یابد یا کاهش ،قراردهیم . چنین مرحله‌ای از محاسبات بندرت لازم می‌شود زیرا که از بررسی بارگذاری و خط تأثیر شکل (۶ــ۱۰ ج)بدون محاسبه چنین نتیجه‌گیری می‌شود که این چنین حرکتی از بارها سبب افزایش برش در پانل BC خواهد شد .

بار 2 در مقطع اثر می‌کند سپس جای خود را به‌بار 3 می‌دهد	افزایش برش	کاهش برش
بارهای گروه ۱ ــ کلیه بارها	$100(5)(+1/50) + 10^*(5)(+1/50) = +11.0$	$20(5)(-4/50) = -8.0$
بارهای گروه ۲ ــ هیچ	0	0
بارهای گروه ۳ ــ هیچ	0	0
ترکیب کل بارها	$+11.0$	-8.0

دیده می‌شود که افزایش در برش پانل BC ایجاد شده است و لذا بار 4 را در مقطع قرار می‌دهیم.

بار 3 در مقطع اثر می‌کند سپس جای خود را به‌بار 4 می‌دهد	افزایش برش	کاهش برش
بارهای گروه ۱ ــ کلیه بارها	$80(5)(+1/50) + 10(5)(+1/50) = +9.0$	$40(5)(-4/50) = -16.0$
بارهای گروه ۲ ــ هیچ	0	0
بارهای گروه ۳ ــ هیچ	0	0
ترکیب کل بارها	$+9.0$	-16.0

دیده می‌شود که‌کاهشی درمقدار مثبت برش درپانل BC ایجاد شده‌است ، لذا حداکثر برش در پانل BC وقتی ایجاد خواهد شد که بار 3 در C وارد شود و مقداراین‌حداکثربرش را می‌توان به‌طریق زیر با استفاده‌از نمودار لنگر شکل ۶ـ۷ محاسبه نمود :

$$R_{Ay} = \frac{2,200 + 130(5)}{50} = +57.0 \text{ kips}$$

جمع عکس‌العملهای تیرهای عرضی در A و B برابر خواهد شد با :

$$10 + 20/2 = 20 \text{ kips}$$

لذا حداکثر برش مثبت حاصل از بار زنده در پانل BC برابر خواهد شد با :

$$+57.0 - 20.0 = +37.0 \text{ kips}$$

* این عددبرای بار است .

۶ــ ۱۱ برش حداکثر مطلق حاصل از بارهای زنده

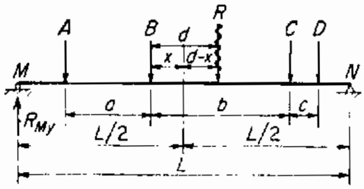
در روشهائی‌که بر طبق آنها محاسبات مربوط به‌برش حداکثر حاصل از بارهای زنده انجام می‌پذیرد ، فرض می‌شود که مقطع یا پانلی که برای آن مقدار برش محاسبه می‌گردد مشخص باشد . اغلب‌بدون مطرح‌بودن مقطعی در‌یک قطعه محاسبه برش حداکثر مطلق‌حاصل از بارهای زنده موردنیاز می‌باشد و به‌عبارت دیگر لازم است که برش حداکثر حاصل‌از بارهای زنده را که امکان بوجود آمدن آن در مقطعی از یک قطعه وجود دارد محاسبه گردد. در مورد یک تیر ساده و یا یک شاهتیر برش حداکثر مطلق حاصل از بارهای زنده در یکی از مقاطع تکیه‌گاهی انتهایی اتفاق خواهد افتاد ، اگر تیر یا شاهتیر دارای دو تکیه‌گاه ساده‌در انتها نباشد در‌آن صورت برش حداکثرمطلق حاصل ازبارهای زنده در یکی ازسطوح طرفین تکیه‌گاههای آن اتفاق خواهد افتاد و برای محاسبه مقدار صحیح برش حداکثر مطلق حاصل از بارهای زنده مقادیربرش حداکثر حاصل از بارهای زنده را فقط‌باید در هریک‌ازآن‌مقاطع محاسبه کنیم .

۶ــ ۱۲ لنگر حداکثر مطلق حاصل از بارهای زنده

مانند آنچه قبلا" ذکر شد ، درروشهائی‌که برطبق‌آنها محاسبات مربوط به‌تعیین‌حداکثر لنگر حاصل از بارهای زنده انجام می‌پذیرد فرض می‌شود مقطعی که برای‌آن مقدار لنگر محاسبه می‌گردد مشخص باشد . اغلب لازم است که لنگر حداکثر مطلق بارهـای زنده برای یک تیر یا شاهتیری محاسبه گردد . برای یک تیر روی دو تکیه‌گاه ساده انتهایی این مقـدار درمقطع میانی‌آن ،هم‌برای باریکنواخت زنده و هم‌برای بارمنفرد متمرکز زنده اتفاق می‌افتد و برای شاهتیری با تیر ریزی کف این مقدار در نزدیکترین نقطهٔ‌پانلی به‌مقطع میانی‌شاهتیر اتفاق خواهد افتاد . برای شاهتیری که به‌صورت تره بوده و یا قسمتی از آن به‌شکل طره باشد لنگر حداکثر مطلق حاصل از بارهای زنده حدودا" در یکی از عکس‌العملها اتفاق می‌افتـد . اگر مقطع لنگر حداکثر مطلق بارهای زنده را نتوان دقیقا" حدس زد لازم است که لنگری حداکثررا برای مقاطع مختلف که درآن مقاطع احتمال وقوع لنگر حداکثر مطلق‌بارهای زنده وجود دارد محاسبه نمود .

حالت مخصوصی که دارای اهمیت زیادی‌است، تعیین لنگرحداکثر مطلق بارهای زنده درتیرساده تحت اثر دسته بارهای زنده متمرکز مانند شکل(۶ــ۱۱)می‌باشد .از آنجائـی کـه

نمودار لنگربرای دسته بارهای متمرکزشامل یک دسته خطوط می‌باشدکه در راستای موقعیتهای بارها دو بدو یکدیگر را قطع می‌کنند بنابراین لنگر حداکثر مطلق بارهای زنده بایدمستقیما" در زیر یکی از این بارها ایجاد شود. این دو سئوال می‌بایستی پاسخ داده شود: ۱ــ زیر کدام یک از بارها لنگر حداکثر مطلق بارهای زنده ایجاد خواهد شد؟ ۲ــ زمانی که لنگر حداکثر مطلق بارهای زنده اتفاق می‌افتد موقعیت این بار چه خواهد بود؟



شکل ۶ــ۱۱ موقعیت لازم برای لنگر حداکثر مطلق

پاسخ سئوال نخست اغلب توسط روش آزمون و خطا امکان‌پذیر است ولی بررسی سئوال دوم بستگی به‌تحلیل مستقیم موضوع دارد. فرض‌کنید که در شکل (۶ــ۱۱) لنگر حداکثرمطلق بارهای زنده زیر بار B بوجود آید. همچنین فرض کنید که فاصله بار B را از مرکز دهانه‌تیر با x و فاصله برآیند R کلیه بارهای A ، B ، C و D را از بار B با d نشان دهیم. حال می‌خواهیم مقدار x را به‌نحوی‌معین کنیم که لنگر درمحل اثر B به‌مقدارحداکثر برسد. مقدار R_{My} را می‌توان با لنگرگیری حول N تعیین نمود و در این محاسبات بجای بارهای‌حقیقی A ، B ، C و D مقدار نیروی برآیند R را جایگزین خواهیم کرد. بنابراین‌خواهیم داشت:

$$R_{My} = \frac{R\left(\frac{L}{2} + x - d\right)}{L} = \frac{R}{2} + \frac{Rx}{L} - \frac{Rd}{L}$$

اگر لنگر زیر بار B را با M_B نشان دهیم داریم:

$$\begin{aligned} M_B &= R_{My}\left(\frac{L}{2} - x\right) - Aa = \left(\frac{R}{2} + \frac{Rx}{L} - \frac{Rd}{L}\right)\left(\frac{L}{2} - x\right) - Aa \\ &= \frac{RL}{4} - \frac{Rd}{2} - \frac{Rx^2}{L} + \frac{Rxd}{L} - Aa \end{aligned}$$

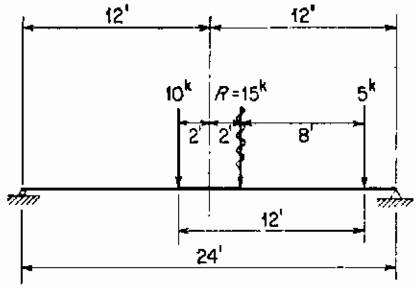
برای این که مقدار M_B حداکثر مقدار خود را پیدا کند باید داشته باشیم،

$$\frac{dM_B}{dx} = -\frac{2Rx}{L} + \frac{Rd}{L} = 0$$

و از آنجا $x = d/2$ خواهد شد.

بنابراین می‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم که لنگر حداکثر، مستقیما" زیر یکی‌از دسته‌بارهای متمرکز زنده که بر تیری ساده با دو تکیه‌گاه انتهایی وارد می‌شوند زمانی ایجاد خواهد شدکه مرکز تیر در وسط فاصله بار مخصوص(ایجادکنندهٔ لنگر حداکثر) و برآیند کلیه بارهای موثر در دهانه تیر قرار گیرد.

اگر فقط دو بار متمرکز وجود داشته باشد لنگر حداکثر مطلق بارهای زنده زیر سنگین‌ترین آن دوبار اتفاق خواهد افتاد. چنین حالتی درشکل(۶–۱۲)شرح داده‌شده‌است درآن شکل فاصله بار 10-kip ازبرآیند R این دوباربرابربا $(5 \times 12)/15 = 4$ ft می‌باشد. وقتی لنگرحداکثر مطلق‌ایجاد می‌شود بار 10-kip به‌فاصله 2 ft از مرکزدهانهٔ تیرقرارمی‌گیرد



شکل ۶–۱۲ لنگر حداکثر مطلق برای دوبار

لذا برآیند R نیز به‌فاصله2 ftاز مرکز دهانه تیر و در سمت دیگرآن واقع می‌شود، در این حالت باید وارسی شود که هردو بار در روی دهانهٔ تیر قرار گرفته باشند و اگر چنین نباشد لنگر حداکثر مطلق در مقطع میانی تیر و وقتی که سنگین‌ترین بارها در وسط دهانه قرار گیرد به‌وقوع خواهد پیوست. در حالتی که در شکل نشان داده شده است هردوبار روی دهانه‌تیر قرار دارند و لنگر حداکثر مطلق بارهای زنده مستقیما" زیر بار 10-kip بوجود می‌آیدومقدار آن چنین است:

$$M = \frac{15(12 - 2)^2}{24} = +62.5 \text{ kip-ft}$$

اگر بیش از دوبار متمرکز وجود داشته باشد امکان این وجود ندارد که بتوان حدس زد لنگرحداکثر مطلق بارهای زنده زیر کدامیک ازآنها بوجود خواهد آمد ولی معمولا" زیر بار سنگینی که نزدیک مرکز گروه بارها واقع است اتفاق می‌افتد. لنگر حداکثری که زیر هریک از بارها امکان ایجاد پیدا می‌کند بروشی که قبلا" گفته شد قابل تعیین است و بزرگترین این لنگرهای حداکثر، لنگر حداکثر مطلق بارهای زنده خواهد بود.

۶ ــ ۱۳ خطوط تأثیر خرپاها ــ کلیات

خطوط تأثیر را می‌توان برای نیروی میله‌های قطعات خرپا ترسیم کرد این خطوط برای تعیین موقعیت بارهای زنده که سبب ایجاد حداکثر نیروی میله‌ها در قطعات خرپا می‌شوند و همچنین در محاسبه مقدار حداکثر این نیروی میله‌ها مهم می‌باشند. برای خرپاها نیز همان روشهای کلی که برای رسم خطوط تأثیر تیرها و شاهتیرها به‌کار برده شد قابل اجراست محاسبه عرض خط تأثیر با قراردادن بار واحدی در هریک از نقاط پانلی خرپا همواره امکان‌پذیر است معمولا" تیرهای طولی بین تیرهای عرضی کف مانند تیرهای دو تکیه‌گاه ساده انتهایی عمل می‌کنند و لذا خط تأثیر در بین نقاط پانلی یک خط مستقیم خواهد بود. همانطوری که در تیرها و شاهتیر امکان دارد در اینجا نیز اغلب ممکن است حجم محاسبات را با درک این حقیقت که خط تأثیر برای پانلهای متوالی از خطوط مستقیم تشکیل شده است کاهش داد.

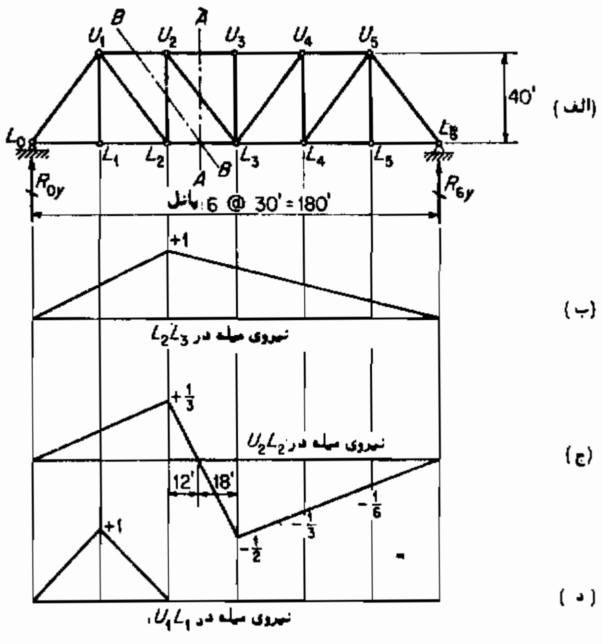
پس از آن‌که خط تأثیر برای نیروی یکی از قطعات خرپا رسم شد، کاربرد آن منحنی با استفاده از یک بارگذاری معین و تحلیل تنش مانند آنچه در مورد تیرها و شاهتیرها ذکر شد انجام خواهد گرفت.

خطوط تأثیر خرپاها را برای بار واحدی که در طول میله‌های اصلی حمال حرکت می‌کند و یا به‌عبارت دیگر میله‌های اصلی که شامل آن دسته نقاط پانلی می‌باشند که بارهای زنده بر آنها اثر می‌کنند ترسیم می‌شود.

۶ ــ ۱۴ خطوط تأثیر برای خرپای پرات

رسم و کاربرد خطوط تأثیر خرپاها را با بررسی خرپای پرات شکل (۶ـ۱۳ الف) شرح خواهیم داد. برای این که خط تأثیری برای یک میله اصلی نظیر میله L_2L_3 رسم کنیم کافی است که از کلیه نیروهای مؤثر بر یک سمت از مقطع A-A حول U_2 لنگرگیری کنیم. اگر بار واحد در سمت چپ مقطع واقع شود، کشش در L_2L_3 برابر با حاصل‌ضرب R_{0y} در 120 تقسیم بر ارتفاع خرپا که برابر با $40'$ می‌باشد خواهد بود و بنابراین نسبت مستقیم با R_{0y} خواهد داشت و چون مقدار R_{0y} به‌همان‌ترتیب که بار واحد از L_0 تا L_2 تغییر مکان می‌یابد به‌طور خطی تغییر می‌کند لذا خط تأثیر خط مستقیمی خواهد بود که مقدار صفر در L_0 را به‌مقدار $+1 = (120/40)\frac{1}{3}+$ در L_2 وصل می‌نماید. اگر خطی‌بودن تفهیم نشود مقدار عرض خط تأثیر را در L_1 می‌توان مستقلا" محاسبه نمود که در این صورت مقدار آن

برابر با $+\frac{1}{2} = (120/40)\frac{1}{6}+$ خواهد بود . اگر بار واحد در L_3 یا در هر نقطه‌ای واقع در سمت راست مقطع A-A قرار گیرد کشش در L_2L_3 برابر با حاصلضرب R_{0y} در 60 تقسیم بر 40 خواهد شد و چون به‌همان‌ترتیب که بار واحد از L_3 تا L_6 تغییر مکان می‌دهد R_{0y} به‌طور خطی تغییر می‌کند .این خط تأثیر به‌صورت خطی مستقیم مقدار $+1 = (60/40)\frac{2}{3}+$ در L_2 را به‌مقدار صفر در L_6 وصل خواهد کرد . این خط تأثیر در شکل (۶–۱۳ ب) که در آن کشش را در بالای خط مبنا نشان داده‌ایم رسم شده است .



شکل ۶–۱۳ خطوط تأثیر برای خرپای پرات

رسم خط تأثیر برای نیروی میله‌های اعضای جان توسط شکل (۶–۱۳ ج) شرح داده می‌شود در این شکل میله عمودی U_2L_2 مورد بررسی قرار گرفته است . وقتی بار واحدی در سمت چپ مقطع B-B قرار می‌گیرد ، کشش در این عضو برابر با عکس‌العمل R_{6y} می‌شود و لـــذا خط تأثیر خط مستقیمی از مقدار صفر در L_0 تا مقدار $+\frac{1}{3}$ در L_2 خواهد بود . وقتی که بار واحد در سمت راست مقطع B-B واقع است فشار در U_2L_2 برابر با عکس‌العمل R_{06} خواهد شد .و بنابراین خط تأثیر خط مستقیمی از $-\frac{1}{2}$ در L_3 تا صفر در L_6 خواهد شد، در این جا مقادیر منفی را که نشان دهنده مقادیر فشاری می‌باشند در زیر خط مبنا رسم کرده‌ایم . بـــا فرض این‌که تیرهای طولی به‌نوعی اجرا شوند که تکیه‌گاههای انتهایی آنها نقاط پانلی L_1

و L_3 باشد خط تأثیر بین نقاط پانلی L_2 و L_3 یک خط مستقیم خواهد بود.

در هردو میله‌ای که مورد بررسی قرار گرفت، خطوط تأثیر در کل دهانه خرپا ادامه داشت، چنین میله‌هایی را اعضای اولیه خرپا گویند. حال عضو عمودی U_1L_1 را که‌برای آن خط تأثیر مربوطه در شکل (۶ــ۱۳ د) نشان داده شده است مورد بررسی قرار می‌دهیم. اگر روش گره‌ها را برای گره L_1 به‌کار بریم دیده می‌شود که هرگاه بار واحد در هرنقطه‌پانلی به‌جز L_1 وارد شود مقدار نیرو در این میله برابر با صفر خواهد شد و در صورت واردشدن آن به L_1 مقدار نیرو برابر با1+ خواهد بود. چنین عضوی که فقط تحت وضعیتهای خاصی از بار واحد تنش می‌پذیرد عضو ثانویه خرپا گفته می‌شود.

برای این‌که بااستفاده ازخط تأثیر حداکثر نیروی میله حاصل از بار زنده را معین‌کنیم اصول جدیدی به‌کار گرفته نمی‌شود. به‌عنوان مثال فرض کنید که حداکثر فشار در میله عمودی U_2L_2 تحت اثر بار زنده یکنواختی به‌شدت 2,000 lb/ ft و بار منفرد متمرکززنده‌ای برابر با 15,000 lb مورد محاسبه باشد.

بااستفاده از روش دقیق، موقعیت‌نقطه خنثی خط تأثیر در شکل (۶ــ۱۳ ج) بااستفاده از دو مثلث متشابه در فاصله ۱۲ فوتی به‌سمت راست L_2 معین می‌شود. برای ایـن که‌فشار حداکثر در U_2L_2 ایجاد شود بار یکنواخت باید از نقطه خنثی تا نقطه L_6 وارد شود و بـار متمرکز در L_3 اثر کند، در این صورت مقدار این فشار حداکثر برابر خواهد شد با:

$$2{,}000(\tfrac{1}{2})(108)(-\tfrac{1}{2}) + 15{,}000(-\tfrac{1}{2}) = -61{,}500 \text{ lb}$$

بـا استفـاده از روش تقریبـی، بـار پانلـی بـرای بـار یکنـواخت برابربا $2{,}000 \times 30 = 60{,}000$ lb شده که باید در L_3، L_4 و L_5 وارد شود و بار متمـرکز باید در L_3 اثر کند، در این‌صورت حداکثر فشار حاصل از بار زنده خواهد شد:

$$60{,}000(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}) + 15{,}000(-\tfrac{1}{2}) = -67{,}500 \text{ lb}$$

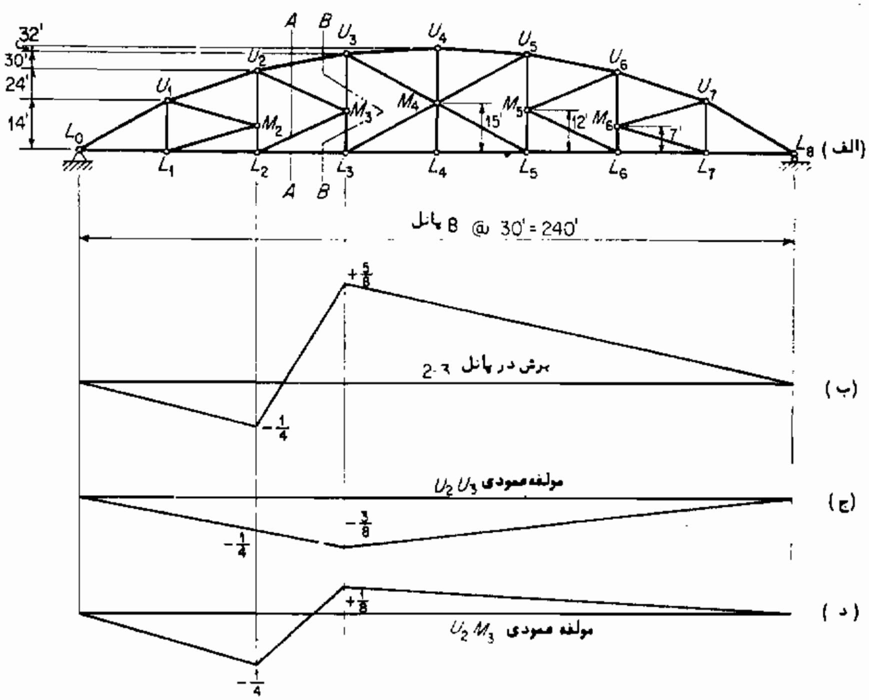
۶ ــ ۱۵ خطوط تأثیر برای خرپا با قطریهای K

در حالات ساده نظیر حالت خرپای پرات که در بند (۶ــ۱۴) بحث شد، به‌دلیل‌ساده بودن نسبی آن و درک این واقعیت‌که قسمتهای مختلفی از خطوط تأثیر در چند پانل‌متوالی می‌تواندخطی باشد امکان داردکه بتوان ازمحاسبات بسیاری خودداری کرد، ولی دربسیاری از خرپاهای پیچیده اغلب لازم است که یا ۱ــ عرضهای نقاط پانلی متوالی را محاسبه نمود

و یا ۲ــ ابتدا خطوط تأثیر را برای اعضای دیگری به‌جز آن عضو که مورد نظر می‌باشد ترسیم نموده و از خصوصیات رسم آنها در ترسیم خط تأثیر مورد نظر استفاده نمود. حالت اخیر را می‌توان با بررسی قطری U_2M_3 از خرپای شکل (۶ــ۱۴ الف) که خرپایی با قطریهای به‌شکل K است و نقاط پانلی فوقانی آن بر روی یک سهمی قرار دارد شرح داد. این خرپا عملاً یک درجه نامعین است . در هرصورت این نامعینی مربوط به‌دو پانل مرکزی است و سه پانل از دو طرف معین هستند.

بررسی گره M_3 نشان می‌دهد که مولفه‌های افقی نیروی میله‌های U_2M_3 و L_2M_3 همواره از نظر مقدار برابر بوده ولی در خلاف جهت یکدیگر خواهند بود و چون شیب این دو میله با یکدیگر یکسان است، مولفه‌های عمودی این نیروی میله‌ها نیز از نظر مقدار با یکدیگر برابر بوده و از نظر جهت در خلاف هم خواهند بود و بنابراین برای این‌که هریک از دو قسمت طرفین مقطع A-A از سازه را هنگام واردشدن نیروهای عمودی در تعادل نگهدارند، نیروی میله در این دو میله در یک جهت عمل خواهند کرد البته میله اصلی U_2U_3 نیز دارای یک مؤلفه عمودی است که شرط تعادل فوق‌الذکر باید آن را نیز ملحوظ دارد.

ابتدا باید خط تأثیری برای کل برش در پانل 2-3 را همان‌طوری‌که در شکل (۶ــ۱۴ب)



شکل ۶ــ۱۴ خطوط تأثیر برای خرپا با قطریهای K

دیده می‌شود رسم کرد و سپس باید خط تأثیر مولفه عمودی نیروی میله U_2U_3 را رسم نمود برای تعیین نیروی میله در این عضو می‌توان از لنگرگیری حول L_3 از کلیه نیروهای واقع در یکطرف مقطع $B\text{-}B$ سود جست . این خط تأثیر شکل مثلثی خواهد دارد که رأس آن در نقطه پانلی ۳ و به‌عرض $-(3/8)(150/30)(6/30) = -3/8$ قرار دارد .

بااعمال $\Sigma F_v = 0$ به‌قسمتی از خرپا که در طرف چپ برش $A\text{-}A$ قراردارد مولفه‌عمودی کششی نیروی میله در U_2M_3 برابر با نصف مجموع برش مثبت در پانل 2-3 و مولفه‌عمودی کششی در U_2U_3 تعیین خواهد شد . به‌این ترتیب عرض خط تأثیر مولفه عمودی نیروی میله در U_2M_3 برابر با نصف جمع جبری عرضهای خط تأثیر در شکل‌های (۶ــ۱۴ ب) و (۶ــ۱۴ج) معین خواهد شد و چون این دو خط تأثیر فقط در L_2 و L_3 تغییر مسیر می‌دهند ، خط‌تأثیر مولفه‌عمودی نیروی میله در U_2M_3 فقط در این نقاط تغییرمسیر خواهد داد .عرضهای‌بحرانی که عبارت از عرض نقاط تغییر مسیر خط تأثیر حاصل می‌باشند در اینجا تعیین شده است .

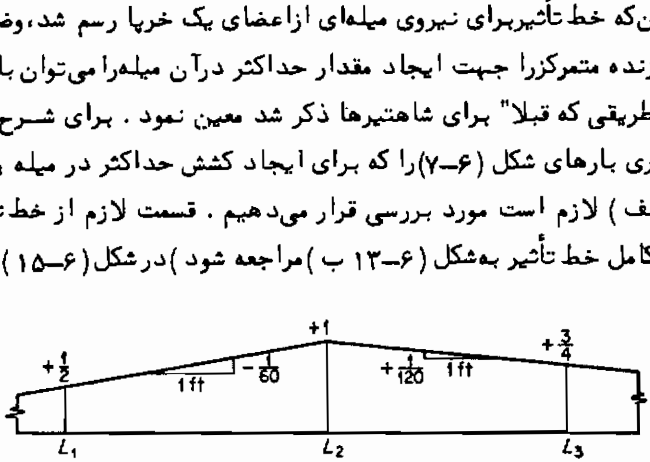
در L_2: $\quad [-1/4 + (-1/4)]1/2 = -1/4$

در L_3: $\quad [+5/8 + (-3/8)]\,1/2 = +1/8$

خط تأثیرحاصل‌برای‌مولفه‌عمودی‌نیروی‌میله U_2M_3 درشکل (۶ــ۱۴د) نشان داده‌شده‌است .

۶ ــ ۱۶ تعیین نیروی حداکثر عضوی از خرپا تحت اثر سری بارهای زنده متمرکز

پس از آن‌که خط تأثیربرای نیروی میله‌ای ازاعضای یک خرپا رسم شد،وضعیت‌قرارگیری دسته بارهای زنده متمرکزرا جهت ایجاد مقدار حداکثر درآن میله‌را می‌توان با حرکت‌دادن بارها به‌همان طریقی که قبلا" برای شاهتیرها ذکر شد معین نمود . برای شرح این مطلب ، وضعیت قرارگیری بارهای شکل (۶ــ۷)را که برای ایجاد کشش حداکثر در میله L_2L_3 ازخرپای شکل (۶ــ۱۳ الف) لازم است مورد بررسی قرار می‌دهیم . قسمت لازم از خط تأثیر این عضو را (برای شکل کامل خط تأثیر به‌شکل (۶ــ۱۳ ب)مراجعه شود)درشکل(۶ــ۱۵)نشان‌داده‌ایم



شکل ۶ــ۱۵ قسمتی از خط تاثیر شکل ۶ــ۱۴ ب)

محاسبات به‌طریق زیر است (می‌توان حدس زد که بار 1 در L_2 ایجاد حداکثرنخواهد کرد) :

بار 2 در L_2 قراردادر و سپس جای خود را به‌بار 3 می‌دهد	افزایش کشش	کاهش کشش
	$100(5)(+\frac{1}{120}) = +\frac{50}{12}$	$30(5)(-\frac{1}{60}) = -\frac{5}{2}$
بار 3 در L_2 قراردادردوسپس‌جای‌خود را به‌بار 4 می‌دهد		
	$80(5)(+\frac{1}{120}) = +\frac{10}{3}$	$50(5)(-\frac{1}{60}) = -\frac{25}{6}$

بنابراین کشش حداکثر در L_2L_3 وقتی است که بار 3 در L_2 قرار گیرد . برای تعیین این مقدار حداکثر دو عملکرد متفاوت پیشنهاد می‌گردد .

روش ۱ ، (که بر پایه نمودار لنگر از شکل(۶–۷)می‌باشد) :

$$R_{0_y} = \frac{2{,}200 + 130(95)}{180} = 80.8 \text{ kips}$$

لذا نیروی میله در L_2L_3 خواهد شد :

$$\frac{+80.8(60) - 250}{40} = 115.0 \text{ kips}$$

روش ۲ (که بر پایه محاسبه عرضهای خط تأثیر در هر نقطه پانلی می‌باشد) :

نقطه پانلی	عکس‌العملهای‌تیرهای‌عرضی‌کف	عرض خط تأثیر	افزایش‌نیرودر L_2L_3
1	$10(\frac{3}{6}) + 20(\frac{1}{6}) = +8.3$	$+\frac{1}{2}$	$+4.2$
2	$10(\frac{3}{6}) + 20(\frac{5}{6} + \frac{5}{6} + \frac{5}{6} + \frac{4}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6}) = +78.3$	$+1$	$+78.3$
3	$20(\frac{1}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6}) = +43.3$	$+\frac{3}{4}$	$+32.5$
			$\Sigma = +115.0$ kips

۶ ــ ۱۷ جداول تأثیر

اغلب درج مشخصات تأثیر در جداول تأثیر ، بر نمایش آنها به‌شکل نمودار مزیت پیدا می‌کند ، جدول تأثیر (جدول ۶ــ۱) مربوط به‌خرپای شکل (۶ــ۱۳ الف) می‌باشد ، این جدول نیروی میله را در هریک از میله‌های خرپا تحت اثر بار واحدی در هریک از نقاط پانلی معین می‌کند ، نیروی میله‌های L_2L_3 ، U_2L_2 و U_1L_1 به‌ترتیب مستقیما" از شکلهای (۶ ــ ۱۳ ب)، (۶ ــ ۱۳ج) و ((۶ــ۱۳ د) استخراج شده است . نیروی سایر میله‌ها را خود دانشجویان می‌توانند وارسی کنند .

جدول (۶ــ۱) جدول تأثیر برای خرپای شکل (۶ــ۱۳الف)

میله	مقدار نیروی میله‌باقرارگرفتن بارواحد در						
	L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
L_0L_1	0.000	+0.625	+0.500	+0.375	+0.250	+0 125	0 000
L_1L_2	0.000	+0.625	+0.500	+0.375	+0.250	+0.125	0.000
L_2L_3	0.000	+0.500	+1.000	+0.750	+0.500	+0.250	0.000
L_0U_1	0.000	−1.041	−0.833	−0.625	−0.417	−0.208	0.000
U_1U_2	0.000	−0.500	−1.000	−0.750	−0.500	−0.250	0.000
U_2U_3	0.000	−0.375	−0.750	−1.125	−0.750	−0 375	0.000
U_1L_2	0.000	−0.208	+0.833	+0.625	+0.417	+0.208	0.000
U_2L_3	0.000	−0.208	−0.417	+0.625	+0 417	+0 208	0.000
U_1L_1	0.000	+1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
U_2L_2	0 000	+0.167	+0.333	−0.500	−0.333	−0.167	0.000
U_3L_3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0 000	0.000

برای استفاده از جدول تأثیر ، در محاسبه نیروهای حداکثر حاصل از بارهای زنده به‌روش تقریبی ، بهتر است که جدول دیگری که خلاصه جدول تأثیر می‌باشد همانطوری‌که‌در جدول(۶ــ۲) نشان داده شده تهیه نمود .

در خلاصه جدول تأثیر ، جمع عرضهای مثبت برای یک عضو با جمع‌نمودن کلیه‌مقادیر مثبت برای آن عضو از جدول تأثیربه‌دست می‌آید .حاصل‌ضرب این حاصل‌جمع در بارپانلی حاصل‌ازبارزنده‌یکنواخت‌برابرباکشش‌حداکثردرآن‌عضوتحت‌اثر بارزنده‌یکنواخت‌خواهدبود.

جمع عرضهای منفی برای یک عضو با جمع‌نمودن کلیه عرضهای منفی از جدول تأثیر برای آن عضو به‌دست می‌آید . حاصل‌ضرب این حاصل‌جمع در بار پانلی حاصل از بار زنده یکنواخت برابر با فشار حداکثر حاصل از بارزنده را یکنواخت در آن عضو خواهد بود .

جمع کل عرضها را برای یک عضو می‌توان با جمع جبری حاصل جمع عرضهای مثبت و حاصل‌جمع عرضهای منفی برای آن عضو به‌دست آورد . اگر بارهای پانلی‌حاصل از بارمرده

با یکدیگر برابر باشند از حاصل‌ضرب این حاصل جمع و بار پانلی حاصل از بارهای مـــرده نیروی میله‌های حاصل‌از بار مرده برای هرعضوی به‌استثنای میله‌های‌عمودی به‌دست می‌آید. برای میله‌های عمودی‌این حاصل‌ضربها را باید با تأثیردادن بار مرده مؤثر برنقاط پانلی‌در میله‌های اصلی فوقانی تصحیح نمود .

جدول ۶ــ۲ خلاصه‌ای ازجدول تأثیر برای خرپای‌شکل (۶ــ۱۳الف)

میله	جمع عرضها			عرضهای‌حداکثر		طول‌بارشده‌برای	
	مثبت	منفی	کـل	مثبت	منفی	کشش	فشار
L_0L_1	+1.875	0.000	+1.875	+0.625	0.000	180	0
L_1L_2	+1.875	0.000	+1.875	+0.625	0.000	180	0
L_2L_3	+3.000	0.000	+3.000	+1.000	0.000	180	0
L_0U_1	0.000	−3.124	−3.124	0.000	−1.041	0	180
U_1U_2	0.000	−3.000	−3.000	0.000	−1.000	0	180
U_2U_3	0.000	−3.375	−3.375	0.000	−1.125	0	180
U_1L_2	+2.083	−0.208	+1.875	+0.833	−0.208	144	36
U_2L_3	+1.250	−0.625	+0.625	+0.625	−0.417	108	72
U_1L_1	+1.000	0.000	+1.000	+1.000	0.000	60	0
U_2L_2	+0.500	−1.000	−0.500	+0.333	−0.500	72	108
U_3L_3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0

عرض حداکثرمثبت برای یک‌عضو باانتخاب مقدارحداکثر مثبت‌برای‌آن عضو ازجدول تأثیر به‌دست می‌آید . از حاصل‌ضرب این مقدار و بار متمرکز زنده حداکثر فشار حاصل ازآن بار متمرکز زنده درآن عضو به‌دست می‌آید .

عرض حداکثر منفی برای یک عضو با انتخاب مقدار حداکثر منفی برای آن عضـو از جدول تأثیر به‌دست می‌آید . از حاصل‌ضرب این مقدار و بار متمرکز زنده حداکثرفشارحاصل ازآن بار متمرکز زنده درآن عضو به‌دست می‌آید .

عملکردلازم برای محاسبه‌کل نیروی میله‌های حاصل از اثر بار زنده ومرده درهرعضوی از خرپا با استفاده از خلاصه جدول تأثیر با بررسی میله U_2L_3 با بارهای زیر شرح داده می‌شود :

بار مرده $= 2{,}000$ lb / ft

بار زنده یکنواخت $= 1{,}000$ lb / ft

بار زنده مرکز $= 10{,}000$ lb

	کشش حداکثر، kips	فشار حداکثر kips
مرده	$60(+0.625) = +37.5$	$+37.5$
زنده		
یکنواخت	$30(+1.250) = +37.5$	$30(-0.625) = -18.8$
متمرکز	$10(+0.625) = +6.3$	$10(-0.417) = -4.2$
نیروی میله‌کل زنده به‌اضافه مرده	$+81.3$	$+14.5$

دیده می‌شود که در این حالت تغییر تنش وجود ندارد

۶ ــ ۱۸ طول بارشده

طول بارشده عبارت از طولی از یک سازه است که به‌منظور ایجاد حداکثر تنش حاصل از بارهای زنده در یک عضوی از آن سازه توسط بار زنده یکنواختی بارشده باشد. این طول بار شده را می‌توان از خط تأثیر رسم شده برای آن عضو به‌دست آورد. به‌عنوان مثال شاهتیر شکل (۶ــ۵) را درنظر بگیرید طول بار شده برای لنگر مثبت در E برابر با 60 ft می‌باشد طول بارشده برای برش مثبت در پانل BC برابر با 48 ft و برای برش منفی در همان پانل برابر با 12 ft می‌باشد. طول بارشده پارامتری است که در بسیاری از روابط موجود برای ضربه به‌عنوان وارسی به‌کار برده می‌شود.

وقتی بارهای زنده معادلی به‌جای دسته بارهای زنده متمرکز به‌کار برده‌می‌شود، برای بار زنده متمرکز و بار زنده یکنواخت از نظر فیزیکی تفاوتی ابراز نمی‌شود لذا به‌کار ــ بردن همان طول بارشده‌که برای بار زنده یکنواخت به‌کار برده می‌شود برای بار زنده‌متمرکز صحیح خواهد بود. به‌عبارت دیگر ضریب ضربه برای هردو نوع بار زنده معادل بر اساس طول بارشده نظیر توسط بار یکنواخت خواهد بود.

در محاسبه طولهای بارشده اغلب مجاز هستیم‌که محل نقطهٔ خنثی را در حدودمیانه پانلی در نظر بگیریم، چنین عملی از حجم محاسبات می‌کاهد و خطای مهمی در تنش محاسباتی کل (مرده + زنده + ضربه) ایجاد نمی‌کند.

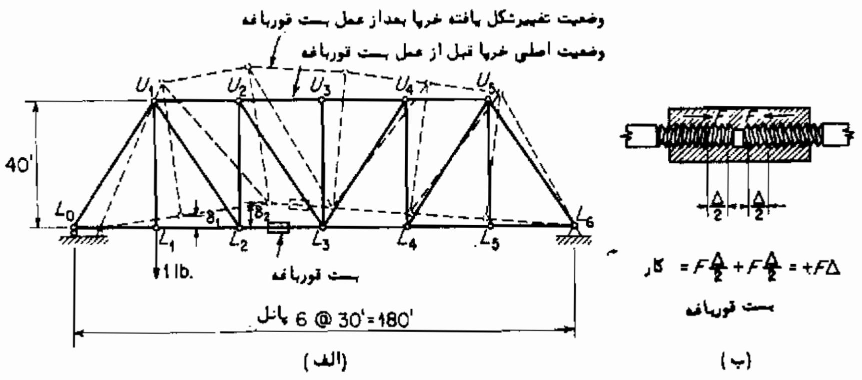
در صورت لزوم به‌خلاصه جدول تأثیر (جدول ۶ــ۲) می‌توان دوستون برای طولهای بارشده لازم برای کشش و فشاراضافه نمود، وجود چنین مشخصاتی در خلاصه جدول تأثیر

در محاسبه نیروی میله‌های حاصل از ضربه در اعضای مختلف کمک می‌نماید .

۶ ــ ۱۹ نحوهٔ دیگری برای تعیین خطوط تأثیر

با ایجاد تغییرشکل مجازی در عضوی از خرپا و یا در مقطعی از یک شاهتیر ، می‌توان به‌نحوی دیگر به‌ترسیم خطوط تأثیر پرداخت ، جالب‌بودن این روش بیشتر درسازه‌هایی‌غیراز سازه‌های‌معین است و دررسم خطوط تأثیر سازه‌های نامعین به‌هردوروش‌تحلیلی و مدل‌سازی اهمیت فراوانی می‌دهند (این‌چنین روشی‌که برای رسم خطوط تأثیر وجوددارد به‌نام "اصل مولر ــ برسلو" معروف است که در بخش (۱۴ــ۳) مورد بحث قرار خواهیم داد) .

این روش را با بررسی خرپای شکلی (۶ــ۱۶ الف) که در رسم خط تأثیری برای عضو L_2L_3 مورد نظر می‌باشد شرح می‌دهیم ، فرض کنید که در میله L_2L_3 بست قورباغه‌ای‌قرار داده باشیم ، اگر این بست قورباغه را آنقدر بپیچانیم که میله L_2L_3 به‌اندازه Δ کوچک‌شود در این صورت سازه شکلی را که با خط چین نشان‌داده‌ایم پیداخواهد کرد ، چون این خرپا معین است پس با پیچاندن بست قورباغه مقاومتی ارتجاعی درآن بوجود نخواهد آمــــد ، بنابراین هیچ تنشی در هیچ یک از اعضای آن ایجاد نخواهد شد . حال فرض کنید کــه بار واحــد مجازی در یکی‌ازنقاط پانلی آن‌مانند L_1 اثر کند و فرض کنیدکه نیروی کششی‌حاصل از این بار در L_2L_3 برابر با F باشد ، در این صورت وقتی که بست قورباغه پیچانده‌می‌شود این نیرو کاری برابر با $+F(\Delta)$ انجام خواهد داد ، زیرا که این بست قورباغه در هرانتهای خود نیرویی بر کششی برابربا $+F$ بر میله L_2L_3 اعمال می‌کند و فاصله کل تغییریافته‌توسط این دو نیروی F چنانکه در شکل (۶ــ۱۶ ب) نشان داده شده است برابر با Δ خواهد بود.



شکل ۶ــ۱۶ نحوه دیگری برای تعیین خطوط تأثیر

بار واحد در L_1 نیز به‌طور عمودی تغییر مکانی برابر با δ_1 خواهد داد و چنین تغییرمکانی بر روی سازه‌کاری برابر با $(\delta_1)(1-)$ انجام خواهد داد . علامت منفی در این‌عبارت‌به‌دلیل این است که تغییر مکان انجام شده در خلاف جهت اثر بار واحد می‌باشد .

تنش‌های موجود درسازه در طول این تغییرشکل تغییری نخواهد کرد و بنابراین‌انرژی کرنشی‌ارتجاعی ذخیره شده در اعضای خرپا ثابت باقی خواهد ماند و چون انرژی کرنشی ارتجاعی ثابت باقی می‌ماند ، در طول این تغییرشکل هرگاه کلیه نیروها را در نظر بگیریم کاری انجام نمی‌شود لذا خواهیم داشت :

$$+F(\Delta) - (1)(\delta_1) = 0$$

و از آنجا

$$F = +\frac{\delta_1}{\Delta}$$

اگر بار واحد در یک نقطه پانلی غیرمشخص L_n اثر کند عملکرد مشابهی منجر به‌نتیجه‌گیری زیر می‌شد .

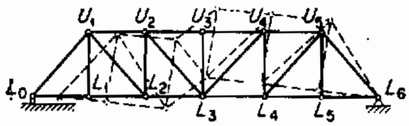
$$F = +\frac{\delta_n}{\Delta}$$

و چون F برابر با نیروی میله L_2L_3 تحت اثر بار واحد در L_n می‌باشد لذا برابر با عرض خط تأثیر نیروی میله در میله L_2L_3 در نقطه L_n خواهد بود و چون مقدار Δ مستقل‌ازنقطهٔ پانلی مورد نظر می‌باشد لذا می‌توان نتیجه‌گیری نمود که میله‌های اصلی‌تحتانی‌خرپای‌شکل (۶ـ۱۶ الف) که با خط‌چین نشان داده شده است شکل خط تأثیر را برای کشش در L_2L_3 نشان خواهد داد . مقیاس خط تأثیر را می‌توان با تقسیم نمودن تغییر مکان δ_n برتغییرشکل اعمال شده Δ به‌دست آورد و اگر Δ را برابر با واحد بگیریم مقادیر δ_n به‌تنهایی از نظر عددی نشان دهندهٔ عرضهای خط تأثیر خواهد بود .

استفاده کامل از این روش برای رسم خطوط تأثیر نیاز به‌مدلی از سازه و یا به‌معلوماتی کافی برای محاسبه تغییر مکانها دارد .البته حتی بدون محاسبه تغییرمکانها اغلب می‌توان شکلی را که یک سازه بخود می‌گیرد قابل رویت نمود . و به‌این ترتیب به‌شکل خط تأثیر پی برد . موقعیت بارهای زنده را که سبب ایجاد تنشهای حداکثر حاصل از بار زنده می‌شوند اغلب می‌توان با ملاحظه شکل خطوط تأثیر بدون این که به‌محاسبه مقادیر عرضهای بحرانی بپردازیم معین نمود .

به‌عنوان مثال ، خط چینهای شکل (۶ـ۱۷) نشان‌دهندهٔ شکلی است که‌آن خرپا در صورتی که میله قطری U_2L_3 کوتاه شود بخود خواهد گرفت و چون میله‌های اصلی تحتانی

فقط در L_2 و L_3 تغییرشیب خواهند داد ،لذا محاسبه عرض خط تأثیر برای نیرو در U_2L_3 فقط برای تعیین در این نقاط پانلی لازم خواهد بود . و به‌علاوه می‌توان بدون محاسبه عرض این نقاط نتیجه‌گیری کرد که با استفاده از روش تقریبی برای این‌که حداکثر کشش حاصل از

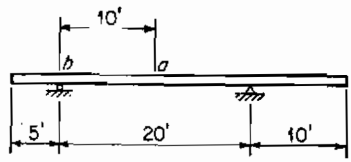


شکل (۶ـ۱۷)ـ خط تأثیر برای نیرو در میله قطری خرپا

بارهای زنده در U_2L_3 بوجود آید ، باید در مورد بار زنده یکنواخت در L_3 ، L_4 و L_6 بارهای پانلی وارد نموده و در L_3 نیز بار زنده متمرکز وارد کرد . برای محاسبه مقدار حقیقی نیروی میله حداکثر حاصل از بارهای زنده پس از اثردادن آن بارها در نقاط فوق‌الذکر از معادلات تعادل استفاده نمود .

۶ ـ ۲۰ مسائل

۶ ـ ۱ با درنظرگرفته شکل(۶ـ۱۸) خطوط تأثیر را برای (الف) برش در a (ب) لنگر در a (ج) عکس‌العمل در b رسم کنید .



شکل (۶ـ۱۸)ـ مساله (۶ـ۱) و (۶ـ۲)

جواب :

(الف) عرض در : $+0.5$ = راست a

-0.5 = چپ a $+0.25$ = انتهای چپ

(ب) عرض در : -5.0 = انتهای راست $+5.0$ = a $b = 0$ -2.5 = انتهای چپ

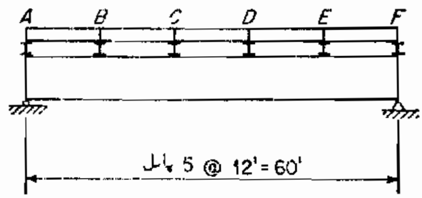
(ج) خط تأثیر به‌طورخطی از $+1.25$ در انتهای چپ تا -0.5 در انتهای راست تغییر می‌کند .

۶ ـ ۲ با درنظرگرفتن شکل (۶ـ۱۸) و به‌کاربردن بارزنده‌ای مرکب از یک بار یکنواخت به‌شدت 500 lb / ft و یک‌بار متمرکز برابر با 5,000 lb (الف) حداکثر عکس‌العمل رو به‌بالا را در مقطع سمت راست تکیه‌گاه b محاسبه‌کنید (ب) لنگرهای حداکثر مثبت و منفی در a رامحاسبه کنید (ج) حداکثر برشهای مثبت و منفی را در مقطع سمت راست تکیه‌گاه b محاسبه کنید (د) اگر شدت بارمرده 1,000 lb / ft باشد حداکثر لنگر در a را با استفاده از خط تأثیر تحت اثر مجموع بار مرده و زنده محاسبه کنید .

جواب :

(الف) 14,062.5 lb	(ج) +50,000 lb-ft	−40,625 lb-ft
(ب) +10,312.5 lb	−3,750 lb	(د) +68,750 lb-ft

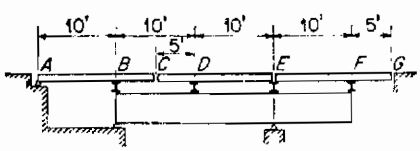
۶ ـ ۳ برای سازه شکل ۶ـ۱۹ خطوط تأثیر را برای (الف) برش در پانل AB (ب) لنگر در نقطه پانلی C رسم کنید .



شکل ۶ـ۱۹ مسائل ۶ـ۳ و ۶ـ۴

۶ ـ ۴ به‌هر دو روش دقیق و تقریبی برش حداکثر درپانل AB و لنگر حداکثر درنقطه پانلی C ـ حاصل از بارهای زنده را برای سازه شکل (۶ـ۱۹) محاسبه کنید ، هرگاه بارهای زنده عبارت از بار یکنواختی به‌شدت 1,200 lb ft و بارمنفرد متمرکزی برابر با 18,000 lb باشد .

۶ ـ ۵ برای سازه شکل (۶ـ۲۰) خطوط تأثیر را برای (الف) برش در پانل DE (ب) لنگر در نقطه پانلی E رسم کنید .



شکل ۶ـ۲۰ مسائل ۶ـ۵ و ۶ـ۶

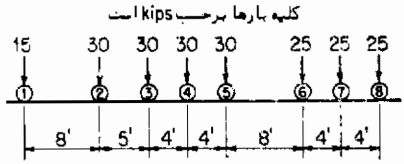
جواب :

(الف) خط تأثیر به‌طور خطی از 0.75− در C تا 0.0 در E و تا 0.75− در G تغییر می‌کند .

(ب) خط تأثیر به‌طور خطی از 0.0 در E تا 15.0− در G تغییر می‌کند .

۶ ـ ۶ توسط روش تقریبی حداکثر برش در پانل DE و حداکثر لنگر در نقطه پانلی E حاصل از بارهای زنده رابرای سازه شکل(۶ـ۲۰) تحت اثربارهای زنده مذکور در مساله(۶ـ۴)محاسبه کنید .

۶ ـ ۷ برای بارگذاری شکل(۶ـ۲۱) نمودار لنگر رسم کنید .



شکل ۶ـ۲۱ مسائل ۶ـ۷ تا ۶ـ۱۰

۶ـ۸ بااستفاده ازنمودار لنگر بارگذاری شکل (۶ـ۲۱) و سازهٔ شکل(۶ـ۱۹) مطلوب است محاسبه (الف) عکس‌العمل چپ شاهتیر هرگاه بار 3 در C قرار گیرد . (ب) عکس‌العمل چپ شاهتیر هرگاه بار 5 در C قرار گیرد (ج) برش در پانل AB هرگاه بار 3 در E قرارگیرد . (د)لنگر در نقطه پانلی D هرگاه بار 2 در D قرار گیرد .

۶ ـ ۹ برای بارگذاری شکل(۶ـ۲۱)حداکثر لنگر حاصل از بارهای زنده را برای نقطه پانلی B از شاهتیر شکل (۶ـ۱۰ الف) محاسبه کنید .

جواب :

+1,068 kip-ft

۶ ـ ۱۰ برای بارگذاری شکل(۶ـ۲۱) حداکثر برش مثبت در پانل CD از شاهتیر شکل (۶ـ۱۰ الف) را محاسبه کنید .

جواب :

+28.2 kips

۶ ـ ۱۱ برش حداکثرمطلق را درتیر شکل (۶ـ۴ الف)که بر اثر واردشدن بار زنده‌ای به‌شدت 1,000 lb/ft و بار متمرکز زنده‌ای برابر با 5,000 lb حاصل می‌شود محاسبه کنید .

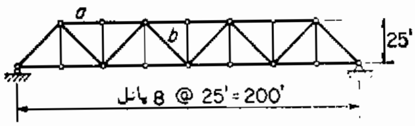
۶ ـ ۱۲ لنگر حداکثر مطلق را که در اثر دوبار متمرکز زنده‌ای که هریک برابر با 10 kips می‌باشند و به‌فاصله 10 ft ازیکدیگر قراردارند و بر تیرساده با دو تکیه‌گاه انتهایی به‌دهانه 20 ft وارد می‌شوند را محاسبه کنید .

جواب :

+56.25 kip-ft

۶ ــ ۱۳ لنگر حداکثر مطلق را که در اثر چهار بار متمرکز زنده‌ای که هریک برابربا 12 kips بوده و به‌فاصله 6 ft از یکدیگر قرار دارند و بر تیر ساده‌ای با دو تکیه‌گاه انتهایی به‌دهانه 25 ft وارد می‌شوند ، را محاسبه کنید .

۶ ــ ۱۴ حداکثر نیروهای میله را که در اثر بار زنده بوجود می‌آید در میله‌های a ، b از خرپای شکل(۶ــ۲۲) دراثر بار زنده‌یکنواختی به‌شدت 750 lb / ft محاسبه‌کنید.درمحاسبات خود فشار و کشش هردو مورد بررسی قرار گیرد .



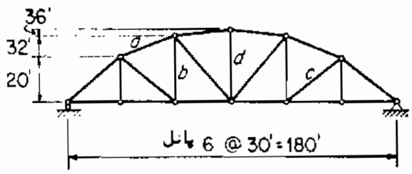
شکل ۶ــ۲۲ مساله ۶ــ۱۴

جواب :

در میله a = $-112,500$ lb

در میله b = $+30,300$ lb, $-17,045$ lb

۶ ــ ۱۵ نقاط پانلی فوقانی خرپای شکل(۶ــ۲۳) بر یک سهمی قرار دارند ، مطلوب‌است رسم خطوط تأثیربرای (الف) مولفه افقی نیروی میله در a (ب)نیروی میله در b (ج)نیروی‌میله در c (د) نیروی میله در d



شکل (۶ــ۲۳) مسائل (۶ــ۱۵) ، (۶ــ۱۷) ، (۶ــ۱۸)

جواب :

(الف) خط تأثیر به‌صورت خطی از 0.0 در چپ تا -1.25 در نقطه پانلی 3 و تا 0.0 در انتهای راست نقطه پانلی ادامه دارد .

(ب) خط تأثیربه‌صورت خطی‌از 0.0 درچپ تا $+0.833$ در نقطه‌پانلی 3 واز -0.125 در نقطه پانلی 4 تا 0.0 در انتهای راست ادامه دارد .

(ج) خط تأثیر به‌صورت خطی از 0.0 در چپ تا $+0.300$ در نقطه پانلی 5 تا -0.750 در نقطه پانلی 6 تا 0.0 در انتهای راست ادامه دارد .

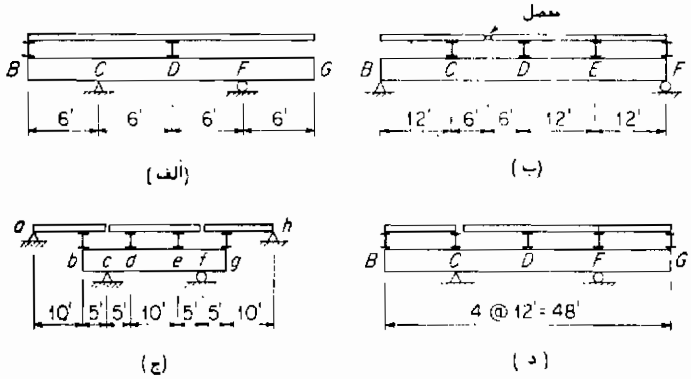
(د) خط تأثیر به‌شکل خطی از 0.0 در چپ تا $+0.333$ در نقطه پانلی 4 تا 0.0 در انتهای راست ادامه دارد .

۶ ــ ۱۶ خط تأثیری برای نیروی‌میله در میله [illegible] از خرپای شکل (۶ــ۱۴ الف) رسم‌کنید.

۶ ــ ۱۷ حداکثرنیروی میله‌را در میله [illegible] از خرپای شکل(۶ــ۲۳) تحت اثربارگذاری شکل(۶ــ۲۱) محاسبه کنید .

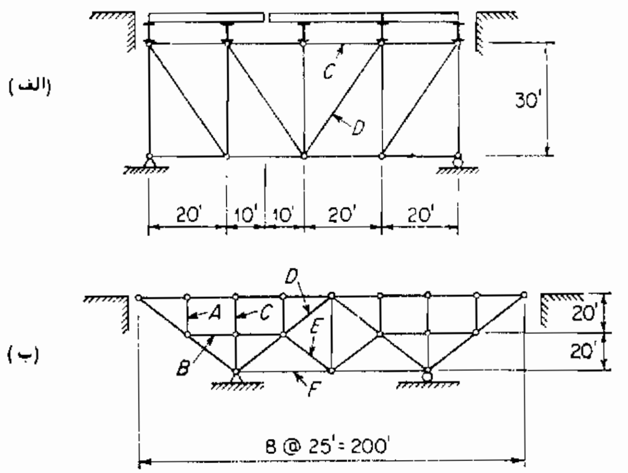
۶ ــ ۱۸ خلاصه جدول تأثیری برای‌میله‌های [illegible] و [illegible] از خرپای‌شکل(۶ــ۲۳)تهیه‌کنید و در این‌خلاصه جدول طولهای بار شده را نیز درج نمائید .

۶ ــ ۱۹ برای‌کلیه تیرهای‌شکل(۶ــ۲۴)خط تأثیری برای برش در پانل [illegible] و برای لنگرخمشی در نقطه پانلی [illegible] رسم کنید .



شکل ۶ــ۲۴ مساله ۶ــ۱۹

۶ ــ ۲۰ برای هریک از میله‌های‌مشخص‌شده در شکل(۶ــ۲۵)خط تأثیر لازم برای نیروی میلـــه درآن میله را رسم کنید .



شکل ۶ــ۲۵ مساله ۶ــ۲۰

۷

خرپاهای پلها و سقفها

۷ ـ ۱ مقدمه

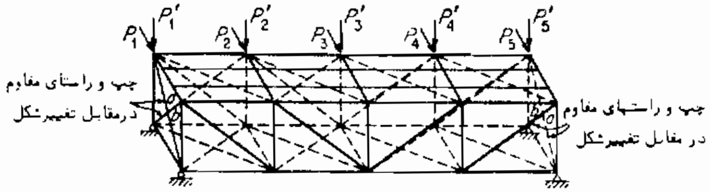
بارگذاری خرپاها را در فصل ۱ ، تحلیل تنش خرپاها را به‌طریق ریاضی و ترسیمی به‌ترتیب درفصول ۴ و ۵ و خطوط تأثیرخرپاها و تعیین حداکثر نیروی میله حاصل از بارهای زنده در خرپاها را در فصل ۶ دیدیم . در این فصل کلیه مطالب ذکر شده قبلی را برای تحلیل در سطح وسیع خرپاها گردآوری خواهیم کرد ، علامت تنش و اثر کشهای قطری را مورد بررسی قرار خواهیم داد . اثر اعوجاج پلها را نسبت به‌تکیه‌گاههایشان مورد توجه‌قرار خواهیم داد و بالاخره بررسی اندکی در مورد پلهای متحرک انجام خواهد شد .

خرپاها را مانند سازه‌های مستوی تحلیل خواهیم کرد ولی همواره باید مدنظر داشته باشیم که عملا" آنها قسمتهایی‌از شبکه‌های سه‌بعدی می‌باشند ، برای این‌که مجازبودن‌چنین عملکردی را درک کنیم ، پل شکل (۷ـ۱) را که برآن بارهای جانبی $P_1, P_2, . . ., P_8$ وارد می‌شوند و فرض می‌گرددکه این بارها درصفحه دستگاه مهاربندی فوقانی آن قرارداشته‌باشد مورد بررسی قرارمی‌دهیم .فرض کنیدکه صفحه‌ای افقی در سطحی بین میله‌های اصلی‌فوقانی و تحتانی ، این سازه را قطع نماید . قسمت جداشده این سازه را که در بالای این‌صفحه قرار دارد در نظر بگیرید دیده خواهد شد که مولفه‌های افقی نیروی میله‌ها چپ و راستهای مقاوم در مقابل تغییرشکل دو انتهای سازه باید دستگاه مهاربندی فوقانی را کـه در اثر بارهـای جانبی قـرار دارد در تعادل نگهدارند* ایـن مولفه‌های افقی به‌صورت عکس‌العملهایـی برای دستگاه‌مهاربندی فوقانی عمل خواهند کرد بنابراین می‌توان به‌صورت خرپای مستـوی

---

* این مطلب کاملا" هم صحیح نیست زیرا اگر بارهای جانبی به‌صورت نامتقارن وارد شوند ،مولفه‌های افقی‌نیروی میله‌ها درقطریهای خرپاهای اصلی نیز به‌صورت عکس‌العملهایی برای دستگاه مهاربندی فوقانی عمل خواهند کرد .

مورد بررسی قرار گیرد . مولفه‌های عمودی نیروی میله‌ها در چپ و راستهـای مقاوم در مقابل تغییرشکل دو انتهای سازه باید توسط نیروی میله‌های عمودی خرپاهای اصلی متعـــادل شوند ، لذا دیده می‌شود که چپ و راستهای دو انتهای سازه مانند خرپایی مستوی عکس‌ــ العمل دستگاه مهاربندی فوقانی را به پی منتقل می‌نمایند .



شکل ۷ــ۱ خرپای پل

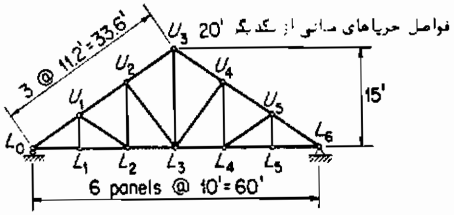
باردیگر همین‌سازه را درنظر بگیرید به‌طوری‌که فقط برآن بارهای‌عمودی P'_1, P'_2 . . . و P'_5 واقع در صفحه خرپای عمودی پشتی اثر کنند و فرض کنید که یک صفحه عمودی موازی با خرپاهای اصلی عمودی واقع در بین این دو خرپا سازه را قطع نماید ، چپ و راستهـای مقاوم در مقابل تغییرشکل در دو انتهای این سازه تنها اعضای قطع‌شده‌ای خواهند بود که قادر به‌تحمل مولفه‌های عمودی می‌باشند ، اگر میله‌های قطری a قادر به‌تحمل فشارر باشند در این حالت تحمل تنش نموده و بر نیروی میله‌های عمودی خرپای پشتی تأثیر خواهند گذاشت .در هر صورت این تأثیرگذاری دارای اهمیت ثانوی می‌باشد و لذا مجاز هستیم و علاوه برآن در جهت اطمینان خواهد بود اگر خرپای پشتی را مانند خرپایی مستـوی تحت اثر بارهای P'_1 ، P'_2 ، . . . P'_5 تحلیل نمائیم .

اگر چپ و راستهای مقاوم در مقابل تغییرشکل دیگری در نقاط پانلی میانی‌اضافه‌گردد وضعیت بررسی سازه پیچیده‌تر خواهد شد ، به‌این شکل که اگر نقاط پانلی یکی از خرپاهـای عمودی تحت اثر بارگذاری ، تغییرشکل عمودی دهد ، چپ و راستهای میانی به‌نحوی عمـل خواهند کرد که نقاط پانلی نظیر مربوط به‌خرپای عمودی بار نشده مجبوربه‌مقداری‌تغییرشکل عمودی خواهند بود . این عمل باعث ایجاد تنشهای حاصل از مشارکت در خرپای بدون‌بار خواهد شد . بدیهی است اگر هردو خرپا دارای بارگذاری مشابهی باشند تقارن سازه‌ایجاب می‌کند که هیچ نوع تنش حاصل از مشارکت درآنها ایجاد نشود . در یک پل حقیقی بارهای عمودی مؤثر بر دوخرپای عمودی اصلی هرگز یکسان نمی‌باشد ولی عموما" این‌بارها درموارد بارگذاری حداکثرکه براساس‌آن طرح‌پل انجام می‌گیرد ،به‌اندازهٔ‌کافی مشابه یکدیگرمی‌باشد، لذا نیروی میله‌ها درچپ و راستهای نقاط‌پانلی‌میانی را می‌توان‌برابر با صفرگرفت و به‌این

جهت هریک از خرپاهای اصلی عمودی‌را می‌توان جداگانه به‌صورت سازه‌ای مستوی تحلیل نمود .

۷ ــ ۲ تحلیل کلی یک خرپای سقف

تحلیل کلی یک خرپای پوششی سقف نه‌تنها شامل محاسبه نیروی میله‌ها در هریک‌از اعضای خرپا تحت اثر انواع مختلف بارگذاری مؤثر بر خرپا می‌باشد ، بلکه برای هر عضوی از خرپا شامل ترکیب نیروهای میله مربوطه به‌هریک از انواع بارگذاریها نیز می‌شود تابتوان به‌حداکثر نیروی میله‌ای که امکان بوجودآمدن آن از ترکیب اثرات ناشی از انواع مختلف بارگذاریها حاصل می‌شود رسید . برای این که چنین عملکردی را شرح دهیم خرپای سقف شکل(۷ــ۲)را که در دوانتهای خود بر دیوار تکیه دارد موردبررسی قرار می‌دهیم ، این خرپا یکی از خرپاهای میانی بوده که از بین سری خرپاهائی که به‌فاصله 20 ft از یکدیگرقراردارند انتخاب شده‌است . فرض خواهد شد که شبکه‌بندی سقف به‌نحوی باشد که بارهای سقف فقط بر نقاط پانلی میله‌های اصلی فوقانی خرپا وارد شوند . وزن پوشش سقف به‌اضافه وزن لاپه که انتقال‌دهندهٔ این وزن به‌خرپاها می‌باشد .برابر با 4.3 lb بر فوت مربع سطح پوشش‌سقف فرض می‌شود . وزن خود خرپاها را برابر با 75 lb بر فوت افقی فرض خواهیم کرد که به طور مساوی بین نقاط پانلی‌فوقانی و تحتانی‌تقسیم‌گردد ،بار حاصل‌ازبرف‌را برابربا $20\ lb/ft^2$ سطح تصویر سقف فرض کرده و بار حاصل از یخ‌زدگی را برابر با $10\ lb/ft^2$ سطح تصویر سقف

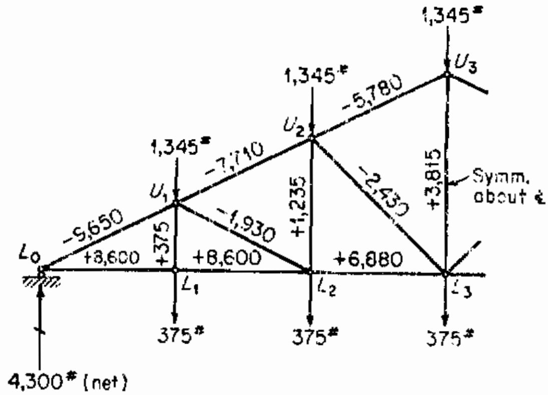


شکل ۷ــ۲ خرپای سقف

فرض می‌کنیم و بالاخره بار حاصل از اثر باد را بر طبق توصیه مذکور در گزارش ASCE ــ که دربخش(۱ــ۱۱) ذکر شد و براساس سرعت حداکثر بادی برابربا 100 mph می‌باشد ــ در نظر می‌گیریم ، تحلیل را به‌ترکیب بارهای زیر محدود می‌کنیم : ۱ــ بار مرده به‌اضافه‌بار برف در کل سقف ۲ــ بار مرده به‌اضافه بار باد به‌اضافه بار برف در پشت سمت بادگیر ۳ ــ بار مرده به‌اضافه بار یخ در کل سقف به‌اضافه بار باد . باید متذکر شد که وزش باد می‌تواند

از هردو طرف راست یا چپ باشد*.

ابتدا نیروی میله‌ها را حاصل از اثر بار مرده محاسبه می‌کنیم ،در مورد میله‌های اصلی تحتانی بارهای پانلی مرده برابر با $75/2(10) = 375$ lb بوده و برای میله‌های اصلی فوقانی بارهای پانلی مرده برابر با $375 + 4.3(11.2)(20) = 1,345$ lb خواهد شد . این بارها به‌اضافه نیروی میله‌های حاصل از این بارهای مرده را درشکل (۷-۳) نشان داده‌ایم . چون نیروی میله‌ها نسبت به‌خط مرکزی خرپا متقارن می‌باشند فقط نیمی از خرپا نشان داده شده است . محاسبات مربوط به‌تعیین نیروی میله‌های حاصل از بارهای مرده را چون مطلب جدیدی در خود ندارد حذف کرده‌ایم .



شکل ۷-۳ نیروی میله‌ها حاصل از بار مرده

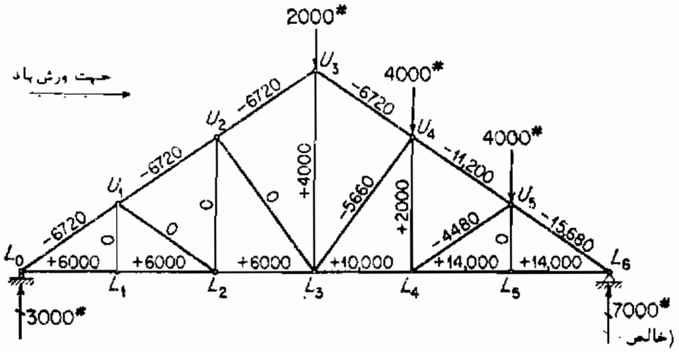
---

* این چنین ترکیب بارگذاری‌را در بحث حاضر بدان جهت مورد بررسی قرارمی‌دهیم زیرا که یکی از متداولترین ترکیبات مورداستفاده می‌باشد . اگر بار باد براساس فرمولی‌نظیر فرمول دوخمین (Duchemin)- به‌اضافات بخش (۱-۱۱) مراجعه شود- محاسبه گردد ، شرطی منطقی خواهد بود زیرا امکان دارد برف سمت بادگیر توسط فشار باد از شیب سمت بادگیر رانده شده ولی در شیب سمت پشت بادگیر -که درآنجا نه فشاری وجود دارد و نه مکشی - باقی بماند . هرگاه براساس توصیه مذکور در گزارش ASCE مساله را دنبال کنیم به‌نظر می‌رسد که چنین ترکیبی ازبارگذاری اتفاق نیافتد زیرا در این‌مساله بخصوص درشیب هردو طرف مکش خواهیم‌داشت و بیشترین مکش درسمت پشت بادگیرخواهد بود و با چنین بارگذاری بادی ، اگر برفی بر پشت بام باقی بماند به‌نظر می‌رسد که بیشتر در سمت بادگیر برف‌باقی بماند . درهرصورت همواره این امکان وجود داردکه برف قبل از وزش باد به‌نحوی جابجا شده باشد که بتوان بارگذاری ۲ را فرض نمود .

در بارگذاری ۱ ــ بار برف در کل سقف موردنظر می‌باشد و در بارگذاری ۲ــ فقط به‌بار برف در سمت پشت بادگیر اکتفا شده‌است ، ما ابتدا نیروی میله‌ها را برای بار برف فقط بـر سمت پشت بادگیرمحاسبه خواهیم کرد و سپس به‌دلیل این‌که خرپا متقارن‌می‌باشدبااستفاده از اصل جمع آثار به‌محاسبه نیروی میله‌ها تحت اثر بار برف در کل سقف خواهیم پرداخت و به‌این ترتیب از تحلیل کامل دیگری خودداری خواهیم نمود . بار پانلی حاصل ازباربرف خواهد شد .

$$20 \times 10 \times 20 = 4{,}000 \text{ lb}$$

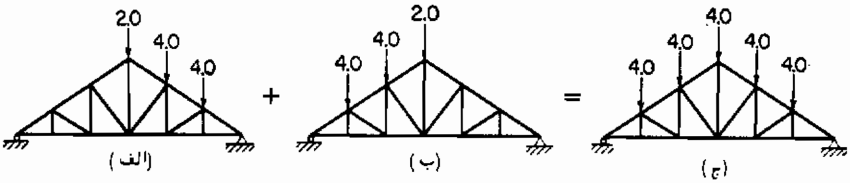
اگر بار برف فقط در سمت پشت بادگیر باشد ، بار پانلی حاصل از بار برف در U_3 برابر با نصف مقدار فوق خواهد شد ،این بارهای پانلی به‌همراه نیروی میله‌های حاصل از این بارها در شکل (۷ــ۴) نشان داده شده‌است و چون این بارگذاری نامتقارن است ،نیروی میله‌هابرای کلیه اعضای خرپا محاسبه شده است .



شکل ۷ــ۴ نیروی میله‌ها حاصل از بار برف بر پشت بادگیر

برای تعیین نیروی میله‌ها تحت اثر بار کامل برف می‌توانیم از اصل جمع آثار چنانکه در شکل (۷ــ۵) نشان داده شده‌است استفاده کنیم ، لذا نیروی میله‌ها بر طبق بارگذاری "الف" (چنانکه قبلا" درشکل(۷ــ۴) محاسبه شده‌است) را بر نیروی میله‌ها بر طبق بارگذاری "ب" (که با در نظرگرفتن تقارن از طریق شکل (۷ــ۴) استخراج شده‌است) جمع جبری‌نموده و نتیجه را برابر با بارگذاری "ج" که معادل اثر بار کامل برف می‌باشد به‌دست می‌آوریم . به‌عنوان مثال نیروی میله در میله L_0U_1 در اثر بار کامل برف برابر خواهد شد با :

$$-6{,}720 - 15{,}680 = -22{,}400$$



شکل ۷ ـ ۵ اجتماع بارگذاریها

و برای میله U_2L_3 خواهد شد : $-5{,}660 = 5{,}660 - 0$ و . . . و چون بارگذاری اخیر یک بارگذاری متقارن است لذا فقط نیمی از خرپا نشان داده شده است ، بدیهی است که نیروی میله‌های مذکور در شکل (۷ـ۶) را می‌توان با تحلیل جداگانه‌ای که برطبق بارگذاری کامل برف انجام می‌گیرد به‌دست آورد .

بارگذاری ۳ ـ مربوط به بار یخ در کل سقف می‌باشد ، چون شدت باریخ درنصف شدت برف ذکر شده است لذا نیروی میله‌های حاصل از بار کامل یخ برابر با نصف نیروی میله‌های حاصل از بار کامل برف خواهد بود . نیروی میله‌ها را که حاصل از بار کامل یخ می‌باشد در شکل (۷ـ۷) نشان داده‌ایم .

برای سرعت بادی برابر با 100 mph با استفاده از معادله (۱ـ۳) خواهیم داشت .

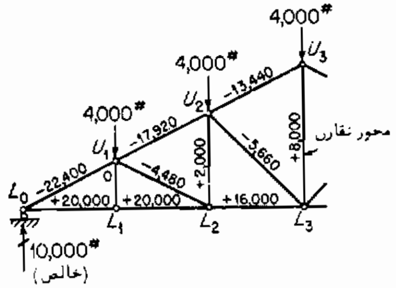
$$q = 0.002558(100)^2 = 25.6 \text{ lb/ft}$$

برای این سقف $\tan\alpha = 15/30 = 0.5$ و از آنجا $\alpha = 26.6°$ می‌باشد و با استفاده‌ازمعادله (۱ـ۴) شیب سمت بادگیر، مکشی برابر با مقدار زیر تحمل خواهد کرد :

$$p = [0.07(26.6) - 2.10](25.6) = 6.4 \text{ lb/ft}$$

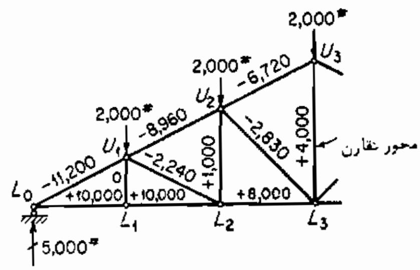
مکش در شیب سمت پشت بادگیر برابر است با $0.6(25.6) = 15.4$ lb/ft و به‌این ترتیب بار پانلی حاصل برای سمت بادگیر خواهد شد : $6.4(11.2)(20) = 1{,}435$ lb برای سهلترنمودن محاسبات بهتر است که مولفه‌های عمودی و افقی بارهای پانلی ناشی‌از باد را به‌جای مولفه اصلی آن در نظر بگیریم که در این صورت به‌ترتیب خواهیم داشت 1,280 lb رو به‌بالا و 640 lb رو به‌سمت باد . در مورد باد سمت پشت بادگیر مقداربار پانلی آن برابر با $15.4(11.2)(20) = 3{,}450$ lb خواهد شد با این بار پانلی مولفه‌عمودی آن برابر 3,080 lb به‌سمت بالا و مولفه افقی آن برابر با 1,540 lb همسو با جهت‌باد خواهد شد . شکل (۷ـ۸) خرپای مورد بحث را تحت اثر مولفه‌های افقی و عمودی بارهای پانلی و نیروهای میله حاصل از این بارگذاری نشان می‌دهد . نصف بار پانلی در L_0 و L_6 را در

تحلیل داخل کرده‌ایم و مولفه افقی باد موثر در L_0 ایجاد تنش در خرپا خواهدنمودوچون بار حاصل از باد نامتقارن می‌باشد نیروی میله‌ها را در کل خرپا نشان داده‌ایم .



شکل ۷ــ۶ نیروی میله‌ها حاصل از بار کامل برف

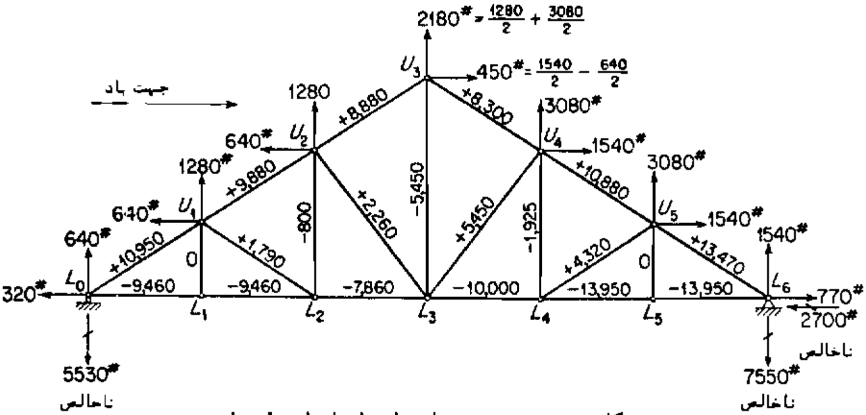
درجدول (۷ــ۱)نیروی میله‌های نشان‌داده شده درشکلهای (۷ــ۳)، (۷ــ۴)و(۷ــ۶)الی (۷ــ۸) را درج نموده‌ایم و سپس به‌تناسب سه بارگذاری مشخص شده این نیروی میله‌هاراجهت محاسبه نیروی میلهٔ کل در هریک از اعضای خرپا با یکدیگر ترکیب کرده‌ایم و بالاخره برای هریک از اعضاء حداکثر نیروی میله موجود را که برای یکی از سه ترکیب بارگذاری به دست می‌آید انتخاب می‌کنیم تا بتوانیم توسط این نیروی میله‌های حداکثر محاسبه مقطع آن عضو را بعمل آوریم . علائمی که در اول ستونها بکار رفته است به‌این معانی است D : نیروی‌میله حاصل از بار مرده S : نیروی میله حاصل از بار برف بر کل خرپا S_L : نیروی میله حاصل‌از بار برف بر سمت پشت بادگیر I : نیروی میله حاصل از بار یخ بر کل خرپا W : نیروی میله حاصل از بار باد . این جدول را فقط برای میله‌های نیمی از خرپا تنظیم کرده‌ایم ولی برای این‌که نیروی میله‌های کل خرپا را در ستونهای S_L و W درج کنیم ابتدا به‌ذکر نیروی میله مربوط به‌خود میله تحت اثر بار موردنظر اقدام کرده‌ایم و سپس نیروی میله قرینه آن را در خرپا تحت اثر همان بارگذاری بیان کرده‌ایم*.



شکل ۷ــ۷ نیروی میله‌ها حاصل از بار کامل یخ

---

*این عمل را برای میله‌های اصلی تحتانی انجام نداده‌ایم . چرا؟



شکل ۷–۸ ینروی میله‌ها حاصل از بار باد

جدول (۷–۱) جدول نیروی میله‌ها برای خرپای شکل (۷–۲) نیروها برحسب پاوند است

میله‌ها	D	S	S_L	I	W	(1) $D+S$	(2) $D+W+S_L$	(3) $D+W+I$	حداکثر نیرو	ترکیب بارگذاریها
L_0L_1	+8,600	+20,000	+ 6,000 +14,000	+10,000	− 9,460 −13,950	+28,600	+ 5,140 + 8,650	+9,140 +4,650	+28,600	1
L_1L_2	+8,600	+20,000	+ 6,000 +14,000	+10,000	− 9,460 −13,950	+28,600	+ 5,140 + 8,650	+9,140 +4,650	+28,600	1
L_2L_3	+6,880	+16,000	+ 6,000 +10,000	+ 8,000	− 7,860 −10,100	+22,880	+ 5,020 + 0,780	+7,020 +4,780	+22,880	1
L_0U_1	−9,650	−22,400	− 6,720 −15,680	−11,200	+10,950 +13,470	−32,050	− 5,420 −11,860	−9,900 −7,380	−32,050	1
U_1U_2	−7,710	−17,920	− 6,720 −11,200	− 8,960	+ 9,880 +10,880	−25,630	− 4,550 − 8,030	−6,790 −5,790	−25,630	1
U_2U_3	−5,780	−13,440	− 6,720 − 6,720	− 6,720	+ 8,800 + 8,300	−19,220	− 3,700 − 4,200	−3,700 −4,200	−19,220	1
U_1L_2	−1,930	− 4,480	0 − 4,480	− 2,240	+ 1,790 + 4,320	− 6,410	− 140 − 2,090	−2,380 + 150	+ 150 − 6,410	3 1
U_2L_3	−2,430	− 5,660	0 − 5,660	− 2,830	+ 2,260 + 5,450	− 8,090	− 170 − 2,640	−3,000 + 190	+ 190 − 8,090	3 1
U_1L_1	+ 375	0	0 0	0	0 0	+ 375	+ 375	+ 375	+ 375	1, 2, 3
U_2L_2	+1,235	+ 2,000	0 + 2,000	+ 1,000	− 800 − 1,925	+ 3,235	+ 435 + 1,310	+1,435 + 310	+ 3,235	1
U_3L_3	+3,815	+ 8,000	+ 4,000	+ 4,000	− 5,450	+11,815	+ 2,365	+2,365	+11,815	1

رقمهای دوم مربوط به‌زمانی می‌شود که جهت وزش باد بر خلاف حالت نخست‌باشد .بدیهی

است‌که در آن حالت طرح خرپا می‌بایستی مناسب با رقمهای دوم نیز باشد . در درج جمع بارگذاریهایی که شامل S_L یا W می‌باشند هردو مقادیر مثبت و منفی آنها ملحوظ شده‌است.

۷ ــ ۳ تنشهای مجاز برای قطعات تحت تنش حاصل از باد

وقتی قطعاتی تحت تنش حاصل از بار باد قرار می‌گیرند معمولاً مجاز هستیم که برای آنها تنش محاسباتی را قدری بیشتراز بارگذاریهای دیگر در نظر بگیریم ، برای مثال برخی از آئین‌نامه‌ها اجازه می‌دهند قطعاتی را که تحت تنش حاصل از ترکیبی از بارگذاریهای باد و سایر بارها می‌باشند با تنش مجازی $33\frac{1}{3}$ درصد بیشتراز آنچه در بخش (۱ــ۲۲)بیان شد محاسبه کنند ، به‌شرطی که مقطعی که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید کمتراز آنچه برای ترکیب سایر بارگذاریهای بدون باد لازم‌است نباشد . این آئین نامه‌ها همچنین بیان می‌کنند که افزایش $33\frac{1}{3}$ درصدبرای طرح قطعاتی‌که فقط‌تحت تنش حاصل‌از باد نیزباشندمجازمی‌باشد .

به‌جای این‌که محاسبه قطعات تحت تأثیر بار باد را براساس تنش افزایش یافته‌ای‌برابر با $\frac{4}{3}$ تنش متعارف مجاز انجام دهیم واضح است که می‌توان همین نتیجه را با محاسبه‌ای براساس تنش مجاز متعارف ولی‌با نیروی میله‌ای برابربا $\frac{3}{4}$ نیروی میله واقعی به‌دست‌آوریم زیرا : $F/\frac{4}{3}f = \frac{3}{4}F/f$ می‌باشد . لذا در تهیه جدول نیروی میله‌ها نظیرجدول (۷ــ۱) در ستون مربوط‌به "نیروی میله حداکثر" بزرگترین ارقام : $D + S$ ، $\frac{3}{4}(D + W + S_L)$ و $\frac{3}{4}(D + W + I)$ درج شده است ، در این صورت آن عضو را با معلوم بودن نیروی میله حداکثر براساس تنش مجاز متعارف محاسبه می‌کنیم .

۷ ــ ۴ تحلیل کلی یک خرپای پل

تحلیل کلی یک خرپای پل شامل محاسبه نیروی میله در هر عضو از آن خرپا تحت اثر هریک از بارگذاریها و تعیین ترکیب این نیروها به‌منظور تعیین نیروی میله کل حداکثر برای هر عضو جهت وارسی محاسبات می‌باشد . برای این که این روش تحلیل را شرح‌دهیم‌خرپای مخصوص شاهراهها ازنوع وارن (Warren) را که درشکل (۷ــ۹) نشان داده‌ایم مورد بررسی قرار می‌دهیم . این خرپا برای بار مرده ، زنده و ضربه محاسبه خواهد شد . فرض می‌شودکه خرپا به‌اضافهٔ اتصالات و دستگاه بادبند درجه دوم آن جمعاً 0.500 kip/ft وزن داشته باشد و این وزن به‌طور مساوی بین نقاط پانلی فوقانی و تحتانی تقسیم‌شود .وزن قسمتی از کف‌سازی که توسط خرپا تحمل می‌شود برابر با 0.800 kip/ft فرض می‌شود که بر

نقاط تحتانی پانلی اثر خواهند کرد . برای تأثیر بار زنده دستگاه بار معادل زنده‌ای به‌کار برده خواهد شد که از بار یکنواختی به‌شدت 0.650 kip / ft و بار منفرد متمرکزی‌برابربا 20.0 kips تشکیل شود . ضربه را براساس معادله (۱–۱) محاسبه خواهیم کرد .نیروی میله حداکثر حاصل از بار زنده را با استفاده از روش تقریبی محاسبه خواهیم کرد .برای‌هرعضوی از نیمهٔ چپ خرپا نیروی‌میله‌کل حداکثررا برای هریک‌از اعضای‌خرپا به‌دست خواهیم آورد .

ابتدا عرضهای خط‌تأثیر را برای اعضای نیمه چپ خرپا با درنظرگرفتن‌اثرباروا‌حدی در کلیه نقاط‌پانلی تحتانی خرپا (در کل طول خرپا) محاسبه خواهیم کرد . این عرضها را در جدول تأثیری درج می‌کنیم (جدول۷–۲) و چون در محاسبات مربوط به‌این مقادیرنکات نامتعارفی وجود ندارد از ذکر جزئیات محاسبات مربوط به‌آن خودداری می‌کنیم .

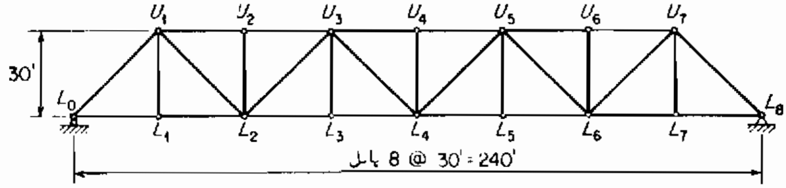
سپس خلاصه‌ای از جدول تأثیر (جدول ۷–۲) تهیه خواهیم کرد (جدول ۷–۳) .

قبل‌از تهیه جدول نیروی میله‌های‌اعضای موردبحث ،باید بارهای‌پانلی‌را برای بارهای مرده–زنده‌محاسبه‌کنیم .بارپانلی‌مرده مربوط به‌میله‌هایی اصلی فوقانی برابر است با $30(0.250) = 7.5$ kips و برای بار پانلی میله‌های اصلی تحتانی برابر است با $7.5 + 30(0.800) = 31.5$ kips بارپانلی مربوطبه‌بارزنده‌یکنواخت‌برابراست‌با $30(0.650) = 19.5$ kips و بارزنده‌متحرک که قبلا" بعنوان بارپانلی‌ذکرشده‌است برابر با 20.0 kips.

جدول تأثیر برای خرپای شکل(۷–۹

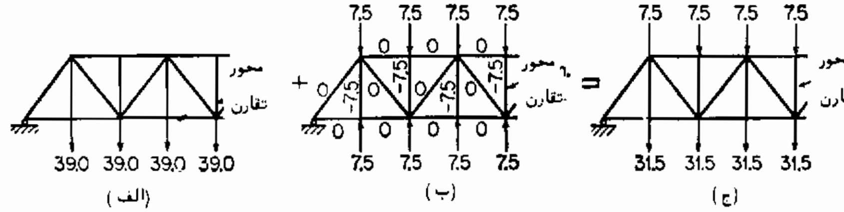
میله	نیروی میله‌ها تحت اثر بار واحد در								
	L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8
L_0L_2*	0	+0.875	+0.750	+0.625	+0.500	+0.375	+0.250	+0.125	0
L_2L_4	0	+0.625	+1.250	+1.875	+1.500	+1.125	+0.750	+0.375	0
L_0U_1	0	−1.238	−1.060	−0.885	−0.708	−0.530	−0.354	−0.177	0
U_1U_3	0	−0.750	−1.500	−1.250	−1.000	−0.750	−0.500	−0.250	0
U_3U_4	0	−0.500	−1.000	−1.500	−2.000	−1.500	−1.000	−0.500	0
U_1L_2	0	−0.177	+1.060	+0.885	+0.708	+0.530	+0.354	+0.177	0
L_2U_3	0	+0.177	+0.354	−0.885	−0.708	−0.530	−0.354	−0.177	0
U_3L_4	0	−0.177	−0.354	−0.530	+0.708	+0.530	+0.354	+0.177	0
U_1L_1	0	+1.000	0	0	0	0	0	0	0
U_2L_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
U_3L_3	0	0	0	+1.000	0	0	0	0	0
U_4L_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0

* اگر فقط‌بار عمودی بر گره L_1 اثر کند نیروی میله در L_0L_1 و L_1L_2 همواره یکی خواهد شد لذا در این جدول و جدول بعدی این دو عضو را مانند یک عضو تلقی کرده‌ایم .



شکل ۷–۹ خرپای پل شاهراها

در جدول تنش (جدول ۷–۴) نیروهای میله حاصل از بار مرده براساس اصل جمع آثار همان‌طوری که در شکل (۷–۱۰) نشان داده شده است محاسبه‌شده‌اند. نیروی میله‌ها را ابتدا برای بارگذاری شکل (۷–۱۰ الف) محاسبه می‌کنیم در این بارگذاری فرض شده است که کلیه بارهای مرده بر میله‌های اصلی تحتانی اثر می‌کند لذا بار پانلی مرده برای نقاط تحتانی پانلی برابر با: $39.0 = 7.5 + 31.5$ می‌شود. چون جدول تأثیر براساس اثر بارها بر نقاط پانلی تحتانی تهیه شده است نیروی میله‌های مربوط به‌این حالت از بارگذاری را می‌توان با حاصل‌ضرب جمع کلیه عرضهای خط تأثیر برای هریک از اعضاء در بار پانلی کل حاصل از بار مرده یعنی 39.0 به‌دست آورد. نیروی میله‌های مربوط به‌بارگذاری شکل (۷–۱۰ ب) را بعداً می‌توان محاسبه نمود، مقدار 7.5 بار پانلی حاصل از بار مرده در میله‌های اصلی فوقانی می‌باشد. محاسبه نیروی این خرپا بسیار ساده است و چنانکه نتیجه محاسبات را در شکل می‌بینید نیروی میله در کلیه عمودیها برابر با 7.5– بوده و در سایر اعضاء برابر با صفر است. حال اگر بارگذاریهای شکل‌های (۷–۱۰ الف) و (۷–۱۰ ب) را براساس اصل جمع آثار با هم جمع کنیم بارگذاری شکل (۷–۱۰ ج) که متناظر با بارگذاری حقیقی توسط بارمرده می‌باشد به‌دست خواهد آمد. لذا نیروهای میله حاصل از بار مرده را می‌توان توسط جمع نیروی میله‌های محاسبه شده توسط بارگذاریهای مذکور در شکل‌های (۷–۱۰ الف) و (۷–۱۰ ب) به‌دست آورد. به‌طور خلاصه نیروی میله حاصل از بارهای مرده را برای یک عضو مشخص می‌توان به‌صورت زیر محاسبه نمود: ۱– بار پانلی کل حاصل از بار مرده را در جمع کلیه عرضهای خط تأثیر ضرب می‌کنیم ۲– فقط از نیروی میله حاصل برای میله‌های عمودی که از



شکل (۷–۱۰) محاسبه نیروهای میله حاصل از بار مرده

جدول (۷-۳) خلاصه جدول تأثیر برای خرپای شکل ۷-۹

میله‌ها	جمع عرضها			عرضهای حداکثر		طول بارشده برحسب ft	
	مثبت	منفی	جمع	مثبت	منفی	کشش	فشار
L_0L_2	+3.500	0	+3.500	+0.875	0	210	0
L_2L_4	+7.500	0	+7.500	+1.875	0	240	0
L_0U_1	0	−4.952	−4.952	0	−1.238	0	240
U_1U_3	0	−6.000	−6.000	0	−1.500	0	240
U_3U_4	0	−8.000	−8.000	0	−2.000	0	240
U_1L_2	+3.714	−0.177	+3.537	+1.060	−0.177	206	34
L_2U_3	+0.531	−2.654	−2.123	+0.354	−0.885	69	171
U_3L_4	+1.769	−1.061	+0.708	+0.708	−0.530	137	103
U_1L_1	+1.000	0	+1.000	+1.000	0	60	0
U_2L_2	0	0	0	0	0	0	0
U_3L_3	+1.000	0	+1.000	+1.000	0	60	0
U_4L_4	0	0	0	0	0	0	0

طریق مرحله ۱ به‌دست می‌آید مقدار بار پانلی مربوط به‌بار مرده میله‌های اصلی فوقانی‌راکم می‌کنیم .

چون بارمرده به‌طوریکنواخت گسترده نشده‌است نیروی میله‌ها را که مربوط به‌بارگذاری شکل (۷-۱۰ الف) می‌باشند می‌توان با استفاده از جدول تأثیر به‌دست آورد ، به‌این صورت که تک تک بار پانلی را درمقادیر عرضهای مربوطه مندرج درجدول تأثیر ضرب نموده،حاصل جمع کلیه ارقامی که بدین ترتیب برای نیروی یک میله به‌دست می‌آید نشان دهندهٔ نیروی آن میله تحت اثر کلیه بارها خواهد بود . بدیهی است گاهی اوقات ترجیح داده می‌شود که برای تعیین نیروی میله‌های حاصل از اثر بار مرده به‌محاسبه جداگانه‌مستقلی بدون استفاده از خصوصیات تأثیر اقدام نمود .

کشش و فشار حداکثر ناشی از بار زنده یکنواخت در ستون بعدی درج شده است .برای تعیین این ارقام کافی است که حاصل‌ضرب بار پانلی حاصل از بار زنده یکنواخت (19.5) را در حاصل جمع عرضهای مثبت و منفی متناظر خط‌تأثیر به‌دست آوریم به‌همین ترتیب کشش و فشار حداکثر ناشی‌از بار زنده متمرکز درستون بعد درج شده است .برای تعیین این‌مقادیر کافی است که حاصل‌ضرب بار پانلی حاصل از بار متمرکز زنده (20.0) را در حداکثر عرض مثبت و منفی متناظر خط‌تأثیر به‌دست آوریم . جمع کل نیروی میله حاصل از بار زنده را می‌توان با جمع ارقام به‌دست آمده برای بارهای یکنواخت و متمرکز زنده به‌دست آورد .

افزایش ضربه را که بر اساس معادله (۱-۱) تعیین شده‌است معین می‌کنیم و از ضرب

ارقام افزایش ضربه در نیروی میله کل حاصل از بارهای زنده ، نیروی میله حاصل از ضربه بدست می‌آید که از مجموع این نیرو و نیروی میله کل حاصل از بارهای زنده ، نیروی میله کل حاصل از بار زنده و ضربه حاصل خواهد شد . در ستون آخر جمع نیروی میله‌های حاصل از بار مرده ، بار زنده و ضربه درج شده است . بایستی خاطرنشان کرد که نیروی میله‌ها را برای بارهای زنده وضربه با هردو علامت در جدول نیروی میله‌ها درج کرده‌ایم تا مطمئن گردیم که میلهٔ فوق در صورت تغییر علامت تنش مقاومت خواهد کرد (به‌بخش (۷–۵)مراجعه شود) . در محاسبات عملی خرپاها باید نیروی میله‌ها را تحت اثر حالات بارگذاری دیگری نظیر اثر باد بررسی نمود و ترکیب این نیروها را با نیروی میله‌ها حاصل از بار مرده ، زنده و ضربه در ستون دیگری از جدول درج نمود . در این مثال از محاسبه نیروی میله‌های حاصل

جدول ۷–۴ جدول نیروی میله‌ها برای خرپای شکل ۷–۹ کلیه نیروهها برحسب kips می‌باشد

میله‌ها	$D =$ نیروی میله از بارمرده	$L =$ نیروی میله از بار زنده: یکنواخت	متمرکز	جمع	افزایش ضربه	$I =$ نیروی میله از ضربه	$L + I$	جمع $= D + L + I$
L_0L_2	+136.5 —	+ 68.3 —	+17.5 —	+ 85.8 —	0.137 —	+11.8 —	+ 97.6 —	+234.1 —
L_2L_4	+292.5 —	+146.2 —	+37.5 —	+183.7 —	0.137 —	+25.2 —	+208.9 —	+501.4 —
L_0U_1	— −193.0	— − 96.5	— −24.7	— −121.2	— 0.137	— −16.6	— −137.8	— −330.8
U_1U_3	— −234.0	— −117.0	— −30.0	— −147.0	— 0.137	— −20.2	— −167.2	— −401.2
U_3U_4	— −312.0	— −156.0	— −40.0	— −196.0	— 0.137	— −26.8	— −222.8	— −534.8
U_1L_2	+138.0 —	+ 72.5 − 3.5	+21.2 − 3.5	+ 93.7 − 7.0	0.151 0.300	+14.2 − 2.1	+107.9 − 9.1	+245.9 —
L_2U_3	— − 83.0	+ 10.4 − 51.8	+ 7.1 −17.7	+ 17.5 − 69.5	0.258 0.169	+ 4.5 −11.8	+ 22.0 − 81.3	— −164.3
U_3L_4	+ 27.6 —	+ 34.5 − 20.7	+14.2 −10.6	+ 48.7 − 31.3	0.191 0.219	+ 9.3 − 6.9	+ 58.0 − 38.2	+ 85.6 − 10.6
U_1L_1	+ 31.5 —	+ 19.5 —	+20.0 —	+ 39.5 —	0.270 —	+10.7 —	+ 50.2 —	+ 81.7 —
U_2L_2	— − 7.5	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— − 7.5
U_3L_3	+ 31.5 —	+ 19.5 —	+20.0 —	+ 39.5 —	0.270 —	+10.7 —	+ 50.2 —	+ 81.7 —
U_4L_4	— − 7.5	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— − 7.5

از اثر باد صرفنظر شده است زیرا که تحلیل دستگاه مهاربهای جانبی و پرتالها را به یکی‌از فصول بعدی واگذار کرده‌ایم .

۵ ــ ۷ تغییر علامت تنش

در تحلیل خرپای مخصوص شاهراه دربخش (۷ــ۴) فرض شده است که کلیه قطعات آن خرپا قادر به‌تحمل فشار و کشش باشند ونیروی میله حداکثررا با هر دوعلامت‌برای‌هرمیله‌ای به‌دست آورده‌ایم .در تهیه نیروی میله‌های جدول (۷ــ۴) نیروی کل میله را که حاصل از بار مرده+زنده+ضربه‌می‌باشدباجمع ساده‌جبری $L+I$ بانیروی‌میله حاصل از بار مرده به دست آورده‌ایم فقط در مورد یکی از اعضای این خرپا یعنی U_3L_4 نیروی میله حاصل از جمع بار زنده و ضربه از مقدار نیروی میله‌حاصل از بار مرده تجاوز کرده است و علامت نیروی میله حاصل‌از بار زنده و ضربه مغایر با علامت نیروی میله حاصل از بار مرده می‌باشد .

برای بیان این وضعیت U_3L_4 به‌شرح زیر می‌باشد ، برحسب این که محل قرارگیری بار زنده روی سازه در چه محلی باشد نیروی میله کل حاصل‌از بار مرده + بار زنده+ افزایش‌ضربه می‌تواندکششی یا فشاری گردد .این تغییر نوع تنش را که برحسب حرکت بار زنده درطول دهانه سازه بوجود می‌آید "تغییر علامت تنش" گویند . هرگاه در اعضایی امکان‌تغییرعلامت تنش موجود باشد ،به‌جای استفاده از روش متعارف‌متکی بر تنشهای مجازکه براساس‌بارگذاری $D+L+I$ که در جدول (۷ــ۴)ذکر شده ، می‌باشد ، باید روش تحلیل مطمئنتری برگزید. به‌عنوان مثال آئین نامه‌ای چنین الزام می‌کند "هرگاه در طی عبور کامل بار زنده ،درعضوی تغییر علامت تنش بوجود آید باید هریک از تنشها را برابر با 50 درصد کوچکترین آندو افزایش دهیم و اگر تنشهای حاصل از بار زنده و مرده دارای علامتهای متفاوتی باشند فقط 70 درصد تنش حاصل از بار مرده را در جمع با تنش بار زنده که دارای علامت مغایری با تنش حاصل از بار مرده دارد می‌توان مؤثر فرض نمود . " رعایت نکات این آئین نامه منتج به‌نیروی میلهٔ کل می‌گردد که براساس‌آن نیرو باید عضو مربوطه را که تحت اثر تنش با دو علامت متفاوت قراردارد طرح نمود .چون این ازدیاد تنش را با تنشهای‌مجاز متعارف وارسی می‌نمایند لذا چنین ازدیادتنشی نسبت به‌حالتی که‌بدون در نظر گرفتن این افزایش به‌طرح قطعه می‌پردازد ، اطمینان بیشتری در نظر می‌گیرد .

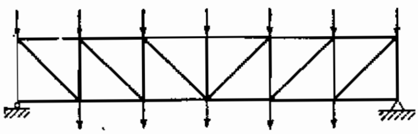
برای این که کاربرد نکات فوق‌الذکر آئین نامه را شرح داده باشیم U_3L_4 را در نظر می‌گیریم :

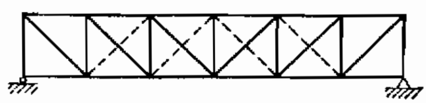
بار مرده	$+27.6$	$0.7(+27.6) = +19.3$
بار زنده + افزایش ضربه	$+58.0$	-38.2
	$+85.6$	-18.9
	$+\ 9.5 = 18.9(0.50)$	$-\ 9.5 = 18.9(0.50)$
	$+95.1$ kips	-28.4 kips

حال قطعه را باید طوری طرح و محاسبه نمودکه در برابر این هردونیروی میلهایستایی نماید .

۷ ـ ۶ کشهای قطری

هر عضوی که دارای ضریب لاغری (خارج قسمت طول بر شعاع ژیراسیون) بزرگی‌باشد تحت اثر هر نیروی فشاری نسبتاً" کوچک نیز کمانه خواهد نمود . این چنین عضوی می‌تواند به‌طور رضایت‌بخشی تحمل کشش نماید ولی فقط قادر به‌تحمل مقدار ناچیزی فشارخواهدبود قطریهای یک خرپا را می‌توان به‌نحوی طرح نمود که دارای چنین خاصیتی باشند . در این صورت بدانها قطریهای کششی گویند . اگر خرپایی فقط‌برای تحمل بار مرده مانند آنچه در شکل (۷ـ۱۱ الف) می‌بینیم طرح شود وجود تنها یک قطـــری کششی در هر پانل آن کافی خواهد بود و همواره می‌توان شیب این قطریها را به‌نحوی انتخاب کرد که برش حاصل‌از بار مرده در پانل فقط ایجاد کشش درآن قطریها بنماید . ولی هرگاه بارهای زنده نیـز مـورد بررسی قرارگیرند ، همواره این امکان وجود دارد که بر اثر موقعیت معینی از بارهای زنده‌که حداکثر برش حاصل از بارهای زنده به‌اضافه افزایش ضربه در پانلی که دارای علامتی مغایـر با علامت برش حاصل از بارهای مرده می‌باشد ، از مقدار برش بارهای مرده تجاوزنماید.این چنین موقعیتی سبب ایجاد فشار در قطریهای کششی خواهد نمود که ابدا" مطلوب نیست . در این صورت باید قطری کششی دیگری که به‌آن کش قطری خواهیم گفت به‌آن پانل اضافـه نمائیم کشهای قطری دارای شیبی در خلاف‌جهت قطری کششی اصلی خواهندداشت.کشهای قطری تحت‌اثر برش بارهای مرده‌تنشی تحمل نمی‌کنندزیرا تحت اثربرش بار مرده‌به‌آهستگی


(الف)


(ب)

شکل ۷ـ۱۱ کاربرد کشهای قطری

کمانه می‌نمایند ولی وقتی برش در پانل بر اثر بار زنده و افزایش ضربه تغییر علامت می‌دهد قطری کششی اصلی کمانه نموده و به‌تنش صفر می‌رسد و در این حالت کش قطری شروع به‌عمل نموده و برش حاصل از مجموع بار مرده، بار زنده و افزایش ضربه را مانند قطعه‌ای کششی تحمل می‌نماید.

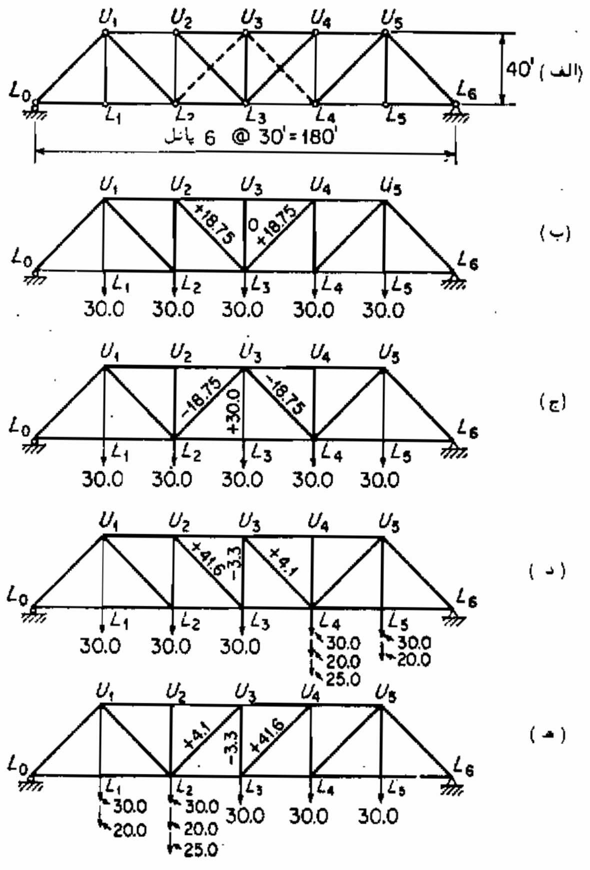
در طرح خرپاهایی که فقط به‌قطریهای کششی نیاز دارند، ابتدا باید پانلهایی که برای آنها کشهای قطری لازم خواهد بود معین شوند. به‌نظر می‌رسد که وجود کشهای قطری در پانلهای میانی خرپا مورد لزوم باشند زیرا در آن پانلها برش حاصل از بار مرده کمتر از برش در پانلهای انتهایی می‌باشد در صورتی که برش حاصل از بارهای زنده که دارای علامتی برخلاف برش بارهای مرده باشند، در پانل میانی افزایش می‌یابند و بیشتر امکان دارد در آن پانلها مقدار آنها از برش بار مرده تجاوز کند. به‌عنوان نمونه در شکل (۷ــ۱۱ ب) کشهای قطری را که با خط چین نمایش داده شده است در چهار پانل میانی خرپا نشان داده‌ایم.

برای این که نحوه تعیین نیروهای میله را در عضوی از یک خرپا که دارای کشهای قطری می‌باشد شرح دهیم به‌محاسبه حداکثر فشار در قطعه U_3L_3 از سازه شکل (۷ــ۱۲ الف) می‌پردازیم. ترسیم خط تأثیر مربوطه، تغییر نیروی میله را در U_3L_3 ــ هرگاه بار واحد در طول کل دهانه خرپا حرکت کند ــ نشان می‌دهد ولی رسم چنان خط تأثیری نمی‌تواند محل اثر بارهای زنده را که سبب ایجاد بیشترین نیروی فشاری در U_3L_3 می‌شوند به‌ما نشان دهد زیرا محاسبه هریک از عرضهای خط تأثیر نسبت به‌این که قطری اصلی و یا کش مربوط در دو پانل میانی عمل نمایند متفاوت خواهد بود. چنین شرطی برای وضعیتهای متفاوت بار واحد متغیر خواهد بود. به‌عنوان مثال اگر بار واحد در L_2 قرار گیرد L_2U_3 و L_3U_4 عمل خواهند نمود ولی U_2L_3 و U_3L_4 دارای تنشی برابر با صفر خواهند بود در صورتی که هرگاه بار واحد در L_3 قرار گیرد، U_2L_3 و L_3U_4 شروع به‌عمل نموده و L_2U_3 و U_3L_4 تنشی تحمل نخواهند کرد. در حقیقت عرضهای مختلف خط تأثیر متناظر با عملکرد متفاوت سازه‌ها خواهد بود و تحت چنین شرایطی اصل جمع آثار صادق نخواهد بود. حداکثر نیروی فشاری در U_3L_3 که تحت اثر مجموع بارهای مرده به‌اضافه زنده و ضربه حاصل می‌شود، بستگی به‌این دارد که کدامیک از قطریهای خرپا تحت اثر بارگذاری کل که منجر به‌فشار حداکثر می‌شوند عمل نمایند.

برای این‌که به‌صورت ساده‌ای موضوع فوق را شرح دهیم فرض کنید که بار پانلی مرده که بر میله‌های تخت پائین وارد می‌شوند برابر با 30.0 kips و بار پانلی زنده یکنواخت برابر با 20.0 kips و بار زنده متمرکز برابر با 25.0 kips بوده و از اثر ضربه صرفنظر کرده باشیم.

چهار حالت مختلفی که قطریهای دو پانل میانی می‌توانند عمل نمایند در شکلهای

(۷–۱۲ ب) تا (۷–۱۲ هـ)نشان داده شده است . اگر به‌صورت شکل (۷–۱۲ ب)عمل‌نمایند با اعمال روش گرهها بر گره U_3 دیده می‌شود که U_3L_3 نمی‌تواند تنش قبول نماید اگر مانند شکل (۷–۱۲ ج) عمل نمایند با اعمال روش گرهها بر گره L_3 معلوم می‌شود که بار زنده نمی‌تواند طوری قرار گیرد که در U_3L_3 ایجاد فشار نماید . حتی تحت اثر بارهای مرده نیز چنین‌چیزی غیرممکن‌می‌باشد ،گرچه در این‌حالت L_2U_3 و U_3L_4 الزاما"تحمل‌فشارمی‌نمایند. اگر قطریها مانند شکل (۷–۱۲ ب) عمل نمایند بارهای زنده باید به‌نحوی که نشان داده شده‌است قرارگیرند تا این‌که در U_3L_3 حداکثر فشار بوجود آید . امکان ایجاد چنین حالتی وجود دارد زیرا در یک چنین حالتی U_2L_3 و U_3L_4. هردو بکشش عمل‌نموده ومنتج به‌فشاری برابر با -3.3 kips در U_3L_3 می‌گردد. و اگرقطریها مانند شکل (۷–۱۲ هـ)عمل کنند همان فشار قبلی یعنی -3.3 kips در U_3L_3 ایجاد می‌شود و چون L_2U_3 و L_3U_4 هردو به‌کشش کار



شکل ۷–۱۲ تحلیل خرپا که دارای کشهای قطری است

می‌کنند لذا یک چنین حالتی نیز امکان اتفاق دارد .

به‌این ترتیب می‌توان نتیجه‌گرفت که حداکثر فشارممکن در U_3L_3 برابر با 3.3 kips− می‌باشد .

هرگاه خرپایی دارای کشهای قطری باشد تعیین حداکثر نیروی میله‌هائی‌که تحت‌تأثیر عملکرد کشهای قطری می‌باشند به‌روش آزمون و خطا امکان‌پذیر است و به‌این ترتیب کلیه وضعیتهای بارهای زنده را که می‌توانند به‌حداکثر نیروی میله مطلوب بیانجامند باید مورد تفحص قرار دارد همین‌طور اگر قطریهایی را که فقط قادر به‌تحمل کشش می‌باشند مؤثر فرض کنیم نتیجه تفحص و محاسبات زمانی قبول خواهد بود که نیروی میله‌های مربوط به‌آن قطریها نشان‌دهنده کشش در آنها باشند .

۷ – ۷ پلهای متحرک – کلیات

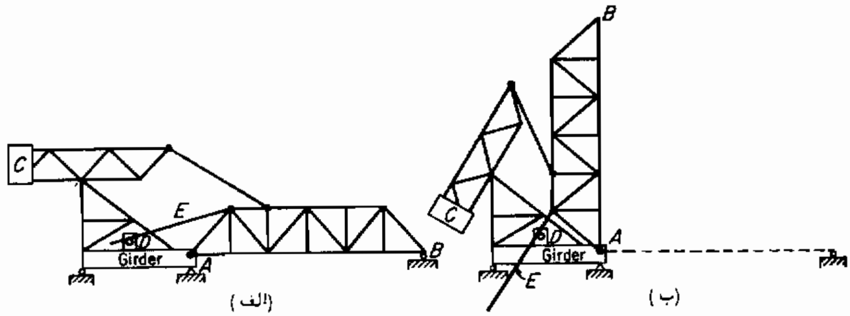
هرگاه نقشه‌برداری پلسازی منطقه نشان دهدکه سطح جاده‌عبوری پل بایدنزدیک‌سطح آزاد آب زیر پل قرار گیرد ، فاصله آزاد عمودی زیر پل و آب ممکن است مجبور نماید برای این که کشتیرانی زیر پل انجام‌گیرد پلی متحرک در آن محل ساخته شود . پل متحرک‌به‌پلی اطلاق می‌شود که جهت عبور کشتیها قادر به‌حرکت باشد سه نوع مهم پلهای متحرک به‌قرار زیر می‌باشند : ۱ – پلهای قپانی ۲ – پلهای بالارونده و ۳– پلهای چرخان افقی .انتخاب صحیح هریک از این سه نوع بستگی کامل به‌فاصله آزاد عمودی لازم جهت کشتیرانی دارد و در هرصورت بررسی لازم برای این که در محلی معین بایجاد پلی متحرک در ارتفاع پائین و به‌ایجاد پلی ثابت در ارتفاع بالا اقدام شود ، معمولا" فقط‌با مطالعات دقیق اقتصادی امکان‌پذیر می‌باشد .

۷ – ۸ پلهای قپانی

پلهای قپانی زمانی اقتصادی خواهند بود که دهانه لازم برای‌کشتیرانی طولانی‌نبوده ولی ارتفاع آزادلازم برای آن زیاد باشد .نوع متداولی از پلهای قپانی درشکل(۷–۱۳)نشان داده‌ایم در این‌نوع نیروی محرکی چرخ‌دنده D را می‌گرداند و چنین‌عملی بازوی E راجابجا کرده و به‌این ترتیب بازشدن و یا بسته شدن دهانه پل انجام می‌گیرد ، وجود وزنه تعادل C سبب تقلیل نیروی لازم محرک می‌گردد .

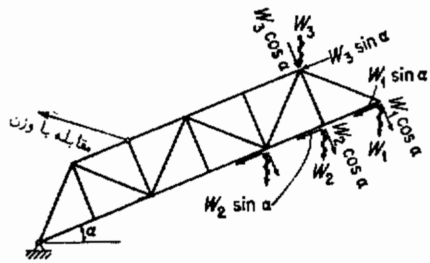
نیروی میله‌های حاصل‌از بار مرده در یک پل قپانی وقتی که پل باز یا بسته‌باشدتغییر

می‌نماید و ممکن است در بعضی از قطعات نیروی میله‌های حاصل از بار مرده در طی این عملیات تا اندازه‌ای افزایش یابدکه از کل‌نیروی میله‌ها ــ حتی زمانی که پل بسته‌بوده و تحت اثر عبور باشد ــ بیشتر گردد .



شکل ۷ــ۱۳ پل میانی

برای این که حداکثر نیروهای میله را که در اثر بازشدن و بسته شدن دهانه بوجود می‌آید تعیین کنیم فرض‌کنید که F_H نیروی میله حاصل از بار مرده عضوی در حالت افقی دهانه پل بوده و F_V نیروی میله حاصل از بار مرده همان عضو پس‌از آن که دهانه به‌صورت عمودی رسیــد باشد (به‌عبارت دیگر وقتی به‌اندازه $90°$ از وضعیت بسته خود تغییر نمود) . هردوی این مقادیر را می‌توان به‌سادگی به‌روشهای متعارف تحلیل بدست آورد . اگــر پــل کاملا" بازنشده باشد به‌طوری‌که میله‌های تخت پایین آن با افق زاویه α بسازند(همان‌طوری که درشکل(۷ــ۱۴)دیده می‌شود) کلیه بار پانلی مرده را می‌توان به‌دو مولفه عمودی و مــوازی با میله‌های تحتانی تجزیه نمود . مولفه‌های بار مرده که عمود بر میله‌های اصلی تحتانی می‌باشند ،نیروی میله‌هایی برابر با $F_H \cos \alpha$ ایجاد خواهند کرد در حالی‌که مولفه‌های بار مرده که به‌موازات میله‌های تخت پائین می‌باشند نیروی میله‌هایی برابر با $F_V \sin \alpha$ ایجاد خواهندکردو بنابراین برای زاویه‌غیرمشخص α نیروی میله حاصل‌از بار مرده یعنی F_D برای



شکل ۷ــ۱۴ پل قپانی که کاملا" باز نشده است

هر عضو غیرمشخص برابر خواهد شد با :

$$F_D = F_V \sin \alpha + F_H \cos \alpha \qquad \text{(الف)}$$

اگر مشتق F_D را نسبت به α برابر با صفر قرار دهیم :

$$\frac{dF_D}{d\alpha} = F_V \cos \alpha - F_H \sin \alpha = 0$$

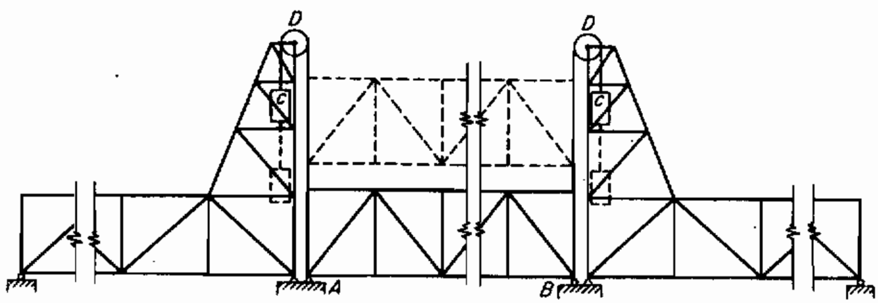
از این رابطه خواهیم داشت : $\tan \alpha = F_V/F_H$ با قرار دادن این مقدار در معادله (الف) خواهیم داشت :

$$\text{Max } F_D = F_V \frac{F_V}{\sqrt{F_V^2 + F_H^2}} + F_H \frac{F_H}{\sqrt{F_V^2 + F_H^2}} = \sqrt{F_V^2 + F_H^2} \qquad (۱-۷)$$

اگر پل بسته باشد عکس‌العمل بار مرده در انتهای آزاد پل صفر خواهد بود زیرا وزنهٔ تعادل بار مرده را در تعادل حفظ می‌نماید ، ولی بارهای زنده نظیر یک پل روی دو تکیه‌گاه انتهایی در هردو انتهای پل ایجاد عکس‌العمل خواهند نمود .

۷ ـ ۹ پلهای بالا رونده

هرگاه دهانهٔ آزاد افقی لازم بیشتر از ارتفاع آزاد عمودی مورد نیاز برای کشتیرانی باشد به‌نظر می‌رسد که پلهای بالارونده اقتصادی تر باشند . نوع متداول از این نوع پلها را در شکل (۷ ـ ۱۵) ما نشان داده‌ایم . در این پل ، دهانهٔ AB توسط کابلهایی که از روی قرقره‌های D ـ که خود بر بالاترین نقطه پایه‌ها نصب شده‌اند ـ رد شده به‌پائین و بالاحرکت

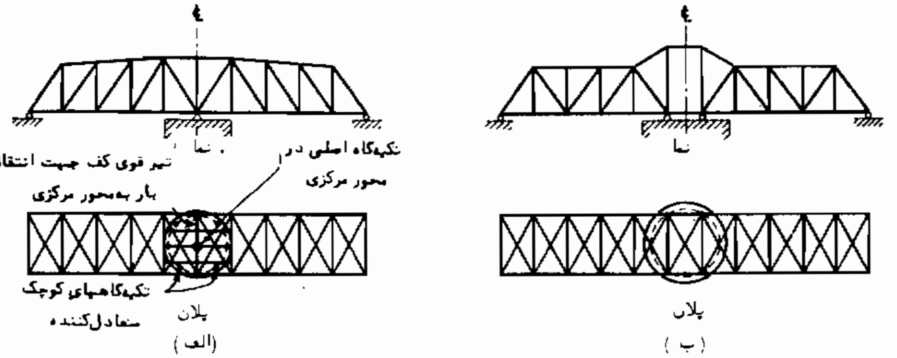


شکل (۷ـ۱۵) پل بالارونده

می‌کند . مقدار نیروی محرک لازم برای این حرکت توسط وزنه‌های تعادل C کاهش داده شده است ،عموماً" این وزنه‌ها را طوری طرح می‌کنند که جهت تعادل کل بار مرده دهانه متحرک پل کافی باشد به‌این جهت عکس‌العملهای بارمردهٔ پل توسط کابلها تحمل می‌شوند ولی بارهای زنده روی دهانه متحرک پل تولید عکس‌العملهایی می‌کنند که بر پی‌های A و B وارد می‌شوند .

۷ ــ ۱۰ پلهای چرخان افقی

پلهای چرخان افقی ارتفاع آزاد عمودی نامحدودی را ایجاد می‌کنند ولی پایه میانی آنها به‌عنوان نقطهٔ کوری در عبور و مرور آبی آن باقی می‌ماند . برای این چنین پل متحرکی سطح افقی وسیعی موردنیاز می‌باشد ، پلهای چرخان افقی را می‌توان به‌دو صورت با تکیه‌گاه مرکزی به‌طوری که در شکل (۷ــ۱۶ الف) دیده می‌شود و با تکیه‌گاه حلقوی چنان‌که در شکل (۷ــ۱۶ ب) نشان داده شده است ایجاد نمود . در هرصورت پل حول محور عمودی مرکزی خود به‌طور افقی چرخیده و باز می‌شود ، وقتی که پل باز است دو دهانه آن به‌صورت طره‌ای ازپایه میانی قرارداشته و سازه معین‌می‌باشد و وقتی پل بسته‌است خرپاها به‌صورت سرتاسری بوده و لذا نامعین خواهند شد . تحلیل تنش در حالت بسته پل براساس اصولی‌که‌در قسمت مربوط‌به‌سازه‌های نامعین در کتاب می‌باشد انجام خواهد گرفت .



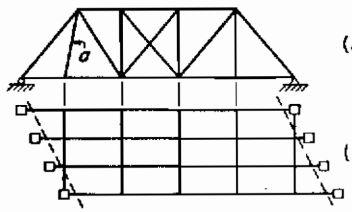
شکل ۷ ــ۱۶ پل چرخان افقی

وقتی یک پل چرخان بسته‌است مقدارعکس‌العملهای انتهای بیرونی‌آنها‌بستگی به‌طرح خواهد داشت اگر این نقاط‌انتهایی فقط‌تکیه‌گاههای خود را لمس نمایند . کوچکترین اثر بار زنده‌ای در یک دهانه‌سبب جداشدن انتهای بیرونی دهانه دیگر از تکیه‌گاه خودخواهند .

شد ، معمولا" از وقوع چنین حالتی توسط بلندکردن دو انتهای آن به‌مقدار ناچیزی در زمان بسته بودن پل جلوگیری می‌کنند ، به‌این ترتیب عکس‌العمل بار مرده را می‌توان به‌نوعی محاسبه نمود که مقدار آن از عکس‌العمل حداکثر بار زنده با علامت مخالف آن بیشتر باشد .

۱۱ ـ ۷ پلهای اریب

اگر تکیه‌گاههای پلی در امتداد عمود بر محور طولی پل قرار نگرفته باشد پل را اریب گویند . شکل (۷ـ۱۷ ب) پلان چنین سازه‌ای را نشان می‌دهد ، به‌منظور جلوگیری‌ازپیچیده شدن سازه معمولا" تیر ریزی کف یک چنین پلی را عمود بر خرپاهای اصلی قرار می‌دهند، یک چنین عملی سبب نامتقارن شدن خرپاهای اصلی می‌گردد . میله‌های اصلی دو انتهای خرپاها دارای یک شیب بوده و پرتالهای‌انتهایی پل در یک صفحه قرار خواهند گرفت‌چنین عملی ممکن است منجر به‌ایجاد میله متمایلی نظیر a در شکل (۷ـ۱۷ الف) گردد .



شکل ۷ـ۱۷ پل اریب

محاسبه نیروی میله‌ها دراعضای یک خرپای پل اریب‌می‌تواند به‌همان روش کلی‌مشروح برای پلهای عمود بر تکیه‌گاههای خود انجام گیرد ولی در هرصورت وقتی به‌اثربارهای‌زنده می‌پردازیم باید ناهماهنگ‌بودن تیرریزی کف‌را در محاسبات خودملحوظ‌کنیم ،چنین‌عملی در جزئیات مربوط به‌محاسبات بارهای زنده پانلی تأثیرگذاشته و سبب خواهد شدکه‌بارهای وارده بر کلیه‌نقاط پانلی یکسان نباشد .

۷ ـ ۱۲ مسائل

۷ ـ ۱ برای خرپاهای پوششی سقفها و بارگذاریهای بخش ۷ـ۲ :

(الف) حداکثر کششی و فشاری نیروی میله‌های هریک از اعضای نیمه چپ‌خرپاراتحت اثر بار مرده به‌اضافه بار باد محاسبه نمائید .

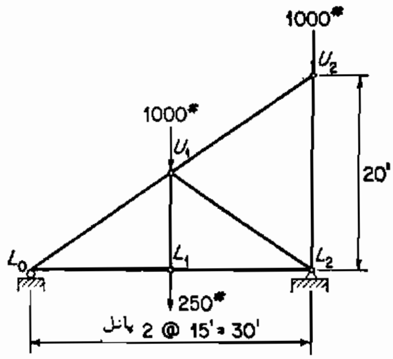
(ب) نیروهای میله بهدست آمده در قسمت "الف "را با حداکثرنیروهای میله داده شده در جدول نیروی میله (۷-۲) مقایسه نمائید اگر عضوی در بارگذاری الف بیشترین بار را تحمل میکند آن عضو را تحت آن بار محاسبه کنید (توجه: در قسمت ب افـزایش تنـش مجاز قطعات را برای بارگذاری تحت اثر بـاد در نظر نیاورید)

(ج) آیا لازم است این خرپا را بهخاطر جلوگیری از بلندشدن آن مهار کنیم ؟ اگـر چنین قیدی الزامی است نیروی بلندکننده احتمالی را که برای آن نیرو میل مهار لازم باید تعیین شود محاسبه کنید . ضریب اطمینان محاسباتی را برای این نیرو برابر با ۵۰ درصـد فرض کنید .

۷ ــ ۲خرپای پوششی شکل(۷ـ۱۸) یکی ازخرپاهای میانی سری خرپاهایی است که به فاصله 15-ft از یکدیگر قرار گرفته اند ، بار مرده موثر براین خرپا در شکل نشان داده شده است بار برف برابر با $20\ lb/ft^2$ بر سطح افقی خواهد بود . بار باد با استفاده ازفرمول دوخمین و براساس شده فشار بادی برابر با $20\ lb/ft^2$ بر سطح عمودی محاسبه خواهد شد . برای هریک از بارگذاریهای زیر کلیه نیروی میلههای حداکثر را برای هریک از میلههـا چه بهصورت فشاری و چه بهصورت کششی محاسبه کنید : ۱ ــ بار مرده بهاضافه برف ۲ــ بار مرده بهاضافه بار باد (توجه شود که باد از هریک از دوسو میتواند بوزد) .کدامیک ازنیروی میلهها برای طرح و محاسبه اعضای خرپا بهکار خواهد رفت .

جواب :

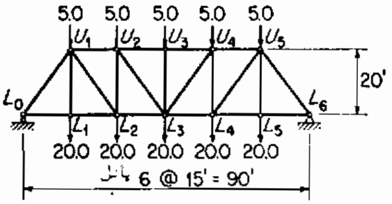
$$L_0L_1 = +4{,}310,\ -20;\ U_1U_2 = +1{,}530,\ -3{,}610;\ U_2L_2 = +1{,}000, -3{,}760\ \text{lb}$$



شکل ۷ــ۱۸ مساله ۷ــ۲

۷ ــ ۳ درشکل(۷ــ۱۹) بار پانلی مردهخرپای پلی برحسب kips نشان داده شده است ، این خرپا تحت اثر بار زنده یکنواختی بهشدت $1.0\ kip/ft$ و بار متمرکزی برابر با 15.0 kips قرار

دارد ، اثر ضربه را براساس رابطه (۱ــ۱) محاسبه خواهیم کرد . برای نیروی میله‌های‌اعضای نیمه چپ این خرپا جدولی تهیه‌کنید که دارای ستونهایی برای : بارمرده ،بارزنده‌یکنواخت بار زنده متمرکز ، کل بار زنده ، اثر ضربه ، بار زنده به‌اضافه ضربه و جمع کل بار مرده + بار زنده + ضربه داشته باشد .برای تعیین نیروی میله‌ای حاصل از بار زنده روش تحلیل‌تقریبی را به‌کار گیرید .اگر برای میله‌ای نیروی میله‌ای فشاری و کششی موجوداست هردو راذکرکنید، ترکیب بار مرده ، بار زنده و ضربه را (الف) با روش جمع جبری (ب) برحسب آئین نامه مذکور در بخش (۷ــ۵))برای اعضای تحت اثر تنش با امکان تغییر علامت ، معین کنید .



شکل ۷ــ۱۹ مسائل ۷ــ۳ و ۷ــ۴

جواب :

(الف) $L_0L_1 = +93.1$: $U_1U_2 = -148.9$; $U_1L_2 = +101.6$ kips

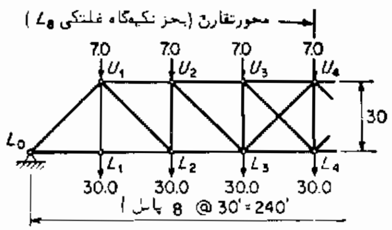
(ب) $U_2L_3 = -14.3,\ +56.5$; $U_2L_2 = -48.3,\ +6.0$ kips.

به‌جز اعضای فوق عضو دیگری تحت تنش با دو علامت قرار نمی‌گیرد .

۷ ــ ۴ اگر فرض شودکه قطریهای خرپای شکل(۷ــ۱۹) فقط قادربه‌تحمل کشش باشنددرکدامیک از پانلهای آن نیاز به‌کشهای قطری می‌باشد .

جواب : کشهای قطری L_2U_3 و U_3L_4 موردنیاز است .

۷ ــ ۵ بارهایی‌که درشکل(۷ــ۲۰) بر خرپا وارد می‌شود نشان دهنده بارهای پانلی مرده برحسب kips می‌باشد . قطریهای این خرپا فقط قادر به‌تحمل کشش می‌باشند ، برای‌خرپا بارهای زنده : یکنواخت به‌شدت 0.700 kip / ft و متمرکز برابر با 20.0 kips اثرمی‌کند اثر ضربه را بر اساس معادله (۱ــ۱)محاسبه خواهیم کرد ، حداکثر نیروی میله‌ها را تحت‌اثر مجموع بار مرده+بارزنده+ اثر ضربه در (الف) L_1U_1 (ب) U_3U_4 محاسبه کنید .



شکل ۷ــ۲۰ مساله ۷ ــ ۵

۷ ــ ۶ شکل(۷ــ۲۱)نشان‌دهنده یک دهانه باسکولی‌است که برآن بارهای‌پانلی مرده‌برحسب kipsاثر می‌کند .

(الف) نیروی میله‌ها و کشش دربند اتصال به‌وزنه تعادل را تحت اثر بارهای مرده‌در حالت بسته دهانه مطابق شکل محاسبه کنید .

(ب) حداکثر نیروی میله حاصل از بارهای مرده را هرگاه دهانه فوق‌الذکر تا زاویه $90°$ بلند شود برای کلیه میله‌ها به‌جز میله L_0U_1 محاسبه کنید .

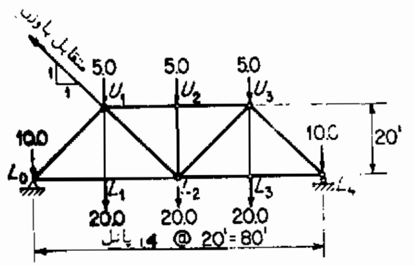
(ج) آیا روش تحلیل مذکور در قسمت(ب)برای محاسبه حداکثر نیروی میله حاصل‌از بار مرده در L_0U_1 نیز صادق است ؟

جواب :

(الف) $L_0L_1 = -105.0;\ U_1L_2 = +84.85;\ U_2U_3 = +45.0$ kips

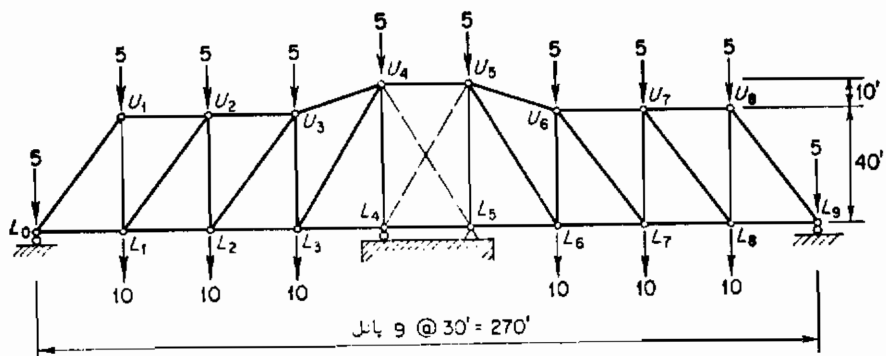
(ب) $L_2L_3 = -31.62;\ U_1U_2 = +45.0,\ -10.0;\ L_2U_3 = -49.50$ kips

(ج) خیر.



شکل ۷ــ۲۱ مساله ۷ــ۶

۷ ــ ۷ شکل(۷ــ۲۲) خرپای یک پل چرخان افقی را که تحت اثر بارهای مرده خود بــر حسب kips می‌باشد نشان‌می‌دهد ،اعضایی‌که با خط‌چین نشان داده شده‌است فقط قادربه‌تحمل کشش می‌باشند .



شکل ۷ ــ ۲۲ مساله ۷ــ۷

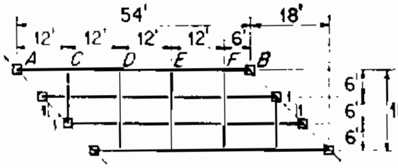
(الف) نیروی میله‌ها را تحت‌اثر بار مرده آن زمانی‌که پل چرخیده و به‌حالت‌باز قرار گرفته باشد حساب کنید .

(ب) وقتی که پل بسته است هریک از دو انتهای سازه به‌اندازه 1 in بالاتر ازسطح آن در موقع بازبودن قرار می‌گیرند ، اگر نیرویی برابر با 10 kips بـــه‌سمت بالا در L_0 وقتـــی که پل باز است اثر کند ، این نیرو سبب می‌شود که L_0 به‌اندازه 1 in بالارفته و L_8 به‌اندازه $\frac{1}{4}$ in پائین رود ، به‌این ترتیب عکس‌العملهای حاصل از بار مرده را در L_0 و L_8 هرگاه پل بسته باشد حساب کنید .

۷ ــ ۸ پل اریبی برای یک خط راه‌آهن طرح شده‌است و پلان آن را در شکل(۷ــ۲۳) می‌بینیم وزن ریل با بستهای آن 500 lb/ ft بوده و وزن هر تیر طولی با اتصالات آن 125 lb/ ft ، وزن هر تیر عرضی کف با اتصالات آن 175 lb /ft می‌باشد .

(الف) آن قسمت از بارهای پانلی مرده را که بر شاهتیر AB از طریق تیرهای عرضی کف به‌شاهتیر در نقاط پانلی C, D, E و F وارد می‌شود محاسبه کنید .

(ب) اگر بر ریل فوق‌الذکر بار زنده یکنواختی به‌شدت 5,000 lb / ft در طـــول کل سازه وارد شود ، بارهای پانلی زنده‌ای که بر شاهتیر AB از طریق تیرهای عرضی‌کف‌درنقاط پانلی C, D, E و F وارد می‌شوند چه مقدار خواهند بود .



شکل ۷ــ۲۳ مساله ۷ــ۸

۸

سازه‌های با دهانهٔ وسیع

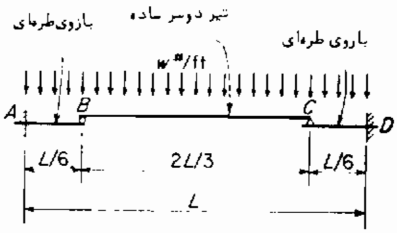
۸ ــ ۱ مقدمه

به‌همان میزان که دهانهٔ سازه‌ای وسیعتر می‌گردد ، اگر سازه‌ای با دو تکیه‌گاه انتهایی ساده به‌کاربرده باشیم به‌همان میزان لنگر خمشی مؤثر بر سازه به‌سرعت افزایش می‌یابد . حتی اگر شدت بارمؤثر بر سازه با افزایش دهانه افزایش نیابد لنگرحاصله‌ازبارهای گسترده متناسب با مربع دهانه تغییر خواهد کرد . عملاً بار مرده متناسب با دهانه‌افزایش می‌یابد و به‌این جهت لنگر خمشی با میزانی بزرگتراز مربع دهانه افزایش می‌یابد و چون تنشهای موجود در میله‌های اصلی خرپا متناسب با لنگر خمشی متحمله توسط خرپاها می‌باشد ،دیده می‌شود که وسعت دهانه اهمیت بسیاری در طرح و محاسبه‌خرپاها و همچنین‌درطرح ومحاسبه تیرها و شاهتیرها دارد .

در سازه‌های اقتصادی ، ترجیح داده می‌شود در صورتی که دهانه آنها وسیع باشد روشهای ساخت مطلوبی را جهت تقلیل لنگرهای خمشی به‌مقادیری کمترازآنچه امکان‌ایجاد آن در سازه‌های با دو تکیه‌گاه ساده انتهایی موجود است به‌کار برند .روشهای‌متعددی‌جهت جامه عمل پوشاندن به‌هدف فوق وجود دارد ، در این فصل به‌شرح برخی از این روشها با ذکر محاسبه چندین سازه با دهانه وسیع خواهیم پرداخت .

۸ ــ ۲ *سازه‌های طره‌ای ــ کلیات*

در سازه‌های طره‌ای لنگرهای خمشی را با کوچک‌نمودن قسمتی از دهانه که تحمل لنگر مثبت‌می‌نماید تقلیل‌می‌دهند به‌این‌ترتیب‌که تیری با دو تکیه‌گاه انتهایی‌ساده و با دهانه‌ای کوچکتر از دهانه کل را بر تیرهای‌طره‌ای که تحمل لنگر منفی می‌نمایند تکیه می‌دهند . سازه شکل(۸ــ۱) طرز ساختن یک سازه‌ای طره‌ای را نشان می‌دهد ،این سازه معین می‌باشد . لنگر



شکل ۸ـ۱ طرز ساختن سازه طره‌ای

حداکثر در تیر BC برابر است با :

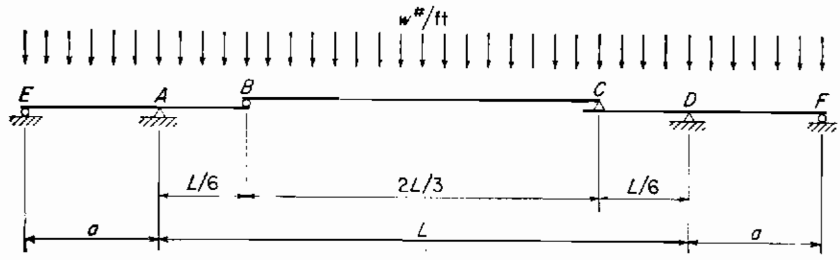
$$\frac{1}{8}w\left(\frac{2L}{3}\right)^2 = \frac{wL^2}{18}$$

حداکثر لنگر در بازوی طره‌ای AB در نقطه A بوده و برابر با مقدار زیر خواهد بود :

$$-\frac{w}{2}\left(\frac{2L}{3}\right)\left(\frac{L}{6}\right) - w\left(\frac{L}{6}\right)\left(\frac{L}{12}\right) = \frac{-5wL^2}{72}$$

اگر تیری با دهانهٔ L به‌کار برده می‌شد لنگر حداکثر برابر با $+wL^2/8$ می‌گردید . در این حالت تقلیل لنگرحداکثر به‌دلیل طره‌ای‌کردن سازه برابربا تفاوت بین $wL^2/8$ و $5wL^2/72$ می‌باشد و به‌عبارت دیگر در حدود ۴۵ درصد است . باید خاطرنشان کرد که حداکثر لنگر تنها ضابطه‌ای نیست که برحسب آن مزیت نسبی انواع مختلف سازه‌ها را باهم بتوان‌مقایسه نمود .ولی در هرصورت یکی از مهمترین ضوابط تعیین انتخاب سازه برای دهانه‌ای مشخص می‌باشد .در محاسبات عملی کلیه لنگرها و برشهای حاصل از کلیه انواع بارگذاریها،ازجمله بارهای زنده را باید در طول کل دهانه سازه محاسبه نمود .

به‌دلیل شرایط متعددی ،ایجاد گیرداری لازم درتکیه‌گاههای A و D ازطره‌های AB و CD شکل (۸ـ۱)مشکل‌خواهد بود ،لذا در شکل(۸ـ۲) همان‌اصل به‌کارگرفتن‌طره‌را مراعات



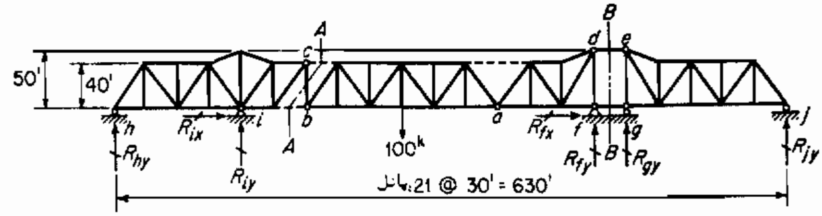
شکل ۸ـ۲ نمونه‌ای از شاهتیر طره‌ای پل

کرده ولی مشکلات موجود را نیز رفع کرده‌اند ، به‌نوعی که لنگر در بین A و D این‌سازه‌عینا" نظیرلنگرها در سازهٔ شکل(۸ــ۱)می‌باشد ، البته لنگرها در نقاط A و D تــوسط دهانه‌های کناری AE و DF مهارمی‌شوند به‌عنوان‌مثال لنگر در A توسط عکس‌العمل‌در E و کل بارموءثر بین E و A مهار می‌گردد .

۸ ــ ۳ مشخصات ایستایی سازه‌های‌طره‌ای

برای این که سازه‌ای‌طره‌ای نسبت به‌نیروهای خارجی خود معین باشد باید بتوان به‌تعداد عکس‌العملهــای‌مستقل سازه معادلات مستقل جهت محاسبه نیروهای خارجی برقرار نمود ، به‌استثنای تیر ساده طره، سایر سازه‌های‌طره‌ای همواره دارای بیش از سه عکس‌العمل مستقل می‌باشند در جائی که فقط سه معادله مستقل تعادل جهت اعمال به‌کل سازه وجود دارد .بنابراین برای این‌که سازه‌ای‌طره‌ای‌را تبدیل به‌سازه‌ای‌معین نمائیم‌لازم‌است به‌تعداد لازم اتصالات اجرایی مناسب در آن به‌کار بریم تا بتوانیم به‌قسمتهای مختلف آن بــه طور جداگانه معادلات تعادل را اعمال کنیم و به‌این ترتیب دیده می‌شود که معادلات مستقل خاص سازه نیز بر معادلات فوق اضافه می‌گردد . برخی از این اتصالات اجرایی درخودسازه طره‌ای مستتراند ولی برخی دیگر را به‌طرز مطلوب ، باید ایجاد کرد .

درشکل(۸ــ۳) اتصالات اجرایی فوق‌الذکررا شرح داده‌ایم .مفصل a یکی‌ازاین‌اتصالات اجرایی است ، زیرا که معادله $\Sigma M_a = 0$ را می‌توان به‌کلیه بارهای موءثر به‌هریک از طرفین سازه نسبت به a اعمال نمود ، مفصل b نیز مانند مفصل a است زیرا که می‌توان رابطه $\Sigma M_b = 0$ را بر کلیه نیروهای موءثر به‌هریک‌از دوقسمت طرفین این مفصل اعمال نمود .



شکل ۸ــ۳ خرپای طره‌ای پلها

مفصل c نیز امکان به‌کاربردن رابطه $\Sigma M_c = 0$ را در مورد کلیه نیروهای موءثــر به‌هریک از قسمت‌های طرفین مفصل c را به‌ما می‌دهد . به‌جای این که مفصل c را بــه ایــن طریق به‌کار بریم معمولا" اگر به‌طرز مشروح زیر عمل شود مزیت بیشتری خواهد داشت :چون

در هردو نقطه b و c مفصل وجود دارد لذا میلهٔ bc مانند یک بند اتصال عمل می‌نماید و به‌این طریق نتیجه گرفته می‌شود که اگر برشی به‌نحوی که bc را قطع کند در نظر بگیریم مجموع نیروهای عمود بر bc که به‌هریک از دوقسمت برش فوق‌الذکر وارد می‌شوند برابر با صفر خواهد بود ، در این حالت مورد بحث مطلب فوق به‌این معنی است که امکان اعمال معادله $\Sigma F_x = 0$ بر کلیه نیروهای مؤثر بر سازه‌و واقع در یک سوی برش A-A وجود دارد .

حذف قطری در پانل defg نیز ایجاد نوعی اتصال اجرایی می‌کند که اجازه استفاده‌از یک معادله مستقل تعادل دیگر را نسبت به‌نیروهای خارجی به‌ما می‌دهد ، زیرا که به دلیل چنین حالتی این پانل نمی‌تواند هیچ نیروی برشی تحمل نماید ، بنابراین معادله را می‌توان بر کلیه نیروهای مؤثر بر یک سوی برش B-B به‌کار برد .

دیده می‌شود که هفت معادله مستقل زیرین را می‌توان برای محاسبه عکس‌العملهای این سازه اعمال نمود :

(۱) $\Sigma M = 0$ برای کلیه نیروهای مؤثر بر سازه

(۲) $\Sigma F_x = 0$ برای کلیه نیروهای مؤثر بر سازه

(۳) $\Sigma F_y = 0$ برای کلیه نیروهای مؤثر بر سازه

(۴) $\Sigma M_a = 0$ برای کلیه نیروهای مؤثر بر یک سوی مفصل a

(۵) $\Sigma M_b = 0$ برای کلیه نیروهای مؤثر بر یک سوی مفصل b

(۶) $\Sigma F_x = 0$ برای کلیه نیروهای مؤثر بر یک سوی برش A-A.

(۷) $\Sigma F_y = 0$ برای کلیه نیروهای مؤثر بر یک سوی برش B-B

دراین سازه‌همچنین هفت‌عکس‌العمل مستقل‌به‌ترتیب‌زیر $R_{hy}, R_{iy}, R_{ix}, R_{fy}, R_{fx},$ R_{yy} و R_{jy} نیز وجود دارد . بنابراین ،این سازه نسبت به‌نیروهای خارجی آن معین می‌باشد می‌توان ملاحظه نمود که این سازه هم نسبت به‌نیروهای داخلی و هم نسبت به‌نیروهای خارجی‌اش معین است زیرا جمع کل تعداد میله‌ها (75) به‌اضافه جمع کل عکس‌العملها (7) برابر با دو برابر تعداد گرههاست $(2 \times 41) = 82$:

۸ ــ ۴ تحلیل تنش خرپاهای طره‌ای

برای این‌که عکس‌العملهای سازه شکل (۸ــ۳) را با در نظرگرفتن بارگذاری مؤثر برآن محاسبه کنیم می‌توان به‌صورت زیر عمل نمود : فرض کنید که کلیه عکس‌العملها در جهات نشان داده شده عمل کنند . معادله $\Sigma F_x = 0$ را بر قسمتی از سازه که در طرف چپ برش A-A واقع است اعمال کنید معلوم می‌شود که $R_{rx} = 0$ می‌باشد .

معادله $\Sigma F_x = 0$ را بر کل سازه اعمال کنید معلوم می‌شود که $R_{fx} = 0$ است .
معادله $\Sigma M_b = 0$ را بر قسمتی از سازه که در طرف چپ مفصل b واقع است اعمال کنید :

$$+R_{hy}(6)(30) + R_{iy}(2)(30) = 0 \qquad R_{iy} = -3R_{hy}$$

معادله $\Sigma M_a = 0$ را بر قسمتی از سازه که در طرف چپ مفصل a واقع است اعمال کنید :

$$-(100)(3)(30) + R_{hy}(12)(30) + (-3R_{hy})(8)(30) = 0 \qquad R_{hy} = -25$$
$$R_{iy} = -3(-25) = +75$$

معادله $\Sigma F_y = 0$ را بر قسمتی از سازه که در طرف چپ برش B-B واقع است اعمال کنید .

$$-25 + 75 - 100 + R_{fy} = 0 \qquad R_{fy} = +50$$

معادله $\Sigma F_y = 0$ را بر قسمتی از سازه که در طرف راست برش B-B واقع است اعمال کنید .

$$+R_{gy} + R_{jy} = 0 \qquad R_{gy} = -R_{jy}$$

و بالاخره معادله $\Sigma M_a = 0$ را بر قسمتی از سازه که در طرف راست مفصل a واقع است اعمال کنید .

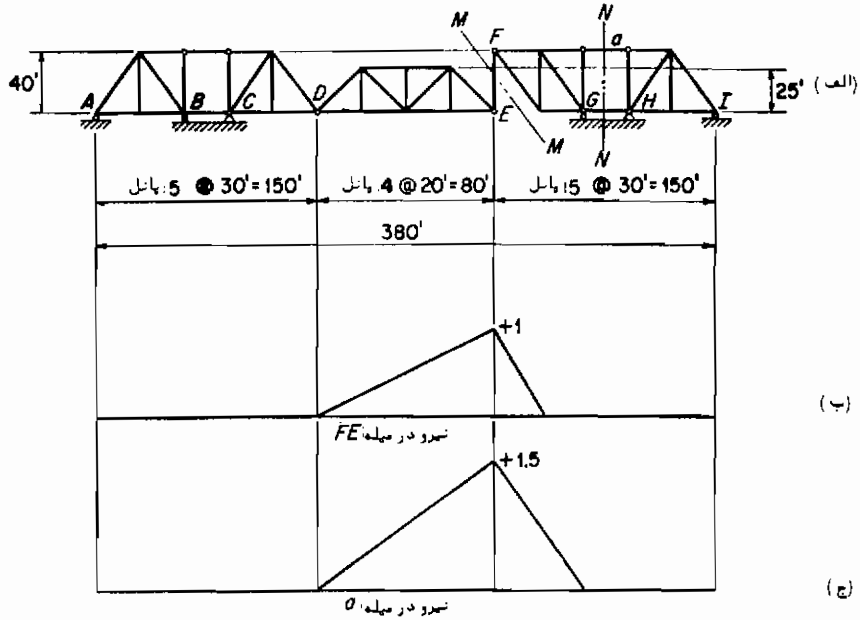
$$-50(3)(30) - (-R_{jy})(4)(30) - R_{jy}(9)(30) = 0$$
$$R_{jy} = -30 \qquad R_{gy} = +30$$

معادلات موجودرا می‌توان با ترتیبهای مختلف به‌کار برد و اگر سازه پایدار باشدکلیه صور گوناگون منجر به نتایجی یکسان خواهد شد .

پس از آن که عکس‌العملها معلوم شدند ، نیروی میله‌ها را می‌توان با روشهای متعارف تحلیل سازه‌های خرپایی معین تعیین نمود . چون امکان انجام تحلیل سازه برای هر نیروی واحدی واقع در هریک از نقاط پانلی ممکن است ، لذا رسم خطوط تأثیر برای عکس‌العملها و یا برای هریک از نیروی میله‌ها منجر به‌مشکلی نخواهد شد ولی با وجود این بهتر است که قبل ازپرداختن به‌میله موردنظر به‌رسم‌خطوط تأثیر برای عکس‌العملها و باسایر نیروی میله‌ها پرداخت و سپس با استفاده از معلوماتی که به‌این‌طریق حاصل می‌شود به‌رسم خط تأثیر مورد نظر اقدام نمود .

آنچه در اینجا ذکر شد در رسم خط تأثیر میله a از سازهٔ شکل (۸ـ۴ الف) شرح‌داده شده است ، ابتدا خط تأثیر میله FE را با لنگرگیری حول D از کلیه نیروهای مؤثر بر قسمتی از سازه که بین D و برش M-M واقع می‌باشند رسم می‌کنیم و سپس خط تأثیر میله a را با

محاسبه نیروی آن توسط لنگرگیری حول G از کلیه نیروهای مؤثر بر قسمتی از سازه که بین برشهای M-M و N-N واقع‌اند رسم می‌کنیم ، نیروهائی که‌در معادلات حاصل وارد می‌شوند عبارت از نیروی موجود در آویز FE ، نیروی واحد وارده و نیرو در میلهٔ a خواهد بود .

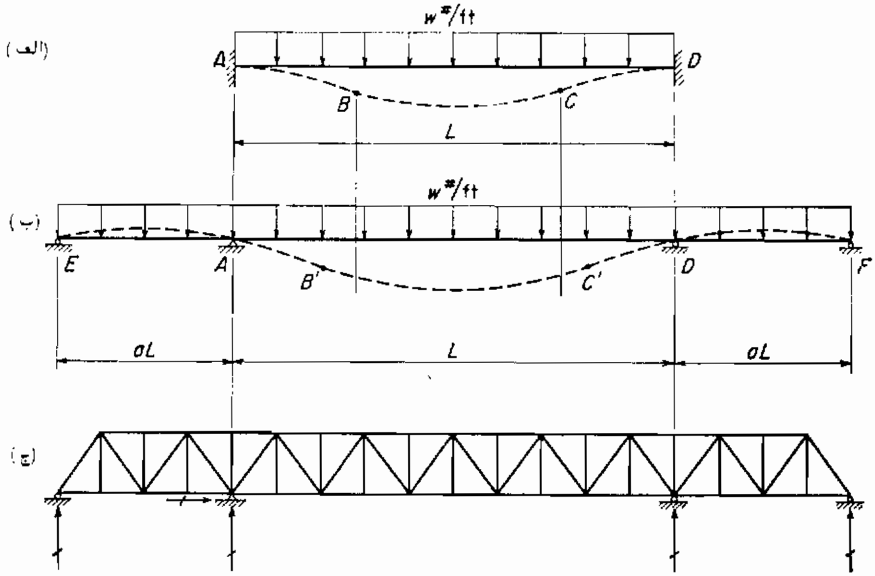


شکل ۸ــ۴ نمونه‌ای از خط تأثیر نیروی میله‌ها

۸ ــ ۵ سازه‌های سرتاسری

کاهش لنگر حداکثر را که حاصل کوچک نمودن دهانه‌های مؤثر سازه است و نهایتاً سبب کم شدن لنگر خمشی مثبت در سازه‌های طره‌ای می‌گردد ، می‌توان به‌طریقی مشابه و با یکسره‌نمودن سازه نیز ایجاد نمود گرچه سازه‌های یکسره معمولاً نامعین می‌باشند ، تیر دوسر گیردار شکل (۸ــ۵ الف) تحت اثر بار گسترده یکنواخت نشان داده شده توسط خط چین خمش پیدا می‌کند . در نقاط B و C لنگر خمشی تغییر علامت داده و بدان جهت $ABCD$ انحنای تیر خمیده (شده) نیز عوض می‌گردد ، در چنان نقاطی که به‌نقاط عطف موسوم است لنگر خمشی صفر بوده و لذا نمودار لنگر برای تیر AD مانند تیری‌که در نقاط‌عطف‌دارای مفصل باشد در آن نقاط صفر می‌گردد . به‌دلیل مشکلات اجرایی در ایجاد انتهای گیردار در A و D برای سازه‌های با دهانهٔ وسیع درعمل نوعی گیرداری نسبی که بعلت وجود

دهانه‌های اضافی کناری بوجود می‌آید مانند شکل (۸ـ۵ ب) به‌کار برده می‌شـــود. محـل قرارگیری نقاط عطف B' و C' بستگی به‌نسبت دهانهٔ a خواهد داشت. خرپای سـرتاسـری شکل (۸ـ۵ ج) دارای همان مزایای حاصل از یکسره‌بودن تیر سرتاسری (۸ـ۵ ب) می‌باشد. چون این خرپای سرتاسری دارای پنج عکس‌العمل مستقل است، لذا دو درجه‌نامعین بوده و تحلیل آن بستگی به‌روشهایی خواهد داشت که خصوصیات ارتجاعی این سازه را نیز در بر بگیرند.



شکل ۸ـ۵ سازه‌های سرتاسری

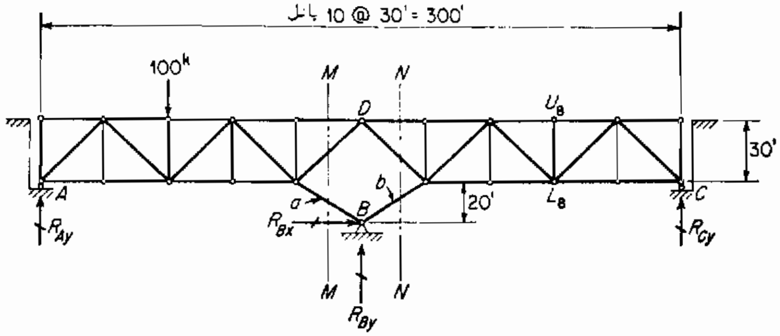
البته می‌توان با حذف چند میله، یک خرپای سرتاسری معین ایجاد نمود، چنین‌عملی در خرپای ویچرت* که توسط‌ایی. ام. ویچرت Wichert اهل پیتسبــورگ اختراع و به‌ثبت رسیده است با حذف اعضای عمودی خرپا درنقاط‌تکیه‌گاهی میانی ایجاد شده است. چنین سازه‌ای در شکل (۸ـ۶) نشان داده شده است. این سازه دارای 40 میله و 4 عکس‌العمل و به‌عبارت دیگر 44 مجهول می‌باشد و همچنین دارای 22 گره است، لذا 44 معادله تعادل برای حل نیروهای داخلی و خارجی آن وجود خواهد داشت، دیده می‌شود که دراین سازه

---

* به‌کتاب زیر مراجعه شود:

D.B.Steinman "the Wichert turss" D.Van Nostrand Company. Iuc., New York. 1932

تعداد مجهولات و معادلات موجود برای تحلیل آن برابر بوده و لذا عملا" معین است و فقط باید به‌میله‌های a و b شیب داد چون در غیر این صورت این سازه از نظر هندسی ناپایدار خواهد شد. این چنین ناپایداری را می‌توان با دریافت نتایج ناسازگار از حل استاتیکی آن تحقیق نمود.



شکل ۸ـ۶ خرپای ویچرت

در مورد سازه شکل(۸ـ۶)که تحت اثر بارهای نشان داده شده‌است. اعمال $\Sigma F_x = 0$ بر کل سازه نشان می‌دهد که در آن $R_{Bx} = 0$ است، برای تعیین عکس‌العملهای عمودی می‌توان به‌شرح زیر عمل کرد: با لنگرگیری حول D از کلیهٔ نیروهای مؤثر بر قسمت راست برش N-N و با فرض رو به‌بالا عمل نمودن عکس‌العملهای عمودی سازه داریم:

$$-R_{Cy}(5)(30) + X_b(50) = 0 \qquad X_b = +3R_{Cy}$$
$$Y_b = +\tfrac{2}{3}X_b = +2R_{Cy}$$

با لنگرگیری حول D از نیروهای واقع در چپ برش M-M داریم:

$$+R_{Ay}(5)(30) - 100(3)(30) - X_a(50) = 0 \qquad X_a = +3R_{Ay} - 180$$
$$Y_a = +\tfrac{2}{3}X_a = +2R_{Ay} - 120$$

با اعمال $\Sigma F_y = 0$ در گره B داریم:

$$+R_{By} + 2R_{Cy} + 2R_{Ay} - 120 = 0$$

از آنجا:

$$R_{By} = 120 - 2R_{Ay} - 2R_{Cy}$$

و چون این عبارت بیان‌کننده مقدار عکس‌العمل میانی برحسب دو عکس‌العمل انتهایی می‌باشد

حال می‌توانیم عکس‌العملهای انتهایی را با اعمال $\Sigma M = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ در مورد کل سازه محاسبه کنیم . برای $\Sigma M_A = 0$ داریم :

$$+100(2)(30) - (120 - 2R_{Ay} - 2R_{Cy})(5)(30) - R_{Cy}(10)(30) = 0$$

و با اعمال $\Sigma F_y = 0$ داریم :

$$R_{Ay} - 100 + (120 - 2R_{Ay} - 2R_{Cy}) + R_{Cy} = 0$$

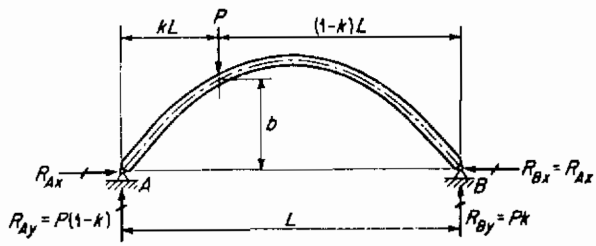
با حل این دو معادله خواهیم داشت :

$$R_{Cy} = -20,\ R_{Ay} = +40$$
$$R_{By} = 120 - 2(+40) - 2(-20) = +80$$

با معلوم شدن مقادیر عکس‌العملهای تحلیل نیروی میله‌ها مشکلی ایجاد نخواهد کرد و چون در حالی که باری واحد به‌هریک ازنقاط پانلی اثر کند می‌توان به‌طریق ذکر شده فوق تحلیل لازم را به‌عمل‌آوردلذا می‌توان خطوط تأثیرلازم را برای عکس‌العملها و نیروی میله‌ها رسم نمود .

۸ ــ ۶ قوسها ــ کلیات

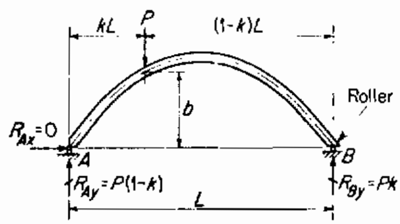
روش دیگری که برای کاهش لنگرهای حداکثر در سازه‌های با دهانه وسیع به‌کار برده می‌شود شامل انتخاب نوعی سازه برای دهانه فوق‌الذکر می‌باشد که براثر آن‌بارهای عمودی مؤثر تولید عکس‌العملهای افقی کند به‌طوری که لنگرهای حاصل از این عکس‌العملهای افقی در جهت کاهش لنگرهای حاصل‌از بارهای عمودی باشد. شکل (۸ــ۷)نشان‌دهنده‌یک‌قوس



شکل ۸ــ۷ قوس دو مفصل

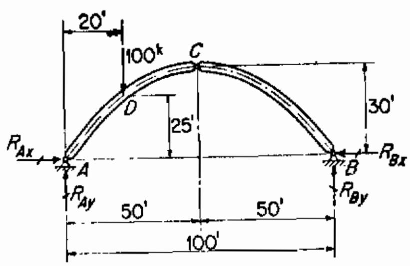
است که آن قوس سازه‌ای است که سبب ایجاد عکس‌العملهای رو به‌داخل افقی تحت اثـــــر بارهای مؤثر عمودی می‌نماید . این قوس از نوع دو مفصل است.عکس‌العملهای عمودی این سازه را می‌توان با استفاده از روابط تعادل و با لنگرگیری حـول یکی از مفصلهای انتهایی ازکلیه نیروهای مؤثر برقوس به‌دست آورد : اگرنیروی مؤثرخارجی p باشد عکس‌العملهـای عمودی دارای مقادیر مذکور در شکل خواهند بود . رابطهٔ بیـن عکس‌العملهای افقـــی R_{Ax} و R_{Bx} را می‌توان با استفاده از روابط تعادل $(\Sigma F_x = 0)$ به‌دست آورد ولـــــی مقادیر واقعی این عکس‌العملها را فقط می‌توان بر اساس تحلیل ارتجاعـی معلوم نمود زیرا که با داشتن چهار عکس‌العمل مستقل این قوس دو مفصل ، یک‌درجه نامعین خواهد بود .

اگر یکی‌از مفصلهای انتهایی‌را به‌غلتک تبدیل‌کنیم ،چنانچه در شکل(۸ـ۸) دیده‌می‌شود سازهٔ ایجاد شده دیگر قوس نبوده بلکه تیری منحنی و معین می‌باشد و لنگر خمشی در محل تأثیربار خارجی برابر با $P(1-k)kL$ خواهد بود . در قوس دو مفصل شکل(۸ ــ ۷)این مقدار لنگر به‌میزانی برابر با $R_{Ax}b$ کاهش می‌یابد .



شکل ۸ــ۸ تیر منحنی

یک قوس را می‌توان با اضافه‌نمودن مفصل سومی در یکی از نقاط میانی‌آن نظیر تاج‌آن علاوه‌بر دومفصل انتهایی آن به‌سازه‌ای معین تبدیل نمود ، چنین سازه‌ای را در شکل(۸ــ۹) نشان داده‌ایم و به‌آن قوس سه مفصل گویند . این سازه دارای چهار عکس‌العمل مستقل است و برای کل سازه سه معادله می‌توان برقرار نمود و همچنین با لنگرگیری حول مفصل C ازکلیه



شکل ۸ــ۹ قوس سه مفصل

نیروهای مؤثر به‌هریک از طرفین این مفصل یک معادله خاص سازه نیز می‌توان ایجاد کرد . به‌این‌ترتیب با لنگرگیری از کلیه نیروهای مؤثر بر سازه حول نقطه A خواهیم‌داشت :

$$R_{By} = +100(20/100) = +20$$

و به‌همین ترتیب با لنگرگیری حول مفصل B ، خواهیم داشت ،

$$R_{Ay} = +100(80/100) = +80$$

و حال با لنگرگیری حول مفصل C از نیروهای مؤثر بر قسمتی از سازه که در طرف راست این مفصل واقع است داریم :

$$+R_{Bx}(30) - 20(50) = 0 \qquad R_{Bx} = +33.3$$

با اعمال $\Sigma F_x = 0$ بر کل سازه خواهیم داشت : $R_{Ax} = +33.3$
مقدار لنگر در نقطه اثر بار خواهد شد :

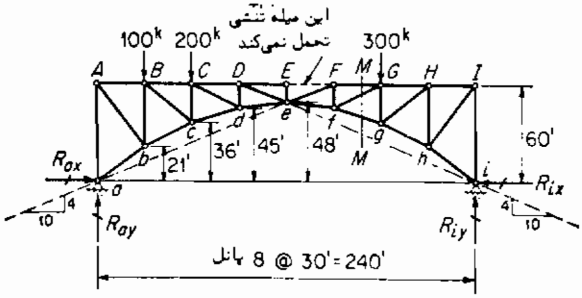
$$M_D = +80(20) - 33.3(25) = +767 \text{ kip-ft}$$

در مورد تیری ساده روی دو تکیه‌گاه انتهایی که دارای همان دهانه و بارگذاری باشد ، لنگر در محل تأثیر بار برابر با $+80(20) = +1,600$ kip-ft خواهد شد . با این ترتیب دیده می‌شود که اجرای قوسی آن مقدار لنگر را 52 درصد تقلیل داده است . البته مقاطع قوس تحمل فشار نیز می‌نمایند که در تیر ساده با دو تکیه‌گاه‌انتهایی وجودندارد مثلا" فشار در تاج C قوس شکل (۸ــ۹) جائی‌که مماس بر قوس افقی می‌باشد برابر با عکس‌العمل‌افقی یعنی برابر با مقدار 33.3 kips− برای بار وارده می‌گردد .معمولا" تحمل بار توسط تنشهای یکنواخت محوری نسبت به‌تحمل آن با تنشهای خمشی مقرون به‌صرفه است ، واضح است در صورتی‌که تنشهای محوری فشاری باشند می‌بایستی پایداری قطعه دربرابر کمانش ارتجاعی تأمین گردد .

۸ ــ ۷ تحلیل قوس خرپایی سه‌مفصل

دو نوارقوسی AC و BC از سازهٔ شکل(۸ــ۹) را می‌توان با خرپاهای نشان‌داده‌شده‌شکل (۸ــ۱۰) جایگزین نمود . چون در این سازه چهار عکس‌العمل وجود دارد لذا فقط به‌سبب مفصل در نقطهٔ e ، این سازه نامعین است و چون میلهٔ EF که به‌صورت خط‌چین نشان‌داده

شده است در دو انتهای خود به‌نحوی اتصال یافته که نیرویی محوری تحمل نمی‌کند لذا مفصل در e به‌صورت مؤثری عمل می‌نماید .



شکل ۸ــ۱۰ قوس خرپایی سه مفصل

عکس‌العملهای این سازه را می‌توان به‌طریق زیر محاسبه نمود : با لنگرگیری حول a از کلیه نیروهای مؤثر بر سازه خواهیم داشت :

$$+100(30) + 200(2)(30) + 300(6)(30) - R_{iy}(8)(30) = 0$$
$$R_{iy} = +287.5 \text{ kips}$$

با اعمال شرط $\Sigma F_y = 0$ بر کلیه نیروهای مؤثر بر سازه داریم :

$$+R_{ay} - 100 - 200 - 300 + 287.5 = 0 \qquad R_{ay} = +312.5 \text{ kips}$$

برای بدست‌آوردن R_{ix} معادله $\Sigma M = 0$ را حول مفصل e با در نظر گرفتن نیروهای مؤثر بر قسمتی از سازه که بر قسمت راست این مفصل اثر می‌کنند اعمال می‌کنیم :

$$+300(2)(30) + R_{ix}(48) - 287.5(4)(30) = 0 \qquad R_{ix} = +344 \text{ kips}$$

با اعمال $\Sigma F_x = 0$ بر کل سازه R_{ax} نیز برابر با $+344$ kips به‌دست می‌آید : مقدار R_{ax} را می‌شود با اعمال لنگرگیری حول مفصل e از نیروهای واقع در سمت چپ این مفصل نیز به‌دست آورد .

$$+312.5(4)(30) - R_{ax}(48) - 100(3)(30) - 200(2)(30) = 0$$
$$R_{ax} = +344 \text{ kips}$$

در محاسبه نیروی میله‌ها ،اثر عکس‌العملهای افقی را نبایستی نادیده گرفت ،به‌عنوان

مثال برای این که نیرو را در FG به‌دست آوریم از نیروهای واقع در راست برش M-M حول f لنگرگیری می‌نمائیم .

$$+300(30) + 344(45) - 287.5(90) - F_{FG}(15) = 0 \qquad F_{FG} = -93 \text{ kips}$$

اگر باری در حد فاصل بین مفصل مرکزی و یکی از نقاط انتهایی خرپا وجود نداشته باشد ، عکس‌العمل برآیند در آن انتها از خرپا می‌بایستی چنان امتدادی داشته باشد که از مفصل مرکزی بگذرد زیرا لنگر حول مفصل مرکزی از نیروهای واقع در آن سمت مفصل می‌بایستی برابر با صفر شود . به‌این ترتیب اگر بار عمودی واحدی در B بر سازهٔ شکل (٨ـ١٠) اثر کند $R_{i} = +\frac{1}{8}$ می‌شود و چون عکس‌العمل برآیند در i در راستای خط‌چین رسم‌شده از i به e قرار می‌گیرد ، به‌سرعت می‌توان نتیجه گرفت که :

$$R_{ix} = +\frac{1}{8}\left(\frac{10}{4}\right) = +\frac{5}{16}$$

این واقعیت اغلب سبب راحت‌ترشدن تحلیل قوس مخصوصا" در رسم خط تأثیر می‌گردد .

اگر قوس سه مفصل شکل (٨ـ١٠) تحت اثر بارهای یکسانی در کلیه نقاط پانلی فوقانی (و یا در کلیه نقاط پانلی تحتانی) قرار گیرد ، شرایط تنش زیر برقرار خواهد شد .

١ ــ نیرو در کلیه میله‌های اصلی فوقانی برابر با صفر خواهد شد .

٢ ــ نیرو در کلیه قطریها برابر با صفر خواهد شد .

٣ ــ نیرو در کلیه عمودیها برابر با نیروی پانلی فوقانی خواهد شد .

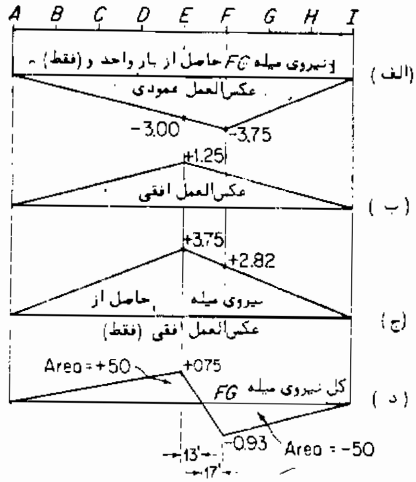
۴ ــ مولفه افقی نیرو در هریک از میله‌های اصلی تحتانی مساوی بوده و هریک از آنها برابر با عکس‌العملهای افقی خواهد شد .واقعیت این مطلب را دانشجویان می‌توانند بررسی نمایند . چنین عملی بسیار مفید خواهد بود به‌عنوان مثال در محاسبه نیروی میله‌های حاصل از بار مرده گسترده یکنواخت کمک خواهدنمود . وجود چنین شرایطی به‌دلیل آن است که کلیه نقاط پانلی تحتانی این سازه در روی یک سهمی قرار دارند و اگر کثیرالاضلاع فونیکولری برای بارهای فوق‌الذکر را چنان رسم‌کنیم که این کثیرالاضلاع از سه مفصل قوس عبورکند ، کثیرالاضلاع رسم شده بر وضعیت قرارگرفته میله‌های اصلی تحتانی منطبق خواهد شد .

٨ ــ ٨ خطوط تأثیر قوس خرپائی سه مفصل

خطوط تأثیر یک قوس خرپایی سه مفصل را می‌توان با قراردادن در موقعیتهای مختلف

بار واحد رسم نمود ولی روشی مشابه روش زیرین اغلب مزیت پیدا می‌کند: می‌خواهیم خط تأثیری برای میله FG از سازه شکل(۸-۱۰) رسم کنیم . ابتدا خط تأثیری برای قسمتی از نیروی FG که مربوط به بار واحد و عکس‌العملهای عمودی می‌شود رسم می‌کنیم . چون این عکس‌العملها دارای مقدار برابر با عکس‌العملهای تیر ساده با دو تکیه‌گاه انتهایی می‌باشند لذا خط تأثیر برای این قسمت از نیرو ، مثلثی خواهد بود که حداکثر مقدار آن زمانی اتفاق می‌افتد که بار واحد مستقیما" بر مرکز لنگرگیری f وارد شود و در این صورت همان طوری که در شکل (۸-۱۱ الف) می‌بینیم عرض خط تاثیر برابر با $-\frac{5}{8}(\frac{90}{15}) = -3.75$ خواهد شد .
سپس خط تاثیر برابر $R_{ax} = R_{ix}$ رسم خواهیم کرد ، وقتی که بار واحد از A به E حرکت می‌کند ، R_{iy} و بنابراین R_{ix} (که برابر $\frac{5}{2}R_{iy}$ می‌باشد) به‌طور خطی تغییر خواهد کرد . وقتی بار در E واقع شود R_{ix} برابر با $+1.25 = \frac{5}{2}(+\frac{1}{2})$ خواهد شد . و خط تأثیر برای R_{ix} خط مستقیمی از مقدار صفر در A تا $+1.25$ در E خواهد بود . با استدلال مشابهی به‌عکس‌العمل در a می‌پردازیم . خط تأثیر برای $R_{ax} = R_{ix}$ خط مستقیمی خواهد بود که از $+1.25$ در E تا صفر در I امتداد دارد . خط تأثیر اندازهٔ این عکس‌العمل افقی را در شکل (۸-۱۱ ب) نشان داده‌ایم . نیرو در میله FG حاصل از عکس‌العملهای افقی برابر خواهد شد با $+R_{ix}(\frac{45}{15}) = +3R_{ix}$ لذا خط تأثیر برای این قسمت از نیرو در میله FG مثلثی خواهد بود که رأس آن در E دارای مختصاتی برابر: $+3(+1.25) = +3.75$ خواهد بود . این خط تأثیر را در شکل (۸-۱۱ ج) نشان داده‌ایم . حال میتوانیم خط تأثیر را برای کل نیرو در میله FG باانطباق خطوط تأثیر شکلهای (۸-۱۱ الف) و (۸-۱۱ ج) که منجر به خط تأثیر شکل (۸-۱۱ د) می‌گردد . به‌دست آوریم .

دیده می‌شود که سطح خالص زیر منحنی آنگونه که باید برابر با صفر است زیرا بار یکنواختی که برکل دهانه وارد می‌شود نیرویی در میله‌های اصلی فوقانی ایجاد نخواهد کرد .



شکل ۸-۱۱ خطوط تأثیر برای قوس شکل ۸-۱۰

۸ ــ ۹ قوسهای خرپائی سه مفصل با اختلاف سطح تکیه‌گاهی

تکیه‌گاههای یک قوس خرپایی سه مفصل ممکن است نظیرآنچه در شکل(۸ــ۱۲) دیده می‌شود در سطوح تراز مختلفی قرار داشته باشند ، در این حالت عکس‌العملهای‌عمودی‌قوس با آنچه در حالت معمولی یک خرپا با دوتکیه‌گاه انتهایی می‌تواند داشته باشد متفاوت خواهد بود ، زیرا وقتی حول یکی از نقاط تکیه‌گاهی لنگرگیری می‌کنیم ،اثر عکس‌العمل‌افقی در تکیه‌گاه انتهایی دیگر در معادله لنگرگیری داخل می‌شود ولی در هرصورت مقادیر عکس‌العملها را می‌توان توسط معادلات تعادل به‌دست آوریم . با در نظر گرفتن شکل (۸ــ۱۲ الف) و لنگرگیری حول a از کلیه نیروهای موثر بر سازه داریم :

$$+100(60) - R_{ix}(20) - R_{iy}(240) = 0$$

و لذا :

$$R_{ix} = +300 - 12R_{iy}$$

و حال می‌توانیم با لنگرگیری حول مفصل e از نیروهای مؤثر بر راست مفصل بنویسیم :

$$+R_{ix}(38) - R_{iy}(120) = 0$$
$$R_{iy} = +{}^{38}\!/_{120}R_{ix} = +{}^{38}\!/_{120}(+300 - 12R_{iy})$$

و ازآنجا داریم :

$$R_{ix} = +300 - 12(19.8) = +62.5 \text{ kips} \qquad R_{iy} = +19.8 \text{ kips}$$

در راه حل فوق حل دستگاه دو معادله دو مجهولی الزامی است ولی می‌توان با در نظرگرفتن جهت عکس‌العملها طبق شکل (۸ــ۱۲ ب) از این عمل خودداری نمود ، در این شکل راستای R'_{ix} طوری گرفته شده است که بر خط اتصال دو نقطه تکیه‌گاهی منطبق می‌باشد در این شکل R'_{iy} عکس‌العمل عمودی بوده که مقدارآن با مقدار R_{iy} متفاوت است زیرا که R'_{ix} نیز دارای یک مولفه عمودی می‌باشد ، با لنگرگیری حول a داریم :

$$+100(60) - R'_{iy}(240) = 0 \qquad R'_{iy} = +25.0$$

با لنگرگیری حول e و فرض این که R'_{ix} در نقطه o اثر کند :

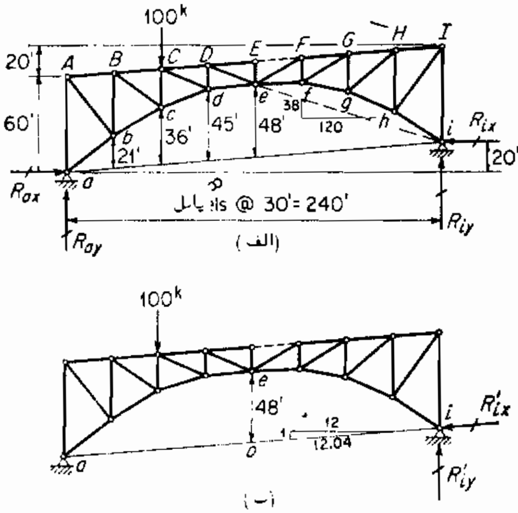
$$+\frac{12.00}{12.04}R'_{ix}(48) - 25.0(120) = 0$$

و از آنجا $R'_{ix} = +62.7\ \text{kips}$ خواهد شد. از این طریق عکس‌العمل واقعی افقی در i خواهد شد:

$$R_{ix} = +62.7\left(\frac{12.00}{12.04}\right) = +62.5\ \text{kips}$$

و عکس‌العمل واقعی عمودی در i برابر خواهد شد با:

$$R_{iy} = +25.0 - \frac{1}{12.04}(62.7) = +19.8\ \text{kips}$$



شکل (۸ – ۱۲) اختلاف سطح تکیه‌گاهی

در حالت خاصی که باری بر قسمت راست مفصل e اثر نکند می‌توان نتیجه گرفت که عکس‌العمل برآیند در i از e بگذرد و از آنجا خواهیم داشت:

$$R_{ix} = \frac{120}{38} R_{iy} = +3.16 R_{iy}$$

سپس با لنگرگیری حول a نتیجه می‌شود که:

$$+100(60) - 3.16 R_{iy}(20) - R_{iy}(240) = 0$$

و بالاخره داریم:

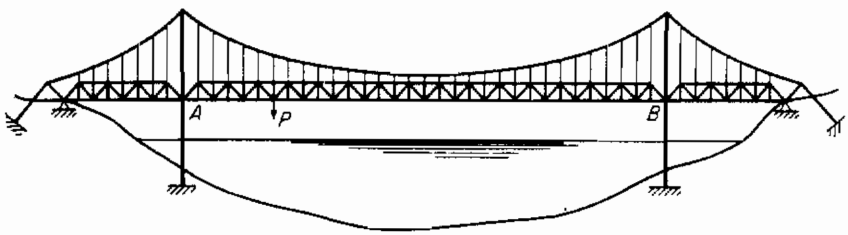
$$R_{iy} = +19.8\ \text{kips}$$

و از آنجا نتیجه خواهد شد .

$$R_{ix} = +3.16(+19.8) = +62.5 \text{ kips}$$

۸ ــ ۱۰ پلهای معلق

روش مهمی که در تقلیل لنگرخمشی سازه‌های با دهانهٔ وسیع به‌کار برده می‌شود عبارت از ایجاد تکیه‌گاههای فرعی در نقاط واقع در طول دهانه سازه به‌توسط کابلهایی نظیر آنچه در پلهای معلق وجود دارد می‌باشد . با توجه به‌شکل (۸ــ۱۳) یک پل معلق معمولاً" به‌نحوی نصب می‌شود که کلیه بار مرده آن به‌کابلها وارد شود . و وقتی بار زنده بر پل وارد می‌شود به‌دلیل کشش موجود درکابل قسمت اعظم بار زنده به‌کابلها منتقل می‌شود . از این‌رو خرپای تقویتی AB هیچ لنگری که حاصل از بار مرده باشد تحمل نمی‌کند و لنگر حاصل از بار زندهٔ آن تا حد قابل توجهی تقلیل یافته است . در سازه‌های با دهانه وسیع چنین عملکردی از اهمیت شایانی برخوردار است زیرا بیشتر بار توسط کابل کششی که نقشی بسیار مؤثر در باربری بارها دارد تحمل می‌شود .



شکل (۸ ــ ۱۳) پل معلق

پل معلقی نظیر شکل (۸ــ۱۳) جزء سازه‌های نامعین می‌باشد ولی با اجرای اتصالاتی خاص می‌توان آن را به‌صورت معین درآورد ، تحلیل پلهای معلق معین در مبحث (۱۰ــ۱۰) مورد بررسی قرار گرفته است .

۸ ــ ۱۱ مسائل

۸ ــ ۱ (الف) خط تأثیری برای عکس‌العمل عمودی A از سازهٔ شکل (۸ــ۲) رسم کنید $a = L/2$ بگیرید .

(ب)اگر عکس‌العمل حداکثر حاصل از بار یکنواخت زنده به‌شدت 1,000 lb/ft را با عکس‌العمل حداکثر حاصل در A درحالتی که EA ، AD ، DF را تیرهای ساده با دو تکیه‌گاه انتهایی در نظر بگیریم نتیجه چه خواهد بود .

جواب :

(الف) خط تأثیر بصورت خطی از 0.0 در E تا 1.33+ در B و تا 0.0 در C تغییر می‌کند .

(ب) عکس‌العمل در حالت طره‌ای برابر با $R_1 = 888.8L$ می‌شود و عکس‌العمل درحالت تیر ساده برابر با $R_2 = 750.0L$ می‌شود که $R_1/R_2 = 1.185$ خواهد بود .

۸ ــ ۲ با در نظرگرفتن پل طره‌ای شکل(۸ــ۳) خط تأثیری برای (الف) نیرو در آویز bc (ب) عکس‌العمل عمودی در i ، (ج) نیروی میله در میله اصلی de رسم کنید (د) حداکثر نیرو را در میله de تحت اثربارگذاریهای زیرین محاسبه‌کنید : بارمرده برابر با 2,000 lb/ft بار زنده یکنواختی برابر 1,000 lb/ft بار زنده متمرکزی برابر با 10,000 lb .

جواب :

(الف) خط تأثیر به‌طور خطی از 0.0 واقع در وسط i و b تا 1.0 در b و از آنجا تا 0.0 در a رسم می‌شود .

(ب) خط تأثیر به‌طور خطی از 0.0 در h تا 1.5 در b و از آنجا تا 0.0 در a رسم می‌شود .

(ج) خط تأثیر به‌طور خطی از 0.0 در b تا 1.8 در a و از آنجا تا 0.0 در r رسم می‌شود

(د) 747,000 lb

۸ ــ ۳ کلیه نیروها را در میله‌های خرپای ویچرت شکل (۸ــ۶) را تحت اثر باری برابر با 100 kips که در D وارد می‌شود محاسبه کنید .

۸ ــ ۴ برای عکس‌العمل در A از خرپای ویچرت شکل(۸ــ۶) خط تأثیر رسم کنید .

جواب :

خط تأثیر به‌طور خطی از 1.0+ در A تا 0.5− در B و از آنجا تا 0.0 در C رسم می‌شود .

۸ ــ ۵ یک خرپای سه‌دهانهٔ ویچرت را که هرطرف آن مشابه طرف سمت‌چپ شکل (۸ــ۶)می‌باشد در نظر بگیرید در صورتی که محور تقارنی از U_8L_8 رسم شود با این تفاوت که تکیه‌گاه قرینه B را می‌بایستی تکیه‌گاهی غلتکی گرفت کلیه عکس‌العملهای این سازه را هرگاه تحت اثر بار یکنواختی به‌شدت w lb/ft در کل دهانه سازه و بر نقاط پانلی فوقانی آن قرار گیرد محاسبه کنید .

۸ ــ ۶ برش و نیروی محوری در نقطه D از سازهٔ شکل (۸ــ۹) را تحت اثر بار وارد محاسبه‌کنید فرض کنید که شیب قوس در D برابر با $30°$ با افق باشد .

۸ ـ ۷ کلیهٔ نیروی میله را در همهٔ اعضای قوس سه‌مفصل شکل (۸ـ۱۰) تحت اثر بار یکنواختی به‌شدت 1,000 lb/ft که بر کل دهانهٔ سازه اثر می‌کند محاسبه کنید. بارهای پانلی بر نقاط پانلی فوقانی وارد می‌شوند.

۸ ـ ۸ خط تأثیری برای نیرو در میله bc از سازه شکل (۸ـ۱۰) رسم کنید.

جواب:

خط تأثیر به‌صورت خطی از 0.0 در a تا 0.215+ در b و ازآنجا تا 1.72ـ در e وازآنجاتا 0.0 در i رسم می‌شود.

۸ ـ ۹ مقدار حداکثر نیرو در میله Bc از سازه به‌شکل (۸ـ۱۰) تحت اثر بارهای زیرین چه خواهد بود: بارمرده‌ای برابربا 1,000 lb/ft ،بار زنده یکنواختی برابربا 500 lb/ft با متمرکز زنده‌ای برابر با 5,000 lb .

۸ ـ ۱۰ مساله (۸ـ۸) را با در نظر گرفته (۸ـ۱۲ الف) رسم کنید.

جواب:

خط تأثیر به‌طور خطی از 0.0 در a تا 0.220+ در b و ازآنجا تا 1.761ـ در e وازآنجا تا 0.0 در i رسم می‌شود.

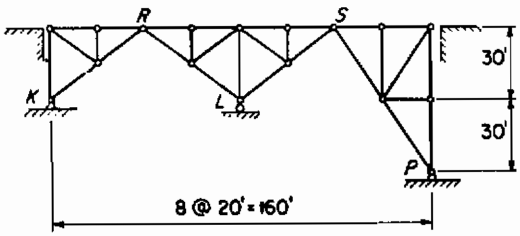
۸ ـ ۱۱ مساله (۸ـ۹) را با در نظر گرفتن شکل (۸ـ۱۲ الف) رسم کنید.

جواب:

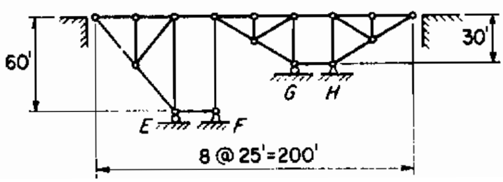
$Bc = +19{,}110$ lb, $-16{,}930$ lb

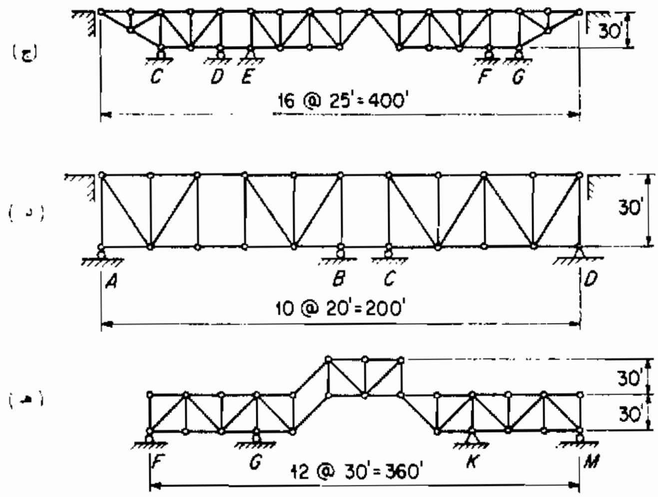
۸ ـ ۱۲ خطوط تأثیر عکس‌العمل را برای هریک از سازه‌های شکل (۸ـ۱۴) رسم کنید.

(الف)



(ب)





شکل (۸ـ۱۴) مساله (۸ـ۱۲)

۹

شبکه‌های سه‌بعدی

۹ ــ ۱ مقدمه

گرچه اغلب سازه‌های مهندسی سه‌بعدی هستند ولی می‌توان سازه‌های سه‌بعدی را نیز به‌چندین سازه مستوی تجزیه نموده و هریک از آنها را تحت اثر بارهای مؤثر در صفحه سازه مورد تحلیل قرار داد. به‌عنوان مثال خرپای یک پل زیرگذر را که دارای میله‌های اصلی فوقانی و تحتانی موازی با یکدیگر می‌باشد در نظر بگیرید یک چنین سازه‌ای سه‌بعدی بوده و آن را می‌توان به‌شش سازه مستوی تجزیه نمود. این سازه‌ها عبارتنداز دو خرپای اصلی عمودی، سیستم مهاربندی فوقانی، سیستم مهاربندی تحتانی و دو پرتال انتهایی. اغلب برخی از قطعات این سازه را می‌بایستی عضو بیش از یکی از سازه‌های مستوی دانست به‌عنوان مثال میله اصلی تحتانی خرپای عمودی، میله اصلی سیستم مهاربندی تحتانی نیز می‌باشد. چنین حالتی هیچ نوع مشکلی درمحاسبات بوجود نمی‌آورد زیرا می‌توان مقدار تنش را در یک چنین عضوی به‌تناسب این که در کدام سازه واقع است محاسبه نموده و سپس تنش کل را با رویهم‌گذاری چند تنش محاسباتی در آن قطعه محاسبه نمود.

در برخی از سازه‌های سه‌بعدی بین تنشهای موجود در قطعات مختلفی که در یک‌صفحه قراردارند روابط بخصوصی موجود است. بدیهی است که در یک چنین حالتی آن سازه را نمی‌توان به‌روش تجزیه به‌چندین سازه مستوی تحلیل نمود، در یک چنین سازه‌ای تحلیل بخصوص سه‌بعدی آن مورد لزوم خواهد بود.

اگر بخواهیم چند سازه از این نوع را مثال بزنیم می‌توان به‌برجها، آنتنهای مهارشده دکلها، شبکه‌بندی طاقها و شبکه‌بندی بدنه هواپیما اشاره نمود. این چنین سازه‌هایی ممکن است معین و یا نامعین باشند. در این فصل به‌بررسی سازه‌های سه‌بعدی معین می‌پردازیم بدیهی است که ازروشهای تحلیل سازه‌های نامعین که در بخشهای دیگر این کتاب صحبت شده است می‌توان در تحلیل سازه‌های سه‌بعدی نامعین نیز استفاده نمود.

در این بخش از تحلیل سازه‌های سه‌بعدی از سه محورمختصات استفاده‌می‌شوداز OX و OY به‌همان ترتیبی که در سازه‌های مستوی تعریف شد یعنی OX افقی و OY عمودی‌استفاده می‌گردد و OZ افقی و عمود بر صفحه XOY در نظر گرفته می‌شود .

باید یادآور شویم که اصول پایه تحلیل سازه‌های سه‌بعدی همان اصول پایه سازه‌های مستوی می‌باشد . هریک از معادلات تعادل را می‌توان در مورد کل سازه یا به‌هریک قسمت از سازه به‌کاربرد ، البته تعداد معادلات تعادل در این‌حالت بیشتر است‌زیرا نیروها رامی‌توان درامتداد محورهای جدیدی برآیند نمود .همچنین لنگرگیری را می‌توان حول دومحورجدید دیگر نیز انجام داد .

۹ ــ ۲ شرط‌تعادل

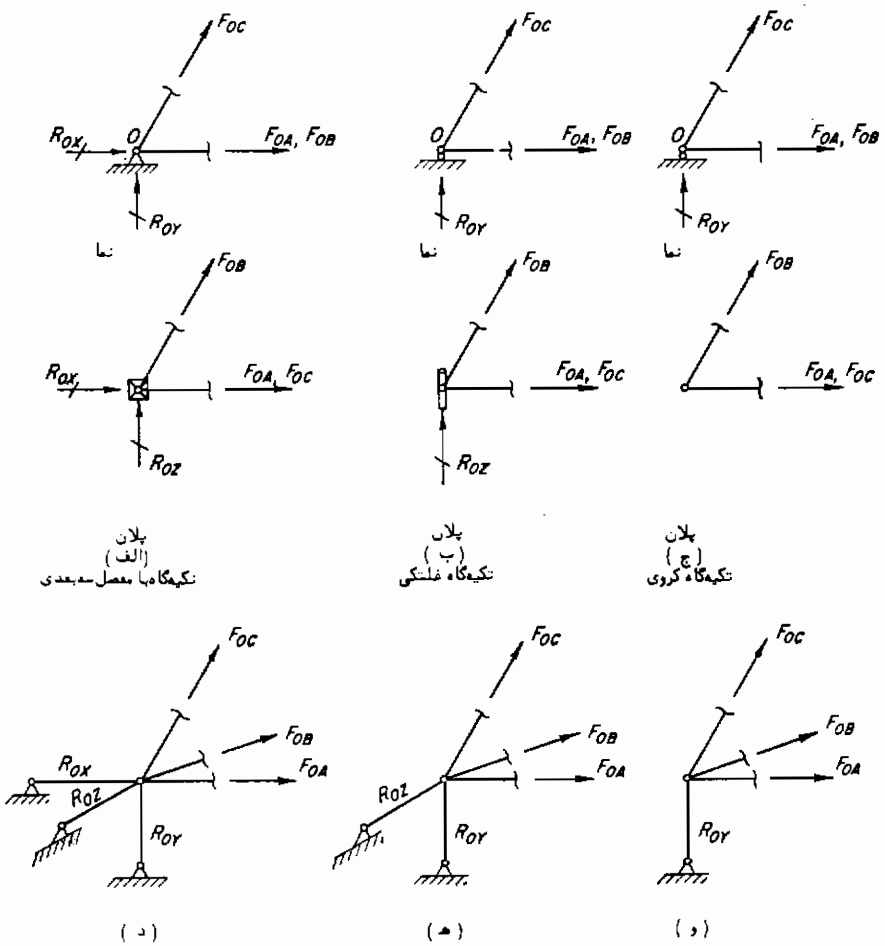
معمولا" فرض می‌شود که قطعات یک شبکه سه‌بعدی به‌نوعی به‌یکدیگر مفصل شده‌اند که قطعات فقط قادر به‌تحمل بارهای محوری باشند و لذا فقط یک مولفه مستقل نیروی‌میله برای هر عضو از شبکه وجود خواهد داشت .

چنین گره مفصلی را درروی نمودار خطی شبکه‌های فضایی با یک‌دایره کوچک‌توخالی نشان خواهیم داد .

البته هر عضوی دارای سه مولفه نیروی میله که به‌ترتیب به‌موازات هریک از سه محور مختصات می‌باشند ، خواهد بود که روابط موجود بین این سه مولفه را می‌توان ازتصویرعضو مورد نظر به‌دست آورد .

در نقطه تکیه‌گاهی شبکه فضایی امکان وجود سه مولفه مستقل نیروی عکس‌العمل‌موجود است ولی امکان این نیز وجود دارد که سازه را در یک نقطه تکیه‌گاهی به‌نوعی طرح نمود که یک و یا بیش از یک مولفه عکس‌العمل برابر با صفر گردد . در شکل (۹ــ۱ الف) مفصل تکیه‌گاهی که یک مفصل سه‌بعدی است می‌تواند سه مولفهٔ مستقل عکس‌العمل R_{oz} ، R_{oy} و R_{ox} را داشته‌باشد .فرض کنیدکه این مفصل را با یک غلتک مانندشکل (۹ــ۱ ب) جایگزین کرده باشیم ،دراین‌صورت چون یک چنین غلتکی در برابر انتقال افقی در راستای Z مقاومت‌خواهد کرد لذا عکس‌العملهای R_{oy} و R_{oz} دارای مقدار بوده ولی مقدار R_{ox} برابر با صفر خواهد شد اگر این غلتک را با یک گوی کروی جایگزین کنیم دیگر عکس‌العمل افقی وجود نداشته و فقط عکس‌العمل عمودی R_{oy} وجود خواهد داشت ، چنین حالتی در شکل (۹ــ۱ ج) نشان داده شده است . برخی اوقات بهتر است که این سه نوع تکیه‌گاه‌را با مقدار معادل بند آنها نشان دهیم ، به‌عنوان مثال تکیه‌گاه مفصلی سه‌بعدی را می‌توان

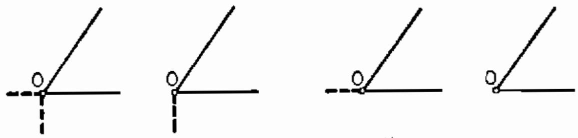
همان‌طوری‌که درشکل (۹ــ۱ الف) نشان داده شده است با سه بند متقاطع که در یک صفحه واقع نشده باشند نظیر آنچه در شکل (۹ــ۱ د) به‌طور ایزومتریک نشان داده شده نمایش داد و تکیه‌گاه غلتکی شکل (۹ــ۱ ب) را با دو بند متقاطع واقع در صفحه YOZ نظیر آنچه در شکل (۹ــ۱ هـ) نشان داده شده و تکیه‌گاه کروی شکل (۹ــ۱ ج) را با یک بند در راستای OY نظیر آنچه در شکل (۹ــ۱ و) نشان داده شده است نمایش داد.



شکل(۹ــ۱) انواع تکیه‌گاههای شبکه فضایی

برای این که بتوان این سه نوع تکیه‌گاه را در پلان نمایش داد، از خط چین ضخیم در راستای عکس‌العملهایی که دارای مولفه‌افقی می‌باشند استفاده خواهد شد. چنین قراردادی درشکل(۹ــ۲) نمایش داده شده است در این شکل (الف) نشان‌دهنده تکیه‌گاه مفصلی است‌که

دارای دو عکس‌العمل افقی در راستای X و Y می‌باشد (ب) نشان دهندهٔ تکیه‌گاه غلتکی است که در آن غلتک به‌نوعی قرار گرفته است که دارای عکس‌العمل افقی در راستای Z می‌باشد، (ج) نشان دهنده تکیه‌گاه غلتکی است که در آن غلتک به‌نوعی قرار گرفته است که دارای عکس‌العمل افقی در راستای X می‌باشد وبالاخره(د)نشان‌دهنده تکیه‌گاه کروی است که در آن عکس‌العمل افقی وجود ندارد.



شکل (۹ــ۲) وضعیت‌های مختلف مولفه‌های افقی عکس‌العمل

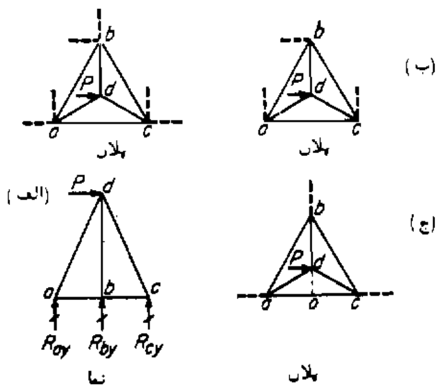
به‌این ترتیب تعداد کل عناصر مجهول تحلیل تنش که در تحلیل شبکه‌های سه‌بعدی وجود دارند عبارت خواهد بود از تعداد میله‌ها باضافه تعداد مولفه‌های مستقل عکس‌العمل (یا بند) که تعداد این مولفه‌ها در هر تکیه‌گاه نسبت به‌نوع ساختی که برای نقطه تکیه‌گاهی در نظر گرفته می‌شود می‌تواند یک، دو و یا سه باشد.

در مورد یک شبکه سه‌بعدی می‌توان شش معادله مستقل تعادل جهت بررسی تعادل بین *بارهای خارجی مؤثر بر سازه و عکس‌العمل‌های سازه برقرار نمود*. اگر OX ، OY و OZ سه‌محور مختصات باشند این شش معادله عبارت خواهند بود از $\Sigma F_x = 0$ ، $\Sigma F_y = 0$ ، $\Sigma F_z = 0$ و $\Sigma M_x = 0$ ، $\Sigma M_y = 0$ ، $\Sigma M_z = 0$ در این روابط ΣM_x نشان‌دهنده جمع لنگر حاصل از کلیه نیروهای مؤثر بر سازه حول محور OX خواهد بود و....

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که شرط لازم (که البته کافی نمی‌باشد) برای محاسبات تعادل یک شبکه سه‌بعدی با در نظر گرفتن نیروهای مؤثر خارجی آن این‌است که تعداد کل مولفه‌های مستقل عکس‌العمل آن برابر با شش باشد.

حال اگر هم نیروهای داخلی و هم نیروهای خارجی را در نظر بگیریم برای هر گره می‌توان سه معادله مستقل تعادل برقرار نمود، که این معادلات عبارتنداز $\Sigma F_x = 0$ ، $\Sigma F_y = 0$ و $\Sigma F_z = 0$. معادلات تعادل کل سازه معادلات مستقلی (خارج ازاین‌معادلات) نمی‌باشند. ***بنابراین می‌توان نتیجه گرفت‌که شرط لازم (اما ناکافی) برای محاسبات ایستایی یک شبکه سه‌بعدی با در نظر گرفتن هردو نیروی داخلی و خارجی آن این است که جمع تعداد کل میله‌ها و تعداد کل مولفه‌های مستقل عکس‌العمل آن سه برابر تعداد گرهها باشد.***

کاربرد این اصول را می‌توان با بررسی شکل (۹ـ۳ الف) شرح داد. اگر در وهله اول فقط نیروهای خارجی را در نظر بگیریم در صورتی که عکس‌العملهای افقی مطابق تصویرافقی شکل آرایش یافته باشند در این صورت کلا" ۹ مولفه مستقل عکس‌العمل وجود داشته و لذا این سازه برابر با (سه درجه) = ۶ـ۹ نامعین خواهد بود. اگر بجای مفصلها غلتک قرار گیرد در این‌صورت عکس‌العملها افقی‌مطابق شکل (۹ـ۳ ج) عمل نموده و تعداد عکس‌العملهای مستقل این سازه به شش رسیده و این سازه معین خواهد شد. اگر فرض شود که غلتکها به‌نوعی قرار گرفته باشند که عکس‌العملهای افقی دارای راستاهایی مطابق شکل (۹ـ۳ ج) باشندگرچه از نظر شمارش این سازه‌معین می‌باشد ولی‌نسبت به‌اثر بارهای خارجی حالت ناپایدارخواهد



شکل(۹ـ۳) آرایش پایدار عکس‌العملها

داشت. به‌عنوان مثال عکس‌العمل Z در b برحسب این که با استفاده از $\Sigma F_z = 0$ که نسبت به‌کل سازه اعمال شود (که در این حالت تعداد آن برابر با صفر خواهد شد) و یا این که با استفاده از معادله $\Sigma M_y = 0$ حول محور عمودی مار از a محاسبه گردد (که در این حالت دارای مقداری خواهد شد). دارای دو مقدارخواهد بود. این نشان‌می‌دهد که گرچه‌شمارش یک شرط‌لازم برای معین بودن سازه می‌باشد ولی یک ضابطه کافی نمی‌باشد. *اگر قرار است یک سازه سه‌بعدی پایدار باشد باید که عکس‌العملها به‌نوعی قرار گرفته باشند که در مقابل انتقال در راستای هریک از سه محور و در مقابل دوران حول هریک از آنها مقاومت نمایند.* چون کلیه عکس‌العملهای شکل (۹ـ۳ج) از نقطه o می‌گذرند لذا قادر نخواهند بود که در مقابل دوران حول محور مار از این نقطه مقاومت نمایند.

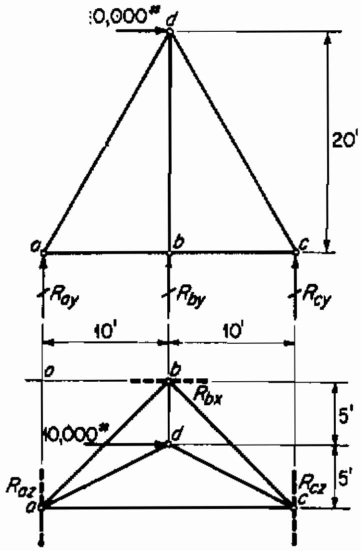
حال به‌بررسی هردو نیروی داخلی و خارجی شکل (۹ـ۳ الف) می‌پردازیم، در این حالت ۱۵ مجهول مستقل (۶ نیروی میله و ۹ مولفه عکس‌العمل) وجود دارد. چون ۴ گره

وجود دارد لذا $4 \times 3 = 12$ معادله مستقل تعادل وجود خواهد داشت ، معلوم می‌شودکه این سازه (سه درجه)=۱۲−۱۵نامعین می‌باشد . اگرعکس‌العملها نظیرآنچه در شکل (۹−۳ب) آرایش یافته باشند فقط ۱۲ مجهول‌مستقل وجودخواهد داشت (۶ نیروی‌میله و۶عکس‌العمل) و چون بازهم ۱۲ معادله مستقل تعادل موجود است لذا این سازه نسبت به‌نیروهای داخلی و خارجی معین خواهد بود .

۹ ـ ۳ محاسبه عکس‌العملها

هرگاه یک شبکه سه‌بعدی نسبت به‌نیروهای مؤثر خارجی برآن معین باشد و اگر فقط روی سه نقطه دارای تکیه‌گاه باشد مقادیر عکس‌العملهای آن را می‌توان با اعمال معادلات تعادل بر کل سازه به‌عنوان یک جسم محاسبه نمود و اگر بر روی بیش‌از سه نقطه تکیه‌گاهی قرار گرفته باشد معمولا" لازم است که نیروی چند میله و یا نیروی کل میله‌ها را قبلا" محاسبه کنیم تا بتوانیم به‌تعیین عکس‌العملها بپردازیم . در این بحث به‌محاسبه عکس‌العملهای سازه‌هایی خواهیم پرداخت که محاسبه مستقیم عکس‌العملها ممکن باشد .

در شکل (۹−۴) عکس‌العملهای عمودی را می‌توان مستقلا" محاسبه نمود . به‌این‌صورت که اگر حول محوری که از دو تکیه‌گاه می‌گذرد از کلیه نیروهای مؤثر بر سازه لنگرگیری‌نمائیم



شکل (۹−۴) محاسبه عکس‌العملها

مقدار عکس‌العمل عمودی تکیه‌گاه سوم به‌عنوان تنها مجهول این معادله خواهد بود و همچنین با اعمال معادله $\Sigma M_x = 0$ حول محور ac ، R_{by} تنها نیروی خارجی دارای لنگر خواهد بود لذا مقدار $R_{by} = 0$ خواهد شد با لنگرگیری حول خط اثر R_{az} توسط $\Sigma M_z = 0$ خواهیم داشت .

$$+10{,}000(20) - R_{cy}(20) = 0$$

از این معادله $R_{cy} = +10{,}000 \text{ lb}$ خواهد شد ، با اعمال $\Sigma F_y = 0$ بر کل سازه داریم .

$$R_{ay} + 10{,}000 = 0$$

از این معادله $R_{ay} = -10{,}000 \text{ lb}$ می‌گردد .

برای محاسبه عکس‌العملهای افقی اگر با استفاده از معادله $\Sigma M_y = 0$ حول هر محور عمودی مار بر مرکز تقاطع خطوط اثر دو عکس‌العمل افقی لنگرگیری نمائیم ، سومین عکس‌العمل افقی موجود تنها مجهول معادله خواهد بود . به‌عنوان مثال اگر حول محور عمودی مار بر نقطه o لنگرگیری کنیم و فرض نمائیم که R_{cz} رو به‌سمت پشت سازه باشد داریم

$$-10{,}000(5) - R_{cz}(20) = 0 \quad \therefore \quad R_{cz} = -2{,}500 \text{ lb}$$

حال اگر معادله $\Sigma F_z = 0$ را بر کل سازه اعمال کنیم و فرض نمائیم که R_{az} رو به‌سمت پشت سازه عمل کند خواهیم داشت :

$$R_{az} - 2{,}500 = 0 \qquad R_{az} = +2{,}500 \text{ lb}$$

و بالاخره با اعمال $\Sigma F_x = 0$ بر کل سازه و با فرض اینکه R_{bx} رو به‌سمت چپ عمل کند خواهیم داشت :

$$+10{,}000 - R_{bx} = 0 \qquad R_{bx} = +10{,}000 \text{ lb}$$

همان‌طوری که در سازه‌های مستوی ذکر گردید هریک از معادلات تعادل را می‌توان با نظم و طرق مختلفی که نسبت به ابتکار محاسب متفاوت می‌باشد به‌کار برد .

۹ ــ ۴ محاسبه نیروی میله‌ها

یک میله از شبکه سه‌بعدی می‌تواند دارای سه تصویر روی سه محور مختصات باشد ، این

مطلب را در شکل(۹ــ۵) شرح داده‌ایم . در این شکل میله ab دارای تصاویر ax ، ay ، az به‌ترتیب در راستای محورهای OX، OY و OZ می‌باشد . برحسب طول این تصاویر طول میله ab به‌صورت زیر محاسبه خواهد شد .

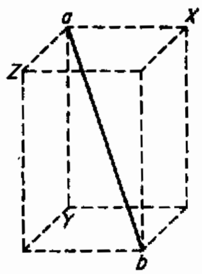
$$ab = [(ax)^2 + (ay)^2 + (az)^2]^{1/2}$$

چون نیروی F_{ab} محوری است ، مولفه‌های F_{ab} به‌موازات محورهای مختصات به‌صورت زیر خواهند بود .

$$X_{ab} = F_{ab}\frac{ax}{ab} \qquad Y_{ab} = F_{ab}\frac{ay}{ab} \qquad Z_{ab} = F_{ab}\frac{az}{db}$$

از ترکیب این روابط به‌سادگی می‌توان مقدار هر تصویر میله را برحسب مقدار سایر تصاویر آن بیان نمود . به‌عنوان مثال $X_{ab} = Y_{ab}(ax/ay)$ ....

در هر گرهی که میله‌های مختوم به‌آن گره دریک صفحه واقع نشده باشند برای محاسبه نیروی میله‌ها سه معادله تعادل می‌توان برقرار نمود و لذا اگر به‌آن گره بیش از سه میله با



شکل (۹ــ۵) تصاویر یک میله

نیروی مجهول ختم نشده باشد در یک چنین‌گرهی آن نیروهای میله‌را می‌توان محاسبه‌نمود . این روش کلی بسط روش گرهها به‌صورت سه‌بعدی می‌باشد با اعمال آن بر گره d از سازه‌شکل (۹ــ۴) شرح داده شده است . ابتدا باید جدول ابعاد زیر را تهیه نمود :

با فرض کششی بودن کلیه میله‌ها در گره d معادلات زیر برقرار خواهد بود .

$$\begin{aligned}
\Sigma F_x &= 0 \qquad & +10{,}000 - X_{ad} + X_{cd} &= 0\\
\Sigma F_y &= 0 \qquad & -Y_{ad} - Y_{bd} - Y_{cd} &= 0\\
\Sigma F_z &= 0 \qquad & +Z_{ad} - Z_{bd} + Z_{cd} &= 0
\end{aligned}$$

قطعه	طول	تصاویر		
		X	Y	Z
ad	22.9	10	20	5
bd	20.6	0	20	5
cd	22.9	10	20	5
ab	14.14	10	0	10
bc	14.14	10	0	10
ac	20.0	20	0	0

نه مولفه نیروی میله که در این سه‌معادله ذکر شده است برحسب سه نیروی میله F_{ad} ، F_{bd} و F_{cd} به‌صورت زیر قابل بیان است .

$$+10{,}000 - \frac{10}{22.9}F_{ad} + \frac{10}{22.9}F_{cd} = 0$$
$$-\frac{20}{22.9}F_{ad} - \frac{20}{20.6}F_{bd} - \frac{20}{22.9}F_{cd} = 0$$
$$+\frac{5}{22.9}F_{ad} - \frac{5}{20.6}F_{bd} + \frac{5}{22.9}F_{cd} = 0$$

حل دستگاه سه معادله سه مجهولی فوق منجر به پاسخهای زیرین می‌گردد .

$$F_{ad} = +11{,}450 \text{ lb} \qquad F_{bd} = 0 \qquad F_{cd} = -11{,}450 \text{ lb}$$

در این سازه بخصوص ابتدا می‌توان عکس‌العملهای عمودی را چنانچه دربخش (۹–۳) نشان داده شده است محاسبه‌نمود و نیروی‌میله‌های ad ، bd و cd را می‌توان‌به‌سادگی بااستفاده از این واقعیت محاسبه‌نمود . به‌عنوان مثال در گره a عکس‌العمل عمودی رو به‌سمت پائین و برابر با 10,000 lb خواهد بود . با عمال $\Sigma F_y = 0$ در گره a داریم .

$$-10{,}000 + Y_{ad} = 0 \qquad Y_{ad} = +10{,}000$$
$$F_{ad} = +10{,}000\left(\frac{22.9}{20.0}\right) = +11{,}450^*$$

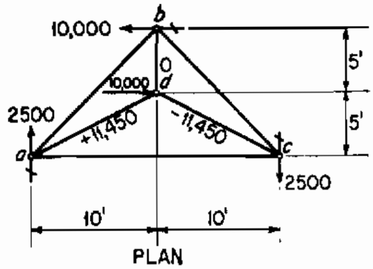
* بدیهی است که این رابطه را می‌توان مستقیما" به‌صورت زیر نوشت :

$$-10{,}000 + \frac{20.0}{22.9}F_{ad} = 0 \qquad F_{ad} = +11{,}450$$

به‌همین‌نحو می‌توان F_{bd} و F_{cd} را به‌سادگی با اعمال $\Sigma F_y = 0$ به‌ترتیب بر گرههای b و c به‌دست آورد ، در حالت کلی این روش براساس برقرارنمودن دستگاه سه‌معادله سه مجهولی در گره d استواراست زیرا درسازه‌های پیچیده سه‌بعدی این تنها روش قابل‌اجرا خواهدبود .

تحلیل میله‌های اتصال نقاط تکیه‌گاهی شکل(۹ــ۴) را می‌توان با استفاده‌از مقادیرمعلوم شده عکس‌العملهای افقی بر طبق محاسبات بخش(۹ــ۳) انجام داد .

مقادیر این عکس‌العملها را در شکل (۹ــ۶) نشان داده‌ایم . برای شرح مطلب گره a



شکل (۹ــ۶) محاسبه نیروی میله‌ها به‌روش گرهها

را با برقرارنمودن معادله $\Sigma F_z = 0$ مورد بررسی قرار می‌دهیم با ذکر این که $Z_{ad} = +11{,}450(5/22.9)$ می‌باشد داریم .

$$+2{,}500 + 11{,}450\left(\frac{5}{22.9}\right) + F_{ab}\left(\frac{10}{14.14}\right) = 0 \qquad F_{ab} = -7{,}070 \text{ lb}$$

به‌همین ترتیب می‌توان‌نیروی میله ac را بااعمال $\Sigma F_x = 0$ در گره a محاسبه نمودومقدار F_{bc} را با اعمال $\Sigma F_z = 0$ در گره c به‌دست آورد *.

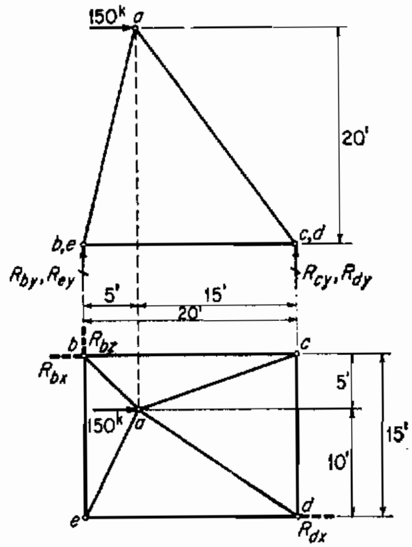
۹ ــ ۵ حالتی که محاسبه عکس‌العملها بدون محاسبه نیروی میله‌ها ممکن نیست .

سازهٔ شکل(۹ــ۷) از نظر داخلی و خارجی معین است و چون فقط سه‌عکس‌العمل افقی موجود است آنها را می‌توان فقط با در نظر گرفتن نیروهای خارجی محاسبه نمود ولی عکس

---

* دانشجویان می‌بایستی بدانند که این مثال فقط جهت شرح اهمیت روش کلی آورده شده‌است .تحلیل این گره را می‌توان با حد قابل ملاحظه‌ای با به‌کاربردن قضیه (الف) از بند (۹ــ۶) تسهیل نمود .

العملهای عمودی را نمی‌توان بدون در نظر گرفتن نیروی میله‌ها محاسبه کرد . اگر بتوانیم نیروها را در ab ، ac ، ad و ae محاسبه‌کنیم سپس قادرخواهیم بودعکس‌العملهای‌عمودی را با در نظر گرفتن مولفه‌های عمودی این نیروی میله‌ها محاسبه کنیم .



شکل (۹ـ۷) مثال مشروح

چون در گره a چهارنیروی میله مجهول وجوددارد و فقط می‌توانیم سه‌معادله تعادل در آن گره برقرار کنیم لذا محاسبه مستقیم این چهار نیروی میله ممکن نخواهد بود .البته می‌توان فقط با استفاده از تعادل به‌تحلیل این سازه پرداخت زیرا در پنج گره می‌توانیم پانزده معادله مستقل تعادل برقرار کنیم و از طرف دیگر فقط پانزده نیروی مجهول مستقل نیز وجود دارد (۸ میله ،۴ عکس‌العمل عمودی و ۳ عکس‌العمل افقی)

برای این سازه‌معادلات تعادل همگی با یکدیگر مرتبط می‌باشند و لذا بااستفاده ازاین مطلب می‌توان جهت تسهیل در محاسبات یکی از نیروهای میله‌ها را موقتا" مجهول فرض کرد و سایرنیروی‌میله‌ها و عکس‌العمل‌هارا برحسب این مجهول‌محاسبه‌نمودو سپس بااستفاده از یکی از معادلات تعادل به‌تعیین مقدارآن مجهول پرداخت.برای شرح این روش F_{cd} را موقتا" به‌عنوان مجهول بر می‌گزینیم . در گره c معادله $\Sigma F_z = 0$ را برقرار می‌کنیم .

$$F_{cd} + \frac{5}{25.5} F_{ac} = 0 \qquad F_{ac} = -5.10 F_{cd}$$

میله	تصاویر			طول
	X	Y	Z	
ab	5	20	5	21.2
ac	15	20	5	25.5
ad	15	20	10	26.9
ae	5	20	10	22.9
bc	20	0	0	20.0
cd	0	0	15	15.0
de	20	0	0	20.0
eb	0	0	15	15.0

در گره d با به‌کاربردن معادله $\Sigma F_z = 0$ داریم .

$$F_{cd} + \frac{10}{26.9} F_{ad} = 0 \qquad F_{ad} = -2.69 F_{cd}$$

فرض کنید که عکس‌العملهای عمودی در e و d رو به‌سوی بالا باشند ، حال در گره e معادلهٔ $\Sigma F_y = 0$ را می‌نویسیم :

$$R_{cy} + \frac{20}{25.5} F_{ac} = 0$$

$$R_{cy} = -0.784 F_{ac} = -0.784(-5.10 F_{cd}) = +4.00 F_{cd}$$

در گره d با به‌کاربردن معادله $\Sigma F_y = 0$ داریم :

$$R_{dy} + \frac{20}{26.9} F_{ad} = 0$$

$$R_{dy} = -0.744 F_{ad} = -0.744(-2.69 F_{cd}) = +2.00 F_{cd}$$

حال با لنگرگیری حول be از کلیه نیروهای موثر بر سازه خواهیم داشت .

$$+150(20) - R_{cy}(20) - R_{dy}(20) = 0$$

بنابراین

$$+150(20) - 4.00 F_{cd}(20) - 2.00 F_{cd}(20) = 0_d \qquad F_{cd} = +25 \text{ kips}$$

چون مقادیر R_{cy} ، R_{dy} ، F_{ac} و F_{ad} را قبلا" برحسب F_{cd} بیان کرده‌ایم حال می‌توانیم مقادیر آنهارا محاسبه نمائیم ،پس‌ازآن که این نیروها معلوم شدند تحلیل مابقی‌سازه اشکالی

بوجود نخواهد آورد .

۹ ـ ۶ قضایای مخصوص

گرچه شبکه‌های سه‌بعدی را می‌توان به‌روش‌هائی که ذکر شد تحلیل نمود ، با وجوداین قضایای زیرین به‌دلیل آن‌که اغلب منتج به‌تقلیل‌عملیات محاسباتی‌قابل‌ملاحظه‌ای می‌گردند از اهمیت بسیاری برخوردار می‌باشند .

الف ــ اگر کلیه میله‌های مختوم به‌یک گره به‌استثنای یکی از آنها که میلهٔ n ام باشد همگی در یک صفحه واقع شده باشند ، مولفه عمود براین صفحه نیروی n ، برابر است بامولفه عمود بر صفحه هر نیرو یا نیروهای موثر بر آن گره ، تحقیق صحت این قضیه با به‌کارگرفتن تعادل گره موردنظر ممکن می‌باشد . می‌توان جمع کلیه نیروهای عمود برآن صفحه را که‌شامل کلیه میله‌ها به‌جز n می‌باشد به‌دست آورد .درسازهٔ شکل(۹ــ۴) اگربه‌عنوان مثال این‌قضیه را در مورد گره d به‌کار بریم ، میله‌های ad و dc در صفحه adc قرار دارند لذا مولفه عمود بر صفحه adc نیروی میله bd باید برابر با مولفهٔ عمود بر آن صفحهٔ نیروی موثر بر آن گره باشد در این حالت مخصوص نیروی موثر برگره نیز در همان صفحه قرارگرفته است لذا مولفه عمود بر صفحه ندارد و بدین ترتیب نتیجه گرفته می‌شود که نیروی میله bd برابر با صفر است . علم براین مطلب تحلیل گره d را که در بند (۹ــ۴) به‌توسط سه معادله سه مجهولی به‌عمل آمد ، به‌دو معادله لازم دومجهولی تبدیل می‌کند .

ب ــ اگر کلیه میله‌های مختوم بر یک گره به‌استثنای یکی از آنها که میله n ام باشد در یک صفحه واحدی واقع شده باشند و بر آن گره نیز نیرویی اثر نکند نیروی میله n برابر با صفر خواهد بود .

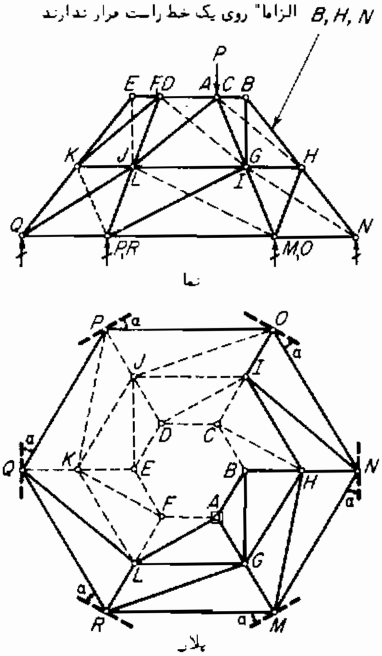
ج ــ اگر کلیه میله‌های یک گره مگر دو میلهٔ آن دارای نیرو نبوده و این دو میله نیز هم‌راستا نباشند و برآن گره نیز نیروی خارجی وارد نشود نیروی میله هریک از این میله‌ها برابر با صفر خواهد بود .

۹ ـ ۷ کاربرد قضایای مخصوص ــ گنبد شودلر (Schwedler Dome)

اهمیت کاربرد این سه قضیه را در تحلیل‌شبکه‌های سه‌بعدی می‌توان با بررسی گنبد شودلر شکل(۹ــ۸) که تحت اثر نیروی P در گره A قرار دارد شرح داد .درمیله‌هائی‌که در

پلان با خط‌چین نشان داده شده است با به‌کاربردن قضایای فوق به‌صورت زیر می‌توان دریافت که نیروی میله‌ای وجود ندارد .

در گره F ، میله‌های EF ، KF و LF به‌جز AF همگی در یک صفحه قرار گرفته‌اند و چون بر گره F نیرویی اثر نمی‌کند لذا برطبق قضیه (ب) نیروی میله AF برابر با صفر خواهد بود . به‌همین‌ترتیب می‌توان به‌بررسی گرههای E ، D ، C و B پرداخت و نتیجه گرفت که میله‌های EF ، DE ، CD و BC همگی دارای نیروی میله برابر با صفر می‌باشند .



شکل (۹–۸) گنبد شودلر

حال اگر دوباره به‌گره F برگردیم ، چون نیروی میله‌های FA ، FE صفر هستند و دو میله KF و LF دو میله‌ای هستند که به‌گرهی ختم می‌شوند که بر آن گره نیرویی اثر نمی‌کند لذا برطبق قضیه(ج)نتیجه‌گرفته می‌شود که نیروی میله این دو نیزبرابر با صفر است . بررسی مشابه گرههای E ، D و C به‌این‌نتیجه می‌رسدکه میله‌های KE و JE و JD و ID و IC و HC نیز همگی نیرویی تحمل نمی‌کنند .

حال اگر گره K را مورد بررسی قرار دهیم چون KE و KF نیرویی‌تحمل نمی‌کنند و KL تنها میله‌ی واقع درخارج صفحهٔ میله‌های JK ، PK و QK می‌باشد لذا میله KL نیرویی‌تحمل نخواهد کرد . به‌همین‌ترتیب بررسی گرههای J و I نشان می‌دهد که میله‌های JK و IJ نیز

نیرویی تحمل نمی‌کنند .

حال دوباره به‌گره K بر می‌گردیم ، چون میله‌های JK ، EK ، FK و LK دارای نیرو نمی‌باشند میله‌های QK ، PK میله‌هایی هستند که بر گرهی بدون تاثیر نیروی خارجی ختم می‌گردند بنابراین این دو میله نیز نیرویی نخواهند داشت . بررسی مشابه گره J نشان می‌دهد که میله‌های PJ و OJ نیز دارای نیرو نخواهند بود .

از آنجائی که این شبکه‌ی گنبدی تحت تأثیر بار عمودی در A قرار گرفته است فقط میله‌هائی‌که با خطوط پردر روی پلان شکل(۹ـ۸) نشان داده‌شده‌اند تحمل نیرو خواهند نمود .

برای تکمیل تحلیلی این سازه می‌توان با اعمال روش گرهها به‌ترتیب بر گرههای A ، B ، L ، G ، H و I به‌محاسبه نیروی میله درکلیه میله‌ها به‌جزمیله‌های قاعده‌اصلی آن‌پرداخت پس از آن عکس‌العملهای عمودی را می‌توان با به‌کاربردن $\Sigma F_y = 0$ در هریک از نقاط تکیه گاهی معین نمود .

برای این‌که به‌محاسبه عکس‌العملهای افقی و نیروی میله در میله‌های قاعده اصلی که همگی در یک صفحه واقع‌اند بپردازیم لازم است که‌موقتا" نیروی میله را در یکی از میله‌های قاعده اصلی به‌طور موقت مجهول فرض نمائیم فرض کنید F_{RM} موقتا" مجهول باشد . اگر در گره R معادلات $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_z = 0$ را به‌کار بریم می‌توانیم F_{QR} و عکس‌العمل افقی را در R برحسب F_{RM} بیان‌کنیم (بایستی متوجه بود که گره R تحت تأثیر مولفه‌های X و Z نیروی میله در میله‌های LR و GR نیز می‌باشد) هرگاه در جهت ساعتگرد روی قاعده اصلی حرکت کرده و به‌ترتیب به‌درج معادلات در گرههای Q ، P و N و O بپردازیم این معادلات امکان خواهند داد که نیروی میله را در کلیه میله‌های اصلی و عکس‌العملهای افقی‌به‌جزدر M را برحسب F_{RM} بیان کنیم ، حال اگر معادلات $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_z = 0$ را بر گره M اعمال کنیم مقادیر F_{RM} و مولفه افقی عکس‌العمل را در M می‌توانیم به‌دست آوریم : چون سایر نیروهای میله‌ها و عکس‌العملهای افقی قبلا" برحسب F_{RM} بیان شده است حال می‌توان مقادیر عددی آنها را نیز معین نمود .

اگر زوایای‌بین‌عکس‌العملهای‌افقی ومیله‌های‌قاعده‌اصلی‌رادارای‌مقادیرمخصوصی باشند امکان ناپایداری هندسی گنبد شودلر وجوددارد ، کرچه شمارش استاتیکی‌خبری از آن نمی‌دهد*.

---

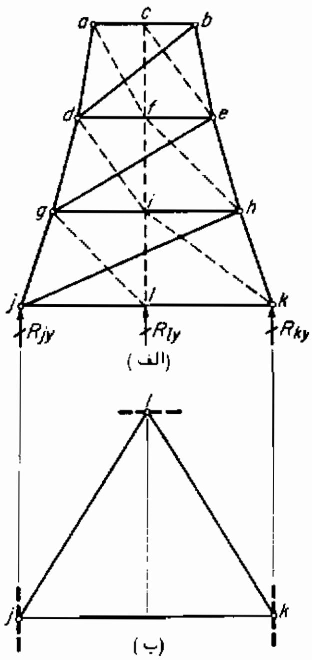
* به‌بخش ۱۶ کتاب زیر که در مورد شبکه‌های فضائی است مراجعه شود .

C.M. Spofford " Theory of structures" 4th ed.

Mc. Graw - Hill Book Company Inc. New York 1939

۹ ــ ۸ برجها

حتی اگر ساقهای (اعضای ستونی) یک برج مشبک در کل طول خود دارای شیب ثابتی باشند آن سازه را می‌بایستی براساس سازه‌های سه‌بعدی تحلیل نمود. در شکل (۹ــ۹ الف) نمای جانبی یک برج با قاعده مثلثی را که ساقهای آن دارای شیب ثابتی نمی‌باشد ملاحظه می‌نمایید. در شکل (۹ــ۹ ب) آرایش عکس‌العملهای افقی آن را مشاهده می‌کنیم، این سازه همان‌طوری که بررسی نیز نشان خواهد داد یک سازه معین است می‌توان پانل به‌پانل با شروع محاسبات از پانل فوقانی و ادامه آن به‌سمت پائین تحلیل نمود. هرگاه مانند این حالت ساقهای مجاور پانل فوقانی در یک صفحه واقع شده باشند نیروی میله‌را در هریک از میله‌های قاعده اصلی فوقانی را می‌توان به‌سادگی با استفاده از سه قضایای بخش (۹ــ۶) محاسبه نمود. به‌عنوان مثال F_{ab} را می‌توان با استناد به‌این مطلب که مولفه عمود بر صفحه acfd این نیرو باید مولفهٔ عمود بر همین صفحه بار خارجی موثر برگره a را درتعادل نگهدارد محاسبه نمود. پس از آن که نیرو در میله‌های قاعده فوقانی محاسبه شود، نیرو در قطریها و ساقهای



شکل (۹ــ۹) برج مثلثی

پانل فوقانی محاسبه خواهد شد . نیروهای این میله‌ها به‌همراه کلیه بارهای خارجی مؤثر برگرههای d ، e و f به‌عنوان بارهای وارده بر پانل دوم به‌حساب آمده و به‌روش مشابه فوق به‌تحلیل این پانل خواهیم پرداخت و . . . .

اگر ساقهای مجاور پانلی در یک صفحه واقع نشده باشند ، برای تعیین نیروی میله‌های قاعده می‌بایستی از روش کلی‌تری استفاده نمود . مثل سابق از پانل فوقانی شروع به‌محاسبه می‌کنیم و نیروی میله‌را در یکی‌از اعضای قاعده فوقانی موقتا" به‌عنوان مجهول بر می‌گزینیم اگر F_{ab} را به‌عنوان مجهول انتخاب کنیم با اعمال روش گرهها بر گره b رابطه‌ای برای F_{bc} برحسب F_{ab} به‌دست می‌آید . به‌همین ترتیب گره c مقدار F_{ca} را برحسب F_{ab} معین می‌کند و بالاخره با اعمال روش گرهها بر گره a می‌توان به‌مقدار عددی F_{ab} پی برد .

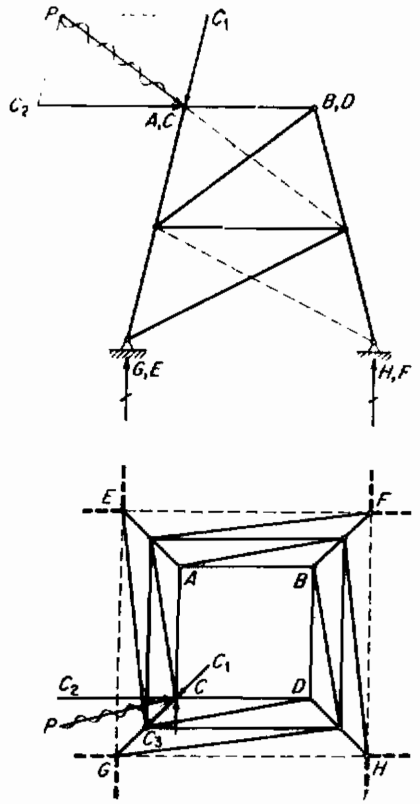
معمولا" مهاربندی درجه دومی در کلیه سطوح افقی که شیب ساقهای برج تغییر می‌کند وجود دارد و اغلب در نقاط پانلی که حتی شیب ساقها نیز تغییر نمی‌کند این مهاربندی وجود دارد . به‌عنوان مثال در برجی که دارای قاعده مستطیلی شکل می‌باشد این‌مهاربندی افقی می‌تواند شامل قطریهایی باشد که نقاط پانلی متقابل را بهم وصل می‌کنند ، چنین مهاربندی برج را یک سازه نامعین‌خواهد کرد .درعمل معمولا" اعضای اصلی برج را به‌عنوان بار برتلقی کرده و فرض می‌شودکه این مهاربندیها نیرویی‌تحمل نکنند و بدین‌ترتیب‌تحلیل چنین سازه‌ای به‌صورت معین باقی می‌ماند .

۹ ــ ۹ برج با ساق‌های مستقیم

اگر شیب ساقهای برج در کل ارتفاع خود ثابت باشد می‌توان برج را جهت تحلیل به‌چندخرپای مستقیم تجزیه‌نمود . چنین سازه‌ای در شکل(۹ــ۲۰)نشان داده شده‌است‌هربار P که برگرهی‌اثرمی‌کندبه‌سه‌مولفه‌تجزیه خواهد شد ، C_1 موازی ساق برج ، C_2 افقی و واقع در یک صفحهٔ مجاور برج ، C_3 افقی و واقع در صفحه دیگر مجاور برج .

بااستفاده ازقضایای بخش (۹ــ۶) به‌سادگی‌می‌توان فهمید که C_1 فقط سبب‌ایجادنیروی میله در میله‌های GC شده و C_2 فقط سبب ایجادنیرو درمیله‌های صفحهٔ $CDGH$ برج‌می‌شود و C_3 فقط سبب ایجاد نیرو در میله‌های صفحه $ACEG$ برج می‌گردد .

به‌این ترتیب نیروهای‌میله حاصل‌از هریک ازمولفه‌های C_1 ، C_2 و C_3 را می‌توان به‌کمک تحلیل مستوی جداگانه‌ای به‌دست آورد و سپس نیروی کل حاصل از P در هر میله را می‌توان با جمع آثار سه مولفه آن به‌دست آورد . چون هر نیروی پانلی را می‌توان به‌صورت زیر مورد



شکل (۹–۱۰) برج مستطیلی با ساقهای مستقیم

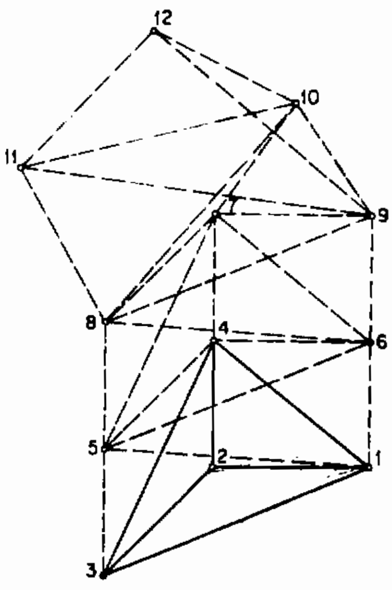
تحلیل قرار داد لذا این چنین روشی یک روش کلی برای تحلیل خواهد بود .

اگر کلیه صفحات یک چنین برجی مشابه یکدیگر باشند ، می‌توان به‌تهیه‌مشخصات تأثیر اقدام نمود . به‌این صورت که نیروهای میله موجود در هر میله از آن صفحات را حاصل از (الف) یک بار واحد افقی که به‌ترتیب در هریک از گره‌های آن صفحه اثرکند و(ب) یک بارواحد موازی با ساق برج که به‌ترتیب در هر گره از آن صفحه اثر کند دانست . اگر چنین مشخصات تأثیری‌را برای یک صفحه ازبرج تهیه‌کنیم از یک چنین‌مشخصاتی می‌توان برای سایر صفحات نیز استفاده نمود . اگر کلیه بارهای پانلی را به‌مولفه‌های ذکرشده فوق تجزیه نماییم و از مشخصات تأثیر استفاده کنیم تنشهای حاصل از کلیه حالات بارگذاری خارجی‌را درهریک‌از اعضاء می‌توان با استفاده از اصل جمع آثار به‌دست آورد .

۹ ـ ۱۰ تئوری کلی شبکه‌های سه‌بعدی

بسیاری از شبکه‌های فضایی را که در سازه‌های متعارف به‌کار می‌برند می‌توان بـه کمک روشهای فوق‌الذکر محاسبه نمود ، ولی به‌منظور تسهیل در بررسی مسائل مربوط به‌شبکه‌هـای غیرمتعارف مطالعه پایداری تعادلی و معین‌بودن شبکه‌های فضایی به‌صورت کلی‌تری و مشابـه با آنچه در فصل چهارم در مورد خرپاها (یا شبکه‌های مستوی) بعمل آمد لازم می‌باشد . شرح مختصری از چنین عملکردی به‌صورت زیر خواهد بود*.

آرایش اعضاء یک یک شبکه فضایی ساده ، گروهی از نقاط را که در یک صفحه واقع‌نشده باشند می‌توان توسط یک شبکه فضایی صلب و مقاوم به‌صورت مشروح زیر به‌یکدیگرمتصل‌نمود. (تعاریف مربوط به‌اجسام صلب و مقاوم در بخش(۴ـ۳) ذکر شده است) ابتدا با استفـاده از شش میله چهارنقطه غیر واقع در روی یک صفحه‌را به‌طوری‌که در شکل(۹ـ۱۱) با خط پر جهت



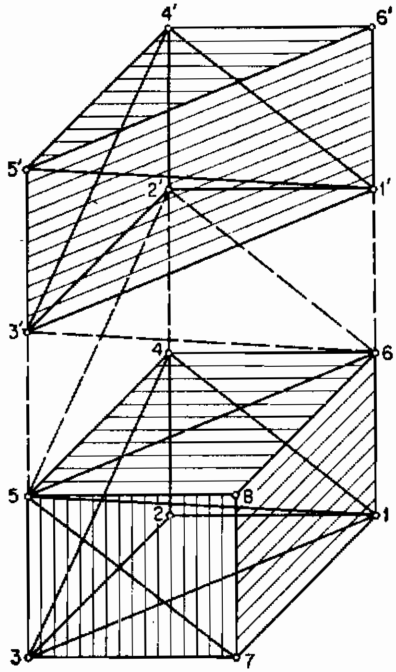
شکل (۹ـ۱۱) شبکه فضایی ساده

---

* به‌منظور بحث بیشتر و بهتر در مورد شبکه‌های فضایی معین می‌توان به‌فصل چهارم صفحات ۱۶۳ الی ۲۱۲ کتاب زیر مراجعه نمود .

S.P. Timoshenko D.H. Young " Theory of structures"

Mc Graw Hill Book Company Inc. New York 1945.



شکل (۹–۱۲) شبکه فضایی مرکب

اتصال گرههای 1 ، 2 ، 3 و 4 به‌کار رفته است با ایجاد یک هسته چهاروجهی به‌هم متصل کند. پس از آن می‌توان گره 5 را به‌این هسته صلب توسط میله‌هایی که از گرههای 1 ، 3 و 4 به آن گره وصل می‌شوند و در روی شکل با خط‌چین نشان داده شده است در فضا تثبیت نمود و به‌همین‌ترتیب هریک از گرههای 6 الی 12 را می‌توان توسط سه میله که در یک صفحه *واقع نباشند* به‌شبکه‌ای که قبلاً ایجاد شده است متصل نمود .

اگر بخواهیم از همان الفاظی‌که در مورد خرپاها به‌کار بردیم استفاده نماییم یک شبکه فضایی‌را که به‌این ترتیب ایجاد می‌شود *به‌نام شبکه فضایی ساده* خواهیم نامید . تعداد میله‌هایی که جهت ایجاد چنین شبکه‌ای با n گره لازم است برابر با $6 + (4 - n)3$ و یا $b = 3n - 6$ خواهد بود .

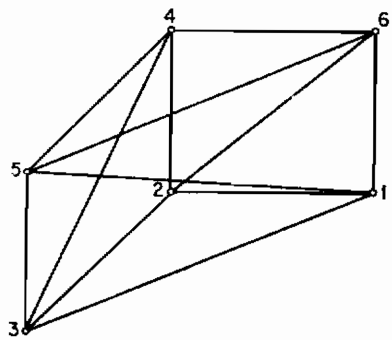
ایجاد شبکه‌های فضایی مرکب با اتصال چندین شبکه فضایی ساده به‌نحوی که در شکل (۹–۱۲) دیده می‌شود ممکن است . این‌اتصال باید توسط شش میله که *محورهای آنها* در روی *یک خط* مستقیم یکدیگر *را قطع ننمایند* انجام می‌گیرد . در شکل (۹–۱۲) دوشبکه‌فضایی ساده را با هاشور مشخص کرده و میله‌های‌اتصال این دو شبکه‌را با خط‌چین نشان‌داده‌ایم . ملاحظه

می‌شود که‌تعداد کل میله‌های به‌کار رفته در یک‌چنین حالتی برابر با :

$$(3n_1 - 6) + (3n_2 - 6) + 6, \quad \text{یا} \quad b = 3(n_1 + n_2) - 6, \quad \text{یا} \quad b = 3n - 6,$$

می‌باشد. در این روابط n_1 و n_2 نشان‌دهنده تعداد گرههای هریک از شبکه‌های فضایی ساده بوده و n نشان‌دهنده تعداد کل گرههای کل سازه است.

شبکه‌های فضایی پیچیده، از آنجائی که اکثر شبکه‌های فضایی را نمی‌توان در زمرهٔ شبکه‌های ساده و یا مرکب به‌حساب آورد لذا آنها را در زمرهٔ شبکه‌های فضایی پیچیده‌قرار می‌دهند. یک چنین شبکه‌ای‌را در شکل(۹–۱۳) نشان داده‌ایم. دیده می‌شود که اگر میله 2-6 را در وضعیت 1-4 قرار دهیم، این‌شبکه به‌یک‌شبکه فضایی ساده تبدیل می‌شود، به‌همان نحو فوق‌الذکر تعداد میله‌های لازم جهت ایجاد یک شبکه صلب و مقاوم توسط یک شبکه فضایی پیچیده نیز برابر با $b = 3n - 6$ می‌باشد*.



شکل (۹–۱۳) شبکه فضایی پیچیده

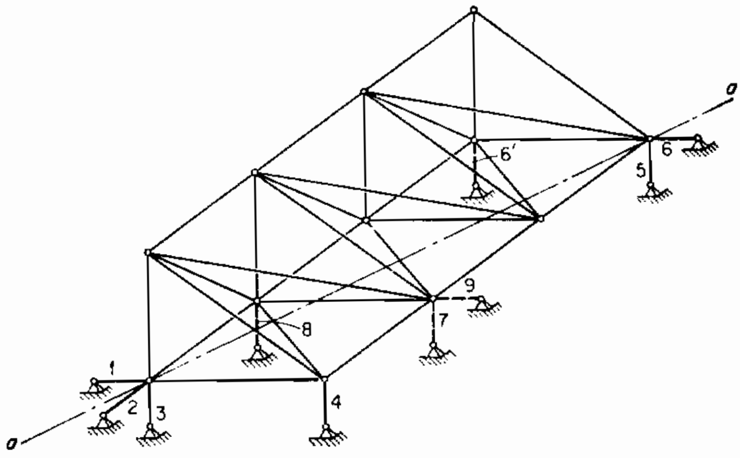
تکیه‌گاههای شبکه‌های فضایی، اگر یک شبکه فضایی به‌نحوی روی تکیه‌گاههای‌خود قرار گرفته باشد که *مولفه‌های عکس‌العمل آن معادل با شش بند که خط اثر آنها یکدیگر را* در روی *یک خط مستقیم قطع نکنند باشد* این سازه پایدار بوده و این شش مولفه معین بوده‌ومحاسبه آنها توسط شش معادله تعادل کلی سازه که در بند (۹–۲) بیان گردید بعمل می‌آید. چنین آرایش تکیه‌گاهی در شکل (۹–۱۴) نشان داده‌شده در این شکل بندها را با خط ضخیم‌واعداد

---

* همان‌طوری که درفصل ۴ تاکید شد، چنین ضابطه‌ای یک *شرط لازم ولی ناکافی* برای صلب و مقاوم بودن شبکه می‌باشد. اگرچه تعداد میله‌های شبکه‌ای کافی باشد ولی اگر آرایش میله‌ها به‌نحو مطلوبی انجام نگرفته باشد امکان ناپایداری هندسی شبکه فضایی وجود دارد.

از 1 الی 6 مشخص کرده‌ایم .

واضح است که اگر خط اثر بند 6 بر خط aa منطبق میشد ، سازه حالت ناپایداری بخود می‌گرفت زیرا در آن صورت عکس‌العملی که در مقابل دوران سازه حول محور منطبق بر بند 3 ایستادگی نماید وجود نداشت . چنین حالتی در صورتی که بند 6 در موقعیت بند $6'$ قرار می‌گرفت نیز تکرار می‌شد . ملاحظه می‌شود که در هریک از حالات فوق محورهای کلیه بندها خط عمود منطبق بر بند 3 را قطع می‌کنند زیرا بندهای 4 ، 5 و $6'$ با بند 3 موازی بوده و لذا آن خط عمودی را در بی‌نهایت قطع خواهند نمود . بدیهی است که اگر بندهایی اضافی نظیر بندهای 7 ، 8 و 9 بر بندهای اولیه ـ بندهای 1 الی 6 ـ افزوده شوند سازه سازه پایدار بوده ولی عکس‌العمل‌های آن نامعین خواهد شد که در این حالت درجه نامعینی سه خواهد بود .



شکل (۹ـ۱۴) آرایش عکس‌العملها

در اغلب شبکه‌های فضایی موجود تعداد مولفه‌های عکس‌العمل بیش از شش است ، در یک چنین حالاتی اگر تعداد مولفه‌های عکس‌العمل r باشد اغلب $(r - 6)$ میله از تعداد کل میله لازم جهت یک شبکه صلب ومقاوم یعنی $(3n - 6)$ حذف می‌گردد و درنتیجه خواهیم داشت:

$$b = (3n - 6) - (r - 6)$$

و یا $3n = (b + r)$ و به‌عبارت دیگر چون حذف $(r - 6)$ میله معادل با افزودن $(r - 6)$ معادله خاص (یا معادله شرط ــ مترجم) می‌باشد ،اگر چنین عملی به‌نحو مطلوبی انجام گیرد از ناپایداری هندسی جلوگیری شده و سازه پایدار و معین خواهد بود . گاهی عکس‌العملها

را می‌توان مستقیماً" با استفاده از ترکیب معادلات خاص و معادلات تعادل در موردکل سازه محاسبه نمود ولی اغلب اوقات محاسبه عکس‌العملها همان‌طوری‌که دربند (۹-۵) شرح داده شد بدون محاسبه برخی از نیروی میله‌ها امکان‌پذیر نمی‌باشد .

این چنین بررسیها و نظایرآنها ما را به‌نتیجه‌گیری زیر درمورد پایداری و شرط‌معینی سازه‌های شبکه‌های فضایی با در نظر گرفتن مولفه‌های عکس‌العمل و نیروی میله‌های آنها می‌رساند ، در مورد شبکه‌های فضایی کلا" $3n$ معادله مستقل تعادل موجود است که این معادلات با جداکردن هریک از گرهها و برقرارنمودن سه معادله $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ و $\Sigma F_z = 0$ بوجود می‌آید . در این معادلات تعداد مجهولاتی که کلا" برابربا $(b + r)$ می‌باشندموجود است که در آن b تعداد نیروی میله‌ها و r تعداد مولفه‌های عکس‌العمل می‌باشد . هرگاه تعداد مجهولات را با تعداد معادلات موجود مقایسه کنیم نتایج‌زیربه‌دست می‌آید .

اگر $(b + r) < 3n$ باشد ، سازه ناپایدار است .

اگر $(b + r) = 3n$ باشد ، سازه معین است.

اگر $(b + r) > 3n$ باشد ، سازه نامعین است .

اگر این ضابطه شمارش نشان دهد که سازه‌ای معین یا نامعین می‌باشدمی‌بایستی‌متوجه بود که شمارش تنها نمی‌تواند پایداری سازه را اثبات نماید زیرا اگرآرایش و ترتیب قرار-گرفتن میله‌ها و یا مولفه‌های عکس‌العمل وضع مطلوبی نداشته باشد ممکن است سازه از نظر ایستایی یا هندسی ناپایدار باشد .

تحلیل تنش شبکه‌های فضایی‌معین ، تحلیل تنش بسیاری‌از شبکه‌های فضایی رامی‌توان با ترکیبی از روش گرهها و مقاطع به‌همان‌صورتی که قبلا" در فصل ۴ در مورد خرپاها (یا شبکه‌های مستوی) شرح داده شد انجام داد . بدیهی است وضع هندسی سازه‌های سه بعدی به‌نحوقابل توجهی مانع از پیشرفت قابل توجه چنان محاسباتی می‌گردد .

به‌عنوان مثال یک شبکه ساده فضایی را که به‌نحو معینی روی تکیه‌گاه قرار گرفته است در نظر بگیرید . در یک چنین حالتی عکس‌العملها را می‌توان با در نظر گرفتن تعادل کلی سازه محاسبه نمود و پس از تعیین عکس‌العملها کلیه مقادیرنیروهای موثر خارجی‌برسازه‌معلوم می‌گردد .حال می‌توان آخرین گره ایجاد شده در شبکه ساده فضایی‌را (نظیر گره 12 در شکل ۹-۱۱) از سازه جدا نمود . در این گره فقط سه نیروی میله مجهول وجود دارد که مقادیر آنها را می‌توان‌از طریق سه معادله تعادل‌گره معین نمود .اگر درست برعکس ترتیبی که‌گرهها درسازه ایجادشده‌اند یعنی درترتیب‌گرههای 11 ، 10 ، 9 و غیره به‌تحلیل گرهها بپردازیم در مورد هر گره فقط سه نیروی میله مجهول وجود خواهد داشت و لذا تعیین کامل نیروی

میله‌ها فقط با اعمال نوبت روش گرهها در گرههای متعدد انجام خواهد گرد .

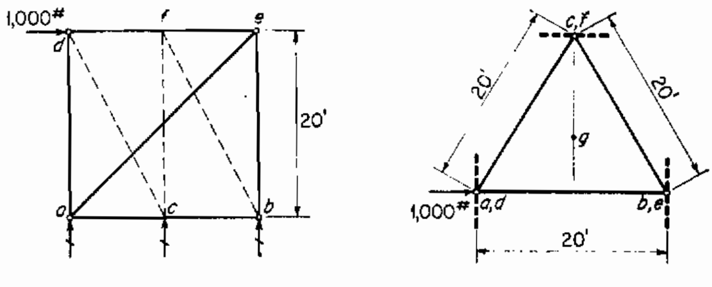
در حالت یک شبکه فضایی مرکب پس از تعیین عکس‌العملها می‌توان تا جائی که در هر گره مورد تحلیل سه نیروی میلهٔ مجهول وجود دارد محاسبات را با استفاده از روش گرهها پیش برد ولی در گرهی که تعداد نیروی میله مجهول بیش از سه باشد می‌بایستی از روش مقاطع به‌منظور تعیین برخی از نیروی میله‌ها استفاده کرد . در حالت یک شبکه فضایی پیچیده بالاخره به‌نقطه‌ای خواهیم رسید که نه توسط روش گرهها ــ و نه‌توسط روش‌مقاطع ــ حل‌مستقیم مساله ممکن نخواهد بود . در یک چنین حالتی یا می‌بایستی به‌نحوی که دربند (۴ ــ ۱۲) برای شبکه‌های فضایی شرح داده شد به‌حل مساله پرداخت و یا این که به‌روش هنبرگ متوسل شد (به‌مراجعی که در بخش (۴ــ۱۲) ذکر شده است مراجعه شود) .

در سالهای اخیر از شبکه‌های فضایی بسیار پیچیده در فرستنده‌ها و گیرنده‌های رادار استفاده می‌شود در یک چنین سازه‌هایی مقدار وسیعی گره و میله وجود داشته و گاهی نیز دارای شکل هندسی بغرنجی می‌باشند و اغلب بجای‌مقاومت قطعات محدودیتهای تغییرمکان و مشخصات لرزشی‌تعیین کننده طرح آنها می‌باشد .در تحلیل چنین سازه‌هایی‌درجذ جامعی از ماشینهای حسابگر با به‌کاربردن روشهای ماتریسی استفاده می‌شود .

۹ ــ ۱۱ مسائل

۹ ــ ۱ نشان دهید که برج شکل (۹ــ۱۰) معین است .

۹ ــ ۲ عکس‌العملهای سازه‌شکل(۹ــ۱۵) را تحت‌اثربار 1,000 lb موثر برآن پیداکنید .



شکل (۹ ــ ۱۵) مسائل ۹ــ۲ ، ۹ــ۳ و ۹ــ۴

جواب :

(به‌طرف بالا) $R_{by} = 1{,}000$ lb (به طرف بالا) $R_{az} = 866$ lb (به‌طرف پائین) $R_{ay} = 1{,}000$ lb

(به‌سمت چپ) $R_{cy} = 0$; $R_{cz} = 1{,}000$ lb (به‌طرف پائین) $R_{bz} = 866$ lb

۹ ـ ۳ نیروی میله‌های سازه شکل (۹ــ۱۵) را تحت اثر بار موثر 1,000 lb پیدا کنید .

جواب :

میله‌های : $ab = -500;\ bc = +1{,}000;\ ca = -1{,}000;\ ed = -1{,}000$

$ea = +1{,}414$ lb ; $eb = -1{,}000$ و کلیه سایر میله‌ها صفر می‌باشد .

۹ ـ ۴ عکس‌العملها و نیروی میله‌ها را در سازهٔ شکل(۹ــ۱۵) در صورتی پیدا کنید که بار 1,000 lb که بر گره d اثر می‌کند در راستایی وارد شود که امتداد آن از نقطه g که در مرکز مثلث متساوی الاضلاع def واقع است بگذرد .

جواب :

$R_{ay} = 1{,}154$ (به‌طرف پائین) $R_{az} = 250$ (به‌طرف بالا) $R_{by} = 577$ (به‌طرف بالا)

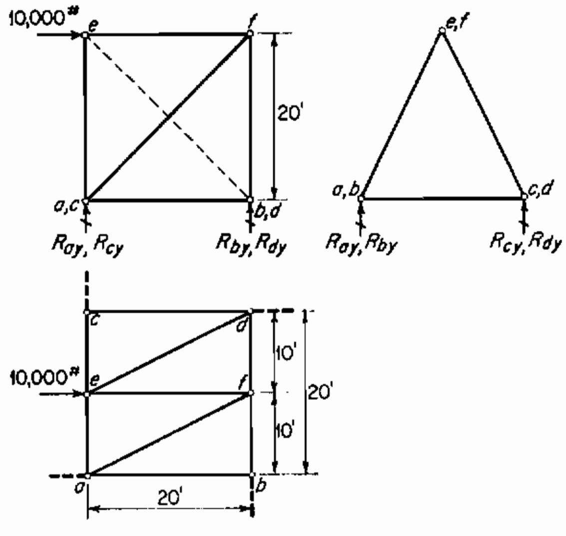
$R_{bz} = 750$ (به‌طرف پائین) $R_{cy} = 577$ (به‌طرف بالا) $R_{cz} = 866$ lb (به‌سمت چپ)

میله‌های : $ab = -433;\ bc = +866;\ ca = -289;\ ed = eb = -577;\ da = +577$

$dc = -815;\ ca = +815$ lb و سایر میله‌ها صفر می‌باشد .

۹ ـ ۵ (الف) نشان دهید که سازه شکل (۹ــ۱۶) یک درجه نامعین است .

(ب) عکس‌العمل‌های سازهٔ شکل(۹ــ۱۶) و کلیه نیروی میله‌های آن را تحت اثر بار موثر 10,000 lb محاسبه کنید ، فرض کنید که میله ef میله‌ای فشاری بوده و دارای نیرویی برابر با نصف بار موثر بر سازه می‌باشد .



شکل (۹ــ۱۶) مساله ۹ــ۵

۹ ــ ۶ اگر همان‌طوری که درشکل(۹ــ۸) نشان داده شده است زاویه α که بین عکس‌العمل افقی و میله قاعده اصلی می‌باشد در کلیه نقاط تکیه‌گاهی گنبد شودلر دارای مقدار ثابتی باشد ثابت کنیدکه تحت اثر هربارعمودی موثر بر گنبد جمع جبری کلیه عکس‌العملهای افقی برابربا صفر است .

۹ ــ ۷ در برجی مشابه با برج شکل(۹ــ۹) که دارای 10 پانل با ارتفاع هریک برابربا 10 ft می‌باشد $ab = bc = ca = 10$ ft و $de = ef = fd = 12$ ft و در قاعده برج $jk = kl = lj = 40$ ft بر گره a بارهای موثر خارجی زیرین اثر می‌کند ، باری افقی برابر با 10,000 lb که در جهت موازی با محور OX و رو به‌سمت راست اثر می‌کند ، باری افقی برابر با 5,000 lb که درجهت موازی با محور OZ و رو به‌سمت عقب اثر می‌کند و باری عمودی برابر با 20,000 lb که رو به‌سمت پائین اثر می‌کند :

(الف) مقدار نیروی میله را در اعضاء ab ، bc و ca چقدر است .

(ب) مقداربرآیند مولفه‌های X، Y و Z نیروهای موثر برگرههای d ، e و f که‌توسط ساق‌ها و قطریهای پانل فوقانی اعمال می‌شوند چیست .

(ج) عکس‌العملهای برج چقدر است .

جواب :

(الف) میله : $ab = -8.45$ kips; $bc = 0$ $ca = 0$

(ب) گره : d: $Z = -0.41$, $X = +6.34$, $Y = -7.04$; e: $Z = -0.41$

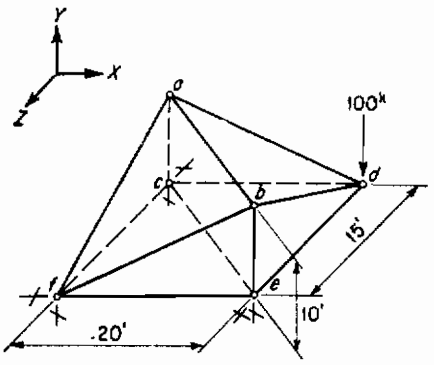
$X = +0.70$; $Y = -7.04$; f: $Z = +5.81$; $X = +2.96$; $Y = -5.92$ kips

$R_{lx} = 10.00$ (به‌سمت چپ) $R_{ly} = 19.43$ (به‌طرف بالا) $R_{js} = 3.37$ (به‌طرف بالا)

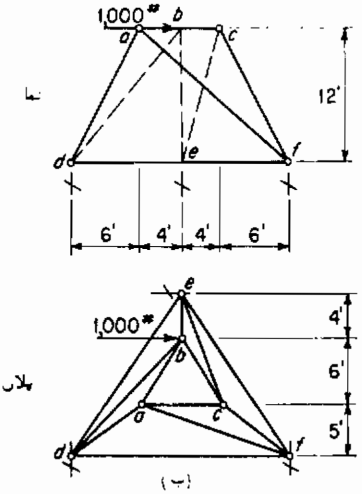
$R_{jy} = 22.22$ (به‌طرف پائین) $R_{ks} = 8.37$ (به‌طرف پائین) $R_{ky} = 22.79$ kips (به‌طرف بالا)

۹ ــ ۸ برج مساله (۹ــ۷) دارای وزنی برابر با 50,000 lb می‌باشد ، حداکثر بار حاصل از باد که بر برج اثر می‌کند برابر با فشار جانبی معادل 400 lb بر هر فوت ارتفاع برج می‌باشد ، تکیه‌گاه این برج بر اساس چه نیرویی رو به‌بالا می‌بایستی محاسبه شود در صورتی که برطبق آئین نامه محاسباتی ، پی بر اساس ۱۵۰ درصد نیروی رو به‌بالای مؤثر محاسبه می‌گردد .

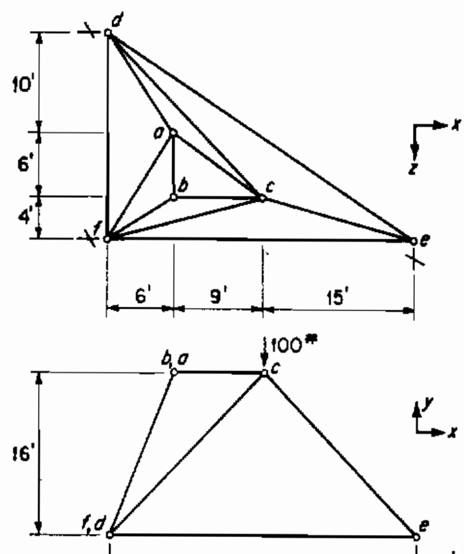
۹ ـ ۹ عکس‌العملها و نیروی میله‌های هریک از شبکه‌های فضایی شکل(۹ـ۱۷)را محاسبه‌کنید .

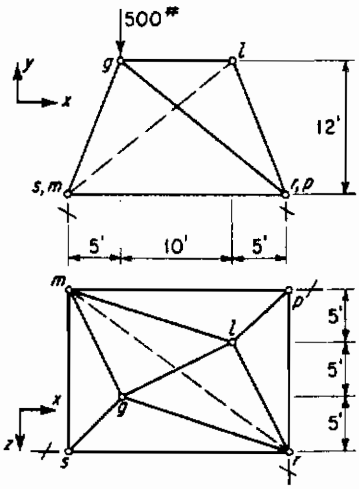


(الف)



(ب)





دقت : در نقاط $m,p,r,$ و s دارای مولفه عمودی عکس‌العمل می‌باشد . نیروی میله را در عضو gl برابر با 100 پاوند فشاری فرض کنید .

دقت : در نقاط e ، d و f دارای مولفه عمودی عکس العمل می‌باشد .

شکل (۹ـ۱۷) مساله ۹ـ۹

۱۰

کابلها

۱۰ ـ ۱ مقدمه

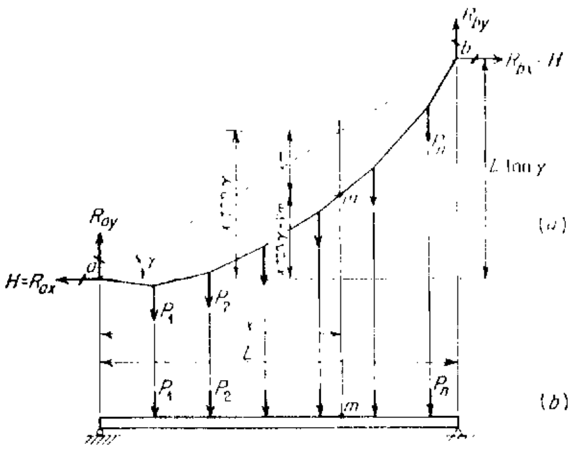
کابلها دراکثر انواع سازه‌های مهم مهندسی به‌کار برده می‌شوند . کابلها اعضاء اصلی و باربر پلهای‌معلق و دستگاههای حمال کابلی را تشکیل می‌دهند . در دکلها و برجهای‌رادیو از کابلهای ثابت به‌نحوگسترده‌ای استفاده‌می‌شود و به‌صورت‌کابلهای موقتی در نصب سازه‌ها به‌کار برده می‌شود . گرچه تحلیل دقیق کابلها نیاز به‌معلومات ریاضی خارج از هدف این کتاب دارد ولی ذکر برخی از روابط اساسی کابلها در سازه‌های مهندسی بسیار مهم است .

اگر بر کابلها بارگسترده یکنواختی درطول آن مانند وزن آنها اثر کند کابل مربوطه شکل شنت Catenary بخود خواهد گرفت و در صورتی که افت (یا شکم) کابل نسبت به‌طول آن قابل توجه نباشد شکل حاصل از کابل را می‌توان سهمی فرض کرده وبه‌این‌ترتیب تحلیل کابل‌را تا حد بالایی ساده نمود .

۱۰ ـ ۲ قضیه کلی کابلها

کابلی را که در نقاط a و b در حالت کلی در یک تراز نمی‌باشد و به‌عنوان تکیه گاه کابل فرض می‌شوند ثابت‌شده وبر آن‌کابل بارهای P_1, P_2 و . . . P_n مانند شکل(۱۰ـ۱ الف) اثر می‌کنند در نظر بگیرید . فرض می‌شود که این کابل کاملا" خمش‌پذیر بوده به‌نوعی که لنگر خمشی در هرنقطهٔ آن برابر با صفر باشد ، چون کلیه بارها عمودی است لذا مولفه افقی کشش کابل که آن را با H نشان می‌دهیم در کلیه نقاط دارای مقدار ثابتی بوده وعکس‌ـ العملهای افقی کابل نیز برابر با H خواهد بود .

اگر ΣM_b جمع کلیه لنگرهای‌حاصل از بارهای P_1 , P_2 . . . P_n حول b بوده و ΣM_m جمع کلیه لنگرهای بارهای P_1, P_2 . . . P_n که در قسمت سمت چپ نقطه m بر کابل اثر



شکل (۱۰–۱) استخراج قضیه کابلها

می‌کنند باشد ، اگر چنانچه لنگرهای کلیه نیروهای موثر بر کابل‌را حول b محاسبه کنیم خواهیم داشت .

$$+H(L\tan\gamma) + R_{ay}L - \Sigma M_b = 0$$

و یا :

$$R_{ay} = \frac{\Sigma M_b}{L} - H\tan\gamma \qquad \text{(الف)}$$

اگر لنگر کلیه نیروهای‌موثر به‌سمت چپ نقطه m ازکابل را حول نقطه m محاسبه‌کنیم خواهیم داشت :

$$+H(x\tan\gamma - y_m) + R_{ay}x - \Sigma M_m = 0$$

اگر بجای R_{ay} از معادله (الف) مقدار آن را در رابطه فوق قرار دهیم خواهیم داشت :

$$Hy_m = \frac{x}{L}\Sigma M_b - \Sigma M_m \qquad \text{(ب)}$$

در معادله (ب) مقدار y_m بیان کننده فاصله عمودی نقطه m از خطی است که دو تکیه‌گاه a و b کابل را به‌هم متصل می‌سازد . سمت راست معادله (ب) برابر است با لنگر خمشی‌حاصل درنقطه m (به‌شکل ۱۰–۱(ب)مراجعه شود) از یک تیر ساده فرضی که تحت اثر بارهای P_1, P_2 . . . P_n واقع شده و دارای دهانه L باشد و در این تیر نقطه m یک مقطع فرضی به‌فاصله x از تکیه‌گاه چپ آن باشد .

با ملاحظه معادله (ب) قضیه کلی کابلها به‌صورت زیر بیان می‌گردد : *در هر نقطه‌از یک کابل که تحت اثر بارهای عمودی واقع شده باشد ، حاصل‌ضرب مولفه افقی کشش کابل در فاصله عمودی آن نقطه از خط اتصال دو انتهای کابل برابر است با لنگر خمشی حاصل*

در همان مقطع از تیری ساده که تحت اثر همان بارهای عمودی واقع شده و دارای همان دهانه کابل باشد.

باید تاکید نمود که این قضیه در مورد کلیه انواع بارهای عمودی موثر بر کابلها صادق است اعم از این که خط اتصال دو انتهای کابل افقی و یا مایل باشد.

۱۰ ــ ۳ کاربرد قضیه عمومی کابلها

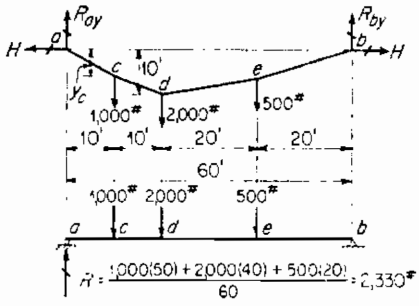
فرض کنید که بارهای موثر بر یک کابل و فاصله یک نقطه از کابل از خط اتصال دو انتهای آن همان طوری که در شکل (۱۰ــ۲) نشان داده شده است معلوم باشد. اگر از وزن کابل صرف نظر شود لنگر خمشی در نقطه d از تیر فرضی با همان دهانه کابل برابر خواهد بود با:

$$2{,}330(20) - 1{,}000(10) = 36{,}600 \text{ ft-lb}$$

لذا بر طبق قضیه عمومی کابلها خواهیم داشت $10H = 36{,}600$ و یا $H = 3{,}660$ lb برای اینکه فاصله نقطه دیگری نظیر نقطه c از کابل را از خط اتصال دو انتهای کابل محاسبه کنیم، قضیه عمومی کابلها را در مورد مقطع c اعمال می‌کنیم که در نتیجه خواهیم داشت $3{,}660y_c = 2{,}330(10)$ و از آنجا $y_c = 6.38$ ft بدست می‌آید. کابل در فاصله a و c شکل خط مستقیمی بخود خواهد گرفت زیرا از وزن کابل صرف نظر شده است و در این فاصله طول کابل برابر با مقدار زیر خواهد بود.

$$\sqrt{(10)^2 + (6.38)^2} = 11.85 \text{ ft}$$

چون مولفه افقی کشش کابل برابر با $3{,}660$ lb می‌باشد کشش واقعی کابل بین c و b برابر با $3{,}660(11.85/10) = 4{,}340$ lb پاوند خواهد شد.



شکل (۱۰ــ۲) کاربرد قضیه عمومی کابلها

عکس‌العمل عمودی سمت چپ کابل برابر با مولفه عمودی کشش کابل در قسمت ac یعنی برابر با $3,660(6.38/10) = 2,330\ \text{lb}$ خواهد شد . در این حالت خاص این مقدار برابر با عکس‌العمل عمودی سمت چپ تیر ساده فرضی می‌باشد . اگر خط واصل بین دو انتهای کابل شیب‌دار می‌بود مقادیر عکس‌العملهای کابل و تیر متفاوت می‌شد .

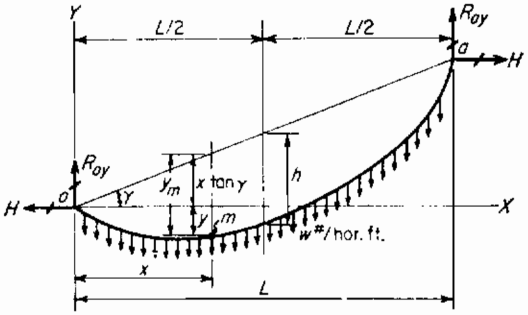
۱۰ – ۴ شکل کابل با بار یکنواخت

حالت بارگذاری یکنواخت کابل یعنی با شدت یکنواخت در هر واحد طول افقی کل دهانه آن بسیار حالت مهمی‌می‌باشد ، چون نه‌تنها این چنین حالتی نظیرحالت‌بارگذاری کابل پلهای معلق است بلکه حالتی است که با تقریب می‌توان‌کابل‌را تحت اثر بار حاصل از وزن خود به‌شرط‌این‌که وزن آنرا در طول افقی دهانه آن ثابت فرض کنیم تحلیل‌نمائیم . در شکل (۱۰–۳) با در نظر گرفتن قضیه عمومی کابلها به‌نتیجه زیر خواهیم رسید .

$$Hy_m = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2} \qquad \text{(الف)}$$

اگر مقدار خاص y_m را در وسط دهانه با h نشان دهیم مقدار h را شکم کابل نامیده و در حالتی به‌صورت عمودی اندازه خواهیم‌گرفت .برای وسط دهانه‌که $x = L/2$ و $y_m = h$ می‌باشد معادله قبلی به‌صورت $Hh = wL^2/8$ در می‌آید ، لذا :

$$H = \frac{wL^2}{8h} \qquad (۱۰ – ۱)$$



شکل(۱۰–۳) کابل با بارگذاری یکنواخت در واحد طول افقی آن

این رابطه که بیان کننده مقدار H می‌باشد بسیار مهم است ، دیده می‌شود که مقدار فوق در هردو صورت افقی و یا مایل بودن خط اتصال دو انتهای کابل ، معتبر باقی می‌ماند . اگر

مقدار H را ازاین رابطه درمعادله (الف) قرار دهیم و ازآنجا y_m را محاسبه کنیم خواهیم داشت:

$$y_m = \frac{4hx}{L^2}(L - x) \qquad (۲-۱۰)$$

معادله (۱۰-۲) شکل کابل را معین می‌کند، این رابطه شکم کابل را از خط اتصال دو انتهای آن مشخص می‌کند. اغلب لازم است که شکل کابل را بر طبق یک محور افقی معین کنیم در این حالت اگر o مرکز محور مورد نظر بوده و آن را در انتهای چپ کابل که درشکل (۱۰-۳) نشان داده‌ایم درنظر بگیریم با استفاده از رابطه $y = +x\tan\gamma - y_m$ می‌توان مقدار y_m را در معادله (۱۰-۲) قرار داده و به‌معادله زیر رسید:

$$y = \frac{4hx}{L^2}(x - L) + x\tan\gamma \qquad (۳-۱۰)$$

اگرخط اتصال دو انتهای‌کابل افقی باشد در این‌صورت $\tan\gamma = 0$ بوده‌خواهیم‌داشت.

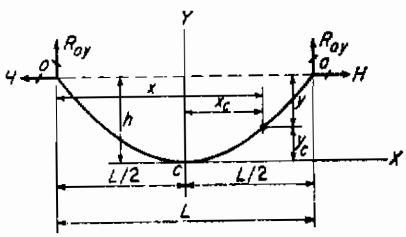
$$y = \frac{4hx}{L^2}(x - L) \qquad (۴-۱۰)$$

اگر خط اتصال دو انتهای کابل افقی باشد و بخواهیم منحنی کابل را بر طبق محورهایی که مرکز آنها در نقطه c یعنی پائینترین نقطه کابل که در وسط دهانه کابل قرار دارد بنویسیم با توجه به‌شکل (۱۰-۴) داریم:

$$x = \frac{L}{2} + x_c \qquad \text{و} \qquad y = -h + y_c$$

اگر این روابط را در معادله (۱۰-۴) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$y_c = \frac{4h}{L^2}x_c^2 \qquad (۵-۱۰)$$



شکل (۱۰-۴) شکل هندسی کابل

۱۰ ــ ۵ کشش کابل با بار یکنواخت

نیروی داخل کابل همواره محوری‌است و مولفه افقی‌کشش کابل را در هرصورت‌می‌توان توسط معادله(۱۰ــ۱) معین نمود .یک جزء کوچک از کابل را به‌طول ds و با تصویر افقی dx در نظر بگیرید ، در این صورت کشش T_x کابل در فاصله x از انتهای آن با $H\ ds/dx$ نشان داده می‌شود . اگر خط اتصال دو انتهای کابل شیب‌دار باشد چنانکه در شکل(۱۰ــ۳)دیدیم مشتق معادله (۱۰ــ۳) به‌صورت زیر خواهد بود :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{8hx}{L^2} - \frac{4h}{L} + \tan\gamma \\ &= \frac{8\theta x}{L} - 4\theta + \tan\gamma\end{aligned}$$

در این معادله $h/L = \theta$ بوده و نسبت افت (یا شکم) گفته می‌شود .

علاوه برآن چون $ds = [1 + (dy/dx)^2]^{1/2}\,dx$ می‌باشد پس $T_x = H[1 + (dy/dx)^2]^{1/2}$ خواهد بود یا :

$$T_x = H\left(1 + \frac{64\theta^2 x^2}{L^2} + 16\theta^2 + \tan^2\gamma - \frac{64\theta^2 x}{L} + \frac{16\theta x}{L}\tan\gamma - 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} \quad \text{(الف)}$$

حداکثر کشش در یکی از دو انتهای کابل خواهد بود .

$$\begin{aligned}&T_{max} = H(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma - 8\theta\tan\gamma)^{1/2} \quad : \text{اگر } x = 0 \text{ باشد} \\ &T_{max} = H(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma + 8\theta\tan\gamma)^{1/2} \quad : \text{اگر } x = L \text{ باشد}\end{aligned} \qquad (۶ - ۱۰)$$

اگر خط اتصال دو انتهای کابل افقی باشد $\tan\gamma = 0$ شده و در هردو انتهای کابل داریم :

$$T_{max} = H(1 + 16\theta^2)^{1/2} \qquad (۷ - ۱۰)$$

درحالت مخصوصی‌که خط اتصال دو انتهای‌کابل افقی است معادله(۱۰ــ۷)رامی‌توان‌به‌صورت زیر استخراج نمود : کشش حداکثر کابل در انتهای کابل بوده و مقدارآن برابربا عکس‌العمل برآیند تکیه‌گاه کابل خواهد بود ،این عکس‌العمل دارای مولفه افقی برابر با H است ولــی مولفه عمودی آن برابر با نصف کل بار موثر بر کابل می‌باشد و یا برابر با $wL/2$ است ، لذا

چون $4Hh/L = 4H\theta$ می‌باشد و $H = wL^2/8h$ است داریم :

$$
\begin{aligned}
T_{max} &= (H^2 + R_y^2)^{1/2} \\
&= (H^2 + 16H^2\theta^2)^{1/2} \\
&= H(1 + 16\theta^2)^{1/2}
\end{aligned}
$$

۱۰ ــ ۶ مثالهای مشروح

مثال ۱۰ــ۱ = کابلی‌که بار گسترده و یکنواخت به‌شدت $1\ kip/foot$ (تصویر افقی) راتحمل می‌کند بین دو نقطه که دارای یک تراز بوده و به‌فاصله $2{,}000\ ft$ از یکدیگر قرار دارند آویزان است . نسبت افت این کابل به‌نوعی است که‌مولفه افقی کشش کابل برابر با $2{,}500\ kips$ می‌باشد . کشش حداکثر کابل چقدر است

حل : داریم $H = wL^2/8h,\ 2{,}500 = 1(2{,}000)^2/8h,\ h = 200\ ft$

$$\theta = \frac{h}{L} = \frac{200}{2{,}000} = \frac{1}{10}$$

$$T_{max} = H(1 + 16\theta^2)^{1/2} = 2{,}500(1 + 16/100)^{1/2} = 2{,}690\ kips$$

مثال ۲ــ۱۰ = کابلی که بار گسترده و یکنواخت به‌شدت $100\ lb/foot$ (تصویر افقی) را تحمل می‌کند ، بین دو نقطه که به‌فاصله $200\ ft$ افقی از یکدیگر فاصله داشت و یکی‌ازآن‌نقاط $50\ ft$ بالاتر از نقطه دیگر قرار دارد آویزان است . کشش کابل را آنقدر تغییر داده‌اند که مقدار شکم (یا افت)کابل در وسط دهانه آن (به‌عبارت دیگر فاصله عمودی بین خط و اصل بین دو انتهای کابل و کابل در وسط دهانه) برابر با $12.5\ ft$ باشد ،مقدار کشش حداکثر کابل چقدر است .

حل :

$$H = \frac{wL^2}{8h} = \frac{100(200)^2}{8(12.5)} = 40{,}000\ lb$$

$$\theta = \frac{h}{L} = \frac{12.5}{200} = 0.0625 \qquad \tan\gamma = \frac{50}{200} = 0.25$$

حداکثر کشش کابل در تکیه‌گاهی که در تراز بالا قرار دارد اتفاق خواهد افتاد که مقدار آن برابر است با :

$$
\begin{aligned}
T_{max} &= H(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma + 8\theta\tan\gamma)^{1/2} \\
&= 40{,}000[1 + 16(0.0625)^2 + (0.25)^2 + 8(0.0625)(0.25)]^{1/2} \\
&= 44{,}700\ lb
\end{aligned}
$$

---

۱۰ ــ ۷ طول کابل با بار یکنواخت

اگر s_o طول کل کابل باشد خواهیم داشت :

$$s_o = \int_0^L ds = \int_0^L \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx \qquad \text{(الف)}$$

در حالتی که خط اتصال دو انتهای کابل افقی باشد با استفاده‌از معادله (۱۰ــ۵) که براساس مرکز مختصاتی واقع در پائینترین نقطه کابل که در وسط دهانهٔ کابل قرار دارد ، می‌باشد داریم :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8hx}{L^2}$$

$$s_o = 2\int_0^{L/2}\left(1 + \frac{64h^2x^2}{L^4}\right)^{1/2} dx \qquad \text{(ب)}$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه به‌عبارت دقیق زیر خواهیم رسید .

$$s_o = \frac{L}{2}(1 + 16\theta^2)^{1/2} + \frac{L}{8\theta}\ln\left[4\theta + (1 + 16\theta^2)^{1/2}\right] \qquad (۱۰-۸)$$

استفاده از معادله (۱۰ــ۸) نیاز به‌کاربرد لگاریتم طبیعی دارد ، عبارت‌بسیارمفید که برای محاسبه طول کابل در حالتی که خط اتصال دو انتهای کابل افقی باشد با بسط عبارت :

$$\left(1 + \frac{64h^2x^2}{L^4}\right)^{1/2}$$

به‌دست می‌آید . بدین‌ترتیب عبارت فوق به‌کمک قضیه بینوم به‌یک سری همگرا تبدیل کرده و چند عبارت اولیه این سری را در محاسبهٔ معادله (b) در نظر می‌گیریم در این‌صورت خواهیم داشت .

$$s_o = 2\int_0^{L/2}\left[(1)^{1/2} + \frac{1}{2}(1)^{-1/2}(64)\frac{h^2x^2}{L^4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(1)^{-3/2}(64)^2\frac{h^4x^4}{L^8} + \cdots\right]dx$$

که به‌صورت ساده زیر در می‌آید :

$$s_o = L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5} + \cdots\right) \tag{۹ — ۱۰}$$

این معادله به‌شدت همگراست و سه‌عبارت اولیه این‌سری دارای دقت‌کافی دراغلب‌محاسبات می‌باشد .

اگر خط اتصال دو انتهای کابل دارای شیب باشد مقدار دقیق s_o را می‌توان با قرار‌دادن dy/dx از معادله (۱۰—۳) در معادله (الف) به‌دست آورد ،ولی چنین عملی منتهی به‌محاسبات بسیارخستگی‌آوری خواهد شد ، در اغلب موارد عملکرد تقریبی زیر منجربه‌نتایج محاسباتی با دقت کافی می‌گردد .

فرض کنید که طول چنین کابلی برابر با طول کابلی است که خط اتصال دو انتهای آن افقی باشد در صورتی‌که کابل اخیر دارای دهانه‌ای برابر با طول خط اتصال دو انتهای‌کابل یعنی $L \sec\gamma$ بوده و افت کابل برابر با $h\cos\gamma$ باشد که یک چنین مقداری بیان کننده‌فاصله تقریبی حداکثر بین کابل و خط اتصال دو انتهای کابل می‌باشد ، با در نظر گرفتن این فرضیات داریم .

$$\theta' = \frac{h\cos\gamma}{L\sec\gamma} = \frac{\theta}{\sec^2\gamma}$$

حال با اعمال معادله (۱۰—۹) براین کابل که توسط فرضیات فوق حاصل شده‌است و با به‌کار بردن فقط دو عبارت اولیه آن خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} s_o &= L\sec\gamma\left(1 + \frac{8}{3}\frac{\theta^2}{\sec^4\gamma}\right) \\ &= L\left(\sec\gamma + \frac{8}{3}\frac{\theta^2}{\sec^3\gamma}\right) \end{aligned} \tag{۱۰ — ۱۰}$$

برای این‌که طول‌کابل‌مثال (۱۰—۱) از بند (۱۰—۶) را با بکاربردن‌معادله (۱۰—۹) به‌دست‌آوریم ($\theta = 1/10$) خواهیم داشت .

$$\begin{aligned} s_o &= 2{,}000\left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{100}\right) - \frac{32}{5}\left(\frac{1}{10{,}000}\right)\right] \\ &= 2{,}000(1.000 + 0.0267 - 0.0006) = 2{,}052 \text{ ft} \end{aligned}$$

برای این که طول تقریبی کابل مثال (۱۰—۲) از بند (۱۰—۶) را با استفاده ازمعادله (۱۰—۱۰) پیدا کنیم خواهیم داشت :

$$\theta = 0.0625 \qquad \sec^2\gamma = 1 + \tan^2\gamma = 1 + (0.25)^2 = 1.0625$$

$$\sec\gamma = 1.031$$

$$s_o = 200\left[1.031 + \frac{8}{3}\frac{(0.0625)^2}{(1.031)^3}\right] = 208 \text{ ft}$$

۱۰ ــ ۸ اتساع ارتجاعی کابلها

وقتی‌کابلی باری را متحمل‌می‌شود ازدیاد طول نیز پیدا می‌کند که اغلب این ازدیاد طول در تعیین افت کابل و همچنین در سایر موارد بسیار مهم می‌باشد . بر طبق تعـــریف ضریب ارتجاعی داریم .

$$\Delta L = \frac{FL}{AE} \text{ که در آن } E = \frac{F/A}{\Delta L/L}$$

جزیی از کابل که دارای طولی برابر با ds باشد کششی برابر با T_x تحمل می‌نمایـد ، یک روش ساده جهت تعیین ازدیاد طول در وهله اول شامل تعیین T_{av} می‌باشد که بر طبـق تعریف عبارت از کشش متوسطی است که هرگاه در کل طول کابل بر آن اثر کند همان ازدیاد طول‌کابل واقعی‌را ایجاد نماید . هرگاه‌این مقدار را به‌زبان ریاضی بیان‌کنیم‌خواهیم‌داشت :

$$\frac{T_{av}s_o}{AE} = \int_0^{s_o} \frac{T_x\,ds}{AE}$$

در این رابطه A و E ثابت فرض می‌شوند لذا داریم :

$$T_{av} = \frac{1}{s_o}\int_0^{s_o} T_x\,ds = \frac{1}{s_o}\int_0^{s_o} H\frac{ds}{dx}\,ds = \frac{H}{s_o}\int_0^{L}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]dx \qquad \text{(الف)}$$

اگر بار موثر بر کابل را باری گسترده و یکنواخت با شدت ثابت در هر فوت افقی فرض‌کنیم و خط‌اتصال دو انتهای کابل را مایل بگیریم . مقدار dy/dx را می‌توان از معادله(۱۰ــ۳) که برابر با $\tan\gamma + (4h/L) - (8hx/L^2)$ خواهد بود به‌دست آوریم ، هرگاه این مقدار dy/dx رادرمعادله (الف)قرار‌دهیم‌وسپس به‌انتگرال‌گیری رابطه بپردازیم داریم :

$$T_{av} = \frac{HL}{s_o}\left(1 + \frac{16}{3}\theta^2 + \tan^2\gamma\right) \qquad \text{(ب)}$$

با استفاده از معادله ۱۰ــ۱۰ مقدار s_o خواهد شد .

$$T_{av} = H \frac{1 + (16\theta^2/3) + \tan^2 \gamma}{\sec \gamma + \frac{8}{3}(\theta^2/\sec^3 \gamma)} \qquad (۱۰-۱۱)$$

اگر خط اتصال دو انتهای کابل افقی باشد در آن صورت $\gamma = 0$ شده و خواهیم داشت .

$$T_{av} = H \frac{1 + (16\theta^2/3)}{1 + (8\theta^2/3)} \qquad (۱۰-۱۲)$$

به‌عنوان مثال فرض کنید که تعیین ازدیاد طول کابل مثال (۱۰ــ۱) مربوط بــه بخش (۱۰ــ۶) موردنظر باشد در مورد آن کابل مقدار s_o برابر با 2,052 ft دربند(۱۰ــ۷) محاسبه شد ، اگر $E = 27{,}000{,}000$ psi و $A = 50$ sq in باشد خواهیم داشت :

$$T_{av} = 2{,}500 \frac{1 + \frac{16}{3}(\frac{1}{100})}{1 + \frac{8}{3}(\frac{1}{100})} = 2{,}570 \text{ kips}$$

$$\text{(اتساع ارتجاعی)} = \frac{T_{av}s_o}{AE} = \frac{2{,}570(2{,}052)}{\frac{50}{144}(27{,}000)(144)} = 3.91 \text{ ft}$$

با تقریب می‌توان طول بی‌تنش کابل را به‌صورت زیر تعیین نمود :

$$2{,}052 - 4 = 2{,}048 \text{ ft}$$

۱۰ ــ ۹ سازه‌های مهارشده توسط کابل

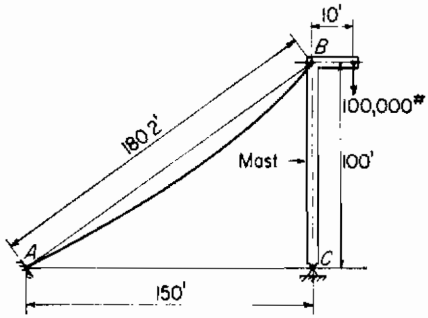
با بررسی سازه شکل (۱۰ــ۵) می‌توان به‌کاربرد روابط مختلف موجود در مورد کابلهای مهاری سازه‌ها پرداخت فرض کنید برای عمودنگهداشتن دکل BC از کابل مهاری بوزن 4.16 lb/ft استفاده شده باشد و این دکل باری برابر با 100,000 lb را نیز تحمل کند ،هرگاه حول نقطه C از کلیه نیروهای موثر بر دکل لنگرگیری‌نمائیم و توجه‌داشته باشیم که H یعنی مولفه افقی کشش کابل‌رو به‌سمت چپ دکل عمل کند خواهیم داشت .

$$100H = 100{,}000(10) \qquad H = 10{,}000 \text{ lb}$$

این مقدار H می‌بایستی جهت عمودنگهداشتن دکل در کابل بوجود آید و لذا افت کـابل می‌بایستی در عبارت زیر صدق کند .

$$10{,}000 = \frac{wL^2}{8h} = \frac{5.00(150)^2}{8h}$$

$$h = 1.41 \text{ ft}$$



شکل(۱۰-۵) کابل مهاری

در این حل تقریبی ، شکل کابل سهمی فرض شده و تحت اثر باری گسترده و یکنواخت برابر با زیر در نظر گرفته شده است .

$$w = 4.16(180.2/150) = 5.00 \text{ lb/}(\text{فوت افقی})$$

کشش حداکثر در کابل مهاری در نقطه B اتفاق خواهد افتاد و با استفاده از معادله(۱۰-۶) برابر با مقدار زیر خواهد شد .

$$T_{\max} = 10{,}000\left[1.000 + 16\left(\frac{1.41}{150}\right)^2 + \left(\frac{100}{150}\right)^2 + 8\left(\frac{1.41}{150}\right)\left(\frac{100}{150}\right)\right]^{1/2} = 12{,}240 \text{ lb}$$

با فرض این که کابل مانند میله‌ای که در امتداد خط اتصال دو انتهای کابل یعنی AB قرار گرفته باشد می‌توان با تقریب قابل قبولی راه حلی برای مساله فوق ارائه نمود . چون طول این خط برابر با 180.2 ft می‌باشد لذا کشش کابل برابر با $10{,}000\left(\frac{180.2}{150}\right) = 12{,}000$ lb خواهد بود . تنها خطایی‌که بدین ترتیب درحل مسئله وارد می‌شود این است که درحقیقت شیب کامل در نقطه B عملا" بیشتر از خط اتصال دو انتهای کابل می‌باشد و فقط زمانی که نسبت افت (یا شکم) کابل بزرگ باشد این اختلاف شیب مهم خواهد بود .

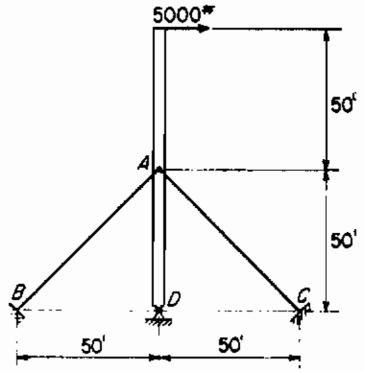
معمولا" برای این که از واژگونی دکل در بیش از یک جهت جلوگیری شود لازم است دکل یا سازه را با بیش از یک کابل مهاری ، مهار نمود . در چنین حالاتی کابلهای مهاری‌را تحت اثر کشش اولیه قرار می‌دهند این کشش اولیه حدود یک دوم کشش حداکثر کابل در حال عمل می‌باشد . فرض کنید در سازه شکل(۱۰-۶) افت (یا شکم) کابلهای AB و AC را همان‌طوری‌که در فوق ذکر شد درحالی که باری افقی به‌دکل اثرنکند تنظیم کرده باشند و

به‌این‌ترتیب مولفه افقی کشش هریک از کابلها برابربا 6,000 lb باشد ، تحت یک چنین شرایطی کشش حداکثر در هریک ازکابلهابرحسب روش‌تقریبی مذکور در شکل (۱۰–۵) برابر با $+6{,}000 \times 1.414 = +8{,}500$ lb خواهد شد .

اگر باری افقی برابر با 5,000 lb بر نقطه فوقانی دکل اثر کند نیرویی افقی برابر با 10,000 lb توسط کابلها و رو به‌سمت چپ باید بر نقطه A جهت برقرارنمودن تعادل دکل وارد شود . با یک تحلیل تقریبی که منتهی به‌نتایج قابل قبولی می‌گردد می‌توان فرض کرد که این بار 10,000 lb سبب ازدیادمولفه افقی کشش کابل AB به‌اندازه 5,000 lb وسبب تقلیل مولفه افقی کشش کابل AC برابر با همان مقدار خواهد شد و لذا $H_{AB} = +11{,}000$ lb و $H_{AC} = +1{,}000$ lb خواهد شد و بدین ترتیب کشش حداکثر کابل برابربا مقدارزیر خواهد شد .

$$+11{,}000 \times 1.414 = +15{,}500 \text{ lb}$$

عملا" وقتی بار 5,000 lb بر بالای دکل وارد می‌شود نقطه A به‌سمت راست حرکت می‌کند ، چون کابل AB امکان چنین حرکتی را می‌دهد لذا ازدیاد طول ارتجاعی پیداکرده و شکم کابل کم می‌شود ولی شکم کابل AC ازدیاد پیدا کرده و طول ارتجاعی آن‌کم‌می‌شود . تحلیل دقیق تغییر ارتجاعی طول کابل و شکم آن امکان‌پذیر می‌باشد ولی نسبةً پیچیده است ، در مسائل متداول مربوط به‌طراحی راه‌حل تقریبی فوق قابل اجرا می‌باشد .



شکل(۱۰–۶) دکل مهارشده با کابل

۱۰ – ۱۰ پلهای معلق معین

پلهای معلق را معمولا" به‌نوعی می‌سازند که بارهای مرده آن کلا" توسط کابلها تحمل گردد ، که قسمت عمده بارمرده آنها ناشی ازجاده بوده و لذا به‌صورت‌یکنواخت عمل‌می‌کند

معمولا" فرض می‌شود که بار مرده به‌صورت یکنواخت بر واحد طول افقی وارد شود و براساس چنین فرضی شکل کابلها تحت اثر بار مرده به‌صورت سهمی خواهد بود . وقتی که بار زنده به‌منظور ایجاد حداکثر تنش در قطعات بر قسمتی از پل وارد می‌شود کابلها تمایل به تغییر شکل خود پیدا می‌کنند برای این که ازتغییر موضعی شیب جاده که می‌تواند بر اثر بار زنده مقدار زیاده ازحدی پیدا کند جلوگیری شود معمولا" تیرهای عرضی کف‌سازی پل را توسط خرپاهایی مهار می‌کنند که این خرپاها به‌نوبت توسط آویزهایی به‌کابلها آویزان می‌گردند . این چنین خرپاهای تقویت‌کننده‌ای سبب می‌شوند که بار زنده به‌نحوی به‌چندین آویزمنتقل شود که عملا" شکل کابل‌را زیر اثر بارهای زنده نیز بتوان به‌صورت‌سهمی فرض نمود .تازمانی که شکل کابل به‌صورت سهمی باقی می‌ماند باید بر آن چنان‌باری وارد شود که در واحدطول افقی به‌صورت یکنواخت باشد و چون فواصل آویزها یکسان می‌باشد چنین استدلالی منجر به‌یکسان‌بودن کشش آویزها در کل دهانه پل می‌گردد . در تئوری "ارتجاعی " پلهای معلق ، کشش در کلیه آویزهای دهانه یک پل یکسان فرض می‌گردد . عدم صحت کامل این تئوری را می‌توان با تئوری پیچیده‌تر و دقیقتری‌که تئوری "تغییرمکان " پلهای معلق‌می‌باشد نشان‌داد . البته تا زمانی که یک پل معلق طویل و خمش‌پذیر بماند تئوری ارتجاعی منجر به‌نتایجی‌که زیاد خطا ندارد خواهد شد .

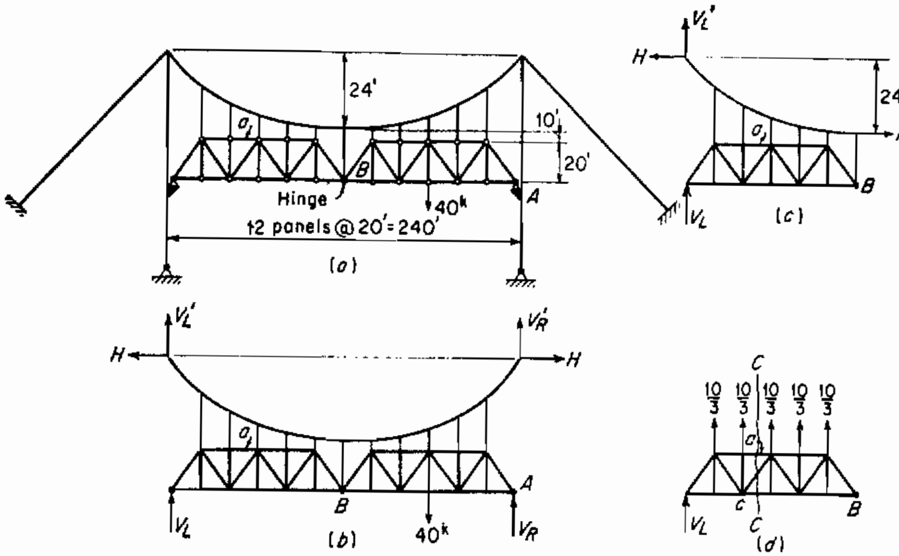
اگر خرپاهای تقویتی یک پل معلق به‌طوری که در شکل (۱۰ـ۷ الف) نشان داده شده است دارای مفصل در وسط دهانه باشد . به‌شرطی که کشش کلیه آویزها را یکسان فرض کنیم سازهٔ ایجاد شده معین خواهد بود . کاربرد روابط مختلف مربوط به‌کابلهای یک پل معلق معین را می‌توان با تحلیل سازه به‌نحوی که در شکل نشان داده شده است شرح داد .

فرض کنید براین پل بار زنده‌ای برابر با 40 kips همان‌طوری که در شکل نشان داده شده است اثر کند . تعادل کلیه نیروهای موثر بر آن قسمت از سازه را که در شکل (۱۰ـ۷ ب) نشان داده شده است در نظر بگیرید ، مولفه افقی عکس‌العمل کابل در هردو انتهای آن برابر و دارای یک راستا خواهند بود ، اگر حول نقطه A لنگرگیری نمائیم خواهیم داشت :

$$(V_L + V'_L)(240) - 40(60) = 0 \qquad V_L + V'_L = +10 \text{ (به‌طرف بالا)}$$

حال تعادل کلیه نیروهای موثر بر آن قسمت از سازه را که در شکل (۱۰ ـ ۷ ج) نشان داده شده است را با لنگرگیری از کلیه این نیروها حول مفصل B بررسی کنید .

$$(V_L + V'_L = 10)(120) + H(30) - H(54) = 0 \qquad H = 50.0 \text{ kips}$$



شکل(۱۰–۷) پل معلق

در دهانهٔ اصلی کشش حداکثر کابل در انتهای کابل بوجود آمده و برحسب معادله (۱۰–۷) مقدار آن برابر با : $50.0(1 + {}^{16}\!/_{100})^{1/2} = 53.9$ kips

اگر X کشش درهریک ازآویزها باشد ،باریکنواخت مؤثرمعادل با $X/20$ kips/ ft خواهد شد ، برای محاسبه X می‌بایستی از معادله $H = wL^2/8h$ که درآن $w = X/20$ می‌باشد استفاده نمود .

$$50.0 = \frac{X}{20}\,\frac{(240)^2}{8(24)} \qquad X = +\frac{10}{3}\,\text{kips}$$

پس ازآنکه کشش آویزها محاسبه گردید ، نیروی میله‌های خرپای تقویتی به‌سادگی محاسبه خواهد شد ،به‌عنوان مثال برای این‌که نیروی میله a محاسبه‌شود .ابتدا باید مقدار V_L را با لنگرگیری حول B ازکلیه نیروهای مؤثر برآن قسمت از سازه که درشکل (۱۰–۷ د) نشان داده شده است محاسبه نمود .

$$+120V_L + {}^{10}\!/_{3}(20 + 40 + 60 + 80 + 100) = 0 \qquad V_L = -{}^{25}\!/_{3}\ \text{(رو به‌سمت پائین)}$$

در این سازهٔ مخصوص دهانه‌های کناری پل حالت معلق ندارند و کابلهای دهانه‌های کناری‌مانند مهاری برج عمل می‌کنند .مولفه افقی‌کشش کابل در دهانهٔ میانی و کناری یکسان بوده و این مطلب را می‌توان با لنگرگیری حول مفصل پایه برج از کلیه نیروهای مؤثربر برج اثبات نمود . فرض می‌شود که V_L در راستای خط مرکزی برج اثر می‌کند .

۱۰ ــ ۱۱ مسائل

۱۰ــ۱ کابلی به‌دهانه 1,000 ft تعداد بار متمرکز به‌فواصل افقی 200 ft را تحمل می‌نماید . مقدار این بارها ازچپ به‌راست برحسب kips برابر با 100 ، 50 ، 200 و 300 می‌باشد،انتهای راست کابل 100 ft بالاتر ازانتهای چپ آن است .حداکثر فاصله‌عمودی بین‌کابل و خط اتصال دو انتهای کابل برابر با 50 ft می‌باشد ، با صرف‌نظرنمودن از وزن خود کابل مطلوب است .

(الف) فاصله عمودی کابل از نقطه اثر هریک از بارها

(ب) طول کابل

(ج) حداکثر کشش کابل

۱۰ــ۲ دهانه‌های کناری یک پل معلق دارای دهانه‌ای برابر با 500 ft و نسبت افتی برابر با $\frac{1}{40}$ می‌باشد ، شیب خط اتصال دو انتهای کابل با $\tan\gamma = 0.7$ معیــن می‌گردد .

بار موٴثر بر کابل برابر با 1,000 lb بر هر فوت افقی است ، $E = 27{,}000{,}000$ psi و سطح مقطع کابل برابر با 50 sq in می‌باشد .

(الف) شیب حداکثر کابل چقدر است

(ب) حداکثر کشش کابل چقدر است

(ج) طول کابل را برحسب مقدار صحیح فوت (بدون اعشار) بیان کنید .

(د) طول بدون تنش کابل را برحسب مقدار صحیحی از فوت (بدون‌اعشار)محاسبه کنید .

جواب :

(الف) 0.8. (ب) 3,200 kips (ج) 611 ft (د) 609 ft

۱۰ــ۳ برای کابلهایی که تحمل باری یکنواخت در هر فوت افقی می‌نمایند تعدادی نمودارکه از طریق آنها بتوان نسبت s_o/L را برحسب تغییرات θ از 0 الی 0.25 و تغییرات مقادیر γ از 0 الی 1 بتوان تعیین نمود ایجاد کند .

۱۰ــ۴ کابلی به‌دهانه 1,000 ft دارای خط اتصال دو انتهایی افقی می‌باشد این کابل باری یکنواخت‌به‌شدت 1,500 lb برهر فوت افقی‌را تحمل می‌کند ، درجه حرارت +50°F و $E = 27{,}000$ kips و $A = 40$ sq in می‌باشد .

(الف) شکم کابل در وسط دهانه چقدر است .

(ب) طولی خالی از تنش کابل در +100°F چقدر است .

۱۰ــ۵ نوک یک دکل توسط ۱۲ کابل مهاری که در پلان هریک با دیگری زاویهٔ 30° می‌سازد مهار شده‌اند هریک از این کابلهای مهاری دارای دهانه 400 ft بوده و ارتفاعی افقی برابر

با 150 ft می‌باشند وزن هر کابل برابر با 5 lb/ft و شکم هریک از آنها 4 ft است

(الف) فشار ناشی از کلیه کابلها که حاصل از عکس‌العملهای عمودی آنها می‌باشد بر دکل چقدر است.

(ب) حداکثر نیرو در هر کابل مهاری چقدر است.

(ج) ارتفاع دکل برابر با 150 ft است، اگر بر نوک دکل نیرویی افقی برابربا 100,000 lb اثر کند مقادر تقریبی حداکثر کشش در هریک از کابل‌ها چقدر است؟ (فرض کنید که هریک از این کابلها مهاری مقاومی در برابر این نیرو متناسب با کسینوس زاویه بین کابل مهاری و نیرو در پلان از خود نشان می‌دهد).

۱۰–۶ یک پل معلق مشابه آنچه در شکل (۱۰–۷ الف) دیده می‌شود دارای 20 پانل 20 فوتی و نسبت افتی برابر با $\frac{1}{10}$ می‌باشد، ارتفاع خرپای تقویتی 20 ft می‌باشد.

(الف) اگر بار زنده به‌شدت 1,000 lb/ft در کل میله‌های تحتانی اثر کند، کشش کابل را در دهانهٔ آویزان آن محاسبه کرده ونیروی حداکثرمیله‌تحتانی اصلی‌خرپای تقویتی را تعیین کنید.

(ب) خطوط تأثیر را برای‌اعضای نامبرده زیر رسم کنید (۱) مولفه افقی کشش کابل (۲) کشش‌آویز (۳)نیروی قطری خرپای تقویتی‌که در پانل دوم از برج سمت چپ‌قراردارد.

(ج) بار مردهٔ موٴثر براین سازه برابر با 5 kips/ft می‌باشد. بار زنده اثر بار یکنواختی برابر با 2 kips/ft و بار متمرکزی برابر با 20 kips تشکیل می‌گردد. با صرف‌نظرنمودن ازاثرضربه، سطح مقطع‌لازم برای هرآویزرا معلوم کنید. در این‌محاسبات تنش مجاز را 50 kips/in برای کشش کابل فرض نمایند.

جواب:

(الف) 538.5 kips = (کشش حداکثر کابل) میله‌های اصلی‌تحتانی‌باری تحمل نمی‌کنند.

(ب) (۱) خط تأثیر به‌طور خطی از مقدار صفر در یکی از دو انتهای آن شروع شده و تا 2.50+ در وسط دهانه تغییر می‌کند.

(۲) خط تأثیر به‌طور خطی از مقدار صفر در یکی از دو انتهای شروع شده تا 0.10+ در وسط دهانه تغییر می‌کند.

(۳) خط تأثیر به‌طور خطی از مقدار صفر در انتهای چپ دهانه شروع شده به 0.192− در دومین نقطه پانلی و از آنجا به 1.032+ در سومین نقطهٔ پانلی و ازآنجا به 0.495− در وسط دهانه‌وبالاخره‌ازآنجا تا 0.0 درانتهای دهانهٔ راست تغییرمی‌کند.

(ج) 2.84 sq in

۱۱

تحلیل تقریبی سازه‌های نامعین

۱۱ ــ ۱ مقدمه

تحلیل کلیه سازه‌ها در عمل تقریبی است . زیرا همواره می‌بایستی برای تحلیل آنها چندین مفروض ابتدائی را بپذیریم تا بتوانیم محاسبات را به‌انجام برسانیم برای‌مثال‌وقتی محاسبه یک خرپا با اتصالات مفصلی را شروع می‌کنیم فرض می‌نمائیم که کلیه مفصلها بدون اصطکاک هستند تا این‌که میله‌های خرپا فقط نیروی محوری تحمل کنند بدیهی است ایجاد مفصل بدون اصطکاک غیرممکن بوده و لذا محاسبه خرپا عملا" تقریبی است ، از این‌رو است که می‌توان گفت هیچ تحلیلی به‌صورت دقیق وجود ندارد .

بسیار روشن است که هرگاه در تعیین مفروضات محاسباتی یک سازه معین دقت بسیار کرده باشیم ، خطای ناشی از تقریبی‌بودن مفروضات ناچیز خواهد بود . تحلیل تنش سازه‌ها هرگاه براساس مفروضات متعارف استوار باشد به‌آن روش تحلیل "روش دقیق" اطلاق می‌گردد. در اینجا هرگاه منظور ما از کلمه دقیق ، به‌معنای مطلق آن باشد می‌بینیم که انتخاب کلمه فوق صحیح نبوده است ولی از آنجائی که منظور ما از انتخاب آن کلمه‌برای‌چنان محاسباتی متمایزبودن "محاسبات براساس مفروضات متعارف " با محاسباتی که براساس مفروضات اضافی دیگری نیز استوار است می‌باشد ، لذا انتخاب کلمه فوق‌الذکر انتخاب بجائی است زیرا اگر روش محاسباتی نخست روش نسبتا" دقیقی باشد روش دوم محاسباتی به‌معنی واضح کلمه تقریبی است .

وقتی از روش تقریبی یک مساله معلوم محاسباتی صحبت می‌شود الزاما"به‌هیچ مجموعه مفروضات مشخصی اشاره نمی‌گردد زیرا یک روش تقریبی معلوم همواره بر اساس مدت زمان داده شده و دقت محاسباتی درخواست گردیده انتخاب و به‌کار برده می‌شود .

در حل مسائل محاسباتی‌متعارف سازه‌ها می‌توان‌از روشهای تقریبی‌که توسط پیشینیان ابداع گردیده است و توسط‌آنان درجه دقت آن روشها مشخص گردیده است با خاطرآسوده

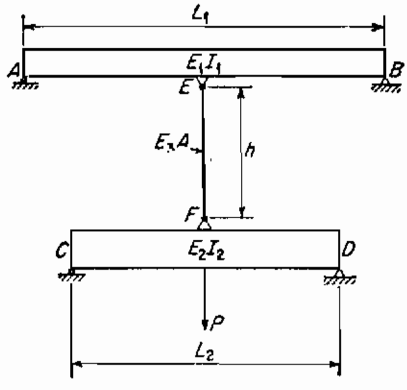
استفاده نمود . البته روشهای تقریبی ، محاسبات کلیه سازه‌های نامعین را در بر نمی‌گیرد یک محاسب ماهر تنش محاسباتی باید به‌اندازه کافی با عملکرد سازه‌های نامعین آشنا باشد تا بتواند درشرایطی که مشخصات سازه‌ای با مفروضات قبلی‌او تطابق ندارد مفروضات صحیحی جهت محاسبه آن سازه اتخاذ نماید .

در این فصل تعدادی از روشهای تقریبی تحلیل سازه‌های متعارف نامعین ارائه شده است یادگیری این روشها بسیار مهم است ،ولی مهمتراز آن درک عملی است ، که جهت تعیین فرضیات هوشیارانه حاکم براین روشها بکارگرفته شده است ، زیرا چنین درکی محاسب را قادر می‌سازد که روش مشابهی برای سایر سازه‌های نامعین که در این فصل به‌حل آنها نپرداخته‌ایم ابداع نماید .

۱۱ ــ ۲ اهمیت روشهای تقریبی در تحلیل سازه‌های نامعین

درتحلیل یک‌سازه‌معین مشخصات ارتجاعی‌قطعات آن وارد عملکردمحاسباتی‌نمی‌شود . بدین‌جهت برای چنین سازه‌هایی می‌توان روش بررسی تنش نسبتاً ساده و دقیقی به‌کاربرد. در سازه‌های نامعین همواره مشخصات ارتجاعی قطعات آن سازه در تعیین تنش قطعات وارد می‌شوند این مشخصات عبارتند از ضریب ارتجاعی ، سطح مقطع لنگر لختی سطح مقطع و طول قطعه . برای تفهیم بهتر مطلب می‌توان از شکل (۱۱ــ۱) کمک گرفت .

فرض کنید که سختی تیر AB نسبت به‌سختی تیر CD کم باشد به‌این معنی‌که E_1I_1/L_1^3 نسبت به E_2I_2/L_2^3 مقدار کمی را به‌دست دهد ، در این صورت تیر CD قسمت بیشتری از بار p را نسبت به‌تیر AB تحمل خواهد کرد . حال تصور کنید که قطعه کششی EF که دو تیر



شکل (۱۱ــ۱) اثر مشخصات ارتجاعی در محاسبه تنش

را بهم متصل می‌کند از سختی بسیار کمی برخوردار باشدیعنی که مقدار E_3A/h کم باشد مثلا" جنس آن از لاستیک که دارای ضریب ارتجاعی ناچیزی است ساخته شده باشد با این شرط اخیر تیر CD بازهم قسمت بیشتری از بار P رانسبت به‌حالت نخست تحمل خواهدکرد.

هرگاه مقادیر محاسباتی عواملی را که در تعیین سختی قطعات یک سازه‌نامعین وارد می‌شوند را بتوانیم دقیقا" مشخص کنیم ، محاسبه چنین سازه‌ای از همان دقت محاسباتی سازه‌های معین برخوردار خواهد بود ولی در عمل سه عاملی که ذیلا" ذکر شده است ممکن است از انجام یک محاسبه دقیق جلوگیری نماید .

۱ ــ فرد محاسب معلومات کافی و لازم برای حل سازه‌های نامعین نداشته باشد .

۲ ــ زمان لازم‌برای انجام یک محاسبه دقیق چنان طولانی‌باشد که‌عملا" راه حل‌دقیق محاسباتی کنار گذاشته شود ، مثلا" در برخی مواقع نمودار زمانی ، تعیین‌کنندهٔ زمان ارائه محاسبات می‌باشد و یا در سایرموارد ملاحظات اقتصادی ممکن است‌انتخاب روش محاسباتی تقریبی را تجویز نماید ،بدین صورت‌که امکان دارد به‌کاربردن مصالح‌به‌همراه ضریب‌اطمینان بالاتر ــ که می‌تواند نتیجه اتخاذ راه حل تقریبی باشد ــ به‌قناعت در بکاربردن مصالح به‌همراه ضریبی اطمینان کمتر ــ که امکان دارد نتیجه دقیق تنشها باشد ــ ارجحیت داشته باشد . این نوع اتخاذ تصمیم امکان دارد در محاسبات مربوط به‌سازه‌های کم‌ــ اهمیت و در محاسبات قسمتهای کم اهمیت سازه‌های مهم به‌عمل آید . در این موارد محاسب با قضاوتی‌که در مورد درصد خطای ناشی از به‌کارگرفتن روش تقریبی محاسباتی به‌عمل می‌آورد ممکن است به انتخاب روش تقریبی اقدام نماید .

۳ ــ وقتی که محاسبه یک سازه نامعین شروع می‌شود ، مقدار سطح مقطع و لنگر لختنی مقطع کلیه قطعات آن نامعلوم است برای این که تخمین تقریبی در مورد مقادیر فوق‌الذکر به‌دست آید باید اقدام به‌یک محاسبه تقریبی تنش در قطعات سازه نمود ، پس‌ازانجام چنین محاسبه تقریبی و تعیین مقاطع می‌توان محاسبات دقیق ارتجاعی را شروع نمود ، عموما" اولین محاسبه دقیق ارتجاعی نشان می‌دهد که تنش واقعی با آنچه به‌صورت تقریبی‌به‌دست آمده تطابق ندارد ، از این پس فقط به‌کمک محاسبات متعدد می‌توان به‌نتیجه مطلوب نهایی رسید ، از این‌رو روش تحلیل تقریبی در سازه‌های نامعین می‌تواند دربررسیهای‌ابتدایی‌این نوع سازه‌ها بسیار مفید باشد .

۱۱ ــ ۳ تعداد مفروضات لازم

چنانکه قبلا" نیز به‌نوعی اشاره شد برای این که بتوان به‌حل سازه‌ای فقط بر اساس

معادلات تعادل اقدام نمود باید همواره به‌تعداد مولفه‌های مستقل نیرو که در داخل سازه می‌بایستی معلوم گردد معادله مستقل تعادل وجود داشته باشد. اگر تعداد n مولفه مستقل تعادل وجود داشته باشد، سازه موردنظر نامعین از درجه n خواهد بود. از این رو برای این که بتوان سازه را براساس روش تقریبی یعنی فقط با استفاده از تعادل محاسبه نمود می‌بایستی n فرض مستقل که هر یک از این فرضها تأمین‌کننده یک معادله با رابطه مستقل تعادل باشد ابداع نمود.

هرگاه تعداد مفروضات ابداعی کمتر از n باشد سازه را نمی‌توان فقط‌براساس تعادل محاسبه کرد و اگر تعداد فرضیات بیشتراز n باشد فرضیات با یکدیگر تناقض داشته وعملکرد براساس معادلات تعادل استوار برفرضیات فوق منتهی‌به‌جوابهای متناقض خواهد شد.اولین قدمی که در کاربرد روش تقریبی‌محاسبه سازه‌های نامعین می‌بایستی برداشت اینست‌که‌درجه نامعینی سازه را دریافت. سپس به‌تعداد درجه نامعینی سازه فرض اضافی ابداع نمود.

۱۱ ــ ۴ خرپای نردبانی با دو عضو قطری

چنین خرپاهایی به‌صورت فراوان در سازه‌های مهندسی به‌کار برده می‌شود. بعنوان مثال خرپاهای افقی تحتانی و فوقانی پلهای فلزی* به‌این صورت طرح می‌شوند. روش تقریبی تحلیل چنین خرپایی در مورد خرپای شکل (۱۱ــ۲) شرح داده شده است. در این خرپا فرض براین است که میله‌های میانی (قطریها) خرپا قادر به‌تحمل‌کشش و با فشارهستند. در اولین وهله دیده می‌شود که این خرپا نامعین از درجه شش‌است، زیرا هرگاه‌درهریک از پانلهای خرپا قطری را حذف کنیم آنچه که باقی خواهد ماند یک خرپای معین خواهد بود.

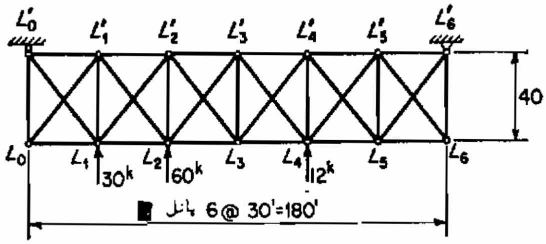
لذا لازم است که همسو با شرایط‌تنش شش فرض مستقل ابداع نمائیم، فرض می‌شود که در هر پانل برش موجود به‌تساوی توسط دو میله قطری تحمل شود از آنجائی که شش پانل وجود دارد لذا این فرض معرف شش فرض مستقل است.

حال بسیارساده‌است‌که فقط‌با استفاده از روابط‌تعادل به‌حل سازه بپردازیم. درشکل (۱۱ــ۳) حل خرپای فوق را ارائه گرده‌ایم در این شکل از روش نیروهای راهنما " استفاده شده است. برش در هر پانلی از خرپا ابتدا به‌کمک نیروهای خارجی محاسبه شده است، به‌این صورت که مثلا" درپانل ۲ــ۱مقداربرش‌برابر 39 kips ــ است این برش به‌تساوی‌بین‌میله‌های L_1L_2' و $L_1'L_2$ تقسیم می‌شود، به‌این صورت نیروی راهنمای این دو میله به‌ترتیب‌برابر

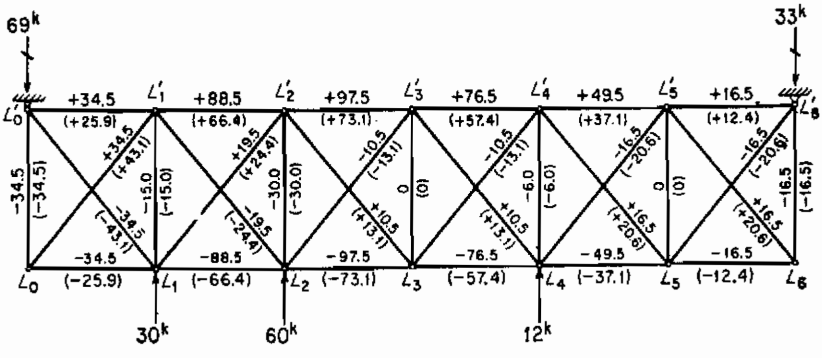
* این خرپاها مهارکننده پلها در برابر نیروهای افقی می‌باشند (مترجم)

19.5 + و 19.5 − خواهد شد و به‌همین ترتیب نیروی راهنمای سایر میله‌های قطری محاسبه می‌گردد ، با استفاده ازنیروی راهنمای میله‌های قطری نیروی راهنمای سایرمیله‌ها (میله‌های اصلی) قابل محاسبه خواهد بود*. در شکل ۱۱–۳ نیروهای واقعی میله‌ها در داخل پرانتز نشان داده شده است .

در چنین خرپاهایی بیشتر معمول است که قطریهای خرپا را به‌کشش محاسبه کنند ، به‌این صورت که در طرح طول کمانشی (طول نگهداری نشده ــ فاصله دوسر میله ــ میله‌تقسیم بر شعاع ژیراسیون حداقل مقطع میله)آنها را زیادانتخاب می‌کنند تا به‌راحتی‌زیربارفشاری کمانه‌کنند ، و قطری دیگر حداکثر نیروی برشی پانل را به‌صورت کشش تحمل کند . البته با در نظرگرفتن جهت نیروی برشی در هر پانل می‌توان از ابتدا به‌راحتی فهمید که کدامیک‌از قطریها به‌کشش کار خواهد کرد . در مثال فوق اگر خرپا را بخواهیم با فرض تحمل کشش قطریها حل کنیم نیروی داخلی کلیه میله‌های قطری را که تحمل فشار می‌کنند بایستی برابر با صفر قرار دهیم به‌این ترتیب به‌نحوی دیگر خرپای فوق معین شده و تکمیل بقیه‌محاسبات مربوطه به‌مشکلی بر نخواهد خورد .



شکل (۱۱ ــ ۲) خرپا با قطریهای مضاعف

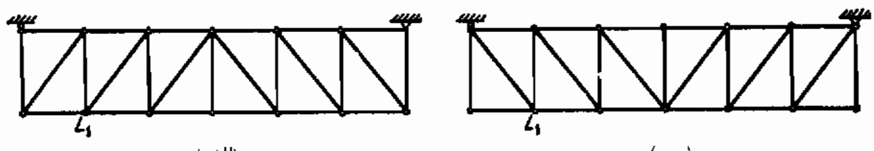


شکل (۱۱–۳) مثال مشروح

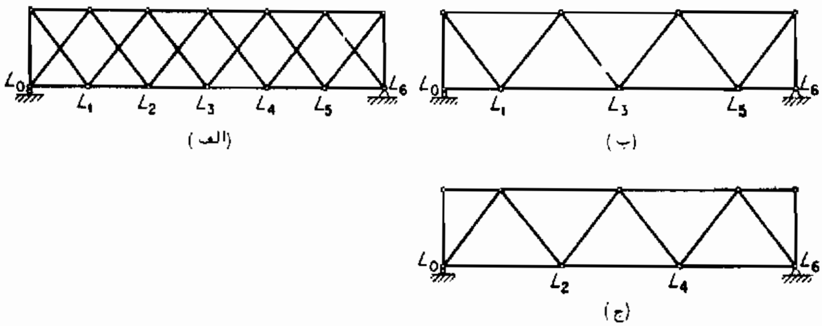
* جهت توضیح بیشتر به‌مثال (۹–۴) مراجعه شود .

۱۱ ــ ۵ خرپای چند گونه

در برخی از مواقع خرپاهایی که از نظر آرایش میله‌های داخلی نامعین هستند قابل تجزیه به‌دو یا چند نوع مختلف خرپای معین می‌گردید ،به‌عنوان مثال خرپای شکل (۱۱ــ۲) می‌تواند مجموع دوخرپای شکل(۱۱ــ۴) باشد .درخرپای اخیر نیرویی‌که به‌گرهی نظیر L_1 اثرمی‌کند می‌تواند توسط یکی ازخرپاهای شکل(۱۱ــ۴) تحمل شود گرچه نمی‌توان چنان بار وارد شده‌ای را فقط مختص یکی از خرپاهای تشکیل‌دهنده فوق به‌حساب آورد .حال به‌خرپای شکل (۱۱ــ۵ الف) که فقط یک درجه نامعین می‌باشد توجه کنید این خرپا را می‌توان به دو خرپا مطابق شکل‌های (۱۱ــ۵ ب) و (۱۱ــ۵ ج) تجزیه نمود . اگر باری به‌یکی از گرههای این خرپا اثر کند می‌توان فرض کردکه بار وارده فقط‌توسط یکی ازخرپاهای تجزیه شده‌تحمل می‌شود .برای مثال فرض کنید که باری عمودی به‌یکی از گرههای L_1 ، L_3 و یا L_5 اثرمی‌کند در این صورت می‌توان تصور نمود که فقط‌خرپای شکل (۱۱ــ۵ ب) این بار را تحمل می‌کند زیرا میله‌های قطری این خرپا در این حالت قادر به‌تحمل آن خواهند بود اگر فرض کنیم‌که خرپا شکل (۱۱ــ۵ ج) آن نیرو را تحمل‌کند دراین صورت میله‌های اصلی تحتانی خرپاتحمل خمش خواهند نمود ازآنجائی که کلیه میله‌های یک خرپا تحت اثر نیروهای محوری محاسبه می‌شوند لذا نمی‌توان پذیرفت که خرپای شکل (۱۱ــ۵ ج)در گرههای L_1 , L_3 و L_5 تحمل بارنمایند به‌همین‌ترتیب می‌توان استدلال نمود که نیروهای وارده بر گرههای L_2 و L_4 کلا " توسط‌خرپای (۱۱ــ۵ ج) تحمل می‌شوند . بنابراین نیروهای وارده بر خرپای شکل (۱۱ــ۵ الف) را می‌توان به‌تناسب این که به‌کدام‌یک از گرههای خرپا وارد می‌شوند به‌یکی از خرپاهای تشکیل دهندهٔ آن نسبت داد و چون هردو خرپای تشکیل دهنده خرپای معین می‌باشند لذا تعیین نیروهای میله‌های خرپا به‌سادگی انجام‌پذیر می‌باشد پس ازحل کامل هردوخرپای تشکیل‌دهنده تعیین نیروهای‌داخلی‌خرپای‌واقعی‌با رویهم‌گذاری نیروهای میله‌های خرپاهای تشکیل‌دهنده با یکدیگر انجام‌پذیر خواهدبود . به‌این صورت که نیروهای میله‌های قطری به‌همان مقدار که در هریک از خرپاهای تشکیل‌دهنده به‌دست آمده



شکل(۱۱ــ۴) خرپاهای تشکیل‌دهنده خرپای شکل (۱۱ــ۲)



شکل (۱۱–۵) خرپای چندگونه

است باقی می‌ماند ولی نیروهای میله‌های فوقانی و تحتانی و میله‌های عمودی کناری با جمع جبری مقادیر به‌دست آمده در دو خرپای فرعی انجام‌پذیر خواهد بود .

چون خرپای شکل (۱۱–۵ الف) یک درجه نامعین می‌باشد لذا روشی کـه برای حل آن اتخاذ شد براین اصل استوار است‌که نیروی برشی در یک پانل بین دو میله‌قطری‌آن‌پانل به‌نوعی تقسیم می‌شود که گویی این میله‌ها به‌صورت مستقل هریک به‌یکی از خرپاهای‌تشکیل دهنده اختصاص داشته باشند و این خرپاها نیز به‌صورت مستقل تحت تأثیر بار عمل کنند ، فرضی که به‌صورت فوق درمورد تقسیم نیروی برشی در یک پانل اتخاذ شد منتج به‌این مطلب می‌شود که تقسیم نیروی برشی بر همان اساس در سایر پانلها مستقیما" توسط معادلات‌تعادل انجام گیرد ، به‌این صورت فرض دیگری در حل این خرپا انجام نگرفته است .

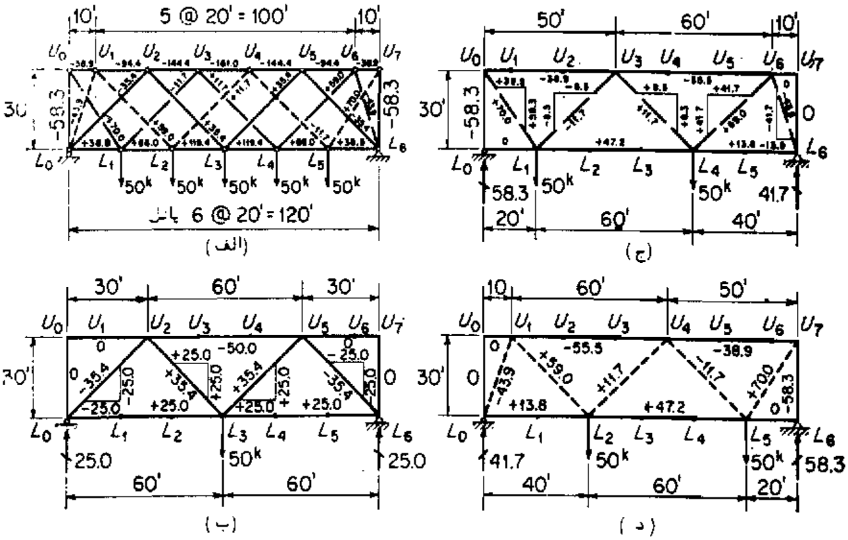
برای روشن‌شدن روشی که در مورد حل خرپاهای قابل تجزیه به‌کار بردیم خرپای‌شکل (۱۱–۶ الف) را مورد بررسی قرار می‌دهیم ، این خرپا را چنانکه در روی شکل با خطوط پر، تیره و خط‌چین نشان داده‌ایم می‌توان ترکیبی ازسه خرپا دانست .نیروهای محوری میله‌های خرپای تشکیل‌دهنده را در شکلهای (۱۱–۶ ب) الی (۱۱–۶ د) نشان داده‌ایم ، با استفاده از مقادیر به‌دست آمده برای میله‌های خرپاهای تشکیل‌دهنده نیروهای میله‌های خرپای‌شکل (۱۱–۶ الف) را تعیین کرده‌ایم ، مثلا" نیروی محوری میله U_2L_3 کلا" برابر با مقداری‌است که در خرپای شکل (۱۱–۶ ب) برای آن به‌دست آمده $(+35.4)$ در صورتی که برای تعیین نیروی میله U_2U_3 جمع نیروهای‌به‌دست آمده برای این میله در کلیه خرپاهای تشکیل‌دهنده را به‌صورت زیر به‌دست آورده‌ایم :

$$-50.00 - 38.9 - 55.5 = -144.4$$

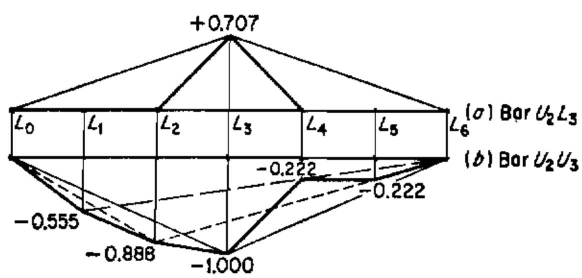
برای این‌که خط تأثیر نیروی محوری هریک ازمیله‌های خرپاهای چندگونه را رسم کنیم می‌بایستی به‌همان روش فوق‌الذکر عمل نمائیم ، در شکل (۱۱–۷ الف) و (۱۱–۷ ب)

خطوط تأثیر میله‌های U_2L_3 و U_2U_3 رسم شده است ، چون U_2L_3 یک عضو از خرپای شکل (۱۱–۶ ب) می‌باشد ابتدا با در نظرگرفتن فقط آن خرپا ، خط تأثیرمیله فوق رسم شده است ، دراین خط تأثیر بعد L_3 تنها بعد معنی‌دار می‌باشد زیرا هرگاه نیروی واحد به‌هریک از گرههای دیگر اثر کند آن نیرو توسط خرپای تشکیل‌دهنده دیگری تحمل شده و لذا نیروی محوری U_2L_3 برابر صفر خواهد شد ، از آنجائی که خط تأثیر بین دو گره انتهای یک پانل به‌صورت خطی می‌باشد لذا خط تأثیر نیروی این میله به‌صورت خط پر رنگی که در شکل (۱۱–۷) رسم شده است خواهد بود .

میله U_2U_3 عضوی از کلیه خرپاهای تشکیل‌دهنده خرپای اصلی می‌باشد اگر این میله را به‌نوبت عضوی از هریک از سه خرپای نشان داده شده در شکلهای (۱۱–۶ ب) الی (۱۱–۶ د) بدانیم خط تأثیر آن میله در هریک از حالات فوق به‌ترتیب



شکل(۱۱–۶) مثال عددی



شکل(۱۱–۷) خطوط تأثیرخرپای شکل (۱۱–۶)

به‌صورت خطوط پر، تیره و خط چین در شکل (۱۱–۷ ب) خواهد بود. بعد L_3 در خط تأثیر مربوط به‌خرپای شکل (۱۱–۶ ب) تنها بعد معنی‌دار آن خط تأثیر و بعدهای نقاط L_1 و L_4 تنها بعدهای معنی‌دار خط تأثیر خرپای شکل (۱۱–۶ ج) و بعدهای نقاط L_2 و L_6 تنها بعدهای معنی‌دار خط تأثیر خرپای شکل (۱۱–۶ د) می‌باشد. این نقاط معنی‌دار در شکل (۱۱–۷ب) با خط پررنگ بهم متصل شده است که نمایانگر خط تأثیر میله U_2U_3 می‌باشد.

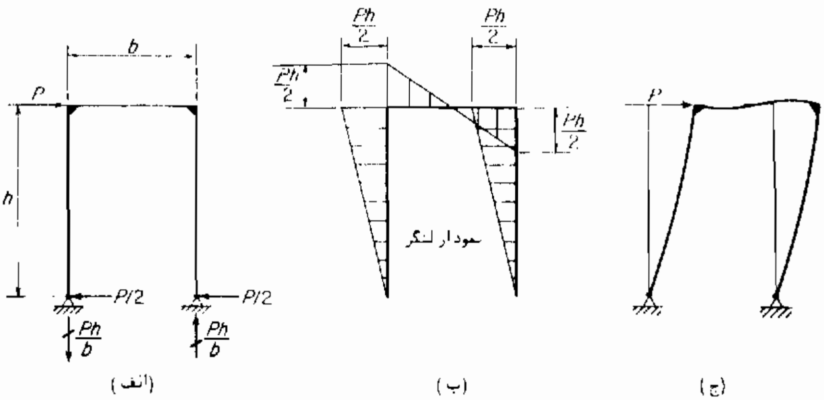
۱۱ – ۶ پرتالها

پرتالها نظیر پرتالهای پلی که در بخش (۱–۲۱) شرح داده شد اصولا" جهت انتقال نیروهای افقی مؤثر به‌انتهای فوقانی ستون آن به‌پی به‌کار گرفته می‌شوند، با اندکی دقت می‌توان دریافت که یک قاب نامعین برای این منظور بسیار مناسب خواهد بود ولی اغلب ترجیح می‌دهند که در حل این سازه نامعین از روشهای تقریبی استفاده کنند. پرتال شکل (۱۱–۸ الف) را در نظر بگیرید می‌بینید که کلیه قطعات آن قادر به‌تحمل لنگر خمشی، برش و نیروی محوری می‌باشند، ستونها در انتها به‌صورت مفصلی به‌تکیه‌گاه متصل‌اند و از طرف دیگر توسط اتصال صلبی به‌شاهتیر قاب وصل شده‌اند. از آنجائی که این قاب فقط یک‌درجه نامعین می‌باشد لذا در حل تقریبی آن یک فرض اضافی کفایت خواهد کرد، بررسی دقیق این نوع سازه‌ها نشان می‌دهد که نیروی برشی مؤثر بر قاب تقریبا" به‌نسبت مساوی بین دو ستون قاب تقسیم می‌شود، به‌این جهت می‌توان فرض نمود که عکس‌العمل افقی ستونها برابر یکدیگر و یا هریک برابر $P/2$ باشد*.

سایر مجهولات را می‌توان با به‌کاربردن معادلات تعادل به‌دست آورد، به‌این‌ترتیب که عکس‌العمل عمودی ستون سمت راست با لنگرگیری حول مفصل ستون سمت چپ به‌دست آمده و عکس‌العمل ستون سمت چپ با به‌کاربردن معادله $\Sigma F_y = 0$ درکل سازه‌معلوم می‌شود حال که کلیه مقادیر عکس‌العملها معلوم شده است می‌توان به‌راحتی نمودارلنگرخمشی وتلاش برشی را که به‌صورت گویایی تغییرات لنگر خمشی را در مقاطع مختلف قاب به‌دست می‌دهد رسم نمود (شکل ۱۱–۸ ب). دقت در منحنی تغییرشکل پرتال تحت اثر نیروی p که در شکل (۱۱–۸ ج) با مقیاسی غیرواقعی‌نشان داده شده‌است به‌درک‌مطلب‌کمک بسیاری‌می‌نماید.

حال به‌پرتال دیگری که به‌نوعی شبیه پرتال شکل (۱۱–۸ الف) می‌باشد توجه کنید

* این فرض زمانی منطقی است که قاب قرینه بوده و منحنی خمشی ستونها با یکدیگر برابر باشد. حال پاسخ‌دهیدکه اگرسختی‌خمشی ستونها متفاوت‌باشد چه‌فرضی منطقی‌خواهد بود.



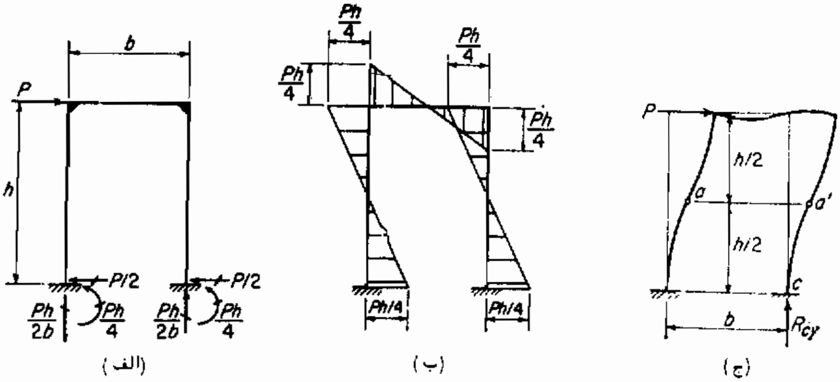
شکل (۱۱–۸) قاب پرتال

تفاوت این پرتال که در شکل (۱۱–۹ الف) نشان داده شده با پرتال قبلی این است‌که ستونهای آن در انتها به‌صورت گیردار به‌پی خود متصل شده‌اند ،این سازه سه‌درجه نامعین می‌باشد و لذا برای حل آن می‌بایستی سه فرض اضافی تعیین کنیم ، مانند پرتالی‌با تکیه‌گاه مفصلی می‌توان فرض کرد که عکس‌العمل‌های افقی این قاب نیز برابر یکدیگر و هریک برابر $P/2$ باشد از طرف دیگربا دقت درمنحنی تغییرشکل این پرتال‌که در شکل (۱۱ – ۹ج) نشان داده شده‌است متوجه می‌شویم‌که درحدود مقطع میانی نقاطی‌هستند‌که منحنی‌تغییر شکل ستونها انحنای خود را در این نقاط تغییر می‌دهند این نقاط همان نقاط عطف می‌باشند که در آن نقاط‌لنگر خمشی تغییر علامت می‌دهد و لذا مقدار لنگر خمشی در این نقاط برابر صفر می‌باشد ، به‌این‌ترتیب دو فرض اضافی دیگر را بدین‌صورت می‌توان تعیین نمود‌که‌نقاط عطف در مقطع میانی ستونها واقع شده‌اند ،از نظر محاسباتی چنین فرضی معادل بااین‌است که درنقاط a و a' (شکل ۱۱–۹ ج)دومفصل ایجاد کرده باشیم . عکس‌العملهای عمودی این پرتال برابرنیروی محوری ستونهای‌آن می‌باشد‌که این نیروهارا می‌توان به‌ترتیب‌با لنگرگیری حول a و a' از کلیه نیروهایی که در بالای این نقاط عمل می‌کنند به‌دست آورد ،برای مثال هرگاه حول نقطه a لنگرگیری نمائیم خواهیم داشت ،

$$+P\frac{h}{2} - R_{cy}b = 0 \qquad R_{cy} = +\frac{Ph}{2b}$$

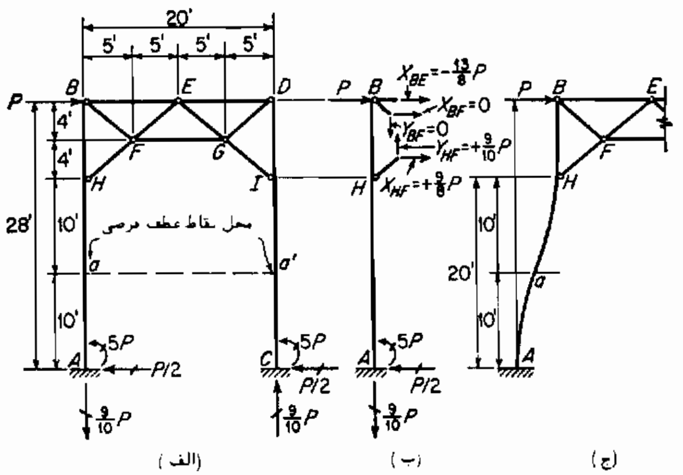
لنگرگیرداری تکیه‌گاههای ستونها برابر خواهد بود با مقدار تلاش برشی در نقاط عطف ضرب‌در فاصله این نقاط از تکیه‌گاهها ، به‌این ترتیب مقدار لنگرگیرداری تکیه‌گاهها برابر خواهد شد با : $(P/2)(h/2) = Ph/4$

پس از تعیین مقادیر عکس‌العملها به‌راحتی می‌توان مقدار تلاش برشی و لنگر خمشی‌را برای کلیه مقاطع پرتال تعیین نمود ، در شکل (۱۱ــ۹ ج) نمودار تغییرات لنگر خمشی ترسیم‌شده است .



شکل(۱۱ــ۹) قاب پرتال با تکیه‌گاه گیردار

پرتال پلها اغلب به‌صورتی که در شکل (۱۱ــ۱۰ الف) نشان داده شده است ساخته می‌شود ، در یک چنین پرتالی ستونهای AB ، CD به‌صورت یکسره از A تا B و از C تا D به نوعی طراحی می‌شودکه قادر باشند تلاش برشی ،لنگر خمشی و همچنین‌نیروی محوری‌تحمل نمایند ، سایر قطعات این پرتال از جمله قطعات خرپای آن را با اتصالات مفصلی در نظر بگیرید ، چنین سازه‌ای سه‌درجه نامعین خواهد بود و برای حل آن سه فرض اضافی زیر را تعیین می‌کنیم ،



شکل(۱۱ــ۱۰) پرتال پلها

۱ ــ عکس‌العملهای افقی برابر یکدیگرند .

۲ ــ نقطهٔ عطفی در مقطع میانی ستون AB به‌یک فاصله از A و H وجود دارد .

۳ ــ نقطهٔ عطفی در مقطع میانی ستون CD به‌یک فاصله از C و I وجود دارد .

به‌این ترتیب عکس‌العملهای افقی تکیه‌گاهها هریک برابر $P/2$ شده و لنگرگیرداری تکیه‌گاهی هریک از ستون‌ها برابر خواهد شد با حاصل‌ضرب تلاش برشی در نقاط عطف در فاصله این نقاط از تکیه‌گاهها و لذا برابر خواهد شد با : $(P/2)(10) = 5P$

مقادیر عکس‌العملهای عمودی با لنگرگیری حول نقاط عطف ازکلیه نیروهایی که بالاتر از نقاط a و a' به‌سازه اثرمی‌کنند معلوم می‌شود و به‌این ترتیب این چنین معادلاتی مقادیر عکس‌العملهای عمودی‌را هریک برابر با $9P/10$ درجهتهای نشان‌داده شده روی‌شکل معین‌خواهد کرد .

برای تعیین نیروهای داخلی میله‌های متصل به‌ستونها ، به‌این صورت می‌توان‌عمل‌نمود . فرض کنید که ستون AB یک قطعه صلب است و از کلیه نیروهای مؤثر بر آن حول نقطه B لنگرگیری نمائید . خواهیم داشت :

$$+\frac{P}{2}(28) - 5P - X_{HF}(8) = 0 \qquad X_{HF} = +\frac{9P}{8}$$
$$\therefore\ Y_{HF} = +\frac{9P}{8}\left(\frac{4}{5}\right) = +\frac{9P}{10}$$

برای تعیین نیروی محوری میله BF کافی است که‌معادله $\Sigma F_y = 0$ را درموردکلیه نیروهای مؤثر بر ستون AB بنویسید .

$$+Y_{BF} - \frac{9P}{10} + \frac{9P}{10} = 0 \qquad \therefore\ Y_{BF} = 0 \qquad \therefore\ X_{BF} = 0$$

برای تعیین نیروی محوری میله BE بایستی معادله $\Sigma F_x = 0$ را در مورد کلیه نیروهای مؤثر بر ستون AB بنویسید .

$$+X_{BE} + 0 + \frac{9P}{8} + P - \frac{P}{2} = 0 \qquad \therefore\ X_{BE} = -\frac{13P}{8}$$

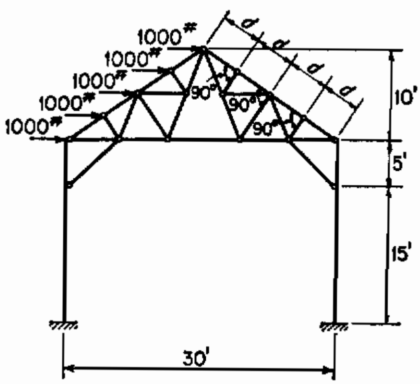
پس از آن که مقادیر کلیه نیروهای مؤثر بر ستون AB چنانکه در شکل (۱۱ــ۱۰ب) نشان داده‌ایم معلوم شد . نیروی محوری در هر مقطع ستون قابل محاسبه بوده و می‌توان نمودار تغییرات تلاش برشی و لنگر خمشی را برای ستون رسم نمود . ستون CD رانیزبه‌همین طریق می‌توان بررسی نمود . بدیهی است که پس از آن تعیین سایر نیروهای مجهول سازه به‌راحتی قابل محاسبه خواهد بود .

۱۱ ــ ۷ خرپاهای قابی کارخانه‌ها

خرپاهای قابی کارخانه‌ها اغلب به‌صورت شکل (۱۱ــ۱۱) ساخته می‌شود ، روش‌تحلیل تقریبی این سازه‌ها هرگاه تحت تأثیر نیروهای افقی واقع شده باشند براساس فرضیاتی‌استوار است که در مورد پرتال شکل (۱۱ــ۱۰) انجام گرفت ، بدین صورت که عکس‌العملهای افقی ستونها با یکدیگربرابر بوده و دونقطه عطف در ارتفاع 7.5 فوتی ستونها از پی قراردارد . پس از این فرضیات کاربرد معادلات تعادل برای حل این سازه دقیقا" به‌همان روش کلی که در مورد پرتالها گفته شد ، استوار می‌باشد .

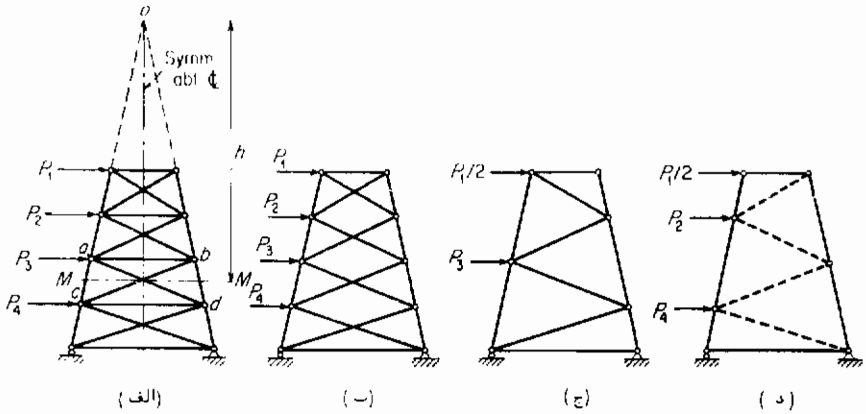
۱۱ ــ ۸ برجها با پایه‌های مستقیم

اگر پایه‌های یک برج معین در طول خود از یک شیب یکنواخت برخوردار باشد ، هریک از صفحات‌برج در یک صفحه واقع خواهند شد ، برای حل یک چنین برجی تحت اثر بارهای جانبی می‌توان ابتدا کلیه نیروهای موجود را به‌دو مولفه واقع در صفحه‌های مجاور نقطه اثر نیرو تجزیه نموده و سپس می‌توان هریک از خرپاهای مستوی صفحات جانبی برج را تحت اثر مولفه‌های نیروی واقع درصفحه خرپا موردبررسی قرار داد ، یک چنین روش مستقیما" نیروهای داخلی میله‌های میانی خرپاها را به‌دست خواهد داد ولی نیروی محوری پایه‌ها را می‌توان با جمع جبری مقادیر به‌دست آمده در خرپاهای مستوی مجاور یکدیگر که در آن پایه مشترک می‌باشند معین نمود .



شکل (۱۱ــ۱۱) خرپای قابی کارخانه

ممکن است خرپاهای هریک‌از صفحات برج نامعین داخلی‌باشند ، در یک چنین‌مواردی تحلیل برج می‌تواند به‌همان روش تبدیل برج به‌خرپاهای مستوی انجام گیرد ، ولی هرگاه بخواهیم که حل سازه فقط به‌کمک معادلات تعادل انجام گیرد بدیهی است‌که‌فرضیات‌اضافی مناسبی موردنیاز خواهد بود .



شکل (۱۱−۱۲) خرپای برجی

فرض کنید در شکل (۱۱−۱۲ الف) بخواهیم نیروهای داخلی میله‌های قطری پانل $abcd$ را تعیین کنیم مقطع M-M را از محل تقاطع دو میله قطری این پانل عبور می‌دهیم و نسبت به‌نقطه o که محل تقاطع امتداد پایه‌های خرپاست از کلیه نیروهای واقع دربالای مقطع M-M لنگرگیری می‌نمائیم ، چون امتدادپایه‌ها از نقطه o می‌گذرد لذا لنگر مولفه‌های افقی نیروهای داخلی میله‌های قطری که همان بازوی لنگر برابر با h می‌باشند با لنگر نیروهای P_1 ، P_2 و P_3 نسبت به‌نقطه o در تعادل خواهند بود .

اگر میله‌های قطری فقط‌قادر به‌تحمل کشش باشند نیروی داخلی میله ad برابر با صفر بوده و فقط یک مجهول مولفه افقی نیروی داخلی میله bc باشد باید تعیین شود که‌آن نیرو به‌راحتی قابل محاسبه خواهد بود و اگر فرض شود که میله‌های قطری قادر به‌تحمل‌کشش و فشار باشند می‌بایستی فرض‌گردد که مولفه‌های افقی دو میله قطری از نظر مقدار با یکدیگر برابر ولی از نظرعلامت مخالف هم باشند ،یک چنین فرضی تعدادمجهولات را به‌یک‌مجهول تقلیل می‌دهد و بدین ترتیب می‌توان مولفه‌های افقی میله‌های قطری را محاسبه نمود .

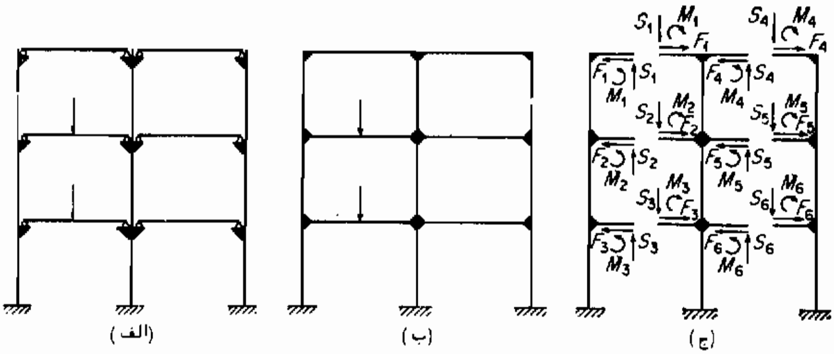
اگر میله‌های افقی خرپا را در حد فاصل پانلهای خرپا حذف کنیم ــ به‌صورتی که در شکل (۱۱−۱۲ ب)نشان داده شده است ــ می‌توان تصور نمود که خرپای برج از دو خرپای مجزا که در شکلهای (۱۱−۱۲ ج) و (۱۱−۱۲ د) نشان داده شده است تشکیل شده باشد در

این حالت هریک از خرپاهای تجزیه شده به‌راحتی فقط به‌توسط معادلات تعادل تحت اثر نیروهای مربوط بخود قابل حل خواهند بود . نیروهای واقعی در خرپای اصلی با جمع جبری نیروهای مختلف در دو خرپای تجزیه شده حاصل خواهد شد .

دیده می‌شود که همان روش کلی حل تقریبی خرپاهای نامعین روی تکیه‌گاههای کناری قابل استفاده در حل و بررسی برجهایی که از خرپاهایی به‌صورت طره‌ای تشکیل شده است می‌باشد .

۱۱ ــ ۹ تنش حاصل از بارهای عمودی در قابهای ساختمانی

یک قاب ساختمانی عبارت است از شاهتیرها که بار عمودی را به‌ستونها منتقل‌می‌کنند وازستونها، هرگاه چنین قابی را به‌صورتی که در شکل (۱۱ــ۱۳ الف) نشان داده‌ایم بسازیم

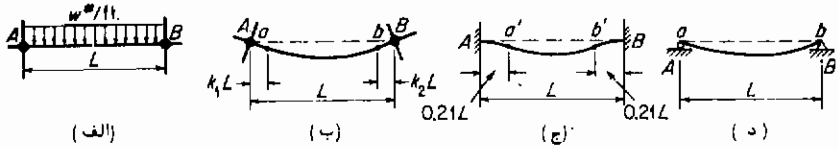


شکل(۱۱ــ۱۳) قاب ساختمانی

به‌نحوی که کاملا" یک قاب معین را ایجاد نماید می‌بینیم که‌چنان قابی در مقابل نیروهای افقی بسیار ضعیف است ، به‌این جهت در عمل قابهای ساختمانی را به‌صورتی که در شکل (۱۱ــ۱۳ ب) نشان داده شده می‌سازند که درآن چنین حالتی شاهتیرها کاملا" به‌ستونها به‌صورت گیردارمتصل شده‌اند با چنین اتصالاتی کلیه قطعات قاب تحمل لنگر خمشی ،تلاش برشی و نیروی محوری را خواهند نمود . چنین قابی را یک قاب صلب و یا قاب ساختمانی گویند این گونه قابها به‌دلیل اتصالات صلب در حد بالایی نامعین می‌باشند . تعیین درجه نامعینی آنها به‌صورتی که در شکل (۱۱ــ۱۳ ج) نشان داده شده است به‌عمل می‌آید . فرض کنید کلیه شاهتیرها را در وسط دهانه خود قطع کنیم ،سازه ایجاد شده معین خواهد بود که درآن ستونها مانند طره‌ای عمل خواهند کرد . بدیهی است در چنین سازه‌ای لنگر خمشی ،

تلاش برشی و نیروی محوری به‌صورتی که نشان داده شده است عمل خواهند کرد ، اگـر n تعداد شاهتیرهای سازه باشد برای این که آن‌را تبدیل به‌یک سازهٔ معین نمائیم لازم‌است‌که $3n$ مجهول را از بین ببریم لذا چنین اسکلتی $3n$ درجه‌نامعین خواهدبود. به‌این‌صورت اسکلت شکل (۱۱–۱۳ ب) هیجده درجه نامعین است . یک بنایی با یکصد طبقه و هشت ردیف ستون شامل 700 شاهتیر بوده و لذا 2,100 درجه نامعین خواهد بود ، بدین صورت می‌بینیم که کاربرد روش تقریبی در حل چنین سازه‌ای تا چه حد مفید است .

اگر بخواهیم چنان قاب ساختمانی را فقط به‌کمک معادلات تعادل حل کنیم چـون در هر اسکلت ساختمانی هر شاهتیر ایجاد سه‌درجه‌نامعینی می‌نماید ، لذا می‌بایستی برای هر شاهتیر سه فرض اضافی در نظر بگیریم .در شکل (۱۱–۱۴ الف) یک شاهتیر را که تحت اثر بار یکنواختی به‌شدت w lb/ft قرار گرفته است مشاهده می‌کنیم دو انتهای این شاهتیـــر یعنی نقاط A و B به‌صورتی که در شکل (۱۱–۱۴ ب) نشان داده شده است دوران خواهنـد



شکل (۱۱–۱۴) شاهتیر قابهای ساختمانی

کرد ، زیرا این نقاط کاملا" در برابر دوران مقطع مهار نشده است . اگر تکیه‌گاههای A و B کاملا" در برابر دوران مهار شده بود ، به‌نحوی که در شکل (۱۱–۱۴ ج) می‌بینیم ، تعییـــن نقطه عطف شاهتیر کاری سهل و ساده بود و می‌دانستیم که این نقاط به‌فاصله $0.21L$ از دو انتهای تیر واقع شده است ،و اگردو انتهای تیر مفصلی بود (شکل ۱۱–۱۴ د)می‌دانستیم که نقاط عطف درمحل تکیه‌گاهها قرار دارند . برای حالت عملی که تکیه‌گاهها کاملا"دربرابر دوران مهارنشده‌اند محل نقاط عطف به‌فاصله‌ای بین $0.00L$ الی $0.21L$ از تکیه‌گاهها واقع خواهد شد و اگر این فاصله را برابر با $0.1L$ بگیریم یک محل تقریبی ولی منطقـی برای نقاط عطف انتخاب کرده‌ایم .

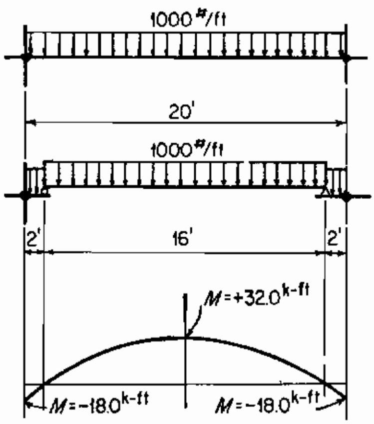
حل قابهای ساختمانی به‌روش دقیق نشان می‌دهد که نیروی محوری شاهتیرها تحـت اثر بارهای قائم عموما" ناچیز است .

به‌این ترتیب سه‌فرض اضافی زیر برای حل تقریبی قابهای ساختمانی تحت اثر بارهای قائم برای هریک از شاهتیرها به‌کار گرفته خواهد شد .

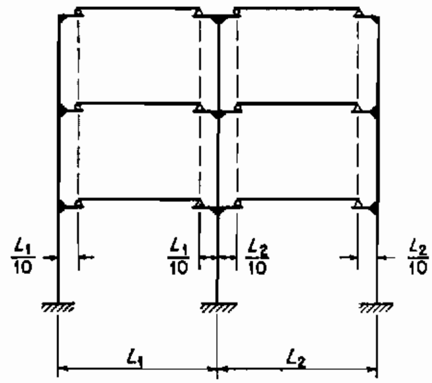
۱ ــ نیروی محوری در هر شاهتیر برابر صفر است .

۲ ـ نقطه عطفی درفاصله یکدهم‌دهانه شاهتیر ازتکیه‌گاه دست چپ واقع خواهدشد .
۳ ـ نقطه عطفی در فاصله یکدهم دهانه شاهتیر از تکیه‌گاه دست راست واقع خواهد شد .چنین فرضیاتی معادل با این است که قاب ساختمانی از نظر نوع اسکلت محاسباتی به‌صورت قاب شکل(۱۱ــ۱۵) تبدیل گردد . در این قاب شاهتیرها به‌کمک تعادل به‌نحوی که در شکل(۱۱ــ۱۶)می‌بینیم محاسبه خواهد شد ، لنگر حداکثر مثبت در وسط دهانه تیربرابر خواهد شد با :

$$M = +\tfrac{1}{8}(1.0)(16)^2 = +32.0 \text{ kip-ft}$$



شکل (۱۱ــ۱۶) ممان خمشی شاهتیرها



شکل (۱۱ــ۱۵) فرضیات اضافی شاهتیرها

لنگر حداکثر منفی در انتهای دهانه شاهتیر برابر خواهد شد با :

$$M = -8.0(2) - 1.0(2)(1) = -18.0 \text{ kip-ft}$$

تلاش برشی حداکثر در انتهای هر دهانه برابر خواهد شد با :

$$S = 8.0(1) + 2.0(1) = 10 \text{ kips}$$

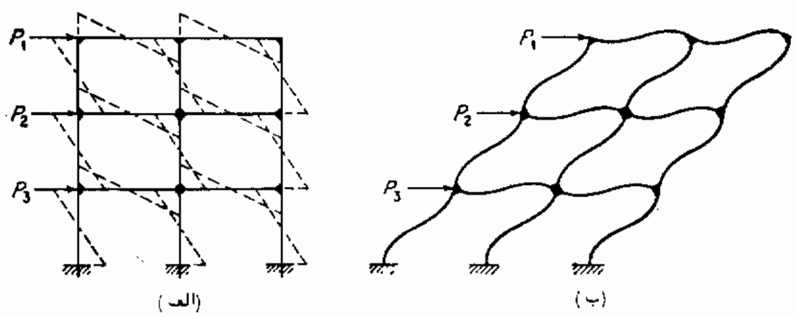
چون مقدار تلاش برشی در انتهای هر شاهتیر برابر با نیروی عمودی موثر بر ستون‌از طرف شاهتیر می‌باشد لذا نیروی محوری کلی ستونها با حاصلجمع تلاش برشی شاهتیر از بالای ستون تا پائین ستون مورد نظر به‌دست خواهد آمد .

برای این که نیروی فشاری حداکثر در ستونها ایجاد شود طره‌های متصل به‌ستونها نیز بارگذاری شده است ، در ستونهای میانی لنگر حاصل از بارگذاری کف ساختمان که توسط شاهتیرها به‌ستون منتقل می‌شود چون از دو طرف به‌ستون وارد می‌شود لذا لنگرخمشی‌ستون

ناچیز بوده و اغلب از آن در محاسبات صرف نظر می‌گردد ، ولی در ستونهای کناری چون شاهتیرها از یک طرف به‌ستون لنگر وارد می‌کنند لذا لنگر خمشی ستونها قابل ملاحظه بوده و در محاسبات باید منظور گردد . در هر صورت در محاسبه‌ستونهافرض‌اضافی (۱)فاقداعتبار بوده‌و لنگر حاصل از شاهتیرها را می‌بایستی متناسب سختی ستونها بین آنها تقسیم نمود .

۱۱ ــ ۱۰ تنش حاصل از بارهای جانبی در قابهای ساختمانی

در بند (۱۱ــ۹) گفته شد که روش تقریبی بررسی قابهای ساختمانی از آنجائی که این قابها دارای درجه نامعینی بالایی می‌باشند از اهمیت بسیاری برخوردار است ، گفته شد که درجه‌نامعینی یک قاب ساختمانی‌نظیرشکلی (۱۱ــ۱۷ الف)برابر با سه‌برابرتعدادشاهتیرهای آن قاب است .لذا مقدارفرضیات اضافی برای این‌که بتوان قاب‌مزبور را فقط به‌کمک معادلات



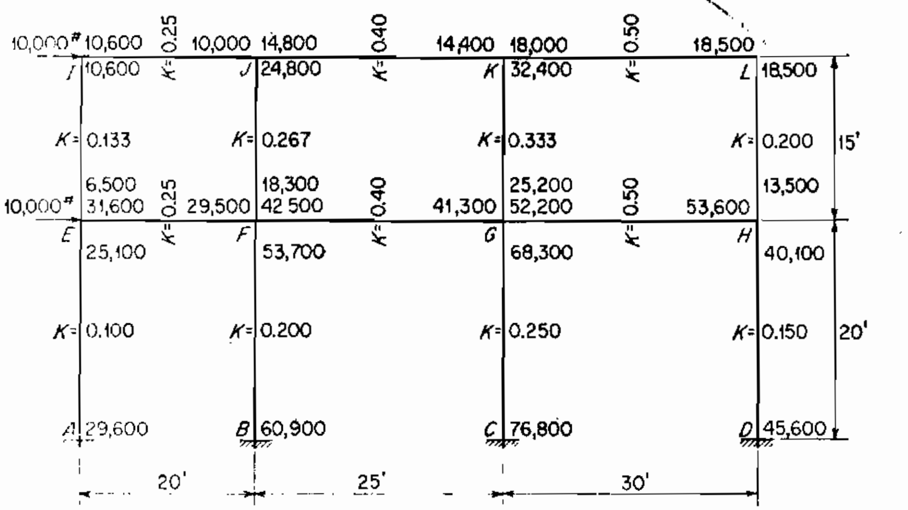
شکل (۱۱ــ۱۷) قاب ساختمانی تحت اثر بارهای جانبی

تعادل قابل حل نمود .سه برابر تعداد شاهتیرهای آن‌قاب خواهد بود .البته تعدادفرضیات اضافی رقمی است ثابت و ربطی به‌نوع بارگذاری قاب ساختمانی ندارد .فرضیاتی که درمورد اثر بار عمودی برای حل قاب ساختمانی اتخاذ شد نمی‌تواند در مورد اثربارجانبی‌ساختمان مفید باشد زیرا تغییرشکل سازه تحت اثر بار افقی کاملا" از تغییرشکل آن‌تحت‌اثربار عمودی متفاوت می‌باشد ،این تفاوت را می‌توان با دقت در شکل (۱۱ــ۱۷ ب) که نشان دهنده‌تغییر شکل قاب در مقیاسی خارج از اندازه متعارف می‌باشد مشاهده‌نمود . دیده می‌شود که‌در این تغییرشکل محل واقع شدن نقاط عطف کاملا" با موقعیت آن نقاط در قابی تحت اثر بارهای عمودی متفاوت می‌باشد . عملا" وقتی یک قاب ساختمانی تحت اثر بارهای‌افقی واقع می‌شود ــ چنانچه در شکل (۱۱ــ۱۷ ب) می‌بینیم ــ نقاط عطف در حدود مراکز شاهتیرها و ستونها واقع می‌شود ، فرض این که این نقاط درمراکز ستونها و تیرها واقع‌اند ازجمله فرضیات‌اضافی

است‌که در روشهای تقریبی جهت حل سازه‌ها فقط به‌کمک‌معادلات تعادل به‌کارگرفته می‌شود . تغییرات لنگر خمشی قاب شکل (۱۱—۱۷) را می‌توان به‌صورتی که در شکل (۱۱—۱۷ الف) با رسم خط‌چین نشان داده شده است نمایش داد .

در این قسمت سه روش مختلف حل و بررسی قابهای ساختمانی تحت اثر بارهای افقی ارائه شده است که به‌ترتیب عبارتنداز ۱ــ روش پرتال ۲ــ روش طره‌ای ۳ــ روش ضریب .

برای این که درجه دقت هریک از این سه روش مشخص شود در مورد یک قاب معین‌این سه‌روش را به‌کارخواهیم برد .قابی که مورد حل و بررسی واقع خواهد شد در شکل (۱۱—۱۸)



شکل(۱۱—۱۸) مقادیر دقیق لنگرهای انتهایی قطعات تحت اثر بارهای افقی

تحت اثر بارهای افقی نشان داده شده است ، بدیهی است که حل این قاب توسط‌روشهای دقیق که به‌حل سازه‌هایی نامعین می‌پردازد نظیر روش "شیب ــ تغییرمکان" نیز ممکن است ، حل قاب فوق‌الذکر توسط‌روش دقیق محاسباتی برای مقایسه‌نتایج به‌دست آمده با آنچه در محاسبات تقریبی به‌دست می‌آید شایان اهمیت‌است ، به‌این‌جهت نتایج تحلیل این قاب را که به‌روش دقیق حاصل شده است درشکل (۱۱—۱۸)نشان داده‌ایم،مقادیرلنگرهای‌دوانتهای ستونها و تیرها را برحسب فوت ــ پاوند در دو انتهای هریک از قطعات فوق ذکر کرده‌ایم .

برای استفاده از روشهای "شیب ــ تغییرمکان" و ضریب دانستن سختی نسبی هریک‌از قطعات ضروری‌است به‌این جهت سختی نسبی را که با K نشان داده‌ایم و برای هریک از قطعات با تقسیم لنگر سختی آن قطعه به‌طول آن‌به‌دست آمده است در مورد هرقطعه از شکل (۱۱—۱۸)در همان شکل ذکر کرده‌ایم .

۱۱ – ۱۱ روش پرتال

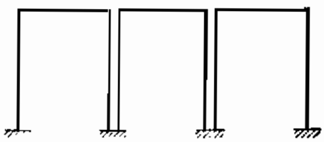
در روش پرتال فرضیات اضافی زیر اتخاذ شده است :

۱ – در مقاطع میانی دهانه هر شاهتیر یک نقطه عطف وجود دارد .

۲ – در مقاطع میانی ارتفاع هر ستون یک نقطه عطف وجود دارد .

۳ – کل تلاش برشی در هر طبقه به‌نوعی بین ستونهای آن طبقه تقسیم می‌گردد که سهم هر ستون میانی دوبرابر سهم ستونهای کناری می‌باشد .

فرض سوم از آنجا ناشی می‌شود که می‌توان هرطبقه رامجموعه‌ای از پرتالهایی با یک دهانه مانند شکل(۱۱–۱۹) فرض‌کرد در چنین حالتی ستونهای کناری نظیر یک ستون از این پرتالها بوده و در حالتی که ستونهای میانی متناظر با دو ستون از این قابها خواهند بود . منطقی به‌نظر می‌رسد که قبول کنیم ستونهای میانی دو برابر ستونهای کناری نیروی برشی تحمل نمایند .



شکل (۱۱– ۱۹) مجموعه پرتالهای معادل قاب ساختمانی

با در نظر گرفتن روابط بین تلاش برشی‌ستونها ،هرگاه درطبقه‌ای از یک‌قاب ساختمانی m ستون داشته باشیم ، مجموعه فرض معرف $(m-1)$ فرض اضافی است .

برای قاب شکل(۱۱–۱۸) مجموعه فرضیات‌اضافی روش پرتال معرف تعدادفرضیات‌اضافی زیر است .

تعداد نقاط عطف شاهتیرها	$2 \times 3 = 6$
تعداد نقاط عطف ستونها	$4 \times 2 = 8$
روابط تلاش برشی ستونها	$2 \times 3 = 6$
جمع	20

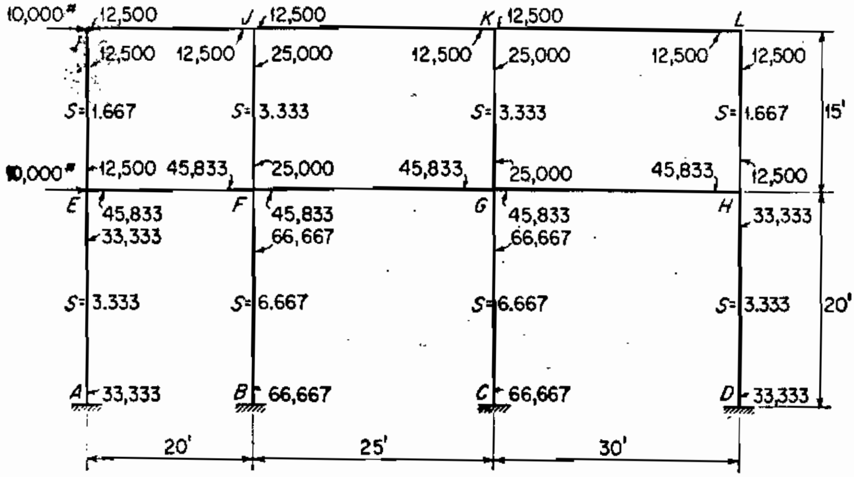
چون قاب مورد نظر دارای شش شاهتیر می‌باشد لذا فقط هیجده درجه نامعین است . بدین‌ترتیب دیده می‌شود که در روش پرتال تعداد فرضیات اضافی بیشتر از فرضیات لازم است ولی ازآنجائی‌که این فرضیات با یکدیگر سازگاری دارند لذا به‌نتایج ناسازگار از طریق اعمال معادلات تعادل بر نخواهیم خورد .

برای شرح عملیات لازم برای اعمال روش پرتال این عملیات را در مورد قاب شکل (۱۱–۱۸) انجام می‌دهیم درشکل (۱۱–۲۰) نتایج حاصل از این عملیات درج شده است.

تلاش برشی ستونها: با درنظرگرفتن فرضیات (۳) اگر x مقدار تلاش برشی درستونهای میانی همان طبقه برابر با $2x$ خواهد بود، با این شرح برای طبقه اول خواهیم داشت.

$$x + 2x + 2x + x = 6x = 10{,}000 + 10{,}000 = 20{,}000$$
$$x = 3{,}333 \qquad 2x = 6{,}667$$

برای طبقه دوم خواهیم داشت: $6x = 10{,}000;\ x = 1{,}667;\ 2x = 3{,}333$



شکل (۱۱–۲۰) مقادیر لنگرهای انتهای شاهتیرها و ستونها در روش پرتال

لنگر خمشی ستونها: برطبق فرضیات (۲) مقدارلنگر خمشی درمقاطع میانی ستونهابرابر با صفر است، لذا مقدار لنگر انتهای هرستون برابر خواهد بود با مقدار تلاش برشی آن ستونها ضرب‌در نصف ارتفاع آن ستون، برای مثال مقدار M_{AE} که لنگر انتهای A ازستون AE می‌باشد برابر خواهد شد با:

$$3{,}333 \times 10 = 33{,}333 \quad \text{ft-lb}$$

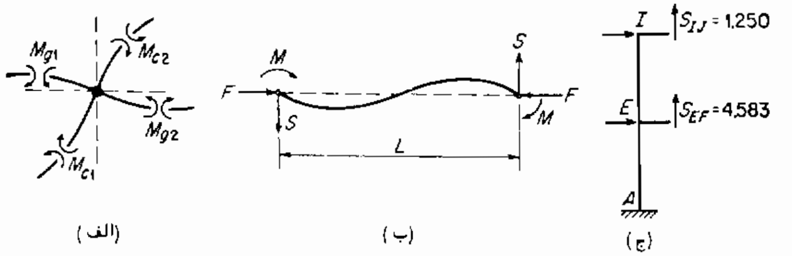
و مقدار لنگر M_{FJ} برابر خواهد شد.

$$M_{FJ} = 3{,}333 \times 7.5 = 25{,}000 \text{ ft-lb}$$

لنگر خمشی شاهتیرها: با توجه به‌شکل (۱۱–۱۷ ب) که نوع تغییرشکل قاب را تحت اثر بارهای جانبی نشان می‌دهد می‌توان دریافت که لنگرهای خمشی تیرها در یک گره در خلاف جهت لنگرهای خمشی ستونها عمل می‌کنند این واقعیت در شکل (۱۱–۲۱ الف) به

صورت واضحی نشان داده شده‌است با توجه به‌این شکل می‌توان معادله زیر را بین لنگرهای خمشی انتهای تیرها و ستونها در یک گره نوشت : $M_{c1} + M_{c2} = M_{g1} + M_{g2}$
یعنی‌که مجموع لنگرهای خمشی انتهای‌ستونها برابرمجموع لنگرهای خمشی‌انتهای‌تیرهاست ، از این رابطه با در نظر گرفتن این که قبلا"لنگرهای انتهایی ستونها محاسبه شده است می‌توان برای تعیین لنگرهای انتهایی تیرها استفاده نمود . به‌این ترتیب به‌عنوان مثال در گره E داریم :

$$M_{EF} = 33{,}333 + 12{,}500 = 45{,}833 \text{ ft-lb}$$



شکل (۱۱ــ۲۱) قطعات تفکیک شده قاب شکل(۱۱ــ۲۰)

چون برطبق فرضیات (۱)در مقطع میانی شاهتیر EF یک‌نقطه عطف وجود دارد ،لذا مقدار M_{FE} نیز برابر با 45,833 ft-lb خواهد شد .با مساوی قراردادن لنگرهای‌شاهتیرها با لنگرهای ستونها در گره F خواهیم داشت : $M_{FG} + 45.833 = 66{,}667 + 25{,}000$
به‌این‌ترتیب M_{FG} نیز برابربا 45,833 ft-lb خواهدشد .اگر به‌همین‌ترتیب شاهتیرهای طبقه اول را مورد بررسی قراردهیم خواهیم دید که لنگرهای خمشی انتهای‌کلیه شاهتیرهای آن طبقه برابر با 45,833 ft-lb می‌شود ، لنگرهای انتهای شاهتیرهای طبقه بالا نیزبه‌همین نحو تعیین می‌گردد ، خواهیم دید که در این طبقه مقدار عددی کلیه آن لنگرهـا برابر با، 12,500 ft-lb می‌شود .

تلاش برشی شاهتیرها : با توجه به‌شکل (۱۱ــ۲۱ ب) هرگاه رابطه $\Sigma M = 0$ را برای کلیه نیروها و لنگرهای موءثر بریک شاهتیر با لنگرگیری حول یک‌انتهای آن شاهتیر بنویسیم خواهیم داشت : $SL = 2M$ و ازآنجا $S = 2M/L$ بدین ترتیب مقدار برش میله EF خواهد شد .

$$S_{EF} = \frac{2 \times 45{,}833}{20} = 4{,}583 \text{ lb} \qquad S_{IJ} = \frac{2 \times 12{,}500}{20} = 1{,}250 \text{ lb}$$

نیروی‌محوری ستونها : با توجه به‌شکل (۱۱ــ۲۱ ج) نیروی محوری ستونها باجمع تلاش

برشی منتقل شده از شاهتیرها به‌انتهای فوقانی ستونها به‌دست می‌آید ، به‌این ترتیب‌داریم :

$$F_{EI} = +1{,}250 \text{ lb} \qquad F_{AE} = +1{,}250 + 4{,}583 = +5{,}833 \text{ lb}$$

نیروی محوری شاهتیرها را که عموما" درمحاسبات نقش مهمی ندارد نیز می‌توان به‌همین‌نحو تعیین نمود ، به‌این ترتیب باید نیروهای برشی منتقل شده از ستونها به‌یک طرف شاهتیر را جمع نمود ، بدیهی است در این صورت باید اثر نیروهای جانبی را نیز در این جمع بندی به‌حساب آورد .

۱۱ ــ ۱۲ روش طره‌ای

فرضیات اضافی در روش طره‌ای به‌قرار زیر است :

۱ ــ در مقاطع میانی دهانه هر شاهتیر یک نقطه عطف وجود دارد .

۲ ــ در مقاطع میانی ارتفاع هرستون یک نقطه عطف وجود دارد .

۳ ــ شدت تنش محوری هر ستون از یک طبقه متناسب با فاصله افقی آن ستون از مرکز ثقل کلیه ستونهای آن طبقه موردنظر است .

جهت تحقیق فرضیات (۳) می‌توان به‌روش مشابهی که در تعیین شدت تنش عمودی مقاطع یک تیر طره‌ای عمل می‌شود استفاده نمود .

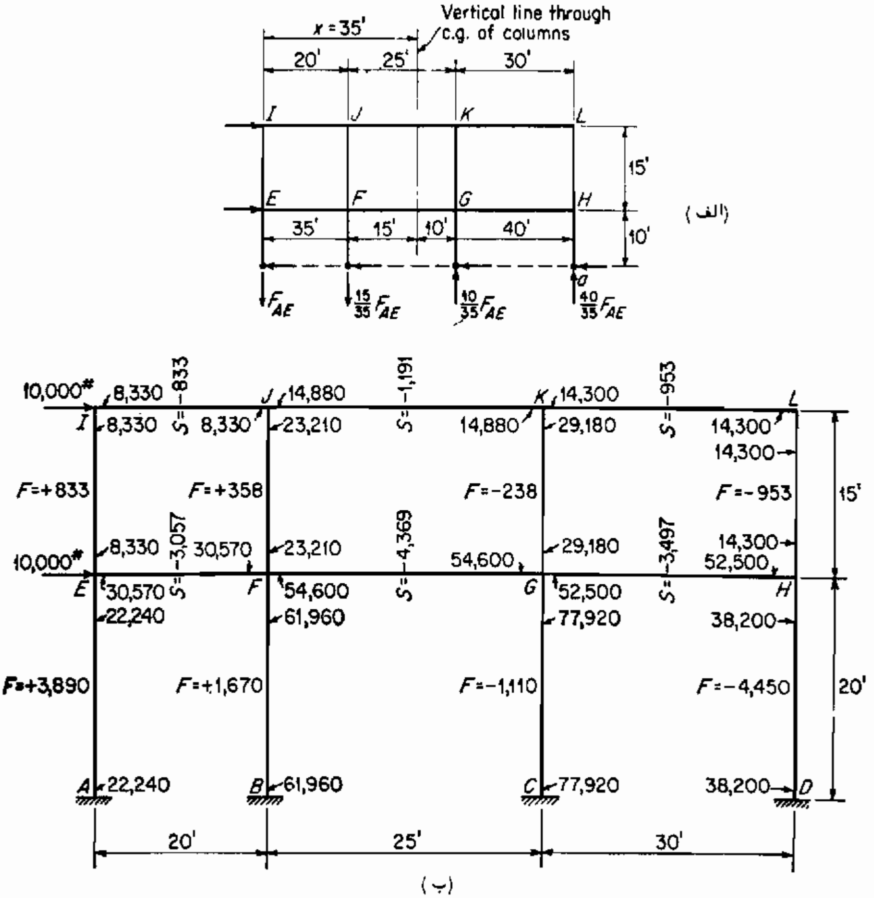
اگر در طبقه‌ای m ستون داشته باشیم اجرای مجموعه فرضیات (۳) با توجه به‌روابط موجود بین نیروهای محوری ستونها معادل با $m - 1$ فرض اضافی خواهد بود ، لذا مانند روش پرتال روش طره‌ای نیزمفروضات بیشتری ازمقدار مجهولات ارائه‌می‌دهد ولی بازبه‌همان ترتیب این فرضیات اضافی به‌دلیل سازگاری با یکدیگر نتایج مغایری را ایجاد نمی‌کنند .

برای شرح عملی روش طره‌ای ، این روش را در مورد قاب شکل(۱۱ــ۱۸) عمل می‌کنیم ، بحث زیرین به‌شکل (۱۱ــ۲۲ ب) مربوط می‌شود که در آن نتایج حاصل از تحلیل به روش طره‌ای قاب درج شده است .

نیروی محوری ستونها : با فرض این که سطح مقطع کلیه ستونها برابر باشد موقعیت مرکز ثقل ستونها در هرطبقه بتوسط رابطه زیر معین خواهد شد .

$$x = \frac{20 + 45 + 75}{4} = 35.0 \text{ ft} \qquad (\text{فاصله از } AEI)$$

با توجه به‌شکل (۱۱ــ۲۲ الف) با فرض این که نیروی محوری ستون AE برابربا $+F_{AE}$ باشد و نیز با توجه به‌مجموعه فرضیات (۳) مقادیر نیروهای محورهای ستونهای BF ، CG و DH



شکل (۱۱–۲۲) مقادیر لنگرهای انتهای شاهتیرها و ستونها در روش طره‌ای

به‌ترتیب برابر با $+{}^{15}\!/_{35}F_{AE}$ ، $-{}^{10}\!/_{35}F_{AE}$ و $-{}^{40}\!/_{35}F_{AE}$ خواهد شد با لنگرگیری حول نقطه a از کلیه نیروهای موءثر سه قسمت فوقانی سازه واقع در بالای صفحه افقی مار بر کلیه نقاط عطف ستونهای آن طبقه خواهیم داشت :

$$+10{,}000(25) + 10{,}000(10) - F_{AE}(75) - {}^{15}\!/_{35}F_{AE}(55) + {}^{10}\!/_{35}F_{AE}(30) = 0$$

لذا داریم : $F_{AE} = +3{,}890;\ F_{BF} = +{}^{15}\!/_{35}(+3{,}890) = +1{,}670$

نیروهای محوری ستونهای طبقه دوم نیز نسبت به‌یکدیگر همان روابط ستونهای طبقه نخست را دارند ، این نیروها را نیز به‌همان روش می‌توان محاسبه نمود ، به‌این ترتیب که

نسبت به‌نقطه عطف ستون HI از کلیه نیروهای موءثر بر قسمت فوقانی سازه واقـع در بالای صفحه مار (صفحه افقی) بر کلیه نقاط عطف ستونهای آن طبقه لنگرگیری نمود. نیروی‌محوری هرستون در شکل (۱۱—۲۲ ب) در وسط آن ستون ذکر شده است.

تلاش برشی شاهتیرها: تلاش برشی شاهتیرهارا می‌توان با درنظر گرفتن نیروی‌محوری ستونها در هر گره به‌دست آورد، برای مثال در گره E خواهیم داشت:

$$S_{EF} = +833 - 3{,}890 = -3{,}057$$

در گره F داریم:

$$S_{FG} = -3{,}057 + 358 - 1{,}670 = -4{,}369$$

تلاش برشی شاهتیرها در وسط آنها، در شکل (۱۱—۲۲ ب) درج شده است.

لنگر خمشی شاهتیرها: چون لنگر خمشی در وسط شاهتیرها برابر با صفر است، لـــذا لنگر انتهای هر شاهتیر برابر با حاصلضرب تلاش برشی آن شاهتیر در نصف دهانـــه آن خواهد شد. به‌عنوان مثال داریم:

$M_{EF} = 3{,}057 \times 10 = 30{,}570$ ft-lb $M_{KJ} = 1{,}191 \times 12.5 = 14{,}880$ ft-lb و غیره

لنگر خمشی ستونها: لنگر خمشی ستونها به‌طوری که در ادامه بحث می‌آید با محاسبه از انتهای فوقانی ستون شروع می‌شود و سپس به‌تدریج به‌سوی انتهای تحتانی ستون خاتمـه می‌پذیرد، مثلاً" درگره J چون مجموع لنگرهای خمشی ستونها برابرمجموع لنگرهای خمشـی تیرها است خواهیم داشت.

$$M_{JF} = 8{,}330 + 14{,}880 = 23{,}210 \text{ ft-lb}$$

و از آنجائی که در مقطع میانی ستون FJ یک نقطه عطف وجود دارد لذا M_{FJ} نیز برابربا 23,210 ft-lb خواهد شد، در گره F خواهیم داشت:

$$M_{FB} + 23{,}210 = 30{,}570 + 54{,}600$$

پس داریم، $M_{FB} = 61{,}960$ ft-lb مقدار M_{BF} نیز چون نقطهٔ عطفی در مقطـع میانـــی ستون BF وجود دارد برابر با 61,960 ft-lb خواهد شد.

۱۱ — ۱۳ روش ضریب

روش ضریب در مقام مقایسه با دو روش قبلی یعنی پرتال و طره‌ای که یک سازه را تحت

اثر نیروهای افقی مورد بررسی قرار می‌دهند از دقت بیشتری برخوردار است . چرا که در دو روش قبلی اساس تحلیل سازه بر فرضیاتی اضافی در مورد عملکرد تنشها استوار است تا بتوان سازه‌را فقط به‌کمک معادلات تعادل حل نمود در صورتی که روش ضریب براساس فرضیاتی اضافی در مورد عملکرد ارتجاعی سازه استوار است تا بتواند یک روشی تقریبی برای اعمال روش شیب ــ تغییرمکان ابداع نماید . هرگاه بخواهیم از روش شیب ــ تغییر مکان کمک بگیریم عملا" می‌توان به‌کمک یک مجموعه دستورات نسبتا" ساده بدون آن که از اصول ارتجاعی اطلاعی داشته باشیم آن روش را اجرا کنیم .

قبل ازاجرای روش ضریب لازم است که مقدار $K = I/L$ را برای کلیه شاهتیرها و ستونها به‌دست آورد ، لازم نیست که مقدار واقعی K در عملیات به‌کار برده شود زیرا تنش فقط به‌تناسب نسبت سختی قطعات قاب توزیع می‌گردد ، در هر صورت لازم است که نسبت سختی قطعات به‌یکدیگر به‌صورت صحیحی تعیین گردد .

روش ضریب را می‌توان با اجرای شش مرحله زیر اعمال نمود .

۱ ــ برای هرگره‌ضریب شاهتیر g را توسط رابطه $g = \Sigma K_c/\Sigma K$ تعیین نمایید . اینجا ΣK_c مجموع مقادیر K برای کلیه ستونهای وارده به‌آن گره بوده و ΣK مجموع مقادیر K برای کلیه قطعات وارده به‌آن گره می‌باشد ، مقدار g را که به‌این نحو به‌دست می‌آید در نزدیک انتهای هر شاهتیری که به‌آن گره وارد می‌شود بنویسید .

۲ ــ برای هرگره‌ضریب ستون c را توسط رابطه $c = 1 - g$ تعیین‌نمایند ،دراین‌رابطه g ضریب شاهتیر است که در مرحله (۱) طریقه تعیین آن ذکر شد ، مقدار به‌دست آمده c را درنزدیکی انتهای هرستونی‌که به‌آن گره وارد می‌شود بنویسید . برای انتهای گیردارستونهای طبقه اول ، $c = 1$ می‌باشد .

۳ ــ با اجرای دستورات مراحل (۱) و (۲) در انتهای هرقطعه از قطعات قاب عددی موجود است به‌هریک از این اعداد نصف اعدادی را که در انتهای قطعه قرار دارد اضافه کنید .

۴ ــ مجموع مقادیری را که با اجرای گام (۳) برای انتهای هر عضوی به‌دست می‌آید در مقدار K آن عضو ضرب نمائید ، مقدار به‌دست‌آمده را برای ستونها ضریب لنگر ستون C و برای شاهتیرها ،ضریب لنگر شاهتیر G بنامید .

۵ ــ ضریب لنگر ستونها C که از طریق اجرای مرحله (۴) به‌دست می‌آید عملا" مقدار نسبی و تقریبی لنگرهای انتهای ستونهای طبقه‌ای است که ستونها در آن طبقه قرار دارند، مجموع لنگرهای انتهای ستونهای واقع در یک طبقه را به‌راحتی با استفاده از روابط تعادل می‌توان برابر با مجموع جمع تلاش برشی افقی آن طبقه ضرب‌در ارتفاع همان طبقه تعیین

کرد ، لذا با تعیین یک ضریب ساده برای هرطبقه می‌توان ضریب لنگر ستونهای C را تبدیل به‌لنگر انتهای ستونها نمود .

۶ ــ ضریب لنگر شاهتیرها G که از طریق اجرای مرحله (۴) به‌دست می‌آید عملاً" مقدار نسبی و تقریبی لنگرهای انتهای شاهتیرهای یک گره می‌باشد ، مجموع لنگرهای انتهای شاهتیرها واقع در یک گره را می‌توان به‌راحتی با استفاده از روابط تعادل برابر با مجموع لنگرهای انتهای ستونها در آن گره که به‌توسط مرحله (۵) محاسبه می‌شود می‌توان تعیین نمود. لذا با تعیین یک ضریب ساده برای هرگره می‌توان ضریب لنگر شاهتیرها G را تبدیل به‌لنگر انتهای شاهتیرها نمود .

برای شرح عملیات لازم در روش ضریب قاب ساختمانی شکل (۱۱ــ۱۸) را بهاین روش مورد بررسی قرار می‌دهیم ،بحث و عملی که ذیلاً" آورده می‌شود مربوط به‌شکل (۱۱ــ۲۳) است که در آن شکل محاسبات لازم در روش ضریب و نتایج حاصله نشان داده شده است .مقادیر K برای هرطبقد به‌عنوان مقدار معلومی برای آن قطعه روی آن قطعه درج شده است .برای‌هر طبقه ابتدا درسمت راست شکل مقادیر H که جمع تلاش برشی افقی آن طبقه می‌باشدومقدار Hh که‌حاصل‌ضرب H در ارتفاع طبقه h می‌باشد محاسبه شده است ، شرح جزئیات عملیات لازم ذیلاً" درج شده است :

مرحله ۱ــ محاسبه ضریب‌شاهتیرها

برای گره E .

$$g_E = \frac{0.133 + 0.100}{0.133 + 0.100 + 0.250} = 0.482$$

این مقدار در انتهای چپ شاهتیر EF نوشته می‌شود

برای گره F :

$$g_F = \frac{0.267 + 0.200}{0.267 + 0.200 + 0.250 + 0.400} = 0.418$$

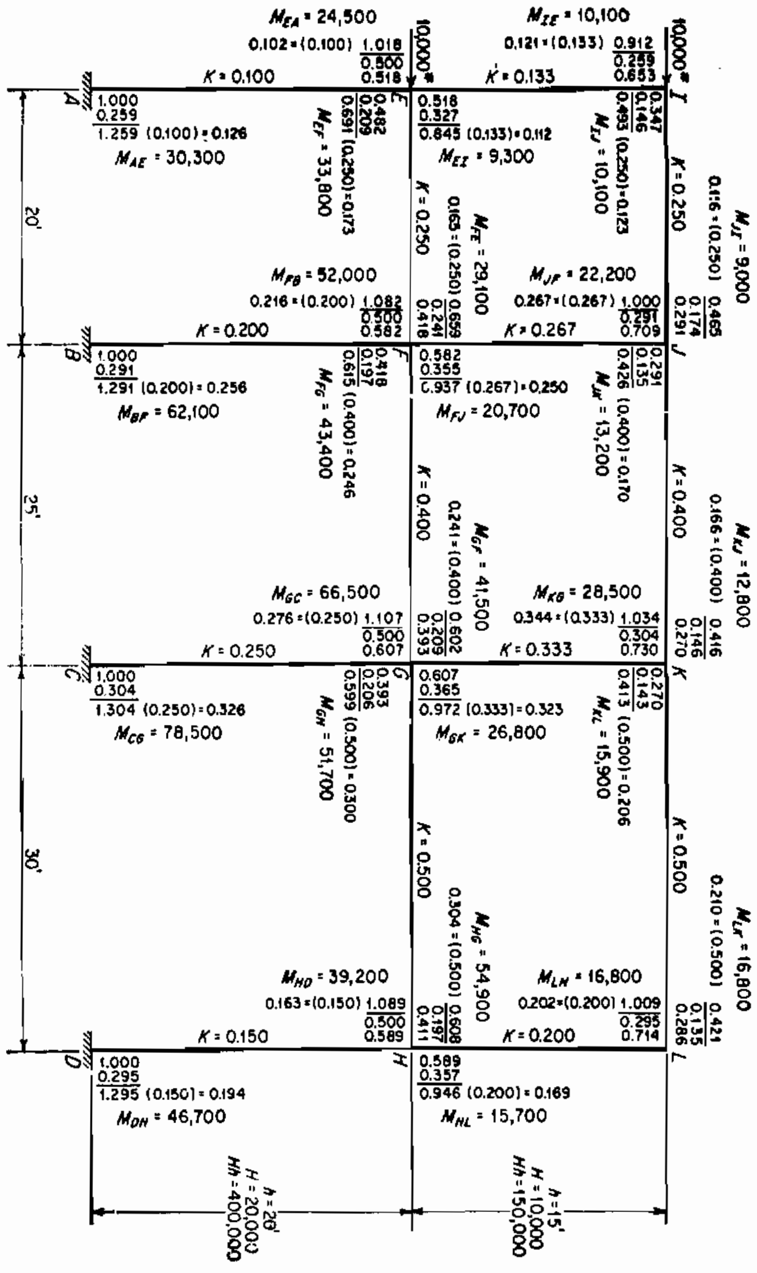
این مقدار در انتهای چپ شاهتیر FG و انتهای راست شاهتیر EF نوشته می‌شود .

برای گره I :

$$g_I = \frac{0.133}{0.133 + 0.250} = 0.347$$

این‌مقداررا درانتهای چپ شاهتیر IJ می‌نویسیم .

ضریب شاهتیرها برای سایر گرهها به‌همین نحو محاسبه می‌گردد و مقادیر محاسبه‌شده در نزدیک انتهای هر شاهتیر که به‌آن گره ختم می‌شود نوشته می‌گردد .



شکل (۱۱ – ۲۳) مقادیر لنگرهای انتهای تیرها و ستونها در روش ضریب

مرحله ۲ـ محاسبه ضریب ستونها

برای گره E .
$$c_E = 1 - g_E = 1.000 - 0.482 = 0.518$$

این مقدار در بالای ستون AE و در پایین ستون EI نوشته می‌شود .

برای گره J :
$$c_J = 1.000 - 0.291 = 0.709$$

این مقدار در بالای ستون FJ نوشته می‌شود .

برای گره A :
$$c_A = 1.000$$

برای این که این گره انتهای گیردار ستون طبقه اول را تشکیل می‌دهد ،این‌مقدارمی‌بایستی در پائین ستون AE نوشته شود .

ضریب ستون برای سایر گرهها به‌روشی مشابه محاسبه می‌گردد و در نزدیک انتهای‌هر ستونی که به‌آن گره ختم می‌شود درج می‌گردد .

مرحله ۳ـ ازدیاد مقدارانتهای هرقطعه به‌اندازه نیمی از عدد انتهای دیگر قطعه

برای گره A : قطعه AE : $1.000 + 0.5(0.518) = 1.259$

برای گره E : قطعه EI : $0.518 + 0.5(0.653) = 0.845$

قطعه EF : $0.482 + 0.5(0.418) = 0.691$

قطعه EA : $0.518 + 0.5(1.000) = 1.018$

برای سایر گرهها محاسبات مشابهی در روی شکل(۱۱ـ۲۳)انجام گرفته است .

مرحله ۴ـ محاسبه ضریب لنگر ستون و ضریب لنگر شاهتیر

برای گره A . قطعه AE . $C_{AE} = 1.259(0.100) = 0.126$

E قطعه EI : $C_{EI} = 0.845(0.133) = 0.112$

قطعه EF : $G_{EF} = 0.691(0.250) = 0.173$

قطعه EA : $C_{EA} = 1.018(0.100) = 0.102$

برای سایر گرهها محاسبات مشابهی در روی شکل(۱۱ـ۲۳) انجام گرفته است .

مرحله ۵ ـ محاسبه لنگر ستونها

چون ضریب لنگر ستونها به‌صورت نسبی گویای مقادیر لنگرهای انتهای ستونهای هـر طبقه از قاب می‌باشند به‌عبارت دیگر مقادیر لنگرهای انتهای ستونها را می‌توان بـه صورت

زیر نشان داد

$$M_{AE} = AC_{AE} \qquad M_{EA} = AC_{EA} \qquad M_{BF} = AC_{BF}$$

که در این روابط M_{AE} ، M_{EA} و M_{BF} و غیره مقادیر واقعی لنگر انتهای ستونها می‌باشند و A یک مقدار ثابت برای کلیه ستونهای هرطبقه می‌باشد .

لذا مجموع لنگرهای انتهایی ستونها برابر خواهد شد با :

(مجموع لنگرهای انتهایی‌ستونها) $= A(C_{AE} + C_{EA} + C_{BF} + C_{FB} + C_{CG} + C_{GC} + C_{DH} + C_{HD})$
$= A\Sigma C$ برای هرطبقه (الف)

هرگاه روابط تعادل کلیه نیروهای موثر بر کلیه ستونهای یک طبقه مفروض را بنویسیم بااستفاده‌از شکل(۱۱-۲۴) و لنگرگیری حول انتهای تحتانی ستون سمت راست یعنی نقطه a خواهیم داشت :

$$(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)h = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6 + M_7 + M_8$$

مجموع $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ برابر با H است که خود جمع تلاش برشی موجود در طبقه می‌باشد ، مجموع لنگرها در طرف دیگر یعنی $M_1 + M_2 + \cdots + M_8$ برابر با مجموع لنگرهای انتهای ستونهای طبقه موردنظر است لذا :

(مجموع لنگرهای انتهایی ستونها) $= Hh$ (ب)

از روابط (الف) و (ب) نتیجه می‌گیریم که :

$$A = \frac{Hh}{\Sigma C \text{ برای هر طبقه}} \qquad (ج)$$

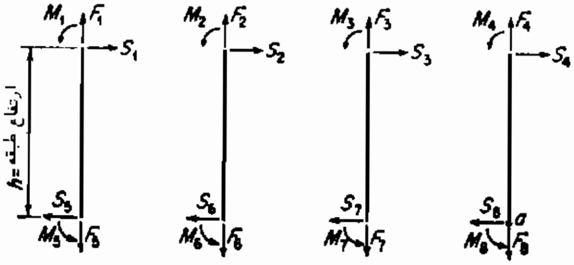
برای‌هرطبقه مقدار A را می‌توان توسط‌رابطه (ج) بدست‌آورد پس ازتعیین مقدار A باضرب مقدار A در ضریب لنگر ستون مقدار لنگر انتهای هر ستون تعیین می‌گردد .

در اینجا محاسبات لازم فوق را برای طبقه اول قاب ساختمانی شکل (۱۱-۲۳) انجام می‌دهیم .

$$A_1 = \frac{400{,}000}{0.126 + 0.102 + 0.258 + 0.216 + 0.326 + 0.276 + 0.194 + 0.163} = 241{,}000$$

$$M_{AE} = 0.126(241{,}000) = 30{,}300 \text{ ft-lb}$$
$$M_{EA} = 0.102(241{,}000) = 24{,}500 \text{ ft-lb}$$
$$M_{BF} = 0.258(241{,}000) = 62{,}100 \text{ ft-lb}$$

لنگر انتهایی سایر ستونها به‌روشی مشابه با استفاده از مقدار $A_1 = 241{,}000$ به‌دست خواهد آمد .



شکل (۱۱ ــ ۲۴) ستونهای تفکیک شده یک طبقه

برای تعیین لنگرهای انتهایی طبقه دوم می‌بایستی مقدار A_2 را با استفاده از رابطه (ج) برای طبقه دوم به‌دست آورد ، اگر چنین کنیم مقدار $A_2 = 83{,}000$ خواهدشد .

<u>مرحله ۶ ــ تعیین لنگر شاهتیرها</u>

ازآنجائی که ضریب لنگر شاهتیرها به‌صورت نسبی گویای مقدار لنگر انتهای شاهتیرها در یک گره می‌باشند به‌عبارت دیگرمی‌توان باتوجه به‌شکل(۱۱ــ۲۵) برای مقادیر لنگر انتهای شاهتیرها روابط زیر را نوشت :

$$M_{AB} = B_A G_{AB} \qquad\qquad M_{AC} = B_A G_{AC}$$

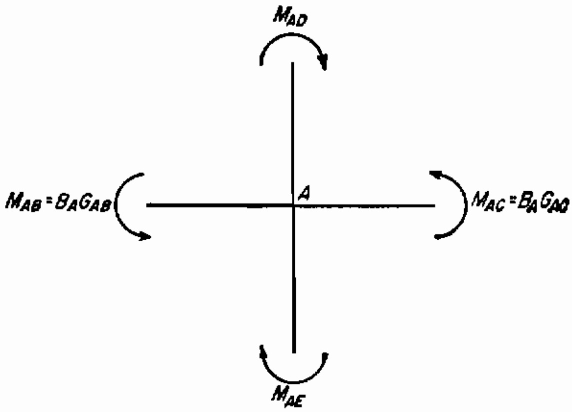
که در این روابط B_A یک مقدارثابت در هردو رابطه می‌باشد به‌علاوه چون در هر گره‌مجموع لنگرهای ستونها برابر با لنگر شاهتیرها است لذا مقدار B_A را می‌توان از طریق رابطه زیر تعیین نمود .

$$B_A G_{AB} + B_A G_{AC} = M_{AB} + M_{AD}$$

به‌همین ترتیب در هرگرهی نظیر N خواهیم داشت :

$$B_N = \frac{(\text{مجموع لنگر ستونها در گره } N)}{(\text{مجموع ضریب لنگرشاهتیرهادرگره } N)} \qquad (\text{د})$$

برای هرگره مقدار B_N را می‌توان بتوسط‌رابطه(د)محاسبه نمود ، سپس می‌توان‌لنگر انتهای هر شاهتیر را در هر گرهی با ضرب ضریب لنگر شاهتیر مربوطه در B_N به‌دست‌آورد. عملیات لازم برای شاهیترهای مختوم به‌گره F از قاب شکل(۱۱ــ۲۳) در اینجا شرح‌داده می‌شود .



شکل (۱۱–۲۵) یک گره منفک شده

$$B_F = \frac{52{,}000 + 20{,}700}{0.165 + 0.246} = 176{,}500$$
$$M_{FE} = 0.165(176{,}500) = 29{,}100 \text{ ft-lb}$$
$$M_{FG} = 0.246(176{,}500) = 43{,}400 \text{ ft-lb}$$

شایان توجه است که اعمال مرحله (۶) به‌گرههای خارجی یک قاب‌را با استفاده از تعادل گره که به‌دنبال آن مجموع لنگرهای انتهایی ستونها برابر لنگر انتهای شاهتیر می‌باشد نیز می‌توان انجام داد. به‌این ترتیب می‌توان مستقیماً" با جمع مقادیر لنگر انتهای‌ستونهالنگر انتهای شاهتیرها را توسط تعادل گره به‌دست آورد و به‌این ترتیب معلوم می‌شود که محاسبه ضریب لنگر شاهتیرها در گرههای خارجی بیهوده می‌باشد.

پس‌از آنکه این کار انجام شد و کلیه لنگرهای انتهای‌ستونها و شاهتیرها معلوم شد. با استفاده از روابط تعادل می‌توان به‌محاسبه تلاش برشی و نیروی محوری تک تک قطعات پرداخت.

۱۱ – ۱۴ مسائل

۱۱ – ۱ هرگاه خرپای شکل (۱۱–۲) تحت اثر سربار زنده یکنواختی به‌شدت 500 lb/ft قرار گرفته باشد مقدار حداکثرنیروی محوری میله‌های زیرین را در حالات اثر بار به‌گرههای انی و یا به‌گرههای تحتانی محاسبه کنید.

(ب) $L_3'L_4$ (الف) L_3L_4 (میله‌های قطری می‌توانند تحمل فشار نمایند)

جواب : (الف) $+47{,}812.8$ lb (ب) $\mp 8{,}437.5$ lb, $\pm 3{,}750$ lb

۱۱ ــ ۲ هرگاه به‌خرپای شکل (۱۱ــ۶ الف) سربار زنده یکنواختی برابر با $1{,}000$ lb/ft و یک بار زنده متمرکزبرابر با $10{,}000$ lb اثر کند ،مقدار حداکثر نیروی محوری میله‌های‌زیرین را محاسبه کنید . (الف) U_5U_6 (ب) L_4U_6 (ج) U_6L_6

جواب :

(الف) $+46.6$ kips (ب) $+33.00$ kips (ج) -31.6 kips

۱۱ ــ ۳ هرگاه به‌پرتال شکل (۱۱ــ۸ الف) بار گسترده یکنواختی حاصل از باد به شدت 200 lb/ft در طول کل ستون سمت چپ آن اثر کند ، با فرض این که $h = 40$ ft و $b = 30$ ft باشد نمودار لنگر خمشی را برای کلیه اعضای پرتال رسم کنید .

۱۱ ــ ۴ مساله(۱۱ــ۳) را با فرض پرتال شکل (۱۱ــ۹ الف) حل کنید .

۱۱ ــ ۵ مساله(۱۱ــ۲) را با فرض پرتال شکل (۱۱ــ۱۰ الف) حل‌کنید ، ابعاد پرتال درشکل ذکر شده است .

۱۱ ــ ۶ برای قاب شکل (۱۱ــ۱۱) :

الف : نمودار لنگر خمشی و تلاش برشی را برای ستون سمت چپ رسم کنید .

ب : مقادیر نیروهای موءثر به‌خرپای پوششی قاب را که از طریق ستونها و زانویی‌ها وارد می‌شود پیدا کنید .

جواب :

الف : $+2{,}500$ = (مقدار تلاش برشی از تکیه‌گاه تا زانویی)

$-3{,}750$ = (بالای زانویی) $-18{,}750$ lb-ft = (لنگر در تکیه‌گاه)

$+18{,}750$ = (لنگر در زانویی) 0.0 = (لنگر در بالا)

ب : $-2{,}846$ lb (نیروی محوری در ستون سمت چپ)

$+2{,}846$ lb (نیروی محوری در ستون سمت راست)

به‌سمت راست $3{,}750$ lb (برش در ستون سمت چپ)

به‌سمت راست $3{,}750$ lb (برش در ستون سمت راست)

$+8{,}520$ = (نیروی محوری در زانویی سمت چپ)

$-8{,}520$ lb = (نیروی محوری در زانویی به‌سمت راست)

۱۱ ــ ۷ برجی به‌مقطع مستطیل دارای خرپاهای جانبی نظیر شکل (۱۱ــ۱۲ الف) می‌باشد. این برج دارای پنج پانل است که ارتفاع هریک 10 ft می‌باشد ، عرض هر صفحه جانبی آن در پی برابر با 15 ft و در بالای آن برابر 7.5 ft است ، هریک از گرههای سمت چپ خرپاهای جانبی این برج تحت اثر نیروهای افقی به‌سمت راست گره برابربا $1{,}000$ lb

قرار دارد به‌طوری که این نیروها در صفحه همان خرپا واقعند ، مطلوب است تعیین نیروهای داخلی کلیه میله‌های برج . فرض کنید که میله‌های قطری کلیه پانلها نیروهای متساوی ازنظر مقدار ولی مخالف از نظر علامت تحمل می‌کنند .

۱۱ ــ ۸ یک قاب ساختمانی دارای سه دهانه هریک به‌طول 20 ft و سه طبقه هرطبقه به‌ارتفاع 12 ft می‌باشد ، ستونهای طبقه‌اول در پی‌های خود گیردار شده‌اند . بار مرده یکنواختی به‌شدت 500 lb/ ft و سربار زنده یکنواختی به‌شدت 300 lb / ft بر شاهتیرهای این قاب اثر می‌کند ، مطلوب است تعیین ،

الف ــ حداکثر لنگر خمشی مثبت شاهتیرهای این قاب

ب ــ حداکثر لنگر خمشی مثبت شاهتیرهای این قاب

ج ــ حداکثر تلاش برشی شاهتیرهای این قاب

د ــ حداکثر نیروی فشاری ستونهای خارجی این قاب

هـ ــ حداکثر نیروی فشاری ستونهای داخلی این قاب

و ــ حداکثر لنگر خمشی ستونهای خارجی این قاب

ز ــ حداکثر لنگر خمشی ستونهای داخلی این قاب

۱۱ ــ ۹ قاب ساختمانی مساله (۱۱ــ۸) تحت اثر نیروهای افقی هریک به‌مقدار 5,000 lb که در امتداد شاهتیرهای این قاب و در سمت خارجی چپ ستونها قرار دارد . مطلوب است تعیین لنگر خمشی انتهای هریک از اعضای این قاب در محاسبات از روش پرتال استفاده کنید .

جواب :

لنگرهای خمشی تکیه‌گاهی از سمت چپ به‌طرف راست عبارتنداز :

15.0, 30.0, 30.0, 15.0 kip-ft

۱۱ ــ ۱۰ مساله (۱۱ــ۹) را به‌روش طره‌ای حل کنید .

جواب :

لنگرهای خمشی تکیه‌گاهی از سمت چپ به‌طرف راست عبارتنداز:

13.5, 31.5, 31.5, 13.5 kip-ft

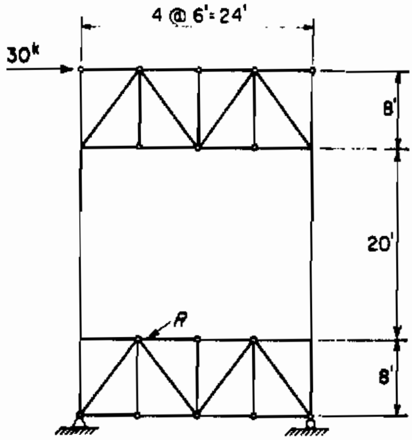
۱۱ ــ ۱۱ مساله(۱۱ــ۹) را به‌روش ضریب حل کنید ، لنگر خمشی شاهتیرها را سه‌برابر لنگر لختی ستونها بگیرید .

جواب :

لنگرهای خمشی تکیه‌گاهی از سمت چپ به‌طرف راست عبارتنداز :

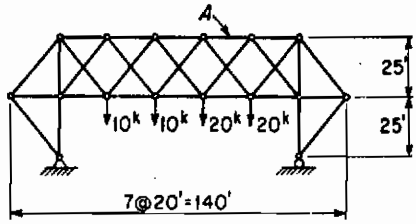
23.80, 25.45, 25.45, 23.80

۱۱ – ۱۲ نیروی محوری عضو R از پرتال نشان داده شده در شکل (۱۱–۲۶) را محاسبه کنید. فرضیات اضافی لازم و منطقی خود را نیز بیان نمائید.



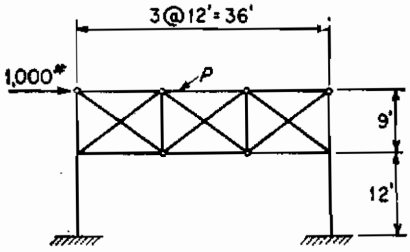
شکل (۱۱–۲۶) مساله (۱۱–۱۲)

۱۱ – ۱۳ نیروی محوری میله A را در سازهٔ شکل(۱۱–۲۷) محاسبه کنید. فرضیات اضافی منطقی را تعیین کنید.



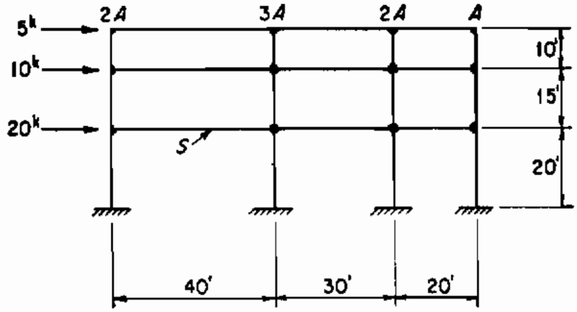
شکل (۱۱–۲۷)مساله (۱۱–۳)

۱۱ – ۱۴ کلیه اعضای خرپای شکل (۱۱–۲۸) قادر به‌تحمل کشش فشار می‌باشند، هرگاه نقطه عطفی در فاصله 4 ft از پی‌های ستونها قرار داشته باشد مطلوب است تعیین نیروی محوری عضو P .



شکل (۱۱–۲۸) مساله (۱۱–۱۴)

۱۱ – ۱۵ با به‌کاربردن روش طره‌ای تلاش برشی و لنگر خمشی انتهای شاهتیرهای قاب ساختمانی شکل (۱۱–۲۹) را محاسبه‌کنید ، سطح مقطع ستونها در بالای شکل ذکر شده است .



شکل (۱۱–۲۹) مساله (۱۱–۱۵)

۱۲

تغییر مکان سازه‌ها

۱ ــ ۱۲ مقدمه

سازه‌های مهندسی ازمصالحی‌ساخته می‌شوندکه تحت اثرتنش و یا تغییردما تغییرشکل می‌دهند ، این تغییرشکل سبب می‌شود که نقاط یک سازه از محل اولیه خود حرکت نمایندکه به‌این نوع حرکت تغییرمکان (خیز ، دوران) گویند از آنجائی که تغییرشکل سازه‌ها همواره پائینتراز حد ارتجاعی مصالح سازه‌اتفاق می‌افتد ،لذا همیشه پس از حذف تنش و یا برگشت به‌درجه حرارت اولیه ،تغییرمکان سازه نیز منتفی می‌گردد ، این نوع تغییرشکل‌ویاتغییرمکان را که در اثر بارگذاری سازه‌ها و یا تغییر درجه حرارت ایجاد می‌گردد ، تغییرشکل ارتجاعی گویند .

گاهی تغییرمکان سازه‌ها نتیجه نشست تکیه‌گاهها ، چرخش گرههای مفصلی ، انقباض بتن و یا سایر عوامل نظیر آن می‌باشد ، در چنین مواردی چون عامل تغییر مکان همواره به‌صورت پایدار باقی می‌ماند لذا تغییرمکان بوجود آمده هرگز از بین نمی‌رود . این نوع تغییرمکان را برای این‌که با نوع ارتجاعی متفاوت باشد می‌توان غیر ارتجاعی‌نامید.در این قسمت خواهیم دیدکه تغییرشکل و تغییرمکان سازه‌ها باو یا بدون وجودتنش ــ چنانکه‌بعدها در جزئیات شرح خواهیم داد ــ ممکن می‌باشد .

اغلب مهندسین سازه لازم می‌بینند که تغییرمکان سازه‌ها را محاسبه کنند . به‌عنوان مثال وقتی نصب پلهای طره‌ای یا سرتاسری مطرح باشد و یا طرح بالابرهای پلهای‌معلق‌مورد نظر باشد محاسبه تغییرمکان نقاط مختلف سازه امری اجباری است ، بعضی اوقات محاسبات تغییرمکان سازه‌ها به‌منظور جلوگیری از تجاوز تغییرشکل آنها از حد معینی انجام می‌گیرد ، به‌عنوان مثال تغییرمکان تیرهای کف همیشه به‌خاطر به‌حداقل‌رساندن ترکهای پوشش‌گچ باید محدود گردد و همچنین در موارد کاربرد محورها جهت عملکرد صحیح و کامل تکیه‌گاههای آنها تغییرمکان آنها را باید محدود کرد . در مواردی‌که عملکرد دینامیکی و ارتعاشی‌سازه‌ها

مطرح است نیزمحاسبه تغییرمکان سازه‌ها اجباری‌است ولی بااین وجود شاید مهمترین‌دلیلی که محاسبات تغییرمکان‌را برای مهندسین سازه‌جالب‌توجه‌می‌سازد این باشدکه تا حد وسیعی محاسبات سازه‌های نامعین بر پایه تعیین تغییرمکان آنها زیر اثر بارگذاری استوار است .

روشهای متعددی برای محاسبه تغییر مکانها وجود دارد که از بین آنها طرق زیر از جمله اساسی‌ترین و مفیدترین راهها به‌شمار می‌رود و لذا دراین فصل به‌شرح آنها خواهیم پرداخت :

۱ ــ روشهایی که در آن یک مولفه مشخص از تغییرمکان را محاسبه می‌کنند .

ــ روش کار مجازی (قابل استفاده در کلیه سازه‌ها)

ــ قضیه دوم کاستیگلیانو (قابل استفاده در کلیه سازه‌ها)

۲ ــ روشهایی که در آن چندین مولفه تغییرمکان را به‌طور همزمان محاسبه می‌کنند

ــ روش ویلیوت ــ مور (قابل استفاده فقط در خرپاها)

ــ روش سلسله میله‌ها (قابل استفاده فقط در خرپاها)

ــ روش سطح لنگر (روش بار ارتجاعی یا روش تیر مزدوج) (قابل استفاده در تیرها و قابها)

۲ ــ ۱۲ ماهیت مساله تغییرمکان

محاسبه تغییرمکان سازه‌ها الزاما" یک مساله هندسی و یا مثلثاتی است ،البته در وهله اول لازم است که تغییرمکان اجزاء و قطعات سازه را معین نمود ولی پس از تعیین آن تغییر مکانها را می‌توان با به‌کاربردن اصول هندسی یا مثلثاتی محاسبه نمود .

این مطلب بخصوص در حالت یک خرپای ساده که از تعدادی مثلث تشکیل شده است کاملا" واضح است ، شکل‌بندی این مثلثها با معلوم‌بودن طول سه ضلع آنها مشخص می‌گردد به‌این ترتیب اگر طول قطعات قبل و بعداز تغییرشکل معلوم باشد ، موقعیت گرهها قبل‌و بعد از تغییرشکل به‌کمک مثلثات قابل محاسبه می‌باشد با تعیین اختلاف دو موقعیت گره (قبل و بعداز تغییرشکل) تغییرمکان‌گره معلوم می‌گردد ولی گرچه تئوری چنین روشی ساده است‌ولی در عمل کاری خستگی‌آور و نامناسب است .

در حالتی که خرپا مطرح است ، مساله تغییرمکان آن را به‌صورت ترسیمی نیز می‌توان حل کرد به‌این ترتیب که تصویرآن را قبل و بعداز تغییرشکل روبهم قرار می‌دهیم ، چنین روشی گرچه از نظرفکری ساده و روشن است ولی اگر دقت کمی را نیز در عمل خواستارباشیم می‌بایستی در چنان مقیاس بزرگی آن را به‌کار بگیریم که عملا" برای یک نقشه‌کش تهیه‌چنان

نقشه‌ای غیرممکن می‌باشد .

"روش دوران" وسیله دیگری برای محاسبه تغییرمکان خرپاهاست،این‌وسیله‌از نظر فکری ساده ولی از نظر عملی غیرقابل استفاده است ، این روش اندیشه مفیدی در مورد چگونگی بوجودآمدن تغییرمکان خرپاها بهما می‌دهد در این روش می‌توان تغییرمکان هرگره از خرپای ساده را در اثر تغییر طول هریک‌از میله‌های آن‌بااثردادن دوران قسمتی از خرپا نسبت به‌قسمت دیگر آن که ثابت فرض می‌شود معین نمود . با تعیین جداگانه اثر هریک از میله‌ها و جمع کلیه این اثرات تغییرمکان یک گره راتحت اثر تغییر طول کلیه میله‌های خرپا می‌توان محاسبه نمود .

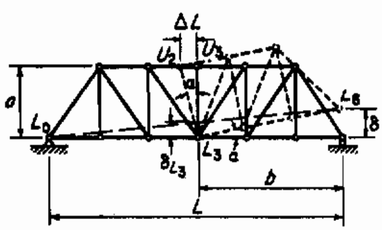
برای این‌که نحوهٔ عمل چنین روشی را شرح دهیم ، اثر تغییرطول میله‌فوقانی اصلی U_2U_3 خرپای شکل (۱۲ــ۱)را موردبررسی قرار می‌دهیم ، چون کلیه تغییر شکلها کوچک است می‌توانیم فرض‌کنیم که دورانهای قطعات به‌قدری کوچک باشد که بتوانیم بنویسیم .

$$\alpha = \sin \alpha = \tan \alpha$$

همچنین مجاز هستیم قوسی را که نقطه‌ای طول آن را همزمان با دوران می‌پیماید با مماس بر آن قوس برای راحتی بیشتر منطبق فرض نمائیم‌برای این که تأثیرتغییر طول U_2U_3 را درتغییرمکان خرپا پیدا کنیم ابتدا گره U_3 را آزادکرده و به‌اندازهٔ تغییر طول میله مزبور یعنی ΔL به‌آن انتقالی می‌دهیم اگر قسمت چپ خرپا را در موقعیت خود ثابت فرض‌کنیم برای این که بار دیگر نقاط U_3 برهم منطبق شوند لازم‌است‌که میله U_3U_4 حول U_4 و قسمت‌خط‌چین خرپاحول L_3 دوران نماید، در این حال نقطه U_3 در دوران U_3U_4 حرکت عمودی‌و در دوران قسمت خط‌چین حرکت افقی خواهد داشت .

در این حالت محل تقاطع این دو مسیر در راستای وضعیت اولیه U_3U_4 قرار خواهد گرفت و موقعیت نهایی U_3 در وضعی که نشان داده شده است قرار می‌گیرد پس:

$$\delta = \alpha b = \frac{\Delta L}{a} b = \frac{b}{a} \Delta L$$

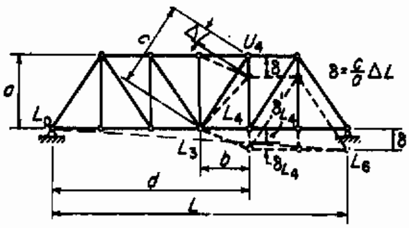


شکل (۱۲ــ۱) تغییر مکان ناشی ازتغییرطول میله فوقانی خرپا

حال اگر نشست تکیه‌گاهی وجود نداشته باشد گره L_6 نبایستی حرکت عمودی داشته باشد بدین جهت کل خرپا می‌بایستی در جهت ساعتگرد حول L_0 آنقدر دوران نماید تا L_6 به‌وضعیت تکیه‌گاهی خود برگردد، در این صورت خط چینی که L_0 را به L_6 متصل می‌کند خط تغییرمکان صفر خواهد بود و تغییرمکان عمودی به‌سمت پائین گره L_4 با نسبت‌گیری ساده برابر خواهد شد با:

$$\delta_{L_4} = \frac{L-b}{L}\delta = \frac{L-b}{L}\frac{b}{a}\Delta L$$

با روشی مشابه می‌توان تغییرمکان ناشی از تغییر طول میله قطری‌را به نحوی‌که درشکل (۱۲–۲) نشان داده شده است نیز معین نمود، با توجه به‌آنچه گذشت غیرقابل‌استفاده بودن این‌روش مشخص می‌گردد ولی از اندیشه آن‌به‌صورت مستقیم‌در روش ویلیوت مور که در بخش (۱۲–۱۲) شرح داده شده است‌استفاده‌شده است.



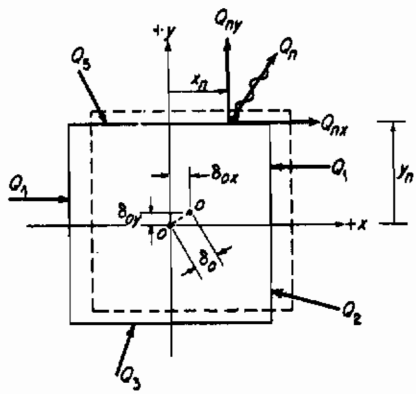
شکل (۱۲–۲) تغییرمکان ناشی ازتغییرطول میله قطری خرپا

گرچه روشهای متعددی که‌در بالا شرح داده شد غیرعملی هستند ولی اطلاع از وجود آنها مهم است زیرا چنین اطلاعی به‌ما می‌آموزد که مساله تغییرمکان را می‌توان با بکارگیری اندیشه‌های ساده روزمره حل نمود، بعلاوه واضح می‌شود که باید در تئوری آن بازنگری نمود تا زحمت اجرای آن در حل مسایل عملی کاهش یابد.

۱۲ – ۳ *اصل تغییرمکانهای مجازی*

شاید متداول‌ترین، مستقیم‌ترین و کم‌خطاترین روش محاسبه تغییرمکانهای سازه روش **کار مجازی** باشد، این روش‌که بر پایه یکی از مواردا‌ستعمال ***اصل تغییر مکانهای مجازی***‌استوار است اولین بار در سال ۱۷۱۷ توسط‌جان برنولی به‌صورت فرمولی ارائه شد، اصل گفته‌شده را می‌توان به‌صورت زیر ارائه داد.

فرض کنید که جسم صلبی تحت اثر دستگاه نیروی Q در تعادل باشد ــ منظوراز جسم صلب جسمی است غیرقابل تغییرشکل که در آن هیچیک از اجزاء آن نسبت به‌یکدیگر حرکتی نسبی نداشته باشند ــ ابتدا فرض کنید که این جسم به‌صورتی که در شکل (۱۲ــ۳) نشان‌داده شده‌است تحت اثر عامل دیگری مستقل از دستگاه نیروی Q تغییرمکان کوچکی بدون دوران متحمل شود، پس از انتخاب مرکز o و دو محور مختصات x و y می‌توان این انتقال نقطه o را به‌صورت واقعی با δ_o با دو تصویر δ_{ox} و δ_{oy} در جهت محورهای x و y نشان داد، این دو تصویر را زمانی مثبت خواهیم گرفت که در جهت مثبت محورهای نشان‌داده شده باشند، چون این جسم صلب است، کلیه نقاط آن دقیقاً" به‌همان میزان نقطه o انتقال خواهند یافت.



شکل (۱۲ــ۳) انتقال مجازی جسم صلب

کلیه نیروهای Q را می‌توان به‌دو مولفه درجهت x و y مانند Q_{nx} و Q_{ny} بــرای نیروی Q_n تجزیه نمود جهت مثبت این مولفه‌ها همان جهت مثبت مربوط به‌محورهــای مختصات می‌باشد. ازآنجائی که دستگاه نیروی Q درتعادل می‌باشدلذا بین‌مولفه‌های آن نیروها معادلات زیر برقرار خواهد بود.

$$\Sigma Q_{nx} = 0 \qquad \Sigma Q_{ny} = 0 \qquad \Sigma(Q_{nx}y_n - Q_{ny}x_n) = 0$$

حال به‌تعیین کار W_Q که‌توسط نیروهای Q طی انتقال‌بسیارکوچک δ_o جسم‌صلب که توسط عاملی دیگر ایجاد می‌شود می‌پردازیم، چون این انتقال کوچک‌است می‌توان فرض نمود که کلیه نیروهای Q همان وضع و جهت نسبی خود را نسبت به‌جسم‌صلب و

یکدیگر حفظ می‌نمایند لذا در طول این انتقال در تعادل باقی خواهند ماند ، با این شرح می‌توان نوشت که :

$$W_Q = \Sigma(Q_{nx}\delta_{ox} + Q_{ny}\delta_{oy}) = \delta_{ox}\Sigma Q_{nx} + \delta_{oy}\Sigma Q_{ny}$$

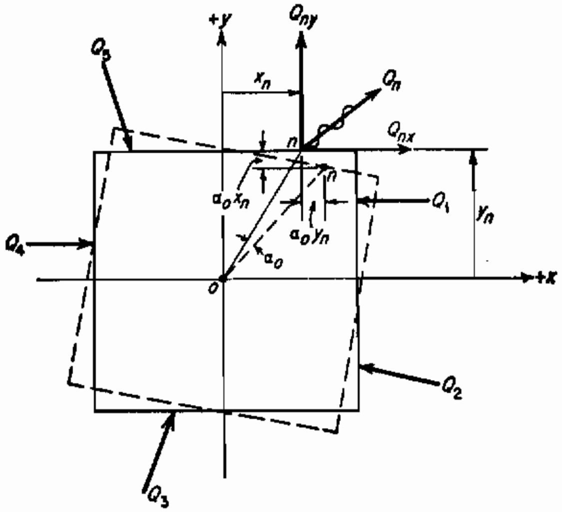
با توجه به‌روابط مذکور در (a) دیده می‌شود که کل کار انجام شده توسط نیروهای Q در چنین حالتی برابر با صفر است .

به‌همین ترتیب می‌توان‌کار انجام شده توسط نیروهای Q را در اثر دوران‌کوچک α_o جسم صلب حول نقطه o به‌دست آورد . در این دوران ، می‌توان فرض کرد که هر نقطه در طول عمود برشعاع مار از مرکز دوران به‌نقطه مزبور ، حرکت نماید یعنی‌بجای حرکت در طول قوس در طول مماس برآن قوس حرکت کند ، لذا مولفه‌های تغییـرمکان نقطه نامشخص n را می‌توان به‌صورت نشان داده شده درشکل (۱۲–۴) محاسبه نمود ، چون زاویه دوران کوچک است باز هم نیروهای Q در تعادل باقی خواهند ماند ، پس می‌توانیم بنویسیم :

$$W_Q = \Sigma(Q_{nx}\alpha_o y_n - Q_{ny}\alpha_o x_n) = \alpha_o\Sigma(Q_{nx}y_n - Q_{ny}x_n)$$

با توجه به‌معادلات (a) معلوم می‌شود که کل کار انجام شده توسط نیروهای Q درطول دوران جسم صلب نیز برابر با صفر می‌باشد .

پس از کمی تفکر واضح می‌شود که هر تغییرمکان کوچک جسم صلب قابل تبدیل به یک



شکل (۱۲–۴) دوران مجازی جسم صلب

انتقال نقطه معلوم و یک دوران جسم صلب حول همان نقطه می‌باشد ، ازآنجائی که درهر دو حالت انتقال و دوران کار انجام شده توسط دستگاه نیروی Q (که یک دستگاه در حـال تعادل است) چنانکه دیده شد برابر صفر است ،اصل زیر در حالت کلی در موردی‌که جسم صلب تغییرمکان نامشخصی را تحمل می‌کند صادق خواهد بود .

اصل تغییرمکانهای مجازی برنولی : هرگاه‌دستگاه نیروی Q که برجسم صلبی اثرمی‌کند در تعادل بوده و پس از آن که به‌جسم یک تغییرمکان کوچک مجازی دهیم باز درتعادل‌باقی بماند کار مجازی انجام شده توسط دستگاه نیروی Q برابر با صفر خواهد بود .

در بیان اصل فوق کلمه مجازی به‌این جهت به‌کار رفته است که بیانگر مستقل و جدا بودن عمل تغییرمکان از دستگاه نیروی Q باشد . لذا کاری که توسط دستگاه نیـروی Q در طول تغییرمکان مجازی انجام می‌پذیرد *کار مجازی* نامند .

۱۲ ــ ۴ پایه و اساس روش کار مجازی

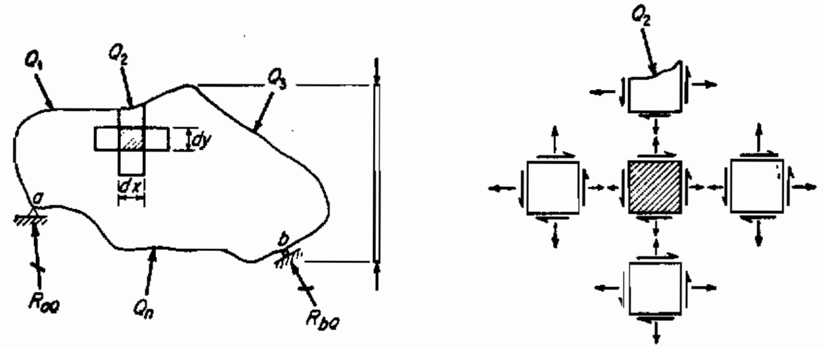
حال می‌توانیم اصل تغییرمکانهای مجازی‌را جهت تصمیم‌اساس کارمجازی‌برای‌محاسبه تغییرمکان سازه‌ها به‌کاربریم این روش در کلیه سازه‌ها ــ تیرها ، خرپاها و قابها چه‌مسطح و چه فضایی ــ قابل استفاده می‌باشد ،برای سادگی مطلب سازه‌ای مسطح نظیر شکل(۱۲ــ۵)را در نظر می‌گیریم فرض نمایید که این سازه تحت اثر بارهای خارجی و عکس‌العملهای‌آن (به‌صورت دستگاه نیروی Q) در تعادل باشد .

چون کل جسم در تعادل است ،کلیه اجزاء آن نظیرجزء هاشورخورده آن تحت‌تنشهای داخلی Q که نتیجه نیروهای خارجی Q می‌باشد در تعادل خواهند بود . اگر این جـزء و اجزای مجاورآن را به‌صورت جدا مطالعه کنیم می‌بینیم که تنشهای داخلی Q به‌کلیه سطوح تماس این اجزاء اثر کرده ولی نیروهای خارجی Q به‌سطوح خارجی آن اثر می‌کنند .در کلیه سطوح تماس بین دوجزء مجاور تنشهای داخلی از نظر مقدار عددی با یکدیگر برابر ولی از حیث جهت در خلاف یکدیگر خواهند بود .

حال تصور کنید که این جسم در اثر عامل دیگری غیراز دستگاه نیروی Q تغییر شکـل کوچکی دهد ، چنین تغییرشکلی که بدان تغییرشکل مجازی گویند به‌دستگاه نیروی Q حرکتی خواهد داد که در اثر چنین تغییرشکلی هر جزیی نظیر جزء هاشورخورده (در شکل ۱۲ ــ ۵) تغییرشکل داده و همچنین مانند یک جسم صلب تحمل انتقال و دوران خواهد نمـود ، لـذا سطوح چنان جزیی تغییر مکان داده و بر اثر آن تغییر مکان تنشهای Q که به‌سطوح‌خارجی‌آن اثر می‌کنند تکان خورده و ایجاد کار مجازی خواهند نمود ، اگر کار مجازی انجام شده توسط

تنشهای Q را ــ که این تنشها به‌سطوح خارجی اجزاء اثرمی‌کنند ــ با dW_s نشان دهیم جزیی از این کار مجازی ناشی از حرکت سطوح اطراف این اجزاء می‌باشد که در اثر تغییرشکل خود جزء مزبور بوجود می‌آید و این قسمت از کار مجازی را با dW_d نشان می‌دهیم باقی مانـــده dW_s عبارت خواهد بود از کاری مجازی که توسط تنشهای Q در طی حرکت باقی مانده‌سطوح مرزی انجام می‌پذیرد که این قسمت برابر با $dW_s - dW_d$ خواهد بود ، در هـر صورت این حرکت باقی مانده ناشی‌از انتقال و دوران آن جزءمی‌باشد که مانند جسم صلب متحمل می‌شود که در چنین حالتی بر طبق اصل تغییرمکانهای مجازی ، کار مجازی‌حاصل‌ازآن برابر با صفر خواهد شد پس.

$$dW_s - dW_d = 0 \quad \therefore \quad dW_s = dW_d$$



شکل (۱۲ــ۵) سازه مسطح در حال تعادل تحت اثر دستگاه نیروی Q

حال اگر کار مجازی انجام‌شده توسط تنشهای Q را در مورد کلیه اجزای جسم بـهم بیفزائیم رابطه فوق به‌صورت زیر در می‌آید :

$$W_s = W_d \qquad (۱۲ - ۱)$$

ابتدا برای ارزیابی W_s یادآوری می‌کنیم که مقدار آن عبارت از جمع کارمجازی‌انجام شده توسط تنشها و نیروهای Q موثر بر کلیه سطوح اجزاء جسم می‌باشد ، چون در برابر هر جزء سطح داخلی جسم جزء سطح دیگری درست در همان راستا وجود دارد لذا این سطـوح مجاور دقیقا" به‌یک مقدارتغییر مکان خواهند یافت و چون نیروهای موثر براین جزءسطهـای داخلی از نظر مقدار عددی دقیقا" با یکدیگر برابر بوده و از نظر جهت در خلاف یکدیگـر می‌باشند لذا کل کار مجازی انجام شده روی هر جفت سطح داخلی برابر با صفر خواهدبود

و از آنجائی که کلیه سطوح داخلی به‌صورت جفت سطح وجود دارند ، پس هیچ‌کار مجازی توسط نیروهای موثر بر سطوح داخلی انجام نمی‌گیرد و مقدار W_e محدود به‌کار انجام‌شده توسط نیروهای خارجی Q برروی سطوح خارجی‌اجزاء تشکیل‌دهنده جسم‌خواهد بود بنابراین معادله (۱۲—۱) را می‌توان به‌صورت زیر تفسیر نمود :

قانون کار مجازی : هرگاه یک جسم ارتجاعی (قابل تغییرشکل) تحت‌اثر دستگاه‌نیروی Q در تعادل باشد و پس‌از تحمل تغییرشکلی کوچک و مجازی به‌حال تعادل باقی بماند کار مجازی خارجی انجام شده توسط نیروهای خارجی Q که برسطح خارجی جسم اثر می‌کنند برابر با کار تغییرشکل مجازی داخلی جسم که توسط تنشهای داخلی Q انجام می‌پذیرد خواهد بود .

قانون کار مجازی اساس روش کار مجازی مورد استفاده در محاسبه تغییر مکانهاست‌ولی قبل از این که بتوان به‌چنان محاسباتی پرداخت می‌بایستی عبارات مناسب برای تعیین‌کار مجازی خارجی و کارتغییرشکل مجازی داخلی به‌دست آورد و اضافه برآن‌ابتکارهای متعددی جهت انتخاب دستگاه Q می‌بایستی به‌کار گرفت تا بتوان مولفه‌های موردنظر تغییر مکانها را محاسبه کرد . کلیه این مطالب در گفتارهای زیر شرح داده خواهد شد .

برای این که انعطاف‌پذیری و کلی‌بودن قابل‌توجه روش کارمجازی را درک نمائیم‌تأکید فرضیات و محدودیتهای زیر مهم می‌باشد .

۱ ــ تنها شرطی که‌نیروهای خارجی Q و تنشهای داخلی Q می‌بایستی حائز باشند این است که در طول جریان تغییر شکل همچنان ایجاد دستگاه نیرویی در تعادل‌را بنمایند، بدیهی است که این شرط در صورتی که تغییرشکل مجازی شکل هندسی سازه را به‌صورت محسوس تغییر دهد صادق نخواهد بود .

۲ ــ روابط‌استخراج شده فوق مستقل از علت یا نوع تغییرشکل می‌باشد ــ این روابط خواه‌مربوط به‌تغییرشکل ناشی‌از بارگذاری، درجه حرارت، خطای طول قطعات و یا سایر علل باشد ویا خواه‌مربوط به‌مصالحی‌باشد که از قانون هوک‌پیروی کنند یا نکنند صادق‌می‌باشند .

۳ ــ علاوه بر ان که تغییرشکلها بایستی تا حدی که شکل هندسی سازه را به‌صورتی محسوس تغییر ندهندکوچک باشند باید سازگار نیز باشند به‌این معنی که قطعات سازه باید به‌نحوی تغییرشکل دهند که پس‌از تغییرشکل به‌یکدیگر جفت بوده و شرایط قیود تکیه‌گاهی را تأمین نمایند .

۱۲ ــ ۵ *روابط کار مجازی خارجی و داخلی*

محاسبه W_e که کار مجازی خارجی انجام شده توسط دستگاه نیروی Q موثر بریک‌سازه

می‌باشد امری ساده است ، اگر δ نشان دهنده تغییر مکان نقطه اثر نیروی Q در طول تغییر شکل مجازی یک سازه باشد و مقدار δ را در همان جهت و راستای نیروی Q اندازه بگیریم ، کار مجازی انجام شده توسط نیروی Q_1 برابر با Q_1 ضرب‌در δ_1 خواهد بود و بنابراین کل کار مجازی انجام شده توسط نیروهای Q که شامل بارگذاریها و عکس‌العملها می‌باشد برابر خواهد شد با :

$$W_e = Q_1\delta_1 + Q_2\delta_2 + Q_3\delta_3 + \cdots$$

این رابطه را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد .

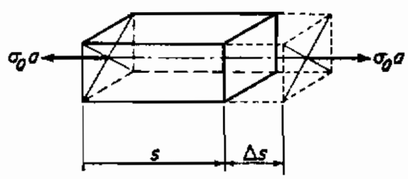
$$W_e = \Sigma Q\delta \qquad (۱۲-۲)$$

یعنی این که کافی است که حاصل ضرب Q در δ را برای هریک از نیروهای Q به‌دست آورده و برای کلیه نیروهای Q که شامل بارگذاریها و عکس‌العملها می‌باشد مقادیر به‌دست آمده را بهم بیفزائیم . بایستی خاطر نشان کنیم که هرگاه فرض بر این باشد که در رابطه فوق‌مقدار کار مثبت فرض شود می‌بایستی مقدار δ را در جهت Q مربوط‌به‌خود مثبت فرض کنیم .

محاسبه W_d که کار مجازی تغییرشکل داخلی می‌باشد نیز به‌طور نسبی ساده می‌باشد ، برای به‌دست‌آوردن عبارت W_d در این قسمت می‌بایستی انواع مختلف تغییرشکل را نظیر تغییرطول (محوری) تغییرشکل برشی، تغییرشکل خمشی و غیره را محاسبه کنیم ،ابتدا حالت ساده شکل(۱۲-۶) را که قطعه کوچکی به‌طول اولیه (قبل‌از تغییرشکل) s و سطح مقطع a را نشان می‌دهد ملاحظه کنید فرض کنیم که شدت تنش Q که به‌صورت یکنواخت در کل سطح مقطع a گسترده شده است σ_Q باشد در این صورت نیروی محوری برابر با $(\sigma_Q)(a)$ خواهد شد . اگر تغییرشکل مجازی این قطعه فقط کرنش محوری یکنواخت e باشد تغییر طول محوری Δs برابر با $(e)(s)$ خواهد شد بنابراین کار مجازی تغییرشکل داخلی که توسط تنشهای Q حاصل می‌شود با رابطه ساده زیر بیان خواهد شد :

$$W_d = \sigma_Q a\,\Delta s = \sigma_Q a e s \qquad (۳-۱۲)$$

حال می‌توانیم این رابطه را برای محاسبه کار تغییرشکل مجازی داخلی یک تیر یا میله‌ای

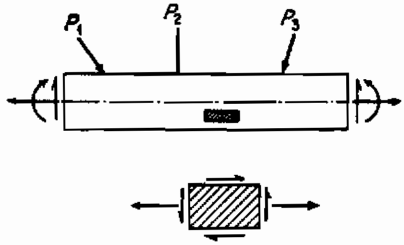


شکل (۱۲-۶) تغییر طول محوری

از خرپا و یا قاب به‌کار بریم .

تغییرشکل میله‌ای را که تحت اثر دستگاه نیروی دوبعدی P قرار دارد و یا تحت اثر تغییر درجه حرارت واقع است در نظر می‌گیریم ، فرض می‌کنیم که محور مار بر مراکز ثقل این قطعه خط مستقیمی باشد و فرض می‌کنیم که کلیه مقاطع این قطعه دارای محور تقارنی واقع در صفحه بارهای P باشد در نتیجه برآیند تنشهای داخلی P نیز در همان صفحه واقع خواهد شد.

هر نیروی محوری نظیر F_P در هرسطح مقطع قطعه سبب ایجاد کرنش محوری یکنواخت در کلیه تارهای مقطع خواهد نمود و به‌همین ترتیب فرض نمایید که تغییر درجه حرارت نیز سبب ایجاد کرنش یکنواخت در این مقطع بنماید ، اگر کرنش یکنواخت محوری مقطع قطعه‌را که در اثر دو عامل فوق ایجاد می‌شود با e_0 نشان دهیم دستگاه بارگذاری P نیز سبب تلاش برشی و لنگر خمشی در همان مقطع خواهد شد به‌دلیل این دو اثر یک قطعه افقی نظیرآنچه درشکل(۱۲ــ۷) نشان داده شده‌است تحمل تنشهای مماسی و عمودی خواهدنمود بررسیهای بیشتری نشان می‌دهد بجز در قطعاتی که ارتفاع آنان نسبت به‌طول آنها زیاد است درسایر قطعات اثر تنش برشی در ایجادتغییرمکان نسبت به‌تنشهای عمودی که با ازدیاد و یا تقلیل طول اجزاء سبب ایجاد تغییرمکان می‌گردند ناچیز می‌باشد . بدین‌جهت در این کتاب ازاثر تنشهای برشی صرف‌نظر می‌گردد .



شکل (۱۲ــ۷) برش و خمش در اثر بارهای P

با صرف‌نظرنمودن ازتغییرشکل برشی محاسبه‌کار مجازی تغییرشکل ناشی‌از فقط ازدیاد یا تقلیل طول اجزاء طولی عملی ساده خواهد بود . فرض کنید که دستگاه نیروی Q در همان صفحه نیروهای P ــ شکل (۱۲ــ۷)ــ واقع شده‌باشد این نیروها سبب ایجاد نیروی محوری، تلاش برشی و لنگر خمشی در مقطع قطعه خواهند نمود . حال می‌خواهیم عبارتی جهت‌بیان کار مجازی تغییرشکل داخلی انجام شده توسط تنشهای بوجود آمده Q وقتی قطعه مزبور تغییرشکلی مجازی به‌نوعی که در بند قبل ذکر شد تحمل می‌نماید به‌دست آوریم .

محورهای متعامد مختصات $o-s, y, z$ را به‌نوعی که محور s بر مراکز ثقل قطعه گذشته و

محور z عمود بر صفحهٔ کاغذ باشد انتخاب می‌کنیم ، حال اگر مانند شکل (۱۲ــ۸) یک جزء طولی از قطعه را که در موقعیت (s,y) قرار گرفته در نظر بگیریم واضح است که عمل کرد این جزء تحت شرایط فوق دقیقاً شبیه جزء نشان داده شده درشکل (۱۲ــ۶) می‌باشد وبنابر این کارمجازی مربوط به این جزء طولی را می‌توان به‌کمک معادله (۱۲ــ۳) تعیین نمود. اگر چنین عملی را برای کلیه اجزای قطعه انجام دهیم و نتایج حاصل را با یکدیگر جمع کنیم ، کارمجازی تغییرشکل کل قطعه به‌دست خواهد آمد .

با فرض این که تنشهای عمودی را می‌توان با استفاده از نظریه مقدماتی تیرها به‌دست آورد و تعاریف زیر را داشته باشیم .

M_P : لنگر خمشی حاصل از بارهای P در مقطع mm' (که سبب ایجاد تغییرشکل مجازی می‌گردد) .

M_Q : لنگر خمشی حاصل از بارهای Q در مقطع mm'

F_P : نیروی محوری حاصل از بارهای P در مقطع mm'

F_Q : نیروی محوری حاصل از بارهای Q در مقطع mm'

σ_P : تنش عمودی حاصل از بارهای P در نقطه (s,y) که برابربا $(F_P/A)+(M_Py/I)$ می‌باشد .

σ'_P : تنش عمودی حاصل از F_P در نقطه (s,y) که برابر با F_P/A می‌باشد .

σ''_P : تنش عمودی حاصل از M_P در نقطه (s,y) که برابر با M_Py/I می‌باشد .

σ_Q : تنش عمودی حاصل از بارهای Q در نقطه (s,y) که برابربا $(F_Q/A)+(M_Qy/I)$ می‌باشد .

e : کرنش محوری حاصل از بارهای P و تغییرات درجه حرارت جزء طولی در نقطه (s,y)

e_o : کرنش محوری حاصل از بارهای P و تغییرات درجه حرارت و لنگر طولی در نقطه‌ای روی محور مار بر مراکز ثقل .

I : لنگر لختی سطح مقطع mm' نسبت به‌محور oz

A : مساحت سطح مقطع mm'

E : ضریب ارتجاعی مصالح مصرفی

b : عرض سطح مقطع mm' در تار y

حال جزء طولی قطعه را که در نقطه (s,y) واقع است و دارای طولی برابر با ds ، عرض برابر با b و ارتفاعی برابر با dy می‌باشد درنظر بگیرید دراین‌حالت‌خواهیم‌داشت :

$$e = e_o + \frac{\sigma''_P}{E} = e_o + \frac{M_Py}{EI}$$

کار مجازی تغییر شکل این جزء خواهد شد .

$$(\sigma_Q b\,dy)(e\,ds) = \left(\frac{F_Q}{A} + \frac{M_Q y}{I}\right)(b\,dy)\left(e_o + \frac{M_P y}{EI}\right) ds$$

بنابراین کل کار مجازی تغییرشکل برای کل قطعه خواهد شد .

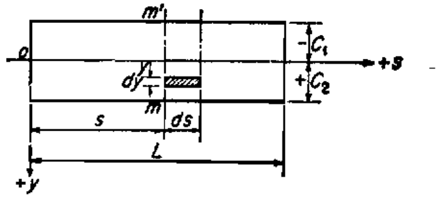
$$\begin{aligned} W_d &= \int_0^L \int_{-C_1}^{+C_2} \left(\frac{F_Q}{A} + \frac{M_Q y}{I}\right)(b\,dy)\left(e_o + \frac{M_P y}{EI}\right) ds \\ &= \int_0^L \int_{-C_1}^{+C_2} \left(\frac{F_Q e_o}{A} + \frac{M_Q e_o}{I}y + \frac{F_Q M_P}{EIA}y + \frac{M_Q M_P}{EI^2}y^2\right) b\,dy\,ds \end{aligned}$$

با توجه به‌این که همواره داریم .

$$\int_{-C_1}^{C_2} b\,dy = A \qquad \int_{-C_1}^{C_2} yb\,dy = 0 \qquad \int_{-C_1}^{C_2} y^2 b\,dy = I$$

رابطه فوق به‌صورت شکل ساده زیر در می‌آید .

$$W_d = \int_0^L F_Q e_o\,ds + \int_0^L \frac{M_Q M_P}{EI}\,ds \qquad (۴-۱۲)$$



شکل (۱۲-۸) محورهای مختصات

۱۲ ــ ۶ تغییرمکان خرپاها با استفاده از کار مجازی

برای این که رابطه اختصاصی قانون کار مجازی را برای خرپاها به‌دست آوریم کافی است که معادلات (۱۲-۲) و (۱۲-۴) را در معادله (۱۲-۱) قرار دهیم ابتدا حالتی را که شامل خرپای ایده‌آلی با گرههای مفصلی می‌گردد و این خرپا تحت اثر بارهای P و Q که همگی فقط بر گرههای خرپا وارد می‌شوند را در نظر بگیرید . در یک چنین حالتی تک تک قطعات فقط تحت اثر بارهای محوری واقع شده و هیچ برش و لنگری را تحمل نخواهند کرد و عبارت دوم معادله (۱۲-۴) حذف خواهد شد و علاوه بر آن مقدار F_Q در طول یک قطعه‌

مشخص ثابت خواهد بود و چون :

$$\int_0^L e_o\, ds = (\text{تغییر طول محوری در یک قطعه}) = \Delta L$$

کار مجازی تغییرشکل برای قطعه خمشی از خرپا خواهد شد .

$$W_d = F_Q \int_0^L e_o\, ds = F_Q\, \Delta L$$

حاصل جمع کلیه مقادیرفوق برای تک تک قطعات خرپا برابر با کار مجازی داخلی تغییرشکل برای کل خرپا خواهد شد که برابر با مقدار زیر می‌گردد .

$$W_d = \Sigma F_Q\, \Delta L$$

بنابراین قانون‌کار مجازی که قابل‌استفاده برای یک خرپای‌ایده‌آل با اتصالات مفصل می‌باشد به‌صورت زیر در می‌آید :

$$\Sigma Q\delta = \Sigma F_Q\, \Delta L$$

روابط مناسبی‌را برای محاسبه ΔL می‌توان به‌راحتی برحسب آن‌که تغییر طول‌حاصل از بارهای P ، تغییر درجه حرارت و یا به‌علت دیگری‌باشد به‌دست آورد . در حالتی که قطعه‌ای منشوری دارای سطح مقطعی ثابت و برابر با A و ضریب ارتجاعی ثابتی برابربا E باشد .

اگر تغییرشکل حاصل از اثر بارهای P بر گرههای خرپا باشد .

$$\Delta L = (e_o)(L) = \left(\frac{\sigma'_P}{E}\right)(L) = \left(\frac{F_P}{A}\right)\left(\frac{L}{E}\right) = \frac{F_P L}{AE} \qquad (\text{۵–۱۲ الف})$$

اگر تغییرشکل حاصل از تغییر یکنواخت درجه حرارت t باشد .

$$\Delta L = (e_o)(L) = (\alpha_t t)(L) = \alpha_t t L \qquad (\text{۵–۱۲ ب})$$

اگر تغییرشکل حاصل از هردو عامل فوق به‌صورت همزمان باشد .

$$\Delta L = \frac{F_P L}{AE} + \alpha_t t L \qquad (\text{۵–۱۲ ج})$$

در اینجا علاوه بر تعاریفی که قبلا" ذکر شد داریم :

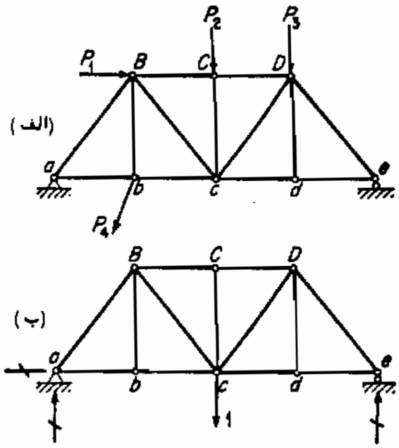
F_P : نیروی میلهٔ یک عضو حاصل از بارهای P

F_Q : نیروی میلهٔ یک عضو حاصل از بارهای Q

α_t : ضریب انبساط حرارتی مصالح

L : طول قطعه

معادله (۱۲ــ۵) اساس روش کار مجازی را برای محاسبه تغییرشکل خرپاهای ایده‌آل قبلی را تشکیل می‌دهد ولی ما هنوز هم کاربرد آنرا برای این عمل نمیدانیم .به‌عنوان‌مثال فرض کنید که بخواهیم مولفه عمودی تغییرشکل گره c را که در اثر بارهای P که در شکل (۱۲ــ۹ الف) نشان داده شده است حاصل می‌شود محاسبه کنیم ، فرض کنیدکه‌برای‌دستگاه بار Q بار عمودی واحدی که بر گره c اثر می‌کند توأم با عکس‌العمل‌های آن در نظر بگیریم ،



شکل (۱۲ــ۹) کاربرد روش کار مجازی در خرپای مفصلی

اگر تصور کنیم که ما ابتدا دستگاه Q را بر سازه وارد کنیم و سپس بارهای واقعی P را بر آن اثر دهیم در این صورت بارهای Q تغییر جا داده و در طول این تغییر کار مجازی خارجی انجام خواهند داد . بر طبق قانون کار مجازی تنشهای داخلی Q ، به‌همان میزان وقتی که اعضای خرپا در اثر تنشهای F_P تغییر طول می‌دهند کار مجازی داخلی‌انجام خواهند داد، لذا با استفاده از معادله (۱۲ــ۵) داریم :

$$(1)(\delta_c^{\downarrow}) + W_R = \sum F_Q \frac{F_P L}{AE}$$

در این رابطه W_R بیانگر کار مجازی انجام شده توسط عکس‌العمل‌های Q می‌باشد البته این در صورتی است که نقاط تکیه‌گاهی تغییرمکان یافته و مقدار تغییرمکان به‌صورت رقم قابل محاسبه باشد و اگر تکیه‌گاهها ثابت باشند $W_R = 0$ می‌باشد و :

$$(1)(\delta_c^t) = \sum F_Q F_P \frac{L}{AE}$$

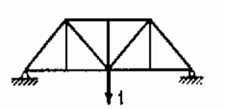
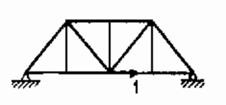
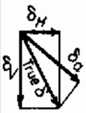
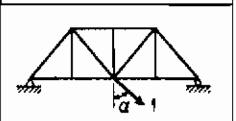
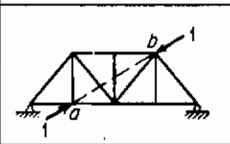
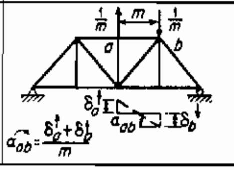
نیروی میله‌های F_Q و F_P را که به‌ترتیب دراثردستگاههای بارگذاری Q و P حاصل‌می‌شوند به‌راحتی می‌توان محاسبه نمود ،پس از آن‌که این مقادیر را با مقادیر معلوم L ، A و E طبق رابطه فوق ترکیب نمودیم‌قسمت‌سمت راست معادله بالامحاسبه می‌گردد و بدین‌ترتیب مقدار مجهول δ_c معین می‌گردد .

در شکل(۱۲ــ۱۰)انتخاب مناسب‌دستگاههای Q را برای استفاده درمحاسبه مولفه‌های موردنیاز تغییرمکان نشان داده‌ایم ، دیده می‌شودکه "رلم " انتخاب دستگاه‌نیروی Q دراین است‌که در جهت تغییرمکان موردنیاز δ که تنها مجهول درطرف چپ معادله‌می‌باشدانتخاب گردد ،برخی از دانشجویان نقش تغییرشکل حاصل از دستگاه Q را در این قسمت به راحتی نمی‌فهمند ، واقعیت این است که ما با آن تغییرمکان کاری نداریم ،ما می‌خواهیم تغییرمکان حاصل از دستگاهی را سبب تغییرشکل شده است پیدا کنیم . دستگاه Q دستگاهی است که در این عملیات تغییر مکان می‌یابد و لذا کاری مجازی انجام می‌دهد و بر اثر آن ما را قادر می‌سازد که تغییرمکان مطلوب خودرا محاسبه کنیم ،توجه شود که در این‌قسمت ما به محاسبه کار واقعی انجام شده توسط بارهای P که سبب تغییرشکل سازه شده‌اند نمی‌پردازیم .

مسائل عددی زیرین روشهای تنظیم محاسبات را در مسائل متداول نشان می‌دهد، در کاربرد قانون کار مجازی رعایت علامت گذاری دارای اهمیت بسیار است ، در استخراج معادلات مربوط به‌کار مجازی خارجی و داخلی دستگاه Q فرض را براین گذاشتیم که‌کارانجام شده مثبت باشد . این مطلب بدین معنی‌است که اولا" δ را زمانی‌مثبت فرض‌کنیم که دارای همان جهت نیروی نظیر Q باشد و ثانیا"چنین ایفاد می‌شود که F_Q و ΔL هردوزمانی‌مثبت گرفته می‌شوند که در یک راستا عمل کنند ، و اگر F_Q را زمانی مثبت می‌گیریم که‌کششی باشد ΔL را زمانی می‌بایستی‌مثبت گرفت که ایجاد ازدیاد طول کند و بنابراین F_P در صورت کششی‌بودن مثبت‌گرفته می‌شود و t زمانی مثبت گرفته می‌شود که ازدیاد درجه حرارت‌وجود داشته باشد .

پس از مطالعه‌مثالهای زیرین خواهید فهمید که دو عامل اشتباه وجود داردکه‌عبارتند از ــ آحاد و علائم البته اگرآحاد نیرو را برای نیروی Q و تنشها منظور کنیم‌احتمالا" اشکال کمتری بروز خواهد کرد گرچه برخی از مؤلفین این نیروها را بدون بعد در نظر می‌گیرند ، معمولا" اگر در حل مسأله همواره واحد ثابتی برای طول در نظر بگیریم بهتر خواهدبود ولی در برخی اوقات منطقی‌تر است که بخاطر این که به‌اعداد محسوس‌تری برسیم آحاد طول را عوض کنیم . به‌عنوان مثال در این مسائل A و E را برحسب واحد اینچ به‌کار برده‌ایم در

صورتی که L را برحسب فوت بیان کرده‌ایم . آنچه در این زمینه انجام می‌گیرد عموماً" بستگی به‌سلیقه شخصی دارد ولی می‌بایستی خاطرنشان کرد که همواره از یک طریقه پیروی کنیم و مطمئن باشیم که آحاد انتخابی سازگار باشند . اگر از همان علائم قراردادی با دقت بسیار پیروی کنیم در مورد علائم نبایستی به‌مشکلی برخوردکنیم ولی لازم است که علائم کلیه حاصل‌ضربها را کنترل نمائیم . خاطرنشان می‌شود که F_Q و F_P نیروهای میله واقعی هستند و مولفه‌های افقی و یا عمودی نمی‌باشند .

مولفه تغییرمکان	دستگاه - Q	$\Sigma Q\delta = \Sigma F_Q \Delta L$	توضیحات
۱ــ مولفه عمودی تغییرمکان گرهها		$(1)(\delta_V^{\downarrow}) + W_R = \Sigma F_Q \Delta L$ $W_R =$ (کارمجازی خارجی) مکس‌العمل Q	مقدار δ زمانی مثبت خواهد بود که هم جهت با نیروی نظیر Q قرار گیرد . جهت مثبت را با پیکان نشان داده‌ایم . بنابراین جهت منفی در خلاف جهت پیکان خواهد بود . F_Q زمانی مثبت است که کششی باشد ΔL زمانی مثبت است که ازدیاد طول باشد F_P زمانی مثبت است که کششی باشد W_R زمانی صفر است که تکیه‌گاهها ثابت باشند . در صورت نشست معلوم تکیه‌گاهها مقدار W_R محاسبه می‌گردد
۲ــ مولفه افقی تغییرمکان گرهها		 $(1)(\delta_H^{\rightarrow}) + W_R = \Sigma F_Q \Delta L$	
۳ــ مولفه غیر مشخص تغییرمکان گرهها		$(1)(\delta_a^{\searrow}) + W_R = \Sigma F_Q \Delta L$	
۴ــ تغییر مکان نسبی دو گره در طول خطی که آن دو را بهم وصل می‌کند		$(1)(\delta_a^{\nearrow}) + (1)(\delta_b^{\swarrow}) + W_R = \Sigma F_Q \Delta L$ $(1)(\delta_a^{\nearrow} + \delta_b^{\swarrow}) + W_R =$ $(1)(\delta_{a-b}^{\nearrow\swarrow}) + W_R = \Sigma F_Q \Delta L$ $\delta_{a-b}^{\nearrow\swarrow}$ = rel. mov. $\underline{a}$ and $\underline{b}$ together	
۵ــ دوران میله یک خرپا		$\left(\frac{1}{m}\right)(\delta_a^{\downarrow}) + \left(\frac{1}{m}\right)(\delta_b^{\uparrow}) + W_R = \Sigma F_Q \Delta L$ $\left(\frac{1}{m}\right)(\delta_a^{\downarrow} + \delta_b^{\uparrow}) + W_R =$ $(1)(\alpha_{a-b}^{\frown}) + W_R = \Sigma F_Q \Delta L$	

شکل (۱۲ــ۱۰) دستگاه نیروهای متعارف Q که در مسایل تغییرمکان خرپاها به‌کار برده می‌شود

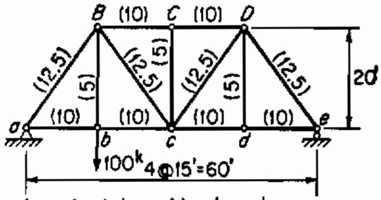
مثال ۱۲ ــ ۱ = (الف) مولفه عمودی‌تغییرمکان گره c را تحت اثر بارنشان‌داده‌شده 100^k محاسبه کنید . (ب) مولفه عمودی تغییر مکان گره c را هرگاه فقط میله‌های اصلی تحتانی $50°F$ تقلیل درجه حرارت دهند محاسبه کنید ، $\alpha_t = 1/150{,}000$ per °F می‌باشد .

(a) $\sum Q\delta = \sum F_Q \, \Delta L = \sum F_Q F_P \frac{L}{AE}$

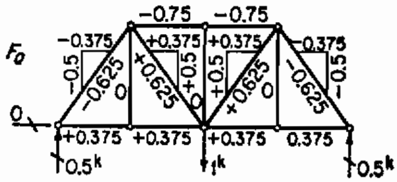
$(1^k)(\delta_c^{\downarrow}) = \frac{1}{E}\sum F_Q F_P \frac{L}{A}$

$= \frac{+325.01^{k^2{}'/''^2}}{30 \times 10^3 \ k/''^2}$

$\therefore \ \delta_c = \underline{+0.01083 \ ft}$ به‌طرف پائین



مقادیرسطح مقاطع در داخل پرانتز درج شده است

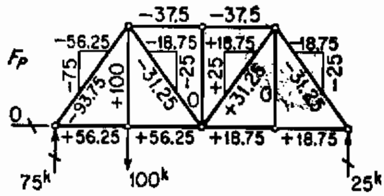


(b) $\Sigma Q\delta = \Sigma F_Q \, \Delta L = \Sigma F_Q \alpha_t t L$

$(1^k)(\delta_c^{\downarrow}) = \alpha_t \Sigma F_Q t L$

$= \left(\frac{1}{150{,}000} \ per \ ^\circ F\right)(-1{,}125^{k^\circ F'})$

$\therefore \ \delta_c = \underline{-0.0075 \ ft}$ به‌طرف بالا

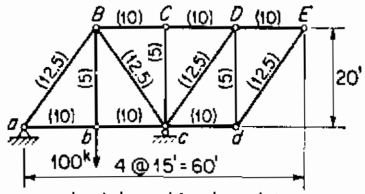


جدول تنظیم محاسبات

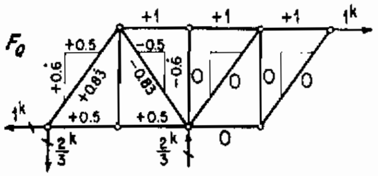
میله‌ها	L	A	$\frac{L}{A}$	F_Q	F_P	$F_Q F_P \frac{L}{A}$	t	$F_Q t L$
آحاد	'	''²	'/''²	k	k	k²'/''²	°F	k°F'
ab	15	10	1.5	+0.375	+ 56.25	+ 31.64	−50	− 281.25
bc	15	10	1.5	+0.375	+ 56.25	+ 31.64	−50	− 281.25
cd	15	10	1.5	+0.375	+ 18.75	+ 10.55	−50	− 281.25
de	15	10	1.5	+0.375	+ 18.75	+ 10.55	−50	− 281.25
BC	15	10	1.5	−0.75	− 37.5	+ 42.19	0	0
CD	15	10	1.5	−0.75	− 37.5	+ 42.19	0	0
aB	25	12.5	2	−0.625	− 93.75	+117.19	0	0
Bc	25	12.5	2	+0.625	− 31.25	− 39.06	0	0
cD	25	12.5	2	+0.625	+ 31.25	+ 39.06	0	0
De	25	12.5	2	−0.625	− 31.25	+ 39.06	0	0
bB	20	5	4	0	+100	0	0	0
cC	20	5	4	0	0	0	0	0
dD	20	5	4	0	0	0	0	0

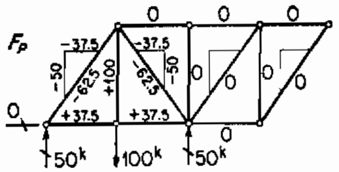
مثال ۱۲ ــ ۲ = مولفه افقی تغییرمکان گره E را تحت اثر بارگذاری نشان داده شده محاسبه کنید.

$E = 30 \times 10^3 \ kips \ in$



اقادیرسطح مقاطع در داخل پرانتز درج شده است





$$\sum Q\delta = \sum F_Q \,\Delta L = \sum F_Q F_P \frac{L}{AE}$$

$$(1^k)(\delta_E^{\rightarrow}) = \frac{1}{E}\sum F_Q F_P \frac{L}{A} = \frac{+56.25^{k^2/in^2}}{30 \times 10^{3\,k/in^2}}$$

$$\therefore \delta_E = \underline{+0.001875\ ft} \qquad \therefore \text{to right}$$

میله	L	A	$\frac{L}{A}$	F_Q	F_P	$F_Q F_P \frac{L}{A}$
آحاد		in^2	ft/in^2	k	k	$k^2 ft/in^2$
ab	15	10	1.5	+0.5	+37.5	+ 28.13
bc	15	10	1.5	+0.5	+37.5	+ 28.13
aB	25	12.5	2	+0.83	−62.5	−104.17
Bc	25	12.5	2	−0.83	−62.5	+104.17
Σ						+ 56.25

بحث :

توجه شود که هر میله‌ای را که برای آن میله یکی از مقادیر F_Q یا F_P صفراست می‌توان از جدول حذف نمود زیرا برای چنان میله‌ای حاصل‌ضرب $F_Q F_P (L/A)$ همواره صفرخواهد شد.

مثال ۱۲ ــ ۳= درخرپای مربوط به‌مثال (۱۲ــ۲) مولفه افقی تغییر مکان E. راکه‌حاصل از جابجایی تکیه‌گاهها به‌صورت زیر می‌باشد محاسبه کنید .

$0.5''$ به‌سمت چپ = جابجایی افقی در a.

$0.75''$ به‌طرف پائین = جابجایی عمودی در a

$0.25''$ به‌طرف پائین = جابجایی عمودی در c

برای تحلیل تنش تحت اثر دستگاه نیروی Q از مثال قبل استفاده کنید .دراین مثال تغییرمکان فقط به‌دلیل جابجایی‌تکیه‌گاهها ایجادمی‌شود و برای هیچ‌یک ازاعضا تغییر طولی بوجود نمی‌آید یعنی برای کلیه اعضاء $\Delta L = 0$ است .

$$\Sigma Q\delta = \Sigma F_Q \,\Delta L = 0$$

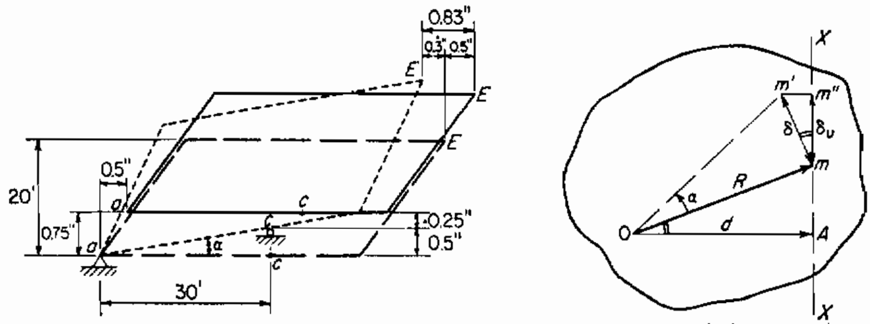
$$(1^k)(\delta_E^{\rightarrow}) + (1^k)(0.5'') + (\tfrac{2}{3}^k)(0.75'') - (\tfrac{2}{3}^k)(0.25'') = 0$$

$$\therefore \delta_E = -0.5 - 0.5 + 0.167 = \underline{-0.833\ in.}$$

بحث :

در محاسبه کار مجازی خارجی که توسط عکس‌العملهای Q انجام می‌شود دقت کنیدکه علامت صحیح به‌کار برده شود علامت مثبت یا منفی کار مجازی یک عکس‌العمل بستگی به‌این دارد که نقطهٔ اثر آن عکس‌العمل به‌ترتیب در جهت و یا در خلاف‌جهت عکس‌العمل جابجا شود .

محاسبه تغییرمکان حاصل از نشست تکیه‌گاهها را می‌توان به‌سادگی بااستفاده از علم‌ـ الحرکات به‌دست‌آورد .در شکل(الف) خطوط پر نشان دهنده وضعیت اولیه خرپا می‌باشد . می‌توان فرض نمودکه خرپا ابتدا چنان حرکتی انتقالی‌را متحمل شود که تکیه‌گاه a دروضعیت نهایی خود قرار گیرد ، وضعیت انتقال یافته خرپا را در شکل با خطوط منقطع نشان‌داده‌ایم.



(الف) (ب)

پس از آن خرپا حول a در جهت عکس ساعتگرد آنقدر می‌چرخد تا این‌که تکیه‌گاه c در وضعیت مناسب خود قرار گیرد وضعیت نهایی خرپا را با خط چین نشان داده‌ایم ،در شکلهای ذکر شده جابجاییها را بخاطر واضح‌شدن مساله به‌صورت بسیار زیادی بزرگ نشان داده‌ایم . با توجه به‌شکل فوق جابجایی افقی نقطهٔ E را می‌توان به‌صورت‌زیرمحاسبه نمود.

به‌سمت چپ $0.5''$ = حاصل از انتقال

به‌سمت چپ $\frac{0.5''}{30'} \times 20' = 0.\dot{3}''$ = حاصل از دوران حول a

به‌سمت چپ $0.5'' + 0.\dot{3}'' = 0.8\dot{3}''$ = کل جابجایی افقی نقطه E

محاسبه جابجایی در اثر دوران نیاز به‌توضیح دارد و به‌صورتی است که گویا عملکرد قضیه مفیدی را بیان می‌کند حرکت نقطه m از یک جسم صلب را که حول مرکز O به اندازه زاویهٔ کوچک α دوران می‌نماید در نظر بگیرید .درشکل(ب) این زاویه بخاطر واضحترشدن شرح هندسی مساله خارج از اندازه بزرگ نشان داده شده است ، عملاً" زاویه به‌قدری کوچک است (برحسب رادیان)که سینوس و تانژانت آن عملا" با یکدیگر برابر است ،این بدان‌معنی

است که منطقاً" می‌توان فرض کرد که نقطه m بجای آن که در طول قوسی تغییرمکـان دهـد می‌توان در طول مماس نشان داده شده تا نقطه m' تغییرمکان دهد . فرض کنید که بخواهیم مولفهٔ تغییرمکان mm' را در راستای معینی نظیر XX معلوم کنیم از نقطـهٔ O عمود OA را براین راستای XX وارد کنید ، با در نظر گرفتن شکل واضح است که مثلثهای $mm'm''$ و OmA متشابه هستند ، بنابراین خواهیم داشت :

$$\frac{\delta_v}{\delta} = \frac{d}{R} \qquad \delta_v = \frac{\delta}{R} d = \alpha d$$

زیرا $\alpha \approx \delta/R$ است . بنابراین قضیه زیر را می‌توان بیان نمود .

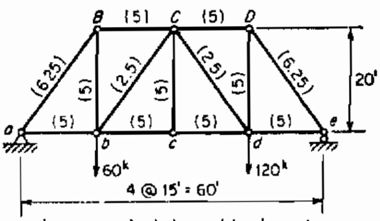
اگر جسمی صلب حول مرکزی نظیر O به‌اندازهٔ زاویهٔ کوچک α دوران کند مولفه‌تغییر مکان نقطه m در طول راستای XX که از آن نقطه می‌گذرد برابربا حاصل ضرب زاویـه α در فاصله عمودی نقطه O از XX می‌باشد . در مورد خرپای فوق داریم :

$$\alpha = \frac{0.5''}{30'}$$

بنابراین جابجایی افقی نقطه E که در اثر دوران حول O می‌باشد خواهد شد .

$$\frac{0.5''}{30'}(20') = 0.3''$$

مثال ۱۲ – ۴ = تغییرمکان نسبی نقاط b و D را در طول خط اتصال آنها و در هریـک از حالات زیر پیدا کنید (الف) بارهای نشان داده شده $E = 30 \times 10^3$ kips in .
(ب) ازدیاد درجه حرارتی برابر با $80°F$ در تخت فوقانی و تقلیل درجه‌حرارتی برابر با $20°F$ در تخت تحتانی $\alpha_t = 1/150{,}000$ per °F



مقادیرسطح‌مقاطع درداخل‌پرانتز درج‌شده‌است

(a) $\sum Q\delta = \sum F_Q \Delta L = \sum F_Q F_P \frac{L}{AE}$

$$(1^k)(\delta_b) + (1^k)(\delta_D) = \frac{1}{E}\sum F_Q F_P \frac{L}{A}$$

$$(1^k)(\delta_{b-D}) = \frac{55.0^{k^2/''^2}}{30 \times 10^{3\,k/''^2}}$$

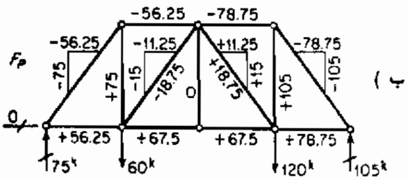
$\therefore\ \delta_{b-D} = \underline{+0.00183\ ft}$ به‌سمت یکدیگر

(b) $\Sigma Q\delta = \Sigma F_Q \Delta L = \Sigma F_Q \alpha_t t L = \alpha_t \Sigma F_Q t L$

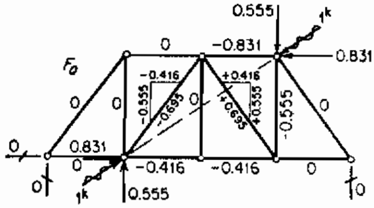
$$(1^k)(\delta_{b-D})$$

$$= \left(\frac{1}{150{,}000}\ \text{per }°F\right)(-747.2^{k°F'})$$

$\therefore\ \delta_{b-D} = \underline{-0.00499\ ft}$ به‌سمت دور از هم



(ب)



(الف)

میله‌ها	L	A	$\frac{L}{A}$	F_Q	F_P	$F_Q F_P \frac{L}{A}$	t	$F_Q t L$
آحاد	$'$	in^2	$'/in^2$	k	k	$k^2 '/in^2$	$°F$	$k°F'$
bc	15	5	3	−0.416	+ 67.5	− 84.5	−20	+125
cd	15	5	3	−0.416	+ 67.5	− 84.5	−20	+125
CD	15	5	3	−0.831	− 78.75	+197.0	+80	−997.2
[illegible]	25	2.5	10	−0.695	− 18.75	+130	0	0
Cd	25	2.5	10	+0.695	+ 18.75	+130	0	0
dD	20	5	4	−0.555	+105	−233	0	0
Σ						+ 55.0		−747.2

بحث :

در مسائل مربوط به‌تغییرمکانهای حاصل از تغییر درجه حرارت و نشست در خرپاهای معین بسیاری از دانشجویان دچار سردرگمی‌می‌شوند . آنها ، احساس می‌کنند که در اعضاء خرپا در چنان حالاتی‌می‌بایستی تنش بوجود آید . درصورتی که در خرپاهای معین تا زمانی برسازه باری اثر نکند عکس‌العملی بوجود نمی‌آید ،این مطلب‌را می‌توان‌بااستفاده‌ازمعادلات تعادل ثابت نمود . اگر عکس‌العملی و یا باری خارجی وجود نداشته باشد بنابراین نیرویی داخلی در میله‌ها بوجود نخواهد آمد . از نظر فیزیکی تغییرشکل چنان خرپایی که‌حاصل از نشست تکیه‌گاهی و یا تغییرطول حاصل از تغییردرجه حرارت می‌باشد می‌تواند بدون مواجه‌شدن با مقاومتی انجام گیرد بنابراین عکس‌العملی و یا نیروی میله‌ای ایجاد نخواهد کرد .

کلیه خرپاهائی که مورد بررسی قرار گرفت خرپاهای ایده‌آل مفصلی بودند که تحت‌اثر بارهای Q و p که همواره بر گرهها وارد می‌شدند قرار داشتند . هرگاه یک خرپای مفصلی تحت‌اثر قسمتی ازبارهای p واقع شود که برخی‌ازآنها بر بین‌گرهها بر اعضای‌آن وارد شوند چنان اعضایی تحت اثر لنگر خمشی M_P قرار خواهند گرفت و در صورتی که فقط تغییرمکان گرهها موردنظر باشد دستگاه Q فقط شامل بارهای‌گرهی خواهد شد و لنگر خمشی M_Q ایجاد نخواهد شد و عبارت دوم سمت راست، معادله (۱۲ـ۴) حذف‌می‌شود .بنابراین قانون‌کار مجازی

در چنین حالتی نیز مانند معادله (۱۲–۵) خواهد شد . نظیر آن در حالاتی‌که به‌منظور محاسبه تغییرمکان اعمال‌بارهای Q بین گرهها الزامی‌است ولی بارهای P که بارهای ایجادکننده تغییرمکان می‌باشند فقط بر گرهها وارد می‌شوند نیز صادق است زیرا در این حالت لنگر خمشی M_P وجود نخواهد داشت .

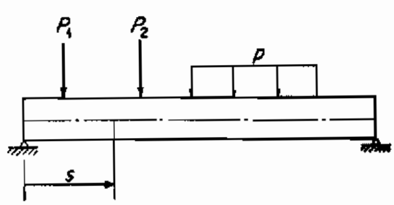
حالتی که یک خرپای مفصلی تحت اثر بارهای P و Q که هردو بر نقاط بین گرهها وارد شوند مانند سازه‌های متشکل‌از قابهای صلب خواهد بود درمبحث بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد، حالات شامل خرپاهای پرچی نیز در همان بند بحث می‌گردد .

۱۲ ــ ۷ تغییرمکان تیرها و قابها با استفاده از روش کار مجازی

برای به‌دست‌آوردن رابطه‌ای برای قانون‌کار مجازی تیرها و قابها می‌توان به‌طریق مشابهی با قراردادن معادلات (۱۲–۲) و (۱۲–۴) در معادله (۱۲–۱) عمل نمود . ابتدا تیری را در نظر بگیرید که توسط بارهای عرضی تغییرشکل می‌دهد در چنان‌حالتی اگر عکس‌العملها مولفه افقی نداشته باشند ، کلیه مقاطع تیر بدون نیروی محوری فقط تحت تأثیر برش و لنگر خمشی قرار خواهند گرفت ، اولین عبارت معادله (۱۲–۴) حذف شده و قانون کار مجازی در این حالت فقط به‌صورت ساده زیر بیان خواهد شد .

$$\sum Q\delta = \int M_Q M_P \frac{ds}{EI} \qquad (۶ - ۱۲)$$

خاطرنشان می‌سازد که در استخراج معادله (۱۲–۴) از تغییرشکل برشی صرف‌نظر شده است، چنین حالتی را در شکل (۱۲–۱۱) نشان داده‌ایم ، برای این که در چنین‌حالتی مولفه عمودی ، افقی و یا هردو مولفه معینی از تغییرشکل نقطه‌ای از آن را معلوم کنیم ، باری‌واحد در راستای موردنظربرآن تیر وارد می‌کنیم ،این بار واحد به‌همراه‌عکس‌العملهای خودتشکیل دستگاه Q را خواهد داد که در طول تغییرشکل نیز متحمل تغییرمکان خواهد شد ،حل‌مساله



شکل (۱۲–۱۱) تغییر مکان تیرها

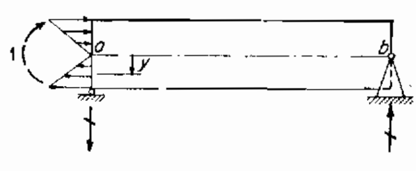
تغییرمکان تیرها اساسا" شبیه حل مساله تغییرمکان خرپا است و فقط تعیین مقدارسمت‌راست معادله (۱۲ـ۶) تغییر کرده است .

قبل‌از آن که به‌انتگرال‌گیری طرف‌راست رابطه فوق اقدام‌کنیم می‌بایستی روابط مربوط به M_Q و M_P را به‌صورت تابعی از s بیان نمائیم عموما" لازم است که انتگرال گیری بـــرای کل تیر را به‌صورت حاصل جمع از چند انتگرال برای قسمتهای مختلف تیر بیان کنیـــم ایـــن تقسیم انتگرال‌گیری می‌بایستی در نقاطی انجام گیرد که توابع مربوط به M_Q و M_P و یا I که برحسب s بیان شده‌اند تغییرنمایند. اغلب با انتخاب مبداء های اندازه‌گیری مختلفی‌برای s در مورد هریک از قسمتهای انتگرال‌گیری می‌توان عمل انتگرال‌گیری را ساده نمود ، فـــن چگونگی چنان محاسباتی را در مثالهای متعدد زیرین شرح داده‌ایم .

به‌علامت‌گذاری عبارات مختلف معادله (۱۲ـ۶) توجه بسیار شود گرچه انتخاب‌هرنوع علامت گذاری مناسب دیگری برای M_Q و M_P تا زمانی که برای هردوی آنها یک نوع علامت گذاری انتخاب شود مجاز خواهد بود ولی عموما" علامت‌گذاری متداول تیرها بیشتر رضایت بخش می‌باشد . بدیهی است که δ زمانی مثبت خواهد بود که در همان جهت نیروی نظیر Q خود قرار داشته باشد .

اغلب لازم است که دوران مقطعی‌از تیر را معین نمائیم . برای چنین منظوری دستگاه Q را باری گسترده نظیرآنچه درشکل (۱۲ـ۱۲)نشان داده شده‌است بهمراه عکس‌العملهای آن در نظر بگیرید . این بار به‌نوعی در مقطع گفته شده گسترده خواهد شد که نظیر باکوپل واحدی گردد . فرض‌کنید که شدت این بار در فاصله y از تار خنثی برابر با q_y باشـــد ، چون فقط تغییرشکل حاصل از خمش در نظر گرفته می‌شود ، یک مقطع که قبل از خمش مسطح بوده‌است بعد ازخمش نیز مسطح و عمود برمنحنی ارتجاعی تیر باقی می‌ماند و اگر مقطعی به‌اندازهٔ زاویه کوچک α دوران یافته باشد و نقطه‌ای ازآن که به‌فاصله y از تار خنثی واقع شده است بعداز دوران تغییرمکانی برابربا $(\alpha)(y)$ پیدا خواهد کرد بنابراین کارمجازی خارجی حاصل از دوران بار گسترده q که حاصل از دوران مقطع در اثر دستگاه P می‌باشـــد خواهد شد :

$$\int(q_y b\, dy)(\alpha y) = \alpha\int q_y by\, dy = (1)(\alpha)$$



شکل (۱۲ـ۱۲) دستگاه Q برای تعیین تغییر شیب یک مقطع

چون لنگر بار q حول تار خنثی که‌مساوی $\int q_y b y\, dy$ می‌باشد برابر با ۱ است و چون معلوم شد که کار مجازی خارجی‌انجام شده توسط بار گسترده‌ای نظیر بار q فقط برابر با حاصل‌ضرب زوج برآیند واحد آن در α می‌باشد لذا می‌توانیم زوج واحدی بدون توجه به‌جزئیات پخش بار واحد به‌مقطع اثردهیم در این حالت با اعمال معادله (۱۲–۶) خواهیم داشت :

$$(1)(\alpha_a^{\frown}) + W_R = \int M_Q M_P \frac{ds}{EI}$$

باقی مساله شبیه تغییرمکان عمودی می‌باشد .

مثال ۱۲ – ۵= تغییرمکان عمودی نقطه A را که حاصل اثر بار P در نقطه B می‌باشد محاسبه کنید

$$\sum Q\delta = \int M_Q M_P \frac{ds}{EI}$$

$$(1^k)(\delta_A\downarrow) = \int_A^B M_Q M_P \frac{dx}{EI} + \int_B^C M_Q M_P \frac{dx}{EI}$$

از A تا B

$$0 < x < a \qquad M_Q = -x \qquad M_P = 0$$

از B تا C

$$0 < x < (L-a)$$

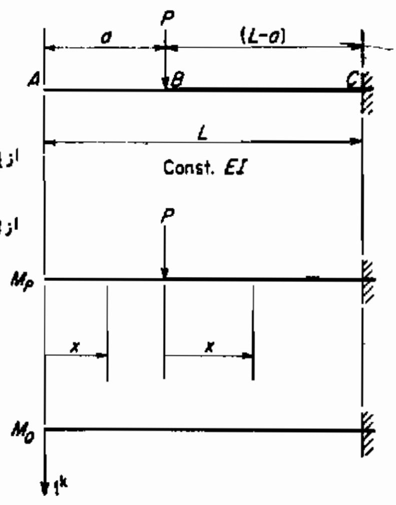
$$M_Q = -(a+x) \qquad M_P = -Px$$

$$(1^k)(\delta_A\downarrow) = 0 + \frac{1}{EI}\int_0^{L-a} [-(a+x)][-Px]\,dx$$

$$= \frac{P}{EI}\left[\frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^{L-a}$$

$$= \frac{P}{EI}\left[\frac{a(L-a)^2}{2} + \frac{(L-a)^3}{3}\right]$$

$$\delta_A^{\downarrow} = \frac{P}{6EI}(L-a)^2(2L+a)$$

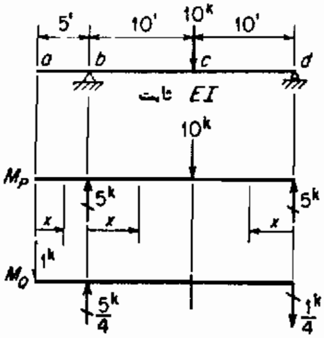


مثال ۱۲ – ۶= تغییرمکان عمودی نقطه a را تحت اثربار نشان داده شده‌محاسبه‌کنید.

$$E = 30 \times 10^3 \text{ kips/in.} \qquad I = 200 \text{ in.}^4$$

$$\sum Q\delta = \int M_Q M_P \frac{ds}{EI}$$

$$(1^k)(\delta_a^{\downarrow}) = \int_a^b M_Q M_P \frac{dx}{EI} + \int_b^c + \int_d^c$$



از a تا b

$$M_P = 0$$

از b تا c

$$0 < x < 10 \qquad M_Q = \frac{x}{4} - 5 \qquad M_P = 5x$$

از d تا c

$$0 < x < 10 \qquad M_Q = -\frac{x}{4} \qquad M_P = 5x$$

$$(1^k)(\delta_a^{\downarrow}) = \frac{1}{EI}\left[0 + \int_0^{10}\left(\frac{x}{4} - 5\right)(5x)\,dx + \int_0^{10}\left(\frac{-x}{4}\right)(5x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\left[\frac{5}{12}x^3 - \frac{25}{2}x^2\right]_0^{10} + \left[-\frac{5}{12}x^3\right]_0^{10}\right\} = -\frac{1,250^{k'^3}}{EI}$$

$$\therefore \delta_a = \frac{-1,250^{k'^3}}{(30\times 10^3 \times 144)^{k/'^2}\left(\frac{200}{144\times 144}\right)^{'^4}} = \underline{-0.030\ ft}$$ بسمت بالا

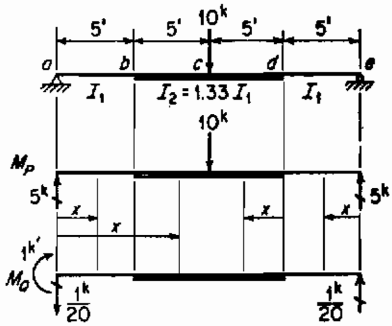
بحث :

مبداء اندازه‌گیری x را در هرقسمتی می‌توان به‌طور دلخواه‌انتخاب‌نمود ولی‌می‌بایستی یک مبداء برای x در عبارات مربوط به‌هردوی M_Q و M_P مربوط به‌یک قسمت واحد در نظر گرفته شود . انتخاب مبداء بایستی به‌صورتی باشد که مقدار عبارات مربوط به‌روابط M_Q و M_P را تقلیل دهد چنین عملی حجم عملیات را در جاگذاری حدود انتگرال کم خواهد نمود .

مثال ۱۲ــ۷= دوران مقطع را در نقطه a که حاصل بارگذاری نشان داده شده درشکل است محاسبه کنید . $E = 30 \times 10^3\ kips\ \ in.$ $\quad I_1 = 150\ in.^4$ $\quad I_2 = 200\ in.^4$

$$\sum Q\delta = M_Q M_P \frac{ds}{EI}$$

$$(1^{k'})(\alpha_a^{\curvearrowright}) = \int_a^b M_Q M_P \frac{dx}{EI} + \int_b^c + \int_e^d + \int_d^c$$



از a تا b $\qquad 0 < x < 5 \qquad I_1 \qquad M_Q = 1 - \frac{x}{20} \qquad M_P = 5x$

از b تا c

$$5 < x < 10 \qquad 1.33I_1 \qquad M_Q = 1 - \frac{x}{20} \qquad M_P = 5x$$

از e تا d

$$0 < x < 5 \qquad I_1 \qquad M_Q = \frac{x}{20} \qquad M_P = 5x$$

از c تا d

$$0 < x < 5 \qquad 1.33I_1 \qquad M_Q = \frac{1}{4} + \frac{x}{20} \qquad M_P = 25 + 5x$$

$$\begin{aligned}
(1^{k'})(\alpha_a^{\frown}) &= \frac{1}{EI_1}\left[\int_0^5\left(1 - \frac{x}{20}\right)(5x)\,dx + \int_5^{10}\left(1 - \frac{x}{20}\right)(5x)\frac{dx}{1.33}\right. \\
&\quad \left. + \int_0^5\left(\frac{x}{20}\right)(5x)\,dx + \int_0^5\left(\frac{1}{4} + \frac{x}{20}\right)(25 + 5x)\frac{dx}{1.33}\right] = \frac{1}{EI_1}\left\{\left[\frac{5x^2}{2} - \cancel{\frac{x^3}{12}}\right]_0^5\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{1.33}\left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right]_5^{10} + \left[\cancel{\frac{x^3}{12}}\right]_0^5 + \frac{1}{1.33}\left[\frac{25x}{4} + \frac{5}{4}x^2 + \frac{x^3}{12}\right]_0^5\right\} \\
&= \frac{1}{EI_1}\left\{\frac{5}{2}(25) + \frac{1}{1.33}\left[\frac{5}{2}(100 - 25) - \left(\frac{1{,}000 - 125}{12}\right)\right]\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{1.33}\left[\frac{25}{4}(5) + \frac{5}{4}(25) + \frac{125}{12}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{EI_1}\left[62.5 + \frac{1}{1.33}(187.5 - 62.5 + 62.5)\right] = \frac{1}{EI}(62.5 + 140.6) = \frac{203.1^{k'^2}}{EI_1}
\end{aligned}$$

$$\therefore \alpha_a = \frac{(203.1)^{k'^2}}{(30 \times 10^3 \times 144)^{k/'^2}\left(\frac{150}{144 \times 144}\right)^{'^4}} = \underline{+0.0065}$$

بحث :

انتخاب مبداء اندازه‌گیری x در حل این مساله شاید بهترین انتخاب نباشد غرض از یک چنین انتخابی نشان دادن راههای‌مختلف بررسی‌مساله می‌باشد . هرگاه قبل‌ازقراردادن حدود انتگرال حذف عباراتی مطرح‌گردد می‌بایستی از چنین عملی مطمئن شد ، بدین‌ترتیب که یکی‌بودن حدود انتگرال حتما" وارسی شود .

مثال ۱۲ ــ ۸= دوران مقطع را در نقطه B محاسبه کنید ، E و I هردو دارای‌مقادیر ثابتی هستند .

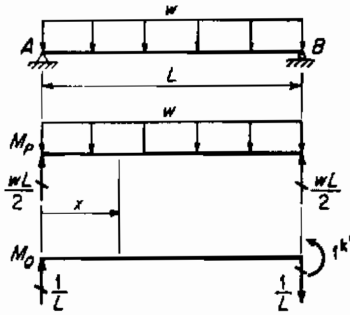
$$\sum Q\delta = \int M_Q M_P \frac{ds}{EI}$$

$$(1^{k'})(\alpha_B^{\frown}) = \int_A^B M_Q M_P \frac{dx}{EI}$$

از A تا B

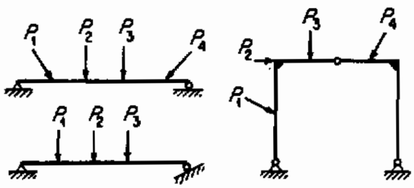
$$0 < x < L$$

$$M_Q = \frac{x}{L} \qquad M_P = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$



$$(1^{k'})(\alpha_B) = \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)\left(\frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}\right)\frac{dx}{EI}$$
$$= \frac{w}{EI}\left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8L}\right]_0^L = \frac{wL^3}{24EI}$$
$\therefore \alpha_B = \frac{wL^3}{24EI}$ در خلاف جهت ساعتگرد

حال حالت کلی‌تر یک تیر و یا یک قاب صلب را که مقاطع اعضای آنها تحت‌اثر نیروی محوری ، برش ، لنگر خمشی می‌باشند در نظر بگیرید چندین حالت متفاوت از این نوع‌رادر شکل (۱۲ـ۱۳) نشان داده‌ایم ، امکان دارد تغییرمکان چنین سازه‌ای علاوه بر نیروهای محوری و لنگرهای خمشی که نتیجه بارهای p می‌باشند در اثر تغییر درجه حرارت‌نیزبوجود



شکل (۱۲ـ۱۳) سازه‌هایی که علاوه بر خمش تغییر طول محوری نیز تحمل می‌کنند

آید . بنابراین هردو عبارت معادله (۱۲ـ۴) را در محاسبه کار مجازی داخلی‌می‌بایستی‌در نظر گرفت پس قانون کار مجازی را در مورد چنان حالاتی می‌توان به‌صورت عبارت زیربیان نمود .

$$\sum Q\delta = \int F_Q e_0 \, ds + \int M_Q M_P \frac{ds}{EI} \qquad (۷-۱۲)$$

دراین عبارت کرنش محوری e_0 شامل اثر نیروی محوری و حرارت خواهد بود یعنی :

$$e_0 = \alpha_t + \frac{F_P}{AE}$$

معمولا" می‌توان کل سازه را به‌قطعات متعددی که در طول هریک از آنها A ،F_P ،F_Q و t ثابت می‌باشند جدا کرد .به‌همین ترتیب برای محاسبه عبارت‌دوم سمت‌راست‌معادله (۱۲ـ۷) ، انتگرال را می‌توان به‌قسمتهای متعددی که در طول هریک از آنها توابع M_Q ،

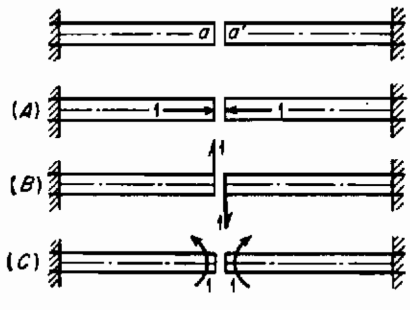
M_P و I به‌یک صورت مشخص باقی می‌مانند تقسیم نمود قسمتهایی که برای محاسبه عبارت نخست معادله (۱۲ـ۷) انتخاب می‌شود ، الزاما" همان قسمتهای به‌کار گرفته برای محاسبه عبارت دوم نخواهد بود . در هر صورت معادله (۱۲ـ۷)را برای راحتی بیشتر می‌توان به‌صورت زیر نشان داد :

$$\sum Q\delta = \sum F_Q \,\Delta L + \sum \int M_Q M_P \frac{ds}{EI} \qquad (۱۲-۸)$$

در این رابطه داریم : $\Delta L = \int e_0 \, ds = \alpha_t t L + \frac{F_P L}{AE}$

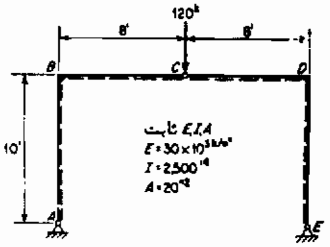
علامت Σ در سمت‌راست معادله (۱۲ـ۸) نشان می‌دهد که مجموع چنان عباراتی که برای کلیه قسمتهای مختلف‌کلیه اعضای سازه می‌بایستی برای‌محاسبه آن‌عبارت به‌دست‌آید .

کاربرد معادله (۱۲ـ۸) در یک مساله معلوم به‌همان روش و فنـی نیاز داردکه قبلا" در مثالهای (۱۲ـ۱) تا (۱۲ـ۸) شرح داده شد . در مثال (۱۲ـ۹) نظم وآرایش محاسبات را ملاحظه خواهیم کرد . در اغلب مسائل مربوط به‌تغییر مکان تیرها و قابها می‌بایستی مولفه تغییرمکان نقطه‌ای و یا دوران مقطعی را پیدا کنیم و گاهی لازم است که تغییرمکان‌نسبی دو مقطع مجاور هم را نظیر مقاطع a و a' در شکل (۱۲ـ۱۴) معلوم کنیم تغییرمکان نسبی افقی عمودی و یا زاویه‌ای در نقاط a و a' را می‌توان با انتخاب دستگاه Q متعدد به‌ترتیب نظیر شکلهای A ، B یا C به‌دست آورد .



شکل (۱۲ـ۱۴) دستگاه Q جهت تعیین تغییر مکانهای نسبی

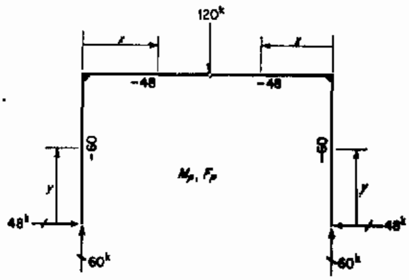
مثال ۱۲ ــ ۹= دوران مقطع را در طرف چپ مفصل c را تحت اثر بارهای نشان‌داده شده محاسبه کنید .



$$\sum Q\delta = \sum F_Q F_P \frac{L}{AE} + \sum \int M_Q M_P \frac{ds}{EI}$$

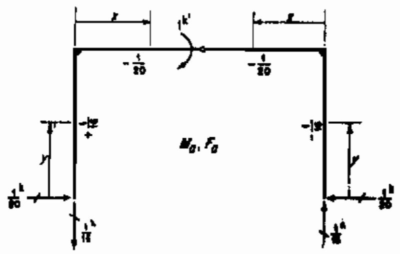
$$(1^{k'})(\alpha_{\widehat{CL}}) = \int_A^B M_Q M_P \frac{dy}{EI} + \int_B^C M_Q M_P \frac{dx}{EI} + \int_E^D + \int_D^C + \sum F_Q F_P \frac{L}{AE}$$

توجه : $F_Q F_P \frac{L}{AE}$ را می‌توان برای همان قسمتهای AB, BC, ED و DC محاسبه نمود ، خط تیره نشان دهنده تار زیرین برای استفاده از قرارداد علامت گذاری در تیرها جهت علائم M_Q و M_P می‌باشد .



از A تا B :

$$L = 10' \qquad 0 \to y \to 10$$
$$F_Q = +\frac{1}{16} \qquad M_Q = -\frac{y}{20}$$
$$F_P = -60 \qquad M_P = -48y$$



از B تا C .

$$L = 8' \qquad 0 \to x \to 8$$
$$F_Q = -\frac{1}{20} \qquad M_Q = -\frac{1}{2} - \frac{x}{16}$$
$$F_P = -48 \qquad M_P = -480 + 60x$$

از E تا D

$$L = 10 \qquad 0 \to y \to 10$$
$$F_Q = -\frac{1}{16} \qquad M_Q = -\frac{y}{20}$$
$$F_P = -60 \qquad M_P = -48y$$

از D تا C

$$L = 8 \qquad 0 \to x \to 8$$
$$F_Q = -\frac{1}{20} \qquad M_Q = -\frac{1}{2} + \frac{x}{16}$$
$$F_P = -48 \qquad M_P = -480 + 60x$$

$$(1^{k'})(\alpha_{\widehat{CL}}) = \frac{1}{EI}\left[2\int_0^{10}\left(\frac{-y}{20}\right)(-48y)\,dy + \int_0^8\left(-\frac{1}{2} - \frac{x}{16}\right)(-480 + 60x)\,dx + \int_0^8\left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{16}\right)(-480 + 60x)\,dx\right] + \frac{2}{AE}\left(-\frac{1}{20}\right)(-48)(8)$$

$$= \frac{1}{EI}\left[(1.6y^3)\Big|_0^{10} + 2(240x - 15x^2)\Big|_0^8\right] + \frac{38.4}{AE}$$

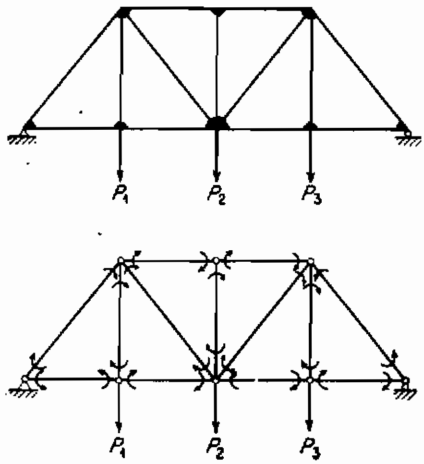
$$(1^{k'})(\alpha_{\widehat{CL}}) = \frac{3{,}520}{EI} + \frac{38.4}{AE} = \frac{(3{,}520)^{k'^2}}{(30 \times 10^3 \times \cancel{144})^{k/'^2}\left(\frac{2{,}500}{144 \times \cancel{144}}\right)^{'4}} + \frac{(38.4)^{k'}}{(30 \times 10^3 \times \cancel{144})^{k/'^2}\left(\frac{20}{\cancel{144}}\right)^{'2}}$$

$\therefore \alpha_{CL} = +0.00676 + 0.000064 = \underline{+0.006824}$ رادیان در جهت ساعتگرد

بحث :

درمسائلی‌که هم خمش و هم تغییرشکل محوری‌مطرح می‌باشد به‌آحاد دقت‌کافی‌مبذول شود ، شایان توجه است که مقدار عبارت مربوط به‌تغییرشکل محوری در حدود یک درصد تغییرشکل خمشی می‌باشد ، این نتیجه کم و بیش نشان دهنده میزان نسبی این دو اثر در مسائل مربوط به‌تغییرمکان قابهامی‌باشد ، لذا معمولا" صرف‌نظرنمودن ازتغییرشکل‌محوری در چنین حالاتی مجاز می‌باشد .

خرپایی که دارای گرههای پرچی می‌باشد در ردهٔ قابهای صلب به‌حساب‌می‌آید در مبحث مربوط به‌بند (۴ــ۲) گفته شد که اعضای چنین خرپایی علاوه بر نیروهای محوری تحمل برش و لنگر خمشی نیز می‌نمایند حتی اگر بارهای وارده بر گرهها اثر کند . ولی هرگاه تحلیل تنش و کرنش در اعضای چنین خرپایی مطرح باشد چنین خرپایی پرچی‌رامی‌توان نظیرخرپای مفصل‌که درشکل (۱۲ــ۱۵)نشان داده شده‌است تصور نمود . چنین خرپای معادلی‌نه‌تنها توسط بارهای موٴثر برگرههای‌معلوم بارگذاری شده است بلکه توسط زوجهایی در انتهای هریک از قطعات نیز که به‌ترتیب برابر با لنگرهای انتهایی در هریک از اعضای خرپایی پرچی می‌باشد بارگذاری شده‌است ، تحلیل دقیق نشان می‌دهد که در اغلب حالات این زوجهای انتهایی تولید مقدار کمی نیروی محوری در اعضاء نیز می‌نمایند . به‌عبارت دیگر نیروی میله‌ها در خرپای مفصلی مشابه ، تقریبا" کلا" توسط بارهای موٴثر بر گرهها بوجود می‌آید ، در مبحث قبلی خاطرنشان شد که تغییرمکان گرهها در یک خرپای مفصلی تابعی از تغییر طول محوری اعضای آن می‌باشد و بستگی به‌تغییرشکل حاصل از خمش آن اعضاء ندارد . بنابراین تغییرمکان گرهها در خرپای مفصلی مشابه تحت اثر بارهای موٴثر بر گرهها و زوجهای انتهایی عملا" برابر با تغییرمکان گرههای خرپای مفصلی ایده‌آلی‌تحت اثر فقط بارهای موٴثر بر گرهها خواهد بود . پس هرگاه بخواهیم تغییرمکان گرههای



شکل (۱۲–۱۵) تغییر مکان خرپا با گرهای صلب

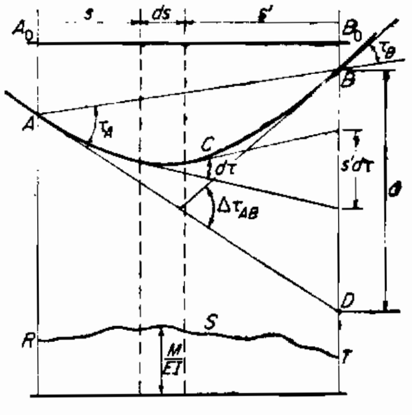
یک خرپای پرچی‌را محاسبه‌کنیم‌ می‌توانیم آن را به‌صورت‌خرپای مفصلی ایده‌آلی فرض نمائیم . بدیهی است که خمش اعضای خرپاهای پرچــی تغییر مکان نقاط دیگر خــرپا را به‌جزء گرهای آن تحت تأثیر قرار می‌دهد .

در هیچ جائی از مبحث قبلی مطلبی در مورد حالتی از تیر یا قابی که دارای محوری منحنی و مقطع متغیر باشد ذکر نگردید . بحث در جزئیات چنین سازه‌هایی خارج از بحث این‌کتاب می‌باشد .اگر انحناء و تغییر مقطع زیاد نباشد . تنشهای عمودی درچنان سازه‌هایی را می‌توان با تغییرخطی فرض نموده و بنابراین تغییرمکان آن سازه را با استفاده از معادلــه (۱۲–۷) محاسبه نمود . در چنان حالاتی انتگرالهای سمت راست آن معادله‌را بندرت می‌توان به‌طور دقیق به‌دست آورد و اغلب مقادیرآنها را با استفاده از عملیات تقریبی محاسبه می‌نمایند و برای این منظور محور سازه را به‌تعداد قطعات کوچکی با طولهای برابــر Δs تقسیم می‌نمایند و مقادیر F_Q ، e_0 ، M_Q ، M_P و I را برای مرکز مقاطع هریک‌ازاین قطعات کوچک محاسبه می‌کنند و پس از آن می‌توان مقادیر هریک از حاصل ضربهای $F_Q e_0 \Delta s$ و $M_Q M_P \Delta s/EI$ را برای هریک از قطعات معلوم نمود . حاصل جمع کلیــه ایـن حاصل‌ضربهای مربوط به‌کلیه قطعات به‌طور تقریبی برابربا مقدار سمت‌راست‌معادله (۱۲–۷) خواهد شد ، هرقدر طول این قطعات کوچک گرفته شود دقت حاصل جمع گفته شده افزایــش خواهد یافت .

۱۲ ــ ۸ قضایای سطح لنگر

اغلب قضایای سطح لنگر در محاسبات مربوط به‌شیب و تغییرمکان تیرها و قابها (مخصوصا" زمانی که تغییرشکل آنها حاصل از بارهای متمرکز باشد نه بارهای‌گسترده) راحت‌تراز روش کار مجازی به‌کار برده می‌شود. این قضایا براساس شکل هندسی‌منحنی خیز تیر و رابطه بین دوران و لنگر خمشی در نقطه‌ای از منحنی‌خیز بیان می‌شود.

در شکل (۱۲ــ۱۶) قسمت ACB از منحنی خیز تیری را که در حالت بدون تنش ابتدایی خود در وضعیت مستقیم A_oB_o قرار داشت در نظر بگیرید و در نقاط A و B مماسهایی بر منحنی‌خیز رسم کنید. خط مماس بر نقطه A خط عمود مار از نقطه‌ٔ B را در D قطع می‌کند.



شکل (۱۲ــ۱۶) استخراج قضایای سطح لنگر

زاویه $\Delta\tau_{AB}$ برابر با زاویه دوران بین دو مماس در نقاط A و B می‌باشد، با توجه به‌این مطلب که تغییرمکانها و انحنای تیر را در این شکل به‌صورت خارج از مقیاسی بسیار بزرگ نشان داده‌ایم، عملا" زاویهٔ هریک از این مماسها بر منحنی‌خیز به‌اندازه‌ای کوچک است که زاویه‌ای نظیر τ_A را می‌توان تقریبا" برابر با مقدار سینوس و تانژانت آن گرفت و همچنین کسینوس آن را می‌توان تقریبا" برابر با واحد فرض کرد.

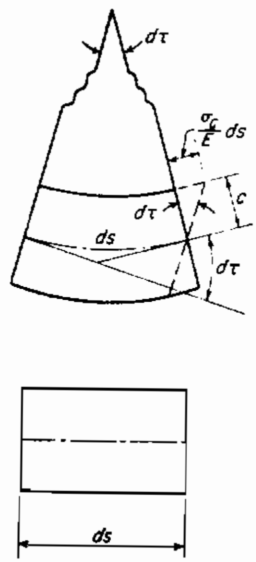
یک جزء بسیار کوچک این منحنی‌را که تصویر افقی آن برابربا ds باشد در نظربگیرید و مماسهایی بردو انتهای منحنی این جزء رسم کنید، تغییرشیب آن دومماس نسبت به‌یکدیگر برابر با زاویه $d\tau$ بوده و مقدار آن را می‌توان با در نظر گرفتن شکل (۱۲ــ۱۷) به‌صورت زیر تعیین نمود:

$$d\tau = \frac{(\sigma_c\, ds)/E}{c} = \frac{Mc}{EI}\frac{ds}{c} = \frac{M}{EI}\, ds$$

واضح است که برای محاسبه تغییر شیب کل بین دو مماس مار بر A و B می‌بایستی مجموع زوایای $d\tau$ را برای کلیه اجزاء ds در طول منحنی خیز ACB به‌دست آوریم دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$\Delta\tau_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_A^B \frac{M}{EI}\, ds \qquad (۹-۱۲)$$

فرض کنید که RST منحنی لنگر خمشی برای قسمت AB باشد به‌صورتی که هرعرضی ازاین منحنی را بر مقدار EI درآن نقطه نیز تقسیم کرده باشیم، چنین منحنی را منحنیM/EI خواهیم خواند، واضح است که انتگرال رابطه (۱۲-۹) برابر با سطح زیر منحنی M/EI در حد فاصل A و B می‌باشد، بنابراین با استفاده از معادله (۱۲-۹) اولین قضیه سطح لنگر به‌صورت زیر بیان می‌شود.



شکل (۱۲-۱۷) تغییر شیب دیفرانسیلی

تغییر شیب بین دو مماس بر منحنی‌خیز در نقاط A و B برابر با سطح منحنی M/EI بین این دو نقاط می‌باشد. (البته به‌شرطی‌که درقسمت AB از تیر هیچ نوع غیرپیوستگی‌نظیر مفصل وجود نداشته باشد) با در نظرگرفتن این حقیقت که تغییرشکل و شیب‌ها همگی کوچکند با ملاحظه شکل (۱۲-۱۶) واضح می‌شودکه قسمتی از خط BD (که عمود بر وضعیت

بدون تنش تیر رسم شده است) که بین دو مماس بر دو انتهای جزء ds رسم می‌شود به‌صورت $s'\,d\tau$ نوشته شده و در نتیجه خواهیم داشت :

$$d = \int_A^B s'\,d\tau = \int_A^B \frac{M}{EI} s'\,ds \qquad (۱۰-۱۲)$$

این انتگرال برابر با لنگر سطح زیر منحنی M/EI در حد فاصل نقاط A و B حول محوری مار بر نقطه B می‌باشد و بدین‌ترتیب دومین قضیه سطح لنگر به‌صورت زیر بیان می‌شود .

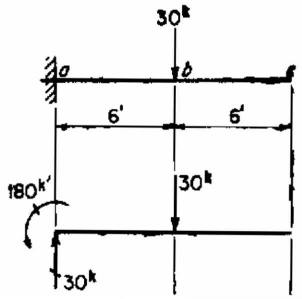
تغییرمکان نقطه B که در روی منحنی خیز واقع است از مماس براین منحنی درنقطه A برابر است با لنگر سطح زیر منحنی M/EI در حد فاصل نقاط A و B نسبت به‌محوری که‌از B می‌گذرد . .

(البته به‌شرطی که در قسمت AB ازتیر هیچ نوع غیرپیوستگی نظیر مفصل وجود نداشته‌باشد) باید دقت شود که این تغییرشکل در جهت عمود بر وضعیت اولیه تیراندازه‌گیری می‌شود .

این دو قضیه را می‌توان مستقیما" جهت تعیین شیبها و تغییر مکانهای تیر فقط با رسم منحنی لنگر برای بارهای موثر تیر و محاسبه لنگر سطح برای کل یا قسمتی از منحنی M/EI نظیر ،به‌کار برد . شرح عملکرد اجرایی این روش را در مثالهای (۱۲–۱۰) الی (۱۲ — ۱۲) بیان کرده‌ایم ، دراین مثالها دیده خواهد شدکه چگونه با ابتکارهایی محاسبات مربوط به‌این روش ساده می‌گردد ، روش متشابهی که براساس این روش استوار است و روش بار ارتجاعی خوانده می‌شود در مبحث بعدی ذکر خواهد شد .

این قضایا را می‌توان بدون اشکال برای قطعاتی‌که دارای انحنای‌اولیه می‌باشند توسعه داد ، البته بررسی چنان حالاتی خارج از موضوع این کتاب می‌باشد .

مثال ۱۲ — ۱۰= با استفاده از قضایای سطح لنگر تغییر مکان در نقاط b و c و شیب منحنی‌خیز را در نقطه b تعیین کنید ، E و I دارای مقادیر ثابتی هستند .



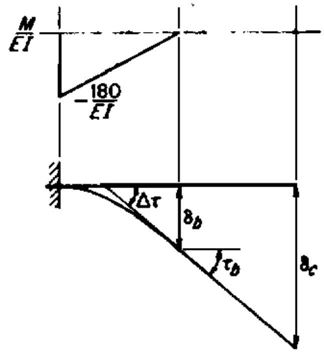
با استفاده از دومین قضیه سطح لنگر داریم :

به‌سمت پائین

$$\delta_b = \left(\frac{180}{EI}\right)\left(\frac{6}{2}\right)(4) = \frac{2,160}{EI}$$

به‌سمت پائین

$$\delta_c = \left(\frac{180}{EI}\right)\left(\frac{6}{2}\right)(4+6) = \frac{5,400}{EI}$$

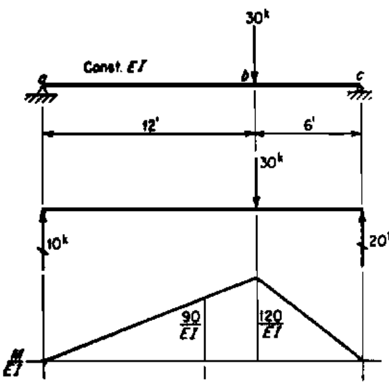


با استفاده از اولین قضیه سطح لنگر داریم :

$$\Delta\tau = \left(\frac{180}{EI}\right)\left(\frac{6}{2}\right) = \frac{540}{EI}$$
$$\therefore \tau_b = \frac{540}{EI}$$

جهت کاربرد قضایای سطح لنگر می‌توان علامت‌گذاری معینی تعیین نمود ، از چنین عملی در این قسمت به‌دلیل این‌که امکان دارد با علائم قراردادی پیشنهادی‌برای‌بحث‌بعدی که در مورد بار ارتجاعی می‌باشد تداخل نماید خودداری شده است . در کاربرد قضایای سطح لنگر می‌توان از علائمی که در مثالهای (۱۲ـ۱۰) الی (۱۲ـ۱۲) به‌کاربرده شده‌است استفاده نمود . در این مثالها ابتدا شکل‌تقریبی منحنی‌خیز به‌منظورانحناء با همان علامت و نمودار لنگر خمشی رسم کرده‌ایم . در محاسبات مربوط به‌تغییرمکان (و یا زاویه دوران) قسمت‌معینی از نمودار M/EI (بدون توجه به‌علامت M در آن قسمت) را در صورتی که به‌ترتیب سبب افزایش و یا تقلیل مقدار تغییرمکان که در شکل مفروض نشان داده شده است بنماید مثبت‌یا منفی در نظر می‌گیرند در صورتی که نتیجه نهایی مثبت باشد جهت تغییر مکان نشان‌داده شده تأیید می‌گردد .

مثال ۱۲ ـ ۱۱= با استفاده از قضایای سطح لنگر شیب منحنی ارتجاعی را در نقاط a و m محاسبه کرده و تغییرمکان را در نقطه m تعیین کنید .

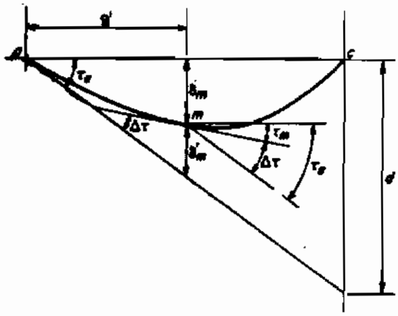


چون شیبها کوچکند پس :

$$\tan\tau_a = \tau_a$$
$$\therefore \tau_a = \frac{d}{18}$$

با استفاده از قضیه دوم سطح لنگر

$$d = \left(\frac{120}{EI}\right)\left[\left(\frac{12}{2}\right)(6+4) + \left(\frac{6}{2}\right)(4)\right]$$
$$= \frac{8,640}{EI} \qquad \therefore \tau_a = \frac{480}{EI}$$



با استفاده از شکل منحنی‌خیز $\tau_m = \tau_a - \Delta\tau$

و با در نظرگرفتن اولین قضیه سطح لنگر داریم :

$$\Delta\tau = \left(\frac{90}{EI}\right)\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{405}{EI}$$

$$\therefore \tau_m = \frac{480 - 405}{EI} = \frac{75}{EI}$$

باز هم با استفاده از شکل داریم :

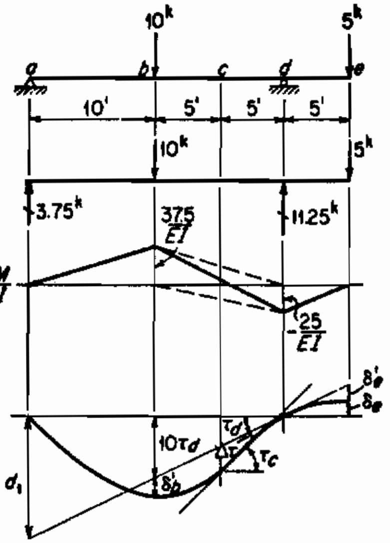
$$\delta_m = 9\tau_a - \delta'_m$$

با اعمال قضیه دوم سطح لنگر خواهیم داشت :

$$\delta'_m = \left(\frac{90}{EI}\right)\left(\frac{9}{2}\right)(3) = \frac{1,215}{EI}$$

$$\therefore \delta_m = (9)\left(\frac{480}{EI}\right) - \frac{1,215}{EI} = \frac{3,105}{EI}$$

مثال ۱۲-۱۲= بااستفاده از قضایای سطح لنگرتغییر مکانهای نقاط b ، e و همچنین شیب نقطه c را محاسبه کنید.



$$\tau_d = \frac{d_1}{20},$$

$$d_1 = \frac{1}{EI}\left[(37.5)\left(\frac{20}{2}\right)(10) - (25)\left(\frac{10}{2}\right)\left(10 + \frac{2}{3} \times 10\right)\right] = \frac{5,000}{3EI}$$

$$\therefore \tau_d = \frac{250}{3EI}$$

$$\delta_b = 10\tau_d + \delta'_b,$$

$$\delta'_b = \frac{1}{EI}\left[(25)\left(\frac{10}{2}\right)\left(\frac{20}{3}\right) - (37.5)\left(\frac{10}{2}\right)\left(\frac{10}{3}\right)\right] = \frac{625}{3EI}$$

$$\therefore \delta_b = \frac{2,500}{3EI} + \frac{625}{3EI} = \frac{3,125}{3EI}$$ به‌سمت پائین

$$\delta_e = 5\tau_d - \delta'_e,$$

$$\delta'_e = \frac{1}{EI}\left[(25)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{10}{3}\right)\right] = \frac{625}{3EI}$$

$$\therefore \delta_e = \frac{1,250}{3EI} - \frac{625}{3EI} = \frac{625}{3EI}$$ به‌سمت بالا

$$\tau_c = \tau_d + \Delta\tau,$$

$$\Delta\tau = \frac{(25 + 12.5)(5)}{2EI} - \frac{(18.75)(5)}{2EI} = \frac{93.75}{2EI}$$

$$\therefore \tau_c = \frac{250}{3EI} + \frac{93.75}{2EI} = \frac{781.25}{6EI}$$

بحث :

دیده می‌شودکه کاربرد صحیح علائم زمانی که تیری تحمل هردونوع لنگر خمشی‌مثبت و منفی را می‌نماید بسیار مشکل می‌شود برای به‌حداقل رساندن این اشکال توصیه می‌شود که شکل منحنی ارتجاعی را تا حد امکان دقیق رسم‌نمائید . رسم‌دقیق شکل منحنی را می‌توان به‌سادگی و فقط‌با تبعیت از نمودار لنگر خمشی انجام داد . لنگر خمشی مثبت سبب تقعر رو ببالای منحنی‌خیز شده و لنگر خمشی منفی سبب تقعر رو به‌پائین آن منحنی می‌شود . دیده خواهد شد که در حل چنین مسائلی ، استفاده از روش بار ارتجاعی برتری دارد زیرا در آن روش مشکل حاصل از علامت‌گذاری کم و بیش به‌طور خودکار انجام می‌گیرد .

در قسمتی نظیر bd که در آن قسمت منحنی لنگر به‌طور خطی از مقدار مثبت به‌مقدار منفی تغییر می‌کند اغلب اوقات بهتر است که برای تسهیل در محاسبات‌مربوطه منحنی لنگر واقعی را با خطوط‌تیره نشان داده‌شده جایگزین نمایند . دراین حالت مثلثهای مثبت و منفی منحنی لنگرواقعی با مثلثی مثبت باارتفاع 37.5 و قاعده 10 و مثلثی‌منفی‌باارتفاع 25 و قاعده 10 جایگزین شده ، با اندکی دقت و بررسی معلوم می‌گردد که چنین عملکردی برای تعیین محاسبات لازم جهت سطح خالص و یا لنگر خالص سطح حول هر محوری‌عمودی لازم ، منطقی‌تر خواهد بود .

---

۱۲ ــ ۹ روش بار ارتجاعی

با در نظرگرفتن منحنی خیز ACB قطعه AB که در وضعیت اولیه خود به‌شکل مستقیم بوده است و مطابق آنچه در شکل(۱۲ــ۱۸) دیده می‌شود خم شده است می‌توان به‌استخراج خصوصیات روش بار ارتجاعی پرداخت . فرض کنید که RST منحنی M/EI باشد با اعمال قضیه دوم سطح لنگر داریم :

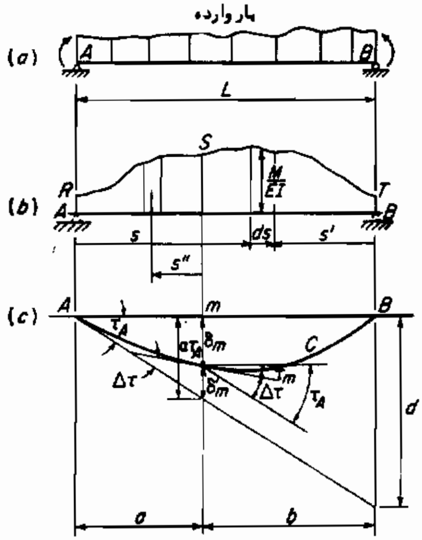
$$d = \int_A^B s' \frac{M}{EI} ds$$

و از آنجا :

$$\tau_A = \frac{d}{L} = \frac{1}{L}\int_A^B s' \frac{M}{EI} ds$$

این عبارت بیان‌کننده این مطلب است که τ_A برابر با لنگر سطح زیر منحنی M/EI در حد فاصل A و B حول محور مار بر B تقسیم بر L می‌باشد. جالب است که می‌بینیم این روش محاسباتی τ_A برای ما بسیارآشناست . فرض کنیدکه به‌طورخیالی نمودار M/EI یعنی RST

بیانگر باری مجازی بر تیر ساده‌ای که دارای دو تکیه‌گاه A و B نظیرآنچه درشکل(۱۲–۸ب) با خط‌چین نشان داده شده است باشد، در این صورت محاسبه عکس‌العمل عمودی نقطه A با لنگرگیری حول محوری که از نقطه B می‌گذرد (و عمود بر صفحه کاغذ می‌باشد) به دست خواهد آمد که بدین ترتیب این عکس‌العمل عمودی در نقطه A دقیقا" برابر با مقدار τ_A که در بالا محاسبه شد خواهد گردید.



شکل (۱۲–۱۸) استخراج روش بار ارتجاعی

این‌شباهت محاسباتی باادامه محاسبات برای τ_m و δ_m باز هم دیده می‌شود. دراینجا τ_m شیب مماس برمنحنی خیز نسبت به‌امتداد AB است و δ_m عبارت‌از تغییر مکان نقطه m از همان امتداد AB می‌باشد. ابتدا به τ_m می‌پردازیم و خواهیم داشت:

$$\tau_m = \tau_A - \Delta\tau$$

و با در نظر گرفتن قضیه اول سطح لنگر داریم، $\Delta\tau = \int_A^m M/EI\,ds$ و ازآنجا خواهیم داشت:

$$\tau_m = \tau_A - \int_A^m \frac{M}{EI}\,ds$$

با همان فرضی که نمودار M/EIرا به‌صورت نمودار بار و τ_A را به‌عنوان عکس‌العمل نقطه A تیر خیالی در نظرگرفتیم می‌بینیم که در این رابطه τ_m برابر است با عکس‌العمل τ_A منهای بار وارده در حد فاصل A و m به‌بیانی دیگر τ_m را می‌توان برش در نقطه m این

تیر خیالی فرض نمود . به‌همان منوال داریم :

$$\delta_m = (a)(\tau_A) - \delta'_m$$

و با در نظر گرفتن قضیه دوم سطح لنگر داریم ، $\delta'_m = \int_A^m s''(M/EI)\,ds$ و از آنجا خواهیم داشت :

$$\delta_m = (\tau_A)(a) - \int_A^m s'' \frac{M}{EI}\,ds$$

از این رابطه دیده می‌شود که δ_m را می‌توان لنگر خمشی نقطه m تیر خیالی فرض نمود .

با ملاحظه آنچه ارائه شد می‌توان چنین نتیجه گرفت که منحنی‌خیز تیر AB دقیقاً" برابر با منحنی لنگر خمشی یک تیر خیالی روی دو تکیه‌گاه ساده است به‌طوری‌که‌دارای‌همان دهانه AB بوده و توسط بار گسترده جانبی برابر با نمودار M/EI تیر حقیقی AB بار شده باشد . شیب مماس بر منحنی‌خیز در هر نقطه از تیر برابر است با عرض نظیر نمودار برش مربوط به تیر خیالی AB که تحت اثر نمودار M/EI بار شده باشد . با چنین‌کاربردی‌نمودار M/EI را "*بار ارتجاعی*" نامیده و روش محاسباتی مربوط به تعیین تغییر مکان و شیب تیر را "*روش بار ارتجاعی*" می‌نامند . برش و لنگر خمشی حاصل از بار ارتجاعی موثر بر تیر خیالی را اغلب به‌ترتیب *برش ارتجاعی* و *لنگر ارتجاعی* می‌نامند .

با این قیاس . مساله محاسبه‌تغییرمکانها و شیبهای یک‌تیرتبدیل به‌عملکردی‌کاملا" معلوم برای مهندس سازه می‌گردد و تنها عملی که محاسب می‌بایستی انجام دهد عبارت خواهد شد از محاسبه عکس‌العملها برش و لنگر خمشی مربوط به‌یک تیر خیالی که روی دو تکیه گاه ساده قرار داشته و توسط بار گسترده جانبی بارگذاری شده باشد . مثالهای زیر سهل‌بودن روش بار ارتجاعی را نشان می‌دهد .

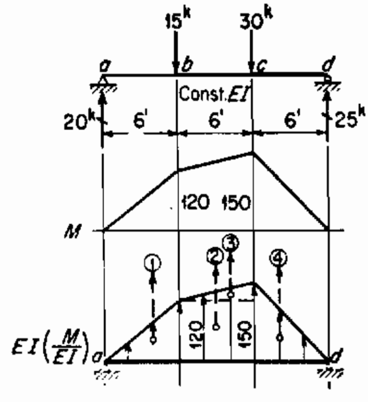
درکلیه مثالهای تکیه‌گاههای A و B غیرقابل تغییرشکل می‌باشند واین بدان‌معنی‌است که این نقاط تغییرمکان نداده و بنابراین خط واصل بین A و B افقی باقی می‌ماند و بز وضعیت قبل‌از تغییرشکل محورتیر منطبق خواهدشد لذاشیب τ_m و تغییرمکان δ_m به‌ترتیب عبارت از شیب و تغییرمکان حقیقی نسبت به‌وضعیت اولیه تیر خواهند بود . البته روش بار ارتجاعی را می‌توان به‌هرقسمت AB از تیر اعمال نمود چه از نظر وضعیت ضلع AB منحنی خیز ثابت باقی بماند یا نماند . در هرصورت بخاطر داشته باشید که برش و لنگر خمشی حاصل از روش بار ارتجاعی نسبت به‌وضع AB اندازه شیب و تغییرمکان را معین می‌کند واگر این ضلع تغییرمحل داده باشد مقادیری که برحسب اندازه‌گیری نسبت به‌وضعیت اولیه تیر برای شیب و تغییر مکان معین شوند تا زمانی‌که اثر تغییر محل این ضلع در آنها ملحوظ

نگردد مقادیر حقیقی نخواهند بود .

در حالت کلی که ضلع مذکور ممکن است تغییر محل بدهد یا ندهد ، کاربرد روش بار ارتجاعی را می‌توان در بیان زیر خلاصه نمود .

شیبها و تغییرمکانهای مربوط به یک منحنی ارتجاعی که نسبت به‌یکی‌ازاضلاع آن AB اندازه‌گیری‌می‌شود به‌ترتیب عبارت‌خواهند بود ازبرشها (ی ارتجاعی) و لنگرهای (ارتجاعی) تیری خیالی با دهانه AB روی دو تکیه‌گاه ساده به‌طوری که توسط بار (ارتجاعی) گسترده‌ای که برابر با نمودار M/EI برای قسمت AB باشد بارشده باشد ، البته به‌شرطی‌که درحدفاصل قسمت AB تیر هیچ نوع غیرپیوستگی وجود نداشته باشد) چون بارهای رو به‌بالا در چنین محاسباتی مثبت فرض می‌شوند عرضهای مثبت M/EI نشان دهنده بارهای روبه‌بالا خواهند بود . اگر رسم منحنیهای برش و لنگر خمشی این تیر خیالی را با همان علامت‌گذاری‌که‌برای تیر متعارف به‌کار می‌بریم انجام دهیم لنگر خمشی مثبت در بالای محور و لنگر خمشی‌منفی در پائین آن قرار خواهد گرفت و بنابراین لنگر خمشی مثبت تیر خیالی نشان‌دهنده تغییر مکان به‌بالای ضلع و مقادیر منفی لنگر نشان‌دهنده تغییرمکان به‌پائین ضلع خواهد بود. به‌همان ترتیب برش مثبت در تیر خیالی نشان دهنده شیب رو به‌بالا منحنی ارتجاعی از طرف چپ به‌راست بوده و برش منفی نشان دهنده شیب‌رو به‌پائین خواهد بود .

مثال ۱۲ – ۱۳= با استفاده از روش بار ارتجاعی ، شیبها و تغییرمکانهای این تیر را محاسبه کنید .



$\Sigma M_d = 0$

(1)	$120 \times 3 =$	$360 \times 14 =$	5,040
(2)	$120 \times 6 =$	$720 \times 9 =$	6,480
(3)	$30 \times 3 =$	$90 \times 8 =$	720
(4)	$150 \times 3 =$	$450 \times 4 =$	1,800
		1,620	14,040
			18
			780 ↕

$\Sigma M_a = 0$

$360 \times 4 = 1{,}440$
$720 \times 9 = 6{,}480$
$90 \times 10 = 900$
$450 \times 14 = 6{,}300$

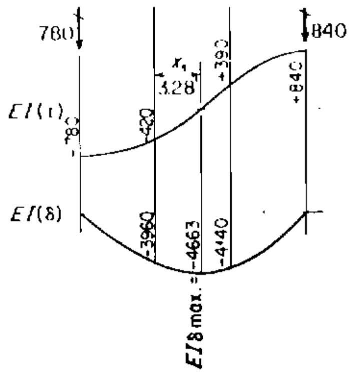
$$\frac{15{,}120}{18} = 840 \updownarrow$$

$0 = \delta_a$

$\tau_a = -780 \qquad -780 \times 6 = -4{,}680$

$+360 \qquad +360 \times 2 = +720$

$-3{,}960 = \delta_b$



$$
\begin{aligned}
\tau_b &= -420 & -420 \times 6 &= -2{,}520\\
&\ +720 & +720 \times 3 &= +2{,}160\\
&\ +90 & +90 \times 2 &= +180\\
& & &\ \overline{-4{,}140} = \delta_c\\
\tau_c &= +390 & +390 \times 6 &= +2{,}340\\
&\ +450 & +450 \times 4 &= +1{,}800\\
\tau_d &= +840 & & \ 0 = \delta_d
\end{aligned}
$$

حداکثر مقدار δ زمانی خواهد بود که $\tau = 0$ باشد و این وقتی است که برش‌در تیر خیالی صفر شود که چنین نقطه‌ای بین b و c خواهد بود جائی که:

$$
\begin{aligned}
EI\tau &= -420 + 120x_1 + \left(\frac{30}{6}\right)\frac{x_1^2}{2}\\
&= -420 + 120x_1 + 2.5x_1^2 = 0\\
\therefore\ x_1^2 + 48x_1 &= 168\\
(x_1 + 24)^2 &= 168 + (24)^2 = 744\\
x_1 + 24 &= +27.28 \qquad \therefore\ x_1 = \underline{3.28'}
\end{aligned}
$$

در این نقطه داریم:

$$
\begin{aligned}
EI\delta_{max} &= -3{,}960 - (420)(3.28) + (120)(3.28)\left(\frac{3.28}{2}\right) + (5)(3.28)\left(\frac{3.28}{2}\right)\left(\frac{3.28}{3}\right)\\
&= -3{,}960 - 1{,}378 + 646 + 29 = -4{,}663\ \textit{kip-ft}^3
\end{aligned}
$$

بحث:

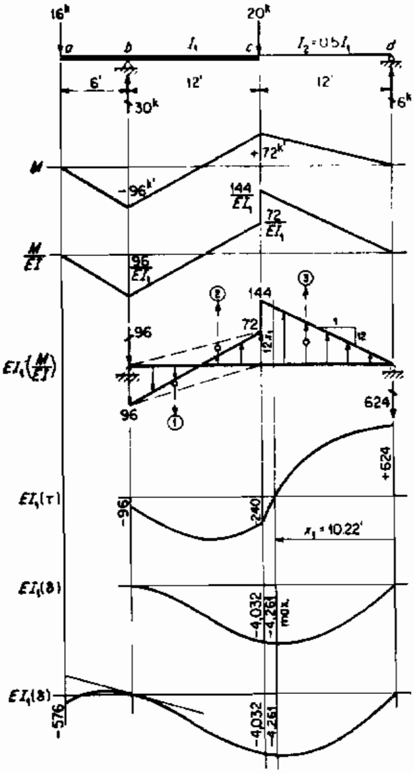
به‌آحاد این اعداد مختلف دقت کنید وچون M برحسب *kip-feet* می‌باشد، بنابراین سطح زیر منحنی M برحسب *kip-feet*^{2} ولنگر سطح برحسب *kip-feet*^{3} خواهد شد و به‌این ترتیب هرگاه مقادیر E و I نیز برحسب آحاد *kip* و *foot* بیان شوند، مقادیر δ برحسب *feet* و τ برحسب رادیان خواهد شد.

مثال ۱۲ــ۱۴= شیبها و تغییرمکانهای این تیر را محاسبه کنید.

$$E = 30 \times 10^3\ k/''^2 \qquad I_1 = 600\ in.^4 \qquad I_2 = 300\ in.^4$$

ضلع bd این تیر افقی باقی می‌ماند و بنابراین هرگاه شیبها و تغییرمکانها را نسبت به‌این مبنا تعیین‌کنیم آنها مقادیرواقعی خواهند بود. اگر روش بار ارتجاعی‌را برای محاسبه آنها

به‌کار بریم باید تیر خیالی را روی تکیه‌گاههای b و d در نظر بگیریم . عکس‌العمل نقطه b این تیر مقدار حقیقی شیب مماس بر منحنی‌خیز را در نقطه b به‌دست می‌دهد . حال که مقدار این شیب معلوم شده است با به‌کاربردن قضایای سطح لنگر می‌توان به‌سادگی مستقیما" به‌محاسبه شیبها و تغییرمکانهای قسمت طره‌ای ab پرداخت .



$$\Sigma M_b = 0$$

$$\begin{array}{lrr}
(1) & 96\times 6 = 576\times 4 = & +2{,}304 \\
(2) & 72\times 6 = 432\times 8 = & -3{,}456 \\
(3) & 144\times 6 = 864\times 16 = & -13{,}824 \\
 & +720 & -14{,}976
\end{array}$$

$$\frac{14{,}976}{24} = 624 \downarrow$$

$$\Sigma M_d = 0$$

$$\begin{array}{rcr}
576 \times 20 & = & -11{,}520 \\
432 \times 16 & = & 6{,}912 \\
864 \times 8 & = & 6{,}912 \\
 & & 2{,}304
\end{array}$$

$$\frac{2{,}304}{24} = 96 \downarrow$$

$$\begin{array}{rcr}
\tau_b & = & -96 \\
 & & -576 \\
 & & +432 \\
\tau_c & = & -240 \\
 & & +864 \\
\tau_d & = & +624
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcr}
 & & 0 = \delta_b \\
-96 \times 12 & = & -1{,}152 \\
-576 \times 8 & = & -4{,}608 \\
+432 \times 4 & = & +1{,}728 \\
 & & -4{,}032 = \delta_c \\
-240 \times 12 & = & -2{,}880 \\
+864 \times 8 & = & +6{,}912 \\
 & & 0 = \delta_d
\end{array}$$

بنابراین در نقطه a داریم :

$$EI_1\delta_a = 96 \times 6 - 96 \times 3 \times 4 = \underline{-576}$$ به‌سمت پائین

مقدار حداکثر دقیقا" در سمت راست c جائی که $\tau = 0$ باشد قرار خواهد داشت :

$$EI_1\tau = +624 - (12x_1)\left(\frac{x_1}{2}\right) = 0 \qquad \therefore x_1^2 = 104 \qquad x_1 = \underline{10.22'}$$

$$EI_1\delta_{max} = -(624)(10.22) + \frac{(12)(10.22)^3}{(2)(3)} = -6{,}385 + 2{,}124 = \underline{-4{,}261}$$ به‌سمت پائین

با قراردادن مقادیر E و I_1 در رابطه فوق خواهیم داشت :

$$\delta_{max} = \frac{-(4{,}261)^{k'^3}}{(30 \times 10^3 \times 144)^{k/'^2}\,(600/144^2)^{'^4}} = \underline{-0.0341\,ft}$$ به‌سمت پائین

۱۲ ـ ۱۰ اعمال قضایای سطح لنگر و روش بار ارتجاعی برای تغییر مکان تیرها و قابها

به‌منظور استفاده کامل از خواص سطح لنگر اغلب ترجیح داده می‌شود که کاربرد دو قضیه سطح لنگر به‌همراه بار ارتجاعی باهم به‌کارگرفته شود ، چنین کاربردی را قبلا" درمثال (۱۲ـ۱۴) شرح دادیم وعلاوه برآن در مثالهای بعدی نیز شرح داده خواهد شد ، برای این که نحوه کاربرد روش محاسباتی را در یک مساله طرح ریزی کنیم توصیه می‌شود که ابتداشکل منحنی‌خیز سازه را رسم کنیم . البته برای این که در رسم چنان منحنیهایی ماهر شویم‌نیاز به‌ممارست فراوان خواهد بود ولی در عین حال یک مبتدی نیز می‌تواند با تبعیت از نمودار منحنی خمشی یک قطعه و با دقت درمثبت و منفی‌بودن‌آن به‌رسم‌صحیح انحنای‌تیربپردازد .

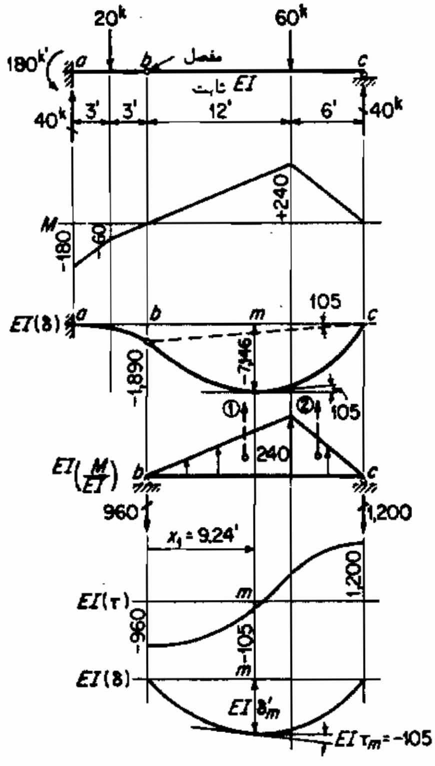
پس از آن‌که به‌طور تقریبی منحنی‌خیز رسم شد ، می‌توان به‌راحتی به‌طرح چگونگی‌حل مساله پرداخت برای این که تغییر مکانها را نسبت به‌یک مماس به‌دست آورید ، مستقیما" از قضایای سطح لنگر استفاده کنید و برای این که تغییر مکانها را نسبت به‌یک مبنا تعیین‌کنید از روش بارارتجاعی استفاده نمائید . در کاربرد روش *بار ارتجاعی به‌نحوی که در اینجا ذکر شد منحنی خیز تیر واقعی نظیر به‌دهانه تیر خیالی هرگز نبایستی دارای مفصلی‌میانی‌باشد،* در چنان مفصلهایی امکان تغییر ناگهانی در شیب منحنی‌خیز وجود دارد ، چنین تغییر ناگهانی در یک بار ارتجاعی که فقط‌شامل M/EI می‌باشد ملحوظ‌نمی‌گردد . چنان حالاتی را می‌توان به‌توسط‌کاربرد دیگری از روش بار ارتجاعی که‌روش‌تیرمزدوج نامیده می‌شود و در بخش(۱۲ـ۱۱)بدان خواهیم‌پرداخت ویا توسط‌روش ترکیبی قضایای‌سطح‌لنگر و روش بار ارتجاعی به‌نحوی که در مثالهای زیر شرح داده می‌شود بررسی نمود .

به‌همین دلیل که ذکر شد ، تقریبا" این مطلب حقیقت دارد که قضایای سطح لنگر را نمی‌توان در حد فاصل دو نقطه ازمنحنی‌خیز زمانی‌که مفصلی در آن‌قسمت از تیر قرارداشته باشد به‌کار برد .

مثال ۱۲ ـ ۱۵= حداکثر تغییر مکان این تیر را محاسبه کنید .

پس از بررسی شکل منحنی خیز دیده می‌شود که می‌توان δ_b را با اعمال قضیه دوم‌سطح‌لنگر به‌قسمت ab محاسبه نمود با این تغییرمکان موقعیت خط مبنای bc معلوم می‌شود با درنظر گرفتن این مبنا تغییر مکانها و شیبها را می‌توان با استفاده از روش بار ارتجاعی که بر تیری

خیالی به‌دهانه bc اعمال می‌شود محاسبه نمود .



$$EI\delta_b = [(180)(3/2)(5) + (60)(5/2)(3)] = \underline{1,890}\ (\downarrow)$$

$$bc = \frac{1,890}{18} = \underline{105} \quad (\text{دوران خط مبناء } bc\ )$$

$$\begin{aligned}
(1)\ 240 \times 6 &= 1,440 \times 10 = 14,400\\
(2)\ 240 \times 3 &= 720 \times 4 = \underline{2,880}\\
& \frac{17,280}{18} = \underline{960} \updownarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1,440 \times 8 &= 11,520\\
720 \times 14 &= \underline{10,080}\\
& \frac{21,600}{18} = \underline{1,200} \updownarrow
\end{aligned}$$

نقطه حداکثر δ در جائی قرار دارد که مماس بر منحنی خیز افقی باشد به‌عبارت دیگردرآن نقطه شیب مماس نسبت‌به‌خط مبنای bc و رو به‌سمت راست به‌طرف پائین باشد و با این‌که

$$EI\tau_m = -105$$

$$EI\tau_m = -960 + (20x_1)\left(\frac{x_1}{2}\right) = -105$$

$$x_1^2 = 85.5$$

$$\underline{x_1 = 9.24'}$$

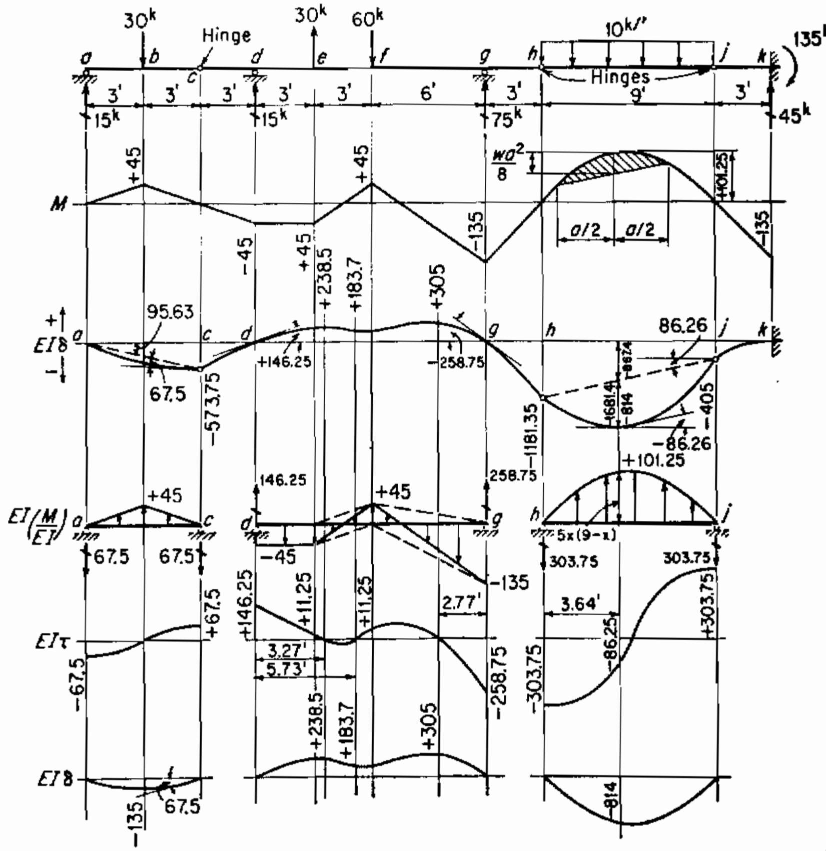
$$EI\delta'_m = -(960)(9.24) + \frac{(20)(9.24)^3}{6} = \underline{-6,225}$$

$$EI\delta_m = -6,225 - (105)(18 - 9.24) = \underline{-7,146}$$

بحث :

دقت کنید که به‌دلیل وجود مفصل b اعمال روش بار ارتجاعی بر تیر خیالی‌به‌دهانه ac مجاز نمی‌باشد .

مثال ۱۲ ــ ۱۶= شیبها و تغییر مکانهای این تیر را محاسبه‌کنید E ، I دارای مقادیر ثابتی هستند .



بحث :

چون خط dg از منحنی‌خیز تغییر محل نمی‌دهد بنابراین شیبها و تغییر مکانهائی که نسبت به‌آن با اعمال روش بار ارتجاعی بر تیر خیالی dg به‌دست می‌آیند مقادیر حقیقی شیبها و تغییرمکانهای تیر دراین قسمت خواهند بود محاسبات لازم برای این‌قسمت سرراست و بدون‌اشکال است و منجر به‌نتایجی می‌شود که با ذکر محل برای مقادیر حداکثر قسمت dg نشان داده شده است .

عکس‌العملهای این تیرخیالی نشان‌دهنده شیب مماس برمنحنی‌خیز در d و g می‌باشد پس ازآن به‌سادگی می‌توان با به‌کاربردن قضیه دوم سطح لنگر به‌محاسبه تغییر مکان اضافی مفصلهای c و h در این مماسها پرداخت ، تغییر مکانهای کلی این مفصلها نسبت به‌وضعیت اولیه تیر در شکل نشان داده شده است .

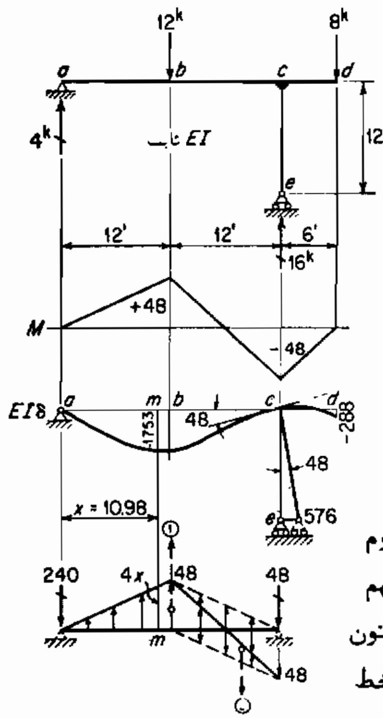
همچنین به‌سادگی می‌توان بااعمال قضیه‌دوم‌سطح لنگر به‌قسمت طره‌ای jk به‌محاسبه تغییرمکان مفصل در j پرداخت .

به‌این ترتیب وضعیت خطوط مبنای ac و hj معلوم شده و پس از آن امکان دارد که بتوان به‌محاسبه مقادیر حقیقی شیبها و تغییرمکانها در این قسمتها پرداخت محل و مقادیر تغییرمکانهای حداکثر در این قسمتها نشان داده شده است مقادیر تغییر مکانها و شیبها را نسبت به‌خطوط مبنای ac و hj می‌توان بااعمال روش بارارتجاعی بر تیرهای خیالی‌باهمان دهانه‌ها به‌دست آورد .

ملاحظه می‌شود که در قسمت ac هیچ نقطه‌ای وجود ندارد که بیشتر از c تغییرمکان داشته باشد زیراشیب خط مبنا در این قسمت بیشتر از شیب مماس بر c نسبت به‌خط مبنا می‌باشد .

قضایای سطح لنگر و روش بار ارتجاعی را می‌توان همچنین در محاسبات مربوط به‌تغییر مکان قابها به‌کار گرفت تغییر مکانهای قابها که بدین ترتیب به‌دست می‌آیند در هر صورت شامل اثر تغییر طول محورهای قطعات نمی‌باشند و خوشبختانه معمولا" صرفنظرنمودن از تغییر شکل طولی در اکثر مسائل مربوط به‌تغییرمکان قابها مجاز می‌باشد .

مثال ۱۲ ــ ۱۷ = تغییر مکانهای این قاب را محاسبه کنید .



$$(1)\quad 48 \times 12 = 576 \times {}^{12}\!/_{24} = 288 \downarrow$$

$$(2)\quad 48 \times 6 = 288 \times {}^{4}\!/_{24} = 48 \uparrow$$

$$\underline{\underline{240}} \downarrow$$

$$(1)\quad 576 \times {}^{12}\!/_{24} = 288 \downarrow$$

$$(2)\quad 288 \times {}^{20}\!/_{24} = 240 \uparrow$$

$$\underline{\underline{48}} \downarrow$$

برای این که نقطه حداکثر تغییرمکان را بیابیم

$$EI\tau_m = 0 = -240 + (4x)\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$x^2 = 120 \qquad x = 10.98$$

$$EI\delta_m = -(240)(10.98) + (4)\frac{(10.98)^3}{6}$$

$$= \underline{\underline{-1,753}}\ (\downarrow)$$

$$Ei\delta_d = (48)(6) - (48)(3)(4)$$

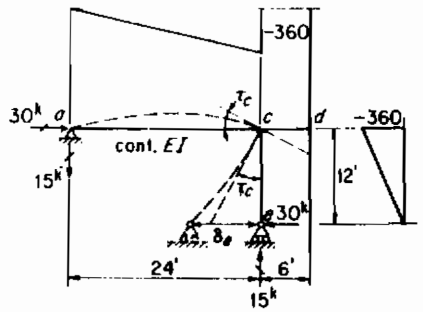
$$= \underline{\underline{-288}}\ (\downarrow)$$

$$EI\delta_e = (48)(12) = \underline{\underline{576}}\ (\rightarrow)$$

چون گره c صلب می‌باشد لذا کلیه مماسهای مرسوم بر منحنی‌های خیز کلیه اعضایی‌که‌در آن گره بهم می‌رسند به‌یک مقدار دوران خواهند کرد . چون ستون هیچ لنگر خمشی تحمل نمی‌کند لذا منحنی‌خیز خط راستی خواهد بود که دارای زاویه تمایلی به‌همان

میزان زاویـــه مماس بر منحنی خیز تیر خواهد بود .

مثال ۱۲ ــ ۱۸ = تغییرمکان نقطهٔ e از این قاب را محاسبه کنید .



$$EI\tau_c = (360)(12)(16/24) = 2{,}880$$

$$EI\delta_e = (2{,}880)(12) + (360)(6)(8) = \underline{51{,}840}$$

$(\leftarrow)$

از این مثالها و مسائل انتهای فصل T شکار می‌شود که کاربرد روشهای سطح لنگرزمانی برتری پیدا می‌کند که نمودار لنگر در چند خط مستقیم تشکیل شده باشد و به‌عبارت دیگـر تیر مورد نظر تحت اثر بارهای متمرکز باشد ، در چنین حالتی سطح زیـر منحنـی M/EI را می‌توان به‌چند مستطیل و مثلث تجزیه نموده و محاسبات مربوطه بسیار ساده خواهد بـود . وقتی که بار گسترده باشد نمودارلنگر یک خط منحنی‌شده ،و محاسبات مشکلتر می‌شود،وقتی بار وارده به‌طور یکنواخت گسترده باشد منحنی لنگر سهمی شده و نمودار M/EI را به چنـد مثلث ، مستطیل و قطعه‌های سهمی تجزیه می‌کنیم . در حالات پیچیده‌تر بارهای گستـرده معمولا" لازم است که نمودار M/EI را به‌چندین قسمت کوچک که هریک در این قسمتهـا بـه تناسب به‌مثلثها و مستطیلهایی تقسیم می‌گردد تجزیه نمود . گاهی بهتر است برای این که نتیجه جمع تقریبی را دقیقتر کنیم از قاعده سمسون Simpson استفاده کنیم .

با درنظرگرفتن نمودار لنگر خمشی برای قسمت hj از تیر مثال(۱۲ـ۱۶)سطح‌هاشور خورده بین منحنی سهمی و وتری از این منحنی را ملاحظه کنید . اگر تصویر افقی‌این وتر را برابربا a بگیریم ثابت‌کنید ۱ــ قسمتی ازخط عمودی‌که از وسط وتـر می‌گـــذرد و بین این وتر و منحنی قرار دارد برابر است با $wa^2/8$ که در این عبارت w شـــدت بار گسترده یکنواخت‌موءثر بر تیر است ۲ــ سطح این‌قطعه هاشور خورده برابربا $wa^3/12$ است ۳ــ مرکز ثقل این قطعهٔ هاشورخورده روی خط عمودی‌که از وسط وترمی‌گذرد قرار دارد .

زمانی لازم است که از روشهای ترسیمی در کاربرد روش بار ارتجاعی استفاده کنیـم .

به‌عنوان مثال فرض کنید که در نمودار M/EI به‌دلیل بارگذاری پیچیده سازه و یا تغییر لنگر لختی تیرشکل بی‌قاعده‌ای داشته‌باشد در چنین حالاتی نمودار برش و لنگر را که‌حاصل از بار بی‌قاعده ارتجاعی بر تیر خیالی می‌باشد می‌توان به‌کمک روش ترسیمی به‌همان‌ترتیبی که در بخش (۵-۱۰) بحث شد به‌دست آورد .

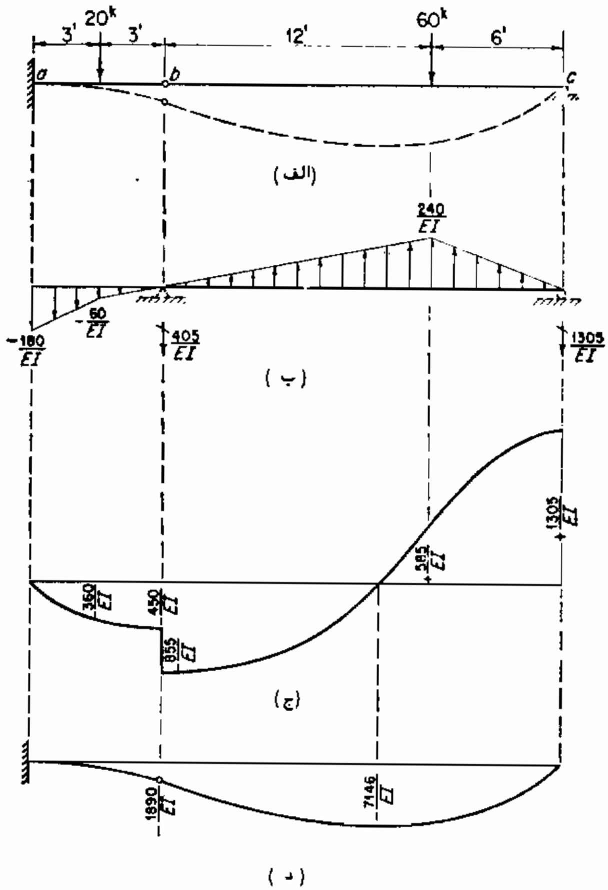
۱۲ - ۱۱ روش تیر مزدوج

از مثالهای مبحث قبل چنین بر می‌آید که محاسبات تغییر مکان هر تیری را می‌توان با به‌کاربردن ترکیب مناسبی از قضایای سطح لنگر و روش بار ارتجاعی محاسبه نمود . روشی را که جهت این ترکیب به‌کار گرفته می‌شود می‌توان با کمی بسط و تغییر روش بار ارتجاعی تدوین نمود . این چنین بسطی را روش تیر مزدوج می‌گویند .

برای این که به‌شرح و استخراج روش جدید بپردازیم تیری را که در مثال (۱۲ - ۱۵) به‌کاربرده شده‌است و درشکل(۱۲-۱۹) به‌صورتی‌متفاوت نشان داده‌شده‌است درنظربگیرید. درشکل (۱۲-۱۹الف)تیر واقعی با بارهای‌واردهٔ برآن دیده‌می‌شود .درشکل مزبور منحنی تغییرمکان با خط‌چین نشان داده‌شده که این منحنی به‌دلیل وجود تکیه‌گاهها و مفصل b دارای خواص ویژه مهمی می‌باشد حتی اگر در این مرحله مقدار تغییر مکانها نامعلوم فرض شوند ۱- در تکیه‌گاه a هم تغییرمکان و هم شیب منحنی ارتجاعی صفر می‌باشد ۲- درتکیه گاه c تغییرمکان صفر بوده ولی منحنی‌خیز می‌تواند هر شیبی که لازم باشد پیدا کنید ۳- در مفصل b هم تغییرمکان وجود دارد و هم این که امکان وجود تغییر شیبی ناگهانی بین طرف چپ و طرف راست مفصل وجود دارد .

هدف انتخاب تیری مزدوج (به‌عبارت دیگر تیر فرضی نظیر تیر واقعی) است به طوری که دارای همان طول تیر واقعی بوده ولی دارای چنان تکیه‌گاه و قیودی باشد که ***هرگاه تیر مزدوج‌را با باری(ارتجاعی)برابر با نمودار M/EI تیرواقعی بارگذاری‌کنیم ،برش(ارتجاعی) تیر مزدوج در هر مقطعی از آن برابر با شیب تیر واقعی در همان مقطع نظیر بوده و لنگر خمشی(ارتجاعی) تیر مزدوج نیز برابر با تغییر مکان مقطع نظیر در تیر واقعی گردد*** . دقت شود که شیبها و تغییرمکانهای تیر واقعی نسبت به‌وضعیت اولیه آنها اندازه‌گیری می‌شود و این بدان معنی است که آنها مقادیر واقعی شیبها و تغییر مکانها می‌باشند . همواره می‌توان فقط با معلوم‌بودن مشخصات منحنی‌خیز تیر واقعی تکیه‌گاهها و سایر خصوصیات اجرایی‌آن تیر، نظیر مفصل b ، چنان تکیه‌گاههای برای تیر مزدوج انتخاب کرد که بتوان‌به‌هدف‌مورد نظر رسید .

برای این که به‌شرح انتخاب تکیه‌گاههای تیر مزدوج بپردازیم تیرشکل (۱۲–۱۹) را در نظر بگیرید . در نقطه a تیرواقعی نه‌شیبی وجود دارد و نه تغییر مکانی بنابراین درآن نقطه از تیر مزدوج نه برشی باید باشد و نه لنگری و این بدان معنی است که نقطه a تیر مزدوج می‌بایستی آزاد و بدون تکیه‌گاه باشد . در نقطه c تیرواقعی شیب وجود دارد ولی تغییرمکان صفراست پس درآن نقطهٔ تیرمزدوج می‌بایستی برش وجود داشته ولی لنگری وجود نداشته‌باشد و این بدان معنی است که نقطه c تیر مزدوج می‌بایستی دارای عکس‌العمل عمودی باشد یعنی دارای تکیه‌گاهی غلتکی باشد . در نقطهٔ b تیر واقعی تغییر مکان وجود داشته و امکان ناپیوستگی در شیب نیز وجود داردبنابراین درآن نقطه از تیر مزدوج می‌بایستی عکس‌العملی عمودی برای ایجاد تغییر ناگهانی برش وجود داشته و همچنین آن نقطه قادر به‌تحمل‌لنگر خمشی نیز باشد و به‌عبارت دیگر نقطه b در تیر مزدوج باید دارای تکیه‌گاهی غلتکی باشد



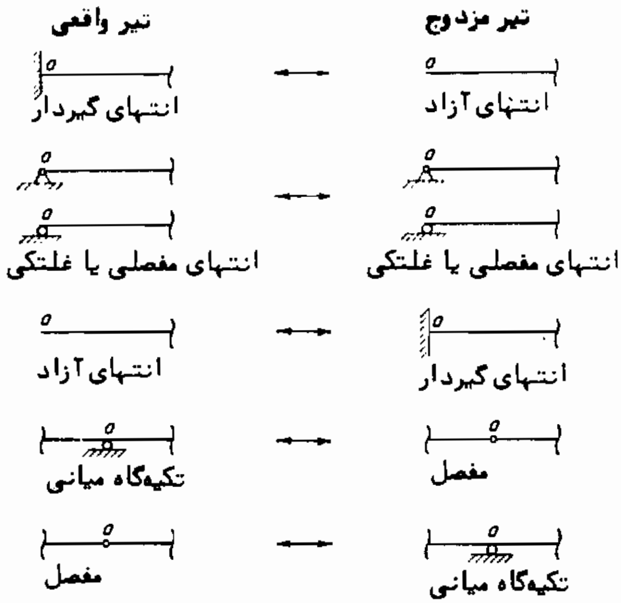
شکل (۱۲–۱۹) استخراج روش تیر مزدوج

و به‌این ترتیب تیرمزدوج مانند آنچه در شکل (۱۲–۱۹ ب) نشان داده‌شده است بارگذاری شده و دارای تکیه‌گاههای نشان داده شده خواهد بود.

حال اگر مانند تیری معین به‌محاسبه عکس‌العملها، برشها و لنگرهای خمشی بپردازیم می‌توان به‌ترسیم نمودارهای برش (ارتجاعی) و لنگر خمشی (ارتجاعی) به‌ترتیب نظیر شکلهای (۱۲–۱۹ ج) و (۱۲–۱۹ د) اقدام کرد. عرضهای این نمودارها به‌ترتیب مقادیر شیب و تغییر مکان مربوط به‌مقطع نظیر تیر واقعی را به‌صورتی که این مقادیر نسبت به‌وضعیت قبل‌از تغییر شکل تیر اندازه‌گیری‌شود معلوم می‌کنند. قرارداد علائم برای بار (ارتجاعی) برش (ارتجاعی) و لنگر خمشی (ارتجاعی) همان قرارداد متعارف تیرهاست که در انتهای بخش (۱۲–۹) وقتی بحث در بارهٔ روش بار ارتجاعی بود بیان شد.

از بحث فوق و بحثهای مشابه دیگری می‌توان به‌قواعدی که منجر به‌انتخاب تکیه‌گاهها و قیدهای تیرهای مزدوج‌می‌شود و در شکل (۱۲–۲۰) نشان داده شده‌است رسید. شرح انتخاب تکیه‌گاهها و قیدهای تیرهای مزدوج متعارف در شکل (۱۲–۲۱) نشان داده شده‌است. ملاحظه می‌شود که تیرهای حقیقی معین همواره دارای‌تیرهای مزدوج معین‌می‌باشند و تیرهای‌حقیقی نامعین به‌نظر می‌رسد که دارای تیرهای مزدوج ناپایدارند در صورتی که این چنین تیرهای مزدوج توسط بار ارتجاعی برابر با نمودار M/EI تیر واقعی به‌حالت تعادل نگهداری‌می‌شود به‌عنوان مثال آخرین حالت نشان داده شده را که در آن تیر حقیقی دارای دو انتهای گیردار می‌باشد و تیر مزدوج نظیر آن دارای دو انتهای کاملا" آزاد است می‌توان ملاحظه نمود. برای هرنوع بارگذاری (مانند بار متمرکزی که‌به‌وسط دهانه اثر کرده‌است) معلوم‌می‌شود که نمودار M/EI منتهی به‌یک بارگذاری ارتجاعی می‌شود که بخودی خود در تعادل بوده و به‌هیچ عکس‌العمل تکیه‌گاهی نیاز ندارد. واقعیت این است که در یک چنین حالاتی‌تعیین شرایط پایداری لازم بارگذاری ارتجاعی منتهی به‌روشی می‌شود که تعیین‌کننده معادلات‌لازم برای لنگرهای گیرداری در آن تیرهای نامعین می‌باشد.

اگربخواهیم بااستفاده از روش تیر مزدوج به‌حل مسایلی‌نظیرآنچه درمثالهای (۱۲–۱۴) و (۱۲–۱۵) و یا (۱۲–۱۶) ذکر شده است بپرازیم باید دقیقا" به‌همان محاسباتی بپردازیم که اگر می‌خواستیم آن مسائل را به‌روشی ترکیب شده ازقضایای سطح لنگر و روش بار ارتجاعی حل کنیم. به‌عبارت دیگر روش تیر مزدوج روش محاسباتی سرراست (بدون پیچ و خم) با علائم قراردادی معلومی را ارائه می‌دهد و در نتیجه اگر از طریق تیرمزدوج به‌محاسبات لازم بپردازیم امکان اشتباهات محاسباتی تقلیل می‌یابد.

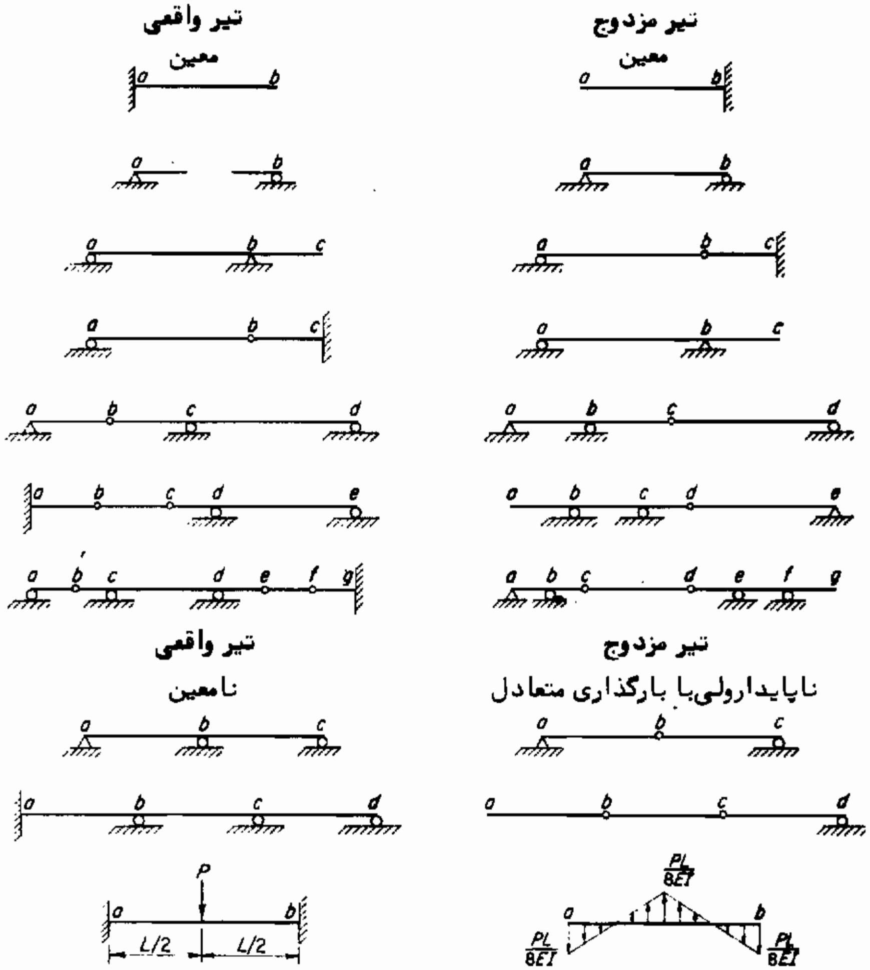


شکل (۱۲–۲۰) انتخاب تکیه‌گاه و جزئیات (قیوات) تیر مزدوج

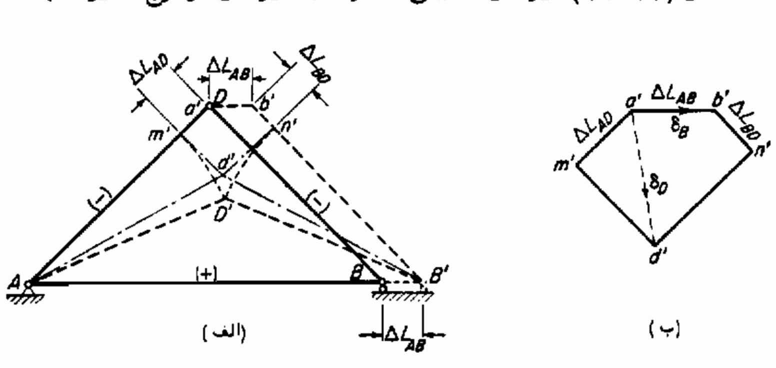
۱۲ – ۱۲ روش ویلیو (ت) – مور

وقتی‌که از روش کارمجازی برای محاسبه تغییرمکان یک خرپا استفاده‌کنیم در هر مرحله فقط امکان محاسبه یک مولفه تغییرمکان یک گره امکان‌پذیر می‌باشد و برای این که مقدار و جهت تغییرمکان واقعی و مطلق یک گره را پیدا کنیم به‌هر دو مولفه افقی و عمودی آن نیاز داریم و بنابراین عموما" برای این که تغییرمکان واقعی هر گره خرپا را محاسبه‌کنیم‌نیاز به‌دوبار کاربرد مستقل کار مجازی خواهیم داشت . با به‌کاربردن یک راه حل ترسیمی به‌نام روش ویلیو (ت) – مور می‌توان به‌محاسبه کلیه تغییرمکانهای واقعی خرپا پرداخت و بدین ترتیب واضح است که این روش در حل برخی از مسائل مربوط به‌تغییرمکانها برتری کاملی خواهد داشت .

اساس روش ویلیو (ت) – مور را می‌توان با بررسی خرپای ساده شکل (۱۲–۲۲) شرح داد. فرض‌کنید که با استفاده از معادلات (۱۲–۵ ب) و با (۱۲–۵ ج) تغییرطول ΔL قطعات را با در نظر گرفتن شرایط معلوم تغییر شکل محاسبه کرده باشیم ، در این صورت می‌توان وضعیت تغییرشکل یافته خرپا را به‌روشی که توسط خط چین در شکل (۱۲–۲۱ الف) نشان داده شده‌است معین کرد ، ابتدا مفصل گره D را آزادکرده و بگذارید که تغییر طول قطعه AB انجام گیرد ، چنین عملی سبب می‌شود که قطعه DB چنانکه نشان داده شده است به‌موازات



شکل (۱۲–۲۱) تیرهای حقیقی متعارف با تیرهای مزدوج نظیر آنها



شکل (۱۲–۲۲) علم‌الحرکات تغییرمکان یک خرپا

خود حرکت کند و در این صورت کلیه نقاط آن قطعه به‌طور افقی به‌سمت راست به‌میزانی برابر با ΔL_{AB} تغییر محل خواهند داد . حال اگر بگذاریم که قطعات AD و BD تغییر طول دهند انتهای D هریک از آنها مانند آنچه نشان داده شده است به‌شرطی که آن قطعات به‌ترتیب در نقاط A و B' به‌قطعه AB متصل باقی بمانند تغییر محل خواهد داد ، قبل از آن که مفصل D دوباره بوجود آید و خرپا بازهم بهم متصل گردد لازم است که کاری کنیم که انتهای D هریک از قطعات AD و BD بار دیگر برهم منطبق شوند و برای چنین عملی می‌بایستی AD را حول A و BD را حول B' دوران دهیم تا این که دوقوس یکدیگر را قطع کنند و بدین‌ترتیب تغییرمکان هر گره را می‌توان با معلوم‌بودن وضعیتهای اولیه و تغییر محل داده گره معلوم نمود .

یک چنین عملی سرراست و بدون اشکال است ولی اعمال آن در مسائل عملی مشکل است‌زیرا عملاً" تغییر مکانها و تغییرطولها از آنچه‌که در این شکل نشان داده شده‌است‌بسیار کوچکترند و لذا برای رسیدن به‌نتیجه‌ای نسبتاً" دقیق ترسیمی اخذ مقیاس بسیار بزرگ لازم خواهد بود . چون تغییرشکلها کوچکند بنابراین‌دوران زاویه‌ای کلیه‌قطعات نیز کوچک‌خواهد بود و در حقیقت این کوچکی به‌حدی است‌که مجاز هستیم فرض کنیم هرنقطه‌ای‌درطی‌دوران یک قطعه در امتداد مماس عمود بر وضعیت اولیه قطعه (بجای طول قوس) به‌طوری که توسط نقطه در شکل (۱۲–۲۲ الف) نشان داده شده است ، تغییرمحل می‌دهد . اگر مقدار ΔL را به‌طور خارج‌از مقیاسی در این شکل بزرگ نکرده بودیم خطوط خط چین و خط نقطه نظیرکلیه موارد عملی بر یکدیگر منطبق می‌شد . با به‌کاربردن فرض فوق قادر هستیم که تغییرمکانهای گرهها را بدون این که نیاز به‌رسم کل‌طول قطعات باشد به‌دست‌آوریم زیرا دیگرنیازی‌به‌رسم قوسهایی حول مراکز دوران نمی‌باشیم .

نمودار ساده شده‌ای که در شکل (۱۲–۲۲ ب) نشان داده‌ایم شبیه قسمتی‌از شکل (۱۲–۲۲ الف) می‌باشد که با همان حروف مشخص شده است .نمودار مزبور تغییر طول کلیه قطعات و مماسهای مرسوم برقوسهای دوران را نشان می‌دهد و بر طبق آن می‌توان‌تغییروضع نسبی گرههای مختلف را پیدا نمود ، چنین نموداری را به‌نام مهندس فرانسوی پیشنهاد ـ کننده آن نمودار ویلیو (ت) می‌نامند . مثل قبل تصور کنید که مفصل D را موقتاً" آزادکرده و بگذاریم به‌نوبت تغییر طولها انجام گیرد . با انتخاب مقیاس مناسبی برای ΔL و مشخص کردن نقاط این نمودار با حروف کوچک گرههای تحتانی نظیر در خرپا نمودار را با تعیین محل نقطه a' شروع می‌کنیم ، در این خرپای ساده می‌دانیم که گره A از نظر موقعیت ثابت مانده و قطعه AB افقی باقی می‌ماند . بنابراین گره B به‌صورت افقی به‌سمت راست‌نسبت‌به A به‌اندازه ΔL_{AB} حرکتی نسبی خواهد داشت که این مقدار با فاصله دو موقعیت نسبی

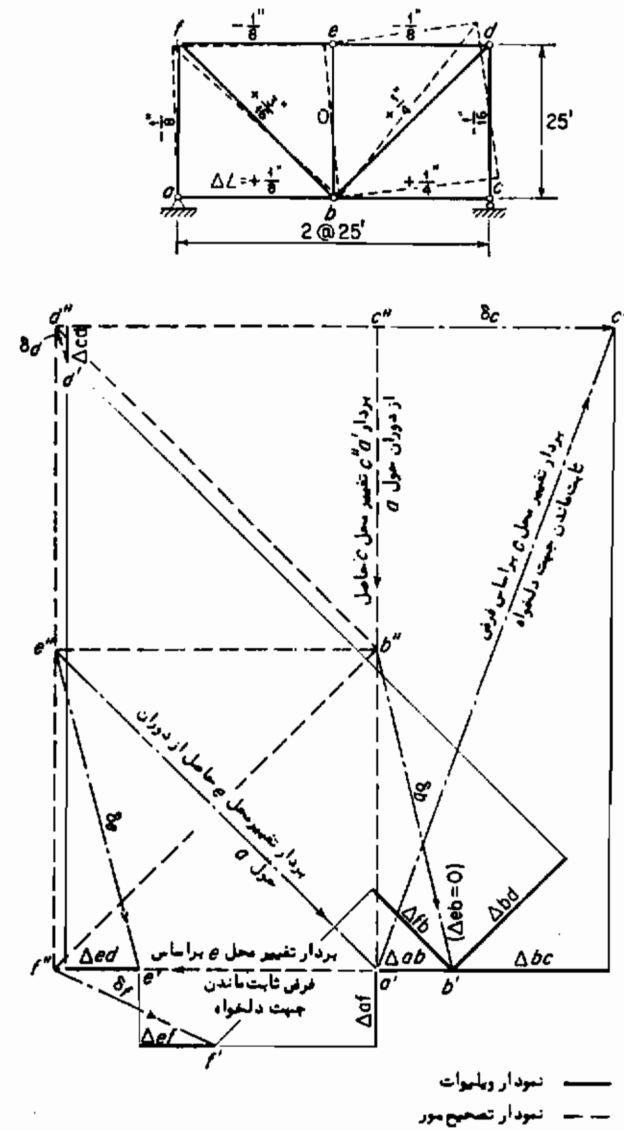
a' و b' نشان داده شده است . به‌دلیل تقلیل طولی برابر با ΔL_{AD} انتهای D قطعه AD به‌موازات AD و نسبت به‌گره A حرکتی به‌طرف پائین و سمت چپ خواهد داشت‌که‌این حرکت را با بردار $\overline{a'm'}$ نشان داده‌ایم . به‌همین‌ترتیب به‌دلیل تقریبی طولی برابر با ΔL_{BD} انتهای D قطعه BD به‌موازات BD نسبت به‌گره B حرکتی به‌طرف پائین‌و سمت راست خواهد داشت که این حرکت را با بردار $\overline{b'n'}$ نشان داده‌ایم .برای این‌که انتهای D قطعات برهم منطبق شوند می‌بایستی که قطعه AD حول A و قطعه BD حول B دوران نمایند ، در طی این دوران فرض می‌شود که انتهای D قطعات در طول مماسهایی که‌به‌ترتیب با بردارهای $\overline{m'd'}$ و $\overline{n'd'}$ نشان داده شده‌است حرکت‌کنند ،ملاحظه‌می‌شود که مماسها به‌ترتیب عمود بر قطعات AD و BD می‌باشند . بردارهای $\overline{a'd'}$ و $\overline{a'b'}$ به‌ترتیب نشان‌دهنده تغییر مکانهای گرههای D و B نسبت به‌گره A می‌باشند و در این حالت چون عملا" موقعیت‌گره A ثابت است این بردارها نشان‌دهنده تغییر محلهای مطلق و حقیقی آن گرهها هستند ، بدیهی است که طول این بردارها را باید با همان مقیاسی که برای رسم ΔL به کار برده‌ایم اندازه‌گیری کنیم .

رسم نمودار ویلیو (ت) برای خرپایی مفصلتر براساس همان روشی که در بالا ارائه شد انجام می‌گیرد . یعنی به‌طور موقتی فرض می‌شود که کلیه قطعات آزاد شوند و پس از آن که فرض شود کلیه قطعات تغییر طولهای خود را انجام دهند بار دیگر و به‌نوبت بهم وصل می‌شوند و به‌این‌ترتیب نمودارویلیو (ت)نتایج تغییرمحل گرهها را نشان می‌دهد . در چنان حالاتی تغییر محل نسبی و حقیقی دو انتهای یک میله برخلاف آنچه برای گرههای A و B از خرپای سازه ارائه شده در بالا وجود داشت معلوم نمی‌شود . در هر صورت نمودار ویلیو (ت) را می‌توان براساس فرضی‌اختیاری به‌این صورت که میله‌ای در راستای خود ثابت‌بماند رسم نمود و به‌عبارت دیگر فرض نمود که تغییر محل نسبی گرههای دو انتهای این میله به موازات آن میله بوده و برابربا تغییر طول آن میله باشد . پس ازآن که موقعیت این دونقطه تثبیت شد نقطه سوم که مربوط به‌گره سوم از مثلث خرپا می‌باشد و توسط این سه گره ایجاد می‌شود ، به‌همان نحوی‌که قبلا" شرح‌داده شد تعیین موقعیت می‌شود .بقیه اسکلت‌را می‌توان گره به‌گره و همواره به‌نحوی که گره انتخابی گره سوم مثلثی باشد که دو گره قبلی آن تثبیت شده است و موقعیت این گره جدید با در نظرگرفتن آن دو گره معلوم شود ادامه داد . اگر راستای فرض شده صحیح بوده باشد بردارهای مربوط به‌برخی از شرایط تغییرمکان معلوم در راستای صحیحی‌خواهند بود و اگر این‌بردارها با شرایط معلوم سازگار نباشند نمودار تصحیحی مور را می‌بایستی به‌نمودار ویلیو (ت) افزود .

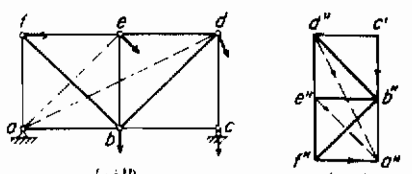
نمودارویلیو (ت)خرپای شکل(۱۲ـ۲۳) را با این فرض‌که گره a از نظر موقعیت ثابت

است و قطعه ab از نظر امتداد ثابت باشد رسم شده است . اگر این امتداد فرض شده صحیح باشد بردارهای رسم شده از نقطه a' به‌نقاط b' ، c' ، d' و غیره‌نشان‌دهنده‌به‌ترتیب‌تغییر مکانهای حقیقی گرههای b ، c ، d و غیره‌خواهند بود .گره c خرپا چون‌یک‌تکیه‌گاه غلتکی است نمی‌تواند تغییر مکان عمودی داشته باشد و فقط اجبار به‌حرکتی‌افقی دارد . ولی بر اساس راستای فرض شده گره c به‌طرف بالا و سمت راست به نحوی که توسط بردار $\overline{a'c'}$ نشان داده شده‌است تغییر مکان یافته و سایر گرهها نیز به‌نحوی که با خط چین روی نمودار خطی خرپا با مقیاسی خارج از اندازه بزرگ نشان داده شده است تغییر محل داده‌اند .این نشان می‌دهد که فرض ثابت ماندن جهت ab فرضی خطاست و حال لازم است که خرپا را کلاً حول a در جهت ساعتگرد دوران دهیم تا این که گره c دوباره برروی تکیه‌گاه برگردد ، مقدارلازم دوران را می‌توان با علم براین که تغییر مکان حقیقی c می‌بایستی برداری افقی باشد معین نمود . تغییرمکان حققی برآیند بردار $\overline{a'c'}$ و بردار نشان‌دهنده تغییر محل c در طول دوران خرپا حول a می‌باشد . در طی دوران زاویه‌ای کوچک خرپا حول a می‌توان فرض نمودکه گره c در طول مماس برقوس حقیقی تغییر محل می‌دهد یعنی عمود بر خط ac خرپا و به‌عبارت‌دیگر در این حالت به‌طورعمودی حرکت‌می‌کند . اگربرداری را که نشان‌دهنده حرکت c نسبت به a در طی دوران می‌باشد توسط‌بردار عمودی $\overline{c''a'}$ که از a' می‌گذرد به‌نمودار اضافه کنیم برآیند بردار $(\downarrow)$ $\overline{c''a'}$ و بردار $(\nearrow)$ $\overline{a'c'}$ باید بردار افقی $(\rightarrow)$ $\overline{c''c'}$ باشد که این بردار، تغییرمکان حقیقی گره c می‌باشد و بدین ــ ترتیب نقطه c'' تثبیت می‌شود .

در طی دوران خرپا حول a نه‌تنها گره c بلکه می‌توان فرض کرد که سایر گرهها نیز در طول عمود بر شعاع مار بر گرهی که مرکز دوران می‌باشد یعنی a حرکت می‌کنند و مقدار این تغییرمحل برابر با حاصل ضرب شعاع در زاویه دوران می‌باشد ، در شکل (۱۲ــ۲۴الف) پیکانهایی که از گرهها رسم شده نشان دهنده جهت تغییر محل گرهها در طی دوران خرپا در جهت ساعتگرد و حول α به‌اندازه زاویه کوچک α می‌باشند .اگر این بردارها را با مقیاس معین و به‌سمت‌گره a'' همان‌طوری که در شکل (۱۲ــ۲۴ ب) نشان داده‌شده‌است رسم کنیم ، تغییر محل گره b در طی دوران با بردار $\overline{b''a''}$ و برای گره c با بردار $\overline{c''a''}$ و برای گره d با بردار $\overline{d''a''}$ و غیره نشان داده می‌شود . پس از آن که مطابق شکل این نقاط با دو پریم را بهم وصل کردیم ، هرقسمتی از این دو شکل را با نظیر خود از شکل دیگر در نظر بگیرید مثلاً مثلث dac را با مثلث $d''a''c''$ ملاحظه کنید ، چون $c''a''$ بر ca عمود است و $d''a''$ نیز بر da عمود می‌باشد بنابراین (زاویه $d''a''c''$)=(زاویه dac) می‌باشد و چون $c''a'' = \alpha ca$ می‌باشد و $d''a'' = \alpha da$ هست پس $c''a''/d''a'' = ca/da$

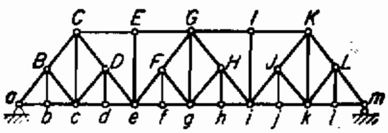


شکل (۱۲–۲۳) روش ویلیو (ت) — مور



شکل (۱۲–۲۴) نمودار تصحیح مور

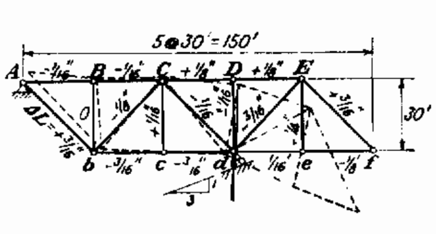
f' ، e' و E' را در طرف چپ و به‌همین ترتیب نقاط H' ، h' ، i' و I' را در طرف راست می‌توان بدون اشکال تعیین موقعیت نمود ولی با استفاده از آنچه قبلاً گفته شد دیگر بیشتر از این نمی‌توان پیش رفت . یکی از طرقی که توسط آن می‌توان براین مشکل غلبه کرد این است که با علم بر این که تغییر محل نسبی گرههای c و e در راستای موازی با CDe برابر است با مجموع تغییر طول میله‌های CD و De و به‌همین ترتیب تغییر محل نسبی گرههای c و e در طول cde برابر است با مجموع تغییر طول cd و de به‌طور موقت گرههای D و d را نادیده می‌گیریم و میله‌های cD و Dd را حذف می‌کنیم و نمودار را جهت تعیین محل نقاط e' و E' ادامه می‌دهیم و پس از آن که این نقاط را تعیین محل کردیم به‌میله‌های حذف شده بر می‌گردیم و نقاط D' و d' را تعیین موقعیت می‌نمائیم اگر این عمل به‌طور صحیحی انجام گرفته باشد هرگاه محل e' را از طریق D' و d' پیدا کنیم می‌بایستی بر موقعیت موجود نقطه e' منطبق گردد . حال می‌توان نقاط B' ، b' و a' را بدون اشکال تعیین موقعیت نمود و نقاط باقی مانده در طرف راست iI را به‌همان طریقی که برای نقاط موجود درطرف چپ Ee شرح داده شد می‌توان تعیین محل نمود .



شکل (۱۲–۲۶) خرپای مرکب

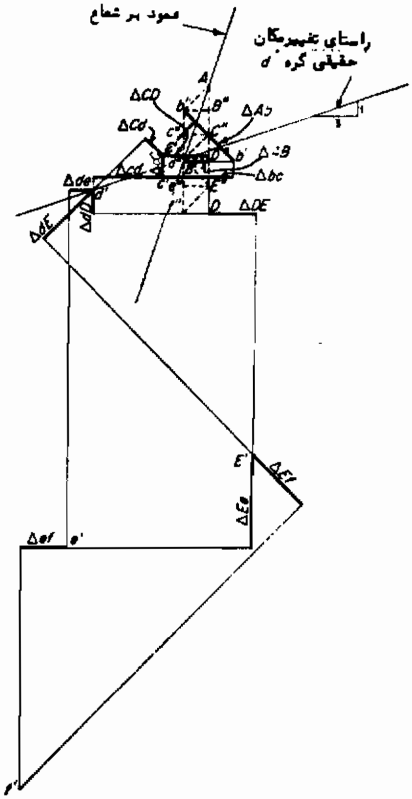
اعمال روش ویلیو (ت) مور برای قوس سه مفصل نیاز به‌فنی متفاوت دارد که در مثال (۱۲–۲۱) شرح داده شده است .

مثال ۱۲–۱۹= برای این خرپا نمودار ویلیو (ت) مور را رسم کنید .



فرض کنید نقطه c در جای خود ثابت بماند

فرض کنید که راستای میله cC ثابت بماند .



نقطه	تغییر مکان	
	افقی	عمودی
A	0	0
B	0.063″ ←	0.130″ ↓
C	0.125″ ←	0.050″ ↓
D	0	0.125″ ↓
E	0.125″ →	0.700″ ↓
b	0.125″ →	0.130″ ↓
c	0.063″ ←	0.112″ ↓
d	0.250″ ←	0.083″ ↓
e	0.313″ ←	0.962″ ↓
f	0.438″ ←	1.513″ ↓

بحث :

با فرض این‌که گره c در جای خود ثابت می‌ماند و راستای میله cC نیز تغییر نمی‌کند بردارهائی که در روی نمودار ویلیو (ت) از c' به A' ، B' ، b' ، C' و غیره رسم می‌گردند نشان دهنده تغییر محل گرههای A ، B ، b ، C و غیره می‌باشند در چنین حالتی تغییر مکان برآیند گرهها با مقیاسی خارج از اندازه بزرگ مانند آنچه در نمودار خطی نشان‌داده شده‌است خواهد بود .واضح است که فرضهای ثابت‌بودن راستا و محل گره درست نمی‌باشند زیرا گره A از مفصل تکیه‌گاهی جدا شده و تغییر محل گره d نیز به‌موازات سطح تکیه‌گاه نمی‌باشد ، ولی با وجود این معلوم است که وضعیتهای فرض شده زیاد هم خطا نیستند .

گره A را می‌توان به‌مفصل تکیه‌گاهی برگرداند ، هرگاه خرپا را مانند جسمی صلب به‌موازات بردار $\overline{A'c'}$ به‌اندازه مقدار آن بردار با در نظر گرفتن مقیاس آن انتقال دهیم . در طی این انتقال کلیه گرهها به‌اندازه‌ای که بردار $\overline{A'c'}$ معلوم می‌کند تغییر محل می‌دهند و پس از این انتقال تغییرمحل گرهی نظیر E برآیند برداری ،دوبردار $\overline{A'c'}$ و بردار $\overline{c'E'}$

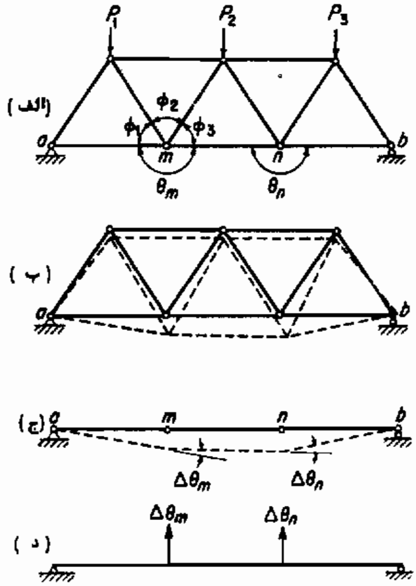
معینی برای گره c نشان می‌دهد و به‌همین ترتیب بردار $\overline{e'c'_R}$ در نمودار راست تغییر مکان دیگری برای گره c مشخص می‌کند و اگر فرضهای اولیه صحیح بوده باشند تغییر مکان گره c چه از طریق نمودارچپ چه از طریق نمودار راست یکی‌خواهد بود .چون این بردارها معادل نیستند لذا می‌بایستی نیمه چپ را حول a به‌طوری که گره c در جهت عمود بر شعاع ac حرکت کند دوران دهیم و به‌همین ترتیب نیمهٔ راست را حول e به‌طوری‌که گره c درجهت عمود بر شعاع ec حرکت کند دوران دهیم .این دورانها می‌بایستی چنان باشند که سبب شوند تغییرمکان برآیند گره c برای هر دو نیمه یکسان گردد . این مقادیر به‌طوری که در نمودار برداری میانی نشان داده شده است معین می‌شوند در این نمودار بردار $\overline{c'_Lc''}$ برای نیمه چپ و بردار $\overline{c'_Rc''}$ برای نیمه راست می‌باشد ، بنابراین این بردارها یعنی $\overline{c'_La'}$ و $\overline{c'_Re'}$ به‌ترتیب اساس شروع و رسم نمودارتصحیحی مور برای نیمه‌های چپ و راست‌راتشکیل می‌دهند . حال می‌توان برای تعیین تغییر مکانهای حقیقی گرههای مختلف از بردارهائی‌که نقاط با دو پریم را به‌نقاط با یک پریم وصل می‌کنند استفاده نمود .

۱۲ ــ ۱۴ روش سلسله میله‌ها

روش سلسلهٔ میله‌ها از این نظر که توسط‌آن می‌توان تغییر مکان گرههای مختلف یک خرپا را همزمان معین نمود شبیه روش ویلیو (ت) مور می باشد . این روش اولین بار توسط مولر ــ برسلا Muller-Breslau ارائه گردید و اساسا" تطبیق کاربرد روش بار ارتجاعی بر خرپا به‌عوض تیرها می‌باشد .

برای این که به‌استخراج اساس این روش بپردازیم ، خرپای ساده شکل (۱۲ــ۲۷الف) را که درآن تغییرمکان عمودی کلیه نقاط پانلی میله‌های اصلی‌تحتانی مورد محاسبه‌می‌باشد در نظر بگیرید . با درنظرگرفتن آنچه سبب تغییرشکل می‌گردد تغییر طول اعضاء را می‌توان از معادلات (۱۲ــ۵ الف)(۱۲ــ۵ ب)و (۱۲ــ۵ ج)محاسبه‌نمود .درنتیجه شکل‌خرپا به‌صورتی زوایای مثلثهای خرپا به‌مقدار بسیار ناچیزی تغییر می‌کنند و در نتیجه شکل خرپا به‌صورتی که با خط‌چین در شکل (۱۲ــ۲۷ ب)با مقیاسی خارج ازاندازه نشان داده شده است تغییر می‌کند ، تغییر زوایای مثلثها را می‌توان به‌سادگی به‌کمک روابطی که در پائین بیان می‌شود محاسبه نمود . میله‌های تحتانی خرپا را می‌توان ازآن جدا نموده و شکل تغییر مکان یافته آن را به‌صورت شکل (۱۲ــ۲۷ ج) مورد بررسی قرار داد . بلافاصله به‌نظر می‌رسد که نحوهٔ محاسبه شکل تغییرمکان یافتهٔ میله‌های‌تحتانی شبیه محاسبه منحنی ارتجاعی یک‌تیرمستقیم توسط سطح لنگر و یا روش بار ارتجاعی می‌باشد . فقط در حالت مربوط به‌تیر ، منحنی خیز

یک منحنی صاف و پیوسته می‌باشد و شیب آن به‌تدریج تغییر می‌کند در صورتی که منحنی تغییر مکان در این میله‌های تحتانی از چند خط صاف که فقط در گرههای خرپا تغییر شیب می‌دهند تشکیل شده است . این سری میله‌های مستقیم ، سلسله میله‌ها نامیده می‌شوند و به‌همین دلیل این روش را به‌این اسم می‌خوانند .



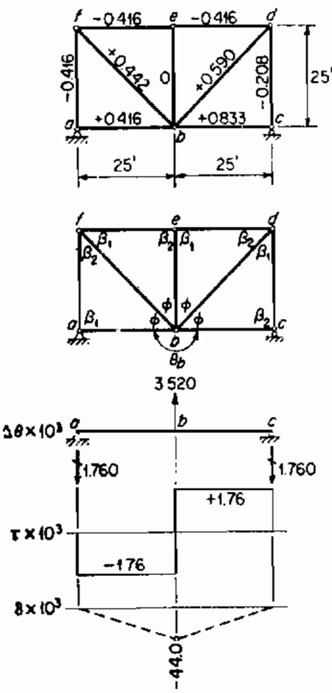
شکل (۱۲-۲۷) اساس روش سلسلهٔ میله‌ها

در یک تیر ، تغییر شیب بین دو مماس بر انتهاهای یک جزء کوچک dx از منحنی‌خیز برابر است با $M/EI\,dx$ که به‌نوبه‌خود برابربا جزء زیرنمودار M/EI مربوط به‌جزء می‌باشد در گرهی مثل m ازسلسله میله‌ها تغییرشیب بین میله‌های مجاوریکدیگر برابر است باتغییر زوایه θ_m که عبارت‌از $\Delta\theta_m$ می‌باشد و بین‌گرهها تغییر شیبی‌وجود ندارد و بنابراین‌وقتی از روش سطح لنگر در سلسله میله‌ها استفاده می‌شود نمودار M/EI را می‌بایستی با چند عرض که هریک از آنها در یکی‌از گرههای میانی برابر با $\Delta\theta$ در آن گره می‌باشد جایگزین نمود ، لذا بار ارتجاعی که برای سلسله میله‌ها به‌کار می‌رود شامل چندین بار متمرکز نظیر شکل (۱۲-۲۷ د) می‌گردد .فنی که در کاربرد سطح لنگر و یا روش بار ارتجاعی برای تعیین شیبها و تغییرمکانها در سلسله میله‌ها به‌کار برده می‌شود دقیقاً" نظیر حالت تیرهامی‌باشد. زاویه θ را می‌بایستی زاویه‌ای در نظر گرفت که طرف پائین‌تر دومیلهٔ مجاور یکدیگر تشکیل می‌دهد ، مقدار $\Delta\theta$ هرگاه θ افزایش یابد مثبت در نظرگرفته می‌شود (بنابراین نشان‌دهنده

منحنی تغییرمکان می‌باشد که می‌باید نسبت به‌میله‌های اصلی مربوط به‌نقاط تکیه‌گاهی ایـن تیر خیالی اندازه‌گیری شوند. به‌این ترتیب درمثال (۱۲–۲۳) که میله‌های اصلی af دوران می‌نمایند تغییر مکانهای حقیقی را می‌توان با رسم خط تغییر مکان صفر که از نقاط a و d می‌گذرد و تصحیح تغییر مکانها با اندازه‌گیری آنها از میله‌های اصلی af به‌طوری که شرح داده شد معین نمود.

مثال ۱۲ ـ ۲۲ = با استفاده ازروش سلسله میله‌ها مولفه عمودی تغییرمکان گره b از خرپای شکل (۱۲–۲۳) را معین کنید.

اعدادی که روی نمودار خطی (خرپا) نشان داده شده است عبارتند از $e \times 10^3$ کلیـه کرنشها را به‌منظور دستیابی به‌اعدادی سهل‌المحاسبه‌تر در ۱۰۰۰ ضرب کرده‌ایم. بدین ـ جهت برای این که نتایج نهایی جوابهای حقیقی باشند آنها را می‌بایستی بر ۱۰۰۰ تقسیم نمود.



∡	$e_2 - e_1$	col β_1	$e_2 - e_3$	col β_2	$\Delta\phi$
abf	$-0.416 - 0.416$	0	$-0.416 - 0.442$	1	-0.858
fbe	$-0.416 - 0.442$	1	$-0.416 - 0$	0	-0.858
ebd	$-0.416 - 0$	0	$-0.416 - 0.590$	1	-1.006
dbc	$-0.208 - 0.590$	1	$-0.208 - 0.833$	0	-0.798
$\Sigma\Delta\phi$					-3.520

چون در این حالت $\Delta\theta$ از نظر مقدار برابر ولی از نظر علامت در خلاف جهت $\Sigma\Delta\phi$ در گره b می‌باشد داریم:

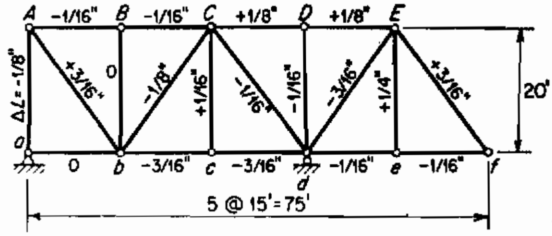
$$\therefore\ \Delta\theta_b = +3.520$$

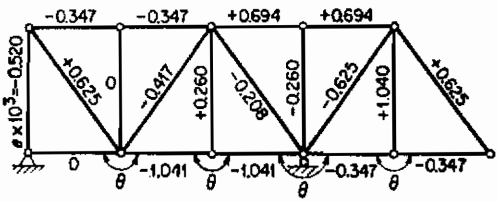
و بنابراین بار ارتجاعی رو به‌بالا می‌باشد.

$$1.760 \times 25 = -44.0$$

$$\therefore\ \delta_b = \underline{\underline{0.044\ ft}} \quad \text{(به‌سمت پائین)}$$
$$= \underline{\underline{0.528\ in.}}$$

مثال ۱۲ ـ ۲۳= با استفاده از روش سلسلهٔ میله‌ها مولفه‌های عمودی تغییر مکانهای مفاصل تخت پائین را پیدا کنید .





برای راحتی عمل e را در 10^3 ضرب کنید و سپس نتایج نهایی را برای به دست آوردن پاسخ‌های حقیقی بر 10^3 تقسیم کنید .

∡	$(e_3-e_1)\times 10^3$ (1)	$\cot \beta_1$ (2)	(1) × (2)	$(e_3-e_2)\times 10^3$ (3)	$\cot \beta_2$ (4)	(3) × (4)	$\Delta\phi \times 10^3$	$\Delta\theta \times 10^3$
abA	−0.520−0 = −0.520	0	0	−0.520−0.625 = −1.145	1.3̇	−1.527	−1.527	
AbB	−0.347−0.625 = −0.972	0.75	−0.729	−0.347−0 = −0.347	0	0	−0.729	+1.301
BbC	−0.347−0 = −0.347	0	0	−0.347+0.417 = +0.070	0.75	+0.052	+0.052	
Cbc	+0.260+0.417 = +0.677	1.3̇	+0.903	+0.260+1.041 = +1.301	0	0	+0.903	
bcC	−0.417+1.041 = +0.624	0.75	+0.468	−0.417−0.260 = −0.677	1.3̇	−0.903	−0.435	+0.435
Ccd	−0.208−0.260 = −0.468	1.3̇	−0.624	−0.208+1.041 = +0.833	0.75	+0.625	0	
cdC	+0.260+1.041 = +1.301	0	0	+0.260+0.208 = +0.468	1.3̇	+0.624	+0.624	
CdD	+0.694+0.208 = +0.902	0.75	+0.676	+0.694+0.260 = +0.954	0	0	+0.676	−4.509
DdE	+0.694+0.260 = +0.954	0	0	+0.694+0.625 = +1.319	0.75	+0.989	+0.989	
Ede	+1.040+0.625 = +1.665	1.3̇	+2.220	+1.040+0.347 = +1.387	0	0	+2.220	
deE	−0.625+0.347 = −0.278	0.75	−0.208	−0.625−1.040 = −1.665	1.3̇	−2.220	−2.428	+2.252
Eef	+0.625−1.040 = −0.415	1.3̇	−0.553	+0.625+0.347 = +0.972	0.75	+0.729	+0.176	

با به‌کاربردن تیری خیالی به‌دهانه

$$\Sigma M_f, \quad \overset{\curvearrowleft}{+}$$

$$\begin{aligned} 1.301 \times 4 &= 5.204 \\ 0.435 \times 3 &= +1.305 \\ -4.509 \times 2 &= -9.018 \\ 2.252 \times 1 &= +2.252 \\ 5\,|&\overline{-0.257} \\ \overline{0.521}\downarrow \qquad & \underline{0.051}\updownarrow \end{aligned}$$

$$\Sigma M_a, \quad \overset{\curvearrowleft}{+}$$

$$\begin{aligned} 1.301 \times 1 &= +\ 1.301 \\ 0.435 \times 2 &= +\ 0.870 \\ -4.509 \times 3 &= -13.527 \\ 2.252 \times 4 &= +\ 9.008 \\ 5\,|&\overline{-\ 2.348} \\ &\underline{0.470}\updownarrow \end{aligned}$$

میله‌ها ، بارگذاری مذکوربرابر خواهد بودبا تغییر زاویه $\Delta\theta_m$ باملحوظ داشتن‌دخالتهای کرنش در قطعات مجاور سلسله میله‌ها ، در این تغییر زاویه و بهاین ترتیب اگر بار ارتجاعی تغییر یافته در گره m با W_m نشان داده شود داریم :

$$W_m = \Delta\theta_m - e_L \tan\alpha_L + e_R \tan\alpha_R$$

در این رابطه e_L و α_L به‌ترتیب نشان دهنده کرنش و شیب اولیه قطعه مجاور سلسه میلـــه واقع در سمت چپ گره m نسبت به‌افق می‌باشد e_R و α_R به‌همان نحو نشان دهنـــده مقادیر فوق برای قطعه مجاور درسمت راست گره m می‌باشند $\Delta\theta_m$ بیان‌کننده تغییر زاویـه θ_m با شرحی که در بالا داده شد می‌باشد یعنی زاویه‌ای که بین‌کنارهای تحتانی دو میلــه مجاور از سلسله میله‌ها تشکیل می‌شود (نظیـر θ_b ، θ_c ، θ_d درشکل (۱۲ـ۲۰الف)مترجم) برای این‌که معادلات به‌طریقی صحیح‌تنظیم گردد هماهنگی و صحت علائم اهمیت بسیاردارد .

W_m زمانی مثبت است که نشان دهنده بار ارتجاعی به‌سمت بالا باشد .

$\Delta\theta_m$ زمانی مثبت است که θ_m ازدیاد یابد .

e زمانی مثبت است که قطعه ازدیاد طول یابد .

α زمانی مثبت است که شیب اولیه قطعه سمت راست رو به‌بالا باشد .

مثال ۱۲ ــ ۲۴= با استفاده از روش سلسله میله‌ها مولفه‌های عمودی تغییر مکانهـای مفاصل تحتانی را محاسبه کنید .

$\measuredangle$	$(e_1 - e_2) \times 10^3$ (1)	$\cot\beta_1$ (2)	(1) × (2)	$(e_3 - e_2) \times 10^3$ (3)	$\cot\beta_2$ (4)	(3) × (4)	$\Delta\phi \times 10^3$	$\Delta\theta \times 10^3$
AbB	$-0.348-0.490=-0.838$	1.0	-0.836	$-0.348-0=-0.348$	0	0	-0.838	
BbC	$-0.348-0=-0.348$	0	0	$-0.348+0.490=+0.142$	1.0	$+0.142$	$+0.142$	$+0.883$
Cbc	$-0.260+0.490=+0.230$	1.0	$+0.230$	$-0.260-0.990=-1.250$	$0.\dot{3}$	-0.417	-0.187	
bcC	$-0.490-0.990=-1.480$	0.500	-0.740	$-0.490+0.260=-0.230$	1.0	-0.230	-0.970	$+0.838$
Ccd	$+0.245+0.260=+0.505$	1.0	$+0.505$	$+0.245-0.990=-0.745$	0.500	-0.373	$+0.132$	
cdC	$-0.260-0.990=-1.250$	$0.\dot{3}$	-0.417	$-0.260-0.245=-0.505$	1.0	-0.505	-0.922	
CdD	$-0.695-0.245=-0.940$	1.0	-0.940	$-0.695+0.348=-0.347$	0	0	-0.940	$+3.293$
DdE	$-0.695+0.348=-0.347$	0	0	$-0.695-0.736=-1.431$	1.0	-1.431	-1.431	

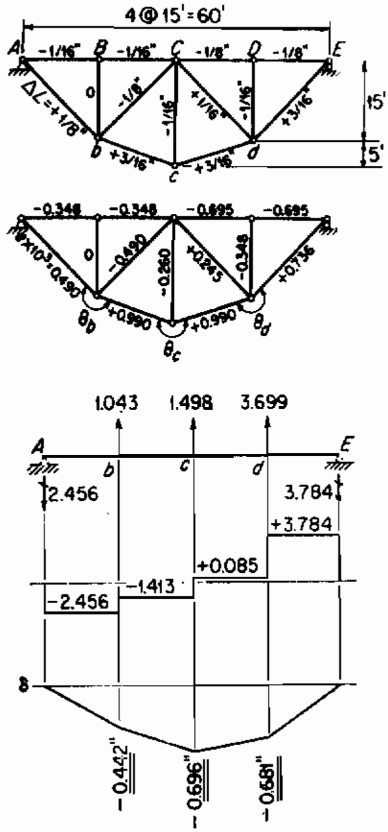
$$W_m = \Delta\theta_m - e_L \tan\alpha_L + e_R \tan\alpha_R.$$

$$W_b \times 10^3 = +0.883 - (0.490)(-1.0) + (0.990)(-0.\dot{3}) = +1.043$$

$$W_c \times 10^3 = +0.838 - (0.990)(-0.\dot{3}) + (0.990)(0.\dot{3}) = +1.498$$

$$W_d \times 10^3 = +3.293 - (0.990)(0.\dot{3}) + (0.736)(1.0) = +3.699$$

به‌تعیین عکس‌العملهای تیر خیالی AE می‌پردازیم .



$$\Sigma M_E,$$
$$1.043 \times 3 = 3.129$$
$$1.498 \times 2 = 2.996$$
$$3.699 \times 1 = 3.699$$
$$4)\underline{9.824}$$
$$6.240\uparrow \qquad \underline{2.456}\downarrow$$

$$\Sigma M_A,$$
$$1.043 \times 1 = 1.043$$
$$1.498 \times 2 = 2.996$$
$$3.699 \times 3 = 11.097$$
$$4)\underline{15.136}$$
$$\underline{3.784}\downarrow$$

		$0 = \delta_A \times 10^3$
-2.456	$-2.456 \times 15 =$	-36.84
$+1.043$		$-36.84 = \delta_b \times 10^3$
-1.413	$-1.413 \times 15 =$	-21.20
$+1.498$		$-58.04 = \delta_c \times 10^3$
$+0.085$	$+0.085 \times 15 =$	$+1.28$
$+3.699$		$-56.76 = \delta_d \times 10^3$
$+3.784$	$+3.784 \times 15 =$	$+56.76$
-3.784		$0 = \delta_E \times 10^3$
0		

مثال (۱۲-۲۴) کاربرد این روش را در مورد سلسله میله‌ای که دارای وضعیت اولیه مستقیم‌الخطی نمی‌باشد شرح می‌دهد . تذکر این مطلب مهم است که درچنین‌حالاتی برش حاصل از بار ارتجاعی در تیر خیالی دارای تعبیر خاصی نمی‌باشد ، بدیهی است در مورد حالاتی که سلسله میله‌ها دارای شکل اولیه مستقیم‌الخط می‌باشند ،برش نشان دهنده شیب قطعات در سلسله‌میله‌های تغییرمکان یافته می‌باشد .هرگاه سلسله میله‌ها در حالت کلی‌شکل چندضلعی داشته باشد بار ارتجاعی توسط معادله (۱۲-۱۲) بیان می‌گردد .این‌رابطه‌به‌این طریق محاسبه شدکه لنگر خمشی تیر خیالی سبب تغییرمکان سلسله میله‌ها می‌شدولی‌تعبیری برای برش حاصل ازاین بار ارائه نشد .صحت این مطالب‌را می‌توان به‌توسط محاسبات‌انجام شده در مثال (۱۲-۲۴) بررسی نمود . در این حالت چون میلهٔ Bb تغییر طول نمی‌دهد . تغییرمکان عمودی گرههای B و b یکسان خواهند بود . دوران میله AB در جهت ساعتگرد

برابر با 0.002456 رادیان می‌باشد زاویه BAb به‌اندازه 0.000490 رادیان کم می‌شود ، بنابراین میله Ab در جهت ساعتگرد به‌اندازهٔ 0.001966 رادیان دوران خواهد کرد و دیده می‌شود که این مقدار برابر با برش که مساوی 0.002456 می‌باشد نیست . به‌همین ترتیب‌معلوم می‌شود که هیچ یک از سایر دورانهای قطعات سلسلهٔ میله‌ها نیز برابر با برشهای نظیر خود نیستند . بدیهی‌است با معلوم‌بودن دوران میله Ab دوران سایرمیله‌های سلسله را می‌توان با دنبال‌کردن گره به‌گره سلسله میله‌ها و بااستفاده از مقادیر $\Delta\theta$ که قبلاً معلوم شـده است محاسبه نمود . به‌این منوال دوران میلهٔ bc برابربا 0.001083 رادیان و در جهت عقربه‌های ساعت و دوران cd برابربا 0.000245 رادیان درجهت عقربه‌های ساعت و بالاخره dE برابر با 0.003048 رادیان در جهت عکس عقربه‌های ساعت محاسبه می‌گردد .

روش سلسله میله‌ها را می‌توان به‌همین منوال به‌سادگی بر هر خرپای ساده‌ای اعمـال نمود . سلسله میله‌های موردنظر را به‌طوری انتخاب می‌کنیم که گرههایی را که تغییرمکان عمودی آنها مورد محاسبه باشد به‌یکدیگر وصل کند بار ارتجاعی هرسلسله‌میله‌ای را که‌بدین طریق تعیین شده باشد می‌توان‌از معادله (۱۲ـ۱۲)محاسبه نمود . درحالات‌خاصی‌که سلسله میله‌ها دارای وضعیت اولیه مستقیم و افقی می‌باشند (همان‌طوری که در مثالهای (۱۲ـ۲۲) و (۱۲ـ۲۳ شرح داده شد) برای کلیه میله‌ها α صفر بوده و W_m برابر بـا $\Delta\theta_m$ می‌گردد . بایستی ذکرنمود که معادله (۱۲ـ۱۲) را نمی‌توان در مورد سلسله‌میله‌ای که دارای قطعه‌ای عمودی باشد به‌کار برد زیرا درآن صورت $\alpha = 90°$ و $\tan\alpha = \infty$ می‌گردد ،در هر صورت قراردادن چنان قطعه‌ای در سلسله میله‌ها هرگز لازم نمی‌گردد زیرااختلاف‌بین‌تغییر مکان عمودی دو انتهای چنان قطعه‌ای عمودی برابر با تغییر طول آن قطعه می‌باشد .

این روش را در مورد خرپاهای مرکب نظیر آنچه در شکل (۱۲ـ۲۶) نشان داده شـده است نیز می‌توان اعمال کرد ولی درچنین حالاتی لازم‌است میله‌هائی‌خیالی بین گرههایی نظیر D و E ، E و F و غیره درنظرگرفت تا بتوان خرپارا به‌مثلثهایی تبدیل نمودوتغییرات زوایا را محاسبه کرد . تغییر طول هریک از این میله‌ها را می‌توان با محاسبه تغییر مکان‌نسبی گرههای واقع در انتهای میله مورد نظر با استفاده از روش کار مجازی محاسبه نمـود . ایـن روش را می‌توان همچنین بر قوسهای سه‌مفصلی نظیر مثال (۱۲ـ۲۱) نیز اعمال کرد .در این مورد نیز لازم است قبل از این که تغییرات زوایا مورد محاسبه قرار گیرد میله‌ای خیالی بین C و D در نظر گرفت ، تغییر طول این میله خیالی برابر با تغییـرمکان نسبی گرههای C و D می‌باشد که به‌همان صورت مذکور می‌توان آن را به‌کمک روش کار مجازی محاسبه نمود .

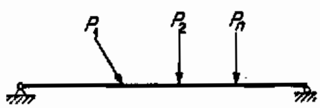
۱۲ــ ۱۵ قضیه دوم کاستیگلیانو

درسال ۱۸۷۹ کاستیگلیانو نتایج تحقیقات پرکار خود را که مربوط به‌سازه‌های نامعین بود منتشرکرد ، او ازدو قضیه که به‌نام خود او نامیده‌می‌شوند استفاده کرده بود . قضیه دوم کاستیگلیانو را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد .

در هر سازه‌ای که از مصالح ارتجاعی ساخته شده و از قانون هوک تبعیت کند به‌شرطی که درجه حرارت ثابت بوده و این سازه دارای تکیه‌گاههای ثابت و غیرقابل تغییرشکلی‌باشد مشتق نسبی درجه اول انرژی تغییرشکل آن سازه نسبت به‌هرنیرویی برابر خواهد بود با تغییرمکان نقطهٔ اثر آن نیرو در جهت خط‌اثر آن (نیرو) .

در این‌عبارت کلمات نیرو و تغییرمکان‌را می‌شودبه‌ترتیب به‌معانی‌زوج و دوران‌زاویه‌ای نیز توجیه نمود . علاوه بر آن باید طی تغییرشکل سازه ، شکل هندسی آن تغییر محسوسی ننماید بنابراین کاربرد این قضیه محدود به‌حالاتی است که جمع تغییر مکانها منطقی و ممکن باشد .

برای استخراج این قضیه ، سازه‌ای بنظیر تیر شکل (۱۲ــ۳۰) را که شرایط فوق‌الذکر را حائزمی‌باشد در نظربگیرید ،فرض کنیدکه به‌صورت تدریجی توسط‌بارهای $P_1, P_2, \ldots, P_n$ بارگذاری شده باشد در این صورت کار خارجی انجام شده توسط‌این نیروها (که‌آن‌را با W_E نشان می‌دهیم) تابعی از این نیروها خواهد بود . برطبق اصل بقای انرژی می‌دانیم که در



شکل (۱۲ــ۳۰) استخراج قضیه دوم کاستیگلیانو

هر سازهٔ ارتجاعی که تحت اثر دستگاه باری به‌صورت تعادل درآمده باشد کار داخلی یا انرژی تغییرشکل ذخیره شده درسازه برابر است با کارخارجی که درطی اثر تدریجی بارهای مؤثر بر سازه انجام می‌گیرد اگر کار داخلی و یا به‌عبارت دیگر انرژی تغییرشکل را با W_I نشان دهیم ، می‌توان رابطه زیر را نوشت :

$$W_I = W_E = f(P_1, P_2, \ldots, P_n) \qquad \text{(الف)}$$

حال فرض کنید نیروی P_n به‌اندازه کوچک dP_n افزایش مقدار پیدا کند ، در این صورت کار

داخلی افزایش یافته و مقدار جدید آن خواهد شد .

$$W'_I = W_I + \frac{\partial W_I}{\partial P_n} dP_n \qquad (ب)$$

مقدار کل انرژی داخلی مستقل از ترتیب اثر نیروهاست و فقط بستگی به‌مقدار نهایی نیروها دارد و علاوه بر این‌اگر مصالح سازه از قانون هوک تبعیت کند ،تغییر شکلها و تغییرمکانهای حاصل از بارهای P_1 ، P_2 ، P_n و بنابراین کار انجام شده توسط‌آن نیروها مقدار ثابتی می‌باشد و ربطی به‌این مطلب ندارد که سازه قبلا" تحت اثر بارهای دیگری بوده باشد یا نه البته این تازگی ندارد که تنش کلی حاصل از کلیه نیروها در حد ارتجاعی باقی بماند ، بنابراین اگر نیروی بی‌نهایت کوچک dP_n ابتدا وارد شود و نیروهای $P_1, P_2, \ldots P_n$ بعداز آن اثر نمایند مقدار نهایی کار داخلی بازهم به‌همان مقدار بیان شده توسط معادلـه (ب) خواهد بود .

اگر بار dP_n در وهله اول اثر کند سبب تغییرمکان بی‌نهایت کوچکی برابـا $d\delta_n$ خواهد نمودکه کار خارجی حاصل در طی‌اثر dP_n بی‌نهایت کوچک درجه دوم بودمومی‌توان از آن صرف‌نظر نمود . حال اگر نیروهای P_1،P_2،. . . P_n اثر کنند کار خارجی‌انجام‌گرفته توسط‌این نیروها به‌دلیل این که dP_n قبلا" وجود داشته تغییر نخواهد کرد لذا مقدار آن کار برابربا مقدار W_E برطبق معادله(الف) خواهد بود . ولی درطی‌اثراین‌نیروها نقطه‌اثـر p_n به‌مقداری برابر با δ_n در راستای خط‌اثر این نیرو تغییرمکان خواهد داد و بنابـراین dP_n در طی این تغییرمکان کاری خارجی برابر با $(\delta_n)\,(dP_n)$ انجام خواهد داد . اگرکل مقدار کار خارجی انجام شده توسط‌کل دستگاه در طی این بارگذاری را با W'_E نشان‌دهیم خواهیم داشت :

$$W'_E = W_E + dP_n\delta_n \qquad (ج)$$

و چون بر طبق اصل بقای انرژی W'_E برابر با W'_I می‌باشد لذا

$$W_E + dP_n\delta_n = W_I + \frac{\partial W_I}{\partial P_n} dP_n \qquad (د)$$

و ازآنجا که W_E برابر با W_I می‌باشد ، معادله (د) به‌صورت زیر خلاصه می‌گردد :

$$\frac{\partial W_I}{\partial P_n} = \delta_n \qquad (۱۲-۱۳)$$

این رابطه بیان ریاضی قضییه دوم کاستیگلیانو می‌باشد .

برای استفاده از قضییه دوم کاستیگلیانو ابتدا لازم است که عباراتی‌برای انرژی تغییر شکل ذخیره شده و یا برای‌کار داخلی انجام‌شده توسط‌تنشهای موجود در یک قطعه بدست

آوریم . ابتدا انرژی تغییرشکل ذخیره شده در میلـه‌ای را که تحت اثـر نیروی محوری F می‌باشد به‌صورتی که این نیرو به‌صورت تدریجی از صفر به‌مقدار نهایی خود افزایش یابـد در نظر می‌گیریم ، حال از چنین میله‌ای یک جزء کوچک که مانند شکـل (۱۲ـ۳۱) محـدود به‌دو مقطع می‌باشد جدا می‌کنیم . فرض کنید که براین جزء نیروی F_t که دارای مقداری‌بین صفر و مقدار نهایی نیروی F می‌باشد اثر کند و فرض کنیدکه این‌نیرو افزایشی برابربا dF_t پیدا کندکه این افزایش نیرو سبب تغییرطولی برابربا $\Delta(dL)_t$ گردد دراین‌صورت‌داریم:

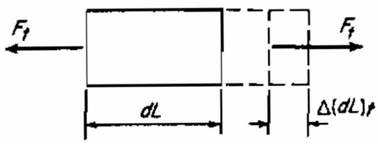
$$\Delta(dL)_t = dF_t \frac{dL}{AE} \qquad (\text{هـ})$$

با حذف مقادیر بی‌نهایت کوچک از درجه دوم ، کار داخلی انجام شده در اثر dF_t برابـر واهد شد با $(F_t\,[\Delta(dL)_t])$ و بنابراین کـل کار داخلی dW_I انجام شده درطی‌افزایش نیروی F از صفر الی مقدار نهایی خود در این جزء خواهد شد :

$$dW_I = \int_0^F F_t\,\Delta(dL)_t = \int_0^F F_t \frac{dL}{AE}\,dF_t = \frac{F^2}{2AE}\,dL \qquad (\text{و})$$

برای کـل قطعه ، مقدار کار داخلی برابر خواهد بود با مجموع جملات dW_I برای کلیه اجزاء dL بنابراین :

$$W_I = \int_0^L \frac{F^2}{2AE}\,dL = \frac{F^2L}{2AE} \qquad (\text{ز})$$



شکل (۱۲ـ۳۱) انرژی تغییرشکل ذخیره‌شده توسط نیروی محوری

برای کلیه قطعات سازه ، کار داخلی برابر خواهد شد با مجموع چنین جملات برای هریک‌از میله‌های سازه و یا :

$$(۱۲-۱۴) \qquad W_I = \sum \frac{F^2L}{2AE} \quad \text{(انرژی تغییرشکل ذخیره شده توسط نیروهای محوری)}$$

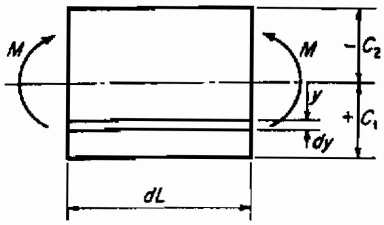
حال می‌توان از این معادله برای تعیین عبارت انرژی تغییرشکل ذخیره شده در یـک نیرو توسط تنشهای حاصل از لنگر خمشی M استفاده نمود ، یک جزء کوچک به‌طول dL از تیری را مطابق شکل (۱۲ـ۳۲) درنظر بگیرید این جزء از تیر را می‌توان دسته‌ای از تارهای کوچکی

که‌هریک دارای طولی برابر dL و ارتفاعی برابربا dy و عرضی عمود برصفحه کاغذ و برابر با b می‌باشند فرض کرد . نیروی محوری در هریک از چنین تاری خواهد شد :

$$F = \sigma b\,dy = \frac{My}{I}\,b\,dy \qquad (ح)$$

کل انرژی تغییرشکل ذخیره شده در چنان تارهایی از تیر را می‌توان با استفاده از معادلـه (۱۲–۱۴) یعنی با جمع نمودن انرژی حاصل از کلیه تارهای جزء به‌طول dL به‌دست آورد و سپس جمع کلیه این مقادیر را برای کل اجزاء در طول تیر به‌دست آورد . در ایـن صورت داریم :

$$\begin{aligned} W_I &= \int_0^L \int_{-C_2}^{C_1} \left(\frac{My}{I}\,b\,dy\right)^2 \frac{dL}{2(b\,dy)E} = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} \int_{-C_1}^{C_1} \frac{y^2 b\,dy}{I}\,dL \\ &= \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dL \end{aligned} \qquad (ط)$$



شکل (۱۲–۳۲) انرژی تغییرشکل ذخیره شده توسط لنگر خمشی

زیرا $\int_{-C_1}^{C_1} y^2 b\,dy = I$ می‌باشد . بنابراین برای کلیه قطعات خمشی سازه خواهیم داشت :

$$W_I = \sum \int \frac{M^2}{2EI}\,dL \qquad (۱۲–۱۵)$$ (انرژی تغییرشکل ذخیره شده‌توسط لنگرخمشی)

چنانکه قبلاً" نیز در بخش (۱۲–۵) ذکر شد ، معمولاً" می‌توان از انرژی تغییرشکل ذخیره‌شده توسط تنشهای برشی در تیرها صرف‌نظر نمود .

۱۲ – ۱۶ قضیه اول کاستیگلیانو

برای این که مبحث مربوط به‌قضایای کاستیگلیانو کامل شود ، قضیه اول او نیزدر این جا ذکر می‌شود . اگرچه این قضیه بیشتر از آن که روشی برای محاسبه تغییر مکانها باشـد روشی برای ذکرشرایط تعادل و برای تحلیل سازه‌های نامعین می‌باشد .قضیه اول‌کاستیگلیانو

را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد*.

در هر سازه‌ای که از مصالح ارتجاعی خطی و یا غیرخطی تشکیل شده باشد و در آن درجه حرارت ثابت بوده و تکیه‌گاههای آن غیرقابل تغییرشکل باشند، مشتق اول انرژی تغییرشکل نسبت به هر مولفهٔ تغییرشکل برابر است با نیروی مؤثر در آن نقطه و در راستای نظیر به‌همان مولفه تغییرمکان.

این قضیه را می‌توان به‌همان نحوی که قضیه دوم استخراج گردید معین نمود. فرض کنید سازه‌ای تحت اثر نیروهای P_1 P_2 , . . . , P_n در تعادل باشد، این نیروها مقداری کار خارجی برابر با W_E و به‌همان مقدار انرژی تغییرشکل برابر W_I در سازه انجام می‌دهند و هم‌چنین هر نقطهٔ اثر این نیروها تغییر مکانهایی برابر با δ_1 δ_2 , ... δ_n اعمال می‌کنند اگر با تغییر بی‌نهایت‌کوچک نیروها تغییرمکان δ_n به‌اندازه کوچکی برابر با $d\delta_n$ تغییرنماید ولی سایر تغییر مکانهای δ_1 δ_2 . . . δ_n ثابت نگهداشته شوند مقدار انرژی تغییرشکل ذخیره شده در دستگاه به مقدار W_I تغییر خواهد نمود، بدین صورت که:

$$W_I' = W_I + \frac{\partial W_I}{\partial \delta_n} d\delta_n \qquad \text{(الف)}$$

از کار خارجی درجه دومی که توسط نیروی کوچک dP_n انجام می‌گیرد صرف‌نظر شود، با در نظر گرفتن تغییر مکان اضافی $d\delta_n$ کار خارجی انجام شده در سازه به‌مقدار W_E' افزایش خواهد یافت، در این صورت داریم:

$$W_E' = W_E + P_n\, d\delta_n \qquad \text{(ب)}$$

چون W_I' و W_E' می‌بایستی با یکدیگر برابر باشند با مساوی قراردادن طرفین راست معادله (الف) و (ب) خواهیم داشت

$$\frac{\partial W_I}{\partial \delta_n} = P_n \qquad \text{(ج)}$$

---

* به‌کتاب کاستیگلیانو با عنوان: " Theorem de lequilibre des systemes etastiques etses applications"

و یا به‌کتاب ماتسون Matheson باعنوان زیر مراجعه شود:

" Hyperstatic Structures"

متاسفانه در نام‌گذاری قضایای کاستیگلیانو ابهام زیادی وجود دارد. خود کاستیگلیانو قضایای خود را به‌صورت " قسمت اول و قسمت دوم قضیه دیفرانسیلی کار داخلی " می‌نامند. در این کتاب قسمت اول و قسمت دوم را به‌ترتیب قضیه اول کاستیگلیانو و قضیه دوم کاستیگلیانو نامیده‌ایم.

این عبارت بیان ریاضی قضیه اول کاستیگلیانو می‌باشد.

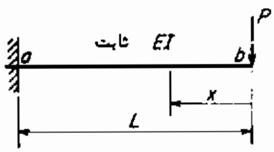
از نحوهٔ کاربرد قضیه‌اول کاستیگلیانو دراینجا بحث نخواهدشد. خواننده‌می‌تواند به‌کتابی که توسط هاتسون‌که بدان اشاره شد و یا به‌مقاله آرجریس (Arggris) مراجعه‌نماید. به‌منظور استفاده از این قضیه واضح است که عبارت دیگری برای انرژی تغییر شکل می‌بایستی استخراج گردد این عبارات باید بیان‌کنندهٔ انرژی تغییرشکل برحسب تغییر مکانهای δ_1 δ_2 . . . δ_n باشند.

۱۲ ــ ۱۷ محاسبه تغییر مکانها با استفاده از قضیه دوم کاستیگلیانو

قضیه دوم کاستیگالیانو اصولا" در تحلیل سازه‌های نامعین به‌کار برده می‌شود ولی گاهی نیز در حل مسائل مربوط به‌تغییر مکانها نیز از آن استفاده می‌کنند. فن استفاده از این روش در مسایل تغییر مکانها اساسا" به‌همان نحو استفاده از روش کار مجازی است. در مسائل عددی زیر خواهیم دید که چگونه محاسبات عددی هردوی این روشها تقریبا"یکی است.

در مثال (۱۲ــ۲۵) شرح می‌دهیم که چگونه این روش را در محاسبه تعیین تغییرمکان نقطه اثرنیرویی به‌کار بریم.اگر این نیرو دارای مقدار عددی باشد به‌طورموقت می‌توان‌آن‌را با متغیری جایگزین نمود و پس‌از آن که مشتق نسبی مربوط به‌عبارت خمشی گرفته شد می‌توان متغیر را با مقدار عددی آن جایگزین کرد.

مثال ۱۲ ــ ۲۵= تغییرمکان عمودی نقطه b را تحت اثر بار نشان داده شده محاسبه کنید.



$$W_I = \sum \int \frac{M^2\,dx}{2EI}$$

$$\frac{\partial W_I}{\partial P} = \delta_b^{\downarrow} = \sum \int M \frac{\partial M}{\partial P} \frac{dx}{EI}$$

a :

$$0 < x < L \qquad M = -Px \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

بنابراین

$$\delta_b^{\downarrow} = \int_0^L (-Px)(-x)\frac{dx}{EI} = \left| \frac{Px^3}{3EI} \right|_0^L$$

پس داریم :

$$\delta_b = \frac{PL^3}{3EI}$$

گاهی لازم است که تغییر مکان نقطه‌ای را که بر آن نیرویی اثر نمی‌کند تعیین کنیم، در یک چنین حالاتی می‌توانیم به‌طور موقت نیرو (یا لنگری) خیالی در جهت مولفه تغییر

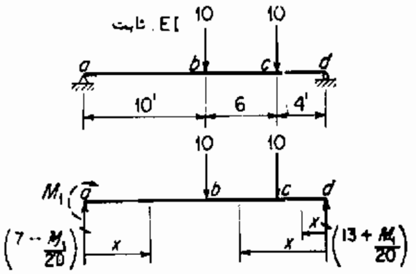
مکان مورد نظر به‌نقطه‌ٔ مفروض اثر دهیم و پس از آن که به‌مشتق‌گیری نسبی از انرژی تغییر شکل پرداختیم ، مقدار نیرو را برابر با صفر قرار دهیم و به‌محاسبات عددی خود ادامه دهیم . به‌این ترتیب تغییرمکان مورد نظر تحت اثر بارگذاری موجود به‌دست خواهد آمد . در مثال (۱۲–۲۶) به‌شرح این روش پرداخته‌ایم .

بدین ترتیب با اضافه‌نمودن بارهای‌خیالی مطلوب امکان‌محاسبه هرمولفه‌ی دلخواهی از تغییرمکان ممکن می‌گردد . در چنین حالاتی فن انتخاب بارهای مناسب خیالی به‌همان صورت انتخاب دستگاه نیروهای Q در روش کارهای مجازی است ، مثال (۱۲–۲۷) این نکته را شرح می‌دهد و همچنین تشابه نزدیک قضیه دوم کاستیگلیانو را با روش کار مجازی‌درحل مسائل آشکار می‌سازد .

بایستی خاطرنشان نمودکه قضیه دوم‌کاستیگلیانو را می‌توان به هرنوع‌از سازه‌ها اعم ازتیر، خرپا ویا قاب‌اعمال‌کرد به‌شرطی‌که عملکرد مصالح‌آنها به‌طورخطی‌درمحدوده‌ٔ ارتجاعی انجام‌گیرد . کاربرد این روش به‌طور مؤکد در حالاتی ممکن است که تغییر مکان حاصل‌از اثر بارگذاریها باشد ، کاربرد این قضیه در حالاتی که محاسبات تغییرمکان مربوط به‌اثر درجه حرارت و یا اثر حاصل از نشست تکیه‌گاهی می‌گردد ممکن نمی‌باشد .

مثال ۱۲ – ۲۶= تغییر شیب مقطع a را تحت اثربارهای نشان داده‌شده‌محاسبه‌کنید .

فرض کنید به‌طور موقت لنگر M_1 در a اثرکند ، با فرض آن به‌صورت جزیی از بارگذاری ، می‌توان به‌صورت زیر عمل نمود :



$$W_I = \sum \int \frac{M^2\,dx}{2EI}$$

$$\frac{\partial W_I}{\partial M_1} = \alpha_a = \sum \int M \frac{\partial M}{\partial M_1} \frac{dx}{EI}$$

از a تا b

$$0 < x < 10 \qquad M = M_1 + \left(7 - \frac{M_1}{20}\right)x \qquad \frac{\partial M}{\partial M_1} = \left(1 - \frac{x}{20}\right)$$

از d تا c

$$0 < x < 4 \qquad M = \left(13 + \frac{M_1}{20}\right)x \qquad \frac{\partial M}{\partial M_1} = \frac{x}{20}$$

از c تا b

$$4 < x < 10 \qquad M = \left(13 + \frac{M_1}{20}\right)x - 10(x-4) \qquad \frac{\partial M}{\partial M_1} = \frac{x}{20}$$

پس

$$\frac{\partial W}{\partial M_1} = EI\alpha_a^{\frown} = \int_0^{10}\left[M_1 + \left(7 - \frac{M_1}{20}\right)x\right]\left(1 - \frac{x}{20}\right)dx$$
$$+ \int_0^4\left[\left(13 + \frac{M_1}{20}\right)x\right]\left(\frac{x}{20}\right)dx + \int_4^{10}\left[\left(13 + \frac{M_1}{20}\right)x - 10(x - 4)\right]\left(\frac{x}{20}\right)dx$$

حال در این معادله می‌بایستی $M_1 = 0$ قرار داد . زیرا آن یک بار خیالی است ، دراین‌صورت داریم :

$$EI\alpha_a^{\frown} = \int_0^{10}(7x)\left(1 - \frac{x}{20}\right)dx + \int_0^4(13x)\left(\frac{x}{20}\right)dx + \int_4^{10}(3x + 40)\left(\frac{x}{20}\right)dx$$
$$= \left[\frac{7x^2}{2} - \frac{7x^3}{60}\right]_0^{10} + \left[\frac{13x^3}{60}\right]_0^4 + \left[\frac{3x^3}{60} + x^2\right]_4^{10} = \left(350 - \frac{700}{6}\right) + \left(\frac{208}{15}\right)$$
$$+ \left[\left(\frac{1,000 - 64}{20}\right) + (100 - 16)\right]$$

و یا این که :

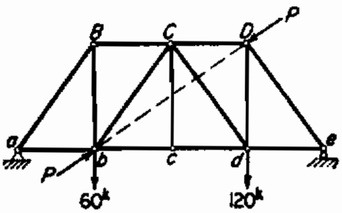
$$\alpha_a = \frac{378}{EI}$$

اگر $I = 200\ in.^4 \quad E = 30 \times 10^3\ ^{k/''^2}$

$$\alpha_a = \frac{(378)^{k'^2}}{(30 \times 10^3 \times 144)^{k/'^2}(200/144^2)^{'^4}} = 0.00907$$ رادیان

مثال ۱۲ــ ۲۷ = قسمت (الف) مثال ۱۲ــ۴ را بااستفاده ازقضیه دوم کاستیگلیانو حل کنید .

برای این که به محاسبه تغییر مکان نسبی گرههای b و D بپردازیم‌به‌دستگاه بارگذاری موجود بارهای P را به‌صورت نشان داده شده اضافه کنید .



$$W_I = \sum\frac{F^2L}{2AE}$$

$$\frac{\partial W_I}{\partial P} = \delta_{b-D}^{\swarrow\nearrow} = \sum\frac{FL}{AE}\frac{\partial F}{\partial P}$$

با استفاده از محاسباتی که در مثال (۱۲ــ۴) برای بارهای 60 و 120-kip انجام‌گرفته و توجه به‌این مطلب که نیروها حاصل‌از بارهای P ، P برابرنیروهای حاصل‌از بارهای واحد در آن سلسله می‌باشد ، می‌توان به‌صورت زیر عمل کرد .

قبل از تعیین حاصل ضربهای مذکور در آخرین ستون می‌بایستی P را برابر صفر قرار داد تا این که فقط قسمت ثابت F در این حاصل ضرب وارد شود . بدین ترتیب داریم

$$\delta_{b-D}^{\swarrow\nearrow} = \frac{+55}{E} = \frac{(55)^{k/''^2}}{(30 \times 10^3)^{k/''^2}} = +0.00183\ ft$$

میله	L	A	$\frac{A}{L}$	F	$\frac{\partial F}{\partial P}$	$F\frac{L}{A}\frac{\partial F}{\partial P}$
آحاد	'	in^2	$in^2/'$	k	k/k	k'/in^2
bc	15	5	3	$+67.5-0.416P$	-0.416	-84.5
cd	15	5	3	$+67.5-0.416P$	-0.416	-84.5
CD	15	5	3	$-78.75-0.831P$	-0.831	$+197.0$
bC	25	2.5	10	$-18.7-0.695P$	-0.695	$+130$
Cd	25	2.5	10	$+18.7+0.695P$	$+0.695$	$+130$
dD	20	5	4	$+105-0.555P$	-0.555	-233
Σ						$+55.0$

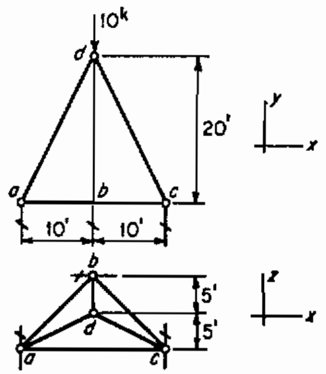
دقت کنید که کلیه‌ی میله‌هایی که در آنها نیروی حاصل از بارهای خیالی P و یا بارهای موثر نشان داده شده صفراست در تعیین حاصل‌ضربهای‌مذکور درستون آخروظیفه‌ای ندارند بنابراین به‌ذکر آنها در جدول نیازی نیست .

۱۲ ــ ۱۸ تغییرمکان شبکه‌های فضایی

تغییرمکانهای‌گرههای یک شبکه‌ی فضایی‌را می‌توان بدون‌اشکال‌به‌توسط یکی از روشهای کار مجازی یا قضیه دوم کاستیگلیانو محاسبه نمود . همان طوری که در مثال (۱۲ــ۲۸)دیده می‌شود از عباراتی که به‌منظور استفاده در خرپاهای مستوی برای بیان این روش ارائه شد می‌توان در شبکه‌های فضایی (که آنها نیز "خرپاهای" سه‌بعدی می‌باشند) استفاده نمود .

مثال ۱۲ ــ ۲۸= مولفه z تغییرمکان گره d را تحت بارگذاری نشان داده شده‌محاسبه نمایند ، سطح مقطع کلیه قطعات z اینچ مربع می‌باشد . $E=30\times10^3\ kips/in$

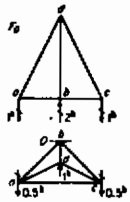
میله	تصویر			L
	x	y	z	
ab	10	0	10	14.14
bc	10	0	10	14.14
ac	20	0	0	20
ad	10	20	5	22.91
bd	0	20	5	20.62
cd	10	20	5	22.91



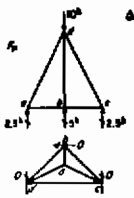
با استفاده از روش کار مجازی

$$\sum Q\delta = \sum F_Q\,\Delta L = \sum F_Q F_P \frac{L}{AE}$$

$$(1^k)(\delta_{dz}) = \frac{1}{AE}\sum F_Q F_P L$$



میله	مولفه‌ها X	مولفه‌ها Y	مولفه‌ها Z	F_Q
ab	+0.25	0	+0.25	+0.354
bc	+0.25	0	+0.25	+0.354
ac	−0.75	0	0	−0.75
ad	+0.5	+1	+0.25	+1.145
bd	0	−2	−0.5	−2.062
cd	+0.5	+1	+0.25	+1.145



میله	مولفه‌ها X	مولفه‌ها Y	مولفه‌ها Z	F_P
ab	+0.625	0	+0.625	+0.884
bc	+0.625	0	+0.625	+0.884
ac	+0.625	0	0	+0.625
ad	−1.25	−2.5	−0.625	−2.863
bd	0	−5	−1.25	−5.154
cd	−1.25	−2.5	−0.625	−2.863

میله	L	F_Q	F_P	$F_Q F_P L$
آحاد	′	k	k	$k^{2\prime}$
ab	14.14	+0.354	+0.884	+ 4.4
bc	14.14	+0.354	+0.884	+ 4.4
ac	20	−0.75	+0.625	− 9.4
ad	22.91	+1.145	−2.863	+ 75.0
bd	20.62	−2.062	−5.154	+219.4
cd	22.91	+1.145	−2.863	− 75.0
Σ				+ 68.8

بنابراین

$$(1^k)(\delta_{dz}) = \frac{+68.8^{k^{2\prime}}}{(2''^2)(30\times 10^{3\,k/''^2})}$$

$$\delta_{dz} = \underline{+0.00115\ ft}$$

۱۲ ــ ۱۹ سایر مسائل تغییر مکان

کلیه مثالهای این فصل مختص به‌شرح تغییرمکانهای سازه‌های معین بوده است ، البته کلیه روشهایی که دراینجا معرفی شدند در هر دو نوع سازه‌های معین و نامعین قابل‌استفاده می‌باشد ، واضح است که تحلیل تنش در یک‌سازهٔ نامعین قبل از آن که تغییرشکلهای‌قطعات آن معلوم شود می‌بایستی بعمل آید و پس از آن که چنین تحلیلی به‌عمل‌آمدمحاسبات‌تغییر مکان آن سازه اساساً به‌همان طریقی خواهد بود که گویی سازه‌ای معین می‌باشد ، مثالهای متعددی برای شرح چنین‌محاسباتی در بند (۱۳ــ۲۷)شده است .

در این فصل بحث تغییر مکانهای تیرها محدود به‌حالاتی بوده است که در آن محور خنثای تیر مستقیم‌الخط‌بوده و مقاطع آن دارای محورهای تقارنی در همان سطح بارگذاری بوده است و علاوه بر این بحثی در مورد مقدار دخالت تغییرمکان ناشی از برش نگردیده

است کلیه حالاتی از این قبیل در حد بحث این کتاب نمی‌باشد و می‌بایستی در بحثهای پیشرفته‌تری که مربوط به این حالات می‌شود ذکر گردند. با وجود این بایستی خاطر نشان کرد که هریک از روشهای کارمجازی و یا قضیه دوم کاستیگلیانو را می‌توان برای رفع این شکل در این حالات بسط داد. هم چنین از این روشها می‌توان برای بررسی قطعاتی که تحت پیچش می‌باشند نیز استفاده نمود.

۱۲ ـ ۲۰ کوژدادن سازه‌ها

منظور از کوژدادن سازه این است که شکلی بدون تنش قطعات سازه را به‌نحوی انتخاب کنیم که تحت شرایط معلومی از بارگذاری سازه شکل نظری خودرا باز یابد. این عمل به دو منظور زیر انجام می‌گیرد: (۱) شکل ظاهری سازهٔ تحت بار را بهتر می‌کند (۲) اطمینان لازم جهت این که سازهٔ تحت بارهمان شکل نظری مورد استفاده درتحلیل تنش‌را دارد حاصل می‌گردد.

برای شرح این عمل، مساله کوژدادن یک خرپا را مورد نظر بگیرید، در این حالت اعضای خرپا به‌نحوی ساخته می‌شوند که طویلتر و یا کوتاه‌تر از طولهای نظری خود باشند و چون تنش حداکثر در قطعات تحت موقعیتهای مختلف بار زنده حاصل می‌شود نمی‌توان به خرپا چنان کوژی داد که قطعات طول نظری خود را در صورت رسیدن به‌تنش حداکثر پیدا کنند. چنانکه عملا" نیز لازم است معمولا" به‌خرپاها به‌صورتی کوژ می‌دهند که شکل نظری خود را تحت اثر بار مرده و یا بار مرده به‌اضافه قسمتی از کل بار زنده در کل دهانه سازه پیدا کنند.

برای این که کوژ خرپا را به‌طور دقیق ایجاد کنیم، تغییر طول هریک از اعضای آن را تحت تنش حاصل از بار لازم‌برای محاسبه کوژ معین می‌کنیم وسپس قطعات فشاری‌را به‌مقدار لازم طویلتر و قطعات‌کششی را به‌مقدارلازم کوتاه‌تر می‌سازیم، در این صورت پس‌از نصب، خرپا اگر تحت اثر بار لازم برای کوژ قرار گیرد خرپا تغییرمکان یافته و شکل نظری خود را پیدا می‌کند. مزیت چنین روش دقیق این‌است که کلیه خرپاهایی‌که بدین طریق کوژ داده‌می‌شود بدون تنش اولیه نصب می‌گردند و نامطلوب بودن آن در این است که کلیه قطعات‌شامل تغییر طول می‌گردند و لذا گاهی تغییر طولها آنچنان کوچک است که امکان انجام آن وجود ندارد.

روش عملی در کوژدادن خرپاها این است که فقط طولهای قطعات اصلی آن را تغییر دهند، به‌عنوان مثال اگر هریک از میله‌های اصلی فوقانی یک خرپا روی دو تکیه‌گاه

انتهایی می‌بایستی 3_{16} اینچ در هر 10 فوت افقی آن افزایش دهیم ، چنین عملی معادل با این است که هم تخت فوقانی وهم میله تخت تحتانی آن را به‌مقدار نصف آن تغییر دهیم چنین تغییر طولی معادل ایجاد شدت تنشی برابر با زیر است :

$$29{,}000{,}000 \times \tfrac{3}{32} \times \tfrac{1}{120} = 22{,}600 \text{ psi}$$

چون فقط میله‌های اصلی تصیحح می‌گردند ، مقدار این تصحیح به‌مظور اثر قطعات جان در تغییر مکان می‌بایستی افزایش یابد ،اگر فرض شود که میله‌های اصلی در 80 درصد تغییرمکان دخالت دارند تغییر طولی که در بار ذکر شد سبب باری در میله‌های اصلی می‌شود که ایجاد شدت تنشی برابر با زیر می‌گردد :

$$0.8 \times 22{,}600 = 18{,}000 \text{ psi}$$

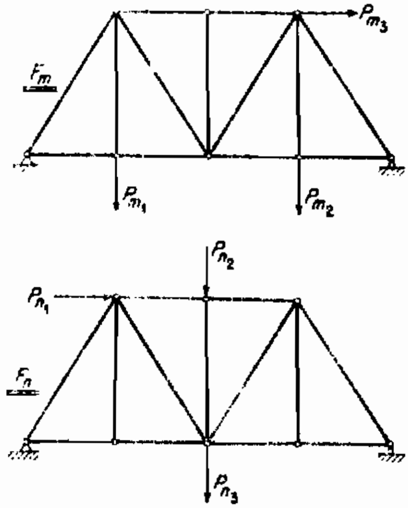
به‌عبارت دیگر روش تجربی که در بالا پیشنهاد شد معادل انتخاب باری برای محاسبه کوژ می‌باشد که نظیر با بار مرده به‌اضافه کل بار زنده با اثر ضربه در کل سازه است .

از این روش تقریبی برای محاسبه کوژ می‌توان بدون اشکال در کلیه خرپاهای معین استفاده نمود ولی در کاربرد آن در خرپاهای نامعین می‌بایستی احتیاط لازم را بعمل آورد در غیر این صورت خرپای نصب شده ممکن است تحت اثر تنشهای اولیه‌ای که بدین طریق در خرپا ایجاد می‌گردد نیز قرار گیرد .

۱۲ــ۲۱ قانون ماکسوئل در مورد تغییر مکانهای متقابل ــ قانون بتی (Betti)

قانون ماکسوئل حالت خاصی از قانون کلی بتی می‌باشد . هردوی این قوانین را می‌توان به‌هرنوعی از سازه‌ها اعم از تیر ، خرپا و یا قاب اعمال نمود . برای ساده‌ترنمودن این بحث با در نظر گرفتن خرپای ساده شکل (۱۲ــ۳۳) به‌بررسی این قوانین می‌پردازیم . فرض کنید که این خرپا تحت اثر دودستگاه نیروی جداگانه و مستقل P_m و P_n قرارگرفته باشد ،دستگاه نیروی P_m ایجاد نیروی میله‌های F_m در اعضای خرپا می‌نماید و به‌همین‌ترتیب دستگاه نیروی P_n ایجاد نیروی میله‌های F_n در اعضای آن می‌کند ، دو وضعیت خیالی زیر را فرض کنید ، ابتدا این که فرض کنید که این خرپا تحت اثر دستگاه P_m در سکون باشد و در این حالت با واردنمودن دستگاه P_n تغییرشکل اضافی به‌خرپا اعمال می‌کنیم ، دوم این که درست حالت عکس وضعیت قبل را ایجاد کنیم بدین صورت که خرپا تحت اثر دستگاه P_n در سکون باشد و سپس با اثردادن دستگاه P_m خرپا تغییرشکل بیشتری پیدا کند ، قانون کار مجازی را در

هردو وضعیت به‌کار می‌بریم و از طریق آن نتیجه‌گیری بسیار مفیدی که به‌نام قانون بتی معرف است می‌کنیم.



شکل ۱۲–۳۳) استخراج قانون بتی

بدین منظور فرض می‌نماییم که تکیه‌گاههای این سازه غیرقابل تغییر شکلی بوده و درجه حرارت نیز ثابت بماند و هم‌چنین فرض می‌کنیم که:

δ_{mn}: عبارت باشد ازتغییرمکان نقطه اثر یکی‌از نیروهای p_m (در امتداد وجهت همان نیرو) تحت واردشدن دستگاه نیروی P_n.

δ_{nm}: عبارت باشد از تغییرمکان نقطهٔ اثر یکی از نیروهای p_n تحت اثر وارد شسدن دستگاه نیروی P_m.

حال کاربرد قانون کار مجازی را در وضعیت نخست در نظر بگیرید،دراین حالت دستگاه نیروی P_m مانند دستگاه نیروی Q می‌باشدکه در اثرواردشدن‌دستگاه p_n به‌دلیل تغییرشکل سازه بدان تغییر محلی اعمال می‌شود، بدین ترتیب با کاربرد معادله (۱۲–۵) داریم:

$$\Sigma P_m \delta_{mn} = \Sigma F_m \,\Delta L$$

دراین عبارت $\Delta L = F_n L/AE$ می‌باشد و لذا:

$$\sum P_m \delta_{mn} = \sum F_m F_n \frac{L}{AE} \qquad \text{(الف)}$$

در وضعیت دوم دستگاه نیروی P_n مانند دستگاه نیروی Q خواهد بود و در اثر واردشدن دستگاه P_m که ایجاد تغییرشکل اضافی می‌نماید بدان دستگاه تغییر محلی اعمال می‌شود ، لذا با به‌کاربردن معادله (۱۲-۵) خواهیم داشت :

$$\Sigma P_m \delta_{mn} = \Sigma F_m \Delta L$$

در این عبارت $\Delta L = F_n L/AE$ می‌باشد پس :

$$\sum P_n \delta_{nm} = \sum F_n F_m \frac{L}{AE} \qquad (ب)$$

از معادلات (الف) و(ب) رابطه زیر نتیجه می‌شود .

$$\Sigma P_m \delta_{mn} = \Sigma P_n \delta_{nm} \qquad (۱۲-۱۶)$$

که هرگاه این رابطه به‌صورت نوشته بیان شود آن را قانون بتی می‌گویند .

در هر سازه‌ای که از مصالح ارتجاعی ساخته شده باشد و از قانون هوک تبعیت کند به‌شرطی که دارای تکیه‌گاههای غیرقابل تغییرشکل بوده و در طول عمل درجه حرارت ثابت بماند کار مجازی انجام شده توسط دستگاه نیروی P_m که در طی تغییرشکل حاصل از اثر دستگاه نیروی P_n انجام می‌گیرد برابر است با کار مجازی انجام شده توسط دستگاه نیروی P_n که در طی تغییرشکل حاصل از اثر دستگاه نیروی P_m بر سازه انجام می‌پذیرد .

قانون بتی که اصل بسیارمفیدی می‌باشد گاهی به‌نام حالت کلی قانون ماکسوئل نامیده می‌شود . بدین معنی‌که قانون ماکسوئل را که در مورد تغییرمکانهای متقابل می‌باشد می‌توان از قانون بتی نتیجه گیری نمود .

سازه‌ای نظیر خرپای شکل (۱۲-۳۴) را در نظر بگیرید ، فرض کنید که این خرپا ابتدا تحت اثر بار P در نقطه 1 قرار داشته باشد و پس از آن فرض کنید که این خرپا تحت اثر باری به‌همان مقدار P ولی در نقطه 2 واقع شود ، اگر :

δ_{12} : تغییر مکان در نقطه 1 و در امتداد ab در اثر واردشدن بار P به‌نقطه 2 ودر امتداد cd و δ_{21} : تغییرمکان درنقطه 2 و درامتداد cd در اثرواردشدن بار P به‌نقطه 1 و در امتداد ab باشد ، قانون بتی را در این حالت به‌کار می‌بریم :

$$(P)(\delta_{12}) = (P)(\delta_{21})$$

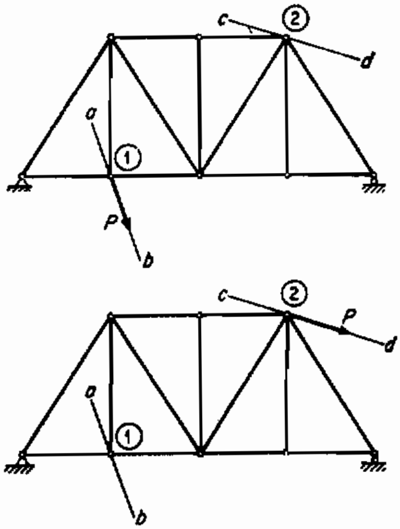
پس خواهیم داشت :

$$\delta_{12} = \delta_{21} \qquad (۱۲-۱۷)$$

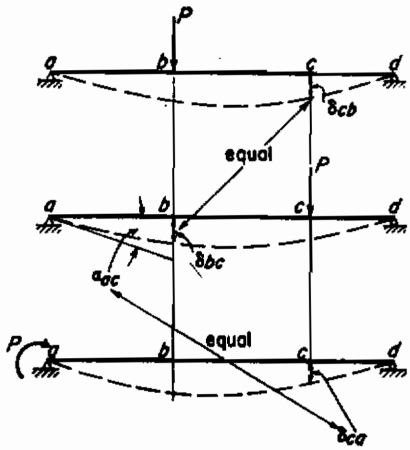
که اگر این رابطه به‌صورت الفاظ درآید آن را قانون تغییرمکانهای متقابل ماکسوئل می‌نامند.

در هر سازه‌ای که از مصالح ارتجاعی ساخته شده باشد و از قانون هوک تبعیت کند به‌شرطی که دارای تکیه‌گاههای غیرقابل تغییرشکل بوده و در طول عمل درجه حرارت ثابت بماند ، تغییرمکان نقطه 1 درامتداد ab که دراثر واردشدن بار P به‌نقطه 2 و درراستای cd بوجود بیاید از نظر عددی برابر است با تغییرمکان نقطهٔ 2 درامتداد cd در صورتی که دراثر واردشدن بار P به‌نقطه 1 و در راستای ab بوجود آید .

قانون ماکسوئل بیان‌کننده یک حالت‌کلی‌است و آن‌را می‌توان در هرسازه‌ای به‌کار برد ، این روابط متقابل بین دورانهای حاصل‌ازاثر دو لنگر وهمچنین بین تغییرمکان‌حاصل‌ازاثرلنگر P و دوران حاصل‌ازنیروی P نیز صادق‌است .درشکل (۱۲-۳۵)این حالت کلی‌بودن قانون



شکل (۱۲-۳۴) استخراج قانون ماکسوئل



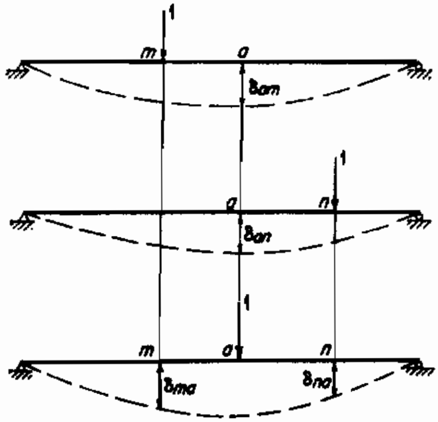
شکل (۱۲-۳۵) کاربرد قانون ماکسوئل

را به‌کمک تیری شرح داده‌ایم ، تعیین $\delta_{cb} = \delta_{bc}$ از کاربرد مستقیم قانون ماکسوئل به‌دست می‌آید . دقت کنید که دوران α_{ac} برحسب رادیان که در اثر نیروی P بر حسب پوند بوجود می‌آید از نظر عددی برابر است با تغییرمکان δ_{ca} برحسب ft که دراثر لنگر P برحسب ft-lb حاصل می‌شود . در حالت عکس می‌بایستی به‌آحاد دقت نمود .

آشنایی کامل با علائم به‌کار رفته به‌عنوان زیر نویس که‌جهت نشان‌دادن تغییرمکانها استفاده می‌شود بسیار مهم است . زیرنویس‌اول نشان‌دهنده محل اندازه‌گیری تغییرمکان و زیرنویس دوم نشان‌دهنده محل اثر باری است که ایجاد تغییرمکان می‌نماید .

۱۲ ــ ۲۲ خطوط تأثیر برای تغییر مکانها

فرض کنید بخواهیم خط تأثیری برای تغییر مکان عمودی نقطه a از تیر شکل (۱۲ــ۳۶) رسم نماییم ، عرضهای چنین خط تأثیری را می‌توان با قراردادن بار عمودی واحدی درنقاط مختلف طول تیر و محاسبه تغییرمکان عمودی نقطهٔ a در هریک از حالات فوق به‌دست‌آورد. بدین‌ترتیب هرگاه بار واحدی در نقطه m وارد شود تغییر مکانی برابر با δ_{am} در نقطهٔ a ایجاد می‌کند و یا اگر این بار در نقطه دیگر n اثر کند تغییر مکانی برابر با δ_{an} درنقطه a ایجاد خواهد گرد ، حال به‌مزیت کاربرد قانون ماکسوئل در این مساله‌دقت نمایید ، اگر صرفاً به‌اثردادن بارعمودی واحدی در نقطه a اکتفا کنیم تغییر مکانهای δ_{ma} و δ_{na} درنقاط



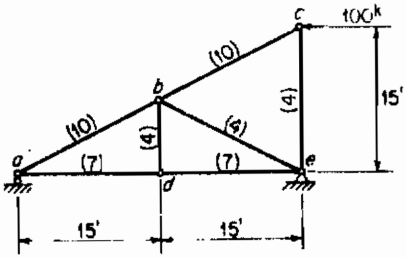
شکل (۱۲ــ۳۶) خطوط تأثیر تغییر مکان

m و n بر طبق قانون ماکسوئل به‌ترتیب برابر با δ_{am} و δ_{an} خواهند بود و به‌عبارت دیگر منحنی (یا منحنی تغییرشکل) تیر که حاصل از اثر بار واحد بر نقطه a می‌باشد ، خط تأثیر تغییرمکان عمودی در نقطهٔ a نیز هست . بدین ترتیب با محاسبه عرضهای منحنی‌ارتجاعی می‌توانیم به‌تعیین عرضهای خط تأثیر مورد نظر بپردازیم .

با استفاده از این طریق می‌توانیم به‌تعیین خط تأثیر تغییر مکان هرنقطه‌ای ازیک‌سازه اقدام کنیم .برای به‌دست‌آوردن خط تأثیر تغییرمکان برای یک نقطهٔ معلوم کافی است‌که‌بار واحدی برآن نقطه اثر دهیم و به‌محاسبه منحنی حاصل شده در سازه بپردازیم .

۱۲ ــ ۲۳ مسائل

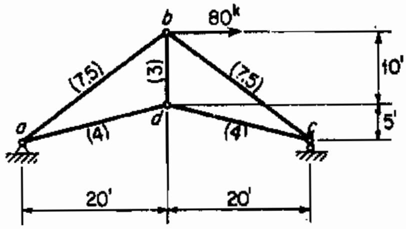
۱۲ ــ ۱ با استفاده از روش کار مجازی مولفه عمودی تغییرمکان گره c از سازه شکل را تحت بار نشان داده شده محاسبه کنید ، سطح مقطع میله‌ها را برحسب اینچ مربع در داخل‌پرانتز نشان داده‌ایم .



$E = 30 \times 10^3$ kips / sq in

شکل (۱۲ــ۳۷) مساله (۱۲ــ۱)

۱۲ ــ ۲ بااستفاده‌از روش‌کار مجازی مولفه افقی‌تغییرمکان‌گره c ازسازه‌شکل (۱۲ــ۳۸)راتحت اثر بارنشان داده‌شده محاسبه کنید ، سطح مقطع میله‌ها را برحسب اینچ مربع در داخل پرانتز ذکر گردیده‌ایم .



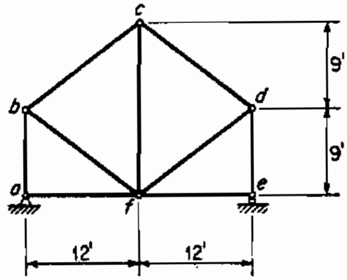
$E = 30 \times 10^3$ kips / in

جواب :

0.0390 ft بەسمت‌راست

شکل (۱۲ــ۳۸) مساله (۱۲ــ۲)

۱۲ ــ ۳ برای سازه شکل (۱۲ــ۳۹) مولفه افقی تغییرمکان گره d را هرگاه میله ef یک‌اینچ کوتاه شود محاسبه کنید .



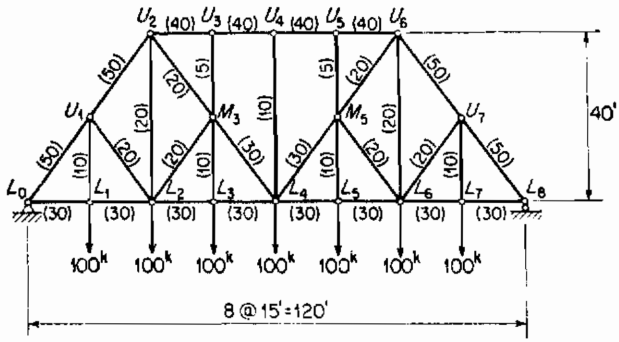
جواب :

0.375 in بەسمت راست

شکل (۱۲ــ۳۹) مساله (۱۲ــ۳)

۱۲ ــ ۴ با استفاده از روش کار مجازی برای سازه شکل (۱۲ــ۴۰) تغییر محل نسبی گرههای M_3 و U_4 را در طول خط M_3U_4 (الف) تحت اثر بارگذاری نشان داده شده (ب) تحت اثر ازدیاد یکنواخت درجه حرارت برابر با $50°F$ در میله‌های اصلی تحتانی محاسبه کنید. سطح مقطع میله‌ها برحسب اینچ مربع در داخل پرانتز نشان داده‌ایم

$E = 30 \times 10^3$ kips /in $\qquad \alpha_t = 1/150,000$ per °F

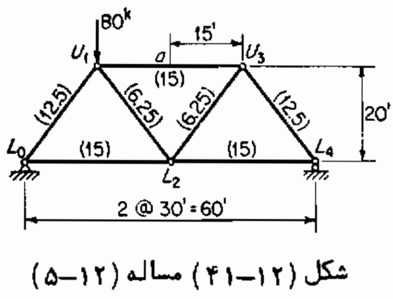


شکل (۱۲ــ۴۰) مساله (۱۲ــ۴)

۱۲ ــ ۵ با استفاده از روش کار مجازی برای سازه شکل (۱۲ــ۴۱) تغییر مکان عمودی نقطهٔ a را تحت اثر بارگذاری نشان داده شده محاسبه کنید، سطح مقطع اعضاء را بر حسب اینچ مربع در داخل پرانتز نشان داده‌ایم $\qquad E = 30 \times 10^3$ kips in.

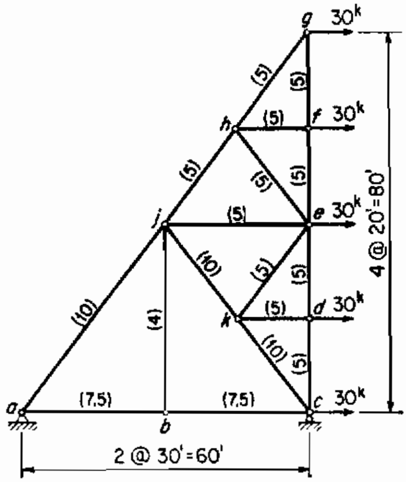
جواب :

0.00642 ft به‌طرف پائین



شکل (۱۲ــ۴۱) مساله (۱۲ــ۵)

۱۲ ــ ۶ برای سازه شکل (۱۲ــ۴۲) سطح مقطع اعضاء برحسب اینچ مربع در داخل پرانتز ذکر شده است و $E = 30 \times 10^3$ kips sq in می‌باشد، دوران زاویه‌ای عضو bj را تحت اثر بارهای نشان داده شده محاسبه کنید.



شکل (۱۲–۴۲) مساله (۱۲–۶)

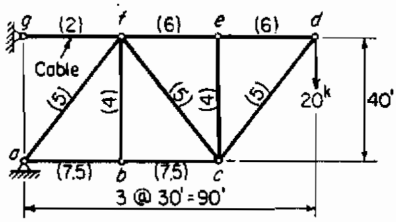
۱۲ –۷برای سازه شکل (۱۲–۴۳) برای عضو gf $E_1 = 20 \times 10^3$ kips in و برای کلیه سایر اعضاء $E_2 = 30 \times 10^3$ kips sq in می‌باشد ، سطح مقاطع اعضاء را برحسب اینچ مربع در داخل پرانتز نشان داده‌ایم ، با استفاده از روش کار مجازی :

(الف) مولفه عمودی تغییرمکان نقطه c را تحت اثربارهای نشان داده‌شده محاسبه‌کنید.

(ب)ــ هرگاه بر قطعه gf یک بست قورباغه قرار داده باشیم و توسط آن طول این قطعه را 0.5 in کوتاه کنیم ، مولفهٔ عمودی و افقی تغییر محل نقطه c را که در این عمل کوتاه‌ـ کردن بوجود می‌آید چقدر خواهد بود .

جواب :

(الف) 0.0774 ft به‌سمت پائین (ب) 0.75 in به‌بالا افقی 0 in

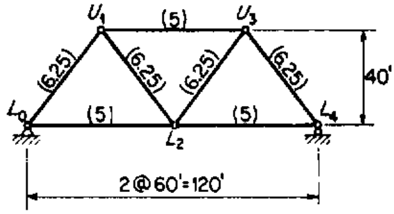


شکل (۱۲–۴۳) مساله (۱۲–۷)

۱۲ – ۸ با توجه به‌شکل (۱۲–۴۴) د رطی تعمیرتکیه‌گاه به‌سمت راست این خرپا لازم شدکه آن را به‌طور موقت د رگره L_2 روی یک جک هیدرولیکی قرار دهیم اگر عکس‌العمل ناخالص بارمرده

در L_4 برابر با 50 kips باشد ، فاصله‌ای را که این جک در گره L_4 می‌بایستی خرپا را بلند کند محاسبه کنید . به‌طوری که تکیه‌گاه در L_4 آزاد شده و 2 in بالاتر از وضع اصلی خود قرار گیرد ، سطح مقطع میله‌ها را برحسب اینچ مربع در داخل پرانتز نشان داده‌ایم ،

$E = 30 \times 10^3$ kips in



جواب :

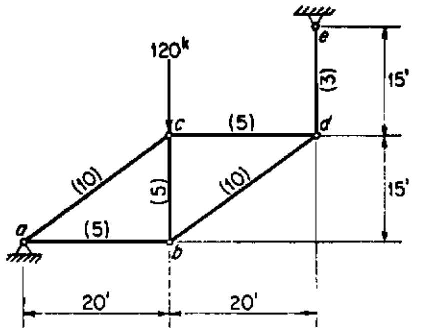
به بالا 1.905 in

شکل (۱۲–۴۴) مساله (۱۲–۸)

۱۲ ــ ۹ با توجه به‌شکل (۱۲–۴۵) و سطح مقاطعی که برحسب اینچ مربع در داخل پرانتز درج شده است ، برای قطعه ed مقدار $E_1 = 20 \times 10^3$ kips sq in و برای‌سایر اعضاء $E_2 = 30 \times 10^3$ kips in می‌باشد . با استفاده از روش کار مجازی جهت و مقدار تغییر مکان برآیند گره d را تحت اثر بارگذاری نشان داده شده محاسبه کنید .

جواب :

0.01695 ft به‌طرف پائین و با زاویه 27.7° سمت راست عمود



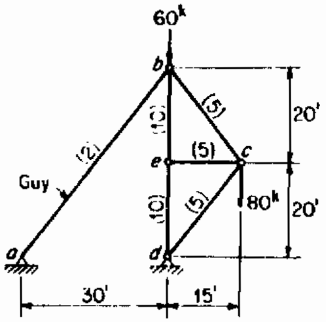
شکل (۱۲–۴۵) مساله (۱۲–۹)

۱۲ ــ ۱۰ برای سازه شکل (۱۲–۴۶) سطح مقاطع اعضاء برحسب اینچ مربع درداخل پرانتز درج شده است . مقدار E به‌ترتیب به‌قرار زیر است ، برای طناب $E_1 = 20 \times 10^3$ kips in و برای سایر اعضاء $E_2 = 30 \times 10^3$ kips in

(الف)مولفه عمودی‌تغییرمکان گره c را تحت اثربارگذاری نشان داده‌شده محاسبه‌کنید .

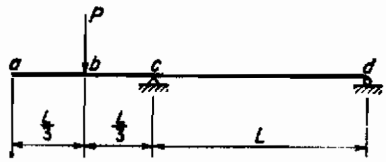
(ب)هرگاه بر طناب مزبور یک بست قورباغه افزوده شود ، مقدار تغییر طول طنـاب را

که برای رساندن گره c به‌وضعیت اولیه طناب قبل از تغییر مکان لازم است معین کنید .



شکل (۱۲–۴۴) مساله (۱۲–۱۰)

۱۲ – ۱۱ بااستفاده از روش کار مجازی ، تغییرمکان عمودی و تغییر شیب مقطع نقطه a ازتیر شکل (۱۲–۴۷) را محاسبه کنید ، E و I هردو دارای مقادیر ثابتی هستند .



شکل (۱۲–۴۷) مساله (۱۲–۱۱)

۱۲ – ۱۲ با استفاده از روش کار مجازی در مورد شاهتیر شکل (۱۲–۴۸) :

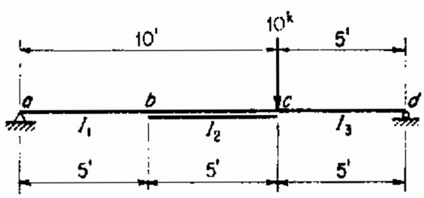
الف ـ مولفه عمودی تغییرمکان نقطه b را تحت بارگذاری شکل محاسبه کنید .

ب ـ تغییر شیب مقطع نقطه d را تحت اثر بار یکنواختی به‌شدت 2 kips/ft در طول کل دهانه محاسبه کنید .

$$E = 30 \times 10^3 \text{ kips}/\text{in} \qquad I_1 = 300 \text{ in.}^4 \qquad I_2 = 500 \text{ in.}^4$$

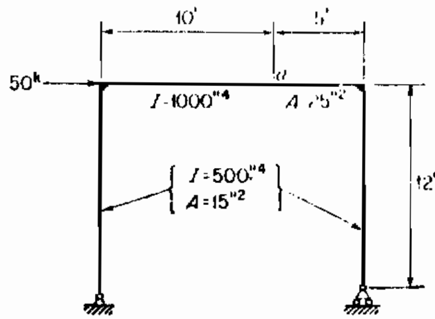
جواب :

(الف) 0.00585 ft به‌سمت پائین (ب) 0.003635 رادیان (درجهت عکس ساعتگرد)



شکل (۱۲–۴۸) مساله (۱۲–۱۲)

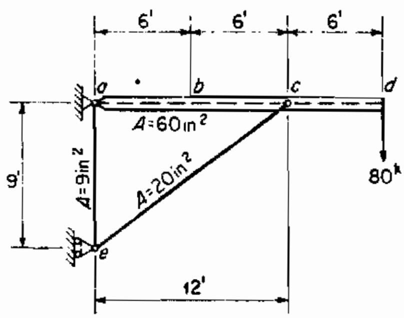
۱۲ ـ ۱۳ تغییرمکان عمودی نقطه a ازقاب شکل (۱۲ـ۴۹) را با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکلهای حاصل از تنشهای محوری و خمشی محاسبه کنید. $E = 30 \times 10^3$ kips/in



شکل (۱۲ـ۴۹) مساله (۱۲ـ۱۳)

۱۲ ـ ۱۴ در سازه‌شکل (۱۲ـ۵۰) مقدار I برای قطعه ad برابر با 3,456 in.⁴ بوده و مقدار ضریب ارتجاعی $E = 30 \times 10^3$ kips in می‌باشد. با استفاده از روش کار مجازی مولفه عمودی تغییرمکان نقطه b را محاسبه کنید.

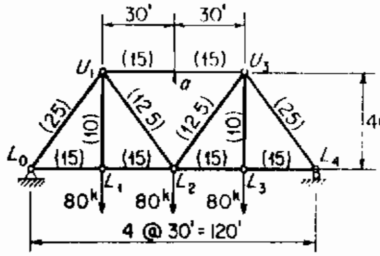
جواب: به‌طرف پائین 0.000877 ft



شکل (۱۲ـ۵۰) مساله (۱۲ـ۱۴)

۱۲ ـ ۱۵ در خرپای شکل (۱۲ـ۵۱) سطح مقاطع اعضاء برحسب اینچ مربع در داخل پرانتز ذکر شده است و داریم:

$E = 30 \times 10^3$ kips sq in تغییرمکان نسبی نقطه a و گره L_3 را در طول خط اتصال آنها تحت اثر بارگذاری نشان داده شده محاسبه کنید.



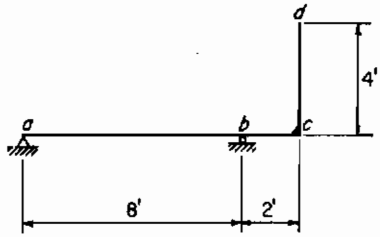
شکل (۱۲–۵۱) مساله (۱۲–۱۵)

۱۲ ـ ۱۶ با توجه به‌شکل (۱۲–۵۲) و با استفاده از روش کار مجازی مولفه افقی تغییر مکان نقطهٔ d را تحت تغییر محلهای زیرین تکیه‌گاهها محاسبه کنید .

نقطه a : به‌سمت چپ 0.36 in افقی

به طرف پائین 0.48 in عمودی

نقطه b : به طرف پائین 0.96 in عمودی



شکل (۱۲–۵۲) مساله (۱۲–۱۶)

۱۲ ـ ۱۷ با توجه به‌شکل (۱۲–۵۳) و با استفاده از روش سطح لنگر :

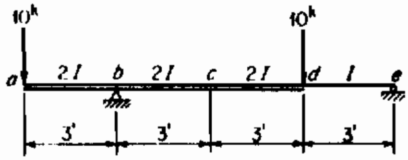
الف ـ تغییرمکان‌عمودی نقاط a ، c و d و همچنین‌تغییر شیب‌منحنی‌نقاط b و c را برحسب E و I محاسبه کنید .

ب ـ اگر $E = 30 \times 10^3$ kips in و $I = 300$ in.^{4} باشد در قسمت a تغییرمکان عمودی نقطهٔ a را برحسب اینچ و شیب نقطه b را برحسب رادیان محاسبه کنید .

جواب :

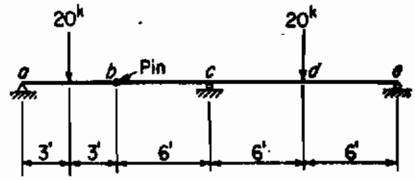
(به‌طرف پائین در c) $10/EI$ (به‌طرف بالا در c) $17.5/EI$ (به‌سمت پائین در a)

$115/EI$ الف (در جهت عقربه‌های ساعت در c) $6.67/EI$ (در جهت عکس عقربه‌های ساعت در b) $23.33/EI$ (در b) رادیان 0.000373 (در a) 0.02204 in (ب)



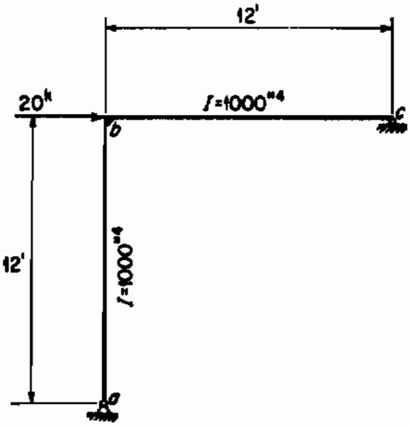
شکل (۱۲–۵۳) مساله (۱۲–۱۷)

۱۲ – ۱۸ با توجه به‌شکل (۱۲–۵۴) و با استفاده از روش بار ارتجاعی و قضایای سطح لنگر (الف) تغییرمکان عمودی تیر را برحسب E ، I در فواصل 3-ft. محاسبه کنید.
(ب) مقدار و محل حداکثر تغییرمکان عمودی را در دهانه ce پیدا کنید، E ، I هردو دارای مقدار ثابتی هستند.



شکل (۱۲–۵۴) مساله (۱۲–۱۸)

۱۲ – ۱۹ با توجه به‌شکل (۱۲–۵۵) و با استفاده از روش سطح لنگر، مقدار و محل تغییر‌مکان عمودی حداکثر را در قطعه bc پیدا کنید. $E = 30 \times 10^3$ kips sq in

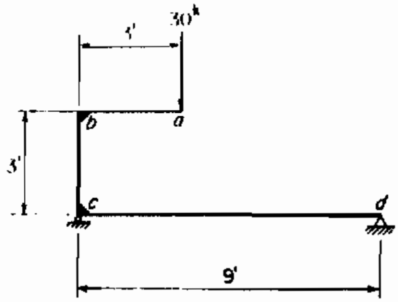


شکل (۱۲–۵۵) مساله (۱۲–۱۹)

۱۲ – ۲۰ با مراجعه به‌شکل (۱۲–۵۶) و فرض ثابت بودن مقادیر E و I در کل سازه‌به‌صورت

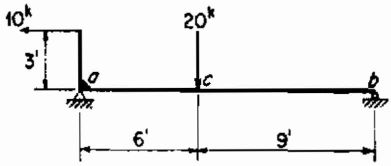
$E = 30 \times 10^3$ kips/sq in و $I = 432$ in.⁴ مولفه عمودی تغییرمکان نقطه a از طره‌ای مربوطه را محاسبه کنید.

جواب: 0.021 ft (به‌طرف پائین)



شکل (۱۲–۵۶) مساله (۱۲–۲۰)

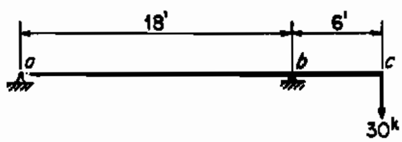
۱۲ – ۲۱ با مراجعه به‌شکل (۱۲–۵۷) و فرض ثابت بودن مقادیر E و I به‌مقادیر عددی $I = 192$ in.⁴ $E = 30 \times 10^3$ kips/in مقدار و محل تغییرمکان عمودی حداکثر تیر ab را محاسبه کنید.



شکل (۱۲–۵۷) مساله (۱۲–۲۱)

۱۲ – ۲۲ با مراجعه به‌شکل (۱۲–۵۸) و معلوم بودن مقادیر $I = 1,440$ in.⁴ و $E = 30 \times 10^3$ kips/in اگر تکیه‌گاه b به‌مقدار $\frac{1}{8}$ in نشست کرده باشد مقدار و محل تغییرمکان رو به بالای حداکثر تیر ab که حاصل از بارگذاری نشان داده شده و نشست فوق‌الذکر می‌باشد محاسبه کنید.

جواب: 0.00698 ft به‌طرف بالا به‌فاصله 8.56 ft از a

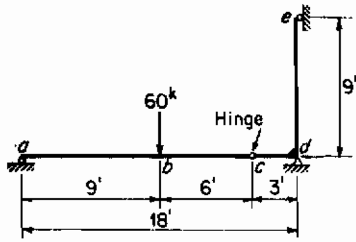


شکل (۱۲–۵۸) مساله (۱۲–۲۲)

۱۲ – ۲۳ با مراجعه به‌شکل (۱۲–۵۹) محل و مقدار تغییرمکان عمودی حداکثر این سازه را

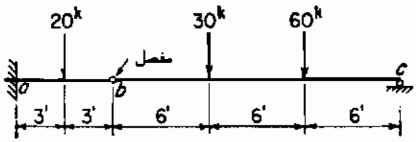
محاسبه کنید ، در این محاسبه از قضایای سطح لنگر و تطابق بار ارتجاعی استفاده نمایند
E و I دارای مقادیر ثابتی به‌صورت زیر می‌باشند

$I = 1{,}200 \text{ in.}^4 \qquad E = 30 \times 10^3 \text{ kips} / \text{sq in}$



شکل (۱۲–۵۹) مساله (۱۲–۲۳)

۱۲ – ۲۴ با توجه به‌شکل (۱۲–۶۰) و مقادیر $I = 576 \text{ in.}^4$ و $E = 30 \times 10^3 \text{ kips} / \text{sq in}$ تغییرمکان عمودی حداکثر این تیر را با استفاده از روش تیر مزدوج محاسبه نمایند .

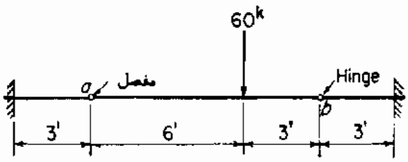


شکل (۱۲–۶۰) مساله (۱۲–۲۴)

۱۲ –۲۵ با مراجعه به‌شکل (۱۲–۶۱) مقدار و محل تغییر مکان عمودی این تیر را محاسبه کنید ، E و I دارای مقادیر ثابتی به‌صورت زیر می‌باشند .

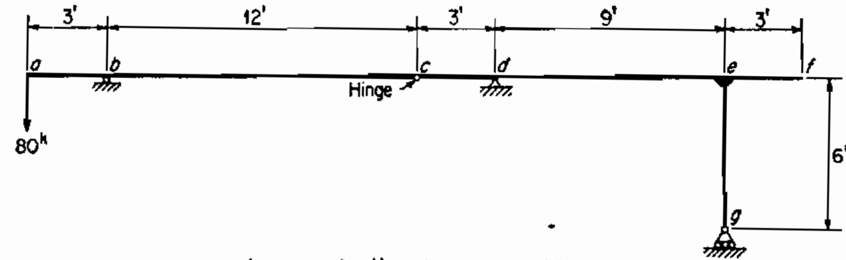
$E = 30 \times 10^3 \text{ kips} / \text{sq in} \qquad I = 432 \text{ in.}^4$

جواب : 0.01182 ft به‌سمت پائین درفاصله 5.1 ft از a



شکل (۱۲–۶۱) مساله (۱۲–۲۵)

۱۲ – ۲۶ با مراجعه به‌شکل (۱۲–۶۲) و با استفاده از روش تیر مزدوج ، مقدار و محل تغییر مکان عمودی حداکثر قسمت bc از این سازه را محاسبه کنید ، E و I دارای مقادیر ثابتی برابر با $E = 30 \times 10^3 \text{ kips} / \text{in}$ و $I = 1{,}440 \text{ in.}^4$ می‌باشند .

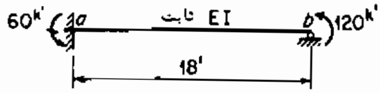


شکل (۱۲–۶۲) مساله (۱۲–۲۶)

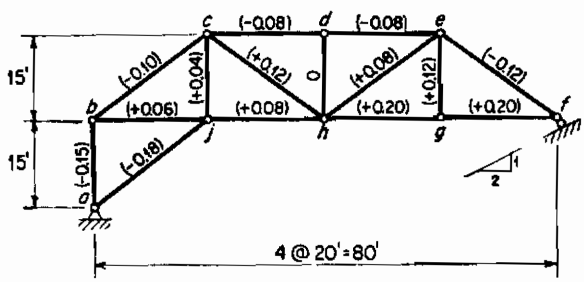
۱۲ – ۲۷ با مراجعه به‌شکل (۱۲ – ۶۳) فرض کنید که لنگری برابر با 120 kip-ft بر b اثر کرده و عکس‌العملی برابر با 60 kip-ft در تکیه‌گاه a مانند شکل ایجاد می‌کند، مقدار و محل تغییر مکان عمودی حداکثر را در این تیر محاسبه کنید.

$E = 30 \times 10^3$ kips in $\quad I = 576$ in.^{4}

جواب: 1,440/EI به‌سمت پائین در فاصله 12 ft از a



۱۲ – ۲۸ با توجه به‌شکل (۱۲–۶۴) مولفه‌های افقی و عمودی تغییر مکانهای گرههای این خرپا را با استفاده‌از روش ویلیو (ت)– مور پیدا کنید. با فرض ثابت بودن موقعیت نقطه h و امتداد میله hd نمودار ویلیو (ت) را رسم کنید و نتایج را برحسب اینچ ثبت نمائید. مقیاس انتخابی 1 in. = 0.20 in باشد و موقعیت نقطه h' را در گوشه راست پائین کاغذ 1 in از پائین صفحه و 3 in از کنار راست کاغذ انتخاب کنید. مقادیر ΔL میله‌هارا در داخل پرانتز نشان داده‌ایم.



شکل (۱۲–۶۴) مساله (۱۲–۲۸)

۱۲ ــ ۲۹ با استفاده از روش ویلیو (ت) ــ مور مولفه‌های افقی و عمودی کلیه گرههای خرپا را در مسائل زیر پیدا کنید. (الف) مساله (۱۲ــ۶) (ب) مساله (۱۲ــ۷) (ج) مساله (۱۲ــ۴) (د) مساله (۱۲ــ۹) (هـ) مساله (۱۲ــ۱۰)

۱۲ ــ ۳۰ با استفاده از روش سلسله میله‌ها، محاسبات زیر را انجام دهید. (الف) تغییر مکان عمودی نقاط پانلی‌تحتانی خرپای‌مساله (۱۲ــ۱۵) (ب) تغییرمکان عمودی نقاط پانلی فوقانی خرپای‌مساله (۱۲ــ۷) (ج) تغییر مکان افقی نقاط پانلی c، d، e، f و g ازخرپای مساله (۱۲ــ۶) (د) تغییر مکان افقی نقاط پانلی a j، h و g از خرپای مساله(۱۲ــ۶) (هـ) تغییرمکان عمودی گرههای سلسله میله $L_0U_2U_6L_8$ از خرپای مساله (۱۲ــ۴) (و) تغییرمکان عمودی نقاط پانلی تحتانی قوس سه مفصل مثال (۱۲ــ۲۱).

۱۳
تحلیل تنش درسازه‌های نامعین

۱۳ ـ ۱ مقدمه

در چهل سال اخیر سازه‌های نامعین همواره به‌طور گسترده‌تر از قبل به‌کاربرده شده‌اند زیرا چنین سازه‌هایی در اثر بارهای متحرک و یا منقول اقتصادی تر و مستحکمتر می‌باشند ، ازطرف دیگر چون اتصالات سازه‌های بتن مسلح و فلزی به‌نحوی است که یک پارچگی سازه‌ها را به‌صورت کلی یا جزیی ایجاد می‌کند لذا عملا" این سازه‌ها در زمرهٔ سازه‌های نامعین می‌باشند .به‌این دلیل است‌که آگاهی برروشهای طرح ومحاسبه‌سازه‌های نامعین با گسترده‌تر شدن استفاده ازابنیه فلزی یا بتنی روز به‌روز مهمترمی‌گردد . نمونه‌هایی از سازه‌های‌نامعین عبارتنداز تیرها و خرپاهای یکسره ، طاقهای دو مفصل یا بی‌مفصل . قابهای صلب پلها ، پلهای معلق و قابهای ساختمانی .

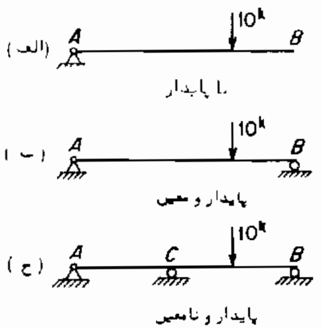
سازه‌های نامعین و سازه‌های معین در دو زمینهٔ زیر با هم متفاوت هستند .

۱ ــ تحلیل تنش در این سازه‌ها نه تنها بستگی به‌مشخصات هندسی سازه دارد بلکه به‌خواص ارتجاعی آن نظیر ضریب ارتجاعی سطح مقطع و لنگر لختی نیزبستگی دارد .به‌این جهت برای این‌که به‌طرح نهایی سازه‌های نامعین برسیم باید برای‌قطعات آن‌اندازه‌های‌لازم را در محاسبات فرض‌کنیم سپس به‌تحلیل تنش بپردازیم و بعداز آن اندازه‌های جدیدی برای‌آن مقادیر برحسب تنشهای به‌دست آمده انتخاب کنیم و این عمل را تا جایی‌که‌به‌طرح نهایی میرسیم ادامه دهیم .

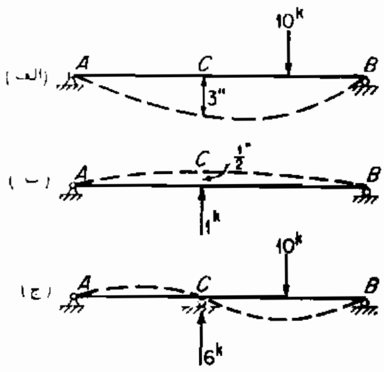
۲ ــ در حالت کلی در سازه‌های نامعین مقدار تنشها نه تنها بستگی به‌شدت و نوع بارگذاری دارد بلکه به‌تغییرات درجه حرارت و نشست تکیه‌گاهها ، خطاهای ساخت و نظایر آن نیز مربوط می‌گردد .

برای درک چگونگی محاسبه تنش در سازه‌های نامعین لازم است که ابتدا تفاوتهای موجود بین سازه‌های ناپایدارمعین‌ونامعین را درک نمائیم . به‌این جهت یادآوری‌مختصری

از مقدمات اساسی این سازه‌ها به‌عمل می‌آید . فرض کنید که تیر AB فقط دارای یک تکیه‌گاه مفصلی در A نظیر شکل (۱۳ــ۱ الف) باشد ، اگر باری برابر با 10-kip چنانچه نشان داده شده است به‌این تیر اثر کند واضح است که این تیر حول مفصل A خواهد چرخید . لذا تیری که بدین صورت تکیه‌گاه داشته باشد یک سازه ناپایدار خواهد بود ، حال اگر مانند شکل (۱۳ــ۱ ب) در انتهای B این تیر یک تکیه‌گاه غلتکی اضافه کنیم دیگر تیر مزبور حول A نخواهد چرخید و تبدیل به‌یک سازهٔ پایدار می‌گردد که این سازه یک سازه معین‌نیزمی‌باشد



شکل ۱۳ــ۱ طبقه‌بندی سازه‌ها



شکل ۱۳ ــ ۲ انطباق ساده آثار

اگر یک تکیه‌گاه غلتکی دیگری در نقطهٔ C مانند شکل (۱۳ــ۱ ج) به‌آن اضافه کنیم در این حالت تعداد تکیه‌گاهها بیشتراز حداقل موردنیاز برای ایجاد تعادل خواهد شد و لذا دیگرسازه فوق معین نبوده بلکه نامعین خواهد شد .در حالت اخیر نه‌تنها از انتقال ودوران قطعه جلوگیری کرده‌ایم بلکه از تغییرمکان عمودی نقطه C نیز جلوگیری شده است .

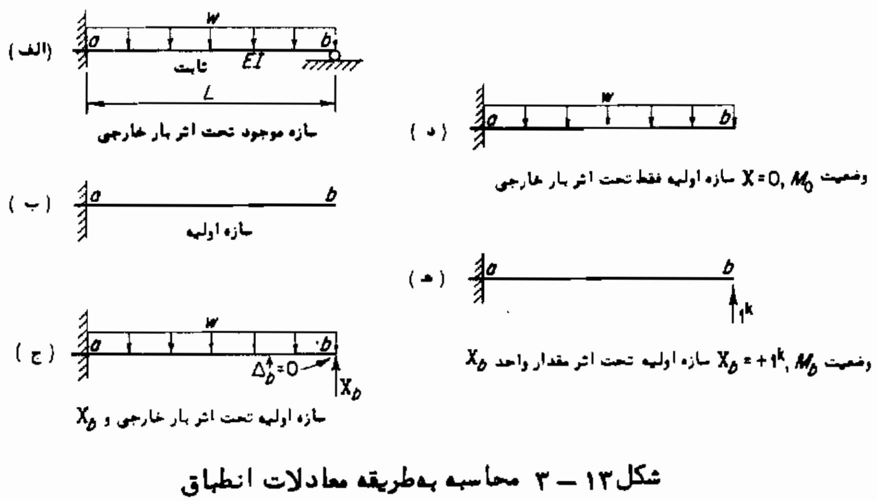
با اندک دقتی فورا" می‌توان روشی برای تعیین عکس‌العمل عمودی نقطه C پیشنهاد نمود . فرض کنید مانند شکل (۱۳ــ۲ الف) موقتا" تکیه‌گاه C را حذف‌کرده و تیررا به صورت ساده روی دو انتهای خود قرار دهیم در این حالت فرض نمائید که بار 10-kip در نقطه C تغییر مکانی عمودی و به‌سمت پائین برابر با $3''$ ایجاد می‌نماید . حال اگر تکیه‌گاه نقطه C را دوباره ایجاد کنیم این تکیه‌گاه باید آنچنان عکس‌العمل به‌این تیر بدهد که نقطه C را به‌جای خود برگرداند و به‌عبارت دیگر تغییرمکان نقطه C را برابر صفر نماید . برای این که بدانیم چه مقدار عکس‌العمل در نقطه C اعمال کنیم تا نقطه C به‌جای خود برگردد ابتدا مقدار تغییرمکان ناشی از اثر نیرویی برابر با 1-kip در نقطه C را در حالی که تیر فقط روی دوتکیه‌گاه A و B قرار دارد معین می‌کنیم چنانکه در شکل (۱۳ــ۲ ب) نشان داده شده است اگر مقدار تغییر مکان در این حالت برابر با $\frac{1}{2}$ in باشد معلوم می‌شود که نیرویی

برابر با 6 kips که در جهت از پائین به‌بالا در نقطه C اثرکند مانندشکل (۱۳–۲ج) نقطه C از تیر را که خود تحت اثر بار متمرکز 10-kip می‌باشد به‌جای خود برخواهد گرداند، بدین ترتیب عکس‌العمل عمودی نقطه C از تیر شکل (۱۳–۱ ج) برابر با 6 kips در جهت ازپائین به‌بالا تعیین می‌شود. پس از این‌که مقدار عکس‌العمل در نقطه C معین‌شدبااستفاده از معادلات تعادل می‌توان به‌راحتی مقادیر عکس‌العمل‌های نقطه A و B را معین نمود.

۱۳ ــ ۲ کاربرد معادلات رویهم‌گذاری (انطباق) در تحلیل سازه‌های نامعین

بسیاری از سازه‌های نامعین ساده را می‌توان به‌طریقی که ذکر شد حل و بررسی نمود، البته با چنان روش بدون نظامی که شرح داده شد، حل سازه‌های پیچیده‌تر مشکل خواهد شد، لذا برای این که بتوان روش فوق را برای کلیه‌حالات قابل‌اجرا نموده و در حالات‌ساده نیز به‌راحتی به‌نتیجه رسید طریقه نظام یافته روش فوق را برای حالتی ساده بیان می‌کنیم.

فکر و فلسفه این روش نظام یافته‌را می‌توان با شرح تیرنامعینی‌که درشکل (۱۳–۳الف) نشان داده شده است بیان نمود تکیه‌گاههای تیر را غیرقابل تغییرشکل فرض می‌کنیم. این تیر یک درجه نامعین است و به‌عبارت دیگر فقط یک مولفه عکس‌العمل اضافه برآنچه برای استفاده از معادلات تعادل لازم است داراست. لذا یکی از مولفه‌های عکس‌العمل را می‌توان به‌عنوان اضافی قلمداد کرد، در این حالت عکس‌العمل عمودی را در نقطه b به‌عنوان عکس‌العمل اضافی فرض می‌کنیم.



شکل ۱۳ ــ ۳ محاسبه به‌طریقه معادلات انطباق

فرض کنید که از سازه موجود تکیه‌گاه در نقطه b و عکس‌العمل عمودی X_b را که درآن تکیه‌گاه اعمال می‌شد حذف‌کنیم ،طره‌ای معین و پایدار باقی مانده که پس از حذف تکیه‌گاه اضافی در نقطه b بدست می‌آید، این طره را سازه اولیه می‌نامیم (شکل ۱۳ــ۲ ب) حال می‌توان سازه اولیه را تحت اثر مجموع اثرات بارهای موجود سازه اصلی و نیروی اضافی نامعین X_b مطابق شکل (۱۳ ــ ۳ ج) قرار دهیم .

اگر نیروی اضافی X_b که به‌سازه اولیه وارد می‌شود از نظر مقدار برابر با عکس‌العمل در نقطه b سازه موجود باشد . مقادیر تلاش برشی و لنگر خمشی ومقادیر عکس‌العملها در نقطه a برای دو سازه یکی خواهد شد و اگرشرایط تنش در دو سازه‌اولیه و موجود یکی باشد اجبارا" نحوه تغییرشکل در دو سازه کاملا" یکی خواهد شد . اگر نحوه تغییر شکل دو سازه یکی باشد . تغییر مکان تکیه‌گاهی در نقطه a نیز برای آنها یکی خواهد شد و به‌همین نحو تغییرمکان در هر دو نقطه نظیر از دو سازه یکی خواهد بود . بنابراین چون در نقطه b از سازه موجود تغییر مکان عمودی وجود ندارد لازم است که در سازه اولیه که تحت اثر مجموع بارهای موءثر موجود و X_b قرار دارد نیز تغییرمکان عمودی برابر صفر باشد .

امکان این که شرح فوق را به‌صورت ریاضی درآوریم و از آن معادله‌ای برای تعیین مقدار مجهول X_b ارائه دهیم موجود است ، با فرض این که جهت مثبت X_b به‌طرف بالا باشد و تعاریف زیر را نیز داشته باشیم :

Δ_b : تغییرمکان به‌سمت بالای نقطه b در سازه اولیه (شکل ۱۳ــ۳ ج)

Δ_{bo} : تغییرمکان به‌سمت بالای نقطه b در سازه اولیه تحت اثر بار موجود و شرط $X = 0$ (شکل ۱۳ــ۳ د) .

Δ_{bb} : تغییرمکان به‌سمت بالای نقطه b در سازه اولیه که فقط تحت اثر مجهول X_b می‌باشد .

محاسبه Δ_{bb} تا زمانی که مقدار X_b معلوم نشده است امکان‌پذیر نمی‌باشد و اگر داشته باشیم :

δ_{bb} : تغییر مکان به‌سمت بالای نقطه b در سازه اولیه که فقط تحت اثر بار واحد به‌سمت بالا در نقطه b قرار گرفته باشد "یعنی $X_b = +1$ " (شکل ۱۳ــ۳ هـ) .

می‌توان گفت تا زمانی که اصل رویهم‌گذاری صادق است داریم :

$$\frac{\Delta_{bb}}{X_b} = \frac{\delta_{bb}}{1^k} \qquad \text{(الف)}$$

و لذا

$$\Delta_{bb} = \frac{X_b}{1^k}\,\delta_{bb} \qquad \text{or} \qquad \Delta_{bb} = X_b\delta_{bb} \qquad \text{(ب)}$$

و چون $X_b/1^k$ را با X_b جایگزین کرده‌ایم پس بایستی مقدار X_b را بدون بعد در نظرداشته باشیم و بدانیم که X_b فقط مقدار عددی X_b را نشان می‌دهد (یعنی مقدار نیروهای 1^k را نشان می‌دهد *) البته این یک واقعیت فیزیکی است‌که Δ_b (تغییرمکان‌کل) برابر با جمع تغییرمکانهای حاصل از اثر تک تک بارگذاریها یعنی بار موجود و مجهول X_b باشد:

$$\Delta_b = \Delta_{bo} + \Delta_{bb} \qquad (ج)$$

لذا با درنظرگرفتن رابطه (b) خواهیم داشت:

$$\Delta_b = \Delta_{bo} + X_b\delta_{bb} \qquad (۱-۱۳)$$

این معادله را معادله روبهم‌گذاری (انطباق) برای تغییرمکان نقطه b در سازه اولیه گویند.

چون Δ_b می‌بایستی برابر با صفر باشد لذا معادله (۱۳-۱) را جهت تعیین X_b حل می‌کنیم.

$$X_b = -\frac{\Delta_{bo}}{\delta_{bb}} \qquad (۲-۱۳)$$

تعیین مقادیر عددی Δ_{bo} و δ_{bb} به‌طرق مختلف محاسبه تغییر مکان تیرها امری ساده است، با جاگذاری مقادیر آنها در معادله (۱۳-۲) باید قرار داد علامت‌گذاری را به‌نحوی که گفته شد یعنی مثبت برای تغییر مکانهای به‌سمت بالا رعایت کنیم به‌این ترتیب مقدار مثبت X_b نشان خواهد داد که جهت عمل X_b به‌سمت بالاست و مقدار منفی عمل کرد به‌سوی پائین آن را معین می‌کند. نحوه و ترتیب محاسبات عددی در چنین مسائلی در مثالهای بخش (۱۳-۴) نشان داده شده است.

۱۳ ــ ۳ شرح کلی کاربرد معادلات انطباق در تحلیل سازه‌های نامعین

روشی‌که دربخش(۱۳-۲) شرح داده شد روشی‌کلی برای تعیین تنش در سازه‌های‌نامعین

---

* از طرف دیگر معادله(الف)را به‌صورت زیر نیز می‌توان نمایش داد.

$$\Delta_{bb} = X_b\frac{\delta_{bb}}{1^k} \quad \text{or} \quad \Delta_{bb} = X_b d_{bb} \qquad (ب)$$

در این صورت d_{bb} را ضریب تغییرمکان‌گویند که این ضریب مقدارتغییر مکان به‌سمت‌بالای نقطه b را با بازاء واحد نیرو نشان می‌دهد لذا دارای بعد واحد تغییر مکان به‌واحد نیرو خواهد بود. اگر چنین راه‌حلی را بپذیریم در آن صورت X_b دارای بعد بوده و برحسب واحدهای نیرو بیان خواهد شد.

است ، گرچه روشهای دیگری نیز وجود دارد که برای سازه‌های خاصی به‌کاربردن آنها براین روش برتری پیدا می‌کند ولی روشی چنین کلی و قابل انعطاف برای حل سازه‌های نامعین موجود نیست . روش منطبق بر معادلات انطباق برای کلیه سازه‌ها اعم از تیرها ، قابها و یا خرپاها و یا ترکیبی از این سازه‌ها قابل اجراست اعم از این که تحلیل سازه‌ها تحت اثر بارگذاریها ،تغییرات درجه‌حرارت ،نشست تکیه‌گاهها ، اشتباهات اجرایی و نظایر آن‌بررسی کنیم قابل استفاده خواهد بود .

فقط یک شرط در مورد کاربرد معادلات (رویهم‌گذاری) انطباق بایستی رعایت شود و آن قابل اجرابودن اصل انطباق می‌باشد .با بحثی‌که دربخش (۲–۱۲) در باره‌اصل‌انطباق‌شد تا زمانی که تغییرات هندسی تحت اثر بارهای وارده به نحوی باشد که مصالح آن سازه از قانون هوک تبعیت کند صادق است البته کلیه روش‌های دیگری که در اینجا بیان می‌شود نیز مانند این روش بایستی شرط فوق در مورد آنها صادق باشد .

قبل از این که به‌مثالهای مشروح عددی در مورد کاربرد این روش با استفاده‌ازمسائلی نمونه بپردازیم بهتر است که در مورد آنچه در بخش (۱۳–۲) گفته شد شرح بیشتری داده شود ممکن است دانشجویان در درک شرح کلی زیر دچار اشکال شوند ولی اگر تا پایان آن بخواندن مطلب بپردازند و آنچه‌را که درک کرده جذب‌نمایند و پس ازآن مثالهای بخشهای (۱۳–۴) و (۱۳–۵)را مطالعه کنند قادر خواهند شد که بقیه مطلب را نیز با دوباره‌خواندن آن درک نمایند .

فرض کنید که بخواهیم یک سازه نامعین معلومی را تحت یک یا کلیه حالاتی که در آن ایجادتنش می‌کند حل و بررسی نمائیم ،این سازه می‌تواند به‌هرصورت و به‌هردرجه‌ای‌نامعین باشد به‌هرحال اولین قدم در حل آن تعیین درجه نامعینی آن است . فرض کنید سازه فوق n درجه نامعین باشد .دراین صورت n قید اضافی را انتخاب‌می‌کنیم و آنهارا از سازه‌حذف می‌نمائیم وبه‌جای آنها به‌تعداد n تا مولفهٔ تنش اضافی به‌سازه می‌افزائیم کلیه‌این n مجهول X_a ، X_b ، . . . X_n همزمان و همراه با بارهای موجود (خارجی) به‌سازه اولیه‌که پس از آزادکردن n قید اضافی بوجود آمده است اثر می‌کنند .

به‌انواع مختلف می‌توان قیدهای اضافی را برای آزادکردن آنها انتخاب نمود ولی‌در هرصورت انتخابی صحیح خواهد بودکه با دقت‌کافی به‌دست آمده و لذا عملیات محاسباتی را به‌حداقل برساند .برخی‌ازاصول انتخاب قیدهای اضافی در بخش (۱۳–۶) شرح داده‌شده است و در حال حاضر کافی است ذکر کنیم که این قیود اضافی بایستی به‌نحوی‌انتخاب‌شوند که سازه اولیه سازه‌ای پایدار و معین باشد*.

* گاهی بهتر است که سازه اولیه را سازه‌ای نامعین و پایدار انتخاب نمود بخش ۱۴–۳ .

پس از انتخاب مجهولات می‌توانیم بگوئیم که اگر مجهولات بارهایی را به‌سازه اولیه اعمال‌کنند که توسط قیدهای اضافی نظیر به‌سازه موجود اعمال می‌شود ، پس کلیه حالات‌تنش در دوسازه اولیه و موجود یکی‌خواهد بود .درنتیجه تغییرشکل دو سازه نیز کاملا" یکی‌خواهد بود و اگر تغییرمکان تکیه‌گاههای سازه اولیه با تغییر مکان تکیه‌گاههای نظیر سازه موجود یکی باشد لازم است که تغییرمکان کلیه نقاط‌نظیر دو سازه نیز یکی باشد . می‌توان از این بحث چنین نیز برداشت کرد که لازم است تغییرمکان نقاط‌اثر n مجهول در سازهٔ اولیه کاملا" برابر با تغییر مکان نظیرآن نقاط‌در سازهٔ موجود باشد .

اگر n معادله انطباق برای n تغییر مکان نوشته شود این معادلات n مجهول را در خود خواهند داشت و چون هریک‌از n تغییرمکان سازه‌بستگی به‌تک تک n مجهول‌معادلات انطباق دارد لذا حل دستگاه معادلات n مجهولی به‌تعیین n مجهول خواهد انجامید .

درکاربرد این روش برای راحتی بیشترمی‌بایستی قراردادی برای نام‌گذاری‌تغییرمکانها ابداع گرد تغییرمکان کلی نقطه m از سازه اولیه را تحت اثر کلیه حالات با Δ_m نشان می‌دهیم سایر تغییر مکانها را که جزیی از این تغییرمکان کلی می‌باشند با دو زیرنویس که زیرنویس اول نشان دهندهٔ محل تغییرمکان مورد بحث و زیرنویس دوم مربوط به‌بارگذاری مربوطه می‌گردد نشان خواهیم داد ، به‌این ترتیب تغییرمکان نقطه m از سازهٔاولیه را که به‌دلیلی بوجود آمده باشد به‌شرح زیر قرارداد می‌کنیم .

Δ_m : تغییر مکان کلی نقطه m تحت اثر کلیه عوامل

Δ_{mo} : تغییرمکان نقطه m تحت شرط $X = 0$ (یعنی تحت اثر بار موجود بدون اثر مجهولات موردنظر)

Δ_{mT} : تغییرمکان ناشی از اثر تغییر حرارت

Δ_{mS} : تغییرمکان نقطه m ناشی از اثر نشست *تکیه‌گاهی سازهٔ اولیه*

Δ_{mE} : تغییرمکان نقطه m ناشی از اثر خطای ساخت و اجراء

δ_{ma} : تغییرمکان نقطه m ناشی از اثر $X_a = +1$ kip

δ_{mb} : تغییرمکان نقطه m ناشی از اثر $X_b = +1$ kip

δ_{mm} : تغییر مکان نقطه m ناشی از اثر $X_m = +1$ kip

توجه کنید که تغییر مکان ناشی از اثر مقدار واحد مجهولات را با دلتای کوچک (δ) نشان می‌دهیم .

هر مجهولی را می‌توان در جهت و راستایی دلخواه به‌سازه وارد کرد با این انتخاب جهت مثبت آن مجهول را نیز تعیین کرده‌ایم . تغییرمکان نقطهٔ اثر آن مجهول در راستای

انتخاب شده اندازه‌گیری می‌شود و جهت مثبت تغییرمکان نیز همان جهت عملکرد مجهول خواهد بود .

بدین‌ترتیب با به‌کاربردن تعاریف و قراردادن علامت ، دستگاه n معادله انطباق که شامل n مجهول می‌باشد به‌شکل زیرخواهد بود ، هر معادله بیانگر تغییر مکان کلی یک‌نقطه تحت اثر هریک از n مجهول به‌سازه اولیه می‌باشد .

$$\begin{aligned}
\Delta_a &= \Delta_{ao} + \Delta_{aT} + \Delta_{aS} + \Delta_{aE} + X_a\delta_{aa} + X_b\delta_{ab} + \cdots + X_n\delta_{an} \\
\Delta_b &= \Delta_{bo} + \Delta_{bT} + \Delta_{bS} + \Delta_{bE} + X_a\delta_{ba} + X_b\delta_{bb} + \cdots + X_n\delta_{bn} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Delta_n &= \Delta_{no} + \Delta_{nT} + \Delta_{nS} + \Delta_{nE} + X_a\delta_{na} + X_b\delta_{nb} + \cdots + X_n\delta_{nn}
\end{aligned} \qquad (۱۳-۳)$$

اگر مقادیر معلوم Δ_a و Δ_b ... Δ_n را در معادلات قرار دهیم و همچنین پس از تعیین مقادیر تغییرمکانهای طرف راست معادله به‌طرق مناسب‌موجود و جاگذاری آنها درمعادلات،دستگاه n معادله n مجهولی را می‌توان حل کرده و مقادیر مجهولات X_a X_b ... X_n را معین نمود .

در مثال (۱۳-۲۲) روش ساده‌ای مبنی بر استفاده از جدول در حل این‌قبیل‌معادلات ارائه شده است .

اگر در ایجاد معادلات انطباق به‌طریقی که دربخش(۱۳-۲)بیان شد از ضریب تغییر مکان استفاده شود معادلات(۱۳-۳) بر حسب ضرایب تغییرمکان d_{ij} که بیان کننده تغییر مکان نقطه اثرمجهول X_i در جهت انتخابی X_i تحت اثرمقدار واحد مجهول X_j می‌باشد به‌صورت زیر نوشته خواهد شد :

$$\begin{aligned}
\Delta_a &= \Delta_{ao} + \Delta_{aT} + \Delta_{aS} + \Delta_{aE} + X_a d_{aa} + X_b d_{ab} + \cdots + X_n d_{an} \\
\Delta_b &= \Delta_{bo} + \Delta_{bT} + \Delta_{bS} + \Delta_{bE} + X_a d_{ba} + X_b d_{bb} + \cdots + X_n d_{bn} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Delta_n &= \Delta_{no} + \Delta_{nT} + \Delta_{nS} + \Delta_{nE} + X_a d_{na} + X_b d_{nb} + \cdots + X_n d_{nn}
\end{aligned} \qquad (۱۳-۳')$$

چنانکه قبلاً نیز گفته شد مجهولات X در این معادلات دارای بعد نیرو یا لنگر برحسب حالت موجود خواهند بود .

توجه‌کنیدکه ازاین معادلات مقادیر X_a X_b ... X_n به‌صورت‌بدون بعدبه‌دست‌می‌آید چنین مطلبی واضح می‌باشد زیرا باید X_a X_b ... X_n عدد خالص باشند تا این که کلیه عبارات معادلات (۱۳-۳) دارای بعد یک نوع تغییرمکان (انتقال یا دوران) گردند ، برای این که واحدی برای مقادیر X_a ، X_b ... مشخص کنیم لازم است‌که‌آحاد مقادیرواحد این مجهولات را که در محاسبه مقادیر δ_{aa} ، δ_{ab} و غیره بکار برده‌ایم همواره درنظرداشته باشیم .

توجه کنید که قیود آزادشده (مجهولات) می‌توانند نیرو و یا لنگر بوده و تغییر مکانها نیز که با Δ یا δ نشان داده شده‌اند به‌تناسب این که آنها معرف تغییر مکان نقطه اثر یک نیرو یا لنگر باشند می‌توانند معرف تغییرمکان خطی (انتقال) و یا تغییرمکان زاویه‌ای (دوران) باشند. درمثالهای مشروح زیر جهت مثبت یک تغییر مکان را با پیکان کوچکی که با علامت مربوطه مانند $\Delta_a^{\uparrow}$ ، $\Delta_b^{\curvearrowleft}$ ، $\Delta_c^{\rightarrow}$ و غیره، همراه شده است نشان داده‌ایم.

۱۳ ــ ۴ مثالهای عددی تحلیل تنش به‌طریقه معادلات انطباق

مثالهای زیر کاربرد عملی معادلات انطباق را برای تعیین تنش در سازه‌های متعارف نامعین که تحت اثر بارگذاری معلوم خارجی قرار دارند روشن می‌سازد.

پس از تعیین درجه نامعینی سازه آزادی عمل قابل ملاحظه‌ای در انتخاب قیود اضافی وجود دارد. در هرصورت *هرگز مولفه‌های عکس‌العمل، نیروی محوری، تلاش برشی و لنگر خمشی قابل محاسبه تیرها را به‌عنوان قید اضافی انتخاب نکنید زیرا اگر چنان کمیتی قابل محاسبه باشد آن کمیت برای پایداری سازه لازم خواهد بود، با حذف آن سازه اولیه ناپایدار خواهد شد.*

البته چنان خطایی غیرقابل تشخیص نیست زیرا تعیین تنش چنان سازه اولیه‌ای منتهی به‌عملی غیرممکن و یا جوابهایی ناسازگار خواهد شد.

خواننده باید انتخابهای دیگری برای قیود اضافی در مثالهای ذکرشده به‌عمل آورد و سعی کند که انتخابی با عملیات محاسباتی کمتراز آنچه انجام شده است تعیین نماید.

مساله انتخاب قیود اضافی با شرح مبسوط تری در بخش (۱۳ــ۶) آورده شده است.

جهت مثبت *عوامل مجهول (نیرو یا لنگر) به‌طور دلخواه انتخاب می‌گردد* و تغییرمکان *نقطهٔ اثر آن عامل مجهول در جهت مثبت آن عامل مثبت گرفته می‌شود. با توجه به‌هریک از این مثالها دیده می‌شود که جهت اثر نهایی هریک از عوامل مجهول ربطی به‌انتخاب جهت مثبت ابتدایی ندارد.*

در کاربرد روش انطباق هرنوع طریقه‌ای برای محاسبه مقادیر تغییرمکانها مجازمی‌باشد بدیهی است مانند سایر مسائل تغییرمکان باید دقت بسیاری در کاربرد آحاد و علائم به‌کار گرفته شود، بار دیگر توجه کنیدکه مقادیر X_a ، X_b و غیره‌که از این راه‌حلها به‌دست می‌آید فقط مقادیر عددی می‌باشند یعنی‌که دارای بعد نیستند. چنان‌مقادیرعددی‌مثلا" اگربرای X_a برابربا 10.5 باشدنشان‌می‌دهدکه X_a 10.5 برابربزرگترازباروا‌حددرحالت $X_a = +1$ kip می‌باشد بدین‌ترتیب اگر بار واحد 1-kip باشد در بیان پاسخ نهایی مقدار X_a را برابر

با 10.5 kips ذکر نموده و یا در ادامه محاسبات به‌کار خواهیم برد .

اگر یک نوع واحد نیرو و یک‌نوع واحد طول در کل مساله بکار برده باشیم واحدها همواره سازگار خواهند بود و اگر واحدهای مختلفی نظیر ft ، in ، lb و kips را درمسائلی که بیش از یک نوع تغییر شکل در آنها مطرح است مخلوط کنیم بدیهی است که به‌مشکل بر خواهیم خورد ، اشکال مشابهی در حل مسائلی که به‌بحث در مورد تغییر درجه حرارت ، نشست تکیه‌گاهها و نظایر آن مربوط می‌شود زمانی‌که آحاد مختلفی به‌کار گیریم ایجادخواهد شد ، اشکالاتی ازین قبیل در بخش (۱۳ــ۵) شرح داده شده است .

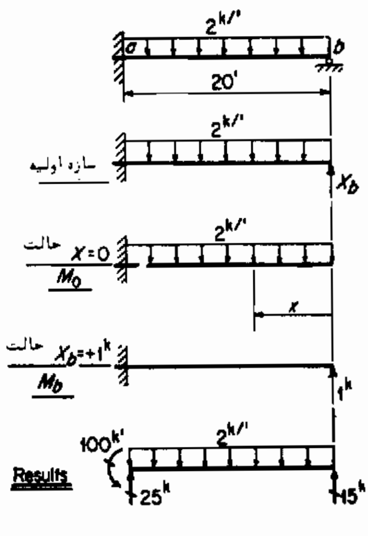
باید توجه کرد که مقدار Δ_n که تغییر مکان کل نقطهٔ اثر عامل مجهول X_n تحت اثر کلیه حالات می‌باشد نیز همواره برابر صفر است ، در حقیقت فقط زمانی مقدار Δ_n مخالف صفر می‌گردد که X_n بیان کننده نیرو یا لنگر باشد که به‌یک تکیه‌گاه سازه موجودکه‌در جهت X_n تحمل حرکتی می‌نماید اثر کند .

مثال ۱۳ ــ ۱= عکس‌العملهای این تیر را محاسبه کنید E ، I ثابت هستند

سازه یک درجه نامعین است ، X_b را می‌توان عامل مجهول انتخاب کنیم ، پس داریم :

$$\Delta_b^1 = \Delta_{bo} + X_b\delta_{bb} = 0$$

مقادیر Δ_{bo} ، δ_{bb} را به‌روش کار مجازی تعیین می‌کنیم



$$\sum Q\delta = \sum \int M_Q M_P \frac{ds}{EI}$$

Δ_{bo}: $\quad M_Q = M_b \qquad M_P = M_o$

$$(1^k)(\Delta^1_{bo}) = \int M_b M_o \frac{ds}{EI}$$

از b تا a

$$M_b = x \qquad M_o = -x^2$$

$$(1^k)(\Delta^1_{bo}) = \int_0^{20} (x)(-x^2)\frac{dx}{EI}$$

$$\Delta_{bo} = \frac{-40{,}000^{k'^3}}{EI}$$

δ_{bb}: $\quad M_Q = M_b \qquad M_P = M_b$

$$(1^k)(\delta^1_{bb}) = \int M_b^2 \frac{dx}{EI}$$

$$(1^k)(\delta^1_{bb}) = \int_0^{20} (x)^2 \frac{dx}{EI} \qquad \delta_{bb} = \frac{2{,}667^{k'^3}}{EI}$$

پس

$$\frac{-40{,}000}{EI} + \frac{2{,}667}{EI}X_b = 0$$

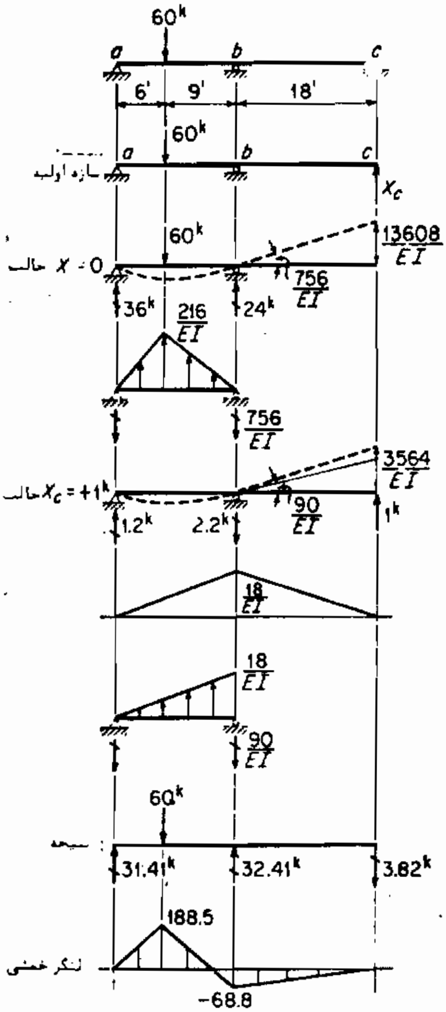
به‌سمت بالا

$$\therefore X_b = \underline{+15}$$

سپس با کمک گرفتن از معادلات تعادل عکس‌العملها در انتهای a به‌صورتی که نشان داده شده محاسبه می‌شود .

مثال ۱۳ ــ ۲ = عکس‌العمل‌های این تیر را محاسبه کـرده و نمودار لنگر خمشـی آنـــرا ترسیم نمائید E و I ثابت هستند .

سازه یک درجه نامعین است X_c را به‌عنوان عامل مجهول انتخاب می‌کنیم پس:



$$\Delta_c^{\uparrow} = \Delta_{co} + X_c\delta_{cc} = 0$$

مقادیر Δ_{co} و δ_{cc} را بروش بار اتجاعی محاسبه می‌کنیم

Δ_{co}: ابتدا مقدار عکس‌العمل تیر خیالی را در نقطه b مشخص می‌کنیم

$$216 \times 3 \quad = 648 \times 4 = \quad 2{,}592$$
$$216 \times 4.5 = 972 \times 9 = \quad 8{,}748$$
$$\frac{11{,}340}{15} = 756$$

پس :

$$EI\Delta_{co} = 756 \times 18 = 13{,}608\uparrow$$

$$\therefore \Delta_{co} = \frac{+13{,}608^{k'^3}}{EI}$$

δ_{cc}: ابتدا عکس‌العمل تیر خیالی را در b مشخص می‌کنیم

$$\tfrac{5}{3} \times 18 \times 7.5 = 90$$

پس :

$$EI\delta_{cc} = 90 \times 18 + 18 \times 9 \times 12$$
$$= 3{,}564\uparrow$$

$$\therefore \delta_{cc} = \frac{+3{,}564^{k'^3}}{EI}$$

پس

$$\frac{13{,}608}{EI} + \frac{3{,}564}{EI}X_c = 0$$

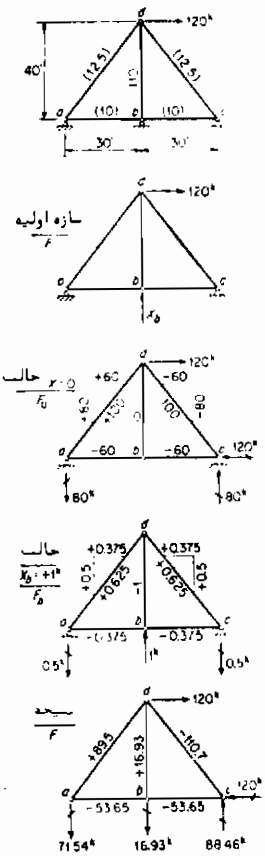
$$\therefore X_c = \underline{-3.82}$$ یعنی به‌سمت پائین

حال می‌توان عکس‌العمل‌های مربوط به a و b را به‌سادگی به‌کمک معادلات تعادل معین نمود و به‌همین ترتیب نمودار لنگر خمشی را بدون اشکال رسم کرد .

مثال ۱۳ ــ ۳= عکس‌العملها و نیروی میله‌ها را برای این خرپا محاسبه کنید ، سطح مقاطع را در داخل پرانتز نشان داده‌ایم . $E = 30 \times 10^3\ kips \quad sq\ in$

چون این سازه یک درجه نامعین می‌باشد X_b را به‌عنوان مجهول بر می‌گزینیم در این صورت خواهیم داشت :

$$\Delta_b^1 = \Delta_{bo} + X_b \delta_{bb} = 0$$



Δ_{bo} و δ_{bb} را به‌روش کار مجازی محاسبه می‌کنیم

$$\sum Q\delta = \sum F_Q \Delta L = \sum F_Q F_P \frac{L}{AE}$$

$$\Delta_{bo}: F_Q = F_b \qquad F_P = F_o \qquad (1^k)(\Delta_{bo}^1) = \frac{1}{E}\sum F_b F_o \frac{L}{A}$$

$$\delta_{bb}: F_Q = F_b \qquad F_P = F_b \qquad (1^k)(\delta_{bb}^1) = \frac{1}{E}\sum F_b^2 \frac{L}{A}$$

میله‌ها	L	A	$\frac{L}{A}$	F_o	F_b	$F_bF_o\frac{L}{A}$	$F_b^2\frac{L}{A}$	X_bF_b	F
آحاد	'	in^2	$'/in^2$	k	k	$k^2{}'/in^2$	$k^2{}'/in^2$	k	k
ab	30	10	3	− 60	−0.375	+ 67.5	+0.422	+ 6.35	− 53.65
bc	30	10	3	− 60	−0.375	+ 67.5	+0.422	+ 6.35	− 53.65
ad	50	12.5	4	+100	+0.625	+250	+1.563	−10.6	+ 89.4
dc	50	12.5	4	−100	+0.625	−250	+1.563	−10.6	−110.6
bd	40	10	4	0	−1.0	0	+4.0	+16.93	+ 16.93
Σ						+135	+7.970		

$$(1^k)(\Delta_{bo}) = \frac{+135^{k^2\prime/in^2}}{E} \qquad \Delta_{bo} = \frac{135^{k\prime/in^2}}{E}$$

$$(1^k)(\delta_{bb}) = \frac{+7.97^{k^2\prime/in^2}}{E} \qquad \delta_{bb} = \frac{7.97^{k\prime/in^2}}{E}$$

$\therefore \dfrac{135}{E} + \dfrac{7.97}{E} X_b = 0 \qquad X_b = \underline{-16.93}$ به‌سمت پائین .

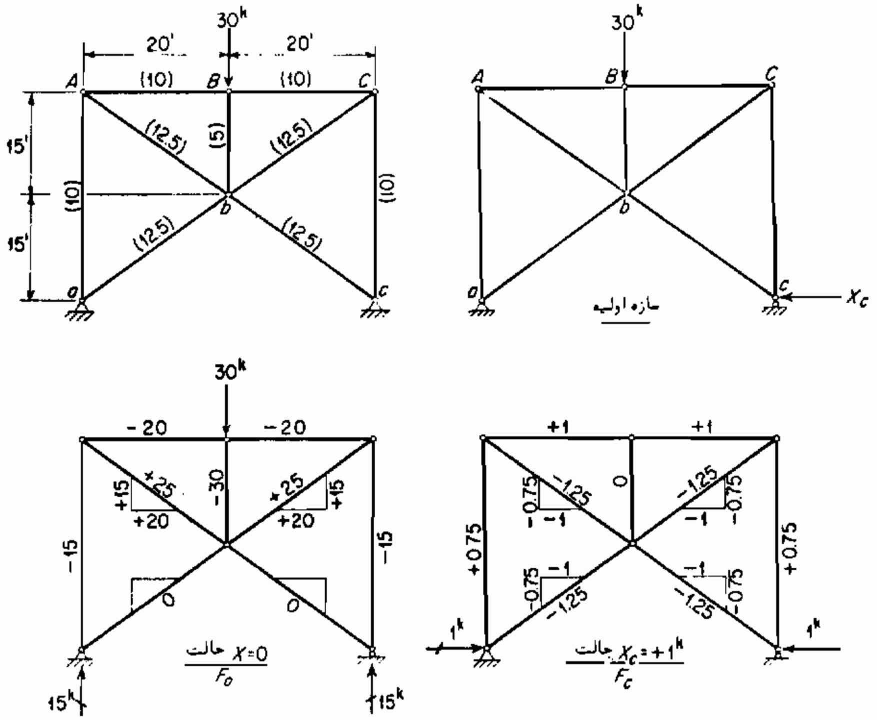
حال بقیه عکس‌العمل‌ها و نیروی میله‌ها را می‌توان با استفاده از معادلات تعادل محاسبه نمود . نیروی میله‌ها را نیز می‌توان به‌همین ترتیب با استفاده از جدول و بکاربردن رابطه زیر که بیان کننده روش انطباق می‌باشد محاسبه کرد .

$$F = F_o + X_b F_b$$

مثال ۱۳ – ۴= عکس‌العملهای این خرپا را محاسبه کنید ، سطح مقطع اعضاء آن در داخل پرانتز ذکر شده است ، $E = 30 \times 10^3\ kips\ \ sq\ in$

چون این سازه یک‌درجه نامعین است X_c را به‌عنوان مجهول انتخاب می‌کنیم .

$$\Delta_c^{\leftarrow} = \Delta_{co} + X_c\delta_{cc} = 0$$



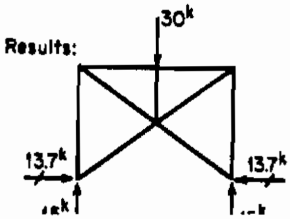
با استفاده از روش کار مجازی به‌محاسبه مقادیر Δ_{co} و δ_{cc} می‌پردازیم .

Δ_{co}: $\quad F_Q = F_c \quad F_P = F_o \quad (1^k)(\Delta_{co}^{\leftarrow}) = \frac{1}{E}\sum F_cF_o\frac{L}{A}$

δ_{cc}: $\quad F_Q = F_c \quad F_P = F_c \quad (1^k)(\delta_{cc}^{\leftarrow}) = \frac{1}{E}\sum F_c^2\frac{L}{A}$

ازآنجائی‌که هم از نظر بارگذاری هم از نظر شکل سازه و هم از حیث تکیه‌گاهها تقارن‌وجود دارد ، فقط نصف میله‌های خرپا در جدول درج شده است .

$$\frac{-272.5}{E} + \frac{19.875}{E}X_c = 0 \qquad \therefore X_c = \underline{+13.7} \quad \therefore \leftarrow\!\!+$$



میله	L	A	$\frac{L}{A}$	F_o	F_c	$F_oF_c\frac{L}{A}$	$F_c^2\frac{L}{A}$
آحاد	′	″²	′/″²	k	k	k²′/″²	k²′/″²
AB	20	10	2	−20	+1.0	−40	+2.0
ab	25	12.5	2	0	−1.25	0	+3.125
Aa	30	10	3	−15	+0.75	−33.75	+1.688
Ab	25	12.5	2	+25	−1.25	−62.5	+3.125
$\frac{1}{2}Bb$	7.5	5	1.5	−30	0	0	0
$\frac{1}{2}\Sigma$						−136.25	+9.938
						$-272.5^{k'/''^2}$	$19.875^{k'/''^2}$

مثال ۱۳ – ۵= نیروی میله‌ها را در اعضای این خرپا محاسبه کنید E و A برای کلیه اعضاء ثابت هستند.

این خرپا ازنظر تکیه‌گاهی معین است ولی از نظر نیروی میله‌های خود دودرجه‌نامعین می‌باشد میله‌های bC و Cd را برش می‌زنیم و نیروهای داخلی آنها را به‌عنوان مجهول می‌گیریم:

$$\Delta_1 = \Delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} = 0 \qquad (1)$$
$$\Delta_2 = \Delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} = 0 \qquad (2)$$

به‌دلیل قانون ماکسوئل $\delta_{12} = \delta_{21}$ است و به‌دلیل تقارن سازه و انتخاب مناسب مجهولها $\delta_{11} = \delta_{22}$ می‌باشد. بنابراین فقط چهار تغییر مکان محاسبه خواهد شد، که این تغییر مکانها عبارتنداز Δ_{10} ، Δ_{20} ، δ_{12} و δ_{11} با استفاده از روش کار مجازی خواهیم داشت:

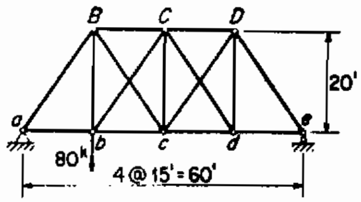
$$(1^k)(EA\Delta_{10}) = \Sigma F_1F_oL = -2{,}040^{k^2\prime}$$
$$(1^k)(EA\Delta_{20}) = \Sigma F_2F_oL = +760^{k^2\prime}$$
$$(1^k)(EA\delta_{12}) = \Sigma F_1F_2L = +12.8^{k^2\prime}$$
$$(1^k)(EA\delta_{11}) = \Sigma F_1^2L = +86.4^{k^2\prime}$$

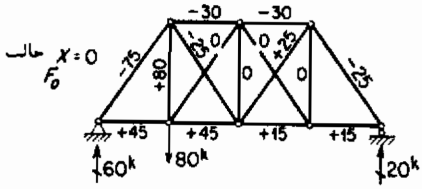
حال اگر این مقادیر را در عبارات (۱) ، (۲) قرار دهیم و مقدار EA را حذف نمائیم خواهیم داشت:

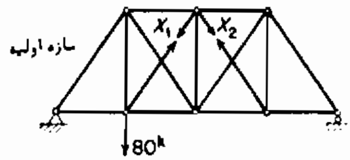
$$-2{,}040 + 86.4X_1 + 12.8X_2 = 0$$
$$+760 + 12.8X_1 + 86.4X_2 = 0$$

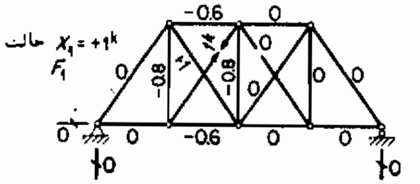
با حل این دستگاه دو معادله دومجهولی مقادیر زیر به‌دست می‌آید:

$$X_1 = \underline{+25.5} \qquad X_2 = \underline{-12.6}$$









میله	L	F_0	F_1	F_2	F_0F_1L	F_0F_2L	F_1^2L	F_1F_2L	F_1X_1	F_2X_2	F
آحاد	'	k	k	k	$k^2{}'$	$k^2{}'$	$k^2{}'$	$k^2{}'$	k	k	k
bc	15	+45	−0.6	0	−405	0	+ 5.4	0	−15.3	0	+29.7
cd	15	+15	0	−0.6	0	−135	0	0	0	+ 7.6	+22.6
BC	15	−30	−0.6	0	+270	0	+ 5.4	0	−15.3	0	−45.3
CD	15	−30	0	−0.6	0	+270	0	0	0	+ 7.6	−22.4
bB	20	+80	−0.8	0	−1,280	0	+12.8	0	−20.4	0	+59.6
cC	20	0	−0.8	−0.8	0	0	+12.8	+12.8	−20.4	+10.1	−10.3
dD	20	0	0	−0.8	0	0	0	0	0	+10.1	+10.1
Bc	25	−25	+1	0	−625	0	+25.0	0	+25.5	0	+ 0.5
bC	25	0	+1	0	0	0	+25.0	0	+25.5	0	+25.5
cD	25	+25	0	+1	0	+625	0	0	0	−12.6	+12.4
Cd	25	0	0	+1	0	0	0	0	0	−12.6	−12.6
Σ					−2,040	+760	+86.4	+12.8			

بحث :

جدولی‌کردن محاسبات چنین خرپایی ، مشخص نمودن میله‌هایی که در آنها نه‌نیروی میله F_1 وجود دارد نه F_2 ، غیر ضروری است ، ولی حتماً می‌بایستی میله‌های اضافی ذکر شود ، چـرا ؟

ممکن است سئوالاتی در مورد قطع میله‌های خرپای این مساله وجود داشتـه باشـد، دانشجویان گاهی اظهار می‌دارندکه دوانتهای چنین میله قطع شده‌ای حالت ناپایدارخواهد داشت ،زیرا چنانکه در نمودار خطی فوق‌الذکر نشان داده شده است‌امکان‌دوران دوانتهای این میله‌ها حول مفصل‌های گرهها وجود دارد برای این که امکان صحیح چنین‌عملی‌را نشان دهیم نحوهٔ برش در چنین حالاتی را در شکل (۱۳—۴) نشان داده‌ایم ، چون برش و لنگر درمیله‌ای که در دوانتهای خود بدین‌صورت مفصل شده‌است معین می‌باشدلذا چنین‌اتصالی

قابل انفصال نخواهد بود و بدین‌ترتیب وقتی ما می‌گوئیم که میله‌ای را برش می‌دهیم منظور این است که قدرت انتقال نیروی محوری را از آن سلب می‌کنیم ولی قدرت تحمل برش و لنگر آن همچنان باقی می‌ماند . این عمل را می‌توان به‌طوری که در شکل نشان داده شده است .با خالی‌نمودن اطراف محور میله و تراش دادن انتهای دیگر آن و تأمین اتصال آن‌دو توسط چند سری گویچه که در حول محور قرار دارند ایجاد نمود .

شکل ۱۳–۴ بیان چگونگی سلب قدرت انتقال نیروی محوری

البته نشان‌دادن چنین شرح اتصالی در همه مواردی که میله را به‌منظور سلب قدرت انتقال نیروی محوری برش می‌دهیم غیرعملی خواهد بود .در چنین‌حالاتی همواره‌به‌صورتی که در نمودار خطی نشان داده‌ایم چنین حالاتی را بیان خواهیم کرد ولی منظورما اتصالی از نوع بالا خواهد بود .

این شرح در مورد قطعه کششی مثال (۱۳–۸) نیز صادق خواهد بود .

مثال ۱۳ – ۶= عکس‌العملهای این تیر را محاسبه کرده و نمودار لنگر خمشی را برای آن رسم کنید . $E = 30 \times 10^3$ kips sq in

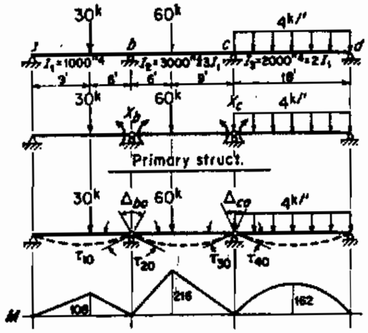
---

این تیر دو درجه نامعین می‌باشد . لنگرهای تکیه‌گاههای میانی را به‌عنوان مجهول انتخاب می‌کنیم لذا خواهیم داشت :

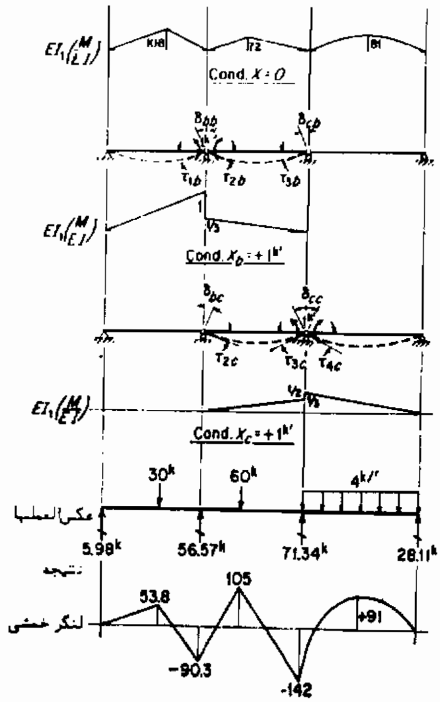
$$\Delta_b = \Delta_{bo} + X_b\delta_{bb} + X_c\delta_{bc} = 0 \qquad (1)$$

$$\Delta_c = \Delta_{co} + X_b\delta_{cb} + X_c\delta_{cc} = 0 \qquad (2)$$

طبق قانون ماکسول $\delta_{bc} = \delta_{cb}$ و با استفاده از قضایای سطح لنگر برای محاسبه Δ_{bo} ، Δ_{co} ، δ_{bb} ، δ_{cb} و δ_{cc} خواهیم داشت :



$$\left.\begin{aligned} &EI_1\tau_{10} = \\ &\frac{108}{15}\left[\frac{(9)(6)}{2} + \frac{(6)(11)}{2}\right] = 432 \\ &EI_1\tau_{20} = \\ &\frac{72}{15}\left[\frac{(9)(6)}{2} + \frac{(6)(11)}{2}\right] = 288 \end{aligned}\right\} EI_1\Delta_{bo} = \underline{+720^{k'^2}}$$



$$EI_1\tau_{3a} = \frac{72}{15}\left|\frac{(6)(4)}{2} + \frac{(9)(9)}{2}\right| = 252$$

$$EI_1\tau_{4a} = \left(\frac{2}{3}\right)\frac{(81)(18)}{2} = 486$$

$$EI_1\Delta_{ca} = \underline{+738^{k'^3}}$$

$$EI_1\tau_{1b} = \left(\frac{1}{15}\right)\frac{(15)(10)}{2} = 5$$

$$EI_1\tau_{2b} = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{(15)(10)}{(15)(2)} = \frac{5}{3}$$

$$EI_1\delta_{bb} = \underline{+6.67^{k'^3}}$$

$$EI_1\tau_{3b} = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{(15)(5)}{(15)(2)} = \frac{5}{6}$$

$$\therefore\ EI_1\delta_{cb} = \underline{+0.83^{k'^3}}$$

$$EI_1\tau_{3c} = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{(15)(10)}{(15)(2)} = \frac{5}{3}$$

$$EI_1\tau_{4c} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{(18)(12)}{(18)(2)} = 3$$

$$EI_1\delta_{cc} = \underline{+4.67^{k'^3}}$$

با جاگذاری این مقادیر در معادلات (۱) و (۲) و حذف EI_1 از معادلات خواهیم داشت :

$$720 + 6.67X_b + 0.83X_c = 0$$
$$738 + 0.83X_b + 4.67X_c = 0$$

از حل این دستگاه معادله مقادیر زیر به‌دست می‌آید :

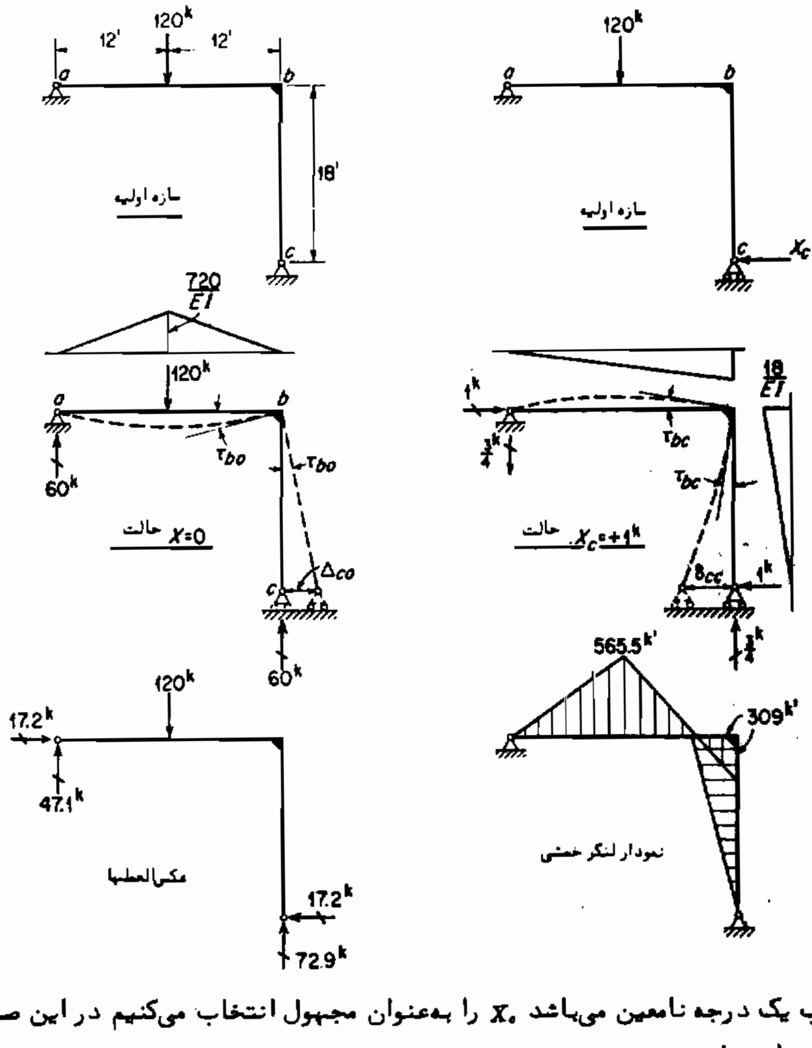
$$X_b = \underline{-90.3} \qquad X_c = \underline{-142.0}$$

پس از معلوم‌شدن این مقادیر لنگر می‌توان در قسمتهای مختلف تیر با استفاده از معادلات تعادل به‌محاسبه برش، عکس‌العملها و لنگرها پرداخت که در این صورت نتایج نشان داده شده حاصل خواهد شد .

بحث :

وقتی لنگرهای تکیه‌گاهی را به‌عنوان مجهول انتخاب می‌کنیم ، مقاومت در برابر لنگر را در این نقاط از بین می‌بریم و این بدان معنی است که در این نقاط مفصل ایجاد می‌کنیم. به‌نحوهٔ برخورد با تغییر I در طول تیر این مساله توجه نمایند ، دیده می‌شود که‌یک I را به‌عنوان مبنا انتخاب کرده‌ایم و سپس سایر I ها را نسبت به‌آن نشان داده‌ایم . پس از انجام این عمل دیگر ذکر مقادیر متغیر I در این مساله مورد پیدا نخواهد کرد .

مثال ۱۳ ـ ۷ = مقادیر عکس‌العملها را برای این قاب محاسبه کرده‌ونمودار لنگرخمشی را برای آن رسم کنید E و I ثابت هستند ، فقط تغییرشکل حاصل از لنگر موردنظر می‌باشد .



این قاب یک درجه نامعین می‌باشد X_c را به‌عنوان مجهول انتخاب می‌کنیم در این صورت خواهیم داشت :

$$\Delta_c = \Delta_{co} + X_c \delta_{cc} = 0$$

حال با استفاده از قضایای سطح لنگر مقادیر Δ_{co} و δ_{cc} را محاسبه می‌کنیم .

$$EI\tau_{bo} = (720)(12)\left(\frac{12}{24}\right) = 4,320 \qquad \therefore \Delta_{co} = -\left(\frac{4,320}{EI}\right)(18) = \frac{-77,760^{k'^3}}{EI}$$

$$EI_{\tau_{ba}} = (18)(12)\left(\frac{16}{24}\right) = 144 \qquad \therefore\ \delta_{ee} = \left(\frac{144}{EI}\right)(18) + \left(\frac{18}{EI}\right)(9)(12) = +\frac{4{,}536^{k'^3}}{EI}$$

بدین ترتیب خواهیم داشت :

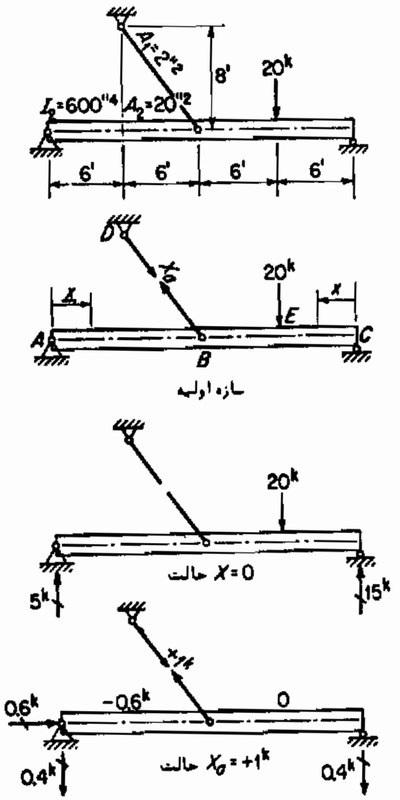
$$\frac{-77{,}760}{EI} + \frac{4{,}536}{EI}X_e = 0 \qquad X_e = \underline{+17.16} \qquad \therefore\ \leftrightarrow$$

بقیه محاسبات را می‌توان با استفاده از روابط تعادل انجام داد .

مثال ۱۳ ـ ۸= مقدار نیرو را در میله کششی این سازه معین کنید .

این سازه یک درجه نامعین می‌باشد ، قطعه کششی را بریده و نیروی داخلی آن را به‌عنوان مجهول انتخاب می‌کنیم ، خواهیم داشت : $\Delta_a = \Delta_{ao} + X_a\delta_{aa} = 0$

با ملحوظ نمودن تغییرشکل حاصل از لنگر خمشی و نیروی محوری مقادیر Δ_{ao} و δ_{aa} را با استفاده از روش کار مجازی محاسبه می‌نمائیم .



$$\sum Q\delta = \sum F_Q F_P \frac{L}{AE} + \sum \int M_Q M_P \frac{ds}{EI}$$

از A تا B

$0 < x < 12 \qquad L = 12$

$M_o = 5x \qquad F_o = 0$

$M_a = -0.4x \qquad F_a = -0.6^k$

از C تا E

$0 < x < 6$

$M_o = 15x \qquad F_o = 0$

$M_a = -0.4x \qquad F_a = 0$

از E تا B

$6 < x < 12$

$M_o = 120 - 5x \qquad F_o = 0$

$M_a = -0.4x \qquad F_a = 0$

از D تا B

$L = 10$

$M_o = 0 \qquad F_o = 0$

$M_a = 0 \qquad F_a = +1^k$

$$(1^k)(\Delta_{ao}) = \sum F_a F_o \frac{L}{AE} + \sum \int M_o M_o \frac{ds}{EI} = 0 + \int_0^{12} (5x)(-0.4x)\frac{dx}{EI_2} + \int_0^{6} (15x)(-0.4x)\frac{dx}{EI_2} + \int_6^{12} (120 - 5x)(-0.4x)\frac{dx}{EI_2}$$

$$\therefore EI_2\Delta_{ao} = \underline{-3{,}168^{k'^3}}$$

$$(1^k)(\delta_{aa}) = \sum F_o^2 \frac{L}{AE} + \sum \int M_o^2 \frac{ds}{EI} = \frac{(-0.6)^2(12)}{EA_2} + \frac{(1^2)(10)}{EA_1} + 2\int_0^{12} (-0.4x)^2 \frac{dx}{EI_2} \qquad \therefore EI_2\delta_{aa} = \underline{+206.05^{k'^3}}$$

چون داریم :

$$\frac{I_2}{A_2} = \left(\frac{600}{144^2}\right)\left(\frac{144}{20}\right) = \left(\frac{30}{144}\right)' \qquad \frac{I_2}{A_1} = \left(\frac{600}{144^2}\right)\left(\frac{144}{2}\right) = \left(\frac{300}{144}\right)'$$

$$\frac{-3{,}168}{EI_2} + \frac{206.05}{EI_2} X_a = 0 \qquad \therefore X_a = \underline{+15.38} \qquad \therefore$$ کششی :

اگر از تغییر شکل حاصل از نیروی محوری صرف‌نظر شود خواهیم داشت :

$$X_a = \frac{3{,}168}{184.32} = \underline{+17.2}$$

۱۳ــ۵ چند مثال برای بررسی اثر حرارت ، نشست و غیره

در مثالهای زیر به‌شرح چگونگی کاربرد معادلات انطباق در تحلیل تنش سازه‌هــای نامعین متداول که تحت اثر تغییر درجه حرارت ، جابجایی تکیه‌گاهها ، خطاهای ساخت و غیره قرار دارند می‌پردازیم .

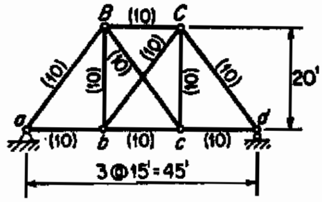
اساسا" این مسائل پیچیده‌تر از مسائل مربوط به‌بررسی سازه‌ها تحت اثر بارگـذاریها نمی‌باشند همواره بیاد داشته‌باشید که تغییرمکانهای Δ_{aT} ، Δ_{aS} و غیره به‌ترتیب نشان‌دهنده *تغییر مکانهای نقاط در سازه اولیه تحت اثر تغییر درجه حرارت سازه اولیه ، نشست تکیه‌ــ گاههای سازهٔ اولیه و غیره می‌باشند هرگاه جمع این تغییر مکانها با سهم مربوط به‌هریک از اتصالات اضافی به‌صورت صحیحی انجام‌گیرد جمع کل می‌بایستی طوری باشد که تغییر مکان نقطه a از سازه اولیه برابر با تغییر مکان معلوم نقطه نظیر آن از سازه اصلی باشد .*

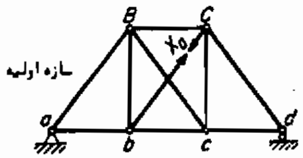
مثال ۱۳ ــ ۹ = نیروی میله‌ها را در صورت ازدیاد درجه حرارتی برابر با $60°F$ در میله‌های aB ، BC و Cd محاسبه کنید ، در سایر میله‌ها تغییر درجه حرارتی‌انجام‌نمی‌گیرد $E = 30 \times 10^3\ kips\ \ sq\ in$ و $\alpha_t = 1/150{,}000\ °F$ سطح مقاطع را در داخل پرانتز نشان داده‌ایم .

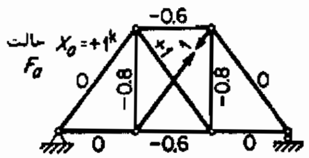
این خرپا یک درجه نامعین است ، میله bC را قطع کرده و نیروی میله آن را به‌عنوان مجهول اضافی فرض می‌کنیم ، در این حالت خواهیم داشت :

$$\Delta_a^{\swarrow\nearrow} = \Delta_{aT} + X_a\delta_{aa} = 0$$

با استفاده از روش کار مجازی ،







Δ_{aT}: $F_Q = F_a$

$$(1^k)(\Delta_{aT}^{\swarrow\nearrow}) = \sum F_a\alpha t L = \alpha_t \sum F_a t L$$

δ_{aa}: $F_Q = F_P = F_a$ $\qquad (1^k)(\delta_{aa}^{\swarrow\nearrow}) = \frac{1}{E}\sum F_a^2\frac{L}{A}$

میله	L	A	$\frac{L}{A}$	F_a	$F_a^2\frac{L}{A}$	t	$F_a tL$	X_aF_a
آحاد	'	$''^2$	$'/''^2$	k	$k^2'/''^2$	°F	k°F'	k
BC	15	10	1.5	−0.6	+0.54	+60	−540	− 7.5
bc	15	10	1.5	−0.6	+0.54	0	0	− 7.5
Bb	20	10	2	−0.8	+1.28	0	0	−10.0
Cc	20	10	2	−0.8	+1.28	0	0	−10.0
Bc	25	10	2.5	+1.0	+2.5	0	0	+12.5
bC	25	10	2.5	+1.0	+2.5	0	0	+12.5
Σ					+8.64		−540	

$$\Delta_{aT} = -(540)^{°F'}\left(\frac{1}{150{,}000}\right)^{/°F} = \underline{-0.0036\ ft}$$

$$\delta_{aa} = +\frac{8.64^{k'/''^2}}{30\times10^3\,{}^{k/''^2}} = \underline{+0.000288\ ft}$$

$-0.0036 + 0.000288X_a = 0 \qquad X_a = \underline{+12.5}$ کشش

مثال ۱۳ ــ ۱۰= نیرو میله‌ها را در قاب خرپایی دو مفصل مثال(۱۳ــ۴) در صورتی که قطعه AB به‌اندازه $\frac{1}{8}''$ کوچکتر ساخته شده باشد حساب کنید .

در این حالت $\qquad \Delta_c^{\leftarrow} = \Delta_{cE} + X_c\delta_{cc} = 0$

با به‌کاربردن روش کار مجازی و استفاده از معلومات مثال (۴ــ۱۳) مقدار Δ_{cE} به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد

$$(1^k)(\Delta_{cE}^{\leftarrow}) = \Sigma F_c\,\Delta L_E = (+1^k)(-\tfrac{1}{96})' \qquad \Delta_{cE} = -0.0104'$$

از مثال (۴ــ۱۳) خواهیم داشت :

$$\delta_{cc} = +\frac{19.875^{k'/''^2}}{E} = +\frac{19.875^{k'/''^2}}{30\times10^3\,{}^{k/''^2}} = +0.00066625'$$

$$\therefore\ -0.0104' + 0.00066625'X_c = 0 \qquad \therefore\ X_c = \underline{+15.7} \qquad \therefore\ \leftrightarrow$$

پس از آن می‌توان نیروی میله‌ها را از رابطه زیر معین نمود .

$$F = X_cF_c = 15.7F_c$$

مثال ۱۳ – ۱۱ = نیروی میله‌های این خرپا را تحت اثر جابجایی‌تکیه‌گاهی زیر محاسبه کنید .

تکیه‌گاه a : بطرف پایین $0.24\ in$

تکیه‌گاه c : بطرف پائین $0.48\ in$

تکیه‌گاه e : بطرف پائین $0.36\ in$

مقادیر سطح مقاطع را در داخل پرانتز نشان داده‌ایم $E = 30 \times 10^3\ kips\ \ sq\ in$

عکس‌العمل عمودی c را به‌عنوان مجهول اضافی انتخاب می‌کنیم

$$\Delta_c^{\downarrow} = \Delta_{cS} + X_c\delta_{cc} = -0.04'$$

با استفاده از روش کار مجازی خواهیم داشت :

$$\Delta_{cS}: \qquad \Sigma Q\delta = 0$$

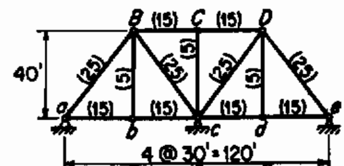
چون $\Delta L = 0$ (به‌مثال ۱۲–۳ مراجعه شود)

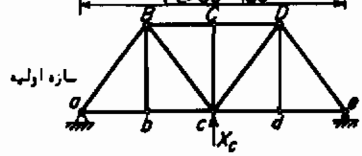
$$(1^k)(\Delta_{cS}^{\uparrow}) + (0.5^k)(0.02') + (0.5^k)(0.03') = 0$$

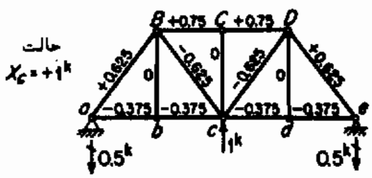
$$\therefore\ \Delta_{cS} = \underline{-0.025'}$$

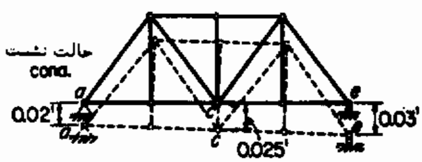
که بر مقدار حاصل از بررسی هندسی در شکل نشان داده شده تطابق دارد

$$\delta_{cc}: \qquad (1^k)(\delta_{cc}^{\uparrow}) = \frac{1}{E}\sum F_c^2\frac{L}{A}$$









به‌دلیل تقارن درج نیمی از میله‌های خرپا در جدول کافی خواهد بود .

میله	L	A	$\frac{L}{A}$	F_c	$F_c^2\frac{L}{A}$	X_cF_c
آحاد	$'$	in^2	$'/in^2$	k	$k^2{}'/in^2$	k
ab	30	15	2	-0.375	$+0.281$	$+26.0$
bc	30	15	2	-0.375	$+0.281$	$+26.0$
BC	30	15	2	$+0.75$	$+1.125$	-52.1
aB	50	25	2	$+0.625$	$+0.781$	-44.1
Bc	50	25	2	-0.625	$+0.781$	$+44.1$
$\frac{1}{2}\Sigma$					$+3.25$	

$$\delta_{cc} = \frac{+6.50^{k^2{}'/in^2}}{30 \times 10^3\ ^{k/in^2}} = \underline{+0.000216'}$$

$$\therefore\ -0.025 + 0.000216X_c = -0.04'$$

$$X_c = \frac{-0.015}{0.000216} = \underline{-69.5}$$ به‌سمت پائین

مثال ۱۳ ــ ۱۲= عکس‌العملهای تیر مثال (۱۳ــ۹) تحت نشستهای تکیه‌گاهی زیر محاسبه نموده و نمودار لنگر خمشی را برای آن رسم کنید .

نقطه c: $0.05\ ft$ به‌طرف پائین   نقطه a: $0.02\ ft$ بطرف پائین

نقطه d: 0 نقطه b: $0.04\ ft$ بطرف پائین

$$E = 30 \times 10^3\ kips/\ sq\ in$$

در این حالت :

$$\Delta_b = \Delta_{bS} + X_b\delta_{bb} + X_c\delta_{bc} = 0 \qquad (1)$$

$$\Delta_c = \Delta_{cS} + X_b\delta_{cb} + X_c\delta_{cc} = 0 \qquad (2)$$

یا با استفاده از روش کار مجازی و یا با استفاده از بررسی هندسی مقابل خواهیم داشت :

$$\Delta_{bS} = -0.000667$$
$$\Delta_{cS} = -0.003444$$

از مثال (۱۳ــ۹) داریم :

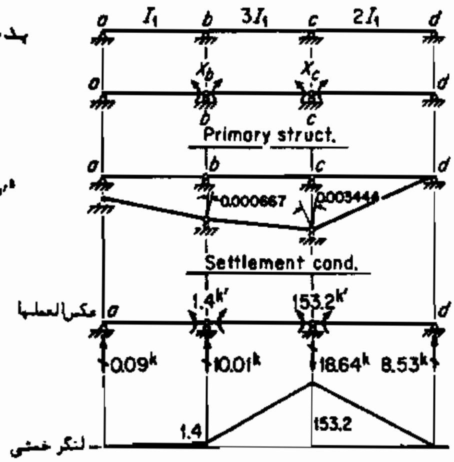
$$\delta_{bb} = \frac{6.667^{k'^3}}{EI_1} \qquad \delta_{cc} = \frac{4.667^{k'^3}}{EI_1}$$

$$\delta_{bc} = \delta_{cb} = \frac{0.833^{k'^3}}{EI_1}$$

پس از جاگذاری این مقادیر معادلات (۱) و (۲) به‌صورت زیر در می‌آید :

$$6.667X_b + 0.833X_c = 0.000667EI_1$$
$$0.833X_b + 4.667X_c = 0.003444EI_1$$

بدین طریق خواهیم داشت :



$$EI_1 = (30 \times 10^3 \times 144)^{k/ft^2}\left(\frac{1{,}000}{144^2}\right)^{ft^4}$$

$$= 0.208 \times 10^6\ ^{k'^2}$$

$$X_b = +0.00000685EI_1 = +\underline{1.4}$$
$$X_c = +0.000736EI_1 = +\underline{153.2}$$

پس از معلوم‌شدن این دو مقدار محاسبه عکس‌العملها و رسم نمودار لنگر خمشی ساده‌خواهد بـود .

۱۳ ــ ۶ تذکراتی کلی در مورد انتخاب مجهولات اضافی

از بحث قبلی چنین بر می‌آید که انتخابهای متفاوتی در مجهولات اضافی وجود دارد و تنها ضابطه‌ای که برای انتخاب وجود دارد این است که سازه اولیه پایدار باقی بماندالبته واضح است‌که انتخاب‌مناسب مجهولات‌اضافی حجم‌محاسبات را نیز به‌حداقل خودمی‌رساند. چنین نتیجه‌ای در صورتی حاصل می‌گردد که به‌نکات زیر توجه شود:

۱ ــ از هرنوع تقارن سازه استفاده شود.

۲ ــ سازه اولیه را به‌نوعی انتخاب کنید که تا حد ممکن اثرات حاصل از بارگذاری‌های متفاوت را بتوان درهم ادغام نمود.

بررسی انتخابهای متعدد مجهولات اضافی در مورد خرپای سرتاسری شکل (۱۳ ــ ۵) صحت نکات فوق را تأئید می‌نماید. این سازه دو درجه نامعین است و لذا هرنوع انتخابی که برای مجهولات اضافی بعمل آید منجر به‌دو معادله زیر خواهد شد.

$$\begin{aligned} \Delta_a &= \Delta_{ao} + X_a\delta_{aa} + X_b\delta_{ab} = 0 \\ \Delta_b &= \Delta_{bo} + X_a\delta_{ba} + X_b\delta_{bb} = 0 \end{aligned} \qquad \text{(الف)}$$

چون δ_{ab} برابر با δ_{ba} می‌باشدفقط محاسبه پنج تغییرمکان مختلف زیر موردنیازخواهدبود.

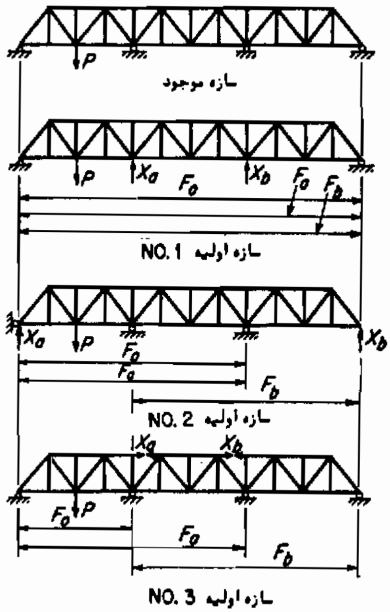
$$(1)(\Delta_{ao}) = \sum F_a F_o \frac{L}{AE} \qquad (1)(\delta_{aa}) = \sum F_a^2 \frac{L}{AE}$$
$$(1)(\Delta_{bo}) = \sum F_b F_o \frac{L}{AE} \qquad (1)(\delta_{bb}) = \sum F_b^2 \frac{L}{AE}$$
$$(1)(\delta_{ab}) = \sum F_a F_b \frac{L}{AE}$$

برای محاسبه این مقادیر قبلا" می‌بایستی نیروی میله‌های F_o ، F_a و F_b محاسبه گردند.

اگر سازه متقارن باشد و مجهولات اضافی نیز به‌صورت متقارن انتخاب شوند نیروهای F_b را می‌توان بخاطر تقارن از نیروهای F_a به‌دست آورده به‌علاوه چون مقادیر δ_{bb} رانیز به‌همان دلیل می‌توان برابر با مقادیر δ_{aa} گرفت فقط‌چهار مقدار تغییر مکان می‌بایستی محاسبه گردد. هرگاه انتخاب مجهولات به‌نوعی باشد که‌اثر بارگذاریهای مختلف تا حد امکان به‌میله‌های کمتری اختصاص پیدا کند حجم محاسبات به‌حداقل خودخواهدرسید. البته چنین مطلبی در صورتی‌که سازه متقارن باشد یا نه امکان‌پذیر می‌باشد.

در هرسه انتخاب مختلف شکل (۱۳ــ۵) از تقارن استفاده شده است. قسمتهایی‌ازسازه را که تحت اثر بارگذاریهای مختلف تحت اثر بار قرار می‌گیرند در هرحالتی نشان داده‌ایم.

مقایسه سازه‌های اولیه مختلف این سازه به‌وضوح نشان می‌دهد که انتخاب شماره ۳ بهترین آنها خواهد بود زیرا در این حالت اثر بارگذاریها به‌قسمتهای کمتری اختصاص یافته است .



شکل۱۳ــ۵ انتخاب مجهولهات اضافی

در اینجا می‌بایستی به‌چند نکته اشاره شود ، در بحث مربوط به‌مثال (۱۳ــ۵) یادآوری شد که برش و لنگر مربوط به‌میله‌ای مستقیم که در دو انتهای خود مفصل شده باشد معین می‌باشد ، اگر چنین میله‌ای برش داده شود فقط نیروی محوری آن نامعین می‌باشدکه‌می‌تواند به‌عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته شود ، از طرف دیگر اگر قطعه‌ای دردوانتهای خود به‌صورت‌صلب با بقیه سازه متصل شده باشد ،برش، لنگر و نیروی محوری چنین میله‌ای‌ازنظر تعادل نامعین خواهد بود و در صورتی‌که چنین میله‌ای برش داده شود هر سه آنهایعنی‌برش لنگر و نیروی محوری را باید به‌عنوان مجهول اضافی در نظر گرفت تا این که سازهٔ مزبور در صورت حذف قیود مربوط به‌این سه‌عامل همچنان پایدار باقی بماند . (همان طوری‌که‌درمثال ۱۳ــ۱۴ شرح داده شده است)

۱۳ ــ ۷ تحلیل سازه‌های نامعین با استفاده از قضیه دوم کاستیگلیانو ـ قضیه‌کار حداقل

در روش قبل تحلیل سازه‌های نامعین از طریق ایجاد معادلات انطباق برای‌تغییر

مکانهای نقاط اثر مجهولات اضافی انجام می‌گرفت ، به‌عوض چنین‌کاری‌می‌توان روابط مربوط به‌این تغییر مکانها را با به‌کاربردن قضیه دوم کاستیگلیانو ایجاد نمود ، البته چنین روشی شباهت زیادی به‌روش اول دارد و می‌توان گفت روشی خودبه‌خودی تراز اولی است و بدین‌جهت کاربرد آن توسط برخی از مهندسین و یا دانشجویان ترجیح داده می‌شود .از آنجائی که قضیه کاستیگلیانو در حقیقت محدود به‌محاسبات تغییر مکانهای حاصل از بارهای موٴثر بر سازه می‌باشد لذا این روش کلیتی را که روش انطباق دارد شامل نمی‌شود .

به‌عنوان مثال تیرنامعین شکل (۱۳–۳) را در نظر بگیرید،پس‌از تعیین درجه نامعینی می‌توان به‌تعیین مجهول اضافی و سازه اولیه اقدام کرد ، تغییرمکان نقطهٔ اثر مجهول‌اضافی X_b را می‌توان با به‌کاربردن قضیه کاستیگلیانو محاسبه نمود . در این حالت خاص فقط تغییرشکل حاصل از خمش در محاسبات داخل می‌شود و لذا خواهیم داشت :

$$W_I = \sum \int M^2 \frac{ds}{2EI}$$

و چون داریم :

$$\frac{\partial W_I}{\partial X_b} = \Delta_b^I \qquad \text{(الف)}$$

چون نقطه b از سازه اصلی تغییرمکانی ندارد ، لذا مقدار Δ_b در سازه اولیه می‌بایستی برابر با صفر شود و یا این که :

$$\frac{\partial W_I}{\partial X_b} = \sum \int M \frac{\partial M}{\partial X_b} \frac{ds}{EI} = 0 \qquad \text{(ب)}$$

و چون M لنگر خمشی کل سازه اولیه حاصل ازکلیه اثرات می‌باشد لذا برابر با جمع آثار بارهای وارده و مجهول اضافی X_b خواهد بود و لذا خواهیم داشت :

$$M = M_o + X_b M_b \qquad \frac{\partial M}{\partial X_b} = M_b \qquad \text{(ج)}$$

بدین ترتیب معادله (ب) به‌صورت زیر در خواهد آمد .

$$\sum \int M_o M_b \frac{ds}{EI} + X_b \sum \int M_b^2 \frac{ds}{EI} = 0 \qquad \text{(د)}$$

تعیین‌این انتگرالها برای سازه‌اولیه ساده است و پس ازآن می‌توان‌مقدار X_b را محاسبه‌نمود .

اگر از روش انطباق استفاده کرده بودیم مقادیر Δ_{bo} و δ_{bb} از طریق کارمجازی‌به‌صورت زیر حاصل می‌شد :

$$(1)(\Delta_{bo}) = \sum \int M_o M_b \frac{ds}{EI} \qquad (1)(\delta_{bb}) = \sum \int M_b^2 \frac{ds}{EI} \qquad \text{(هـ)}$$

از معادلات (هـ) بلافاصله چنین بر می‌آید که معادله (د) را می‌توان به‌شکل زیرنیزارائه‌نمود :

$$\Delta_{bo} + X_b\delta_{bb} = 0 \qquad (و)$$

به‌این ترتیب دیده می‌شود که اگر از روش کار مجازی برای محاسبه Δ_{bo} و δ_{bb} در معادلات انطباق استفاده شود این دو روش اساساً یکی خواهند شد .

درشرح فوق سازهٔ مورد بحث فقط یک درجه‌نامعین بود ،در سازه‌های با درجه نامعینی بالا اساس عملکرد بهمان صورت فوق است ، بدین ترتیب که پس از انتخاب n مجهـــول اضافی و سازه اولیه تغییرمکان نقطه اثر هریک از n مجهول اضافی را می‌توان با به‌کار بردن قضیه دوم کاستیگلیانو به‌دست آورد . بدین ترتیب n معادله n مجهولی حاصل خواهـــد شدکه حل این دستگاه‌معادلات منجر به‌تعیین‌کلیه مقادیرمجهولات می‌شود. درمثال (۱۳–۱۴) روش استفاده از این طریقه را در تحلیل‌قاب چند درجه نامعین شرح داده شده است .

در مثالهای مربوط به‌بخش (۱۳–۸) معادلات سازگار با معادلات (ب) با روشی کمکی متفاوت تعیین شده‌اند . بدان طریق امکان استفاده مؤثر از قضیه کاستیگلیانو در برخی از مسایل ممکن می‌گردد ، بدیهی است از روش مشروح فوق می‌توان در حل برخی دیگرازمسایل استفاده نمود واضح است که در این صورت امتیازی در کاربرد روش کاستیگلیانـــو به عـوض معادلات انطباق وجود ندارد .

اگر درتحلیل سازه‌های نامعین ،تغییر مکان نقطه اثر مجهولی برابر با صفـر باشـــد ، استفاده از قضیه کاستیگلیانو بصورت معادله (الف) منتهی به‌این مطلب می‌شود که مشتق اول انرژی تغییرشکل نسبت به‌آن مجهول برابر با صفر باشد . این مطلب معادل این است کـــه مقدارمجهول را به‌نوعی بایستی انتخاب‌نمود که عبارت‌انرژی کرنشی (یا تغییرشکل)به‌مقدار حداقل خود برسد . این حالت مخصوص از قضیه دوم کاستیگلیانو اغلب بنام *قضیـــه کـار حداقل* خوانده شده و به‌صورت زیر بیان می‌شود .

در یک سازه نامعین اگر جابجایی تکیه‌گاهی و تغییر درجه حرارت مطرح نباشد،مقادیر مجهولات اضافی می‌بایستی به‌نوعی باشد که انرژی تغییر شکل را به‌حداقل خود برساند .

۸ – ۱۳ مثالهایی چند در باره تحلیل تنش با استفاده از قضیه دوم کاستیگلیانو

مثالهای زیر عمدتاً بخاطر شرح کاربرد قضیه‌دوم کاستیگلیانو در تحلیل تنش‌سازه‌های نامعین انتخاب شده است ،اگر در هریک ازاین حالات مسالەرا بااستفاده از معادلات‌انطباق بررسی نمائیم و دربن بررسی از روش کار مجازی جهت محاسبه تغییر مکانها کمک بگیــریم ،

خواهیم دریافت که محاسبات انجام‌شده اساساً" با محاسبات مربوط به‌روش کاستیگلیانو یکی می‌باشد. تنها فرقی‌که دراین دو روش وجود دارد این است‌که در راه‌حل به‌طریق‌کاستیگلیانو معادلات بخودی خود بوجود می‌آیند.

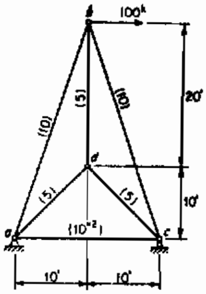
البته تفاوتی بین این دو طریقه موجود است که ارزش یادآوری دارد و آن این‌است که *در راه حل کاستیگلیانو مجهولات‌اضافی درطول حل مساله‌برحسب آحاد خود درعملیات وارد می‌شوند*. به‌عنوان مثال در معادله (الف) اگر W_I برحسب kip-feet بیان شودمقدار X_b را می‌بایستی برحسب kips در عملیات وارد نمود تا این‌که نسبت تغییرات W_I به‌تغییرات X_b که مقدار Δ_b را بیان میکند برحسب فوت حاصل شود و بخاطر سازگاری معادلات (ج) اگر X_b برحسب kips بیان شود می‌بایستی مقدار M_b دارای آحادکیپ ـ فوت باشدوبدین ترتیب اگر مقدار مجهولات در راه حل کاستیگلیانو برحسب آحاد خود بیان گردند وارسی ابعاد در طول کلیه محاسبات به‌منظور سازگاری عملیات همواره الزامی خواهد بود.

به‌طورخلاصه می‌توان گفت‌که قضیه کاستیگلیانو فقط زمانی قابل استفاده است‌که‌تغییر مکان سازه‌ها در اثر بارگذاری بوجود آمده باشد البته به‌طریقی که در پائین بیان می‌شود امکان تحلیل تنش در سازه‌های نامعین که تحت اثر تغییر درجه حرارت، نشست تکیه‌گاهی و غیره قرار گرفته‌اند وجود دارد: سازه اولیه را انتخاب کنید و موقتاً" کلیه اتصالات اضافی را حذف کنید. حال سازه اولیه را تحت اثر تغییر درجه حرارت یا نشست قرار دهیدوتغییر مکان نقاط اثر اتصالات‌اضافی را در این سازه اولیه و در این شرایط محاسبه کنیدالبته‌چنین محاسباتی را می‌توان با استفاده از روش کار مجازی و یا روش مناسب دیگری انجام دهید. حال مجهولات اضافی را بر سازه اثر دهید بدیهی است که این مجهولات می‌بایستی نقاط اثر خود را بر وضعیت صحیح خود برگردانند. از قضیه کاستیگلیانو می‌توان‌درمحاسبه‌تغییر مکان حاصل از این مجهولات استفاده نمود. با جاگذاری مقادیر تغییرمکانها که‌قبلاً" محاسبه شده است معادلاتی به‌دست می‌آید که در آنها مجهولات اضافی تنها مجهولات معادلات می‌باشند و به‌این‌ترتیب با حل دستگاه معادلات حاصل می‌توان به‌تعیین آنها پرداخت. از آنجائی که چنین راه حلی اغلب به‌سادگی طریقه حاصل از معادلات انطباق نمی‌باشد بدین جهت هرگز مورد استعمالی برای کاربرد آن پیدا نمی‌شود.

مثال ۱۳ ــ ۱۳= نیروی میله‌های اعضاء این خرپارا محاسبه‌کنید، سطح مقاطع را در داخل پرانتز نشان داده‌ایم $E = 30 \times 10^3\ kips\ \ sq\ in$

این خرپا یک درجه نامعین می‌باشد. نیروی محوری میله bd را به‌عنوان مجهول اضافی

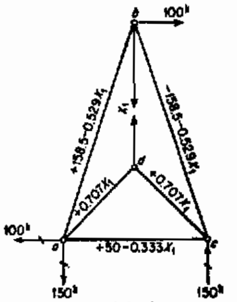
انتخاب می‌کنیم .



$$W_I = \sum \frac{F^2L}{2AE} \qquad \frac{\partial W_I}{\partial X_1} = \Delta_1 = 0$$

$$\therefore \frac{\partial W_I}{\partial X_1} = \frac{1}{E}\sum \frac{FL}{A}\frac{\partial F}{\partial X_1} = 0$$

میله	L	A	$\frac{L}{A}$	F	$\frac{\partial F}{\partial X_1}$	$F\frac{L}{A}\frac{\partial F}{\partial X_1}$
آحاد	$'$	$''^2$	$'/''^2$	k	k/k	$k'/''^2$
ab	31.7	10	3.17	$+158.5 - 0.529X_1$	-0.529	$-265 + 0.886X_1$
bc	31.7	10	3.17	$-158.5 - 0.529X_1$	-0.529	$+265 + 0.886X_1$
ca	20	10	2	$+50 - 0.333X_1$	-0.333	$-33.3 + 0.222X_1$
ad	14.1	5	2.83	$+0.707X_1$	$+0.707$	$+1.414X_1$
bd	20	5	4	$+1.0\ X_1$	$+1.0$	$+4.000X_1$
cd	14.1	5	2.83	$+0.707X_1$	$+0.707$	$+1.414X_1$
Σ						$-33.3 + 8.822X_1$



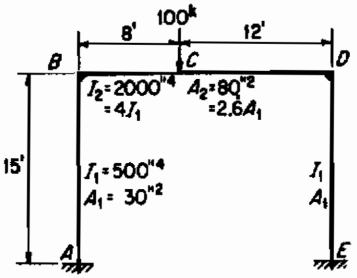
سازه اولیه

$$\therefore\ -33.3 + 8.822X_1 = 0 \qquad X_1 = \underline{+3.78}\ kips$$

حال سایر نیروی میله‌ها را می‌توان به‌کمک معادلات تعادل و یا با ادامه جدول فوق‌محاسبه نمود .

مثال ۱۳ – ۱۴= این قاب را با به‌کاربردن قضیه کاستیکلیانو حل‌کنید. هردو اثرتغییر شکل حاصل از نیروی محوری و لنگر خمشی را در محاسبات داخل کنید .

این قاب سه درجه نامعین است ، شاهتیر آن در وسط دهانه برش داده و لنگر نیروی محوری و برش آن را به‌عنوان سه مجهول اضافی X_a ، X_b و X_c انتخاب کنید .



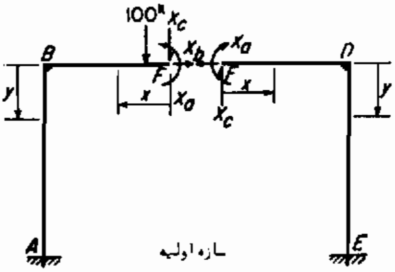
$$W_I = \sum \int M^2 \frac{ds}{2EI} + \sum \frac{F^2L}{2AE}$$

$$\frac{\partial W_I}{\partial X_a} = \Delta_a = 0$$

$$\frac{\partial W_I}{X_b} = \Delta_b = 0$$

$$\frac{\partial W_I}{\partial X_c} = \Delta = 0$$

با مشتق‌گیری و حذف E خواهیم داشت :



$$\sum \int M \frac{\partial M}{\partial X_a} \frac{ds}{I} + \sum F \frac{L}{A} \frac{\partial F}{\partial X_a} = 0 \quad (۱)$$

$$\sum \int M \frac{\partial M}{\partial X_b} \frac{ds}{I} + \sum F \frac{L}{A} \frac{\partial F}{\partial X_b} = 0 \quad (۲)$$

$$\sum \int M \frac{\partial M}{\partial X_c} \frac{ds}{I} + \sum F \frac{L}{A} \frac{\partial F}{\partial X_c} = 0 \quad (۳)$$

از F تا C

$$0 < x < 2 \quad M = X_a - xX_c \quad \frac{\partial M}{\partial X_a} = 1 \quad \frac{\partial M}{\partial X_b} = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial X_c} = -x$$

$$L = 2' \quad F = X_b \quad \frac{\partial F}{\partial X_a} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial X_b} = 1 \quad \frac{\partial F}{\partial X_c} = 0$$

از C تا B

$$2 < x < 10 \quad M = X_a - xX_c - 100(x-2) \quad \frac{\partial M}{\partial X_a} = 1 \quad \frac{\partial M}{\partial X_b} = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial X_c} = -x$$

$$L = 8' \quad F = X_b \quad \frac{\partial F}{\partial X_a} = \frac{\partial F}{\partial X_c} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial X_b} = 1$$

از B تا A

$$0 < y < 15 \quad M = X_a - yX_b - 10X_c - 800 \quad \frac{\partial M}{\partial X_a} = 1 \quad \frac{\partial M}{\partial X_b} = -y \quad \frac{\partial M}{\partial X_c} = -10$$

$$L = 15' \quad F = -100 - X_c \quad \frac{\partial F}{\partial X_a} = \frac{\partial F}{\partial X_b} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial X_c} = -1$$

از F تا D

$$0 < x < 10 \quad M = X_a + xX_c \quad \frac{\partial M}{\partial X_a} = 1 \quad \frac{\partial M}{\partial X_b} = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial X_c} = x$$

$$L = 10' \quad F = X_b \quad \frac{\partial F}{\partial X_a} = \frac{\partial F}{\partial X_c} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial X_b} = 1$$

از D تا E

$$0 < y < 15 \quad M = X_a - yX_b + 10X_c \quad \frac{\partial M}{\partial X_a} = 1 \quad \frac{\partial M}{\partial X_b} = -y \quad \frac{\partial M}{\partial X_c} = 10$$

$$L = 15' \quad F = X_c \quad \frac{\partial F}{\partial X_a} = \frac{\partial F}{\partial X_b} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial X_c} = 1$$

با جاگذاری در معادله (۱) خواهیم داشت :

$$\int_0^2 (X_a - xX_c)(1)\frac{dx}{4I_1} + \int_2^{10} (X_a - xX_c - 100x + 200)(1)\frac{dx}{4I_1}$$
$$+ \int_0^{15} (X_a - yX_b - 10X_c - 800)(1)\frac{dy}{I_1} + \int_0^{10} (X_a + xX_c)(1)\frac{dx}{4I_1}$$
$$+ \int_0^{15} (X_a + 10X_c - yX_b)(1)\frac{dy}{I_1} = 0$$

پس از ضرب و حذف و انتگرال‌گیری لازم عبارت زیر به‌دست می‌آید .

$$35X_a - 225X_b = 12,800$$

حال معادله (۲) را ایجاد می‌کنیم

$$\int_0^{15} (X_a - yX_b - 10X_c - 800)(-y)\frac{dy}{I_1} + \int_0^{15} (X_a - yX_b + 10X_c)(-y)\frac{dy}{I} + X_b\frac{(1)(10)}{2.6A_1} + X_b\frac{(1)(10)}{2.6A_1} = 0$$

به‌همان ترتیب پس از ضرب و حذف انتگرال‌گیری لازم عبارت زیر حاصل خواهد شد.

$$(-225)X_a + \left(2,250 + 7.5\frac{I_1}{A_1}\right)X_b = -90,000$$

و چون :

$$\frac{I_1}{A_1} = \left(\frac{500}{144^2}\right)\left(\frac{144}{30}\right) = \frac{50}{432}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$-225X_a + 2,250.87X_b = -90,000$$

به‌نحوی مشابه فوق معادله (۳) به‌صورت زیر در می‌آید :

$$\left(3,166.7 + 30\frac{I_1}{A_1}\right)X_c = -\left(125,866.7 + 1,500\frac{I_1}{A_1}\right)$$

$$3,170.14X_c = -126,040.2$$

پس از حل دستگاه معادلات حاصل از (۱)، (۲)، (۳)

$$X_a = \underline{+304.2^{k'}}$$
$$X_b = \underline{-\ 9.56^k}$$
$$X_c = -\ \underline{39.76^k}$$

اگر از اثر تغییر شکل محوری در کلیه عملیات صرف‌نظر می‌کردیم می‌بایستی کلیه عبارات شامل A را از معادلات حذف می‌نمودیم در این صورت نتایج زیر به‌دست می‌آید.

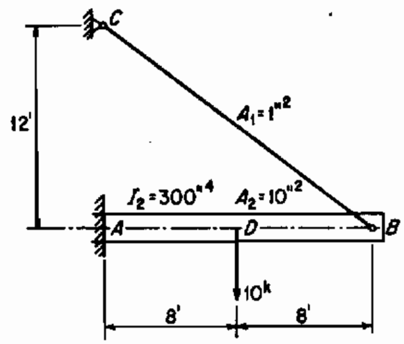
$$X_a = \underline{+304.0^{k'}}$$
$$X_b = \underline{-\ 9.60^k}$$
$$X_c = -\ \underline{39.74^k}$$

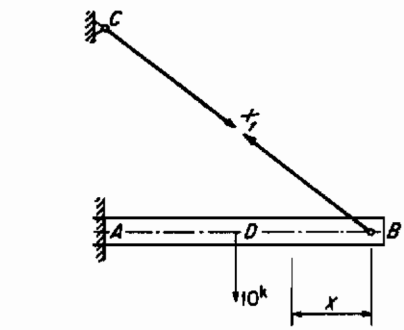
بحث :

از این مثال چنین نتیجه‌گیری می‌شود که می‌توان از اثر تغییر شکل محوری در مقایسه با اثر تغییر شکل خمشی در سازه‌های ساخته شده از قابهای صلب صرفنظر نمود.

مثال ۱۳ – ۱۵= نیروی داخلی میله کششی را محاسبه کنید ، هردو اثرحاصل‌از نیروی محوری و لنگر خمشی را در نظر بگیرید .

این سازه یک درجه نامعین می‌باشد ، نیروی داخلی میله کششی را به‌عنوان مجهول اضافی انتخاب می‌کنیم در این صورت خواهیم داشت :





سازه اولیه

$$\frac{\partial W_I}{\partial X_1} = \Delta_1 = 0$$

$$\frac{\partial W_I}{\partial X_1} = \sum \int M \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{dx}{EI} + \sum F \frac{\partial F}{\partial X_1} \frac{L}{AE} = 0 \qquad (1)$$

از B تا C

$$M = 0 \qquad F = X_1 \qquad \frac{\partial F}{\partial X_1} = 1$$
$$L = 20'$$

از B تا D

$$M = 0.6xX_1 \qquad F = -0.8X_1$$
$$\frac{\partial M}{\partial X_1} = 0.6x \qquad \frac{\partial F}{\partial X_1} = -0.8$$
$$0 < x < 8 \qquad L = 8'$$

از D تا A

$$M = 0.6xX_1 - 10(x-8) \qquad F = -0.8X_1$$
$$\frac{\partial M}{\partial X_1} = 0.6x \qquad \frac{\partial F}{\partial X_1} = -0.8$$
$$8 < x < 16 \qquad L = 8'$$

بدین ترتیب معادله (۱) خواهد شد .

$$\int_0^8 (0.6xX_1)(0.6x)\frac{dx}{I_2} + \int_8^{16} (0.6xX_1 - 10x + 80)(0.6x)\frac{dx}{I_2} + \frac{X_1(20)(1)}{A_1} + \frac{(-0.8X_1)(16)(-0.8)}{A_2} = 0$$

از این رابطه حاصل خواهد شد :

$$X_1\left(491.52 + 20\frac{I_2}{A_1} + 10.24\frac{I_2}{A_2}\right) = 2{,}560$$
$$\frac{I_2}{A_1} = \frac{25}{12} \qquad \frac{I_2}{A_2} = \frac{5}{24}$$
$$\therefore 535.32X_1 = 2{,}560$$
$$\therefore X_1 = \underline{+4.80^k}$$

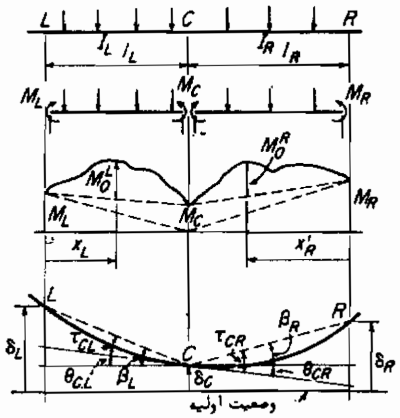
و اگر از اثر نیروی محوری صرف نظر می‌شد مقدار نیرو به‌قرار زیر می‌بود .

$$X_1 = \underline{+5.20^t}$$

۱۳ ـ ۹ استخراج معادله سه لنگر

برای اولین‌بار معادله سه لنگر در سال ۱۸۵۷ میلادی توسط کلاپیرون Clapeyron مهندس فرانسوی ارائه‌گردید این معادله عبارت‌از رابطه‌ای است‌که بین لنگرهای سه نقطه از یک قطعه‌سرتاسری وجود دارد . عملاً" ایجاد چنین رابطه‌ای بین لنگرهای تکیه‌گاهی تیرهای نامعین بسیارمفید می‌باشد .

مطابق شکل (۱۳ــ۶) سه نقطه L ، C و R را روی یک قطعه سرتاسری مشخص کنید و فرض کنید که مقدار لنگر لختی بین L و C ثابت بوده و برابر با I_L و به‌همین ترتیب بین C و R ثابت و برابر با I_R باشد فرض می‌شود که در وضعیت اولیه این تیر دارای شکل مستقیم‌الخط بوده و تغییر مکانهای آن نسبت به‌وضعیت اولیه در نقاط L و C و R به‌ترتیب برابر با δ_L ، δ_C و δ_R باشد که‌مقادیر این تغییر مکانها اگر به‌سمت بالا باشد مثبت فرض می‌گردد .



شکل ۱۳ــ۱۶ استخراج معادله سه لنگر

با فرض این که لنگر خمشی زمانی مثبت باشد که در تارهای انتهایی ایجاد کشش کند، لنگرهای این سه نقطه را به‌ترتیب با M_L ، M_C و M_R نشان می‌دهیم، نمودار لنگر خمشی را برای قسمت LC و یا CR می‌توان با استفاده از انطباق سه اثر جداگانه زیر به‌دست آورد : لنگر حاصل از اثر هریک از لنگرهای انتهایی که به‌طور جداگانه عمل کنند ،که نمودار حاصل

از این اثرات را با خط چینهائی که تشکیل مثلثها را داده‌اند نشان داده‌ایم و همچنین لنگر حاصل از اثر بارگذاری خارجی که به‌تنهایی و بدون در نظر گرفتن‌اثر لنگرهای انتهایی در نظر گرفته می‌شود که این اثر را نیز با عرض M_o^L در قسمت LC و با M_o^R در قسمت CR نشان داده‌ایم .

از شکل منحنی‌خیز داریم :

$$\theta_{CL} = \beta_L - \tau_{CL} \qquad \theta_{CR} = \tau_{CR} - \beta_R$$

و چون منحنی خیز در نقطه C پیوستگی خود را حفظ می‌کند لذا :

$$\theta_{CL} = \theta_{CR}$$

و از آنجا :

$$\beta_L - \tau_{CL} = \tau_{CR} - \beta_R \qquad \text{(الف)}$$

و چون کلیه این زوایا کوچک هستند ، می‌توانیم فرض کنیم که .

$$\beta_L = \frac{\delta_L - \delta_C}{l_L} \qquad \beta_R = \frac{\delta_R - \delta_C}{l_R} \qquad \text{(ب)}$$

اگر نمودار لنگر خمشی به‌نمودارM/EI تبدیل شود می‌توان به‌سادگی τ_{CL} و τ_{CR} را بسا استفاده از قضیه دوم سطح لنگر محاسبه نمائیم :

$$\begin{aligned}\tau_{CL} &= \frac{1}{EI_L l_L}\left(\frac{M_L l_L^2}{6} + \frac{M_C l_L^2}{3} + \int_0^{l_L} M_o^L x_L\, dx_L\right)\\ \tau_{CR} &= \frac{1}{EI_R l_R}\left(\frac{M_R l_R^2}{6} + \frac{M_C l_R^2}{3} + \int_0^{l_R} M_o^R x'_R\, dx'_R\right)\end{aligned} \qquad \text{(ج)}$$

اگر مقادیر زیر با علائم نشان داده مشخص کنیم ،

$$(\mathfrak{M}_o)_L = \int_0^{l_L} M_o^L x_L\, dx_L \qquad (\mathfrak{M}_o)_R = \int_0^{l_R} M_o^R x'_R\, dx'_R \qquad (۴-۱۳)$$

اگر مقادیر معادله (۱۳ـ۴) را در معادلات (ج) قرار دهیم و سپس از معادلات (ب) و (ج) درمعادله(الف)قرار دهیم رابطه‌ای را که به‌نام‌معادله سه لنگر مشهور است‌بدست‌خواهیم‌آورد .

$$\begin{aligned}M_L \frac{l_L}{I_L} + 2M_C\left(\frac{l_L}{I_L} + \frac{l_R}{I_R}\right) + M_R \frac{l_R}{I_R} = &-\frac{\mathfrak{L}_o}{I_L} - \frac{\mathfrak{R}_o}{I_R}\\ &+ 6E\left[\frac{\delta_L}{l_L} - \delta_C\left(\frac{1}{l_L} + \frac{1}{l_R}\right) + \frac{\delta_R}{l_R}\right]\end{aligned} \qquad (۵-۱۳)$$

در رابطه فوق مفاهیم زیر مطرح می‌باشند :

$$\mathfrak{L}_o = +\frac{6(\mathfrak{M}_o)_L}{l_L} \qquad \mathfrak{R}_o = +\frac{6(\mathfrak{M}_o)_R}{l_R} \qquad (۶-۱۳)$$

در استفاده از این معادلات به‌نکات زیر دقت کامل نمائید .

۱ ــ مقادیر M_L ، M_C و M_R زمانی مثبت خواهند بود که در تارهای تحتانی ایجاد کشش نمایند.

۲ ــ مقادیر δ_L ، δ_C و δ_R زمانی مثبت خواهند بود که از وضعیت اولیه به‌سمت بالا باشند.

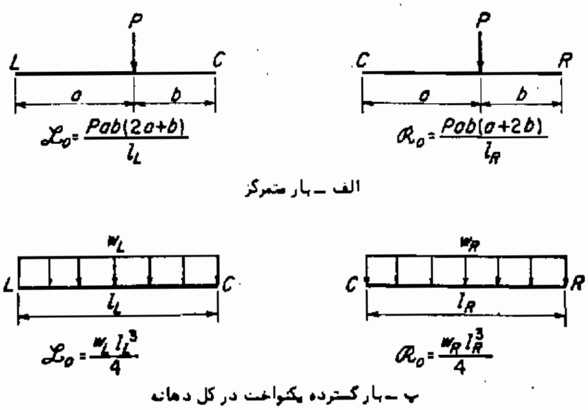
۳ ــ $\mathfrak{L}_o$ و $\mathfrak{R}_o$ ترتیب عبارات مربوط به‌بارگذاری در دهانه‌های LC و CR می‌باشند.

۴ ــ نمودار M_o برای هرقطعه عبارت است از نمودار لنگر برای آن قطعه با فرض این که قطعه مزبور روی دو تکیه‌گاه ساده قرار گیرد، و در این صورت $(\mathfrak{M}_o)_L$ عبارت خواهد بود از لنگر سطح‌زیر این نمودار حول محور مار بر انتهای چپ و $(\mathfrak{M}_o)_R$ عبارت خواهد بود از لنگر سطح حول محور مار بر انتهای راست. بدیهی است که علامت هردوی این لنگرها فقط بستگی به‌علامت عرض‌های نمودار M_o خواهد داشت.

در حالت خاص که $I_L = I_R = I$ می‌باشد معادله (۱۳ ــ ۵) به‌صورت زیر خلاصه می‌گردد.

$$M_L l_L + 2M_C(l_L + l_R) + M_R l_R = -\mathfrak{L}_o - \mathfrak{R}_o + 6EI\left[\frac{\delta_L}{l_L} - \delta_C\left(\frac{1}{l_L} + \frac{1}{l_R}\right) + \frac{\delta_R}{l_R}\right] \quad (۱۳-۷)$$

عبارات مربوط به‌بارگذاری در حالات تیر تحت اثر بارگذاری کل دهانه و تحت‌اثر بارمتمرکز در شکل (۱۳ــ۷) نشان داده شده است.



شکل ۱۳ــ۷ عبارات مربوط به‌بارگذاری

۱۳ ــ ۵) کاربرد معادله سه لنگر

اعمال معادله سه لنگر به هر سه نقطه‌ای در طول یک‌تیر تا زمانی که در آن طول تیر

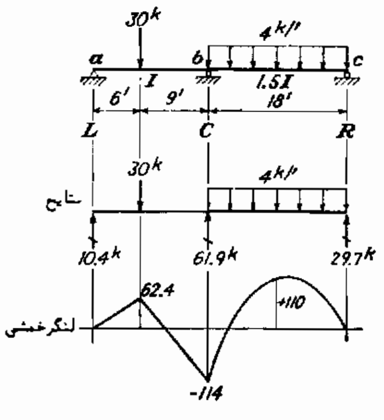
ناپیوستگی نظیر مفصل وجود نداشته باشد امکان‌پذیر است . اگر این معادله را در مورد تیر سرتاسری به‌کار بریم و سه تکیه‌گاه متوالی آن را به‌ترتیب L ، C و R بنامیم عبارات مربوط به‌تغییرمکان در طرف راست این معادله یا برابر با صفر بوده و یا برابر با مقدار معلوم‌نقاط تکیه‌گاهی خواهدشد . بدین ترتیب معادله‌ای به‌دست می‌آیدکه درآن معادله لنگرهای‌مربوط به‌نقاط تکیه‌گاهی تنها مجهولات آن معادله هستند .

به‌این طریق می‌توانیم معادله مستقلی برای هر سه نقطه تکیه‌گاهی متوالی یک تیر سرتاسری برقرارکنیم و بدین ترتیب n معادله مستقل که درآنها n معادله‌تکیه‌گاهی‌به‌عنوان مجهول وجود دارد به‌دست می‌آید ، از حل این دستگاه معادله می‌توان به‌مقادیر لنگرهای تکیه‌گاهی پی برد . در بررسی انتهای گیردار یک تیر سرتاسری ابهامی به‌نظر می‌رسد که فن برخورد با آن در مثالهای زیر شرح داده شده است .

تحلیل تیرهای سرتاسری به‌کمک این روش بسیار ساده است ولی لازم است که به‌علائم قراردادی مذکور دربخش (۱۳–۹) دقت‌کامل شده و درانتخاب آحادسازگاری لازم‌مخصوصا" زمانی که نشست تکیه‌گاهی وجود دارد به‌عمل آید .

مثال ۱۳ – ۱۶= عکس‌العملهای‌این تیر را تعیین کرده و نمودار لنگر خمشی را برای آن رسم کنید .

با بکاربردن معادله (۱۳ – ۵) و فرض a ، b ، c به‌ترتیب به‌عنوان L ، C و R داریم :



$$M_a = 0 \qquad M_b = ? \qquad M_c = 0$$

$$\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0$$

$$\mathfrak{L}_0 = \frac{(30)(6)(9)(21)}{15} = 2,208$$

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{(4)(18)^3}{4} = 5,832$$

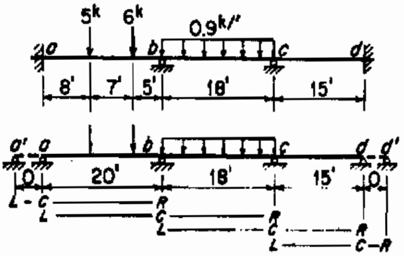
$$0 + 2M_b\left(\frac{15}{I} + \frac{18}{1.5I}\right) + 0$$

$$= \frac{-2,268}{I} - \frac{5,832}{1.5I}$$

$$54M_b = -6,156 \qquad M_b = -\underline{114}^{k'}$$

مثال ۱۳ – ۱۷= لنگرهای تکیه‌گاهی این تیر را محاسبه کنید E و I ثابت هستند

در این حالت چهار لنگر M_a ، M_b ، M_c و M_d مجهول می‌باشند بنابراین چهار معادله‌لازم خواهد بود ، همان‌طوری که می‌بینیم انتهای گیردار را می‌توان با دهانــه‌ای به‌طــول صفــر جایگزین‌کرد . به‌این ترتیب می‌توان معادلات موردنیازرا با اعمال چهار بار معادله (۱۳–۷) به‌نحوی که در هربار L ، C و R را مطابق آنچه مشخص شده است در نظر گرفته‌شود به‌دست آورد .



$\delta_{a'} = \delta_a = \delta_b = \delta_c = \delta_d = \delta_{d'} = 0$

a' ، a و b را به‌ترتیب L ، C و R بگیرید .

$$\mathfrak{L}_0 = 0 \qquad \mathfrak{R}_0 = \frac{(5)(8)(12)(32)}{20} + \frac{(6)(15)(5)(25)}{20} = 1{,}330.5 \qquad M'_a = 0$$

$$\therefore\ 40M_a + 20M_b = -1{,}330.5 \qquad (1)$$

a ، b و c را به‌ترتیب L ، C و R بگیرید .

$$\mathfrak{L}_0 = \frac{(5)(8)(12)(28)}{20} + \frac{(6)(15)(5)(35)}{20} = 1{,}459.5 \qquad \mathfrak{R}_0 = \frac{(0.9)(18)^3}{4} = 1{,}312.2$$

$$\therefore\ 20M_a + 76M_b + 18M_c = -2{,}771.7 \qquad (2)$$

b ، c و d را به‌ترتیب L ، C و R بگیرید .

$$\mathfrak{L}_0 = 1{,}312.2 \qquad \mathfrak{R}_0 = 0 \qquad \therefore\ 18M_b + 66M_c + 15M_d = -1{,}312.2 \qquad (3)$$

c ، d و d' را به‌ترتیب L ، C و R بگیرید .

$$\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{R}_0 = 0 \qquad M'_d = 0 \qquad \therefore\ 15M_c + 30M_d = 0 \qquad (4)$$

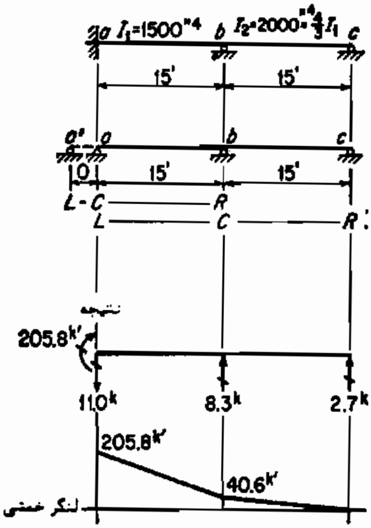
با حل دستگاه چهار معادله (۱) ، (۲) ، (۳) و (۴) مقادیر مجهول لنگرها مانند زیر معیــن می‌شود .

$$M_a = \underline{-19.17^{k\prime}} \qquad M_b = \underline{-28.20^{k\prime}} \qquad M_c = \underline{-13.74^{k\prime}} \qquad M_d = \underline{+6.87^{k\prime}}$$

مثال ۱۳ – ۱۸ = عکس‌العملهای تکیه‌گاهی این تیر را تحت اثر تغییر وضع تکیه‌گاهها محاسبه کرده و نمودار لنگر خمشی را برای آن تیر رسم کنید .

تکیه‌گاه a : در جهت ساعتگــرد دورانی برابر با 0.005 رادیان انجام مــی‌دهــد

تکیه‌گاه b : نشستی برابر با $0.0208\ ft$ دارد .



a ، a' و b را بترتیب L ، C و R بگیرید.

$$M'_a = 0 \qquad \delta_a = 0$$
$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{R}_0 = 0 \qquad \delta_b = -0.0208'$$

به‌دلیل‌دوران تکیه‌گاه a ، δ'_a/l_L برابربا $+0.005$ می‌شود و باا‌ستفاده‌ازمعادله (۱۳–۵)خواهیم داشت:

$$2M_a\left(\frac{15}{I_1}\right) + M_b\left(\frac{15}{I_1}\right) = 6E(0.005) + 6E\left(-\frac{0.0208}{15}\right)$$
$$\therefore\ 30M_a + 15M_b = 0.02166EI_1$$

a ، b و c را L ، C و R بگیرید.

$$M_c = 0 \qquad \delta_b = -0.0208'$$
$$\delta_a = 0 \qquad \delta_c = 0$$

با اعمال (۱۳–۵) خواهیم داشت:

$$M_a\left(\frac{15}{I_1}\right) + 2M_b\left(\frac{15}{I_1} + \frac{15}{\frac{4}{3}I_1}\right) = -6E(-0.0208)\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{15}\right)$$
$$\therefore\ 15M_a + 52.5M_b = +0.01664EI_1$$

با حل دستگاه معادله دومجهول (۱) ، (۲)و قراردادن مقدار $EI_1 = 31.25 \times 10^4\ kip\text{-}ft^2$ خواهیم داشت:

$$M_a = +0.000658EI_1 = \underline{+205.8^{k'}}$$
$$M_b = +0.0001291EI_1 = \underline{\underline{+40.6^{k'}}}$$

۱۳ــ ۱۱ استخراج معادله شیب ــ تغییر مکان

روش شیب ــ تغییرمکان درسال ۱۹۱۵ توسط پرفسور جی ــ ای مانی G. A. Maney به‌عنوان‌روش کلی در تحلیل سازه‌های متشکل از گرههای صلب ارائه گردید. این روش کاربرد معادلاتی را که قبلا" توسط ماندرلا (Mand rla)و موهر جهت محاسبه تنشهای ثانویه خرپا پیشنهاد شده بو دقیقترنمود. این روش در جای خود بسیار مفید و مهم بوده و توجیه بسیار عالی برای روش پخش لنگر می‌باشد.

معادلات اساسی زیر با استفاده از قضایای سطح لنگر استخراج شده است، لذا در این معادلات تغییرشکل حاصل از لنگر خمشی ملحوظ شده ولی از تغییر شکل حاصل از برش و نیروی محوری صرف‌نظر شده است. چون اثر تغییرشکل حاصل از برش و نیروی محوری در تحلیل تنش بسیاری از تیرها و قابهای نامعین بسیار کوچک است لذا خطای استفاده از

این معادلات به‌عنوان اساس استخراج روش شیب ــ تغییرمکان در تحلیل سازه‌ها بسیار کم خواهد بود (جهت اثبات چنین مطلبی به‌نتایج مثال(۱۳ــ۱۴)مراجعه‌کنید) *معادله اساسی شیب ــ تغییرمکان رابطه‌ای است که برای لنگر انتهای یک قطعه برحسب چهار مقداری که عبارت از دوران مماس در هر انتهای منحنی خیز قطعه ، دوران خط‌اتصال دو انتهای قطعه و بارهای خارجی موٴثر برآن باشند* نوشته می‌گردد .درکاربرد این معادله استفاده‌ازقرارداد علائم زیر سبب تسهیل در محاسبات می‌گردد :

۱ ــ لنگرهای موثر بر دو انتهای یک قطعه در جهت *ساعتگرد* مثبت فرض می‌گردند .

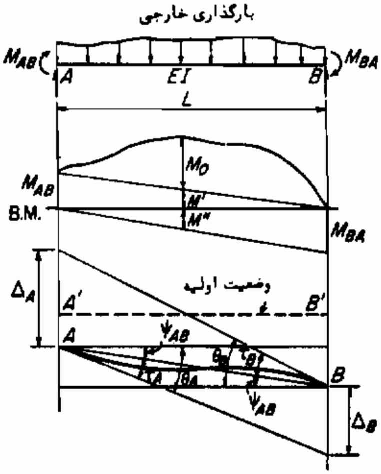
۲ ــ هرگاه θ زاویه دوران مماس بر منحنی‌خیز در یک انتهای قطعه نسبت به‌امتداد اولیه قطعه باشد ، این زاویه θ زمانی مثبت گرفته می‌شود که مماس بر منحنی‌خیز نسبت به‌امتداد وضعیت اولیه خود در جهت *ساعتگرد* دوران کرده باشد .

۳ ــ هرگاه ψ زاویه دوران خط‌اتصال دوانتهای منحنی‌خیز نسبت به‌امتداداولیه‌قطعه باشد ، زاویه ψ زمانی مثبت خواهد بود که این خط‌نسبت به‌امتداد اولیه خود درجهت *ساعتگرد* دوران کرده باشد .

درنمایش لنگرهای‌انتهایی‌دو زیرنویس به‌کارخواهیم برد ،این‌دو زیرنویس باهم‌نشان دهندهٔ قطعه مورد بحث خواهند بود و اولین زیرنویس نشان دهندهٔ انتهایی از قطعه‌است که برآن همان لنگروارد شده است ،به‌عنوان مثال M_{AB} نشان دهنده لنگر وارد برانتهای A از قطعهAB بوده و M_{BA} لنگر موٴثر بر انتهای B از همان قطعه است ، زوایای θ را فقط‌با یک زیرنویس که نشان‌دهندهٔ انتهای قطعه است مشخص خواهیم کرد و زوایای ψ را با دو زیرنویس که نشان‌دهنده خط‌اتصال و قطعه می‌باشد نشان خواهیم داد .

با به‌کاربردن نکات و علائم فوق قطعه AB را که دارای E و I ثابت (البته بطورنظری استخراج معادله شیب ــ تغییرمکان با در نظرگرفتن I متغیر نیز امکان‌پذیر می‌باشد)درکل طول خود بوده و دارای وضعیت اولیه مستقیم الخطی باشد در نظر بگیرید و فرض‌کنید که این قطعه تحت اثر لنگرهای انتهایی مثبت و بار غیرمشخصی نظیر شکل (۱۳ــ۸) قرار گرفته باشد . اگر AB منحنی‌خیز این تیر باشد $A'B'$ نشان‌دهنده وضعیت اولیه آن خواهد بود ، در این صورت θ_A ، θ_B و ψ_{AB} همان‌طوری که نشان داده شده است مثبت خواهندبود .

نمودار لنگر خمشی‌را برای این قطعه می‌توان از جمع سه اثرجداگانه زیر به‌دست‌آورد. نمودارحاصل از اثرجداگانه هریک از لنگرهای انتهایی‌که درروی شکل با عرضهای قسمتهای مثلثی M' و M'' مشخص‌شده‌است‌نمودارحاصل‌ازاثرجداگانه‌بارهای‌موثرباحذف‌لنگرهای‌انتهایی که این نمودار نیز با‌عرضهای M_o معین شده است و به‌عبارت دیگر M_o عبارتست از عرضهای نمودار لنگر خمشی نظیر قطعه هرگاه آن قطعه برروی دو تکیه‌گاه ساده انتهایی قرار گیرد .



شکل ۱۳ــ۸ استخراج معادله شیب ــ تغییرمکان

مقدار لنگر خمشی در هر نقطه از این قطعه را می‌بایستی با جمع جبری مقادیر M_o و M' و M'' به‌دست آورد ولی در این قسمت از بحث بهتر است که اثر هریک را به‌طور جداگانه بررسی نمائیم.

اگر نمودار لنگر را به‌نمودار M/EI تبدیل کنیم در این صورت مقادیر Δ_A و Δ_B را می‌توان به‌کمک قضیه دوم سطح لنگر به‌دست آوریم. در این صورت خواهیم‌داشت:

$$\Delta_A = -\frac{L^2}{6EI}M_{AB} + \frac{L^2}{3EI}M_{BA} - \frac{(\mathfrak{M}_o)_A}{EI} \qquad \text{(الف)}$$

$$\Delta_B = \frac{L^2}{3EI}M_{AB} - \frac{L^2}{6EI}M_{BA} + \frac{(\mathfrak{M}_o)_B}{EI} \qquad \text{(ب)}$$

در این روابط $(\mathfrak{M}_o)_A$ عبارتست ازلنگر سطح زیر نمودار لنگر خمشی M_o حول محور مار بر A و به‌همین ترتیب $(\mathfrak{M}_o)_B$ عبارت است از لنگر همان سطح حول محور مار بر B.

با در نظرگرفتن این حقیقت‌که کلیه زوایا و تغییرشکلهای مذکور درشکل (۱۳ــ۸) بقدری‌کوچکند‌که عملاً یک زاویه را می‌توان با سینوس و تانژانت آن یکی فرض کرد با مراجعه به‌شکل، روابط زیر را می‌توان برقرار داشت.

$$\frac{\Delta_A}{L} = \tau_B = \theta_B - \psi_{AB} \qquad \frac{\Delta_B}{L} = \tau_A = \theta_A - \psi_{AB} \qquad \text{(ج)}$$

با حل دستگاه معادلات (الف) و (ب) نسبت به M_{AB} و M_{BA} و جایگزینی مقادیر Δ_A/L و Δ_B/L از معادلات (ج) مقادیر زیر به‌دست خواهد آمد.

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\psi_{AB}) + \frac{2}{L^2}[(\mathfrak{M}_o)_A - 2(\mathfrak{M}_o)_B]$$
$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}(2\theta_B + \theta_A - 3\psi_{AB}) + \frac{2}{L^2}[2(\mathfrak{M}_o)_A - (\mathfrak{M}_o)_B] \qquad (د)$$

تا کنون از شرایط بارگذاری صحبتی به‌میان نیامده و معادلات (د) برای هرنوع بارگذاری عرضی صادق می‌باشند، آخرین عبارت هریک از این معادلات که درداخل کروشه آورده شده است تابعی از نوع بارگذاری است و شناسایی معنی فیزیکی آن بسیار مهم است، فرض کنید که θ_A ، θ_B و ψ_{AB} هرسه برابر با صفر باشند، در این صورت آخرین عبارات معادلات (د) به‌ترتیب برابر با لنگر نسبت به انتهای A و لنگر نسبت به انتهای B قطعه می‌باشد، اما اگر θ_A ، θ_B و ψ_{AB} همگی برابر با صفر باشند ازنظر فیزیکی چنین معنی می‌دهد که هردو انتهای این قطعه در برابر دوران و یا انتقال پایدارند و به‌عبارت دیگر این قطعه در دو انتهای خود گیردار می‌باشد پس این آخرین عبارات معادلات (د) برابر با لنگرهای دو انتهای گیردار" می‌باشند لذا آنها را با FEM نشان می‌دهیم.

$$\mathrm{FEM}_{AB} = \frac{2}{L^2}[(\mathfrak{M}_o)_A - 2(\mathfrak{M}_o)_B]$$
$$\mathrm{FEM}_{BA} = \frac{2}{L^2}[2(\mathfrak{M}_o)_A - (\mathfrak{M}_o)_B] \qquad (۸-۱۳)$$

اگر مقادیر معادلات (۱۴-۸) را در معادلات (د) قرار دهیم خواهیم داشت.

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\psi_{AB}) + \mathrm{FEM}_{AB} \qquad (۹-۱۳)$$
$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}(2\theta_B + \theta_A - 3\psi_{AB}) + \mathrm{FEM}_{BA}$$

با دقت بیشتر در معادلات (۱۳-۹) معلوم می‌شود که اگر انتهای نزدیک قطعه را با N و انتهای دور قطعه را با F نشان دهیم، این دو معادله را می‌توان با یک معادله کلی نشان داد. اگر تعریف زیر را در نظر بگیریم:

$$K_{NF} = (\text{ضریب سختی قطعه } NF) = \frac{I_{NF}}{L_{NF}} \qquad (۱۰-۱۳)$$

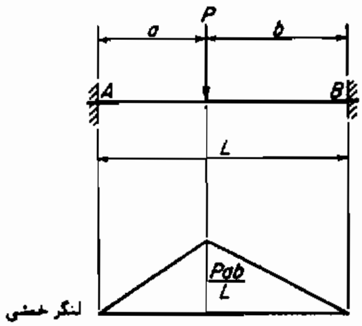
معادله اساسی شیب ـ تغییر مکان به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$M_{NF} = 2EK_{NF}(2\theta_N + \theta_F - 3\psi_{NF}) + \mathrm{FEM}_{NF} \qquad (۱۱-۱۳)$$

واضح است که مقدار FEM را می‌توان به‌سادگی برای هرنوع بارگذاری معین نمود و اگرعلاوه

برآن دوران مماس در هردوانتهای تیر و دوران خط اتصال دو انتهای قطعه معلوم شود می‌توان به‌سادگی با استفاده از معادله (۱۳–۱۱) به‌محاسبه لنگرهای دو انتهای قطعه پرداخت . در بخش (۱۳–۱۲) نحوه کاربرد این معادله را در حل تیرها و قابهای نامعین شرح داده‌ایم .

بار متمرکز (به‌شکل (۱۳–۹) مراجعه شود) :



شکل ۱۳–۹ بار متمرکز

$$(\mathfrak{M}_o)_A = \frac{Pab}{L}\left[\frac{a}{2}\left(\frac{2a}{3}\right) + \frac{b}{2}\left(a + \frac{b}{3}\right)\right] = \frac{Pab}{6}(2a+b)$$

$$(\mathfrak{M}_o)_B = \frac{Pab}{L}\left[\frac{b}{2}\left(\frac{2b}{3}\right) + \frac{a}{2}\left(b + \frac{a}{3}\right)\right] = \frac{Pab}{6}(2b+a) \qquad (۱۲-۱۳)$$

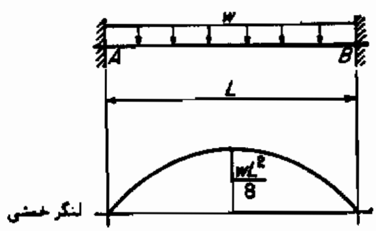
$$\text{FEM}_{AB} = \frac{2}{L^2}\left[\frac{Pab}{6}(2a+b) - 2\frac{Pab}{6}(2b+a)\right] = -\frac{Pab^2}{L^2}$$

$$\text{FEM}_{BA} = \frac{2}{L^2}\left[2\frac{Pab}{6}(2a+b) - \frac{Pab}{6}(2b+a)\right] = +\frac{Pa^2b}{L^2}$$

بار گسترده یکنواخت در کل دهانه (به‌شکل ۱۳–۱۰ مراجعه شود)

$$(\mathfrak{M}_o)_A = (\mathfrak{M}_o)_B = \frac{wL^4}{24}$$

$$\text{FEM}_{AB} = -\frac{wL^2}{12} \qquad \text{FEM}_{BA} = +\frac{wL^2}{12} \qquad (۱۳-۱۳)$$



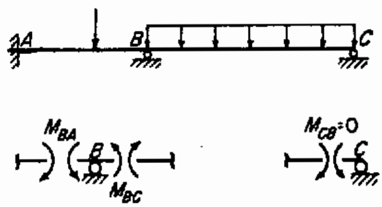
شکل ۱۳–۱۰ بار گسترده یکنواخت در کل دهانه

بایستی یادآوری نمود که علامت صحیح FEM بخودی‌خود از این عبارات به‌دست می‌آید . در بسیاری از حالات با قدری دقت جهت لنگر انتهای تیر را می‌توان فهمید و به‌این‌ترتیب معمولا" قادر به‌تعیین و کنترل علامت FEM هستیم .

بار دیگر یادآوری می‌کنیم که قرارداد علائم روش شیب ــ تغییر مکان می‌بایستی به‌کار برده شود و همچنین خاطرنشان می‌سازیم که معادلات فوق برای قطعه‌ای استخراج شده است که دارای حالت اولیه مستقیم‌الخط بوده و در آن قطعه E و I دارای مقادیر ثابتی باشند .

۱۳ ــ ۱۲ اعمال روش شیب ــ تغییر مکان بر تیرها و قابها

ابتدا به‌کاربرد روش شیب ــ تغییرمکان در مسائل مربوط به‌تیرهای سرتاسری نظیرآنچه در شکل (۱۳ــ۱۱) نشان داده شده است توجه کنید ، فرض می‌شود که تکیه‌گاههای این تیر غیرقابل تغییرشکل باشند ، این تیر را مجموعه‌ای از دو قطعه AB و BC که به‌صورت کاملا" صلب در گره B بهم وصل شده‌اند تصورکنید ، در این‌صورت با استفاده‌از معادله (۱۳ــ۱۱) می‌توانیم روابطی برای نقاط‌انتهایی هریک‌از این قطعات بنویسیم ،این چهار لنگر انتهایی M_{AB} ، M_{BA} ، M_{BC} و M_{CB} را می‌توانیم برحسب زوایای θ و ψ و همچنین FEM که کلیه آنها از طریق معادلات (۱۳ــ۱۲) و (۱۳ــ۱۳) قابل محاسبه می‌باشند تعیین کنیم .



شکل ۱۳ــ۱۱ تفکیک گرهها

چون تکیه‌گاهها غیرقابل تغییرشکل می‌باشند ، می‌دانیم که در این حالت θ_A ، ψ_{AB} و ψ_{BC} همگی برابر با صفر هستند و علاوه بر آن چون قطعات BA و BC به‌صورت صلب‌در گره B به‌یکدیگر وصل شده‌اندلذا مماس برمنحنی خیز درانتهای B از قطعه AB می‌بایستی نسبت به‌امتداد اولیه خود جبرا" بایـد به‌مقدار θ_B برابر با دوران مماس در انتهای B از قطعه BC دوران نماید . فقط مقادیر θ_B و θ_C که در روابط مربوط به‌چهار لنگر انتهایی وجود دارند مجهول هستند ،اگربتوانیم به‌نحوی مقادیر θ_B و θ_C را معین‌کنیم خواهیم توانست هر چهار لنگر انتهایی را محاسبه کرده و با معلوم شدن این چهار لنگر هر لنگردیگر با برش

و عکس‌العمل مورد نظر با استفاده از معادلات تعادل قابل محاسبه خواهد بود . به‌عبارت دیگر تحلیل تنش این تیر پس از معلوم‌شدن مقادیر θ_B و θ_C به‌مساله‌ای در زمینهٔ تعادل تبدیل می‌گردد .

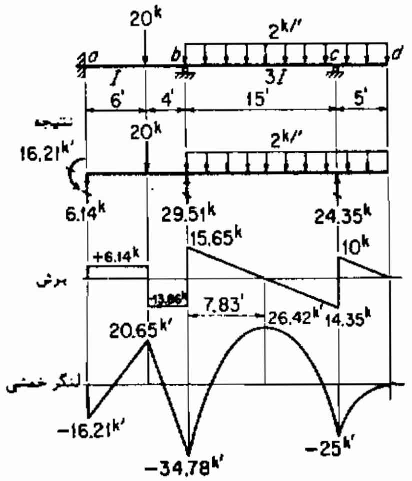
در این حالت ،با در نظرگرفتن این حقیقت که لنگرهای انتهایی می‌بایستی دومعادله ساده تعادل را تأمین نمایند می‌توان به‌تعیین این دو مجهول پرداخت ، این معادلات را می‌توان با جداکردن گرههای B و C به‌نحوی که در شکل (۱۳ــ۱۱) نشان داده شده است و برقرارنمودن معادله $\Sigma M = 0$ برای هریک از این گرهها به‌صورت زیرا تأمین نمود :

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \longleftarrow \Sigma M_B = 0 \qquad \text{از}$$
$$M_{CB} = 0 \longleftarrow \Sigma M_C = 0 \qquad \text{از}$$

اگر در این دو معادله عبارات مربوط به‌لنگرها انتهایی را از معادله (۱۲ــ۱۱) قرار دهیم بدین‌ترتیب دو معادله با مجهولات θ_B و θ_C به‌دست خواهد آمد . پس از حل این دستگاه معادله و تعیین این مجهولات قادر خواهیم شد که لنگرهای انتهایی را معین کرده و تحلیل تنش تیر را بانتها برسانیم .

راه‌حل‌عددی‌چنین مسئله‌ای درمثال (۱۳ــ۱۹)شرح داده‌شده‌است ،درمثال (۱۳ــ۲۰) این موضوع‌را بسط داده و بحالتی‌که جابجایی تکیه‌گاهی نیز وجودداشته باشد اعمال‌کرده‌ایم.

مثال ۱۳ ــ ۱۹= عکس‌العملهای این تیررا محاسبه‌کرده و نمودارهای برش و لنگرخمشی را برای آن رسم کنید تکیه‌گاهها غیرقابل تغییرشکل می‌باشند .



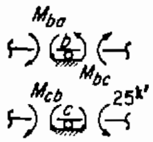
زوایای θ و ψ را تحلیل کنید .

$$\theta_a = 0 \qquad \psi_{ab} = \psi_{bc} = 0$$
$$\theta_b = ? \qquad \theta_c = ?$$
$$K_{ab} = \frac{I}{10} = K \qquad K_{bc} = \frac{3I}{15} = 2K$$
$$FEM_{ab} = -\frac{(20)(6)(4)^2}{(10)^2} = -19.2^{k'}$$
$$FEM_{ba} = +\frac{(20)(6)^2(4)}{(10)^2} = +28.8^{k'}$$
$$FEM_{bc} = -\frac{(2)(15)^2}{12} = -37.5^{k'}$$
$$FEM_{cb} = +37.5^{k'} \qquad M_{cd} = -25^{k'}$$

با استفاده از معادله (۱۳ــ۱۱) عباراتی برای لنگرهای انتهایی می‌نویسیم :

$$M_{ab} = 2EK\theta_b - 19.2$$
$$M_{ba} = 4EK\theta_b + 28.8$$
$$M_{bc} = 8EK\theta_b + 4EK\theta_c - 37.5$$
$$M_{cb} = 8EK\theta_c + 4EK\theta_b + 37.5$$

گرههای b و c را جدا کرده و معادلات مربوط به‌آن گرهها را می‌نویسیم و در آن معادلات مقادیر M_{ba} و M_{bc} و غیره را قرار می‌دهیم .



$$\Sigma M_b = 0 \quad M_{ba} + M_{bc} = 0 \quad \therefore\ 12EK\theta_b + 4EK\theta_c - 8.7 = 0 \quad (۱)$$
$$\Sigma M_c = 0 \quad M_{cb} - 25 = 0 \quad \therefore\ 4EK\theta_b + 8EK\theta_c + 12.5 = 0 \quad (۲)$$

پس از حل معادلات (۱) و (۲) جوابهای زیر به‌دست می‌آید :

$$EK\theta_b = \underline{+1.495} \qquad EK\theta_c = \underline{-2.31}$$

پس از قراردادن این مقادیر در روابط مربوط به‌لنگرهای انتهایی خواهیم داشت :

$$M_{ab} = +2.99 - 19.2 = \underline{-16.21^{k'}} \qquad M_{bc} = +11.96 - 9.24 - 37.5 = \underline{-34.78^{k'}}$$
$$M_{ba} = +5.98 + 28.8 = \underline{+34.78^{k'}} \qquad M_{cb} = -18.48 + 5.98 + 37.5 = \underline{+25.0^{k'}}$$

بقیه محاسبات به‌کمک معادلات تعادل انجام خواهد گرفت :

بحث :

قسمت طره‌ای cd هیچ مشکلی ایجاد نمی‌کند زیرا لنگر خمشی در این قسمت از نظر تعادل معلوم است ولی همین طره، معادله گره را در گره c تحت تاثیر قرار می‌دهد . هرگاه گرهها را جدا می‌کنید ، لنگرهای مجهول را در جهت مثبت فرض نمائید (بدین‌صورت که در انتهای قطعه در جهت ساعتگرد وارد شوند و در انتهای گره در جهت عکس ساعتگرد اثر کنند) بدیهی است که لنگرهای معلوم را به‌مقدار حقیقی و در جهت واقعی اثرشان در نظر می‌گیریم .

بهترین راه برای برخورد با ضرایب K انتخاب یک ضریب K استاندارد و بیان سایر ضرایب برحسب آن می‌باشد .

همواره سازگاری آحاد را می‌توان با انتخاب آحاد kip و $foot$ حفظ کرد .

راه‌حل دیگری جهت برخورد با اثر طره به‌صورت زیر می‌باشد . به‌دلیل تعادل لنگرها

در هر گره m اگر اعضایی که به‌این گره متصل‌اند به‌گرههای a ، b ، $\ldots j$ منتهی‌شوند داریم :

$$M_{ma} + M_{mb} + \cdots + M_{mj} = 0$$

اگر هریک از این لنگرهای انتهایی معلوم باشد مقدارآن را می‌توان با علامت و مقداردرست آن دراین‌رابطه‌قرارداد .به‌عنوان‌مثال‌درگره c ، $M_{cb} + M_{cd} = 0$ و چون $M_{cd} = -25$ لذا خواهیم داشت : $M_{cb} - 25 = 0$

که این مقدار معادله (۲) ارائه شده در بالا را بیان می‌کند .

دقت شود که نتایج نهایی می‌بایستی در معادلات (۱) و (۲) صدق کنند ، بدیهی است برای این وارسی کافی است که مقادیر معلوم را در این معادلات قرار دهیم .

مثال ۱۳ – ۲۰= لنگرهای انتهایی‌را در تیر (۱۳–۱۹) به‌شرطی‌که این لنگرها فقط در اثر جابجایی زیرین تکیه‌گاهها بوجود آمده باشند محاسبه‌کنید (باری بر تیراثر نمی‌کند)

تکیه‌گاه a : $0.01\ ft$ به‌طور عمودی به‌طرف پائین و دورانی در جهت ساعتگرد و برابر با 0.001 رادیان .

تکیه‌گاه b : $0.04\ ft$ به‌طور عمودی به‌طرف پائین

تکیه‌گاه c : $0.0175\ ft$ به‌طور عمودی به‌طرف پائین

مقدار $I = 1{,}000\ in.^4$ و $E = 30 \times 10^3\ kips/sq\ in$ فرض می‌شود .

در این حالت :

$$\theta_a = +0.001 \qquad \psi_{ab} = \frac{0.04 - 0.01}{10} = +0.003 \qquad \psi_{bc} = -\frac{(0.04 - 0.0175)}{15} = -0.0015$$

$$\theta_b = ? \quad \text{and} \quad \theta_c = ?$$

چون باری براین تیر وارد نمی‌شود لذا کلیه مقادیر FEM برابر با صفر است ، با استفاده‌از معادله (۱۳–۱۱) عبارات زیر را برای لنگرهای انتهایی می‌نویسیم :

$$\begin{aligned}
M_{ab} &= 2EK(0.002 + \theta_b - 0.009) &&= 2EK\theta_b - 0.014EK \\
M_{ba} &= 2EK(2\theta_b + 0.001 - 0.009) &&= 4EK\theta_b - 0.016EK \\
M_{bc} &= 2E(2K)(2\theta_b + \theta_c + 0.0045) &&= 8EK\theta_b + 4EK\theta_c + 0.018EK \\
M_{cb} &= 2E(2K)(2\theta_c + \theta_b + 0.0045) &&= 4EK\theta_b + 8EK\theta_c + 0.018EK
\end{aligned}$$

از طریق معادلات گرهها داریم :

$$\Sigma M_b = 0 \qquad M_{ba} + M_{bc} = 0 \qquad 12EK\theta_b + 4EK\theta_c + 0.002EK = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma M_c = 0 \qquad M_{cb} = 0 \qquad 4EK\theta_b + 8EK\theta_c + 0.018EK = 0 \qquad (2)$$

از حل دستگاه معادلات (۱) و (۲) جوابهای زیر به‌دست می‌آید.

$$\theta_b = +0.0007 \qquad \theta_c = -0.0026$$

با جایگذاری این مقادیر خواهیم داشت:

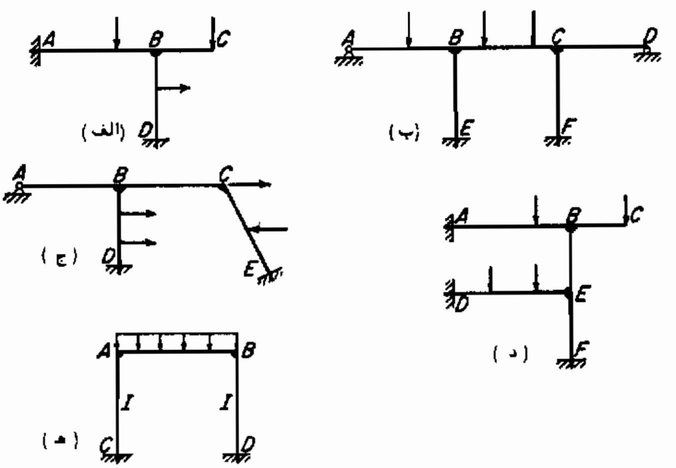
$$M_{ab} = -0.0126EK = \underline{-262.5^{k'}} \qquad M_{bc} = +0.0132EK = \underline{+275.0^{k'}}$$
$$M_{ba} = -0.0132EK = \underline{-275.0^{k'}} \qquad M_{cb} = \quad 0 \quad = \underline{\quad 0 \quad}$$

زیرا:
$$EK = 30 \times 10^3 \times 144 \times \frac{1,000}{144^2 \times 10} = 20,833 \text{ kip-ft}$$

بحث:

درچنین مسائلی باید کاملاً مواظب بودکه مقادیر معلوم‌زوایای θ و ψ باعلامات‌صحیح خود در محاسبات وارد شوند و همچنین بایستی دقت شود که آحاد همچنان سازگار باقی بمانند.

قابهای صلب شکلهای (۱۳–۱۲ الف) الی (۱۳–۱۲ د) را در نظر بگیرید و فرض‌کنید همان‌طوری که معمولاً در قابهای صلب معمول است از تغییر طول حاصل از نیروی محوری صرف‌نظرکرده و فقط‌تغییرشکل حاصل‌از خمش را درنظر بگیریم بااین فرض به‌سادگی‌می‌توان نشان داد که در هریک از این چهار قاب زاویه ψ برای کلیه قطعات صفر می‌باشد (بدیهی است که باستثنای قسمت‌های طره‌ای معین)، به‌عنوان مثال شکل (۱۳–۱۲ ب) را در نظر بگیرید واضح است با صرف‌نظر کردن ازتغییر طول محوری قطعات AB و BE گره B فقط در صورت جابجایی تکیه‌گاه می‌تواند تغییر محل بدهد و اگر گره B تغییر محل ندهد می‌توانیم



شکل۱۳–۱۲ قابهای متداولی که در آنها تغییر مکان افقی وجود ندارد

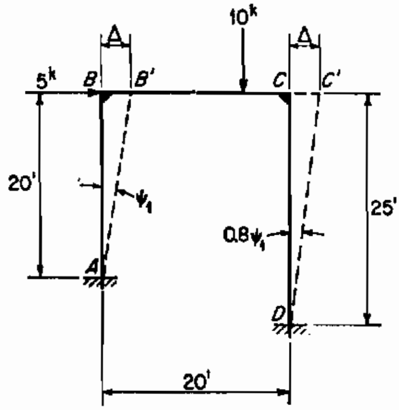
نتیجه بگیریم که گره C نیز به‌همان طریق جابجا نخواهد شد. در این صورت زوایای ψ برای هر پنج قطعه AB ، BC ، CD ، BE و CF برابر با صفر خواهد شد.

در هر گره مقدار زاویه θ برای انتهای کلیه قطعاتی که به‌صورت صلب به‌آن گره ختم می‌شوند یکسان خواهد بود و بنابراین در حالت این قاب از نظر زاویهٔ θ فقط چهار زاویه θ_A ، θ_B ، θ_C ، θ_D مجهول خواهند بود. لذا با استفاده از معادله (۱۳-۱۱) روابطی جهت تعیین لنگرهای انتهایی برحسب چهار زاویه θ که تنها مجهولات می‌باشند به دست خواهدآمد و چون می‌توانیم درکلیه گرههائی که درآنها θ مجهول‌است معادله‌گره $\Sigma M = 0$ را برقرار کنیم به‌این ترتیب قادر خواهیم بود چهار معادله را که درآنها چهار زوایای θ مجهول می‌باشند (همان‌طوری که در مثال (۱۳-۱۹) دیدیم) به‌دست آوریم، پس از تعیین این چهار زاویه می‌توانیم جهت‌تعیین مقادیر لنگرهای انتهایی‌از مقادیر معلوم‌شدهٔ زوایای θ استفاده‌کنیم مابقی محاسبات‌لازم جهت‌تحلیل تنش به‌یک مساله تعادل‌منتهی‌می‌گردد.

بدین ترتیب معلوم می‌شود که راه حل شیب ـ تغییر مکان در مورد قابهایی‌که درآنها زوایای ψ به‌عنوان مجهول وجود ندارند عملا" به‌همان طریق تیر سرتاسری می‌باشد، حل قاب شکل (۱۳-۱۲ هـ) نیز به‌همان ترتیب قابل انجام است به‌شرطی که هم ساخت خودقاب و هم بارگذاری‌آن حالت قرینه داشته باشد، در این حالت خاص تغییر مکانها شکل قرینه پیدا گرده و لذا درانتهای فوقانی ستونها تغییرمکانی افقی وجودنخواهد داشت و درنتیجه زوایای ψ برای هر سه قطعه این قاب صفر خواهد بود.

در اغلب انواع کلی قابهای صلب حتی اگر منحصرا" تغییرشکل حاصل از خمش را در نظربگیریم هردو زوایای θ و ψ مجهول می‌باشند، به‌عبارت‌دیگر هم درآنها دوران گرهها وجود دارد و هم دوران خط‌اتصال در گره انتهایی که جابجایی جانبی گفته می‌شود، انواع مختلفی از این قابها در شکل (۱۳-۱۵) نشان داده شده است. برای بررسی این چنین مسائلی می‌بایستی به‌راه‌حلهای جدیدی دست یافت، بدین منظور قاب شکل (۱۳ - ۱۳) را در نظر بگیرید.

اگر این قاب‌دارای تکیه‌گاههای غیرقابل تغییرشکلی باشد در این صورت فقط دوزاویه θ مجهول که عبارت از θ_B و θ_C می‌باشند وجود خواهد داشت ولی در این حالت عاملی برای جلوگیری از جابجایی جانبی نقطهٔ B وجود ندارد، چون ازتغییرشکل حاصل‌ازنیروی محوری قاب صرف‌نظر کرده‌ایم و چون دوران خط‌اتصال دو انتهای قطعه همواره کوچک‌است لذا عملا" جابجایی گره B در ابتداء عمود برAB خواهد بود که در این حالت افقی‌خواهد بود. فرض کنید این جابجایی را با Δ نشان دهیم، می‌توانیم به‌همان طریق استدلال‌کنیم که گره C انتهای فوقانی ستون CD نیز می‌بایستی دارای جابجایی افقی باشد وچون‌ازتغییر



شکل ۱۳–۱۳ قابی که در آن جابجایی جانبی مطرح است

شکل طولی BC نیز صرف‌نظر شده‌است بنابراین جابجایی افقی گره C نیز می‌بایستی برابر با Δ گردد .

در شکل (۱۳–۱۳) شکل‌جابجا شده قطعات قاب را با خط‌چین نشان داده‌ایم ، توجه شودکه خطوط خط‌چین نشان‌دهنده منحنی خیز قاب نیست‌بلکه‌صرفا" نشان دهندهٔ خطوط اتصال گرههاست ، از این شکل معلوم می‌شود که :

$$\psi_{BC} = 0 \qquad \psi_{AB} = \frac{\Delta}{20} = \psi_1$$

$$\psi_{CD} = \frac{\Delta}{25} = \frac{4}{5}\psi_1$$

بنابراین در این حالت کلیه زوایای ψ مربوط به‌قطعات قاب را می‌بایستی برحسب یک مجهول که در اینجا ψ_1 می‌باشد بیان کنیم*.

* در مثال (۱۳–۲۲) از همین فن در مساله بسیار مشکلتری به‌منظور تحلیل ψ با در نظرگرفتن روابط بین زوایا استفاده شده است ، از همین طریقه اساسی می‌توان در بررسی زوایای ψ مربوط به هرقاب پیچیده‌ای نظیر آنچه در شکل (۱۳–۱۵) نشان داده شده است استفاده نمود که ذیلا" در این مورد شرح داده می‌شود :

۱ – موقتا" کلیه گرههای صلب‌را در قسمت نامعین قاب به‌صورت مفصل و کلیه تکیه – گاههای گیردار را به‌صورت تکیه‌گاه مفصلی فرض کنید ، حال ببینید که این سازهٔ‌اخیراز نظر تعادل هندسی پایدار می‌باشد و یا خیر . اگر یک گره یا بیشتر از یک گره از این سازه به‌صورت ناپایدار بوده و تمایل به‌جابجایی انتقالی ازمحل خود داشته باشد ،دراین صورت

بقیه پاورقی

سازه ناپایدار است و خط اتصال دو انتهای قطعاتی از قاب که تمایل به‌جابجایی از خود نشان می‌دهند دورانی برابر با ψ خواهند داشت به‌عبارت دیگر در چنین حالتی‌جابجایی سازه اصلی امکان‌پذیر خواهد بود .

۲ ــ درجه ناپایداری سازه تغییر یافته برابر است با تعداد بند و یا تکیه‌گاه غلکتی که به‌منظور تأمین پایداری سازه بدان اضافه گردد ، موقعیت چنین تکیه‌گاههای اضافی‌را می‌توان به‌روش زیر معین نمود . تصور کنید که قطعات سازه را از تکیه‌گاهها جدا نموده و همچنین‌در کلیه گرهها از یکدیگر جدا کرده باشید حال به‌سوارکردن قطعات سازه به‌صورت تک به‌تک بپردازید ، به‌طوری که نصب این قطعات را از تکیه‌گاهها شروع کنید ، به‌همان نحوی‌که نصب قطعات پیش می‌رود معلوم خواهد شد که در چه گرهی به‌منظور جلوگیری از ناپایداری سازه به‌تکیه‌گاههای کمکی نیاز است . این تکیه‌گاه کمکی به‌هر گرهی که از اتصال حداقل دوقطعه تشکیل می‌شود اضافه خواهد شد واضح است که انتهای دیگر قطعات به‌قسمت نصب شده و پایدار سازه متصل می‌باشد .

۳ ــ حال می‌توان با جابجاکردن به‌نوبت هریک از تکیه‌گاههای کمکی که به‌منظور حفظ پایداری به‌نحوی که در بالا اشاره شد به‌سازهٔ تغییر یافته اضافه شده است به‌تحلیل زوایای ψ و روابط بین آن زوایا در قاب‌اصلی پرداخت ،هریک از این‌تکیه‌گاهها را می‌توان‌به‌مقدار دلخواهی جابجا نموده و از این طریق به‌محاسبه دوران خط‌اتصال دو انتهای قطعه که به‌دلیل جابجایی پیش می‌آمد اقدام کرد ، یکی از این دورانهای فوق‌الذکر را که حاصل از جابجایی یک تکیه‌گاه می‌باشد می‌توان به‌عنوان یک زاویه مستقل ψ برگزید و سپس سایر دورانهای قطعات را برحسب آن حساب کرد ، به‌این ترتیب دیده می‌شود که تعداد زاویه مستقل ψ در هر سازه‌ای برابر با درجه ناپایداری سازه تغییر یافتهٔ آن می‌باشد .بایستی خاطرنشان کرد که امکان دارد که زاویه دوران خط‌اتصال دو انتهای قطعه‌ای از یک قاب به‌بیش از یک زاویه مستقل ψ مربوط‌بوده باشد .

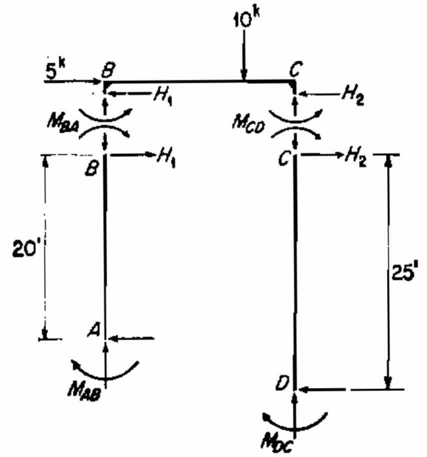
در هر قاب صلب هر درجه‌آزادی نسبت به‌جابجایی جانبی مربوط‌به یک زاویه‌مستقل ψ می‌باشد در مبحث (۱۳ــ۱۴) خواهیم دید که درک و امکان حل قابها به‌روش پخش‌لنگر بستگی کامل به‌محاسبه صحیح درجه‌آزادی نسبت به‌جابجایی جانبی سازه دارد .

پس از اعمال این روش در مورد قابهای شکل (۱۳ــ۱۵) درجه ناپایداری سازه‌های تغییریافته (به‌عبارت دیگر تعداد زوایای مستقل ψ سازهٔ اصلی) به‌ترتیب خواهد شد .

(*a*) 1 (*b*) 1 (*c*) 1 (*d*) 3 (*e*) 1 (*f*) 3 (*g*) 2 (*h*) 2

اگر از معادله (۱۳-۱۱) به‌منظور تعیین لنگرهای انتهایی قطعات استفاده کنیم دراین حالت به‌عباراتی خواهیم رسید که در آنها سه مجهول θ_B ، θ_C و ψ_1 وجود خواهند داشت دو معادله از جمع سه معادله لازم جهت تعیین این مقادیر مجهول از طریق برقرار نمودن معادلات گرههای B و C به‌دست می‌آید ولی‌تعیین سومین‌معادله مستقل‌که می‌بایستی‌توسط لنگرهای انتهایی تأمین گردد به‌نحودیگری به‌دست می‌آید . برای تعیین این معادله‌بایستی به‌صورت زیر عمل کرد : هریک از ستونها را با قطع آنها درست زیر شاهتیر و درست‌روی پی همان‌طوری که درشکل (۱۳-۱۴) می‌بینید از سازه جدا کنید و به‌همین طریق شاهتیر را نیز با قطع آن درست در بالای ستونها از سازه جدا کنید حال حول انتهای تحتانی هریک از ستونها لنگرگیری نمائید .

$$M_{AB} + M_{BA} + 20H_1 = 0 \qquad \text{(الف)}$$
$$M_{DC} + M_{CD} + 25H_2 = 0 \qquad \text{(ب)}$$



شکل ۱۳-۱۴ جدانمودن ستونها از شاهتیر

به‌همین ترتیب در مورد شاهتیر نیز $\Sigma F_x = 0$ را برقرار می‌کنیم

$$H_1 + H_2 = 5 \qquad \text{(ج)}$$

اگرمقادیر H_1 و H_2 را ازمعادلات(الف)و(ب)درمعادله (ج) قراردهیم سومین معادله‌مستقل تعادل به‌دست خواهد آمد .

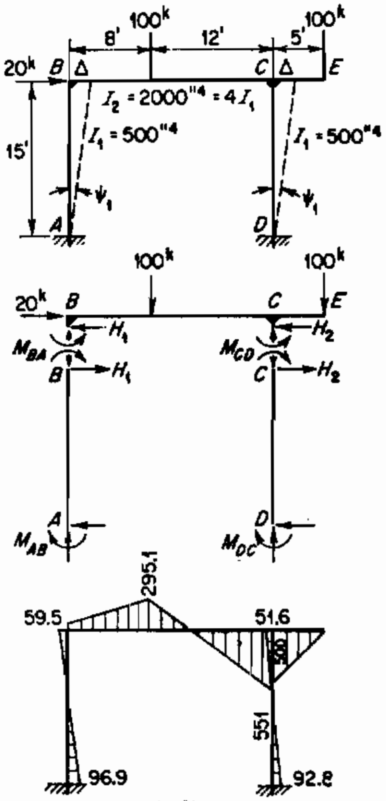
$$M_{AB} + M_{BA} + 0.8M_{DC} + 0.8M_{CD} + 100 = 0 \qquad \text{(د)}$$

از طریق دو معادله گرهها و این معادله که بنام "معادله برش" خوانده می‌شود قادر خواهیم بود که پس از حل این دستگاه سه معادله مقادیر θ_B ، θ_C و ψ_1 را به‌دست‌آوردیم و سپس‌مساله را مانند مسائل قبلی حل کنیم .

در مثالهای (۱۳-۲۱) و (۱۳-۲۲) به‌شرح روش شیب ـ تغییرمکان در حل برخی از

قابهای معمولی که در آنها امکان جابجایی جانبی وجود دارد پرداخته‌ایم .

مثال ۱۳ ــ ۲۱= لنگرهای انتهایی این قاب را محاسبه کرده و نمودار لنگر خمشی را برای آن رسم کنید .



نتیجه

به‌تحلیل زوایای θ و ψ می‌پردازیم .

$$\theta_A = \theta_D = \psi_{BC} = 0$$

$$\theta_B = ? \qquad \theta_C = ? \qquad \psi_{AB} = \psi_{CD} = \psi_1$$

$$K_{AB} = K_{CD} = \frac{I_1}{15} = K \qquad K_{BC} = \frac{4I_1}{20} = 3K$$

$$FEM_{BC} = -\frac{(100)(8)(12)^2}{(20)^2} = -288^{k'}$$

$$FEM_{CB} = +\frac{(100)(8)^2(12)}{(20)^2} = +192^{k'}$$

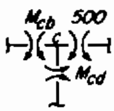
با استفاده از معادله (۱۳ــ۱۱) داریم .

$$M_{AB} = 2EK\theta_B - 6EK\psi_1$$
$$M_{BA} = 4EK\theta_B - 6EK\psi_1$$
$$M_{BC} = 12EK\theta_B + 6EK\theta_C - 288$$
$$M_{CB} = 12EK\theta_C + 6EK\theta_B + 192$$
$$M_{CD} = 4EK\theta_C - 6EK\psi_1$$
$$M_{DC} = 2EK\theta_C - 6EK\psi_1$$

گره B :

$$\Sigma M_B = 0 \qquad M_{BA} + M_{BC} = 0 \qquad (۱)$$
$$\therefore\ 16EK\theta_B + 6EK\theta_C - 6EK\psi_1 - 288 = 0$$

گره C :



$$\Sigma M_C = 0 \qquad M_{CB} + M_{CD} - 500 = 0$$
$$\therefore\ 6EK\theta_B + 16EK\theta_C - 6EK\psi_1 - 308 = 0 \qquad (۲)$$

معادلات برش :

ستون AB : $M_{AB} + M_{BA} + 15H_1 = 0$

ستون DC : $M_{DC} + M_{CD} + 15H_2 = 0$

شاهتیر: $H_1 + H_2 = 20$

$$\therefore\ M_{AB} + M_{BA} + M_{CD} + M_{DC} + 300 = 0$$

از حل سه معادله (۱) ، (۲) و (۳) مقادیر زیر بدست می‌آید :

$$EK\theta_B = \underline{+18.63} \qquad EK\theta_C = \underline{+20.60} \qquad EK\psi_1 = \underline{+22.34}$$

و بالاخره :

$$M_{AB} = \underline{-96.9^{k'}} \qquad M_{BC} = \underline{+59.8^{k'}} \qquad M_{CD} = \underline{-51.6^{k'}}$$
$$M_{BA} = \underline{-59.6^{k'}} \qquad M_{CB} = \underline{+551.0^{k'}} \qquad M_{DC} = \underline{-98.8^{k'}}$$

بحث :

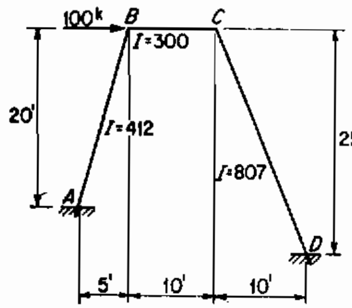
توجه‌کنیدکه در اولین‌شکل با خط‌چین وضعیت تغییرشکل یافته‌خطوط اتصال‌دوانتهای ستونها و نه خود منحنی‌خیز آنها را نشان داده‌ایم .

وقتی در یک قاب قسمتهای مختلف آن‌را جدا می‌کنیم همان‌طوری که در دومین شکل می‌بینیدکلیه لنگرهای انتهایی‌مجهول را می‌بایستی به‌صورت‌مثبت و به‌عبارت‌دیگردرجهت ساعتگرد در نظر بگیریم ، بدیهی‌است که نیروهای محوری و برشها را می‌توان در هر جهتی انتخاب کرد ولی پس‌ازآن که نیرویی نظیر H_1 را در جهت معینی روی قسمتی جدا شده‌از سازه مشخص‌کردیم در هر قسمت جدا شده دیگرآن جهت آن را سازگار با جهت انتخابی معین کنیم .

وقتی نمودار لنگر خمشی را برای چنین سازه‌ای رسم می‌کنیم ، مقادیر عددی‌عرضهای نمودار را درطرفی‌ازنمودار درج کنیدکه درآن سمت قطعه لنگر خمشی درآن قسمت از قطعه مزبور مربوط به‌قاب صلب ایجاد تنش فشاری کرده باشد .

مثال ۱۳ ــ ۲۲= لنگرهای انتهایی این قاب را محاسبه کرده و نمودار لنگر خمشی را برای آن رسم کنید

برای تحلیل روابط موجود بین‌زوایای ψ ، تصور کنید که کلیه قطعات‌راموقتا" از محل گرهها و تکیه‌گاهها ازهم جدا کرده وسپس یکی پس‌از دیگری بهم‌متصل‌کنیم، ابتدا قطعه AB را به پی وصل کنید اگر خط‌اتصال دو انتهای این قطعه حول A به‌اندازه ψ_{AB} دوران کند انتهای B در راستای عمود بر AB به‌اندازه‌ٔ BB' تغییر مکان پیدا خواهد کرد ، قطعه BC را به‌موازات خود آنقدر انتقال دهید که انتهای B از AB و BC در نقطه B' یکدیگر را قطع کنند ، حال اگر خط‌اتصال دو انتهایی BC دوران نماید انتهای C آن در راستای عمود بروضعیت اولیه خودبه‌اندازه‌ٔ $C''C'$ تغییرمکان خواهد داد به‌همین ترتیب‌اگر قطعه CD به تکیه‌گاه خود در D وصل شود و خط‌اتصال دو انتهای‌آن را دوران دهیم ، انتهای C آن در راستای عمود بر CD به‌اندازهٔ CC' تغییر مکان خواهد داد ، در این حالت دو انتهای C قطعات BC و CD یکدیگر را در نقطهٔ C' قطع خواهند کرد ، در این صورت خواهیم داشت :

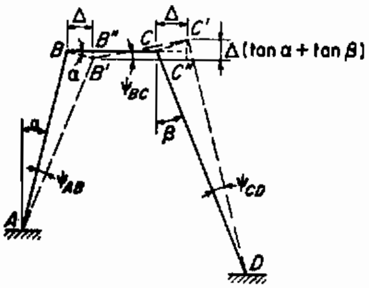


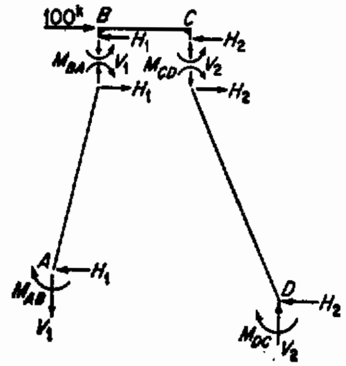
$$\psi_{AB} = \frac{BB'}{L_{AB}} = \frac{\Delta}{(\cos\alpha)L_{AB}} = \frac{\Delta}{20} = \frac{10}{13}\psi_1$$

$$\psi_{BC} = -\frac{C''C''}{10} = -\frac{\Delta}{10}(\tan\alpha + \tan\beta)$$

$$= -\frac{13}{200}\Delta = -\psi_1$$

$$\psi_{CD} = \frac{CC'}{L_{CD}} = \frac{\Delta}{(\cos\beta)L_{CD}} = \frac{\Delta}{25} = \frac{8}{13}\psi_1$$





بنابراین کلیه زوایای ψ را می‌توان برحسب یک مجهول ψ_1 بیان نمود و چون $\theta_A = \theta_D = 0$ است‌لذا مجهولات مستقل عبارت خواهند بود از θ_B ، θ_C و ψ_1

$$K_{AB} = \frac{412}{20.6} = 20 = K \qquad K_{BC} = \frac{300}{10} = 30 = 1.5K \qquad K_{CD} = \frac{807}{26.9} = 1.5K$$

چون هیچ باری بین گرهها وارد نمی‌شود لذا کلیه مقادیر FEM برابر با صفر خواهد بود ، با استفاده از معادله (۱۳ـ۱۱) داریم :

$$M_{AB} = 2EK\theta_B - {}^{60}\!/_{13}EK\psi_1 \qquad M_{CB} = 3EK\theta_B + 6EK\theta_C + 9EK\psi_1$$
$$M_{BA} = 4EK\theta_B - {}^{60}\!/_{13}EK\psi_1 \qquad M_{CD} = 6EK\theta_C - {}^{72}\!/_{13}EK\psi_1$$
$$M_{BC} = 6EK\theta_B + 3EK\theta_C + 9EK\psi_1 \qquad M_{DC} = 3EK\theta_C - {}^{72}\!/_{13}EK\psi_1$$

گره B :

$$\Sigma M_B = 0 \qquad M_{BA} + M_{BC} = 0 \qquad \therefore\ 10EK\theta_B + 3EK\theta_C + 4.385EK\psi_1 = 0 \qquad (۱)$$

گره C :

$$\Sigma M_C = 0 \qquad M_{CB} + M_{CD} = 0 \qquad \therefore\ 3EK\theta_B + 12EK\theta_C + 3.462EK\psi_1 = 0 \qquad (۲)$$

معادلات برش :

ستون AB : (الف) $\quad \Sigma M_A = 0 \qquad M_{AB} + M_{BA} + 20H_1 - 5V_1 = 0$

ستون CD : (ب) $\quad \Sigma M_D = 0 \qquad M_{DC} + M_{CD} + 25H_2 - 10V_2 = 0$

شاهتیر: (ج) $\quad \Sigma M_C = 0 \qquad M_{BA} + M_{CD} + 10V_1 = 0$

(د) $\quad \Sigma F_y = 0 \qquad V_1 = V_2$

(هـ) $\quad \Sigma F_x = 0 \qquad H_1 + H_2 = 100$

مقادیر V_1 ، V_2 و H_2 را از روابط (ج)، (د) و (هـ) در روابط (الف) و (ب) قرار دهید و سپس H_1 را در معادلات تغییریافته (الف) و (ب) حذف کنید، در این صورت خواهیم داشت:

$$M_{AB} + 2.3M_{BA} + 2.1M_{CD} + 0.8M_{DC} + 2{,}000 = 0$$

یا $$11.2EK\theta_B + 15EK\theta_C - 31.292EK\psi_1 = -2{,}000 \qquad (۳)$$

حال معادلات (۱)، (۲) و (۳) را از طریق جدول زیر حل کنید:

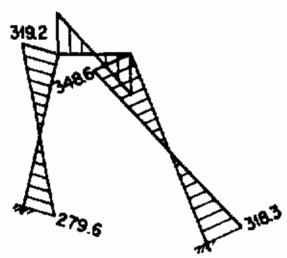
معادله	محاسبات	$EK\theta_B$ +	$EK\theta_C$ +	$EK\psi_1$	$= const \times 10^{-2}$	Check
1		+10	+ 3	+ 4.385	0	+17.385
2		+ 3	+12	+ 3.462	0	+18.462
3		+11.2	+15	−31.292	−20	−25.092
3′	3 × 0.893	+10	+13.393	−27.939	−17.857	−22.404
3″	3 × 0.268	+ 3	+ 4.018	− 8.382	− 5.357	− 6.721
4	1 − 3′		−10.393	+32.324	+17.857	+39.789
5	2 − 3″		+ 7.982	+11.844	+ 5.357	+25.183
4′	4 × 0.768		− 7.982	+24.825	+13.715	+30.559
6	5 + 4′			+36.669	+19.072	+55.742
				+ 1.0	+ 0.5201	

$$7.982EK\theta_C = 5.357 - 6.159 = -0.802 \qquad EK\theta_C = -0.1005$$
$$3EK\theta_B = -5.357 + 4.359 + 0.404 = -0.594 \qquad EK\theta_B = -0.1980$$

نتایج فوق برای مقدار ثابتی برابر با 0.01 مقدار ثابت واقعی است محاسبه شده‌اند، نتایج حقیقی ۱۰۰ برابر مقادیر فوق است:

$$EK\theta_B = \underline{-19.80} \qquad EK\theta_C = \underline{-10.05} \qquad EK\psi_1 = \underline{+52.01}$$

بنابراین لنگرهای انتهایی برابر با مقادیر زیر خواهند بود:



$$M_{AB} = -39.6 - 240.0 = \underline{-279.6^{k'}}$$
$$M_{BA} = -79.2 - 240.0 = \underline{-319.2^{k'}}$$
$$M_{BC} = -118.8 - 30.2 + 468.1 = \underline{+319.1^{k'}}$$
$$M_{CB} = -59.4 - 60.4 + 468.1 = \underline{+348.7^{k'}}$$
$$M_{CD} = -60.4 - 288.1 = \underline{-348.5^{k'}}$$
$$M_{DC} = -30.2 - 288.1 = \underline{-318.3^{k'}}$$

بحث :

زمانی‌که به‌تحلیل روابط بین‌زوایای ψ می‌پردازید ازصحیح بودن‌علامات‌آنها مطمئن شوید و بدین ترتیب معین کنید که خطوط اتصال دو انتهای قطعات در جهت و یا درخلاف جهت ساعتگرد دوران می‌نمایند .

در این مساله حل دستگاه معادلات چندمجهولی را در جزئیات لازم به‌صورت‌جدولی شرح داده‌ایم ،این چنین راه حلی در مواقعی‌که سه یا بیشتراز سه معادله وجود داشته باشد راه حل ساده‌ای است ، خصوصیات مهم این نحو عملیات ذیلا" ذکر می‌گردد .

۱ ـ وقتی که قصد حذف مجهولی را دارید معادله‌ای را انتخاب کنید که درآن‌معادله بزرگترین ضریب را داشته باشد عملیات لازم را روی این‌معادله به‌منظور مساوی‌کردن ضریب مجهول با هریک‌از ضرایب آن مجهول درمعادلات دیگر انجام‌دهید ، در این‌صورت همواره این معادله در اعدادی کمتراز یک ضرب خواهد شد ، عمل به‌چنین نحوی در جهت تقلیل خطا می‌باشد .

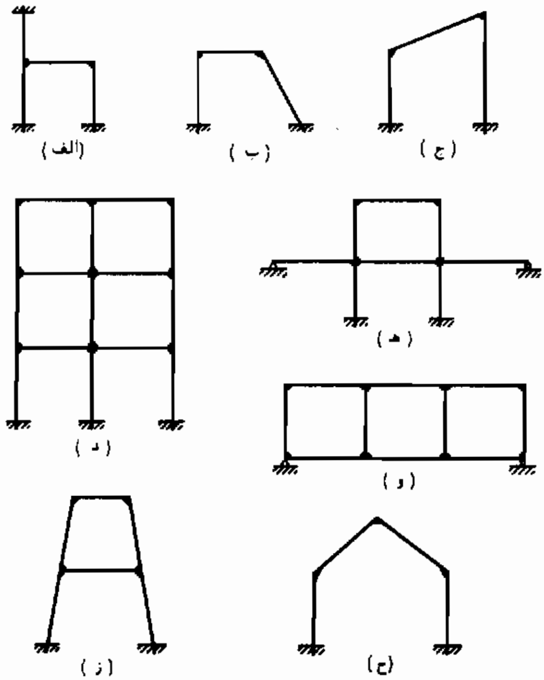
۲ ـ جهت تسهیل در وارسی ، محاسبات انجام شده در هر معادله را ذکر کنید .

۳ ـ در ستون وارسی جمع جبری کلیه ضرایب و مقدار ثابت معادله را درج کنید . بر روی این عدد نیز مانند سایر اعداد معادله ، عملیات محاسباتی انجام دهید . پس‌از هر عملیات محاسباتی جمع‌کلیه ضرایب جدید و مقدارثابت جدید می‌بایستی برابر با این‌عدد جدید در ستون وارسی باشد . بایستی یادآور شد که یک چنین وارسی لازم بوده ولی برای حذف خطاهای وارد شده در محاسبات کافی نیست .

۴ ـ تعداد ارقام‌صحیح مقدارثابت می‌بایستی با ارقام صحیح ضرایب مجهول مساوی شود ، این عمل اعداد درج شده در ستون وارسی را اعدادی موءثرتر خواهد نمود . پس از آن‌که پاسخ مجهولات به‌دست‌آمد مقادیر مجهولات را می‌بایستی درعدد لازم جهت تطابق این پاسخها با عدد ثابت واقعی ضرب نمود .

از این‌پس دانشجویان به‌مقایسه‌مزایا و معایب روشهای‌مختلف تحلیل‌تنش می‌پردازند . دانشجو باید در موقع انتخاب یک روش به‌مزایای انتخاب خود بیندیشد ، به‌عنوان مثال‌اگر او بخواهد جهت تحلیل‌سازه‌های مذکور درشکلهای (۱۳ـ۱۲) و (۱۳ـ۱۵) انتخاب‌روش‌نماید در هر موردی درکاربرد معادلات انطباق ، قضیه کاستیگلیانو و یا برتری آنها بر روش شیب تغییرمکان خواهد اندیشید .

مقدار محاسبات کم و بیش برابر با مربع تعداد معادلات موجود در راه حل می‌باشد .



شکل ۱۳-۱۵ قابهای صلب با امکان جابجایی جانبی

درحالت کلی ، بهترین روش آن است که کمترین مجهولات را داشته باشد . بدین‌ترتیب‌اگر روش معادلات انطباق را با روش شیب ــ تغییر مکان مقایسه کنیم عمدتا" می‌بایستی تعداد مولفه‌های مجهول نیروها را با تعداد زوایای θ و ψ مجهول مقایسه نمائیم .

۱۳ ــ ۱۳ اساس روش پخش لنگر

روش پخش لنگر روشی مبتکرانه و سهل در تحلیل تنش سازه‌های متشکل از گرههای صلب می‌باشد*.

کلیه روشهایی که تا کنون ذکر شد به‌دستگاه معادلات چندمجهولی منتهی می‌گردند و هرگاه تعداد معادلات بیش از سه یا چهار باشد عمده‌ترین وقت محاسباتی صرف حل دستگاه معادلات می‌گردد ، روش پخش لنگر معمولا" به‌چنان تعدادی از معادلات منتهی نمی‌شود و

* روش پخش لنگردرسال ۱۹۳۲ توسط پرفسور هاردی‌کراس Cross درچندین نشریه منتشر و ارائه‌گردید و بدون‌شک این روش یکی ازمهمترین روشهای تحلیل‌نگری‌درسالهای‌اخیراست.

اغلب ازنظر محاسباتی از کلیه روشهائی که تا کنون ذکر شد کوتاهتر است ،به‌علاوه این‌حسن را دارد که شامل چندین چرخه محاسبات می‌باشد که به‌صورت همگرا به‌نتایج دقیق نهایی منتهی می‌گردند و بنابراین این‌چرخه محاسباتی‌را می‌توان پس از رسیدن به‌درجه دقت‌مورد لزوم ختم نمود .

اگر به‌معادله (۱۳-۱۱) که معادله‌اساسی‌شیب ــ تغییرمکان می‌باشد دقت کنیم‌خواهیم دید که لنگر موءثر بر هر انتهای قطعه به‌صورت جبری مجموع چهار اثر جداگانه است .

۱ ــ لنگرگیر دارای حاصل از بارگذاری قطعه به‌عبارت دیگر FEM

۲ ــ لنگر حاصل از دوران مماس بر منحنی خیز در انتهای نزدیک تیر

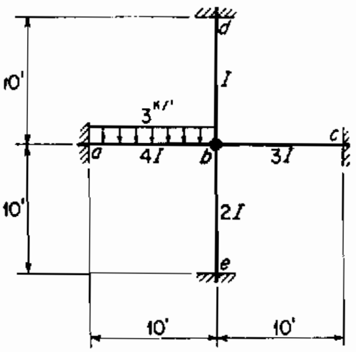
۳ ــ لنگر حاصل از دوران مماس بر منحنی خیز در انتهای دور تیر

۴ ــ لنگر حاصل از دوران خط اتصال دو انتهای قطعه

چون لنگر انتهایی حاصل‌از جمع این چهار اثر می‌باشدمی‌توان این اثرات راجداگانه وارد نموده و به‌این طریق به جمع اثرات آنها رسید .

جهت تسهیل در بحث بالا به‌موضوع سازه‌هایی می‌پردازیم که در طول هر قطعه آنها مقدار I ثابت بوده و امکان جابجایی جانبی برای آن سازه وجود نداشته باشد که در این صورت مقدار ψ برای کلیه قطعات آن صفر خواهد شد .

چنین سازه‌ای را که در شکل (۱۳-۱۶) می‌بینیم در نظر بگیرید ، اگر تکیه‌گاهها غیرــ قابل تغییرشکل باشند دراین صورت در گرههای a ، d ، c یا e دوران گرهی وجودنخواهد داشت ولی در اثر بارگذاری امکان دوران گرهی در b وجود دارد . فرض کنید که در وهله اول سازه بدون بارگذاری بوده و در این حالت توسط اسبابی موقتا" از دوران بعدی گره b جلوگیری نمائیم در این صورت در اثر بارگذاری خارجی در قطعه ab لنگر گیرداری بوجود خواهد آمد که مقدار آن را می‌توان با استفاده از معادلات (۱۳-۱۳) محاسبه نمود .



شکل ۱۳-۱۶ تعیین اهداف روش پخش‌لنگر (فقط دوران گره وجود دارد)

لنگر FEM_{ba} سبب لنگری در جهت خلاف ساعتگرد برگره b می‌گردد و اگر این گره را آزادکنیم لنگر مزبور سبب دوران گره b در جهت‌مخالف ساعتگرد خواهد نمود و هرگاه این گره دوران نماید کلیه قطعاتی که به‌این گره ختم می‌شوند تحمل لنگر خواهند نمود و این گره تا زمانی که لنگر انتهایی کافی در این قطعات به‌منظور معادل کردن اثر FEM_{ba} ایجادنشده است به‌دوران‌خود ادامه خواهد داد. بدیهی است‌همزمان با ایجادلنگر انتهایی در انتهای b این قطعات، انتهای دیگر این قطعات نیز تحت اثر لنگر واقع خواهند شد پس از آن که‌تعادل لنگری در گره b بوجود آمد در این حالت سازه تغییر شکل نهایی خود را پیدا کرده است و جمع لنگر انتهایی در انتهاهای قطعات مختلف (در گره b) برابر با جمع‌جبری لنگرگیرداری و لنگر حاصل از دوران گره b خواهد بود.

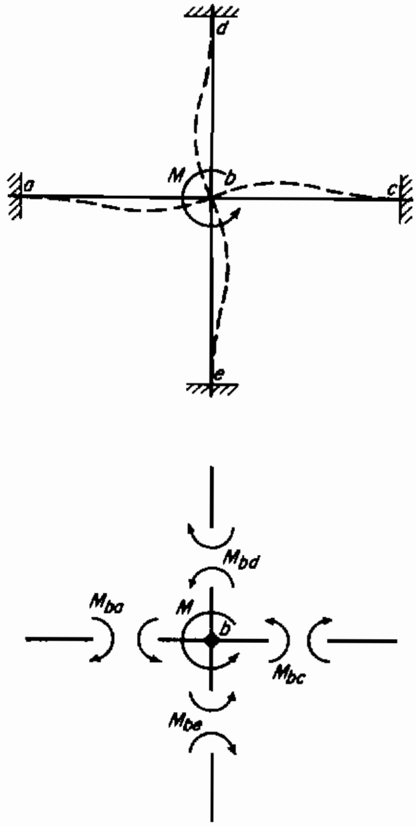
آنچه در بالا ذکر شد اساس روش پخش لنگر را تشکیل می‌دهد، برای تسهیل در شرح این روش چند نامگذاری زیررا قبول می‌کنیم. قبلاً با لفظی که برای شرح لنگرهای انتهایی حاصل‌از بارگذاری موثر برسازه هرگاه‌از دوران کلیه گرهها جلوگیری شده باشد آشناشده‌ایم چنان لنگرهایی را *لنگرهای(انتهایی) گیرداری* گویند، در صورت آزادنمودن گرهی اگر جمع جبری لنگرهای گیرداری در انتهاهای قطعات مختوم به‌آن گره برابر با صفر نباشد آن گره در اثر لنگر برآیند موجود در گره شروع به‌دوران خواهد نمود بدین جهت به‌این لنگر برآیند، *لنگر نامتعادل* گویند. هرگاه گره تحت اثر لنگر نامتعادل دوران کند در انتهای قطعات مختوم به‌این گرەلنگر انتهایی بوجود خواهدآمد که بالاخره این‌لنگرها سبب تعادل گره خواهند شد، به‌مقدار نهایی این لنگرهای انتهایی *لنگرهای* پخش شده گویند، چون‌گره دوران می‌کندلذا سبب خمش قطعات شده و درانتهای دیگر قطعات‌سبب ایجاد لنگرمی‌گردد که به‌این لنگرها *لنگر انتقالی* خواهیم گفت.

قبل از آن‌که به‌طور عددی به‌محاسبه لنگرهای مختلف بپردازیم می‌بایستی به‌تعیین قرارداد علائمی اقدام کنیم سه نوع قرارداد علائم در کاربرد این روش استفاده می‌شودولی مولفین ترجیح می‌دهند که همان قرارداد علائمی را که در روش شیب ــ تغییر مکان شرح داده شد به‌کار برده شود به‌این صورت که: ***لنگرهای انتهایی زمانی مثبت خواهند بودکه‌در جهت ساعتگرد بر انتهای قطعات اثر کنند.***

روابط مربوط به‌*لنگرهای گیرداری* قبلاً در مبحث (۱۳ــ۱۱) تعیین شده‌است، بدین ــ ترتیب مقدار **لنگر نامتعادل** موثر بر گره n برابر با جمع جبری لنگرهای انتهایی n قطعه که همگی به‌صورت صلب در آن گره به‌هم وصل شده‌اند خواهد بود.

جهت توضیح چگونگی محاسبه *لنگرهای پخش‌شده* به‌تحلیل بیشتری نیازمند هستیم، سازه شکل (۱۳ــ۱۶) را به‌طوری که گره b تحت اثر لنگر نامتعادل M به‌دوران‌درآید درنظر

بگیرید، دراین حالت سازه به‌صورت شکل (۱۳-۱۷) تغییرشکل یافته به‌سبب بوجود آمدن لنگرهای پخش شده M_{ba} ، M_{bd} و غیره خواهد شد که بوجودآمدن این لنگرها سبب تعادل گره b می‌گردد.



شکل ۱۳-۱۷ دوران گره

این لنگرهای پخش شده‌که دارای مقادیرنامعلوم می‌باشند به‌صورت مثبت فرض می‌شوند بدین ترتیب که بر انتهای قطعات در جهت ساعتگرد و برگره در جهت عکس‌ساعتگرد عمل کنند. لنگر نامتعادل M که حاصل از لنگر انتهایی گیرداری مثبت می‌باشد نیز در جهت عکس ساعتگرد برگره اثر خواهد نمود و چون $\Sigma M_b = 0$ است لذا:

$$M_{ba} + M_{bc} + M_{bd} + M_{be} + M = 0 \qquad \text{(الف)}$$

در این صورت لنگری پخش شده را می‌توان به‌کمک معادله (۱۳-۱۱) محاسبه نمود، با توجه به‌این مطلب که $\theta_a = \theta_d = \theta_c = \theta_e = 0$ می‌باشد و کلیه زوایای ψ صفر هستند داریم:

$$M_{ba} = 4EK_{ba}\theta_b \qquad M_{bc} = 4EK_{bc}\theta_b$$
$$M_{bd} = 4EK_{bd}\theta_b \qquad M_{be} = 4EK_{be}\theta_b \qquad (ب)$$

حال اگر معادلات (ب) را در معادله (الف) قرار دهیم و مقدار θ_b را از رابطه حاصل معین نموده و در تک تک معادلات (ب) منظور کنیم روابطی برای بیان مقادیر M_{ba} و غیره به‌دست خواهیم آورد. مثلاً:

$$M_{ba} = \frac{-K_{ba}}{K_{ba} + K_{bd} + K_{bc} + K_{be}} M \qquad (ج)$$

و در حالت کلی لنگر پخش شده در میله bm به‌صورت زیر معین می‌شود:

$$M_{bm} = -\frac{K_{bm}}{\sum_b K} M \qquad (د)$$

در مخرج کسر این رابطه، سختی کلیه قطعات به‌گره b وارد می‌شوند و اگر:

$$DF_{bm} = (bm \text{ قطعه } b \text{ ضریب پخش انتهای}) = \frac{K_{bm}}{\sum_b K} \qquad (۱۳-۱۴)$$

در این صورت خواهیم داشت:

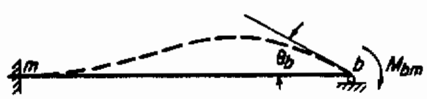
$$M_{bm} = -DF_{bm}M \qquad (۱۳-۱۵)$$

معادله (۱۳-۱۵) را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

لنگرپخش شده حاصل در انتهای b از قطعه bm، هرگاه گره b تحت اثر لنگر نامتعادل M دوران نماید برابر است با حاصل‌ضرب ضریب پخش در لنگر نامتعادل با علامت عکس.

برای لنگر انتقالی نیز بایستی رابطه‌ای معین کنیم. قطعه‌ای را که در انتهای b آن به‌اندازه θ_b دوران یافته و لذا لنگر پخش شده M_{bm} در آن انتهای قطعه مانند شکل (۱۳-۱۸) بوجود آمده است در نظر بگیرید، دیده می‌شود قبل و بعد از دوران گره b گره m همچنان بدون دوران باقی مانده و لذا θ_m برابر با صفر خواهد بود چون، ψ_{bm} نیز برابر صفر است معادله (۱۳-۱۱) منجر به‌روابط زیر می‌شود:

$$M_{bm} = 4EK_{bm}\theta_b \qquad M_{mb} = 2EK_{bm}\theta_b$$



شکل ۱۳-۱۸ لنگر انتقالی

و بنابراین

$$M_{mb} = \tfrac{1}{2}M_{bm} \qquad (۱۶-۱۳)$$

به‌عبارت دیگر، لنگر انتقالی برابر با یک‌دوم لنگر پخش‌شده نظیر خود بوده و دارای **همان علامت لنگر** پخش شده است.

به‌این ترتیب کلیه مطالب و روابط لازم است جهت حل مسائل ساده پخش لنگر ذکر شده است، دقت شود که آنچه در بالا، ذکر شد فقط زمانی صادق است که سازهٔ مورد نظر دارای قطعاتی با لنگر لختی ثابت باشد. در مبحث (۱۳-۱۵) مطالب‌بالارا درمورد سازه‌ای که از ترکیب قطعاتی با لنگر لختی متغیر تشکیل شده باشد بسط خواهیم داد.

۱۳ ـ ۱۴ کاربرد روش پخش لنگر در تیرها و قابها

برای شرح کاربرد روش پخش لنگر ابتدا بمثالی در مورد تیر سرتاسری شکل (۱۳-۱۹) توجه نمائید. این تیر دارای تکیه‌گاههای غیرقابل تغییرشکل می‌باشد. در این صورت زوایای ψ برای هردوقطعه صفر بوده و دوران تکیه‌گاه a همواره برابر با صفر خواهدبود، فرض‌کنید که موقتاً" از دوران گرههای b و c جلوگیری کرده و تیر را تحت اثر بارگذاری قرار دهیم، در این صورت مقادیر حاصل برای لنگرهای انتهایی گیرداری به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\mathrm{FEM}_{ab} = -9.6 \text{ kip-ft} \qquad \mathrm{FEM}_{bc} = -18.75 \text{ kip-ft}$$
$$\mathrm{FEM}_{ba} = +14.4 \text{ kip-ft} \qquad \mathrm{FEM}_{cb} = +18.75 \text{ kip-ft}$$

برای این که خود را جهت آزادکردن گرههای b و c آماده کرده و بتوانیم بـه پخش لنگرهای نامتعادل بپردازیم ضرایب سختی K و از طریق آنها ضرایب پخـش می‌بایستی محاسبه گردند.

در گره b: $\quad \Sigma K = 0.3I \qquad DF_{ba} = \tfrac{1}{3} \qquad DF_{bc} = \tfrac{2}{3}$

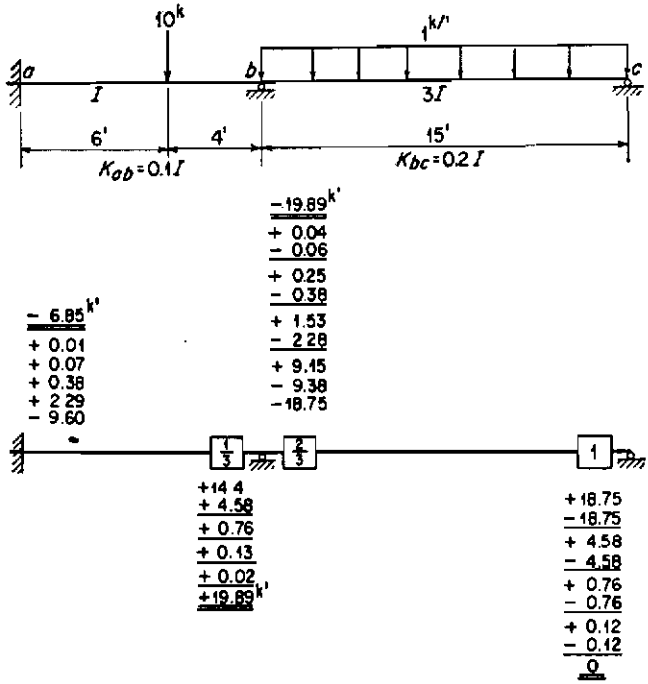
در گره c: $\quad \Sigma K = 0.2I \qquad DF_{cb} = 1$

ضرایب پخش را در داخل مربعی روی نمودار (۱۳-۱۹) درج می‌کنیم، کلیـه محاسبات لازم برای لنگرهای انتهایی در روی این نمودار درج می‌گردد به‌طوری که اعداد مربوط به‌یک لنگر انتهایی به‌صورت ستونی از اعداد که عمود بر قطعه می‌باشد نوشته می‌شوند، این اعداد در سمتـی از قطعه قرار دارند که هرگاه حول گره در جهت ساعتگرد عمل کنیم آن سمت قطعه در وهله اول مورد تلاقی قرار گیرد. واضح است کـه چنین آرایش محاسباتی حالت اجباری‌ندارد ولی برای قابها بسیار مناسب به‌نظر می‌رسد.

پس ازمحاسبه لنگرهای‌گیرداری، گرههای b و c را به‌نوبت آزادکرده و به‌طورتدریجی

امکان دوران آنهارا تا وضعیت تعادل ممکن می‌سازیم ،پس از آزادنمودن‌گره c آن گره تحت اثر لنگر نامتعادل 18.75+ تاجائی‌که لنگرپخش‌شده برابر با 18.75− به‌منظور ایجاد تعادل بوجود آید به‌دوران در می‌آید . پس از آن دوباره از دوران c جلوگیری کرده و خطی زیر 18.75− رسم می‌کنیم تا نشان دهیم که این گره در این حالت به‌تعادل رسیده‌است .در اثر دوران گره c لنگری‌انتقالی برابربا یک دوم لنگرپخش شده در انتهای b از قطعه bc بوجود می‌آید که در این حالت برابر با 9.38− خواهد بود .

حال اگر گره b را آزاد کنیم این گره تحت اثر لنگر نامتعادلی برابر با مجموع جبری دو لنگر گیرداری در این گره و لنگر انتقالی فوق‌الذکر که از نظر عددی برابر با 13.73− می‌گردد به‌دوران در خواهد آمد . با بکاربردن ضریب پخش ، لنگرهای پخش شده حاصل جهت ایجاد تعادل گره برابر با 9.15+ و 4.58+ محاسبه خواهند شدکه‌این‌اعداد درجای خود درج شده و زیر آنها خطی کشیده می‌شود . این خط‌نشان می‌دهد که در حال حاضر این گره به‌تعادل رسیده است ، باز از دوران این گره از وضعیت جدید خود جلوگیری کرده لنگرهای انتقالی حاصل در a و c را که در اثر دوران گره b بوجود می‌آیند به ترتیب برابر با2.29+و4.58+در محل خود ثبت می‌نمائیم .

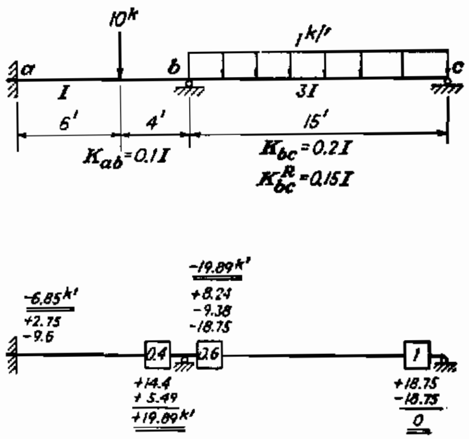


شکل ۱۳–۱۹ مثال عددی

حال دوباره به‌گره c برمی‌گردیم و آن را آزاد می‌کنیم ،این گره تحت‌اثر لنگرنامتعادل 4.58+ دوران نموده و لنگر پخش شده 4.58− راایجاد می‌کند و بازهم نیمی از این لنگر پخش شده به‌انتهای b از این قطعه منتقل می‌شود ، در این حالت از دوران گره c جلوگیری می‌شود ،حال برای بار دوم‌گره b را آزاد می‌کنیم و دراین حالت این‌گره تحت لنگرنامتعادل 2.29− دوران کرده و لنگرهای پخش شده 0.76+ و 1.53+ را ایجاد می‌کند که نیمـــی از این لنگرهای پخش شده به‌ترتیب برابر با 0.38+ و 0.76+ به a و c منتقل می‌گردد .

به‌همین ترتیب به‌آزاد و قفل نمودن به‌نوبت گرههای c و پس‌از‌آن b آنقدر ادامه می‌دهیم که اثرات آنها به‌قدری کوچک شود که از‌آنها بتوان صرف‌نظر نمود . در اینجا این مساله را بیش از آنچه در عمل موردنیاز می‌باشد ادامه داده‌ایم و غرض ما از این عمل شرح بهتر این روش بوده است ، پس‌از‌آن که عمل پخش لنگر به‌انتها رسید ، مقادیر مربـــوط به‌لنگرهای انتهایی را می‌توان باجمع جبری‌کلیه اعداد به‌دست‌آمده درستون اعداد مختلف محاسبه نمود .

از‌آنجائی که در این مثال گره c یک گره مفصلی است و مرتبا" به‌گره b لنگر منتقـل می‌کند همگرایی لنگــرها به‌کندی پیش می‌رود ، هرگاه در انتهای سازه‌ای گرهی مفصلی‌وجود داشته باشد می‌توان با تغییری که در روش بالا داده می‌شود مطابق آنچه درشکل (۱۳ــ۲۰) دیده می‌شود همگرایی لنگرها را زودتر حاصل نمود .



شکل ۱۳ــ۲۰ مثال تشریحی برای کاربرد ضریب سختی تقلیل یافته

مانند سابق با جلوگیری نمودن ازدوران کلیه گرهها و واردنمودن بارخارجی که‌به‌نوبه خود سبب ایجاد لنگرهای گیرداری می‌شود مساله را شروع می‌کنیم ، بازهم در وهله اول‌گـره c را آزاد کرده و می‌گذاریم که دوران نماید و در اثر این دوران لنگر پخش شده 18.75−

ایجاد شده از این لنگر 9.38− به‌گره b منتقل می‌گردد. در این نقطه گره c را جهت‌دوران آزاد نگه می‌داریم تا این که از ایجاد لنگر انتهایی جلوگیری شود، در این شرایط که گره b را آزاد می‌کنیم این گره تحت اثر لنگر 13.73− دوران می‌نماید در حالی که گره c به‌جای آن که قفل شده باشد آزادانه می‌چرخد. به‌طور فیزیکی می‌توان گفت که دیگرقطعه bc مانند سابق سخت نیست و لذا قادر به‌دریافت همان مقدارلنگر نامتعادل نمی‌باشد، حال‌به‌تعیین مقدار تقلیل سختی آن می‌پردازیم.

با مراجعه به‌اشکال (۱۳–۱۶) و (۱۳–۱۷) و چگونگی تعیین رابطه‌ای‌برای‌لنگرهای‌پخش شده. فرض کنید که تکیه‌گاه c بجای آن که تکیه‌گاهی گیردار باشد تکیه‌گاهی غلتکی و یا مفصلی می‌بود، در این صورت تحت اثر لنگر نامتعادل M در b، در گره c یک زاویه θ بوجودمی‌آمد ولی مقدار M_{cb} برابربا صفر می‌شد، حال با کاربردمعادله (۱۳–۱۱) تحلیل قبلی به‌صورت زیر تغییر می‌یافت:

$$M_{cb} = 4EK_{bc}\theta_c + 2EK_{bc}\theta_b = 0$$

و از آنجا:

$$\theta_c = -\frac{\theta_b}{2}$$

بنابراین:

$$M_{bc} = 4EK_{bc}\theta_b + 2EK_{bc}\theta_c = 3EK_{bc}\theta_b = 4E(3/4K_{bc})\theta_b = 4EK^R_{bc}\theta_b$$

که در آن:

$$K^R_{bc} = (\text{ضریب سختی تقلیل یافته}) = 3/4K_{bc} \qquad (۱۳-۱۷)$$

بدین‌ترتیب روابط قبلی مربوط به‌ضرایب پخش را به‌شرطی که برای قطعاتی که در انتهای دیگرشان مفصلی هستند ضریب‌سختی تقلیل یافته‌را به‌کار بریم‌می‌توان در این حالت جدید استفاده نمائیم*.

حال با به‌کاربردن ضریب سختی تقلیل یافته قطعه bc، ضرایب توزیع b را معین می‌کنیم:

در b: $\Sigma \text{ eff K} = 0.25I \qquad DF_{ba} = 0.4 \qquad DF_{bc} = 0.6$

---

* چون ضریب سختی مؤثر در انتهای b از قطعه bm هرگاه انتهای m گیردار باشد برابر با K_{bm} و هرگاه مفصلی باشد برابر با K^R_{bm} می‌باشد بهتر است که معادله (۱۳ – ۱۴) راشکل زیر بیان کنیم.

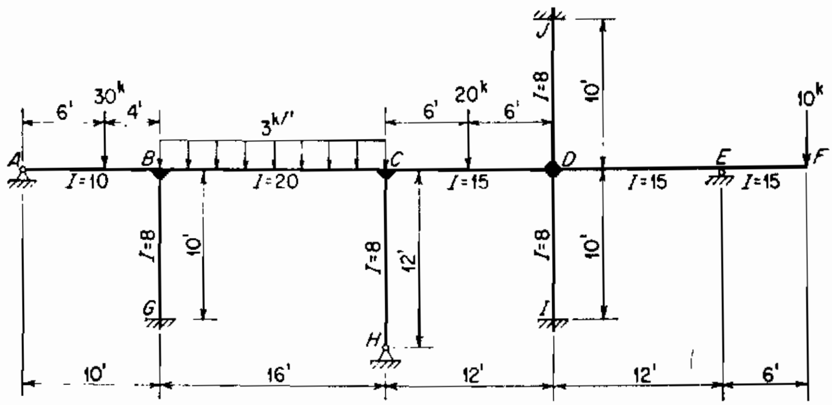
$$DF_{bm} = (bm \text{ از قطعه } b \text{ ضریب پخش انتهای}) = \frac{\text{eff } K_{bm}}{\sum_b \text{eff K}} \qquad (۱۳ - ۱۴ \text{ الف})$$

در این رابطه علامت eff K نشان‌دهنده‌ضریب سختی مؤثرقطعه است که این ضریب می‌تواندبرحسب آن‌که‌انتهای دیگرقطعه گیردار و یا مفصلی‌باشد به‌ترتیب K ویا K^R گرفته‌شود.

در نتیجه جهت متعادل نمودن لنگر نامتعادل 13.73− در آن گره لنگرهای پخش شـــده و 5.49+ و 8.24+ بوجود می‌آید ، بدیهی است که از این لنگر چیزی به گره c منتقل نمی‌گردد زیرا این گره آزاد باقی مانده است بین گرههای a و b همان انتقال متعارف وجود دارد ، در این حالت خاص چون دیگر گره c در اثر آزادشدن گره b نامتعادل نشده است لذا عملیات محاسباتی خاتمه یافته است و بدین‌ترتیب کلیه گرههای موجود در تعادل هستند و اگر برای همیشه گره b را آزاد نگـه داریم ، دیگر انتقال لنگری بوجود نخواهد آمد . در این حالت با جمع اعداد در هریک از ستون اعداد مقادیر دقیق لنگرهای انتهایی را به‌دست می‌آوریم.

حالت اصلاح شدهٔ اخیر اغلب پس از یک چرخه مانند آنچه در این مساله دیدیم به‌پاسخهای صحیح نمی‌رسد ولی همواره زودتر از روش اصلی به‌همگرایی می‌رسـد . در مثال (۱۳–۲۳) به‌شرح چگونگی محاسبات لازم در مورد سازه‌ای با پیچیدگی قابل ملاحظـــه پرداخته‌ایم دراین سازه کلیه دورانهای خط اتصال دوانتهای قطعات صفر می‌باشند. درمثال (۱۳–۲۴) در مورد سازه‌ای که برای آن زوایای ψ صفر نمی‌باشند ولی دارای مقادیرمعلومی هستند محاسبات لازم را انجام داده‌ایم .

مثال ۱۳–۲۳= برای این قاب لنگرهای انتهایی را محاسبه کرده و نمودار لنگر خمشی را رسم کنید ، تکیه‌گاهها غیرقابل تغییر شکل می‌باشند .



ضرایب پخش :

At B: Σ eff K = 2.8	*At C:* Σ eff K = 3.0	*At D:* Σ eff K = 3.788
DF_{BA} = 0.268	DF_{CB} = 0.417	DF_{DC} = 0.330
DF_{BC} = 0.446	DF_{CD} = 0.417	DF_{DJ} = 0.212
DF_{BG} = 0.286	DF_{CH} = 0.167	DF_{DE} = 0.248
1.000	1.000	DF_{DI} = 0.212
		1.002

لنگرهای گیرداری :

$$FEM_{AB} = -\frac{(30)(6)(4)^2}{(10)^2} = -28.8^{k'} \qquad FEM_{BA} = +\frac{(30)(6)^2(4)}{(10)^2} = +43.2^{k'}$$

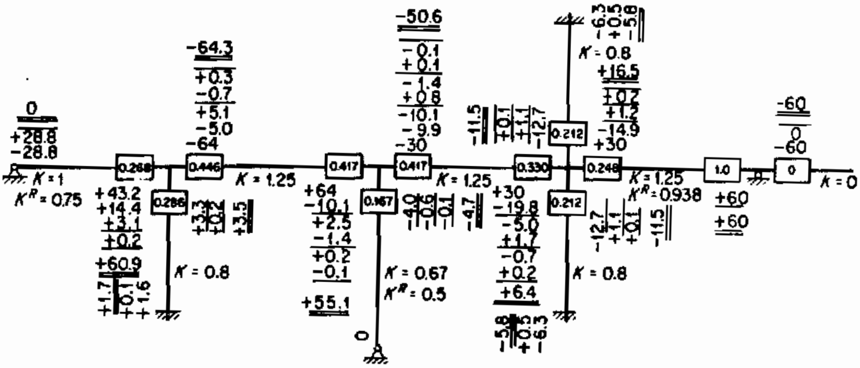
$$FEM_{BC} = \frac{(3)(16)^2}{12} = -64^{k'} \qquad FEM_{CB} = +64^{k'}$$

$$FEM_{CD} = -\frac{(20)(12)}{8} = -30^{k'} \qquad FEM_{DC} = +30^{k'}$$

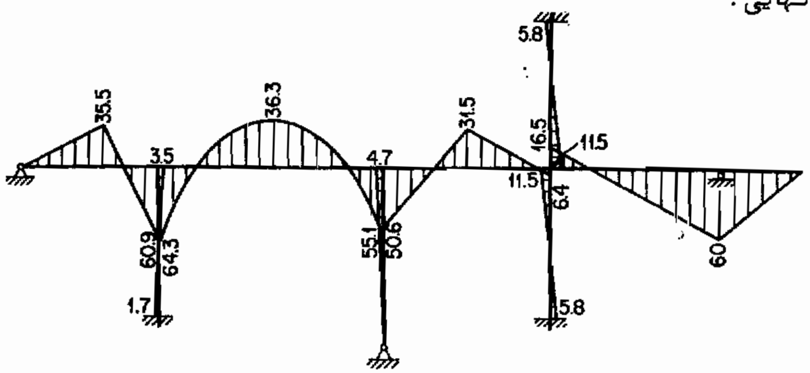
لنگر طـره :

$$M_{EF} = -(10)(6) = -60^{k'}$$

پخش لنگر :



نتایج نـهایی :



بحث :

در این سازه ، پس از آن که کلیه گرهها در مقابل دوران قفل شدند و سپس بارهـــای خارجی بر سازه وارد شدند لنگری در انتهای E طره علاوه بر لنگرها متعارف گیرداری‌که‌در نقاط دیگر قاب بوجود می‌آید تولید خواهد شد ، همان طوری که یک لنگر گیرداری در لنگر نامتعادل داخل می‌شود این لنگر 60 kip-ft نیز دارای همین نقش خواهد بود .

ملاحظه می‌شود که بازوی طره‌ای هیچ تأثیری در جلوگیری از دوران گره E نـدارد و

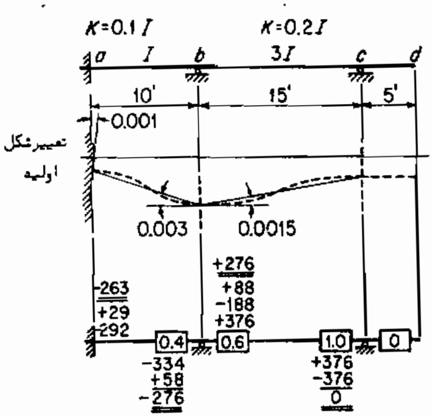
این بدان معنی است که ضریب سختی آن برابر با صفر می‌باشد . بنابراین کلیه لنگرهای نامتعادل توسط سایر قطعاتی که بدین گره ختم می‌شوند منتقل می‌گردد .

با عمل به‌روش تجدید نظر شده کلیه گرههای مفصلی می‌بایستی در وهلـه اول آزاد گردند . این عمل نه تنها شامل گرههای A و H می‌گردد بلکه شامل E نیز خواهد بود .

سایر گرهها ، هریک به‌نوبه خود آزاد شده و به‌تدریج در جهت وضعیت تعادل خـود دوران پیدا می‌کنند .اگر در حین عمل به‌آزادسازی گرهی بپردازیم که دارای بیشترین لنگر نامتعادل می‌باشد همگرایی اعداد قدری سریعتر خواهد بود ولی بایستی یادآور شدکه‌نتایج نهایی بستگی به‌ترتیب آزادکردن گرهها ندارد .

مثال ۱۳ ــ ۲۴= مثال (۱۳ــ۲۰) را با روش پخش لنگر حل کنید .

فرض کنید که موقتاً" از دوران کلیه گرهها جلوگیری کرده و با ایـن شکل جابجایـی تکیه‌گاهها را اعمال کنیم ، خواهیم داشت :



$\theta_a = +0.001$ رادیان

$\psi_{ab} = +0.003$ رادیان

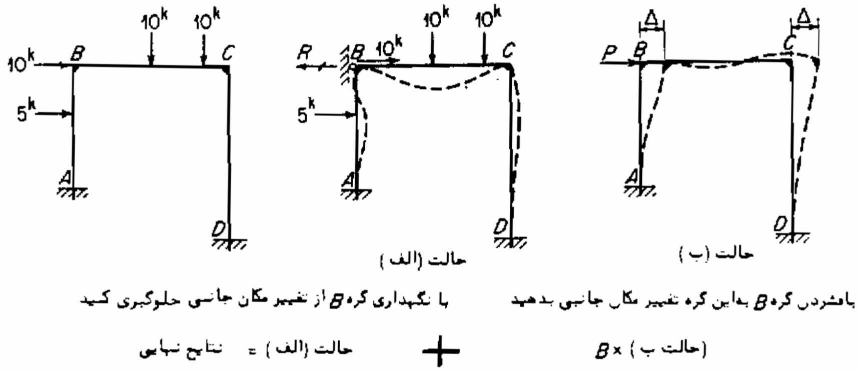
$\psi_{bc} = -0.0015$ رادیان

در حقیقت با این عمل قطعات را خم نموده و لنگر انتهایی در آنها ایجاد کرده‌ایم کـه‌این لنگرها را می‌توان از معادله (۱۳ــ۱۱) به‌صورت زیر محاسبه نمود :

$$M_{ab} = 2E(0.1I)(0.002 - 0.009)$$
$$= -0.0014EI = -292^{k'}$$
$$M_{ba} = 2E(0.1I)(0.001 - 0.009)$$
$$= -0.0016EI = -334^{k'}$$
$$M_{bc} = 2E(0.2I)(+0.0045)$$
$$= +0.0018EI = +376^{k'}$$
$$M_{cb} = +0.0018EI = +376^{k'}$$

در محاسبات فوق $EI = 30 \times 10^3 \times \frac{1,000}{144} = 208,333\ kip\text{-}ft^2$ در نظـر گرفته شده است . بقیه محاسبات را با فرض این لنگرهای اولیه به‌عنوان لنگرهای گیـرداری دقیقاً" به‌همان روش قبل می‌توان ادامه داد . بدین ترتیب پخش لنگر و . . . دقیقاً" مـانـند شکل (۱۳ــ۲۰) انجام گرفته است .

پس از آن که فلسفه روش پخش لنگر را با جزئیات لازم محاسباتی آن در مورد حالت فوق درک نمودیم حال به‌سادگی می‌توان به‌شرح حالات پیچیده‌تری که در آن حالات تغییر مکان جانبی وجود دارد و به‌عبارت دیگر زوایای ψ مجهول می‌باشند پرداخت. به‌عنوان مثال قاب شکل (۱۳-۲۱) را در نظر بگیرید*، در این حالت مانعی برای جلوگیری از تغییر مکان افقی انتهای فوقانی ستون وجود ندارد. بنابراین علاوه بر دوران گرههای B و C دوران خط اتصال دو انتهای ستونها نیز که نامعلوم هستند وجود خواهد داشت.



شکل ۱۳-۲۱ کاربرد روش بخش لنگر در امکان جابجایی جانبی (انتقال گرهها)

به‌منظور حل این مساله به‌کمک پخش لنگر آن را به‌دو قسمت جداگانه تقسیم می‌کنیم. ابتدا تصور کنید که نیروی افقی R را که قادر به‌جلوگیری از هرنوع جابجایی افقی می‌باشد بر گره B وارد کنیم. براین چنین سازه‌ای‌که در مقابل جابجایی افقی مهار شده است بارهای خارجی را اعمال‌کرده و به‌کمک روش پخش لنگر درست مانند حالتی که جابجایی جانبی وجود نداشته باشد به‌محاسبه لنگرهای انتهایی می‌پردازیم، پس از آنکه لنگرهای انتهایی محاسبه گردید می‌توان با استفاده از روابط تعادل به‌محاسبه نیروی بازدارنده R پرداخت**.
این قسمت از محاسبه را در شکل (۱۳-۱۹) با حالت A مشخص کرده‌ایم.

---

* به‌مطلبی که در داخل کادر بند (۱۳-۱۲) در مورد روش تعیین تعداد منتقل‌زوایای مجهول ψ گفته شده است مراجعه نمایند. تعداد درجات آزادی مربوط به‌امکان تغییر مکان جانبی برابر با تعداد منتقل زوایای مجهول ψ می‌باشد.

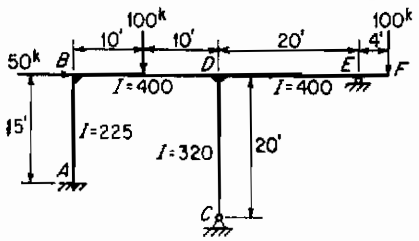
** فرض کنید که در یک حالت خاص نیروی بازدارنده R که با تعادل به‌دست می‌آید برابر با صفر گردد. با در نظرگرفتن مساله امکان تغییر مکان جانبی چنین مطلبی چه معنی می‌دهد؟ آیا لازم است که به راه حل حالت B عمل شود.

در قسمت دوم محاسبه که حالت B می‌باشد با فرض جلوگیری از دوران گرهها، گره B از قاب را مجبور به‌جابجایی دلخواهی برابر با Δ می‌کنیم. *(توجه شود که نیروی جابجا ــ کننده P مربوط به‌حالت B می‌بایستی به‌همان نقطه‌اثر نیروی بازدارنده R مربوط به‌حالت A وارد شده در همان راستا باشد)* بدین ترتیب می‌توان به‌تحلیل زوایای ψ که در ستونها ایجاد می‌شود پرداخت و با استفاده از معادله (۱۳ــ۱۱) به‌محاسبه لنگرهای انتهای اولیه‌که درکلیه قطعات ایجاد می‌گردد اقدام کرد. لنگرهای انتهایی که بدین‌ترتیب به‌دست می‌آیند برحسب $E\Delta$ خواهند بود ولی چون مقدار Δ یک مقدار دلخواهی است می‌توانیم $E\Delta$ را برابر با واحد و یا برابر با هر مقدار مناسب دیگری اختیار کنیم تا این که مقادیر لنگرهای انتهایی اولیه برحسب اعداد بیان شوند. حال اگر به‌نوبه با آزادسازی گرههای B و C به‌پخش و انتقال لنگر بپردازیم برای این قاب مقادیری برای لنگرهای انتهایی به‌دست خواهیم آورد. حال بازهم می‌توان به‌محاسبه نیروی P که به‌قاب وارد شده و سبب ایجاد این لنگرها شده است پرداخت.

به‌این ترتیب می‌توان با روی هم‌گذاری دوقسمت مربوط به‌حالت A و B به‌تعیین پاسخهایی جهت حالت بارگذاری واقعی قاب اقدام کرد، به‌منظورتسهیل بحث مربوط به‌نحوه این جمع آثار فرض کنید که مقدار R برابر با 12 kips و رو به‌سوی چپ و مقدار P برابر با 6 kips رو به‌سوی راست معین شده باشد، می‌بایستی لنگرهای مربوط به‌حالت A را همان طوری‌که هستند در نظر گرفت زیرا که بارهای خارجی در این حالت به‌همان صورتی که وجود دارند در عملیات وارد شده‌اند. واضح است که این نتایج را می‌توان با هر ضریبی ازنتایج حالت B به‌طور دلخواه جمع کرد ولی با استفاده از مقادیر به‌دست آمده برای R و P اگر دو برابر بارهای حاصل از حالت B را با بارهای حاصل از حالت A جمع کنیم واضح است که نتایج به‌دست آمده شامل اثرات دستگاه بارگذاری خارجی خواهد بود و به‌این ترتیب واضح است که نتایج نهایی لازم برای لنگرهای انتهایی با جمع جبری دو برابر لنگرهای حالت B با لنگرهای حالت A به‌دست خواهد آمد.

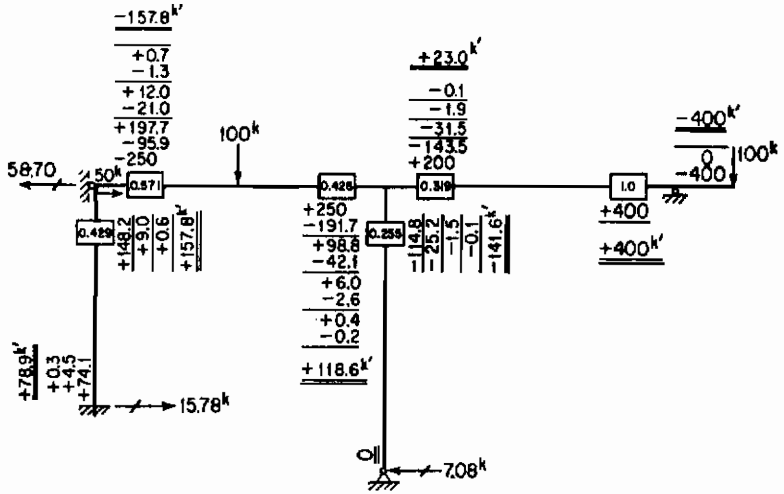
مثال ۱۳ ــ ۲۵ ـ لنگرهای انتهایی این قاب را محاسبه کنید.

در B	$K_{AB} = 15$	$DF_{BA} = 0.429$
	$K_{BD} = 20$	$DF_{BD} = 0.571$
	Σ eff K $= 35$	
در D	$K_{DB} = 20$	$DF_{DB} = 0.426$
	$K_{DE}^{R} = 15$	$DF_{DE} = 0.319$
	$K_{DC}^{R} = 12$	$DF_{DC} = 0.255$
	Σ eff K $= 47$	



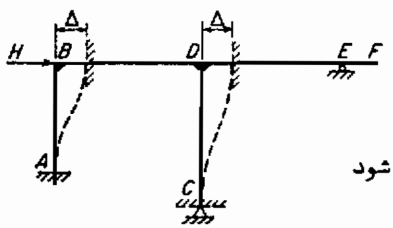
حالت(الف)از جابجایی قاب جلوگیری می‌شود ، گره B تثبیت می‌گردد . کلیه بارهارا برسازه وارد می‌کنیم . با جدانمودن ستونها عکس‌العملهای افقی در A و C را می‌توان محاسبه‌نمود

$$FEM_{BD} = -250 \qquad M_{EF} = -400$$
$$FEM_{DB} = +250$$



و پس از آن با استفاده از $\Sigma H = 0$ در مورد کل سازه می‌توان به‌تعیین نیروی باز دارنده در گره B که برابر با 58.70^k می‌باشد اقدام نمود . جهت این نیرو رو بـه سوی چپ خواهد بود .

حالت(ب) با جابجانمودن‌نقطه B ،در سازه تغییر محل جانبی ایجادکنید ، در ابتداموقتا" از دوران کلیه گرهها از جمله C جلوگیری نمائید و از معادله (۱۱–۱۳) لنگرهای انتهایی اولیه را محاسبه کنید .



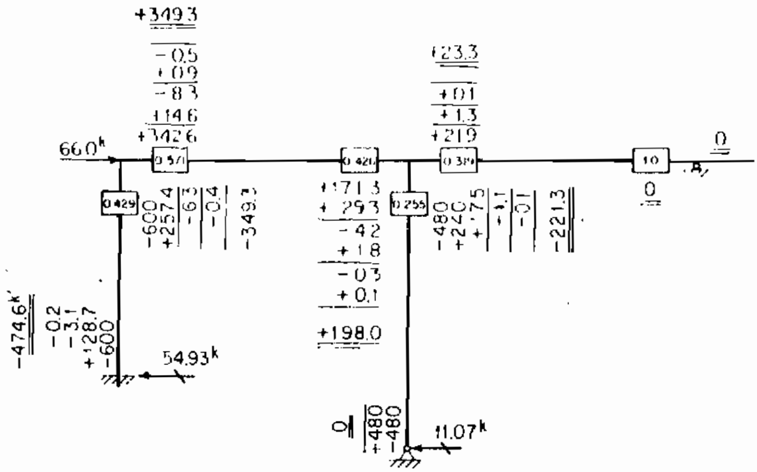
$$M_{AB} = M_{BA} = -6E(15)\left(\frac{\Delta}{15}\right) = -6E\Delta$$

$$M_{CD} = M_{DC} = -6E(16)\left(\frac{\Delta}{20}\right) = -4.8E\Delta$$

اگر $E\Delta = 100;$ فرض شود

$$M_{AB} = M_{BA} = -600$$
$$M_{CD} = M_{DC} = -480$$

ترکیب‌حالت(الف) وحالت (ب) :اگر B ضریب‌نتایج‌حالت (ب)باشد،حاصل‌انطباق B در حالت (ب)و (الف)می‌بایستی به‌نوعی باشد که نیروی جدید حاصل‌درحالت (ب) بتوانـد نیروی بازدارنده گره B را در حالت (الف)وجود دارد خنثی نماید تا این که تنهـا اثـر نیروهای موثر خارجی برجا بماند ، این خنثی‌سازی را می‌توان به‌صورت معادله‌ای بیان‌نمود



که در این معادله نیروی رو به‌سوی راست را مثبت فرض کرده‌ایم ، خواهیم داشت :

$$-58.7 + 66B = 0 \qquad or \qquad B = 0.89$$

(حالت ب) (B)+ (حالت الف) = نتایج نهایی

$$M_{AB} = +78.9 - 421.5 = \underline{\underline{-342.6^{k'}}} \qquad M_{DC} = -141.6 - 196.7 = \underline{\underline{-338.3^{k'}}}$$
$$M_{BA} = +157.8 - 310.5 = \underline{\underline{-152.7^{k'}}} \qquad M_{DE} = +23.0 + 20.7 = \underline{\underline{+43.7^{k'}}}$$
$$M_{BD} = -157.8 + 310.5 = \underline{\underline{+152.7^{k'}}} \qquad M_{ED} = +400 + 0 = \underline{\underline{+400^{k'}}}$$
$$M_{DB} = +118.6 + 176.0 = \underline{\underline{+294.6^{k'}}}$$

بحث :

وقتی‌که به‌محاسبه لنگرهای انتهایی اولیه حاصل ازدوران خط‌اتصال دو انتهای‌اعضاء می‌پردازیم باید توجه نمائیم که کلیه گرهها از جمله تکیه‌گاههای مفصلی قادر به‌دوران نمی‌باشند ،همچنین توجه شودکه دراین‌محاسبات ازضریب‌سختی K استفاده شده است و از ضریب سختی تقلیل یافته استفاده نشده است .

از ضریب سختی تقلیل یافته فقط‌در محاسبه ضرایب پخش استفاده می‌شود و نه‌بیشتر.

مقادیر لنگرهای انتهایی حاصل از هر نیروی افقی‌مؤثر برگره B را می‌توان مستقیما"با استفاده‌از قسمت حالت(ب) از محاسبه به‌دست آورد .

آنچه در مثال (۱۳–۲۵) شرح داده‌شد بدون هیچ‌گونه تغییری در مورد کلیه قابها بـا یک زاویه ψ مستقل قابل اعمال می‌باشد . بسط چنین کاربردی در مورد قابهائی کـه دارای بیش از یک ψ مستقل می‌باشند نیز بسیار ساده است . قابی که دارای n زاویه مستقل باشـد

قابی با n درجه آزادی در برابر تغییرمکان جانبی خوانده می‌شود .

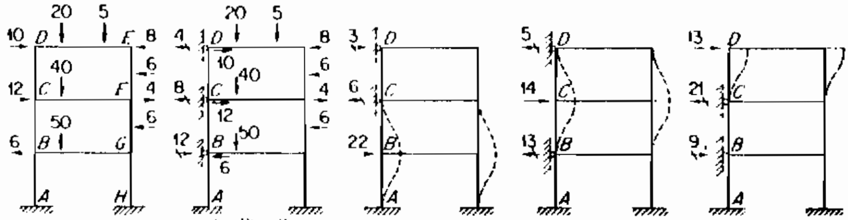
برای چنین قابی راه‌حل پخش لنگر به $(n + 1)$ حالت جداگانه تقسیم می‌گردد (۱) حالت (الف) که در آن با ایجاد n نیروی بازدارنده کاملا" از تغییرمکان جانبی قاب جلوگیری شده است . (۲) n حالت تغییرمکان جداگانه جانبی که در مورد هریک از این حالات فقط یک زاویه ψ مستقل می‌تواند وجود داشته باشد زیرا $(n - 1)$ نیروی بازدارنده از نیروهائی که در حالت(الف) از تغییر مکان جانبی n گره جلوگیری می‌نمودند هنوز در جای خود قرار دارند و تنها یک گره باقی مانده از گرههای نگهداری شده حالت(الف) تحت اثر فشار جانبی قرار می‌گیرد .

نتایج حاصل از این $(n + 1)$ حالت‌را می‌توان به‌همان روشی‌که در مثال (۱۲ـ۲۵) شرح داده شد باهم جمع نمود . پس‌از حل دستگاه n معادله ضرایبی که بر طبق آنها هریک از حالات تغییرمکان جانبی در این جمع‌بندی وارد می‌شوند به‌دست خواهد آمد . این n معادله با برقرارنمودن یک معادله برای هریک‌از n گره نگهداری شده‌حالت (الف) به‌دست می‌آیند. درمورد یک گره غیرمشخص j یک چنین معادله‌ای بیان‌کنندهٔ این‌است که جمع جبری‌نیروی بادارنده گره j ازحالت(الف) به‌اضافه‌حاصل ضرب ضریب B درنیروی بازدارندهٔ و یا فشار دهندهٔ افقی درحالت (ب) به‌اضافه حاصل‌ضرب ضریب C درنیروی بازدانده و یا فشاردهنده افقی در حالت (ج) و الی آخر برای هریک از n حالت مربوط به‌تغییر مکان جانبی‌می‌بایستی برابر با صفر باشد .

برای شرح کاربرد پخش لنگر در چنین حالتی قابی را که دارای چندین درجه‌آزادی‌در برابر تغییرمکان جانبی می‌باشد نظیر قاب‌شکل (۱۲ـ۲۲) در نظر می‌گیریم . این قاب‌به‌دلیل امکان تغییرمکان افقی‌گرههای B ، C و D دارای سه زاویه مستقل ψ می‌باشد . لذاگفته‌می‌شود که این قاب دارای سه درجه آزادی در مقابل تغییر مکان جانبی می‌باشد ، به‌این جهت‌روش پخش لنگر را به $(3 + 1)$ یا چهار حالت جداگانه تقسیم می‌کنیم : حالت (الف) از جابجایی جانبی‌گرهها جلوگیری شده‌است) و سه‌حالت تغییرمکان‌جانبی (حالات(ب)، (ج) و (د)) .

درحالت (الف) پس از آن‌که با اعمال نیروهای‌بازدارنده برگرههای B ، C و D از امکان تغییر مکان جلوگیری به‌عمل آمده ، بارهای خارجی را وارد کرده و روش متعارف پخش لنگر را که برای حالات بدون تغییر مکان جانبی است اعمال می‌کنیم تا لنگری انتهایی‌به‌دست‌آید . سپس با استفاده‌ازتعادل‌،نیروهای‌بازدارنده رادر B ، C و D محاسبه می‌کنیم ، برای‌تسهیل در امر شرح این مساله فرض می‌کنیم که این نیروها به‌ترتیب دارای مقادیر 12، 8 و 4 در جهتهای نشان داده شده روی شکل (۱۲ـ۲۲) باشند .

سپس هریک از سه‌حالت مربوط به‌تغییرمکان جانبی‌را جداگانه موردبررسی‌قرار می‌دهیم



سازه اصلی با بارهای وارده | حالت (الف) از تغییرمکان جانبی جلوگیری شده است، بارهای جانبی برسازه اثر می‌کنند | حالت (ب) گره B منفرده می‌شود گرههای C و D ثابت هستند | حالت (ج) گره C منفرده می‌شود گرههای B و D ثابت‌هستند | حالت (د) گره D منفرده می‌شود گرهای B و C ثابت هستند

نتایج نهایی = (حالت الف) + حالت (ب)(B) + حالت (ج)(C) + حالت (د)(D)

شکل ۱۳ــ۲۲ چند درجه آزادی در برابر امکان تغییر مکان جانبی

تذکر: مقادیری که در شکل جهت نیروهای فشاردهنده افقی و یا بازدارنده ذکر شده است فقط جنبهٔ تشریحی داشته و برای این مساله محاسبه‌نشده‌اند خطوطی که با خط‌چین نشان داده شده است شکل تغییر یافته قاب‌را نسبت به‌وضعیت‌اولیه خودنشان می‌دهد، دریک چنین تغییرمکانی ازدوران گرهها جلوگیری شده است. شکل نهایی منحنی‌خیز که پس از آزادنمودن کلیه‌گرهها و رسیدن به‌وضعیت نهایی خود پس از پخش لنگر کامل بوجود می‌آیدنشان داده نشده‌است.

به‌عنوان مثال درحالت (ب) از تغییرمکان افقی‌گرههای C و D جلوگیری‌شده و در حالی که به‌گره B تغییر مکانی دلخواه اعمال شده است. اگر از ابتدا از دوران این گرهها جلوگیری شده باشد پس از اعمال این تغییر مکان لنگرهای اولیه در قطعات AB ، BC ، GH و GF بوجود خواهدآمد، همان‌طوری‌که‌درحالت (ب) مثال (۱۳ــ۲۵) انجام‌شده مقادیر لنگرهای انتهایی اولیه‌را برای این تغییرمکان دلخواه می‌توان محاسبه نمود. جهت پخش‌این‌لنگرهای انتهایی اولیه ازروش پخش لنگر استفاده می‌شود و پس از آن بااستفاده‌ازتعادل‌نیروی‌فشار‌دهنده افقی در B و نیروهای بازدارندهٔ موثر بر C و D محاسبه می‌گردند. به‌همان دلیل بالا جهت تسهیل در شرح مساله این نیروها را با همان مقادیر و جهتهای نشان داده شده درحالت (ب) از شکل (۱۳ــ۲۲) فرض می‌کنیم راه حلهای مشابهی برای دو حالت اعمال جابجایی جانبی (ج) و (د) به‌کار می‌بریم.

آنچه باقی می‌ماند تعیین مقدار دخالت هریک از این سه حالت مربوط به تغییر مکان جانبی‌درجمع به‌حالت (الف) جهت رسیدن به‌نتایج نهایی این‌مساله‌می‌باشد. به‌عبارت دیگر بایدضرایب B ، C و D را به‌ترتیب درهریک‌ازحالات (ب)، (ج) و(د) به‌منظورضرب در مقادیر

به‌دست آمده در آن حالات جهت تعیین نتایج نهایی محاسبه نمائیم . مقادیر این ضرایب را می‌توان با حل دستگاه سه‌معادله که هریک از این معادلات به‌صورت زیر تشکیل می‌گردد محاسبه نمود ، به‌عنوان مثال اگر نیروهای رو به‌سوی راست را مثبت فرض کنیم در گره B خواهیم داشت :

$$12 + 22B - 13C + 9D = 0$$

در گره C :

$$-8 - 6B + 14C - 21D = 0$$

در گره D :

$$-4 + 3B - 5C + 13D = 0$$

مقادیر B ، C و D را می‌توان از حل این سه معادله به‌دست آورد ، حال اگر نیروهای خارجی حالت (ب) را در B ونیروهای خارجی حالت (ج) را در C و بالاخره نیروهای حالت (د) را در D ضرب کرده و سپس مقادیر تغییر یافته این نیروها را که از این سه حالت به‌دست می‌آیند بر نیروهای حالت (الف) منطبق نمائیم حاصل نیروهای موءثر خارجی خواهد بود (به‌انضمام عکس‌العمل‌های نظیر آنها) . به‌عبارت دیگر چنین رویهم‌گذاری کلیه نیروهای بازدارنده و فشاردهنده افقی را حذف خواهد نمود . واضح است که نتایج نهایی (نظیر لنگرهای انتهایی حاصل از اثر بارهای خارجی) را می‌توان با رویهم‌گذاری نتایج این‌چهار حالتی که در شکل (۱۳–۲۲) نشان داده شده است به‌دست آورد .

بایستی خاطرنشان کرد که نحوه اعمال جابجایی گرهها در هریک از جابجاییهای جانبی کاملاً" اختیاریست ، تنها شرطی که وجود دارد این است که هریک از حالات اعمال جابجایی جانبی مستقل‌از حالات دیگر باشد ، به‌عنوان مثال درحالت (ب) می‌توانیم بهکلیه گرههای B ، C و D یک مقدار برابری ، تغییرمکان افقی بدهیم و درحالت (ج) می‌توانیم گره B را درجای خود ثابت نموده و برگرههای C و D یک مقدار برابری ،تغییر مکان‌افقی‌بدهیم و بدین‌ترتیب این دوحالت جدید (ب) و (ج) را با دوحالت‌قبلی(الف) و (د) ترکیب‌نمائیم . دراین‌صورت معادلات‌جدیدی به‌دست‌خواهدآمدکه ازطریق حل‌آن دستگاه‌معادلات ، مقادیر جدیدی برای ضرایب B ، C و D حاصل خواهد شد ولی رویهم‌گذاری این حالات جدید به‌همان نتایج نهایی به‌دست آمده از طریق راه حل نخست منتهی خواهد شد .

برای حل حالاتی که درآنها تغییرمکان جانبی وجود دارد روشی موجود است که منجر به‌دستگاه معادلات چندمجهولی نمی‌گردد ، در این روش همزمان با تغییر مکان گرهها نیروهای خارجی را که سبب ایجاد لنگرهای گیرداری می‌شوند بر سیستم واردمی‌کنیم، پس از هر چرخه از پخش‌لنگر ، معادلات تعادل را کنترل کرده و بارهای موءثر بر گرهها را معین می‌کنیم اگر این بارها با بارهای معلوم موءثر بر گرهها مطابقت نداشته باشند ، تغییر مکان اضافی دیگری بر گره اعمال می‌کنیم و به چرخه پخش لنگر دیگر می‌پردازیم و بازهم

نیروها را وارسی می‌کنیم و . . .*

۱۲ – ۱۵ کاربرد روش پخش لنگر در قطعاتی با لنگر لختی متغیر

فلسفه اساسی روش پخش لنگر که در بخش (۱۲–۱۳) شرح داده شد بر هر تیر و قابی که از قطعات با I و E ثابت و یا متغیر تشکیل شده است قابل بسط می‌باشد، البته روابطی‌که جهت لنگرهای گیرداری، ضرایب سختی و لنگرهای انتقالی در این قسمت معلوم گردید کلاً برای قطعاتی با E و I ثابت صادق بوده و از آنها نمی‌توان‌برای قطعات غیرمنشوری‌استفاده نمود. حال ما روابط جدید این مقادیر را **برای قطعاتی که دارای شکل اصلی مستقیم‌الخط بوده ولی با E و I متغیر می‌باشند** استخراج می‌کنیم.

ضریب انتقال C. لنگرانتقالی عبارت از لنگری‌است که در یک انتهای گیردار قطعه‌ای هرگاه انتهای دیگر آن‌قطعه در اثر یک لنگرانتهایی دوران نماید بوجودمی‌آید، لنگر انتقالی به B را می‌توان به‌سادگی برحسب حاصل‌ضرب لنگر موٴثر بر A و ضریب انتقال C_{AB} بیان نمود، ترتیب زیرنویس ضریب انتقال بیان کننده جهت انتقال لنگر می‌باشد به‌این‌ترتیب‌که نشان می‌دهد لنگر از A به B منتقل شده است و یا:

$$M_{BA} = C_{AB}M_{AB} \qquad (۱۲–۱۸)$$

---

* شرح کامل این طریقهٔ از بحث این کتاب خارج است، جهت اطلاع بیشترخواننده می‌تواند به‌کتب دیگری‌که‌به‌صورت‌مفصلتربه‌روش‌پخش‌لنگرمی‌پردازند‌نظیرکتب‌زیرمراجعه‌نماید. مراجعه نماید.

L.E. Grinter "Theory of Modern Steel Structures"

J.A.L. Matheson "Hyperstatic Structures"

J.I. Parcel and R.B Moorman " Analysis of Statically Indeterminate Structures"

کلاً برای تحلیل وسیعتری از سازه‌های نامعین می‌توان علاوه برآنچه در بالا ذکر شد به‌کتب زیر نیز مراجعه نمود:

S.F. Borg and J.J. Gennaro "Advanced Structural Analysis"

L.C. Maugh " Statically Indeterminate Structures"

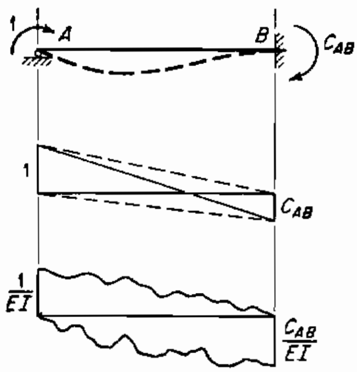
S.P. Timoshenko and D.H. Young"Theory of Structures"

C.K. Wang " Statically Indeterminate Structures"

J.S. Kinney " Indeterminate Structural Analysis"

با استفاده ازین معادله ، تعریف ضریب انتقال عبارت خواهد بود از لنگری که در انتهای گیردار قطعه‌ای بوجود می‌آید هرگاه انتهای دیگر قطعه در اثر لنگری برابر با واحد دوران نماید در مورد قطعات منشوری (با لنگر لختی ثابت) ضریب انتقال برابر با ½ می‌باشد ، بایستی متذکر شد که در صورتی C_{AB} برابر با C_{BA} خواهد بود که قطعه مورد بحث حول نقطهٔ مرکزی خود متقارن باشد .

شرح روش محاسبه ضریب انتقال در یک حالت غیرمشخص به‌صورت زیر خواهد بود :
قطعه AB را مطابق شکل (۱۳–۲۳) در نظر بگیرید و برانتهای A آن لنگری برابر با واحد وارد نمائید بر اثر این لنگر در انتهای B لنگری برابر با C_{AB} بوجود می‌آید هرگاه تغییرمکان نقطه A واقع روی منحنی‌خیز قطعه را از خط مماس بر B اندازه بگیریم مقدار آن برابر با صفر خواهد بود با در نظر گرفتن قضیه دوم سطح لنگر ، لنگر سطح نمودار M/EI حول نقطه A می‌بایستی برابر با صفر باشد . از طریق این معادله می‌توان به‌سادگی مقدار C_{AB} را محاسبه نمود .



شکل ۲۳–۱۳ ضریب انتقال

ضریب سختی حقیقی K' : حال به‌بخش (۱۳–۱۳) که در مورد تعیین لنگر پخش‌شده بود بر می‌گردیم و شکل‌های (۱۳–۱۶) و (۱۳–۱۷) را با فرض این که سازهٔ مورد بحث در آن شکلها از قطعات غیرمنشوری (با لنگر لختی متغیر) تشکیل شده باشد در نظر می‌گیریم . برای محاسبه اثر حاصل از دوران گره B که خود به‌دلیل لنگر نامتعادل M حاصل می‌شود دیگر نمی‌توان از معادله (۱۳–۱۱) استفاده نمود . در این حالت می‌توانیم بنویسیم :

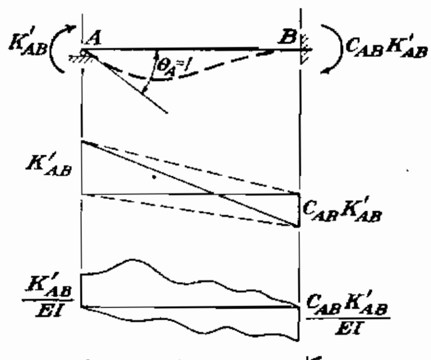
$$M_{BA} = K'_{BA}\theta_B \qquad M_{BC} = K'_{BC}\theta_C \qquad \text{(الف)}$$

در این روابط K'_{BA} و K'_{BC} و غیره را ضرایب سختی حقیقی انتهای B از قطعه BA ، انتهای B از قطعه BC و غیره می‌نامند با استفاده از این معادلات ، تعریف ضریب سختی حقیقی K'_{BA} عبارت خواهد بود از لنگری که برای دوران دادن مماس نقطه B از قطعه BA برابر با

واحد هرگاه انتهای دیگر آن یعنی A گیردار باشد لازم خواهد بود.

در مورد یک قطعه منشوری ضریب سختی حقیقی برابر با $4EK$ خواهد بود، متذکر می‌شویم علامت K که قبلاً "ضریب سختی" یک قطعه نامیده بودیم بیان‌کننده مقدار نسبی ضرایب سختی حقیقی یک قطعه می‌باشد. شاید بهتر بود که K را "ضریب سختی نسبی" بنامیم ولی از آنجائی که لغظ مربوط به‌آن به‌دفعات به‌کار برده می‌شود لذا لازم است که‌لفظ آن کوتاه انتخاب شود. در حالت کلی ضریب سختی‌حقیقی برای هر انتهای قطعه‌ای متفاوت است فقط در صورتی که آن قطعه متقارن باشد ضریب سختی حقیقی آن در هر دو انتها یکی خواهد بود.

ضریب سختی حقیقی K'_{AB} برای انتهای A از قطعه AB شکل (۱۳–۲۴) را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه نمود: برحسب تعریف هرگاه لنگری انتهایی برابر با K'_{AB} بر انتهای A وارد شود، هرگاه انتهای B گیردار باشد مماس نقطه A به‌اندازه زاویه‌ای برابر با واحد دوران خواهد نمود، بر طبق قضیه اول سطح لنگر باید سطح خالص زیر نمودار M/EI برابر با واحد گردد، اگر C_{AB} که قبلاً برطبق شرح بالا معین شده است محاسبه کرده باشیم از معادله فوق مقدار K'_{AB} را می‌توان محاسبه نمود.



شکل ۱۳–۲۴ ضریب سختی

ضریب سختی تقلیل یافته حقیقی K'^{R}_{AB}: ضریب سختی تقلیل یافته حقیقی K'^{R}_{AB} عبارت خواهد بود از لنگری که برای دوران دادن مماس نقطه A به‌اندازه زاویه برابر با واحد هرگاه انتهای دیگر آن مفصلی باشد. مقدار K'^{R}_{AB} را به‌شرطی که قبلاً K'_{AB}، C_{AB} و C_{BA} معلوم شده باشند می‌توان به‌سادگی به‌صورت زیر معین نمود:

میله AB را که موقتاً از دوران انتهای B آن جلوگیری کرده‌ایم در نظر بگیرید، لنگری برابر با K'_{AB} بر انتهای A آن وارد می‌کنیم این لنگر در نقطه A دورانی برابر با واحد ایجاد کرده و در انتهای دیگر آن لنگر انتقالی برابر $C_{AB}K'_{AB}$ بوجود می‌آورد، حال اگر انتهای

را در وضعیت جدید خود قفل کنیم و انتهای B را آزاد کنیم این انتها تحت اثر لنگر نامتعادل $C_{AB}K'_{AB}$ دوران کرده و لنگر پخش شده برابر با $-C_{AB}K'_{AB}$ بوجود می‌آورد و درنتیجه لنگری انتقالی‌برابر با $-C_{BA}C_{AB}K'_{AB}$ در A ایجادمی‌شود. دراین‌حالت قطعه مانند شکل (۱۳–۲۵) حالت‌تغییر شکل یافته خود را پیدا کرده است و کل لنگرانتهایی در A برابر با ضریب‌سختی تقلیل یافته حقیقی K'^{R}_{AB} خواهد شد، یعنی.

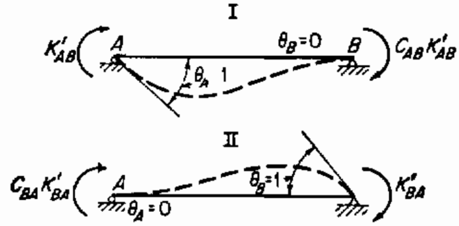
$$K'^{R}_{AB} = K'_{AB}(1 - C_{BA}C_{AB}) \qquad (۱۳–۱۹)$$

درمورد قطعات منشوری‌که برای‌آنها هردو مقادیر C_{AB} و C_{BA} برابر با ½ است‌ازرابطه (۱۳–۱۹) مقدار K'^{R}_{AB} برابر سه‌چهارم مقدار K'_{AB} به‌دست می‌آید.

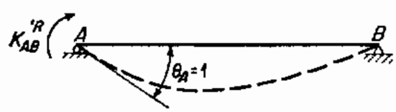
با وارسی رابطه بین سختی و ضرایب انتقالمی‌توان رابطه مفیدی جهت وارسی بین سختی و ضرایب انتقال به‌دست‌آورد، قطعه AB از شکل (۱۳–۱۶) را که تحت اثر دودستگاه بارگذاری I و II قرار دارد در نظر بگیرید با اعمال قانون بتی‌خواهیم داشت:

$$C_{AB}K'_{AB} = C_{BA}K'_{BA} \qquad (۱۳–۲۰)$$

این رابطه هرگاه نیازبه‌وارسی مقادیرضرایب سختی و ضرایب انتقال‌باشد بسیار مفیدخواهد بود.



شکل ۱۳–۲۶ رابطه کنترلی



شکل ۱۳–۲۵ ضریب سختی تقلیل یافته حقیقی

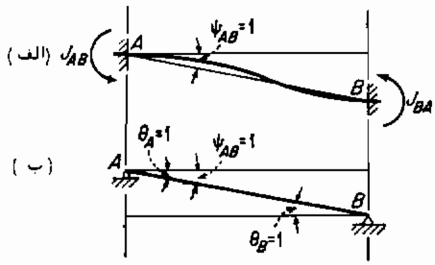
ضرایب پخش لنگرهای پخش شده: اگر با استفاده از معادلات (الف) که در این مبحث آورده شده‌است محاسبه مربوط به‌لنگرهای پخش شده‌را برطبق روشی که درمبحث (۱۳–۱۳) آورده شده است انجام دهیم، روابطی که برای ضرایب توزیع به‌دست خواهد آمد مانند معادلات (۱۳–۱۴) یا (۱۳–۱۴الف) خواهد بود فقط دراین روابط‌ضرایب سختی‌حقیقی K' به‌جای ضرایب سختی K قرار گرفته است.

ضریب تغییر مکان جانبی: به‌سادگی می‌توان برای ضریب تغییر مکان جانبی J که در محاسبه لنگرهای انتهایی اولیه که توسط دوران خط اتصال دو انتهای قطعه بوجود می‌آید روابطی معین نمود، برای چنان لنگرهای انتهایی روابط زیر برقرار است:

$$M_{AB} = J_{AB}\psi_{AB}$$
$$M_{BA} = J_{BA}\psi_{AB} \qquad (۲۱-۱۳)$$

ضریب تغییرمکان جانبی J_{AB} **عبارت خواهد بود از لنگری که در انتهای** A **از قطعه** AB **در اثر دوران برابر با واحد خط اتصال دو انتهای آن بوجود می‌آید به‌شرطی که از دوران هر دو انتهای قطعه جلوگیری شده باشد** ضریب‌تغییرمکان برای یک قطعه‌منشوری برابر با $-6EK$ خواهد شد. ضریب تغییرمکان جانبی در صورتی که قطعه متقارن باشد برای هردوانتهای آن یکسان خواهد بود.

مقدار ضریب تغییرمکان جانبی قطعه AB از شکل (۱۳-۲۷ الف) را می‌توان بر طبق استدلال زیر برحسب ضرایب‌سختی و ضرایب‌انتقال بیان‌نمود: فرض کنید که موقتاً گیرداری دو انتهای A و B قطعه را حذف نموده و این قطعه مانند شکل (۱۳-۲۷ ب) عمل نماید، حال انتهای A را در وضعیت جدید خود قفل کرده و انتهای B را آنقدر دوران می‌دهیم



شکل ۱۳-۲۷ ضریب تغییرمکان جانبی

که θ_B به‌مقدار صفر خود برگردد در این صورت در انتهای B لنگر انتهایی $-K'_{BA}$ و در A لنگر انتهایی $-C_{BA}K'_{BA}$ بوجود می‌آید حال انتهای B را در وضعیت جدید خود قفل کرده و انتهای A آنقدر دوران دهید که θ_A به‌مقدار صفر خود برگردد، در این حالت‌در انتهای A لنگر انتهایی $-K'_{AB}$ ودرانتهای B لنگرانتهایی $-C_{AB}K'_{AB}$ بوجود می‌آید دراین وضعیت قطعه شکل اولیه خود را مطابق شکل (۱۳-۲۷ الف) باز یافته و لذا لنگرهای انتهایی کل برابر با ضرایب تغییرمکان جانبی خواهند بود و یا:

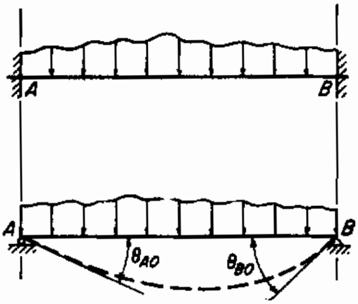
$$J_{AB} = -(K'_{AB} + C_{BA}K'_{BA})$$
$$J_{BA} = -(K'_{BA} + C_{AB}K'_{AB}) \qquad (۲۲-۱۳)$$

لنگرهای (انتهایی) گیرداری: لنگرگیرداری را درقطعات غیرمنشوری می‌توان به‌طریق زیرمحاسبه‌نمود، قطعه AB را که تحت اثربارگذاری غیرمشخص خارجی‌است درنظربگیرید، موقتاً فرض می‌کنیم که بار خارجی مانند یک تیر روی دو تکیه‌گاه ساده براین قطعه اثر کند در این

حالت با استفاده از قضایای سطح لنگر به‌محاسبه زوایای حاصل از دوران لنگرها یعنی θ_{A_0} و θ_{B_0} بپردازید، حال اگر تصور کنیم که انتهای B را در وضعیت جدید خود قفل کرده و انتهای A را آنقدر دوران دهیم که به‌شیب صفر برسد و سپس انتهای A را در این وضعیت قفل نموده و انتهای B را آنقدر دوران دهیم که به‌وضعیت اولیه خود برگردد، لنگرهای انتهایی حاصل به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{FEM}_{AB} &= -K'_{AB}\theta_{A_0} + C_{BA}K'_{BA}\theta_{B_0} \\ \text{FEM}_{BA} &= +K'_{BA}\theta_{B_0} - C_{AB}K'_{AB}\theta_{A_0} \end{aligned} \qquad (۱۳-۲۳)$$

نکات کلی: عبارات فوقانی فقط در مورد قطعاتی که دارای شکل اولیه مستقیم‌الخط باشند قابل‌استفاده است این روابط را می‌توان با دقت قابل‌قبولی در قطعاتی که‌دارای محوری با انحنای مختصری باشند به‌شرطی که آرایش سازه به‌نوعی باشد که نیروی فشاری محوری حاصل در آن قطعات نسبتاً" کوچک باشد به‌کار برد. بررسی روابط دقیقی که به‌حل قطعات منحنی می‌پردازد از بحث این کتاب خارج است.



شکل ۱۳-۲۸ محاسبات اضافی مربوط به‌لنگرهای گیرداری

برای قطعات متداولی که دارای ماهیچه و یا دارای لنگر لختی متغیر می‌باشند مقادیر لنگرهای گیرداری، ضرایب سختی و ضرایب انتقال در جداول و یا نمودارهایی به صورت محاسبه شده وجود دارد*.

۱۳ ــ ۱۶ تحلیل تنش شبکه‌های فضایی نامعین

شبکه‌های فضایی نامعین را می‌توان به‌کمک معادلات انطباق و یا قضیه کاستیگلیانو

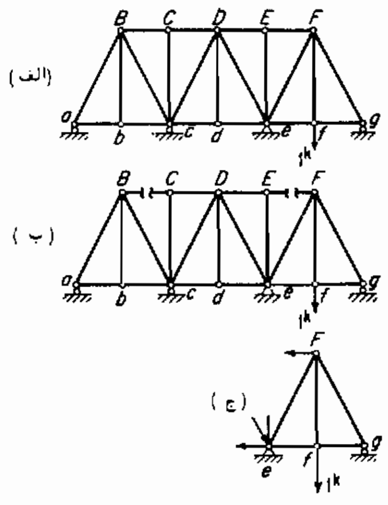
* به‌عنوان مثال می‌توان به Bulletin S.T. 41 انجمن سیمان پرتلند که در [illegible] تیرها و ستونهای بتونی با لنگر لختی متغیر می‌باشد مراجعه نمود.

بررسی نمود ، اساسا"تحلیل تنش چنین شبکه‌هایی با به‌کاربردن روشهای فوق دقیقا" مانند یک خرپای نامعین می‌باشد ،بدیهی است‌که جزئیات این تحلیل به‌علت آن که تحلیل تنش مربوط به‌سازه اولیه معین آن به‌علت سه‌بعدی بودن به‌مراتب پیچیده‌تر از یک‌خرپای‌مستوی است ، بسیار خسته‌کننده خواهد بود . کلیه مطالبی که در مورد خرپاهای نامعین گفته شد در مورد آنها نیز صادق است و در هر صورت بسط جزیی‌تر مطالب مربوط به‌شبکه‌های‌فضایی خارج از بحث این کتاب می‌باشد

۱۳ــ۱۷ تغییر مکان سازه‌های نامعین

پس ازآن که تحلیل تنش برای یک سازه نامعین کلا"به‌اتمام رسید می‌توان بدون‌اشکال با همان روشهایی که در فصل ۱۲ در مورد سازه‌های معین بیان شد به‌محاسبه کرنش و تغییر مکان سازه پرداخت .

به‌عنوان مثال فرض کنید که نیروی میله‌ها و تغییر طول قطعات مختلف خرپای شکل (۱۳ــ۲۹ الف)را تحت اثربارگذاری معلومی محاسبه‌کرده باشیم .حال فرض کنیدکه‌بخواهیم تغییرمکان عمودی‌گره f را به‌روش کارمجازی معین کنیم ،می‌توان به‌روش معمولی عمل نموده و بار عمودی واحدی همان‌طوری که در شکل (۱۳ــ۲۹ الف) نشان داده شده بر گره f وارد کنیم ، این بار سبب ایجاد نیروهای F_Q در اثر میله‌های خرپا خواهد شد ، پس از آن که کلیه این نیروهارا محاسبه کردیم می‌توان بااستفاده از معادله (۱۲ــ۵) به‌محاسبه‌تغییرمکان



شکل ۱۳ــ۲۹ تغییرمکان خرپای نامعین

لازم گره f پرداخت . این عمل گرچه طریقه معلومی است ولی بسیار خسته‌کننده خواهدبود زیرا اکثر میله‌های خرپا در این محاسبات داخل می‌شوند .

اگر درک کنیم که مجهولات یک سازه نامعین به‌نوعی محاسبه می‌گردند که تنشها ، کرنشها و تغییر مکانهای سازه‌اولیه و سازه اصلی یکی باشد دراین صورت می‌توان با این‌علم محاسبات مربوط به‌تغییرمکان سازه‌های نامعین را تا حد بسیار زیادی ساده نمود . زیرا در این صورت می‌توان به‌جای این که از سازه اصلی نامعین در محاسبات استفاده شود از سازه اولیه معین استفاده نمود ، بدیهی است که کاربرد سازه اولیه بسیار ساده‌تر خواهد بود . به‌عنوان مثال فرض کنید که در سازه بالا از سازه اولیه شکل (۱۳-۲۹ الف) جهت محاسبه تغییرمکان عمودی گره f به‌روش کار مجازی استفاده کنیم . در این حالت نیروی واحدموءثر بر گره f فقط سبب ایجاد نیروهای F_Q در پنج میله ef ، fg ، eF ، fF و Fg خواهد شد. در نتیجه وقتی که از معادله (۱۲-۵) استفاده می‌کنیم فقط این پنج میله در مجموع $F_Q \Delta L$ وارد می‌شود و به‌این ترتیب محاسبات بسیار خسته‌کننده قبلی در این حالت خاص به این صورت تقلیل می‌یابد .

برخی توضیح تشریحی ارائه شده بالا را کافی نمی‌دانند و ترجیح می‌دهند که‌به‌صورت ریاضی این مطلب را اثبات‌کنند .گرچه چنین تشریحی در اینجا انجام نخواهد شد ولی به‌صورت ریاضی می‌توان ثابت نمودکه نتایج حاصل‌از اثر بار واحد Q چه بر سازه‌اصلی نامعین و چه بر سازه اولیه معین کاملا" یکسان می‌باشد .

ازنظرفیزیکی ،به‌صورت واضحی بەنظرمی‌رسد که تغییر مکانهای محاسباتی برای‌دهانه سمت راست ازسازه اصلی دقیقا" با تغییر مکانهای این قسمت که به‌صورت دهانه‌ای مستقل و تحت اثر نیروهای موءثر خارجی و نیروهای خارجی حاصل‌ازنیروی میله‌های‌قطعاتی که درشکل (۱۳-۲۹ ج)بریده شده‌اند قراردارد برابر باشند ،تحلیل فیزیکی چنین مطلبی درمورد تغییر مکانهای یک تیر سرتاسری بیشتر از فوق واضح است . در چنین سازه‌ای جدا۔ کردن هر دهانه از بقیه تیر و محاسبه تغییر مکانهای آن دهانه درست مانند تیری روی دو تکیه‌گاه ساده که تحت اثر بارگذاری خارجی خود درآن دهانه و لنگرهای انتهایی‌که معادل لنگرهای خمشی در نقاط تکیه‌گاهی تیر سرتاسری اصلی می‌باشد قرار دارد عملی متداول و طبیعی می‌باشد .

۱۳ - ۱۸ تنشهای ثانویه در خرپاها

در فصل ۴ گفته شد که تحلیل مقدماتی تنش خرپاها بر اساس فرضیات زیراستوار است :

۱ ــ قطعات خرپا درانتها خود توسط مفصلهای بدون اصطکاک به‌یکدیگرمتصل‌شده‌اند.

۲ ــ کلیه بارهای خارجی و عکس‌العمل‌ها (از جمله وزن قطعات خرپا) به‌گرههای‌خرپا اثر می‌کنند .

۳ ــ محورهای مار برمراکز ثقل کلیه قطعات مستقیم‌الخط‌بوده و بر خطوط‌اتصال‌مراکز گرهها منطبق است که این خطوط‌نیز به‌نوبه خود همگی در صفحه‌ای که شامل سایر محورها و خطوط‌اثر نیروها می‌باشد قرار دارند .

تنشهائی‌که بر اساس چنین فرضیاتی محاسبه‌می‌گردند به‌تنشهای اولیه " موسوم‌هستند

تنشهائی که حاصل از مواردی است که در تحلیل تنشهای اولیه در نظر گرفته نشده است تنشهای ثانویه نامیده می‌شوند ، مهمترین تنشی که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید تنش حاصل از صلب‌بودن گرههای خرپاست که اجازه نمی‌دهد قطعات خرپا تحت اثر تغییر شکل آن به‌آزادی عمل کنند* ، روشهای مدون متعددی برای تحلیل تقریبی تنشهای ثانویه‌موجود است ، البته این چنین مساله‌ای را می‌توان با استفاده از روش پخش لنگر به‌نحو مطلوبی‌حل نمود که در زیر به‌شرح چگونگی این روش می‌پردازیم .

خرپایی که دارای گرههای صلب است عملا" در زمرهٔ قابهای صلب قرار دارد .از نظر اصولی چنین قابی را می‌توان با استفاده از معادلات انطباق و یا قضیه کاستیگلیانــو مــورد تحلیل قرارداده و به‌تعیین تغییرشکل حاصل ازخمش و نیروی محوری آن پرداخت ولی‌درجه نامعینی چنین سازه‌ای به‌قدری بالا خواهد بود که عملا" به‌تحلیل تنش دقیقی منجرنخواهد شد . قبلا" خاطرنشان کردیم که تغییر مکان گرهها عمدتا" تابعی از نیروهای محوری قطعات خواهد بود زیرا خمش قطعات در درجه دوم اهمیت واقع است و به‌عبارت دیگر اثر برشها و لنگرهای قطعات بر روی نیروی محوری آنها بسیار کم است**.

و به‌همین‌دلیل است‌که نیروی‌محوری قطعات و تغییرمکان گرههارا با فرض‌مفصل‌بودن گرهها به‌دست می‌آوریم . هرگاه‌تغییرمکان گرهها معلوم باشد ، می‌توان به‌محاسبه کلیه زوایای ψ قطعات پرداخت و به‌این ترتیب بقیه مساله را می‌توان یا به‌کمک روش شیب ــ تغییر مکان و یا روش پخش‌لنگر به‌همان نحوی که در مورد قابها به‌کار برده می‌شود در حالتی کــه فقــط زوایای θ مجهول باشند حل نمود .

---

* مقاله مهمی که در باره این چنین روشهایی وجــود دارد توسط سیسیل ویوان‌آبــو نوشته شده است .

** به‌کتاب زیر نوشته پارسل و مورمان مراجعه شود .

"Analysis of Statically Indeterminate Structures,"

حل مسائل مربوط به‌تنشهای ثانویه را می‌توان در چهار چوب زیر ارائه نمود .

۱ ــ نیروی میله‌ها را با فرض مفصلی بودن گرههای خرپا محاسبه کنید .

۲ ــ تغییر مکان گرههاو دوران خطوط اتصال دو انتهای قطعات را محاسبه نمائید . چنین محاسبه‌ای را می‌توان بااستفاده از روش ویلیوت و یا به‌طریقی‌که ازتغییر زوایااستفاده می‌گردد نظیر شرحی که در مثال (۱۳ــ۲۶) می‌بینیم انجام داد .

۳ ــ لنگرهای انتهایی اولیه را در حالتی که اگر از دوران کلیه گرهها جلوگیری کرده و سپس تغییر مکانهای گرهها و دورانهای خطوط اتصال دو انتهای قطعات را بر آن اعمال می‌نمائیم محاسبه می‌کنیم ،به‌همین ترتیب لنگرهای نامتعادلی‌را که امکان بوجود آمدن آنها در گرهها به‌سبب خروج از مرکزیت میله‌ها وجود دارد محاسبه کنید .

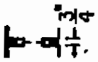
۴ ــ به‌پخش و انتقال به‌دفعات لازم بپردازید ، لنگرهای انتهایی که به‌این طریق به‌دست می‌آیند باتقریب درجه اول نشان‌دهنده لنگرهای انتهایی ثانویه‌می‌باشند که ازطریق آنها می‌توان به‌محاسبه تنشهای ثانویه پرداخت ، با استفاده‌از این لنگرهای‌انتهایی‌محاسبه برش درقطعات ساده بوده وهمچنین می‌توان بااستفاده از روابط‌تعادل مقادیر جدیدنیروی میله‌ها را محاسبه نمود .

۵ ــ اگر این مقادیرجدید نیروی میله‌ها با آنچه در مرحله ۱ محاسبه شده است‌تفاوت فاحشی داشته باشد مراحل ۲ ، ۳و ۴ را تکرار نموده و بدین‌ترتیب به‌محاسبه تنشهای ثانویه با تقریب درجه دوم بپردازید .

چنین عملکردی را در مثال (۱۳ــ۲۱) نشان داده‌ایم .

مثال ۱۳ ــ ۲۶= تنشهای ثانویه را در قطعات این خرپا محاسبه کنید .

تذکر :

۱ ــ قطعات ab ، bc ، Bb ، Bc و Cc از نیمرخ مقابل تشکیل شده‌اند . 

۲ ــ اعضاء اصلی فوقانی از نیمرخ مقابل با ترکیبی از ناودانی : 

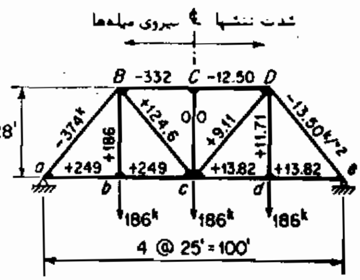
مرحله ۱= نیروی اولیه میله‌ها وشدت اولیه تنشها درنمودار خطی فوق‌نشان داده شده‌است .

مرحله ۲= با محاسبه تغییرزوایا که بااستفاده ازمعادله (۱۲ــ۱۱ب)ممکن می‌گردد به‌محاسبه زوایای ψ می‌پردازیم :

در این حالت مقدار ψ_{Cc} با استفاده از تقارن برابر صفر می‌باشد و بنابراین سمت کلیه این زوایا صحیح می‌باشد . در هر صورت می‌توان هریک از زوایای ψ را صفر فرض نموده و سایر زوایای ψ را به‌تناسب آن محاسبه نمود . واضح است که چنین عملی مجاز می‌باشد زیرا که

بدان معنی است که خرپا را مانند جسمی صلب دوران داده باشیم بدیهی است که درچنین صورتی شرایط تنش تغییر می‌نماید.

میله‌ها	L	A	I	r	K	نیمرخ ترکیبی
	in.	$in.^2$	$in.^4$	in.	$in.^3$	
ab bc	300	18.0	174.9	6.375	0.583	4 ∠s6 × 3½ × ½
Bb	336	16.88	153.4	6.375	0.456	4 ∠s6 × 3½ × 7/16
Bc	450.4	13.68	131.4	6.375	0.292	4 ∠s6 × 3½ × 3/8
Cc	336	11.44	78.9	5.375	0.235	4 ∠s5 × 3 × 3/8
aB	450.4	27.68	960.9	5.739 0.699	2.134	2[s 15″ − 33.9# 1Pl 18 × 7/16
BC	300	26.55	922.7	5.921 9.453	3.076	2[s 15″ − 33.9# 1Pl 18 × 3/8

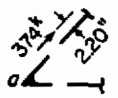


زاویه	$f_2 - f_1$	$\cot\beta_1$	$f_1 - f_3$	$\cot\beta_2$	1st term	2d term	$E\,\Delta\gamma$
B-a-b	+11.71+13.50 = +25.21	1.12		0	+28.25	0	+28.25
b-B-a	+13.82+13.50 = +27.32	0.893		0	+24.40	0	+24.40
a-b-B	−13.50−13.82 = −27.32	0.893	−13.50−11.71 = −25.21	1.12	−24.40	−28.25	−52.65
c-B-b	+13.82− 9.11 = +4.71	0.893		0	+ 4.21	0	+ 4.21
B-b-c	+ 9.11−11.71 = −2.60	1.12	+ 9.11−13.82 = −4.71	0.893	− 2.91	− 4.21	− 7.12
b-c-B		0	+11.71− 9.11 = +2.60	1.12	0	+ 2.91	+ 2.91
C-B-c		0	0 −9.11 = − 9.11	1.12	0	−10.20	−10.20
c-C-B	+ 9.11−0 = +9.11	1.12	+ 9.11+12.50 = +21.61	0.893	+10.20	+19.30	+29.50
B-c-C		0	−12.50− 9.11 = −21.61	0.893	0	−19.30	−19.30

$$
\begin{aligned}
E\psi_{Cc} &= 0 \\
E\Delta_{BcC} &= \underline{-19.30} \\
E\psi_{Bc} &= +19.30 \\
E\Delta_{Bcb} &= \underline{+\ 2.91} \\
E\psi_{bc} &= +16.39 \\
E\Delta_{Bbc} &= \underline{-\ 7.12} \\
E\psi_{Bb} &= +23.51 \\
E\Delta_{abB} &= \underline{-52.65} \\
E\psi_{ab} &= +76.16 \\
E\Delta_{Bab} &= \underline{+28.25} \\
E\psi_{aB} &= +47.91
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
E\psi_{aB} &= +47.91 \\
E\Delta_{aBb} &= \underline{+24.40} \\
E\psi_{Bb} &= +23.51 \\
E\Delta_{bBc} &= \underline{+\ 4.21} \\
E\psi_{Bc} &= +19.30 \\
E\Delta_{cBC} &= \underline{-10.20} \\
E\psi_{BC} &= +29.50 \\
E\Delta_{BCc} &= \underline{+29.50} \\
E\psi_{Cc} &= 0
\end{aligned}
$$

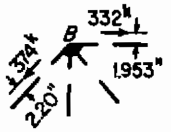
مرحله ۳= لنگرهای اولیه ابتدایی و لنگرهای خروج از مرکز را محاسبه می‌کنیم .

گره a :



$$M_e = +(374)(2.20) = \underline{+823}^{k''}$$

گره B :

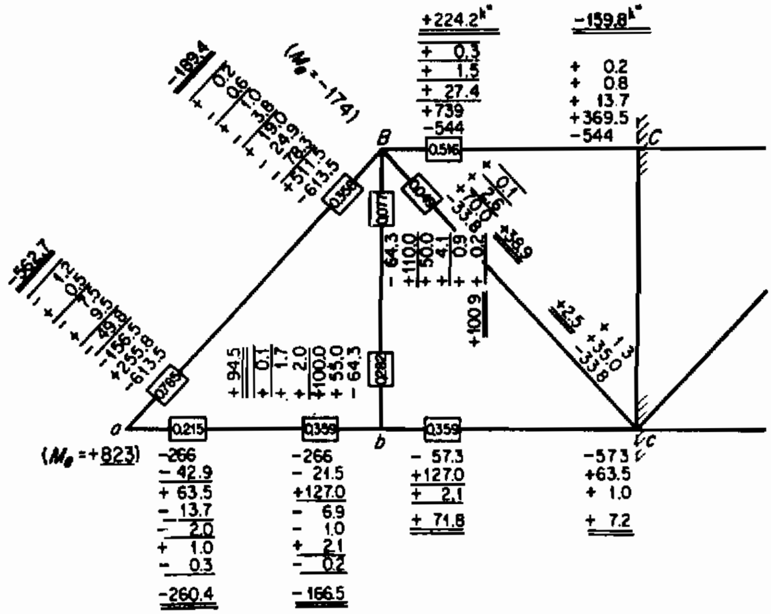


$$M_e = -(374)(2.20) + (332)(1.953)$$
$$= \underline{-174}^{k''}$$

میله	K	$E\psi$	$-6EK\psi$
ab	0.583	+76.16	$-266.0^{k''}$
bc	0.583	+16.39	$-\ 57.3^{k''}$
aB	2.134	+47.91	$-613.5^{k''}$
BC	3.076	+29.60	$-544.0^{k''}$
Bb	0.456	+23.51	$-\ 64.3^{k''}$
Cc	0.235	0	0
Bc	0.292	+19.30	$-\ 33.8^{k''}$

مرحله ۴= به‌پخش و انتقال تا زمانی که لنگرهای انتهایی ثانویه به‌دست آید ادامه می‌دهیم روی نمودار صفحه بعد زیر این لنگرها خط‌کشیده شده است . از طریق این لنگرهای‌انتهایی با معلوم‌بودن اساس مقطع به‌سادگی می‌توان به‌محاسبه شدت تنشهای ثانویه پرداخت .

توجه کنیدکه در این حالت به‌دلیل‌تقارن فقط‌بررسی نیمی‌ازخرپا کافی‌است ،به‌علاوه معلوم است‌که گرههای C ، c دوران نمی‌کنند و لذا هرگزآزادکردن این‌گرهها لازم‌نخواهد بود .

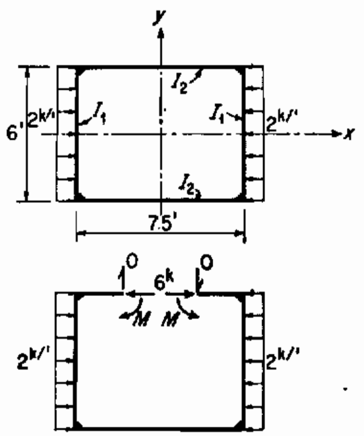


۱۳ ــ ۱۹ تذکرات اضافی : بارهای متقارن و با ضد تقارن مرکز ارتجاعی و تشابه ستونی

برای معرفی مقدماتی از یک موضوع ، نویسنده می‌بایستی حد و مرزی دلخواه‌بین‌اصول بنیادی و زمینه پیشرفتهٔ آن موضوع معین نماید زیرا همواره مطالبی وجود دارد که می‌توان به‌ذکر آنها پرداخت و یا از ذکر آنها صرف نظر نمود ، البته بهتر است به‌شرح مختصری از مضمون کلی آنها پرداخت و به‌خواننده پیشنهاد نمود در صورت تمایل به‌مطالعه بیشتر در آن زمینه بپردازد .

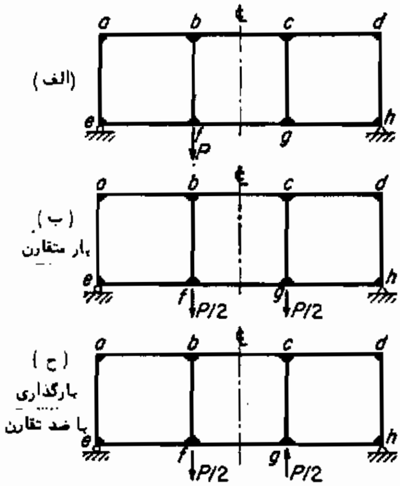
در بحثهای قبلی به‌تقارن در معنی محدود آن به‌کرات اشاره شده است ، هرگاه سازه مورد تحلیل دارای تقارن باشد بر ما واجب است‌که تا حد امکان ازاین تقارن استفاده‌کنیم، به‌عنوان مثال سازه مربع بسته شکل (۱۳ــ۳۰) را در نظر بگیرید . بر طبق تحلیل این سازه سه درجه نامعین است اگر هم قاب و هم بارگذاری آن حول هردو محور x و y دارای‌تقارن باشد ، به‌دلیل تقارن می‌توان استدلال نمود که در مقطع وسط شاهتیر برش صفر بوده‌ومقدار نیروی محوری برابر با 6 kips فشاری می‌باشد و بهاین ترتیب فقط مقدار لنگر نامعلــو م باقی می‌ماند و این بخاطر تقارن است که فقط یک مقدار نامعلوم از سه درجه نامعینی باقــی می‌ماند .

از تسهیلی که در وضعیت پیش مشاهده کردیم چنین معلوم می‌شود که هرگاه برسازه‌ای متقارن باری نامتقارن وارد شود نیز می‌توان تسهیلات بسیار در محاسبه به‌دست آوردچنین وضعی را نظیر آنچه در شکل (۱۳ــ۳۱) نشان داده شده است در نظر بگیرید ، فرض کنیدکه



شکل ۱۳ــ۳۰ سازه متقارن ــ بارگذاری متقارن

این قاب (که خرپای ویرندیل خوانده می‌شود) فقط حول محور عمودی خود دارای تقارن باشد ، هرگاه حل این قاب تحت اثر بارگذاری نامتقارن نظیر شکل (۱۳-۳۱ الف) مطرح باشد اگر از روش شیب ــ تغییر مکان استفاده کنیم جمعاً" به ۱۱ مجهول خواهیم رسید ــ 8 زاویه θ و 3 زاویه ψــ حال اگر بارگذاری را به دو دستگاه بارگذاری که یکی از آنها مطابق شکل (۱۳-۳۱ ب) دارای تقارن و دیگری مطابق شکل (۱۳-۳۱ ج) دارای ضدتقارن می‌باشد



شکل ۱۳-۳۱ کاربرد بارگذاری متقارن و با ضد تقارن

تجزیه کنیم واضح است که جمع این دو دستگاه بارگذاری برابر با بارگذاری موجود بوده و بنابراین جمع نتایج حاصل از این دو دستگاه بارگذاری متفاوت مساوی نتایج حاصل از بارــ گذاری معلوم خواهد بود .

حال به‌مقایسه حجم محاسباتی تحلیل سازه با بار نامتقارن با جمع حجم محاسباتی لازم برای بارگذاری متقارن و با ضد تقارن می‌پردازیم . در مورد بارگذاری متقارن فقط پنج مجهول مستقل خواهیم داشت ــ چهار زاویه θ و یک زاویه ψ زیرا که به‌دلیل تقارن داریم :

$$\theta_a = -\theta_d \qquad \theta_b = -\theta_c \qquad \theta_e = -\theta_h \qquad \theta_f = -\theta_g$$
$$\psi \text{ cols} = \psi_{fg} = 0 \qquad \psi_{ef} = -\psi_{gh}$$

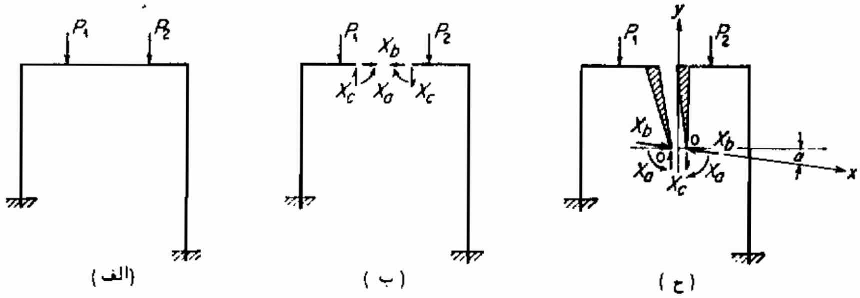
در حالت بارگذاری با ضد تقارن شش مجهول مستقل خواهیم داشت ــ چهار زاویه θ و دو زاویه ψ ــ زیرا در این حالت به‌دلیل ضد تقارن داریم :

$$\theta_a = \theta_d \qquad \theta_b = \theta_c \qquad \theta_e = \theta_h \qquad \theta_f = \theta_g \qquad \psi_{ef} = \psi_{gh}$$

از آنجائی که حجم محاسباتی به‌طور تقریبی متناسب با مجذور تعداد مجهولات می‌باشد اگر

بارگذاری متقارن و با ضد تقارن را برگزینیم تقریبا" حجم محاسباتی به‌نصف خواهد رسید . چنین عملی درمورد سازه‌های متقارن بسیارمفید است و سزاواراست که دراین زمینه‌به‌مطالعه بیشتری پرداخته شود*.

روش "مرکز ارتجاعی" نیز روش مفید دیگری است که در اینجا از آن ذکری بـه میان نیامد**. روش مرکز ارتجاعی را می‌توان در مورد سازه‌هائی که دارای شکل بسته‌ای می‌باشند نظیرقابی‌که در شکل (۱۳ــ۳۱) نشان داده شده به‌کار برد . در قابهایی از این قبیل، زمین به‌عنوان ضلع دیگرآن به‌حساب می‌آید ، این قاب را می‌توان با استفاده از معادلات‌انطباق (رویهم‌گذاری)تحلیل نمود ، در این صورت مجهولات آن را می‌توان مطابق شکل (۱۳ــ۳۲ ب) بر گزید که در این صورت دقیقا" مطابق شکل (۱۳ــ۱۴) خواهد بود ، اگر به‌این‌ترتیب



شکل ۱۳ــ۳۲ کاربرد مرکز ارتجاعی

عمل کنیم حل مساله منجر به‌حل دستگاه سه معادله سه‌مجهولی زیر می‌گردد :

$$\Delta_{ao} + X_a\delta_{aa} + X_b\delta_{ab} + X_c\delta_{ac} = 0$$
$$\Delta_{bo} + X_a\delta_{ab} + X_b\delta_{bb} + X_c\delta_{bc} = 0$$
$$\Delta_{co} + X_a\delta_{ac} + X_b\delta_{bc} + X_c\delta_{cc} = 0$$

اگر بتوانیم این سه مجهول را به‌نوعی انتخاب کنیم که δ_{ab} ، δ_{ac} و δ_{bc} برابربا صفرشود دراین صورت هریک ازاین معادلات فقط شامل یک مجهول بوده و لذا نیازی به‌حل دستگاه سه مجهولی نخواهد بود . چنین عملی با اعمال این سه مجهول به‌نقطه‌ای نظیر o از شکل

* J. S. Newell, Symmetric and Anti-symmetric Loadings, *Civil Eng*
شماره آوریل سال ۱۹۳۹ مجله Civil Eng

W. L. Andrée, Das B = *U* Verfahren, R. Oldenbourg-Verlag, Munich, 1919

** W. M. Fife and J. B. Wilbur, "Theory of Statically Indeterminate Structures,

McGraw-Hill Book Company,

(۱۳–۳۲ج) به‌نحوی که مولفه‌های نقطه o و زاویه تمایل محور x یعنی α به‌نوعی انتخاب گردند که δ_{ab} و δ_{ac} و δ_{bc} همگی برابر صفر شوند ممکن می‌گردد. فرض می‌شود که این مجهولات که بر نقطه o اثر می‌کنند توسط دو بازوی صلب (غیرقابل تغییرشکل) به دوطرف برش ایجاد شده در شاهتیر متصل شده باشند، البته واضح است که دو دسته مجهولاتی که در شکل‌های (۱۳–۳۲ب) و (۱۳–۳۲ج) نشان داده شده‌اند از نظر تعادل معادل یکدیگر بوده ولی دارای یک مقدار نخواهند بود.

جزئیات محاسباتی مربوط به‌کاربرد روش مرکز ارتجاعی بیشتر شبیه محاسبه لنگر سطح و حاصل ضرب لنگر لختی و یا لنگرلختی سطوح می‌باشد، پرفسور هاردی کراس بدین‌موضوع پی برده و محاسبات مربوط به آن را مانند محاسبات مربوط به‌ستونی که تحت اثر ترکیبی‌از خمش و تنش مستقیم قرار دارد ارائه نموده است، وی این چنین ارائه محاسباتی را روش "تشابه ستونی" نامیده است*.

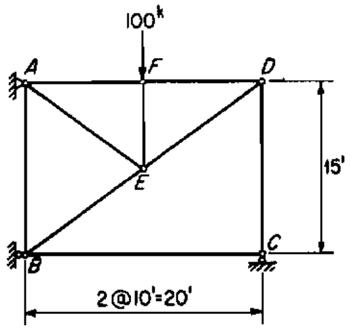
۱۳ – ۲۰ مسائل

۱۳ – ۱ کلیه عکس‌العمل‌های‌سازه شکل (۱۳–۳۲) را با استفاده از معادلات انطباق به‌عنوان راه حل محاسباتی معین کنید، برای کلیه قطعات $L/A = 1$ گرفته شود.

جواب :

در A به‌سمت بالا 83^k و به‌سمت چپ 44^k

در B 44^k به‌سمت راست و در C 17^k به‌طرف بالا.

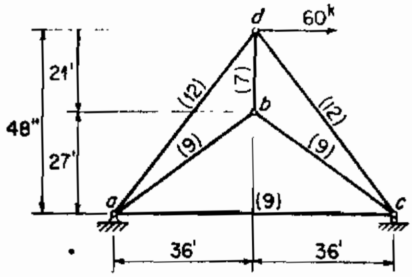


شکل ۱۳–۳۲ مساله ۱۳–۱

---

* H. Gross and N.D. Morgan, "Continuous Frames of Reinforeed Concrete," John Wiley & Sons, Inc., New York. 1932.

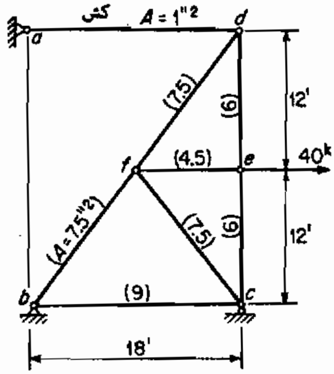
۱۳ – ۲ نیروی میله را در اعضای خرپای شکل (۱۳–۴۴) با استفاده از روش انطباق محاسبه کنید ، سطح مقطع اعضاء را بر حسب اینچ مربع در داخل پرانتز نشان داده‌ایم .



شکل ۱۳–۴۴ مساله ۱۳–۲

۱۳ – ۳ با استفاده از روش معادلات انطباق مقدار نیروی میله را در میلگرد کششی ad از سازه شکل (۱۳–۳۵) معین کنید سطح مقاطع اعضاء را برحسب اینچ مربع در داخل پرانتز نشان داده‌ایم .

جواب : $F_{ad} = +3.06^k$



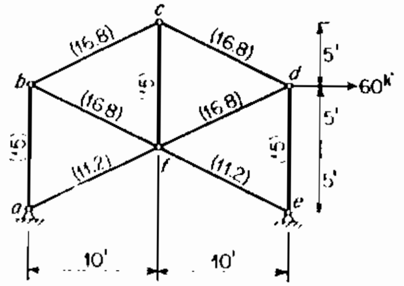
شکل ۱۳–۳۵ مساله ۱۳–۳

۱۳ – ۴ با استفاده از معادلات انطباق نیروی میله را در کلیه قطعات طاق شکل (۱۳–۳۶) محاسبه کنید . سطح مقاطع اعضاء را بر حسب اینچ مربع در داخل پرانتز ذکر کرده‌ایم .

$E = 30 \times 10^3$ kips per sq in., $\alpha_t = 1/150{,}000$ per °F.

جواب :

$F_{ab} = +14.4^k; F_{cd} = -15.6^k; F_{bc} = +16.1^k$



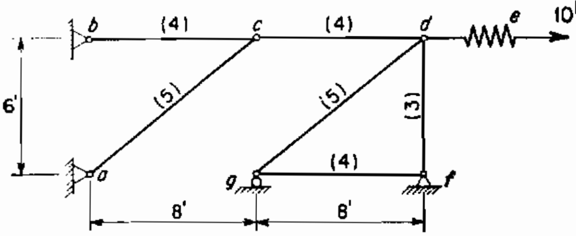
شکل ۱۳–۳۶ مساله ۱۳–۴

۱۳ – ۵ مولفه افقی عکس‌العمل راست طاق مساله (۱۳–۴) را در هریک از شرایط زیر پیدا کنید. ((الف) در صورت افزایش درجه حرارت به‌مقدار 50°F در میله‌های ab, bc, cd, de درسایر میله‌ها تغییر بوجود نمی‌آید. (ب) اگر میله‌های bc و cd در اثر خطای ناشی از ساخت به‌اندازهٔ ¼ in کوتاهتر و میله cf به‌اندازه ⅛ in طویلتر شده و لذا لازم شودکه آنها را با اعمال زور در جای خود قرار دهند (ج) اگر تکیه‌گاهها به‌مقادیر زیر نشست داشته باشند:

تکیه‌گاه چپ:	عمودی =	0.48 in	به‌سمت پائین
	افقی =	0.24 in	به‌سمت چپ
تکیه‌گاه سمت راست:	عمودی =	0.24 in	به‌سمت پائین
	افقی =	0.36 in	به‌سمت راست.

جواب: 58.65^k به‌سمت راست (ب) 222.5^k به‌سمت چپ (ج) 391^k به‌سمت‌راست.

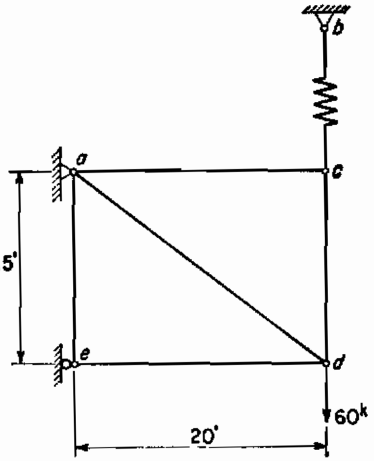
۱۳ – ۶ عکس‌العمل‌ها و نیروی میله را در کلیه اعضای سازه شکل (۱۳–۳۷) محاسبه کنید، سطح مقاطع اعضاء را در داخل پرانتز نشان داده‌ایم. آزمایش فنر de نشان می‌دهد که نیرویی برابر با 20 kips سبب ازدیادطولی برابر با 1 in در آن می‌گردد. $E = 30{,}000$ kips sq in



شکل ۱۳–۳۷ مساله ۱۳–۶

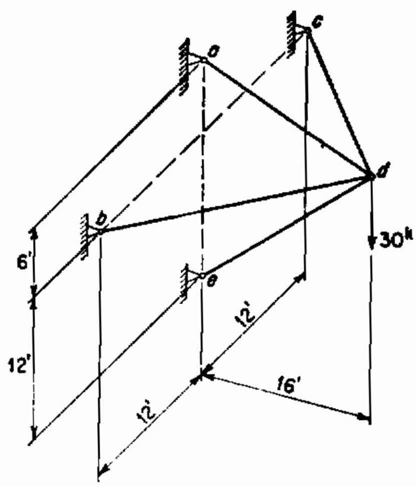
۱۳ – ۷ مولفه افقی تغییر مکان‌گره d را تحت اثر بار وارده برسازهٔ شکل (۱۳–۳۸) محاسبه

کنید . سختی فنر bc به‌نوعی است که تحت اثر نیروی کششی 1 kip ازدیاد طولی برابر با 0.036 پیدا می‌کند ، برای سایر قطعات $A = 2$ in ۸ $E = 30,000$ kips/sq in



شکل ۱۳–۳۸ مساله ۱۳–۷

۱۳ – ۸ کلیه گرههای سازه شکل (۱۳–۳۹) از مفصلهای بدون اصطکاک تشکیل شده است ، گرههای b ، c و d در یک‌صفحه افقی واقعند ، برای سایر قطعات $A=3$ in $E=30,000$ kips/sqin می‌باشد . نیروی میله‌ها را در کلیه قطعات این سازه تحت اثر نیروی عمودی 30-kip محاسبه کنید .



شکل ۱۳–۳۹ مساله ۱۳–۸

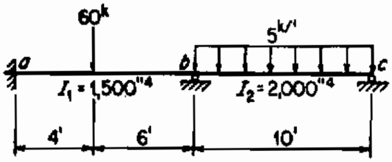
۱۳ ــ ۹ تیر شکل(۱۳ــ۴۰)را در نظر بگیرید .

(الف) به‌نحوی منطقی (که به‌شرح آن خواهید پرداخت) مقادیر عکس‌العمل‌های این تیر را حدس بزنید ،البته بایستی مطمئن شویدکه این مقادیرحدسی شما حداقل درمعادلات تعادل صدق می‌کنند ،و نمودارهای برش لنگرخمشی را برای راه‌حل خود رسم نموده‌ومنحنی چند تیر را نیز رسم کنید .

(ب) با استفاده از معادلات انطباق برای حل این تیر تحلیل کامل تیررا تحت اثر بارگذاری آن انجام داده و نمودارهای برش و لنگر خمشی را برای نتایج حاصله رسم کنید .

(ج) تحلیل تیر را فقط برای نشست عمودی تکیه‌گاه b برابر با 0.24 in و دوران تکیه‌گاه a درجهت ساعتگرد برابر با 0.005 رادیان انجام‌دهید $E = 30{,}000$ kips/sq in

(د) مقادیری را که شما در قسمت a برای عکس‌العمل‌ها حدس زده‌ایددرحالت‌کلی تغییر مکانهای سازگاری را در سازه ایجاد نخواهند کرد . به‌عنوان مثال به‌جای آن که تکیه گاهها از جای خود تغییر مکان ندهند مقادیر حدسی شما سبب ایجاد مقداری تغییرمکان‌در تکیه‌گاه خواهد شد ، مقادیرجابجایی (تغییرمکان)که در اثرمقادیر حدسی شما ایجاد می‌شود چه مقدار خواهند بود ؟

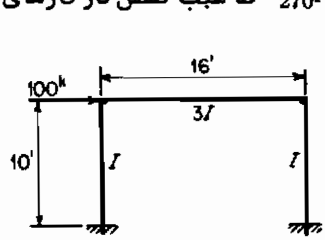


شکل (۱۳ــ۴۰) مساله ۱۳ ــ ۹

۱۳ ــ ۱۰نمودار لنگر خمشی را برای قاب شکل (۱۳ــ۴۱) رسم کنید ، برای این عمل ازقضیه کاستیگلیانو استفاده نمائید و فقط تغییرشکل خمشی را در نظر بگیرید .

جواب :

مقدار M در پی ستون 270k' که سبب کشش در تارهای سمت چپ می‌نماید .



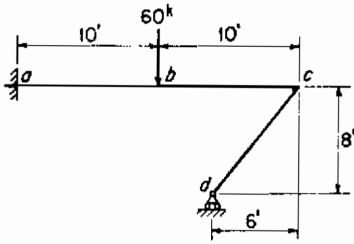
شکل ۱۳ــ۴۱ مساله ۱۳ــ۱۰

۱۳ ــ ۱۱ عکس‌العملهای سازه شکل (۱۳ــ۴۲) را محاسبه کنید . از تغییرشکل حاصل‌ازنیروی

محوری صرف‌نظر نمائید ، E و I دارای مقادیر ثابتی هستند .

جواب : $R_{ax} = 0$ $R_{ay} = 31.1^k$ وبه‌سمت‌بالا $M_a = 195.4^{k'}$

در جهت عکس عقربه‌های ساعت ، $R_{dy} = 28.9^k$ و به‌سمت بالا .



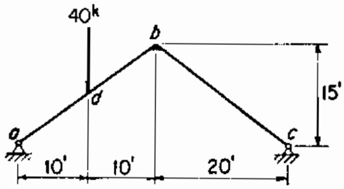
شکل ۱۳–۴۲ مساله ۱۳–۱۱

۱۳ ـ ۱۲ عکس‌العملهای سازه شکل (۱۳–۴۳) را محاسبه کنید از تغییر شکل حاصل از نیروی محوری صرف‌نظر کنید ، E و I دارای مقادیر ثابتی هستند .

جواب :

$R_{ax} = 18.3^k$ و به‌سمت راست ، $R_{ay} = 30^k$ و به‌سمت بالا ،

$R_{cx} = 18.3^k$ و به‌سمت چپ ، $R_{cy} = 10^k$ و به‌سمت بالا .

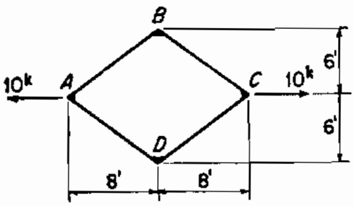


شکل ۱۳–۴۳ مساله ۱۳–۱۲

۱۳ ـ ۱۳ برای عضو AB از قاب شکل (۱۳–۴۴) نمودارهای برش و لنگر خمشی رارسم کنید. از تغییرشکل حاصل از نیروی محوری صرف‌نظر نمائید .

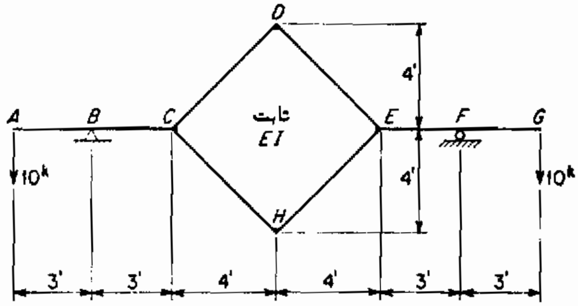
جواب :

برش دارای مقدار ثابتی برابر با 3^k می‌باشد ، $M_A = 15^{k'}$ که ایجاد کشش در تارهای خارجی می‌کند ، $M_B = 15^k$ که ایجاد کشش در تارهای داخلی می‌نماید .



شکل ۱۳–۴۴ مساله (۱۳–۱۳

۱۳ ــ ۱۴ سازه شکل (۱۳ــ۴۵) را تحلیل نموده و برای قطعه CD نمودار لنگر خمشی‌را رسم کنید .



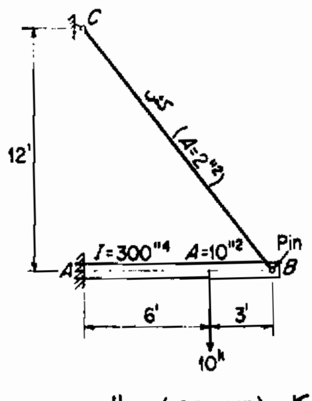
شکل ۱۳ــ۴۵ مساله ۱۳ــ۱۴

۱۳ ــ ۱۵ با در نظر گرفتن شکل (۱۳ــ۴۶) منحنی لنگر خمشی را برای تیر AB رسم نمائید از قضیه کاستیگلیانو استفاده شود .

جواب :

برش از A تا بارگذاری $+5.31^k$ = و برش از بارگذاری تا $B = -4.69^k$ $M_A = 17.81^{k'}$

M مقطع بار $+14.07^{k'}$



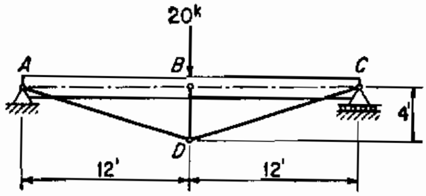
شکل (۱۳ــ۴۶) مساله ۱۳ ــ ۱۵

۱۳ ــ ۱۶ با درنظرگرفتن شکل (۱۳ــ۴۷) نیروهای محوری را در اعضاء خرپا تحت اثر بارگذاری آن محاسبه کنیدهمچنین منحنی لنگر خمشی را برای قطر AC رسم کنید .

برای قطعه AC $I = 432$ in.⁴ $A = 12$ in

برای قطعه AD $A = 3$ in

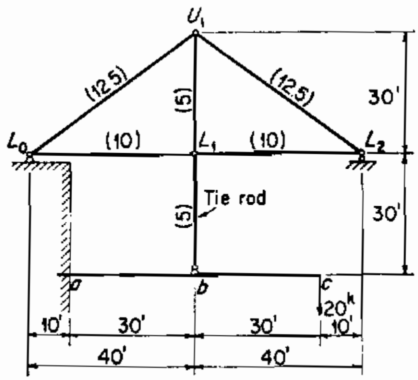
برای قطعه DC $A = 3$ in برای قطعه BD $A = 2$ in



شکل ۱۳–۴۷ مساله ۱۳–۱۶

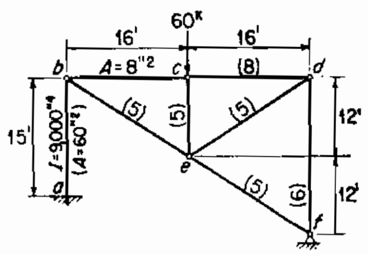
۱۳ ـ ۱۷ در سازه شکل (۱۳–۴۸) سطح مقاطع را برحسب اینچ مربع در داخل پرانتز نشان داده‌ایم $E = 30 \times 10^3$ kips/in^2 و $I = 4{,}000$ in.^{4} برای تیرمی‌باشد ،مقدار نیرورا درداخل میله کششی که تیر را به‌خرپا متصل‌می‌سازد محاسبه‌کنید دو انتهای این‌میله مفصلی‌می‌باشد .

جواب : $F_{L_1b} = +47.0^k$



شکل ۱۳–۴۸ مساله ۱۳–۱۷

۱۳ ـ ۱۸ عکس‌العمل‌های سازه شکل (۱۳–۴۹) را محاسبه کنید .



شکل ۱۳–۴۹ مساله ۱۳–۱۸

۱۳ ـ ۱۹ با در نظر گرفتن شکل (۱۳–۵۰)

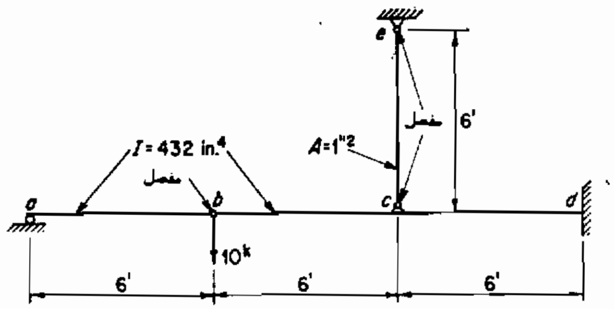
(الف) عکس‌العمل حاصل از بار وارده را محاسبه کنید

(ب) فرض کنید که میله کششی ec را حذف کرده و به‌جای آن در نقطه c یک‌تکیه ـ گاه غلتکی برای تیر ایجاد کنیم در صورتی که بار وارده نیز حذف نمائیم ولی سازه بدست آمده را تحت اثر جابجایی تکیه‌گاهی زیر قرار دهیم مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهها را محاسبه کنید .

تکیه‌گاه a نشستی برابر با 0.72 in به‌سمت پائین

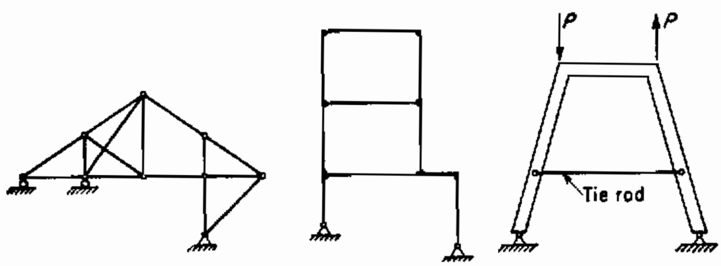
تکیه‌گاه c نشستی برابر با 0.12 in به‌سمت پائین

تکیه‌گاه d دورانی برابر با 0.005 رادیان در جهت عکس عقربه‌های ساعت .



شکل ۱۳ــ۵۰ مساله ۱۳ــ۱۹

۱۳ ــ ۲۰ سازه‌های شکل (۱۳ــ۵۱) را از نظر پایداری و معین بودن مورد بحث قرار دهید و در صورت نامعین بودن انتخاب مجهولات خود را بیان کنید ، در مورد سازه سمت راست دلیل خود را در مورد تحلیل تنش آن با استفاده از اصول تقارن و ضد تقارن بیان کنید .



شکل ۱۳ــ۵۱ مساله ۱۳ــ۲۰

۱۳ ــ ۲۱ تیر سرتاسری دو دهانه مساله (۱۳ــ۹) را در نظر بگیرید و فرض کنید بااضافه ـ نمودن تسمه به‌پروفیل آن لنگر لختی دهانه را به‌دوبرابر برسانیم در صورت اعمال چنین تغییری اثر آن را بر روی نتایج حاصل قبلی در مورد زیر چه خواهد بود :

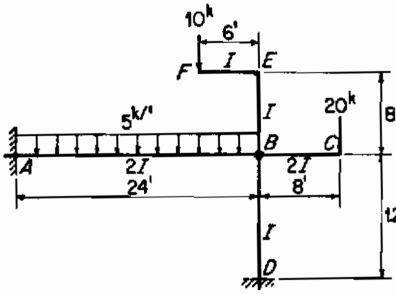
(الف) لنگر خمشی محاسبه شده با در نظر گرفتن بارگذاری معلوم .
(ب) لنگر خمشی محاسبه شده برای جابجایی تکیه‌گاهها .
(ج) تغییر مکانهای حاصل از خمش برای جابجایی تکیه‌گاهها .
(د) شدت تنش حاصل از خمش که برای جابجایی‌های تکیه‌گاهی محاسبه شده است .

۱۳ ــ ۲۲ با مراجعه به‌شکل (۱۳ــ۵۲) و با استفاده از روش شیب ــ تغییرمکان لنگرهای انتهایی را در کلیه قطعات این قاب محاسبه کرده و منحنیهای لنگر را برای قطعات AB و BD رسم کنید .

جواب :

با در نظر گرفتن علائم شیب تغییرمکان $M_{AB} = -275^{k'}$

$M_{DB} = -35^{k'}$ $M_{BD} = -70^{k'}$ $M_{BA} = +170^{k'}$



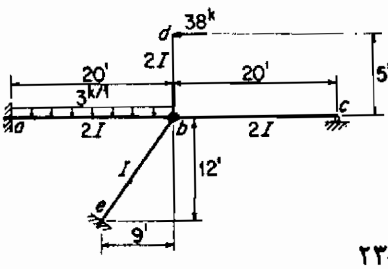
شکل ۱۳ــ۵۲ مساله ۱۳ــ۲۲

۱۳ ــ ۲۳ بامراجعه به‌شکل (۱۳ــ۵۳) و با استفاده از روش شیب تغییرمکان لنگرهای انتهایی را در کلیه قطعات این قاب محاسبه کنید . منحنیهای برش و لنگر را برای قطعه ab رسم نمائید .

جواب :

با در نظر گرفتن علائم شیب ــ تغییرمکان $M_{ab} = -160^{k'}$

$M_{eb} = -40^{k'}$ $M_{be} = -80^{k'}$ $M_{bc} = -90^{k'}$ $M_{ba} = -20^{k'}$



شکل ۱۳ــ۵۳ مساله ۱۳ــ۲۳

۱۳ ــ ۲۴ قسمتهای(ب)و(ج)از مساله (۱۳ــ۹)را با استفاده‌از روش شیب ــ تغییرمکان محاسبه کنید .

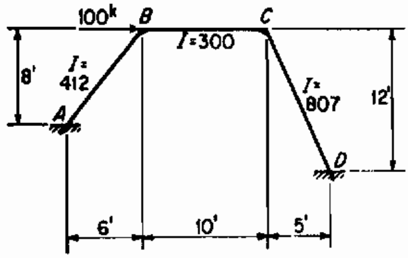
۱۳ ــ ۲۵ بااستفاده از روش شیب ــ تغییرمکان لنگرهای انتهایی و عکس‌العملهای تکیه‌گاهی قاب شکل (۱۳ــ۵۴) را محاسبه کنید .

جواب :

با در نظر گرفتن علائم شیب ــ تغییرمکان $M_{AB} = -164.6^{k'}$

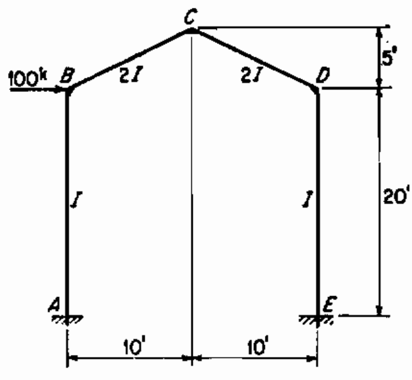
$M_{BC} = +150.2^{k'}$ $M_{BA} = -150.2^{k'}$ $M_{CB} = +147.4^{k'}$

$M_{CD} = -147.4^{k'}$ $M_{DC} = -163.5^{k'}$



شکل ۱۳ــ۵۴ مساله ۱۳ــ۲۵

۱۳ ــ ۲۶ با استفاده از روش شیب ــ تغییرمکان کلیه لنگرهای انتهایی و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی قاب شکل (۱۳ــ۵۵) را محاسبه کنید .

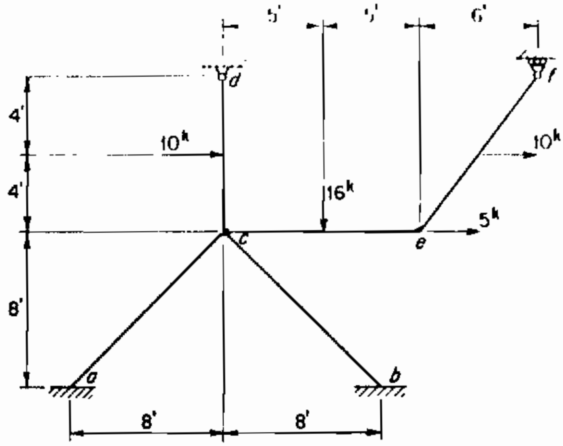


شکل ۱۳ــ۵۵ مساله ۱۳ــ۲۶

۱۳ ــ ۲۷ در هر صورت حل کامل سازه شکل (۱۳ــ۵۶) موردنیاز نمی‌باشد ولی :

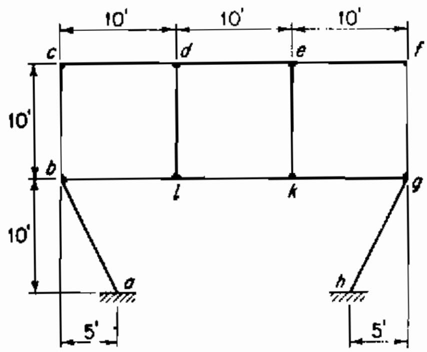
(الف) زوایای مستقل θ و ψ را مشخص کنید ، اگر بین برخی از زوایای ψ رابطه‌ای وجود دارد آن رابطه را تعیین کنید .

(ب) معادلات تعادل را که اساس حل این سازه به‌روش شیب ـ تغییرمکان می‌باشد بنویسید .



شکل ۱۳ـ۵۶ مساله ۱۳ـ۲۷

۱۳ ـ ۲۸ فرض کنید که سازه شکل (۱۳ـ۵۷) حول محور عمودی خود دارای تقارن باشد .
(الف) زوایای مستقل θ ، ψ را معین کرده و معادلات تعادل موجود را با فرض این که بارگذاری این قاب نسبت به‌محور عمودی دارای تقارن باشد بنویسید .
(ب) همین عمل را برای بارگذاری با ضد تقارن انجام دهید .



شکل ۱۳ـ۵۷ مساله ۱۳ـ۲۸

۱۳ ـ ۲۹ با ملاحظه شکل (۱۳ـ۵۸) و به‌کاربردن پخش لنگر لنگرهای انتهایی را در قطعات این قاب محاسبه کرده و منحنیهای برش و لنگر را برای قطعه AB رسم کنید .
جواب :

با در نظر گرفتن علائم شیب ـ تغییرمکان $M_{AB} = -180.8^{k'}$

$M_{DB} = -10.3^{k'}$ $M_{BD} = -28.3^{k'}$ $M_{BA} = +88.3^{k'}$

$M_{DE} = +5.1^{k'}$ $M_{DF} = +5.1^{k'}$

۱۳ ــ ۳۰ قسمتهای الف و ب مساله (۱۳ــ۹) را با استفاده از پخش لنگر محاسبه کنید .

۱۳ــ۳۱ با ملاحظه شکل (۱۳ــ۵۹) لنگرهای انتهایی این قاب را با استفاده از روش پخش لنگر محاسبه کنید .

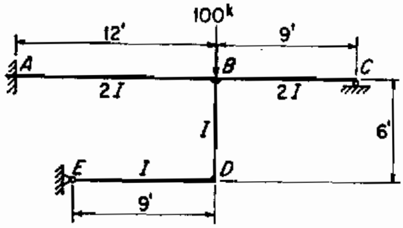
جواب :

با در نظر گرفتن علائم شیب تغییر مکان

$M_{AB} = -338^{k'}$

$M_{BC} = +294^{k'}$ $M_{BA} = -340^{k'}$ $M_{DE} = -98.6^{k'}$

$M_{DB} = +98.6^{k'}$ $M_{BD} = +46^{k'}$



شکل ۱۳ــ۵۹ مساله ۱۳ــ۳۱

۱۳ ــ ۳۲ با استفاده از روش پخش لنگر لنگرهای انتهایی قطعات قاب شکل (۱۳ــ۶۰) را محاسبه کنید .

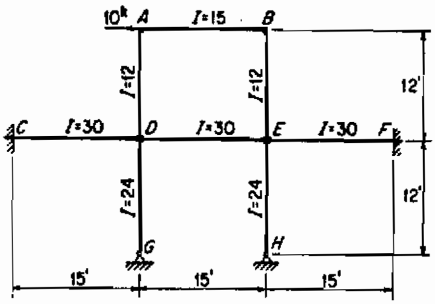
جواب :

با در نظر گرفتن علائم شیب ــ تغییرمکان

$M_{AB} = +26.8^{k'}$

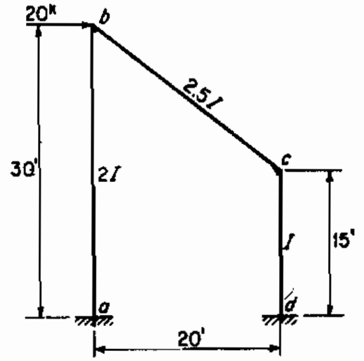
$M_{AD} = -26.8^{k'}$ $M_{DA} = -33.2^{k'}$ $M_{DG} = +7.7^{k'}$

$M_{DC} = +10.4^{k'}$ $M_{DE} = +15.2^{k'}$



شکل ۱۳ــ۶۰ مساله ۱۳ــ۳۲

۱۳ ــ ۳۳ باملاحظه شکل (۱۳ــ۶۱) لنگرهای انتهایی را درقطعات این قاب بااستفاده از روش پخش لنگر محاسبه کنید .



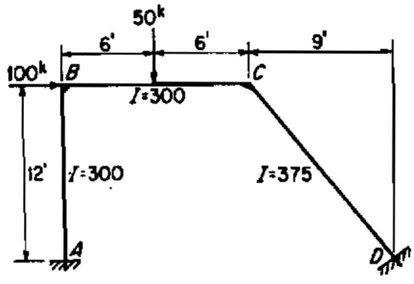
شکل ۱۳ــ۶۱ مساله ۱۳ــ۳۳

۱۳ ــ ۳۴ با ملاحظه شکل (۱۳ــ۶۲) ، لنگرهای انتهایی این قاب را با استفاده‌ازروش پخش لنگر پیدا کنید .

جواب :

با در نظرگرفتن علائم شیب ــ تغییر مکان $M_{BA} = -123.6^{k'}$

$M_{CD} = -223.6^{k'}$ $M_{AB} = -158.2^{k'}$ $M_{DC} = -208.2^{k'}$



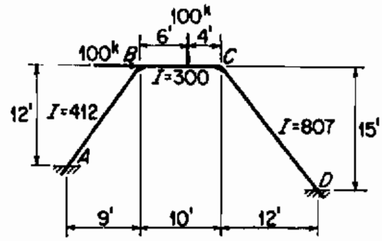
شکل ۱۳ــ۶۲ مساله ۱۳ــ۳۴

۱۳ ــ ۳۵ برای قاب‌شکل (۱۳ــ۶۳)منحنی‌های لنگر خمشی را با استفاده از روش پخش لنگر رسم نمائید .

جواب :

با در نظرگرفتن علائم شیب ــ تغییر مکان $M_{BA} = -55.6^{k'}$

$M_{CD} = -233.4^{k'}$ $M_{DC} = -167.6^{k'}$ $M_{AB} = -69.2^{k'}$



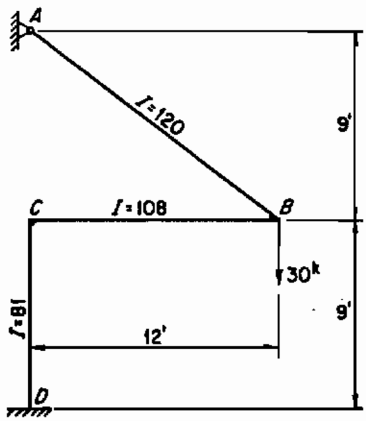
شکل ۱۳ــ۶۳ مساله ۱۳ــ۳۵

۱۳ ــ ۳۶ سازه شکل (۱۳ــ۶۴) را در نظر بگیرید .

(الف) با استفاده از روش پخش لنگر کلیه لنگرهای انتهایی حاصل از بارگذاری‌نشان داده شده را در کلیه قطعات آن محاسبه کنید .

(ب) با استفاده‌از نتایج حاصل ازقسمت(الف)توضیح دهید که چگونه تغییرمکان‌افقی C را محاسبه خواهید کرد .

(ج) چه مقدار نیروی افقی می‌بایستی به‌گره C وارد کنیم تا آن را به‌وضعیت اصلی خود برگردانیم .



شکل ۱۳ــ۶۴ مساله ۱۳ــ۳۶

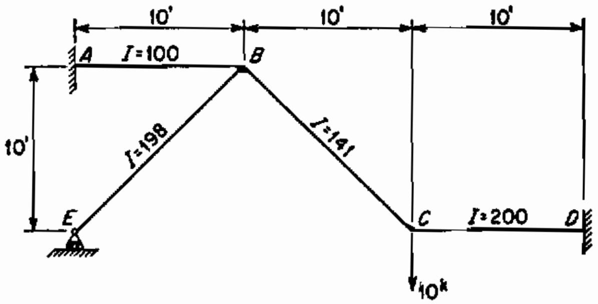
۱۳ ــ ۳۷ سازه شکل (۱۳ــ۶۵) را در نظر بگیرید .

(الف) با استفاده از روش پخش لنگر کلیه لنگرهای انتهایی حاصل از بارگذاری‌نشان داده شده را در این سازه محاسبه کنید .

(ب) فرض کنید که گره B این سازه را توسط میله کششی که با مفصل به‌آن گره وصل می‌شود به‌تکیه‌گاهی درفاصله 12 ft بالای آن گره وصل کنیم ، نیروی محوری‌حاصل دراین

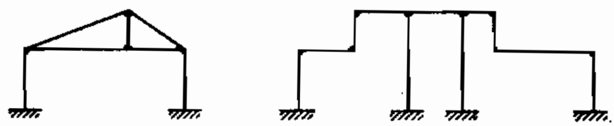
میله کششی را که در اثر نیروی عمودی 10-kip که بر گره C وارد می‌شود محاسبه کنید ، از تغییر طول محوری حاصل در این میله صرف نظر نمائید .

(ج) شرح دهید که چگونه می‌توان اثر تغییر طول محوری میله کششی را در عملیات روش پخش لنگر داخل نمود .



شکل ۱۳–۶۵ مساله ۱۳–۳۷

۱۳ – ۳۸ فرض کنید که سازه‌های شکل (۱۳–۶۶) نامتقارن باشند ، با استفاده از شکلهای مناسب نظر خود را در مورد حل هریک از آنها به‌حالات مختلفی توسط روش پخش لنگر بیان کنید .



شکل ۱۳–۶۶ مساله ۱۳–۳۸

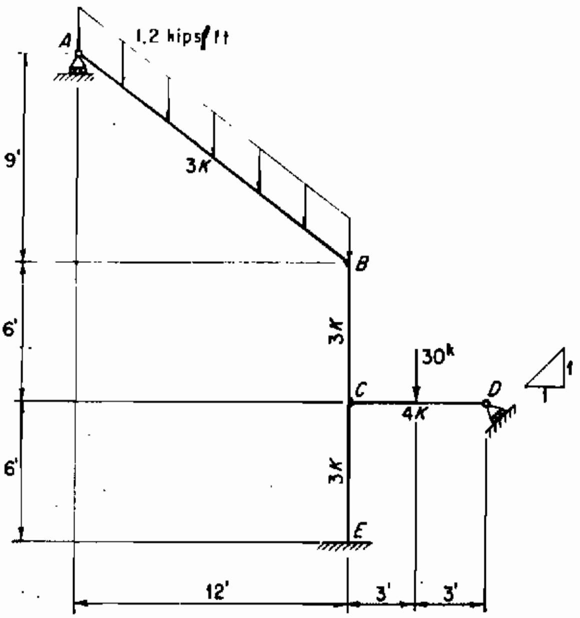
۱۳ – ۳۹ کلیه لنگرهای انتهایی را در اعضای قاب شکل (۱۳–۶۷) را محاسبه کنید .

جواب :

با در نظر گرفتن علائم شیب – تغییر مکان $M_{BA} = -M_{BC} = +8.6^{k'}$

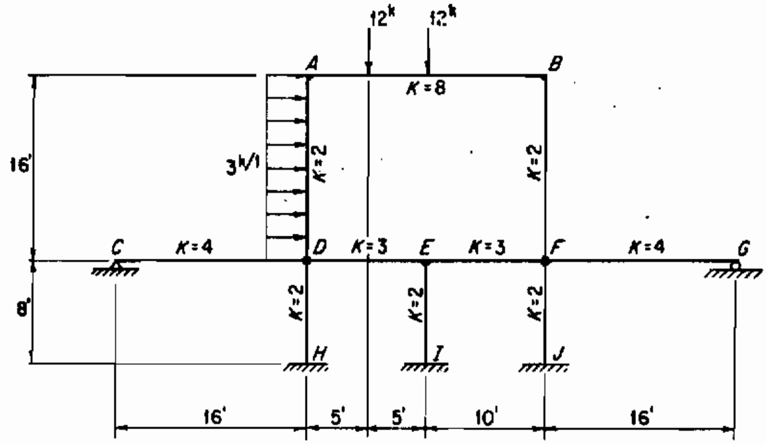
$M_{CB} = +8.6^{k'}$ $M_{CD} = -37.2^{k'}$ $M_{CE} = +28.7^{k'}$

$M_{EC} = +23.9^{k'}$



شکل ۱۳—۶۷ مساله ۱۳—۳۹

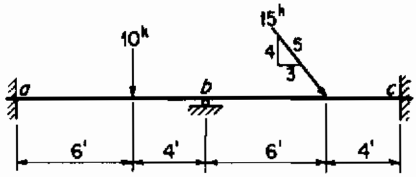
۱۳ — ۴۰ با استفاده از اصول تقارن و ضد تقارن لنگرهای انتهایی کلیه قطعات قاب شکل (۱۳—۶۸) را با استفاده از روش پخش لنگر محاسبه کنید .



شکل ۱۳—۶۸ مساله ۱۳—۴۰

۱۳ — ۴۱ تیر شکل (۱۳—۶۹) را در نظر بگیرید در این تیر $I = 500$ in.^{4} و $A = 30$ in مقدار $E = 30 \times 10^3$ kips / sq in می‌باشد . حل این مساله را در روشهای مختلف ،شیب —

تغییرمکان قضیه سه لنگر و معادلات انطباق با هم مقایسه کنید . سوال : این تیرچند درجه نامعین می‌باشد ؟
آیا عکس‌العمل‌های افقی‌را با استفاده ازروشهای سه لنگر و شیب تغییر مکان می‌توان‌محاسبه نمود ؟ کدام یک از این روشها بر همه برتری دارند ؟ تعداد معادلات ایجاد شده در هریک از این راه حلها چه می‌باشد ؟



شکل ۱۳–۶۹ مسئله ۱۳–۴۱

۱۳ – ۴۲ مقدارزوایای‌مستقل ψ و θ را در هریک ازسازه‌های‌شکلهای (۱۳–۱۲) و (۱۳–۱۵) محاسبه کنید .

۱۴

خطوط تأثیر سازه‌های نامعین

۱۴ ـ ۱ مقدمه

در فصل ۱۳ روشهای گوناگون تحلیل سازه‌های نامعین مورد بحث و بررسی قرارگرفت و در کلیه حالات موردبحث سازه‌های مورد نظر تحت اثر یک نوع بارگذاری معینی قرارگرفته بودند . اغلب لازم است که یک سازهٔ نامعین را تحت اثر بارهای منقول و یا متحرک‌بررسی نمائیم ، در چنین حالاتی بهتر است برای‌مولفه‌های مختلف تنش خطوط تاثیر و یا جدول تاثیر تهیه نمود ، زیرا از طریق آنها می‌توان هم چگونگی بارگذاری سازه را جهت محاسبه اثر حداکثر معین کرد و هم قادر خواهیم بود مقدار این اثر حداکثر را محاسبه نمائیم .

در فصل ۶ چگونگی تهیه و کاربرد خطوط تاثیر را برای سازه‌های معین شرح داده‌ایم، در چنین حالاتی دیدیم که پس از قدری تمرین می‌توان یک خط تاثیر را با مشخص کردن چندین عرض اصلی آن و اتصال‌دادن آن عرضها به‌یکدیگر توسط خطوط مستقیم رسم کرد . خطوط تاثیر سازه‌های نامعین را نمی‌توان به‌همان راحتی رسم کرد زیرا در این حالت خطوط تاثیرعموما" یامنحنی شکل هستند و یا ازچندین خط شکسته که منحنی‌وار بهم وصل شده‌اند تشکیل یافته‌اند .

خوشبختانه اغلب‌خطوط تاثیر این‌نوع سازه‌ها ازنوع دوم هستند ،اگر یک سازه نامعین در نقاط پانلی خود از طریق تیرهای عرضی کف ــ که این تیرها نیز به‌نوبت خود به‌وسیله تیرهای طولی بار شده‌اندــ بارگذاری شده باشد در این حالت تیرهای طولی در حد فاصل تیرهای عرضی کف مانند تیرهای ساده عمل می‌کنند ، به‌سادگی می‌توان نشان داد که کلیه خطوط تاثیر این سازه نامعین در حد فاصل نقاط پانلی از خطوط مستقیم تشکیل یافته‌اند ولی اگر تیرهای طولی به‌صورت تیرهای سرتاسری روی چند تیر عرضی اثر کنندخطوط تاثیر بین نقاط پانلی به‌شکل منحنی در خواهد آمد . در اغلب حالات عملی ، انحراف‌این‌خطوط منحنی از خطوط مستقیم‌الخط بین نقاط پانلی بسیار اندک است . اگر بار متحرک بر یک پل

از طریق تیرهای کف و تیرهای عرضی اثر نکند و بر سازهٔ دیگری وارد شود در این صورت نیز خطوط تاثیر مربوطه به‌شکل خطوط منحنی خواهند بود .

اولین قدم دررسم خطوط تاثیربرای تنشهای مختلف یک سازه‌نامعین ، تعیین خطوط تاثیر برای قیدهای اضافی آن می‌باشد . پس از آن که چنین عملی انجام شد تعیین خطوط تاثیر برای عکس‌العمل نیروهای میله ،برش یا لنگر به‌کمک معادلات تعادل امکان‌پذیر خواهد بود .

۱۴ ـ ۲ رسم خطوط تاثیر به‌کمک وضعیتهای متعدد بار واحد

در فصل ۶ خاطرنشان کردیم که عرضهای خط‌تاثیر یک کمیت را همواره می‌توان با قراردادن بار واحد در وضعیتهای مختلفی که در آن نقاط امکان اثر بار بر سازه وجود دارد با محاسبه مقدار آن کمیت در هر وضعیت جدید تعیین نمود . چنین روشی را می‌توان برای به‌دست‌آوردن خطوط تاثیر اتصالات (قیدهای) اضافی یک سازهٔ نامعین به‌کار برد . عمل به‌چنین کاری منجربه‌حل چندین مساله از نوع مسائل فصل ۱۳ می‌باشد .

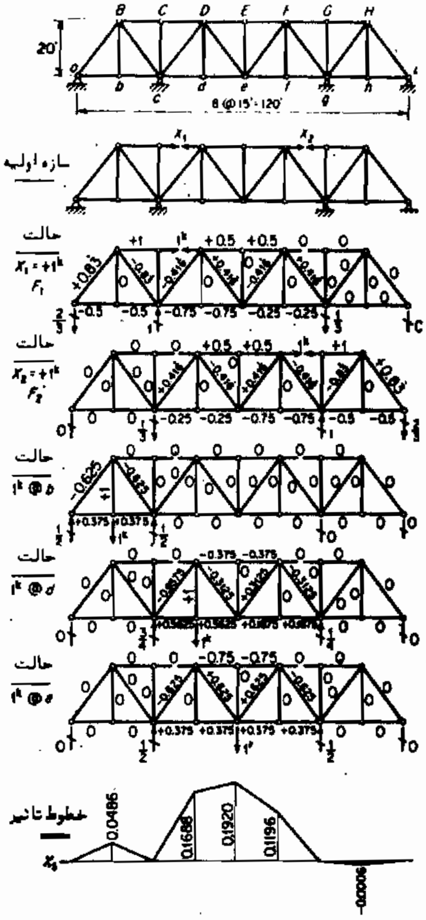
در وهله نخست به‌نظر می‌رسد که چنین عملی بسیار خستگی‌آور خواهد بود ولی همان‌طوری که در مثال (۱۴ـ۱) شرح داده شده است خواهیم دید که می‌توان محاسبات را به‌نحو مطلوبی آرایش داد ، به‌علاوه پس از آن که یکبار خطوط تاثیر را برای قیود اضافی به‌دست آوردیم تعیین خطوط تاثیر برای سایر مولفه‌های تنش با استفاده از معادلات‌انطباق بسیار ساده خواهدبود . در مثال (۱۴ـ۱) پس از آن که عرضهای خط‌تاثیر برای‌مجهولات X_1 و X_2 محاسبه شد ، عرضهای مربوط به‌سایر نیروهای میله‌را می‌توان با استفاده از روش جدولی از طریق رابطه زیر به‌دست آورد .

$$F = F_o + X_1F_1 + X_2F_2$$

ملاحظه می‌کنید که چنین کاری بسیار ساده است زیرا نیروهای میله F_o را قبلا" برای‌مقادیر کلیه نیروهای میله تحت اثر وضعیتهای مختلف بار واحد محاسبه کرده‌ایم . اگرچه محاسبه خطوط‌تاثیر برای مجهولات (قیود اضافی) یک سازه نامعین بااستفاده از این طریق طولانی می‌باشد ولی تعیین خطوط‌تاثیر برای کلیه‌نیروی میله‌ها و عکس‌العمل‌ها چه از این طریق‌چه از طریق دیگری باهمین زحمت خواهد بود .

مثال ۱۴ ـ ۱= با فرض ثابت بودن A برای کلیه میله‌ها ، خطوط‌تاثیر نیروی داخل میله‌های اضافی این خرپا را رسم کنید .

نیروی داخل میله‌های CD و FG را به‌عنوان مجهول انتخاب می‌کنیم، بااستفاده‌از معادلات انطباق مقدار این مجهولات را برای بار واحد که‌بر هر گره n اثر می‌کند محاسبه می‌کنیم،



$$\Delta_1 = \Delta_{1n} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} = 0 \qquad (۱)$$
$$\Delta_2 = \Delta_{2n} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} = 0 \qquad (۲)$$

با استفاده از تقارن داریم: $\delta_{11} = \delta_{22}$ و با استفاده از قانون ماکسوئل داریم: $\delta_{12} = \delta_{21}$

بنابراین معادلات (۱) و (۲) به‌صورت زیر خواهند بود.

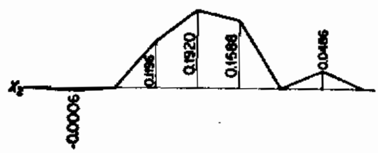
$$\Delta_{1n} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} = 0 \qquad (\text{۱ الف})$$
$$\Delta_{2n} + X_1\delta_{12} + X_2\delta_{11} = 0 \qquad (\text{۲ الف})$$

با به‌کاربردن روش کار مجازی جهت محاسبه مقادیر تغییر مکانها مقادیر ثابت سازه به‌صورت زیر خواهند بود.

$$(1^k)(\delta_{11}) = \frac{1}{EA}\sum F_1^2 L$$
$$(1^k)(\delta_{12}) = \frac{1}{EA}\sum F_1 F_2 L$$

در حالی که عبارات مربوط به‌بار خواهند بود.

$$(1^k)(\Delta_{1n}) = \frac{1}{EA}\sum F_1 F_n L$$
$$(1^k)(\Delta_{2n}) = \frac{1}{EA}\sum F_2 F_n L$$



چون مقادیر EA برای‌کلیه‌میله‌ها مقداری‌ثابت‌است و طرف‌راست‌معادلات (۱ـالف) و (۲ـالف) دارای مقدارصفر می‌باشد، درجهت تسهیل محاسبات می‌توان برای بقیه محاسبات $EA = 1$ قرار داد. بر حسب تقارن مقدار X_1 بازاء بار واحد در b برابر با مقدار X_2 بازاء بار واحد در h خواهد بود و در نتیجه اگر مقادیر X_1 و X_2 را بازاء بار واحد به ترتیب در نقاط b، d و e محاسبه کنیم معلومات کافی جهت رسم خطوط تاثیر برای X_1 و X_2 خواهیم داشت.

ثابتهای سازه:

میله	L	F_1	F_2	F_1F_2L	F_1^2L
ac	30	-0.5	0	0	$+7.5$
ce	30	-0.75	-0.25	$+5.625$	$+16.875$
eg	30	-0.25	-0.75	$+5.625$	$+1.875$
BD	30	$+1.0$	0	0	$+30.0$
DF	30	$+0.5$	$+0.5$	$+7.5$	$+7.5$
aB	25	$+0.8\dot{3}$	0	0	$+17.35$
Bc	25	$-0.8\dot{3}$	0	0	$+17.35$
cD	25	$-0.41\dot{6}$	$+0.41\dot{6}$	-4.345	$+4.345$
De	25	$+0.41\dot{6}$	$-0.41\dot{6}$	-4.345	$+4.345$
eF	25	$-0.41\dot{6}$	$+0.41\dot{6}$	-4.345	$+4.345$
Fg	25	$+0.41\dot{6}$	$-0.41\dot{6}$	-4.345	$+4.345$
Σ				$+1.37$	$+115.83$

$\therefore\ \delta_{11} = \underline{+115.83} \qquad \delta_{12} = \underline{+1.37}$

مقادیر مربوط به‌بار

بار واحد در دهانهٔ چپ — در b

میله	L	F_1	F_n	F_1F_nL
ac	30	-0.5	$+0.375$	-5.625
aB	25	$+0.83$	-0.625	-13.0
Bc	25	-0.83	-0.625	$+13.0$
Σ				-5.625

بار واحد در دهانهٔ میانی

				در d			در e	
میله	L	F_1	F_2	F_n	F_1F_nL	F_2F_nL	F_n	F_1F_nL
ce	30	-0.75	-0.25	$+0.563$	-12.66	-4.22	$+0.375$	-8.44
eg	30	-0.25	-0.75	$+0.188$	-1.41	-4.22	$+0.375$	-2.81
DF	30	$+0.5$	$+0.5$	-0.375	-5.63	-5.63	-0.75	-11.25
cD	25	-0.416	$+0.416$	-0.938	$+9.78$	-9.78	-0.625	$+6.50$
De	25	$+0.416$	-0.416	-0.313	-3.26	$+3.26$	$+0.625$	$+0.50$
eF	25	-0.416	$+0.416$	$+0.313$	-3.26	$+3.26$	$+0.625$	-0.50
Fg	25	$+0.416$	-0.416	-0.313	-3.26	$+3.26$	-0.625	-6.50
Σ					-19.70	-14.07		-22.50

حل معادلات

معادلات	محاسبات	X_1 +	X_2	بار واحد در , ثابت = b	d	e	بررسی
(1)		$+115.83$	$+1.37$	$+5.625$	$+19.70$	$+22.50$	$+165.025$
(2)		$+1.37$	$+115.83$	$+0$	$+14.07$	$+22.50$	$+153.77$
(1′)	$(1)\times 0.01182$	$+1.37$	$+0.016$	$+0.066$	$+0.233$	$+0.266$	$+1.951$
(3)	$(2)-(1')$		$+115.814$	-0.066	$+13.837$	$+22.234$	$+151.819$
			$+1.0$	-0.00057	$+0.1196$	$+0.1920$	$+1.3100$
			-1.37	$+0.00078$	-0.1638	-0.2610	
		$+115.83$		$+5.6258$	$+19.5362$	$+22.2390$	
		$+1.0$		$+0.0486$	$+0.1688$	$+0.1920$	

۱۴ ــ ۳ اصل مولر ــ برسلا (Müller-Breslau) جهت تعیین خطوط تاثیر

بر طبق اصل مولر ــ برسلا می‌توان روش بسیار ساده‌ای جهت محاسبه خطوط تاثیر بوجود آورد*، و همچنین این روش اساس برخی از روشهای غیرمستقیم تحلیل مدلها می‌باشد. این اصل را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود.

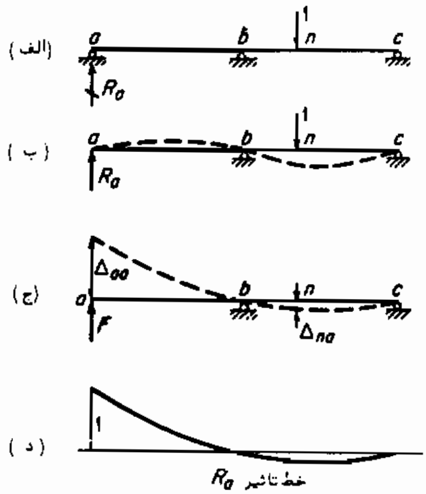
عرضهای خط تاثیر یک اثر تنش زا (نظیر نیروی محوری، برش، لنگر یا عکس‌العمل) در هر سازه‌ای متناسب خواهد بود با منحنی تغییر مکانی که با حذف قید مربوط به‌آن اثر از سازه و جایگزین‌نمودن تغییرشکلی متناسب با آن بر سازه اولیه به‌دست می‌آید.

این اصل را می‌توان برکلیه سازه‌ها اعم‌از تیر، خرپا یا قاب به‌صورت معین یا نامعین اعمال نمود. **در صورتی که سازه‌های موردنظر نامعین باشند کاربرد این اصل محدود به سازه‌هائی است که از مصالح ارتجاعی با تبعیت از قانون هوک ساخته شده باشند.** عملا" چنین محدودیتی مهم نمی‌باشد زیرا در سطح بسیار وسیعی از کاربردهای عملی این شرط صادق می‌باشد.

اعتبار این اصل را می‌توان به‌صورت زیرنشان داد: به‌این منظور تیر سرتاسری دو دهانهٔ شکل (۱۴ــ۱ الف) را درنظر بگیرید، فرض کنیدکه خط تاثیرمربوط به‌عکس‌العمل مقطع a این تیر موردنیاز باشد این خط تاثیر را می‌توان با قراردادن بار واحد عمودی در نقاط مختلف n در طول سازه و محاسبه عکس‌العمل برای آن بار، رسم نمود این محاسبات را می‌توان به‌طریق زیر انجام داد: موقتا" تکیه‌گاه غلتکی مقطع a را از سازه حذف نمائید تا این‌که سازه اولیه‌ای به‌صورت شکل (۱۴ــ۱ب) به‌دست آید، فرض کنید که براین سازهٔ اولیه بار واحد عمودی در نقطه n اثر کند که سبب عکس‌العمل عمودی R_n در a شود. اگر این نیرو دارای همان مقدار عکس‌العمل عمودی در نقطهٔ a از سازهٔ واقعی باشد، در این صورت تنشها و به‌دنبال آن تغییرشکل سازه اولیه دقیقا" مانند سازه‌واقعی خواهد بود. بنابراین منحنی ارتجاعی سازهٔ‌اولیه‌تحت‌چنین شرایطی مانند شکل (۱۴ــ۱ب) خواهد شد که در آن تغییر مکان عمودی نقطهٔ a برابر با صفر می‌باشد.

---

* به‌همین ترتیب با استفاده از اصل مولر ــ برسلا اغلب می‌توان به‌طور تقریبی به‌رسم شکل خطوط تأثیرپرداخت و به‌این‌ترتیب با دقتی‌که برای مقاصد طراحی‌کافی‌می‌باشد به‌تعیین چگونگی بارگذاری سازه به‌منظور ایجاد حداکثر اثر مورد نظر اقدام نمود.



شکل (۱۴–۱) اصل مولر – برسلا

حال فرض کنید که بر سازهٔ اولیه یک نیروی عمودی F در نقطهٔ a اثر کند . در این حالت سازهٔ اولیه مانند شکل (۱۴–۱ج) تغییرشکل خواهد داد ،بدین‌ترتیب سازهٔ اولیه را تحت اثر دو دستگاه‌نیروی متفاوت و جداگانه قرار داده‌ایم : (۱) نیروهای مذکور در شکل (ب) و (۲) نیروهای مذکور در شکل (ج) .

با اعمال قانون بتی بر این حالت خواهیم داشت

$$(R_a)(\Delta_{aa}) + (1)(\Delta_{na}) = (F)(0)$$

و بنابراین

$$R_a = -\frac{\Delta_{na}}{\Delta_{aa}}(1) \qquad (۱۴-۱)$$

علامتهائی که برای نشان دادن تغییر مکانها به‌کار رفته است همان علائم ذکرشده‌در روش معادلات انطباق می‌باشد .

از این معادله چنین بر می‌آید که عکس‌العمل R_a مربوط به‌بار واحد عمودی‌موثر به‌نقطهٔ n متناسب با تغییرمکان Δ_{na} در آن نقطه می‌باشد .بنابراین شکل‌خط تاثیر R_a مانند شکل منحنی‌خیز سازه می‌باشد در صورتی‌که نیروی F در نقطه a اثر کند ، مقدار عرض خط تاثیر در هر نقطه نامعلوم n را می‌توان با تقسیم‌نمودن تغییر مکان آن نقطه از این منحنی‌خیز بر تغییر مکان نقطه a به‌دست آورد . به‌این‌ترتیب معلوم می‌شود که خطوط تاثیر را می‌توان بر طبق اصل مولر – برسلا به‌دست آورد .

به‌همین ترتیب می‌توان اعتبار این اصل را برای هر اثر تنش‌زا از سازه را ثابت نمود .

در حالت کلی معادله (۱۴ــ۱) برای اثر تنش زا، X_a به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$X_a = -\frac{\Delta_{na}}{\Delta_{aa}}(1) \qquad (۱۴\text{ــ}۲)$$

ذکر قرارداد علائم در مورد این معادله بسیار مهم است، بدین‌ترتیب X_a زمانی مثبت است که با تغییرمکان Δ_{aa} هم‌جهت باشد و Δ_{na} زمانی مثبت است که در جهت بار واحد موثری باشد که تأثیر آن توسط عرضهای خط تأثیر نشان داده شده است، همچنین می‌بایستی ذکر کرد که X_a هم نشان‌دهندهٔ نیرو و هم نشان‌دهنده لنگر می‌باشد. اگر X_a یک نیرو باشد Δ_{aa} مربوطه یک تغییر مکان خطی خواهد بود و اگر X_a یک لنگر باشد Δ_{aa} مربوطه یک دوران زاویه‌ای خواهد بود.

ذکر این نکته نیز مهم است که عرض کلیه خطوط تأثیرها بستگی به‌مقدار نیروی F که جهت ایجاد تغییر مکان Δ_{aa} می‌بایستی بر سازه اولیه اثر کند ندارند. برای محاسبه عرضهای خط‌تأثیر معمولاً" مقدار F را برابر با واحد گرفته و مقادیر Δ_{aa} و Δ_{na} را نسبت به‌آن محاسبه می‌کنند.

در مثالهای (۱۴ــ۲) و (۱۴ــ۳) کاربرد این روش را در مورد تیرهای سرتاسری شرح داده‌ایم وقتی که به‌کاربرد این روش می‌پردازیم می‌بایستی بدانیم که اگر سازه اصلی بیش از یک درجه نامعین باشد سازه اولیه‌ای که پس از حذف قید موردنظر باقی می‌ماند بازهم نامعین خواهد بود. در هر صورت چنین مطلبی ایجاد اشکال نمی‌نماید فقط می‌بایستی قبل از آن که بتوان به‌محاسبه تغییر مکانهای Δ_{aa} و Δ_{na} پرداخت سازهٔ اولیه نامعین را به‌کمک یکی از روشهای مذکور در فصل سیزدهم تحلیل نمود.

مثال ۱۴ ــ ۲ = خط‌تأثیری برای عکس‌العمل عمودی در نقطه b از این تیر رسم‌کنید.

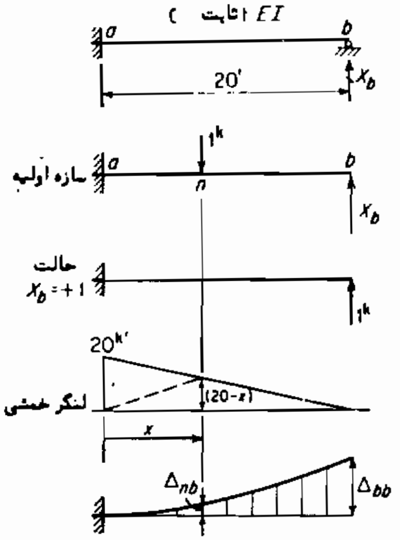
با به‌کاربردن‌اصل مولرــ برسلا سازه اولیه شکل مقابل‌را انتخاب می‌کنیم، می‌توانیم‌بنویسیم:

$$X_b^{\uparrow} = -\frac{\Delta_{nb}^{\downarrow}}{\Delta_{bb}^{\uparrow}}(1^k)$$

در رابطه فوق جهت مثبت هریک از علائم نشان داده شده است.

اگر به‌منظور راحتی بیشتر تصمیم بگیریم که Δ_{nb} را رو به‌سوی بالا مثبت بگیریم می‌بایستی علامت راست این معادله را تغییر دهیم و بنویسیم:

$$X_b^{\uparrow} = \frac{\Delta_{nb}^{\uparrow}}{\Delta_{bb}^{\uparrow}}(1^k)$$

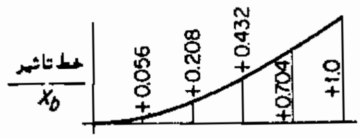


بر طبق قضیه دوم سطح لنگر:

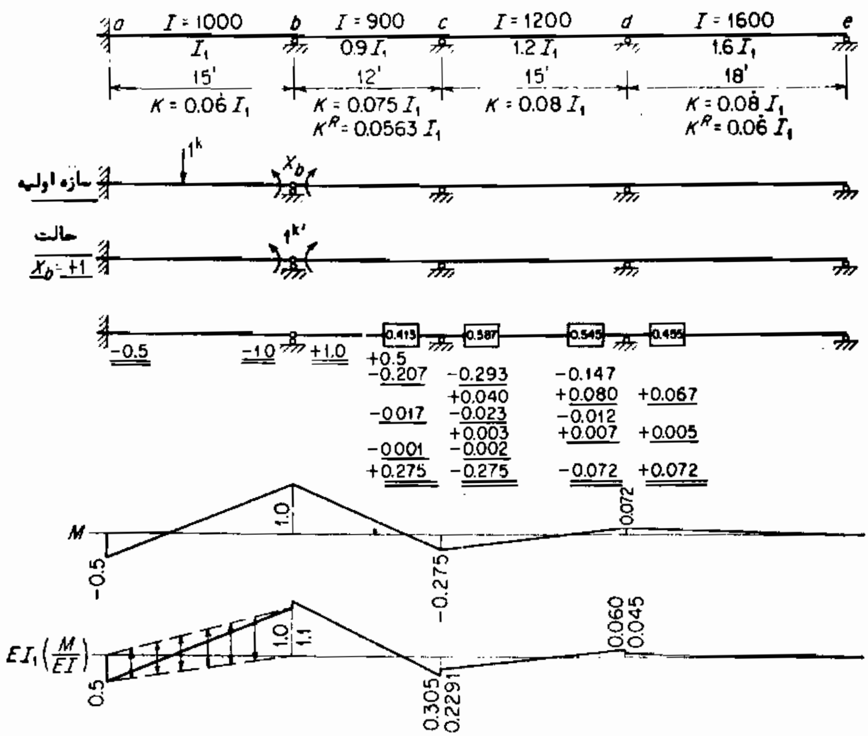
$$EI\Delta_{nb} = (20)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{2x}{3}\right) + (20-x)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{x^2}{6}(60-x)$$

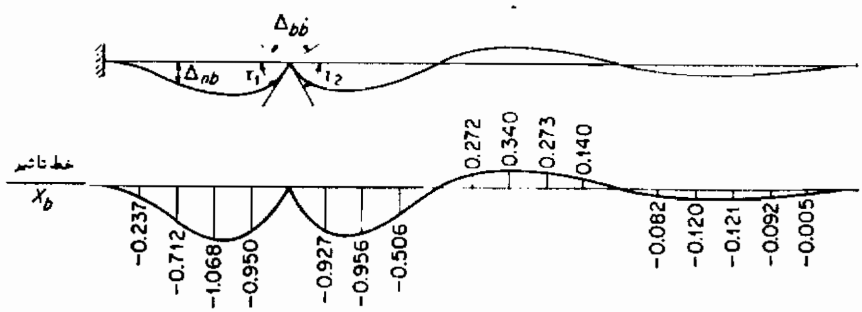
$$EI\Delta_{bb} = \frac{(20)^2}{6}(60-20) = \frac{8,000}{3}$$

$$\therefore X_b^{\uparrow} = \frac{x^2(60-x)}{16,000}$$



مثال ۱۴ ــ ۳ = خط تأثیری برای لنگر در تکیه‌گاه b از این تیر رسم کنید.





با استفاده از اصل مولر ــ برسلا

$$X_b^{\circlearrowright\circlearrowleft} = -\frac{\Delta_{nb}^{\downarrow}}{\Delta_{bb}^{\circlearrowright\circlearrowleft}}(1^k) \qquad or \qquad X_b^{\circlearrowright\circlearrowleft} = +\frac{\Delta_{nb}^{\uparrow}}{\Delta_{bb}^{\circlearrowright\circlearrowleft}}(1^k)$$

بر حسب این که علامت Δ_{nb} را تغییر دهیم یا ندهیم.

Δ_{nb} و Δ_{bb} را با استفاده از سطح لنگر و یا بار ارتجاعی محاسبه می‌کنیم.

$$EI_1\tau_1 = (0.5)(7.5) = 3.75 \qquad \therefore\ EI_1\Delta_{bb} = 3.75 + 3.83 = \underline{7.58}$$
$$EI_1\tau_2 = (1.1)(6)(2/3) - (0.305)(6)(1/3) = 3.834$$

دهانه ab :

$$EI_1\Delta_{nb}^{\uparrow} = \left(\frac{x}{15}\right)\left(\frac{x^2}{6}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{2x}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{30}\right)\left(\frac{x^2}{6}\right) = \frac{x^3}{60} - \frac{x^2}{4}$$
$$\therefore\ X_b = \frac{1}{7.58}\left(\frac{x^3}{60} - \frac{x^2}{4}\right)$$

دهانه bc :

$$EI_1\Delta_{nb}^{\uparrow} = -3.834x + (1.1)\left(\frac{x^2}{3}\right) + (1.1 - 0.0928x)\left(\frac{x^2}{6}\right) - (0.02542)\left(\frac{x^3}{6}\right)$$
$$= -3.834x + 0.556x^2 - 0.0197x^3$$
$$\therefore\ X_b = \frac{1}{7.58}(-3.834x + 0.556x^2 - 0.0197x^3)$$

برای دهانه‌های cd و de نیز به‌همین ترتیب به‌دست می‌آید، همان‌طوری که درج‌شده است مقادیر عرضهای خط تأثیر را در فواصل سه‌فوتی می‌توان از این معادلات به‌دست آورد.

---

۱۴ ــ ۴ خطوط تأثیر حاصل از جمع اثرات لنگرهای گیرداری

این روش برای محاسبه خطوط تأثیرلنگرهای انتهایی تیر و یا قابهای نامعین بسیارمهم است، در این حالت لازم‌است که به‌پخش لنگرجهت محاسبه‌اثرات جداگانه هریک‌ازلنگرهای گیرداری اعضای مختلف بار شده بپردازیم پس از آن می‌توان با جمع این اثرات جداگانه

به‌منظور تعیین لنگرهای انتهایی کل اقدام کرد . اگر همان‌طوری که در مثال (۱۴–۴) شرح داده شده است این عمل به‌طور منظم انجام گیرد روش بسیار موءثری جهت تعیین خطوط تأثیر لنگرهای انتهایی خواهد بود .

به‌طور اساسی این روش از مراحل زیر تشکیل می‌گردد :

۱ ــ لنگری گیرداری برابر با واحد به‌انتهای یک قطعه وارد کنید ، با استفاده از روش پخش لنگر لنگرهای انتهایی حاصل را در کلیه قطعات محاسبه کنید . این عمل را برای هر انتهای کلیه قطعاتی که می‌توانند دارای لنگر گیرداری حاصل از بارهای وارده باشند تکرار کنید .

۲ ــ لنگرهای گیرداری حاصل از اثر بار واحدی را که به‌نوبت در هریک از نقاط مختلف بارگذاری اثر می‌کند محاسبه کنید .

۳ ــ نتایج حاصل از مراحل ۱ و ۲ را به‌منظور تعیین لنگرهای انتهایی حاصل از اثر بار واحد در هریک از نقاط مختلف بارگذاری سازه با یکدیگر ترکیب کنید .

بدیهی است که پس از آن که خطوط تأثیر را برای لنگرهای انتهایی محاسبه نمودیم سایر خطوط تأثیر را می‌توان با استفاده از روابط تعادل محاسبه نمود .

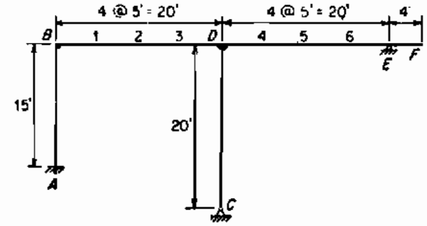
پس از محاسبه مرحله یک از مراحل فوق عملاً "فقط یک بار استفاده از روش پخش لنگر برای هریک از گرههای قاب لازم خواهد بود که آن را می‌توان برای لنگر گیرداری برابر با واحد در هر عضوی در یک گره انجام داد . پس از آن که به‌این عمل اقدام نمودیم اثر لنگر گیرداری برابر با واحد را در هریک از اعضای مختوم به‌آن گره می‌توان با توسل به‌بررسی و جستجو معین نمود . در حل مثال (۱۴–۴) این چنین عملی تشریح شده است .

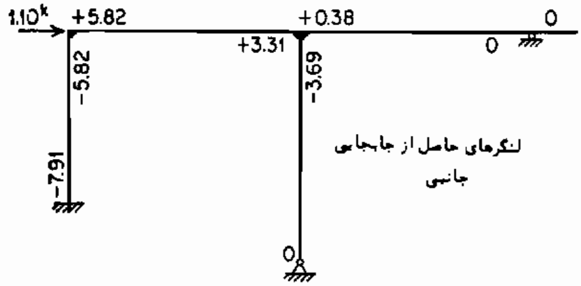
مثال ۱۴ ــ ۴ = با جمع اثرات لنگرهای گیرداری، جدول تأثیری برای لنگرهای انتهایی قاب مثال ۱۳–۲۵ تهیه نمائید . مقدار عرضها را در فواصل ۵ فوت از طول شاهتیر $BDEF$ معین کنید .

در این حالت امکان جابجایی جانبی ستونها وجود دارد ،جهت ملحوظ نمودن این جابجایی باید به‌حالت (الف) و (ب) حل سازه را با یکدیگر ترکیب کنیم .

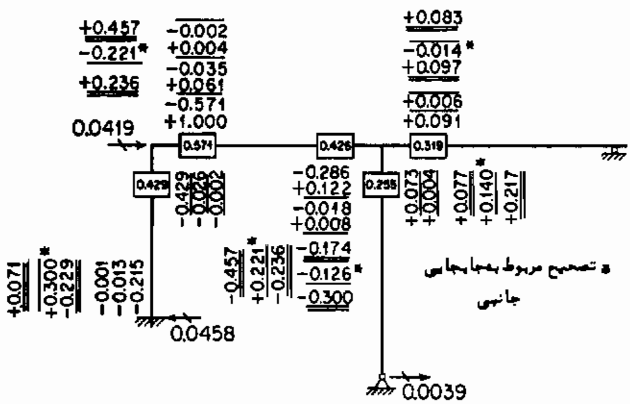
حالت (ب) از لنگرهای انتهایی مثال (۱۴–۲۵) را به‌کار برده و نتایج آن را بر 60 تقسیم می‌کنیم .

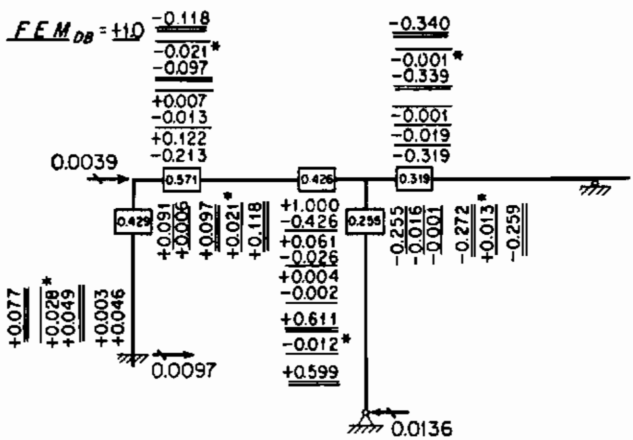
مرحله ۱ = لنگرهای انتهایی حاصل از $FEM = +1$ در انتهاهای قطعات شاهتیر را معین می‌کنیم .


4 @ 5' = 20'
4 @ 5' = 20'
4'
B 1 2 3 D 4 5 6 E F
15'
20'
A
C


1.10k
+5.82
+0.38
0
+3.31
0
-5.82
-3.69
-7.91
0
لنگرهای حاصل از جابجایی جانبی

$FE\,M_{BD} = +1.0$


+0.457
-0.221*
+0.236
-0.002
+0.004
-0.035
+0.061
-0.571
+1.000
+0.083
-0.014*
+0.097
+0.006
+0.091
0.0419
0.571
0.426
0.319
0.429
0.255
-0.286
+0.122
-0.018
+0.008
-0.174
-0.126*
-0.300
0.0458
0.0039
* تصحیح مربوط بجابجایی جانبی


FE M_DB = +1.0
-0.118
-0.021*
-0.097
+0.007
-0.013
+0.122
-0.213
-0.340
-0.001*
-0.339
-0.001
-0.019
-0.319
0.0039
0.571
0.426
0.319
0.429
0.255
+1.000
-0.426
+0.061
-0.026
+0.004
-0.002
+0.611
-0.012*
+0.599
0.0097
0.0136

این ارقام تنها پاسخهای اصلی پخش لنگر لازم جهت عملیات محاسباتی می‌باشند ، لنگرهای انتهایی حاصل از $FEM_{DE} = +1.000$ را می‌توان فقط با تغییر عدد $+1.000$ از DB به ستون DE اعداد به‌دست آورد . به‌همین‌ترتیب لنگرهای انتهایی حاصل از هریک از $FEM_{ED} = +1.0$ یا $FEM_{EF} = +1.0$ برابر با $\frac{1}{2}$ مقادیر حاصل از $FEM_{DE} = +1$ می‌باشد به جز در موارد دو انتهای ED و EF .

خلاصه لنگرهای انتهایی حاصل از $FEM = +1$ درنقاط مختلف

$FEM = +1$ در نقاط	M_{AB}	M_{BD}	M_{DB}	M_{DE}	M_{DC}	M_{ED}
BD	$+0.071$	$+0.236$	-0.300	$+0.083$	$+0.217$	0
DB	$+0.077$	-0.118	$+0.599$	-0.340	-0.259	0
DE	$+0.077$	-0.118	-0.401	$+0.660$	-0.259	0
ED	-0.038	$+0.059$	$+0.201$	-0.330	$+0.129$	0
EF	-0.038	$+0.059$	$+0.201$	-0.330	$+0.129$	-1.0

مرحله ۲ : FEM حاصل از اثر بار واحد در نقاط مختلف بارگذاری :

بار در	FEM در انتها :				
	BD	DB	DE	ED	EF
1	-2.8125	$+0.9375$			
2	-2.50	$+2.50$			
3	-0.9375	$+2.8125$			
4			-2.8125	$+0.9375$	
5			-2.50	$+2.50$	
6			-0.9375	$+2.8125$	
F					-4.00

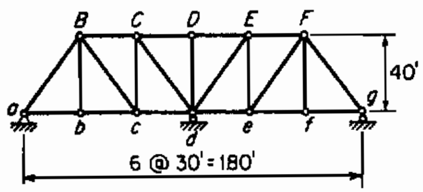
مرحله ۳ : جدول تأثیر برای لنگرهای انتهایی .

بار در	ضریب × [لنگر انتهایی نظیر +۱ در نقطه (۱−)] = FEM	M_{AB}	M_{BD}	M_{DB}	M_{DE}	M_{DC}	M_{ED}
1	$-2.8125 \times BD$	-0.199	-0.664	$+0.844$	-0.233	-0.610	
	$+0.9375 \times DB$	$+0.072$	-0.111	$+0.561$	-0.318	-0.243	
		-0.127	-0.775	$+1.405$	-0.551	-0.853	0
2	$-2.50 \times BD$	-0.172	-0.590	$+0.750$	-0.207	-0.543	
	$+2.50 \times DB$	$+0.192$	-0.295	$+1.498$	-0.850	-0.648	
		$+0.020$	-0.885	$+2.248$	-1.057	-1.191	0
3	$-0.9375 \times BD$	-0.067	-0.221	$+0.281$	-0.078	-0.203	
	$+2.8125 \times DB$	$+0.216$	-0.332	$+1.682$	-0.956	-0.729	
		$+0.149$	-0.553	$+1.963$	-1.034	-0.932	0
4	$-2.8125 \times DE$	-0.216	$+0.332$	$+1.128$	-1.852	$+0.729$	
	$+0.9375 \times ED$	-0.036	$+0.054$	$+0.188$	-0.308	$+0.120$	
		-0.252	$+0.386$	$+1.316$	-2.160	$+0.849$	0
5	$-2.50 \times DE$	-0.192	$+0.295$	$+1.002$	-1.648	$+0.648$	
	$+2.50 \times ED$	-0.095	$+0.145$	$+0.500$	-0.820	$+0.320$	
		-0.287	$+0.440$	$+1.502$	-2.468	$+0.968$	0
6	$-0.9375 \times DE$	-0.072	$+0.111$	$+0.376$	-0.619	$+0.243$	
	$+2.8125 \times ED$	-0.107	$+0.163$	$+0.565$	-0.922	$+0.360$	
		-0.179	$+0.274$	$+0.941$	-1.541	$+0.603$	0
F	$-4.0 \times EF$	$+0.152$	-0.232	-0.804	$+1.321$	-0.521	$+4.0$

۱۴ــ ۵ مسایل

۱۴ ــ ۱ (الف) فرض کنید که L/A برای کلیه میله‌ها ثابت باشد ، خط تأثیری برای میله CD از خرپای شکل (۱۴ــ۲) تهیه نمائید .

(ب) با استفاده از معلومات قسمت (الف) خطوط تأثیری برای نیرو در میله‌های Bc و bc تهیه کنید .



شکل (۱۴ــ۲) ــ مساله (۱۴ــ۱)

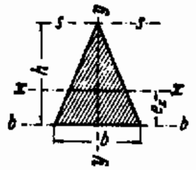
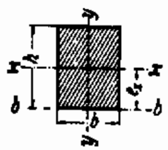
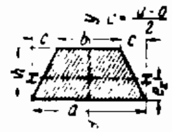
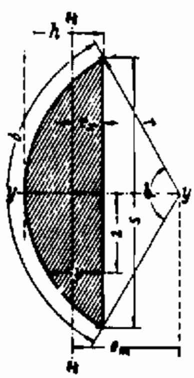
۱۴ ــ ۲ برای میله‌های bc و cd از خرپای شکل (۱۳ــ۵) خطوط تأثیر تهیه کنید.
۱۴ ــ ۳ با استفاده از اصل مولر ــ برسلا برای موارد زیر خطوط تأثیر تهیه کنید:
(الف) لنگر در نقطه c از تیر مثال (۱۴ــ۳)
(ب) عکس‌العمل عمودی در نقطه b از همان تیر.
۱۴ ــ ۴ با استفاده از روش مشروح در بخش (۱۴ــ۴)، خطوط تأثیری برای لنگرهای انتهایی تیر مذکور در مثال (۱۴ــ۳) تهیه کنید.

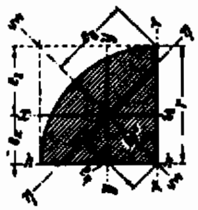
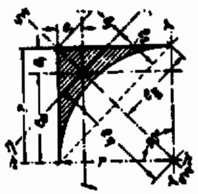
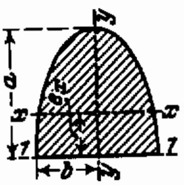
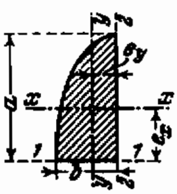
ضمائم

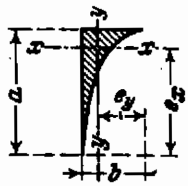
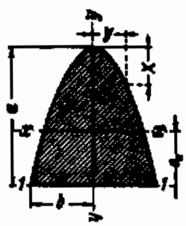
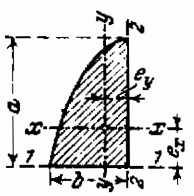
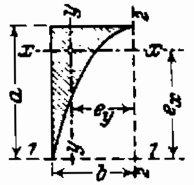
ضمیمه الف ــ تبدیل آحاد متعارف بهمیکدیگر

in	= 0.025400	m
ft	= 0.304800	m
in^2	= 645.1600	mm^2
ft^2	= 0.092903	m^2
in^3	= $16.387064.10^{-6}$	m^3
ft^3	= $28.31685.10^{-3}$	m^3
quart	= 0.946353	liter
gallon	= $3.785412.10^{-3}$	m^3
in^4	= 41.623143	cm^4
cm^4	= $1.000000.10^{-8}$	m^4
ft^4	= $8.360975.10^{-3}$	m^4
gram	= 980.665000	dyne
kg	= 9.806650	N
lb (جرم)	= 0.453592	kg (جرم)
kips (=1000 lbs)	= 4.448222	kN
kip/ft	= 14.593904	kN/m
lb/ft	= 1.488164	kg/m
kg/cm^2	= 9.806650	N/m^2 (Pascal)
kg/cm^2	= 98.066500	kN/m^2 (kPa)
kip/ft^2	= 47.880260	kN/m^2
lb/in^2 (psi)	= 6.894757	kN/m^2
lb.in (torque)	= o.112985	N.m (لنگر)
lb.ft	= 1.355818	N.m
kip.ft	= 1.355818	kN.m
ft.lb (کار یا انرژی)	= 1.355818	joule
cal.g (مقدار بین‌المللی)	= 4.186800	joule
lb/ft^3	= 16.018460	kg/m^3
kip/ft^3	= 157.087616	kN/m^3
g/cm^3	= 62.427900	lb/ft^3
g/cm^3	= 9.806650	kN/m^3

ضمیمه ب : سطح و مرکز ثقل برخی از اشکال بارگذاریها

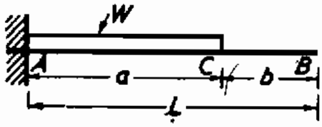
نوع شکل	مشخصات شکل	سطح	موقعیت مرکز ثقل
مثلث		$A = \frac{bh}{2}$	$e_x = \frac{1}{3}h$
مستطیل		$A = bh$	$e_x = \frac{h}{2}$
ذوزنقه		$A = \frac{h}{2}(a+b)$	$e_x = \frac{h}{3}\,\frac{a+2b}{a+b}$
نیم دایره		$A = \frac{\pi}{2} r^2 = 1{,}57080\, r^2$	$e_x = \frac{4r}{3\pi} \approx 0{,}4244\, r$
قطعه دایره		$A = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi \varphi^\circ}{180^\circ} - \sin\varphi\right) = \frac{r(b-s)+sh}{2}$	$e_m = \frac{s^3}{12A} = \frac{2}{3}\,\frac{r^3 \sin^3 \frac{\varphi}{2}}{A}$ $e_x = e_m - r\cos\frac{\varphi}{2}$

نوع شکل	مشخصات شکل	سطح	موقعیت مرکز ثقل
ربع دایره		$A = \frac{\pi}{4} r^2 \approx 0{,}7854\, r^2$	$e_x \approx 0{,}4244\, r$ $e_1 \approx 0{,}5756\, r$ $e_\eta \approx 0{,}6002\, r$ $e_\xi \approx 0{,}7071\, r$
کسر ربع دایره از مربع		$A = r^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ $\approx 0{,}2146\, r^2$	$e_1 \approx 0{,}2234\, r$ $e_x \approx 0{,}7766\, r$ $e_\eta \approx 1{,}0983\, r$ $e_\xi \approx 0{,}7071\, r$ $e_2 \approx 0{,}3159\, r$ $e_3 \approx 0{,}3912\, r$
نیم بیضی		$A = \frac{\pi}{2} a b \approx 1{,}571\, a b$	$e_x = \frac{4}{3\pi} a \approx 0{,}4244\, a$
ربع بیضی		$A = \frac{\pi}{4} a b \approx 0{,}7854\, a b$	$e_x = \frac{4}{3\pi} a \approx 0{,}4244\, a$ $e_y = \frac{4}{3\pi} b \approx 0{,}4244\, b$

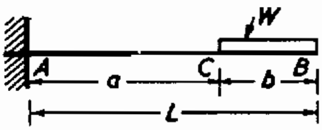
نوع شکل	مشخصات شکل	سطح	موقعیت مرکز ثقل
کسر ربع بیضی از مستطیل		$A = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) a\,b$ $\approx 0{,}2146\, a\,b$	$e_x \approx 0{,}7766\, a$ $e_y \approx 0{,}7766\, b$
سهمی		$A = \frac{4}{3}\, a\,b$	$e_x = \frac{2}{5}\, a$
نیم سهمی		$A = \frac{2}{3}\, a\,b$	$e_x = \frac{2}{5}\, a$ $e_y = \frac{3}{8}\, b$
کسر نیم سهمی از مستطیل		$A = \frac{1}{3}\, a\,b$	$e_x = \frac{7}{10}\, a$ $e_y = \frac{3}{4}\, b$

ضمیمه ج : مقادیر FEM در تیرهای مختلف

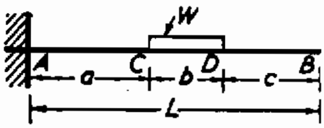
تیر طره‌ای



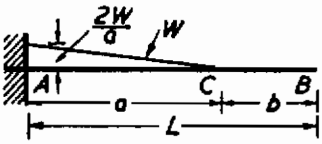
$FEM_{AB} = -\frac{Wa}{2}$



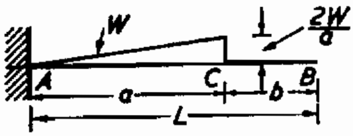
$FEM_{AB} = -W\left(a+\frac{b}{2}\right)$



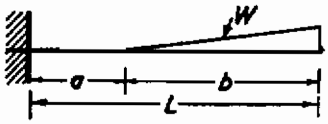
$FEM_{AB} = -W\left(a+\frac{b}{2}\right)$



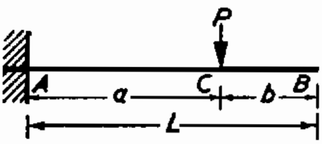
$FEM_{AB} = -\frac{Wa}{3}$



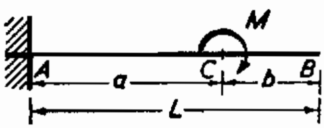
$FEM_{AB} = -\frac{2Wa}{3}$



$FEM_{AB} = -W\left(a+\frac{2b}{3}\right)$

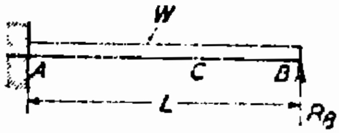
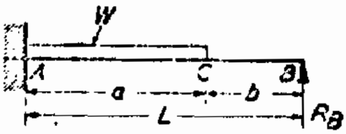
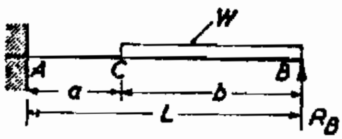
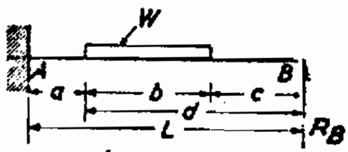
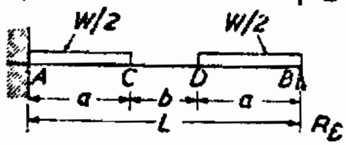
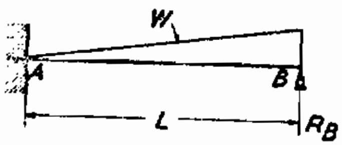
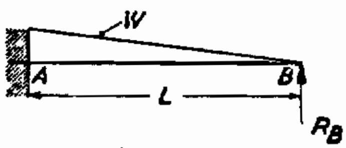
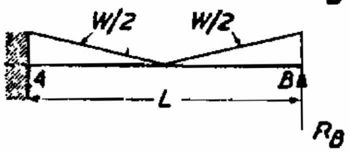
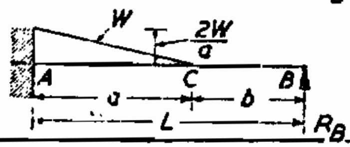


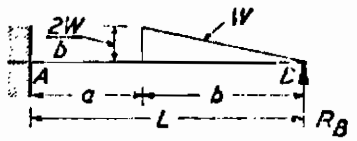
$FEM_{AB} = -P.a$



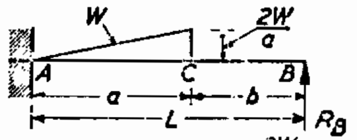
$FEM_{AB} = -M_C$

تیر یک سر ساده و یک سر گیردار

	$FEM_{AB} = -\frac{WL}{8}$
	$FEM_{AB} = -\frac{Wa}{8}(2-n)^2 \quad a/L=n$
	$FEM_{AB} = -\frac{Wb}{8}(2-n^2) \quad b/L=n$
	$FEM_{AB} = -\frac{W}{8L^2 b}(d^2-c^2)(2L^2-c^2-d^2)$
	$FEM_{AB} = -\frac{Wa}{8L}(3L-2a)$
	$FEM_{AB} = -\frac{7WL}{60}$
	$FEM_{AB} = -\frac{2WL}{15}$
	$FEM_{AB} = -\frac{3WL}{32}$
	$FEM_{AB} = -\frac{Wa}{60L^2}(3a^2-15aL+20L^2)$

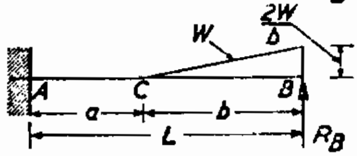


$$FEM_{AB} = -\frac{Wb}{15L^2}(5L^2 - 3b^2)$$

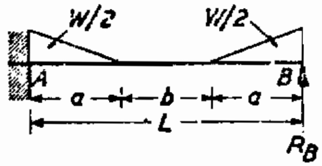


$$m = a/L$$

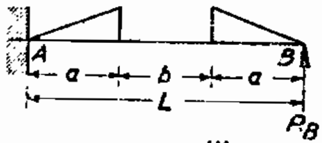
$$FEM_{AB} = -Wa\left(\frac{m^2}{5} - \frac{3m}{4} + \frac{2}{3}\right)$$



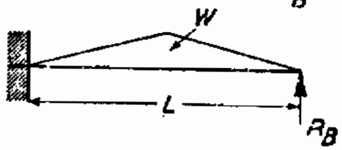
$$FEM_{AB} = -\frac{Wb}{60L^2}(10L^2 - 3b^2)$$



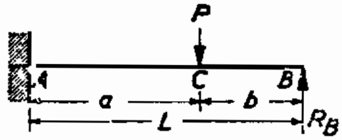
$$FEM_{AB} = -\frac{Wa}{8L}(2L - a)$$



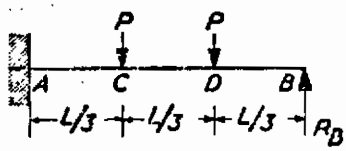
$$FEM_{AB} = -\frac{Wa}{8L}(4L - 3a)$$



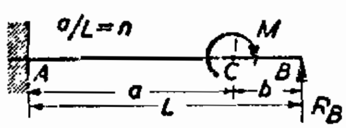
$$FEM_{AB} = -\frac{5WL}{32}$$



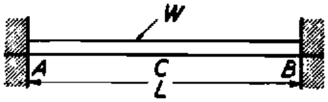
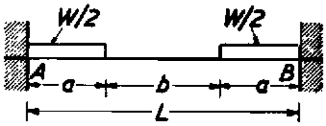
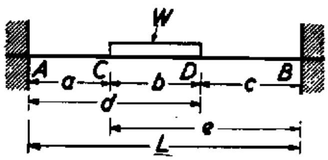
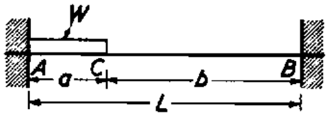
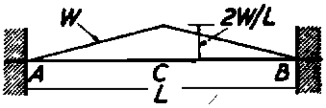
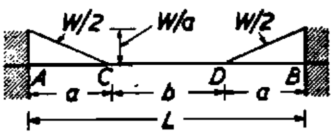
$$FEM_{AB} = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{2L^2}$$

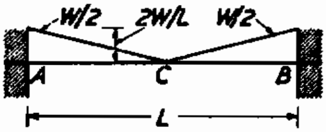


$$FEM_{AB} = -\frac{PL}{3}$$

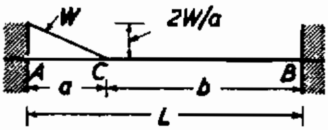


$$FEM_{AB} = \frac{M}{2}(2 - 6n + 3n^2)$$

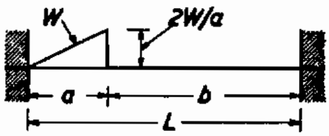
تیر دوسر گیردار	
	$FEM_{AB} = -FEM_{BA} = -\frac{WL}{12}$
	$FEM_{AB} = -FEM_{BA} = -\frac{Wa}{12L}(3L-2a)$
	$FEM_{AB} = \frac{-W}{12L^2 b}\left[e^3(4L-3e)-c^3(4L-3c)\right]$ $FEM_{BA} = \frac{+W}{12L^2 b}\left[d^3(4L-3d)-a^3(4L-3a)\right]$
	$FEM_{AB} = -\frac{WL}{12}\cdot m\ (3m^2-8m+6)$ $FEM_{BA} = \frac{WL}{12}\cdot m^2(4-3m)$ $\quad a/L = m$
	$FEM_{BA} = +WL/10$ $FEM_{AB} = -WL/15$
	$FEM_{AB} = -FEM_{BA} = -\frac{5WL}{48}$
	$FEM_{AB} = -FEM_{BA} = -\frac{Wa}{12L}(2L-a)$



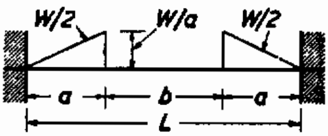
$$FEM_{AB} = -FEM_{BA} = -WL/K$$



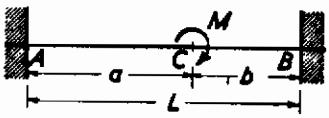
$$FEM_{AB} = -\frac{Wa}{30L^2}(3a^2+10bL)$$
$$FEM_{BA} = \frac{Wa^2}{30L^2}(5L-3a)$$



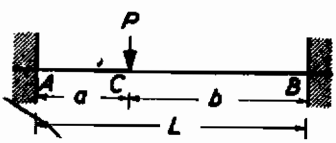
$$FEM_{AB} = -\frac{Wa}{15L^2}(10L^2-15aL+6a^2)$$
$$FEM_{BA} = \frac{Wa^2}{10L^2}(5L-4a)$$



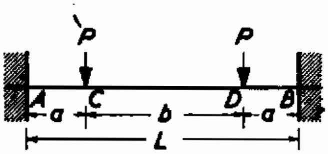
$$FEM_{AB} = -FEM_{BA} = -\frac{Wa}{12L}(4L-3a)$$



$$FEM_{BA} = +M.\frac{a}{L^2}(3b-L)$$
$$FEM_{AB} = M.\frac{b}{L^2}(3a-L)$$



$$FEM_{AB} = -\frac{Pab^2}{L^2}$$
$$FEM_{BA} = \frac{Pba^2}{L^2}$$



$$FEM_{AB} = -FEM_{BA} = -\frac{Pa(L-a)}{L}$$

واژه‌یاب
فارسی ـ انگلیسی

(الف)

آرشیتکت صنایع دریایی	*naval architect*
آنتن مهارشده	*guyed mast*
آنکـراژ	*anchorage*
آویزها	*hangers*
اتصالات اجرایی	*construction features*
اثر تنش زا	*stress element*
اثر حاصل از غلت	*rolling effect*
ارتعاش	*vibration*
ازدیاد طول	*elongation*
اسکله	*pier*
اشعه	*raqs*
اصل بقای انرژی	*principle of the conservation of energy*
اصل رویهم‌گذاری (انطباق)	*principle of superposition*
اصلی تحتانی (میله‌های)	*bottom chords*
اصلی فوقانی (میله‌های)	*top chords*
اعضای انتهایی	*end posts*
اعضای اولیه خرپا	*primary truss members*
اعضای جان	*web members*
افت (شکم)	*sag*
افزایش ضربه	*impact fraction*

انبساط	expantion
انتهای دور	far end
انتهای نزدیک	near end
انجمن مهندسین راه آهن آمریکا	American Railway Engineering Association
انجمن مهندسین راه و حمل و نقل ایالات امریکا	American Association of State Highway and Transportion officials
انرژی ارتجاعی کرنش	elastic strain energy
انقباض	contraction
ایستایی ترسیمی	graphic static

(ب)

با تکیه‌گاه حلقوی	rim bearing type
با تکیه‌گاه مرکزی	center bearing type
بار اتجاعی	elastic load
بار باد	wind load
با دوپریم	double - prime
بار کامل برف	full snow load
بار کامل پانلی	full panel load
با ضد تقارن	antisymetrical
بارهای جانبی	lateralloads
بارهای دینامیکی آب	hydrodynamic loads
بارهای زنده	live loads
بارهای متحرک	moving loads
بارهای مرده	dead loads
بارهای منقول	movable loads
بار یخ زدگی	ice load
برج	tower
برج انتقال نیرو	transmission tower
برج رادیو	radio .tower

برش ارتجاعی	elastic shear
برنامه‌ریزی	planning
بست قورباغه	turnbuckles
بند	link

(پ)

پارینه سنگی	Paleolithic
پایدار	stable
پایه مستقیم	leg
پرتال	portal
پرچ	rivet
پشت بادگیر	leeward
پل اریب	skew bridge
پل با عبورگاه تحتانی	through bridge
پل با عبورگاه فوقانی	deck bridge
پل با عبورگاه میانی	half-through bridge
پل بالا رونده	vertical lift bridge
پل چرخان افقی	horizotal-swing bridge
پل خرپایی روی گذر	through - parrallel chord truss bridge
پل سه مفصل	three hinged bridge
پل طره‌ای	cantilever bridge
پل قپانی	bascule bridge
پل متحرک	movable bridge
پل معلق	suspension bridge
پوسته	shell
پیچش	twisting
پیچهای ناقص (خام)	unfinished bolts

(ت)

تابع	function
تئوری	theorem
تحلیل تنش	stress analysis
تحلیل سازه‌ای	structural analysis
تحلیل‌گر سازه	structural analyst
تخت تحتانی	bottom chord
تخت فوقانی	top chord
تجزیه نیرو	resolution
ترکیب نیرو	composition
تسمه بال	top plate
تشابه ستونی	column analogy
تعادل استاتیکی	static equilbrium
تغییرشکل	deformation
تغییرشکل مجازی	virtural deformation
تغییر علامت تنش	stress reversal
تغییر مکان	displacement
تغییر مکان خطی	linear deflection
تغییر مکان زاویه‌ای	angular deformation
تغییر مکان نسبی	relative deflection
تکیه‌گاه	support
تکیه‌گاه بنددار	link support
تکیه‌گاه غلتکی	roller support
تکیه‌گاه فرعی	partial support
تکیه‌گاه کروی	ball support
تکیه‌گاه گیردار	fixed support
تکیه‌گاه مفصل	hinge support
تکیه‌گاه مفصلی سه‌بعدی	universal joint support
تلاش برشی	shear force

تلاش مقاوم برشی	*shear resisting force*
تنش اولیه	*primary stress*
تنش برشی	*shear stress*
تنش تسلیم	*yield stress*
تنش زنده	*live stress*
تنش ضربه‌ای	*impact stress*
تنش عمودی	*normal stress*
تنش مجاز	*permissble stress*
تنش مرده	*dead stress*
تیـر	*beam*
تیر اصلی	*girder*
تیر طولی کف	*stringer*
تیر مزدوج	*conjugate beam*
تیـر ورق	*girder(plate)*
تیر یکسره	*continuous beam*

(ج)

جابجایی جانبی	*sidesway*
جوش	*weld*

(چ)

چپ و راست	*bracing*
چپ و راست مقاوم در برابر تغییرشکل	*sway - bracinq diagonals*

(ح)

حد ارتجاعی	*elastic limit*
حداقـل	*minimum*
حداکثر	*maximum*

(خ)

خرپا	truss
خرپای ایده‌آل	ideal truss
خرپای پیچیده	complex truss
خرپای چندگونه	multiple - system truss
خرپای ساده	simple truss
خرپای مرکب	compound truss
خرپای مستوی	planar truss
خستگی	fatigue
خستگی خمیری	plastic fatigue
خط اثر	line of action
خط تأثیر	influence line
خط قطار	track
خط مبنا	base line
خطوط لوله	pipeline

(د)

درجه آزادی	degree of freedom
درجه نامعینی	degree of indeterminacy
دستگاه بار معادل زنده	equivalent live-load system
دستگاه نیروهای اصلی	original force system
دستگاه نیروی هم صفحه غیرمشخص	general coplanar force system
دسته‌بندی	classification
دفتر ملی استانداردها	National Bureau of standards
دفتر هماهنگی آئین نامه‌های ساختمانی	Uniforme Building Code
دکل	derrick
دوران	rotation
دیوار حایل	retaining wall

(ر)

راستا	*direction*
رنسانس	*renaissance*
روش بار ارتجاعی	*elastic load method*
روش پخش لنگر	*distribution method*
روش تغییر مکان	*displacement method*
روش دوران	*rotation method*
روش ضریب	*factor method*
روش گرهها	*method of joints*
روش مقاطع	*method of sections*
روش نیرو	*force method*
روشهای آزادسازی تنش	*relaxation procedures*
ریسمان	*string*

(ز)

زاویه اصطکاک	*friction angle*
زنجیر	*catenary*
زوج	*couple*

(س)

سازگار	*compatible*
سازه اولیه	*primary structure*
سازه پانلی	*panel structure*
سازه پیوسته	*continuum structure*
سازه تغییر یافته	*modified structure*
سازه قابی	*framed structure*
سازه کابلی	*steel-cable structure*
سازه مجزا	*descrete structure*

سازه موجود	*actual structure*
سازه مهارشده با کابل	*guyed structure*
سازه مهندسی	*engineering structure*
ساق	*leg*
سطح خالص	*net area*
سد	*dam*
سطح لنگر	*moment area*
سطح ناخالص	*gross area*
سلسله میله‌ها	*bar - chain*

(ش)

شبکه فضایی	*space framework*
شبکه فضایی پیچیده	*complex space framework*
شبکه فضایی ساده	*simple space framework*
شبکه فضایی مرکب	*compound space framework*
شبکه مستوی	*planar truss*
شبکه مستوی	*plane framework*
شتاب خروج از مرکز	*circular acceleration*
شدت تنش ثانویه	*secondary stress intensity*
شعاع ژیراسیون	*radius of gyration*
شکل	*sketch*
شکل سازه	*structural form*
شکستگی ناشی از تردی	*brittle fracture*
شکم (افت)	*sag*
شما	*sketch*
شیب ـ تغییر مکان	*slope-deflection*

(ص)

صفحه اتصال	*gusset plate*

صفحه تقسیم فشار	bearing plate
صلب	rigid

(ض)

ضربه	impact
ضریب انبساط حرارتی	coefficient of thermal expansion
ضریب بار	load factor
ضریب پخش	distribution factor
ضرایب تأثیر	influence coefficients
ضریب تغییر مکان	deflection coefficient
ضریب تغییر مکان جانبی	sidesway factor
ضریب سختی	stiffness factor
ضریب سختی تقلیل یافته	reduced stiffness factor
ضریب سختی تقلیل یافته حقیقی	true reduced stiffness factor
ضریب سختی حقیقی	true stiffness factor
ضریب سختی موءثر	effective stiffness factor
ضریب سختی نسبی	relative stiffness factor
ضریب ستون	column factor
ضریب شاهتیر	girder factor
ضریب لاغری	slenderness ratio
ضریب لنگر ستون	column moment factor
ضریب لنگر شاهتیر	girder moment factor

(ط)

طرح ارتجاعی	elastic design
طرح خمیری	plastic design

(ع)

عرض بحرانی	critical ordinate

عکس‌العمل اضافی	redundant reaction
علائم باو	Bow's notation
علائم قراردادی	notation
علائم قراردادی	sign convention
علم‌الحرکات	kinematics
عمودی (میله)	vertical

(غ)

غشاء	membrane
غشاء خمش‌پذیر	flexible membrane
غلتک	roller
غیر ارتجاعی	nonelastic

(ف)

فاصله بیرون به‌بیرون قطعات	clear span
فاصله قطبی	polar distance
فرضیات هوشیارانه	intelligent assumptions
فشار	pressure
فشار آب ساکن	hydrostatic pressure
فشار خاک	soil pressure
فشار عامل	active pressure
فشار غیرعامل	passive Pressure

(ق)

قاب ساختمانی	building frame
قاب کارخانه	mill bent
قاعده سمسون	Simpson's rule
قضیه بینوم	binomial theorem
قضیه کار حداقل	theorem of least work

لنگر	*moment*
لنگر ارتجاعی	*elastic moment*
لنگر انتقالی	*carry - over moment*
لنگر پخش شده	*distributed moment*
لنگر پذیر	*moment - resisting*
لنگر خمشی	*bending moment*
لنگر گیرداری	*fixed end moment*
لنگر لختی ناخالص	*gross moment of inertia*
لنگر مقاوم	*resisting moment*
لنگر نامتعادل	*unbalanced moment*
لنگرهای انتهای گیردار	*fixed end moments*

(م)

متقارن	*symetrical*
متقاطع	*concurrent*
مرکز برش	*shear center*
مرکز ثقل	*centroid*
محور	*shaft*
محورهای مار بر مرکز ثقل	*centroidal axis*
مخزن	*tank*
مسیر عبور	*lane*
مفصل	*hinge*
مفصل ساختمانی	*construction hinge*
مفصل سه بعدی	*universal joint*
مقدار	*magnitude*
معادله برش	*shear equation*
معادله خاص (شرط)	*equation of construction condition*
معادله رویهم‌گذاری (انطباق)	*superposition equation*
معادله سه لنگر	*three moment equation*

معادله شیب تغییر مکان	slope - deflection equation
معین	statically determinate
مکانیک خاک	soil mechanics
مکش	suction
موسسه آزمایش و مصالح آمریکا	American Society for Testing and Materials
مؤسسه آهن و فولاد آمریکا	American Iron and Steel Institute
موسسه بتن آمریکا	American Concrete Institute
مؤسسه ساختمانهای فولادی آمریکا	American Institute of Steel Construction
مولفه‌های قائم	rectangular components
مهاربها	bracing system
مهندس برق	electrical enginear
مهندس تأسیسات	sanitary engineer
مهندس ترابری	transportation engineer
مهندس سازه	structural engineer
مهندس شیمی	chemical engineer
مهندس صنایع هوایی	aeronautical engineer
مهندس طراح	design engineer
مهندس هیدرولیک	hydroulic engineer
میله (خرپا)	bar
میله اصلی حمال	loaded chord
میله محوری	pin

(ن)

ناپایدار	unstable
ناپایدار هندسی	geometrically unstable
نا متقارن	unsymetrical
نا معین	statically indeterminate
نسبت افت (شکم)	sag ratio
نشست	settlement

نصب	*erection*
نظریـــه	*theorem*
نقاط بحرانی	*critical points*
نقطه تسلیم	*yield point*
نقطه خنثی	*neutral point*
نقطهٔ عطف	*point of infection*
نمایش پیکر آزاد	*free body sketche*
نمودار بار	*load curve*
نمودار برش	*shear curve*
نمودار تصحیحی مور	*Mohr correction diagram*
نمودار خطی	*line diagram*
نمودار لنگر	*moment diagram*
نمودار لنگر خمشی	*bending moment curve*
نمودار ماکسوئل	*Maxwell diagram*
نیروهای اضافی	*redundant forces*
نیروهای جرمی	*inertia forces*
نیروهای حرارتی	*thermal forces*
نیروهای خارجی	*outer forces*
نیروهای داخلی	*inner forces*
نیروی اصطکاکی	*frictional force*
نیروی راهنما	*index force*
نیروی زلزله	*earthquake force*
نیروی طولی	*longitudinal force*
نیروی عامل	*active force*
نیروی فشار محوی	*axial thrust*
نیروی گریز از مرکز	*centrifugal force*
نیروی محرک	*motive force*
نیروی محوری	*axial force*
نیروی مقاوم محوری	*axial resisting force*
نیروی میله	*bar force*

(و)

ورق جان	*web plate*
وزن مرده	*dead weight*
وزنه تعادل	*counter weight*
ویادوک	*viaduct*
ویرندیل	*Vierendeel*

(هـ)

هم‌راستا	*collinear*
هم صفحه	*coplanar*